Αγγλικά
Λυκείου Α' τάξη
γραφή Δx. ΠΡ

291

ΠΕΤΡΟΥ Γ. ΤΟΓΚΑ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΗΣ ΒΑΡΒΑΚΕΙΟΥ ΠΡΟΤΥΠΟΥ ΣΧΟΛΗΣ
ΤΟΥ ΔΙΔΑΣΚΑΛΕΙΟΥ ΤΗΣ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΕΩΣ

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ
ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ,
ΤΩΝ ΠΡΑΚΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ, ΤΩΝ ΥΠΟΨΗΦΙΩΝ ΔΙΑ
ΤΑΣ ΑΝΩΤΑΤΑΣ ΣΧΟΛΑΣ ΤΟΥ ΚΡΑΤΟΥΣ κ.λ.π.

ΕΚΔΟΣΙΣ ΤΡΙΤΗ
ΒΕΛΤΙΩΜΕΝΗ ΚΑΙ ΕΠΗΥΞΗΜΕΝΗ

ΕΚΔΟΤΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ ΙΩΑΝΝΟΥ ΣΙΔΕΡΗ
ΑΘΗΝΑΙ, ΟΔΟΣ ΤΣΩΡΤΣΙΛ 44

Κάθε γνήσιον ἀντίτυπον φέρει τὴν ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως.

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ
ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.
ΑΛΓΕΒΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Ι. ΠΡΟΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑΙ ΓΝΩΣΕΙΣ

1. Ὁρισμὸς καὶ σκοπὸς τῆς Ἀλγέβρας. Ἡ Ἄλγεβρα εἶναι ἕνας κλάδος τῶν Μαθηματικῶν ἐπιστημῶν καὶ ἔχει σκοπὸν νὰ γενικεύῃ καὶ νὰ ἁπλοποιῇ τὰ ζητήματα τῆς Ἀριθμητικῆς· δηλ. ἡ Ἄλγεβρα εἶναι μία ***γενικὴ Ἀριθμητική***· εἶναι, κατὰ τὸν Νεύτωνα, ***μία διεθνὴς Ἀριθμητική***.

2. Χρῆσις τῶν γραμμάτων. Διὰ νὰ γενικεύῃ καὶ νὰ ἁπλοποιῇ ὅλα τὰ ζητήματα, τὰ ἀναφερόμενα εἰς τοὺς ἀριθμούς, ἡ Ἄλγεβρα χρησιμοποιεῖ τὰ γράμματα τῆς ἀλφαβήτου μὲ τὰ ὁποῖα παριστάνει τοὺς ἀριθμούς.

Κατὰ συνθήκην, χρησιμοποιεῖ τὰ πρῶτα γράμματα τῆς ἀλφαβήτου $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ διὰ νὰ παραστήσῃ τοὺς ***γνωστοὺς*** ἀριθμοὺς καὶ τὰ τελευταῖα γράμματα $\ldots \varphi, \chi, \psi, \omega$ ἢ x, y, z διὰ νὰ παραστήσῃ τοὺς ***ἀγνώστους*** ἀριθμούς.

Ὅταν εἰς ἕνα ζήτημα ἕνα ποσὸν δύναται νὰ λαμβάνῃ διαφόρους τιμάς, κατὰ τὰς διαφόρους περιστάσεις, αἱ τιμαὶ τοῦ ποσοῦ αὐτοῦ δύνανται νὰ παρασταθοῦν μὲ τὰ γράμματα

$$\alpha', \alpha'', \alpha''', \ldots \alpha^{(\nu)}$$

τὰ ὁποῖα ἐκφωνοῦνται: ἄλφα τονούμενον, ἄλφα δίστονον, ἄλφα τρίστονον, ... ἄλφα νίτονον,

ἢ μὲ τὰ γράμματα $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_\nu$.

τὰ ὁποῖα ἐκφωνοῦνται: ἄλφα ἕν, ἄλφα δύο, ἄλφα τρία....ἄλφα νί.

3. **'Αλγεβρικὰ σύμβολα.** Ὅπως εἰς τὴν 'Αριθμητικήν, οὕτω καὶ εἰς τὴν Ἄλγεβραν χρησιμοποιοῦμεν διάφορα σημεῖα ἢ σύμβολα διὰ νὰ δηλώσωμεν τὰς πράξεις, αἱ ὁποῖαι πρέπει νὰ γίνουν ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν καὶ τὰς σχέσεις, αἱ ὁποῖαι ὑπάρχουν μεταξύ των.

1ον. ***Σημεῖα πράξεων.*** Εἰς τὴν Ἄλγεβραν (ὅπως εἰς τὴν 'Αριθμητικήν) τὸ σημεῖον τῆς προσθέσεως εἶναι τὸ $+$ (σὺν) καὶ τὸ σημεῖον τῆς ἀφαιρέσεως εἶναι τὸ $-$ (πλήν).

Π.χ. τὸ $\alpha+\beta+\gamma$ παριστάνει τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν α, β, γ. Τὸ $\alpha-\beta$ παριστάνει τὴν διαφορὰν τοῦ ἀριθμοῦ β ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ α.

Τὸ σημεῖον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἶναι τὸ $\times$ ἢ τὸ $\cdot$ τὸ ὁποῖον ἐκφωνεῖται ***ἐπί.***

Π. χ. τὸ $5 \cdot 4 \cdot 12$ παριστάνει τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν 5, 4, 12.

Ὅταν οἱ παράγοντες ἑνὸς γινομένου παρίστανται μὲ γράμματα, παραλείπομεν συνήθως τὸ σημεῖον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ γράφομεν τὰ γράμματα τὸ ἕνα πλησίον τοῦ ἄλλου.

Π. χ. τὸ γινόμενον $\alpha\times\beta\times\gamma$ ἢ $\alpha\cdot\beta\cdot\gamma$ γράφεται ἁπλῶς $\alpha\beta\gamma$ καὶ ἀπαγγέλλεται: ἄλφα ἐπὶ βῆτα ἐπὶ γάμμα ἢ ἁπλῶς ἄλφα βῆτα γάμμα.

Τὸ σημεῖον τῆς διαιρέσεως εἶναι τὸ $:$ τὸ ὁποῖον ἐκφωνεῖται ***διά.***

Π.χ. $\alpha:\beta$ παριστάνει τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ α διὰ τοῦ β.

Τὸ πηλίκον $\alpha:\beta$ παρίσταται συνήθως καὶ ὑπὸ μορφὴν κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$.

Τὸ σύμβολον $\sqrt{}$ δηλώνει τὴν ἐξαγωγὴν τῆς τετραγωνικῆς ρίζης.

Π.χ. τὸ $\sqrt{9}$ παριστάνει τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ 9.

2ον. ***Σημεῖα συγκρίσεως.*** Εἰς τὴν Ἄλγεβραν, αἱ σχέσεις ἰσότητος καὶ ἀνισότητος μεταξὺ δύο ἀριθμῶν σημειοῦνται μὲ τὰ αὐτὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα χρησιμοποιεῖ ἡ 'Αριθμητική.

Π.χ. διὰ νὰ δείξωμεν, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β εἶναι ἴσοι, γράφομεν $\alpha=\beta$ καὶ ἐκφωνοῦμεν: ἄλφα ἴσον βῆτα.

Διὰ νὰ δείξωμεν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς α εἶναι μεγαλύτερος τοῦ β, γράφομεν $\alpha>\beta$ καὶ ἐκφωνοῦμεν: ἄλφα μεγαλύτερον τοῦ βῆτα κλπ.

Διὰ νὰ δείξωμεν, ὅτι ἕνας ἀριθμὸς α δὲν εἶναι ἴσος μὲ ἕνα ἄλλον ἀριθμὸν β, χωρὶς ὅμως νὰ θέλωμεν νὰ δηλώσωμεν, ποῖος ἐκ τῶν δύο εἶναι μεγαλύτερος, γράφομεν $\alpha\neq\beta$ καὶ ἐκφωνοῦμεν: ἄλφα διάφορον τοῦ βῆτα.

4. **Παρενθέσεις.** Εἰς τὴν Ἄλγεβραν, ὅπως καὶ εἰς τὴν 'Αριθμητικήν χρησιμοποιοῦμεν τὰς παρενθέσεις ( ) ὅταν θέλωμεν νὰ δηλώσωμεν, ὅτι αἱ πράξεις, αἱ ὁποῖαι περικλείονται μεταξὺ τῶν παρενθέσεων, πρέπει νὰ θεωροῦνται, ὅτι ἔχουν ἐκτελεσθῆ.

Π. χ. Τὸ $6+8-5$ φανερώνει ἁπλῶς τὰς πράξεις, τὰς ὁποίας πρέπει νὰ κάμωμεν ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν 6, 8, 5.

Ἐνῷ τὸ $(6+8-5)$ παριστάνει τὸ ἐξαγόμενον τῶν πράξεων αὐτῶν, αἱ ὁποῖαι ὑποτίθενται, ὅτι ἔχουν ἐκτελεσθῆ.

Ἐπίσης διὰ νὰ παραστήσωμεν τὸ γινόμενον τοῦ ἀθροίσματος $7+9$ ἐπὶ τὴν διαφορὰν $12-8$ γράφομεν

$$(7+9)\times(12-8) \text{ ἢ ἁπλούστερον } (7+9)(12-8).$$

Τὸ

$$(\alpha+\beta)(\gamma+\delta+\varepsilon)$$

παριστάνει τὸ γινόμενον τοῦ ἀθροίσματος $\alpha+\beta$, τὸ ὁποῖον θεωρεῖται ἐκτελεσθέν, ἐπὶ τὸ ἄθροισμα $\gamma+\delta+\varepsilon$, τὸ ὁποῖον θεωρεῖται ἐπίσης ὡς ἐκτελεσθέν.

Αἱ παρενθέσεις εἶναι τριῶν εἰδῶν:
αἱ συνήθεις ***παρενθέσεις*** (...),
αἱ ***ἀγκύλαι*** [...], αἱ ὁποῖαι περικλείουν τὰς παρενθέσεις [... (...)]
καὶ αἱ ***ἑνωτικαὶ γραμμαί,*** $\left\{\ldots\right\}$, αἱ ὁποῖαι περικλείουν παρενθέσεις καὶ ἀγκύλας $\left\{\ldots[\ldots(\ldots)\ldots]\ldots\right\}$

Παρατήρησις. Δὲν πρέπει νὰ συγχέωμεν τὰς παραστάσεις

$$5+4\times6+2 \quad \text{καὶ} \quad (5+4)\times(6+2)$$

Ἡ πρώτη φανερώνει, ὅτι πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸ 5 τὸ γινόμενον 4×6 καὶ ἔπειτα εἰς τὸ ἐξαγόμενον 29 νὰ προσθέσωμεν τὸ 2. Τὸ ἐξαγόμενον τῆς πρώτης εἶναι $5+24+2=31$.

Ἡ δευτέρα φανερώνει, ὅτι πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἄθροισμα $5+4$, δηλ. τὸ 9 ἐπὶ τὸ ἄθροισμα $6+2$, δηλ. ἐπὶ τὸ 8. Τὸ ἐξαγόμενόν της θὰ εἶναι $9\times8=72$.

5. Πλεονεκτήματα ἀπὸ τὴν χρῆσιν τῶν γραμμάτων καὶ τῶν σημείων. Διὰ νὰ κατανοήσωμεν πῶς ἡ Ἄλγεβρα, μὲ τὴν χρῆσιν τῶν γραμμάτων καὶ τῶν σημείων ἁπλοποιεῖ καὶ γενικεύει ὅλα τὰ ζητήματα τῆς Ἀριθμητικῆς, θὰ δώσωμεν ἕνα ἁπλοῦν παράδειγμα.

Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ λύσωμεν τὸ κάτωθι πρόβλημα:

Πρόβλημα: Μία ἁμαξοστοιχία διανύει 45 χιλιόμετρα τὴν ὥραν· πόσα χιλιόμετρα θὰ διανύσῃ εἰς 3,5 ὥρας;

Ἀφοῦ ἡ ἁμαξοστοιχία εἰς 1 ὥραν διανύει 45 χιλιόμετρα εἰς 3,5 ὥρας θὰ διανύσῃ 3,5 φορὰς περισσότερον χιλιόμετρα, δηλ. θὰ διανύσῃ

$$45 \text{ χιλμ.} \times 3{,}5 \text{ ἢ } 157{,}5 \text{ χλμ.}$$

Ἐὰν εἰς τὸ πρόβλημα αὐτὸ ἀλλάξωμεν τὴν ταχύτητα τῆς ἁμαξοστοιχίας καὶ τὸν χρόνον τῆς κινήσεώς της, δηλ. ἐάν, ἀντὶ τῶν ἀριθμῶν 45 καὶ 3,5 θέσωμεν ἄλλους ἀριθμούς, θὰ ἔχωμεν νὰ λύσωμεν ἕνα ἄλλο πρόβλημα, ὅμοιον πρὸς τὸ δοθέν.

Εἰς τὴν 'Αριθμητικὴν ὅλα τὰ προβλήματα τοῦ εἴδους αὐτοῦ λύονται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ἀλλὰ πρέπει κάθε φορὰν νὰ κάμωμεν τοὺς ἰδίους συλλογισμοὺς διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ζητούμενον.

Τουναντίον εἰς τὴν Ἄλγεβραν ὅλα τὰ προβλήματα τοῦ εἴδους αὐτοῦ, χάρις εἰς τὴν χρῆσιν τῶν γραμμάτων, λύονται μὲ ἕνα μόνον γενικὸν πρόβλημα.

Πράγματι· τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα εἰς τὴν Ἄλγεβραν διατυπώνεται ὡς ἑξῆς:

Ἕνα κινητὸν διανύει v χιλιόμετρα τὴν ὥραν· πόσα χιλιόμετρα θὰ διανύσῃ εἰς t ὥρας;

'Αφοῦ εἰς 1 ὥραν διανύει v χιλιόμετρα, εἰς t ὥρας θὰ διανύσῃ $v \times t$ ἢ vt χιλιόμετρα. Τὸ διάστημα λοιπόν, ποὺ θὰ διανύσῃ τὸ κινητὸν εἰς t ὥρας, εἶναι vt· ἐὰν παραστήσωμεν μὲ x τὸ διάστημα αὐτό, θὰ ἔχωμεν τὴν ἰσότητα

$$\boxed{x = vt} \tag{1}$$

'Εὰν τώρα θέλωμεν νὰ λύσωμεν ἕνα οἱονδήποτε πρόβλημα τοῦ εἴδους αὐτοῦ, ἀρκεῖ νὰ ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν ἰσότητα αὐτὴν τὰ γράμματα v καὶ t μὲ τοὺς ἀριθμούς, τοὺς ὁποίους παριστάνουν.

Οὕτω, ἐὰν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν πόσον διάστημα θὰ διανύσῃ μία ἁμαξοστοιχία εἰς 2,5 ὥρας, ἂν κινῆται μὲ ταχύτητα 50 χλμ. τὴν ὥραν, πρέπει νὰ ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὸ v μὲ 50 καὶ τὸ t μὲ 2,5. Τὸ ζητούμενον διάστημα θὰ εἶναι λοιπὸν

$$x = 50 \text{ χιλιόμ.} \times 2{,}5 = 125 \text{ χιλιόμετρα.}$$

6. Τύποι. Μία ἰσότης, ὅπως ἡ ἰσότης x=vt, ἡ ὁποία δίδει τὴν τιμὴν ἑνὸς ἀγνώστου ποσοῦ, ὅταν γνωρίζωμεν ἄλλα ποσά, τῶν ὁποίων αἱ τιμαὶ παρίστανται μὲ γράμματα, λέγεται ***τύπος.***

'Επίσης ἡ ἰσότης $T = \frac{KEX}{100}$, τὴν ὁποίαν εὑρήκαμεν εἰς τὴν 'Αριθμητικὴν καὶ ἡ ὁποία δίδει τὸν τόκον T ἑνὸς κεφαλαίου K εἰς X ἔτη πρὸς E %, εἶναι ἕνας τύπος.

Γενικῶς: ***Τύπος εἶναι μία ἰσότης, ἡ ὁποία δίδει ὑπὸ μορφὴν συμπυκνωμένην, τὴν σειρὰν τῶν πράξεων, τὰς ὁποίας πρέπει νὰ ἐκτελέσωμεν ἐπὶ τῶν δεδομένων ἑνὸς προβλήματος, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ζητούμενον.***

Ἡ Ἄλγεβρα προσπαθεῖ νὰ δώσῃ εἰς κάθε μαθηματικὸν ζήτημα μίαν γενικὴν λύσιν, ἡ ὁποία νὰ ἐκφράζεται μὲ ἕνα ἢ περισσοτέρους τύπους· διὰ τοῦτο δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν, ὅτι ἡ Ἄλγεβρα εἶναι ***ἡ ἐπιστήμη τῶν μαθηματικῶν τύπων.***

7. Πλεονεκτήματα τῶν τύπων. 1ον. Ἕνας τύπος ἐπιτρέπει νὰ λύσωμεν ὅλα τὰ προβλήματα, τὰ ὁποῖα διαφέρουν μόνον κατὰ τὰ ἀριθμητικὰ δεδομένα των.

Οὕτω ὁ τύπος $E=\beta\upsilon$ ἐπιτρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τυχόντος ὀρθογωνίου, ὅταν γνωρίζωμεν τὴν βάσιν του β καὶ τὸ ὕψος του υ.

2ον. Ἐπίσης ἕνας τύπος φανερώνει κατὰ ἕνα τρόπον σύντομον καὶ σαφῆ τὰς σχέσεις, αἱ ὁποῖαι ὑπάρχουν μεταξὺ τῶν δεδομένων καὶ τοῦ ἀγνώστου ἑνὸς προβλήματος, ἐνῷ ἡ διατύπωσις τῶν σχέσεων αὐτῶν διὰ λόγων θὰ ἦτο γενικῶς μακρὰ καὶ σύνθετος.

Π. χ. ὁ τύπος $T=\frac{KEX}{100}$ δεικνύει ἀμέσως, ὅτι:

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν τόκον ἑνὸς κεφαλαίου πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ κεφάλαιον ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιον ἐπὶ τὸν χρόνον καὶ τὸ γινόμενον των νὰ διαιρέσωμεν διὰ 100.

Ἐπίσης ἀντὶ νὰ εἴπωμεν:

Τὸ μῆκος τῆς περιφερείας Γ ἑνὸς κύκλου εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἀριθμοῦ π ἐπὶ τὴν διάμετρόν του (διπλάσιον τῆς ἀκτῖνος), ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν

$$\Gamma = 2\pi R.$$

3ον. Δυνάμεθα νὰ μετασχηματίσωμεν ἕνα τύπον καὶ νὰ λάβωμεν ἐξ αὐτοῦ ἄλλους τύπους, οἱ ὁποῖοι μᾶς ἐπιτρέπουν νὰ λύσωμεν νέας σειρὰς προβλημάτων. Ἀργότερον θὰ ἴδωμεν, πῶς κάμνομεν αὐτοὺς τοὺς μετασχηματισμούς.

8. Ἀριθμητικὴ τιμὴ ἑνὸς τύπου. ***Ἀριθμητικὴ τιμὴ*** ἑνὸς τύπου λέγεται τὸ ἐξαγόμενον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν, ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὰ γράμματα τοῦ τύπου μὲ ἀριθμοὺς καὶ ἐκτελέσωμεν τὰς πράξεις, αἱ ὁποῖαι σημειώνονται.

Π.χ. Ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ τύπου $x=vt$, διὰ $v=45$ καὶ $t=3$ εἶναι

$$x=45\times3=135.$$

Ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ τύπου $x=\frac{\alpha\beta\gamma}{2}$, διὰ $\alpha=3$, $\beta=8$, $\gamma=4$ εἶναι

$$x=\frac{3\cdot8\cdot4}{2}=48.$$

Ἀσκήσεις. *1.* Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $E=\frac{\beta\cdot\upsilon}{2}$. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδόν του, ἐὰν εἶναι:

1ον. $\beta=15$ μέτρ. $\upsilon=8$ μέτρ. 3ον. $\beta=124$ μ., $\upsilon=12{,}8$ μέτρα.
2ον. $\beta=4{,}8$ μέτρ. $\upsilon=3{,}5$ μέτρ. 4ον. $\beta=18{,}4$ μ., $\upsilon=17$ μέτρα.

2. Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τραπεζίου δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $E = \frac{(B+\beta)}{2} \cdot \upsilon$ ὅπου B εἶναι ἡ μεγάλη βάσις του, β ἡ μικρὰ βάσις του καὶ υ τὸ ὕψος του. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδόν του, ἐὰν εἶναι :

1ον. $B=28$ μέτρα, $\beta=17$ μέτρα, $\upsilon=8$ μέτρα.

2ον. $B=105{,}60$ μέτρα, $\beta=49{,}5$ μέτρα, $\upsilon=24{,}8$ μέτρα.

3. Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κύκλου δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $E=\pi R^2$, ὅπου $\pi = 3{,}1415$ καὶ R ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδόν του, ἐὰν εἶναι :

1ον $R=4$ μέτρ. 2ον. $R=3{,}75$ μέτρ. 3ον. $R=0{,}25$ μέτρ.

4. Τὸ διάστημα s, ποὺ διανύει ἕνα κινητὸν κατὰ τὴν ἐλευθέραν πτῶσιν του, δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $s = \frac{1}{2} gt^2$, ὅπου $g=9{,}80$ καὶ t=χρόνος εἰς δευτερόλεπτα. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ διάστημα αὐτό, ἐάν :

1ον $t = 4$ δευτερ. 2ον $t = 12$ δευτερ. 3ον $t = 15$ δευτερ.

5. Τὸ διάστημα s, ποὺ διανύει ἕνα κινητόν, ὅταν ἐκσφενδονίζεται μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα v_0 δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $s = v_0 t + \frac{1}{2} gt^2$. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ διάστημα αὐτό, ἐὰν εἶναι·

1ον. $v_0 = 60$ μέτρ., $t = 5$ δευτερ., $g = 9{,}80$

2ον. $v_0 = 500$ μέτρ., $t = 10$ δευτερ., $g = 9{,}80$

6. Ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα, εἰς θερμοκρασίαν θ, δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $V_\vartheta = 331{,}3 \sqrt{1+\alpha\vartheta}$, ὅπου α εἶναι ὁ συντελεστὴς τῆς διαστολῆς τοῦ ἀερίου. Ποία εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου, ὅταν ἡ θερμοκρασία εἶναι $\vartheta = 35^0$ καὶ $\alpha = 0{,}00365$;

7. Τὸ μῆκος Μ μιᾶς μεταλλικῆς ῥάβδου, εἰς θερμοκρασίαν ϑ^0, δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου : $M = \mu(1+\alpha\vartheta)$, ὅπου μ εἶναι τὸ μῆκος τῆς ῥάβδου εἰς 0^0 καὶ α ὁ συντελεστὴς διαστολῆς. Ἐὰν $\alpha = 0{,}0000144$ καὶ $\mu = 3$ μέτρα : 1ον. Ποῖον θὰ εἶναι τὸ μῆκος Μ τῆς ῥάβδου εἰς 15^0. 2ον. Ποία θὰ εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν μηκῶν μεταξὺ 15^0 καὶ 48^0;

9. Ποσὰ τὰ ὁποῖα δύνανται νὰ μετρηθοῦν κατὰ δύο ἀντιθέτους φοράς. Μερικὰ ποσὰ δύνανται νὰ μετρηθοῦν κατὰ δύο ἀντιθέτους φοράς :

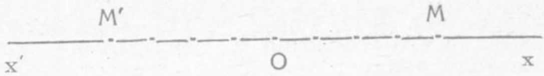
Π.χ. Ὁ ***δρόμος***, τὸν ὁποῖον ***διανύει*** ἕνα αὐτοκίνητον, τὸ ὁποῖον ἀναχωρεῖ ἐκ Τριπόλεως καὶ κινεῖται ἐπὶ τῆς ὁδοῦ Ἀθηνῶν—Καλαμῶν, δύναται νὰ μετρηθῇ κατὰ δύο ἀντιθέτους φοράς, καθόσον τὸ αὐτοκίνητον διευθύνεται πρὸς τὰς Καλάμας ἢ πρὸς τὰς Ἀθήνας.

Ἡ ***θερμοκρασία*** ἑνὸς τόπου δύναται νὰ μετρηθῇ κατὰ δύο ἀντιθέτους φοράς : ἄνω τοῦ μηδενὸς ἢ κάτω τοῦ μηδενός.

Ἡ ***χρονολογία ἑνὸς γεγονότος*** δύναται νὰ μετρηθῇ ἐπίσης κατὰ δύο τρόπους : πρὸ Χριστοῦ, ἢ μετὰ Χριστόν.

Διὰ νὰ προσδιορισθοῦν ἀκριβῶς τὰ ποσὰ τοῦ εἴδους αὐτοῦ, δὲν ἀρκεῖ νὰ μετρηθοῦν μὲ μίαν μονάδα μετρήσεως καὶ νὰ παρασταθῇ τὸ μέτρον του μὲ ἕνα ἀριθμόν· πρέπει ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς νὰ συνοδεύεται καὶ μὲ μίαν ***ἔκφρασιν,*** ἡ ὁποία νὰ δηλώνῃ τὴν ***φορὰν*** κατὰ τὴν ὁποίαν ἐμετρήθησαν τὰ ποσὰ αὐτά.

Παραδείγματα. 1ον· Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἕνα κινητὸν κινεῖται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας $x'x$ (Σχ. 1) καὶ ὅτι κατά τινα στιγμὴν εὑρίσκεται εἰς τὸ



Σχ. 1

σημεῖον Ο. Ἐὰν τὸ κινητόν, κινούμενον ἐπὶ τῆς εὐθείας αὐτῆς, ἀπομακρυνθῇ ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο κατὰ 4 μέτρα, δὲν ὁρίζεται ἀκριβῶς ἡ θέσις τοῦ κινητοῦ· διότι τὸ κινητὸν δύναται νὰ κινηθῇ πρὸς τὰ δεξιὰ ἢ πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ Ο. Πρέπει νὰ εἴπωμεν, ὅτι διήνυσε 4 μέτρα πρὸς τὰ ***δεξιὰ*** τοῦ Ο, ὁπότε εὑρίσκεται εἰς τὸ σημεῖον Μ, ἢ ὅτι διήνυσε 4 μέτρα πρὸς τὰ ***ἀριστερὰ*** τοῦ Ο, ὁπότε εὑρίσκεται εἰς τὸ σημεῖον Μ'.

2ον. Ἡ ***μέση θερμοκρασία*** ἑνὸς τόπου, δὲν καθορίζεται, ἐὰν εἴπωμεν, ὅτι εἶναι 2, 3, 4... βαθμοί· πρέπει νὰ δηλώσωμεν, ἐὰν οἱ βαθμοὶ ἐμετρήθησαν ***ἄνω*** ἢ ***κάτω*** τοῦ μηδενός.

Διὰ νὰ ἁπλοποιήσωμεν τὰς ἐκφράσεις: ***πρὸς τὰ δεξιὰ*** ἢ ***πρὸς τὰ ἀριστερὰ*** τοῦ σημείου Ο, ***ἄνω*** ἢ ***κάτω*** τοῦ μηδενὸς κλπ. παραδεχόμεθα νὰ δηλώνωμεν **τὴν *φορὰν*** τῶν μεγεθῶν μὲ τὰ σημεῖα $+$ καὶ $-$.

Π.χ. θὰ λέγωμεν: ὅτι τὸ κινητὸν διήνυσε $+4$ μέτρα, ἀντὶ νὰ εἴπωμεν 4 μέτρα ***πρὸς τὰ δεξιὰ*** τοῦ σημείου Ο· ἢ ὅτι διήνυσε -4 μέτρα, ἀντὶ νὰ εἴπωμεν 4 μέτρα ***πρὸς τὰ ἀριστερὰ*** τοῦ Ο.

Ἐπίσης λέγομεν, ὅτι ἡ θερμοκρασία ἑνὸς τόπου κατά τινα στιγμὴν εἶναι $+12^0$, ἀντὶ νὰ εἴπωμεν 12^0 ***ἄνω*** τοῦ μηδενός, ἢ ὅτι εἶναι -10 βαθμοί, ἀντὶ νὰ εἴπωμεν, ὅτι εἶναι 10 βαθμοὶ ***κάτω*** τοῦ μηδενός.

10. **Ἀνάγκη τῆς δημιουργίας νέων ἀριθμῶν.** Ἐκτὸς τῶν λόγων, ποὺ ἀνεφέραμεν ἀνωτέρω, ὑπάρχουν καὶ ἄλλοι λόγοι, οἱ ὁποῖοι μᾶς ἐπιβάλλουν νὰ δημιουργήσωμεν νέους ἀριθμούς.

Π.χ. Δὲν δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν ἀφαίρεσιν $6-15$, ὅπου ὁ ἀφαιρετέος 15 εἶναι μεγαλύτερος τοῦ μειωτέου 6.

Ὅπως εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν ἐδημιουργήσαμεν τὰ κλάσματα διὰ νὰ κάμωμεν δυνατὴν καὶ τελείαν κάθε διαίρεσιν καὶ εἰς περίπτωσιν ἀκόμη, ὅπου ὁ διαιρέτης ἦτο μεγαλύτερος τοῦ διαιρετέου, οὕτω καὶ ἐδῶ πρέπει νὰ δημιουργήσωμεν ἕνα νέον εἶδος ἀριθμῶν, τοὺς ***ἀλγεβρικοὺς ἀριθμούς,*** ὥστε νὰ εἶναι δυνατὴ κάθε ἀφαίρεσις.

II. ΑΛΓΕΒΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

11. **Θετικοὶ καὶ ἀρνητικοὶ ἀριθμοί.** Ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ τῆς ἀριθμητικῆς, ἐκτὸς τοῦ μηδενός, οἱ ὁποῖοι ἔχουν ἔμπροσθέν των τὸ σημεῖον $+$ λέγονται ***θετικοὶ ἀριθμοί.***

Π.χ. Οἱ ἀριθμοὶ $+1$, $+12$, $+\frac{3}{4}$, $+\sqrt{15}$ εἶναι θετικοὶ ἀριθμοὶ καὶ ἐκφωνοῦνται κατὰ σειράν :
σὺν ἕνα, σὺν δώδεκα, σὺν τρία τέταρτα, $+$ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 15.

Ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ τῆς ἀριθμητικῆς, ἐκτὸς τοῦ μηδενός, οἱ ὁποῖοι ἔχουν ἔμπροσθέν των τὸ σημεῖον — λέγονται ***ἀρνητικοὶ ἀριθμοί.***

Π.χ. οἱ ἀριθμοὶ -5, $-\frac{7}{8}$, $-\sqrt{28}$ εἶναι ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ καὶ ἐκφωνοῦνται κατὰ σειράν :
πλὴν πέντε, πλὴν ἑπτὰ ὄγδοα, πλὴν τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ εἴκοσι ὀκτώ.

12. **'Αλγεβρικοὶ ἀριθμοί.** Τὸ σύνολον τῶν ***θετικῶν*** καὶ ***ἀρνητικῶν*** ἀριθμῶν, συμπεριλαμβανομένου καὶ τοῦ μηδενός, χωρὶς κανένα σημεῖον, λέγονται ***ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοὶ*** ἢ ***σχετικοὶ ἀριθμοί.***

Π.χ. Οἱ ἀριθμοὶ -4, $+12$, $+\frac{3}{5}$, $-\frac{7}{8}$, 0, $-\sqrt{5}$, $+\sqrt{21}$ εἶναι ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοί.

Οἱ ἀκέραιοι καὶ κλασματικοὶ ἀριθμοὶ τῆς ἀριθμητικῆς, λέγονται ***φυσικοὶ ἀριθμοί.***

13. **Ὁμόσημοι ἀριθμοί. Ἑτερόσημοι ἀριθμοί.** Δύο ἢ περισσότεροι ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοὶ λέγονται ***ὁμόσημοι,*** ἐὰν ἔχουν τὸ αὐτὸ σημεῖον καὶ ***ἑτερόσημοι,*** ἐὰν δὲν ἔχουν τὸ αὐτὸ σημεῖον.

Π.χ. Οἱ ἀριθμοὶ $+8$, $+\frac{3}{5}$, $+\sqrt{28}$ εἶναι ὁμόσημοι.

'Επίσης οἱ ἀριθμοὶ -7, $-4{,}5$, $-\frac{3}{4}$ εἶναι ὁμόσημοι.

Οἱ ἀριθμοὶ -8, $+4$, $+\frac{3}{4}$, $\sqrt{2}$ εἶναι ἑτερόσημοι.

14. **'Απόλυτος τιμή.** ***'Απόλυτος τιμὴ ἢ μέτρον*** ἑνὸς ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι ὁ ἴδιος ἀριθμός, χωρὶς τὸ σημεῖον του.

Π. χ. ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ $+8$ εἶναι 8, καὶ τοῦ -12 εἶναι 12.

Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ ἑνὸς ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ α παρίσταται μὲ τὸ σύμβολον $|\alpha|$.

Π. χ. Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ -5 παρίσταται μὲ τὸ σύμβολον $|-5|$, καὶ ἐκφωνεῖται: ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ πλὴν 5.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς ἀπολύτου τιμῆς θὰ εἶναι

$$|-5|=5, \quad |+7|=7$$

15. **Συνθήκη.** ***Κάθε θετικὸς ἀριθμὸς εἶναι ἴσος μὲ τὴν ἀπόλυτον τιμήν του.***

Π. χ. $+8 = 8, \quad +\frac{4}{5} = \frac{4}{5}.$

῾Η παραδοχὴ αὐτή, ὡς θὰ ἴδωμεν κατωτέρω, δὲν εἰσάγει καμμίαν ἀντίφασιν. Χάρις εἰς αὐτὴν οἱ θετικοὶ ἀριθμοὶ παρίστανται, ὅπως καὶ οἱ ἀριθμοὶ τῆς ᾿Αριθμητικῆς. Οἱ μόνοι λοιπὸν νέοι ἀριθμοί, ποὺ εἰσάγονται εἰς τὴν ῎Αλγεβραν, εἶναι οἱ ἀρνητικοὶ ἀριθμοί.

16. **᾿Αλγεβρικοὶ ἀριθμοὶ ἴσοι, ἄνισοι, ἀντίθετοι.** ***Δύο ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοὶ λέγονται ἴ σ ο ι,*** ἐὰν ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀπόλυτον τιμὴν καὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον.

Οὕτω $(-5) = (-5)$, ἐνῷ $(-5) \neq (+5)$.

῾Ομοίως ἡ ἰσότης $\alpha = \beta$ ἐκφράζει, ὅτι οἱ δύο ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοὶ α καὶ β ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀπόλυτον τιμὴν καὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον.

Δύο ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι ἄ ν ι σ ο ι, ἐὰν διαφέρουν, εἴτε κατὰ τὴν ἀπόλυτον τιμήν, εἴτε κατὰ τὸ σημεῖον, εἴτε καὶ κατὰ τὴν ἀπόλυτον τιμὴν καὶ κατὰ τὸ σημεῖον.

Π. χ. Οἱ ἀριθμοὶ $+12$ καὶ $+8$ εἶναι ἄνισοι. ᾿Επίσης οἱ ἀριθμοὶ $+9$ καὶ -9 καθὼς καὶ οἱ $+10$ καὶ -7 εἶναι ἄνισοι.

Δύο ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοὶ λέγονται ἀ ν τ ί θ ε τ ο ι ἢ σ υ μ μ ε τ ρ ι κ ο ί, ἐὰν ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀπόλυτον τιμὴν καὶ διάφορα σημεῖα.

Π. χ. Οἱ ἀριθμοὶ $+5$ καὶ -5 εἶναι ἀντίθετοι.

῾Ο ἀλγεβρικὸς ἀριθμός, ὁ ἀντίθετος τοῦ -15 εἶναι ὁ $+15$

» » » » » α » ὁ $-\alpha$.

ΣΗΜ. Δὲν πρέπει νὰ λέγωμεν *ποτέ*, ὅτι δύο ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι ἴσοι καὶ ἔχουν διάφορα σημεῖα, ἀλλὰ ὅτι εἶναι ἀντίθετοι ἢ συμμετρικοί.

᾿Ασκήσεις. *8.* Γράψατε τρεῖς θετικοὺς καὶ τρεῖς ἀρνητικοὺς ἀριθμούς.

9. Ποῖαι εἶναι αἱ ἀπόλυτοι τιμαὶ τῶν ἀριθμῶν :

$$-5, \quad +24, \quad -25, \quad -\frac{4}{5}, \quad -0{,}28, \quad +\frac{3}{7}\ ;$$

10. Ποῖοι εἶναι οἱ ἀντίθετοι τῶν ἀριθμῶν

$$+15, \quad -23, \quad -\frac{3}{4}, \quad -3{,}5, \quad +\sqrt{14}, \quad +0{,}75\ ;$$

17. **Γραφικὴ παράστασις τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν.** Διὰ νὰ παραστήσωμεν γραφικῶς ἕνα ἀλγεβρικὸν ἀριθμὸν ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς :

Λαμβάνομεν μίαν εὐθεῖαν $x'x$ (Σχ. 2). ᾿Επ᾿ αὐτῆς λαμβάνομεν

Ε′ Δ′ Γ′ Β′ Α′ Ο Α Β Γ Δ Ε

x′ −6 −5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5 6 x

Σχ. 2

ἕνα τυχὸν σημεῖον Ο καὶ ὁρίζομεν ἐκ τῶν προτέρων, ὅτι τοῦτο παριστάνει τὸ μηδέν. Ἔπειτα ὁρίζομεν ἐπὶ τῆς εὐθείας x΄x ὡς θετικὴν φορὰν τὴν ἐκ τοῦ Ο πρὸς τὸ x καὶ ὡς ἀρνητικὴν τὴν ἐκ τοῦ Ο πρὸς τὸ x΄. Ἑκατέρωθεν τοῦ Ο καὶ ἐπὶ τῆς εὐθείας x΄x λαμβάνομεν ἴσα εὐθύγραμμα τμήματα ΟΑ, ΑΒ,....ΟΑ΄, Α΄Β΄,... ἕκαστον τῶν ὁποίων εἶναι ἴσον μὲ μίαν μονάδα μήκους.

Κάτωθεν τῶν Α, Β,... γράφομεν τοὺς θετικοὺς ἀριθμούς, 1, 2, 3, 4, 5...., κάτωθεν δὲ τῶν Α΄, Β΄,... γράφομεν τοὺς ἀρνητικοὺς ἀριθμοὺς —1, —2, —3, —4....

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω θὰ λέγωμεν, ὅτι:

Τὸ εὐθ. τμῆμα ΟΑ παριστάνει τὸν ἀλγεβρικὸν ἀριθμὸν +1
» » » ΟΒ » » » » +2
» » » ΟΓ » » » » +3
. . . .
. . . .
τὸ εὐθ. τμῆμα ΟΑ΄ παριστάνει τὸν ἀλγεβρικὸν ἀριθμὸν —1
» » » ΟΒ΄ » » » » —2
» » » ΟΓ΄ » » » » —3
. . . .
. . . .

Καὶ ἀντιστρόφως, θὰ λέγωμεν, ὅτι:

ὁ ἀλγεβρικὸς ἀριθμὸς +5 παρίσταται ὑπὸ τοῦ εὐθ. τμήματος ΟΕ
» » » —3 » » » » » ΟΓ΄.
. . . .

18. **Διάταξις τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν κατὰ τάξιν μεγέθους**. Ἂς συγκρίνωμεν μεταξύ των, τοὺς ἀλγεβρικοὺς ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι παριστάνουν τὴν περιουσιακὴν κατάστασιν δύο προσώπων Α καὶ Β κατά τινα ἡμέραν καὶ τὰ ὁποῖα εἶχον τὸ αὐτὸ ποσὸν εἰς τὸ Ταμεῖον των.

1ον. Ἔστω, ὅτι ὁ Α ***εἰσέπραξε*** 2000 δρχ. δηλ. ἔχει +2000 δρχ.
ὁ Β ***ἐπλήρωσε*** 8000 δρχ. δηλ. ἔχει —8000 δρχ.

Εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ περιουσία τοῦ Α εἶναι ***μεγαλυτέρα*** τῆς περιουσίας τοῦ Β.

Δηλ. τὸ +2000 εἶναι μεγαλύτερον τοῦ —8000.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι

Ι. ***Κάθε θετικὸς ἀριθμὸς εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ κάθε ἀρνητικὸν ἀριθμόν.***

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω θὰ εἶναι $5>-28$ $1>-754$.

2ον. Ἔστω, ὅτι ὁ Α ***εἰσέπραξε*** 3000 δρχ., δηλ. ἔχει $+3000$ δρχ.
ὁ Β ***εἰσέπραξε*** 1000 δρχ., δηλ. ἔχει $+1000$ δρχ.

Εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ περιουσία τοῦ Α εἶναι ***μεγαλυτέρα*** τῆς περιουσίας τοῦ Β.

Δηλ. τὸ $+3000$ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ $+1000$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι :

II. ***Ἐκ δύο θετικῶν ἀριθμῶν μεγαλύτερος εἶναι ἐκεῖνος, ὁ ὁποῖος ἔχει μεγαλυτέραν ἀπόλυτον τιμήν.***

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω θὰ εἶναι $8>4$ $106>105$.

3ον. Ἔστω, ὅτι ὁ Α ***ἐπλήρωσε*** 3000 δρχ., δηλ. ἔχει -3000 δρχ.
ὁ Β ***ἐπλήρωσε*** 1000 δρχ., δηλ. ἔχει -1000 δρχ.

Πλουσιώτερος εἶναι ὁ Β, διότι ἡ πληρωμή του εἶναι μικροτέρα.

Δηλ. τὸ -1000 εἶναι μεγαλύτερον τοῦ -3000.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι :

III. ***Ἐκ δύο ἀρνητικῶν ἀριθμῶν μεγαλύτερος εἶναι ἐκεῖνος, ὁ ὁποῖος ἔχει μικροτέραν ἀπόλυτον τιμήν.***

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω θὰ εἶναι $-5>-600$, $-1>-2564$.

4ον. Εἶναι φανερόν, ὅτι εἶναι προτιμότερον νὰ μὴν ἔχῃ κανεὶς τίποτε, δηλ. νὰ ἔχῃ 0 δραχμάς, παρὰ νὰ ὀφείλῃ ἕνα ποσόν.

Δηλ. τὸ 0 εἶναι μικρότερον τοῦ $+200$ καὶ μεγαλύτερον τοῦ -1000.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι :

IV. ***Κάθε θετικὸς ἀριθμὸς εἶναι μεγαλύτερος τοῦ μηδενός. Κάθε ἀρνητικὸς ἀριθμὸς εἶναι μικρότερος τοῦ μηδενός.***

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω θὰ εἶναι $8>0$, $0>-75$, $-24<0$.

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τοὺς ἀλγεβρικοὺς ἀριθμοὺς κατὰ τὴν ἀκόλουθον σειρὰν μεγέθους :

$$-\infty \ldots -20 \ldots -10 \ldots 0 \ldots +10 \ldots +25 \ldots +\infty$$

Μὲ τὸ σύμβολον ∞ (ἄπειρον) παριστάνομεν ἕνα ἀριθμὸν ἀπείρως μεγάλον κατ' ἀπόλυτον τιμήν.

Εἰς τὴν σειρὰν αὐτὴν κάθε ἀριθμός, ὁ ὁποῖος εὑρίσκεται ἀριστερὰ ἑνὸς ἄλλου εἶναι μικρότερος αὐτοῦ.

Ἀσκήσεις. 11. Νὰ τεθοῦν οἱ κάτωθι ἀριθμοὶ κατὰ σειρὰν οὕτως ὥστε : 1ον. Αἱ ἀπόλυτοι τιμαί των νὰ βαίνουν ἐλαττούμεναι. 2ον. Οἱ ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοὶ νὰ βαίνουν αὐξανόμενοι :

$$-6, \ +24, \ -26, \ -4{,}7, \ +68, \ -\frac{15}{2}, \ +\frac{23}{6}.$$

12. Νὰ τεθοῦν οἱ κάτωθι ἀριθμοὶ κατὰ σειρὰν οὕτως, ὥστε νὰ βαίνουν αὐξανόμενοι :

$$-\frac{4}{3}, \ -\frac{13}{11}, \ \frac{15}{2}, \ -1, \ 0, \ \frac{48}{7}, \ -\frac{1}{2}, \ +\frac{1}{2}, \ -4, \ +2.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

19. Αἱ πράξεις ἐπὶ τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν σημειοῦνται μὲ τὰ αὐτὰ σημεῖα, ὅπως εἰς τὴν ἀριθμητικήν, καὶ δίδομεν εἰς τὸ ἐξαγόμενον τὸ αὐτὸ ὄνομα.

Οὕτω, ἐὰν α καὶ β εἶναι δύο ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοί, τὰ $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$, $\alpha\beta$ καὶ $\alpha:\beta$ ἢ $\frac{\alpha}{\beta}$ παριστάνουν ἀντιστοίχως τὸ ***ἄθροισμά των***, τὴν ***διαφοράν των***, τὸ ***γινόμενόν των*** καὶ τὸ ***πηλίκον των***.

Διὰ νὰ μὴ γίνεται σύγχυσις τῶν σημείων $+$ καὶ $-$ δύο ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν μὲ τὰ σημεῖα $+$ καὶ $-$ τῆς προσθέσεως καὶ τῆς ἀφαιρέσεως αὐτῶν, θὰ θέτωμεν προσωρινῶς τοὺς ἀλγεβρικοὺς ἀριθμοὺς ἐντὸς παρενθέσεως.

Π. χ. Τὸ $(-5)+(+8)$ παριστάνει τὸ ἄθροισμα τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν -5 καὶ $+8$ καὶ ἐκφωνεῖται: πλὴν 5 ***καὶ*** σὺν 8.

Ι. ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

20. **Ἄθροισμα δύο ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν.** Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις:

I. ***Ἐὰν οἱ προσθετέοι εἶναι ὁμόσημοι.***

II. ***Ἐὰν οἱ προσθετέοι εἶναι ἑτερόσημοι.***

I. ***Ἄθροισμα δύο ὁμοσήμων ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν.*** 1ον. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν $+12$ καὶ $+8$.

Ἐπειδὴ 12 θετικαὶ μονάδες καὶ 8 θετικαὶ μονάδες κάμνουν 20 θετικὰς μονάδας, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν

$$(+12)+(+8)=+20.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν $(+14)+(+15)=+29$

$$\left(+\frac{2}{3}\right)+\left(+\frac{1}{4}\right)=\left(+\frac{8}{12}\right)+\left(+\frac{3}{12}\right)=+\frac{11}{12}.$$

2ον. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν -12 καὶ -8.

Ἐπειδὴ 12 ἀρνητικαὶ μονάδες καὶ 8 ἀρνητικαὶ μονάδες κάμνουν 20 ἀρνητικὰς μονάδας, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν

$$(-12)+(-8)=-20.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν $(-5)+(-9)=-14$.

II. ***Ἄθροισμα δύο ἑτεροσήμων ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν.*** Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ἑτεροσήμων ἀριθμῶν -7 καὶ $+20$.

Ἐπειδὴ 7 ἀρνητικαὶ μονάδες ἐξουδετεροῦν 7 θετικὰς μονάδας, μένουν ἀκόμη 13 θετικαὶ μονάδες.

Ὥστε θὰ εἶναι $(-7)+(+20)=+13$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι $(+15)+(-25)=-10$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν κάτωθι κανόνα:

Κανὼν I. ***Τὸ ἄθροισμα δύο ὁμοσήμων ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἕνας ἀλγεβρικὸς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἔχει ὡς ἀπόλυτον τιμὴν τὸ ἀριθμητικὸν ἄθροισμα τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν δύο ἀριθμῶν καὶ ὡς σημεῖον τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν δύο αὐτῶν ἀριθμῶν***

II. ***Τὸ ἄθροισμα δύο ἑτεροσήμων ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἕνας ἀλγεβρικὸς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἔχει ὡς ἀπόλυτον τιμὴν τὴν ἀριθμητικὴν διαφορὰν τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν δύο αὐτῶν ἀριθμῶν καὶ ὡς σημεῖον τὸ σημεῖον ἐκείνου ἐκ τῶν δύο ἀριθμῶν, ὁ ὁποῖος ἔχει τὴν μεγαλυτέραν ἀπόλυτον τιμήν.***

21. Παρατηρήσεις. I. ***Τὸ ἄθροισμα δύο ἀντιθέτων ἀριθμῶν εἶναι μηδέν.***

Π. χ. $(+8)+(-8)=0$.

Διότι οἱ ἀντίθετοι ἀριθμοὶ εἶναι ἑτερόσημοι καὶ ἡ διαφορὰ τῶν ἀπολύτων τιμῶν των εἶναι μηδέν.

II. ***Ὅταν ὁ ἕνας ἀπὸ τοὺς δύο προστιθεμένους ἀριθμοὺς εἶναι μηδέν, τὸ ἄθροισμά των εἶναι ἴσον μὲ τὸν ἄλλον ἀριθμόν.***

Π. χ. $(+5)+0=+5$, $0+(-8)=-8$.

III. Εἰς τοὺς ἀλγεβρικοὺς ἀριθμοὺς ἡ λέξις ***προσθέτω,*** δὲν ἐπιφέρει ἀναγκαστικῶς καὶ τὴν ἔννοιαν τῆς ***αὐξήσεως,*** ὅπως εἰς τὴν Ἀριθμητικήν.

Π. χ. Ὁ ἀριθμὸς 12 δὲν αὐξάνει, ἂν προσθέσωμεν εἰς αὐτὸν τὸν (-17)· πράγματι, κατὰ τὸν κανόνα τῆς προσθέσεως θὰ εἶναι

$$(12)+(-17)=-5.$$

Ἀσκήσεις. 13. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι ἀθροίσματα:

1. $(+5)+(+7)$	5. $(+15)+(-15)$
2. $(-8)+(-6)$	6. $(-17)+0$
3. $(+6)+(-4)$	7. $0+(+15)$
4. $(-9)+(+5)$	8. $13+(-14)$.

14. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι ἀθροίσματα:

1. $(-6{,}35)+(-5{,}45)$	3. $(+14{,}25)+(-9{,}46)$
2. $(+8{,}66)+(-9{,}30)$	4. $(+13{,}95)+(+0{,}64)$.

15. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι ἀθροίσματα:

1. $\left(+\frac{3}{4}\right)+\left(+\frac{1}{2}\right)$ 2. $\left(+7\frac{1}{2}\right)+\left(-3\frac{1}{4}\right)$

3. $\left(-\frac{5}{8}\right)+\left(-\frac{3}{4}\right)$ 6. $\left(-2\frac{1}{5}\right)+\left(-4\frac{1}{4}\right)$

4. $\left(+\frac{3}{5}\right)+\left(-\frac{5}{6}\right)$ 7. $\left(+5\frac{1}{3}\right)+\left(+7\frac{1}{2}\right)$

5. $\left(-\frac{7}{10}\right)+\left(+\frac{3}{4}\right)$ 8. $\left(-8\frac{1}{2}\right)+\left(+5\frac{2}{3}\right)$

16. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα $x=\alpha+\beta$.
1. Ἐὰν $\alpha=+3$ καὶ $\beta=-12$
2. » $\alpha=-9$ » $\beta=-64$
3. » $\alpha=0$ » $\beta=-17$
4. » $\alpha=+15$ » $\beta=24$.

22. Ἄθροισμα πολλῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν. ***Συγκεκριμένον παράδειγμα.*** Τὸ ταμεῖον ἑνὸς ἐμπόρου παρουσιάζει τὴν κάτωθι κίνησιν κατὰ τὴν διάρκειαν μιᾶς ἡμέρας:

Μίαν εἴσπραξιν 12000 δραχμῶν, μίαν πληρωμὴν 3000 δραχμῶν, μίαν πληρωμὴν 8000 δραχμῶν καὶ τέλος μίαν εἴσπραξιν 5000 δραχμῶν.

Νὰ εὑρεθῇ τὸ συνολικὸν ποσόν, τὸ ὁποῖον θὰ εὑρίσκεται εἰς τὸ ταμεῖον, εἰς τὸ τέλος τῆς ἡμέρας.

Παριστάνομεν μὲ θετικοὺς ἀριθμοὺς τὰς εἰσπράξεις καὶ μὲ ἀρνητικοὺς ἀριθμοὺς τὰς πληρωμάς.

Ἐν πρώτοις ὁ ἔμπορος εἰσπράττει $+12000$ δραχ.

Μετὰ τὴν πληρωμὴν τῶν 3000 δρχ., τὸ ταμεῖον του ἔχει

$$(+12000)+(-3000)=+9000 \text{ δρχ.}$$

Μετὰ τὴν δευτέραν πληρωμὴν τῶν 8000 δρχ. τὸ ταμεῖον ἔχει

$$(+9000)+(-8000)=+1000 \text{ δρχ.}$$

Μετὰ τὴν εἴσπραξιν τῶν 5000 δρχ. τὸ ταμεῖον ἔχει

$$(+1000)+(+5000)=+6000 \text{ δρχ.}$$

Τὸ ὁλικὸν ποσόν, τὸ ὁποῖον θὰ ἔχῃ τὸ ταμεῖον εἰς τὸ τέλος τῆς ἡμέρας, εἶναι $+6000$ δραχμαί· ὥστε θὰ εἶναι:

$$(+12000)+(-3000)+(-8000)+(+5000)=+6000.$$

Τὸ τελικὸν ἐξαγόμενον $+6000$ λέγεται ***ἄθροισμα*** τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν $+12000$, -3000, -8000 καὶ $+5000$.

Ἀπὸ τὸ παράδειγμα αὐτὸ καὶ ἀπὸ ἄλλα ὅμοια πρὸς αὐτὸ δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν τὸ ἄθροισμα πολλῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν ὡς ἑξῆς:

Ὁρισμός. Ἄθροισμα πολλῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν λέγεται ὁ ἀλγεβρικὸς ἀριθμός, τὸν ὁποῖον εὑρίσκομεν ὡς ἑξῆς: προσθέτομεν τοὺς δύο πρώτους ἀλγεβρικοὺς ἀριθμούς· εἰς τὸ ἄθροισμα αὐτῶν προσθέτομεν τὸν τρίτον ἀριθμόν· εἰς τὸ νέον ἄθροισμα προσθέτομεν τὸν τέταρτον ἀριθμὸν καὶ οὕτω καθεξῆς, ἕως ὅτου λάβωμεν ὅλους τοὺς ἀριθμούς.

Οἱ προσθετέοι ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοὶ λέγονται ***ὅροι*** τοῦ ἀθροίσματος.

Παράδειγμα. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα :

$$(-10) + (+7) + (+4) + (-9) + (-11)$$

Προσθέτομεν τοὺς δύο πρώτους ὅρους -10 καὶ $+7$ καὶ εὑρίσκομεν ἄθροισμα $(-10) + (+7) = -3$.

Εἰς τὸ ἄθροισμα αὐτὸ -3, προσθέτομεν τὸν τρίτον ὅρον $+4$ καὶ εὑρίσκομεν ἄθροισμα $(-3) + (+4) = +1$.

Εἰς τὸ νέον ἄθροισμα $+1$, προσθέτομεν τὸν τέταρτον ὅρον -9 καὶ εὑρίσκομεν ἄθροισμα $(+1) + (-9) = -8$.

Ε . τὸ νέον ἄθροισμα -8 προσθέτομεν τὸν τελευταῖον ὅρον -11 καὶ εὑρίσκομεν ἄθροισμα $(-8) + (-11) = -19$.

Τὸ ζητούμενον λοιπὸν ἄθροισμα εἶναι -19 καὶ δυνάμεθα νὰ γράψωμεν $(-10) + (+7) + (+4) + (-9) + (-11) = -19$.

Εἰς τὴν πρᾶξιν, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἀνωτέρω ἄθροισμα, λέγομεν συνήθως:

πλὴν 10 καὶ σὺν 7 ἴσον πλὴν 3· πλὴν 3 καὶ σὺν 4 ἴσον σὺν 1· σὺν 1 καὶ πλὴν 9 ἴσον πλὴν 8· πλὴν 8 καὶ πλὴν 11 ἴσον πλὴν 19.

Ἀσκήσεις 17. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι ἀθροίσματα :

1. $(+4) + (-5) + (+8) + (-7) + (-8) + (-9)$
2. $(+8) + (-12) + (+25) + (-70) + (+60) + (-10)$
3. $(-15) + (-20) + (-30) + (+40) + (+65) + (-12)$.
4. $\left(-\frac{5}{3}\right) + \left(+\frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{1}{6}\right) + (+5) + \left(-\frac{1}{4}\right)$
5. $\left(+\frac{7}{8}\right) + \left(-\frac{3}{5}\right) + \left(-\frac{3}{4}\right) + \left(+\frac{7}{10}\right) + \left(+\frac{1}{2}\right)$

18. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα $x = \alpha + \beta + \gamma + \delta$

1. Ἐὰν $\alpha = -2$, $\beta = +8$, $\gamma = -7$, $\gamma = -24$
2. » $\alpha = +2{,}4$, $\beta = -3{,}5$, $\gamma = -4{,}25$, $\delta = -5{,}60$
3. » $\alpha = -\frac{2}{3}$, $\beta = +\frac{4}{5}$, $\gamma = -\frac{1}{2}$, $\delta = +\frac{3}{4}$.

23. **Ἰδιότητες τῆς προσθέσεως.** Αἱ ἰδιότητες τῆς προσθέσεως, τὰς ὁποίας ἐγνωρίσαμεν εἰς τὴν Ἀριθμητικήν, ἰσχύουν καὶ διὰ τοὺς ἀλγεβρικοὺς ἀριθμούς.

24. Ἰδιότης Ι. ***Τὸ ἄθροισμα δύο ἢ περισσοτέρων ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν (ὅρων) δὲν μεταβάλλεται, ἂν ἀλλάξωμεν τὴν θέσιν των.***

Εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ τελικὸν ἐξαγόμενον, τὸ ὁποῖον εὑρήκαμεν εἰς τὸ συγκεκριμένον παράδειγμα τῆς § 22 εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς τάξεως κατὰ τὴν ὁποίαν ἔγιναν αἱ εἰσπράξεις καὶ αἱ πληρωμαὶ τοῦ ἐμπόρου· δηλ. θὰ εἶναι :

$$(+12000)+(-3000)+(-8000)+(+5000)=$$
$$=(-3000)+(+5000)+(+12000)+(-8000)$$

Γενικῶς θὰ εἶναι:

$$\boxed{(-\alpha)+(+\beta)+(-\gamma)+(-\delta)=(-\gamma)+(-\alpha)+(-\delta)+(+\beta)}$$

25. Ἰδιότης II. ***Τὸ ἄθροισμα πολλῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν δύο ἢ περισσοτέρους ὅρους μὲ τὸ ἄθροισμά των.***

Ἔστω τὸ ἄθροισμα $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon$· ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τοὺς ὅρους β καὶ δ μὲ τὸ ἄθροισμά των $(\beta+\delta)$ λέγω, ὅτι θὰ εἶναι

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon=\alpha+(\beta+\delta)+\gamma+\varepsilon.$$

Ἐὰν ὅλοι οἱ ὅροι τοῦ ἀθροίσματος $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon$ ἔχουν τὸ αὐτὸ σημεῖον, ἡ ἀπόδειξις γίνεται ὅπως εἰς τὴν ἀριθμητικήν· δηλ. εἶναι κατὰ σειράν·

$$\begin{aligned}\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon&=\beta+\delta+\alpha+\gamma+\varepsilon\\&=(\beta+\delta)+\alpha+\gamma+\varepsilon\\&=\alpha+(\beta+\delta)+\gamma+\varepsilon\end{aligned}$$

Ἐὰν οἱ ὅροι του ἔχουν διάφορα σημεῖα, δυνάμεθα νὰ δικαιολογήσωμεν τὴν ἀνωτέρω πρότασιν, ἂν λάβωμεν τὸ συγκεκριμένον παράδειγμα τῆς § 22.

Εἶναι φανερόν, ὅτι εἰς τὸ συγκεκριμένον αὐτὸ παράδειγμα θὰ ἠδυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν πολλὰς ἐμπορικὰς πράξεις μὲ μίαν καὶ νὰ προσθέσωμεν ἔπειτα τὰ διάφορα ἐξαγόμενα τῶν πράξεων αὐτῶν. Ἰδιαιτέρως θὰ ἠδυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν πρῶτον ὅλας τὰς εἰσπράξεις καὶ νὰ τὰς ἀντικαταστήσωμεν μὲ μίαν εἴσπραξιν καὶ ἔπειτα ὅλας τὰς πληρωμὰς καὶ νὰ τὰς ἀντικαταστήσωμεν μὲ μίαν. Γνωρίζοντες τότε τὰς συνολικὰς εἰσπράξεις καὶ τὰς συνολικὰς πληρωμάς, θὰ ἠδυνάμεθα νὰ εὕρωμεν εὐκόλως τὸ τελικὸν ἐξαγόμενον.

Π. χ. ὅλαι αἱ εἰσπράξεις εἶναι: $(+12000)+(+5000)=+17000$

ὅλαι αἱ πληρωμαὶ εἶναι: $(-3000)+(-8000)=-11000$

Τὸ τελικὸν ἐξαγόμενον θὰ εἶναι: $(+17000)+(-11000)=+6000$

Θὰ εἶναι λοιπόν:

$$(+12000)+(-3000)+(-8000)+(+5000)=$$
$$=(+17000)+(-11000)=+6000.$$

Ὥστε γενικῶς θὰ εἶναι:

$$\boxed{(-\alpha)+(+\beta)+(-\gamma)+(+\delta)=[(+\beta)+(+\delta)]+[(-\alpha)+(-\gamma)]}$$

26. Ἐφαρμογή. Πῶς εὑρίσκομεν τὸ ἄθροισμα πολλῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν; Στηριζόμενοι εἰς τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν εὐκολώτερον ἕνα ἄθροισμα ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν, ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τὸν κάτωθι πρακτικὸν κανόνα:

Κανών. ***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα πολλῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν προσθέτομεν χωριστὰ τοὺς θετικοὺς καὶ χωριστὰ τοὺς ἀρνητικοὺς ἀριθμοὺς καὶ προσθέτομεν ἔπειτα τὰ δύο ἐξαγόμενα.***

Παράδειγμα. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα:

$$(+3)+(-7)+(-10)+(+8)+(+12)$$

Τὸ ἄθροισμα τῶν θετικῶν ἀριθμῶν εἶναι:

$$(+3)+(+8)+(+12)=+23$$

Τ' ἄθροισμα τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν εἶναι:

$$(-7)+(-10)=-17$$

Τὸ ζητούμενον ἄθροισμα εἶναι: $(+23)+(-17)=+6$

Συνήθως αἱ πράξεις διατάσσονται ὡς ἑξῆς:

$$(+3)+(-7)+(-10)+(+8)+(+12)=(+23)+(-17)=+6$$

27. Πόρισμα ***Εἰς ἕνα ἄθροισμα δυνάμεθα νὰ παραλείψωμεν δύο ἀντιθέτους ὅρους, ἐὰν ὑπάρχουν τοιοῦτοι.***

Π. χ. εἰς τὸ ἄθροισμα $(-3)+(+8)+(-10)+(-8)$ δυνάμεθα νὰ παραλείψωμεν τοὺς ἀντιθέτους ἀριθμοὺς $+8$ καὶ -8, διότι τὸ ἄθροισμά των εἶναι μηδέν. Θὰ εἶναι λοιπόν:

$$(-3)+(+8)+(-10)+(-8)=(-3)+(-10)=-13.$$

28. Ἰδιότης III. ***Εἰς ἕνα ἄθροισμα ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν ἕνα ὅρον του δι' ἄλλων, οἱ ὁποῖοι νὰ ἔχουν αὐτὸν ὡς ἄθροισμα.***

Ἡ ἰδιότης αὐτὴ προκύπτει ἀπὸ τὴν ἰδιότητα II. Κατ' αὐτὴν θὰ εἶναι:

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon=\alpha+(\beta+\delta)+\gamma+\varepsilon$$

Ἐὰν ἐναλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν μελῶν τῆς ἰσότητος αὐτῆς, θὰ ἔχωμεν:

$$\boxed{\alpha+(\beta+\delta)+\gamma+\varepsilon=\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon}$$

29. Ἰδιότης IV. ***Διὰ νὰ προσθέσωμεν δύο ἢ περισσότερα ἀθροίσματα σχηματίζομεν ἕνα ἄθροισμα, τὸ ὁποῖον νὰ περιέχῃ ὅλους τοὺς ὅρους τῶν ἀθροισμάτων.***

Π. χ. ἐὰν εἶναι $\Sigma=\alpha+\beta+\gamma$, $\Sigma'=\alpha'+\beta'$, $\Sigma''=\alpha''+\beta''+\gamma''+\delta''$, θὰ εἶναι

$$\begin{aligned} S=\Sigma+\Sigma'+\Sigma'' &= (\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha'+\beta')+(\alpha''+\beta''+\gamma''+\delta'') \\ &= \alpha+\beta+\gamma+\alpha'+\beta'+\alpha''+\beta''+\gamma''+\delta'' \end{aligned}$$

Ἀσκήσεις. *19.* Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι ἀθροίσματα:

1. $[(+3)+(-7)]+[(-5)+(+8)+(-12)]$
2. $[(-9)+(+10)]+(-11)+[(-17)+(-11)+(+35)]$.
3. $[(+5)+(-7)]+[(-9)+(+14)]+[(-9)+(+18)+(-20)]$.

30. Ἁπλοποίησις τῆς γραφῆς ἑνὸς ἀθροίσματος. Διὰ νὰ παραστήσωμεν ἁπλούστερον ἕνα ἄθροισμα ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν ***παραδεχόμεθα:***

1ον. ***Νὰ παραλείπωμεν τὸ σημεῖον + τῆς προσθέσεως μεταξὺ τῶν ὅρων τοῦ ἀθροίσματος.***

2ον. ***Νὰ γράφωμεν ὅλους τοὺς ὅρους τοῦ ἀθροίσματος, χωρὶς τὰς παρενθέσεις των, τὸν ἕνα πλησίον τοῦ ἄλλου καὶ μὲ τὸ σημεῖον του.***

3ον. ***Νὰ παραλείπωμεν τὸ σημεῖον +, ἐὰν τοῦτο εὑρίσκεται ἔμπροσθεν τοῦ πρώτου ὅρου:***

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω, τὸ ἄθροισμα

$$(+9)+(-8)+(+15)+(-18)+(+5)$$

γράφεται ἁπλούστερον $9-8+15-18+5$.

Εἰς τὴν ἀριθμητικὴν τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα

$$9-8+15-18+5$$

θὰ ἡρμηνεύετο ὡς μία ***σειρὰ προσθέσεων*** καὶ ***ἀφαιρέσεων*** τῶν ἀριθμῶν 9, 8, 15, 18, 5 τῆς ἀριθμητικῆς. Εἰς τὴν ἄλγεβραν παριστάνει ἕνα ἄθροισμα, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς ὅρους τοὺς ἀλγεβρικοὺς ἀριθμοὺς $+9$, -8, $+15$, -18, $+5$ μεταξὺ τῶν ὁποίων ***ὑπονοεῖται, ὅτι ὑπάρχει*** τὸ σημεῖον τῆς προσθέσεως.

Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν ἕνα ἄθροισμα ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν, τοῦ ὁποίου ἔχει ἁπλοποιηθῆ ἡ γραφή, ***ὑπονοοῦμεν***, ὅτι μεταξὺ τῶν ὅρων του, ὑπάρχει πάντοτε τὸ σημεῖον + τῆς προσθέσεως καὶ ἐφαρμόζομεν ἔπειτα ἕνα ἀπὸ τοὺς δύο τρόπους, ποὺ ἐδείξαμεν εἰς τὰς § 22 καὶ 26.

Παράδειγμα. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα:

$$-4+9+8-12+5-10$$

1ος τρόπος. Λέγομεν: -4 *καὶ* $+9$ ἴσον $+5$· $+5$ *καὶ* $+8$ ἴσον $+13$· $+13$ *καὶ* -12 ἴσον $+1$· $+1$ *καὶ* $+5$ ἴσον $+6$· $+6$ *καὶ* -10 ἴσον -4. Θὰ εἶναι λοιπόν:

$$-4+9+8-12+5-10=-4$$

2ος τρόπος. Προσθέτομεν πρῶτον ὅλους τοὺς ὅρους, οἱ ὁποῖοι ἔχουν ἔμπροσθέν των τὸ σημεῖον +, δηλ. τοὺς $+9$, $+8$ καὶ $+5$ καὶ εὑρίσκομεν ἄθροισμα $+22$.

Ἔπειτα προσθέτομεν ὅλους τοὺς ὅρους, οἱ ὁποῖοι ἔχουν ἔμπροσθέν των τὸ σημεῖον —, δηλ. τοὺς -4, -12, -10 καὶ εὑρίσκομεν ἄθροισμα -26.

Ἔπειτα προσθέτομεν τὰ δύο ἐξαγόμενα $+22$ καὶ -26 καὶ εὑρίσκομεν τελικὸν ἐξαγόμενον -4· ὥστε θὰ εἶναι:

$$-4+9+8-12+5-10=22-26=-4$$

Ἀσκήσεις. 20. Νὰ ἁπλοποιηθῇ ἡ γραφὴ τῶν κάτωθι ἀθροισμάτων καὶ νὰ ὑπολογισθοῦν ἔπειτα τὰ ἀθροίσματα κατὰ δύο τρόπους:

1. $(+4)+(-9)+(-5)+(+8)+(+5)+(+4)+(-1)$
2. $(-2)+(-8)+(+6)+(-7)+(-4)+(+3)+(+9)$

3. $(+2,6) + (4,5) + (-8,6) + (-5) + (+9,75)$

4. $\left(-\frac{5}{2}\right)+\left(+\frac{4}{3}\right)+\left(-\frac{1}{6}\right)+\left(+8\right)+\left(-\frac{3}{4}\right)$

21. Ἔμπορος ἔχει εἰς τὸ Ταμεῖον του 75000 δρχ. ὀφείλει εἰς διαφόρους 4500 δρχ., 12450 δρχ., 5650 δρχ. Ἐξ ἄλλου τοῦ ὀφείλουν 850,75 δρ., 7950,25 δρχ. καὶ 9245,75 δρχ. 1ον. Νὰ ἐκφρασθῇ, μὲ ἕνα ἄθροισμα ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν, ἡ ἐμπορικὴ κατάστασίς του. 2ον. Νὰ ὑπολογισθῇ αὐτὸ τὸ ἄθροισμα.

22. Ἕνα ἀεροπλάνον ἀνῆλθεν εἰς ὕψος 2100 μ. ἔπειτα κατῆλθε κατὰ 1200 μ. ἀνῆλθεν πάλιν κατὰ 760 μ. καὶ κατῆλθε πάλιν κατὰ 600 μ. Νὰ ἐκφρασθοῦν μὲ ἀλγεβρικοὺς ἀριθμοὺς αἱ ἄνοδοι καὶ κάθοδοι τοῦ ἀεροπλάνου καὶ νὰ ὑπολογισθῇ τὸ τελικὸν ὕψος τοῦ ἀεροπλάνου.

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

31. **Ὁρισμός.** ***Διαφορὰ δύο ἀριθμῶν α καὶ β λέγεται ἕνας τρίτος ἀριθμὸς δ, ὁ ὁποῖος προστιθέμενος εἰς τὸν δεύτερον β δίδει τὸν πρῶτον α.***

Ἡ διαφορὰ δ τῶν ἀριθμῶν α καὶ β γράφεται $\alpha-\beta=\delta$
Ἡ διαφορὰ τῶν (+8) καὶ +10 » $(+8)-(+10)$
Ἡ διαφορὰ τῶν (−7) καὶ (−5) » $(-7)-(-5)$

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν αὐτὸν

ἐὰν εἶναι $\boxed{\alpha-\beta=\delta}$ πρέπει νὰ εἶναι $\boxed{\beta+\delta=\alpha}$

32. **Πῶς εὑρίσκομεν τὴν διαφορὰν δύο ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν.** Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν

$$(+8)-(-12)$$

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ x τὴν διαφορὰν αὐτήν, δηλ. ἐὰν θέσωμεν

$$(+8)-(-12)=x$$

τότε, κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς ἀφαιρέσεως, θὰ εἶναι

$$(-12)+x=(+8) \qquad (1)$$

Προσθέτομεν καὶ εἰς τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος (1) τὸν (+12) καὶ ἔχομεν $(-12)+x+(+12)=(+8)+(+12)$

Ἐὰν παραλείψωμεν (§ 27) τοὺς ἀντιθέτους ἀριθμοὺς −12 καὶ +12, ἡ προηγουμένη ἰσότης γράφεται

$$x=(+8)+(+12)$$

Εὑρήκαμεν λοιπόν, ὅτι

$$(+8)-(-12)=x=(+8)+(+12)$$

ἢ ἁπλούστερον

$$(+8)-(-12)=(+8)+(+12)$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν τῶν ἀριθμῶν

$+8$ καὶ -12 ***προσθέτομεν*** εἰς τὸν μειωτέον $+8$ τὸν ***ἀντίθετον*** τοῦ ἀφαιρετέου -12.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι

$$(-9)-(+6)=(-9)+(-6)$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἀκόλουθον κανόνα:

Κανών. ***Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ ἕνα ἀλγεβρικὸν ἀριθμὸν ἕνα ἄλλον, προσθέτομεν εἰς τὸν πρῶτον*** (μειωτέον) ***τὸν ἀντίθετον τοῦ δευτέρου*** (ἀφαιρετέον).

Κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα θὰ εἶναι:

$$(-6)-(-20)=(-6)+(+20)=+14$$
$$(-8)-(+15)=(-8)+(-15)=-23$$
$$(+5)-(-7)=(+5)+(+7)=+12$$
$$(+24)-(+9)=(+24)+(-9)=+15$$

Ἀσκήσεις. ***23.*** Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ κάτωθι διαφοραί:

1. $(+5)-(+8)$
2. $(-7)-(-10)$
3. $(+9)-(-15)$
4. $(-20)-(+18)$
5. $(+3{,}50)-(-4{,}25)$
6. $(-7{,}25)-(-0{,}75)$
7. $(-2{,}40)-(+3{,}60)$
8. $(+3{,}85)-(-5{,}50)$

24. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ κάτωθι διαφοραί:

1. $\left(-\frac{3}{4}\right)-\left(-\frac{7}{8}\right)$
2. $\left(+\frac{3}{2}\right)-\left(+\frac{1}{5}\right)$
3. $\left(-\frac{7}{8}\right)-\left(+\frac{3}{4}\right)$
4. $\left(+\frac{2}{5}\right)-\left(-\frac{1}{3}\right)$
5. $\left(-2\frac{1}{5}\right)-\left(-3\frac{1}{4}\right)$
6. $\left(-3\frac{2}{5}\right)-\left(+7\frac{1}{2}\right)$
7. $\left(-9\frac{3}{4}\right)-\left(-6\frac{1}{5}\right)$
8. $\left(-10\frac{1}{2}\right)-\left(+5\frac{1}{8}\right)$

25. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διαφορὰ $x=\alpha-\beta$:

1. Ἐὰν $\alpha=+8$, $\beta=+3$
2. » $\alpha=-9$, $\beta=-8$
3. » $\alpha=0$, $\beta=+5$
4. » $\alpha=-18$, $\beta=0$

33. **Ἐκτέλεσις οἱασδήποτε ἀφαιρέσεως.** Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ ***ἀφαίρεσις*** ἑνὸς ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ ἀπὸ ἄλλου ἀνάγεται εἰς τὴν ***πρόσθεσιν*** τοῦ ἀντιθέτου τοῦ ἀφαιρετέου εἰς τὸν μειωτέον. Ἐπειδὴ δὲ ἡ πρόσθεσις δύο ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν εἶναι πάντοτε μία πρᾶξις δυνατή, συνάγομεν, ὅτι καὶ ἡ ἀφαίρεσις δύο ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν εἶναι μία πρᾶξις πάντοτε δυνατή· δηλ. δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν οἱανδήποτε ἀφαίρεσιν καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ἀκόμη, ποὺ ὁ ἀφαιρετέος εἶναι μεγαλείτερος τοῦ μειωτέου.

Πράγματι· ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν 5—28.
Ἡ διαφορὰ αὐτὴ γράφεται $(+5)-(+28)$.
Κατὰ τὸν κανόνα τῆς ἀφαιρέσεως θὰ εἶναι

$$(+5)-(+28)=(+5)+(-28)=-23$$

Ὥστε εἶναι $5-28=-23$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι $1-100=-99$, $0-36=-36$

34. Παρατηρήσεις. I. Εἰς τὴν Ἄλγεβραν ἡ ἀφαίρεσις δὲν συνεπάγεται ἀναγκαστικῶς τὴν ἔννοιαν τῆς ἐλαττώσεως.

Πράγματι, ἐὰν θέλωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ ἕνα ἀριθμὸν τὸν —20, πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν ἀριθμὸν αὐτὸν τὸν +20, δηλ. αὐξάνομεν τὸν ἀριθμόν.

II. Ὁ ἀντίθετος τοῦ β εἶναι ὁ —β. Συνεπῶς

Ἐὰν $\beta=+8$ ὁ $-\beta=-(+8)=-8$

Ἐὰν $\beta=-8$ ὁ $-\beta=-(-8)=+8$

Παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς —β δύναται νὰ ἔχῃ μίαν τιμὴν θετικὴν ἢ ἀρνητικήν. Διὰ τοῦτο δὲν πρέπει νὰ θεωροῦμεν τοὺς ἀριθμοὺς $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$,... ὡς ἀρνητικοὺς πάντοτε.

Ἀσκήσεις. *26.* Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι ἀφαιρέσεις:
1. 8—24, 2. 1—37, 3. 54—59, 4. 0—67.

35. Ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα. ***Μία σειρὰ διαδοχικῶν προσθέσεων καὶ ἀφαιρέσεων ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν λέγεται ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα.***

Π. χ. $(+3)-(+8)+(-9)+(+12)-(-6)$

εἶναι ἕνα ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα.

Ἕνα ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα δύναται πάντοτε νὰ ἀναχθῇ εἰς ἕνα ***ἄθροισμα ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν.***

Πράγματι· ἔστω τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα

$$(+15)-(+8)+(+20)-(-9)+(-12) \quad (1)$$

Κατὰ τὸν κανόνα τῆς § 32 διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ +8 πρέπει νὰ προσθέσωμεν τὸ —8 καὶ διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ —9 πρέπει νὰ προσθέσωμεν τὸ +9. Τὸ ἀνωτέρω λοιπὸν ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα (1) γράφεται $(+15)+(-8)+(+20)+(+9)+(-12)$ (2)
δηλ. τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα (1) εἶναι ἴσον μὲ ἕνα ἄθροισμα ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν. Τὸ ἄθροισμα (2) δύναται νὰ γραφῇ ἁπλούστερον (§ 30)

$$15-8+20+9-12 \quad (3)$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα

$$(-4)-(+5)-(-8)+(+9)-(+10)$$

γράφεται $(-4)+(-5)+(+8)+(+9)+(-10)$

ἢ ἁπλούστερον $-4-5+8+9-10$

36. **Πρακτικὴ παρατήρησις.** Ἐὰν συγκρίνωμεν τὰ ἀλγεβρικὰ ἀθροίσματα (1) καὶ (3) διαπιστώνομεν, ὅτι ἡ ἁπλοποίησις τῆς γραφῆς ἑνὸς ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος στηρίζεται εἰς τὸν κατωτέρω πρακτικὸν κανόνα :

Εἰς ἕνα ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα, δύο διαδοχικὰ ὅμοια σημεῖα ἀντικαθίστανται μὲ τὸ σημεῖον + καὶ δύο διαδοχικὰ διάφορα σημεῖα ἀντικαθίστανται μὲ τὸ σημεῖον —.

Κατὰ τὸν κανόνα αὐτὸν θὰ εἶναι

$$-(-6)=+6\cdot \qquad -(+8)=-8\cdot$$
$$+(+6)=+6\cdot \qquad +(-8)=-8\cdot$$

καὶ γενικῶς $\alpha+(-\beta)-(-\gamma)-(+\delta)=\alpha-\beta+\gamma-\delta$

37. **Πῶς ὑπολογίζομεν ἕνα ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα.** Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν ἕνα ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα ἐργαζόμεθα ὅπως εἰς τὴν § 22.

Παράδειγμα. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα :

$$-8+12+10-20+4-9$$

Λέγομεν -8 *καὶ* $+12$ ἴσον $+4$· $+4$ *καὶ* $+10$ ἴσον $+14$· $+14$ *καὶ* -20 ἴσον -6· -6 *καὶ* $+4$ ἴσον -2· -2 *καὶ* -9 ἴσον -11. Ὥστε θὰ εἶναι

$$-8+12+10-20+4-9=-11$$

Ἀσκήσεις. 27. Τὰ κάτωθι ἀλγεβρικὰ ἀθροίσματα : 1ον νὰ μετασχηματισθοῦν εἰς ἀθροίσματα ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν· 2ον νὰ ἁπλοποιηθῇ ἡ γραφή των καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμή των.

1. $(+15)+(-4)-(+8)-(-7)+(-10)-(-21)$
2. $(-13)-(-8)+(-2)-(-8)-(+6)-(-11)$
3. $(-15)+(-9)-(+8)-(-4)-(+11)+(+25)$

28. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος $\alpha-\beta+\gamma-\delta$:

1ον Ἐὰν $\alpha=+15$, $\beta=+10$, $\gamma=-18$, $\delta=+14$
2ον » $\alpha=+40$, $\beta=-25$, $\gamma=+20$, $\delta=-11$
3ον » $\alpha=-48$, $\beta=-35$, $\gamma=+35$, $\delta=-18$

38. **Ἰδιότητες τοῦ ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος.** Ἐπειδὴ ἕνα ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα εἶναι ἄθροισμα ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν ἕπεται, ὅτι αἱ ἰδιότητες τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν, τὰς ὁποίας ἐγνωρίσαμεν εἰς τὰς § 23—29 ἰσχύουν καὶ διὰ τὰ ἀλγεβρικὰ ἀθροίσματα. Π. χ. θὰ εἶναι :

I. $\alpha-\beta+\gamma-\delta-\varepsilon=-\beta-\delta+\alpha-\varepsilon+\gamma$
II. $\alpha-\beta-\gamma+\delta-\varepsilon=(\alpha+\delta)+(-\beta-\gamma-\varepsilon)$
III. $\alpha+(-\beta+\gamma)+\delta-\varepsilon=\alpha-\beta+\gamma+\delta-\varepsilon$

39. **Πῶς προσθέτομεν ἕνα ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα εἰς ἀριθμόν ;** ***Συγκεκρ. παράδειγμα :*** Ἕνας ἔμπορος ἔχει εἰς τὸ ταμεῖόν του

5000 δρχ. Αἱ ἐμπορικαί του πράξεις κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς ἡμέρας ἔχουν σημειωθῇ μὲ τὸ ἀκόλουθον ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα:

$$4500-800+2000-3600=+2100$$

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν πραγματικὴν κατάστασιν τοῦ ταμείου, δυνάμεθα νὰ ἐργασθῶμεν κατὰ δύο τρόπους:

1ον. Νὰ προσθέσωμεν εἰς τὰς 5000 δρχ., τὰς ὁποίας εἶχε τὸ τὸ ταμεῖον του, τὸ τελικὸν ἐξαγόμενον τῶν ἐμπορικῶν πράξεων τῆς ἡμέρας, δηλ. τὰς +2100 δρχ., ὁπότε τὸ ταμεῖον θὰ ἔχῃ

$$5000+2100=7100 \text{ δρχ.}$$

δηλ. θὰ εἶναι

$$5000+(4500-8000+2000-3600)=5000+2100=7100$$

2ον. Δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν κατάστασιν τοῦ ταμείου του. μεθ' ἑκάστην πρᾶξιν, ὁπότε τὸ ταμεῖον θὰ ἔχῃ

$$5000+4500-800+2000-3600=7100 \text{ δρχ.}$$

Τὸ ἐξαγόμενον εἶναι προφανῶς τὸ αὐτό. Θὰ εἶναι λοιπὸν

$$5000+(4500-800+2000-3600)=$$
$$=5000+4500-800+2000-3600=7100.$$

Γενικῶς, ἐὰν Α εἶναι ἕνας ἀλγεβρικὸς ἀριθμὸς ἢ ἕνα ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα, θὰ ἔχωμεν :

$$\boxed{A+(\alpha-\beta+\gamma-\delta)=A+\alpha-\beta+\gamma-\delta}$$

Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι :

Κανών. ***Διὰ νὰ προσθέσωμεν ἕνα ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα εἰς ἕνα ἀριθμόν, ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν δεξιὰ τοῦ ἀριθμοῦ ὅλους τοὺς ὅρους τοῦ ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος μὲ τὰ σημεῖα των καὶ νὰ εὕρωμεν ἔπειτα τὸ ἐξαγόμενον τοῦ ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος.***

Κατὰ τὸν κανόνα αὐτὸν θὰ εἶναι:

$$160+(-8+40-25)=160-8+40-25=167$$
$$200+(32-45+10)=200+32-45+10=197$$
$$(5+12-8)+(-3+7-1)=5+12-8-3+7-1=12$$

40. **Παρατηρήσεις** Ἀπὸ τὴν ἰσότητα

$$A+(\alpha-\beta+\gamma-\delta)=A+\alpha-\beta+\gamma-\delta$$

συνάγομεν, ὅτι:

I. ***Ἐὰν ἔμπροσθεν μιᾶς παρενθέσεως, ἡ ὁποία περικλείει ἕνα ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα, ὑπάρχῃ τὸ σημεῖον +, δυνάμεθα νὰ παραλείψωμεν τὴν παρένθεσιν.***

Π. χ. εἶναι: $-9+(-5+7)-8=-9-5+7-8$

II. ***Ὁσοιδήποτε ὅροι ἑνὸς ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος δύνανται***

***νὰ τεθοῦν ἐντὸς παρενθέσεως, ἐὰν ἔμπροσθεν αὐτῆς θέσωμεν τὸ σημεῖον* $+$.**

Π. χ. $-5+8-12+3-9 = -5+8+(-12+3-9)$

$$\alpha-\beta+\gamma+\delta-\varepsilon = \alpha-\beta+(\gamma+\delta-\varepsilon)$$

Ασκήσεις. 29. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις:

1. $100+(-4+25-37)$
2. $-5+(7-38+12)$
3. $(-4+12)+(-7+3-6)$
4. $(2-4+8)+(-9-7+10)$

30. Ἕνας ἔμπορος ἔχει 12000 δρχ. εἰς τὸ ταμεῖον του. Κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς ἡμέρας ἔκαμε τὰς κάτωθι διαδοχικὰς εἰσπράξεις καὶ πληρωμάς: $+4300$ δρχ., -500 δρχ., $+1580$ δρχ., $+4200$ δρχ., -2450 δρχ., $+4750$ δρχ. Τί ποσὸν ἔχει τὸ ταμεῖον του εἰς τὸ τέλος τῆς ἡμέρας;

41. Ἀντίθετα ἀθροίσματα. Θεώρημα. ***Ἐὰν εἰς ἕνα ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα ἀντικαταστήσωμεν ὅλους τοὺς ὅρους του μὲ τοὺς ἀντιθέτους ὅρους των, τὸ νέον ἄθροισμα εἶναι ἀντίθετον τοῦ πρώτου.***

Ἔστω τὸ ἄθροισμα $\Sigma=\alpha-\beta+\gamma-\delta$. Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα $\Sigma'=-\alpha+\beta-\gamma+\delta$ εἶναι ἀντίθετον τοῦ πρώτου ἀθροίσματος.

Ἐὰν τὰ ἀθροίσματα Σ καὶ Σ' εἶναι ἀντίθετα πρέπει, κατὰ τὴν (§ 21 I) τὸ ἄθροισμά των νὰ εἶναι ἴσον μὲ μηδέν.

Πράγματι τὸ ἄθροισμά των εἶναι

$$\begin{aligned}\Sigma+\Sigma' &= (\alpha-\beta+\gamma-\delta)+(-\alpha+\beta-\gamma+\delta)\\ &= \alpha-\beta+\gamma-\delta-\alpha+\beta-\gamma+\delta\\ &= (\alpha-\alpha)+(\beta-\beta)+(\gamma-\gamma)+(\delta-\delta)\\ &= 0 \quad + \quad 0 \quad + \quad 0 \quad + 0 = 0\end{aligned}$$

Τὰ ἀθροίσματα λοιπὸν Σ καὶ Σ' εἶναι ἀντίθετα, διότι ἔχουν ἄθροισμα μηδέν· ἑπομένως δυνάμεθα νὰ γράψωμεν

$$\alpha-\beta+\gamma-\delta = -(-\alpha+\beta-\gamma+\delta)$$

Π. χ. Τὸ ἀντίθετον τοῦ ἀθροίσματος $-4+8-12-9$ εἶναι τὸ $4-8+12+9$

Ἀσκήσεις. 31. Ποῖα εἶναι τὰ ἀντίθετα τῶν κάτωθι ἀθροισμάτων:

1. $8-7+12-6$
2. $-9-6+25-14$
3. $-(5+9-17+6)$
4. $+(17-24+5-2)$

42. Πῶς ἀφαιροῦμεν ἕνα ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα ἀπὸ ἀριθμόν; Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα $-8+6+7-15$ ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν 140, δηλ. ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν $140-(-8+6+7-15)$ (1)

Ἡ διαφορὰ αὐτὴ δύναται νὰ εὑρεθῇ κατὰ δύο τρόπους:

1ον. Νὰ ὑπολογίσωμεν πρῶτον τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα $-8+6+7-15$, ὁπότε θὰ ἔχωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν δύο ἀλγεβρικοὺς ἀριθμούς.

Πράγματι· ἐπειδὴ $-8+6+7-15=-10$ θὰ ἔχωμεν

$$140-(-8+6+7-15)=140-(-10)=140+10=150$$

2ον. Κατὰ τὸν κανόνα τῆς ἀφαιρέσεως δύο ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν πρέπει εἰς τὸν μειωτέον 140 νὰ προσθέσωμεν τὸν ἀντίθετον τοῦ ἀφαιρετέου $(-8+6+7-15)$ Ἐπειδὴ ὁ ἀντίθετος τοῦ $-8+6+7-15$ εἶναι ὁ $8-6-7+15$ θὰ ἔχωμεν

$$140-(-8+6+7-15)=140+(8-6-7+15)$$
$$=140+8-6-7+15=150$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι εὑρήκαμεν τὴν αὐτὴν διαφορὰν καὶ κατὰ τοὺς δύο τρόπους.

Γενικῶς : Ἐὰν Α παριστάνῃ ἕνα ἀλγεβρικὸν ἀριθμὸν ἢ ἕνα ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα, θὰ ἔχωμεν

$$\boxed{A-(\alpha-\beta+\gamma-\delta)=A-\alpha+\beta-\gamma+\delta}$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν κάτωθι κανόνα:

Κανών. ***Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἕνα ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα ἀπὸ ἕνα ἀριθμὸν (ἢ ἀπὸ ἄλλο ἄθροισμα) γράφομεν δεξιὰ τοῦ ἀριθμοῦ ὅλους τοὺς ὅρους τοῦ ἀθροίσματος μὲ ἠλλαγμένα τὰ σημεῖα των καὶ ἔπειτα ὑπολογίζομεν τὸ ἐξαγόμενον.***

Κατὰ τὸν κανόνα αὐτὸν θὰ εἶναι :

$$8-(12-4+9-15)=8-12+4-9+15=+6$$
$$-20-(-7+5-10+2)=-20+7-5+10-2=-10$$
$$(-3+4-5)-(2+8-9)=-3+4-5-2-8+9=-5.$$

43. **Παρατήρησις.** Ἀπὸ τὴν ἰσότητα (§ 42)

$$A-(\alpha-\beta+\gamma-\delta)=A-\alpha+\beta-\gamma+\delta$$

συνάγομεν, ὅτι :

I. ***Ἐὰν ἔμπροσθεν μιᾶς παρενθέσεως, ἡ ὁποία περικλείει ἕνα ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα, ὑπάρχῃ τὸ σημεῖον — δυνάμεθα νὰ παραλείψωμεν τὴν παρένθεσιν καὶ τὸ —, ἀρκεῖ νὰ ἀλλάξωμεν τὰ σημεῖα ὅλων τῶν ὅρων, οἱ ὁποῖοι εὑρίσκονται ἐντὸς τῆς παρενθέσεως.***

Π. χ. $-8+5-(-9+4-3)=-8+5+9-4+3$

$-\alpha+\beta-(\gamma-\delta+\varepsilon)=-\alpha+\beta-\gamma+\delta-\varepsilon$

II. ***Δυνάμεθα νὰ θέσωμεν ἐντὸς παρενθέσεως, ἔμπροσθεν τῆς ὁποίας ὑπάρχει τὸ σημεῖον —, ὁσουσδήποτε ὅρους ἑνὸς ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος, ἀρκεῖ νὰ ἀλλάξωμεν τὰ σημεῖα τῶν ὅρων, οἱ ὁποῖοι θὰ τεθοῦν ἐντὸς τῆς παρενθέσεως.***

Π. χ. $3-5-7+4-1=3-(+5+7-4+1)$

$\alpha+\beta-\gamma-\delta+\varepsilon=\alpha+\beta-(+\gamma+\delta-\varepsilon)$

Ἀσκήσεις. *32.* Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις :

1. $15+(-5+17)$
2. $20-(+8-15)$
3. $14-(-9+4)$
4. $-8-(-15+12)$
5. $-10-(-7+15)$
6. $-1-(-9+6)$

33. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ $\alpha-(\beta-\gamma)$.

1ον Ἐὰν $\alpha=-5,\quad \beta=4,\quad \gamma=8$

2ον » $\alpha=-10,\quad \beta=-7,\quad \gamma=6$

3ον » $\alpha=0,\quad \beta=-9,\quad \gamma=-8$

34. Δίδονται τὰ κάτωθι ἀλγεβρικὰ ἀθροίσματα.

$$A=-4+8-3+2$$
$$B=-6+4+12-5$$
$$\Gamma=-4+3-1-27+7$$

Νὰ ὑπολογισθοῦν : 1. $A+B+\Gamma$, 2. $A-B+\Gamma$, 3. $A-(B+\Gamma)$

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

44. Τί ὀνομάζομεν γινόμενον δύο ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν:

Ὁρισμός. ***Θὰ ὀνομάσωμεν γινόμενον δύο ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν α καὶ β ἕνα τρίτον ἀλγεβρικὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος γίνεται ἀπὸ τὸν α (πολλαπλασιαστέον) ὅπως γίνεται ὁ β (πολλαπλασιαστὴς) ἀπὸ τὴν θετικὴν μονάδα +1 καὶ ἀπὸ τὰ μέρη της.***

Διακρίνομεν τὰς κάτωθι περιπτώσεις :

I. ***Οἱ α καὶ β εἶναι θετικοὶ ἀριθμοί.*** Ἔστωσαν $\alpha=+8$ καὶ $\beta=+3$. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον $(+8).(+3)$.

Ἐπειδὴ ὁ πολλαπλασιαστὴς $+3$ γίνεται ἀπὸ τὴν θετικὴν μονάδα $+1$ διὰ τῆς ἐπαναλήψεως αὐτῆς 3 φοράς, τὸ ζητούμενον γινόμενον $(+8)\cdot(+3)$ θὰ εὑρεθῇ, ἐὰν ἐπαναλάβωμεν τὸν πολλαπλασιαστέον $+8$ τρεῖς φοράς. Θὰ εἶναι λοιπὸν

$$(+8)\cdot(+3)=(+8)+(+8)+(+8)=+24$$

II. ***Ὁ α εἶναι ἀρνητικὸς καὶ ὁ β θετικός.*** Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον $(-8)\cdot(+3)$.

Ὅπως κατὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν, πρέπει νὰ ἐπαναλάβωμεν 3 φορὰς τὸν πολλαπλασιαστέον -8. Δηλ. θὰ εἶναι

$$(-8)\cdot(+3)=(-8)+(-8)+(-8)=-24$$

III. ***Ὁ α εἶναι θετικὸς καὶ ὁ β ἀρνητικός.*** Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον $(+8)\cdot(-3)$.

Ὁ πολλαπλασιαστὴς -3 δύναται νὰ γίνῃ ἀπὸ τὴν θετικὴν μονάδα $+1$, ἂν ἀλλάξωμεν πρῶτον τὸ σημεῖον της, δηλ. ἐὰν λάβωμεν τὴν ἀντίθετόν της -1 καὶ ἐπαναλάβωμεν αὐτὴν 3 φοράς.

Τὸ γινόμενον λοιπὸν $(+8)\cdot(-3)$ θὰ εὑρεθῇ, ἐὰν ἐπαναλάβωμεν τρεῖς φορὰς τὸν πολλαπλασιαστέον $+8$ μὲ ἀλλαγμένον τὸ σημεῖον του, δηλ. θὰ εἶναι

$$(+8)(-3)=(-8)+(-8)+(-8)=-24$$

IV. ***Οἱ α καὶ β εἶναι ἀρνητικοί.*** Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον $(-8)\cdot(-3)$.

Ὅπως κατὰ τὴν προηγουμένην περίπτωσιν, πρέπει νὰ ἐπαναλάβωμεν 3 φορὰς τὸν πολλαπλασιαστέον -8 μὲ ἀλλαγμένον τὸ σημεῖον του. Δηλ. θὰ εἶναι

$$(-8)(-3)=(+8)+(+8)+(+8)=+24$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν κάτωθι ὁρισμόν:

Γινόμενον δύο ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν λέγεται ἕνας τρίτος ἀλγεβρικὸς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἔχει ὡς ἀπόλυτον τιμὴν τὸ ἀριθμητικὸν γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν δύο δοθέντων ἀριθμῶν καὶ ὡς σημεῖον τὸ σημεῖον +, ἐὰν οἱ δύο ἀριθμοὶ εἶναι ὁμόσημοι, ἢ τὸ σημεῖον —, ἐὰν οἱ δύο ἀριθμοὶ εἶναι ἑτερόσημοι.

Οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ λέγονται ***παράγοντες τοῦ γινομένου.***

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν αὐτὸν θὰ εἶναι

$$(+9)\cdot(+5)=+45, \quad (-10)(+5)=-50$$
$$(-7)\cdot(-6)=+42, \quad (+12)(-3)=-36$$

45. Σημεῖον τοῦ γινομένου δύο ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ σημεῖον τοῦ γινομένου δύο ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν, δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸν κάτωθι ***κανόνα τῶν σημείων,*** τὸν ὁποῖον συνάγομεν ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τοῦ γινομένου δύο ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν:

$$\textbf{Κανών:}\left\{\begin{array}{l} + \text{ ἐπὶ } + \text{ δίδει } + \\ + \text{ ἐπὶ } - \quad » \quad - \\ - \text{ ἐπὶ } + \quad » \quad - \\ - \text{ ἐπὶ } - \quad » \quad + \end{array}\right.$$

Ἀσκήσεις. Α΄ Ὁμάς. ***35.*** Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι γινόμενα

1. $(+5)\cdot(+7)$ 4. $(-3{,}5)\cdot(-0{,}6)$
2. $(-8)\cdot(+9)$ 5. $(+1{,}4):(+2{,}3)$
3. $(+10)\cdot(-4)$ 6. $(-0{,}7)\cdot(+0{,}8)$

36. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι γινόμενα:

1. $\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)$ 2. $(-9)\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)$

3. $\left(+\frac{1}{5}\right)\cdot\left(+\frac{2}{3}\right)$ 4. $\left(+9\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)$

Β' Ὁμάς. 37. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις:

1. $(+2)\cdot(-3)-(+5)\cdot(-8)+(-9)\cdot(-6)-3\cdot(-10)$
2. $(+5)\cdot(-2)+(-9)\cdot(-1)-(+8)\cdot(-3)-(-7)\cdot 4$
3. $\left(-\frac{1}{2}\right)\left(+\frac{2}{3}\right)-\left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{6}\right)\left(+\frac{5}{8}\right)$

46. Παρατηρήσεις. I. ***Ἐὰν ἀλλάξωμεν τὸ σημεῖον ἑνὸς ἐκ τῶν παραγόντων, ἀλλάσσει τὸ σημεῖον τοῦ γινομένου.***

Π. χ. $\alpha\cdot(-\beta)=-\alpha\beta$ καὶ $(-\alpha)\cdot(-\beta)=+\alpha\beta$

II. ***Ὅταν ὁ ἕνας ἀπὸ τοὺς παράγοντας εἶναι μηδέν, τὸ γινόμενον εἶναι μηδέν.***

Π. χ. $(+3)\cdot 0=0$ καὶ $0\cdot(-8)=0$

III. ***Ὅταν τὸ γινόμενον δύο παραγόντων εἶναι ἴσον μὲ μηδέν, ὁ ἕνας τοὐλάχιστον τῶν παραγόντων εἶναι ἴσος μὲ μηδέν.***

Π. χ. ἂν εἶναι $\alpha\beta=0$ πρέπει νὰ εἶναι, εἴτε $\alpha=0$, εἴτε $\beta=0$.

47. Τί ὀνομάζομεν γινόμενον πολλῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν;

Γινόμενον πολλῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν λέγεται ὁ ἀλγεβρικὸς ἀριθμός, τὸν ὁποῖον εὑρίσκομεν ὡς ἑξῆς: Πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο πρώτους παράγοντας· τὸ εὑρεθὲν ἐξαγόμενον πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν τρίτον παράγοντα· τὸ νέον ἐξαγόμενον πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν τέταρτον παράγοντα καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρις ὅτου λάβωμεν ὅλους τοὺς παράγοντας.

Παράδειγμα. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ γινόμενον

$$(+5)\cdot(-3)\cdot(-6)\cdot(+8)\cdot(-2)$$

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ γινομένου πολλῶν παραγόντων ἔχομεν διαδοχικῶς $(+5)\cdot(-3)=-15$, $(-15)\cdot(-6)=+90$,
$(+90)\cdot(+8)=+720$, $(+720)\cdot(-2)=-1440$

Θὰ εἶναι λοιπὸν

$$(+5)\cdot(-3)\cdot(-6)\cdot(+8)\cdot(-2)=-1440$$

Κατὰ τὸν ἀνωτέρω ὁρισμόν, ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ γινομένου πολλῶν παραγόντων εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν παραγόντων αὐτῶν.

Ἐὰν ἕνας ἀπὸ τοὺς παράγοντας εἶναι μηδέν, τὸ γινόμενον εἶναι προφανῶς ἴσον μὲ τὸ μηδέν.

Π. χ. $(-4)\cdot(+10)\cdot(-9)\cdot 0\cdot(-18)=0$

48. Σημεῖον τοῦ γινομένου πολλῶν ἀριθμῶν. Τὸ σημεῖον τοῦ γινομένου πολλῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ *πλῆθος τῶν ἀρνητικῶν παραγόντων.*

Τὸ σημεῖον εἶναι $+$, ἐὰν ὅλοι οἱ παράγοντες εἶναι θετικοὶ ἢ ἐὰν τὸ πλῆθος τῶν ἀρνητικῶν παραγόντων εἶναι ἄρτιον.

Τὸ σημεῖον εἶναι $-$, ἐὰν τὸ πλῆθος τῶν ἀρνητικῶν παραγόντων εἶναι περιττόν.

Π. χ. $(+3)\cdot(+1)\cdot(+8)\cdot(+5)=+120$ (ὅλοι οἱ παράγοντες θετικοί)

$(+2)\cdot(-4)\cdot(-1)\cdot(+6)=+48$ (*δύο* ἀρνητικοὶ παράγοντες)

$(+10)\cdot(-5)\cdot(-6)\cdot(-1)=-300$ (*τρεῖς* ἀρνητικοὶ παράγοντες)

Ἀσκήσεις. *38.* Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι γινόμενα:

1. $(+3)\cdot(-5)\cdot(-6)\cdot(+4)\cdot(-7)$
2. $(-6)\cdot(-2)\cdot(-5)\cdot(+1)\cdot(-10)$
3. $(+5)\cdot(-4)\cdot(-3)\cdot(-1)\cdot(+7)$
4. $(-2)\cdot(+5)\cdot(-9)\cdot(-10)\cdot(-3)\cdot(-1)$
5. $\left(-3\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-1\right)$

39. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις:

1. $(+2)(-3)(-5)-(+1)(-7)(+2)+(-2)(-4)(+6)$
2. $(-5)(-1)(+10)-(+2)(-3)(-1)(+5)$
3. $\left(-\frac{1}{3}\right)\left(+\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{2}{3}\right)\left(+\frac{5}{6}\right)\left(-\frac{4}{5}\right)$

49. **Ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.** Αἱ ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, τὰς ὁποίας ἐγνωρίσαμεν εἰς τὴν Ἀριθμητικήν, ἰσχύουν καὶ διὰ τοὺς ἀλγεβρικοὺς ἀριθμούς.

50. **Ι. Ἰδιότης τῆς ἀντιμεταθέσεως.** ***Τὸ γινόμενον δύο ἢ περισσοτέρων ἀλγεβρικῶν παραγόντων δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν μεταβληθῇ ἡ τάξις των.***

Πράγματι. 1ον. ***Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ γινομένου δὲν μεταβάλεται,*** κατὰ γνωστὸν θεώρημα τῆς Ἀριθμητικῆς, (τὴν ἰδιότητα τῆς ἀντιμεταθέσεως).

2ον. ***Τὸ σημεῖον τοῦ γινομένου δὲν μεταβάλλεται,*** διότι τὸ σημεῖον του ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ πλῆθος τῶν ἀρνητικῶν παραγόντων καὶ ὄχι ἀπὸ τὴν θέσιν των.

Θὰ εἶναι λοιπὸν γενικῶς:

$$\boxed{(-\alpha)\cdot(+\beta)\cdot(+\gamma)\cdot(-\delta)=(+\beta)\cdot(-\delta)\cdot(-\alpha)\cdot(+\gamma)}$$

51. **ΙΙ. Ἰδιότης.** ***Εἰς ἕνα γινόμενον πολλῶν ἀλγεβρικῶν παραγόντων δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν δύο ἢ περισσοτέρους παράγοντας μὲ τὸ γινόμενόν των.***

Γενικῶς θὰ ἔχωμεν:

$$\boxed{(-\alpha)(+\beta)(-\gamma)(+\delta)=(-\alpha)\cdot[(+\beta)(+\delta)]\cdot(-\gamma)}$$

52. III. Ἰδιότης. ***Εἰς ἕνα γινόμενον πολλῶν ἀλγεβρικῶν παραγόντων δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν ἕνα παράγοντα δι' ἄλλων, οἱ ὁποῖοι ἔχουν αὐτὸν ὡς γινόμενον.***

Γενικῶς θὰ ἔχωμεν :

$$\boxed{(+\alpha)\cdot[(-\beta)(+\delta)]\cdot(-\gamma)=(+\alpha)(-\beta)(-\gamma)(+\delta)}$$

53. IV. Ἰδιότης. ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕνα γινόμενον πολλῶν ἀλγεβρικῶν παραγόντων ἐπὶ ἕνα ἀλγεβρικὸν ἀριθμὸν ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕ ν α μ ό ν ο ν ἐκ τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν αὐτόν.***

Γενικῶς θὰ ἔχωμεν :

$$\boxed{[(-\alpha)(+\beta)(-\gamma)]\cdot(-\mu)=(-\alpha)\cdot[(+\beta)(-\mu)]\cdot(-\gamma)}$$

Π.χ. $[(-4)(+5)(-9)(+2)]\cdot(-3)=(-4)(-15)(-9)(+2)=-1080$

54. V. Ἰδιότης. ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο ἢ περισσότερα γινόμενα ἀλγεβρικῶν παραγόντων σχηματίζομεν ἕνα γινόμενον, τὸ ὁποῖον περιέχει ὅλους τοὺς παράγοντας τῶν γινομένων.***

Γενικῶς θὰ ἔχωμεν :

$$\boxed{[(-\alpha)(+\beta)(-\gamma)]\cdot[(+\delta)(-\varepsilon)]=(-\alpha)(+\beta)(-\gamma)(+\delta)(-\varepsilon)}$$

Π. χ. $[(-2)(+5)(-7)]\cdot[(+3)(-8)]=$

$$=(-2)(+5)(-7)(+3)(-8)=-1680$$

Ἀσκήσεις. 40. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις :

1. $[(-4)\cdot(+9)\cdot(-2)]\cdot(-7)$ 2. $[(-7)(-5)(+1)]\cdot(+2)$
3. $[(-5)(+7)(-10)]\cdot[(-1)(+2)(-8)]$
4. $[2(-8)(+3)]\cdot[(-5)(-1)(+4)]\cdot[(+4)(+1)(-10)]$

55. **Πῶς πολλαπλασιάζομεν ἕνα ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα ἐπὶ ἕνα ἀριθμόν; Θεώρημα.** ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕνα ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα ἐπὶ ἕνα ἀριθμόν, πολλαπλασιάζομεν κάθε ὅρον τοῦ ἀθροίσματος ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν αὐτὸν καὶ προσθέτομεν τὰ ἐξαγόμενα.***

Τὸ θεώρημα αὐτὸ εἶναι γνωστὸν εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν ὡς ***ἐπιμεριστικὴ ἰδιότης***. Θὰ τὸ ἐπαληθεύσωμεν ἐδῶ μὲ ἕνα παράδειγμα.

Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα $6-8+5$ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν -4· δηλ. ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον $(6-8+5)\cdot(-4)$

Ἐπειδὴ $6-8+5=+3$ θὰ εἶναι

$$(6-8+5)\cdot(-4)=(+3)\cdot(-4)=-12$$

Ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμόν, κατὰ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα, θὰ ἔχωμεν

$$(6-8+5)\cdot(-4)=6(-4)-8(-4)+5(-4)$$
$$=-24+32-20=-12$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ ἐξαγόμενον εἶναι τὸ αὐτό· ὥστε δυνάμεθα νὰ γράψωμεν

$$(6-8+5)\cdot(-4)=6(-4)-8(-4)+5(-4)$$
$$=-24+32-20=-12$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι :

$$(-9-6+7-2)\cdot(+5)=-9(+5)-6(+5)+7(+5)-2(+5)$$
$$=-45-30+35-10=-50$$

Γενικῶς θὰ εἶναι :

$$\boxed{(\alpha-\beta+\gamma-\delta)\cdot\mu=\alpha\mu-\beta\mu+\gamma\mu-\delta\mu} \qquad (1)$$

Ἐὰν ἀλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν παραγόντων τοῦ πρώτου μέλους τῆς ἰσότητος (1) θὰ ἔχωμεν καὶ

$$\boxed{\mu(\alpha-\beta+\gamma-\delta)=\alpha\mu-\beta\mu+\gamma\mu-\delta\mu}$$

56. **Ἐξαγωγὴ κοινοῦ παράγοντος.** Κατὰ τὸ θεώρημα τῆς § 55 θὰ εἶναι

$$(\alpha+\beta-\gamma)\,\mu=\alpha\mu+\beta\mu-\gamma\mu$$

Ἐὰν ἐναλλάξωμεν τὰ μέλη τῆς ἰσότητος αὐτῆς, θὰ ἔχωμεν

$$\alpha\mu+\beta\mu-\gamma\mu=(\alpha+\beta-\gamma)\mu \qquad (1)$$

Ἀπὸ τὴν ἰσότητα (1) συνάγομεν, ὅτι :

Ἐὰν ἔχωμεν ἕνα ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα γινομένων, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἔχει κοινὸν παράγοντα, δυνάμεθα νὰ θέτωμεν τὸν παράγοντα αὐτὸν ἐκτὸς παρενθέσεως καὶ ἐντὸς αὐτῆς τὸ ἄθροισμα τῶν μὴ κοινῶν παραγόντων.

Π.χ. θὰ εἶναι $-3\mu+7\mu-9\mu=(-3+7-9)\mu$

$$7\alpha-\frac{4}{5}\alpha+8\alpha-12\alpha=\left(7-\frac{4}{5}+8-12\right)\alpha$$

Ἀσκήσεις. 41. **Νὰ ἐκτελεσθοῦν κατὰ δύο τρόπους, αἱ κάτωθι πράξεις :**

1. $(14-6+2-10)\cdot(+5)$ 2. $(-4+9+8-25)\cdot(-4)$

3. $\left(-\frac{1}{3}+6+\frac{2}{5}-8\right)\cdot(-5)$ 4. $\left(-5+8-\frac{2}{3}+\frac{4}{5}-7\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)$

57. Πῶς πολλαπλασιάζομεν δύο ἢ περισσότερα ἀλγεβρικὰ ἀθροίσματα. ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕνα ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα ἐπὶ ἄλλο ἄθροισμα, πολλαπλασιάζομεν διαδοχικῶς κάθε ὅρον τοῦ πρώτου ἀθροίσματος ἐπὶ κάθε ὅρον τοῦ δευτέρου ἀθροίσματος καὶ προσθέτομεν ἔπειτα τὰ ἐξαγόμενα.***

Ἔστω, ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ ἀθροίσματα $(\alpha+\beta+\gamma)$ καὶ $(\alpha'+\beta')$. Θὰ δείξωμεν, ὅτι :

$$(\alpha+\beta+\gamma)\cdot(\alpha'+\beta')=\alpha\alpha'+\beta\alpha'+\gamma\alpha'+\alpha\beta'+\beta\beta'+\gamma\beta'$$

Πράγματι· ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα $(\alpha'+\beta')$ ἔχει ἐκτελεσθῆ, θὰ ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἄθροισμα $(\alpha+\beta+\gamma)$ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν $(\alpha'+\beta')$ καὶ ἑπομένως, κατὰ τό θεώρημα τῆς § 55 θὰ ἔχωμεν :

$$(\alpha+\beta+\gamma)\cdot(\alpha'+\beta')=\alpha(\alpha'+\beta')+\beta(\alpha'+\beta')+\gamma(\alpha'+\beta')=$$
$$=\alpha\alpha'+\alpha\beta'+\beta\alpha'+\beta\beta'+\gamma\alpha'+\gamma\beta'$$

Γενικῶς θὰ ἔχωμεν :

$$\boxed{(\alpha+\beta-\gamma)(\delta-\varepsilon)=\alpha\delta+\beta\delta-\gamma\delta-\alpha\varepsilon-\beta\varepsilon+\gamma\varepsilon}$$

Π.χ. θὰ εἶναι :

$$(-5+6+7)(8-10)=-5\cdot8+6\cdot8+7\cdot8-5(-10)+6(-10)+7(-10)$$
$$=-40+48+56+50-60-70=-16$$

Γενικώτερον : ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν πολλὰ ἀλγεβρικὰ ἀθροίσματα πολλαπλασιάζομεν τὰ δύο πρῶτα ἀθροίσματα, ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν τὸ εὑρεθὲν ἐξαγόμενον ἐπὶ τὸ τρίτον ἄθροισμα καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρις ὅτου λάβωμεν καὶ τὸ τελευταῖον ἄθροισμα.***

Ἀσκήσεις. *42.* Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις :

1. $(-4+6+6-5)\cdot(+3-8)$ 2. $(-6+8-4-12)\cdot(5-9)$
3. $(-2+5)\cdot(4-8)\cdot(3-11)$

43. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις :

1. $(-10+6-18)\cdot(12-9)\cdot(-4)$, 2. $(-4+10-1)(-3+8-5)(+4)$

44. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις :

1. $(-5+8-10)(-2)-(7+9-6)(+5)$
2. $(+12-7+24)(-3)-(-6+4)(-5)+(-3)(+7)$
3. $\left(-\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{2}{3}+\frac{5}{8}-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)$

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

58. Ὁρισμός. ***Πηλίκον δύο ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν λέγεται ἕνας τρίτος ἀλγεβρικὸς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν δεύτερον δίδει ὡς γινόμενον τὸν πρῶτον***

Τὸ πηλίκον τοῦ ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ α διὰ τοῦ ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ β γράφεται $\alpha : \beta$ ἢ $\frac{\alpha}{\beta}$.

Ὁ πρῶτος ἀριθμὸς α λέγεται ***διαιρετέος*** καὶ ὁ δεύτερος ἀριθμὸς β λέγεται ***διαιρέτης***.

59. **Πῶς εὑρίσκομεν τὸ πηλίκον δύο ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν.** Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον $(+24) : (-6)$.

Κατὰ τὸν ἀνωτέρω ὁρισμόν, τὸ ζητούμενον πηλίκον θὰ εἶναι -4, διότι $(-4)\cdot(-6) = +24 =$ διαιρετέον.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν

$(+15) : (+3) = +5$, διότι $(+5)\cdot(+3) = +15$
$(-12) : (-4) = +3$, διότι $(+3)\cdot(-4) = -12$
$(-20) : (+5) = -4$, διότι $(-4)\cdot(+5) = -20$
$(+24) : (-4) = -6$, διότι $(-6)\cdot(-4) = +24$

Ὁμοίως εἶναι

$\frac{+15}{+5} = +3$, διότι $(+3)\cdot(+5) = +15$
$\frac{-18}{-9} = +2$, διότι $(+2)\cdot(-9) = -18$
$\frac{-30}{+6} = -5$, διότι $(-5)\cdot(+6) = -30$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν κάτωθι κανόνα :

Κανών. ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν δύο ἀλγεβρικοὺς ἀριθμούς, διαιροῦμεν τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τοῦ διαιρετέου διὰ τῆς ἀπολύτου τιμῆς τοῦ διαιρέτου καὶ ἔμπροσθεν τοῦ πηλίκου θέτομεν τὸ σημεῖον + μέν, ἐὰν οἱ δύο ἀριθμοὶ εἶναι ὁμόσημοι, τὸ σημεῖον — δέ, ἐὰν οἱ δύο ἀριθμοὶ εἶναι ἑτερόσημοι.***

60. **Παρατηρήσεις.** Ι. Ἐὰν εἰς μίαν διαίρεσιν δύο ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν ὁ διαιρέτης δὲν διαιρῇ ἀκριβῶς τὸν διαιρετέον, τότε τὸ πηλίκον παρίσταται ὑπὸ μορφὴν κλάσματος. Π. χ.

$(+3):(+5) = \frac{+3}{+5} = +\frac{3}{5}$, $\quad (-3):(+5) = \frac{-3}{+5} = -\frac{3}{5}$,

$(+3):(-5) = \frac{+3}{-5} = -\frac{3}{5}$, $\quad (-3):(-5) = \frac{-3}{-5} = +\frac{3}{5}$.

ΙΙ. Τὰ ἀνωτέρω παραδείγματα δεικνύουν ἀκόμη, ὅτι τὸ πηλίκον δύο ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν :

1ον. Ἀλλάσσει σημεῖον, ἂν ἀντικαταστήσωμεν τὸν ἕνα ἐκ τῶν ἀριθμῶν μὲ τὸν ἀντίθετόν του·

καὶ 2ον δὲν ἀλλάσσει σημεῖον, ἂν ἀντικαταστήσωμεν καὶ τοὺς δύο ἀριθμοὺς διὰ τῶν ἀντιθέτων των.

61. **Ἰδιαίτεραι περιπτώσεις.** I. Ἐὰν ὁ διαιρετέος εἶναι μηδέν, ὁ δὲ διαιρέτης διάφορος τοῦ μηδενός, τὸ πηλίκον θὰ εἶναι ἴσον μὲ μηδέν.

Δηλ. θὰ εἶναι $0:3=0$, διότι ὁ διαιρέτης 3, πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ μηδέν, δίδει τὸν διαιρετέον 0.

Γενικῶς θὰ εἶναι $\boxed{\dfrac{0}{\alpha}=0}$

II. Ἡ διαίρεσις οἱουδήποτε ἀριθμοῦ διὰ μηδενός, π.χ. ἡ $8:0$, εἶναι ἀδύνατος.

Διότι δὲν ὑπάρχει ἀριθμός, ὁ ὁποῖος πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν διαιρέτην 0, νὰ δίδῃ γινόμενον τὸν διαιρετέον 8, ὁ ὁποῖος εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός.

Ὥστε τὸ $\boxed{\dfrac{\alpha}{0} \text{ εἶναι τὸ σύμβολον τοῦ ἀδυνάτου}}$

III. Ὅταν ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης εἶναι 0, τὸ πηλίκον εἶναι τυχὼν ἀριθμός, ἀόριστον.

Διότι κάθε ἀριθμὸς πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν διαιρέτην 0 δίδει γινόμενον τὸν διαιρετέον 0.

Ὥστε τὸ $\boxed{\dfrac{0}{0} \text{ εἶναι τὸ σύμβολον τῆς ἀοριστίας}}$

Ἀσκήσεις. Α΄ Ὁμάς. 45. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι διαιρέσεις:

1. $(+30):(+5)$	5. $(-75):(+6)$
2. $(-20):(-4)$	6. $(+87):(-3)$
3. $(-32):(+8)$	7. $(+4{,}5):(-0{,}9)$
4. $(+45):(-9)$	8. $(-8{,}75):(+0{,}25)$

46. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τοῦ πηλίκου $\dfrac{\alpha}{\beta}$:

1. Ἐὰν $\alpha=-216$, $\beta=+18$	4. Ἐὰν $\alpha=+12{,}6$, $\beta=-1{,}8$
2. » $\alpha=+248$, $\beta=-12$	5. » $\alpha=-5{,}64$, $\beta=+0{,}6$
3. » $\alpha=-350$, $\beta=-25$	6. » $\alpha=+29{,}6$, $\beta=-0{,}4$

47. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι πηλίκα:

1. $\left(+\frac{3}{4}\right):\left(+\frac{5}{6}\right)$	5. $\left(-2\frac{1}{2}\right):\left(+1\frac{1}{4}\right)$
2. $\left(-\frac{1}{5}\right):\left(-\frac{2}{3}\right)$	6. $\left(-5\frac{1}{3}\right):\left(-2\frac{1}{5}\right)$
3. $\left(-\frac{7}{8}\right):\left(+\frac{3}{4}\right)$	7. $\left(+5\frac{1}{2}\right):\left(+1\frac{2}{3}\right)$
4. $\left(+\frac{1}{2}\right):\left(-\frac{1}{3}\right)$	8. $\left(-3\right):\left(+4\frac{3}{5}\right)$

Β' Ὁμάς. 48. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις :

1. $[(-24):(+3)]-[(-18):(-6)]+[(+36):(-9)]$
2. $(+5)\cdot(-4)-[(-375):(-25)]+(-4+12-7)$

62. Ἰδιότητες τῆς διαιρέσεως. Αἱ ἰδιότητες τῆς διαιρέσεως, τὰς ὁποίας ἐγνωρίσαμεν εἰς τὴν Ἀριθμητικήν, ἰσχύουν καὶ διὰ τοὺς ἀλγεβρικοὺς ἀριθμούς.

Κατωτέρω θὰ ἐπαληθεύσωμεν μερικὰς ἰδιότητας τῆς διαιρέσεως μὲ παραδείγματα.

63. Πῶς διαιροῦμεν ἕνα ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα δι' ἀριθμοῦ. ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἕνα ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα δι' ἀριθμοῦ, διαιροῦμεν κάθε ὅρον τοῦ ἀθροίσματος διὰ τοῦ ἀριθμοῦ καὶ προσθέτομεν τὰ μερικὰ ἐξαγόμενα.***

Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα

$$(24-16+40) \text{ διὰ } -4$$

Ἐπειδὴ $24-16+40=+48$ θὰ εἶναι

$$(24-16+40):(-4)=(+48):(-4)=-12$$

Ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν, κατὰ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα, θὰ ἔχωμεν

$$(24-16+40):(-4)=\frac{24}{-4}+\frac{-16}{-4}+\frac{40}{-4}=-6+4-10=-12$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ ἐξαγόμενον εἶναι τὸ αὐτό.

Γενικῶς θὰ ἔχωμεν :

$$\boxed{(\alpha-\beta+\gamma-\delta):\mu=\frac{\alpha}{\mu}-\frac{\beta}{\mu}+\frac{\gamma}{\mu}-\frac{\delta}{\mu}}$$

Ἀσκήσεις. Α' ὁμάς. 49. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις :

1. $(-8+12-24+2-10):(+2)$
2. $(-24+15-27+18-30):(-3)$
3. $\left(-\frac{1}{3}+\frac{5}{6}+\frac{2}{5}-1+\frac{7}{8}\right):\left(-\frac{1}{2}\right)$

50. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις :

1. $(-16+24-40):(-4)-(-27+12-30):(-3)$
2. $\left(-\frac{1}{3}+\frac{5}{6}-\frac{3}{4}\right):\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{5}-\frac{7}{10}+\frac{1}{4}\right):\left(-\frac{1}{3}\right)$

64. Πῶς διαιροῦμεν γινόμενον πολλῶν παραγόντων δι' ἀριθμοῦ. ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἕνα γινόμενον πολλῶν παραγόντων δι' ἀριθμοῦ ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν ἕ ν α μ ό ν ο ν ἐκ τῶν παραγόντων αὐτῶν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ.***

Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸ γινόμενον

$$5 \cdot (-21) \cdot 8 \text{ διὰ τοῦ } -7$$

Θὰ ἔχωμεν

$$[5 \cdot (-21) \cdot 8] : (-7) = (-840) : (-7) = +120$$

Ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν, κατὰ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα, καὶ διαιρέσωμεν μόνον τὸν παράγοντα (—21) διὰ τοῦ —7, θὰ ἔχωμεν

$$[5 \cdot (-21) \cdot 8] : (-7) = 5 \cdot \frac{-21}{-7} \cdot 8 = 5 \cdot 3 \cdot 8 = +120$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ ἐξαγόμενον εἶναι τὸ αὐτό.

Γενικῶς θὰ ἔχωμεν

$$\boxed{(\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta) : \mu = \alpha \cdot \frac{\beta}{\mu} \cdot \gamma \cdot \delta}$$

***65.* Πόρισμα.** Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸ γινόμενον $[4 \cdot (-5)(-8)]$ διὰ τοῦ -8. Κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα θὰ ἔχωμεν :

$$[4 \cdot (-5) \cdot (-8)] : (-8) = 4 \cdot (-5) \cdot \frac{-8}{-8} = 4 \cdot (-5) \cdot 1 = 4 \cdot (-5)$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι :

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἕνα γινόμενον πολλῶν παραγόντων διά τινος ἐκ τῶν παραγόντων του ἀρκεῖ νὰ ἐξαλείψωμεν αὐτόν.

Γενικῶς θὰ ἔχωμεν :

$$\boxed{(\alpha\beta\gamma\delta) : \gamma = \alpha\beta\delta}$$

Ἀσκήσεις. ***51.*** Νὰ ἐκτελεσθοῦν κατὰ δύο τρόπους αἱ κάτωθι πράξεις :

1. $[(-24)(+35)(-16)((+43)] : (-4)$ 2. $[(-6) \cdot 7 \cdot (-15) \cdot 8] : (-15)$

52. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις:

1. $[(+5)(-12)-(-20)(+6)] : (-3)$
2. $[(+5)(+9)+(-6)(+8)-(+4)(-15)] : (-3)$

ΑΛΓΕΒΡΙΚΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

66.* Ἀλγεβρικὸν κλάσμα.** Ἔστωσαν α καὶ β δύο ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοί· τὸ πηλίκον τῶν δύο αὐτῶν ἀριθμῶν, τὸ ὁποῖον παριστάνομεν μὲ $\frac{\alpha}{\beta}$, λέγεται ***ἀλγεβρικὸν κλάσμα.

Ὁ διαιρετέος α λέγεται ***ἀριθμητὴς*** τοῦ κλάσματος καὶ ὁ διαιρέτης β λέγεται ***παρονομαστὴς*** τοῦ κλάσματος αὐτοῦ.

Οἱ ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοὶ α καὶ β λέγονται ***ὅροι*** τοῦ κλάσματος.

Π. χ. Τὰ πηλίκα

$$\frac{+12}{+6},\quad \frac{+25}{-8},\quad \frac{-16}{-3},\quad \frac{18}{-6},\quad \frac{-5}{4}$$

εἶναι ἀλγεβρικὰ κλάσματα.

Ὁ παρονομαστὴς β ἑνὸς ἀλγεβρικοῦ κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$ πρέπει νὰ εἶναι ***διάφορος τοῦ μηδενός,*** διότι ἄλλως τὸ πηλίκον $\frac{\alpha}{0}$ δὲν θὰ εἶχεν καμμίαν ἔννοιαν· πράγματι δὲν ὑπάρχει ἀριθμός, ὁ ὁποῖος πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 0 νὰ δίδῃ γινόμενον τὸν ἀριθμὸν α.

Ἐὰν α=0, τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι ἴσον μὲ μηδέν· δηλ. εἶναι

$$\boxed{\frac{0}{\beta}=0}$$

67. Παρατηρήσεις σχετικαὶ μὲ τὸ σημεῖον τῶν κλασμάτων. 1. Ἐπειδὴ ἕνα κλάσμα παριστάνει τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο ἀριθμῶν, τὸ κλάσμα εἶναι ***θετικόν,*** ἐὰν καὶ οἱ δύο ὅροι του εἶναι ***ὁμόσημοι*** καὶ ***ἀρνητικόν,*** ἐὰν οἱ δύο ὅροι του εἶναι ***ἑτερόσημοι*** (§ 59)

Π. χ. $\frac{+15}{+8}=\frac{-15}{-8}=+\frac{15}{8},\qquad \frac{-15}{+8}=\frac{+15}{-8}=-\frac{15}{8}$

2. Ἡ ἀξία ἑνὸς κλάσματος δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν ἀλλάξωμεν συγχρόνως τὸ σημεῖον ἑνὸς ὅρου του καὶ τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἔμπροσθεν τοῦ κλάσματος.

Πράγματι ἡ ἀλλαγὴ τοῦ σημείου ἑνὸς μόνον ὅρου του, ἀλλάσσει τὸ σημεῖον τοῦ πηλίκου, ἀλλὰ ἐπειδὴ ἀλλάσσωμεν ἐπίσης καὶ τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἔμπροσθεν τοῦ κλάσματος, τὸ ἀρχικὸν σημεῖον τοῦ πηλίκου ἀποκαθίσταται.

Π.χ. $\frac{+18}{+9}=-\frac{-18}{+9}=-\frac{18}{-9}=+2$

Ἔχοντες ὑπ' ὄψει τὰς δύο ἀνωτέρω παρατηρήσεις δυνάμεθα νὰ γράψωμεν γενικῶς

$$+\frac{+\alpha}{+\beta}=+\frac{-\alpha}{-\beta}=-\frac{-\alpha}{+\beta}=-\frac{\alpha}{-\beta}$$

$$-\frac{+\alpha}{+\beta}=-\frac{-\alpha}{-\beta}=+\frac{-\alpha}{+\beta}=+\frac{+\alpha}{-\beta}$$

68. Ἀντίστροφος ἑνὸς ἀριθμοῦ. ***Ἀντίστροφος ἑνὸς ἀριθμοῦ μ λέγεται τὸ πηλίκον τῆς θετικῆς μονάδος (+1) διὰ τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ.***

Π.χ. ὁ ἀντίστροφος τοῦ μ εἶναι ὁ $\frac{+1}{\mu}$.

Ὁ ἀντίστροφος τοῦ −6 εἶναι ὁ $\frac{+1}{-6}$ ἢ $-\frac{1}{6}$.

Παρατηρήσεις. I. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν ἀντιστρόφων ἀριθμῶν, ὁ ἀντίστροφος τοῦ $+1$ εἶναι $\frac{+1}{+1} = +1$. Παρατηροῦμεν, ὅτι :

Ὁ ἀριθμὸς 1 εἶναι ἴσος μὲ τὸν ἀντίστροφόν του $+1$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι καὶ ὁ ἀριθμὸς -1 εἶναι ἴσος μὲ τὸν ἀντίστροφόν του -1.

Οἱ ἀριθμοὶ $+1$ καὶ -1 εἶναι οἱ μόνοι ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὴν ἰδιότητα νὰ εἶναι ἴσοι μὲ τοὺς ἀντιστρόφους των.

II. Ὁ ἀντίστροφος τοῦ α εἶναι ὁ $\frac{+1}{\alpha}$. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν α ἐπὶ τὸν ἀντίστροφόν του $\frac{+1}{\alpha}$ εὑρίσκομεν γινόμενον :

$$\alpha \cdot \frac{+1}{\alpha} = +1$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι : ***Τὸ γινόμενον ἑνὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ τὸν ἀντίστροφόν του εἶναι ἴσον μὲ*** $+1$.

69. Ἰδιότητες τῶν ἀλγεβρικῶν κλασμάτων. Αἱ ἰδιότητες τῶν κλασμάτων τῆς Ἀριθμητικῆς ἰσχύουν καὶ διὰ τὰ ἀλγεβρικὰ κλάσματα καὶ ἀποδεικνύονται ὁμοίως.

70. Θεώρημα I. ***Ἡ ἀξία ἑνὸς ἀλγεβρικοῦ κλάσματος δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἢ διαιρέσωμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους του ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, διάφορον τοῦ μηδενός.***

Ἔστω τὸ ἀλγεβρικὸν κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ ἕνας ἀλγεβρικὸς ἀριθμὸς μ θετικὸς ἢ ἀρνητικός, ἀλλὰ διάφορος τοῦ μηδενός. Θὰ δείξωμεν, ὅτι :

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha\mu}{\beta\mu}.$$

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ π τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ α διὰ β, θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{\alpha}{\beta} = \pi \qquad \text{ἢ} \qquad \alpha = \beta\pi. \tag{1}$$

Πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος (1) ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν μ καὶ ἔχομεν $\alpha\mu = \beta\pi \cdot \mu$ ἢ $\alpha\mu = \beta\mu \cdot \pi$. (2)

Ἐπειδὴ τὸ μ εἶναι διάφορον τοῦ μηδενὸς καὶ τὸ βμ θὰ εἶναι διάφορον τοῦ μηδενὸς καὶ ἑπομένως ἡ ἰσότης (2) ἐκφράζει, τὸ ὅτι τὸ π εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ αμ διὰ βμ· δηλ. θὰ εἶναι

$$\pi = \frac{\alpha\mu}{\beta\mu}$$

καὶ ἐπειδὴ $\pi = \frac{\alpha}{\beta}$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γράφεται :

$$\boxed{\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha\mu}{\beta\mu}}$$

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι ἡ ἀξία ἑνὸς κλάσματος δὲν μεταβάλλεται, ***ἐὰν διαιρέσωμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους του διὰ μ.*** Δυνάμεθα ἐπίσης νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι ἡ διαίρεσις ἑνὸς ἀριθμοῦ διὰ μ ἀνάγεται εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν αὐτοῦ ἐπὶ $\frac{1}{\mu}$.

Π.χ. $\frac{5}{8}=\frac{5\times(-2)}{8\times(-2)}=\frac{-10}{-16}=+\frac{10}{16}$, $\frac{-24}{18}=\frac{-24:6}{18:6}=\frac{-4}{3}$

71. Πόρισμα. ***Ἡ ἀξία ἑνὸς κλάσματος δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν ἀλλάξωμεν τὰ σημεῖα καὶ τῶν δύο ὅρων του.***

Διότι ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους του ἐπὶ —1 Θὰ εἶναι λοιπὸν

$$\frac{+12}{+4}=\frac{-12}{-4}, \quad \frac{+15}{-3}=\frac{-15}{+3}.$$

72. **Ἐφαρμογαί:** 1ον. ***Ἁπλοποίησις τῶν ἀλγεβρικῶν κλασμάτων.*** Δυνάμεθα νὰ ἁπλοποιήσωμεν ἕνα ἀλγεβρικὸν κλάσμα, ὅπως καὶ εἰς τὴν Ἀριθμητικήν, ἐξαλείφοντες τοὺς κοινοὺς παράγοντας καὶ τῶν δύο ὅρων.

Οὕτω: $\frac{35}{-42}=\frac{5\times7}{-6\times7}=-\frac{5}{6}$

2ον. ***Τροπὴ ἀλγεβρικῶν κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα.*** Ἡ τροπὴ ἑτερωνύμων ἀλγεβρικῶν κλασμάτων εἰς ἄλλα ὁμώνυμα γίνεται ὅπως καὶ εἰς τὴν Ἀριθμητικήν.

Πράγματι· ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ τρέψωμεν τὰ κλάσματα

$$-\frac{8}{12}, \quad \frac{18}{-24}, \quad \frac{-5}{-6}$$

εἰς ὁμώνυμα.

Ἁπλοποιοῦμεν κατ' ἀρχὰς τὰ κλάσματα καὶ ἔχομεν

$$-\frac{2}{3}, \quad -\frac{3}{4}, \quad \frac{5}{6}.$$

Τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν των εἶναι τὸ 12. Κατὰ τὰ γνωστά, τὰ ἀνωτέρω κλάσματα εἶναι ἴσα μὲ

$$-\frac{8}{12}, \quad -\frac{9}{12}, \quad \frac{10}{12}$$

Γενικῶς. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ τρέψωμεν εἰς ὁμώνυμα τὰ κλάσματα

$$\frac{\alpha}{\beta}, \quad \frac{\alpha'}{\beta'}, \quad \frac{\alpha''}{\beta''}$$

Ἐργαζόμενοι ὅπως εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν εὑρίσκομεν

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha\beta'\beta''}{\beta\beta'\beta''}, \quad \frac{\alpha'}{\beta'}=\frac{\alpha'\beta\beta''}{\beta\beta'\beta''}, \quad \frac{\alpha''}{\beta''}=\frac{\alpha''\beta\beta'}{\beta\beta'\beta''}$$

Ἀσκήσεις. *53.* Νὰ ἁπλοποιηθοῦν καὶ νὰ τραποῦν εἰς ὁμώνυμα τὰ κάτωθι κλάσματα :

1 $\frac{-10}{+25}$, $\frac{+3}{-24}$, $\frac{-10}{-18}$. 2. $\frac{-9}{+4}$, $\frac{+5}{+15}$, (-10)

73. Θεώρημα II. ***Τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα πολλῶν ὁμωνύμων κλασμάτων εἶναι ἕνα κλάσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν καὶ ὡς ἀριθμητὴν τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν ἀριθμητῶν.***

Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ προσθέσωμεν τὰ ὁμώνυμα κλάσματα $\frac{\alpha}{\Delta}$, $\frac{\beta}{\Delta}$, $\frac{\gamma}{\Delta}$. Θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$\frac{\alpha}{\Delta}+\frac{\beta}{\Delta}+\frac{\gamma}{\Delta}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\Delta}$$

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πηλίκου δύο ἀριθμῶν :

Ἐὰν εἶναι $\frac{\alpha}{\Delta}=\pi$ θὰ εἶναι $\alpha=\Delta\pi$ (1)

» » $\frac{\beta}{\Delta}=\pi'$ » » $\beta=\Delta\pi'$ (2)

» » $\frac{\gamma}{\Delta}=\pi''$ » » $\gamma=\Delta\pi''$ (3)

Προσθέτομεν κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας (1), (2), (3) καὶ ἔχομεν

$$\alpha+\beta+\gamma=\Delta\pi+\Delta\pi'+\Delta\pi''$$

ἢ $\alpha+\beta+\gamma=\Delta(\pi+\pi'+\pi'')$ (§ 56)

Διαιροῦμεν διὰ Δ καὶ τὰ δύο μέλη τῆς τελευταίας ἰσότητος καὶ ἔχομεν

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\Delta}=\pi+\pi'+\pi''$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα αὐτὴν τὰ π, π', π'' μὲ τὰ ἴσα των $\frac{\alpha}{\Delta}$, $\frac{\beta}{\Delta}$, $\frac{\gamma}{\Delta}$ καὶ ἔχομεν :

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\Delta}=\frac{\alpha}{\Delta}+\frac{\beta}{\Delta}+\frac{\gamma}{\Delta}$$

Ἐὰν τὰ δοθέντα κλάσματα δὲν εἶναι ὁμώνυμα, τρέπομεν αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα.

Παράδειγμα. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα

$$\frac{+3}{+4}+\frac{-5}{+6}-\frac{+4}{-3}+\frac{+7}{-8}$$

Τὸ δοθὲν ἄθροισμα γράφεται

$$\frac{3}{4}-\frac{5}{6}+\frac{4}{3}-\frac{7}{8}$$

Τρέπομεν τὰ κλάσματα εἰς ὁμώνυμα. Τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν των εἶναι **24** ἔχομεν λοιπόν :

$$\frac{3}{4}-\frac{5}{6}+\frac{4}{3}-\frac{7}{8}=\frac{18}{24}-\frac{20}{24}+\frac{32}{24}-\frac{21}{24}=$$
$$=\frac{18-20+32-21}{24}=\frac{+9}{24}=\frac{3}{8}.$$

Ἀσκήσεις. *54.* Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις:

1. $\frac{-3}{5}+\frac{2}{-7}$ 4. $\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+\frac{5}{6}$

2. $\frac{+5}{-12}-\frac{-7}{36}$ 5. $\frac{-4}{5}-\frac{2}{-3}+\frac{-1}{10}$

3. $\frac{6}{11}-\frac{+5}{-33}$ 6. $\frac{-6}{8}-\frac{-2}{5}-\frac{-3}{+15}$

74. Θεώρημα ΙΙ. ***Τὸ γινόμενον δύο ἢ περισσοτέρων ἀλγεβρικῶν κλασμάτων εἶναι ἕνα ἀλγεβρικὸν κλάσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς ἀριθμητὴν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν καὶ ὡς παρονομαστὴν τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν.***

Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\alpha'}{\beta'}$, $\frac{\alpha''}{\beta''}$

Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\alpha'}{\beta'}\times\frac{\alpha''}{\beta''}=\frac{\alpha\alpha'\alpha''}{\beta\beta'\beta''}$

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πηλίκου δύο ἀριθμῶν:

Ἐὰν εἶναι $\frac{\alpha}{\beta}=\pi$ θὰ εἶναι $\alpha=\beta\pi$ (1)

» » $\frac{\alpha'}{\beta'}=\pi'$ » $\alpha'=\beta'\pi'$ (2)

» » $\frac{\alpha''}{\beta''}=\pi''$ » $\alpha''=\beta''\pi''$ (3)

Πολλαπλασιάζομεν τὰς ἰσότητας (1), (2), (3) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\alpha\alpha'\alpha''=\beta\pi\,.\,\beta'\pi'\,.\,\beta''\pi'' \quad \text{ἢ} \quad \alpha\alpha'\alpha''=\beta\beta'\beta''\pi\pi'\pi'' \qquad (4)$$

Ἐπειδὴ οἱ παρονομασταὶ β, β', β'' εἶναι διάφοροι τοῦ μηδενὸς καὶ τὸ γινόμενον τῶν $\beta\beta'\beta''$ θὰ εἶναι διάφορον τοῦ μηδενὸς καὶ ἐπομένως ἡ ἰσότης (4) ἐκφράζει, ὅτι τὸ $\pi\pi'\pi''$ εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ $\alpha\alpha'\alpha''$ διὰ τοῦ $\beta\beta'\beta''$, δηλ. εἶναι

$$\frac{\alpha\alpha'\alpha''}{\beta\beta'\beta''}=\pi\pi'\pi'' \quad \text{ἢ} \quad \frac{\alpha\alpha'\alpha''}{\beta\beta'\beta''}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\alpha'}{\beta'}\cdot\frac{\alpha''}{\beta''}$$

Παράδειγμα. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον τῶν κλασμάτων $\frac{-1}{+2}$, $\frac{+2}{+3}$, $\frac{+5}{-6}$, $\frac{-10}{+3}$.

Κατὰ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα θὰ ἔχωμεν

$$\frac{-1}{+2}\cdot\frac{+2}{+3}\cdot\frac{+5}{-6}\cdot\frac{-10}{+3}=\frac{(-1)\cdot(+2)\cdot(+5)\cdot(-10)}{(+2)\cdot(+3)\cdot(-6)\cdot(+3)}=\frac{+100}{-108}=-\frac{25}{27}$$

Ἀσκήσεις. Α' Ὁμάς. *55.* Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις :

1. $\frac{4}{-5}\cdot\frac{-3}{8}$ 4. $\frac{-5}{6}\cdot\frac{+4}{-5}$ 7. $\frac{-1}{+4}\cdot\frac{+3}{-7}$

2. $\frac{6}{7}\cdot\frac{-9}{-10}$ 5. $\frac{-1}{+4}\cdot(-7)$ 8. $\frac{+6}{-2}\cdot\frac{-9}{+10}$

3. $\frac{2}{3}\cdot\frac{-5}{+6}$ 6. $(-4)\cdot\frac{-7}{+12}$ 9. $\frac{-7}{8}\cdot\frac{6}{-7}$

56. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις :

1. $\frac{-15}{+4}\cdot\frac{+8}{-4}\cdot\frac{-6}{+5}$ 3. $(-5)\cdot\frac{-1}{+4}\cdot(-2)\cdot\frac{+3}{-5}$

2. $\frac{+7}{-2}\cdot\frac{-1}{+4}\cdot\frac{-3}{-5}$ 4. $\frac{-5}{+6}\cdot\frac{+2}{-5}\cdot(-10)\cdot\frac{-7}{+10}$

Β' Ὁμάς. *57.* Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις :

1. $\left(-\frac{+3}{4}+\frac{-2}{+3}-\frac{-1}{-6}+\frac{2}{-5}\right)\cdot\frac{-7}{+3}$

2. $\left(-\frac{+1}{-3}+\frac{+5}{-4}+\frac{-3}{+2}\right)\cdot\left(\frac{-3}{+4}-\frac{-1}{+5}\right)$

3. $\frac{-4+7-2}{+1-12+5}\cdot\frac{9-3+8}{-7+2-1}\cdot\frac{-5+11}{-10+4+5}$

75. Θεώρημα III. ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν κλάσμα διὰ κλάσματος πολλαπλασιάζομεν τὸ κλάσμα τοῦ διαιρετέου ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ διαιρέτου ἀντεστραμμένον.***

Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ διὰ τοῦ $\frac{\gamma}{\delta}$.

Θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$\frac{\alpha}{\beta}:\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\delta}{\gamma}=\frac{\alpha\cdot\delta}{\beta\cdot\gamma}$$

Διότι, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸ πηλίκον $\frac{\alpha\cdot\delta}{\beta\cdot\gamma}$ ἐπὶ τὸν διαιρέτην $\frac{\gamma}{\delta}$, θὰ εὕρωμεν τὸν διαιρετέον $\frac{\alpha}{\beta}$

Πράγματι ἔχομεν

$$\frac{\alpha\cdot\delta}{\beta\cdot\gamma}\cdot\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\cdot\delta\cdot\gamma}{\beta\cdot\gamma\cdot\delta}=\frac{\alpha}{\beta}$$

Π. χ. $\frac{-4}{+5}:\frac{+7}{-10}=\frac{-4}{+5}\cdot\frac{-10}{+7}=\frac{(-4)\cdot(-10)}{(+5)\cdot(+7)}=\frac{+8}{+7}=\frac{8}{7}$.

Ὁμοίως ἔχομεν

$$\frac{\frac{+4}{-3}}{\frac{-5}{+6}}=\frac{+4}{-3}:\frac{-5}{+6}=\frac{+4}{-3}:\frac{+6}{-5}=\frac{(+4)\cdot(+6)}{(-3)\cdot(-5)}=\frac{8}{5}$$

Ἀσκήσεις. *58.* Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι διαιρέσεις :

1. $\frac{2}{5} : \frac{-3}{8}$ 3. $\frac{-1}{+4} : \frac{-2}{-3}$ 5. $(-8) : \frac{-4}{+5}$

2. $\frac{-4}{3} : \frac{-3}{+10}$ 4. $\frac{-6}{-7} : \frac{-3}{+4}$ 6. $(+9) : \frac{-7}{-10}$

59. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι διαιρέσεις :

1. $\frac{5+8-10}{-4+2-7} : \frac{1-7+9}{2+5-11}$ 3. $\frac{-1+2-3}{(-5)\cdot(+6)-7} : \frac{(-8):(+4)}{5-7+11}$

2. $\frac{-12+15-18}{+6-7+11} : \frac{5-(4-3)}{-8-(6-7)}$ 4. $\frac{(-2)(+6)-10}{(+24):(-6)} : \frac{5-9+1}{5-4(4-9)}$

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

76. Δύναμις ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ. ***Δύναμις ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ λέγεται τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων ἴσων μὲ τὸν ἀριθμὸν αὐτόν.***

Π. χ. Τὸ γινόμενον $(-2)(-2)(-2)(-2)$ εἶναι ἡ *τετάρτη δύναμις* τοῦ (-2) καὶ γράφεται συμβολικῶς $(-2)^4$, δηλ. εἶναι

$$(-2)^4=(-2)(-2)(-2)(-2)=+16$$

Ὁμοίως ἡ *πέμπτη δύναμις* τοῦ $(+3)$ εἶναι

$$(+3)^5=(+3)(+3)(+3)(+3)(+3)=+243$$

Γενικῶς* : *Νυοστὴ δύναμις ἑνὸς ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ α λέγεται τὸ γινόμενον ν παραγόντων ἴσων μὲ τὸν ἀριθμὸν α.

Π. χ. ἡ νυοστὴ δύναμις τοῦ α εἶναι

$$\alpha^\nu = \alpha.\alpha.\alpha.\alpha. \; . \; . \; . \; . \; \alpha, \;(\nu \text{ παράγοντες})$$

Ὁ ἀριθμὸς α λέγεται ***βάσις*** τῆς δυνάμεως α^ν καὶ ὁ μικρὸς ἀριθμὸς ν, ὁ ὁποῖος γράφεται δεξιὰ καὶ ἄνω τῆς βάσεως, λέγεται ***ἐκθέτης*** τῆς δυνάμεως.

Π. χ. εἰς τὴν δύναμιν $(-5)^4$ βάσις εἶναι ὁ ἀριθμὸς -5 καὶ ἐκθέτης ὁ 4.

Ὁ ἐκθέτης φανερώνει τὸ πλῆθος τῶν ἴσων παραγόντων.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν δυνάμεων, ὁ ἐκθέτης πρέπει νὰ εἶναι ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἀριθμός. Ἐπίσης ὁ ἐκθέτης δὲν πρέπει νὰ εἶναι μικρότερος τοῦ 2, διότι ἄλλως δὲν θὰ εἴχομεν γινόμενον ἴσων παραγόντων καὶ ἑπομένως καὶ δύναμιν ἀριθμοῦ.

Ἡ ***δευτέρα δύναμις*** ἑνὸς ἀριθμοῦ λέγεται καὶ ***τετράγωνον*** αὐτοῦ, ἡ δὲ ***τρίτη δύναμις*** αὐτοῦ λέγεται καὶ ***κύβος*** αὐτοῦ.

Π. χ. τὸ γινόμενον $(-5)\cdot(-5)$ γράφεται $(-5)^2$ καὶ ἐκφωνεῖται -5 εἰς τὴν δευτέραν δύναμιν ἢ -5 εἰς τὸ τετράγωνον.

Ἐπίσης τὸ γινόμενον $(+2)(+2)(+2)$ γράφεται $(+2)^3$ καὶ ἐκφωνεῖται $+2$ εἰς τὴν τρίτην δύναμιν ἢ $+2$ εἰς τὸν κύβον.

77. Σημεῖον τῶν ἀλγεβρικῶν δυνάμεων. Ἐπειδὴ αἱ δυνάμεις εἶναι γινόμενα ἀλγεβρικῶν παραγόντων, τὸ σημεῖον των ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ πλῆθος τῶν ἀρνητικῶν παραγόντων· ἂν λοιπὸν ἔχωμεν ὑπ' ὄψει τὸν κανόνα τοῦ σημείου ἑνὸς γινομένου πολλῶν ἀλγεβρικῶν παραγόντων (§ 48) συνάγομεν, ὅτι :

1ον. Ὅλαι αἱ δυνάμεις ἑνὸς θετικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι θετικαί.

2ον. Αἱ δυνάμεις τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν εἶναι θετικαί, ἐὰν ὁ ἐκθέτης των εἶναι ἄρτιος καὶ ἀρνητικαί, ἐὰν ὁ ἐκθέτης των εἶναι περιττὸς ἀριθμός.

Π. χ. $(+3)^4=(+3)(+3)(+3)(+3)=+81$

$(-3)^4=+81$ (ἔχει 4 ἀρνητικοὺς παράγοντας)

$(-3)^3=-27$ (ἔχει 3 ἀρνητικοὺς παράγοντας)

Ἐὰν α εἶναι θετικὸς ἀριθμός, ἡ δύναμις α^ν εἶναι πάντοτε θετική. Ἐὰν α εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμός, ἡ δύναμις α^ν εἶναι θετική, ἐὰν ὁ ν εἶναι ἄρτιος καὶ ἀρνητική, ἐὰν ὁ ν εἶναι περιττὸς ἀριθμός.

78. Παρατηρήσεις. I. Ἐπειδὴ $1^6=1.1.1.1.1.1=1$ συνάγομεν, ὅτι :

Ὅλαι αἱ δυνάμεις τῆς μονάδος εἶναι ἴσαι μὲ 1.

II. Εἴπομεν ἀνωτέρω (§ 76), ὅτι ὁ ἐκθέτης μιᾶς δυνάμεως δὲν πρέπει νὰ εἶναι μικρότερος τοῦ 2· ἐν τούτοις παραδεχόμεθα, ὅτι :

Π. χ. $8=8^1$, $(-5)^1=-5$, $\alpha^1=\alpha$, $\beta=\beta^1$

III. Ὅταν ἡ βάσις μιᾶς δυνάμεως εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμὸς πρέπει νὰ θέτωμεν τὸν ἀριθμὸν αὐτὸν ἐντὸς παρενθέσεως.

Διότι τὸ $(-5)^2$ εἶναι τελείως διάφορον τοῦ -5^2

Πράγματι : $(-5)^2=(-5)(-5)=+25$

$-5^2=-5\cdot5=-25$

Ἀσκήσεις. Α' Ὁμάς. 60. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ κάτωθι δυνάμεις :

1. $(-12)^2$ 4. $-(-3)^3$ 7. $(-0{,}5)^4$
2. $(+10)^3$ 5. $+(-5)^2$ 8. $(+3{,}2)^2$
3. $(-2)^5$ 6. $-(-1)^6$ 9. $(0{,}001)^6$

61. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τοῦ $x=\alpha^\nu$

1. Ἐὰν $\alpha=-12$, $\nu=3$ 3. Ἐὰν $\alpha=-2{,}5$ $\nu=3$
2. Ἐὰν $\alpha=-7$, $\nu=2$ 4. Ἐὰν $\alpha=0{,}003$ $\nu=4$

62. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων :

1. $(-2)^3-(+3)^3$ 4. $(-1)^5-(-2)^4-(-3)^3$
2. $(-5)^1+(-2)^4$ 5. $(+1)^3+(-3)^2-(-5)^2$
3. $(+10)^2-(-100)^3$ 6. $(0{,}5)^2-(1{,}2)^3-(+0{,}25)^4$

63. **Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων :**

1. $2^3\cdot3^2$ 3. $(-5)^2\cdot(-1)^5$ 5. $(-10)^3\cdot(-1)^5$
2. $(-2)^2\cdot(-3)^2$ 4. $(-6)^2\cdot(+4)^9$ 6. $(+0{,}6)^2\cdot(-1{,}3)^2$

Β' Ὁμάς. 64. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων:

1. $3^2-4(-2)^2(-1)$
2. $3(-4)^2+(-5)(-1)^4-6(-2)^4$
3. $2(-3)^2(-1)^4+3(-5)^2\cdot2^3-(-1)^3(-7)^2$
4. $6^2-3\cdot2^3(-3)^2+4^2(-3)^2-5(-6)^2(-1)^7$

79. Ἰδιότητες τῶν δυνάμεων. Αἱ ἰδιότητες τῶν δυνάμεων, τὰς ὁποίας ἐγνωρίσαμεν εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν ἰσχύουν καὶ διὰ τὰς δυνάμεις τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν καὶ ἀποδεικνύονται ὁμοίως.

80. Γινόμενον δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον $\alpha^4\,.\,\alpha^3\,.\,\alpha^2$.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν δυνάμεων θὰ εἶναι:

$$\alpha^4\,.\,\alpha^2\,.\,\alpha^3=\alpha\alpha\alpha\alpha\,.\,\alpha\alpha\,.\,\alpha\alpha\alpha$$

Τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἰσότητος αὐτῆς εἶναι τὸ γινόμενον $4+2+3=9$ παραγόντων ἴσων μὲ τὸν α· εἶναι ἴσον λοιπὸν μὲ $\alpha^{4+2+3}=\alpha^9$ Θὰ εἶναι λοιπὸν

$$\alpha^4\,.\,\alpha^2\,.\,\alpha^3=\alpha^{4+2+3}=\alpha^9$$

Ὁμοίως, εἶναι $(-3)^4\,.\,(-3)^5\,.\,(-3)^2=(-3)^{4+5+2}=(-3)^{11}$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι:

I. *Ἰδιότης.* ***Τὸ γινόμενον δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἡ ὁποία ἔχει ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν των.***

Κατὰ τὴν ἰδιότητα αὐτὴν θὰ εἶναι γενικῶς

$$\boxed{\alpha^\mu\cdot\alpha^\nu\cdot\alpha^\varrho=\alpha^{\mu+\nu+\varrho}}\quad\text{καὶ ἀντιστρόφως}\quad\boxed{\alpha^{\mu+\nu}=\alpha^\mu\cdot\alpha^\nu}$$

Ἀσκήσεις. 65. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων:

1. $(-2)^2\cdot(-2^3)$
2. $(-3)^4\cdot(-3^2)$
3. $(-5)^2\,.\,(-5)^3\cdot(-5)$
4. $(-1)^6\cdot(-1)^7\cdot(-1)^3$

66. Μὲ τί ἰσοῦνται τὰ κάτωθι γινόμενα;

1.	$\alpha^3\cdot\alpha^2$	4.	$x^5\cdot x^3$	7.	$y^2\cdot y^3\cdot y^4$
2.	$\alpha\cdot\alpha^5$	5.	$x^4\cdot x^2\cdot x$	8.	$y^2\cdot y^5\cdot y^6$
3.	$\alpha^2\cdot\alpha^6$	6.	$x^2\cdot x^3\cdot x^2$	9.	$y^2\cdot y\cdot y^3\cdot y^4$

81. Πῶς ὑψώνομεν μίαν δύναμιν εἰς ἄλλην δύναμιν. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ ὑψώσωμεν τὴν δύναμιν α^3 εἰς τὴν πέμπτην δύναμιν, δηλ. ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ $(\alpha^3)^5$.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν δυνάμεων θὰ εἶναι

$$(\alpha^3)^5=\alpha^3\,.\,\alpha^3\,.\,\alpha^3\,.\,\alpha^3\,.\,\alpha^3$$

ἤ, κατὰ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα

$$(\alpha^3)^5=\alpha^{3+3+3+3+3}=\alpha^{3\cdot5}=\alpha^{15}$$

Ὁμοίως θὰ εἶναι $[(-5)^2]^3=(-5)^6$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι:

II. ***Ἰδιότης. Διὰ νὰ ὑψώσωμεν μίαν δύναμιν ἑνὸς ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ εἰς ἄλλην δύναμιν, σχηματίζομεν μίαν νέαν δύναμιν, ἡ ὁποία ἔχει βάσιν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν καὶ ἐκθέτην τὸ γινόμενον τῶν δύο ἐκθετῶν.***

Κατὰ τὴν ἰδιότητα αὐτὴν θὰ εἶναι γενικῶς

$\boxed{(\alpha^{\mu})^{\nu} = \alpha^{\mu\nu}}$ καὶ ἀντιστρόφως $\boxed{\alpha^{\mu\nu} = (\alpha^{\mu})^{\nu} = (\alpha^{\nu})^{\mu}}$

Ἀσκήσεις. *67.* Μὲ τί ἰσοῦνται αἱ κάτωθι δυνάμεις;

1. $(\alpha^2)^3$	3. $(x^3)^2$	5. $(y^{10})^2$
2. $(\alpha^3)^4$	4. $(x^4)^5$	6. $(y^7)^3$

68. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων:

1. $[(-3)^2]^3$	3. $[(-2)^3]^2$	5. $+[(-2)^4]^2$
2. $[(+1)^5]^2$	4. $[(-0{,}03)^3]^2$	6. $-[(-1)^2]^6$

69. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων:

1. $(-5)^2+(-3)^2-[(-2)^2]^3$	3. $(-2)^3 \cdot [(-3)^2]^2 \cdot (-10)^2$
2. $(-6)^3-(-2)^4+[(-1)^6]^2$	4. $(-3)^2 \cdot [(-1)^4]^2 \cdot [(+2)^3]^2$

82. Πῶς ὑψώνομεν γινόμενον παραγόντων εἰς δύναμιν;

Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ ὑψώσωμεν τὸ γινόμενον $\alpha.\beta.\gamma$ εἰς τὴν τρίτην δύναμιν, δηλ. ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ $(\alpha.\beta.\gamma)^3$.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν δυνάμεων θὰ εἶναι:

$$\begin{aligned}(\alpha.\beta.\gamma)^3 &= \alpha.\beta.\gamma \times \alpha.\beta.\gamma \times \alpha.\beta.\gamma \\ &= \alpha.\alpha.\alpha \,.\, \beta.\beta.\beta \,.\, \gamma.\gamma.\gamma \\ &= \alpha^3 \,.\, \beta^3 \,.\, \gamma^3\end{aligned}$$

Ὁμοίως εἶναι $[(-2).(-3).(+5)]^4 = (-2)^4.(-3)^4.(+5)^4$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι:

III. ***Ἰδιότης. Διὰ νὰ ὑψώσωμεν γινόμενον πολλῶν ἀλγεβρικῶν παραγόντων εἰς μίαν δύναμιν, ὑψώνομεν κάθε παράγοντα τοῦ γινομένου εἰς τὴν δύναμιν αὐτήν.***

Κατὰ τὴν ἰδιότητα αὐτὴν θὰ εἶναι γενικῶς

$\boxed{(\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\delta)^{\nu} = \alpha^{\nu}\cdot\beta^{\nu}\cdot\gamma^{\nu}\cdot\delta^{\nu}}$ καὶ ἀντιστρόφως $\boxed{\alpha^{\nu}\cdot\beta^{\nu}\cdot\gamma^{\nu} = (\alpha\beta\gamma)^{\nu}}$

Ἀσκήσεις. Α΄ Ὁμάς. *70.* Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ δυνάμεις:

1. $(\alpha\beta\gamma)^4$	3. $(-4\alpha x\omega)^2$	5. $(-\alpha\beta\gamma)^{\nu}$
2. $(3xy\omega)^3$	4. $(+5\beta\gamma\delta)^3$	6. $(-5xy\omega)^{\mu}$

71. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ δυνάμεις:

1. $[(-3)\cdot(+2)\cdot(-5)]^3$	3. $[(3\cdot 5\cdot(-4)]^2$
2. $[(+3)\cdot(-1)\cdot(-10)]^3$	4. $[(-5)(+3)(-1)]^4$

Β' Ὁμάς. *72.* Τὸ γινόμενον $9.8.4^3.27.3^2$ νὰ μετασχηματισθῇ εἰς γινόμενον δύο δυνάμεων.

73. Τὸ γινόμενον $9.25.81.64.5^4$ νὰ μετασχηματισθῇ εἰς δύναμιν ἑνὸς ἀριθμοῦ.

83. Πηλίκον δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον $\alpha^7 : \alpha^4$.

Ἐπειδὴ τὸ πηλίκον δύο ἀριθμῶν παρίσταται καὶ ὑπὸ μορφὴν κλάσματος, θὰ ἔχωμεν

$$\alpha^7 : \alpha^4 = \frac{\alpha^7}{\alpha^4} = \frac{\alpha.\alpha.\alpha.\alpha.\alpha.\alpha.\alpha.}{\alpha.\alpha.\alpha.\alpha.} = \alpha.\alpha.\alpha. = \alpha^3$$

Ὥστε εἶναι $\alpha^7 : \alpha^4 = \alpha^{7-4} = \alpha^3$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν $(-5)^6 : (-5)^4 = (-5)^{6-4} = (-5)^2$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι:

IV. ***Ἰδιότης. Τὸ πηλίκον δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἡ ὁποία ἔχει ἐκθέτην τὴν διαφορὰν τοῦ ἐκθέτου τοῦ διαιρέτου ἀπὸ τοῦ ἐκθέτου τοῦ διαιρετέου.***

Κατὰ τὴν ἰδιότητα αὐτήν, ἐὰν εἶναι $\mu > \nu$ θὰ εἶναι γενικῶς

$$\boxed{\alpha^\mu : \alpha^\nu = \alpha^{\mu-\nu}} \quad \text{ἢ καὶ} \quad \boxed{\frac{\alpha^\mu}{\alpha^\nu} = \alpha^{\mu-\nu}}$$

καὶ ἀντιστρόφως $\boxed{\alpha^{\mu-\nu} = \alpha^\mu : \alpha^\nu}$

Ἀσκήσεις. ***74.*** **Μὲ τί ἰσοῦνται τὰ κάτωθι πηλίκα:**

1. $\alpha^8 : \alpha^5$	3. $x^8 : x^4$	5. $y^6 : y^4$
2. $\alpha^7 : \alpha^6$	4. $x^5 : x^4$	6. $y^{10} : y^7$

75. **Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι πηλίκα:**

1. $7^8 : 7^5$	3. $(-5)^4 : (-5)^2$	5. $(-6)^6 : (-6)^4$
1. $9^{15} : 9^{13}$	4. $(+10)^5 : (+10)^3$	6. $(-0{,}03)^4 : (-0{,}03)^2$

76. **Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις:**

1. $(-5)^2 + [(-3)^5 : (-3)^2]$
3. $[(-3)^2]^3 - [(-5)^5 : (-5)^3] + (-1)^7$
2. $[(-2)^4 : (-2)^3] + (-3)^2 \cdot (+5)^2$
4. $[(-2) \cdot (+3)]^2 - [(+2)^3]^2 + [(-10)^5 : (-10)^4]$

84. Πῶς ὑψώνομεν ἕνα κλάσμα εἰς μίαν δύναμιν. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ ὑψώσωμεν τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ εἰς τὴν τρίτην δύναμιν, δήλ. θέλομεν νὰ εὕρωμεν, μὲ τί ἰσοῦται τὸ $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν δυνάμεων θὰ εἶναι

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha.\alpha.\alpha.}{\beta.\beta.\beta.} = \frac{\alpha^3}{\beta^3}$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι $\left(\frac{-2}{3}\right)^4 = \frac{(-2)^4}{3^4} = \frac{16}{81}$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι :

V. *Ἰδιότης. **Διὰ νὰ ὑψώσωμεν ἕνα κλάσμα εἰς μίαν δύναμιν ἀρκεῖ νὰ ὑψώσωμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους του εἰς τὴν δύναμιν αὐτήν.***

Κατὰ τὴν ἰδιότητα αὐτὴν θὰ εἶναι γενικῶς

$$\boxed{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu}=\frac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}}} \quad \text{καὶ ἀντιστρόφως} \quad \boxed{\frac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}}=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu}}$$

Ἀσκήσεις. 77. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ δυνάμεις :

1. $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ 2. $\left(\frac{1}{2}\right)^4$ 3. $\left(\frac{3}{4}\right)^3$ 4. $\left(\frac{-5}{+6}\right)^2$

85. Πρώτη δύναμις ἑνὸς ἀριθμοῦ. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον τῆς δυνάμεως α^6 διὰ α^5. Κατὰ τὴν ἰδιότητα τοῦ πηλίκου δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, θὰ εἶναι :

$$\frac{\alpha^6}{\alpha^5}=\alpha^{6-5}=\alpha^1 \tag{1}$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι προέκυψε τὸ σύμβολον α^1, τὸ ὁποῖον δὲν δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς δύναμις τοῦ α, διότι ὁ ἐκθέτης τοῦ α εἶναι μικρότερος τοῦ 2. Ἀλλὰ τὸ πηλίκον $\alpha^6 : \alpha^5$ δύναται νὰ γραφῇ :

$$\frac{\alpha^6}{\alpha^5}=\frac{\alpha.\alpha.\alpha.\alpha.\alpha.\alpha.}{\alpha.\alpha.\alpha.\alpha.\alpha.}=\alpha \tag{2}$$

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) ἀναγκαζόμεθα νὰ ***παραδεχθῶμεν***, ὅτι τὸ σύμβολον α^1 παριστάνει τὸν ἀριθμὸν α. δηλ. εἶναι : $\alpha^1=\alpha$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι :

$$\beta^1=\beta, \quad (-5)^1=-5, \quad (+12)^1=+12$$

Ὥστε παραδεχόμεθα, ὅτι :

Ἡ πρώτη δύναμις ἑνὸς ἀριθμοῦ διαφόρου τοῦ μηδενὸς εἶναι ἴση μὲ τὸν ἀριθμὸν αὐτόν.

Δηλ. εἶναι γενικῶς $\boxed{\alpha^1=\alpha}$

Ἀσκήσεις. 78. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ δυνάμεις :

1. $(-5)^1$ 3. $(-7{,}24)^1$ 5. $(-35.1)^1$
2. $(+18)^1$ 4. $(+0{,}05)^1$ 6. $(+0{,}75)^1$

79. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων :

1. $(-3)^2+(+5)^2-(+25)^1$ 3. $(-5)^2+(-7)^1-(+12)^1$
3. $(-2)^3\cdot(-5)^2\cdot(-8)^1$ 4. $(-12)^1-(-6)^1+(-3)^2$

86. Περὶ τοῦ συμβόλου α^0. Δυνάμεις μὲ ἐκθέτας ἀκεραίους ἀρνητικοὺς ἀριθμούς. Κατὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ πηλίκου δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ($\alpha^\mu : \alpha^\nu$), ὑπεθέσαμεν, ὅτι ὁ ἐκθέτης μ τοῦ διαιρετέου α^{μ} εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ἐκθέτου ν τοῦ διαιρέτου α^{ν} καὶ εὑρήκαμεν

$$\frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\nu}} = \alpha^{\mu-\nu}$$

Θὰ ἐξετάσωμεν τώρα τὰς κάτωθι περιπτώσεις:

1ον. ***Οἱ ἐκθέται μ καὶ ν εἶναι ἴσοι.*** Ἔστω, ὅτι οἱ ἐκθέται μ καὶ ν εἶναι ἴσοι καὶ ἔστω, ὅτι $\mu=\nu=5$. Ἐὰν παραδεχθῶμεν, ὅτι ἡ ἰδιότης τοῦ πηλίκου δύο δυνάμεων ὑφίσταται καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, τότε θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{\alpha^5}{\alpha^5} = \alpha^{5-5} = \alpha^0 \qquad (1)$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι προέκυψε τὸ σύμβολον α^0, τὸ ὁποῖον δὲν ἔχει καμμίαν ἔννοιαν.

Ἀλλὰ τὸ πηλίκον $\frac{\alpha^5}{\alpha^5}$, ὡς πηλίκον δύο ἴσων ἀριθμῶν, εἶναι ἴσον

μὲ τὴν μονάδα, δηλ. εἶναι $\frac{\alpha^5}{\alpha^5} = 1.$ (2)

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) ἀναγκαζόμεθα νὰ ***παραδεχθῶμεν,*** ὅτι τὸ σύμβολον α^0 παριστάνει τὴν μονάδα 1, δηλ., ὅτι εἶναι $\alpha^0=1$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι:

$$\beta^0=1, \quad (-4)^0=1, \quad (\alpha+\beta)^0=1$$

Ὥστε παραδεχόμεθα, ὅτι:

Ἡ μηδενικὴ δύναμις ἑνὸς ἀριθμοῦ, διαφόρου τοῦ μηδενός, εἶναι ἴση μὲ τὴν μονάδα 1.

Δηλ. γενικῶς εἶναι $\boxed{\alpha^0 = 1}$

2ον. ***Ὁ ἐκθέτης μ εἶναι μικρότερος τοῦ ν.*** Ἔστω, ὅτι εἶναι $\mu=3$ καὶ $\nu=5$. Ἂν παραδεχθῶμεν, ὅτι ἡ ἰδιότης τοῦ πηλίκου δύο δυνάμεων ὑφίσταται καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{\alpha^3}{\alpha^5} = \alpha^{3-5} = \alpha^{-2} \qquad (1)$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι προέκυψε τὸ σύμβολον α^{-2}, τὸ ὁποῖον δὲν ἔχει καμμίαν ἔννοιαν.

Ἀλλὰ τὸ πηλίκον τοῦ α^3 διὰ τοῦ α^5 γράφεται:

$$\frac{\alpha^3}{\alpha^5} = \frac{\alpha.\alpha.\alpha.}{\alpha.\alpha.\alpha.\alpha.\alpha.} = \frac{1}{\alpha^2} \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) ἀναγκαζόμεθα νὰ ***παραδεχθῶμεν,*** ὅτι:

$$\alpha^{-2} = \frac{1}{\alpha^2}$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι $\beta^{-4} = \frac{1}{\beta^4}$

καὶ γενικῶς θὰ εἶναι $\boxed{\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu}}$

Ὥστε παραδεχόμεθα, ὅτι:

Κάθε δύναμις ἀριθμοῦ, ἡ ὁποία ἔχει ἐκθέτην ἀρνητικὸν ἀριθμόν, εἶναι ἴση μὲ κλάσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀριθμητὴν τὴν μονάδα 1 καὶ παρονομαστὴν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν μὲ τὸν ἐκθέτην του θετικόν.

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω θὰ εἶναι:

$$5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}, \quad (-3)^{-4} = \frac{1}{(-3)^4} = \frac{1}{81}$$

καὶ ἀντιστρόφως:

$$\frac{1}{\alpha^3} = \alpha^{-3}, \quad \frac{1}{5^4} = 5^{-4}, \quad \frac{1}{\alpha^\nu} = \alpha^{-\nu}$$

Ἐπίσης εἶναι: $\frac{\alpha}{\beta} = \alpha \cdot \frac{1}{\beta} = \alpha \cdot \beta^{-1}$

Παρατήρησις. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν δυνάμεων τῶν ἀριθμῶν οἱ ἐκθέται των πρέπει νὰ εἶναι ἀκέραιοι καὶ θετικοί. Τὰ ἀνωτέρω ἐκτεθέντα (§ 86), μᾶς ἐπιτρέπουν νὰ γενικεύσωμεν τὴν ἔννοιαν τῆς δυνάμεως ἑνὸς ἀριθμοῦ, ***ἐπεκτείνοντες αὐτὴν*** καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν, ποὺ ***οἱ ἐκθέται εἶναι μηδὲν ἢ ἀρνητικοὶ ἀριθμοί.***

Οὕτω παρεδέχθημεν, ὅτι:

$$\alpha^0 = 1, \qquad \alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu}$$

Αἱ ἰδιότητες τῶν δυνάμεων μὲ ἐκθέτας θετικοὺς καὶ ἀκεραίους ἰσχύουν καὶ διὰ τὰς δυνάμεις μὲ ἐκθέτας ἀκεραίους καὶ ἀρνητικούς.

Πράγματι ἔχομεν:

I. $\boldsymbol{\alpha^{-\nu} \cdot \alpha^{-\mu} = \alpha^{-\nu-\mu}}$

Διότι $\alpha^{-\nu} \cdot \alpha^{-\mu} = \frac{1}{\alpha^\nu} \cdot \frac{1}{\alpha^\mu} = \frac{1}{\alpha^\nu \cdot \alpha^\mu} = \frac{1}{\alpha^{\nu+\mu}} = \alpha^{-(\nu+\mu)} = \alpha^{-\nu-\mu}$

II. $\boldsymbol{(\alpha^\nu)^{-\mu} = \alpha^{-\nu\mu}}$

Διότι $(\alpha^\nu)^{-\mu} = \frac{1}{(\alpha^\nu)^\mu} = \frac{1}{\alpha^{\nu\mu}} = \alpha^{-\nu\mu}$

III. $\boldsymbol{(\alpha \cdot \beta \cdot \gamma)^{-\nu} = \alpha^{-\nu} \cdot \beta^{-\nu} \cdot \gamma^{-\nu}}$

Διότι $(\alpha \cdot \beta \cdot \gamma)^{-\nu} = \frac{1}{(\alpha\beta\gamma)^\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu \cdot \beta^\nu \cdot \gamma^\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu} \cdot \frac{1}{\beta^\nu} \cdot \frac{1}{\gamma^\nu} = \alpha^{-\nu} . \beta^{-\nu} . \gamma^{-\nu}$

IV. $\boldsymbol{\alpha^{-\mu} : \alpha^{-\nu} = \alpha^{(-\mu)-(-\nu)} = \alpha^{\nu-\mu}}$

Διότι $\alpha^{-\mu} : \alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\mu} : \frac{1}{\alpha^\nu} = \frac{1}{\alpha^\mu} \cdot \frac{\alpha^\nu}{1} = \frac{\alpha^\nu}{\alpha^\mu} = \alpha^{\nu-\mu}$

Ἀσκήσεις. *80.* Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα:

1. $(-8)^0$	3. $(-7{,}25)^0$	5. $-(-8)^0$
2. $(+7)^0$	4. $(+0{,}004)^0$	6. $-(+2{,}5)^0$

81. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις:

1. $(-9)^0+(-8)^1+(-25)^0$ 3. $(-5)^0\cdot(+4)^1\cdot(-25)^0\cdot(-2)^0$
2. $(-7)^1-(-6)^0-(-2)^2$ 4. $(+3)^2\cdot(-22)^0\cdot(-7)^2\cdot(-19)^0$

82. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ κάτωθι δυνάμεις:

1. 2^{-5}	3. -5^{-3}	5. $0{,}2^{-3}$	7. $(0{,}04)^{-3}$
2. $(-3)^{-4}$	4. $(+4)^{-2}$	6. $(-0{,}6)^{-2}$	8. $(-1{,}2)^{-2}$

83. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων:

1. $(-2)^{-3}+(-3)^{-2}-(-10)^{-2}$ 2. $(-3)^{-3}\cdot(-2)^3\cdot(+8)^{-1}$

84. Νὰ γραφοῦν ὡς δυνάμεις, χωρὶς παρονομαστάς, τὰ κλάσματα:

1. $\frac{3}{4}$, 2. $-\frac{3}{5}$, 3. $\frac{\alpha\beta}{\gamma}$

85. Νὰ ἐφαρμοσθοῦν αἱ ἰδιότητες τῶν δυνάμεων:

1. $\alpha^{-2}\cdot\alpha^0\cdot\alpha^2$	3. $[(-\alpha)]^{2-3}$	5. $(3\alpha\beta\gamma)^{-2}$
2. $\beta^{-3}\cdot\beta^1\cdot\beta^9\cdot\beta^4$	4. $(\beta^\nu)^{-\mu}$	6. $x^6 : x^{-7}$

ΡΙΖΑΙ ΕΝΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ

87. Ὁρισμοί. ***Νιοστὴ ρίζα ἑνὸς ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ λέγεται ἕνας ἄλλος ἀλγεβρικὸς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ὑψούμενος εἰς τὴν νιοστὴν δύναμιν δίδει τὸν δοθέντα ἀριθμόν.***

Ἡ νιοστὴ ρίζα τοῦ ἀριθμοῦ α παρίσταται μὲ τὸ σύμβολον $\sqrt[\nu]{\alpha}$ καὶ ἐκφωνεῖται: ***νιοστὴ ρίζα τοῦ α.***

Ἡ νιοστὴ ρίζα ἑνὸς ἀριθμοῦ α θὰ εἶναι ἕνας ἄλλος ἀριθμὸς β, ἐὰν $\beta^\nu=\alpha$· δηλ. θὰ εἶναι:

$$\sqrt[\nu]{\alpha}=\beta, \quad \text{ἐὰν} \quad \beta^\nu=\alpha$$

Ὁμοίως ἡ πέμπτη ρίζα τοῦ 32 εἶναι ὁ 2, διότι $2^5=32$· δηλ. εἶναι:

$$\sqrt[5]{32}=32, \quad \text{διότι} \quad 2^5=32$$

Ὁμοίως εἶναι:

$$\sqrt[3]{125}=5, \quad \text{διότι} \quad 5^3=125 \qquad \sqrt[2]{81}=9, \quad \text{διότι} \quad 9^2=81.$$

Τὸ σημεῖον $\sqrt{}$ λέγεται ***ριζικόν***· ὁ ἀριθμὸς ν λέγεται ***δείκτης τοῦ ριζικοῦ*** καὶ ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος εὑρίσκεται ὑπὸ τὸ ριζικὸν λέγεται ***ὑπόρριζον.***

Ἡ ***δευτέρα ρίζα*** ἑνὸς ἀριθμοῦ λέγεται καὶ ***τετραγωνικὴ*** ρίζα αὐτοῦ· ἡ δὲ ***τρίτη ρίζα*** ἑνὸς ἀριθμοῦ λέγεται καὶ ***κυβικὴ ρίζα*** αὐτοῦ.

Π. χ. ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ α εἶναι ἡ $\sqrt[2]{\alpha}$ ἢ ἁπλῶς $\sqrt{\alpha}$, χωρὶς τὸν δείκτην 2. Ἡ κυβικὴ ρίζα τοῦ β εἶναι ἡ $\sqrt[3]{\beta}$

Ἐὰν ὁ δείκτης ν μιᾶς ρίζης εἶναι ἄρτιος, ἡ ρίζα λέγεται ***ἀρτία*** ἢ ***ἀρτίας τάξεως***, ἐὰν δὲ εἶναι περιττός, ἡ ρίζα λέγεται ρίζα ***περιττῆς τάξεως***.

Παρατήρησις. Γνωρίζομεν, ὅτι:

$$\sqrt[\nu]{\alpha}=\beta \quad (1), \quad \text{ἐὰν} \quad \beta^\nu=\alpha \quad (2)$$

Ἐὰν ὑψώσωμεν εἰς τὴν νιοστὴν δύναμιν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος (1) θὰ ἔχωμεν $\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\nu=\beta^\nu$

Ἐπειδὴ $\beta^\nu=\alpha$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γράφεται: $\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\nu=\alpha$

Παρατηροῦμεν, ὅτι διὰ νὰ ὑψώσωμεν τὴν νιοστὴν ρίζαν ἑνὸς ἀριθμοῦ εἰς τὴν νιοστὴν δύναμιν ἀρκεῖ νὰ ***ἐξαλείψωμεν*** τὸ ριζικόν.

Οὕτω θὰ εἶναι $\quad (\sqrt{\alpha})^2=\alpha, \quad \left(\sqrt[3]{\alpha}\right)^3=\alpha, \quad \left(\sqrt[8]{\beta}\right)^8=\beta$

καὶ γενικῶς $\quad \boxed{\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\nu=\alpha}$

88. **Ρίζαι ἀρτίας τάξεως.** ***1ον.*** Ἐπειδὴ $(\pm 6)^2=+36$ συνάγομεν, ὅτι ἡ ***τετραγωνικὴ ρίζα*** τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ $+36$ εἶναι ὁ $+6$ καὶ ὁ -6· δηλ. εἶναι:

$$\sqrt{+36}=\pm 6, \quad \text{διότι} \quad (\pm 6)^2=+36$$

Ὁμοίως εἶναι $\sqrt{81}=\pm 9$, διότι $(\pm 9)^2=81$.

Ἐπίσης ἐπειδὴ $(\pm 2)^4=+16$, ἕπεται, ὅτι ἡ ***τετάρτη ρίζα*** τοῦ $+16$ εἶναι ὁ $+2$ καὶ ὁ -2· δηλ. εἶναι:

$$\sqrt[4]{+16}=\pm 2, \quad \text{διότι} \quad (\pm 2)^4=+16$$

Ὁμοίως εἶναι $\sqrt[4]{81}=-3$, διότι $(\pm 3)^4=81$

Ἐπίσης ἐπειδὴ $(\pm 2)^6=+64$ ἕπεται, ὅτι ἡ ***ἕκτη ρίζα*** τοῦ $+64$ εἶναι ὁ $+2$ καὶ ὁ -2· δηλ. εἶναι

$$\sqrt[6]{+64}=\pm 2, \quad \text{διότι} \quad (\pm 2)^6=+64.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι:

I. ***Κάθε θετικὸς ἀριθμὸς ἔχει δύο τετραγωνικὰς ρίζας καὶ γενικῶς δύο ρίζας ἀρτίας τάξεως, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀντίθετοι.***

2ον. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ -81.

Εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς -1 δὲν ἔχει τετραγωνικὴν ρίζαν, διότι δὲν ὑπάρχει ἀριθμὸς x, θετικὸς ἢ ἀρνητικός, ὁ ὁποῖος ὑψούμενος εἰς τὴν δευτέραν δύναμιν νὰ μᾶς δίδῃ τὸν -81.

Ὥστε ἡ $\sqrt{-81}$ δὲν ὑπάρχει.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι: $\sqrt[4]{-64}$ δὲν ὑπάρχει.

Ὥστε δὲν ὑπάρχει ἀριθμὸς θετικὸς ἢ ἀρνητικός, ὁ ὁποῖος ὑψούμενος εἰς ἀρτίαν δύναμιν νὰ δίδῃ ἐξαγόμενον ἀρνητικὸν ἀριθμόν.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι:

II. ***Οἱ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ δὲν ἔχουν τετραγωνικὰς ρίζας ἢ ρίζας ἀρτίας τάξεως.***

89. **Παρατηρήσεις.** Εἰς τὰς ἐφαρμογάς, ἐκ τῶν δύο τετραγωνικῶν ριζῶν ἑνὸς θετικοῦ ἀριθμοῦ, θὰ λαμβάνωμεν ἐκείνην, ἡ ὁποία ἔχει τὸ αὐτὸ σημεῖον, μὲ τὸ σημεῖον ποὺ εὑρίσκεται ἔμπροσθεν τοῦ ριζικοῦ.

Π. χ. $+\sqrt{16}=+4, \qquad -\sqrt{16}=-4, \qquad \pm\sqrt{16}=\pm4$

$\sqrt{25}=5, \qquad -\sqrt{25}=-5, \qquad \pm\sqrt{25}=\pm5$

Ἐπίσης ἐπειδὴ $(\pm\alpha)^2=\alpha^2$ αἱ ρίζαι τοῦ α^2 θὰ εἶναι:

$$\pm\sqrt{\alpha^2}=\pm\alpha$$

ἀλλὰ

$$\sqrt{\alpha^2}=\begin{cases}+\alpha, & \text{ἐὰν } \alpha>0\\ -\alpha, & \text{ἐὰν } \alpha<0\end{cases}$$

$$-\sqrt{\alpha^2}=\begin{cases}-\alpha, & \text{ἐὰν } \alpha>0\\ +\alpha, & \text{ἐὰν } \alpha<0\end{cases}$$

90 **Ρίζαι περιττῆς τάξεως.** Ἐπειδὴ $(+2)^3=+8$ συνάγομεν, ὅτι ἡ ***κυβικὴ ρίζα*** τοῦ $+8$ εἶναι ὁ ἀριθμός $+2$· δηλ. εἶναι

$$\sqrt[3]{+8}=+2, \quad \text{διότι} \quad (+2)^3=8$$

Ὁμοίως εἶναι $\sqrt[3]{64}=+4, \quad$ διότι $\quad 4^3=64.$

Ἐπίσης ἐπειδὴ $(-5)^3=-125$ ἕπεται, ὅτι ἡ κυβικὴ ρίζα τοῦ -125 εἶναι ὁ ἀριθμὸς -5· δηλ. εἶναι

$$\sqrt[3]{-125}=-5, \quad \text{διότι} \quad (-5)^3=-125.$$

Ὁμοίως ἐπειδὴ $(+2)^5=+32, \quad (-2)^5=-32$ συνάγομεν ὅτι:

$$\sqrt[5]{+32}=+2, \quad \text{διότι} \quad (+2)^5=+32$$

$$\sqrt[5]{-32}=-2, \quad \text{διότι} \quad (-2)^5=-32$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι:

Κάθε ἀλγεβρικὸς ἀριθμὸς ἔχει μίαν μόνον κυβικὴν ρίζαν καὶ γενικῶς μίαν μόνον ρίζαν περιττῆς τάξεως.

Σημ. Εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις ἔχομεν $\sqrt[\nu]{0}=0$.

'Ασκήσεις. *86.* Νὰ εὑρεθοῦν αἱ κάτωθι ρίζαι :

1. $\pm\sqrt{100}$,	4. $\sqrt[3]{-64}$,	7. $-\sqrt[4]{81}$
2. $+\sqrt{121}$,	5. $-\sqrt[3]{1000}$,	8. $\sqrt{-100}$
3. $-\sqrt{49}$,	6. $+\sqrt[3]{216}$,	9. $+\sqrt[4]{625}$

87. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις :

1. $\sqrt{25}-\sqrt{2}+\sqrt{16}-\sqrt{100}$, 3. $\sqrt[3]{64}-\sqrt[4]{81}-\sqrt[3]{8}$

2. $\sqrt{49}+\sqrt[3]{-8}-\sqrt[3]{27}+\sqrt{64}$, 4. $\sqrt{36}-\sqrt{16}+\sqrt[3]{216}$

88. Νὰ ὑπολογισθοῦν :

1. $\sqrt{(-3)(-8)\cdot 2+1}-\sqrt[3]{(+3)(-4)+(-6)(+9)+2}$

2. $$\frac{\left(\sqrt[3]{-27}+1\right)\left[(-5)-(+3)+\left(\frac{-2}{+3}\cdot\frac{-4}{-8}\right)\right]}{\sqrt{(-5)-(-21)}-\sqrt[3]{(-15)+(-7)\cdot\left(\frac{210}{-3}\right)+(-350)}}$$

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑΙ ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

91. **'Ορισμοί** Λέγομεν, ὅτι ἕνας ἀλγεβρικὸς ἀριθμὸς α εἶναι ***μεγαλύτερος*** ἑνὸς ἄλλου β, καὶ γράφομεν $\alpha>\beta$, ὅταν ἡ διαφορὰ $\alpha-\beta$ εἶναι θετικὸς ἀριθμός, δηλ. ἐὰν εἶναι $\alpha-\beta>0$.

Λέγομεν, ὅτι ἕνας ἀλγεβρικὸς ἀριθμὸς α εἶναι ***μικρότερος*** ἑνὸς ἄλλου β, καὶ γράφομεν $\alpha<\beta$, ἐὰν ἡ διαφορὰ $\alpha-\beta$ εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμός, δηλ. ἐὰν εἶναι $\alpha-\beta<0$.

Κατὰ τοὺς ὁρισμοὺς αὐτοὺς θὰ εἶναι:

$3>-8$, διότι $3-(-8)=3+8=+11$

$-5>-7$, διότι $-5-(-7)=-5+7=+2$

$2>0$, διότι $2-0=2$

$0>-5$, διότι $0-(-5)=0+(+5)=+5$

'Απὸ τὰ ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι :

1ον. ***Κάθε θετικὸς ἀριθμὸς εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ κάθε ἀρνητικὸν ἀριθμόν.***

2ον. ***'Εκ δύο ἀρνητικῶν ἀριθμῶν μεγαλύτερος εἶναι ἐκεῖνος, ποὺ ἔχει τὴν μικροτέραν ἀπόλυτον τιμήν.***

3ον. ***Τὸ μηδὲν εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ κάθε ἀρνητικὸν ἀριθμόν.***

Διὰ τοῦτο, ὅταν θέλωμεν νὰ δηλώσωμεν, ὅτι ἕνας ἀλγεβρικὸς ἀριθμὸς α εἶναι θετικὸς γράφομεν $\alpha>0$ καὶ ὅταν εἶναι ἀρνητικὸς γράφομεν $\alpha<0$.

Ἡ σχέσις $\alpha>\beta$ λέγεται ***ἀνισότης***· τὸ α εἶναι τὸ ***πρῶτον μέλος*** τῆς ἀνισότητος· τὸ β εἶναι τὸ ***δεύτερον μέλος*** τῆς ἀνισότητος.

Αἱ ἀνισότητες $\alpha>\beta$ καὶ $\gamma>\delta$ λέγονται ***ὁμοιόστροφοι*** ἀνισότητες, ἢ λέγομεν, ὅτι αἱ ἀνισότητες $\alpha>\beta$ καὶ $\gamma>\delta$ ἔχουν τὴν ***αὐτὴν στροφήν***.

Αἱ ἀνισότητες $\alpha>\beta$ καὶ $\gamma<\delta$ λέγονται ***ἑτερόστροφοι*** ἢ λέγομεν, ὅτι ἔχουν ***ἀντίθετον στροφήν***.

Ἀσκήσεις. 89. Ποῖοι εἶναι οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἐπαληθεύουν τὴν διπλῆν ἀνισότητα :

1. $-3,5<x<8,2$ 3. $-5<x<0$
2. $-8\leqslant x\leqslant -3$ 4. $-7,5<x<1$

92. **Ἰδιότητες τῶν ἀνισοτήτων. Θεώρημα Ι.** ***Ἐὰν προσθέσωμεν ἢ ἀφαιρέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀλγεβρικὸν ἀριθμὸν καὶ εἰς τὰ δύο μέλη μιᾶς ἀνισότητος ἡ στροφὴ τῆς ἀνισότητος δὲν μεταβάλλεται.***

Ἔστω ἡ ἀνισότης $\alpha>\beta$ καὶ μ ἕνας ἀλγεβρικὸς ἀριθμός· θὰ δείξωμεν, ὅτι $\alpha+\mu>\beta+\mu$

Ἐπειδὴ $\alpha>\beta$ θὰ εἶναι, κατὰ τὸν ὁρισμόν, $\alpha-\beta>0$ (1)

Ἐὰν προσθέσωμεν καὶ ἀφαιρέσωμεν εἰς τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἀνισότητος (1) τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν μ, εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ ἀνισότης δὲν ἀλλάσσει στροφήν· θὰ εἶναι λοιπόν·

$$\alpha+\mu-\beta-\mu>0 \quad \text{ἢ} \quad (\alpha+\mu)-(\beta+\mu)>0$$

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν ἀνισοτήτων ἡ τελευταία ἀνισότης ἐκφράζει, ὅτι ὁ $(\alpha+\mu)$ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ $(\beta+\mu)$· δηλ. εἶναι :

$$\alpha+\mu>\beta+\mu$$

Ἐδείχθη λοιπὸν ὅτι :

Ἐὰν εἶναι $\boxed{\alpha>\beta}$ θὰ εἶναι καὶ $\boxed{\alpha+\mu>\beta+\mu}$

Π.χ. Ἐπειδὴ εἶναι $18>11$ θὰ εἶναι καὶ $18+5>11+5$ καὶ $18-5>11-5$.

93. **Πορίσματα. Ι.** ***Εἰς μίαν ἀνισότητα δυνάμεθα νὰ μεταφέρωμεν ἕνα ὅρον της ἀπὸ τὸ ἕνα μέλος της εἰς τὸ ἄλλο, ἀρκεῖ νὰ ἀλλάξωμεν τὸ σημεῖον του.***

Ἔστω ἡ ἀνισότης $\alpha>\beta+\gamma$. (1) Θὰ δείξωμεν, ὅτι εἶναι καὶ $\alpha-\gamma>\beta$.

Πράγματι· ἐὰν ἀφαιρέσωμεν καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέλη τῆς ἀνισότητος (1) τὸν ἀριθμὸν γ, θὰ ἔχωμεν

$$\alpha-\gamma>\beta+\gamma-\gamma \quad \text{ἢ} \quad \alpha-\gamma>\beta.$$

Π.χ. Ἐὰν εἶναι $25>7+9$ θὰ εἶναι καὶ $25-7>9$ ἢ $18>9$
Ὁμοίως, ἐὰν εἶναι $8>15-12$ θὰ εἶναι καὶ $8+12>15$.

II. ***Εἰς μίαν ἀνισότητα δυνάμεθα νὰ μεταφέρωμεν ὅλους τοὺς ὅρους ἑνὸς μέλους της εἰς τὸ ἄλλο, ἀρκεῖ νὰ ἀλλάξωμεν ὅλα τὰ σημεῖα των· δηλ. δυνάμεθα νὰ λάβωμεν μίαν ἀνισότητα τῆς μορφῆς***

$$A>0 \quad \text{ἢ} \quad A<0$$

Π.χ. Ἐὰν εἶναι $\alpha+\beta>\gamma-\delta$ θὰ εἶναι $\alpha+\beta-\gamma+\delta>0$.

94. **Θεώρημα II.** ***Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἢ διαιρέσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη μιᾶς ἀνισότητος ἐπὶ ἕνα θετικὸν ἀριθμὸν ἡ ἀνισότης δὲν ἀλλάσσει στροφήν.***

Ἔστω ἡ ἀνισότης $\alpha>\beta$. Ἐὰν $\mu>0$ θὰ εἶναι καὶ $\alpha\mu>\beta\mu$.

Πράγματι· ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $\alpha>\beta$· ἄρα κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν ἀνισοτήτων, θὰ εἶναι $\alpha-\beta>0$. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν θετικὸν ἀριθμὸν $(\alpha-\beta)$ ἐπὶ τὸν θετικὸν ἀριθμὸν μ, τὸ γινόμενον $(\alpha-\beta)\mu$ θὰ εἶναι προφανῶς θετικόν· δηλ. θὰ εἶναι :

$$(\alpha-\beta)\mu>0 \quad \text{ἢ} \quad \alpha\mu-\beta\mu>0$$

Ἐπειδὴ ἡ διαφορὰ $\alpha\mu-\beta\mu$ εἶναι θετική, θὰ εἶναι

$$\alpha\mu>\beta\mu$$

Τὸ θεώρημα εἶναι ἀληθὲς καὶ ὅταν διαιρέσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἀνισότητος διὰ τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ μ· διότι ἡ διαίρεσις διὰ μ ἀνάγεται εἰς πολλαπλασιασμὸν ἐπὶ τὸν θετικὸν ἀριθμὸν $\frac{1}{\mu}$.

Ὥστε: Ἐὰν εἶναι $\boxed{\alpha>\beta}$ καὶ $\mu>0$ θὰ εἶναι καὶ $\boxed{\alpha\mu>\beta\mu}$

Π.χ. Ἔστω ἡ ἀνισότης $18>12$.
Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη της ἐπὶ 2 θὰ ἔχωμεν

$$18.2>12.2 \quad \text{ἢ} \quad 36>24$$

Ἐὰν διαιρέσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη της διὰ 2 θὰ ἔχωμεν $9>6$.

95 **Θεώρημα III.** ***Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἢ διαιρέσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη μιᾶς ἀνισότητος ἐπὶ ἕνα ἀρνητικὸν ἀριθμόν, ἡ ἀνισότης ἀλλάσσει στροφήν.***

Ἔστω ἡ ἀνισότης $\alpha>\beta$

Ἐὰν $\mu<0$ θὰ ἔχωμεν $\alpha\mu<\beta\mu$.

Πράγματι, ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $\alpha>\beta$· ἄρα κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν ἀνισοτήτων θὰ εἶναι $\alpha-\beta>0$. (1) Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν θετικὸν ἀριθμὸν $(\alpha-\beta)$ ἐπὶ τὸν ἀρνητικὸν ἀριθμὸν μ, τὸ γινόμενον $(\alpha-\beta)\mu$ θὰ εἶναι ἀρνητικόν· δηλ. θὰ εἶναι

$$(\alpha-\beta)\mu<0 \quad \text{ἢ} \quad \alpha\mu-\beta\mu<0$$

Ἐπειδὴ ἡ διαφορὰ αμ—βμ εἶναι ἀρνητική, ὁ ἀριθμὸς αμ εἶναι μικρότερος τοῦ βμ· δηλ. θὰ εἶναι $\alpha\mu < \beta\mu$.

Τὸ θεώρημα εἶναι ἀληθὲς καὶ ἀποδεικνύεται ὁμοίως, ἐὰν διαιρέσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη μιᾶς ἀνισότητος διὰ τοῦ ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ μ· διότι ἡ διαίρεσις διὰ μ ἀνάγεται εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν ἐπὶ τὸν ἀρνητικὸν ἀριθμὸν $\frac{1}{\mu}$.

Ὥστε ἐὰν εἶναι $\boxed{\alpha > \beta}$ καὶ $\mu < 0$, θὰ εἶναι καὶ $\boxed{\alpha\mu < \beta\mu}$

Π.χ. Ἔστω ἡ ἀνισότης $30 > 24$.

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη της ἐπὶ —2 θὰ λάβωμεν τὴν ἀνισότητα

$$30 \cdot (-2) < 24 \cdot (-2) \quad ἢ \quad -60 < -48$$

Ἐὰν διαιρέσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη της διὰ —2 θὰ λάβωμεν

$$\frac{30}{-2} < \frac{24}{-2} \quad ἢ \quad -15 < -12$$

96. Πόρισμα. ***Ἐὰν ἀλλάξωμεν τὰ σημεῖα καὶ τῶν δύο μελῶν μιᾶς ἀνισότητος ἡ ἀνισότης ἀλλάσσει στροφήν.***

Διότι πολλαπλασιάζονται καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἀνισότητος ἐπὶ τὴν ἀρνητικὴν μονάδα —1.

Π.χ. Ἀπὸ τὴν ἀνισότητα $7 > 5$ λαμβάνομεν $-7 < -5$.

Ἀσκήσεις. *90.* Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἐὰν προσθέσωμεν δύο ἢ περισσοτέρας ὁμοιοστρόφους ἀνισότητας προκύπτει ὁμοιόστροφος ἀνισότης.

91. Ἐὰν εἶναι $\alpha > \beta$ καὶ $\gamma > \delta$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι θὰ εἶναι $\alpha - \delta > \beta - \gamma$.

92. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ἐὰν ὅλα τὰ μέλη πολλῶν ὁμοιοστρόφων ἀνισοτήτων εἶναι θετικά, δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἀνισότητας αὐτὰς καὶ νὰ λάβωμεν ὁμοιόστροφον ἀνισότητα

93. Ἐὰν εἶναι $\alpha > \beta$ καὶ $\gamma < \delta$ καὶ οἱ α, β, γ, δ εἶναι θετικοί, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι θὰ εἶναι $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\delta}$.

94. Ἐὰν εἶναι $\alpha > \beta$ θὰ εἶναι καὶ $\alpha^\nu > \beta^\nu$, ἐὰν οἱ α καὶ β εἶναι θετικοὶ καὶ ὁ ν εἶναι ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἀριθμός.

95. Ἐὰν τὰ μέλη μιᾶς ἀνισότητος εἶναι θετικοὶ ἀριθμοὶ καὶ τὰ ὑψώσωμεν εἰς τὴν αὐτὴν δύναμιν μὲ ἐκθέτην ἀρνητικόν, ἡ ἀνισότης γίνεται ἑτερόστροφος.

96. Ἐὰν εἶναι $\alpha > 1$ θὰ εἶναι $\alpha^\nu < 1$, ἂν $\nu < 0$ καὶ ἀκέραιος.

97. Ἐὰν εἶναι $0 < \alpha < 1$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha^\mu > 1$, ἂν $\mu < 0$ καὶ ἀκέραιος.

98. Ἐὰν $\alpha > 1$ θὰ εἶναι καὶ $\alpha^{-3} < \alpha^{-2} < \alpha^{-1} < \alpha^0 < \alpha < \alpha^2$.

99. Ἂν ὁ α εἶναι θετικὸς καὶ μικρότερος τῆς μονάδος θὰ εἶναι $\alpha^{-3} > \alpha^{-2} > \alpha^{-1} > \alpha^0 > \alpha > \alpha^2 \ldots$

ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

ΑΚΕΡΑΙΑΙ ΑΛΓΕΒΡΙΚΑΙ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

97. **Ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις.** ***Ἀλγεβρικὴ παράστασις λέγεται ἕνα σύνολον ἀριθμῶν καὶ γραμμάτων ἢ μόνον γραμμάτων, τὰ ὁποῖα συνδέονται μὲ τὰ σημεῖα τῶν πράξεων.***

Π. χ. αἱ $6\alpha^2\beta$, $2(\alpha+\beta)$ $\frac{\alpha+\beta}{2\gamma}$, $\frac{3}{4}x^2y\omega$, $\frac{\alpha\sqrt{\beta}}{3x}$ εἶναι ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις.

98. **Ρηταὶ καὶ ἄρρητοι παραστάσεις.** ***Μία ἀλγεβρικὴ παράστασις λέγεται ρητή, ὅταν κανένα γράμμα της δὲν εὑρίσκεται ὑπὸ ριζικόν· ἄλλως λέγεται ἄρρητος.***

Π. χ. αἱ παραστάσεις $3\alpha^2+\beta$, $\alpha^2\beta\sqrt{3}$, $\frac{4x^3y}{\omega}$ εἶναι ρηταί.

Αἱ παραστάσεις $\alpha\sqrt{\beta}$, $\alpha^2\beta\sqrt{3\gamma}$, εἶναι ἄρρητοι παραστάσεις.

Μία ἀλγεβρικὴ παράστασις λέγεται ***ρητὴ ὡς πρὸς ἕνα γράμμα,*** ὅταν τὸ γράμμα αὐτὸ δὲν κεῖται ὑπὸ τὸ ριζικόν.

Π. χ. ἡ παράστασις $\alpha\sqrt{\beta^2+\gamma}+\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4\beta}$ εἶναι ρητὴ ὡς πρὸς τὸ γράμμα α.

99. **Ἀκέραιαι καὶ κλασματικαὶ παραστάσεις.** ***Μία ἀλγεβρικὴ παράστασις λέγεται ἀκεραία, ὅταν δὲν περιέχει διαίρεσιν διὰ γράμματος· ἄλλως λέγεται κλασματική.***

Π. χ. αἱ παραστάσεις $4\alpha^2+\frac{\beta}{5}$, $\frac{4}{3}\pi R^3$, $\frac{8\alpha^2\beta}{15}$ εἶνε ἀκέραιαι.

Αἱ παραστάσεις $\frac{\alpha+\beta}{\gamma}$, $\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha\beta}$ εἶναι κλασματικαί.

Μία παράστασις λέγεται ***ἀκεραία ὡς πρὸς ἕνα γράμμα,*** ὅταν τὸ γράμμα αὐτὸ δὲν εἶναι παρονομαστής.

Π.χ. ἡ παράστασις $\frac{3\alpha\beta}{\gamma}+\frac{4\alpha^2x}{\beta}$ εἶναι ἀκεραία ὡς πρὸς τὸ γράμμα α.

Ἀσκήσεις. 100. Γράψατε: 1. Τρεῖς ρητὰς παραστάσεις. 2. Τρεῖς ἀρρήτους παραστάσεις. 3. Τρεῖς ἀκεραίας παραστάσεις. 4. Τρεῖς κλασματικὰς παραστάσεις. 5. Τρεῖς ἀκεραίας καὶ ἀρρήτους παραστάσεις.

100.* Μονώνυμα.** ***Μονώνυμον λέγεται ἡ παράστασις εἰς τὴν ὁποίαν δὲν σημειώνεται οὔτε πρόσθεσις οὔτε ἀφαίρεσις.

Π.χ. αἱ παραστάσεις $-6\alpha^2\beta$, $\frac{4}{3}\alpha\beta\sqrt{x}$, $\frac{3\alpha^2\beta}{\gamma\delta}$ εἶναι μονώνυμα.

Ἕνα μονώνυμον δύναται νὰ εἶναι ***ρητὸν*** ἢ ***ἄρρητον, ἀκέραιον*** ἢ ***κλασματικὸν*** ὡς πρὸς ἕνα γράμμα, ἢ πρὸς περισσότερα γράμματα ἢ ὡς πρὸς τὸ σύνολον τῶν γραμμάτων του.

Κατὰ τὸν ὁρισμόν, ἕνα μονώνυμον δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἕνα γινόμενον παραγόντων.

Π.χ. $10\alpha^2\beta^3\gamma = 10\cdot\alpha^2\cdot\beta^3\cdot\gamma$, $-\frac{5x^2y}{\omega^2} = -5\cdot x^2\cdot y\cdot\frac{1}{\omega^2}$

Εἰς κάθε μονώνυμον διακρίνομεν τὸ ***ἀριθμητικὸν μέρος του,*** δηλ. τὸν ἀριθμητικὸν παράγοντα καὶ τὸ ***ἐγγράμματον μέρος του.***

Ὁ ἀριθμητικὸς παράγων ἑνὸς μονωνύμου λέγεται ***συντελεστὴς τοῦ μονωνύμου.***

Π.χ. Τὸ μονώνυμον $-15\alpha^2\beta$ ἔχει συντελεστὴν τὸ -15 καὶ ἐγγράμματον μέρος τὸ $\alpha^2\beta$.

Ἐπίσης τὰ μονώνυμα

$$-\frac{5}{9}xy, \quad 3\alpha\sqrt{\beta}, \quad -4x^2y\omega, \quad -7\beta^2\gamma^3\delta$$

ἔχουν ὡς συντελεστὰς ἀντιστοίχως τοὺς

$$-\frac{5}{9}, \quad 3, \quad -4, \quad -7$$

Ὅταν ἕνα μονώνυμον δὲν ἔχῃ κανένα ἀριθμητικὸν παράγοντα, λαμβάνομεν ὡς συντελεστήν του τὸν $+1$ ἢ -1, καθόσον ἔμπροσθέν του ὑπάρχει τὸ σημεῖον $+$ ἢ τὸ $-$.

Π.χ. τὸ μονώνυμον $\alpha^3\beta^2$ ἔχει συντελεστὴν τὸ 1.
τὸ μονώνυμον $-\beta^2\gamma\delta$ ἔχει συντελεστὴν τὸ -1.

101.* Παρατηρήσεις.** I. Εἰς μερικὰς περιπτώσεις ἕνα ἀπὸ τὰ γράμματα ἑνὸς μονωνύμου θεωρεῖται ὡς ἄγνωστος καὶ τὰ ὑπόλοιπα γράμματά του ὡς γνωστοὶ ἀριθμοί. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, ὡς ***συντελεστὴν τοῦ μονωνύμου λαμβάνομεν ὅλον τὸ ἄλλο μέρος τοῦ μονωνύμου, ἐκτὸς τοῦ ἀγνώστου.

Π.χ. Ἐὰν εἰς τὸ μονώνυμον $5\alpha\beta x$ θεωρήσωμεν ὡς ἄγνωστον τὸ γράμμα x, ὁ συντελεστὴς τοῦ μονωνύμου αὐτοῦ εἶναι ὁ $5\alpha\beta$.

II. ***Δὲν πρέπει νὰ συγχέωμεν τὸν συντελεστὴν μὲ τὸν ἐκθέτην.***

Πράγματι: $4\alpha = \alpha+\alpha+\alpha+\alpha$
$\alpha^4 = \alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha$

Ἀσκήσεις. 101. Γράψατε: 1ον τρία ἀκέραια μονώνυμα, 2ον τρία κλασματικὰ μονώνυμα:

1. Ποῖοι εἶναι οἱ συντελεσταὶ τῶν κάτωθι μονωνύμων:

$$5\alpha^2x, \quad -\frac{2x^3y}{5}, \quad -3\alpha^2\beta^2x, \quad \frac{4\alpha^4\beta x^2}{5}, \quad \frac{3\alpha\beta y.}{5}$$

102 2. Ποῖοι εἶναι οἱ συντελεσταὶ τῶν ἀνωτέρω μονωνύμων, ἐὰν θεωρήσωμεν μόνον τὰ γράμματα x καὶ y ὡς ἀγνώστους.

102.* Βαθμὸς ἑνὸς μονωνύμου.** Ὁ ἐκθέτης ἑνὸς γράμματος ἑνὸς μονωνύμου ὁρίζει τὸν ***βαθμὸν τοῦ μονωνύμου ὡς πρὸς τὸ γράμμα αὐτό.

Π.χ. Τὸ μονώνυμον $4\alpha^2\beta^3\gamma$ εἶναι ***δευτέρου βαθμοῦ*** πρὸς τὸ γράμμα α, ***τρίτου βαθμοῦ*** πρὸς τὸ γράμμα β, καὶ ***πρώτου βαθμοῦ*** πρὸς τὸ γράμμα γ.

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν δύο ἢ περισσοτέρων γραμμάτων ἑνὸς μονωνύμου ὁρίζει τὸν ***βαθμὸν τοῦ μονωνύμου*** ὡς πρὸς τὰ γράμματα αὐτά.

Π.χ. Τὸ μονώνυμον $5\alpha^2\beta^3\gamma$ εἶναι ***πέμπτου βαθμοῦ*** ὡς πρὸς τὰ γράμματα α καὶ β, ***τρίτου βαθμοῦ*** ὡς πρὸς τὰ γράμματα α καὶ γ, καὶ ***ἕκτου βαθμοῦ*** ὡς πρὸς τὰ γράμματα α, β, γ.

Ἀσκήσεις. 103. Τίνος βαθμοῦ εἶναι τὰ κάτωθι μονώνυμα ὡς πρὸς α· ὡς πρὸς β· ὡς πρὸς γ· ὡς πρὸς β καὶ γ· ὡς πρὸς α,β,γ.

1. $5\alpha^2\beta$ 2. $-4\alpha^3\beta^2\gamma^4$ 3. $\frac{4}{5}\beta\gamma^2$, 4. $\alpha^4\beta\gamma$.

103.* Ὅμοια μονώνυμα.** ***Δύο ἢ περισσότερα μονώνυμα λέγονται ὅμοια, ἐὰν ἔχουν τὸ αὐτὸ ἐγγράμματον μέρος καὶ διαφέρουν (ἂν διαφέρουν) ***μόνον κατὰ τοὺς συντελεστάς των.***

Π.χ. Τὰ μονώνυμα $5\alpha^2\beta$, $-8\alpha^2\beta$, $\frac{4}{5}\alpha^2\beta$ εἶναι ὅμοια· ἔχουν τὸ αὐτὸ ἐγγράμματον μέρος $\alpha^2\beta$.

Ὁμοίως καὶ τὰ μονώνυμα $2\alpha x$, $-3\beta x$, $7x$, εἶναι ὅμοια ὡς πρὸς τὸ γράμμα x.

***104.* Ἄθροισμα ὁμοίων μονωνύμων.** Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ προσθέσωμεν τὰ ὅμοια μονώνυμα.

$$5\alpha^2\beta, \quad -2\alpha^2\beta, \quad 6\alpha^2\beta$$

Τὸ ἄθροισμά των σημειώνεται ὡς ἑξῆς:

$$(+5\alpha^2\beta)+(-2\alpha^2\beta)+(+6\alpha^2\beta)$$

ἢ ἁπλούστερον (§ 30) $5\alpha^2\beta-2\alpha^2\beta+6\alpha^2\beta$

Τὸ ἄθροισμα αὐτὸ περιλαμβάνει $(5-2+6)=9$ φορὰς τὴν κοινὴν τιμὴν $\alpha^2\beta$, δηλ. εἶναι ἴσον μὲ $9\alpha^2\beta$. Θὰ εἶναι λοιπόν·

$$5\alpha^2\beta-2\alpha^2\beta+6\alpha^2\beta=9\alpha^2\beta$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι: ***Τὸ ἄθροισμα ὁμοίων μονωνύμων εἶναι***

ἕνα μονώνυμον, ὅμοιον πρὸς τὰ δοθέντα καὶ τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς συντελεστὴν τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν συντελεστῶν των.

Π. χ. Τὸ ἄθροισμα τῶν ὁμοίων μονωνύμων

$$-7\alpha\beta^2x, \quad +10\alpha\beta^2x, \quad -12\alpha\beta^2x$$

εἶναι $-7\alpha\beta^2x+10\alpha\beta^2x-12\alpha\beta^2x=(-7+10-12)\alpha\beta^2x=-9\alpha\beta^2x$

Ὁμοίως τὸ ἄθροισμα τῶν ὁμοίων μονωνύμων

$$5\alpha^2\beta^3\gamma, \quad -\frac{3}{8}\alpha^2\beta^3\gamma, \quad -12\alpha^2\beta^3\gamma, \quad \frac{1}{4}\alpha^2\beta^3\gamma \quad \text{εἶναι}$$

$$5\alpha^2\beta^3\gamma-\frac{3}{8}\alpha^2\beta^3\gamma-12\alpha^2\beta^3\gamma+\frac{1}{4}\alpha^2\beta^3\gamma=\left(5-\frac{3}{8}-12+\frac{1}{4}\right)\alpha^2\beta^3\gamma$$
$$=-\frac{57}{8}\alpha^2\beta^3\gamma.$$

Ὁμοίως τὸ ἄθροισμα τῶν ὁμοίων μονωνύμων

$3\alpha x, \quad 4\beta x, \quad -5\gamma x,$ πρὸς τὸ γράμμα x, εἶναι

$$3\alpha x+4\beta x-5\gamma x=(3\alpha+4\beta-5\gamma)x.$$

Ἀσκήσεις. *104.* Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ὁμοίων μονωνύμων:

1. $-3x^2, \quad 5x^2, \quad +12x^2, \quad -20x^2$
2. $5\alpha^2\beta^2, \quad -\alpha^2\beta^2, \quad 7\alpha^2\beta^2, \quad -15\alpha^2\beta^2$
3. $-3x^2y \quad 5x^2y, \quad \frac{1}{4}x^2y, \quad -\frac{3}{4}x^2y$

105. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ὁμοίων μονωνύμων, πρὸς τὸ γράμμα x.

1. $-5\alpha x, \quad 2\alpha^2x, \quad -\beta x, \quad +\gamma x$
2. $2\lambda x^2, \quad -\mu x^2, \quad -2\nu x^2, \quad -x^2$
3. $-\alpha\beta x, \quad +5\beta\gamma x, \quad -7\alpha\gamma x, \quad +x$

105. Πολυώνυμα. ***Πολυώνυμον λέγεται μία ἀλγεβρικὴ παράστασις, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ πολλὰ μονώνυμα, τὰ ὁποῖα συνδέονται μεταξύ των μὲ τὰ σημεῖα τῆς προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως.***

Π. χ. ἡ παράστασις $2\alpha-3\alpha^2\beta+5\beta\delta$ εἶναι ἕνα πολυώνυμον.

Δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ἀκόμη, ὅτι:

Πολυώνυμον εἶναι ἕνα ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα μονωνύμων.

Καθένα ἀπὸ τὰ μονώνυμα, ποὺ ἀποτελοῦν ἕνα πολυώνυμον, λαμβανόμενον μὲ τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἔμπροσθέν του, λέγεται ***ὅρος τοῦ πολυωνύμου.***

Π. χ. Οἱ ὅροι τοῦ πολυωνύμου $4\alpha^3+5\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2+8\beta^3$ εἶναι οἱ $+4\alpha^3, \quad +5\alpha^2\beta, \quad -3\alpha^2\beta, \quad +8\beta^3$

Ἐὰν ἕνα πολυώνυμον ἔχει ***δύο ὅρους,*** λέγεται ***διώνυμον·*** ἐὰν ἔχῃ τρεῖς ὅρους λέγεται ***τριώνυμον.***

Π. χ. ἡ παράστασις $\alpha x+\beta$ εἶναι ἕνα διώνυμον
ἡ παράστασις $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ εἶναι ἕνα τριώνυμον.

Ἕνα πολυώνυμον λέγεται ***ἀκέραιον*** πολυώνυμον, ἐὰν ὅλοι οἱ ὅροι του εἶναι ἀκέραιοι.

Ἐπειδὴ ἕνα πολυώνυμον εἶναι ἄθροισμα μονωνύμων, δηλ. ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν, δυνάμεθα ***νὰ ἀλλάξωμεν τὴν τάξιν τῶν ὅρων του ἢ νὰ ἀντικαταστήσωμεν δύο ἢ περισσοτέρους ὅρους μὲ τὸ ἄθροισμά των.***

106. **Ἀναγωγὴ ὁμοίων ὅρων.** Ὅταν εἰς ἕνα πολυώνυμον ὑπάρχουν πολλὰ ὅμοια μονώνυμα, τὰ ἀντικαθιστῶμεν μὲ τὸ ἄθροισμά των, τὸ ὁποῖον γνωρίζομεν νὰ ὑπολογίζωμεν (§ 104).

Π. χ. Ἔστω τὸ πολυώνυμον

$$4\alpha^2\beta-5\beta\gamma+3\alpha^2\beta+8\alpha\beta^2-5\alpha^2\beta+12\beta\gamma$$

Εἰς τὸ πολυώνυμον αὐτὸ δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν τοὺς ὁμοίους ὅρους $4\alpha^2\beta$, $+3\alpha^2\beta$, $-5\alpha^2\beta$ μὲ τὸ ἄθροισμά των $(4\alpha^2\beta+3\alpha^2\beta-5\alpha^2\beta)=2\alpha^2\beta$ καὶ τοὺς ὁμοίους ὅρους $-5\beta\gamma$ καὶ $+12\beta\gamma$ μὲ τὸ ἄθροισμά των $(-5\beta\gamma+12\beta\gamma)=+7\beta\gamma$.

Μετὰ τὴν ἀντικατάστασιν αὐτὴν τὸ δοθὲν πολυώνυμον γίνεται

$$2\alpha^2\beta+7\beta\gamma+8\alpha\beta^2$$

Θὰ εἶναι λοιπὸν

$$4\alpha^2\beta-5\beta\gamma+3\alpha^2\beta+8\alpha\beta^2-5\alpha^2\beta+12\beta\gamma=2\alpha^2\beta+7\beta\gamma+8\alpha\beta^2$$

Ἡ ἀντικατάστασις πολλῶν ὁμοίων ὅρων δι' ἑνὸς λέγεται ***ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων.***

Ἀσκήσεις. 106. Νὰ γίνῃ ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων εἰς τὰ κάτωθι πολυώνυμα :

1. $3\alpha\beta^2+6\alpha^2\beta-\alpha\beta^2+5\alpha^2\beta-6\alpha\beta^2$ 3. $3x-5\beta x+5\beta-4\beta x-3\beta-x+\beta$

2. $5\alpha x-4\beta y-12\alpha x+9\beta y-\alpha x-\beta y$ 4. $9\alpha\beta\gamma^2-7\alpha^3\beta\gamma+2\alpha\beta^3\gamma+6\alpha^3\beta\gamma-5\alpha\beta\gamma^2$

107. Νὰ γίνῃ ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων εἰς τὰ κάτωθι πολυώνυμα :

1. $-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}x+3x-\frac{8}{3}x$ 2. $2\alpha-\frac{3}{4}\beta^2-\alpha+\frac{7}{8}\beta^2+4\beta^2$

107. **Βαθμὸς ἑνὸς πολυωνύμου.** ***Ὁ βαθμὸς*** **ἑνὸς ἀκεραίου πολυωνύμου ὡς πρὸς *ἕνα γράμμα του* ὁρίζεται ἀπὸ τὸν μεγαλύτερον ἐκθέτην τοῦ γράμματος αὐτοῦ εἰς τὸ πολυώνυμον.**

Π. χ. Τὸ πολυώνυμον $8\alpha^2x^4+5\alpha\beta^3x^2-6\alpha\beta x$ εἶναι τετάρτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x, τρίτου βαθμοῦ ὡς πρὸς β καὶ δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς α.

Ὁ βαθμὸς ἑνὸς ἀκεραίου πολυωνύμου ὡς πρὸς περισσότερα γράμματα ὁρίζεται ἀπὸ τὸ μεγαλύτερον ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν τῶν γραμμάτων αὐτῶν εἰς τὸν αὐτὸν ὅρον.

Ἔστω τὸ πολυώνυμον $5xy^2-6x^2y^4+2x^5y^2$.

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν τῶν x καὶ y εἶναι 3 εἰς τὸν πρῶτον ὅρον, 6 εἰς τὸν δεύτερον ὅρον καὶ 7 εἰς τὸν τρίτον ὅρον· ἑπομένως τὸ πολυώνυμον αὐτὸ εἶναι 7ου βαθμοῦ πρὸς x καὶ y.

Παρατήρησις. Διὰ νὰ καθορίσωμεν τὸν βαθμὸν ἑνὸς πολυωνύμου πρέπει προηγουμένως νὰ κάμωμεν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων του, ἐὰν ὑπάρχουν τοιοῦτοι.

Π.χ. Τὸ πολυώνυμον $3\alpha^5-12\alpha^3+2\alpha^5+4\alpha^2-5\alpha^5$ δὲν εἶναι τοῦ 5ου βαθμοῦ, ἀλλὰ τοῦ 3ου βαθμοῦ. Πράγματι· ἐὰν κάμωμεν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων του λαμβάνομεν τὸ πολυώνυμον $-12\alpha^3+4\alpha^2$.

Ἀσκήσεις. 108. Τίνος βαθμοῦ εἶναι τὰ κάτωθι πολυώνυμα;

1. $3x^2-4x^3y+5xy^2+x^3y$
2. $2y^5-4x^3y^3+11xy-8x^5$
3. $3xy^3-4x^3y^4+2x^3y+4x^2y^4+y^3-x^5$
4. $2\alpha x^5-\beta x^5+\beta x^2-2\alpha x^5+\beta x+\beta x^5$

108. **Ὁμογενῆ πολυώνυμα.** ***Ἕνα πολυώνυμον λέγεται ὁμογενὲς πρὸς ἕνα γράμμα ἢ πρὸς περισσότερα γράμματα, ὅταν ὅλοι οἱ ὅροι του εἶναι τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ, εἴτε πρὸς τὸ ἐξεταζόμενον γράμμα, εἴτε πρὸς τὰ δοθέντα γράμματα.***

Π. χ. Τὸ πολυώνυμον $3\alpha x^4-7\alpha\beta x^4+9x^4$ εἶναι ἕνα ὁμογενὲς πολυώνυμον τοῦ τετάρτου βαθμοῦ πρὸς x.

Τὸ πολυώνυμον $3\alpha^5+4\alpha^4\beta-7\alpha^3\beta^2-\alpha^2\beta^3$ εἶναι ἕνα ὁμογενὲς πολυώνυμον τοῦ πέμπτου βαθμοῦ πρὸς τὰ γράμματα α καὶ β.

Ὁ βαθμὸς ἑνὸς ὁμογενοῦς πολυωνύμου λέγεται ***βαθμὸς ὁμογενείας.***

Ἀσκήσεις. 109. Γράψατε τρία πολυώνυμα ὁμογενῆ πρὸς τὰ γράμματα x καὶ y.

109. **Διατεταγμένα πολυώνυμα.** Λέγομεν, ὅτι ἕνα ἀκέραιον πολυώνυμον εἶναι ***διατεταγμένον κατὰ τὰς ἀνιούσας*** (ἢ κατὰ τὰς ***κατιούσας***) δυνάμεις ἑνὸς γράμματος, ἐὰν οἱ ὅροι τοῦ πολυωνύμου εἶναι γραμμένοι κατὰ τοιαύτην σειράν, ὥστε οἱ ἐκθέται τοῦ γράμματος αὐτοῦ νὰ βαίνουν αὐξανόμενοι (ἢ ἐλαττούμενοι) ἀπὸ τοῦ πρώτου ὅρου πρὸς τὸν τελευταῖον.

Π. χ. Τὸ ἀκέραιον πολυώνυμον $5\alpha x^4-6\alpha^2x+3\alpha\beta+2x^5$ διατεταγμένον κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ γράμματος x γράφεται

$$2x^5+5\alpha x^4-6\alpha^2x+3\alpha\beta$$

καὶ διατεταγμένον κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ x γράφεται

$$3\alpha\beta-6\alpha^2x+5\alpha x^4+2x^5$$

Ὁ ὅρος $3\alpha\beta$, ὁ ὁποῖος δὲν περιέχει τὸ ***γράμμα τῆς διατάξεως*** x λέγεται ***ἀνεξάρτητος ὅρος*** ἢ ***βαθμοῦ μηδὲν*** πρὸς τὸ γράμμα x ἢ καὶ ***σταθερὸς ὅρος.***

Ἕνα ὁμογενὲς πολυώνυμον, ὅπως τὸ

$$5\alpha^5-4\alpha^4\beta-3\alpha^3\beta^2+9\alpha^2\beta^3+\alpha\beta^4-\beta^5$$

εἶναι διατεταγμένον κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ γράμματος α καὶ κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ γράμματος β.

Ἀσκήσεις. *110*. Νὰ γίνῃ ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων καὶ νὰ διαταχθοῦν τὰ κάτωθι πολυώνυμα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ x.

1. $9x+4x^2-10+2x-5x^3+1+8x^3$
2. $4y^4+6x^2y^2-7x^3-2x^2y^2-6y^4+4x^3y-9xy^3$
3. $2\alpha^4x+5\beta^2x^3-6\alpha^5-5\alpha^4x+\alpha^2x^3+2x^5-\alpha^3x-4\alpha x^4$

111. Νὰ γίνῃ ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων καὶ νὰ διαταχθοῦν τὰ κάτωθι πολυώνυμα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ x.

1. $15x^4-4\alpha^4+3\alpha^3x-2\alpha^2x^2+11\alpha x^3-14\alpha^2x^2+5\alpha x^3$
2. $5x^3-4xy^2+7x^2y+8x^3+6xy^2+xy^2-y^3$

112. Νὰ γίνῃ ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων καὶ νὰ διαταχθοῦν τὰ κάτωθι πολυώνυμα: 1ον. Κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ α καὶ 2ον. Κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ β.

1. $8\alpha^3-5\alpha\beta\gamma+6\alpha\beta\gamma+3\alpha\beta\gamma-4\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-5\beta^3+6\alpha^2\beta$
2. $-10\alpha^2\beta^3-4\alpha^5+2\beta^5-18\beta^2\alpha^3+\beta^3\alpha^2-9\alpha^3\beta^2-\alpha^4\beta-3\alpha\beta^4+7\alpha^5$.

110. **Πλήρη πολυώνυμα.** Ἕνα πολυώνυμον, τὸ ὁποῖον εἶναι διατεταγμένον ὡς πρὸς ἕνα γράμμα, λέγεται ***πλῆρες***, ὅταν περιέχῃ ὅρους ὅλων τῶν βαθμῶν, ὡς πρὸς τὸ γράμμα τῆς διατάξεως.

Π.χ. Τὸ πολυώνυμον $5\alpha x^3+3\beta x^2-x+8$, τὸ ὁποῖον εἶναι διατεταγμένον κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ γράμματος x, εἶναι πλῆρες· ὁ τελευταῖος ὅρος του 8 λέγεται σταθερὸς ὅρος καὶ εἶναι βαθμοῦ μηδὲν ὡς πρὸς τὸ γράμμα x, διότι (§ 86 1ον) $8x^0=8\cdot 1=8$.

Τὸ πολυώνυμον $8x^5-7\alpha x^2+6x-2$ εἶναι ***ἐλλιπὲς*** πολυώνυμον πρὸς τὸ γράμμα x, διότι λείπουν οἱ ὅροι τοῦ 4ου καὶ 3ου βαθμοῦ.

Δυνάμεθα πάντοτε νὰ συμπληρώσωμεν ἕνα ἐλλιπὲς πολυώνυμον, ἐὰν εἰσαγάγωμεν εἰς αὐτὸ τοὺς ὅρους, ποὺ λείπουν μὲ συντελεστὴν μηδέν.

Π.χ. Τὸ προηγούμενον πολυώνυμον δύναται νὰ γραφῇ:

$$8x^5+0x^4+0x^3-7\alpha x^2+6x-2$$

111. **Ἀριθμητικὴ τιμὴ μιᾶς ἀλγεβρικῆς παραστάσεως**. Ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ μιᾶς ἀλγεβρικῆς παραστάσεως εὑρίσκεται, ὅπως καὶ ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ ἑνὸς τύπου (§ 8).

Π.χ. Ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς παραστάσεως $4\alpha^2-5\alpha\beta+3\beta^2$ διὰ $\alpha=3$ καὶ $\beta=2$ εἶναι

$$\begin{aligned} 4\alpha^2-5\alpha\beta+3\beta^2 &= 4\cdot 3^2-5\cdot 3\cdot 2+3\cdot 2^2 \\ &= 4\cdot 9-5\cdot 3\cdot 2+3\cdot 4 \\ &= 36-30+12=18. \end{aligned}$$

Ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς παραστάσεως $(5x^2-3xy)(x^3+y^2)$ διὰ $x=-2$, $y=4$ εἶναι

$$\begin{aligned} (5x^2-3xy)(x^3+y^2) &= [5\cdot(-2)^2-3\cdot(-2)\cdot 4]\cdot[(-2)^3+4^2] \\ &= [5\cdot 4-3\cdot(-2)\cdot 4]\cdot[(-8)+16) \\ &= (20+24)\cdot(+8) \\ &= 44\cdot 8=352 \end{aligned}$$

Ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς παραστάσεως $x=3\sqrt{\alpha^2-\beta^2}+\frac{4\alpha(2\beta-\alpha)}{2}$

διὰ $\alpha=5$, $\beta=3$ εἶναι

$$x=3\cdot\sqrt{5^2-3^2}+\frac{4\cdot5(2\cdot3-5)}{2}$$
$$=3\cdot\sqrt{16}\quad+\frac{4\cdot5\cdot1}{2}$$
$$=3\cdot4\quad+10=12+10=22$$

112. **Ἰσοδύναμοι ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις.** ***Δύο ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις λέγονται ἰσοδύναμοι, ὅταν λαμβάνουν τὴν αὐτὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν διὰ τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν γραμμάτων των.***

Π.χ. αἱ παραστάσεις $\alpha(\beta+\gamma)$ καὶ $\alpha\beta+\alpha\gamma$ εἶναι ἰσοδύναμοι.

Πράγματι· ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς πρώτης παραστάσεως διὰ

$\alpha=2$, $\beta=3$, $\gamma=5$ εἶναι $2(3+5)=2\cdot8=16$.

Ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς δευτέρας παραστάσεως διὰ τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν γραμμάτων α, β, γ, δηλ.

διὰ $\alpha=2$, $\beta=3$, $\gamma=5$ εἶναι $2\cdot3+2\cdot5=6+10=16$.

113. **Ταυτότης.** ***Ταυτότης λέγεται ἡ ἰσότης δύο ἰσοδυνάμων ἀλγεβρικῶν παραστάσεων.***

Π.χ. Ἡ ἰσότης $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$ εἶναι μία ταυτότης, διότι αἱ παραστάσεις $\alpha(\beta+\gamma)$ καὶ $\alpha\beta+\alpha\gamma$ εἶναι ἰσοδύναμοι, ὅπως ἐδείχθη ἀνωτέρω.

Συνήθως διὰ νὰ δείξωμεν, ὅτι μία ἰσότης εἶναι μία ταυτότης, ἀντικαθιστῶμεν τὸ σημεῖον τῆς ἰσότητος $=$ μὲ τὸ σημεῖον $\equiv$

Π.χ. γράφομεν $\alpha(\beta+\gamma)\equiv\alpha\beta+\alpha\gamma$, $\alpha+\beta\equiv\beta+\alpha$

Ἀσκήσεις. 113. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῶν κάτωθι παραστάσεων:

1. $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ ἐὰν $\alpha=-8$, $\beta=3$
2. $\alpha^2\beta^3-4\alpha^2\gamma+4\alpha^3\beta$, ἐὰν $\alpha=2$, $\beta=4$, $\gamma=-5$
3. $\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$, ἐὰν $\alpha=-2$, $\beta=3$
4. $\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$, ἐὰν $\alpha=10$, $\beta=-1$
5. $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha\beta+2\alpha\gamma-2\beta\gamma$ ἐὰν $\alpha=5$, $\beta=3$, $\gamma=3$

114. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῶν κάτωθι πολυωνύμων:

1. $(2\alpha-\beta)^2-(3\beta-\alpha^2)$, ἐὰν $\alpha=-1$, $\beta=-2$
2. $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)-(\alpha^2-\beta^2)$, ἐὰν $\alpha=7$, $\beta=-3$
3. $(\alpha+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2-\alpha\beta$, ἐὰν $\alpha=5$, $\beta=-4$
4. $(\alpha+\beta)^3-(\alpha-\beta)^3+\alpha^3-\beta^3$, ἐὰν $\alpha=6$, $\beta=-3$
5. $x(y+\omega)^2+y(\omega+x)^2+\omega(x+y)^2$ ἐὰν $x=3$, $y=-2$, $\omega=1$

115. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῶν κάτωθι πολυωνύμων:

1. $\frac{\alpha^2}{4}-\frac{\alpha\beta}{3}+\frac{\beta^2}{9}$ ἐὰν $\alpha=\frac{1}{3}$, $\beta=\frac{1}{2}$
2. $\frac{5\alpha^2\beta}{2}-\frac{8\alpha\beta^2}{9}+\frac{\alpha^2\beta^2}{2}$ ἐὰν $\alpha=\frac{2}{3}$, $\beta=\frac{4}{3}$

116. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῶν κάτωθι παραστάσεων :

1. $\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$, ἐὰν $\alpha=35,\ \beta=28,\ \gamma=21,\ \tau=42$
2. $\frac{1}{3}\upsilon\left(B+\beta+\sqrt{\beta B}\right)$, ἐὰν $\upsilon=5,\ \beta=49,\ B=144$
3. $\frac{1}{3}\pi\left(A^2+\alpha^2+A\alpha\right)\upsilon$, ἐὰν $\alpha=3{,}2,\ A=5,\ \upsilon=6,\ \pi=3{,}14$

117. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀριθμητικὴ τῶν κάτωθι παραστάσεων :

1. $\frac{1}{(\alpha+\beta)^2}\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}\right)+\frac{2}{(\alpha+\beta)^2}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$ ἐὰν $\alpha=-2,\ \beta=5$
2. $\frac{\alpha(\beta-\gamma)^2}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{\beta(\gamma-\alpha)^2}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}+\frac{\gamma(\alpha-\beta)^2}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$ ἐὰν $\alpha=3,\ \beta=2,\ \gamma=-1$

118. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῶν κάτωθι παραστάσεων :

1. $\dfrac{x^2+\dfrac{1}{x}}{x+\dfrac{1}{x}-1}$ ἐὰν $x=-4$ · 2. $\dfrac{x-\dfrac{x-1}{x+1}}{1+\dfrac{x(x-1)}{x+1}}$ ἐὰν $x=\frac{1}{2}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β
ΑΛΓΕΒΡΙΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ

***114*. Ἀλγεβρικὸς λογισμός.** Ὅπως ἐπὶ τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν διαφόρους πράξεις, πρόσθεσιν, ἀφαίρεσιν, πολλαπλασιασμόν, διαίρεσιν κλπ., οὕτω καὶ ἐπὶ τῶν ἀλγεβρικῶν παραστάσεων δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν τὰς αὐτὰς πράξεις.

Ἐπειδὴ ὅμως αἱ ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις περιέχουν γράμματα, δὲν δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν τὰς πράξεις αὐτάς, ὅπως εἰς τὴν Ἀριθμητικήν, καὶ νὰ εὕρωμεν ἕνα ἀριθμητικὸν ἐξαγόμενον. Δυνάμεθα ὅμως μὲ τὴν βοήθειαν τῶν ἰδιοτήτων τῶν πράξεων, νὰ μετασχηματίσωμεν μίαν ἀλγεβρικὴν παράστασιν εἰς ἄλλην ἰσοδύναμον καὶ ἁπλουστέραν, δηλ. νὰ κάμωμεν μίαν ***ἀλγεβρικὴν πρᾶξιν.***

Τὸ σύνολον τῶν ἀλγεβρικῶν πράξεων λέγεται ἀλγεβρικὸς λογισμός.

Οἱ κανόνες τῶν πράξεων, τοὺς ὁποίους ἐγνωρίσαμεν εἰς τοὺς ἀλγεβρικοὺς ἀριθμοὺς μένουν οἱ αὐτοὶ καὶ διὰ τὰς ἀλγεβρικὰς παραστάσεις, διότι εἰς τὰς παραστάσεις τὰ γράμματα παριστάνουν ἀριθμούς.

***115*. Γενικὸς ὁρισμός.** Ἐκτελῶ μίαν πρᾶξιν : πρόσθεσιν, ἀφαίρεσιν, πολλαπλασιασμόν, διαίρεσιν, ὕψωσιν εἰς μίαν δύναμιν, ἐξαγωγὴν μιᾶς ρίζης, ἐπὶ τῶν μονωνύμων ἢ τῶν πολυωνύμων Α καὶ Β, σημαίνει, ἐξ ὁρισμοῦ, ὅτι εὑρίσκω ἕνα μονώνυμον ἢ ἕνα πολυώνυμον

Π, τὸ ὁποῖον νὰ εἶναι ἀντιστοίχως ἰσοδύναμον μὲ τὸ ἄθροισμα, μὲ τὴν διαφοράν, μὲ τὸ γινόμενον, μὲ τὸ πηλίκον, μὲ τὴν δύναμιν ἢ μὲ τὴν ρίζαν τῶν δοθέντων πολυωνύμων Α καὶ Β.

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

116. **Πρόσθεσις μονωνύμων.** ***Τὸ ἄθροισμα πολλῶν μονωνύμων εἶναι ἕνα πολυώνυμον, τὸ ὁποῖον περιέχει ὅλα τὰ δοθέντα μονώνυμα μὲ τὰ σημεῖα των.***

Π. χ. Τὸ ἄθροισμα τῶν μονωνύμων

$$A=3\alpha^2\beta, \quad B=-5\alpha\beta^2, \quad \Gamma=\frac{4}{5}\alpha\beta\gamma$$

εἶναι τὸ πολυώνυμον

$$\Pi=A+B+\Gamma=3\alpha^2\beta-5\alpha\beta^2+\frac{4}{5}\alpha\beta\gamma$$

Δυνάμεθα νὰ ἐπαληθεύσωμεν εὐκόλως, ὅτι διὰ κάθε σύστημα τιμῶν, τὰς ὁποίας θὰ δώσωμεν εἰς τὰ γράμματα τῶν μονωνύμων, τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμητικῶν τιμῶν ἑκάστου μονωνύμου εἶναι ἴσον μὲ τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν τοῦ πολυωνύμου.

Ὥστε διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὸ ἄθροισμα πολλῶν μονωνύμων, ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν τὸ ἕνα μονώνυμον κατόπιν τοῦ ἄλλου μὲ τὰ σημεῖα των.

Εἶναι φανερόν, ὅτι πρέπει πάντοτε νὰ κάμνωμεν τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων τοῦ πολυωνύμου, ἐὰν ὑπάρχουν τοιοῦτοι.

Π.χ. Τὸ ἄθροισμα τῶν μονωνύμων

$$-5x^2y, \quad -4xy^2, \quad +8x^2y$$

εἶναι τὸ πολυώνυμον $-5x^2y-4xy^2+8x^2y$

Μετὰ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων του αὐτὸ εἶναι ἴσον μὲ

$$3x^2y-4xy^2$$

117. **Πῶς προσθέτομεν πολυώνυμα;** Ἔστω, ὅτι ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν τὰ πολυώνυμα

$$A=6\alpha^2-4\alpha\beta+8\beta^2+2, \quad B=-9\alpha\beta+4\alpha^2-12, \quad \Gamma=\beta^2-7\alpha^2+4$$

Τὸ ἄθροισμα τῶν πολυωνύμων αὐτῶν σημειώνεται :

$$A+B+\Gamma=(6\alpha^2-4\alpha\beta+8\beta^2+2)+(-9\alpha\beta+4\alpha^2-12)+(\beta^2-7\alpha^2+4)$$

Κατὰ τὴν § 39 πρέπει νὰ γράψωμεν δεξιὰ τοῦ πρώτου πολυωνύμου τοὺς ὅρους τοῦ δευτέρου πολυωνύμου μὲ τὰ σημεῖα των καὶ οὕτω καθεξῆς. Θὰ εἶναι λοιπόν :

$$A+B+\Gamma=6\alpha^2-4\alpha\beta+8\beta^2+2-9\alpha\beta+4\alpha^2-12+\beta^2-7\alpha^2+4$$

Κάμνομεν τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων καὶ εὑρίσκομεν τελικῶς, ὅτι :

$$A+B+\Gamma=3\alpha^2-13\alpha\beta+9\beta^2-6$$

Εἶναι φανερόν, ὅτι διὰ κάθε σύστημα τιμῶν, τὰς ὁποίας δίδομεν εἰς τὰ γράμματα τῶν πολυωνύμων, τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμητικῶν τιμῶν τῶν δοθέντων πολυωνύμων εἶναι ἴσον μὲ τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν τοῦ εὑρεθέντος πολυωνύμου.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν κάτωθι κανόνα:

Κανών. ***Διὰ νὰ προσθέσωμεν πολλὰ πολυώνυμα σχηματίζομεν ἕνα πολυώνυμον, τὸ ὁποῖον περιέχει ὅλους τοὺς ὅρους τῶν πολυωνύμων μὲ τὰ σημεῖα των καὶ κάμνομεν ἔπειτα τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων, ἐὰν ὑπάρχουν τοιοῦτοι.***

Παρατήρησις. Εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν πολυωνύμων δυνάμεθα, διὰ νὰ γίνεται εὐκολώτερον ἡ ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων, νὰ ***γράφωμεν τὸ ἕνα πολυώνυμον κάτωθι τοῦ ἄλλου*** οὕτως, ὥστε οἱ ὅμοιοι ὅροι των νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην.

Π.χ. Διὰ νὰ προσθέσωμεν τὰ πολυώνυμα

$A=3x^2+2y^2-5xy+8,\quad B=5y^2-12-7x^2$ καὶ $\Gamma=x^2+xy-15$

δυνάμεθα νὰ γράψωμεν

$$\begin{array}{rl} A= & 3x^2-5xy+2y^2+8 \\ B= & -7x^2 \qquad\quad +5y^2-12 \\ \Gamma= & x^2+xy \qquad\quad -15 \\ \hline A+B+\Gamma= & -3x^2-4xy+7y^2-19 \end{array}$$

Ἀσκήσεις. Α' Ὁμάς. 119. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἀθροίσματα τῶν κάτωθι πολυωνύμων:

1. $3\alpha+4\beta-\gamma-\delta$ καὶ $-5\alpha+3\beta+2\gamma+3\delta$
2. $2\beta+6\gamma-4\alpha$ καὶ $-3\alpha+\beta-5\gamma$
3. $4\alpha\beta-6\alpha\gamma+5\beta\gamma$ καὶ $\alpha\gamma-5\alpha\beta-3\beta\gamma$
4. $5\alpha^2\beta+4\alpha\beta^2-\beta^3$ καὶ $3\beta^3-5\alpha^2\beta-5\alpha\beta^2$

120. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἀθροίσματα τῶν κάτωθι πολυωνύμων:

1. $3\alpha-4\beta,\quad 4\alpha-2\beta,\quad 7\alpha+8\beta,\quad 3\beta-6\alpha$
2. $4x^2-5y^2,\quad 2x^2+7y^2,\quad -9x^2+6y^2,\quad x^2+y^2$
3. $x^3-2x^2y+4yx^2,\quad -3x^2y-xy^2-y^3,\quad x^3+4y^3$

121. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἀθροίσματα τῶν κάτωθι πολυωνύμων:

1. $\dfrac{3\alpha^2}{4}-\dfrac{2\alpha^2\beta}{3},\quad \dfrac{3\alpha^2}{5}+\alpha^2\beta,\quad \dfrac{\alpha\beta^2}{2}-\dfrac{\alpha^2\beta}{4}$
2. $-\dfrac{2}{5}x^2-4xy+y^2-\dfrac{1}{2}x+3y-1,\quad 3x^2-5xy+\dfrac{y^2}{3}-\dfrac{1}{4},$

$$\frac{2}{3}xy-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}x-\frac{1}{4}y+\frac{1}{2}$$

Β' Ὁμάς. 122. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα: **1ον.** Τριῶν διαδοχικῶν ἀριθμῶν. **2ον.** Τριῶν διαδοχικῶν περιττῶν ἀριθμῶν. **3ον.** Τριῶν διαδοχικῶν ἀρτίων ἀριθμῶν.

123. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις καὶ νὰ γίνῃ ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων:

1. $(4\alpha^2x-\alpha\beta+4\beta^2x^3)+(3\alpha\beta x^2+\beta^2x-3\alpha\beta)+(-7\alpha^2x+5\beta^2x^3-6\alpha\beta x^2)$
2. $(3x^{\mu}y-2x^{\mu-1}y^2+5x^{\mu-2}y^3-7x^{\mu-\nu})+(-x^{\mu-1}y^2-10x^{\mu-3}y^5)+$
$+(9x^{\mu}y-10x^{\mu-3}y^5+x^{\mu-1}y^2-2x^{\mu-\nu})$

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

118. **Ὁρισμός.** ***Ἀφαιρῶ μίαν ἀλγεβρικὴν παράστασιν Β ἀπὸ μίαν ἄλλην παράστασιν Α, σημαίνει, ὅτι εὑρίσκω μίαν τρίτην ἀλγεβρικὴν παράστασιν Δ τοιαύτην, ὥστε Δ=Α—Β.***

119. **Πῶς ἀφαιροῦμεν μονώνυμα;** Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ μονώνυμον $-7\alpha\beta^2$ ἀπὸ τὸ μονώνυμον $4\alpha^2\beta\gamma$· δηλ. ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν $4\alpha^2\beta\gamma-(-7\alpha\beta^2)$.

Κατὰ τὸν κανόνα τῆς § 32 πρέπει εἰς τὸν μειωτέον $4\alpha^2\beta\gamma$ νὰ προσθέσωμεν τὸν ἀντίθετον τοῦ ἀφαιρετέου· δηλ. θὰ εἶναι

$$4\alpha^2\beta\gamma-(-7\alpha\beta^2)=4\alpha^2\beta\gamma+7\alpha\beta^2$$

Εἶναι φανερόν, ὅτι διὰ κάθε σύστημα τιμῶν, τὰς ὁποίας δίδομεν εἰς τὰ γράμματα τῶν μονωνύμων, ἡ διαφορὰ τῶν ἀριθμητικῶν τιμῶν τῶν μονωνύμων $4\alpha^2\beta\gamma$ καὶ $-7\alpha\beta^2$ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν τοῦ διωνύμου $4\alpha^2\beta\gamma+7\alpha\beta^2$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι

$$\begin{aligned}-8\alpha x^2-(+5\alpha x^2)&=-8\alpha x^2-5\alpha x^2\\&=-13\alpha x^2\end{aligned}$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι :

Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἕνα μονώνυμον Β ἀπὸ ἕνα ἄλλο Α, ἀρκεῖ νὰ θέσωμεν τὸ μονώνυμον Β πλησίον τοῦ Α μὲ ἀλλαγμένον τὸ σημεῖον του.

120. **Πῶς ἀφαιροῦμεν πολυώνυμον ἀπὸ ἄλλο πολυώνυμον;** Ἔστω, ὅτι θέλωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ πολυώνυμον $B=-5\alpha+4\beta-\gamma$ ἀπὸ τὸ πολυώνυμον $A=7\alpha-9\beta+4\gamma$, δηλαδὴ ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν

$$A-B=(7\alpha-9\beta+4\gamma)-(-5\alpha+4\beta-\gamma)$$

Κατὰ τὸν κανόνα τῆς § 42 πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸ πρῶτον πολυώνυμον τὸ ἀντίθετον τοῦ δευτέρου· θὰ εἶναι λοιπὸν

$$\begin{aligned}A-B&=(7\alpha-9\beta+4\gamma)-(-5\alpha+4\beta-\gamma)\\&=(7\alpha-9\beta+4\gamma)+(+5\alpha-4\beta+\gamma)\\&=7\alpha-9\beta+4\gamma+5\alpha-4\beta+\gamma\\&=12\alpha-13\beta+5\gamma\end{aligned}$$ μετὰ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων.

Κανών. ***Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἕνα πολυώνυμον Β ἀπὸ ἕνα ἄλλο πολυώνυμον Α, γράφομεν δεξιὰ τοῦ πολυωνύμου Α τοὺς ὅρους τοῦ πολυωνύμου Β μὲ ἀλλαγμένα τὰ σημεῖα των καὶ κά-***

μνομεν ἔπειτα τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων, ἐὰν ὑπάρχουν τοιοῦτοι.

121. **Παρατήρησις.** Κατὰ τὴν ἀφαίρεσιν τῶν πολυωνύμων δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τὸ πολυώνυμον τοῦ ἀφαιρετέου κάτωθι τοῦ πολυωνύμου τοῦ μειωτέου, οὕτως ὥστε οἱ ὅμοιοι ὅροι νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην.

Π.χ. Ἔστω, ὅτι θέλωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ πολυώνυμον $B=3x^4-8x^2-x+8$ ἀπὸ τὸ πολυώνυμον $A=5x^4+2x^3+6x^2-5x+1$

Ἀλλάσσομεν τὰ σημεῖα τῶν ὅρων τοῦ πολυωνύμου τοῦ ἀφαιρετέου καὶ γράφομεν

$$\begin{array}{rl} A= & 5x^4+2x^3+6x^2-5x+1 \\ -B= & -3x^4 \qquad +8x^2+x-8 \\ \hline A-B= & 2x^4+2x^3+14x^2-4x-7 \end{array}$$

Γενικῶς :

Ἔστω, ὅτι εἶναι
$$A=3\alpha^3+7\alpha^2\beta-5\alpha\beta^2+\beta^3$$
$$B=5\beta^3+6\alpha\beta^2+5\alpha^3$$
$$\Gamma=-7\alpha\beta^2+8\alpha^2\beta-\alpha^3-\beta^3$$
καί, ὅτι ζητεῖται νὰ ὑπολογισθῇ ἡ παράστασις $\Pi=A-B-\Gamma$.

Διὰ νὰ κάμωμεν τὸν ὑπολογισμὸν αὐτόν, πρέπει νὰ γράψωμεν τὰ δοθέντα πολυώνυμα, τὸ ἕνα κάτωθι τοῦ ἄλλου οὕτως, ὥστε οἱ ὅμοιοι ὅροι νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην, ἀφοῦ προηγουμένως ἀλλάξωμεν ὅλα τὰ σημεῖα τῶν ὅρων τῶν πολυωνύμων B καὶ Γ· ἔπειτα ὑπολογίζομεν τὸ ἄθροισμα

$$\Pi=A+(-B)+(-\Gamma)$$

Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν

$$\begin{array}{rl} A= & 3\alpha^3+7\alpha^2\beta-5\alpha\beta^2+\beta^3 \\ -B= & -5\alpha^3 \qquad -6\alpha\beta^2-5\beta^3 \\ -\Gamma= & +\alpha^3-8\alpha^2\beta+7\alpha\beta^2+\beta^3 \\ \hline A-B-\Gamma= & -\alpha^3-\alpha^2\beta-4\alpha\beta^2-3\beta^3 \end{array}$$

Ἀσκήσεις. 124. Προφορικῶς. Νὰ ἀφαιρεθῇ :

1.	τὸ	$-3\alpha^2$	ἀπὸ τὸ	α^2	4.	ἀπὸ τὸ	$3\alpha\beta$	τὸ	$-5\alpha\beta$
2.	»	$5y$	»	$-8y$	5.	»	$-9\alpha^2\gamma$	»	$6\alpha^2\gamma$
3.	»	$3\alpha\beta$	»	0	6.	»	$-10\beta\gamma^2$	»	$-9\beta\gamma^2$

125. Νὰ ἀφαιρεθῇ :

1.	τὸ	$3\alpha^2-2\beta^2$	ἀπὸ τὸ	$\alpha^2+\beta^2$
2.	»	$-3\mu^2+2\nu^2+\mu\nu$	»	$-4\mu^2+2\nu^2-3\mu\nu$
3.	»	$\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$	»	$\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$

126. Νὰ ἀφαιρεθῇ :

τὸ $\frac{1}{4}\alpha^2\beta^2-3\alpha\beta^3+7\beta$ ἀπὸ τὸ $\frac{1}{2}\alpha^2\beta^2+3\alpha\beta^3+7\beta$

2. » $\frac{2}{3}x^2y-\frac{1}{4}xy^2-\frac{5}{8}y^2$ » $\frac{1}{3}x^2y+\frac{1}{2}xy^2+\frac{2}{3}y^2$

127. Τί πρέπει νὰ προσθέσωμεν :

1.	εἰς τὸ	$4\alpha+\beta$	διὰ νὰ λάβωμεν	4α
2.	»	$x^2+\beta x+\gamma$	»	$3x^2+\beta x$
3.	»	$\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$	»	$-2\alpha\beta$

128. Νὰ προστεθοῦν τὰ πολυώνυμα :

$$3x^2-5xy+4y^2 \quad \text{καὶ} \quad 5x^2+6xy-7y^2$$

καὶ ἀπὸ τὸ ἄθροισμά των νὰ ἀφαιρεθῇ :

1. $3xy-y^2+x^2$ 2. $2y^2+3x^2+7xy$

129. 'Από τὸ πολυώνυμον $\Pi=6\alpha^2-5\alpha\gamma-3\gamma^2+4\beta\gamma+3\beta^2-\alpha\beta$ νὰ ἀφαιρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν πολυωνύμων

$$A=3\beta^2-\alpha^2+4\gamma^2-3\beta\gamma+2\alpha\beta \quad \text{καὶ} \quad B=3\alpha^2+2\beta^2-5\beta\gamma+\alpha\gamma-\alpha\beta+\gamma^2$$

***122.* Πῶς ἀπαλείφομεν παρενθέσεις καὶ ἀγκύλας ;** Εἰς τὴν Ἄλγεβραν συναντῶμεν συνήθως ἀλγεβρικὰς παραστάσεις, αἵ ὁποῖαι περικλείονται ὑπὸ παρενθέσεων καὶ ἀγκυλῶν ἢ καὶ ἑνωτικῶν γραμμῶν.

Αἱ παρενθέσεις κλπ. δύνανται νὰ παραλειφθοῦν διαδοχικῶς, ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τοὺς κανόνας τῶν § 40 καὶ 43.

Συνιστῶμεν ὅμως, ὅπως ἡ ἀπαλοιφὴ τῶν παρενθέσεων γίνεται κατὰ τὴν ἑξῆς σειράν :

Νὰ ἀπαλείφωμεν πρῶτον τὴν παρένθεσιν ἢ ἀγκύλην, ποὺ συναντῶμεν πρῶτον, χωρὶς νὰ λαμβάνωμεν ὑπ' ὄψει τὰς παρενθέσεις, ποὺ περικλείει ἡ ἀγκύλη· ἔπειτα ἀπαλείφομεν πάλιν τὴν πρώτην παρένθεσιν ἢ ἀγκύλην καὶ οὕτω καθεξῆς, ὅπως φαίνεται εἰς τὰ κάτωθι παραδείγματα :

Παράδειγμα 1ον

$$\begin{aligned}(2\alpha-\beta+3\gamma)-[3\alpha+(\alpha+\beta-7\gamma)]&=2\alpha-\beta+3\gamma-3\alpha-(\alpha+\beta-7\gamma)=\\&=2\alpha-\beta+3\gamma-3\alpha-\alpha-\beta+7\gamma\\&=-2\alpha-2\beta+10\gamma.\end{aligned}$$

Παράδειγμα 2ον

$$\begin{aligned}7x-\{3x-[5y+(2x+y)-y]\}&=7x-3x+[5y+(2x+y)-y]=\\&=7x-3x+5y+(2x+y)-y\\&=7x-3x+5y+2x+y-y\\&=6x+5y.\end{aligned}$$

Παράδειγμα 3ον

$$\begin{aligned}&-(2x+3y-5\omega)-\{(x+y)+[5x-(2y-\omega)+y]-x+3y\}=\\&=-2x-3y+5\omega-(x+y)-[5x-(2y-\omega)+y]+x-3y\\&=-2x-3y+5\omega-x-y-5x+(2y-\omega)-y+x-3y\\&=-2x-3y+5\omega-x-y-5x+2y-\omega-y+x-3y\\&=-7x-6y+4\omega.\end{aligned}$$

'Ασκήσεις 130. Α'. 'Ομάς. Νὰ ἀπαλειφθοῦν αἱ παρενθέσεις καὶ νὰ γίνῃ ἡ ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων.

1. $(\alpha-4+3\beta)+(5-3\alpha+\beta)$ 2. $x-(2y+5x)+(3x-y)+2y$
3. $(\alpha^2+\beta^2-5\alpha\beta)-(\alpha^2-2\beta^2+6\alpha\beta)-(\beta^2+\alpha\beta)$
4. $2\tau-(\tau-\alpha)+2\tau-(\tau-\beta)+2\tau-(\tau-\gamma)$

131. Νὰ ἀπαλειφθοῦν αἱ παρενθέσεις καὶ αἱ ἀγκύλαι τῶν κάτωθι παραστάσεων καὶ νὰ γίνῃ ἡ ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων :

1. $(\alpha+\beta-3\gamma)-[\alpha-(\beta+2\gamma)+2\beta]$ 2. $4\alpha^2-[2\beta^2-(\alpha+\beta^2-\alpha^2)+(\alpha-2\beta)]$
3. $2\alpha\beta+\beta^2-[3\alpha\beta-(-\beta^2-6\alpha\beta)+\beta^2-\alpha^2]$
4. $2x-8y+\omega-(4x-y+3\omega)-[x+2y-\omega-(3x+5\omega)]$
5. $7\alpha-\{-3\beta-[2\alpha+(4\alpha-3\beta)]+(\alpha-5\beta)-2\alpha\}$
6. $\alpha-\{-3\beta+\alpha+[\beta-(\alpha+\gamma)-2\alpha]+[\alpha-(\beta+2\gamma)]\}$

132. Οἱ τρεῖς τελευταῖοι ὅροι τῶν κάτωθι παραστάσεων νὰ τεθοῦν ἐντὸς παρενθέσεως, ἔμπροσθεν τῆς ὁποίας νὰ ὑπάρχῃ τὸ σημεῖον — (§ 43, II).

1. $2\alpha-3\beta+4\gamma-7\delta$ 3. $3x^3-x^2+2x+5$
2. $\alpha^2\beta+5\alpha\beta^2-\beta^3+4\alpha^3$ 4. $7\alpha^4-4\alpha^3\beta-\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^3$

133. Νὰ τεθοῦν ἐντὸς παρενθέσεως, ἔμπροσθεν τῆς ὁποίας ὑπάρχει τὸ σημεῖον —, οἱ δύο πρῶτοι ὅροι καὶ ἐντὸς παρενθέσεως, ἔμπροσθεν τῆς ὁποίας ὑπάρχει τὸ σημεῖον +, οἱ δύο τελευταῖοι ὅροι τῶν κάτωθι παραστάσεων :

1. $-2\alpha x^2+\beta y^2-3\beta x^2+\gamma y$ 2. $2xy^2-y^3-\alpha x^2+\beta xy-5$
3. $-\alpha x^2y+\beta xy^2-x^2y^2-\alpha x^2+\beta y^2$

Β' Ὁμάς. 134. Ὁ Παῦλος ἔχει x δραχμάς, ὁ Πέτρος ἔχει x+4 δραχ. Ὁ πρῶτος κερδίζει y+12 δρχ. καὶ ὁ δεύτερος χάνει ω—20 δρχ. Ποία εἶναι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν χρημάτων τοῦ Παύλου καὶ τοῦ Πέτρου ; Ποία εἶναι ἡ ἀριθμητικὴ διαφορά, ἐάν : $x=420$, $y=25$, $\omega=40$.

135. Μία ἁμαξοστοιχία Α κινεῖται μὲ ταχύτητα α χιλιομέτρων τὴν ὥραν. Μία ἄλλη ἁμαξοστοιχία Β κινεῖται μὲ ταχύτητα β χιλιομ. τὴν ὥραν. Ἡ Α αὐξάνει τὴν ταχύτητά της κατὰ γ χλμ. καὶ ἡ Β ἐλαττώνει τὴν ταχύτητά της κατὰ δ χλμ. Ποία εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν ταχυτήτων τῶν Α καὶ Β ; Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀριθμητικὴ διαφορά, ἐάν : $\alpha=70$, $\beta=60$, $\gamma=15$, $\delta=12$.

136. Δίδονται τὰ πολυώνυμα ;

$A=\alpha^2+2\beta^2+8\gamma^2$ $\Gamma=2\alpha^2-\beta^2+5\gamma^2$
$B=-\alpha^2-3\beta^2+\gamma^2$ $\Delta=5\beta^2-\gamma^2+3\alpha^2$

Νὰ ὑπολογισθοῦν :

1. $A-B+\Gamma-\Delta$ 2. $A+(B-\Gamma-\Delta)$

137. Δίδονται τὰ πολυώνυμα :

$A=4x^3-2x^2+x-5$, $B=2x^3+4x^2-3x+1$, $\Gamma=-3x^3+x^2-7x-3$

1ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ πολυώνυμα $A+B-\Gamma$, $A-B+\Gamma$, $-A+B+\Gamma$ καὶ νὰ ἐπαληθευθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν αὐτῶν πολυωνύμων εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα $A+B+\Gamma$.

2ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ πολυώνυμα ;

1. $A+B+\Gamma$ 3. $A-(B+\Gamma)$
2. $A+B-\Gamma$ 4. $A-(-B-\Gamma)$

Νὰ συγκριθῇ τὸ τελευταῖον ἐξαγόμενον πρὸς τὸ πρῶτον. Νὰ ἐξηγηθῇ.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

123. **Πῶς πολλαπλασιάζομεν ἀκέραια μονώνυμα;** Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ μονώνυμα $5\alpha^3\beta^2\gamma$ καὶ $8\alpha^2\beta^3\gamma^2\delta$, δηλ. ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον

$$5\alpha^3\beta^2\gamma\times8\alpha^2\beta^3\gamma^2\delta$$

Ἐπειδὴ τὰ μονώνυμα παριστάνουν ἀλγεβρικοὺς ἀριθμοὺς καὶ εἶναι γινόμενα πολλῶν παραγόντων, δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν τὰς ἰδιότητας τοῦ γινομένου ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν· ἐδῶ λοιπὸν ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο γινόμενα πολλῶν παραγόντων· καὶ κατὰ γνωστὴν ἰδιότητα (§ 54) ἀρκεῖ νὰ σχηματίσωμεν ἕνα γινόμενον, τὸ ὁποῖον νὰ περιέχῃ ὅλους τοὺς παράγοντας τῶν γινομένων· θὰ εἶναι λοιπὸν

$$5\alpha^3\beta^2\gamma\times8\alpha^2\beta^3\gamma^2\delta=5\,.\,\alpha^3\,.\,\beta^2\,.\,\gamma\,.\,8\,.\,\alpha^2\,.\,\beta^3\,.\,\gamma^2\,.\,\delta \qquad (1)$$

Ἀλλὰ εἰς τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἰσότητος αὐτῆς δυνάμεθα νὰ ἀλλάξωμεν τὴν τάξιν τῶν παραγόντων καὶ νὰ ἀντικαταστήσωμεν δύο ἢ περισσοτέρους παράγοντας διὰ τοῦ γινομένου των. Ἡ ἰσότης λοιπὸν (1) γράφεται

$$\begin{aligned}5\alpha^3\beta^2\gamma\times8\alpha^2\beta^3\gamma^2\delta&=5\,.\,8\,.\,\alpha^3\,.\,\alpha^2\,.\,\beta^2\,.\,\beta^3\,.\,\gamma\,.\,\gamma^2\,.\,\delta\\&=40\,.\,\alpha^5\,.\,\beta^5\,.\,\gamma^3\,.\,\delta\\&=40\alpha^5\beta^5\gamma^3\delta.\end{aligned}$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι

$$\begin{aligned}-2\alpha x^2y\times\frac{4}{3}\alpha^2xy^3\times5\alpha xy^2&=(-2)\cdot\frac{4}{3}\cdot5\cdot\alpha\cdot\alpha^2\cdot\alpha\cdot x^2\cdot x\cdot x\cdot y\cdot y^3\cdot y^2\\&=-\frac{40}{3}\alpha^4x^4y^6\end{aligned}$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν κάτωθι κανόνα:

Κανών. ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο ἢ περισσότερα μονώνυμα:***

1ον. Πολλαπλασιάζομεν τοὺς συντελεστάς των·

2ον. Γράφομεν δεξιὰ τοῦ γινομένου αὐτοῦ τῶν συντελεστῶν, ὅλα τὰ διάφορα γράμματα, τὰ ὁποῖα ὑπάρχουν εἰς τὰ δοθέντα μονώνυμα καὶ μὲ ἐκθέτην, εἰς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν, ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν, τοὺς ὁποίους ἔχει τὸ κοινὸν αὐτὸ γράμμα εἰς τοὺς διαφόρους παράγοντας.

Π.χ. Κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα θὰ ἔχωμεν

$$(4\alpha^3\beta^2\gamma)\cdot(-6\alpha^2\beta\gamma^3)\cdot(\alpha^4\beta^3)=-24\alpha^9\beta^6\gamma^4$$

καὶ γενικῶς

$$\boxed{\mathbf{Ax^{\mu}\,y^{\nu}\,\omega^{\varrho}\times Bx^{\mu'}y^{\nu'}\omega^{\varrho'}=ABx^{\mu+\mu'}y^{\nu+\nu'}\omega^{\varrho+\varrho'}}}$$

124. **Ἰδιαιτέρα περίπτωσις.** Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν παράστασιν $(2\alpha^2\beta^3\gamma)^3$.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν δυνάμεων θὰ εἶναι

$$(2\alpha^2\beta^3\gamma)^3=2\alpha^2\beta^3\gamma\times2\alpha^2\beta^3\gamma\times2\alpha^2\beta^3\gamma=8\alpha^6\beta^9\gamma^3$$

Γενικῶς θὰ εἶναι

$$\boxed{(x^{\alpha}\, y^{\beta}\, \omega^{\gamma})^{\mu}=x^{\alpha\mu}y^{\beta\mu}\omega^{\gamma\mu}}$$

'Εκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι

Διὰ νὰ ὑψώσωμεν ἕνα μονώνυμον εἰς τὴν μυοστὴν δύναμιν (ὅπου μ εἶναι ἀκέραιος καὶ θετικὸς) ὑψώνομεν κάθε παράγοντα τοῦ μονωνύμου εἰς τὴν μ δύναμιν.

'Ασκήσεις. 138. Νὰ πολλαπλασιασθοῦν τὰ κάτωθι μονώνυμα :

1. $3\alpha^2\beta\gamma\cdot5\alpha\beta^2\gamma^3\delta$
2. $-5\alpha y^3\cdot(-4\alpha y^3)$
3. $-3\alpha^2xy\cdot(-2\alpha x^2)$
4. $\left(-\frac{1}{2}x^3y\omega^2\right)\left(\frac{1}{3}x^2y^2\omega\right)$
5. $\alpha^2\beta^3\cdot\alpha\beta\gamma$
6. $-8\alpha\beta x\cdot(-\alpha^2\beta^3x^3)$
7. $2\alpha\cdot\alpha\beta^2\cdot(-\alpha\gamma)$
8. $\left(-4xy^2\omega\right)\left(-\frac{3}{2}x^2y\right)\left(-5x^2y^3\omega\right)$

139. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ δυνάμεις :

1. $(3\alpha\beta)^2$
2. $(-2\alpha\beta^3)^3$
3. $\left(\frac{2}{5}\alpha^2\beta\gamma\right)^2$
4. $(-4\alpha\beta^2)^3$
5. $(-3\alpha^2x^3y)^2$
6. $\left(\frac{4}{3}\alpha^3\beta^2\gamma\right)^2$
7. $(-9\alpha^3\beta x^4)^3$
8. $(-4\alpha x^3y^2)^2$
9. $\left(-\frac{1}{2}x^2y^2\omega\right)^4$

140. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ δυνάμεις :

1. $[(-2\alpha^2\beta\gamma^3)^2]^3$
2. $\left[\left(-\frac{1}{2}\alpha^3\beta^2\gamma^4\right)^2\right]^4$
3. $[(2x^{\mu}y^{\nu}\omega^{\rho})^2]^3$
4. $[(-x^{\alpha}y^{\beta}\omega^{\gamma})^{\mu}]^{\nu}$

125. **Πῶς πολλαπλασιάζομεν πολυώνυμον ἐπὶ μονώνυμον;** Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ πολυώνυμον

$5\alpha^3-3\alpha^2\beta+\alpha\beta^2-2\beta^3$ ἐπὶ τὸ μονώνυμον $-4\alpha\beta$

δηλ. νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον

$$(5\alpha^3-3\alpha^2\beta+\alpha\beta^2-2\beta^3)\times(-4\alpha\beta)$$

'Επειδὴ ἕνα πολυώνυμον εἶναι ἕνα ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα, δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸν κανόνα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος ἐπὶ ἀριθμὸν (§ 55). Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν

$$(5\alpha^3-3\alpha^2\beta+\alpha\beta^2-2\beta^3)\times(-4\alpha\beta)=-20\alpha^4\beta+12\alpha^3\beta^2-4\alpha^2\beta^3+8\alpha\beta^4.$$

Γενικῶς διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕνα πολυώνυμον ἐπὶ ἕνα μονώνυμον ἐφαρμόζομεν τὸν κάτωθι κανόνα :

Κανών. ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕνα πολυώνυμον ἐπὶ ἕνα μονώνυμον πολλαπλασιάζομεν κάθε ὅρον τοῦ πολυωνύμου ἐπὶ τὸ μονώνυμον καὶ προσθέτομεν ἔπειτα τὰ προκύπτοντα γινόμενα.***

'Ο ἀνωτέρω κανὼν ἰσχύει καὶ διὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν μονωνύμου ἐπὶ πολυώνυμον.

Π.χ. $(-3\alpha x)\cdot(4x^3-7x^2+2x-1)=-12\alpha x^4+21\alpha x^3-6\alpha x^2+3\alpha x$.

Ἀσκήσεις. 1η Ὁμάς. *141.* Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι γινόμενα:

1. $(\alpha^2-\beta^2)\alpha\beta$	4. $(3\alpha^2-5\alpha\beta-2\beta^2)\cdot(-5\alpha\beta)$
2. $(x^2y-3xy^2)\cdot 2xy$	5. $(3x^3-4x^2+1)\cdot(-3\alpha x^2)$
3. $-3xy^2\cdot(\alpha x^2-\beta xy+y^2)$	6. $4\mu^2\nu^3.(\mu^3-3\mu^2\nu+3\mu\nu^2)$.

142. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι γινόμενα:

1. $$\left(3\alpha x^3-\frac{4}{5}\beta x^2+\frac{1}{3}\gamma x\right)\cdot 3\alpha\beta\gamma x$$

2. $$\left(\frac{4}{5}\alpha^2\gamma-\frac{1}{3}\beta\gamma^2+\frac{5}{4}\alpha\beta\gamma\right)\cdot\frac{3}{4}\alpha^2\beta\gamma$$

Β' Ὁμάς. *143.* Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις καὶ νὰ γίνῃ ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων:

1. $(2\alpha+3\beta)\cdot 4\alpha-(3\alpha-8\beta)\cdot 5\beta+(\alpha+2\beta)\cdot 6\alpha$
2. $(3x^2-4x+1)\cdot(-5xy)-(2x^2+3x+4)\cdot 2xy$
3. $4x(3x-2y)-(2x+3y)5y-2x(x+3y)$
4. $(2\alpha^3-3\alpha^2\beta+4\alpha\beta^2)3\alpha\beta-(-\alpha\beta)(\alpha^3+5\alpha^2\beta-\alpha\beta^2)$

144. Ἐὰν εἶναι $A=x^2+2xy+y^2$ $\quad \Gamma=3x^2+5xy+y^2$

$B=x^2-2xy+y^2$ $\quad \Delta=-x^2-3xy+2y^2$

νὰ ὑπολογισθοῦν:

1. $5A-3B+\Gamma$	3. $2A-3\Gamma+2\Delta$
2. $5(A-3B+\Gamma)$	4. $2(A+B)-3(B-\Gamma)+4(\Gamma-A)$

126. Πῶς πολλαπλασιάζομεν δύο ἀκέραια πολυώνυμα.

Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον

$$(\alpha^2-3\alpha\beta+2\beta^2)\times(2\alpha-5\beta)$$

Ἐὰν παρατηρήσωμεν, ὅτι τὸ γινόμενον τῶν δύο ἀνωτέρω πολυωνύμων εἶναι ἕνα γινόμενον ἑνὸς ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος ἐπὶ ἕνα ἄλλο ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα, (§ 57) δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸν κάτωθι κανόνα:

Κανών. ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕνα πολυώνυμον ἐπὶ ἄλλο πολυώνυμον πολλαπλασιάζομεν διαδοχικῶς ὅλους τοὺς ὅρους τοῦ πρώτου πολυωνύμου ἐπὶ ἕκαστον ὅρον τοῦ δευτέρου πολυωνύμου καὶ προσθέτομεν ἔπειτα τὰ προκύπτοντα γινόμενα· κάμνομεν ἔπειτα τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων, ἐὰν ὑπάρχουν τοιοῦτοι.***

Κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα θὰ εἶναι

$$\begin{aligned}(\alpha^2-3\alpha\beta+2\beta^2)(2\alpha-5\beta) &= (\alpha^2-3\alpha\beta+2\beta^2)\cdot 2\alpha+(\alpha^2-3\alpha\beta+2\beta^2)\cdot(-5\beta)\\ &= 2\alpha^3-6\alpha^2\beta+4\alpha\beta^2-5\alpha^2\beta+15\alpha\beta^2-10\beta^3\\ &= 2\alpha^3-11\alpha^2\beta+19\alpha\beta^2-10\beta^3\end{aligned}$$

Ὁμοίως ἔχομεν

$$\begin{aligned}(2x-3y)(5x+y) &= (2x-3y)\cdot 5x+(2x-3y)\cdot y\\ &= 10x^2-15xy+2xy-3y^2\\ &= 10x^2-13xy-3y^2\end{aligned}$$

Ἀσκήσεις. 145. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι γινόμενα:

1. $(3x-5)(2x+4)$ 4. $(2\alpha\beta-4\gamma)(5\gamma+\alpha\beta)$
2. $(2x+y)(3x+5y)$ 5. $(3\alpha\beta+1)(3-5\alpha\beta)$
3. $(4xy-x^2)(xy+y^2)$ 6. $(5\alpha^2-2\beta^2)(3\alpha^2+\beta^2)$

146. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις καὶ νὰ γίνῃ ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων:

1. $(\alpha+\beta)(3\alpha-\beta)-(4\beta-\alpha)(2\alpha-\beta)-2\beta(2\alpha+\beta)$
2. $(2x+3y)(x-4y)-(x+5y)(-y-x)-3xy(x-y)$
3. $(x+1)(y-2)-(3y+4)(x-6)+2(x-6y)$
4. $(2x+3y)(3x-2y)-3(x^2-y^2)+4(x^2-xy+y^2)$

147. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις:

1. $(x+y)(3x-y)-[xy-x(2x-y)]$
2. $(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha+\gamma)+(\beta+\gamma-\alpha)(\beta+\gamma)$
3. $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta-2\gamma)+(\beta-\gamma)(\beta+\gamma-2\alpha)+(\gamma-\alpha)(\gamma+\alpha-2\beta)$

***127.* Σύντομος πολλαπλασιασμος.** Τὰ γινόμενα τῆς μορφῆς $(x\pm\alpha)(x\pm\beta)$ δύνανται νὰ εὑρεθοῦν ἀμέσως.

Πράγματι ἂν ὑποθέσωμεν, ὅτι $\alpha=8$, $\beta=5$ θὰ ἔχωμεν τὰς περιπτώσεις:

$$(x+8)(x+5) = x^2+8x+5x+40 = x^2+13x+40$$
$$(x-8)(x-5) = x^2-8x-5x+40 = x^2-13x+40$$
$$(x+8)(x-5) = x^2+8x-5x-40 = x^2+3x-40$$
$$(x-8)(x+5) = x^2-8x+5x-40 = x^2-3x-40$$

Καὶ εἰς τὰς τέσσαρας περιπτώσεις τὸ γινόμενον ἀποτελεῖται ἀπὸ τρία μέρη, τὰ ὁποῖα δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἀμέσως:

Ὁ 1ος ὅρος εἶναι x^2 ***εἶναι τὸ τετράγωνον τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ δυωνύμου.***

Ὁ 2ος ὅρος εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διωνύμου ἐπὶ τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν δύο τελευταίων ὅρων.

Ὁ 3ος ὅρος εἶναι τὸ γινόμενον τῶν τελευταίων ὅρων.

Π.χ. $(x+5)(x-3)=x^2+2x-15$

$(y-9)(y-6)=y^2-15y+54$

Γενικῶς θὰ εἶναι $\boxed{(x+\alpha)(x+\beta)=x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta}$

Ἀσκήσεις 148. Νὰ εὑρεθοῦν ἀπὸ μνήμης τὰ κάτωθι γινόμενα:

1. $(x+5)(x+4)$ 4. $(\alpha+10)(\alpha-11)$
2. $(x-1)(x+8)$ 5. $(\beta+9)(\beta+5)$
3. $(y-4)(y+2)$ 6. $(\omega-1)(\omega-7)$

149. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις.

1. $(x+2)(x+5)-(x+3)(x-7)+(x-8)(x-1)$
2. $(y+1)(y-7)+(y+8)(y-1)-(y+2)(y-9)$

***128.* Γινόμενον δύο διατεταγμένων πολυωνύμων.** Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον δύο πολυωνύμων εἶναι προτιμότερον νὰ διατάσσωμεν τὰ δοθέντα πολυώνυμα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ αὐτοῦ γράμματος καὶ νὰ κατατάσσωμεν τὴν πρᾶξιν, ὅπως εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν πολυψηφίων ἀριθμῶν τῆς Ἀριθμητικῆς.

Π.χ. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον

$$(-4\alpha^2\beta-\beta^3+2\alpha^3+3\alpha\beta^2)\cdot(\alpha\beta-5\beta^2+3\alpha^2)$$

Διατάσσομεν πρῶτον τὰ δοθέντα πολυώνυμα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ γράμματος α καὶ γράφομεν τὸ ἕνα πολυώνυμον κάτωθι τοῦ ἄλλου, ὅπως φαίνεται κατωτέρω:

Πολλαπλασιαστέος :	$\Pi=2\alpha^3-4\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$
Πολλαπλασιαστής :	$\Pi'=3\alpha^2+\alpha\beta-5\beta^2$
Γινόμενον τοῦ Π ἐπὶ $3\alpha^2$	$6\alpha^5-12\alpha^4\beta+9\alpha^3\beta^2-3\alpha^2\beta^3$
Γινόμενον τοῦ Π ἐπὶ $\alpha\beta$	$+2\alpha^4\beta-4\alpha^3\beta^2+3\alpha^2\beta^3-\alpha\beta^4$
Γινόμενον τοῦ Π ἐπὶ $-5\beta^2$	$-10\alpha^3\beta^2+20\alpha^2\beta^3-15\alpha\beta^4+5\beta^5$
Γινόμενον	$6\alpha^5-10\alpha^4\beta-5\alpha^3\beta^2+20\alpha^2\beta^3-16\alpha\beta^4+5\beta^5$

Παρατήρησις. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον δύο ἐλλειπῶν πολυωνύμων ἐργαζόμεθα ὅπως ἀνωτέρω, ἀλλὰ πρέπει νὰ προσέχωμεν νὰ ἀφήνωμεν κενὰς θέσεις, διὰ νὰ δυνάμεθα νὰ γράφωμεν τοὺς ὁμοίους ὅρους εἰς τὴν αὐτὴν στήλην.

Π.χ. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ γινόμενον

$$(\alpha^4-2\alpha^2\beta^2+3\alpha\beta^3-\beta^4)(2\alpha^3+\alpha^2\beta-\beta^3).$$

Διάταξις τῆς πράξεως

Πολλαπλασιαστέος $\Pi=$	$\alpha^4-2\alpha^2\beta^2+3\alpha\beta^3-\beta^4$
Πολλαπλασιαστὴς $\Pi'=$	$2\alpha^3+\alpha^2\beta-\beta^3$
Γινόμεν. τοῦ Π ἐπὶ $2\alpha^3$	$2\alpha^7-4\alpha^5\beta^2+6\alpha^4\beta^3-2\alpha^3\beta^4$
Γινόμεν. τοῦ Π ἐπὶ $\alpha^2\beta$	$+\alpha^6\beta-2\alpha^4\beta^3+3\alpha^3\beta^4-\alpha^2\beta^5$
Γινόμεν. τοῦ Π ἐπὶ $-\beta^3$	$-\alpha^4\beta^3+2\alpha^2\beta^5-3\alpha\beta^6+\beta^7$
Γινόμενον	$2\alpha^7+\alpha^6\beta-4\alpha^5\beta^2+3\alpha^4\beta^3+\alpha^3\beta^4+\alpha^2\beta^5-3\alpha\beta^6+\beta^7$

Ἀσκήσεις. 150. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι γινόμενα:

1. $(5x^2-2xy-3y^2)(x^2-2xy)$ 3. $(9x^2+4\alpha x+\alpha^2)(5x-\alpha)$
2. $(8\alpha^3-4\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2-\beta^3)\cdot(2\alpha-3\beta)$ 4. $(3x^2+4xy-5y^2)\cdot(2xy^2-5y^3)$

151. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι γινόμενα:

1. $(3x^4-5x^3+2x^2-4x+2)(x^3-x^2+2x-1)$
2. $(3\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)\cdot(-2\alpha^2+3\alpha\beta-\beta^2)$
3. $(1-2x^2+4x^3)\cdot(2-5x^2+4x)$
4. $(3\alpha x^3-5\alpha^2x^2+4\alpha^3x+\alpha^4)\cdot(2\alpha x^2-3\alpha^2x+\alpha^3)$
5. $\left(x^4-\frac{1}{2}x^3y+\frac{2}{3}x^2y^2-3xy^3+\frac{1}{2}y^4\right)\left(2x^3-4x^2y+\frac{1}{6}y^3\right)$

152. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι ἀξιοσημείωτα γινόμενα:

1. $(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)(\alpha+\beta)$ 2. $(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)(\alpha+\beta)$
3. $(x^3+x^2y+xy^2+y^3)(x-y)$ 4. $(x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4)(x+y)$
5. $(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)(x-y)$

153. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ γινόμενα:

1. $(x+y+\omega)(x^2+y^2+\omega^2-y\omega-\omega x-xy)$
2. $(\alpha^\nu+3\alpha^{\nu-2}-2\alpha^{\nu-1})(2\alpha^{\nu+1}+\alpha^{\nu+2}-3\alpha^\nu)$
3. $(x^{3\mu}+x^{2\mu}y^\mu+\beta x^{\mu-2}y^2)(x^\nu+\alpha x^{\nu-1}y-\beta x^{\nu-2}y^2)$
4. $(x^\mu y^{\nu-3}+x^{\mu-1}y^{\nu-2}+x^{\mu-2}y^{\nu-1}+x^{\mu-3}y^\nu)(x^2-y^2)$

129. **Πῶς πολλαπλασιάζομεν πολλὰ πολυώνυμα;** ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν πολλὰ πολυώνυμα*** πολλαπλασιάζομεν τὰ δύο πρῶτα πολυώνυμα, ἔπειτα τὸ εὑρεθὲν γινόμενον πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸ τρίτον πολυώνυμον . . . καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρις ὅτου λάβωμεν ὅλα τὰ δοθέντα πολυώνυμα.

Παράδειγμα. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ γινόμενον

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma).$$

Πολλαπλασιάζομεν πρῶτον τὸ $x-\alpha$ ἐπὶ $x-\beta$ καὶ ἔχομεν (§ 127)

$$(x-\alpha)(x-\beta)=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta.$$

Πολλαπλασιάζομεν τώρα τὸ $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$ ἐπὶ $x-\gamma$ καὶ ἔχομεν

$$\begin{array}{l} x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta \\ \qquad\quad x-\gamma \\ \hline x^3-(\alpha+\beta)x^2+\quad \alpha\beta x \\ \qquad -\gamma x^2+(\alpha+\beta)\gamma x-\alpha\beta\gamma \\ \hline x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+[\alpha\beta+(\alpha+\beta)\gamma]x-\alpha\beta\gamma \end{array}$$

ὥστε θὰ εἶναι

$$\boxed{(\mathbf{x}-\alpha)(\mathbf{x}-\beta)(\mathbf{x}-\gamma)=\mathbf{x}^3-(\alpha+\beta+\gamma)\mathbf{x}^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\mathbf{x}-\alpha\beta\gamma}$$

Ἀσκήσεις. 154. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ γινόμενα:

1. $(x-5)(x-3)(x-8)$
2. $(x+2)(x+7)(x+10)$
3. $(y+\omega)(\omega+x)(x+y)$
4. $(x^2-y^2)(y^2-\omega^2)(\omega^2-x^2)$

155. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ γινόμενα:

1. $(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^2-1)$
2. $(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(-\alpha+\beta+\gamma)$
3. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$
4. $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$

130. **Θεώρημα Ι.** ***Τὸ γινόμενον δύο πολυωνύμων περιέχει τοὐλάχιστον δύο ὅρους, οἱ ὁποῖοι δὲν δύνανται νὰ ἀναχθοῦν.***

Πράγματι, ὅταν πολλαπλασιάζωμεν δύο πολυώνυμα, διατεταγμένα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ αὐτοῦ γράμματος, εὑρίσκομεν ὅρους, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ ἕνας ἔχει τὴν μεγαλυτέραν δύναμιν (μεγιστοβάθμιος ὅρος), καὶ ὁ ἄλλος ἔχει τὴν μικροτέραν δύναμιν (ἐλαχιστοβάθμιος ὅρος). Ὁ μεγιστοβάθμιος ὅρος προκύπτει ἀπὸ τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν πρώτων ὅρων τοῦ πολλαπλασιαστέου καὶ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ καὶ ὁ ἐλαχιστοβάθμιος προκύπτει ἀπὸ τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν τελευταίων ὅρων τῶν δύο πολυωνύμων. Οἱ δύο αὐτοὶ ὅροι δὲν δύνανται νὰ ἀναχθοῦν ποτέ· ἑπομένως τὸ πολυώνυμον ἔχει δύο τοὐλάχιστον ὅρους.

Τοῦτο φαίνεται εἰς τὸ κάτωθι γινόμενον :

$$
\begin{array}{ll}
\text{Πολλαπλασιαστέος} & x^3+\alpha x^2+\alpha^2 x+\alpha^3 \\
\text{Πολλαπλασιαστὴς} & x-\alpha \\
\hline
 & x^4+\alpha x^3+\alpha^2x^2+\alpha^3x \\
 & \quad\;\; -\alpha x^3-\alpha^2x^2-\alpha^3x-\alpha^4 \\
\hline
\text{Γινόμενον} & x^4 \qquad\qquad\qquad\qquad -\alpha^4
\end{array}
$$

131. Πόρισμα. ***Ὁ βαθμὸς τοῦ γινομένου δύο ἀκεραίων πολυωνύμων εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν βαθμῶν τῶν πολυωνύμων αὐτῶν.***

132. **Θεώρημα II.** ***Τὸ γινόμενον δύο ὁμογενῶν πολυωνύμων εἶναι ἕνα ὁμογενὲς πολυώνυμον, τοῦ ὁποίου ὁ βαθμὸς εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν βαθμῶν τῶν δύο πολυωνύμων.***

Πράγματι· ἐπειδὴ τὰ πολυώνυμα αὐτὰ εἶναι ὁμογενῆ, ὅλοι οἱ ὅροι ἑκάστου εἶναι τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ καὶ ἑπομένως τὸ γινόμενόν των θὰ εἶναι προφανῶς ἕνα πολυώνυμον, τοῦ ὁποίου ὅλοι οἱ ὅροι θὰ εἶναι τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ, δηλ. θὰ εἶναι ὁμογενές, καὶ κάθε ὅρος τοῦ γινομένου θὰ ἔχῃ βαθμὸν ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν βαθμῶν ἑνὸς ὅρου τοῦ πολλαπλασιαστέου καὶ ἑνὸς ὅρου τοῦ πολλαπλασιαστοῦ.

Π.χ. εἰς τὸ παράδειγμα τῆς § 128 ὅλοι οἱ ὅροι τοῦ πολλαπλασιαστέου εἶναι τοῦ τρίτου βαθμοῦ, ὅλοι οἱ ὅροι τοῦ πολλαπλασιαστοῦ εἶναι τοῦ δευτέρου βαθμοῦ καὶ ὅλοι οἱ ὅροι τοῦ γινομένου εἶναι ἀναγκαστικῶς τοῦ πέμπτου βαθμοῦ.

Σημείωσις. Ὅταν πολλαπλασιάζωμεν ὁμογενῆ πολυώνυμα, τὸ γινόμενόν των πρέπει νὰ εἶναι ὁμογενὲς πολυώνυμον καὶ βαθμοῦ ἴσου πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν βαθμῶν τῶν δύο πολυωνύμων. Ἐὰν λοιπόν, κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων, εὕρωμεν, ὅτι τὸ γινόμενον τῶν δύο ὁμογενῶν πολυωνύμων δὲν εἶναι ὁμογενὲς πολυώνυμον, τὸ εὑρεθὲν γινόμενον εἶναι ἐσφαλμένον καὶ πρέπει νὰ ἐκτελέσωμεν καὶ πάλιν τὸν πολλαπλασιασμόν.

ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΟΙ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

133. Αἱ κατωτέρω ταυτότητες εἶναι ἀξιοσημείωτοι, διότι χρησιμοποιοῦνται κατὰ τὸν μετασχηματισμὸν τῶν ἀλγεβρικῶν παραστάσεων καὶ διὰ τοῦτο εἶναι ἀνάγκη νὰ τὰς ἐνθυμούμεθα ἀπὸ μνήμης.

134. **Τετράγωνον ἀθροίσματος ἢ διαφορᾶς δύο ἀριθμῶν.** Ἔστωσαν α καὶ β δύο τυχόντες ἀριθμοὶ ἢ δύο μονώνυμα. Τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος τῶν α καὶ β εἶναι $(\alpha+\beta)^2$ ἢ $(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)$. Τὸ δὲ τετράγωνον τῆς διαφορᾶς των εἶναι $(\alpha-\beta)^2$ ἢ $(\alpha-\beta)(\alpha-\beta)$. Ἂν ἐκτελέσωμεν τοὺς πολλαπλασιασμοὺς θὰ ἔχωμεν :

$$\begin{array}{l} \alpha+\ \beta \\ \alpha+\ \beta \\ \hline \alpha^2+\alpha\beta \\ \quad+\alpha\beta+\beta^2 \\ \hline \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} \alpha-\ \beta \\ \alpha-\ \beta \\ \hline \alpha^2-\alpha\beta \\ \quad-\alpha\beta+\beta^2 \\ \hline \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2 \end{array}$$

Τὰ ἐξαγόμενα τῶν δύο αὐτῶν πολλαπλασιασμῶν παρίστανται συνήθως ὡς ἑξῆς:

$$\boxed{(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta} \qquad \boxed{(\alpha-\beta)^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta}$$

καὶ ἐκφράζουν, ὅτι:

I. ***Τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἀριθμῶν, ηὐξημένον κατὰ τὸ διπλάσιον γινόμενον τῶν δύο αὐτῶν ἀριθμῶν.***

II. ***Τὸ τετράγωνον τῆς διαφορᾶς δύο ἀριθμῶν εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἀριθμῶν, ἠλαττωμένον κατὰ τὸ διπλάσιον γινόμενον τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν.***

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω θὰ εἶναι:

1. $(3\alpha x+5\beta y)^2 = (3\alpha x)^2+(5\beta y)^2+2\cdot 3\alpha x\cdot 5\beta y$
$\qquad = 9\alpha^2x^2+25\beta^2y^2+30\alpha\beta xy$

2. $(5xy^2-7\omega^3)^2 = (5xy^2)^2+(7\omega^3)^2-2\cdot 5xy^2\cdot 7\omega^3$
$\qquad = 25x^2y^4+49\omega^6-70xy^2\omega^3$

3. $\left(4\alpha\beta^2\pm\frac{2}{5}x\right)^2=(4\alpha\beta^2)^2+\left(\frac{2}{5}x\right)^2\pm 2\cdot 4\alpha\beta^2\cdot\frac{2}{5}x$
$\qquad = 16\alpha^2\beta^4+\frac{4}{25}x^2 \pm \frac{16}{5}\alpha\beta^2x$

Ὁμοίως εἶναι

4. $81^2=(80+1)^2=80^2+1+2\cdot 80\cdot 1=6400+1+160=6561$
$59^2=(60-1)^2=60^2+1-2\cdot 60\cdot 1=3600+1-120=3481$

'Ασκήσεις. ***156.*** Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι ἀξιοσημείωτα γινόμενα:

1.	$(\mu+\nu)^2$	4.	$(5\alpha+3\beta)^2$	7.	$(\alpha+x^2y)^2$
2.	$(\alpha+8)^2$	5.	$(15+3x)^2$	8.	$(4\alpha^3+5\beta\gamma)^2$
3.	$(2\mu+\nu)^2$	6.	$(3\alpha^2\beta+4)^2$	9.	$(1+3\alpha^2\beta^2)^2$

157. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι γινόμενα:

1.	$\left(\frac{\mu}{3}+1\right)^2$	3.	$\left(\frac{4}{5}x^2+\frac{5}{3}\gamma\right)$	5.	$\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{5}xy\right)^2$
2.	$\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}y\right)^2$	4.	$\left(\frac{4}{5}\alpha^2\beta+\frac{2}{3}\gamma\right)^2$	6.	$\left(\frac{1}{2}\alpha x+\frac{5}{3}\alpha y\right)^2$

158. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι ἀξιοσημείωτα γινόμενα:

1.	$(\beta-2)^2$	4.	$(3x-7y)^2$	7.	$(2\alpha^3-3\alpha^2\beta)^2$
2.	$(2\alpha-1)^2$	5.	$(5\alpha x-8\beta y)^2$	8.	$(x^2-y^2)^2$
3.	$(9-5x)^2$	6.	$(\alpha\beta-\gamma\delta)^2$	9.	$(7\alpha x-8\beta y^2)^2$

159. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι ἀξιοσημείωτα γινόμενα:

1. $\left(\frac{1}{2}-x\right)^2$ 3. $\left(\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}\right)^2$ 5. $\left(3x+\frac{1}{2}\right)^2$

2. $\left(\frac{1}{3}xy-\frac{1}{2}\omega\right)^2$ 4. $\left(\frac{4}{3}\alpha\beta^2-\gamma\right)^2$ 6. $\left(\frac{1}{4}\alpha^2x-\frac{1}{5}\right)^2$

160. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ τετράγωνα τῶν κάτωθι ἀριθμῶν (§ 134..4).

1. 21^2 2. 52^2 3. 71^2 4. 91^2

Β' Ὁμάς. 161. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις καὶ νὰ γίνῃ ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων·

1. $(3x+4y)^2-(5y-2x)^2-3(x-y)^2$
2. $(2\alpha-3\beta)^2-(4\alpha-5\beta)^2-(3\alpha+5\beta)(\alpha-7\beta)$
3. $2(\alpha+3\beta)^2-3(\beta-5\alpha)^2+4(\alpha+\beta)(\alpha-3\beta)$
4. $(2x+5y)(x-3y)-(x+2y)^2-5x(x+y)$
5. $(\alpha-\beta)^2(x-y)+(\alpha-x)^2(y-\beta)+(\alpha-y)^2(\beta-x)$

162. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διακρίνουσα $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$.

1. Ἐὰν $\alpha=\lambda+1,\quad \beta=2\lambda+3,\quad \gamma=\lambda-1$
2. » $\alpha=2\lambda+1,\quad \beta=\lambda-5,\quad \gamma=3\lambda-2$
3. » $\alpha=3\mu-2,\quad \beta=3-\mu\quad \gamma=-2\mu-1.$

163. Εἰς τὰς κάτωθι παραστάσεις δίδονται οἱ δύο ὅροι τοῦ τετραγώνου ἑνὸς δυωνύμου· νὰ εὑρεθῇ ὁ τρίτος ὅρος:

1. $\mu^2+2\mu\nu$ 5. $49x^2+4y^2$ 9. $\mu^2-8\mu$
2. $4x^2+12\alpha x$ 6. $81\alpha^2+49\beta^2$ 10. $4\alpha^2x^2+4\alpha\beta x$
3. $25y^2-40y\omega$ 7. $x^2+\beta x$ 11. $1-2\alpha\mu$
4. $\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{3}xy$ 8. $\frac{9}{4}x^2+\frac{5}{2}\alpha\beta$ 12. $\frac{9}{16}\alpha^2+\frac{1}{9}\beta^2$

135. Γινόμενον ἀθροίσματος δύο μονωνύμων ἐπὶ τὴν διαφοράν των. Ἔστωσαν α καὶ β δύο τυχόντες ἀριθμοὶ ἢ δύο τυχόντα μονώνυμα. Τὸ γινόμενον τοῦ ἀθροίσματός των $\alpha+\beta$ ἐπὶ τὴν διαφοράν των $\alpha-\beta$ εἶναι: $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$.

Ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὰς πράξεις, θὰ ἔχωμεν

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) &= \alpha^2+\alpha\beta-\alpha\beta-\beta^2\\ &= \alpha^2-\beta^2\end{aligned}$$

Θὰ εἶναι λοιπὸν

$$\boxed{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2}$$

Ἡ ταυτότης αὐτὴ ἐκφράζει, ὅτι:

Τὸ γινόμενον ἀθροίσματος δύο μονωνύμων ἐπὶ τὴν διαφοράν των εἶναι ἴσον μὲ τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν δύο αὐτῶν μονωνύμων.

Π.χ. 1. $(2\alpha\beta+3\gamma\delta)(2\alpha\beta-3\gamma\delta)=(2\alpha\beta)^2-(3\gamma\delta)^2=4\alpha^2\beta^2-9\gamma^2\delta^2$

2. $\left(3x^2y-\frac{4}{5}\alpha\beta^2\right)\left(3x^2y+\frac{4}{5}\alpha\beta^2\right)=9x^4y^2-\frac{16}{25}\alpha^2\beta^4$

3. $(\alpha+\beta+3\gamma)(\alpha+\beta-3\gamma)=[(\alpha+\beta)+3\gamma][(\alpha+\beta)-3\gamma]$
$=(\alpha+\beta)^2-(3\gamma)^2$
$=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta-9\gamma^2$

'Ασκήσεις. Α' 'Ομάς. 164. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι ἀξιοσημείωτα γινόμενα:

1. $(\alpha+3)(\alpha-3)$
2. $(2x+1)(2x-1)$
3. $(5x-y)(5x+y)$
4. $(1+\alpha\beta)(1-\alpha\beta)$
5. $(\alpha-\beta^2)(\alpha+\beta^2)$
6. $(\mu^3-\nu^2)(\mu^3+\nu^2)$
7. $(3\alpha x+5\beta y)(3\alpha x-5\beta y)$
8. $(\alpha x^2+2\alpha^2 y)(\alpha x^2-2\alpha^2 y)$

165. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι ἀξιοσημείωτα γινόμενα:

1. $\left(\frac{1}{4}x+\frac{3}{5}\right)\left(\frac{1}{4}x-\frac{3}{5}\right)$
2. $\left(1+\frac{3}{5}\alpha\right)\left(1-\frac{3}{5}\alpha\right)$
3. $\left(\frac{2}{3}\alpha x+\frac{1}{4}y\right)\left(\frac{2}{3}\alpha x-\frac{1}{4}y\right)$
4. $\left(\frac{1}{2}xy-1\right)\left(\frac{1}{2}xy+1\right)$
5. $\left(\frac{2}{7}\alpha\beta-3\gamma\right)\left(3\gamma+\frac{2}{7}\alpha\beta\right)$
6. $\left(\frac{1}{6}\alpha^2\beta+\frac{1}{3}\beta^2\gamma\right)\left(\frac{1}{6}\alpha^2\beta-\frac{1}{3}\beta^2\gamma\right)$

Β' 'Ομάς. 166. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι γινόμενα.

1. $(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)$
2. $(\alpha-\beta+\gamma)(\beta+\gamma-\alpha)$
3. $(x+y+5)(x-y+5)$
4. $(3\alpha+\beta-8)(3\alpha+\beta+8)$
5. $(\alpha^2+2\alpha+5)(\alpha^2+2\alpha-5)$
6. $(x+y+\alpha+\beta)(x+y-\alpha-\beta)$
7. $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$
8. $(x^2+y^2+xy)(x^2+y^2-xy)$
9. $(\alpha^2+\beta+\alpha\sqrt{2})(\alpha^2\ \ \alpha\sqrt{2}+\beta)$
10. $(\alpha+\beta+\gamma-\delta)(\alpha+\beta-\gamma+\delta)$

Γ' 'Ομάς. 167. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις καὶ νὰ γίνῃ ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων:

1. $(3\alpha+4\beta)(3\alpha-4\beta)-(\beta-5\alpha)(\beta+5\alpha)$
2. $(\mu+\nu)^2-(\mu-\nu)^2+(\mu+\nu)(\mu-\nu)$
3. $(3x+y)^2-(2y-5x)^2-(4x+y)(4x-y)$
4. $3(\alpha-2x)^2+2(\alpha-2x)(\alpha+2x)+(3x-\alpha)(3x+\alpha)-(2\alpha-3x)^2$

168. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις κλπ.

1. $(x^2-y^2)(x^2+y^2)(x^4+y^4)(x^8+y^8)$
2. $(x+2y)(x-2y)(x^2+4y^2)(x^4+16y^4)$
3. $(x+\alpha)(x-\alpha)(x^2+\alpha x+\beta^2)(x^2-\alpha x+\beta^2)$

***136.* Κύβος δυωνύμου.** Ἔστωσαν α καὶ β δύο τυχόντες ἀριθμοὶ ἢ δύο μονώνυμα· ὁ κύβος τοῦ ἀθροίσματός των εἶναι

$$(\alpha+\beta)^3 \quad \text{ἢ} \quad (\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta) \quad \text{ἢ} \quad (\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta)(\alpha+\beta)$$

ὁ δὲ κύβος τῆς διαφορᾶς των εἶναι

$$(\alpha-\beta)^3 \quad \text{ἢ} \quad (\alpha-\beta)^2(\alpha-\beta) \quad \text{ἢ} \quad (\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta)(\alpha-\beta)$$

Ἂν ἐκτελέσωμεν τὰς πράξεις θὰ ἔχωμεν:

$$\begin{array}{rrrr}
\alpha^2 & +2\alpha\beta & +\beta^2 & \\
\alpha & +\beta & & \\
\hline
\alpha^3 & +2\alpha^2\beta & +\alpha\beta^2 & \\
 & +\alpha^2\beta & +2\alpha\beta^2 & +\beta^3 \\
\hline
\alpha^3 & +3\alpha^2\beta & +3\alpha\beta^2 & +\beta^3
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrr}
\alpha^2 & -2\alpha\beta & +\beta^2 & \\
\alpha & -\beta & & \\
\hline
\alpha^3 & -2\alpha^2\beta & +\alpha\beta^2 & \\
 & -\alpha^2\beta & +2\alpha\beta^2 & -\beta^3 \\
\hline
\alpha^3 & -3\alpha^2\beta & +3\alpha\beta^2 & -\beta^3
\end{array}$$

Τὰ ἐξαγόμενα τῶν δύο αὐτῶν πολλαπλασιασμῶν παρίστανται συνήθως ὡς ἑξῆς:

$$\boxed{(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3} \qquad (1)$$

$$\boxed{(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3} \qquad (2)$$

καὶ ἐκφράζουν, ὅτι:

I. ***Ὁ κύβος τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν εἶναι ἴσος μὲ τὸν κύβον τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ καὶ μὲ τὸ τριπλάσιον γινόμενον τοῦ τετραγώνου τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ ἐπὶ τὸν δεύτερον καὶ μὲ τὸ τριπλάσιον γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ δευτέρου καὶ μὲ τὸν κύβον τοῦ δευτέρου ἀριθμοῦ.***

II. ***Ὁ κύβος τῆς διαφορᾶς δύο ἀριθμῶν εἶναι ἴσος μὲ τὸν κύβον τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ, πλὴν τὸ τριπλάσιον γινόμενον τοῦ τετραγώνου τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ ἐπὶ τὸν δεύτερον, καὶ μὲ τὸ τριπλάσιον γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ δευτέρου, πλὴν τὸν κύβον τοῦ δευτέρου.***

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω θὰ εἶναι

$$(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$
$$(x-y)^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$$
$$(2\alpha+5\beta)^3=(2\alpha)^3+3\cdot(2\alpha)^2\cdot5\beta+3\cdot2\alpha\cdot(5\beta)^2+(5\beta)^3$$
$$=8\alpha^3+60\alpha^2\beta \qquad +150\alpha\beta^2 \qquad +125\beta^3$$
$$(3\mu x^2-4\nu y^2)^3=(3\mu x^2)^3-3\cdot(3\mu x^2)^2\cdot4\nu y^2+3\cdot3\mu x^2\cdot(4\nu y^2)^2-(4\nu y^2)^3$$
$$=27\mu^3x^6-108\mu^2\nu x^4y^2+144\mu\nu^2x^2y^4-64\nu^3y^6$$

Ἀσκήσεις. Α΄ Ὁμάς. 169. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι ἀξιοσημείωτα γινόμενα:

1. $(\mu+\nu)^3$	4. $(x-4)^3$	7. $(3x+4y)^3$
2. $(x+1)^3$	5. $(2x+1)^3$	8. $(2\alpha\beta-3\beta\gamma)^3$
3. $(y+5)^3$	6. $(3\alpha x+\beta y)^3$	9. $(2xy-3x^2y)^3$

Β΄ Ὁμάς. 170. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις καὶ νὰ γίνῃ ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων:

1. $(3x-5)^3+(x-2)(x+2)(3x+1)-2x(3x-5)^2$
2. $(x+y)^3+(x-y)^3+3(x+y)(x-y)^2+3(x-y)(x+y)^2$

137. **Ἄλλαι ἀξιοσημείωτοι ταυτότητες.** Γνωρίζομεν (§ 134), ὅτι

$$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta \quad (1), \qquad (\alpha-\beta)^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta \quad (2)$$

1. Ἀπὸ τὴν ταυτότητα (1) λαμβάνομεν

$$\boxed{\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}$$

2. Ἀπὸ τὴν ταυτότητα (2) λαμβάνομεν

$$\boxed{\alpha^2+\beta^2=(\alpha-\beta)^2+2\alpha\beta}$$

3) Ἂν προσθέσωμεν τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη θὰ ἔχωμεν

$$\boxed{(\alpha+\beta)^2+(\alpha-\beta)^2=2(\alpha^2+\beta^2)}$$

4. Ἂν ἀφαιρέσωμεν τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη θὰ ἔχωμεν

$$\boxed{(\alpha+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2=4\alpha\beta}$$ (ταυτότης τοῦ Legendre)

138. Τετράγωνον ἑνὸς πολυωνύμου *Θεώρημα. **Τὸ τετράγωνον ἑνὸς πολυωνύμου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων ὅλων τῶν ὅρων του, ηὐξημένον κατὰ τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν διπλασίων γινομένων ὅλων τῶν ὅρων του ἀνὰ δύο λαμβανομένων, καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους.***

Ἐὰν τὸ πολυώνυμον ἔχῃ δύο ὅρους, δηλ. ἐὰν εἶναι τῆς μορφῆς $\alpha+\beta$ τὸ τετράγωνόν του θὰ εἶναι (§ 134).

$$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta.$$

Ἐὰν τὸ πολυώνυμον ἔχῃ τρεῖς ὅρους, δηλ. ἐὰν εἶναι τῆς μορφῆς $\alpha+\beta+\gamma$, δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα $\alpha+\beta$ ἔχει ἐκτελεσθῇ, ὁπότε τὸ πολυώνυμον λαμβάνει τὴν μορφὴν $(\alpha+\beta)+\gamma$, δηλ. ἔχει δύο ὅρους καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta+\gamma)^2&=[(\alpha+\beta)+\gamma]^2\\&=(\alpha+\beta)^2+\gamma^2+2(\alpha+\beta)\gamma\\&=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta+\gamma^2+2\alpha\gamma+2\beta\gamma\end{aligned}$$

δηλ. θὰ εἶναι

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ θεώρημα εἶναι ἀληθές, ὅταν τὸ πολυώνυμον ἔχῃ δύο ὅρους ἢ καὶ τρεῖς ὅρους.

Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ θεώρημα αὐτὸ εἶναι ἀληθὲς καὶ ὅταν τὸ πολυώνυμον ἔχῃ ν ὅρους. Πρὸς τοῦτο θὰ χρησιμοποιήσωμεν τὴν ***μέθοδον τῆς ἐπαγωγῆς*** *

---

* Ἡ μέθοδος αὐτὴ συνίσταται εἰς τὸ νὰ ὑποθέτωμεν, ὅτι τὸ θεώρημα αὐτὸ εἶναι ἀληθὲς δι' ἕνα ἄθροισμα (ν—1) ὅρων καὶ νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι τὸ θεώρημα εἶναι ἀκόμη ἀληθὲς δι' ἕνα ἄθροισμα ν ὅρων. Κατὰ τὴν μέθοδον αὐτήν, ἐὰν τὸ θεώρημα εἶναι ἀληθὲς διὰ δύο ὅρους, θὰ εἶναι ἀληθὲς καὶ διὰ τρεῖς ὅρους· ἐὰν εἶναι ἀληθὲς διὰ τρεῖς ὅρους, θὰ εἶναι ἀληθὲς καὶ διὰ τέσσαρας ὅρους καὶ οὕτω καθεξῆς· ἑπομένως τὸ θεώρημα ἀληθεύει γενικῶς, ὁσοιδήποτε καὶ ἐὰν εἶναι οἱ ὅροι τοῦ ἀθροίσματος.

Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ τετράγωνον τοῦ πολυωνύμου $\Pi = \alpha+\beta+\gamma+ \ldots + \kappa+\lambda+\mu$ τὸ ὁποῖον ἔχει ν ὅρους.

Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ θεώρημα εἶναι ἀληθὲς διὰ τὸ τετράγωνον ἑνὸς πολυωνύμου, τὸ ὁποῖον ἔχει (ν—1) ὅρους.

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ Ε τὸ πολυώνυμον, τὸ ὁποῖον ἔχει τοὺς (ν—1) ὅρους τοῦ πολυωνύμου Π, δηλ. ἐὰν θέσωμεν

$$E = \alpha+\beta+\gamma+ \ldots + \kappa+\lambda$$

θὰ ἔχωμεν

$$E^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots+\kappa^2+\lambda^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+\ldots+2\alpha\lambda+2\beta\gamma+\ldots+2\beta\lambda+2\gamma\delta\ldots+2\gamma\lambda+\ldots+2\kappa\lambda$$

Ἐπειδὴ $\Pi = E+\mu$ θὰ εἶναι $\Pi^2 = (E+\mu)^2$

ἢ $\Pi^2 = E^2+\mu^2+2E\mu$

Ἡ τελευταία ταυτότης δεικνύει, ὅτι τὸ Π^2 ἀποτελεῖται : πρῶτον ἀπὸ τὸ E^2, δηλ. ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ν—1 ὅρων, ηὐξημένον κατὰ τὰ διπλάσια γινόμενα αὐτῶν ἀνὰ δύο λαμβανομένων· δεύτερον ἀπὸ τὸ μ^2, δηλ. ἀπὸ τὸ τετράγωνον τοῦ νυοστοῦ ὅρου καὶ τρίτον ἀπὸ τὸ $2E\mu$, δηλ. ἀπὸ τὰ διπλάσια γινόμενα τῶν (ν—1) πρώτων ὅρων ἐπὶ τὸν νυοστὸν ὅρον μ· ὥστε θὰ εἶναι

$$\Pi^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots+\kappa^2+\lambda^2+\mu^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+\ldots+2\alpha\mu+2\beta\gamma+\ldots+2\beta\mu+2\gamma\delta+\ldots+2\lambda\mu$$

Ἐπειδὴ τὸ θεώρημα ἀληθεύει διὰ δύο ὅρους, θὰ ἀληθεύῃ καὶ διὰ τρεῖς ὅρους· ἐπίσης ἐπειδὴ ἀληθεύει διὰ τρεῖς ὅρους, θὰ ἀληθεύῃ καὶ διὰ τέσσαρας ὅρους.....καὶ οὕτω καθεξῆς· ἑπομένως τὸ θεώρημα ἀληθεύει γενικῶς.

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω θὰ εἶναι :

$$(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\alpha\delta+2\beta\gamma+2\beta\delta+2\gamma\delta$$

$$(3x^2-4x+5)^2 = (3x^2)^2+(-4x)^2+5^2+2\cdot 3x^2\cdot(-4x)+2\cdot 3x^2\cdot 5+2\cdot(-4x)5$$
$$= 9x^4+16x^2+25-24x^3+30x^2-40x$$

ΣΗΜ. Τὸ τετράγωνον ἑνὸς πολυωνύμου παρίσταται συμβολικῶς ὡς ἑξῆς :

$$(\Sigma\alpha)^2 = \Sigma\alpha^2 + 2\Sigma\alpha\beta$$

ὅπου $(\Sigma\alpha)^2$ παριστάνει τὸ τετράγωνον τοῦ πολυωνύμου $(\alpha+\beta+\gamma+\ldots)$, τὸ $\Sigma\alpha^2$ παριστάνει τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ὅρων του, δηλ. τὸ $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots$, καὶ τὸ $2\Sigma\alpha\beta$ παριστάνει τὸ διπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὅρων του, οἱ ὁποῖοι σχηματίζονται, ὅπως ὁ αβ.

Ἀσκήσεις. 171. Νὰ ἀναπτυχθοῦν :

1. $(\alpha+\beta-\gamma)^2$ 2. $(x-y+\omega)^2$ 3. $(\alpha+\beta-2\gamma)^2$ 4. $(\alpha+\beta-\gamma-\delta)^2$

172. Νὰ ἀναπτυχθοῦν :

1. $(2\alpha-3\beta+4\gamma)^2$ 3. $(5x^3-2x^2-4x-1)^2$
2. $(3x^2-4x+2)^2$ 4. $(x^3-3x^2y+3xy^2-y^3)^2$

Β' Ὁμάς. 173. Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ παραστάσεις:

1. $(1+2x-3y)^2-(3y-2x-1)^2$
2. $8(x-1)^3+4(x-1)^2+(x^2-4x+2)^2-(x^4-x^2+1)$
3. $\alpha(\beta+\gamma-\alpha)^2+\beta(\gamma+\alpha-\beta)^2+\gamma(\alpha+\beta-\gamma)^2+(\beta+\gamma-\alpha)(\gamma+\alpha-\beta)(\alpha+\beta-\gamma)$
4. $(2\alpha^2+3\alpha\beta-\beta^2)^2-4(\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2+3\alpha\beta+2\beta^2)$
5. $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)^2-(\alpha+\beta+\gamma)^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$
6. $(\alpha\beta\gamma+\beta\gamma\delta+\gamma\delta\alpha+\delta\alpha\beta)^2-(\beta\gamma-\alpha\delta)(\gamma\alpha-\beta\delta)(\alpha\beta-\gamma\delta)$.

139.* Διώνυμον τοῦ Νεύτωνος.** Τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ $(x+\alpha)^\mu$ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου τοῦ ***διωνύμου τοῦ Νεύτωνος, περὶ τοῦ ὁποίου θὰ γίνῃ λόγος εἰς ἰδιαίτερον κεφάλαιον.

Δυνάμεθα πρακτικῶς νὰ εὕρωμεν τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ $(x+\alpha)^\mu$, ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τὸν κάτωθι κανόνα:

Κανών. Τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ $(x+\alpha)^\mu$ εἶναι ἕνα ὁμογενὲς πολυώνυμον πρὸς τὰ γράμματα x καὶ α, βαθμοῦ μ καὶ περιέχει $\mu+1$ ὅρους. Οἱ ἐκθέται τοῦ x βαίνουν ἐλαττούμενοι κατὰ μονάδα ἀπὸ ὅρου εἰς ὅρον, τοῦ δὲ α αὐξανόμενοι κατὰ μονάδα.

Ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ ἀναπτύγματος εἶναι πάντοτε x^μ καὶ ὁ τελευταῖος α^μ. Διὰ νὰ μεταβῶμεν ἀπὸ ἕνα ὅρον τοῦ ἀναπτύγματος εἰς τὸν ἑπόμενον, πολλαπλασιάζομεν τὸν συντελεστὴν τοῦ ὅρου αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἐκθέτην τοῦ x, ποὺ ἔχει ὁ ὅρος αὐτὸς καὶ τὸ γινόμενον αὐτὸ διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἐκθέτου τοῦ α ηὐξημένου κατὰ 1. Παραπλεύρως δὲ τοῦ πηλίκου αὐτοῦ γράφομεν τὸν α μὲ ἐκθέτην κατὰ μονάδα μεγαλύτερον καὶ τὸν x μὲ ἐκθέτην κατὰ μονάδα μικρότερον.

Π.χ. $(x+\alpha)^4=x^4+4\alpha x^3+6\alpha^2x^2+4\alpha^3x+\alpha^4$

$(x+\alpha)^5=x^5+5\alpha x^4+10\alpha^2x^3+10\alpha^3x^2+5\alpha^4x+\alpha^5$

$(x+\alpha)^6=x^6+6\alpha x^5+15\alpha^2x^4+20\alpha^3x^3+15\alpha^4x^2+6\alpha^5x+\alpha^6$.

Σημ. Διὰ τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ $(x-\alpha)^\mu$ ἰσχύει ὁ αὐτὸς κανὼν μὲ μόνην τὴν διαφοράν, ὅτι πρέπει νὰ θέτωμεν ἐναλλὰξ τὰ σημεῖα + καὶ — πρὸ τῶν ὅρων τοῦ ἀναπτύγματος.

Π.χ. $(x-\alpha)^5=x^5-5\alpha x^4+10\alpha^2x^3-10\alpha^3x^2+5\alpha^4x-\alpha^5$

Ἀσκήσεις. 174. Νὰ ἀναπτυχθοῦν αἱ κάτωθι δυνάμεις:

1. $(x-\alpha)^4$ 2. $(x\pm\alpha)^6$ 3. $(x\pm\alpha)^7$ 4. $(x+\alpha)^8$

175. Νὰ ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις:

$$(\alpha+\beta)^4-2(\alpha^2+\beta^2)(\alpha+\beta)^2+2(\alpha^4+\beta^4)$$

140.* Κύβος ἑνὸς πολυωνύμου.** *Θεώρημα.* ***Ὁ κύβος ἑνὸς πολυωνύμου εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν κύβων ὅλων τῶν ὅρων του, ηὐξημένον κατὰ τὰ τριπλάσια γινόμενα τοῦ τετραγώνου ἑκάστου ὅρου ἐπὶ ἕκαστον τῶν ἄλλων ὅρων, καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους καὶ ηὐξημένον ἀκόμη κατὰ τὰ ἑξαπλάσια γινόμενα τῶν ὅρων του, λαμβανομένων ἀνὰ τρεῖς καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους.

Ἔστω τὸ πολυώνυμον $\alpha+\beta+\gamma$, τὸ ὁποῖον ἔχει τρεῖς ὅρους· τότε θὰ εἶναι

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta+\gamma)^3 &= [(\alpha+\beta)+\gamma]^3\\ &= (\alpha+\beta)^3+3(\alpha+\beta)^2\gamma+3(\alpha+\beta)\gamma^2+\gamma^3\\ &= \alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3+3(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)\gamma+3(\alpha+\beta)\gamma^2+\gamma^3\\ &= \alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3+3\alpha^2\gamma+6\alpha\beta\gamma+3\beta^2\gamma+\\ &\qquad +3\gamma^2\alpha+3\gamma^2\beta+\gamma^3\\ &= \alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3\alpha^2\beta+3\alpha^2\gamma+3\beta^2\alpha+3\beta^2\gamma+3\gamma^2\alpha+3\gamma^2\beta+6\alpha\beta\gamma.\end{aligned}$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ θεώρημα ἀληθεύει, ὅταν τὸ πολυώνυμον ἔχῃ τρεῖς ὅρους.

Θὰ δείξωμεν ἀκόμη, ὅτι ἐὰν τὸ θεώρημα ἀληθεύῃ διὰ τὸν κύβον ἑνὸς πολυωνύμου μὲ $(\nu-1)$ ὅρους, θὰ ἀληθεύῃ καὶ διὰ τὸν κύβον ἑνὸς πολυωνύμου μὲ ν ὅρους.

Πράγματι· ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ ὑπολογίσωμεν τὸν κύβον τοῦ πολυωνύμου $\Pi=\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\kappa+\lambda+\mu$ τὸ ὁποῖον ἔχει ν ὅρους.

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ E τὸ πολυώνυμον, τὸ ὁποῖον ἔχει τοὺς $\nu-1$ ὅρους τοῦ πολυωνύμου Π, δηλ. ἐὰν θέσωμεν

$$E=\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\kappa+\lambda$$

θὰ ἔχωμεν $E^3=(\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\kappa+\lambda)^3$

Ἐπειδὴ $\Pi=E+\mu$ θὰ εἶναι $\Pi^3=E^3+\mu^3+3E^2\mu+3E\mu^2$ (1)

Ἡ ταυτότης (1) δεικνύει, ὅτι τὸ Π^3 ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ $E^3+\mu^3$, τὸ ὁποῖον περιέχει τὸ ἄθροισμα τῶν κύβων τῶν ν ὅρων τοῦ πολυωνύμου καὶ ὅλα τὰ τριπλάσια γινόμενα τῆς μορφῆς $3\alpha^2\beta$ καὶ τὰ ὁποῖα δὲν περιέχουν τὸν μ, καὶ ἀκόμη τὸ ἄθροισμα τῶν ἑξαπλασίων γινομένων τῶν ὅρων τοῦ πολυωνύμου E ἀνὰ τρεῖς λαμβανομένων.

Ἐπὶ πλέον ὅλα τὰ τριπλάσια γινόμενα τοῦ μ περιέχονται εἰς τὸ $3E^2\mu$ καὶ ὅλα τὰ τριπλάσια γινόμενα τοῦ μ^2 περιέχονται εἰς τὸ $3\mu^2E$. Ἐξ ἄλλου οἱ ὅροι τοῦ $3E^2\mu$ εἶναι τοιοῦτοι, ὅπως οἱ

$$\ldots 3(2\alpha\beta+2\alpha\gamma+\ldots+2\kappa\lambda).\mu \equiv 6\alpha\beta\mu+6\alpha\gamma\mu+\ldots+6\kappa\lambda\mu$$

δηλ. περιέχουν τὸ ἄθροισμα τῶν ἑξαπλασίων γινομένων δύο τυχόντων ὅρων τοῦ E ἐπὶ μ.

Ὥστε τὸ θεώρημα ἀληθεύει διὰ τὸ πολυώνυμον Π.

Ἐπειδὴ τὸ θεώρημα ἀληθεύει διὰ τρεῖς ὅρους θὰ ἀληθεύῃ καὶ διὰ τέσσαρας ὅρους ...., καὶ ἑπομένως εἶναι γενικόν.

ΣΗΜ. Ὁ κύβος ἑνὸς πολυωνύμου παρίσταται συμβολικῶς ὡς ἑξῆς:

$$(\Sigma\alpha)^3=\Sigma\alpha^3+3\Sigma\alpha^2\beta+6\Sigma\alpha\beta\gamma$$

ὅπου τὸ $(\Sigma\alpha)^3$ παριστάνει τὸν κύβον τοῦ πολυωνύμου $(\alpha+\beta+\gamma+\ldots)$, τὸ $\Sigma\alpha^3$ παριστάνει τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν κύβων τῶν ὅρων τοῦ πολυωνύμου, δηλ. τὸ $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\ldots$, τὸ $3\Sigma\alpha^2\beta$ παριστάνει τὸ τριπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὅρων, οἱ ὁποῖοι σχηματίζονται, ὅπως ὁ $\alpha^2\beta$, δηλ. τῶν ὅρων $\alpha^2\beta, \alpha^2\gamma, \ldots \beta^2\gamma, \ldots$ Τὸ $6\Sigma\alpha\beta\gamma$ παριστάνει τὸ ἑξαπλάσιον ἄθροισμα τοῦ γινομένου τῶν ὅρων ἀνὰ τρεῖς λαμβανομένων.

Ἀσκήσεις. 176. Νὰ ἀναπτυχθοῦν καὶ νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις:

1. $(2x+1)^3+(2x-1)^3$ 2. $(3x+2)^3-(3x-2)^3$
3. $(x+y+\omega)^3-(y+\omega-x)^3-(\omega+x-y)^3-(x+y-\omega)^3$

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

141.* Ὁρισμοί.** ***Διαίρεσις μιᾶς ἀλγεβρικῆς παραστάσεως Α διὰ ἄλλης ἀλγεβρικῆς παραστάσεως Β λέγεται ἡ εὕρεσις μιᾶς τρίτης ἀλγεβρικῆς παραστάσεως Π, ἡ ὁποία πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ τὴν δευτέραν Β, δίδει τὴν πρώτην Α.

Διὰ νὰ σημειώσωμεν τὴν διαίρεσιν τῆς Α διὰ Β γράφομεν

$$A : B \quad \text{ἢ} \quad \frac{A}{B}$$

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν αὐτὸν θὰ ἔχωμεν τὴν ταυτότητα

$$\frac{A}{B} = \Pi \quad \text{ἢ} \quad A = B.\Pi$$

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ προκύπτει, ὅτι ἡ διαίρεσις εἶναι μία ἀντίστροφος πρᾶξις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Πράγματι, εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν ζητοῦμεν ἕνα γινόμενον, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τοὺς δύο παράγοντας, ἐνῷ εἰς τὴν διαίρεσιν γνωρίζομεν τὸ γινόμενον (διαιρετέον) καὶ τὸν ἕνα ἐκ τῶν παραγόντων του (διαιρέτην) καὶ ζητοῦμεν τὸν ἄλλον παράγοντα (πηλίκον).

***142.* Πῶς διαιροῦμεν ἀκέραια μονώνυμα.** Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸ μονώνυμον $-27\alpha^3\beta^4\gamma^2$ διὰ τοῦ $9\alpha^2\beta^3$. Τὸ πηλίκον τῶν δύο αὐτῶν μονωνύμων θὰ εἶναι

$$\frac{-27\alpha^3\beta^4\gamma^2}{9\alpha^2\beta^3} = \frac{-27\cdot\alpha^3\cdot\beta^4\cdot\gamma^2}{9\cdot\alpha^2\cdot\beta^3} = \frac{-27}{9}\cdot\frac{\alpha^3}{\alpha^2}\cdot\frac{\beta^4}{\beta^3}\cdot\gamma^2 =$$
$$= -3\cdot\alpha^{3-2}\cdot\beta^{4-3}\cdot\gamma^2 = -3\alpha\beta\gamma^2.$$

Πράγματι, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν διαιρέτην $9\alpha^2\beta^3$ ἐπὶ τὸ εὑρεθὲν πηλίκον $-3\alpha\beta\gamma^2$, εὑρίσκομεν τὸν διαιρετέον

$$9\alpha^2\beta^3\cdot(-3\alpha\beta\gamma^2) = -27\alpha^3\beta^4\gamma^2$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται ὁ ἑξῆς κανών:

Κανών. ***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον δύο ἀκεραίων μονωνύμων, διαιροῦμεν τὸν συντελεστὴν τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ διαιρέτου καὶ δεξιὰ τοῦ πηλίκου τῶν συντελεστῶν***

γράφομεν ἕκαστον γράμμα τοῦ διαιρετέου, ἀφοῦ προηγουμένως ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν ἐκθέτην αὐτοῦ τὸν ἐκθέτην τοῦ αὐτοῦ γράμματος τοῦ διαιρέτου.

Κατὰ τὸν κανόνα αὐτὸν θὰ εἶναι:

$36\alpha^2\beta^3xy^2 : (-9\alpha\beta^3xy) = -4\alpha y, \quad (-4x^3y^2\omega) : (-2xy\omega) = 2x^2y$

143. **Παρατηρήσεις.** I. Ἕνα γράμμα, τὸ ὁποῖον ἔχει τὸν αὐτὸν ἐκθέτην εἰς τὸν διαιρετέον καὶ εἰς τὸν διαιρέτην, ἐξαλείφεται εἰς τὸ πηλίκον· πράγματι κατὰ τὰς § 83, 86 θὰ εἶναι

$$\frac{\beta^4}{\beta^4} = \beta^{4-4} = \beta^0 = 1.$$

II. Ἐὰν ἕνα γράμμα δὲν ὑπάρχῃ εἰς τὸν διαιρέτην, μένει εἰς τὸ πηλίκον, ὅπως εἶναι εἰς τὸν διαιρετέον· διότι δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν, ὅτι ὑπάρχει εἰς τὸν διαιρέτην μὲ ἐκθέτην 0.

Πράγματι θὰ εἶναι $\quad \dfrac{\alpha^2\beta^3\gamma}{\alpha\beta^2} = \dfrac{\alpha^2\beta^3\gamma}{\alpha\beta^2\gamma^0} = \alpha\beta\gamma$

144. **Πότε ἡ διαίρεσις εἶναι δυνατή;** Διὰ νὰ εἶναι τὸ πηλίκον δύο ἀκεραίων μονωνύμων, ἕνα ἀκέραιον μονώνυμον, ***πρέπει ὁ διαιρετέος νὰ ἔχῃ ὅλα τὰ γράμματα τοῦ διαιρέτου καὶ μὲ ἐκθέτας τὸ ὀλιγώτερον ἴσους μὲ τοὺς ἐκθέτας τοῦ διαιρέτου.***

Πράγματι· ἐὰν τὸ πηλίκον εἶναι ἀκέραιον, τὸ γινόμενόν του ἐπὶ τὸν διαιρέτην δίδει, ὡς διαιρετέον, ἕνα ἀκέραιον μονώνυμον, τὸ ὁποῖον περιέχει ὅλα τὰ γράμματα τοῦ διαιρέτου μὲ ἐκθέτας τὸ ὀλιγώτερον ἴσους μὲ τοὺς ἐκθέτας τῶν αὐτῶν γραμμάτων τοῦ διαιρέτου.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν, ὅτι ἡ διαίρεσις εἶναι ***δυνατὴ*** (τελεία) ἤ, ὅτι ***ὁ διαιρετέος εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ διαιρέτου.***

Π.χ. Ἡ διαίρεσις $10x^3y^2\omega : 5x^2y^2\omega$ εἶναι τελεία· τὸ πηλίκον εἶναι $2x$.

145. **Πότε ἡ διαίρεσις εἶναι ἀδύνατος.** Ἡ διαίρεσις δύο ἀκεραίων μονωνύμων εἶναι ἀδύνατος:

1ον. ***Ἐὰν ὁ διαιρέτης ἔχῃ ἕνα ἢ περισσότερα γράμματα, τὰ ὁποῖα δὲν περιέχονται εἰς τὸν διαιρετέον.***

2ον. ***Ἐὰν ὁ διαιρέτης ἔχῃ ἕνα γράμμα μὲ ἐκθέτην μεγαλύτερον ἀπὸ τὸν ἐκθέτην τοῦ γράμματος αὐτοῦ εἰς τὸν διαιρετέον.***

Ὅταν ἡ διαίρεσις δύο μονωνύμων εἶναι ἀδύνατος, παριστάνομεν τὸ πηλίκον των μὲ μίαν ***κλασματικὴν παράστασιν,*** ἡ ὁποία ἔχει ἀριθμητὴν τὸν διαιρετέον καὶ παρονομαστὴν τὸν διαιρέτην.

Π.χ. Τὸ πηλίκον τοῦ $16\alpha\beta^2$ διὰ τοῦ $7\alpha^3$ εἶναι ἡ κλασματικὴ παράστασις:

$$\frac{16\alpha\beta^2}{7\alpha^3} \quad \text{ἢ} \quad \frac{16\beta^2}{7\alpha^2}$$

Ἐπίσης τὸ πηλίκον τοῦ $9\alpha\beta\gamma^3$ διὰ τοῦ $4\alpha^2\beta^2\delta$ εἶναι

$$\frac{9\alpha\beta\gamma^3}{4\alpha^2\beta^2\delta} \quad \text{ἢ} \quad \frac{9\gamma^3}{4\alpha\beta\delta}$$

Ἀσκήσεις. 177. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ πηλίκα τῶν διαιρέσεων τῶν κάτωθι μονωνύμων:

1. $6x^5 : 2x^2$ 3. $27y^8 : 9y^2$ 5. $(-3xy) : (-xy)$
2. $12x^{10} : (-4x^6)$ 4. $(-12x^5) : 3x^4$ 6. $4\alpha\beta^2 : (-2\alpha\beta)$

178. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι πηλίκα:

1. $2x^3y^2 : (-xy^2)$ 5. $(-9x^4y^2\omega) : (-x^3y^2)$
2. $10x^4y^2 : (-5x^3y)$ 6. $(-18x^2y^3\omega^2) : (-6x^2y^2\omega^2)$
3. $6\alpha^4\beta^5\gamma^3 : 3\alpha^3\beta^2$ 7. $(-8\alpha^3\beta^5\gamma^6) : 2\alpha^3\beta^3\gamma^3)$
4. $12x^5y^3\omega^4 : (-4x^2y\omega^2)$ 8. $(-24\alpha^3\beta^8x^4y) : (-8\alpha\beta^2x^3y)$

179. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ πηλίκα τῶν κάτωθι μονωνύμων:

1. $\dfrac{3\alpha^4\beta^2\gamma^5}{12\alpha^4\beta^2\gamma^3}$ 3. $\dfrac{-7x^3y^4}{-3x^2y^4\omega}$ 5. $\dfrac{-9\alpha^3\beta xy}{-3\alpha^3\beta^2\omega}$

2. $\dfrac{-24x^3y^2\omega^4}{18xy^2\omega^3}$ 4. $\dfrac{5\alpha\beta\gamma}{7\alpha^2\beta x}$ 6. $\dfrac{4\alpha^3\beta^2\gamma^3}{5\alpha^4\beta}$

180. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι πηλίκα:

1. $12x^{\mu-1}y^{\nu+3}\omega : (3x^{\mu-1}y^{\nu+1})$ 2. $-\dfrac{3}{4}\alpha^{\mu+2}\beta^{\nu-5}\gamma^{\rho} : \dfrac{7}{9}\alpha^{\mu-1}\beta^{\nu-8}\gamma$

***146.* Πῶς διαιροῦμεν ἀκέραιον πολυώνυμον διὰ ἀκεραίου μονωνύμου;** Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸ πολυώνυμον $6\alpha^4-3\alpha^3\beta+10\alpha^2\beta^2$ διὰ τοῦ μονωνύμου $2\alpha^2$.

Ἐπειδὴ ἕνα πολυώνυμον εἶναι ἕνα ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν ὅρων του, δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸν κανόνα τῆς διαιρέσεως ἑνὸς ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος δι' ἀριθμοῦ (§ 63), δηλ. νὰ διαιρέσωμεν κάθε ὅρον τοῦ πολυωνύμου διὰ 2α. Θὰ ἔχωμεν λοιπόν:

$$(6\alpha^4-3\alpha^3\beta+10\alpha^2\beta^2) : 2\alpha^2 = \frac{6\alpha^4}{2\alpha^2} - \frac{3\alpha^3\beta}{2\alpha^2} + \frac{10\alpha^2\beta^2}{2\alpha^2}$$
$$= 3\alpha^2 - \frac{3}{2}\alpha\beta + 5\beta^2$$

Τὸ εὑρεθὲν πηλίκον $3\alpha^2-\frac{3}{2}\alpha\beta+5\beta^2$ εἶναι πράγματι τὸ ζητούμενον, διότι πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην $2\alpha^2$, δίδει τὸν διαιρετέον. Πράγματι ἔχομεν:

$$2\alpha^2\left(3\alpha^2-\frac{3\alpha\beta}{2}+5\beta^2\right) = 6\alpha^4-3\alpha^3\beta+10\alpha^2\beta^2$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι

$$\frac{5\alpha^2\beta^3x-7\alpha\beta^2x^2+15\alpha\beta\gamma x}{3\alpha\beta x} = \frac{5\alpha^2\beta^3x}{3\alpha\beta x} - \frac{7\alpha\beta^2x^2}{3\alpha\beta x} + \frac{15\alpha\beta\gamma x}{3\alpha\beta x}$$
$$= \frac{5}{3}\alpha\beta^2 - \frac{7}{3}\beta x + 5\gamma$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν κάτωθι κανόνα:

Κανών. ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἕνα πολυώνυμον διὰ μονωνύ-***

μου διαιροῦμεν κάθε ὅρον τοῦ πολυωνύμου διὰ τοῦ μονωνύμου καὶ προσθέτομεν τὰ προκύπτοντα πηλίκα.

Παρατήρησις. Διὰ νὰ εἶναι ἡ διαίρεσις δυνατή, πρέπει κάθε ὅρος τοῦ διαιρετέου νὰ εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ διαιρέτου. Ὅταν ἡ διαίρεσις εἶναι ἀδύνατος, τὸ πηλίκον ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕνα ἄθροισμα κλασματικῶν πηλίκων, εἰς τὸ ὁποῖον πρέπει πάντοτε νὰ δίδωμεν τὴν ἁπλουστέραν μορφήν.

Π.χ. $$\frac{3\alpha\beta+4\beta\gamma-6\alpha\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\frac{3\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma}+\frac{4\beta\gamma}{\alpha\beta\gamma}-\frac{6\alpha\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\frac{3}{\gamma}+\frac{4}{\alpha}-\frac{6}{\beta}$$

Ἀσκήσεις. 181. Νὰ γίνουν αἱ κάτωθι διαιρέσεις:

1. $(6x^5-4x^4+8x^3+10x^2):2x^2$ 2. $(4\alpha^4\beta^3-12\alpha^3\beta^4+8\alpha^2\beta^5):(-4\alpha^2\beta^3)$
3. $(40\alpha x^4+32\alpha^2x^3-48\alpha^3x^2-24\alpha^4x):(-8\alpha x)$
4. $(54\alpha^4x^3y^2-27\alpha^2x^3y^3+36\alpha^4x^2y^3):(-9\alpha^2xy)$.

182. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι πηλίκα:

1. $\dfrac{8x^4-6x^3+4x^3+8x-2}{2x^2}$ 3. $\dfrac{2x^2-3y^2+\omega^2}{\alpha y\omega}$
2. $\dfrac{5x^3y^2\omega+12x^2y^3\omega^3-3xy^3\omega^2}{-5x^2y\omega^2}$ 4. $\dfrac{3\alpha^2-4\beta^2+5\gamma^2}{2\alpha\beta\gamma}$

183. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ πηλίκον:

$$(3\alpha^{\mu}\beta^{\nu-1}\gamma^{\lambda-2}x-7\alpha^5\beta^3\gamma^6+\frac{15}{4}\alpha^{2\mu}\beta^{\nu-1}\gamma^{\lambda+2}\omega):(-3\alpha^{3-\mu}\beta^5\gamma^4)$$

147. Ἐξαγωγὴ κοινοῦ παράγοντος ἐκτὸς παρενθέσεως.

Ἔστω τὸ γινόμενον $3\alpha^2\beta\times(4\alpha^2-5\alpha+2)$. Γνωρίζομεν, ὅτι

$$3\alpha^2\beta(4\alpha^2-5\alpha+2)=12\alpha^4\beta-15\alpha^3\beta+6\alpha^2\beta \qquad (1)$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι κάθε ὅρος τοῦ δευτέρου μέλους τῆς ἰσότητος (1) εἶναι γινόμενον τοῦ μονωνύμου $3\alpha^2\beta$ ἐπὶ ἕνα μονώνυμον τῆς παρενθέσεως. Ὥστε ὅλοι οἱ ὅροι τοῦ πολυωνύμου $12\alpha^4\beta-15\alpha^3\beta+6\alpha^2\beta$ περιέχουν τὸν παράγοντα $3\alpha^2\beta$, ὁ ὁποῖος, διὰ τὸν λόγον αὐτόν, λέγεται ***κοινὸς παράγων.***

Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἰσότητος (1) διὰ τοῦ πρώτου, δηλ. ἐὰν γράψωμεν

$$12\alpha^4\beta-15\alpha^3\beta+6\alpha^2\beta=3\alpha^2\beta(4\alpha^2-5\alpha+2)$$

θὰ λέγωμεν, ὅτι ***ἐθέσαμεν τὸν κοινὸν παράγοντα $3\alpha^2\beta$ ἐκτὸς παρενθέσεως.*** Ἐντὸς τῆς παρενθέσεως ὑπάρχει τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ πολυωνύμου $12\alpha^4\beta-15\alpha^3\beta+6\alpha^2\beta$ διὰ τοῦ μονωνύμου $3\alpha^2\beta$.

Γενικῶς. Ἐὰν ὅλοι οἱ ὅροι ἑνὸς πολυωνύμου ἔχουν ἕνα κοινὸν παράγοντα, δυνάμεθα νὰ θέσωμεν τὸν παράγοντα αὐτὸν ἐκτὸς παρενθέσεως καὶ ἐντὸς αὐτῆς νὰ θέσωμεν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ δοθέντος πολυωνύμου διὰ τοῦ κοινοῦ αὐτοῦ παράγοντος. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν, ὅτι ***ἀνελύσαμεν τὸ πολυώνυμον εἰς γινόμενον παραγόντων***.

Π.χ. Εἰς τὸ πολυώνυμον $12x^2y-8xy^2-4xy\omega$ οἱ ὅροι του ἔχουν κοινὸν παράγοντα τὸ μονώνυμον $4xy$. Θὰ εἶναι λοιπὸν

$$12x^2y-8xy^2-4xy\omega=4xy(3x-2y-\omega)$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι:

$$\alpha^2\beta\gamma+\alpha\beta^2\gamma-\alpha\beta\gamma^2=\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta-\gamma)$$

Ἀσκήσεις. *184.* Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ κάτωθι παραστάσεις:

1.	$\alpha\beta+\beta\gamma$	5.	$5x^4-10x^2$	9.	$54+81\alpha\beta$
2.	$2\beta+\beta^2$	6.	$4\mu\nu-16\mu^2\nu$	10.	$16\alpha^2\beta^3-4\alpha^3\beta^2$
3.	$6\alpha^2\beta-4\alpha\beta$	7.	$15\alpha x^2-5\alpha x$	11.	$13x^2y^2-39x^4y^2$
4.	$9\alpha\beta^3+3\alpha\beta^2$	8.	$21+27y$	12.	$\alpha^2\beta^2\gamma-4\alpha^3\beta\gamma$

148. Τί ὀνομάζομεν διαίρεσιν δύο ἀκεραίων πολυωνύμων; ***Διαίρεσις ἑνὸς ἀκεραίου πολυωνύμου Α δι᾽ ἑνὸς ἀκεραίου πολυωνύμου Β λέγεται ἡ εὕρεσις ἑνὸς τρίτου πολυωνύμου Π, τοιούτου ὥστε νὰ εἶναι $A=B.\Pi$.***

Τὸ πολυώνυμον Α λέγεται ***διαιρετέος***, τὸ Β ***διαιρέτης*** καὶ τὸ Π ***πηλίκον***.

Τὸ πηλίκον δύο ἀκεραίων πολυωνύμων σπανίως ἐκφράζεται μὲ ἕνα ἀκέραιον πολυώνυμον Π.

Θὰ ἴδωμεν κατωτέρω εἰς ποίας περιπτώσεις ἡ διαίρεσις $A:B$ εἶναι δυνατὴ καὶ θὰ προσδιορίσωμεν τὸ πηλίκον Π, ἐὰν ὑπάρχῃ τοιοῦτον.

149. Διαίρεσις δύο ἀκεραίων πολυωνύμων διατεταγμένων. Ἔστωσαν Α καὶ Β δύο ἀκέραια πολυώνυμα τοῦ x, διατεταγμένα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ x καὶ ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον τοῦ Α διὰ τοῦ Β.

Ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι ὑπάρχει ἕνα τρίτον πολυώνυμον Π τοῦ x, ἀκέραιον καὶ διατεταγμένον κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ x καὶ τοιοῦτον, ὥστε, πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην Β, νὰ δίδῃ τὸν διαιρετέον Α, θὰ ἔχωμεν τὴν ταυτότητα $A\equiv B\cdot\Pi$ (1)

Εἶναι ἀνάγκη λοιπὸν νὰ προσδιορίσωμεν τοὺς ὅρους τοῦ πολυωνύμου Π. Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ Π_1, Π_2, $\Pi_3\ldots$, Π_ν τοὺς διαδοχικοὺς ὅρους τοῦ πολυωνύμου Π, δηλ. ἂν θέσωμεν

$$\Pi=\Pi_1+\Pi_2+\Pi_3+\ldots+\Pi_\nu$$

ἡ ταυτότης (1) γράφεται

$$A=B\cdot(\Pi_1+\Pi_2+\Pi_3+\ldots+\Pi_\nu) \qquad (2)$$

Ἀλλὰ γνωρίζομεν (§ 130), ὅτι, ὅταν δύο πολυώνυμα εἶναι διατεταγμένα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ αὐτοῦ γράμματος καὶ πολλαπλασιασθοῦν, ὁ πρῶτος ὅρος καὶ ὁ τελευταῖος ὅρος τοῦ γινομένου δὲν ἀνάγονται μὲ κανένα ἄλλον ὅρον καὶ προκύπτουν ὁ μὲν πρῶτος ὅρος ἐκ τοῦ πολλαπλασιάσμοῦ τῶν πρώτων ὅρων τῶν πολυωνύμων, ὁ δὲ τελευταῖος ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν τελευταίων ὅρων του.

Ἐξ αὐτοῦ λοιπὸν συνάγομεν, ὅτι ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ πολυωνύμου Α εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου Β ἐπὶ τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ πηλίκου Π· ἑπομένως θὰ εὕρωμεν τὸν πρῶτον ὅρον Π_1 τοῦ πηλίκου Π, ἂν διαιρέσωμεν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ διαιρετέου Α διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου Β.

Ἂς ἴδωμεν τώρα πῶς θὰ εὕρωμεν τὸν δεύτερον ὅρον τοῦ πηλίκου Π. Ἡ ταυτότης (2) γράφεται

$$A=B\Pi_1+B(\Pi_2+\Pi_3+\ldots+\Pi_\nu)$$

Ἀφαιροῦμεν καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέλη αὐτῆς τὸ $B\Pi_1$ καὶ ἔχομεν

$$A-B\Pi_1=B(\Pi_2+\Pi_3+\ldots+\Pi_\nu) \qquad (3)$$

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ Y_1 τὴν διαφορὰν $A-B\Pi_1$, τοῦ διαιρετέου Α καὶ τοῦ γινομένου τοῦ διαιρέτου Β ἐπὶ τὸν πρῶτον ὅρον Π_1 τοῦ πηλίκου, καὶ τὴν ὁποίαν διαφορὰν ὀνομάζομεν ***πρῶτον ὑπόλοιπον*** τῆς διαιρέσεως, ἡ ταυτότης (3) γράφεται

$$Y_1=B(\Pi_2+\Pi_3+\ldots+\Pi_\nu) \qquad (4)$$

Ἐὰν ἐργασθῶμεν καὶ ἐπὶ τῆς ταυτότητος (4), ὅπως εἰργάσθημεν καὶ εἰς τὴν ταυτότητα (2), θὰ ἴδωμεν, ὅτι διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν δεύτερον ὅρον τοῦ πηλίκου, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ ὑπολοίπου Y_1 διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου Β.

Συνεχίζοντες κατ᾽ αὐτὸν τὸν τρόπον τὴν ἐργασίαν, θὰ εὕρωμεν ὅλους τοὺς ὅρους τοῦ πηλίκου Π. Οἱ βαθμοὶ τῶν διαδοχικῶν ὅρων $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_\nu$ τοῦ πηλίκου βαίνουν ἐλαττούμενοι.

Ἐὰν τὸ τελευταῖον ὑπόλοιπον εἶναι μηδέν, τότε τὸ πολυώνυμον Α εἶναι ***διαιρετὸν*** διὰ τοῦ Β καὶ τὸ πηλίκον ἐκφράζεται μὲ ἕνα ἀκέραιον πολυώνυμον Π·

$$\text{δηλ. εἶναι} \quad \frac{A}{B}=\Pi \quad \text{ἢ} \quad A=B\cdot\Pi$$

δηλ. $\boxed{\text{Διαιρετέος} = \text{διαιρέτην} \times \text{πηλίκον}}$

Ἐάν, τοὐναντίον, τὸ τελευταῖον ὑπόλοιπον εἶναι διάφορον τοῦ μηδενὸς καὶ βαθμοῦ μικροτέρου τοῦ βαθμοῦ τοῦ διαιρέτου, ἡ διαίρεσις εἶναι ἀδύνατος καὶ λέγομεν, ὅτι τὸ πολυώνυμον Α δὲν εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ Β. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, ἂν παραστήσωμεν μὲ Υ τὸ τελευταῖον ὑπόλοιπον, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν $A=B.\Pi+Y$ (5)

δηλ. $\boxed{\text{Διαιρετέος} = \text{διαιρέτην} \times \text{πηλίκον} + \text{ὑπολοίπῳ}}$

"Αν διαιρέσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ταυτότητος (5) διὰ B, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν αὐτὴν ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\frac{A}{B} = \Pi + \frac{Y}{B}$$

'Εκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν κάτωθι κανόνα τῆς διαιρέσεως δύο ἀκεραίων πολυωνύμων:

Κανών. ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἕνα ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ*** x ***δι' ἄλλου ἀκεραίου πολυωνύμου τοῦ*** x***, τὰ ὁποῖα εἶναι διατεταγμένα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ*** x***:***

1ον. Διαιροῦμεν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου· τὸ προκύπτον ἐξαγόμενον εἶναι ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ πηλίκου.

2ον. Πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸν εὑρεθέντα πρῶτον αὐτὸν ὅρον τοῦ πηλίκου καὶ ἀφαιροῦμεν τὸ γινόμενον αὐτὸ ἀπὸ τὸν διαιρετέον καὶ εὑρίσκομεν ἕνα ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον ὀνομάζομεν π ρ ῶ τ ο ν ὑ π ό λ ο ι π ο ν.

3ον. Διαιροῦμεν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ πρώτου ὑπολοίπου διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου καὶ τὸ προκύπτον ἐξαγόμενον εἶναι ὁ δεύτερος ὅρος τοῦ πηλίκου.

4ον. Πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸν δεύτερον ὅρον τοῦ πηλίκου καὶ ἀφαιροῦμεν τὸ γινόμενον αὐτὸ ἀπὸ τὸ πρῶτον ὑπόλοιπον. Τὸ ἐξαγόμενον αὐτὸ εἶναι τὸ δ ε ύ τ ε ρ ο ν ὑ π ό λ ο ι π ο ν.

Συνεχίζομεν ἔπειτα τὴν πρᾶξιν μέχρις ὅτου εὕρωμεν ἕνα ὑπόλοιπον μηδέν, (διαίρεσις τελεία) ***ἢ ἕνα ὑπόλοιπον βαθμοῦ μικροτέρου τοῦ διαιρέτου*** (διαίρεσις ἀτελής).

Παράδειγμα 1ον. "Εστω, ὅτι θέλομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸ πολυώνυμον $A=6x^4-19x^3+15x^2-x-6$ διὰ τοῦ πολυωνύμου $B=2x^2-3x+2$.

Κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα διαιροῦμεν τὸν πρῶτον ὅρον $6x^4$ τοῦ A διὰ τοῦ πρώτου ὅρου $2x^2$ τοῦ B καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον $6x^4 : 2x^2=3x^2$. 'Ο $3x^2$ εἶναι ὁ *πρῶτος ὅρος τοῦ πηλίκου.*

Πολλαπλασιάζομεν τὸν πρῶτον ὅρον $3x^2$ τοῦ πηλίκου Π ἐπὶ τὸν διαιρέτην B καὶ εὑρίσκομεν γινόμενον $6x^4-9x^3+6x^2$. 'Αφαιροῦμεν τὸ γινόμενον αὐτὸ ἀπὸ τὸν διαιρετέον A· διὰ νὰ εὐκολύνωμεν τὴν ἀφαίρεσιν αὐτὴν γράφομεν τοὺς ὅρους τοῦ γινομένου, μὲ ἀλλαγμένα τὰ σημεῖα των, κάτωθι τῶν ὁμοίων ὅρων τοῦ διαιρέτου A καὶ κάμνομεν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων.

"Αν ἀφαιρέσωμεν τὸ $6x^4-9x^3+6x^2$ ἀπὸ τὸν διαιρετέον A εὑρίσκομεν τὸ *πρῶτον ὑπόλοιπον* $Y_1=-10x^3+9x^2-x-6$.

Διαιροῦμεν τώρα τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ Y_1 διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ Β καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον $-10x^3 : 2x^2 = -5x$. Τὸ $-5x$ εἶναι ὁ *δεύτερος ὅρος τοῦ πηλίκου.* Πολλαπλασιάζομεν τὸν δεύτερον ὅρον $-5x$ τοῦ πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην Β καὶ εὑρίσκομεν γινόμενον $-10x^3+15x^2-10x$, τὸ ὁποῖον θέτομεν κάτωθι τοῦ πρώτου ὑπολοίπου Y_1, μὲ ἀλλαγμένα τὰ σημεῖα τῶν ὅρων του. Μετὰ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον $Y_2 = -6x^2+9x-6$ τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ *δεύτερον ὑπόλοιπον.*

Διαιροῦμεν τὸν πρῶτον ὅρον $-6x^2$ τοῦ δευτέρου ὑπολοίπου Y_2 διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου Β καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον $-6x^2 : 2x^2 = -3$· τὸ -3 εἶναι ὁ *τρίτος ὅρος τοῦ πηλίκου.*

Πολλαπλασιάζομεν τὸν τρίτον ὅρον -3 τοῦ πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην Β καὶ εὑρίσκομεν γινόμενον $-6x^2+9x-6$. Τὸ γινόμενον αὐτὸ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸ Y_2 καὶ εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον μηδέν.

Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ πολυώνυμον Α διαιρεῖται διὰ τοῦ πολυωνύμου Β καὶ δίδει ἕνα πηλίκον Π ἴσον μὲ $3x^2-5x-3$. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ γράψωμεν :

$$\frac{A}{B} = \Pi \quad \text{ἢ} \quad \frac{6x^4-19x^3+15x^2-x-6}{2x^2-3x+2} = 3x^2-5x-3$$

$$\text{ἢ} \quad A = B\Pi \quad \text{ἢ} \quad 6x^4-19x^3+15x^2-x-6 = (2x^2-3x+2)(3x^2-5x-3)$$

Διάταξις τῆς πράξεως :

$$\begin{array}{lr|l}
A = & 6x^4-19x^3+15x^2-\ x-6 & 2x^2-3x+2 \qquad = B \\
 & -6x^4+\ 9x^3-\ 6x^2 \qquad\quad & 3x^2-5x-3 \qquad = \Pi \\ \cline{2-2}
\text{1ον ὑπόλοιπον} & 0-10x^3+\ 9x^2-\ x-6 & \\
 & +10x^3-15x^2+10x \quad & \\ \cline{2-2}
\text{2ον ὑπόλοιπον} & 0-\ 6x^2+\ 9x-6 & \\
 & +\ 6x^2-\ 9x+6 & \\ \cline{2-2}
\text{3ον ὑπόλοιπον} & 0 \qquad\qquad &
\end{array}$$

Παράδειγμα 2ον. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸ πολυώνυμον $A = 2x^5-11x^4+3x^3+31x^2+2x+5$ διὰ τοῦ $B = 2x^3-5x^2-4x+1$.

Διάταξις τῆς πράξεως :

$$\begin{array}{lr|l}
A = & 2x^5-11x^4+\ 3x^3+31x^2+\ 2x+5 & 2x^3-5x^2-4x+1 \qquad = B \\
 & -2x^5+\ 5x^4+\ 4x^3-\ \ x^2 \qquad\quad & x^2-3x\ -4 \qquad\quad = \Pi \\ \cline{2-2}
\text{1ον ὑπόλοιπον} & -\ 6x^4+\ 7x^3+30x^2+\ 2x+5 & \\
 & +\ 6x^4-15x^3-12x^2+\ 3x \quad & \\ \cline{2-2}
\text{2ον ὑπόλοιπον} & -\ 8x^3+18x^2+\ 5x+5 & \\
 & +\ 8x^3-20x^2-16x+4 & \\ \cline{2-2}
\text{3ον ὑπόλοιπον} & -\ 2x^2-11x+9 &
\end{array}$$

εὑρήκαμεν πηλίκον $\Pi = x^2-3x-4$ καὶ ὑπόλοιπον $-2x^2-11x+9$.

***150.* Παρατηρήσεις. I.** Εἰς τὴν τελείαν διαίρεσιν οἱ ἄκροι ὅροι τοῦ διαιρετέου εἶναι ἀντιστοίχως ἴσοι μὲ τὰ γινόμενα τῶν ἄκρων ὅρων τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ πηλίκου.

Π. χ. Εἰς τὸ παράδειγμα 1ον εἶναι

$$6x^4=2x^2\cdot 3x^2 \quad \text{καὶ} \quad -6=2\cdot(-3)$$

II. Ὁ πρῶτος ὅρος ἑκάστου ὑπολοίπου ἐξαλείφεται.

III. Ὁ βαθμὸς τοῦ πηλίκου Π εἶναι ἴσος μὲ τὴν διαφορὰν τῶν βαθμῶν τοῦ διαιρετέου καὶ τοῦ διαιρέτου. Ἐὰν ὁ βαθμὸς τοῦ Α εἶναι μ καὶ τοῦ Β εἶναι ν, ὁ βαθμὸς τοῦ πηλίκου εἶναι μ—ν· ὑποθέτομεν πάντοτε, ὅτι $\mu>\nu$.

IV. Ὅταν ὁ διαιρετέος εἶναι ἕνα ἐλλιπὲς πολυώνυμον, κατὰ τὴν διάταξιν τῶν πράξεων, ἀφήνομεν χῶρον διὰ τοὺς ὅρους, οἱ ὁποῖοι δὲν ὑπάρχουν εἰς τὸν διαιρετέον.

Π. χ. **Νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ διαίρεσις** . $(x^4-y^4):(x-y)$

$$\begin{array}{rr|l}
x^4 & -y^4 & x-y \\ \cline{3-3}
-x^4+x^3y & & x^3+x^2y+xy^2+y^3 \\ \hline
x^3y & -y^4 & \\
-x^3y+x^2y^2 & & \\ \hline
x^2y^2 & -y^4 & \\
-x^2y^2+xy^3 & & \\ \hline
xy^3 & -y^4 & \\
-xy^3 & +y^4 & \\ \hline
 & 0 &
\end{array}$$

Ἀσκήσεις. ***185.*** Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ πηλίκα τῶν κάτωθι διαιρέσεων:

1. $(35x^3+47x^2+13x+1):(5x+1)$
2. $(5x^6+15x^5+5x+15):(x+3)$
3. $(-6x^3+2x^4-3x+3x^2+1):(-3x+x^2+1)$
4. $(2x^5+6x^4-23x^3+2x^2+16x-3):(x^2+5x-1)$
5. $6x^5-25x^3+5x^4-13x+31x^2+2):(2x^2-3x+2)$.

186. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ πηλίκα τῶν κάτωθι διαιρέσεων:

1. $(x^4-1):(x+1)$ 2. $(x^6-1):(x-1)$
3. $(\alpha^4+\alpha^8+1):(\alpha^2+1-\alpha)$ 4. $(49x^3-72xy^2+27y^3):(7x-3y)$

187. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ πηλίκα τῶν πολυωνύμων:

1. $(x^3+y^3+\omega^3-3xy\omega):(x+y+\omega)$
2. $\dfrac{x^3(y-\omega)+y^3(\omega-x)+\omega^3(x-y)}{x^2(y-\omega)+y^2(\omega-x)+\omega^2(x-y)}$
3. $\dfrac{-x^4+(\alpha^2-\alpha)x^3+(\alpha^3+3\alpha)x^2+(-\alpha^3+2\alpha^2)x-2\alpha^2}{-x^2+\alpha^2x+2\alpha}$
4. $(\alpha^{8\mu}-\beta^{8\nu}):(\alpha^{5\mu}-\beta^{5\nu}+\alpha^{\mu}\beta^{4\nu}-\alpha^{4\mu}\beta^{\nu})$

188. Νὰ γίνουν αἱ κάτωθι διαιρέσεις:

1. $(6x^4-4x^3y+3x^2y^2-7xy^3+4y^4):(3x^2-5xy+2y^2)$
2. $(60\alpha^3\beta^2-5\alpha^2\beta^3+15\alpha^5-61\alpha^4\beta-35\alpha\beta^4-4\beta^5):(3\alpha^2-\beta^2-8\alpha\beta)$
3. $[x^4(x-5y)+x^2y^2(7x-y)-2y^4(2x-y)]:[x^2(x-3y)-y^2(y-3x)]$

151. **Διαίρεσις δύο πολυωνύμων διατεταγμένων κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις.** Ἡ διαίρεσις δύο ἀκεραίων πολυωνύμων διατεταγμένων κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ αὐτοῦ γράμματος γίνεται κατὰ τὸν κανόνα (§ 149) τῆς διαιρέσεως δύο πολυωνύμων διατεταγμένων κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ αὐτοῦ γράμματος.

Τὸ πηλίκον ὅμως τῆς διαιρέσεως δύο τοιούτων πολυωνύμων δὲν εὑρίσκεται ποτέ, ἐκτὸς ἐὰν ἡ διαίρεσις εἶναι τελεία.

Παράδειγμα 1ον. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸ πολυώνυμον $A=6+19x+3x^2-19x^3+6x^4$ διὰ τοῦ πολυωνύμου $B=-3-5x+3x^2$

Διάταξις τῶν πράξεων:

$$
\begin{array}{l r|l}
 & 6+19x+3x^2-19x^3+6x^4 & -3-5x+3x^2 \\
 & -6-10x+6x^2 & \overline{-2-3x+2x^2} \\ \hline
\text{1ον ὑπόλοιπον} & 9x+9x^2-19x^3+6x^4 & \\
 & -9x-15x^2+9x^3 & \\ \hline
\text{2ον ὑπόλοιπον} & -6x^2-10x^3+6x^4 & \\
 & +6x^2+10x^3-6x^4 & \\ \hline
\text{3ον ὑπόλοιπον} & 0 &
\end{array}
$$

Παράδειγμα 2ον. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸ πολυώνυμον $A=4-3x+4x^2+5x^3$ διὰ τοῦ $B=1+2x-5x^2$.

Διάταξις τῶν πράξεων:

$$
\begin{array}{l r|l}
A= & 4-3x+4x^2+5x^3 & 1+2x-5x^2 \qquad =B \\
 & -4-8x+20x^2 & \overline{4-11x \qquad\qquad =\Pi} \\ \hline
\text{1ον ὑπόλοιπον} & -11x+24x^2+5x^3 & \\
 & +11x+22x^2-55x^3 & \\ \hline
\text{2ον ὑπόλοιπον} & 46x^2-50x^3 &
\end{array}
$$

Ἡ διαίρεσις δύναται νὰ συνεχισθῇ ἐπ' ἄπειρον, ἀλλὰ συνήθως σταματῶμεν τὴν πρᾶξιν μετὰ τὴν χρησιμοποίησιν ὅλων τῶν ὅρων τοῦ διαιρετέου. Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν τὴν ταυτότητα

$$4-3x+4x^2+5x^3=(1+2x^2-5x^2)(4-11x)+(46x^2-50x^3)$$

Ὅταν θέλωμεν τὸ πηλίκον νὰ εἶναι ν βαθμοῦ, τότε συνεχίζομεν τὴν διαίρεσιν.

Ἀσκήσεις. ***189.*** **Νὰ γίνουν αἱ κάτωθι διαιρέσεις:**

1. $(4+3x^3+x^4):(1+x^2)$
2. $(-1+\alpha-4\alpha^2+4\alpha^3+6\alpha^4+\alpha^5):(-1+\alpha+\alpha^2)$

190. Νὰ γίνῃ ἡ διαίρεσις:

$x^4+[4\alpha^2-3(\alpha+\beta)]x^3-12\alpha^2(\alpha+\beta)x^2+[4\alpha^2+3(\alpha+\beta)\gamma^2]x-\gamma^4$

διὰ τοῦ $x^2+4\alpha^2x-\gamma^2$.

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΕΝΟΣ ΑΚΕΡΑΙΟΥ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ ΤΟΥ x ΔΙ' ΕΝΟΣ ΔΥΩΝΥΜΟΥ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $x \pm \alpha$

152. **Συμβολικὴ παράστασις ἑνὸς πολυωνύμου.** Ἕνα ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ x παρίσταται συνήθως μὲ τὸ σύμβολον Π(x) (τὸ ὁποῖον διαβάζεται Π τοῦ x) ἢ μὲ φ(x) ἢ σ(x) ἢ f(x), κλπ. δηλ. γράφομεν
$$\Pi(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$$
Τὸ γράμμα x, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ λάβῃ οἱανδήποτε ἀριθμητικὴν τιμήν, λέγεται ***μεταβλητή***.

Ἕνα ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ x, βαθμοῦ μ καὶ διατεταγμένον κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ x, ἔχει τὴν μορφήν:
$$A_0x^{\mu}+A_1x^{\mu-1}+A_2x^{\mu-2}+\ldots+A_{\mu-1}x+A_{\mu}$$
Οἱ συντελεσταὶ $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{\mu}$ εἶναι ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοὶ θετικοί, ἀρνητικοὶ ἢ μηδέν.

Ἐὰν εἰς τὸ πολυώνυμον Π(x) ἀντικαταστήσωμεν τὸ x μὲ μίαν δοθεῖσαν τιμὴν ξ, τὸ ἐξαγόμενον τῆς ἀντικαταστάσεως παρίσταται μὲ τὸ σύμβολον Π(ξ).

Π.χ. Ἐὰν εἶναι $\Pi(x)=2x^3-10x^2+8x-5$
θὰ εἶναι
$$\Pi(1)=2\cdot1^3-10\cdot1^2+8\cdot1-5=-5$$
$$\Pi(2)=2\cdot2^3-10\cdot2^2+8\cdot2-5=-13$$
$$\Pi(-3)=2\cdot(-3)^3-10\cdot(-3)^2+8\cdot(-3)-5=-173$$

Ἀσκήσεις. *191*. Ἐὰν $\varphi(x)=3x^4-5x^2+2x-1$ νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ $\varphi(-1)$, $\varphi(2)$, $\varphi(0)$, $\varphi\left(-\frac{3}{4}\right)$

192. Ἐὰν $\varphi(x)=x^3-\alpha x^2+3\alpha^2x+\alpha^3$ νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ $\varphi(\alpha)$ καὶ $\varphi(-\alpha)$

193. Ἐὰν $\varphi(x)=2x^2-3x$ νὰ ὑπολογισθῇ τὸ $\varphi(x+1)-\varphi(x)$.

194. Ἐὰν $\varphi(x)=x^2-3x+2$ νὰ ὑπολογισθῇ τὸ $\varphi(x+1)-\varphi(x-1)$.

153. **Διαιρετότης διὰ x—α. Θεώρημα.** ***Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἑνὸς ἀκεραίου πολυωνύμου τοῦ x διὰ τοῦ διωνύμου τῆς μορφῆς x—α, εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἐξαγόμενον, τὸ ὁποῖον προκύπτει, ὅταν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὸ πολυώνυμον τὸ x διὰ τοῦ α.***

Ἔστω φ(x) ἕνα ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ x. Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ φ(x) διὰ τοῦ x—α εἶναι ἴσον μὲ φ(α).

Πράγματι· ἔστω π(x) τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ φ(x) διὰ (x—α) καὶ Υ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως αὐτῆς. Τὸ ὑπόλοιπον Υ εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ x, δηλ. τὸ Υ δὲν θὰ περιέχῃ τὸ x, διότι ὁ διαιρέτης (x—α) εἶναι πρώτου βαθμοῦ καὶ ἑπομένως τὸ ὑπόλοιπον θὰ εἶναι βαθμοῦ κατωτέρου τοῦ πρώτου, δηλ. μηδενικοῦ βαθμοῦ.

Ἐπειδὴ εἰς κάθε διαίρεσιν ὁ διαιρετέος εἶναι ἴσος μὲ τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ πηλίκον σὺν τῷ ὑπολοίπῳ, θὰ ἔχωμεν τὴν ταυτότητα:
$$\varphi(x)=(x-\alpha)\cdot\pi(x)+\Upsilon \qquad (1)$$

Ἡ ταυτότης (1) ἀληθεύει διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x· ἄρα ἀληθεύει καὶ διὰ $x=\alpha$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) τὸ x μὲ τὸ α λαμβάνομεν

$$\varphi(\alpha)=(\alpha-\alpha)\cdot\pi(\alpha)+Y$$
$$\text{ἢ}\quad \varphi(\alpha)=\quad 0\cdot\pi(\alpha)+Y$$
$$\text{ἢ}\quad \varphi(\alpha)=Y$$

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως....***

Παράδειγμα. Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ πολυωνύμου

$$\varphi(x)=5x^2-4x-20 \quad \text{διὰ} \quad x-3$$

εἶναι $\varphi(3)=5\cdot3^2-4\cdot3-20=5\cdot9-4\cdot3-20=45-12-20=13.$

154. Πόρισμα. ***Ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, διὰ νὰ εἶναι ἕνα ἀκέραιον πολυώνυμον*** $\varphi(x)$ ***διαιρετὸν διὰ*** $x-\alpha$ ***εἶναι νὰ μηδενίζεται τὸ πολυώνυμον, ὅταν ἀντικαταστήσωμεν εἰς αὐτὸ τὸ*** x ***διὰ τοῦ α.***

Ἡ συνθήκη εἶναι ἀναγκαία· διότι διὰ νὰ εἶναι τὸ πολυώνυμον $\varphi(x)$ διαιρετὸν διὰ $x-\alpha$ πρέπει τὸ ὑπόλοιπον Y νὰ εἶναι μηδέν· δηλ. πρέπει νὰ εἶναι $\varphi(\alpha)=0$.

Ἡ συνθήκη εἶναι ἱκανή· διότι ἐὰν $\varphi(\alpha)=0$ τὸ ὑπόλοιπον Y εἶναι μηδὲν καὶ ἑπομένως τὸ πολυώνυμον εἶναι διαιρετὸν διὰ $x-\alpha$.

ΣΗΜ. Ἡ ἔκφρασις: ***ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη*** ἐκφράζεται ἁπλούστερον: ***πρέπει καὶ ἀρκεῖ.*** Π.χ. τὸ ἀνωτέρω πόρισμα ἐκφράζεται καὶ ὡς ἑξῆς:

Διὰ νὰ εἶναι ἕνα ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ x ***διαιρετὸν διὰ*** $x-\alpha$, ***πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ πολυώνυμον νὰ μηδενίζεται, ὅταν ἀντικαταστήσωμεν εἰς αὐτὸ τὸ*** x ***διὰ τοῦ α.***

155. **Διαιρετότης διὰ $x+\alpha$**. Ἐὰν παρατηρήσωμεν, ὅτι $x+\alpha=x-(-\alpha)$ συνάγομεν, ὅτι:

I. ***Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἑνὸς ἀκεραίου πολυωνύμου τοῦ*** x ***διὰ*** $x+\alpha$ ***εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἐξαγόμενον, τὸ ὁποῖον προκύπτει, ὅταν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὸ πολυώνυμον τὸ*** x ***διὰ τοῦ*** $-\alpha$.

II. ***Ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη διὰ νὰ εἶναι ἕνα ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ*** x ***διαιρετὸν διὰ*** $x+\alpha$ ***εἶναι νὰ μηδενίζεται τὸ πολυώνυμον, ὅταν ἀντικαταστήσωμεν εἰς αὐτὸ τὸ*** x ***διὰ τοῦ*** $-\alpha$.

Παράδειγμα. Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ πολυωνύμου

$$\varphi(x)=3x^3-5x^2+4x+8 \quad \text{διὰ} \quad x+2$$

εἶναι
$$\begin{aligned}\varphi(-2)&=3\cdot(-2)^3-5\cdot(-2)^2+4\cdot(-2)+8\\&=3\cdot(-8)-5\cdot4\quad+4\cdot(-2)+8\\&=-24\quad-20\quad-8\quad+8=-44\end{aligned}$$

156. **Διαιρετότης διὰ $\alpha x+\beta$ ὅπου $\alpha\neq0$.** Ἔστω, ὅτι ἕνα πολυώνυμον $\varphi(x)$ διαιρούμενον διὰ $(\alpha x+\beta)$ δίδει πηλίκον $\pi(x)$ καὶ ὑπόλοιπον Y, ὅπου τὸ Y εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ x.

Κατὰ τὰ γνωστὰ θὰ ἔχωμεν τὴν ταυτότητα

$$\varphi(x)=(\alpha x+\beta)\cdot\pi(x)+Y \qquad (1)$$

Ἐὰν θέσωμεν $x=-\dfrac{\beta}{\alpha}$, ἡ (1) γίνεται

$$\varphi\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)=0\cdot\pi(x)+Y$$

$$\text{ἢ}\quad \varphi\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)=Y$$

Ἐξ αὐτοῦ συνάγομεν ἀκόμη, ὅτι :

I. ***Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἑνὸς ἀκεραίου πολυωνύμου τοῦ*** x ***διὰ*** $\alpha x+\beta$ ***εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἐξαγόμενον, τὸ ὁποῖον προκύπτει, ὅταν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὸ πολυώνυμον τὸ*** x ***διὰ τοῦ*** $-\dfrac{\beta}{\alpha}$.

II. ***Διὰ νὰ εἶναι ἕνα πολυώνυμον*** $\varphi(x)$ ***διαιρετὸν διὰ*** $\alpha x+\beta$, ***πρέπει νὰ ἀρκεῖ τὸ πολυώνυμον νὰ μηδενίζεται, ὅταν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὸ*** $\varphi(x)$ ***τὸ*** x ***διὰ τοῦ*** $-\dfrac{\beta}{\alpha}$.

Παράδειγμα. Νὰ εὑρεθοῦν, χωρὶς νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ διαίρεσις, τὰ ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων τοῦ πολυωνύμου $\varphi(x)=x^3-4x^2+5x-6$ διὰ $x-2$ διὰ $x+2$ καὶ διὰ $4x+1$.

Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ $\varphi(x)$ διὰ $x-2$ εἶναι

$$\varphi(2)=2^3-4\cdot2^2+5\cdot2-6=8-16+10-6=-4$$

Διὰ $x+2$ εἶναι $\varphi(-2)=(-2)^3-4\cdot(-2)^2+5\cdot(-2)-6=-8-16-10-6=-40$

Διὰ $4x+1$ εἶναι $\varphi\left(-\dfrac{1}{4}\right)=\left(-\dfrac{1}{4}\right)^3-4\left(-\dfrac{1}{4}\right)^2+5\cdot\left(-\dfrac{1}{4}\right)-6$

$$=-\frac{1}{64}-4\cdot\frac{1}{16}-\frac{5}{4}-6=-\frac{481}{64}$$

Ἀσκήσεις. 195. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ὑπόλοιπα τῶν κάτωθι διαιρέσεων, χωρὶς νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ πρᾶξις :

1. $(3x^2-4x+5):(x-2)$
2. $(5x^3-7x^2+8x+1):(x-3)$
3. $(8x^2-5x-1):(x-1)$
4. $(-x^3-4x^2-x+1):(x-5)$

196. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ὑπόλοιπα τῶν κάτωθι διαιρέσεων χωρὶς νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ πρᾶξις :

1. $(5x^3-3x^2+2x+1):(x+1)$
2. $(x^4-3x^2+x-1):(x+3)$
3. $(3x^4-5x^3+x-1):(x+2)$
4. $(x^2-3x+2):(x+5)$

197. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ὑπόλοιπα τῶν κάτωθι διαιρέσεων, χωρὶς νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ πρᾶξις :

1. $(4x^2-5x+6):(2x-1)$
2. $(2x^3-4x^2+5x-1):(3x-2)$
3. $(x^3-3x^2+5):(3x+1)$
4. $(3x^3-5x^2+x-1):(2x+3)$

157. **Ἐφαρμογαί.** Τὰ προηγούμενα θεωρήματα μᾶς ἐπιτρέπουν, χωρὶς νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν, νὰ εὑρίσκωμεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἑνὸς πολυωνύμου τοῦ x δι' ἑνὸς δυωνύμου τοῦ πρώτου βαθμοῦ καὶ νὰ εὑρίσκωμεν εἰς ποίας περιπτώσεις ἡ διαίρεσις εἶναι τελεία.

Παράδειγμα 1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ πολυώνυμον $\varphi(x)=3x^2-11x+10$ **εἶναι διαιρετὸν διὰ** $x-2$.

Γνωρίζομεν (§ 154), ὅτι διὰ νὰ εἶναι διαιρετὸν τὸ πολυώνυμον $\varphi(x)$ διὰ τοῦ $x-2$, πρέπει τὸ $\varphi(2)$ νὰ εἶναι ἴσον μὲ μηδέν· ἐδῶ εἶναι

$$\varphi(2)=3\cdot 2^2-11\cdot 2+10=12-22+10=0.$$

Ἐπειδὴ $\varphi(2)=0$, τὸ $\varphi(x)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $x-2$.

Παράδειγμα 2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ πολυώνυμον $x^3+y^3+\omega^3-3xy\omega$ **εἶναι διαιρετὸν διὰ** $x+y+\omega$ **καὶ νὰ ὑπολογισθῇ τὸ πηλίκον.**

Ἐὰν θέσωμεν τὸν διαιρέτην ὑπὸ τὴν μορφὴν $x+(y+\omega)$ τὸ πολυώνυμον τοῦ διαιρετέου θὰ εἶναι διαιρετὸν διὰ $x+(y+\omega)$, ἐὰν μηδενίζεται, ὅταν ἀντικαταστήσωμεν τὸ x διὰ τοῦ $-(y+\omega)$· ἔχομεν

$$\begin{aligned}\varphi[-(y+\omega)]&=[-(y+\omega)]^3+y^3+\omega^3-3y\omega[-(y+\omega)]\\&=-y^3-3y^2\omega-3y\omega^2-\omega^3+y^3+\omega^3+3y^2\omega+3y\omega^2=0\end{aligned}$$

Ἐπειδὴ τὸ ὑπόλοιπον εἶναι μηδέν, τὸ πολυώνυμον $x^3+y^3+\omega^3-3xy\omega$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $x+y+\omega$.

Ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν τοῦ $x^3+y^3+\omega^3-3xy\omega$ διὰ τοῦ $x+y+\omega$ εὑρίσκομεν πηλίκον $x^2+y^2+\omega^2-xy-x\omega-y\omega$.

Ἄρα θὰ εἶναι:

$$x^3+y^3+\omega^3-3xy\omega=(x+y+\omega)(x^2+y^2+\omega^2-xy-x\omega-y\omega)$$

Ἀσκήσεις. Α' Ὁμάς. 198. Νὰ εὑρεθῇ, χωρὶς νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ διαίρεσις, τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ $3x^4-2x^3-x^2-x+2$ διὰ $x-3$, διὰ $x+2$, διὰ $2x-3$, διὰ $3x+1$.

199. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ πολυώνυμον $3x^2-4x-15$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $x-3$.

200. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ πολυώνυμον $\alpha^2-4\alpha\beta+3\beta^2$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $\alpha-3\beta$.

Β' Ὁμάς. 201. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ $(x+y)^\mu-x^\mu-y^\mu$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $x+y$, ὅταν τὸ μ εἶναι περιττὸς ἀριθμός.

202. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ $(\alpha+\beta+\gamma)^\mu-\alpha^\mu-\beta^\mu-\gamma^\mu$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $\alpha+\beta$, $\alpha+\gamma$, $\beta+\gamma$, ὅταν ὁ μ εἶναι περιττὸς ἀριθμὸς καὶ θετικός.

Αξιοσ. πηλικα

ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΑ ΠΗΛΙΚΑ

158. **Πηλίκα τῶν διαιρέσεων** $(x^\mu \pm \alpha^\mu):(x \pm \alpha)$. **Ι.** ***Πηλίκον τῆς διαιρέσεως*** $(x^\mu-\alpha^\mu):(x-\alpha)$. Τὸ δυώνυμον $x^\mu-\alpha^\mu$ εἶναι πάντοτε διαιρετὸν διὰ $x-\alpha$, διότι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεώς του διὰ $x-\alpha$ εἶναι

$$\varphi(\alpha)=\alpha^\mu-\alpha^\mu=0 \text{ διὰ κάθε τιμὴν τοῦ } \mu.$$

Ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν τοῦ $x^\mu-\alpha^\mu$ διὰ $x-\alpha$ εὑρίσκομεν πηλίκον

$$\pi(x)=x^{\mu-1}+\alpha x^{\mu-2}+\alpha^2x^{\mu-3}+\alpha^3x^{\mu-4}+\ldots+\alpha^{\mu-1})$$

Ἄρα θὰ εἶναι:

$$(x^\mu-\alpha^\mu)=(x-\alpha)(x^{\mu-1}+\alpha x^{\mu-2}+\alpha^2x^{\mu-3}+\ldots+\alpha^{\mu-1})$$

Π.χ. $(x^3-\alpha^3):(x-\alpha)=x^2+\alpha x+\alpha^2$ · ἄρα

$$\boxed{x^3-\alpha^3=(x-\alpha)(x^2+\alpha x+\alpha^2)}$$

$(x^4-\alpha^4):(x-\alpha)=\alpha x^2+\alpha x^2+\alpha^2x+\alpha^3$ · ἄρα $x^4-\alpha^4=(x-\alpha)(x^3+\alpha x^2+\alpha^2x+\alpha^3)$

II. ***Πηλίκον τῆς διαιρέσεως*** $(x^\mu-\alpha^\mu):(x+\alpha)$. Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ $\varphi(x)=x^\mu-\alpha^\mu$ διὰ τοῦ $x+\alpha$ εἶναι

$$\varphi(-\alpha)=(-\alpha)^\mu-\alpha^\mu$$

1ον. Ἐὰν μ εἶναι ἄρτιος ἀριθμός, θὰ εἶναι $(-\alpha)^\mu=\alpha^\mu$ καὶ ἡ (1) γίνεται
$$\varphi(-\alpha)=\alpha^\mu-\alpha^\mu=0$$

Ἐὰν λοιπὸν μ ἄρτιος, τὸ ὑπόλοιπον εἶναι μηδὲν καὶ ἑπομένως τὸ $x^\mu-\alpha^\mu$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $x+\alpha$ καὶ δίδει πηλίκον

$$\pi(x)=x^{\mu-1}-\alpha x^{\mu-2}+\alpha^2x^{\mu-3}-\ldots+\alpha^{\alpha-2}x-\alpha^{\mu-1}$$

Π.χ. $(x^4-\alpha^4):(x+\alpha)=x^3-\alpha x^2+\alpha^2x-\alpha^3$

2ον. Ἐὰν μ εἶναι περιττὸς ἀριθμός, θὰ εἶναι $(-\alpha)^\mu=-\alpha^\mu$ καὶ ἡ (1) γίνεται
$$\varphi(-\alpha)=-\alpha^\mu-\alpha^\mu=-2\alpha^\mu$$

Ἐὰν λοιπὸν μ εἶναι περιττὸς ἀριθμός, τὸ ὑπόλοιπον $\varphi(-\alpha)$ εἶναι διάφορον τοῦ μηδενὸς καὶ ἑπομένως τὸ $x^\mu-\alpha^\mu$ δὲν εἶναι διαιρετὸν διὰ $x+\alpha$. Τὸ πηλίκον εἶναι:

$$\pi(x)=x^{\mu-1}-\alpha x^{\mu-2}+\alpha^2x^{\mu-3}-\ldots-\alpha^{\mu-2}x+\alpha^{\mu-1}$$

Π.χ. $(x^3-\alpha^3):(x+\alpha)$ δίδει πηλίκον $x^2-\alpha x+x^2$ καὶ ὑπόλοιπον $-2\alpha^3$

III. ***Πηλίκον τῆς διαιρέσεως*** $(x^\mu+\alpha^\mu):(x+\alpha)$. Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ $\varphi(x)=x^\mu+\alpha^\mu$ διὰ $x+\alpha$ εἶναι

$$\varphi(-\alpha)=(-\alpha)^\mu+\alpha^\mu \qquad (1)$$

1ον. Ἐὰν μ εἶναι ἄρτιος ἀριθμός, θὰ εἶναι $(-\alpha)^\mu=+\alpha^\mu$ καὶ ἡ (1) γίνεται
$$\varphi(-\alpha)=+\alpha^\mu+\alpha^\mu=+2\alpha^\mu$$

Ὥστε: ***ἐὰν μ εἶναι ἄρτιος***, τὸ ὑπόλοιπον $\varphi(-\alpha)$ εἶναι διάφορον τοῦ μηδενὸς καὶ ἑπομένως ***τὸ*** $x^\mu+\alpha^\mu$ ***δὲν εἶναι διαιρετὸν διὰ*** $x+\alpha$. Τὸ πηλίκον εἶναι

$$\pi(x)=x^{\mu-1}-\alpha x^{\mu-2}+\alpha^2x^{\mu-3}-\ldots+\alpha^{\mu-2}x-\alpha^{\mu-1}$$

Π.χ. Ἡ διαίρεσις $(x^4+x^4):(x+\alpha)$ δίδει πηλίκον $x^3-\alpha x^2+\alpha^2x-\alpha^3$ καὶ ὑπόλοιπον $2\alpha^4$.

2ον. Ἐὰν μ εἶναι περιττὸς ἀριθμός, θὰ εἶναι $(-\alpha)^\mu=-\alpha^\mu$ καὶ ἡ (1) γίνεται
$$\varphi(-\alpha)=-\alpha^\mu+\alpha^\mu=0$$

Ὥστε: ***ἐὰν δ μ εἶναι περιττὸς ἀριθμός***, τὸ ὑπόλοιπον $\varphi(-\alpha)$ εἶναι μηδὲν καὶ ***ἑπομένως τὸ*** $x^\mu+\alpha^\mu$ ***εἶναι διαιρετὸν διὰ*** $x+\alpha$.

(105)

Τὸ πηλίκον $\pi(x)$ εἶναι

$$\pi(x)=x^{\mu-1}-\alpha x^{\mu-2}+\alpha^2x^{\mu-3}-\ldots-\alpha^{\mu-2}x+\alpha^{\mu-1}$$

Θὰ εἶναι λοιπὸν

$$(x^\mu+\alpha^\mu)=(x+\alpha)(x^{\mu-1}-\alpha x^{\mu-2}+\alpha^2x^{\mu-3}-\ldots-\alpha x^{\mu-2}+\alpha^{\mu-1})$$

Π.χ. $(x^3+\alpha^3):(x+\alpha)=x^2-\alpha x+\alpha^2$ · ἄρα

$$\boxed{\mathbf{x^3+\alpha^3=(x+\alpha)(x^2-\alpha x+\alpha^2)}}$$

75
5ο Θέμα

IV. ***Πηλίκον τῆς διαιρέσεως*** $(x^\mu+\alpha^\mu):(x-\alpha)$. Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ $\varphi(x)=x^\mu+\alpha^\mu$ διὰ τοῦ $x-\alpha$ εἶναι

$$\varphi(\alpha)=\alpha^\mu+\alpha^\mu=2\alpha^\mu$$

᾿Επειδὴ τὸ ὑπόλοιπον $\varphi(\alpha)$ εἶναι διάφορον τοῦ μηδενός, δι᾿ οἱανδήποτε τιμὴν τοῦ μ ἕπεται, ὅτι τὸ $x^\mu+\alpha^\mu$ ***δὲν εἶναι ποτὲ διαιρετὸν διὰ*** $x-\alpha$.

Π.χ. Ἡ διαίρεσις $(x^\mu+\alpha^\mu):(x-\alpha)$ δίδει πηλίκον

$x^{\mu-1}+\alpha x^{\mu-2}+\alpha^2x^{\mu-3}+\ldots+\alpha^{\mu-1}$ καὶ ὑπόλοιπον $2\alpha^\mu$

᾿Ασκήσεις. 203. *Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ πηλίκα καὶ τὰ ὑπόλοιπα τῶν κάτωθι διαιρέσεων, χωρὶς νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ διαίρεσις :*

1. $(\alpha^4-\beta^4):(\alpha-\beta)$ 3. $(x^6-\alpha^6):(x-\alpha)$ 5. $(\alpha^4-1):(\alpha-1)$
2. $(x^5-y^5):(x-y)$ 4. $(\alpha^7-\beta^7):(\alpha-\beta)$ 6. $(y^5-1):(y-1)$

204. Ὁμοίως τῶν κάτωθι διαιρέσεων :

1. $(\alpha^3-\beta^3):(\alpha+\beta)$ 3. $(x^5-\alpha^5):(x+\alpha)$ 5. $(x^4-1):(x+1)$
2. $(\alpha^4-\beta^4):(\alpha+\beta)$ 4. $(x^6-y^6):(x+y)$ 6. $(\alpha^5-1):(x+1)$

Α΄ Ὁμάς. 205. Ὁμοίως τῶν κάτωθι διαιρέσεων :

1. $(\alpha^3+\beta^3):(\alpha+\beta)$ 3. $(x^5+y^5):(x+y)$ 5. $(\alpha^4+1):(\alpha+1)$
2. $(\alpha^4+\beta^4):(\alpha+\beta)$ 4. $(x^6+\alpha^6):(x+\alpha)$ 6. $(x^5+1):(x+1)$

206. Ὁμοίως τῶν κάτωθι διαιρέσεων :

1. $(\alpha^3+\beta^3):(\alpha-\beta)$ 3. $(\alpha^5+\beta^5):(\alpha-\beta)$ 5. $(x^4+1):(x-1)$
2. $(x^4+y^4):(x-y)$ 4. $(y^6+\beta^6)(y-\beta)$ 6. $(\alpha^5+1):(\alpha-1)$

207. Ὁμοίως τῶν κάτωθι διαιρέσεων :

1. $(16-x^4):(2+x)$ 3. $(x^3+8y^3):(x+2y)$ 5. $(64x^3-1):(4x-1)$
2. $(x^4-16y^4):(x+2y)$ 4. $(27\mu^3+1):(3\mu+1)$ 6. $(81\alpha^4-16\beta^4):(3\alpha-2\beta)$

Β΄ Ὁμάς. 208. Ποίων τελείων διαιρέσεων τῆς μορφῆς $(x^\mu\pm\alpha^\mu):(x\pm\alpha)$ εἶναι πηλίκα τὰ κάτωθι :

1. $x^2+\alpha x+\alpha^2$ 4. x^3+x^2+x+1
2. $x^2-\alpha x+\alpha^2$ 5. $\alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^3$
3. x^2-x+1 6. $x^4-yx^3+y^2x^2-y^3x+y^4$

209. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ $13^{2\nu}-1$ εἶναι διαιρετὸν διὰ 14

210. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ $7^{2\nu+1}+1$ εἶναι διαιρετὸν διὰ 8.

211. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ παράστασις $2^{35}-1$ εἶναι διαιρετὴ διὰ 31 καὶ διὰ 127.

ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΕΙΣ ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ

159. Ὁρισμός. ***Ἀνάλυσις μιᾶς παραστάσεως εἰς γινόμενον παραγόντων λέγεται ὁ μετασχηματισμὸς αὐτῆς εἰς γινόμενον παραγόντων.***

Ἡ ἀνάλυσις μιᾶς ἀλγεβρικῆς παραστάσεως εἰς γινόμενον παραγόντων εἶναι ἕνα ἀπὸ τὰ σπουδαιότερα προβλήματα τῆς Ἀλγέβρας. Μὲ αὐτὴν συντομεύομεν τὰς πράξεις ἐπὶ τῶν ἀλγεβρικῶν παραστάσεων, ἁπλοποιοῦμεν τὰς κλασματικὰς παραστάσεις καὶ κατορθώνομεν νὰ λύωμεν ἐξισώσεις ἀνωτέρου βαθμοῦ, ὡς θὰ ἴδωμεν εἰς ἄλλο κεφάλαιον. Διὰ νὰ ἀναλύσωμεν μίαν ἀλγεβρικὴν παράστασιν εἰς γινόμενον παραγόντων πρέπει νὰ ἐξετάζωμεν, ἐὰν ἡ παράστασις δύναται νὰ ἀναχθῇ εἰς μίαν ἀπὸ τὰς κάτωθι περιπτώσεις:

1ον. Ἐὰν οἱ ὅροι της ἔχουν κοινὸν παράγοντα. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θέτομεν τὸν κοινὸν παράγοντα ἐκτὸς παρενθέσεως, ὅπως ἐδείχθη εἰς τὴν § 147.

Παράδειγμα. Νὰ τραπῇ εἰς γινόμενον παραγόντων ἡ παράστασις

$$12\alpha^2\beta-16\alpha\beta^2+4\alpha^3\beta$$

Οἱ ὅροι της ἔχουν κοινὸν παράγοντα τὸν $4\alpha\beta$. Θέτομεν τὸ $4\alpha\beta$ ὡς κοινὸν παράγοντα καὶ εὑρίσκομεν $4\alpha\beta(3\alpha-4\beta+\alpha^2)$

Ἡ διάταξις τῶν πράξεων εἶναι:

$$12\alpha^2\beta-16\alpha\beta^2+4\alpha^3\beta=4\alpha\beta(3\alpha-4\beta+\alpha^2)$$

Παρατήρησις. Ἐνίοτε ὁ κοινὸς παράγων τῶν ὅρων μιᾶς παραστάσεως φαίνεται, ὅταν ἀλλάξωμεν τὸ σημεῖον ἑνὸς ὅρου του.

Π.χ. Ἔστω ἡ παράστασις $2\alpha(x-y)+3\beta(y-x)$.

Ἡ παράστασις αὐτὴ γράφεται $2\alpha(x-y)-3\beta(x-y)$.

Θέτομεν τὸν κοινὸν παράγοντα $(x-y)$ ἐκτὸς παρενθέσεως καὶ ἔχομεν $(x-y)(2\alpha-3\beta)$.

Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν κατὰ σειράν:

$$2\alpha(x-y)+3\beta(y-x)=2\alpha(x-y)-3\beta(x-y)$$
$$=(x-y)(2\alpha-3\beta)$$

Ἀσκήσεις. Α' Ὁμάς. *212.* Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ κάτωθι παραστάσεις:

1. $12\alpha x-16\alpha y$
2. $\alpha\beta^2\gamma^3-\alpha^3\beta^2\gamma$
3. $5\alpha^2x-10\alpha xy+20\alpha x\omega$
4. $3\mu x^2y-12\nu xy^2+21\mu\nu xy$

213. Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ κάτωθι παραστάσεις:

1. $\alpha x+\beta x-\gamma x$
2. $4\alpha^3+10\alpha^2-2\alpha$
3. $\alpha^2\beta\gamma-\alpha\beta^2\gamma+\alpha\beta\gamma^2$
4. $12\alpha x^3+3\alpha x^2y-12\alpha xy^2$
5. $9\mu^2\nu^2-27\mu\nu+63$
6. $12\alpha^2\beta+6\alpha^3\beta^2-18\alpha^2\beta^4$

214. Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ κάτωθι παραστάσεις:

1. $(\alpha+\beta)x+(\alpha+\beta)y$
2. $(\beta-\gamma)\omega-(\beta-\gamma)\omega$
3. $(x^2-y^2)+\alpha(x^2-y^2)$
4. $\alpha\beta(xy-\omega)+(xy-\omega)$
5. $x(2\alpha+\beta)-15(2\alpha+\beta)$
6. $\alpha(3yx+\omega)-\beta(3xy+\omega)$

Β' Ὁμάς. *215.* Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ κάτωθι παραστάσεις:

1. $(3x-1)(y+2)-(1-3x)(y-2)$
2. $(5\alpha-1)(\beta+3)-(1-5\alpha)(\beta-3)$
3. $(x-2y)(\alpha-\beta)-(\alpha+\beta)(2y-x)$
4. $(\alpha-\beta)(2\alpha-\beta+\gamma)+(\beta-\alpha)(\alpha-\beta+\gamma)$
5. $(\gamma-\alpha-\beta)(2\alpha-\beta)-(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha+\beta)$
6. $(2x+1)(3x-2)-(x-4)(2x+1)-(2x+1)^2$
7. $(x-y)(\alpha-2)-(y-x)(\beta+3)-(x-y)(1-\gamma)$

2ον. ***Ἐὰν ἡ παράστασις εἶναι τῆς μορφῆς $\alpha^2-\beta^2$.*** Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἐφαρμόζομεν τὴν ταυτότητα

$$\boxed{\alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)} \qquad (1)$$

ἡ ὁποία προκύπτει ἀπὸ τὴν γνωστὴν (§ 135) ταυτότητα $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$, ἐὰν ἐναλλάξωμεν τὰ μέλη της.

Παραδείγματα. 1ον. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ τρέψωμεν τὴν παράστασιν $9x^2-4\alpha^2$ εἰς γινόμενον παραγόντων. Ἡ παράστασις αὐτὴ γράφεται $(3x)^2-(2\alpha)^2$ δηλ. εἶναι διαφορὰ τετραγώνων τῶν ἀριθμῶν $3x$ καὶ 2α· δηλ. εἶναι τῆς μορφῆς $\alpha^2-\beta^2$. Κατὰ τὴν ταυτότητα (1) θὰ εἶναι

$$(3x)^2-(2\alpha)^2=(3x+2\alpha)(3x-2\alpha)$$

δηλ. εἶναι $\quad 9x^2-4\alpha^2=(3x+2\alpha)(3x-2\alpha)$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι

$$16\alpha^2\beta^6-25\alpha^4\beta^2=(4\alpha\beta^3+5\alpha^2\beta)(4\alpha\beta^3-5\alpha^2\beta)$$

2ον. $\quad \alpha^3\beta\gamma-\alpha\beta\gamma^3=\alpha\beta\gamma(\alpha^2-\beta^2)$
$$=\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$$

3ον. $\quad \alpha^4-\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^2-\beta^2)$
$$=(\alpha^2+\beta^2)(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$$

4ον. $\quad (x+y)^2-\omega^2=[(x+y)+\omega)][(x+y)-\omega]$
$$=(x+y+\omega)(x+y-\omega)$$

Ἀσκήσεις. *216.* Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ κάτωθι παραστάσεις:

1. $25-x^2$
2. ω^2-1
3. $4x^2-9\omega^2$
4. $16\alpha^2-4\beta^2$
5. x^4-y^4
6. $9\beta^2-\gamma^4$
7. $25\alpha^2x^2-4y^2$
8. $4\alpha^2\beta^2-9x^2y^2$
9. $\alpha^2\beta^2-49\gamma^2$

217. Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ κάτωθι παραστάσεις:

1. $1-\frac{1}{4}x^2$
2. $\frac{1}{9}\alpha^2-\frac{4}{25}$
3. $\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{25}y^2$
4. $\frac{4}{9}x^2y^2-1$
5. $\frac{9}{16}\alpha^2x^2-\frac{4}{9}\beta^2y^2$
6. $\alpha^2\beta^4-\frac{1}{81}x^2\omega^2$

Α' Ὁμάς. *218.* Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ κάτωθι παραστάσεις:

1. $3x^2-12y^2$
2. $5\alpha^3-5\alpha x^2$
3. $15x^2-15$
4. $2\alpha x^2-162\alpha$
5. $243-3\beta^2$
6. $3x^4-3\beta^2$
7. $75x^2-48\omega^2$
8. $\alpha x^4-25\alpha$
9. $13\alpha^5y-117\alpha y^3$
10. $8\alpha^2\beta^2-50\alpha^2\gamma^2$
11. $45x^2y^4-80\omega^2$
12. $27\alpha^3\beta-12\alpha\beta^3$

Β' Ὁμάς. 219. Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ κάτωθι παραστάσεις :

1. $(\alpha+\beta)^2-\gamma^2$ 4. $100-(3\alpha-\beta)^2$ 7. $16\alpha^2-(2\beta-3\gamma)^2$
2. $(x-y)^2-4\alpha^2$ 5. $9-(x+y)^2$ 8. $1-(3x-y)^2$
3. $(3x+y)^2-25$ 6. $\alpha^2-(2\beta+\gamma)^2$ 9. $64\alpha^4\beta^2-(\alpha-2\beta)^2$

220. Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ κάτωθι παραστάσεις :

1. $(2\alpha+\beta)^2-(2\alpha-\beta)^2$ 6. $9(\alpha+\beta)^2-4(\alpha-\beta)^2$
2. $(3x+5y)^2-(2x-y)^2$ 7. $25(x+y)^2-16(x-y)^2$
3. $(5\mu+\nu)^2-(\mu-3\nu)^2$ 8. $3(\alpha-2\beta)^2-27(\alpha+\beta)^2$
4. $(\alpha+1)^2-(\alpha-1)^2$ 9. $5(x+y)^2-20(2x-y)^2$
5. $(3x-y)^2-(x+5y)^2$ 10. $28(\alpha+3\beta)^2-7(\beta-2\alpha)^2$

221. Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ κάτωθι παραστάσεις :

1. $(\alpha+\beta-\gamma)^2-(2\alpha+\beta+5\gamma)^2$ 5. $(\alpha^2+\alpha+1)^2-(\alpha^2-\alpha+1)^2$
2. $(\alpha+\beta+x)^2-(x-\alpha-\beta)^2$ 6. $(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)^2-(\alpha^2+\gamma^2-\beta^2)^2$
3. $(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)^2-(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)^2$ 7. $(4x^2+3x+3)^2-(3-4x^2)^2$
4. $(\alpha+\beta-\gamma)^2-(\alpha-\beta+\gamma)^2$ 8. $(1+\alpha+x)^2-(1+\alpha-x)^2$

222. Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ κάτωθι παραστάσεις :

1. $(x+y)(2\alpha-\beta)+(x^2-y^2)$ 3. $(2x-y)(\alpha+\beta)-(2x-y)^2$
2. $(\alpha^2-\beta^2)-(\alpha-\beta)(2\alpha+\beta)$ 4. $(\alpha+1)(\alpha-2)-(\alpha^2-4)$
5. $(\alpha+1)(2-\alpha)+(\alpha-2)^2+(\alpha^2-4)$
6. $(\alpha-2\beta)(\alpha+\beta)-(\alpha-2\beta)^2-(\alpha^2-4\beta^2)$

223. Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον τριῶν ἢ περισσοτέρων παραγόντων αἱ κάτωθι παραστάσεις :

1. x^4-1 3. $81\alpha^4-16\beta^4$ 5. α^8-1
2. $x^4-\alpha^4$ 4. x^8-y^8 6. $3\alpha^5-48\alpha\beta^8$

3ον. Ἐὰν ἡ παράστασις εἶναι τῆς μορφῆς $\alpha^2\pm2\alpha\beta+\beta^2$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἐφαρμόζομεν τὰς ταυτότητας

$$\boxed{\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta=(\alpha+\beta)^2}\ (1),\qquad \boxed{\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta=(\alpha-\beta)^2}\ (2)$$

αἱ ὁποῖαι προκύπτουν ἀπὸ τὰς γνωστὰς (§ 134) ταυτότητας

$$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta,\qquad (\alpha-\beta)^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta$$

ἐὰν ἐναλλάξωμεν τὰ μέλη των.

Ἀπὸ τὰς ταυτότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι ἕνα τριώνυμον, τοῦ ὁποίου οἱ δύο ὅροι του εἶναι τετράγωνα δύο ἀριθμῶν καὶ ὁ τρίτος ὅρος του εἶναι τὸ διπλάσιον γινόμενον τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν, δύναται ***νὰ τραπῇ εἰς γινόμενον δύο παραγόντων*** : εἰς ***τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος ἢ τῆς διαφορᾶς τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν.***

Παραδείγματα. 1ον. Εἰς τὸ τριώνυμον $25x^2+40xy+16y^2$ οἱ δύο ὅροι του $25x^2$ καὶ $16y^2$ εἶναι τετράγωνα τῶν $5x$ καὶ $4y$, ὁ δὲ τρίτος ὅρος $40xy$ εἶναι τὸ διπλάσιον γινόμενον τῶν $5x$ καὶ $4y$, δηλ. εἶναι $2\cdot5x\cdot4y$· ἄρα δυνάμεθα νὰ γράψωμεν

$$25x^2+40xy+16y^2=(5x+4y)^2=(5x+4y)(5x+4y)$$

2ον. Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι:

$$9\alpha^4-24\alpha^2\beta^2+16\beta^4=(3\alpha^2-4\beta^2)^2=(3\alpha^2-4\beta^2)(3\alpha^2-4\beta^2)$$

3ον. **Νὰ ἀναλυθῇ ἡ παράστασις** $16x^3-48x^2+36x$ **εἰς γινόμενον παραγόντων.**

Θέτομεν τὸ $4x$ ἐκτὸς παρενθέσεως καὶ ἔχομεν $4x(4x^2-12x+9)$.

Τὸ τριώνυμον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἐντὸς τῆς παρενθέσεως εἶναι τὸ τετράγωνον τοῦ $(2x-3)$· ἄρα θὰ εἶναι $4x(2x-3)^2$.

Θὰ εἶναι λοιπὸν κατὰ σειράν:

$$16x^3-48x^2+36x=4x(4x^2-12x+9)=4x(2x-3)^2$$

Ἀσκήσεις. Α΄ Ὁμάς. 224. Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα παραγόντων αἱ κάτωθι παραστάσεις:

1. $\mu^2+2\mu\nu+\nu^2$
2. $\alpha^2+4\alpha\beta+4\beta^2$
3. $9x^2+6xy+y^2$
4. $x^2-12x+36$
5. $\frac{1}{4}\mu^2+\frac{1}{9}\nu^2+\frac{1}{3}\mu\nu$
6. x^4-4x^2+4
7. $x^4-2x^2y^3+y^6$
8. $9\alpha^4\beta^2-6\alpha^2\beta\gamma+\gamma^2$
9. $9x^4+24x^2y^2+16y^4$
10. $\frac{9}{16}xy^2+\frac{4}{25}x\omega^2-\frac{3}{5}xy\omega$

Β΄ Ὁμάς. 225. Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ κάτωθι παραστάσεις:

1. $9\alpha x^2+24\alpha xy+16\alpha y^2$
2. $49x^2\omega-28xy\omega+4y^2\omega$
3. $x-20xy+100xy^2$
4. $3\alpha^3x^4-6\alpha^2x^2y^2+3\alpha y^4$
5. $\mu^3-16\mu^2\nu+64\mu\nu^2$
7. $\frac{1}{4}\mu^2+\frac{1}{9}\nu^2+\frac{1}{3}\mu\nu$
7. $x+x^3-2x^2$
8. $\alpha-2\alpha xy\omega+\alpha x^2y^2\omega^2$
9. $25\alpha^3\beta^3+10\alpha^2\beta^2+\alpha\beta$
10. $81\alpha^2\gamma+126\alpha\beta\gamma+49\beta^2\gamma$
11. $242+220x+50x^2$
12. $\frac{9}{16}xy^2+\frac{4}{25}x\omega^2-\frac{3}{5}xy\omega$

4ον. Ἐὰν ἡ παράστασις εἶναι τῆς μορφῆς $\alpha^3\pm\beta^3$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἐφαρμόζομεν τὰς ταυτότητας ποὺ εὑρήκαμεν εἰς τὴν § 158.

$$\boxed{\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)} \qquad \boxed{\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}$$

Παραδείγματα. 1ον. $8\alpha^3-64\beta^3=(2\alpha)^3-(4\beta)^3$

$$=(2\alpha-4\beta)[(2\alpha)^2+2\alpha\cdot4\beta+(4\beta)^2]$$
$$=(2\alpha-4\beta)(4\alpha^2+8\alpha\beta+16\beta^2)$$

2ον. $54x^3-16\alpha^3=2(27x^3-8\alpha^3)$

$$=2[(3x)^3-(2\alpha)^3]$$
$$=2(3x-2\alpha)[(3x)^2+3x\cdot2\alpha+(2\alpha)^2)]$$
$$=2(3x-2\alpha)(9x^2+6\alpha x+4\alpha^2)$$

3ον. $\alpha x^4-1000\alpha xy^3=\alpha x(x^3-1000y^3)=\alpha x[x^3-(10y)^3]$

$$=\alpha x(x-10y)(x^2+10xy+100y^2)$$

Ἀσκήσεις. 226. Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ κάτωθι παραστάσεις:

1. $x^3\pm64$
2. $x^3-8y^3\omega^3$
3. $343\alpha^3-\beta^3$
4. $27x^3-216y^3$
5. $1-125\alpha^3$
6. $1000\omega^3-1$.

227. Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ κάτωθι παραστάσεις:

1. $\alpha^3\beta-\beta\gamma^3$	4. x^3+64	7. $27x^3y-\alpha^3\beta^3y$
2. $\alpha x^3+8\alpha y^3$	5. $\alpha^3\beta^3-27$	8. $216\alpha^3\beta-343\beta^4$
3. $\alpha\beta^3-27\alpha$	6. $x^3-8x^3y^3$	9. $(\alpha+\beta)^3+(\alpha-\beta)^3$

5ον. Μέθοδος χωρισμοῦ τῆς παραστάσεως εἰς ὁμάδας. Κατὰ τὴν μέθοδον αὐτὴν χωρίζομεν τοὺς ὅρους τῆς παραστάσεως εἰς ὁμάδας, (δυώνυμα, τριώνυμα, ...) τῶν ὁποίων οἱ ὅροι ἔχουν κοινὸν παράγοντα· ἀναλύομεν ἔπειτα κάθε δυώνυμον ἢ τριώνυμον εἰς γινόμενον δύο παραγόντων. Εἰς πολλὰς περιπτώσεις λαμβάνομεν οὕτω μίαν παράστασιν, τῆς ὁποίας ὅλοι οἱ ὅροι ἔχουν ἕνα κοινὸν παράγοντα, τὸν ὁποῖον θέτομεν ἐκτὸς παρενθέσεως.

Παράδειγμα 1ον. Νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον παραγόντων ἡ παράστασις

$$3\beta x^3-4\alpha\beta x^2+3\gamma x-4\alpha\gamma$$

Θέτομεν ἐντὸς παρενθέσεως τοὺς δύο πρώτους ὅρους της καὶ ἐντὸς ἄλλης παρενθέσεως τοὺς δύο τελευταίους ὅρους της καὶ ἔχομεν

$$(3\beta x^3-4\alpha\beta x^2)+(3\gamma x-4\alpha\gamma)$$

Ἐξάγομεν ἐκτὸς παρενθέσεως τὸ βx^2 εἰς τὴν πρώτην ὁμάδα καὶ τὸ γ εἰς τὴν δευτέραν ὁμάδα καὶ ἔχομεν

$$\beta x^2(3x-4\alpha)+\gamma(3x-4\alpha)$$

Θέτομεν τὸ $(3x-4\alpha)$ ὡς παράγοντα καὶ ἔχομεν

$$(3x-4\alpha)(\beta x^2+\gamma)$$

Ὥστε θὰ εἶναι $3\beta x^3-4\alpha\beta x^2+3\gamma x-4\alpha\gamma=(3x-4\alpha)(\beta x^2+\gamma)$

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς:

$$\begin{aligned}3\beta x^3-4\alpha\beta x^2+3\gamma x-4\alpha\gamma&=(3\beta x^3-4\alpha\beta x^2)+(3\gamma x-4\alpha\gamma)\\&=\beta x^2(3x-4\alpha)+\gamma(3x-4\alpha)\\&=(3x-4\alpha)(\beta x^2+\gamma)\end{aligned}$$

Παράδειγμα 2ον. Νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον παραγόντων ἡ παράστασις

$$\alpha x^3-2\alpha x^2-\beta x+2\beta$$

Ἔχομεν κατὰ σειράν:

$$\begin{aligned}\alpha x^3-2\alpha x^2-\beta x+2\beta&=(\alpha x^3-2\alpha x^2)-(\beta x-2\beta)\\&=\alpha x^2(x-2)-\beta(x-2)\\&=(x-2)(\alpha x^2-\beta)\end{aligned}$$

Παράδειγμα 3ον. Νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον παραγόντων ἡ παράστασις

$$\gamma^2-\alpha^2-\beta^2+2\alpha\beta$$

Ἔχομεν κατὰ σειράν:

$$\begin{aligned}\gamma^2-\alpha^2-\beta^2+2\alpha\beta&=\gamma^2-(\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta)\\&=\gamma^2-(\alpha-\beta)^2\\&=[\gamma+(\alpha-\beta)][\gamma-(\alpha-\beta)]\\&=(\gamma+\alpha-\beta)(\gamma-\alpha+\beta)\end{aligned}$$

Ἀσκήσεις. 228. Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ κάτωθι παραστάσεις:

1. $\alpha x+\beta x+\alpha y+\beta y$	6. $x^3-5x^2+2x-10$
2. $5\alpha x-4\beta x+5\alpha y-4\beta y$	7. $x^3+7x^2+3x+21$

3. $\alpha^2-4\alpha+\alpha\gamma-4\gamma$
4. $4\alpha y-2\beta y+2\alpha\omega-\beta\omega$
5. $\alpha^2\gamma^2-\alpha\gamma\delta+\alpha\beta\gamma-\beta\delta$
8. $\alpha x^2+\alpha^2 x+\alpha+x$
9. x^3+x^2+x+1
10. $11\alpha^3+55\alpha^2+6\alpha+30$

229. Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ κάτωθι παραστάσεις :

1. $\alpha^2\gamma-\alpha^2\delta-\beta^2\delta+\beta^2\gamma$
2. $\alpha^2-\beta^2-2\alpha+2\beta$
3. $4x-4y+\alpha y-\alpha x$
4. $x^2+y\omega-xy-x\omega$
5. $\beta\gamma-\alpha^2+\alpha\gamma-\alpha\beta$
6. $3\alpha^2\gamma^2+\beta\delta+3\alpha\beta\gamma+\alpha\gamma\delta$
7. $x^3-15+5x^2-3x$
8. $\alpha^2\beta^2-1+\beta^2-\alpha^2$
9. $xy^2+x-1-y^2$
10. x^3-2x^2-x+2

230. Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ κάτωθι παραστάσεις :

1. $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-\gamma^2$
2. $x^2-2xy+y^2-16\omega^2$
3. $x^2-y^2-2\alpha y-\alpha^2$
4. $4\alpha^2-\beta^2+4\beta x-4x^2$
5. $9-9\alpha^2-\beta^2+6\alpha\beta$
6. x^4-x^2-2x-1
7. $\alpha^4+2\alpha^2\beta+\beta^2-81$
8. $3y^2-6xy+3y^2-27\omega^2$
9. $x^4+2x^3+x^2-y^2$
10. y^2-x^2+2x-1

231. Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ κάτωθι παραστάσεις :

1. $4\alpha^2-4\alpha\beta+\beta^2-9\alpha^2\beta^2$
2. $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-\gamma^2-2\gamma\delta-\delta^2$
3. $2xy+1-x^2-y^2$
4. $\alpha^2-\beta^2+2\beta-1$
5. $4\mu^2+4\mu+1-4\nu^2+4\nu-1$
6. $1-2\alpha+2\beta\gamma+\alpha^2-\beta^2-\gamma^2$

160. **Παρατηρήσεις.** I. Ἐνίοτε διὰ νὰ ἐμφανισθῇ εἰς μίαν παράστασιν μία γνωστὴ ταυτότης, ***προσθέτομεν καὶ ἀφαιροῦμεν ἕνα ἁρμόζοντα ὅρον.***

Παράδειγμα 1ον. Νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον παραγόντων ἡ παράστασις

$$x^4+4x^2+16$$

Διὰ νὰ εἶναι ἡ δοθεῖσα παράστασις τὸ τετράγωνον τοῦ (x^2+4) ἔπρεπε ὁ δεύτερος ὅρος της νὰ ἦτο $8x^2$. Προσθέτομεν λοιπὸν καὶ ἀφαιροῦμεν τὸ $4x^2$ καὶ ἔχομεν τότε :

$$\begin{aligned} x^4+4x^2+16 &= x^4+8x^2+16-4x^2 \\ &= (x^4+8x^2+16)-4x^2 \\ &= (x^2+4)^2-4x^2 \\ &= [(x^2+4)+2x].[(x^2+4)-2x] \\ &= (x^2+4+2x)(x^2+4-2x) \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2ον. Νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον παραγόντων ἡ παράστασις

$$\alpha^4+\beta^4$$

Ἔχομεν κατὰ σειράν :

$$\begin{aligned} \alpha^4+\beta^4 &= \alpha^4+\beta^4+2\alpha^2\beta^2-2\alpha^2\beta^2 \\ &= (\alpha^4+\beta^4+2\alpha^2\beta^2)-2\alpha^2\beta^2 \\ &= (\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2 \\ &= [(\alpha^2+\beta^2)+\alpha\beta\sqrt{2}].[(\alpha^2+\beta^2)-\alpha\beta\sqrt{2}] \\ &= (\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta\sqrt{2})(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta\sqrt{2}) \end{aligned}$$

II. Ἐνίοτε δυνάμεθα νὰ ἀναλύσωμεν ἕνα ὅρον τῆς παραστάσεως εἰς ἄθροισμα δύο ὅρων, ὁπότε ἡ ἀνάλυσις τῆς παραστάσεως ἀνάγεται εἰς μίαν ἀπὸ τὰς προηγουμένας περιπτώσεις.

Παράδειγμα. Νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον παραγόντων ἡ παράστασις

$$x^4+y^4-3x^2y^2$$

Ἔχομεν κατὰ σειράν:

$$\begin{aligned} x^4+y^4-3x^2y^2 &= (x^4+y^4-2x^2y^2)-x^2y^2 \\ &= (x^2-y^2)^2-x^2y^2 \\ &= [(x^2-y^2)+xy].[(x^2-y^2)-xy] \\ &= (x^2-y^2+xy)(x^2-y^3-xy) \end{aligned}$$

Ἀσκήσεις. Α΄ Ὁμάς. 232. Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ κάτωθι παραστάσεις:

1. $x^4+3x^2y^2+4y^4$
2. $x^4+x^2y^2+y^4$
3. $16\alpha^4+4\alpha^2\beta^2+\beta^4$
4. $\mu^4+3\mu^2\nu^2+4\nu^2$
5. $16x^4+25y^4+36x^2y^2$
6. $4x^4+16x^2y^2+25y^4$
7. $9\alpha^4+26\alpha^2\beta^2+25\beta^4$
8. x^4+x^2+1

233. Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ κάτωθι παραστάσεις:

1. $\alpha^4-5\alpha^2\beta^2+4\beta^2$
2. $4x^4-21x^2y^2+9y^4$
3. $4x^4-13x^2+1$
4. $4x^4-37x^2y^2+9y^4$
5. $16\alpha^4-17\alpha^2+1$
6. $9x^4-15x^2+1$
7. $x^4+y^4-11x^2y^2$
8. $25x^4+y^4-11x^2y^2$

234. Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ κάτωθι παραστάσεις:

1. x^4+9y^4 2. $16x^5-4x$ 3. $\alpha^8+\beta^8$.

Β΄ Ὁμάς. 235. Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ κάτωθι παραστάσεις διὰ τῆς καταλληλοτέρας μεθόδου:

1. $\alpha^3+2\alpha^2-1$
2. $x^3-3\alpha^2x+2\alpha^3$
3. $\alpha^2-\alpha\beta-\beta-1$
4. $x^2+y^2-4x+4y-2xy+3$
5. $x^7+8x^4-x^3-8$
6. $\alpha^4+\alpha^3-\alpha^2-\alpha$

236. Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ παραστάσεις:

1. $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4-2\beta^2\gamma^2-2\gamma^2\alpha^2-2\alpha^2\beta^2$
2. $(\alpha\beta+\gamma\delta+\beta^2-\delta^2)^2-(\alpha\delta+\beta\gamma)^2$
3. $4(\alpha\beta+\gamma\delta)^2-(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2)^2$
4. $(\alpha\beta-\gamma\delta)(\alpha^2-\beta^2+\gamma^2-\delta^2)+(\alpha\gamma-\beta\delta)(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2)$

237. Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ παραστάσεις:

1. $4xy(x-y)-6x(x-y)^2+2x(x^2-y^2)$
2. $(7x-y)^2-4(7x-y)(2x+y-1)+3(2x+y-1)^2$
3. $4x^2+y^2+9\omega^2-4xy+12x\omega-6y\omega$
4. $(\alpha-2\beta)^2-6(\alpha-2\beta)(3\alpha+\beta)+8(3\alpha+\beta)^2$
5. $(\alpha x+\beta y)^2+(\alpha y-\beta x)^2+(\gamma x+\delta y)^2-(\gamma y-\delta x)^2$

238. Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ παραστάσεις:

1. $\alpha\gamma(\alpha+\gamma)+\alpha\beta(\alpha-\beta)-\beta\gamma(\beta+\gamma)$
2. $(\alpha-\beta)(\alpha^2-\gamma^2)-(\alpha-\gamma)(\alpha^2-\beta^2)$
3. $1+xy+\alpha(x+y)-(x+y)-\alpha(1+xy)$

239. Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ παραστάσεις:

1. $x^{\nu+1}y^{\nu-1}+x^{\nu-1}y^{\nu+1}-2x^{\nu}y^{\nu}$
2. $\alpha^{\mu+\nu}-\alpha^{\mu}\beta^{\nu}+\alpha^{\nu}\beta^{\mu}-\beta^{\mu+\nu}$
3. $-12\alpha x^{\nu}+144\alpha^2x^{\nu+1}-120\alpha^3x^{\nu+2}$
4. $x^{3\mu}-3x^{2\mu}+3x^{\mu}-1$
5. $\alpha^{2\mu+3\nu}-\alpha^{2\mu}-\alpha^{3\nu}+1$
6. $x^{\mu+\nu}y^{\mu}-x^{2\nu}y^{\mu+\nu}-x^{\nu}y^{2\mu}$

240. Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ κάτωθι παραστάσεις:

1. $(x+y)^3-x^3-y^3$ 2. $(x+y)^5-x^5-y^5$ 3. $(x+y)^7-x^7-y^7$

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΕΝΟΣ ΑΚΕΡΑΙΟΥ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ ΤΟΥ x ΔΙ' ΕΝΟΣ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ ΔΙΩΝΥΜΩΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ

161. **Διαίρεσις διὰ (x—α)(x—β)(x—γ).... Θεώρημα.** ***Ὅταν ἕνα ἀκέραιον πολυώνυμον*** φ(x) ***εἶναι διαιρετόν, χωριστά, διὰ τῶν διωνύμων*** x—α, x—β, x—γ, ***ὅπου α, β, γ εἶναι ἀριθμοὶ διάφοροι μεταξύ των, τὸ πολυώνυμον*** φ(x) ***εἶναι διαιρετὸν καὶ διὰ τοῦ γινομένου*** (x—α) (x—β) (x—γ).

Ἐπειδὴ τὸ φ(x) εἶναι διαιρετὸν διὰ x—α, θὰ δίδῃ ἕνα πηλίκον $\pi_1(x)$ καὶ θὰ ἔχωμεν τὴν ταυτότητα $\quad \varphi(x)=(x-\alpha)\,.\,\pi_1(x) \quad (1)$

Ἡ ταυτότης αὐτὴ ὑφίσταται διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x, ἄρα καὶ διὰ x=β· ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν (1) τὸ x μὲ β λαμβάνομεν

$$\varphi(\beta)=(\beta-\alpha)\,\pi_1(x) \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ τὸ φ(x) διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ x—β, θὰ εἶναι φ(β)=0 καὶ ἑπομένως ἡ (2) γράφεται $\quad 0=(\beta-\alpha)\,.\,\pi_1(\beta).$

Διὰ νὰ εἶναι τὸ γινόμενον $(\beta-\alpha)\,.\,\pi_1(x)$ ἴσον μὲ μηδὲν πρέπει ὁ ἕνας ἀπὸ τοὺς παράγοντάς του νὰ εἶναι ἴσος μὲ μηδέν· ἀλλὰ ὁ παράγων β—α εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός, διότι ἐξ ὑποθέσεως $\beta\neq\alpha$· ἄρα θὰ εἶναι ἴσος μὲ μηδὲν ὁ ἄλλος παράγων $\pi_1(\beta)$, δηλ. θὰ εἶναι $\pi_1(\beta)=0$.

Ἐπειδὴ $\pi_1(\beta)=0$, τὸ πολυώνυμον $\pi_1(x)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ **x—β** καὶ ἔστω, ὅτι δίδει ἕνα πηλίκον $\pi_2(x)$. Θὰ ἔχωμεν τότε τὴν ταυτότητα

$$\pi_1(x) = (x-\beta)\,.\,\pi_2(x)$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὸ $\pi_1(x)$ μὲ τὸ ἴσον του $(x-\beta).\pi_2(x)$ καὶ ἔχομεν $\quad \varphi(x) = (x-\alpha)(x-\beta)\,.\,\pi_2(x) \quad (4)$

Ἡ ταυτότης αὐτὴ ὑφίσταται διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x, ἄρα καὶ διὰ x=γ· ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν (4) τὸ x διὰ τοῦ γ, θὰ ἔχωμεν

$$\varphi(\gamma) = (\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)\,.\,\pi_2(\gamma) \qquad (5)$$

Ἀλλὰ φ(γ)=0, διότι τὸ φ(x) εἶναι διαιρετὸν διὰ x—γ· ἑπομένως ἡ (5) γράφεται $\quad 0=(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)\,.\,\pi_2(\gamma)$

Ἀλλὰ διὰ νὰ εἶναι τὸ γινόμενον $(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)\,.\,\pi_2(\gamma)$ ἴσον μὲ μηδέν, πρέπει ὁ ἕνας ἀπὸ τοὺς παράγοντας νὰ εἶναι ἴσος μὲ μηδέν· ἀλλ' οἱ παράγοντες (γ—α), (γ—β) εἶναι διάφοροι τοῦ μηδενός, διότι ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $\alpha\neq\beta\neq\gamma$· ἄρα θὰ εἶναι ἴσος μὲ μηδὲν ὁ τρίτος παράγων $\pi_2(\gamma)$, δηλ. θὰ εἶναι $\pi_2(\gamma)=0$.

Ἐπειδὴ $\pi_2(\gamma)=0$, τὸ πολυώνυμον $\pi_2(x)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ **x—γ** καὶ ἔστω, ὅτι δίδει ἕνα πηλίκον $\pi_3(x)$· θὰ ἔχωμεν τότε τὴν ταυτότητα

$$\pi_3(x) = (x-\gamma)\,.\,\pi_3(x)$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (4) τὸ $\pi_2(x)$ μὲ τὸ ἴσον τοῦ $(x-\gamma)\,.\,\pi_3(x)$ καὶ ἔχομεν $\quad \varphi(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\,.\,\pi_3(x)$

Ἡ τελευταία ταυτότης δεικνύει, ὅτι τὸ πολυώνυμον $\varphi(x)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ γινομένου $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ καὶ δίδει πηλίκον $\pi_3(x)$.

Ἀντιστρόφως. Ἔστω, ὅτι τὸ πολυώνυμον $\varphi(x)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ γινομένου $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$. Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ $\varphi(x)$ εἶναι διαιρετόν, χωριστά, διὰ $x-\alpha$, διὰ $x-\beta$, διὰ $x-\gamma$.

Πράγματι· ἔστω $\pi(x)$ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ $\varphi(x)$ διὰ $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$· ἄρα θὰ ἔχωμεν τὴν ταυτότητα

$$\varphi(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\,.\,\pi(x)$$

Ἡ ταυτότης αὐτὴ δεικνύει, ὅτι τὸ $\varphi(x)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $x-\alpha$ καὶ δίδει πηλίκον $(x-\beta)(x-\gamma)\,.\,\pi(x)$, ἢ ὅτι εἶναι διαιρετὸν διὰ $x-\beta$ καὶ δίδει πηλίκον $(x-\alpha)(x-\gamma)\,.\,\pi(x)$, ἢ ὅτι εἶναι διαιρετὸν διὰ $x-\gamma$ καὶ δίδει πηλίκον $(x-\alpha)(x-\beta)\,.\,\pi(x)$.

162. **Γενίκευσις τοῦ θεωρήματος.** Ὁμοίως ἀποδεικνύεται τὸ θεώρημα, ἐὰν οἱ διώνυμοι παράγοντες εἶναι περισσότεροι τῶν τριῶν· ἐξ αὐτοῦ συνάγομεν τὸ κάτωθι γενικὸν θεώρημα :

Ὅταν ἕνα ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ x ***μηδενίζεται διὰ*** μ ***διαφόρους τιμάς,*** $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$, ***τὸ πολυώνυμον αὐτὸ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ γινομένου*** $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots(x-\lambda)$

Παραδείγματα 1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ πολυώνυμον $\varphi(x)=x^3+2x^2-5x-6$ **εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ γινομένου** $(x+1)(x-2)(x+3)$.

Ἐξετάζομεν, ἐὰν τὰ $\varphi(-1)$, $\varphi(2)$, $\varphi(-3)$ εἶναι ἴσα μὲ μηδέν. Ἐδῶ εἶναι

$$\varphi(-1)=(-1)^3+2(-1)^2-5(-1)-6=-1+2+5-6=0$$
$$\varphi(2)=\ 2^3+2\cdot 2^2-5\cdot 2-6=8+8-10-6=0$$
$$\varphi(-3)=(-3)^3+2\cdot(-3)^2-5\cdot(-3)-6=-27+18+15-6=0$$

Ἐπειδὴ $\varphi(-1)=0$, $\varphi(2)=0$, $\varphi(-3)=0$, τὸ πολυώνυμον εἶναι διαιρετόν, χωριστά, διὰ $x+1$, διὰ $x-2$, καὶ διὰ $x+3$· ἄρα θὰ εἶναι διαιρετὸν καὶ διὰ τοῦ γινομένου $(x+1)(x-2)(x+3)$

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ $x^\mu-\alpha^\mu$ **εἶναι διαιρετὸν διὰ** $x^2-\alpha^2$, **ὅταν τὸ** μ **εἶναι ἄρτιος.**

Γνωρίζομεν (§ 158), ὅτι τὸ $x^\mu-\alpha^\mu$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $x-\alpha$ καὶ διαιρετὸν διὰ τοῦ $x+\alpha$, ὅταν ὁ μ εἶναι ἄρτιος (§ 158 II)· ἄρα τὸ $x^\mu-\alpha^\mu$ θὰ εἶναι διαιρετὸν καὶ διὰ τοῦ γινομένου $(x-\alpha)(x+\alpha)=x^2-\alpha^2$

163. Πόρισμα. ***Ἐὰν ἕνα ἀκέραιον πολυώνυμον***

$$\varphi(x)=A_0x^\mu+A_1x^{\mu-1}+A_2x^{\mu-2}+\ldots A_{\mu-1}x+A_\mu$$

μηδενίζεται διὰ μ ***διαφόρους τιμὰς τοῦ*** x, ***ἔστω τὰς*** $\alpha,\beta,\gamma\ldots\lambda$, ***τὸ πολυώνυμον αὐτὸ εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον***

$$A_0(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots(x-\lambda)$$

Ἐπειδὴ τὸ πολυώνυμον $\varphi(x)$ μηδενίζεται διὰ $x=\alpha,\beta,\gamma,\ldots\lambda$, θὰ εἶναι διαιρετὸν δι' ἑκάστου τῶν διωνύμων $(x-\alpha)$, $(x-\beta)$, $(x-\gamma)\ldots$

$(x-\lambda)$ καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι διαιρετὸν καὶ διὰ τοῦ γινομένου των

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots(x-\lambda)$$

Τὸ γινόμενον αὐτὸ εἶναι ἕνα ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ x καὶ μ βαθμοῦ. Ἂν διαιρέσωμεν τὸ πολυώνυμον $\varphi(x)$, τὸ ὁποῖον εἶναι μ βαθμοῦ, δι᾽ ἑνὸς πολυωνύμου τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ μ, θὰ λάβωμεν ἕνα πηλίκον βαθμοῦ μηδὲν καὶ ἑπομένως ἀνεξάρτητον τοῦ x.

Τὸ πηλίκον θὰ εἶναι λοιπὸν μία σταθερὰ ποσότης, ἡ ὁποία εὑρίσκεται, κατὰ τὸν κανόνα τῆς διαιρέσεως τῶν πολυωνύμων, ἂν διαιρέσωμεν τὸν πρῶτον ὅρον A_0x^μ τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ πρώτου ὅρου x^μ τοῦ διαιρέτου· δηλ. εἶναι $A_0x^\mu : x^\mu = A_0$.

Τὸ πηλίκον θὰ εἶναι A_0 καὶ κατὰ τὴν ταυτότητα τῆς τελείας διαιρέσεως θὰ ἔχωμεν

$$\varphi(x)=A_0x^\mu + A_1x^{\mu-1}+\ldots A_\mu = A_0(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots(x-\lambda)$$

Παράδειγμα. Τὸ πολυώνυμον $7x^3-42x^2+77x-42$ μηδενίζεται διὰ $x=1$, $x=2$, $x=3$· ἄρα θὰ εἶναι $7x^3-42x^2+77x-42=7(x-1)(x-2)(x-3)$

Ἀσκήσεις. ***241.*** Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ πολυώνυμον

$$\varphi(x) = 4x^3-12x^2-4x+12$$

εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ γινομένου $(x-1)(x+1)(x-3)$

242. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ πολυώνυμον $\varphi(x)=2x^4-5x^3-8x^2+17x-6$ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ γινομένου $(x-1)(x+2)(x-3)$

243. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ πολυώνυμον

$$\varphi(x) = 2x^5-x^4-10x^3+5x^2+8x-4$$

εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ $(x^2-1)(x^2-4)$ καὶ νὰ ὑπολογισθῇ τὸ πηλίκον

244. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ πολυώνυμον

$$\varphi(x) = x^5+x^4-6x^3-14x^2-11x-3$$

εἶναι διαιρετὸν διὰ $(x+1)^4$ καὶ νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον.

164. Ἐφαρμογή. ***Ἀνάλυσις παραστάσεων εἰς γινόμενον παραγόντων. Μέθοδος διωνύμων παραγόντων.*** Διὰ νὰ ἀναλύσωμεν εἰς γινόμενον παραγόντων ἕνα πολυώνυμον $\varphi(x)$ μὲ τὴν μέθοδον αὐτήν, διατάσσομεν τὸ πολυώνυμον κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ γράμματος x καὶ ἀναζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν ἕνα ἢ περισσοτέρους ἀριθμοὺς α, β, γ,.... τοιούτους, ὥστε νὰ εἶναι $\varphi(\alpha)=0$, $\varphi(\beta)=0$, $\varphi(\gamma)=0$,.... Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ πολυώνυμον $\varphi(x)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ τῶν διωνύμων $x-\alpha$, $x-\beta$, $x-\gamma$,... καὶ ἑπομένως (§ 161) εἶναι διαιρετὸν καὶ διὰ τοῦ γινομένου $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots$

Ἐλαττώνομεν τὸν ἀριθμὸν τῶν δοκιμῶν, ἂν παρατηρήσωμεν, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ,.... πρέπει νὰ εἶναι διαιρέται τοῦ σταθεροῦ ὅρου τοῦ πολυωνύμου $\varphi(x)$.

Παράδειγμα 1ον. Νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον παραγόντων τὸ τριώνυμον

$$\varphi(x) = x^2+2x-3$$

Οἱ διαιρέται τοῦ -3 εἶναι ± 1 καὶ ± 3. Οἱ δυνατοὶ διώνυμοι παράγοντες τῆς μορφῆς $x \pm \alpha$ εἶναι οἱ $x-1$, $x+1$, $x-3$, $x+3$.

Ἐξετάζομεν, ἐὰν ὁ πρῶτος παράγων $x-1$ εἶναι διαιρέτης τοῦ $\varphi(x)$. Πρὸς τοῦτο ὑπολογίζομεν τὸ $\varphi(1)$.

Ἐδῶ εἶναι $\qquad \varphi(1) = 1^2+2\cdot 1-3 = 0.$

Ἐπειδὴ $\varphi(1)=0$, τὸ $\varphi(x)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $x-1$· ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν τοῦ $\varphi(x)$ διὰ $x-1$ εὑρίσκομεν πηλίκον $x+3$ καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι $\qquad x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$

Παράδειγμα 2ον. Νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον παραγόντων τὸ πολυώνυμον $\qquad \varphi(x)=x^3+6x^2+11x+6.$

Οἱ διαιρέται τοῦ 6 εἶναι ± 1, ± 2, ± 3 καὶ ± 6 καὶ ἑπομένως οἱ δυνατοὶ δυώνυμοι παράγοντες εἶναι

$$(x-1),\ (x+1),\ x-2,\ x+2,\ x-3,\ x+3,\ x-6,\ x+6$$

Διὰ νὰ ἴδωμεν ποῖοι ἐξ αὐτῶν τῶν διωνύμων παραγόντων εἶναι διαιρέται τοῦ $\varphi(x)$ ὑπολογίζομεν τὰς παραστάσεις $\varphi(1)$, $\varphi(-1)$, $\varphi(2)$, $\varphi(-2)$, $\varphi(3)$, $\varphi(-3)$, $\varphi(6)$, $\varphi(-6)$. Ἐδῶ εἶναι:

$$\varphi(1)=1^3+6\cdot 1^2+11\cdot 1+6=24$$
$$\varphi(-1)=(-1)^3+6(-1)^2+11(-1)+6=-1+6-11+6=0$$
$$\varphi(2)=2^3+6\cdot 2^2+11\cdot 2+6\neq 0$$
$$\varphi(-2)=(-2)^3+6(-2)^2+11(-2)+6=-8+24-22+6=0$$

Ἐπειδὴ $\varphi(-1)=0$ καὶ $\varphi(-2)=0$, τὸ πολυώνυμον $\varphi(x)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $x+1$ καὶ διὰ $x+2$ καὶ ἑπομένως εἶναι διαιρετὸν καὶ διὰ τοῦ γινομένου $\qquad (x+1)(x+2) \quad$ ἢ $\quad x^2+3x+2$

Ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν τοῦ $\varphi(x)$ διὰ x^2+3x+2 εὑρίσκομεν πηλίκον $x+3$ καὶ ὑπόλοιπον μηδέν· ἄρα θὰ εἶναι:

$$\varphi(x)=x^3+6x^2+11x+6=(x+1)(x+2)(x+3)$$

Ἀσκήσεις. Α΄ Ὁμάς. 245. Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων τὰ κάτωθι πολυώνυμα διὰ τῆς μεθόδου τῶν δυωνύμων παραγόντων:

1. x^2+x-2	4. x^3+2x^2-5x-6	7. $2x^3-15x^2+6x+7$
2. x^3-x^2+x+6	5. x^4-5x^2+4	8. $x^3-3x^2-4x+12$
3. $x^3-6x^2+11x-6$	6. $3x^3-16x^2+3x+10$	9. x^3+3x^2-6x-8

Β΄ Ὁμὰς 246. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ πολυώνυμον

$$y=\beta(x^3-\alpha^3)+\alpha x(x^2-\alpha^2)+\alpha^3(x-\alpha)$$

εἶναι διαιρετὸν διὰ $(\alpha+\beta)(x-\alpha)$.

247. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις

$$y=\alpha^3(\beta^2-\gamma^2)+\beta^3(\gamma^2-\alpha^2)+\gamma^3(\alpha^2-\beta^2)$$

εἶναι διαιρετὴ διὰ $(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$.

248. Ἐὰν μ εἶναι ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἀριθμός, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ πολυώνυμον $\varphi(x)=(x-2)^{2\mu}+(x-1)^{\mu}-1$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $(x-1)(x-2)$ καὶ νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον.

249. Ἐὰν ν εἶναι ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἀριθμός, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ πολυώνυμον $\varphi(x)=(x+1)^{2\nu}-x^{2\nu}-2x-1$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $x(x+1)(2x+1)$ καὶ νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον.

250. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ $99x^{100}-100x^{99}+1$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $(x-1)$ καὶ νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον.

251. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ $\nu x^{\nu+1}-(\nu+1)x^{\nu}+1$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $(x-1)^2$ καὶ νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον.

252. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ

$$\varphi(x)=\nu^2x^{\nu+2}-(2\nu^2+\nu-1)x^{\nu+1}+(\nu+1)^2x^{\nu}-x-1$$

εἶναι διαιρετὸν διὰ $(x-1)^3$ καὶ νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον. (ν=ἀκέραιος καὶ θετικός).

253. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

$$\varphi(x)=x^{\nu\alpha_1+\nu-1}+x^{\nu\alpha_2+\nu-2}+x^{\nu\alpha_3+\nu-3}+\ldots+x^{\nu\alpha_{\nu-1}+1}+x^{\nu\alpha_\nu}$$

ὅπου $\nu, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu$ παριστάνουν ἀκεραίους θετικούς, εἶναι διαιρετὸν διὰ $x^{\nu-1}+x^{\nu-2}+\ldots+x+1$.

254. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $(x^{\nu}-1)(x^{\nu+1}-1)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $(x-1)(x^2-1)$.

255. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $(x^{\nu}-1)(x^{\nu+1}-1)(x^{\nu+2}-1)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $(x-1)^3(x+1)(x^2+x+1)$.

ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΙΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΩΝ

165. **Ἐπαλήθευσις μιᾶς ταυτότητος.** Διὰ νὰ ἐπαληθεύσωμεν μίαν ταυτότητα ἀκολουθοῦμεν τὴν κάτωθι πορείαν :

Λαμβάνομεν τὸ πρῶτον μέλος τῆς ταυτότητος καὶ ἐκτελοῦμεν τὰς πράξεις, ποὺ ἔχουν σημειωθῆ. Ἔπειτα, μὲ διαδοχικοὺς μετασχηματισμούς, προσπαθοῦμεν νὰ καταλήξωμεν εἰς τὸ δεύτερον μέλος.

Ἐπίσης δυνάμεθα νὰ ἀρχίσωμεν ἀπὸ τὸ δεύτερον μέλος τῆς ταυτότητος, ὁπότε πρέπει νὰ καταλήξωμεν εἰς τὸ πρῶτον μέλος.

Τέλος δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν τὰς πράξεις, χωριστά, εἰς κάθε μέλος· ἐὰν εὕρωμεν τὰ αὐτὰ ἐξαγόμενα καὶ εἰς τὰ δύο μέλη τῆς ταυτότητος, τότε ἡ ταυτότης εἶναι ἀληθής.

Κατὰ τὴν ἐπαλήθευσιν τῶν ταυτοτήτων πρέπει νὰ ἐνθυμούμεθα ἀπὸ μνήμης τὰς κάτωθι ταυτότητας, τὰς ὁποίας εὑρήκαμεν εἰς προηγουμένας παραγράφους :

1.	$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta$,	$(\alpha-\beta)^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta$
2.	$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$	
3.	$(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$,	$(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$
4.	$\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$,	$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$
5.	$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$,	$\alpha^2+\beta^2=(\alpha-\beta)^2+2\alpha\beta$
6.	$(\alpha+\beta)^2+(\alpha-\beta)^2=2(\alpha^2+\beta^2)$,	$(\alpha+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2=4\alpha\beta$

Ἐὰν εἰς τὰς ταυτότητας (3) θέσωμεν τὸ $3\alpha\beta$ ὡς παράγοντα εἰς τοὺς δύο μεσαίους ὅρους τοῦ δευτέρου μέλους, λαμβάνομεν τὰς ταυτότητας :

$$\boxed{7.\ (\alpha+\beta)^3=\alpha^3+\beta^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta),\ (\alpha-\beta)^3=\alpha^3-\beta^3-3\alpha\beta(\alpha-\beta)}$$

αἱ ὁποῖαι γράφονται καὶ ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\boxed{\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta),\quad \alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)^3+3\alpha\beta(\alpha-\beta)}$$

Παράδειγμα 1ον. Νὰ ἐπαληθευθῇ ἡ ταυτότης:

$(\alpha^2+\beta^2)(\gamma^2+\delta^2)-(\alpha\gamma+\beta\delta)^2=(\alpha\delta-\beta\gamma)^2$ (ταυτότης τοῦ Lagrange)

Ἐκτελοῦμεν τὰς πράξεις εἰς τὸ πρῶτον μέλος τῆς ταυτότητος καὶ ἔχομεν: $\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2+\alpha^2\delta^2+\beta^2\delta^2-(\alpha^2\gamma^2+\beta^2\delta^2+2\alpha\beta\gamma\delta)$

ἢ $\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2+\alpha^2\delta^2+\beta^2\delta^2-\alpha^2\gamma^2-\beta^2\delta^2-2\alpha\beta\gamma\delta$

Κάμνομεν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων καὶ ἔχομεν

$$\beta^2\gamma^2+\alpha^2\delta^2-2\alpha\beta\gamma\delta$$

Ἀλλὰ ἡ τελευταία παράστασις εἶναι τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ $(\alpha\delta-\beta\gamma)^2$.

Παρατηροῦμεν, ὅτι εὑρήκαμεν τὸ δεύτερον μέλος τῆς ταυτότητος· ἄρα ἡ δοθεῖσα ταυτότης ἐπαληθεύεται.

Ἡ *διάταξις τῶν πράξεων* γίνεται ὡς ἑξῆς:

$$\begin{aligned}(\alpha^2+\beta^2)(\gamma^2+\delta^2)-(\alpha\gamma+\beta\delta)^2 &=\\ &=\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2+\alpha^2\delta^2+\beta^2\delta^2-(\alpha^2\gamma^2+\beta^2\delta^2+2\alpha\beta\gamma\delta)\\ &=\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2+\alpha^2\delta^2+\beta^2\delta^2-\alpha^2\gamma^2-\beta^2\delta^2-2\alpha\beta\gamma\delta\\ &=\beta^2\gamma^2+\alpha^2\delta^2-2\alpha\beta\gamma\delta\\ &=(\alpha\delta-\beta\gamma)^2\end{aligned}$$

Παράδειγμα 2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ ἡ ταυτότης:

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2+(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\gamma)^2+(\beta-\gamma)^2=3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$$

Ἔχομεν:

$$\begin{aligned}1\text{ον μέλος}&=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma)+(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)+\\ &\quad+(\alpha^2-2\alpha\gamma+\gamma^2)+(\beta^2-2\beta\gamma+\gamma^2)\\ &=3\alpha^2+3\beta^2+3\gamma^2\\ &=3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\end{aligned}$$

Ἀσκήσεις. ***256.*** Νὰ ἐπαληθευθοῦν αἱ κάτωθι ταυτότητες:

1. $(\alpha^2-\beta^2)^2+(2\alpha\beta)^2=(\alpha^2+\beta^2)^2$
2. $(\alpha x+\beta y)^2+(\alpha y-\beta x)^2+\gamma^2(x^2+y^2)=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(x^2+y^2)$
3. $(\alpha x+\beta y)^2+(\alpha y-\beta x)^2+(\gamma x+\delta y)^2+(\gamma y-\delta x)^2=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)(x^2+y^2)$

257. Νὰ ἐπαληθευθοῦν αἱ κάτωθι ταυτότητες:

1. $(x-y)(x+y)^3-x^4+y^4=2xy(x^2-y^2)$
2. $x^4-y^4-(x-y)^3(x+y)=2xy(x^2-y^2)$

258. Νὰ ἐπαληθευθοῦν αἱ κάτωθι ταυτότητες:

1. $(\alpha+\beta+\gamma)^2+(\alpha-\beta-\gamma)^2-(\alpha+\beta-\gamma)^2-(\alpha-\beta+\gamma)^2=8\beta\gamma$
2. $(\alpha+\beta-\gamma)^2-(\alpha-\beta+\gamma)^2-(\alpha+\beta)^2+(\alpha-\beta)^2+4\alpha\gamma=0$
3. $(\alpha+\beta+\gamma)^2+(\beta+\gamma-\alpha)^2+(\gamma+\alpha-\beta)^2+(\alpha+\beta-\gamma)^2=4(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$
4. $(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2+(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\gamma)^2+(\alpha-\delta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\beta-\delta)^2+$
   $+(\gamma-\delta)^2=4(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)$
5. $(\alpha+\beta-\gamma)^2+(\alpha-\beta+\gamma)^2=2[\alpha^2+(\beta-\gamma)^2]$

259. Νὰ ἐπαληθευθοῦν αἱ κάτωθι ταυτότητες:

1. $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(x^2+y^2+\omega^2)-(\alpha x+\beta y+\gamma\omega)^2=$
$=(\alpha y-\beta x)^2+(\alpha\omega-\gamma x)^2+(\beta\omega-\gamma y)^2$ Ταυτότης τοῦ Lagrange
2. $(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(\beta+\gamma-\alpha)=(2\alpha\beta)^2-(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)^2$
3. $(\alpha+\beta+\gamma-\delta)(\alpha+\beta-\gamma+\delta)(\alpha-\beta+\gamma+\delta)(-\alpha+\beta+\gamma+\delta)=$
$=4(\alpha\beta+\gamma\delta)^2-(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2)^2$

260. Νὰ ἐπαληθευθοῦν αἱ κάτωθι ταυτότητες:

1. $\alpha(\alpha+\beta)(\alpha+2\beta)(\alpha+3\beta)+\beta^4=(\alpha^2+3\alpha\beta+\beta^2)^2$
2. $\alpha(\alpha+1(\alpha+2)(\alpha+3)+1=(\alpha+3\alpha+1)^2$

261. Νὰ ἐπαληθευθῇ ἡ κάτωθι ταυτότης:

$$(\alpha+\beta)^2-(\gamma+\delta)^2+(\alpha+\gamma)^2-(\beta+\delta)^2=2(\alpha-\delta)(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$$

ΜΕΓΙΣΤΟΣ ΚΟΙΝΟΣ ΔΙΑΙΡΕΤΗΣ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΟΝ ΚΟΙΝΟΝ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΟΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

166. **Μέγιστος κοινὸς διαιρέτης ἀκεραίων ἀλγεβρικῶν παραστάσεων.** Ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης (μ.κ.δ.) ἀκεραίων μονωνύμων εἶναι ὁ μ.κ.δ. τῶν ἐγγραμμάτων μερῶν των, ὁ ὁποῖος θὰ ἔχῃ ὡς συντελεστὴν τὸν μ.κ.δ. τῶν συντελεστῶν των.

Ἡ εὕρεσις τοῦ μ.κ.δ. ἀλγεβρικῶν παραστάσεων γίνεται, ὅπως καὶ εἰς τὴν Ἀριθμητικήν, δι' ἀναλύσεως τῶν παραστάσεων εἰς γινόμενα παραγόντων.

Διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ μ.κ.δ. ἀκεραίων ἀλγεβρικῶν παραστάσεων ἀκολουθοῦμεν τὸν κάτωθι κανόνα:

Κανών. ***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν μ.κ.δ. ἀκεραίων ἀλγεβρικῶν παραστάσεων:***

1ον ***Ἀναλύομεν τὰς παραστάσεις αὐτὰς εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων.***

2ον. ***Σχηματίζομεν ἕνα γινόμενον, τὸ ὁποῖον περιέχει ὅλους τοὺς κοινοὺς παράγοντας, εἴτε ἀριθμητικούς, εἴτε μονώνυμα, εἴτε πολυώνυμα εἶναι οὗτοι καὶ ἕκαστον ἐξ αὐτῶν μὲ τὸν μικρότερον ἐκθέτην.***

Παράδειγμα 1ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ.κ.δ. τῶν παραστάσεων

$$60\alpha^3\beta^2\gamma,\quad 30\alpha^2\beta^3,\quad 20\alpha\beta^8\gamma^2$$

Κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα θὰ εἶναι

$$\left.\begin{array}{l} 60\alpha^3\beta^2\gamma=2^2\cdot 3\cdot 5\alpha^3\beta^2\gamma \\ 30\alpha^2\beta^3=2\cdot 3\cdot 5\alpha^2\beta^3 \\ 20\alpha\beta^2\gamma^3=2^2\cdot 5\alpha\beta^2\gamma^3 \end{array}\right\}\ \mu.\kappa.\delta.=2\cdot 5\alpha\beta^2=10\alpha\beta^2$$

Παράδειγμα 2ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ.κ.δ. τῶν παραστάσεων

$$x^2+y^2-2xy,\quad 3x^2-3y^2,\quad 2\alpha x-2\alpha y$$

Κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα θὰ εἶναι

$$\left.\begin{array}{ll} x^2+y^2-2xy & =(x-y)^2 \\ 3x^2-3y^2=3(x^2-y^2) & =3(x-y)(x+y) \\ 2\alpha x-2\alpha y & =2\alpha(x-y) \end{array}\right\},\ \mu.\kappa.\delta.=x-y$$

'Ασκήσεις **262**. Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ.κ.δ. τῶν παραστάσεων

1. $2\alpha^2\beta^3\gamma$	$12\alpha\beta^2\gamma^4$	$6\alpha^3\beta\gamma^2$	4. $\alpha^3-\alpha$	$\alpha^3+2\alpha^2+\alpha$	$3\alpha^2+3\alpha$
2. $14xy^2\omega$	$7x^2y\omega^2$	$21\alpha\beta x^3y$	5. $\alpha^2-\beta^2$	$(\alpha-\beta)^3$	$\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$
3. x^3-xy^2	x^2y-y^3	$2x+2y$	6. $9(\mu^2-\nu^2)$	$6(\mu-\nu)$	$18(\mu^2+\nu^2-2\mu\nu)$

***167*. Ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον ἀκεραίων ἀλγεβρικῶν παραστάσεων.** Ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον (ἐ.κ.π.) ἀκεραίων μονωνύμων εἶναι τὸ ἐ.κ.π. τῶν ἐγγραμμάτων μερῶν των, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς συντελεστὴν τὸ ἐ.κ.π. τῶν συντελεστῶν των.

Ἡ εὕρεσις τοῦ ἐ.κ.π. ἀκεραίων ἀλγεβρικῶν παραστάσεων γίνεται, ὅπως εἰς τὴν Ἀριθμητικήν, δι' ἀναλύσεως τῶν παραστάσεων εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων.

Διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ ἐ.κ.π. ἀκεραίων ἀλγεβρικῶν παραστάσεων ἀκολουθοῦμεν τὸν κάτωθι κανόνα:

Κανών. ***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐ.κ.π. ἀκεραίων ἀλγεβρικῶν παραστάσεων:***

1ον Ἀναλύομεν τὰς ἀλγεβρικὰς παραστάσεις εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων, δηλ. εἰς παραστάσεις, αἱ ὁποῖαι εἶναι διαιρεταὶ μόνον διὰ τοῦ ἑαυτοῦ των καὶ διὰ τῆς μονάδος.

2ον Σχηματίζομεν ἔπειτα ἕνα γινόμενον, τὸ ὁποῖον περιέχει ὅλους τοὺς πρώτους παράγοντας, κοινοὺς ἢ μὴ κοινούς, εἴτε ἀριθμητικοί, εἴτε μονώνυμα, εἴτε πολυώνυμα εἶναι οὗτοι καὶ ἕκαστον ἐξ αὐτῶν μὲ τὸν μεγαλύτερον ἐκθέτην.

Παράδειγμα 1ον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐ.κ.π. τῶν παραστάσεων:

$$24x^3y^2\omega, \quad 30x^2y^3\omega^2, \quad 12x^4y$$

Κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα θὰ εἶναι:

$$\left.\begin{aligned} 24x^3y^2\omega &= 2^3\cdot 3\cdot x^3y^2\omega \\ 30x^2y^3\omega^2 &= 2\cdot 3\cdot 5\cdot x^2y^3\omega^2 \\ 12x^4y &= 2^2\cdot 3\cdot x^4y \end{aligned}\right\} \text{ἐ.κ.π.} = 2^3\cdot 3\cdot 5x^4y^3\omega^2 = 120x^4y^3\omega^2$$

Παράδειγμα 2ον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐ.κ.π. τῶν παραστάσεων:

$$\alpha^2-\beta^2, \quad \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2, \quad \alpha^3-\beta^3, \quad 5\alpha x-5\beta x$$

Τρέπομεν τὰς παραστάσεις εἰς γινόμενον παραγόντων καὶ ἔχομεν:

$$\left.\begin{aligned} \alpha^2-\beta^2 &= (\alpha+\beta)(\alpha-\beta) \\ \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2 &= (\alpha-\beta)^2 \\ \alpha^3-\beta^3 &= (\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2) \\ 5\alpha x-5\beta x &= 5x(\alpha-\beta) \end{aligned}\right\} \text{ἐ.κ.π.} = 5x(\alpha-\beta)^2(\alpha+\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$$

'Ασκήσεις. **263**. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐ.κ.π. τῶν κάτωθι παραστάσεων:

1.	$6\alpha^2\beta$,	$18\alpha\beta^2$,	$24\alpha^2\beta\gamma$	
2.	$7\alpha^2\beta x$,	$21\alpha^3\beta^2x^2$,	$12\alpha^4\beta^3xy$	
3.	$3(\alpha+\beta)$,	$12(\alpha-\beta)$,	$6(\alpha^2-\beta^2)$,	$\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$
4.	$\alpha(\beta-\gamma)$,	$\beta^2(\beta+\gamma)$,	$\alpha\beta(\beta^2-\gamma^2)$	
5.	x^2-1,	x^4-1,	x^2-2x+1,	
6.	$2(\alpha^2-\beta^2)$,	$6(\alpha-\beta)$,	$4(\alpha+\beta)$,	$12(\alpha^4-\beta^4)$
7.	$\alpha^3+\beta^3$,	$(\alpha+\beta)^2$,	$\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2$,	$\alpha^2-\beta^2$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΙΝ

Α' Ὁμάς. ***264.*** Αἱ κάτωθι παραστάσεις νὰ τεθοῦν ὑπὸ μορφὴν ἑνὸς ἀθροίσματος τριῶν τετραγώνων:

1. $2(x^2+y^2+\omega^2-xy-y\omega-\omega x)$ 2. $(x^2+y^2+\omega^2)^2$

265. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἐὰν ἕνας ἀριθμὸς εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα δύο τετραγώνων καὶ τὸ διπλάσιόν του εἶναι ἄθροισμα τελείων τετραγώνων.

266. Νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ γινόμενον δύο παραστάσεων, ἑκάστη τῶν ὁποίων εἶναι ἄθροισμα δύο τετραγώνων, εἶναι ἐπίσης ἄθροισμα δύο τετραγώνων.

267. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ παράστασις $\alpha^2\beta^2+(\alpha^2+\beta^2)(\alpha+\beta)^2$ εἶναι ἕνα τέλειον τετράγωνον.

Β' Ὁμάς. ***268.*** Νὰ ἐπαληθευθοῦν αἱ κάτωθι ταυτότητες:

1. $\alpha^2(\gamma-\beta)+\beta^2(\alpha-\gamma)+\gamma^2(\beta-\alpha)=(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$
2. $(x-\alpha)^2(\beta-\gamma)+(x-\beta)^2(\gamma-\alpha)+(x-\gamma)^2(\alpha-\beta)=(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\alpha-\gamma)$

269. Νὰ ἐπαληθευθοῦν αἱ κάτωθι ταυτότητες:

1. $[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2]^2=2[(\alpha-\beta)^4+(\beta-\gamma)^4+(\gamma-\alpha)^4]$
2. $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)^2-(\alpha+\beta+\gamma)^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)=(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)^2$

270. ἐπαληθευθῇ ἡ κάτωθι ταυτότης:

$$(x^2-1)(y^2-1)(\omega^2-1)+(x+y\omega)(y+\omega x)(\omega+xy) = \\ =(xy\omega+1)(x^2+y^2+\omega^2+2xy\omega-1)$$

271. Νὰ ἐπαληθευθοῦν αἱ κάτωθι ταυτότητες:

1. $$4[\alpha\beta(x^2-y^2)+(\alpha^2-\beta^2)xy]^2+[(\alpha^2-\beta^2)(x^2-y^2)-4\alpha\beta xy]^2 = \\ =(\alpha^2+\beta^2)^2(x^2+y^2)^2$$
2. $$[(x^2+y^2)^2+\alpha^2x^2]^2-4\alpha^2(x^2+y^2)^2 = \\ =[(x^2+y^2+\alpha y)^2-\alpha^2(x^2+y^2)].[(x^2+y^2-\alpha y)^2-\alpha^2(x^2+y^2)]$$

272. Νὰ ἐπαληθευθοῦν αἱ κάτωθι ταυτότητες:

1. $(\alpha+\beta+\gamma)^3=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$
2. $(x+y+\omega)^3=3(x+y+\omega)(x^2+y^2+\omega^2)-2(x^3+y^3+\omega^3)+6yx\omega$

273. Νὰ ἐπαληθευθῇ ἡ ταυτότης:

1. $(\alpha^3-\beta^3)(\alpha^3+\beta^3)^3=\alpha^3(\alpha^3-2\beta^3)^3+\beta^3(2\alpha^3-\beta^3)^3$

274. Νὰ ἐπαληθευθοῦν αἱ κάτωθι ταυτότητες τοῦ Gauchy

1. $(x+y)^4+x^4+y^4\equiv 2(x^2+xy+y^2)^2$
2. $(x+y)^5-x^5-y^5\equiv 5xy(x+y)(x^2+xy+y^2)$
3. $(x+y)^7-x^7-y^7\equiv 7xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2$
4. $(x+y)^9-x^9-y^9\equiv 3xy(x+y)[3(x^2+xy+y^2)^3+x^2y^2(x+y)^3]$

275. Νὰ ἐπαληθευθῇ ἡ ταυτότης:

1. $(x+y+\omega)^5-(y+\omega-x)^5-(\omega+x-y)^5-(x+y-\omega)^5=80xy\omega(x^2+y^2+\omega^2)$

Γ' Ὁμάς. ***276.*** Νὰ ἀποδειχθοῦν αἱ κάτωθι ταυτότητες:

1. $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma)$
2. $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2]$
3. $(\beta+\gamma)^3+(\gamma+\alpha)^3+(\alpha+\beta)^3-3(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)=2(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma)$

277. Ἐὰν $\alpha+\beta+\gamma=0$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$.

278. Ἐὰν εἶναι $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$ νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἶναι:

εἴτε $\alpha+\beta+\gamma=0$ εἴτε $\alpha=\beta=\gamma$

279. Ἐὰν εἶναι $\alpha+\beta+\gamma=2\tau$ νὰ ἀποδειχθοῦν αἱ κάτωθι ταυτότητες:

1. $(\tau-\alpha)^2+(\tau-\beta)^2+(\tau-\gamma)^2+\tau^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$
2. $2(\tau-\alpha)(\tau-\beta)+2(\tau-\beta)(\tau-\gamma)+2(\tau-\gamma)(\tau-\alpha)=2\tau^2-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2$
3. $2(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)+\alpha(\tau-\beta)(\tau-\gamma)+\beta(\tau-\gamma)(\tau-\alpha)+\gamma(\tau-\alpha)(\tau-\beta)=\alpha\beta\gamma$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ.

ΡΗΤΑΙ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΑΙ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

168. **Κλασματικαὶ παραστάσεις.** ***Κλασματικὴ παράστασις*** λέγεται μία παράστασις τῆς μορφῆς $\frac{A}{B}$, ἡ ὁποία παριστάνει τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως μιᾶς παραστάσεως Α διὰ μιᾶς ἄλλης παραστάσεως Β.

Π.χ. αἱ παραστάσεις: $\frac{2\alpha-\beta^2}{3\beta-4\alpha\beta}$, $\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2}$

εἶναι κλασματικαὶ παραστάσεις.

Μία κλασματικὴ παράστασις τῆς μορφῆς $\frac{A}{B}$ λέγεται ***ῥητή,*** ὅταν αἱ παραστάσεις Α καὶ Β εἶναι ῥηταί. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ παράστασις $\frac{A}{B}$ λέγεται ***ῥητὴ κλασματικὴ παράστασις*** ἢ καὶ ἁπλῶς ***ῥητὸν κλάσμα.*** Αἱ παραστάσεις Α καὶ Β λέγονται ***ὅροι*** τοῦ ῥητοῦ κλάσματος καὶ ὁ μὲν Α λέγεται ***ἀριθμητής,*** ὁ δὲ Β ***παρονομαστὴς*** αὐτοῦ.

Εἶναι φανερόν, ὅτι διὰ νὰ ἔχῃ ἔννοιαν τὸ κλάσμα $\frac{A}{B}$, πρέπει ὁ παρονομαστής του Β νὰ εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός.

169. **Ἰδιότητες τῶν κλασματικῶν παραστάσεων.** Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὰς παραστάσεις Α καὶ Β μὲ τὰς ἀριθμητικὰς τιμάς των, ἡ κλασματικὴ παράστασις $\frac{A}{B}$ γίνεται ἕνα ἀριθμητικὸν ἀλγεβρικὸν κλάσμα· ἑπομένως αἱ ἰδιότητες τῆς προσθέσεως, τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, τῆς διαιρέσεως, ,τῶν ἀλγεβρικῶν κλασμάτων, τὰς ὁποίας ἐγνωρίσαμεν εἰς τὰς § 69, 70 ἐπεκτείνονται καὶ ἐπὶ τῶν κλασματικῶν παραστάσεων.

170. **Ἁπλοποίησις κλασματικῶν παραστάσεων.** ***Ἁπλοποίησις μιᾶς κλασματικῆς παραστάσεως*** λέγεται ἡ εὕρεσις μιᾶς ἄλλης κλασματικῆς παραστάσεως, τῆς ὁποίας οἱ ὅροι νὰ εἶναι μικροτέρου βαθμοῦ καὶ ἡ ὁποία νὰ εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν δοθεῖσαν κλασματικὴν παράστασιν.

Διὰ νὰ ἁπλοποιήσωμεν μίαν ἀλγεβρικὴν κλασματικὴν παράστασιν ἐφαρμόζομεν τὸν κάτωθι κανόνα:

Κανών. ***Διὰ νὰ ἁπλοποιήσωμεν μίαν ἀλγεβρικὴν παράστασιν:***

1ον. Ἀναλύομεν, ἐὰν ὑπάρχῃ ἀνάγκη, καὶ τοὺς δύο ὅρους της εἰς γινόμενον παραγόντων.

2ον. Ἐξαλείφομεν τοὺς κοινοὺς παράγοντας, οἱ ὁποῖοι ὑπάρχουν εἰς τοὺς δύο ὅρους της· δηλ. διαιροῦμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους της διὰ τῶν κοινῶν αὐτῶν παραγόντων.

Κατὰ τὴν ἐφαρμογὴν τοῦ κανόνος αὐτοῦ διακρίνομεν τὰς κάτωθι περιπτώσεις:

I. ***Οἱ δύο ὅροι τοῦ κλάσματος εἶναι ἀκέραια μονώνυμα.***

Παράδειγμα. Νὰ ἁπλοποιηθῇ τὸ κλάσμα $\frac{21\alpha^2\beta^3\gamma\delta^2}{-14\alpha\beta^2\delta^4}$

Θέτομεν τὸν $7\alpha\beta^2\delta^2$ ὡς κοινὸν παράγοντα καὶ ἔπειτα τὸν ἐξαλείφομεν, ἂν ὑποθέσωμεν, ὅτι $7\alpha\beta^2\delta^2 \neq 0$.

$$\frac{21\alpha^2\beta^3\gamma\delta^2}{-14\alpha\beta^2\delta^4} = -\frac{7\alpha\beta^2\delta^2 \times 3\alpha\beta\gamma}{7\alpha\beta^2\delta^2 \times 2\delta^2} = -\frac{3\alpha\beta\gamma}{2\delta^2}$$

II. ***Οἱ δύο ὅροι τοῦ κλάσματος εἶναι πολυώνυμα.***

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἀναλύομεν τὰ πολυώνυμα τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ τοῦ παρονομαστοῦ εἰς γινόμενον παραγόντων καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους διὰ τῶν κοινῶν παραγόντων, δηλ. ἐξαλείφομεν τοὺς κοινοὺς παράγοντας.

Παράδειγμα. Νὰ ἁπλοποιηθῇ τὸ κλάσμα $A = \frac{3\alpha x^2 - 12\alpha xy + 12\alpha y^2}{6\alpha x^2 - 24\alpha y^2}$

Ἀναλύομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους του εἰς γινόμενον παραγόντων:

Ὁ ἀριθμητὴς γράφεται: $3\alpha(x^2-4xy+4y^2)=3\alpha(x-2y)^2$

Ὁ παρονομαστὴς γράφεται: $6\alpha(x^2-4y^2)=6\alpha(x+2y)(x-2y)$

Καὶ τὸ δοθὲν κλάσμα δύναται νὰ γραφῇ:

$$A = \frac{3\alpha(x-2y)^2}{6\alpha(x+2y)(x-2y)} = \frac{x-2y}{2(x+2y)}$$

Ἀσκήσεις. Α' Ὁμάς. 280. Νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ κάτωθι κλάσματα:

1. $\frac{3x^3}{6xy}$ 3. $\frac{5\alpha\beta x}{30\beta\gamma x}$ 5. $\frac{-12\alpha^3\beta x^4}{36\alpha^2\beta^2x^3}$ 7. $\frac{57\mu^2\nu^2}{-19\mu\nu^2}$

2. $\frac{12\alpha^2x}{18\alpha x^2}$ 4. $\frac{-7\alpha xy^2}{21\alpha^2x^2y^2}$ 6. $\frac{3\mu^2\nu x}{8\mu^3\nu^2y^2}$ 8. $\frac{63\alpha^3\beta^3x}{45\alpha^4\beta x^2}$

281. Νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ κάτωθι κλάσματα:

1. $\frac{\alpha+\alpha\beta}{\beta+\beta^2}$ 2. $\frac{3\alpha x+6\alpha^2}{5\beta x+10\alpha\beta}$ 3. $\frac{7\alpha-7\beta-7\gamma}{35\alpha-35\beta-35\gamma}$

Β' Ὁμάς. 282. Νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ κάτωθι κλάσματα:

1. $\frac{\alpha x^2-\alpha^3}{\beta x^2-\alpha^2\beta}$ 4. $\frac{x^3+3x^2}{x^2-9}$ 7. $\frac{4\alpha^2-9\beta^2}{12\alpha x+18\beta x}$

2. $\frac{2\alpha-3}{4\alpha^2-9}$ 5. $\frac{\alpha^2\beta-\alpha\beta}{\alpha^2-1}$ 8. $\frac{16-25\beta^2}{8\alpha-10\alpha\beta}$

3. $\frac{4x^2-25}{2x+5}$ 6. $\frac{x^2-4}{x^2+2x}$ 9. $\frac{\alpha^4-x^4}{\alpha^3x-\alpha x^3}$

283. Νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ κάτωθι κλάσματα:

1. $\frac{x^2-9}{x^2+6x+9}$ 3. $\frac{x^2+x}{x^2+2x+1}$ 5. $\frac{(\alpha+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2}{\alpha^2\beta-\alpha\beta^2}$ 7. $\frac{\alpha^2-1}{5\alpha^2-10\alpha+5}$

2. $\frac{6\mu+6}{3\mu^2+6\mu+3}$ 4. $\frac{\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}$ 6. $\frac{(x-1)(x+1)^2}{x^3-x}$ 8. $\frac{4x^2-8x+4}{x^2-x}$

284. Νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ κάτωθι κλάσματα:

1. $\frac{x^3-1}{x-1}$ 3. $\frac{x^3+1}{x^2-x+1}$ 5. $\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2-\beta^2}$

2. $\frac{x^2+x}{x^3+1}$ 4. $\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}$ 6. $\frac{\alpha^3+\beta^3}{(\alpha-\beta)^2+\alpha\beta}$

285. Νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ κάτωθι κλάσματα:

1. $\frac{x^2-(2x-3)^2}{x^2-1}$ 3. $\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2+2\alpha\beta}{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2+2\alpha\gamma}$ 5. $\frac{x^8-1}{(x^4+1)(x^2-1)}$

2. $\frac{x^3+2\alpha x^2+\alpha^2 x}{3\alpha x^2-3\alpha^3}$ 4. $\frac{1-x^2+x^3-x^5}{1+x-x^2-x^3}$ 6. $\frac{\alpha\gamma+\beta\gamma+\alpha\delta+\beta\delta}{\alpha^2+\alpha\beta}$

171. Τροπὴ ἑτερωνύμων ρητῶν κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα.

Τὰ ρητὰ κλάσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν λέγονται ***ὁμώνυμα***, ἄλλως λέγονται ***ἑτερώνυμα***.

Διὰ νὰ τρέψωμεν ἑτερώνυμα ρητὰ κλάσματα εἰς ὁμώνυμα, χρησιμοποιοῦμεν τὰς αὐτὰς μεθόδους, ποὺ ἐχρησιμοποιήσαμεν εἰς τὰ ἀλγεβρικὰ κλάσματα. (§ 72. 2ον).

Α΄ τρόπος. Κανών. ***Διὰ νὰ τρέψωμεν πολλὰ ρητὰ κλάσματα εἰς ὁμώνυμα, ἁπλοποιοῦμεν πρῶτον αὐτά, ἐὰν εἶναι δυνατὸν καὶ πολλαπλασιάζομεν ἔπειτα τοὺς δύο ὅρους ἑκάστου ρητοῦ κλάσματος ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν τῶν ἄλλων.***

Παράδειγμα. Νὰ τραποῦν εἰς ὁμώνυμα τὰ ρητὰ κλάσματα:

$$\frac{\alpha^2+\alpha\beta}{\alpha^2}, \quad \frac{\beta^2-\alpha\beta}{\beta\gamma}, \quad \frac{\alpha+\beta}{\beta}$$

Ἁπλοποιοῦμεν τὰ κλάσματα καὶ λαμβάνομεν τὰ ἰσοδύναμα ὁμώνυμα κλάσματα.

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha}, \quad \frac{\beta-\alpha}{\gamma}, \quad \frac{\alpha+\beta}{\beta}$$

Πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο ὅρους τοῦ πρώτου κλάσματος ἐπὶ βγ, τοὺς δύο ὅρους τοῦ δευτέρου κλάσματος ἐπὶ αβ καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ τρίτου κλάσματος ἐπὶ αγ καὶ λαμβάνομεν τὰ ἰσοδύναμα ὁμώνυμα κλάσματα

$$\frac{\beta\gamma(\alpha+\beta)}{\alpha\beta\gamma}, \quad \frac{\alpha\beta(\beta-\alpha)}{\alpha\beta\gamma}, \quad \frac{\alpha\gamma(\alpha+\beta)}{\alpha\beta\gamma}$$

Β΄ τρόπος. Ὅταν οἱ παρονομασταὶ τῶν κλασμάτων ἔχουν ***κοινοὺς παράγοντας***, εἶναι προτιμότερον νὰ λαμβάνωμεν ὡς κοινὸν παρονομαστήν, τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν, ὅπως καὶ εἰς τὴν Ἀριθμητικήν.

Παράδειγμα. Νὰ τραποῦν εἰς ὁμώνυμα τὰ κάτωθι κλάσματα:

$$\frac{3(\alpha+\beta)}{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2},\quad \frac{2(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}{\alpha^3-\beta^3},\quad \frac{4}{\alpha^2-\beta^2}$$

Ἁπλοποιοῦμεν τὰ κλάσματα. Τὸ πρῶτον κλάσμα γράφεται:

$$\frac{3(\alpha+\beta)}{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2}=\frac{3(\alpha+\beta)}{(\alpha+\beta)^2}=\frac{3}{\alpha+\beta}$$

τὸ δεύτερον κλάσμα γράφεται:

$$\frac{2(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}{\alpha^3-\beta^3}=\frac{2(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}{(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}=\frac{2}{\alpha-\beta}$$

τὸ τρίτον κλάσμα γράφεται:

$$\frac{4}{\alpha^2-\beta^2}=\frac{4}{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}$$

Ἔχομεν τώρα νὰ τρέψωμεν εἰς ὁμώνυμα τὰ κάτωθι κλάσματα:

$$\frac{3}{\alpha+\beta},\quad \frac{2}{\alpha-\beta},\quad \frac{4}{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)} \qquad (1)$$

Ὁ κοινὸς παρονομαστὴς τῶν κλασμάτων (1) θὰ εἶναι τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν τῶν κλασμάτων αὐτῶν, δηλ. τὸ $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$.

Διαιροῦμεν τὸ ἐ.κ.π. $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$ δι' ἑκάστου ἐκ τῶν παρονομαστῶν τῶν κλασμάτων (1) καὶ εὑρίσκομεν πηλίκα, ἀντιστοίχως

$$\alpha-\beta.\qquad \alpha+\beta.\qquad 1.$$

Πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ πρώτου κλάσματος ἐπὶ $\alpha-\beta$, τοῦ δευτέρου κλάσματος ἐπὶ $\alpha+\beta$ καὶ τοῦ τρίτου κλάσματος ἐπὶ 1 καὶ λαμβάνομεν τὰ ἰσοδύναμα ὁμώνυμα κλάσματα:

$$\frac{3(\alpha-\beta)}{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)},\quad \frac{2(\alpha+\beta)}{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)},\quad \frac{4}{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}$$

$$\text{ἢ}\quad \frac{3(\alpha-\beta)}{\alpha^2-\beta^2},\quad \frac{2(\alpha+\beta)}{\alpha^2-\beta^2},\quad \frac{4}{\alpha^2-\beta^2}$$

Ἀσκήσεις. 286. Νὰ τραποῦν εἰς ὁμώνυμα τὰ κάτωθι κλάσματα:

1. $\frac{3}{4x},\ \frac{4}{6x^2},\ \frac{5}{12x^3}$
2. $\frac{1}{x+1},\ \frac{3}{4x+4},\ \frac{x}{x^2-1}$
3. $\frac{\alpha}{x-\alpha},\ \frac{x}{\alpha-x},\ \frac{\alpha^2}{x^2-\alpha^2},\ \frac{\alpha x}{\alpha^2-x^2}$
4. $\frac{\alpha}{\alpha-\beta},\ \frac{\beta}{\alpha+\beta},\ \frac{\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}$
5. $\frac{1}{x-1},\ \frac{x}{(x-1)^2},\ \frac{x}{x+1},\ \frac{5}{x^2-1}$
6. $\frac{\alpha}{x-\alpha},\ \frac{\alpha+x}{x^2+\alpha x+\alpha^2},\ \frac{\alpha x}{x^3-\alpha^3}$

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ ΡΗΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

***172.* Πράξεις ἐπὶ τῶν κλασματικῶν παραστάσεων.** Αἱ πράξεις ἐπὶ τῶν κλασματικῶν παραστάσεων γίνονται, ὅπως καὶ αἱ ἀντίστοιχοι πράξεις ἐπὶ τῶν ἀριθμητικῶν ἀλγεβρικῶν κλασμάτων (§ 73, 74, 75).

173.* Πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις ἀλγεβρικῶν κλασμάτων. Κανών.** ***Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα πολλῶν κλασμάτων, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

1ον. Ἀναλύομεν τοὺς παρονομαστάς των εἰς γινόμενον παραγόντων.

2ον. Ἁπλοποιοῦμεν τὰ κλάσματα, ἐὰν τοῦτο εἶναι δυνατόν.

3ον. Τρέπομεν τὰ κλάσματα εἰς ἰσοδύναμα ὁμώνυμα μὲ κοινὸν παρονομαστὴν τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν των.

4ον. Σχηματίζομεν ἕνα κλάσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς ἀριθμητὴν τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν ἀριθμητῶν καὶ ὡς παρονομαστὴν τὸν κοινὸν παρονομαστήν.

5ον. Ἁπλοποιοῦμεν τὸ τελικὸν ἐξαγόμενον, ἐὰν εἶναι δυνατόν.

Παράδειγμα 1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα:

$$A=\frac{3\alpha}{5\beta x^2}+\frac{2\beta-x}{15\alpha^2 x}+\frac{\beta x^2-9\alpha^3}{15\alpha^2\beta x^2}$$

Τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν τῶν δοθέντων κλασμάτων εἶναι: $15\alpha^2\beta x^2$

Τρέπομεν τὰ κλάσματα εἰς ὁμώνυμα μὲ κοινὸν παρονομαστὴν τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν καὶ ἔχομεν:

$$A=\frac{3\alpha\cdot 3\alpha^2}{15\alpha^2\beta x^2}+\frac{(2\beta-x)\beta x}{15\alpha^2\beta x^2}+\frac{\beta x^2-9\alpha^3}{15\alpha^2\beta x^2}=\frac{9\alpha^3+(2\beta-x)\beta x+\beta x^2-9\alpha^3}{15\alpha^2\beta x^2}$$

$$=\frac{9\alpha^3+2\beta^2 x-\beta x^2+\beta x^2-9\alpha^3}{15\alpha^2\beta x^2}=\frac{2\beta^2 x}{15\alpha^2\beta x^2}=\frac{2\beta}{15\alpha^2 x}$$

Παράδειγμα 2ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα:

$$A=\frac{5}{2x-4}-\frac{x}{x^2+2x}-\frac{x+10}{2x^2-8}$$

Ἐπειδὴ $2x-4=2(x-2)$, $x^2+2x=x(x+2)$, καὶ $2x^2-8=2(x^2-4)=2(x+2)(x-2)$

τὸ δοθὲν ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα γράφεται:

$$A=\frac{5}{2(x-2)}-\frac{x}{x(x+2)}-\frac{x+10}{2(x-2)(x+2)}$$

Ἁπλοποιοῦμεν τὸ δεύτερον κλάσμα καὶ ἔχομεν:

$$A=\frac{5}{2(x-2)}-\frac{1}{x+2}-\frac{x+10}{2(x-2)(x+2)}$$

Τρέπομεν τὰ κλάσματα εἰς ὁμώνυμα μὲ κοινὸν παρονομαστὴν τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν, τὸ ὁποῖον εἶναι $2(x-2)(x+2)$ καὶ ἔχομεν

$$A=\frac{5(x+2)}{2(x+2)(x-2)}-\frac{2(x-2)}{2(x+2)(x-2)}-\frac{x+10}{2(x+2)(x-2)}$$

Σχηματίζομεν ἕνα κλάσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς ἀριθμητὴν τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν ἀριθμητῶν τῶν τελευταίων κλασμάτων καὶ ὡς παρονομαστὴν τὸν κοινὸν παρονομαστὴν $2(x+2)(x-2)$ καὶ ἔχομεν

$$A=\frac{5(x+2)-2(x-2)-(x+10)}{2(x+2)(x-2)}$$

Ἐκτελοῦμεν τὰς πράξεις κλπ. εἰς τὸν ἀριθμητὴν καὶ ἔχομεν

$$A=\frac{5x+10-2x+4-x-10}{2(x+2)(x-2)}=\frac{2x+4}{2(x+2)(x-2)}=\frac{2(x+2)}{2(x+2)(x-2)}=\frac{1}{x-2}$$

Παράδειγμα 3ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα:

$$A=\frac{\alpha}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{\beta}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}+\frac{\gamma}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)},\quad (\alpha\neq\beta\neq\gamma)$$

Οἱ 6 παράγοντες, οἱ ὁποῖοι εὑρίσκονται εἰς τοὺς παρονομαστάς. δύνανται νὰ ἀναχθοῦν εἰς 3, ἐὰν παρατηρήσωμεν, ὅτι

$$\alpha-\gamma=-(\gamma-\alpha), \quad \beta-\alpha=-(\alpha-\beta), \quad \gamma-\beta=-(\beta-\gamma)$$

Ὥστε τὸ δοθὲν ἄθροισμα δύναται νὰ γραφῇ :

$$A=\frac{-\alpha}{(\alpha-\beta)(\gamma-\alpha)}+\frac{-\beta}{(\beta-\gamma)(\alpha-\beta)}+\frac{-\gamma}{(\gamma-\alpha)(\beta-\gamma)} \qquad (1)$$

Τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν εἶναι $(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$ καὶ ἐπομένως τὸ ἄθροισμα (1) γράφεται

$$A=\frac{-\alpha(\beta-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}+\frac{-\beta(\gamma-\alpha)}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}+\frac{-\gamma(\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}$$

$$=\frac{-\alpha(\beta-\gamma)-\beta(\gamma-\alpha)-\gamma(\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}=$$

$$=\frac{-\alpha\beta+\alpha\gamma-\beta\gamma+\alpha\beta-\alpha\gamma+\beta\gamma}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}=\frac{0}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}=0$$

Ἀσκήσεις. 287. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι ἀλγεβρικὰ ἀθροίσματα:

1. $\frac{\alpha}{3}+\frac{\alpha}{4}$ 2. $\frac{x+y}{2}-\frac{x+2y}{3}$ 3. $\frac{2\beta+\alpha}{3}-\frac{\alpha+\beta}{4}-\frac{\alpha+5\beta}{6}$

288. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι ἀλγεβρικὰ ἀθροίσματα :

1. $\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\alpha\gamma}+\frac{1}{\beta\gamma}$ 3. $\frac{1}{10x^2}+\frac{5}{4x}-\frac{7}{5x}$

2. $\frac{\alpha-\beta}{2\beta}-5+\frac{3\alpha\beta-\beta^2}{\beta^2}$ 4. $\frac{\beta-\gamma}{\beta\gamma}+\frac{\gamma-\alpha}{\gamma\alpha}+\frac{\alpha-\beta}{\alpha\beta}$

289. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι ἀλγεβρικὰ ἀθροίσματα :

1. $\frac{x+1}{x+2}-\frac{x-1}{x-2}$ 2. $\frac{x-3}{x+3}+\frac{3+x}{3-x}$ 3. $\frac{\alpha-\beta}{\beta}+\frac{2\alpha}{\alpha-\beta}$

290. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι ἀλγεβρικὰ ἀθροίσματα:

1. $\frac{1}{1-x}-\frac{2x}{1-x^2}$ 3. $\frac{\alpha+1}{\alpha^2-x^2}+\frac{\alpha-1}{(x-\alpha)^2}$ 5. $\frac{2x^2-2x+1}{x^3-x}-\frac{x}{x-1}$

2. $\frac{\alpha}{x-\alpha}-\frac{\alpha^2}{x^2-\alpha^2}$ 4. $\frac{1}{x-y}+\frac{2y}{x^2-y^2}$ 6. $\frac{\alpha x}{\alpha^2-x^2}-\frac{\alpha-x}{\alpha+x}$

291. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι ἀλγεβρικὰ ἀθροίσματα :

1. $\mu-\frac{\mu+\nu}{2}$ 3. $\alpha-x+\frac{x^2}{\alpha+x}$ 5. $\frac{\alpha^2+\beta^3}{\alpha+\beta}-(\alpha-\beta)$

2. $x-\frac{x}{x-1}$ 4. $x+y-\frac{x^2-y^2}{x+2y}$ 6. $\frac{4-2x+x^2}{2-x}-(2+x)$

7. $x+y-\frac{2xy-y^2}{x+y}$

292. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι ἀλγεβρικὰ ἀθροίσματα :

1. $\frac{\alpha}{\alpha-x}+\frac{3\alpha}{\alpha+x}-\frac{2\alpha x}{\alpha^2-x^2}$ 3. $\frac{\alpha}{\alpha-1}-\frac{\alpha}{\alpha+1}+\frac{2\alpha^2}{\alpha^2-1}$

2. $\frac{x}{x+1}+\frac{x-1}{x}+\frac{1}{x(x+1)}$ 4. $\frac{2}{2x+1}-\frac{1}{2x-1}+\frac{2}{4x^2-1}$

293. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι ἀλγεβρικὰ ἀθροίσματα:

1. $\frac{30\alpha}{9\alpha^2-1}+\frac{4}{3\alpha-1}-\frac{5}{3\alpha+1}$ 3. $\frac{4\alpha\beta+2\beta^2-12\alpha^2}{3\alpha^2-3\beta^2}+\frac{2\alpha-\beta}{\alpha-\beta}+\frac{7\alpha}{3\alpha+3\beta}$

2. $\dfrac{3}{2x-4}-\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{x+10}{2x^2-8}$ 4. $\dfrac{\alpha+\beta}{2\alpha-2\beta}-\dfrac{\alpha-\beta}{2\alpha+2\beta}+\dfrac{2\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}$

294. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι ἀλγεβρικὰ ἀθροίσματα :

1. $\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{3x}{1-x^2}$ 3. $\dfrac{1}{2(x-y)}-\dfrac{1}{2(x+y)}+\dfrac{y}{y^2-x^2}$

2. $\dfrac{10}{3+y}-\dfrac{4}{3-y}+\dfrac{12(1-y)}{y^2-9}$ 4. $\dfrac{x+1}{x-\alpha}+\dfrac{5\alpha+3x}{\alpha^2-x^2}-\dfrac{x-1}{\alpha+x}+\dfrac{3}{x-\alpha}$

5. $\dfrac{xy}{\alpha\beta}+\dfrac{(x-\alpha)(y-\alpha)}{\alpha(\alpha-\beta)}+\dfrac{(x-\beta)(y-\beta)}{\beta(\beta-\alpha)}$

295. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι ἀλγεβρικὰ ἀθροίσματα :

1. $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}+\dfrac{1}{(x-2)(x-3)}$

2. $\dfrac{(x+1)}{x}-\dfrac{(x+1)}{x+2}-\dfrac{\alpha}{\alpha x}+\dfrac{\beta}{\beta x+2\beta}$

3. $\left(\dfrac{\alpha x}{x+1}-\dfrac{\alpha}{x-1}\right)-\left(\dfrac{\alpha}{x+1}+\dfrac{\alpha x}{x-1}\right)$

4. $\dfrac{x+1}{2x-2}-\dfrac{x-1}{2x+2}-\dfrac{4x}{x^2-1}+\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

. $\dfrac{1}{(x-3)(x-4)}-\dfrac{2}{(x-2)(x-4)}+\dfrac{1}{(x-2)(x-3)}$

6. $\dfrac{2(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha^2-\beta^2}-\dfrac{2(\alpha^2-\beta^2)}{\alpha^2+\beta^2}+\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}-\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$

7. $\dfrac{4\alpha\beta+2\beta^2-12\alpha^2}{3(\alpha^2-\beta^2)}+\dfrac{2\alpha-\beta}{\alpha-\beta}+\dfrac{7\alpha}{3(\alpha+\beta)}+2$

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΡΗΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

174. Πολλαπλασιασμὸς ρητῶν ἀλγεβρικῶν κλασμάτων. Κανών. ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο ἢ περισσότερα ρητὰ κλάσματα σχηματίζομεν ἕνα κλάσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς ἀριθμητὴν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν των καὶ ὡς παρονομαστὴν τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν των. Επειτα ἁπλοποιοῦμεν τὸ προκῦπτον κλάσμα, ἐὰν εἶναι δυνατόν.***

Παράδειγμα 1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ γινόμενον $\dfrac{3\alpha^2\beta}{4xy^2}\cdot\dfrac{8x^2y\omega}{9\alpha^3\beta^2\gamma}$

Κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{3\alpha^2\beta}{4xy^2}\cdot\frac{8x^2y\omega}{9\alpha^3\beta^2\gamma}=\frac{3\alpha^2\beta\cdot 8x^2y\omega}{4xy^2\cdot 9\alpha^3\beta^2\gamma}=\frac{2x\omega}{3\alpha\beta y\gamma}$$

Παράδειγμα 2ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ γινόμενον $\dfrac{3\alpha\beta}{\alpha-\beta}\cdot\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{6\beta^2}$

Κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{3\alpha\beta}{\alpha-\beta}\cdot\frac{\alpha^2-\beta^2}{6\beta^2}=\frac{3\alpha\beta\cdot(\alpha^2-\beta^2)}{(\alpha-\beta)\cdot 6\beta^2}=\frac{3\alpha\beta(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)\cdot 6\beta^2}=\frac{\alpha(\alpha+\beta)}{2\beta}$$

Παράδειγμα 3ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ γινόμενον

$$\Gamma=\left(\frac{x-y}{x+y}+\frac{x+y}{x-y}\right)\cdot\left(\frac{x^2+y^2}{2xy}+1\right)\cdot\frac{xy}{x^2+y^2}$$

Ἐκτελοῦμεν τὰς πράξεις εἰς τὴν πρώτην παρένθεσιν καὶ ἔχομεν

$$\frac{x-y}{x+y}+\frac{x+y}{x-y}=\frac{(x-y)^2+(x+y)^2}{(x+y)(x-y)}=\frac{x^2-2xy+y^2+x^2+2xy+y^2}{(x+y)(x-y)}=\frac{2x^2+2y^2}{(x+y)(x-y)}$$

Ὁμοίως ἐκτελοῦμεν τὰς πράξεις εἰς τὴν δευτέραν παρένθεσιν καὶ ἔχομεν $\dfrac{x^2+y^2}{2xy}+1=\dfrac{x^2+y^2+2xy}{2xy}=\dfrac{(x+y)^2}{2xy}$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὸ δοθὲν γινόμενον τοὺς παράγοντας, οἱ ὁποῖοι εὑρίσκονται ἐντὸς παρενθέσεων, μὲ τὰς τιμάς των καὶ ἔχομεν

$$\Gamma=\frac{2x^2+2y^2}{(x+y)(x-y)}\cdot\frac{(x+y)^2}{2xy}\cdot\frac{xy}{x^2+y^2}=\frac{2(x^2+y^2)\cdot(x+y)^2\cdot xy}{(x+y)(x-y)\cdot 2xy(x^2+y^2)}=\frac{x+y}{x-y}$$

Ἀσκήσεις. Α' Ὁμάς. 296. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι γινόμενα:

1. $\dfrac{2\alpha}{3\beta}\cdot\dfrac{6\beta\gamma}{5\alpha^3}$ 2. $\dfrac{\alpha^2}{\beta\gamma}\cdot\dfrac{\beta^2}{\alpha\gamma}\cdot\dfrac{\gamma^2}{\alpha\beta}$ 3. $\dfrac{\alpha^2\beta}{x^2y}\cdot\dfrac{\beta^2\gamma}{y^2\omega}\cdot\dfrac{\gamma^2\alpha}{\omega^2x}$

297. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι γινόμενα:

1. $\dfrac{2\alpha}{\alpha-\beta}\cdot\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{4\alpha\beta}$ 3. $\dfrac{\alpha^2\beta^2-9}{4\nu^3-\nu}\cdot\dfrac{2\nu^2+\nu}{\alpha\beta+3}$ 5. $\dfrac{\alpha^3-\alpha x^2}{\beta\gamma^2-\beta x^2}\cdot\dfrac{\beta\gamma+\beta x}{\alpha^2-\alpha x}$

2. $\dfrac{3x-9}{2x}\cdot\dfrac{4xy}{5x-15}$ 4. $\dfrac{x^2-y^2}{3(x^2+y^2)}\cdot\dfrac{2x^2+2y^2}{x^2-xy}$ 6. $\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{x-y}\cdot\dfrac{x^2-y^2}{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2}$

298. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι γινόμενα:

1. $\dfrac{\mu^2-\nu^2}{x-y}\cdot\dfrac{x^2-y^2}{\nu-\mu}\cdot\dfrac{3}{x+y}\cdot\dfrac{4}{\mu+\nu}$ 4. $\dfrac{2(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha^2-\beta^2}\cdot\dfrac{(\alpha+\beta)^2}{2\alpha\beta}\cdot\dfrac{\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}$

2. $\dfrac{\mu^3-\nu^3}{\mu^3+\nu^3}\cdot\dfrac{\mu+\nu}{\mu-\nu}\cdot\dfrac{\mu^2-\mu\nu+\nu^2}{\mu^2+\mu\nu+\nu^2}$ 5. $\dfrac{x^2-2xy+y^2}{x^2+2xy+y^2}\cdot\dfrac{x^2+3xy+2y^2}{x^2-3xy+2y^2}\cdot\dfrac{x^2-4y^2}{x^2-y^2}$

3. $\dfrac{x-y}{x^3-y^3}\cdot\dfrac{x^3+y^3}{x+y}\cdot\left(\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}\right)^2$ 6. $\dfrac{\alpha\gamma+\beta\gamma+\alpha\delta+\beta\delta}{\alpha\gamma-\beta\gamma-\alpha\delta+\beta\delta}\cdot\dfrac{\alpha\gamma-\beta\gamma+\alpha\delta-\beta\delta}{\alpha\gamma+\beta\gamma-\alpha\delta-\beta\delta}$

Β' Ὁμάς. 299. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι γινόμενα:

1. $\left(1+\dfrac{\alpha}{\beta}\right)\cdot\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$ 2. $\dfrac{\alpha x}{\alpha+x}\cdot\left(\dfrac{x}{\alpha}-\dfrac{\alpha}{x}\right)$ 3. $\left(\alpha+\dfrac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha}\right)\cdot\alpha$

4. $\dfrac{2x}{2y-\alpha}\cdot\left(\dfrac{y+\alpha}{3}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$ 5. $\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right)\cdot\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$

6. $\left(\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}-\dfrac{4x^2}{x^2-y^2}\right)\cdot\dfrac{x^2-2xy+y^2}{4xy}$

7. $\left[\dfrac{\alpha+\beta}{2(\alpha-\beta)}-\dfrac{\alpha-\beta}{2(\alpha+\beta)}+\dfrac{2\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}\right]\cdot\dfrac{\alpha-\beta}{2\beta}$

Γ' Ὁμάς. 300. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι ἀξιοσημείωτα γινόμενα:

1. $\left(\dfrac{2\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^2$ 3. $\left(\dfrac{\alpha}{x^2y}-\dfrac{y^2x}{\beta}\right)^2$ 5. $\left(1+\dfrac{\alpha\beta}{\gamma\delta}\right)^2$

2. $\left(\dfrac{x}{y}-\dfrac{3y}{x}\right)^2$ 4. $\left(\dfrac{x^2y}{\beta}-\dfrac{\alpha^2\beta}{xy}\right)^2$ 6. $\left(\dfrac{3}{\alpha^2\beta\gamma}-\alpha\beta^2\right)$

301. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι ἀξιοσημείωτα γινόμενα:

1. $\left(\dfrac{x}{3}+1\right)\left(\dfrac{x}{3}-1\right)$ 3. $\left(\dfrac{2\alpha\beta}{7x}+\dfrac{1}{5\beta}\right)\left(\dfrac{2\alpha\beta}{7x}-\dfrac{1}{5\beta}\right)$

2. $\left(\dfrac{3x}{5}+\dfrac{1}{4}\right)\left(\dfrac{3x}{5}-\dfrac{1}{4}\right)$ 4. $\left(x+\dfrac{\alpha}{\beta}\right)\left(x-\dfrac{\alpha}{\beta}\right)$

302. Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ κάτωθι παραστάσεις: (§ 159,3ον)

1. $\dfrac{\alpha^2}{\beta^2}+6+\dfrac{9\beta^2}{\alpha^2}$ 3. $\dfrac{x^2}{9y^2}+\dfrac{y^2}{16x^2}-\dfrac{1}{6}$ 5. $\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}-\dfrac{2\beta x}{\alpha y}$

2. $\dfrac{9x^2}{y^2}+\dfrac{6}{y^2}+\dfrac{1}{x^2y^2}$ 4. $\dfrac{4\alpha^2}{\beta^2}-\dfrac{12\gamma}{\beta}+\dfrac{9\gamma^2}{\alpha^2}$ 6. $\dfrac{16\alpha^2}{25}+2+\dfrac{25}{16\alpha^2}$

303. Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ κάτωθι παραστάσεις:

1. $\alpha^2-\dfrac{\beta^2}{\gamma^2}$ 3. $\dfrac{9x^2}{4}-\dfrac{4}{9y^2}$ 5. $9\alpha^2x^4-\dfrac{\omega^2}{9\alpha^2}$

2. $\dfrac{x^2}{25\alpha^2}-\dfrac{y^2}{4\beta^2}$ 4. $\dfrac{x^2}{\alpha^2}-\dfrac{y^2}{\beta^2}$. 6. $\dfrac{4x^2y^2}{\alpha^2}-\dfrac{\omega^2\beta^2}{64y^2}$

Δ' Ὁμάς. 304. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι γινόμενα:

1. $\left(1-\dfrac{3\alpha+\beta}{\alpha+\beta}\right)\cdot\left(1-\dfrac{2\alpha+\beta}{\alpha+2\beta}\right)$ 3. $\left(\dfrac{1+x}{1-x}-\dfrac{1-x}{1+x}\right)\left(\dfrac{3}{4x}+\dfrac{x}{4}-x\right)$

2. $\left(\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{2x}{1-x^2}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{x}-1\right)$ 4. $\left(\dfrac{x+y}{x-y}+1\right)\left(1-\dfrac{x-y}{x+y}\right)$

304. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι γινόμενα:

1. $\left(\alpha^2-x+\dfrac{2x^2}{\alpha^2+x}\right)\left(\alpha^2+x\right)$ 3. $\left(1+\alpha+\dfrac{3+\alpha^2}{1-\alpha}\right)\left(1-\alpha^2\right)$

2. $\left(\alpha^2-1\right)\left(\dfrac{\alpha}{\alpha+1}+\dfrac{\alpha}{\alpha-1}-1\right)$ 4. $\left(\alpha^2-1\right)\left(\dfrac{1}{\alpha-1}-\dfrac{1}{\alpha+1}+1\right)$

5. $\left(1+\dfrac{x^4-2x^2y^2+y^4}{4x^2y^2}\right)\cdot\left(x^4-2x^2y^2+y^4\right)$

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΡΗΤΩΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

175. **Διαίρεσις ρητῶν ἀλγεβρικῶν κλασμάτων. Κανών.** ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἕνα κλάσμα δι' ἄλλου κλάσματος, πολλαπλασιάζομεν τὸ κλάσμα τοῦ διαιρετέου ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ διαιρέτου ἀντεστραμμένον· ἔπειτα ἁπλοποιοῦμεν, ἐὰν τοῦτο εἶναι δυνατόν.***

Παράδειγμα 1ον. Νὰ γίνῃ ἡ διαίρεσις $\dfrac{3\alpha^2\beta^3\gamma}{4x^2y}:\dfrac{9\alpha^3\beta\gamma^2}{8xy^2\omega}$

Κατὰ τὸν κανόνα τῆς διαιρέσεως κλασμάτων θὰ ἔχωμεν

$$\frac{3\alpha^2\beta^3\gamma}{4x^2y}:\frac{9\alpha^3\beta\gamma^2}{8xy^2\omega}=\frac{3\alpha^2\beta^3\gamma}{4x^2y}\cdot\frac{8xy^2\omega}{9\alpha^3\beta\gamma^2}=\frac{3\alpha^2\beta^3\gamma\cdot 8xy^2\omega}{4x^2y\cdot 9\alpha^3\beta\gamma^2}=\frac{2\beta^2y\omega}{3\alpha\gamma x}$$

Παράδειγμα 2ον. Νὰ γίνῃ ἡ διαίρεσις $\dfrac{x^2-4\alpha^2}{x^2+4\alpha x}:\dfrac{x^2-2\alpha x}{\alpha x+4\alpha^2}$

Κατὰ τὸν κανόνα τῆς διαιρέσεως κλασμάτων θὰ ἔχωμεν

$$\frac{x^2-4\alpha^2}{x^2+4\alpha x}:\frac{x^2-2\alpha x}{\alpha x+4\alpha^2}=\frac{x^2-4\alpha^2}{x^2+4\alpha x}\cdot\frac{\alpha x+4\alpha^2}{x^2-2\alpha x}=\frac{(x^2-4\alpha^2)(\alpha x+4\alpha^2)}{(x^2+4\alpha x)(x^2-2\alpha x)}=$$

$$=\frac{(x+2\alpha)(x-2\alpha)\alpha(x+4\alpha)}{x(x+4\alpha)x(x-2\alpha)}=\frac{\alpha(x+2\alpha)}{x^2}$$

Ἀσκήσεις. Α' Ὁμάς. 305. Νὰ γίνουν αἱ κάτωθι διαιρέσεις:

1. $\dfrac{\beta}{\alpha}:\dfrac{2\beta}{3\alpha}$ 2. $4\alpha\beta:\dfrac{\beta}{\alpha}$ 3. $\dfrac{9\alpha^2}{2\beta}:3\alpha$ 4. $\dfrac{5\alpha^2x}{4\beta y^2}:\dfrac{15\alpha x^3}{8\beta^2y}$

306. Νὰ γίνουν αἱ κάτωθι διαιρέσεις :

1. $\dfrac{x+y}{x-y}:\dfrac{1}{x-y}$ 3. $\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\gamma^2-\delta^2}:\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma+\delta}$ 5. $\dfrac{\alpha^2-4x^2}{\alpha-4\alpha x}:\dfrac{\alpha^2-2\alpha x}{\alpha x+4x^2}$

2. $\dfrac{(\alpha+\beta)^2}{x-y}:\dfrac{\alpha+\beta}{(x-y)^2}$ 4. $\dfrac{\alpha^4-\beta^4}{x^3+y^3}:\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{x^2-xy+y^2}$ 6. $\dfrac{\alpha^2x^2-x^4}{\alpha^3-x^3}:\dfrac{\alpha x^2+x^3}{\alpha^2+\alpha x+x^2}$

7. $\dfrac{\alpha^2+\alpha x+\alpha y+xy}{\alpha^2-\alpha x-\alpha y+xy}:\dfrac{\alpha^2-\alpha x+\alpha y-xy}{\alpha^2+\alpha x-\alpha y-xy}$

Β' Ὁμάς. 307. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι διαιρέσεις :

1. $\left(\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{x-y}\right):\dfrac{2y}{x^2-y^2}$ 3. $\left(\dfrac{\alpha}{\alpha+2\beta}+\dfrac{\alpha}{\alpha-2\beta}\right):\dfrac{2\alpha^2}{\alpha^2-4\beta^2}$

2. $\left(\alpha+\dfrac{2\alpha^2}{2+\alpha}\right):\dfrac{4\beta+\alpha^2\beta}{\alpha^2x-4x}$ 4. $\left(\dfrac{2x+y}{x+y}+\dfrac{2y+x}{x-y}-\dfrac{x^2}{x^2-y^2}\right):\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$

308. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι διαιρέσεις :

1. $\left(\dfrac{\alpha^2}{\beta^2}-\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}\right):\left(\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}\right)$ 3. $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}-\dfrac{\gamma}{\delta}\right):\left(\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\gamma}{\delta}\right)$

2. $\left(\dfrac{1}{\alpha^2}-\dfrac{1}{\beta^2}\right):\left(\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\beta}\right)$ 4. $\left(\dfrac{\alpha^3}{\beta^3}-\dfrac{\beta^3}{\alpha^3}\right):\left(\dfrac{\alpha}{\beta}-\dfrac{\beta}{\alpha}\right)$

309. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι διαιρέσεις :

1. $\left(\alpha+\dfrac{\beta}{\gamma}\right):\left(\alpha-\dfrac{\beta}{\gamma}\right)$ 3. $\left(1+\dfrac{\alpha^2}{x^2}\right):\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{\alpha}{x}\right)$ 5. $\left(1+\dfrac{\alpha^3}{x^3}\right):\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{\alpha}{x^3}\right)$

2. $\left(\alpha^2-\dfrac{1}{\beta^2}\right):\left(\alpha-\dfrac{1}{\beta}\right)$ 4. $\left(x^4-\dfrac{1}{x^2}\right):\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)$ 6. $\left(1+\dfrac{x-\alpha}{x+\alpha}\right):\left(\dfrac{x+\alpha}{x-\alpha}-1\right)$

7. $\left(\alpha+\dfrac{\beta-\alpha}{1+\alpha\beta}\right):\left[1-\dfrac{1+\alpha\beta}{\alpha(\beta-\alpha)}\right]$

Γ' Ὁμάς. 310. Νὰ γίνουν αἱ κάτωθι διαιρέσεις :

1. $\left(\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{x}{1-x}\right):\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{x}{1+x}\right)$ 3. $\left(\dfrac{x}{x+y}+\dfrac{y}{x-y}\right):\left(\dfrac{x}{x-y}-\dfrac{y}{x+y}\right)$

2. $\left(\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}\right):\left(\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}\right)$ 4. $\left(\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}\right):\left(\dfrac{x-y}{x+y}-\dfrac{x^3-y^3}{x^3+y^3}\right)$

5. $\left(\dfrac{2x}{x+y}-\dfrac{y}{x-y}+\dfrac{y^2}{x^2-y^2}\right):\left(\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{x}{x^2-y^2}\right)$

6. $\left(\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}-\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right):\left(\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}\right)$

ΣΥΝΘΕΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

176. **Σύνθετα κλάσματα.** ***Σύνθετον κλάσμα λέγεται τὸ κλάσμα, τοῦ ὁποίου ὁ ἕνας τοὐλάχιστον τῶν ὅρων του εἶναι κλασματικὴ παράστασις.***

Π. χ. Τὰ κλάσματα

$$\frac{\dfrac{1}{\alpha+\beta}}{\dfrac{1}{\alpha-\beta}},\qquad \frac{\dfrac{\alpha}{\beta}-x}{\dfrac{\alpha}{\beta}+x},\qquad \frac{\alpha-\beta}{\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}}$$

εἶναι σύνθετα κλάσματα

Διὰ νὰ ἁπλοποιήσωμεν ἕνα σύνθετον κλάσμα, δηλ. διὰ νὰ τρέψωμεν αὐτὸ εἰς ἰσοδύναμον ***ἁπλοῦν*** κλάσμα, ἐφαρμόζομεν μίαν ἐκ τῶν δύο κάτωθι μεθόδων.

177. **Πρώτη μέθοδος. Κανών.** ***Διὰ νὰ ἁπλοποιήσωμεν ἕνα σύνθετον κλάσμα τρέπομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ συνθέτου κλάσματος εἰς ἁπλᾶ κλάσματα καὶ διαιροῦμεν ἔπειτα τὸν ἀριθμητήν του διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του.***

Παράδειγμα 1ον. Νὰ ἁπλοποιηθῇ τὸ σύνθετον κλάσμα:

$$A=\frac{\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2-\beta^2}}{\dfrac{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2}{\alpha-\beta}}$$

Διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ συνθέτου κλάσματος διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του καὶ ἔχομεν

$$A=\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2-\beta^2}:\frac{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2}{\alpha-\beta}=\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2-\beta^2}\cdot\frac{\alpha-\beta}{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2}=\frac{(\alpha^3+\beta^3)(\alpha-\beta)}{(\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)}=$$

$$=\frac{(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)(\alpha-\beta)}{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)}=1$$

Παράδειγμα 2ον. Νὰ ἁπλοποιηθῇ τὸ σύνθετον κλάσμα:

$$K=\frac{\dfrac{3}{\alpha-2}-\dfrac{2}{\alpha-3}}{\dfrac{1}{\alpha-3}-\dfrac{1}{\alpha-2}}$$

Ὁ ἀριθμητὴς τοῦ συνθέτου κλάσματος γράφεται

$$\frac{3}{\alpha-2}-\frac{2}{\alpha-3}=\frac{3(\alpha-3)-2(\alpha-2)}{(\alpha-2)(\alpha-3)}=\frac{3\alpha-9-2\alpha+4}{(\alpha-2)(\alpha-3)}=\frac{\alpha-5}{(\alpha-2)(\alpha-3)}$$

Ὁ παρονομαστής του γράφεται

$$\frac{1}{\alpha-3}-\frac{1}{\alpha-2}=\frac{(\alpha-2)-(\alpha-3)}{(\alpha-2)(\alpha-3)}=\frac{\alpha-2-\alpha+3}{(\alpha-3)(\alpha-2)}=\frac{1}{(\alpha-3)(\alpha-2)}$$

Διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητήν του διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του καὶ ἔχομεν:

$$K=\frac{\alpha-5}{(\alpha-2)(\alpha-3)}:\frac{1}{(\alpha-2)(\alpha-3)}=\frac{\alpha-5}{(\alpha-2)(\alpha-3)}\cdot\frac{(\alpha-2)(\alpha-3)}{1}=\alpha-5$$

Παράδειγμα 3ον. Νὰ ἁπλοποιηθῇ τὸ κλάσμα:

$$A=\frac{1}{x+\dfrac{1}{1+\dfrac{x+1}{3-x}}}$$

Ἁπλοποιοῦμεν κατ' ἀρχὰς τὸ σύνθετον κλάσμα τοῦ παρονομαστοῦ καὶ ἔχομεν διαδοχικῶς:

$$1+\frac{x+1}{3-x}=\frac{3-x+x+1}{3-x}=\frac{4}{3-x}$$

$$\frac{1}{1+\dfrac{x+1}{3-x}}=\frac{1}{\dfrac{4}{3-x}}=1:\frac{4}{3-x}=\frac{3-x}{4}$$

$$x+\frac{1}{1+\frac{x+1}{3-x}}=x+\frac{3-x}{4}=\frac{4x+3-x}{4}=\frac{3x+3}{4}$$

ὁπότε τὸ σύνθετον κλάσμα γίνεται

$$A=\frac{1}{\frac{3x+3}{4}}=1:\frac{3x+3}{4}=\frac{4}{3x+3}=\frac{4}{3(x+1)},$$

178. **Δευτέρα μέθοδος. Κανών.** · ***Διὰ νὰ ἁπλοποιήσωμεν ἕνα σύνθετον κλάσμα πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους του ἐπὶ τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν τῶν ὅρων του.***

Παράδειγμα 1ον. Νὰ ἁπλοποιηθῇ τὸ σύνθετον κλάσμα

$$A=\frac{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}+\frac{\beta}{\alpha-\beta}}{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}-\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$$

Πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ συνθέτου κλάσματος ἐπὶ τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν τῶν ὅρων του, δηλ. ἐπὶ $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$ καὶ ἔχομεν

$$A=\frac{\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}+\frac{\beta}{\alpha-\beta}\right)\cdot(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}{\left(\frac{\alpha}{\alpha-\beta}-\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)\cdot(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}=\frac{\alpha(\alpha-\beta)+\beta(\alpha+\beta)}{\alpha(\alpha+\beta)-\beta(\alpha-\beta)}=$$

$$=\frac{\alpha^2-\alpha\beta+\alpha\beta+\beta^2}{\alpha^2+\alpha\beta-\alpha\beta+\beta^2}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}=1$$

Παράδειγμα 2ον. Νὰ ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις

$$A=\frac{\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\alpha}}{\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}-1}-\frac{1+\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\beta^2}{\alpha^2}}{\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha^2}}$$

Πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ πρώτου συνθέτου κλάσματος ἐπὶ τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν τῶν ὅρων του, δηλ. ἐπὶ $\alpha\beta$ καὶ ἔχομεν

$$1\text{ον συνθετ. κλάσμα}=\frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\alpha}\right).\alpha\beta}{\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}-1\right).\alpha\beta}=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta}$$

Πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ δευτέρου συνθέτου κλάσματος ἐπὶ $\alpha^2\beta$ καὶ ἔχομεν

$$2\text{ον συνθετ. κλάσμα}=\frac{\left(1+\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right).\alpha^2\beta}{\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right).\alpha^2\beta}=\frac{\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^3}{\alpha^3+\beta^3}$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν δοθεῖσαν παράστασιν τὰ σύνθετα κλάσματα μὲ τὰ ἴσα των καὶ ἔχομεν

$$A = \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta} - \frac{\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^3}{\alpha^3+\beta^3} = \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta} - \frac{\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^3}{(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta)} =$$

$$= \frac{(\alpha+\beta)(\alpha^2-\beta^2)-(\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^3)}{(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta)} = \frac{\alpha^3+\alpha^2\beta-\alpha\beta^2-\beta^3-\alpha^2\beta-\alpha\beta^2-\beta^3}{(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta)} =$$

$$= \frac{\alpha^3-2\alpha\beta^2-2\beta^3}{\alpha^3+\beta^3}$$

Ἀσκήσεις. Α' Ὁμάς. 311. Νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ κάτωθι σύνθετα κλάσματα :

1. $\dfrac{\dfrac{\alpha^2-4x^2}{\alpha^2+4\alpha x}}{\dfrac{\alpha^2-2\alpha x}{\alpha x+4x^2}}$ 2. $\dfrac{\dfrac{x^2-y^2-\omega^2-2y\omega}{x^2-y^2-\omega^2+2y\omega}}{\dfrac{x-y-\omega}{x+y-\omega}}$ 3. $\dfrac{\dfrac{\alpha^4-\beta^4}{\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2}}{\dfrac{(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)}{\alpha^3+\beta^3}}$

Β' Ὁμάς. 312. Νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ κάτωθι σύνθετα κλάσματα :

1. $\dfrac{x^2+\dfrac{1}{x}}{x+\dfrac{1}{x}-1}$ 2. $\dfrac{x-\dfrac{x-1}{x+1}}{x+\dfrac{x(x-1)}{x+1}}$ 3. $\dfrac{1-\dfrac{x}{y}}{\dfrac{x^2}{y}-y}$ 4. $\dfrac{\dfrac{x+1}{x-1}}{x-\dfrac{1}{x}}$

5. $\dfrac{\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}-1}{\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}+1}$ 6. $\dfrac{\dfrac{2\mu+\nu}{\mu+\nu}+1}{1+\dfrac{\nu}{\mu+\nu}}$ 7. $\dfrac{\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}}{\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}}$ 8. $\dfrac{\dfrac{2x}{y}+1-\dfrac{y}{x}}{\dfrac{2x}{y}+\dfrac{y}{x}-3}$

313. Νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ κάτωθι σύνθετα κλάσματα :

1. $\dfrac{\dfrac{\alpha+x}{2\alpha}-\dfrac{2x}{\alpha+x}}{\dfrac{\alpha+x}{2x}-\dfrac{2\alpha}{\alpha+x}}$ 3. $\dfrac{\dfrac{\alpha+x}{\alpha-x}+\dfrac{\alpha-x}{\alpha+x}}{\dfrac{\alpha^2+x^2}{\alpha^2-x^2}-\dfrac{\alpha^2-x^2}{\alpha^2+x^2}}$ 5. $\dfrac{\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}}{\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}}$

2. $\dfrac{\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\beta}-2\alpha}{\dfrac{1}{\beta}-\dfrac{1}{\alpha}}$ 4. $\dfrac{\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}-\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}{1-\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}$ 6. $\dfrac{\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{1-x}{1+x}}{\dfrac{1}{(1+x)^2}+\dfrac{1}{(1-x)^2}}$

314. Νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ κάτωθι σύνθετα κλάσματα :

1. $\dfrac{\dfrac{\beta^2+\alpha}{\beta^2}-\dfrac{\alpha^2+\beta}{\alpha^2}}{\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}-\dfrac{2}{\alpha\beta}}$ 2. $\dfrac{\dfrac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma}-\dfrac{\beta-\gamma}{\alpha-\beta}}{\dfrac{\alpha-\beta-1}{\alpha-\beta}-\dfrac{\beta-\gamma-1}{\beta-\gamma}}$ 3. $\dfrac{\dfrac{x}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{x}+2-\dfrac{(\alpha-x)^2}{\alpha x}}{4\alpha x\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\alpha}\right)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\alpha}\right)}$

4. $\dfrac{\dfrac{1-x}{1-x+x^2}+\dfrac{1+x}{1+x+x^2}}{\dfrac{1+x}{1+x+x^2}-\dfrac{1-x}{1-x+x^2}}$ 6. $\dfrac{\dfrac{x-\alpha}{1+\alpha x}-\dfrac{x-\beta}{1+\beta x}}{1+\dfrac{(x-\alpha)(x-\beta)}{(1+\alpha x)(1+\beta x)}}$

5. $\dfrac{\left(\dfrac{x+y\omega}{x-y\omega}\right)^2+\dfrac{x+y\omega}{x-y\omega}+1}{\left(\dfrac{x+y\omega}{x-y\omega}\right)^2-\dfrac{x+y\omega}{x-y\omega}-1}$ 7. $\dfrac{\dfrac{\alpha}{\beta}\left(\dfrac{\beta^3}{\alpha}+\alpha\beta-2\beta^2\right)}{\alpha^2+\alpha\beta-2\beta^2}$

Γ' Ὁμάς. ***315.*** Νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ κάτωθι σύνθετα κλάσματα:

1. $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{\beta^2}}}$ 3. $\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{2+\dfrac{2x}{1-x}}}$ 5. $\dfrac{\beta^2}{\beta-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\beta}}}$

2. $\dfrac{\dfrac{1}{\alpha^2-1}}{1-\dfrac{\alpha+1}{\alpha-\dfrac{1}{\alpha}}}$ 4. $\dfrac{\dfrac{\dfrac{x^2}{\alpha^2}-\dfrac{\alpha^2}{x^2}}{\dfrac{x}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{x}}}{\alpha-x}$ 6. $\dfrac{\dfrac{1+\dfrac{x-\alpha}{x+\alpha}}{\dfrac{x+\alpha}{x-\alpha}-1}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\alpha}}$

316. Νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ κάτωθι σύνθετα κλάσματα:

1. $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1-x}}}$ 3. $\dfrac{x+y}{x+y+\dfrac{1}{x+y+\dfrac{1}{x+y}}}$ 5. $\dfrac{1}{\alpha-\beta+\dfrac{1}{\alpha-\dfrac{1}{\beta}}}$

2. $\dfrac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha^2-\beta^2+\dfrac{2\beta^2}{1+\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}}}$ 4. $\dfrac{3\alpha-\beta}{\alpha+\beta+\dfrac{\alpha-\beta}{1+\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}}$ 6. $\dfrac{9x^2-64}{x-1-\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{4+x}}}$

317. Νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ κάτωθι σύνθετα κλάσματα:

1. $\dfrac{\dfrac{1}{\dfrac{1}{\beta}-\dfrac{1}{\alpha}}}{\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}-\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}$ 2. $\dfrac{\dfrac{x}{1+\dfrac{1}{x}}+1-\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{x}{1-\dfrac{1}{x}}-x-\dfrac{1}{x-1}}$

Δ' Ὁμάς. ***318.*** Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις:

1. $\dfrac{\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}:\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha+\beta}}{2(\alpha-\beta)}$ 2. $\dfrac{\left(1-\dfrac{1}{\alpha}\right)\left(\alpha-\alpha^2+\dfrac{\alpha^2-1}{1+\alpha}-1\right)(\alpha+1)}{(1-\alpha)\left(1+\dfrac{1}{\alpha}\right)}$

2. $\dfrac{\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}-\dfrac{\gamma}{\alpha\beta}\right)(\alpha+\beta+\gamma)}{\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}+\dfrac{2}{\alpha\beta}-\dfrac{\gamma^2}{\alpha^2\beta^2}}$ 4. $\dfrac{\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\cdot\dfrac{x^2-y^2}{x^3+y^3}\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}\right)}{\dfrac{(x+y)^2-xy}{(x-y)^2+xy}\cdot\left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}\right)}$

319. Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις:

1. $\dfrac{\dfrac{2xy}{x+y}-y}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y-2x}}+\dfrac{\dfrac{2xy}{x+y}-x}{\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x-2y}}$ 3. $\dfrac{\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\beta}+2\alpha}{\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\alpha}}+\dfrac{2\beta-\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha}}{\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\alpha}}$

2. $\dfrac{\dfrac{2xy}{x+y}-x}{\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x-2y}}+\dfrac{\dfrac{2xy}{x+y}-y}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y-2x}}$ 4. $\dfrac{1-x}{1-x+x^2}-\dfrac{\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x}-2\right)}{\dfrac{1}{x^3}+1}$

320. Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις:

1. $\dfrac{\dfrac{\alpha}{\beta}-\dfrac{\beta}{\alpha}}{\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}-1}-\dfrac{1+\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}}{\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}}$ 3. $\dfrac{\dfrac{1+xy}{1-xy}+\dfrac{1-xy}{1+xy}}{\dfrac{1+xy}{1-xy}-\dfrac{1-xy}{1+xy}}+\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$

2. $\dfrac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y-\omega}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y-\omega}}\cdot\left(1-\dfrac{y^2+\omega^2-x^2}{2y\omega}\right)$ 4. $\dfrac{\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta+\gamma}}{\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\beta+\gamma}}\cdot\left(1+\dfrac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}\right)$

321. Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις:

1. $\dfrac{\dfrac{25\alpha\beta}{4xy}}{\dfrac{5\alpha}{2y}}:\dfrac{84\beta^3}{21y}$ 2. $\dfrac{\dfrac{\alpha^2\beta^2}{\gamma}\cdot\dfrac{\beta}{\alpha^2\gamma^2}}{\dfrac{\beta^2\gamma^2}{\alpha}\cdot\dfrac{\alpha\gamma}{\beta^2}}:\dfrac{\dfrac{\alpha\beta}{\gamma^2}}{\dfrac{\beta\gamma}{\alpha^2}}$ 3. $\dfrac{\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}}{\dfrac{\alpha}{\beta}-\dfrac{\beta}{\alpha}}:\dfrac{\dfrac{\alpha^2}{\beta^2}-\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}}{\left(\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\alpha}\right)^2}$

4. $\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y+\omega}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y+\omega}}:\dfrac{\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x+\omega}}{\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x+\omega}}$ 5. $\left[\dfrac{\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}+\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}\right]:\left[\dfrac{\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}-\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}\right]$

ΙΔΙΑΙΤΕΡΑΙ ΜΟΡΦΑΙ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

179. **Ἰδιαίτεραι μορφαὶ τῶν κλασμάτων.** Εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις τοῦ λογισμοῦ τῶν κλασματικῶν παραστάσεων τῆς μορφῆς $\dfrac{A}{B}$ παρεδέχθημεν ὅτι ὁ παρονομαστὴς B εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός. Δύναται ὅμως νὰ συμβῇ ὥστε, ὅταν ὑπολογίζωμεν τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν ἑνὸς κλάσματος, διὰ ὡρισμένας τιμὰς τῶν γραμμάτων του, ὁ ἕνας ἢ καὶ οἱ δύο ὅροι του νὰ εἶναι ἴσοι μὲ μηδέν.

Π.χ. Ἔστω τὸ κλάσμα $\dfrac{x-1}{y+2}$.

διὰ $x=1$ καὶ $y=2$ ἔχομεν $\dfrac{1-1}{2+2}=\dfrac{0}{4}$ (*μορφὴ* $\dfrac{0}{\alpha}$)

διὰ $x=-1$ καὶ $y=-2$ » $\dfrac{-1-1}{-2+2}=\dfrac{-2}{0}$ (*μορφὴ* $\dfrac{\alpha}{0}$)

διὰ $x=1$ καὶ $y=-2$ » $\dfrac{1-1}{-2+2}=\dfrac{0}{0}$ (*μορφὴ* $\dfrac{0}{0}$)

Εἰς τὴν § 66 ἐδείξαμεν, ὅτι:

1. ***Ἕνα κλάσμα τῆς μορφῆς $\dfrac{0}{\alpha}$ εἶναι ἴσον μὲ μηδέν.***

2. ***Ἕνα κλάσμα τῆς μορφῆς $\dfrac{\alpha}{0}$, δὲν ἔχει καμμίαν ἀριθμητικὴν τιμήν.***

Τὸ σύμβολον $\dfrac{\alpha}{0}$ δὲν παριστάνει κανένα πηλίκον· παριστάνει τὸ σύμβολον τοῦ ***ἀδυνάτου λογισμοῦ.***

Ἐν τούτοις δυνάμεθα νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι ἕνα κλάσμα, τοῦ ὁποίου ὁ ἀριθμητὴς μένει ἀμετάβλητος, αὐξάνει, ὅταν ὁ παρονομαστής του ἐλαττοῦται.

Π.χ. $\frac{5}{1}=5,\quad \frac{5}{0,1}=50,\quad \frac{5}{0,01}=500,\quad \frac{5}{0,00001}=500000.$

Ὅταν ὁ παρονομαστὴς ἐλαττοῦται μέχρι τοῦ 0, ἡ τιμὴ τοῦ κλάσματος γίνεται μεγαλυτέρα ἀπὸ κάθε ἀριθμόν. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν, ὅτι τὸ κλάσμα ***τείνει πρὸς τὸ ἄπειρον.***

Ἡ μορφὴ λοιπὸν $\frac{\alpha}{0}$ παριστάνει τὸ σύμβολον τοῦ ***ἀπείρου*** (∞) ἢ τὸ σύμβολον τῆς ***ἀδυναμίας***.

3. ***Ἕνα κλάσμα τῆς μορφῆς*** $\frac{0}{0}$ ***ἔχει μίαν ἀπροσδιόριστον τιμήν.***

Εἰς πολλὰς περιπτώσεις ἡ ἀοριστία αὐτὴ εἶναι ***φαινομενικὴ*** καὶ προέρχεται ἐκ τοῦ ὅτι εἰς τὸν ἀριθμητὴν καὶ εἰς τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος ὑπάρχει ἕνας κοινὸς παράγων, ὁ ὁποῖος γίνεται μηδὲν διὰ μερικὰς τιμὰς τῶν γραμμάτων του. Ἐὰν ἐξαλείψωμεν τὸν παράγοντα αὐτόν, ἐξαλείφομεν καὶ τὴν ἀοριστίαν τοῦ κλάσματος.

Παράδειγμα 1ον. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν τιμὴν τοῦ κλάσματος $K=\frac{x^2-4}{3x-6}$ (1) διὰ $x=2$.

Διὰ $x=2$ τὸ κλάσμα λαμβάνει τὴν μορφὴν $K=\frac{4-4}{6-6}=\frac{0}{0}$

Ἂν ἀναλύσωμεν τὸ δοθὲν κλάσμα εἰς γινόμενον παραγόντων καὶ τὸ ἁπλοποιήσωμεν θὰ ἔχωμεν

$$K=\frac{x^2-4}{3x-6}=\frac{(x-2)(x+2)}{3(x-2)}=\frac{x+2}{3} \qquad (2)$$

Διὰ $x=2$ τὸ τελευταῖον κλάσμα γίνεται $K=\frac{2+2}{3}=\frac{4}{3}$.

Διὰ κάθε ἄλλην τιμὴν τοῦ x ἐκτὸς τῆς τιμῆς $x=2$, τὰ κλάσματα (1) καὶ (2) ἔχουν τὴν αὐτὴν τιμὴν καὶ διὰ τοῦτο τὸ κλάσμα (2) λέγεται ἡ ***ἀληθὴς τιμὴ*** τοῦ κλάσματος (1) διὰ $x=2$.

Παράδειγμα 2ον. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀληθὴς τιμὴ τοῦ κλάσματος

$$K=\frac{x^2+4x-21}{x^2+2x-15} \quad \text{διὰ} \quad x=3$$

Τὸ δοθὲν κλάσμα διὰ $x=3$ λαμβάνει τὴν μορφὴν $\frac{0}{0}$

Ἀφοῦ καὶ οἱ δύο ὅροι τοῦ κλάσματος K μηδενίζονται διὰ $x=3$ ἕπεται, ὅτι διαιροῦνται ἀκριβῶς διὰ $x-3$ καὶ ἐπομένως ἔχουν κοινὸν παράγοντα τὸν $x-3$. Τὸ δοθὲν κλάσμα δύναται λοιπὸν νὰ γραφῇ

$$K=\frac{x^2+4x-21}{x^2+2x-15}=\frac{(x-3)(x+7)}{(x-3)(x+5)}=\frac{x+7}{x+5} \qquad (2)$$

Διὰ κάθε τιμὴν τοῦ $x\neq 3$, τὸ δοθὲν κλάσμα λαμβάνει τὴν αὐτὴν ἀριθμητικὴν τιμήν, τὴν ὁποίαν λαμβάνει τὸ κλάσμα (2).

Διὰ $x=3$ τὸ κλάσμα (2) λαμβάνει τὴν τιμὴν $\dfrac{3+7}{3+5}=\dfrac{10}{8}$, ἡ ὁποία εἶναι καὶ ἡ ἀληθὴς τιμὴ τοῦ δοθέντος κλάσματος.

Ἀσκήσεις. 322. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀληθὴς τιμὴ τῶν κάτωθι κλασμάτων :

1. $\dfrac{x^2-\alpha^2}{3x-3\alpha}$, διὰ $x=\alpha$
2. $\dfrac{y^4-\alpha^4}{y^2-\alpha^2}$, διὰ $y=\alpha$
3. $\dfrac{x^3+2x^4}{x}$, διὰ $x=0$
4. $\dfrac{(\alpha^2-\beta^2)(\mu-\nu)}{(\alpha-\beta)(\mu^2-\nu^2)}$, διὰ $\alpha=\beta$, $\mu=\nu$
5. $\dfrac{(x^2-\alpha^2)(y+\beta)}{(x-\alpha)(y^2-\beta^2)}$, διὰ $x=\alpha$, $y=\beta$
6. $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}$, διὰ $x=2$
7. $\dfrac{x^2-4x-5}{x^2+2x-15}$, διὰ $x=-5$
8. $\dfrac{x^2-1}{x^3+3x^2+2x}$, διὰ $x=-1$
9. $\dfrac{x^3+x^2+x+1}{x^3+x^2-x-1}$, διὰ $x=-1$
10. $\dfrac{3x^2+x-2}{3x^2+4x-4}$, διὰ $x=\dfrac{2}{3}$

ΑΝΑΛΟΓΙΑΙ

180. Λόγος δύο ἀριθμῶν. ***Λόγος δύο ἀριθμῶν ἢ δύο παραστάσεων*** α καὶ β λέγεται τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τῶν ἀριθμῶν α καὶ β.

Π. χ. ὁ λόγος τοῦ α καὶ β εἶναι $\dfrac{\alpha}{\beta}$ ἢ $\alpha:\beta$.

Ὁ λόγος δύο ἀριθμῶν ἔχει τὰς ἰδιότητας τῶν κλασμάτων.

181. Ἀναλογία. ***Ἡ ἰσότης δύο λόγων λέγεται ἀναλογία.***

Π.χ. Ἡ ἰσότης $\dfrac{3}{4}=\dfrac{6}{8}$ εἶναι ἀναλογία.

Ἐπίσης, ἐὰν οἱ λόγοι $\dfrac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\dfrac{\gamma}{\delta}$ εἶναι ἴσοι, συνιστοῦν μίαν ἀναλογίαν. Ἡ ἀναλογία αὐτὴ γράφεται:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \quad \text{ἢ} \quad \alpha:\beta=\gamma:\delta$$

Οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ, δ λέγονται ***ὅροι τῆς ἀναλογίας***· οἱ α καὶ δ λέγονται ***ἄκροι ὅροι*** καὶ οἱ β καὶ γ ***μέσοι ὅροι τῆς ἀναλογίας.***

Ὁ τέταρτος ὅρος μιᾶς ἀναλογίας λέγεται ***τέταρτος ἀνάλογος*** τῶν τριῶν ἄλλων.

Π. χ. εἰς τὴν ἀναλογίαν $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\gamma}{\delta}$, ὁ δ εἶναι ὁ τέταρτος ἀνάλογος τῶν τριῶν ἄλλων ὅρων της α, β, γ.

Ἡ ἀναλογία ἔχει τὰς ἰδιότητας τῆς ἰσότητος.

182. Συνεχὴς ἀναλογία. ***Μία ἀναλογία λέγεται συνεχὴς ἀναλογία, ὅταν οἱ μέσοι ὅροι της εἶναι ἴσοι.***

Π. χ. ἡ ἀναλογία $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\beta}{\gamma}$ εἶναι συνεχὴς ἀναλογία

Ὁ μέσος ὅρος β λέγεται ***μέσος ἀνάλογος*** τῶν δύο ἄλλων ὅρων.

Ὁ πρῶτος ἢ ὁ τέταρτος ὅρος μιᾶς συνεχοῦς ἀναλογίας λέγονται ***τρίτος ἀνάλογος*** τῶν δύο ἄλλων.

Π. χ. εἰς τὴν ἀναλογίαν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}$, τρίτος ἀνάλογος εἶναι ὁ α ἢ ὁ γ.

183. **Συνεχεῖς λόγοι.** ***Συνεχεῖς λόγοι ἢ συνεχῆ κλάσματα λέγονται μία σειρὰ ἴσων κλασμάτων, τῶν ὁποίων ὁ παρονομαστὴς τοῦ ἑνὸς εἶναι ἀριθμητὴς τοῦ ἑπομένου.***

Π. χ. Ἐὰν εἶναι $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\gamma}{\delta}$, οἱ λόγοι αὐτοὶ εἶναι συνεχεῖς.

184. **Ἰδιότητες ἀναλογίας. I. Ἰδιότης.** ***Εἰς κάθε ἀναλογίαν τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων ὅρων της εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν μέσων ὅρων της.***

Ἔστω ἡ ἀναλογία $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$. Θὰ δείξωμεν ὅτι $\alpha\delta=\beta\gamma$.

Πράγματι· ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ ἐπὶ βδ (δηλ. ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν) ἔχομεν

$$\frac{\alpha}{\beta}\cdot\beta\delta=\frac{\gamma}{\delta}\cdot\beta\delta \text{ ἢ μετὰ τὴν ἁπλοποίησιν } \alpha\delta=\beta\gamma.$$

Ἀντιστρόφως. Ἐὰν εἶναι αδ=βγ, θὰ εἶναι καὶ $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$.

Πράγματι ἐὰν διαιρέσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος $\alpha\delta=\beta\gamma$ διὰ βδ, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\alpha\delta}{\beta\delta}=\frac{\beta\gamma}{\beta\delta} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}.$$

Ἡ ἀνωτέρω ἰδιότης τῶν ἀναλογιῶν εἶναι ***θεμελιώδης***.

185. **Ἐφαρμογαί.** Στηριζόμενοι εἰς τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα, δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν ἕνα ὅρον μιᾶς ἀναλογίας, ὅταν μᾶς δοθοῦν οἱ ἄλλοι τρεῖς ὅροι της.

Πρόβλημα 1ον. ***Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ἄγνωστος ὅρος x τῆς ἀναλογίας*** $\alpha:\beta=\gamma:x$.

Κατὰ τὴν θεμελιώδη ἰδιότητα τῶν ἀναλογιῶν θὰ εἶναι $\alpha x=\beta\gamma$ (1)

Διαιροῦμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος (1) διὰ α ἔχομεν $x=\frac{\beta\gamma}{\alpha}$.

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἰσότητα συνάγομεν τὸν κάτωθι κανόνα:

Κανὼν I. ***Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν ἕνα ἄκρον ὅρον μιᾶς ἀναλογίας πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο μέσους ὅρους της καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γνωστοῦ ἄκρου ὅρου της.***

Πρόβλημα 2ον. ***Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ἄγνωστος ὅρος x τῆς ἀναλογίας*** $\alpha:x=\beta:\gamma$.

Κατὰ τὴν θεμελιώδη ἰδιότητα τῶν ἀναλογιῶν ἔχομεν

$$x\beta=\alpha\gamma \quad \text{ἢ} \quad x=\frac{\alpha\gamma}{\beta}.$$

Ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω ἰσότητα συνάγομεν, ὅτι :

Κανὼν ΙΙ. ***Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν ἕνα μέσον ὅρον μιᾶς ἀναλογίας πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο ἄκρους ὅρους της καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γνωστοῦ μέσου ὅρου της.***

186. **Ἐφαρμογὴ τοῦ κανόνος.**

Παράδειγμα 1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ἄγνωστος ὅρος x τῆς ἀναλογίας

$$\frac{17(\alpha-2\beta)}{x}=\frac{51(\alpha^2-4\beta^2)}{6(\alpha+2\beta)}$$

Κατὰ τὸν κανόνα τῆς § 185 θὰ ἔχωμεν

$$x=\frac{17(\alpha-2\beta)\cdot 6(\alpha+2\beta)}{51(\alpha^2-4\beta^2)}=\frac{17\cdot 6(\alpha-2\beta)(\alpha+2\beta)}{51(\alpha-2\beta)(\alpha+2\beta)}=2$$

Παράδειγμα 2ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ἄγνωστος ὅρος x τῆς ἀναλογίας

$$\left(\alpha+\frac{\beta^2}{\alpha}\right):(\alpha^2+\beta^2)=\left(\alpha-\frac{\beta^2}{\alpha}\right):x$$

Κατὰ τὸν κανόνα τῆς § 185 θὰ ἔχωμεν

$$x=\frac{(\alpha^2+\beta^2)\left(\alpha-\frac{\beta^2}{\alpha}\right)}{\alpha+\frac{\beta^2}{\alpha}}=\frac{(\alpha^2+\beta^2)\cdot\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha}}{\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha}}=\frac{(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^2-\beta^2)}{\alpha^2+\beta^2}=\alpha^2-\beta^2$$

Παράδειγμα 3ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ μέσος ἀνάλογος τῶν $\frac{\alpha\gamma}{\beta}$ καὶ $\frac{\alpha\beta}{\gamma}$.

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ x τὸν μέσον ἀνάλογον, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\alpha\gamma}{\beta}:x=x:\frac{\alpha\beta}{\gamma}, \text{ ἢ } x^2=\frac{\alpha\gamma}{\beta}\cdot\frac{\alpha\beta}{\gamma} \text{ ἢ } x^2=\alpha^2, \text{ ἄρα } x=\pm\alpha$$

Ἀσκήσεις. 323. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ ἄγνωστοι ὅροι x τῶν κάτωθι ἀναλογιῶν.

1. $\frac{\alpha+\beta}{x}=\frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{\alpha^3-\beta^3}$ 3. $x:\left(\alpha+\frac{\alpha\beta}{\alpha-\beta}\right)=\left(\beta-\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\right):\alpha^2\beta^2$

2. $\left(\nu+\frac{\mu^2}{\nu}\right):x=(\mu^2+\nu^2):\left(\mu-\frac{\nu^2}{\mu}\right)$ 4. $\frac{\mu(\nu-\mu)}{(\nu+\mu)^2}:\mu\nu=x:\frac{\nu(\mu+\nu)}{(\nu-\mu)^2}$

5. $\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha\gamma+\gamma^2}:\frac{\alpha+\beta}{\alpha^2-\gamma^2}=x:\left(\alpha+\frac{\alpha\gamma}{\alpha-\gamma}\right)$

6. $\frac{\beta(1+\beta)}{1-\alpha^2}:\frac{1-\beta^2}{\alpha(1+\alpha)}=\left(\beta+\frac{\alpha\beta}{1-\alpha}\right):x$

7. $\frac{\nu}{(\nu+\mu)^2}:x=x:\frac{2\nu^2}{\mu^3+\nu^3}$ 8. $\frac{\mu^2}{\lambda^2-\mu^2}:x=x:\frac{\lambda\mu-\mu^2}{(\lambda+\mu)^2}$.

187. **ΙΙ. Ἰδιότης.** ***Ἐὰν εἰς μίαν ἀναλογίαν ἐναλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν ἄκρων ὅρων της ἢ τῶν μέσων ὅρων της, προκύπτει πάλιν ἀναλογία.***

Ἔστω ἡ ἀναλογία $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$. (1)

Θὰ δείξωμεν, ὅτι θὰ εἶναι καὶ $\frac{\delta}{\beta}=\frac{\gamma}{\alpha}$ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta}$.

Ἀπὸ τὴν δοθεῖσαν ἀναλογίαν (1) ἔχομεν, κατὰ τὴν θεμελειώδη ἰδιότητα τῶν ἀναλογιῶν, $\alpha\delta=\beta\gamma$ (2)

Διαιροῦμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (2) διὰ αβ καὶ ἔχομεν

$$\frac{\alpha\delta}{\alpha\beta}=\frac{\beta\gamma}{\alpha\beta} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\delta}{\beta}=\frac{\gamma}{\alpha}$$

Ὁμοίως, ἐὰν διαιρέσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (2) διὰ γδ θὰ λάβωμεν

$$\frac{\alpha\delta}{\gamma\delta}=\frac{\beta\gamma}{\gamma\delta} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta}.$$

Ἀσκήσεις. 324. Ἐὰν εἶναι $\alpha\delta=\beta\gamma$ νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι

1. $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ 2. $\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta}$ 3. $\frac{\delta}{\gamma}=\frac{\beta}{\alpha}$ 4. $\frac{\delta}{\beta}=\frac{\gamma}{\alpha}$

325. Νὰ γραφῇ ὑπὸ μορφὴν ἀναλογίας, καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους, ἡ ἰσότης:

1. $xy=\omega\varphi$ 2. $\mu^2=\nu\varrho$

326. Νὰ σχηματισθοῦν διάφοροι ἀναλογίαι ἀπὸ τὴν ἰσότητα:

$$5\alpha^2\gamma=12\beta^2\delta$$

327. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ἐὰν εἶναι $\alpha:\beta=\gamma:\delta$, θὰ εἶναι:

1. $\alpha:\delta=\beta\gamma:\delta^2$ 4. $\nu\alpha:\beta=\nu\gamma:\delta$ 7. $(\alpha+1):1=(\beta\gamma+\delta):\delta$
2. $1:\beta=\gamma:\alpha\delta$ 5. $\mu\alpha:\nu\beta=\mu\gamma:\nu\delta$ 8. $(\alpha-\beta\mu):(\gamma-\delta\mu)=\beta:\delta$
3. $\alpha\delta:\beta=\gamma:1$ 6. $(\alpha-1):\beta=(\beta\gamma-\delta):\beta\delta$ 9. $\alpha\beta:\gamma\delta=(\alpha+\beta)^2:(\gamma+\delta)^2$.

188. III. Ἰδιότης. ***Ἐὰν ἔχωμεν τὴν ἀναλογίαν*** $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ (1) ***θὰ ἔχωμεν ἐπίσης καὶ*** $\frac{\alpha\pm\beta}{\beta}=\frac{\gamma\pm\delta}{\delta}$.

Πράγματι, ἐὰν προσθέσωμεν τὴν μονάδα καὶ εἰς τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος (1), θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\alpha}{\beta}+1=\frac{\gamma}{\delta}+1 \quad \text{ἢ} \quad \frac{\alpha+\beta}{\beta}=\frac{\gamma+\delta}{\delta}.$$

Ἐὰν ἀφαιρέσωμεν τὴν μονάδα καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος (1), θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\alpha}{\beta}-1=\frac{\gamma}{\delta}-1 \quad \text{ἢ} \quad \frac{\alpha-\beta}{\beta}=\frac{\gamma-\delta}{\delta}.$$

189. IV. Ἰδιότης. ***Ἐὰν ἔχωμεν τὴν ἀναλογίαν*** $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ (1) ***θὰ ἔχωμεν ἐπίσης καὶ τὴν*** $\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}=\frac{\gamma-\delta}{\gamma+\delta}$.

Πράγματι· ἀπὸ τὴν δοθεῖσαν ἀναλογίαν (1) ἔχομεν (§ 188)

$\frac{\alpha-\beta}{\beta}=\frac{\gamma-\delta}{\delta}$ ἤ, ἂν ἀλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν μέσων ὅρων της

$$\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}=\frac{\beta}{\delta} \tag{2}$$

Ὁμοίως ἀπὸ τὴν δοθεῖσαν ἀναλογίαν (1) ἔχομεν (§ 188)

$$\frac{\alpha+\beta}{\beta}=\frac{\gamma+\delta}{\delta} \quad \text{ἤ} \quad \frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta}=\frac{\beta}{\delta} \tag{3}$$

Ἐπειδὴ τὰ δεύτερα μέλη τῶν ἰσοτήτων (2) καὶ (3) εἶναι ἴσα, θὰ εἶναι ἴσα καὶ τὰ πρῶτα μέλη των, δηλ. θὰ εἶναι

$$\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}=\frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta}.$$

Ἂν ἀλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν μέσων ὅρων τῆς τελευταίας ἀναλογίας, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}=\frac{\gamma-\delta}{\gamma+\delta}.$$

Ἀσκήσεις. 328. Ἐὰν $\alpha:\beta=\gamma:\delta$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι:

1. $\frac{5\alpha+\beta}{3\alpha+4\beta}=\frac{5\gamma+\delta}{3\gamma+4\delta}$ 3. $\frac{\mu\alpha+\nu\beta}{\rho\alpha-\sigma\beta}=\frac{\mu\gamma+\nu\delta}{\rho\gamma-\sigma\delta}$

2. $\frac{3\alpha+4\gamma}{3\alpha-4\gamma}=\frac{3\beta+4\delta}{3\beta-4\delta}$ 4. $\frac{\nu\alpha+\beta}{\mu\alpha+\rho\beta}=\frac{\nu\gamma+\delta}{\mu\gamma+\rho\delta}$

190. Θεώρημα. ***Ἐὰν πολλὰ κλάσματα εἶναι ἴσα μεταξύ των, τὸ κλάσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς ἀριθμητὴν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμητῶν τῶν κλασμάτων καὶ ὡς παρονομαστὴν τὸ ἄθροισμα τῶν παρονομαστῶν, εἶναι ἴσον μὲ καθένα ἀπὸ τὰ κλάσματα αὐτά.***

Ἔστωσαν τὰ κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha'}{\beta'}, \frac{\alpha''}{\beta''},\ldots$

Θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha'}{\beta'}=\frac{\alpha''}{\beta''}=\ldots\ldots=\frac{\alpha+\alpha'+\alpha''+\ldots}{\beta+\beta'+\beta''+\ldots}$$

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ λ τὴν κοινὴν τιμὴν τῶν δοθέντων κλασμάτων, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha'}{\beta'}=\frac{\alpha''}{\beta''}=\ldots=\lambda.$$

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πηλίκου δύο ἀριθμῶν, ἐπειδὴ εἶναι:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\lambda \quad \text{θὰ εἶναι} \quad \alpha=\beta\lambda \tag{1}$$

$$\frac{\alpha'}{\beta'}=\lambda \quad \text{θὰ εἶναι} \quad \alpha'=\beta'\lambda \tag{2}$$

$$\frac{\alpha''}{\beta''}=\lambda \quad \text{θὰ εἶναι} \quad \alpha''=\beta''\lambda \tag{3}$$

Προσθέτομεν τὰς ἰσότητας (1), (3), (3) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\alpha+\alpha'+\alpha''=\beta\lambda+\beta'\lambda+\beta''\lambda \quad \text{ἢ} \quad \alpha+\alpha'+\alpha''=(\beta+\beta'+\beta'')\lambda \tag{4}$$

'Εὰν $\beta+\beta'+\beta''\neq 0$ διαιροῦμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος (4) διὰ $\beta+\beta'+\beta''$ καὶ ἔχομεν

$$\frac{\alpha+\alpha'+\alpha''}{\beta+\beta'+\beta''}=\lambda=\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha'}{\beta'}=\frac{\alpha''}{\beta''}$$

Ὥστε εἶναι $$\boxed{\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha'}{\beta'}=\frac{\alpha''}{\beta''}=\ldots\ldots=\frac{\alpha+\alpha'+\alpha''+\ldots}{\beta+\beta'+\beta''+\ldots}}$$

191. **Πόρισμα.** ***'Εὰν εἶναι*** $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha'}{\beta'}=\frac{\alpha''}{\beta''}$ ***θὰ εἶναι καὶ***

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha'}{\beta'}=\frac{\alpha''}{\beta''}=\frac{\mu\alpha+\mu'\alpha'+\mu''\alpha''}{\mu\beta+\mu'\beta'+\mu''\beta''}$$

ὅπου οἱ ἀριθμοὶ μ, μ', μ'' ***εἶναι οἱοιδήποτε θετικοὶ ἢ ἀρνητικοὶ καὶ διάφοροι τοῦ μηδενός.***

Πράγματι· γνωρίζομεν, ὅτι ἡ ἀξία ἑνὸς κλάσματος δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους του ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν. Θὰ εἶναι λοιπὸν

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha'}{\beta'}=\frac{\alpha''}{\beta''}=\frac{\mu\alpha}{\mu\beta}=\frac{\mu'\alpha'}{\mu'\beta'}=\frac{\mu''\alpha''}{\mu''\beta''}$$

'Εὰν ἐφαρμόσωμεν τὸ προηγούμενον θεώρημα εἰς τὰ ἴσα κλάσματα

$$\frac{\mu\alpha}{\mu\beta}=\frac{\mu'\alpha'}{\mu'\beta'}=\frac{\mu''\alpha''}{\mu''\beta''}$$

θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha'}{\beta'}=\frac{\alpha''}{\beta''}=\frac{\mu\alpha}{\mu\beta}=\frac{\mu'\alpha'}{\mu'\beta'}=\frac{\mu''\alpha''}{\mu''\beta''}=\frac{\mu\alpha+\mu'\alpha'+\mu''\alpha''}{\mu\beta+\mu'\beta'+\mu''\beta''}$$

'Ασκήσεις. 329. 'Εὰν εἶναι $\frac{\lambda}{\alpha-\beta}=\frac{\mu}{\beta-\gamma}=\frac{\nu}{\alpha-\gamma}$ θὰ εἶναι καὶ $\lambda+\mu=\nu$

330. 'Εὰν εἶναι $\frac{\mu\alpha+\nu\gamma}{\mu\beta+\nu\delta}=\frac{\alpha}{\beta}$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι καὶ $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ καὶ ἀντιστρόφως.

331. 'Εὰν εἶναι $\frac{\alpha}{x}=\frac{\beta}{y}=\frac{\gamma}{\omega}$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι καὶ

1. $(x^2+y^2+\omega^2)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)=(\alpha x+\beta y+\gamma\omega)^2$ καὶ ἀντιστρόφως.

332. 'Εὰν εἶναι $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\gamma}{\delta}$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι:

1. $\frac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}{\beta^3+\gamma^3+\delta^3}=\frac{\alpha}{\delta}$ 2. $(\beta+\delta)\gamma^3=\alpha\delta(\gamma^2+\delta^2)$

3. $(2\alpha+3\delta)(3\alpha^3-4\beta^3)=(3\alpha-4\delta)(2\alpha^3+3\beta^3)$

333. Ποία σχέσις πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν α καὶ β, ἵνα ἔχωμεν

$$\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}=\frac{4\alpha-\beta}{6\alpha-\beta}$$

334. Δίδονται αἱ ἀναλογίαι $\alpha:\beta=\gamma:\delta$ καὶ $x:y=\omega:\varphi$ καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ποία σχέσις πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν α, β, γ, δ, x, y, φ, ω, ἵνα ἔχωμεν

$$\frac{\alpha+x}{\beta+y}=\frac{\gamma+\omega}{\delta+\varphi}$$

335. Ἐὰν ἔχωμεν τὴν σχέσιν

$$(x+y+\omega+\varphi)(x-y-\omega+\varphi)=(x-y+\omega-\varphi)(x+y-\omega-\varphi)$$

νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ x, y, ω, φ σχηματίζουν ἀναλογίαν.

336. Ἐὰν εἶναι $\dfrac{\alpha^2+\alpha x+x^2}{\alpha^2-\alpha x+x^2}=\dfrac{\beta^2+\beta y+y^2}{\beta^2-\beta y+y^2}$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι καὶ $\dfrac{x}{y}=\dfrac{\alpha}{\beta}$, ἢ $\dfrac{\beta}{x}=\dfrac{y}{\alpha}$

337. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐὰν εἶναι $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\gamma}{\delta}$ θὰ εἶναι καὶ

$$\Sigma=\frac{(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}-\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}-\frac{\gamma\delta}{\gamma+\delta}=0$$

338. Ἐὰν εἶναι $\dfrac{\lambda}{x}=\dfrac{\mu}{y}=\dfrac{\nu}{\omega}$ καὶ $\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}+\dfrac{\omega^2}{\gamma^2}=1$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι καὶ $\dfrac{\lambda^2}{\alpha^2}+\dfrac{\mu^2}{\beta^2}+\dfrac{\nu^2}{\gamma^2}=\dfrac{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}{x^2+y^2+\omega^2}$

339. Ἐὰν εἶναι $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\gamma}{\delta}$, θὰ εἶναι καὶ $\dfrac{\alpha^2+2\alpha\beta+3\beta^2}{\gamma^2+2\gamma\delta+3\delta^2}=\dfrac{\beta(\alpha-3\beta)}{\delta(\gamma-3\delta)}$

340. Ἐὰν εἶναι $\dfrac{x^2-y\omega}{\alpha}=\dfrac{y^2-\omega x}{\beta}=\dfrac{\omega^2-xy}{\gamma}$ θὰ εἶναι καὶ

$$\frac{\alpha^2-\beta\gamma}{x}=\frac{\beta^2-\gamma\alpha}{y}=\frac{\gamma^2-\alpha\beta}{\omega}$$

341. Ἐὰν εἶναι $\dfrac{x}{\alpha}=\dfrac{y}{\beta}=\dfrac{\omega}{\gamma}$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι καὶ

1. $\dfrac{x^2+\alpha^2}{x+\alpha}+\dfrac{y^2+\beta^2}{y+\beta}+\dfrac{\omega^2+\gamma^2}{\omega+\gamma}=\dfrac{(x+y+\omega)^2+(\alpha+\beta+\gamma)^2}{(x+y+\omega)+(\alpha+\beta+\gamma)}$
2. $\dfrac{x^\nu+\alpha^\nu}{x^{\nu-1}+\alpha^{\nu-1}}+\dfrac{y^\nu+\beta^\nu}{y^{\nu-1}+\beta^{\nu-1}}+\dfrac{\omega^\nu+\gamma^\nu}{\omega^{\nu-1}+\gamma^{\nu-1}}=\dfrac{(x+y+\omega)^\nu+(\alpha+\beta+\gamma)^\nu}{(x+y+\omega)^{\nu-1}+(\alpha+\beta+\gamma)^{\nu-1}}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΓΕΝΙΚΗΝ ΕΠΑΝΑΛΗΨΙΝ

1ον. Ἀσκήσεις ἐπὶ τῶν ἀκεραίων ἀλγεβρικῶν παραστάσεων

Α' Ὁμάς. *342.* Δίδονται τὰ πολυώνυμα:

$$A=2x^3-5x^2y+4xy^2+y^3 \qquad \Gamma=y^3-5xy^2+x^3+2x^2y$$
$$B=-x^3-xy^2+7x^2y+4y^3 \qquad \Delta=3x^3+x^2y-7xy^2+4y^3$$

1. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ πολυώνυμα $A+B-\Gamma$, $A-B+\Gamma$, $-A+B+\Gamma$ **καὶ νὰ ἐπαληθευθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν αὐτῶν πολυωνύμων εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα** $A+B+\Gamma$.

2. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ πολυώνυμα:

$$A+B-\Gamma-\Delta, \quad A-B+\Gamma-\Delta, \quad -A+B+\Gamma+\Delta, \quad -A-B-\Gamma+\Delta$$

καὶ νὰ ἐπαληθευθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων αὐτῶν πολυωνύμων εἶναι μηδέν.

343. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ γινόμενον τῶν πολυωνύμων:

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2-\alpha\beta-\alpha\gamma-\alpha\delta-\beta\gamma-\beta\delta-\gamma\delta \quad \text{ἐπὶ} \quad \alpha+\beta+\gamma+\delta$$

344. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ πηλίκον τῶν πολυωνύμων:

1. $x^3(y-\omega)+y^3(\omega-x)+\omega^3(x-y)$ διὰ $x^2(y-\omega)+y^2(\omega-x)+\omega^2(x-y)$
2. $-x^4+(\alpha^2-\alpha)x^3+(\alpha^3+3\alpha)x^2+(-\alpha^3+2\alpha^2)x-2\alpha^2$ διὰ $-x^2+\alpha^2x+2\alpha$
3. $x^4(y^2-\omega^2)+y^4(\omega^2-x^2)+\omega^4(x^2-y^2)$ διὰ $x^2(y-\omega)+y^2(\omega-x)+\omega^2(x-y)$

Β' Ὁμάς. 345. Νὰ ἐπαληθευθοῦν αἱ κάτωθι ταυτότητες:

1. $(\gamma+\delta)^2(\alpha-\beta)^2-(\alpha-\beta)^2(\gamma-\delta)^2+\gamma^2(\gamma-\delta)^2-(\gamma+\delta)^2\gamma^2=(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha-\beta-\gamma)4\gamma\delta$
2. $(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2+(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2+(\gamma-\alpha)^2(\alpha-\beta)^2=[(\beta-\gamma)^2-(\alpha-\beta)(\gamma-\alpha)]^2$
3. $(\alpha^4-\beta^4)+2\beta(\alpha^3+\beta^3)-(\alpha+\beta)^2(\alpha-\beta)^2=2\alpha^2\beta(\alpha-\beta)$

346. Νὰ ἐπαληθευθοῦν αἱ κάτωθι ταυτότητες:

1. $(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha x^2+\beta y^2+\gamma\omega^2)-(\alpha x+\beta y+\gamma\omega)^2=$
$$=\beta\gamma(y-\omega)^2+\gamma\alpha(\omega-x)^2+\alpha\beta(x-y)^2$$
2. $(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)^2+(\alpha^2-\beta\gamma)^2+(\beta^2-\gamma\alpha)^2+(\gamma^2-\alpha\beta)^2=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2$
3. $\alpha(\beta+\gamma)^2+\beta(\gamma+\alpha)^2+\gamma(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\gamma\equiv(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)$
4. $(\alpha+\beta+\gamma)(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)-\alpha\beta\gamma=(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)$

347. Νὰ ἐπαληθευθοῦν αἱ κάτωθι ταυτότητες:

1. $2(2x-\alpha)^3-27\alpha^2x=(x-2\alpha)(4x+\alpha)^2$
2. $(x-y)(x+y)^3=x(x-2y)^3+y(2x-y)^3$
3. $(\beta+\gamma)^3+(\gamma+\alpha)^3+(\alpha+\beta)^3-3(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)=2(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma)$
4. $(\alpha^2-\beta\gamma)^3+(\beta^2-\gamma\alpha)^3+(\gamma^2-\alpha\beta)^3-3(\alpha^2-\beta\gamma)(\beta^2-\gamma\alpha)(\gamma^2-\alpha\beta)=$
$$=(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma)^2$$
5. $(\alpha+\beta)^3+3\alpha\beta(1-\alpha-\beta)-1=(\alpha+\beta-1)(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta+\alpha+\beta+1)$

348. Νὰ ἐπαληθευθῇ ἡ ταυτότης τοῦ Euler:

1. $(\alpha x+\beta y+\gamma\omega+\delta\varphi)^2+(\beta x-\alpha y+\delta\omega-\gamma\varphi)^2+(\gamma x-\delta y-\alpha\omega+\beta\varphi)^2+$
$$+(\delta x+\gamma y-\beta\omega-\alpha\varphi)^2=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)(x^2+y^2+\omega^2+\varphi^2)$$

349. Νὰ ἐπαληθευθοῦν αἱ κάτωθι ταυτότητες:

1. $(y+\omega-2x)^4+(\omega+x-2y)^4+(x+y-2\omega)^4\equiv$
$$\equiv18(x^2+y^2+\omega^2-y\omega-\omega x-xy)^2$$
2. $(\beta+\gamma)^2(\gamma+\alpha)^2(\alpha+\beta)^2+2\alpha^2\beta^2\gamma^2-\alpha^4(\beta+\gamma)^2-\beta^4(\gamma+\alpha)^2-\gamma^4(\alpha+\beta)^2\equiv$
$$\equiv2(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)^2$$
3. $(\alpha+\beta+\gamma)^4-(\beta+\gamma)^4-(\gamma+\alpha)^4-(\alpha+\beta)^4+\alpha^4+\beta^4+\gamma^4\equiv12\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)$

Γ' Ὁμάς. 350. Ἐὰν θέσωμεν $x+y=\alpha$ καὶ $xy=\beta$ νὰ ἐπαληθευθῇ, ὅτι:

1. $x^2+y^2=\alpha^2-2\beta$ 3. $x^4+y^4=\alpha^4-4\alpha^2\beta+2\beta^2$
2. $x^3+y^3=\alpha^3-3\alpha\beta$ 4. $x^5+y^5=\alpha^5-5\alpha^3\beta+5\alpha\beta^2$

351. Ἐὰν εἶναι $\alpha+\beta+\gamma=0$ νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι:

1. $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2=2(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4)$
2. $\alpha(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)=\beta(\beta+\alpha)(\beta+\gamma)=\gamma(\gamma+\alpha)(\gamma+\beta)$
3. $\alpha(\beta-\gamma)^2+\beta(\gamma-\alpha)^2+\gamma(\alpha-\beta)^2+9\alpha\beta\gamma=0$
4. $(3\alpha-2\beta)^3+(3\beta-2\gamma)^3+(3\gamma-2\alpha)^3=3(3\alpha-2\beta)(3\beta-2\gamma)(3\gamma-2\alpha)$
5. $5(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)=6(\alpha^5+\beta^5+\gamma^5)$

352. Ἐὰν θέσωμεν $x=(\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2+\beta^2)^2$, $y=2\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)^2$, $\omega=\alpha^2+\beta^2$, νὰ ἐπαληθευθῇ, ὅτι $x^2+y^2=\omega^6$.

353. Ἐὰν θέσωμεν $x=\alpha(3\beta^2-\alpha^2)$, $y=\beta(3\alpha^2-\beta^2)$, $\omega=\alpha^2+\beta^2$, νὰ ἐπαληθευθῇ, ὅτι θὰ ἔχωμεν $x^2+y^2=\omega^3$.

354. Ἐὰν θέσωμεν $x^2+y^2=1$ νὰ ἐπαληθευθῇ, ὅτι θὰ εἶναι $(3x-4x^3)^2+(3y-4y^3)^2=1$.

355. Ἐὰν θέσωμεν $x=\alpha^2-\beta\gamma$, $y=\beta^2-\alpha\gamma$, $\omega=\gamma^2-\alpha\beta$ νὰ ἐπαληθευθῇ, ὅτι θὰ εἶναι $\alpha x+\beta y+\gamma\omega=(x+y+\omega)(\alpha+\beta+\gamma)$.

356. Ἐὰν θέσωμεν $A=\alpha+\beta+\gamma+\delta$, $B=\alpha+\beta-\gamma-\delta$, $\Gamma=\alpha-\beta+\gamma-\delta$, $\Delta=\alpha-\beta-\gamma+\delta$ καί, ἐὰν εἶναι $\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)=\gamma\delta(\gamma^2+\delta^2)$ νὰ ἐπαληθευθῇ, ὅτι θὰ εἶναι $A.B(A^2+B^2)=\Gamma.\Delta(\Gamma^2+\Delta^2)$.

357. Ἐὰν θέσωμεν $A=x^2-y\omega$, $B=y^2-x\omega$, $\Gamma=\omega^2-xy$, νὰ ἐπαληθευθῇ, ὅτι θὰ εἶναι $(A+B+\Gamma)(x+y+\omega)=xA+yB+\omega\Gamma$.

358. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ἐὰν θέσωμεν:

$x=(\alpha^2+3\beta^2)^2-\alpha+3\beta$, $\quad y=-(\alpha^2+3\beta^2)^2+\alpha+3\beta$

$\omega=(\alpha^2+3\beta^2)(\alpha+3\beta)-1$, $\quad \varphi=-(\alpha^2+3\beta^2)(\alpha-3\beta)+1$

θὰ ἔχωμεν $x^3+y^3=\omega^3+\varphi^3$.

359. Ἐὰν $x+y=\alpha$ καὶ $x^3+y^3=\beta^3$, νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ παραστάσεις x^4+y^4 καὶ x^5+y^5 συναρτήσει τῶν α καὶ β.

360. Ἐὰν $x+y+\omega=\alpha$ καὶ $x^2+y^2+\omega^2=\beta^2$, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως $xy+y\omega+\omega x$ συναρτήσει τῶν α καὶ β.

361. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ πολυώνυμον:

$$A=x^4+y^4+\omega^4+x^2y^2+x^2\omega^2+y^2\omega^2-2xy\omega(x+y+\omega)$$

εἶναι πάντοτε θετικόν. Εἰς ποίαν περίπτωσιν γίνεται μηδέν;

362. Ἐὰν εἶναι

$$x+y+\omega=\alpha$$
$$x^2+y^2+\omega^2=\beta^2$$
$$x^3+y^3+\omega^3=\gamma^3$$

νὰ ὑπολογισθῇ τὸ γινόμενον $xy\omega$ συναρτήσει τῶν α, β, γ.

363. Ἐὰν εἰς τὸ πολυώνυμον $x^3+y^3+z^3-3xyz$ ἀντικαταστήσωμεν τὸ x διὰ τοῦ $\alpha X+\beta Y+\gamma Z$, τὸ y διὰ τοῦ $\alpha Y+\beta Z+\gamma X$ καὶ τὸ z διὰ τοῦ $\alpha Z+\beta X+\gamma Y$, νὰ ἐπαληθευθῇ, ὅτι θὰ εἶναι

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(X^3+Y^3+Z^3-3XYZ)(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma)$$

2ον. Ἀσκήσεις ἐπὶ τῶν κλασματικῶν παραστάσεων

Α΄ Ὁμάς. 364. Ἐὰν $x+\dfrac{1}{x}=\alpha$ νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ παραστάσεις:

1. $x^2+\dfrac{1}{x^2}$ $\quad$ 2. $x^3+\dfrac{1}{x^3}$ $\quad$ 3. $x^4+\dfrac{1}{x^4}$.

365. Νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ κάτωθι κλάσματα·

1. $A=\dfrac{\alpha\beta(x^2+y^2)+xy(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha\beta(x^2-y^2)+xy(\alpha^2-\beta^2)}$ $\quad$ 2. $A=\dfrac{(\alpha^2-\beta^2-\gamma^2-2\beta\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)}{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\gamma^2-2\alpha\gamma-\beta^2)}$

3. $\Lambda=\dfrac{(x^2+x-1)(x^2-x+1)-(x^2+x+1)(x^2-x-1)}{(x^2+x-1)(x^2+x+1)-(x^2-x+1)(x^2-x-1)}$

4. $A=\dfrac{x^5+x^2y^3-x^4y-xy^4}{x^4-x^2y^2+x^3y-xy^3}$

366. Νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ κάτωθι κλάσματα :

1. $\dfrac{x^2+\alpha^2-\beta^2-2\beta\gamma+2\alpha x-\gamma^2}{x^2+\beta^2-\alpha^2+2\beta x-2\alpha\gamma-\gamma^2}$ 2. $\dfrac{7\alpha^3-2\alpha^2\beta-63\alpha\beta^2+18\beta^3}{5\alpha^4-3\alpha^3\beta-45\alpha^2\beta^2+27\alpha\beta^3}$

3. $\dfrac{\alpha^3(\beta^2-\gamma^2)+\beta^3(\gamma^2-\alpha^2)+\gamma^3(\alpha^2-\beta^2)}{\alpha^2(\beta-\gamma)+\beta^2(\gamma-\alpha)+\gamma^2(\alpha-\beta)}$

Β' Ὁμάς. 367. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις :

1. $\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{1-x}{1+x}-\dfrac{1-x+x^2}{1+x^2}\cdot\dfrac{1+x+x^2}{1-x^2}-1$

2. $\dfrac{4\alpha-3\beta}{2\alpha-11\beta}-\dfrac{6\alpha+22\beta}{6\alpha-33\beta}-\dfrac{1}{2\alpha-11\beta}+1$

3. $\dfrac{x^2}{xy+y^2}+\dfrac{x^2+y^2}{xy}-\dfrac{y^2}{x^2+xy}$

4. $\dfrac{x^2+x+1}{(1-2x)^3}-\dfrac{x+1}{(1-2x)^2}+\dfrac{1}{1-2x}$

368. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις :

1. $\dfrac{x^4-(x-1)^2}{(x^2+1)^2-x^2}+\dfrac{x^2-(x^2-1)^2}{x^2(x+1)^2-1}+\dfrac{x^2(x-1)^2-1}{x^4-(x+1)^2}$

2. $\dfrac{(2\alpha-3\beta)^2-\alpha^2}{4\alpha^2-(3\beta+\alpha)^2}+\dfrac{4\alpha^2-(3\beta-\alpha)^2}{9(\alpha^2-\beta^2)}+\dfrac{9\beta^2-\alpha^2}{(2\alpha+3\beta)^2-\alpha^2}$

369. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις :

1. $\dfrac{8}{(x^2+3)(x^2-1)}+\dfrac{2}{x^2+3}+\dfrac{1}{x+1}$ 2. $\dfrac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha^3-\beta^3}-\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}-\dfrac{4\alpha\beta}{\alpha^3-\beta^3}$

3. $\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha x+\beta y}+\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha x-\beta y}+\dfrac{2(\alpha^2x+\beta^2y)}{\alpha^2x^2+\beta^2y^2}-\dfrac{4(\alpha^4x^3-\beta^4y^3)}{\alpha^4x^4-\beta^4y^4}$

370. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις :

1. $\dfrac{4x^2}{(x+2)(4x-4)}-\dfrac{(3x+2)^2}{(x+2)(3x-6)}+\dfrac{(6x-4)^2}{(4x-4)(3x-6)}$

2. $\dfrac{3x-6}{x+1}-\dfrac{56x^2-84x}{(21x-14)(15-10x)}-3-\dfrac{4x^2-135x+225}{5(3x^2-2x)}$

3. $\dfrac{x^2}{3x-3}-\dfrac{(x+1)(x+2)}{7x+7}+\dfrac{10x}{6-6x}+\dfrac{7x^2+14x}{(x-1)(3x+6)}-\dfrac{1}{3}$

4. $\dfrac{\beta+1}{\beta-\alpha}+\dfrac{5\alpha+3\beta}{\alpha^2-\beta^2}+\dfrac{\beta-1}{\alpha+\beta}+\dfrac{3}{\beta-\alpha}$, 5. $\dfrac{x^3}{x-1}-\dfrac{x^2}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}$

371. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις :

1. $\dfrac{\beta-\gamma}{\beta+\gamma}+\dfrac{\gamma-\alpha}{\gamma+\alpha}+\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}+\dfrac{(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)}{(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)}$

2. $\dfrac{2\alpha}{\alpha+\beta}+\dfrac{2\beta}{\beta+\gamma}+\dfrac{2\gamma}{\gamma+\alpha}+\dfrac{(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)}{(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)}$

3. $\dfrac{\beta\gamma}{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)}+\dfrac{\gamma\alpha}{(\beta+\gamma)(\beta+\alpha)}+\dfrac{\alpha\beta}{(\gamma+\alpha)(\gamma+\beta)}+\dfrac{2\alpha\beta\gamma}{(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)}$

4. $\dfrac{1}{\alpha_1(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)}+\dfrac{1}{\alpha_2(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)}+$

$+\dfrac{1}{\alpha_3(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)}+\dfrac{1}{\alpha_4(\alpha_4-\alpha_1)(\alpha_4-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_3)}$

Γ' Ὁμάς. *372.* Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι ἀλγεβρικὰ ἀθροίσματα:

1. $\dfrac{x^\nu + y^\nu}{x^\nu - y^\nu} - \dfrac{x^\nu - y^\nu}{x^\nu + y^\nu}$

2. $\dfrac{1}{1+x^{\nu-\varrho}+x^{\nu-\sigma}} + \dfrac{1}{1+x^{\varrho-\nu}+x^{\varrho-\sigma}} + \dfrac{1}{1+x^{\sigma-\nu}+x^{\sigma-\varrho}}$

3. $\dfrac{x^{3\nu}}{x^\nu - 1} - \dfrac{x^{2\nu}}{x^\nu + 1} - \dfrac{1}{x^\nu - 1} + \dfrac{1}{x^\nu + 1}$

4. $\dfrac{x^{4\nu}}{x^{2\nu}-1} - \dfrac{x^{3\nu}}{x^\nu - 1} + \dfrac{x^{2\nu}}{x^\nu + 1} - \dfrac{1}{x^{2\nu}-1} + \dfrac{1}{x^\nu - 1} - \dfrac{1}{x^\nu + 1}$

373. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ κάτωθι ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα:

$$\frac{A}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{B}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)} + \frac{\Gamma}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

εἰς τὸ ὁποῖον νὰ ἀντικατασταθοῦν τὰ Α,Β,Γ ἀντιστοίχως:

1ον μὲ 1, 1, 1   4ον μὲ $\alpha^3, \beta^3, \gamma^3$ 7ον μὲ $(\beta+\gamma), (\gamma+\alpha), (\alpha+\beta)$

2ον μὲ α, β, γ 5ον μὲ $\beta\gamma, \alpha\gamma, \alpha\beta$ 8ον μὲ $(x-\alpha)^2, (x-\beta)^2, (x-\gamma)^2$

3ον μὲ $\alpha^2,\beta^2,\gamma^2$ 6ον μὲ $\beta^2\gamma^2,\gamma^2\alpha^2,\alpha^2\beta^2$ 9ον μὲ $\beta\gamma(\alpha+\delta), \gamma\alpha(\beta+\delta), \alpha\beta(\gamma+\delta)$

374. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ κάτωθι ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα:

$$\frac{A}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{B}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)} + \frac{\Gamma}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

εἰς τὸ ὁποῖον νὰ ἀντικατασταθοῦν τὰ Α,Β,Γ, ἀντιστοίχως:

1ον μὲ $\alpha^3(\beta+\gamma), \beta^3(\gamma+\alpha), \gamma^3(\alpha+\beta)$

2ον μὲ $\alpha(\beta-\gamma)^2, \beta(\gamma-\alpha)^2, \gamma(\alpha-\beta)^2$

3ον μὲ $(\alpha-x)(\alpha-y)(\alpha-\omega), (\beta-x)(\beta-y)(\beta-\omega), (\gamma-x)(\gamma-y)(\gamma-\omega)$

4ον μὲ $(x+\beta)(x+\gamma), (x+\gamma)(x+\alpha), (x+\alpha)(x+\beta)$

5ον μὲ $\alpha^2(x-\beta)(x-\gamma), \beta^2(x-\gamma)(x-\alpha), \gamma^2(x-\alpha)(x-\beta)$.

375. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι ἀλγεβρικὰ ἀθροίσματα:

1. $\dfrac{(x-\alpha)^2}{\alpha(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \dfrac{(x-\beta)^2}{\beta(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)} + \dfrac{(x-\gamma)^2}{\gamma(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$

2. $\dfrac{x+\alpha}{x(x-y)(x-\omega)} + \dfrac{y+\alpha}{y(y-\omega)(y-x)} + \dfrac{\omega+\alpha}{\omega(\omega-x)(\omega-y)}$

3. $\dfrac{1}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(x+\alpha)} + \dfrac{1}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)(x+\beta)} + \dfrac{1}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(x+\gamma)}$

Δ' Ὁμάς. *376* Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις:

1. $\dfrac{1}{(\alpha+\beta)^2}\left(\dfrac{1}{\alpha^2} + \dfrac{1}{\beta^2}\right) + \dfrac{2}{(\alpha+\beta)^3}\left(\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta}\right)$

2. $\dfrac{\beta+\gamma}{\beta\gamma}(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2) + \dfrac{\gamma+\alpha}{\gamma\alpha}(\gamma^2+\alpha^2-\beta^2) + \dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)$

3. $\left(\dfrac{\beta}{\gamma}+\dfrac{\gamma}{\beta}\right)^2 + \left(\dfrac{\gamma}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\gamma}\right)^2 + \left(\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^2 - \left(\dfrac{\beta}{\gamma}+\dfrac{\gamma}{\beta}\right)\left(\dfrac{\gamma}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\gamma}\right)\left(\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}\right)$

377. Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις:

1. $\left(\dfrac{2\alpha}{3\beta}-1\right)\left(\dfrac{2\alpha}{3\beta}+1\right)\left(\dfrac{4\alpha^2}{9\beta^2}+1\right)$ 2. $\dfrac{1-x^2}{\alpha+\alpha^2} \cdot \dfrac{1-\alpha^2}{x+x^2}\left(\alpha+\dfrac{\alpha x}{1-x}\right)^2$

3. $\left(\dfrac{x-y}{x+y} + \dfrac{x+y}{x-y}\right)\left(\dfrac{x^2+y^2}{2xy}+1\right) \cdot \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

4. $\frac{1-x^2}{1+2y+y^2}\cdot\frac{1-y^2}{y^2+2xy+x^2}\cdot\left(\frac{x}{1-x}-\frac{x'}{1-y}\right)$

378. Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις :

1. $\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}-\frac{\gamma}{\alpha\beta}\right)(\alpha+\beta+\gamma):\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{2}{\alpha\beta}-\frac{\gamma^2}{\alpha^2\beta^2}\right)$

2. $\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}-\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)\alpha^2:\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}-1\right)\left(1-\frac{1}{1+\alpha}\right)$

3. $\left(\frac{\alpha}{\beta^2}+1\right)\left(\frac{\alpha^2}{\beta^2}-1\right)\left(\frac{\alpha^2}{\beta^4}+1\right):\left(1+\frac{\alpha}{\beta^2}+\frac{\alpha^2}{\beta^4}+\frac{\alpha^3}{\beta^6}\right)$

Ε΄ Ὁμάς. 379. Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις :

1. $$\frac{1}{\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right)\left(1-\frac{\gamma}{\alpha}\right)}+\frac{1}{\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(1-\frac{\gamma}{\beta}\right)}+\frac{1}{\left(1-\frac{\alpha}{\gamma}\right)\left(1-\frac{\beta}{\gamma}\right)}$$

2. $$\frac{1}{1+\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\alpha}{\gamma}}+\frac{1}{1+\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\beta}{\alpha}}+\frac{1}{1+\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma}{\beta}}$$

380. Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις :

1. $$\frac{\frac{\alpha^2+\beta^2}{\beta}-\alpha}{\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha}}\cdot\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^3+\beta^3}\cdot\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}+\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)\cdot\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}+\frac{\beta}{\alpha-\beta}\right)$$

2. $$\frac{\frac{x}{y}-1+\frac{y}{x}}{x^3-2x^2y+xy^2}\cdot\frac{x^4y^4}{xy+y^2}\cdot\left(\frac{x^2}{y^2}-2+\frac{y^2}{x^2}\right)$$

3. $$\left[\frac{\frac{\alpha^2(1-x)}{y+\alpha^2x}+1}{\alpha-\frac{\alpha y(1-x)}{y+\alpha^2x}}\right]\cdot\frac{6\alpha x}{3y-\omega}\cdot\left(\frac{y+\omega}{4}-\frac{\omega}{3}\right)$$

4. $$\left[\frac{\frac{4\alpha\beta}{\alpha+\beta}+2\alpha}{\frac{4\alpha\beta}{\alpha+\beta}-2\alpha}-\frac{2\beta+\frac{4\alpha\beta}{\alpha+\beta}}{2\beta-\frac{4\alpha\beta}{\alpha+\beta}}\right]:\frac{\frac{4\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}}{\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}-\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}$$

381. Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις :

1. $$\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha-\frac{\beta}{1+\frac{\beta}{\alpha-\beta}}}-\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha+\frac{\beta}{1-\frac{\beta}{\alpha+\beta}}}$$

2. $$1-\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta-\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha-\beta}}$$

3. $$\frac{1-x-x^3}{1-\frac{x}{1+x+\frac{x}{1-x+x^2}}}:\frac{1+x+x^3}{1+\frac{x}{1-x-\frac{x}{1+x+x^2}}}$$

4. $$\frac{x^2}{1-\cfrac{1}{x^2+\cfrac{\frac{1}{x}}{x+\frac{1}{x}}}}+\frac{x^2-2}{1-\cfrac{1}{x^2-\cfrac{\frac{1}{x}}{x-\frac{1}{x}}}}$$

382. Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις :

1. $$\frac{(xy)^{\alpha+\beta}+x^\beta y^\alpha-x^\alpha y^\beta-1}{\left(\frac{y}{x}\right)^\alpha(xy)^\beta+y^{\alpha+\beta}[(xy)^\beta-(xy)^{-\alpha}]-y^{2\beta}}$$

2. $$\left(\frac{x-y}{x+y}+\frac{x+y}{x-y}\right)\left(\frac{x^2+y^2}{2xy}+1\right)\cdot\frac{1}{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}$$

3. $$\frac{\left[\frac{(\alpha+\beta)^3}{3\alpha\beta}-\alpha-\beta\right]\left[\frac{(\alpha-\beta)^3}{3\alpha\beta}+\alpha-\beta\right]}{\left[\frac{(\alpha+\beta)^2}{4\alpha\beta}-1\right][(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta]}\cdot\frac{(\beta-\alpha)^3-(\beta-\alpha)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}$$

383. Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις :

1. $$\left[1+\frac{1+\frac{1+x}{1-3x}}{1-3\cdot\frac{1+x}{1-3x}}\right]:\left[1-3\cdot\frac{1+\frac{1+x}{1-3x}}{1-3\frac{1+x}{1-3x}}\right]$$

2. $$\frac{\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{x}\right)}{1+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}:\frac{1+\frac{x}{y}}{\frac{x^3}{y^3}-1}$$

3. $$\frac{\frac{x-1}{3}+\frac{x-1}{x-2}}{\frac{x+2}{4}+\frac{x+2}{x-3}}:\frac{\frac{x+3}{7}-\frac{x+3}{x+4}}{\frac{x-2}{3}+\frac{x-2}{x-1}}$$

4. $$\frac{1-\frac{1}{x+y}}{\frac{y}{x+y}}:\frac{\frac{1}{1+x}+\frac{x}{1-x}}{\frac{y}{1-x}-\frac{xy}{1+x}}$$

Στ΄ Ὁμάς. *384.* Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῶν κάτωθι παραστάσεων :

1. $\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x-y}-\frac{y^2}{x^2-y^2}$ διὰ $y=\frac{3x}{4}$

2. $\frac{x}{\alpha}+\frac{x}{\beta-\alpha}-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ διὰ $x=\frac{\alpha^2(\beta-\alpha)}{\beta(\beta+\alpha)}$

3. $\frac{x+2\alpha}{2\beta-x}+\frac{x-2\alpha}{2\beta+x}-\frac{4\alpha\beta}{4\beta^2-x^2}$ διὰ $x=\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$

4. $\frac{x+y-1}{x-y+1}$ διὰ $x=\frac{\alpha+1}{\alpha\beta+1}$, $y=\frac{\alpha\beta+\alpha}{\alpha\beta+1}$

385. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν κάτωθι παραστάσεων :

1. $\frac{x+2\mu}{2\nu-x}-\frac{2\mu-x}{2\nu+x}+\frac{4\mu\nu}{x^2-4\nu^2}$ διὰ $x=\frac{\mu\nu}{\mu+\nu}$

2. $\frac{x+\mu}{y+\nu}$ διὰ $x=\frac{2\nu^2+\lambda^2-\mu^2}{3\mu}$, καὶ $y=\frac{2\mu^2+\lambda^2-\nu^2}{3\nu}$

3. $(x+1)(y+1)$ διὰ $x=\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}$, $y=\frac{(\alpha+\gamma-\beta)(\alpha+\beta-\gamma)}{(\alpha+\beta+\gamma)(\beta+\gamma-\alpha)}$

386. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ παράστασις $x^2+y^2+\omega^2-xy\omega$

διὰ $x=\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$, $y=\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\beta}$, $\omega=\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\alpha}{\gamma}$

Ζ' 'Ομάς. 387. 'Εὰν εἶναι $\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{4}{\alpha}$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι

$$(\alpha+\beta-\gamma)^3+2(\beta+\gamma-\alpha)^3+(\gamma+\alpha-\beta)^3=2(\beta+\gamma)^3$$

388. 'Εὰν εἶναι $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=0$ νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι

1. $(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ 2. $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^3=(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma)^2$

389. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ σχέσις

$$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+\alpha^2\beta^2=2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)$$

ὑφίσταται μόνον, ὅταν $\alpha=\beta=\gamma$.

390. 'Εὰν $\alpha\neq\beta\neq\gamma$ καὶ ν τυχὼν ἀριθμὸς θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\mu\gamma\beta+\nu}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{\mu\alpha\gamma+\nu}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}+\frac{\mu\alpha\beta+\nu}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}=\text{σταθερὸν}$$

Η' 'Ομάς. 391. Νὰ ἐπαληθευθοῦν αἱ κάτωθι ταυτότητες:

1. $\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)^2-\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)^2\equiv\mu\nu$ 2. $\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\equiv\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$

3. $$\frac{1}{1-\mu x}\cdot\frac{\mu^2}{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)}+\frac{\nu^2}{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}\cdot\frac{1}{1-\nu x}+$$
$$+\frac{\lambda^2}{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}\cdot\frac{1}{1-\lambda x}\equiv\frac{1}{(1-\mu x)(1-\nu x)(1-\lambda x)}$$

4. $\frac{1}{(\beta-\gamma)^2}+\frac{1}{(\gamma-\alpha)^2}+\frac{1}{(\alpha-\beta)^2}=\left(\frac{1}{\beta-\gamma}+\frac{1}{\gamma-\alpha}+\frac{1}{\alpha-\beta}\right)^2$

392. 'Εὰν $\alpha+\beta+\gamma=2\tau$ νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι

1. $\frac{1}{\tau-\alpha}+\frac{1}{\tau-\beta}+\frac{1}{\tau-\gamma}-\frac{1}{\tau}=\frac{\alpha\beta\gamma}{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$

2. $1+\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}=\frac{2\tau(\tau-\alpha)}{\beta\gamma}$

393. 'Εὰν $\alpha+\beta+\gamma=0$, νὰ δειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι

$$\left(\frac{\beta-\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma-\alpha}{\beta}+\frac{\alpha-\beta}{\gamma}\right)\cdot\left(\frac{\alpha}{\beta-\gamma}+\frac{\beta}{\gamma-\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha-\beta}\right)=9$$

394. 'Εὰν $\gamma=\alpha+2$ καὶ $\beta=\alpha-1$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι

$$\frac{\alpha^2\beta^2\gamma^2-\alpha^2\beta^2-\gamma^2+1}{\alpha^2\beta\gamma-\frac{\gamma}{\beta}+\beta\left(\alpha^2-\frac{1}{\beta^2}\right)}+1=\alpha^2$$

395. 'Εὰν $x=\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$, νὰ ἐπαληθευθῇ, ὅτι $\frac{\alpha^2}{\alpha-x}=\frac{\beta^2}{\beta-x}=\alpha+\beta$

396. 'Εὰν $x=\frac{2\beta^2-\alpha^2+\gamma^2}{3\alpha}$ καὶ $y=\frac{2\alpha^2-\beta^2+\gamma^2}{3\beta}$ νὰ ἐπαληθευθῇ, ὅτι θὰ εἶναι $\frac{x+\alpha}{y+\beta}=\frac{\alpha}{\beta}$

397. Ἐὰν α καὶ ν εἶναι ἀκέραιοι, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ παράστασις $K=\dfrac{\alpha^{3\nu}-1}{\alpha^2+\alpha+1}$ εἶναι ἀκεραία.

398. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ παράστασις

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right)-\frac{\beta+\gamma}{\beta\gamma}\left(\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\beta}\right)$$

δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ μορφὴν μιᾶς διαφορᾶς δύο τετραγώνων.

399. Ἐὰν α, β, γ εἶναι ἀριθμοὶ διάφοροι μεταξύ των, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἐὰν ἡ παράστασις $A=\dfrac{\alpha}{\beta-\gamma}+\dfrac{\beta}{\gamma-\alpha}+\dfrac{\gamma}{\alpha-\beta}$ εἶναι μηδέν, θὰ εἶναι ἐπίσης μηδὲν καὶ ἡ παράστασις $B=\dfrac{\alpha}{(\beta-\gamma)^2}+\dfrac{\beta}{(\gamma-\alpha)^2}+\dfrac{\gamma}{(\alpha-\beta)^2}$

400. Ἐὰν ἔχωμεν $\dfrac{x^2-y\omega}{\alpha}=\dfrac{y^2-\omega x}{\beta}=\dfrac{\omega^2-xy}{\gamma}$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ ἔχωμεν ἐπίσης καὶ $\dfrac{\alpha^2-\beta\gamma}{x}=\dfrac{\beta^2-\gamma\alpha}{y}=\dfrac{\gamma^2-\alpha\beta}{\omega}$

401. Ἐὰν εἶναι $\dfrac{\beta-\gamma}{y-\omega}+\dfrac{\gamma-\alpha}{\omega-y}+\dfrac{\alpha-\beta}{x-y}=0$ νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι ἐπίσης καὶ $(\beta-\gamma)(y-\omega)^2+(\gamma-\alpha)(\omega-x)^2+(\alpha-\beta)(x-y)^2=0$

402. Ἀπὸ τὰς σχέσεις

$$\frac{\dfrac{\mu}{(\alpha-\beta)^2}+\dfrac{\nu}{(\alpha+\gamma)^2}}{\alpha}=\frac{\dfrac{\nu}{(\beta+\gamma)^2}-\dfrac{\lambda}{(\alpha-\beta)^2}}{\beta}=\frac{\dfrac{\lambda}{(\alpha+\gamma)^2}+\dfrac{\mu}{(\beta+\gamma)^2}}{\gamma} \qquad (1)$$

ὅπου οἱ ἀριθμηταὶ καὶ οἱ παρονομασταὶ εἶναι διάφοροι τοῦ μηδενός, νὰ εὑρεθοῦν αἱ σχέσεις

$$\alpha\lambda+\beta\mu=\gamma\nu \quad (2) \qquad \text{καὶ} \qquad \frac{\alpha}{(\beta+\gamma)^2}=\frac{\beta}{(\alpha+\gamma)^2}+\frac{\gamma}{(\alpha-\beta)^2} \quad (3)$$

403. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ παράστασις

$$\frac{\alpha x^2+\beta y^2+\gamma\omega^2}{\beta\gamma(y-\omega)^2+\gamma\alpha(\omega-x)^2+\alpha\beta(x-y)^2}$$

διατηρεῖ πάντοτε τὴν αὐτὴν τιμήν, δι' ὅλας τὰς τιμὰς τῶν x, y, ω, αἱ ὁποῖαι μηδενίζουν τὴν $\alpha x+\beta y+\gamma\omega$.

404. Ἐὰν ἀληθεύῃ ἡ ἰσότης $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}=\dfrac{1}{\alpha+\beta+\gamma}$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι δύο ἐκ τῶν ἀριθμῶν α, β, γ εἶναι ἀναγκαστικῶς ἀντίθετοι καὶ νὰ ἀποδειχθῇ ἔπειτα, ὅτι:

$$\frac{1}{\alpha^{2\nu+1}}+\frac{1}{\beta^{2\nu+1}}+\frac{1}{\gamma^{2\nu+1}}=\frac{1}{(\alpha+\beta+\gamma)^{2\nu+1}},$$ (ν ἀκέραιος καὶ θετικός).

405. Δίδεται ἡ παράστασις $y=\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$ (1), ὅπου α. β, γ, δ εἶναι δοθέντες ἀριθμοί. Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ y_1, y_2, y_3, y_4 τὰς τιμὰς ποὺ λαμβάνει ἡ (1), ὅταν ἀντικαταστήσωμεν τὸ x μὲ τὰ x_1, x_2, x_3, x_4 νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ ἔχωμεν

$$\frac{y_1-y_3}{y_2-y_3}:\frac{y_1-y_4}{y_2-y_4}=\frac{x_1-x_3}{x_2-x_3}:\frac{x_1-x_4}{x_2-x_4}$$

406. Ἐὰν $\alpha+\beta+\gamma=0$ καὶ ἐὰν θέσωμεν $\Sigma_\nu=\alpha^\nu+\beta^\nu+\gamma^\nu$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ ἔχωμεν:

1. $2\Sigma_4 = \Sigma_2^2$ 2. $\dfrac{\Sigma_3\Sigma_2}{\Sigma_5} = \dfrac{6}{5}$ 3. $\dfrac{\Sigma_5}{\Sigma_4} = \dfrac{5\Sigma_3}{3\Sigma_2}$ 4. $\dfrac{5\Sigma_7}{7\Sigma_5} = \dfrac{\Sigma_4}{\Sigma_2}$

3. Ἀσκήσεις ἐπὶ τῆς ἀλγεβρικῆς διαιρετότητος

407. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ δύο περιττῶν ἀριθμῶν εἶναι διαιρετὸν διὰ 2.

408. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τετράγωνον ἑνὸς περιττοῦ ἀριθμοῦ ἠλαττωμένον κατὰ 1, εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 8.

409. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων δύο διαδοχικῶν ἀριθμῶν δὲν εἶναι ποτὲ διαιρετὴ διὰ 2.

410. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων δύο περιττῶν ἀριθμῶν εἶναι διαιρετὴ διὰ 8.

411. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων δύο ἀριθμῶν, μὴ διαιρετῶν διὰ 3, εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 3.

412. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ διαφορὰ ἑνὸς ἀριθμοῦ ἀπὸ τοῦ κύβου του εἶναι διαιρετὴ διὰ 6.

413. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν κύβων δύο διαδοχικῶν ἀρτίων ἀριθμῶν εἶναι διαιρετὴ διὰ 8.

414. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν κύβων δύο διαδοχικῶν περιττῶν ἀριθμῶν εἶναι διαιρετὴ διὰ 2 καὶ ὄχι διὰ 4.

415. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τοῦ κύβου ἀρτίου ἀριθμοῦ καὶ τοῦ εἰκοσαπλασίου τοῦ ἀριθμοῦ εἶναι διαιρετὸν διὰ 48.

416. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ γινόμενον τῶν τριῶν τελευταίων ἐξ ἑπτὰ διαδοχικῶν ἀριθμῶν, ἐλαττούμενον κατὰ τὸ γινόμενον τῶν τριῶν πρώτων, ἀποτελεῖ ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 12.

417. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν δύναται νὰ τεθῇ πάντοτε ὑπὸ τὴν μορφὴν δύο τετραγώνων.

Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ παραστάσεις :

418.	$1+10^\nu + 100^\nu$	εἶναι	διαιρετὴ	διὰ	3	
419.	$\nu^3-\nu$	»	»	»	24	ἐὰν ν περιττὸς ἀριθ.
420.	$(\alpha^2-1)\,\alpha^2(\alpha^2+1)$	»	»	»	60	
421.	$\nu^5-5\nu^3+4\nu$	»	»	»	120	ἐὰν $\nu>2$ καὶ ἀκέραιος
422.	$2^{4\nu+1}-2^{2\nu}-1$	»	»	»	9	
423.	$3^{4\nu+1}+10.3^{2\nu}-13$	»	»	»	64	
424.	$9^{3\nu}-8^{2\nu}$	»	»	»	665	
425.	$9^{2\nu+1}+8^{\nu+2}$	»	»	»	73	
426.	$2^{7\nu+3}+3^{2\nu+1}.5^{4\nu+1}$	»	»	»	23	
427.	$3.5^{2\nu+1}+2^{3\nu+1}$	»	»	»	17	
428.	$2^{2\nu-1}.3^{\nu+2}+1$	»	»	»	11	
429.	$7^{2\nu+1}-48\nu-7$	»	»	»	288	
430.	$2^{2\nu}+15\nu-1$	»	»	»	9	
431.	$156^\nu-12^\nu-13^\nu+1$	»	»	»	132	
432.	$(\alpha^3-\alpha)(\alpha^2-4)$	»	»	»	120	ἐὰν $\nu>2$

433. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐὰν ν δὲν εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 3, τὸ ἄθροισμα $1+2^\nu+2^{2\nu}$ εἶναι διαιρετὸν διὰ 7.

434. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι οὐδεὶς ἀριθμὸς πρῶτος, ἐκτὸς τοῦ 5, δύναται νὰ ἔχῃ τὴν μορφὴν μ^4+4.

435. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐὰν ἕνα δυώνυμον τοῦ πρώτου βαθμοῦ τῆς μορφῆς $x-\alpha$ διαιρῇ ἀκριβῶς δύο πολυώνυμα $\Phi(x)$ καὶ $\varphi(x)$, θὰ διαιρῇ καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεώς των καὶ ἀντιστρόφως.

436. Ἐὰν $x, y, \alpha, \beta, \gamma$ εἶναι ἀκέραιοι καὶ θετικοὶ ἀριθμοὶ καὶ ἐὰν ὁ ἀριθμὸς $\alpha+10\beta+100\gamma$ εἶναι διαιρετὸς διὰ $x+10y$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι καὶ ὁ ἀριθμὸς $\gamma x^2-\beta xy+\alpha y^2$ εἶναι διαιρετὸς διὰ $x+10y$.

437. Ἐὰν ἡ παράστασις $100\alpha+\beta$ εἶναι διαιρετὴ διὰ $x+10\mu$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι καὶ ἡ παράστασις $\alpha x^2+\beta\mu^2$ εἶναι διαιρετὴ διὰ $x+10\mu$.

438. Ἐὰν $\alpha x+\mu\beta$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $x-\mu$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι καὶ ἡ παράστασις $(\alpha+\beta)(x+\mu)$ εἶναι διαιρετὴ διὰ $x-\mu$.

439. Ἐὰν $x+y+\omega=0$ νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι :

1ον) $x^3+y^3+\omega^3$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $xy\omega$.

2ον) $x^5+y^5+\omega^5$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $xy\omega$.

440. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ παράστασις

$$A=(\alpha y-\beta x)^2+(\beta\omega-\gamma y)^2+(\gamma x-\alpha\omega)^2+(\alpha x+\beta y+\gamma\omega)^2$$

εἶναι διαιρετὴ διὰ $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ καὶ διὰ $x^2+y^2+\omega^2$.

441. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ πολυώνυμον $(x^2-xy+y^2)^3+(x^2+xy+y^2)^3$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $2(x^2+y^2)$ καὶ νὰ ὑπολογισθῇ τὸ πηλίκον.

442. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ παράστασις :

1ον) $(2x+y+1)^2-(x+2y-1)^2$ εἶναι διαιρετὴ διὰ $3(x+y)$

2ον) $(6x^2-7x-3)(x^2-7x+12)$ εἶναι διαιρετὴ διὰ $3x^2-11x-4$

443. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ πολυώνυμον :

1ον) $\varphi(x)=3x^4-12x+9$ περιέχει ὡς παράγοντα τὸν $x-1$

2ον) $\varphi(x)=2x^3-5x+6$ » » » » $x+2$

444. Νὰ προσδιορισθῇ ὁ μ, ἵνα τὸ πολυώνυμον :

1. $x^3+y^3+\omega^3+\mu xy\omega$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $x+y+\omega$
2. $(x+y+\omega)^3+\mu(x^3+y^3+\omega^3)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $x+y$
3. $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4+\mu(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $\alpha+\beta+\gamma$

445. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\varphi(x)=x^\nu-x^{\nu-2}-2x+2$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $(x-1)^2$ καὶ νὰ ὑπολογισθῇ τὸ πηλίκον.

446. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ πολυώνυμον :

$$(x+y+\omega)^{2\nu+1}-x^{2\nu+1}-y^{2\nu+1}-\omega^{2\nu+1}$$

εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ $(x+y+\omega)^3-x^3-y^3-\omega^3$

447. Ἐὰν $A=\pi o\lambda.\delta+\upsilon$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι $A^\mu=\pi o\lambda.\delta+\upsilon^\mu$

ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'.

ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

192. Πρόβλημα. ***Τὸ τριπλάσιον ἑνὸς ἀριθμοῦ εἶναι 12. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμός;***

Εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 4· διότι μόνον τὸ τριπλάσιον τοῦ 4 εἶναι ἴσον μὲ 12.

193. **Ἐξισώσεις.** Εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα ἐζητήσαμεν νὰ εὕρωμεν ἕνα ἀριθμόν, τοῦ ὁποίου τὸ τριπλάσιον νὰ εἶναι ἴσον μὲ 12.

Ἐὰν παραστήσωμεν τὸν ζητούμενον αὐτὸν ἀριθμὸν μὲ x, τὸ τριπλάσιόν του θὰ παρασταθῇ μὲ $x \cdot 3$ ἢ $3x$. Ἐπειδὴ δὲ τὸ $3x$ εἶναι ἴσον μὲ 12 ἔχομεν τὴν ἰσότητα $$3x=12. \quad (1)$$

Ἡ ἰσότης αὐτὴ ἀληθεύει μόνον, ὅταν δώσωμεν εἰς τὸ γράμμα x τὴν τιμὴν $x=4$. Ἐὰν δώσωμεν εἰς τὸ x ἄλλην τιμὴν ἐκτὸς τῆς τιμῆς $x=4$ ἡ ἰσότης (1) δὲν ἀληθεύει.

Πράγματι, διὰ $x=5$, τὸ πρῶτον μέλος τῆς (1) δίδει $3 \cdot 5$ ἢ 15, τὸ ὁποῖον εἶναι διάφορον τοῦ δευτέρου μέλους της 12.

Ἐπίσης ἡ ἰσότης $$5x=10 \quad (2)$$ ἀληθεύει μόνον διὰ $x=2$.

Αἱ ἰσότητες (1) καὶ (2) λέγονται ***ἐξισώσεις***.

Γενικῶς: ***Κάθε ἰσότης, ἡ ὁποία ἀληθεύει μόνον, ὅταν τὸ γράμμα ἢ τὰ γράμματα, ποὺ περιέχει, λάβουν καταλλήλους τιμὰς λέγεται ἐξίσωσις ἢ ἰσότης ὑπὸ ὅρους.***

Τὰ γράμματα, τὰ ὁποῖα περιέχει μία ἐξίσωσις καὶ τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ λάβουν τὰς καταλλήλους τιμὰς διὰ νὰ ἀληθεύῃ αὕτη, λέγονται ***ἄγνωστοι*** τῆς ἐξισώσεως.

Τὸ μέρος μιᾶς ἐξισώσεως, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἀριστερὰ τοῦ = λέγεται ***πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως*** καὶ τὸ μέρος, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται δεξιὰ τοῦ = λέγεται ***δεύτερον μέλος τῆς ἐξισώσεως***.

194. **Ταυτότης.** Εἰς τὴν § 113 εἴδομεν, ὅτι ***ταυτότης*** λέγεται ἡ ἰσότης δύο ἰσοδυνάμων ἀλγεβρικῶν παραστάσεων.

Δηλ. ταυτότης εἶναι μία ἰσότης, ἡ ὁποία ἀληθεύει πάντοτε, οἱανδήποτε τιμὴν καὶ ἂν λάβουν τὰ γράμματα, τὰ ὁποῖα ἔχει.

Π.χ. αἱ ἰσότητες $\alpha(\alpha+\beta)=\alpha^2+\alpha\beta$ καὶ $x^2-9=(x+3)(x-3)$ εἶναι ταυτότητες.

195. **Διάφορα εἴδη ἰσοτήτων**. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι αἱ ἰσότητες διακρίνονται :

1ον. Εἰς ***ἀριθμητικὰς ἰσότητας***, δηλ. εἰς ἰσότητας, αἱ ὁποῖαι περιέχουν μόνον ἀριθμούς.

Π.χ. $12-7=5 \qquad 9-20=-11$

2ον. Εἰς ***ἐγγραμμάτους ἰσότητας***, δηλ. εἰς ἰσότητας, αἱ ὁποῖαι, ἐκτὸς τῶν ἀριθμῶν, περιέχουν καὶ γράμματα. Αἱ ἐγγράμματοι ἰσότητες διακρίνονται εἰς ***ταυτότητας*** καὶ εἰς ***ἐξισώσεις***.

196. **Ταξινόμησις τῶν ἐξισώσεων**. Μία ἐξίσωσις λέγεται ***ἀριθμητικὴ ἐξίσωσις,*** ὅταν δὲν περιέχῃ ἄλλα γράμματα ἐκτὸς τῶν ἀγνώστων.

Μία ἐξίσωσις λέγεται ***ἐγγράμματος,*** ὅταν, ἐκτὸς τῶν ἀγνώστων, περιέχῃ καὶ ἄλλα γράμματα, τὰ ὁποῖα παριστάνουν ποσότητας, αἱ ὁποῖαι θεωροῦνται ὡς γνωσταί.

Π. χ. ἡ $3x+5=x+8$ εἶναι μία *ἀριθμητικὴ* ἐξίσωσις.
ἡ $\alpha x+\beta=\beta x$ » » *ἐγγράμματος* »

Μία ἐξίσωσις εἶναι ***ἀκεραία,*** ὅταν ὁ ἄγνωστός της δὲν εὑρίσκεται εἰς τὸν παρονομαστήν· ἄλλως λέγεται ***κλασματική***.

Π.χ. ἡ ἐξίσωσις $\frac{2x+5}{3}-x=\frac{3x}{5}-7$ εἶναι μία ἀκεραία ἐξίσωσις

» » $\frac{2x+3}{x-2}+3=\frac{6x}{x+1}$ » » κλασματική »

Μία ἐξίσωσις εἶναι ***ῥητή***, ὅταν ὁ ἄγνωστος δὲν εὑρίσκεται ὑπὸ τὸ ῥιζικόν· ἄλλως λέγεται ***ἄρρητος ἐξίσωσις.***

Π. χ. αἱ ἐξισώσεις $3x+5=12$ καὶ $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ εἶναι *ῥηταὶ* ἐξισώσεις.
Ἡ ἐξίσωσις $\sqrt{2x+6}=x-1$ εἶναι *ἄρρητος* ἐξίσωσις.

Μία ἐξίσωσις λέγεται ***ἐξίσωσις*** μὲ ***ἕνα, δύο, τρεῖς ἀγνώστους,*** ὅταν περιέχῃ ἕνα, δύο, τρία γράμματα, ἕκαστον τῶν ὁποίων παριστάνει καὶ ἕνα ἄγνωστον.

Μία ἐξίσωσις μὲ ἕνα ἄγνωστον παρίσταται συμβολικῶς

$$A(x)=B(x).$$

Ὁμοίως ἡ συμβολικὴ παράστασις

$$A(x, y, \omega, \ldots)=B(x, y, \omega, \ldots)$$

παριστάνει μίαν ἐξίσωσιν, ἡ ὁποία ἔχει, ὡς ἀγνώστους, τὰ γράμματα $x, y, \omega, \ldots$.

197 **Ῥίζαι μιᾶς ἐξισώσεως.** Αἱ ἰδιαίτεραι τιμαί, τὰς ὁποίας πρέπει νὰ λάβουν οἱ ἄγνωστοι μιᾶς ἐξισώσεως, διὰ νὰ ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν, λέγονται ***ρίζαι ἢ λύσεις τῆς ἐξισώσεως***.

Π. χ. Ἡ ἐξίσωσις $2x+8=x+13$ ἀληθεύει διὰ $x=5$· ἡ τιμὴ $x=5$ εἶναι *ρίζα* τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς ἢ καὶ *λύσις* αὐτῆς.

198. **Ἰσοδύναμοι ἐξισώσεις.** Δύο ἐξισώσεις εἶναι ***ἰσοδύναμοι***, ὅταν ἔχουν τὰς αὐτὰς λύσεις· δηλ. ὅταν κάθε ρίζα τῆς πρώτης ἐξισώσεως ἐπαληθεύει τὴν δευτέραν καὶ κάθε ρίζα τῆς δευτέρας ἐπαληθεύει τὴν πρώτην.

Π. χ. αἱ ἐξισώσεις $3x+5=26$ καὶ $x+4=2x-3$ εἶναι ἰσοδύναμοι, διότι ἔχουν τὴν αὐτὴν λύσιν $x=7$.

199. **Λύσις μιᾶς ἐξισώσεως.** Ἡ εὕρεσις τῶν ριζῶν ἢ τῶν λύσεων μιᾶς ἐξισώσεως λέγεται ***λύσις τῆς ἐξισώσεως***.

Διὰ νὰ λύσωμεν μίαν ἐξίσωσιν, μετασχηματίζομεν αὐτὴν διαδοχικῶς εἰς ἄλλας ἐξισώσεις ***ἰσοδυνάμους*** μέχρις, ὅτου λάβωμεν μίαν τελικὴν ἐξίσωσιν, τῆς ὁποίας αἱ ζητούμεναι ρίζαι εἶναι προφανεῖς, ὅπως $x=5$, $x=\alpha+\beta$. Ὁ μετασχηματισμὸς μιᾶς ἐξισώσεως εἰς ἄλλην ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν στηρίζεται ἐπὶ τῶν κάτωθι ἰδιοτήτων τῶν ἐξισώσεων.

200. **Ἰδιότης I.** ***Ἐὰν προσθέσωμεν ἢ ἀφαιρέσωμεν καὶ εἰς τὰ δύο μέλη μιᾶς ἐξισώσεως τὴν αὐτὴν ποσότητα, λαμβάνομεν μίαν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν.***

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $2x+5=4x-1$ (1)

Ἐὰν προσθέσωμεν καὶ εἰς τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως (1) τὴν αὐτὴν ποσότητα $3x-2$ λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$(2x+5)+(3x-2)=(4x-1)+(3x-2) \qquad (2)$$

Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2) εἶναι ἰσοδύναμοι.

Πράγματι· ἡ ἐξίσωσις (1) ἀληθεύει διὰ $x=3$. Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν (1) τὸ x μὲ τὴν τιμήν του 3 λαμβάνομεν τὴν ἀριθμητικὴν ἰσότητα $2.3+5=4.3-1$ ἢ $11=11$.

Ἐὰν προσθέσωμεν καὶ εἰς τὰ δύο μέλη τῆς ἀριθμητικῆς αὐτῆς ἰσότητος τὸν ἀριθμὸν $3.3-2=7$ (δηλ. τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν τοῦ $3x-2$ διὰ $x=3$) λαμβάνομεν τὴν ἀριθμητικὴν ἰσότητα

$$(2.3+5)+(3.3-2)=(4.3-1)+(3.3-2) \quad ἢ \quad 11+7=11+7$$

Ἀλλὰ ἡ τελευταία αὐτὴ ἰσότης παριστάνει τὴν ἀριθμητικὴν τιμήν, τὴν ὁποίαν λαμβάνουν τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως (2), ὅταν ἀντικαταστήσωμεν εἰς αὐτὴν τὸ x διὰ τοῦ 3.

Ὥστε ἡ λύσις $x=3$ τῆς ἐξισώσεως (1) εἶναι καὶ λύσις τῆς ἐξισώσεως (2)

Ἀντιστρόφως. Θὰ δείξωμεν τώρα, ὅτι λύσις τῆς ἐξισώσεως (2 εἶναι καὶ λύσις τῆς ἐξισώσεως (1).

Ἡ ἐξίσωσις (2) ἀληθεύει διὰ x=3. Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν (2) τὸ x μὲ τὴν τιμήν του 3 λαμβάνομεν τὴν ἀριθμητικὴν ἰσότητα

$$(2\cdot 3+5)+(3\cdot 3-2)=(4\cdot 3-1)+(3\cdot 3-2) \quad \text{ἢ} \quad 11+7=11+7.$$

Ἐὰν ἀφαιρέσωμεν καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέλη τῆς ἀριθμητικῆς αὐτῆς ἰσότητος τὸν ἀριθμὸν $3\cdot 3-2$ λαμβάνομεν τὴν ἀριθμητικὴν ἰσότητα

$$2\cdot 3+5=4\cdot 3-1 \quad \text{ἢ} \quad 11=11.$$

Ἀλλὰ ἡ τελευταία αὐτὴ ἀριθμητικὴ ἰσότης παριστάνει τὴν ἀριθμητικὴν τιμήν, τὴν ὁποίαν λαμβάνουν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως (1), ὅταν ἀντικαταστήσωμεν εἰς αὐτὴν τὸ x διὰ τοῦ 3.

Ὥστε ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως (2) εἶναι καὶ λύσις καὶ τῆς ἐξισώσεως (1). Ἑπομένως κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν ἰσοδυνάμων ἐξισώσεων, αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2) εἶναι ἰσοδύναμοι.

Γενικῶς. Ἔστω μία ἐξίσωσις

$$A(x,y,\omega,...)=B(x,y,\omega,...) \qquad (1)$$

ἡ ὁποία περιέχει τοὺς ἀγνώστους x,y,ω,...

Ἐὰν προσθέσωμεν καὶ εἰς τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως (1) τὴν αὐτὴν ἀλγεβρικὴν παράστασιν φ(x,y,ω,..) θὰ προκύψῃ ἡ ἐξίσωσις

$$A(x,y,\omega,...)+\varphi(x,y,\omega,...)=B(x,y,\omega,...)+\varphi(x,y,\omega....) \qquad (2)$$

Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2) εἶναι ἰσοδύναμοι.

Πράγματι· ἔστω x=α, y=β, ω=γ,... μία λύσις τῆς ἐξισώσεως (1).

Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν (1) τοὺς ἀγνώστους x,y,ω,.. μὲ τὰς τιμάς των α,β,γ,... θὰ λάβωμεν μίαν ἀριθμητικὴν ἰσότητα

$$A(\alpha,\beta,\gamma,...)=B(\alpha,\beta,\gamma,...).$$

Ἐὰν προσθέσωμεν καὶ εἰς τὰ δύο μέλη τῆς ἀριθμητικῆς αὐτῆς ἰσότητος τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν φ(α,β,γ,...), θὰ λάβωμεν τὴν ἀριθμητικὴν ἰσότητα $A(\alpha,\beta,\gamma,...)+\varphi(\alpha,\beta,\gamma,...)=B(\alpha,\beta,\gamma,...)+\varphi(\alpha,\beta,\gamma,...)$

Ἀλλὰ ἡ τελευταία αὐτὴ ἀριθμητικὴ ἰσότης παριστάνει τὴν ἀριθμητικὴν τιμήν, τὴν ὁποίαν, λαμβάνουν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως (2), ὅταν ἀντικαταστήσωμεν εἰς αὐτὴν τοὺς ἀγνώστους x,y,ω,... μὲ τὰς τιμάς των α,β,γ,... ἀντιστοίχως.

Ὥστε ἡ λύσις **x=α, y=β, ω=γ,...** *τῆς ἐξισώσεως (1) εἶναι καὶ λύσις τῆς ἐξισώσεως (2).*

Ἀντιστρόφως. Θὰ δείξωμεν τώρα, ὅτι κάθε λύσις τῆς ἐξισώσεως (2) εἶναι καὶ λύσις τῆς ἐξισώσεως (1).

Ἔστω x=α, y=β, ω=γ,... μία λύσις τῆς ἐξισώσεως (2).

Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) τοὺς ἀγνώστους x,y,ω.... μὲ τὰς τιμάς των α,β,γ,... θὰ λάβωμεν τὴν ἀριθμητικὴν ἰσότητα

$$A(\alpha,\beta,\gamma,...)+\varphi(\alpha,\beta,\gamma,...)=B(\alpha,\beta,\gamma,...)+\varphi(\alpha,\beta,\gamma,...)$$

Ἐὰν ἀφαιρέσωμεν καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέλη τῆς ἀριθμητικῆς αὐτῆς ἰσότητος τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν φ(α,β,γ,...) θὰ προκύψῃ ἡ ἀριθμητικὴ ἰσότης

$$A(\alpha,\beta,\gamma,...)=B(\alpha,\beta,\gamma,...)$$

Ἀλλὰ ἡ τελευταία αὐτὴ ἀριθμητικὴ ἰσότης παριστάνει τὴν ἀριθμητικὴν τιμήν, τὴν ὁποίαν λαμβάνουν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως (1) διὰ $x=\alpha$, $y=\beta$, $\omega=\gamma,\ldots$

Ὥστε *ἡ λύσις* $x=\alpha$, $y=\beta$, $\omega=\gamma,\ldots$ *τῆς ἐξισώσεως (2) εἶναι καὶ λύσις τῆς ἐξισώσεως (1).*

Ἑπομένως αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2) εἶναι ἰσοδύναμοι.

Ἡ ἰδιότης αὐτὴ ἰσχύει καὶ ὅταν ἀφαιρέσωμεν καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως (1) τὴν αὐτὴν ἀλγεβρικὴν παράστασιν $\varphi(\alpha,\beta,\gamma,\ldots)$, διότι ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν καὶ εἰς τὰ δύο μέλη της τὴν παράστασιν $-\varphi(\alpha,\beta,\gamma,\ldots)$.

Παρατήρησις. Ἡ προηγουμένη ἀπόδειξις προϋποθέτει, ὅτι ἡ παράστασις $\varphi(\alpha,\beta,\gamma,\ldots)$ ἔχει μίαν ἀριθμητικὴν τιμὴν διὰ $x=\alpha$, $y=\beta$, $\omega=\gamma,\ldots$ ἄλλως αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2) δὲν εἶναι ἰσοδύναμοι.

Π.χ. αἱ ἐξισώσεις $x=5$ καὶ $x+\sqrt{4-x}=5+\sqrt{4-x}$ δὲν εἶναι ἰσοδύναμοι, διότι διὰ $x=5$ ἡ παράστασις $\sqrt{4-x}$ γίνεται $\sqrt{-1}$, ἡ ὁποία δὲν ἔχει ἀριθμητικὴν τιμήν.

***201.* Πόρισμα Ι.** Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $3x-5=2x+10$. Ἐὰν προσθέσωμεν καὶ εἰς τὰ δύο μέλη της τὸν ἀριθμὸν 5 λαμβάνομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν

$$3x-5+5=2x+10+5 \quad \text{ἢ} \quad 3x=2x+10+5$$

Παρτηροῦμεν, ὅτι ὁ ὅρος -5 μετεφέρθη ἀπὸ τὸ πρῶτον μέλος τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἰς τὸ δεύτερον μέλος της μὲ ἀλλαγμένον τὸ σημεῖον της. Ὥστε :

Δυνάμεθα νὰ μεταφέρωμεν ἕνα ὅρον ἐκ τοῦ ἑνὸς μέλους μιᾶς ἐξισώσεως εἰς τὸ ἄλλο μέλος της, ἀρκεῖ νὰ ἀλλάξωμεν τὸ σημεῖον του.

202.* Πόρισμα ΙΙ.** ***Κάθε ἐξίσωσις δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν $A(x,y,\omega,\ldots)=0$

Διότι ἀρκεῖ νὰ μεταφέρωμεν ὅλους τοὺς ὅρους τοῦ δευτέρου μέλους της εἰς τὸ πρῶτον, ὁπότε τὸ δεύτερον μέλος γίνεται μηδέν.

Π. χ. ἡ ἐξίσωσις $5x-6=2x+10$ δύναται νὰ γραφῇ

$$5x-6-2x-10=0 \quad \text{ἢ} \quad 3x-16=0$$

203.* Ἰδιότης ΙΙ.** ***Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν (ἢ ἐὰν διαιρέσωμεν) καὶ τὰ δύο μέλη μιᾶς ἐξισώσεως, ἐπὶ τὴν αὐτὴν ἀλγεβρικὴν παράστασιν (ἡ ὁποία εἶναι πάντοτε ὡρισμένη καὶ διάφορος τοῦ μηδενὸς) λαμβάνομεν μίαν ἐξίσωσιν ἰσοδύναμον μὲ τὴν δοθεῖσαν.

Π. χ. αἱ ἐξισώσεις $3x+4=2x+6$ καὶ $(3x+4)\cdot 10=(2x+6)\cdot 10$ εἶναι ἰσοδύναμοι. Ἡ ἀπόδειξις γίνεται ὅπως εἰς τὴν § 200.

Γενικῶς : Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $A(x)=B(x)$* (1)

---

* Ὑποθέτομεν, ὅτι ἡ ἐξίσωσις ἔχει ἕνα ἄγνωστον· ἡ ἀπόδειξις ὅμως ἰσχύει καὶ δι' ἐξισώσεις μὲ περισσοτέρους ἀγνώστους.

'Εὰν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως (1) ἐπὶ τὴν ἀλγεβρικὴν παράστασιν μ, ἡ ὁποία ἔχει μίαν ἀριθμητικὴν τιμὴν διάφορον τοῦ μηδενὸς καὶ ἡ ὁποία δὲν περιέχει ἀγνώστους, θὰ προκύψῃ ἡ ἐξίσωσις $$\mu \cdot A(x) = \mu \cdot B(x) \qquad (2)$$

Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2) εἶναι ἰσοδύναμοι.

Πράγματι· ἔστω $x=\alpha$ μία λύσις τῆς ἐξισώσεως (1). 'Εὰν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν (1) τὸ x διὰ τοῦ α, θὰ λάβωμεν τὴν ἀριθμητικὴν ἰσότητα $$A(\alpha) = B(\alpha).$$

'Εὰν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἀριθμητικῆς αὐτῆς ἰσότητος ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν μ, θὰ προκύψῃ ἡ ἰσότης
$$\mu \cdot A(\alpha) = \mu \cdot B(\alpha)$$

Ἡ τελευταία αὐτὴ ἰσότης παριστάνει τὴν ἀριθμητικὴν τιμήν, τὴν ὁποίαν λαμβάνουν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως (2), ὅταν ἀντικαταστήσωμεν εἰς αὐτὴν τὸν ἄγνωστον x μὲ τὴν τιμήν του α.

Ὥστε ἡ λύσις $x=\alpha$ τῆς ἐξισώσεως (1) εἶναι καὶ λύσις τῆς ἐξισώσεως (2).

'Αντιστρόφως. Θὰ δείξωμεν τώρα, ὅτι κάθε λύσις τῆς ἐξισώσεως (2) εἶναι καὶ λύσις τῆς ἐξισώσεως (1).

Ἔστω $x=\alpha$ μία λύσις τῆς ἐξισώσεως (2).

'Εὰν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) τὸ x μὲ τὴν τιμήν του α λαμβάνομεν τὴν ἀριθμητικὴν ἰσότητα
$$\mu \cdot A(\alpha) = \mu \cdot B(\alpha)$$

'Εὰν διαιρέσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἀριθμητικῆς αὐτῆς ἰσότητος διὰ τοῦ ἀριθμοῦ μ, λαμβάνομεν τὴν ἀριθμητικὴν ἰσότητα
$$A(\alpha) = B(\alpha)$$

'Αλλὰ ἡ τελευταία αὐτὴ ἰσότης παριστάνει τὴν ἀριθμητικὴν τιμήν, τὴν ὁποίαν λαμβάνουν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως (1), ὅταν ἀντικαταστήσωμεν τὸν ἄγνωστον x μὲ τὴν τιμήν του α.

Ὥστε ἡ λύσις $x=\alpha$ τῆς ἐξισώσεως (2) εἶναι καὶ λύσις τῆς ἐξισώσεως (1).

Ἑπομένως αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2) εἶναι ἰσοδύναμοι.

Μὲ τοὺς αὐτοὺς συλλογισμοὺς ἀποδεικνύομεν, ὅτι ἡ ἰδιότης αὐτὴ ἰσχύει καὶ ὅταν διαιρέσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως διὰ τοῦ ἀριθμοῦ μ, διότι ἡ διαίρεσις διὰ μ, ἀνάγεται εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν ἐπὶ $\frac{1}{\mu}$.

204. Πόρισμα I. ***Δυνάμεθα νὰ ἀλλάξωμεν τὰ σημεῖα ὅλων τῶν ὅρων μιᾶς ἐξισώσεως.***

Διότι ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὰ δύο μέλης της ἐπὶ —1.

Π.χ. αἱ ἐξισώσεις $2x-8=x+5$ καὶ $-2x+8=-x-5$ εἶναι ἰσοδύναμοι.

246. Πόρισμα II. ***Δυνάμεθα νὰ ἀπαλείψωμεν ὅλους τοὺς ἀριθμητικοὺς παρονομαστὰς τῶν ὅρων μιᾶς ἐξισώσεως.***

Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ τρέψωμεν τοὺς ὅρους τῆς ἐξισώσεως εἰς ὁμώνυμα κλάσματα καὶ ἔπειτα νὰ πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη της ἐπὶ τὸν κοινὸν παρονομαστήν.

Π.χ. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $$\frac{3x}{2}+5=\frac{4x}{5}-\frac{7}{3}$$

Τρέπομεν ὅλους τοὺς ὅρους τῆς ἐξισώσεως εἰς ὁμώνυμα κλάσματα μὲ κοινὸν παρονομαστὴν τὸ ἐ.κ.π. 30 τῶν παρονομαστῶν των καὶ ἔχομεν :
$$\frac{45x}{30}+\frac{150}{30}=\frac{24x}{30}-\frac{70}{30}$$
Πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς τελευταίας ἐξισώσεως ἐπὶ 30 καὶ λαμβάνομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν $45x+150=24x-70$, ἡ ὁποία δὲν ἔχει παρονομαστάς.

Εἰς τὴν πρᾶξιν, πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως ἐπὶ τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν, χωρὶς προηγουμένως νὰ τρέψωμεν ὅλους τοὺς ὅρους της εἰς ὁμώνυμα κλάσματα.

Π.χ. εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς δοθείσης ἐξισώσεως ἐπὶ τὸ ἐ.κ.π. 30 τῶν παρονομαστῶν τῶν ὅρων της καὶ ἔχομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν
$$\frac{3x}{2}\cdot 30+5\cdot 30=\frac{4x}{5}\cdot 30-\frac{7}{3}\cdot 30$$
ἢ μετὰ τὴν ἁπλοποίησιν
$$3x\cdot 15+5\cdot 30=4x\cdot 6-7\cdot 10 \quad ἢ \quad 45x+150=24x-70$$
Διὰ νὰ ἐξαλείψωμεν τοὺς παρονομαστὰς μιᾶς ἀκεραίας ἐγγραμμάτου ἐξισώσεως, πρέπει νὰ θεωροῦμεν τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν της ***διάφορον τοῦ μηδενὸς*** καὶ ἔπειτα νὰ πολλαπλασιάζωμεν καὶ τὰ δύο μέλη της ἐπὶ αὐτό.

Π. χ. ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\frac{x+\alpha}{\alpha}-\frac{x+\beta}{\beta}=1.$

Τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν της εἶναι $\alpha\beta$. Ἐὰν $\alpha\beta\neq 0$, πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς ἐπὶ $\alpha\beta$ καὶ λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν
$$\frac{x+\alpha}{\alpha}\cdot\alpha\beta-\frac{x+\beta}{\beta}\,\alpha\beta=1\cdot\alpha\beta \quad ἢ \quad (x+\alpha)\beta-(x+\beta)\alpha=\alpha\beta,$$
ἡ ὁποία εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν δοθεῖσαν καὶ δὲν ἔχει παρονομαστάς.

206. Ἰδιότης ΙΙΙ. ***1ον. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη μιᾶς ἐξισώσεως ἐπὶ μίαν ἀλγεβρικὴν παράστασιν, ἡ ὁποία περιέχει ἀγνώστους, εἰσάγομεν γενικῶς ξένας λύσεις.***

2ον. Ἐὰν διαιρέσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη μιᾶς ἐξισώσεως διὰ τῆς αὐτῆς ποσότητος, ἡ ὁποία περιέχει ἀγνώστους, παραλείπομεν, γενικῶς, λύσεις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

1ον. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $5x=20$ (1), ἡ ὁποία ἔχει τὴν λύσιν $x=4$.

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὰ τὰ δύο μέλη της ἐπὶ $x+3$ λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν $5x(x+3)=20(x+3)$ (2)

Ἡ ἐξίσωσις (2) δύναται νὰ γραφῇ
$$5x(x+3)-20(x+3)=0 \quad ἢ \quad (x+3)(5x-20)=0$$

Διὰ νὰ εἶναι τὸ γινόμενον τῶν δύο παραγόντων $(x+3)$ καὶ $(5x-20)$ ἴσον μὲ μηδὲν πρέπει νὰ εἶναι

εἴτε $x+3=0$ (3) εἴτε $5x-20=0$ (4)

Ἀπὸ τὴν (3) εὑρίσκομεν $x=-3$ καὶ ἀπὸ τὴν (4) $x=4$.

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ ἐξίσωσις (2) ἔχει τὰς λύσεις $x=4$ καὶ $x=-3$, δηλ. ἔχει, ἐκτὸς τῆς λύσεως $x=4$, τὴν ὁποίαν ἔχει καὶ ἡ ἐξίσωσις (1), καὶ τὴν λύσιν $x=-3$, ἡ ὁποία εἶναι ξένη πρὸς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν (1).

2ον. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $5x(x+3)=20(x+3)$, ἡ ὁποία ἔχει τὰς λύσεις $x=4$ καὶ $x=-3$.

Ἐὰν διαιρέσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς διὰ τοῦ κοινοῦ παράγοντος $x+3$ λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν $5x=20$, ἡ ὁποία ἔχει μόνον τὴν λύσιν $x=4$.

Γενικῶς. 1ον. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $A=B$ (1)

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη της ἐπὶ τὴν ποσότητα Μ, ἡ ὁποία περιέχει ἕνα ἢ περισσοτέρους ἀγνώστους λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν $A.M=B.M$ (2)

Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2) δὲν εἶναι γενικῶς ἰσοδύναμοι. Ἡ ἐξίσωσις (2) δύναται νὰ γραφῇ

$A.M-B.M=0$ ἢ $M(A-B)=0$

Διὰ νὰ εἶναι τὸ γινόμενον τῶν δύο παραγόντων Μ καὶ $A-B$ ἴσον μὲ μηδὲν πρέπει ὁ ἕνας, τουλάχιστον, ἀπὸ τοὺς παράγοντάς του νὰ εἶναι ἴσος μὲ μηδέν, δηλ. πρέπει νὰ εἶναι

εἴτε $M=0$ εἴτε $A-B=0$

Αἱ λύσεις τῆς ἐξισώσεως $A-B=0$ ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν (1)· ἀλλὰ αἱ λύσεις τῆς ἐξισώσεως $M=0$ δύναται νὰ μὴ ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν (1) καὶ ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις (2) περιέχει ξένας ρίζας.

Αἱ ἐξισώσεις λοιπὸν (1) καὶ (2) δὲν εἶναι γενικῶς ἰσοδύναμοι.

2ον. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $A.M=B.M$ (3)

Ἐὰν διαιρέσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως (3) διὰ τοῦ κοινοῦ παράγοντος Μ, ὁ ὁποῖος περιέχει ἀγνώστους, λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν $A=B$ (4)

Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ ἐξισώσεις (3) καὶ (4) δὲν εἶναι, γενικῶς, ἰσοδύναμοι. Ἡ ἐξίσωσις (3) γράφεται

$A.M-B.M=0$ ἢ $M(A-B)=0$

καὶ ἑπομένως ἔχει τὰς λύσεις τῶν ἐξισώσεων

$M=0$ καὶ $A-B=0$

ἐνῶ ἡ ἐξίσωσις (4) ἔχει μόνον τὰς λύσεις, τὰς ὁποίας ἔχει ἡ ἐξίσωσις

$A-B=0$

Παρατηροῦμεν, ὅτι, ἐὰν διαιρέσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως (3) διὰ Μ, παραλείπομεν τὰς λύσεις τῆς ἐξισώσεως $M=0$.

207. Σπουδαία παρατήρησις. Ὅταν καὶ τὰ δύο μέλη μιᾶς ἐξισώσεως **ἔχουν ἕνα κοινὸν παράγοντα, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀγνώστους,**

δὲν πρέπει ποτὲ νὰ ἁπλοποιοῦμεν τὴν ἐξίσωσιν, διαιροῦντες καὶ τὰ δύο μέλη της διὰ τοῦ κοινοῦ παράγοντος, διότι παραλείπομεν λύσεις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως· ἀλλὰ πρέπει νὰ μεταφέρωμεν ὅλους τοὺς ὅρους τῆς ἐξισώσεως εἰς τὸ πρῶτον μέλος καὶ νὰ θέτωμεν τὸν κοινὸν αὐτὸν παράγοντα ἐκτὸς παρενθέσεως. Ἐξισώνομεν ἔπειτα κάθε παράγοντα μὲ τὸ μηδὲν καὶ εὑρίσκομεν τὰς λύσεις τῶν ἐξισώσεων, ποὺ θὰ προκύψουν, αἱ ὁποῖαι εἶναι καὶ λύσεις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

Π.χ. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $(x+6)(x-4)=3x(x-4)$
Παρατηροῦμεν, ὅτι καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς ἔχουν τὸν κοινὸν παράγοντα $(x-4)$. Μεταφέρομεν τὸ $3x(x-4)$ εἰς τὸ πρῶτον μέλος καὶ ἔχομεν διαδοχικῶς

$$(x+6)(x-4)-3x(x-4)=0 \quad ἢ \quad (x-4)[(x+6)-3x]=0 \quad ἢ \quad (x-4)(6-2x)=0$$

Διὰ νὰ εἶναι τὸ γινόμενον τῶν παραγόντων $(x-4)$ καὶ $(6-2x)$ ἴσον μὲ μηδέν, πρέπει νὰ εἶναι εἴτε $x-4=0$, εἴτε $6-2x=0$

Αἱ λύσεις τῶν ἐξισώσεων αὐτῶν εἶναι $x=4$ καὶ $x=3$, αἱ ὁποῖαι εἶναι καὶ λύσεις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

Ἐὰν εἴχομεν διαιρέσει καὶ τὰ δύο μέλη τῆς δοθείσης ἐξισώσεως διὰ $(x-4)$ θὰ ἐξηφανίζαμεν τὴν λύσιν $x=4$.

Ἐπίσης ὅταν πολλαπλασιάζωμεν καὶ τὰ δύο μέλη μιᾶς ἐξισώσεως ἐπὶ μίαν παράστασιν, ἡ ὁποία περιέχει ἀγνώστους, πρέπει ὄχι μόνον νὰ ἀποκλείωμεν τὰς ξένας λύσεις, ἀλλὰ καὶ ἐκείνας, αἱ ὁποῖαι δίδουν ὡς λύσεις ***τὸ ἄπειρον***.

208. Βαθμὸς μιᾶς ἐξισώσεως. Διὰ νὰ ὁρίσωμεν τὸν βαθμὸν μιᾶς ἀκεραίας καὶ ρητῆς ἐξισώσεως, μεταφέρομεν ὅλους τοὺς ὅρους της εἰς τὸ πρῶτον μέλος, κάμνομεν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων, καὶ δίδομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν τὴν μορφὴν $A=0$, ὅπου A εἶναι ἕνα πολυώνυμον ἀκέραιον, ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους τῆς ἐξισώσεως.

Ὁ βαθμὸς τοῦ πολυωνύμου A εἶναι ἐπίσης καὶ βαθμὸς τῆς ἐξισώσεως.

Π.χ. ἡ ἐξίσωσις $5x-35=0$ εἶναι τοῦ ***πρώτου βαθμοῦ***
ἡ ἐξίσωσις $2x^2-5x-10=0$ εἶναι τοῦ ***δευτέρου βαθμοῦ***
ἡ ἐξίσωσις $4x^2y^2-3xy+1=0$ εἶναι τοῦ ***τετάρτου βαθμοῦ*** ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους x καὶ y.

ΛΥΣΙΣ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΕΝΑ ΑΓΝΩΣΤΟΝ

209. Λύσις μιᾶς ἐξισώσεως τοῦ πρώτου βαθμοῦ. Στηριζόμενοι εἰς τὰς προηγουμένας ἰδιότητας τῶν ἐξισώσεων, δυνάμεθα νὰ λύσωμεν μίαν ἐξίσωσιν τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον.

Παράδειγμα. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $4+\frac{2x-5}{3}=\frac{x+11}{9}$

Ἐξαλείφομεν τοὺς παρονομαστάς· πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς δοθείσης ἐξισώσεως ἐπὶ τὸ ἑ.κ.π. 9 τῶν παρονομαστῶν της καὶ λαμβάνομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν

$$4\cdot 9+3(2x-5)=x+11.$$

Ἐκτελοῦμεν πράξεις καὶ ἔχομεν $36+6x-15=x+11.$

Μεταφέρομεν τοὺς γνωστοὺς ὅρους 36 καὶ -15 εἰς τὸ δεύτερον μέλος μὲ ἀλλαγμένα τὰ σημεῖα των καὶ τὸν ἄγνωστον ὅρον x εἰς τὸ πρῶτον μέλος μὲ ἀλλαγμένον τὸ σημεῖον του καὶ λαμβάνομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν $6x-x=-36+15+11.$

Κάμνομεν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων καὶ ἔχομεν $5x=-10.$

Διαιροῦμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς τελευταίας ἐξισώσεως διὰ τοῦ συντελεστοῦ 5 τοῦ ἀγνώστου καὶ λαμβάνομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν

$$x=-\frac{10}{5}=-2.$$

Ἡ τιμὴ $x=-2$ εἶναι ρίζα, δηλ. λύσις, τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

Ἐπαλήθευσις. Ἐξετάζομεν τώρα, ἐὰν ἡ εὑρεθεῖσα τιμὴ $x=-2$ εἶναι λύσις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

Πρὸς τοῦτο ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ***δοθεῖσαν ἐξίσωσιν*** τὸν ἄγνωστον x μὲ τὴν εὑρεθεῖσαν τιμήν του· ἂν τὸ ἐξαγόμενον τῆς ἀντικαταστάσεως αὐτῆς δώσῃ καὶ εἰς τὰ δύο μέλη τῆς δοθείσης ἐξισώσεως τὴν αὐτὴν ἀριθμητικὴν τιμήν, τότε ἡ ἐξεταζομένη αὐτὴ τιμὴ τοῦ x εἶναι ρίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως· ἄλλως κάποιο σφάλμα ἔγινε κατὰ τὴν πορείαν τῶν πράξεων καὶ εἶναι ἀνάγκη νὰ ἐπαναλάβωμεν μετὰ προσοχῆς καὶ ***ἐξ ἀρχῆς*** τὴν πορείαν τῶν πράξεων.

Εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν διὰ $x=-2$ ἔχομεν:

$$1\text{ον μέλος}=4+\frac{2\cdot(-2)-5}{3}=4+\frac{-9}{3}=4-3=1$$

$$2\text{ον μέλος}=\frac{-2+11}{9}=\frac{9}{9}=1.$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι διὰ $x=-2$ καὶ τὰ δύο μέλη τῆς δοθείσης ἐξισώσεως ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν 1· ἄρα ἡ εὑρεθεῖσα τιμὴ $x=-2$ εἶναι λύσις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν κάτωθι κανόνα:

210. **Κανών.** Διὰ νὰ λύσωμεν μίαν ἐξίσωσιν τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον ἀκολουθοῦμεν τὴν κάτωθι πορείαν:

1ον. Ἐξαλείφομεν τοὺς παρονομαστάς, ἐὰν ὑπάρχουν τοιοῦτοι.

2ον. Ἐκτελοῦμεν τὰς πράξεις, ἐὰν σημειοῦνται τοιαῦται.

3ον. Χωρίζομεν τοὺς γνωστοὺς ὅρους ἀπὸ τοὺς ἀγνώστους ὅρους, μεταφέροντες τοὺς ἀγνώστους ὅρους εἰς τὸ πρῶτον μέλος καὶ τοὺς γνωστοὺς ὅρους εἰς τὸ δεύτερον μέλος ἢ καὶ τἀνάπαλιν.

4ον. Κάμνομεν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων.

5ον. Διαιροῦμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ ἀγνώστου, (ἐὰν οὗτος εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός).

211. Ἐφαρμογὴ τοῦ κανόνος.

Παράδειγμα 1ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $5(x-2)-2(3-x)=3x-4$.

Ἐκτελοῦμεν πράξεις καὶ ἔχομεν $5x-10-6+2x=3x-4$.

Χωρίζομεν τοὺς ἀγνώστους ὅρους ἀπὸ τοὺς γνωστοὺς καὶ ἔχομεν

$$5x+2x-3x=10+6-4.$$

Κάμνομεν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων καὶ ἔχομεν $4x=12$.

Διαιροῦμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς διὰ 4 καὶ ἔχομεν

$$x=\frac{12}{4}=3.$$

Ὥστε ἡ ρίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι $x=3$.

Ἐπαλήθευσις. Διὰ $x=3$ ἔχομεν:

1ον μέλος$=5(3-2)-2(3-3)=5\cdot1-2\cdot0=5$

2ον μέλος$=3\cdot3-4=9-4=5$.

Παράδειγμα 2ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\frac{5x-2}{3}-\frac{x-8}{4}=\frac{x+14}{2}-2$.

Ἐξαλείφομεν παρονομαστάς· πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως ἐπὶ τὸ ἐ.κ.π. 12 τῶν παρονομαστῶν της καὶ λαμβάνομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν

$$4(5x-2)-3(x-8)=6(x+14)-2\cdot12$$

Ἐκτελοῦμεν πράξεις καὶ ἔχομεν $20x-8-3x+24=6x+84-24$

Χωρίζομεν τοὺς ἀγνώστους ὅρους ἀπὸ τοὺς γνωστοὺς καὶ ἔχομεν

$$20x-3x-6x=8-24+84-24$$

Κάμνομεν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων καὶ ἔχομεν $11x=44$.

Διαιροῦμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς τελευταίας ἐξισώσεως διὰ 11 καὶ ἔχομεν $$x=\frac{44}{11}=4.$$

Ὥστε ἡ ρίζα τῆς ἐξισώσεως εἶναι $x=4$.

Ἐπαλήθευσις. Διὰ $x=4$ ἔχομεν

$$1\text{ον μέλος}=\frac{5\cdot4-2}{3}-\frac{4-8}{4}=\frac{18}{3}-\frac{-4}{4}=6+1=7$$

$$2\text{ον μέλος}=\frac{4+14}{2}-2=\frac{18}{2}-2=9-2=7.$$

Ἀσκήσεις. Α΄ Ὁμάς. 448. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

1. $3x-6=x+14$
2. $5x-12=2x+6$
3. $4x+7=3x-8$
4. $3x+21+5x-60=45+10x-12$
5. $7y-9-2y+10=8y-9-4y$
6. $16\omega-4\omega-60=4\omega+12\omega-80$

449. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

1. $6x=9(3x-1)-5$
2. $3(x-2)+2(3-x)=7x-3$
3. $2x-(x+9)=3(x-2)+8$
4. $2(3+2x)-3=15x$
5. $x-2(x-3)=3x+10$
6. $5(1+4x)=7+12x$
7. $2(x-3)-3(x+1)=10-2(x+10)$
8. $2(3x-1)-3x-5(8-3x)+24=0$
9. $5(x-3)+10(2-5x)+10x=-(15+10x)$
10. $9(8-\omega)-10(9-\omega)-4(\omega-1)=1-8\omega$.

Β' Ὁμάς. **450.** Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

1. $\frac{7x+4}{5}-x=\frac{3x-5}{2}$

2. $\frac{2x-5}{3}-\frac{5x-3}{4}+\frac{8}{3}=0$

3. $\frac{3x-4}{7}+\frac{5x+3}{3}=43-5x$

4. $\frac{5y-3}{2}-\frac{3y}{4}=y-5$

5. $\frac{5x-7}{2}-\frac{2x+7}{3}=3x-14.$

6. $\frac{x-3}{8}+\frac{x+9}{12}=\frac{2x+7}{20}+3$

7. $\frac{x+4}{3}-\frac{x-4}{5}=2+\frac{3x-1}{15}$

8. $\frac{x-1}{7}+\frac{23-x}{5}=7-\frac{4+x}{4}$

9. $\frac{1}{6}(8-x)+x-1\frac{2}{3}=\frac{1}{2}(x+6)-\frac{x}{3}$

10. $2x-\frac{1}{2}(19-2x)=\frac{1}{2}(2x-11)$

Γ' Ὁμάς. **451.** Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

1. $\frac{2(3x-5)}{5}-\frac{5(5x+10)}{12}=\frac{7(3x+2)}{4}-71$

2. $\frac{3(x-4)}{4}-\frac{2(x+5)}{3}-\frac{3x-5}{2}=2-\frac{5(x+1)}{6}-x$

3. $\frac{2x+1}{4}+\frac{6x+1}{5}-\frac{2(4x+3)}{3}+\frac{4(6-x)}{6}=0$

4. $\frac{7(x-3)}{4}-\frac{3(2-x)}{5}-\frac{5(x-1)}{6}=x-2$

Δ' Ὁμάς. **452.** Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

1. $2x-\left(\frac{15x}{9}-5\right)=\frac{x-6}{3}+7$

2. $\frac{9x+7}{2}-\left(x-\frac{x-2}{7}\right)=36$

3. $12-\left(\frac{3x+1}{4}+\frac{2x+1}{3}\right)=10-\left(\frac{5x-1}{4}-\frac{x+5}{6}\right)$

4. $\frac{x-1}{4}-\frac{1}{5}\left(\frac{x+1}{8}-\frac{30-2x}{4}\right)=-\left(\frac{1}{4}-\frac{x+1}{2}\right)$

5. $\frac{x-1}{4}-\frac{1}{8}\left(\frac{x-5}{4}-\frac{14-2x}{5}\right)=\frac{x-9}{2}-\frac{7}{8}$

6. $\frac{1}{9}\left[3x-6-5\left(\frac{7x}{2}-5\right)\right]+13(x-5)+\frac{1}{4}=0$

7. $\frac{1}{2}\left[8-\frac{x}{3}-2\left(\frac{x}{2}+5\right)\right]-\left[6-\frac{3x}{2}+3(x-5)\right]+5=0$

212. Ἐξισώσεις ἀδύνατοι καὶ ἐξισώσεις ἀόριστοι. Δύναται νὰ συμβῇ ὥστε μία ἐξίσωσις νὰ μὴν ἔχῃ καμμίαν λύσιν ***(ἀδύνατος ἐξίσωσις)*** ἢ νὰ ἔχῃ ἀπειρίαν λύσεων ***(ἀόριστος ἐξίσωσις)***.

Παράδειγμα. 1ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\frac{x-4}{2}=\frac{7x}{2}-3x-5$

Ἐφαρμόζοντες τὸν κανόνα τῆς § 210 ἔχομεν κατὰ σειρὰν

$$x-4=7x-6x-10 \quad \text{ἢ} \quad x-7x+6x=4-10 \quad \text{ἢ} \quad 0\cdot x=-6$$

Ἐπειδὴ τὸ γινόμενον κάθε ἀριθμοῦ x ἐπὶ μηδὲν εἶναι ἴσον μὲ μηδὲν καὶ ὄχι μὲ -6, συνάγομεν, ὅτι ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις **δὲν ἔχει λύ-**

σιν· εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν, ὅτι ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι ἀδύνατος.

Παράδειγμα 2ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\frac{8x}{3}+4=\frac{5x+12}{3}+x$

Ἐφαρμόζοντες τὸν κανόνα τῆς § 210 ἔχομεν κατὰ σειρὰν

$8x+12=5x+12+3x$ ἢ $8x-5x-3x=-12+12$ ἢ $0 \cdot x=0$

Ἐπειδὴ κάθε ἀριθμὸς x, πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ μηδὲν δίδει γινόμενον μηδὲν ἕπεται, ὅτι ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει ὡς λύσιν ἕνα **τυχόντα ἀριθμόν**· δηλ. ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι μία ταυτότης καὶ ἑπομένως ἀληθεύει διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x· εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν, ὅτι ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι ἀόριστος.

Ἀσκήσεις. ***453.*** Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

1. $\frac{5x}{7}=10\left(\frac{x}{14}+1\right)$
2. $\frac{6(9+8x)}{2}-27=24x$
3. $\frac{3x+2}{5}-\frac{4x-3}{7}=4+\frac{x-2}{35}$
4. $\frac{x}{3}+\frac{x}{2}+5=\frac{5x}{6}+2$
5. $\frac{2x-1}{3}-\frac{5x+2}{12}=\frac{x-3}{4}+1$
6. $\frac{3x}{4}-\frac{16+7x}{20}=\frac{2(x-2)}{5}$
7. $2x-5=\frac{x+7}{2}+\frac{3x}{2}$
8. $\frac{3x}{2}-5+x=\frac{x-10}{2}+2x$
9. $\frac{x+6}{2}+\frac{2(x+17)}{3}+\frac{5(x-10)}{6}=2x+6$
10. $\frac{x+1}{4}-\frac{2x-1}{5}+\frac{3x+1}{2}=\frac{27x+19}{20}$

213. Λύσις ἐγγραμμάτων ἐξισώσεων. Αἱ ἐγγράμματοι ἐξισώσεις λύονται, ὅπως καὶ αἱ ἀριθμητικαὶ ἐξισώσεις. Πρέπει ὅμως νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψει μας, ὅτι, ἐὰν μία ἐξίσωσις ἔχῃ γράμματα ὡς παρονομαστάς, δὲν δυνάμεθα νὰ δίδωμεν εἰς τὰ γράμματα αὐτὰ τιμάς, αἱ ὁποῖαι μηδενίζουν τοὺς παρονομαστάς· διότι διὰ τὰς τιμὰς αὐτὰς τὰ κλάσματα καὶ ἡ ἐξίσωσις δὲν ἔχουν καμμίαν ἔννοιαν (§ 179).

Παράδειγμα. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\frac{\alpha(x-\alpha)}{\beta}+\frac{\beta(x-\beta)}{\alpha}=x$

Υποθέτομεν, ὅτι $\alpha\neq 0$ καὶ $\beta\neq 0$.

Ἐξαλείφομεν τοὺς παρονομαστάς· πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως ἐπὶ τὸ ἐ.κ.π. αβ τῶν παρονομαστῶν, τὸ ὁποῖον εἶναι διάφορον τοῦ μηδενὸς καὶ ἔχομεν

$$\alpha^2(x-\alpha)+\beta^2(x-\beta)=\alpha\beta x$$

Ἐκτελοῦμεν πράξεις καὶ ἔχομεν $\alpha^2x-\alpha^3+\beta^2x-\beta^3=\alpha\beta x$

Χωρίζομεν τοὺς ἀγνώστους ὅρους ἀπὸ τοὺς γνωστοὺς καὶ ἔχομεν

$$\alpha^2x+\beta^2x-\alpha\beta x=\alpha^3+\beta^3$$

Κάμνομεν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων καὶ ἔχομεν

$$(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)x=\alpha^3+\beta^3$$

Ἐὰν $\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2\neq 0$, διαιροῦμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς τελευταίας ἐξισώσεως διὰ $\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2$ καὶ ἔχομεν

$$x=\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2}=\frac{(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)}{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2}=\alpha+\beta.$$

Ἀσκήσεις. Α' Ὁμάς. 454. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

1. $\frac{x}{\alpha\beta}+\frac{x}{\alpha\gamma}=\frac{1}{\beta\gamma}$ 2. $\frac{x}{\alpha}+\frac{x}{\alpha+\gamma}=2\alpha+\beta$

455. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

1. $\alpha x+\gamma=\beta x+\delta$
2. $x+\mu+\nu=\mu x-\nu x$
3. $\mu(x+\mu)-\nu(x-\nu)=2\mu\nu$
4. $\alpha(x-\beta)=\beta(\alpha-x)-(\alpha+\beta)x$
5. $\alpha-\nu(x-\mu)=\mu(\nu-x)$
6. $\alpha x-(\mu+\nu)=\beta x-(\mu-\nu)$
7. $\alpha(\alpha-x)=\beta(\beta-x)$

Β' Ὁμάς. 456. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

1. $\frac{x}{\alpha-\beta}+\frac{x}{\alpha+\beta}=2$
2. $\frac{x+\alpha}{\alpha}-\frac{x+\beta}{\beta}=1$
3. $\frac{\alpha(x-\alpha)}{\beta}+\frac{\beta(x-\beta)}{\alpha}=x$
4. $\frac{x+\alpha-\beta}{\alpha}-\frac{x+\beta-\alpha}{\beta}=\frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha\beta}$
5. $\frac{\alpha(\alpha-x)}{\beta}-\frac{\beta(\beta+x)}{\alpha}=x$
6. $\frac{\alpha-x}{\alpha-\beta}-\frac{x-\beta}{\alpha+\beta}=\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}$
7. $\frac{x-\alpha}{\beta}+\frac{x-\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$
8. $\frac{\alpha}{\alpha+\beta-1}=2-\frac{x}{\alpha-\beta+1}$

Γ' Ὁμάς. 457. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

1. $\frac{x+\alpha}{\alpha-\beta}+\frac{x-\alpha}{\alpha+\beta}=\frac{x+\beta}{\alpha+\beta}+\frac{2(x-\beta)}{\alpha-\beta}$
2. $\frac{x}{\alpha^2-\beta^2}+\frac{2x}{\alpha+\beta}+\frac{\alpha+\beta-1}{2(\alpha-\beta)}=\frac{x}{\alpha-\beta}+1$
3. $\frac{x}{\alpha\beta}+\frac{x}{\beta\gamma}+\frac{x}{\gamma\alpha}-1=\alpha\beta\gamma-x(\alpha+\beta+\gamma)$
4. $3x-\left(\frac{x}{3}+\frac{5\alpha}{6}\right)=\frac{2\alpha}{5}-\frac{\alpha}{3}-\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{5x}{3}\right)$
5. $\frac{x}{2\beta}+\frac{4\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}+\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}=\frac{x}{\alpha+\beta}+\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}$
6. $\frac{\alpha-x}{\alpha-\beta}+\frac{\alpha+x}{\alpha+\beta}+\frac{x}{2}=\frac{\alpha\beta x}{\alpha^2-\beta^2}+\frac{(\alpha-\beta)x}{2(\alpha+\beta)}$
7. $\frac{\alpha x}{\alpha+\beta}+2\alpha\beta=\frac{\beta x}{\alpha-\beta}+\alpha^2-\beta^2$

214. Λύσις κλασματικῶν ἐξισώσεων.

Αἱ κλασματικαὶ ἐξισώσεις λύονται, ὅπως καὶ αἱ ἀκέραιαι ἐξισώσεις· δὲν πρέπει ὅμως νὰ παραδεχώμεθα ὡς λύσιν μίαν τιμὴν τοῦ ἀγνώστου x, ἡ ὁποία θὰ ἐμηδένιζε ἕνα παρονομαστήν.

Παράδειγμα 1ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\frac{2x-3}{x-4}=\frac{3}{x-4}+\frac{2x+1}{x-1}$

Τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι $(x-4)(x-1)$, τὸ ὁποῖον θεωροῦμεν διάφορον τοῦ μηδενός. Πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως ἐπὶ $(x-4)(x-1)$ καὶ ἔχομεν

$$(2x-3)(x-1)=3(x-1)+(2x+1)(x-4)$$

Ἐκτελοῦμεν πράξεις καὶ ἔχομεν

$$2x^2-3x-2x+3=3x-3+2x^2+x-8x-4.$$

Χωρίζομεν τοὺς ἀγνώστους ὅρους ἀπὸ τοὺς γνωστοὺς καὶ ἔχομεν

$$2x^2-3x-2x-3x-2x^2-x+8x=-3-3-4$$

Κάμνομεν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων καὶ ἔχομεν

$$-x=-10 \quad ἢ \quad x=10$$

Ἡ τιμὴ $x=10$ εἶναι λύσις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, διότι δὲν μηδενίζε κανένα παρονομαστήν της.

Παράδειγμα 2ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\dfrac{3}{x+2}-\dfrac{6x}{x^2-4}=\dfrac{3}{x-2}$

Τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν εἶναι $(x+2)(x-2)$, τὸ ὁποῖον θεωροῦμεν διάφορον τοῦ μηδενός. Ἐξαλείφομεν παρονομαστὰς κτλ. καὶ ἔχομεν κατὰ σειρὰν

$$3(x-2)-6x=3(x+2) \quad ἢ \quad 3x-6-6x=3x+6 \quad ἢ \quad 3x-6x-3x=6+6$$
$$ἢ \quad -6x=12 \quad ἢ \quad 6x=-12, \quad ἄρα \quad x=-2$$

Ἡ τιμὴ $x=-2$ εἶναι ἀπαράδεκτος, διότι μηδενίζει δύο παρονομαστάς· ἑπομένως ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι ἀδύνατος.

Ἀσκήσεις. Α' Ὁμάς. 458. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

1. $\dfrac{5(x-2)}{x+2}-\dfrac{2(x-3)}{x+3}=3$
2. $\dfrac{1}{2x-3}-\dfrac{3}{2x^2-3x}=\dfrac{5}{x}$
3. $\dfrac{2x+1}{3x-3}=\dfrac{7x-1}{6x+6}-\dfrac{2x^2-3x-45}{4x^2-4}$
4. $\dfrac{3+x}{x-4}+\dfrac{2-x}{2x-8}+\dfrac{2x-1}{3x-12}=\dfrac{5}{6}$
5. $\dfrac{7x+8}{21}-\dfrac{x+4}{8x-11}=\dfrac{x}{3}$
6. $\dfrac{2x-3}{2x-4}-6=\dfrac{x-5}{3(x-2)}-\dfrac{11}{2}$
7. $\dfrac{7x+16}{21}-\dfrac{x+8}{4x+10}=\dfrac{23}{70}+\dfrac{x}{3}$
8. $\dfrac{x+1}{x-2}+\dfrac{x-1}{x+2}=\dfrac{2(x^2+2)}{x^2-4}$
9. $\dfrac{3}{4-2x}+\dfrac{30}{8(1-x)}=\dfrac{3}{2-x}+\dfrac{5}{2-2x}$
10. $\dfrac{2x-13}{2x-16}+\dfrac{2(x-6)}{x-8}=\dfrac{7}{8}+\dfrac{10x-78}{3x-24}$

Β' Ὁμάς. 459. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

1. $\dfrac{x}{x-2}-\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{x-8}{x-6}-\dfrac{x-9}{x-7}$
2. $\dfrac{x+5}{x+4}-\dfrac{x-6}{x-7}=\dfrac{x-4}{x-5}-\dfrac{x-15}{x-16}$
3. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-7}=\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{1}{x-4}$
4. $\dfrac{x-1}{x-2}-\dfrac{x-2}{x-3}=\dfrac{x-5}{x-6}-\dfrac{x-6}{x-7}$
5. $\dfrac{x-1}{x-2}+\dfrac{x-6}{x-7}=\dfrac{x-5}{x-6}+\dfrac{x-2}{x-3}$

Γ' Ὁμάς. 460. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

1. $\dfrac{4}{x+2}+\dfrac{7}{x+3}=\dfrac{37}{x^2+5x+6}$
2. $\dfrac{2+2x}{9x^2-4}-\dfrac{x-2}{9x^2+12x+4}=\dfrac{x+4}{9x^2-4}$
3. $\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{4}{5x-15}=\dfrac{x-1}{x^2-5x+6}$
4. $\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x+2}{x+3}+\dfrac{4}{x^2+2x-3}=0$

5. $\frac{1}{3x-1}+\frac{2(x+1)}{x-1}-\frac{3x^2+1}{3x^2-4x+1}=1$ 6. $\frac{3+2x}{1+2x}-\frac{5+2x}{7+2x}=1-\frac{4x^2-2}{7+16x+4x^2}$

Δ' Ὁμάς. 461. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις :

1. $\frac{x+1}{x-1}=\frac{\alpha+\beta+1}{\alpha+\beta-1}$.

2. $\frac{1}{\alpha-\beta}+\frac{\alpha-\beta}{x}=\alpha\beta^2-\frac{\alpha+\beta}{x}$

3. $\frac{x-1}{x+\alpha-\beta}=\frac{1-x}{x-\alpha+\beta}+2$

4. $\frac{1}{x-\alpha}-\frac{1}{x-\beta}=\frac{\alpha-\beta}{x^2-\alpha\beta}$

5. $\frac{1}{x+6\alpha}+\frac{2}{x-3\alpha}+\frac{3}{x+2\alpha}=\frac{6}{x+\alpha}$

6. $\frac{2x+3\beta}{x(x-\alpha)}+\frac{3x-5\alpha}{(x-\alpha)(x-\beta)}=\frac{5}{x-\beta}$

7. $\frac{x+4\alpha+\beta}{x+\alpha+\beta}+\frac{4x+\alpha+2\beta}{x+\alpha-\beta}=5$

8. $\frac{\beta x+\alpha}{2\alpha^2\beta}+\frac{x-1}{3\beta^2}=\frac{3\beta^2+7\alpha^2}{6\alpha^2\beta(\alpha-\beta)}$

9. $\frac{8\alpha}{(x+2)^2}+\frac{8\beta}{(x-2)^2}+\frac{(\alpha+\beta)x^4}{(x^2-4)^2}=-(\alpha+\beta)$

***215.* Ἐξισώσεις βαθμοῦ ἀνωτέρου τοῦ πρώτου, ἀναγόμεναι εἰς ἐξισώσεις τοῦ πρώτου βαθμοῦ.** Ἡ λύσις μερικῶν ἐξισώσεων μὲ ἕνα ἄγνωστον x, τῆς μορφῆς $A=0$, βαθμοῦ ἀνωτέρου τοῦ πρώτου, δύναται νὰ ἀναχθῇ εἰς τὴν λύσιν ἐξισώσεων τοῦ πρώτου βαθμοῦ, ὅταν τὸ πρῶτον μέλος της A δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον παραγόντων τοῦ πρώτου βαθμοῦ.

Παράδειγμα 1ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^3-4x=0$ (1)

Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται

$$x(x^2-4)=0 \quad \text{ἢ} \quad x(x+2)(x-2)=0 \qquad (2)$$

Διὰ νὰ εἶναι τὸ γινόμενον τῶν τριῶν παραγόντων x, $x+2$, $x-2$ ἴσον μὲ μηδέν, πρέπει ὁ ἕνας, τουλάχιστον, ἀπὸ τοὺς παράγοντας αὐτοὺς νὰ εἶναι ἴσος μὲ μηδέν· δηλ. πρέπει νὰ εἶναι

εἴτε $x=0$, εἴτε $x+2=0$, εἴτε $x-2=0$

Αἱ τρεῖς αὐταὶ ἐξισώσεις εἶναι τοῦ πρώτου βαθμοῦ καὶ ἔχουν ἀντιστοίχως, ρίζας $x=0$, $x=-2$, $x=2$.

Αἱ τιμαὶ αὐταὶ τοῦ x εἶναι καὶ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

Παράδειγμα 2ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $(5x-1)^2-(3x+2)^2=0$ (1)

Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται

$$[(5x-1)+(3x+2)]\cdot[(5x-1)-(3x+2)]=0$$

$$\text{ἢ} \quad (5x-1+3x+2)(5x-1-3x-2)=0 \quad \text{ἢ} \quad (8x+1)(2x-3)=0 \qquad (2)$$

Διὰ νὰ ἀληθεύῃ ἡ (2) πρέπει νὰ εἶναι

εἴτε $8x+1=0$ (3) εἴτε $2x-3=0$ (4)

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (3) εὑρίσκομεν $x=-\frac{1}{8}$.

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (4) εὑρίσκομεν $x=\frac{3}{2}$.

Αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως (2), ἄρα καὶ τῆς ἰσοδυνάμου (1), εἶναι

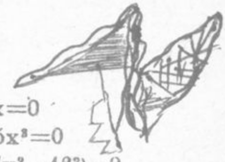
$$x=-\frac{1}{8} \quad \text{καὶ} \quad x=\frac{3}{2}.$$

Παράδειγμα 3ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $(2x-1)(x+4)(x-8)=0$

Αἱ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι ρίζαι τῶν ἐξισώσεων

$$2x-1=0, \quad x+4=0, \quad x-8=0$$

$$\text{δηλ. αἱ} \quad x=\frac{1}{2}, \quad x=-4, \quad x=8.$$



Ἀσκήσεις. ***462.*** Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

1. $x(x-1)(3x+2)(x-5)=0$
2. $(3x+1)^2-(2x-1)^2=0$
3. $(x-2\beta)^2=(x+2\alpha)^2$
4. $x^3-9x=0$
5. $5x-45x^3=0$
6. $(\alpha+x)(x^2-4\beta^2)=0$

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΙΣ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

216. **Γενικὴ μορφὴ τῶν ἐξισώσεων τοῦ πρώτου βαθμοῦ.** Μία ἐξίσωσις τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον x, δύναται νὰ ἀναχθῇ, διὰ μιᾶς σειρᾶς μετασχηματισμῶν, στηριζομένων εἰς τὸν κανόνα τῆς § 210, εἰς τὴν γενικὴν μορφὴν $\boxed{\alpha x+\beta=0}$

ὅπου α καὶ β δύνανται νὰ εἶναι τυχοῦσαι ποσότητες, θετικαὶ ἢ ἀρνητικαί, ἀριθμητικαὶ ἢ ἐγγράμματοι, μονώνυμα ἢ πολυώνυμα, ἀλλὰ πάντως ἀνεξάρτητα τοῦ ἀγνώστου x.

217. **Διερεύνησις τῆς ἐξισώσεως $\alpha x+\beta=0$.** Ὅταν λέγωμεν, ὅτι θὰ ***διερευνήσωμεν*** τὴν ἐξίσωσιν

$$\alpha x+\beta=0 \quad \text{ἢ} \quad \alpha x=-\beta \qquad (1)$$

σημαίνει, ὅτι θὰ ἐξετάσωμεν:

1ον. Διὰ ποίας ἰδιαιτέρας τιμὰς τῶν γραμμάτων της α καὶ β, ἡ ἐξίσωσις ἔχει μίαν μόνον λύσιν.

2ον. Διὰ ποίας τιμὰς τῶν γραμμάτων της εἶναι ἀδύνατος ἢ ἀόριστος.

Κατὰ τὴν διερεύνησιν τῆς ἐξισώσεως (1) δύνανται νὰ παρουσιασθοῦν αἱ κάτωθι τρεῖς περιπτώσεις:

Ι Περίπτωσις. $\alpha\neq 0$. Ὅταν τὸ α εἶναι διάφορον τοῦ μηδενός, δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως (1) διὰ x καὶ νὰ λάβωμεν τὴν ***μοναδικὴν*** λύσιν $\quad x=-\frac{\beta}{\alpha}$.

ΙΙ Περίπτωσις. $\alpha=0$. Ὅταν τὸ x εἶναι ἴσον μὲ μηδέν, δὲν δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως (1) διὰ x.

Ἐδῶ δύνανται νὰ παρουσιασθοῦν δύο περιπτώσεις, διότι, ὅταν τὸ α εἶναι ἴσον μὲ μηδέν, τὸ β δύναται νὰ εἶναι διάφορον τοῦ μηδενὸς ἢ καὶ ἴσον μὲ μηδέν.

1ον. ***$\alpha=0$ καὶ $\beta\neq 0$,*** Ὅταν τὸ α εἶναι ἴσον μὲ μηδὲν καὶ τὸ β διάφορον τοῦ μηδενὸς ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται $\quad 0\cdot x=-\beta$.

Διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x, τὸ γινόμενον $0\cdot x$ εἶναι πάντοτε ἴσον μὲ μηδὲν καὶ ὄχι ἴσον μὲ $-\beta$, τὸ ὁποῖον εἶναι, ἐξ ὑποθέσεως, διάφορον τοῦ μηδενός. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ἐξίσωσις (1) δὲν ἔχει λύσιν· εἶναι ***ἀδύνατος***.

2ον. ***$\alpha=0$ καὶ $\beta=0$***. Ὅταν τὸ α καὶ τὸ β εἶναι ἴσα μὲ μηδέν, ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται $0\cdot x=0$ ἢ $0=0$.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ἐξίσωσις (1) ἀληθεύει διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x καὶ λέγομεν, ὅτι ἡ ἐξίσωσις εἶναι ***ἀόριστος***, ἢ ὅτι ὑπάρχει ***ἀοριστία*** εἰς τὴν ἐξίσωσιν.

Πίναξ διερευνήσεως τῆς ἐξισώσεως $\alpha x+\beta=0$

Ἐὰν $\alpha\neq 0$ ἡ ἐξίσωσις **ἔχει τὴν λύσιν** $x=-\dfrac{\beta}{\alpha}$

Ἐὰν $\alpha=0$· $\begin{cases} \beta\neq 0 \text{ ἡ ἐξίσωσις εἶναι } \textbf{ἀδύνατος} \\ \beta=0 \text{ ἡ ἐξίσωσις εἶναι } \textbf{ἀόριστος} \end{cases}$

218. **Ἐφαρμογαί. Παράδειγμα 1ον. Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις:**

$$\mu x+\frac{9x-\mu}{3}=4x+2$$

Ἐξαλείφομεν παρονομαστὰς κλπ. καὶ ἔχομεν κατὰ σειρὰν

$$3\mu x+9x-\mu=12x+6 \quad \text{ἢ} \quad 3\mu x+9x-12x=\mu+6$$
$$\text{ἢ} \quad (3\mu-3)x=\mu+6 \qquad (1)$$

Ἡ ἐξίσωσις (1) ἔχει τὴν μορφὴν $\alpha x=\beta$, ὅπου $\alpha=3\mu-3$ καὶ $\beta=\mu+6$.

I. Ἐὰν $3\mu-3\neq 0$, δηλ. ἐὰν $3\mu\neq 3$, ἢ $\mu\neq 1$, ἡ ἐξίσωσις (1) ἔχει τὴν λύσιν
$$x=\frac{\mu+6}{3\mu-3} \qquad (2)$$

II. Ἐὰν $3\mu-3=0$, δηλ. ἐὰν $\mu=1$, ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται $0x=7$ καὶ εἶναι ἀδύνατος διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x.

Ὥστε ἡ ἐξίσωσις (1) ἔχει τὴν λύσιν (2), ἐὰν $\mu\neq 1$ καὶ δὲν ἔχει λύσιν διὰ $\mu=1$.

ΣΗΜ. Τὸ γράμμα μ, εἰς τὸ ὁποῖον δυνάμεθα νὰ δώσωμεν οἱανδήποτε τιμὴν λέγεται ***παράμετρος***.

Παράδειγμα 2ον. Διὰ ποίας τιμὰς τῆς παραμέτρου α, ἡ ἐξίσωσις
$$\alpha^2x+1=x+\alpha$$
1ον. Ἔχει μίαν μόνον λύσιν; 2ον. Εἶναι ἀδύνατος; 3ον. Εἶναι ἀόριστος;

Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται

$$\alpha^2x-x=\alpha-1 \quad \text{ἢ} \quad (\alpha^2-1)x=\alpha-1 \quad \text{ἢ} \quad (\alpha+1)(\alpha-1)x=\alpha-1 \qquad (1)$$

I. Ἐὰν $(\alpha+1)(\alpha-1)\neq 0$, δηλ. ἐὰν $\alpha\neq -1$ καὶ $\alpha\neq 1$, ἡ ἐξίσωσις (1) *ἔχει τὴν λύσιν*

$$x=\frac{\alpha-1}{(\alpha+1)(\alpha-1)}=\frac{1}{\alpha+1} \qquad (2)$$

II. Ἔστω τώρα, ὅτι $(\alpha+1)(\alpha-1)=0$, δηλ. ὅτι $\alpha=-1$, εἴτε $\alpha=1$.

Ἐξετάζομεν χωριστὰ κάθε μίαν ἀπὸ τὰς περιπτώσεις $\alpha=-1$ καὶ $\alpha=1$.

1ον. Ἐὰν $\alpha=-1$, ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται $0x=-2$ καὶ ἐπομένως εἶναι *ἀδύνατος*.

2ον. Ἐὰν $\alpha=1$, ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται $0.x=0$ καὶ ἐπομένως εἶναι *ἀόριστος*.

Ὥστε: ἐὰν $\alpha\neq-1$ καὶ $\alpha\neq1$ ἡ ἐξίσωσις (1) ἔχει τὴν λύσιν (2)
ἐὰν $\alpha=-1$ ἡ ἐξίσωσις (1) εἶναι ἀδύνατος
ἐὰν $\alpha=1$ ἡ ἐξίσωσις (1) εἶναι ἀόριστος.

Παράδειγμα 3ον. Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$\alpha x-\beta^2+2\alpha\beta=\alpha^2+\beta x$$

Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται

$$\alpha x-\beta x=\beta^2-2\alpha\beta+\alpha^2 \quad ἢ \quad (\alpha-\beta)x=(\alpha-\beta)^2 \qquad (1)$$

1ον. Ἐὰν $\alpha-\beta\neq0$, δηλ. $\alpha\neq\beta$, ἡ ἐξίσωσις (1) ἔχει τὴν λύσιν

$$x=\frac{(\alpha-\beta)^2}{\alpha-\beta}=\alpha-\beta.$$

2ον. Ἐὰν $\alpha-\beta=0$, δηλ. $\alpha=\beta$, ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται $0.x=0$ καὶ εἶναι ἀόριστος.

Παράδειγμα 4ον. Νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις $\alpha^2x+4=\alpha(x+2)+\beta$

Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται

$$\alpha^2x+4=\alpha x+2\alpha+\beta \quad ἢ \quad \alpha^2x-\alpha x=2\alpha+\beta-4 \quad ἢ \quad \alpha(\alpha-1)x=2\alpha+\beta-4 \quad (1).$$

I. Ἐὰν $\alpha(\alpha-1)\neq0$, δηλ. ἐὰν $\alpha\neq0$ καὶ $\alpha\neq1$, ἡ ἐξίσωσις (1) ἔχει τὴν λύσιν $\dfrac{2\alpha+\beta-4}{\alpha(\alpha-1)}$.

II. Ἔστω τώρα, ὅτι $\alpha(\alpha-1)=0$, δηλ. ὅτι $\alpha=0$ εἴτε $\alpha=1$. Ἐξετάζομεν χωριστὰ κάθε μίαν ἀπὸ τὰς περιπτώσεις $\alpha=0$ καὶ $\alpha=1$.

1ον. Ἐὰν $\alpha=0$ ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται $0\cdot x=\beta-4$.

Ἐὰν τώρα εἶναι καὶ $\beta-4=0$, δηλ. $\beta=4$, ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται $0\cdot x=0$ καὶ ἐπομένως εἶναι ἀόριστος.

Ἐὰν εἶναι $\beta-4\neq0$, δηλ. $\beta\neq4$, ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται $0\cdot x=\beta-4$ καὶ εἶναι ἀδύνατος.

2ον. Ἐὰν $\alpha-1=0$, δηλ. ἐὰν $\alpha=1$, ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται

$$0.x=2.1+\beta-4 \quad ἢ \quad 0.x=\beta-2$$

Ἐὰν τώρα εἶναι καὶ $\beta-2=0$, δηλ. $\beta=2$, ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται $0x=0$ καὶ εἶναι ἀόριστος.

Ἐὰν εἶναι $\beta-2\neq0$, δηλ. $\beta\neq2$ ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται $0.x=\beta-2$ καὶ εἶναι ἀδύνατος.

Κατωτέρω συνοψίζομεν τὸ ἐξαγόμενον τῆς διερευνήσεως.

I. Ἐὰν $\alpha(\alpha-1)\neq0$, ἡ ἐξίσωσις ἔχει τὴν λύσιν $x=\dfrac{2\alpha+\beta-4}{\alpha(\alpha-1)}$.

II. Ἐὰν $\alpha=0$ $\begin{cases}\beta=4 & \text{ἡ ἐξίσωσις εἶναι ἀόριστος}\\ \beta\neq4 & \text{» » ἀδύνατος.}\end{cases}$

III. Ἐὰν $\alpha=1$ $\begin{cases}\beta=2 & \text{» » ἀόριστος}\\ \beta\neq2 & \text{» » ἀδύνατος.}\end{cases}$

Ἀσκήσεις. Α΄ Ὁμάς. 463. Νὰ λυθοῦν καὶ νὰ διερευνηθοῦν αἱ ἐξισώσεις:

1. $\alpha x+\alpha+1=x$
2. $4\alpha^2x-1=x+2\alpha$
3. $2\alpha x+1=4\alpha^2+x$
4. $\mu x+8x=2(\mu-1)x+10$

5. $(\mu-2)x+\mu=7$
6. $(x-1)+40\mu x-5\mu=0$
7. $\mu^2(x-2)-3\mu=x+1$
8. $(\mu^2-4)x=\mu^2-2\mu$
9. $\mu^2 x=\mu(x+2)-2$
10. $(\mu-1)x-8\mu=0.$

Β' Ὁμάς. ***464.*** Νὰ λυθοῦν καὶ νὰ διερευνηθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

1. $x-\dfrac{2}{\mu^3}=\dfrac{1}{\mu^2}(4x+1)$
2. $\dfrac{4}{x-4\mu}=\dfrac{5}{x-\mu}-\dfrac{1}{x-4}$
3. $\dfrac{2x+\mu}{3}-\dfrac{x-3}{\mu}-\dfrac{3\mu x+(\mu-3)^2}{3\mu}=0$
4. $\dfrac{x+1}{x+2+\mu}=\dfrac{x-1}{x+2-\mu}$
5. $\dfrac{9x}{20\mu}+\dfrac{x}{20}-1=\dfrac{x(\mu+9)}{20}-\mu$
6. $\dfrac{x-2}{\mu}-\dfrac{4+\mu^2}{2\mu}=-\dfrac{x-\mu}{2}$

Γ' Ὁμάς. ***465.*** Νὰ λυθοῦν καὶ νὰ διερευνηθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

1. $\alpha x+\alpha=\beta x+\beta$
2. $\alpha x+\beta^2=\alpha^2-\beta x$
3. $\dfrac{\mu x}{2}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{\nu}{3}+x$
4. $\alpha x-2\alpha^2=\beta x-2\beta^2$
5. $(\alpha+\beta)x+(\alpha-\beta)x=2\alpha^3$
6. $\alpha x+\beta-\dfrac{3x+2\alpha\beta}{3}=\dfrac{1}{2}$
7. $(\alpha+x)(1+\beta x)=\alpha(1+\beta)+\alpha^2\beta^2+\beta x^2$
8. $(x-\alpha)(2x-\beta)^2-(x-\beta)(2x-\alpha)^2=0$
9. $\mu^2(\mu-x)+\mu^2\nu=\nu^2(\nu-x)+\mu\nu^2$

466. Νὰ λυθοῦν καὶ νὰ διερευνηθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

1. $\dfrac{x}{\alpha}+\dfrac{x}{\beta}=1$
2. $\dfrac{x}{2\alpha}-\dfrac{x}{2\beta}=2$
3. $\dfrac{x}{\alpha}-\dfrac{x}{\beta}=\alpha-\beta$
4. $\dfrac{\alpha x-\beta}{\beta}=\dfrac{\beta x}{\alpha}+1$
5. $(\alpha+x)(\beta+x)=\alpha(\beta+1)+\dfrac{\alpha^2}{\beta}+x^2$
6. $\dfrac{x+\alpha}{\alpha}-\dfrac{x+\alpha}{\beta}=1$
7. $\dfrac{x}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\beta}{\alpha}-\dfrac{x}{\beta}$
8. $\dfrac{\alpha x}{\beta}-\dfrac{\beta x-1}{\alpha}=\dfrac{1}{\beta}$
9. $\dfrac{2x+\alpha}{\beta}-\dfrac{x-\beta}{\alpha}=\dfrac{3\alpha x+(\alpha-\beta)^2}{\alpha\beta}$
10. $\dfrac{4\lambda x+1}{\mu}-3=\dfrac{3x}{\mu}+2$
11. $(\alpha+x)(\alpha-x)=\dfrac{\beta(\alpha-x)}{\alpha+\beta}+\dfrac{2x}{\alpha}-x^2$

Δ' Ὁμάς. ***467.*** Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ α αἱ κάτωθι ἐξισώσεις εἶναι ἀδύνατοι:

1. $\dfrac{\alpha x-1}{3}+\dfrac{x+1}{2}=4$
2. $\dfrac{x-\alpha+3}{2}=\dfrac{2x+3\alpha x}{3}$

468. Διὰ ποίας τιμὰς τῶν α καὶ β ἡ ἐξίσωσις $\dfrac{\alpha x-\beta}{3}+\dfrac{x}{2}=3x-\alpha$

1ον. Ἔχει μίαν λύσιν; 2ον. Εἶναι ἀδύνατος; 3ον. Εἶναι ἀόριστος;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΙΝ

Α'. Ὁμάς. ***469.*** Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ μ ἡ ἐξίσωσις $\mu x^2+2\mu x-5=0$ ἀληθεύει:

1ον. Διὰ $x=3$. 2ον. Διὰ $x=-1$. 3ον. Διὰ $x=\dfrac{1}{2}$

470. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ τιμὴ τοῦ μ εἰς τρόπον, ὥστε τὸ πολυώνυμον:

1. $x^3+\mu x^2+2\mu x-1$ νὰ εἶναι διαιρετὸν διὰ $x+1$
2. $x^3+\mu x^2+2\mu x-1$ νὰ εἶναι διαιρετὸν διὰ $x-1$

3. $\alpha x^2+\mu x-3\alpha\mu$ νὰ εἶναι διαιρετὸν διὰ $x-\alpha$
4. $\mu x^2+2\mu x+5$ νὰ εἶναι διαιρετὸν διὰ $x+1$
5. $\mu x^2-(\mu-1)x-4\mu$ νὰ εἶναι διαιρετὸν διὰ $x+2$

Β′ Ὁμάς. *471.* Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

1. $-\left\{2(x-4)-3(x+1)+[10-2(x+1)-60]\right\}=15(x+1)$
2. $3\left\{2[5(2x-4)-10]-25\right\}-40=x$ 3. $5\left\{3[2(x+1)+12]+2\right\}-100=20x+130$
4. $\dfrac{6}{7}\left\{\dfrac{5}{12}\left[\dfrac{7}{8}\left(\dfrac{3x}{4}+5\right)-10\right]+3\right\}-24=0$

472. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις

1. $(x-1)(x-2)+(x-1)(x-3)=2(x-2)(x-3)$
2. $(x+1)(x-2)=(x-3)(x-4)+3x-1$ 3. $(2x+5)^2-(18x+6)=(4x-1)(x+1)$
4. $(2x+5)^2-(x+1)(x+2)=(x-3)^2+(2x-1)(x+2)$
5. $\left(x-\dfrac{5}{2}\right)\left(x+\dfrac{3}{2}\right)-(x-5)(x+3)=\dfrac{39}{4}$
6. $7x^2+5=(5x-2)(3x+7)-(4x-1)(2x+11)$

Γ′ Ὁμάς. *473.* Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

1. $\dfrac{x}{6}-\dfrac{x-\dfrac{1}{2}}{3}-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{5}-\dfrac{x}{3}\right)=0$

2. $\dfrac{x-\dfrac{2x+3}{9}}{8}-\dfrac{x-\dfrac{1}{3}}{2}=\dfrac{2x-\dfrac{5(x+3)}{6}}{4}-\dfrac{x+1}{3}$

3. $\dfrac{x-\dfrac{2(x-6)}{3}}{8}+\dfrac{x+3}{5}=x-10+\dfrac{x-\dfrac{3x-6}{5}}{3}$

4. $\dfrac{x-\dfrac{5}{3}}{2}-\dfrac{1-\dfrac{x}{3}}{4}+\dfrac{\dfrac{x}{2}}{6}-\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{5x+8}{12}$

5. $\dfrac{\dfrac{3x-5}{2}}{4}=\dfrac{4(2x-7)}{9}+\dfrac{3-\dfrac{5(x-2)}{3}}{3}+\dfrac{13}{24}$

474. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

1. $\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{1-\dfrac{x+1}{x-3}}}=4$ 3. $\dfrac{\dfrac{1+x}{1-x}-\dfrac{1-x}{1+x}}{\dfrac{1+x}{1-x}-1}=\dfrac{3}{14-x}$

2. $\dfrac{2x}{3}+\dfrac{\dfrac{3x-5}{4}-\dfrac{5x-3}{6}}{\dfrac{4x-3}{9}-\dfrac{2x-5}{4}}=\dfrac{2x-4}{3}$ 4. $\dfrac{\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x-1}{x+1}}{1+\dfrac{x+1}{x-1}}=\dfrac{1}{2}$

5. $\dfrac{\dfrac{1}{1+x}}{1-\dfrac{1}{1+x}}+\dfrac{\dfrac{1}{1+x}}{\dfrac{x}{1-x}}+\dfrac{\dfrac{1}{1-x}}{\dfrac{x}{1+x}}+\dfrac{3}{2x}=0$

6. $\left(\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}\right)\left(\frac{3}{4x}+\frac{x}{4}-x\right)=\frac{\left(x-3+\frac{5x}{2x-6}\right)\frac{3x}{2}}{2x-1+\frac{15}{x-3}}$

Δ' Ὁμάς. ***475.*** Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις :

1. $\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x-3}=0$ 3. $\frac{x+1}{x-2}+\frac{x-1}{x+2}=\frac{2(x^2+2)}{x^2-4}$

2. $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-2}=0$ 4. $\frac{4}{1+x}+\frac{x+1}{1-x}=\frac{x^2-3}{1-x^2}$

5. $\frac{x^2-4x+4}{x-1}+\frac{x^2-3x-1}{x-2}-\frac{2(x^2-5x+5)}{x-3}=0$

476. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις :

1. $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}=\frac{11}{(x-1)(x-2)(x-3)}$
2. $\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+1}=\frac{14}{x-3}-\frac{9}{x-2}$
3. $\frac{3}{(x+2)(x-1)}=\frac{1}{x(x-1)^2}+\frac{3}{x(x-3)}$
4. $\frac{5x-1}{2(x-3)}=\frac{2(4x+1)}{3(x+3)}+\frac{7x^2-8x+1}{2(x^2-9)}$
5. $\frac{x}{2}-\frac{2(2x-3)}{3(x-1)}+\frac{3x-1}{2(x-1)}=\frac{3(x^2+2)}{2(3x-2)}$
6. $\frac{1}{(x-1)(x-2)}+\frac{2}{(x-2)(x-3)}+\frac{16}{(x-3)(x-4)}=\frac{19}{(x-2)(x-4)}$
7. $\frac{3+x}{x-4}+\frac{2-x}{2x-8}+\frac{2x-1}{3(x-4)}=\frac{5}{6}$

Ε' Ὁμάς. ***477.*** Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις :

1. $(x+1)^2-\alpha(5-2\alpha-x)=(x-2\alpha)^2+5$
2. $[(\alpha^2-\beta^2)x-1]^2+(2\alpha\beta x-1)^2=[(\alpha^2+\beta^2)x+1]^2$
3. $(x-\alpha)^3(x+2\beta+\alpha)-(x+\beta)^3(x-2\alpha-\beta)=0$
4. $[(\mu^2-1)x-1]^2=[(\mu^2+1)x+1]^2-(2\mu x-1)^2$
5. $\alpha(x-\beta)(x-\gamma)-\beta(x-\alpha)(x-\gamma)=(\alpha-\beta)(x-\alpha)(x-\beta)$
6. $(\alpha-x)(1-\beta)=(\alpha-x)(1-x)+(1+x)(\beta-x)$.

478. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις :

1. $\frac{x}{2\alpha-\beta}+2(\alpha-2\beta)=\frac{\alpha-\beta}{\alpha\beta}x-\frac{\beta^2}{\alpha}$
2. $\frac{(\alpha+x)(\alpha-\beta)}{\alpha+\beta}+\frac{(\alpha-x)(\alpha+\beta)}{\alpha-\beta}=\frac{(x-\alpha)(\alpha^2-6\alpha\beta+\beta^2)}{\alpha^2-\beta^2}$
3. $\frac{x+\alpha^2}{(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)}+\frac{x-\beta^2-\gamma^2}{(\gamma-\alpha-\beta)(\beta-\alpha-\gamma)}=1$
4. $\frac{(\alpha+\beta)^2(x+1)-(\alpha+\beta)(x+1)+x+1}{\alpha+\beta+1}=(\alpha+\beta)^2-(\alpha+\beta)+1$

ΣΤ' Ὁμάς. ***479.*** Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις :

1. $(2x-\alpha-\beta)[(x-\alpha)^3-(x-\beta)^3]=3(\beta-\alpha)[(x-\alpha)^3+(x-\beta)^3]$
2. $\frac{(x-\alpha)^2+(x-\alpha)(x-\beta)+(x-\beta)^2}{19}=\frac{(x-\alpha)^2-(x-\alpha)(x-\beta)+(x-\beta)^2}{49}$

3. $\dfrac{6x}{\alpha(\alpha+1)(\alpha-2)} - \dfrac{x}{\alpha(\alpha^2-1)} = \dfrac{5x+2}{(\alpha^2-1)(\alpha-2)}$

480. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις :

1. $\dfrac{x}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \dfrac{x}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + \dfrac{x}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} = 2$

2. $\dfrac{\beta\gamma x}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \dfrac{\alpha\gamma x}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + \dfrac{\alpha\beta x}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} = \alpha\beta\gamma$

3. $\dfrac{\alpha^2 x}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \dfrac{\beta^2 x}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)} + \dfrac{\gamma^2 x}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} = \alpha\beta\gamma$

4. $\dfrac{\beta^2\gamma^2 x-\alpha^2}{\beta\gamma(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \dfrac{\gamma^2\alpha^2 x-\beta^2}{\gamma\alpha(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)} + \dfrac{\alpha^2\beta^2 x-\gamma^2}{\alpha\beta(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} = 0$

Ζ' Ὁμάς. 481. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις :

1. $\dfrac{\alpha x-1}{x-1} + \dfrac{\beta}{x+1} = \dfrac{\alpha(x^2+1)}{x^2-1}$ 2. $\dfrac{\alpha}{\alpha x-1} + \dfrac{\beta}{\beta x-1} = \dfrac{\alpha+\beta}{(\alpha+\beta)x-1}$

3. $(x^2+\alpha^2-\beta^2)\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\alpha}\right) + (\alpha^2+\beta^2-x^2)\left(\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta}\right) +$
$$+(\beta^2+x^2-\alpha^2)\left(\dfrac{1}{\beta} + \dfrac{1}{x}\right) = 0$$

4. $\dfrac{1}{(x+\alpha)^2-\beta^2} + \dfrac{1}{(x+\beta)^2-\alpha^2} = \dfrac{1}{x^2-(\alpha+\beta)^2} + \dfrac{1}{x^2-(\alpha-\beta)^2}$

5. $\dfrac{x-\alpha}{x-\alpha-1} - \dfrac{x-\alpha-1}{x-\alpha-2} = \dfrac{x-\beta}{x-\beta-1} - \dfrac{x-\beta-1}{x-\beta-2}$

6. $\dfrac{1}{x-\alpha} + \dfrac{1}{x-\beta} + \dfrac{1}{x+\alpha+\beta} = \dfrac{3}{x}$

7. $\dfrac{x+\alpha+\beta}{x+\alpha} = \dfrac{x+\alpha-\beta}{x-\alpha} - \dfrac{\alpha^2-\beta^2}{x^2-\alpha^2}$

Η' Ὁμάς. 482. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις :

1. $x\left(\dfrac{x-2\alpha}{x+\alpha}\right)^3 + \alpha\left(\dfrac{2x-\alpha}{x+\alpha}\right)^3 = x^2-\alpha^2$

2. $\dfrac{x+\alpha}{x-\alpha} + \dfrac{x+2\alpha}{x-2\alpha} = \dfrac{x-2\alpha}{x+2\alpha} + \dfrac{x-\alpha}{x+\alpha}$

3. $\dfrac{\alpha-x}{\alpha+x} + \dfrac{\beta-x}{\beta+x} = \dfrac{\alpha+x}{\alpha-x} + \dfrac{\beta+x}{\beta-x}$

4. $\dfrac{(\beta-\gamma)(1+\alpha^2)}{x+\alpha^2} + \dfrac{(\gamma-\alpha)(1+\beta^2)}{x+\beta^2} + \dfrac{(\alpha-\beta)(1+\gamma^2)}{x+\gamma^2} = 0$

5. $\dfrac{(x+\alpha)(x+\beta)}{(x-\alpha)(x-\beta)} + \dfrac{(x-\alpha)(x-\beta)}{(x+\alpha)(x+\beta)} = \dfrac{(x+\gamma)(x+\delta)}{(x-\gamma)(x-\delta)} + \dfrac{(x-\gamma)(x-\delta)}{(x+\gamma)(x+\delta)}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

***219*. Στοιχεῖα ἑνὸς προβλήματος.** Εἰς τὸ προηγούμενον κεφάλαιον ἐμάθομεν νὰ λύωμεν ἐξισώσεις τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον. Εἰς τὴν πρᾶξιν ὅμως δὲν θὰ συναντήσωμεν ποτὲ ἐξισώσεις, ἀλλὰ προβλήματα, τῶν ὁποίων ἡ λύσις ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν τῶν ἐξισώσεων· διότι κάθε πρόβλημα δύναται νὰ ἐκφρασθῇ μὲ μίαν ἢ περισσοτέρας ἐξισώσεις, αἱ ὁποῖαι ἐκφράζουν τὴν σχέσιν ἢ τὰς σχέσεις αἱ ὁποῖαι ὑπάρχουν μεταξὺ τῶν δεδομένων τοῦ προβλήματος καὶ τῶν ἀγνώστων του.

Τὰ ***δεδομένα*** ἑνὸς προβλήματος εἶναι ἀριθμοὶ ἢ ποσότητες γνωσταί, καὶ οἱ ***ἄγνωστοι*** τοῦ προβλήματος ἢ τὰ ***ζητούμενα*** αὐτοῦ, εἶναι ἀριθμοὶ ἢ ποσότητες, αἱ ὁποῖαι πρέπει νὰ ὑπολογισθοῦν συναρτήσει τῶν δεδομένων τοῦ προβλήματος:

Π. χ. εἰς τὸ πρόβλημα:

Νὰ εὑρεθῇ ἕνας ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ διπλάσιον αὐξηθὲν κατὰ 15 εἶναι ἴσον μὲ τὸ τριπλάσιον αὐτοῦ ἐλαττωθὲν κατὰ 9, ὁ ***ἄγνωστος*** τοῦ προβλήματος εἶναι ὁ ζητούμενος ἀριθμός. Τὰ ***δεδομένα*** τοῦ προβλήματος εἶναι: τὸ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ, ὁ ἀριθμὸς 15, τὸ τριπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ καὶ ὁ ἀριθμὸς 9.

Ἡ εὕρεσις τῆς τιμῆς τοῦ ἀγνώστου ἢ τῶν ἀγνώστων ἑνὸς προβλήματος λέγεται ***λύσις τοῦ προβλήματος.***

Ἐπειδὴ κάθε πρόβλημα δύναται νὰ ἐκφρασθῇ μὲ μίαν ἢ περισσοτέρας ἐξισώσεις, ἀναλόγως τῶν ἀγνώστων, ποὺ περιέχει, ἡ λύσις τοῦ προβλήματος ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως ἢ τῶν ἐξισώσεων τοῦ προβλήματος.

Τὰ κατωτέρω παραδείγματα θὰ μᾶς δείξουν πῶς εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ προβλήματος καὶ τὴν λύσιν αὐτοῦ.

220*. Πρόβλημα I. *Νὰ εὑρεθῇ ἕνας ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ διπλάσιον αὐξηθὲν κατὰ 15, εἶναι ἴσον μὲ τὸ τριπλάσιον αὐτοῦ ἐλαττωθὲν κατὰ 9.

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ x τὸν ζητούμενον ἀριθμόν, τὸ διπλάσιόν του θὰ παρασταθῇ μὲ 2x καὶ τὸ τριπλάσιόν του θὰ παρασταθῇ μὲ 3x.

Κατὰ τὸ πρόβλημα πρέπει νὰ εἶναι

$$\text{διπλάσιον ἀριθμοῦ} + 15 = \text{τριπλάσιον ἀριθμοῦ} - 9$$

$$2x + 15 = 3x - 9.$$

Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν καὶ ἔχομεν κατὰ σειρὰν

$$2x - 3x = -15 - 9 \quad \text{ἢ} \quad -x = -24, \quad \text{ἢ} \quad x = 24$$

Ὥστε ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 24.

221. Πρόβλημα ΙΙ. ***Τὸ ἄθροισμα τῶν ἡλικιῶν τριῶν προσώπων εἶναι 86 ἔτη. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἡλικία ἑκάστου, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ὁ δεύτερος ἔχει διπλασίαν ἡλικίαν τοῦ πρώτου καὶ ὅτι ὁ τρίτος εἶναι 14 ἔτη μικρότερος τοῦ δευτέρου.***

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ x τὴν ἡλικίαν τοῦ πρώτου, ἡ ἡλικία τοῦ δευτέρου θὰ παρασταθῇ μὲ $2x$ καὶ τοῦ τρίτου μὲ $2x-14$.

Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν ἡλικιῶν εἶναι 86 ἔτη, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $x+2x+(2x-14)=86$.

Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν καὶ ἔχομεν κατὰ σειρὰν.

$$x+2x+2x=86+14 \quad ἢ \quad 5x=100 \quad ἄρα \quad x=\frac{100}{5}=20$$

Ὥστε ἡ ἡλικία τοῦ πρώτου εἶναι 20 ἔτη, τοῦ δευτέρου 40 ἔτη καὶ τοῦ τρίτου $40-14=26$ ἔτη. Πράγματι τὸ ἄθροισμα τῶν ἡλικιῶν τῶν τριῶν αὐτῶν προσώπων εἶναι $20+40+26=86$ ἔτη.

222. Λύσις ἑνὸς προβλήματος. Ἀπὸ τὰ δύο ἀνωτέρω παραδείγματα συνάγομεν, ὅτι ἡ λύσις ἑνὸς προβλήματος περιλαμβάνει γενικῶς:

1ον. Τὴν ἐκλογὴν τοῦ ἀγνώστου ἢ τῶν ἀγνώστων.

2ον. Τὴν εὕρεσιν τῆς ἐξισώσεως (ἢ τῶν ἐξισώσεων) τοῦ προβλήματος.

3ον. Τὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως (ἢ τῶν ἐξισώσεων).

4ον. Τὴν ἐπαλήθευσιν τοῦ προβλήματος καὶ τὴν διερεύνησιν αὐτοῦ.

223. Ἐκλογὴ τοῦ ἀγνώστου. Γενικῶς ἡ ἐκφώνησις τοῦ προβλήματος καθορίζει ποῖοι εἶναι οἱ ἄγνωστοι τοῦ προβλήματος.

Π.χ. Εἰς τὸ πρόβλημα Ι (§ 219) ἡ ἐκφώνησις τοῦ προβλήματος λέγει: **Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου...».** Εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ ἄγνωστος εἶναι ὁ ἀριθμὸς αὐτός.

Ἐνίοτε ἡ ἐκλογὴ τοῦ ἀγνώστου γίνεται διαφόρως.

Π.χ. Εἰς τὸ πρόβλημα. **«Νὰ εὑρεθῇ διψήφιος ἀριθμός, ἂν γνωρίζωμεν ὅτι τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων εἶναι τριπλάσιον τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων καὶ ὅτι...»** δὲν λαμβάνομεν ὡς ἄγνωστον τὸν ζητούμενον διψήφιον ἀριθμόν, ἀλλὰ τὸ ψηφίον τῶν μονάδων, διότι εἰς τὴν πραγματικότητα ὑπάρχουν δύο ἄγνωστοι: τὸ ψηφίον τῶν μονάδων καὶ τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ.

Πράγματι, ἂν παραστήσωμεν μὲ x τὸ ψηφίον τῶν μονάδων, τότε τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων θὰ παρασταθῇ μὲ $3x$ καὶ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς θὰ παρασταθῇ μὲ $3x\cdot10+x$ ἢ μὲ $31x$.

224. Εὕρεσις τῆς ἐξισώσεως ἑνὸς προβλήματος. Ἐπειδὴ ἡ ποικιλία τῶν προβλημάτων εἶναι μεγάλη, δὲν ὑπάρχει γενικὸς κανών, ὁ ὁποῖος νὰ μᾶς ἐπιτρέπῃ νὰ εὑρίσκωμεν ἀμέσως τὴν ἐξίσωσιν ἢ τὰς ἐξισώσεις ἑνὸς προβλήματος.

Ἐν τούτοις δυνάμεθα νὰ ἀκολουθοῦμεν γενικῶς τὴν κάτωθι πορείαν πρὸς εὕρεσιν τῆς ἐξισώσεως τοῦ προβλήματος.

Ἐξετάζομεν μετὰ προσοχῆς τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος. Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη, δηλ. ὅτι εὑρήκαμεν τὸν ἄγνωστον τοῦ προβλήματος. Σημειώνομεν ἔπειτα τὴν σειρὰν τῶν πράξεων, ποὺ συνδέουν τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος μὲ τὸν ἄγνωστον κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥς νὰ ἠθέλαμεν νὰ ἐπαληθεύσωμεν, ὅτι ὁ ἐκλεγεὶς ἄγνωστος ἱκανοποιεῖ τοὺς ὅρους τῆς ἐκφωνήσεως τοῦ προβλήματος. Ἡ ἰσότης τὴν ὁποίαν θὰ εὕρωμεν κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον εἶναι ἡ ***ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος***.

Ὅταν σχηματίσωμεν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ προβλήματος, τότε ἡ λύσις του ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεώς του.

225. Λύσις τῆς ἐξισώσεως τοῦ προβλήματος. Ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως τοῦ προβλήματος γίνεται ὅπως καὶ ἡ λύσις τῶν ἐξισώσεων

226. Ἐπαλήθευσις καὶ διερεύνησις τοῦ προβλήματος. Ἐὰν τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος εἶναι ἀριθμοί, δυνάμεθα εὐκόλως νὰ ἐπαληθεύσωμεν, ὅτι ἡ εὑρεθεῖσα λύσις τῆς ἐξισώσεως ἱκανοποιεῖ τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος. Εἶναι φανερόν, ὅτι, ἐὰν ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι ἀδύνατος ἢ ἀόριστος καὶ τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον ἢ ἀόριστον.

Ἐὰν τὰ δεδομένα ἑνὸς προβλήματος παρίστανται μὲ γράμματα ἢ ἐξαρτῶνται ἀπὸ μίαν παράμετρον, πρέπει νὰ κάμωμεν τὴν διερεύνησιν τοῦ προβλήματος, ὅπως θὰ δείξωμεν κατωτέρω.

Τὰ κάτωθι παραδείγματα θὰ μᾶς δείξουν τὴν πορείαν, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ἀκολουθοῦμεν διὰ τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων.

227. Πρόβλημα III. ***Τρία πρόσωπα Α, Β, Γ διενεμήθησαν ἕνα χρηματικὸν ποσόν. Ὁ Α ἔλαβε τὸ $\frac{1}{5}$ αὐτοῦ καὶ 100 δραχ. ἀκόμη, ὁ Β ἔλαβε τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ποσοῦ καὶ 90 δραχ. ἀκόμη καὶ ὁ Γ ἔλαβε τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ ποσοῦ καὶ 70 δραχ. ἀκόμη. Νὰ εὑρεθῇ πόσον ἦτο τὸ διανεμηθὲν ποσὸν καὶ πόσα ἔλαβε κάθε πρόσωπον.***

Ἔστω, ὅτι τὸ χρηματικὸν ποσὸν ἦτο x δραχμαί. Ὁ Α ἔλαβε τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ ποσοῦ καὶ 100 δραχ. ἀκόμη, δηλ. ἔλαβε $\frac{x}{5}+100$ δραχ. Ὁ Β ἔλαβε $\frac{x}{3}+90$ δραχ. καὶ ὁ Γ ἔλαβε $\frac{x}{4}+70$ δραχ.

Ἐπειδὴ τὰ τρία μερίδια ἔχουν ἄθροισμα ἴσον μὲ τὸ διανεμηθὲν ποσὸν x, θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\left(\frac{x}{5}+100\right)+\left(\frac{x}{3}+90\right)+\left(\frac{x}{4}+70\right)=x$$

Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτήν.

Ἐξαλείφομεν τὰς παρενθέσεις καὶ τοὺς παρονομαστὰς καὶ ἔχομεν κατὰ σειρὰν $12x+6000+20x+5400+15x+4200=60x$

ἢ $12x+20x+15x-60x=-6000-5400-4200$

ἢ $-13x=-15600$ ἢ $13x=15600$ · ἄρα $x=\frac{15600}{13}=1200$

Ὥστε τὸ διανεμηθὲν ποσὸν ἦτο 1200 δραχ.

Ὁ Α ἔλαβε $1200\cdot\frac{1}{5}+100=340$ δραχ.

Ὁ Β ἔλαβε $1200\cdot\frac{1}{3}+90=490$ δραχ.

Ὁ Γ ἔλαβε $1200\cdot\frac{1}{4}+70=370$ δραχ.

228. Πρόβλημα IV. ***Ἕνας ἐχώρισεν ἕνα κεφάλαιον 48000 δραχ. εἰς δύο μέρη καὶ ἐτόκισε τὸ πρῶτον μέρος πρὸς 6 % καὶ τὸ δεύτερον πρὸς 4 %· ἔλαβε δὲ καὶ ἀπὸ τὰ δύο κεφάλαια τόσον ἐτήσιον τόκον, ὅσον θὰ ἐλάμβανε, ἐὰν ἐτόκιζε ὁλόκληρον τὸ κεφάλαιόν του πρὸς 5,5 %. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ δύο μέρη τοῦ κεφαλαίου.***

Ἔστω, ὅτι τὸ ἕνα μέρος τοῦ κεφαλαίου εἶναι x δραχμαί, τότε τὸ ἄλλο μέρος θὰ εἶναι 48000—x δραχ.

Αἱ x δραχμαὶ τοκιζόμεναι πρὸς 6 % φέρουν, εἰς 1 ἔτος, τόκον

$$\frac{x\cdot 6\cdot 1}{100} \text{ δραχ. ἢ } \frac{6x}{100}$$

Αἱ 48000—x δρχ. τοκιζόμεναι πρὸς 4 % φέρουν, εἰς 1 ἔτος, τόκον

$$\frac{(48000-x)\cdot 4\cdot 1}{100} \text{ δραχ.}$$

Αἱ 48000 δραχ. τοκιζόμεναι πρὸς 5,5 % φέρουν, εἰς 1 ἔτος, τόκον

$$\frac{48000\cdot 5{,}5\cdot 1}{100} \text{ δραχ.}$$

Ἐπειδή, κατὰ τὸ πρόβλημα, οἱ τόκοι τῶν δύο μερῶν ἔχουν ἄθροισμα ἴσον μὲ τὸν τόκον τοῦ ἀρχικοῦ κεφαλαίου, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $\frac{6x}{100}+\frac{(48000-x)4}{100}=\frac{48000\cdot 5{,}5}{100}$

Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν καὶ ἔχομεν κατὰ σειρὰν

$6x+(48000-x)4=48000\cdot 5{,}5$ ἢ $6x+192000-4x=264000$

ἢ $6x-4x=-192000+264000$ ἢ $2x=72000$ ἄρα $x=36000$

Ὥστε τὸ ἕνα μέρος ἦτο 36000 δρχ. καὶ τὸ ἄλλο

$48000-36000=12000$ δραχ.

229. Πρόβλημα V. ***Ἕνα κρᾶμα ἀργύρου καὶ χαλκοῦ ζυγίζει εἰς τὸν ἀέρα 1160 γραμμάρια· ὅταν τὸ κρᾶμα αὐτὸ βυθισθῇ εἰς τὸ ὕδωρ, ζυγίζει μόνον 1040 γραμ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ βάρος τοῦ ἀργύρου καὶ τὸ βάρος τοῦ χαλκοῦ, ποὺ περιέχονται εἰς τὸ κρᾶμα, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ἀργύρου εἶναι 10,47 καὶ τοῦ χαλκοῦ 8,85.***

Γνωρίζομεν, ὅτι κάθε σῶμα, τὸ ὁποῖον βυθίζεται εἰς τὸ ὕδωρ χάνει ἀπὸ τὸ βάρος του ἕνα μέρος ἴσον μὲ τὸ βάρος τοῦ ἐκτοπιζομένου ὕδατος ('Αρχὴ τοῦ 'Αρχιμήδους).
Τὸ βάρος τοῦ ἐκτοπιζομένου ὕδατος εἶναι 1160 γρ.—1040 γρ.=120 γρμ.

Ἑπομένως ὁ **ὄγκος τοῦ κράματος** εἶναι 120 κυβικὰ ἑκατοστόμετρα.

Ἔστω x γραμ. τὸ βάρος τοῦ ἀργύρου· τότε τὸ βάρος τοῦ χαλκοῦ θὰ εἶναι $1160-x$ γραμ.

Ὁ ὄγκος τοῦ ἀργύρου εἶναι ἴσος μὲ $\dfrac{\text{βάρος}}{\text{ειδικ. βάρος}}$, δηλ. μὲ $\dfrac{x}{10{,}47}$.

Ὁ ὄγκος τοῦ χαλκοῦ εἶναι ἴσος μὲ $\dfrac{1160-x}{8{,}85}$. Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν δύο αὐτῶν μετάλλων εἶναι ἴσον μὲ 120 κ. ἐκ., θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν
$$\frac{x}{10{,}47}+\frac{1160-x}{8{,}85}=120.$$

Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτήν. Ἐξαλείφομεν παρονομαστὰς καὶ ἔχομεν κατὰ σειρὰν $8{,}85x+(1160-x)10{,}47=120\cdot 10{,}47\cdot 8{,}85$

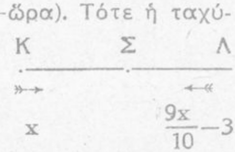
ἢ $8{,}85x+12145{,}20-10{,}47x=11119{,}14$ ἢ $8{,}85x-10{,}47x=-12145{,}2+11119{,}14$

ἢ $-1{,}62x=-1026{,}06$ ἢ $162x=102606$, ἄρα $x=\dfrac{102606}{162}=633{,}370$ γραμ.

Ὥστε τὸ βάρος τοῦ ἀργύρου ἦτο 633,370 γραμ. καὶ τοῦ χαλκοῦ
$$1160-633{,}370=526{,}63 \text{ γραμ.}$$

230. **Πρόβλημα VI.** ***Δύο ποδηλάται A καὶ B ἀναχωροῦν συγχρόνως ἐκ δύο πόλεων K καὶ Λ, αἱ ὁποῖαι ἀπέχουν 195 χιλιόμετρα, καὶ διευθύνονται πρὸς συνάντησίν των. Ἡ ταχύτης τοῦ B εἶναι κατὰ 3 χιλιόμετρα μικροτέρα τῶν $^9/_{10}$ τῆς ταχύτητος τοῦ A. Οἱ ποδηλάται συνηντήθησαν μετὰ 6 ὥρας ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεώς των. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ταχύτητες τῶν ποδηλατῶν, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ὁ B ἐστάθμευσε καθ' ὁδὸν ἐπὶ μίαν ὥραν.***

Ἔστω x ἡ ταχύτης τοῦ A (εἰς χιλιόμετρα—ὥρα). Τότε ἡ ταχύτης τοῦ B θὰ εἶναι $\dfrac{9x}{10}-3$ χιλιόμετρα.



Ὁ A, ἀφοῦ εἰς 1 ὥραν διανύει x χιλιόμετρα, εἰς 6 ὥρας θὰ διανύσῃ $x\cdot 6$ ἢ $6x$ χιλιόμετρα. Ὁ ποδηλάτης B ἐστάθμευσεν ἐπὶ μίαν ὥραν καὶ ἑπομένως ἐκινήθη ἐπὶ 1 ὥραν ὀλιγώτερον, δηλ. ἐκινήθη ἐπὶ 5 ὥρας· ἀφοῦ εἰς 1 ὥραν διανύει $\dfrac{9x}{10}-3$ χιλμ. εἰς 5 ὥρας θὰ διανύσῃ $\left(\dfrac{9x}{10}-3\right)5$ χιλμ.

Ὅταν οἱ δύο ποδηλάται συνηντήθησαν εἰς τὸ σημεῖον Σ, εἶχον διανύσει ὅλην τὴν ἀπόστασιν τῶν 195 χιλμ. ποὺ ἐχώριζε τὰς δύο πόλεις K καὶ Λ καὶ ἑπομένως θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν
$$6x+\left(\frac{9x}{10}-3\right)5=195.$$

Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτήν.

Ἐκτελοῦμεν πράξεις κλπ. καὶ ἔχομεν διαδοχικῶς

$$6x+\frac{45x}{10}-15=195 \quad \text{ἢ} \quad 60x+45x-150=1950$$

$$\text{ἢ} \quad 60x+45x=150+1950 \quad \text{ἢ} \quad 105x=2100$$

$$\text{ἄρα} \quad x=\frac{2100}{105}=20 \text{ χιλιόμετρα.}$$

Ὥστε ἡ ταχύτης τοῦ Α ἦτο 20 χιλιόμετρα τὴν ὥραν καὶ τοῦ Β ἦτο $\frac{9}{10}\cdot 20-3=15$ χιλιόμετρα τὴν ὥραν.

231. **Πρόβλημα VII. (*Γεωμετρίας*).** ***Δίδεται ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι ΒΓ=α, ΑΒ=ΑΓ=β. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς του ΑΒ ἕνα σημεῖον Δ τοιοῦτον, ὥστε, ἐὰν ἀχθῇ ἡ παράλληλος ΔΕ πρὸς τὴν βάσιν ΒΓ, νὰ ὁρίζῃ ἕνα τραπέζιον ΔΒΓΕ, τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος νὰ εἶναι τριπλασία τῆς περιμέτρου τοῦ τριγώνου ΑΔΕ.***

Τὸ ζητούμενον σημεῖον Δ θὰ ὁρισθῇ, ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν ἀπόστασίν του ΑΔ ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α.

Ἔστω λοιπόν, ὅτι ΑΔ=x.

Κατὰ τὸ πρόβλημα θὰ ἔχωμεν

περίμετρος τραπεζ. ΔΒΓΕ=3 περίμ. τριγ. ΑΔΕ

ἢ ΔΒ+ΒΓ+ΓΕ+ΕΔ=3 (ΑΔ+ΔΕ+ΕΑ) (1)

Ὑπολογίζομεν τὰς πλευρὰς τοῦ τραπεζίου καὶ τοῦ τριγώνου συναρτήσει τῶν α, β καὶ x.

Ἐδῶ εἶναι

$$ΔΒ=ΕΓ=β-x, \quad ΒΓ=α, \quad ΑΔ=ΑΕ=x$$

Ὑπολογίζομεν τὴν πλευρὰν ΔΕ. Ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΔΕ καὶ ΑΒΓ ἔχομεν

$$\frac{ΔΕ}{ΒΓ}=\frac{ΑΔ}{ΑΒ} \quad \text{ἢ} \quad \frac{ΔΕ}{α}=\frac{x}{β} \quad \text{ἢ} \quad ΔΕ=\frac{αx}{β}.$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὰ ΔΒ, ΒΓ, ... μὲ τὰ ἴσα των καὶ ἔχομεν

$$(β-x)+α+(β-x)+\frac{αx}{β}=3\left(x+\frac{αx}{β}+x\right)$$

Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτήν.

Ἐκτελοῦμεν πράξεις κλπ. καὶ ἔχομεν κατὰ σειρὰν

$$β-x+α+β-x+\frac{αx}{β}=3x+\frac{3αx}{β}+3x$$

$$\text{ἢ} \quad β^2-βx+αβ+β^2-βx+αx=3βx+3αx+3βx$$

$$\text{ἢ} \quad -βx-βx+αx-3βx-3αx-3βx=-β^2-αβ-β^2$$

$$\text{ἢ} \quad -8βx-2αx=-2β^2-αβ \quad \text{ἢ} \quad 8βx+2αx=β(2β+α) \quad \text{ἢ} \quad 2x(4β+α)=β(2β+α)$$

Ἐπειδὴ τὸ 4β+α εἶναι διάφορον τοῦ μηδενὸς ἔχομεν $x=\frac{β(2β+α)}{2(4β+α)}$

232. **Προβλήματα ἀδύνατα, προβλήματα ἀόριστα.** Τὰ προηγούμενα προβλήματα εἶχον ἐκλεγῇ κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε νὰ ἔχουν μίαν λύσιν καὶ μίαν μόνον.

Τὰ κατωτέρω παραδείγματα θὰ μᾶς δείξουν πῶς ἕνα πρόβλημα τοῦ πρώτου βαθμοῦ δύναται νὰ εἶναι **ἀδύνατον,** δηλ. νὰ μὴ ἔχῃ καμμίαν λύσιν, ἢ νὰ εἶναι **ἀόριστον,** δηλ. νὰ ἔχῃ ἀπείρους λύσεις.

233. Πρόβλημα I. ***Νὰ εὑρεθῇ ἕνας ἀριθμός, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ἥμισύ του καὶ τὸ τρίτον του εἶναι ἴσον μὲ τὸ πενταπλάσιον τοῦ ἕκτου τοῦ ἀριθμοῦ καὶ μὲ 12 ἀκόμη.***

Ἔστω x ὁ ζητούμενος ἀριθμός.

Κατὰ τὸ πρόβλημα ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=\frac{5x}{6}+12 \qquad (1)$$

Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν καὶ ἔχομεν κατὰ σειρὰν

$$3x+2x=5x+72 \quad \text{ἢ} \quad 3x+2x-5x=72 \quad \text{ἢ} \quad 0x=72$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ ἐξίσωσις (1) εἶναι ἀδύνατος· ἄρα καὶ τὸ πρόβλημα εἶναι **ἀδύνατον.**

234. Πρόβλημα II. ***Δώδεκα ἄνδρες καὶ γυναῖκες ἐξώδευσαν ἐν ὅλῳ εἰς μίαν ἐκδρομὴν 87000 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες καὶ πόσαι αἱ γυναῖκες, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ἕκαστος τῶν ἀνδρῶν ἐξώδευσε 7000 δραχ. καὶ ἑκάστη τῶν γυναικῶν 5000 δραχ.***

Ἔστω, ὅτι οἱ ἄνδρες ἦσαν x, τότε αἱ γυναῖκες θὰ ἦσαν $12-x$.

Ἐπειδὴ ἕκαστος τῶν ἀνδρῶν ἐξώδευσε 7000 δραχ., οἱ x ἄνδρες ἐξώδευσαν $7000\cdot x$ ἢ $7000x$ δραχ. Ἐπειδὴ ἑκάστη τῶν γυναικῶν ἐξώδευσε 5000 δραχ. αἱ $12-x$ γυναῖκες ἐξώδευσαν $5000(12-x)$ δραχ.

Ἐπειδὴ τὰ ἔξοδα τῶν ἀνδρῶν καὶ τῶν γυναικῶν ἦσαν 87000 δραχ. ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $\quad 7000x+5000(12-x)=87000.$

Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν καὶ ἔχομεν κατὰ σειρὰν

$$7000x+60000-5000x=87000 \quad \text{ἢ} \quad 7000x-5000x=-60000+87000$$

$$\text{ἢ} \quad 2000x=27000 \qquad \text{ἄρα} \quad x=\frac{27000}{2000}=13\frac{1}{2}.$$

Ἡ εὑρεθεῖσα τιμὴ τοῦ x εἶναι ἀπαράδεκτος, διότι, κατὰ τὴν φύσιν τοῦ προβλήματος, ἡ τιμὴ τοῦ x ἔπρεπε νὰ εἶναι ἀκεραία. Τὸ δοθὲν λοιπὸν πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον.

235. Πρόβλημα III. ***Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος ἑνὸς ὀρθογωνίου, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ἄθροισμά των εἶναι 30 μέτρα καὶ ὅτι, ἐὰν αὐξήσωμεν κατὰ 5 μέτρα τὴν βάσιν του καὶ κατὰ 4 μέτρα τὸ ὕψος του τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου αὐξάνει κατὰ 100 τετρ. μέτρα.***

Ἔστω, ὅτι ἡ βάσις τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι x μέτρα· τότε τὸ ὕψος του θὰ εἶναι $30-x$ μέτρα καὶ τὸ ἐμβαδόν του θὰ εἶναι $x(30-x)$ τετρ. μέτρα. Ἐὰν ἡ βάσις του γίνῃ $x+5$ μέτρα καὶ τὸ ὕψος του $(30-x)+4$ ἢ $34-x$ μέτρα, τὸ ἐμβαδόν του θὰ εἶναι $(x+5)(34-x)$ τετρ. μέτρα.

Ἐπειδὴ το δεύτερον ἐμβαδὸν εἶναι κατὰ 100 τετρ. μέτρα μεγαλύτερον τοῦ πρώτου, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$(x+5)(34-x)=x(30-x)+100$$

Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν καὶ ἔχομεν κατὰ σειρὰν

$$34x+170-x^2-5x=30x-x^2+100 \quad \text{ἢ} \quad 34x-x^2-5x-30x+x^2=-170+100$$

$$\text{ἢ} \quad -x=-70 \quad \text{ἢ} \quad x=70$$

Εὑρήκαμεν, ὅτι ἡ βάσις του εἶναι 70 μέτρ· ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἀπαράδεκτον διότι, κατὰ τὸ πρόβλημα ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος ἔπρεπε νὰ ἔχουν ἄθροισμα 30 μέτρ. δηλ. ἔπρεπε ἡ τιμὴ τοῦ x, δηλ. ἡ βάσις νὰ ἦτο μικροτέρα τῶν 30 μ. Τὸ πρόβλημα εἶναι λοιπὸν ἀδύνατον.

Ἐὰν ὑπολογίζαμεν τὸ ὕψος, θὰ εὑρίσκομεν, ὅτι τοῦτο εἶναι ἴσον μὲ 30—70=—40 μέτρ. καὶ ἡ *ἀρνητικὴ* αὐτὴ λύσις θὰ ἐδείκνυε ἀκόμη, ὅτι τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον.

236. Πρόβλημα IV. ***Εἰς τὰ $\frac{5}{6}$ ἑνὸς ἀριθμοῦ προσθέτομεν τὸν ἀριθμὸν 2. Ἀπὸ τὸ ἐξαγόμενον αὐτὸ ἀφαιροῦμεν τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ ἀριθμοῦ ηὐξημένον κατὰ 6 καὶ εὑρίσκομεν τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ἀριθμοῦ ἠλαττωμένου κατὰ 3. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι εἶναι ἕνα πολλαπλάσιον τοῦ 9 καὶ περιέχεται μεταξὺ τοῦ 50 καὶ 80.***

Ἔστω x ὁ ζητούμενος ἀριθμός.

Κατὰ τὸ πρόβλημα θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\left(\frac{5x}{6}+2\right)-\frac{1}{2}(x+6)=\frac{1}{3}(x-3) \qquad (1)$$

Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτήν.

Ἐκτελοῦμεν πράξεις κλπ. καὶ ἔχομεν κατὰ σειρὰν

$$\frac{5x}{6}+2-\frac{x}{2}-3=\frac{x}{3}-1 \quad \text{ἢ} \quad 5x+12-3x-18=2x-6$$

$$\text{ἢ} \quad 5x-3x-2x=-12+18-6 \quad \text{ἢ} \quad 0x=0 \quad \textit{(ἀοριστία)}$$

Ἡ ἐξίσωσις 0x=0 ἀληθεύει διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x. Δὲν συμβαίνει ὅμως τὸ αὐτὸ καὶ διὰ τὸ πρόβλημα, διότι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς πρέπει νὰ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 9 καὶ νὰ περιέχεται μεταξὺ τοῦ 50 καὶ 80 Ὥστε τὸ πρόβλημα ἔχει μόνον τὰς λύσεις

$$x=54, \quad x=63, \quad x=72$$

237. Παρατήρησις. Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω παραδείγματα παρατηροῦμεν ὅτι ἕνα πρόβλημα δύναται νὰ εἶναι ἀδύνατον, ὄχι μόνον, ὅταν ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι ἀδύνατος, ἀλλὰ καὶ ὅταν ἡ εὑρεθεῖσα τιμὴ τοῦ ἀγνώστου τῆς ἐξισώσεως τοῦ προβλήματος, δὲν ἐκπληροῖ ὡρισμένους ὅρους, οἱ ὁποῖοι πηγάζουν ἀπὸ αὐτὴν τὴν φύσιν τοῦ προβλήματος· π. χ. νὰ εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ ἀγνώστου ἀκεραία, θετική, ἢ νὰ περιέχεται μεταξὺ ὡρισμένων ὁρίων κλπ.

238. **Ἐξήγησις τῶν ἀρνητικῶν λύσεων.** Ὅταν λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν ἑνὸς προβλήματος καὶ εὕρωμεν μίαν ἀρνητικὴν λύσιν, συνάγομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον. Πολλάκις ὅμως δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν, ὡς λύσιν τοῦ προβλήματος, τὴν ἀρνητικὴν αὐτὴν λύσιν, ἂν τροποποιήσωμεν τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος.

239. **Πρόβλημα Ι.** ***Πατήρ τις εἶναι 56 ἐτῶν καὶ ὁ υἱός του 30 ἐτῶν. Μετὰ πόσα ἔτη ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς θὰ εἶναι διπλασία τῆς ἡλικίας τοῦ υἱοῦ;***

Ἔστω, ὅτι θὰ συμβῇ αὐτὸ μετὰ x ἔτη. Μετὰ x ἔτη ὁ πατὴρ θὰ εἶναι $56+x$ ἐτῶν καὶ ὁ υἱός του $30+x$.

Κατὰ τὸ πρόβλημα θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν $(56+x)=2(30+x)$ (1)

Λύομεν αὐτὴν καὶ εὑρίσκομεν $x=-4$.

Ἡ ἀρνητικὴ λύσις $x=-4$ δεικνύει, ὅτι τὸ πρόβλημα, ὅπως ἐδόθη, εἶναι ἀδύνατον, δηλ. ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς δὲν θὰ εἶναι ποτέ, *εἰς τὸ μέλλον* διπλασία τῆς ἡλικίας τοῦ υἱοῦ.

Ἂν ὅμως παραδεχθῶμεν νὰ παριστάνωμεν μὲ θετικὸν ἀριθμὸν τὸν μέλλοντα χρόνον καὶ μὲ ἀρνητικὸν τὸν παρελθόντα χρόνον, ἡ ἐξίσωσις (1) δύναται νὰ δώσῃ λύσιν εἰς τὸ πρόβλημα, ἀρκεῖ νὰ τροποποιήσωμεν τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος ὡς ἑξῆς:

Πατήρ τις εἶναι 56 ἐτῶν καὶ ὁ υἱός του 30. Πότε ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς θὰ εἶναι ἢ ἦτο διπλασία τῆς ἡλικίας τοῦ υἱοῦ;

Ἐπειδὴ τὸ πρόβλημα αὐτὸ ἔχει τὴν λύσιν $x=-4$, συνάγομεν, ὅτι ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς ἦτο διπλασία τῆς ἡλικίας τοῦ υἱοῦ πρὸ 4 ἐτῶν. Πράγματι πρὸ 4 ἐτῶν ὁ πατήρ του ἦτο 52 ἐτῶν καὶ ὁ υἱός του 26 ἐτῶν.

240. **Παρατήρησις.** Ὅταν ὁ ἄγνωστος ἑνὸς προβλήματος εἶναι ἕνα μέγεθος, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ μετρηθῇ κατὰ δύο ἀντιθέτους φοράς, εἶναι ἀνάγκη νὰ ἐκλέγωμεν τὴν θετικὴν φορὰν τοῦ ἀγνώστου μεγέθους.

Κατόπιν αὐτοῦ κάθε λύσις ἀρνητικὴ δεικνύει, ὅτι τὸ ἄγνωστον μέγεθος πρέπει νὰ ληφθῇ κατ᾽ ἀντίθετον φορὰν ἐκείνης, τὴν ὁποίαν ὑποθέσαμεν κατὰ τὴν κατάστρωσιν τοῦ προβλήματος.

241. **Πρόβλημα ΙΙ.** ***Ἕνας ἔμπορος, ὁ ὁποῖος ἔχει εἰς τὸ ταμεῖον του 15000 δρχ. κάμνει δύο ἐμπορικὰς πράξεις. Κατὰ τὴν πρώτην πρᾶξιν εἰσπράττει τὸ τριπλάσιον τῶν ὅσων μένουν εἰς τὸ ταμεῖον του μετὰ τὴν δευτέραν πρᾶξιν. Κατὰ τὴν δευτέραν πρᾶξιν ἐπλήρωσεν 22000 δραχ. Νὰ εὑρεθῇ τί ποσὸν εἰσέπραξεν ἢ ἐπλήρωσε τελικῶς;***

Ἔστω x τὸ ποσὸν ποὺ εἰσέπραξε ἢ ἐπλήρωσε· ὁ x θὰ παριστάνῃ εἴσπραξιν, ἐὰν εἶναι θετικὸς καὶ πληρωμήν, ἐὰν εἶναι ἀρνητικός. Εἰς τὸ τέλος τῆς δευτέρας πράξεως τὸ ταμεῖον θὰ ἔχῃ $15000+x$.

Κατὰ τὴν πρώτην πρᾶξιν εἰσέπραξε $3(15000+x)$ καὶ ἑπομένως τὸ ταμεῖον θὰ ἔχῃ $15000+3(15000+x)$ δρχ. Ὅταν πληρώσῃ 22000 δραχ. θὰ μείνουν εἰς τὸ ταμεῖον $15000+3(15000+x)-22000$ δρχ.

Ἐπειδὴ τὸ ποσὸν αὐτὸ παριστάνει τὰ χρήματα, ποὺ ἔμειναν εἰς τὸ ταμεῖον μετὰ τὴν δευτέραν πρᾶξιν, δηλ. παριστάνει τὸ ποσὸν $15000+x$, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$15000+3(15000+x)-22000=15000+x$$

Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν καὶ ἔχομεν κατὰ σειρὰν

$$15000+45000+3x-22000=15000+x$$

ἢ $3x-x=-15000-45000+22000+15000$

ἢ $2x=-23000$ ἄρα $x=-11500$

Ὥστε τελικῶς ὁ ἔμπορος ἐπλήρωσεν 11500 δραχ.

1/3 ΠΡ

ΠΡ2ΩΝ

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΕΝΑ ΑΓΝΩΣΤΟΝ

Α΄ Ὁμάς. *483.* Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ διπλάσιον αὐξηθὲν κατὰ 5 ἰσοῦται μὲ τὸ τριπλάσιον αὐτοῦ μεῖον 19.

484. Πατήρ τις εἶναι 58 ἐτῶν καὶ ἔχει υἱὸν 27 ἐτῶν. Μετὰ πόσα ἔτη ὁ πατὴρ θὰ ἔχῃ διπλασίαν ἡλικίαν τῆς ἡλικίας τοῦ υἱοῦ του;

485. Πατήρ τις εἶναι κατὰ 25 ἔτη μεγαλύτερος τοῦ υἱοῦ του. Πρὸ 6 ἐτῶν τὸ ἄθροισμα τῶν ἡλικιῶν των ἦτο 43 ἐτῶν. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς καὶ τοῦ υἱοῦ.

486. Ἔμπορος εἶχε δύο τεμάχια ὑφάσματος. Τὸ πρῶτον ἦτο τριπλάσιον τοῦ δευτέρου. Ἀπὸ τὸ πρῶτον ἐπώλησε 36 μέτρα καὶ ἀπὸ τὸ δεύτερον 4 μέτρα καὶ οὕτω τὰ τεμάχια ἔγιναν ἴσα κατὰ τὸ μῆκος. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος ἑκάστου τεμαχίου.

487. Δύο βαρέλια περιέχουν τὴν αὐτὴν ποσότητα οἴνου· ἐξάγομεν 34 ὀκ. ἐκ τοῦ πρώτου καὶ 80 ὀκ. ἐκ τοῦ δευτέρου καὶ μένει διπλασία ποσότης οἴνου εἰς τὸ πρῶταν βαρέλιον ἢ εἰς τὸ δεύτερον. Πόσας ὀκάδας οἴνου περιεῖχε ἕκαστον βαρέλιον;

Β΄ Ὁμάς. *488.* Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὰ $\frac{2}{3}$ καὶ τὰ $\frac{3}{4}$ κάμνουν 170;

489. Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἐλαττούμενος κατὰ τὸ ἥμισυ αὐτοῦ καὶ κατὰ 8, δίδει τὸ τετραπλάσιον τοῦ ὀγδόου αὐτοῦ ἠλαττωμένον κατὰ 2. ΑΔ

490. Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος προστιθέμενος εἰς τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{6}{17}$, τὸ κάμνει ἴσον μὲ $\frac{1}{3}$.

491. Ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{29}{42}$ διὰ νὰ γίνῃ τὸ κλάσμα ἴσον μὲ 0,5;

492. Ἕνας πατὴρ εἶναι 27 ἐτῶν καὶ ἡ κόρη του 3 ἐτῶν. Μετὰ πόσα ἔτη ἡ ἡλικία τῆς κόρης θὰ εἶναι ἴση μὲ τὸ τέταρτον τῆς ἡλικίας τοῦ πατρός της;

493. Πατήρ τις εἶναι 35 ἐτῶν, ὁ υἱός του 15 ἐτῶν καὶ ἡ κόρη του 10 ἐτῶν. Μετὰ πόσα ἔτη ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς θὰ ἔχῃ λόγον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἡλικιῶν τῶν δύο τέκνων του ἴσον μὲ $\frac{8}{7}$.

494. Νὰ εὑρεθῇ ἀκέραιος ἀριθμός, ὁ ὁποῖος διαιρούμενος διὰ 7 ἢ 9 ἀφήνει ὑπόλοιπον 3, τὰ δὲ πηλίκα διαφέρουν κατὰ 4.

495. Νὰ εὑρεθοῦν τρεῖς διαδοχικοὶ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ καὶ τοιοῦτοι ὥστε, τὸ ἥμισυ τοῦ μικροτέρου καὶ τὸ τέταρτον τοῦ μεγαλυτέρου νὰ ἀποτελοῦν τὰ $\frac{7}{9}$ τοῦ μεταξὺ αὐτῶν ἀριθμοῦ.

496. Ἔμπορος ἔχει ὕφασμα τῶν 8000 δρχ. κατὰ μέτρον. Πωλεῖ τὸ ἥμισυ πρὸς 8500 δρχ., τὸ τρίτον πρὸς 7500 δρχ. καὶ τὸ ὑπόλοιπον πρὸς 9000 δρχ. καὶ κερδίζει οὕτω 15000 δρχ. Πόσων μέτρων ἦτο τὸ ὕφασμα,

497. Ὁ μαθηματικὸς Διόφαντος ἔζησε τὸ ἕκτον τῆς ζωῆς του ὡς παιδίον, τὸ δωδέκατον αὐτῆς ὡς νεανίας, τὸ ἕβδομον αὐτῆς μετὰ τὸν γάμον του καὶ 5 ἔτη ὅτε ἀπέκτησε υἱόν, ὅστις ἔζησε τὸ ἥμισυ ἢ ὅσον ὁ πατήρ του· ἔζησε δὲ ἀκόμη 4 ἔτη μετὰ τὸν θάνατον τοῦ υἱοῦ του. Πόσα ἔτη ἔζησεν ὁ Διόφαντος;

IV *Ὁμάς. 498.* Νὰ χωρισθῇ ὁ 240 εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε τὸ πηλίκον μερῶν νὰ ἰσοῦται μὲ $\frac{3}{7}$.

499. Νὰ χωρισθῇ ὁ ἀριθμὸς 205 εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε τὸ μεγαλύτερον διαιρεθὲν διὰ τοῦ μικροτέρου, νὰ δίδῃ πηλίκον 3 καὶ ὑπόλοιπον 25.

500. Εἰς μίαν ἐκδρομὴν οἱ ἄνδρες ἦσαν τριπλάσιοι τῶν γυναικῶν. Μετὰ τὴν ἀναχώρησιν τεσσάρων ἀνδρῶν μετὰ τῶν συζύγων των ἔμειναν ἑπταπλάσιοι ἄνδρες τῶν γυναικῶν. Πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες καὶ πόσαι αἱ γυναῖκες;

501. Χωρικὴ ἐσκόπευε νὰ πωλήσῃ ὅσα αὐγὰ εἶχε πρὸς 0,500 δραχ. ἕκαστον· ἐπειδὴ ἔσπασαν 3, ἐπώλησε τὰ ὑπόλοιπα πρὸς 0,600 δραχ. καὶ δὲν ἐζημιώθη. Πόσα εἶχεν ἐξ ἀρχῆς;

502. Χωρικός τις ἐρωτηθεὶς πόσα πρόβατα καὶ πόσας ὄρνιθας ἔχει ἀπήντησεν ὡς ἑξῆς: «Τὰ ζῶα μου ἔχουν ἐν ὅλῳ 30 κεφάλια καὶ 72 πόδια». Πόσα πρόβατα καὶ πόσας ὄρνιθας εἶχε ὁ χωρικός;

503. Ἠγόρασέ τις 12 πήχεις ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος. Ἐὰν ἡ τιμὴ τοῦ πήχεως ἦτο κατὰ 2500 δραχ. μικροτέρα, θὰ ἠγόραζε μὲ τὸ αὐτὸ ποσὸν 3 πήχεις περισσότερον. Πόσον ἐτιμᾶτο ὁ πῆχυς;

504. Ὑπηρέτης λαμβάνει ἐτήσιον μισθὸν 3 600 000 δρχ. καὶ μίαν ἐνδυμασίαν. Ἂν διὰ 8 μῆνας ἔλαβε 2 740 000 μόνον πόσον ἐτιμᾶτο ἡ ἐνδυμασία;

505. Δύο ἐργάται εἰργάσθησαν ὁ μὲν πρῶτος ἐπὶ 27 ἡμέρας, ὁ δὲ δεύτερος ἐπὶ 21 ἡμέρας. Ὁ πρῶτος, ὁ ὁποῖος κερδίζει 2000 δραχ. περισσοτέρας ἡμερησίως ἀπὸ τὸν δεύτερον, ἔλαβεν 81000 δραχ. ἐπὶ πλέον τοῦ δευτέρου. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμερομίσθιον ἑκάστου ἐργάτου.

506. Μία μητέρα καὶ ἡ κόρη της ἐργάζονται εἰς ἕνα ἐργοστάσιον γυναικείων εἰδῶν. Ἡ μητέρα ἐργάζεται ἐπὶ 60 ἡμέρας καὶ ἡ κόρη ἐπὶ 50 ἡμέρας. Ἡ μητέρα κερδίζει 1000 δραχ. ἡμερησίως περισσότερον τῆς κόρης της καὶ ἡ κόρη λαμβάνει 90000 δραχ. ὀλιγώτερον ἀπὸ τὴν μητέρα. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμερομίσθιον ἑκάστης.

507. Ἡ χωρητικότης βαρελίου Α ἔχει λόγον $\frac{13}{6}$ πρὸς τὴν χωρητικότητα ἄλλου βαρελίου Β. Ἐὰν τὰ βαρέλια εἶναι πλήρη καὶ ἀφαιρέσωμεν 50 ὀκάδες ἐκ τοῦ Α καὶ 100 ὀκάδ. ἐκ τοῦ Β, μένουν εἰς τὸ Α τριπλάσιαι ὀκάδες ἢ εἰς τὸ Β. Πόσας ὀκάδας χωρεῖ ἕκαστον βαρέλιον;

Δ΄ Ὁμάς. *508.* Νὰ εὑρεθοῦν δύο διαδοχικοὶ ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὰ τετράγωνα νὰ διαφέρουν κατὰ 51.

509. Δύο ἀριθμοὶ διαφέρουν κατὰ 5. Τὸ γινόμενον αὐτῶν εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τοῦ μεγαλυτέρου κατὰ 100. Ποῖοι εἶναι οἱ ἀριθμοί;

510. Διψηφίου ἀριθμοῦ τὸ ψηφίον τῶν μονάδων εἶναι διπλάσιον τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων. Ἐὰν ἐναλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν ψηφίων του προκύπτει ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ πρώτου κατὰ 36. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμός;

511. Τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων διψηφίου ἀριθμοῦ εἶναι 12. Ἐὰν ἐλαττωθῇ οὗτος κατὰ 18 προκύπτει ὁ δι᾽ ἐναλλαγῆς τῶν ψηφίων του εὑρισκόμενος ἀριθμός. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμός;

Ε΄ Ὁμάς. *512.* Ἐδαπάνησέ τις τὸ $\frac{1}{3}$ καὶ τὸ $\frac{1}{5}$ τῶν χρημάτων του καὶ ἔμειναν 56000 δραχμαί. Πόσας δραχμὰς εἶχεν;

513. Τρεῖς ἀριθμοὶ ἔχουν ἄθροισμα 70. Ὁ δεύτερος διαιρούμενος διὰ τοῦ πρώτου δίδει πηλίκον 2 καὶ ὑπόλοιπον 1, ὁ τρίτος διαιρούμενος διὰ τοῦ δευτέρου δίδει πηλίκον 3 καὶ ὑπόλοιπον 3. Ποῖοι εἶναι οἱ ἀριθμοί;

514. Τρεῖς ἄνθρωποι ἐμοιράσθησαν ἕνα χρηματικὸν ποσόν. Ὁ πρῶτος ἔλαβε τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ποσοῦ πλὴν 50000 δρχ.· ὁ δεύτερος ἔλαβε τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτοῦ καὶ ὁ τρίτος τὸ ἥμισυ αὐτοῦ πλὴν 300000 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ ποῖον ἦτο τὸ ποσὸν καὶ τὸ μερίδιον ἑκάστου.

515. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἡλικιῶν τριῶν προσώπων εἶναι 100 ἔτη. Ἡ ἡλικία τοῦ μεγαλυτέρου εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἡλικιῶν τῶν δύο ἄλλων καὶ ἡ ἡλικία τοῦ νεωτέρου εἶναι κατὰ 10 ἔτη μικροτέρα τῆς ἡλικίας τοῦ δευτέρου. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἡλικίαι τῶν τριῶν προσώπων.

516. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἡλικίαι δύο προσώπων, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι πρὸ 4 ἐτῶν ἡ ἡλικία τοῦ πρώτου ἦτο διπλασία τῆς ἡλικίας τοῦ δευτέρου καὶ ὅτι μετὰ 6 ἔτη ἡ ἡλικία τοῦ δευτέρου θὰ εἶναι τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς ἡλικίας τοῦ πρώτου.

517. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἡλικίαι τριῶν προσώπων Α, Β, Γ, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἡλικιῶν εἶναι ἴσον μὲ 59 ἔτη· ὅτι ὁ Β εἶναι κατὰ 3 ἔτη μεγαλύτερος τοῦ Α καὶ ὁ Γ κατὰ 4 ἔτη μικρότερος τοῦ Α.

518. Εἰς μίαν ἐκδρομὴν ἔλαβον μέρος 30 ἄτομα, ἄνδρες γυναῖκες καὶ παιδία. Ὁ ἀριθμὸς τῶν γυναικῶν ἦτο ἴσος μὲ τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἀνδρῶν, ὁ δὲ ἀριθμὸς τῶν παιδίων ἦτο τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἀνδρῶν καὶ γυναικῶν μαζί. Πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες, αἱ γυναῖκες καὶ τὰ παιδία;

519. Ἔμπορος ἠγόρασε ἐμπορεύματα, ἀντὶ 3 400 000 δρχ. Ἐὰν ἐπώλει αὐτὰ πρὸς 3500 δρχ. τὴν ὀκᾶν θὰ ἔχανε τόσα ὅσα ἐκέρδιζε, ἐὰν τὰ ἐπώλε πρὸς 5 000 δραχ. τὴν ὀκᾶν. Πόσας ὀκάδας ἐμπορευμάτων ἠγόρασε;

520. Ἔμπορος ἐπώλησεν ἕνα ὕφασμα πρὸς 7500 δρχ. τὸν πῆχυν καὶ ἐκέρδισεν οὕτω 900[illegible] δρχ. Ἐὰν ἐπώλει τὸ ὕφασμα κατὰ 20[illegible] δραχ. εὐθυνότερον θὰ ἐζημιοῦτο 300[illegible] δρχ. Πόσων πήχεων ἦτο τὸ ὕφασμα;

521. Τὰ ἔσοδα ἑνὸς ἐμπόρου ἐκ μιᾶς ἐπιχειρήσεως ἀνέρχονται κατ' ἔτος εἰς τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ κεφαλαίου, τὸ ὁποῖον κατέχει εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ ἔτους, τὰ δὲ ἔξοδά του εἰς τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτοῦ τοῦ κεφαλαίου. Μετὰ δύο ἔτη ὁ ἔμπορος εἶχε κερδίσει 9 100 000 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἀρχικὸν κεφάλαιον τοῦ ἐμπόρου.

522. Ἠγόρασέ τις οἶνον πρὸς 32[illegible] δρχ. τὴν ὀκᾶν καὶ ἔλαιον πρὸς 12[illegible] δρχ. τὴν ὀκᾶν. Ὁ ἀριθμὸς τῶν ὀκάδων τοῦ οἴνου ὑπερβαίνει κατὰ 40 ὀκ. τὸν ἀριθμὸν τῶν ὀκάδων τοῦ ἐλαίου καὶ τὸ πληρωθὲν ποσὸν διὰ τὸ ἔλαιον ὑπερβαίνει κατὰ 576[illegible] δρχ. τὸ πληρωθὲν ποσὸν διὰ τὸν οἶνον. Νὰ εὑρεθῇ πόσας ὀκάδας οἴνου καὶ ἐλαίου ἠγόρασεν;

ΣΤ' Ὁμάς. 523. Βρύσις γεμίζει μιαν δεξαμενὴν εἰς **3** ὥρας· ἄλλη τὴν γεμίζει εἰς 4 καὶ τρίτη εἰς 6 ὥρας. Εἰς πόσας ὥρας τὴν γεμίζουν, ἂν ρέουν καὶ αἱ τρεῖς συγχρόνως;

524. Κρουνὸς γεμίζει δεξαμενὴν εἰς 12 ὥρας, ἄλλος γεμίζει αὐτὴν εἰς 10 ὥρας καὶ τρίτος ἀδειάζει αὐτὴν εἰς 30 ὥρας. Ἂν καὶ αἱ τρεῖς ἀνοιχθοῦν συγχρόνως εἰς πόσον χρόνον θὰ γεμίσῃ ἡ δεξαμενή;

525. Πατὴρ καὶ υἱὸς σκάπτουν ἕνα ἀγρὸν εἰς 6 ἡμέρας· ὁ πατὴρ μόνος του σκάπτει αὐτὸν εἰς 10 ἡμέρας. Εἰς πόσας ἡμέρας σκάπτει αὐτὸν ὁ υἱὸς μόνος του;

526. Ὁ Α δύναται νὰ ἐκτελέσῃ ἕνα ἔργον εἰς χρόνον δύο φορὰς ὀλιγώτερον ἐκείνου, ποὺ ἐχρειάζετο ὁ Β διὰ τὸ αὐτὸ ἔργον. Ὁ χρόνος ποὺ ἐχρειάζετο ὁ Β διὰ τὸ αὐτὸ ἔργον εἶναι τὰ δύο τρίτα τοῦ χρόνου ποὺ ἐχρειάζετο ὁ Γ διὰ τὸ αὐτὸ ἔργον. Καὶ οἱ τρεῖς μαζὶ δύνανται νὰ ἐκτελέσουν τὸ ἔργον εἰς 6 ἡμέρας. Νὰ εὑρεθῇ ὁ χρόνος, τὸν ὁποῖον χρειάζεται ἕκαστος διὰ νὰ ἐκτελέσῃ μόνος του τὸ ἔργον.

527. Κρουνὸς Α γεμίζει δεξαμενὴν εἰς 20 ὥρας. Δεύτερος παρέχει εἰς τὴν δεξαμενὴν τετραπλασίαν ποσότητα ὕδατος εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον. Ἐὰν ἀνοιχθοῦν συγχρόνως καὶ ἐπὶ 3 ὥρας καὶ οἱ δύο κρουνοί, ἡ δεξαμενή, εἰς τὴν ὁποίαν χύνεται τὸ ὕδωρ τῶν κρουνῶν, χρειάζεται ἀκόμη 400 ὀκ. διὰ νὰ γεμίσῃ. Πόσας ὀκάδας ὕδατος χωρεῖ ἡ δεξαμενή;

528. Ὁ Α ἐργάτης ἐξετέλεσε τὰ $\frac{3}{5}$ ἑνὸς ἔργου εἰς 12 ἡμέρας, ὁπότε ἔρχεται καὶ δεύτερος ἐργάτης Β καὶ ἐκτελοῦν μαζὶ τὸ ὑπόλοιπον ἔργον εἰς 3 ἡμέρας. Νὰ εὑρεθῇ εἰς πόσας ἡμέρας ἠδύνατο νὰ ἐκτελέσῃ τὸ ἔργον ὁ Β μόνος του;

529. Μία βρύσις παρέχει 11400 ὀκ. ὕδατος εἰς 6 ὥρας· δευτέρα βρύσις παρέχει 37500 ὀκ. ὕδατος εἰς 15 ὥρας καὶ τρίτη παρέχει 36000 ὀκ. εἰς 24 ὥρας. Ἐὰν ἀνοιχθοῦν συγχρόνως καὶ αἱ τρεῖς βρύσεις εἰς πόσας ὥρας θὰ γεμίσουν μίαν δεξαμενήν, ἡ ὁποία χωρεῖ 227300 ὀκ. ὕδατος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΚΟΥ ΚΑΙ ΥΦΑΙΡΕΣΕΩΣ

530. Ἐδάνεισέ τις τὰ $\frac{3}{5}$ τῶν χρημάτων του πρὸς 4 % καὶ τὸ ὑπόλοιπον πρὸς 5 % καὶ εἰσέπραξε μετὰ ἕνα ἔτος τόκον 154 ~~000~~ δρχ. Πόσα ἐδάνεισε πρὸς 4 % καὶ πόσα πρὸς 5 %;

531. Εἶχε τις 4 500 ~~000~~ δρχ. καὶ ἐτόκισε μέρος αὐτῶν πρὸς 6 % καὶ τὸ ὑπόλοιπον πρὸς 5 %. Μετὰ ἕνα ἔτος ἔλαβε καὶ ἐκ τῶν δύο κεφαλαίων τόκον 257 ~~000~~ δρχ. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ μέρη εἰς τὰ ὁποῖα διῃρέθη τὸ κεφάλαιον.

532. Ἐχώρισέ τις ἕνα κεφάλαιον 600 ~~000~~ δρχ. εἰς δύο μέρη καὶ ἐτόκισε τὸ πρῶτον πρὸς 4,5 % ἐπὶ 6 μῆνας καὶ τὸ δεύτερον πρὸς 4 % ἐπὶ 10 μῆνας. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ μέρη εἰς τὰ ὁποῖα ἐχωρίσθη τὸ κεφάλαιον, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ὁ τόκος τοῦ πρώτου μέρους ἦτο κατὰ 5125 δρχ. μεγαλύτερος τοῦ τόκου τοῦ δευτέρου μέρους.

533. Τοκίζει τις μὲ ἁπλοῦν τόκον τρία κεφάλαια: τὸ πρῶτον πρὸς 4 % ἐπὶ 5 ἔτη, τὸ δεύτερον πρὸς 5 % ἐπὶ 3 ἔτη καὶ 9 μῆνας καὶ τὸ τρίτον πρὸς 1 % ἐπὶ 2 ἔτη καὶ 8 μῆνας. Ἔλαβε δὲ συνολικῶς καὶ ἀπὸ τὰ τρία κεφάλαια τόκον 441 ~~000~~ δρχ. Ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ δεύτερον κεφάλαιον ἦτο διπλάσιον τοῦ πρώτου καὶ τὸ τρίτον τριπλάσιον τοῦ δευτέρου, νὰ εὑρεθοῦν τὰ κεφάλαια καὶ οἱ τόκοι ἑκάστου ἐξ αὐτῶν.

534. Δύο κεφάλαια διαφέρουν κατὰ 5000 δραχμάς· τὸ μεγαλύτερον ἐτοκίσθη πρὸς 4 % καὶ τὸ μικρότερον πρὸς 5 %. Ἐὰν εἰς τὰ κεφάλαια αὐτὰ προστεθοῦν ἀντιστοίχως καὶ οἱ ἐτήσιοι τόκοι των, προκύπτουν ἴσα κεφάλαια. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἀρχικὰ κεφάλαια.

535. Ἐχώρισέ τις ἕνα κεφάλαιον 480 000 δρχ. εἰς δύο μέρη καὶ ἐτόκισε τὸ πρῶτον πρὸς 6 % καὶ τὸ δεύτερον πρὸς 4 %. Ἔλαβε δὲ καὶ ἀπὸ τὰ δύο κεφάλαια, τόσον ἐτήσιον τόκον, ὅσον θὰ ἐλάμβανε, ἐὰν ἐτόκιζεν ὁλόκληρον τὸ κεφάλαιόν του πρὸς 5,5 %. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ δύο μέρη τοῦ κεφαλαίου.

536. Κατέθεσέ τις τὰ $\frac{3}{5}$ ἑνὸς κεφαλαίου του πρὸς 3,5 % καὶ τὸ ὑπόλοιπον πρὸς 5 %. Ἐὰν ἠλάττωνε τὸ κεφάλαιόν του κατὰ 20000 δρχ. καὶ ἐτόκιζε τὸ ὑπόλοιπον πρὸς 4,5 %, θὰ ηὔξανε τὸν ἐτήσιον τόκον κατὰ 540 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἀρχικὸν κεφάλαιον.

537. Εἶχε τις ἕνα χρηματικὸν ποσὸν καὶ διέθεσε τὸ $\frac{1}{4}$ διὰ νὰ ἀγοράσῃ μίαν οἰκίαν, ἡ ὁποία τοῦ ἀπέδιδε 10 % ἐπὶ τῆς ἀξίας της, τὸ $\frac{1}{3}$ διὰ τὴν ἀγορὰν ἀγροκτήματος, τὸ ὁποῖον τοῦ ἀπέδιδε 4,5 % καὶ τὸ ὑπόλοιπον διέθεσε δι' ἀγορὰν μετοχῶν, αἱ ὁποῖαι τοῦ ἐπέφερον μίαν ζημίαν 2 %. Νὰ εὑρεθῇ ποῖον ἦτο τὸ ἀρχικὸν ποσόν, ἐὰν τὸ καθαρὸν ἐτήσιον εἰσόδημά του ἦτο 1 900 ~~000~~ δρχ.

538. Ἐτόκισε τις κεφάλαιον 1 500 000 δρχ. πρὸς 8 % καὶ ἕνα ἄλλο κεφάλαιον 1 400 000 δρχ. πρὸς 6 %. Μετὰ πόσα ἔτη θὰ λάβῃ καὶ ἐκ τῶν δύο κεφαλαίων τόκον 612 000 δραχμάς;

539. Δύο γραμμάτια εἶναι πληρωτέα, τὸ πρῶτον μὲν μετὰ ἕνα ἔτος καὶ τὸ δεύτερον μετὰ 18 μῆνας. Τὸ δεύτερον γραμμάτιον ὑπερβαίνει τὸ πρῶτον κατὰ 45 000 δρχ. Ἐὰν τὰ γραμμάτια αὐτὰ πληρωθοῦν σήμερον, θὰ ἔχουν, πρὸς 5 %, συνολικὴν ἔκπτωσιν 48 750 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τῶν γραμματίων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΙΝΗΣΕΩΣ

Α΄ Ὁμάς. 540. Διὰ νὰ ἀνέλθῃ μία ἅμαξα εἰς τὴν κορυφὴν ἑνὸς λόφου καὶ νὰ ἐπιστρέψῃ εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἀναχωρήσεώς της, χρειάζεται, ἀφαιρουμένων τῶν στάσεων, μίαν καὶ ἡμίσειαν ὥραν. Ποῖον εἶναι τὸ μῆκος τῆς ὁδοῦ, ἡ ὁποία ὁδηγεῖ εἰς τὴν κορυφὴν τοῦ λόφου, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ ἅμαξα διανύει 7 χιλιόμετρα τὴν ὥραν κατὰ τὴν ἀνάβασιν καὶ 12 χιλιόμετρα τὴν ὥραν κατὰ τὴν κατάβασιν;

541. Ἕνας λεμβοῦχος διανύει 50 μέτρα κατὰ λεπτὸν τῆς ὥρας, ὅταν ἀκολουθῇ τὸ ρεῦμα ἑνὸς ποταμοῦ, καὶ 20 μέτρα, ὅταν κινῆται πρὸς τὴν ἀντίθετον διεύθυνσιν τοῦ ρεύματος. Μέχρι ποίας ἀποστάσεως πρέπει νὰ κατέλθῃ, κωπηλατῶν, διὰ νὰ δυνηθῇ νὰ ἐπιστρέψῃ τὴν 3 ὥραν 5 λ. ἀπογευματινὴν εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἀναχωρήσεως, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ἀνεχώρησε τὴν 10 ὥραν 45 λ. πρωϊνήν;

542. Ἔκ τινος τόπου ἀνεχώρησε πεζὸς διατρέχων 60 χιλιόμετρα καθ' ἡμέραν. Μετὰ 4 ἡμέρας ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ αὐτοῦ τόπου ἄλλος μὲ τὴν ἐντολὴν νὰ φθάσῃ τὸν πρῶτον εἰς 8 ἡμέρας. Πόσα χιλιόμετρα πρέπει νὰ διανύῃ αὐτὸς καθ' ἡμέραν;

543. Ἱππεὺς διήνυσε μίαν ἀπόστασιν μὲ ταχύτητα 12 χιλιομ. τὴν ὥραν. Ἐὰν ἐκινεῖτο μὲ ταχύτητα 8 χιλιομ. τὴν ὥραν θὰ ἐχρειάζετο 2 ὥρας περισσότερον διὰ νὰ διανύσῃ τὴν ἀπόστασιν αὐτήν. Πόσην ἀπόστασιν διήνυσε;

544. Θέλων τις νὰ κάμῃ ἕνα περίπατον, ἀναχωρεῖ ἐκ τῆς οἰκίας του μὲ μίαν ἅμαξαν, ἡ ὁποία διανύῃ 12 χλμ. τὴν ὥραν. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς οἰκίας του πρέπει νὰ ἐγκαταλείψῃ τὴν ἅμαξαν, ἵνα ἐπιστρέφων πεζῇ, μὲ ταχύτητα 4 χλμ. τὴν ὥραν εὑρίσκεται εἰς τὴν οἰκίαν του μετὰ 5 ὥρας ἀπὸ τῆς ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεώς του ἐξ αὐτῆς.

545. Δύο ποδηλάται Α καὶ Β, ἀπέχοντες μεταξύ των 49,600 χιλιόμετρα, ἐκκινοῦν συγχρόνως καὶ διευθύνονται ὁ ἕνας πρὸς τὸν ἄλλον. Ὅταν συνηντήθησαν, ὁ Α εἶχε διανύσει 1,6 χιλιόμετρα περισσότερον τοῦ Β. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ταχύτης ἑκάστου, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ὁ Α διήνυσε καθ' ὥραν 800 μέτρα περισσότερον τοῦ Β.

Β΄ Ὁμάς. 546. Δύο φίλοι ἀναχωροῦν συγχρόνως ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Α διὰ νὰ κάμουν ἕνα περίπατον 4 χιλιομέτρων. Ὁ πρῶτος βαδίζει μὲ ταχύτητα 2,5 χλμ. τὴν ὥραν καὶ ὁ δεύτερος μὲ ταχύτητα 3 χλμ. τὴν ὥραν. Ὁ δεύτερος φθάσας εἰς τὸ τέρμα Β τοῦ περιπάτου, ἐπιστρέφει διὰ τῆς αὐτῆς ὁδοῦ καὶ συναντᾷ τὸν φίλον του. Νὰ εὑρεθῇ ποῦ συνήντησε τὸν φίλον του;

547. Αὐτοκίνητον ἐκτελοῦν τὴν συγκοινωνίαν τῶν πόλεων Α καὶ Β, ἀνεχώρησεν ἐκ τῆς πόλεως Α, 4 ὥρας βραδύτερον ποδηλάτου, ὁ ὁποῖος μετέβαινεν ἐκ τῆς πόλεως Α εἰς τὴν Β, μὲ ταχύτητα 12 χιλιομέτρων τὴν ὥραν. Τὸ αὐτοκίνητον, διανύον 30 χιλιόμετρα τὴν ὥραν, ἔφθασεν εἰς τὴν πόλιν Β καὶ μετὰ παραμονὴν 1,5 ὥρας, ἐπιστρέφον πρὸς τὴν πόλιν Α, μὲ τὴν αὐτὴν ταχύτητα, συνήντησε τὸν ποδηλάτην εἰς ἀπόστασιν 30 χιλιομέτρων ἀπὸ τῆς πόλεως Β. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις ΑΒ τῶν δύο πόλεων..

548. Δύο ποδηλάται Α καὶ Β ἀναχωροῦν συγχρόνως ἐξ Ἀθηνῶν μὲ ταχύτητας 17,6 χιλιομέτρων καὶ 13,2 χιλιομέτρων τὴν ὥραν ἀντιστοίχως. Μετὰ πορείαν 3 ὡρῶν, ὁ πρῶτος, θέλων νὰ συναντήσῃ τὸν δεύτερον, ἐλαττώνει τὴν ταχύτητά του εἰς 10 χιλιόμετρα τὴν ὥραν. Νὰ εὑρεθῇ εἰς πόσην ἀπόστασιν ἀπὸ τῶν Ἀθηνῶν θὰ συναντήσῃ τὸν Β;

549. Πεζὸς καὶ ποδηλάτης ἀναχωροῦν συγχρόνως, ὁ μὲν ἐκ τοῦ σημείου Α, ὁ δὲ ἐκ τοῦ σημείου Β καὶ διευθύνονται πρὸς συνάντησίν των. Μετὰ 4 ὥρας ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεώς των συνηντήθησαν εἰς ἕνα σημεῖον Σ, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἀπὸ τὸ Α ἀπόστασιν ἴσην πρὸς τὸ τέταρτον τῆς ἀποστάσεως ΑΒ. Ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ὁ ποδηλάτης διανύει 9 χιλιόμετρα τὴν ὥραν περισσότερον τοῦ πεζοῦ, νὰ εὑρεθοῦν: 1ον Αἱ ταχύτητες τοῦ πεζοῦ καὶ ποδηλάτου καὶ 2ον ἡ ἀπόστασις ΑΒ.

550. Ἕνας ποδηλάτης ἀναχωρεῖ ἐξ ἑνὸς σημείου Α, μὲ ταχύτητα 8 χλμ. τὴν ὥραν, διὰ νὰ φθάσῃ εἰς ἄλλο σημεῖον Β. Ὅταν εἶχε διανύσει 24 χλμ. ἀναγκάζεται νὰ ἐπιστρέψῃ εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἀναχωρήσεως Α. Ἐπιστρέφει μὲ ταχύτητα 12 χλμ. τὴν ὥραν. Ἀναχωρεῖ ἔπειτα μὲ τὴν αὐτὴν ταχύτητα καὶ φθάνει εἰς τὸν προορισμόν του, δηλ. εἰς τὸ σημεῖον Β κατὰ τὴν ἐκ τῶν προτέρων ὁρισθεῖσαν ὥραν. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις ΑΒ.

551. Ποδηλάτης ἀναχωρεῖ ἀπό τινος τόπου, διανύων 12 χιλιόμετρα τὴν ὥραν· 3 ὥρας βραδύτερον ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ αὐτοῦ τόπου ἄλλος, διανύων 16 χιλιόμετρα τὴν ὥραν· 1ον. Πότε θὰ προηγῆται ὁ πρῶτος τοῦ δευτέρου κατὰ 12 χιλιόμετρα; 2ον. Πότε θὰ προηγῆται ὁ δεύτερος τοῦ πρώτου κατὰ 50 χλμ.;

552. Ποδηλάτης καὶ πεζοπόρος ἀναχωροῦν συγχρόνως, ὁ μὲν ἐκ τῆς πόλεως Α, ὁ δὲ ἐκ τῆς Β καὶ διευθύνονται πρὸς συνάντησίν των. Ὁ ποδηλάτης διανύει 16 χιλιόμετρα τὴν ὥραν καὶ ὁ πεζοπόρος 5 χιλιόμετρα τὴν ὥραν. Νὰ εὑρεθῇ μετὰ πόσον χρόνον θὰ συναντηθοῦν καὶ εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς πόλεως Α, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ ἀπόστασις ΑΒ εἶναι 105 χιλιόμετρα.

553. Δύο αὐτοκίνητα Α καὶ Β ἀναχωροῦν ἐκ τῆς αὐτῆς πόλεως Ο καὶ διευθύνονται ἀντιθέτως. Μετὰ 4 ὥρας τὰ αὐτοκίνητα ἀπέχουν μεταξύ των 312 χιλιόμετρα. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ταχύτητές των, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ ταχύτης τοῦ ἑνὸς εἶναι ἴση μὲ τὰ $\frac{6}{7}$ τῆς ταχύτητος τοῦ ἄλλου.

554. Δύο πόλεις Α καὶ Β, αἱ ὁποῖαι ἀπέχουν 270 χιλιόμετρα, συνδέονται διὰ σιδηροδρομικῆς γραμμῆς. Δύο ἁμαξοστοιχίαι ἀναχωροῦν ἐκ τῶν Α καὶ Β καὶ φθάνουν εἰς τὴν ἄλλην πόλιν. Ἡ ταχύτης τῆς μιᾶς εἶναι τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ταχύτητος τῆς ἄλλης. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ταχύτητες, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ ταχεῖα φθάνει εἰς τὸ τέρμα 2,5 ὥρας ἐνωρίτερον.

555. Ἐκ μιᾶς πόλεως Α ἀναχωρεῖ πεζοπόρος, ὁ ὁποῖος διανύει 20 χλμ. εἰς 5 ὥρας. Ἐκ μιᾶς ἄλλης πόλεως Β, ἡ ὁποία κεῖται 16 χλμ. ὄπισθεν αὐτῆς, ἀναχωρεῖ, 5 ὥρας βραδύτερον, ἕνας ἄλλος πεζοπόρος, ὁ ὁποῖος διανύει 16,5 χλμ. εἰς τρεῖς ὥρας. Πότε καὶ ποῦ ὁ δεύτερος πεζοπόρος, θὰ φθάσῃ τὸν πρῶτον;

556. Δύο αὐτοκίνητα Α καὶ Β, τὰ ὁποῖα ἀνεχώρησαν ταυτοχρόνως καὶ διευθύνονται πρὸς τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν, χωρίζονται ὑπὸ μιᾶς ἀποστάσεως 32 χλμ. Τὸ προπορευόμενον Β διανύει 42 χλμ. τὴν ὥραν, τὸ δὲ Α 58 χλμ. τὴν ὥραν. Πότε τὸ αὐτοκίνητον Α θὰ συναντήσῃ τὸ Β καὶ εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τὸ Α;

557. Ἕνας κλέπτης, διὰ νὰ ἀποφύγῃ τὴν σύλληψίν του, ἀναχωρεῖ τὴν 8 ὥραν καὶ 20λ πρωϊνὴν μὲ αὐτοκίνητον, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ διανύσῃ 192 χιλιόμετρα εἰς 5 ὥρας καὶ 20′. Ποίαν ταχύτητα πρέπει νὰ ἔχῃ ἕνα ἄλλο αὐτοκίνητον, τὸ ὁποῖον ἀνεχώρησε μὲ ἀστυνομικοὺς 1 ὥραν 30λ βραδύτερον, διὰ νὰ φθάσουν τὸν κλέπτην εἰς ἀπόστασιν 378 χιλιομέτρων ἀπὸ τὸ σημεῖον τῆς ἀναχωρήσεώς του;

558. Ἐκ μιᾶς πόλεως Α ἀναχωρεῖ μία ἁμαξοστοιχία καὶ διευθύνεται πρὸς τὴν πόλιν Β μὲ ταχύτητα 30 χιλιομ. τὴν ὥραν. Μετὰ 2 ὥρας, ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεως τῆς πρώτης ἁμαξοστοιχίας, ἀναχωρεῖ, ἐκ τῆς αὐτῆς πόλεως καὶ πρὸς τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν, δευτέρα ἁμαξοστοιχία μὲ ταχύτητα 40 χιλιομ. τὴν ὥραν. 1ον. Νὰ εὑρεθῇ μετὰ πόσας ὥρας ἡ δευτέρα ἁμαξοστοιχία θὰ φθάσῃ τὴν πρώτην καὶ εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τὴν Α; 2ον. Μετὰ πόσας ὥρας ἡ β′ θὰ προηγῆται τῆς α′ κατὰ 75 χιλιόμετρα;

559. Ἕνα αὐτοκίνητον πρέπει νὰ μεταβῇ ἐκ μιᾶς πόλεως Α εἰς ἄλλην Β μὲ ταχύτητα 64 χλμ. τὴν ὥραν. Ἐπὶ 3 ὥρας τὸ αὐτοκίνητον κινεῖται μὲ αὐτὴν τὴν ταχύτητα. Ἔπειτα, λόγῳ βλάβης τῆς μηχανῆς του, σταματᾷ ἐπὶ 50 λεπτὰ τῆς ὥρας· μετὰ τὴν διόρθωσιν τῆς βλάβης συνεχίζει τὴν διαδρομήν του, ἡ ὁποία αὐξάνεται κατὰ 31 χλμ., μὲ ταχύτητα μεγαλυτέραν τῆς πρώτης κατὰ 6 χλμ. καθ' ὥραν. Λόγῳ τῆς βλάβης τοῦ αὐτοκινήτου καὶ τῆς αὐξήσεως τῆς διαδρομῆς, ἡ τελικὴ βραδύτης ἀνῆλθεν εἰς 1 ὥραν 5 λεπτά. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις ΑΒ.

Γ′ Ὁμάς. *560.* Μία ἀλώπηξ, ἡ ὁποία κάμνει 2 πηδήματα κατὰ δευτερόλεπτον, ἔχει ἤδη κάμει 39 πηδήματα, ὅταν ἕνας σκύλος, ὁ ὁποῖος κάμνει 4 πηδήματα κατὰ δευτερόλεπτον, ἤρχισε νὰ τὴν καταδιώκῃ. Μετὰ πόσα δευτερόλεπτα ὁ σκύλος θὰ φθάσῃ τὴν ἀλώπεκα;

561. Ἕνας σκύλος καταδιώκει μίαν ἀλώπεκα, ἡ ὁποία ἀπέχει 60 πηδήματα αὐτῆς. Ὅταν αὐτὴ κάμνῃ 9 πηδήματα, ὁ σκύλος κάμνει 6 πηδήματα. Ἀλλὰ 3 πηδήματα αὐτοῦ ἰσοδυναμοῦν μὲ 7 ἐκείνης. Μετὰ πόσα πηδήματά του ὁ σκύλος θὰ φθάσῃ τὴν ἀλώπεκα:

562. Μετὰ πόσην ὥραν ἀπὸ τῆς μεσημβρίας συμπίπτουν οἱ δεῖκται τῶν ὡρῶν καὶ τῶν πρώτων λεπτῶν ὡρολογίου;

563. Πότε, μετὰ μεσημβρίαν, οἱ αὐτοὶ δεῖκται τοῦ προηγουμένου προβλήματος συμπίπτουν διὰ δευτέραν, τρίτην κλπ. φοράν;

564. Πότε, μετὰ μεσημβρίαν, οἱ δεῖκται τῶν ὡρῶν καὶ τῶν πρώτων λεπτῶν ὡρολογίου εὑρίσκονται ὁ ἕνας εἰς τὴν προέκτασιν τοῦ ἄλλου;

565. Πότε, μετὰ μεσημβρίαν, οἱ αὐτοὶ δεῖκται (τοῦ προηγουμένου προβλήματος) σχηματίζουν ὀρθὴν γωνίαν διὰ 1ην, 2αν, 3ην . . . φοράν;

566. Πότε, μετὰ μεσημβρίαν, οἱ δεῖκται τοῦ προηγουμένου προβλήματος σχηματίζουν γωνίαν α^0 διὰ πρώτην, 2αν, 3ην . . . φοράν;

567. Πότε, μετὰ μεσημβρίαν, ὁ δείκτης τῶν δευτερολέπτων διχοτομεῖ τὴν γωνίαν τῶν δύο ἄλλων δεικτῶν, ὡροδείκτου καὶ λεπτοδείκτου;

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕΙΞΕΩΣ

568. 40 ὀκάδες ἁλμυροῦ ὕδατος περιέχουν 3,4 ὀκ. ἅλατος. Πόσον καθαρὸν ὕδωρ πρέπει νὰ ρίψωμεν εἰς αὐτό, ἵνα 40 ὀκάδες τοῦ νέου μείγματος περιέχουν 2 ὀκάδας ἅλατος;

569. Πόσας λίτρας θαλασσίου ὕδατος πρέπει νὰ ἔχωμεν διὰ νὰ λάβωμεν 72 ὀκ. ἅλατος, ἐὰν μία λίτρα θαλασσίου ὕδατος ζυγίζῃ 1,026 χγρ. καὶ ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ θαλάσσιον ὕδωρ περιέχει ἅλας ἴσον μὲ τὸ $\frac{1}{40}$ τοῦ βάρους του.

570. Παντοπώλης ἀνέμειξε δύο εἴδη ἐλαίου· τοῦ πρώτου εἴδους ἡ ὀκᾶ τιμᾶται 10 800 δραχμὰς καὶ τοῦ δευτέρου 14 400 δραχμάς. Πόσας ὀκάδας πρέπει νὰ ἀναμείξῃ ἐξ ἑκάστου εἴδους διὰ νὰ σχηματίσῃ μεῖγμα 1200 ὀκάδ., τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ νὰ τιμᾶται 12 000 δραχμάς.

571. Δύο δοχεῖα χωρητικότητος 30 ὀκ. καὶ 20 ὀκ. εἶναι πλήρη, τὸ μὲν πρῶτον οἴνου, τὸ δὲ δεύτερον ὕδατος. Νὰ εὑρεθῇ πόσας ὀκάδας πρέπει νὰ μεταφέρωμεν ἀπὸ τὸ ἕνα δοχεῖον εἰς τὸ ἄλλο, ἐναλλάξ, ἵνα προκύψουν ἴσα μείγματα.

572. Ἕνα βαρέλιον περιέχει 120 ὀκ. οἴνου καὶ 180 ὀκ. ὕδατος· ἕνα δεύτερον βαρέλιον περιέχει 90 ὀκ. οἴνου καὶ 30 ὀκ. ὕδατος. Πόσας ὀκάδας πρέπει νὰ λάβωμεν ἐξ ἑκάστου βαρελίου διὰ νὰ σχηματίσωμεν ἕνα μεῖγμα, τὸ ὁποῖον νὰ περιέχῃ 70 ὀκάδ. οἴνου καὶ 70 ὀκ. ὕδατος;

573. Ἔχομεν δύο διαλύσεις ἅλατος· ἡ μία ἐσχηματίσθη μὲ 120 ὀκ. ὕδατος καὶ μὲ 18 ὀκ. ἅλατος· ἡ δὲ ἄλλη μὲ 90 ὀκ. ὕδατος καὶ 3 ὀκ. ἅλατος. Πόσας ὀκάδας πρέπει νὰ λάβωμεν ἐξ ἑκάστου εἴδους, διὰ νὰ σχηματίσωμεν ἕνα κρᾶμα 70 ὀκ. ὕδατος καὶ 7 ὀκάδων ἅλατος;

574. Ἠγόρασέ τις καφὲ πρὸς 60 000 δραχ. καὶ 100 000 δραχ. τὴν ὀκᾶν. Πόσας ὀκάδας πρέπει νὰ ἀναμείξῃ ἀπὸ τὸν καφὲν τῆς κατωτέρας ποιότητος μὲ 1 ὀκᾶν τῆς ἀνωτέρας ποιότητος, διὰ νὰ σχηματίσῃ μεῖγμα, τὸ ὁποῖον πωλῶν πρὸς 74 800 δραχ. τὴν ὀκᾶν, νὰ κερδίζῃ 10 % ἐπὶ ἑκάστης πωλουμένης ὀκάδος τοῦ μείγματος;

575. Ἔμπορος ἔχει ἀναμείξει 125 ὀκ. καφὲ τῶν 72 000 δραχμῶν κατ' ὀκᾶν, μὲ 165 ὀκ. ἄλλου εἴδους τῶν 48 000 δραχμ. κατ' ὀκᾶν. Πόσας ὀκάδας καφὲ πρέπει νὰ προσθέσῃ ἀπὸ τὴν πρώτην ποιότητα, ἵνα 84 ὀκάδες τοῦ νέου μείγματος περιέχουν 15 ὀκ. ἀπὸ τὴν δευτέραν ποιότητα. Νὰ προσδιορισθῇ καὶ ἡ τιμὴ τῆς ὀκᾶς τοῦ νέου μείγματος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

Α' Ὁμάς. *576.* Εἰς τὸ ἄκρον Α ἑνὸς μοχλοῦ ΑΒ μήκους 3 μέτρων ἔχομεν ἐξαρτήσει ἕνα βάρος Δ=50 χιλιογράμμων. Πόσον βάρος πρέπει νὰ ἐξαρτήσωμεν εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον Β διὰ νὰ ἰσορροπῇ ὁ μοχλός, ὅταν τὸ ὑπομόχλιον Υ ἀπέχῃ ἀπὸ τὸ Α 1,20 μέτρα;

577. Εἰς τὰ ἄκρα Α καὶ Β ἑνὸς μοχλοῦ μήκους 2 μέτρων ἔχουν ἐξαρτηθῇ βάρη 10 χιλιογράμμων καὶ 15 χιλιογράμμων. Ποῦ πρέπει νὰ τοποθετηθῇ τὸ ὑπομόχλιον διὰ νὰ ἰσορροπήσῃ ὁ μοχλός;

578. Τὸ βάρος σανίδος ἐκ ξύλου ἐλάτης εἶναι κατὰ 9,2 χιλιόγραμμα μικρότερον τοῦ βάρους τοῦ ἐκτοπιζομένου ὑπ' αὐτῆς ὕδατος. Νὰ εὑρεθῇ πόσον εἶναι τὸ βάρος τῆς σανίδος, ἐὰν τὸ εἰδικὸν βάρος τῆς ἐλάτης εἶναι 0,54.

579. Φελλὸς ἔχει ὄγκον 15 κυβικ. παλ. καὶ βάρος 3,6 χιλιογράμμων. Ποῖον τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ φελλοῦ.

580. Ἕνας ὄγκος πάγου ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μὲ βάσιν τετράγωνον πλευρᾶς 1,20 μ. Ἐὰν θέσωμεν ἐπ' αὐτοῦ ἕνα βάρος 75 χλγρ. καὶ τὸν θέσωμεν ἐντὸς ὕδατος, βυθίζονται τὰ $\frac{19}{20}$ τοῦ ὄγκου του. Νὰ προσδιορισθῇ τὸ ὕψος τοῦ πάγου, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ πυκνότης τοῦ πάγου εἶναι 0,92.

581. Διὰ νὰ μάθῃ τις νὰ κολυμβᾷ θέλει νὰ κατασκευάσῃ ζώνην ἐκ φελλοῦ τοιαύτην, ὥστε νὰ κρατῆται ὄρθιος ἐντὸς τοῦ ὕδατος, μὲ τὴν κεφαλὴν ἐκτὸς αὐτοῦ. Πόσον βάρος πρέπει νὰ ἔχῃ ἡ ζώνη, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι οὗτος ζυγίζει 60 χιλιόγραμμα, ὅτι τὸ βάρος τῆς κεφαλῆς του εἶναι 3 χιλιόγραμμα καὶ ὅτι τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ἐντὸς τοῦ ὕδατος σώματος εἶναι 1,02 καὶ τοῦ φελλοῦ 0,24.

582. Ἕνας κύλινδρος 12 ἑκατοστομέτρων εἶναι ἀνηρτημένος εἰς τὸν ἕνα δίσκον ἑνὸς ὑδροστατικοῦ ζυγοῦ. Ὅταν 3 ἑκ. τοῦ κυλίνδρου αὐτοῦ βυθίζωνται εἰς τὸ ὕδωρ, ζυγίζει 25 γραμ. καὶ ὅταν 8 ἑκ. αὐτοῦ βυθίζωνται εἰς τὸ ὕδωρ ζυγίζει 5 γραμ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ βάρος καὶ ἡ πυκνότης τοῦ κυλίνδρου.

583. Ὑποπτευόμεθα, ὅτι ἕνα χάλκινον ἀγαλμάτιον εἶναι κοῖλον ἐσωτερικῶς. Τὸ βάρος του εἰς τὸν ἀέρα εἶναι 523 γραμμάρια, εἰς δὲ τὸ ὕδωρ 447,5 γραμ. Ἐὰν ἡ πυκνότης τοῦ χαλκοῦ εἶναι 8,8 νὰ εὑρεθῇ, ἐὰν ἡ ὑποψία ἔχῃ βάσιν καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος εἰς κυβ. ἑκατοστόμετρα τῆς ἐσωτερικῆς κοιλότητος τοῦ ἀγαλματίου.

Β' Ὁμάς. 584. Τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ χρυσοῦ εἶναι 19, τοῦ δὲ χαλκοῦ 9. Πόσον χρυσὸν καὶ πόσον χαλκὸν πρέπει νὰ συντήξωμεν διὰ νὰ σχηματίσωμεν κρᾶμα 50 γραμ. εἰδικοῦ βάρους 15;

585. Κρᾶμα ἀργύρου καὶ κασσιτέρου ἔχει εἰδικὸν βάρος 8 καὶ ζυγίζει 5 χιλιόγραμμα. Πόσον ἄργυρον καὶ πόσον κασσίτερον περιέχει τὸ κρᾶμα αὐτό, ἐὰν γνωρίζωμεν ὅτι τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὑδραργύρου εἶναι 10,53 τοῦ δὲ κασσιτέρου 7,28;

586. Κρᾶμα ἀργύρου καὶ χαλκοῦ περιέχει 1845 γραμ. ἀργύρου περισσότερον τοῦ χαλκοῦ. Ἐὰν προσθέσωμεν εἰς τὸ κρᾶμα αὐτὸ ἄργυρον, βάρους ἴσου πρὸς τὸ τρίτον τοῦ βάρους τοῦ καθαροῦ ἀργύρου, τοῦ περιεχομένου εἰς τὸ κρᾶμα, λαμβάνομεν ἕνα νέον κρᾶμα τίτλου 0,835. Νὰ εὑρεθῇ τὸ βάρος καὶ ὁ τίτλος τοῦ ἀρχικοῦ κράματος.

587. Ἔχει τις ἕνα μεῖγμα νίτρου καὶ θείου βάρους 80 χλγρ. Ἡ ἀναλογία τοῦ μείγματος εἶναι 7 μέρη νίτρου καὶ 3 μέρη θείου. Πόσον νίτρον πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸ μεῖγμα, ἵνα λάβωμεν ἕνα νέον μεῖγμα, τὸ ὁποῖον νὰ περιέχῃ 11 μέρη νίτρου καὶ 4 μέρη θείου;

588. Χρυσοχόος ἔχει ἕνα κρᾶμα ἀργύρου τίτλου 0,850. Ἐὰν προσθέσῃ εἰς αὐτό, διὰ συντήξεως 640 γραμ. καθαροῦ ἀργύρου, λαμβάνει ἕνα κρᾶμα τίτλου 0,952. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ βάρος τοῦ πρώτου κράματος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

589. Ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ διαφορὰ τῶν ὀξειῶν γωνιῶν αὐτοῦ εἶναι 20°. Πόση εἶναι ἑκάστη τῶν γωνιῶν;

590. Ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἡ γωνία τῆς κορυφῆς εἶναι τὸ ἥμισυ τῶν παρὰ τὴν βάσιν γωνιῶν του· νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι του.

591. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ γωνίαι τετραπλεύρου, ἐὰν καθεμία εἶναι κατὰ 20° μεγαλυτέρα τῆς προηγουμένης της.

592. Πόσας πλευρὰς ἔχει κανονικὸν πολύγωνον, τοῦ ὁποίου ἑκάστη γωνία εἶναι 144°.

593. Πόσων μοιρῶν εἶναι ἑκάστη γωνία τετραπλεύρου, ἐὰν εἶναι μεταξύ των καθὼς οἱ ἀριθμοὶ 1, 2, 3, 4.

594. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς ἑνὸς κύκλου εἰς τὸν ὁποῖον μία χορδή του 42 ἑκ. ἔχει ἕνα βέλος 7 ἑκ.

595. Ἠγόρασέ τις ἕνα κῆπον σχήματος ὀρθογωνίου ἀντὶ 12 000 000 δρχ. Διὰ νὰ τὸν περιβάλλῃ μὲ συρματόπλεγμα ἐξώδευσε, πρὸς 10 000 δρχ. τὸ μέτρον, τὸ $\frac{1}{6}$ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς τοῦ κήπου. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαστάσεις τοῦ κήπου, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ μῆκος ἦτο μεγαλύτερον τοῦ πλάτους κατὰ 20 μ.

596. Ἡ περίμετρος ὀρθογωνίου εἶναι 120 μέτρα. Ἐὰν τὸ μῆκος του ἦτο 2,5 φορὰς μεγαλύτερον τοῦ πλάτους του, ἡ περίμετρος θὰ ἦτο κατὰ 20 μέτρα μεγαλυτέρα. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ διαστάσεις.

597. Αἱ διαστάσεις ἑνὸς ὀρθογωνίου εἶναι 10 μέτρ. καὶ 6 μέτρ. Ἐὰν αὐξήσωμεν τὴν βάσιν κατὰ 5 μέτρα, πόσον πρέπει νὰ αὐξηθῇ τὸ ὕψος, ἵνα τὸ νέον ὀρθογώνιον ἔχῃ ἐμβαδὸν διπλάσιον τοῦ πρώτου;

598. Τὸ μῆκος ἑνὸς ὀρθογωνίου εἶναι τριπλάσιον τοῦ πλάτους του. Ἐὰν αὐξήσωμεν τὰς διαστάσεις του κατὰ 4 μέτρα, τὸ ἐμβαδόν του αὐξάνει κατὰ 656 τετραγ. μέτρα. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου.

599. Ἕνας ὀρθογώνιος κῆπος, τοῦ ὁποίου τὸ πλάτος εἶναι $\frac{4}{5}$ τοῦ μήκους του, ἔχει ἐμβαδὸν 2400 τετρ. μέτρα περισσότερον ἑνὸς ἄλλου κήπου, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος εἶναι κατὰ 40 μέτρα μεγαλύτερον τοῦ μήκους τοῦ πρώτου καὶ τὸ πλάτος εἶναι κατὰ 40 μέτρα μικρότερον τοῦ πλάτους τοῦ πρώτου κήπου. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαστάσεις τῶν δύο κήπων.

600. Ὁ ἰδιοκτήτης ἑνὸς οἰκοπέδου σχήματος ὀρθογωνίου, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος εἶναι κατὰ 18 μέτρα μεγαλύτερον τοῦ πλάτους, θέλει νὰ σχηματίσῃ, γύρω ἀπὸ τὸν κῆπον καὶ εἰς τὸ ἐξωτερικὸν αὐτοῦ, μίαν δενδροστοιχίαν πλάτους 2,5 μέτρα. Πρὸς τοῦτο ἀναγκάζεται νὰ ἀγοράσῃ ἀπὸ τοὺς γείτονάς του 695 τετρ. μέτρα. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαστάσεις τοῦ οἰκοπέδου.

601. Δύο πλευραὶ ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἀπὸ 20 μ. Ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας ἡ ὁποία περιέχεται μεταξὺ τῶν δύο αὐτῶν πλευρῶν διαιρεῖ τὴν τρίτην πλευρὰν εἰς δύο μέρη, τὰ ὁποῖα διαφέρουν κατὰ 12 μ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τρίτη πλευρά.

602. Δίδεται ἕνα τετράγωνον πλευρᾶς ΑΒ=74 μέτρ. Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΑΒ λαμβάνομεν ἕνα μῆκος ΒΕ=13 μέτρα. Νὰ ἀχθῇ ἀπὸ τὸ σημεῖον Ε μία εὐθεῖα, ἡ ὁποία νὰ διαιρῇ τὸ τετράγωνον εἰς δύο ἰσοδύναμα τετράπλευρα.

603. Εἰς ἕνα ἰσοσκελὲς τραπέζιον γνωρίζομεν τὴν μεγάλην βάσιν 18 μ.

καὶ τὴν διαγώνιον 15 μ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μικρὰ βάσις, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ τραπέζιον αὐτὸ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἕνα ἡμικύκλιον ἀκτῖνος 2 μ.

604. Εἰς ἕνα τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι 63 ἑκ. καὶ τὸ ὕψος 54 ἑκ. ἐγγράφομεν ἕνα ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος εἶναι 116 ἑκ. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου αὐτοῦ.

605. Ἡ βάσις ΑΒ ἑνὸς ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ εἶναι 48 μ. καὶ τὸ ὕψος του ΑΔ=26 μ. Κατὰ πόσα μέτρα πρέπει νὰ προεκτείνωμεν τὴν ΑΒ μέχρι τοῦ Ε ἵνα τὸ τρίγωνον ΕΒΗ, ὅπου Η εἶναι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῆς ΕΔ καὶ τῆς ΒΓ, νὰ ἔχῃ ἐμβαδὸν ἴσον μὲ τὴν διαφορὰν τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο μερῶν ΑΒΗΔ καὶ ΔΗΓ;

606. Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι ΑΒ=12 ἑκ., ΒΓ=20 ἑκ., ΓΑ=18 ἑκ. Ἐπὶ τῆς ΑΒ λαμβάνομεν ἕνα σημεῖον Ζ καὶ φέρομεν τὰς ΖΜ καὶ ΜΕ παραλλήλους, ἀντιστοίχως, πρὸς τὰς ΑΓ καὶ ΑΒ. Ἡ ἐξωτερικὴ διχοτόμος τῆς γωνίας Α τέμνει τὴν διαγώνιον ΖΕ τοῦ τετραπλεύρου ΑΖΜΕ εἰς τὸ Θ. Νὰ ὁρισθῇ ἡ θέσις τοῦ σημείου Ζ ἐπὶ τῆς ΑΒ εἰς τρόπον ὥστε νὰ εἶναι ΕΘ=3ΘΖ.

607. Τραπεζίου ΑΒΓΔ ἡ μεγάλη βάσις εἶναι ΑΒ=105 μέτρα, ἡ μικρὰ βάσις ΓΔ=60 μέτρα καὶ τὸ ὕψος του ΔΗ=45 μέτρα. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς ΑΒ πρέπει νὰ φέρωμεν μίαν παράλληλον πρὸς τὰς βάσεις, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΔ εἰς τὸ Μ, τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ρ, τὴν ΒΔ εἰς τὸ Σ καὶ τὴν ΒΓ εἰς τὸ Ν καὶ τοιαύτην, ὥστε νὰ εἶναι ΜΡ=ΡΣ=ΣΝ; Ἐὰν εἶναι ΜΣ=2ΜΡ ἢ ΜΡ=2ΜΣ, ὑπάρχουν δύο τοιαῦται παράλληλοι. Νὰ ὑπολογισθῇ τό ἐμβαδὸν τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῶν δύο αὐτῶν παραλλήλων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΙΝ

Α΄ Ὁμάς. 608. Δύο ἐργολάβοι ἠγόρασαν 500 κυβικὰ μέτρα ἄμμου πρὸς 17 500 τὸ κυβικὸν μέτρον. Ὁ πρῶτος μετέφερε τὴν ἄμμον εἰς ἀπόστασιν 3 χιλιομέτρων, ὁ δὲ δεύτερος εἰς ἀπόστασιν 4 χιλιομέτρων. Τὰ ἔξοδα τῆς μεταφορᾶς τῆς ἄμμου ἀνῆλθον εἰς 5 000 δρχ. κατὰ κυβικὸν μέτρον καὶ κατὰ χιλιόμετρον. Ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ὁ δεύτερος ἐπλήρωσε 3 350 000 δραχ. περισσοτέρας τοῦ πρώτου διὰ τὴν ἀγορὰν καὶ μεταφορὰν τῆς ἄμμου, νὰ εὑρεθῇ πόσα κυβικὰ μέτρα ἄμμου ἠγόρασεν ἕκαστος καὶ πόσον ἐπλήρωσεν.

609. Γεωργὸς ἤρχισε νὰ καλλιεργῇ ἕνα ἀγρόν του· ὑπολογίζει δὲ ὅτι, ἐὰν καλλιεργῇ 90 τετραγ. μέτρα καθ᾿ ὥραν, θὰ δύναται νὰ τελειώσῃ τὴν καλλιέργειαν τοῦ ἀγροῦ του τὴν 6 ὥραν μ. μ. Ὅταν ἐτελείωσε τὸ ἥμισυ τῆς ἐργασίας του καταλαμβάνεται ὑπὸ ἀδιαθεσίας, ἡ ὁποία δὲν τοῦ ἐπιτρέπει νὰ καλλιεργῇ περισσότερα ἀπὸ 50 τετρ. μέτρα καθ᾿ ὥραν. Λόγῳ τῆς βραδύτητος αὐτῆς τελειώνει τὴν ἐργασίαν του τὴν 8 μ. μ. 1ον. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἀγροῦ καὶ 2ον ἡ ὥρα κατὰ τὴν ὁποίαν ἤρχισε τὴν ἐργασίαν του.

610. Ἕνα βαρέλιον περιέχει 500 ὀκάδας οἴνου Α ποιότητος καὶ ἕνα δεύτερον περιέχει 300 ὀκ. οἴνου Β ποιότητος. Θέλομεν νὰ ἐξαγάγωμεν ἐξ ἑκάστου βαρελίου τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ὀκάδων καὶ νὰ θέσωμεν εἰς τὸ πρῶτον βαρέλιον τὸν οἶνον, ποὺ ἐξήχθη ἀπὸ τὸ δεύτερον καὶ εἰς τὸ δεύτερον βαρέλιον τὸν οἶνον ποὺ ἐξήχθη ἀπὸ τὸ πρῶτον εἰς τρόπον, ὥστε εἰς τὰ δύο βαρέλια ἡ ἀναλογία τοῦ οἴνου τῆς Α ποιότητος πρὸς τὸν οἶνον τῆς Β ποιότητος νὰ εἶναι ἡ αὐτή. Πόσας ὀκάδας οἴνου πρέπει νὰ ἐξαγάγωμεν ἐξ ἑκάστου βαρελίου;

611. Ἕνας ἐπιχειρηματίας ἀγοράζει ἕνα κῆπον ἀντὶ 6 000 000 δρχ. τὸ στρέμμα. Μετὰ τὴν ἀγορὰν διαπιστώνει, ὅτι ὁ κῆπος ἦτο κατὰ 100 τετρ. μέτρα ὀλιγώτερον ἀπὸ ὅσα εἶχε πληρώσει. Ἐν τούτοις δὲν διαμαρτύρεται, διότι εὑρίσκει τὴν εὐκαιρίαν νὰ πωλήσῃ ἀμέσως τὸν κῆπον ἀντὶ 8 000 δρχ. τὸ τ. μέτρον. Ἐκ τῆς πωλήσεως αὐτῆς ἐκέρδισε 12 % ἐπὶ τῶν ὅσων εἶχε πληρώσει. Νὰ εὑρεθῇ ἡ πραγματικὴ ἐπιφάνεια τοῦ κήπου εἰς τετρ. μέτρα.

612. Ἠγόρασέ τις ἕνα κῆπον σχήματος ὀρθογωνίου, τοῦ ὁποίου τὸ πλάτος ἦτο τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ μήκους. Περιβάλλει αὐτὸν μὲ συρματόπλεγμα διὰ τὸ ὁποῖον ἐπλήρωσε, πρὸς 18000 δραχ. τὸ μέτρον, τὰ $\frac{7}{80}$ τῆς τιμῆς τῆς ἀγορᾶς τοῦ κήπου. Ἡ συνολικὴ δαπάνη τῆς ἀγορᾶς καὶ τοῦ συρματοπλέγματος ἦτο 31 320 000 δραχ. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ διαστάσεις τοῦ κήπου.

613. Δεξαμενὴ πληροῦται ὑπὸ δύο ἀνίσων κρουνῶν Α καὶ Β. Ὁ Α γεμίζει τὴν δεξαμενὴν εἰς τετραπλάσιον χρόνον ἢ ὁ Β. Ἀνοίγεται ὁ Α ἐπὶ χρόνον ἴσον μὲ τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ χρόνου, τὸν ὁποῖον χρειάζεται ὁ Β διὰ νὰ γεμίσῃ τὴν δεξαμενήν. Κλείομεν ἔπειτα τὸν Α καὶ ἀνοίγομεν τὸν Β καὶ γεμίζει ἡ δεξαμενὴ εἰς χρόνον κατὰ $2\frac{1}{4}$ ὥρας περισσότερον τοῦ χρόνου, τὸν ὁποῖον θὰ ἐχρειάζοντο καὶ οἱ δύο κρουνοὶ διὰ νὰ γεμίσουν τὴν δεξαμενὴν, ἐὰν ἠνοίγοντο συγχρόνως ἐξ ἀρχῆς. Νὰ εὑρεθῇ πόσον χρόνον χρειάζεται ἕκαστος κρουνὸς διὰ νὰ γεμίσῃ μόνος του τὴν δεξαμενήν.

Β' Ὁμάς. 614. Ἐξοδεύει τις τὰ $\frac{3}{5}$ τῶν χρημάτων του καὶ 100 000 δραχμὰς ἀκόμη· τὴν δευτέραν φορὰν ἐξοδεύει τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ ὑπολοίπου καὶ 25 000 δραχμὰς καὶ τρίτην φορὰν τὰ $\frac{3}{8}$ τοῦ νέου ὑπολοίπου πλὴν 120 000 δραχμάς· τοῦ μένουν δὲ τελικῶς 8 000 000 δραχμαί. Πόσα χρήματα εἶχεν ἀρχικῶς ;

615. Χρέος ἐξωφλήθη εἰς τρεῖς δόσεις. Ἡ πρώτη δόσις ἦτο ἴση μὲ τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ χρέους καὶ μὲ 50 000 δρχ. ἀκόμη. Ἡ δευτέρα ἦτο ἴση μὲ τὴν πρώτην καὶ μὲ τὸ τρίτον τοῦ ὑπολοίπου χρέους καὶ ἡ τρίτη δόσις ἦτο ἴση μὲ τὸ τέταρτον τοῦ ἀρχικοῦ χρέους καὶ μὲ 200 000 δραχ. ἀκόμη. Πόσον ἦτο τὸ χρέος ;

616. Ταξειδιώτης φθάνει εἰς μίαν πόλιν ἀφοῦ ἐξώδευσε τὰ $\frac{3}{4}$ τῶν χρημάτων, τὰ ὁποῖα ἔφερε μαζί του. Εἰς τὴν πόλιν αὐτὴν λαμβάνει 5 000 000 δρχ. τὰς ὁποίας τοῦ ὤφειλαν καὶ ἐξοδεύει ἐκεῖ τὰ $\frac{3}{8}$ τῶν χρημάτων, τὰ ὁποῖα οὕτω εἶχε. Διὰ τὴν ἐπιστροφήν του ἐξώδευσε τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ ὑπολοίπου καὶ παρετήρησε, ὅτι τοῦ εἶχον μείνει 900 000δρχ.Πόσα χρήματα ἔφερεν ἀρχικῶς μαζί του;

617. Τέσσαρες μαθηταί, ἐμοίρασαν ὡρισμένον ἀριθμὸν μήλων κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον. Ὁ πρῶτος ἔλαβε τὸ ἥμισυ τῶν μήλων πλὴν 10 μῆλα, ὁ δεύτερος ἔλαβε τὰ τρία τέταρτα τοῦ ὑπολοίπου πλὴν 15 μῆλα· ὁ τρίτος ἔλαβε τὰ δύο πέμπτα τοῦ νέου ὑπολοίπου καὶ 2 μῆλα ἀκόμη, ὁ δὲ τέταρτος τὰ 13 μῆλα, ποὺ ἔμειναν. Νὰ εὑρεθῇ πόσα μῆλα ἐμοίρασαν καὶ πόσα ἔλαβεν ἕκαστος;

618. Πατὴρ τις διανέμει μῆλα εἰς τοὺς τρεῖς υἱούς του. Εἰς τὸν πρῶτον δίδει τὸ ἥμισυ τῶν ὅσων ἔχει καὶ ἥμισυ μῆλον. Εἰς τὸν δεύτερον δίδει τὸ ἥμισυ τοῦ ὑπολοίπου καὶ ἥμισυ μῆλον, τέλος εἰς τὸν τρίτον δίδει τὸ ἥμισυ τοῦ νέου ὑπολοίπου καὶ ἥμισυ μῆλον ἀκόμη. Οὕτω ὁ πατὴρ ἔμεινε χωρὶς μῆλα· Πόσα μῆλα διένειμεν;

619. Χωρικὴ ἐπώλησε τὸ ἥμισυ τῶν αὐγῶν, τὰ ὁποῖα εἶχε καὶ ἥμισυ αὐγὸν χωρὶς νὰ θραύσῃ κανέν. Ἐπώλησε πάλιν τὸ ἥμισυ τῶν ὑπολοίπων καὶ ἥμισυ αὐγὸν χωρὶς νὰ θραύσῃ κανέν. Τρίτην καὶ τετάρτην φορὰν ἐπώλησεν ὁμοίως. Πόσα εἶχεν ἐξ ἀρχῆς, ἂν τῆς ἔμειναν 1 αὐγόν;

Γ' Ὁμάς. 620. Αὐξάνει τις τὴν περιουσίαν του κατὰ τὸ τρίτον τῆς ἀξίας της καὶ εἰς τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους κρατεῖ 20 000 000 δραχ. διὰ τὰ ἔξοδά του. Εἰς τὸ τέλος τοῦ τρίτου ἔτους παρετήρησεν, ὅτι ἡ περιουσία του ἐδιπλασιάσθη· Νὰ εὑρεθῇ πόση ἦτο ἀρχικῶς ἡ περιουσία του.

621. Δύο παῖκται Α καὶ Β συνεφώνησαν τὰ ἑξῆς: ἐκεῖνος ποὺ θὰ χάσῃ εἰς τὸ παιγνίδι, θὰ δώσῃ εἰς τὸν ἄλλον τὸ ἥμισυ τῶν χρημάτων του, ποὺ κατέχει ἐκείνην τὴν στιγμὴν καὶ 1000 δραχμὰς ἀκόμη. Ἤρχισαν τὸ παιγνίδιον κατέχοντες τὸ αὐτὸ ποσὸν χρημάτων ἕκαστος. Εἰς τὴν πρώτην παρτίδα τοῦ παιγνιδίου ἔχασε ὁ Β, εἰς δὲ τὴν δευτέραν ἔχασε ὁ Α. Ὅταν ἐτελείωσε τὸ παιγνίδι ὁ Β κατεῖχε διπλάσια χρήματα τοῦ Α. Πόσα χρήματα εἶχεν ἀρχικῶς ἕκαστος;

622. Δύο πρόσωπα Α καὶ Β εὗρον ἕνα χρηματικὸν ποσόν. Ὁ Α λαμβάνει ἐκ τοῦ εὑρεθέντος ποσοῦ 20 000 δραχ. καὶ τὸ ἕκτον τοῦ ὑπολοίπου· ἔπειτα ὁ Β λαμβάνει 30 000 δραχ. καὶ τὸ ἕκτον τοῦ ὑπολοίπου καὶ παρετήρησαν, ὅτι καὶ οἱ δύο εἶχον λάβει τὸ αὐτὸ ποσόν. Πόσον ἦτο τὸ εὑρεθὲν ποσὸν καὶ πόσον ἔλαβε ἕκαστος;

623. Ἐργάτης ἐξοικονομεῖ 3 600 000 δραχμὰς ἐκ τοῦ ἐτησίου εἰσοδήματός του. Τὸ ἑπόμενον ἔτος τὰς μὲν δαπάνας του ἠλάττωσε κατὰ 10 %, τὸ δὲ εἰσόδημά του ηὐξήθη κατὰ 5 %, καὶ οὕτω κατὰ τὸ δεύτερον ἔτος ἐξοικονόμησε 600 000 δραχ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἀρχικὸν ἐτήσιον εἰσόδημά του.

624. Λόγῳ ναυαγίου ἔμπορός τις ἔχασεν ἕνα φορτίον ἐμπορευμάτων, τὸ ὁποῖον εἶχε ἀσφαλίσει. Ἡ ἀσφαλιστικὴ ἑταιρεία προσφέρει ἕνα χρηματικὸν ποσόν, τὸ ὁποῖον ὁ ἔμπορος δὲν ἀπεδέχθη, διότι ἦτο κατὰ 10 % κατώτερον τῆς ἀξίας τῶν ἀπολεσθέντων ἐμπορευμάτων. Ἐὰν ἡ ἑταιρεία ἔδιδε 620 000 δραχ. ἐπὶ πλέον, ἡ προσφορὰ αὕτη θὰ ἦτο κατὰ 5,5 % ἀνωτέρα τῆς ἀπωλείας. Νὰ εὑρεθῇ πόσον εἶχον ἀσφαλισθῇ τὰ ἐμπορεύματα καὶ πόσον προσέφερεν ἡ Ἑταιρεία;

625. Ἀτμόπλοιον ἀναχωρῆσαν ἔκ τινος λιμένος εἶχε προμηθείας τροφίμων δι' 60 ἡμέρας, ἐὰν ἔδιδεν εἰς ἕκαστον ἐπιβάτην 1 μερίδα τροφῆς ἡμερησίως. Μετὰ ταξείδιον 20 ἡμερῶν, τὸ ἀτμόπλοιον κατελήφθη ὑπὸ τρικυμίας, ἡ ὁποία παρέσυρε 5 ἐπιβάτας. Λόγῳ δὲ τῶν ἀβαριῶν, τὰς ὁποίας ὑπέστη τὸ ἀτμόπλοιον ἐκ τῆς τρικυμίας, ηὔξησεν ἡ διάρκεια τοῦ ταξειδίου κατὰ 24 ἡμέρας καὶ ὑπεχρεώθησαν οἱ ἐπιβάται νὰ λαμβάνουν τὰ $\frac{5}{7}$ τῆς ἀρχικῆς μερίδος τροφίμων. Νὰ εὑρεθῇ πόσοι ἐπιβάται ἐπέβαινον ἀρχικῶς τοῦ ἀτμοπλοίου

626. Δύο ἀνθρακωρυχεῖα Α καὶ Β συνδέονται διὰ σιδηροδρομικῆς γραμμῆς μήκους 60 χλμ. Ἡ ἐξαγωγὴ τοῦ ἄνθρακος κοστίζει 240 000 δρχ. κατὰ τόννον εἰς τὸ Α καὶ 280 000 δρχ. κατὰ τόννον εἰς τὸ Β, ἡ δὲ μεταφορὰ κοστίζει 2 000 δρχ. κατὰ τόννον καὶ κατὰ χιλιόμετρον. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς σιδηροδρομικῆς γραμμῆς ΑΒ ἕνα σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον ὁ ἄνθραξ νὰ κοστίζῃ τὴν αὐτὴν τιμὴν εἴτε ἐκ τοῦ Α, εἴτε ἐκ τοῦ Β μεταφέρεται.

Δ' Ὁμάς. 627. Ἕνας ἑξαψήφιος ἀριθμὸς ἀρχίζει ἐξ ἀριστερῶν μὲ τὸ ψηφίον 1. Ἐὰν μεταφέρωμεν τὸ ψηφίον αὐτὸ ἐκ τῆς πρώτης πρὸς τὰ ἀριστερὰ θέσεως εἰς τὴν τελευταίαν θέσιν πρὸς τὰ δεξιά, προκύπτει ἀριθμός, ὁ ὁποῖος εἶναι τριπλάσιος τοῦ ἀρχικοῦ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἑξαψήφιος ἀριθμός.

628. Ἕνας στρατηγὸς θέλει νὰ σχηματίσῃ μὲ τοὺς στρατιώτας του ἕνα πλῆρες τετράγωνον (ὄχι περίμετρον). Δοκιμάζει τὴν πρώτην φορὰν καὶ παρατηρεῖ, ὅτι τοῦ μένουν 39 στρατιῶται. Ἔπειτα τοποθετεῖ ἕνα στρατιώτην ἐπὶ πλέον εἰς ἑκάστην πλευρὰν καὶ παρατηρεῖ, ὅτι τοῦ λείπουν 50 στρατιῶται διὰ νὰ σχηματισθῇ τὸ τετράγωνον. Πόσους στρατιώτας εἶχεν ὁ στρατηγός;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

242. **Ὁρισμοί.** Εἰς τὴν § 91 εἴδομεν, ὅτι μία ***ἀνισότης*** εἶναι τὸ σύνολον δύο παραστάσεων, αἱ ὁποῖαι χωρίζονται μὲ τὰ σημεῖα $>$ ἢ $<$. Αἱ ἀνισότητες διακρίνονται:

1ον. ***Εἰς ἀριθμητικὰς ἀνισότητας.***

2ον. ***Εἰς ἐγγραμμάτους ἀνισότητας.***

Π. χ. Ἡ ἀνισότης $15-18>-9$ εἶναι μία *ἀριθμητικὴ ἀνισότης.*
Ἡ ἀνισότης $4\alpha^2+5>15\alpha-1$ εἶναι μία *ἐγγράμματος* »

Αἱ ἐγγράμματοι ἀνισότητες δύνανται νὰ εἶναι ***μόνιμοι ἀνισότητες (ταυτότητες ἀνισοτήτων)***, δηλ. νὰ ἀληθεύουν διὰ κάθε τιμὴν τῶν γραμμάτων, ποὺ περιέχουν, ἢ νὰ εἶναι ***δεσμευμέναι ἀνισότητες (ἀνισοεξισώσεις)***, δηλ. νὰ ἀληθεύουν δι' ὡρισμένας τιμὰς τῶν γραμμάτων, ποὺ περιέχουν. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὰ γράμματα τῶν ἀνισοτήτων αὐτῶν λέγονται ***ἄγνωστοι*** αὐτῶν.

Π. χ. Ἡ ἀνισότης $(3\alpha-4)^2+5>1$ εἶναι *μόνιμος.*
Ἡ ἀνισότης $5x-4>6$ εἶναι *δεσμευμένη.*

Κατωτέρω τὰς δεσμευμένας ἀνισότητας θὰ ὀνομάζωμεν ἁπλῶς ***ἀνισότητας.***

Αἱ τιμαί, αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύουν μίαν ἀνισότητα λέγονται ***ῥίζαι ἢ λύσεις*** τῆς ἀνισότητος αὐτῆς.

Αἱ ἀνισότητες δύνανται, ὅπως αἱ ἐξισώσεις, νὰ εἶναι ***ἀκέραιαι ἢ κλασματικαί, ῥηταὶ ἢ ἄρρητοι, μὲ ἕνα ἢ περισσοτέρους ἀγνώστους.***

Ἰσοδύναμοι ἀνισότητες. Δύο ἀνισότητες, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τοὺς ***αὐτοὺς*** ἀγνώστους, λέγονται ***ἰσοδύναμοι,*** ὅταν ἔχουν τὰς αὐτὰς λύσεις.

***243.* Ἰδιότητες τῶν ἀνισοτήτων.** Αἱ ἰδιότητες τῶν ἀριθμητικῶν ἀνισοτήτων, τὰς ὁποίας ἐγνωρίσαμεν εἰς τὴν § 92 ἰσχύουν καὶ διὰ τὰς δεσμευμένας ἀνισότητας καὶ ἀποδεικνύονται, ὅπως αἱ ἰδιότητες τῶν ἐξισώσεων (§ 200). Διὰ τὰς ἀνισότητας, αἱ ἰδιότητες αὐταὶ ἐκφράζονται ὡς ἑξῆς:

244. Ἰδιότης I. ***Ἐὰν προσθέσωμεν ἢ ἀφαιρέσωμεν τὴν αὐτὴν ποσότητα καὶ εἰς τὰ δύο μέλη μιᾶς ἀνισότητος λαμβάνομεν μίαν ἰσοδύναμον ἀνισότητα.***

245. Πορίσματα. *1ον.* ***Ἐὰν καὶ εἰς τὰ δύο μέλη μιᾶς ἀνισότητος ὑπάρχουν δύο ὅροι ἴσοι, δυνάμεθα νὰ τοὺς παραλείψωμεν.***

2ον. ***Εἰς μίαν ἀνισότητα δυνάμεθα νὰ μεταφέρωμεν ἕνα ὅρον της ἀπὸ τὸ ἕνα μέλος εἰς τὸ ἄλλο, ἀρκεῖ νὰ ἀλλάξωμεν τὸ σημεῖον του.***

3ον. ***Εἰς μίαν ἀνισότητα δυνάμεθα νὰ μεταφέρωμεν ὅλους τοὺς ὅρους τοῦ ἑνὸς μέλους της εἰς τὸ ἄλλο.***

Π. χ. ἡ ἀνισότης $A > B$ εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν $A - B > 0$.

246. Ἰδιότης II. ***Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν (ἢ διαιρέσωμεν) καὶ τὰ δύο μέλη μιᾶς ἀνισότητος ἐπὶ τὸν αὐτὸν θετικὸν ἀριθμόν, λαμβάνομεν μίαν ἰσοδύναμον ὁμοιόστροφον ἀνισότητα.***

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἢ διαιρέσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη μιᾶς ἀνισότητος ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀρνητικὸν ἀριθμόν, λαμβάνομεν μίαν ἰσοδύναμον, ἀλλὰ ἑτερόστροφον ἀνισότητα.

247. Πορίσματα. *1ον.* ***Ἐὰν ἀλλάξωμεν τὰ σημεῖα ὅλων τῶν ὅρων μιᾶς ἀνισότητος λαμβάνομεν μίαν ἑτερόστροφον ἀνισότητα.***

2ον. ***Δυνάμεθα νὰ ἐξαλείψωμεν τοὺς παρονομαστὰς μιᾶς ἀνισότητος, ἐὰν γνωρίζωμεν τὸ σημεῖον τοῦ κοινοῦ παρονομαστοῦ τῶν ὅρων της.***

***248.* Λύσις ἀκεραίων ἀνισοτήτων.** Ἡ λύσις τῶν ἀνισοτήτων γίνεται ὅπως καὶ ἡ λύσις τῶν ἐξισώσεων (§ 210). Πρέπει ὅμως νὰ προσέχωμεν, ὅταν ἀλλάσσωμεν τὰ σημεῖα καὶ τῶν δύο μελῶν τῆς ἀνισότητος, νὰ ἀλλάσσωμεν καὶ τὴν στροφὴν αὐτῆς.

Παράδειγμα 1ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $3(x-2)+2(3-x) > 7x-3$

Ἐκτελοῦμεν πράξεις καὶ ἔχομεν $3x-6+6-2x > 7x-3$.

Χωρίζομεν γνωστοὺς ὅρους ἀπὸ ἀγνώστους καὶ ἔχομεν

$$3x-2x-7x > +6-6-3 \quad ἢ \quad -6x > -3 \qquad (1)$$

Ἀλλάσσομεν τὰ σημεῖα καὶ τῶν δύο μελῶν τῆς ἀνισότητος (1), δηλ. πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη της ἐπὶ τὴν ἀρνητικὴν μονάδα καὶ ἡ ἀνισότης ἀλλάσσει στροφὴν καὶ ἔχομεν

$$6x<3, \quad \text{ἄρα} \quad x<\frac{1}{2}$$

Ὥστε ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ οἱ μικρότεροι τοῦ $\frac{1}{2}$, δηλ. οἱ περιεχόμενοι μεταξὺ τοῦ $-\infty$ καὶ τοῦ $\frac{1}{2}$, ἐπαληθεύουν τὴν δοθεῖσαν ἀνισότητα.

Παράδειγμα 2ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $\frac{x-1}{7}+\frac{23-x}{5}>7-\frac{4+x}{4}$

Ἐξαλείφομεν τοὺς παρονομαστάς. Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη της ἐπὶ τὸ ἐ.κ.π. 7.5.4 τῶν παρονομαστῶν της καὶ ἔχομεν

$$20(x-1)+28(23-x)>7.5.4.7-35(4+x)$$
$$\text{ἢ} \quad 20x-20+644-28x>980-140-35x$$
$$\text{ἢ} \quad 20x-28x+35x>20-644+980-140$$
$$\text{ἢ} \quad 27x>216, \quad \text{ἄρα} \quad x>8.$$

Ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ οἱ μεγαλύτεροι τοῦ 8, δηλ. οἱ περιεχόμενοι μεταξὺ τοῦ 8 καὶ τοῦ $+\infty$ ἐπαληθεύουν τὴν δοθεῖσαν ἀνισότητα.

249. Διάστημα. Τὸ σύνολον τῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι περιέχονται μεταξὺ δύο δοθέντων ἀριθμῶν α καὶ β, (α<β) λέγεται ***διάστημα*** καὶ παρίσταται συμβολικῶς μὲ (α, β).

Ἐπίσης τὸ σύνολον τῶν τιμῶν τοῦ x, αἱ ὁποῖαι πληροῦν τὴν διπλῆν ἀνισότητα α<x<β λέγεται ***διάστημα τῶν τιμῶν τοῦ x ἀπὸ α ἕως β***.

Οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β λέγονται ***ἄκρα τοῦ διαστήματος***.

Ὅταν εἰς τὰς τιμὰς ἑνὸς διαστήματος περιλαμβάνωνται καὶ τὰ ἄκρα αὐτοῦ, τὸ διάστημα λέγεται ***κλειστόν***· ἐν ἐναντίᾳ περιπτώσει λέγεται ***ἀνοικτόν***.

Οὕτω τὸ	διάστημα	$\alpha\leqslant x\leqslant\beta$	λέγεται	*κλειστὸν* διάστημα
τὸ	»	$\alpha<x<\beta$	»	*ἀνοικτὸν* »
τὸ	»	$\alpha\leqslant x<\beta$	»	*κλειστὸν πρὸς τ' ἀριστερὰ*
τὸ	»	$\alpha<x\leqslant\beta$	»	*κλειστὸν πρὸς τὰ δεξιά.*

Λέγομεν, ὅτι ἕνας ἀριθμὸς μ εἶναι ἐκτὸς τοῦ διαστήματος (α, β), ἐὰν δὲν περιέχεται μεταξὺ τῶν α καὶ β, δηλ. ἐὰν εἶναι μικρότερος τοῦ α ἢ μεγαλύτερος τοῦ β.

Ἀσκήσεις. 620. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἀνισότητες :

1. $\frac{3x+1}{4}-\frac{4-x}{3}>1$
2. $\frac{5(3x-2)}{2}-3(x-1)>10$
3. $x-\frac{x-1}{2}>\frac{x-2}{2}-\frac{x-3}{4}$
4. $\frac{3(x-4)}{5}-\frac{2(5+x)}{6}<\frac{5x-1}{10}$

5. $$\frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{3}+\frac{x-1}{2}\right)-\frac{x+5}{6}<2$$

6. $$\frac{x-3}{2}-\frac{x-4}{3}-\frac{x-5}{4}>1$$

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΙΣ ΤΗΣ ΑΝΙΣΟΣΗΤΟΣ $\alpha x+\beta>0$

250. Διερεύνησις τῆς ἀνισότητος $\alpha x+\beta>0$. Μία ἀκεραία ἀνισότης τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον x δύναται πάντοτε νὰ ἀναχθῇ εἰς τὴν γενικὴν μορφὴν

$$\alpha x+\beta>0$$

ἢ εἰς τὴν ὁποίαν οἱ α καὶ β εἶναι ποσότητες ἀριθμητικαὶ ἢ ἐγγράμματοι, θετικαὶ ἢ ἀρνητικαί, μονώνυμα ἢ πολυώνυμα.

Ὁ συντελεστὴς α τοῦ ἀγνώστου x πρέπει ***νὰ εἶναι πάντοτε διάφορος τοῦ μηδενός***, διότι ἄλλως ἡ ἀνισότης θὰ ἐλάμβανε τὴν μορφὴν $\beta>0$ καὶ δὲν θὰ ἦτο πλέον μία δεσμευμένη ἀνισότης, ἀλλὰ μία ἀριθμητικὴ ἀνισότης.

Ὁ β δύναται νὰ εἶναι τυχὸν ἀριθμὸς θετικός, ἀρνητικὸς ἢ μηδέν.

Ἔστω τώρα, ὅτι θέλομεν νὰ λύσωμεν τὴν ἀνισότητα

$$\alpha x+\beta>0. \quad (1)$$

Μεταφέρομεν τὸ β εἰς τὸ δεύτερον μέλος καὶ λαμβάνομεν τὴν ἰσοδύναμον ἀνισότητα.

$$\alpha x>-\beta \quad (2)$$

Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις:

1ον. $\alpha>0$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (2) διὰ τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ α καὶ λαμβάνομεν τὴν λύσιν

$$x>-\frac{\beta}{\alpha}.$$

2ον. $\alpha<0$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, ἂν διαιρέσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (2) διὰ τοῦ ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ α, ἡ ἀνισότης ἀλλάσσει στροφὴν καὶ λαμβάνομεν τὴν λύσιν

$$x<-\frac{\beta}{\alpha}.$$

Παρατήρησις. Ἀνωτέρω εἴπομεν, ὅτι ὁ α πρέπει νὰ εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός. Ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι $\alpha=0$, ἡ ἀνισότης $\alpha x+\beta>0$ γίνεται $0x+\beta>0$ (1)

Ἐὰν $\beta>0$, ἡ ἀνισότης (1) ***ἐπαληθεύεται πάντοτε.***

Ἐὰν $\beta<0$, ἡ ἀνισότης (1) εἶναι ***ἀδύνατος.***

Ἐὰν $\beta=0$, ἡ ἀνισότης λαμβάνει τὴν μορφὴν $0x+0>0$, ἡ ὁποία εἶναι ἀκόμη ἀδύνατος, ἐπειδὴ τὸ πρῶτον μέλος της εἶναι πάντοτε μηδέν.

251. Ἐφαρμογαί. Παράδειγμα 1ον. Νὰ λυθῇ καὶ νὰ **διερευνηθῇ ἡ ἀνισότης** $\mu(x-2)>x-3$.

Ἐκτελοῦμεν πράξεις κλπ. καὶ ἔχομεν διαδοχικῶς

$$\mu x-2\mu>x-3 \quad \text{ἢ} \quad \mu x-x>2\mu-3 \quad \text{ἢ} \quad (\mu-1)x>2\mu-3 \quad (1)$$

I. Ἐὰν $\mu-1>0$, δηλ. ἐὰν $\mu>1$, διαιροῦμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (1) διὰ τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ $\mu-1$ καὶ ἔχομεν $x>\frac{2\mu-3}{\mu-1}$.

II. Ἐὰν $\mu-1<0$, δηλ. ἐὰν $\mu<1$, διαιροῦμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (1) διὰ τοῦ ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ $\mu-1$ καὶ λαμβάνομεν $x<\frac{2\mu-3}{\mu-1}$.

III. Ἐὰν $\mu-1=0$, δηλ. $\mu=1$, ἡ (1) γίνεται

$$0\cdot x>2\cdot 1-3 \quad \text{ἢ} \quad 0\cdot x>-1$$

ἡ τελευταία ἀνισότης ἀληθεύει διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x.

Παράδειγμα 2ον. Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἀνισότης

$$\frac{\mu x-2}{3}+\frac{3\mu-x}{4}<\frac{\mu}{2}.$$

Ἐξαλείφομεν παρονομαστὰς κλπ. καὶ ἔχομεν διαδοχικῶς

$$4(\mu x-2)+3(3\mu-x)<6\mu \quad \text{ἢ} \quad 4\mu x-8+9\mu-3x<6\mu$$

$$\text{ἢ} \quad 4\mu x-3x<+8-9\mu+6\mu \quad \text{ἢ} \quad (4\mu-3)x<8-3\mu) \qquad (1)$$

I. Ἐὰν $4\mu-3>0$, δηλ. ἐὰν $\mu>\frac{3}{4}$, διαιροῦμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (1) δια τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ $4\mu-3$ καὶ λαμβάνομεν $x<\frac{8-3\mu}{4\mu-3}$.

II. Ἐὰν $4\mu-3<0$, δηλ. ἐὰν $\mu<\frac{3}{4}$, διαιροῦμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (1) διὰ τοῦ ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ $4\mu-3$ καὶ λαμβάνομεν $x>\frac{8-3\mu}{4\mu-3}$.

III. Ἐὰν $4\mu-3=0$, δηλ. ἐὰν $\mu=\frac{3}{4}$ ἡ ἀνισότης (1) γίνεται

$$0\cdot x<8-3\cdot\frac{3}{4} \quad \text{ἢ} \quad 0\cdot x<\frac{23}{4}$$

καὶ ἀληθεύει διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x.

Παράδειγμα 3ον. Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἀνισότης

$$\frac{x}{\mu}+\frac{1-x}{3}>\frac{x+3}{2\mu}.$$

Μεταφέρομεν ὅλους τοὺς ὅρους τῆς ἀνισότητος εἰς τὸ πρῶτον μέλος καὶ ἔχομεν

$$\frac{x}{\mu}+\frac{1-x}{3}-\frac{x+3}{2\mu}>0 \qquad (1$$

Ἐπειδὴ δὲν γνωρίζομεν τὸ σημεῖον τοῦ μ, δὲν δυνάμεθα νὰ ἐξαλείψωμεν παρονομαστάς· διὰ τοῦτο ἐργαζόμεθα ὡς κάτωθι:

Τρέπομεν εἰς ὁμώνυμα τά κλάσματα τοῦ πρώτου μέλους τῆς (1 καὶ ἐκτελοῦντες πράξεις κλπ. ἔχομεν διαδοχικῶς

$$\frac{6x+2\mu(1-x)-3(x+3)}{6\mu}>0 \quad \text{ἢ} \quad \frac{6x+2\mu-2\mu x-3x-9}{6\mu}>0$$

$$\text{ἢ} \quad \frac{(3-2\mu)x+2\mu-9}{6\mu}>0 \qquad (2)$$

Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις, καθόσον ὁ μ εἶναι θετικὸς ἢ ἀρνητικός.

1. Ἔστω $\mu>0$· ἐὰν $\mu>0$, δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἀνισότητος (2) ἐπὶ τὸν θετικὸν ἀριθμὸν 6μ καὶ θὰ λάβωμεν τὴν ἰσοδύναμον ἀνισότητα

$$(3-2\mu)x+2\mu-9>0 \quad \text{ἢ} \quad (3-2\mu)x>9-2\mu \qquad (3)$$

1ον. Ἐὰν $3-2\mu>0$, δηλ. ἐὰν $\mu<\frac{3}{2}$, διαιροῦμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (3) διὰ τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ $3-2\mu$ καὶ ἔχομεν τὴν λύσιν $x > \frac{9-2\mu}{3-2\mu}$.

2ον. Ἐὰν $3-2\mu < 0$, δηλ. ἐὰν $\mu > \frac{3}{2}$, διαιροῦμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (3) διὰ τοῦ ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ $3-2\mu$ καὶ λαμβάνομεν τὴν λύσιν

$$x < \frac{9-2\mu}{3-2\mu}.$$

3ον. Ἐὰν $3-2\mu=0$, δηλ. ἐὰν $\mu=\frac{3}{2}$, ἡ (3) γίνεται $0>6$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον καὶ ἑπομένως ἡ (3) εἶναι ἀδύνατος.

II. Ἔστω $\mu<0$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (2) ἐπὶ τὸν ἀρνητικὸν ἀριθμὸν 6μ καὶ λαμβάνομεν τὴν ἑτερόστροφον ἀνισότητα

$$(3-2\mu)x+2\mu-9<0 \quad \text{ἢ} \quad (3-2\mu)x<9-2\mu \qquad (4)$$

Ἐπειδὴ τὸ μ εἶναι ἀρνητικόν, ὁ συντελεστὴς $3-2\mu$ τοῦ x εἶναι θετικὸς καὶ ἑπομένως διαιροῦμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (4) διὰ τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ $3-2\mu$ καὶ ἔχομεν τὴν λύσιν $x < \frac{9-2\mu}{3-2\mu}$.

Ἀσκήσεις. *630.* Νὰ λυθοῦν καὶ νὰ διερευνηθοῦν αἱ κάτωθι ἀνισότητες:

1. $\mu(x-1) > x-2$
2. $2\mu(x-1) > \mu(x+2)$
3. $\frac{\mu x}{2} - \frac{2\mu x}{3} - \frac{3\mu x}{4} > 1$
4. $\mu(x+5) > x-4$
5. $3(\mu x-1)+2(2\mu-x) < x$
6. $\frac{\mu x+2}{3} - \frac{x-\mu}{4} > \frac{2\mu-x}{6}$

631. Νὰ λυθοῦν καὶ νὰ διερευνηθοῦν αἱ κάτωθι ἀνισότητες:

1. $\frac{x}{\mu} + \frac{1-3x}{2} > \frac{x+2}{4\mu}$
2. $\frac{2x-1}{\mu+1} - \frac{x+2}{3} > \frac{2x-5}{2(\mu+1)}$
3. $\frac{3x-1}{\mu+1} - \frac{2x+3}{2} > \frac{3x-4}{3(\mu+1)}$
4. $\frac{\mu x}{\mu-2} - \frac{x-1}{3} < \frac{2x+3}{4}$
5. $\frac{5-3x}{\mu+2} - \frac{1-x}{\mu+2} - \frac{2-x}{3} + \frac{1+x}{4} > 0$

ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΟΠΟΙΩΝ Η ΛΥΣΙΣ ΑΝΑΓΕΤΑΙ ΕΙΣ ΤΗΝ ΛΥΣΙΝ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΕΝΑ ΑΓΝΩΣΤΟΝ

252. **Ἀκέραιαι ἀνισότητες μὲ ἕνα ἄγνωστον βαθμοῦ ἀνωτέρου τοῦ πρώτου.** Ἡ λύσις ἀκεραίων ἀνισοτήτων μὲ ἕνα ἄγνωστον, βαθμοῦ ἀνωτέρου τοῦ πρώτου, ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν πολλῶν ἀνισοτήτων τοῦ πρώτου βαθμοῦ, ὅταν τὸ πολυώνυμον τοῦ πρώτου μέλους της δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον διωνύμων παραγόντων τοῦ πρώτου βαθμοῦ. Τὰ κάτωθι παραδείγματα θὰ μᾶς δείξουν τὸν τρόπον τῆς λύσεως τοιούτων ἀνισοτήτων.

Παράδειγμα 1ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $(x+2)(x-4)(x-8) > 0$ (1)
Εὑρίσκομεν τὰς ρίζας τῶν διωνύμων παραγόντων τοῦ πρώτου μέλους τῆς δοθείσης ἀνισότητος. Αἱ ρίζαι αὐτῶν εἶναι $x=-2$, $x=4$, $x=8$. Αἱ τιμαὶ αὐταὶ τοῦ x λέγονται *χαρακτηριστικαὶ τιμαὶ τοῦ* x.

Τάσσομεν τὰς ρίζας αὐτὰς κατὰ τάξιν μεγέθους οὕτως, ὥστε νὰ βαίνουν αὐξανόμεναι $-2,\ 4,\ 8$.

Αἱ χαρακτηριστικαὶ αὗται τιμαὶ τοῦ x χωρίζουν τὸ διάστημα $(-\infty, +\infty)$ εἰς μικρότερα διαστήματα, ὅπως φαίνεται κατωτέρω

$$-\infty \ldots -2 \ldots 4 \ldots 8 \ldots +\infty$$

Ὑποθέτομεν τώρα, ὅτι ὁ ἄγνωστος x λαμβάνει τιμὰς ἀπὸ τὸ $-\infty$ ἕως τὸ $+\infty$.

Ὅταν ὁ x λάβῃ τιμὰς μικροτέρας τοῦ -2, οἱ παράγοντες $x+2$, $x-4$, $x-8$ τοῦ πρώτου μέλους τῆς (1) εἶναι ἀρνητικοὶ καὶ ἑπομένως τὸ γινόμενόν των $\Gamma=(x+2)(x-4)(x-8)$ θὰ εἶναι ἀρνητικόν, ὡς γινόμενον τριῶν ἀρνητικῶν παραγόντων.

Ὅταν ὁ x λάβῃ τιμὰς περιεχομένας μεταξὺ -2 καὶ 4, δηλ. μεγαλυτέρας τοῦ -2, ἀλλὰ μικροτέρας τοῦ 4, ὁ παράγων $x+2$ εἶναι θετικὸς καὶ οἱ δύο ἄλλοι παράγοντες $x-4$ καὶ $x-8$ εἶναι ἀρνητικοί. Τὸ γινόμενόν των ὅμως Γ θὰ εἶναι θετικόν, διότι τὸ πλῆθος τῶν ἀρνητικῶν παραγόντων εἶναι ἄρτιον.

Ὅταν ὁ x λάβῃ τιμὰς περιεχομένας μεταξὺ 8 καὶ $+\infty$, δηλ. ὅταν $8<x<+\infty$ καὶ οἱ τρεῖς παράγοντες $x+2$, $x-4$, $x-8$ εἶναι θετικοὶ καὶ ἑπομένως καὶ τὸ γινόμενόν των εἶναι θετικόν.

Ὁ κάτωθι πίναξ μᾶς δεικνύει τὸ σημεῖον τοῦ γινομένου.

$$\Gamma=(x+2)(x-4)(x-8)$$

x	$-\infty \ldots$	$-2 \ldots$	$4 \ldots$	$8 \ldots +\infty$
Σημεῖον τοῦ Γ.	$-$	$+$	$-$	$+$

Διὰ νὰ ἀληθεύῃ ἡ δοθεῖσα ἀνισότης πρέπει τὸ πρῶτον μέλος της νὰ εἶναι θετικόν. Ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸν ἀνωτέρω πίνακα, ἡ δοθεῖσα ἀνισότης ἀληθεύει διὰ τιμὰς τοῦ x περιεχομένας μεταξὺ -2 καὶ 4 καὶ διὰ τιμὰς τοῦ x περιεχομένας μεταξὺ 8 καὶ $+\infty$, δηλ. διὰ

$$-2<x<4 \quad \text{καὶ διὰ} \quad 8<x<+\infty$$

Παράδειγμα 2ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης

$$(x-5)(2x+3)(-5x+4)(x+9)>0$$

Διὰ νὰ εἶναι θετικοὶ ὅλοι οἱ συντελεσταὶ τοῦ x, ἀλλάσσομεν τὸ σημεῖον τοῦ τρίτου παράγοντος τῆς δοθείσης ἀνισότητος, ὁπότε θὰ ἀλλάξῃ καὶ ἡ στροφή της. Θὰ εἶναι λοιπὸν

$$(x-5)(2x+3)(5x-4)(x+9)<0 \qquad (1)$$

Αἱ ρίζαι τῶν παραγόντων τοῦ πρώτου μέλους τῆς (1) εἶναι

$$5,\ -\frac{3}{2},\ \frac{4}{5},\ -9.$$

Τάσσομεν τὰς ρίζας αὐτὰς κατὰ τάξιν μεγέθους οὕτως, ὥστε νὰ βαίνουν αὐξανόμεναι καὶ ἔχομεν

$$-9,\ -\frac{3}{2},\ \frac{4}{5},\ 5.$$

Ἀλλάσσομεν τὴν τάξιν τῶν παραγόντων τοῦ πρώτου μέλους τῆς (1), οὕτως, ὥστε αἱ ρίζαι των νὰ βαίνουν αὐξανόμεναι καὶ ἔχομεν τὴν ἰσοδύναμον ἀνισότητα

$$(x+9)(2x+3)(5x-4)(x-5)<0. \qquad (2)$$

Αἱ ρίζαι τῶν παραγόντων τοῦ πρώτου μέλους τῆς (2) χωρίζουν τὸ διάστημα $(-\infty, +\infty)$ εἰς μικρότερα διαστήματα, ὅπως φαίνεται κατωτέρω

$$-\infty \ldots\ldots -9 \ldots\ldots -\frac{3}{2} \ldots\ldots \frac{4}{5} \ldots\ldots 5 \ldots\ldots +\infty.$$

Δίδομεν τώρα εἰς τὸ x τιμὰς ἀπὸ τὸ $-\infty$ ἕως τὸ $+\infty$. Ὅταν ὁ x λαμβάνῃ τιμὰς μικροτέρας τοῦ -9, δηλ. ὅταν $-\infty < x < -9$, οἱ παράγοντες $x+9$, $2x+3$, $5x-4$, $x-5$ τοῦ πρώτου μέλους τῆς (2) εἶναι ἀρνητικοὶ καὶ ἐπειδὴ εἶναι τέσσαρες, δηλ. τὸ πλῆθος των εἶναι ἄρτιον, τὸ γινόμενόν των $\Gamma=(x+9))2x+3)(5x-4)(x-5)$ εἶναι θετικόν.

Ὅταν ὁ x λαμβάνῃ τιμὰς περιεχομένας μεταξὺ τοῦ -9 καὶ $-\frac{3}{2}$, δηλ. ὅταν εἶναι $-9 < x < -\frac{3}{2}$, μόνον ὁ πρῶτος παράγων $x+9$ εἶναι θετικός, δηλ. ἀλλάσσει σημεῖον, καὶ ἑπομένως τὸ γινόμενον Γ εἶναι ἀρνητικόν.

Ὅταν ὁ x λαμβάνῃ τιμὰς περιεχομένας μεταξὺ τοῦ $-\frac{3}{2}$ καὶ $\frac{4}{5}$, δηλ. ὅταν $-\frac{3}{2} < x < \frac{4}{5}$, ἀλλάσσει σημεῖον καὶ ὁ δεύτερος παράγων καὶ ἑπομένως τὸ γινόμενον Γ εἶναι θετικόν, καὶ οὕτω καθεξῆς. Δηλ. κάθε φοράν, ποὺ ὁ x διέρχεται ἀπὸ μίαν ρίζαν, τὸ γινόμενον ἀλλάσσει σημεῖον.

Ὁ κάτωθι πίναξ μᾶς δεικνύει τὸ σημεῖον τοῦ γινομένου

$$\Gamma=(x+9)(2x+3)(5x-4)(x-5)$$

x	$-\infty \ldots -9 \ldots -\frac{3}{2} \ldots \frac{4}{5} \ldots 5 \ldots +\infty.$
Σημεῖον τοῦ Γ.	$+ \quad - \quad + \quad - \quad +$

Διὰ νὰ ἀληθεύῃ ἡ ἀνισότης (2) καὶ ἑπομένως καὶ ἡ ἰσοδύναμος δοθεῖσα ἀνισότης, πρέπει τὸ πρῶτον μέλος της νὰ εἶναι ἀρνητικόν. Ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸν ἀνωτέρω πίνακα ἡ ἀνισότης (2) ἀληθεύει διὰ

$$-9 < x < -\frac{3}{2} \quad \text{καὶ διὰ} \quad \frac{4}{5} < x < 5.$$

253.* Σπουδαία παρατήρησις.** Ἀπὸ τὰ δύο ἀνωτέρω παραδείγματα συνάγομεν, ὅτι δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ προσδιορίζωμεν τὸ σημεῖον τοῦ γινομένου Γ δι' ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ x ἀπὸ τὸ $-\infty$ ἕως $+\infty$. Διότι ὅταν προσδιορισθῇ τὸ σημεῖον τοῦ Γ εἰς ἕνα διάστημα τιμῶν τοῦ x, τὸ σημεῖον τοῦ Γ ἀλλάσσει εἰς τὸ ἑπόμενον διάστημα, διότι ἀλλάσσει τὸ σημεῖον ἑνὸς παράγοντος καὶ οὕτω καθεξῆς. Εἰδικώτερον τὸ σημεῖον τοῦ Γ εἶναι ***πάντοτε θετικόν, διὰ τιμὰς τοῦ x περιεχομένας εἰς τὸ τελευταῖον διάστημα, διότι, εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, ὅλοι οἱ παράγοντες τοῦ Γ εἶναι θετικοί. Διὰ τοῦτο θέτομεν εἰς τὸ τελευταῖον διάστημα πάντοτε τὸ σημεῖον $+$ καὶ ἔπειτα ἐναλλὰξ τὸ σημεῖον $-$, $+$, . . . εἰς τὰ πρὸς τὰ ἀριστερὰ διαστήματα.

Ἀσκήσεις. *632.* Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἀνισότητες:

1. $(x+3)(x-2)>0$
3. $x(x+5)(x-7)>0$
2. $(3x+1)(x-4)(x+2)(4x-3)<0$
4. $(-2x+1)(x+4)(3x-5)>0$
5. $(-x+5)(-x-7)(-x+2)(-3x-1)>0$
6. $x(2x+1)(x-5)(x+3)(-3x+4)>0$.

254. Κλασματικαὶ ἀνισότητες. Ἔστω ἡ ἀνισότης $\frac{A}{B}>0$, (1)

ὅπου A καὶ B εἶναι διώνυμα τῆς μορφῆς $\alpha x+\beta$ Ἐπειδὴ δὲν γνωρίζομεν τὸ σημεῖον τοῦ παρονομαστοῦ, ἐφ᾽ ὅσον περιέχει τὸν ἄγνωστον x, δὲν δυνάμεθα νὰ πολλαπλάσιάσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη της ἐπὶ B διὰ νὰ ἐξαλειφθῇ ὁ παρονομαστής. Δυνάμεθα ὅμως νὰ πολλαπλασιάσωμεν και τὰ δύο μέλη τῆς (1) ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ παρονομαστοῦ, δηλ. ἐπὶ B^2, τὸ ὁποῖον εἶναι πάντοτε θετικόν, ὁπότε θὰ ἔχωμεν

$$\frac{A}{B}\cdot B^2>0 \quad \text{ἢ} \quad A\cdot B>0.$$

Ἡ λύσις λοιπὸν τῆς ἀνισότητος $\boxed{\frac{A}{B}>0}$ ἀνάγεται εἰς τὴν

λύσιν τῆς ἰσοδυνάμου ἀνισότητος $\boxed{A\cdot B>0}$

Παράδειγμα 1ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $\frac{x(x+5)}{(x-1)(x+2)}>0.$

Ἡ δοθεῖσα ἀνισότης εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν

$$x(x+5)(x-1)(x+2)>0 \quad \text{ἢ} \quad (x+5)(x+2)x(x-1)>0 \qquad (1)$$

Αἱ ρίζαι τῶν παραγόντων τοῦ πρώτου μέλους τῆς (1) εἶναι

$$-5,\ -2,\ 0,\ 1.$$

Ὁ κάτωθι πίναξ μᾶς δεικνύει τὸ σημεῖον τοῦ γινομένου

$$\Gamma=(x+5)(x+2)x(x-1).$$

x	$-\infty$ ..... -5 ..... -2 ..... 0 ..... 1 ..... $+\infty$
Σημεῖον τοῦ Γ	+ − + − +

Ἡ ἀνισότης (1) καὶ ἑπομένως ἡ δοθεῖσα ἀληθεύει διὰ

$$-\infty<x<-5 \quad \text{διὰ} \quad -2<x<0 \quad \text{καὶ διὰ} \quad 1<x<+\infty$$

Παράδειγμα 2ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $\frac{2}{3x+1}>\frac{3}{x-4}.$

Ἡ δοθεῖσα ἀνισότης γράφεται

$$\frac{2}{3x+1}-\frac{3}{x-4}>0 \quad \text{ἢ} \quad \frac{2(x-4)-3(3x+1)}{(3x+1)(x-4)}>0$$

$$\text{ἢ} \quad \frac{-(7x+11)}{(3x+1)(x-4)}>0 \quad \text{ἢ} \quad \frac{7x+11}{(3x+1)(x-4)}<0 \qquad (1)$$

Ἡ ἀνισότης (1) εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν

$$(7x+11)(3x+1)(x-4)<0.$$

Αἱ ρίζαι τῶν παραγόντων τοῦ πρώτου μέλους τῆς (2) εἶναι $-\frac{11}{7}$, $-\frac{1}{3}$, 4. Ὁ κάτωθι πίναξ μᾶς δεικνύει τὸ σημεῖον τοῦ γινομένου $\Gamma=(7x+11)(3x+1)(x-4)$.

x	$-\infty \ldots\ldots -\frac{11}{7} \ldots\ldots -\frac{1}{3} \ldots\ldots 4 \ldots\ldots +\infty$
Σημεῖον τοῦ Γ	$-$ $\quad+\quad$ $-$ $\quad+$

Διὰ νὰ ἀληθεύῃ ἡ ἀνισότης (2) πρέπει τὸ πρῶτον μέλος της νὰ εἶναι ἀρνητικόν. Ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸν ἀνωτέρω πίνακα, ἡ ἀνισότης αὐτή, ἑπομένως καὶ ἡ ἰσοδύναμος δοθεῖσα, ἀληθεύουν διὰ

$$-\infty < x < -\frac{11}{7} \quad \text{καὶ διὰ} \quad -\frac{1}{3} < x < 4.$$

Ἀσκήσεις. ***633.*** Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἀνισότητες:

1. $\dfrac{x-4}{x+5} < 0$ 3. $\dfrac{x(x+3)}{x^2-4} > 0$ 5. $\dfrac{-3x+2}{(2x+1)(x-3)} < 0$

2. $\dfrac{-2x+5}{(3x+1)(x-4)} < 0$ 4. $\dfrac{x(x-1)(x+2)}{x^2-9}$ 6. $\dfrac{(x-3)(x+5)}{x(x-2)(x+1)} > 0$

634. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἀνισότητες:

1. $\dfrac{x+4}{3x-1} > 2$ 4. $\dfrac{1}{x+3} + \dfrac{2}{x+2} - \dfrac{3}{x+1} > 0$

2. $\dfrac{-3x+2}{2x+1} < -3$ 5. $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2}{x+3} - \dfrac{3}{x+2} < 0$

3. $\dfrac{3}{x-2} > \dfrac{4}{3x-2}$ 6. $\dfrac{x^2-5x+1}{x^2-1} > 1$

255. Συναληθεύουσαι ἀνισότητες. Λέγομεν, ὅτι δύο ἢ περισσότεραι ἀνισότητες τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον, ***συναληθεύουν*** ἢ ἀποτελοῦν ἕνα ***σύστημα ἀνισοτήτων τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον,*** ὅταν ἀληθεύουν μὲ τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων.

Ἡ εὕρεσις ὅλων τῶν κοινῶν λύσεων τῶν διαφόρων ἀνισοτήτων λέγεται ***λύσις*** τοῦ συστήματος τῶν ἀνισοτήτων.

Τὰ κάτωθι παραδείγματα θὰ μᾶς δείξουν τὸν τρόπον τῆς εὑρέσεως τῶν κοινῶν λύσεων ἑνὸς συστήματος ἀνισοτήτων.

Παράδειγμα 1ον. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ x συναληθεύουν αἱ ἀνισότητες

$$6x-8 > 4x-20 \quad (1), \qquad \frac{3x+5}{2} < x+10 \quad (2)$$

Λύομεν χωριστὰ τὰς ἀνισότητας (1) καὶ (2) καὶ εὑρίσκομεν, ὅτι ἡ (1) ἀληθεύει διὰ $x > -6$ καὶ ἡ (2) ἀληθεύει διὰ $x < 15$.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὰς κοινὰς λύσεις τῶν ἀνισοτήτων (1) καὶ (2) σχηματίζομεν τὸν κάτωθι πίνακα, ὁ ὁποῖος περιέχει τὰς χαρακτηριστικὰς τιμὰς τοῦ x

$$\underbrace{-\infty \ldots\ldots -6}_{A} \ldots\ldots \underbrace{15 \ldots\ldots +\infty}_{B}$$

Ἔπειτα ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

Ἡ ἀνισότης (1) ἀληθεύει διὰ $x > -6$· ἄρα ὁ x δὲν δύναται νὰ λαμβάνῃ τιμὰς περιεχομένας εἰς τὸ διάστημα A.

Ἡ ἀνισότης (2) ἀληθεύει διὰ $x < 15$· ἄρα ὁ x δὲν δύναται νὰ λαμβάνῃ τιμὰς περιεχομένας εἰς τὸ διάστημα B.

Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι διὰ νὰ συναληθεύουν αἱ δοθεῖσαι ἀνισότητες πρέπει ὁ x νὰ λαμβάνῃ τιμὰς περιεχομένας μόνον εἰς τὸ διάστημα $(-6, 15)$. Ὥστε αἱ δοθεῖσαι ἀνισότητες συναληθεύουν διὰ $-6 < x < 15$.

Παράδειγμα 2ον. **Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα τῶν ἀνισοτήτων**

$$3x+5>0 \quad (1) \qquad x-6<0 \quad (2) \qquad (x+2)(x-4)(x-8)>0 \quad (3)$$

Ἡ ἀνισότης (1) ἀληθεύει διὰ $x > -\frac{5}{3}$.

Ἡ ἀνισότης (2) ἀληθεύει διὰ $x < 6$.

Ἡ ἀνισότης (3) ὅπως εὑρήκαμεν εἰς τὸ 1ον παράδειγμα τῆς § 252 ἀληθεύει διὰ $-2<x<4$ καὶ διὰ $8<x<+\infty$.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὰς κοινὰς λύσεις τῶν ἀνισοτήτων (1), (2) καὶ (3), σχηματίζομεν τὸν κάτωθι πίνακα, ὁ ὁποῖος περιέχει τὰς χαρακτηριστικὰς τιμὰς τοῦ x κατὰ τάξιν μεγέθους

$$\underbrace{-\infty \ldots\ldots -2}_{A} \underbrace{\ldots\ldots -\frac{5}{3}}_{B} \ldots\ldots \underbrace{4 \ldots\ldots 6}_{\Gamma} \underbrace{\ldots\ldots 8}_{\Delta} \underbrace{\ldots\ldots +\infty}_{E}$$

Ἔπειτα ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

Ἡ ἀνισότης (1) ἀληθεύει διὰ $x>-\frac{5}{3}$· ἄρα ὁ x δὲν δύναται νὰ λαμβάνῃ τιμὰς περιεχομένας εἰς τὰ διαστήματα Α καὶ Β.

Ἡ ἀνισότης (2) ἀληθεύει διὰ $x<6$· ἄρα ὁ x δὲν δύναται νὰ λαμβάνῃ τιμὰς περιεχομένας εἰς τὰ διαστήματα Δ καὶ Ε.

Ἡ ἀνισότης (3) ἀληθεύει διὰ $-2<x<4$ καὶ διὰ $8<x<+\infty$· ἄρα ὁ x δὲν δύναται νὰ λαμβάνῃ τιμὰς περιεχομένας εἰς τὰ διαστήματα Α, Γ καὶ Δ.

Παρατηροῦμεν, ὅτι διὰ νὰ συναληθεύουν καὶ αἱ τρεῖς ἀνισότητες (1), (2), (3) πρέπει ὁ x νὰ λαμβάνῃ τιμὰς περιεχομένας μόνον εἰς τὸ διάστημα $\left(-\frac{5}{3}, 4\right)$. Ὥστε αἱ δοθεῖσαι ἀνισότητες συναληθεύουν διὰ $-\frac{5}{3}<x<4$.

Παράδειγμα 3ον. **Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ x συναληθεύουν αἱ ἀνισότητες**

$$2x>x-2 \quad (1), \qquad \frac{4x}{3}<x+2 \quad (2), \qquad x+1>\frac{x}{2}+6 \quad (3)$$

Ἡ ἀνισότης (1) ἀληθεύει διὰ $x>-2$.

Ἡ ἀνισότης (2) ἀληθεύει διὰ $x<6$.

Ἡ ἀνισότης (3) ἀληθεύει διὰ $x>10$.

Εὑρίσκομεν τὰς κοινὰς λύσεις τῶν ἀνισοτήτων (1), (2), (3).

Πρὸς τοῦτο σχηματίζομεν τὸν κάτωθι πίνακα τῶν χαρακτηριστικῶν τιμῶν τοῦ x

$$\underbrace{-\infty \ldots\ldots -2}_{A} \underbrace{\ldots\ldots 6}_{B} \underbrace{\ldots\ldots 10}_{\Gamma} \underbrace{\ldots\ldots +\infty}_{\Delta}$$

Ἔπειτα ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

Ἡ ἀνισότης (1) ἀληθεύει διὰ $x > -2$· ἄρα ὁ x δὲν δύναται νὰ λαμβάνῃ τιμὰς περιεχομένας εἰς τὸ διάστημα Α.

Ἡ ἀνισότης (2) ἀληθεύει διὰ $x < 6$· ἄρα ὁ x δὲν δύναται νὰ λαμβάνῃ τιμὰς περιεχομένας εἰς τὰ διαστήματα Γ καὶ Δ.

Ἡ ἀνισότης (3) ἀληθεύει διὰ $x > 10$· ἄρα ὁ x δὲν δύναται νὰ λαμβάνῃ τιμὰς περιεχομένας εἰς τὰ διαστήματα Α, Β, Γ.

Παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ δοθεῖσαι ἀνισότητες δὲν συναληθεύουν μὲ καμμίαν τιμὴν τοῦ x. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν, ὅτι τὸ σύστημα τῶν ἀνισοτήτων (1), (2), (3) εἶναι ***ἀδύνατον*** ἢ ὅτι αἱ ἀνισότητες αὐταὶ εἶναι ***ἀσυμβίβαστοι.***

Ἀσκήσεις. ***635.*** Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ x συναληθεύουν αἱ κάτωθι ἀνισότητες:

1. $2x - \frac{5}{7} < 3(x-5)$ καὶ $x - \frac{2}{3}(x+2) > 5$

2. $\frac{7x}{3} + 2 > x + 8$ καὶ $91 - 4x > 8x + 6$

3. $8x - 7 > \frac{15x-9}{2}$ καὶ $4x - 5 > 5x - \frac{8}{3}$

4. $4x - 5 > \frac{2}{3}$ καὶ $-5x + 3(x-2) > \frac{2}{3}(x+11)$

5. $(2x-1)(3x-5) < 0$ καὶ $x(2x+1)(3-x)\left(x - \frac{1}{2}\right) > 0$

6. $\frac{2x+3}{5x-4} > 0$ καὶ $\frac{x(x-2)(3x+2)}{(4x-7)(3x-1)} < 0$

ΘΕΩΡΗΤΙΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ

Ἀσκήσεις ***636.*** Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι πάντοτε $\alpha^2 + \beta^2 > 2\alpha\beta$.

637. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\frac{\alpha^2+\beta^2}{2} > \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2$

638. Ἐὰν εἶναι $\alpha\beta > 0$, νὰ δειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} > 2$

639. Ἐὰν α,β,γ εἶναι θετικοὶ ἀριθμοί, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι

$$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha) > 8\alpha\beta\gamma$$

640. Ἐὰν α,β,γ εἶναι θετικοὶ ἀριθμοί, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι

$$\alpha\beta\gamma > (\alpha+\beta-\gamma)(\alpha+\gamma-\beta)(\beta+\gamma-\alpha)$$

641. Ἐὰν $\alpha \neq \beta \neq \gamma$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 > \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$

642. Ἐὰν $\alpha > \beta > \gamma$ ἢ $\beta > \gamma > \alpha$ ἢ $\gamma > \alpha > \beta$, νὰ ἐπαληθευθῇ ἡ ἀνισότης

$$\alpha^2\beta + \beta^2\gamma + \gamma^2\alpha > \alpha^2\gamma + \beta^2\alpha + \gamma^2\beta$$

643. Ἐὰν $\alpha < \beta < \gamma$ ἢ $\beta < \gamma < \alpha$ ἢ $\gamma < \alpha < \beta$, νὰ ἐπαληθευθῇ ἡ ἀνισότης

$$\alpha^2\beta + \beta^2\gamma + \gamma^2\alpha < \alpha^2\gamma + \beta^2\gamma + \gamma^2\beta$$

644. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\mu^2+\nu^2+\lambda^2) > (\alpha\mu+\beta\nu+\gamma\lambda)$

645. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἶναι $3(1+\alpha^2+\alpha^4) > (1+\alpha+\alpha^2)^2$ δι' οἱανδήποτε τιμὴν τοῦ α, θετικὴν ἢ ἀρνητικήν.

646. Ἐὰν α,β,γ εἶναι θετικοὶ ἀριθμοὶ καὶ διάφοροι μεταξύ των, νὰ ἀποδειχθῇ ἡ ἀνισότης:

1. $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3 > 3\alpha\beta\gamma$ 2. $(\alpha+\beta+\gamma)^3 > 3(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$

647. Ἐὰν $\alpha > 1$, νὰ ἐπαληθευθοῦν αἱ κάτωθι ἀνισότητες:

1. $\alpha^3 > \alpha^2 - \alpha + 1$ 2. $2\alpha^4 + 1 > 2\alpha^3 + \alpha^2$

648. Ἐὰν $\alpha > 0$ καὶ μ ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἀριθμός, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

$$(1+\alpha)^\mu > 1 + \mu\alpha$$

649. Ἐὰν $x^2+y^2+\omega^2=1$ καὶ $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$ νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι καὶ $\alpha x+\beta y+\gamma\omega<1$, ἐκτὸς τῆς περιπτώσεως $\alpha-x=\beta-y=\gamma-\omega=0$

650. Ἐὰν εἶναι $x^2+y^2=1$ καὶ $\alpha^2+\beta^2=1$ νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι καὶ $\alpha x+\beta y<1$.

651. Ἐὰν α,β,γ εἶναι οἱοιδήποτε ἀριθμοί, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

$$\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+\alpha^2\beta^2 \geqslant \alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)$$

652. Ἐὰν α,β,γ παριστάνουν τὰ μήκη τῶν πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2<2\alpha\beta+2\beta\gamma + 2\alpha\gamma$ (Σχολὴ Εὐελπίδων)

653. Ἐὰν α,β,γ εἶναι θετικοὶ ἀριθμοὶ καὶ τοιοῦτοι, ὥστε $\alpha+\beta+\gamma=1$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι:

$$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)>8\alpha\beta\gamma$$

654. Ἐὰν $\alpha>\beta$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha^2>\alpha\beta$, ἂν $\alpha>0$ καὶ $\alpha^2<\alpha\beta$, ἐὰν $\alpha<0$.

655. Ἐὰν $\alpha>1$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha^\mu>1$, ἐὰν $\mu>0$· ἂν δὲ εἶναι $\alpha<1$ θὰ εἶναι καὶ $\alpha^\mu<1$.

656. Ἐὰν $\alpha>\beta$, $\gamma>\delta$ καὶ $\alpha\delta>0$, ἔνθα α καὶ δ θετικά, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι καὶ $\alpha\gamma>\beta\delta$. Ἂν δὲ $\alpha\delta>0$ καὶ α καὶ δ εἶναι καὶ τὰ δύο ἀρνητικά, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι $\alpha\gamma<\beta\delta$. Περαιτέρω δείξατε διὰ καταλλήλων ἀριθμητικῶν παραδειγμάτων, ὅτι, ἐὰν $\alpha\delta<0$, τότε δύνανται νὰ συμβοῦν αἱ τρεῖς περιπτώσεις: $\alpha\gamma>\beta\delta$, $\alpha\gamma=\beta\delta$, $\alpha\gamma<\beta\delta$.

Ποῖον κανόνα λογισμοῦ μὲ ἀνισότητας συνάγετε ἐκ τῶν ἀνωτέρω;

(Πολυτεχνεῖον 1937)

657. Ἐὰν α καὶ β εἶναι ὁμόσημοι ἀριθμοί, νὰ ἀποδειχθῇ ἡ ἀνισότης

$$(1+\alpha)(1+\beta)>1+\alpha+\beta$$

658. Ἐὰν $\alpha,\beta,\ldots,\lambda$ εἶναι θετικοὶ ἀριθμοί, νὰ ἀποδειχθῇ ἡ ἀνισότης

$$(1+\alpha)(1+\beta)\ldots(1+\lambda)>1+\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda$$

659. Ἐὰν α,β,γ εἶναι θετικοὶ ἀριθμοί, νὰ ἀποδειχθῇ ἡ ἀνισότης

$$(\alpha+\beta)\alpha\beta+(\alpha+\gamma)\alpha\gamma+(\beta+\gamma)\beta\gamma \geqslant 6\alpha\beta\gamma$$

660. Ἐὰν α,β,γ εἶναι θετικοὶ καὶ διάφοροι μεταξύ των, νὰ ἀποδειχθοῦν αἱ κάτωθι ἀνισότητες:

1. $\alpha\beta(\alpha+\beta)+\beta\gamma(\beta+\gamma)+\gamma\alpha(\gamma+\alpha)<2(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)$
2. $(\alpha+\beta-\gamma)^2+(\alpha-\beta+\gamma)^2+(-\alpha+\beta+\gamma)^2>\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$
3. $3(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)<8(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)$
4. $(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4)>\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2>\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)$

661. Νὰ ἀποδειχθῇ, δι' ἀναλύσεως εἰς γινόμενον παραγόντων, ἡ ἀνισότης

$$(A^2+B^2+\Gamma^2+\ldots)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots)>(A\alpha+B\beta+\Gamma\gamma+\ldots)^2$$

662. Ἐὰν $\alpha>\beta$ καὶ ν ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἀριθμός, νὰ ἀποδειχθῇ ἡ ἀνισότης $(\alpha^{2\nu+2}-\beta^{2\nu+2})^2>(\alpha^{2\nu}-\beta^{2\nu})^{\nu+1}$

663. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι κάθε κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$, μικρότερον (ἢ μεγαλύτερον) τῆς μονάδος αὐξάνει (ἢ ἐλαττοῦται), ὅταν προσθέσωμεν καὶ εἰς τοὺς δύο ὅρους του τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν μ.

664. Νὰ ἀποδειχθῇ ἡ ἀνισότης

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_\nu^2 \geqslant \frac{2}{\nu-1}(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\ldots+\alpha_1\alpha_\nu+\alpha_2\alpha_3+\ldots+\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu)$$

665. Νὰ ἀποδειχθῇ ἡ ἀνισότης $\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2}{4} > \left(\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{4}\right)^2$

666. Ἐὰν $\alpha>\beta$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ παράστασις $\frac{\alpha^\nu-\beta^\nu}{\alpha-\beta}$ περιλαμβάνεται μεταξὺ $\nu\beta^{\nu-1}$ καὶ $\nu\alpha^{\nu-1}$.

667. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ἐὰν εἶναι $\frac{\alpha}{\beta}<\frac{\alpha'}{\beta'}<\frac{\alpha''}{\beta''}$ θὰ εἶναι καὶ

$$\frac{\alpha}{\beta}<\frac{\nu\alpha+\nu'\alpha'+\nu''\alpha''}{\nu\beta+\nu'\beta'+\nu''\beta''}<\frac{\alpha''}{\beta''}.$$

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΙΣ ΓΕΝΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

256. Διερεύνησις γενικῶν προβλημάτων. Ὅταν τὰ δεδομένα ἑνὸς προβλήματος εἶναι ἐγγράμματα, δηλ. ὅταν τὸ πρόβλημα εἶναι ***γενικόν***, εἶναι ἀνάγκη νὰ ***διερευνῶμεν*** τὸ πρόβλημα αὐτό. Δηλ. πρέπει νὰ ζητοῦμεν τὰς διαφόρους λύσεις, τὰς ὁποίας δύναται νὰ ἔχῃ τὸ πρόβλημα, ἂν κάμωμεν ὅλας τὰς δυνατὰς ὑποθέσεις ἐπὶ τῶν δεδομένων τοῦ προβλήματος καὶ νὰ ὁρίζωμεν τὴν σημασίαν, τὴν ὁποίαν θὰ ἔχουν τὰ ἐξαγόμενα αὐτὰ διὰ τὸ πρόβλημα.

257. Παράδειγμα 1ον ***Πατήρ τις εἶναι α ἐτῶν καὶ ὁ υἱός του β ἐτῶν. Πότε ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς θὰ εἶναι τριπλασία τῆς ἡλικίας τοῦ υἱοῦ.***

Ἔστω, ὅτι θὰ συμβῇ αὐτὸ μετὰ x ἔτη. Μετὰ x ἔτη ὁ πατὴρ θὰ εἶναι $\alpha+x$ ἐτῶν καὶ ὁ υἱός του $\beta+x$. Ἐπειδὴ μετὰ x ἔτη ὁ πατὴρ θὰ ἔχῃ τριπλασίαν ἡλικίαν τοῦ υἱοῦ, θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\alpha+x=3(\beta+x).$$

Λύομεν αὐτὴν καὶ ἔχομεν κατὰ σειρὰν

$$\alpha+x=3\beta+3x \quad \text{ἢ} \quad x-3x=-\alpha+3\beta$$

$$\text{ἢ} \quad -2x=-\alpha+3\beta \quad \text{ἢ} \quad 2x=\alpha-3\beta \quad \text{ἄρα} \quad x=\frac{\alpha-3\beta}{2} \qquad (1)$$

Διερεύνησις I. Ἐὰν $\alpha-3\beta>0$, δηλ. ἐὰν $\alpha>3\beta$, ἡ τιμὴ τοῦ x εἶναι θετικὴ καὶ τὸ ζητούμενον θὰ συμβῇ εἰς τὸ μέλλον.

II. Ἐὰν $\alpha-3\beta<0$, δηλ. ἐὰν $\alpha<3\beta$, ἡ τιμὴ τοῦ x εἶναι ἀρνητικὴ καὶ τὸ ζητούμενον ἔγινε εἰς τὸ παρελθόν.

III. Ἐὰν $\alpha-3\beta=0$, δηλ. ἐὰν $\alpha=3\beta$, ἡ τιμὴ τοῦ x εἶναι μηδὲν καὶ ἑπομένως ἡ σημερινὴ ἡλικία τοῦ πατρὸς εἶναι τριπλασία τῆς ἡλικίας τοῦ υἱοῦ.

258. Παράδειγμα 2ον. ***Πόσας ὀκάδας ἐλαίου τῶν μ δραχμῶν κατ᾽ ὀκᾶν πρέπει νὰ ἀναμείξωμεν μὲ ἔλαιον τῶν 8 χιλιοδρχ. κατ᾽ ὀκᾶν, διὰ νὰ σχηματίσωμεν μεῖγμα 80 ὀκάδων ἐλαίου, τὸ ὁποῖον νὰ πωλῆται πρὸς μ—6 χιλιοδρχ. τὴν ὀκᾶν; Νὰ γίνῃ διερεύνησις ὡς πρὸς τὰς τιμὰς τοῦ μ.***

Ἔστω, ὅτι πρέπει νὰ ἀναμείξωμεν x ὀκάδας ἀπὸ τὸ ἔλαιον τῶν μ χδρχ. τότε ἀπὸ τὸ ἔλαιον τῶν 8 χδρχ. κατ' ὀκᾶν θὰ ἀναμείξωμεν $80-x$ ὀκάδας. Ἡ ἀξία τῶν x ὀκάδων εἶναι μx χδρχ. ἡ ἀξία τῶν $80-x$ ὀκάδων εἶναι $8(80-x)$ χδρχ. καὶ ἡ ἀξία τοῦ μείγματος εἶναι $80(\mu-6)$ χδρχ. Πρέπει λοιπὸν νὰ εἶναι $\mu x+8(80-x)=80(\mu-6)$.

Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτήν. Ἐκτελοῦμεν πράξεις κλπ. καὶ ἔχομεν κατὰ σειρὰν

$$\mu x+640-8x=80\mu-480 \quad \text{ἢ} \quad \mu x-8x=-640+80\mu-480$$

$$\text{ἢ} \quad (\mu-8)x=80\mu-1120 \qquad (1)$$

Διερεύνησις I. Ἐὰν $\mu-8>0$, δηλ. ἐάν $\mu>8$ ἡ ἐξίσωσις (1) ἔχει τὴν λύσιν

$$x=\frac{80\mu-1120}{\mu-8}.$$

Διὰ νὰ εἶναι ὅμως παραδεκτὴ ἡ τιμὴ αὐτὴ τοῦ x πρέπει νὰ εἶναι θετικὴ καὶ μικροτέρα τοῦ 80. Δηλ. πρέπει νὰ εἶναι

$$0<\frac{80\mu-1120}{\mu-8}<80$$

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν συνάγομεν, ὅτι πρέπει νὰ συναληθεύουν αἱ ἀνισότητες

$$\frac{80\mu-1120}{\mu-8}>0 \quad (2) \qquad \text{καὶ} \qquad \frac{80\mu-1120}{\mu-8}<80 \qquad (3)$$

Ἡ ἀνισότης (2) εἶναι ἰσοδύναμος (§ 254) μὲ τὴν

$$(\mu-8)(80\mu-1120)>0 \quad \text{ἢ} \quad (\mu-8)(\mu-14)>0$$

καὶ ἀληθεύει διὰ $\mu<8$ καὶ διὰ $\mu>14$.

Ἡ ἀνισότης (3) γράφεται

$$\frac{80\mu-1120}{\mu-8}-80<0 \quad \text{ἢ} \quad \frac{80\mu-1120-80(\mu-8)}{\mu-8}<0$$

$$\text{ἢ} \quad \frac{-480}{\mu-8}<8 \quad \text{ἢ} \quad \frac{480}{\mu-8}>0$$

Ἡ τελευταία ἀνισότης εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν

$480(\mu-8)>0$ ἢ $\mu-8>0$, ἡ ὁποία ἀληθεύει διὰ $\mu>8$.

Κατὰ τὰ γνωστὰ (§ 255) εὑρίσκομεν, ὅτι αἱ ἀνισότητες (2) καὶ (3) συναληθεύουν διὰ $\mu>14$.

$$\underbrace{-\infty \;.\;.\;.\;.\;.\; 8}\underbrace{\;.\;.\;.\;.\;.\; 14} \;.\;.\;.\;.\;.\; +\infty$$

Ὥστε διὰ νὰ εἶναι παραδεκτὴ ἡ τιμὴ τοῦ x πρέπει νὰ εἶναι $\mu>14$.

II. Ἐὰν $\mu-8=0$, δηλ. ἐὰν $\mu=8$ ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται

$$0\cdot x=-1120 \quad \textit{(ἀδύνατος)}$$

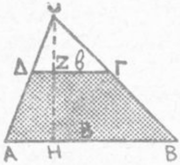
Πράγματι, ἐὰν ἀναμείξωμεν ἔλαιον τῶν 8 χδρχ. κατ'ὀκᾶν μὲ ἔλαιον τῶν 8 χδρχ. δὲν δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν μεῖγμα τῶν $\mu-6=8-6=2$ χδρχ.

259. Παράδειγμα 3ον. ***Αἱ βάσεις ἑνὸς τραπεζίου εἶναι Β, β καὶ τὸ ὕψος του υ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος τοῦ μεγάλου τριγώνου, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν, ἂν προεκτείνωμεν τὰς μὴ παραλλήλους πλευράς του μέχρι τῆς συναντήσεώς των.***

Ἔστω τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου αἱ μὴ παράλληλοι πλευ ραί, προεκτεινόμεναι, τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ο. Θέτομεν $OH=x$ ὁπότε $OZ=x-\upsilon$.

Ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΟΔΓ καὶ ΟΑΒ ἔχομεν

$$\frac{OZ}{OH}=\frac{\Delta\Gamma}{AB} \quad \text{ἢ} \quad \frac{x-\upsilon}{x}=\frac{\beta}{B}.$$



Σχ. 2

Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτήν.

Ἐξαλείφομεν παρανομαστὰς κλπ. καὶ ἔχομεν κατὰ σειρὰν

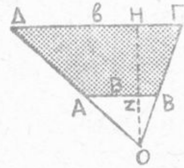
$$B(x-\upsilon)=\beta x \quad \text{ἢ} \quad Bx-B\upsilon=\beta x$$

$$\text{ἢ} \quad Bx-\beta x=B\upsilon \quad \text{ἢ} \quad (B-\beta)x=B\upsilon \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ $B-\beta\neq 0$ (ἰδιότης τοῦ τραπεζίου) διαιροῦμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (1) διὰ $B-\beta$ καὶ ἔχομεν $x=\dfrac{B\upsilon}{B-\beta}$ (2)

Διερεύνησις. Εἰς τὴν Γεωμετρίαν ὅλα τὰ μεγέθη θεωροῦνται θετικά. Διὰ νὰ εἶναι λοιπὸν τὸ πρόβλημα δυνατόν, πρέπει ἡ τιμὴ τοῦ x, ποὺ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου (2), νὰ εἶναι θετική. Ἐδῶ τὸ γινόμενον $B\upsilon$ εἶναι θετικόν· ἑπομένως τὸ σημεῖον τοῦ κλάσματος $\dfrac{B\upsilon}{B-\beta}$, δηλ. ἡ τιμὴ τοῦ x, ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ σημεῖον τοῦ παρονομαστοῦ $B-\beta$.

I. Ἐὰν $B-\beta>0$, δηλ. ἐὰν $B>\beta$, ὁ παρονομαστὴς εἶναι θετικός. ἄρα καὶ ἡ τιμὴ τοῦ x εἶναι θετικὴ καὶ ἑπομένως τὸ πρόβλημα ἔχει πάντοτε μίαν λύσιν. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ Ο κεῖται ἄνω τῆς ΑΒ (Σχ. 2).



Σχ. 3

II. Ἐὰν $B-\beta<0$, δηλ. ἐὰν $B<\beta$, ὁ παρονομαστὴς $B-\beta$ εἶναι ἀρνητικός, ἄρα καὶ ἡ τιμὴ τοῦ x εἶναι ἀρνητική. Δυνάμεθα νὰ δώσωμεν μίαν ἔκφρασιν εἰς τὴν λύσιν αὐτήν, ἂν θεωρήσωμεν, ὅτι τὸ σημεῖον Ο κεῖται κάτωθι τῆς ΑΒ (Σχ. 3)

III. Ἐὰν $B-\beta=0$, δηλ. ἐὰν $B=\beta$ ἡ τιμὴ τοῦ x γίνεται ∞ καὶ τὸ πρόβλημα δὲν ἔχει λύσιν. Πράγματι, εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ τραπέζιον γίνεται ἕνα παραλληλόγραμμον καὶ αἱ πλευραὶ ΑΔ καὶ ΒΓ, ὡς παράλληλοι, δὲν συναντῶνται ποτέ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΕΝΙΚΑ

Α΄ Ὁμάς. 668. Τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν εἶναι γ. Τὸ ἄθροισμα τοῦ γινομένου τοῦ ἑνὸς ἐπὶ μ καὶ τοῦ ἄλλου ἐπὶ ν εἶναι α. Ποῖοι εἶναι οἱ ἀριθμοί;

669. Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος προστιθέμενος καὶ εἰς τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος $\dfrac{\alpha}{\beta}$ καθιστᾷ αὐτὸ διπλάσιον τοῦ δοθέντος.

670. Ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς ἕκαστον τῶν ἀριθμῶν α, β, γ, δ, ἵνα οἱ προκύπτοντες ἀριθμοὶ συνιστοῦν ἀναλογίαν;

671. Νὰ εὑρεθῇ πόσον αὐξάνει ἕνα κλάσμα $\dfrac{\alpha}{\beta}$, ἐὰν προσθέσωμεν καὶ εἰς τοὺς δύο ὅρους του τὸν θετικὸν ἀριθμὸν γ;

672. Ἡ ἡλικία δύο προσώπων εἶναι τοῦ μὲν ἑνὸς α ἐτῶν, τοῦ δὲ ἄλλου β ἐτῶν. Πότε ἡ ἡλικία τοῦ πρώτου θὰ εἶναι μ φορὰς μεγαλυτέρα τῆς ἡλικίας τοῦ δευτέρου;

673. Αἱ ἡλικίαι δύο προσώπων εἶναι ἀντιστοίχως 25 καὶ 40 ἐτῶν. Μετὰ πόσα ἔτη ὁ λόγος τῶν ἡλικιῶν των θὰ εἶναι ἴσος μὲ λ.

674. Θέλει τις νὰ πληρώσῃ α δραχμὰς μὲ ν δίδραχμα καὶ πεντάδραχμα. Πόσα δίδραχμα καὶ πόσα πεντάδραχμα θὰ δώσῃ;

675. Νὰ μοιρασθοῦν α δραχμαὶ εἰς δύο πρόσωπα οὕτως, ὥστε τὸ μερίδιον τοῦ πρώτου νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ νιοστὸν μέρος τοῦ δευτέρου. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μερίδιον ἑκάστου.

676. Νὰ μοιρασθοῦν α δραχμαὶ μεταξὺ τριῶν προσώπων Α, Β, Γ, οὕτως ὥστε ὁ Α νὰ λάβῃ διπλασίας τοῦ Β, ὁ Β νὰ λάβῃ β δραχμὰς περισσοτέρας τοῦ Γ. Πόσας δραχμὰς ἔλαβε ἕκαστος;

677. Νὰ χωρισθῇ ποσόν τι εἰς τρία μέρη, ὥστε τὸ πρῶτον νὰ ὑπερβαίνῃ τὸ δεύτερον κατὰ ρ καὶ τὸ τρίτον νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ πρῶτον μεῖον λ.

678. Μία ὑφάντρια ὑφαίνει α μέτρα ὑφάσματος καθ' ἡμέραν, μία ἄλλη δὲ β μέτρα καθ' ἡμέραν. Ἡ πρώτη ὑφάντρια ἔχει ἤδη ὑφαίνει μ μέτρα. Μετὰ πόσας ἡμέρας αἱ δύο ὑφάντριαι θὰ ἔχουν ὑφάνει τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν μέτρων;

Β' Ὁμάς. 679. Ἕνα βαρέλιον περιέχει α ὀκάδες οἴνου. Ἐξάγομεν ἐξ αὐτοῦ μίαν ὀκᾶν οἴνου, τὴν ὁποίαν ἀντικαθιστῶμεν μὲ μίαν ὀκᾶν ὕδατος. Ἐξάγομεν ἐκ δευτέρου μίαν ὀκᾶν τοῦ μείγματος καὶ τὴν ἀντικαθιστῶμεν πάλιν μὲ μίαν ὀκᾶν ὕδατος. Τὸ αὐτὸ πράττομεν ν φοράς. Πόση ποσότης καθαροῦ οἴνου θὰ μείνῃ εἰς τὸ βαρέλιον;

680. Μοιράζει τις ἕνα χρηματικὸν ποσὸν εἰς μερικὰ πρόσωπα κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον. Εἰς τὸ πρῶτον δίδει α δραχμὰς καὶ τὸ μιοστὸν τοῦ ὑπολοίπου. Μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τοῦ μεριδίου τοῦ πρώτου, δίδει εἰς τὸ δεύτερον 2α δραχ. καὶ τὸ μιοστὸν τοῦ ὑπολοίπου. Μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τῶν δύο αὐτῶν μεριδίων δίδει εἰς τὸν τρίτον 3α δραχ. καὶ τὸ μιοστὸν τοῦ ὑπολοίπου καὶ οὕτω καθεξῆς. Μετὰ τὴν διανομὴν τοῦ ποσοῦ, εὑρέθη, ὅτι τὰ μερίδια ὅλων ἦσαν ἴσα. Νὰ εὑρεθῇ πόσον ἦτο τὸ διανεμηθὲν ποσόν, εἰς πόσα πρόσωπα διενεμήθη τοῦτο καὶ τὸ μερίδιον ἑκάστου (ἐφαρμογή: $\alpha=1000$, $\mu=4$).

681. Ὁ πληθυσμὸς μιᾶς πόλεως αὐξάνει κατὰ τὸ $\frac{1}{\nu}$ τοῦ πληθυσμοῦ τοῦ προηγουμένου ἔτους. Σήμερον ἡ πόλις ἔχει k κατοίκους. Πόσους κατοίκους εἶχε πρὸ μ ἐτῶν. (Ἐφαρμογή: $\nu=20$, $k=194481$, $\mu=4$).

Γ' Ὁμάς. Γεωμετρίας 682. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι, ἂν αὐξηθῇ κατὰ α, τὸ ἐμβαδόν του αὐξάνει κατὰ $\frac{\beta^2\sqrt{3}}{4}$;

683. Δίδεται ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι ΑΒ=ΑΓ=γ καὶ ΒΓ=α. Φέρομεν μίαν παράλληλον ΔΕ πρὸς τὴν βάσιν ΒΓ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ΒΔ εἰς τρόπον, ὥστε νὰ εἶναι ΒΔ=ΔΕ=ΕΓ.

684. Δίδεται ἕνα τραπέζιον ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου ἡ μεγάλη βάσις ΑΒ=α καὶ ἡ μικρὰ βάσις ΓΔ=β καὶ τὸ ὕψος του ΔΗ=υ. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν x ἀπὸ τῆς ΑΒ πρέπει νὰ ἀχθῇ μία παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις, ἵνα ἡ παράλληλος αὐτὴ ἔχῃ δοθὲν μῆκος λ;

685. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς δοθὲν τρίγωνον ἕνα τετράγωνον καὶ νὰ εὑρεθῇ εἰς ποίαν πλευρὰν τοῦ τριγώνου ἀντιστοιχεῖ τὸ μεγαλύτερον τετράγωνον.

686. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ ἕνα ὀρθογώνιον ΔΕΖΗ δοθείσης περιμέτρου, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ ΕΖ νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΓ καὶ αἱ κορυφαὶ Δ καὶ Η ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΑΓ ἀντιστοίχως.

687. Ἑνὸς τραπεζίου ΑΒΓΔ δίδονται αἱ δύο βάσεις ΑΒ=α καὶ ΓΔ=β καὶ ἡ μία ἐκ τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν ΑΔ=γ. Νὰ εὑρεθῇ εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ σημείου Α θὰ συναντηθοῦν αἱ μὴ παράλληλοι πλευραί του;

688. Δίδεται ἕνα κανονικὸν ἡμιεξάγωνον ὁριζόμενον ὑπὸ τῶν τριῶν διαδοχικῶν πλευρῶν του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ καὶ τῆς διαμέτρου ΑΔ τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου. Χωρίζομεν τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἡμιεξαγώνου εἰς τρία μέρη διὰ δύο καθέτων ΕΖ καὶ ΗΘ πρὸς τὴν ΑΔ. Νὰ προσδιορισθοῦν αἱ κάθετοι αὗται, ὥστε νὰ συμβαίνῃ μία ἐκ τῶν κάτωθι ὑποθέσεων:

1ον. Τὰ τρία μέρη τοῦ ἡμιεξαγώνου νὰ εἶναι ἰσοδύναμα.

2ον. Ἐὰν περιστραφῇ τὸ ἡμιεξάγωνον περὶ τὴν ΑΔ, τὰ τρία μέρη νὰ παράγουν στερεά, τῶν ὁποίων αἱ κυρταὶ ἐπιφάνειαι νὰ εἶναι ἰσοδύναμοι.

3ον. Οἱ ὄγκοι τῶν στερεῶν τούτων νὰ εἶναι ἰσοδύναμοι.

689. Δίδεται ἕνας κύκλος Ο ἀκτῖνος ΟΑ=R. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ἀκτῖνος αὐτῆς ἕνα σημεῖον Σ τοιοῦτον, ὥστε ἐὰν φέρωμεν τὴν ἐφαπτομένην ΣΒ τοῦ κύκλου Ο καὶ τὴν κάθετον ΒΓ ἐπὶ τὴν ΟΑ, νὰ εἶναι ΑΓ=λ. Ἐφαρμογὴ $\quad ΑΓ = \frac{3R}{2}$.

690. Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ. Ἐξ ἑνὸς σημείου Μ τῆς πλευρᾶς ΒΓ, φέρομεν τὴν ΜΔ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΓ καὶ τέμνουσαν τὴν ΑΒ εἰς τὸ Δ, καὶ τὴν ΜΕ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ καὶ τέμνουσαν τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ε. Νὰ προσδιορισθῇ τὸ σημεῖον Μ. εἰς τρόπον ὥστε νὰ εἶναι ΜΔ=ΜΕ.

691. Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ. Ἐξ ἑνὸς σημείου Μ τῆς βάσεως ΒΓ φέρομεν τὰς παραλλήλους ΜΕ καὶ ΜΔ πρὸς τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΒ. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ Β πρέπει νὰ ληφθῇ τὸ σημεῖον Μ εἰς τρόπον, ὥστε

$$ΜΔ + ΜΕ = λ.$$

692. Ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ δίδονται δύο πλευραὶ ΑΒ=γ καὶ ΒΓ=α. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ ἕνα σημεῖον Δ τοιοῦτον, ὥστε, ἐὰν ἀχθῇ ἡ ΔΕ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ, νὰ εἶναι ΔΕ=λ. Διερεύνησις.

693. Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ ὁρισθῇ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ ἕνα σημεῖον Δ τοιοῦτον, ὥστε, ἐὰν φέρωμεν ἐκ τοῦ Δ μίαν παράλληλον ΔΕ πρὸς τὴν ΒΓ, καὶ ἡ ὁποία παράλληλος συναντᾷ τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ε, νὰ εἶναι

$$ΒΔ + ΓΕ = 2ΔΕ.$$

694. Νὰ ἀχθῇ μία παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν δοθέντος τριγώνου εἰς τρόπον, ὥστε τὸ σχηματιζόμενον τραπέζιον νὰ ἔχῃ δοθεῖσαν περίμετρον 2τ.

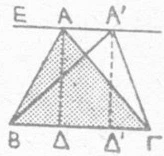
695. Δίδεται ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου αἱ ἴσαι πλευραὶ εἶναι ΑΒ=ΑΓ=α καὶ τοῦ ὁποίου ἡ βάσις ΒΓ εἶναι ἴση μὲ 2β. Νὰ ἀχθῇ μία παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ, κειμένη μεταξὺ τοῦ Α καὶ ΒΓ, συναντῶσα τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε καὶ τοιαύτη, ὥστε τὸ τραπέζιον ΔΕΓΒ νὰ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

696. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ ἕνα τετράγωνον ΔΕΖΗ, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ ΗΖ νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΓ καὶ αἱ κορυφαὶ Δ, Η ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΑΓ ἀντιστοίχως.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΣ $y=\alpha x+\beta$. ΓΡΑΦΙΚΗ ΛΥΣΙΣ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΕΝΑ ΑΓΝΩΣΤΟΝ

260. **Μεταβλητὰ καὶ σταθερὰ ποσά.** Ἔστω ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ (Σχ. 4), τοῦ ὁποίου ἡ βάσις ΒΓ εἶναι ὡρισμένη κατὰ τὴν θέσιν καὶ τὸ μέγεθος, ἡ δὲ ἀπέναντι τῆς βάσεως κορυφὴ Α κινεῖται ἐπ' εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν. Εἶναι φανερόν, ὅτι κάθε μία ἀπὸ τὰς τρεῖς γωνίας του Α, Β, Γ ἀλλάσσει συνεχῶς τιμήν, τὸ ἄθροισμα ὅμως τῶν γωνιῶν αὐτῶν εἶναι σταθερὸν καὶ ἴσον μὲ 180°, δι' οἱανδήποτε θέσιν τῆς κινητῆς κορυφῆς ἐπὶ τῆς εὐθείας.



Σχ. 4

Ἐπίσης ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου μεταβάλλεται, ὅταν ἡ κορυφὴ Α κινῆται ἐπὶ τῆς παραλλήλου εὐθείας Δ, ἐνῷ τὸ ἐμβαδόν του μένει σταθερόν.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παρατηροῦμεν, ὅτι ὑπάρχουν δύο εἴδη ποσῶν: ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα λαμβάνουν διαφόρους τιμάς, ὅπως αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου, ἡ περίμετρος καὶ τὰ ὁποῖα καλοῦνται ***μεταβλητὰ ποσὰ*** ἢ ἁπλῶς ***μεταβληταὶ*** καὶ ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα διατηροῦν πάντοτε τὴν αὐτὴν τιμήν, ὅπως τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου, καὶ τὰ ὁποῖα καλοῦνται ***σταθερὰ ποσὰ ἢ σταθεραί.***

Γενικῶς. ***Μεταβλητὸν ποσὸν ἢ ἁπλῶς μεταβλητὴ λέγεται κάθε ποσόν, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ λαμβάνῃ διαφόρους τιμάς.***

Κατ' ἀντίθεσιν: ***Κάθε ποσόν, τὸ ὁποῖον διατηρεῖ τὴν αὐτὴν τιμήν, δηλ. μένει ἀμετάβλητον, λέγεται σταθερὸν ποσόν.***

Π.χ. ἡ ἀκτὶς ἑνὸς κύκλου, τὸ μῆκος τῆς περιφερείας του, τὸ ἐμβαδόν του εἶναι μεταβλητὰ ποσά. Ὁ λόγος ὅμως τῆς περιφερείας του πρὸς τὴν διάμετρόν του, δηλ. ὁ π., εἶναι σταθερὸν ποσόν.

261. **Στοιχειώδης ἔννοια τῆς συναρτήσεως.** Ἔστω ἡ ἀλγεβρικὴ παράστασις $2x-5$. Ἐὰν τὴν παραστήσωμεν μὲ y θὰ εἶναι

$$y=2x-5. \qquad (1)$$

Διὰ $x=1$, ἡ (1) δίδει $y=2\cdot 1-5=-3$

Διὰ $x=2$, ἡ (1) δίδει $y=2\cdot 2-5=-1$ κ.ο.κ.

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ ἰσότης (1) συνδέει δύο μεταβλητὰς x καὶ y καὶ ὅτι ἡ τιμὴ τῆς μεταβλητῆς y ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν τιμὴν τῆς μεταβλητῆς x.

Ἡ μεταβλητὴ x, εἰς τὴν ὁποίαν δίδομεν αὐθαιρέτως οἱανδήποτε τιμὴν λέγεται **ἀνεξάρτητος μεταβλητή**, ἡ δὲ μεταβλητὴ y, τῆς ὁποίας ἡ τιμὴ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν τιμὴν τῆς x, λέγεται **συνάρτησις τῆς x**.

Ὥστε ἡ δοθεῖσα ἀλγεβρικὴ παράστασις $2x-5$ εἶναι συνάρτησις τῆς μεταβλητῆς x.

Ἐπίσης ἡ παράστασις $2x^2-5x+1$ εἶναι συνάρτησις τῆς x. Ἐκτὸς τῶν ἀλγεβρικῶν παραστάσεων ὑπάρχουν καὶ ἄλλα ποσά, τὰ ὁποῖα εἶναι συναρτήσεις ἄλλων ποσῶν.

Π. χ. Ἡ *ἀξία* ἑνὸς ὑφάσματος εἶναι *συνάρτησις τοῦ μήκους του*.

Τὸ *μῆκος* μιᾶς μεταλλικῆς ράβδου εἶναι *συνάρτησις τῆς θερμοκρασίας της*.

Τὸ *διάστημα*, τὸ ὁποῖον διανύει ἕνα κινητόν, εἶναι *συνάρτησις τῆς ταχύτητός του* καὶ *τοῦ χρόνου*, κατὰ τὸν ὁποῖον κινεῖται.

Τὸ *ἐμβαδὸν* ἑνὸς τετραγώνου εἶναι *συνάρτησις τῆς πλευρᾶς του*.

Τὸ *ἐμβαδὸν* ἑνὸς κύκλου εἶναι *συνάρτησις τῆς ἀκτῖνος του*.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι:

***Ἐὰν δύο μεταβληταὶ* x *καὶ* y *συνδέωνται μεταξύ των κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε εἰς κάθε δοθεῖσαν τιμὴν τῆς* x *νὰ ἀντιστοιχῇ ὡρισμένη τιμὴ τῆς* y, *τότε ἡ* y *λέγεται συνάρτησις τῆς* x.**

Μία συνάρτησις μιᾶς μεταβλητῆς παρίσταται συνήθως μὲ τὸ γράμμα y ἢ μὲ τὰ σύμβολα $\sigma(x)$, $\varphi(x)$, $f(x)$. . . ., τὰ ὁποῖα ἀπαγγέλλονται: σίγμα τοῦ χί, φὶ τοῦ χί, ἔφ τοῦ χί. . . .

Π. χ. αἱ $y=3x+1$, $\sigma(x)=2x^2+5x-4$

εἶναι συναρτήσεις τῆς μεταβλητῆς x.

262. Μεταβολὴ τῆς συναρτήσεως $y=\alpha x+\beta$. Ἔστω ἡ συνάρτησις $y=3x+4$ (1).

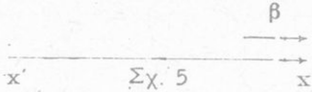
Διὰ νὰ ἴδωμεν πῶς μεταβάλλεται ἡ συνάρτησις (1) πρέπει νὰ δώσωμεν εἰς τὸν x τιμὰς ἀπὸ τὸ $-\infty$ ἕως τὸ $+\infty$ καὶ νὰ εὕρωμεν τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῆς συναρτήσεως y. Ὁ κάτωθι πίναξ δεικνύει τὰς τιμάς, τὰς ὁποίας λαμβάνει ἡ συνάρτησις y, ὅταν ἡ x λάβῃ τὰς τιμὰς. . . .3, -2, -1, 0, 1, 2, 3. . . .

x	$-\infty$. . . .	-3	-2	-1	0	1	2	3. . . .	$+\infty$
y	$-\infty$. . . .	-5	-2	$+1$	4	7	10	13. . . .	$+\infty$

Ὁ πίναξ ὅμως αὐτός, οὔτε εὔκολον εἶναι νὰ καταρτισθῇ δι' ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ x, οὔτε μᾶς διευκολύνει εἰς τὴν ἐξέτασιν τῶν μεταβολῶν τῆς συναρτήσεως αὐτῆς. Διὰ τοῦτο εἶναι ἀνάγκη νὰ εὑρεθῇ ἄλλος τρόπος μὲ τὸν ὁποῖον νὰ αἰσθητοποιοῦνται αἱ μεταβολαὶ τῆς συναρτήσεως αὐτῆς ἢ ἄλλης οἱασδήποτε συναρτήσεως.

Αἱ κατωτέρω γνώσεις μᾶς εἶναι ἀπαραίτητοι πρὸς τοῦτο:

263. **Ἄξων.** Ἔστω μία ἀπεριόριστος εὐθεῖα x΄x. Ἕνα κινη-

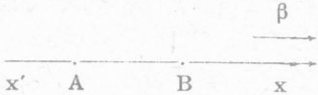


Σχ. 5

τὸν δύναται νὰ διανύσῃ τὴν εὐθεῖαν αὐτὴν εἴτε κατὰ τὴν φορὰν τοῦ βέλους β, εἴτε κατ᾽ ἀντίθετον φοράν. Διὰ νὰ διακρίνωμεν τὰς δύο φορὰς μεταξύ των, δίδομεν εἰς μίαν ἐξ αὐτῶν, αὐθαιρέτως, τὸ ὄνομα ***θετικὴ φορά***, ὁπότε ἡ ἄλλη θὰ ὀνομασθῇ ***ἀρνητικὴ φορά***. Συνήθως ὡς θετικὴν φορὰν λαμβάνομεν τὴν φορὰν ἐκ τοῦ x΄ πρὸς τὸ x καὶ ὡς ἀρνητικὴν τὴν φορὰν ἐκ τοῦ x πρὸς τὸ x΄.

Ἡ ἀπεριόριστος εὐθεῖα x΄x, ***ἐπὶ τῆς ὁποίας ἔχει ὁρισθῆ ἡ θετικὴ φορὰ καὶ κατὰ συνέπειαν καὶ ἡ ἀρνητικὴ φορά, λέγεται ἄξων ἢ προσανατολισμένη εὐθεῖα.***

264. **Θετικὰ ἢ ἀρνητικὰ εὐθύγραμμα τμήματα (διανύσματα).** Ἔστωσαν Α καὶ Β δύο σημεῖα τοῦ ἄξονος x΄x.



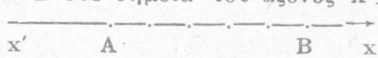
Σχ. 6

Τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ τοῦ ἄξονος (Σχ. 6) δύναται νὰ διανυθῇ ἀπὸ ἕνα κινητόν, εἴτε κατὰ τὴν φορὰν ἐκ τοῦ Α πρὸς τὸ Β, εἴτε κατὰ τὴν φορὰν ἐκ τοῦ Β πρὸς τὸ Α. Ὅταν τὸ κινητὸν ἀκολουθῇ τὴν φορὰν τοῦ ἄξονος, τότε τὸ εὐθ. τμῆμα, τὸ διανυόμενον ὑπ᾽ αὐτοῦ, θὰ θεωρῆται ***θετικόν***, ἄλλως θὰ θεωρῆται ***ἀρνητικόν***.

Π.χ. Τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ εἶναι θετικόν, ἐνῷ τὸ ΒΑ εἶναι ἀρνητικόν.

Τὸ σημεῖον, ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἐκκινεῖ τὸ κινητόν, διὰ νὰ διανύσῃ τὸ εὐθ. τμῆμα, ὀνομάζεται ἀρχὴ τοῦ εὐθ. τμήματος καὶ τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον φθάνει τὸ κινητόν, λέγεται ***τέλος*** τοῦ εὐθ. τμήματος.

265. **Ἀλγεβρικὴ τιμὴ ἑνὸς εὐθ. τμήματος τοῦ ἄξονος x΄x.** Ἔστωσαν Α καὶ Β δύο σημεῖα τοῦ ἄξονος x΄x. Θὰ ὀνομάσωμεν



Σχ. 7

ἀλγεβρικὴν τιμὴν τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ τὸν ἀλγεβρικὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος ἔχει ὡς ἀπόλυτον τιμὴν τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος ἐκφράζει τὸ μῆκος του, μετρηθὲν διὰ δοθείσης μονάδος, καὶ ὡς σημεῖον τὸ + ἢ τὸ — καθόσον τὸ εὐθ. τμῆμα εἶναι θετικὸν ἢ ἀρνητικόν.

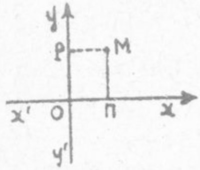
Π. χ. Ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ (Σχ. 7) εἶναι +5, ἐνῷ τοῦ εὐθ. τμήματος ΒΑ εἶναι —5.

Ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ ἑνὸς εὐθ. τμήματος ΑΒ παρίσταται μὲ τὸ σύμβολον $\overline{AB}$, τὸ ὁποῖον ἀπαγγέλλεται: ἀλγεβρικὴ τιμὴ τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ.

Οὕτως, ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸ σχῆμα 7 θὰ εἶναι:

$$\overline{AB}=+5,\quad \overline{BA}=-5 \text{ καὶ } AB=|\overline{AB}|=|\overline{BA}|=5$$

266.* Συντεταγμέναι ἑνὸς σημείου.** Ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου γράφομεν δύο ἄξονας $x'x$ καὶ $y'y$ (Σχ. 8) καθέτους μεταξύ των καὶ προσανατολισμένους κατὰ τὴν φορὰν ποὺ δεικνύει τὸ βέλος. Οἱ ἄξονες αὐτοὶ λέγονται ***ὀρθογώνιοι ἄξονες. Ἔστω Μ ἕνα σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου, ἐπὶ τοῦ ὁποίου κεῖνται οἱ ἄξονες. Ἀπὸ τὸ σημεῖον Μ φέρομεν τὰς καθέτους ΜΠ καὶ ΜΡ ἐπὶ τοὺς ἄξονας $x'x$ καὶ $y'y$. Κάθε σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου εἶναι τελείως ὡρισμένον, ὅταν γνωρίζωμεν τὰς ἀλγεβρικὰς τιμὰς τῶν εὐθ. τμημάτων ΟΠ καὶ ΟΡ.



Σχ. 8

Ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τοῦ εὐθυγ. τμήματος ΟΠ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος $x'x$, λέγεται ***τετμημένη τοῦ σημείου Μ*** καὶ παρίσταται πάντοτε μὲ τὸ γράμμα x· δηλ. εἶναι $x=\overline{O\Pi}$.

Ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τοῦ εὐθ. τμήματος ΟΡ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος $y'y$, λέγεται ***τεταγμένη τοῦ σημείου Μ*** καὶ παρίσταται μὲ τὸ γράμμα y· δηλ. εἶναι $y=\overline{OP}$.

Ἡ τετμημένη καὶ ἡ τεταγμένη ἑνὸς σημείου Μ, λέγονται ***συντεταγμέναι τοῦ σημείου Μ.***

Διὰ νὰ δείξωμεν, ὅτι ἕνα σημεῖον Μ ἔχει τετμημένην x καὶ τεταγμένην y, γράφομεν $M(x, y)$.

Οἱ ἄξονες $x'x$ καὶ $y'y$ λέγονται ***ἄξονες τῶν συντεταγμένων.***

Ὁ ἄξων $x'x$ λέγεται ***ἄξων τῶν τετμημένων ἢ ἄξων τῶν*** x ***καὶ ὁ ἄξων*** $y'y$ ***λέγεται ἄξων τῶν τεταγμένων ἢ ἄξων τῶν*** y.

Τὸ σημεῖον Ο λέγεται ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων.

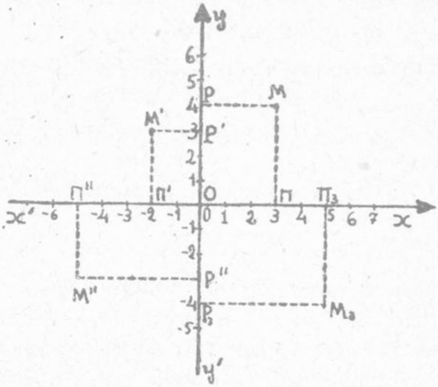
Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι: ***Εἰς κάθε σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου ἀντιστοιχοῦν δύο ἀριθμοὶ*** x ***καὶ*** y, ***οἱ ὁποῖοι εἶναι αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου Μ.***

Π. χ.	Αἱ συντεταγμέναι	τοῦ	σημείου	Μ (Σχ. 9)	εἶναι	$x=+3$,	$y=+4$
»	»	»	»	Μ′	»	$x=-2$,	$y=+3$
»	»	»	»	Μ″	»	$x=-5$,	$y=-3$
»	»	»	»	M_3	»	$x=+5$,	$y=-4$

***267.* Προσδιορισμὸς ἑνὸς σημείου διὰ τῶν συντεταγμένων του.** Ἀνωτέρω εἴδομεν, ὅτι εἰς κάθε σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου ἀντιστοιχοῦν δύο συντεταγμέναι του τελείως ὡρισμέναι.

Ἀντιστρόφως: *Εἰς δύο συντεταγμένας* x *καὶ* y *ἀντιστοιχεῖ ἕνα καὶ μόνον σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου.*

Πράγματι. Ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x λαμβάνομεν ἕνα σημεῖον Π, τοῦ ὁποίου ἡ τετμημένη $\overline{O\Pi} = x$ καὶ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν y ἕνα σημεῖον Ρ, τοῦ ὁποίου ἡ τεταγμένη $\overline{OP} = y$. Ἀπὸ τὰ σημεῖα Π καὶ Ρ φέρομεν παραλλήλους, ἀντιστοίχως, πρὸς τοὺς ἄξονας τῶν y′y καὶ x′x, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον Μ· τὸ σημεῖον αὐτὸ εἶναι τὸ μόνον σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον ἔχει τετμημένην x καὶ τεταγμένην y.



Σχ. 9

268. Παρατηρήσεις. 1η. Κάθε σημεῖον τοῦ ἄξονος x′x ἔχει τεταγμένην μηδὲν καὶ ἀντιστρόφως: Κάθε σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἔχει τεταγμένην μηδέν, κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x.

2α. Κάθε σημεῖον τοῦ ἄξονος y ἔχει τετμημένην μηδὲν καὶ ἀντιστρόφως: Κάθε σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἔχει τετμημένην μηδέν, κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν y.

Ἡ ἀρχὴ Ο ἔχει συντεταγμένας μηδέν.

Ἀσκήσεις. ***697.*** Νὰ σημειωθῇ ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου ἡ θέσις τῶν σημείων:

1. Α(−3, +1), Γ(−4, −2), Ε(+3, 0), Κ(−4, −2)
2. Β(0, −4), Δ(+1, −3), Ζ(0, −3), Θ(+1, −3).

698. Τίνος γεωμετρικοῦ σχήματος εἶναι κορυφαὶ τὰ κάτωθι σημεῖα;

1. Α(−1, −2), Β(5, −2), Γ(5, 4), Δ(+1, 4)
2. Α(−3, −5), Β(1, −5), Γ(2, 2), Δ(−3, 2).

269. Γραφικὴ παράστασις τῶν συναρτήσεων. Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω δυνάμεθα νὰ αἰσθητοποιήσωμεν τὴν μεταβολὴν μιᾶς συναρτήσεως $y = \alpha x + \beta$ μὲ τὴν βοήθειαν τῶν ὀρθογωνίων συντεταγμένων· δηλ. δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν ***γραφικῶς*** τὴν μεταβολὴν τῆς συναρτήσεως αὐτῆς. Πρὸς τοῦτο ἀκολουθοῦμεν τὴν κάτωθι πορείαν:

Δίδομεν εἰς τὴν μεταβλητὴν x διαφόρους τιμὰς καὶ εὑρίσκομεν τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῆς y. Τὰς τιμὰς τῆς μεταβλητῆς x θεωροῦμεν ὡς ***τετμημένας*** εἰς ἕνα σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων x′Οx καὶ y′Οy καὶ τὰς τιμὰς τῆς y ὡς τεταγμένας εἰς τὸ αὐτὸ σύστημα ἀξόνων. Ὁρίζομεν ἔπειτα τὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου, τὰ ὁποῖα ἔχουν ὡς συντεταγμένας τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῶν x καὶ y. ***Ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ἢ ἡ καμπύλη,*** ἡ ὁποία συνδέει τὰ σημεῖα αὐτά, ***εἶναι ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτήσεως.***

270. Γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτήσεως $y = \alpha x$.

Ἐὰν εἰς τὴν συνάρτησιν $y=\alpha x+\beta$ θέσωμεν $\beta=0$, ἡ συνάρτησις λαμβάνει τὴν ἁπλῆν μορφὴν $y=\alpha x$, τὴν ὁποίαν θὰ παραστήσωμεν γραφικῶς.

Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ παραστήσωμεν γραφικῶς τὴν συνάρτησιν

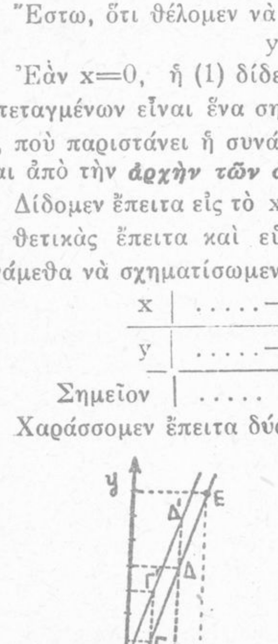
$$y = 3x \qquad (1).$$

Ἐὰν $x=0$, ἡ (1) δίδει $y=0$. Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων εἶναι ἕνα σημεῖον τῆς εὐθείας γραμμῆς ἢ τῆς καμπύλης, ποὺ παριστάνει ἡ συνάρτησις, ἢ ὅπως λέγομεν, ἡ καμπύλη διέρχεται ἀπὸ τὴν ***ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων.***

Δίδομεν ἔπειτα εἰς τὸ x τιμὰς αὐξανομένας ἀρνητικὰς κατ' ἀρχὰς καὶ θετικὰς ἔπειτα καὶ εὑρίσκομεν τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τοῦ y. Δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν τὸν κάτωθι πίνακα:

x	.....	−2	−1	0	1	2	.....
y	.....	−6	−3	0	3	6	.....
Σημεῖον	.....	Α	Β	Ο	Γ	Δ	.....

Χαράσσομεν ἔπειτα δύο ὀρθογωνίους ἄξονας x′Ox καὶ y′Oy καὶ εὑρίσκομεν τὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου, τὰ ὁποῖα ἔχουν συντεταγμένας τὰς τιμὰς τοῦ ἀνωτέρω πίνακος. Εὑρίσκομεν τὰ σημεῖα Α, Β, Ο, Γ, Δ. Ἐὰν συνδέσωμεν τὰ σημεῖα αὐτὰ μὲ μίαν γραμμήν, θὰ ἴδωμεν, ὅτι τὰ σημεῖα αὐτὰ κεῖνται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας γραμμῆς.



Σχ. 10

Ἡ εὐθεῖα αὐτὴ εἶναι ἡ ***καμπύλη, τὴν ὁποίαν παριστάνει*** ἡ συνάρτησις $y = 3x$.

Μὲ τὸν ὅρον καμπύλη πρέπει νὰ νοῆται ἡ γραμμή, τὴν ὁποίαν παριστᾷ ἡ συνάρτησις.

Δυνάμεθα νὰ ἐπαληθεύσωμεν, ὅτι ὄχι μόνον τὰ εὑρεθέντα σημεῖα, ἀλλὰ καὶ ὅλα τὰ σημεῖα τῆς εὐθείας ΑΔ ἐπαληθεύουν τὴν σχέσιν $y=3x$. Πράγματι τὸ σημεῖον Ε τῆς εὐθείας αὐτῆς ἔχει συντεταγμένας $x=3$ καὶ $y=9$.

271. Γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτήσεως $y=\alpha x+\beta$. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ παραστήσωμεν γραφικῶς τὴν συνάρτησιν

$$y = 3x + 2 \qquad (1).$$

Θὰ ἠδυνάμεθα, ὅπως εἰς τὴν συνάρτησιν $y=3x$, νὰ εὕρωμεν ἕνα πίνακα τιμῶν τῶν x καὶ y καὶ νὰ ἐργασθῶμεν ὁμοίως. Δυνάμεθα ὅμως νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι διὰ μίαν τιμὴν τοῦ x, ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ y θὰ εἶναι ἀνωτέρα κατὰ 2 μονάδας ἐκείνης, ποὺ εὑρέθη προηγουμένως εἰς τὴν συνάρτησιν $y = 3x$. Τὰ σημεῖα λοιπὸν Α, Β, Ο, Γ, Δ πρέπει νὰ ἀντικατασταθοῦν μὲ τὰ σημεῖα Α′, Β′, Μ, Γ′, Δ′ τῶν ὁποίων αἱ ***τεταγμέναι*** εἶναι κατὰ 2 μονάδας μεγαλύτεραι τῶν προηγουμένων. Ἐὰν συνδέσωμεν τὰ διάφορα αὐτὰ σημεῖα μὲ μίαν γραμμήν, θὰ ἴδωμεν ἀκόμη, ὅτι κεῖνται ἐπὶ εὐθείας γραμμῆς. Ὥστε ἡ συνάρτησις $y=3x+2$ παριστᾷ τὴν εὐθεῖαν Α′Β′ΜΓ′Δ′. Διὰ τοῦ κάτωθι θεωρήματος ἀποδεικνύεται, ὅτι ἡ συνάρτησις $y=\alpha x+\beta$ παριστᾷ μίαν εὐθεῖαν.

272. Θεώρημα. Ἡ συνάρτησις $y=\alpha x+\beta$ παριστᾷ μίαν εὐθεῖαν.

1ον. Ἔστω ἡ συνάρτησις $y=3x$. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ συνάρτησις αὐτὴ παριστᾷ μίαν εὐθεῖαν γραμμήν. Δηλ. θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ σημεῖα Α, Ο, Δ, τὰ ὁποῖα ὡρίσθησαν, ὅπως ἐδείχθη εἰς τὴν § 270 κεῖνται ἐπὶ εὐθείας.

Φέρομεν τὰς εὐθείας ΟΑ καὶ ΟΔ (Σχ. 10). Ἀπὸ τὸν τρόπον, κατὰ τὸν ὁποῖον ὡρίσθησαν τὰ σημεῖα Α, Ο, Δ συνάγομεν, ὅτι

$$\frac{Η Δ}{Ο Η} = \frac{6}{2} = 3, \quad \frac{Θ Α}{Ο Θ} = \frac{-6}{-2} = 3$$

Ὥστε εἶναι

$$\frac{Η Δ}{Ο Η} = \frac{Θ Α}{Ο Θ} = 3.$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΗΔ καὶ ΟΘΑ ἔχουν τὰς καθέτους πλευράς των ἀναλόγους. Ἄρα τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ὅμοια. Ἐκ τῆς ὁμοιότητος αὐτῶν συνάγομεν, ὅτι αἱ γωνίαι των εἶναι ἴσαι μίαν πρὸς μίαν, ἤτοι εἶναι $Δ\widehat{Ο}Η = Θ\widehat{Ο}Α$. Ἀπὸ τὴν ἰσότητα τῶν γωνιῶν αὐτῶν συνάγομεν, ὅτι τὰ σημεῖα Α, Ο, Δ κεῖνται ἐπ᾿ εὐθείας γραμμῆς.

2ον. Ἔστω ἡ συνάρτησις $y=3x+2$. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ συνάρτησις αὐτὴ παριστάνει μίαν εὐθεῖαν γραμμήν. Δηλ. θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ σημεῖα Α′, Β′, Μ, Γ′, Δ′, τὰ ὁποῖα ὡρίσθησαν εἰς τὴν § 270 κεῖνται ἐπ᾿ εὐθείας γραμμῆς (Σχ. 10).

Πράγματι· φέρομεν τὴν εὐθεῖαν Β′Γ′. Τὸ τετράπλευρον ΒΒ′Γ′Γ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι αἱ δύο ἀπέναντι πλευραί του ΒΒ′ καὶ

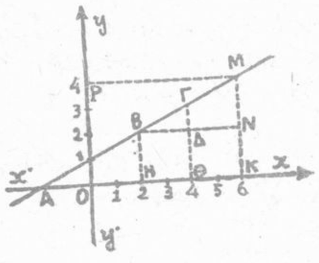
ΓΓ′ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι: ἴσαι μέν, διότι ΒΒ′=ΓΓ′=2, παράλληλοι δέ, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθείαν x′Ox· συνεπῶς ἡ Β′Γ′ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ. Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΜΟΓΓ′ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ ὅτι ἡ ΜΓ′ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΟΓ. Ὥστε αἱ Γ′Μ καὶ Γ′Β′ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν ΒΟΓ· καὶ ἐπειδὴ ἄγονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον Γ′, ἕπεται, ὅτι κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας· ὥστε ἡ Β′ΜΓ′ εἶναι εὐθεῖα γραμμή.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Η συνάρτησις y=αx+β παριστᾷ...***

273. **Σπουδαῖαι παρατηρήσεις.** I. Αἱ συναρτήσεις $y=3x$ καὶ $y=3x+2$, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὸν αὐτὸν συντελεστὴν τοῦ x, παρίστανται μὲ ***δύο εὐθείας παραλλήλους.***

II. Ἡ εὐθεῖα, τὴν ὁποίαν παριστᾷ ἡ συνάρτησις $y=3x+2$, τέμνει τὸν ἄξονα y′y εἰς ἕνα σημεῖον Μ, τοῦ ὁποίου ἡ τεταγμένη εἶναι ἀκριβῶς ἴση μὲ +2.

274. **Θεώρημα ἀντίστροφον.** ***Κάθε εὐθεῖα γραμμὴ δύναται νὰ παρασταθῇ ὑπὸ μιᾶς συναρτήσεως τῆς μορφῆς*** $y=\alpha x+\beta$.



Σχ. 11

Ἔστω μία εὐθεῖα ΑΓ (Σχ. 11), ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Α

Α(−2,0), Β(2,2), Γ(4,3).

Ἔστω τυχὸν σημεῖον Μ τῆς εὐθείας αὐτῆς, τοῦ ὁποίου αἱ συντεταγμέναι, ἔστω ὅτι εἶναι $\overline{OK}=x$, καὶ $\overline{KM}=y$. Ἀπὸ τὰ σημεῖα Γ καὶ Μ φέρομεν παραλλήλους ΓΘ καὶ ΜΚ πρὸς τὸν ἄξονα Oy καὶ ἀπὸ τὸ Β τὴν παράλληλον ΒΔΝ πρὸς τὸν ἄξονα Ox, ἡ ὁποία τέμνει τὰς ΓΘ καὶ ΜΚ εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ν. Ἀπὸ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΒΔΓ καὶ ΒΝΜ συνάγομεν, ὅτι:

$$\frac{NM}{\Delta\Gamma}=\frac{BN}{B\Delta} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\overline{NM}}{\overline{\Delta\Gamma}}=\frac{\overline{BN}}{\overline{B\Delta}} \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ $\overline{NM}=\overline{KM}-\overline{KN}=y-2$, $\overline{\Delta\Gamma}=\overline{\Theta\Gamma}-\overline{\Theta\Delta}=3-2$, $\overline{BN}=\overline{HK}=\overline{OK}-\overline{OH}=x-2$, καὶ $\overline{B\Delta}=\overline{H\Theta}=\overline{O\Theta}-\overline{OH}=4-2$,

ἡ (1) γράφεται: $\dfrac{y-2}{3-2}=\dfrac{x-2}{4-2}$ ἢ $y-2=\dfrac{x-2}{2}$

Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν ὡς πρὸς y καὶ εὑρίσκομεν

$$y=\frac{1}{2}x+1$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ συντεταγμέναι ***τυχόντος σημείου τῆς εὐθείας*** ΑΓ ἐπαληθεύουν μίαν σχέσιν τῆς μορφῆς $y=\alpha x+\beta$.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Κάθε εὐθεῖα γραμμή...***

275. **Συμπέρασμα.** Τὰ δύο προηγούμενα θεωρήματα μᾶς ἐπιτρέπουν νὰ συμπεράνωμεν, ὅτι:

I. ***Ἡ συνάρτησις*** $y=\alpha x+\beta$ παριστᾷ μίαν εὐθεῖαν γραμμὴν καὶ διὰ τοῦτο λέγεται καὶ ***γραμμικὴ συνάρτησις***.

II. ***Κάθε ἐξίσωσις τοῦ πρώτου βαθμοῦ καὶ τῆς μορφῆς*** $y=\alpha x+\beta$ παριστᾷ μίαν εὐθεῖαν γραμμήν.

276. **Ἐφαρμογαί. I.** ***Πρακτικὴ κατασκευὴ τῆς εὐθείας*** $y = \alpha x + \beta$.

Ἐπ' ὅσον ἡ συνάρτησις $y=\alpha x+\beta$ παριστᾷ μίαν εὐθεῖαν γραμμήν, εἶναι φανερόν, ὅτι δύο μόνον σημεῖα αὐτῆς ἀρκοῦν διὰ νὰ τὴν παραστήσωμεν γραφικῶς. Ἀντὶ νὰ εὕρωμεν δύο **τυχόντα** σημεῖα αὐτῆς, εὑρίσκομεν ἐκεῖνα τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα τέμνουν τοὺς ἄξονας τῶν συντεταγμένων.

Παράδειγμα. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ κατασκευάσωμεν τὴν εὐθεῖαν

$$y = -\frac{x}{2} + 2 \qquad (1)$$

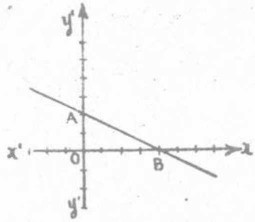
Ἐὰν λάβωμεν $x=0$, ἡ (1) δίδει $y=2$ καὶ ἔχομεν τὸ σημεῖον $A(0,2)$.

Ἐὰν λάβωμεν $y=0$, ἡ (1) δίδει

$$0 = -\frac{x}{2} + 2 \quad \text{ἢ} \quad 4 = x \qquad \text{καὶ}$$

ἔχομεν τὸ σημεῖον $B(4,0)$.

Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν AB, ἡ ὁποία εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα.



Σχ. 12.

Ἀσκήσεις. *698.* **Νὰ προσδιορισθοῦν τὰ κάτωθι σημεῖα:**

1ον. (3, —5), (3, 8), (3, 0), (3, —2)

2ον. (—7, —1), (7, —1), (2, —1), (—5, —1).

Ἂν ἑνώσωμεν τὰ σημεῖα ἑκάστης σειρᾶς, ποίαν γραμμὴν παριστάνουν;

699. **Νὰ παρασταθοῦν γραφικῶς αἱ κάτωθι συναρτήσεις:**

$$y = 2x, \quad y = -3x, \quad y = -\frac{1}{2}x, \quad y = -\frac{3}{2}x$$

700. **Νὰ παρασταθοῦν γραφικῶς αἱ συναρτήσεις:**

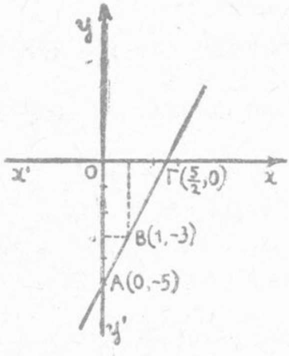
$$y = 3x + 4, \quad y = -2x + 1, \quad y = \frac{2}{3}x - 4, \quad y = \frac{2x+2}{3}$$

277. **Γραφικὴ λύσις τῶν ἐξισώσεων τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον.** Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ λύσωμεν γραφικῶς τὴν ἐξίσωσιν $2x-5=0$ (1).

Παριστάνομεν τὸ πρῶτον μέλος της μὲ y, δηλ. θέτομεν $y=2x-5$ καὶ κατασκευάζομεν (σχ. 13) τὴν εὐθεῖαν, τὴν ὁποίαν παριστᾷ ἡ συνάρτησις $y=2x-5$ (2).

Ἐὰν λάβωμεν $x=0$, ἡ (2) δίδει $y=-5$ καὶ ἔχομεν τὸ σημεῖον A. Ἐὰν λάβωμεν $x=1$, ἡ (2) δίδει $y=-3$ καὶ ἔχομεν τὸ σημεῖον B.

Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ, ἡ ὁποία τέμνει τὸν ἄξονα τῶν x εἰς τὸ σημεῖον Γ. Ἡ τετμημένη τοῦ σημείου Γ εἶναι ἡ ρίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως. Ἐπειδὴ ἡ τετμημένη τοῦ Γ εἶναι 2,5 ἡ ρίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι ἡ 2,5. Ἂν λύσωμεν κατὰ τὰ γνωστὰ τὴν ἐξίσωσιν $2x-5=0$ εὑρίσκομεν πράγματι, ὅτι $x=2,5$.



Σχ. 13

Ἀπὸ τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα καὶ ἀπὸ ἄλλα ὅμοια πρὸς αὐτὸ συνάγομεν, ὅτι:

Διὰ νὰ λύσωμεν γραφικῶς μίαν ἐξίσωσιν τοῦ πρώτου βαθμοῦ $\alpha x+\beta=0$, ***κατασκευάζομεν τὴν εὐθεῖαν, τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ συνάρτησις*** $y=\alpha x+\beta$ ***καὶ εὑρίσκομεν τὴν τετμημένην*** x ***τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῆς εὐθείας αὐτῆς καὶ τοῦ ἄξονος τῶν*** x.

Ἀσκήσεις √*701.* Νὰ λυθοῦν γραφικῶς αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

1. $2x+4=0$ 3. $\frac{3x+9}{2}=0$ 5. $\frac{3x}{2}-\frac{x}{4}=-\frac{5}{2}$

2. $4x-8=0$ 4. $\frac{x+6}{2}=1$ 6. $\frac{4x}{3}-2=0$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΔΥΟ Ἢ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΟΥΣ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ. ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

278. **Ἐξίσωσις μὲ δύο ἀγνώστους.** Ἔστω ἡ ἐξίσωσις

$$5x+2y=12 \qquad (1)$$

Ἐὰν δώσωμεν εἰς τὸν ἄγνωστον x τὴν τιμὴν 0, δηλ. ἐὰν θέσωμεν $x=0$, ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται

$$0+2y=12 \quad ἢ \quad y=6.$$

Αἱ τιμαὶ $x=0$ καὶ $y=6$ εἶναι μία ***λύσις*** τῆς ἐξισώσεως (1).

Ὁμοίως, ἐὰν δώσωμεν εἰς τὸν x τὰς **τιμὰς** 1, 2, 3, 4, . . . θὰ εὕρωμεν, ἀπὸ τὴν (1), ὅτι τὸ y ἔχει, ἀντιστοίχως, τὰς τιμὰς

$$\frac{7}{2}, \quad 1, \quad -\frac{3}{2} \quad -4, \ldots$$

Αἱ τιμαὶ αὗται τῶν x καὶ y σχηματίζουν ἀνὰ δύο, ἕνα ***ζεῦγος λύσεων*** τῆς ἐξισώσεως (1).

Ἐπειδὴ εἰς κάθε τιμὴν τοῦ x, ἀκεραίαν ἢ κλασματικήν, ἀντιστοιχεῖ καὶ μία ὡρισμένη τιμὴ τοῦ y, συνάγομεν ὅτι :

Ἡ ἐξίσωσις (1) ἔχει ἄπειρα ζεύγη λύσεων.

Ἡ γενικὴ μορφὴ μιᾶς ἐξισώσεως τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ δύο ἀγνώστους εἶναι ἡ

$$\boxed{\alpha x+\beta y=\gamma} \qquad (2)$$

Ἡ ἐξίσωσις (2) λέγεται ***ἀόριστος***.

Ἀσκήσεις. 302. Νὰ εὑρεθοῦν τρία ζεύγη λύσεων τῶν κάτωθι ἐξισώσεων :

1. $3x+y=5$ 3. $7x-8y+1=0$ 4. $\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=2$ 4. $\frac{y}{2}+19=2-x$

279. Σύστημα ἐξισώσεων. Ἔστωσαν αἱ ἐξισώσεις :

$$3x+4y=26 \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad 5x-2y=0 \quad (2)$$

Αἱ ἐξισώσεις αὗται ἀληθεύουν διὰ $x=2$ καὶ $y=5$ καὶ λέγομεν, ὅτι ἀποτελοῦν ἕνα ***σύστημα δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους.***

Γενικῶς : ***Σύστημα ἐξισώσεων λέγεται τὸ σύνολον δύο ἢ περισσοτέρων ἐξισώσεων, αἱ ὁποῖαι ἀληθεύουν μὲ τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων, ποὺ περιέχουν.***

Αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων, ποὺ ἐπαληθεύουν τὰς ἐξισώσεις ἑνὸς συστήματος, λέγονται ***ρίζαι*** τοῦ συστήματος αὐτοῦ ἢ ***λύσεις*** αὐτοῦ.

Π.χ. αἱ ρίζαι τοῦ συστήματος τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) εἶναι

$$x=2, \quad y=5.$$

Λύσις ἑνὸς συστήματος ἐξισώσεων λέγεται ἡ εὕρεσις τῶν ριζῶν τοῦ συστήματος.

280. Συστήματα ἰσοδύναμα. ***Δύο ἢ περισσότερα συστήματα λέγονται ἰσοδύναμα, ὅταν ἔχουν τὰς αὐτὰς λύσεις· δηλ. ὅταν κάθε λύσις τοῦ ἑνὸς συστήματος εἶναι λύσις καὶ τοῦ ἄλλου συστήματος καὶ ἀντιστρόφως.***

Ὅταν δύο συστήματα εἶναι ἰσοδύναμα, δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὸ ἕνα διὰ τοῦ ἄλλου.

281. Ἰδιότητες συστημάτων. Ἡ λύσις ἑνὸς συστήματος ἐξισώσεων στηρίζεται ἐπὶ τοῦ μετασχηματισμοῦ τοῦ δοθέντος συστήματος εἰς μίαν σειρὰν ἄλλων ἰσοδυνάμων συστημάτων, εἰς τρόπον ὥστε ἡ λύσις τοῦ τελικοῦ συστήματος νὰ εἶναι προφανής.

Οἱ μετασχηματισμοὶ αὐτοὶ στηρίζονται ἐπὶ τῶν κάτωθι ἰδιοτήτων.

282. Ἰδιότης I. ***Εἰς ἕνα σύστημα ἐξισώσεων δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν ἢ νὰ ἀφαιρέσωμεν κατὰ μέλη δύο ἢ περισσοτέρας***

ἐξισώσεις του καὶ νὰ ἀντικαταστήσωμεν μίαν ἀπὸ τὰς δοθείσας ἐξισώσεις μὲ τὴν προκύπτουσαν καὶ νὰ λάβωμεν οὕτω ἕνα σύστημα ἰσοδύναμον μὲ τὸ δοθέν.

Ἔστω τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων

$$\mathrm{I}\quad\left\{\begin{array}{ll} A=A' & (1)\\ B=B' & (2)\\ \Gamma=\Gamma' & (3)\end{array}\right.$$

ὅπου $A, B, \Gamma, A', B', \Gamma'$ εἶναι παραστάσεις ποὺ περιέχουν τοὺς ἀγνώστους $x, y, \omega \ldots$

Ἐὰν προσθέσωμεν τὰς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος (1) κατὰ μέλη, **λαμβάνομεν τὴν** ἐξίσωσιν

$$A+B+\Gamma=A'+B'+\Gamma'$$

Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ σύστημα

$$\mathrm{II}\quad\left\{\begin{array}{ll} A+B+\Gamma=A'+B'+\Gamma' & (4)\\ B=B' & (5)\\ \Gamma=\Gamma' & (6)\end{array}\right.$$

εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ σύστημα (I).

Πράγματι, κάθε λύσις τοῦ συστήματος I δίδει ἴσας ἀριθμητικὰς τιμὰς καὶ εἰς τὰ δύο μέλη τῶν ἐξισώσεών του (1), (2), (3)· ἄρα θὰ δίδῃ ἴσας ἀριθμητικὰς τιμὰς καὶ εἰς τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως

$$A+B+\Gamma=A'+B'+\Gamma'$$

Συνεπῶς κάθε λύσις τοῦ συστήματος I εἶναι καὶ λύσις τοῦ συστήματος II.

Ἀντιστρόφως. Κάθε λύσις τοῦ συστήματος II δίδει ἴσας ἀριθμητικὰς τιμὰς καὶ εἰς τὰ δύο μέλη τῶν ἐξισώσεών του (4), (5), (6). Ἄρα καὶ τὰ ἀθροίσματα $B+\Gamma$ καὶ $B'+\Gamma'$ θὰ ἔχουν ἴσας ἀριθμητικὰς τιμάς. Ἂν ἀφαιρέσωμεν καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέλη τῶν ἴσων ἀριθμητικῶν τιμῶν τῆς ἰσότητος $A+B+\Gamma=A'+B'+\Gamma'$ τὰ ἴσα ἀθροίσματα $B+\Gamma$ καὶ $B'+\Gamma'$, θὰ προκύψουν αἱ ἴσαι ἀριθμητικαὶ τιμαὶ $A=A'$· ὥστε κάθε λύσις τοῦ συστήματος II εἶναι καὶ λύσις τοῦ συστήματος I.

Παρατήρησις. Ἡ προηγουμένη ἀπόδειξις εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν προστιθεμένων κατὰ μέλη ἐξισώσεων. Ἐξ αὐτοῦ συνάγομεν, ὅτι δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ προσθέτωμεν κατὰ μέλη ὅλας τὰς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος, ἀλλὰ μερικὰς ἐξ αὐτῶν. Πάντως ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις πρέπει νὰ ***ἀντικαταστήσῃ μίαν ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις, ποὺ ἐχρησιμοποιήσαμεν διὰ νὰ τὴν σχηματίσωμεν.***

Π.χ. ἡ ἐξίσωσις $B+\Gamma=B'+\Gamma'$ δὲν δύναται νὰ ἀντικαταστήσῃ τὴν ἐξίσωσιν $A=A'$.

283. **Πόρισμα.** ***Δυνάμεθα, πρὶν προσθέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις ἑνὸς συστήματος, νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἑκάστην ἐξ αὐτῶν ἐπὶ ἕναν ἀριθμὸν διάφορον τοῦ μηδενὸς καὶ ἀνεξάρτητον τῶν ἀγνώστων.***

Οὕτω τὰ συστήματα

$$\left.\begin{array}{l} A=A' \\ B=B' \\ \Gamma=\Gamma' \end{array}\right\} \mathrm{I} \qquad \left.\begin{array}{c} A\lambda+B\mu+\Gamma\nu=A'\lambda+B'\mu+\Gamma'\nu \\ B=B' \\ \Gamma=\Gamma' \end{array}\right\} \mathrm{II}$$

εἶναι ἰσοδύναμα, διότι ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ τῶν δύο μελῶν μιᾶς ἐξισώσεως ἐπὶ ἕναν ἀριθμὸν διάφορον τοῦ μηδενός, δὲν μεταβάλλει τοὺς ὅρους εἰς τοὺς ὁποίους ὑπόκεινται οἱ ἄγνωστοι.

284. **Ἰδιότης II.** ***Εἰς ἕνα σύστημα ἐξισώσεων δυνάμεθα νὰ λύσωμεν μίαν ἐξίσωσίν του ὡς πρὸς ἕνα ἄγνωστον, ἔστω πρὸς x συναρτήσει τῶν ἄλλων. Ἐὰν συνδυάσωμεν τὴν οὕτω προκύπτουσαν ἐξίσωσιν μὲ τὰς ἄλλας ἐξισώσεις τοῦ συστήματος, εἰς τὰς ὁποίας ἀντικαθιστῶμεν, προηγουμένως, τὸν ἄγνωστον x μὲ τὴν εὑρεθεῖσαν τιμήν του, θὰ λάβωμεν ἕνα σύστημα ἰσοδύναμον μὲ τὸ δοθέν.***

Ἔστω τὸ σύστημα τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ δύο ἀγνώστους

$$\mathrm{I}\left\{\begin{array}{ll} 3x-4y=2 & (1) \\ 5x+2y=12 & (2) \end{array}\right.$$

Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν (1) ὡς πρὸς x καὶ ἔχομεν

$$3x=2+4y \qquad \text{ἢ} \qquad x=\frac{2+4y}{3} \qquad (3)$$

Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) τὸ x μὲ τὴν τιμήν του, ποὺ δίδει ἡ (3), εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$5\cdot\frac{2+4y}{3}+2y=12$$

Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ σύστημα

$$\mathrm{II}\left\{\begin{array}{ll} x=\dfrac{2+4y}{3} & (3) \\ 5\cdot\dfrac{2+4y}{3}+2y=12 & (4) \end{array}\right.$$

εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ I.

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ λύσις τοῦ συστήματος I εἶναι x=α, y=β. Ἂν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὰς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος I τοὺς ἀγνώστους x καὶ y μὲ τὰς τιμάς των α καὶ β, θὰ λάβωμεν τὰς ἀριθμητικὰς ἰσότητας

$$\left\{\begin{array}{ll} 3\alpha-4\beta=2 & (1') \\ 5\alpha+2\beta=12 & (2') \end{array}\right.$$

Ἀπὸ τὴν (1΄) λαμβάνομεν $\alpha=\frac{2+4\beta}{3}$ (3΄)

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (2΄) τὸ α μὲ τὴν τιμήν του αὐτὴν καὶ ἔχομεν $5\cdot\frac{2+4\beta}{3}+2\beta=12$ (4΄)

Ἀλλὰ αἱ ἰσότητες (3΄) καὶ (4΄) παριστάνουν τὴν ἀριθμητικὴν τιμήν, ποὺ λαμβάνουν καὶ τὰ δύο μέλη τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος II, ὅταν ἀντικαταστήσωμεν εἰς αὐτὰς τοὺς ἀγνώστους x καὶ y μὲ τὰς τιμάς των α καὶ β.

Ὥστε ἡ λύσις x=α, y=β τοῦ συστήματος I εἶναι καὶ λύσις τοῦ συστήματος II.

Ἀντιστρόφως. Θὰ δείξωμεν, ὅτι κάθε λύσις τοῦ συστήματος II εἶναι καὶ λύσις τοῦ συστήματος I. Πράγματι, ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ σύστημα II ἔχει τὴν λύσιν x=α, y=β.

Ἂν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὰς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος II τοὺς ἀγνώστους x καὶ y μὲ τὰς τιμάς των α καὶ β, θὰ λάβωμεν τὰς ἀριθμητικὰς ἰσότητας

$$\left|\begin{array}{ll} \alpha=\frac{2+4\beta}{3} & (3'') \\ 5\cdot\frac{2+4\beta}{3}+2\beta=12 & (4'') \end{array}\right.$$

Ἀπὸ τὴν (3΄΄), ἂν ἐξαλείψωμεν τὸν παρονομαστὴν καὶ μεταφέρωμεν τὸ 4β εἰς τὸ πρῶτον μέλος, λαμβάνομεν $3\alpha-4\beta=2$ (1΄΄)

Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν (4΄΄) τὸ $\frac{2+4\beta}{3}$ μὲ τὴν τιμήν του α, θὰ λάβωμεν $5\alpha+2\beta=12$ (2΄΄)

Ἀλλὰ αἱ ἰσότητες (1΄΄) καὶ (2΄΄) παριστάνουν τὰς ἀριθμητικὰς τιμάς, ποὺ λαμβάνουν καὶ τὰ δύο μέλη τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος I, ὅταν ἀντικαταστήσωμεν εἰς αὐτὰς τοὺς ἀγνώστους x καὶ y μὲ τὰς αὐτὰς τιμάς των α καὶ β.

Ὥστε ἡ λύσις x=α, y=β τοῦ συστήματος II εἶναι καὶ λύσις τοῦ συστήματος I. Τὰ συστήματα λοιπὸν I καὶ II εἶναι ἰσοδύναμα.

285. **Ἀπαλοιφή**. Ὅταν εἰς τὰς ἐξισώσεις ἑνὸς συστήματος ἀντικαταστήσωμεν ἕνα ἄγνωστον μὲ τὴν τιμήν του, ὁ ἄγνωστος αὐτὸς ἐξαλείφεται. Λέγομεν τότε, ὅτι ἔχομεν κάμει ***ἀπαλοιφὴν*** τοῦ ἀγνώστου.

Γενικῶς: ***Ἀπαλοιφὴ*** ἑνὸς ἀγνώστου μεταξὺ τῶν μ ἐξισώσεων ἑνὸς συστήματος λέγεται ἡ ἀντικατάστασις τοῦ δοθέντος συστήματος δι᾿ ἑνὸς ἰσοδυνάμου συστήματος, εἰς τὸ ὁποῖον αἱ μ—1 ἐξισώσεις δὲν περιέχουν τὸν ἄγνωστον αὐτόν.

ΛΥΣΙΣ ΕΝΟΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΔΥΟ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

286. Γενικὴ μορφὴ ἑνὸς συστήματος μὲ δύο ἀγνώστους. Ἡ γενικὴ μορφὴ ἑνὸς συστήματος τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ δύο ἀγνώστους εἶναι :

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha x + \beta y &= \gamma \\ \alpha' x + \beta' y &= \gamma' \end{aligned}}$$

ὅπου α, β, γ, α΄, β΄, γ΄ εἶναι ποσότητες ἀριθμητικαὶ ἢ ἐγγράμματοι, θετικαὶ ἢ ἀρνητικαὶ ἢ μηδέν, ἀλλὰ ἀνεξάρτητοι τῶν ἀγνώστων x καὶ y.

287. Λύσις ἑνὸς συστήματος δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους. Διὰ νὰ λύσωμεν ἕνα σύστημα δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους πρέπει :

1ον. ***Νὰ ἀπαλείψωμεν ἕνα ἄγνωστον· δηλ. νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὸ δοθὲν σύστημα μὲ ἕνα ἰσοδύναμον σύστημα, τοῦ ὁποίου ἡ μία ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις του νὰ ἔχῃ ἕνα μόνον ἄγνωστον.***

2ον. ***Νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν μὲ τὸν ἕνα ἄγνωστον.***

3ον. ***Νὰ ἀντικαταστήσωμεν εἰς μίαν ἀπὸ τὰς δοθείσας ἐξισώσεις τὸν ἄγνωστον αὐτὸν μὲ τὴν εὑρεθεῖσαν τιμήν του καὶ νὰ λύσωμεν ἔπειτα τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν πρὸς εὕρεσιν τῆς τιμῆς τοῦ ἄλλου ἀγνώστου.***

Ἡ ἀπαλοιφὴ ἑνὸς ἀγνώστου μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων ἑνὸς συστήματος μὲ δύο ἀγνώστους καὶ ἑπομένως καὶ ἡ λύσις τοῦ συστήματος δύναται νὰ γίνῃ μὲ μίαν ἀπὸ τὰς κάτωθι μεθόδους :

1ον. ***Μέθοδος ἀπαλοιφῆς διὰ προσθέσεως.*** (Συνέπεια τῆς ἰδιότητος I).

2ον. ***Μέθοδος ἀπαλοιφῆς δι᾿ ἀντικαταστάσεως.*** (Συνέπεια τῆς ἰδιότητος II).

3ον. ***Μέθοδος ἀπαλοιφῆς διὰ συγκρίσεως.***

288. I. Μέθοδος ἀπαλοιφῆς διὰ προσθέσεως. ***Παράδειγμα 1ον.*** Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ λύσωμεν τὸ σύστημα

$$\left\{ \begin{aligned} 3x + 7y &= 28 \qquad (1) \\ 2x + 4y &= 18 \qquad (2) \end{aligned} \right.$$

Διὰ νὰ ἀπαλείψωμεν ἕνα ἄγνωστον, π. χ. τὸν x, μὲ τὴν μέθοδον αὐτήν, προσπαθοῦμεν νὰ ἀντικατάστήσωμεν τὸ δοθὲν σύστημα μὲ ἕνα ἄλλο ἰσοδύναμον σύστημα εἰς τὸ ὁποῖον οἱ συντελεσταὶ τοῦ x νὰ εἶναι ***ἀντίθετοι.***

Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς πρώτης ἐξισώσεως τοῦ δοθέντος συστήματος ἐπὶ 2 (δηλ. ἐπὶ τὸν συντελεστὴν τοῦ x, ποὺ ἔχει εἰς τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν) καὶ τὰ δύο μέλη τῆς δευτέρας ἐξισώσεως ἐπὶ −3 (δηλ. ἐπὶ τὸν συντελεστὴν τοῦ x, ποὺ ἔχει εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν μὲ ἀλλαγμένον τὸ σημεῖον του) καὶ λαμβάνομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα.

$$\begin{cases} 6x+14y=56 \\ -6x-12y=-54 \end{cases}$$

Προθέτομεν τὰς ἐξισώσεις αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$2y=2, \quad \text{ἄρα} \quad y=1$$

Ἀντικαθιστῶμεν μίαν ἀπὸ τὰς δοθείσας ἐξισώσεις τοῦ δοθέντος συστήματος I, ἔστω τὴν δευτέραν, μὲ τὴν ἐξίσωσιν $y=1$ καὶ ἔχομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα

$$\text{II} \begin{cases} 3x+7y=28 & (3) \\ y=1 & (4) \end{cases}$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (3) τὸ y μὲ τὴν τιμήν του 1, ποὺ δίδει ἡ ἐξίσωσις (4) καὶ ἔχομεν $3x+7\cdot 1=28$

Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν καὶ εὑρίσκομεν $x=7$.

Ὥστε τὸ δοθὲν σύστημα ἔχει τὴν λύσιν $x=7$, $y=1$.

ΣΗΜ. Ἡ διάταξις τῶν πράξεων διὰ τὴν ἀπαλοιφὴν τοῦ ἀγνώστου x γίνεται ὡς κατωτέρω:

$$\begin{array}{r|r} 2 & 3x+7y=28 \\ -3 & 2x+4y=18 \\ \hline & 6x+14y=56 \\ & -6x-12y=-54 \\ \hline & +2y=2 \\ \text{ἄρα} & y=1 \end{array}$$

Εἰς τὴν πρᾶξιν, μετὰ τὴν εὕρεσιν τῆς τιμῆς τοῦ ἑνὸς ἀγνώστου, π.χ. $y=1$, δὲν γράφομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα II, ἀλλὰ ἀντικαθιστῶμεν ἀμέσως εἰς μίαν ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις τοῦ δοθέντος συστήματος τὸν y μὲ τὴν τιμήν του 1 καὶ εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ ἄλλου ἀγνώστου.

Παρατήρησις. Διὰ νὰ ἀπαλείψωμεν ἕνα ἄγνωστον μεταξὺ τῶν δύο ἐξισώσεων ἑνὸς συστήματος μὲ δύο ἀγνώστους, δὲν εἶναι ἀνάγκη πάντοτε νὰ πολλαπλασιάζωμεν καὶ τὰ δύο μέλη ἑκάστης ἐξισώσεως ἐπὶ τὸν συντελεστὴν τοῦ ἀγνώστου, ποὺ ἔχει ἡ ἄλλη ἐξίσωσις. Ὅταν οἱ συντελεσταὶ δὲν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, δυνάμεθα νὰ λάβωμεν, κοινὸν συντελεστὴν τοῦ ἀγνώστου, ποὺ θέλομεν νὰ ἐπαλείψωμεν, τὸ ἑ.κ.π. τῶν συντελεστῶν του. Διαιροῦμεν ἔπειτα αὐτὸ τὸ ἑ.κ.π. δι᾽ ἑκάστου τῶν συντελεστῶν τοῦ ἀγνώστου καὶ πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη ἑκάστης ἐξισώσεως ἐπὶ τὸ ἀντίστοιχον πηλίκον.

Ἔστω, π.χ. ὅτι θέλομεν νὰ λύσωμεν τὸ σύστημα

$$\begin{cases} 15x-12y=36 & (1) \\ 7x+9y=46 & (2) \end{cases}$$

Ἀπαλοίφομεν τὸν y. Τὸ ἑ.κ.π. τῶν συντελεστῶν του 12 καὶ 9 εἶναι τὸ 36. Τὰ πηλίκα τοῦ 36 διὰ 12 καὶ διὰ 9 εἶναι ἀντιστοίχως 3 καὶ 4. Πολλαπλασιάζομεν λοιπὸν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως (1) ἐπὶ 3 καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (2) ἐπὶ 4 καὶ ἔχομεν κατὰ σειράν.

$$\begin{array}{r|l} 3 & 15x-12y=36 \\ 4 & 7x+9y=46 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 45x-36y=108 \\ 28x+36y=184 \\ \hline 73x \qquad =292 \end{array}$$

ἄρα $x=\frac{292}{73}=4.$

Ἔπειτα ἐργαζόμενοι, ὅπως εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα εὑρίσκομεν, ὅτι $y=2.$

Ἀσκήσεις. ***702.*** Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα:

1. $\begin{cases} 3x+4y=33 \\ 5x+2y=41 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 7x+8y=-61 \\ -3x+4y=-11 \end{cases}$ 5. $\begin{cases} x-12y=-2 \\ 3y+5x=53 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 12x-y=14 \\ 6x+3y=0 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} 3x-5y=14 \\ 12x+10y=-8 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 3\varphi-4\omega=-7 \\ 9\varphi+\omega=109. \end{cases}$

289. **II. Μέθοδος ἀπαλοιφῆς δι᾽ ἀντικαταστάσεως.** Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ λύσωμεν τὸ σύστημα:

$$\text{I}\begin{cases} 3x+2y=18 & (1) \\ 5x-4y=8 & (2) \end{cases}$$

Λύομεν μίαν ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις τοῦ δοθέντος συστήματος, ἔστω τὴν πρώτην, πρὸς ἕνα ἄγνωστον, ἔστω πρὸς x, θεωροῦντες ὡς γνωστὸν τὸν ἄγνωστον y καὶ ἔχομεν

$$3x=18-2y \quad \text{ἢ} \quad x=\frac{18-2y}{3} \qquad (3)$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) τὸ x μὲ τὴν τιμήν του, ποὺ δίδει ἡ ἐξίσωσις (3) καὶ ἔχομεν

$$5\cdot\left(\frac{18-2y}{3}\right)-4y=8 \qquad (4)$$

Ἡ ἐξίσωσις (4) καὶ ἡ ἐξίσωσις (3), ἡ ὁποία εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν (1), ἀποτελοῦν τὸ σύστημα:

$$\text{II}\begin{cases} x=\frac{18-2y}{3} & (3) \\ 5\cdot\left(\frac{18-2y}{3}\right)-4y=8 & (4) \end{cases}$$

τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ σύστημα I.

Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν (4), ἡ ὁποία εἶναι πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον, τὸν y, καὶ ἔχομεν κατὰ σειρὰν

$$5(18-2y)-12y=24 \quad \text{ἢ} \quad 90-10y-12y=24 \quad \text{ἢ} \quad -10y-12y=-90+24$$
$$\text{ἢ} \quad -22y=-66 \quad \text{ἢ} \quad 22y=66 \quad \text{ἄρα} \quad y=3$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (3) τὸ y μὲ τὴν τιμήν του 3 καὶ ἔχομεν: $x=\frac{18-2\cdot3}{3}$ ἢ $x=4$

Τὸ σύστημα II, ἄρα καὶ τὸ ἰσοδύναμον δοθὲν σύστημα, ἔχει τὴν λύσιν $x=4, \quad y=3$

Ἀσκήσεις. *703.* Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα :

1. $\begin{cases} 3x+4y=23 \\ 2x-7y=-4 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x+3\varphi=10 \\ 2x+\varphi-26=0 \end{cases}$ 5. $\begin{cases} 4y+3\omega=44 \\ 2y-\omega=12 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+7y=42 \\ y-3x=6 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} 4\omega=5\varphi+3 \\ 4\varphi=5\omega-6 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 7x+5\varphi=65 \\ 14x-3\varphi=52 \end{cases}$

290. **Μέθοδος ἀπαλοιφῆς διὰ συγκρίσεως.** Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ λύσωμεν τὸ σύστημα

$$\begin{cases} 2x-3y=1 & (1) \\ 5x+4y=37 & (2) \end{cases}$$

Λύομεν καὶ τὰς δύο ἐξισώσεις τοῦ δοθέντος συστήματος πρὸς ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἄγνωστον, ἔστω πρὸς x, θεωροῦντες ὡς γνωστὸν τὸν ἄλλον ἄγνωστον y.

Ἡ ἐξίσωσις (1) δίδει $2x=1+3y$ ἤ $x=\dfrac{1+3y}{2}$ (3)

Ἡ ἐξίσωσις (2) δίδει $5x=37-4y$ ἤ $x=\dfrac{37-4y}{5}$ (4)

Ἐπειδὴ αἱ τιμαὶ τοῦ x, ποὺ δίδουν αἱ ἐξισώσεις (3) καὶ (4), πρέπει νὰ εἶναι ἴσαι συνάγομεν, ὅτι

$$\frac{1+3y}{2}=\frac{37-4y}{5}$$

Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτήν, ἡ ὁποία εἶναι πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον καὶ ἔχομεν κατὰ σειρὰν

$5(1+3y)=2(37-4y)$ ἤ $5+15y=74-8y$ ἤ $15y+8y=74-5$
ἤ $23y=69$, ἄρα $y=3$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (3) τὸ y μὲ τὴν τιμήν του 3 καὶ ἔχομεν $x=\dfrac{1+3.3}{2}$ ἤ $x=5$

Ὥστε τὸ δοθὲν σύστημα ἔχει τὴν λύσιν $x=5, \quad y=3$.

Ἀσκήσεις. *704.* Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα :

1. $\begin{cases} 2x-3y=8 \\ 5x-7y=15 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 8x+2y=7 \\ x+y=1,25 \end{cases}$ 5. $\begin{cases} 2x-5y=25 \\ 3x+y=12 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+3y=13 \\ 3x-5y=11 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} 3x+y=15 \\ 5x-4y=8 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 7x-y=-19 \\ x+7y=33 \end{cases}$

291. **Παρατήρησις.** Τὰ συστήματα, τὰ ὁποῖα ἐλύσαμεν καὶ μὲ τὰς τρεῖς μεθόδους, εἶχον τὴν γενικὴν μορφὴν

$$\begin{cases} \alpha x+\beta y=\gamma \\ \alpha' x+\beta' y=\gamma' \end{cases}$$

Τὸ κάτωθι παράδειγμα θὰ μᾶς δείξῃ πῶς λύομεν ἕνα σύστημα δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους, τὸ ὁποῖον δὲν ἔχει τὴν γενικὴν μορφήν.

Παράδειγμα. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα :

$$\text{I}\quad\begin{cases} 2(3x-y)-3(y-x)=21 & (1)\\[4pt] \dfrac{2x+4y}{5}+\dfrac{3x-y}{3}=2y+1 & (2)\end{cases}$$

Ἐν πρώτοις δίδομεν εἰς τὸ δοθὲν σύστημα τὴν γενικὴν μορφὴν του (§ 286).

Ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται

$$6x-2y-3y+3x=21 \quad ἢ \quad 9x-5y=21 \qquad (1')$$

Ἡ ἐξίσωσις (2) γράφεται

$$3(2x+4y)+5(3x-y)=30y+15 \quad ἢ \quad 6x+12y+15x-5y=30y+15$$

$$ἢ \quad 6x+12y+15x-5y-30y=15 \quad ἢ \quad 21x-23y-15 \qquad (2')$$

Ἀντικαθιστῶμεν τὰς ἐξισώσεις τοῦ δοθέντος συστήματος μὲ τὰς ἰσοδυνάμους ἐξισώσεις των (1′) καὶ (2′) καὶ ἔχομεν νὰ λύσωμεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα :

$$\text{II}\quad\begin{cases} 9x-\ 5y=21 & (1')\\ 21x-23y=15 & (2')\end{cases}$$

Λύομεν ἔπειτα τὸ σύστημα II μὲ μίαν ἀπὸ τὰς τρεῖς μεθόδους καὶ εὑρίσκομεν τὴν λύσιν $x=4,\ y=3$.

Ἀσκήσεις. Α′ Ὁμάς. ***705.*** Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα :

1. $\begin{cases} 2(2x+3y)=3(2x-3y)+10\\ 4x-3y=4(6y-2x)+3\end{cases}$

2. $\begin{cases} (x+1)(y+2)=(x-1)(y+3)+5\\ (2x+1)(y-1)=(x+3)(2y-3)+2\end{cases}$

3. $\begin{cases} 2(2x-y)-4(y-2x)=48\\ 3(5x+y)-5(y+x)=40\end{cases}$

4. $\begin{cases} 7(5x+7y)=13(3x+11)\\ 11(11x+27)=19(7x+5y)\end{cases}$

5. $\begin{cases} 3(x+y)+2(y-x)=7\\ 5(x-y)+3(x+y)=14\end{cases}$

6. $\begin{cases} 3(2x-4)+4(3y-1)=26\\ 2x+y-3(x+2y)=-16\end{cases}$

Β′ Ὁμάς. ***706.*** Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα :

1. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2}-\dfrac{x-y}{3}=\dfrac{5}{3}\\[6pt] \dfrac{x+y}{3}+\dfrac{x-y}{4}=3\end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{5}=\dfrac{x-y}{3}\\[6pt] \dfrac{x+y}{2}-\dfrac{x-y}{3}=\dfrac{y+2}{2}\end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{x+2}{3}+\dfrac{y-4}{4}=\dfrac{5x-y}{4}\\[6pt] \dfrac{2y-x}{4}+\dfrac{x+y}{6}=x+1\end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{3}+\dfrac{x-y}{4}=\dfrac{5(x-4)}{8}\\[6pt] \dfrac{x+y}{4}-\dfrac{x-y}{3}=\dfrac{6y+3}{12}\end{cases}$

707. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα :

1. $\begin{cases} \dfrac{3x+2y}{2}=\dfrac{x+4y}{6}+y+2\\[6pt] 2x-\dfrac{x+y}{3}=\dfrac{x+5}{2}\end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{3x-y}{2}+\dfrac{x+y}{5}=x+\dfrac{y+2}{3}+1\\[6pt] x-\dfrac{x+y}{2}-1=y-\dfrac{x+6}{3}\end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{x+2}{7}+\dfrac{y-x}{4}=2x-8\\[6pt] \dfrac{2y-3x}{3}+2y=3x+4\end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{x+4}{3}-\dfrac{5x-4y}{6}=0\\[6pt] \dfrac{x+2y-1}{6}=\dfrac{5x-9y+4}{10}\end{cases}$

292. **Λύσις ἐγγραμμάτων συστημάτων.** Τὰ ἐγγράμματα συστήματα, δηλ. τὰ συστήματα, τῶν ὁποίων αἱ ἐξισώσεις εἶναι ἐγγράμματοι, λύονται ὅπως καὶ τὰ ἀριθμητικὰ συστήματα.

Παράδειγμα 1ον. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα :

$$\begin{cases} 3\alpha x+2\beta y=\gamma & (1) \\ \alpha x-3\beta y=4\gamma & (2) \end{cases}$$

Ἀπαλοίφομεν τὸν ἄγνωστον x μὲ τὴν μέθοδον ἀπαλοιφῆς διὰ προσθέσεως. Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως (1) ἐπὶ —1 καὶ τῆς ἐξισώσεως (2) ἐπὶ 3 καὶ ἔχομεν κατὰ σειρὰν

$$\begin{array}{r|l} -1 & 3\alpha x+2\beta y=\gamma \\ 3 & \alpha x-3\beta y=4\gamma \\ \hline & -3\alpha x-2\beta y=-\gamma \\ & 3\alpha x-9\beta y=12\gamma \\ \hline & -11\beta y=11\gamma \end{array}$$

Ἐὰν $\beta\neq0$ θὰ εἶναι $y=-\dfrac{11\gamma}{11\beta}$ ἢ $y=-\dfrac{\gamma}{\beta}$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) τὸ y μὲ τὴν τιμήν του αὐτὴν καὶ ἔχομεν $\alpha x-3\beta\left(-\dfrac{\gamma}{\beta}\right)=4\gamma$ ἢ $\alpha x+3\gamma=4\gamma$

ἀπὸ τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν $x=\dfrac{\gamma}{\alpha}$, ἐὰν $\alpha\neq0$.

Παράδειγμα 2ον. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα :

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\alpha+\beta}+\dfrac{y}{\alpha-\beta}=2\alpha & (1) \\ \dfrac{x-y}{2\alpha\beta}=\dfrac{x+y}{\alpha^2+\beta^2} & (2) \end{cases}$$

Δίδομεν εἰς τὸ σύστημα τὴν γενικὴν μορφήν του.

Ὑποθέτομεν, ὅτι οἱ παρονομασταὶ $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$, $\alpha\beta$, $\alpha^2+\beta^2$ εἶναι διάφοροι τοῦ μηδενός.

Ἐξαλείφομεν παρονομαστὰς κλπ. καὶ ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται

$$(\alpha-\beta)x+(\alpha+\beta)y=2\alpha(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) \qquad (1')$$

Ὁμοίως ἡ ἐξίσωσις (2) γράφεται

$$(\alpha^2+\beta^2)(x-y)=2\alpha\beta(x+y) \text{ ἢ } (\alpha^2+\beta^2)x-(\alpha^2+\beta^2)y=2\alpha\beta x+2\alpha\beta y \text{ ἢ}$$
$$(\alpha^2+\beta^2)x-(\alpha^2+\beta^2)y-2\alpha\beta x-2\alpha\beta y=0 \text{ ἢ } (\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta)x-(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta)y=0$$
$$\text{ἢ } (\alpha-\beta)^2x-(\alpha+\beta)^2y=0 \qquad (2')$$

Λύομεν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1') καὶ (2') μὲ τὴν μέθοδον τῆς ἀπαλοιφῆς δι' ἀντικαταστάσεως.

Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν (2') πρὸς x καὶ ἔχομεν $x=\dfrac{(\alpha+\beta)^2y}{(\alpha-\beta)^2}$ (3)

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (1') τὸ x μὲ τὴν τιμήν του αὐτὴν καὶ ἔχομεν $$(\alpha-\beta)\cdot\frac{(\alpha+\beta)^2 y}{(\alpha-\beta)^2}+(\alpha+\beta)y=2\alpha(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$$

ἢ $$(\alpha+\beta)^2y+(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)y=2\alpha(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)^2$$

ἁπλοποιοῦμεν διὰ $\alpha+\beta$, τὸ ὁποῖον εἶναι διάφορον τοῦ μηδενὸς καὶ ἔχομεν

$$(\alpha+\beta)y+(\alpha-\beta)y=2\alpha(\alpha-\beta)^2 \quad ἢ \quad (\alpha+\beta+\alpha-\beta)y=2\alpha(\alpha-\beta)^2 \quad ἢ$$

$$2\alpha y=2\alpha(\alpha-\beta)^2, \quad ἢ \text{ ἐπειδὴ } \alpha\neq 0, \quad y=(\alpha-\beta)^2$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (3) τὸ y μὲ τὴν τιμήν του αὐτὴν καὶ ἔχομεν

$$x=\frac{(\alpha+\beta)^2\cdot(\alpha-\beta)^2}{(\alpha-\beta)^2} \quad ἢ \quad x=(\alpha+\beta)^2$$

Ὥστε τὸ δοθὲν σύστημα ἔχει τὴν λύσιν : $x=(\alpha+\beta)^2$, $y=(\alpha-\beta)^2$

Ἀσκήσεις. Α΄ Ὁμάς. *708.* **Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα :**

1. $\begin{cases} x+y=\alpha \\ x-\beta y=0 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x+2y=\alpha+\beta \\ \alpha x=\beta(\alpha-y) \end{cases}$

2. $\begin{cases} \alpha x+\beta y=\alpha\beta \\ \beta x+\alpha y=\alpha\beta \end{cases}$ 4. $\begin{cases} \alpha x+\beta y=\alpha^2 \\ \beta x+\alpha y=\beta^2 \end{cases}$

709. **Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα :**

1. $\begin{cases} (\alpha+2)x+\alpha y=1 \\ -3x+(\alpha-2)y=-1 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} (\alpha+\beta)x+(\alpha-\beta)y=2\alpha\beta \\ (\alpha+\gamma)x+(\alpha-\gamma)y=2\alpha\gamma \end{cases}$

2. $\begin{cases} (\mu-\nu)x+(\mu+\nu)y=\alpha \\ (\mu^2-\nu^2)(x+y)=\alpha\mu \end{cases}$ 5. $\begin{cases} (\alpha^2+\beta^2)x+(\alpha^2-\beta^2)y=\alpha^2 \\ (\alpha+\beta)x+(\alpha-\beta)y=\alpha \end{cases}$

3. $\begin{cases} (\alpha+\beta)x-(\alpha-\beta)y=4\alpha\beta \\ (\alpha-\beta)x+(\alpha+\beta)y=2\alpha^2-2\beta^2 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} (\alpha+2\beta)x-(\alpha-2\beta)y=6\alpha\gamma \\ (\alpha+3\gamma)x-(\alpha-3\gamma)y=4\alpha\beta \end{cases}$! τέλος

710. **Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα :**

1. $\begin{cases} (\alpha^2+1)x+(\alpha^2-1)y=\alpha \\ (\alpha+1)x+(\alpha-1)y=\alpha^2 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} (\beta^2-\alpha^2)x+\alpha(\alpha+\beta)y=\beta+2\alpha \\ (\beta^2-\alpha^2)(3x+5y)=8\beta-2\alpha \end{cases}$

2. $\begin{cases} (2\alpha-\beta)x+(\alpha-\beta)y=3\alpha+2\beta \\ (2\gamma-\delta)x+(\gamma-\delta)y=3\gamma+2\delta \end{cases}$ 4. $\begin{cases} \alpha x+1=\alpha y+\beta x \\ \beta y+1=\alpha x+\beta y \end{cases}$

Β΄ Ὁμάς. *711.* **Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα :**

1. $\begin{cases} \dfrac{x}{\alpha}+\dfrac{y}{\beta}=1 \\ \dfrac{x}{\beta}-\dfrac{y}{\alpha}=1 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x=5\alpha-y \\ \dfrac{x+y}{2}-\dfrac{x-y}{2}=\alpha \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{x}{\alpha}+\dfrac{y}{\beta}=\alpha^2\beta \\ \dfrac{x}{\alpha^2}+\dfrac{y}{\beta^2}=-\beta^2 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} \dfrac{x}{\alpha+\beta}+\dfrac{y}{\alpha-\beta}=\dfrac{1}{\alpha-\beta} \\ \dfrac{x}{\alpha+\beta}-\dfrac{y}{\alpha-\beta}=\dfrac{1}{\alpha+\beta} \end{cases}$

712. **Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα :**

1. $\begin{cases} (\alpha+\beta)x-(\alpha-\beta)y=4\alpha\beta \\ \dfrac{x}{\alpha+\beta}+\dfrac{y}{\alpha-\beta}=2 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x-y=4\alpha\beta \\ \dfrac{x}{\alpha+\beta}+\dfrac{y}{\alpha-\beta}=2\alpha \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{x-\alpha}{\beta} = \dfrac{\beta-y}{\alpha} \\ \dfrac{x+\alpha}{\beta} = \dfrac{y+\beta}{\alpha} \end{cases}$ 4. $\begin{cases} \dfrac{x}{\alpha+\beta} + \dfrac{y}{\alpha-\beta} = 2\alpha \\ \dfrac{x-y}{2\alpha\beta} = \dfrac{x+y}{\alpha^2+\beta^2} \end{cases}$

713. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα:

1. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{\alpha+\beta} - \dfrac{x-y}{\alpha-\beta} = \dfrac{2(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha^2-\beta^2} \\ \dfrac{x}{\alpha+\beta} - \dfrac{y}{\alpha-\beta} = \dfrac{4\alpha\beta}{\beta^2-\alpha^2} \end{cases}$ 2. $\begin{cases} \dfrac{x-\alpha}{\beta} + \dfrac{y-\beta}{\alpha} = 0 \\ \dfrac{x+y-\beta}{\alpha} + \dfrac{x-y-\alpha}{\beta} = 0 \end{cases}$

714. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα:

1. $\begin{cases} \dfrac{1}{x-y} + \dfrac{1}{x+y} = \mu \\ \dfrac{1}{x-y} - \dfrac{1}{x+y} = \nu \end{cases}$ 2. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} = \dfrac{\alpha}{\beta-\gamma} \\ \dfrac{x+\gamma}{y+\beta} = \dfrac{\alpha+\beta}{\alpha+\gamma} \end{cases}$

715. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα:

1. $\begin{cases} \dfrac{1}{x+\dfrac{1}{y-\dfrac{\alpha}{x}}} = \dfrac{1}{x-\dfrac{1}{y-\dfrac{\beta}{x}}} \\ \dfrac{1}{y}\left(1-\dfrac{1}{x}\right) = 1 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{\alpha+\beta-\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}}{\alpha-\beta+\dfrac{\alpha\beta}{\alpha-\beta}} \\ x+y=2\alpha^3 \end{cases}$

Γ' Ὁμάς. *716*. Διὰ ποίας τιμὰς τῶν μ καὶ ν ἡ ἐξίσωσις $x^2-(3\mu-4)x-2\nu=0$ ἀληθεύει διὰ $x=2$ καὶ διὰ $x=-5$.

717. Νὰ προσδιορισθοῦν αἱ παράμετροι μ καὶ ν, ἵνα ἡ ἐξίσωσις $\mu x^2+(\mu+4)x+3\nu-2=0$ ἀληθεύῃ διὰ $x=2$ καὶ διὰ $x=-5$.

718. Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ μ καὶ ν εἰς τρόπον, ὥστε τὸ πολυώνυμον $\varphi(x)=\mu x^3+(\mu-2)x^2-(3\nu+5)x-4\nu$ νὰ εἶναι διαιρετὸν διὰ $x+1$ καὶ διὰ $x-3$ Νὰ τεθῇ ἔπειτα τὸ $\varphi(x)$ ὑπὸ μορφὴν ἑνὸς γινομένου παραγόντων.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΙΣ ΕΝΟΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΤΟΥ 1ου ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

293. Διερεύνησις ἑνὸς συστήματος τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ δύο ἀγνώστους. Εἴδομεν, ὅτι διὰ νὰ λύσωμεν ἕνα σύστημα ἐξισώσεων τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ δύο ἀγνώστους, πρέπει νὰ δώσωμεν εἰς αὐτὸ τὴν γενικὴν μορφὴν

$$\mathrm{I}\quad \begin{cases} \alpha x+\beta y=\gamma \\ \alpha' x+\beta' y=\gamma' \end{cases}$$

Ὅταν λέγωμεν, ὅτι θὰ ***διερευνήσωμεν*** τὸ σύστημα Ι σημαίνει, ὅτι θὰ ἐξετάσωμεν νὰ εὕρωμεν ***διὰ ποίας ἰδιαιτέρας τιμὰς τῶν γραμμάτων*** α, β, γ, α′, β′, γ′ τὸ ***σύστημα ἔχει μίαν λύσιν, εἶναι ἀδύνατον ἢ εἶναι ἀόριστον.***

294. Ἀριθμητικὰ παραδείγματα διερευνήσεως. Συστήματα ἀόριστα. Ὅπως εἴδομεν εἰς τὰ προηγούμενα παραδείγματα ἡ λύσις ἑνὸς συστήματος τοῦ πρώτου βαθμοῦ ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν μιᾶς ἐξισώσεως τοῦ πρώτου βαθμοῦ. Ἀλλὰ μία ἐξίσωσις τοῦ πρώτου βαθμοῦ δύναται νὰ ἔχῃ μίαν ρίζαν ἢ νὰ εἶναι ἀδύνατος ἢ νὰ εἶναι ἀόριστος. Ἑπομένως καὶ τὸ σύστημα δύναται νὰ ἔχῃ μίαν λύσιν ἢ νὰ εἶναι ἀδύνατον ἢ νὰ εἶναι ἀόριστον.

Παράδειγμα 1ον. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$\mathrm{I}\begin{cases} 3x-4y=10 & (1)\\ 9x-12y=25 & (2)\end{cases}$$

Λύομεν τὸ σύστημα Ι μὲ τὴν μέθοδον τῆς ἀντικαταστάσεως.

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1) λαμβάνομεν $x=\dfrac{10+4y}{3}$ (1′)

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) τὸ x μὲ τὴν τιμήν του αὐτὴν καὶ ἔχομεν:

$$9\cdot\frac{10+4y}{3}-12y=25 \quad ἢ \quad 3(10+4y)-12y=25$$

ἢ $30+12y-12y=25$ ἢ $12y-12y=-30+25$ ἢ $0\cdot y=-5$ (2′)

Ἀντικαθιστῶμεν τὴν ἐξίσωσιν (1) μὲ τὴν (1′) καὶ τὴν (2) μὲ τὴν (2′) καὶ ἔχομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα

$$\mathrm{II.}\begin{cases} x=\dfrac{10+4y}{3}\\ 0y=-5\end{cases}$$

Ἡ τελευταία ἐξίσωσις $0y=-5$ εἶναι ***ἀδύνατος***· ἄρα καὶ τὸ σύστημα ΙΙ καὶ συνεπῶς καὶ τὸ δοθὲν σύστημα δὲν ἔχει λύσιν, δηλ. εἶναι ἀδύνατον.

ΣΗΜ. Ἡ μέθοδος ἀπαλοιφῆς διὰ προσθέσεως θὰ ἐδείκνυε ἀμέσως, ὅτι τὸ σύστημα Ι εἶναι ἀδύνατον. Πράγματι, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως (1) ἐπὶ 3 θὰ λάβωμεν τὸ σύστημα

$$\mathrm{I}\begin{cases} 9x-12y=30\\ 9x-12y=25\end{cases}$$

τὸ ὁποῖον εἶναι προφανῶς ἀδύνατον, διότι τὰ πρῶτα μέλη τῶν δύο αὐτῶν ἐξισώσεων εἶναι τὰ αὐτά, ἐνῶ τὰ δεύτερα μέλη των εἶναι διάφορα.

Παρατήρησις. Παρατηροῦμεν, ὅτι μεταξὺ τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων καὶ τῶν γνωστῶν ὅρων τοῦ δοθέντος συστήματος ὑπάρχει ἡ σχέσις:

$$\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}\neq\frac{\gamma}{\gamma'}, \quad δηλ. \quad \frac{3}{9}=\frac{4}{12}\neq\frac{10}{25}$$

Παράδειγμα 2ον. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα:

$$\mathrm{I}\ \begin{cases} 6x-2y=10 & (2) \\ 3x-\ y=-5 & (1) \end{cases}$$

Λύομεν τὸ σύστημα αὐτὸ μὲ τὴν μέθοδον ἀπαλοιφῆς δι' ἀντικαταστάσεως. Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (2) ἔχομεν $y=3x-5$ (2')

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) τὸ y μὲ τὴν τιμήν του αὐτὴν καὶ ἔχομεν:

$6x-2(3x-5)=10$ ἢ $6x-6x+10=10$ ἢ $6x-6x=-10+10$ ἢ $0x=0$ (1')

Τὸ σύστημα λοιπὸν I εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ

$$\mathrm{II}\ \begin{cases} y=3x-5 & (2') \\ 0x=0 & (1') \end{cases}$$

Ἡ δευτέρα ἐξίσωσις τοῦ συστήματος II εἶναι ἀόριστος, διότι ἀληθεύει διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x. Ὥστε εἰς κάθε τιμὴν τοῦ x ἀντιστοιχεῖ μία τιμὴ τοῦ y, ἡ ὁποία δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (2'). Τὸ σύστημα λοιπὸν II, ἄρα καὶ τὸ ἰσοδύναμον δοθὲν σύστημα I, ἔχει ἀπείρους λύσεις, δηλ. εἶναι *ἀόριστον.*

ΣΗΜ. Ἡ μέθοδος ἀπαλοιφῆς διὰ προσθέσεως θὰ ἐδείκνυε ἀμέσως, ὅτι τὸ σύστημα I εἶναι ἀόριστον.

Πράγματι, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως (2) ἐπὶ 2 θὰ λάβωμεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα

$$\mathrm{III}\ \begin{cases} 6x-2y=10 \\ 6x-2y=10 \end{cases}$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι καὶ αἱ δύο ἐξισώσεις τοῦ συστήματος III εἶναι αἱ αὐταὶ καὶ ἑπομένως τὸ σύστημα ἔχει μίαν μόνον ἐξίσωσιν μὲ δύο ἀγνώστους, τὴν $6x-2y=10$, ἡ ὁποία καθὼς γνωρίζομεν (§ 278) εἶναι ἀόριστος.

Παρατήρησις. Παρατηροῦμεν, ὅτι μεταξὺ τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων καὶ τῶν γνωστῶν ὅρων τοῦ δοθέντος συστήματος ὑπάρχει ἡ σχέσις:

$$\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}=\frac{\gamma}{\gamma'}, \quad \text{δηλ.} \quad \frac{6}{3}=\frac{2}{1}=\frac{10}{5}$$

295. Διερεύνησις τοῦ γενικοῦ συστήματος τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ δύο ἀγνώστους.

Πρόβλημα. Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ τὸ σύστημα:

$$\mathrm{A}\ \begin{cases} \alpha x+\beta y=\gamma & (1) \\ \alpha' x+\beta' y=\gamma' & (2) \end{cases}$$

Λύομεν τὸ σύστημα αὐτὸ μὲ τὴν μέθοδον τῆς ἀντικαταστάσεως.

Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν (1) πρὸς x καὶ ἔχομεν $x=\dfrac{\gamma-\beta y}{\alpha}$ (3)

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) τὸ x μὲ τὴν τιμήν του αὐτὴν καὶ ἔχομεν:

$$\alpha'\cdot\frac{\gamma-\beta y}{\alpha}+\beta' y=\gamma' \quad \text{ἢ} \quad \alpha'\gamma-\alpha'\beta y+\alpha\beta' y=\alpha\gamma'$$

$$\text{ἢ} \quad (\alpha\beta'-\beta\alpha')y=\alpha\gamma'-\alpha'\gamma \qquad (4)$$

Ἀντικαθιστῶμεν τὰς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος Α μὲ τὰς (3) καὶ (4) καὶ ἔχομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα

$$\text{B}\begin{cases} x=\dfrac{\gamma-\beta y}{\alpha} & (3)\\ (\alpha\beta'-\beta\alpha')y=\alpha\gamma'-\alpha'\gamma & (4)\end{cases}$$

I. **Ἔστω $(\alpha\beta'-\beta\alpha')\neq 0$.** Ἐὰν $\alpha\beta'-\beta\alpha'\neq 0$, δηλ. ἐὰν $\alpha\beta'\neq\beta\alpha'$ ἢ $\dfrac{\alpha}{\alpha'}\neq\dfrac{\beta}{\beta'}$, ἡ (4) δίδει $\quad y=\dfrac{\alpha\gamma'-\alpha'\gamma}{\alpha\beta'-\beta\alpha'}$.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (3) τὸ y μὲ τὴν τιμήν του αὐτὴν καὶ ἔχομεν

$$x=\frac{\gamma-\beta\cdot\dfrac{\alpha\gamma'-\alpha'\gamma}{\alpha\beta'-\beta\alpha'}}{\alpha}=\frac{\gamma(\alpha\beta'-\beta\alpha')-\beta(\alpha\gamma'-\alpha'\gamma)}{\alpha(\alpha\beta'-\beta\alpha')}=$$

$$=\frac{\gamma\alpha\beta'-\gamma\beta\alpha'-\beta\alpha\gamma'+\beta\alpha'\gamma}{\alpha(\alpha\beta'-\beta\alpha')}=\frac{\alpha(\beta'\gamma-\beta\gamma')}{\alpha(\alpha\beta'-\beta\alpha')}=\frac{\beta'\gamma-\beta\gamma'}{\alpha\beta'-\beta\alpha'}$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ σύστημα Α ἔχει τὴν λύσιν:

$$x=\frac{\gamma\beta'-\beta\gamma'}{\alpha\beta'-\beta\alpha'}\qquad y=\frac{\alpha\gamma'-\gamma\alpha'}{\alpha\beta'-\beta\alpha'}\tag{5}$$

Ἡ λύσις αὕτη εἶναι μηδέν, ἐὰν $\gamma=\gamma'=0$.

Ὥστε: ***Ἐὰν $\dfrac{\alpha}{\alpha'}\neq\dfrac{\beta}{\beta'}$, τὸ σύστημα I ἔχει μίαν λύσιν.***

II. **Ἔστω $\alpha\beta'-\beta\alpha'=0$.** Ἐὰν $\alpha\beta'-\beta\alpha'=0$, δηλ. ἐὰν $\dfrac{\alpha}{\alpha'}=\dfrac{\beta}{\beta'}$, δὲν δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως (4) διὰ τοῦ μηδενός.

Ἐδῶ δύνανται νὰ παρουσιασθοῦν δύο περιπτώσεις, διότι, ὅταν τὸ $\alpha\beta'-\beta\alpha'$ εἶναι ἴσον μὲ μηδέν, τὸ $\alpha\gamma'-\gamma\alpha'$ δύναται νὰ εἶναι διάφορον τοῦ μηδενὸς ἢ ἴσον μὲ τὸ μηδέν.

1ον. ***Ἐὰν $\alpha\gamma'-\gamma\alpha'\neq 0$,*** δηλ. ἐὰν εἶναι $\alpha\gamma'\neq\gamma\alpha'$ ἢ $\dfrac{\alpha}{\alpha'}\neq\dfrac{\gamma}{\gamma'}$, ἡ ἐξίσωσις (4) γίνεται $\quad 0\cdot y=\alpha\gamma'-\gamma\alpha'\quad$ ἢ $\quad 0=\alpha\gamma'-\gamma\alpha'$
ἡ ὁποία εἶναι ἀδύνατος· καὶ ἑπομένως καὶ τὸ σύστημα εἶναι ***ἀδύνατον.***

Ὥστε: ***Ἐὰν $\dfrac{\alpha}{\alpha'}=\dfrac{\beta}{\beta'}$ καὶ $\dfrac{\alpha}{\alpha'}\neq\dfrac{\gamma}{\gamma'}$, δηλ. ἐὰν $\dfrac{\alpha}{\alpha'}=\dfrac{\beta}{\beta'}\neq\dfrac{\gamma}{\gamma'}$ τὸ σύστημα Α εἶναι ἀδύνατον.***

2ον. Ἐὰν ***$\alpha\gamma'-\gamma\alpha'=0$,*** δηλ. ἐὰν $\dfrac{\alpha}{\alpha'}=\dfrac{\gamma}{\gamma'}$, ἡ ἐξίσωσις (4) γίνεται

$$0\cdot y=0\quad ἢ\quad 0=0.$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι, ἐὰν $\alpha\gamma'-\gamma\alpha'=0$, ἡ ἐξίσωσις (4) ἀληθεύει διὰ κάθε τιμὴν τοῦ y. Εἰς κάθε αὐθαίρετον τιμὴν τοῦ y ἀντιστοιχεῖ μία ὡρισμένη τιμὴ τοῦ x, ἡ ὁποία δίδεται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως (3). Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ σύστημα Α ἔχει ἀπειρίαν λύσεων, εἶναι ***ἀόριστον.***

Ὥστε: ***Ἐὰν $\dfrac{\alpha}{\alpha'}=\dfrac{\beta}{\beta'}$ καὶ $\dfrac{\alpha}{\alpha'}=\dfrac{\gamma}{\gamma'}$, δηλ. ἐὰν $\dfrac{\alpha}{\alpha'}=\dfrac{\beta}{\beta'}=\dfrac{\gamma}{\gamma'}$, τὸ σύστημα εἶναι ἀόριστον.***

Ἰδιαίτεραι περιπτώσεις: I. Ἐὰν $\alpha'=\beta'=0$, *οἱ δύο ἄγνωστοι μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς ἐξισώσεως ἐξαφανίζονται.* Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ σύστημα Α λαμβάνει τὴν μορφήν·

$$\begin{cases} \alpha x+\beta y=\gamma \\ 0=\gamma' \end{cases}$$

Ἐὰν $\gamma'=0$, τότε τὸ σύστημα ἔχει μίαν μόνον ἐξίσωσιν τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ δύο ἀγνώστους καὶ ἑπομένως εἶναι ***ἀόριστον*** (§ 294. 2ον).

Ἐὰν $\gamma'\neq 0$ τὸ σύστημα εἶναι ***ἀδύνατον.***

Τοὺς αὐτοὺς συλλογισμοὺς ἐφαρμόζομεν, ἐὰν εἶναι $\alpha=\beta=0$.

II. Ἐὰν $\alpha=\alpha'=0$, *ὁ ἕνας ἐκ τῶν ἀγνώστων τοῦ συστήματος ἐξαφανίζεται.* Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ σύστημα γίνεται·

$$\begin{cases} \beta y=\gamma \\ \beta' y=\gamma' \end{cases} \quad \text{ἀπὸ τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν} \quad \begin{cases} y=\dfrac{\gamma}{\beta} \\ y=\dfrac{\gamma'}{\beta'} \end{cases}$$

Ἐὰν $\dfrac{\gamma}{\beta}=\dfrac{\gamma'}{\beta'}$ ἢ $\dfrac{\gamma}{\gamma'}=\dfrac{\beta}{\beta'}$ τὸ σύστημα εἶναι ***ἀόριστον,*** διότι ἔχει τὰς λύσεις:

$$\begin{cases} x=\text{οἱοσδήποτε} \\ y=\dfrac{\gamma}{\beta}=\dfrac{\gamma'}{\beta'} \end{cases}$$

Ἐὰν $\dfrac{\gamma}{\beta}\neq\dfrac{\gamma'}{\beta'}$ ἢ $\dfrac{\gamma}{\gamma'}\neq\dfrac{\beta}{\beta'}$ τὸ σύστημα εἶναι προφανὲς ***ἀδύνατον.***

Οἱ αὐτοὶ συλλογισμοὶ ἐφαρμόζονται, ἐὰν εἶναι $\beta=\beta'=0$.

III. Ἐὰν $\alpha=\alpha'=\beta=\beta'=0$, *ὅλοι οἱ συντελεσταὶ τῶν ἀγνώστων εἶναι μηδέν.* Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ σύστημα I γίνεται

$$\begin{cases} 0=\gamma \\ 0=\gamma' \end{cases}$$

Ἐὰν $\gamma=\gamma'=0$, τὸ σύστημα εἶναι ***ἀόριστον***, διότι καὶ αἱ δύο ἐξισώσεις του λαμβάνουν τὴν μορφὴν

$$0x+0y=0$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν, ὅτι τὸ σύστημα ἔχει μίαν ***διπλῆν ἀοριστίαν***, διότι καὶ αἱ δύο ἐξισώσεις του ἐπαληθεύονται δι' ὅλας τὰς τιμὰς τῶν x καὶ y.

Ἐὰν γ ἢ $\gamma'\neq 0$, τὸ σύστημα εἶναι ***ἀδύνατον.***

Πίναξ διερευνήσεως τοῦ συστήματος :

$$\text{I}\quad \begin{cases} \alpha x+\beta y=\gamma \\ \alpha' x+\beta' y=\gamma' \end{cases}$$

Α' Γενικὴ περίπτωσις :

I. Ἐὰν $\alpha\beta'-\beta\alpha'\neq 0$, δηλ. ἐὰν $\frac{\alpha}{\alpha'}\neq\frac{\beta}{\beta'}$, τὸ σύστημα (I) ἔχει τὴν λύσιν $x=\frac{\gamma\beta'-\beta\gamma'}{\alpha\beta'-\beta\alpha'}$, $y=\frac{\alpha\gamma'-\gamma\alpha'}{\alpha\beta'-\beta\alpha'}$

II. Ἐὰν $\alpha\beta'-\beta\alpha'=0$ καὶ $\alpha\gamma'-\gamma\alpha'\neq 0$, δηλ. ἐὰν $\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}\neq\frac{\gamma}{\gamma'}$ τὸ σύστημα (I) εἶναι **ἀδύνατον.**

III. Ἐὰν $\alpha\beta'-\beta\alpha'=0$ καὶ $\alpha\gamma'-\gamma\alpha'=0$, δηλ. ἐὰν $\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}=\frac{\gamma}{\gamma'}$ τὸ σύστημα (I) εἶναι **ἀόριστον.**

Β'. Ἰδιαίτεραι περιπτώσεις :

I $\alpha'=\beta'=0$ $\begin{cases} \text{Ἐὰν } \gamma'=0 \text{ τὸ σύστημα εἶναι ἀόριστον} \\ \text{Ἐὰν } \gamma'\neq 0 \text{ » » » ἀδύνατον} \end{cases}$

II $\alpha=\alpha'=0$ $\begin{cases} \text{Ἐὰν } \frac{\gamma}{\gamma'}=\frac{\beta}{\beta'} \text{ θὰ εἶνε } x=\text{τυχὸν ἀριθ.}, y=\frac{\gamma}{\beta}=\frac{\gamma'}{\beta'} \\ \text{Ἐὰν } \frac{\gamma}{\gamma'}\neq\frac{\beta}{\beta'} \text{ τὸ σύστημα εἶναι ἀδύνατον} \end{cases}$

III $\alpha=\alpha'=\beta=\beta'=0$ $\begin{cases} \text{Ἐὰν } \gamma=\gamma'=0 \text{ τὸ σύστημα εἶναι ἀόριστον} \\ \text{Ἐὰν } \gamma \text{ ἢ } \gamma'\neq 0 \text{ » » ἀδύνατον} \end{cases}$

296. Ἐφαρμογαὶ τῆς διερευνήσεως.

Παράδειγμα 1ον. Χωρὶς νὰ λυθοῦν τά κάτωθι συστήματα, νὰ εὑρεθῇ ποῖον ἔχει μίαν λύσιν, ποῖον εἶναι ἀδύνατον καὶ ποῖον εἶναι ἀόριστον.

$$A \begin{cases} 3x+5y=8 \\ 9x+15y=20 \end{cases} \qquad B \begin{cases} 2x+y=5 \\ 3x-2y=11 \end{cases} \qquad \Gamma \begin{cases} x-2y=1 \\ -3x+6y=-3 \end{cases}$$

Ἐξετάζομεν τοὺς λόγους τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων καὶ τῶν γνωστῶν ὅρων.

1ον. Εἰς τὸ σύστημα Α ἔχομεν $\frac{3}{9}=\frac{5}{15}\neq\frac{8}{20}$. ἄρα τὸ σύστημα Α εἶναι ἀδύνατον.

2ον. Εἰς τὸ σύστημα Β εἶναι $\frac{2}{3}\neq-\frac{1}{2}$, δηλ. οἱ λόγοι τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων x καὶ y εἶναι διάφοροι· ἄρα τὸ σύστημα Β ἔχει μίαν λύσιν.

3ον. Εἰς τὸ σύστημα Γ εἶναι $\frac{1}{-3}=\frac{-2}{6}=\frac{1}{-3}$, δηλ. οἱ λόγοι τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων καὶ τῶν γνωστῶν ὅρων εἶναι ἴσοι· ἄρα τὸ σύστημα αὐτὸ εἶναι ἀόριστον.

Ἀσκήσεις. 719. Χωρὶς νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα, νὰ εὑρεθῇ ποῖον ἔχει μίαν λύσιν, ποῖον εἶναι ἀδύνατον καὶ ποῖον εἶναι ἀόριστον.

1. $\begin{cases} 5x+y=7 \\ 10x+2y=13 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 8x-16y+3=0 \\ 2x-4y+1=0 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 2x-3y=15 \\ -6x+9y=-45 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x-3y+5=0 \\ 4x-6y+10=0 \end{cases}$ 5. $\begin{cases} 7x-6y=1 \\ -21x+18y=-3 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 7x+2y=-11 \\ 35x+10y=-20 \end{cases}$

720. Δίδεται ἡ ἐξίσωσις $5x-4y=7$. Νὰ εὑρεθῇ μία ἄλλη ἐξίσωσις, ἡ ὁποία νὰ σχηματίζῃ μὲ αὐτήν: 1ον ἕνα σύστημα, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ μίαν λύσιν 2ον ἕνα σύστημα ἀδύνατον. 3ον ἕνα σύστημα ἀόριστον.

721. Ἡ αὐτὴ ἄσκησις μὲ τὴν ἐξίσωσιν $x+\frac{y}{3}=\frac{5}{4}$

297. Ἄλλη μέθοδος λύσεως συστημάτων τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ δύο ἀγνώστους. Κανὼν τοῦ Gramer. Εἴδομεν, ὅτι ἡ λύσις τοῦ γενικοῦ συστήματος

$$\begin{cases} \alpha x+\beta y=\gamma \\ \alpha' x+\beta' y=\gamma' \end{cases}$$

δίδεται ὑπὸ τῶν τύπων

$$x=\frac{\gamma\beta'-\beta\gamma'}{\alpha\beta'-\beta\alpha'},\quad y=\frac{\alpha\gamma'-\gamma\alpha'}{\alpha\beta'-\beta\alpha'} \qquad (1)$$

Διὰ νὰ εὕρωμεν ἀμέσως τοὺς τύπους (1) παρατηροῦμεν ἐν πρώτοις, ὅτι ἔχουν τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν $\alpha\beta'-\beta\alpha'$.

Ἡ διαφορὰ αὐτὴ $\alpha\beta'-\beta\alpha'$ λέγεται ***ὁρίζουσα*** τῶν συντελεστῶν $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ καὶ παρίσταται μὲ τὸ σύμβολον

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}$$

Ἐξ ὁρισμοῦ λοιπὸν εἶναι:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}=\alpha\beta'-\beta\alpha'$$

οἱοιδήποτε καὶ ἐὰν εἶναι οἱ συντελεσταὶ $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$.

Π. χ. θὰ εἶναι $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}=3\cdot 6-5\cdot 4=18-20=-2$

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}=(-2)(-4)-3(-1)=8+3=11$$

Οἱ ἀριθμηταὶ τοῦ τύπου (1) εἶναι ἐπίσης ὁρίζουσαι, αἱ ὁποῖαι δύνανται νὰ γραφοῦν μὲ τὸ σύμβολον τῆς ὁριζούσης.

Ὁ ἀριθμητὴς τοῦ x, $A_x=\gamma\beta'-\beta\gamma'$ προκύπτει ἀπὸ τὴν ὁρίζουσαν τοῦ παρονομαστοῦ, ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τοὺς συντελεστὰς α καὶ α′ τοῦ x διὰ τῶν γνωστῶν ὅρων γ καὶ γ′ δηλ. εἶναι

$$A_x=\begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix}=\gamma\beta'-\beta\gamma'$$

Ὁμοίως ὁ ἀριθμητὴς τοῦ y, $A_y = \alpha\gamma' - \gamma\alpha'$ προκύπτει ἀπὸ τὴν ὁρίζουσαν τοῦ παρονομαστοῦ, ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τοὺς συντελεστὰς β καὶ β′ τοῦ y διὰ τῶν γνωστῶν ὅρων γ καὶ γ′. δηλ. εἶναι

$$A_y = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha' & \gamma' \end{vmatrix} = \alpha\gamma' - \gamma\alpha'$$

Οἱ τύποι (1) δύνανται λοιπὸν νὰ ἐκφρασθοῦν καὶ ὡς ἑξῆς:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}} = \frac{\gamma\beta' - \beta\gamma'}{\alpha\beta' - \beta\alpha'}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha' & \gamma' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}} = \frac{\alpha\gamma' - \gamma\alpha'}{\alpha\beta' - \beta\alpha'}$$

Οἱ ἀνωτέρω τύποι εἶναι γνωστοὶ ὑπὸ τὸ ὄνομα ***τύποι τοῦ*** *Gramer*.

Κανὼν τοῦ Gramer. ***Οἱ τύποι, οἱ ὁποῖοι δίδουν τὴν λύσιν ἑνὸς συστήματος τοῦ πρώτου βαθμοῦ δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους*** **x** ***καὶ*** **y** ***εἶναι κλάσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ὡς κοινὸν παρονομαστὴν τὴν ὁρίζουσαν τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων καὶ τῶν ὁποίων ὁ ἀριθμητὴς προκύπτει ἐκ τοῦ παρονομαστοῦ, ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν ὁρίζουσαν τοῦ παρονομαστοῦ τοὺς συντελεστὰς τοῦ ἐξεταζομένου ἀγνώστου μὲ τοὺς γνωστοὺς ὅρους, οἱ ὁποῖοι πρέπει νὰ εἶναι γραμμένοι πάντοτε εἰς τὸ δεύτερον μέλος ἑκάστης ἐξισώσεως.***

Π.χ. Κατὰ τὸν κανόνα τοῦ Gramer τὸ σύστημα

$$\begin{cases} 2x - 3y = 34 \\ -5x + y = -33 \end{cases}$$

ἔχει τὴν λύσιν

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 34 & -3 \\ -33 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{34 \cdot 1 - (-3)(-33)}{2 \cdot 1 - (-3)(-5)} = \frac{34 - 99}{2 - 15} = \frac{-65}{-13} = 5$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 34 \\ -5 & -33 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2(-33) - 34(-5)}{-13} = \frac{-66 + 170}{-13} = \frac{104}{-13} = -8$$

Ἀσκήσεις. *722.* Νὰ λυθοῦν μὲ τὴν βοήθειαν τῶν τύπων τοῦ Gramer τὰ κάτωθι συστήματα:

1. $\begin{cases} 8x + 4y = 29 \\ 9x + 2y = 17 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 7x - 3y - 8 = 0 \\ 4x + 9y = -24 \end{cases}$ 5. $\begin{cases} x - 3y = 2 \\ 5x + y = 26 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x + 5y = -9 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} 2x - 5y - 9 = 0 \\ 7x + 4y - 10 = 0 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 3x + y = 23 \\ -x + 2y = -3 \end{cases}$

298. Ἐφαρμογαὶ τῆς διερευνήσεως.

Παράδειγμα 1ον. Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διευρηνηθῇ τὸ σύστημα:

$$\text{I} \quad \begin{cases} x + \mu y = 2 \\ \mu x - 4\mu y = (3\mu + 4) \end{cases}$$

Ἡ ὁρίζουσα τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων εἶναι

$$\begin{vmatrix} 1 & \mu \\ \mu & -4\mu \end{vmatrix} = -4\mu-\mu^2=-\mu(\mu+4)$$

Περίπτωσις 1η. Ὑποθέτομεν, ὅτι $-\mu(\mu+4)\neq0$, δηλ. ὅτι $\mu\neq0$ καὶ $\mu\neq-4$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ σύστημα Ι ἔχει τὴν λύσιν

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2 & \mu \\ 3\mu+4 & -4\mu \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \mu \\ \mu & -4\mu \end{vmatrix}}=\frac{-8\mu-\mu(3\mu+4)}{-\mu(\mu+4)}=\frac{-8\mu-3\mu^2-4\mu}{-\mu(\mu+4)}=\frac{-3\mu(\mu+4)}{-\mu(\mu+4)}=3$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ \mu & 3\mu+4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \mu \\ \mu & -4\mu \end{vmatrix}}=\frac{3\mu+4-2\mu}{-\mu(\mu+4)}=\frac{\mu+4}{-\mu(\mu+4)}=-\frac{1}{\mu}$$

Περίπτωσις 2α. Ὑποθέτομεν, ὅτι $-\mu(\mu+4)=0$, δηλ. ὅτι εἶναι εἴτε $\mu=0$ εἴτε $\mu=-4$.

Ἐὰν $\mu=0$, τὸ δοθὲν σύστημα Ι λαμβάνει τὴν μορφὴν

$$\begin{cases} x+0y=2 \\ 0x-0y=4 \end{cases} \quad ἢ \quad \begin{cases} x=2 \\ 0=4 \end{cases}$$

καὶ ἑπομένως εἶναι ἀδύνατον.

Ἐὰν $\mu=-4$, τὸ δοθὲν σύστημα λαμβάνει τὴν μορφὴν

$$\begin{cases} x-4y=2 \\ -4x+16y=-12+4 \end{cases} \quad ἢ \quad \begin{cases} x-4y=2 \\ -4x+16y=-8 \end{cases}$$

Ἐπειδὴ εἶναι $-\frac{1}{4}=-\frac{4}{16}=-\frac{2}{8}$, δηλ. ἐπειδὴ οἱ λόγοι τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων καὶ τῶν γνωστῶν ὅρων εἶναι ἴσοι, τὸ σύστημα εἶναι ἀόριστον.

Παράδειγμα 2ον. Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ λ τὸ σύστημα

$$\begin{cases} (\lambda-3)x+(\lambda+7)y=8 \\ 4x+5y=1+\lambda \end{cases}$$

εἶναι ἀδύνατον;

Διὰ νὰ εἶναι τὸ δοθὲν σύστημα ἀδύνατον πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι $\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}\neq\frac{\gamma}{\gamma'}$, δηλ. πρέπει νὰ εἶναι

$$\underbrace{\frac{\lambda-3}{4}=\frac{\lambda+7}{5}}_{(1)}\neq\frac{8}{1+\lambda}$$

Ἡ ἰσότης (1) δίδει $5(\lambda-3)=4(\lambda+7)$

ἢ $5\lambda-15=4\lambda+28$ ἢ $5\lambda-4\lambda=15+28$ ἢ $\lambda=43$.

Ἡ τιμὴ αὐτὴ τοῦ λ πρέπει νὰ ἐπαληθεύῃ τὴν σχέσιν $\frac{\lambda-3}{4}\neq\frac{8}{1+\lambda}$. Πράγματι διὰ $\lambda=43$ ἔχομεν $\frac{40}{4}\neq\frac{8}{44}$.

Ὥστε, ἐὰν $\lambda=43$ τὸ δοθὲν σύστημα εἶναι ἀδύνατον.

Παράδειγμα 3ον. Διὰ ποίας τιμὰς τῶν λ καὶ μ τὸ σύστημα

$$\begin{cases} (\lambda+\mu)x+(2\lambda-3)y=\lambda\mu \\ (\lambda-\mu)x+(\mu-5)y=2\lambda\mu \end{cases}$$

εἶναι ἀόριστον;

Διὰ νὰ εἶναι τὸ δοθὲν σύστημα ἀόριστον, πρέπει νὰ εἶναι·

$\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}=\frac{\gamma}{\gamma'}$· δηλ. πρέπει νὰ εἶναι

$$\frac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu}=\frac{2\lambda-3}{\mu-5}=\frac{\lambda\mu}{2\lambda\mu}=\frac{1}{2}$$

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν λαμβάνομεν τὰς ἰσότητας

$$\frac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu}=\frac{1}{2} \quad (1) \qquad \text{καὶ} \quad \frac{2\lambda-3}{\mu-5}=\frac{1}{2} \quad (2)$$

Ἀπὸ τὴν (1) ἔχομεν

$$2(\lambda+\mu)=\lambda-\mu \quad \text{ἢ} \quad 2\lambda+2\mu-\lambda+\mu=0 \quad \text{ἢ} \quad \lambda+3\mu=0 \qquad (1')$$

Ἀπὸ τὴν (2) ἔχομεν

$$2(2\lambda-3)=\mu-5 \quad \text{ἢ} \quad 4\lambda-6=\mu-5 \quad \text{ἢ} \quad 4\lambda-\mu=6-5 \quad \text{ἢ} \quad 4\lambda-\mu=1 \quad (2')$$

Αἱ ζητούμεναι τιμαὶ τῶν λ καὶ μ δίδονται ἀπὸ τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1′) καὶ (2′)· δηλ. ἀπὸ τὸ σύστημα

$$\begin{cases} \lambda+3\mu=0 \\ 4\lambda-\mu=1 \end{cases}$$

Λύομεν τὸ σύστημα αὐτὸ καὶ εὑρίσκομεν τὴν λύσιν $\lambda=\frac{3}{13}$, $\mu=-\frac{1}{13}$. Ὥστε τὸ δοθὲν σύστημα θὰ εἶναι ἀόριστον, ἐὰν $\lambda=\frac{3}{13}$ καὶ $\mu=-\frac{1}{13}$.

Ἀσκήσεις. Α' Ὁμάς. ***723.*** Νὰ λυθοῦν καὶ νὰ διερευνηθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα:

1. $\begin{cases} \lambda x+y=2 \\ x+y=2\lambda \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x+(3\lambda-1)y=0 \\ x+2y=\lambda-4 \end{cases}$

2. $\begin{cases} \lambda x-2y=\lambda \\ (\lambda-1)x-y=1 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} (\lambda^2-1)x-y=\lambda \\ 2x-y=\lambda-1 \end{cases}$

724. Νὰ λυθοῦν καὶ νὰ διερευνηθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα:

1. $\begin{cases} x+y=\lambda \\ \lambda x+y=1 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x+\mu y=1 \\ \mu x-3\mu y=2\mu+3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} y=\lambda+2x \\ 3y-\lambda=x+3 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} 4x+\lambda y=9 \\ 2\lambda x+18y=-27 \end{cases}$

Β' Ὁμάς. ***725.*** Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ μ τὰ κάτωθι συστήματα εἶναι ἀδύνατα;

1. $\begin{cases} \mu x+y=1 \\ 3x+2y=-5 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} (\mu+2)x+(\mu-7)y=7 \\ 4x-5y=8+\mu \end{cases}$

726. Διὰ ποίας τιμὰς τῶν μ καὶ ν τὰ κάτωθι συστήματα εἶναι ἀόριστα;

1. $\begin{cases} (\mu-\nu)x+(3\mu-5)y=2\mu\nu \\ (\mu+\nu)x+(\nu-7)y=6\mu\nu \end{cases}$ 2. $\begin{cases} (2\mu+\nu)x+(\mu+2\nu+3)y=1 \\ (5\mu+\nu-1)x+(4\mu+\nu+2)y=2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} (2\mu-4\nu+\beta)x+(7\mu-2\nu-\alpha)y=1 \\ (3\mu-2\nu+\beta)x+(5\mu-2\nu)y=3 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} (3\mu-5\nu+\beta)x+(8\mu-3\nu-\alpha)y=1 \\ (2\mu-3\nu+\beta)x+(4\mu-\nu)y=2 \end{cases}$

Γ' Ὁμάς. ***727.*** Νὰ λυθοῦν καὶ νὰ διερευνηθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα:

1. $\begin{cases} (2-\lambda)x+y=\lambda+4 \\ (\lambda+4)x+(3\lambda+2)y=8-7\lambda \end{cases}$ 2. $\begin{cases} (\mu-1)x+2\mu y=2 \\ 2\mu x+(\mu-1)y=\mu-1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} (\mu+2)x+(2\mu+3)y=3\mu+1 \\ (3\mu+4)x+(\mu+6)y=\mu+2 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} (\mu-2)x+3\mu y=-3 \\ 3\mu x+(\mu-2)y=\mu-2 \end{cases}$

728. Νὰ λυθοῦν καὶ νὰ διερευνηθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα

1. $\begin{cases} (\mu-1)^2x+(\mu^2-1)y=(\mu+1)^2 \\ (2\mu-1)x+(\mu+1)y=\mu^2-1 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} (2\mu-3)x-\mu y=3\mu-2 \\ 5x+(2\mu+3)y=-5 \end{cases}$

2. $\begin{cases} (\mu-1)x+2(\mu-2)y=2 \\ 2(\mu-1)x+5(\mu-3)y=4 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} \mu(x+2y)=x-2 \\ 2\mu x-y+1=\mu(1-y) \end{cases}$

729. Νὰ λυθοῦν καὶ νὰ διερευνηθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα:

1. $\begin{cases} (\mu^2-1)x+(\mu-1)^2y=(\mu+1)^2 \\ (\mu+1)x+(2\mu-1)y=\mu^2-1 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} (\mu^2+1)x+(\mu^2-1)y=\mu \\ (\mu+1)x+(\mu-1)y=\mu^2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} (\lambda-1)x+(\lambda+1)y=2(\lambda^2-1) \\ (\lambda^2-1)x+(\lambda^2+1)y=2(\lambda^3-1) \end{cases}$ 4. $\begin{cases} (\mu+5)x+(2\mu+3)y=3\mu+2 \\ (3\mu+10)x+(5\mu+6)y=2\mu+4 \end{cases}$

5. $\begin{cases} \mu(x+y)+\mu^2(2x-3y-2)=\mu+3 \\ \mu(1-\mu)x+\mu(y-1)=2\mu^2(x-y)-3\mu^2-2 \end{cases}$

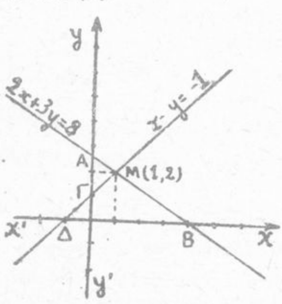
ΓΡΑΦΙΚΗ ΛΥΣΙΣ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

$$\begin{cases} \alpha x+\beta y=\gamma \\ \alpha' x+\beta' y=\gamma' \end{cases}$$

299. **Πῶς λύομεν γραφικῶς ἕνα σύστημα τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ δύο ἀγνώστους**; Ἔστω τὸ σύστημα:

$$\begin{cases} 2x+3y=8 & (1) \\ x-y=-1 & (2) \end{cases}$$

Κατασκευάζομεν τὰς εὐθείας, ποὺ παριστάνουν αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2).



Σχ. 14

Ἡ ἐξίσωσις (1) διὰ x=0 δίδει $y=\frac{8}{3}$ καὶ ἔχομεν τὸ σημεῖον Α. Διὰ y=0 δίδει x=4 καὶ ἔχομεν τὸ σημεῖον Β. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ· ἡ ΑΒ παριστᾷ τὴν ἐξίσωσιν (1).

Ἡ ἐξίσωσις (2) διὰ x=0 δίδει y=1 καὶ ἔχομεν τὸ σημεῖον Γ· διὰ y=0 δίδει x=−1 καὶ ἔχομεν τὸ σημεῖον Δ. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΓΔ· ἡ ΓΔ παριστᾷ τὴν ἐξίσωσιν (2).

Αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Μ (1,2). Αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου Μ ἐπαληθεύουν καὶ τὰς δύο ἐξισώσεις τοῦ δοθέντος συστήματος.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι :

Διὰ νὰ λύσωμεν γραφικῶς ἕνα σύστημα δύο ἐξισώσεων τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ δύο ἀγνώστους, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὰς συντεταγμένας τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν δύο εὐθειῶν ποὺ παριστάνουν αἱ δύο αὐταὶ ἐξισώσεις τοῦ συστήματος.

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΤΡΕΙΣ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ ΚΑΙ, ΓΕΝΙΚΩΣ, ΜΕ ν ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ν ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

300. **Λύσις ἑνὸς συστήματος μὲ τρεῖς ἀγνώστους.** Ἕνα σύστημα τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ τρεῖς ἀγνώστους δύναται πάντοτε νὰ λάβῃ τὴν γενικὴν μορφήν :

$$\mathrm{I}\quad\begin{cases} \alpha x+\beta y+\gamma \omega=\delta \\ \alpha' x+\beta' y+\gamma' \omega=\delta' \\ \alpha'' x+\beta'' y+\gamma'' \omega=\delta'' \end{cases}$$

Διὰ νὰ λύσωμεν ἕνα σύστημα τῆς μορφῆς I χρημιμοποιοῦμεν τὰς αὐτὰς μεθόδους, ποὺ ἐχρησιμοποιήσαμεν καὶ εἰς τὰ συστήματα μὲ δύο ἀγνώστους.

301. **Μέθοδος ἀπαλοιφῆς διὰ προσθέσεως.** Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ λύσωμεν τὸ σύστημα

$$(\mathrm{A})\quad\begin{cases} 2x+3y-\omega=12 \\ x-5y+3\omega=-13 \\ -3x+7y+2\omega=29 \end{cases}\quad\begin{array}{r|l} 1 & 3 \\ -2 & \\ & 2 \end{array}\quad\begin{array}{c}(1)\\(2)\\(3)\end{array}$$

Ἀπαλείφομεν ἕνα ἄγνωστον, ἔστω τὸν x, μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2). Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως (1) ἐπὶ 1 καὶ τῆς ἐξισώσεως (2) ἐπὶ −2 καὶ λαμβάνομεν τὰς ἐξισώσεις :

$$2x+3y-\omega=12$$
$$-2x+10y-6\omega=26$$

Προσθέτομεν τὰς ἐξισώσεις αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$13y-7\omega=38 \qquad (4)$$

Ἀπαλείφομεν *τὸν αὐτὸν ἄγνωστον* x μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (3). Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως (1) ἐπὶ 3 καὶ τῆς (3) ἐπὶ 2 καὶ λαμβάνομεν τὰς ἐξισώσεις

$$6x+9y-3\omega=36$$
$$-6x+14y+4\omega=58$$

Προσθέτομεν τὰς ἐξισώσεις αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$23y+\omega=94 \qquad (5)$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὸ δοθὲν σύστημα τὴν ἐξίσωσιν (2) διὰ τῆς (4) καὶ τὴν ἐξίσωσιν (3) διὰ τῆς (5) καὶ ἔχομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα

$$(\mathrm{B})\quad\begin{cases} 2x+3y-\omega=12 & (1) \\ 13y-7\omega=38 & (4) \\ 23y+\omega=94 & (5) \end{cases}$$

Αἱ ἐξισώσεις (4) καὶ (5) ἀποτελοῦν ἕνα σύστημα δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους, τὸ ὁποῖον λύομεν μὲ μίαν ἀπὸ τὰς γνωστὰς μεθόδους καὶ εὑρίσκομεν τὴν λύσιν $y=4, \quad \omega=2$.

Τὰς τιμὰς αὐτὰς τῶν y καὶ ω θέτομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) καὶ ἔχομεν $2x+3\cdot 4-2=12, \quad$ ἄρα $x=1$.

Ὥστε τὸ δοθὲν σύστημα ἔχει τὴν λύσιν $(x=1,\ y=4,\ \omega=2)$.

302. Μέθοδος ἀπαλοιφῆς δι᾽ ἀντικαταστάσεως. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ λύσωμεν τὸ σύστημα :

$$(A) \left\{ \begin{array}{ll} 5x+2y-2\omega= \ 15 & (1) \\ x-4y+3\omega= \ 24 & (2) \\ 3x+5y+\ \omega=-\ 4 & (3) \end{array} \right.$$

Ἀπαλείφομεν ἕνα ἄγνωστον, ἔστω τὸν x, μεταξὺ τῶν τριῶν ἐξισώσεων. Πρὸς τοῦτο λύομεν τὴν ἐξίσωσιν (2) πρὸς x (διότι εἰς τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν συντελεστὴς τοῦ x εἶναι ὁ 1) καὶ ἔχομεν

$$x=24+4y-3\omega \qquad (4)$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὰς δύο ἄλλας ἐξισώσεις (1) καὶ (3) τοῦ συστήματος (A) τὸ x μὲ τὴν τιμήν του αὐτήν.

Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) τὸ x μὲ τὴν τιμήν του $24+4y-3\omega$ λαμβάνομεν

$$5(24+4y-3\omega)+2y-2\omega=15 \quad ἤ \quad 120+20y-15\omega+2y-2\omega=15$$
$$ἤ \quad 20y-15\omega+2y-2\omega=-120+15 \quad ἤ \quad 22y-17\omega=-105. \qquad (5)$$

Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (3) τὸ x μὲ τὴν τιμήν του $24+4y-3\omega$ λαμβάνομεν

$$3(24+4y-3\omega)+5y+\omega=-4 \quad ἤ \quad 72+12y-9\omega+5y+\omega=-4$$
$$ἤ \quad 12y-9\omega+5y+\omega=-72-4 \quad ἤ \quad 17y-8\omega=-76 \qquad (6)$$

Αἱ ἐξισώσεις (4), (5), (6) ἀποτελοῦν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα

$$(B) \left\{ \begin{array}{ll} x=24+4y-3\omega & (4) \\ 22y-17\omega=-105 & (5) \\ 17y-\ 8\omega=-\ 76 & (6) \end{array} \right.$$

Αἱ ἐξισώσεις (5) καὶ (6) ἀποτελοῦν ἕνα σύστημα μὲ δύο ἀγνώστους, τὸ ὁποῖον λύομεν μὲ μίαν ἀπὸ τὰς γνωστὰς μεθόδους καὶ εὑρίσκομεν $y=-4, \quad \omega=1$.

Τὰς τιμὰς αὐτὰς τῶν y καὶ ω θέτομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (4) καὶ εὑρίσκομεν $x=24+4\cdot(-4)-3\cdot 1$ ἤ $x=5$

Ὥστε τὸ σύστημα ἔχει τὴν λύσιν $(x=5,\ y=-4,\ \omega=1)$

303. Γενικὸς κανών. Ἡ μέθοδος ἀπαλοιφῆς διὰ προσθέσεως καὶ ἡ μέθοδος ἀπαλοιφῆς δι᾽ ἀντικαταστάσεως ἐφαρμόζονται γενικῶς καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν, ποὺ τὸ σύστημα ἔχει ν ἐξισώσεις μὲ ν ἀγνώστους.

Διὰ νὰ λύσωμεν ἕνα σύστημα ν ἐξισώσεων μὲ ν ἀγνώστους μὲ τὴν μέθοδον ἀπαλοιφῆς διὰ προσθέσεως ἢ δι᾽ ἀντικαταστάσεως, ἀκολουθοῦμεν γενικῶς τὸν κάτωθι κανόνα :

Κανών. *Ἀπαλείφομεν ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἄγνωστον μεταξὺ τῶν ν ἐξισώσεων καὶ λαμβάνομεν ἕνα νέον σύστημα, τὸ ὁποῖον ἔχει 1 ἐξίσωσιν μὲ ν ἀγνώστους καὶ (ν—1) ἐξισώσεις μὲ (ν—1) ἀγνώστους.*

Ἀπαλείφομεν ἔπειτα ἕνα δεύτερον ἄγνωστον μεταξὺ τῶν (ν—1) ἐξισώσεων καὶ λαμβάνομεν ἕνα νέον σύστημα, τὸ ὁποῖον ἔχει 1 ἐξίσωσιν μὲ ν ἀγνώστους, 1 ἐξίσωσιν μὲ (ν—1) ἀγνώστους καὶ (ν—2) ἐξισώσεις μὲ (ν—2) ἀγνώστους·

Συνεχίζομεν κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον μέχρις ὅτου λάβωμεν ἕνα σύστημα, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ :

1 ἐξίσωσιν μὲ ν ἀγνώστους
1 » » ν—1 »
1 » » ν—2 »
. . . .
2 ἐξισώσεις μὲ 2 ἀγνώστους

Λύομεν ἔπειτα τὸ σύστημα τῶν δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους καὶ τὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων αὐτῶν θέτομεν εἰς τὴν προηγουμένην ἐξίσωσιν μὲ τοὺς 3 ἀγνώστους, ὁπότε εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν καὶ τρίτου ἀγνώστου. Ἔπειτα προχωροῦμεν ὁμοίως εἰς τὴν ἀμέσως προηγουμένην ἐξίσωσιν καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρις ὅτου εὕρωμεν ὅλας τὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων.

304. **Μέθοδος ἀπαλοιφῆς διὰ συγκρίσεως.** Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ λύσωμεν τὸ σύστημα

$$(A)\left|\begin{array}{lr} 3x+2y-5\omega=\ \ 64 & (1)\\ 4x-3y+2\omega=-18 & (2)\\ 5x+4y+3\omega=\ \ 20 & (3)\end{array}\right.$$

Λύομεν καὶ τὰς τρεῖς ἐξισώσεις πρὸς ἕνα ἄγνωστον, ἔστω πρὸς x, θεωροῦντες τοὺς ἄλλους ἀγνώστους ὡς γνωστοὺς καὶ εὑρίσκομεν

$$x=\frac{64-2y+5\omega}{3}\quad(1')\qquad x=\frac{-18+3y-2\omega}{4}\quad(2')\qquad x=\frac{20-4y-3\omega}{5}\quad(3')$$

Ἐξισώνομεν τὰ δεύτερα μέλη τῶν (1'), (2'), (3') καὶ ἔχομεν :

$$\frac{64-2y+5\omega}{3}=\frac{-18+3y-2\omega}{4}=\frac{20-4y-3\omega}{5}$$

Ἡ ἐξίσωσις $\frac{64-2y+5\omega}{3}=\frac{-18+3y-2\omega}{4}$ δίδει

$4(64-2y+5\omega)=3(-18+3y-2\omega)$ ἢ $256-8y+20\omega=-54+9y-6\omega$

ἢ $-8y+20\omega-9y+6\omega=-256-54$ ἢ $-17y+26\omega=-310$ (4)

Ἡ ἐξίσωσις $\frac{64-2y+5\omega}{3}=\frac{20-4y-3\omega}{5}$ δίδει

$5(64-2y+5\omega)=3(20-4y-3\omega)$ ἢ $320-10y+25\omega=60-12y-9\omega$

ἢ $-10y+25\omega+12y+9\omega=-320+60$ ἢ $2y+34\omega=-260$ (5)

Αἱ ἐξισώσεις (1′), (4) καὶ (5) ἀποτελοῦν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα

$$B \begin{cases} x = \dfrac{64-2y+5\omega}{3} & (1') \\ -17y+26\omega=-310 & (4) \\ 2y+34\omega=-260 & (5) \end{cases}$$

Αἱ ἐξισώσεις (4) καὶ (5) ἀποτελοῦν ἕνα σύστημα δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους, τὸ ὁποῖον λύομεν μὲ μίαν ἀπὸ τὰς γνωστὰς μεθόδους καὶ εὑρίσκομεν $y=6$, $\omega=-8$.

Τὰς τιμὰς αὐτὰς τῶν y καὶ ω θέτομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1′) καὶ εὑρίσκομεν $x = \dfrac{64-2\cdot6+5(-8)}{3} = 4.$

Ὥστε τὸ σύστημα A ἔχει τὴν λύσιν: $x=4$, $y=6$, $\omega=-8$.

Ἡ ἀνωτέρω μέθοδος ἐφαρμόζεται γενικῶς καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν, ποὺ τὸ σύστημα ἔχει ν ἐξισώσεις μὲ ν ἀγνώστους.

Ἀσκήσεις. Α′ Ὁμάς. **730.** Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα:

1. $\begin{cases} 2x+3y-\omega=4 \\ x-5y+3\omega=3 \\ 5x+y+\omega=41 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 5x+2y-3\omega=0 \\ 3x-4y+5\omega=10 \\ 7x-3y+6\omega=10 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x-2y-10\omega=-1 \\ 2x+y+5\omega=13 \\ 3x+3y+\omega=38 \end{cases}$

Β′ ὁμάς. **731.** Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα:

1. $\begin{cases} 2x-\dfrac{y}{3}+\dfrac{3\omega}{2}=10 \\ x+y-\omega=5 \\ \dfrac{2x}{3}-\dfrac{y}{6}+\dfrac{\omega}{2}=3 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{3\omega}{4}=\dfrac{19}{4} \\ y-15x+6\omega=-33 \\ \dfrac{\omega}{2}+\dfrac{5x}{6}+y=9 \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{2x-y+\omega}{3x-y+\omega}=\dfrac{5}{3} \\ \dfrac{x-3y+\omega}{y-2\omega+1}=-1 \\ \dfrac{x+y+\omega}{2x-y+\omega}=1 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} \dfrac{5x+7y}{x+y}=6 \\ \dfrac{3(\omega-x)}{x-y+\omega}=1 \\ \dfrac{2x+3y-\omega}{x+6}=2 \end{cases}$

305. Συστήματα ἀδύνατα ἢ ἀόριστα. Ὅπως τὰ συστήματα δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους, οὕτω καὶ ἕνα σύστημα ν ἐξισώσεων μὲ ν ἀγνώστους, δύναται νὰ ἔχῃ μίαν λύσιν, ἢ νὰ εἶναι ἀδύνατον ἢ νὰ εἶναι ἀόριστον.

Παράδειγμα 1ον. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα:

$$(A) \begin{cases} 3x+6y-3\omega=8 \\ -x+5y+2\omega=10 \\ 4x+y-5\omega=6 \end{cases} \left|\begin{matrix} 1 \\ 3 \\ \end{matrix}\right| \begin{matrix} 4 \\ \\ -3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$

Ἀπαλείφομεν τὸν x μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2). Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (1) ἐπὶ 1 καὶ τῆς (2) ἐπὶ 3 καὶ ἔχομεν

$$3x+6y-3\omega=8$$
$$-3x+15y+6\omega=30$$

Προσθέτομεν τὰς ἐξισώσεις αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$21y+3\omega=38 \qquad (4)$$

Ἀπαλείφομεν τὸν αὐτὸν ἄγνωστον x μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (3). Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (1) ἐπὶ 4 καὶ τῆς (3) ἐπὶ —3 καὶ ἔχομεν

$$12x+24y-12\omega=32$$
$$-12x-3y+15\omega=-18$$

Προσθέτομεν τὰς ἐξισώσεις αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$21y+3\omega=14 \qquad (5)$$

Ἀντικαθιστῶμεν τὰς ἐξισώσεις (2) καὶ (3) μὲ τὰς (4) καὶ (5) καὶ ἔχομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα

$$(B)\quad \left\{\begin{array}{rr} 3x+6y-3\omega=8 & (1)\\ 21y+3\omega=38 & (4)\\ 21y+3\omega=14 & (5)\end{array}\right.$$

Αἱ δύο τελευταῖαι ἐξισώσεις (4) καὶ (5) εἶναι ἀσυμβίβαστοι, διότι ἔχουν τὰ πρῶτα μέλη των ἴσα καὶ διάφορα τὰ δεύτερα μέλη των· ἄρα τὸ δοθὲν σύστημα εἶναι ἀδύνατον.

Σημ. Τὸ ἀδύνατον τοῦ συστήματος φαίνεται ἀμέσως, ἂν παρατηρήσωμεν, ὅτι τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως (1) εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν πρώτων μελῶν τῶν ἐξισώσεων (2) καὶ (3), πρᾶγμα τὸ ὁποῖον δὲν συμβαίνει καὶ μὲ τὰ δεύτερα μέλη των.

Παράδειγμα 2ον. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα :

$$(A)\quad \left\{\begin{array}{r|c|c} 3x-y+7\omega=11 & 2 & -1\\ -2x+4y-5\omega=5 & 3 & \\ x+3y+2\omega=16 & & 3\end{array}\right. \qquad \begin{array}{r}(1)\\(2)\\(3)\end{array}$$

Ἀπαλείφομεν τὸν x μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2). Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως (1) ἐπὶ 2 τῆς δὲ ἐξισώσεως (2) ἐπὶ 3 καὶ ἔχομεν

$$6x-2y+14\omega=22$$
$$-6x+12y-15\omega=15$$

Προσθέτομεν τὰς ἐξισώσεις αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$10y-\omega=37 \qquad (4)$$

Ἀπαλείφομεν τὸν αὐτὸν ἄγγωστον x μεταξὺ τῶν (1) καὶ (3).

Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (1) ἐπὶ —1 καὶ τῆς (3) ἐπὶ 3 καὶ ἔχομεν

$$-3x+y-7\omega=-11$$
$$3x+9y+6\omega=48$$

Προσθέτομεν τὰς ἐξισώσεις αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$10y-\omega=37 \qquad (5)$$

Ἀντικαθιστῶμεν τὰς ἐξισώσεις (2) καὶ (3) τοῦ δοθέντος συστήματος μὲ τὰς (4) καὶ (5) καὶ ἔχομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα

$$(\mathrm{B}) \left\{ \begin{array}{ll} 3x-y+7\omega=11 & (1) \\ 10y-\omega=37 & (4) \\ 10y-\omega=37 & (5) \end{array} \right.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι αἱ ἐξισώσεις (4) καὶ (5) τοῦ συστήματος Β εἶναι αἱ αὐταί· ἄρα τὸ σύστημα ἔχει δύο μόνον ἐξισώσεις μὲ τρεῖς ἀγνώστους καὶ ἑπομένως εἶναι ἀόριστον.

Σημ. Ἡ ἀοριστία τοῦ συστήματος φαίνεται ἀμέσως, ἂν παρατηρήσωμεν ὅτι τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως (3) εἶναι ἴσα μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστοίχων μελῶν τῶν δύο ἄλλων ἐξισώσεων.

Ἀσκήσεις: *732.* Δίδονται αἱ ἐξισώσεις $3x+y-\omega=5$, $2x-4y+3\omega=8$ καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ μία τρίτη ἐξίσωσις, ἡ ὁποία νὰ ἀποτελῇ μὲ τὰς δύο δοθείσας : 1ον. ἕνα σύστημα ἀδύνατον· 2ον. ἕνα σύστημα ἀόριστον.

733. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα

$$1. \left\{ \begin{array}{l} 2x+y-8\omega=10 \\ 3x-2y+5\omega=14 \\ 8x-3y+2\omega=38 \end{array} \right. \qquad 2. \left\{ \begin{array}{l} x+2y+3\omega=14 \\ 3x+8y+4\omega=20 \\ 2x+6y+\omega=18 \end{array} \right.$$

$$3. \quad \frac{x}{3}+\frac{2y}{5}+\omega=6, \quad x+\frac{6y}{5}+3\omega=18. \quad \frac{x}{12}+\frac{y}{10}+\frac{\omega}{4}=\frac{3}{2}$$

306. **Μέθοδος τοῦ** Bezout **ἢ τῶν προσδιοριστέων συντελεστῶν.** Κατὰ τὴν μέθοδον τῆς ἀπαλοιφῆς διὰ προσθέσεως, ἀπαλείφομεν ἕνα ἄγνωστον, π.χ. τὸν x, μεταξὺ τῆς πρώτης καὶ δευτέρας ἐξισώσεως ἑνὸς συστήματος, ἔπειτα μεταξὺ τῆς πρώτης καὶ τρίτης ἐξισώσεως, καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρις ὅτου λάβωμεν τὴν πρώτην καὶ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν τοῦ συστήματος.

Ἡ μέθοδος τοῦ Bezout, ἡ ὁποία γενικεύει τὴν μέθοδον αὐτήν, μᾶς ἐπιτρέπει νὰ ἀπαλείψωμεν ταυτοχρόνως $(\nu-1)$ ἀγνώστους, ἂν ὑπολογίσωμεν καταλλήλως τοὺς παράγοντας ἐπὶ τοὺς ὁποίους πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ ἑκάστη ἐξίσωσις.

Τὸ κάτωθι παράδειγμα θὰ μᾶς δείξῃ τὸν τρόπον τῆς λύσεως ἑνὸς συστήματος τριῶν ἐξισώσεων μὲ τὴν μέθοδον τοῦ Bezout.

Παράδειγμα. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα :

$$\left\{ \begin{array}{l|l} \alpha x+\beta y+\gamma \omega=\delta & \lambda \\ \alpha' x+\beta' y+\gamma' \omega=\delta' & \mu \\ \alpha'' x+\beta'' y+\gamma'' \omega=\delta'' & 1 \end{array} \right. \qquad \begin{array}{r} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

Πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως (1) ἐπὶ λ, τῆς ἐξισώσεως (2) ἐπὶ μ καὶ τῆς ἐξισώσεως (3) ἐπὶ 1 καὶ προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις ποὺ θὰ προκύψουν, λαμβάνομεν

$$(\alpha\lambda+\alpha'\mu+\alpha'')x+(\beta\lambda+\beta'\mu+\beta'')y+(\gamma\lambda+\gamma'\mu+\gamma'')\omega=\delta\lambda+\delta'\mu+\delta'' \qquad (4)$$

Ἐὰν προσδιορίσωμεν τὰ λ καὶ μ εἰς τρόπον, ὥστε οἱ συντελεσταὶ δύο ἀγνώστων τῆς ἐξισώσεως (4) π. χ. οἱ y καὶ ω, νὰ μηδενίζωνται, τότε ἡ ἐξίσωσις (4) θὰ ἔχῃ ἕνα μόνον ἄγνωστον καὶ ἑπομένως δύναται νὰ λυθῇ εὐκόλως.

Διὰ νὰ μηδενίζωνται οἱ συντελεσταὶ τῶν y καὶ ω πρέπει νὰ εἶναι

$$\left| \begin{array}{l} \beta\lambda+\beta'\mu+\beta''=0 \\ \gamma\lambda+\gamma'\mu+\gamma''=0 \end{array} \right.$$

Λύομεν τὸ σύστημα τῶν δύο αὐτῶν ἐξισώσεων, μὲ ἀγνώστους τοὺς λ καὶ μ καὶ εὑρίσκομεν τὴν λύσιν

$$\lambda=\frac{\beta'\gamma''-\beta''\gamma'}{\beta\gamma'-\beta'\gamma} \quad (5), \qquad \mu=\frac{\beta''\gamma-\beta\gamma''}{\beta\gamma'-\beta'\gamma} \quad (6)$$

Ὅταν οἱ λ καὶ μ ἔχουν τὰς τιμάς, ποὺ δίδουν αἱ ἰσότητες (5) καὶ (6), οἱ συντελεσταὶ τῶν ἀγνώστων y καὶ ω εἶναι μηδὲν καὶ ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις (4) γίνεται $(\alpha\lambda+\alpha'\mu+\alpha'')x=\delta\lambda+\delta'\mu+\delta''$ ἀπὸ τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν, ἂν $\alpha\lambda+\alpha'\mu+\alpha''\neq 0$

$$x=\frac{\delta\lambda+\delta'\mu+\delta''}{\alpha\lambda+\alpha'\mu+\alpha''} \quad (7)$$

Ἂν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν ἰσότητα (7) τὰ λ καὶ μ μὲ τὰς τιμάς των, ποὺ δίδουν αἱ ἰσότητες (5) καὶ (6), εὑρίσκομεν, μετὰ τὰς ἁπλοποιήσεις κλπ.

$$x=\frac{\delta\beta'\gamma''-\delta\beta''\gamma'+\delta'\beta''\gamma-\delta'\beta\gamma''+\delta''\beta\gamma'-\delta''\beta'\gamma}{\alpha\beta'\gamma''-\alpha\beta''\gamma'+\alpha'\beta''\gamma-\alpha'\beta\gamma''+\alpha''\beta\gamma'-\alpha''\beta'\gamma} \quad (8)$$

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ὑπολογίζομεν τὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων y καὶ ω, ἂν μηδενίσωμεν τοὺς συντελεστὰς τῶν x καὶ ω ἢ τῶν x καὶ y.

Εἰς τὴν πρᾶξιν ὅμως, ὅταν ὑπολογίσωμεν τὴν τιμὴν τοῦ x, ἀντικαθιστῶμεν τὸ x μὲ τὴν τιμήν του εἰς τὰς δύο ἄλλας ἐξισώσεις τοῦ συστήματος καὶ ἔχομεν οὕτω νὰ λύσωμεν ἕνα σύστημα μὲ δύο ἀγνώστους

Ἐφαρμογή. ***Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα :***

$$\left\{ \begin{array}{r} 2x+3y-\omega=17 \\ 3x-4y+2\omega=-5 \\ x+y+3\omega=10 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} \lambda \\ \mu \\ 1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{r} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

Πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως (1) ἐπὶ λ, τῆς ἐξισώσεως (2) ἐπὶ μ καὶ τῆς ἐξισώσεως (3) ἐπὶ 1 καὶ προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις, ποὺ θὰ προκύψουν, ἔχομεν

$$(2\lambda+3\mu+1)x+(3\lambda-4\mu+1)y+(-\lambda+2\mu+3)\omega=17\lambda-5\mu+10 \quad (4)$$

Προσδιορίζομεν τὰ λ καὶ μ εἰς τρόπον, ὥστε οἱ συντελεσταὶ τῶν y καὶ ω νὰ εἶναι μηδέν, δηλ. θέτομεν

$$\left| \begin{array}{l} 3\lambda-4\mu+1=0 \\ -\lambda+2\mu+3=0 \end{array} \right.$$

Λύομεν τὸ σύστημα αὐτὸ καὶ εὑρίσκομεν τὴν λύσιν $\lambda=-7$; $\mu=-5$. Ἐὰν $\lambda=-7$ καὶ $\mu=-5$ οἱ συντελεσταὶ τῶν y καὶ ω εἶναι μηδὲν καὶ ἡ ἐξίσωσις (4) γίνεται

$$(-14-15+1)x=17(-7)-5(-5)+10 \quad ἢ \quad -28x=-84 \quad ἄρα \quad x=3$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2) τὸ x μὲ τὴν τιμήν του 3 καὶ εὑρίσκομεν τὰς ἐξισώσεις

$$\left| \begin{array}{r} 3y-\omega=11 \\ -4y+2\omega=-14 \end{array} \right.$$

Λύομεν τὸ σύστημα αὐτὸ καὶ εὑρίσκομεν $y=4$, $\omega=1$.
Ὥστε τὸ δοθὲν σύστημα ἔχει τὴν λύσιν $(x=3,\ y=4,\ \omega=1)$.

Ἀσκήσεις. 734. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα μὲ τὴν μέθοδον Bezout.

1. $\begin{cases} 4x-3y+2\omega=9 \\ 2x+5y-3\omega=4 \\ 5x+2y-\omega=11 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 3x+2y+4\omega=17 \\ 2x+5y+3\omega=19 \\ 3x-y+\omega=8 \end{cases}$

307. Μέθοδος τῶν ὁριζουσῶν. Τὴν διαφορὰν $\alpha\beta'-\beta\alpha'$ παρεστήσαμεν συμβολικῶς διὰ τοῦ $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}$ καὶ ἐκαλέσαμεν ὁρίζουσαν τῶν συντελεστῶν $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$.

Γενικῶς ἡ συμβολικὴ παράστασις

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}$$

λέγεται ὁρίζουσα ***δευτέρας τάξεως*** ἢ ὁρίζουσα τῶν τεσσάρων στοιχείων $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$.

Αἱ διαγώνιοι $\alpha\beta'$ καὶ $\beta\alpha'$ λέγονται, ἀντιστοίχως, ἡ ***πρώτη*** καὶ ἡ ***δευτέρα διαγώνιος*** τῆς ὁριζούσης Δ.

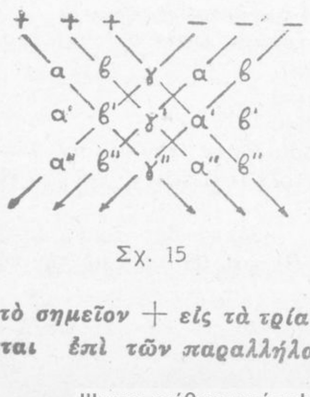
Ἡ συμβολικὴ παράστασις

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$$

λέγεται ***ὁρίζουσα τρίτης τάξεως*** ἢ ὁρίζουσα τῶν ἐννέα στοιχείων α,β,γ, α',β',γ', $\alpha'',\beta'',\gamma''$ καὶ παριστάνει τὴν παράστασιν

$$\alpha\beta'\gamma''+\beta\gamma'\alpha''+\gamma\alpha'\beta''-\gamma\beta'\alpha''-\alpha\gamma'\beta''-\beta\alpha'\gamma'' \qquad (1)$$

Διὰ νὰ ἐπιτύχωμεν τὸ ἀνάπτυγμα τῆς ὁριζούσης τρίτης τάξεως, δηλ. τὴν παράστασιν (1), χρησιμοποιοῦμεν τὸν κάτωθι κανόνα, ὁ ὁποῖος λέγεται ***κανὼν τοῦ Sarrus:***



Σχ. 15

Γράφομεν τὴν πρώτην καὶ δευτέραν στήλην τῶν γραμμάτων παραπλεύρως τῶν τριῶν στηλῶν (βλέπε σχῆμα 15).

Σχηματίζομεν ἔπειτα τὰ ἕξη γινόμενα τῶν στοιχείων, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐπὶ τῶν παραλλήλων γραμμῶν πρὸς τὰς διαγωνίους τοῦ σχήματος, προτάσσοντες τὸ σημεῖον + εἰς τὰ τρία γινόμενα τῶν στοιχείων, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐπὶ τῶν παραλλήλων πρὸς τὴν πρώτην διαγώνιον καὶ

τὸ σημεῖον—εἰς τὰ γινόμενα τῶν στοιχείων, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐπὶ τῶν παραλλήλων πρὸς τὴν δευτέραν διαγώνιον.

Π. χ. Ἂν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἀνάπτυγμα τῆς ὁριζούσης

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

σχηματίζομεν ἐν πρώτοις τὸν κάτωθι πίνακα

$$\begin{matrix} 3 & 4 & 7 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 6 & 5 & 2 \end{matrix}$$

καὶ κατὰ τὸν κανόνα τοῦ Sarrus ἔχομεν

$$\Delta = 3{\cdot}3{\cdot}6+4{\cdot}3{\cdot}5+7{\cdot}2{\cdot}2-7{\cdot}3{\cdot}5-3{\cdot}3{\cdot}2-4{\cdot}2{\cdot}6$$
$$= 54 + 60 + 28 - 105 - 18 - 48 = -29.$$

***308.* Λύσις ἑνὸς συστήματος τριῶν ἐξισώσεων μὲ τρεῖς ἀγνώστους διὰ τῆς μεθόδου τῶν ὁριζουσῶν.** Διὰ νὰ λύσωμεν ἕνα σύστημα τριῶν ἐξισώσεων τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ τρεῖς ἀγνώστους, μὲ τὴν μέθοδον τῶν ὁριζουσῶν, ἐφαρμόζομεν τὸν κανόνα τοῦ Gramer (§ 297).

Π.χ. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$\begin{cases} 3x+2y+4\omega=17 \\ 2x+5y+3\omega=19 \\ 3x-\ y+\ \omega=8 \end{cases}$$

Κατὰ τὸν κανόνα τοῦ Gramer θὰ εἶναι

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 17 & 2 & 4 \\ 19 & 5 & 3 \\ 8 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 17 & 4 \\ 2 & 19 & 3 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}}, \quad \omega = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 17 \\ 2 & 5 & 19 \\ 3 & -1 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}}$$

Ὑπολογίζομεν τὰς ὁριζούσας τῶν ἀριθμητῶν καὶ παρονομαστῶν τῶν ἀγνώστων x, y, ω μὲ τὸν κανόνα τοῦ Sarrus καὶ ἔχομεν

$$x = \frac{17{\cdot}5{\cdot}1+2{\cdot}3{\cdot}8+4{\cdot}19{\cdot}(-1)-4{\cdot}5{\cdot}8-17{\cdot}3{\cdot}(-1)-2{\cdot}19{\cdot}1}{3{\cdot}5{\cdot}1+2{\cdot}3{\cdot}3+4{\cdot}2(-1)-4{\cdot}5{\cdot}3-3{\cdot}3{\cdot}(-1)-2{\cdot}2{\cdot}1} =$$
$$= \frac{85+48-76-160+51-38}{15+18-8-60+9-4} = \frac{-90}{-30} = 3$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι $y=2$, $\omega=1$

Ἀσκήσεις. 735. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ κάτωθι ὁρίζουσαι :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & \beta & \gamma \\ \alpha & 0 & \alpha \\ \beta & \gamma & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & \gamma & \beta \\ \gamma & 1 & \alpha \\ \beta & \gamma & 1 \end{vmatrix}$$

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΕΠΙΔΕΧΟΜΕΝΑ ΕΙΔΙΚΟΝ ΤΡΟΠΟΝ ΛΥΣΕΩΣ

309. Λύσις συστημάτων διὰ τεχνασμάτων. Ὅλα τὰ συστήματα δύνανται νὰ λυθοῦν μὲ μίαν ἀπὸ τὰς τρεῖς γενικὰς μεθόδους, ποὺ ἀνεφέραμεν εἰς τὴν § 287. Μερικὰ ὅμως ἰδιαίτερα συστήματα δύνανται νὰ λυθοῦν ἁπλούστερον καὶ ταχύτερον ἂν χρησιμοποιήσωμεν εἰδικοὺς τρόπους λύσεως (τεχνάσματα), οἱ ὁποῖοι συνίστανται, εἴτε εἰς προσήκουσαν ἐκλογὴν τῶν ἀγνώστων, ποὺ πρόκειται νὰ ἀπαλείψωμεν, εἴτε εἰς τὸν συνδυασμὸν μεταξὺ τῶν πολλῶν ἐξισώσεων, εἴτε εἰς ἄλλα μέσα, τὰ ὁποῖα ἡ μακρὰ πεῖρα δύναται νὰ εὕρῃ.

310. I. Αἱ ν ἐξισώσεις δὲν περιέχουν ὅλους τοὺς ἀγνώστους

Παράδειγμα 1ον. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$\left\{\begin{array}{r|c|c}
x+2y=10 & -3 & \\
4y+2\omega-\varphi=9 & & 3 \\
3x+4\omega=16 & 1 & \\
y-5\omega+3\varphi=13 & & 1
\end{array}\right.
\qquad \begin{array}{c}(1)\\(2)\\(3)\\(4)\end{array}$$

Ἀπαλείφομεν τὸν x μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (3). Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (1) ἐπὶ —3 καὶ τῆς (3) ἐπὶ 1 καὶ ἔχομεν

$$-3x-6y=-30$$
$$3x+4\omega=16$$

Προσθέτομεν αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$-6y+4\omega=-14 \quad \text{ἢ} \quad -3y+2\omega=-7 \qquad (5)$$

Ἀπαλείφομεν τὸν φ μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων (2) καὶ (4). Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (2) ἐπὶ 3 καὶ τῆς (4) ἐπὶ 1 καὶ ἔχομεν

$$12y+6\omega-3\varphi=27$$
$$y-5\omega+3\varphi=13$$

Προσθέτομεν τὰς ἐξισώσεις αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$13y+\omega=40 \qquad (6)$$

Λύομεν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (5) καὶ (6) καὶ εὑρίσκομεν $y=3$, $\omega=1$.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (3) τὸ ω μὲ τὴν τιμήν του 1 καὶ ἔχομεν $3x+4\cdot1=16$, ἄρα $x=4$.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) τὰ y καὶ ω μὲ τὰς τιμάς των καὶ ἔχομεν $4\cdot3+2\cdot1-\varphi=9$ ἢ $\varphi=5$

Ὥστε τὸ δοθὲν σύστημα ἔχει τὴν λύσιν ($x=4$, $y=3$, $\omega=1$, $\varphi=5$).

Παράδειγμα 2ον. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$\left\{\begin{array}{r}
3x+y=43 \\
2y+\omega=25 \\
-\omega+3\varphi=55 \\
x+2y+5\omega-4\varphi=-24
\end{array}\right.
\qquad \begin{array}{c}(1)\\(2)\\(3)\\(4)\end{array}$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1) ἔχομεν $x=\frac{43-y}{3}$ (1′)

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (2) ἔχομεν $\omega=25-2y$ (2′)

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (3) ἔχομεν $\varphi=\frac{55+\omega}{3}=\frac{55+(25-2y)}{3}=\frac{80-2y}{3}$ (3′)

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (4) τοὺς ἀγνώστους x, ω καὶ φ μὲ τὰς τιμάς των, ποὺ δίδουν αἱ ἐξισώσεις (1′), (2′), (3′) καὶ ἔχομεν

$$\frac{43-y}{3}+2y+5(25-2y)-4\cdot\frac{80-2y}{3}=-24.$$

Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτήν, ἡ ὁποία εἶναι πρώτου βαθμοῦ πρὸς y καὶ εὑρίσκομεν $y=10$.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὰς ἐξισώσεις (1′), (2′), (3′) τὸ y μὲ τὴν τιμήν του 10 καὶ εὑρίσκομεν

$$x=\frac{43-10}{3}=11,\qquad \omega=25-2\cdot10=5,\qquad \varphi=\frac{80-2\cdot10}{3}=20.$$

Ὥστε τὸ δοθὲν σύστημα ἔχει τὴν λύσιν $(x=11,\ y=10,\ \omega=5,\ \varphi=20)$.

Ἀσκήσεις. *736*. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα :

1. $\begin{cases} x+2y=14 \\ y+3\omega=10 \\ \omega+4x=26 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 2x+3y-\omega=18 \\ 5x+2\omega=41 \\ y+4\omega=36 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x-2y+3\omega=21 \\ 2x+3y=13 \\ 4x-2\omega=8 \end{cases}$

737. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα

1. $\begin{cases} 4x-3\omega+\varphi=10 \\ 5y+\omega-4\varphi=1 \\ 3y+\varphi=17 \\ x+2y+3\varphi=25 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 4x-3\omega+\varphi=24 \\ 5y+\omega-4\varphi=18 \\ 3y+\omega=14 \\ x+2y+3\omega=38 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x+y+2\omega+\varphi=-4 \\ 2y+3\omega=-1 \\ 5\omega-7\varphi=12 \\ 4x-5y=-2 \end{cases}$

311. II. Χρῆσις βοηθητικοῦ ἀγνώστου.

Παράδειγμα 1ον. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$\begin{cases} \frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{\omega}{2} & (1) \\ 2x+3y-\omega=48 & (2) \end{cases}$$

Παριστάνομεν τὰ ἴσα κλάσματα τῆς σχέσεως (1) μὲ ἕνα βοηθητικὸν ἄγνωστον. Πρὸς τοῦτο θέτομεν $\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{\omega}{2}=\lambda$ ἀπὸ τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν $x=3\lambda,\quad y=4\lambda,\quad \omega=2\lambda$ (3)

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) τὰ x, y, ω μὲ τὰς τιμὰς αὐτὰς καὶ ἔχομεν

$2\cdot3\lambda+3\cdot4\lambda-2\lambda=40$ ἢ $6\lambda+12\lambda-2\lambda=48$ ἢ $16\lambda=48$ ἄρα $\lambda=3$.

Τὴν τιμὴν αὐτὴν τοῦ λ θέτομεν εἰς τὰς ἐξισώσεις (3) καὶ εὑρίσκομεν $x=9,\quad y=12,\quad \omega=6.$

Παράδειγμα 2ον. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$(A)\quad \begin{cases} 3x+2(y+\omega+\varphi)=42 \\ 3y+2(\omega+\varphi+x)=44 \\ 3\omega+2(\varphi+x+y)=46 \\ 3\varphi+2(x+y+\omega)=48 \end{cases}$$

Θέτομεν $x+y+\omega+\varphi=\tau$ (1), ὁπότε θὰ εἶναι $y+\omega+\varphi=\tau-x$, $\omega+\varphi+x=\tau-y$, $\varphi+x+y=\tau-\omega$, $x+y+\omega=\tau-\varphi$ καὶ τὸ δοθὲν σύστημα γράφεται

$$(B)\quad \begin{cases} 3x+2(\tau-x)=42 & (2) \\ 3y+2(\tau-y)=44 & (3) \\ 3\omega+2(\tau-\omega)=46 & (4) \\ 3\varphi+2(\tau-\varphi)=48 & (5) \end{cases}$$

Ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος (B) λαμβάνομεν

$$x=42-2\tau,\quad y=44-2\tau,\quad \omega=46-2\tau,\quad \varphi=48-2\tau \qquad (6)$$

Τὰς τιμὰς αὐτὰς τῶν x, y, ω, φ θέτομεν εἰς τὴν (1) καὶ ἔχομεν

$$(42-2\tau)+(44-2\tau)+(46-2\tau)+(48-2\tau)=\tau$$

Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν καὶ εὑρίσκομεν $\tau=20$.

Τὴν τιμὴν αὐτὴν τοῦ τ θέτομεν εἰς τὰς ἐξισώσεις (6) καὶ εὑρίσκομεν $x=2$, $y=4$, $\omega=6$, $\varphi=8$.

Παράδειγμα 3ον. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{3}{\omega}=0 \\ \dfrac{3}{\omega}-\dfrac{2}{y}=2 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\omega}=\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

Θέτομεν $\dfrac{1}{x}=x'$, $\dfrac{1}{y}=y'$, $\dfrac{1}{\omega}=\omega'$, (1)

καὶ τὸ δοθὲν σύστημα γράφεται

$$\begin{cases} 2x'+y'-3\omega'=0 & (2) \\ 3\omega'-2y'=2 & (3) \\ 3x'+3\omega'=4 & (4) \end{cases}$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (3) λαμβάνομεν $y'=\dfrac{3\omega'-2}{2}$ (3′)

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (4) λαμβάνομεν $x'=\dfrac{4-3\omega'}{3}$ (4′)

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) τὰ y' καὶ x' μὲ τὰς τιμάς των, ποὺ δίδουν αἱ ἐξισώσεις (3′) καὶ (4′) καὶ ἔχομεν

$$2\cdot\frac{4-3\omega'}{3}+\frac{3\omega'-2}{2}-3\omega'=0$$

Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτήν, ἡ ὁποία εἶναι πρώτου βαθμοῦ πρὸς ω' καὶ εὑρίσκομεν $\omega'=\dfrac{10}{21}$.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὰς ἐξισώσεις (3') καὶ (4') τὸ ω' μὲ τὴν τιμήν του αὐτὴν καὶ εὑρίσκομεν

$$y' = \frac{3\cdot\frac{10}{21}-2}{2} = -\frac{2}{7}, \qquad x' = \frac{4-3\cdot\frac{10}{21}}{3} = \frac{6}{7}.$$

Τὰς τιμὰς τῶν x', y', ω' θέτομεν εἰς τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ εὑρίσκομεν $x = \frac{7}{6}, \quad y = -\frac{7}{2}, \quad \omega = \frac{21}{10}.$

Παράδειγμα 4ον. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$\frac{y\omega}{3y+2\omega} = 6, \qquad \frac{\omega x}{2\omega+3x} = 8, \qquad \frac{xy}{5x+4y} = 6.$$

Ἡ πρώτη ἐξίσωσις γράφεται

$$\frac{3y+2\omega}{y\omega} = \frac{1}{6} \quad ἢ \quad \frac{3y}{y\omega} + \frac{2\omega}{y\omega} = \frac{1}{6} \quad ἢ \quad \frac{3}{\omega} + \frac{2}{y} = \frac{1}{6} \qquad (1)$$

Ὁμοίως αἱ δύο ἄλλαι ἐξισώσεις γράφονται

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{\omega} = \frac{1}{8} \quad (2), \qquad \frac{5}{y} + \frac{4}{x} = \frac{1}{6} \qquad (3)$$

Λύομεν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1), (2), (3).

Θέτομεν $\frac{1}{x} = x', \quad \frac{1}{y} = y', \quad \frac{1}{\omega} = \omega' \qquad (4)$

καὶ λαμβάνομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα

$$\begin{cases} 3\omega'+2y' = \frac{1}{6} \\ 2x'+3\omega' = \frac{1}{8} \\ 5y'+4x' = \frac{1}{6} \end{cases} \quad ἢ \quad \begin{cases} 18\omega'+12y'=1 & (1') \\ 16x'+24\omega'=1 & (2') \\ 30y'+24x'=1 & (3') \end{cases}$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (2') ἔχομεν $\omega' = \frac{1-16x'}{24} \qquad (5)$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (3') ἔχομεν $y' = \frac{1-24x'}{30} \qquad (6)$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1') τὰ ω' καὶ y' μὲ τὰς τιμάς των, ποὺ δίδουν αἱ ἐξισώσεις (5) καὶ (6) καὶ ἔχομεν

$$18\cdot\frac{1-16x'}{24} + 12\cdot\frac{1-24x'}{30} = 1 \quad ἢ \quad \frac{3(1-16x')}{4} + \frac{2(1-24x')}{5} = 1$$

$$ἢ \quad 15(1-16x')+8(1-24x')=20 \quad ἢ \quad 15-240x'+8-192x'=20$$

$$ἢ \quad -240x'-192x'=-15-8+20 \quad ἢ \quad -432x'=-3 \quad ἢ \quad x' = \frac{3}{432} = \frac{1}{144}$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὰς ἐξισώσεις (5) καὶ (6) τὸ x' μὲ τὴν τιμήν του αὐτὴν καὶ εὑρίσκομεν

$$\omega' = \frac{1-16\cdot\frac{1}{144}}{24} = \frac{144-16}{24\,.\,144} = \frac{1}{27}, \quad y' = \frac{1-24\cdot\frac{1}{144}}{30} = \frac{144-24}{30\cdot144} = \frac{1}{36}$$

Τὰς τιμὰς τῶν x', y', ω' θέτομεν εἰς τὰς ἰσότητας (4) καὶ εὑρίσκομεν $x=144, \quad y=36, \quad \omega=27.$

Ἀσκήσεις. Α΄ Ὁμάς. ***738.*** Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα :

1. $\begin{cases} \dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{\omega}{2} \\ 2x+3y+4\omega = 52 \end{cases}$
3. $\begin{cases} \dfrac{x}{\alpha} = \dfrac{y}{\beta} = \dfrac{\omega}{\gamma} = \dfrac{\varphi}{\delta} \\ \alpha x+\beta y+\gamma\omega+\delta\varphi = \mu \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{\omega-1}{5} \\ 5x+3y-2\omega = 51 \end{cases}$
4. $\begin{cases} \dfrac{x-\alpha}{\alpha} = \dfrac{y-\beta}{\beta} = \dfrac{\omega-\gamma}{\gamma} \\ x+y+\omega = 1 \end{cases}$

Β΄ Ὁμάς. ***739.*** Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα :

1. $\begin{cases} \mu x = \nu y = \varrho\omega \\ \alpha x+\beta y+\gamma\omega = \delta \end{cases}$
2. $\begin{cases} \alpha x = \beta y = \gamma\omega = \delta\varphi \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{\omega}+\dfrac{1}{\varphi} = \dfrac{1}{\mu} \end{cases}$

740. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα

1. $\begin{cases} \dfrac{3}{x+y+1} - \dfrac{2}{2x-3y+5} = \dfrac{7}{20} \\ \dfrac{4}{x+y+1} + \dfrac{1}{2x-3y+5} = \dfrac{37}{40} \end{cases}$
2. $\begin{cases} \dfrac{1}{3x-2y+1} + \dfrac{1}{x+2y-3} = \dfrac{5}{12} \\ \dfrac{1}{x+2y-3} - \dfrac{1}{3x-2y+1} = \dfrac{1}{12} \end{cases}$

741. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα :

1. $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{y} + \dfrac{3}{\omega} = 3 \\ \dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{y} - \dfrac{1}{\omega} = 4 \\ \dfrac{2}{x} - \dfrac{8}{y} + \dfrac{5}{\omega} = 3 \end{cases}$
2. $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{\omega} = 9 \\ \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{y} + \dfrac{4}{\omega} = 11 \\ \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{y} - \dfrac{2}{\omega} = 1 \end{cases}$
3. $\begin{cases} \dfrac{\alpha}{x} + \dfrac{\beta}{y} - \dfrac{\gamma}{\omega} = \lambda \\ \dfrac{\alpha}{x} - \dfrac{\beta}{y} + \dfrac{\gamma}{\omega} = \mu \\ -\dfrac{\alpha}{x} + \dfrac{\beta}{y} + \dfrac{\gamma}{\omega} = \nu \end{cases}$

Γ΄ Ὁμάς. ***742.*** Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα :

1. $\begin{cases} x+3(y+\omega+\varphi)=28 \\ y+3(\omega+\varphi+x)=26 \\ \omega+3(\varphi+x+y)=24 \\ \varphi+3(x+y+\omega)=22 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 2x+3(y+\omega+\varphi)=20 \\ 2y+3(\omega+\varphi+x)=14 \\ 2\omega+3(\varphi+x+y)=24 \\ 2\varphi+3(x+y+\omega)=32 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x+\alpha(y+\omega)=k \\ y+\beta(\omega+x)=\lambda \\ \omega+\gamma(x+y)=\mu \end{cases}$

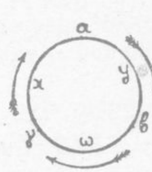
743. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα :

1 $\begin{cases} \dfrac{xy}{5x+4y} = 3 \\ \dfrac{y\omega}{3y+5\omega} = 7 \\ \dfrac{\omega x}{2\omega+3x} = 6 \end{cases}$
2. $\begin{cases} \dfrac{y\omega}{y+\omega} = \dfrac{18}{5} \\ \dfrac{\omega x}{\omega+x} = \dfrac{36}{13} \\ \dfrac{xy}{x+y} = \dfrac{12}{5} \end{cases}$
3. $\begin{cases} \dfrac{xy}{\alpha y+\beta x} = \gamma \\ \dfrac{x\omega}{\alpha\omega+\gamma x} = \beta \\ \dfrac{y\omega}{\beta\omega+\gamma y} = \alpha \end{cases}$

ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

312. Συμμετρικαὶ παραστάσεις. Κυκλικὴ ἐναλλαγή. Ὑποθέτομεν, ὅτι ἔχομεν τὴν ἀλγεβρικὴν παράστασιν $α^2-βγ$ τῶν τριῶν γραμμάτων α, β, γ.

Ἐπὶ μιᾶς περιφερείας σημειώνομεν τρία σημεῖα, τὰ ὁποῖα ὀνομάζομεν α, β, γ καὶ ὑποθέτομεν, ὅτι ἕνα κινητὸν ἀναχωρεῖ ἀπὸ ἕνα σημεῖον, ἔστω τὸ α, καὶ διανύει τὴν περιφέρειαν κατὰ τὴν φορὰν τοῦ βέλους. Τὸ κινητὸν αὐτό, κατὰ τὴν κίνησίν του ἐπὶ τῆς περιφερείας, θὰ συναντᾷ τὰ διάφορα σημεῖα α, β, γ καὶ πάντοτε κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν.



Σχ. 16

Ἐὰν εἰς τὴν παράστασιν $α^2-βγ$ (1) ἀντικαταστήσωμεν κάθε γράμμα της διὰ τοῦ ἑπομένου γράμματος, ποὺ συναντᾷ τὸ κινητὸν κατὰ τὴν κίνησίν του, δηλ. τὸ α διὰ τοῦ β, τὸ β διὰ τοῦ γ, τὸ γ διὰ τοῦ α, θὰ λάβωμεν τὴν παράστασιν $β^2-γα$ (2)
ἡ ὁποία θὰ λέγωμεν, ὅτι προέκυψεν ἀπὸ τὴν παράστασιν (1) διὰ ***κυκλικῆς ἐναλλαγῆς*** τῶν γραμμάτων της.

Ἡ νέα παράστασις (2) διὰ κυκλικῆς ἐναλλαγῆς τῶν γραμμάτων της γίνεται $γ^2-αβ$ καὶ αὐτὴ πάλιν διὰ νέας κυκλικῆς ἐναλλαγῆς τῶν γραμμάτων της γίνεται $α^2-βγ$, δηλ. προκύπτει ἡ δοθεῖσα παράστασις (1).

Δυνάμεθα νὰ κάμωμεν κυκλικὴν ἐναλλαγὴν καὶ εἰς δύο ὁμάδας γραμμάτων, τὰ ὁποῖα περιέχονται εἰς μίαν παράστασιν ἢ εἰς ἕνα τύπον.

Π.χ. Ἐὰν ἔχωμεν τὴν παράστασιν $α^2x+β^2y+γ^2ω$ καὶ κάμωμεν χωριστὰ τὴν κυκλικὴν ἐναλλαγὴν τῶν γραμμάτων α, β, γ καὶ x, y, ω λαμβάνομεν τὴν παράστασιν $β^2y+γ^2ω+α^2x$.

Λέγομεν, ὅτι μία παράστασις εἶναι ***συμμετρικὴ*** ὡς πρὸς τὰ γράμματα ποὺ περιέχει, ἐὰν ἡ παράστασις δὲν ἀλλάσσει τιμήν, ὅταν ἀλλάξωμεν μεταξύ των τὰ γράμματά της διὰ κυκλικῆς ἐναλλαγῆς.

Π.χ. Ἡ παράστασις $α(β+γ)^2+β(γ+α)^2+γ(α+β)^2$ (2)
εἶναι συμμετρικὴ πρὸς τὰ γράμματα α, β, γ· διότι, ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὸ α διὰ τοῦ β, τὸ β διὰ τοῦ γ καὶ τὸ γ διὰ τοῦ α, λαμβάνομεν τὴν παράστασιν $β(γ+α)^2+γ(α+β)^2+α(β+γ)^2$, ἡ ὁποία εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν παράστασιν (2).

Ὁμοίως ἡ παράστασις

$$\frac{α}{(α-β)\,(α-γ)}+\frac{β}{(β-α)\,(β-γ)}+\frac{γ}{(γ-β)\,(γ-α)}$$

εἶναι συμμετρικὴ παράστασις πρὸς τὰ γράμματα α, β, γ.

Μία ἀλγεβρικὴ παράστασις λέγεται ***συμμετρικὴ*** πρὸς δύο ἢ περισσοτέρας ὁμάδας γραμμάτων, ἐὰν δὲν ἀλλάσσῃ τιμήν, ὅταν ἀλλάξωμεν εἰς αὐτήν, διὰ κυκλικῆς ἐναλλαγῆς, τὰ γράμματα δύο οἱωνδήποτε ὁμάδων.

Οὕτω ἡ παράστασις $$\alpha^2x+\beta^2y+\gamma^2\omega+\delta^2\varphi \qquad (3)$$ εἶναι συμμετρικὴ ὡς πρὸς τὰς ὁμάδας τῶν γραμμάτων (α,x), (β,y), (γ,ω), (δ,φ). Πράγματι, ἐὰν λάβωμεν τὰς ὁμάδας (α,x) καὶ (γ,ω) καὶ ἀλλάξωμεν τὸ α διὰ τοῦ γ, καὶ τὸ γ διὰ τοῦ α, ὅπως ἐπίσης τὸ x διὰ τοῦ ω καὶ τὸ ω διὰ τοῦ x λαμβάνομεν τὴν παράστασιν
$$\gamma^2\omega+\beta^2y+\alpha^2x+\delta^2\varphi$$
ἡ ὁποία εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν (3).

313. Συμμετρικὰ συστήματα. Ἕνα ***σύστημα ἐξισώσεων λέγεται συμμετρικόν,*** ὅταν καθεμία ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις του εἶναι συμμετρικὴ ὡς πρὸς τὰς αὐτὰς ὁμάδας γραμμάτων.

Π.χ. Τὸ σύστημα
$$\begin{cases} x+y+\omega=\alpha & (1)\\ y+\omega+\varphi=\beta & (2)\\ \omega+\varphi+x=\gamma & (3)\\ \varphi+x+y=\delta & (4)\end{cases}$$
εἶναι συμμετρικὸν πρὸς τοὺς ἀγνώστους x, y, ω, φ καὶ πρὸς τὰ γράμματα α, β, γ, δ.

Διὰ νὰ λύσωμεν ἕνα τοιοῦτον σύστημα προσθέτομεν κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις του καὶ ἔχομεν
$$3x+3y+3\omega+3\varphi=\alpha+\beta+\gamma+\delta \quad \text{ἢ} \quad x+y+\omega+\varphi=\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{3} \qquad (5)$$
Ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (5) τὴν (1) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν
$$\varphi=\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{3}-\alpha \quad \text{ἢ} \quad \varphi=\frac{\beta+\gamma+\delta-2\alpha}{3} \qquad (6)$$
Αἱ τιμαὶ τῶν ἄλλων ἀγνώστων εὑρίσκονται ὁμοίως· δηλ. ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὴν (5) διαδοχικῶς κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις (2), (3), (4). Δυνάμεθα ὅμως, λόγῳ τῆς συμμετρίας τοῦ συστήματος, νὰ εὕρωμεν ἀμέσως ἐκ τοῦ τύπου (6) τὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων x, y, ω διὰ κυκλικῆς ἐναλλαγῆς τῶν ἀγνώστων x, y, ω, φ καὶ τῶν γραμμάτων α, β,γ, δ.

Πράγματι εἶναι
$$x=\frac{\gamma+\delta+\alpha-2\beta}{3}, \quad y=\frac{\delta+\alpha+\beta-2\gamma}{3}, \quad \omega=\frac{\alpha+\beta+\nu-2\delta}{3}$$

Παράδειγμα 2ον. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα
$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{\omega}=\dfrac{1}{\alpha}\\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{\omega}+\dfrac{1}{\varphi}=\dfrac{1}{\beta}\\ \dfrac{1}{\omega}+\dfrac{1}{\varphi}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{\cdot}\\ \dfrac{1}{\varphi}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{\delta}\end{cases}$$

Ἐὰν θέσωμεν $\frac{1}{x}=x'$, $\frac{1}{y}=y'$, $\frac{1}{\omega}=\omega'$, $\frac{1}{\varphi}=\varphi'$, $\frac{1}{\alpha}=\alpha'$, $\frac{1}{\beta}=\beta'$, $\frac{1}{\gamma}=\gamma'$, $\frac{1}{\delta}=\delta'$ λαμβάνομεν τὸ αὐτὸ σύστημα μὲ τὸ προηγούμενον καὶ ἑπομένως ἡ λύσις του εἶναι εὔκολος.

Ἀσκήσεις. ***744***. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα :

1. $\begin{cases} x+y=9 \\ y+\omega=15 \\ \omega+x=12 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x+y-\omega=\alpha \\ y+\omega-x=\beta \\ \omega+x-y=\gamma \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x+y=\alpha \\ y+\omega=\beta \\ \omega+x=\gamma \end{cases}$

745. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα :

1. $\begin{cases} x+y+\omega=14 \\ y+\omega+\tau=20 \\ \omega+\tau+x=18 \\ \tau+x+y=16 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} y+\omega+\varphi-x=\alpha \\ \omega+\varphi+x-y=\beta \\ \varphi+x+y-\omega=\gamma \\ x+y+\omega-\varphi=\delta \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 2x+y+\omega+\varphi=\alpha \\ x+2y+\omega+\varphi=\beta \\ x+y+2\omega+\varphi=\gamma \\ x+y+\omega+2\varphi=\delta \end{cases}$

746. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα :

1. $\begin{cases} x+y=5 \\ y+\omega=8 \\ \omega+\varphi=9 \\ \varphi+\tau=11 \\ \tau+x=9 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12} \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{\omega}=\frac{1}{20} \\ \frac{1}{\omega}+\frac{1}{x}=\frac{1}{15} \end{cases}$ 3. $\begin{cases} \frac{1}{x+y}=\mu \\ \frac{1}{y+\omega}=\varrho \\ \frac{1}{\omega+x}=\nu \end{cases}$

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΕΙΣ ΤΑ ΟΠΟΙΑ Ο ΑΡΙΘΜΟΣ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΙΣΟΣ ΜΕ ΤΟΝ ΑΡΙΘΜΟΝ ΤΩΝ ΑΓΝΩΣΤΩΝ

314. Συστήματα μὲ μ ἐξισώσεις καὶ μ+ν ἀγνώστους.

Ἔστω, ὅτι ἔχομεν νὰ λύσωμεν τὸ σύστημα

$$(A)\begin{cases} 2x+3y-5\omega=10 \\ 4x-y+\omega=1 \end{cases}$$

Ὑποθέτομεν, ὅτι ὁ ω εἶναι γνωστός. Μεταφέρομεν εἰς τὸ δεύτερον μέλος τοὺς ὅρους, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὸν ω καὶ ἔχομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα

$$\begin{cases} 2x+3y=10+5\omega & (1) \\ 4x-y=1-\omega & (2) \end{cases}$$

Λύομεν τὸ σύστημα αὐτὸ μὲ μίαν ἀπὸ τὰς γνωστὰς μεθόδους ἀπαλοιφῆς καὶ εὑρίσκομεν τὴν λύσιν

$$x=\frac{13+2\omega}{14}, \qquad y=\frac{19+11\omega}{7} \qquad (3)$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι οἱ ἄγνωστοι x καὶ y ἐκφράζονται συναρτήσει τοῦ ἀγνώστου ω. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ δώσωμεν εἰς τὸν ω τυχοῦσαν αὐθαίρετον τιμὴν καὶ νὰ προσδιορίσωμεν τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῶν x καὶ y ἀπὸ τοὺς τύπους (3).

Π.χ. Ἂν δώσωμεν εἰς τὸν ω τὴν τιμὴν 0, οἱ τύποι (3) δίδουν $x=\frac{13}{14}$, $y=\frac{19}{7}$ καὶ τὸ σύστημα ἔχει τὴν λύσιν

$$\left(x=\frac{13}{14},\quad y=\frac{19}{7},\quad \omega=0\right)$$

Ἐὰν θέσωμεν ω=1, οἱ τύποι (3) δίδουν $x=\frac{15}{14}$ καὶ $y=\frac{30}{7}$ καὶ τὸ σύστημα ἔχει τὴν λύσιν $\left(x=\frac{15}{14},\quad y=\frac{30}{7},\quad \omega=1\right)$.

Ὥστε τὸ δοθὲν σύστημα ἔχει ἀπείρους λύσεις, δηλ. εἶναι **ἀόριστον**. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θὰ λέγωμεν, ὅτι ***ἡ ἀοριστία εἶναι ἁπλῆ*** ἢ ***πρώτης τάξεως***.

Γενικῶς, ἐὰν ἕνα σύστημα ἔχῃ μ ἐξισώσεις μὲ μ+ν ἀγνώστους δυνάμεθα νὰ δώσωμεν εἰς τοὺς ν ἀγνώστους αὐθαιρέτους τιμὰς καὶ νὰ εὕρωμεν τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῶν ἄλλων μ ἀγνώστων. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ σύστημα εἶναι ***ἀόριστον*** μὲ ν βοηθητικοὺς ἀγνώστους. Ἡ ἀοριστία αὐτὴ λέγεται ***ν τάξεως***.

Σημ. Ἕνα τοιοῦτον σύστημα δύναται ἐν τούτοις νὰ εἶναι ἀδύνατον. Π.χ. τὸ σύστημα

$$\begin{cases} 2x-5y+3\omega=8 & (1)\\ -6x+15y-9\omega=18 & (2)\end{cases}$$

εἶναι ἀδύνατον, διότι ἂν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς πρώτης ἐξισώσεως ἐπὶ −3 εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $-6x+15y-9\omega=-24$ ἡ ὁποία μαζὶ μὲ τὴν ἐξίσωσιν (2) σχηματίζουν ἕνα σύστημα ἀδύνατον.

Ἀσκήσεις. 747. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα

1. $\begin{cases} 2x+4y-\omega=6\\ 2x+3y+5\omega=8\end{cases}$ 2. $\begin{cases} 2x-y+3\omega+2\varphi-\tau=20\\ 3x+2y-\omega+\varphi+3\tau=-9\\ x+4y+2\omega-5\varphi+2\tau=-9\end{cases}$

315. Συστήματα μ+ν ἐξισώσεων μὲ μ ἀγνώστους. I. Ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐξισώσεων εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀγνώστων, π.χ. ὅταν ἔχωμεν μ+ν ἐξισώσεις μὲ μ ἀγνώστους, ἐκλέγομεν μ ἐξισώσεις, τὰς ἁπλουστέρας, καὶ λύομεν τὸ σύστημα τῶν μ αὐτῶν ἐξισώσεων μὲ τοὺς μ ἀγνώστους καὶ προσδιορίζομεν οὕτω τὰς τιμὰς τῶν μ αὐτῶν ἀγνώστων. Αἱ τιμαὶ τῶν μ αὐτῶν ἀγνώστων πρέπει νὰ ἐπαληθεύουν καὶ τὰς ἄλλας ν ἐξισώσεις, ἄλλως τὸ σύστημα εἶναι **ἀδύνατον**· εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν, ὅτι αἱ μ+ν ἐξισώσεις εἶναι ***ἀσυμβίβαστοι***.

Παράδειγμα. Ἔστω τό σύστημα :

$$(A)\begin{cases} 3x+4y=17 & (1)\\ -2x+7y=8 & (2)\\ 4x-5y=2 & (3)\end{cases}$$

Λύομεν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) μὲ μίαν ἀπὸ τὰς γνωστὰς μεθόδους καὶ εὑρίσκομεν $x=3$, $y=2$.

Ἐξετάζομεν τώρα, ἐὰν αἱ τιμαὶ $x=3$, $y=2$ ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν (3). Πράγματι, ἐὰν θέσωμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (3) $x=3$, $y=2$ εὑρίσκομεν

$$4\cdot3-5\cdot2=2 \quad ἢ \quad 12-10=2 \quad ἢ \quad 2=2.$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ τιμαὶ $x=3$, $y=2$ ἐπαληθεύουν καὶ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν καὶ ἐπομένως τὸ σύστημα (A) εἶναι *ὡρισμένον*.

Σημ. Ἐὰν ἡ ἐξίσωσις (3) ἦτο $4x-5y=8$, αἱ τιμαὶ $x=3$, $y=2$ δὲν ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν καὶ τὸ δοθὲν σύστημα εἶναι ***ἀδύνατον*** ἢ λέγομεν, ὅτι αἱ ἐξισώσεις του εἶναι ***ἀσυμβίβαστοι***.

316. **Ἀπαλείφουσα.** II. Ἐὰν αἱ $\mu+\nu$ ἐξισώσεις μὲ τοὺς μ ἀγνώστους εἶναι ἐγγράμματοι, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν ἱκανὴν καὶ ἀναγκαίαν συνθήκην, ἵνα αἱ δοθεῖσαι ἐξισώσεις εἶναι σύμβιβασταί. Πρὸς τοῦτο ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς :

Ἐκλέγομεν μ ἐξισώσεις, τὰς ἁπλουστέρας, καὶ λύομεν τὸ σύστημα τῶν μ αὐτῶν ἐξισώσεων μὲ τοὺς μ ἀγνώστους. Ἀντικαθιστῶμεν ἔπειτα τὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων αὐτῶν εἰς τὰς ὑπολοίπους ἐξισώσεις καὶ σχηματίζομεν ν ἰσότητας, αἱ ὁποῖαι ἐκφράζουν τὰς συνθήκας ὑπὸ τὰς ὁποίας τὸ δοθὲν σύστημα θὰ εἶναι συμβιβαστόν.

Αἱ ἰσότητες αὐταὶ λέγονται ***συναρμόζουσαι ἢ ἀπαλείφουσαι*** τοῦ συστήματος.

Παράδειγμα. Νὰ προσδιορισθῇ ὁ μ εἰς τρόπον ὥστε αἱ ἐξισώσεις

$$x+\mu y=1, \quad x+y=\mu, \quad x-y=2$$

νὰ εἶναι συμβιβασταί.

Λύομεν τὸ σύστημα τῶν δύο τελευταίων ἐξισώσεων καὶ εὑρίσκομεν τὴν λύσιν $$x=\frac{\mu+2}{2}, \qquad y=\frac{\mu-2}{2} \qquad (1)$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν τὰ x καὶ y μὲ τὰς τιμάς των αὐτὰς καὶ ἔχομεν

$$\frac{\mu+2}{2}+\mu\cdot\frac{\mu-2}{2}=1 \quad ἢ \quad \mu+2+\mu(\mu-2)=2 \quad ἢ \quad \mu+2+\mu^2-2\mu-2=0$$

$$ἢ \quad \mu^2-\mu=0 \quad ἢ \quad \mu(\mu-1)=0 \qquad (2)$$

Διὰ νὰ εἶναι αἱ δοθεῖσαι ἐξισώσεις συμβιβασταὶ πρέπει νὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις (2) ***(ἀπαλείφουσα)***.

Ἡ σχέσις (2) ἀληθεύει διὰ $\mu=0$ καὶ διὰ $\mu=1$.

Ἐὰν λάβωμεν $\mu=0$, αἱ ἰσότητες (1) δίδουν $x=1$ καὶ $y=-1$ καὶ ἔχομεν τὴν λύσιν ($x=1$, $y=-1$) τοῦ συστήματος τῶν ἐξισώσεων, ποὺ ἐδόθησαν.

Ἐὰν λάβωμεν $\mu=1$, αἱ ἰσότητες (2) δίδουν $x=\frac{3}{2}$, $y=-\frac{1}{2}$ καὶ ἔχομεν τὴν λύσιν $\left(x=\frac{3}{2},\quad y=-\frac{1}{2}\right)$.

Παράδειγμα 2ον. Νά εὑρεθῇ ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων

$$(A)\begin{cases} x+y=2\alpha & (1)\\ x-y=2\beta & (2)\\ 2x+3y=\alpha+2\beta & (3)\\ 3x+4y=3\alpha+3\beta-1 & (4)\end{cases}$$

εἶναι συμβιβαστόν.

Λύομεν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) καὶ εὑρίσκομεν

$$x=\alpha+\beta,\qquad y=\alpha-\beta. \tag{5}$$

Τὰς τιμὰς αὐτὰς τῶν x καὶ y θέτομεν εἰς τὰς ἐξισώσεις (3) καὶ (4) καὶ εὑρίσκομεν

$$\begin{cases} 2(\alpha+\beta)+3(\alpha-\beta)=\alpha+2\beta\\ 3(\alpha+\beta)+4(\alpha-\beta)=2\alpha+3\beta-1\end{cases} \quad \text{ἢ} \quad (B)\begin{cases} 4\alpha-3\beta=0\\ 5\alpha-4\beta=-1\end{cases}$$

Διὰ νὰ εἶναι τὸ σύστημα (A) συμβιβαστὸν πρέπει νὰ ἀληθεύουν αἱ σχέσεις (B) *(ἀπαλείφουσα)*.

Αἱ σχέσεις (B) ἀποτελοῦν ἕνα σύστημα δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους α καὶ β, τὸ ὁποῖον δυνάμεθα νὰ λύσωμεν. Λύοντες αὐτὸ εὑρίσκομεν $\alpha=3$, $\beta=4$.

Αἱ τιμαὶ αὐταὶ τῶν α καὶ β καθιστοῦν τὸ σύστημα (A) δυνατὸν καὶ ἡ λύσις του δίδεται ὑπὸ τῶν τύπων (5) καὶ εἶναι $x=7$, $y=-1$

Ἀσκήσεις. Α' Ὁμάς. 748. Ποῖον ἀπὸ τὰ κάτωθι συστήματα εἶναι συμβιβαστὸν ἢ ἀδύνατον;

$$1.\begin{cases}2x+5y=15\\ x-2y=3\\ 3x+y=16\end{cases}\qquad 2.\begin{cases}7x-y=6\\ 5x+2y=7\\ x-y=2\end{cases}\qquad 3.\begin{cases}x+y-8=0\\ 2x-y-7=0\\ 2x+5y=12\end{cases}$$

749. Νὰ προσδιορισθῇ ὁ μ εἰς τρόπον, ὥστε αἱ ἐξισώσεις

$$\mu x+y=1,\quad x+y=2,\quad x-y=\mu$$

νὰ εἶναι συμβιβασταί.

750. Νὰ εὑρεθῇ ἡ σχέσις, ἡ ὁποία πρέπει νὰ ὑφίσταται μεταξὺ τῶν συντελεστῶν τῶν ἐξισώσεων

$$\alpha x+\beta y=\gamma \ (1),\quad \alpha' x+\beta' y=\gamma' \ (2),\quad \alpha'' x+\beta'' y=\gamma'' \ (2)$$

ἵνα αἱ ἐξισώσεις αὗται εἶναι συμβιβασταί, δηλ. νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπαλείφουσα αὐτῶν.

751. Νὰ εὑρεθῇ ἡ συνθήκη, ἵνα αἱ ἐξισώσεις

$$x+2y=\alpha \ (1),\quad x-2y=\beta \ (2),\quad x-3y=0 \ (3)$$

εἶναι συμβιβασταί.

752. Νὰ προσδιορισθῇ ὁ μ εἰς τρόπον, ὥστε αἱ ἐξισώσεις

$$x+y=\mu \ (1),\quad \alpha x+\beta y=\mu^2 \ (2),\quad \alpha^2 x+\beta^2 y=\mu^3 \ (3)$$

εἶναι συμβιβασταί.

753. Νὰ προσδιορισθῇ ὁ μ εἰς τρόπον, ὥστε αἱ ἐξισώσεις

$$(2\mu+5)x+(3\mu+1)y+3=0 \ (1),\quad (\mu+5)x+(2\mu+3)y-18=0 \ (2),\quad y-2x=0 \ (3)$$

νὰ εἶναι συμβιβασταί.

Β' Ὁμάς. *754.* Νὰ προσδιορισθῇ ὁ μ εἰς τρόπον, ὥστε τὸ ἄθροισμα $x+y$ τῶν ἀγνώστων, οἱ ὁποῖοι ἐπαληθεύουν τὸ σύστημα

$$(5\mu+1)x+(3\mu+2)y=15 \quad (1), \qquad (13\mu-14)x-(2\mu-5)y=9 \quad (2)$$

νὰ εἶναι ἴσον μὲ 3.

755. Δίδεται τὸ σύστημα $4x-3y=30$ (1), $5x-\alpha y=13\alpha+2$ (2) καὶ ζητεῖται νὰ προσδιορισθῇ ὁ α εἰς τρόπον, ὥστε νὰ εἶναι $x+y=4$.

756. Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ μ τὸ σύστημα

$$2x-5y=3 \quad (1), \qquad (\mu+2)x+(4-\mu)y=1+\mu \quad (2)$$

ἔχει μίαν λύσιν, ἡ ὁποία ἐπαληθεύει τὴν σχέσιν $y=3x$;

757. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ μ τὰ κάτωθι συστήματα εἶναι συμβιβαστά ;

$$1.\ \begin{cases} 2x+\ y=\ 8 \\ 3y-4y=\ 1 \\ \mu x+(\mu+1)y=12 \end{cases} \qquad 2.\ \begin{cases} 3x-5y=2\mu-1 \\ x+3y=\ \mu-7 \\ 5x-2y=2\mu \end{cases}$$

Γ' Ὁμάς. *758.* Ποία σχέσις πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν α, β, γ, ἵνα τὰ κάτωθι συστήματα εἶναι συμβιβαστά :

$$1.\ \begin{cases} 2x-y=\alpha \\ 2y-x=\beta \\ 3(\alpha x-\beta y)=2\gamma^2 \end{cases} \qquad 2.\ \begin{cases} x-\alpha y=2 \\ x+\beta y=3 \\ (\alpha+\beta)(x-y)=2\gamma+\alpha-1 \end{cases} \qquad 3.\ \begin{cases} x-\alpha y=\gamma \\ y-\alpha x=\beta \\ \gamma x+\beta y=1 \end{cases}$$

759. Νὰ εὑρεθῇ ποία σχέσις πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν α, β, γ, ἵνα τὸ σύστημα

$$\begin{cases} A=\ x+\ y+\ \omega-(\alpha+\beta+\gamma)=0 \\ B=\alpha x+\beta y+\gamma\omega-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)=0 \\ \Gamma=\beta x+\gamma y+\alpha\omega-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)=0 \\ \Delta=\gamma x+\alpha y+\beta\omega-4\alpha\beta=0 \end{cases}$$

εἶναι συμβιβαστον. Μετὰ τὴν εὕρεσιν τῆς σχέσεως αὐτῆς, νὰ λυθῇ τὸ δοθὲν σύστημα.

ΟΜΟΓΕΝΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

317.* Ὁμογενὴς ἐξίσωσις.** Μία ἀκεραία ἐξίσωσις λέγεται ***ὁμογενής, ὅταν δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν $A=0$, ὅπου Α εἶναι ἕνα πολυώνυμον ὁμογενὲς (§ 108) ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους.

Π.χ. αἱ ἐξισώσεις $\alpha x+\beta y=0$, $\alpha x+\beta y+\gamma\omega=0$ εἶναι ὁμογενεῖς.

Μία ὁμογενὴς ἐξίσωσις δὲν εἶναι ποτὲ ἀδύνατος. Ἔχει ***πάντοτε*** τὸ ὀλιγώτερον τὴν λύσιν $x=y=\omega=\ldots\ldots=0$.

318.* Ὁμογενῆ συστήματα.** ***Ἕνα σύστημα λέγεται ὁμογενές, ὅταν αἱ ἐξισώσεις εἶναι ὁμογενεῖς.

Ι. ***Σύστημα δύο ὁμογενῶν ἐξισώσεων τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ δύο ἀγνώστους.*** Ἔστω τὸ γενικὸν σύστημα

$$(A)\ \begin{cases} \alpha\, x+\beta\, y=0 \\ \alpha' x+\beta' y=0 \end{cases}$$

Τὸ σύστημα αὐτὸ δὲν εἶναι ποτὲ ἀδύνατον, διότι ἔχει πάντοτε **τὴν λύσιν** $x=0, \quad y=0.$

Ὑποθέτομεν, ὅτι οἱ συντελεσταὶ α, β, α', β' εἶναι διάφοροι τοῦ μηδενός. Γνωρίζομεν (§ 295) ὅτι :

1ον. Ἐὰν $\alpha\beta'-\beta\alpha'\neq 0$, δηλ. ἐὰν $\dfrac{\alpha}{\alpha'}\neq\dfrac{\beta}{\beta'}$ τὸ σύστημα (Α) ἔχει μίαν λύσιν, ἡ ὁποία δίδεται ὑπὸ τῶν τύπων

$$x=\frac{\gamma\beta'-\beta\gamma'}{\alpha\beta'-\beta\alpha'},\qquad y=\frac{\alpha\gamma'-\gamma\alpha'}{\alpha\beta'-\beta\alpha'}$$

Ἐπειδὴ ἐδῶ εἶναι $\gamma=\gamma'=0$, οἱ ἀριθμηταὶ τῶν κλασμάτων αὐτῶν εἶναι μηδὲν καὶ ἑπομένως ἡ λύσις τοῦ συστήματος (Α) εἶναι

$$x=0,\quad y=0.$$

2ον. Ἐὰν $\alpha\beta'-\beta\alpha'=0$, δηλ. ἐὰν $\dfrac{\alpha}{\alpha'}=\dfrac{\beta}{\beta'}$, τὸ σύστημα (Α) εἶναι ***ἀόριστον***.

Πράγματι, ἐὰν θέσωμεν $\dfrac{\alpha}{\alpha'}=\dfrac{\beta}{\beta'}=\dfrac{1}{\lambda}$, λαμβάνομεν $\alpha'=\alpha\lambda$ καὶ $\beta'=\beta\lambda$, ὁπότε τὸ σύστημα (Α) γίνεται

$$\begin{cases}\alpha x+\beta y=0\\ \lambda(\alpha x+\beta y)=0\end{cases}\quad\text{ἢ}\quad\begin{cases}\alpha x+\beta y=0\\ \alpha x+\beta y=0\end{cases}$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ σύστημα ἀνάγεται εἰς μίαν ἐξίσωσιν μὲ δύο ἀγνώστους, ἡ ὁποία εἶναι προφανῶς ἀόριστος. ***Ἡ ἀοριστία τοῦ συστήματος (Α) εἶναι ἁπλῆ.***

II. ***Σύστημα δύο ὁμογενῶν ἐξισώσεων τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ τρεῖς ἀγνώστους.*** Ἔστω τὸ γενικὸν σύστημα

$$(\mathrm{A})\begin{cases}\alpha x+\beta y+\gamma\omega=0\\ \alpha'x+\beta'y+\gamma'\omega=0\end{cases}$$

Τὸ σύστημα αὐτὸ δὲν εἶναι ποτὲ ἀδύνατον, διότι ἔχει πάντοτε τὴν λύσιν $x=0,\quad y=0,\quad \omega=0.$

Ἐπίσης τὸ δοθὲν σύστημα εἶναι ἀόριστον, διότι ἔχει περισσοτέρους ἀγνώστους ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις (§ 314).

Θὰ ἀναζητήσωμεν ἤδη τὸν γενικὸν κανόνα τοῦ σχηματισμοῦ τῆς λύσεως.

Ἐὰν δώσωμεν εἰς τὸ ω μίαν αὐθαίρετον τιμήν, τότε τὸ σύστημα (Α) γίνεται

$$(\mathrm{B})\begin{cases}\alpha x+\beta y=-\gamma\omega\\ \alpha'x+\beta'y=-\gamma'\omega\end{cases}$$

Ἐὰν $\alpha\beta'-\beta\alpha'\neq 0$, τὸ σύστημα (Β) ἔχει τὴν λύσιν

$$x=\frac{\beta\gamma'\omega-\beta'\gamma\omega}{\alpha\beta'-\beta\alpha'}=\omega\cdot\frac{\beta\gamma'-\beta'\gamma}{\alpha\beta'-\beta\alpha'},\qquad y=\frac{\alpha'\gamma\omega-\alpha\gamma'\omega}{\alpha\beta'-\beta\alpha'}=\omega\cdot\frac{\alpha'\gamma-\alpha\gamma'}{\alpha\beta'-\beta\alpha'}$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ τιμαὶ τῶν x καὶ y ἐξαρτῶνται ἐκ τῆς τιμῆς τοῦ ω.

Ἐὰν θέσωμεν $\omega=\alpha\beta'-\beta\alpha'$, οἱ τύποι (1) δίδουν τὴν λύσιν

$$x=\beta\gamma'-\beta'\gamma, \quad y=\alpha'\gamma-\alpha\gamma', \quad \omega=\alpha\beta'-\beta\alpha'$$

Ἐὰν θέσωμεν $\omega=\lambda(\alpha\beta'-\beta\alpha')$, αἱ τιμαὶ τῶν x καὶ y θὰ γίνουν λ φορὰς μεγαλύτεραι τῶν προηγουμένων, δηλ. θὰ εἶναι :

$$\boxed{x=\lambda(\beta\gamma'-\beta'\gamma), \quad y=\lambda(\alpha'\gamma-\alpha\gamma'), \quad \omega=\lambda(\alpha\beta'-\beta\alpha')} \qquad (2)$$

Γενικῶς, τὸ δοθὲν σύστημα ἔχει μίαν ἀπειρίαν λύσεων, αἱ ὁποῖαι δίδονται ὑπὸ τῶν τύπων (2).

Ὥστε, ἐὰν $\alpha\beta'-\beta\alpha'\neq 0$ ἡ ***ἀοριστία εἶναι ἁπλῆ.***

Ἐὰν $\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}=\frac{\gamma}{\gamma'}$, ἡ ***ἀοριστία εἶναι διπλῆ***, διότι αἱ δύο ἐξισώσεις τοῦ συστήματος ἀνάγονται εἰς μίαν.

319. Ἐφαρμογή. ***Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα.***

$$\left| \begin{array}{lr} 5x+4y-2\omega=0 & (1) \\ 4x-y-\omega=0 & (2) \\ x+3y+2\omega=19 & (3) \end{array} \right.$$

Αἱ δύο πρῶται ἐξισώσεις τοῦ συστήματος εἶναι ὁμογενεῖς καὶ ἑπομένως αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων x, y, ω δίδονται ὑπὸ τῶν τύπων

$$x=\lambda(\beta\gamma'-\beta'\gamma), \quad y=\lambda(\alpha'\gamma-\alpha\gamma'), \quad \omega=\lambda(\alpha\beta'-\beta\alpha') \qquad (4)$$

Ἐπειδὴ $\beta\gamma'-\beta'\gamma=4\cdot(-1)-(-1)\cdot(-2)=-6$, $\alpha'\gamma-\alpha\gamma'=4\cdot(-2)-5\cdot(-1)=-3$, $\alpha\beta'-\beta\alpha'=5(-1)-4\cdot4=-21$, οἱ τύποι (4) γίνονται

$$x=-6\lambda, \quad y=-3\lambda, \quad \omega=-21\lambda \qquad (5)$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (3) τὰ x, y, ω μὲ τὰς τιμάς των, ποὺ δίδουν οἱ τύποι (5) καὶ ἔχομεν

$$-6\lambda+3\cdot(-3\lambda)+2(-21\lambda)=19$$

ἀπὸ τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν $\lambda=-\frac{1}{3}$.

Τὴν τιμὴν αὐτὴν τοῦ λ θέτομεν εἰς τὰς ἰσότητας (5) καὶ εὑρίσκομεν $x=2$, $y=1$, $\omega=7$, ἡ ὁποία εἶναι ἡ λύσις τοῦ δοθέντος συστήματος.

Ἀσκήσεις. *760.* Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα:

1. $\left\{ \begin{array}{l} 3x+4y-2\omega=0 \\ 6x-y-\omega=0 \\ x-2y+3\omega=22 \end{array} \right.$ 2. $\left\{ \begin{array}{r} x+y+\omega=0 \\ \alpha x+\beta y+\gamma\omega=0 \\ \beta\gamma x+\gamma\alpha y+\alpha\beta\omega=1 \end{array} \right.$

3. $\left\{ \begin{array}{r} x+y+\omega=0 \\ (\beta+\gamma)x+(\gamma+\alpha)y+(\alpha+\beta)\omega=0 \\ \beta\gamma x+\gamma\alpha y+\alpha\beta\omega=0 \end{array} \right.$ 4. $\left| \begin{array}{l} \alpha x+\beta y+\gamma\omega=0 \\ \alpha^2x+\beta^2y+\gamma^2\omega=0 \\ \alpha^3x+\beta^3y+\gamma^3\omega=\alpha^2(\beta-\gamma)+ \\ \qquad +\beta^2(\gamma-\alpha)+\gamma^2(\alpha-\beta) \end{array} \right.$

5. $\left\{ \begin{array}{l} x+y+\omega=0 \\ \frac{\alpha^2x}{\alpha-\delta}+\frac{\beta^2y}{\beta-\delta}+\frac{\gamma^2\omega}{\gamma-\delta}=0 \\ \frac{\alpha x}{\alpha-\delta}+\frac{\beta y}{\beta-\delta}+\frac{\gamma\omega}{\gamma-\delta}=\delta(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta) \end{array} \right.$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΙΝ

Α' Ὁμάς. ***761.*** Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα :

$$1. \begin{cases} x+3y+5\omega+3\varphi-28=0 \\ x+y+2\omega+\varphi-13=0 \\ x+2y+5\omega+4\varphi-26=0 \\ x+3y+8\omega+5\varphi-35=0 \end{cases} \qquad 2. \begin{cases} 2x+3y-67=0 \\ x-y+2\omega-36=0 \\ 2y-3\omega+\varphi=0 \\ \omega-\varphi+10=0 \end{cases}$$

762. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα :

$$\begin{cases} x+y+\omega+\varphi+\tau-9=0 \\ 8x-5\omega+10=0 \\ x+\varphi+2\tau-10=0 \\ x+2\omega-5\varphi+16=0 \\ x+2y+3\omega+4\varphi+5\tau-37=0 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} 3x-2y=12 \\ 4\omega-3\varphi=13 \\ 5y-3\omega=18 \\ 20\varphi-3x=-4 \end{cases} \quad 3. \begin{cases} 3x+2y=3 \\ x+y-2\omega=-5 \\ 3y-5\omega+\varphi=-10 \\ \omega-\varphi=-2 \end{cases}$$

763. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα :

$$1. \begin{cases} y\omega+x\omega+xy=12xy\omega \\ 3y\omega-4x\omega+5xy=18xy\omega \\ 5y\omega-3x\omega+2xy=13xy\omega \end{cases} \qquad 2. \begin{cases} 3y\omega+2x\omega-xy=xy\omega \\ 30y\omega+12xy-18x\omega=13xy\omega \\ 18xy+24y\omega-42x\omega=5xy\omega \end{cases}$$

Β' Ὁμάς. ***764.*** Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα :

$$1. \quad \frac{x}{y+\omega+1}=\frac{y}{\omega+x}=\frac{\omega}{x+y-1}=x+y+\omega$$

$$2. \quad \frac{2x+3y-4\omega}{x+5}=\frac{3x+4y-2\omega}{5x}=\frac{4x+2y-3\omega}{4x-1}=\frac{x+y-\omega}{6}$$

765. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα :

$$1. \begin{cases} x+y-\omega=3\alpha-\beta-\gamma \\ x-y+\omega=3\beta-\alpha-\gamma \\ y+\omega-x=3\gamma-\beta-\alpha \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x+y+\omega=\alpha+\beta \\ x+y-\omega=3\alpha-\beta \\ x-y+\omega=3\beta-\alpha \end{cases} \quad 3. \begin{cases} \gamma x+\alpha y=\beta \\ \alpha y+\beta x=\gamma \\ \beta\omega+\gamma y=\alpha \end{cases}$$

766. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα :

$$1. \begin{cases} 2x+y+\omega+\varphi=\alpha \\ x+2y+\omega+\varphi=\beta \\ x+y+2\omega+\varphi=\gamma \\ x+y+\omega+2\varphi=\delta \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x+\alpha y=\lambda \\ y+\beta\omega=\mu \\ \omega+\gamma\varphi=\nu \\ \varphi+\delta x=\varrho \end{cases} \quad 3. \begin{cases} x(y+\omega)=\alpha \\ y(\omega+x)=\beta \\ \omega(x+y)=\gamma \end{cases}$$

767. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα :

$$1. \begin{cases} x+y-\omega=\alpha \\ y+\omega-\varphi=\beta \\ \omega+\varphi-\tau=\gamma \\ \varphi+\tau-x=\delta \\ \tau+x-y=\varepsilon \end{cases} \qquad 2. \begin{cases} x+y-\omega=\alpha-1 \\ y+\omega-\varphi=2\alpha-8 \\ \omega+\varphi-\tau=\alpha+4 \\ \varphi+\tau-x=6\alpha+2 \\ \tau+x-y=5\alpha+3 \end{cases}$$

768. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα :

$$1. \begin{cases} (\varrho+\mu)x-(\varrho-\mu)y=2\nu\varrho \\ (\mu+\nu)y-(\mu-\nu)\omega=2\mu\varrho \\ (\nu+\varrho)\omega-(\nu-\varrho)x=2\mu\nu \end{cases} \qquad 2. \begin{cases} (\omega+x)\mu-(\omega-x)\nu=2y\omega \\ (x+y)\nu-(x-y)\varrho=2x\omega \\ (y+\omega)\varrho-(y-\omega)\mu=2xy \end{cases}$$

769. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα :

1. $\begin{cases} k(x+y+\omega)=\alpha-\mu x \\ k(y+\omega+\varphi)=\beta-\nu y \\ k(\omega+\varphi+x)=\gamma-\lambda\omega \\ k(\varphi+x+y)=\delta-\varrho\omega \end{cases}$ 2. $\begin{cases} xyz=\alpha(xy-yz+zx) \\ xyz=\beta(xy+yz-zx) \\ xyz=\gamma(-xy+yz+zx) \end{cases}$

Γ' Ὁμάς. *770.* Δίδεται τὸ πολυώνυμον $\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$. Νὰ ὁρισθοῦν οἱ α, β, γ, δ, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ πολυώνυμον αὐτὸ μηδενίζεται διὰ $x=0$ καὶ διὰ $x=1$, ὅτι διὰ $x=\frac{2}{3}$ λαμβάνει τὴν τιμὴν -4 καὶ διὰ $x=\frac{4}{5}$ λαμβάνει τὴν τιμὴν $\frac{4}{5}$. Μετὰ ταῦτα νὰ ἀναλυθῇ τὸ πολυώνυμον εἰς γινόμενον παραγόντων.

771. Δίδεται τὸ σύστημα :

$$\alpha x-6y=5\alpha-3, \qquad 2x+(\alpha-7)y=-7\alpha+29$$

καὶ ζητεῖται νὰ προσδιορισθῇ διὰ ποίας τιμὰς τοῦ α : 1ον) τὸ σύστημα εἶναι ἀδύνατον ; 2ον) τὸ σύστημα εἶναι ἀόριστον ; 3ον) τὸ σύστημα ἔχει τὴν λύσιν $x=y$.

772. Νὰ ὁρισθῇ ὁ α, ἵνα αἱ ρίζαι τοῦ συστήματος

$$(\alpha-1)x-3y=12 \quad (1), \qquad 4x+(3\alpha+2)y=5 \quad (2)$$

εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀριθμῶν 3 καὶ 8.

773. Νὰ ὁρισθῇ ὁ α εἰς τρόπον, ὥστε αἱ τιμαὶ τῶν x καὶ y, αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύουν τὸ σύστημα

$$(\alpha+2)x+(1+5\alpha)y=15 \quad (1, \qquad (5-2\alpha)x+(1-10\alpha)y=9 \quad (2)$$

νὰ ἐπαληθεύουν τὴν σχέσιν $x+y=-6$.

774. Διὰ ποίας τιμὰς τῶν α καὶ β τὸ σύστημα

$$(\alpha+\beta)x+(\alpha-\beta)y=15 \quad (1), \qquad (2\alpha-3\beta)x+(2\alpha-5\beta)y=\alpha+2\beta \quad (2)$$

ἔχει τὴν λύσιν $x=3,\ y=-7$;

775. Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ λ τὸ σύστημα

$$(\lambda-1)x-y=0 \quad (1), \qquad 2\lambda x+3y-7\omega=0 \quad (2), \qquad (\lambda+2)x+2y-6\omega=0 \quad (3)$$

εἶναι ἀόριστον ;

776. Ἐὰν μεταξὺ τῶν x, y, ω ὑπάρχουν αἱ σχέσεις

$$\frac{2(x+3y)}{x-y}=\frac{-6(y+\omega)}{4(y-\omega)}=\frac{2(3\omega-x)}{5(\omega+x)}$$

νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι $6x+3y+\omega=0$.

777. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$\frac{x}{\alpha-1}+\frac{y}{\alpha-3}+\frac{\omega}{\alpha-5}=0, \quad \frac{x}{\alpha-3}+\frac{y}{\alpha-5}+\frac{\omega}{\alpha-7}=0, \quad x+y+\omega=8$$

Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων δύνανται νὰ τεθοῦν ὑπὸ τὰς μορφάς : $x=(\alpha-1)(\alpha-3)$, $y=-2(\alpha-3)(\alpha-5)$, $\omega=(\alpha-5)(\alpha-7)$. Νὰ ὁρισθῇ ὁ α, ἵνα αἱ τιμαὶ αὐταὶ εἶναι ἀκέραιαι καὶ θετικαί.

Δ' Ὁμάς. *778.* Νὰ λυθοῦν καὶ νὰ διερευνηθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα :

1. $\begin{cases} x+2y+(\mu+1)\omega=4 \\ 2x+3y+(\mu+2)\omega=6 \\ 3x+(3\mu+4)y+3\omega=8 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x+y+\omega=6 \\ \mu x+4y+\omega=5 \\ 6x+(\mu+2)y+2\omega=13 \end{cases}$

779. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα :

$$1.\ \begin{cases}(\mu+1)x+y+\omega=\mu-1\\ x+(\mu+1)y+\omega=4-\mu\\ x+y+(\mu+1)\omega=-3\end{cases}\qquad 2.\ \begin{cases}\mu x+y+\omega=1\\ x+\mu y+\omega=\mu\\ x+y+\mu\omega=\mu^2\end{cases}$$

780. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα :

$$1.\ \begin{cases}\mu x+y+\omega=\mu^2\\ x+\mu y+\omega=3\mu\\ x+y+\mu\omega=2\end{cases}\qquad 2.\ \begin{cases}3x+5y+\mu\omega=2\\ 5x+3y+\mu\omega=2\\ \mu x+5y+3\omega=2\end{cases}$$

781. Νὰ λυθοῦν καὶ νὰ διερευνηθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα :

$$1.\ \begin{cases}\mu x+y+\omega+\varphi=1\\ x+\mu y+\omega+\varphi=\mu\\ x+y+\mu\omega+\varphi=\mu^2\\ x+y+\omega+\mu\varphi=\mu^3\end{cases}\qquad 2.\ \begin{cases}\mu x+y+\omega-\mu=0\\ \mu x+\mu y+\omega-1=0\\ x+\mu y+\mu\omega-1=0\\ x+y+\mu\omega-\mu=0\end{cases}$$

782. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα :

$$1.\ \begin{cases}2x+3y-4\omega=5\\ 2\alpha x+2\beta y+(\beta-5\alpha)\omega=2\alpha+3\beta\\ \beta x+3\alpha y+(\alpha-\beta)\omega=\alpha+4\beta\end{cases}\qquad 2.\ \begin{cases}\mu x+y-\omega=1\\ x+\mu y-\omega=1\\ -x+y+\mu\omega=1\end{cases}$$

783. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα :

$$1.\ \begin{cases}x+y+\omega=\alpha+\beta\\ x-y=2\beta\\ 2x(\alpha-\beta)-(y-\omega)(\alpha+\beta)=0\end{cases}\qquad 2.\ \begin{cases}\alpha x+\beta y+\omega=1\\ x+\alpha\beta y+\omega=\beta\\ x+\beta y+\alpha\omega=1\end{cases}$$

784. Νὰ λυθοῦν καὶ διερευνηθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα

$$1.\ \begin{cases}\alpha x+\beta y-\gamma\omega=\alpha\beta\\ 3\alpha x-\beta y+2\gamma\omega=\alpha(5\gamma-\beta)\\ 3y+2\omega=5\alpha\end{cases}\qquad 2.\ \begin{cases}x+y+(2\alpha+1)y=-(7\alpha^2-6\alpha-16)\\ (\alpha+2)x-(3\alpha+4)y=-7\alpha^2-6\alpha-16\\ (3\alpha+4)x-(\alpha+2)y+\omega=16+6\alpha-7\alpha^2\end{cases}$$

785. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα :

$$1.\ \begin{cases}-x+y+\omega-1=0\\ x-y+\omega+1=0\\ \mu^2x+\mu y+\omega=\mu^5\end{cases}\qquad 2.\ \begin{cases}\gamma y-\beta\omega=\lambda\\ \alpha\omega-\gamma x=\mu\\ \beta x-\alpha y=\nu\end{cases}\qquad 3.\ \begin{cases}x+y+\omega=\alpha\\ \dfrac{x-\mu}{\nu-\varrho}=\dfrac{y-\nu}{\varrho-\mu}=\dfrac{\omega-\varrho}{\mu-\nu}\end{cases}$$

Ε' Ὁμάς. *786.* Ἐὰν τὰ λ, μ, λ+μ εἶναι διάφορα τοῦ μηδενός, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ σύστημα :

$$A=\frac{y}{\beta}+\frac{\omega}{\gamma}-\lambda\left(1+\frac{x}{\alpha}\right)=0,\qquad B=\frac{y}{\beta}+\frac{\omega}{\gamma}-\mu\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)=0$$

$$\Gamma=\frac{y}{\beta}-\frac{\omega}{\gamma}=\frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)=0,\qquad \Delta=\frac{y}{\beta}-\frac{\omega}{\gamma}-\frac{1}{\mu}\left(1+\frac{x}{\alpha}\right)=0$$

ἔχει μίαν μόνον λύσιν.

787. Ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις :

$$x=\beta y+\gamma\omega+\delta\varphi\ \ (1),\qquad y=\alpha x+\gamma\omega+\delta\varphi\ \ (2),$$
$$\omega=\alpha x+\beta y+\delta\varphi\ \ (3),\qquad \varphi=\alpha x+\beta y+\gamma\omega\ \ (4)$$

νὰ ἐξαχθῇ ἡ σχέσις : $\dfrac{\alpha}{\alpha+1}+\dfrac{\beta}{\beta+1}+\dfrac{\gamma}{\gamma+1}+\dfrac{\delta}{\delta+1}=1$

788. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$\begin{cases} \alpha x+\beta\ (y+\omega+\varphi)=\gamma \\ \alpha y+\beta_1(\omega+\varphi+x)=\gamma_1 \\ \alpha\omega+\beta_2(\varphi+x+y)=\gamma_2 \\ \alpha\varphi+\beta_3(x+y+\omega)=\gamma_3 \end{cases}$$

(Σχολὴ 'Αεροπορίας 1933)

ΣΤ' 'Ομάς. 789. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα

$$1.\ \begin{cases} x+\alpha y+\alpha^2\omega+\alpha^3=0 \\ x+\beta y+\beta^2\omega+\beta^3=0 \\ x+\gamma y+\gamma^2\omega+\gamma^3=0 \end{cases} \qquad 2.\ \begin{cases} x+y+\omega+\alpha(y+\omega)+\alpha^2\omega+\alpha^3=0 \\ x+y+\omega+\beta(y+\omega)+\beta^2\omega+\beta^3=0 \\ x+y+\omega+\gamma(y+\omega)+\gamma^2\omega+\gamma^3=0 \end{cases}$$

790. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα

$$1.\ \begin{cases} x+\alpha y+\alpha^2\omega+\alpha^4=0 \\ x+\beta y+\beta^2\omega+\beta^4=0 \\ x+\gamma y+\gamma^2\omega+\gamma^4=0 \end{cases} \qquad 2.\ \begin{cases} \alpha^3x+\alpha^2y+\alpha\omega+1=0 \\ \beta^3x+\beta^2y+\beta\omega+1=0 \\ \gamma^3x+\gamma^2y+\gamma\omega+1=0 \end{cases}$$

791. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$\begin{cases} x+\alpha y+\alpha^2\omega+\alpha^3\varphi+\alpha^4=0 \\ x+\beta y+\beta^2\omega+\beta^3\varphi+\beta^4=0 \\ x+\gamma y+\gamma^2\omega+\gamma^3\varphi+\gamma^4=0 \\ x+\delta y+\delta^2\omega+\delta^3\varphi+\delta^4=0 \end{cases}$$

792. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{\omega}{\gamma}=\frac{x}{\beta}+\frac{y}{\gamma}+\frac{\omega}{\alpha}=\frac{x}{\gamma}+\frac{y}{\alpha}+\frac{\omega}{\beta}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}$$

793. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$\begin{cases} \alpha^2x+\beta^2y+\gamma^2\omega=1 \\ \alpha^3x+\beta^3y+\gamma^3\omega=\alpha+\beta+\gamma \\ \alpha^4x+\beta^4y+\gamma^4\omega=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta \end{cases}$$

794. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα

$$1.\ \begin{cases} x+\ y+\ \omega=1 \\ \alpha x+\beta y+\gamma\omega=\delta \\ \alpha^2x+\beta^2y+\gamma^2\omega=\delta^2 \end{cases} \qquad 2.\ \begin{cases} x+y+\omega=\alpha+\beta+\gamma \\ \beta x+\gamma y+\alpha\omega=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \\ \gamma x+\alpha y+\beta\omega=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \end{cases}$$

795. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα

$$1.\ \begin{cases} x-\alpha y+\alpha^2\omega=\alpha^3 \\ x-\beta y+\beta^2\omega=\beta^3 \\ x-\gamma y+\gamma^2\omega=\gamma^3 \end{cases} \qquad 2.\ \begin{cases} x+y+\omega=\alpha+\beta+\gamma \\ \beta x+\gamma y+\alpha\omega=\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta \\ \gamma x+\alpha y+\beta\omega=\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta \end{cases}$$

796. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα

$$1.\ \begin{cases} \dfrac{x}{\upsilon-\alpha}+\dfrac{y}{\upsilon-\beta}+\dfrac{\omega}{\upsilon-\gamma}=1 \\ \dfrac{x}{\upsilon'-\alpha}+\dfrac{y}{\upsilon'-\beta}+\dfrac{\omega}{\upsilon'-\gamma}=1 \\ \dfrac{x}{\upsilon''-\alpha}+\dfrac{y}{\upsilon''-\beta}+\dfrac{\omega}{\upsilon''-\gamma}=1 \end{cases} \qquad 2.\ \begin{cases} \dfrac{x}{\upsilon_1-\alpha}+\dfrac{y}{\upsilon_1-\beta}+\dfrac{\omega}{\upsilon_1-\gamma}+\dfrac{\varphi}{\upsilon_1-\delta}=1 \\ \dfrac{x}{\upsilon_2-\alpha}+\dfrac{y}{\upsilon_2-\beta}+\dfrac{\omega}{\upsilon_2-\gamma}+\dfrac{\varphi}{\upsilon_2-\delta}=1 \\ \dfrac{x}{\upsilon_3-\alpha}+\dfrac{y}{\upsilon_3-\beta}+\dfrac{\omega}{\upsilon_3-\gamma}+\dfrac{\varphi}{\upsilon_3-\delta}=1 \\ \dfrac{x}{\upsilon_4-\alpha}+\dfrac{y}{\upsilon_4-\beta}+\dfrac{\omega}{\upsilon_4-\gamma}+\dfrac{\varphi}{\upsilon_4-\delta}=1 \end{cases}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΔΥΟ Ἤ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΟΥΣ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

320. Τὰ προβλήματα τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ δύο ἢ περισσοτέρους ἀγνώστους λύονται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ποὺ ἐλύθησαν τὰ προβλήματα τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον (§ 219). Πρέπει μόνον νὰ προσέχωμεν νὰ εὑρίσκωμεν τόσας ἐξισώσεις, ὅσοι εἶναι οἱ ἄγνωστοι τοῦ προβλήματος, ἄλλως τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων τοῦ προβλήματος θὰ ἦτο ἀόριστον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

321. Πρόβλημα 1ον. ***Νὰ εὑρεθῇ τὸ κλάσμα, τὸ ὁποῖον γίνεται ἴσον μὲ $\frac{2}{3}$, ὅταν προσθέσωμεν καὶ εἰς τοὺς δύο ὅρους του τὸν ἀριθμὸν 4 καὶ γίνεται ἴσον μὲ $\frac{1}{2}$, ὅταν ἀφαιρέσωμεν καὶ ἀπὸ τοὺς δύο ὅρους του τὸν ἀριθμὸν 1.***

Ἔστω x ὁ ἀριθμητὴς καὶ y ὁ παρονομαστὴς τοῦ ζητουμένου κλάσματος. Κατὰ τὸ πρόβλημα θὰ ἔχωμεν τὰς ἐξισώσεις

$$\frac{x+4}{y+4}=\frac{2}{3} \quad (1) \qquad \frac{x-1}{y-1}=\frac{1}{2} \quad (2)$$

Λύομεν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2). Ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται

$$3(x+4)=2(y+4) \quad \text{ἢ} \quad 3x+12=2y+8 \quad \text{ἢ} \quad 3x-2y=-4 \quad (1')$$

Ἡ ἐξίσωσις (2) γράφεται

$$2(x-1)=y-1 \quad \text{ἢ} \quad 2x-2=y-1 \quad \text{ἢ} \quad 2x-y=1 \quad (2')$$

Λύομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1′) καὶ (2′) μὲ μίαν ἀπὸ τὰς γνωστὰς μεθόδους καὶ εὑρίσκομεν $x=6$ καὶ $y=11$.

Ὥστε τὸ ζητούμενον κλάσμα εἶναι $\frac{6}{11}$.

322. Πρόβλημα 2ον. ***Νὰ εὑρεθῇ διψήφιος ἀριθμός, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων του εἶναι ἴσον μὲ τὰ τρία τέταρτα τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων καὶ ὅτι, ἐὰν ἐναλλάξωμεν τὴν τάξιν τῶν ψηφίων του προκύπτει ἀριθμὸς κατὰ 18 μεγαλύτερος τοῦ ἀρχικοῦ.***

Ἔστω x τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων καὶ y τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ. Ἐν πρώτοις ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$x=\frac{3}{4}y \qquad (1)$$

Ὁ ἀριθμὸς ὁ ὁποῖος ἔχει x δεκάδας καὶ y μονάδας γράφεται $10x+y$. Ἂν ἐναλλάξωμεν τὴν τάξιν τῶν ψηφίων του, ὁ νέος ἀριθμὸς θὰ ἔχῃ y δεκάδας καὶ x μονάδας καὶ ἑπομένως γράφεται $10y+x$. Ἐπειδή, κατὰ τὸ πρόβλημα, ὁ νέος ἀριθμὸς εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ἀρχικοῦ κατὰ 18 ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$(10y+x)=(10x+y)+18 \qquad (2)$$

Λύομεν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2). Ἡ ἐξίσωσις (2) γράφεται

$$10y+x-10x-y=18 \quad \text{ἢ} \quad 9y-9x=18 \quad \text{ἢ} \quad y-x=2 \qquad (2')$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς αὐτὴν τὸ x μὲ τὴν τιμήν του, ποὺ δίδει ἡ (1) καὶ ἔχομεν

$$y-\frac{3y}{4}=2 \quad \text{ἢ} \quad 4y-3y=8 \quad \text{ἄρα} \quad y=8$$

Τὴν τιμὴν αὐτὴν τοῦ y θέτομεν εἰς τὴν (1) καὶ εὑρίσκομεν $x=\frac{3}{4}\cdot 8=6$. Ὥστε ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς ἔχει 6 δεκάδας καὶ 8 μονάδας, δηλ. εἶναι ὁ 68.

323. **Πρόβλημα 3ον.** ***Ὁ Πέτρος ἀπαντᾷ εἰς τὸν Γεώργιον, ὁ ὁποῖος τὸν ἠρώτησε περὶ τῆς ἡλικίας του: «Ἔχω τριπλασίαν ἡλικίαν ἐκείνης, τὴν ὁποίαν εἴχετε, ὅταν εἶχον τὴν ἡλικίαν, ποὺ ἔχετε τώρα καὶ ὅταν θὰ ἔχετε τὴν ἡλικίαν ποὺ ἔχω, θὰ ἔχωμεν καὶ οἱ δύο ἡλικίαν 98 ἐτῶν». Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἡλικία τοῦ Πέτρου.***

Ἔστω x ἡ ἡλικία τοῦ Πέτρου καὶ y ἡ ἡλικία τοῦ Γεωργίου. Ἡ διαφορὰ τῶν ἡλικιῶν των εἶναι σταθερὰ καὶ ἴση μὲ $x-y$. Ὥστε ὅταν ὁ Πέτρος εἶχε τὴν ἡλικίαν y, ὁ Γεώργιος εἶχε ἡλικίαν $y-(x-y)$ ἢ $2y-x$ καὶ ἐπειδή, κατὰ τὸ πρόβλημα, τὸ τριπλάσιον τῆς ἡλικίας αὐτῆς εἶναι ἴσον μὲ τὴν πραγματικὴν ἡλικίαν τοῦ Πέτρου, θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$x=3(2y-x) \qquad (1)$$

Ὅταν ὁ Γεώργιος θὰ ἔχῃ ἡλικίαν x, ὁ Πέτρος θὰ ἔχῃ $x+(x-y)$ ἢ $2x-y$ καὶ κατὰ τὸ πρόβλημα θὰ ἔχωμεν καὶ τὴν ἐξίσωσιν

$$x+(2x-y)=98 \qquad (2)$$

Λύομεν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καί (2) μὲ μίαν ἀπὸ τὰς γνωστὰς μεθόδους καὶ εὑρίσκομεν $x=42$ καὶ $y=28$. Ὥστε ἡ ἡλικία τοῦ Πέτρου ἦτο 42 ἔτη.

324. **Πρόβλημα 4ον.** ***Οἰνέμπορος ἔχει δύο ποιότητας οἴνου. Μία ὀκᾶ τῆς πρώτης ποιότητος καὶ μία ὀκᾶ τῆς δευτέρας ἀξίζουν 6000 δραχ. Ἀλλὰ μ ὀκάδες τῆς πρώτης ποιότητος καὶ (3μ—10) ὀκάδες τῆς δευτέρας ἀξίζουν 42800 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ***

ἡ τιμὴ τῆς ὀκᾶς κάθε ποιότητος καὶ νὰ διερευνηθῇ τὸ πρόβλημα ὡς πρὸς τὴν παράμετρον μ.

Ἔστω, ὅτι ἡ ὀκᾶ τοῦ οἴνου τῆς πρώτης ποιότητος ἀξίζει x δραχμὰς καὶ ἡ ὀκᾶ τῆς δευτέρας ποιότητος ἀξίζει y δραχμάς. Κατὰ τὸ πρόβλημα θὰ ἔχωμεν τὰς ἐξισώσεις

$$\mathrm{I}\left\{\begin{array}{ll} x+y=6000 & (1)\\ \mu x+(3\mu-10)y=42800 & (2)\end{array}\right.$$

Λύομεν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) μὲ τὴν μέθοδον τῆς ἀντικαταστάσεως. Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1) ἔχομεν $x=6000-y$. (1′)
Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (2) τὸ x μὲ τὴν τιμήν του καὶ ἔχομεν
$\mu(6000-y)+(3\mu-10)y=42800$ ἢ $6000\mu-\mu y+3\mu y-10y=42800$ ἢ $2\mu y-10y=42800-6000\mu$ ἢ $(2\mu-10)y=42800-6000\mu$ (3)

Ἐὰν $2\mu-10\neq 0$ ἢ $\mu\neq 5$, ἡ ἐξίσωσις (3) ἔχει τὴν λύσιν

$$y=\frac{42800-6000\mu}{2\mu-10}=\frac{21400-3000\mu}{\mu-5}$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1′) τὸ y μὲ τὴν τιμήν του αὐτὴν καὶ ἔχομεν $x=6000-\dfrac{21400-3000\mu}{\mu-5}=\dfrac{9000\mu-51400}{\mu-5}$

Διερεύνησις. Ἐὰν $2\mu-10=0$, δηλ. $\mu=5$ ἡ ἐξίσωσις (3) γίνεται

$$0y=42800-6000.5 \quad ἢ \quad 0y=12800$$

δηλ. εἶναι ***ἀδύνατος.***

Ἐὰν $2\mu-10\neq 0$, δηλ. $\mu\neq 5$, τὸ σύστημα ἔχει τὴν εὑρεθεῖσαν λύσιν

$$x=\frac{9000\mu-51400}{\mu-5} \quad καὶ \quad y=\frac{21400-3000\mu}{\mu-5}$$

Διὰ νὰ εἶναι ὅμως παραδεκταὶ αἱ τιμαὶ αὐταὶ τῶν x καὶ y πρέπει νὰ εἶναι θετικαί: δηλ. πρέπει νὰ συναληθεύουν αἱ ἀνισότητες

$$\frac{9000\mu-51400}{\mu-5}>0 \quad (4) \qquad \frac{21400-3000\mu}{\mu-5}>0 \quad (5)$$

Ἡ ἀνισότης (4) εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν $(\mu-5)(9000\mu-51400)>0$ καὶ ἀληθεύει διὰ $\mu<5$ καὶ διὰ $\mu>5{,}71$.

Ἡ ἀνισότης (5) εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν
$(\mu-5)(21400-3000\mu)>0$ ἢ $(\mu-5)(3000\mu-21400)<0$
καὶ ἀληθεύει διὰ $5<\mu<7{,}13$.

Καὶ αἱ δύο ἀνισότητες συναληθεύουν διὰ $5{,}71<\mu<7{,}13$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΛΥΣΙΝ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

Α′ Ὁμάς. 797. Ὁ Α λέγει εἰς τὸν Β: δός μου 10 ἐκ τῶν μήλων σου καὶ θὰ ἔχω 1,5 τῶν ἰδικῶν σου. Ὁ Β ἀπαντᾷ: δός μου 10 ἐκ τῶν ἰδικῶν σου, διὰ νὰ ἔχω τετραπλάσια τῶν ἰδικῶν σου. Πόσα μῆλα εἶχε καθείς;

798. Ἀγοράζει τις δύο εἴδη ὑφάσματος, ἐκ μὲν τοῦ πρώτου 5 μέτρα, ἐκ δὲ τοῦ δευτέρου 6 μέτρα ἀντὶ 122000 δραχμῶν. Ἐπειδὴ ὁ ἔμπορος ἐνήλλαξε τὰ δύο εἴδη, ἐζημιώθη ὁ ἀγοραστὴς 2000 δραχμάς. Πόσον ἐτιμᾶτο τὸ μέτρον καθενὸς εἴδους ;

799. Θέλων τις νὰ ἀγοράσῃ μίαν οἰκίαν ἀποφασίζει νὰ ζητήσῃ ἀπὸ ἕκαστον ὀφειλέτην τὸ αὐτὸ ποσὸν χρημάτων, διὰ νὰ πληρώσῃ τὴν οἰκίαν. Ἐὰν ζητήσῃ ἀπὸ ἕκαστον ὀφειλέτην 1 250 000 δραχμάς, θὰ τοῦ ἐχρειάζοντο ἀκόμη 6 250 000 δρχ., ἐνῷ ἐὰν ἐζήτει 3 000 000 δραχμὰς ἀπὸ ἕκαστον, θὰ τοῦ ἐπερίσσευαν 5000000 δρχ. Πόσον ἐτιμᾶτο ἡ οἰκία καὶ πόσοι ἦσαν οἱ ὀφειλέται ;

800. Ἕνα χρηματικὸν ποσὸν διενεμήθη μεταξὺ προσώπων τινῶν. Ἐὰν τὰ πρόσωπα ἦσαν 3 ἐπὶ πλέον, ἕκαστον πρόσωπον θὰ ἐλάμβανε 1 χιλιόδραχμ. ὀλιγώτερον καὶ ἐὰν τὰ πρόσωπα ἦσαν κατὰ δύο ὀλιγώτερα θὰ ἐλάμβανεν ἕκαστον πρόσωπον 1 χιλιόδραχ. ἐπὶ πλέον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ διανεμηθὲν ποσὸν καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν προσώπων.

Β' Ὁμάς. *801.* Ἐὰν ὁ Α εἶχε 36 βώλους ἀκόμη, θὰ εἶχε τριπλασίους τοῦ Β. Ἀλλὰ ἐὰν ὁ Β εἶχε 5 βώλους ἀκόμη, θὰ εἶχε τὸ ἥμισυ τῶν βώλων τοῦ Α. Πόσους βώλους εἶχεν ἕκαστος ;

802. Παιδίον λέγει εἰς ἄλλο, ἐὰν μοῦ δώσῃς τὸ ἥμισυ τῶν μήλων σου θὰ ἔχω 40 μῆλα. Τὸ ἄλλο ἀπαντᾷ, δός μου σὺ τὸ ἥμισυ τῶν ἰδικῶν σου διὰ νὰ ἔχω 35. Πόσα μῆλα εἶχε τὸ καθέν ;

803. Οἱ Α καὶ Β ἔβαλον στοίχημα 100 δρχ. Ἐὰν ὁ Α ἔχανε, θὰ εἶχε 250 δρχ. ὀλιγώτερον τοῦ διπλασίου τῶν χρημάτων, τὰ ὁποῖα θὰ ἔχῃ ὁ Β. Ἐάν, τουναντίον, ὁ Β ἔχανε, θὰ εἶχε τὰ πέντε δέκατα ἕβδομα τῶν χρημάτων, τὰ ὁποῖα θὰ εἶχε τότε ὁ Α. Πόσας δραχμὰς εἶχεν ἕκαστος ;

804. Οἱ Α καὶ Β παίζουν βώλους. Εἰς τὸ πρῶτον παιγνίδι ὁ Α κερδίζει τόσους βώλους, ὅσους εἶχε καὶ 4 ἀκόμη καὶ εὑρέθη μὲ διπλασίους βώλους ἀπὸ τὸν Β. Εἰς τὸ δεύτερον παιγνίδι ὁ Β κερδίζει τὸ ἥμισυ τῶν βώλων, ποὺ εἶχεν ἀρχικῶς καὶ 1 βῶλον ἀκόμη καὶ οὕτω εὑρέθη νὰ ἔχῃ τριπλασίους βώλους τοῦ Α. Πόσους βώλους εἶχεν ἀρχικῶς ἕκαστος ;

805. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ ὅροι ἑνὸς κλάσματος, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι : 1ον. ἐὰν προσθέσωμεν 3 εἰς τὸν ἀριθμητήν του καὶ 1 εἰς τὸν παρονομαστήν του, τὸ νέον κλάσμα γίνεται ἴσον μὲ 2/3· 2ον. ἐὰν ἀφαιρέσωμεν 1 ἀπὸ τὸν ἀριθμητήν του καὶ 3 ἀπὸ τὸν παρονομαστήν του, τὸ κλάσμα γίνεται ἴσον μὲ 1/2.

806. Νὰ εὑρεθῇ ἕνα κλάσμα τοιοῦτον, ὥστε ἂν προσθέσωμεν 1 καὶ εἰς τοὺς δύο ὅρους του νὰ γίνεται ἴσον μὲ δύο τρίτα καὶ ἐὰν ἀφαιρέσωμεν 2 καὶ ἀπὸ τοὺς δύο ὅρους του νὰ γίνεται ἴσον μὲ ἓν δεύτερον.

807. Ἐὰν ὁ Μ. Ἀλέξανδρος ἀπέθνησκε 9 ἔτη ἐνωρίτερον, θὰ ἐβασίλευε κατὰ τὸ 1/8 τῆς ζωῆς του. Ἐὰν ὅμως ἀπέθνησκεν 9 ἔτη βραδύτερον θὰ ἐβασίλευε κατὰ τὸ ἥμισυ τῆς ζωῆς. Εἰς ποίαν ἡλικίαν ἀπέθανε καὶ ἐπὶ πόσον χρόνον ἐβασίλευσεν ;

808. Πρὸ 18 ἐτῶν ἡ ἡλικία τοῦ Α ἦτο διπλασία τῆς ἡλικίας τοῦ Β. Μετὰ 9 ἔτη ἡ ἡλικία τοῦ Α θὰ εἶναι τὰ πέντε τέταρτα τῆς ἡλικίας τοῦ Β. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἡλικίαι τῶν Α καὶ Β.

809. Νὰ εὑρεθῇ διψήφιος ἀριθμός, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων εἶναι ἴσον μὲ τὰ 2/3 τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων καὶ ὅτι, ἐὰν ἐναλλάξωμεν τὴν τάξιν τῶν ψηφίων του προκύπτει ἀριθμὸς κατὰ 18 μεγαλύτερος τοῦ ἀρχικοῦ.

810. Νὰ εὑρεθῇ διψήφιος ἀριθμός, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του εἶναι 10 καὶ ὅτι, ἐὰν τὸν ἀντιστρέψωμεν προκύπτει νέος ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ὑπερβαίνει κατὰ 15 τὸ τετραπλάσιον τοῦ πρώτου.

Γ' Ὁμάς. 811. Νὰ εὑρεθῇ τριψήφιος ἀριθμὸς περιεχόμενος μεταξὺ 400 καὶ 500, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του νὰ εἶναι 9. Ἂν ἀντιστραφῇ ἡ τάξις τῶν ψηφίων του προκύπτει ἀριθμὸς ἴσος μὲ τὰ 35/47 τοῦ πρώτου.

812. Ἐὰν παρεμβάλωμεν μεταξὺ τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων καὶ δεκάδων διψηφίου ἀριθμοῦ τὸν 4, τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀριθμῶν εἶναι 604. Ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν δεύτερον ἀριθμὸν διὰ τοῦ πρώτου, εὑρίσκομεν πηλίκον 9 καὶ ὑπόλοιπον 34. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός.

813. Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ἑνὸς ἀκεραίου ἀριθμοῦ Δ διὰ τοῦ ἀκεραίου δ εἶναι 4 καὶ τὸ ὑπόλοιπον 20. Ἐὰν προσθέσωμεν τὸν διαιρετέον, τὸν διαιρέτην, τὸ πηλίκον καὶ τὸ ὑπόλοιπον λαμβάνομεν ἄθροισμα 719. Νὰ εὑρεθῇ ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης.

814. Ἔμπορος ἠγόρασε μίαν ὡρισμένην ποσότητα ἐμπορευμάτων. Ἐπώλησεν ἔπειτα αὐτὰ καὶ ἐκέρδισεν 8 % ἐπὶ τῆς τιμῆς τῆς πωλήσεως. Ἐὰν ἐπώλει αὐτὰ πρὸς 9 % ἐπὶ τῆς τιμῆς τῆς ἀγορᾶς, θὰ ἐκέρδιζε 350 δραχμὰς περισσότερον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῆς ἀγορᾶς, ἡ τιμὴ τῆς πωλήσεως καὶ τὸ κέρδος.

815. Ἔμπορος ἠγόρασε δύο εἴδη ὑφασμάτων· τὸ μὲν πρῶτον πρὸς 4 000 δρχ. τὸ μέτρον, τὸ δὲ δεύτερον πρὸς 6 000 δρχ. τὸ μέτρον· ἐπλήρωσε δὲ διὰ τὴν ἀγορὰν αὐτὴν ἐν ὅλῳ 440 000 δραχμάς. Ἐπώλησεν ἔπειτα τὸ πρῶτον μὲ κέρδος 30 % ἐπὶ τῆς τιμῆς τῆς ἀγορᾶς καὶ τὸ δεύτερον μὲ κέρδος 25 % ἐπὶ τῆς τιμῆς τῆς ἀγορᾶς. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος ἑκάστου εἴδους, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ συνολικὸν κέρδος παριστάνει τὰ $^3/_{14}$ τῆς συνολικῆς τιμῆς τῆς πωλήσεως.

816. Ἀπὸ δύο διάφορα μεταλλεῖα Α καὶ Β ἐξάγομεν μετάλλευμα σιδήρου. Τὸ Α περιέχει 70 % σίδηρον καὶ τὸ Β 55 %. Ἀναμιγνύομεν μίαν ὡρισμένην ποσότητα μεταλλεύματος ἀπὸ τὸ Α μὲ μίαν ἄλλην ἀπὸ τὸ Β καὶ σχηματίζομεν ἕνα τρίτον μετάλλευμα, τὸ ὁποῖον περιέχει 60 % σιδήρου. Ἐὰν εἴχομεν λάβει 15 γραμμάρια ἐπὶ πλέον ἀπὸ ἕκαστον τῶν δύο μεταλλευμάτων τότε τὸ μεῖγμα τοῦ μεταλλεύματος θὰ περιεῖχε 61,35 % σιδήρου. Νὰ εὑρεθῇ : 1ον. Κατὰ ποίαν ἀναλογίαν ἔγινεν ἡ ἀνάμειξις. 2ον. Πόσα γραμμάρια ἐλήφθησαν διὰ νὰ σχηματισθῇ τὸ μεῖγμα ;

817. Οἰνέμπορος ἠγόρασε δύο βαρέλια Α καὶ Β οἴνου πρὸς 2100 δρχ. τὴν ὀκᾶν. Τὸ Α κοστίζει 52500 δρχ. περισσότερον τοῦ Β. Ὅταν ἐπώλησεν ἐκ τοῦ Α τὰ $^4/_9$ τοῦ περιεχομένου οἴνου καὶ ἐκ τοῦ Β τὸ $^1/_2$, τὰ δύο βαρέλια εἶχον τὴν αὐτὴν ποσότητα οἴνου. Πόσας ὀκάδας οἴνου περιεῖχε κάθε βαρέλιον.

818. Κτηματίας πωλεῖ ἕνα κῆπον, μίαν ἄμπελον καὶ ἕνα ἀγρόν. Ἡ ἄμπελος εἶναι κατὰ 275 ($μ^2$) μικροτέρα τοῦ κήπου, ἀλλὰ τὸ τετραγ. μέτρον τῆς ἀμπέλου ἐπωλήθη κατὰ 2000 δρχ. περισσότερον ἀπὸ τὸ τετραγ. μέτρον τοῦ κήπου. Ἐν τούτοις ἡ ἄμπελος ἐπωλήθη κατὰ 600 000 δρχ. ὀλιγώτερον τοῦ κήπου· Ὁ ἀγρὸς ἦτο κατὰ 725 τετρ. μέτρα μεγαλύτερος τῆς ἀμπέλου καὶ τὸ τετραγ. μέτρον τοῦ ἀγροῦ αὐτοῦ ἐπωλήθη κατὰ 3 500 δρχ. ὀλιγώτερον ἀπὸ τὸ τετραγ. μέτρον τῆς ἀμπέλου. Ὁ ἀγρὸς οὕτω ἐπωλήθη κατὰ 1 425 000 δραχ. περισσότερον τῆς ἀμπέλου. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κήπου καὶ ἡ τιμὴ κατὰ τετραγ. μέτρον τοῦ κήπου αὐτοῦ.

Α΄ Ὁμάς. Τόκου. 819. Ἔχει τις κεφάλαιον 546 000 δραχ. καὶ 650 000 δραχ. Λαμβάνει δὲ κατ' ἔτος τόκον 38 400 δραχ. καὶ ἐκ τῶν δύο. Ἐὰν τὸ πρῶτον ἐτοκίζετο πρὸς τὸ ἐπιτόκιον τοῦ δευτέρου καὶ τοὐναντίον, θὰ ἐλάμβανε 550 δραχ. περισσοτέρας, ὡς τόκον ἢ πρίν. Τίνα εἶναι τὰ ἐπιτόκια ;

820. Τοκίζει τις μέρος τοῦ κεφαλαίου του πρὸς 3 % καὶ τὸ ὑπόλοιπον πρὸς 2,5 % καὶ λαμβάνει ἐτήσιον τόκον 380 000 δραχμάς. Ἐὰν ἐτόκιζε τὸ πρῶτον μέρος πρὸς 2,5 % καὶ τὸ ὑπόλοιπον πρὸς 3 %, θὰ ἐλάμβανε τόκον κατὰ 10 000 δραχ. περισσότερον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ κεφάλαιόν του.

821. Ὁ λόγος δύο κεφαλαίων εἶναι 5 : 8. Ἐὰν αὐξήσωμεν ἕκαστον ἐξ αὐτῶν κατὰ 10 000 δραχμάς, ὁ λόγος των γίνεται 50 : 77.

Ζητεῖται : 1ον. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ δύο αὐτὰ κεφάλαια. 2ον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐπιτόκιον μὲ τὸ ὁποῖον ἐτοκίσθη τὸ δεύτερον κεφάλαιον, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ πρῶτον ἐτοκίσθη πρὸς 4,5 % καὶ ὅτι ὁ λόγος τῶν ἐτησίων τόκων των εἶναι 9 : 16.

822. Δύο κεφάλαια ἔχουν λόγον 8 : 9. Κατετέθησαν δὲ πρὸς ἐπιτόκια τοιαῦτα, ὥστε, ἐὰν προσθέσωμεν εἰς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν τὸν ἐτήσιον τόκον του, τὰ προκύπτοντα κεφάλαια ἔχουν λόγον 209 : 234. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κεφάλαια καὶ τὰ ἐπιτόκια, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι οἱ ἐτήσιοι τόκοι τῶν δύο κεφαλαίων ἦσαν ἴσοι πρὸς 252 000 δραχμὰς ἕκαστος.

823. Ἐπιχειρηματίας κατέθεσεν ἕνα κεφάλαιον εἰς μίαν ἐπιχείρησιν, ἡ ὁποία τοῦ ἀπέδιδεν 6 % καὶ ἕνα δεύτερον κεφάλαιον εἰς μίαν ἄλλην ἐπιχείρησιν, ἡ ὁποία τοῦ ἀπέδιδε 12 %. Ἐκ τοῦ πρώτου κεφαλαίου εἶχεν εἰσόδημα 7200 δραχ. ὀλιγώτερον ἀπὸ τὸ εἰσόδημα τοῦ δευτέρου κεφαλαίου. Ἐὰν ἐνήλλασσε τὰς καταθέσεις του, θὰ ἐλάμβανε τὸ αὐτὸ εἰσόδημα καὶ ἀπὸ τὰς δύο ἐπιχειρήσεις. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κατατεθέντα εἰς τὴν ἐπιχείρησιν κεφάλαια.

824. Κεφάλαιον 4 000 000 δραχμῶν ἐτοκίσθη ἐπὶ 9 μῆνας καὶ 18 ἡμέρας· ἕνα δεύτερον κεφάλαιον 4 500 000 δραχμῶν ἐτοκίσθη ἐπὶ 5 μῆνας καὶ 10 ἡμέρας. Τὸ πρῶτον κεφάλαιον ἔδωσεν 64 000 δραχ. περισσότερον τόκον τοῦ δευτέρου. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐπιτόκια πρὸς τὰ ὁποῖα ἐτοκίσθησαν τὰ κεφάλαια, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι θὰ ἔδιδον τὸν αὐτὸν τόκον, ἐὰν ἐτοκίζοντο ἐπὶ 1 ἔτος.

825. Κατέθεσέ τις ἕνα κεφάλαιον καὶ μετὰ 5 μῆνας ἔλαβε τόκον καὶ κεφάλαιον 2 440 000 δραχμάς. Ἐὰν κατέθετε τὸ κεφάλαιον ἐπὶ 11 μῆνας θὰ ἐλάμβανε τόκον καὶ κεφάλαιον 2 488 000 δραχ. Νὰ προσδιορισθῇ τὸ κεφάλαιον καὶ τὸ ἐπιτόκιον.

826. Ἐδανείσθη τις ἕνα κεφάλαιον πρὸς ὡρισμένον ἐπιτόκιον. Ἐὰν ἐπλήρωνε τὸ χρέος του μετὰ 15 μῆνας, θὰ ἐπλήρωνε τόκον καὶ κεφάλαιον 1 881 000 δραχ. Ἐὰν ἐπλήρωνε τὸ χρέος του μετὰ 15 μῆνας, θὰ ἐπλήρωνε 1 935 000 δραχ. Πόσον κεφάλαιον ἐδανείσθη καὶ πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ;

827. Κατέθεσέ τις ἕνα κεφάλαιον πρὸς 3 % καὶ μετά τινα χρόνον ἔλαβε τόκον 432 000 δραχμάς. Ἐὰν τὸ κεφάλαιον ἔμενεν ἐπὶ 1 ἔτος ὀλιγώτερον, ἀλλ' ἐτοκίζετο πρὸς 4,5 %, θὰ ἐλάμβανε τόκον 486 000 δραχμάς. Πόσον κεφάλαιον κατέθεσε καὶ ἐπὶ πόσον χρόνον ;

828. Κατέθεσέ τις εἰς μίαν Τράπεζαν ἕνα κεφάλαιον πρὸς ὡρισμένον ἐπιτόκιον. Μετὰ 1 ἔτος ἀποσύρει τὸ κεφάλαιον καὶ καταθέτει αὐτὸ ηὐξημένον κατὰ 100 000 δραχμὰς εἰς ἄλλην Τράπεζαν μὲ ἐπιτόκιον κατὰ 1 % ἀνώτερον τοῦ προηγουμένου. Ὁ ἐτήσιος τόκος, τὸν ὁποῖον ἔλαβεν ἐκ τῆς δευτέρας Τραπέζης ἦτο μεγαλύτερος κατὰ 29 000 δραχμὰς τοῦ προηγουμένου. Μετὰ ἕνα ἔτος ἀποσύρει τὸ νέον κεφάλαιον καὶ καταθέτει αὐτό, ηὐξημένον κατὰ 50 000 δραχ. εἰς τρίτην Τράπεζαν μὲ ἐπιτόκιον κατὰ 1 % ἀνώτερον τοῦ ἐπιτοκίου τῆς δευτέρας Τραπέζης. Ὁ ἐτήσιος τόκος, τὸν ὁποῖον ἔλαβεν ἐκ τῆς τρίτης Τραπέζης ἦτο κατὰ 28 500 δραχ. μεγαλύτερος τοῦ τόκου τοῦ δευτέρου ἔτους. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἀρχικὸν κεφάλαιον, τὸ ἀρχικὸν ἐπιτόκιον, οἱ διαδοχικοὶ ἐτήσιοι τόκοι καὶ νὰ ἐπαληθευθῇ, ἐὰν οἱ διάφοροι ὅροι τοῦ προβλήματος ἔχουν ἐκπληρωθῇ.

Ε' Ὁμάς. Μείξεως. 829. Οἰνοπώλης ἔχει δύο ποιότητας οἴνου. Ὅταν τὰς ἀναμείξῃ μὲ ἀναλογίαν 9 πρὸς 6, ἡ ὀκᾶ τοῦ μείγματος τιμᾶται 2720 δρχ. Ὅταν τὰς ἀναμείξῃ μὲ ἀναλογίαν 7 πρὸς 3, ἡ ὀκᾶ τοῦ μείγματος τιμᾶται 2640 δραχ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς ὀκᾶς ἑκάστης ποιότητος.

830. Ἀνέμειξέ τις 7 χιλιόγραμμα οἰνοπνεύματος μετὰ 6 χιλιογράμμων οἰνοπνεύματος διαφόρου τίτλου καὶ ἔλαβε μεῖγμα 18°. Ἐὰν ὅμως ἀνεμείγνυε 9 χιλιόγραμμα τοῦ πρώτου οἰνοπνεύματος μετὰ 4 χιλιογράμμων τοῦ δευτέρου, θὰ ἐλάμβανε μεῖγμα 16°. Ποῖος ὁ βαθμὸς τοῦ πρώτου καὶ ποῖος ὁ βαθμὸς τοῦ δευτέρου οἰνοπνεύματος.

831. Ἔχομεν δύο βαρέλια Α καὶ Β οἴνου. Χύνομεν ἐκ τοῦ Α βαρελίου εἰς τὸ Β τόσας ὀκάδας, ὅσας ἔχει τὸ Β. Χύνομεν ἔπειτα ἐκ τοῦ Β βαρελίου εἰς τὸ Α, τόσας ὀκάδας, ὅσας ἔχει ἤδη τὸ Α. Ἔπειτα χύνομεν ἐκ τοῦ Α βαρελίου εἰς τὸ Β, τόσας ὀκάδας ὅσας εἶχε ἤδη τὸ Β. Μένουν τότε εἰς ἕκαστον βαρέλιον α ὀκάδες οἴνου. Νὰ εὑρεθῇ πόσας ὀκάδας οἴνου περιεῖχε ἕκαστον βαρέλιον.

832. Ὁ Ἱέρων τῶν Συρακουσῶν ἔδωκε νὰ τοῦ κάνουν στέφανον ἐκ χρυσοῦ βάρους 7465 γραμ. Ἵνα εὕρῃ ὁ Ἀρχιμήδης, ἂν ὁ χρυσοχόος ἀντικατέστησε χρυσὸν δι' ἀργύρου, ἐβύθισε τὸν στέφανον εἰς τὸ ὕδωρ καὶ παρετήρησεν, ὅτι ὁ χρυσὸς ἔχασε 467 γραμ. τοῦ βάρους του. Γνωστοῦ ὄντος, ὅτι ὁ χρυσὸς χάνει εἰς τὸ ὕδωρ τὰ 0,052 καὶ ὁ ἄργυρος 0,095 τοῦ βάρους του, πόσος ἦτο ὁ χρυσὸς ἐκ τοῦ στεφάνου καὶ πόσος ὁ ἄργυρος ;

833. Χρυσοχόος ἔχει δύο κοσμήματα, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ πρῶτον περιέχει 270 γραμ. χρυσοῦ καὶ 30 γραμ. χαλκοῦ καὶ τὸ δεύτερον περιέχει 200 γραμ. χαλκοῦ. Νὰ εὑρεθῇ πόσην ποσότητα πρέπει νὰ λάβῃ ἀπὸ ἕκαστον τῶν κοσμημάτων αὐτῶν διὰ νὰ σχηματίσῃ ἕνα κρᾶμα 400 γραμ. καὶ τίτλου 0,825.

834. Χρυσοχόος συνέτηξε ἕνα κρᾶμα ἀργύρου καὶ χαλκοῦ τίτλου 0,9 μὲ ἕνα δεύτερον κρᾶμα τῶν αὐτῶν μετάλλων καὶ τίτλου 0,85 καὶ μὲ 400 γραμ. χαλκοῦ καὶ ἔλαβε ἕνα νέον κρᾶμα βάρους 1500 γραμμαρίων καὶ τίτλου 0,640. Νὰ εὑρεθῇ τὸ βάρος ἑκάστου τῶν δύο πρώτων κραμμάτων.

835. Χρυσοχόος συνέτηξε δύο κράματα χρυσοῦ καὶ χαλκοῦ τίτλων 0,950 καὶ 0,800, μὲ 3 γραμ. καθαροῦ χρυσοῦ καὶ ἐσχημάτισε ἕνα κρᾶμα βάρους 25 γραμ. καὶ τίτλου 0,896. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ βάρη τῶν δύο πρώτων κραμάτων.

836. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ βάρος καὶ ὁ τίτλος ἑνὸς κράμματος ἀργύρου καὶ χαλκοῦ, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι, ἐὰν συντήξωμεν αὐτὸ μὲ 300 γραμ. καθαροῦ ἀργύρου, λαμβάνομεν ἕνα νέον κρᾶμα τίτλου 0,900· ἐνῷ, ἐὰν τὸ συντήξωμεν μὲ

200 γραμ. ἑνὸς ἄλλου κράματος, τίτλου 0,900, θὰ λάβωμεν ἕνα ἄλλο κρᾶμα τίτλου 0,840.

ΣΤ΄ Ὁμάς. Κινήσεως. *837.* Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ταχύτης καὶ τὸ μῆκος μιᾶς ἁμαξοστοιχίας, ἡ ὁποία χρειάζεται 7 δευτερόλεπτα τῆς ὥρας διὰ νὰ διέλθῃ ἔμπροσθεν παρατηρητοῦ καὶ 25 δευτερόλεπτα διὰ νὰ διέλθῃ ἔμπροσθεν σταθμοῦ μήκους 378 μέτρων.

838. Ἐὰν μία ἁμαξοστοιχία αὐξήσῃ τὴν ταχύτητά της κατὰ 6 χιλιόμετρα τὴν ὥραν, θὰ φθάσῃ εἰς τὸν προορισμόν της 48 λεπτὰ τῆς ὥρας ἐνωρίτερον. Ἐὰν ἐλαττώσῃ τὴν ταχύτητά της κατὰ 10 χιλιόμετρα τὴν ὥραν, θὰ φθάσῃ 144 λεπτὰ τῆς ὥρας βραδύτερον εἰς τὸν προορισμόν της. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ταχύτης τῆς ἁμαξοστοιχίας καὶ τὸ διανυθὲν ὑπ' αὐτῆς διάστημα.

839. Δύο κινητά, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν μεταξύ των 36 χλμ. ἀναχωροῦν ταυτοχρόνως ἐκ δύο σημείων Α καὶ Β, κινούμενα ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ. Τὰ κινητὰ αὐτὰ συναντῶνται μετὰ 4 ὥρας, ἐὰν κινοῦνται ἀντιθέτως καὶ μετὰ 8 ὥρας, ἐὰν κινοῦνται πρὸς τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ταχύτητές των.

840. Δύο αὐτοκίνητα πρόκειται νὰ διανύσουν μίαν ἀπόστασιν ΑΒ, ἡ ὁποία παρουσιάζει μίαν ἀνωφέρειαν ΑΜ καὶ μίαν κατωφέρειαν ΜΒ. Τὸ πρῶτον αὐτοκίνητον ἔχει ταχύτητα 18 χλμ. τὴν ὥραν κατὰ τὴν ἄνοδόν του καὶ 36 χλμ. κατὰ τὴν κάθοδόν του. Αἱ ταχύτητες τοῦ δευτέρου εἶναι ἀντιστοίχως 15 χλμ. καὶ 40 χλμ. τὴν ὥραν. Κατὰ τὴν μετάβασίν των ἀπὸ τοῦ Α εἰς τὸ Β καὶ τὰ δύο αὐτοκίνητα ἔφθασαν συγχρόνως εἰς τὸ Β. Κατὰ τὴν ἐπιστροφήν των ὅμως ἀπὸ Β εἰς Α, τὸ πρῶτον αὐτοκίνητον ἔφθασεν 35 λ. ἐνωρίτερον τοῦ ἄλλου. Νὰ ὑπολογισθοῦν τα μήκη ΑΜ καὶ ΜΒ.

841. Τέσσαρες ἐπιβάται θέλουν νὰ μεταβοῦν ἐκ μιᾶς πόλεως Α εἰς ἄλλην Β, αἱ ὁποῖαι ἀπέχουν 39,6 χλμ. Διαθέτουν δὲ πρὸς τοῦτο ἕνα αὐτοκίνητον, τὸ ὁποῖον κινεῖται μὲ ταχύτητα 36 χλμ. καθ' ὥραν καὶ τὸ ὁποῖον ἔχει δύο μόνον θέσεις ἐπιβατῶν, ἐκτὸς τῆς θέσεως τοῦ σωφέρ. Οἱ δύο νεώτεροι ἐκ τῶν ἐπιβατῶν δύνανται νὰ διανύσουν 6 χλμ. καθ' ὥραν πεζῇ καὶ οἱ ἄλλοι δύο, πλέον ἡλικιωμένοι, δύνανται νὰ διανύσουν μόνον 4 χλμ. καθ' ὥραν.

Διὰ τὴν χρησιμοποίησιν τοῦ αὐτοκινήτου ἔκαμον τὴν ἑξῆς συμφωνίαν: Τὸ αὐτοκίνητον θὰ ἀναχωρήσῃ μὲ τοὺς δύο ἡλικιωμένους ἐπιβάτας καὶ θὰ τοὺς ἀφήσῃ εἰς ἕνα σημεῖον Μ τῆς ὁδοῦ ΑΒ, ἀπὸ τοῦ ὁποίου θὰ ἐξακολουθήσουν τὴν πορείαν των πεζῇ μέχρι τῆς πόλεως Β. Τὸ αὐτοκίνητον θὰ ἐπιστρέψῃ ἀμέσως ὀπίσω διὰ νὰ παραλάβῃ τοὺς δύο νεωτέρους ἐπιβάτας, οἱ ὁποῖοι ἐν τῷ μεταξὺ ἐβάδιζον πεζῇ καὶ εἶχον φθάσει εἰς ἕνα σημεῖον Σ καὶ θὰ τοὺς μεταφέρῃ εἰς τὴν πόλιν Β. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ θέσις τοῦ σημείου Σ καὶ ἐπὶ τῆς ὁδοῦ ΑΒ οὕτως, ὥστε οἱ 4 ἐπιβάται, οἱ ὁποῖοι ἀνεχώρησαν συγχρόνως ἐκ τοῦ Α, νὰ φθάσουν ταυτοχρόνως εἰς τὸ Β.

842. Ἕνας σωφὲρ αὐτοκινήτου, διερχόμενος ἔμπροσθεν ἑνὸς χιλιομετρικοῦ δείκτου σημειώνει μίαν ἀπόστασιν, ἡ ὁποία ἐκφράζεται μὲ ἕνα διψήφιον ἀριθμόν. Συνεχίζων τὸν δρόμον του, μὲ τὴν αὐτὴν ταχύτητα, διέρχεται μετὰ μίαν ὥραν ἔμπροσθεν ἑνὸς ἄλλου δείκτου, ὁ ὁποῖος φέρει τὰ αὐτὰ ψηφία, ἀλλὰ κατ' ἀντίστροφον τάξιν. Τέλος μετὰ μίαν ὥραν ἀργότερον φθάνει ἔμπροσθεν ἑνὸς τρίτου δείκτου, ὁ ὁποῖος ἔχει τὰ αὐτὰ ψηφία μὲ τὸν πρῶτον, ἀλλὰ μὲ ἕνα μηδὲν μεταξὺ αὐτῶν. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ταχύτης τοῦ αὐτοκινήτου καὶ οἱ ἀριθμοὶ τῶν δεικτῶν, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων ἑκάστου ἀριθμοῦ εἶναι 7.

843. Ἕνας λεμβοῦχος διήνυσε 15 χλμ. εἰς 1 ὥραν 15 λ., ἀκολουθῶν τὸ ρεῦμα ἑνὸς ποταμοῦ καὶ μένων διαρκῶς εἰς τὸ μέσον τοῦ ρεύματος τοῦ ποταμοῦ. Ὅταν ἐπέστρεφεν, ἠκολούθησε τὴν ὄχθην τοῦ ποταμοῦ, ὅπου ἡ ταχύτης τοῦ ρεύματος εἶναι τὰ $^3/_5$ τῆς ταχύτητος αὐτοῦ εἰς τὸ μέσον καὶ ἐχρειάσθη 2 ὥρας 5 λ. διὰ τὸ αὐτὸ διάστημα. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ταχύτης τοῦ ρεύματος τοῦ ποταμοῦ εἰς τὸ μέσον.

Ζ' Ὁμὰς. Διάφορα. *844.* Δύο οἰνέμποροι Α καὶ Β εἰσέρχονται εἰς μίαν πόλιν φέροντες ὁ μὲν 64 βαρέλια οἴνου, ὁ δὲ 20 βαρέλια τῆς αὐτῆς ἀξίας. Ἀλλ' ἐπειδὴ δὲν εἶχον ἀρκετὰ χρήματα διὰ νὰ πληρώσουν τὸν φόρον τῆς εἰσαγωγῆς, ὁ Α ἐπλήρωσε τὸν φόρον μὲ 5 βαρέλια καὶ μὲ 40 δραχ. ἀκόμη· ὁ Β ἐπλήρωσε τὸν φόρον μὲ 2 βαρέλια, ἀλλ' ἔλαβεν ὀπίσω 40 δραχ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀξία ἑκάστου βαρελίου καὶ ὁ φόρος εἰσαγωγῆς ἑκάστου βαρελίου. (Πρόβλημα παγίδος).

845. Ὀκτὼ βώδια ἔφαγαν εἰς 7 ἑβδομάδας τὸ χόρτον 4 στρεμμάτων καὶ ὅσον ἐβλάστησε κατὰ τὸ διάστημα τοῦτο. 9 βώδια ἔφαγον εἰς 8 ἑβδομάδας τὸ χόρτον 5 στρεμμάτων καὶ ὅσον ἐβλάστησε κατὰ τὸ διάστημα τοῦτο. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ πόσα βώδια δύνανται νὰ βοσκήσουν ἐπὶ 12 ἑβδομάδας εἰς 6 στρέμματα, συμπεριλαμβανομένου καὶ τοῦ χόρτου, τὸ ὁποῖον θὰ βλαστήσῃ κατὰ τὸ διάστημα τοῦτο.

846. Ἕνας ἐργάτης καὶ μία ἐργάτρια ἀνέλαβον νὰ ἐκτελέσουν ἕνα ἔργον εἰς 20 ἡμέρας. Τὴν ἑβδόμην ἡμέραν ἡ ἐργάτρια ἀσθενεῖ καὶ ὁ ἐργάτης συνεχίζει μόνος του τὸ ἔργον, τὸ ὁποῖον ἐτελείωσεν εἰς 12 ἡμ. Πόσας ἡμέρας θὰ ἐχρειάζετο μόνος του ὁ ἐργάτης ἢ ἡ ἐργάτρια διὰ νὰ τελειώσῃ τὸ ἔργον;

847. Δεξαμενὴ πλήρης ὕδατος κενοῦται ὑπὸ δύο ἀνίσων κρουνῶν Α καὶ Β. Ἀνοίγομεν τὸν κρουνὸν Α καὶ ἔπειτα, ὅταν ἐχύθη τὸ τέταρτον τοῦ περιεχομένου εἰς τὴν δεξαμενὴν ὕδατος, ἀνοίγομεν καὶ τὸν κρουνὸν Β. Οὕτω τὸ ὑπόλοιπον τῆς δεξαμενῆς ἐκενώθη εἰς χρόνον κατὰ 1 ὥραν περισσότερον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον θὰ ἐχρειάζετο ὁ κρουνὸς Α διὰ νὰ κενώσῃ τὸ τέταρτον τῆς δεξαμενῆς. Ἐὰν καὶ οἱ δύο κρουνοὶ ἠνοίγοντο συγχρόνως, ἡ δεξαμενὴ θὰ ἐκενοῦτο ἡμίσειαν ὥραν ταχύτερον. Νὰ εὑρεθῇ πόσον χρόνον χρειάζεται ἕκαστος κρουνὸς διὰ νὰ κενώσῃ μόνος του τὴν δεξαμενήν.

Η' Ὁμάς. Γεωμετρίας. *848.* Αἱ διαστάσεις ἑνὸς ὀρθογωνίου εἶναι 40 μέτρα καὶ 30 μέτρα. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ διαστάσεις ἑνὸς ἄλλου ὀρθογωνίου ὁμοίου πρὸς τὸ πρῶτον καὶ τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος εἶναι 84 μέτρα.

849. Δύο κύκλων, ἐφαπτομένων ἐξωτερικῶς, ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων των εἶναι 0,30 μ. Πόσαι εἶναι αἱ ἀκτῖνες των, ἐὰν ἔχουν λόγον 2 : 3 ;

850. Εἰς ἕνα κύκλον ἀκτῖνος 12 μ. μία χορδὴ 20 μ. τέμνεται ἀπὸ μίαν διάμετρον εἰς τρόπον, ὥστε τὸ σημεῖον τῆς τομῆς ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὸ κέντρον καὶ ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς χορδῆς. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ δύο τμήματα τῆς χορδῆς.

851. Ἡ ἐπιφάνεια ἑνὸς ὀρθογωνίου αὐξάνει κατὰ 3450 ($μ^2$), ὅταν διπλασιάσωμεν καὶ τὰς δύο διαστάσεις του. Αὐξάνει ἐπίσης κατὰ 1100 ($μ^2$), ὅταν ἐλαττώσωμεν τὸ μῆκος κατὰ 16 μέτρα καὶ τριπλασιάσωμεν τὸ πλάτος. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου.

852. Ἐὰν αὐξηθῇ ἡ βάσις τριγώνου κατὰ 1 μέτρον καὶ ἐλαττωθῇ τὸ ὕψος αὐτοῦ κατὰ 2 μέτρα, ἐλαττοῦται τὸ ἐμβαδόν του κατὰ 7 ($μ^2$). Ἐὰν ἐλαττωθῇ ἡ βάσις του κατὰ 2 καὶ αὐξηθῇ τὸ ὕψος του κατὰ 3, τὸ ἐμβαδόν του ἐλαττοῦται κατὰ 10 ($μ^2$). Πόση εἶναι ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος του;

853. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ ἕνα ὀρθογώνιον ΔΕΖΗ, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ ΕΖ νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς βάσεως ΒΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ τοῦ ὁποίου αἱ διαστάσεις νὰ ἔχουν διαφορὰν δ.

854. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς δοθὲν τρίγωνον ἕνα ὀρθογώνιον ὅμοιον πρὸς δοθὲν ὀρθογώνιον.

855. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς δοθὲν τρίγωνον ἕνα ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου ἡ διαφορὰ τῶν δύο προσκειμένων πλευρῶν νὰ εἶναι ἴση μὲ δοθὲν μῆκος λ.

856. Νὰ εὑρεθῇ ἡ περίμετρος ἑνὸς τριγώνου, ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν διαφορὰν δ δύο πλευρῶν καὶ τὰ δύο τμήματα μ καὶ ν, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ἡ τρίτη πλευρὰ ὑπὸ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας τῆς περιεχομένης μεταξὺ τῶν δύο πρώτων πλευρῶν.

857. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ $AB=x$, $A\Gamma=y$ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ, ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν $B\Gamma=\alpha$, καὶ τὸ ἄθροισμα $AB+A\Gamma=k$ καὶ ὅτι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Β συναντᾷ τὴν ἀπέναντι πλευρὰν ΑΓ εἰς ἕνα σημεῖον Δ τριοῦτον, ὥστε $B\Delta=\Delta\Gamma$.

858. Δίδεται ἕνα ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι $AB=\Gamma\Delta=\alpha$, $B\Gamma=A\Delta=\beta$, $\alpha>\beta$. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς τὸ ὀρθογώνιον αὐτὸ ἕνα ἄλλο ὀρθογώνιον ΕΖΗΘ, τοῦ ὁποίου ὁ λόγος $\frac{EZ}{E\Theta}$ τῶν πλευρῶν νὰ εἶναι ἴσος μὲ δοθέντα ἀριθμὸν μ, μεγαλύτερον τῆς μονάδος.

859. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς δοθέντα ρόμβον, τοῦ ὁποίου δίδονται αἱ διαγώνιοι $A\Gamma=\alpha$, $B\Delta=\beta$, ἕνα ὀρθογώνιον δοθείσης περιμέτρου 2τ.

860. Εἰς ποῖον ὕψος πρέπει νὰ ἀνυψωθῇ ἀεροναύτης διὰ νὰ ἴδῃ μίαν σφαιρικὴν ζώνην ἐμβαδοῦ Ε;

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΤΡΕΙΣ Ἢ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΟΥΣ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

325. Πρόβλημα 1ον. ***Νὰ εὑρεθῇ ἕνας τριψήφιος ἀριθμός, ὁ ὁποῖος αὐξάνει κατὰ 270, ὅταν ἐναλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν δύο πρώτων πρὸς τὰ ἀριστερὰ ψηφίων του καὶ ὁ ὁποῖος ἐλαττοῦται κατὰ 99, ἐὰν ἐναλλάξωμεν τὴν τάξιν τῶν ἀκραίων ψηφίων του. Τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του εἶναι 20.***

Ἔστω x τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων, y τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων καὶ ω τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ. Ὁ ἀριθμὸς ποὺ ἔχει x ἑκατοντάδας, y δεκάδας καὶ ω μονάδας γράφεται $100x+10y+\omega$. Ἐὰν ἐναλλάξωμεν τὰ δύο πρῶτα ψηφία του, ὁ ἀριθμὸς θὰ ἔχῃ y ἑκατοντάδας, x δεκάδας καὶ ω μονάδας καὶ ἑπομένως γράφεται $100y+10x+\omega$.

Ἐπειδὴ ὁ νέος ἀριθμὸς εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ἀρχικοῦ κατὰ 270 ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$(100y+10x+\omega)=(100x+10y+\omega)+270 \quad \text{ἢ} \quad 90y-90x=270$$

$$\text{ἢ} \quad y-x=3 \qquad (1)$$

Ἐὰν ἐναλλάξωμεν τὰ ἀκραῖα ψηφία του, ὁ ἀριθμὸς θὰ ἔχῃ ω ἑκατοντάδας, y δεκάδας καὶ x μονάδας καὶ ἑπομένως γράφεται $100\omega+10y+x$. Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς εἶναι κατὰ 99 μικρότερος τοῦ ἀρχικοῦ ἀριθμοῦ θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$100\omega+10y+x+99=100x+10y+\omega \quad \text{ἢ} \quad 99\omega-99x=-99$$

$$\text{ἢ} \quad \omega-x=-1 \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του εἶναι ἴσον μὲ 20 ἔχομεν καὶ τὴν ἐξίσωσιν $x+y+\omega=20$ (3)

Λύομεν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1), (2), (3). Ἀπὸ τὴν (1) ἔχομεν $y=3+x$ (1′)

Ἀπὸ τὴν (2) ἔχομεν $\omega=x-1$ (2′)

Τὰς τιμὰς τῶν y καὶ ω θέτομεν εἰς τὴν (3) καὶ ἔχομεν

$$x+3+x+x-1=20 \quad \text{ἢ} \quad x=6$$

Τὴν τιμὴν αὐτὴν τοῦ x θέτομεν εἰς τὰς (1′) καὶ (2′) καὶ εὑρίσκομεν $y=9$ καὶ $\omega=5$.

Ὥστε ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς ἔχει 6 ἑκατοντάδας, 9 δεκάδας καὶ 5 μονάδας, δηλ. εἶναι ὁ 695.

326. Πρόβλημα 2ον. ***Ἕνας θεῖος θέλει νὰ μοιράσῃ 1763500 δραχμὰς εἰς τοὺς τρεῖς ἀνεψιούς του, ἡλικίας 15 ἐτῶν, 11 ἐτῶν καὶ 9 ἐτῶν εἰς τρόπον, ὥστε, ἂν καταθέσουν ἀμέσως τὰ μερίδιά των εἰς μίαν Τράπεζαν πρὸς 4 % νὰ λάβουν κατὰ τὴν ἐνηλικίωσίν των (21ον ἔτος) τὸ αὐτὸ ποσόν, τόκους καὶ κεφάλαιον. Πόσον πρέπει νὰ εἶναι τὸ μερίδιον ἑκάστου;***

Ἔστωσαν x, y, ω τὰ μερίδια τῶν ἀνεψιῶν ἀντιστοίχως. Ἐν πρώτοις ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $y+x+\omega=1\,763\,500$

Ὁ πρῶτος ἀνεψιός, ἂν καταθέσῃ x δρχ. πρὸς 4 % θὰ λάβῃ μετὰ $21-15=6$ ἔτη τόκον $\frac{x\cdot4\cdot6}{100}$ ἢ $\frac{24x}{100}$ καὶ ἑπομένως θὰ λάβῃ κατὰ τὴν ἐνηλικίωσίν του κεφάλαιον καὶ τόκους $x+\frac{24x}{100}$ ἢ $\frac{124x}{100}$ δρχ.

Ὁ δεύτερος ἀνεψιός, ἂν καταθέσῃ y δρχ. πρὸς 4 % θὰ λάβῃ μετὰ $21-11=10$ ἔτη τόκον $\frac{y\cdot4\cdot10}{100}$ ἢ $\frac{40y}{100}$ καὶ ἑπομένως θὰ λάβῃ κατὰ τὴν ἐνηλικίωσίν του, κεφάλαιον καὶ τόκους $y+\frac{40y}{100}$ ἢ $\frac{140y}{100}$ δρχ.

Ὁ τρίτος ἀνεψιός, ἂν καταθέσῃ ω δρχ. πρὸς 4 % θὰ λάβῃ μετὰ $21-9=12$ ἔτη τόκον $\frac{\omega\cdot4\cdot12}{100}$ ἢ $\frac{48\omega}{100}$ καὶ ἑπομένως θὰ λάβῃ κατὰ τὴν ἐνηλικίωσίν του, κεφάλαιον καὶ τόκους $\omega+\frac{48\omega}{100}$ ἢ $\frac{148\omega}{100}$ δρχ.

Ἐπειδή, κατὰ τὸ πρόβλημα, τὰ χρήματα ποὺ θὰ λάβουν καὶ οἱ τρεῖς ἀνεψιοί, κατὰ τὴν ἐνηλικίωσίν των, θὰ εἶναι ἴσα, ἔχομεν καὶ τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{124x}{100}=\frac{140y}{100}=\frac{148\omega}{100} \quad ἢ \quad 31x=35y=37\omega \qquad (2)$$

Λύομεν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2). Παριστάνομεν τὰ ἴσα γινόμενα τῆς (2) μὲ λ καὶ ἔχομεν $31x=35y=37\omega=\lambda$

ἀπὸ τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν $x=\frac{\lambda}{31}, \quad y=\frac{\lambda}{35}, \quad \omega=\frac{\lambda}{37} \qquad (3)$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (1) τὰ x, y, ω μὲ τὰ ἴσα των καὶ ἔχομεν

$$\frac{\lambda}{31}+\frac{\lambda}{35}+\frac{\lambda}{37}=1763\,500 \text{ ἢ } 1295\lambda+1147\lambda+1085\lambda=1763\,500.40145$$

$$\text{ἢ } 3527\lambda=1763500.40145 \quad \text{ἄρα } \lambda=\frac{1763500\cdot 40145}{3527}=20072500$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (3) τὸ λ μὲ τὴν τιμήν του καὶ εὑρίσκομεν

$$x=\frac{20072500}{31}=647500, \quad y=\frac{20072500}{35}=573500, \quad \omega=\frac{20072500}{37}=542500$$

Ὥστε τὰ μερίδια τῶν ἀνεψιῶν ἦσαν 647500 δρχ., 573500 δρχ., 542500 δρχ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΛΥΣΙΝ ΜΕ ΤΡΕΙΣ Ἢ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΟΥΣ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

Α' Ὁμάς. *861.* Νὰ εὑρεθοῦν τρεῖς ἀριθμοὶ τοιοῦτοι, ὥστε ὁ πρῶτος καὶ τὸ ἥμισυ τοῦ δευτέρου, ὁ δεύτερος καὶ τὸ τρίτον τοῦ τρίτου καὶ ὁ τρίτος καὶ τὸ τέταρτον τοῦ πρώτου νὰ εἶναι πάντοτε 1000.

862. Νὰ εὑρεθοῦν τρεῖς ἀριθμοὶ τοιοῦτοι, ὥστε ὁ πρῶτος καὶ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν δύο ἄλλων νὰ εἶναι 120, ὁ δεύτερος καὶ τὸ δέκατον πέμπτον τῆς διαφορᾶς τοῦ πρώτου ἀπὸ τοῦ τρίτου νὰ ἰσοῦται μὲ 62 καὶ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν τριῶν νὰ ἰσοῦται μὲ 95.

863. Νὰ εὑρεθῇ τριψήφιος ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων εἶναι 17. Τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων εἶναι διπλάσιον τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων καὶ ὅταν ἀφαιρεθῇ ἀπ' αὐτοῦ ὁ 396 εὑρίσκομεν τὸν ἀριθμόν, τὸν προκύπτοντα δι' ἐναλλαγῆς τῶν ψηφίων του.

864. Νὰ εὑρεθῇ τριψήφιος ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ μὲν ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων εἶναι τὸ τρίτον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων, τὸ δὲ ψηφίον τῶν δεκάδων εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων. Ἂν γραφοῦν τὰ ψηφία του κατ' ἀντίστροφον τάξιν προκύπτει ἀριθμὸς κατὰ 198 μεγαλύτερος αὐτοῦ.

865. Νὰ εὑρεθῇ τριψήφιος ἀριθμός, ἐὰν γνωρίζωμεν : α) ὅτι τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων εἶναι ἴσον μὲ τὰ $^2/_5$ τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων· β) τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν δύο ἄλλων καὶ γ) ὅτι, ἐὰν προσθέσωμεν 198 εἰς τὸν ζητούμενον ἀριθμόν, λαμβάνομεν τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος προκύπτει, ἂν γραφοῦν τὰ ψηφία του κατ' ἀντίστροφον τάξιν.

866. Νὰ εὑρεθῇ τριψήφιος ἀριθμός, ἐὰν γνωρίζωμεν : α) ὅτι αὐξάνει κατὰ 180, ἐὰν ἐναλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν δύο πρώτων ψηφίων του· β) ἐλαττοῦται κατὰ 99, ὅταν ἐναλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν ἄκρων ψηφίων του καὶ γ) ἐλαττοῦται κατὰ 27, ὅταν ἐναλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν δύο τελευταίων ψηφίων του.

867. Ὁ Νεύτων ἐγεννήθη τὸν 17ον αἰῶνα καὶ ἀπέθανε τὸν 18ον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἔτος κατὰ τὸ ὁποῖον ἐγεννήθη καὶ τὸ ἔτος κατὰ τὸ ὁποῖον ἀπέθανε, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος σχηματίζεται ἀπὸ τὰ δύο τελευταῖα ψηφία τοῦ ἔτους τῆς γεννήσεώς του, αὐξανόμενος κατὰ 12, ἰσοῦται μὲ τὸ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ, ὁ ὁποῖος σχηματίζεται ἀπὸ τὰ δύο τελευταῖα ψηφία τοῦ ἔτους τοῦ θανάτου του καὶ ὅτι ὁ τελευταῖος οὗτος ἀριθμὸς (δηλ. τῶν δύο τελευταίων ψηφίων τοῦ ἔτους τοῦ θανάτου του) αὐξανόμενος κατὰ 1 εἶναι ἴσος μὲ τὰ $^2/_3$ τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ.

868. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἔτος τῆς ἀνακαλύψεως τῆς τυπογραφίας, ἐὰν γνωρίζωμεν : α) ὅτι εἶναι ἀριθμὸς τετραψήφιος· β) ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του εἶναι 14· γ) ὅτι τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων· δ) ὅτι τὸ ψηφίον τῶν χιλιάδων ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων ἀπὸ τοῦ ψηφίου τῶν ἑκατοντάδων καὶ ε) ὅτι, ἐὰν γραφοῦν τὰ ψηφία του κατ' ἀντίστροφον τάξιν προκύπτει ἀριθμὸς μεγαλύτερος κατὰ 4905. (Πανεπιστήμιον 1939)

869. Νὰ εὑρεθῇ τετραψήφιος ἀριθμός, ἐὰν γνωρίζωμεν : α) ὅτι ὁ ἀριθμὸς δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν γράψωμεν τὰ ψηφία του κατ' ἀντίστροφον τάξιν, β) ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του εἶναι 16, γ) ὅτι ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος σχηματίζεται ἀπὸ τὰ δύο τελευταῖα ψηφία του εἶναι μεγαλύτερος κατὰ 18 τοῦ ἀριθμοῦ, τὸν ὁποῖον σχηματίζουν τὰ δύο πρῶτα ψηφία του.

Β' Ὁμάς. 870. Ποσὸν 810 000 δραχμῶν νὰ μοιρασθῇ εἰς τρία πρόσωπα, ὥστε τὰ μερίδια τοῦ α' καὶ β' νὰ εἶναι ὡς 2 : 3, τοῦ δὲ β' καὶ γ' ὡς 3 : 4. Ποῖα τὰ μερίδια ;

871. Τρεῖς γυναῖκες πωλοῦν αὐγά. Ἐὰν ἡ πρώτη ἔδιδε τὸ ἕβδομον καὶ ἡ τρίτη τὸ δέκατον τρίτον τῶν ἰδικῶν των εἰς τὴν δευτέραν, θὰ εἶχον καὶ αἱ τρεῖς τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν αὐγῶν. Ἐὰν καὶ αἱ τρεῖς εἶχον ἐξ ἀρχῆς 360 αὐγά, πόσα εἶχεν ἑκάστη ;

872. Τρεῖς συνεταῖροι ἐμοίρασαν τὸ κέρδος μιᾶς ἐπιχειρήσεως· ὁ πρῶτος ἔλαβε τὸ ἥμισυ τοῦ κέρδους πλὴν τὰ $^2/_{13}$ τῶν μεριδίων, τὰ ὁποῖα εἶχον λάβει καὶ οἱ δύο ἄλλοι συνεταῖροι· ὁ δεύτερος ἔλαβε τὸ τέταρτον τοῦ κέρδους καὶ τὸ $^1/_{10}$ τῶν μεριδίων τῶν δύο ἄλλων συνεταίρων· ὁ τρίτος ἔλαβε 30 000 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μερίδιον ἑκάστου καὶ τὸ διανεμηθὲν κέρδος.

873. Ἡ ἡλικία ἑνὸς πατρὸς εἶναι κατὰ 2 ἔτη μεγαλυτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἡλικιῶν τῶν τριῶν υἱῶν του. Μετὰ 10 ἔτη ἡ ἡλικία του θὰ εἶναι διπλασία τῆς ἡλικίας τοῦ μεγαλυτέρου υἱοῦ· μετὰ 18 ἔτη θὰ εἶναι διπλασία τῆς ἡλικίας τοῦ δευτέρου υἱοῦ καὶ μετὰ 26 ἔτη θὰ εἶναι διπλασία τῆς ἡλικίας τοῦ μικροτέρου υἱοῦ. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ πραγματικαὶ ἡλικίαι τοῦ πατρὸς καὶ ἑκάστου υἱοῦ.

874. Ἡ διαφορὰ τῶν τιμῶν δύο εἰδῶν ὑφάσματος τοῦ αὐτοῦ μήκους εἶναι 1 280 000 δρχ.· 4 μέτρα τοῦ πρώτου εἴδους κοστίζουν 180 000 δρχ. περισσότερον ἀπὸ ὅσον κοστίζουν 3 μέτρα τοῦ δευτέρου· ἐνῷ 3 μέτρα τοῦ πρώτου εἴδους καὶ 4 μέτρα τοῦ δευτέρου κοστίζουν μαζὶ 760 000 δρχ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τοῦ ὑφάσματος ἑκάστου εἴδους καὶ ἡ τιμὴ τοῦ μέτρου ἑκάστου.

875. Τρία κεφάλαια Α, Β, Γ κατετέθησαν πρὸς 3 %, 3,5 % καὶ 4 % καὶ ἔδωσαν συνολικὸν τόκον, ἴσον μὲ τὸν τόκον, τὸν ὁποῖον θὰ ἔδιδον τὰ $^{11}/_{12}$ καὶ τῶν τριῶν κεφαλαίων, ἐὰν ἐτοκίζοντο πρὸς 4 %. Ἐὰν τὸ Α ἐτοκίζετο πρὸς 4 % καὶ τὸ Γ πρὸς 3,5 %, ὁ τόκος αὐτῶν μαζὶ θὰ ἠλαττοῦτο κατὰ 50 δραχμάς. Τέλος ἐὰν τὸ Β ἐχωρίζετο εἰς δύο μέρη, τοιαῦτα ὥστε τοκιζόμενα πρὸς 3 % καὶ 2 % ἀντιστοίχως, νὰ δώσουν ἴσους τόκους, ὁ ἐτήσιος τόκος τοῦ Β θὰ ἠλαττοῦτο κατὰ 220 δραχμάς. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ τρία κεφάλαια.

Γ' Ὁμάς. 876. Τρεῖς ἄνθρωποι εἶχον ποσόν τι χρημάτων ἕκαστος καὶ συνεφώνησαν κατὰ σειρὰν νὰ διπλασιάζῃ καθεὶς τὰ χρήματα τῶν δύο ἄλλων. Εἰς τὸ τέλος εὑρέθη ἕκαστος μὲ 16000 δρχ. Τί ποσὸν εἶχεν ἕκαστος κατ' ἀρχάς;

877. Τρεῖς φίλοι Α, Β, Γ συζητοῦν διὰ τὴν ἡλικίαν των. Ὁ Α λέγει εἰς τὸν Β: «ὅταν εἶχον τὴν ἡλικίαν σας, ὁ Γ ἦτο 10 ἐτῶν» Ἀλλὰ ὁ Β ἀπαντᾷ: «Ὅταν θὰ ἔχω τὴν ἡλικίαν σας, ὁ Γ θὰ εἶναι 26 ἐτῶν». Ὁ Γ συμπεραίνει: «ὅταν ἐγεννήθην τὸ ἄθροισμα τῶν ἡλικιῶν σας ἦτο διπλάσιον τῆς σημερινῆς ἡλικίας μου». Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἡλικίαι τῶν Α, Β, Γ.

878. Δύο στρατιαὶ Α καὶ Β πολεμοῦν ἡ μία ἐναντίον τῆς ἄλλης. Κατὰ τὴν πρώτην μάχην ἡ ὀλιγαριθμοτέρα στρατιὰ χάνει τὸ $^{1}/_{6}$ καὶ ἡ ἄλλη Β τὸ $^{1}/_{7}$ τῆς δυνάμεώς της. Κατὰ μίαν δευτέραν μάχην αἱ ἀπώλειαι ἦσαν ἴσαι. Εἰς τὸ τέλος τοῦ πολέμου εὑρέθη, ὅτι ἡ στρατιὰ Α εἶχεν ἀπωλέσει ἐν ὅλῳ 59 000 ἄνδρας καὶ ἡ Β 61 000 καὶ ὅτι ἡ στρατιὰ Β ἦτο τὴν στιγμὴν ἐκείνην διπλασία τῆς στρατιᾶς Α. Πόση ἦτο ἡ δύναμις ἑκάστης στρατιᾶς κατὰ τὴν ἔναρξιν τοῦ πολέμου;

879. Δύο δοχεῖα Α καὶ Β, τοῦ αὐτοῦ βάρους, περιέχουν διαφόρους ποσότητας ὕδατος. Τὸ συνολικὸν βάρος τοῦ Α εἶναι τὰ $^{4}/_{5}$ τοῦ βάρους τοῦ Β. Ἐὰν χύσωμεν τὸ περιεχόμενον τοῦ Β εἰς τὸ Α, τότε τὸ Α θὰ εἶναι 8 φορὰς βαρύτερον τοῦ κενοῦ δοχείου Β. Ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ βάρος τοῦ ὕδατος, ποὺ περιέχεται εἰς τὸ Β ὑπερβαίνει κατὰ 50 γραμμάρια τὸ βάρος τοῦ ὕδατος τοῦ Α, νὰ εὑρεθῇ τὸ βάρος ἑκάστου δοχείου καὶ τὸ βάρος τοῦ ὕδατος, τὸ ὁποῖον περιείχετο ἀρχικῶς εἰς αὐτά.

880. Τρεῖς κρουνοὶ Α, Β, Γ τροφοδοτοῦν μίαν δεξαμενήν. Οἱ Β καὶ Γ δύνανται νὰ γεμίσουν τὴν δεξαμενὴν εἰς α ὥρας· οἱ Γ καὶ Α τὴν γεμίζουν εἰς β ὥρας, οἱ Α καὶ Β τὴν γεμίζουν εἰς γ ὥρας. Ἐὰν ἀνοιχθοῦν συγχρόνως καὶ οἱ τρεῖς κρουνοί, εἰς πόσον χρόνον θὰ γεμίσῃ ἡ δεξαμενή;

881. Τρεῖς κρουνοὶ Α, Β, Γ, ἐκ τῶν ὁποίων οἱ μικρότεροι Β καὶ Γ παρέχουν τὴν αὐτὴν ποσότητα ὕδατος, ἀνοίγονται συγχρόνως διὰ νὰ γεμίσουν μίαν δεξαμενήν. Νὰ εὑρεθῇ εἰς πόσον χρόνον θὰ γεμίσῃ ἡ δεξαμενή, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι: 1ον ἐὰν ἐκλείετο ὁ ἕνας ἐκ τῶν κρουνῶν Β, Γ τὴν στιγμήν, καθ' ἣν ἡ δεξαμενὴ εἶχε γεμίσει κατὰ τὸ ἥμισυ, θὰ ηὔξανε ἡ διάρκεια τῆς πληρώσεως τῆς δεξαμενῆς κατὰ 1 ὥραν. 2ον. ἐὰν ἐκλείετο καὶ ὁ ἄλλος ἐκ τῶν κρουνῶν Β, Γ τὴν στιγμήν, καθ' ἣν ἡ δεξαμενὴ εἶχε γεμίσει κατὰ τὰ $^{3}/_{4}$, ἡ διάρκεια τῆς πληρώσεως τῆς δεξαμενῆς θὰ ηὔξανε ἀκόμη κατὰ μίαν ὥραν;

Δ' Ὁμάς. 882. Χρυσοχόος ἔχει τρία κράματα ἀργύρου καὶ χαλκοῦ, βάρους 50 γραμ., 30 γραμ. καὶ 20 γραμ. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ τίτλοι τῶν κραμάτων αὐτῶν, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι, ἐὰν συντήξῃ τὸ πρῶτον μὲ τὸ δεύτερον, θὰ λάβῃ κρᾶμα τίτλου 0,750, τὸ πρῶτον μὲ τὸ τρίτον θὰ λάβῃ κρᾶμα τίτλου 0,780, καὶ ἐὰν συντήξῃ τὸ δεύτερον μὲ τὸ τρίτον θὰ λάβῃ κρᾶμα τίτλου 0,852.

883. Δύο κράματα, ἀργύρου καὶ χαλκοῦ, ἔχουν τὸν αὐτὸν τίτλον. Συντήκομεν ἕκαστον ἐξ αὐτῶν τῶν κραμάτων μὲ μίαν ποσότητα χαλκοῦ ἴσην μὲ ἐκείνην, ποὺ περιέχεται εἰς τὸ κρᾶμα. Λαμβάνομεν οὕτω δύο νέα κράματα, τῶν ὁποίων τὰ βάρη ἔχουν λόγον 1 : 2 καὶ οἱ τίτλοι των ἔχουν λόγον 2 : 3. Νὰ εὑρεθῇ ὁ κοινὸς τίτλος τῶν δύο πρώτων κραμάτων.

884. Χρυσοχόος ἔχει τρία κράματα, τὰ ὁποῖα συνίστανται :

Τὸ πρῶτον	ἀπὸ 20 γρ. χρυσοῦ,	30 γρ. ἀργύρου	καὶ 40 γρ. χαλκοῦ	
Τὸ δεύτερον	» 30	» 40	» 50	»
Τὸ τρίτον	» 40	» 50	» 90	»

Νὰ εὑρεθῇ πόσον βάρος πρέπει νὰ λάβῃ ἀπὸ ἕκαστον τῶν τριῶν κραμάτων, διὰ νὰ σχηματίσῃ ἕνα ἄλλο, τὸ ὁποῖον νὰ περιέχῃ 34 γραμ. χρυσοῦ, 46 ἀργύρου καὶ 67 γραμ. χαλκοῦ.

885. Χρυσοχόος ἔχει δύο κράμματα, Α καὶ Β, ἀργύρου καὶ χαλκοῦ. Ἐὰν προσθέσῃ 100 γραμ. χαλκοῦ εἰς τὸ Α καὶ 200 γραμ. χαλκοῦ εἰς τὸ Β, τὰ δύο κράματα θὰ ἔχουν ἴσα βάρη. Ἐὰν προσθέσῃ 200 γραμ. χαλκοῦ εἰς τὸ Α καὶ 100 γραμ. χαλκοῦ εἰς τὸ Β, τὰ δύο κράματα θὰ ἔχουν τὸν αὐτὸν τίτλον. Τέλος ἐὰν συντήξῃ τὸ ἥμισυ τοῦ Α μὲ τὸ τρίτον τοῦ Β, θὰ λάβῃ ἕνα κράμα τίτλου 0,875 καὶ βάρους 800 γραμ. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ βάρη καὶ οἱ τίτλοι τῶν κραμάτων Α καὶ Β.

886. Οἰνοπώλης ἐγέμισε ἕνα βαρέλιον οἴνου, χωρητικότητος 228 ὀκ., μὲ τρία εἴδη οἴνου, τῶν 2000 δρχ., τῶν 3000 δρχ. καὶ τῶν 3200 δρχ. κατ' ὀκᾶν καὶ μὲ μίαν ὡρισμένην ποσότητα ὕδατος. Πωλεῖ τὸν οἶνον τοῦ βαρελίου αὐτοῦ πρὸς 2800 δρχ. τὴν ὀκᾶν καὶ κερδίζει 400 δρχ. κατ' ὀκᾶν. Νὰ εὑρεθῇ πόσας ὀκάδας ὕδατος καὶ πόσας ὀκάδας ἐξ ἑκάστου οἴνου ἔθεσεν εἰς τὸ βαρέλιον, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ περιεχομένη εἰς τὸ πρῶτον βαρέλιον ποσότης οἴνου εἶναι πενταπλασία ἐκείνης τοῦ ὕδατος καὶ ὅτι ἡ ποσότης τοῦ οἴνου τῶν 2000 δρχ. εἶναι διπλασία ἐκείνης τῶν 3000 δραχμῶν.

Ε' Ὁμάς. Κινήσεως. *887.* Μία λεωφόρος, ἡ ὁποία συνδέει δύο πόλεις Α καὶ Β, παρουσιάζει ὁριζόντια, ἀνωφερῆ καὶ κατωφερῆ τμήματα. Ἡ ἀπόστασις ΑΒ εἶναι 78 χιλιόμετρα καὶ τὸ κατωφερικὸν τμῆμα αὐτῆς, ἐκ τῆς Α πρὸς τὴν Β, εἶναι ἴσον μὲ τὰ $^7/_{10}$ τοῦ ἀνωφερικοῦ τμήματος αὐτῆς. Ἕνας ποδηλάτης, ὁ ὁποῖος ἔχει ταχύτητα 25 χιλιομέτρων καθ' ὥραν ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου τμήματος τῆς λεωφόρου, 15 χιλιόμετρα ἐπὶ τοῦ ἀνωφερικοῦ καὶ 30 χιλιόμετρα ἐπὶ τοῦ κατωφερικοῦ, μεταβαίνει ἐκ τῆς πόλεως Α εἰς τὴν Β καὶ ἐπιστρέφει ἐκ τῆς Β πρὸς τὴν Α. Ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν χρόνων, τοὺς ὁποίους χρειάζεται ὁ ποδηλάτης, διὰ νὰ κάμῃ τὰς δύο αὐτὰς διαδρομάς, εἶναι 24 λεπτῶν τῆς ὥρας, ζητεῖται νὰ εὑρεθοῦν: 1ον τὰ μήκη τῶν ὁριζοντίων, ἀνωφερικῶν καὶ κατωφερικῶν τμημάτων τῆς λεωφόρου ἐκ τῆς Α πρός τὴν Β· καὶ 2ον οἱ χρόνοι τοὺς ὁποίους ἐχρειάσθη διὰ νὰ μεταβῇ ἀπὸ τὴν Α πρὸς τὴν Β καὶ νὰ ἐπιστρέψῃ ἐκ τῆς Β πρὸς τὴν Α.

888. Ἱππεὺς καὶ πεζοπόρος ἀναχωροῦν συγχρόνως ἐκ τῆς αὐτῆς πόλεως Α καὶ διευθύνονται πρὸς τὴν πόλιν Β. Ὁ ἱππεὺς φθάσας εἰς τὴν πόλιν Β, 50 λεπτὰ τῆς ὥρας πρὸ τοῦ πεζοπόρου, ἐπιστρέφει ἀμέσως εἰς τὴν πόλιν Α καὶ διασταυροῦται μὲ τὸν πεζοπόρον εἰς ἀπόστασιν 2000 μέτρων ἀπὸ τὴν Β. Ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ὁ ἱππεὺς ἐχρειάσθη ἐν ὅλῳ 100 λεπτὰ τῆς ὥρας διὰ τὴν μετάβασιν καὶ ἐπιστροφήν του, νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις ΑΒ τῶν δύο πόλεων καὶ αἱ ταχύτητες (εἰς μέτρα—λεπτὸν) τοῦ ἱππέως καὶ τοῦ πεζοπόρου.

889. Ἁμαξοστοιχία Α, ἔχουσα ταχύτητα ν, ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ σημείου, ἐκ τοῦ ὁποίου ἀνεχώρησε πρότερον ἄλλη ἁμαξοστοιχία Β μὲ ταχύτητα ν′. Ὑπελογίσθη δὲ ὁ μεταξὺ τῶν ἀναχωρήσεων τούτων χρόνος κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε νὰ φθάσουν συγχρόνως αἱ ἁμαξοστοιχίαι εἰς τὸ τέρμα. Ἡ ἁμαξοστοιχία Β διήνυσε κατ' ἀρχὰς τὰ $^2/_3$ τοῦ δρόμου της μὲ τὴν ταχύτητά της ν′ καὶ ἔπειτα ἠλάττωσε αὐτὴν κατὰ τὸ ἥμισυ καὶ οὕτω ἡ συνάντησις τῶν δύο ἁμαξοστοιχιῶν ἔγινε δ χλμ. πρὸ τοῦ τέρματος. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς διαδρομῆς. (ἐφαρμογὴ ν=40, ν′=24, δ=15 χλμ.).

890. Δύο δρομεῖς διατρέχουν ἕνα κυκλικὸν στῖβον, μὲ ὡρισμένην ταχύτητα ἕκαστος. Ἀναχωροῦν συγχρόνως ἐκ δύο σημείων Α καὶ Β, ἐκ διαμέτρου ἀντιθέτων, καὶ διευθυνόμενοι ἀντιθέτως διασταυροῦνται διὰ πρώτην φορὰν εἰς ἕνα σημεῖον Μ τοῦ στίβου, τὸ ὁποῖον ἀπέχει 120 μέτρα ἀπὸ τὸ Β, ἔπειτα διὰ δευτέραν φορὰν εἰς ἕνα σημεῖον Σ, τὸ ὁποῖον ἀπέχει 60 μέτρ. ἀπὸ τὸ Α. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τοῦ κυκλικοῦ στίβου. Ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ἐμεσολάβησαν 60 δευτερόλεπτα μεταξὺ τῶν δύο διασταυρώσεων, ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἡ ταχύτης ἑκάστου δρομέως εἰς μέτρα-δευτερόλεπτα.

891. Δύο αὐτοκίνητα ἀναχωροῦν ἐκ δύο πόλεων Α καὶ Β καὶ διευθύνονται πρὸς συνάντησίν των. Εἰς τὸ σημεῖον τῆς συναντήσεώς των Σ ὑπελόγισαν, ὅτι τὸ πρῶτον εἶχε διανύσει 30 χιλιόμετρα περισσότερον ἀπὸ τὸ δεύτερον καὶ ὅτι, ἐὰν ἐξηκολούθουν νὰ κινοῦνται μὲ τὴν ταχύτητα τῆς πορείας των, θὰ ἐχρειάζετο τὸ πρῶτον 2 ὥρ. 15 λ. τῆς ὥρας διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὴν πόλιν Β καὶ τὸ δεύτερον 4 ὥρ. διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὴν Α. Νὰ εὑρεθῇ: 1ον. μετὰ πόσον χρόνον ἀπὸ τῆς ἐκκινήσεώς των συνηντήθησαν. 2ον. ἡ ταχύτης εἰς χιλιόμετρα—ὥρα) ἑκάστου αὐτοκινήτου. 3ον. ἡ ἀπόστασις ΑΒ.

892. Ἐκ δύο σημείων ἀπεχόντων 1500 μέτρα ἀναχωροῦν συγχρόνως δύο κινητά, ὁμαλῶς καὶ ἀντιθέτως κινούμενα. Ὅταν συνηντήθησαν, τὸ πρῶτον εἶχε διατρέξει 300 μέτρα περισσότερον τοῦ ἄλλου. Τίς ὁ λόγος τῶν ταχυτήτων;

893. Δύο ἁμαξοστοιχίαι ἀναχωροῦν συγχρόνως ἐκ δύο πόλεων Α καὶ Β καὶ διευθύνονται πρὸς συνάντησίν των. Ἡ ἀπόστασις τῶν πόλεων εἶναι 360 χιλιόμετρα. Μετὰ τὴν διασταύρωσίν των εἰς τὸ σημεῖον Σ, ἡ πρώτη ἐχρειάσθη 2 $^1/_2$ ὥρας διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὴν πόλιν Β καὶ ἡ δευτέρα 10 ὥρας διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὴν πόλιν Α. Νὰ εὑρεθῇ εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς πόλεως Α διεσταυρώθησαν αἱ ἁμαξοστοιχίαι καὶ ποῖαι ἦσαν αἱ ταχύτητές των (εἰς χιλιόμετρα—ὥρα).

894. Δύο ἁμαξοστοιχίαι ἀναχωροῦν ἐκ δύο πόλεων Α καὶ Β καὶ διευθύνονται πρὸς συνάντησίν των. Μετὰ τὴν διασταύρωσίν των εἰς τὸ σημεῖον Σ, ἡ πρώτη ἁμαξοστοιχία ἐχρειάσθη 1 ὥρ. 52 λ. καὶ ἡ δευτέρα 2 ὥρ. 55 λ. διὰ νὰ τελειώσουν τὴν διαδρομήν των. Νὰ εὑρεθῇ μετὰ πόσον χρόνον ἀπὸ τῆς ἐκκινήσεώς των συνηντήθησαν εἰς τὸ σημεῖον Σ καὶ ποία εἶναι ἡ ἀπόστασις ΑΒ τῶν δύο πόλεων, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι αἱ ταχύτητές των διαφέρουν 12 χιλιόμετρα.

895. Ἱππεὺς ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ σημείου Α μιᾶς εὐθείας ΑΒ συγχρόνως μὲ δύο πεζούς, οἱ ὁποῖοι ἀναχωροῦν ἐκ τοῦ σημείου Β κατ' ἀντιθέτους διευθύνσεις ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ. Ὁ ἱππεὺς συναντᾷ τὸν πρῶτον εἰς ἕνα σημεῖον Σ καὶ τὸν δεύτερον εἰς τὸ Σ'. Ζητεῖται νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος ΑΒ, ἐὰν γνωρίζωμεν: 1ον ὅτι οἱ δύο πεζοὶ ἔχουν τὴν αὐτὴν ταχύτητα καὶ ὅτι ὁ ἱππεὺς ἔχει τριπλασίαν ταχύτητα τῶν πεζῶν. 2ον ὅτι ἡ ἀπόστασις εἶναι ἴση μὲ 24 χιλιόμετρα·

896. Πεζοπόρος ἀναχωρεῖ ἐκ τῆς πόλεως Α καὶ διευθύνεται εἰς τὴν πόλιν Β μὲ ταχύτητα ν χλμ. καθ' ὥραν. Μετὰ ἕνα τέταρτον τῆς ὥρας ἀναχωρεῖ ἐκ τῆς αὐτῆς πόλεως Α καὶ διευθύνεται πρὸς τὴν Β, ἕνας ποδηλάτης, ὁ ὁποῖος συνήντησε τὸν πεζοπόρον εἰς ἀπόστασιν ΑΣ=α χλμ. Ὁ ποδηλάτης μετὰ τὴν ἄφιξίν του εἰς τὴν πόλιν Β, καὶ παραμονὴν ἐκεῖ ἐπὶ ἡμίσειαν ὥραν, ἐπιστρέφει εἰς τὴν πόλιν Α καὶ συναντᾷ ἐκ δευτέρου τὸν πεζοπόρον εἰς τὸ σημεῖον Σ', τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἀπὸ τοῦ Σ ἀπόστασιν ΣΣ'=β χλμ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ταχύτης ν' τοῦ ποδηλάτου καὶ ἡ ἀπόστασις ΣΒ=x.

897. Δύο φίλοι ὁ Πέτρος καὶ ὁ Παῦλος βαδίζουν, ὁ ἕνας παραπλεύρως τοῦ ἄλλου, ἐπὶ μιᾶς ὁδοῦ ΑΒ, ἡ ὁποία συνδέει δύο συνοικισμοὺς Α καὶ Β. Εἰς ἕνα ὡρισμένον σημεῖον Σ τῆς ὁδοῦ ΑΒ, τοὺς ἔφθασε ἕνα τράμ, τὸ ὁποῖον ἐκτελεῖ τὴν συγκοινωνίαν τῶν δύο συνοικισμῶν. Ἀμέσως ὁ Πέτρος ἐπιστρέφει αἰφνιδίως πρὸς τὸν συνοικισμὸν Α, ὁ δὲ Παῦλος συνεχίζει τὸν δρόμον του πεζῇ πρὸς τὴν διεύθυνσιν Β. Τὸ τρὰμ φθάνει εἰς τὸν συνοικισμὸν Β, παραμένει ἐκεῖ ἐπὶ ν λεπτὰ τῆς ὥρας καὶ ἔπειτα ἐπιστρέφει εἰς τὸν Α. Συναντᾷ εἰς τὸ σημεῖον Σ' τὸν Παῦλον, ὁ ὁποῖος ἀνέρχεται ἐπ' αὐτοῦ καὶ φθάνει εἰς τὸν Α συγχρόνως μὲ τὸν φίλον του.

Ἐὰν αἱ ταχύτητες τῶν πεζοπόρων καὶ τρὰμ εἶναι ἀντιστοίχως υ καὶ υ' εἰς (μέτρα—ὥρα) καὶ δ ἡ ἀπόστασις ΑΒ εἰς μέτρα, νὰ προσδιορισθοῦν τὰ σημεῖα Σ καὶ Σ' τῆς ὁδοῦ.

898. Τρεῖς ἁμαξοστοιχίαι Α', Β', Γ' ἀναχωροῦν τὴν μεσημβρίαν ἀντιστοίχως ἐκ τῶν σταθμῶν Α, Β, Γ. Ὁ σταθμὸς Β κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Γ καὶ εἶναι ΑΒ=64 χλμ. καὶ ΒΓ=234 χλμ. Αἱ ἁμαξοστοιχίαι, αἱ ὁποῖαι ἀνεχώρησαν ἐκ τῶν σταθμῶν Α καὶ Β διευθύνονται πρὸς τὸν Γ, ἡ δὲ τρίτη ἁμαξοστοιχία διευθύνεται πρὸς τὸν σταθμὸν Α. Ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι αἱ ταχύτητές των εἶναι 32 χλμ., 40 χλμ., 48 χλμ. τὴν ὥραν ἀντιστοίχως, νὰ εὑρεθῇ: 1ον μετὰ πόσον χρόνον ἡ ἁμαξοστοιχία, ἡ ὁποία ἀνεχώρησεν ἐκ τοῦ σταθμοῦ Β θὰ ἀπέχῃ ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὰς ἄλλας δύο ἁμαξοστοιχίας καὶ 2ον πόσον θὰ ἀπέχῃ ἀπ' αὐτῶν.

899. Δύο ἁμαξοστοιχίαι ἀναχωροῦν ἐκ Πειραιῶς καὶ διευθύνονται πρὸς τὰς Καλάμας. Ἡ πρώτη, Α, ἀνεχώρησε τὴν 8 ὥρ. πρωϊνὴν μὲ μίαν ταχύτητα 51 χλμ. καθ' ὥραν καὶ ἡ δευτέρα, Β, τὴν 8 ὥρ. 20 λ. πρωϊνὴν μὲ μίαν ταχύτητα 45 χλμ. καθ' ὥραν. Ἡ ἀπόστασις τῶν Ἀθηνῶν—Καλαμῶν εἶναι 237 χλμ. Μία τρίτη ἁμαξοστοιχία, Γ, ἀνεχώρησε τὴν 8 ὥρ. πρωϊνὴν ἐκ Καμαμῶν καὶ διευθύνεται πρὸς τὰς Ἀθήνας μὲ ταχύτητα 54 χλμ. καθ' ὥραν. Ζητεῖται 1ον. Μετὰ πόσον χρόνον ἡ ἁμαξοστοιχία Α θὰ ἀπέχῃ ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὰς Β καὶ Γ. 2ον. Πόσον θὰ ἀπέχουν ἀπὸ τῶν Ἀθηνῶν αἱ τρεῖς ἁμαξοστοιχίαι κατ' ἐκείνην τὴν στιγμήν.

900. Δύο κινητὰ κινοῦνται πρὸ ἀορίστου χρόνου ἐπὶ εὐθείας γραμμῆς κατὰ τὴν διεύθυνσιν x′x. Τὸ πρῶτον κινητὸν διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Α, t ὥρας πρὶν τὸ δεύτερον κινητὸν διέλθῃ διὰ τοῦ σημείου Β. Ζητεῖται τὸ σημεῖον Σ τῆς συναντήσεώς των, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ ἀπόστασις ΑΒ εἶναι ἴση μὲ τὸ δ καὶ ὅτι αἱ ταχύτητές των εἶναι v καὶ v .

ΣΤ′ Ὁμάς. Γεωμετρίας. 901. Τρεῖς κύκλοι ἐφάπτονται μεταξύ των ἐξωτερικῶς. Πόσαι εἶναι αἱ ἀκτῖνες των, ἐὰν αἱ ἀποστάσεις τῶν κέντρων των εἶναι α, β, γ μέτρα.

902. Αἱ πλευραὶ τριγώνου εἶναι 8 μέτρα, 10 μέτρα, 12 μέτρα. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῶν πλευρῶν ὁμοίου πρὸς αὐτὸ τριγώνου ἔχοντος περίμετρον 60 μέτρα ;

903. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν α, β, γ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζομεν τρία ὀρθογώνια ὅμοια καὶ τοιαῦτα, ὥστε τὸ ὀρθογώνιον τὸ κατασκευαζόμενον ἐπὶ τῆς πλευρᾶς α νὰ ὑπερβαίνῃ (κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν) κατὰ μίαν ποσότητα k^2 τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ὕψη τῶν τριῶν ὀρθογωνίων.

904. Δίδεται ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ πλευρᾶς α. Νὰ ἀχθῇ μία εὐθεῖα, ἡ ὁποία νὰ συναντᾷ τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε καὶ τὴν προέκτασιν τῆς ΒΓ εἰς τὸ Ζ καὶ τοιαύτη, ὥστε τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων ΑΔΕ, ΓΕΖ καὶ τοῦ τετραπλεύρου ΒΓΕΔ νὰ εἶναι ἰσοδύναμα.

905. Τριγώνου γνωρίζομεν δύο πλευρὰς α καὶ β καὶ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ὑψῶν, τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν εἰς τάς πλευρὰς αὐτὰς εἶναι ἴσον μὲ τὸ τρίτον ὕψος. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τρίτη πλευρά τοῦ τριγώνου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤ′

ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΟΣ ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ
ΑΚΕΡΑΙΟΙ ΛΥΣΕΙΣ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ $\alpha x+\beta y=\gamma$

327. Ἀπροσδιόριστος ἀνάλυσις.

Εἰς τὴν § 278 εἴδομεν, ὅτι ἡ ἐξίσωσις $\alpha x+\beta y=\gamma$ (1) ἔχει ἄπειρα ζεύγη λύσεων, διότι εἰς κάθε τιμὴν τοῦ y, ἀκεραίαν ἢ κλασματικήν, ἀντιστοιχεῖ καὶ μία ὡρισμένη τιμὴ τοῦ x.

Πολλάκις ὅμως εὑρισκόμεθα εἰς τὴν ἀνάγκην, ἐξ ὅλων τῶν ἀπείρων ζευγῶν λύσεων τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς, νὰ λάβωμεν μόνον τὰς **ἀκεραίας καὶ θετικὰς** τιμὰς τῶν ἀγνώστων x καὶ y.

Ἡ **ἀπροσδιόριστος ἀνάλυσις** τοῦ πρώτου βαθμοῦ ἔχει ὡς σκοπὸν νὰ ἀναζητῇ τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς ἐξισώσεως (1).

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς ἐξισώσεως $\alpha x+\beta y=\gamma$, πρέπει νὰ γνωρίζωμεν τὰ κάτωθι θεωρήματα :

328. Θεώρημα I. ***Ἐὰν οἱ ἀκέραιοι συντελεσταὶ α καὶ β τῶν x καὶ y τῆς ἐξισώσεως $\alpha x+\beta y=\gamma$ ἔχουν κοινὸν παράγοντα, τὸν ὁποῖον δὲν ἔχει ὁ γ, ἡ ἐξίσωσις δὲν ἔχει καμμίαν ἀκεραίαν λύσιν.***

Ἐὰν οἱ x καὶ y εἶχον ἀκεραίαν τιμήν, τότε τὰ αx καὶ βy θὰ ἦσαν ἀκέραιοι ἀριθμοί, ἐφ' ὅσον καὶ οἱ συντελεσταὶ α καὶ β εἶναι ἀκέραιοι. Κάθε κοινὸς διαιρέτης τῶν α καὶ β, π.χ. ὁ δ, ὡς διαιρῶν τὸν α καὶ β θὰ διαιρῇ καὶ τὰ πολλαπλάσια αὐτῶν αx καὶ βy καὶ ἐπομένως καὶ τὸ ἄθροισμά των αx+βy ἢ τὸ ἴσον του γ, ὅπερ ἄτοπον· διότι ἐξ ὑποθέσεως ὁ γ δὲν διαιρεῖται διὰ δ. Ἡ ἐξίσωσις λοιπὸν αx+βy=γ δὲν δύναται νὰ ἔχῃ ἀκεραίαν λύσιν.

Παρατήρησις. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐξάγεται, ὅτι, ἐάν, μετὰ τὴν διαίρεσιν καὶ τῶν δύο μελῶν τῆς ἐξισώσεως αx+βy=γ, διὰ τῶν κοινῶν παραγόντων τῶν α, β, γ, οἱ συντελεσταὶ τῶν x καὶ y δὲν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἡ ἐξίσωσις δὲν περιέχει καμμίαν ἀκεραίαν λύσιν.

329. **Θεώρημα II.** ***Ἐὰν οἱ συντελεσταὶ α καὶ β τῶν x καὶ y τῆς ἐξισώσεως αx+βy=γ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἡ ἐξίσωσις ἔχει μίαν ἀκεραίαν λύσιν.***

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν αx+βy=γ ὡς πρὸς x, ἔχομεν $x = \frac{\gamma-\beta y}{\alpha}$

Ἐὰν δώσωμεν εἰς τὸν y τὰς α διαδοχικὰς τιμὰς

$$0, 1, 2, 3 \ldots (\alpha-1)$$

καὶ ἐκτελέσωμεν κάθε φορὰν τὴν διαίρεσιν τοῦ (γ—βy) διὰ τοῦ α εἰς τρόπον, ὥστε τὸ πηλίκον νὰ εἶναι πάντοτε θετικόν, τὰ δυνατὰ ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων θὰ εἶναι οἱ ἀριθμοὶ

$$0, 1, 2, 3 \ldots (\alpha-1).$$

Τὰ ὑπόλοιπα αὐτά, ποὺ θὰ λάβωμεν, θὰ εἶναι διάφορα μεταξύ των· διότι ἂν δώσωμεν εἰς τὸν y δύο διαφόρους τιμὰς μ καὶ ν, μικροτέρας τοῦ α καὶ παραστήσωμεν μὲ π καὶ π' τὰ ἀντίστοιχα πηλίκα τῶν γ—βμ καὶ γ—βν διὰ τοῦ α καὶ ὑποθέσωμεν, ὅτι τὰ ἀντίστοιχα ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων εἶναι ἴσα μὲ υ, θὰ ἔχωμεν τὰς ἰσότητας·

$$\gamma-\beta\mu=\alpha\pi+\upsilon \quad (1), \qquad \gamma-\beta\nu=\alpha\pi'+\upsilon \quad (2)$$

Ἀφαιροῦντες τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2) κατὰ μέλη ἔχομεν

$$\beta(\nu-\mu)=\alpha(\pi-\pi').$$

Ἀλλὰ τότε ὁ α, ὡς διαιρῶν τὸ α(π—π'), ὡς πολλαπλάσιόν του, θὰ διαιρῇ καὶ τὸ ἴσον αὐτοῦ β(ν—μ) καὶ ἐπειδὴ ὁ α εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν β, ἐξ ὑποθέσεως, θὰ διαιρῇ τὸν ἄλλον παράγοντα (ν—μ) ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἄτοπον, διότι ἡ διαφορὰ (ν—μ) εἶναι μικροτέρα τοῦ α, ἐφ' ὅσον οἱ ἀριθμοὶ ν καὶ μ ἐλήφθησαν ἐξ ὑποθέσεως μικρότεροι τοῦ α

Εἰς τὸ ἄτοπον αὐτὸ ἐπέσαμεν, διότι ὑποθέσαμεν, ὅτι τὰ ὑπόλοιπα εἶναι ἴσα.

Τὰ ὑπόλοιπα λοιπόν, ποὺ θὰ λάβωμεν, θὰ εἶναι ὅλα διάφορα καὶ κατὰ συνέπειαν ἕνα ἐξ αὐτῶν θὰ εἶναι μηδέν· ἐπομένως ὑπάρχει μία ἀκεραία τιμὴ τοῦ y μικροτέρα τοῦ α, ἡ ὁποία καθιστᾷ καὶ τὸν x ἀκέραιον.

330. **Θεώρημα III.** ***Ὅταν γνωρίζωμεν μίαν ἀκεραίαν λύσιν τῆς ἐξισώσεως αx+βy=γ (1) δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἀπειρίαν τοιούτων λύσεων.***

Ἔστω, ὅτι οἱ συντελεσταὶ α καὶ β τῆς (1) εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· τότε ἡ ἐξίσωσις (1) ἔχει μίαν ἀκεραίαν λύσιν, ὅπως ἐδείξαμεν εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα καὶ ἔστω ὅτι $x=x_0$ καὶ $y=y_0$. Θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις (1) ἔχει ἀπειρίαν λύσεων.

Ἐπειδὴ $x=x_0$ καὶ $y=y_0$ ἡ (1) γράφεται $\alpha x_0+\beta y_0=\gamma$ (2).

Ἀφαιροῦντες τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη ἔχομεν

$$\alpha(x-x_0)+\beta(y-y_0)=0 \quad ἢ \quad \alpha(x-x_0)=-\beta(y-y_0) \tag{3}$$

ἡ ὁποία εἶναι προφανῶς ἰσοδύναμος μὲ τὴν (1).

Ἐκ τῆς (3) ἔχομεν $$x-x_0=-\frac{\beta(y-y_0)}{\alpha} \tag{4}$$

Διὰ νὰ ἀντιστοιχῇ εἰς μίαν ἀκεραίαν τιμὴν y μία ἀκεραία τιμὴ τοῦ x, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ὁ α νὰ διαιρῇ τὸ γινόμενον $\beta(y-y_0)$. Ἀλλὰ ἐπειδὴ ὁ α δὲν δύναται νὰ διαιρῇ τὸν β, ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι πρῶτος πρὸς αὐτόν, πρέπει νὰ διαιρῇ τὸν ἄλλον παράγοντα $(y-y_0)$.

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ λ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ $(y-y_0)$ διὰ τοῦ α, ἤτοι ἂν θέσωμεν $$\frac{y-y_0}{\alpha}=\lambda \tag{5}$$

(ὅπου λ παριστάνει οἱονδήποτε ἀκέραιον ἀριθμὸν θετικὸν ἢ ἀρνητικὸν θὰ ἔχωμεν: ἐκ μὲν τῆς (4)

$$x-x_0=-\beta\lambda \quad ἢ \quad \boxed{\mathbf{x=x_0-\beta\lambda}}$$

ἐκ δὲ τῆς (5) $$y-y_0=\alpha\lambda \quad ἢ \quad \boxed{\mathbf{y=y_0+\alpha\lambda}} \tag{6}$$

Ἐπειδὴ δὲ ὁ λ δύναται νὰ εἶναι, ἀδιαφόρως, θετικὸς ἢ ἀρνητικὸς οἱ τύποι (6) δύναται νὰ γραφοῦν καὶ ὡς ἑξῆς

$$\boxed{\mathbf{x=x_0+\beta\lambda}} \qquad \boxed{\mathbf{y=y_0-\alpha\lambda}} \tag{7}$$

Ἐκ τῶν τύπων (6) ἢ (7) συμπεραίνομεν, ὅτι ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις (1) ἔχει ἀπειρίαν λύσεων.

Ὥστε, ὅταν γνωρίζωμεν μίαν ἀκεραίαν λύσιν, $x=x_0$, $y=y_0$, τῆς ἐξισώσεως $\alpha x+\beta y=\gamma$, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ x, ἂν προσθέσωμεν εἰς τὴν γνωστὴν τιμὴν τοῦ x τὸ γινόμενον τοῦ λ ἐπὶ τὸν συντελεστὴν τοῦ y, ὁ ὁποῖος λαμβάνεται μὲ τὸ σημεῖον, ποὺ ἔχει (ἢ μὲ ἀντίθετον σημεῖον), τὰς δὲ τιμὰς τοῦ y εὑρίσκομεν, ἂν προσθέσωμεν εἰς τὴν γνωστὴν τιμὴν τοῦ y τὸ γινόμενον τοῦ λ ἐπὶ τὸν συντελεστὴν τοῦ x, ὁ ὁποῖος λαμβάνεται μὲ σημεῖον ἀντίθετον (ἢ μὲ τὸ αὐτὸ σημεῖον).

ΔΙΑΦΟΡΟΙ ΤΡΟΠΟΙ ΕΥΡΕΣΕΩΣ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΛΥΣΕΩΝ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ $\alpha x+\beta y=\gamma$

331. **Εὕρεσις τῶν ἀκεραίων λύσεων τῆς ἐξισώσεως $\alpha x+\beta y=\gamma$.** Ὅπως εἴδομεν εἰς τὰ προηγούμενα θεωρήματα, ὅταν εὕρωμεν μίαν ἀκεραίαν λύσιν τῆς ἐξισώσεως $\alpha x+\beta y=\gamma$, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἀπείρους ἀκεραίας λύσεις τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς, ἀρκεῖ νὰ ἐφαρμόσωμεν τοὺς τύπους

$$\boxed{x=x_0-\beta\lambda \quad y=y_0+\alpha\lambda} \ (A) \quad ἢ \quad \boxed{x=x_0+\beta\lambda \quad y=y_0-\alpha\lambda} \ (B)$$

Τὰ κάτωθι παραδείγματα θὰ μᾶς δείξουν τὰς διαφόρους μεθόδους διὰ τῶν ὁποίων εὑρίσκομεν μίαν ἀκεραίαν λύσιν τῆς ἐξισώσεως

$$\alpha x+\beta y=\gamma.$$

Παράδειγμα 1ον. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιοι λύσεις τῆς ἐξισώσεως

$$2x+3y=0$$

Ἐπειδὴ ὁ γ εἶναι μηδέν, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἀληθεύει διὰ $x=0$ καὶ $y=0$. Ἔχομεν λοιπὸν μίαν ἀκεραίαν λύσιν, $x=0$, $y=0$ καὶ ἑπομένως ὅλαι αἱ ἀκέραιαι λύσεις δίδονται ὑπὸ τῶν τύπων (A) ἢ (B). Πράγματι, ἐὰν εἰς τοὺς τύπους (A) θέσωμεν $x_0=0$, $y_0=0$ λαμβάνομεν

$$x=0-3\lambda, \qquad y=0+2\lambda$$

Ἐὴν δώσωμεν τώρα εἰς τό λ διαφόρους ἀκεραίας τιμάς, θετικὰς ἢ ἀρνητικάς, π.χ. -2. -1, 0, 1, 2, 3. . . . εὑρίσκομεν ἀτιστοίχως

$$x=\ 6,\ 3,\ 0,\ -3,\ -6,\ -9. \ldots$$
$$y=-4,\ -2,\ 0,\ 2,\ 4,\ 6. \ldots$$

Ὁ κάτωθι πίναξ συνοψίζει τὰς τιμὰς τῶν λ, x, y.

λ	-2	-1	0	1	2	3	4	5	...
x	6	3	0	-3	-6	-9	-12	-15	...
y	-4	-2	0	2	4	6	8	10	...

Παράδειγμα 2ον. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς ἐξισώσεως

$$x+3y=8$$

Ἂν θέσωμεν $y=0$ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις δίδει $x=8$. Ἔχομεν λοιπὸν μίαν ἀκεραίαν λύσιν $x_0=8$, $y=0$. Συνεπῶς ὅλαι αἱ ἀκέραιαι λύσεις δίδονται ὑπὸ τῶν τύπων

$$x=8-3\lambda, \qquad y=0+1.\lambda$$

Ὁ κάτωθι πίναξ περιέχει τὰς τιμὰς τῶν x καὶ y διὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τοῦ λ.

λ	-1	0	1	2	3	4	5	....
x	11	8	5	2	-1	-4	-7	....
y	-1	0	1	2	3	4	5	....

Παράδειγμα 3ον. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς ἐξισώσεως

$$5x-8y=2$$

Ἐπειδὴ οἱ συντελεσταὶ 5 καὶ 8 τῶν ἀγνώστων x καὶ y εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει μίαν ἀκεραίαν λύσιν.

Λύομεν τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν πρὸς x (ἐπειδὴ ἔχει μικρότερον συντελεστὴν) καὶ εὑρίσκομεν $\quad x=\dfrac{2+8y}{5}$. (1)

Δίδομεν τώρα εἰς τὸν y μίαν ἀπὸ τὰς τιμὰς $0, 1, 2, 3, 4$, τὸ πλῆθος τῶν ὁποίων ὁρίζει ὁ συντελεστὴς 5, καὶ παρατηροῦμεν ποία ἀπὸ τὰς τιμὰς αὐτὰς τοῦ y καθιστᾷ τὸ x ἀκέραιον·

Ἐὰν θέσωμεν $y=1$, ὁ (1) δίδει $x=\frac{2+8}{5}=2$ καὶ ἑπομένως ἔχομεν μίαν ἀκεραίαν λύσιν $x_0=2$, $y_0=1$ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

Ὅλαι αἱ ἄλλαι ἀκέραιαι λύσεις της δίδονται ὑπὸ τῶν τύπων

$$x=2+8\lambda, \quad y=1+5\lambda$$

Ὁ κάτωθι πίναξ περιέχει τὰς τιμὰς τῶν x καὶ y διὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τοῦ λ.

λ	-2	-1	0	1	2	3	....
x	-14	-6	2	10	18	26	....
y	-9	-4	1	6	11	16	....

Παράδειγμα 4ον. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς ἐξισώσεως

$$65x+47y=101 \qquad (1)$$

Λύομεν τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν πρὸς y (διότι ἔχει μικρότερον συντελεστὴν καὶ ἔχομεν

$$y=\frac{101-65x}{47} \quad \text{ἢ} \quad y=\frac{47\cdot2+7-47x-18x}{47} \quad \text{ἢ} \quad y=(2-x)+\frac{7-18x}{47} \qquad (2)$$

Ἐὰν δώσωμεν εἰς τὸν x τὴν τιμὴν 3, τὸ κλάσμα $\frac{7-18x}{47}$ γίνεται ἀκέραιος καὶ ἴσος μὲ -1. Ἑπομένως ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ y, ποὺ δίδει ἡ (2), εἶναι $y=(2-3)+(-1)=-2$.

Ἔχομεν λοιπὸν μίαν ἀκεραίαν λύσιν $x_0=3$ καὶ $y_0=-2$ καὶ ἑπομένως ὅλαι αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως δίδονται ὑπὸ τῶν τύπων $x=3-47\lambda$ καὶ $y=-2+65\lambda$.

Ἀσκήσεις. ***906.*** Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῶν κάτωθι ἐξισώσεων

1. $7x+8y=10$
2. $3x-5y=1$
3. $7x+10y=297$
4. $9x-7y=28$
5. $13x+29y=120$
6. $18x-43y=240$

ΑΚΕΡΑΙΑΙ ΚΑΙ ΘΕΤΙΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ $\alpha x+\beta y=\gamma$

332. **Ἀκέραιαι καὶ θετικαὶ λύσεις τῆς ἐξισώσεως: $\alpha x+\beta y=\gamma$.** **Πρόβλημα.** ***Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι καὶ θετικαὶ λύσεις τῆς ἐξισώσεως*** $\alpha x+\beta y=\gamma$ (1)

Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις, καθ' ὅσον οἱ συντελεσταὶ α καὶ β εἶναι ὁμόσημοι ἢ ἑτερόσημοι.

Περίπτωσις I. Οἱ α καὶ β εἶναι ὁμόσημοι. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὑποθέτομεν, ὅτι οἱ συντελεσταὶ α καὶ β εἶναι θετικοί· διότι, ἐὰν εἶναι ἀρνητικοί, δυνάμεθα νὰ ἀλλάξωμεν τὰ σημεῖα τῆς ἐξισώσεως (1) ὁπότε θὰ γίνουν θετικοί.

Ἐὰν ὁ γνωστὸς ὅρος γ εἶναι ἀρνητικός, ἡ ἐξίσωσις (1) δὲν ἔχει προφανῶς καμμίαν **θετικὴν** λύσιν.

Ἐὰν ὁ γ εἶναι θετικός, δηλ. ὁμόσημος πρὸς τοὺς α καὶ β, ἡ ἐξίσωσις (1) ἔχει μίαν ἀκεραίαν λύσιν καὶ ἔστω αὕτη $x=x_0$, $y=y_0$. Ἑπομένως ὅλαι αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς (1) δίδονται ὑπὸ τῶν τύπων

$$x=x_0+\beta\lambda, \qquad y=y_0-\alpha\lambda \qquad (2)$$

Διὰ νὰ εἶναι αἱ τιμαὶ αὐταὶ τῶν x καὶ y θετικαί, πρέπει νὰ συναληθεύουν αἱ ἀνισότητες $x_0+\beta\lambda>0$ καὶ $y_0-\alpha\lambda>0$.

Ἀπὸ τὰς ἀνισότητας αὐτὰς λαμβάνομεν $\lambda<-\frac{x_0}{\beta}$ καὶ $\lambda>\frac{y_0}{\alpha}$.

Αἱ ἀνισότητες αὐταὶ συναληθεύουν διὰ $-\frac{x_0}{\beta}<\lambda<\frac{y_0}{\alpha}$. (3)

Ἡ σχέσις (3) ὑφίσταται πάντοτε, διότι τὸ $\frac{y_0}{\alpha}$ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ $-\frac{x_0}{\beta}$.

Πράγματι, ἡ ἀνισότης $\frac{y_0}{\alpha}>-\frac{x_0}{\beta}$ γίνεται $\alpha x_0+\beta y_0>0$ ἢ $\gamma>0$. Ἀλλὰ ἡ τελευταία ἀνισότης ὑφίσταται ἐξ ὑποθέσεως, ἄρα καὶ ἡ

$$\frac{y_0}{\alpha}>-\frac{x_0}{\beta}.$$

Ἐὰν δὲν ὑπάρχουν ἀκέραιοι ἀριθμοὶ μεταξὺ τῶν $-\frac{x_0}{\beta}$ καὶ $\frac{y_0}{\alpha}$ τότε ἡ ἐξίσωσις (1) δὲν ἔχει **ἀκεραίας καὶ θετικὰς** λύσεις.

Κάθε ἀκεραία τιμὴ τοῦ λ, θετικὴ ἢ ἀρνητική, ἀλλὰ περιλαμβανομένη μεταξὺ τῶν $-\frac{x_0}{\beta}$ καὶ $\frac{y_0}{\alpha}$ δίδει ἀκεραίας καὶ θετικὰς τιμὰς τῶν x καὶ y.

Περίπτωσις II. Οἱ α καὶ β εἶναι ἑτερόσημοι. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ἐξίσωσις (1) ἔχει τὴν γενικὴν λύσιν

$$x=x_0-\beta\lambda, \qquad y=y_0-\alpha\lambda.$$

Διὰ νὰ εἶναι αἱ τιμαὶ αὐταὶ τῶν x καὶ y θετικαί, πρέπει νὰ εἶναι

$$x^0-\beta\lambda>0 \quad \text{καὶ} \quad y_0-\alpha\lambda>0$$

Ἀπὸ τὰς ἀνισότητας αὐτὰς λαμβάνομεν $\lambda<\frac{x_0}{\beta}$ καὶ $\lambda<\frac{y_0}{\alpha}$.

Δυνάμεθα νὰ δώσωμεν εἰς τὸν λ ὅλας τὰς ἀκεραίας τιμὰς τὰς μικροτέρας ἀπὸ τὴν μικροτέραν ἀκεραίαν τιμὴν τῶν $\frac{x_0}{\beta}$ καὶ $\frac{y_0}{\alpha}$ καὶ ἑπομένως **τὸ πλῆθος τῶν ἀκεραίων καὶ θετικῶν λύσεων** τῆς ἐξισώσεως **$\alpha x+\beta y=\gamma$ εἶνε ἄπειρον.**

333. **Ἐφαρμογαί.** ***Πρόβλημα 1ον. Μία τάξις μαθητῶν καὶ μαθητριῶν συνέλεξεν 100 000 δρχ. εἰς ἔρανον ὑπὲρ ἑνὸς φιλανθρωπικοῦ σκοποῦ. Ἕκαστος τῶν μαθητῶν προσέφερεν 1900 δραχμὰς καὶ ἑκάστη μαθήτρια 1100 δραχμάς. Νὰ εὑρεθῇ πόσους μαθητὰς καὶ πόσας μαθητρίας ἔχει ἡ τάξις ;***

Ἔστω ὅτι ἡ τάξις εἶχε x μαθητὰς καὶ y μαθητρίας. Οἱ x μαθηταὶ προσέφεραν 1900x δρχ. καὶ αἱ y μαθήτριαι προσέφεραν 1100y δρχ. Ἐπειδὴ τὸ συγκεντρωθὲν ποσὸν ἦτο 100 000 δρχ. ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$1900x+1100y=100\,000 \quad \text{ἢ} \quad 19x+11y=1000 \qquad (1)$$

Πρέπει νὰ εὕρωμεν τώρα τὰς ἀκεραίας καὶ **θετικὰς** λύσεις τῆς ἐξισώσεως (1). Ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται $y = \frac{1000-19x}{11}$ (2)

Ἐὰν θέσωμεν $x=4$, ἡ (2) δίδει $y=84$. Ὅλαι αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς ἐξισώσεως (1) δίδονται ὑπὸ τῶν τύπων

$$x=4-11\lambda \quad \text{καὶ} \quad y=84+19\lambda$$

Διὰ νὰ εἶναι αἱ τιμαὶ αὐταὶ τῶν x καὶ y παραδεκταὶ πρέπει νὰ εἶναι θετικαί· δηλ. πρέπει νὰ συναληθεύουν αἱ ἀνισότητες

$$4-11\lambda>0 \quad \text{καὶ} \quad 84+19\lambda>0 \qquad (3)$$

Ἡ πρώτη ἀνισότης ἀληθεύει διὰ $\lambda<\frac{4}{11}$. Ἡ δευτέρα ἀνισότης ἀληθεύει διὰ $\lambda>-\frac{84}{19}$. Καὶ αἱ δύο ἀνισότητες συναληθεύουν διὰ $-\frac{84}{19}<\lambda<\frac{4}{11}$. Αἱ ἀκέραιαι τιμαὶ τοῦ λ διὰ τὰς ὁποίας συναληθεύουν αἱ ἀνισότητες (3) εἶναι $-4, -3, -2, -1, 0$.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τοὺς τύπους (2) τὸ λ μὲ καθεμίαν ἀπὸ τὰς τιμάς του αὐτὰς καὶ εὑρίσκομεν τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῶν x καὶ y.

Ὁ κάτωθι πίναξ παρέχει τὰς τιμὰς τῶν x καὶ y, δηλ. τὸν ἀριθμῶν τῶν μαθητῶν καὶ μαθητριῶν, διὰ τὰς τιμὰς αὐτὰς τοῦ λ.

	λ	−4	−3	−2	−1	0
Μαθηταὶ	x	48	37	26	15	4
Μαθήτριαι	y	8	27	46	65	84

334. **Πρόβλημα 2ον.** ***Νὰ εὑρεθῇ διψήφιος ἀριθμός, ὁ ὁποῖος γίνεται κατὰ 18 μικρότερος, ἐὰν ἐναλλάξωμεν τὴν τάξιν τῶν ψηφίων του.***

Ἔστω x τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων καὶ y τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ. Ὁ ἀριθμὸς ποὺ ἔχει x δεκάδας καὶ y μονάδας γράφεται $10x+y$. Ἐὰν ἐναλλάξωμεν τὰ ψηφία του, ὁ ἀριθμὸς θὰ ἔχῃ y δεκάδας καὶ x μονάδας καὶ ἑπομένως θὰ γράφεται $10y+x$. Ἐπειδὴ ὁ δεύτερος ἀριθμὸς εἶναι μικρότερος τοῦ πρώτου κατὰ 18 ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$10x+y=10y+x+18 \quad \text{ἢ} \quad x-y=2 \qquad (1)$$

Εὑρίσκομεν τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς ἐξισώσεως (1). Ἐὰν θέσωμεν $y=0$, ἡ (1) δίδει $x=2$ καὶ ἑπομένως ἔχομεν μίαν ἀκεραίαν λύσιν $x=2$, $y=0$.

Ὅλαι αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς ἐξισώσεως (1) δίδονται ὑπὸ τῶν τύπων $x=2-\lambda \quad y=0-\lambda$ (4)

Διὰ νὰ εἶναι ὅμως παραδεκταὶ αἱ τιμαὶ αὐταὶ τῶν x καὶ y, πρέπει νὰ εἶναι: 1ον θετικαὶ καὶ 2ον μικρότεραι τοῦ 10.

Διὰ νὰ εἶναι αἱ τιμαὶ τῶν x καὶ y ***θετικαί***, πρέπει νὰ συναληθεύουν αἱ ἀνισότητες $2-\lambda>0$ καὶ $-\lambda>0$

Αἱ ἀνισότητες αὐταὶ συναληθεύουν διὰ $\lambda<0$. (5

Διὰ νὰ εἶναι αἱ τιμαὶ τῶν x καὶ y μικρότεραι τοῦ 10, πρέπει νὰ συναληθεύουν αἱ ἀνισότητες

$$2-\lambda < 10 \quad \text{καὶ} \quad -\lambda < 10$$

Αἱ ἀνισότητες αὐταὶ συναληθεύουν διὰ $\lambda > -8$. (6)

Αἱ ἀνισότητες (5) καὶ (6) συναληθεύουν διὰ $-8 < \lambda < 0$.

Ὥστε αἱ ἀκέραιαι τιμαί, τὰς ὁποίας δύναται νὰ λάβῃ ὁ λ εἶναι αἱ $-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1$.

Ἐὰν $\lambda=-1$ αἱ (4) δίδουν $x=3$, $y=1$ καὶ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι 31
» $\lambda=-2$ » » $x=4$, $y=2$ » » » » 42
» $\lambda=-3$ » » $x=5$, $y=3$ » » » » 53
. . . .
» $\lambda=-7$ » » $x=9$, $y=7$ » » » » 97

Ἀσκήσεις. *907.* Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι καὶ θετικαὶ τιμαὶ τοῦ x, αἱ ὁποῖαι καθιστοῦν ἀκεραίας καὶ θετικὰς τὰς κάτωθι παραστάσεις :

1. $\frac{x-1}{2}$ 2. $\frac{x-3}{11}$ 3. $\frac{x-2}{3}$ 4. $\frac{x-5}{19}$

5. $\frac{3x-10}{7}$ 6. $\frac{11x-8}{17}$ 7. $\frac{x-10}{29}$ 8. $\frac{16x-1}{5}$

908. Νὰ ἀναλυθῇ τὸ κλάσμα $\frac{77}{65}$ εἰς ἄθροισμα ἢ διαφορὰν δύο ἄλλων κλασμάτων ἐχόντων παρονομαστὰς 5 καὶ 13. (Πολυτεχνεῖον 1931)

909. Νὰ εὑρεθῇ κλάσμα τοιοῦτον, ὥστε, ἂν ὁ ἀριθμητής του αὐξηθῇ κατὰ 4 καὶ ὁ παρονομαστής του κατὰ 5, νὰ γίνεται τὸ κλάσμα ἴσον μὲ $\frac{3}{4}$.

910. Νὰ εὑρεθῇ κλάσμα, τὸ ὁποῖον δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν προστεθῇ 5 εἰς τὸν ἀριθμητὴν καὶ 12 εἰς τὸν παρονομαστήν.

911. Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς Α, ὁ ὁποῖος διαιρούμενος διὰ 11 δίδει ὑπόλοιπον 3 καὶ διαιρούμενος διὰ 19 δίδει ὑπόλοιπον 10.

912. Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, ὅστις διαιρούμενος διὰ 7 νὰ δίδῃ πηλίκον μεγαλύτερον τοῦ ὑπολοίπου κατὰ 3.

913. Νὰ εὑρεθῇ διψήφιος ἀριθμὸς τοιοῦτος, ὥστε τὸ διπλάσιον τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων αὐξηθὲν κατὰ 4, νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ τέταρτον τῆς διαφορᾶς τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 45.

914. Πόσα νομίσματα τῶν 5 δραχμῶν καὶ τῶν 2 δραχμῶν πρέπει νὰ θέσωμεν τὸ ἕνα πλησίον τοῦ ἄλλου οὕτως, ὥστε τὰ σημεῖα ἐπαφῆς καὶ τὰ κέντρα των νὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας, διὰ νὰ σχηματίσωμεν ἐξ αὐτῶν μῆκος ἑνὸς μέτρου. Αἱ διάμετροι τῶν πενταδράχμων καὶ διδράχμων εἶναι 37 χιλιοστόμετρα καὶ 27 χιλιοστόμετρα ἀντιστοίχως.

335. Ἀκέραιαι καὶ θετικαὶ λύσεις ἑνὸς συστήματος δύο ἐξισώσεων μὲ τρεῖς ἀγνώστους.

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὰς ἀκεραίας καὶ θετικὰς λύσεις τοῦ συστήματος

$$\begin{cases} 3x+5y+6\omega=54 & \Big| \ -3 \quad (1)\\ 9x+3y+8\omega=70 & \Big| \ \ \ 5 \quad (2) \end{cases}$$

Ἐπειδὴ οἱ συντελεσταὶ τοῦ y εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἀπαλείφομεν τὸν y μεταξὺ τῶν δύο ἐξισώσεων τοῦ δοθέντος συστήματος

Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (1) ἐπὶ -3 καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (2) ἐπὶ 5 καὶ ἔχομεν

$$-9x-15y-18\omega=-162$$
$$45x+15y+40\omega=350$$

Προσθέτομεν τὰς ἐξισώσεις αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$36x+22\omega=188 \quad \text{ἢ} \quad 18x+11\omega=94 \qquad (3)$$

Εὑρίσκομεν τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς (3).

Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν (3) πρὸς ω καὶ ἔχογεν $\omega=\dfrac{94-18x}{11}$. (3′)

Ἐὰν λάβωμεν $x=4$, ἡ (3′) δίδει $\omega=2$.

Ὥστε ὅλαι αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς ἐξισώσεως (3) δίδονται ὑπὸ τῶν τύπων

$$x=4+11\lambda, \quad \omega=2-18\lambda \qquad (4)$$

Τὰς τιμὰς αὐτὰς τῶν x καὶ ω θέτομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) καὶ ἔχομεν.

$$3(4+11\lambda)+5y+6(2-18\lambda)=54 \quad \text{ἢ} \quad 5y-141\lambda=30 \qquad (5)$$

Εὑρίσκομεν τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς ἐξισώσεως (5). Ἡ ἐξίσωσις (5) γράφεται $y=\dfrac{30+141\lambda}{5}$ καὶ διὰ $\lambda=0$, δίδει $y=6$. Ὥστε ὅλαι αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς ἐξισώσεως (5) δίδονται ὑπὸ τῶν τύπων

$$y=6-141\lambda', \quad \lambda=0-5\lambda' \qquad (6)$$

Τὴν τιμὴν τοῦ λ θέτομεν εἰς τὰς ἐξισώσεις (4) καὶ ἔχομεν

$$x=4-55\lambda', \quad \omega=2+90\lambda'$$

Ὥστε ὅλαι αἱ ***ἀκέραιαι λύσεις*** τοῦ δοθέντος συστήματος δίδονται ὑπὸ τῶν τύπων

$$x=4-55\lambda', \quad y=6-141\lambda', \quad \omega=2+90\lambda' \qquad (7)$$

Διὰ νὰ εἶναι ὅμως αἱ τιμαὶ αὐταὶ τῶν x, y, ω ***θετικαί***, πρέπει νὰ συναληθεύουν αἱ ἀνισότητες

$$4-55\lambda'>0, \quad 6-141\lambda'>0, \quad 2+90\lambda'>0$$

Ἡ πρώτη ἀνισότης ἀληθεύει διὰ $\lambda'<\dfrac{4}{55}$, ἡ δευτέρα ἀληθεύει διὰ $\lambda<\dfrac{6}{141}$ καὶ ἡ τρίτη ἀληθεύει διὰ $\lambda>-\dfrac{2}{90}$. Κατὰ τὰ γνωστὰ εὑρίσκομεν, ὅτι αἱ τρεῖς ἀνισότητες συναληθεύουν διὰ $-\dfrac{2}{90}<\lambda'<\dfrac{6}{141}$. Ἡ μόνη ἀκεραία τιμὴ τοῦ λ′ ποὺ ἐπαληθεύει τὴν σχέσιν αὐτὴν εἶναι $\lambda'=0$.

Διὰ $\lambda'=0$, αἱ (7) δίδουν $x=4$, $y=6$, $\omega=2$.

Ὥστε τὸ δοθὲν σύστημα ἔχει μίαν μόνον ἀκεραίαν καὶ θετικὴν λύσιν τὴν $x=4$, $y=6$, $\omega=2$.

Ἀσκήσεις. 905. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ πλῆθος τῶν ἀκεραίων λύσεων τῆς ἐξισώσεως $\alpha x+\beta y=\gamma$, ὅπου α καὶ β εἶναι ὁμόσημοι, εἶναι ἴσον μὲ ἕνα ἀπὸ τὰ πηλίκα τῆς διαιρέσεως, **κατ' ἔλλειψιν** ἢ **καθ' ὑπεροχήν**, τοῦ γ διὰ δ.

906. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι καὶ θετικαὶ λύσεις τοῦ συστήματος

$$\left.\begin{array}{l}3x+5y+6\omega=104\\2x+3y+8\omega=164\end{array}\right\}$$

907. Νὰ εὑρεθοῦν τρεῖς ἀκέραιοι καὶ θετικοὶ ἀριθμοὶ τοιοῦτοι, ὥστε ἐὰν πολλαπλασιασθοῦν ἀντιστοίχως ἐπὶ 3, 5 καὶ 7, τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων των νὰ ἰσοῦται μὲ 560· καὶ τοιοῦτοι ὥστε, ἐὰν πολλαπλασιασθοῦν ἐπὶ 9, 25 καὶ 49, τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων των νὰ ἰσοῦται μὲ 2920.

908. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς Α, ὅστις διαιρούμενος διὰ 11 δίδει ὑπόλοιπον 3· διαιρούμενος διὰ 17 δίδει ὑπόλοιπον 10 καὶ διαιρούμενος διὰ 37 δίδει ὑπόλοιπον 13.

909. Νὰ εὑρεθῇ τριψήφιος ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὰ ψηφία ἔχουν ἄθροισμα 20. Ἐὰν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν 16 καὶ διαιρέσωμεν τὸ ὑπόλοιπον διὰ 2, εὑρίσκομεν τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος προκύπτει, ἐὰν τὰ ψηφία του γραφοῦν κατ' ἀντίστροφον τάξιν.

910. Ἠγόρασέ τις μὲ 100 δεκάδραχμα 100 διάφορα ἀντικείμενα. Ἕκαστον ἀντικείμενον τοῦ πρώτου εἴδους τιμᾶται ἥμισυ δεκάδραχμον, ἕκαστον τοῦ δευτέρου εἴδους 2 δεκάδραχμα καὶ ἕκαστον τοῦ γ' εἴδους 4 δεκάδραχμα. Νὰ εὑρεθῇ πόσα ἀντικείμενα ἠγόρασεν ἐξ ἑκάστου εἴδους.

911. Κτηνοτρόφος ἠγόρασε μὲ 100 λίρας 100 ζῶα, μόσχους, πρόβατα καὶ ἀρνιά. Ἕκαστος μόσχος τιμᾶται $3\,{}^1/_2$ λίρας, ἕκαστον πρόβατον $1\,{}^1/_8$ λίρας καὶ ἕκαστον ἀρνίον ${}^1/_2$ λίρας. Νὰ εὑρεθῇ πόσα ζῶα ἠγόρασεν ἐξ ἑκάστου εἴδους

912. Νὰ εὑρεθῇ τετραψήφιος ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 9, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του περιλαμβάνεται μεταξὺ 10 καὶ 20 καὶ τοῦ ὁποίου τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων ἰσοῦται μὲ τὰ δύο τρίτα τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων.

913. Νὰ εὑρεθῇ πενταψήφιος ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 9, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ψηφίον τῶν χιλιάδων ἰσοῦται μὲ τὰ τρία τέταρτα τοῦ ἀθροίσματος τῶν ψηφίων τῶν δεκάδων καὶ μονάδων, ἡ δὲ διαφορὰ τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων ἀπὸ τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων χιλιάδων εἶνε 3.

914. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι καὶ θετικαὶ λύσεις τῶν ἐξισώσεων

$$6x+22y+15\omega=77 \qquad\qquad 3x+5y+7\omega=89.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ

ΡΙΖΑΙ. ΕΚΘΕΤΑΙ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΟΙ. ΕΚΘΕΤΑΙ ΑΡΝΗΤΙΚΟΙ

ΡΙΖΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑΙ. ΡΙΖΑΙ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

***336.* Νυοστὴ ῥίζα ἑνὸς ἀριθμοῦ.** Εἰς τὴν § 87 ἐδώσαμεν τὸν ὁρισμὸν τῆς νυοστῆς ῥίζης ἑνὸς ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ.

Γενικῶς. Ἔστω ἕνας θετικὸς ἀριθμὸς α καὶ **ν** ἕνας ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἀριθμός. Ἐὰν ὑπάρχῃ ἕνας ῥητὸς ἀριθμὸς β, τοῦ ὁποίου ἡ νυοστὴ δύναμις νὰ εἶναι ἴση μὲ α, θὰ λέγωμεν ὅτι ὁ β εἶναι ἡ νυοστὴ ῥίζα τοῦ α καὶ θὰ παριστάνωμεν τὸν ἀριθμὸν αὐτὸν μὲ τὸ σύμβολον $\sqrt[\nu]{\alpha}$.

ΛΑΖΑΡΗ

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω αἱ ἰσότητες $\boxed{\beta=\sqrt[\nu]{\alpha}}$ καὶ $\boxed{\beta^\nu=\alpha}$ εἶναι ἰσοδύναμοι. Ἐπίσης ἐξ ὁρισμοῦ ἔχομεν καὶ $\boxed{\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\nu=\alpha}$

337. **Ρίζαι ἀρτίας τάξεως καὶ περιττῆς τάξεως.** Εἰς τὰς § 88 καὶ 90 εἴδομεν, ὅτι ἕνας ἀλγεβρικὸς ἀριθμὸς α ἔχει 0, 1 ἢ 2 νυοστὰς ρίζας, αἱ ὁποῖαι ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὰς τιμὰς τοῦ ν καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖον τοῦ α.

I. ***Ὁ δείκτης ν εἶναι ἄρτιος.*** Ἐὰν $\alpha>0$, αἱ νυοσταὶ ρίζαι τοῦ α εἶναι :

$$\pm\sqrt[\nu]{|\alpha|}=\pm\beta.$$

Π.χ. αἱ τέταρται ρίζαι τοῦ 16 εἶναι : $\pm\sqrt[4]{16}=\pm2$, διότι $(\pm2)^4=+16$

Ἐὰν $\alpha<0$, ἡ $\sqrt[\nu]{-|\alpha|}$ δὲν ὑπάρχει, διότι δὲν ὑπάρχει ἀριθμός, θετικὸς ἢ ἀρνητικός, ὁ ὁποῖος ὑψούμενος εἰς ἀρτίαν δύναμιν νὰ δίδῃ ἐξαγόμενον ἀρνητικόν.

Π.χ. αἱ τέταρται ρίζαι τοῦ -16 δὲν ὑπάρχουν· λέγομεν, ὅτι εἶναι φανταστικαί.

Γενικῶς ἡ παράστασις $\sqrt[2\nu]{-|\alpha|}$ δὲν ἔχει ἔννοιαν καὶ λέγεται ***φανταστικὴ παράστασις.*** Διὰ τοῦτο, ὅταν ὁ δείκτης ἑνὸς ριζικοῦ εἶναι ἄρτιος πρέπει νὰ ὑποθέτωμεν ***πάντοτε***, ὅτι τὸ ὑπόρριζον εἶναι θετικόν.

II. ***Ὁ δείκτης ν εἶναι περιττὸς ἀριθμός.*** Ἐὰν $\alpha>0$, θὰ εἶναι $\sqrt[\nu]{\alpha}=+\beta$, διότι ἕνας καὶ μόνον θετικὸς ἀριθμὸς ὑπάρχει, ὁ ὁποῖος ὑψούμενος εἰς τὴν νυοστὴν δύναμιν (περιττὴν) δίδει ἐξαγόμενον θετικόν.

Ἐὰν $\alpha<0$ θὰ εἶναι $\sqrt[\nu]{-|\alpha|}=-\sqrt[\nu]{|\alpha|}=-\beta$, διότι ἕνας καὶ μόνον ἀρνητικὸς ἀριθμὸς ὑπάρχει, ὁ ὁποῖος ὑψούμενος εἰς τὴν νυοστὴν δύναμιν (περιττὴν) δίδει ἐξαγόμενον ἀρνητικόν.

Π.χ. ἡ πέμπτη ρίζα τοῦ $+32$ εἶναι $\sqrt[5]{+32}=+2$, διότι $(+2)^5=+32$ καὶ ἡ πέμπτη ρίζα τοῦ -32 εἶναι $\sqrt[5]{-32}=-2$, διότι $(-2)^5=-32$.

338. **Θεώρημα.** ***Ἐὰν αἱ νυοσταὶ δυνάμεις δύο θετικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἴσαι, οἱ δύο αὐτοὶ ἀριθμοὶ εἶναι ἴσοι.***

Ἔστωσαν α καὶ β δύο θετικοὶ ἀριθμοὶ καὶ α^ν καὶ β^ν αἱ νυοσταὶ δυνάμεις των· θὰ δείξωμεν ὅτι, ἐὰν $\alpha^\nu=\beta^\nu$ θὰ εἶναι καὶ $\alpha=\beta$.

Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $\alpha^\nu=\beta^\nu$ ἢ $\alpha^\nu-\beta^\nu=0$ (1)

Ἐπειδὴ τὸ $\alpha^\nu - \beta^\nu$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ $\alpha-\beta$ καὶ δίδει πηλίκον $\alpha^{\nu-1}+\alpha^{\nu-2}\beta+\alpha^{\nu-3}\beta^2+\ldots+\beta^{\nu-1}$ ἡ ἰσότης (1) γράφεται:

$$(\alpha-\beta)(\alpha^{\nu-1}+\alpha^{\nu-2}\beta+\alpha^{\nu-3}\beta^2+\ldots+\beta^{\nu-1})=0 \qquad (2)$$

Διὰ νὰ εἶναι τὸ γινόμενον τῶν δύο αὐτῶν παραγόντων ἴσον μὲ μηδέν, πρέπει ὁ ἕνας, τουλάχιστον, ἐκ τῶν παραγόντων νὰ εἶναι ἴσος μὲ μηδέν. Ἐπειδὴ οἱ α καὶ β εἶναι θετικοί, ὁ δεύτερος παράγων εἶναι πάντοτε θετικός, καὶ ἑπομένως διάφορος τοῦ μηδενός: ἄρα θὰ εἶναι ὁ ἄλλος παράγων ἴσος μὲ μηδέν, δηλ. θὰ εἶναι $\alpha-\beta=0$ ἢ $\alpha=\beta$.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἐὰν αἱ νυοσταὶ δυνάμεις...***

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΡΙΖΩΝ

***339.* Ἰδιότητες τῶν ριζῶν.** Ὁ λογισμὸς τῶν ριζῶν τῶν θετικῶν ἀριθμῶν στηρίζεται ἐπὶ τῶν ἰδιοτήτων τῶν δυνάμεων, τὰς ὁποίας ἐγνωρίσαμεν εἰς τὰς § 79—86 καὶ τὰς ὁποίας ἐπαναλαμβάνομεν κατωτέρω συμβολικῶς:

1.	$\alpha^\mu \cdot \alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}$	4.	$\dfrac{\alpha^\mu}{\beta^\nu} = \alpha^{\mu-\nu}$	$(\mu > \nu)$
2.	$(\alpha^\mu)^\nu = \alpha^{\mu\nu}$			
3.	$(\alpha.\beta.\gamma)^\nu = \alpha^\nu \cdot \beta^\nu \cdot \gamma^\nu$	5.	$\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^\nu = \dfrac{\alpha^\nu}{\beta^\nu}$	

Οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ εἶναι θετικοὶ ἀριθμοὶ καὶ οἱ μ καὶ ν ἀκέραιοι καὶ θετικοί.

Ὅταν θέλωμεν νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι δύο ρίζαι εἶναι ἴσαι, πρέπει νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι αἱ ρίζαι αὐταὶ ὑψούμεναι εἰς τὴν αὐτὴν δύναμιν δίδουν τὰ αὐτὰ ἐξαγόμενα (§ 338).

340.* Ἰδιότης Ι.** ***Ἡ ἀξία μιᾶς ρίζης δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν (ἢ διαιρέσωμεν) τὸν δείκτην τῆς ρίζης καὶ τὸν ἐκθέτην τῆς ὑπορρίζου ποσότητος ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Ἔστω ἡ $\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$, ὅπου α θετικὸς ἀριθμὸς καὶ μ καὶ ν ἀκέραιοι καὶ θετικοὶ ἀριθμοί. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν δείκτην ν καὶ τὸν ἐκθέτην μ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον ἀριθμὸν ρ, θὰ προκύψῃ ἡ ρίζα $\sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}}$.

Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\sqrt[\nu]{\alpha^\mu} = \sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}}$ (1)

Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι ὑφίσταται ἡ ἰσότης (1), ἀρκεῖ νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι αἱ νρ δυνάμεις τῶν θετικῶν ἀριθμῶν $\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$ καὶ $\sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}}$ εἶναι ἴσαι.

Πράγματι, ἡ νρ δύναμις τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ $\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$ εἶναι:

$$\left(\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}\right)^{\nu\rho} = \left[\left(\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}\right)^{\nu}\right]^{\rho} = (\alpha^{\mu})^{\rho} = \alpha^{\mu\rho}$$

καὶ ἡ νρ δύναμις τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ $\sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}}$ εἶναι $\left(\sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}}\right)^{\nu\rho} = \alpha^{\mu\rho}$

Παρατηροῦμεν, ὅτι οἱ θετικοὶ ἀριθμοὶ $\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$ καὶ $\sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}}$, ὑψούμενοι εἰς τὴν αὐτὴν δύναμιν νρ, δίδουν τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον $\alpha^{\mu\rho}$· ἄρα (§ 338) οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ εἶναι ἴσοι : δηλ. θὰ εἶναι

$$\boxed{\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}} = \sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}}}$$

Π.χ. $\sqrt[3]{\alpha^2} = \sqrt[6]{\alpha^4}$, $\sqrt{5} = \sqrt[4]{5^2} = \sqrt[4]{25}$

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι : $\boxed{\sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}}$

341. Ἐφαρμογαί. Ι. ***Ἁπλοποίησις τῶν ῥιζῶν.*** Στηριζόμενοι εἰς τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα, δυνάμεθα νὰ ἁπλοποιήσωμεν μίαν ῥίζαν, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν δείκτην τῆς ῥίζης καὶ τὸν ἐκθέτην τοῦ ὑπορρίζου διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, διὰ τοῦ ἑ.κ.π. αὐτῶν.

Π.χ. εἶναι $\sqrt[6]{\alpha^4} = \sqrt[3]{\alpha^2}$, $\sqrt[6]{81} = \sqrt[6]{3^4} = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9}$.

Ἐὰν ὁ δείκτης διαιρῇ ἀκριβῶς τὸν ἐκθέτην τοῦ ὑπορρίζου, τότε τὸ ῥιζικὸν ἐξαλείφεται.

Π.χ. $\sqrt[3]{\alpha^6} = \alpha^2$. Ἐὰν $\lambda = \nu\rho$, θὰ εἶναι $\sqrt[\nu]{\alpha^{\lambda}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\nu\rho}} = \alpha^{\rho}$.

ΙΙ. ***Τροπὴ ῥιζῶν εἰς τὸν αὐτὸν δείκτην.*** Δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν δύο ἢ περισσοτέρας ῥίζας μὲ διαφόρους δείκτας εἰς ἄλλας ἰσοδυνάμους μὲ τὸν αὐτὸν δείκτην. Πρὸς τοῦτο εὑρίσκομεν ἐ.κ.π. τῶν δεικτῶν τῶν ῥιζῶν καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸν δείκτην καὶ τὸν ἐκθέτην τῆς ὑπορρίζου ποσότητος κάθε ῥίζης ἐπὶ τὸ ἀντίστοιχον πηλίκον τοῦ ἐ.κ.π. διὰ τοῦ δείκτου ἑκάστης ῥίζης : Ἐργαζόμεθα, δηλ. ὅπως εἰς τὴν τροπὴν ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα.

Παράδειγμα. Νὰ τραποῦν αἱ κάτωθι ῥίζαι εἰς ἄλλας ἰσοδυνάμους μὲ τὸν αὐτὸν δείκτην.

$$\sqrt{\alpha^8},\quad \sqrt[4]{\beta},\quad \sqrt[6]{\gamma^5},\quad \sqrt[3]{2}.$$

Τὸ ἑ.κ.π. τῶν δεικτῶν 2, 4, 6, 3 εἶναι τὸ 12, τὰ δὲ πηλίκα τοῦ 12 διὰ τῶν δεικτῶν αὐτῶν εἶναι ἀντιστοίχως 6, 3, 2, 4.

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω αἱ ἰσοδύναμοι ῥίζαι πρὸς τὰς δοθείσας εἶναι αἱ

$$\sqrt[12]{\alpha^{18}},\quad \sqrt[12]{\beta^3},\quad \sqrt[12]{\gamma^{10}},\quad \sqrt[12]{2^4}.$$

Αἱ ῥίζαι αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὸν αὐτὸν δείκτην λέγονται ***ἰσοβάθμιαι ῥίζαι.***

Ἀσκήσεις. 915. Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ κάτωθι ρίζαι :

1. $\sqrt{2^4}$ 3. $\sqrt[4]{\alpha^8}$ 5. $\sqrt{9\alpha^2\beta^4}$ 7. $\sqrt[3]{27\alpha^6\beta^{12}\gamma^3}$

2. $\sqrt[3]{3^6}$ 4. $\sqrt[5]{\beta^{20}}$ 6. $\sqrt[3]{\alpha^3\beta^6\gamma^9}$ 8. $\sqrt[4]{16\alpha^4\beta^8\gamma^4}$

916. Νὰ τραποῦν αἱ κάτωθι ρίζαι εἰς ἄλλας ἰσοδυνάμους μὲ τὸν αὐτὸν δείκτην :

1. $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt[3]{\alpha}$, $\sqrt[4]{\alpha}$ 2. $\sqrt{\alpha\beta}$, $\sqrt[4]{\alpha\beta^3}$, $\sqrt[5]{\gamma^4}$

3. $\sqrt{2xy}$, $\sqrt[3]{3xy}$, $\sqrt[6]{6xy}$ 4. $\sqrt{3\alpha}$, $\sqrt[\mu]{(\alpha-\beta)^\lambda}$, $\sqrt[\nu]{(x+y)^3}$

917. Ποία ἀπὸ τὰς παραστάσεις $\sqrt[3]{10}$, $\sqrt{5}$ εἶναι μεγαλυτέρα ;

342. II. Ἰδιότης. ***Ἡ νυοστὴ ρίζα ἑνὸς γινομένου πολλῶν παραγόντων εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενον τῶν νυοστῶν ριζῶν τῶν παραγόντων.***

Ἔστω $\sqrt[\nu]{\alpha\cdot\beta\cdot\gamma}$ ἡ νυοστὴ ρίζα τοῦ γινομένου $\alpha\cdot\beta\cdot\gamma$.

Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\sqrt[\nu]{\alpha\cdot\beta\cdot\gamma}=\sqrt[\nu]{\alpha}\,.\,\sqrt[\nu]{\beta}\,.\,\sqrt[\nu]{\gamma}$ (1)

Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι ὑφίσταται ἡ ἰσότης (1), ἀρκεῖ νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι αἱ νυοσταὶ δυνάμεις τῶν θετικῶν ἀριθμῶν

$\sqrt[\nu]{\alpha\cdot\beta\cdot\gamma}$ καὶ $\sqrt[\nu]{\alpha}\,.\,\sqrt[\nu]{\beta}\,.\,\sqrt[\nu]{\gamma}$ εἶναι ἴσαι.

Πράγματι ἔχομεν $\left(\sqrt[\nu]{\alpha\cdot\beta\cdot\gamma}\right)^\nu=\alpha\cdot\beta\cdot\gamma$ καὶ

$$\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\,.\,\sqrt[\nu]{\beta}\,.\,\sqrt[\nu]{\gamma}\right)^\nu=\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\nu\cdot\left(\sqrt[\nu]{\beta}\right)^\nu\cdot\left(\sqrt[\nu]{\gamma}\right)^\nu=\alpha\cdot\beta\cdot\gamma.$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι εὑρίσκομεν τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον αβγ· ἄρα ἡ ἰσότης (1) ὑφίσταται, δηλ. εἶναι

$$\boxed{\sqrt[\nu]{\alpha\cdot\beta\cdot\gamma}=\sqrt[\nu]{\alpha}\,.\,\sqrt[\nu]{\beta}\,.\,\sqrt[\nu]{\gamma}}$$

343. Πόρισμα. Ἐὰν ἐναλλάξωμεν τὰ μέλη τῆς ἰσότητος (1) θὰ λάβωμεν τὴν ἰσότητα

$$\boxed{\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta}\cdot\sqrt[\nu]{\gamma}=\sqrt[\nu]{\alpha\cdot\beta\cdot\gamma}}$$

Ἀπὸ τὴν ἰσότητα αὐτὴν συνάγομεν, ὅτι :

Τὸ γινόμενον πολλῶν ριζῶν μὲ τὸν αὐτὸν δείκτην εἶναι ἴσον μὲ ρίζαν, ἡ ὁποία ἔχει ὡς δέκτην τὸν κοινὸν δείκτην καὶ ὡς ὑπόρριζον ποσότητα τὸ γινόμενον τῶν ὑπορρίζων ποσοτήτων.

Π. χ. $\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{3.9}=\sqrt[3]{27}=3$

$$\sqrt{\alpha+\beta}\cdot\sqrt{\alpha-\beta}=\sqrt{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}=\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$$

344. **Παρατήρησις.** Ἐὰν αἱ ῥίζαι δὲν ἔχουν τὸν αὐτὸν δείκτην, τρέπομεν πρῶτον αὐτὰς εἰς ἄλλας ἰσοδυνάμους μὲ τὸν αὐτὸν δείκτην καὶ ἔπειτα εὑρίσκομεν τὸ γινόμενόν των ὡς ἀνωτέρω.

Π. χ. τὸ γινόμενον $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt[3]{\beta}\cdot\sqrt[4]{\gamma}$ εἶναι ἴσον μὲ

$$\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt[3]{\beta}\cdot\sqrt[4]{\gamma}=\sqrt[12]{\alpha^6}\cdot\sqrt[12]{\beta^4}\cdot\sqrt[12]{\gamma^3}=\sqrt[12]{\alpha^6\cdot\beta^4\cdot\gamma^3}$$

Ὁμοίως εἶναι $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{5}=\sqrt[6]{2^3}\cdot\sqrt[6]{5^2}=\sqrt[6]{2^3.5^2}=\sqrt[6]{200}$

καὶ γενικῶς : $\boxed{\sqrt[\mu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\mu\nu]{\alpha^\nu}\cdot\sqrt[\mu\nu]{\beta^\mu}=\sqrt[\mu\nu]{\alpha^\nu\cdot\beta^\mu}}$

345 **Ἰδιαίτεραι περιπτώσεις.** I. Ἐὰν ἔχωμεν τὴν ῥίζαν $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu\beta}$ τότε κατὰ τὴν § 342 θὰ ἔχωμεν :

$\sqrt[\nu]{\alpha^\nu\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha^\nu}\cdot\sqrt[\nu]{\beta}=\alpha\sqrt[\nu]{\beta}$, δηλ. εἶναι $\boxed{\sqrt[\nu]{\alpha^\nu\beta}=\alpha\sqrt[\nu]{\beta}}$

Παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ παράγων α^ν τοῦ ὑπορρίζου ἐξῆλθε ἐκτὸς τοῦ ῥιζικοῦ.

Γενικῶς, ὅταν ἕνας ἢ περισσότεροι παράγοντες τοῦ ῥιζικοῦ ἔχουν ἐκθέτην ἴσον μὲ τὸν δείκτην τοῦ ῥιζικοῦ, δυνάμεθα νὰ ***θέσωμεν τὸν παράγοντα αὐτὸν ἐκτὸς τοῦ ῥιζικοῦ,*** ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἐκθέτην του διὰ τοῦ δείκτου τῆς ῥίζης.

Π. χ. 1. $\sqrt{32}=\sqrt{16.2}=\sqrt{4^2.2}=4\sqrt{2}$, 2. $\sqrt[3]{27\alpha^4}=\sqrt[3]{3^3\alpha^3\alpha}=3\alpha\sqrt[3]{\alpha}$

3. $\sqrt{18\alpha^5\beta^3\gamma^2}=\sqrt{9\alpha^4\beta^2\gamma^2 2\alpha\beta}=3\alpha^2\beta\gamma\sqrt{2\alpha\beta}$

4. $\sqrt{12\alpha^2\beta-24\alpha\beta^2+12\beta^3}=\sqrt{12\beta(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)}=\sqrt{4.3\beta(\alpha-\beta)^2}=2(\alpha-\beta)\sqrt{3\beta}$

II. Ἐὰν ἐναλλάξωμεν τὰ μέλη τῆς ἰσότητος $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu\beta}=\alpha\sqrt[\nu]{\beta}$ θὰ ἔχωμεν : $\boxed{\alpha\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha^\nu\beta}}$

Παρατηροῦμεν, ὅτι δυνάμεθα νὰ ***θέσωμεν τὸν παράγοντα α ἐντὸς ῥιζικοῦ,*** ἀρκεῖ νὰ ὑψώσωμεν αὐτὸν εἰς τὴν νυοστὴν δύναμιν.

Π.χ. $2\sqrt{3}=\sqrt{2^2.3}=\sqrt{12}$, $2\alpha\beta\sqrt[3]{\alpha\gamma}=\sqrt[3]{2^3\alpha^3\beta^3\alpha\gamma}=\sqrt[3]{8\alpha^4\beta^3\gamma}$

Ἀσκήσεις. 918. Εἰς τὰς κάτωθι ῥίζας νὰ τεθοῦν ἐκτὸς ῥιζικοῦ ὅλοι οἱ δυνατοὶ παράγοντες τοῦ ὑπορρίζου.

1. $\sqrt{24}$ 3. $\sqrt[3]{24}$ 5. $\sqrt{108\alpha^2\beta}$ 7. $\sqrt{9\alpha^2\beta^3\gamma^4}$

2. $\sqrt{45}$ 4. $\sqrt[3]{500}$ 6. $\sqrt[3]{135x^4}$ 8. $\sqrt[3]{82\alpha^3\beta^4\gamma^6}$

919. Εἰς τὰς κάτωθι ρίζας νὰ τεθοῦν ἐκτὸς ριζικοῦ ὅλοι οἱ δυνατοὶ παράγοντες τοῦ ὑπορρίζου.

1. $\sqrt{4\alpha^3\beta^2-12\alpha^2\beta^4}$ 5. $\sqrt{(\nu^2-1)(\nu+1)}$ 9. $\sqrt{\alpha^3+2\alpha^2\beta+\alpha\beta^2}$

2. $\sqrt{8\alpha^4\beta^3-16\alpha^4\beta^2}$ 6. $\sqrt{3\alpha^2-6\alpha\beta+3\beta^2}$ 10. $\sqrt{4\alpha^5\beta^2-20\alpha^3\beta^3+25\alpha\beta^4}$

3. $\sqrt{(\alpha^2+4\alpha\beta-4\beta^2)^3}$ 7. $\sqrt{50(x^2-1)(2x+2)}$ 11. $\sqrt{\alpha^3-\alpha^2-\alpha+1}$

4. $\sqrt{(\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2}$ 8. $\sqrt{\alpha^{2\mu+\nu}\beta^{2\mu\nu}\gamma^{\mu+2\nu}}$ 12. $\sqrt[3]{(\alpha-\beta)(\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta)}$

920. Εἰς τὰς κάτωθι παραστάσεις, ὁ πρὸ τοῦ ριζικοῦ παράγων νὰ εἰσαχθῇ καταλλήλως ἐντὸς αὐτοῦ καὶ νὰ γίνῃ ὁπλοποίησις.

1. $5\sqrt{3}$ 3. $4\sqrt{8}$ 5. $-5x\sqrt{12x}$ 7. $\alpha\sqrt{\alpha+\beta}$

2. $3\sqrt{5}$ 4. $2\sqrt{\alpha}$ 6. $-3\alpha^2\sqrt[3]{\beta}$ 8. $(x+y)\sqrt{2\alpha}$

921. Εἰς τὰς κάτωθι παραστάσεις, ὁ πρὸ τοῦ ριζικοῦ παράγων νὰ εἰσαχθῇ καταλλήλως ἐντὸς αὐτοῦ καὶ νὰ γίνῃ ἁπλοποίησις.

1. $\frac{1}{3}\sqrt{18}$ 3. $\frac{x}{y}\sqrt{\frac{y}{x}}$ 5. $\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta}{\alpha+\beta}}$

2. $\frac{1}{2}\sqrt[3]{216}$ 4. $\frac{\alpha+\beta}{3}\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}$ 6. $\frac{x}{x+\alpha}\sqrt{\frac{(\alpha x+\alpha^2)(\alpha x^2-\alpha^3)}{4x^2}}$

7. $\frac{x-y}{x+y}\sqrt{\frac{x^2+xy}{x^2-2xy+y^2}}$

922. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις καὶ νὰ γίνουν αἱ δυναταὶ ἁπλοποιήσεις.

1. $\sqrt{18}\cdot\sqrt{8}$ 2. $\sqrt[3]{16}\cdot\sqrt[3]{32}$ 3. $\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[3]{24}$ 4. $\sqrt[3]{3\alpha^2\beta}\cdot\sqrt[3]{9\alpha\beta^4}$

5. $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{125}$ 6. $x\sqrt{y^2\omega}\cdot y\omega\sqrt{x^2\omega}$ 7. $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt[4]{3}$

923. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις καὶ νὰ γίνουν αἱ δυναταὶ ἁπλοποιήσεις.

1. $x\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}\cdot y\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}$ 2. $\sqrt{\frac{3\alpha^4+6\alpha^3\beta+2\alpha^2\beta^2}{8\alpha\beta^3-8\beta^4}}\cdot\sqrt{\frac{2\alpha^2\beta-2\beta^3}{6\alpha^4\beta^3}}$

346.* III Ἰδιότης. *Τὸ πηλίκον δύο ριζῶν, μὲ τὸν αὐτὸν δείκτην, εἶναι ἴσον μὲ ρίζαν, ἡ ὁποία ἔχει ὡς δείκτην τὸν κοινὸν δείκτην καὶ ὡς ὑπόρριζον τὸ πηλίκον τῶν ὑπορρίζων.

Ἔστω τὸ πηλίκον $\frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}$ · θὰ δείξωμεν, ὅτι
$$\frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}=\sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta}} \qquad (1)$$

Ἐὰν ὑψώσωμεν εἰς τὴν νυοστὴν δύναμιν τοὺς θετικοὺς ἀριθμοὺς $\frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}$ καὶ $\sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta}}$ θὰ εὕρωμεν ἐξαγόμενα ἴσα.

Πράγματι, ἔχομεν $\left(\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}\right)^{\nu} = \dfrac{\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\nu}}{\left(\sqrt[\nu]{\beta}\right)^{\nu}} = \dfrac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\left(\sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}\right)^{\nu} = \dfrac{\alpha}{\beta}$

Παρατηροῦμεν, ὅτι εὑρίσκομεν τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον $\dfrac{\alpha}{\beta}$· ἄρα ἡ ἰσότης (1) ὑφίσταται.

Δηλ. εἶναι : $\boxed{\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}}$

Π. χ. $$\frac{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\sqrt{\alpha+\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha+\beta}} = \sqrt{\frac{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}{(\alpha+\beta)}} = \sqrt{\alpha-\beta}$$

***347*. Παρατήρησις**. Ἐὰν οἱ δεῖκται τῶν ριζῶν εἶναι διάφοροι, τρέπομεν πρῶτον τὰς ρίζας εἰς ὁμοιοβάθμους καὶ ἐφαρμόζομεν ἔπειτα τὴν προηγουμένην ἰδιότητα.

Π. χ. $$\frac{\sqrt{9}}{\sqrt[3]{3}} = \frac{\sqrt[6]{9^3}}{\sqrt[6]{3^2}} = \sqrt[6]{\frac{9^3}{3^2}} = \sqrt[6]{3^4} = \sqrt[3]{3^2}$$

$$\frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\mu]{\beta}} = \frac{\sqrt[\nu\mu]{\alpha^{\mu}}}{\sqrt[\nu\mu]{\beta^{\nu}}} = \sqrt[\nu\mu]{\frac{\alpha^{\mu}}{\beta^{\nu}}}, \qquad \frac{\sqrt{125}}{5} = \frac{\sqrt{125}}{\sqrt{25}} = \sqrt{\frac{125}{25}} = \sqrt{5}$$

***348*. Πόρισμα.** Ἂν ἐναλλάξωμεν τὰ μέλη τῆς ἰσότητος

$\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}$ λαμβάνομεν $\boxed{\sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}} = \dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}}$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι :

Ἡ νυοστὴ ρίζα ἑνὸς κλάσματος εἶναι ἴση μὲ τὸ πηλίκον τῶν νυοστῶν ριζῶν τῶν ὅρων του.

Π. χ. $$\sqrt[3]{\frac{8\alpha^3}{27\beta^3\gamma^6}} = \frac{\sqrt[3]{8\alpha^3}}{\sqrt[3]{27\beta^3\gamma^6}} = \frac{\sqrt[3]{2^3\cdot\alpha^3}}{\sqrt[3]{3^3\cdot\beta^3\cdot\gamma^6}} = \frac{2\alpha}{3\beta\gamma^2}$$

$$\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{25}} = \frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{5} = \frac{1}{5}\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

Ἀσκήσεις. 924. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις καὶ νὰ γίνουν αἱ δυναταὶ ἁπλοποιήσεις :

1. $\sqrt{72} : \sqrt{8}$ 3. $\sqrt[4]{243} : \sqrt[4]{3}$ 5. $5\sqrt{50} : \sqrt{2}$ 7. $\sqrt{54} : \sqrt[4]{36}$
2. $\sqrt[3]{81} : \sqrt[3]{3}$ 4. $\sqrt[3]{54x^4} : \sqrt[3]{2x}$ 6. $\sqrt[3]{7000} : \sqrt[3]{875}$ 8. $\sqrt[3]{\alpha^2} : \sqrt[4]{\alpha^3}$

925. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις καὶ νὰ γίνουν αἱ δυναταὶ ἁπλοποιήσεις.

1. $\dfrac{4\sqrt{\alpha^3\beta^5\gamma^6}}{\sqrt{16\alpha\beta^3\gamma^4}}$ 3. $\dfrac{\sqrt{54(x^3-xy^2)}}{\sqrt{6x(x+y)^2}}$ 5. $\dfrac{\sqrt{\alpha^4x-2\alpha^2x^3+x^5}}{\sqrt{\alpha^2\beta-2\alpha\beta x+\beta x^2}}$

2. $\dfrac{\sqrt[3]{\alpha^5\beta^4}\,.\,\sqrt[3]{\alpha^3\beta^2}}{\sqrt[3]{\alpha^2\beta^{12}}}$ 4. $\dfrac{\sqrt[x]{x^{5x+2}}}{\sqrt[x]{x^{4x+2}}}$ 6. $\dfrac{\sqrt{\alpha^4-\alpha^3x-\alpha^2x^2+\alpha^3x}}{\sqrt{\alpha^2+2\alpha x+x^2}}$

926. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις καὶ νὰ γίνουν αἱ δυναταὶ ἁπλοποιήσεις.

1. $\sqrt{\dfrac{\alpha^3}{\beta^5}}:\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta^3}}$ 3. $\sqrt{\dfrac{27\alpha}{2}}:\sqrt{\dfrac{3\alpha^3}{8}}$ 5. $\sqrt[4]{\dfrac{54x^3}{\alpha}}:\sqrt[4]{\dfrac{9x^5}{\alpha^3}}$

2. $\sqrt{\dfrac{5}{x^3}}:\sqrt{\dfrac{10}{x}}$ 4. $\sqrt[3]{3\alpha}:\sqrt[3]{\dfrac{3}{\alpha^2}}$ 6. $\sqrt[4]{125\alpha^5}:\sqrt[4]{\dfrac{\alpha^2}{5}}$

349.* IV. Ἰδιότης.** ***Διὰ νὰ ὑψώσωμεν μίαν ρίζαν εἰς μίαν δύναμιν, ἀρκεῖ νὰ ὑψώσωμεν τὸ ὑπόρριζον εἰς τὴν δύναμιν αὐτήν.

Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ ὑψώσωμεν τὴν $\sqrt[\mu]{\alpha}$ εἰς τὴν 3ην δύναμιν, δηλ. ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὴν $\left(\sqrt[\mu]{\alpha}\right)^3$

Θὰ δείξωμεν, ὅτι : $\left(\sqrt[\mu]{\alpha}\right)^3=\sqrt[\mu]{\alpha^3}$ (1)

Πράγματι· κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν δυνάμεων θὰ εἶναι

$$\left(\sqrt[\mu]{\alpha}\right)^3=\sqrt[\mu]{\alpha}\,.\,\sqrt[\mu]{\beta}\,.\,\sqrt[\mu]{\gamma}=\sqrt[\mu]{\alpha\,.\,\alpha\,.\,\alpha}=\sqrt[\mu]{\alpha^3}$$

Γενικῶς, θὰ εἶναι : $\boxed{\left(\sqrt[\mu]{\alpha}\right)^\nu=\sqrt[\mu]{\alpha^\nu}}$

350.* Παρατήρησις.** Ἡ ἰσότης $\left(\sqrt[\mu]{\alpha}\right)^\nu=\sqrt[\mu]{\alpha^\nu}$ δὲν εἶναι πάντοτε πλήρης, ὅταν ὁ α εἶναι θετικὸς καὶ οἱ μ καὶ ν ἄρτιοι. Π. χ. ἡ ἰσότης $(\sqrt{9})^4=\sqrt{9^4}$ δὲν εἶναι πλήρης. Διότι ἡ $(\sqrt{9})^4=(\pm3)^4=+81$, ἐνῷ $\sqrt{9^4}=\pm81$. Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ $(\sqrt{9})^4$ δίδει μίαν ρίζαν θετικήν, τὴν $+81$, ἐνῷ ἡ $\sqrt{9^4}$ δίδει δύο ρίζας ±81 ἀντιθέτους. Διὰ τοῦτο, ***ὅταν τὸ α εἶναι θετικὸν καὶ οἱ μ καὶ ν ἄρτιοι, πρέπει νὰ λαμβάνωμεν ὡς τιμὴν τῆς ρίζης μόνον τὴν θετικὴν τιμήν της.

Ἀσκήσεις. 927. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις καὶ νὰ γίνουν αἱ δυναταὶ ἁπλοποιήσεις :

1. $\left(\sqrt[3]{\alpha^2}\right)^6$ 2. $\left(\sqrt[3]{\beta^2}\right)^6$ 3. $(\sqrt{\alpha^3})^4$ 4. $\left(\sqrt[4]{2x^6}\right)^2$ 5. $\left(\sqrt[6]{(1+\alpha)^3}\right)^2$

351.* V Ἰδιότης.** ***Διὰ νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν νυοστὴν ρίζαν

μιᾶς ἄλλης ρίζης, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ ν τὸν δείκτην τῆς ρίζης αὐτῆς.

Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν νυοστὴν ρίζαν τῆς $\sqrt[\mu]{\alpha}$.

Θὰ δείξωμεν, ὅτι $$\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}}=\sqrt[\nu\mu]{\alpha} \qquad (1)$$

Διὰ νὰ δείξωμεν, ὅτι οἱ θετικοὶ ἀριθμοὶ $\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}}$ καὶ $\sqrt[\nu\mu]{\alpha}$ εἶναι ἴσοι, ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ νμ δυνάμεις των εἶναι ἴσαι.

Πράγματι ἔχομεν

$$\left(\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}}\right)^{\nu\mu}=\left[\left(\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}}\right)^{\nu}\right]^{\mu}=\left(\sqrt[\mu]{\alpha}\right)^{\mu}=\alpha$$

καὶ $$\left(\sqrt[\nu\mu]{\alpha}\right)^{\nu\mu}=\sqrt[\nu\mu]{\alpha^{\nu\mu}}=\alpha$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι οἱ θετικοὶ ἀριθμοὶ $\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}}$ καὶ $\sqrt[\nu\mu]{\alpha}$ ὑψούμενοι εἰς τὴν αὐτὴν δύναμιν νμ δίδουν τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον α· ἄρα οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ εἶναι ἴσοι, δηλ. εἶναι :

$$\boxed{\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}}=\sqrt[\nu\mu]{\alpha}}$$

Π. χ. $\sqrt[3]{\sqrt{3}}=\sqrt[6]{3}$, $\quad \sqrt[3]{\sqrt[4]{\alpha^8}}=\sqrt[12]{\alpha^6}=\sqrt{\alpha}$

Ἀσκήσεις. *928.* Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις :

1. $\sqrt[3]{\sqrt{\alpha^3}}$ 2. $\sqrt[4]{\sqrt[3]{\alpha^4}}$ 3. $\sqrt{\sqrt[3]{64\alpha}}$ 4. $\sqrt[3x]{\sqrt[4y]{\alpha^{xy}}}$

929. Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις :

1. $\sqrt{21+\sqrt{13+\sqrt{7+\sqrt{4}}}}$ 2. $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{9}}}}$

3. $\sqrt{14x^2-\sqrt{21x^4+\sqrt{19x^8-\sqrt{9x^{16}}}}}$

930. Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις.

1. $\sqrt{\alpha\sqrt{\alpha\sqrt{\alpha^2}}}$ 2. $\sqrt[4]{\alpha^2\sqrt[3]{\alpha\sqrt{\alpha^4}}}$ 3. $\sqrt[3]{\omega\sqrt[3]{y\sqrt{x^6}}}$

4. $\sqrt[5]{\mu^4\nu^8\sqrt[3]{\nu^2\mu\sqrt{\mu^4\nu^9}}}$

ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ

352.* Πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις ριζῶν.** Ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις ριζῶν γίνεται, ὅπως ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις ἀλγεβρικῶν παραστάσεων. Ἀλλὰ διὰ νὰ δυνηθῶμεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν πολλῶν ριζῶν, πρέπει αἱ ρίζαι νὰ εἶναι ***ὅμοιαι.

Δύο ἢ περισσότεραι ρίζαι λέγονται ***ὅμοιαι***, ὅταν ἔχουν τὸν αὐτὸν δείκτην καὶ τὸ αὐτὸ ὑπόρριζον.

Π.χ. αἱ ρίζαι $3\sqrt{2}$, $-5\sqrt{2}$, $\alpha\sqrt{2}$ εἶναι ὅμοιαι.

Ἐπίσης αἱ ρίζαι $2\sqrt[3]{\alpha^2\beta}$, $-\alpha\sqrt[3]{\alpha^2\beta}$, $+8\beta\sqrt[3]{\alpha^2\beta}$ εἶναι ὅμοιαι.

Αἱ ρίζαι $\sqrt{3\alpha}$, $\sqrt{2\beta}$ δὲν εἶναι ὅμοιαι.

Συντελεστὴς μιᾶς ρίζης εἶναι τὸ σύνολον τῶν παραγόντων, οἱ ὁποῖοι εὑρίσκονται ἐκτὸς τοῦ ριζικοῦ.

Π.χ. οἱ συντελεσταὶ τῶν ριζῶν $3\alpha\sqrt{8}$, $-2\sqrt[3]{\beta^2}$, $+\sqrt[8]{5xy}$ εἶναι ἀντιστοίχως οἱ 3α, -2, $+1$.

Ὁ συντελεστὴς μιᾶς ρίζης πρέπει νὰ γράφεται πάντοτε πρὸ τοῦ ριζικοῦ.

Πολλαὶ ρίζαι, αἱ ὁποῖαι ἐκ πρώτης ὄψεως, δὲν φαίνονται ὅμοιαι δύνανται νὰ γίνουν ὅμοιαι, ἐὰν ἁπλοποιηθοῦν προηγουμένως.

Π. χ. αἱ ρίζαι $5\sqrt{27}$, $-\sqrt{48}$, $+2\sqrt{75}$ δὲν φαίνονται ὅμοιαι. Ἐὰν ὅμως τὰς ἁπλοποιήσωμεν θὰ ἔχωμεν

$$5\sqrt{27}=5\sqrt{9\,3}=5.3\sqrt{3}=15\sqrt{3}, \quad -\sqrt{48}=-\sqrt{16.3}=-4\sqrt{3}$$

$$2\sqrt{75}=2\sqrt{25.3}=2.5\sqrt{3}=10\sqrt{3}$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ ρίζαι $5\sqrt{27}$, $-\sqrt{48}$, $+\sqrt{75}$ εἶναι ἀντιστοίχως ἰσοδύναμοι μὲ τὰς ρίζας $15\sqrt{3}$, $-4\sqrt{3}$, $+10\sqrt{3}$ αἱ ὁποῖαι εἶναι ὅμοιαι ρίζαι.

Ἡ ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ριζῶν γίνεται ὅπως καὶ ἡ ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων ἑνὸς πολυωνύμου.

Π. χ.
$$6\sqrt{2}-3\sqrt{2}+\sqrt{2}=(6-3+1)\sqrt{2}=4\sqrt{2}$$

$$8\sqrt[3]{\alpha}+5\sqrt[3]{\alpha}-2\sqrt[3]{\alpha}=(8+5-2)\sqrt[3]{\alpha}=11\sqrt[3]{\alpha}$$

$$\alpha^2\sqrt{\mu}+\beta^2\sqrt{\mu}-2\alpha\beta\sqrt{\mu}=(\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta)\sqrt{\mu}=(\alpha-\beta)^2\sqrt{\mu}.$$

Παράδειγμα 1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα.

$$A=(5\sqrt{\alpha}-8\sqrt{\beta})+(2\sqrt{\beta}-3\sqrt{\alpha})$$

Ἔχομεν $A=5\sqrt{\alpha}-8\sqrt{\beta}+2\sqrt{\beta}-3\sqrt{\alpha}$

κάμνομεν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ριζῶν καὶ ἔχομεν

$$A=2\sqrt{\alpha}-6\sqrt{\beta}.$$

Παράδειγμα 2ον. Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ ῥίζαι καὶ νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις :

$$A=5\sqrt{18}-2\sqrt{50}+6\sqrt{32} \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ

$$5\sqrt{18}=5\sqrt{9.2}=5.3\sqrt{2}=15\sqrt{2}$$
$$2\sqrt{50}=2\sqrt{25.2}=2.5\sqrt{2}=10\sqrt{2}$$
$$6\sqrt{32}=6\sqrt{16.2}=6.4\sqrt{2}=24\sqrt{2}$$

ἡ (1) γράφεται

$$A=15\sqrt{2}-10\sqrt{2}+24\sqrt{2}=29\sqrt{2}$$

Παράδειγμα 3ον. Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ ῥίζαι καὶ νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις :

$$A=(3\sqrt{16\alpha^3\beta}-5\sqrt{\alpha\beta})-(6\sqrt{9\alpha\beta^3}-7\sqrt{25\alpha\beta})$$

Ἔχομεν

$$A=3\sqrt{16\alpha^3\beta}-5\sqrt{\alpha\beta}-6\sqrt{9\alpha\beta^3}+7\sqrt{25\alpha\beta} \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ

$$3\sqrt{16\alpha^3\beta}=3\sqrt{16\alpha^2\cdot\alpha\beta}=3\cdot4\alpha\sqrt{\alpha\beta}=12\alpha\sqrt{\alpha\beta}$$
$$6\sqrt{9\alpha\beta^3}=6\sqrt{9\beta^2\cdot\alpha\beta}=6\cdot3\beta\sqrt{\alpha\beta}=18\beta\sqrt{\alpha\beta}$$
$$7\sqrt{25\alpha\beta}=7\cdot5\sqrt{\alpha\beta}=35\sqrt{\alpha\beta}$$

ἡ (1) γράφεται

$$A=12\alpha\sqrt{\alpha\beta}-5\sqrt{\alpha\beta}-18\beta\sqrt{\alpha\beta}+35\sqrt{\alpha\beta}=(12\alpha-5-18\beta+35)\sqrt{\alpha\beta}=$$
$$=(12\alpha-18\beta+30)\sqrt{\alpha\beta}.$$

Ἀσκήσεις. 931. Νὰ ἐκτελεσθοῦν καὶ νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις.

1. $3\sqrt{8}-7\sqrt{18}+9\sqrt{72}-12\sqrt{50}$
2. $2\sqrt{24}+3\sqrt{54}-\sqrt{150}$
3. $\sqrt{45\alpha^3}-\sqrt{80\alpha^3}+\sqrt{5\alpha}$
4. $\sqrt{45\alpha^3\beta}+\sqrt{125\alpha^3\beta}-\sqrt{320\alpha^8\beta}$

932. Νὰ ἐκτελεσθοῦν καὶ νὰ ἁπλοιηθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις.

1. $3\sqrt{\frac{3}{4}}-\frac{2}{3}\sqrt{12}+6\sqrt{27}-11\sqrt{\frac{3}{16}}$
2. $3\sqrt{20}+\frac{1}{5}\sqrt{\frac{80}{9}}+\frac{3}{7}\sqrt{\frac{245}{16}}$
3. $3\sqrt{3}-\sqrt{\frac{123}{25}-3}-2\sqrt{432}$
4. $\sqrt{\frac{18\alpha^2\gamma}{\beta^2\delta}}-\sqrt{\frac{50\gamma^3}{\delta^3}}-\sqrt{\frac{128\alpha^4\gamma}{\beta^6\delta}}$
5. $\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha^2}}+\sqrt{\frac{\alpha}{\beta^2}-\frac{1}{\beta}}$
6. $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta\gamma}}+\sqrt{\frac{\beta}{\alpha\gamma}}+\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha\beta}}$

933. Νὰ ἐκτελεσθοῦν καὶ νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις.

1. $\sqrt[3]{56}+\sqrt[3]{189}+\sqrt[3]{448}$
2. $\sqrt[3]{3\alpha^2(\alpha+\beta)^7}-4\alpha\beta\sqrt[3]{3\alpha^2(\alpha+\beta)}$
3. $\sqrt[3]{24\alpha^4\beta}+\sqrt[3]{3\alpha^4\beta x^3}-\sqrt[3]{81\alpha\beta x^6}$
4. $\sqrt[3]{14}-\sqrt[3]{54}+\sqrt[6]{216}+\sqrt[6]{196}$

934. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι ἀσκήσεις :

1. $\sqrt[3]{\frac{\alpha^3\beta^2+\alpha^3\gamma}{\beta^2}}-\sqrt[3]{\frac{x^3\beta^2+x^3\gamma}{\beta^2}}$
2. $\sqrt[3]{\frac{\alpha^7x-\alpha^6\beta}{x^2}}-\sqrt[3]{\frac{\alpha^4x-\alpha^3\beta}{x^2}}$
3. $2\sqrt[3]{\alpha^6\beta}-3\alpha^2\sqrt[3]{64\beta}+5\alpha\sqrt[3]{\alpha^3\beta}+2\alpha^2\sqrt[3]{125\beta^4}+3\alpha^2\sqrt[3]{27\beta}$

***353.* Πολλαπλασιασμὸς καὶ διαίρεσις ἀρρήτων παραστάσεων.** Ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ διαίρεσις ῥιζῶν γίνεται ὅπως ἐδείχθη εἰς τὰς § 342—347, ὁ δὲ πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ διαίρεσις ἀρρήτων παραστάσεων γίνεται ὅπως καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ διαίρεσις ἀλγεβρικῶν παραστάσεων:

Π. χ. 1. $3\sqrt{5\alpha\beta}\cdot 4\sqrt{20\alpha\beta}=12\sqrt{100\alpha^2\beta^2}=12\cdot 10\alpha\beta=120\alpha\beta.$

2. $(\sqrt{5}+2\sqrt{7}+3\sqrt{10})\cdot 2\sqrt{5}=2\sqrt{25}+4\sqrt{35}+6\sqrt{50}=$
$=2.5+4\sqrt{35}+6.5\sqrt{2}=10+4\sqrt{35}+30\sqrt{2}.$

3. $(5\sqrt{3}+2\sqrt{2})(3\sqrt{2}-7\sqrt{3})=15\sqrt{6}+6\sqrt{4}-35\sqrt{9}-14\sqrt{6}$
$=15\sqrt{6}+6\cdot 2-35\cdot 3-14\sqrt{6}=\sqrt{6}+12-105=\sqrt{6}-93.$

4. $12\alpha\gamma\sqrt{6\beta\gamma}:4\gamma\sqrt{2\beta}=\dfrac{12\alpha\gamma}{4\gamma}\sqrt{\dfrac{6\beta\gamma}{2\beta}}=3\alpha\sqrt{3\gamma}.$

Ἐξ ἄλλου ἡ ἐφαρμογὴ τῶν ἀξιοσημειώτων ταυτοτήτων μᾶς ἐπιτρέπει να εὕρωμεν ἀμέσως μερικὰ γινόμενα:

Π. χ. 1. $(\sqrt{\alpha}\pm\sqrt{\beta})^2=(\sqrt{\alpha})^2\pm 2\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}+(\sqrt{\beta})^2=\alpha\pm 2\sqrt{\alpha\beta}+\beta$

2. $(\alpha\pm\sqrt{\beta})^2=\alpha^2\pm 2\alpha\sqrt{\beta}+\beta$

Αἱ παραστάσεις $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ καὶ $\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}$, αἱ ὁποῖαι διαφέρουν κατὰ τὸ σημεῖον μιᾶς ρίζης λέγονται ***συζυγεῖς***. Ἐπίσης οἱ παραστάσεις $\alpha+\sqrt{\beta}$ καὶ $\alpha-\sqrt{\beta}$ εἶναι συζυγεῖς.

Τὸ γινόμενον δύο συζυγῶν παραστάσεων εἶναι :

$$(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})=(\sqrt{\alpha})^2-(\sqrt{\beta})^2=\alpha-\beta$$
$$(\alpha+\sqrt{\beta})(\alpha-\sqrt{\beta})=\alpha^2-\beta$$

Ἀσκήσεις. ***935.*** Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις :

1. $(\sqrt{8}+\sqrt{5})^2$ 3. $(\sqrt{2}+5)^2$ 5. $(3\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$ 7. $(2\sqrt{5}+3\sqrt{6})^2$
2. $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$ 4. $(7-\sqrt{3})^2$ 6. $(5\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$ 8. $(7\sqrt{2}-4\sqrt{3})^2$

936. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις :

1. $(\sqrt{x+3}+5)^2$, 3. $(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1})^2$, 5. $(2\sqrt{x}-3\sqrt{x+1})^2$
2. $(1-\sqrt{x+3})^2$, 4. $(\sqrt{3x+2}-\sqrt{3x-2})^2$, 6. $(3\sqrt{x+5}+5\sqrt{x-5})^2$

937. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις :

1. $\left(\sqrt{\alpha+\sqrt{\beta}}+\sqrt{\alpha-\sqrt{\beta}}\right)^2$ 2. $\left[\sqrt{2-\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})+\sqrt{2+\sqrt{3}}(2+\sqrt{3})\right]^2$

3. $\left(\sqrt{\dfrac{x+\sqrt{x^2-\alpha^2}}{2}}-\sqrt{\dfrac{x-\sqrt{x^2-\alpha^2}}{2}}\right)^2$

4. $\left[\sqrt{\dfrac{1}{2}(\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta^2})}+\sqrt{\dfrac{1}{2}(\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta^2})}\right]^2$

938. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις :

1. $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma})^2$ 3. $(2\sqrt{3}-3\sqrt{5}+5\sqrt{2})^2$

2. $(\sqrt[\nu]{\alpha}-\sqrt[\mu]{\beta}+\sqrt[\rho]{\gamma})^2$ 4. $(\sqrt{5}+11\sqrt{3}-2+\sqrt{6})^2$

939. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις :

1. $(\sqrt[3]{\alpha x^2}+\sqrt[3]{\beta y^2})^3$ 2. $(\sqrt[3]{\mu^2-\nu^2}-\sqrt[3]{(\mu+\nu)^2})^3$

940. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις :

1. $(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})$
2. $(7-2\sqrt{3})(7+2\sqrt{3})$
3. $(5\sqrt{7}+2\sqrt{8})(5\sqrt{7}-2\sqrt{8})$
4. $(2\sqrt{3}+\sqrt{2})(2\sqrt{3}-\sqrt{2})$
5. $(5+\sqrt{3})(5-\sqrt{3})$
6. $(3\sqrt{12}+5)(3\sqrt{12}-5)$

941. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις :

1. $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})$
2. $(\sqrt{\alpha+\beta}+\sqrt{\alpha-\beta})(\sqrt{\alpha+\beta}-\sqrt{\alpha-\beta})$
3. $(1+x\sqrt{3}+x^2)(1-x\sqrt{3}+x^2)$
4. $\left(x+\frac{\alpha}{2}+\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}-\beta}\right)\left(x+\frac{\alpha}{2}-\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}-\beta}\right)$

942. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις :

1. $\sqrt{2+\sqrt{3}}\,.\,\sqrt{2-\sqrt{3}}$
2. $\sqrt{x+y+\sqrt{4xy}}\,.\,\sqrt{x+y-\sqrt{4xy}}$
3. $\sqrt{x+\sqrt{y}}\,.\,\sqrt{x-\sqrt{y}}$
4. $\sqrt[3]{\alpha\sqrt{\alpha}-\sqrt{\alpha^3-\beta^3}}\,.\,\sqrt[3]{\alpha\sqrt{\alpha}+\sqrt{\alpha^3-\beta^3}}$
5. $\sqrt[3]{\mu\sqrt{\mu}-\sqrt{\mu^3-\nu^6}}\,.\,\sqrt[3]{\mu\sqrt{\mu}+\sqrt{\mu^3-\nu^6}}$

943. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις :

1. $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{5})$
2. $(5\sqrt{12}+2\sqrt{3})(7\sqrt{12}-2\sqrt{3})$
3. $(3+8\sqrt{7})(5-2\sqrt{7})$
4. $(5\sqrt{3}-3\sqrt{6})(3\sqrt{8}-4)$
5. $(\sqrt{2}+\sqrt{5})(2\sqrt{2}-\sqrt{5})$
6. $(9\sqrt{10}+\sqrt{6})(2\sqrt{6}-\sqrt{10})$

944. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις :

1. $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})(2\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})$
2. $(\alpha+\sqrt{x})(\beta-\sqrt{y})$
3. $\left(\alpha\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}+\beta\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)\left(\beta\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}-\alpha\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)$

945. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις :

1. $(\sqrt{2}+2\sqrt{18}-5\sqrt{50}+4\sqrt{32})\cdot\sqrt{2}$
2. $(\sqrt[3]{24}-2\sqrt[\varepsilon]{81}+3\sqrt[3]{375}-\sqrt[3]{192})\cdot\sqrt[3]{3}$
3. $(3\sqrt{8}+\sqrt{5}-2\sqrt{2})(\sqrt{72}-2\sqrt{20}-3\sqrt{2})$
4. $(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma})(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma})$

946. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις :

1. $\left(\sqrt{\frac{\alpha\beta^2}{\gamma^3}}+\sqrt{\frac{\alpha^2}{\beta}}\right)\cdot(\sqrt{\alpha\gamma}+\sqrt{\beta^3})$
2. $\sqrt[2\mu]{\sqrt[3\nu]{\alpha^5}}\cdot\sqrt[6\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha^5}}\cdot\sqrt[\mu]{\sqrt[6\nu]{\alpha^9}}\cdot\sqrt[6\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}}$
3. $\left(2x\sqrt{\frac{x}{x^2-\alpha^2}}+\sqrt{\frac{x(x+\alpha)}{x-\alpha}}+\sqrt{\frac{x^2(x^2-\alpha x)}{x+\alpha}}\right)\sqrt{\frac{x+\alpha}{x-\alpha}}$

947. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις :

1. $(\sqrt{x^2+xy}+x-\sqrt{xy})(\sqrt{xy+y^2}-\sqrt{xy}+y)$
2. $\sqrt{\alpha x}+\sqrt{\beta y})(\sqrt{\alpha\beta}-\sqrt{xy})[(\alpha-y)\sqrt{\beta x}-(\beta-x)\sqrt{\alpha y}]$
3. $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma})(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma})(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma})(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma})$
4. $\sqrt{\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}}}\cdot\sqrt{\dfrac{\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta}{\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\alpha\gamma}+\frac{1}{\alpha\beta}}}$

948. Νὰ γίνουν αἱ κάτωθι διαιρέσεις :

1. $(8\sqrt{14}-6\sqrt{63}+4\sqrt{28}-10\sqrt{7}):2\sqrt{7}$ 3. $(4\sqrt{12}-2\sqrt{48}-9\sqrt{3}+3):\sqrt{27}$

2. $(2\sqrt{8}+7\sqrt[3]{12}+\sqrt[4]{2}):2\sqrt{2}$ 4. $(2\sqrt{32}+3\sqrt{72}+\sqrt[4]{64}):\sqrt{8}$

949. Νὰ γίνουν αἱ κάτωθι διαιρέσεις :

1. $(\alpha\beta\gamma\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}+\alpha^2\beta\gamma\sqrt[3]{\alpha^2\beta\gamma}-3\alpha\beta^2\gamma\sqrt[3]{\alpha\beta^2\gamma}+\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma^2}):\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}$

2. $[(x+y)\sqrt{x+y}-(x-y)\sqrt{x^2-y^2}+xy\sqrt{x^2y+xy^2}]:\sqrt{x+y}$

950. Νὰ γίνουν αἱ κάτωθι διαιρέσεις :

1. $(B\sqrt{B}-\beta\sqrt{\beta}):(\sqrt{B}-\sqrt{\beta})$ 2. $(3x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}-2):(3\sqrt{x}-2)$

3. $(\alpha^3-2\sqrt[4]{\alpha^2\beta^3}-\alpha^2\sqrt[6]{\alpha^3\beta^2}+2\beta\sqrt[12]{\beta}):(\sqrt{\alpha}-\sqrt[3]{\beta})$

951. Νὰ γίνουν αἱ κάτωθι διαιρέσεις :

1. $\dfrac{\alpha+\beta\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}}$ 2. $\dfrac{\alpha+\beta-\gamma}{\sqrt{\alpha+\beta}-\sqrt{\gamma}}$ 3. $\dfrac{(3+\sqrt{3})(1+\sqrt{5})\sqrt{5}}{(5+\sqrt{5})(1+\sqrt{3})\sqrt{3}}$

952. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις :

1. $\dfrac{3\sqrt{8}-2\sqrt{12}+\sqrt{20}}{3\sqrt{18}-2\sqrt{27}+\sqrt{45}}$ 2. $\left(\sqrt{1-x}+\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}\right):\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

3. $\sqrt{\dfrac{\alpha^2+\alpha}{\beta^2+\beta}}:\left(\sqrt{\dfrac{\beta^2-\beta}{\alpha^2-\alpha}}:\sqrt{\dfrac{\beta^2-1}{\alpha^2-1}}\right)$

953. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις :

1. $\sqrt{\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}}}:\sqrt{\dfrac{\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta}{\dfrac{1}{\beta\gamma}+\dfrac{1}{\gamma\alpha}+\dfrac{1}{\alpha\beta}}}$

2. $\left(\sqrt[4]{\sqrt{23}-\sqrt{7}}\,.\,\sqrt[4]{\sqrt{23}+\sqrt{7}}\right):\left(\sqrt[6]{5\sqrt{2}-7}\,.\,\sqrt[6]{5\sqrt{2}+7}\right)$

354. Μετασχηματισμὸς τῶν παραστάσεων. $\sqrt{\alpha+\beta\pm2\sqrt{\alpha\beta}}$

Ἀπὸ τὴν ταυτότητα $(\sqrt{\alpha}\pm\sqrt{\beta})^2=\alpha+\beta\pm2\sqrt{\alpha\beta}$ λαμβάνομεν :

$$\sqrt{\alpha}\pm\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha+\beta\pm2\sqrt{\alpha\beta}} \qquad (1)$$

Ἐὰν τὸ ***γινόμενον αβ εἶναι τέλειον τετράγωνον,*** δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν τὴν παράστασιν $\sqrt{\alpha}\pm\sqrt{\beta}$ εἰς ἄλλην ἰσοδύναμον μὲ μίαν μόνον ρίζαν, ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τὸν τύπον (1).

Π. χ. $\sqrt{5}+\sqrt{20}=\sqrt{5+20+2\sqrt{100}}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

$\sqrt{27}-\sqrt{3}=\sqrt{27+3-2\sqrt{81}}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

Ἐὰν ὁ ἕνας ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς α καὶ β εἶναι τέλειον τετράγωνον, δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν τὴν παράστασιν $\sqrt{\alpha+\beta\pm2\sqrt{\alpha\beta}}$ εἰς ἄλλην ἰσοδύναμον, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ μίαν μόνον ρίζαν, ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τὸν τύπον (1).

Π. χ. $\sqrt{9+5\pm2\sqrt{9.5}}=\sqrt{9}\pm\sqrt{5}=3\pm\sqrt{5}$

$\sqrt{3+\sqrt{8}}=\sqrt{1+2+2\sqrt{2}}=\sqrt{1}+\sqrt{2}=1+\sqrt{2}$

Ἀσκήσεις. **954.** Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις :

1. $\sqrt{18}\pm\sqrt{2}$ 3. $\sqrt{50}\pm\sqrt{2}$ 5. $\sqrt{8}\pm\sqrt{2}$ 7. $\sqrt{32}\pm\sqrt{2}$

2. $\sqrt{14+2\sqrt{45}}$ 4. $\sqrt{8+2\sqrt{15}}$ 6. $\sqrt{29+\sqrt{720}}$ 8. $\sqrt{5+\sqrt{24}}$

355. Τετραγωνικὴ ρίζα ἑνὸς μονωνύμου. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ μονωνύμου : $36\alpha^4\beta^2\gamma^8$. Κατὰ τὴν § 342 θὰ ἔχωμεν :

$$\pm\sqrt{36\alpha^4\beta^2\gamma^8}=\pm\sqrt{36}\,.\,\sqrt{\alpha^4}\cdot\sqrt{\beta^2}\,.\,\sqrt{\gamma^8}=\pm6\alpha^2\beta\gamma^4$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν

$$-\sqrt{16x^2y^4\omega^{10}}=-4xy^2\omega^5,\qquad +\sqrt{\frac{9\alpha^2\beta^4}{25x^2y^6}}=+\frac{\sqrt{9\alpha^2\beta^4}}{\sqrt{25x^2y^6}}=+\frac{3\alpha\beta^2}{5xy^3}$$

Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω παραδείγματα συνάγομεν, ὅτι :

Διὰ νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν ἑνὸς μονωνύμου ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ συντελεστοῦ του καὶ διαιροῦμεν διὰ 2 τοὺς ἐκθέτας ὅλων τῶν γραμμάτων του.

Εἶναι φανερόν, ὅτι διὰ νὰ εἶναι ἕνα μονώνυμον τέλειον τετράγωνον, πρέπει ὁ συντελεστής του νὰ εἶναι τέλειον τετράγωνον καὶ οἱ ἐκθέται ὅλων τῶν γραμμάτων του νὰ εἶναι ἄρτιοι.

Σημ. Περὶ τῆς τετραγωνικῆς ρίζης ἑνὸς πολυωνύμου, θὰ κάμωμεν λόγον εἰς τὸ κεφάλαιον τῶν ἰδιοτήτων τῶν πολυωνύμων.

Ἀσκήσεις. **955.** Νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τῶν κάτωθι μονωνύμων :

1. $36\alpha^2\beta^4\gamma^2$ 2. $121\alpha^4\beta^6\gamma^2$ 3. $16x^4y^2\omega^2$ 4. $144\alpha^6\beta^8\gamma^4$

956. Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις :

1. $\sqrt{\frac{81\alpha^2\beta^4}{16x^2}}$ 2. $\sqrt{\frac{25\alpha^4\beta^6}{9\gamma^4x^2}}$ 3. $\sqrt{\frac{9x^2y^2}{64\alpha^4\beta^2}}$ 4. $\sqrt{\frac{\alpha^4\beta^6\gamma^2}{16x^4y^6}}$

ΤΡΟΠΗ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ ΜΕ ΑΡΡΗΤΟΝ ΠΑΡΟΝΟΜΑΣΤΗΝ ΕΙΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ ΜΕ ΡΗΤΟΝ ΠΑΡΟΝΟΜΑΣΤΗΝ

356. Τροπὴ κλασμάτων μὲ ἄρρητον παρονομαστὴν εἰς ἰσοδύναμα μὲ ρητὸν παρονομαστήν. Ὅταν ἔχωμεν ἕνα κλάσμα, τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστὴς εἶναι ἄρρητος, εἶναι προτιμότερον νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὸ κλάσμα αὐτὸ μὲ ἕνα ἄλλο ἰσοδύναμον κλάσμα, τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστὴς νὰ εἶναι ρητός.

Διακρίνομεν τὰς κάτωθι περιπτώσεις :

1ον. Ἐὰν τὸ κλάσμα εἶναι τῆς μορφῆς $\frac{\alpha}{\sqrt{\beta}}$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος ἐπὶ τὸν παρονομαστήν του $\sqrt{\beta}$ καὶ λαμβάνομεν

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\beta}}=\frac{\alpha\sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta}\,.\,\sqrt{\beta}}=\frac{\alpha\sqrt{\beta}}{\beta}$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1.\sqrt{2}}{\sqrt{2}.\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},\qquad \frac{R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{R\sqrt{2}.\sqrt{3}}{\sqrt{3}.\sqrt{3}}=\frac{R\sqrt{6}}{3}$$

Παρατήρησις. Ἐδείξαμεν, ὅτι $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ἡ κατὰ προσέγγισιν τιμὴ τῆς $\sqrt{2}$ εἶναι 1,4142135.... Μὲ τὴν τροπὴν τοῦ ἀρρήτου παρονομαστοῦ τοῦ κλάσματος $\frac{1}{\sqrt{2}}$ εἰς ρητόν, ἀντικαθιστῶμεν τὸ

$$\frac{1}{1{,}4142135}\quad \text{διὰ τοῦ}\quad \frac{1{,}4142135}{2}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι μία ἐπίπονος διαίρεσις, ἀντικαθίσταται διὰ μιᾶς πράξεως, ἡ ὁποία ἐκτελεῖται εὐκόλως καὶ ταχέως.

2ον. ***Ἐὰν τὸ κλάσμα εἶναι τῆς μορφῆς*** $\frac{\alpha}{\sqrt[\nu]{\beta}}$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους του ἐπὶ $\sqrt[\nu]{\beta^{\nu-1}}$ καὶ ἔχομεν

$$\frac{\alpha}{\sqrt[\nu]{\beta}}=\frac{\alpha\sqrt[\nu]{\beta^{\nu-1}}}{\sqrt[\nu]{\beta}.\sqrt[\nu]{\beta^{\nu-1}}}=\frac{\alpha\sqrt[\nu]{\beta^{\nu-1}}}{\sqrt[\nu]{\beta^{\nu}}}=\frac{\alpha\sqrt[\nu]{\beta^{\nu-1}}}{\beta}$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι

$$\frac{2}{\sqrt[3]{5}}=\frac{2\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5}.\sqrt[3]{5^2}}=\frac{2\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{5^3}}=\frac{2\sqrt[3]{25}}{5}$$

$$\frac{\alpha}{\sqrt[5]{\beta^2}}=\frac{\alpha\sqrt[5]{\beta^3}}{\sqrt[5]{\beta^2}.\sqrt[5]{\beta^3}}=\frac{\alpha\sqrt[5]{\beta^3}}{\sqrt[5]{\beta^5}}=\frac{\alpha\sqrt[5]{\beta^3}}{\beta}$$

3ον. ***Ἐὰν τὸ κλάσμα εἶναι τῆς μορφῆς*** $\frac{\mu}{\sqrt{\alpha}\pm\sqrt{\beta}}$. Διὰ νὰ τρέψωμεν τὸ κλάσμα αὐτὸ εἰς ἄλλο ἰσοδύναμον μὲ ρητὸν παρονομαστήν, πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους του ἐπὶ τὴν συζυγῆ παράστασιν τοῦ παρονομαστοῦ. Κατὰ ταῦτα θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{\mu}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}=\frac{\mu(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})}{(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})}=\frac{\mu(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})}{\alpha-\beta}$$

$$\frac{\mu}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}=\frac{\mu(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})}{(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})}=\frac{\mu(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})}{\alpha-\beta}$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν :

$$\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}=\frac{2(\sqrt{2}-\sqrt{5})}{(\sqrt{2}+\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{5})}=\frac{2(\sqrt{2}-\sqrt{5})}{2-5}=-\frac{2}{3}(\sqrt{2}-\sqrt{5})$$

4ον. Ἐὰν τὸ κλάσμα εἶναι τῆς μορφῆς $\frac{\mu}{\alpha\pm\sqrt{\beta}}$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους του ἐπὶ τὴν συζυγῆ παράστασιν τοῦ παρονομαστοῦ.

Π. χ. $$\frac{\mu}{\alpha+\sqrt{\beta}}=\frac{\mu(\alpha-\sqrt{\beta})}{(\alpha+\sqrt{\beta})(\alpha-\sqrt{\beta})}=\frac{\mu(\alpha-\sqrt{\beta})}{\alpha^2-\beta}$$

$$\frac{\mu}{\alpha-\sqrt{\beta}}=\frac{\mu(\alpha+\sqrt{\beta})}{(\alpha-\sqrt{\beta})(\alpha+\sqrt{\beta})}=\frac{\mu(\alpha+\sqrt{\beta})}{\alpha^2-\beta}$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι :

$$\frac{4}{3-2\sqrt{5}}=\frac{4(3+2\sqrt{5})}{(3-2\sqrt{5})(3+2\sqrt{5})}=\frac{4(3+2\sqrt{5})}{9-20}=-\frac{4}{11}(3+2\sqrt{5})$$

5ον. Ἐὰν τὸ κλάσμα εἶναι τῆς μορφῆς $\frac{\mu}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}}$.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν γράφομεν τὸν παρονομαστὴν ὡς ἑξῆς: $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})+\sqrt{\gamma}$ καὶ πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος ἐπὶ $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})-\sqrt{\gamma}$ καὶ ἔχομεν :

$$\frac{\mu}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}}=\frac{\mu(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma})}{[(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})+\sqrt{\gamma}][(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})-\sqrt{\gamma}]}=$$

$$=\frac{\mu(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma})}{(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2-\gamma}=\frac{\mu(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma})}{\alpha+\beta-\gamma+2\sqrt{\alpha\beta}}$$

Τὸ τελευταῖον κλάσμα περιέχει ἕναν ἄρρητον ὅρον εἰς τὸν παρονομαστήν του· ἐὰν θεωρήσωμεν τὸ $\alpha+\beta-\gamma$ ὡς ἕναν ὅρον, πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ τελευταίου κλάσματος ἐπὶ $(\alpha+\beta-\gamma)-2\sqrt{\alpha\beta}$ καὶ ἔχομεν

$$\frac{\mu}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}}=\frac{\mu(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma})(\alpha+\beta-\gamma-2\sqrt{\alpha\beta})}{[(\alpha+\beta-\gamma)+2\sqrt{\alpha\beta}]\,[\alpha+\beta-\gamma)-2\sqrt{\alpha\beta}]}=$$

$$=\frac{\mu(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma})(\alpha+\beta-\gamma-2\sqrt{\alpha\beta})}{(\alpha+\beta-\gamma)^2-4\alpha\beta}$$

6ον. Ἐὰν τὸ κλάσμα εἶναι τῆς μορφῆς $K=\frac{A}{\sqrt[\nu]{\alpha}-\sqrt[\nu]{\beta}}$.

Τὸ δοθὲν κλάσμα γράφεται

$$\frac{A}{\sqrt[\nu]{\alpha}-\sqrt[\nu]{\beta}}=\frac{A}{\alpha-\beta}\cdot\frac{\alpha-\beta}{\sqrt[\nu]{\alpha}-\sqrt[\nu]{\beta}} \text{ ἢ } \frac{A}{\sqrt[\nu]{\alpha}-\sqrt[\nu]{\beta}}=\frac{A}{\alpha-\beta}\cdot\frac{\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\nu-\left(\sqrt[\nu]{\beta}\right)^\nu}{\sqrt[\nu]{\alpha}-\sqrt[\nu]{\beta}} \quad (1$$

Τὸ δεύτερον κλάσμα τῆς (1) εἶναι ἕνα ἀξιοσημείωτον πηλίκον τῆς μορφῆς $\frac{x^\nu-y^\nu}{x-y}$, τὸ ὁποῖον ἰσοῦται μὲ

$$x^{\nu-1}+yx^{\nu-2}+y^2x^{\nu-3}+\ldots+y^{\nu-1}$$

Κατόπιν τούτου ἡ (1) γράφεται : $\dfrac{A}{\sqrt[\nu]{\alpha}-\sqrt[\nu]{\beta}}=$

$$=\frac{A}{\alpha-\beta}\cdot\left(\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-1}}+\sqrt[\nu]{\beta}\cdot\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-2}}+\sqrt[\nu]{\beta^2}\cdot\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-3}}+\dots+\sqrt[\nu]{\beta^{\nu-1}}\right)$$

ἢ

$$\boxed{\frac{A}{\sqrt[\nu]{\alpha}-\sqrt[\nu]{\beta}}=\frac{A}{\alpha-\beta}\left(\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-1}}+\sqrt[\nu]{\beta\alpha^{\nu-2}}+\sqrt[\nu]{\beta^2\alpha^{\nu-3}}+\dots+\sqrt[\nu]{\beta^{\nu-1}}\right)}$$

Π.χ. $$\frac{1}{\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt[3]{\beta}}=\frac{1}{\alpha-\beta}\cdot\frac{\alpha-\beta}{\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt[3]{\beta}}=\frac{1}{\alpha-\beta}\cdot\frac{\left(\sqrt[3]{\alpha}\right)^3-\left(\sqrt[3]{\beta}\right)^3}{\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt[3]{\beta}}=$$

$$=\frac{1}{\alpha-\beta}\cdot\left(\sqrt[3]{\alpha^2}+\sqrt[3]{\alpha\beta}+\sqrt[3]{\beta^2}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{\alpha}-\sqrt[4]{\beta}}=\frac{1}{\alpha-\beta}\cdot\frac{\alpha-\beta}{\sqrt[4]{\alpha}-\sqrt[4]{\beta}}=\frac{1}{\alpha-\beta}\cdot\frac{\left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^4-\left(\sqrt[4]{\beta}\right)^4}{\sqrt[4]{\alpha}-\sqrt[4]{\beta}}=$$

$$=\frac{1}{\alpha-\beta}\cdot\left(\sqrt[4]{\alpha^3}+\sqrt[4]{\beta\alpha^2}+\sqrt[4]{\beta^2\alpha}+\sqrt[4]{\beta^3}\right)$$

7ον. Ἐὰν τὸ κλάσμα εἶναι τῆς μορφῆς $K=\dfrac{A}{\sqrt[\nu]{\alpha}+\sqrt[\nu]{\beta}}$.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν διακρίνομεν δύο περιπτώσεις, καθόσον ὁ δείκτης ν εἶναι ἄρτιος ἢ περιττὸς ἀριθμός.

I. ***Ἐὰν ὁ ν εἶναι ἄρτιος***, γράφομεν τὸ δοθὲν κλάσμα ὡς ἑξῆς :

$$\frac{A}{\sqrt[\nu]{\alpha}+\sqrt[\nu]{\beta}}=\frac{A}{\alpha-\beta}\cdot\frac{\alpha-\beta}{\sqrt[\nu]{\alpha}+\sqrt[\nu]{\beta}}\text{ ἢ }\frac{A}{\sqrt[\nu]{\alpha}-\sqrt[\nu]{\beta}}=\frac{A}{\alpha-\beta}\cdot\frac{\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\nu-\left(\sqrt[\nu]{\beta}\right)^\nu}{\sqrt[\nu]{\alpha}+\sqrt[\nu]{\alpha}}\quad(1)$$

Τὸ δεύτερον κλάσμα τῆς (1) εἶναι ἕνα ἀξιοσημείωτον πηλίκον τῆς μορφῆς $\dfrac{x^\nu-y^\nu}{x+y}$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον μὲ

$$x^{\nu-1}-yx^{\nu-2}+y^2x^{\nu-3}-y^3x^{\nu-4}+\dots-y^{\nu-1}$$

Κατόπιν τούτου ἡ (1) γράφεται :

$$\frac{A}{\sqrt[\nu]{\alpha}+\sqrt[\nu]{\beta}}=\frac{A}{\alpha-\beta}\cdot\left(\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-1}}-\sqrt[\nu]{\beta}\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-2}}+\sqrt[\nu]{\beta^2}\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-3}}-\dots-\sqrt[\nu]{\beta^{\nu-1}}\right)$$

ἢ

$$\boxed{\frac{A}{\sqrt[\nu]{\alpha}+\sqrt[\nu]{\beta}}=\frac{A}{\alpha-\beta}\cdot\left(\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-1}}-\sqrt[\nu]{\beta\alpha^{\nu-2}}+\sqrt[\nu]{\beta^2\alpha^{\nu-3}}-\dots-\sqrt[\nu]{\beta^{\nu-1}}\right)}$$

Π. χ. $$\frac{1}{\sqrt[4]{\alpha}+\sqrt[4]{\beta}}=\frac{1}{\alpha-\beta}\cdot\frac{\alpha-\beta}{\sqrt[4]{\alpha}+\sqrt[4]{\beta}}=\frac{1}{\alpha-\beta}\cdot\frac{\left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^4-\left(\sqrt[4]{\beta}\right)^4}{\sqrt[4]{\alpha}+\sqrt[4]{\beta}}=$$

$$=\frac{1}{\alpha-\beta}\cdot\left(\sqrt[4]{\alpha^3}-\sqrt[4]{\alpha^2\beta}+\sqrt[4]{\beta^2\alpha}-\sqrt[4]{\beta^3}\right)$$

II. ***Ἐὰν ὁ ν εἶναι περιττός,*** γράφομεν τὸ δοθὲν κλάσμα ὡς ἑξῆς :

$$\frac{A}{\sqrt[\nu]{\alpha}+\sqrt[\nu]{\beta}}=\frac{A}{\alpha+\beta}\cdot\frac{\alpha+\beta}{\sqrt[\nu]{\alpha}+\sqrt[\nu]{\beta}}\ \text{ἢ}\ K=\frac{A}{\alpha+\beta}\cdot\frac{\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\nu+\left(\sqrt[\nu]{\beta}\right)^\nu}{\sqrt[\nu]{\alpha}+\sqrt[\nu]{\beta}}\quad(1)$$

Ἐπειδὴ τὸ ν εἶναι περιττὸς ἀριθμός, τὸ $\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\nu+\left(\sqrt[\nu]{\beta}\right)^\nu$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ $\sqrt[\nu]{\alpha}+\sqrt[\nu]{\beta}$ καὶ δίδει πηλίκον :

$$\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-1}}-\sqrt[\nu]{\beta\alpha^{\nu-2}}+\sqrt[\nu]{\beta^2\alpha^{\nu-3}}-\ldots-\sqrt[\nu]{\beta^{\nu-2}\alpha}+\sqrt[\nu]{\beta^{\nu-1}}$$

ἑπομένως ἡ ἰσότης (1) γράφεται :

$$\boxed{\frac{A}{\sqrt[\nu]{\alpha}+\sqrt[\nu]{\beta}}=\frac{A}{\alpha+\beta}\cdot\left(\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-1}}-\sqrt[\nu]{\beta\alpha^{\nu-2}}+\sqrt[\nu]{\beta^2\alpha^{\nu-3}}-\ldots-\sqrt[\nu]{\beta^{\nu-2}\alpha}+\sqrt[\nu]{\beta^{\nu-1}}\right)}$$

Π.χ. $$\frac{1}{\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}}=\frac{1}{\alpha+\beta}\cdot\frac{\alpha+\beta}{\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}}=\frac{1}{\alpha+\beta}\cdot\frac{\left(\sqrt[3]{\alpha}\right)^3+\left(\sqrt[3]{\beta}\right)^3}{\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}}$$

$$=\frac{1}{\alpha+\beta}\cdot\left(\sqrt[3]{\alpha^2}-\sqrt[3]{\alpha\beta}+\sqrt[3]{\beta^2}\right)$$

8ον. ***Ἐὰν τὸ κλάσμα εἶναι τῆς μορφῆς*** $K=\dfrac{A}{\sqrt[\kappa]{\beta}\pm\sqrt[\lambda]{\gamma}}$.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τρέπομεν τὰς δύο ρίζας εἰς ἄλλας ἰσοδυνάμους μὲ τὸν αὐτὸν δείκτην καὶ καταλήγομεν εἰς τὴν μορφὴν $\dfrac{A}{\sqrt[\nu]{B}\pm\sqrt[\nu]{\Gamma}}$, τὴν ὁποίαν γνωρίζομεν νὰ τρέπομεν εἰς ἄλλην ἰσοδύναμον μὲ ρητὸν παρονομαστήν.

Π. χ. $$\frac{1}{\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt{\beta}}=\frac{1}{\sqrt[6]{\alpha^2}-\sqrt[6]{\beta^3}}=\frac{1}{\alpha^2-\beta^3}\cdot\frac{\alpha^2-\beta^3}{\sqrt[6]{\alpha^2}-\sqrt[6]{\beta^3}}=$$

$$=\frac{1}{\alpha^2-\beta^3}\cdot\frac{\left(\sqrt[6]{\alpha^2}\right)^6-\left(\sqrt[6]{\beta^3}\right)^6}{\sqrt[6]{\alpha^2}-\sqrt[6]{\beta^3}}=$$

$$=\frac{1}{\alpha^2-\beta^3}\cdot\left(\sqrt[6]{\alpha^{10}}+\sqrt[6]{\beta^3\alpha^8}+\sqrt[6]{\beta^6\alpha^6}+\sqrt[6]{\beta^9\alpha^4}+\sqrt[6]{\beta^{12}\alpha^2}+\sqrt[6]{\beta^{15}}\right)$$

Ἀσκήσεις. 956΄. Νὰ τραποῦν τὰ κάτωθι κλάσματα εἰς ἄλλα ἰσοδύναμα μὲ ρητὸν παρονομαστήν :

1. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 2. $\dfrac{5}{\sqrt{2}}$ 3. $\dfrac{7}{\sqrt{7}}$ 4. $\dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha}}$ 5. $\dfrac{x}{2\sqrt{xy}}$ 6. $\dfrac{\alpha}{\sqrt[3]{\alpha+\beta}}$

957. Νὰ τραποῦν τὰ κάτωθι κλάσματα εἰς ἄλλα ἰσοδύναμα μὲ ρητὸν παρονομαστήν :

1. $\dfrac{4}{\sqrt[5]{\alpha^2}}$ 2. $\dfrac{\sqrt[4]{4}}{\sqrt[6]{8}}$ 3. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{0{,}008}}$ 4. $\dfrac{2\sqrt[6]{27}}{\sqrt[4]{9}}$ 5. $\dfrac{3\sqrt[6]{64}}{\sqrt[4]{16}}$

958. Νὰ τραποῦν τὰ κάτωθι κλάσματα εἰς ἄλλα ἰσοδύναμα μὲ ρητὸν παρονομαστήν :

1. $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ 3. $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ 5. $\dfrac{3}{2(\sqrt{5}-\sqrt{2})}$ 7. $\dfrac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{5\sqrt{3}+3\sqrt{2}}$

2. $\dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ 4. $\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}}$ 6. $\dfrac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}$ 8. $\dfrac{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

959. Νὰ τραποῦν τὰ κάτωθι κλάσματα εἰς ἄλλα ἰσοδύναμα μὲ ρητὸν παρονομαστήν :

1. $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$ 3. $\dfrac{2}{\sqrt{3}-2}$ 5. $\dfrac{6}{\sqrt{8}-2}$ 7. $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$

2. $\dfrac{\beta+\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}-\beta}$ 4. $\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\beta+\sqrt{\gamma}}$ 6. $\dfrac{\sqrt{x}-1}{1+\sqrt{x}}$ 8. $\dfrac{\alpha-\sqrt{5}}{\alpha+\sqrt{5}}$

960. Νὰ τραποῦν τὰ κάτωθι κλάσματα εἰς ἄλλα ἰσοδύναμα μὲ ρητὸν παρονομαστήν :

1. $\dfrac{\sqrt{\alpha+x}+\sqrt{\alpha-x}}{\sqrt{\alpha+x}-\sqrt{\alpha-x}}$ 3. $\dfrac{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}{\alpha\sqrt{\beta}-\beta\sqrt{\alpha}}$ 5. $\dfrac{\alpha\sqrt{\beta}+\beta\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}$

2. $\dfrac{\alpha\beta}{\sqrt{\beta^3}-\sqrt{\alpha\beta^2}}$ 4. $\dfrac{1+\alpha+\sqrt{1-\alpha^2}}{1+\alpha-\sqrt{1-\alpha^2}}$ 6. $\dfrac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$

7. $\dfrac{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ 8. $\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+x-1}}{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x-1}}$

961. Νὰ τραποῦν τὰ κάτωθι κλάσματα εἰς ἄλλα ἰσοδύνσμα μὲ ρητὸν παρονομαστήν :

1. $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ 2. $\dfrac{\sqrt{30}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ 3. $\dfrac{3+4\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{5}}$

962. Νὰ τραποῦν τὰ κάτωθι κλάσματα εἰς ἄλλα ἰσοδύναμα μὲ ρητὸν παρονομαστήν :

1. $\dfrac{2}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}$ 2. $\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2}}$ 3. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}$

963. Νὰ τραποῦν τὰ κάτωθι κλίσματα εἰς ἄλλα ἰσοδύναμα μὲ ρητὸν παρονομαστήν :

1. $\dfrac{1}{3+\sqrt[3]{4}}$ 2. $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}}$ 3. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt{2}}$ 4. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$

964. Νὰ τραποῦν τὰ κάτωθι κλάσματα εἰς ἄλλα ἰσοδύναμα μὲ ρητὸν παρονομαστήν :

1. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{18}}$ 2. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{5}}$

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΜΕ ΕΚΘΕΤΑΣ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΟΥΣ

357. **Ἐκθέται κλασματικοί.** Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν νυοστὴν ρίζαν τοῦ α^μ, δηλαδὴ θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὴν

$$\sqrt[\nu]{\alpha^\mu} \qquad (1)$$

Ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι ὁ ἐκθέτης μ εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ δείκτου ν, δηλ. ἐὰν εἶναι $\mu=\nu\rho$ (2), ἡ (1) γράφεται

$$\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}=\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu\rho}}=\left(\sqrt[\nu]{\alpha^\nu}\right)^\rho=\alpha^\rho \qquad (3)$$

Ἀπὸ τὴν ἰσότητα (2) λαμβάνομεν $\rho=\dfrac{\mu}{\nu}$. Ἂν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν ἰσότητα (3) τὸν ἐκθέτην ρ μὲ τὸ ἴσον του $\dfrac{\mu}{\nu}$ ἔχομεν

$$\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}=\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$$

Ἐὰν ὁ ἐκθέτης μ δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ δείκτου ν, τὸ $\dfrac{\mu}{\nu}$ εἶναι ἕνα κλάσμα καὶ ἑπομένως τὸ σύμβολον $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ δὲν ἔχει καμμίαν ἔννοιαν (κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν δυνάμεων).

Ἐν τούτοις, πρὸς τὸν σκοπὸν τῆς γενικεύσεως, ***παραδεχόμεθα*** ὅτι, ***οἱοιδήποτε καὶ ἂν εἶναι οἱ ἀκέραιοι καὶ θετικοὶ ἀριθμοὶ μ καὶ ν, τὸ σύμβολον*** $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ ***ἔχει τὴν αὐτὴν τιμὴν μὲ τὴν ρίζαν*** $\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$, ***δηλ. ἐξ ὁρισμοῦ εἶναι***

$$\boxed{\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}=\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}}$$

Π. χ. $\alpha^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{\alpha^3}$, $\alpha^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\alpha^7}=\alpha^{\frac{7}{2}}$

358. **Παρατήρησις.** Ἡ ποσότης $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ δὲν ἀλλάσσει τιμήν, ἂν ἀντικαταστήσωμεν τὸ κλάσμα $\dfrac{\mu}{\nu}$ μὲ ἕνα κλάσμα ἴσον πρὸς αὐτό.

Δηλ. ἐὰν εἶναι $\dfrac{\mu}{\nu}=\dfrac{\mu'}{\nu'}$ θὰ εἶναι πάντοτε $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}=\alpha^{\frac{\mu'}{\nu'}}$ (1)

Πράγματι, ἐξ ὁρισμοῦ, ἡ ἰσότης (1) δύναται νὰ γραφῇ $\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}=\sqrt[\nu']{\alpha^{\mu'}}$

Τρέπομεν τὰς δύο αὐτὰς ρίζας εἰς ἄλλας ἰσοδυνάμους καὶ ἔχομεν

$$\sqrt[\nu\nu']{\alpha^{\mu\nu'}} = \sqrt[\nu\nu']{\alpha^{\mu'\nu}} \qquad (2)$$

Ἐπειδή, ἐξ ὑποθέσεως, εἶναι $\frac{\mu}{\nu} = \frac{\mu'}{\nu'}$ θὰ εἶναι καὶ $\mu\nu' = \mu'\nu$. Ἐπειδὴ $\mu\nu' = \mu'\nu$ ἡ ἰσότης (2) ὑφίσταται καὶ ἑπομένως ὑφίσταται καὶ ἡ (1).

Π.χ. $\alpha^{\frac{5}{10}} = \alpha^{\frac{1}{2}} \qquad \alpha^{\frac{12}{18}} = \alpha^{\frac{2}{3}}$

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἡ ἁπλοποίησις τῶν ριζῶν γίνεται ἁπλούστερον, ἂν χρησιμοποιήσωμεν τοὺς κλασματικοὺς ἐκθέτας.

Π. χ. $\sqrt[12]{\alpha^8} = \alpha^{\frac{8}{12}} = \alpha^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\alpha^2}$

***359.* Ἰδιότητες τῶν δυνάμεων μὲ ἐκθέτας κλασματικούς.** Αἱ ἰδιότητες τῶν δυνάμεων μὲ ἐκθέτας ἀκεραίους (§ 339) ἰσχύουν καὶ διὰ τὰς δυνάμεις μὲ ἐκθέτας κλασματικούς.

1ον. Θὰ δείξωμεν, ὅτι : $\boxed{\alpha^{\frac{\kappa}{\lambda}} \cdot \alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \alpha^{\frac{\kappa}{\lambda} + \frac{\mu}{\nu}}}$

Πράγματι ἔχομεν :

$$\alpha^{\frac{\kappa}{\lambda}} \cdot \alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\lambda]{\alpha^{\kappa}} \cdot \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}} = \sqrt[\lambda\nu]{\alpha^{\kappa\nu}} \cdot \sqrt[\lambda\nu]{\alpha^{\mu\lambda}} = \sqrt[\lambda\nu]{\alpha^{\kappa\nu} \cdot \alpha^{\mu\lambda}} = \sqrt[\lambda\nu]{\alpha^{\kappa\nu+\mu\lambda}} =$$

$$= \alpha^{\frac{\kappa\nu+\mu\lambda}{\lambda\nu}} = \alpha^{\frac{\kappa}{\lambda} + \frac{\mu}{\nu}}$$

2ον. Θὰ δείξωμεν, ὅτι : $\boxed{\left(\alpha^{\frac{\kappa}{\lambda}}\right)^{\frac{\mu}{\nu}} = \alpha^{\frac{\kappa\mu}{\lambda\nu}}}$

Πράγματι, ἔχομεν :

$$\left(\alpha^{\frac{\kappa}{\lambda}}\right)^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\left(\alpha^{\frac{\kappa}{\lambda}}\right)^{\mu}} = \sqrt[\nu]{\left(\sqrt[\lambda]{\alpha^{\kappa}}\right)^{\mu}} = \sqrt[\nu]{\sqrt[\lambda]{\alpha^{\kappa\mu}}} = \sqrt[\lambda\nu]{\alpha^{\kappa\mu}} = \alpha^{\frac{\kappa\mu}{\lambda\nu}}$$

3ον. Θὰ δείξωμεν, ὅτι : $\boxed{(\alpha\beta\gamma)^{\frac{\mu}{\nu}} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}} \cdot \beta^{\frac{\mu}{\nu}} \cdot \gamma^{\frac{\mu}{\nu}}}$

Πράγματι, ἔχομεν :

$$(\alpha\beta\gamma)^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{(\alpha\beta\gamma)^{\mu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}\,\beta^{\mu}\,\gamma^{\mu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}} \cdot \sqrt[\nu]{\beta^{\mu}} \cdot \sqrt[\nu]{\gamma^{\mu}} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}} \cdot \beta^{\frac{\mu}{\nu}} \cdot \gamma^{\frac{\mu}{\nu}}$$

4ον. Θὰ δείξωμεν, ὅτι : $\boxed{\dfrac{\alpha^{\frac{\kappa}{\lambda}}}{\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}} = \alpha^{\frac{\kappa}{\lambda} - \frac{\mu}{\nu}}}$ ἐὰν $\frac{\kappa}{\lambda} > \frac{\mu}{\nu}$

Πράγματι, ἔχομεν

$$\frac{\alpha^{\frac{\kappa}{\lambda}}}{\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}} = \frac{\sqrt[\lambda]{\alpha^{\kappa}}}{\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}} = \frac{\sqrt[\lambda\nu]{\alpha^{\kappa\nu}}}{\sqrt[\lambda\nu]{\alpha^{\mu\lambda}}} = \sqrt[\lambda\nu]{\frac{\alpha^{\kappa\nu}}{\alpha^{\mu\lambda}}} = \sqrt[\lambda\nu]{\alpha^{\kappa\nu-\mu\lambda}} = \alpha^{\frac{\kappa\nu-\mu\lambda}{\lambda\nu}} = \alpha^{\frac{\kappa}{\lambda} - \frac{\mu}{\nu}}$$

5ον. Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\boxed{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\mu}{\nu}}=\frac{\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}}{\beta^{\frac{\mu}{\nu}}}}$

Πράγματι ἔχομεν $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\mu}{\nu}}=\sqrt[\nu]{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\mu}}=\frac{\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}}{\sqrt[\nu]{\beta^{\mu}}}=\frac{\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}}{\beta^{\frac{\mu}{\nu}}}$

Ἀσκήσεις. ***965.*** Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν κάτωθι δυνάμεων :

1. $25^{\frac{1}{2}}$ 2. $27^{\frac{1}{3}}$ 3. $8^{\frac{2}{3}}$ 4. $64^{\frac{5}{6}}$ 5. $125^{\frac{2}{3}}$

966. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν κάτωθι δυνάμεων :

1. $64^{\frac{2}{3}}$ 2. $512^{\frac{1}{3}}$ 3. $\left(\frac{16}{625}\right)^{\frac{1}{4}}$ 4. $\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{2}{3}}$ 5. $10\cdot125^{\frac{1}{3}}$

967. Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις :

1. $\frac{3}{4}(8\alpha^3\beta)^{\frac{1}{3}}-\frac{2\beta}{3}\left(\frac{\alpha^6}{27\beta^5}\right)^{\frac{1}{3}}$ 2. $\alpha(3\alpha^2\beta)^{\frac{1}{2}}+(12\alpha^4\beta)^{\frac{1}{2}}$

3. $8\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\cdot12^{\frac{1}{2}}-\frac{3}{4}\cdot27^{\frac{1}{2}}-2\left(\frac{3}{16}\right)^{\frac{1}{2}}$

4. $\beta(8\alpha^6\beta)^{\frac{1}{3}}+4\alpha(\alpha^3\beta^4)^{\frac{1}{3}}-(125\alpha^6\beta^4)^{\frac{1}{3}}$

968. Νὰ ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις $\sqrt{\alpha^2\sqrt[3]{\alpha^4\beta^2}}+\sqrt{\beta^2\sqrt[3]{\alpha^2\beta^4}}$ διὰ τῆς χρήσεως κλασματικῶν ἐκθετῶν.

969. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις :

1. $\alpha^{\frac{3}{4}}\cdot\alpha^{\frac{5}{3}}$ 2. $\left(\alpha^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}$ 3. $\left(4\alpha^{\frac{1}{2}}\beta^{\frac{2}{3}}\gamma\right)^{\frac{1}{4}}$

4. $\left(\frac{\alpha y}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{\beta x}{y^2}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(\frac{y^2}{\alpha^2\beta^2}\right)^{\frac{1}{4}}$

970. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις :

1. $\left(9\alpha^{\frac{3}{4}}+4\beta^{\frac{1}{3}}\right)^2$ 2. $\left(\alpha^{\frac{2}{3}}-3\alpha^{\frac{1}{4}}-5\right)^2$

971. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις :

1. $\left(\alpha^{\frac{7}{2}}-\alpha^3+\alpha^{\frac{5}{2}}-\alpha^2+\alpha^{\frac{3}{2}}-\alpha+\alpha^{\frac{1}{2}}-1\right)\cdot\left(\alpha^{\frac{1}{2}}+1\right)$

2. $\left(\alpha^{\frac{3}{4}}+\beta^{\frac{2}{5}}\right)\cdot\left(\alpha^{\frac{3}{4}}-\beta^{\frac{2}{5}}\right)$

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΜΕ ΕΚΘΕΤΑΣ ΑΡΝΗΤΙΚΟΥΣ

360. **Ἐκθέται ἀρνητικοί.** Ἐδείξαμεν (§ 359) ὅτι, ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ μ καὶ ν εἶναι θετικοὶ ἀριθμοί, ἀκέραιοι ἢ κλασματικοὶ καὶ τοιοῦτοι, ὥστε $\mu>\nu$ θὰ ἔχωμεν $\dfrac{\alpha^\mu}{\alpha^\nu}=\alpha^{\mu-\nu}$ (1)

Ἐὰν $\mu-\nu=0$ θὰ ἔχωμεν $\dfrac{\alpha^\mu}{\alpha^\nu}=\alpha^0=1$.

Ἐὰν $\mu-\nu<0$, τὸ σύμβολον $\alpha^{\mu-\nu}$ δὲν ἔχει καμμίαν ἔννοιαν.

Ἐὰν ὅμως θέσωμεν $\mu-\nu=-\varrho$ θὰ εἶναι $\nu=\mu+\varrho$.

Ἐὰν εἰς τὴν ἰσότητα (1) ἀντικαταστήσωμεν τὸν ἐκθέτην $\mu-\nu$ μὲ τὸ ἴσον του $-\varrho$, θὰ ἔχωμεν $\dfrac{\alpha^\mu}{\alpha^\nu}=\alpha^{-\varrho}$ (2)

Ἐὰν πάλιν εἰς τὸ πηλίκον $\dfrac{\alpha^\mu}{\alpha^\nu}$ ἀντικαταστήσωμεν τὸν ἐκθέτην ν μὲ τὸ ἴσον του $\mu+\varrho$, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\alpha^\mu}{\alpha^\nu}=\frac{\alpha^\mu}{\alpha^{\mu+\varrho}}=\frac{\alpha^\mu}{\alpha^\mu\cdot\alpha^\varrho}=\frac{1}{\alpha^\varrho} \qquad (3)$$

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (2) καὶ (3) συνάγομεν, ὅτι : $\alpha^{-\varrho}=\dfrac{1}{\alpha^\varrho}$ (4)

Παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ ὁρισμὸς τῶν δυνάμεων μὲ ἐκθέτας ἀκεραίους ἀρνητικοὺς (§ 86 2ον) ἐπεκτείνεται καὶ ἐπὶ τῶν δυνάμεων μὲ ἐκθέτας τυχόντας ἀριθμοὺς θετικοὺς ἢ ἀρνητικούς, ἀκεραίους ἢ κλασματικούς.

Π. χ. Θὰ εἶναι : $3^{-5}=\dfrac{1}{3^5}$, $\quad 5^{-\frac{2}{3}}=\dfrac{1}{5^{\frac{2}{3}}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{5^2}}$

Ἀσκήσεις. *972.* Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις ·

1. $\alpha^{-\frac{1}{2}}\cdot\alpha^{\frac{7}{4}}\cdot\alpha^{-\frac{1}{5}}$ 3. $\alpha^{-\frac{3}{4}}\cdot\beta^{-2}\cdot\alpha^{\frac{5}{6}}\cdot\beta^{\frac{1}{2}}\cdot\gamma$

2. $[(\alpha-\beta)^{-1}\cdot(\beta-\alpha)^{-1}\cdot(\alpha-\beta)^{-1}]^{-2}$ 4. $(1^{-1}-\alpha^{-5})^{-5}\cdot(\alpha^{-5}-1^{-1})^{-5}$

973. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις :

1. $(\alpha^{-1}-x^{-1}):\left(\alpha^{-\frac{1}{3}}-x^{-\frac{1}{3}}\right)$ 2. $\left(\alpha^{-\frac{2}{3}}+2\alpha^{\frac{1}{4}}-1\right)^2$

3. $\left[\left(\dfrac{\alpha-\beta}{x+y}\right)^{-3}\right]^2\cdot\left[\left(\dfrac{x+y}{\beta-\alpha}\right)^{-2}\right]^3\cdot\left[\left(\dfrac{x-y}{x+y}\right)^{-2}\right]^{-3}$

974. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἀριθμητικαὶ τιμαὶ τῶν κάτωθι παραστάσεων :

1. $\dfrac{x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}z-x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{3}}}{xy-y\sqrt{x}+\dfrac{x}{y}z^2}$ διὰ $x=0{,}0001$, $y=-0{,}008$, $z=-\dfrac{1}{2}$

2. $\dfrac{\alpha^{-\frac{1}{3}}\beta^3+\alpha^{\frac{2}{3}}\beta^2-\alpha\beta}{\sqrt[3]{\alpha^4\beta^6}-\alpha\beta\gamma}$ · διὰ $\alpha=0{,}001$, $\beta=-0{,}2$, $\gamma=-\dfrac{1}{3}$

3. $\dfrac{\alpha^{-\frac{3}{4}}+\beta^{-3}+\alpha^{\frac{1}{2}}\beta}{\sqrt[4]{\alpha}\cdot\sqrt[3]{\beta^2}+3\dfrac{\alpha}{\beta}}$ διὰ $\alpha=0{,}0016$, $\beta=-0{,}027$

('Ανωτάτη Σχολὴ 'Εμπορ. 'Επιστημῶν 1947)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΙΝ ΕΠΙ ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ

'Ομὰς Α'. *975*. Νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ διαίρεσις $\left(\alpha^{\frac{3}{4}}-\beta^{\frac{3}{4}}\right):\left(\alpha^{\frac{1}{4}}-\beta^{\frac{1}{4}}\right)$ καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τοῦ πηλίκου διὰ $\alpha=0{,}01$ καὶ $\beta=0{,}16$.

('Ανωτάτη Σχολὴ 'Εμπορικῶν 'Επιστημῶν 1946)

976. Νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ διαίρεσις:

$(5\alpha^2-41\alpha\beta+42\beta^2)\sqrt[12]{\alpha}:\left(\sqrt[3]{\alpha}-\dfrac{7\beta}{\sqrt[3]{\alpha^2}}\right)$ καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τοῦ πηλίκου διὰ $\alpha=0{,}001$ καὶ $\beta=-0{,}02$. ('Ανωτάτη Σχολὴ 'Εμπορ. 'Επιστημῶν)

977. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι διαιρέσεις καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τοῦ πηλίκου καὶ ὑπολοίπου.

1. $\left(\alpha^2-\alpha^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{2}}-2\alpha^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{4}}+2x^{\frac{3}{4}}\right):\left(\alpha^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\right)$ διὰ $\alpha=0{,}01$ καὶ $x=16$.

2. $\left(\alpha^3-2\sqrt[4]{\alpha^2\beta^3}-\alpha^2\sqrt[6]{\alpha^3\beta^2}+2\beta\sqrt[12]{\beta}\right):\left(\sqrt{\alpha}-\sqrt[3]{\beta}\right)$ διὰ $\alpha=0{,}0001$, $\beta=0{,}008$

'Ομὰς Β'. *978*. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ἐὰν οἱ α καὶ β εἶναι δύο τυχόντες θετικοὶ ἀριθμοί, θὰ ἔχωμεν πάντοτε $\dfrac{\alpha+\beta}{2}\geqslant\sqrt{\alpha\beta}$

979. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\sqrt{\alpha+\beta}<\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$.

980. 'Εὰν οἱ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ εἶναι θετικοὶ ἀριθμοί, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ παράστασις $\sqrt[\mu+\nu+\rho+\sigma]{\alpha\beta\gamma\delta}$, κεῖται μεταξὺ τῆς μεγίστης καὶ τῆς ἐλαχίστης τῶν παραστάσεων $\sqrt[\mu]{\alpha}$, $\sqrt[\nu]{\beta}$, $\sqrt[\rho]{\gamma}$, $\sqrt[\sigma]{\delta}$. (Πολυτεχνεῖον).

981. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ παράστασις $2(\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2})(\beta+\sqrt{\alpha^2+\beta^2})$ εἶναι τέλειον τετράγωνον.

'Ομὰς Γ' *982*. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι ἀθροίσματα:

1. $\sqrt{\alpha\beta}+\dfrac{\alpha\beta}{\alpha-\sqrt{\alpha\beta}}$

2. $\sqrt{\alpha-x}+\dfrac{x\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha^2-\alpha x}}$

3. $\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}+\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}$

4. $\dfrac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}-\dfrac{\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}$

5. $\dfrac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}-\dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$

6. $\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{7}}{5-\sqrt{7}}}+\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{7}}{5+\sqrt{7}}}$

√ **983.** Νὰ ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις :

$$\pm\sqrt{\alpha^{\frac{4}{3}}-6\alpha^{\frac{2}{3}}+4\alpha^{\frac{1}{6}}+9-12\alpha^{-\frac{1}{2}}+4\alpha^{-1}}$$ (Πολυτεχνεῖον 1947)

984. Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις καὶ νὰ γίνουν αἱ δυναταὶ ἁπλοποιήσεις :

1. $\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}-\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}$

2. $\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}}-\dfrac{2}{\sqrt{1-x^4}}$

3. $\dfrac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-x^2}}{\alpha-\sqrt{\alpha^2-x^2}}+\dfrac{\alpha-\sqrt{\alpha^2-x^2}}{\alpha+\sqrt{\alpha^2-x^2}}$

4. $\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}-\dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}$

985. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις :

1. $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}-\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

2. $\left(\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right)^3-\left(\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)^3$

Ὁμὰς Δ'. 986. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ἐὰν α καὶ β εἶναι θετικοὶ ἀριθμοὶ καὶ ἐὰν $\alpha^2-\beta$ εἶναι θετικὸς ἀριθμός, θὰ ἔχωμεν :

1. $\sqrt{\alpha+\sqrt{\beta}}=\sqrt{\dfrac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta}}{2}}+\sqrt{\dfrac{\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta}}{2}}$

2. $\sqrt{\alpha-\sqrt{\beta}}=\sqrt{\dfrac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta}}{2}}-\sqrt{\dfrac{\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta}}{2}}$

Κατόπιν αὐτῶν νὰ ἀποδειχθοῦν αἱ ἰσότητες :

1. $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\sqrt{2}$

2. $\dfrac{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{17-12\sqrt{2}}}-\dfrac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{17+12\sqrt{2}}}=2$

987. Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις :

1. $\dfrac{x^3-3x-2+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{x^3-3x+2+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}$

2. $\dfrac{x^2-x-2+(x-1)\sqrt{x^2-4}}{x^2+x-2+(x+1)\sqrt{x^2-4}}$

988. Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις :

1. $\dfrac{\sqrt{1-x}+\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}}{1+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$

2. $\dfrac{\sqrt{\dfrac{\mu+x}{\mu-x}}-\sqrt{\dfrac{\mu-x}{\mu+x}}}{\sqrt{\dfrac{\mu+x}{\mu-x}}+\sqrt{\dfrac{\mu-x}{\mu+x}}}$

989. Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις :

1. $\sqrt{2}\,\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}$

2. $\sqrt{2}\,\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

3. $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})(\alpha+\beta)$

4. $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma})(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma})$

990. Νὰ ἁπλοποιηθουν αἱ κάτωθι παραστάσεις :

1. $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{5}-\sqrt{2})$

2. $[x^2+x(2+\sqrt{2})+(3+2\sqrt{x})][x^2+x(2-\sqrt{2})+(3-2\sqrt{2})]$

3. $\sqrt{(x-\alpha)\sqrt[3]{x^2\sqrt[5]{x+\alpha\sqrt{3}}}\cdot\sqrt[3]{5\alpha^2}\cdot\sqrt{\alpha x^3\sqrt[3]{\alpha^2+x^2}}}$

'Ομὰς Ε'. *991*. Νὰ ἀποδειχθοῦν αἱ κάτωθι σχέσεις :

1. $\sqrt{2+\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$ 2. $\sqrt{2-\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$

3. $\sqrt{2-\sqrt{3}}\,(2+\sqrt{3})(\sqrt{6}-\sqrt{2})=2$ 4. $\sqrt[3]{38+17\sqrt{5}}=\sqrt{9+4\sqrt{5}}$

5. $\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}=\sqrt{2}\,(\sqrt{5}+1)$

992. Νὰ ἀποδειχθοῦν αἱ κάτωθι σχέσεις :

1. $\dfrac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}=\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\dfrac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$ 2. $\dfrac{2\sqrt{9+\sqrt{65}}}{\sqrt{19}-\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{19}+\sqrt{3}}{2\sqrt{9-\sqrt{65}}}$

3. $\left(\dfrac{11}{5-\sqrt{3}}\right)^2-\left(\dfrac{5-2\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}\right)^2=\sqrt{\dfrac{91}{4}+10\sqrt{3}}$

993. Νὰ ἀποδειχθοῦν αἱ κάτωθι ἰσότητες :

1. $\dfrac{5\sqrt{6}}{\sqrt{6}-1}+\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=(3+\sqrt{3})(2+\sqrt{2})$

2. $\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}+\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}=6$ (Σχολὴ 'Αεροπορίας)

994. Νὰ ἀποδειχθοῦν αἱ κάτωθι σχέσεις :

1. $\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\sqrt[3]{\dfrac{9-5\sqrt{3}}{9+5\sqrt{3}}}$ 2. $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{2}}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt[3]{20+12\sqrt{3}}}$

995. Νὰ ἀποδειχθοῦν αἱ κάτωθι σχέσεις :

1. $\dfrac{\sqrt{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}+1}}-\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{8}}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}=\sqrt{2}$

2. $\sqrt[3]{\dfrac{x^3-3x+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{2}}+\sqrt[3]{\dfrac{x^3-3x-(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{2}}=x$

'Ομὰς ΣΤ'. *996*. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῶν κάτωθι παραστάσεων :

1. $\sqrt{\dfrac{3}{4}-x}+\sqrt{2x}-\dfrac{3}{2}\sqrt{1-4x}$, ἐὰν $x=\dfrac{1}{12}$

2. $\dfrac{1+2x}{1+\sqrt{1+2x}}+\dfrac{1-2x}{1-\sqrt{1-2x}}$, ἐὰν $x=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

997. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῶν κάτωθι παραστάσεων :

1. $x(x^2+3\beta)$, ἐὰν $x=\sqrt[3]{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^3}}+\sqrt[3]{\alpha-\sqrt{\alpha^2+\beta^3}}$

2. $\dfrac{x^2+6x+1}{x^2-1}$, ἐὰν $x=\alpha+\sqrt{8}$

3. $\dfrac{x^2+\alpha x+\beta}{x^2+\beta x+\gamma}$, ἐὰν $x=-\sqrt{\dfrac{\beta^2-\alpha\gamma}{\alpha-\beta}}$

4. x^3+3x, ἐὰν $x=\sqrt[3]{\sqrt{2}+1}-\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}$

5. $x^3+\lambda x+k$, ἐὰν $x=\sqrt[3]{-\frac{k}{2}+\sqrt{\frac{k^2}{4}+\frac{\lambda^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{k}{2}-\sqrt{\frac{k^2}{4}+\frac{\lambda^3}{27}}}$

998. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῶν κάτωθι παραστάσεων:

1. $\frac{\alpha-\beta}{\sqrt{\beta}}x^2-2\alpha x+\alpha\sqrt{\beta}$, ἐὰν $x=\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}$ καὶ ἐὰν $x=\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}$

2. $\frac{2\beta\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$, ἐὰν $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right)$ $(\alpha>0,\ \beta>0)$

3. $\frac{2\alpha\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}$, ἐὰν $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}-\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right)$

4. $\frac{2\beta\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}-x}$, ἐὰν $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}-\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right)$ $(\alpha>0,\ \beta>0$

5. $\frac{\sqrt{\alpha+x}-\sqrt{\alpha-x}}{\sqrt{\alpha+x}+\sqrt{\alpha-x}}$, ἐὰν $x=\frac{2\alpha}{\beta+\frac{1}{\beta}}$

999. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ παράστασις

$$\sqrt{\alpha+2\sqrt{\alpha-1}}+\sqrt{\alpha-2\sqrt{\alpha-1}}=2, \quad \text{ἐὰν } \alpha<2$$
$$=2\sqrt{\alpha-1}, \quad \text{ἐὰν } \alpha>2$$

1000. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ παράστασις

$$\sqrt{1+\mu+\sqrt{1+2\mu}}+\sqrt{1+\mu-\sqrt{1+2\mu}}=\sqrt{2}\,.\sqrt{1+2\mu} \quad \text{ἐὰν } \mu>0$$
$$=\sqrt{2} \quad \text{ἐὰν } \mu<0$$

1001. Νὰ ἀποδειχθῇ ἡ ταυτότης

$$\frac{1}{\nu\sqrt{\nu+1}+(\nu+1)\sqrt{\nu}}=\frac{1}{\sqrt{\nu}}-\frac{1}{\sqrt{\nu+1}}$$

Κατόπιν αὐτοῦ νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα

$$\frac{1}{1\sqrt{2}+2\sqrt{1}}+\frac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{4}+4\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\nu\sqrt{\nu+1}+(\nu+1)\sqrt{\nu}}.$$

1002. 'Εὰν εἶναι $\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{\omega}{\gamma}$ νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι καὶ

1. $\frac{x}{\alpha}=\sqrt{\frac{x^2-xy+2\omega^2}{\alpha^2-\alpha\beta+2\gamma^2}}$ 2. $\frac{x}{\alpha}=\sqrt[3]{\frac{x^3-y^2\omega}{\alpha^3-\beta^2\gamma}}$

3. $\frac{x}{\alpha}=\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{\beta\gamma}}=\frac{\sqrt[3]{y^2\omega}}{\sqrt[3]{\beta^2\gamma}}=\frac{\sqrt[3]{\frac{y^2\omega^2}{x}}}{\sqrt[3]{\frac{\beta^2\gamma^2}{\alpha}}}$

4. $\sqrt{\alpha x}+\sqrt{\beta y}+\sqrt{\gamma\omega}=\sqrt{(\alpha+\beta+\gamma)(x+y+\omega)}$

5. $\sqrt{\alpha^2x}+\sqrt{\beta^2y}+\sqrt{\gamma^2\omega}=\sqrt{(\alpha+\beta+\gamma)^2(x+y+\omega)}$

1003. 1ον. Νὰ ἀναλυθῇ τὸ τριώνυμον $\varphi(z)=z^2-2(\varphi^2-\omega^2)z+(\varphi^2-\omega^2)^2$ εἰς γινόμενον δύο παραγόντων πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς z.

2ον. Νὰ ἀναλυθῇ ἡ παράστασις $E=2\varphi^2\omega^2+2\omega^2z^2+2z^2\varphi^2-\varphi^4-\omega^4-z^4$ εἰς γινόμενον τεσσάρων παραγόντων τοῦ πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς φ, ω, z.

3ον. Θέτομεν $z=2\alpha$, $\varphi^2=(x-\sqrt{\alpha^2-\beta^2})^2+y^2$ καὶ $\omega^2=(x+\sqrt{\alpha^2+\beta^2})^2+y^2$ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως E συναρτήσει τῶν x, y, α, β.

1004. Ἐὰν εἶναι $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha'}{\beta'}=\frac{\alpha''}{\beta''}$, ὅπου $\alpha, \beta, \alpha', \beta', \alpha'', \beta''$ εἶναι θετικοὶ ἀριθμοί, θὰ εἶναι ἐπίσης καὶ

$$\sqrt{\alpha\beta}+\sqrt{\alpha'\beta'}+\sqrt{\alpha''\beta''}=\sqrt{(\alpha+\alpha'+\alpha'')(\beta+\beta'+\beta'')}$$

Τὸ ἀντίστροφον ἀληθεύει ;

1005. Ὑποθέτομεν, ὅτι $x=\alpha$, $y=\beta$ ἱκανοποιοῦν τὴν σχέσιν $y=\sqrt{2x^2+1}$ Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ σχέσις αὐτὴ ἐπαληθεύεται καὶ διὰ $x=3\alpha+2\beta$, $y=4\alpha+3\beta$ καὶ διὰ $x=3\alpha-2\beta$, $y=-4\alpha+3\beta$.

Ὁμὰς Ζ'. 1006. Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις :

1. $\left(x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{4}}+1\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}+1\right)\left(x-x^{\frac{1}{2}}+1\right)$

2. $\left(2^{\frac{1}{4}}\alpha+3^{\frac{1}{4}}\beta\right)\left(3^{\frac{1}{4}}\alpha-2^{\frac{1}{4}}\beta\right)-6^{\frac{1}{4}}(\alpha^2-\beta^2)+2^{\frac{1}{3}}\alpha\beta$

3. $\left(\alpha^{\frac{1}{2}}+\beta^{\frac{1}{2}}+\gamma^{\frac{1}{2}}\right)\left(\alpha^{\frac{1}{2}}+\beta^{\frac{1}{2}}-\gamma^{\frac{1}{2}}\right)\left(\alpha^{\frac{1}{2}}-\beta^{\frac{1}{2}}+\gamma^{\frac{1}{2}}\right)\left(\alpha^{\frac{1}{2}}-\beta^{\frac{1}{2}}-\gamma^{\frac{1}{2}}\right)$

1007. Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις :

1. $\sqrt{\frac{x}{\alpha}+\frac{\alpha}{x}-2}\cdot\frac{2(\alpha x)^{\frac{1}{2}}}{\left[\frac{x^2}{\alpha}-\frac{\alpha^2}{x}-3(x-\alpha)\right]^{\frac{1}{3}}}$

2. $\left(\sqrt[x]{\alpha^{-\frac{2}{y}}}+\sqrt[\varrho]{\alpha^{\frac{1}{y}}\beta}+2\sqrt{\sqrt[\varrho]{\beta}}\sqrt{\sqrt[x]{\sqrt[y]{\sqrt[\varrho]{\sqrt{\alpha^{x-2\varrho}}}}}}\right)^{\frac{1}{2}}$

3. $\sqrt{\alpha^{\frac{2}{3}}-6\alpha^{\frac{1}{3}}-4\alpha^{\frac{1}{12}}+9+12\alpha^{-\frac{1}{4}}+4\alpha^{\frac{1}{2}}}$

1008. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ πολυώνυμον

$\varphi(x)=x^3-\alpha^{-\frac{2}{3}}\beta^{-1}(\alpha^2+\beta^2)x+\beta^{\frac{1}{2}}$ μηδενίζεται διὰ $x=\alpha^{\frac{2}{3}}\beta^{-\frac{1}{2}}$.

Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ πηλίκον τοῦ φ(x) διὰ $x-\alpha^{\frac{2}{3}}\beta^{-\frac{1}{2}}$.

1009. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ πολυώνυμον x^3+3x+2 μηδενίζεται διὰ

$$x=(\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{3}}-(\sqrt{2}-1)^{-\frac{1}{3}}$$

1010. Νὰ ἐπαληθευθοῦν αἱ κάτωθι ταυτότητες :

1. $\left(\dfrac{\alpha+(\alpha^2-\beta)^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\dfrac{\alpha-(\alpha^2-\beta)^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\alpha+\beta^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$

2. $2^{\frac{1}{2}}\left[2x+(x^2-\alpha^2)^{\frac{1}{2}}\right]\left[x-(x^2-\alpha^2)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}=(x+\alpha)^{\frac{3}{2}}-(x-\alpha)^{\frac{3}{2}}$

3. $\left(\alpha^2+\alpha^{\frac{4}{3}}\beta^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\beta^2+\alpha^{\frac{2}{3}}\beta^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\alpha^{\frac{2}{3}}+\beta^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$

1011. Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις :

1. $\dfrac{x-y}{x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}}\cdot\dfrac{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}$

2. $\dfrac{\alpha^2-\alpha^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}}-2\alpha^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{4}}+2x^{\frac{3}{4}}}{\alpha^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}}$ 3. $\dfrac{\alpha-x+4\alpha^{\frac{1}{4}}x^{\frac{3}{4}}-4\alpha^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}}{\alpha^{\frac{1}{2}}-2\alpha^{\frac{1}{4}}x^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{2}}}$

4. $\dfrac{1+x-\frac{3}{2}x^{\frac{1}{3}}\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)+x^{\frac{1}{2}}\left(2+\frac{9}{16}x^{\frac{1}{6}}\right)}{1-\frac{3}{4}x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{2}}}$

1012. Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις :

1. $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-2x^{\frac{1}{4}}+1}{x^{\frac{1}{4}}-2x^{\frac{1}{8}}+1}$. 2. $\dfrac{x^{\frac{5}{3}}-x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}-xy^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{2}{3}}y}{x^{\frac{5}{3}}-2xy^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{4}{3}}}$

3. $\dfrac{x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{1}{3}}-16x^{-\frac{2}{3}}-32x^{-1}}{x^{\frac{1}{6}}+4x^{-\frac{1}{6}}+4x^{-\frac{1}{2}}}$

4. $\dfrac{\left(x^2-\frac{1}{y^2}\right)^x\left(x-\frac{1}{y}\right)^{y-x}}{\left(y^2-\frac{1}{x^2}\right)^y\left(y+\frac{1}{x}\right)^{x-y}}$, $(x>0,\ y>0,\ xy>1)$

Ὁμὰς Η'. 1013. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῶν κάτωθι παραστάσεων :

1. $4x^{-2}+4y^{-2}-3x^{-1}y^{-1}$, ἐὰν $x=3+\sqrt{5}$, $y=3-\sqrt{5}$

2. $(1-\alpha x)(1+\alpha x)^{-1}(1+\beta x)^{\frac{1}{2}}(1-\beta x)^{-\frac{1}{2}}$, ἐὰν $x=\alpha^{-1}\left(\frac{2\alpha}{\beta}-1\right)^{\frac{1}{2}}$

3. $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\right)\left(x^{\frac{1}{\mu}}+x^{\frac{1}{\nu}}\right)$ ἐὰν $x=\left(\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right)^{\frac{2\mu\nu}{\mu-\nu}}$

1014. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῶν κάτωθι παραστάσεων :

1. $2\alpha(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot\left[x+(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\right]^{-1}$, ἐὰν $x=\dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$

2. $\mu\nu+(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}(\nu^2-1)^{\frac{1}{2}}$, ἐὰν $\mu=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)$, $\nu=\left(y+\frac{1}{y}\right)$

3. $\frac{\alpha-x}{\alpha+x}\cdot\left(\frac{\beta+x}{\beta-x}\right)^{\frac{1}{2}}$, ἐὰν $x=[\alpha(2\beta-\alpha)]^{\frac{1}{2}}$

1015. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῶν κάτωθι παραστάσεων :

1. $\dfrac{\alpha^{\frac{1}{2}}-\left[\alpha-(\alpha^2-\alpha x)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}}{\alpha^{\frac{1}{2}}+\left[\alpha-(\alpha^2-\alpha x)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}}$ ἐὰν $x=\alpha\left[1-\frac{16\beta^2}{(1+\beta)^4}\right]$ $(\alpha>0,\ \beta>0)$

2. $\frac{1-\alpha x}{1+\alpha x}\sqrt{\frac{1+\beta x}{1-\beta x}}$ ἐὰν $x=\frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{2\alpha}{\beta}-1}$

ΑΣΥΜΜΕΤΡΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

361.* Στοιχειώδης ἔννοια τοῦ ὁρίου.** ***Παράδειγμα 1ον. Ἔστωσαν τὰ κλάσματα $\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{3}{2}$. Ἂν προσθέτωμεν διαδοχικῶς τὴν μονάδα καὶ εἰς τοὺς δύο ὅρους ἑκάστου κλάσματος τότε τὸ μὲν πρῶτον κλάσμα γίνεται :

$$\frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \frac{5}{6},\ \dots\ \frac{9}{10},\ \dots\ \frac{99}{100},\ \dots\ \frac{999999}{1000000},\ \dots$$

τὸ δὲ δεύτερον γίνεται :

$$\frac{4}{3},\ \frac{5}{4},\ \frac{6}{5},\ \dots\ \frac{10}{9},\ \dots\ \frac{100}{99},\ \dots\ \frac{1000000}{999999},\ \dots$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἂν ἐξακολουθῶμεν νὰ προσθέτωμεν συνεχῶς τὴν μονάδα καὶ εἰς τοὺς δύο ὅρους τοῦ πρώτου κλάσματος, τοῦτο πλησιάζει νὰ γίνῃ ἴσον μὲ τὴν μονάδα, ἀλλὰ μένει πάντοτε μικρότερον τῆς μονάδος.

Ἐπίσης παρατηροῦμεν, ὅτι καὶ τὸ δεύτερον κλάσμα πλησιάζει νὰ γίνῃ ἴσον μὲ τὴν μονάδα, ἀλλὰ μένει πάντοτε μεγαλύτερον τῆς μονάδος. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θὰ λέγωμεν, ὅτι καὶ τὰ δύο κλάσματα ***τείνουν πρὸς τὴν μονάδα*** ἢ ***ἔχουν κοινὸν ὅριον τὴν μονάδα.***

Παράδειγμα 2ον. Ἔστω, ὅτι ἕνα κανονικὸν πολύγωνον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἕνα κύκλον. Εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ περίμετρός του εἶναι μικροτέρα τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου. Ἐὰν διπλασιάζωμεν συνεχῶς τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου, ἡ περίμετρός του θὰ αὐξάνῃ συνεχῶς καὶ θὰ πλησιάζῃ νὰ συμπέσῃ μὲ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, **ἀλλὰ θὰ μένῃ πάντοτε μικροτέρα αὐτῆς.**

Ἂς λάβωμεν τώρα ἕνα κανονικὸν πολύγωνον περιγεγραμμένον περὶ τὸν αὐτὸν κύκλον. Εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ περίμετρός του εἶναι μεγαλυτέρα τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου. Ἐὰν διπλασιάζωμεν συνεχῶς τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τοῦ κανονικοῦ αὐτοῦ πολυγώνου, ἡ περίμετρός του θὰ ἐλαττοῦται συνεχῶς καὶ θὰ πλησιάζῃ νὰ συμπέσῃ μὲ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, **ἀλλὰ θὰ μένῃ πάντοτε μικροτέρα αὐτῆς.**

Καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις τοῦ (ἐγγεγραμμένου καὶ τοῦ περιγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου) θὰ λέγωμεν, ὅτι αἱ περίμετροι τῶν πολυγώνων αὐτῶν **τείνουν** πρὸς τὴν περιφέρειαν ἢ **ἔχουν κοινὸν ὅριον** τὴν περιφέρειαν.

362. Ἀσύμμετροι ἀριθμοί. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ 3· δηλ. θέλομεν νὰ εὕρωμεν ἕνα ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος ὑψούμενος εἰς τὸ τετράγωνον νὰ μᾶς δίδῃ τὸν 3.

Εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ $\sqrt{3}$ δὲν δύναται νὰ εἶναι οὔτε ὁ ἀριθμὸς 1, οὔτε ὁ ἀριθμὸς 2, διότι $1^2=1$ καὶ $2^2=4$. Ἄρα ἡ $\sqrt{3}$ θὰ περιέχεται μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 1 καὶ 2 καὶ ἑπομένως **δὲν δύναται νὰ εἶναι ἴση μὲ ἕνα ἀκέραιον ἀριθμόν.**

Ἂς ἐξετάσωμεν τώρα μήπως ἡ $\sqrt{3}$ εἶναι ἴση μὲ ἕνα κλάσμα. Ἔστω, ὅτι ἡ $\sqrt{3}$ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$, δηλ. ἔστω, ὅτι εἶναι

$$\sqrt{3}=\frac{\alpha}{\beta} \qquad \text{ἢ} \qquad 3=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \qquad \text{ἢ} \qquad \frac{\alpha^2}{\beta^2}=3$$

Ἐπειδὴ τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι ἀνάγωγον, οἱ δύο ὅροι του α καὶ β δὲν ἔχουν κανένα κοινὸν διαιρέτην· ἄρα καὶ αἱ δυνάμεις των α^2 καὶ β^2, ὡς γνωρίζωμεν ἐκ τῆς Θεωρ. Ἀριθμητικῆς, δὲν ἔχουν κανένα κοινὸν διαιρέτην. Τὸ κλάσμα λοιπὸν $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$ εἶναι ἀνάγωγον καὶ ἑπομένως δὲν δύναται νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸν ἀκέραιον ἀριθμὸν 3. Ἡ ἰσότης λοιπὸν (1) εἶναι ἀδύνατος. Ἐξ αὐτοῦ συνάγομεν, ὅτι ἡ $\sqrt{3}$ **δὲν δύναται νά εἶναι ἴση οὔτε μὲ ἕνα κλάσμα.**

Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι ἡ $\sqrt{2}$, ἡ $\sqrt{5}$ κλπ. δὲν δύναται νὰ εἶναι ἴσαι μὲ ἕνα ἀκέραιον ἢ κλασματικὸν ἀριθμόν.

Εἴδομεν ἀνωτέρω, ὅτι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 3 δὲν εἶναι οὔτε ἀκέραιος ἀριθμὸς οὔτε κλασματικὸς ἀριθμὸς καὶ ὅτι περιέχεται μεταξὺ

1 καὶ 2. Ἂν ὑπολογίσωμεν ὅμως τὴν $\sqrt{3}$, ὅπως γνωρίζωμεν ἀπὸ τὴν ἀριθμητικήν, κατὰ προσέγγισιν, 0,1, 0,01, 0,001,.... 0,0000001,.... καὶ κατ᾽ ἔλλειψιν, θὰ εὕρωμεν κατὰ σειρὰν τὰ ἐξαγόμενα 1,7, 1,73, 1,732,.... 1,7320508,.... (1).

Τὰ τετράγωνα τῶν ἀριθμῶν τῆς σειρᾶς (1) εἶναι **ἀντιστοίχως :** 2,89, 2,9929, 2,999764,.... 2,9999999378064,....

Παρατηροῦμεν, ὅτι τὰ τετράγωνα τῶν ἀριθμῶν **τῆς σειρᾶς (1)** πλησιάζουν πρὸς τὸν ἀριθμὸν 3, ἀλλὰ μένουν πάντοτε ***μικρότερα τοῦ 3.*** Ἂς λάβωμεν τώρα τοὺς ἀριθμοὺς

1,8, 1,74, 1,733,.... 1,7320509,.... (2)

οἱ ὁποῖοι προκύπτουν ἀντιστοίχως ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς **τῆς σειρᾶς (1)** διὰ τῆς αὐξήσεως τοῦ τελευταίου δεκαδικοῦ ψηφίου **των κατὰ μονάδα**, καὶ οἱ ὁποῖοι παριστάνουν τὴν $\sqrt{3}$ **κατὰ προσέγγισιν** 0,1, 0,01, 0,001,.... 0,0000001,...., ἀλλὰ **καθ᾽ ὑπεροχήν.** Τὰ τετράγωνα τῶν ἀριθμῶν τῆς σειρᾶς (2) εἶναι :

3,24, 3,0276, 3,004079,.... 3,00000032019081,....

Παρατηροῦμεν, ὅτι τὰ τετράγωνα τῶν ἀριθμῶν τῆς σειρᾶς (2) πλησιάζουν πρὸς τὸν ἀριθμὸν 3, ἀλλὰ μένουν πάντοτε ***μεγαλύτερα τοῦ 3.*** Ὥστε τὰ τετράγωνα τῶν ἀριθμῶν τῆς σειρᾶς (1) καὶ τῆς σειρᾶς (2) ***τείνουν πρὸς τὸν ἀριθμὸν 3*** ἢ ἔχουν ***κοινὸν ὅριον τὸν 3.***

Αἱ κατωτέρω σχέσεις φανερώνουν παραστατικώτερα τὴν θέσιν τοῦ ἀριθμοῦ 3 ὡς πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ἀριθμῶν τῆς σειρᾶς (1) καὶ (2).

$1{,}7^2$	$< 3 < 1{,}8^2$	ἢ	$2{,}89 < 3 < 3{,}24$
$1{,}73^2$	$< 3 < 1{,}74^2$	ἢ	$2{,}9929 < 3 < 3{,}0276$
$1{,}732^2$	$< 3 < 1{,}733^2$	ἢ	$2{,}999764 < 3 < 3{,}004079$
. . . .	. . . .	ἢ	. . . .
$1{,}7320508^2$	$< 3 < 1{,}7520509^2$	ἢ	$2{,}9999999378064 < 3 < 3{,}00000032019081$

ἄρα

$$1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$$
$$1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74$$
$$1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733$$
$$. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$
$$1{,}7320508 < \sqrt{3} < 1{,}7320509$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι, ἂν ἐξακολουθῶμεν νὰ ὑπολογίζωμεν τὴν $\sqrt{3}$ μὲ ἀκόμη μεγαλυτέραν προσέγγισιν, εἴτε κατ᾽ ἔλλειψιν, εἴτε καθ᾽ ὑπεροχήν, θὰ ἴδωμεν, ὅτι, ἡ $\sqrt{3}$ περιέχεται μεταξὺ δύο δεκαδικῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι διαφέρουν ἀπολύτως κατὰ μίαν δεκαδικὴν μονάδα τῆς τελευταίας τάξεως. Ἐπειδὴ δὲ ἡ διαφορὰ αὐτὴ δύναται νὰ γίνῃ, ὅσον θέλομεν μικρά, ἀρκεῖ νὰ ἐξακολουθῶμεν ἀρκούντως τὴν ἀνωτέρω ἐργασίαν, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὸν ἕνα ἀπὸ τοὺς ἀριθμούς, ποὺ εὑρέθησαν ὡς ἀνωτέρω, ὡς $\sqrt{3}$.

Ἐν πρώτοις γνωρίζομεν ἀπὸ τὴν Ἀριθμητικήν, ὅτι κάθε ἀριθμός, εἴτε ἀκέραιος, εἴτε κλασματικὸς δύναται νὰ γραφῇ ὑπὸ μορφὴν δεκαδικοῦ.

Π. χ. ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς	7	γράφεται	7,000
ὁ κλασματικὸς ἀριθμὸς	$\frac{5}{8}$	»	0,625
ὁ » »	$\frac{3}{11}$	»	0,2727 .
ὁ » »	$\frac{73}{12}$	»	6,08333 . . . .

Εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ ἀπειρομερὲς πλῆθος 1,7320508. . . ., ποὺ παριστάνει τὴν $\sqrt{3}$ κατὰ προσέγγισιν 0,0000001 δὲν δύναται νὰ εἶναι ὡρισμένος δεκαδικὸς ἀριθμός. Δηλαδὴ δὲν δύναται νὰ εἶναι ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ δεκαδικὸν μέρος του νὰ ἀποτελῆται ἢ ἀπὸ ὡρισμένον πλῆθος δεκαδικῶν ψηφίων ἢ ἀπὸ ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία περιοδικά. Διότι τότε ὁ 1,7320308. . . . θὰ ἦτο ἴσος μὲ ἕνα κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον, ὅπως ἐδείξαμεν ἀνωτέρω.

Καθένας λοιπὸν ἀπὸ τοὺς ἀριθμὸς αὐτούς, ποὺ παριστάνουν τὴν $\sqrt{3}$ ***ἔχει ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία μὴ περιοδικά.***

Τὸν ἀριθμὸν αὐτόν, ὁ ὁποῖος παριστάνει τὴν $\sqrt{3}$ καλοῦμεν ***ἀσύμμετρον ἀριθμόν.***

Ὁμοίως τὸ ἀπειρομερὲς πλῆθος 8,2425262728. . . ., τοῦ ὁποίου τὰ δεκαδικὰ ψηφία ἀκολουθοῦν ἕνα ὡρισμένον νόμον καὶ τοῦ ὁποίου ὁσαδήποτε ψηφία καὶ ἂν λάβωμεν εἰς πεπερασμένον πλῆθος, ἀποτελοῦν ἕνα ἀριθμόν, τοῦ ὁποίου ὑπάρχει μεγαλύτερος, θεωρεῖται ἀριθμός. Τοὺς τοιούτους ἀριθμοὺς ὀνομάζομεν ***ἀσυμμέτρους ἀριθμούς.*** Ὥστε ***ἀσύμμετρος ἀριθμὸς λέγεται κάθε ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἔχει ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία μὴ περιοδικά.***

Κατ᾽ ἀντίθεσιν οἱ ἀκέραιοι καὶ κλασματικοὶ ἀριθμοὶ λέγονται ***σύμμετροι ἀριθμοί.*** Χάρις εἰς τὴν εἰσαγωγὴν τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν, ὅτι κάθε φυσικὸς ἀριθμὸς Α, δηλ. κάθε ἀριθμὸς τῆς Ἀριθμητικῆς, ἔχει μίαν ἀριθμητικὴν τετραγωνικὴν ρίζαν καὶ μίαν μόνην, τὴν ὁποίαν παριστάνομεν μὲ τὸ σύμβολον $\sqrt{A}$.

363. **Γενικὸς ὁρισμὸς τοῦ ἀριθμοῦ.** Ὅλοι οἱ ἀκέραιοι καὶ κλασματικοὶ ἀριθμοὶ ἀποτελοῦνται ἀπὸ πλῆθος μονάδων τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος $\ldots \frac{1}{1000}, \ \frac{1}{100}, \ \frac{1}{10}, \ 1, \ 10, \ 100, \ldots$)

Π. χ. Ὁ $324=100+100+100+10+10+1+1+1+1$.

Ὁ $\frac{5}{8}=0,625$, ὁ $\frac{2}{3}=0,666\ldots$

Ἐπίσης κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν κάθε ἀσύμμετρος ἀριθμὸς εἶναι σύνολον ἀπείρου πλήθους μονάδων τοῦ ἀνωτέρω δεκαδικοῦ συστήματος. Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω δυνάμεθα νὰ δώσωμεν τὸν ἑξῆς ὁρισμὸν τοῦ ἀριθμοῦ :

Ἀριθμὸς εἶναι ἕνα πεπερασμένον ἢ ἄπειρον πλῆθος μονάδων τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος.

Σημ. Δεχόμεθα, ὅτι οἱ ὁρισμοὶ καὶ αἱ ἰδιότητες ἐπὶ τῶν πράξεων τῶν συμμέτρων ἀριθμῶν διατηροῦνται ἐπὶ τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν.

Εἰς τὰς πράξεις ἐπὶ τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν παραλείπομεν τὰ δεκαδικὰ ψηφία ἀπό τινος δεκαδικῆς τάξεως καὶ ἑξῆς. Λαμβάνομεν οὕτω συμμέτρους ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι εἶναι κατὰ προσέγγισιν ἴσοι μὲ τοὺς ἀσυμμέτρους. Ἐπὶ τῶν συμμέτρων αὐτῶν ἀριθμῶν ἐκτελοῦμεν τὰς πράξεις κατὰ τοὺς γνωστοὺς κανόνας

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Η

ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΙ

364. Φανταστικοὶ ἀριθμοί. Εἰς τὴν § 337 εἴδομεν, ὅτι οἱ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ δὲν ἔχουν τετραγωνικὰς ρίζας ἢ ρίζας ἀρτίας τάξεως· π. χ. ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ -81 δὲν ὑπάρχει, διότι δὲν ὑπάρχει ἀριθμὸς θετικὸς ἢ ἀρνητικός, ὁ ὁποῖος ὑψούμενος εἰς τὴν δευτέραν δύναμιν νὰ δίδῃ τὸν -81.

Ἡ ἀδυναμία αὐτή, εἰς τὸ νὰ εὕρωμεν δηλαδὴ ἀριθμοὺς θετικοὺς ἢ ἀρνητικούς, τῶν ὁποίων τὸ τετράγωνον νὰ εἶναι ἴσον μὲ ἕνα ἀρνητικὸν ἀριθμόν, μᾶς ἠνάγκασε νὰ ἐπινοήσωμεν ἕνα νέον εἶδος ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι λέγονται ***φανταστικοί***.

Ἐπειδὴ οἱ νέοι ἀριθμοὶ πρέπει νὰ ἔχουν τὰς ἰδιότητας τῶν μέχρι τοῦδε γνωστῶν ἀριθμῶν (πραγματικῶν ἀριθμῶν) χάριν τῆς γενικότητος τῶν ἰδιοτήτων αὐτῶν, παραδεχόμεθα, ὅτι

I. ***Οἱ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ ἔχουν τετραγωνικὴν ρίζαν.***

Οὕτω ἡ τετραγωνικὴ ρίζα -9 ὑπάρχει καὶ σημειώνεται ὡς ἑξῆς $\sqrt{-9}$.

II. ***Κάθε τετραγωνικὴ ρίζα ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ δύναται νὰ μετασχηματισθῇ εἰς ἕνα γινόμενον τῆς $\sqrt{-1}$ ἐπὶ ἕνα πραγματικὸν ἀριθμόν.***

Πράγματι, ἐὰν ἔχωμεν $\sqrt{-16}$ καὶ ἐφαρμόσωμεν τὴν ταυτότητα $\sqrt{\alpha\beta}=\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$, δυνάμεθα νὰ τὴν γράψωμεν:

$$\sqrt{-16}=\sqrt{16\cdot(-1)}=\sqrt{16}\cdot\sqrt{-1}=\pm 4\sqrt{-1}$$

Κατ᾽ αὐτὸν τὸν τρόπον ἡ ἐξέτασις ὅλων τῶν φανταστικῶν ἀριθμῶν ἀνάγεται εἰς τὴν ἐξέτασιν τῆς $\sqrt{-1}$.

Αὐτὴ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τῆς ἀρνητικῆς μονάδος θεωρεῖται ὡς νέος ἀριθμὸς καὶ καλεῖται φανταστικὴ μονάς.

Ἡ φανταστικὴ μονὰς παρισταται μὲ τὸ σύμβολον i, τὸ ὁποῖον ἀπαγγέλλεται ***(ι ἢ ἰῶτα)***. Δηλ. θέτομεν $\sqrt{-1}=i$, ὁπότε $-1=i^2$.

III. ***Διὰ τὸ νέον τοῦτο εἶδος τῶν ἀριθμῶν δεχόμεθα, ὅτι ἰσχύουν οἱ θεμελιώδεις νόμοι τῶν πράξεων καὶ αἱ ἐξ αὐτῶν προκύπτουσαι ἰδιότητες, τὰς ὁποίας ἐγνωρίσαμεν εἰς τοὺς πραγματικοὺς ἀριθμούς.***

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω οἱ φάνταστικοὶ ἀριθμοὶ γίνονται ἀπὸ τὴν φανταστικὴν μονάδα i ἢ καὶ ἀπὸ τὴν ἀντίθετόν της $-i$ (ἢ καὶ ἐκ τῶν μερῶν των), ὅπως γίνονται οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ ἀπὸ τὰς πραγματικὰς μονάδας $+1$ καὶ -1, (ἢ ἀπὸ τὰ μέρη αὐτῶν).

Π.χ. $4i=i+i+i+i$, $\frac{3}{4}i=\frac{1}{4}i+\frac{1}{4}i+\frac{1}{4}i$, $-3i=(-i)+(-i)+(-i)$.

Σημ. Τὸ γινόμενον $\sqrt{-\alpha}\cdot\sqrt{-\beta}$ μᾶς παρουσιάζει μίαν περίεργον παρατήρησιν. Κατὰ τὴν συνθήκην μας πρέπει νὰ εἶναι

$$\begin{aligned}\sqrt{-\alpha}\times\sqrt{-\beta}&=\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{-1}\times\sqrt{\beta}\cdot\sqrt{-1}\\&=\sqrt{\alpha\beta}\cdot(\sqrt{-1})^2=\sqrt{\alpha\beta}\cdot(-1)=-\sqrt{\alpha\beta}.\end{aligned}$$

Κατὰ τὸν κανόνα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ριζικῶν μὲ τὸν αὐτὸν δείκτην θὰ εἶναι $\sqrt{-\alpha}\times\sqrt{-\beta}=\sqrt{(-\alpha)(-\beta)}=\sqrt{\alpha\beta}$

Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ γινόμενον $\sqrt{-\alpha}\cdot\sqrt{-\beta}$ δίδει δύο διαφορετικὰ ἐξαγόμενα.

365. **Μιγαδικοὶ ἀριθμοί**. ***Τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα ἑνὸς πραγματικοῦ καὶ ἑνὸς φανταστικοῦ ἀριθμοῦ καλεῖται μιγὰς ἢ μιγαδικὸς ἀριθμός.***

Οὕτω οἱ $4+3i$, $5-7i$ εἶναι μιγαδικοὶ ἀριθμοί.

Γενικῶς οἱ μιγαδικοὶ ἀριθμοὶ ἔχουν τὴν μορφὴν $\alpha\pm\beta i$, ὅπου α καὶ β εἶναι τυχόντες πραγματικοὶ ἀριθμοί.

Ὁ α ἀποτελεῖ τὸ πραγματικὸν μέρος τοῦ μιγαδικο ἀριθμοῦ καὶ ὁ βi τὸ φανταστικόν του μέρος.

Ἐὰν $\beta=0$, ὁ μιγαδικὸς ἀριθμὸς $\alpha+\beta i$ γίνεται α, δηλ. εἶναι πραγματικὸς ἀριθμός.

Ἐὰν $\alpha=0$, ὁ μιγαδικὸς ἀριθμὸς $\alpha+\beta i$ γίνεται βi, δηλ. εἶναι φανταστικὸς ἀριθμός.

Ἐὰν $\alpha=0$ καὶ $\beta=0$, ὁ $\alpha+\beta i$ γίνεται μηδέν.

Ἀντιστρόφως: Ἐὰν εἶναι $\alpha+\beta i=0$ ***παραδεχόμεθα***, ὅτι εἶναι καὶ $\alpha=0$ καὶ $\beta=0$.

366. **Ἴσοι μιγαδικοὶ ἀριθμοί.** ***Παραδεχόμεθα,*** ὅτι ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα δύο μιγαδικοὶ ἀριθμοὶ $\alpha+\beta i$ καὶ $\alpha'+\beta' i$ εἶναι ἴσοι, εἶναι νὰ ἔχουν τὰ πραγματικά των μέρη ἴσα καὶ τοὺς συντελεστὰς τῆς i ἴσους. Ἂν λοιπὸν παραδεχθῶμεν τὴν ἰσότητα $\alpha+\beta i=\alpha'+\beta' i$ πρέπει νὰ παραδεχθῶμεν, ὅτι θὰ εἶναι καὶ $\alpha=\alpha'$ καὶ $\beta=\beta'$ καὶ ***ἀντίστρόφως***, αἱ δύο τελευταῖαι ἰσότητες δίδουν τὴν ἰσότητα $\alpha+\beta i=\alpha'+\beta' i$.

367. **Συζυγεῖς μιγαδικοὶ ἀριθμοί.** ***Λέγομεν, ὅτι δύο μιγαδικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι συζυγεῖς, ὅταν διαφέρουν μόνον κατὰ τὸ σημεῖον τοῦ φανταστικοῦ μέρους των.***

Οὕτω οἱ μιγαδικοὶ ἀριθμοὶ $\alpha+\beta i$ καὶ $\alpha-\beta i$ εἶναι συζυγεῖς.

367. **Μέτρον μιγάδος.** ***Μέτρον μιγάδος ἀριθμοῦ*** $\alpha+\beta i$ ***καλεῖται ἡ θετικὴ τετραγωνικὴ ρίζα τῆς παραστάσεως*** $\alpha^2+\beta^2$.

Δηλ. τὸ μέτρον τοῦ $\alpha+\beta i$ εἶναι ὁ θετικὸς ἀριθμὸς $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$.

Οὕτω θὰ εἶναι μέτρον $(3+4i)=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$

μέτρον $(3-2i)=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$.

Τὸ μέτρον λοιπὸν ἑνὸς μιγάδος ἀριθμοῦ εἶναι ἕνας ἀριθμὸς πραγματικὸς θετικός.

Ὅταν ἕνας μιγὰς ἀριθμὸς $\alpha+\beta i$ εἶναι μηδέν, τὸ μέτρον του $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ εἶναι μηδέν· καὶ ἀντιστρόφως, ἐὰν τὸ μέτρον $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ εἶναι μηδέν, οἱ α καὶ β εἶναι μηδὲν καὶ ἑπομένως ὁ μιγὰς $\alpha+\beta i$ εἶναι μηδέν.

Δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν, ὅτι ἡ ***ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη*** διὰ νὰ εἶναι ἕνας μιγὰς ἀριθμὸς μηδέν, εἶναι, νὰ εἶναι μηδὲν τὸ μέτρον του.

Δύο συζυγεῖς μιγάδες ἀριθμοὶ ἔχουν τὸ αὐτὸ μέτρον. Τὸ μέτρον ἑνὸς πραγματικοῦ ἀριθμοῦ α, ὁ ὁποῖος δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν $\alpha+\beta i$, ὅπου $\beta=0$ εἶναι ἴσον μὲ τὴν ἀπόλυτον τιμήν του.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΜΙΓΑΔΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

368. Αἱ παραστάσεις τῆς μορφῆς $\alpha\pm\beta i$ ὑπόκεινται εἰς τοὺς συνήθεις κανόνας τοῦ ἀλγεβρικοῦ ὑπολογισμοῦ, ὡς ἐὰν ἡ i ἦτο ἕνας παράγων πραγματικός. Πάντως κατὰ τοὺς ὑπολογισμοὺς πρέπει νὰ ἀντικαθιστῶσεν τὸ i^2 μὲ -1.

Θὰ λέγωμεν, ὅτι ἕνας ὑπολογισμὸς μιγαδικῶν παραστάσεων ἐξετελέσθη, ὅταν τὸ ἐξαγόμενον τῆς πράξεως ἔχῃ τὴν μορφὴν $\alpha \pm \beta i$.

***369.* Πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις.** Ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις μιγαδικῶν ἀριθμῶν γίνεται, ὅπως καὶ ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις πραγματικῶν ἀλγεβρικῶν παραστάσεων. Οὕτω θὰ εἶναι

$$(\alpha+\beta i)+(\alpha'+\beta' i)=\alpha+\beta i+\alpha'+\beta' i=(\alpha+\alpha')+(\beta+\beta')i$$
$$(\alpha+\beta i)-(\alpha'+\beta' i)=\alpha+\beta i-\alpha'-\beta' i=(\alpha-\alpha')+(\beta-\beta')i$$

Π.χ. $(3+5i)+(8-7i)=3+5i+8-7i=11-2i$

$(4-6i)-(9+2i)=4-6i-9-2i=-5-8i$

***370.* Πολλαπλασιασμός.** Ὁ πολλαπλασιασμὸς δύο ἢ περισσοτέρων μιγαδικῶν ἀριθμῶν γίνεται ὅπως ὁ πολλαπλασιασμὸς τῶν πραγματικῶν ἀλγεβρικῶν παραστάσεων. Οὕτω θὰ εἶναι

$$(\alpha+\beta i)(\gamma+\delta i)=\alpha\gamma+\beta\gamma i+\alpha\delta i+\beta\delta i^2=\alpha\gamma+(\beta\gamma+\alpha\delta)i+\beta\delta(-1)$$
$$=(\alpha\gamma-\beta\delta)+(\beta\gamma+\alpha\delta)i$$

Π.χ. $(2+3i)(5-4i)=10+15i-8i-12i^2=10-23i-12(-1)=$

$=10+23i+12=22+23i$

***371.* Διαίρεσις.** Ἔστω θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον $(\alpha+\beta i):(\gamma+\delta i)$ ἢ $\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}$. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}$ ἐπὶ τὴν συζυγῆ παράστασιν τοῦ παρονομαστοῦ, δηλ. ἐπὶ $\gamma-\delta i$ θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}=\frac{(\alpha+\beta i)(\gamma-\delta i)}{(\gamma+\delta i)(\gamma-\delta i)}=\frac{(\alpha\gamma+\beta\delta)+(\beta\gamma-\alpha\delta)i}{\gamma^2+\delta^2}=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\frac{(\beta\gamma-\alpha\delta)i}{\gamma^2+\delta^2}$$

Π.χ. $$\frac{2+3i}{4-5i}=\frac{(2+3i)(4+5i)}{(4-5i)(4+5i)}=\frac{8+12i+10i+15i^2}{16-25i^2}=$$
$$=\frac{8+22i-15}{16-25(-1)}=\frac{-7+22i}{41}$$

***372.* Δυνάμεις τῆς i.** Ἐπειδὴ $i^2=-1$, θὰ εἶναι

$$i=i$$
$$i^2=-1$$
$$i^3=i^2\, i=-1\,.\,i=-i$$
$$i^4=i^3\,.\,i=-i\,.\,i=-i^2=-(-1)=+1$$

καὶ γενικῶς, ἐὰν ν εἶναι τυχὼν ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἀριθμὸς θὰ εἶναι

$$i^{4\nu}=(i^4)^\nu=1^\nu=1$$
$$i^{4\nu+1}=i^{4\nu}\,.\,i=1\,.\,i=i$$
$$i^{4\nu+2}=i^{4\nu}\,.\,i^2=1.(-1)=-1$$
$$i^{4\nu+3}=i^{4\nu}\,.\,i^3=1.(-i)=-i$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ δυνάμεις τῆς i *εἶναι περιοδικαὶ*

$$i, \quad -1, \quad -i, \quad 1$$

Ἀσκήσεις. 1016. Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ α ἡ παράστασις $\sqrt{3\alpha+6}$ εἶναι 1ον. φανταστική; 2ον. πραγματική;

1017. Αἱ παραστάσεις $\sqrt{x^2-2xy+y^2}$, $\sqrt{4\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2}$ εἶναι πραγματικαὶ ἢ φανταστικαί;

1018. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ῥίζαι τῶν ἀριθμῶν

$$\sqrt{-36}, \quad \sqrt{-81}, \quad \sqrt[4]{-16}, \quad \sqrt[4]{-81}$$

1019. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον τῶν κάτωθι μιγάδων:

1. $3+5i$ 2. $2-3i$ 3. $6+8i$ 4. $8-6i$

1020. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις:

1. $(3+5i)+(7-8i)$, 3. $(10+3i)-(5-7i)$
4. $(7-8i)+(9+4i)$, 4. $(25-i)-(6-5i)$

1021. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις:

1. $(2+5i)(2-3i)$ 3. $(9+5i)(4-7i)$
2. $(5-8i)(5+8i)$ 4. $(5-3i)(8-9i)$

1022. Νὰ ὑπολογισθοῦν:

$$(3+4i)^2, \quad (7-8i)^2, \quad \left(\frac{3}{4}+2i\right)^2, \quad \left(7-\frac{2}{3}i\right)^2$$

1023. Νὰ γίνουν πραγματικοὶ οἱ παρονομασταὶ τῶν κάτωθι κλασμάτων:

1. $\dfrac{3+2i}{3-2i}$ 2. $\dfrac{11+5i}{2-3i}$ 3. $\dfrac{2+i}{3+5i}$ 4. $\dfrac{5-7i}{1-2i}$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

373. Θεώρημα. ***Τὸ μέτρον τοῦ γινομένου δύο μιγάδων εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν μέτρων τῶν μιγάδων αὐτῶν.***

Ἔστωσαν οἱ μιγάδες ἀριθμοὶ $\alpha+\beta i$ καὶ $\gamma+\delta i$ καὶ $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, $\sqrt{\gamma^2+\delta^2}$ τὰ μέτρα των ἀντιστοίχως. Θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$\text{μέτρ. } [(\alpha+\beta i)\,.\,(\gamma+\delta i)]=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,.\,\sqrt{\gamma^2+\delta^2}$$

Πράγματι· ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς μιγάδας $\alpha+\beta i$ καὶ $\gamma+\delta i$ θὰ εὕρωμεν ὡς γινόμενον τὸν μιγάδα ἀριθμὸν

$$(\alpha\gamma-\beta\delta)+(\beta\gamma+\alpha\delta)i.$$

Τὸ μέτρον τοῦ μιγάδος αὐτοῦ εἶναι $\sqrt{(\alpha\gamma-\beta\delta)^2+(\beta\gamma+\alpha\delta)^2}$. Ὥστε θὰ εἶναι

$$\begin{aligned}\text{μέτρ. } [(\alpha+\beta i)\,.\,(\gamma+\delta i)] &= \text{μέτρ. } [(\alpha\gamma-\beta\delta)+(\beta\gamma+\alpha\delta)i] \\ &= \sqrt{(\alpha\gamma-\beta\delta)^2+(\beta\gamma+\alpha\delta)^2} \qquad (1)\end{aligned}$$

Ἐπειδὴ

$$\begin{aligned}(\alpha\gamma-\beta\delta)^2+(\beta\gamma+\alpha\delta)^2 &= \alpha^2\gamma^2-2\alpha\beta\gamma\delta+\beta^2\delta^2+\beta^2\gamma^2+2\alpha\beta\gamma\delta+\alpha^2\delta^2= \\ &=\alpha^2\gamma^2+\beta^2\delta^2+\beta^2\gamma^2+\alpha^2\delta^2=(\alpha^2+\beta^2)\gamma^2+(\alpha^2+\beta^2)\delta^2=(\alpha^2+\beta^2)(\gamma^2+\delta^2)\cdot\end{aligned}$$

ἡ ἰσότης (1) γράφεται

$$\text{μέτρ. } [(\alpha+\beta i)\cdot(\gamma+\delta i)]=\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)(\gamma^2+\delta^2)}=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\cdot\sqrt{\gamma^2+\delta^2}$$

Σημ. Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα εἶναι ἀληθὲς καὶ ὅταν οἱ παράγοντες τοῦ γινομένου εἶναι περισσότεροι ἀπὸ δύο.

374. Θεώρημα. ***Τὸ μέτρον τοῦ πηλίκου δύο μιγάδων εἶναι ἴσον μὲ τὸ πηλίκον τῶν μέτρων των.***

Ἔστωσαν $\alpha+\beta i$ καὶ $\gamma+\delta i$ δύο μιγάδες ἀριθμοὶ καὶ $x+yi$ τὸ πηλίκον των· δηλ. ἔστω, ὅτι

$$\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}=x+yi \tag{1}$$

Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\dfrac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\sqrt{\gamma^2+\delta^2}}=\sqrt{x^2+y^2}$

Ἀπὸ τὴν ἰσότητα (1) λαμβάνομεν

$$\alpha+\beta i=(\gamma+\delta i)(x+yi)$$

Ἂν λάβωμεν τὰ μέτρα καὶ τῶν δύο μελῶν τῆς ἰσότητος αὐτῆς θὰ ἔχωμεν

$$\text{μέτρ. } (\alpha+\beta i)=\text{μέτρ. } [(\gamma+\delta i)\cdot(x+yi)]$$

ἢ $$\text{μέτρ. } (\alpha+\beta i)=\text{μέτρ. } (\gamma+\delta i)\times\text{μέτρ. } (x+yi)$$

ἢ $$\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\sqrt{\gamma^2+\delta^2}\times\sqrt{x^2+y^2}$$

Ἀπὸ τὴν ἰσότητα αὐτὴν λαμβάνομεν

$$\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\sqrt{\gamma^2+\delta^2}}=\sqrt{x^2+y^2}$$

375. Τετραγωνικὴ ρίζα μιγάδος. ***Τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ*** $\alpha+\beta i$ ***καλεῖται κάθε φανταστικὴ παράστασις τῆς μορφῆς*** $x+yi$, ***τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἴσον μὲ*** $\alpha+\beta i$.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν αὐτὸν πρέπει νὰ ἔχωμεν

$$(x+yi)^2=\alpha+\beta i$$

Ἐκτελοῦντες πράξεις λαμβάνομεν

$$x^2+2xyi+y^2i^2=\alpha+\beta i \quad \text{ἢ} \quad x^2+2xyi-y^2=\alpha+\beta i$$

ἢ $$(x^2-y^2)+2xyi=\alpha+\beta i$$

Διὰ νὰ ὑφίσταται ἡ τελευταία ἰσότης πρέπει νὰ εἶναι

$$x^2-y^2=\alpha \quad (1) \qquad 2xy=\beta \quad (2)$$

Λύομεν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2).

Ὑψοῦμεν εἰς τὸ τετράγωνον καὶ τὰ δύο μέλη τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) καὶ ἔχομεν

$$x^4-2x^2y^2+y^4=\alpha^2 \qquad 4x^2y^2=\beta^2$$

Προσθέτοντες αὐτὰς κατὰ μέλη λαμβάνομεν

$$x^4+2x^2y^2+y^4=\alpha^2+\beta^2 \quad \text{ἢ} \quad (x^2+y^2)^2=\alpha^2+\beta^2$$

ἢ $$x^2+y^2=\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \qquad (2')$$

Ἡ τιμὴ $-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ ἀποκλείεται διότι x^2+y^2 εἶναι θετικόν.

Ἀντικαθιστῶμεν τὴν (2) μὲ τὴν (2′) καὶ ἔχομεν νὰ λύσωμεν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2′).

Προσθέτοντες αὐτὰς κατὰ μέλη λαμβάνομεν

$$2x^2=\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \quad \text{ἢ} \quad x=\pm\sqrt{\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}}$$

Ἀφαιροῦντες τὴν (1) ἀπὸ τὴν (2′) λαμβάνομεν

$$y=\pm\sqrt{\frac{-\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}}$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ ὑπόρριζαι ποσότητες τῶν x καὶ y εἶναι θετικαί. Ἐπειδὴ αἱ τιμαὶ τῶν x καὶ y πρέπει νὰ ἐπαληθεύουν τὴν σχέσιν $2xy=\beta$ θὰ εἶναι ὁμόσημοι μέν, ἐὰν β εἶναι θετικόν, ἑτερόσημοι δέ, ἐὰν β εἶναι ἀρνητικόν.

Ὥστε ***κάθε μιγὰς ἀριθμὸς ἔχει μίαν διπλῆν τετραγωνικὴν ρίζαν τῆς μορφῆς*** $x+yi$.

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω θὰ εἶναι:

$$\pm\sqrt{\alpha+\beta i}=\pm\left(\sqrt{\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}}+\sqrt{\frac{-\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}}\,i\right) \qquad (3)$$

$$\pm\sqrt{\alpha-\beta i}=\pm\left(\sqrt{\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}}-\sqrt{\frac{-\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}}\,i\right) \qquad (4)$$

376. **Ἰδιαίτεραι περιπτώσεις.** Διὰ νὰ εὕρωμεν τὰς τετραγωνικὰς ρίζας τῆς i καὶ −i θέτομεν εἰς τοὺς τύπους (3) καὶ (4) τῆς § 375 $\alpha=0$ καὶ $\beta=1$, ὁπότε λαμβάνομεν

$$\pm\sqrt{i}=\pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot i\right)=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$$

$$\pm\sqrt{-i}=\pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot i\right)=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$$

Παράδειγμα. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τῶν παραστάσεων 3+4i
Ἐφαρμόζομεν τὸν τύπον

$$\sqrt{\alpha\pm\beta i}=\sqrt{\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}}\pm\sqrt{\frac{-\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}}\,.\,i$$

καὶ ἔχομεν

$$\sqrt{3+4i}=\sqrt{\frac{3+\sqrt{3^2+4^2}}{2}}+\sqrt{\frac{-3+\sqrt{3^2+4^2}}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{3+5}{2}}+\sqrt{\frac{-3+5}{2}}\cdot i=2+i$$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΜΙΓΑΔΟΣ

377. ***Κάθε μιγὰς τῆς μορφῆς*** $\alpha+\beta i$ ***δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν*** $\rho(\sigma\upsilon\nu\omega+i\eta\mu\omega)$.

Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ προσδιορίσωμεν τὸ ρ καὶ τὴν γωνίαν ω συναρτήσει τῶν α καὶ β.

Ἔστω ὅτι εἶναι $\alpha+\beta i=\rho(\sigma\upsilon\nu\omega+i\,\eta\mu\omega)$.

Ἐπειδὴ οἱ μιγάδες $\alpha+\beta i$ καὶ $\rho(\sigma\upsilon\nu\omega+i\eta\mu\omega)$ εἶναι ἴσοι, θὰ εἶναι καὶ $\rho\,\sigma\upsilon\nu\omega=\alpha$ καὶ $\rho\,\eta\mu\omega=\beta$. (1)

Ὑψοῦμεν εἰς τὸ τετράγωνον καὶ τὰ δύο μέλη τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ ἔχομεν $\rho^2\sigma\upsilon\nu^2\omega=\alpha^2$ καὶ $\rho^2\eta\mu^2\omega=\beta^2$ (2)

Προσθέτομεν τὰς ἰσότητας (2) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\rho^2(\sigma\upsilon\nu^2\omega+\eta\mu^2\omega)=\alpha^2+\beta^2$$

Ἐπειδὴ $\sigma\upsilon\nu^2\omega+\eta\mu^2\omega=1$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γράφεται

$$\rho^2=\alpha^2+\beta^2 \quad \text{ἄρα} \quad \rho=\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \tag{3}$$

(δεχόμεθα μόνον τὴν θετικὴν τιμὴν τοῦ ρ).

Ἀπὸ τὴν ἰσότητα (3) παρατηροῦμεν, ὅτι ***ὁ*** ρ ***εἶναι ἴσος μὲ τὸ μέτρον τοῦ μιγάδος*** $\alpha+\beta i$.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὰς ἐξισώσεις (2) τὸ ρ^2 μὲ τὸ ἴσον του $\alpha^2+\beta^2$ καὶ λαμβάνομεν

$$(\alpha^2+\beta^2)\sigma\upsilon\nu^2\omega=\alpha^2 \quad \text{καὶ} \quad (\alpha^2+\beta^2)\eta\mu^2\omega=\beta^2$$

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας αὐτὰς λαμβάνομεν

$$\sigma\upsilon\nu\omega=\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \quad \text{καὶ} \quad \eta\mu\omega=\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \tag{4}$$

Οἱ τύποι (4) ὁρίζουν τὴν γωνίαν ω.

Πράγματι, ἐὰν διαιρέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας (4) λαμβάνομεν $\dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}=\dfrac{\beta}{\alpha}$ ἢ $\varepsilon\varphi\omega=\dfrac{\beta}{\alpha}$ (5)

Ἀπὸ τοὺς λογαριθμικοὺς πίνακας εὑρίσκομεν ἕνα τόξον φ μικρότερον περιφερείας, τοῦ ὁποίου ἡ ἐφαπτομένη εἶναι ἴση μὲ $\dfrac{\beta}{\alpha}$.

δηλ. ἔστω, ὅτι $\varepsilon\varphi\,\varphi=\dfrac{\beta}{\alpha}$ (6)

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (5) καὶ (6) συνάγομεν, ὅτι

$$\varepsilon\varphi\, \omega = \varepsilon\varphi\, \varphi \quad \text{ἢ} \quad \omega = \varphi + k\pi$$

Ἡ γωνία ω λέγεται ***ὅρισμα τοῦ μιγάδος***.

378. **Ἐφαρμογή**. Ἡ τριγωνομετρικὴ μορφὴ τῶν μιγάδων μᾶς ἐπιτρέπει νὰ ἐκτελέσωμεν ἁπλούστερον τὸν πολλαπλασιασμόν, τὴν διαίρεσιν, τὴν ὕψωσιν εἰς δύναμιν καὶ τὴν ἐξαγωγὴν τῶν ριζῶν τῶν μιγάδων ἀριθμῶν.

Πολλαπλασιασμὸς μιγάδων. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον $(\alpha+\beta i)\cdot(\alpha'+\beta' i)$

Ἐὰν θέσωμεν $\alpha+\beta i = \varrho(\sigma\upsilon\nu\, \omega + i\eta\mu\, \omega)$

$$\alpha'+\beta' i = \varrho'(\sigma\upsilon\nu\, \omega' + i\eta\mu\, \omega')$$

θὰ ἔχωμεν

$$(\alpha+\beta i)(\alpha'+\beta' i) = [\varrho(\sigma\upsilon\nu\, \omega + i\eta\mu\, \omega)]\cdot[\varrho'(\sigma\upsilon\nu\, \omega + i\eta\mu\, \omega')]$$

$$= \varrho\varrho'(\sigma\upsilon\nu\, \omega\sigma\upsilon\nu\, \omega' + i\sigma\upsilon\nu\, \omega\eta\mu\, \omega' + i\eta\mu\, \omega\sigma\upsilon\nu\omega' - \eta\mu\, \omega\eta\mu\, \omega')$$

$$= \varrho\varrho'[(\sigma\upsilon\nu\omega\, \sigma\upsilon\nu\omega' - \eta\mu\omega\, \eta\mu\omega') + i(\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\omega' + \eta\mu\omega'\sigma\upsilon\nu\omega)] \quad (1)$$

Ἐπειδὴ

$$\sigma\upsilon\nu\omega\, \sigma\upsilon\nu\omega' - \eta\mu\omega\, \eta\mu\omega' = \sigma\upsilon\nu(\omega+\omega')$$

καὶ

$$\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\omega' + \eta\mu\omega'\sigma\upsilon\nu\omega = \eta\mu(\omega+\omega')$$

Ἡ ἰσότης (1) γράφεται

$$\boxed{(\alpha+\beta i)(\alpha'+\beta' i) = \varrho\varrho'[\sigma\upsilon\nu(\omega+\omega') + i\eta\mu(\omega+\omega')]}$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι

$$(\alpha+\beta i)(\alpha'+\beta' i)(\alpha''+\beta'' i)\ldots =$$

$$= \varrho\varrho'\varrho''\ldots[\sigma\upsilon\nu(\omega+\omega'+\omega''+\ldots) + i\,\eta\mu(\omega+\omega'+\omega''+\ldots)]$$

ἢ

$$\boxed{\begin{aligned}&\varrho(\sigma\upsilon\nu\omega + i\eta\mu\omega)\cdot\varrho'(\sigma\upsilon\nu\omega' + i\eta\mu\omega')\cdot\varrho''(\sigma\upsilon\nu\omega'' + i\eta\mu\omega'')\ldots =\\ &= \varrho\varrho'\varrho''[\sigma\upsilon\nu(\omega+\omega'+\omega''+\ldots) + i\eta\mu(\omega+\omega'+\omega''+\ldots)]\end{aligned}} \quad (1)$$

Ὥστε: ***Τὸ γινόμενον μιγάδων τῆς μορφῆς*** $\varrho(\sigma\upsilon\nu\omega + i\eta\mu\omega)$ ***εἶναι ἴσον μὲ μιγάδα τῆς αὐτῆς μορφῆς, ὁ ὁποῖος ἔχει μέτρον τὸ γινόμενον τῶν μέτρων τῶν δοθέντων μιγάδων καὶ ὅρισμα τὸ ἄθροισμα τῶν ὁρισμάτων τῶν μιγάδων αὐτῶν.***

379. **Πόρισμα**. Ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι οἱ παράγοντες τοῦ πρώτου μέλους τῆς ἰσότητος (1) τῆς § 378 εἶναι ν καὶ ὅτι εἶναι $\omega = \omega' = \omega'' = \ldots$ τότε ἡ ἰσότης (1) γράφεται

$$\boxed{[\varrho(\sigma\upsilon\nu\, \omega + i\eta\mu\, \omega)]^\nu = \varrho^\nu\, (\sigma\upsilon\nu\, \nu\omega + i\eta\mu\, \nu\omega)} \quad (1)$$

Ἀπὸ τὴν ἰσότητα (1) συνάγομεν, ὅτι:

Διὰ νὰ ὑψώσωμεν ἕνα τριγωνομετρικὸν μιγάδα εἰς τὴν ν δύναμιν, ὑψοῦμεν εἰς τὴν ν δύναμιν τὸ μέτρον του καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸ ὄρισμά του ἐπὶ ν.

380. **Τύπος τοῦ Moivre.** Ἐὰν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τῆς § 379 θέσωμεν $\rho=1$ λαμβάνομεν

$$\boxed{(\text{συν}\,\omega+i\,\text{ημ}\,\omega)^\nu=\text{συν}\,\nu\omega+i\,\text{ημ}\,\nu\omega}$$

Ἡ σχέσις αὐτὴ εἶναι γνωστὴ ὑπὸ τὸ ὄνομα ***τύπος τοῦ Moivre***.

Ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ σχέσις αὐτὴ εἶναι ἀληθὴς δι' οἱανδήποτε τιμὴν τοῦ ν ἀκεραίαν ἢ κλασματικήν, θετικὴν ἢ ἀρνητικήν.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΕΝΑ ΑΓΝΩΣΤΟΝ

Α

ΓΕΝΙΚΟΤΗΤΕΣ

381. **Ὁρισμοί.** Μία ἐξίσωσις μὲ ἕνα ἄγνωστον x εἶναι τοῦ ***δευτέρου βαθμοῦ***, ἐὰν δύναται νὰ ἀναχθῇ, διὰ μιᾶς σειρᾶς μετασχηματισμῶν, στηριζομένων ἐπὶ τῶν ἰδιοτήτων τῶν ἐξισώσεων (§ 200—207), εἰς τὴν γενικὴν μορφὴν

$$\boxed{\alpha x^2+\beta x+\gamma=0} \qquad (1)$$

ὅπου α, β, γ εἶναι δοθεῖσαι ποσότητες θετικαὶ ἢ ἀρνητικαί, ἀριθμητικαὶ ἢ ἐγγράμματοι, μονώνυμα ἢ πολυώνυμα.

Π.χ. ἡ ἐξίσωσις $3x^2-5x+2=0$ εἶναι δευτέρου βαθμοῦ.

Ὁ συντελεστὴς α δὲν δύναται νὰ εἶναι ποτὲ ἴσος μὲ μηδέν, διότι τότε τὸ αx^2 θὰ ἦτο ἴσον μὲ τὸ μηδὲν καὶ ἡ ἐξίσωσις (1) θὰ ἐλάμβανε τὴν μορφὴν $\beta x+\gamma=0$, δηλ. θὰ ἦτο ἐξίσωσις τοῦ πρώτου βαθμοῦ. Οἱ συντελεσταὶ β καὶ γ δύνανται νὰ εἶναι ἴσοι μὲ μηδέν.

Ἐὰν $\beta=0$, ἡ ἐξίσωσις (1) λαμβάνει τὴν μορφὴν

$$\boxed{\alpha x^2+\gamma=0} \qquad (2)$$

Ἐὰν $\gamma=0$, ἡ ἐξίσωσις (1) λαμβάνει τὴν μορφὴν

$$\boxed{\alpha x^2+\beta x=0} \qquad (3)$$

Ἐὰν εἶναι $\beta=\gamma=0$, τότε ἡ ἐξίσωσις (1) λαμβάνει τὴν μορφὴν

$$\boxed{\alpha x^2=0} \qquad (4$$

Αἱ ἐξισώσεις (2), (3), (4) λέγονται ***ἐλλειπεῖς ἐξισώσεις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ***.

Ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, εἰς τὴν ὁποίαν ὅλοι οἱ συντελεσταὶ εἶναι διάφοροι τοῦ μηδενός, λέγεται ***πλήρης ἐξίσωσις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ***.

Ὅταν λέγωμεν, ὅτι θὰ ***λύσωμεν μίαν ἐξίσωσιν τοῦ δευτέρου βαθμοῦ***, σημαίνει, ὅτι θὰ εὕρωμεν ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς θετικούς, ἀρνητικοὺς ἢ μηδέν, οἱ ὁποῖοι ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν.

Οἱ ἀριθμοὶ αὐτοί, ποὺ ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν, λέγονται ***ρίζαι*** τῆς ἐξισώσεως.

ΛΥΣΙΣ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

382. Λύσις τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2=0$. Ἐπειδὴ $\alpha\neq0$, δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν διὰ α καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2=0$ καὶ νὰ λάβωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$x^2=0 \quad \text{ἢ} \quad x=0$$

Λέγομεν, ὅτι ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις $\alpha x^2=0$ ἔχει μίαν ***διπλῆν ρίζαν ἴσην μὲ μηδέν***.

Παράδειγμα. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $8x^2=0$.

Διαιροῦμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς δοθείσης ἐξισώσεως διὰ τοῦ 8 καὶ ἔχομεν $x^2=0$ ἢ $x=0$. Ὥστε ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει μίαν διπλῆν ρίζαν ἴσην μὲ μηδέν.

383. Λύσις τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\gamma=0$.

Παράδειγμα 1ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $5x^2-45=0$.

Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται $5x^2=45$.

Διαιροῦμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς τελευταίας ἐξισώσεως διὰ 5 καὶ ἔχομεν

$$x^2=9 \tag{1}$$

Ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν καὶ τῶν δύο μελῶν τῆς (1) καὶ ἔχομεν

$$x=\pm\sqrt{9} \quad \text{ἢ} \quad x=\pm3$$

Ὥστε ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει δύο ρίζας ἀντιθέτους (συμμετρικάς)· ἂν παραστήσωμεν μὲ x' καὶ x'' τὰς ρίζας της, θὰ εἶναι

$$x'=-3, \qquad x''=+3$$

Παράδειγμα 2ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $3x^2+75=0$.

Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται

$$3x^2=-75 \quad \text{ἢ} \quad x^2=-25 \tag{2}$$

Τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἐξισώσεως εἶναι ἀρνητικόν, ἐνῷ τὸ πρῶτον μέλος της εἶναι θετικὸν διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x, θετικὴν ἢ ἀρνητικήν. Ἐπομένως ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ***δὲν ἔχει λύσιν***, εἶναι ***ἀδύνατος***.

Μετὰ τὴν παραδοχὴν τῶν φανταστικῶν ἀριθμῶν ἡ ἐξίσωσις $x^2=-25$ ἔχει δύο ρίζας φανταστικάς, τὰς $\pm5i$.

Γενίκευσις. **Παράδειγμα 3ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις** $\alpha x^2+\gamma=0$

Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται $\alpha x^2=-\gamma$

Διαιροῦμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς διὰ α, τὸ ὁποῖον εἶναι διάφορον τοῦ μηδενὸς καὶ ἔχομεν

$$x^2 = -\frac{\gamma}{\alpha}$$

Ἐδῶ πρέπει νὰ ἐξετάσωμεν δύο περιπτώσεις :

1ον. *Ἐὰν ἡ ποσότης* $-\frac{\gamma}{\alpha}$ *εἶναι θετική*, ὅπως εἰς τὸ παράδειγμα 1ον, ἡ ἐξίσωσις (1) ἔχει δύο ρίζας ἀντιθέτους

$$x = \pm\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}, \text{ δηλ. εἶναι } x' = +\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}} \text{ καὶ } x'' = -\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}$$

2ον. *Ἐὰν ἡ ποσότης* $-\frac{\gamma}{\alpha}$ *εἶναι ἀρνητική*, ὅπως εἰς τὸ παράδειγμα 2ον, ἡ ἐξίσωσις (1) δὲν ἔχει ρίζας πραγματικάς· εἶναι ἀδύνατος.

Δυνάμεθα ὅμως νὰ εἴπωμεν, ὅτι *ἡ ἐξίσωσις (1) ἔχει δύο ρίζας φανταστικάς*, τὰς

$$x = \pm i\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}, \text{ δηλ. εἶναι } x' = -i\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}, \quad x'' = +i\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}$$

Ἀσκήσεις. 1024. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις :

1. $3x^2-48=0$	4. $5x^2-48=3x^2-114$	7. $(x+5)(x-5)=39$
2. $8x^2-72=0$	5. $5x^2=45-2x^2$	8. $(2x+1)(2x-1)=399$
3. $7x^2+63=0$	6. $10x^2+5=x^2+1$	9. $(3x+1)(3x-1)=-10$

1025. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις :

1. $5x^2+80=0$	3. $2x^2-1=x^2-5$	5. $(x+7)(x-7)=-11$
2. $\frac{4x^2}{5}-60=\frac{3x^2}{4}$	4. $\frac{x^2-9}{3}=\frac{x^2-1}{2}$	6. $\frac{5x^2}{3}-16=x^2-38$

384. Λύσις τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x=0$.

Παράδειγμα 1ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $3x^2+5x=0$

Ἐξάγομεν τὸν x ἐκτὸς παρενθέσεως καὶ ἔχομεν

$$x(3x+5)=0$$

Διὰ νὰ εἶναι τὸ γινόμενον τῶν δύο παραγόντων x καὶ $3x+5$ ἴσον μὲ μηδὲν πρέπει ὁ ἕνας τουλάχιστον ἐκ τῶν παραγόντων νὰ εἶναι ἴσος μὲ μηδέν· δηλ. πρέπει νὰ εἶναι

$$\text{εἴτε } x=0, \quad \text{εἴτε } 3x+5=0 \qquad (1)$$

Ἀπὸ τὴν (1) λαμβάνομεν $3x=5$ ἢ $x=\frac{5}{3}$.

Ὥστε αἱ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι $x'=0$ καὶ $x''=\frac{5}{3}$.

Γενίκευσις Παράδειγμα 2ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^2+\beta x=0$.

Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται $x(\alpha x+\beta)=0$.

Ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ ἀληθεύει διὰ

$$x=0 \text{ καὶ διὰ } \alpha x+\beta=0 \qquad (1)$$

Ἀπὸ τὴν (1) λαμβάνομεν $\alpha x=-\beta$ ἢ $x=-\frac{\beta}{\alpha}$.

Ὥστε αἱ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι $x'=0$ καὶ $x''=-\frac{\beta}{\alpha}$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω δύο παραδειγμάτων συνάγομεν, ὅτι ἡ ἐξίσωσις

$\alpha x^2+\beta x=0$ ἔχει πάντοτε δύο ρίζας πραγματικάς, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία εἶναι ἴση μὲ 0 καὶ ἡ ἄλλη ἴση μὲ $-\dfrac{\beta}{\alpha}$.

Ἀσκήσεις : 1026. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

1. $7x^2-15x=12x$ 3. $(2x+3)(2x-3)=5x-9$ 5. $2(3x^2-x)=3(4x-x^2)$
2. $2x^2-7x=x^2+8x$ 4. $(x+5)^2=7x+25$ 6. $x(2x+1)+3x(x-2)=5x$

1027. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις.

1. $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)=3x-\dfrac{1}{4}$ 2. $3\left(\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{x}{4}\right)=\dfrac{5x^2}{3}$

3. $\dfrac{2x^2+3x}{4}=\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{2x}{5}$

385. Λύσις τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$.

Παράδειγμα. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ (1)

Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται $\alpha x^2+\beta x=-\gamma$.

Πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη αὐτῆς ἐπὶ 4α καὶ ἔχομεν

$$4\alpha^2x^2+4\alpha\beta x=-4\alpha\gamma \qquad (2)$$

Τὸ πρῶτον μέλος τῆς (2) εἶναι οἱ δύο πρῶτοι ὅροι τοῦ τετραγώνου τοῦ $(2\alpha x+\beta)$. Διά νὰ συμπληρώσωμεν τὸ τετράγωνον αὐτὸ προσθέτομεν καὶ εἰς τὰ δύο μέλη τῆς (2) τὸ β^2 καὶ ἔχομεν

$$4\alpha^2x^2+4\alpha\beta x+\beta^2=\beta^2-4\alpha\gamma \quad \text{ἢ} \quad (2\alpha x+\beta)^2=\beta^2-4\alpha\gamma$$

Ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν καὶ τῶν δύο μελῶν αὐτῆς καὶ ἔχομεν

$$2\alpha x+\beta=\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma} \quad \text{ἢ} \quad 2\alpha x=-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}$$

$$\boxed{x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}}$$

Ὁ τύπος αὐτὸς δίδει τὰς δύο ρίζας τῆς ἐξισώσεως (1). Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ x′ καὶ x″ τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως (1) θὰ εἶναι

$$x'=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}, \quad x''=\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

Παράδειγμα 1ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $4x^2-5x-6=0$

Εἰς τὸν τύπον $x=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$ θέτομεν $\alpha=4$, $\beta=-5$, $\gamma=-6$ καὶ ἔχομεν

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4.4.(-6)}}{2.4}=\frac{\pm\sqrt{25+96}}{8}=\frac{5\pm\sqrt{121}}{8}=\frac{5\pm11}{8}$$

Ὥστε αἱ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι

$$x'=\frac{5+11}{8}=\frac{16}{8}=2 \quad \text{καὶ} \quad x''=\frac{5-11}{8}=\frac{-6}{8}=-\frac{3}{4}$$

Παράδειγμα 2ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $16x^2+8x+1=0$

Εἰς τὸν τύπον $x=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$ θέτομεν $\alpha=16$, $\beta=8$, $\gamma=1$ καὶ ἔχομεν

$$x=\frac{-8\pm\sqrt{8^2-4.16.1}}{2.16}=\frac{-8\pm\sqrt{64-64}}{32}=\frac{-8\pm0}{32}$$

Ὥστε αἱ δύο ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι

$$x' = \frac{-8+0}{32} = -\frac{1}{4} \quad \text{καὶ} \quad x'' = \frac{-8-0}{32} = -\frac{1}{4}$$

δηλ. ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει δύο ρίζας ἴσας (ἢ μίαν διπλῆν ρίζαν)

Παράδειγμα 3ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^2-6x+34=0$

Εἰς τὸν τύπον $x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$ θέτομεν $\alpha=1$, $\beta=-6$, $\gamma=34$ καὶ ἔχομεν

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2-4 \cdot 1 \cdot 34}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{36-136}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-100}}{2} = \frac{6 \pm 10i}{2}$$

Ὥστε αἱ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι

$$x' = \frac{6+10i}{2} = 3+5i \quad \text{καὶ} \quad x'' = \frac{6-10i}{2} = 3-5i,$$

δηλ. αἱ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι φανταστικαὶ (συζυγεῖς καὶ μιγαδικαί).

386. Ἁπλοποίησις τοῦ τύπου, ὅταν β εἶναι ἄρτιος. Ὅταν ὁ συντελεστὴς β τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ εἶναι ἄρτιος, δυνάμεθα νὰ θέσωμεν $\beta=2\beta'$ καὶ ἡ ἐξίσωσις γίνεται

$$\alpha x^2+2\beta' x+\gamma=0$$

καὶ ὁ τύπος (§ 385) δίδει $x = \frac{-2\beta' \pm \sqrt{4\beta'^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$

Ἐξάγομεν ἐκτὸς ριζικοῦ τὸν κοινὸν παράγοντα 4 καὶ ἔχομεν

$x = \frac{-2\beta' \pm 2\sqrt{\beta'^2-\alpha\gamma}}{2\alpha}$ Ἁπλοποιοῦμεν διὰ 2 καὶ ἔχομεν

$$\boxed{x = \frac{-\beta' \pm \sqrt{\beta'^2-\alpha\gamma}}{\alpha}} \qquad (1)$$

Παράδειγμα. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $5x^2+18x-8=0$.

Εἰς τὸν τύπον $x = \frac{-\beta' \pm \sqrt{\beta'^2-\alpha\gamma}}{\alpha}$ θέτομεν $\alpha=5$, $\beta'=9$, $\gamma=-8$ καὶ ἔχομεν

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2-5 \cdot (-8)}}{5} = \frac{-9 \pm \sqrt{81+40}}{5} = \frac{-9 \pm \sqrt{121}}{5} = \frac{-9 \pm 11}{5}$$

Ὥστε αἱ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι

$$x' = \frac{-9+11}{5} = \frac{2}{5} \quad \text{καὶ} \quad x' = \frac{-9-11}{5} = \frac{-20}{5} = -4$$

Ἀσκήσεις. Α' Ὁμάς. **1028.** Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

1.	$x^2-16x+48=0$	4.	$2x^2-7x+3=0$	7.	$6x^2+7x-5=0$
2.	$x^2+2x-35=0$	5.	$2^2x-13x+15=0$	8.	$200x^2+30x+1=0$
3.	$x^2-99x-100=0$	6.	$32x^2+12x+1=0$	9.	$125x^2-105x+4=0$

1029. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις :

1. $49x^2-28x+4=0$
2. $4x^2+12x+9=0$
3. $9x^2+24x+16=0$
4. $25x^2+10x+1=0$
5. $36x^2-60x+25=0$
6. $9x^2+64=48x$

1030. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις :

1. $x^2-4x+1=0$
2. $x^2-6x+7=0$
3. $5x^2-40x+76=0$
4. $x^2+4x+7=0$
5. $4x^2-8x+17=0$
6. $4x^2-64x+257=0$
7. $x^2+2x\sqrt{5}-1=0$
8. $x^2-4x\sqrt{3}+9=0$
9. $x^2-2x\sqrt{2}-70=0$

Ὁμὰς Β'. 1031. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις :

1. $x(x-8)+7=0$
2. $x(x-1)-60=60+x$
3. $(x+1)^2=3+x$
4. $(2x-3)^2=8x$
5. $4(x^2-1)=4x-1$
6. $25x(x+1)=-4$

1032. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις :

1. $(x-20)(x+20)=-42x$
2. $(x+1)(x-1)=8x-13$
3. $\frac{x^2}{6}+\frac{2x}{3}=10$
4. $(5x-3)^2=44x+12$
5. $(x+5)^2+17=2(x+3)^2$
6. $x^2-\frac{3x}{4}=3x+1$
7. $x(x-3)+1=5(x-3)$
8. $(3x+2)(x+1)=(6x+4)$
9. $\frac{3x^2}{2}+\frac{x-1}{3}=6x+1$

Ὁμὰς Γ'. 1033. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις :

1. $\frac{1}{x}+\frac{3}{2}=\frac{1}{x+3}$
2. $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-5}=\frac{7}{10}$
3. $\frac{x-1}{x-2}-\frac{x-2}{x-1}=\frac{8}{3}$
4. $\frac{x-5}{x-7}+\frac{x-7}{x-5}+2=0$
5. $\frac{5}{x+2}+\frac{3}{x}=\frac{14}{x+4}$
6. $\frac{7}{x-2}+\frac{8}{x-5}=3$

1034. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις :

1. $\frac{2}{x+2}-\frac{5}{x-4}+\frac{9}{10}=0$
2. $\frac{x}{x+1}+\frac{x}{x+4}=1$
3. $\frac{7}{x-2}+\frac{8}{x-5}=3$
4. $\frac{1}{x-8}+\frac{8}{x-3}=\frac{12}{x+5}$
5. $\frac{x+1}{x}+1=\frac{x}{x-1}$
6. $\frac{2x-1}{x-1}-\frac{2x-3}{x-2}+\frac{1}{6}=0$
7. $\frac{x}{x-1}-\frac{2}{x+1}=\frac{8}{x^2-1}$
8. $\frac{x+1}{x}-\frac{5}{x-2}=2$

1035. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις :

1. $\frac{3}{2(x^2-1)}-\frac{1}{4(x+1)}=\frac{1}{8}$
2. $\frac{4}{x+2}+\frac{5}{x+4}=\frac{12}{x+6}$
3. $\frac{x+1}{x-1}+\frac{x+2}{x-2}=\frac{2x+13}{x+1}$
4. $\frac{2}{x^2-4}-\frac{1}{x(x-2)}+\frac{x-4}{x(x+2)}=0$

1036. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις :

1. $\frac{x+1}{x+2}+\frac{x-1}{x-2}=\frac{2x+1}{x+1}$
2. $\frac{x}{2x-1}+\frac{25}{4x^2-1}=\frac{13}{2x-1}+\frac{1}{27}$
3. $\frac{x+9}{x-3}+\frac{2(2x+1)}{x+3}=\frac{7}{2}+\frac{7(x+13)}{x^2-9}$
4. $\frac{2x-1}{x+1}+\frac{3x-1}{x+2}-\frac{x-7}{x-1}=4$
5. $\frac{2x-1}{x+1}-\frac{x-7}{x-1}=4-\frac{3x-1}{x+2}$

1037. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις :

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{x+2}{x-2}}}=\frac{5}{4x-3}$$

Ὁμὰς Δ'. 1038. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις :

1. $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$
2. $x^2-(2\alpha-3\beta)x-6\alpha\beta=0$
3. $6x^2+(9\alpha+8\beta)x+12\alpha\beta=0$
4. $(\alpha+\beta)x^2-[(\alpha+\beta)^2+1]x+\alpha+\beta=0$

1039. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις :

1. $x^2-2\alpha x+\alpha^2-\beta^2=0$
2. $\beta^2x^2-2\alpha\beta^2x+\alpha^2\beta^2-1=0$
3. $(\alpha^2-\beta^2)x^2-2(\alpha^2+\beta^2)x+\alpha^2-\beta^2=0$
4. $(\alpha^2-\beta^2)x^2-2\alpha x+1=0$

1040. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις :

1. $(x-\alpha)(x-\beta)-(\alpha-x)(x-\beta)=0$
2. $(x+\alpha)(x-\beta)+\alpha\beta=2x^2-\alpha\beta$
3. $(\alpha-1)^2x^2-\alpha(x+\beta)=\alpha x^2(\alpha-2)-\beta x$
4. $x(x-5\alpha)-\beta(x+6\beta)+\alpha(6\alpha+5\beta)=0$

1041. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις :

1. $(\alpha+x)(x-\beta)=2(x-\beta)^2+\alpha\beta$
2. $(2\alpha+x)(2\alpha-x)=15\alpha\beta-9\beta^2-3\alpha x$
3. $x(x-2\beta)+\alpha(\beta-x)+2\gamma(\alpha-2\gamma)+\beta^2=0$
4. $x^2-(\alpha^2+\beta^2)x=2\alpha\beta(x-\alpha^2-\beta^2)$

Ὁμὰς Ε'. 1042. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις :

1. $\dfrac{x-\alpha}{\alpha}=\dfrac{2\alpha}{x-\alpha}$
2. $\dfrac{x-\alpha}{x-\beta}-\dfrac{x-\beta}{x-\alpha}+\dfrac{4\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}=0$
3. $\dfrac{x-\alpha}{x-\beta}+\dfrac{x-\beta}{x-\alpha}+2=0$
4. $\dfrac{x}{x-\alpha}-\dfrac{2\alpha}{x+\alpha}=\dfrac{8\alpha^2}{x^2-\alpha^2}$
5. $\dfrac{x-\alpha}{\alpha}=\dfrac{\beta}{2x-\beta}$
6. $\dfrac{\alpha-\beta}{x-2\alpha}+\dfrac{x+4\beta}{\alpha+\beta}=4$

387. **Λύσις ἐξισώσεων δευτέρου βαθμοῦ μὲ φανταστικοὺς συντελεστάς.** Ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, ὅπου α, β, γ εἶναι ***μιγάδες ἀριθμοί,*** γίνεται ὅπως καὶ ἡ λύσις τῶν ἐξισώσεων τοῦ δευτέρου βαθμοῦ μὲ πραγματικοὺς συντελεστάς. Πρέπει ὅμως κατὰ τὴν ἐξαγωγὴν τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τῆς ὑπορρίζου ποσότητος $\beta^2-4\alpha\gamma$ νὰ ἔχωμεν ὑπ᾿ ὄψει τοὺς τύπους τῆς § 375, ποὺ δίδουν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν ἑνὸς μιγάδος ἀριθμοῦ.

Παράδειγμα. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^2-(7+3i)x+22+7i=0$.

Αἱ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως δίδονται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$x=\frac{(7+3i)\pm\sqrt{(7+3i)^2-4\cdot 1\cdot(22+7i)}}{2} \qquad (1)$$

Ὑπολογίζομεν τὴν ποσότητα $\Delta=(7+3i)^2-4\cdot 1\cdot(22+7i)$

$\Delta=49+42i+9i^2-88-28i=49+42i+9(-1)-88-28i=-48+14i$

Εὑρίσκομεν τώρα τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τῆς Δ, δηλ. ὑπολογίζομεν τὴν παράστασιν $\sqrt{-48+14i}$. Γνωρίζομεν (§ 375) ὅτι

$$\sqrt{\alpha+\beta i}=\sqrt{\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}}+\sqrt{\frac{-\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}}\cdot i, \quad \text{ἄρα θὰ εἶναι}$$

$$\sqrt{-48+14i}=\sqrt{\frac{-48+\sqrt{2304+196}}{2}}+\sqrt{\frac{+48+\sqrt{2304+196}}{2}}\cdot i=$$

$$=\sqrt{\frac{-48+50}{2}}+\sqrt{\frac{+48+50}{2}}\cdot i=1+7i$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὸν τύπον (1) τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν μὲ τὸ ἴσον του $1+7i$ καὶ ἔχομεν : $x=\dfrac{(7+3i)\pm(1+7i)}{2}$

Ὥστε αἱ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι :

$$x'=\frac{7+3i+1+7i}{2}=4+5i \quad \text{καὶ} \quad x''=\frac{7+3i-1-7i}{2}=3-2i$$

Ἀσκήσεις. 1043. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις :

1. $x^2+(2-5i)x+50i=0$
2. $x^2-(7-2i)x+13(1+i)=0$
3. $x^2+(4-5i)x-(21-15i)=0$
4. $6x^2+5x+7+i=0$
5. $6x^2-12(1+i)x-5=0$
6. $x^2-5x+7+i=0$

1044. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις :

1. $(1+i)x^2-(3i-2)x+6i=0$
2. $(2+i)x^2-(6+4i)x+3i=0$

ΕΙΔΟΣ ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$

388. Εἶδος τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$.

Γνωρίζομεν, ὅτι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ (1)

δίδονται ὑπὸ τοῦ τύπου $x=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$ (2)

1ον. ***Ἐὰν $\beta^2-4\alpha\gamma>0$*** ἡ ἐξίσωσις (1) ἔχει δύο ρίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους τὰς

$$x'=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha} \quad \text{καὶ} \quad x''=\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

2ον. ***Ἐὰν $\beta^2-4\alpha\gamma=0$*** ὁ τύπος (2) γίνεται $x=\dfrac{-\beta\pm0}{2\alpha}$ καὶ ἡ ἐξίσωσις ἔχει τὰς ρίζας

$$x'=\frac{-\beta+0}{2\alpha}=\frac{-\beta}{2\alpha} \quad \text{καὶ} \quad x''=\frac{-\beta-0}{2\alpha}=\frac{-\beta}{2\alpha}$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι, ἐὰν $\beta^2-4\alpha\gamma=0$, ἡ ἐξίσωσις (1) ἔχει δύο ρίζας πραγματικὰς καὶ ἴσας ἤ, ὅτι ἔχει μίαν διπλῆν ρίζαν $x=-\dfrac{\beta}{2\alpha}$

3ον. ***Ἐὰν $\beta^2-4\alpha\gamma<0$,*** ἡ ἐξίσωσις (1) ἔχει δύο ρίζας φανταστικάς. Πράγματι ἐπειδὴ $\beta^2-4\alpha\gamma=(-1)(4\alpha\gamma-\beta^2)=i^2(4\alpha\gamma-\beta^2)$ ὁ τύπος (2) γράφεται

$$x=\frac{-\beta\pm\sqrt{i^2(4\alpha\gamma-\beta^2)}}{2\alpha}=\frac{-\beta\pm i\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}}{2\alpha}$$

Ἐὰν θέσωμεν $\dfrac{-\beta}{2\alpha}=\kappa$ καὶ $\dfrac{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}}{2\alpha}=\delta$ αἱ φανταστικαὶ ρίζαι λαμβάνουν τὴν μορφὴν

$$x'=\kappa+\delta i \quad \text{καὶ} \quad x''=\kappa-\delta i,$$

αἱ ὁποῖαι λέγονται ***συζυγεῖς μιγαδικαὶ ρίζαι.***

389. Συμπέρασμα. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω, συνάγομεν, ὅτι διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, πρέπει πρῶτον νὰ ὑπολογίζωμεν τὴν ποσότητα $β^2-4αγ$ καὶ νὰ παρατηροῦμεν τὸ σημεῖον της:

Ἐὰν $β^2-4αγ>0$, ἡ ἐξίσωσις ἔχει ***δύο ρίζας πραγματικὰς*** καὶ ἀνίσους, αἱ ὁποῖαι δίδονται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$x=\frac{-β\pm\sqrt{β^2-4αγ}}{2α}$$

Ἐὰν $β^2-4αγ=0$, ἡ ἐξίσωσις ἔχει ***μίαν ρίζαν διπλῆν*** καὶ ἴσην μὲ $x=-\frac{β}{2α}$.

Ἐὰν $β^2-4αγ<0$, ἡ ἐξίσωσις ἔχει ***δύο ρίζας φανταστικάς.***

Ἡ ποσότης $β^2-4αγ$, διὰ τῆς ὁποίας διακρίνομεν τὸ ***εἶδος*** τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $αx^2+βx+γ=0$, λέγεται ***διακρίνουσα*** τῆς ἐξισώσεως καὶ παρίσταται συνήθως μὲ τὸ γράμμα Δ· δηλ. εἶναι:

$$\boxed{Δ=β^2-4αγ}$$

Ἀσκήσεις. *1045.* Νὰ προσδιορισθῇ τὸ εἶδος τῶν ριζῶν τῶν κάτωθι ἐξισώσεων, χωρὶς προηγουμένως νὰ λυθοῦν αὗται:

1. $x^2+10x+8=0$
2. $x^2-4x+4=0$
3. $5x^2+12x-6=0$
4. $4x^2-15x+1=0$
5. $8x^2-13x+6=0$
6. $25x^2+10x+1=0$

1046. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ μ ἡ ἐξίσωσις $μx^2-2(μ-1)x+μ-4=0$ ἔχει ρίζας πραγματικάς;

1047. Νὰ ὁρισθῇ ἡ τιμὴ τοῦ μ, ἵνα αἱ κάτωθι ἐξισώσεις ἔχουν δύο ρίζας ἴσας. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ρίζαι των:

1. $2μx^2+(5μ+2)x+(4μ+1)=0$
2. $(μ-1)x^2-2(μ+1)x+μ-2=0$
3. $(μ+3)x^2+4μx-(5μ-6)=0$
4. $(μ-3)x^2-(μ+2)x+2μ+1=0$
5. $(2μ-1)x^2+(μ+3)x+4μ=0$
6. $(μ+1)x^2-(μ+4)x+μ-4=0$

1048. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ κάτωθι ἐξισώσεις ἔχουν ρίζας πραγματικάς:

1. $x^2-2αx+α^2-β^2-γ^2=0$
2. $3μx^2-(2μ+3ν)x+2ν=0$
3. $αx^2-(α-2β)x+β=0$
4. $αx^2+(α+β)x+β-α=0$

1049. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ἐξίσωσις $x^2-2(λ+2)x-λ^2=0$ δὲν δύναται νὰ ἔχῃ δύο ρίζας ἴσας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ ΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

***390.* Σχέσεις μεταξὺ τῶν συντελεστῶν καὶ τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $αx^2+βx+γ=0$.** Μεταξὺ τῶν συντελεστῶν καὶ τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $αx^2+βx+γ=0$ ὑπάρχουν δύο σχέσεις ἁπλούσταται καὶ σπουδαιόταται:

1ον. Ἄθροισμα τῶν ριζῶν. Γνωρίζομεν, ὅτι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ εἶναι

$$x'=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha} \quad (1), \qquad x''=\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha} \quad (2)$$

Προσθέτομεν τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$x'+x''=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}=\frac{-2\beta}{2\alpha}$$

ἄρα : $$\boxed{x'+x''=-\frac{\beta}{\alpha}}$$

Ὥστε: ***Τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ριζῶν μιᾶς ἐξισώσεως τοῦ δευτέρου βαθμοῦ εἶναι ἴσον μὲ*** $-\frac{\beta}{\alpha}$.

Π.χ. εἰς τὴν ἐξίσωσιν $12x^2+5x-3=0$, εἶναι $x'+x''=-\frac{\beta}{\alpha}=-\frac{5}{12}$

» » » $x^2-9x+18=0$, » $x'+x''=-\frac{\beta}{\alpha}=+9$

2ον. Γινόμενον τῶν ριζῶν. Ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη ἔχομεν

$$x'x''=\frac{(-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma})\cdot(-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma})}{4\alpha^2}=\frac{\beta^2-(\beta^2-4\alpha\gamma)}{4\alpha^2}=\frac{4\alpha\gamma}{4\alpha^2}$$

ἄρα $$\boxed{x'x''=\frac{\gamma}{\alpha}}$$

Ὥστε: ***Τὸ γινόμενον τῶν δύο ριζῶν μιᾶς ἐξισώσεως τοῦ δευτέρου βαθμοῦ εἶναι ἴσον μὲ*** $\frac{\gamma}{\alpha}$.

Π.χ. εἰς τὴν ἐξίσωσιν $3x^2+3x-12=0$, εἶναι: $x'x''=\frac{\gamma}{\alpha}=-\frac{12}{3}=-4$

» » » $x^2-11x+30=0$, » $x'x''=\frac{\gamma}{\alpha}=30$.

Παρατήρησις. Ἐὰν ἡ ἐξίσωσις παρουσιάζεται ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$x^2+\beta x+\gamma=0$$

δηλ. ἐὰν εἶναι $\alpha=1$, τότε θὰ εἶναι

$$x'+x''=-\beta \quad \text{καὶ} \quad x'x''=\gamma$$

Ἀσκήσεις. *1050.* Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενον τῶν ριζῶν τῶν κάτωθι ἐξισώσεων, χωρὶς νὰ λυθοῦν προηγουμένως :

1. $3x^2-7x-15=0$ 3. $2x^2-9x+1=0$ 5. $5x^2-x-15=0$
2. $x^2+12x+36=0$ 4. $x^2+10x+16=0$ 6. $7x^2+21x+10=0$.

391. Ἐφαρμογαί. Πρόβλημα 1ον. ***Νὰ σχηματισθῇ μία ἐξίσωσις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ ὡς ρίζας, δύο δοθέντας ἀριθμοὺς*** x′ ***καὶ*** x″.

Ἔστω $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις.

Ἐὰν διαιρέσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς διὰ α ἔχομεν
$$x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}=0.$$

Ἀλλὰ $-\frac{\beta}{\alpha}$ παριστάνει τὸ ἄθροισμα $x'+x''$ τῶν δύο ριζῶν της καὶ $\frac{\gamma}{\alpha}$ τὸ γινόμενον $x'x''$ τῶν ριζῶν της. Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (1) τὰ $\frac{\beta}{\alpha}$ καὶ $\frac{\gamma}{\alpha}$ μὲ τὰ ἴσα των καὶ ἔχομεν
$$x^2-(x'+x'')x+x'x''=0$$

Ὥστε: *Διὰ νὰ σχηματίσωμεν μίαν ἐξίσωσιν δευτέρου βαθμοῦ, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ ρίζας δύο δοθέντας ἀριθμοὺς x' καὶ x'' εὑρίσκομεν τὸ ἄθροισμα $x'+x''$ τῶν ριζῶν καὶ τὸ γινόμενον των $x'\cdot x''$ καὶ τὸ μὲν ἄθροισμα θέτομεν ὡς συντελεστὴν τοῦ x μὲ ἀντίθετον σημεῖον, τὸ δὲ γινόμενόν των ὡς σταθερὸν ὅρον τῆς ζητουμένης ἐξισώσεως.*

Παράδειγμα 1ον. Νὰ σχηματισθῇ μία ἐξίσωσις, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ ὡς ρίζας τοὺς ἀριθμοὺς -8 καὶ $+10$.

Τὸ ἄθροισμα τῶν ριζῶν εἶναι: $x'+x''=-8+10=+2$

Τὸ γινόμενον « » » $x'x''=(-8)\cdot 10=-80$

Ἑπομένως ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις εἶναι $x^2-2x-80=0$

Παράδειγμα 2ον. Νὰ σχηματισθῇ μία ἐξίσωσις, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ ὡς ρίζας τὰς $\frac{1}{\alpha+\beta}$ καὶ $\frac{1}{\alpha-\beta}$.

Τὸ ἄθροισμα τῶν ριζῶν εἶναι:
$$x'+x''=\frac{1}{\alpha+\beta}+\frac{1}{\alpha-\beta}=\frac{\alpha-\beta+\alpha+\beta}{\alpha^2-\beta^2}=\frac{2\alpha}{\alpha^2-\beta^2}.$$

Τὸ γινόμενον τῶν ριζῶν εἶναι:
$$x'x''=\frac{1}{\alpha+\beta}\cdot\frac{1}{\alpha-\beta}=\frac{1}{\alpha^2-\beta^2}.$$

Ἑπομένως ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις εἶναι:
$$x^2-\frac{2\alpha}{\alpha^2-\beta^2}x+\frac{1}{\alpha^2-\beta^2}=0 \quad \text{ἢ} \quad (\alpha^2-\beta^2)x^2-2\alpha x+1=0$$

Ἀσκήσεις. Ὁμὰς Α. 1051. Νὰ σχηματισθῇ μία ἐξίσωσις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ ρίζας:

1. 8 καὶ -4 4. $-2,5$ καὶ $4,1$ 7. $\sqrt{2}+1$ καὶ $\sqrt{2}-1$

2. $\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{3}{4}$ 5. $\frac{3}{4}$ καὶ $-\frac{2}{5}$ 8. $\frac{5}{3-\sqrt{2}}$ καὶ $\frac{5}{3+\sqrt{2}}$

3. $7\frac{1}{2}$ καὶ $-4\frac{1}{3}$ 6. $4+\frac{2}{\sqrt{2}}$ καὶ $4-\frac{2}{\sqrt{2}}$ 9. $\frac{3}{5}+\frac{1}{\sqrt{2}}$ καὶ $\frac{3}{5}-\frac{1}{\sqrt{2}}$

1052. Νὰ σχηματισθῇ μία ἐξίσωσις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ ρίζας:

1. $\alpha+\beta$ καὶ $\alpha-\beta$ 3. $2+\alpha$ καὶ $2-\alpha$ 5. $\alpha+\sqrt{\beta}$ καὶ $\alpha-\sqrt{\beta}$

2. $\frac{\alpha-1}{\alpha}$ καὶ $-\frac{\alpha}{\alpha+1}$ 4. $\frac{\alpha-1}{\alpha}$ καὶ $-\frac{\alpha+1}{\alpha+2}$ 6. $\frac{\alpha-2}{\alpha}$ καὶ $\frac{\alpha}{\alpha+2}$

7. $-\frac{\alpha-1}{\alpha+2}$ καὶ $-\frac{\alpha+1}{\alpha-1}$ 8. $\frac{\alpha-2\beta}{\alpha-\beta}$ καὶ $-\frac{\alpha+\beta}{\alpha+2\beta}$ 9. $\frac{\alpha}{\beta\sqrt{3}}$ καὶ $-\frac{\alpha}{\beta\sqrt{3}}$

Ὁμὰς Β'. 1053. Νὰ σχηματισθῇ ἡ ἐξίσωσις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, τῆς ὁποίας αἱ ρίζαι νὰ εἶναι ἴσαι μὲ τὸ ἄθροισμα καὶ μὲ τὸ γινόμενον τῶν ριζῶν x', x'' τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$.

1054. Νὰ σχηματισθῇ μία ἐξίσωσις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ ὡς ρίζας τὰς ἀντιστρόφους τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$. (Σχ. Δοκίμων 1947).

1055. Νὰ σχηματισθῇ μία ἐξίσωσις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, τῆς ὁποίας αἱ ρίζαι νὰ εἶναι κατὰ 5 μεγαλύτεραι τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $5x^2-6x+1=0$.

1056. Νὰ σχηματισθῇ μία ἐξίσωσις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, τῆς ὁποίας αἱ ρίζαι νὰ εἶναι κατὰ λ μικρότεραι τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$.

392. Πρόβλημα 2ον ***Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀριθμοί, ἐὰν γνωρίζωμεν τὸ ἄθροισμά των Σ καὶ τὸ γινόμενόν των Γ.***

Τὸ πρόβλημα αὐτὸ ἀνάγεται εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα Πράγματι, πρέπει νὰ εἶναι

$$x'+x''=\Sigma \quad \text{καὶ} \quad x'x''=\Gamma.$$

Ἐπομένως οἱ δύο ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως

$$x^2-\Sigma x+\Gamma=0.$$

Παράδειγμα. Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι νὰ ἔχουν ἄθροισμα $-\frac{16}{3}$ καὶ γινόμενον -4.

Οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι αἱ δύο ρίζαι τῆς ἐξισώσεως

$$x^2+\frac{16}{3}x-4=0 \quad \text{ἢ} \quad 3x^2+16x-12=0 \qquad (1)$$

Ἂν λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν (1) θὰ εὕρωμεν $x'=-6$, $x''=\frac{2}{3}$

Ὥστε οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι οἱ -6 καὶ $+\frac{2}{3}$.

***Ἀσκήσεις.** 1057.* Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἔχουν :

1. ἄθροισμα 18 καὶ γινόμενον 45 3. ἄθροισμα -7 καὶ γινόμενον -60
2. » 11 » -180 4. » 2 » -80

1058. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαστάσεις ἑνὸς ὀρθογωνίου, ἂν γνωρίζωμεν ὅτι ἡ περίμετρός του εἶναι 74 μέτρα καὶ τὸ ἐμβαδόν του 312 τ. μέτρα.

1059. Εἰς μίαν ἀναλογίαν τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων ὅρων της εἶναι 1500 τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων ὅρων εἶναι 137 καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν μέσων ὅρων εἶναι 85. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ τέσσαρες ὅροι τῆς ἀναλογίας.

1060. Νὰ χωρισθῇ ὁ ἀριθμὸς 70 εἰς δύο μέρη, τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον εἶναι 441.

393. Πρόβλημα 3ον. ***Νὰ ὁρισθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραμέτρου λ εἰς τρόπον, ὥστε αἱ ρίζαι*** x' ***καὶ*** x'' ***τῆς ἐξισώσεως*** $x^2-(4\lambda+1)x+10\lambda=0$, ***νὰ ἐπαληθεύουν τὴν σχέσιν*** $4x'-3x''=8$.

Ἐκτὸς τῆς δοθείσης σχέσεως $4x'-3x''=8$ (1)

ἔχομεν καὶ τὰς σχέσεις $x'+x''=4\lambda+1$ (2), $x'x''=10\lambda$ (3)

όχι

αἱ ὁποῖαι ὑπάρχουν μεταξὺ τῶν ριζῶν καὶ τῶν συντελεστῶν τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

Ἀπαλείφομεν τὰ x′ καὶ x″ μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων (1), (2), (3). Πρὸς τοῦτο λύομεν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) καὶ τας τιμὰς τῶν x′ καὶ x″ θέτομεν εἰς τὴν (3).

Ἀπὸ τὴν (2) ἔχομεν $x'=4\lambda+1-x''$ (4)

Τὴν τιμὴν τοῦ x′ θέτομεν εἰς τὴν (1) καὶ ἔχομεν

$$4(4\lambda+1-x'')-3x''=8 \quad ἢ \quad 16\lambda+4-4x''-3x''=8$$

$$ἢ \quad -4x''-3x''=-16\lambda-4+8 \quad ἢ \quad 7x''=16\lambda-4$$

ἄρα $$x''=\frac{16\lambda-4}{7}$$

Τὴν τιμὴν τοῦ x″ θέτομεν εἰς τὴν (4) καὶ ἔχομεν

$$x'=4\lambda+1-\frac{16\lambda-4}{7} \quad ἢ \quad x'=\frac{28\lambda+7-16\lambda+4}{7}=\frac{12\lambda+11}{7}$$

Τὰς τιμὰς τῶν x′ καὶ x″ θέτομεν εἰς τὴν (3) καὶ ἔχομεν

$$\frac{12\lambda+11}{7}\cdot\frac{16\lambda-4}{7}=10\lambda \quad ἢ \quad (12\lambda+11)(16\lambda-4)=490\lambda.$$

Ἐκτελοῦμεν πράξεις κλπ. καὶ εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$96\lambda^2-181\lambda-22=0$$

Ἡ διακρίνουσα τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εἶναι

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=181^2-4.96.(-22)=32761+8448=41209$$

Ὁ τύπος δίδει $$\lambda=\frac{181\pm\sqrt{41209}}{2\cdot96}=\frac{181\pm203}{192}$$

Ἄρα αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως (5) εἶναι

$$\lambda'=\frac{181+203}{192}=2 \quad καὶ \quad \lambda'=\frac{181-203}{192}=-\frac{22}{192}=-\frac{11}{96}$$

Ὥστε πρέπει νὰ εἶναι $\lambda=2$ ἢ $\lambda=-\frac{11}{96}$.

Πράγματι· ἐὰν λάβωμεν $\lambda=2$, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γίνεται $x^2-9x+20=0$ Αἱ ρίζαι της $x'=5$ καὶ $x''=4$ ἐπαληθεύουν τὴν δοθεῖσαν σχέσιν $4x'-3x''=8$.

Ἀσκήσεις. Ὁμὰς Α′. ***1061.*** Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ παράμετρος μ, ἵνα ἡ ἐξίσωσις $12x^2-\mu x+3=0$ ἔχῃ τὴν ρίζαν $x=-\frac{1}{3}$.

1062. Εἰς τὴν ἐξίσωσιν $x^2-10x+\lambda=0$, νὰ προσδιορισθῇ ὁ λ εἰς τρόπον, ὥστε ἡ μία ἐκ τῶν ριζῶν της νὰ εἶναι : 1ον. ἴση μὲ 4. 2ον. ἴση μὲ 0. 3ον. ἴση μὲ $\frac{4}{5}$.

1063. Εἰς τὴν ἐξίσωσιν $x^2-\mu x+81=0$, νὰ προσδιορισθῇ ὁ μ εἰς τρόπον, ὥστε νὰ εἶναι : 1ον. $x'=x''$. 2ον. $x'=3x''$. 3ον. $x'x''=1$. 4ον. $2x'-3x''=5$.

1064. Εἰς τὴν ἐξίσωσιν $(\alpha-\beta)^2x^2+2(\alpha^2-\beta^2)x+\nu=0$, νὰ προσδιορισθῇ ὁ ν εἰς τρόπον, ὥστε αἱ ρίζαι της νὰ εἶναι : 1ον. ἴσαι καὶ 2ον. ἀντίστροφοι.

1065. Ποίαν τιμὴν πρέπει νὰ λάβῃ ὁ μ, ἵνα αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $8x^2-(\mu-1)x+\mu-7=0$ εἶναι : 1ον. ἴσαι, 2ον. ἀντίθετοι, 3ον. ἀντίστροφοι. 4ον. ἡ μία νὰ εἶναι ἴση μὲ μηδέν.

1066. Εἰς τὴν ἐξίσωσιν $x^2-16x+μ=0$, νὰ ὁρισθῇ ὁ μ εἰς τρόπον, ὥστε νὰ εἶναι $\frac{x'}{2}+\frac{x''}{6}=2$, ἔνθα x', x'' εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως.

(Σχολὴ Εὐελπίδων 1947)

1067. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ ἡ διαφορὰ τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $2x^2-(λ+1)x+λ+3=0$ εἶναι ἴση μὲ 1.

1068. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ τιμὴ τοῦ λ εἰς τρόπον, ὥστε αἱ ρίζαι x' καὶ x'' τῆς ἐξισώσεως $(λ-2)x^2-(λ+4)x+3λ+3=0$ νὰ ἐπαληθεύουν τὴν σχέσιν $3x'=4x''$.

1069. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ τιμὴ τοῦ λ εἰς τρόπον, ὥστε αἱ ρίζαι x' καὶ x'' τῆς ἐξισώσεως $(λ-2)x^2-2(λ-3)x-2(λ+2)=0$ νὰ ἐπαληθεύουν τὴν σχέσιν $3x'+2x''=0$.

1070. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ τιμὴ τοῦ μ εἰς τρόπον, ὥστε αἱ ρίζαι x' καὶ x'' τῆς ἐξισώσεως $(μ-1)x^2-(3μ+4)x+12μ+3=0$ νὰ ἐπαληθεύουν τὴν σχέσιν $4x'-5x''=13$.

1071. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραμέτρου μ εἰς τρόπον, ὥστε ἡ μία ἐκ τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $x^2+(5μ-7)x+μ^2+2μ-3=0$ νὰ εἶναι τριπλασία τῆς ἄλλης.

1072. Ποία σχέσις πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν συντελεστῶν τῆς ἐξισώσεως $αx^2+βx+γ=0$, ἵνα αἱ ρίζαι της εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀριθμῶν μ καὶ ν.

1073. Νὰ προσδιορισθῇ ὁ συντελεστὴς μ εἰς τρόπον, ὥστε ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $x^2-μx+12=0$ νὰ εἶναι ἴση μὲ 7.

1074. Νὰ ὁρισθῇ ὁ λ, ἵνα αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $(2λ-1)x^2+(5λ+1)x-(3λ+1)=0$ ἔχουν λόγον $\frac{2}{3}$.

1075. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διαφορὰ τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως τοῦ δευτέρου βαθμοῦ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι διὰ κάθε τιμὴν τοῦ μ, ἡ ἐξίσωσις : $5x^2-2(5μ+3)x+5μ^2+6μ+1=0$ ἔχει ρίζας πραγματικάς. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν ριζῶν της εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ μ.

***394*. Ἄθροισμα τῶν ὁμοίων δυνάμεων τῶν ριζῶν x_1 καὶ x_2 μιᾶς ἐξισώσεως τοῦ δευτέρου βαθμοῦ**. Τὰ ἀθροίσματα τῶν ὁμοίων δυνάμεων τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $αx^2+βx+γ=0$ δύνανται νὰ ὑπολογισθοῦν ἐκ τῶν συντελεστῶν τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς, χωρὶς προηγουμένως νὰ λυθῇ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις.

Π. χ. ἂν x_1 καὶ x_2 εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $αx^2+βx+γ=0$ θὰ εἶναι :

1ον. $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\left(-\frac{β}{α}\right)^2-2\cdot\frac{γ}{α}=\frac{β^2-2αγ}{α^2}$

Ὥστε εἶναι : $\boxed{x_1^2+x_2^2=\frac{β^2-2αγ}{α^2}}$

2ον. $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=\left(-\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^3-3\cdot\dfrac{\gamma}{\alpha}\left(-\dfrac{\beta}{\alpha}\right)=$

$=\dfrac{3\alpha\beta\gamma-\beta^3}{\alpha^3}$. Ὥστε εἶναι $\boxed{x_1^3+x_2^3=\dfrac{3\alpha\beta\gamma-\beta^3}{\alpha^3}}$

3ον. $x_1^4+x_2^4=(x_1^2+x_2^2)^2-2x_1^2x_2^2=$

$$=\left(\frac{\beta-2\alpha\gamma}{\alpha^2}\right)^2-2\cdot\frac{\gamma^2}{\alpha^2}=\frac{\beta^4-4\alpha\beta^2\gamma+2\alpha^2\gamma^2}{\alpha^4}$$

Ὥστε εἶναι $\boxed{x_1^4+x_2^4=\dfrac{\beta^4-4\alpha\beta^2\gamma+2\alpha^2\gamma^2}{\alpha^4}}$

Ἐὰν συνεχίσωμεν κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον θὰ εὕρωμεν διαδοχικῶς τὰ ἀθροίσματα $x_1^5+x_2^5, \ldots, x_1^\mu+x_2^\mu$.

Ἀσκήσεις. Ὁμὰς Α'. *1076.* Ἐὰν x_1 καὶ x_2 εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $4x^2-13x+4=0$, νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ x_1+x_2, x_1x_2, $x_1^2+x_2^2$, $x_1^3+x_2^3$ χωρὶς προηγουμένως νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις.

1077. Ἐὰν x_1, x_2 εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $4x^2-11x+6=0$, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως $A=\dfrac{3x_1^2+5x_1x_2^2+3x_2^2+5x_1^2x_2}{4x_1^2-6x_1x_2+4x^2}$

χωρὶς νὰ λυθῇ προηγουμένως ἡ ἐξίσωσις.

1078. Ἐὰν x' καὶ x'' εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2-3x-28=0$, νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις, χωρὶς νὰ λυθῇ προηγουμένως ἡ ἐξίσωσις;

1. $4x'^3-6x'x''^2+4x''^3-6x'^2x''$ 2. $2x'^3+3x'^2x''+3x'x''^2+2x''^3$

3. $\dfrac{5x'^2-7x'x''+5x''^2}{4x'^3-5x'^2x''-5x'x''^2+4x''^3}$ 4. $\dfrac{2x'+1)(2x''+1)}{(3x'-9)(3x''-9)}$

1079. Δίδεται ἡ ἐξίσωσις $x^2+\lambda x+\mu=0$. Νὰ σχηματισθῇ ἄλλη ἐξίσωσις ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ ρίζας $\dfrac{x_1^2+x_2^2}{x_1+x_2}$ καὶ $\dfrac{x_1^2+x_2^2+5\lambda\mu}{x_1^2+x_2^2}$ ἔνθα x_1, x_2 εἶναι αἱ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως. (Πολυτεχνεῖον 1934).

Ὁμὰς Β'. 1080. Ἐὰν x' καὶ x'' εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, νὰ σχηματισθῇ ἐξίσωσις δευτέρου βαθμοῦ, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ ρίζας

$$1-\frac{2}{x'} \quad \text{καὶ} \quad 1-\frac{2}{x''}$$

1081. Ἐὰν x' καὶ x'' εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ νὰ σχηματισθῇ ἡ ἐξίσωσις, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ ρίζας $\dfrac{x'}{x''^2}$ καὶ $\dfrac{x''}{x'^2}$.

1082. Ἐὰν x_1 καὶ x_2 εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, νὰ σχηματισθῇ ἐξίσωσις δευτέρου βαθμοῦ, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ ρίζας x_1+3x_2 καὶ x_2+3x_1.

1083. Δίδεται ἡ ἐξίσωσις $x^2+\alpha x+\beta=0$, ἔχουσα ρίζας x' καὶ x''. Νὰ σχηματισθῇ ἄλλη ἐξίσωσις β' βαθμοῦ, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ ρίζας ρ' καὶ ρ'' ἔνθα $\rho'=x'^3+x''^3$ καὶ $\rho''=x'^2+x''^2-x'x''$. (Σχολὴ Εὐελπίδων 1932)

1084. Νὰ σχηματισθῇ ἐξίσωσις δευτέρου βαθμοῦ, τῆς ὁποίας αἱ ρίζαι νὰ εἶναι τὰ τετράγωνα τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $3x^2-8x+2=0$.

1085. Δίδεται ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ καὶ ζητεῖται νὰ σχηματισθῇ μία ἄλλη ἐξίσωσις, τῆς ὁποίας αἱ ρίζαι :

1ον Νὰ εἶναι ἀντίθετοι πρὸς τὰς ρίζας x', x'' τῆς δοθείσης.
2ον Νὰ εἶναι ἀντίστροφοι τῶν ριζῶν τῆς δοθείσης.
3ον Νὰ ἔχῃ ρίζας $\mu x'$ καὶ $\mu x''$.
4ον Νὰ ἔχῃ ρίζας $x'+\lambda$ καὶ $x''+\lambda$.
5ον Νὰ εἶναι τὰ τετράγωνα τῶν ριζῶν τῆς δοθείσης.
6ον Νὰ εἶναι τὰ ἀντίστροφα τετράγωνα τῶν ριζῶν τῆς δοθείσης.

1086. Ἐὰν x' καὶ x'' εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2+7x+8=0$, νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν παραστάσεων $x'^2+x''^2$ καὶ $x'^3+x''^3$ χωρὶς νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις. (Πολυτεχνεῖον 1947)

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΙΣ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$

395. Σημεῖον τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ σημεῖον τῶν ριζῶν μιᾶς ἐξισώσεως τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, χωρὶς νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν, εἶναι ἀνάγκη νὰ ἐξετάσωμεν τὰ σημεῖα τοῦ γινομένου καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ριζῶν της.

Α΄) ***Ἔστω*** $\beta^2-4\alpha\gamma>0$. Ὅταν ἡ διακρίνουσα $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$ εἶναι θετική, ἡ ἐξίσωσις ἔχει δύο ρίζας x' καὶ x'' καὶ εἶναι

$$x'x''=\frac{\gamma}{\alpha} \quad \text{καὶ} \quad x'+x''=-\frac{\beta}{\alpha}$$

Ι. ***Ἐὰν*** $\frac{\gamma}{\alpha}>0$, δηλ. ἐὰν τὸ γινόμενον τῶν ριζῶν εἶναι θετικόν, αἱ ρίζαι x' καὶ x'' εἶναι ***ὁμόσημοι***.

Διὰ νὰ ἴδωμεν, ἐὰν καὶ αἱ δύο ρίζαι εἶναι θετικαὶ ἢ ἀρνητικαί, ἐξετάζομεν τὸ ἄθροισμα $-\frac{\beta}{\alpha}$ τῶν ριζῶν :

Ἐὰν $-\frac{\beta}{\alpha}>0$, τότε αἱ δύο ρίζαι x' καὶ x'' εἶναι θετικαί.

Ἐὰν $-\frac{\beta}{\alpha}<0$, τότε αἱ δύο ρίζαι x' καὶ x'' εἶναι ἀρνητικαί.

ΙΙ. ***Ἐὰν*** $\frac{\gamma}{\alpha}<0$, δηλ. ἐὰν τὸ γινόμενον τῶν ριζῶν εἶναι ἀρνητικόν, αἱ δύο ρίζαι x' καὶ x'' εἶναι ***ἑτερόσημοι***, διότι μόνον τὸ γινόμενον δύο ἑτεροσήμων ἀριθμῶν εἶναι ἀρνητικόν· ἡ μεγαλυτέρα κατ᾽ ἀπόλυτον τιμὴν ρίζα ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ ἀθροίσματος

$$x'+x''=-\frac{\beta}{\alpha}.$$

Ὥστε : Ἐὰν $-\frac{\beta}{\alpha}>0$, ἡ μεγαλυτέρα κατ᾽ ἀπόλυτον τιμὴν εἶναι ἡ θετικὴ ρίζα· (ἡ σχέσις ἐκφράζεται μὲ τὸ ($>|+$).

Ἐὰν $-\frac{\beta}{\alpha}<0$, ἡ μεγαλυτέρα κατ' ἀπόλυτον τιμὴν εἶναι ἡ ἀρνητική· (| > | —).

Ἐὰν $-\frac{\beta}{\alpha}=0$, αἱ δύο ρίζαι εἶναι συμμετρικαί : $x'=-x''$.

III. ***Ἐὰν*** $\boldsymbol{\frac{\gamma}{\alpha}=0}$, δηλ. ἐὰν τὸ γινόμενον τῶν ριζῶν εἶναι ἴσον μὲ μηδέν, ἡ μία ἐκ τῶν ριζῶν εἶναι ἴση μὲ τὸ μηδὲν καὶ ἡ ἄλλη ρίζα εἶναι ἴση μὲ $-\frac{\beta}{\alpha}$.

Β') ***Ἔστω, ὅτι*** $\boldsymbol{\beta^2-4\alpha\gamma=0}$. Ὅταν $\Delta=0$, ἡ ἐξίσωσις ἔχει μίαν διπλῆν ρίζαν ἴσην μὲ $x'=x''=-\frac{\beta}{2\alpha}$ τῆς ὁποίας τὸ σημεῖον ὁρίζεται ἀμέσως.

Γ') ***Ἔστω, ὅτι*** $\boldsymbol{\beta^2-4\alpha\gamma<0}$. Ὅταν $\Delta<0$, ἡ ἐξίσωσις δὲν ἔχει ρίζας πραγματικάς· Ἔχει δύο ρίζας φανταστικὰς συζυγεῖς τῆς μορφῆς

$$\kappa+\delta i \quad \text{καὶ} \quad \kappa-\delta i.$$

Σπουδαία παρατήρησις. Ἐὰν οἱ συντελεσταὶ α καὶ γ εἶναι ἑτερόσημοι, ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ ἔχει πάντοτε δύο ρίζας πραγματικὰς καὶ ἑτεροσήμους,

Παράδειγμα. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σημεῖον τῶν ριζῶν τῶν κάτωθι ἐξισώσεων :
1. $x^2+11x+30=0$, 2. $3x^2-8x-12=0$, 3. $5x^2-10x+5=0$.

1ον. Εἰς τὴν ἐξίσωσιν $x^2+11x+30=0$ εἶναι $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=$ $=11^2-4\cdot30>0$· ἄρα ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ ἔχει δύο ρίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους.

Τὸ γινόμενον τῶν ριζῶν εἶναι $\frac{\gamma}{\alpha}=30$, δηλ. εἶναι θετικόν· ἄρα αἱ ρίζαι της εἶναι ὁμόσημοι. Τὸ ἄθροισμα τῶν ριζῶν της εἶναι $-\frac{\beta}{\alpha}=-11$. Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα εἶναι ἀρνητικὸν καὶ αἱ δύο ρίζαι τῆς ἐξισώσεως εἶναι ἀρνητικαί.

2ον. Ἡ ἐξίσωσις $3x^2-8x-12=0$ ἔχει πάντοτε δύο ρίζας ἑτεροσήμους, διότι οἱ συντελεσταί της α καὶ γ εἶναι ἑτερόσημοι.

3ον. Εἰς τὴν ἐξίσωσιν $5x^2-10x+5=0$ ἢ $x^2-2x+1=0$ εἶναι : $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=4-4=0$· ἄρα ἡ ἐξίσωσις ἔχει δύο ρίζας ἴσας.

Ἐπειδὴ $\frac{\gamma}{\alpha}=1>0$ καὶ $-\frac{\beta}{\alpha}=2>0$, αἱ ρίζαι της εἶναι θετικαί.

396. **Διερεύνησις τῆς ἐξισώσεως** $\boldsymbol{\alpha x^2+\beta x+\gamma=0}$. Ὅταν λέγωμεν, ὅτι θὰ διερευνήσωμεν μίαν ἐξίσωσιν τοῦ δευτέρου βαθμοῦ σημαίνει, ὅτι θὰ ἐξετάσωμεν νὰ εὕρωμεν, χωρὶς νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν :

1ον. ***Ἐὰν ἡ ἐξίσωσις ἔχῃ ἢ ὄχι ρίζας (εἶδος ριζῶν της).***

2ον. ***Ποῖον εἶναι τὸ σημεῖον τῶν ριζῶν της,*** εἰς τὴν περίπτωσιν, που ἡ ἐξίσωσις ἔχει ρίζας.

Ὁ κάτωθι πίναξ συνδυάζει τὰ ἐξαγόμενα τοῦ εἴδους καὶ τοῦ σημείου τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, τὰ ὁποῖα εὑρήκαμεν εἰς τὰς § 388 καὶ 395.

Πίναξ διερευνήσεως τοῦ εἴδους καὶ τοῦ σημείου τῶν ριζῶν x', x'' ($x'<x''$) τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, χωρὶς νὰ ὑπολογισθοῦν προηγουμένως αἱ ρίζαι αὐταί.

1. Ἐὰν $\frac{\gamma}{\alpha}<0$ ἡ ἐξίσωσις ἔχει δύο ρίζας ἑτεροσήμους	$-\frac{\beta}{\alpha}>0$	μεγαλυτέρα κατ' ἀπόλυτον τιμὴν εἶναι ἡ θετικὴ	
	$-\frac{\beta}{\alpha}<0$	μεγαλυτέρα κατ' ἀπόλυτον τιμὴν εἶναι ἡ ἀρνητικὴ	
	$-\frac{\beta}{\alpha}=0$	αἱ δύο ρίζαι εἶναι ἀντίθετοι	
2. Ἐὰν $\frac{\gamma}{\alpha}>0$ Πρέπει νὰ ἐξετάσωμεν τὴν διακρίνουσαν $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$	$\Delta>0$ ἔχει δύο ρίζας	$-\frac{\beta}{\alpha}>0$	αἱ δύο ρίζαι εἶναι θετικαί, δηλαδὴ $0<x'<x''$
		$-\frac{\beta}{\alpha}<0$	αἱ δύο ρίζαι εἶναι ἀρνητικαί, δηλαδὴ $x''<x'<0$
	$\Delta=0$	ἔχει δύο ρίζας ἴσας μὲ $-\frac{\beta}{2\alpha}$ δηλ. εἶναι $x'=x''=-\frac{\beta}{2\alpha}$	
	$\Delta<0$	δὲν ἔχει ρίζας	
3. Ἐὰν $\frac{\gamma}{\alpha}=0$	ἡ μία ρίζα εἶναι ἴση μὲ 0 καὶ ἡ ἄλλη ἴση μὲ $-\frac{\beta}{\alpha}$.		

1087. Νὰ διερευνηθοῦν αἱ ρίζαι τῶν κάτωθι ἐξισώσεων

1. $5x^2-17x+3=0$ 3. $5x^2+15x-21=0$ 5. $9x^2-18x+9=0$
2. $4x^2-11x-6=0$ 4. $5x^2+14x+3=0$ 6. $7x^2-14x-1=0$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΙΝ

Ὁμὰς Α'. *1088.* Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

1. $\alpha(\alpha+1)x^2+x-\alpha(\alpha-1)=0$ 2. $\alpha(\alpha+2)x^2+2x-\alpha^2+1=0$.

1089. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

1. $(\alpha-\beta)^2x^2+2(\alpha^2+\beta^2)x+(\alpha+\beta)^2=0$ 2. $(\alpha^2-\beta^2)x^2-2(\alpha^2+\beta^2)x+\alpha^2-\beta^2=0$
3. $(\mu+\nu)^2x^2-(\mu-\nu)(\mu^2-\nu^2)x-2\mu\nu(\nu^2+\mu^2)=0$

1090. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

1. $(\alpha^2+\alpha-2)x^2+(2\alpha^2+\alpha+3)x+\alpha^2-1=0$ 2. $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)x^2+2(\alpha+\beta+\gamma)x+3=0$

3. $(\gamma+\alpha-2\beta)x^2+(\alpha+\beta-2\gamma)x+\beta+\gamma-2\alpha=0$

1091. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις :

1. $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{3}{x-3}=\dfrac{6}{x+6}$ 2. $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{11}{x-11}=\dfrac{9}{x-9}+\dfrac{10}{x-10}$

3. $\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}+\dfrac{x^2+8x+20}{x+4}=\dfrac{x^2+4x+6}{x+2}+\dfrac{x^2+6x+12}{x+3}$

1092. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις :

1. $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{3}{x}$ 2. $\dfrac{(3-x)^3+(4+x)^3}{(3-x)^2+(4+x)^2}=7$

1093. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις :

1. $\dfrac{1}{\alpha+\beta+x}=\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{x}$ 2. $\left(\dfrac{\alpha-x}{x-\beta}\right)^2=8\left(\dfrac{\alpha-x}{x-\beta}\right)-15$

109. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις :

1. $\dfrac{(x-\alpha)(x-\gamma)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}+\dfrac{(x-\beta)(x-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}=1$ 2. $\dfrac{\alpha-x}{\alpha+x}+\dfrac{\beta-x}{\beta+x}=\dfrac{\alpha+x}{\alpha-x}+\dfrac{\beta+x}{\beta-x}$

1094. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις :

1. $\dfrac{x+\alpha}{x+\beta}+\dfrac{x+\beta}{x+\alpha}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}+\dfrac{\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}$ 2. $\dfrac{y^2}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\sqrt{\beta\gamma}}=\dfrac{y\sqrt{\beta}}{\gamma}+\dfrac{y\sqrt{\gamma}}{\beta}$

'Ομὰς Β'. *1095.* Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ ῥίζαι τῶν κάτωθι ἐξισώσεων εἶναι πραγματικαί :

1. $(\alpha-\beta+\gamma)x^2+4(\alpha-\beta)x+(\alpha-\beta-\gamma)=0$

2. $\alpha\beta\gamma^2x^2+3\alpha^2\gamma x+\beta^2\gamma x-6\alpha^2-\alpha\beta+2\beta^2=0$

3. $\dfrac{(3-x)^2-(2-x)^2}{(2-x)(3-x)}=\dfrac{\alpha}{\beta}$ 4. $\dfrac{\alpha^2}{x-\lambda}+\dfrac{\beta^2}{x-\mu}-1=0$

1096. Νὰ δειχθῇ, ὅτι, ἐὰν αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+2\beta x+\gamma=0$ εἶναι πραγματικαί, τότε αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως

$$(\alpha+\gamma)(\alpha x^2+2\beta x+\gamma)=2(\alpha\gamma-\beta^2)(x^2+1)$$

εἶναι φανταστικαί. (Σχολὴ Δοκίμων 1947).

1097. Νὰ δειχθῇ ὅτι, ἐὰν αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+2\beta x+\gamma=0$ εἶναι πραγματικαί, ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^2+2\beta x+\gamma+\lambda(\alpha x+\beta)=0$ ἔχει ἐπίσης δύο ῥίζας πραγματικάς, διὰ κάθε τιμὴν τοῦ λ.

1098. Δίδεται ἡ ἐξίσωσις $x^2-3xy+y^2+2x-9y+1=0$ (1). 1ον. Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ y ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ ἔχει δύο ῥίζας ἴσας ; 2ον. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ x ἡ ἐξίσωσις (1), ὡς πρὸς y, ἔχει δύο ῥίζας ἴσας ;

1099. Νὰ εὑρεθῇ τὸ εἶδος τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως $\dfrac{\alpha^2}{x+1}-\dfrac{\gamma^2}{x}=\beta^2$, ἐὰν α, β, γ εἶναι τὰ μήκη τῶν πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου.

'Ομὰς Γ'. *1100.* 'Εὰν x' καὶ x'' εἶναι αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, νὰ σχηματισθῇ μία ἐξίσωσις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ ῥίζας τὰς $\dfrac{x'^2+x''}{x''}$ καὶ $\dfrac{x''^2+x'}{x'}$

1101. Νὰ σχηματισθοῦν ἐξισώσεις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, τῶν ὁποίων αἱ ῥίζαι x' καὶ x'' νὰ ἐπαληθεύουν ἀντιστοίχως τὰς σχέσεις :

1. $x'x''+x'+x''-\mu=0$ καὶ $x'x''-\mu(x'+x'')+1=0$

2. $4x'x''-5(x'+x'')+4=0$ καὶ $(x'-1)(x''-1)=\frac{1}{1-\lambda}$

3. $x'x''+x'+x''=\alpha$ καὶ $x'x''+2(x'+x'')+4=0$

1102. Δίδεται ἡ ἐξίσωσις $x^2+\lambda x+k=0$ (1) καὶ ζητεῖται :

1ον. Ποίας τιμὰς πρέπει νὰ λάβουν οἱ συντελεσταὶ λ καὶ k, ἵνα ἡ ἐξίσωσις (1) ἔχῃ ρίζας λ καὶ k.

2ον, Νὰ σχηματισθῇ ἐξίσωσις δευτέρου βαθμοῦ, τῆς ὁποίας αἱ ρίζαι νὰ εἶναι τὰ τετράγωνα τῶν ριζῶν τῆς δοθείσης.

3ον. Δίδοντες εἰς τὸ λ μίαν ὡρισμένην τιμήν, ποίαν τιμὴν πρέπει νὰ δώσωμεν εἰς τὸ k, ἵνα ἡ μία ρίζα τῆς (1) εἶναι διπλασία τῆς ἄλλης.

4ον. Ὅταν $\lambda=2$, ποίαν τιμὴν πρέπει νὰ δώσωμεν εἰς τὸ k, ἵνα ἡ μία ρίζα τῆς (1) εἶναι ἴση μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ἄλλης.

1103. Δίδεται ἡ ἐξίσωσις $(2\mu-1)x^2+2(1-\mu)x+3\mu=0$. Νὰ προσδιορισθῇ ὁ μ εἰς τρόπον, ὥστε: 1ον. ἡ ἐξίσωσις νὰ ἔχῃ ὡς ρίζαν τὴν -1. 2ον. τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ριζῶν της νὰ ἰσοῦται μὲ 4.

1104. Νὰ ὁρισθῇ ἡ τιμὴ τοῦ λ, ἵνα αἱ ρίζαι x′ καὶ x″ τῆς ἐξισώσεως $\lambda x^2-2(\lambda-1)x+\lambda=0$, ἐπαληθεύουν τὴν σχέσιν $\frac{x'}{x''}+\frac{x''}{x'}=4$.

1105. Δίδεται ἡ ἐξίσωσις $3x^2-2(\lambda+1)x-\lambda+1=0$, τῆς ὁποίας αἱ ρίζαι εἶναι x′ καὶ x″. Νὰ ὁρισθῇ ὁ λ εἰς τρόπον, ὥστε νὰ εἶναι $2x'^2+3x'x''^2+2x''^2+3x'^2x''=\frac{12}{7}$.

1106. Νὰ προσδιορισθῇ ὁ ἀριθμὸς μ εἰς τρόπον, ὥστε αἱ ρίζαι x′ καὶ x″ τῆς ἐξισώσεως $x^2-\mu x+3=0$ νὰ ἐπαληθεύουν τὴν σχέσιν

$$12x'x''^2+4x'^3+12x'^2x''+4x''^3=256$$

1107. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ τιμὴ τοῦ λ εἰς τρόπον, ὥστε αἱ ρίζαι x_1 καὶ x_2 τῆς ἐξισώσεως $x^2+x+\lambda=0$ νὰ ἐπαληθεύουν τὴν σχέσιν

$$x_1^3+x_1x_2(2x_1+x_2)+2x_2=1.$$

1108. Αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ εἶναι x_1, x_2. Νὰ ὁρισθῇ ὁ λ, οὕτως, ὥστε ἡ ἐξίσωσις, ἡ ὁποία θὰ ἔχῃ ρίζας $x_1+\lambda$ καὶ $x_2+\lambda$ νὰ μὴν ἔχῃ τὸν ὅρον τοῦ x.

1109. Νὰ προσδιορισθῇ ὁ ἀριθμὸς μ, ἵνα τὸ διπλάσιον τοῦ γινομένου τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $\left(\mu^2-\frac{4}{3}\mu-4\right)x^2-\mu x+2=0$ νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον μιᾶς ρίζης.

1110. Τὸ αὐτὸ διὰ τὴν ἐξίσωσιν $\left(\mu^2-\frac{13\mu}{3}+\frac{13}{9}\right)x^2+3\mu x+2=0$.

1111. Ποία σχέσις πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν συντελεστῶν λ καὶ k τῆς ἐξισώσεως $x^2+\lambda x+k=0$, ἵνα ἡ μία ρίζα της εἶναι ν φορὰς μεγαλυτέρα τῆς ἄλλης. Εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν $\nu=4$, νὰ προσδιορισθοῦν αἱ ἀκέραιαι τιμαὶ τῶν λ καὶ k, αἱ μικρότεραι τοῦ 30.

1112. Δίδεται ἡ ἐξίσωσις $x^2+\pi x+k=0$ καὶ ζητεῖται νὰ ὑπολογισθῇ τὸ k συναρτήσει τοῦ π εἰς τρόπον, ὥστε αἱ ρίζαι x_1 καὶ x_2 τῆς ἐξισώσεως νὰ ἐπαληθεύουν τὴν σχέσιν $\alpha x_1+\beta x_2=1$ (1). Νὰ ἐπαληθευθῇ, ὅτι ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις ἔχει αἱ ρίζας, ὁποῖαι ἐπαληθεύουν τὴν σχέσιν (1).

1113. Αἱ δύο ρίζαι μιᾶς ἐξισώσεως τοῦ δευτέρου βαθμοῦ ἔχουν διαφορὰν $\alpha^2\beta^2$ καὶ γινόμενον $\left(\frac{\alpha^4-\beta^4}{2}\right)^2$. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ δύο αὐταὶ ρίζαι.

1114. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ συντελεσταὶ λ καὶ k καὶ αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2-\lambda x+k=0$, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι αἱ ρίζαι της αὐξανόμεναι, ἑκάστη, κατὰ 1, γίνονται ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2-\lambda^2 x+\lambda k=0$

1115. Δίδεται ἡ ἐξίσωσις $x^2+\beta x+\gamma=0$· ζητεῖται νὰ προσδιορισθοῦν οἱ συντελεσταὶ β καὶ γ εἰς τρόπον, ὥστε αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως νὰ εἶναι ἴσαι μὲ β καὶ μὲ γ.

1116. Αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ εἶναι 1 καὶ 2. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ α, β, γ, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι μεταξὺ τῶν α, β, γ, ὑπάρχει ἡ σχέσις $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$.

1117. Ἐὰν x', x'' εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, νὰ δειχθῇ ὅτι, ἐὰν εἶναι $\alpha+\beta=\gamma$, θὰ εἶναι καὶ

$$(1-x'^2)(1-x''^2)=\frac{4(\alpha+\beta)}{\alpha}=4x'x''$$

1118. Ἐὰν α καὶ β εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2+\lambda x+1=0$ καὶ γ, δ αἱ ρίζαι τῆς $x^2+\mu x+1$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι θὰ εἶναι

$$(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\delta)=\mu^2-\lambda^2.$$

1119. Ἂν λ καὶ μ εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2-\alpha x+\beta=0$ καὶ λ^3, μ^3 αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2-Ax+B=0$, νὰ δειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι $A=\alpha(\alpha^2-3\beta)$ καὶ $B=\beta^3$.

1120. Δίδονται αἱ ἐξισώσεις $x^2-5x+k=0$ (1), $x^2-7x+2k=0$ (2) καὶ ζητεῖται νὰ προσδιορισθῇ ἡ τιμὴ τοῦ k εἰς τρόπον, ὥστε μία τῶν ριζῶν τῆς (2) νὰ εἶναι διπλασία μιᾶς τῶν ριζῶν τῆς πρώτης.

(Πολυτεχνεῖον 1932)

1121. Ἐὰν x', x'' εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+2\beta x+\gamma=0$ καὶ $x'+\lambda$, $x''+\lambda$ αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $Ax^2+2Bx^2+\Gamma=0$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι $A^2(\beta^2-\alpha\gamma)=\alpha^2(B^2-A\Gamma)$.

1122. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $2(\alpha^3+\beta^3)x^2-3x+(\alpha+\beta)=0$, ἐὰν γνωρίζωμεν ὅτι α καὶ β εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2-\lambda x+\frac{\lambda^2-1}{2}=0$

1123. Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ συντελεσταὶ β καὶ γ τῆς ἐξισώσεως $x^2+\beta x+\gamma=0$, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ὁ λόγος τῶν ριζῶν της εἶναι ἴσος μὲ β καὶ ἡ διαφορά των μὲ 3γ.

1124. Δίδεται ἡ ἐξίσωσις $x^2-(\alpha+\gamma)x+\alpha\gamma-\beta^2=0$, καὶ ζητεῖται: 1) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἐξίσωσις ἔχει ρίζας πραγματικάς. 2) Ἐὰν x_1, x_2 εἶναι ρίζαι της, νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ α καὶ γ εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $(y-x_1)(y-x_2)=-\beta^2$.

1125. Ἐὰν x', x'' εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2+\lambda x+k=0$, νὰ εὑρεθῇ ἡ σχέσις, ἡ ὁποία πρέπει νὰ συνδέῃ τὰ λ καὶ k, ἵνα ἔχωμεν

$$\alpha x'^2+\beta x'+\gamma=\alpha x''^2+\beta x''+\gamma$$

ὅπου α, β, γ δοθέντες ἀριθμοί.

1126. Ἂν x_1, x_2 εἶναι αἱ ρίζαι ἐξισώσεως $x^2+\lambda x+k=0$ καὶ ρ_1, ρ_2 αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσες $x^2+\lambda' x+k'=0$, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως

$$A=(x_1-\rho_1)(x_1-\rho_2)(x_2-\rho_1)(x_2-\rho_2).$$

1127. Ἐὰν x', x'' εἶναι αἱ ρίζαι τῆς $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ καὶ x_1, x_2, αἱ ρίζαι τῆς $(\alpha+\lambda)x^2+(\beta+\lambda)x+\gamma+\lambda=0$, νὰ εὑρεθῇ ποία σχέσις πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν ριζῶν x', x'', x_1, x_2 διὰ νὰ ὑφίσταται ἡ σχέσις

$$\beta^2+\lambda(\alpha+\beta+\gamma)+2\alpha\gamma=0.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

397. **Προβλήματα τοῦ δευτέρου βαθμοῦ.** Ἕνα πρόβλημα εἶναι τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, ὅταν ἡ λύσις του ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν μιᾶς ἐξισώσεως τοῦ δευτέρου βαθμοῦ.

Διὰ νὰ λύσωμεν ἕνα πρόβλημα τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, ἀκολουθοῦμεν τὴν αὐτὴν πορείαν, ποὺ ἠκολουθήσαμεν κατὰ τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἢ περισσοτέρους ἀγνώστους.

398. **Πρόβλημα I.** ***Ἕνα ποσὸν 360000 δρχ. πρόκειται νὰ μοιρασθῇ ἐξ ἴσου εἰς μερικοὺς πτωχούς. Ἐὰν οἱ πτωχοὶ ἦσαν κατὰ 5 ὀλιγώτεροι, θὰ ἐλάμβανεν ἕκαστος 2400 δρχ. περισσοτέρας. Πόσοι ἦσαν οἱ πτωχοί.***

Ἔστω ὅτι οἱ πτωχοὶ ἦσαν x. Ἀφοῦ οἱ x πτωχοὶ θὰ ἐλάμβανον 360 000 δρχ., ὁ ἕνας θὰ ἐλάμβανε $\frac{360\,000}{x}$ δρχ.

Ἐὰν οἱ πτωχοὶ ἦσαν $x-5$, τὸ μερίδιον ἑκάστου θὰ ἦτο $\frac{360\,000}{x-5}$.

Ἐπειδὴ τὰ μερίδια διαφέρουν κατὰ 2400 δρ. ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{360\,000}{x-5}-\frac{360\,000}{x}=2400. \qquad (1)$$

ἢ

$$360\,000x-360.000(x-5)=2400x(x-5).$$

Ἐκτελοῦμεν πράξεις κλπ. καὶ εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$x^2-5x-750=0.$$

Αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εἶναι $x=30$ καὶ $x=-25$. Μόνον ἡ τιμὴ $x=30$ εἶναι παραδεκτή· ὥστε οἱ πτωχοὶ ἦσαν 30 καὶ τὸ μερίδιον ἑκάστου ἦτο $\frac{360000}{30}=12000$ δρχ. Ἡ ἄλλη τιμὴ $x=-25$ ἀποκλείεται ὡς ἀρνητική.

399. **Πρόβλημα II.** ***Ἕνας ἔμπορος ἐπώλησε ἕνα ὕφασμα ἀντὶ 240 000 δρχ. καὶ ἕνα ἄλλο, τὸ ὁποῖον ἦτο κατὰ 6 μέτρα μικρότερον, ἀντὶ 144 000 δρχ. Ἐὰν ἐπώλει τὸ πρῶτον ὕφασμα μὲ τὴν τιμὴν τοῦ δευτέρου καὶ ἀντιστρόφως θὰ ἐλάμβανε καὶ***

ἀπὸ τὰ δύο ὑφάσματα 372 000 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ πόσον ἐπώλησε τὸ μέτρον κάθε ὑφάσματος;

Εἶναι προτιμότερον νὰ λάβωμεν ὡς ἄγνωστον τὸ μῆκος τοῦ πρώτου ὑφάσματος.

Ἔστω ὅτι τὸ πρῶτον ὕφασμα ἦτο x μέτρα, ὁπότε τὸ δεύτερον ὕφασμα θὰ ἦτο $x-6$ μέτρα.

Ἀφοῦ ἀπὸ τὰ x μέτρα τοῦ πρώτου ὑφάσματος εἰσέπραξε 240 000 ἀπὸ τὸ 1 μέτρον εἰσέπραξε $\frac{240000}{x}$ δρχ.

Ἐπίσης ἀφοῦ ἀπὸ τὰ $x-6$ μέτρα τοῦ δευτέρου ὑφάσματος εἰσέπραξε 144 000 δρχ. ἀπὸ τὸ 1 μέτρον αὐτοῦ εἰσέπραξε $\frac{144000}{x-6}$ δρχ.

Ἐὰν ὁ ἔμπορος ἐπώλει τὰ x μέτρα πρὸς $\frac{144000}{x-6}$ δρχ. τὸ μέτρον, θὰ εἰσέπραττε $\frac{144000x}{x-6}$ δρχ.

Ἐὰν ἐπώλει τὰ $x-6$ μέτρα πρὸς $\frac{240000}{x}$ δρχ. τὸ μέτρον, θὰ εἰσέπραττε $\frac{240000(x-6)}{x}$ δρχ.

Ἐπειδὴ καὶ ἀπὸ τὰ δύο ὑφάσματα εἰσέπραξε συνολικῶς 372000 δρχ. ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{144000x}{x-6}+\frac{240000(x-6)}{x}=372000$$

ἤ

$$144000x^2+240000(x-6)^2=372000x(x-6)$$

Ἐκτελοῦμεν πράξεις κλπ. καὶ εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$x^2-54x+720=0.$$

Αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εἶναι $x=30$ καὶ $x=24$.

Ἐὰν λάβωμεν $x=30$ εὑρίσκομεν, ὅτι ὁ ἔμπορος ἐπώλησε 30 μέτρα ἀπὸ τὸ πρῶτον ὕφασμα πρὸς $\frac{240\,000}{30}$ ἢ 8000 δραχ. τὸ μέτρον καὶ $30-6$ μέτρα ἢ 24 μέτρα ἀπὸ τὸ δεύτερον ὕφασμα πρὸς $\frac{144000}{24}$ δρχ. ἢ 6000 δρχ. τὸ μέτρον.

Ἐὰν λάβωμεν $x=24$ εὑρίσκομεν, ὅτι ὁ ἔμπορος ἐπώλησε 24 μέτρα ἀπὸ τὸ πρῶτον ὕφασμα πρὸς $\frac{240000}{24}$ δρχ. ἢ 10000 δρχ. τὸ μέτρον καὶ $24-6$ μέτρα ἢ 18 μέτρα ἀπὸ τὸ δεύτερον ὕφασμα πρὸς $\frac{144000}{18}$ δρχ. ἢ 8000 δραχ. τὸ μέτρον.

400. Πρόβλημα III. ***Ἕνα ἀεροπλάνον ἐκτελεῖ τὴν συγκοινωνίαν δύο πόλεων A καὶ B. Ὁ ἄνεμος πνέει κατὰ τὴν κατεύθυνσιν A πρὸς B μὲ κανονικὴν ταχύτητα 20 χιλιομέτρων τὴν***

ὥραν καὶ οὕτω αὐξάνει τὴν ταχύτητα τοῦ ἀεροπλάνου κατὰ τὴν μετάβασιν, καὶ ἐλαττώνει αὐτὴν κατὰ τὴν ἐπιστροφήν. Ἡ διάρκεια τῆς μεταβάσεως καὶ ἐπιστροφῆς τοῦ ἀεροπλάνου εἶναι 5 ὧραι. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ καθαρὰ ταχύτης τοῦ ἀεροπλάνου, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ ἀπόστασις τῶν πόλεων A καὶ B εἶναι 240 χμ.

Ἔστω x ἡ ταχύτης τοῦ ἀεροπλάνου εἰς (χιλιόμετρα—ὥρα). Ὅταν τὸ ἀεροπλάνον μεταβαίνῃ ἐκ τῆς πόλεως A εἰς τὴν B, θὰ ἔχῃ ταχύτητα $x+20$ χιλιομ. τὴν ὥραν καὶ ὅταν ἐπιστρέφῃ θὰ ἔχῃ ταχύτητα $x-20$ χιλιομ. τὴν ὥραν.

Διὰ νὰ διανύσῃ τὴν ἀπόστασιν τῶν 240 χλμ. μὲ ταχύτητα $x+20$ χιλιομέτρων τὴν ὥραν, θὰ χρειασθῇ $\frac{240}{x+20}$ ὥρας. Διὰ τὴν ἐπιστροφὴν θὰ χρειασθῇ $\frac{240}{x-20}$ ὥρας διὰ νὰ διανύσῃ τὴν αὐτὴν ἀπόστασιν. Ἐπειδὴ τὸ ἀεροπλάνον ἐχρειάσθη 5 ὥρας, διὰ τὴν μετάβασιν καὶ τὴν ἐπιστροφήν του, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{240}{x+20}+\frac{240}{x-20}=5.$$

ἢ

$$240\,(x-20)+240(x+20)=5\,(x+20)\,(x-20)$$

Ἐκτελοῦμεν πράξεις κλπ. καὶ εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$x^2-96x-400=0.$$

Αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εἶναι $x'=100$ καὶ $x''=-4$. Ἡ ρίζα $x'=100$ εἶναι παραδεκτὴ μόνον· ἄρα ἡ ταχύτης τοῦ ἀεροπλάνου ἦτο 100 χιλιόμ. τὴν ὥραν. Ἡ ἄλλη ρίζα $x''=-4$ ἀποκλείεται, ὡς ἀρνητική.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΛΥΣΙΝ

Ὁμὰς Α'. 1128. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὰ $\frac{4}{5}$ πολλαπλασιαζόμενα ἐπὶ τὰ $\frac{2}{3}$ αὐτοῦ δίδουν 1920;

1129. Νὰ εὑρεθῇ ἕνας ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον ὑπερβαίνει κατὰ 127 τὸ ἄθροισμα τῶν $\frac{2}{3}$ καὶ τῶν $\frac{3}{4}$ τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ.

1130. Νὰ εὑρεθοῦν τρεῖς ἀκέραιοι διαδοχικοὶ ἀριθμοί, ἐὰν γνωρίζωμεν ὅτι τὸ πηλίκον τοῦ γινομένου των διὰ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἡμιαθροίσματός των εἶναι ἴσον μὲ 130 : 21.

1131. Εἰς ποῖον σύστημα ἀριθμήσεως ὁ ἀριθμὸς 190, (βάσις 10), γράφεται 276;

Ὁμὰς Β'. 1132. Ἕνα ποσὸν 108000 δρχ. πρέπει νὰ πληρωθῇ ἐξ ἴσου ἀπὸ μερικὰ πρόσωπα. Ἐπειδὴ ὅμως δύο ἀπὸ τὰ πρόσωπα αὐτὰ δὲν ἠδυνήθησαν νὰ πληρώσουν τὸ μερίδιόν των, ὑπεχρεώθη κάθε ἕνα ἀπὸ τὰ ἄλλα πρόσωπα νὰ πληρώσῃ 9000 δρχ. ἐπὶ πλέον. Πόσα εἶναι τὰ πρόσωπα;

1133. Μερικοὶ ἐργάται ἐπρόκειτο νὰ κτίσουν 432 κυβικὰ μέτρα ἑνὸς ἔργου. Ἐπειδὴ ὅμως 4 ἀπὸ τοὺς ἐργάτας αὐτοὺς δὲν προσῆλθον πρὸς ἐργασίαν, ἕκαστος τῶν ὑπολοίπων ἔκτισεν 9 κυβ. μ. ἐπὶ πλέον. Νὰ εὑρεθῇ πόσοι ἦσαν οἱ ἐργάται;

1134. Ἔμπορος ἠγόρασε ἕνα ὕφασμα ἀντὶ 60 000 δραχμῶν. Ἐὰν μὲ τὸ αὐτὸ ποσὸν ἠγόραζε 3 μέτρα ἐπὶ πλέον, τὸ μέτρον τοῦ ὑφάσματος θὰ ἐκόστιζε 1000 δραχμὰς ὀλιγώτερον. Πόσα μέτρα ἠγόρασε ἀπὸ τὸ ὕφασμα;

1135. Κτηνοτρόφος ἠγόρασε πρόβατα ἀντὶ 2 400 000 δραχμάς. Ἀπὸ τὰ πρόβατα αὐτὰ ἀπέθανον 4, τὰ δὲ ὑπόλοιπα ἐπώλησε πρὸς 40000 δραχμὰς τὸ ἕνα ἀκριβώτερον καὶ οὕτω ἐκέρδισεν 16000 δραχμάς. Νὰ εὑρεθῇ πόσα πρόβατα ἠγόρασεν.

1136. Εἰς ἐκδρομὴν αἱ γυναῖκες ἦσαν 5 ὀλιγώτεραι τῶν ἀνδρῶν. Οἱ ἄνδρες ἐπλήρωσαν ἐν ὅλῳ 1 800 000 δραχμάς, αἱ δὲ γυναῖκες 800000 δραχμάς. Νὰ εὑρεθῇ πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες καὶ πόσαι αἱ γυναῖκες, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι καθένας ἀπὸ τοὺς ἄνδρας ἐπλήρωσε 40 000 δραχμὰς περισσότερον ἀπὸ κάθ. γυναῖκα.

1137. Ἕνας ἐπλήρωσε 320 χιλιάδας δραχμὰς διὰ τέϊον καὶ 375 χιλιάδας δραχμὰς διὰ καφέ, ἔλαβε δὲ 3 ὀκάδες καφὲ ἐπὶ πλέον τοῦ τεΐου. Νὰ εὑρεθῇ πόσον ἐκόστιζε ἡ ὀκᾶ τοῦ καφέ, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ ὀκᾶ τοῦ τεΐου ἐκόστιζε 85 χιλιάδας δραχμὰς ἐπὶ πλέον.

1138. Ἕνας κτηματίας ἠγόρασε ἕνα οἰκόπεδον ἀντὶ 1920 χιλιοδράχμων καὶ ἕνα ἀγρὸν ἀντὶ 1400 χιλιοδράχμων. Τὸ τετραγωνικὸν μέτρον τοῦ οἰκοπέδου κοστίζει 11 χιλιόδραχμα περισσότερον ἀπὸ τὴν τιμὴν τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου τοῦ ἀγροῦ. Ἡ ἐπιφάνεια καὶ τῶν δύο κτημάτων ἦτο 1560 τ. μ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ κατὰ τετραγωνικὸν μέτρον τοῦ οἰκοπέδου καὶ τοῦ ἀγροῦ.

1139. Ἕνας ὀρθογώνιος κῆπος ἔχει πλάτος ἴσον μὲ τὰ $\frac{5}{8}$ τοῦ μήκους του. Ὁ ἰδιοκτήτης κρατεῖ διὰ τὸν ἑαυτόν του ἕνα ὀρθογώνιον μέρος τοῦ κήπου, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος εἶναι κατὰ 80 μέτρα μικρότερον τοῦ ἀρχικοῦ μήκους καὶ τοῦ ὁποίου τὸ πλάτος εἶναι τὰ $\frac{13}{15}$ τοῦ ἀρχικοῦ πλάτους. Πωλεῖ τὸ ὑπόλοιπον πρὸς 6840 δρχ. τὸ τετρ. μέτρον καὶ μὲ τὰ χρήματα αὐτὰ ἀγοράζει 58 μετοχὰς πρὸς 10260 δραχ. τὴν μίαν. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος τοῦ κήπου.

1140. Εἰς 60 ἄνδρας καὶ γυναῖκας ἐπληρώθησαν 175 χιλιάδες δραχμαί. Νὰ εὑρεθῇ πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες καὶ πόσαι αἱ γυναῖκες, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι καθένας ἀπὸ τοὺς ἄνδρας ἔλαβε τόσας δραχμὰς ὅσαι ἦσαν αἱ γυναῖκες καὶ καθεμία ἀπὸ τὰς γυναῖκας ἔλαβε τόσας δραχμὰς ὅσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες.

1141. Δύο ἐργάται εἰργάζοντο εἰς τὸ αὐτὸ ἐργοστάσιον μὲ διαφορετικὰ ἡμερομίσθια. Ὁ πρῶτος ἐργάτης ἔλαβε 300 χιλιάδας δραχμάς, ὁ δὲ δεύτερος ὁ ὁποῖος ἠργάσθη ἐπὶ 3 ἡμέρας ὀλιγώτερον τοῦ πρώτου ἔλαβε 168 χιλιάδες δραχμάς. Ἐὰν ὁ πρῶτος εἰργάζετο 2 ἡμέρας ὀλιγώτερον, ὁ δὲ δεύτερος 3 ἡμέρας περισσότερον, θὰ ἐλάμβανον τὸ αὐτὸ ποσόν. Νὰ εὑρεθῇ πόσας ἡμέρας εἰργάσθη κάθε ἐργάτης.

1142. Δύο βρύσεις, ὅταν τρέχουν μαζί, γεμίζουν μίαν δεξαμενὴν εἰς 18 ὥρας. Εἰς πόσας ὥρας δύναται νὰ γεμίσῃ τὴν δεξαμενὴν αὐτὴν κάθε μία ἀπὸ τὰς βρύσεις αὐτάς, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι μία ἀπὸ αὐτὰς χρειάζεται 27 ὥρας περισσότερον ἀπὸ τὴν ἄλλην διὰ νὰ τὴν γεμίσῃ μόνη της;

Γ' Ὁμάς. 1143. Ἔμπορος ἐτόκισε 500 000 δραχμὰς πρὸς ὡρισμένον ἐπιτόκιον. Εἰς τὸ τέλος τοῦ ἔτους ἀπέσυρε τοὺς τόκους καὶ τὸ κεφάλαιον καὶ ἐτόκισε τὸ σύνολον αὐτῶν μὲ ἐπιτόκιον κατὰ 0,50 δραχ. μεγαλύτερον τοῦ ἀρχικοῦ. Οὕτω ἔλαβε ἐτήσιον τόκον 26125 δρ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἀρχικὸν ἐπιτόκιον.

1144. Κεφάλαιον 150 000 δρχ. ἐτοκίσθη πρὸς 4 °/₀ ἐπὶ ἕνα χρόνον. Εἰς τὸ τέλος τοῦ χρόνου τούτου ἀποσύρεται τὸ κεφάλαιον καὶ οἱ τόκοι, καὶ κατατίθεται τὸ σύνολον αὐτῶν πρὸς 5 °/₀ ἐπὶ χρόνον μεγαλύτερον τοῦ πρώτου κατὰ ἥμισυ ἔτος. Τὸ νέον κεφάλαιον φέρει τόκους 24750 δραχ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διάρκεια τῆς καταθέσεως.

1145. Ἔμπορος προεξοφλεῖ δύο γραμμάτια: Τὸ πρῶτον 210 000 δρχ. πληρωτέον μετὰ 10 μῆνας καὶ τὸ δεύτερον 306 000 δρχ. πληρωτέον μετὰ 4 μῆνας. Ἐκ τῆς προεξοφλήσεως αὐτῶν ἔλαβε συνολικῶς 500 000 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἔγινε ἡ προεξόφλησις.

1146. Δύο ἔμποροι ἐκέρδισαν ἀπὸ μίαν ἐπιχείρησιν 660 000 δραχμάς. Ὁ πρῶτος ἔμπορος κατέθεσεν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν 600 000 δρχ. περισσότερον τοῦ δευτέρου. Νὰ εὑρεθῇ πόσας δραχμὰς κατέθεσεν ὁ πρῶτος ἔμπορος, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ἔλαβε συνολικῶς 3 960 000 δραχμάς.

1147. Ἔχομεν ἕνα κρᾶμα χρυσοῦ τίτλου 0,920. Εἰς τὸ κρᾶμα αὐτὸ προσθέτομεν διὰ συντήξεως 300 γραμμάρια ἐξ ἄλλου κράματος τίτλου 0,880 καὶ ἀπὸ τὸ προκῦπτον νέον κρᾶμα ἀφαιροῦμεν 200 γραμμάρια, τά ὁποῖα ἀντικαθιστῶμεν μὲ 200 γραμ. τίτλου 0,833 καὶ οὕτω λαμβάνομεν τελικῶς ἕνα κρᾶμα τίτλου 0,893. Νὰ εὑρεθῇ τὸ βάρος τοῦ ἀρχικοῦ κράματος.

Δ' Ὁμάς. ~~*1148*~~. Εἰς πόσας ὥρας διανύει ἕνα κινητὸν 160 χιλιόμετρα, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ἐὰν αὐξήσῃ τὴν ταχύτητά του κατὰ 8 χιλιόμετρα, θὰ χρειασθῇ μίαν ὥραν ὀλιγώτερον διὰ νὰ διανύσῃ τὴν αὐτὴν ἀπόστασιν.

~~*1149.* Δ~~ύο ποδηλάται ἀναχωροῦν συγχρόνως ἀπὸ δύο πόλεις Α καὶ Β, αἱ ὁποῖαι ἀπέχουν 160 χιλιόμετρα καὶ διευθύνονται πρὸς συνάντησίν των. Ὁ πρῶτος διανύει 4 χλμ. περισσότερον τοῦ δευτέρου. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ταχύτητές των, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ἀπὸ τῆς ἐκκινήσεως μέχρι τῆς συναντήσεώς των παρῆλθον τόσαι ὧραι, ὅσον εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ἀριθμοῦ, ὁ ὁποῖος ἐκφράζει τὴν ταχύτητα τοῦ δευτέρου.

1150. Δύο δρομεῖς ἀναχωροῦν συγχρόνως ἀπὸ τὴν αὐτὴν τοποθεσίαν Α καὶ διευθύνονται πρὸς μίαν ἄλλην τοποθεσίαν Β, ἡ ὁποία ἀπέχει ἀπὸ τὴν Α 45 χιλιόμετρα. Ὁ πρῶτος δρομεύς, ὁ ὁποῖος ἐβάδιζε μὲ ταχύτητα μεγαλυτέραν κατὰ 1 χμ. ἀπὸ τὴν ταχύτητα τοῦ δευτέρου, ἔφθασε εἰς τὴν τοποθεσίαν Β ἡμίσειαν ὥραν ἐνωρίτερον τοῦ δευτέρου. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ταχύτητες τῶν δρομέων.

1151. Ἡ ἀπόστασις δύο πόλεων εἶναι 588 χλμ. Μία ἁμαξοστοιχία διανύει τὴν ἀπόστασιν αὐτὴν μὲ μίαν μέσην ταχύτητα. Ἐὰν ἡ ταχύτης τῆς ἁμαξοστοιχίας αὐξηθῇ κατὰ 10,5 χλμ. τὴν ὥραν, τότε ἡ ἁμαξοστοιχια θὰ χρειασθῇ μίαν ὥραν ὀλιγώτερον διὰ νὰ διανύσῃ τὴν ἀπόστασιν τῶν δύο πόλεων. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μέση ταχύτης τῆς ἁμαξοστοιχίας.

1152. Δύο κινητὰ ἀναχωροῦν ἀπὸ δύο σημεῖα Α καὶ Β καὶ διευθύνονται πρὸς συνάντησίν των. Τὸ πρῶτον κινητὸν ἐξεκίνησε 5 δευτερόλεπτα βραδύτερον τοῦ δευτέρου καὶ ἐκινήθη μὲ ταχύτητα 4 μέτρ. κατὰ δευτερόλεπτον μεγαλυτέραν τοῦ πρώτου. Τὰ κινητὰ συνηντήθησαν εἰς τὸ μέσον τῆς ἀποστάσεως ΑΒ ἡ ὁποία ἦτο ἴση μέ 1200 μέτρα. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ταχύτητες τῶν κινητῶν.

1153. Ἕνας ποδηλάτης μεταβαίνει ἀπὸ τὴν πόλιν Α εἰς τὴν πόλιν Β, αἱ ὁποῖαι ἀπέχουν 60 χλμ., μὲ μίαν ὡρισμένην ταχύτητα. Ἐπανέρχεται ἀπὸ τὴν Β εἰς τὴν Α μὲ τὴν αὐτὴν ταχύτητα, ἀλλὰ ὕστερα ἀπὸ πορείαν μιᾶς ὥρας ὑποχρεοῦται νὰ σταματήσῃ ἐπὶ 20 λεπτὰ τῆς ὥρας· ἀναχωρεῖ ἔπειτα διὰ τὴν Α μὲ ταχύτητα κατὰ 5 χμ. μεγαλυτέραν τῆς προηγουμένης. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀρχικὴ ταχύτης του, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ἐχρειάσθη τὸν αὐτὸν χρόνον διὰ τὴν μετάβασιν καὶ τὴν ἐπιστροφήν.

1154. Δύο αὐτοκίνητα ἀναχωροῦν συγχρόνως ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον ἐκκινήσεως διὰ νὰ διανύσουν μίαν ἀπόστασιν 360 χλμ. Ἡ ταχύτης τοῦ πρώτου εἶναι κατὰ 15 χλμ. τὴν ὥραν μεγαλυτέρα ἀπὸ τὴν ταχύτητα τοῦ δευτέρου. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ταχύτητες τῶν αὐτοκινήτων, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ πρῶτον αὐτοκίνητον ἔφθασε εἰς τὸν προορισμόν του 2 ὥρας ἐνωρίτερον τοῦ δευτέρου.

1155. Δύο ἁμαξοστοιχίαι Τ καὶ Τ' ἀναχωροῦν συγχρόνως ἀπὸ δύο πόλεις Α καὶ Β καὶ διευθύνονται πρὸς συνάντησίν των. Ὅταν συνηντήθησαν, ἡ Τ εἶχε διανύσει 108 χλμ. περισσότερον τῆς Τ'. Ἀπὸ τῆς στιγμῆς αὐτῆς ἡ μὲν Τ ἐχρειάσθη 9 ὥρας διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὴν πόλιν Β, ἡ δὲ Τ' 16 ὥρας διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὴν πόλιν Α. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τῶν δύο πόλεων καὶ αἱ ταχύτητες τῶν ἁμαξοστοιχιῶν.

1156. Ἕνα πλοῖον ἀκολουθεῖ τὸ ρεῦμα ἑνὸς πλωτοῦ ποταμοῦ καὶ διανύει μίαν ἀπόστασιν 28,5 χλμ.· ἔπειτα ἐπιστρέφει, ἀνερχόμενον τὸν ποταμόν, καὶ διανύει 22,5 χλμ. Τὸ ταξείδιόν του διήρκεσεν 8 ὥρας. Νὰ εὑρεθῇ ἡ καθαρὰ ταχύτης τοῦ πλοίου (δηλ. ἡ ταχύτης τὴν ὁποίαν θὰ εἶχεν, ἐὰν ἐκινεῖτο ἐπὶ ἠρεμοῦντος ὕδατος), ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ ταχύτης τοῦ ρεύματος τοῦ ποταμοῦ εἶναι 2,5 χλμ. καθ' ὥραν.

1157. Ἕνας βαρκάρης ἀκολουθεῖ τὸ ρεῦμα ἑνὸς ποταμοῦ μήκους 24 χλμ. Ὅταν ἐπέστρεφεν εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἀναχωρήσεως ἐχρειάσθη 2 ὥρας περισσότερον, διότι ἡ ταχύτης του ἠλαττώθη κατὰ 6 χλμ. τὴν ὥραν. Νὰ εὑρεθῇ πόσας ἡμέρας ἐχρειάσθη κατὰ τὴν κάθοδον ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ

ΤΡΙΩΝΥΜΟΝ ΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ — ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

401. **Ὁρισμοί.** Κάθε ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ x, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν μορφὴν

$$\boxed{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} \qquad (1)$$

λέγεται ***τριώνυμον τοῦ δευτέρου βαθμοῦ.***

Οἱ συντελεσταὶ α, β, γ εἶναι ὡρισμέναι ποσότητες, θετικαὶ ἢ ἀρνητικαί, ἀριθμητικαὶ ἢ ἐγγράμματοι, μονώνυμα ἢ πολυώνυμα, ὁ δὲ x μία μεταβλητὴ ποσότης (§ 260), ἡ ὁποία δύναται νὰ λαμβάνῃ ὅλας τὰς τιμὰς ἀπὸ τὸ $-\infty$ ἕως τὸ $+\infty$.

Ρίζαι τοῦ τριωνύμου (1) εἶναι αἱ τιμαὶ τοῦ x, αἱ ὁποῖαι καθιστοῦν τὸ τριώνυμον ἴσον μὲ τὸ μηδέν· δηλ. ρίζαι τοῦ τριωνύμου αὐτοῦ εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$

***402.* Ἀνάλυσις ἑνὸς τριωνύμου τοῦ δευτέρου βαθμοῦ εἰς γινόμενον παραγόντων.** Ἔστω τὸ τριώνυμον

$$\varphi(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma \qquad (1)$$

Ἐὰν θέσωμεν τὸ α ὡς παράγοντα, τὸ τριώνυμον (1) γράφεται

$$\varphi(x)=\alpha\left(x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}\right) \qquad (2)$$

1ον. Ἐὰν $\beta^2-4\alpha\gamma>0$, τὸ τριώνυμον (1) ἔχει δύο ρίζας x′ καὶ x″, ὁπότε θὰ εἶναι

$$x'+x''=-\frac{\beta}{\alpha}, \quad \text{καὶ} \quad x'x''=\frac{\gamma}{\alpha}$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (2) τὰ $\frac{\beta}{\alpha}$ καὶ $\frac{\gamma}{\alpha}$ μὲ τὰ ἴσα των καὶ ἔχομεν

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=\alpha[x^2-(x'+x'')x+x'x'']\\&=\alpha[x^2-x'x-x''x+x'x'']\\&=\alpha[(x^2-x'x)-(x''x-x'x'')]\\&=\alpha[x(x-x')-x''(x-x')]\\&=\alpha(x-x')(x-x'')\end{aligned}$$

Ὥστε εἶναι

$$\boxed{\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-x')(x-x'')} \qquad (3)$$

Δηλ. ***Ἕνα τριώνυμον τοῦ δευτέρου βαθμοῦ εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τοῦ συντελεστοῦ α τοῦ πρώτου ὅρου του ἐπὶ τὸ γινόμενον δύο πρωτοβαθμίων παραγόντων, τοὺς ὁποίους λαμβάνομεν, ἂν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸ x ἑκάστην τῶν ριζῶν x′ καὶ x″ τοῦ τριωνύμου.***

2ον. Ἐὰν $\beta^2-4\alpha\gamma=0$, τὸ τριώνυμον ἔχει δύο ρίζας ἴσας $x'=x''$ καὶ ὁ τύπος (3) γράφεται

$$\boxed{\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-x')^2}$$

3ον. Ἐὰν $\beta^2-4\alpha\gamma<0$, τὸ τριώνυμον ἔχει δύο ρίζας φανταστικὰς (συζυγεῖς μιγάδας), ὁπότε θὰ εἶναι

ΟΧΙ

$x'=\varkappa+\delta i$ καὶ $x''=\varkappa-\delta i$ καὶ ὁ τύπος (3) γίνεται

$$\alpha(x-x')(x-x'')=\alpha[x-(\varkappa+\delta i)][x-(\varkappa-\delta i)]$$

$$=\alpha[(x-\varkappa)-\delta i]\,[(x-\varkappa)+\delta i]$$
$$=\alpha[(x-\varkappa)^2-(\delta i)^2]=\alpha[(x-\varkappa)^2-\delta^2 i^2]$$
$$=\alpha[(x-\varkappa)^2+\delta^2]$$

Ὥστε εἶναι $\boxed{\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha[(x-\varkappa)^2+\delta^2]}$

402. Παραδείγματα.

Παράδειγμα 1ον. Νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον παραγόντων τὸ τριώνυμον
$$3x^2+16x-12.$$

Αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου $3x^2+16x-12$ εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $3x^2+16x-12=0$. Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν εὑρίσκομεν τὰς ρίζας $x'=\frac{2}{3}$ καὶ $x''=-6$. Ἄρα θὰ εἶναι

$$3x^2+16x-12=3\left(x-\frac{2}{3}\right)(x+6)=(3x-2)(x+6).$$

Παράδειγμα 2ον. Νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον παραγόντων τὸ τριώνυμον
$$2x^2-10x+\frac{25}{2}.$$

Αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου $2x^2-10x+\frac{25}{2}$ εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $2x^2-10x+\frac{25}{2}=0$ ἢ τῆς $4x^2-20x+25=0$. Ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ ἔχει μίαν διπλῆν ρίζαν $x'=x''=\frac{5}{2}$· ἄρα θὰ ἔχωμεν

$$2x^2-10x+\frac{25}{2}=2\left(x-\frac{5}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right)=2\left(x-\frac{5}{2}\right)^2.$$

Παράδειγμα 3ον. Νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον παραγόντων τὸ τριώνυμον
$$\mu\nu x^2-(\mu+\nu)x+1.$$

Αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου εἶναι $x'=\frac{1}{\mu}$ καὶ $x''=\frac{1}{\nu}$. Ἄρα θὰ εἶναι $\mu\nu x^2-(\mu+\nu)x+1=\mu\nu\left(x-\frac{1}{\mu}\right)\left(x-\frac{1}{\nu}\right)=(\mu x-1)(\nu x-1).$

Ἀσκήσεις. 1158. Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων τὰ κάτωθι τριώνυμα :

1.	$4x^2-13x+2$	3.	$4x^2-20x+25$	5.	$7x^2+13x-2$.
2.	$2x^2+7x-15$	4.	$3x^2+3x-18$	6.	$10x^2+13x+4$.

1159. Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων τὰ κάτωθι τριώνυμα :

1.	$x^2-2\alpha x+\alpha^2-\beta^2$	3.	$\alpha^2x^2-2\alpha^2x+\alpha^4-1$	5.	$x^2-4\beta x+4\beta^2-\alpha^2$
2.	$\alpha\beta x^2-(\alpha^2+\beta^2)x+\alpha x$	4.	$x^2-2\alpha\gamma x+\alpha^2(\gamma^2-\beta^2)$	6.	$(\mu^2-\nu^2)x^2-2\mu x+1$.

403. Ἐφαρμογὴ εἰς τὴν ἁπλοποίησιν κλασμάτων.

Παράδειγμα 1ον. Νὰ ἁπλοποιηθῇ τὸ κλάσμα
$$A=\frac{3x^2+3x-36}{2x^2-8x+6}.$$

Ἀναλύομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος εἰς γινόμενον παραγόντων. Ἔπειτα, ἐὰν ὑπάρχῃ κοινὸς παράγων καὶ εἰς τοὺς δύο ὅρους του, διαιροῦμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους του διὰ τοῦ κοινοῦ αὐτοῦ παράγοντος.

Αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου $3x^2+3x-36$ εἶναι $x'=3$ καὶ $x''=-4$.
Αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου $2x^2-8x+6$ εἶναι $x'=3$ καὶ $x''=1$.
Τὸ δοθὲν κλάσμα γράφεται

$$A=\frac{3(x-3)(x+4)}{2(x-3)(x-1)}=\frac{3(x+4)}{2(x-1)}$$

Παράδειγμα 2ον. Νὰ ἁπλοποιηθῇ τὸ κλάσμα:

$$A=\frac{x^2-2\mu x+\mu^2-\nu^2}{x^2-(3\mu-\nu)x+2\mu^2-2\mu\nu}$$

Αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου $x^2-2\mu x+\mu^2-\nu^2$ εἶναι $x'=\mu+\nu$ καὶ $x''=\mu-\nu$.
Αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου $x^2-(3\mu-\nu)x+2\mu^2-2\mu\nu$ εἶναι $x'=\mu-\nu$ καὶ $x''=2\mu$.

Τὸ δοθὲν κλάσμα γράφεται

$$A=\frac{[x-(\mu+\nu)][x-(\mu-\nu)]}{[x-(\mu-\nu)](x-2\mu)}=\frac{x-(\mu+\nu)}{x-2\mu}=\frac{x'-\mu-\nu}{x-2\mu}.$$

Ἀσκήσεις. Α' Ὁμάς. 1160. Νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ κάτωθι κλάσματα :

1. $\dfrac{x^2-25}{x^2-6x+5}$. 2. $\dfrac{2x^2-5x+2}{3x^2-5x-2}$. 3. $\dfrac{2x^2-2x-12}{x^2+x-12}$.

1161. Νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ κάτωθι κλάσματα :

1. $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}$. 2. $\dfrac{x^2+4x+3}{x^2-4x-5}$. 3. $\dfrac{x^2+10x+21}{2x^2+12x+10}$.

1162. Νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ κάτωθι κλάσματα :

1. $\dfrac{x^2+3x-18}{x^2+4x-12}$. 2. $\dfrac{2x^2-15x-8}{2x^2-x-1}$. + V 3. $\dfrac{x^2-9x+18}{2x^2-12x+18}$.

1163. Νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ κάτωθι κλάσματα :

1. $\dfrac{x^2-\alpha x-6\alpha^2}{x^2-7\alpha x+12\alpha^2}$. + V 2. $\dfrac{\mu\nu x^2-(\mu^2+\nu^2)x+\mu\nu}{\mu\nu x^2-(\mu^2-2\nu^2)x-2\mu\nu}$.

1164. Νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ κάτωθι κλάσματα :

1. $\dfrac{x^3+2\alpha x^2+\alpha^2 x}{\alpha x^2-\alpha^3}$. 2. $\dfrac{x^2-2\nu x-4\mu(\mu-2\nu)-3\nu^2}{x^2-4\mu\nu-\nu^2+4\mu^2}$.

Β' Ὁμάς. 1165. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις :

$$1+\frac{4x^2}{2x^2+8x}+\frac{27}{2x^2+7x-4}=\frac{6}{2x-1}.$$

1166. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις :

$$\frac{3x^3-5x^2+2x}{4x^2-20x+16}-\frac{5x+1}{6x^2-24x}+\frac{2x-1}{48-24x+3x^2}=\frac{11x^2+17x+4}{6x(x-4)^2}.$$

1167. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις :

$$\frac{14x-4}{2x+1}-\frac{3x-3}{2x^2-x-1}-\frac{30(2x-3)}{3x-2}+\frac{26(2x^2-3x-2)}{4x^2-1}=\frac{49}{(2x+1)(6x^2-7x+2)}.$$

1168. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις :

$$\frac{3x-6}{2x^2-7x+6}+\frac{15x-13}{11x+33}-\frac{2x}{x+3}-\frac{7x-14}{3x^2+5x-2}+\frac{7x+68}{11x+33}=$$
$$=\frac{42}{(2x-3)(3x-1)(x+3)}.$$

404. Σημεῖον τοῦ τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$. Ἔστω τὸ τριώνυμον $\varphi(x)=\alpha x^2+\beta x^2+\gamma$.

Ἐὰν δώσωμεν εἰς τὸν x μίαν τυχοῦσαν τιμήν, ἔστω $x=\xi$, τὸ τριώνυμον $\varphi(x)$ θὰ λάβῃ μίαν ἀριθμητικὴν τιμὴν $\varphi(\xi)$, ἡ ὁποία θὰ εἶναι θετικὴ ἢ ἀρνητική.

Πολλάκις ὅμως εἶναι ἀνάγκη νὰ γνωρίζωμεν ***ἐκ τῶν προτέρων***, τὸ σημεῖον τοῦ τριωνύμου $\varphi(x)$, διὰ τυχοῦσαν τιμὴν τοῦ x, χωρὶς δηλ. νὰ ὑπολογίσωμεν προηγουμένως τὴν ἀριθμητικὴ τιμὴν τοῦ τριωνύμου, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν τιμὴν αὐτὴν τοῦ x.

Ἐπειδὴ τὸ σημεῖον τοῦ τριωνύμου $\varphi(x)$ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν διακρίνουσαν $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$ καὶ ἀπὸ τὸν συντελεστὴν α τοῦ πρώτου ὅρου του, ἐξετάζομεν τὰς κάτωθι τρεῖς περιπτώσεις:

I. ***Περίπτωσις. Ἔστω, ὅτι εἶναι $\beta^2-4\alpha\gamma>0$.***

Ἐπειδὴ ἡ διακρίνουσα $\beta^2-4\alpha\gamma$ εἶναι θετική, τὸ τριώνυμον $\varphi(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ ἔχει δύο ρίζας x', x'', πραγματικὰς καὶ ἀνίσους, ἔστω $x'<x''$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θὰ εἶναι

$$\varphi(x)=\alpha(x-x')(x-x''). \tag{1}$$

Αἱ ρίζαι x' καὶ x'' χωρίζουν τὸ διάστημα $(-\infty, +\infty)$ εἰς τρία διαστήματα $(-\infty, x')$, (x', x'') καὶ $(x'', +\infty)$.

$$-\infty \;.\,.\,+\,.\,.\,.\; x' \;.\,.\,-\,.\,.\,.\; x'' \;.\,.\,.\,+\,.\,.\,.\; +\infty\,.$$

Ὅταν δώσωμεν εἰς τὸν x μίαν τιμὴν μικροτέραν τῆς ρίζης x', δηλ. μίαν τιμὴν κειμένην εἰς τὸ διάστημα $(-\infty, x')$, αἱ διαφοραὶ $x-x'$ καὶ $x-x''$ εἶναι ἀρνητικαί, διότι $x<x'<x''$· τὸ γινόμενόν των ὅμως $(x-x')(x-x'')$ θὰ εἶναι θετικόν, ὡς γινόμενον δύο ἀρνητικῶν παραγόντων καὶ ἑπομένως τὸ τριώνυμον $\varphi(x)$ θὰ ἔχῃ τὸ σημεῖον τοῦ α.

Ὅταν δώσωμεν εἰς τὸν x μίαν τιμὴν κειμένην μεταξὺ τῶν ριζῶν, δηλ. μίαν τιμὴν κειμένην εἰς τὸ διάστημα (x', x''), τότε ἡ διαφορὰ $(x-x')$ εἶναι θετική, ἡ δὲ διαφορὰ $(x-x'')$ ἀρνητική· τὸ γινόμενον $(x-x')(x-x'')$ τῶν διαφορῶν αὐτῶν θὰ εἶναι ἀρνητικὸν καὶ ἑπομένως τὸ τριώνυμον $\varphi(x)$ θὰ ἔχῃ σημεῖον ἀντίθετον τοῦ α.

Τέλος ὅταν δώσωμεν εἰς τὸν x μίαν τιμὴν μεγαλυτέραν τῆς ρίζης x'', δηλ. μίαν τιμὴν κειμένην εἰς τὸ διάστημα $(x'', +\infty)$, αἱ δύο διαφοραὶ $(x-x')$ καὶ $(x-x'')$ εἶναι θετικαί. Τὸ γινόμενον τῶν διαφορῶν αὐτῶν θὰ εἶναι ἐπίσης θετικὸν καὶ ἑπομένως τὸ τριώνυμον $\varphi(x)$ θὰ ἔχῃ τὸ σημεῖον τοῦ α.

Εἶναι φανερὸν ὅτι, ὅταν δώσωμεν εἰς τὸν x μίαν τιμὴν ἴσην μὲ μίαν ἀπὸ τὰς ρίζας του x' καὶ x'', τὸ τριώνυμον $\varphi(x)$ θὰ μηδενισθῇ.

Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι:

Ἐὰν ἕνα τριώνυμον $\varphi(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ ἔχῃ δύο ρίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους, τότε τὸ τριώνυμον ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ α διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x κειμένην ἐκτὸς τῶν ριζῶν του, καὶ ἔχει σημεῖον ἀντίθετον τοῦ α, διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x κειμένην μεταξὺ τῶν ριζῶν του. Εἶναι δὲ τὸ τριώνυμον ἴσον μὲ τὸ μηδέν, ὅταν τὸ x εἶναι ἴσον μὲ μίαν ἀπὸ τὰς ρίζας του.

II. ***Περίπτωσις***: *Ἔστω, ὅτι εἶναι $\beta^2-4\alpha\gamma=0$.*

Ἐπειδὴ ἡ διακρίνουσα $\beta^2-4\alpha\gamma$ εἶναι ἴση μὲ μηδέν, τὸ τριώνυμον φ(x) ἔχει δύο ρίζας ἴσας $x'=x''=-\dfrac{\beta}{2\alpha}$ καὶ ἑπομένως τὸ τριώνυμον γράφεται $\varphi(x)=\alpha(x-x')^2$ ἢ $\varphi(x)=\alpha\left(x+\dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2$. (2)

Ἐπειδὴ ἡ διαφορὰ $(x-x')^2$ εἶναι πάντοτε θετική, ὡς τετράγωνον ἑνὸς ἀριθμοῦ, τὸ τριώνυμον φ(x) θὰ ἔχῃ πάντοτε τὸ σημεῖον τοῦ α, διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x, ἐκτὸς τῆς τιμῆς $x=-\dfrac{\beta}{2\alpha}$, διὰ τὴν ὁποίαν τιμὴν τὸ φ(x) μηδενίζεται. Ὥστε:

Ἐὰν ἕνα τριώνυμον $\varphi(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ ἔχῃ δύο ρίζας ἴσας, τότε τὸ τριώνυμον ἔχει πάντοτε τὸ σημεῖον τοῦ α, δι' ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ x, ἐκτὸς τῆς τιμῆς $x=-\dfrac{\beta}{2\alpha}$, διὰ τὴν ὁποίαν τιμὴν τὸ τριώνυμον μηδενίζεται.

III. ***Περίπτωσις.*** *Ἔστω, ὅτι εἶναι $\beta^2-4\alpha\gamma<0$.*

Ἐπειδὴ ἡ διακρίνουσα $\beta^2-4\alpha\gamma$ εἶναι ἀρνητική, τὸ τριώνυμον φ(x) δὲν ἔχει ρίζας πραγματικὰς (ἔχει φανταστικὰς) καὶ λαμβάνει (§ 402. 3ον) τὴν μορφὴν $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha[(x-\kappa)^2+\delta]^2$. (3)

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ ποσότης, ἡ ὁποία εὑρίσκεται ἐντὸς τῆς ἀγκύλης τοῦ δευτέρου μέλους τῆς ἰσότητος (3) εἶναι θετικὴ διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x· ἑπομένως τὸ τριώνυμον θὰ ἔχῃ πάντοτε τὸ σημεῖον τοῦ α. Ὥστε:

Ἐὰν ἕνα τριώνυμον $\varphi(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ δὲν ἔχῃ ρίζας πραγματικάς, τὸ τριώνυμον ἔχει πάντοτε τὸ σημεῖον τοῦ α, διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x.

Ἐὰν συνοψίσωμεν τὰ συμπεράσματα τῶν τριῶν περιπτώσεων συνάγομεν, ὅτι:

Ἕνα τριώνυμον $\varphi(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ ἔχει σημεῖον ἀντίθετον τοῦ α μόνον εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν ἔχει δύο ρίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους καὶ ὁ x λαμβάνει τιμὰς κειμένας μεταξὺ τῶν ριζῶν του. Εἰς ὅλας τὰς ἄλλας περιπτώσεις τὸ τριώνυμον

$\varphi(x)$ ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ α (ἢ μηδενίζεται, ὅταν τὸ x λάβῃ τιμὰς ἴσας μὲ τὰς ρίζας του).

405. **Παράδειγμα.** Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ x τὰ κάτωθι τριώνυμα εἶναι θετικά, ἀρνητικὰ ἢ μηδέν:

1. $2x^2-16x+24$, 2. $-2x^2+16x-32$, 3. $-2x^2+16x-40$.

1ον. Εἰς τὸ τριώνυμον $2x^2-16x+24$ εἶναι $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=16^2-4.2.24=64$.

Ἐπειδὴ $\Delta>0$, τὸ τριώνυμον ἔχει δύο ρίζας 2 καὶ 6. Ὅταν ὁ x λαμβάνῃ τιμὰς ἐκτὸς τῶν ριζῶν του, δηλ. ὅταν $x<2$ καὶ $x>6$, τὸ τριώνυμον ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ πρώτου ὅρου του, δηλ. εἶναι θετικόν.

Ὅταν ὁ x λαμβάνῃ τιμὰς κειμένας μεταξὺ τῶν ριζῶν του 2 καὶ 6, δηλ. ὅταν $2<x<6$, τὸ τριώνυμον ἔχει σημεῖον ἀντίθετον τοῦ πρώτου ὅρου του, δηλ. εἶναι ἀρνητικόν.

Ὅταν ὁ x λαμβάνῃ τιμὰς ἴσας μὲ τὰς ρίζας του, δηλ. ὅταν $x=2$ ἢ $x=6$, τὸ τριώνυμον εἶναι ἴσον μὲ μηδέν.

Τιμαὶ τοῦ x	$-\infty$ ...... 2 ...... 6 ...... $+\infty$
Σημεῖον τοῦ τριων.	+ 0 − 0 +

2ον. Εἰς τὸ τριώνυμον $-2x^2+16x-32$ εἶναι $\Delta=16^2-4\cdot(-2)(-32)=0$.

Ἐπειδὴ $\Delta=0$, τὸ τριώνυμον ἔχει δύο ρίζας ἴσας $x'=x''=4$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ τριώνυμον ἔχει πάντοτε τὸ σημεῖον τοῦ πρώτου ὅρου του, δηλ. εἶναι ἀρνητικὸν δι' ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ x, ἐκτὸς τῆς τιμῆς $x=4$, διὰ τὴν ὁποίαν εἶναι ἴσον μὲ μηδέν.

3ον. εἰς τὸ τριώνυμον $-2x^2+16x-40$, εἶναι $\Delta=16^2-4(-2)(-40)=-64$

Ἐπειδὴ $\Delta<0$, τὸ τριώνυμον ἔχει πάντοτε τὸ σημεῖον τοῦ πρώτου ὅρου του, δηλ. εἶναι ἀρνητικόν, δι' ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ x.

Ἀσκήσεις 1169. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ x, τὰ κάτωθι τριώνυμα εἶναι θετικά; ἀρνητικά; μηδέν;

1. $-2x^2+16x-24$, 2. $2x^2-16x+32=0$, 3. $2x^2-16x+40$

1170. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τριώνυμον $2x^2-\mu x+\mu^2$ εἶναι θετικὸν διὰ κάθε πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x, οἱοσδήποτε καὶ ἂν εἶναι ὁ ἀριθμὸς μ.

1171. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ $A=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\beta\gamma-\gamma\alpha-\alpha\beta$ εἶναι πάντοτε θετική, οἱοιδήποτε καὶ ἂν εἶναι οἱ α, β, γ.

1172. Χωρὶς νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $8+(x+4)^2=3x-5$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ ρίζαι της εἶναι πάντοτε μεγαλύτεραι τοῦ $\frac{5}{3}$.

1173. Χωρὶς νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $-3-(x+2)^2=(x-3)(x-5)$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ ρίζαι της περιέχονται μεταξὺ 3 καὶ 5.

ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

406. **Ἀνισότητες τοῦ δευτέρου βαθμοῦ.** Μία **ἀνισότης** εἶναι τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, ὅταν δύναται νὰ λάβῃ μίαν ἀπὸ τὰς μορφὰς

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma>0, \qquad \alpha x^2+\beta x+\gamma<0 \qquad (\alpha\neq 0)$$

Διὰ νὰ λύσωμεν μίαν ἀνισότητα τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, δηλ. διὰ νὰ ὁρίσωμεν τὰ διαστήματα μεταξὺ τῶν ὁποίων πρέπει νὰ μεταβάλλεται ὁ x, διὰ νὰ ἀληθεύῃ ἡ ἀνισότης, στηριζόμεθα εἰς τὰ ἐξαγόμενα τοῦ σημείου τοῦ τριωνύμου $\varphi(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$.

Οὕτω διὰ νὰ λύσωμεν τὴν ἀνισότητα $\alpha x^2+\beta x+\gamma>0$ (1) σχηματίζομεν ***πρῶτον*** τὴν διακρίνουσαν $\beta^2-4\alpha\gamma$.

I. ***Ἐὰν*** $\boldsymbol{\beta^2-4\alpha\gamma<0}$, τὸ τριώνυμον $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ ἔχει ***πάντοτε*** τὸ σημεῖον τοῦ α· ἑπομένως:

Ἐὰν $\alpha>0$, ***ἡ ἀνισότης*** (1) ***ἀληθεύει διὰ κάθε τιμὴν τοῦ*** x.

Ἐὰν $\alpha<0$, ***ἡ ἀνισότης*** (1) ***δὲν ἀληθεύει ποτέ.***

II. ***Ἐὰν*** $\boldsymbol{\beta^2-4\alpha\gamma=0}$, τὸ τριώνυμον ἔχει πάντοτε τὸ σημεῖον τοῦ α, ἐκτὸς τῆς τιμῆς $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$· ἑπομένως:

Ἐὰν $\alpha>0$, ***ἡ ἀνισότης*** (1) ***ἀληθεύει διὰ κάθε τιμὴν τοῦ*** x, ***ἐκτὸς τῆς τιμῆς*** $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$.

Ἐὰν $\alpha<0$ ***ἡ ἀνισότης δὲν ἀληθεύει ποτέ.***

III. ***Ἐὰν*** $\boldsymbol{\beta^2-4\alpha\gamma>0}$, τὸ τριώνυμον ἔχει δύο ρίζας x' καὶ x'' $(x'<x'')$, τὰς ὁποίας ὑπολογίζομεν.

Ἔστω, ὅτι $\alpha>0$· διὰ νὰ ἀληθεύῃ ἡ ἀνισότης (1), πρέπει τὸ τριώνυμον νὰ ἔχῃ τὸ σημεῖον τοῦ α καὶ ἑπομένως πρέπει ὁ x νὰ λαμβάνῃ τιμὰς κειμένας ἐκτὸς τῶν ριζῶν. Ἤτοι ἡ ἀνισότης (1) ἀληθεύει διὰ $x<x'$, εἴτε διὰ $x>x''$.

Ἔστω, ὅτι $\alpha<0$· διὰ νὰ ἀληθεύῃ ἡ ἀνισότης (1), πρέπει τὸ τριώνυμον νὰ ἔχῃ σημεῖον ἀντίθετον τοῦ α καὶ ἑπομένως ὁ x πρέπει νὰ λαμβάνῃ τιμὰς κειμένας μεταξὺ τῶν ριζῶν. Ἤτοι ἡ ἀνισότης (1) ἀληθεύει διὰ $x'<x<x''$.

407. Παραδείγματα.

Παράδειγμα I. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $x^2-11x+24>0$.

Διὰ νὰ ἀληθεύῃ ἡ δοθεῖσα ἀνισότης πρέπει τὸ πρῶτον μέλος της νὰ εἶναι θετικόν. Ἡ διακρίνουσα τοῦ τριωνύμου $x^2-11x+24$ εἶναι $\Delta=11^2-4.1.24=25=$θετική.

Ἐπειδὴ $\Delta>0$, τὸ δοθὲν τριώνυμον ἔχει δύο ρίζας 3 καὶ 8. Διὰ νὰ εἶναι τὸ τριώνυμον $x^2-11x+24$ θετικόν, πρέπει ὁ x νὰ λαμβάνῃ τιμὰς κειμένας ἐκτὸς τῶν ριζῶν· ἤτοι πρέπει νὰ εἶναι $x<3$, εἴτε $x>8$.

Ὥστε διὰ $x<3$, εἴτε διὰ $x>8$ τὸ τριώνυμον $x^2-11x+24$ εἶναι θετικὸν καὶ ἑπομένως ἡ δοθεῖσα ἀνισότης ἀληθεύει.

Παράδειγμα II. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $12x^2+11x-2<0$.

Διὰ νὰ ἀληθεύῃ ἡ δοθεῖσα ἀνισότης πρέπει τὸ πρῶτον μέλος της νὰ εἶναι ἀρνητικόν. Ἐδῶ εἶναι $\beta^2-4\alpha\gamma=11^2-4.12.2=25$. Ἐπειδὴ $\Delta>0$ τὸ τριώνυμον $12x^2-11x+2$ ἔχει δύο ρίζας, $x'=\frac{1}{4}$, $x''=\frac{2}{3}$.

Διὰ νὰ εἶναι τὸ τριώνυμον ἀρνητικόν, δηλ. διὰ νὰ ἔχῃ σημεῖον ἀντίθετον τοῦ πρώτου ὅρου του, πρέπει τὸ x νὰ λαμβάνῃ τιμὰς κειμένας μεταξὺ τῶν ριζῶν· ἤτοι πρέπει νὰ εἶναι $\frac{1}{4}<x<\frac{2}{3}$.

Ἡ δοθεῖσα λοιπὸν ἀνισότης ἀληθεύει διὰ $\frac{1}{4}<x<\frac{2}{3}$.

Παράδειγμα III. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $-36x^2+24x-4<0$.

Διὰ νὰ ἀληθεύῃ ἡ δοθεῖσα ἀνισότης πρέπει τὸ πρῶτον μέλος της, δηλ. τὸ τριώνυμον $-36x^2+24x-4$ νὰ εἶναι ἀρνητικόν.

Ἡ διακρίνουσα τοῦ τριωνύμου εἶναι $\Delta=24^2-4(-36)(-4)=0$.

Ἐπειδὴ $\Delta=0$ τὸ τριώνυμον τοῦ πρώτου μέλους τῆς δοθείσης ἀνισότητος ἔχει δύο ρίζας ἴσας $x'=x''=\frac{1}{3}$ καὶ ἔχει πάντοτε τὸ σημεῖον τοῦ πρώτου ὅρου του, ἤτοι εἶναι ἀρνητικὸν δι' ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ x, ἐκτὸς τῆς τιμῆς $x=\frac{1}{3}$. Ὥστε ἡ δοθεῖσα ἀνισότης ἀληθεύει δι' ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ x, ἐκτὸς τῆς τιμῆς $x=\frac{1}{3}$.

Παράδειγμα IV. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $x^2-3x+12>0$.

Διὰ νὰ ἀληθεύῃ ἡ δοθεῖσα ἀνισότης πρέπει τὸ πρῶτον μέλος της, δηλ. τὸ τριώνυμον $x^2-3x+12$, νὰ εἶναι θετικόν. Ἡ διακρίνουσά του εἶναι $\Delta=3^2-4.1.12=-39$

Ἐπειδὴ $\Delta<0$ τὸ τριώνυμον αὐτὸ δὲν ἔχει ρίζας καὶ ἔχει πάντοτε τὸ σημεῖον τοῦ πρώτου ὅρου του, ἤτοι εἶναι θετικὸν δι' ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ x.

Ἡ δοθεῖσα λοιπὸν ἀνισότης ἀληθεύει διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x.

Παράδειγμα V. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $2x^2+3x+4<0$.

Διὰ νὰ ἀληθεύῃ ἡ δοθεῖσα ἀνισότης πρέπει τὸ πρῶτον μέλος της, δηλ. τὸ τριώνυμον $2x^2+3x+4$, νὰ εἶναι ἀρνητικόν. Ἡ διακρίνουσα τοῦ τριωνύμου εἶναι $\Delta=3^2-4.2.4=-23$.

Ἐπειδὴ $\Delta<0$, τὸ τριώνυμον αὐτὸ δὲν ἔχει ρίζας καὶ ἑπομένως ἔχει πάντοτε τὸ σημεῖον τοῦ πρώτου ὅρου του, δηλ. εἶναι θετικὸν διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x. Ὥστε ἡ δοθεῖσα ἀνισότης δὲν ἀληθεύει μὲ καμμίαν τιμὴν τοῦ x.

Ἀσκήσεις. Ὁμὰς Α΄. 1174. Νὰ λυθοῦν αἱ ἀνισότητες:

1. $x^2+5x-14>0$ 3. $x^2-4x+7<0$ 5. $2x^2-5x+10<0$
2. $2x^2-5x+1<0$ 4. $-x^2+6x-9<0$ 6. $-3x^2+4x-6<0$

1175. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἀνισότητες:

1. $5x^2-2x+1>0$ 2. $-x^2+4x+1>0$ 3. $x^2+16x-80<0$

Ὁμὰς Β΄. 1176. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ μ αἱ κάτωθι ἐξισώσεις ἔχουν ρίζας πραγματικάς;

2. $x^2-2(\mu-1)x+\mu-1=0$ 8. $2x^2+4(\mu-2)x-7\mu+9=0$.

1177. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ μ αἱ κάτωθι ἐξισώσεις ἔχουν ρίζας πραγματικάς;

1. $x^2+(4\mu-2)x+15\mu^2-2\mu-8=0$ 2. $x^2-2(\mu-4)x+\mu^2-10=0$

1178. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ μ ἡ ἐξίσωσις $x^2-2(2\mu+1)x+5\mu^2+4\mu-3=0$ ἔχει ρίζας πραγματικάς;

1179. Διὰ ποίας τιμάς τοῦ μ αἱ κάτωθι ἐξισώσεις ἔχουν ρίζας πραγματικάς;

1. $(\mu-1)x^2-2(\mu+1)x+2\mu+5=0$ 2. $(\mu+1)x^2+2\mu x+4\mu-3=0$

1180. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ μ αἱ κάτωθι ἐξισώσεις ἔχουν ρίζας πραγματικάς;

1. $\mu x^2+(\mu-1)x+2\mu=0$ 2. $\mu x^2+(\mu-1)x+\mu=0$

1181. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ἀνισότης $\alpha^2+\beta^2>\alpha\beta$ ἀληθεύει πάντοτε.

1182. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\frac{\lambda}{x}=\frac{x-1}{x-\lambda}$ καὶ νὰ ὁρισθῇ διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ ἔχει ρίζας πραγματικάς.

1183. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ μ ἡ ἐξίσωσις $\left(\mu+\frac{3}{2}\right)x^2+2\mu x+2=0$ ἔχει ρίζας πραγματικάς; Νὰ προσδιορισθῇ ἔπειτα ὁ μ, ἵνα ἡ μία τῶν ριζῶν της εἶναι τὰ $\frac{2}{5}$ τῆς ἄλλης.

408. **'Ανισότητες βαθμοῦ ἀνωτέρου τοῦ δευτέρου.** Διὰ νὰ λύσωμεν μίαν ἀνισότητα βαθμοῦ ἀνωτέρου τοῦ δευτέρου, προσπαθοῦμεν νὰ τὴν ἀναγάγωμεν εἰς μίαν ἀνισότητα τῆς μορφῆς

$$A.B.\Gamma\ldots\ldots>0$$

ὅπου οἱ παράγοντες Α, Β,... εἶναι πολυώνυμα τοῦ πρώτου ἢ τοῦ δευτέρου βαθμοῦ πρὸς τὸν ἄγνωστον. Οἱ δευτεροβάθμιοι παράγοντες, ἐὰν ἔχουν ρίζας, δύνανται νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον δύο πρωτοβαθμίων παραγόντων.

Ἔπειτα ἐξαλείφομεν τοὺς παράγοντας, οἱ ὁποῖοι εἶναι πάντοτε θετικοί, δι' οἱανδήποτε τιμὴν τοῦ ἀγνώστου. Τοιοῦτοι εἶναι αἱ ἄρτιαι δυνάμεις τῶν θετικῶν παραγόντων καὶ τὰ τριώνυμα, τὰ ὁποῖα δὲν ἔχουν ρίζας καὶ τῶν ὁποίων ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι θετικός. Ἔπειτα ἐργαζόμεθα ὅπως ἐδείχθη εἰς τὰ παραδείγματα τῆς § 252.

Παράδειγμα 1ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης:

$$(x^2+1)(x^2-3x+8)(x^2-1)(x^2-8x+15)>0$$

Ὁ παράγων x^2+1 εἶναι θετικὸς διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x καὶ ἐπομένως δύναται νὰ παραλειφθῇ· διότι δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (1) διὰ τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ x^2+1, καὶ ἡ ἀνισότης δὲν ἀλλάσσει στροφήν.

Τὸ τριώνυμον x^2-3x+8 δὲν ἔχει ρίζας, διότι $\beta^2-4\alpha\gamma=3^2-4.1.8=-23$=ἀρνητικόν· ἐπομένως τὸ τριώνυμον ἔχει πάντοτε τὸ σημεῖον τοῦ πρώτου ὅρου του, δηλ. εἶναι θετικὸν διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x· ὁ παράγων λοιπὸν x^2-3x+8 δύναται νὰ παραλειφθῇ.

Ἐπειδὴ $x^2-1=(x+1)(x-1)$ καὶ $x^2-8x+15=(x-3)(x-5)$ ἡ (1)

γράφεται $(x+1)(x-1)(x-3)(x-5)>0.$ (2)

Αἱ ρίζαι τῶν παραγόντων τοῦ πρώτου μέλους τῆς (2) εἶναι

$$-1, \quad +1, \quad 3, \quad 5$$

Προσδιορίζομεν κατὰ τὰ γνωστὰ (§ 252) τὸ σημεῖον τοῦ γινομένου

$$\Gamma=(x+1)(x-1)(x-3)(x-5)$$

Ὁ κάτωθι πίναξ μᾶς δεικνύει τὸ σημεῖον τοῦ Γ.

Τιμαὶ τοῦ x	$-\infty$ ..... -1 ..... $+1$ .... 3 .... 5 .... $+\infty$
Σημεῖον τοῦ Γ	$+ \quad - \quad + \quad - \quad +$

Διὰ νὰ ἀληθεύῃ ἡ ἀνισότης (2), πρέπει τὸ πρῶτον μέλος της, δηλ. τὸ Γ, νὰ εἶναι θετικόν· ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸν ἀνωτέρω πίνακα ἡ ἀνισότης (2) καὶ ἑπομένως καὶ ἡ δοθεῖσα, ἀληθεύουν διὰ

$$-\infty < x < -1, \text{ διὰ } 1 < x < 3 \text{ καὶ διὰ } 5 < x < +\infty.$$

Παράδειγμα 2ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης.

$$\frac{x^2+4x-5}{x(x+1)(x^2+x-6)} > 0$$

Ἡ δοθεῖσα ἀνισότης εἶναι ἰσοδύναμος (§ 254) μὲ τὴν

$$(x^2+4x-5)x(x+1)(x^2+x-6) > 0 \qquad (1)$$

Αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου x^2+4x-5 εἶναι 1 καὶ -5 καὶ ἑπομένως εἶναι $x^2+4x-5=(x+5)(x-1)$.

Αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου x^2+x-6 εἶναι -3 καὶ 2· ἑπομένως εἶναι

$$x^2+x-6=(x+3)(x-2).$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (1) τὰ τριώνυμα μὲ τὰ ἴσα των καὶ ἔχομεν

$$(x+5)(x-1)x(x+1)(x+3)(x-2) > 0$$

ἤ

$$(x+5)(x+3)(x+1)x(x-1)(x-2) > 0 \qquad (2)$$

Αἱ ρίζαι τῶν παραγόντων τοῦ πρώτου μέλους τῆς (2) εἶναι

$$-5, \quad -3, \quad -1, \quad 0, \quad 1, \quad 2.$$

Προσδιορίζομεν, κατὰ τὰ γνωστά, τὸ σημεῖον τοῦ γινομένου

$$\Gamma=(x+5)(x+3)(x+1)x(x-1)(x-2)$$

τοῦ πρώτου μέλους τῆς (2).

Ὁ κάτωθι πίναξ μᾶς δεικνύει τὸ σημεῖον τοῦ Γ.

Τιμαὶ τοῦ x	$-\infty$ ... -5 ... -3 ... -1 ... 0 ... 1 ... 2 ... $+\infty$
Σημεῖον τοῦ Γ	$+ \quad - \quad + \quad - \quad + \quad - \quad +$

Διὰ νὰ ἀληθεύῃ ἡ ἀνισότης (2) πρέπει τὸ πρῶτον μέλος της, δηλ. τὸ Γ, νὰ εἶναι θετικόν. Ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸν ἀνωτέρω πίνακα, ἡ ἀνισότης (2) καὶ ἑπομένως καὶ ἡ δοθεῖσα, ἀληθεύουν διὰ

$$-\infty < x < -5, \quad -3 < x < -1, \quad 0 < x < 1, \quad 2 < x < +\infty.$$

Ἀσκήσεις. Α' Ὁμάς. 1184. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης

$$x(x^2-3x+2)(2x^2+7x+3)(x^2+x+1) < 0$$

1185. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης

$$(x+2)^2(2x^2-5x-3)(3x^2+2x+1)(2x^2+3x-2) > 0$$

1186. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $(x-1)(x^2-3x+2)(x^2+x+1)<0$

1187. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $(x^2-7x+12)(x^2-5x+6)(x^2+2x+6)>0$

1188. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)>0$, ἐὰν $\alpha<\beta<\gamma$

1189. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)>0$, ἐὰν $\alpha<\beta<\gamma<\delta$.

1190. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σημεῖον τῶν κάτωθι πολυωνύμων διὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τοῦ x ἀπὸ $-\infty$ ἕως $+\infty$.

1. $y=(x^2-5x+6)(x^2-x-20)(x^2-2x+10)$.
2. $y=(2x^2-5x-3)(3x^2+2x+1)(2x^2+3x-2)$.

Β' 'Ομάς. *1191.* Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $x^3-x^2-20x<0$.

1192. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $4x^3-20x^2+18x<0$.

1193. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $3x^3-5x^2+2x>0$.

1194. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $\dfrac{-x^2+4x+21}{(x+3)(x^2-7x+10)}>0$.

1195. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-17x+60}>0$.

1196. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $\dfrac{-x^2+5x+6}{x^2+x-6}>0$.

1197. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x-2}>0$.

Γ' 'Ομάς. *1198.* Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $\dfrac{4x^2-5x-1}{2x^2-5x+3}>1$.

1199. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}>1$.

1200. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $\dfrac{1}{x(x-1)(x+2)}>\dfrac{1}{x^2(x+3)}$.

1201. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{3}{x+1}>1$.

1202. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $\dfrac{3}{x-1}-\dfrac{x-1}{x-4}>\dfrac{3}{2}$.

1203. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $\dfrac{x^2+x-2}{x^2-x-2}-\dfrac{x^2-x-2}{x^2+x-2}>\dfrac{3x}{x^2-4}$.

1204. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $3+\dfrac{1}{3-x}>\dfrac{3}{5x+1}$.

Δ' 'Ομάς. *1205.* Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ x συναληθεύουν αἱ ἀνισότητες

$$3x+7>0 \quad \text{καὶ} \quad x^2-6x+5>0.$$

1206. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ x συναληθεύουν αἱ ἀνισότητες

$$2x+5>0, \quad x-2<0 \quad \text{καὶ} \quad (x+4)(x-6)<0.$$

1207. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ x συναληθεύουν αἱ ἀνισότητες

$$x^2-7x+12>0, \quad x^2-2x-48<0 \quad \text{καὶ} \quad 3x^2-16x+5>0.$$

1208. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ x συναληθεύουν αἱ ἀνισότητες

$$\frac{3x-1}{x+2}>0 \quad \text{καὶ} \quad \frac{x^2+2x-4}{x(x+3)}<0.$$

1209. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ x συναληθεύουν αἱ ἀνισότητες

$$\frac{3x+5}{3x-7}<0 \quad \text{καὶ} \quad \frac{12x^2+13x-14}{x-2}<0.$$

1210. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ x συναληθεύουν αἱ ἀνισότητες

$$3x-4>0, \quad \frac{x-1}{x+5}>0 \quad \text{καὶ} \quad x^2-5x-14<0.$$

Ε', Ὁμάς. *1211.* Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ x τὸ τριώνυμον $x^2-14x+50$ λαμβάνει τιμὰς μεγαλυτέρας τοῦ 5 καὶ μικροτέρας τοῦ 26. ('Αν. Γεωπον. 1935)

1212. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ x τὸ τριώνυμον x^2-3x+2 περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ 0 καὶ 6.

1213. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ x τὸ κλάσμα $\dfrac{2x-1}{(x+1)(x-2)}$ περιέχεται μεταξὺ -1 καὶ $+1$.

1214. Δίδεται ἡ ἐξίσωσις $x^2-(\lambda^2-2\lambda)x+(2-\lambda)=0$ καὶ ζητεῖται νὰ προσδιορισθῇ ὁ λ, οὕτως ὥστε τὸ ἄθροισμα $\rho_1+\rho_2+4\rho_1\rho_2$ νὰ περιέχεται μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν -1 καὶ 0, ἂν ρ_1 καὶ ρ_2 εἶναι αἱ ῥίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

1215. Ἐὰν x', x'' εἶναι αἱ ῥίζαι τοῦ τριωνύμου

$$\varphi(x)=(\lambda-1)x^2-(\lambda+1)x+\lambda-2$$

νὰ εὑρεθῇ διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ ἡ παράστασις $x'^2-x'x''+x''^2$ εἶναι θετικὴ καὶ μικροτέρα τοῦ 10.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε'.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΑΝΩΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΑΙ ΟΠΟΙΑΙ ΑΝΑΓΟΝΤΑΙ ΕΙΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

Α'. ΔΙΤΕΤΡΑΓΩΝΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

409. Ὁρισμοί. Μία ἐξίσωσις μὲ ἕνα ἄγνωστον x λέγεται ***διτετράγωνος***, ὅταν εἶναι τοῦ 4ου βαθμοῦ καὶ δύναται νὰ λάβῃ τὴν μορφὴν

$$\boxed{\alpha x^4+\beta x^2+\gamma=0} \qquad (1)$$

εἰς τὴν ὁποίαν ὑπάρχουν μόνον αἱ ἄρτιαι δυνάμεις τοῦ ἀγνώστου.

Οἱ συντελεσταὶ α, β, γ ὑπόκεινται εἰς τοὺς αὐτοὺς ὅρους, ὅπως καὶ οἱ συντελεσταὶ τῆς ἐξισώσεως τοῦ δευτέρου βαθμοῦ.

410. Λύσις τῆς διτετραγώνου ἐξισώσεως. Ἡ λύσις μιᾶς διτετραγώνου ἐξισώσεως ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν μιᾶς ἐξισώσεως τοῦ δευτέρου βαθμοῦ.

Πράγματι· ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^4+\beta x^2+\gamma=0, \qquad (1)$

Ἐὰν θέσωμεν $x^2=y$ (2), ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται

$$\alpha y^2+\beta y+\gamma=0 \quad (3).$$

Ἡ ἐξίσωσις (3) εἶναι δευτέρου βαθμοῦ πρὸς τὸν y καὶ λέγεται ***ἐπιλύουσα*** τῆς διτετραγώνου ἐξισώσεως (1).

Ἔστω, ὅτι ἡ ἐπιλύουσα ἔχει δύο ρίζας y' καὶ y'', πραγματικὰς ἢ φανταστικάς.

Ἀντικαθιστῶμεν, διαδοχικῶς εἰς τὴν (2), τὸ y μὲ τὰς τιμάς του y' καὶ y'' καὶ λαμβάνομεν τὰς ἐξισώσεις

$$x^2=y' \quad (4) \quad \text{καὶ} \quad x^2=y'', \quad (5)$$

Ἀπὸ τὴν (4) εὑρίσκομεν $x'=\pm\sqrt{y'}$ (δύο ρίζαι συμμετρικαί).

Ἀπὸ τὴν (5) εὑρίσκομεν $x''=\pm\sqrt{y''}$ (δύο ρίζαι συμμετρικαί).

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ διτετράγωνος ἐξίσωσις (1) ἔχει 4 ρίζας $\pm\sqrt{y'}$ καὶ $\pm\sqrt{y''}$.

Αἱ τέσσαρες αὐταὶ ρίζαι εἶναι πραγματικαί, ὅταν αἱ τιμαὶ τῶν y' καὶ y'' εἶναι πραγματικαὶ καὶ θετικαί.

Αἱ τέσσαρες ρίζαι τῆς διτετραγώνου ἐξισώσεως (1) δίδονται ὑπὸ τοῦ γενικοῦ τύπου

$$\boxed{x=\pm\sqrt{\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}}}$$

Παράδειγμα 1ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $64x^4-52x^2+9=0$.

Θέτομεν $x^2=y$ (1) καὶ ἡ ἐπιλύουσα ἐξίσωσις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι $64y^2-52y+9=0$. (2)

Αἱ ρίζαι τῆς ἐπιλυούσης (2) εἶναι $y'=\frac{9}{16}$ καὶ $y''=\frac{1}{4}$.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) τὸ y μὲ τὰς τιμάς του καὶ λαμβάνομεν τὰς ἐξισώσεις $x^2=\frac{9}{16}$ (3) $x^2=\frac{1}{4}$ (4)

Ἀπὸ τὴν (3) εὑρίσκομεν $x'=\pm\sqrt{\frac{9}{16}}=\pm\frac{3}{4}$.

Ἀπὸ τὴν (4) εὑρίσκομεν $x''=\pm\sqrt{\frac{1}{4}}=\pm\frac{1}{2}$.

Ὥστε αἱ ρίζαι τῆς διτετραγώνου ἐξισώσεως εἶναι

$$x_1=\frac{3}{4}, \quad x_2=-\frac{3}{4}, \quad x_3=\frac{1}{2}, \quad x_4=-\frac{1}{2}.$$

Παράδειγμα 2ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\alpha^2\beta^2x^4-(\alpha^4-\beta^4)x^2-\alpha^2\beta^2=0$.

Θέτομεν $x^2=y$ (1) καὶ ἡ ἐπιλύουσα ἐξίσωσις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι $\alpha^2\beta^2y^2-(\alpha^4-\beta^4)y-\alpha^2\beta^2=0$.

Αἱ ρίζαι τῆς ἐπιλυούσης εἶναι $y'=\frac{\alpha^2}{\beta^2}$ καὶ $y''=-\frac{\beta^2}{\alpha^2}$.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (1) τὸ y μὲ τὰς τιμάς του καὶ λαμβάνομεν τὰς ἐξισώσεις $x^2=\frac{\alpha^2}{\beta^2}$ (2) καὶ $x^2=-\frac{\beta^2}{\alpha^2}$. (3)

Ἀπὸ τὴν (2) εὑρίσκομεν $x' = \pm\sqrt{\dfrac{\alpha^2}{\beta^2}} = \pm\dfrac{\alpha}{\beta}$.

Ἡ ἐξίσωσις (3) δὲν ἔχει ρίζας πραγματικάς· ἔχει τὰς φανταστικὰς ρίζας
$$x'' = \pm\sqrt{\frac{-\beta^2}{\alpha^2}} = \pm i\,\frac{\beta}{\alpha}.$$

Ὥστε αἱ ρίζαι τῆς διτετραγώνου ἐξισώσεως εἶναι
$$x_1 = +\frac{\alpha}{\beta},\quad x_2 = -\frac{\alpha}{\beta},\quad x_3 = +i\,\frac{\beta}{\alpha},\quad x_4 = -i\,\frac{\beta}{\alpha}.$$

Παράδειγμα 3ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^4 - 10x^2 + 169 = 0$.

Ἡ ἐπιλύουσα τῆς δοθείσης διτετραγώνου ἐξισώσεως εἶναι
$$y^2 - 10y + 169 = 0.$$

Αἱ ρίζαι τῆς ἐπιλυούσης εἶναι $5+12i$ καὶ $5-12i$.

Εἰς τὴν ρίζαν $y = 5+12i$ τῆς ἐπιλυούσης ἀντιστοιχοῦν δύο ρίζαι $x = \pm\sqrt{5+12i}$ τῆς διτετραγώνου. Εἰς τὴν ρίζαν $y = 5-12i$ τῆς ἐπιλυούσης ἀντιστοιχοῦν δύο ρίζαι $x = \pm\sqrt{5-12i}$ τῆς διτετραγώνου.

Ὑπολογίζομεν τώρα τὰς τετραγων. ρίζας $\sqrt{5+12i}$ καὶ $\sqrt{5-12i}$

Γνωρίζομεν, ὅτι
$$\sqrt{\alpha+\beta i} = \sqrt{\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}} + \sqrt{\frac{-\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}}\cdot i.$$

ἄρα θὰ εἶναι
$$\sqrt{5+12i} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{25+144}}{2}} + \sqrt{\frac{-5+\sqrt{25+144}}{2}}\cdot i =$$
$$= \sqrt{\frac{5+13}{2}} + \sqrt{\frac{-5+13}{2}}\,i = 3+2i.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι $\sqrt{5-12i} = 3-2i$. Ὥστε αἱ τέσσαρες ρίζαι τῆς διτετραγώνου ἐξισώσεως εἶναι $x = \pm(3+2i)$ καὶ $x = \pm(3-2i)$.

Ἀσκήσεις. Α' Ὁμάς. 1216. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

1. $9x^4 + 30x^2 + 25 = 0$. 2. $3x^4 - 16x^2 + 5 = 0$. 3. $25x^4 + 9x^2 - 16 = 0$.

1217. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\dfrac{x^2+1}{x} + \dfrac{x}{x^2-1} - \dfrac{19x}{12} = 0$.

1218. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2 + \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2 = \dfrac{10}{9}$.

1219. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\dfrac{(x+4)(x-4)}{9} = \left(\dfrac{5}{x}\right)^2$.

1220. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\dfrac{4}{3}x^4 - 2(x^2-1) = \dfrac{8}{9} - 2x^2 + 3x^4$.

Β' Ὁμάς. 1221. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^4 - (\alpha^2\beta^2+1)x^2 + \alpha\beta^2 = 0$.

1222. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^4 + 4\alpha\beta x^2 - (\alpha^2-\beta^2)^2 = 0$.

1223. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\gamma^4x^4 + (\alpha^2\gamma^2 - \beta^2\gamma^2)x^2 - \alpha^2\beta^2 = 0$.

1224. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^4-\alpha(\alpha+\beta)x^2+\alpha^3\beta=0$.

1225. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^4-2(\alpha^2+\beta^2)x^2+(\alpha^2-\beta^2)^2=0$.

1226. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\mu^2\nu^2x^4-(\mu^4+\nu^4)x^2+\mu^2\nu^2=0$.

1227. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^4-4(\alpha+\beta)x^2+16(\alpha-\beta)^2=0$.

1228. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^4-\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta\gamma)x^2+(\alpha\beta\gamma)^3=0$.

1229. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\alpha^2(\alpha^2-2x^2)+\beta^2(\beta^2-2x^2)+x^4=0$.

1230. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\dfrac{(1+x^2)^2}{\alpha^2}-\dfrac{(1-x^2)^2}{\beta^2}=4x^2$.

1231. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\dfrac{x^2}{x^2-\alpha^2}+\dfrac{x^2}{x^2-\beta^2}=4$.

1232. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\dfrac{x^4+1}{(x+1)^2(x-4)^2}=\dfrac{\alpha}{\beta}$.

Γ' Ὁμάς. *1233.* Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^4-4x^2+5=0$.

1234. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^4-6x^2+34=0$.

1235. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $36x^4-72x^2+25=0$.

1236. Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ μ ἡ ἐξίσωσις $x^4+(\mu-3)x^3+(2\mu-1)x^2+10\mu=0$ γίνεται διτετράγωνος.

1237. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ἐξίσωσις

$$\mu x^4+(3\mu-1)x^3-(\mu-4)x^2+(\mu+2)x+8=0$$

οὐδέποτε γίνεται διτετράγωνος.

Δ' Ὁμάς. *1238.* Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $x^4-10x^2+9<0$.

1239. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $x^4-6x^2+8>0$.

1240. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $x(x^4-7x+12)>0$.

1241. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $\dfrac{x^2+4x-5}{x^4-5x^2+6}>0$.

1242. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $\dfrac{x^4-17x^2+16}{x^2-7x+12}>0$.

1243. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $\dfrac{x^4-26x^2+25}{x(6x^2-x-1)}<0$.

1244. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $\dfrac{x^4-2x^2-2}{x^4-x^2-6}>\dfrac{1}{2}$.

1245. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $\dfrac{x^4-49x^2+96}{x^2-7x+12}>7$.

1246. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $\dfrac{3x^4-2x^2+22}{x^4-12x^2+35}>2$.

411. Διερεύνησις τῆς διτετραγώνου ἐξισώσεως.

Ἡ διερεύνησις τῆς διτετραγώνου ἐξισώσεως $\alpha x^4+\beta x^2+\gamma=0$ (1) δηλ. ὁ προσδιορισμὸς τοῦ εἴδους καὶ τοῦ σημείου τῶν ριζῶν της, χωρὶς νὰ λυθῇ προηγουμένως ἡ ἐξίσωσις, ἀνάγεται εἰς τὴν διερεύνησιν τῆς ἐπιλυούσης ἐξισώσεως $\alpha y^2+\beta y+\gamma=0$.

Πράγματι· I. Ἐὰν $\Delta>0$, $\dfrac{\gamma}{\alpha}>0$, $-\dfrac{\beta}{\alpha}>0$

ἡ ἐπιλύουσα (2) ἔχει δύο ρίζας πραγματικὰς καὶ θετικάς. Ἐπειδὴ εἰς κάθε θετικὴν ρίζαν τῆς ἐπιλυούσης ἀντιστοιχοῦν δύο ρίζαι τῆς διτετραγώνου, ἡ διτετράγωνος ἐξίσωσις θὰ ἔχη τὰς ρίζας πραγματικάς.

Π.χ. ἔστω ἡ ἐξίσωσις $3x^4-14x^2+5=0$.

Ἡ διακρίνουσα τῆς ἐπιλυούσης εἶναι $\Delta=14^2-4.3.5=$θετική. Ἄρα ἡ ἐπιλύουσα ἔχει δύο ρίζας πραγματικάς.

Ἐπειδὴ $\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{5}{3}=$ θετικόν, αἱ ρίζαι τῆς ἐπιλυούσης εἶναι ὁμόσημοι.

Ἐπειδὴ $-\frac{\beta}{\alpha}=\frac{14}{3}=$ θετικόν, αἱ δύο ρίζαι τῆς ἐπιλυούσης εἶναι θετικαί.

Ἄρα ἡ διτετράγωνος ἐξίσωσις ἔχει 4 ρίζας πραγματικάς.

II. **Ἐὰν** $\Delta>0$, $\frac{\gamma}{\alpha}>0$, $-\frac{\beta}{\alpha}<0$

ἡ ἐπιλύουσα (2) ἔχει δύο ρίζας ἀρνητικάς· ἐπομένως ἡ διτετράγωνος ἔχει 4 ρίζας φανταστικάς.

Π.χ. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $5x^4+12x^2+4=0$.

Ἐδῶ εἶναι $\Delta=12^2-4.5.4=$θετικόν· ἄρα ἡ ἐπιλύουσα ἔχει δύο ρίζας πραγματικάς.

Ἐπειδὴ $\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{4}{5}=$ θετικόν, ἡ ἐπιλύουσα ἔχει δύο ρίζας ὁμοσήμους.

Ἐπειδὴ $-\frac{\beta}{\alpha}=-\frac{12}{5}=$ ἀρνητικόν, ἡ ἐπιλύουσα ἔχει δύο ρίζας ἀρνητικάς.

Ἄρα ἡ διτετράγωνος ἔχει 4 ρίζας φανταστικάς.

III. **Ἐὰν** $\frac{\gamma}{\alpha}<0$, ἡ ἐπιλύουσα ἔχει δύο ρίζας ἑτεροσήμους.

Εἰς τὴν θετικὴν ρίζαν τῆς ἐπιλυούσης ἀντιστοιχοῦν δύο ρίζαι πραγματικαὶ καὶ συμμετρικαὶ τῆς διτετραγώνου. Εἰς τὴν ἀρνητικὴν ρίζαν τῆς ἐπιλυούσης ἀντιστοιχοῦν δύο ρίζαι φανταστικαὶ τῆς διτετραγώνου.

Π.χ. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $3x^4+4x^2-8=0$.

Ἐπειδὴ $\frac{\gamma}{\alpha}=-\frac{8}{3}=$ ἀρνητικόν, ἡ ἐπιλύουσα ἔχει δύο ρίζας ἑτεροσήμους· ἄρα ἡ διτετράγωνος ἔχει δύο ρίζας πραγματικὰς καὶ δύο ρίζας ἀρνητικάς.

IV. **Ἐὰν** $\Delta<0$ ἡ ἐπιλύουσα δὲν ἔχει ρίζας πραγματικάς· ἔχει 2 ρίζας φανταστικάς· ἄρα ἡ διτετράγωνος ἔχει 4 ρίζας φανταστικάς.

Ὁ κάτωθι πίναξ συνοψίζει τὴν διερεύνησιν τῆς ἐπιλυούσης καὶ τῆς διτετραγώνου ἐξισώσεως.

Πίναξ διερευνήσεως τῆς ἐξισώσεως $αx^4+βx^2+γ=0$

Ἐπιλύουσα $αy^2+βy+γ=0$			Διτετράγ. $αx^4+βx^2+γ=0$
$β^2-4αγ>0$	$\frac{γ}{α}>0$	$-\frac{β}{α}>0$ 2 ρίζ. θετικ.	4 ρίζαι πραγματικαὶ
		$-\frac{β}{α}<0$ 2 ρίζ. ἀρνητ.	4 ρίζαι φανταστικαὶ
	$\frac{γ}{α}<0$	Δύο ρίζαι ἑτερόσημ.	2 ρίζαι πραγματικαὶ 2 ρίζαι φανταστικαὶ
	$\frac{γ}{α}=0$	$y'=0$	1 διπλῆ ρίζα μηδὲν
		$y''=-\frac{β}{α}$	Ἐὰν $-\frac{β}{α}>0$ 2 ρίζ. πρ. Ἐὰν $-\frac{β}{α}<0$ ρίζ. φαντ.
$β^2-4γα=0$		Μία διπλῆ ρίζα $y'=y''=-\frac{β}{2α}$	$-\frac{β}{α}>0$ 2 διπλ. ρίζαι $-\frac{β}{α}<0$ 4 ρίζ. φανταστ.
$β^2-4αγ<0$		2 ρίζαι φανταστικαὶ	4 ρίζαι φανταστικαὶ

Ἀσκήσεις. *1247.* Νὰ διερευνηθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

1. $2x^4-15x^2+1=0$. 2. $3x^4+10x^2+1=0$.
3. $3x^4+5x^2-12=0$. 4. $x^4-5x^2+12=0$.

412. Διτετράγωνον τριώνυμον.

Ἕνα τριώνυμον τῆς μορφῆς
$$φ(x)=αx^4+βx^2+γ$$
λέγεται ***διτετράγωνον τριώνυμον***.

Αἱ ρίζαι τοῦ διτετραγώνου τριωνύμου εἶναι αἱ ρίζαι τῆς διτετραγώνου ἐξισώσεως $αx^4+βx^2+γ=0$, τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν, ἐὰν ἐξισώσωμεν τὸ τριώνυμον αὐτὸ μὲ μηδέν.

413. Ἀνάλυσις τοῦ τριωνύμου $αx^4+βx^2+γ$ εἰς γινόμενον παραγόντων.

Ἔστω τὸ τριώνυμον $αx^4+βx^2+γ$.

Ἂν θέσωμεν $x^2=y$, τὸ δοθὲν τριώνυμον γράφεται
$$αx^4+βx^2+γ=αy^2+βy+γ \qquad (1)$$
Ἐὰν y' καὶ y'' εἶναι αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου $αy^2+βy+γ$ θὰ εἶναι (§ 402) $αy^2+βy+γ=α(y-y')(y-y'')$

ὁπότε ἡ (1) γράφεται
$$αx^4+βx^2+γ=α(y-y')(y-y'')$$
Ἀντικαθιστῶμεν εἰς αὐτὴν τὸ y μὲ τὸ ἴσον του x^2 καὶ ἔχομεν
$$αx^4+βx^2+γ=α(x^2-y')(x^2-y'') \qquad (2)$$

I. Ἐὰν αἱ δύο ῥίζαι y' καὶ y'' εἶναι θετικαὶ (ὅταν $\frac{\gamma}{\alpha}>0$ καὶ $-\frac{\beta}{\alpha}>0$), ἑκάστη παρένθεσις εἶναι διαφορὰ δύο τετραγώνων καὶ ἑπομένως ἡ (2) γράφεται

$$\alpha x^4+\beta x^2+\gamma=\alpha(x+\sqrt{y'})(x-\sqrt{y'})(x+\sqrt{y''})(x-\sqrt{y''}) \qquad (3)$$

Ἂν παραστήσωμεν τὰς ῥίζας τῆς διτετραγώνου ἐξισώσεως $\alpha x^4+\beta x^2+\gamma=0$ μὲ

$$x_1=-\sqrt{y'},\quad x_2=+\sqrt{y'},\quad x_3=-\sqrt{y''},\quad x_4=+\sqrt{y''}$$

ἡ (3) γράφεται

$$\boxed{\alpha x^4+\beta x^2+\gamma=\alpha(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)} \qquad (4)$$

II. Ἐὰν ἡ μία ῥίζα y' εἶναι θετικὴ καὶ ἡ ἄλλη y'' ἀρνητικὴ (δηλ. ὅταν $\frac{\gamma}{\alpha}<0$), τὸ τριώνυμον λαμβάνει τὴν μορφὴν

$$\alpha x^4+\beta x^2+\gamma=\alpha(x-x_1)(x-x_2)(x^2-y''),\ \text{ὅπου}\ x^2-y''\geqslant 0 \qquad (4)$$

Παράδειγμα 1ον. Νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον παραγόντων τὸ τριώνυμον

$$9x^4-10x^2+1.$$

Αἱ ῥίζαι τοῦ δοθέντος τριωνύμου εἶναι $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=\frac{1}{3}$ $x_4=-\frac{1}{3}$. Θὰ εἶναι λοιπὸν

$$9x^4-10x^2+1=9(x-1)(x+1)\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)$$

Παράδειγμα 2ον. Νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον παραγόντων τὸ τριώνυμον

$$2x^4+3x^2-44$$

Αἱ ῥίζαι τῆς ἐπιλυούσης $2y^2+3y-44=0$ εἶναι $y'=-\frac{11}{2}$ καὶ $y''=4$. Ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τὸν τύπον (4′) εὑρίσκομεν

$$2x^4+3x^2-44=2(x-2)(x+2)\left(x^2+\frac{11}{2}\right)$$

Ἀσκήσεις. Α΄ Ὁμάς. 1248. Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων τὰ κάτωθι τριώνυμα:

1. x^4-13x^2+36 3. x^4-10x^2+9 5. $3x^4-4x^2-4$
2. x^4+7x^2-144 4. x^4-14x^2+49 6. $16x^4-17x^2+1$

1249. Νὰ σχηματισθῇ μία διτετράγωνος ἐξίσωσις, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ ῥίζας:
1. ± 3 καὶ ± 5 2. $\pm 2\alpha\beta$ καὶ $\pm(\alpha+\beta)$ 3. $\pm(2+\sqrt{5})$ καὶ $\pm(2-\sqrt{5})$

1250. Ἐὰν x', x'' εἶναι αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2+\lambda x+k=0$, ζητεῖται νὰ σχηματισθῇ μία διτετράγωνος ἐξίσωσις, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ ῥίζας τὰς $x', x'', -x', -x''$.

1251. Νὰ σχηματισθῇ ἡ διτετράγωνος ἐξίσωσις, ἡ ὁποία ἔχει ὡς ῥίζας τοὺς τέσσαρας ἀριθμοὺς $\pm\sqrt{3}\pm\sqrt{2}$ καὶ νὰ λυθῇ ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις.

Β΄. Ὁμάς. 1252. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τριώνυμον $\varphi(x)=\alpha x^4+\beta x^2+\gamma$ ἀναλύεται εἰς γινόμενον δύο δευτεροβαθμίων παραγόντων.

1253. Ὑποτίθεται, ὅτι ἡ ἐπιλύουσα μιᾶς διτετραγώνου ἐξισώσεως ἔχει τοὺς συντελεστάς της ῥητούς, καὶ ὅτι ἔχει δύο ῥίζας θετικάς, τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον εἶναι τὸ τετράγωνον ἑνὸς ῥητοῦ ἀριθμοῦ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι κάθε ρίζα τῆς διτετραγώνου ἐξισώσεως δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν ἑνὸς ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος δύο ἁπλῶν ριζικῶν.

414 Μετασχηματισμὸς τῆς παραστάσεως $\pm\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$.

Παραστάσεις τῆς μορφῆς $\sqrt{A\pm B}$. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν $x^4-8x^2+9=0$.

Θέτομεν $x^2=y$ (1) καὶ ἡ ἐπιλύουσα ἐξίσωσις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι $y^2-8y+9=0$.

Αἱ ρίζαι τῆς ἐπιλυούσης εἶναι $y'=4-\sqrt{7}$ καὶ $y''=4+\sqrt{7}$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (1) τὸ y μὲ τὰς τιμάς του καὶ ἔχομεν

$x^2=4-\sqrt{7}$ (2) καὶ $x^2=4+\sqrt{7}$. (3)

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (2) εὑρίσκομεν $x'=\pm\sqrt{4-\sqrt{7}}$.

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (3) εὑρίσκομεν $x''=\pm\sqrt{4+\sqrt{7}}$.

Ὥστε ἡ διτετράγωνος ἐξίσωσις ἔχει τὰς τέσσαρας ρίζας

$$\pm\sqrt{4-\sqrt{7}} \quad \text{καὶ} \quad \pm\sqrt{4+\sqrt{7}}$$

αἱ ὁποῖαι συμπτύσσονται εἰς τὸν τύπον $x=\pm\sqrt{4\pm\sqrt{7}}$.

Μετασχηματισμὸς τῶν παραστάσεων τῆς μορφῆς $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$. Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ λύσις τῶν διτετραγώνων ἐξισώσεων δύναται νὰ μᾶς ὁδηγήσῃ εἰς παραστάσεις τῆς μορφῆς $\pm\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$, δηλ. εἰς τὴν ἐξαγωγὴν τῆς τετραγωνικῆς ρίζης μιᾶς ποσότητος $A\pm\sqrt{B}$, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕνα ρητὸν μέρος A καὶ ἀπὸ ἕνα ἄρρητον μέρος $\sqrt{B}$. Αἱ A καὶ B εἶναι ποσότητες ρηταί.

Ἐπειδὴ ὁ ὑπολογισμὸς τῶν παραστάσεων τῆς μορφῆς (1) εἶναι δύσκολος, ἐξ αἰτίας τοῦ διπλοῦ ριζικοῦ, θὰ ζητήσωμεν νὰ εὕρωμεν, μήπως ἡ παράστασις (1) δύναται νὰ μετασχηματισθῇ εἰς ἕνα ἄθροισμα ἁπλῶν ριζικῶν τῆς μορφῆς $\pm\sqrt{x}\pm\sqrt{y}$.

Ἔστω, ὅτι εἶναι

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{x}+\sqrt{y} \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad \sqrt{A-\sqrt{B}}=\sqrt{x}-\sqrt{y} \quad (2).$$

Ὑψοῦμεν εἰς τὸ τετράγωνον καὶ τὰ δύο μέλη τῶν (1) καὶ (2) καὶ ἔχομεν $A+\sqrt{B}=x+y+2\sqrt{xy}$ (1′), $A-\sqrt{B}=x+y-2\sqrt{xy}$. (2′)

Προσθέτομεν τὰς ἰσότητας (1′) καὶ (2′) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$2A=2x+2y \quad \text{ἢ} \quad A=x+y. \quad (3)$$

Ἀφαιροῦμεν τὰς ἰσότητας (1′) καὶ (2′) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$2\sqrt{B}=4\sqrt{xy} \quad \text{ἢ} \quad \sqrt{B}=2\sqrt{xy} \quad \text{ἢ} \quad B=4xy \quad \text{ἢ} \quad xy=\frac{B}{4} \quad (4).$$

Ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις (3) καὶ (4) συνάγομεν, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ x καὶ y εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $X^2-AX+\frac{B}{4}=0$.

Αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εἶναι

$$x=\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2} \quad \text{καὶ} \quad y=\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}.$$

Διὰ νὰ εἶναι λοιπὸν δυνατὸς ὁ μετασχηματισμὸς τῆς παραστάσεως $\sqrt{A+\sqrt{B}}$ εἰς ἄθροισμα ἁπλῶν ριζικῶν, πρέπει οἱ δύο εὑρεθέντες ἀριθμοὶ x καὶ y νὰ εἶναι θετικοὶ καὶ ρητοί, δηλ. πρέπει νὰ εἶναι $A>0$ καὶ ἡ ὑπόρριζος ποσότης A^2-B νὰ εἶναι ἕνα τέλειον τετράγωνον. Πράγματι, ἐὰν θέσωμεν $A^2-B=\Gamma^2$ εὑρίσκομεν

$$x = \frac{A+\Gamma}{2} \quad \text{καὶ} \quad y = \frac{A-\Gamma}{2}.$$

ὁπότε ὁ τύπος τοῦ μετασχηματισμοῦ γίνεται

$$\boxed{\sqrt{A+\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+\Gamma}{2}} + \sqrt{\frac{A-\Gamma}{2}}}$$

Κατὰ ἕνα γενικὸν τρόπον εὑρίσκομεν

$$\boxed{\pm\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \pm\left(\sqrt{\frac{A+\Gamma}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-\Gamma}{2}}\right).}$$

Παράδειγμα 1ον. Νὰ μετασχηματισθῇ ἡ παράστασις $\sqrt{5+\sqrt{21}}$ **εἰς ἄθροισμα ἁπλῶν ῥιζικῶν.**

Ἐδῶ εἶναι $A=5$, $B=21$ καὶ $A^2-B=5^2-21=4=\Gamma^2$, ἄρα $\Gamma=2$.

Θὰ εἶναι λοιπὸν $\sqrt{5+\sqrt{21}} = \sqrt{\frac{5+2}{2}} + \sqrt{\frac{5-2}{2}} = \sqrt{\frac{7}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}}$

Παράδειγμα 2ον. Νὰ μετασχηματισθῇ ἡ παράστασις

$$\sqrt{\alpha+2\beta+\sqrt{\beta(2\alpha+3\beta)}}\,.$$

Ἐδῶ εἶναι $A^2-B=(\alpha+2\beta)^2-\beta(2\alpha+3\beta)=\alpha^2+4\alpha\beta+4\beta^2-2\alpha\beta-3\beta^2=$
$=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2=\Gamma^2$, ἄρα $\Gamma=\alpha+\beta$.

Θὰ εἶναι λοιπὸν $\sqrt{\alpha+2\beta+\sqrt{\beta(2\alpha+3\beta)}} =$

$$= \sqrt{\frac{\alpha+2\beta+(\alpha+\beta)}{2}} + \sqrt{\frac{\alpha+2\beta-(\alpha+\beta)}{2}} = \sqrt{\frac{2\alpha+3\beta}{2}} + \sqrt{\frac{\beta}{2}}.$$

Ἀσκήσεις. ***1254.*** Νὰ μετασχηματισθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις εἰς ἄθροισμα ἁπλῶν ῥιζικῶν

$$\sqrt{17\pm\sqrt{33}} \qquad \sqrt{11\pm2\sqrt{10}} \qquad \sqrt{8\pm\sqrt{28}}$$

1255. Νὰ μετασχηματισθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις εἰς ἄθροισμα ἁπλῶν ῥιζικῶν :

$$\sqrt{3\alpha+\sqrt{5\alpha^2}} \qquad \sqrt{x+y-2\sqrt{xy}} \qquad \sqrt{2x+2\sqrt{x^2-y^2}}$$

1256. Ὁμοίως ἡ παράστασις $\sqrt{x^2+y\pm2x\sqrt{y}}$

257. Ὁμοίως ἡ παράστασις $\sqrt{\alpha+\beta\gamma-2\alpha\sqrt{\beta}}$

1258. Ὁμοίως ἡ παράστασις $\sqrt{xy+2x\sqrt{xy-x^2}}$

1259. Ὁμοίως ἡ παράστασις $\sqrt{x^2+x+1-\sqrt{2x^3+x^2+2x}}$

1260. Ὁμοίως ἡ παράστασις $\sqrt{x^2+\alpha-\beta+\sqrt{\beta[\beta-2(x^2+\alpha)]}}$

1261. Ὁμοίως ἡ παράστασις $\sqrt{\alpha+\beta-\gamma-2\sqrt{\beta(\alpha-\gamma)}}$

1262. Νὰ ἐξετασθῇ εἰς ποίας περιπτώσεις αἱ ῥίζαι μιᾶς διτετραγώνου ἐξισώσεως δύνανται νὰ ἐκφρασθοῦν δι᾽ ἑνὸς ἀθροίσματος ἁπλῶν ῥιζικῶν.

Β΄ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

415. **Ἀντίστροφοι ἐξισώσεις.** Μία ἐξίσωσις, ὡς πρὸς x, εἶναι ***ἀντίστροφος***, ἐὰν δὲν ἀλλάσσῃ, ὅταν ἀντικαταστήσωμεν τὸν x διὰ τοῦ $\frac{1}{x}$. Ἐὰν λοιπὸν ἡ ἐξίσωσις ἔχῃ τὴν πραγματικὴν ῥίζαν x διάφορον τῆς ± 1, πρέπει νὰ ἔχῃ, ὡς δευτέραν ρίζαν, τὴν ἀντίστροφον $\frac{1}{x}$ τῆς πρώτης.

Αἱ ἀντίστροφοι ἐξισώσεις διακρίνονται ὡς ἑξῆς:

Δίδομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν τὴν μορφὴν $\phi(x)=0$. Διατάσσομεν τὸ πολυώνυμον $\phi(x)$ κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ x καὶ ἐὰν οἱ συντελεσταὶ τῶν ὅρων, οἱ ὁποῖοι ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὰ ἄκρα, εἶναι ἴσοι ἢ ἀντίθετοι, (ὅταν δὲν ὑπάρχῃ μεσαῖος ὅρος), τότε ἡ ἐξίσωσις $\phi(x)=0$ εἶναι ἀντίστροφος.

Π.χ. αἱ ἐξισώσεις

$$\alpha x^3+\beta x^2+\beta x+\alpha=0 \qquad \alpha x^4+\beta x^3+\beta x+\alpha=0$$
$$\alpha x^3-\beta x^2+\beta x+\alpha=0 \qquad \alpha x^4-\beta x^3+\beta x-\alpha=0$$
$$\alpha x^4+\beta x^3+\gamma x^2+\beta x+\alpha=0$$

εἶναι ἀντίστροφοι ἐξισώσεις.

Ἡ λύσις μιᾶς ἀντιστρόφου ἐξισώσεως τοῦ 3ου, 4ου καὶ 5ου βαθμοῦ δύναται νὰ ἀναχθῇ πάντοτε εἰς τὴν λύσιν μιᾶς ἐξισώσεως τοῦ δευτέρου βαθμοῦ.

416. 'Αντίστροφοι ἐξισώσεις τοῦ τρίτου βαθμοῦ. ***Πρώτη μορφή.*** Ἡ πρώτη μορφὴ τῶν ἀντιστρόφων ἐξισώσεων τοῦ τρίτου βαθμοῦ εἶναι

$$\alpha x^3+\beta x^2+\beta x+\alpha=0$$

Ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ δύναται νὰ γραφῇ διαδοχικῶς

$$(\alpha x^3+\alpha)+(\beta x^2+\beta x)=0 \quad \text{ἢ} \quad \alpha(x^3+1)+\beta x(x+1)=0$$

ἢ $\quad \alpha(x+1)(x^2-x+1)+\beta x(x+1)=0 \quad$ ἢ $\quad (x+1)[\alpha(x^2-x+1)+\beta x]=0$

ἢ

$$(x+1)[\alpha x^2-(\alpha-\beta)x+\alpha]=0$$

'Απὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν προκύπτουν αἱ ἐξισώσεις:

$$x+1=0 \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad \alpha x^2-(\alpha-\beta)x+\alpha=0 \qquad (2)$$

Ἡ ρίζα τῆς (1) εἶναι $x=-1$.

Αἱ ρίζαι τῆς (2) εἶναι $x=\dfrac{\alpha-\beta\pm\sqrt{(\alpha-\beta)^2-4\alpha^2}}{2\alpha}$

Παράδειγμα. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $2x^3+7x^2+7x+2=0$

Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται

$$(2x^3+2)+(7x^2+7x)=0 \qquad 2(x^3+1)+7x(x+1)=0$$
$$2(x+1)(x^2-x+1)+7x(x+1)=0 \qquad (x+1)[2(x^2-x+1)+7x]=0$$
$$(x+1)(2x^2+5x+2)=0$$

'Απὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν προκύπτουν αἱ ἐξισώσεις

$$x+1=0 \quad (1) \qquad 2x^2+5x+2=0 \qquad (2)$$

Ἡ ρίζα τῆς (1) εἶναι $x=-1$.

Αἱ ρίζαι τῆς (2) εἶναι -2 καὶ $-\frac{1}{2}$.

Ὥστε αἱ ρίζαι τῆς δοθείσης ἀντιστρόφου ἐξισώσεως εἶναι

$$x_1=-1, \quad x_2=-2, \quad x_3=-\frac{1}{2}.$$

Δευτέρα μορφή. Ἡ δευτέρα μορφὴ τῶν ἀντιστρόφων ἐξισώσεων τοῦ τρίτου βαθμοῦ εἶναι:

$$\alpha x^3+\beta x^2-\beta x-\alpha=0$$

Ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ δύναται νὰ γραφῇ:

$$\alpha(x^3-1)+(\beta x^2-\beta x)=0 \quad \text{ἢ} \quad \alpha(x^3-1)+\beta x(x-1)=0$$

ἢ $\alpha(x-1)(x^2+x+1)+\beta x(x-1)=0$ ἢ $(x-1)[\alpha(x^2+x+1)+\beta x]=0$

ἢ $$(x-1)[\alpha x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha]=0$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν προκύπτουν αἱ ἐξισώσεις

$$x-1=0 \quad (1), \qquad \alpha x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha=0 \quad (2)$$

Ἡ ρίζα τῆς (1) εἶναι $x=1$.

Αἱ ρίζαι τῆς (2) εἶναι $x=\dfrac{-(\alpha+\beta)\pm\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha^2}}{2\alpha}$.

Παράδειγμα. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $3x^3-13x^2+13x-3=0$

Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται

$$(3x^3-3)-(13x^2-13x)=0 \quad \text{ἢ} \quad 3(x^3-1)-13x(x-1)=0$$

ἢ $3(x-1)(x^2+x+1)-13x(x-1)=0$ ἢ $(x-1)[3(x^2+x+1)-13x]=0$

ἢ $$(x-1)(3x^2-10x+3)=0$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν προκύπτουν αἱ ἐξισώσεις

$$x-1=0 \quad (1), \qquad 3x^2-10x+3=0 \quad (2)$$

Ἡ ρίζα τῆς (1) εἶναι $x=1$.

Αἱ ρίζαι τῆς (2) εἶναι $x'=3$ καὶ $x''=\dfrac{1}{3}$.

Ὥστε αἱ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι

$$x_1=1, \quad x_2=3, \quad x_3=\frac{1}{3}.$$

Ἀσκήσεις. 1263. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $12x^3+13x^2-13x-12=0$

1264. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $4x^3+13x^2-13x-4=0$

1265. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $5x^3-31x^2+31x-5=0$

1266. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^3+3x^2-3x-1=0$

1267. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $-3x^3-7x^2+7x+3=0$

1268. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $6x^3-19x^2+19x-6=0$

1269. Νὰ εὑρεθοῦν τρεῖς ἀκέραιοι διαδοχικοὶ ἀριθμοὶ τοιοῦτοι, ὥστε ὁ κύβος τοῦ μεγαλυτέρου νὰ εἶναι ἴσος μὲ τὸ τριπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος τῶν κύβων τῶν δύο ἄλλων.

417. Ἀντίστροφοι ἐξισώσεις τοῦ τετάρτου βαθμοῦ.

Πρώτη μορφή. Ἡ πρώτη μορφὴ τῶν ἀντιστρόφων ἐξισώσεων τοῦ τετάρτου βαθμοῦ εἶναι:

$$\alpha x^4+\beta x^3+\gamma x^2+\beta x+\alpha=0$$

Διαιροῦμεν καὶ τὰ δύο μέλη της διὰ x^2, τὸ ὁποῖον εἶναι διάφορον τοῦ μηδενός, καὶ ἔχομεν

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma+\frac{\beta}{x}+\frac{\alpha}{x^2}=0$$

ἢ $$\left(\alpha x^2+\frac{\alpha}{x^2}\right)+\left(\beta x+\frac{\beta}{x}\right)+\gamma=0$$

ἢ $$\alpha\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\beta\left(x+\frac{1}{x}\right)+\gamma=0 \qquad (1)$$

Θέτομεν $x+\dfrac{1}{x}=y$ (2) ὁπότε

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=y^2 \quad ἢ \quad x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2, \quad καὶ \text{ ἡ } (1) \text{ γράφεται}$$

$$\alpha(y^2-2)+\beta y+\gamma=0 \qquad ἢ \qquad \alpha y^2+\beta y+\gamma-2\alpha=0$$

Ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ εἶναι ἡ **ἐπιλύουσα** τῆς δοθείσης ἐξισώσεως καὶ ἔχει, γενικῶς, δύο ρίζας y' καὶ y''.

'Αντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (2) τὸ y, διαδοχικῶς μὲ τὰς τιμάς του y' καὶ y'' καὶ λαμβάνομεν τὰς ἐξισώσεις

$$x+\frac{1}{x}=y' \quad (3) \qquad καὶ \qquad x+\frac{1}{x'}=y'' \qquad (4)$$

Ἡ (3) γράφεται $x^2-y'x+1=0$ (3'). Ἡ (4) γράφεται $x^2-y''x+1=0$ (4')

Αἱ ρίζαι τῶν ἐξισώσεων (3') καὶ (4') εἶναι ρίζαι τῆς δοθείσης ἀντιστρόφου ἐξισώσεως.

Παράδειγμα. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $6x^4+5x^3-38x^2+5x+6=0$

Διαιροῦμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς δοθείσης ἐξισώσεως διὰ x^2 καὶ ἔχομεν

$$6x^2+5x-38+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}=0$$

ἢ
$$\left(6x^2+\frac{6}{x^2}\right)+\left(5x+\frac{5}{x}\right)-38=0$$

ἢ
$$6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-38=0. \qquad (1)$$

Θέτομεν
$$x+\frac{1}{x}=y \qquad (2)$$

ὁπότε
$$x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2, \quad καὶ \text{ ἡ } (1) \text{ γράφεται}$$

$$6(y^2-2)+5y-38=0 \qquad ἢ \qquad 6y^2+5y-50=0$$

Αἱ ρίζαι τῆς ἐπιλυούσης αὐτῆς ἐξισώσεως εἶναι $y'=\frac{5}{2}$, $y''=-\frac{10}{3}$.

'Αντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (2) τὸ y μὲ τὰς τιμάς του καὶ λαμβάνομεν τὰς ἐξισώσεις

$$x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2} \quad (3) \qquad καὶ \qquad x+\frac{1}{x}=-\frac{10}{3} \qquad (4)$$

Η (3) γράφεται $2x^2-5x+2=0$ καὶ ἔχει ρίζας $x'=2$, $x''=\frac{1}{2}$

Ἡ (4) γράφεται $3x^2+10x+3=0$ καὶ ἔχει ρίζας $x'=-3$, $x''=-\frac{1}{3}$

Ὥστε αἱ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι

$$x_1=2, \quad x_2=\frac{1}{2}, \quad x_3=-3, \quad x_4=-\frac{1}{3}.$$

Δευτέρα μορφή. Ἡ δευτέρα μορφὴ τῶν ἀντιστρόφων ἐξισώσεων τοῦ τετάρτου βαθμοῦ εἶναι

$$\alpha x^4+\beta x^3-\beta x-\alpha=0 \qquad (\text{λείπει ὁ ὅρος } x^2)$$

Ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ γράφεται

$$(\alpha x^4-\alpha)+(\beta x^3-\beta x)=0 \qquad ἢ \qquad \alpha(x^4-1)+\beta x(x^2-1)=0$$

ἢ $\alpha(x^2-1)(x^2+1)+\beta x(x^2-1)=0$ ἢ $(x^2-1)[\alpha(x^2+1)+\beta x]=0$

ἢ
$$(x^2-1)[\alpha x^2+\beta x+\alpha]=0$$

9 7.000

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν προκύπτουν αἱ ἐξισώσεις

$x^2-1=0$ (1), $\alpha x^2+\beta x+\alpha=0$ (2)

Αἱ ρίζαι τῆς (1) εἶναι $x=\pm 1$.

Αἱ ρίζαι τῆς (2) εἶναι $x=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha^2}}{2\alpha}$.

Παράδειγμα. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $4x^4-17x^3+17x-4=0$

Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται

$(4x^4-4)-(17x^3-17x)=0$ ἢ $4(x^4-1)-17x(x^2-1)=0$

ἢ $4(x^2-1)(x^2+1)-17x(x^2-1)=0$ ἢ $(x^2-1)[4(x^2+1)-17x]=0$

ἢ $(x^2-1)(4x^2-17x+4)=0$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν προκύπτουν αἱ ἐξισώσεις:

$x^2-1=0$ (1), $4x^2-17x+4=0$ (2)

Αἱ ρίζαι τῆς (1) εἶναι $x=\pm 1$.

Αἱ ρίζαι τῆς (2) εἶναι $x'=4$, $x''=\dfrac{1}{4}$.

Ὥστε αἱ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι

$$x_1=1,\quad x_2=-1,\quad x_3=4,\quad x_4=\frac{1}{4}.$$

Ἀσκήσεις. *1270.* Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^4+x^3-4x^2+x+1=0$

1271. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $6x^4-35x^3+62x^2-35x+6=0$

1272. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $4x^4-9x^3-26x^2-9x+4=0$

1273. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $3x^4-10x^3+10x-3=0$

1274. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $5x^4-26x^3+26x-5=0$

1275. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $2x^4+5x^3-5x-2=0$

1276. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\dfrac{1+x^4}{(1+x)^4}=\dfrac{1}{2}$

1277. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $(1-x)(1+x)^3=x^2$

1278. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\dfrac{(x^2-x+1)^2}{x^4-x^3+x^2-x-1}=\dfrac{9}{13}$.

418. **Ἀντίστροφοι ἐξισώσεις τοῦ πέμπτου βαθμοῦ.** ***Πρώτη μορφή.*** Ἡ πρώτη μορφὴ τῶν ἀντιστρόφων ἐξισώσεων τοῦ πέμπτου βαθμοῦ εἶναι:

$$\alpha x^5+\beta x^4+\gamma x^3+\gamma x^2+\beta x+\alpha=0$$

Τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς μηδενίζεται διὰ $x=-1$· ἄρα διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ $x+1$ καὶ δίδει πηλίκον

$$\alpha x^4+(\beta-\alpha)x^3+(\alpha-\beta+\gamma)x^2+(\beta-\alpha)x+\alpha$$

Ἐπομένως ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται

$$(x+1)[\alpha x^4+(\beta-\alpha)x^3+(\alpha-\beta+\gamma)x^2+(\beta-\alpha)x+\alpha]=0.$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν προκύπτουν αἱ ἐξισώσεις

$x+1=0$ (1), $\alpha x^4+(\beta-\alpha)x^3+(\alpha-\beta+\gamma)x^2+(\beta-\alpha)x+\alpha=0$ (2)

Ἡ ρίζα τῆς (1) εἶναι $x=-1$. Ἡ ἐξίσωσις (2) εἶναι ἀντίστροφος ἐξίσωσις τοῦ τετάρτου βαθμοῦ, τὴν ὁποίαν γνωρίζομεν νὰ λύσωμεν.

Δευτέρα μορφή. Ἡ δευτέρα μορφὴ τῶν ἐξισώσεων τοῦ πέμπτου βαθμοῦ εἶναι

$$\alpha x^5+\beta x^4+\gamma x^3-\gamma x^2-\beta x-\alpha=0$$

Τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εἶναι διαιρετὸν διὰ $x-1$ καὶ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις δύναται νὰ γραφῇ:

$$(x-1)[\alpha x^4+(\alpha+\beta)x^3+(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha]=0.$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν προκύπτουν αἱ ἐξισώσεις

$$x-1=0 \quad (1), \qquad \alpha x^4+(\alpha+\beta)x^3+(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha. \quad (2)$$

Ἡ ρίζα τῆς (1) εἶναι $x=1$. Ἡ ἐξίσωσις (2) εἶναι ἀντίστροφος ἐξίσωσις τοῦ τετάρτου βαθμοῦ, τὴν ὁποίαν γνωρίζομεν νὰ λύσωμεν.

Σημ. Ἡ λύσις τῶν ἀντιστρόφων ἐξισώσεων ἑνὸς βαθμοῦ ἀνωτέρου τοῦ πέμπτου δὲν δύναται, γενικῶς, νὰ ἀναχθῇ εἰς τὴν λύσιν τῶν ἐξισώσεων τοῦ δευτέρου βαθμοῦ.

Ἀσκήσεις. *1279.* Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^5-4x^4+3x^3+3x^2-4x+1=0$.

1280. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $2x^5-3x^4-5x^3+5x^2+3x-2=0$.

1281. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^5-8x^4-2x^3+2x^2+8x-1=0$.

1282. Νὰ ὁρισθῇ ἡ τιμὴ τοῦ λ, ἵνα ἡ ἐξίσωσις

$$(\lambda-1)x^5+3\lambda x^4-(\lambda+1)x^3-(\lambda+1)x^2+3\lambda x+\lambda-1=0$$

ἔχῃ ὡς ρίζαν τὸν ἀριθμὸν $+2$ καὶ νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις, ποὺ θὰ προκύψῃ, ὅταν ἀντικαταστήσωμεν τὸ λ μὲ τὴν τιμήν του αὐτήν.

Γ΄. ΔΙΩΝΥΜΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

419. Διώνυμοι ἐξισώσεις. Δυώνυμος ἐξίσωσις λέγεται κάθε ἐξίσωσις, ἡ ὁποία δύναται νὰ λάβῃ τὴν γενικὴν μορφὴν

$$\boxed{\alpha x^\mu+\beta=0} \qquad (1)$$

ὅπου α εἶναι πάντοτε διάφορον τοῦ μηδενός.

Ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται $x^\mu=-\frac{\beta}{\alpha}$. (2)

καὶ αἱ ρίζαι της εἶναι αἱ μυοσταὶ ρίζαι τοῦ $-\frac{\beta}{\alpha}$.

Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις:

1ον. Τὸ μ εἶναι ἄρτιος. Ἐὰν $-\frac{\beta}{\alpha}>0$, ἡ ἐξίσωσις (2) ***ἔχει δύο*** ρίζας πραγματικὰς καὶ συμμετρικάς, $x=\pm\sqrt[\mu]{-\frac{\beta}{\alpha}}$.

Ἐὰν $-\frac{\beta}{\alpha}<0$, ἡ ἐξίσωσις ***δὲν ἔχει ρίζας πραγματικάς.***

2ον. Τὸ μ εἶναι περιττός. Ἡ ἐξίσωσις (2) ***ἔχει πάντοτε μίαν ρίζαν πραγματικήν,*** $x=\sqrt[\mu]{-\frac{\beta}{\alpha}}$.

420. **Παρατήρησις.** Κάθε διώνυμος ἐξίσωσις τῆς μορφῆς $\alpha x^\mu \pm \beta = 0$ (1) δύναται νὰ ἀναχθῇ εἰς τὴν μορφὴν

$$y^\mu \pm 1 = 0.$$

Πράγματι· ἐὰν διαιρέσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως (1) διὰ α, τὸ ὁποῖον εἶναι πάντοτε διάφορον τοῦ μηδενός, λαμβάνομεν

$$x^\mu \pm \frac{\beta}{\alpha} = 0.$$

Ἐὰν θέσωμεν $\frac{\beta}{\alpha} = k^\mu$, ἡ τελευταία ἐξίσωσις γράφεται

$$x^\mu \pm k^\mu = 0 \quad \text{ἢ} \quad \frac{x^\mu}{k^\mu} \pm 1 = 0 \quad \text{ἢ} \quad \left(\frac{x}{k}\right)^\mu \pm 1 = 0.$$

Ἐὰν θέσωμεν $\frac{x}{k} = y$ (2), ἡ τελευταία ἐξίσωσις γίνεται

$$y^\mu \pm 1 = 0 \qquad (3)$$

Ἐὰν γνωρίζωμεν τὰς ρίζας, πραγματικὰς ἢ φανταστικάς, τῆς ἐξισώσεως (3), δηλ. ἐὰν γνωρίζωμεν τὰς μυοστὰς ρίζας τῆς ± 1, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως (1), ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὰς ἐπὶ k, διότι ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω σχέσιν (2) λαμβάνομεν $x = ky$.

421. **Παραδείγματα.**

Παράδειγμα 1ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^3 - 1 = 0$ καὶ ἐξ αὐτῆς νὰ εὑρεθοῦν αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^3 - 64 = 0$.

1ον. Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις $x^3 - 1 = 0$ γράφεται

$$(x-1)(x^2+x+1) = 0$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν προκύπτουν αἱ ἐξισώσεις

$$x - 1 = 0 \quad (1), \qquad x^2 + x + 1 = 0 \qquad (2)$$

Ἡ ρίζα τῆς (1) εἶναι $x = 1$. Ἡ ἐξίσωσις (2) δὲν ἔχει ρίζας πραγματικάς· ἔχει τὰς φανταστικὰς ρίζας

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

Ὥστε αἱ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι

$$x' = 1, \quad x'' = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}, \qquad x''' = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}.$$

2ον. Ἐπειδὴ $64 = 4^3$ ἡ ἐξίσωσις $x^3 - 64 = 0$ γράφεται

$$x^3 - 4^3 - 0 \quad \text{ἢ} \quad \left(\frac{x}{4}\right)^3 - 1 = 0 \qquad (3)$$

Θέτομεν $\frac{x}{4} = y$ (4) καὶ ἡ (3) γίνεται $y^3 - 1 = 0$.

Αἱ τρεῖς κυβικαὶ ρίζαι τῆς μονάδος εἶναι:

$$y' = 1, \quad y'' = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}, \quad y''' = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}.$$

Ἀπὸ τὴν (4) ἔχομεν $x = 4y$. Πολλαπλασιάζομεν τὰς κυβικὰς ρίζας τῆς μονάδος ἐπὶ 4 καὶ εὑρίσκομεν, ὅτι αἱ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι

$$x_1=4, \quad x_2=2(-1-i\sqrt{3}), \quad x_3=2(-1+i\sqrt{3}).$$

Παράδειγμα 2ον. **Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις** $x^4+1=0$.

Ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ δὲν ἔχει ρίζας πραγματικάς· ἂν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὰς φανταστικὰς ρίζας της ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: Προσθέτομεν καὶ ἀφαιροῦμεν τὸ $2x^2$ εἰς τὸ πρῶτον μέλος της καὶ ἔχομεν

$$x^4+1+2x^2-2x^2=0 \quad ἢ \quad (x^2+1)^2-2x^2=0$$

$$ἢ \quad [(x^2+1)+x\sqrt{2}]\,[(x^2+1)-x\sqrt{2}]=0.$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν προκύπτουν αἱ ἐξισώσεις

$$x^2+x\sqrt{2}+1=0, \quad (1) \qquad x^2-x\sqrt{2}+1=0. \quad (2)$$

Αἱ ρίζαι τῆς (1) εἶναι $x=\dfrac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{2-4}}{2}=\dfrac{-\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}}{2}.$

Αἱ ρίζαι τῆς (2) εἶναι $x=\dfrac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2-4}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}}{2}.$

Ἀσκήσεις. *1283.* Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^3\pm 1=0$.

1284. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^3\pm 125=0$.

1285. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^3\pm 625=0$.

1286. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^5\pm 1=0$.

1287. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^6\pm 1=0$.

1288. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^8\pm 1=0$.

1289. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^{10}\pm 1=0$.

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΟΥ ΤΥΠΟΥ ΤΟΥ MOIVRE ΕΙΣ ΤΗΝ ΛΥΣΙΝ ΤΩΝ ΔΥΩΝΥΜΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

422. **Λύσις τῆς δυωνύμου ἐξισώσεως $x^\nu-1=0$.** Ἔστω x μία νυοστὴ ρίζα τῆς μονάδος, δηλ. μία λύσις τῆς δυωνύμου ἐξισώσεως

$$x^\nu=1. \tag{1}$$

Ἐὰν θέσωμεν

$$x=\rho(\sigma\upsilon\nu\omega+i\eta\mu\omega) \tag{2}$$

ἡ ἐξίσωσις (1) λαμβάνει τὴν μορφὴν

$$[\rho(\sigma\upsilon\nu\omega+i\eta\mu\omega)]^\nu=1 \quad ἢ \quad \rho^\nu(\sigma\upsilon\nu\,\nu\omega+i\eta\mu\,\nu\omega)=1.$$

Διὰ νὰ ὑφίσταται ἡ ἰσότης αὐτὴ πρέπει νὰ εἶναι

$$\rho^\nu=1, \quad (3) \qquad \sigma\upsilon\nu\,\nu\omega=1, \quad (4) \qquad \eta\mu\,\nu\omega=0.$$

Ἀπὸ τὴν ἰσότητα (3) λαμβάνομεν $\rho=1$.

Ἐπειδὴ $1=\sigma\upsilon\nu 2k\pi$, ὅπου k τυχὸν ἀκέραιος ἀριθμός, ἡ ἰσότης (4) γράφεται $\sigma\upsilon\nu\,\nu\omega=\sigma\upsilon\nu 2k\pi$.

Ἀπὸ τὴν ἰσότητα αὐτὴν λαμβάνομεν

$$\nu\omega=2k\pi \quad ἄρα \quad \omega=\frac{2k\pi}{\nu}.$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (2) τὰ ρ καὶ ω μετὰ τὰ ἴσα των 1 καὶ $\frac{2k\pi}{\nu}$ καὶ εὑρίσκομεν

$$\boxed{x=\sigma\upsilon\nu\frac{2k\pi}{\nu}+i\,\eta\mu\frac{2k\pi}{\nu}.} \qquad (5)$$

Ὁ τύπος αὐτὸς δίδει ὅλας τὰς νυοστὰς ρίζας τῆς μονάδος.

Ἐὰν θέσωμεν εἰς τὸν τύπον (5)

$$k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots,\ (\nu-1).$$

λαμβάνομεν ν διαφόρους τιμὰς τοῦ x, αἱ ὁποῖαι εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $$x^\nu-1=0.$$

Ὥστε: ***ἡ μονὰς ἔχει ν νυοστὰς ρίζας διαφόρους.***

Ἐὰν λάβωμεν $k=0$, ὁ τύπος (5) δίδει $x=\sigma\upsilon\nu 0+i\,\eta\mu 0$.

Ἐπειδὴ $\sigma\upsilon\nu 0=1$ καὶ $\eta\mu 0=0$ ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται $$x=1.$$

Ὥστε, ἐὰν $k=0$ ὁ τύπος (5) δίδει τὴν πραγματικὴν ρίζαν $x=1$.

Ἐὰν ὁ ν εἶναι ἄρτιος, ἡ ἐξίσωσις (1) ἔχει καὶ μίαν δευτέραν πραγματικὴν ρίζαν, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν τιμὴν $k=\frac{\nu}{2}$.

423*. Παράδειγμα. *Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^3=1$.

Γνωρίζομεν, ὅτι ὅλαι αἱ νυοσταὶ ρίζαι τῆς μονάδος δίδονται ὑπὸ τοῦ τύπου $$x=\sigma\upsilon\nu\frac{2k\pi}{\nu}+i\,\eta\mu\frac{2k\pi}{\nu}.$$

Ἐδῶ εἶναι $\nu=3$ καὶ ἐπομένως ὁ προηγούμενος τύπος γράφεται

$$x=\sigma\upsilon\nu\frac{2k\pi}{3}+i\,\eta\mu\frac{2k\pi}{3}. \qquad (1)$$

Ἐὰν θέσωμεν $k=0$, ὁ τύπος (1) δίδει $x=\sigma\upsilon\nu 0^\circ+i\,\eta\mu 0^\circ$.

Ἐπειδὴ $\sigma\upsilon\nu 0^\circ=1$ καὶ $\eta\mu 0^\circ=0$ ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται $$x=1.$$

Ἐὰν θέσωμεν $k=1$, ὁ τύπος (1) δίδει $x=\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}+i\,\eta\mu\frac{2\pi}{3}$. (2)

Ἐπειδὴ $\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}=\sigma\upsilon\nu 120^\circ=-\frac{1}{2}$ καὶ $\eta\mu\frac{2\pi}{3}=\eta\mu 120^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

ἡ προηγουμένη ἰσότης (2) γίνεται

$$x=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}.$$

Ἐὰν θέσωμεν $k=2$, ὁ τύπος (1) δίδει

$$x=\sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{3}+i\,\eta\mu\frac{4\pi}{3}. \qquad (3)$$

Ἐπειδὴ $$\sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{3}=\sigma\upsilon\nu 240^\circ=-\sigma\upsilon\nu 60^\circ=-\frac{1}{2}$$

καὶ $$\eta\mu\frac{4\pi}{3}=\eta\mu 240^\circ=-\eta\mu 60^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

ἡ ἰσότης (3) γίνεται

$$x=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

Ὥστε αἱ τρεῖς ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^3=1$ εἶναι

$$x_1=1,\quad x_2=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2},\quad x_3=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

***424.* Παρατήρησις.** Ἐὰν εἰς τὸν τύπον

$$x=\text{συν}\,\frac{2k\pi}{\nu}+i\,\text{ημ}\,\frac{2k\pi}{\nu}. \qquad (1)$$

θέσωμεν $k=1$, θὰ εὕρωμεν μίαν ἀπὸ τὰς ν νυοστὰς ρίζας τῆς μονάδος, ἔστω τὴν x_1· δηλ. ἔστω ὅτι εἶναι

$$x_1=\text{συν}\,\frac{2\pi}{\nu}+i\,\text{ημ}\,\frac{2\pi}{\nu}.$$

Ἐὰν τώρα θέσωμεν εἰς τὸν τύπον (1) $k=0,\ 1,\ 2,\ 3\ldots(\nu-1)$ εὑρίσκομεν εὐκόλως, ὅτι αἱ ν ρίζαι τῆς μονάδος 1, θὰ εἶναι

$$1,\quad x_1,\quad x_1^2,\quad x_1^3,\ \ldots\ldots\ x_1^{\nu-1}.$$

Τὰ ἀνωτέρω δυνάμεθα νὰ ἐπαληθεύσωμεν εἰς τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως $x^3=1$.

Εὑρήκαμεν ὅτι, ἡ πρώτη ρίζα τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εἶναι 1, ἡ δευτέρα ρίζα της εἶναι ἡ $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$· ἡ τρίτη ρίζα της πρέπει νὰ εἶναι ἡ $\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^2$.

Πράγματι εἶναι

$$\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^2=\frac{1-2\sqrt{-3}-3}{4}=\frac{-2-2\sqrt{-3}}{4}=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

ὅπως πράγματι συμβαίνει.

***425.* Λύσις τῆς δυωνύμου ἐξισώσεως** $x^\nu+1=0$. Ἔστω x μία νυοστὴ ρίζα τῆς ἀρνητικῆς μονάδος, δηλ. μία λύσις τῆς δυωνύμου ἐξισώσεως

$$x^\nu=-1 \qquad (1)$$

Ἐὰν θέσωμεν

$$x=\rho(\text{συν}\omega+i\,\text{ημ}\omega) \qquad (2)$$

ἡ ἐξίσωσις (1) λαμβάνει τὴν μορφὴν

$$[\rho(\text{συν}\,\omega+i\,\text{ημ}\,\omega)]^\nu=-1 \quad \text{ἢ} \quad \rho^\nu(\text{συν}\,\nu\omega+i\,\text{ημ}\,\nu\omega)=-1$$

Διὰ νὰ ὑφίσταται ἡ τελευταία σχέσις πρέπει νὰ εἶναι

$\rho^\nu=1$ (3), $\quad$ συν $\nu\omega=-1$ (4), $\quad$ ημ $\nu\omega=0$ (5).

Ἀπὸ τὴν ἰσότητα (3) λαμβάνομεν $\rho=1$.

Ἐπειδὴ $-1=\text{συν}(2k+1)\pi$, ὅπου k τυχὸν ἀκέραιος ἀριθμός, ἡ ἰσότης (4) γράφεται συν $\nu\omega=\text{συν}(2k+1)\pi$.

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν λαμβάνομεν

$$\nu\omega=(2k+1)\pi,\quad \text{ἄρα}\quad \omega=\frac{(2k+1)\pi}{\nu}.$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (2) τὰ ρ καὶ ω μὲ τὰ ἴσα των

καὶ ἔχομεν $$\boxed{x = \text{συν}\,\frac{(2k+1)\,\pi}{\nu} + i\,\text{ημ}\,\frac{(2k+1)\pi}{\nu}} \qquad (6)$$

Ὁ τύπος (6) δίδει ὅλας τὰς ν νυοστὰς ρίζας τῆς ἀρνητικῆς μονάδος.

Ἐὰν θέσωμεν εἰς τὸν τύπον (6)

$$k = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots\ldots, (\nu - 1)$$

λαμβάνομεν ν διαφόρους τιμὰς τοῦ x, αἱ ὁποῖαι εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $$x^\nu + 1 = 0.$$

426. **Λύσις τῆς διωνύμου ἐξισώσεως** $x^\nu = A$. Ὅπως ἐδείξαμεν εἰς τὴν § 420, διὰ νὰ λύσωμεν μίαν ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς $x^\nu = A$, εὑρίσκομεν πρῶτον μίαν νυοστὴν ρίζαν τοῦ Α· ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν αὐτὴν τὴν νυοστὴν ρίζαν τοῦ Α ἐπὶ τὰς ν διαφόρους ρίζας τῆς μονάδος καὶ οὕτω ἔχομεν τὰς ν ρίζας τῆς ἐξισώσεως $x^\nu = A$.

Αἱ ν ρίζαι τῆς μονάδος, ὅπως ἐδείξαμεν εἰς τὴν § 424 εἶναι

$$1,\quad x_1,\quad x_1^2,\quad x_1^3, \ldots\ldots,\quad x_1^{\nu-1}$$

ὅπου $$x_1 = \text{συν}\,\frac{2\pi}{\nu} + i\,\text{ημ}\,\frac{2\pi}{\nu}.$$

Ἐὰν λοιπὸν ἡ νυοστὴ ρίζα τοῦ Α εἶναι α, αἱ ν ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^\nu = A$ θὰ εἶναι

$$\alpha,\quad \alpha x_1,\quad \alpha x_1^2,\quad \alpha x_1^3,\ \ldots\ldots,\quad \alpha x_1^{\nu-1}.$$

Ἐὰν ὁ Α εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς λαμβάνομεν τὴν ἀριθμητικὴν νυοστὴν ρίζαν τοῦ Α.

Ἐὰν ὁ Α εἶναι ἕνας φανταστικὸς ἀριθμός, τὸν θέτομεν ὑπὸ τὴν μορφὴν $$A = \rho(\text{συν}\varphi + i\,\text{ημ}\varphi).$$

Εἶναι εὔκολον νὰ ἴδωμεν, ὅτι δυνάμεθα νὰ λάβωμεν

$$\alpha = \rho^{\frac{1}{\nu}}\left(\text{συν}\,\frac{\varphi}{\nu} + i\,\text{ημ}\,\frac{\varphi}{\nu}\right)$$

ὅπου $\rho^{\frac{1}{\nu}}$ παριστάνει τὴν ἀριθμητικὴν νυοστὴν ρίζαν τοῦ μέτρου ρ.

Ἐὰν ὁ Α εἶναι ἕνας πραγματικὸς καὶ ἀρνητικὸς ἀριθμὸς —Β, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν $A = B(\text{συν}\pi + i\,\text{ημ}\pi)$

διότι $\text{συν}\pi = -1$ καὶ $\text{ημ}\pi = 0$, ὁπότε λαμβάνομεν

$$\alpha = B^{\frac{1}{\nu}}\left(\text{συν}\,\frac{\pi}{\nu} + i\,\text{ημ}\,\frac{\pi}{\nu}\right).$$

Δ'. ΤΡΙΩΝΥΜΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

427. **Τριώνυμοι ἐξισώσεις.** ***Τριώνυμος ἐξίσωσις*** λέγεται κάθε ἐξίσωσις, ἡ ὁποία δύναται νὰ ἀναχθῇ εἰς τὴν γενικὴν μορφὴν

$$\alpha x^k + \beta x^\nu + \gamma = 0.$$

Ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς δύναται νὰ ἀναχθῇ εἰς λύσιν μιᾶς ἐξισώσεως τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, ἐὰν εἶναι $k=2\nu$, δηλαδή, ἐὰν ἡ τριώνυμος ἐξίσωσις εἶναι τῆς μορφῆς

$$\boxed{\alpha x^{2\nu} + \beta x^\nu + \gamma = 0} \qquad (1).$$

Ἐὰν θέσωμεν $x^\nu = y$ (2), ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται

$$\alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0. \qquad (3)$$

Ἡ ἐξίσωσις (3) λέγεται ***ἐπιλύουσα*** τῆς ἐξισώσεως (1).

Ἐὰν ἡ ἐπιλύουσα ἔχῃ δύο ρίζας y' καὶ y'' πραγματικάς, δηλ. ἐὰν εἶναι $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$, τότε ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (2) τὸ y μὲ τὰς δύο τιμάς του y' καὶ y'' καὶ ἔχομεν νὰ λύσωμεν τὰς δύο δυωνύμους ἐξισώσεις $x^\nu = y'$ καὶ $x^\nu = y''$.

Αἱ ρίζαι τῶν δύο αὐτῶν δυωνύμων ἐξισώσεων εἶναι καὶ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως (1).

Παράδειγμα. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $3x^8 - 5x^4 + 2 = 0$.

Θέτομεν $x^4 = y$ (1) καὶ ἡ ἐπιλύουσα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι $3y^2 - 5y + 2 = 0$.

Αἱ ρίζαι τῆς ἐπιλυούσης εἶναι $y' = 1$ καὶ $y'' = \frac{2}{3}$.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (1) τὸ y μὲ τὰς τιμάς του καὶ ἔχομεν

$$x^4 = 1 \quad (2) \quad \text{καὶ} \quad x^4 = \frac{2}{3}. \qquad (3)$$

Αἱ ρίζαι τῶν ἐξισώσεων (2) καὶ (3) εἶναι ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

Αἱ πραγματικαὶ ρίζαι τῶν ἐξισώσεων (2) καὶ (3) εἶναι

$$x' = \pm 1 \quad \text{καὶ} \quad x'' = \pm\sqrt[4]{\frac{2}{3}}.$$

Ἀσκήσεις. 1290. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^6 - 28x^3 + 27 = 0$.

1291. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^6 - 91x^3 + 1728 = 0$.

1292. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^8 - 15x^4 - 16 = 0$.

Ε'. ΑΡΡΗΤΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

428. **Ἄρρητοι ἐξισώσεις.** Κάθε ἐξίσωσις, ἡ ὁποία ἔχει τὸν ἄγνωστον ἢ τοὺς ἀγνώστους ὑπὸ τὸ ριζικόν, λέγεται ***ἄρρητος ἐξίσωσις.***

Π.χ. αἱ ἐξισώσεις $\sqrt{x+5} = x - 1$, $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-3} = 5$, εἶναι ἄρρητοι ἐξισώσεις.

429. Θεώρημα. ***Ἐὰν ὑψώσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη μιᾶς ἐξισώσεως εἰς μίαν τυχοῦσαν δύναμιν, λαμβάνομεν μίαν νέαν ἐξίσωσιν, ἡ ὁποία ἔχει ὅλας τὰς ῥίζας τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, ἀλλὰ δὲν εἶναι γενικῶς, ἰσοδύναμος μὲ τὴν ἀρχικήν.***

I. *Ὕψωσις εἰς τὸ τετράγωνον.* Ἔστω ἡ ἐξίσωσις

$$A = B. \qquad (1)$$

Ἐὰν ὑψώσωμεν εἰς τὸ τετράγωνον καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (1) λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν $\qquad A^2 = B^2 \qquad (2)$

ἡ ὁποία δύναται νὰ γραφῇ :

$$A^2 - B^2 = 0 \quad \text{ἢ} \quad (A+B)(A-B) = 0.$$

Ὑπὸ τὴν μορφὴν αὐτήν, βλέπομεν ἀμέσως, ὅτι ἡ ἐξίσωσις (2) ἀληθεύει, ὄχι μόνον μὲ τὰς λύσεις τῆς ἐξισώσεως $A-B=0$, δηλαδὴ τῆς $A=B$, ἀλλὰ καὶ μὲ τὰς λύσεις τῆς ἐξισώσεως

$$A+B=0 \quad \text{ἢ} \quad A=-B.$$

Αἱ λύσεις τῆς ἐξισώσεως $A=-B$ εἶναι ***ξέναι λύσεις*** πρὸς τὰς λύσεις τῆς ἐξισώσεως $A=B$ καὶ ἐπομένως αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2) δὲν εἶναι γενικῶς ἰσοδύναμοι.

II. ***Ὕψωσις εἰς τυχοῦσαν δύναμιν***: Ἔστω ἡ ἐξίσωσις

$$A=B. \qquad (3)$$

Ἐὰν ὑψώσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως (3) εἰς τὴν μυοστὴν δύναμιν, λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$A^\mu = B^\mu \qquad (4)$$

ἡ ὁποία δύναται νὰ γραφῇ $A^\mu - B^\mu = 0$

ἢ $\qquad (A-B)(A^{\mu-1}+BA^{\mu-2}+B^2A^{\mu-3}+\ldots+B^{\mu-1})=0.$

Ὑπὸ τὴν μορφὴν αὐτὴν βλέπομεν, ὅτι ἡ ἐξίσωσις (4) ἔχει ὄχι μόνον τὰς λύσεις τῆς ἐξισώσεως (3), ἀλλὰ καὶ τὰς λύσεις τῆς ἐξισώσεως $\qquad A^{\mu-1}+BA^{\mu-2}+B^2A^{\mu-3}+\ldots+B^{\mu-1}=0.$

Ἐν τούτοις, ὅταν ὁ ἐκθέτης ***μ εἶναι περιττός,*** αἱ ἐξισώσεις

$$A=B \quad \text{καὶ} \quad A^\mu = B^\mu$$

εἶναι ἰσοδύναμοι· διότι, ἐὰν δύο ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι ἴσοι, αἱ περιτταὶ δυνάμεις των εἶναι ἴσαι καὶ ἀντιστρόφως, ἐὰν αἱ περιτταὶ δυνάμεις δύο ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἴσαι καὶ αἱ μυοσταὶ ῥίζαι των εἶναι ἴσαι (κατ᾽ ἀπόλυτον τιμὴν καὶ κατὰ τὸ σημεῖον).

430. Λύσεις ἀρρήτων ἐξισώσεων. Διὰ νὰ λύσωμεν μίαν ἄρρητον ἐξίσωσιν προσπαθοῦμεν νὰ ἐξαλείψωμεν τὰ ῥιζικά, ὑψώνοντες καὶ τὰ δύο μέλη της εἰς μίαν δύναμιν, τὴν ὁποίαν ὁρίζει ὁ δείκτης τοῦ ῥιζικοῦ. Ἡ ῥητὴ ἐξίσωσις, ποὺ θὰ προκύψῃ λέγεται ***ἐπιλύουσα*** τῆς δοθείσης ἀρρήτου ἐξισώσεως.

Ἔπειτα εὑρίσκομεν τὰς ρίζας τῆς ἐπιλυούσης καὶ ἐξετάζομεν, ἐὰν αἱ εὑρεθεῖσαι αὐταὶ ρίζαι εἶνε ρίζαι καὶ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

Τὰ κάτωθι παραδείγματα θὰ μᾶς δειξουν τὸν τρόπον τῆς λύσεως τῶν ἀρρήτων ἐξισώσεων.

431 **Παράδειγμα 1ον.** ***Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις*** $x+\sqrt{5x+1}=7$.

Ἀπομονώνομεν τό ριζικὸν καὶ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται

$$\sqrt{5x+1}=7-x. \qquad (1)$$

Ὑψώνομεν εἰς τὸ τετράγωνον καὶ τὰ δύο μέλη της καὶ ἔχομεν

$$5x+1=(7-x)^2 \quad \text{ἢ} \quad 5x+1=49-14x+x^2$$

ἢ
$$x^2-19x+48=0.$$

Αἱ ρίζαι τῆς ἐπιλυούσης εἶναι $x'=3$, $x''=16$.

Ἐπαλήθευσις. Ἐξετάζομεν τώρα, ἐὰν αἱ ρίζαι $x'=3$ καὶ $x''=16$ τῆς ἐπιλυούσης εἶναι καὶ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

Ἐὰν λάβωμεν $x=3$, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις δίδει:

1ον μέλος$=3+\sqrt{5\cdot 3+1}=3+4=7$
2ον μέλος$=$ 7

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ ρίζα $x'=3$ δίδει τὴν αὐτὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν καὶ εἰς τὰ δύο μέλη τῆς δοθείσης· ἄρα ἡ ρίζα $x'=3$ εἶναι ρίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

Ἐὰν λάβωμεν $x=16$ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις δίδει

1ον μέλος$=16+\sqrt{5\cdot 16+1}=16+9=25$
2ον μέλος$=$ 7.

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ ρίζα $x''=16$ δὲν δίδει τὴν αὐτὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν καὶ εἰς τὰ δύο μέλη τῆς δοθείσης ἐξισώσεως· ἄρα ἡ ρίζα $x''=16$ δὲν εἶναι ρίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

Ἡ ρίζα $x''=16$ ἐπαληθεύει τὴν ἐξίσωσιν $x-\sqrt{5x+1}=7$ ἡ ὁποία λέγεται ***συζυγὴς*** τῆς δοθείσης ἐξισώσεως καὶ ἡ ὁποία προκύπτει ἀπὸ τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν, ἂν ἀλλάξωμεν τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται πρὸ τοῦ ριζικοῦ.

Σημ. Τὸ ὅτι ἡ ρίζα $x''=16$ δὲν εἶναι ρίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως φαίνεται καὶ ὡς ἑξῆς: Ἐπειδὴ τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως (1) εἶναι θετικόν, πρέπει νὰ εἶναι θετικὸν καὶ τὸ δεύτερον μέλος της, δηλ. πρέπει νὰ εἶναι $7-x>0$ ἢ $x<7$. (2)

Ἐπειδὴ ἡ τιμὴ $x=16$ δὲν ἐπαληθεύει τὴν σχέσιν (2) συνάγομεν, ὅτι ἡ τιμὴ $x=16$ δὲν εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως (1), ἄρα καὶ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

Ἀσκήσεις. *1293.* Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x+\sqrt{2(x+1)}=11$.

1294. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $2x+\sqrt{5-4x}=2{,}5$.

1295. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $3x+\sqrt{7x^2-50x+79}=17$.

1296. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $13-\sqrt{4x^2+7x-8}=2x$.

1297. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $5x+13-\sqrt{3x^2+2x+1}=0$.

1298. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $2x-3-\sqrt{x^2-2x+6}=0$.

1299. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $2\alpha-x=3\sqrt{\alpha x-\alpha^2}$.

1300. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt{3x+7+3\sqrt{2x-4}}=7$.

1301. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt{1+x\sqrt{x^2+3}}=x-1$.

1302. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt{1-\sqrt{x^4-x^2}}=x-1$.

1303. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt{2x+\sqrt{6x^2+1}}=x+1$.

1304. Μετὰ 3 ἔτη ἡ ἡλικία ἑνὸς θὰ εἶναι τὸ τέλειον τετράγωνον ἑνὸς ἀριθμοῦ. Πρὸ 3 ἐτῶν ἡ ἡλικία του ἦτο ἀκριβῶς ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ αὐτοῦ τετραγώνου. Ποία ἦτο ἡ ἡλικία του;

432. Παράδειγμα 2ον. ***Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις*** $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x-3}=2$.

Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται $\sqrt{2x+1}=2+\sqrt{x-3}$ (1)

Ὑψώνομεν εἰς τὸ τετράγωνον καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (1) καὶ ἔχομεν

$$(\sqrt{2x+1})^2=(2+\sqrt{x-3})^2 \quad ἢ \quad 2x+1=4+4\sqrt{x-3}+x-3.$$

Ἀπομονώνομεν τὸ ριζικὸν καὶ ἔχομεν $x=4\sqrt{x-3}$. (2)

Ὑψώνομεν πάλιν εἰς τὸ τετράγωνον καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (2) καὶ ἔχομεν

$$x^2=16(x-3) \quad ἢ \quad x^2-16x+48=0 \tag{3}$$

Αἱ ρίζαι τῆς ἐπιλυούσης (3) εἶναι $x'=4$, $x''=12$.

Αἱ ρίζαι $x'=4$ καὶ $x''=12$ τῆς ἐπιλυούσης εἶναι καὶ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, ὡς εὐκόλως δυνάμεθα νὰ ἐπαληθεύσωμεν.

Ἀσκήσεις. 1305. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt{21+x}=\sqrt{28+2x}-1$.

1306. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}=1$.

1307. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}=1$.

1308. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt{36+x}=2+\sqrt{x}$.

1309. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt{2x+8}=7+\sqrt{x+5}$.

1310. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt{3x-5}=1+\sqrt{2x-5}$.

1311. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt{x+3\alpha^2}+\sqrt{x-2\alpha^2}=5\alpha$.

1312. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{1}}=1$.

1313. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt{2+\sqrt{x-5}}=\sqrt{13}-x$.

433. Παράδειγμα 3ον. ***Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις***

$$\sqrt{x+2}+2\sqrt{x-3}=\sqrt{x+42}$$

Ὑψώνομεν εἰς τὸ τετράγωνον καὶ τὰ δύο μέλη τῆς δοθείσης ἐξισώσεως καὶ ἔχομεν $(\sqrt{x+2}+2\sqrt{x-3})^2=(\sqrt{x+42})^2$

ἢ $$x+2+4\sqrt{(x+2)(x-3)}+4(x-3)=x+42$$

Ἐκτελοῦμεν πράξεις καὶ ἀπομονώνομεν τὸ ριζικὸν καὶ ἔχομεν

$$4\sqrt{(x+2)(x-3)}=52-4x \quad ἢ \quad \sqrt{(x+2)(x-3)}=13-x \tag{1}$$

Ὑψώνομεν εἰς τὸ τετράγωνον καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (1) καὶ ἔχομεν

$$(\sqrt{(x+2)(x-3)})^2=(13-x)^2 \quad ἢ \quad (x+2)(x-3)=169-26x+x^2$$

Ἐκτελοῦμεν πράξεις κλπ καὶ ἔχομεν $25x=175$, ἄρα $x=7$

Ἡ ρίζα $x=7$ εἶναι ρίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, ὡς δυνάμεθα νὰ ἐπαληθεύσωμεν εὐκόλως.

Ἀσκήσεις. 1314. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt{x+9}-\sqrt{x+2}=\sqrt{4x-27}$.

1315. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $4\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x-21}=3\sqrt{2x+27}$.

1316. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt{x^2+2x+3}-\sqrt{x^2-2x+3}=\sqrt{x^2-9}$.

1317. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt{x+6}+\sqrt{x+1}=\sqrt{7x+4}$.

1318. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-7}=\sqrt{x+5}+\sqrt{x-10}$.

1319. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x+2}=\sqrt{2x+5}+\sqrt{3x}$.

1320. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt{x+6}+\sqrt{x-10}=\sqrt{x+17}+\sqrt{x-15}$.

1321. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt{x+6}+\sqrt{x+3}=\sqrt{5-x}+\sqrt{3x+4}$.

1322. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt{3+\sqrt{x}}+\sqrt{4-\sqrt{x}}=\sqrt{7+2\sqrt{x}}$.

1323. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt{4x-3\alpha}-\sqrt{6\alpha+x}=\sqrt{x-3\alpha}$.

434. **Παράδειγμα 4ον.** ***Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις***

$$\sqrt{2x+1}+2\sqrt{x}=\frac{21}{\sqrt{2x+1}}.$$

Πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς δοθείσης ἐξισώσεως ἐπὶ $\sqrt{2x+1}$ καὶ ἔχομεν

$$(\sqrt{2x+1})^2+2\sqrt{x}\cdot\sqrt{2x+1}=21 \quad \text{ἢ} \quad 2x+1+2\sqrt{x(2x+1)}=21.$$

Ἀπομονώνομεν τὸ ριζικὸν καὶ ἔχομεν

$$2\sqrt{x(2x+1)}=20-2x \quad \text{ἢ} \quad \sqrt{x(2x+1)}=10-x. \qquad (1)$$

Ὑψώνομεν εἰς τὸ τετράγωνον καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (1) καὶ ἔχομεν

$$x(2x+1)=100-20x+x^2.$$

Ἐκτελοῦμεν πράξεις κλπ. καὶ εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$x^2+21x-100=0.$$

Αἱ ρίζαι τῆς ἐπιλυούσης (2) εἶναι $x'=4$ καὶ $x''=-25$.

Ἐκ τῶν τιμῶν $x'=4$, $x''=-25$, μόνον ἡ τιμὴ $x=4$ εἶναι ρίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, ὡς εὐκόλως δυνάμεθα νὰ ἐπαληθεύσωμεν. Ἡ ἄλλη τιμὴ $x=-25$ ἀποκλείεται, διότι καθιστᾷ ἀρνητικὰς τάς ὑπορρίζους ποσότητας τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

Ἀσκήσεις. Α' Ὁμάς. 1324. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$\sqrt{x}+\sqrt{x+2}=\frac{4}{\sqrt{x+2}}.$$

1325. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x+\sqrt{x^2+16}=\dfrac{40}{\sqrt{x^2+16}}$.

1326. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\dfrac{\sqrt{4x+20}}{4+\sqrt{x}}=\dfrac{4-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.

1327. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt{3x+1}=\dfrac{36}{\sqrt{3x+1}}-\sqrt{5x}$.

1328. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\dfrac{5}{x+\sqrt{x^2+5}}-\dfrac{5}{x-\sqrt{x^2+5}}=6$.

1329. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\dfrac{1}{1-\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{x^2}$.

1330. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}}+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}=4.$

1331. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\dfrac{1}{1-\sqrt{1-x}}-\dfrac{1}{1+\sqrt{1-x}}=\dfrac{\sqrt{3}}{x}.$

Β' Ομάς. 1332. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\dfrac{\sqrt{27x^2+4}+\sqrt{9x^2+5}}{\sqrt{27x^2+4}-\sqrt{9x^2+5}}=7.$

1333. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\dfrac{x+1+\sqrt{x^2+3x}}{x+1-\sqrt{x^2+3x}}=\dfrac{\sqrt{3x-2}+\sqrt{3x}}{\sqrt{3x-2}-\sqrt{3x}}.$

1334. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\dfrac{x+\sqrt{x^2-\alpha^2}}{x+\sqrt{x^2-\alpha^2}}=\dfrac{x}{\alpha}.$

1335. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\dfrac{\sqrt{\alpha+x}+\sqrt{\alpha-x}}{\sqrt{\alpha+x}-\sqrt{\alpha-x}}=\dfrac{\beta}{\alpha}.$

1336. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{\alpha}}{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}}=\dfrac{2+\sqrt{\beta}}{2-\sqrt{\beta}}.$

1337. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\dfrac{(1-\alpha x)\sqrt{1+\beta x}}{(1+\alpha x)\sqrt{1-\beta x}}=1.$

1338. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\dfrac{\alpha-x}{\sqrt{\alpha-x}}+\dfrac{x-\beta}{\sqrt{x-\beta}}=\sqrt{\alpha-\beta}.$

435. **Ἄρρητοι ἐξισώσεις μὲ δείκτην ριζικοῦ ἀνώτερον τοῦ 2.** Εἰς τὴν § 429 εἴδομεν, ὅτι αἱ ἐξισώσεις

$$A=B \quad \text{καὶ} \quad A^\mu=B^\mu$$

εἶναι ἰσοδύναμοι, ὅταν ὁ ἐκθέτης μ εἶναι ***περιττός***.

Ὥστε, διὰ νὰ λύσωμεν μίαν ἄρρητον ἐξίσωσιν, ἡ ὁποία ἔχει κυβικὰς ρίζας, ἀρκεῖ νὰ ἐξαλείψωμεν τὸ ριζικὸν μὲ μίαν ἢ περισσοτέρας ὑψώσεις εἰς τὸν κύβον. Αἱ ρίζαι τῆς ἐπιλυούσης εἶναι καὶ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

436. **Παραδείγματα.**

Παράδειγμα 1ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt[3]{x^3+28x^2}=4+x.$

Ὑψώνομεν εἰς τὸν κύβον καὶ τὰ δύο μέλη τῆς δοθείσης ἐξισώσεως καὶ ἔχομεν

$$\left(\sqrt[3]{x^3+28x^2}\right)^3=(4+x)^3 \quad \text{ἢ} \quad x^3+28x^2=4^3+3\cdot4^2\cdot x+3\cdot4\cdot x^2+x^3$$

ἢ $\quad x^3+28x^2-64-48x-12x^2-x^3=0 \quad$ ἢ $\quad 16x^2-48x-64=0$

ἢ $$x^2-3x-4=0. \qquad (1)$$

Αἱ ρίζαι τῆς ἐπιλυούσης (1) εἶναι $x'=-1$ καὶ $x''=4$. Ἄρα καὶ αἱ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι $x'=-1$ καὶ $x''=4$, ὡς εὐκόλως δυνάμεθα νὰ ἐπαληθεύσωμεν.

Παράδειγμα 2ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}+\sqrt[3]{\Gamma}=0.$

Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται

$$\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}=-\sqrt[3]{\Gamma}. \qquad (1)$$

Ὑψώνομεν εἰς τὸν κύβον καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (1) καὶ ἔχομεν

$$\left(\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}\right)^3=\left(-\sqrt[3]{\Gamma}\right)^3 \quad ἢ \quad A+B+3\sqrt[3]{A}\cdot\sqrt[3]{B}\left(\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}\right)=-\Gamma$$

ἢ $$A+B+\Gamma=-3\sqrt[3]{AB}\left(\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}\right).$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς αὐτὴν τὸ $\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}$ μὲ τὸ ἴσον του $-\sqrt[3]{\Gamma}$, ποὺ δίδει ἡ (1) καὶ ἔχομεν

$$A+B+\Gamma=-3\sqrt[3]{AB}\cdot\left(-\sqrt[3]{\Gamma}\right) \quad ἢ \quad A+B+\Gamma=3\sqrt[3]{AB\Gamma}. \qquad (2)$$

Ὑψώνομεν πάλιν εἰς τὸν κύβον καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (2) καὶ λαμβάνομεν·

$$\boxed{(A+B+\Gamma)^3=27\,A.B.\Gamma}$$

Ἡ τέλευταία ἐξίσωσις εἶναι ἡ ἐπιλύουσα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως καὶ τῆς ὁποίας αἱ ρίζαι ἐπαληθεύουν γενικῶς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν.

Ἐφαρμογή. **Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις** $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{x-3}+\sqrt[3]{x-4}=0.$

(Μαθημ. Σχολὴ Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν).

Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι τῆς μορφῆς $\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}+\sqrt[3]{\Gamma}=0$ (1)

ὅπου $A=x-2,\quad B=x-3,\quad \Gamma=x-4.$

Γνωρίζομεν, ὅτι ἡ ἐπιλύουσα τῆς (1) εἶναι $27A.B.\Gamma=(A+B+\Gamma)^3$.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς αὐτὴν τὰ A, B, Γ μὲ τὰ ἴσα των καὶ ἔχομεν

$$27(x-2(x-3)(x-4)=[(x-2)+(x-3)+(x-4)]^3$$

ἢ $27(x-2)(x-3)(x-4)=(3x-9)^3$ ἢ $27(x-2)(x-3)(x-4)=27(x-3)^3$

ἢ $(x-3)[(x-2)(x-4)-(x-3)^2]=0$ ἢ $(x-3)(-1)=0$, ἄρα $x=3$.

Ἀσκήσεις. Α' Ὁμάς. ***1339.*** Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x+1-\sqrt[3]{x^3+1}=0.$

1340. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt[3]{x^3+9x^2}=3+x.$

1341. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt[3]{13x+1}=x+1.$

1342. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt[4]{x^4-4x^3+4}=x-1.$

Β' Ὁμάς. ***1343.*** Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x}=0,$

1344. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-3}=0.$

1345. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[3]{5x}.$

1346. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt[3]{12(x-1)}-\sqrt[3]{2x-3}=\sqrt[3]{x}.$

1347. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt[3]{x+12}-\sqrt[3]{x-14}=2.$

1348. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt[3]{72-x}-\sqrt[3]{16-x}=2.$

1349. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt[3]{x+3}-\sqrt[3]{x-4}=1$.

1350. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt[3]{x+21}+\sqrt[3]{14-x}=5$.

1351. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt[3]{3\alpha+x}+\sqrt[3]{3\alpha-x}=\sqrt[3]{9\alpha}$.

1352. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt[3]{\alpha+x}+\sqrt[3]{\alpha-x}=\sqrt[3]{\beta}$.

1353. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt[3]{\alpha+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{\alpha-\sqrt{x}}=\sqrt[3]{5\alpha}$.

1354. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt[3]{\alpha+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{\alpha-\sqrt{x}}=\beta$.

437. **Χρῆσις βοηθητικοῦ ἀγνώστου.** Πολλαὶ ἄρρητοι ἐξισώσεις λύονται εὐκολώτερον μὲ τὴν χρῆσιν βοηθητικοῦ ἀγνώστου. Τὰ κάτωθι παραδείγματα θὰ μᾶς δώσουν τὸν τρόπον τῆς λύσεως τῶν τοιούτων ἐξισώσεων.

Παράδειγμα 1ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$2x^2+3x+\sqrt{2x^2+3x+9}=33.$$

Θέτομεν $2x^2+3x=y$ (1) καὶ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται

$$y+\sqrt{y+9}=33 \quad \text{ἢ} \quad \sqrt{y+9}=33-y \qquad (2)$$

Ὑψώνομεν εἰς τὸ τετράγωνον καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (2) καὶ ἔχομεν

$$(\sqrt{y+9})^2=(33-y)^2$$

$$y+9=1089-66y+y^2 \quad \text{ἢ} \quad \chi^2-67y+1080=0 \qquad (3).$$

Αἱ ρίζαι τῆς ἐπιλυούσης (3) εἶναι $y'=27$ καὶ $y''=40$.

Μόνον ἡ ρίζα $y=27$ εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως (2).

Πράγματι, ἐπειδὴ τὸ πρῶτον μέλος τῆς (2) εἶναι θετικόν, πρέπει νὰ εἶναι θετικὸν καὶ τὸ δεύτερον μέλος της· δηλ. πρέπει νὰ εἶναι

$$33-y>0 \quad \text{ἢ} \quad y<33.$$

Ὥστε ἡ ἄλλη ρίζα $y''=40$ ἀποκλείεται, ὡς μεγαλυτέρα τοῦ 33.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (1) τὸ y μὲ τὴν τιμήν του 27 καὶ ἔχομεν

$$2x^2+3x=27 \quad \text{ἢ} \quad 2x^2+3x-27=0.$$

Αἱ ρίζαι αὐτῆς εἶναι $x'=3$ καὶ $x''=-\frac{9}{2}$. Αἱ ρίζαι αὐταὶ εἶναι καὶ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, ὅπως δυνάμεθα εὐκόλως νὰ ἐπαληθεύσωμεν.

Παράδειγμα 2ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις :

$$\sqrt[3]{\frac{x+3}{5x+2}}+\sqrt[3]{\frac{5x+2}{x+3}}=\frac{13}{6}.$$

Θέτομεν $\sqrt[3]{\frac{x+3}{5x+2}}=y$ (1), ὁπότε $\sqrt[3]{\frac{5x+2}{x+3}}=\frac{1}{y}$

καὶ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται

$$y+\frac{1}{y}=\frac{13}{6} \quad \text{ἢ} \quad 6y^2-13y+6=0. \qquad (2)$$

Αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως (2) εἶναι $y' = \frac{2}{3}$ καὶ $y'' = \frac{3}{2}$.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (1) τὸ y μὲ τὰς τιμάς του καὶ λαμβάνομεν τὰς ἐξισώσεις

$$\sqrt[3]{\frac{x+3}{5x+2}} = \frac{2}{3} \quad (3), \qquad \sqrt[3]{\frac{x+3}{5x+2}} = \frac{3}{2} \quad (4).$$

Ὑψώνομεν εἰς τὸν κύβον καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως (3) καὶ ἔχομεν $\frac{x+3}{5x+2} = \frac{8}{27}$ ἢ $27(x+3)=8(5x+2)$

ἀπὸ τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν $x=5$.

Ὑψώνομεν εἰς τὸν κύβον καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως (4) καὶ ἔχομεν $\frac{x+3}{5x+2} = \frac{27}{8}$ ἢ $8(x+2)=27(5x+2)$

ἀπὸ τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν $x=-\frac{30}{127}$.

Ὥστε αἱ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι $x'=5$ καὶ $x''=-\frac{30}{127}$.

Ἀσκήσεις. ***Α' Ὁμάς.*** *1355.* Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $3\sqrt{x^2+x-2}=x^2+x$.

1356. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^2+3x-5\sqrt{x^2+3x+9}=5$.

1357. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $15x-2x^2-5=\sqrt{2x^2-15x+11}$.

1358. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^2+3=2\sqrt{x^2-2x+2}+2x$.

1359. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^2+2x+4\sqrt{x^2+2x-3}=8$.

1360. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^2+3-2\sqrt{x^2-2x+1}=23+2x$.

1361. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $(x+1)^2+5=5\sqrt{x^2+2x+2}$.

1362. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x(x+1)+3\sqrt{2x^2+6x+5}=25-2x$.

Β' Ὁμάς. *1363.* Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x-3=\frac{2}{\sqrt{x}}$.

1364. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $2\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}=5$.

1365. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $4\sqrt[3]{x}-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}=11$.

1366. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $5\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x^2}=33$.

1367. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $3\sqrt{1+x}+2\sqrt[4]{1+x}=8$.

1368. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $5x\sqrt{x}-3\sqrt[4]{x^3}=296$.

1369. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $(x+\sqrt{x})^4-(x+\sqrt{x})^2=159600$.

1370. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\frac{\sqrt{x^2-5x+6}}{2}=\frac{12-\sqrt{x^2-5x+6}}{\sqrt{x^2-5x+6}}$.

1371. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt{\frac{2x+2}{x+2}}-\sqrt{\frac{x+2}{2x+2}}=\frac{7}{12}$.

1372. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt[3]{\frac{3x+1}{x-3}}+\sqrt[3]{\frac{x-3}{3x+1}}=\frac{5}{2}$.

1373. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt[5]{\frac{16x}{x-1}}+\sqrt[5]{\frac{x-1}{16x}}=\frac{5}{2}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΙΝ ΕΠΙ ΤΩΝ ΑΡΡΗΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

1374. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $2x^2-5x=-\sqrt{x^2+20x-4}$.

1375. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^2-x+1=\sqrt{6x^2-2x+1}$.

1376. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $2x^2+\sqrt{x^2+9}=x^4-9$.

1377. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $2x+3\sqrt{x}=\sqrt{x^3}$.

Β' Ὁμάς. 1378. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $2\left(1+\frac{9}{x}\right)+3\sqrt{\frac{x+9}{x}}=14$.

1379. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt{x-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}=x$.

1380. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt{x(x+1)}+\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^3-x}}=\frac{5}{2}$.

1381. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}}+\frac{1}{\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}}=\sqrt{2(x^3+1)}.$$

1382. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{x+\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+\sqrt{3}}}+\frac{x-\sqrt{3}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-\sqrt{3}}}=\sqrt{x}.$$

1383. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\frac{2+x}{\sqrt{2}+\sqrt{2+x}}+\frac{2-x}{\sqrt{2}-\sqrt{2-x}}=\sqrt{2}$.

1384. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\frac{1+x-\sqrt{2x+x^2}}{1+x+\sqrt{2x+x^2}}=\alpha^3\cdot\frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{x}}{\sqrt{2+x}-\sqrt{x}}$.

1385. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=(\alpha+1)\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}$.

1386. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$\sqrt{(\beta-x)(\gamma-x)}+\sqrt{(\gamma-x)(\alpha-x)}+\sqrt{(\alpha-x)(\beta-x)}=0.$$

Γ' Ὁμάς. 1387. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$.

1388. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt[3]{x^3+1+\sqrt{x^2+x}}=x+1$.

1389 Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt[3]{(\alpha+x)^2}+4\sqrt[3]{(\alpha-x)^2}=5\sqrt[3]{\alpha^2-x^2}$.

1390. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt[3]{(\alpha+x)^2}-\sqrt[3]{\alpha^2-x^2}+\sqrt[3]{(\alpha-x)^2}=\sqrt[3]{\alpha}$.

1391. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt[3]{(x+\alpha)^2}+\mu\sqrt[3]{(x-\alpha)^2}=(\mu+1)\sqrt[3]{\alpha^2-x^2}$.

1392. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[6]{x^2-1}$.

(Πολυτεχνεῖον 1933)

1393. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt[3]{x-\alpha}+\sqrt[3]{x-\beta}+\sqrt[3]{x-\gamma}=0$.

1394. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\dfrac{\sqrt[3]{\alpha+x}-\sqrt[3]{\alpha-x}}{\sqrt[3]{\alpha+x}+\sqrt[3]{\alpha-x}}=\dfrac{x}{\alpha}$.

Δ΄ Ὁμάς. 1395. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=\dfrac{15}{8}\sqrt[3]{\dfrac{x}{15}}$.

1396. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\dfrac{\sqrt{8+x}+\sqrt{8-x}}{\sqrt{8+x}-\sqrt{8-x}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{32}{x}}$.

1397. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\dfrac{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}=\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{\dfrac{16}{x}}$.

1398. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}\cdot\sqrt[4]{\frac{1-x}{1+x}}+\sqrt[4]{\frac{1+x}{1-x}}=2\sqrt[4]{\frac{1-\alpha^2}{(1+\alpha)^2}}.$$

1399. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt[\nu]{(\alpha+x)^2}+2\sqrt[\nu]{(\alpha-x)^2}=3\sqrt[\nu]{\alpha^2-x^2}$.

1400. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha+x}}{x}+\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha+x}}{\alpha}=\dfrac{\sqrt[\nu]{x}}{\beta}$.

Ε΄. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΑΝΩΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΑΝΑΓΟΜΕΝΑΙ ΕΙΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

438 **Χρῆσις βοηθητικοῦ ἀγνώστου.** Πολλαὶ ἐξισώσεις, βαθμοῦ ἀνωτέρου τοῦ δευτέρου, δύνανται νὰ ἀναχθοῦν εἰς ἐξισώσεις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, ἂν χρησιμοποιήσωμεν βοηθητικὸν ἄγνωστον.

Διὰ τὴν λύσιν τῶν διτετραγώνων ἐξισώσεων ἐθέσαμεν $x^2=y$· διὰ τὴν λύσιν τῶν ἀντιστρόφων ἐξισώσεων ἐθέσαμεν $x\pm\dfrac{1}{x}=y$· διὰ τὴν λύσιν τῶν τριωνύμων ἐξισώσεων ἐθέσαμεν $x^\nu=y$.

Ἡ κατάλληλος ἐκλογὴ τοῦ ἀγνώστου εὐκολύνει κατὰ πολὺ τὴν λύσιν πολλῶν ἐξισώσεων, βαθμοῦ ἀνωτέρου τοῦ δευτέρου, ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὰ κάτωθι παραδείγματα :

Παράδειγμα 1ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^2+x+1=\frac{42}{x^2+x}$.

Θέτομεν $x^2+x=y$ (1) καὶ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται

$$y+1=\frac{42}{y} \quad \text{ἢ} \quad y^2+y-42=0. \qquad (2)$$

Αἱ ρίζαι τῆς ἐπιλυούσης (2) εἶναι $y'=6$ καὶ $y''=-7$. Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (1) τὸ y μὲ τὰς τιμάς του καὶ ἔχομεν

$$x^2+x=6 \quad (3) \quad \text{καὶ} \quad x^2+x=-7. \qquad (4)$$

Ἡ ἐξίσωσις (3) γράφεται $x^2+x-6=0$ καὶ αἱ ρίζαι της εἶναι

$$x'=2 \quad \text{καὶ} \quad x''=-3.$$

Ἡ ἐξίσωσις (4) γράφεται $x^2+x+7=0$. Ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ δὲν ἔχει ρίζας πραγματικάς· αἱ φανταστικαί της ρίζαι εἶναι $x=\frac{-1\pm 3i\sqrt{3}}{2}$.

Ὥστε αἱ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι

$$-3, \quad 2, \quad \text{καὶ} \quad \frac{-1\pm 3i\sqrt{3}}{2}.$$

Παράδειγμα 2ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$(x^2+x+2)^4-32x^2(x^2+x+2)^2+256x^4=0.$$

Διαιροῦμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς δοθείσης ἐξισώσεως διὰ x^4 καὶ ἔχομεν

$$\left(\frac{x^2+x+2}{x}\right)^4-32\left(\frac{x^2+x+2}{x}\right)^2+256=0. \qquad (1)$$

Θέτομεν $\left(\frac{x^2+x+2}{x}\right)^2=y$ (2) καὶ ἡ (1) γράφεται

$$y^2-32y+256=0.$$

Αἱ ρίζαι τῆς ἐπιλυούσης εἶναι $y=16$ (διπλῆ ρίζα).

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (2) τὸ y μὲ τὴν τιμήν του καὶ ἔχομεν

$$\left(\frac{x^2+x+2}{x}\right)^2=16, \quad \text{ἄρα} \quad \frac{x^2+x+2}{x}=\pm 4.$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν λαμβάνομεν τὰς ἐξισώσεις

$$\frac{x^2+x+2}{x}=4 \quad \text{καὶ} \quad \frac{x^2+x+2}{x}=-4.$$

Ἡ πρώτη γράφεται $x^2-3x+2=0$ καὶ ἔχει ρίζας $x'=1$ καὶ $x''=2$.

Ἡ δευτέρα γράφεται $x^2+5x+2=0$ καὶ ἔχει ρίζας $x=\frac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$.

Ὥστε αἱ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι 1, 2 καὶ $\frac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$.

Παράδειγμα 3ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^4-4x^3-23x^2+54x+72=0$.

Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται

$$(x^4-4x^3+4x^2)-(27x^2-54x)+72=0 \quad \text{ἢ} \quad (x^2-2x)^2-27(x^2-2x)+72=0. \quad (1)$$

Θέτομεν $x^2-2x=y$ (2) καὶ ἡ (1) γράφεται $y^2-27y+72=0$.

Αἱ ρίζαι τῆς ἐπιλυούσης εἶναι $y'=3$ καὶ $y''=24$. Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (2) τὸ y μὲ τὰς τιμάς του καὶ ἔχομεν

$$x^2-2x=3 \quad (3) \quad \text{καὶ} \quad x^2-2x=24. \qquad (4)$$

Ἡ ἐξίσωσις (3) γράφεται $x^2-2x-3=0$ καὶ αἱ ρίζαι της εἶναι

$$x'=3, \quad x''=-1.$$

Ἡ ἐξίσωσις (4) γράφεται $x^2-2x-24=0$ καὶ αἱ ρίζαι της εἶναι $x'=-4$, $x''=6$. Ὥστε αἱ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι

$$x_1=-4, \quad x_2=-1, \quad x_3=3, \quad x_4=6.$$

Ἀσκήσεις. Α' Ὁμάς. *1401.* Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις
$$3(2x-1)^2-2(2x-1)=65.$$
1402. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $(x^2-3x)^2+3(x^2-3x)+2=0.$
1403. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $(x^2-3x)^2-(x^2-3x)-6=0.$
1404. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $(x^2+7x)+5(x^2+7x)-84=0.$
1405. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $(x^2-7x+13)^2-6(x^2-7x+13)+5=0.$
1406. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $(2x^2+3x-1)^2-5(2x^2+3x+3)+24=0.$
1407. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $(x^2-10x+26)^2-11(x^2-10x+26)+30=0.$
1408. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $(x^4+x^2+1)^2-38(x^4+x^2+1)+105=0.$
1409. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $(x^2-x+1)^4-10x^2(x^2-x+1)^2+9x^4=0.$
1410. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $(x^2-x+1)^4-6x^2(x^2-x+1)^2+5x^4=0.$
1411. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^2-x-18+\dfrac{72}{x^2-x}=0.$
1412. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $3\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)=4\left(x-\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{19}{4}.$
1413. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $(x-5)(x+14)(x+8)(x-11)=2992.$
1414. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $(x-5)(x-7)(x+6)(x+4)=504.$
1415. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\dfrac{(x^2+1)(x+1)^2+x^2}{x^2(x^2+1)+1}=x+\dfrac{1}{x}.$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'.

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΒΑΘΜΟΥ ΑΝΩΤΕΡΟΥ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ

I. ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΤΟΥ Β' ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

440. Συστήματα ἐξισώσεων τοῦ δευτέρου βαθμοῦ. Ἕνα σύστημα δύο ἢ περισσοτέρων ἐξισώσεων εἶναι τοῦ ***δευτέρου βαθμοῦ,*** ὅταν μία τουλάχιστον ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις του εἶνε τοῦ δευτέρου βαθμοῦ.

Π. χ. τὰ συστήματα
$$\begin{cases} x+3y=2 \\ 2x^2-5xy=25 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+y^2+\omega^2=14 \\ x+y+\omega=6 \\ x-y+\omega=0 \end{cases}$$
εἶναι τοῦ δευτέρου βαθμοῦ.

Αἱ δύο γενικαὶ μορφαὶ ἑνὸς συστήματος δύο ἐξισώσεων τοῦ δευτέρου βαθμοῦ μὲ δύο ἀγνώστους εἶναι :
$$\mathrm{I}\begin{cases} \alpha x+\beta y+\gamma=0 \\ Ax^2+Bxy+\Gamma y^2+\Delta x+Ey+Z=0. \end{cases}$$
$$\mathrm{II}\begin{cases} \alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2+\delta x+\varepsilon y+\zeta=0 \\ Ax^2+Bxy+\Gamma y^2+\Delta x+Ey+Z=0. \end{cases}$$
441. Λύσις συστημάτων τῆς μορφῆς I. Διὰ νὰ λύσωμεν ἕνα

σύστημα τῆς μορφῆς I χρησιμοποιοῦμεν τὴν μέθοδον ἀπαλοιφῆς δι' ἀντικαταστάσεως.

Παράδειγμα 1ον. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} x+y=1 & (1) \\ xy=-20 & (2) \end{cases}$

Λύομεν τὴν πρωτοβάθμιον ἐξίσωσιν (1) πρὸς x καὶ ἔχομεν

$$x=1-y. \qquad (1')$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) τὸ x μὲ τὴν τιμήν του $1-y$ καὶ ἔχομεν

$$(1-y)y=-20 \quad \text{ἢ} \quad y-y^2=-20 \quad \text{ἢ} \quad y^2-y-20=0.$$

Αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εἶναι $y'=-4$ καὶ $y''=5$.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (1') τὸ y μὲ τὰς τιμάς του:

Ἐὰν λάβωμεν $y=-4$, ἡ (1') δίδει $x=5$ καὶ τὸ δοθὲν σύστημα ἔχει τὴν λύσιν $(x=5,\ y=-4)$.

Ἐὰν λάβωμεν $y=5$, ἡ (1') δίδει $x=-4$ καὶ τὸ δοθὲν σύστημα ἔχει τὴν λύσιν $(x=-4,\ y=5)$.

Σημ. Τὸ ἀνωτέρω σύστημα λύεται εὐκολώτερον ὡς ἑξῆς :

Ἐδῶ γνωρίζομεν τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενον τῶν ἀγνώστων x καὶ y· ἄρα οἱ x καὶ y εἶναι (§ 392) ρίζαι τῆς ἐξισώσεως

$$X^2-X-20=0.$$

Αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εἶναι 5 καὶ -4· ἄρα τὸ δοθὲν σύστημα ἔχει τὰς λύσεις $(5,\ -4)$, δηλ. εἶναι εἴτε $(x=5,\ y=-4)$, εἴτε $(x=-4,\ y=5)$.

Παράδειγμα 2ον. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$\text{I} \begin{cases} x+y=3 & (1) \\ x^2+y^2=29 & \end{cases}$$

Δυνάμεθα νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν (1) ὡς πρὸς ἕνα ἄγνωστον, ἔστω τὸ y, καὶ τὴν τιμήν του νὰ θέσωμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2), δηλ. νὰ ἐργασθῶμεν, ὅπως εἰς τὸ παράδειγμα 1ον.

Τὰ συστήματα ὅμως τῆς μορφῆς :

$$\begin{cases} x+y=\alpha \\ x^2+y^2=\beta^2 \end{cases}$$

λύονται εὐκολώτερον ὡς ἑξῆς :

Ὑψώνομεν εἰς τὸ τετράγωνον καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (1) καὶ ἔχομεν

$$x^2+y^2+2xy=9.$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς αὐτὴν τὸ x^2+y^2 μὲ τὴν τιμήν του 29, ποὺ δίδει ἡ (2), καὶ ἔχομεν $29+2xy=9$ ἢ $xy=-10$. (3)

Ἀντικαθιστῶμεν τὴν ἐξίσωσιν (2) μὲ τὴν (3) καὶ ἔχομεν νὰ λύσωμεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα :

$$\text{II} \begin{cases} x+y=3 & (1) \\ xy=-10 & (2') \end{cases}$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι γνωρίζομεν τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενον τῶν δύο ἀγνώστων x καὶ y· ἄρα οἱ x καὶ y εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως

$$X^2-3X-10=0.$$

Αἱ ρίζαι αὐτῆς εἶναι 5 καὶ -2. Ὥστε τὸ σύστημα II, ἄρα καὶ τὸ δοθέν, ἔχει τὴν λύσιν (—2, 5, δηλαδὴ εἶναι εἴτε $(x=-2,\ y=5)$, εἴτε $(x=5,\ y=-2)$.

Παράδειγμα 3ον. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$\begin{cases} 5x-y+1=0 & (1) \\ x^2+4xy-2y^2+8x+39=0. & (2) \end{cases}$$

Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν (1) πρὸς y καὶ ἔχομεν $y=5x+1$. $(1')$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) τὸ y μὲ τὴν τιμήν του αὐτὴν καὶ ἔχομεν $x^2+4x(5x+1)-2(5x+1)^2+8x+39=0$.

Ἐκτελοῦμεν πράξεις κλπ. καὶ εὑρίσκομεν $49x^2-12x-37=0$.

Αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εἶναι $x'=1$ καὶ $x''=-\dfrac{37}{49}$.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν $(1')$ τὸ y μὲ τὰς τιμάς του:

Ἐὰν λάβωμεν $x=1$, ἡ $(1')$ δίδει $y=6$ καὶ τὸ δοθὲν σύστημα ἔχει τὴν λύσιν $x=1,\ y=6$.

Ἐὰν λάβωμεν $x=-\dfrac{37}{49}$, ἡ $(1')$ δίδει $y=-\dfrac{136}{49}$ καὶ τὸ σύστημα ἔχει τὴν λύσιν $x=-\dfrac{37}{49},\ y=-\dfrac{136}{49}$.

Ἀσκήσεις. *1416.* Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα:

1. $\begin{cases} x+y=20 \\ xy=64 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 3x+5y=13 \\ 15xy=30 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} xy^2=144 \\ x+y^2=25 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x+y=\alpha \\ xy=\beta \end{cases}$

1417. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαστάσεις ἑνὸς ὀρθογωνίου, ἂν γνωρίζωμεν ὅτι ἡ περίμετρός του εἶναι 78 μ. καὶ τὸ ἐμβαδόν του 360 τ.μ.

1418. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα:

1. $\begin{cases} x^2+y^2=175 \\ x+y=10 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x^2+y^2=164 \\ x-y=2 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x^2-y^2=85 \\ x-y=5 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x^2+y^2=\alpha^2 \\ x+y=\beta \end{cases}$

1419. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα:

1. $\begin{cases} x-y=0{,}8 \\ 2xy=0{,}4 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 3x+2y=13 \\ 2x^2-3y^2+5y=16. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} (7+x)(6+y)=14 \\ 2x+3y=-7. \end{cases}$

1420. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα:

1. $\begin{cases} 2x+2y-10=0 \\ 7x^2+5xy-3y^2-2x-27=0. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x+3y=7 \\ 3x^2-4xy+y^2-2x+y+1=0. \end{cases}$

1421. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα:

1. $\begin{cases} x+y=\dfrac{5}{2} \\ \dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{35}{6} \end{cases}$ 2. $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=1. \\ x^2+y^2=52. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=79 \\ \dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{5}{2}. \end{cases}$

1422. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα:

1. $\alpha x-\gamma y=\beta x-\gamma xy=0$. 2. $x+y=\alpha x+\beta y=\alpha^2x^2-\beta^2y^2$.

1423. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα: $\begin{cases} \alpha y+\beta x=2\alpha\beta \\ (x+\alpha)(y-\beta)+(x-\alpha)(y+\beta)=3(y^2-\beta^2). \end{cases}$

1424. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα: $\begin{cases} (\alpha-\beta)x-2\beta y+\beta^2+2\alpha\beta-\alpha^2=0 \\ x^2+y^2-2\alpha x-(\alpha+\beta)y+\alpha^2+\alpha\beta-\beta^2=0 \end{cases}$

1425. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα: $y-x=2\beta, \quad \frac{x^2}{\alpha-\beta}+\frac{y^2}{\alpha+\beta}=x+y.$

1426. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα: $2\alpha x-xy=\alpha^2, \quad x+y=\frac{\alpha^2+6\alpha\beta+\beta^2}{2(\alpha+\beta)}.$

1427. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα: $x+y=6, \quad \frac{1}{\alpha-x}+\frac{1}{\alpha-y}=\frac{2}{\alpha-\beta}.$

Β 'Ομάς. 1428. Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀριθμοί, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ἄθροισμά των εἶναι 196 καὶ τὸ γινόμενόν των εἶναι 48 φορὰς μεγαλύτερον τοῦ ἀθροίσματός των.

1429 Νὰ εὑρεθῇ ἕνα κλάσμα ἰσοδύναμον μὲ $\frac{2}{3}$ καὶ τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ὅρων του εἶναι ἴσον μὲ 637.

1430. Νὰ χωρισθῇ ὁ ἀριθμὸς 25 εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε τὸ τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου τοῦ πρώτου καὶ τὸ πενταπλάσιον τοῦ τετραγώνου τοῦ δευτέρου νὰ ἔχουν ἄθροισμα 2253.

1431. Τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν εἶναι 45. Τὸ ἄθροισμα τοῦ λόγου των καὶ τοῦ ἀντιστρόφου λόγου των εἶναι 2,05. Ποῖοι εἶναι οἱ ἀριθμοί;

1432 Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ κάθετοι πλευραὶ ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου, ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν ὑποτείνουσαν 51 μέτρα καὶ τὸν λόγον $\frac{8}{10}$ τῶν καθέτων πλευρῶν.

1433. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ κάθετοι πλευραὶ ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου, ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν ὑποτείνουσαν 10 μέτρα καὶ ὅτι ἡ μία κάθετος πλευρά του εἶναι ἴση μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῆς ὑποτεινούσης καὶ τῆς ἄλλης καθέτου πλευρᾶς.

1434. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ κάθετοι πλευραὶ ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου ἐὰν γνωρίζωμεν τὸ ἐμβαδόν του 150 τετρ. μέτρα καὶ τὸν λόγον $\frac{3}{4}$ τῶν καθέτων πλευρῶν.

1435. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ κάθετοι πλευραὶ ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου, ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν ὑποτείνουσαν 50 μέτρα καὶ τὴν διαφορὰν 17 τῶν καθέτων πλευρῶν.

1436. Αἱ διαστάσεις ἑνὸς ὀρθογωνίου ἔχουν λόγον 4 πρὸς 9. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαστάσεις αὐταί, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον εἶναι ἰσοδύναμον μὲ ἕνα τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι 84 μέτ. καὶ τὸ ὕψος 42 μέτρα.

***442.* Λύσις συστημάτων τῆς μορφῆς II.** Ἡ λύσις ἑνὸς συστήματος τοῦ δευτέρου βαθμοῦ τῆς μορφῆς:

$$\text{II}\quad \begin{cases} \alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2+\delta x+\varepsilon y+\zeta=0 \\ \mathrm{A}x^2+\mathrm{B}xy+\Gamma y^2+\Delta x+\mathrm{E}y+\mathrm{Z}=0 \end{cases}$$

ἐξαρτᾶται γενικῶς ἀπὸ μίαν ἐξίσωσιν τοῦ τετάρτου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον, τὴν ὁποίαν δὲν δυνάμεθα νὰ λύσωμεν γενικῶς μὲ τὰς στοιχειώδεις μεθόδους. Τὰ κάτωθι παραδείγματα θὰ μᾶς δείξουν τὸν τρόπον τῆς λύσεως τῶν συστημάτων τῆς μορφῆς αὐτῆς.

Παράδειγμα 1ον. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα : (A) $\begin{cases} x^2+y^2=97 & (1) \\ xy=36 & (2) \end{cases}$

Πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (2) ἐπὶ 2 καὶ ἔχομεν

$$2xy=72. \qquad (2')$$

Προσθέτομεν κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2') καὶ ἔχομεν

$x^2+y^2+2xy=169$ ἢ $(x+y)^2=169$ ἢ $x+y=\pm13$. (3).

Ἀντικαθιστῶμεν τὴν ἐξίσωσιν (1) μὲ τὰς ἐξισώσεις (3) καὶ ἔχομεν νὰ λύσωμεν τὰ ἰσοδύναμα συστήματα :

$$(B) \begin{cases} x+y=13 \\ xy=36 \end{cases} \quad \text{καὶ} \quad (\Gamma) \begin{cases} x+y=-13 \\ xy=36. \end{cases}$$

Οἱ ἄγνωστοι x καὶ y τοῦ συστήματος (B) εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $X^2-13X+36=0$. Αἱ ρίζαι αὐτῆς εἶναι 4 καὶ 9 καὶ ἑπομένως τὸ σύστημα (B), ἄρα καὶ τὸ δοθέν, ἔχει τὴν λύσιν (4, 9)· δηλαδὴ εἶναι εἴτε $(x=4,\ y=9)$ εἴτε $(x=9,\ y=4)$.

Οἱ ἄγνωστοι x καὶ y τοῦ συστήματος (Γ) εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $X^2+13X+36=0$. Αἱ ρίζαι αὐτῆς εἶναι -4, -9 καὶ ἑπομένως τὸ σύστημα (Γ), ἄρα καὶ τὸ δοθέν, ἔχει τὴν λύσιν $(-4, -9)$· δηλ. εἶναι εἴτε $(x=-4,\ y=-9)$, εἴτε $(x=-9)$, $(y=-4)$.

Τὸ δοθὲν λοιπὸν σύστημα ἔχει τὰς λύσεις

$(x=4,\ y=9)$. $(x=9,\ y=4)$, $(x=-4,\ y=-9)$, $(x=-9,\ y=-4)$.

Παράδειγμα 2ον. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$\begin{cases} x^2+2xy-8y^2-6x+18y-7=0 & \Big|\ 5 & (1) \\ 2x^2-5xy-10y^2-3x+9y+7=0 & \Big|\ -4 & (2) \end{cases}$$

Γενικὴ μέθοδος. Ἐξαλείφομεν τὸ y^2 μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2). Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (1) ἐπὶ 5 καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (2) ἐπὶ -4 καὶ ἔχομεν

$$5x^2+10xy-40y^2-30x+90y-35=0$$
$$-8x^2+20xy+40y^2+12x-36y-28=0.$$

Προσθέτομεν κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις αὐτὰς καὶ ἔχομεν

$-3x^2+30xy-18x+54y-63=0$ ἢ $x^2-10xy+6x-18y+21=0$.

Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν ὡς πρὸς y καὶ ἔχομεν

$$(10x+18)y=x^2+6x+21 \quad \text{ἢ} \quad y=\frac{x^2+6x+21}{10x+13} \qquad (3)$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) τὸ **y** μὲ τὴν τιμήν του, ποὺ δίδει ἡ ἐξίσωσις (3) καὶ ἔχομεν

$$x^2+2x\cdot\frac{x^2+6x+21}{10x+18}-8\left(\frac{x^2+6x+21}{10x+18}\right)^2-6x+18\cdot\frac{x^2+6x+21}{10x+18}-7=0.$$

Ἐξαλείφομεν παρονομαστὰς κλπ. καὶ λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$x^4-10x^2+9=0. \qquad (4)$$

Ἡ ἐξίσωσις (4) μὲ τὴν ἐξίσωσιν (3) ἀποτελοῦν ἕνα σύστημα ἰσοδύναμον μὲ τὸ δοθέν.

Λύομεν τὴν διτετράγωνον ἐξίσωσιν (4), κατὰ τὰ γνωστά, καὶ εὑρίσκομεν, ὅτι αἱ τέσσαρες τιμαὶ τοῦ x εἶναι -1, $+1$, -3, $+3$.

Ἐὰν λάβωμεν $x=-1$, ἡ (3) δίδει $y=2$ καὶ τὸ σύστημα ἔχει τὴν λύσιν $(x=-1,\ y=2)$.

Ἐὰν λάβωμεν $x=1$, ἡ (3) δίδει $y=1$ καὶ τὸ σύστημα ἔχει τὴν λύσιν $(x=1,\ y=1)$.

Ἐὰν λάβωμεν $x=-3$, ἡ (3) δίδει $y=-1$ καὶ τὸ σύστημα ἔχει τὴν λύσιν $(x=-3,\ y=-1)$.

Τέλος ἐὰν λάβωμεν $x=3$, ἡ (3) δίδει $y=1$ καὶ τὸ σύστημα ἔχει τὴν λύσιν $(x=3,\ y=1)$.

Ὥστε τὸ δοθὲν σύστημα ἔχει τὰς λύσεις:

$(x=-1,\ y=2)$, $(x=1,\ y=1)$, $(x=-3,\ y=-1)$, $(x=3,\ y=1)$.

Ἀσκήσεις 1437. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα:

1. $\begin{cases} x^2-y^2=208 \\ xy=96 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x^2+y^2=29 \\ 6xy=60. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x^2+y^2=\alpha^2 \\ xy=\beta^2. \end{cases}$

1438. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} x^2-y^2+3y=0 \\ x^2+3xy+2y^2+2x+4y=0 \end{cases}$

1439. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=62 \\ x^2-y^2+x-y=50. \end{cases}$

1440. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} 3x^2+3y^2-11x-7y+10=0 \\ x^2+y^2-4x-4y+5=0. \end{cases}$

1441. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} x^2+y^2+3xy=4 \\ 2x^2+y^2+xy+y=28. \end{cases}$

1442. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} x^2-y^2-2x=0 \\ x^2+y^2+2xy-3y-3x=-3. \end{cases}$

1443. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} x^2-xy+\alpha y=0. \\ y^2-xy-4\alpha x=0. \end{cases}$

1444. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} x^2+y^2+3xy=11 \\ 2x^2+y^2+xy+y=0. \end{cases}$

1445. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ διαστάσεις ἑνὸς ὀρθογωνίου, ἐὰν ἡ διαγώνιός του εἶναι 17 μέτρα καὶ τὸ ἐμβαδόν του 120 τ. μέτρα.

1446. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ κάθετοι πλευραὶ ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου, ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν ὑποτείνουσάν του 25 μέτρα καὶ τὸ ἐμβαδόν του 150 τ. μ.

1447. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ κάθετοι πλευραὶ ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου, ἐὰν γνωρίζωμεν τὸ ἐμβαδόν του 24 τ. μ. καὶ τὴν διαφορὰν 28 τῶν τετραγώνων τῶν καθέτων πλευρῶν του.

1448. Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου εἶναι 360 τ. μ. Ἂν αὐξήσωμεν τὴν βάσιν του κατὰ 10 μέτρα καὶ ἐλαττώσωμεν τὸ ὕψος του κατὰ 6 μέτρα, τὸ τὸ ἐμβαδόν του δὲν μεταβάλλεται. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαστάσεις του.

443. Συμμετρικὰ συστήματα. Ἕνα σύστημα λέγεται ***συμμετρικὸν*** πρὸς τοὺς ἀγνώστους x καὶ y, ὅταν καὶ αἱ δύο ἐξισώσεις του εἶναι συμμετρικαὶ πρὸς x καὶ y.

Π. χ. τὰ συστήματα:

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2+x+y=\alpha \\ x+y+xy=\beta \end{aligned}\right\}, \qquad \left.\begin{aligned} x^4+x^2y^2+y^4=\alpha^2 \\ x^2+y^2+xy=\beta \end{aligned}\right\}$$

εἶναι συμμετρικὰ συστήματα.

Διὰ νὰ λύσωμεν ἕνα συμμετρικὸν σύστημα δευτέρου ἢ ἀνωτέρου βαθμοῦ, χρησιμοποιοῦμεν βοηθητικοὺς ἀγνώστους. Συνήθως παριστάνομεν, μὲ βοηθητικοὺς ἀγνώστους, τὸ ἄθροισμα $x+y$ τῶν ἀγνώστων x καὶ y, τὸ γινόμενόν των xy, τὸ x^2+y^2 κλπ. καὶ τελικῶς καταλήγομεν εἰς τὴν λύσιν τῶν γνωστῶν ἁπλῶν συμμετρικῶν συστημάτων:

$$\begin{cases} x+y=\alpha \\ xy=\beta \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+y^2=\alpha \\ xy=\beta \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+y^2=\alpha^2 \\ x+y=\beta \end{cases}$$

Τὰ κάτωθι παραδείγματα θὰ μᾶς δείξουν τὴν μέθοδον τῆς λύσεως συμμετρικῶν συστημάτων μὲ δύο ἀγνώστους.

Παράδειγμα 1ον. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} x+y+xy=41 \\ xy(x+y)=330. \end{cases}$

Τὸ δοθὲν σύστημα εἶναι συμμετρικὸν πρὸς x καὶ y· διὰ τοῦτο χρησιμοποιοῦμεν βοηθητικοὺς ἀγνώστους. Πρὸς τοῦτο θέτομεν

$$x+y=\varphi \quad \text{καὶ} \quad xy=\omega \qquad (1)$$

καὶ τὸ δοθὲν σύστημα γράφεται $\left.\begin{matrix} \varphi+\omega=41 \\ \varphi\omega=330 \end{matrix}\right\}(\alpha)$

Ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸ σύστημα (α), ἐδῶ γνωρίζομεν τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενον τῶν ἀγνώστων φ καὶ ω· ἄρα οἱ φ καὶ ω εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $k^2-41k+330=0$.

Αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εἶναι 11 καὶ 30.

Ὥστε τὸ σύστημα (α) ἔχει τὴν λύσιν (11, 30), δηλ. εἶναι, εἴτε

$$(\varphi=11,\ \omega=30), \quad \text{εἴτε} \quad (\varphi=30,\ \omega=11).$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὰς ἐξισώσεις (1) τὰ φ καὶ ω μὲ τὰς τιμάς των καὶ ἔχομεν νὰ λύσωμεν τὰ συστήματα

$$\left.\begin{matrix} x+y=11 \\ xy=30 \end{matrix}\right\}(\beta) \qquad \left.\begin{matrix} x+y=30 \\ xy=11 \end{matrix}\right\}(\gamma)$$

Λύομεν τὸ σύστημα (β). Οἱ ἄγνωστοι x καὶ y εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $t^2-11t+30=0$. Αἱ ρίζαι αὐτῆς εἶναι 5 καὶ 6 καὶ ἑπομένως τὸ σύστημα (β) ἔχει τὴν λύσιν (5, 6)· δηλαδὴ εἶναι, εἴτε $(x=5,\ y=6)$, εἴτε $(x=6,\ y=5)$.

Λύομεν καὶ τὸ σύστημα (γ). Οἱ ἄγνωστοι x καὶ y εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $t^2-30t+11=0$. Αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εἶναι $15\pm\sqrt{214}$ καὶ ἑπομένως τὸ σύστημα (γ) ἔχει τὴν λύσιν $(15-\sqrt{214},\ 15+\sqrt{214})$, δηλ. εἶναι εἴτε $(x=15-\sqrt{214},\ y=15+\sqrt{214})$, εἴτε $(x=15+\sqrt{214},\ y=15-\sqrt{214})$.

Ὥστε αἱ λύσεις τοῦ δοθέντος συστήματος εἶναι αἱ λύσεις τῶν συστημάτων (β) καὶ (γ), δηλ. αἱ

$$(5,\ 6) \quad \text{καὶ} \quad (15-\sqrt{214},\ 15+\sqrt{214}).$$

Παράδειγμα 2ον. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$\begin{cases} x^2+y^2+2(x+y)=23 \\ x^2+y^2+xy=19. \end{cases}$$

Θέτομεν $x+y=\varphi$ καὶ $xy=\omega$ (1), ὁπότε
$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=\varphi^2-2\omega$ καὶ τὸ δοθὲν σύστημα γίνεται

$$(\alpha)\left\{\begin{array}{ll}\varphi^2-2\omega+2\varphi=23 & (2)\\ \varphi^2-\omega=19. & (3)\end{array}\right.$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (3) λαμβάνομεν $\omega=\varphi^2-19.$ (3')

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) τὸ ω μὲ τὴν τιμήν του φ^2-19 καὶ λαμβάνομεν

$$\varphi^2-2(\varphi^2-19)+2\varphi=23 \quad ἢ \quad \varphi^2-2\varphi-15=0.$$

Αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εἶναι 5 καὶ -3.

Ἐὰν λάβωμεν $\varphi=5$, ἡ ἐξίσωσις (3') δίδει $\omega=6$ καὶ τὸ σύστημα (α) ἔχει τὴν λύσιν $(\varphi=5,\ \omega=6)$.

Ἐὰν λάβωμεν $\varphi=-3$, ἡ ἐξίσωσις (3') δίδει $\omega=-10$ καὶ τὸ σύστημα (α') ἔχει τὴν λύσιν $(\varphi=-3,\ \omega=-10)$.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὰς ἐξισώσεις (1) τὰ φ καὶ ω μὲ τὰς τιμάς των καὶ ἀγόμεθα εἰς τὴν λύσιν τῶν κάτωθι δύο συστημάτων

$$(\beta)\left\{\begin{array}{l}x+y=5\\ xy=6\end{array}\right. \quad καὶ \quad (\gamma)\left\{\begin{array}{l}x+y=-3\\ xy=-10.\end{array}\right.$$

Λύομεν τὸ σύστημα (β). Οἱ ἄγνωστοι x καὶ y εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $X^2-5X+6=0.$

Αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εἶναι 2 καὶ 3 καὶ ἐπομένως τὸ σύστημα (β) ἔχει τὴν λύσιν (2, 3), ἡ ὁποία εἶναι καὶ λύσις τοῦ δοθέντος συστήματος,

Λύομεν καὶ τὸ σύστημα (γ). Οἱ ἄγνωστοι x καὶ y εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $X^2+3X-10=0.$

Αἱ ρίζαι αὐτῆς εἶναι -5 καὶ 2 καὶ ἐπομένως τὸ σύστημα (γ) ἔχει τὴν λύσιν $(-5,\ 2)$, ἡ ὁποία εἶναι καὶ λύσις τοῦ δοθέντος συστήματος.

Ὥστε τὸ δοθὲν σύστημα, ἔχει τὰς λύσεις:

$(x=2,\ y=3)$, $(x=3,\ y=2)$, $(x=-5,\ y=2)$ καὶ $(x=2,\ y=-5)$.

Παράδειγμα 3ον. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\left\{\begin{array}{ll}x+y=7 & (1)\\ x^3+y^3=91. & (2)\end{array}\right.$

Ὑψώνομεν εἰς τὸν κύβον καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (1) καὶ ἔχομεν

$$x^3+3x^2y+3xy^2+y^3=343 \quad ἢ \quad (x^3+y^3)+3xy(x+y)=343\cdot$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς αὐτὴν τὸ x^3+y^3 μὲ τὸ ἴσον του 91 καὶ τὸ $x+y$ μὲ τὸ ἴσον του 7, ποὺ δίδουν αἱ δοθεῖσαι ἐξισώσεις καὶ ἔχομεν

$$91+3xy\cdot 7=343 \quad ἢ \quad xy=12. \qquad (3)$$

Ἀντικαθιστῶμεν τὴν ἐξίσωσιν (2) μὲ τὴν (3) καὶ ἔχομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα $\left.\begin{array}{r}x+y=7\\ xy=12\end{array}\right\}$ (α)

Ἀπὸ τὸ σύστημα (α) συνάγομεν, ὅτι οἱ ἄγνωστοι x καὶ y εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $X^2-7X+12=0$. Αἱ ρίζαι αὐτῆς εἶναι 3 καὶ 4· ἄρα τὸ σύστημα (α) καὶ ἐπομένως καὶ τὸ ἰσοδύναμον δοθέν, ἔχει τὴν λύσιν (3, 4), δηλ. εἶναι εἴτε $(x=3,\ y=4)$ εἴτε $(x=4,\ y=3)$.

Ἀσκήσεις. 1449. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} x+y+xy=19 \\ xy(x+y)=84. \end{cases}$

1450. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} x^2+y^2-(x+y)=32 \\ x+y+xy=29. \end{cases}$

1451. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} x^2+y^2+6xy=153 \\ 2x^2+2y^2-3xy=36. \end{cases}$

1452. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} (x^2+y^2)(x^2-xy+y^2)=70 \\ (x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)=91. \end{cases}$

1453. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} x^4+x^2y^2+y^4=133. \\ x^2+xy+y^2=7. \end{cases}$

1454. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα :

1. $\begin{cases} x+\sqrt{xy}+y=19 \\ x^2+xy+y^2=133 \end{cases}$ (Σχολὴ Ἰκάρων) 2. $\begin{cases} x+y+\sqrt{xy}=\alpha \\ x^2+y^2+xy=\beta. \end{cases}$

1455. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} x+y=\alpha \\ \alpha^4-4xy[(x+y)^2-2xy]-6x^2y^2=\beta^4. \end{cases}$

1456. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} x^4+x^2y^2+y^4=\alpha \\ x^2+y^2+xy=1. \end{cases}$

1457. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα :

$\begin{cases} x+y=2 \\ x^3+y^3=52. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x+y=\alpha \\ x^3+y^3=\beta^3. \end{cases}$

1458. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} x+y=\alpha \\ x^3+y^3=\beta(x^2+y^2). \end{cases}$

1459. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} x+y=\alpha \\ x^4+y^4=\beta^4. \end{cases}$

1460. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} x+y=\alpha \\ x^5+y^5=\beta^5. \end{cases}$ (Σχολὴ Ἰκάρων)

1461. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ κάθετοι πλευραὶ ὀρθογωνίου τριγώνου, ἐὰν γνωρίζωμεν τὸ ἄθροισμά των ἴσον μὲ 46 καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν κύβων των ἴσον μὲ 31096.

1462. Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀριθμοί, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ὁ λόγος τοῦ ἀθροίσματός των πρὸς τὸ γινόμενόν των εἶναι ἴσος μὲ $\frac{2}{3}$, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των εἶναι πενταπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀριθμῶν.

444. Ὁμογενῆ συστήματα. Ὅταν ἕνα σύστημα ἔχῃ τὴν μορφὴν

$$\mathrm{I}\begin{cases} \alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2=\delta \\ \alpha' x^2+\beta' xy+\gamma' y^2=\delta' \end{cases}$$

δηλ. ὅταν τὰ πρῶτα μέλη τῶν δύο ἐξισώσεών του εἶναι πολυώνυμα ὁμογενῆ δευτέρου βαθμοῦ, τὰ δὲ δεύτερα μέλη σταθεροὶ ἀριθμοί, διάφοροι τοῦ μηδενός, χρησιμοποιοῦμεν βοηθητικὸν ἄγνωστον διὰ τὴν λύσιν του.

Γενικῶς διὰ νὰ λύσωμεν ἕνα ὁμογενὲς σύστημα τῆς μορφῆς I θέτομεν $x=y\omega$ καὶ ἐργαζόμεθα, ὅπως εἰς τὸ κάτωθι παράδειγμα:

Παράδειγμα. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} x^2+3xy+2y^2=20 \\ 2x^2-xy+y^2=16. \end{cases}$

Θέτομεν $x=y\omega$ (1) ὁπότε τὸ δοθὲν σύστημα γράφεται

$$\left\{\begin{matrix} y^2\omega^2+3y^2\omega+2y^2=20 \\ 2y^2\omega^2-y^2\omega+y^2=16 \end{matrix}\right\} \quad \text{ἤ} \quad \mathrm{I}\begin{cases} y^2(\omega^2+3\omega+2)=20 \\ y^2(2\omega^2-\omega+1)=16. \end{cases}$$

Διαιροῦμεν κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος I καὶ ἔχομεν

$$\frac{\omega^2+3\omega+2}{2\omega^2-\omega+1}=\frac{20}{16}=\frac{5}{4}$$

ἤ $\quad 4(\omega^2+3\omega+2)=5(2\omega^2-\omega+1) \quad$ ἤ $\quad 6\omega^2-17\omega-3=0.$

Αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εἶναι $\omega=3$ καὶ $\omega=-\frac{1}{6}$.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) τὸ ω μὲ καθεμίαν ἀπὸ τὰς τιμάς του αὐτάς:

1ον. Ἐὰν λάβωμεν $\omega=3$ ἡ ἐξίσωσις (1) δίδει $x=3y$. (2)

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν τοῦ δοθέντος συστήματος τὸ x μὲ τὸ ἴσον του 3y καὶ ἔχομεν

$$9y^2+9y^2+2y^2=20 \quad \text{ἤ} \quad y^2=1.$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν λαμβάνομεν $y=\pm1$.

Ἐὰν λάβωμεν $y=1$, ἡ ἐξίσωσις (2) δίδει $x=3$ καὶ τὸ δοθὲν σύστημα ἔχει τὴν λύσιν $(y=3,\ y=1)$.

Ἐὰν λάβωμεν $y=-1$, ἡ ἐξίσωσις (3) δίδει $x=-3$ καὶ τὸ δοθὲν σύστημα ἔχει τὴν λύσιν $(x=-3,\ y=-1)$.

2ον. Ἐὰν λάβωμεν $\omega=-\frac{1}{6}$ ἡ ἐξίσωσις (1) δίδει $x=-\frac{y}{6}$. (3)

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν τοῦ δοθέντος συστήματος τὸν x μὲ τὸ ἴσον του $-\frac{y}{6}$ καὶ ἔχομεν

$$\frac{y^2}{36}-\frac{y^2}{2}+2y^2=20 \quad \text{ἤ} \quad y^2=\frac{144}{11}.$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν λαμβάνομεν $y=\pm\frac{12}{\sqrt{11}}$

Ἐὰν $y=\pm\frac{12}{\sqrt{11}}$, ἡ ἐξίσωσις (3) δίδει $x=\mp\frac{2}{\sqrt{11}}$

καὶ τὸ δοθὲν σύστημα ἔχει τὰς λύσεις

$$\left(x=-\frac{2}{\sqrt{11}},\ y=\frac{12}{\sqrt{11}}\right),\ \left(x=\frac{2}{\sqrt{11}},\ y=-\frac{12}{\sqrt{11}}\right).$$

Ἀσκήσεις. 1463. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} x^2+xy=10 \\ y^2+xy=15 \end{cases}$

1464. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} 2x^2+y^2+3xy=70 \\ 6x^2+xy-y^2=50 \end{cases}$

1465. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} x^2-5xy+3y^2=61 \\ 3x^2+2y^2=30 \end{cases}$

1466. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} x^2+y^2+6xy=153 \\ 2x^2+2y^2-3xy=36 \end{cases}$

1467. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} x^2-y\sqrt{xy}=126 \\ x^2-x\sqrt{xy}=-63 \end{cases}$ (Πολυτ. 1932)

445. Διάφορα συστήματα. Εἰς πολλὰς περιπτώσεις ἡ μία ἢ καὶ αἱ δύο ἐξισώσεις ἑνὸς συστήματος εἶναι τοῦ δευτέρου βαθμοῦ ἢ ἀνωτέρου βαθμοῦ, ἀλλὰ διὰ καταλλήλων συνδυασμῶν καταλήγομεν εἰς ἄλλο σύστημα ἰσοδύναμον μὲ τὸ δοθὲν καὶ τοῦ ὁποίου ἡ μία ἐξίσωσις εἶναι τοῦ πρώτου βαθμοῦ, ἢ εἰς ἄλλο σύστημα, τοῦ ὁποίου ἡ λύσις εἶναι εὐκολωτέρα.

Παράδειγμα 1ον. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} xy(x+y)=180 & (1) \\ x^3+y^3=189 & (2) \end{cases}$

Πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (1) ἐπὶ 3 καὶ τὴν προκύπτουσαν ἐξίσωσιν προσθέτομεν κατὰ μέλη μὲ τὴν (2) καὶ λαμβάνομεν $x^3+y^3+3yx(x+y)=729$

ἢ $(x+y)^3=729$ ἢ $x+y=9.$ (3)

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) τὸ $x+y$ μὲ τὸ ἴσον του 9 καὶ εὑρίσκομεν $xy \cdot 9=180$ ἢ $xy=20.$ (4)

Λύομεν ἔπειτα, κατὰ τὰ γνωστά, τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (3) καὶ (4) καὶ εὑρίσκομεν τὴν λύσιν (4, 5), ἡ ὁποία εἶναι καὶ λύσις τοῦ δοθέντος συστήματος.

Παράδειγμα 2ον. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$\begin{cases} (x-y)(x^2-y^2)=160 \\ (x+y)(x^2+y^2)=580. \end{cases}$$

Θέτομεν $x+y=\varphi$ καὶ $x-y=\omega.$ (1)

Ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις (1) λαμβάνομεν

$(x+y)^2=\varphi^2$ ἢ $x^2+2xy+y^2=\varphi^2$ (2)

$(x-y)^2=\omega^2$ ἢ $x^2-2xy+y^2=\omega^2.$ (3)

Προσθέτομεν τὰς ἐξισώσεις (2) καὶ (3) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$2x^2+2y^2=\varphi^2+\omega^2 \quad ἢ \quad x^2+y^2=\frac{\varphi^2+\omega^2}{2}.$$

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω τὸ δοθὲν σύστημα γράφεται

$$\begin{cases} \omega^2\varphi=160 \\ \varphi(\varphi^2+\omega^2)=1160 \end{cases} \quad ἢ \quad \left.\begin{matrix} \omega^2\varphi=160 \\ \varphi^3+\omega^2\varphi=1160. \end{matrix}\right\} (\alpha)$$

Ἀφαιροῦμεν κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος (α) καὶ λαμβάνομεν $\varphi^3=1000$ ἢ $\varphi=10.$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν τοῦ συστήματος (α) τὸ φ μὲ τὴν τιμήν του 10 καὶ λαμβάνομεν $\omega^2=16,$ ἄρα $\omega=\pm 4.$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὰς ἐξισώσεις (1) τὰ φ καὶ ω μὲ τὰς τιμάς των καὶ λαμβάνομεν τὰ συστήματα

$$\left.\begin{matrix} x+y=10 \\ x-y=4 \end{matrix}\right\} (\beta) \qquad \left.\begin{matrix} x+y=10 \\ x-y=-4 \end{matrix}\right\} (\gamma)$$

Τὸ σύστημα (β) ἔχει τὴν λύσιν $x=7,\ y=3$, ἡ ὁποία εἶναι καὶ λύσις τοῦ δοθέντος συστήματος.

Τὸ σύστημα (γ) ἔχει τὴν λύσιν $x=3,\ y=7$, ἡ ὁποία εἶναι καὶ λύσις τοῦ δοθέντος συστήματος.

Ὥστε τὸ δοθὲν σύστημα ἔχει τὴν λύσιν (3, 7).

Ἀσκήσεις. *1468*. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} 9x^2-5x-7y=25 \\ (x+y)^2-3(x+y)=10 \end{cases}$

1469. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} 9x^2-12xy+4y^2+12x-8y+4=0 \\ 3x^2-5xy+y^2+x+y+6=0 \end{cases}$

1470. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} 14x^2-11xy+4y^2=221 \\ (2x-3y)^2+4(2x-3y)=5 \end{cases}$

1471. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} 8x^2-2xy+7y^2=527 \\ (3x+y^2)-9(3x+y)+20=0 \end{cases}$

1472. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα :

$$\frac{2(x+y)-7}{5(x+y)-4}=\frac{5}{6}-\frac{2}{x+y} \quad (1), \qquad \frac{x}{y}=\frac{40y}{x+3y} \quad (2).$$

1473. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα :

$$xy=48 \quad (1), \qquad \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}=\frac{25}{7} \quad (2).$$

1474. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα :

$$x^2+y^2=20 \quad (1), \qquad \frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}=\frac{5}{2} \quad (2).$$

1475. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα :

$$xy=\alpha^2 \quad (1), \qquad \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{\beta^2} \quad (2).$$

1476. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα :

$$1. \begin{cases} (x^2+y^2)(x-y)=41 \\ xy(x-y)=20 \end{cases} \qquad 2. \begin{cases} (x^2+y^2)(x-y)=447 \\ xy(x-y)=210 \end{cases}$$

1477. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα :

$$1. \begin{cases} x^3-y^3=341 \\ x-y=11 \end{cases} \qquad 2. \begin{cases} x-y=217 \\ \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=1 \end{cases} \qquad 3. \begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt[3]{y}=4 \\ \sqrt{x^3}+y=16 \end{cases}$$

1478. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα :

$$x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{5}}=5 \quad (1), \qquad x^{\frac{3}{4}}+y^{\frac{3}{5}}=35$$

1479. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα :

$$\sqrt{x^3}+\sqrt[7]{y^3}=152 \quad (1), \qquad \sqrt{x}+\sqrt[7]{y}=8 \quad (2)$$

II. ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ Ή ΑΝΩΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΤΡΕΙΣ Ή ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΟΥΣ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

***446*. Λύσις συστημάτων ἐξισώσεων τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, ἢ ἀνωτέρου βαθμοῦ, μὲ τρεῖς ἢ περισσοτέρους ἀγνώστους.** Δὲν ὑπάρχει ὡρισμένη μέθοδος διὰ τὴν λύσιν τῶν συστημάτων ἐξισώσεων τοῦ δευτέρου ἢ ἀνωτέρου βαθμοῦ, μὲ τρεῖς ἢ **περισσοτέρους** ἀγνώστους. Ἡ διαδοχικὴ ἀπαλοιφὴ τῶν ἀγνώστων θὰ μᾶς ὡδήγει ἴσως, εἰς μίαν ἐξίσωσιν βαθμοῦ ἀνωτέρου τοῦ δευτέρου, τὴν ὁποίαν γενικῶς δὲν δυνάμεθα νὰ λύσωμεν μὲ τὰς μεθόδους τῆς Στοιχειώδους Ἀλγέβρας. Τὰ τοιαῦτα συστήματα λύονται ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον, μὲ εἰδικὰς μεθόδους (τεχνάσματα).

Τὰ κάτωθι παραδείγματα δὲν δύνανται νὰ μᾶς δώσουν, παρὰ ἁπλῆν ἰδέαν τῶν εἰδικῶν αὐτῶν μεθόδων. Μόνον μὲ τὴν λύσιν πολλῶν ἀσκήσεων θὰ ἀποκτήσωμεν τὴν ἱκανότητα νὰ εὑρίσκωμεν τὴν μέθοδον, ποὺ ἁρμόζει εἰς τὴν λύσιν τοιούτων συστημάτων.

447. Παράδειγμα 1ον. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$\begin{cases} x^2+2y^2+\omega^2=37 & (1)\\ x+3y+\omega=15 & (2)\\ 2x+y-\omega=7. & (3)\end{cases}$$

Γενικὴ μέθοδος. Αἱ ἐξισώσεις (2) καὶ (3) εἶναι τοῦ πρώτου βαθμοῦ πρὸς τοὺς ἀγνώστους x, y, ω. Θεωροῦμεν τὸν ἄγνωστον x ὡς γνωστὸν καὶ λύομεν τὸ σύστημα τῶν δύο αὐτῶν ἐξισώσεων πρὸς y καὶ ω.

Αἱ ἐξισώσεις (2) καὶ (3) γράφονται

$$\left.\begin{aligned} 3y+\omega&=15-x\\ y-\omega&=7-2x\end{aligned}\right\}(\alpha).$$

Ἀπαλείφομεν, κατὰ τὰ γνωστά, τοὺς y καὶ ω μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος (α) καὶ εὑρίσκομεν τὴν λύσιν

$$\omega=\frac{5x-6}{4},\quad y=\frac{22-3x}{4}. \qquad (4)$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) τὰ y καὶ ω μὲ τὰ ἴσα των, ποὺ δίδουν αἱ ἐξισώσεις (4) καὶ ἔχομεν

$$x^2+2\left(\frac{22-3x}{4}\right)^2+\left(\frac{5x-6}{4}\right)^2=37.$$

Ἐκτελοῦμεν πράξεις κλπ. καὶ εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$59x^2-324x+412=0.$$

Αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εἶναι $x'=2$ καὶ $x''=\frac{206}{59}$.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὰς ἐξισώσεις (4) τὸ x μὲ τὰς τιμάς του:

Ἐὰν λάβωμεν $x=2$, αἱ ἐξισώσεις (4) δίδουν $\omega=1$ καὶ $y=4$ καὶ τὸ δοθὲν σύστημα ἔχει τὴν λύσιν $(x=2,\ y=4,\ \omega=1)$.

Ἐὰν λάβωμεν $x=\frac{206}{59}$, αἱ ἐξισώσεις (4) δίδουν $\omega=\frac{169}{59}$, $y=\frac{170}{59}$ καὶ τὸ σύστημα ἔχει τὴν λύσιν $\left(x=\frac{206}{59},\quad y=\frac{170}{59},\ \omega=\frac{169}{59}\right)$

448. Παράδειγμα 2ον. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$\begin{cases} x(x+y+\omega)+y\omega=70 \\ y(x+y+\omega)+\omega x=50 \\ \omega(x+y+\omega)+xy=35. \end{cases}$$

Ἡ πρώτη ἐξίσωσις τοῦ δοθέντος συστήματος γράφεται

$$x^2+xy+x\omega+y\omega=70 \quad \text{ἢ} \quad x(x+y)+\omega(x+y)=70$$

ἢ

$$(x+y)(x+\omega)=70. \tag{1}$$

Ὁμοίως αἱ δύο ἄλλαι ἐξισώσεις γράφονται

$$(y+\omega)(y+x)=50 \tag{2}$$

$$(\omega+x)(\omega+y)=35. \tag{3}$$

Πολλαπλασιάζομεν τὰς ἐξισώσεις (1), (2), (3) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν $(x+y)^2(y+\omega)^2(\omega+x)^2=122500$ ἢ $(x+y)(y+\omega)(\omega+x)=\pm350$. (4)

Διαιροῦμεν κατὰ μέλη τὴν (4) διαδοχικῶς διὰ τῶν (1), (2), (3) καὶ ἔχομεν $y+\omega=\pm5,\quad x+\omega=\pm7,\quad x+y=\pm10.$

Ἐὰν λάβωμεν τὸ σημεῖον $+$, ἔχομεν νὰ λύσωμεν τὸ σύστημα

$$y+\omega=5,\quad x+\omega=7,\quad x+y=10.$$

Λύομεν αὐτὸ κατὰ τὰ γνωστά, καὶ εὑρίσκομεν τὴν λύσιν $x=6$, $y=4$, $\omega=1$, ἡ ὁποία εἶναι καὶ λύσις τοῦ δοθέντος συστήματος.

Ἐὰν λάβωμεν τὸ σημεῖον $-$, ἔχομεν νὰ λύσωμεν τὸ σύστημα

$$y+\omega=-5,\quad x+\omega=-7,\quad x+y=-10$$

τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν λύσιν $x=-6$, $y=-4$, $\omega=-1$, ἡ ὁποία εἶναι καὶ λύσις τοῦ δοθέντος συστήματος.

449. **Παράδειγμα 3ον. Πρόβλημα.** ***Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ περίμετρός του εἶναι 60 μέτρα καὶ ὅτι τὸ ὕψος του ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν εἶναι 12 μέτρα.***

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ x, y τὰς καθέτους πλευρὰς τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου καὶ μὲ ω τὴν ὑποτείνουσαν θὰ ἔχωμεν ἐν πρώτοις τὴν ἐξίσωσιν

$$x+y+\omega=60. \tag{1}$$

Κατὰ τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα θὰ ἔχωμεν καὶ τὴν ἐξίσωσιν

$$x^2+y^2=\omega^2. \tag{2}$$

Ἐπειδὴ τὸ διπλάσιον ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ἐκφράζεται, εἴτε διὰ xy, εἴτε διὰ $\omega\cdot12$, ἔχομεν καὶ τὴν ἐξίσωσιν

$$xy=12\omega. \tag{3}$$

Λύομεν το σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1), (2), (3),

Ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται $x+y=60-\omega$. (1′)

Ὑψώνομεν εἰς τὸ τετράγωνον καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (1′) καὶ ἔχομεν

$$x^2+y^2+2xy=3600-120\omega+\omega^2.$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς αὐτὴν τὸ x^2+y^2 μὲ τὸ ἴσον του ω καὶ τὸ xy μὲ τὸ ἴσον του 12ω, ποὺ δίδουν αἱ ἐξισώσεις (2) καὶ (3) καὶ ἔχομεν

$$\omega^2+24\omega=3600-120\omega+\omega^2 \quad \text{ἢ} \quad 144=3600, \quad \text{ἄρα} \quad \omega=25.$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὰς ἐξισώσεις (1′) καὶ (3) τὸ ω μὲ τὴν τιμὴν του 25 καὶ λαμβάνομεν τὰς ἐξισώσεις

$$\left.\begin{aligned} x+y&=35 \\ xy&=300 \end{aligned}\right\} \quad (\alpha).$$

Οἱ ἄγνωστοι x καὶ y εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $X^2-35X+300=0$. Αἱ ρίζαι αὐτῆς εἶναι 15 καὶ 20 ἄρα τὸ σύστημα (α) ἔχει τὴν λύσιν (15, 20), δηλ. εἶναι, εἴτε ($x=15$, $y=20$), εἴτε ($x=30$, $y=15$).

Ὥστε αἱ κάθετοι πλευραὶ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι 15 μέτρα καὶ 20 μέτρα καὶ ἡ ὑποτείνουσά του 25 μέτρα.

450. Παράδειγμα 4ον. Πρόβλημα. ***Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ 4 ὅροι μιᾶς ἀναλογίας, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων ὅρων της εἶναι 8, τὸ ἄθροισμα τῶν μεσαίων ὅρων της εἶναι 7 καὶ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων ὅρων της εἶναι 65.***

Ἔστωσαν x, y, φ, ω οἱ 4 ὅροι τῆς ἀναλογίας. Κατὰ τὸ πρόβλημα ἔχομεν τὰς ἐξισώσεις

$$\left\{\begin{aligned} \frac{x}{y}&=\frac{\varphi}{\omega} && (1)\\ x+\omega&=8 && (2)\\ y+\varphi&=7 && (3)\\ x^2+y^2+\varphi^2+\omega^2&=65. && (4) \end{aligned}\right.$$

Ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται $x\omega=y\varphi$. (1′).

Ὑψώνομεν εἰς τὸ τετράγωνον καὶ τὰ δύο μέλη τῶν ἐξισώσεων (2) καὶ (3) καὶ ἔχομεν

$$x^2+2x\omega+\omega^2=64 \quad \text{καὶ} \quad y^2+2y\varphi+\varphi^2=49.$$

Προσθέτομεν τὰς ἐξισώσεις αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$x^2+y^2+\varphi^2+\omega^2+2x\omega+2y\varphi=113.$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς αὐτὴν τὸ ἄθροισμα $x^2+y^2+\varphi^2+\omega^2$ μὲ τὸ ἴσον του 65, ποὺ δίδει ἡ (4) καὶ ἔχομεν

$$65+2x\omega+2y\varphi=113 \quad \text{ἢ} \quad x\omega+y\varphi=24. \qquad (5)$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (5) τὸ yφ μὲ τὸ ἴσον του xω, ποὺ δίδει ἡ (1′) καὶ ἔχομεν $x\omega+x\omega=24$ ἢ $x\omega=12$. (6)

Ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις (2) καὶ (6) συνάγομεν, ὅτι οἱ x καὶ ω εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $X^2-8X+12=0$. Αἱ ρίζαι αὐτῆς εἶναι 2 καὶ 6, δηλ. εἶναι εἴτε ($x=2$, $\omega=6$), εἴτε ($x=6$, $\omega=2$).

Ἂν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (5) τὸ xω μὲ τὸ ἴσον του yφ, ποὺ δίδει ἡ (1′), λαμβάνομεν

$$y\varphi+y\varphi=24 \quad \text{ἢ} \quad y\varphi=12. \qquad (7)$$

Ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις (3) καὶ (7) συνάγομεν, ὅτι οἱ y καὶ φ εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $X^2-7X+12=0$. Αἱ ρίζαι αὐτῆς εἶναι 3 καὶ 4, δηλ. εἶναι εἴτε ($y=3$, $\varphi=4$), εἴτε ($y=4$, $\varphi=3$).

Ὥστε ἡ ζητουμένη ἀναλογία θὰ εἶναι ἡ

$$\frac{2}{3}=\frac{4}{6} \quad \text{ἢ} \quad \frac{2}{4}=\frac{3}{6} \quad \text{ἢ} \quad \frac{6}{3}=\frac{4}{2} \quad \text{ἢ} \quad \frac{6}{4}=\frac{3}{2}.$$

Ἀσκήσεις. *1480.* Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα :

$x+y+\omega=6, \qquad x-y+\omega=0, \qquad x^2+y^2+\omega^2=14.$

1481. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα :

$x+y-\omega=\alpha^2-1, \qquad x-y+\omega=(\alpha+1)^2, \qquad xy+\omega=\alpha^4+2\alpha^2+2.$

1482. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα :

$x+y+\omega=3, \qquad \alpha x+\beta y+\gamma\omega=\alpha+\beta+\gamma, \qquad xy\omega=1.$

1483. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$7x-3y+\omega+6=0, \qquad 5x-y-\omega-2=0.$

$2x^2+y^2-4x\omega-2y\omega+3x-4y-13=0.$

1484. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$x+y+\omega=14, \qquad x^2+y^2+\omega^2=84, \qquad y^2=x\omega.$

1485. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$x+y+\omega=132, \qquad x^2=y^2+\omega^2, \qquad x^2+y^2+\omega^2=6050.$

1486. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$x+y-\omega=2, \qquad \omega^2+y^2-x^2=-6, \qquad y\omega=3.$

1487. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$x-2y+3\omega=9, \qquad x^2+4y^2+9\omega^2=189, \qquad 3x\omega=4y^2.$

1483. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$x+y+\omega=41/6, \qquad xy=2, \qquad y\omega=3.$

1489. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$x+y=\omega, \qquad xy=14, \qquad x^2-y^2=45.$

1490. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$x+y=\omega, \qquad 3xy=2\omega, \qquad x^2-y^2=\omega^2.$

1491. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$x+y=8, \qquad xy=\omega, \qquad x^2+y^2=40.$

1492. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$x+y+\omega=36, \qquad xy=108, \qquad x^2+y^2=\omega^2.$

1493. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$x+y=1, \qquad \varphi+\omega=1, \qquad \varphi x+y\omega=-10, \qquad \omega x-\varphi y=5.$

1494. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$xy=\varphi\omega, \qquad x+y=10, \qquad \varphi+\omega=14, \qquad \frac{x}{\omega}+\frac{\varphi}{y}=4.$$

(Πολυτεχνεῖον)

1495. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $x+y+\varphi+\omega=14, \qquad xy\varphi\omega=120,$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{8}{15}, \qquad \frac{1}{\omega}+\frac{1}{\varphi}=\frac{3}{4}.$$

1496. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$x\varphi=y\omega, \qquad x+\varphi=7, \qquad y+\omega=5, \qquad x^2+y^2+\varphi^2+\omega^2=50.$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΙΝ ΕΠΙ ΤΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Α' Ὁμάς. *1497.* Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} x-\sqrt{2y+4}=9 \\ 3x-2y=3. \end{cases}$

1498. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=14 \\ x^2+y^2=2696. \end{cases}$

1499. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} 3\sqrt{4x+2y}-5\sqrt{2x-y}=2 \\ 7\sqrt{4x+2y}+2\sqrt{2x-y}=32. \end{cases}$

1500. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} \sqrt[3]{x+y+2}-\sqrt{2x-3y-7}+3=0 \\ 2\sqrt[3]{x+y+2}+3\sqrt{2x-3y-7}-14=0. \end{cases}$

1501. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} \sqrt{y}-\sqrt{20-x}=\sqrt{y-x} \\ 3\sqrt{20-x}=2\sqrt{y-x}. \end{cases}$

1502. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} x+y=16+\sqrt{4xy} \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=8. \end{cases}$

1503. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} (x+\sqrt{y})(y+\sqrt{x})=15 \\ x+y=5. \end{cases}$

1504. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x-y}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-y}}=4, \qquad 4\sqrt{x}=y. \end{cases}$

1505. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} x+\sqrt{xy+x^2}=3 \\ x(y+6)\sqrt{xy+\sqrt{x}}=22-xy-\sqrt{x}. \end{cases}$

1506. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} 7(x-2\sqrt{21x-6y-2})=2(y-25) \\ 13x^2-3y^2=4. \end{cases}$

1507. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} 2x+y=3\sqrt{2x+y+4} \\ 2x^2-y=2\sqrt{2x^2-y+1}+34. \end{cases}$

1508. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} x-\sqrt{x}+y+\sqrt{y}=2\sqrt{xy} \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=5. \end{cases}$

1509. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}+\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}=\frac{10}{3}, \qquad x^2-y^2=31.$$

1510. Νὰ λυθῇ τὸ συστημα

$$x-y+\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}=\frac{20}{x+y}, \qquad x^2+y^2=34.$$

1511. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$\sqrt{\frac{6x}{x+y}}+\sqrt{\frac{x+y}{6x}}=\frac{5}{2}, \qquad xy-x-y=9.$$

1512. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{61}{\sqrt{xy}}+1, \qquad \sqrt[4]{x^3y}+\sqrt[4]{xy^3}=78.$$

1513. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$x\sqrt{\frac{x}{y}}-y\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{65}{6}, \qquad x-y=5.$$

1514. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{17}{4}, \qquad x^2+y^2=\sqrt{x^2y^2+273}.$$

1515. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases}\sqrt[3]{(x+y)^2}+2\sqrt[3]{(x-y)^2}=3\sqrt[3]{x^2-y^2}\\ 3x-2y=13.\end{cases}$

1516. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases}xy(x+y)-3\left[x\sqrt{y}+y\sqrt{x}\right]=378\\ xy\sqrt{xy}=216.\end{cases}$

1517. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases}x^2-y+\sqrt{x^2-y}=12\\ x^4-y^2=207.\end{cases}$

1518. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases}\sqrt{x}\,(\sqrt{x^3}+\sqrt{y^3})=273\\ x\sqrt{xy}+y^2=364.\end{cases}$

1519. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\quad x+y=\sqrt{2\alpha^2-x^2}=\sqrt{2\alpha^2-y^2}=\alpha\sqrt{3}.$

1520. Να λυθῇ τὸ σύστημα

$$13y\sqrt{\frac{x^2}{y}+3}=6x^2+20y, \qquad 24x^2+y^2=2x(5y+4x).$$

1521. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$\sqrt[3]{\frac{x}{y}}+\sqrt[3]{\frac{y}{x}}=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2y^2}}+1, \qquad \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=2.$$

B' Ὁμάς. 1522. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases}x^2+y^2+x+y=18\\ xy(x+1)(y+1)=72,\end{cases}$

1523. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases}(x+y)(xy+1)=18xy\\ (x^2+y^2)(x^2y^2+1)=208x^2y^2.\end{cases}$

1524. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases}x^2y^2(x^2+y^2)=468\\ (x+y)(x^2+y^2)=13.\end{cases}$

1525. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases}x(x+y)+y(x-y)=17\\ 4x(x+y)=30y(x-y).\end{cases}$

1526. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases}(x^2-y^2)(x-y)=16xy\\ (x^4-y^4)(x^2-y^2)=640x^2y^2.\end{cases}$

1527. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases}(x+y)(x^2+y^2)=\alpha\\ (x^2+y^2)(x^4+y^4)=\beta.\end{cases}$

1528. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases}(x+y)(x^8+y^8)=\alpha\\ (x-y)(x^8-y^8)=\beta\end{cases}$

1529. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} x^4+y^4-x^2y^2=\alpha(x+y)^2 \\ xy(x-y)^2=\beta(x+y)^2. \end{cases}$

1530. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} x^3+y^3=973 \\ (x-y)^2-7(x+y)=90-xy. \end{cases}$

1531. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} x^2+xy+y^2=3 \\ x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4=11. \end{cases}$

1532. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} x^3=31x^2-4y^2 \\ y^3=31y^2-4x^2. \end{cases}$

1533. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} x^2+y^2-(x+y)=12 \\ x^4+y^4+x+y-2(x^3+y^3)=132. \end{cases}$

1534. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} x^4-2x^2y+y^2=49 \\ x^4-2x^2y^2+y^4-x^2+y^2=20. \end{cases}$

1535. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} 6x^4+x^2y^2+16=2x(12x+y^3) \\ x^2+xy-y^2=4. \end{cases}$

1536. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} x^3+y^3+x^2y+xy^2=32 \\ x^4y^2+x^2y^4=128. \end{cases}$

1α 3/60

1537. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} x^3+y^3=\alpha(x+y) \\ x^4+y^4=\beta(x+y)^2. \end{cases}$

1538. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} x^4+y^4+xy(x^2+y^2)=4\alpha^2(\alpha^2+3\beta^2) \\ xy(x+y)^2=4\alpha^2(\alpha^2-\beta^2). \end{cases}$

1539. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} x+y=1 \\ x^3-3x^2y-3xy^2+y^3=13. \end{cases}$

1540. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} x+y=2 \\ 13(x^5+y^5)=121(x^3+y^3). \end{cases}$

1541. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $x^2+3xy=12-xy=16y^2-xy-x^2$.

1542. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$\frac{1}{y}-\frac{1}{x}=\frac{1}{12} \quad (1), \qquad x^2y-xy^2=12 \quad (2).$$

1543. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{\gamma} \quad (1). \qquad \frac{1}{\alpha-x}+\frac{1}{\alpha-y}=\frac{2}{\alpha-\beta} \quad (2).$$

1544. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$\frac{y(1+x^2)}{x(1-y^2)}=-\frac{4}{3} \quad (1), \qquad \frac{y^2(1+x^4)}{x^2(1+y^2)^2}=\frac{8}{25} \quad (2).$$

1545. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$x^2+xy+y^2=3 \quad (1), \qquad \frac{x^5+y^5}{x^3+y^3}=\frac{31}{7} \quad (2).$$

1546. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} x^2-xy+\alpha y=0 \\ y^2-xy-4\alpha x=0. \end{cases}$

Γ' 'Ομάς *1547.* Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$\frac{y\omega}{x}=\frac{12}{7}, \qquad \frac{\omega x}{y}=\frac{21}{4}, \qquad \frac{xy}{\omega}=\frac{28}{3}.$$

1548. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα

1. $$\frac{y+\omega-x}{7}=\frac{\omega+x-y}{11}=\frac{x+y-\omega}{5}=\frac{xy\omega}{3}.$$

2. $$\frac{y+\omega-x}{\alpha}=\frac{\omega+x-y}{\beta}=\frac{x+y-\omega}{\gamma}=xy\omega.$$

1549. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα
$$\frac{x(y\omega+1)}{\omega}=\frac{y(\omega x+1)}{x}=\frac{\omega(xy+1)}{y}=2.$$

1550. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα
$$\frac{\alpha^3 x}{y^2\omega^2}=\frac{\beta^3 y}{\omega^2 x^2}=\frac{\gamma^3\omega}{x^2y^2}=1.$$

1551. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα
$$x+y+\omega=1,\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{\omega}=1,\qquad \alpha x+\beta y+\gamma\omega=1.$$

1552. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα
$$x+y+\omega=\frac{7}{2},\qquad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{\omega}=\frac{7}{2},\qquad xy\omega=1.$$

1553. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα
$$x+y+\omega=\alpha,\quad \frac{2}{x}=\frac{1}{y}+\frac{1}{\omega},\qquad 16y\omega=25x^2.$$

1554. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα
$$\frac{y+\omega}{\alpha}=\frac{\omega+x}{\beta}=\frac{x+y}{\gamma}=xy\omega.$$

1555. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα
$$\begin{cases}\dfrac{x(y+\omega)}{\alpha}=\dfrac{y(\omega+x)}{\beta}=\dfrac{\omega(x+y)}{\gamma},\\[2mm] y\omega+\omega x+xy=(\alpha+\beta+\gamma)\,xy\omega.\end{cases}$$

1556. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα
$$\alpha(xy+x\omega-y\omega)=\beta(y\omega+yx-\omega x)=\gamma(\omega x+\omega y-xy)=xy\omega.$$

1557. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα
$$\frac{xy\omega}{y+\omega}=\alpha,\qquad \frac{xy\omega}{\omega+x}=\beta,\qquad \frac{xy\omega}{x+y}=\gamma.$$

1558. Νά λυθῇ τὸ σύστημα
$$\frac{x-y}{y^2}+\frac{x-\omega}{\omega^2}=\alpha x,\quad \frac{y-\omega}{\omega^2}+\frac{y-x}{x^2}=\beta y,\quad \frac{\omega-x}{x^2}+\frac{\omega-y}{y^2}=\gamma\omega.$$

1559. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα
$$\frac{x-y}{y^2}+\frac{x-\omega}{\omega^2}=\frac{13x}{144},\quad \frac{y-\omega}{\omega^2}+\frac{y-x}{x^2}=\frac{9y}{16},\quad \frac{\omega-x}{x^2}+\frac{\omega-y}{y^2}=\frac{23\omega}{72}$$

Δ' Ὁμάς. *1560.* Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα

1. $\begin{cases}xy=15\\ y\omega=24\\ \omega x=10\end{cases}$ 2. $\begin{cases}xy=-12\\ y\omega=-28\\ \omega x=21\end{cases}$ 3. $\begin{cases}x\omega=\alpha\\ \omega x=\beta\\ xy=\gamma\end{cases}$

1561. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα

1. $\begin{cases} x(y+\omega)= 6 \\ y(\omega+x)=12, \\ \omega(x+y)= 1 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x(y+\omega)=\alpha \\ y(\omega+x)=\beta. \\ \omega(x+y)=\gamma \end{cases}$

1562. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα

1. $\begin{cases} x(x+y+\omega)= 6 \\ y(x+y+\omega)= -9 \\ \omega(x+y+\omega)= 12 \end{cases}$ 1. $\begin{cases} x(x+y+\omega)=\alpha^2 \\ y(x+y+\omega)=\beta^2 \\ \omega(x+y+\omega)=\gamma^2 \end{cases}$

1563. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα

1. $\begin{cases} x+y+\omega= 4 \\ (x-y)^2=\omega+48 \\ xy+\omega=-9 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x+y+\omega=2(\alpha+\beta) \\ (x-y)^2=2\omega \\ xy+\omega=\alpha^2+\beta \end{cases}$

1564. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα

1. $\begin{cases} x^2(y-\omega) = 80 \\ y^2(\omega-x) = 12 \\ \omega^2(x-y) = 98 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x^2(y-\omega) = 75 \\ y^2(\omega-x) = 64 \\ \omega^2(x-y) = 1. \end{cases}$

1565. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα

1. $\begin{cases} x+y-\omega = 5 \\ (x+y)^2-\omega^2 = 65 \\ (y+\omega)^2-x^2 = -13 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x+y+\omega = \alpha \\ (x+y)^2-\omega^2 = \beta^2 \\ (x+\omega)^2-y^2 = \gamma^2 \end{cases}$

1566. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα

1. $\begin{cases} xy-x-y= 13 \\ y\omega-y-\omega=-1 \\ \omega x-\omega-x=-1 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} xy-x-y=\lambda^2-1 \\ y\omega-y-\omega=\mu^2-1 \\ \omega x-\omega-x=\nu^2-1 \end{cases}$

1567. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα

1. $\begin{cases} y\omega-3\omega= 2 \\ \omega x-2x=-3 \\ 3xy+y= 50 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} y\omega-2\omega+1=0 \\ \omega x-3x+1=0 \\ 2xy-3y+2=0 \end{cases}$

1568. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα

1. $\begin{cases} x^2+y+\omega=12 \\ y^2+\omega+x= 8 \\ \omega^2+x+y= 6 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x^2+y+\omega=\alpha \\ y^2+\omega+x=\alpha \\ \omega^2+x+y=\alpha \end{cases}$

1569. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα

1. $\begin{cases} x(x+y+\omega)+y\omega=70 \\ y(x+y+\omega)+\omega x=50 \\ \omega(x+y+\omega)+xy=38 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x(x+y+\omega)+y\omega=238 \\ y(x+y+\omega)+\omega x=187 \\ \omega(x+y+\omega)+xy=154 \end{cases}$

1570. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} (x+y)(x+y-\omega)=2xy+2x+y \\ (y+\omega)(y+\omega-x)=2y\omega+y+3\omega \\ \omega^2+x^2-y\omega-yx=3\omega+2x. \end{cases}$

1571. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$x+y-3z=0, \quad x^2+y^2-5z^2=0, \quad xyz=16.$ (Σχολὴ Ἰκάρων)

1572. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$x^2-y\omega=-17, \quad y^2-\omega x=1, \quad \omega^2-xy=19.$

1573. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$x^2+(y-\omega)^2=25, \quad y^2+(\omega-x)^2=29, \quad \omega^2+(x-y)^2=5.$

1574. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$x^2+y^2-\omega(x+y)=-13, \quad y^2+\omega^2-x(y+\omega)=17, \quad \omega^2+x^2-y(\omega+x)=9$

1575. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα
$xy+x+y=7,\qquad y\omega+y+\omega=5,\qquad \omega x+\omega+x=11.$

1576. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα
$x^2+x+y\omega=1,\qquad y^2+y+\omega x=1,\qquad \omega^2+\omega+xy=1.$

1577. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα
$x^2+y\omega=y+\omega,\qquad y^2+\omega x=\omega+x,\qquad \omega^2+xy=x+y.$

1578. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα
$x+y-\omega=14,\qquad y^2+\omega^2-x^2=46,\qquad y\omega=9.$

1579. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα
$x+y+\omega=20,\qquad xy+y\omega+\omega x=121,\qquad xy\omega=210.$

1580. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα
$x+y+\omega=6,\qquad x^2+y^2+\omega^2=14,\qquad xy+x\omega-y\omega=7.$

1581. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα

$$1.\ \begin{cases} x^2-(y-\omega)^2=96 \\ y^2-(\omega-x)^2=48 \\ \omega^2-(x-y)^2=32 \end{cases} \qquad 2.\ \begin{cases} x^2-(y-z)^2=\alpha \\ y^2-(z-x)^2=\beta \\ z^2-(x-y)^2=\gamma \end{cases}$$

1582. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα
$(y+\omega)^2-x^2=\alpha,\qquad (\omega+x)^2-y^2=\beta,\qquad (x+y)^2-\omega^2=\gamma.$

1583. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα
$(x+y)(y+\omega)=187,\qquad (y+\omega)(\omega+x)=154,\qquad (\omega+x)(x+y)=238.$

1584. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα
$x(y+\omega-x)=39-2x^2,\quad y(\omega+x-y)=52-2y^2,\quad \omega(x+y-\omega)=78-2\omega^2.$

1585. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα
$x-y^2-y\omega-\omega=0,\qquad x-y-y^2-\omega^2=2,\qquad x+y-y^2-\omega=0.$

1586. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα
$x+y+\omega=0,\qquad x^2+y^2-\omega^2=0,\qquad x^4+y^4-\omega^4=66.$

1587. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα

$$1.\ \begin{cases} x^2+xy+y^2=31 \\ y^2+y\omega+\omega^2=21 \\ \omega^2+\omega x+x^2=61 \end{cases} \qquad 2.\ \begin{cases} x^2+xy+y^2=\alpha \\ y^2+y\omega+\omega^2=\beta \\ \omega^2+\omega x+x^2=\gamma \end{cases}$$

(Πολυτεχνεῖον 1932) (Πολυτεχνεῖον 1947)

1588. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα
$xy+y\omega+\omega x=11,\qquad x^2+y^2+\omega^2=14,\qquad x^3+y^3+\omega^3=36.$

Ε' Ὁμάς. *1589*. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt[3]{x+3}-\sqrt[3]{x-4}=1$ διὰ τῆς ἀναγωγῆς της εἰς ἕνα σύστημα δύο ρητῶν ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους. (Θέσατε $\sqrt[3]{x+3}=\varphi$, $\sqrt[3]{x-4}=\omega$).

1590. Ὁμοίως διὰ τὴν ἐξίσωσιν $\sqrt[3]{72-x}-\sqrt[3]{16-x}=2.$

1591. Ὁμοίως διὰ τὴν ἐξίσωσιν $\sqrt[3]{x+49}-\sqrt[3]{x-49}=2$

1592. Ὁμοίως διὰ τὴν ἐξίσωσιν $\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x-2}=3$

1593. Ὁμοίως διὰ τὴν ἐξίσωσιν $\sqrt[4]{21+x}+\sqrt[4]{76-x}=5.$

1594. Ὁμοίως διὰ τὴν ἐξίσωσιν

$$\sqrt[3]{(\alpha+x)^2}+\mu\sqrt[3]{(\alpha-x)^2}=(\mu+1)\sqrt[3]{\alpha^2-x^2}.$$

1595. Ὁμοίως διὰ τὴν ἐξίσωσιν

$\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x-2}=3.$ (Θέσατε $\sqrt{x+1}=\varphi,\quad \sqrt[3]{x-2}=\omega$).

Στ΄. Ὁμάς. 1596. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$x\varphi=y\omega,\quad y+\varphi=7,\quad y+\omega=5,\quad x^3+y^3+\varphi^3+\omega^3=252.$

1597. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$x+y+\varphi+\omega=9,\quad x^2+y^2+\varphi^2+\omega^2=25,\quad x^3+y^3+\varphi^3+\omega^3=81.$
$xy=\omega\varphi.$

1598. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$x\varphi=y\omega,\quad x+y=5,\quad y+\omega=4,\quad x^4+y^4+\varphi^4+\omega^4=289.$

1599. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$x^2+y^2=25,\quad \omega^2+\varphi^2=61,\quad x\varphi+y\omega=38,\quad x\omega+\varphi y=39.$

1600. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$\omega(x-y)=4(\omega-\varphi),\quad x(\varphi-\omega)=2(y-x),$
$y(\omega-\varphi)=3(x-y),\quad \varphi(x-y)=5(\omega-\varphi).$

1601. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$\varphi+\omega=1,\quad \varphi x+\omega y=2,\quad \varphi x^2+\omega y^2=5,\quad \varphi x^3+\omega y^3=14.$

1602. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$(x+y)^2+(\omega+\varphi)^2=52,\quad (x+\omega)^2+(y+\varphi)^2=50,$
$(x+\varphi)^2+(y+\omega)^2=58,\quad x+y+\varphi+\omega=10.$

1603. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$x^2+y^2=1,\quad xy+2\omega=0,\quad y^2+\omega^2=1,\quad (2x+y)(2z+\omega)=8.$

(Χημικὸν Τμῆμα Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν)

1604. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$x+y=7,\quad xz+y\omega=11,\quad xz^2+y\omega^2=19,\quad xz^3+y\omega^3=35.$

Ζ΄ Ὁμάς. 1605. Ποία σχέσις πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν α, β, γ, ἵνα οἱ κάτωθι ἐξισώσεις εἶναι συμβιβασταί ; (δηλ. νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπαλείφουσα)

$xy=\alpha,\quad x^2+y^2=\beta,\quad \dfrac{x}{y}=\gamma.$ (Πανεπιστήμιον)

1606. Ὁμοίως διὰ τὰς ἐξισώσεις

$\alpha x+\beta y=0,\quad x+y-xy=0.\quad x^2+y^2=1.$

1607. Ὁμοίως διὰ τὰς ἐξισώσεις

$x^2-y^2=\alpha x-\beta y,\quad 4xy=\beta x+\alpha y,\quad x^2+y^2=1.$

1608. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπαλείφουσα τῶν ἐξισώσεων

$4(x^2+y^2)=\alpha x+\beta y,\quad 2(x^2+y^2)=\alpha x-\beta y,\quad xy=\gamma^2.$

1609. Ὁμοίως διὰ τὰς ἐξισώσεις

$\alpha x-\beta y=\lambda(x^2-y^2),\quad \beta x+\alpha y=2\lambda xy,\quad x^2+y^2=1.$

1610. Ὁμοίως διὰ τὰς ἐξισώσεις

$x-\lambda y=\alpha, \qquad y-\lambda x=\beta, \qquad x^2+y^2=1.$

1611. Νὰ ἀπαλειφθοῦν οἱ x καὶ y μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων

$\alpha(x^2+y^2+1)=2x, \qquad \beta(x^2+y^2+1)=2y, \qquad \gamma(x^2+y^2+1)=x^2+y^2-1.$

1612. Ὁμοίως διὰ τὰς ἐξισώσεις

$$x+\frac{1}{x}=\alpha, \qquad y+\frac{1}{y}=\beta, \qquad xy+\frac{1}{xy}=\gamma.$$

1613. Νὰ ἀπαλειφθοῦν οἱ x καὶ y μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων

$x+y=\alpha, \qquad x^2+y^2=\beta^2, \qquad x^3+y^3=\gamma^3.$

1614. Ὁμοίως διὰ τὰς ἐξισώσεις

$x+y=\alpha, \qquad x^2+y^2=\beta^2, \qquad x^4+y^4=\gamma^4.$

1615. Νὰ ἀπαλειφθοῦν οἱ x καὶ y μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1, \qquad \frac{x}{\alpha^3}=\frac{y}{\beta^3}, \qquad \sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{\gamma^2}.$$

1616. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$(x+y)(x+\omega)=\alpha y\omega, \qquad (y+x)(y+\omega)=\beta\omega x, \qquad (\omega+x)(\omega+y)=\gamma xy.$

1617. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$x^2=\alpha(x+y)(x+\omega), \qquad y^2=\beta(y+x)(y+\omega), \qquad \omega^2=\gamma(\omega+x)(\omega+y).$

1618. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$y^2+\omega^2-2\alpha y\omega=0, \qquad \omega^2+x^2-2\beta\omega x=0, \qquad x^2+y^2-2\gamma xy=0.$

1619. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$\beta x^2+\alpha xy+\gamma y\omega=0, \qquad \gamma y^2+\beta y\omega+\alpha\omega x=0, \qquad \alpha\omega^2+\gamma\omega x+\beta xy=0.$

1620. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$xy=\alpha^2, \qquad y\omega=\beta^2, \qquad \omega x=\gamma^2, \qquad x^2+y^2+\omega^2=\delta^2.$

1621. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$x+y+\omega=0, \qquad \alpha x^2+\beta y^2+\gamma\omega^2=0, \qquad \alpha x^4+\beta y^4+\gamma\omega^4=0.$

1622. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=\frac{1}{\gamma}, \qquad \frac{\omega}{\alpha}+\frac{\varphi}{\beta}=\frac{1}{\gamma},$$

$$x\omega=y\varphi=-1, \qquad \alpha(y+\varphi)+\beta(x+\omega)=\gamma(y\omega+\varphi x).$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΛΥΣΙΝ

Α' Ὁμάς. *1623*. Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι ἐννεαπλάσιον τῆς διαφορᾶς των καὶ τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον εἶναι ἴσον μὲ τὸν μεγαλύτερον ἐκ τῶν δύο ἀριθμῶν καὶ μὲ τὸ δωδεκαπλάσιον τοῦ πηλίκου των.

1624. Ἕνας ἀριθμὸς εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τριῶν διαδοχικῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν καὶ ἐὰν τὸν διαιρέσωμεν δι' ἑκάστου ἐξ αὐτῶν τὸ ἄθροισμα τῶν πηλίκων εἶναι 47. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοὶ αὐτοί.

1625. Ἐὰν προσθέσωμεν 18 εἰς διψήφιον ἀριθμὸν εὑρίσκομεν τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος προκύπτει, ἂν ἐναλλάξωμεν τὰ ψηφία τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ καὶ ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν διὰ τοῦ γινομένου τῶν ψηφίων του εὑρίσκομεν πηλίκον 3. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμός;

1626. Νὰ εὑρεθῇ διψήφιος ἀριθμός, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ πηλίκον τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ψηφίων του εἶναι μεγαλύτερον τοῦ πηλίκου τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ προκύπτοντος δι' ἐναλλαγῆς τῶν ψηφίων του διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ψηφίων του κατὰ τὴν διαφορὰν τῶν ψηφίων του καὶ ὅτι τὸ γινόμενον τῶν δύο αὐτῶν πηλίκων εἶναι ἴσον μὲ τὸν ζητούμενον ἀριθμόν.

1627. Μερικοὶ μαθηταὶ ἀπεφάσισαν νὰ κάμουν μίαν ἐκδρομὴν μὲ κοινὰ ἔξοδα. Ἐὰν οἱ μαθηταὶ ἦσαν 5 περισσότεροι καὶ ἐπλήρωνε ἕκαστος 1000 δρχ. περισσότερον, θὰ ἐπλήρωνον ἐν ὅλῳ 180 000 δρχ. Ἐὰν ὅμως ἦσαν 5 ὀλιγώτεροι καὶ ἐπλήρωνε ἕκαστος 1000 δρ. ὀλιγώτερον, θὰ ἐπλήρωνον ἐν ὅλῳ 80 000 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ πόσοι ἦσαν οἱ μαθηταὶ καὶ πόσον ἐπλήρωσε κάθε μαθητής.

1628. Ἕνας σωλὴν ἐκ μολύβδου ζυγίζει 65 χγρ.· ἕνας δεύτερος σωλήν, μακρύτερος κατὰ 3 μ. καὶ τοῦ ὁποίου τὸ βάρος κατὰ μέτρον εἶναι 2 χγρ. μεγαλύτερον, ζυγίζει 120 χγρ. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ μήκη καὶ τὸ βάρος, κατὰ τρέχον μέτρον, τῶν δύο σωλήνων.

1629. Οἰνέμπορος ἔχει δύο εἴδη οἴνου. Ἡ ποσότης τοῦ πρώτου εἴδους εἶναι πρὸς τὴν ποσότητα τοῦ δευτέρου εἴδους ὡς οἱ ἀριθμοὶ 5 πρὸς 4. Ἡ ὀκᾶ τοῦ πρώτου εἴδους κοστίζει τόσας δραχμάς, ὅσον εἶναι τὸ δεκαπλάσιον τῆς ποσότητος τοῦ δευτέρου εἴδους καὶ ἡ ὀκᾶ τοῦ δευτέρου εἴδους κοστίζει 250 δρχ. ὀλιγώτερον ἀπὸ ὅσον κοστίζει ἡ ὀκᾶ τοῦ πρώτου εἴδους. Καὶ αἱ δύο ποσότητες κοστίζουν συνολικῶς 850 000 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ποσότης κάθε εἴδους καὶ ἡ τιμὴ τῆς ὀκᾶς κάθε εἴδους.

Β' Ὁμάς. 1630. Κεφάλαιον φέρει ἐτήσιον τόκον 7200 δραχμάς. Ἄλλο κεφάλαιον μεγαλύτερον κατὰ 30 000 δραχμάς, τοκιζόμενον μὲ ἐπιτόκιον κατὰ 1 ο|ο μικρότερον, φέρει ἐτήσιον τόκον 7500 δρχ. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κεφάλαια καὶ τὸ ἐπιτόκιον.

1631. Ἕνας ἔμπορος ἐτόκισε δύο κεφάλαια συνολικοῦ ποσοῦ 100 000 δραχμῶν. Καθένα ἀπὸ τὰ δύο αὐτὰ κεφάλαια ἐτοκίσθη μὲ ἐπιτόκιον ἴσον ἀντιστοίχως μὲ τὸ δεκάκις χιλιοστὸν τοῦ κεφαλαίου. Καὶ ἀπὸ τὰ δύο κεφάλαια ἔλαβε τόκον 5800 δρχ. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κεφάλαια.

1632. Δύο κεφάλαια ἐτοκίσθησαν πρὸς 3 ο|ο· τὸ ἄθροισμά των εἶναι 500 000 δρχ. Τὸ πρῶτον ἐτοκίσθη ἐπὶ 4 μῆνας περισσότερον τοῦ δευτέρου καὶ καθένα ἀπ' αὐτὰ ἔδωσε 6000 δρχ. ὡς τόκον. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κεφάλαια καὶ ὁ χρόνος κατὰ τὸν ὁποῖον ἔμειναν τοκισμένα.

1633. Δύο κεφάλαια ἐτοκίσθησαν μὲ διάφορα ἐπιτόκια. Τὸ ἄθροισμα τῶν δύο κεφαλαίων ἦτο 140 000 δραχμὰς καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιτοκίων 11· ὁ ἐτήσιος τόκος τοῦ πρώτου κεφαλαίου ἦτο 4800 δρχ., τοῦ δὲ δευτέρου 3000 δρχ. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κεφάλαια.

1634. Ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις γραμματίου 246 000 δρχ. εἶναι 6765 δρχ. Ἐὰν ἡ προεξόφλησις ἐγένετο 55 ἡμέρες ἐνωρίτερον καὶ μὲ ἐπιτόκιον κατὰ 1,5 ο|ο μεγαλύτερον, ἡ ὑφαίρεσις θὰ ἔμενε ἡ ἰδία. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐπιτόκιον τῆς προεξοφλήσεως.

Γ' Ὁμάς. 1635. Δύο ἐργάται ἐργαζόμενοι μαζὺ χρειάζονται 4 ὥρ. καὶ 48 λ. διὰ νὰ ἐκτελέσουν ἕνα ἔργον. Νὰ εὑρεθῇ πόσον χρόνον, κάθε ἐργάτης ἐργαζόμενος μόνος του, θὰ ἐχρειάζετο διὰ νὰ ἐκτελέσῃ τὸ ἔργον; ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ὁ δεύτερος χρειάζεται 4 ὥρας περισσότερον ἀπὸ τὸν πρῶτον.

1636. Δύο ἐργάται ἐργαζόμενοι μαζὺ τελειώνουν ἕνα ἔργον εἰς 4,8 ὥρας. Ἐὰν ὁ πρῶτος ἐργαζόμενος μόνος, τελειώσῃ τὸ ἥμισυ τοῦ ἔργου καὶ ἔπειτα συνεχίσῃ ἀμέσως ὁ δεύτερος, τὸ ἔργον τελειώνει εἰς 10 ὥρας. Πόσον χρόνον χρειάζεται κάθε ἐργάτης διὰ νὰ τελειώσῃ μόνος του τὸ ἔργον;

1637. Δύο ἐργάται ἐκτελοῦν μαζὺ ἕνα ἔργον. Ὁ πρῶτος ἐργάζεται κατ' ἀρχὰς ἐπὶ τὸ 1]3 τοῦ χρόνου, καθ' ὃν ἄλλος θὰ ἐξετέλει μόνος του τὸ ἔργον καὶ κατόπιν ὁ δεύτερος ἐργάζεται ἐπὶ τὸ 1[3 τοῦ χρόνου, καθ' ὃν ὁ πρῶτος μόνος του θὰ ἐξετέλει τὸ ἔργον. Οὕτως ἐξετελέσθησαν τὰ 13]18 τοῦ ἔργου. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ χρόνος, τὸν ὁποῖον χρειάζεται κάθε ἐργάτης διὰ νὰ ἐκτελέσῃ μόνος του τὸ ἔργον, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι οἱ δύο ἐργάται ἐργαζόμενοι μαζὺ ἐκτελοῦν τὸ ἔργον εἰς 3 ὥρας 36 λ.

1638. Δύο βρύσεις γεμίζουν μίαν δεξαμενὴν εἰς 2,1 ὥρας, ὅταν ρέουν συγχρόνως. Ἡ δευτέρα μόνη της χρειάζεται 4 ὥρας ἐπὶ πλέον τῆς πρώτης. Νὰ εὑρεθῇ πόσον χρόνον χρειάζεται κάθε βρύσις διὰ νὰ γεμίσῃ τὴν δεξαμενὴν μόνη της.

1639. Μία δεξαμενὴ εἶναι κατὰ τὸ ἥμισυ γεμάτη ἀπὸ νερό. Μία βρύσις δύναται νὰ ἀδειάσῃ τὴν δεξαμενὴν εἰς ὡρισμένον χρόνον καὶ μία δευτέρα βρύσις θὰ ἠδύνατο νὰ τὴν γεμίσῃ τελείως εἰς ἕνα χρόνον διάφορον τοῦ πρώτου. Ἐὰν ἀφήσωμεν συγχρόνως καὶ τὰς δύο βρύσεις ἀνοικτάς, ἡ δεξαμενὴ θὰ ἀδειάσῃ μετὰ 12 ὥρας. Ἐὰν ἐλαττώσωμεν τὸ ἄνοιγμα τῶν βρύσεων, εἰς τρόπον, ὥστε νὰ χρειάζωνται μίαν ὥραν ἐπὶ πλέον, ἡ μὲν πρώτη διὰ νὰ ἀδειάσῃ τὴν δεξαμενὴν καὶ ἡ δευτέρα διὰ νὰ τὴν γεμίσῃ τελείως, θὰ ἐχρειάζοντο $15\frac{3}{4}$ ὥρας διὰ νὰ τὴν ἀδειάσουν, ἐὰν ἀφήνωνται συγχρόνως καὶ αἱ δύο βρύσεις ἀνοικταί. Νὰ εὑρεθῇ πόσας ὥρας χρειάζεται ἡ πρώτη βρύσις διὰ νὰ ἀδειάσῃ ὅλην τὴν δεξαμενὴν καὶ πόσας ὥρας ἡ δευτέρα διὰ νὰ τὴν γεμίσῃ ὅταν εἶναι τελείως ἄδειανή;

1640. Μία δεξαμενή, ἡ ὁποία εἶναι γεμάτη νερό, δύναται νὰ ἀδειάσῃ μὲ μίαν βρύσιν καὶ μὲ ἕνα σίφωνα. Ἀφήνομεν τὴν βρύσιν νὰ τρέξῃ ἐπὶ χρόνον ἴσον μὲ τὰ 2]3 τοῦ χρόνου, κατὰ τὸν ὁποῖον χρειάζεται ὁ σίφων διὰ νὰ ἀδειάσῃ μόνος του τὴν δεξαμενήν· ἔπειτα κλείομεν τὴν βρύσιν καὶ ἀφήνομεν τὸν σίφωνα νὰ τρέξῃ μέχρις, ὅτου ἀδειάσῃ τελείως ἡ δεξαμενή. Ἐὰν ἡ βρύσις καὶ ὁ σίφων ἔτρεχον μαζί, ἀπὸ τῆς ἀρχῆς, θὰ ἐχρειάζοντο δύο ὥρας ὀλιγώτερον διὰ νὰ ἀδειάσουν τὴν δεξαμενὴν καὶ ἀπὸ τὴν βρύσιν θὰ ἔτρεχε τὸ ἥμισυ τοῦ νεροῦ, τὸ ὁποῖον ἔτρεξεν ἀρχικῶς ἀπὸ τὸν σίφωνα. Πόσας ὥρας χρειάζεται χωριστὰ ἡ βρύσις καὶ ὁ σίφων διὰ νὰ ἀδειάσουν τὴν δεξαμενήν;

Δ' Ὁμάς. 1641. Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀριθμοὶ τοιοῦτοι, ὥστε τὸ ἄθροισμά των, τὸ γινόμενόν των καὶ τὸ πηλίκον των νὰ εἶναι ἴσα.

1642. Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀριθμοί, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ἄθροισμά των τὸ γινόμενόν των καὶ ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων των εἶναι ἴσα μεταξύ των.

1643. Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀριθμοί, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ἄθροισμά των, ἡ διαφορά των καὶ τὸ γιτόμενόν των εἶναι ἀντιστοίχως ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν α, β, γ.

1644. Νὰ χωρισθῇ ὁ α εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν κύβων των πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των νὰ ἰσοῦται μὲ β.

1645. Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀριθμοί, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ διαφορά των καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγωνικῶν ριζῶν των ἐκφράζονται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ α.

1646. Δύο ἀριθμοὶ εἰς ἕνα σύστημα ἀγνώστου ἀριθμήσεως γράφονται 504 καὶ 304· τὸ γινόμενόν των παρίσταται μὲ 106100 εἰς τὸ ἐννεαδικὸν σύστημα. Νὰ εὑρεθῇ ἡ βάσις τοῦ πρώτου συστήματος.

1647. Οἱ ἀριθμοὶ 1141 καὶ 634, οἱ ὁποῖοι ἀνήκουν εἰς ἕνα σύστημα ἀριθμήσεως, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι ἄγνωστος, ἔχουν διαφορὰν 102 εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα. Νὰ εὑρεθῇ ἡ βάσις τοῦ πρώτου συστήματος.

Ε΄ Ὁμάς. Μὲ τρεῖς ἢ περισσοτέρους ἀγνώστους. *1648.* Τρεῖς ἀριθμοὶ εἶναι ἀνάλογοι τῶν 3, 2 καὶ 5. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοὶ αὐτοί, ἐὰν γνωρίζωμεν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των εἶναι ἴσον μὲ 152.

1649. Νὰ εὑρεθῇ τριψήφιος ἀριθμός, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του εἶναι 14, ὅτι τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν δύο ἄλλων ψηφίων καὶ ὅτι, ἐὰν ἀντιστρέψωμεν τὴν σειρὰν τῶν ψηφίων του προκύπτει ἀριθμὸς κατὰ 594.

1650. Νὰ εὑρεθοῦν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀποτελοῦντες ἀναλογίαν, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν εἶναι 62,5 καὶ ὁ μὲν πρῶτος ὑπερβαίνει τὸν δεύτερον κατὰ 4 καὶ ὁ τρίτος τὸν τέταρτον κατὰ 3.

1651. Εἰς μίαν ἀναλογίαν οἱ δύο πρῶτοι ὅροι εἶναι μεταξύ των ὡς οἱ ἀριθμοὶ 3 πρὸς 4 καὶ τὸ γινόμενον τῶν τεσσάρων ὅρων της εἶναι 64 φορὰς μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τοῦ πρώτου ὅρου. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ δύο τελευταῖοι ὅροι.

1652. Εἰς μίαν συνεχῆ ἀναλογίαν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν ὅρων εἶναι 42, ἡ διαφορὰ τῶν δύο πρώτων εἶναι 12. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ὅροι τῆς ἀναλογίας.

1653. Εἰς μίαν συνεχῆ ἀναλογίαν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν ὅρων της εἶναι 104, τὸ δε γινόμενον τῶν τριῶν ὅρων της εἶναι 13824. Νὰ σχηματισθῇ ἡ ἀναλογία.

1654. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ τρεῖς ὅροι μιᾶς συνεχοῦς ἀναλογίας, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν ὅρων της εἶναι 39, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των εἶναι 741.

1655. Εἰς μίαν ἀναλογίαν τὸ ἄθροισμα τῶν προηγουμένων ὅρων της εἶναι 15, τὸ ἄθροισμα τῶν ἑπομένων ὅρων της εἶναι 9 καὶ ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν τριῶν πρώτων ὅρων καὶ τοῦ τετραγώνου τοῦ τετάρτου ὅρου εἶναι 152. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ τέσσαρες ὅροι τῆς ἀναλογίας.

1656. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ τέσσαρες ὅροι τῆς ἀναλογίας, ἐὰν γνωρίζωμεν τὸ ἄθροισμα 125 τῶν τετραγώνων των καὶ τὰ γινόμενα 48, 32, 24 τοῦ πρώτου ὅρου ἐπὶ ἕκαστον τῶν τριῶν ἄλλων ὅρων.

1657. Εἰς μίαν ἀναλογίαν τὸ ἄθροισμα τῶν μέσων ὅρων της εἶναι 7, τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων ὅρων της εἶναι 5 καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν κύβων τῶν ὅρων της εἶναι 252. Νὰ σχηματισθῇ ἡ ἀναλογία.

Στ΄ Ὁμάς. Κινήσεως. *1658.* Οταν μία ἅμαξα διήνυσε 2730 μέτρα, οἱ ἐμπρόσθιοι τροχοὶ ἔκαμον 392 στροφὰς περισσοτέρας τῶν ὀπισθίων. Ἐὰν αἱ περιφέρειαι κάθε τροχοῦ ηὐξάνοντο κατὰ 0,30 μέτρα, οἱ ἐμπρόσθιοι τροχοὶ θὰ ἔκαμαν 325 στροφὰς περισσοτέρας τῶν ὀπισθίων. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ μήκη τῶν περιφερειῶν κάθε τροχοῦ.

1659. Ἀεροπλάνον ἐκτελεῖ τὴν συγκοινωνίαν δύο πόλεων Α καὶ Β. Ἐὰν εἶναι νηνεμία χρειάζεται 1,5 ὥρας διὰ νὰ διανύσῃ τὴν ἀπόστασιν ΑΒ. Ἐὰν ὁ ἄνεμος πνέῃ ἀπὸ τὴν πόλιν Β πρὸς τὴν Α μὲ ταχύτητα 50 χλμ. τὴν ὥραν, τὸ ἀεροπλάνον χρειάζεται 3 ὥρ. 12 λ. διὰ τὴν μετάβασίν του εἰς τὴν πόλιν Β καὶ τὴν ἐπιστροφήν του εἰς τὴν πόλιν Α. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ταχύτης τοῦ ἀεροπλάνου.

1660. Δύο δρομεῖς ἀναχωροῦν συγχρόνως ἀπὸ δύο πόλεις Α καὶ Β καὶ διευθύνονται πρὸς συνάντησίν των. Ὁ πρῶτος, ὁ ὁποῖος ἀνεχώρησεν ἀπὸ τὴν πόλιν Α φθάνει εἰς τὴν πόλιν Β 18 ὥρας μετὰ τὴν συνάντησιν τοῦ δευτέρου ὁ ὁποῖος φθάνει εἰς τὴν πόλιν Α 32 ὥρας μετὰ τὴν συνάντησιν αὐτήν. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ταχύτητες τῶν δρομέων καὶ ὁ χρόνος τὸν ὁποῖον ἐχρειάσθη ἕκαστος διὰ νὰ διανύσῃ τὴν ἀπόστασιν ΑΒ τῶν δύο πόλεων, ἡ ὁποία ἦτο 336 χμ.

1661. Ἕνας πεζοπόρος ἀναχωρεῖ ἀπὸ τὴν πόλιν Α καὶ διευθύνεται πρὸς τὴν πόλιν Β, ἡ ὁποία ἀπέχει τῆς Α 13200 μέτρα. Συγχρόνως ἀναχωρεῖ ἀπὸ τὴν Β μία ἅμαξα καὶ διευθύνεται πρὸς τὴν Α. Ἡ διασταύρωσις τοῦ πεζοπόρου καὶ τῆς ἁμάξης ἔγινε μετὰ 44 λεπτὰ τῆς ὥρας καὶ ἡ ἅμαξα φθάνει εἰς τὴν πόλιν Α 105 λεπτὰ ἐνωρίτερον τῆς στιγμῆς, καθ' ἣν ἔφθασεν ὁ πεζοπόρος εἰς τὴν Β. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ταχύτητες (εἰς μέτρα—λεπτὰ) τοῦ πεζοπόρου καὶ τῆς ἁμάξης.

1662. Δύο πόλεις Α καὶ Β συνδέονται διὰ σιδηροδρομικῆς γραμμῆς, ἡ ὁποία βαίνει παραλλήλως μιᾶς λεωφόρου. Μία ἅμαξα ἀναχωρεῖ ἀπὸ τὴν πόλιν Α καὶ διευθύνεται πρὸς τὴν Β συγχρόνως μὲ μίαν ἀτμάμαξαν, ἡ ὁποία ἀναχωρεῖ ἀπὸ τὴν Β καὶ διευθύνεται πρὸς τὴν Α. Μετὰ τὴν διασταύρωσίν των εἰς ἕνα σημεῖον Σ, ἡ ἅμαξα ἐχρειάσθη 36 ὥρας διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὴν πόλιν Β καὶ ἡ ἀτμάμαξα ἐχρειάσθη 9 ὥρας διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὴν πόλιν Α. Νὰ εὑρεθῇ πόσας ὥρας ἐχρειάσθη ἡ ἅμαξα καὶ πόσας ἡ ἀτμάμαξα διὰ νὰ διανύσουν τὴν ἀπόστασιν ΑΒ.

1663. Δύο ἁμαξοστοιχίαι Τ καὶ Τ′ ἀναχωροῦν ἀπὸ δύο πόλεις Α καὶ Β, ἀντιστοίχως πρὸς συνάντησίν των. Ἡ ταχύτης τῆς Τ εἶναι κατὰ 10 χλμ. μεγαλυτέρα τῆς ταχύτητος τῆς Τ′. Αἱ ἁμαξοστοιχίαι διεσταυρώθησαν εἰς ἕνα σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἀπέχει 28 χμ. ἀπὸ τὸ μέσον τῆς ΑΒ. Ἐξ ἄλλου, ἐὰν ἡ Τ ἀνεχώρει 45 λεπτὰ βραδύτερον τῆς Τ′, τότε ἡ διασταύρωσίς των θὰ ἐγίνετο εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ταχύτητες τῶν δύο ἁμαξοστοιχιῶν καὶ ἡ ἀπόστασις ΑΒ.

1664. Τρία ἀτμόπλοια ἀναχωροῦν συγχρόνως ἀπὸ τὸν αὐτὸν λιμένα Α διὰ τὸν λιμένα Β. Ἡ ταχύτης τοῦ δευτέρου εἶναι κατὰ 2 κόμβους μεγαλυτέρα τοῦ πρώτου. Τὸ τρίτον διανύει τὰ μὲν 480 μίλια τῆς ἀποστάσεως ΑΒ μὲ τὴν ταχύτητα τοῦ πρώτου ἀτμοπλοίου, τὸ δὲ ὑπόλοιπον μὲ τὴν ταχύτητα τοῦ δευτέρου. Φθάνει οὕτω εἰς τὸν λιμένα Β 28 ὥρας ἐνωρίτερον τοῦ πρώτου καὶ 8 ὥρας βραδύτερον τοῦ δευτέρου. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τῆς διαδρομῆς εἰς μίλια καὶ ἡ ταχύτης ἑκάστου ἀτμοπλοίου εἰς κόμβους. (Τὸ μίλιον ἰσοῦται μὲ 1852 μέτρα καὶ ὁ κόμβος εἶναι μία μονὰς ταχύτητος ἴση μὲ 1 μίλιον καθ' ὥραν).

1665. Δύο δρομεῖς ἀναχωροῦν συγχρόνως ἀπὸ δύο σημεῖα Α καὶ Β, τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται εἰς τὰ ἄκρα ἑνὸς εὐθυγράμμου στίβου. Κάθε δρομεὺς ἔχει μίαν σταθερὰν ταχύτητα καὶ λαμβάνει τὴν ἐντολὴν μόλις φθάσῃ εἰς τὸ ἀπέναντι σημεῖον νὰ ἐπιστρέψῃ ἀμέσως εἰς τὸ σημεῖον ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἀνεχώρησε. Κατὰ τὴν μετάβασίν των οἱ δρομεῖς διεσταυρώθησαν εἰς ἕνα σημεῖον Σ, τὸ ὁποῖον ἀπέχει 40 μέτρα ἀπὸ τὸ σημεῖον Β. Κατὰ τὴν ἐπιστροφήν των διεσταυρώθησαν εἰς ἕνα σημεῖον Σ΄, τὸ ὁποῖον ἀπέχει 20 μέτρα ἀπὸ τὸ Α. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις ΑΒ, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ἐμεσολάβησαν 40 δευτερόλεπτα μεταξὺ τῶν δύο διασταυρώσεων. Νὰ εὑρεθοῦν ἐπίσης καὶ αἱ ταχύτητες τῶν δύο δρομέων.

Ζ΄ Ὁμάς. Γεωμετρίας. *1666*. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου, ἂν γνωρίζωμεν τὴν περίμετρόν του 60 μ. καὶ τὴν διαφορὰν 14 τῶν καθέτων πλευρῶν του.

1667. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου, ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν περίμετρόν του 90 μ. καὶ τὸ ἄθροισμα 3362 τῶν τετραγώνων τῶν τριῶν πλευρῶν του.

1668. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου, ἂν γνωρίζωμεν τὴν περίμετρόν του 60 μ. καὶ τὸ ἐμβαδόν του 120 τ.μ.

1669. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου, ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν ὑποτείνουσαν 25 μ. καὶ τὸ ἄθροισμα 47 τῶν καθέτων πλευρῶν του καὶ τοῦ ὕψους ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν.

1670. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου, ἐὰν γνωρίζωμεν τὸ ὕψος 12 ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν καὶ ὅτι ἡ ὑποτείνουσα εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς τῶν καθέτων πλευρῶν κατὰ 20 μ.

1671. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου, ἐὰν γνωρίζωμεν τὸ ἐμβαδόν του 240 τ. μ. καὶ τὴν ἀκτῖνα 5 μ. τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

1672. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου, ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν περίμετρόν του 48 μ. καὶ τὴν διαφορὰν 10,4 μ. τῆς ὑποτεινούσης καὶ τοῦ ὕψους ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν.

1673. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου, ἐὰν γνωρίζωμεν τὸ ἄθροισμα 35 μέτρα τῶν καθέτων πλευρῶν του καὶ τὸ ὕψος 12 μέτρα ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν.

1674. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου, ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν διαφορὰν 5 μ. τῶν καθέτων πλευρῶν καὶ τὸ ἄθροισμα 37 μ. τῆς ὑποτεινούσης καὶ τοῦ ὕψους ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν.

1675. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου, ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν περίμετρόν του 24 μ. καὶ τὸ ἄθροισμα 1728 τῶν κύβων τῶν τριῶν πλευρῶν του.

1676. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ κάθετοι πλευραὶ ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου, ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν ὑποτείνουσαν α καὶ τὴν διχοτόμον δ τῆς γωνίας Γ.

1677. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ κάθετοι πλευραὶ ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου, ἂν γνωρίζωμεν τὴν ὑποτείνουσσν α καὶ τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας Α.

1678. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ κάθετοι πλευραὶ ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν ὑποτείνουσαν $\alpha = 13$ μέτρα καὶ τὸ ἄθροισμα

$$\mu_\beta + \mu_\gamma = 13\sqrt{2,5} \text{ μέτρα.}$$

1679. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ κάθετοι πλευραὶ ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου, ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν ὑποτείνουσαν $\alpha=20$ μέτρα καὶ τὸ ἄθροισμα $\gamma+\beta'=25$ μ. ὅπου β' παριστᾷ τὴν προβολὴν τῆς πλευρᾶς β ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν.

1680. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ κάθετοι πλευραὶ x καὶ y καὶ τὸ ὕψος υ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου, ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν ὑποτείνουσαν 50 μέτρα καὶ τὸν λόγον 25|6 τοῦ ἀθροίσματος $x+y$ πρὸς τὸ υ.

1681. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ τρεῖς πλευραὶ ἑνὸς τριγώνου, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τὰ μήκη των εἶναι τρεῖς διαδοχικοὶ ἀκέραιοι ἀριθμοί, καὶ ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ τριπλάσιον τοῦ γινομένου τῆς μεσαίας πλευρᾶς ἐπὶ τὴν διαφορὰν τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.

1682. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου, ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν περίμετρόν του $2\tau=60$ μέτρα καὶ τὴν διαφορὰν $\beta-\gamma=1$ μέτρον.

1683. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου, ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν περίμετρόν του $2\tau=120$ μέτρα καὶ τὸν λόγον $\dfrac{\alpha}{\beta+\gamma}=\dfrac{13}{18}$.

1684. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου, ἐὰν γνωρίζωμεν τὰ ἀθροίσματα $\gamma+x=4{,}8$ μέτρα καὶ $\beta+y=7{,}2$ μέτρα, ἐὰν x καὶ y παριστάνουν τὰς προβολὰς τῶν καθέτων πλευρῶν γ καὶ β ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν α.

1685. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου, ἐὰν γνωρίζωμεν τὸ ὕψος υ_α καὶ τὴν διαφορὰν $\gamma'-\beta'=\upsilon_\alpha$, ὅπου γ' καὶ β' παριστάνουν τὰς προβολὰς τῶν καθέτων πλευρῶν γ καὶ β ἐπὶ τὴν ἐπιτείνουσαν α.

1686. Εἰς ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ($A=90^0$) φέρομεν τὸ ὕψος ΑΔ καὶ ἀπὸ τὸ Δ τὰς καθέτους ΔΕ καὶ ΔΖ ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ ἀντιστοίχως. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ κάθετοι πλευραὶ $AB=x$, $A\Gamma=y$, ἐὰν γνωρίξωμεν, ὅτι $AB+A\Gamma=10$ μέτρα καὶ $BE+\Gamma Z=5$ μέτρα.

1687. Ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ δίδονται αἱ πλευραὶ $B\Gamma=\alpha$, $AB=\gamma$ καὶ ἡ γωνία $A=60^0$. 1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τρίτη πλευρά του. 2ον. Νὰ ὁρισθῇ διὰ ποίας τιμὰς τοῦ α τὸ πρόβλημα εἶναι δυνατόν. 3ον. Νὰ ἐξηγηθοῦν γεωμετρικῶς τὰ ἐξαγόμενα ποὺ θὰ προκύψουν.

1688. Ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ δίδεται τὸ ὕψος $AH=12$ ἑκ. καὶ τὰ τμήματα $B\Delta=4$ ἑκ. καὶ $\Gamma\Delta=3$ ἑκ., εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ἡ ΒΓ ὑπὸ τῆς διχοτόμου ΑΔ τῆς γωνίας Α. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ ΑΒ καὶ ΑΓ.

1689. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὸ ὕψος του υ_α ; τὴν διάμεσόν του μ_α καὶ τὴν διχοτόμον του δ_α .

1690. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τραπεζίου περιγεγραμμένου περὶ κύκλον Ο, ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν περίμετρόν του ἴσην μὲ 12 μέτρ. καὶ τὴν διαγώνιον ἴσην μὲ 2 μέτρα.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ

ΠΡΟΟΔΟΙ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

ΠΡΟΟΔΟΙ

1-1-60

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑΙ ΠΡΟΟΔΟΙ

451. Ὁρισμοί. ***Ἀριθμητικὴ πρόοδος λέγεται μία σειρὰ ἀριθμῶν, ἕκαστος τῶν ὁποίων γίνεται ἐκ τοῦ προηγουμένου του διὰ τῆς προσθέσεως ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.***

Π. χ. ἡ σειρὰ τῶν ἀριθμῶν

$$3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13, \ldots \qquad (1)$$

εἶναι μία ἀριθμητικὴ πρόοοδος, διότι ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν γίνεται ἐκ τοῦ προηγουμένου του, ἂν προσθέσωμεν εἰς αὐτὸν τὸν ἀριθμὸν 2.

Οἱ ἀριθμοὶ 3, 5, 7, . . . λέγονται ***ὅροι*** τῆς ἀριθμητικῆς προόδου.

Ὁ σταθερὸς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος προστίθεται εἰς ἕνα ὅρον διὰ νὰ δώσῃ τὸν ἑπόμενον, λέγεται ***λόγος*** τῆς ἀριθμητικῆς προόδου ἢ ***διαφορὰ τῆς προόδου*** καὶ παρίσταται συνήθως μὲ τὸ γράμμα ω.

Οὕτω ὁ λόγος τῆς προόδου (1) εἶναι ὁ ἀριθμὸς 2.

Ἐὰν ὁ λόγος τῆς προόδου εἶναι θετικὸς ἀριθμός, ἡ πρόοδος λέγεται ***αὔξουσα***· ἐὰν ὁ λόγος της εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμός, ἡ πρόοδος λέγεται ***φθίνουσα***.

Π. χ. ἡ πρόοδος (1) εἶναι αὔξουσα, διότι ὁ λόγος της 2 εἶναι θετικὸς ἀριθμός.

Ἐπίσης ἡ πρόοδος $-8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots$

εἶναι αὔξουσα ἀριθμητικὴ πρόοδος μὲ λόγον $\omega=2$.

Ἡ πρόοδος $80, 76, 72, 68, 64, 60, \ldots$

εἶναι φθίνουσα πρόοδος, διότι ὁ λόγος της -4 εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμός.

452. Παρατηρήσεις. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν λόγον μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τυχόντα ὅρον της τὸν προηγούμενον ὅρον.

Ἀριθμητικαί πρόοδοι

οοδοι

ΓΕΝΑ

Π.χ. ὁ λόγος τῆς ἀριθμ. προόδου $4, -2, -8, -14 \ldots$
εἶναι $\omega = (-8) - (-2) = -8 + 2 = -6$ ·

ὁ λόγος τῆς ἀριθμ. προόδου $4, \frac{15}{4}, \frac{7}{2}, \frac{13}{4}, \ldots$

εἶναι $$\omega = \frac{15}{4} - 4 = \frac{15-16}{4} = -\frac{1}{4}.$$

2α. Ἡ σειρὰ τῶν ἀριθμῶν $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \ldots$ θὰ ἀποτελῇ μίαν ἀριθμητικὴν πρόοδον, ἐὰν ἡ διαφορὰ μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ὅρων της εἶναι σταθερά, δηλαδὴ ἐὰν εἶναι:

$$\beta - \alpha = \gamma - \beta = \delta - \gamma = \varepsilon - \delta = \ldots = \omega. \qquad (1)$$

ὅπου ω παριστάνει τὸν λόγον τῆς προόδου αὐτῆς.

Πράγματι ἀπὸ τὴν σχέσιν (1) λαμβάνομεν

$$\beta = \alpha + \omega, \quad \gamma = \beta + \omega, \quad \delta = \gamma + \omega, \quad \varepsilon = \delta + \omega, \ldots$$

δηλ. κάθε ὅρος της γίνεται ἐκ τοῦ προηγουμένου του διὰ τῆς προσθέσεως ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ω.

3η. Ἐὰν τρεῖς ἀριθμοὶ α, β, γ ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον, θὰ εἶναι, κατὰ τὸν ὁρισμόν,

$$\beta - \alpha = \gamma - \beta \quad \text{ἢ} \quad 2\beta = \alpha + \gamma.$$

Ὥστε διὰ νὰ ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον τρεῖς ἀριθμοὶ α, β, γ, πρέπει νὰ εἶναι $2\beta = \alpha + \gamma$ ἢ $\beta = \frac{\alpha+\gamma}{2}$.

Ὁ β λέγεται ***ἀριθμητικὸς μέσος*** τῶν α καὶ γ.

4η. Διὰ νὰ δηλώσωμεν, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ σχηματίζουν μίαν ἀριθμητικὴν πρόοδον θέτομεν ἔμπροσθεν τοῦ πρώτου ὅρου της τὸ σύμβολον $\div$ καὶ χωρίζομεν τοὺς διαδοχικοὺς ὅρους μὲ ἕνα κόμμα (,) ἢ μὲ μίαν ἄνω τελείαν (·).

Π. χ. $\div \alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ παριστάνει μίαν ἀριθμητικὴν πρόοδον

$\div \kappa \cdot \lambda \cdot \mu \cdot \nu \cdot \ldots$ » » » »

Ἀσκήσεις. Ὁμὰς Α'. 1691. Σχηματίσατε τὰς ἀριθμητικὰς προόδους, αἱ ὁποῖαι ἔχουν:

1. πρῶτον ὅρον 5 καὶ λόγον 6
2. πρῶτον ὅρον -8 καὶ λόγον $+9$
3. πρῶτον ὅρον $\frac{1}{2}$ καὶ λόγον $\frac{2}{3}$.
4. πρῶτον ὅρον -15 καὶ λόγον $+\frac{1}{4}$.
5. πρῶτον ὅρον $\frac{7}{8}$ καὶ λόγον $-\frac{3}{4}$.
6. πρῶτον ὅρον $3\alpha + 5\beta$ καὶ λόγον $\alpha - 2\beta$.

453. Ὑπολογισμὸς τυχόντος ὅρου ἀριθμητικῆς προόδου.

Πρόβλημα. *Ἂν γνωρίζωμεν τὸν πρῶτον ὅρον καὶ τὸν λόγον μιᾶς*

ἀριθμητικῆς προόδος, νὰ ὑπολογισθῇ ὁ νυοστὸς ὅρος της, δηλ. ὁ κατέχων τὴν ν τάξιν·

Ἔστω α ὁ πρῶτος ὅρος τῆς ἀριθμητικῆς προόδου καὶ ω ὁ λόγος της. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς ἀριθμητικῆς προόδου

ὁ 1ος	ὅρος	θὰ	εἶναι	α
ὁ 2ος	»	»	»	α+ω
ὁ 3ος	»	»	»	α+2ω
ὁ 4ος	»	»	»	α+3ω
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
ὁ 10ος	»	»	»	α+9ω
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

Ὁ νόμος τοῦ σχηματισμοῦ τῶν ὅρων τῆς προόδου εἶναι φανερός. Π.χ. ὁ 35ος ὅρος θὰ εἶναι $\alpha+34\omega$, δηλ. θὰ εὑρεθῇ, ἐὰν εἰς τὸν πρῶτον ὅρον α προσθέσωμεν τὸ γινόμενον τοῦ λόγου ω ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 34, ὁ ὁποῖος φανερώνει τὸ πλῆθος τῶν προηγουμένων ὅρων της.

Κατὰ ταῦτα ὁ νυοστὸς ὅρος, δηλ. ὁ κατέχων τὴν ν τάξιν, θὰ εἶναι ἴσος μὲ $\alpha+(\nu-1)\omega$. Ἂν παραστήσωμεν μὲ τ τὸν νυοστὸν αὐτὸν ὅρον θὰ ἔχωμεν τὸν τύπον

$$\boxed{\tau=\alpha+(\nu-1)\omega}$$

ὁ ὁποῖος δίδει τὸν νυοστὸν ὅρον μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου, ἡ ὁποία ἔχει πρῶτον ὅρον τὸν α καὶ λόγον ω.

Παράδειγμα 1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ 31ος ὅρος τῆς προόδου

$$\div\ 15,\ 24,\ 33,\ 42, \ldots$$

Εἰς τὸν τύπον $\tau=\alpha+(\nu-1)\omega$ θέτομεν $\alpha=15$, $\nu=31$, $\omega=24-15=9$ καὶ ἔχομεν $\tau=15+30\cdot 9=285$.

Ὥστε ὁ 31ος ὅρος τῆς δοθείσης προόδου εἶναι ὁ 285.

Παράδειγμα 2ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ 125ος διαδοχικὸς περιττὸς ἀριθμός. Οἱ διαδοχικοὶ περιττοὶ ἀριθμοὶ σχηματίζουν τὴν ἀριθμητικὴν πρόοδον

$$\div\ 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11, \ldots$$

τῆς ὁποίας ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι ὁ 1 καὶ λόγος ὁ 2.

Εἰς τὸν τύπον $\tau=\alpha+(\nu-1)\omega$ θέτομεν $\alpha=1$, $\nu=125$, $\omega=2$ καὶ ἔχομεν $\tau=1+(125-1)\cdot 2=249$.

Ἀσκήσεις. 1692. Νὰ ὑπολογισθῇ :

1. ὁ 20ὸς ὅρος τῆς ἀριθμ. προόδου $\div\ 25,\ 33,\ 41, \ldots$
2. ὁ 100ὸς ὅρος τῆς ἀριθμ. προόδου $\div\ 5\frac{1}{3},\ 4\frac{7}{12},\ 3\frac{5}{6}, \ldots$
3. ὁ 24ος ὅρος τῆς ἀριθμ. προόδου $-3,\ -1,\ 1, \ldots$

$\tau = \alpha + (\nu - 1)\omega$

4. ὁ 124ος ἄρτιος διαδοχικὸς ἀκέραιος ἀριθμός.
5. τὸ 61ον πολλαπλάσιον τοῦ 13 ἀπὸ τοῦ 65 καὶ ἐκεῖθεν.

Β' Ὁμάς. *1693.* Νὰ σχηματισθῇ ἡ ἀριθμητικὴ πρόοδος τῆς ὁποίας :

1. ὁ 5ος ὅρος εἶναι 38 καὶ ὁ 11ος ὅρος εἶναι 8.
2. ὁ 2ος ὅρος εἶναι —10 καὶ ὁ 30ὸς ὅρος εἶναι 270.
3. ὁ 10ος ὅρος εἶναι 231 καὶ ὁ 20ὸς ὅρος εἶναι 2681.

1694. Νὰ εὑρεθοῦν πέντε ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι σχηματίζουν ἀριθμητικὴν πρόοδον, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα τοῦ πρώτου καὶ τοῦ τετάρτου ὅρου εἶναι 22, τὸ δὲ ἄθροισμα τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ πέμπτου ὅρου εἶναι 30.

1695. Ὁ 2ος καὶ ὁ 7ος ὅρος μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου ἔχουν ἄθροισμα 92, ὁ δὲ 4ος καὶ ὁ 11ος ἔχουν ἄθροισμα 71. Ποῖοι εἶναι οἱ τέσσαρες ὅροι;

1696. Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμητικὴ πρόοδος μὲ 12 ὅρους, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων μεσαίων ὅρων της εἶναι 74, καὶ τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων ὅρων της εἶναι 70;

454. Παρατηρήσεις.

Ὁ τύπος $\tau=\alpha+(\nu-1)\omega$ συνδέει τοὺς τέσσαρας ἀριθμοὺς α, ω, ν, τ καὶ ἑπομένως μᾶς ἐπιτρέπει νὰ ὑπολογίσωμεν τὸν ἕνα ἐξ αὐτῶν, ὅταν γνωρίζωμεν τοὺς ἄλλους τρεῖς.

Παράδειγμα 1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ πρῶτος ὅρος τῆς ἀριθμητικῆς προόδου, ἡ ὁποία ἔχει 21 ὅρους, λόγον 7 καὶ τελευταῖον ὅρον 145.

Εἰς τὸν τύπον $\tau=\alpha+(\nu-1)\omega$, θέτομεν $\tau=145$, $\nu=21$, $\omega=7$ καὶ ἔχομεν

$$145=\alpha+20\cdot 7.$$

Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν ὡς πρὸς α καὶ εὑρίσκομεν $\alpha=5$. Ὥστε ὁ πρῶτος ὅρος τῆς προόδου εἶναι 5.

Παράδειγμα 2ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λόγος τῆς ἀριθμητικῆς προόδου, ἡ ὁποία ἔχει πρῶτον ὅρον 80, καὶ τῆς ὁποίας ὁ 25ος ὅρος εἶναι 8.

Εἰς τὸν τύπον $\tau=\alpha+(\nu-1)\omega$ θέτομεν $\alpha=80$, $\nu=25$, $\tau=8$ καὶ ἔχομεν

$$8=80+24\omega.$$

Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν καὶ εὑρίσκομεν $\omega=-3$. Ὥστε ὁ λόγος τῆς προόδου εἶναι -3.

Παράδειγμα 3ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων τῆς ἀριθμητικῆς προόδου $\div\ \frac{1}{3},\ \frac{11}{15},\ \frac{17}{15},\ \ldots\ldots\ \frac{13}{3}.$

Εἰς τὸν τύπον $\tau=\alpha+(\nu-1)\omega$, θέτομεν $\alpha=\frac{1}{3}$, $\tau=\frac{13}{3}$,

$\omega=\frac{17}{15}-\frac{11}{15}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$ καὶ ἔχομεν $\frac{13}{3}=\frac{1}{3}+(\nu-1)\cdot\frac{2}{5}$.

Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν πρὸς ν καὶ εὑρίσκομεν $\nu=11$. Ὥστε τὸ πλῆθος τῶν ὅρων τῆς δοθείσης προόδου εἶναι 11.

Ἀσκήσεις. *1697.* Ὁ λόγος μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου εἶναι 4 καὶ ὁ δέκατος ὅρος της 45. Νὰ εὑρεθῇ ὁ πρῶτος ὅρος της.

1698. Ἀριθμητικῆς προόδου δίδονται :

1. $\omega=-20$, $\nu=20$, $\tau=220$. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ α.
2. $\omega=7$, $\nu=21$, $\tau=145$. » » ὁ α.
3. $\omega=0{,}75$, $\nu=10$, $\tau=6{,}25$. » » ὁ α.

1699. Ὁ πρῶτος ὅρος μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου εἶναι -3 καὶ ὁ ἑνδέκατος 17. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῆς προόδου.

1700. Ἀριθμητικῆς προόδου δίδονται :

1. $\alpha = 4$, $\nu = 19$, $\tau = 49$. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ω.
2. $\alpha = -7$, $\nu = 90$, $\tau = 438$. » » ὁ ω.
3. $\alpha = 0{,}2$, $\nu = 6$, $\tau = 3{,}2$. » » ὁ ω.

1701. Νὰ εὑρεθῇ τὸ πλῆθος ν τῶν ὅρων μιᾶς ἀριθμ. προόδου, ἐάν :

1. $\alpha = 3$, $\omega = 2$, $\tau = 9$. 3. $\alpha = \alpha$, $\omega = 3\beta$, $\tau = \alpha + 21\beta$.
2. $\alpha = 1/3$, $\omega = 2/5$, $\tau = 13/3$. 4. $\alpha = 3\gamma$, $\omega = 2\beta$. $\tau = 3\gamma + 40\beta$.

455. Παρεμβολὴ ἀριθμητικῶν μέσων μεταξὺ δύο ἀριθμῶν α καὶ β. Ὅταν λέγωμεν, ὅτι θὰ ***παρεμβάλωμεν*** μ ἀριθμοὺς μεταξὺ δύο δοθέντων ἀριθμῶν α καὶ β, σημαίνει ὅτι θὰ σχηματίσωμεν μίαν ἀριθμητικὴν πρόοδον, ἡ ὁποία θὰ ἔχῃ $(\mu+2)$ ὅρους καὶ τῆς ὁποίας ὁ πρῶτος ὅρος θὰ εἶναι ὁ α καὶ τελευταῖος ὁ β.

Οἱ παρεμβαλλόμενοι ὅροι λέγονται ***ἀριθμητικοὶ μέσοι.***

Πρόβλημα. Νὰ παρεμβληθοῦν μ ἀριθμητικοὶ μέσοι μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν α καὶ β.

Τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸ νὰ ὑπολογίσωμεν τὸν λόγον τῆς ἀριθμ. προόδου, ἡ ὁποία θὰ ἔχῃ πρῶτον ὅρον τὸν α, τελευταῖον ὅρον τὸν β καὶ τῆς ὁποίας τὸ πλῆθος τῶν ὅρων θὰ εἶναι $\mu+2$ (μ οἱ παρεμβαλλόμενοι ὅροι καὶ 2 οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ α καὶ β).

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ ω΄ τὸν λόγον τῆς προόδου αὐτῆς, τότε, κατὰ τὸν γνωστὸν τύπον $\tau = \alpha + (\nu-1)\omega$, θὰ ἔχωμεν

$$\beta = \alpha + (\mu+1)\omega' \quad \text{ἢ} \quad \beta - \alpha = (\mu+1)\omega'$$

$\omega' = \frac{\beta-\alpha}{\mu+1}$

ἄρα

$$\boxed{\omega' = \frac{\beta-\alpha}{\mu+1}}$$

Γνωρίζοντες ἤδη τὸν λόγον ω΄ τῆς προόδου καὶ τὸν πρῶτον ὅρον της, δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν τὴν ζητουμένην πρόοδον. Οὕτω ἡ ζητουμένη πρόοδος εἶναι

$$\div \alpha,\ \left(\alpha + \frac{\beta-\alpha}{\mu+1}\right),\ \left(\alpha + 2\cdot\frac{\beta-\alpha}{\mu+1}\right),\ + \left(\alpha + 3\cdot\frac{\beta-\alpha}{\mu+1}\right), \ldots \left(\alpha + \mu\cdot\frac{\beta-\alpha}{\mu+1}\right),\ \beta.$$

Παράδειγμα. Νὰ παρεμβληθοῦν 8 ἀριθμητικοὶ μέσοι μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 5 καὶ 32.

Εἰς τὸν τύπον $\omega' = \frac{\beta-\alpha}{\mu+1}$ θέτομεν $\beta = 32$, $\alpha = 5$, $\mu = 8$ καὶ ἔχομεν $\omega' = \frac{32-5}{8+1} = 3$. Ἄρα ἡ ζητουμένη πρόοδος εἶναι

$$\div 5,\ 8,\ 11,\ 14,\ 17,\ 20,\ 23,\ 26,\ 29,\ 32.$$

456. Θεώρημα. ***Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐὰν μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ὅρων μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου παρεμβάλωμεν τὸ αὐτὸ πλῆθος μ ἀριθμητικῶν***

μέσων, αἱ προκύπτουσαι μερικαὶ πρόοδοι ἀποτελοῦν μίαν καὶ τὴν αὐτὴν ἀριθμητικὴν πρόοδον.

Ἔστω ἡ ἀριθμητικὴ πρόοδος $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \rho, \sigma, \tau$.

Ἐὰν παρεμβάλωμεν μεταξὺ τῶν α καὶ β, μ ἀριθμητικοὺς μέσους ὁ λόγος ω_1 τῆς νέας προόδου θὰ εἶναι $\omega_1 = \dfrac{\beta-\alpha}{\mu+1}$.

Ἐὰν παρεμβάλωμεν μ ἀριθμητικοὺς μέσους μεταξὺ τῶν β καὶ γ θὰ εἶναι $\omega_2 = \dfrac{\gamma-\beta}{\mu+1}$.

Ἐὰν παρεμβάλωμεν μ ἀριθμητικοὺς μέσους μεταξὺ τῶν γ καὶ δ θὰ εἶναι $\omega_3 = \dfrac{\delta-\gamma}{\mu+1}$ καὶ οὕτω καθεξῆς.

Οἱ λόγοι $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$ εἶναι ἴσοι, διότι αἱ διαφοραὶ $\beta-\alpha$, $\gamma-\beta$, $\delta-\gamma, \ldots$ εἶναι ἴσαι μὲ τὸν λόγον ω τῆς δοθείσης προόδου. Ἐπειδὴ οἱ λόγοι τῶν μερικῶν προόδων εἶναι ἴσοι καὶ ὁ τελευταῖος ὅρος ἑκάστης εἶναι ὁ πρῶτος ὅρος τῆς ἑπομένης, ἕπεται, ὅτι ὅλαι αἱ πρόοδοι ἀποτελοῦν μίαν πρόοδον μὲ λόγον $\dfrac{\omega}{\mu+1}$.

Παράδειγμα. Ἐὰν παρεμβάλωμεν 3 ἀριθμητικοὺς μέσους μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ὅρων τῆς προόδου

$$\div\ 4,\ 16,\ 28,\ 40 \qquad \text{(λόγος 12)}$$

σχηματίζομεν τὴν νέαν πρόοδον

$$\div\ \mathbf{4},\ 7,\ 10,\ 13,\ \mathbf{16},\ 19,\ 22,\ 25,\ \mathbf{28},\ 31,\ 34,\ 37,\ \mathbf{40},$$

21

ἡ ὁποία ἔχει λόγον $\dfrac{12}{3+1} = 3$.

Ἀσκήσεις. 1702. Νὰ παρεμβληθοῦν :

1.	6	ἀριθμητικοὶ	μέσοι	μεταξὺ	τῶν	ἀριθμῶν	4	καὶ	25
2.	10	»	»	»	»	»	4	»	26
3.	9	»	»	»	»	»	1	»	2
4.	8	»	»	»	»	»	$\frac{1}{2}$	»	$\frac{3}{4}$.

1703. Πόσους ἀριθμητικοὺς μέσους πρέπει νὰ παρεμβάλωμεν μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 1 καὶ 19, ὥστε ὁ δεύτερος μέσος νὰ ἔχῃ πρὸς τὸν τελευταῖον μέσον λόγον ἴσον μὲ 1 πρὸς 6.

1704. Διὰ νὰ παρεμβάλωμεν μμ΄—1 μέσους μεταξὺ δύο ἀριθμῶν α καὶ β δυνάμεθα, εἴτε νὰ παρεμβάλωμεν κατ᾽ ἀρχὰς μ—1 μέσους μεταξὺ α καὶ β καὶ ἔπειτα μ΄—1 μέσους μεταξὺ τῶν διαδοχικῶν ὅρων τῆς οὕτω σχηματισθείσης προόδου, εἴτε νὰ παρεμβάλωμεν κατ᾽ ἀρχὰς μ΄—1 μέσους μεταξὺ τῶν α καὶ β καὶ ἔπειτα μ—1 μέσους μεταξὺ τῶν ὅρων τῆς οὕτω σχηματισθείσης προόδου.

457. Ἄθροισμα τῶν ὅρων μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου.

Λῆμμα. ***Εἰς κάθε ἀριθμητικὴν πρόοδον τὸ ἄθροισμα δύο ὅρων***

της, οἱ ὁποῖοι ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ τοὺς ἄκρους ὅρους, εἶναι σταθερὸν καὶ ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων ὅρων.

Ἔστω ἡ ἀριθμητικὴ πρόοδος

$$\div\ \alpha, \beta, \gamma, \dots \vartheta \dots \varkappa \dots \varrho, \sigma, \tau.$$

ἡ ὁποία ἔχει ν ὅρους καὶ λόγον ω. Θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$\beta+\sigma=\alpha+\tau, \qquad \gamma+\varrho=\alpha+\tau \quad \text{κλπ.}$$

Γνωρίζομεν, ὅτι

$$\beta=\alpha+\omega \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad \tau=\sigma+\omega \quad \text{ἢ} \quad \sigma=\tau-\omega. \quad (2)$$

Προσθέτομεν τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\beta+\sigma=\alpha+\tau.$$

Ὁμοίως ἔχομεν

$$\gamma=\alpha+2\omega \quad (3) \quad \text{καὶ} \quad \tau=\varrho+2\omega \quad \text{ἢ} \quad \varrho=\tau-2\omega. \quad (4)$$

Προσθέτομεν τὰς ἰσότητας (3) καὶ (4) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\gamma+\varrho=\alpha+\tau.$$

Γενικῶς. Ἔστωσαν ϑ καὶ κ δύο ὅροι τῆς προόδου, ποὺ κατέχουν τὴν μ τάξιν ἀπὸ τοὺς ἄκρους ὅρους α καὶ τ. Θὰ ἔχωμεν

$$\vartheta=\alpha+(\mu-1)\omega \quad (5) \quad \text{καὶ} \quad \tau=\varkappa+(\mu-1)\omega. \quad (6)$$

Ἀπὸ τὴν (6) λαμβάνομεν $\varkappa=\tau-(\mu-1)\omega.$ (6′)

Προσθέτομεν τὰς (5) καὶ (6′) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\vartheta+\varkappa=\alpha+\tau.$$

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι : ***Εἰς κάθε ἀριθμ. πρόοδον*** . . . .

Σημ. Ἐὰν τὸ πλῆθος τῶν ὅρων τῆς προόδου εἶναι περιττόν, ὁ μεσαῖος ὅρος εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν δύο ἄκρων ὅρων της.

458. **Πρόβλημα.** ***Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ν ὅρων μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου.***

Ἔστω ἡ ἀριθμητικὴ πρόοδος

$$\div\ \alpha, \beta, \gamma, \dots\dots, \varrho, \sigma, \tau$$

ἡ ὁποία ἔχει ν ὅρους.

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ Σ τὸ ἄθροισμα τῶν ν ὅρων τῆς προόδου αὐτῆς θὰ ἔχωμεν :

$$\Sigma=\alpha+\beta+\gamma+\dots\dots+\varrho+\sigma+\tau. \qquad (1)$$

Ἡ ἰσότης αὐτὴ γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς :

$$\Sigma=\tau+\sigma+\varrho+\dots\dots+\gamma+\beta+\alpha. \qquad (2)$$

Προσθέτομεν τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$2\Sigma=(\alpha+\tau)+(\beta+\sigma)+(\gamma+\varrho)+\dots\dots+(\varrho+\gamma)+(\sigma+\beta)+(\tau+\alpha). \quad (3)$$

Ἐπειδὴ καθένα ἀπὸ τὰ ἀθροίσματα, ποὺ εὑρίσκονται ἐντὸς παρενθέσεως, εἶναι ἴσον μὲ (α+τ), ὡς ἄθροισμα δύο ὅρων, οἱ ὁποῖοι ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ τοὺς ἄκρους ὅρους, ἡ ἰσότης (3) γράφεται

$$2\Sigma=(\alpha+\tau)+(\alpha+\tau)+(\alpha+\tau)+\ldots\ldots+(\alpha+\tau)+(\alpha+\tau)+(\alpha+\tau).$$

Ἐπειδὴ τὸ πλῆθος τῶν ἴσων προσθετέων $(\alpha+\tau)$ εἶναι ν, δηλ. ἴσον μὲ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων τῆς δοθείσης προόδου, ἡ τελευταία ἰσότης γράφεται $2\Sigma=(\alpha+\tau)\nu$

$$\boxed{\Sigma=\frac{(\alpha+\tau)\nu}{2}} \qquad (4)$$

Αὐτὸς εἶναι ὁ τύπος, ὁ ὁποῖος δίδει τὸ ἄθροισμα τῶν ν ὅρων μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου, ἂν γνωρίζωμεν τοὺς ἄκρους ὅρους της.

Ἐὰν εἰς τὸν τύπον (4) ἀντικαταστήσωμεν τὸ τ μὲ τὸ ἴσον του $\alpha+(\nu-1)\omega$ εὑρίσκομεν ἕνα δεύτερον τύπον τοῦ ἀθροίσματος αὐτοῦ

$$\boxed{\Sigma=\frac{1}{2}[2\alpha+(\nu-1)\omega]\nu}$$

Παράδειγμα 1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν 50 ὅρων τῆς προόδου

$$\div\, 4,\ 11,\ 18,\ldots\ldots$$

Εἰς τὸν τύπον $\Sigma=\frac{1}{2}[2\alpha+(\nu-1)\omega]\nu$, θέτομεν $\alpha=4$, $\omega=7$ καὶ $\nu=50$ καὶ ἔχομεν $\Sigma=\frac{1}{2}[2\cdot 4+49\cdot 7]\cdot 50=8775.$

Παράδειγμα 2ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ἀκεραίων ἀριθμῶν.

Οἱ ν πρῶτοι ἀκέραιοι ἀριθμοὶ σχηματίζουν τὴν ἀριθμ. πρόοδον

$$\div\, 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots\ldots\nu \qquad \text{(μὲ λόγον 1)}$$

Εἰς τὸν τύπον $\Sigma=\frac{(\alpha+\tau)\nu}{2}$, ποὺ δίδει τὸ ἄθροισμα τῶν ν ὅρων μιᾶς ἀριθμ. προόδου, θέτομεν $\alpha=1$, $\tau=\nu$, $\nu=\nu$ καὶ ἔχομεν

$\Sigma=\frac{(1+\nu)\nu}{2}$. Ὥστε εἶναι $\boxed{1+2+\ldots+\nu=\frac{(\nu+1)\nu}{2}}$

Παράδειγμα 3ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων περιττῶν ἀριθμῶν.

Οἱ ν περιττοὶ ἀριθμοὶ σχηματίζουν τὴν ἀριθμητικὴν πρόοδον

$$\div\, 1,\ 3,\ 5,\ 7\ldots\ldots \qquad \text{(μὲ λόγον 2)}$$

Εἰς τὸν τύπον $\Sigma=\frac{1}{2}[2\alpha+(\nu-1)\omega]\nu$, θέτομεν $\alpha=1$, $\omega=2$, $\nu=\nu$

καὶ ἔχομεν $\Sigma=\frac{1}{2}[2+(\nu-1)2]\nu=\nu^2$.

Ὥστε εἶναι $\boxed{1+3+5+\ldots=\nu^2}$

'Ασκήσεις. Α' 'Ομάς. 1705. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα :

1. τῶν 12 πρώτων ὅρων τῆς προόδου $\div 7,\ 11,\ 15 \ldots$

2. τῶν 15 » » » » $\div 5\alpha,\ 6\alpha+3\beta,\ 7\alpha+6\beta, \ldots$

3. τῶν 21 » » » » $\div 4,\ \frac{15}{4},\ \frac{7}{2}, \ldots$

4. τῶν ν » » » » $\div 9,\ 11,\ 13, \ldots$

1706. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν 30 πρώτων πολλαπλασίων τοῦ 9.

1707. 'Ο πρῶτος ὅρος ἀριθμητικῆς προόδου εἶναι ὁ 12 καὶ ὁ 30ὸς ὅρος εἶναι 302. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν 30 πρώτων ὅρων αὐτῆς.

1708. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα $1-3+5-7+\ldots$ (ν ὅροι).

1709. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ νυοστὸς ὅρος καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ν ὅρων τῆς προόδου 1. $\div 1,\ \frac{\nu-1}{\nu},\ \frac{\nu-2}{\nu}, \ldots$

2. $\div \frac{\nu^2-1}{\nu},\ \nu,\ \frac{\nu^2+1}{\nu} + \frac{\nu^2+2}{\nu}$.

1710. 'Ο πρῶτος ὅρος μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου εἶναι ἡ μικροτέρα ρίζα καὶ ὁ λόγος αὐτῆς ἡ μεγαλυτέρα ρίζα τῆς ἐξισώσεως $2x^2+7x+3=0$. Νὰ σχηματισθῇ ἡ πρόοδος καὶ νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν 21 ὅρων της.

Β' 'Ομάς. 1711. Πόσον ἀξίζει ἐμπόρευμα, ἐὰν πληρώνεται εἰς 11 δόσεις καὶ ἡ πρώτη δόσις εἶναι 10000 δραχμαί, ἡ δευτέρα 15000 δραχμαί, ἡ τρίτη 20000 δραχμαὶ κ.ο.κ.

1712. Χρέος ἐπληρώθη μὲ 15 μηνιαίας δόσεις. 'Η πρώτη δόσις ἦτο 50000 δραχμαί, ἡ δευτέρα 70000 δραχμαί, ἡ τρίτη 90000 δραχμαὶ κ.ο.κ. Πόσον ἦτο τὸ χρέος ;

1713. 'Ωρολόγιον σημαίνει τὰς ὥρας ἀπὸ τῆς πρώτης μέχρι τῆς δωδεκάτης. Πόσα κτυπήματα κάμνει ἐντὸς ἡμερονυκτίου ;

1714. 'Αναχωρῶν τις ἀπὸ μιᾶς θέσεως Α τοποθετεῖ ἐπὶ εὐθείας γραμμῆς 20 λίθους εἰς ἀποστάσεις 1 μέτρ., 3 μέτρ., 5 μέτρ., κ.ο.κ. Δεύτερος τοποθετημένος εἰς τὴν θέσιν Α εἶναι ὑποχρεωμένος νὰ παραλάβῃ ἀνὰ ἕνα τοὺς λίθους αὐτοὺς καὶ νὰ τοὺς μεταφέρῃ εἰς τὴν ἀρχικήν του θέσιν. Νὰ εὑρεθῇ πόσον διάστημα θὰ διανύσῃ ὁ δεύτερος.

Γ' 'Ομάς. 1715. Γνωρίζομεν ἐκ τῆς Φυσικῆς, ὅτι, ὅταν σῶμα βαρὺ ἀφίνεται ἐλεύθερον ἐξ ὕψους, διανύει εἰς τὸ πρῶτον δευτερόλεπτον τῆς πτώσεώς του 4,9 μέτρα καὶ εἰς κάθε ἑπόμενον δευτερόλεπτον διανύει 9,8 μέτρα περισσότερον ἀπὸ ὅσα διήνυσεν εἰς τὸ προηγούμενον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος ἀπὸ τὸ ὁποῖον κατέπεσεν ἕνα σῶμα εἰς τὸ ἔδαφος, ὅταν γνωρίζωμεν, ὅτι ὁ χρόνος τῆς πτώσεώς του εἶναι 10 δευτερόλεπτα.

1716. Ἕνα βαρὺ σῶμα ἀφίνεται ἐλεύθερον νὰ πέσῃ ἀπὸ ὕψος 1960 μ. Μετὰ πόσα δευτερόλεπτα θὰ φθάσῃ εἰς τὸ ἔδαφος ;

Δ' 'Ομάς. 1717. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι σχηματίζουν ἀριθμητικὴν πρόοδον.

1718. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τέσσαρες γωνίαι ἑνὸς τετραπλεύρου, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι σχηματίζουν ἀριθμητικὴν πρόοδον καὶ ἡ μικροτέρα εἶναι 45^0.

1719. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ γωνίαι ἑνὸς πολυγώνου μὲ ἐννέα πλευράς, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι σχηματίζουν ἀριθμητικὴν πρόοδον μὲ λόγον 3^0.

1720. Αἱ τρεῖς πλευραὶ ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον, τῆς ὁποίας ὁ λόγος εἶναι 6. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τρεῖς πλευραί.

1721. Ἡ μικροτέρα γωνία ἑνὸς πολυγώνου εἶναι 60^0, ἑκάστη δὲ τῶν ἄλλων κατὰ 20 μεγαλυτέρα τῆς προηγουμένης. Νὰ εὑρεθῇ πόσας πλευρὰς ἔχει τὸ πολύγωνον.

1722. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι ἑνὸς πενταγώνου, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι σχηματίζουν ἀριθμητικὴν πρόοδον καὶ ἡ μικροτέρα γωνία εἶναι 60^0.

(Σχολὴ Ἰκάρων 1947)

459. **Ὑπολογισμὸς δύο ἐκ τῶν ποσοτήτων α, ω, ν, τ, Σ, ὅταν δίδωνται τρεῖς ἐξ αὐτῶν.** Οἱ τύποι

$$\tau=\alpha+(\nu-1)\omega \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad \Sigma=\frac{(\alpha+\tau)\nu}{2}.$$

συνιστοῦν δύο σχέσεις μεταξὺ τῶν πέντε ποσοτήτων α, ω, ν, τ, Σ. Αἱ δύο αὗται σχέσεις μᾶς ἐπιτρέπουν νὰ ὑπολογίσωμεν δύο ἀπὸ τὰς πέντε ποσότητας, ὅταν γνωρίζωμεν τὰς τρεῖς ἄλλας. Οὕτω ἀγόμεθα εἰς 10 διάφορα προβλήματα, καθόσον δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ὡς ἀγνώστους τὰς ποσότητας, αἱ ὁποῖαι περιέχονται εἰς τὰς κατωτέρω δέκα ὁμάδας :

$$(\alpha,\omega),\ (\alpha,\nu),\ (\alpha,\tau),\ (\alpha,\Sigma),\ (\omega,\nu),\ (\omega,\tau),\ (\omega,\Sigma),\ (\nu,\tau),\ (\nu,\Sigma),\ (\tau,\Sigma).$$

Παράδειγμα 1ον. Ἀριθμ. προόδου δίδονται : $\nu=11$, $\tau=92$, $\Sigma=517$. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ α καὶ ω.

Εἰς τοὺς τύπους $\tau=\alpha+(\nu-1)\omega$ καὶ $\Sigma=\frac{(\alpha+\tau)\nu}{2}$, θέτομεν $\nu=11$, $\tau=92$, $\Sigma=517$ καὶ λαμβάνομεν

$$92=\alpha+10\omega \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad 517=\frac{(\alpha+92)11}{2}.$$

Λύομεν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2). Ἀπὸ τὴν (2) εὑρίσκομεν $\alpha=2$. Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (1) τὸ α μὲ τὴν τιμήν του 2 καὶ εὑρίσκομεν $\omega=9$.

Παράδειγμα 2ον. Ἀριθμητικῆς προόδου δίδονται $\alpha=21$, $\omega=-2$, $\Sigma=120$. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ ν καὶ τ.

Εἰς τοὺς τύπους $\tau=\alpha+(\nu-1)\omega$ καὶ $\Sigma=\frac{(\alpha+\tau)\nu}{2}$, θέτομεν $\alpha=21$, $\omega=-2$, $\Sigma=120$ καὶ ἔχομεν

$$\tau=21+(\nu-1)(-2) \quad (1), \quad 120=\frac{(21+\tau)\nu}{2}. \qquad (2)$$

Λύομεν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2). Ἀπὸ τὴν (1) ἔχομεν

$$\tau=21-2\nu+2 \quad \text{ἢ} \quad \tau=23-2\nu. \qquad (1')$$

Τὴν τιμὴν αὐτὴν τοῦ τ θέτομεν εἰς τὴν (2) καὶ ἔχομεν

$$120=\frac{(21+23-2\nu)\nu}{2} \quad \text{ἤ} \quad \nu^2-22\nu+120=0.$$

Αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εἶναι $\nu'=10$ καὶ $\nu''=12$.

Ἐὰν λάβωμεν $\nu=10$, ἡ ἐξίσωσις (1') δίδει $\tau=3$ καὶ ἡ πρόοδος ἔχει 10 ὅρους καὶ τελευταῖον ὅρον 3.

Ἐὰν λάβωμεν $\nu=12$, ἡ ἐξίσωσις (1') δίδει $\tau=-1$ καὶ ἡ πρόοδὑς ἔχει 12 ὅρους καὶ τελευταῖον τὸν -1.

Ἀσκήσεις. 1723. Ἀριθμητικῆς προόδου δίδονται :

1. $\nu=19$, $\tau=49$, $\Sigma=503{,}5$. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ α καὶ ω.
2. $\nu=11$, $\tau=92$, $\Sigma=517$. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ α καὶ ω.
3. $\nu=90$, $\tau=438$, $\Sigma=19395$. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ α καὶ ω.
4. $\nu=11$, $\tau=40$, $\Sigma=275$. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ α καὶ ω.

1724. Ἀριθμητικῆς προόδου δίδονται :

1. $\omega=4$, $\tau=88$, $\Sigma=1008$. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ α καὶ ν.
2. $\omega=-3$, $\tau=10$, $\Sigma=578$. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ α καὶ ν.
3. $\omega=11$, $\tau=144$, $\Sigma=1014$. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ α καὶ ν.
4. $\omega=3$, $\tau=30$, $\Sigma=162$. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ α καὶ ν.
5. $\omega=2$, $\tau=18$, $\Sigma=88$. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ α καὶ ν.

1725. Ἀριθμητικῆς προόδου δίδονται :

1. $\omega=7$, $\nu=12$, $\Sigma=594$. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ α καὶ τ.
2. $\omega=4$, $\nu=21$, $\Sigma=1197$. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ α καὶ τ.
3. $\omega=-12$, $\nu=8$, $\Sigma=456$. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ α καὶ τ.
4. $\omega=5$, $\nu=14$, $\Sigma=567$. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ α καὶ τ.

1726. Ἀριθμητικῆς προόδου δίδονται :

1. $\omega=-2$, $\nu=40$, $\tau=-22$. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ α καὶ Σ.
2. $\omega=7$, $\nu=22$, $\tau=149$. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ α καὶ Σ.
3. $\omega=21$, $\nu=12$, $\tau=242$. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ α καὶ Σ.
4. $\omega=0{,}75$, $\nu=10$, $\tau=6{,}25$. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ α καὶ Σ.

1727. Ἀριθμητικῆς προόδου δίδονται :

1. $\alpha=2$, $\tau=87$, $\Sigma=801$. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ ω καὶ ν.
2. $\alpha=28$, $\tau=63$, $\Sigma=72$[illegible] Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ ω καὶ ν.
3. $\alpha=3$, $\tau=39$, $\Sigma=$ [illegible]. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ ω καὶ ν.
4. $\alpha=-13$, $\tau=27$, $\Sigma=77$. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ ω καὶ ν.

1728. Ἀριθμητικῆς προόδου δίδονται :

1. $\alpha=10$, $\nu=14$, $\Sigma=1050$. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ ω καὶ τ.
2. $\alpha=3$, $\nu=50$, $\Sigma=3825$. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ ω καὶ τ.
3. $\alpha=-45$, $\nu=31$, $\Sigma=0$. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ ω καὶ τ.
4. $\alpha=25$, $\nu=12$, $\Sigma=-30$. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ ω καὶ τ.

1729. Ἀριθμητικῆς προόδου δίδονται :

1. $\alpha=8$, $\nu=14$, $\tau=73$. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ ω καὶ Σ.
2. $\alpha=95$, $\nu=19$, $\tau=5$. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ ω καὶ Σ.
3. $\alpha=12$, $\nu=13$, $\tau=144$. Νὰ ὑοολογισθοῦν οἱ ω καὶ Σ.
4. $\alpha=-4$, $\nu=16$, $\tau=101$. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ ω καὶ Σ.

1730. ᾿Αριθμητικῆς προόδου δίδονται:

1. $\alpha=58$, $\omega=-3$, $\Sigma=578$. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ ν καὶ τ.
. $\alpha=3$, $\omega=2$, $\Sigma=120$. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ ν καὶ τ.
3. $\alpha=38$, $\omega=6$, $\Sigma=1095$. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ ν καὶ τ.
4. $\alpha=1$, $\omega=3$, $\Sigma=145$. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ ν καὶ τ.

1731. ᾿Αριθμητικῆς προόδου δίδονται:

1. $\alpha=5$, $\omega=10$, $\tau=105$. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ ν καὶ Σ.
2. $\alpha=23$, $\omega=-2$, $\tau=5$. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ ν καὶ Σ.
3. $\alpha=28$, $\omega=5$, $\tau=268$. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ ν καὶ Σ.
4. $\alpha=17$, $\omega=9$, $\tau=350$. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ ν καὶ Σ.

1732. ᾿Αριθμητικῆς προόδου δίδονται:

1. $\alpha=28$, $\omega=7]3$, $\nu=16$. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ τ καὶ Σ.
2. $\alpha=3$, $\omega=2$, $\nu=13$. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ τ καὶ Σ.
3. $\alpha=7$, $\omega=4$, $\nu=13$. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ τ καὶ Σ.
4. $\alpha=0,5$, $\omega=,6$, $\nu=30$. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ τ καὶ Σ.

1733. Συνταγματάρχης διοικῶν σύνταγμα 3081 στρατιωτῶν τάσσει τοὺς στρατιώτας του εἰς τριγωνικὸν σχηματισμὸν οὕτως, ὥστε ὁ πρῶτος στοῖχος νὰ ἔχῃ 1 στρατιώτην, ὁ δεύτερος 2, ὁ τρίτος 3 στρατιώτας κ.ο.κ. Πόσους στοίχους ἔχει ὁ τριγωνικὸς σχηματισμός; (Σχολὴ Δοκίμων)

460. Ἄθροισμα τῶν ὁμοίων δυνάμεων τῶν ὅρων μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου. Α΄. Πρόβλημα. ***Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ν πρώτων ἀκεραίων ἀριθμῶν.***

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ ἄθροισμα

$$\Sigma=1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+\ldots+\nu^2.$$

Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ ἄθροισμα αὐτὸ χρησιμοποιοῦμεν τὴν ταυτότητα: $(\nu+1)^3\equiv\nu^3+3\nu^2+3\nu+1$

εἰς τὴν ὁποίαν θέτομεν διαδοχικῶς $\nu=0$, $\nu=1$, $\nu=2, \ldots, \nu=\nu$.

Θὰ εἶναι λοιπὸν

$$\begin{aligned}1^3 &= 1\\(1+1)^3&=1^3+3\cdot 1^2+3\cdot 1+1\\(2+1)^3&=2^3+3\cdot 2^2+3\cdot 2+1\\(3+1)^3&=3^3+3\cdot 3^2+3\cdot 3+1\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\\(\nu+1)^3&=\nu^3+3\cdot\nu^2+3\cdot\nu+1\end{aligned}$$

Προσθέτομεν τὰς $(\nu+1)$ ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ μετὰ τὴν ἁπλοποίησιν λαμβάνομεν

$$\begin{aligned}(\nu+1)^3&=3(1^2+2^2+3^2+\ldots+\nu^2)+3(1+2+3+\ldots+\nu)+(\nu+1)\\&=3\cdot\Sigma_2 \qquad\qquad +3\cdot\Sigma_1 \qquad\qquad +\nu+1.\end{aligned}$$

Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν εἰς αὐτὴν τὸ Σ_1 μὲ τὴν τιμήν του $\frac{\nu(\nu+1)}{2}$, ποὺ εὑρήκαμεν εἰς τὴν § 458 λαμβάνομεν

$$(\nu+1)^3=3\cdot\Sigma_2+3\cdot\frac{\nu(\nu+1)}{2}+(\nu+1).$$

'Από τὴν σχέσιν αὐτὴν λαμβάνομεν

$$3\Sigma_2=(\nu+1)^3-\frac{3(\nu+1)\nu}{2}-(\nu+1)=(\nu+1)\left[(\nu+1)^2-\frac{3\nu}{2}-1\right]=$$

$$=(\nu+1)\left(\nu^2+2\nu+1-\frac{3\nu}{2}-1\right)=(\nu+1)\cdot\frac{2\nu^2+\nu}{2}=\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{2}$$

ἤ $$\Sigma_2=\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}.$$ Ὥστε εἶναι

$$\boxed{1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots+\nu^2=\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}}$$

Σημ. 'Επειδὴ τὸ Σ_2 εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός, ὁ προηγούμενος τύπος μᾶς δεικνύει, ὅτι τὸ γινόμενον $\nu(\nu+1)(2\nu+1)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ 6.

461. **Β΄. Ἄθροισμα τῶν κύβων κλπ. τῶν ν πρώτων ἀκεραίων ἀριθμῶν.** Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὰ ἀθροίσματα

$$\Sigma_3=1^3+2^3+3^3+\ldots+\nu^3$$
$$\Sigma_4=1^4+2^4+3^4+\ldots+\nu^4$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

λαμβάνομεν τὰς ταυτότητας

$$(\nu+1)^4=\nu^4+4\nu^3+6\nu^2+4\nu+1$$
$$(\nu+1)^5=\nu^5+5\nu^4+10\nu^3+10\nu^2+5\nu+1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

καὶ ἐργαζόμενοι ὁμοίως εὑρίσκομεν

$$\boxed{\Sigma_3=1^3+2^3+3^3+\ldots+\nu^3=\left[\frac{\nu(\nu+1)}{2}\right]^2}$$

$$\boxed{\Sigma_4=1^4+2^4+3^4+\ldots+\nu^4=\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)(3\nu^2+3\nu-1)}{30}}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΠΙ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΠΡΟΟΔΩΝ

Α΄ Ὁμάς. 1734. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ x, ἵνα οἱ κάτωθι ἀριθμοὶ σχηματίζουν ἀριθμητικὴν πρόοδον :

1. 8, 11+x, 18+x. 2. x+1, 2x+4, 15+x. 3. 3x, x+4, x−1.

1735. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ x, ἵνα τὰ τετράγωνα τῶν ἀριθμῶν 1+x, 3+x 9+x ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον.

1736. Νὰ δειχθῇ, ὅτι τὰ τετράγωνα τῶν x^2-2x-1, x^2+1 καὶ x^2+2x-1 ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον.

1737. Νὰ εὑρεθῇ μία ἀριθμητικὴ πρόοδος, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ὁ πρῶτος ὅρος της εἶναι 1 καὶ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν 5 πρώτων ὅρων της εἶναι ἴσον μὲ τὸ 1]4 τοῦ ἀθροίσματος τῶν 5 ἑπομένων ὅρων της.

1738. Νὰ εὑρεθοῦν πέντε ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι σχηματίζουν ἀριθμητικὴν πρόοδον, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα τοῦ πρώτου καὶ τοῦ τετάρτου ὅρου, εἶναι 22, τὸ δὲ ἄθροισμα τοῦ τετάρτου καὶ τοῦ πέμπτου ὅρου εἶναι 30.

1739. Τὸ ἄθροισμα τῶν 9 ὅρων μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου εἶναι 126, ἡ δὲ διαφορὰ τῶν ἄκρων ὅρων εἶναι 24. Νὰ εὑρεθῇ ἡ πρόοδος.

Β' Ὁμάς. 1740. Ὁ 14ος ὅρος, ὁ 134ος ὅρος καὶ ὁ τελευταῖος ὅρος μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου εἶναι ἀντιστοίχως 66, 666, 6666. Νὰ εὑρεθῇ ὁ πρῶτος ὅρος καὶ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων.

1741. Τρεῖς ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι σχηματίζουν ἀριθμητικὴν πρόοδον, ἔχουν γινόμενον 60000. Ὁ μικρότερος ἐξ αὐτῶν εἶναι 30. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ δύο ἄλλοι.

1742. Νὰ εὑρεθοῦν τρεῖς ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ἄθροισμά των εἶναι 33 καὶ τὸ γινόμενόν των 1287.

1743. Νὰ εὑρεθοῦν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀποτελοῦντες ἀριθμητικὴν πρόοδον, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ἄθροισμά των εἶναι 22, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των εἶναι 166.

1744. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ τρεῖς ὅροι μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου, ἐὰν τὸ ἄθροισμά των εἶναι 21, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των 155.

1745. Ποῖος εἶναι ὁ λόγος τῆς ἀριθμητικῆς προόδου, τῆς ὁποίας ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι α καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων εἶναι ἴσον μὲ αν².

Γ' Ὁμάς. 1746. Νὰ εὑρεθοῦν 6 ἀριθμοὶ ἀποτελοῦντες ἀριθμητικὴν πρόοδον, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι οἱ ἄκροι ὅροι ἔχουν γινόμενον —100, οἱ δὲ τέσσαρες μεσαῖοι ἔχουν ἄθροισμα 30.

1747. Ὁ δεύτερος καὶ ἕβδομος ὅρος μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου ἔχουν γινόμενον 100, οἱ δὲ μεταξὺ αὐτῶν ὅροι ἔχουν ἄθροισμα 50. Νὰ εὑρεθῇ ἡ πρόοδος αὕτη.

1748. Νὰ εὑρεθοῦν τέσσαρες ἀριθμοὶ σχηματίζοντες ἀριθμητικὴν πρόοδον, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων ὅρων της εἶναι 22, τὸ δὲ γινόμενον τῶν μέσων ὅρων της 40.

1749. Ὁ πρῶτος ὅρος μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου εἶναι 2 καὶ ὁ πέμπτος ὅρος της 7. Πόσους ὅρους πρέπει νὰ λάβωμεν, ἵνα τὸ ἄθροισμά των εἶναι ἴσον μὲ 63.

1750. Οἱ ἄκροι ὅροι μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου εἶναι —11 καὶ +33. Νὰ εὑρεθοῦν δύο ὅροι ἀπέχοντες ἰσάκις τῶν ἄκρων, ἐὰν τὸ γινόμενόν των εἶναι 21.

Δ' Ὁμάς. 1751. Νὰ εὑρεθοῦν 5 ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι σχηματίζουν ἀριθμητικὴν πρόοδον, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ γινόμενόν των εἶναι 12320 καὶ τὸ ἄθροισμά των εἶναι 40.

1752. Τὸ ἄθροισμα τριῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον εἶναι 24, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν τετάρτων δυνάμεων αὐτῶν εἶναι 15392. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοὶ αὐτοί.

1753. Νὰ εὑρεθοῦν τέσσαρες ἀκέραιοι ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον, ἐὰν τὸ ἄθροισμά των εἶναι 20 καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστρόφων των εἶναι $1\frac{1}{24}$. (Πολυτεχνεῖον)

1754. Νὰ εὑρεθοῦν 5 ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι σχηματίζουν ἀριθμητικὴν πρόοδον, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ἄθροισμά των εἶναι 45 καὶ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστρόφων των εἶναι 137|180.

1755. Τὸ ἄθροισμα τοῦ τετάρτου καὶ ὀγδόου ὅρου μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου εἶναι 60, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν κύβων των εἶναι 72000. Νὰ εὑρεθῇ ἡ πρόοδος.

1756. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ πρῶτος ὅρος μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ὁ λόγος της εἶναι ω καὶ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων εἶναι ἴσον μὲ (ν+4) φορὰς τὸν τελευταῖον ὅρον. Ἐφαρμογὴ ω=3, ν=25.

1557. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ὅροι μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου εἰς τὴν ὁποίαν τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων εἶναι ἴσον μὲ ν+1 φορὰς τὸ ἥμισυ τοῦ τελευταίου ὅρου.

1758. Νὰ εὑρεθοῦν μ περιττοὶ διαδοχικοὶ ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα νὰ εἶναι μ^2.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙ ΠΡΟΟΔΟΙ

462. Ὁρισμοί. ***Γεωμετρικὴ πρόοδος λέγεται μία σειρὰ ἀριθμῶν, ἕκαστος τῶν ὁποίων γίνεται ἐκ τοῦ προηγουμένου του διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.***

Π.χ. ἡ σειρὰ τῶν ἀριθμῶν

$$1,\ 3,\ 9,\ 27,\ 81,\ 243, \dots \qquad (1)$$

εἶναι μία γεωμετρικὴ πρόοδος, διότι ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν γίνεται ἀπὸ τὸν προηγούμενόν του διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 3.

Οἱ ἀριθμοὶ 1, 3, 9, 27, ... λέγονται ***ὅροι*** τῆς γεωμετρικῆς προόδου.

Ὁ σταθερὸς ἀριθμός, ἐπὶ τὸν ὁποῖον πολλαπλασιάζεται ἕκαστος ὅρος διὰ νὰ δώσῃ τὸν ἑπόμενον ὅρον, λέγεται πάλιν ***λόγος*** τῆς γεωμετρικῆς προόδου καὶ παρίσταται μὲ τὸ γράμμα ω

Ὁ λόγος τῆς γεωμετρικῆς προόδου (1) εἶναι ὁ 3.

Ὁ λόγος ω μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου θεωρεῖται πάντοτε θετικός.

Ἐὰν $\omega > 1$, ἡ γεωμετρικὴ πρόοδος λέγεται ***αὔξουσα.***

Ἐὰν $\omega < 1$, ἡ γεωμετρικὴ πρόοδος λέγεται ***φθίνουσα.***

Π.χ. Ἡ γεωμετρικὴ πρόοδος 2, 10, 50, 250, 1250, ... εἶναι αὔξουσα, διότι ὁ λόγος της εἶναι ω=5.

Ἡ γεωμετρικὴ πρόοδος

$$8,\ 2,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{32}, \dots$$

εἶναι φθίνουσα, διότι ὁ λόγος εἶναι $\omega = \frac{1}{4}$.

Εἰς περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν θὰ θεωρήσωμεν ὡς λόγον μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου οἱονδήποτε ἀριθμὸν θετικὸν ἢ ἀρνητικόν, μία γεωμετρικὴ πρόοδος εἶναι ***φθίνουσα***, ὅταν ὁ λόγος της εἶναι ***ἀπολύτως μικρότερος τῆς μονάδος.***

463. Παρατηρήσεις. *1η.* Ἐὰν ὁ λόγος μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου ἦτο ἀρνητικὸς ἀριθμός, οἱ ὅροι της θὰ ἦσαν ἐναλλὰξ θετικοὶ καὶ ἀρνητικοί.

Π.χ. Ἐὰν ὁ πρῶτος ὅρος μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου ἦτο ὁ 2 καὶ ὁ λόγος της -3, οἱ ὅροι της θὰ ἦσαν

$$2, \; -6, \; 18, \; -54, \; 162, \; -486, \ldots.$$

Ἡ πρόοδος αὐτὴ εἶναι *ἀπολύτως αὔξουσα.*

2α. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν λόγον μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου διαιροῦμεν ἕνα τυχόντα ὅρον της διὰ τοῦ προηγουμένου του· τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως αὐτῆς εἶναι ὁ λόγος τῆς γεωμετρικῆς προόδου.

Π.χ. ὁ λόγος τῆς γεωμετρικῆς προόδου $4, 12, 36, 108, \ldots$ εἶναι $\omega = 12 : 4 = 3$.

Ὁ λόγος τῆς γεωμετρικῆς προόδου $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \ldots$

εἶναι $$\omega = \frac{3}{8} : \frac{1}{2} = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{1} = \frac{3}{4}.$$

3η. Ἡ σειρὰ τῶν ἀριθμων $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \ldots$ θὰ ἀποτελῇ μίαν γεωμετρικὴν πρόοδον, ἐὰν εἶναι

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\varepsilon}{\delta} = \ldots = \omega \qquad (1)$$

ὅπου ω παριστάνει τὸν λόγον τῆς προόδου,

Πράγματι· ἀπὸ τὴν σχέσιν (1) λαμβάνομεν

$$\beta = \alpha\omega, \quad \gamma = \beta\omega, \quad \delta = \gamma\omega, \; \ldots\ldots$$

δηλ. κάθε ὅρος της γίνεται ἐκ τοῦ προηγουμένου του διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

4η. Ἐὰν οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ α, β, γ ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον, θὰ εἶναι $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta}$ ἢ $\beta^2 = \alpha\gamma$.

Ὥστε διὰ ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον τρεῖς ἀριθμοί, πρέπει ὁ δεύτερος νὰ εἶναι ***μέσος ἀνάλογος*** τῶν δύο ἄλλων. Ὁ β λέγεται ***γεωμετρικὸς μέσος*** τῶν α καὶ γ καὶ εἶναι ἴσος μὲ $\sqrt{\alpha\gamma}$, δηλ. εἶναι

$$\beta = \sqrt{\alpha\gamma}.$$

5η. Διὰ νὰ δηλώσωμεν, ὅτι μία σειρὰ ἀριθμῶν, $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ ἀποτελεῖ μίαν γεωμετρικὴν πρόοδον, θέτομεν ἔμπροσθεν τοῦ πρώτου ὅρου της, τὸ σύμβολον $\div\!\!\div$ καὶ χωρίζομεν τοὺς διαδοχικοὺς ὅρους της μὲ ἕνα κόμμα (,) ἢ μὲ δύο τελείας (:).

Π.χ. $\div\!\!\div \; \alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ παριστάνει μίαν γεωμετρ. πρόοδον.

$\div\!\!\div \; \kappa : \lambda : \mu : \nu : \ldots\ldots$ » » » »

Ἀσκήσεις. ***1759.*** Νὰ σχηματισθοῦν αἱ γεωμετρικαὶ πρόοδοι, οἱ ὁποῖοι ἔχουν :

1. πρῶτον ὅρον 4 καὶ λόγον 3.
2. » » $\frac{2}{3}$ » » $\frac{1}{2}$.
3. » » 3α » » $\frac{1}{\beta}$.

1760. Νὰ σχηματισθῇ ἡ γεωμετρικὴ πρόοδος, ἡ ὁποία ἔχει ὡς πρῶτον ὅρον τὴν μεγαλυτέραν ρίζαν τῆς ἐξισώσεως $12x^2-17x+6=0$ καὶ ὡς λόγον τὴν μικροτέραν ρίζαν αὐτῆς.

464. Ὑπολογισμὸς τυχόντος ὅρου γεωμετρικῆς προόδου. Πρόβλημα. ***Ἂν γνωρίζωμεν τὸν πρῶτον ὅρον καὶ τὸν λόγον μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου, νὰ ὑπολογισθῇ ὁ νυοστὸς ὅρος, δηλ. ὁ κατέχων τὴν ν τάξιν.***

Ἔστω α ὁ πρῶτος ὅρος καὶ ω ὁ λόγος τῆς γεωμετρικῆς προόδου.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς γεωμετρικῆς προόδου

ὁ 1ος ὅρος εἶναι α
ὁ 2ος » » $\alpha\omega$
ὁ 3ος » » $\alpha\omega^2$
ὁ 4ος » » $\alpha\omega^3$
. . . .
ὁ 10ος » » $\alpha\omega^9$
. . . .

Ὁ νόμος τοῦ σχηματισμοῦ τῶν ὅρων τῆς προόδου εἶναι φανερός· π.χ. ὁ 25ος ὅρος θὰ εἶναι $\alpha\omega^{24}$, δηλ. θὰ εὑρεθῇ, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν πρῶτον ὅρον α ἐπὶ δύναμιν τοῦ λόγου ω, ἡ ὁποία ἔχει ἐκθέτην τὸν ἀριθμὸν 24, ὁ ὁποῖος φανερώνει τὸ πλῆθος τῶν προηγουμένων ὅρων.

Κατὰ ταῦτα, ὁ νυοστὸς ὅρος, δηλαδὴ ὁ κατέχων τὴν ν τάξιν, θὰ εἶναι ἴσος μὲ $\alpha\omega^{\nu-1}$. Ἂν παραστήσωμεν μὲ τ τὸν νυοστὸν αὐτὸν ὅρον, θὰ ἔχωμεν τὸν τύπον

$$\boxed{\tau = \alpha\omega^{\nu-1}}$$

Ἐφαρμογαί. **1η. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ 7ος ὅρος τῆς γεωμ. προόδου.**
$\div\!\!\div$ 5, 10, 20, 40, ...

Εἰς τὸν τύπον $\tau=\alpha\omega^{\nu-1}$ θέτομεν $\alpha=5$, $\omega=2$, $\nu=7$ καὶ ἔχομεν $\tau=5\cdot2^{7-1}=5\cdot2^6=5\cdot64=320$.

2α. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ 6ος ὅρος τῆς γεωμετρικῆς προόδου
$\div\!\!\div$ 81, 27, 9, ...

Εἰς τὸν τύπον $\tau=\alpha\omega^{\nu-1}$ θέτομεν $\alpha=81$, $\omega=\frac{1}{3}$, $\nu=6$ καὶ ἔχομεν $\tau=81\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{6-1}=81\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^5=81\cdot\frac{1}{3^5}=\frac{1}{3}$.

Ἀσκήσεις. 1761. Νὰ ὑπολογισθῇ :

1. Ὁ 10ος ὅρος τῆς γεωμετρ. προόδου $\div\!\!\div$ 1, 2, 4, 8, ...
2. Ὁ 8ος » » » » $\div\!\!\div \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \ldots$
3. Ὁ 10ος » » » » $\div\!\!\div 1 : \frac{5}{4} : \frac{25}{16}, \ldots$
4. Ὁ 14ος » » » » $\div\!\!\div$ 10240 : 5120 : 2560 : . . . .

465. Παρατηρήσεις. *1η.* Κατὰ τὸ προηγούμενον πρόβλημα, μία γεωμετρικὴ πρόοδος, ἡ ὁποία ἔχει πρῶτον ὅρον τὸν α, λόγον ω καὶ πλῆθος ὅρων ν, δύναται νὰ γραφῇ:

$$\div\div\ \alpha,\ \alpha\omega,\ \alpha\omega^2,\ \alpha\omega^3,\ \alpha\omega^4,\ \ldots\ \alpha\omega^{\nu-1}.$$

2α. Ὅταν τὸ πλῆθος ν τῶν ὅρων εἶναι πολὺ μεγάλο, ἡ δύναμις $\omega^{\nu-1}$ ὑπολογίζεται διὰ τῶν λογαρίθμων, ὡς θὰ ἴδωμεν εἰς τὸ ἑπόμενον κεφάλαιον.

3η. Ὁ τύπος $\tau=\alpha\omega^{\nu-1}$

συνδέει τοὺς τέσσαρας ἀριθμοὺς α, ω, ν, τ, καὶ ἑπομένως μᾶς ἐπιτρέπει νὰ ὑπολογίσωμεν τὸν ἕνα ἐξ αὐτῶν, ὅταν γνωρίζωμεν τοὺς τρεῖς ἄλλους.

Παράδειγμα 1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ πρῶτος ὅρος μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου, ἐὰν ὁ λόγος της εἶναι 2 καὶ ὁ 6ος ὅρος της 480.

Εἰς τὸν τύπον $\tau=\alpha\omega^{\nu-1}$ θέτομεν $\alpha=2$, $\nu=6$, $\tau=480$ καὶ ἔχομεν

$$480=\alpha\cdot 2^5 \quad \text{ἢ} \quad 480=\alpha\cdot 32, \quad \text{ἄρα} \quad \alpha=15.$$

Παράδειγμα 2ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λόγος μιᾶς γεωμετρ. προόδου, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ὁ πρῶτος ὅρος της εἶναι 9 καὶ ὁ 5ος ὅρος της εἶναι 144.

Εἰς τὸν τύπον $\tau=\alpha\omega^{\nu-1}$ θέτομεν $\alpha=9$, $\nu=5$, $\tau=144$ καὶ ἔχομεν

$$144=9\cdot\omega^4 \quad \text{ἢ} \quad \omega^4=16, \quad \text{ἄρα} \quad \omega=\sqrt[4]{16}=2.$$

Παράδειγμα 3ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων μιᾶς γεωμετρ. προόδου, ἡ ὁποία ἔχει $\alpha=6$, $\omega=2$, $\tau=3072$.

Εἰς τὸν τύπον $\tau=\alpha\omega^{\nu-1}$ θέτομεν $\tau=3072$, $\alpha=6$, $\omega=2$ καὶ ἔχομεν $3072=6\cdot 2^{\nu-1}$ ἢ $2^{\nu-1}=512$.

Ἐπειδὴ $512=2^9$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γράφεται $2^{\nu-1}=2^9$.

Ἐδῶ ἔχομεν δύο δυνάμεις ἴσας, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν 2· ἄρα καὶ οἱ ἐκθέται των θὰ εἶναι ἴσοι· δηλ. θὰ εἶναι

$$\nu-1=9, \quad \text{ἄρα} \quad \nu=10.$$

Ἀσκήσεις. 1762. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ πρῶτος ὅρος μιᾶς γεωμετρ. προόδου, ἐάν: 1. ὁ λόγος της εἶναι 2 καὶ ὁ ἕκτος ὅρος 448

2. ὁ λόγος της εἶναι 2 καὶ ὁ ἕβδομος ὅρος 128.

3. $\omega=5$, $\nu=8$, $\tau=78125$.

4. $\omega=\dfrac{1}{3}$, $\nu=5$, $\tau=\dfrac{2}{27}$.

1763. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λόγος μιᾶς γεωμετρ. προόδου, ἐάν:

1. $\alpha=3$, $\nu=7$, $\tau=192$. 2. $\alpha=9$, $\nu=5$, $\tau=144$.

3. ὁ πρῶτος ὅρος της εἶναι 2 καὶ ὁ ἔνατος ὅρος 512.

4. ὁ πρῶτος ὅρος της εἶναι 2 καὶ ὁ ἕβδομος ὅρος 1458.

1764. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ πλῆθος ν τῶν ὅρων μιᾶς γεωμ. προόδου, ἐάν:

1. $\alpha=2$, $\omega=3$, $\tau=162$. 2. $\alpha=6$, $\omega=2$, $\tau=3072$.

3. $\alpha=9$, $\omega=2$, $\tau=2304$. 4. $\alpha=9$, $\omega=2/3$, $\tau=32/27$.

1765. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ὁ 4ος ὅρος εἶναι 13, ὁ 6ος ὅρος 117 καὶ ὁ τελευταῖος εἶναι 9477.

1766. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λόγος μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ὁ 3ος ὅρος της εἶναι 12 καὶ ὁ ὄγδοος εἶναι 384.

466. Παρεμβολὴ γεωμετρικῶν μέσων μεταξὺ δύο δοθέντων ἀριθμῶν α και β. Ὅταν λέγωμεν, ὅτι θὰ παρεμβάλωμεν μ γεωμετρικοὺς μέσους μεταξὺ δύο δοθέντων ἀριθμῶν α καὶ β, σημαίνει, ὅτι θὰ σχηματίσωμεν μίαν γεωμετρικὴν πρόοδον, ἡ ὁποία θὰ ἔχῃ $(\mu+2)$ ὅρους καὶ τῆς ὁποίας ὁ πρῶτος ὅρος θὰ εἶναι ὁ α καὶ τελευταῖος ὁ β.

Οἱ παρεμβαλλόμενοι ἀριθμοὶ λέγονται ***γεωμετρικοὶ μέσοι.***

Πρόβλημα. Νὰ παρεμβληθοῦν μ γεωμετρικοὶ μέσοι μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν α καὶ β.

Τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸ νὰ ὑπολογίσωμεν τὸν λόγον τῆς γεωμετρικῆς προόδου, ἡ ὁποία θὰ ἔχῃ πρῶτον ὅρον τὸν α, τελευταῖον ὅρον τὸν β καὶ τῆς ὁποίας τὸ πλῆθος τῶν ὅρων θὰ εἶναι $\mu+2$ (μ οἱ παρεμβαλλόμενοι καὶ 2 οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ α καὶ β). Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ ω′ τὸν λόγον τῆς γεωμετρικῆς αὐτῆς προόδου, τότε κατὰ τὸν γνωστὸν τύπον $\tau=\alpha\omega^{\nu-1}$ θὰ ἔχωμεν

$$\beta=\alpha\omega'^{\mu+1} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\beta}{\alpha}=\omega'^{\mu+1}$$

ἄρα
$$\boxed{\omega'=\sqrt[\mu+1]{\frac{\beta}{\alpha}}}$$

Γνωρίζοντες ἤδη τὸν λόγον ω′ τῆς προόδου καὶ τὸν πρῶτον ὅρον της, δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν τὴν γεωμετρικὴν πρόοδον. Ἡ ζητουμένη πρόοδος θὰ εἶναι

$$\div\ \alpha,\ \alpha\sqrt[\mu+1]{\frac{\beta}{\alpha}},\quad \alpha\left(\sqrt[\mu+1]{\frac{\beta}{\alpha}}\right)^2+\alpha\left(\sqrt[\mu+1]{\frac{\beta}{\alpha}}\right)^3+\ldots+\alpha\left(\sqrt[\mu+1]{\frac{\beta}{\alpha}}\right)^\mu+\beta.$$

Παράδειγμα. Νὰ παρεμβληθοῦν 4 γεωμετρικοὶ μέσοι μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 16 καὶ 512.

Εἰς τὸν τύπον $\omega'=\sqrt[\mu+1]{\frac{\beta}{\alpha}}$, θέτομεν $\alpha=16$, $\beta=512$, $\mu=4$ καὶ ἔχομεν

$$\omega'=\sqrt[5]{\frac{512}{16}}=\sqrt[5]{32}=\sqrt[5]{2^5}=2.$$

Ἄρα ἡ ζητουμένη πρόοδος εἶναι

$$\div\ 16,\ 32,\ 64,\ 128,\ 256,\ 512.$$

467. Θεώρημα. ***Ἐὰν μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ὅρων μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς γεωμετρικῆς προόδου παρεμβάλωμεν τὸν αὐτὸν***

ἀριθμὸν μ γεωμετρικῶν μέσων, αἱ προκύπτουσαι μερικαὶ γεωμ. πρόοδοι ἀποτελοῦν μίαν καὶ τὴν αὐτὴν γεωμετρικὴν πρόοδον.

Ἔστω ἡ γεωμετρικὴ πρόοδος

$$\div\!\div\ \alpha, \beta, \gamma, \ldots, \kappa, \lambda, \tau.$$

τῆς ὁποίας ὁ λόγος ἔστω, ὅτι εἶναι ω.

Ἐὰν παρεμβάλωμεν μεταξὺ τῶν α καὶ β, β καὶ γ, γ καὶ δ, . . . λ καὶ τ, μ γεωμετρικοὺς μέσους, οἱ λόγοι τῶν μερικῶν γεωμετρικῶν προόδων, ποὺ θὰ προκύψουν, θὰ εἶναι

$$\sqrt[\mu+1]{\frac{\beta}{\alpha}},\ \sqrt[\mu+1]{\frac{\gamma}{\beta}},\ \sqrt[\mu+1]{\frac{\delta}{\gamma}},\ldots \sqrt[\mu+1]{\frac{\tau}{\lambda}}.$$

Οἱ λόγοι αὐτοὶ εἶναι ἴσοι, διότι τὰ πηλίκα $\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\gamma}{\beta}, \frac{\delta}{\gamma}, \ldots \frac{\tau}{\lambda}$ παριστάνουν τὸν λόγον ω τῆς δοθείσης γεωμετρικῆς προόδου·

Ἐπειδὴ οἱ λόγοι τῶν μερικῶν προόδων εἶναι ἴσοι καὶ ὁ τελευταῖος ὅρος ἑκάστης εἶναι ὁ πρῶτος τῆς ἑπομένης, ἕπεται ὅτι ὅλαι αὐταὶ αἱ γεωμετρικαὶ πρόοδοι ἀποτελοῦν μίαν καὶ τὴν αὐτὴν πρόοδον μὲ λόγον $\sqrt[\mu+1]{\omega}$.

Παράδειγμα. Ἐὰν παρεμβάλωμεν 2 γεωμετρικοὺς μέσους μεταξὺ τῶν ὅρων τῆς γεωμετρικῆς προόδου

$$\div\!\div\ 1,\ 8,\ 64,\ 512, \ldots \qquad (\text{λόγος } 8)$$

σχηματίζομεν τὴν νέαν πρόοδον

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 128,\ 256,\ 512.$$

Ἀσκήσεις. *1767.* Νὰ παρεμβληθοῦν 4 γεωμετρικοὶ μέσοι μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 1 καὶ 32.

1768. Νὰ παρεμβληθοῦν 10 γεωμετρικοὶ μέσοι μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 2/243 καὶ 1458.

1769 Νὰ παρεμβληθοῦν 5 γεωμετρικοὶ μέσοι μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 128 καὶ 31250.

1770. Νὰ παρεμβληθοῦν 3 γεωμετρικοὶ μέσοι μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 1 καὶ 1/256.

1771. Μεταξὺ τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $16x^2-33x+2=0$ νὰ παρεμβληθοῦν 4 γεωμετρικοὶ μέσοι.

1772. Νὰ παρεμβληθῇ μεταξὺ τῶν διαδοχικῶν ὅρων τῆς γεωμετρικῆς προόδου $\div\!\div$ 1, 4, 16, 64, 256, ἀνὰ ἕνα γεωμετρικὸν μέσον.

468. Γινόμενον τῶν ὅρων μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου.

Λῆμμα. ***Εἰς κάθε γεωμετρικὴν πρόοδον τὸ γινόμενον δύο ὅρων της, οἱ ὁποῖοι ἀπέχουν ἰσάκις ἀπὸ τὰ ἄκρα, εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων ὅρων της.***

Ἔστω ἡ γεωμετρικὴ πρόοδος $\div\!\div$ α, β, γ, . . . ρ, σ, τ, ἡ ὁποία ἔχει ν ὅρους καὶ λόγον ω.

Ἔστωσαν γ καὶ ρ δύο ὅροι αὐτῆς, οἱ ὁποῖοι ἀπέχουν ἰσάκις ἀπὸ τὰ ἄκρα. Θὰ δείξωμεν ὅτι $\gamma \cdot \rho = \alpha \cdot \tau$.

Ἐπειδὴ ὁ γ εἶναι τρίτος ὅρος, θὰ εἶναι $\gamma=\alpha\omega^2$. (1)

Ἐπίσης ὁ ὅρος τ δύναται νὰ θεωρηθῇ, ὅτι εἶναι τρίτος ὅρος τῆς προόδου, ἡ ὁποία ἔχει πρῶτον ὅρον τὸν ρ καὶ λόγον ω· ἄρα θὰ εἶναι

$$τ=ρω^2 \quad ἢ \quad ρ=\frac{τ}{ω^2}. \qquad (2)$$

Πολλαπλασιάζομεν τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$γρ=ατ.$$

Γενικῶς ἔστωσαν x καὶ y δύο ὅροι τῆς δοθείσης προόδου καὶ τοιοῦτοι, ὥστε νὰ ὑπάρχουν μ ὅροι πρὸ τοῦ x καὶ μ ὅροι μετὰ τὸ y. Κατὰ τὰ γνωστὰ θὰ εἶναι

$$x=αω^μ \quad (3) \quad καὶ \quad τ=yω^μ \quad ἢ \quad y=\frac{τ}{ω^μ} \qquad (4)$$

Πολλαπλασιάζομεν τὰς ἰσότητας (3) καὶ (4) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$xy=ατ.$$

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: *Εἰς κάθε γεωμετρικὴν πρόοδον*

469. Πρόβλημα. *Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ γινόμενον τῶν ν πρώτων ὅρων μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου, ἂν γνωρίζωμεν τὸν πρῶτον καὶ τὸν τελευταῖον ὅρον της.*

Ἔστω ἡ γεωμετρικὴ πρόοδος $\div\!\div$ α, β, γ, ... ρ, σ, τ ἡ ὁποία ἔχει ν ὅρους.

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ Γ τὸ γινόμενον τῶν ν ὅρων της, θὰ ἔχωμεν

$$Γ=α \cdot β \cdot γ \ldots ρ \cdot σ \cdot τ. \qquad (1)$$

Ἐὰν ἀλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν παραγόντων, ἡ ἰσότης (1) γράφεται

$$Γ=τ \cdot σ \cdot ρ \ldots γ \cdot β \cdot α. \qquad (2)$$

Πολλαπλασιάζομεν τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$Γ^2=ατ \cdot βσ \cdot γρ \ldots ργ \cdot σβ \cdot τα. \qquad (3)$$

Ἐπειδὴ τὰ γινόμενα βσ, γρ, ... εἶναι ἴσα μὲ ατ, ὅπως ἐδείχθη ἀνωτέρω (§ 468) ἡ ἰσότης (3) γράφεται

$$Γ^2=ατ \cdot ατ \cdot ατ \ldots ατ \cdot ατ \cdot ατ.$$

Ἐπειδὴ οἱ παράγοντες τοῦ δευτέρου μέλους τῆς ἰσότητος αὐτῆς εἶναι ν, ἡ ἰσότης αὐτὴ γράφεται $Γ^2=(ατ)^ν$.

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἰσότητα λαμβάνομεν $Γ=\sqrt{(ατ)^ν}=\sqrt{α^ν τ^ν}$.

470. Ἄθροισμα τῶν ὅρων μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου. Πρόβλημα. *Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ν ὅρων μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου.*

Ἔστω ἡ γεωμετρικὴ πρόοδος

$$\div\!\div \; α, β, γ, \ldots, ρ, σ, τ$$

ἡ ὁποία ἔχει ν ὅρους καὶ λόγον ω διάφορον τῆς μονάδος 1.

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ Σ τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων της, θὰ εἶναι

$$Σ=α+β+γ+\ldots+ρ+σ+τ. \qquad (1)$$

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος (1) ἐπὶ ω θὰ ἔχωμεν

$$Σω=αω+βω+γω+\ldots+ρω+σω+τω.$$

Ἐπειδὴ $\alpha\omega=\beta$, $\beta\omega=\gamma$, $\gamma\omega=\delta$, ... $\varrho\omega=\sigma$, $\sigma\omega=\tau$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γράφεται

$$\Sigma\omega=\beta+\gamma+\delta+\ldots+\varrho+\sigma+\tau+\tau\omega. \quad (2)$$

Ἐὰν ἀπὸ τὰ μέλη τῆς (2) ἀφαιρέσωμεν τὰ ἀντίστοιχα μέλη τῆς (1) λαμβάνομεν

$$\Sigma\omega-\Sigma=\tau\omega-\alpha \quad \text{ἢ} \quad \Sigma(\omega-1)=\tau\omega-\alpha.$$

Ἐπειδὴ $\omega\neq1$ διαιροῦμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς τελευταίας ἰσότητος διὰ $\omega-1$ καὶ ἔχομεν

$$\boxed{\Sigma=\frac{\tau\omega-\alpha}{\omega-1}} \quad (3)$$

Αὐτὸς εἶναι ὁ τύπος, ὁ ὁποῖος δίδει τὸ ἄθροισμα τῶν ν ὅρων μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου, ὅταν γνωρίζωμεν τοὺς ἄκρους ὅρους της καὶ τὸν λόγον της.

Ἐὰν εἰς τὸν τύπον (3) ἀντικαταστήσωμεν τὸ τ μὲ τὸ ἴσον του $\alpha\omega^{\nu-1}$, λαμβάνομεν

$$\Sigma=\frac{\alpha\omega^{\nu-1}\cdot\omega-\alpha}{\omega-1} \quad \text{ἢ} \quad \boxed{\Sigma=\frac{\alpha(\omega^{\nu}-1)}{\omega-1}} \quad (4)$$

Ὁ τύπος (4) χρησιμοποιεῖται, ὅταν δὲν γνωρίζωμεν τὸν τελευταῖον ὅρον τ.

Παρατήρησις. Ὁ τύπος $\Sigma=\dfrac{\alpha(\omega^{\nu}-1)}{\omega-1}$, ὁ ὁποῖος δίδει τὸ ἄθροισμα τῶν ν ὅρων μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου, δύναται νὰ εὑρεθῇ καὶ ὡς ἑξῆς: Ἔστω ἡ πρόοδος

$$\div\ \alpha,\ \alpha\omega,\ \alpha\omega^2,\ \alpha\omega^3,\ \ldots\ \alpha\omega^{\nu-1}.$$

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ Σ τὸ ἄθροισμα τῶν ν ὅρων της θὰ ἔχωμεν

$$\Sigma=\alpha+\alpha\omega+\alpha\omega^2+\alpha\omega^3+\ldots+\alpha\omega^{\nu-1}$$

ἢ

$$\Sigma=\alpha(1+\omega+\omega^2+\omega^3+\ldots+\omega^{\nu-1}). \quad (1)$$

Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων, οἱ ὁποῖοι περιέχονται ἐντὸς τῆς παρενθέσεως παριστάνει τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ $(\omega^{\nu}-1)$ διὰ $\omega-1$, ἡ ἰσότης (1) γράφεται

$$\Sigma=\alpha\cdot\frac{\omega^{\nu}-1}{\omega-1} \quad \text{ἢ} \quad \Sigma=\frac{\alpha(\omega^{\nu}-1)}{\omega-1}.$$

Εφαρμογή. **Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν 10 ὅρων τῆς προόδου** $\div\ 1, 3, 9, 27, \ldots$

Εἰς τὸν τύπον $\Sigma=\dfrac{\alpha(\omega^{\nu}-1)}{\omega-1}$ θέτομεν $\alpha=1$, $\omega=3$, $\nu=10$ καὶ ἔχομεν

$$\Sigma=\frac{1\cdot(3^{10}-1)}{3-1}=\frac{59049-1}{2}=29524.$$

Ἀσκήσεις. 1773. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα:

1. τῶν 10 ὅρων τῆς γεωμετρικῆς προόδου $\div\ 1, 2, 4, 8\ \ldots$

2. τῶν 7 ὅρων τῆς γεωμετρικῆς προόδου $\div\div 2, \frac{4}{3}, \frac{8}{9}, \ldots$

1774. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα:

1. τῶν 6 ὅρων τῆς γεωμετρικῆς προόδου $\div\div 8, 2, \frac{1}{2}, \ldots,$

2. τῶν 7 ὅρων τῆς γεωμετρικῆς προόδου $\div\div \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \ldots,$

1775. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ παράστασις $A = \dfrac{x+x^2+x^3+\ldots+x^\nu}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\ldots+\frac{1}{x^\nu}}$.

1776. Δύο πρόσωπα Α καὶ Β συνεφώνησαν τὰ ἑξῆς: Ὁ Α θὰ δίδῃ εἰς τὸν Β τὴν 1 Ἰανουαρίου 1 δραχ., τὴν 2αν Ἰανουαρίου 2 δραχ., τὴν 3ην Ἰανουαρίου 3 δραχ. καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρι τοῦ τέλους τοῦ μηνός. Ὁ Β θὰ δίδῃ εἰς τὸν Α τὴν 1 Φεβρουαρίου 1 χιλιοστὸν τοῦ λεπτοῦ, τὴν 2αν Φεβρουαρίου 2 χιλιοστὰ τοῦ λεπτοῦ, τὴν 3 Φεβρουαρίου 4 χιλιοστὰ τοῦ λεπτοῦ, τὴν 4 Φεβρουαρίου 8 χιλιοστὰ τοῦ λεπτοῦ κ.ο.κ. μέχρι τῆς 28 Φεβρουαρίου συμπεριλαμβανομένης. Νὰ ὑπολογισθῇ ποῖος θὰ ὠφεληθῇ ἀπὸ τὴν συμφωνίαν αὐτὴν καὶ πόσον;

471. Ὑπολογισμὸς δύο ἐκ τῶν ποσοτήτων α, ω, ν, τ, Σ, ὅταν δίδωνται τρεῖς ἐξ αὐτῶν. Οἱ τύποι

$$\tau=\alpha\omega^{\nu-1} \quad \text{καὶ} \quad \Sigma=\frac{\alpha(\omega^\nu-1)}{\omega-1}=\frac{\tau\omega-\alpha}{\omega-1}$$

συνιστοῦν δύο σχέσεις μεταξὺ τῶν πέντε ποσοτήτων α, ω, ν, τ, Σ. Αἱ δύο αὐταὶ σχέσεις μᾶς ἐπιτρέπουν νὰ ὑπολογίσωμεν δύο ἀπὸ τὰς πέντε ποσότητας, ὅταν γνωρίζωμεν τὰς τρεῖς ἄλλας. Οὕτω ἀγόμεθα εἰς 10 διάφορα προβλήματα, καθόσον δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ὡς ἀγνώστους τὰς ποσότητας:

$(\alpha,\omega), (\alpha,\nu), (\alpha,\tau), (\alpha,\Sigma), (\omega,\nu), (\omega,\tau), (\omega,\Sigma), (\nu,\tau), (\nu,\Sigma), (\tau,\Sigma)$.

Ὅταν δίδωνται οἱ ω ἢ ν, ἢ καὶ οἱ δύο μαζί, τὸ πρόβλημα εἶναι εὔκολον. Ἡ λύσις τῶν ἄλλων προβλημάτων εἶναι δύσκολος. Μερικὰ ἀπὸ αὐτὰ δύνανται νὰ λυθοῦν μὲ τὴν βοήθειαν τῶν λογαρίθμων· ἄλλα ὅμως δὲν δύνανται νὰ λυθοῦν μὲ τὰς στοιχειώδεις γνώσεις τῆς Ἀλγέβρας.

Παράδειγμα 1ον. Γεωμετρικῆς προόδου δίδονται $\alpha=4, \omega=2, \nu=7$. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ τ καὶ Σ.

Εἰς τοὺς τύπους $\tau=\alpha\omega^{\nu-1}$ καὶ $\Sigma=\frac{\tau\omega-\alpha}{\omega-1}$ θέτομεν $\alpha=4$, $\omega=2, \nu=7$ καὶ ἔχομεν $\tau=4\cdot 2^6$ (1) καὶ $\Sigma=\tau\cdot 2-4$. (2)

Ἀπὸ τὴν (1) ἔχομεν $\tau=4\cdot 64=256$.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (2) τὸ τ μὲ τὴν τιμήν του 256 καὶ ἔχομεν

$$\Sigma=256\cdot 2-4=508.$$

Παράδειγμα 2ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν ὁ λόγος ω καὶ τὸ ἄθροισμα Σ τῶν ὅρων μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου, ἐὰν εἶναι $\alpha=5, \nu=7, \tau=3645$.

Εἰς τοὺς τύπους $\tau = \alpha\omega^{\nu-1}$ καὶ $\Sigma = \frac{\tau\omega - \alpha}{\omega - 1}$ θέτομεν $\alpha = 5$, $\nu = 7$, $\tau = 3645$ καὶ ἔχομεν

$$3645 = 5 \cdot \omega^6 \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad \Sigma = \frac{3645 \cdot \omega - 5}{\omega - 1} \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὴν (1) ἔχομεν $\omega^6 = 729$ ἢ $\omega = \sqrt[6]{729} = \sqrt[6]{3^6} = 3$.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τήν (2) τὸ ω μὲ τὴν τιμήν του 3 καὶ εὑρίσκομεν
$$\Sigma = \frac{3645 \cdot 3 - 5}{3 - 1} = 5465.$$

Ἀσκήσεις. 1777. Γεωμετρικῆς προόδου δίδονται :

1. $\alpha = 25$, $\omega = 3$, $\nu = 7$. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ τ καὶ Σ.
2. $\alpha = 8$, $\omega = 6$, $\nu = 5$. » » οἱ τ καὶ Σ.
3. $\alpha = 2$, $\omega = 3$, $\nu = 5$. » » οἱ τ καὶ Σ.

1778. Γεωμετρικῆς προόδου δίδονται :

1. $\alpha = 7$, $\nu = 7$, $\tau = 5103$. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ ω καὶ Σ.
2. $\alpha = 5$, $\nu = 7$, $\tau = 3645$. » » οἱ ω καὶ Σ.
3. $\alpha = 5$, $\nu = 11$. $\tau = 5120$. » » οἱ ω καὶ Σ.

1779. Γεωμετρικῆς προόδου δίδονται :

1. $\omega = 5$, $\nu = 7$, $\tau = 31250$. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ α καὶ Σ.
2. $\omega = 5$, $\nu = 8$, $\tau = 78125$. » » οἱ α καὶ Σ.
3. $\omega = 2$, $\nu = 10$, $\tau = 2560$. » » οἱ α καὶ Σ.

1780. Γεωμετρικῆς προόδου δίδονται :

1. $\alpha = 5$, $\tau = 1280$, $\Sigma = 2555$. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ ω καὶ ν.
2. $\alpha = 4$, $\tau = 972$, $\Sigma = 1456$. » » οἱ ω καὶ ν.
3. $\alpha = 2$, $\tau = 1458$, $\Sigma = 2186$. » » οἱ ω καὶ ν.

1781. Γεωμετρικῆς προόδου δίδονται :

1. $\alpha = 4$, $\omega = 4$, $\Sigma = 5460$. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ ν καὶ τ.
2. $\alpha = 5$, $\omega = 2$. $\Sigma = 315$. » » οἱ ν καὶ τ.
3. $\alpha = 4{,}6$, $\omega = 108$, $\Sigma = 54155{,}8$. » » οἱ ν καὶ τ.

472. **Ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων μιᾶς φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου.** Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων τῆς φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου

$$\div\div \alpha, \ \alpha\omega, \ \alpha\omega^2, \ \alpha\omega^3, \dots \qquad (1)$$

τῆς ὁποίας ὁ λόγος ω εἶναι $0 < \omega < 1$.

Γνωρίζομεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ν ὅρων μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $\Sigma = \frac{\alpha(\omega^\nu - 1)}{\omega - 1}$.

Ὁ τύπος αὐτὸς γράφεται διαδοχικῶς :

$$\Sigma = \frac{\alpha\omega^\nu - \alpha}{\omega - 1} = \frac{\alpha - \alpha\omega^\nu}{1 - \omega} = \frac{\alpha}{1 - \omega} - \frac{\alpha\omega^\nu}{1 - \omega}.$$

Ὑπὸ τὴν μορφὴν αὐτὴν παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα Σ τῶν ν ὅρων τῆς προόδου ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο μέρη :

Τὸ πρῶτον μέρος $\frac{\alpha}{1-\omega}$ εἶναι σταθερὸν καὶ ἀνεξάρτητον τοῦ πλήθους τῶν ὅρων τῆς προόδου.

Τὸ δεύτερον μέρος $\frac{\alpha\omega^{\nu}}{1-\omega}$ εἶναι μεταβλητὸν καί, ὅταν τὸ ν αὐξάνῃ ἀπεριορίστως ἡ δύναμις ω^{ν} τείνει πρὸς τὸ μηδέν, διότι $\omega<1$ καὶ ἑπομένως τὸ $\frac{\alpha\omega^{\nu}}{1-\omega}$ τείνει πρὸς τὸ μηδέν.

Ὥστε, ὅταν τὸ πλῆθος τῶν ὅρων τῆς φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου (1) αὐξάνῃ ἀπεριορίστως, τὸ ἄθροισμα Σ τῶν ἀπείρων ὅρων της πλησιάζει ἀκαταπαύστως πρὸς τὴν σταθερὰν ποσότητα $\frac{\alpha}{1-\omega}$, ἀπὸ τὴν ὁποίαν δὲν διαφέρει παρὰ κατὰ τὴν ποσότητα $\frac{\alpha\omega^{\nu}}{1-\omega}$, ἡ ὁποία τείνει πρὸς τὸ μηδέν. Μὲ ἄλλους λόγους τὸ $\frac{\alpha}{1-\omega}$ εἶναι ***τὸ ὅριον πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων μιᾶς φθινούσης γεωμετρ. προόδου, ὅταν τὸ πλῆθος τῶν ὅρων της αὐξάνῃ ἀπεριορίστως.***

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ Σ τὸ ὅριον αὐτό, θὰ ἔχωμεν τόν τύπον

$$\boxed{\Sigma=\frac{\alpha}{1-\omega}}$$

ὁ ὁποῖος δίδει τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων μιᾶς φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου.

Ἐφαρμογαί: **1η. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων τῆς προόδου** $\div\!\!\div\ 18,\ 6,\ 2,\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{9},\ldots.$

Εἰς τόν τύπον $\Sigma=\frac{\alpha}{1-\omega}$ θέτομεν $\alpha=18$, $\omega=\frac{1}{3}$ καὶ ἔχομεν

$$\Sigma=\frac{18}{1-\frac{1}{3}}=\frac{18}{\frac{2}{3}}=27.$$

2α. Νὰ εὑρεθῇ τὸ κοινὸν κλάσμα ἀπὸ τὸ ὁποῖον παράγεται τὸ δεκαδικὸν περιοδικὸν κλάσμα 0, 325 325 325 . . . .

Τὸ περιοδικὸν αὐτὸ κλάσμα δύναται νὰ γραφῇ·

$$\frac{325}{1000}+\frac{325}{1000^2}+\frac{325}{1000^3}+\ldots. \qquad (1)$$

Ὑπὸ τὴν μορφὴν αὐτὴν παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ δοθὲν περιοδικὸν κλάσμα εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων μιᾶς φθινούσης γεωμ. προόδου, ἡ ὁποία ἔχει πρῶτον ὅρον τὸ $\frac{325}{1000}$ καὶ λόγον $\frac{1}{1000}$.

Τὸ ζητούμενον λοιπὸν κοινὸν κλάσμα, ἀπὸ τὸ ὁποῖον παράγεται τὸ δοθὲν περιοδικὸν κλάσμα, εἶναι ἴσον μὲ τό ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων τῆς προόδου (1), δηλ. εἶναι

$$\Sigma = \frac{\frac{325}{1000}}{1-\frac{1}{1000}} = \frac{\frac{325}{1000}}{\frac{999}{1000}} = \frac{325}{999}.$$

Ὥστε τὸ 0,325 325 .... παράγεται ἀπὸ τὸ κοινὸν κλάσμα $\frac{325}{999}$.

Ἀσκήσεις 1782. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων τῆς προόδου :

1. $\div\, 2,\ \frac{3}{2},\ \frac{9}{8}, \ldots$ 3. $\div\, \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{9} \ldots$

2. $\div\, 4 : 2 : 1 : \ldots$ 4. $\div\, 15 : 1{,}5 : 0{,}15 \ldots$

1883. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι ἀθροίσματα :

1. $3+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots$ 3. $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots$

2. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$ 4. $8+4+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$

1784. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι ἀθροίσματα :

1. $\frac{3}{2}-\frac{3}{4}+\frac{3}{8}-\frac{3}{16}+\ldots$ 3. $2-\frac{4}{3}+\frac{8}{9}-\frac{16}{27}+\ldots$

2. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots$ 4. $\frac{4}{7}-\frac{5}{7^2}+\frac{4}{7^3}-\frac{5}{7^4}+\ldots$

1785. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κοινὰ κλάσματα, ἀπὸ τὰ ὁποῖα παράγονται τὰ κάτωθι δεκαδικὰ περιοδικὰ κλάσματα :

1. 0,86 86 86 ... 3. 0,544 ...

2. 0,45 273 273 273 ... 4. 27,32 75 75 ...

1786. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι ἀθροίσματα :

1. $1-\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\alpha^4}-\frac{1}{\alpha^5}+\ldots$

2. $x-y+\frac{y^2}{x}-\frac{y^3}{x^2}+\frac{y^4}{x^3}-\frac{y^5}{x^4}+\ldots$

3. $\frac{x+1}{x^2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}-\frac{x}{(x+1)^2}+\frac{x^2}{(x+1)^3}-\ldots$

1787. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι ἀθροίσματα :

1. $\alpha^\nu+\beta\alpha^{\nu-1}+\beta^2\alpha^{\nu-2}+\ldots$ ἐπ' ἄπειρον $(\alpha>\beta>0)$.

2. $\alpha+\beta+\frac{\beta^2}{\alpha}+\frac{\beta^3}{\alpha^2}+\ldots$ » » $(\alpha>\beta>0)$.

3. $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{2-\sqrt{2}}+\frac{1}{2}+\ldots$ »

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΠΙ ΤΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΠΡΟΟΔΩΝ

1ον. Αὔξουσαι γεωμετρικαὶ πρόοδοι

Α' Ὁμάς. *1788.* Ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τοὺς ἀριθμούς, 2, 16, 58 διὰ νὰ γίνουν τρεῖς διαδοχικοὶ ὅροι μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου.

1789. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ x, ἵνα οἱ ἀριθμοὶ $\alpha+x$, $\beta+x$, $\gamma+x$ ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον.

1790. Νὰ εὑρεθοῦν τρεῖς ἀριθμοὶ ἀπολοῦντες γεωμετρικὴν πρόοδον τῆς ὁποίας ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι 36 καὶ ἡ διαφορὰ αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ τρίτου εἶναι 28.

1791. Μία γεωμετρικὴ πρόοδος ἔχει 5 ὅρους. Ὁ λόγος της εἶναι ἴσος μὲ τὸ τρίτον τοῦ πρώτου ὅρου καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων ὅρων εἶναι 18. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ 5 ὅροι της.

Β' Ὁμάς. *1792.* Νὰ εὑρεθοῦν τρεῖς ἀριθμοὶ ἀποτελοῦντες γεωμετρικὴν πρόοδον, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ἀθροισμα τῶν δύο πρώτων εἶναι 20 καὶ τὸ ἄθροισμα τοῦ πρώτου καὶ τοῦ τρίτου εἶναι 68.

1793. Νὰ εὑρεθοῦν τρεῖς ἀριθμοὶ ἀποτελοῦντες γεωμετρικὴν πρόοδον, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων εἶναι 10 καὶ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο τελευταίων εἶναι 15.

1794. Νὰ εὑρεθοῦν τρεῖς ἀριθμοὶ ἀποτελοῦντες αὔξουσαν γεωμετρικὴν πρόοδον, ἐὰν τὸ ἄθροισμά των εἶναι 65, ἡ δὲ διαφορὰ τῶν ἄκρων 40.

1795. Νὰ εὑρεθοῦν τρεῖς ἀριθμοὶ ἀποτελοῦντες γεωμετρικὴν πρόοδον, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ἄθροισμά των εἶναι 31 καὶ ὅτι ὁ μεγαλύτερος ὑπερβαίνει κατὰ 19 τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων.

1796. Νὰ εὑρεθοῦν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀποτελοῦντες γεωμετρικὴν πρόοδον, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων εἶναι 18, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν δύο τελευταίων εἶναι 72.

1797. Νὰ χωρισθῇ ὁ ἀριθμὸς 105 εἰς τρία μέρη ἀποτελοῦντα γεωμετρικὴν πρόοδον, ἐὰν οἱ ἄκροι ὅροι διαφέρουν κατὰ 75.

1798. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ τέσσαρες ὅροι μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ὁ 2ος ὅρος ὑπερβαίνει τὸν πρῶτον κατὰ 3, ὁ 4ος ὑπερβαίνει τὸν 3ον κατὰ 12.

1799. Νὰ εὑρεθοῦν 7 ἀκέραιοι ἀριθμοὶ ἀποτελοῦντες γεωμετρικὴν πρόοδον, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν πρώτων εἶναι 13 καὶ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν τελευταίων εἶναι 1053.

1800. Ὁ πέμπτος ὅρος μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου ὑπερβαίνει τὸν μὲν τρίτον κατὰ 228, τὸ δὲ τέταρτον κατὰ 216. Νὰ εὑρεθῇ ἡ πρόοδος.

1801. Νὰ εὑρεθοῦν τρεῖς ἀριθμοὶ ἀποτελοῦντες γεωμετρ. πρόοδον, ἐὰν γνωρίζωμεν τὸ ἄθροισμά των 52 καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των 1456.

1802. Νὰ εὑρεθοῦν τρεῖς ἀριθμοὶ ἀποτελοῦντες γεωμετρικὴν πρόοδον, ἐὰν γνωρίζωμεν τὸ ἄθροισμά των 21 καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστρόφων των $^7/_{12}$.

1803. Νὰ εὑρεθοῦν τρεῖς ἀριθμοὶ ἀποτελοῦντες γεωμετρικὴν πρόοδον, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ γινόμενόν των εἶναι 216, ὁ δὲ τρίτος εἶναι ἐννεαπλάσιος τοῦ πρώτου.

Γ' Ὁμάς. 1804. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ ἑνὸς τριγώνου, ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν α, καὶ ὅτι αἱ πλευραὶ α, β, γ καὶ τὸ ὕψος υ τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν πλευρὰν α σχηματίζουν γεωμετρικὴν πρόοδον.

1805. Ὁ ὄγκος ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι 5832 κ. ἑκατοστόμετρα. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ διαστάσεις του, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον καὶ ὅτι τὸ ἄθροισμά των εἶναι 78 ἑκατοστόμετρα.

1806. Ἐὰν αἱ τρεῖς πλευραὶ ἑνὸς τριγώνου σχηματίζουν γεωμετρικὴν πρόοδον, νὰ δειχθῇ, ὅτι ὁ λόγος τῆς προόδου αὐτῆς περιέχεται ἀναγκαστικῶς μεταξὺ $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ καὶ $\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$.

2ον. Φθίνουσαι γεωμετρικαὶ πρόοδοι

Α' Ὁμάς. 1807. Ἡ πρῶτος ὅρος φθινούσης γεωμετρικης προόδου εἶναι 12, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων αὐτῆς εἶναι 18. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῆς προόδου.

1808. Φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου ὁ πρῶτος ὅρος ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων αὐτῆς εἶναι 3. Νὰ σχηματισθῇ ἡ πρόοδος.

1809. Δύο πεζοπόροι Α καὶ Β κινοῦνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς ὁδοῦ. Ὁ Α εὑρίσκεται ὄπισθεν τοῦ Β κατὰ 240 μέτρα, ἀλλὰ βαδίζει μὲ διπλασίαν ταχύτητα Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὁ Α, διὰ νὰ συναντήσῃ τὸν Β, πρέπει νὰ διανύσῃ ἕνα διάστημα ἴσον μὲ $240+\frac{240}{2}+\frac{240}{4}+\cdots$ καὶ νὰ ὑπολογισθῇ τὸ διάστημα αὐτό.

1810. Ὁ ταχύπους Ἀχιλλεὺς καὶ μία χελώνη κινοῦνται ἐπὶ μιᾶς ὁδοῦ. Ὁ Ἀχιλλεὺς εὑρίσκεται ὄπισθεν τῆς χελώνης κατὰ 1 λεύγαν, ἀλλὰ βαδίζει μὲ ταχύτητα δεκαπλασίαν τῆς χελώνης. Νὰ εὑρεθῇ, ἐὰν ὁ Ἀχιλλεὺς θὰ φθάσῃ τὴν χελώνην καὶ ποῖον διάστημα θὰ ἔχῃ διανύσει;

Β' Ὁμάς. 1811. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου, εἶναι $9/2$, ἡ δὲ διαφορὰ τῶν δύο πρώτων ὅρων της εἶναι 2. Νὰ σχηματισθῇ ἡ πρόοδος.

1812. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου εἶναι 9, ὁ δὲ δεύτερος ὅρος αὐτῆς εἶναι 2. Νὰ εὑρεθῇ ἡ πρόοδος.

1813. Ὁ πρῶτος ὅρος φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου εἶναι κατὰ 3 μεγαλύτερος τοῦ δευτέρου ὅρου, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων της εἶναι 12. Νὰ εὑρεθῇ ἡ πρόοδος.

1814. Φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι τὸ $1/2$ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀπείρων ὅρων αὐτῆς, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων ὅρων της εἶναι 20. Νὰ εὑρεθῇ ἡ πρόοδος.

1815. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου εἶναι 6, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των εἶναι 18. Νὰ σχηματισθῇ ἡ πρόοδος.

1816. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων μιᾶς φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου εἶναι $25/4$, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων ὅρων της εἶναι 6. Νὰ εὑρεθῇ ἡ πρόοδος.

Γ' Ὁμάς. *1817.* Εἰς τετράγωνον πλευρᾶς α συνδέομεν τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του καὶ εὑρίσκομεν νέον τετράγωνον. Τὸ αὐτὸ ἐπαναλαμβάνομεν εἰς τὸ νέον τετράγωνον καὶ οὕτω καθεξῆς. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα : 1ον τῶν ἐμβαδῶν καὶ 2ον τῶν περιμέτρων τῶν ἀπείρων τούτων τετραγώνων.

1818. Εἰς κύκλον ἀκτῖνος R ἐγγράφομεν τετράγωνον. Εἰς τὸ τετράγωνον ἐγγράφομεν κύκλον· εἰς τὸν νέον κύκλον τετράγωνον κ.ο.κ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν : 1ον τῶν κύκλων· 2ον τῶν τετραγώνων.

ΑΡΜΟΝΙΚΑΙ ΠΡΟΟΔΟΙ

473. **Ἁρμονικαὶ πρόοδοι.** ***Μία σειρὰ ἀριθμῶν***

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta, \ldots$$

λέγεται ἁρμονικὴ πρόοδος, ἂν οἱ ἀντίστροφοί των

$$\frac{1}{\alpha},\ \frac{1}{\beta},\ \frac{1}{\gamma},\ \frac{1}{\delta} \ldots$$

ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον.

Π. χ. οἱ ἀριθμοὶ $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \ldots$

ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν πρόοδον, διότι οἱ ἀντίστροφοί των

$$3,\ 5,\ 7,\ 9, \ldots$$

ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον μὲ λόγον 2.

474. **Θεώρημα.** ***Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν πρόοδον, νὰ δειχθῇ ὅτι,*** $\beta = \frac{2\alpha\gamma}{\alpha+\gamma}$.

Ἀφοῦ οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν πρόοδον, οἱ ἀντίστροφοί των $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$, ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον. Ἐπομένως κατὰ τὴν § (452. 3η) θὰ εἶναι

$$2 \cdot \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma} \quad \text{ἢ} \quad \frac{2}{\beta} = \frac{\gamma+\alpha}{\alpha\gamma}$$

ἄρα

$$\boxed{\beta = \frac{2\alpha\gamma}{\alpha+\gamma}} \qquad (2)$$

Ὁ ἀριθμὸς β λέγεται ***ἁρμονικὸς μέσος*** τῶν α καὶ γ.

Ἡ σχέσις (1) γράφεται καὶ $\boxed{\frac{2}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma}}$

Ἀσκήσεις. 1819. Σχηματίσατε τρεῖς ἁρμονικὰς προόδους.

1820. Νὰ σχηματισθοῦν αἱ ἁρμονικαὶ πρόοδοι, τῶν ὁποίων οἱ δύο πρῶτοι ὅροι εἶναι 1ον. $\frac{1}{3}, \frac{1}{7}$. 2ον. $1, \frac{1}{8}$. 3ον. $\frac{1}{4}, \frac{1}{9}$.

475. **Ὑπολογισμὸς τυχόντος ὅρου ἁρμονικῆς προόδου. Πρόβλημα.** ***Ἐὰν γνωρίζωμεν τοὺς δύο πρώτους ὅρους μιᾶς ἁρμονικῆς προόδου, νὰ ὑπολογισθῇ ὁ νυοστὸς ὅρος της, δηλ. ὁ κατέχων τὴν ν τάξιν.***

Ἔστω ἡ ἁρμονικὴ πρόοδος

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ldots\ \tau. \qquad (1)\ (\text{μὲ } \nu \text{ ὅρους})$$

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς ἁρμονικῆς προόδου, οἱ ἀριθμοὶ

$$\frac{1}{\alpha},\ \frac{1}{\beta},\ \frac{1}{\gamma},\ldots,\ \frac{1}{\tau} \qquad (2)$$

θὰ σχηματίζουν ἀριθμητικὴν πρόοδον.

Ὁ λόγος τῆς ἀριθμητικῆς προόδου (2) εἶναι

$$\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}=\frac{\alpha-\beta}{\alpha\beta}.$$

Ἑπομένως, κατὰ τὸν γνωστὸν τύπον $\tau=\alpha+(\nu-1)\omega$ τῆς ἀριθμητικῆς προόδου, ὁ νυοστὸς ὅρος $\frac{1}{\tau}$ τῆς ἀριθμητικῆς προόδου (2) θὰ εἶναι

$$\frac{1}{\tau}=\frac{1}{\alpha}+(\nu-1)\cdot\frac{\alpha-\beta}{\alpha\beta}=$$

$$=\frac{\beta+(\nu-1)(\alpha-\beta)}{\alpha\beta}=\frac{\beta+\alpha(\nu-1)-\beta(\nu-1)}{\alpha\beta}\cdot \quad \text{ἢ} \quad \frac{1}{\tau}=\frac{\alpha(\nu-1)+\beta(2-\nu)}{\alpha\beta}.$$

Ἄρα ὁ ἀντίστοιχος νυοστὸς ὅρος τῆς ἁρμονικῆς προόδου εἶναι

$$\boxed{\tau=\frac{\alpha\beta}{\alpha(\nu-1)+\beta(2-\nu)}}$$

Ἀσκήσεις. 1821. Νὰ ὑπολογισθῇ

1. Ὁ 10ος ὅρος τῆς ἁρμονικῆς προόδου $1,\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{9}$.
2. Ὁ 25ος » » » » $\frac{1}{25},\ \frac{1}{33},\ \frac{1}{41}$.
3. Ὁ 8ος » » » » $\frac{1}{4},\ \frac{1}{15},\ \frac{2}{7}$.

476. **Παρεμβολή.** ***Πρόβλημα. Μεταξὺ δύο δοθέντων ἀριθμῶν α καὶ β νὰ παρεμβληθοῦν μ ἁρμονικοὶ μέσοι, δηλαδὴ μ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι σχηματίζουν μὲ τοὺς δοθέντας α καὶ β ἁρμονικὴν πρόοδον.***

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν ἁρμονικῶν προόδων, πρέπει οἱ ἀντίστροφοι τῶν ζητουμένων ἀριθμῶν νὰ ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον, ἡ ὁποία θὰ ἔχῃ πρῶτον ὅρον τὸν $\frac{1}{\alpha}$ καὶ τελευταῖον ὅρον τὸν $\frac{1}{\beta}$.

Ὁ λόγος αὐτῆς τῆς ἀριθμητικῆς προόδου θὰ εἶναι (§ 455)

$$\omega' = \frac{\dfrac{1}{\beta} - \dfrac{1}{\alpha}}{\mu+1} = \frac{\alpha-\beta}{\alpha\beta\,(\mu+1)}.$$

Ἑπομένως ἡ ἀριθμητικὴ πρόοδος, ἡ ὁποία ἔχει $\mu+2$ ὅρους, πρῶτον ὅρον $\frac{1}{\alpha}$, λόγον $\frac{\alpha-\beta}{\alpha\beta(\mu+1)}$ καὶ τελευταῖον ὅρον $\frac{1}{\beta}$, θὰ εἶναι

$$\div\ \frac{1}{\alpha},\ \left(\frac{1}{\alpha}+\frac{\alpha-\beta}{\alpha\beta(\mu+1)}\right),\ \left(\frac{1}{\alpha}+2\cdot\frac{\alpha-\beta}{\alpha\beta(\mu+1)}\right),\ \ldots$$

$$\ldots\left(\frac{1}{\alpha}+\mu\cdot\frac{\alpha-\beta}{\alpha\beta(\mu+1)}\right),\ \frac{1}{\beta}$$

ἢ $$\div\ \frac{1}{\alpha},\ \frac{\beta\mu+\alpha}{\alpha\beta(\mu+1)},\ \frac{\beta(\mu-1)+2\alpha}{\alpha\beta(\mu+1)},\ \ldots,\ \frac{\beta+\mu\alpha}{\alpha\beta(\mu+1)},\ \frac{1}{\beta}.$$

Οἱ ἀντίστροφοι τῶν ἀντιστοίχων ὅρων τῆς ἀριθμητικῆς αὐτῆς προόδου θὰ σχηματίσουν ἁρμονικὴν πρόοδον. Ὥστε ἡ ζητουμένη ἁρμονικὴ πρόοδος εἶναι ἡ

$$\alpha,\ \frac{\alpha\beta(\mu+1)}{\beta\mu+\alpha},\ \frac{\alpha\beta(\mu+1)}{\beta(\mu-1)+2\alpha},\ \ldots,\ \frac{\alpha\beta(\mu+1)}{\beta+\mu\alpha},\ \beta\ .$$

'Ασκήσεις. 1822. Νὰ παρεμβληθοῦν :

1. 10 ἁρμονικοὶ μέσοι μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν $\frac{1}{4}$ καὶ $\frac{1}{26}$.
2. 7 » » » » » $\frac{1}{7}$ καὶ $-\frac{1}{9}$.
3. 8 » » » » » 2 καὶ $\frac{4}{3}$.

'Ασκήσεις ἐπὶ τῶν ἁρμονικῶν προόδων

1823. 'Εὰν οἱ ἀριθμοὶ $1+x$, $2+x$, $4+x$ ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν πρόοδον, νὰ ὑπολογισθῇ ὁ x.

1824. 'Εὰν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν πρόοδον, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι θὰ εἶναι $\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma}$ καὶ ἀντιστρόφως.

1825. 'Εὰν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν πρόοδον, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ $\alpha(\beta+\gamma)$, $\beta(\gamma+\alpha)$, $\gamma(\alpha+\beta)$ ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον.

1826. 'Εὰν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν πρόοδον, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι οἱ $\beta-\alpha$, β, $\beta-\gamma$ ἀποτελοῦν ἐπίσης ἁρμονικὴν πρόοδον.

1827. 'Εὰν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν πρόοδον, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἀποτελοῦν ἐπίσης ἁρμονικὴν πρόοδον καὶ οἱ ἀριθμοὶ

1. $\frac{\alpha}{\beta+\gamma},\ \frac{\beta}{\gamma+\alpha},\ \frac{\gamma}{\alpha+\beta}$. 2. $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta+\gamma},\ \frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha+\gamma},\ \frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\alpha+\beta}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΙΝ ΕΠΙ ΤΩΝ ΠΡΟΟΔΩΝ

Α΄. Προβλήματα ἐπὶ τῶν Ἀριθμητικῶν Προόδων

Α΄ Ὁμάς. 1828. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ x, ἵνα τὰ τετράγωνα τῶν ἀριθμῶν $1+x$, $\alpha+x$ α^2+x ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον.

1829. Νὰ εὑρεθοῦν τρεῖς ἀριθμοὶ ἀποτελοῦντες ἀριθμητικὴν πρόοδον, ἐὰν γνωρίζωμεν τὸν λόγον της ω καὶ ὅτι τὸ ἄθροισμά των ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενόν των. (Ἐφαρμογὴ $\omega=1$).

1830. Ὁ λόγος μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου εἶναι 1, ὁ δὲ ἀριθμὸς τῶν ν ὅρων της εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 3. Νὰ εὑρεθῇ ἡ πρόοδος, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων της εἶναι 33, ὁ δὲ ὅρος ὁ κατέχων τὴν $\frac{\nu}{3}$ τάξιν ἰσοῦται μὲ 4.

1831. Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι εἶναι οἱ ἄκροι ὅροι μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου, ἐὰν γνωρίζωμεν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων πρώτων ὅρων της εἶναι 34, τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων τελευταίων ὅρων της εἶναι 118 καὶ ὅτι τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν ὅρων της εἶναι 209.

1832. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀριθμητικὴ πρόοδος, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τοῦ τετάρτου καὶ δωδεκάτου ὅρου εἶναι 578, τὸ δὲ ἄθροισμα τοῦ ἑβδόμου καὶ δεκάτου πέμπτου ὅρου εἶναι 42.

1833. Ἀριθμητικῆς προόδου δίδεται τὸ ἄθροισμα 70 τῶν 7 ὅρων της καὶ τὸ γινόμενον 19 τῶν ἄκρων ὅρων της. 1ον. Νὰ σχηματισθῇ ἡ πρόοδος καὶ 2ον. νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς ἰσόπλευρον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μηκῶν τῶν περιφερειῶν, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἀκτῖνας τοὺς 7 ὅρους τῆς προόδου.

1834. Εἰς ἀριθμητικὴν πρόοδον, τῆς ὁποίας τὸ πλῆθος εἶναι περιττὸς ἀριθμός, τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων περιττῆς τάξεως εἶναι 102, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῆς ἀρτίας τάξεως εἶναι 85. Νὰ εὑρεθῇ ὁ μεσαῖος ὅρος καὶ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων.

1835. Μεταξὺ δύο ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι ἔχουν ἄθροισμα 36/5 παρενεβλήθησαν ἀριθμητικοὶ μέσοι, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι ἴσον μὲ 18. Νὰ εὑρεθῇ πόσοι ἀριθμητικοὶ μέσοι παρενεβλήθησαν ;

1836. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀριθμητικαὶ πρόοδοι, αἱ ὁποῖαι ἀρχίζουν ἀπὸ 5 ἔχουν λόγον ἕνα ἀκέραιον ἀριθμὸν καὶ περιλαμβάνουν τοὺς ἀριθμοὺς 57 καὶ 113.

Β΄ Ὁμάς. 1837. Τὸ ἄθροισμα τῶν μ πρώτων ὅρων μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου ἔχει λόγον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων αὐτῆς ἴσον μέ μ^2 πρὸς ν^2. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ νυοστὸς ὅρος αὐτῆς, ἐὰν ὁ πρῶτος ὅρος της εἶναι 1.

1838. Δίδονται k ἀριθμητικαὶ πρόοδοι, τῶν ὁποίων οἱ πρῶτοι ὅροι εἶναι ἀντιστοίχως $1, 2, 3, 4, \ldots k$ καὶ οἱ λόγοι των $1, 3, 5, \ldots 2k-1$. Ἂν $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3 \ldots$ παριστάνουν τὰ ἀθροίσματα τῶν ν πρώτων ὅρων τῶν προόδων τούτων, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα $\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3+\ldots$

1839. Τὸ ἄθροισμα τῶν μ πρώτων ὅρων μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου, τῆς ὁποίας ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι ὁ α καὶ ὁ λόγος ω εἶναι ν. Τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς αὐτῆς προόδου εἶναι μ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν $\mu+\nu$ πρώτων ὅρων της καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν $\mu-\nu$ πρώτων ὅρων της.

1840. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ 2ν ὅροι μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου, ἐὰν γνωρίζωμεν τὸ ἄθροισμα Σ_1 τῶν ὅρων τῆς περιττῆς τάξεως $1, 3, 5, \ldots 2\nu-1$ καὶ τὸ ἄθροισμα Σ_2 τῶν ὅρων τῆς ἀρτίας τάξεως $2, 4, 6, \ldots 2\nu$.

1841. Ἐὰν τοὺς ἀριθμοὺς $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ χωρίσωμεν εἰς ὁμάδας, ἐκ τῶν ὁποίων ἑκάστη λήγει εἰς τέλειον τετράγωνον, νὰ εὑρεθῇ πόσον εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν τῆς νυοστῆς ὁμάδος.

Γ' Ὁμάς. 1842. Νὰ ἐπαληθευθῇ, ὅτι ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ x, y, ω σχηματίζουν ἀριθμητικὴν πρόοδον, θὰ σχηματίζουν καὶ οἱ

$$x^2+xy+y^2, \quad x^2+x\omega+\omega^2, \quad y^2+y\omega+\omega^2.$$

Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον τῶν λόγων τῶν προόδων τούτων.

1843. Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ $\dfrac{1}{\alpha+\beta}, \dfrac{1}{\alpha+\gamma}, \dfrac{1}{\beta+\gamma}$ ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι καὶ οἱ $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον. Καὶ ἀντιστρόφως.

1844. Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ, ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον νὰ δειχθῇ, ὅτι εἶναι $2(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)+21\alpha\beta\gamma=3(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$.

1845. Εἰς μίαν ἀριθμητικὴν πρόοδον οἱ ὅροι λ, μ, ν τάξεως εἶναι ἀντιστοίχως α, β, γ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἶναι

$$\alpha(\mu-\nu)+\beta(\nu-\lambda)+\gamma(\lambda-\mu)=0.$$ (Σχολὴ Ἰκάρων 1949)

Δ' Ὁμάς. 1846. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἐὰν τρεῖς ἀκέραιοι ἀριθμοὶ ἀποτελοῦν ἀριθμ. πρόοδον μὲ λόγον ω καὶ ἐὰν ὁ ἕνας ἐξ αὐτῶν εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ ω, τὸ γινόμενον τῶν τριῶν αὐτῶν ἀριθμῶν εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ $6\omega^3$.

1847. Ἐὰν $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ εἶναι ἀντιστοίχως τὰ ἀθροίσματα τῶν ν, τῶν 2ν καὶ τῶν 3ν ὅρων μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι $\Sigma_4=3(\Sigma_2-\Sigma_1)$.

1848. Ἐὰν $\Sigma, \Sigma', \Sigma''$ εἶναι ἀντιστοίχως τὰ ἀθροίσματα τῶν ν ὅρων τριῶν ἀριθμητικῶν προόδων, τῶν ὁποίων οἱ πρῶτοι ὅροι εἶναι ἡ μονὰς καὶ τῶν ὁποίων οἱ λόγοι εἶναι ἀντιστοίχως 1, 2, 3, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι $\Sigma+\Sigma''=2\Sigma'$.

1849. Ἐὰν Σ_1 εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν λ πρώτων ὅρων μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου, Σ_2 τὸ ἄθροισμα τῶν μ πρώτων ὅρων της καὶ Σ_3 τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων της, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι

$$\frac{\Sigma_1}{\lambda}(\mu-\nu)+\frac{\Sigma_2}{\mu}(\nu-\lambda)+\frac{\Sigma_3}{\nu}(\lambda-\mu)=0.$$

1850. Ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν k πρώτων ὅρων μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν λ πρώτων ὅρων αὐτῆς, νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν $k+\lambda$ πρώτων ὅρων αὐτῆς ἰσοῦται μὲ μηδέν.

1851. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἐὰν Σ_1 εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ἀκεραίων ἀριθμῶν καὶ Σ_2 τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των, θὰ εἶναι $\Sigma_1^3 > \Sigma_2^2$.

1852. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὑπάρχουν ἄπειροι ἀριθμητικαὶ πρόοδοι μὲ 6 ὅρους, ἐκ τῶν ὁποίων οἱ δύο ἄκροι ἔχουν ἄθροισμα 10 καὶ οἱ τέσσαρες μεσαῖοι ἔχουν ἄθροισμα 20. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ τύποι διὰ τῶν ὁποίων ὁρίζονται αἱ ἀκέραιαι τιμαὶ τοῦ λόγου καὶ τοῦ πρώτου ὅρου τῶν προόδων τούτων.

Ε' Ὁμάς. 1853. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ἐὰν αἱ πλευραὶ α, β, γ τριγώνου καὶ ἡ ἡμιπερίμετρός του ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον, τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον

1854. Νὰ δειχθῇ, ὅτι, ἐὰν αἱ πλευραὶ ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου σχηματίζουν ἀριθμητικὴν πρόοδον, ἡ ἀκτὶς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῆς προόδου.

1855. Τὰ μήκη τῶν πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου σχηματίζουν ἀριθμητικὴν πρόοδον. Παριστῶμεν μὲ α τὴν μικροτέραν πλευρὰν καὶ μὲ ω τὸν λόγον τῆς προόδου. 1ον. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λόγου $\frac{\omega}{\alpha}$, τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ α αἱ πλευραὶ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ἐκφράζονται δι' ἀκεραίων ἀριθμῶν. 2ον. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λόγου $\frac{\omega}{\alpha}$ τὸ τρίγωνον εἶναι ἀμβλυγώνιον;

ΣΤ' Ὁμάς. 1856. Δίδεται ἡ ἀριθμητικὴ πρόοδος

$$\div\ \alpha,\ \alpha+\omega,\ \alpha+2\omega,\ \alpha+3\omega, \ldots, \alpha+\nu\omega, \ldots$$

Σχηματίζομεν ὁμάδας ὅρων τῆς προόδου αὐτῆς· ἡ πρώτη ὁμὰς περιέχει τὸν πρῶτον ὅρον α, ἡ δευτέρα ὁμὰς περιέχει τοὺς δύο ἑπομένους ὅρους $\alpha+\omega$ καὶ $\alpha+2\omega$, ἡ τρίτη ὁμὰς περιέχει τοὺς τρεῖς ἑπομένους ὅρους $\alpha+3\omega$, $\alpha+4\omega$, $\alpha+5\omega$ καὶ οὕτω καθεξῆς. 1ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ πρῶτος καὶ ὁ τελευταῖος ὅρος ἑκάστης ὁμάδος. 2ον. Νὰ τεθῇ ἡ νυοστὴ ὁμὰς ὑπὸ τὴν μορφὴν $\lambda\alpha+\mu\omega$, ὅπου λ καὶ μ εἶναι ἀκέραιοι συντελεσταί.

1857. 1ον. Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ συντελεσταὶ β καὶ γ τῆς ἐξισώσεως $x^2+\beta x+\gamma=0$, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι οἱ συντελεσταὶ 1, β, γ σχηματίζουν αὔξουσαν ἀριθμητικὴν πρόοδον καὶ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως εἶναι ἴσον μὲ 47. 2ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $(x^2-2x+17)(x^2+\beta x+\gamma)>0$ εἰς τὴν ὁποίαν β καὶ γ εἶναι αἱ εὑρεθεῖσαι ἀνωτέρω τιμαί.

1858. Ἐξετάζομεν τὸ ἄθροισμα $\Sigma=\frac{\alpha}{\beta}+\cdots+\frac{\gamma}{\delta}$, τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι εἶναι κοινὰ κλάσματα ἀνάγωγα. Τὸ πρῶτον κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι ἴσον μὲ 0,96875. Τὸ τελευταῖον $\frac{\gamma}{\delta}$ εἶναι τὸ πηλίκον, κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς ἑκατοστοῦ κατ' ἔλλειψιν, τοῦ 102 διὰ 103. Οἱ ἀριθμοὶ α, . . . γ σχηματίζουν ἀριθμητικὴν πρόοδον, τῆς ὁποίας ὁ λόγος ω εἶναι πρῶτος ἀριθμός. Οἱ παρονομασταὶ β, ... δ σχηματίζουν μίαν ἄλλην ἀριθμητικὴν πρόοδον μὲ τὸν αὐτὸν λόγον ω. 1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λόγος ω. 2ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν μεταξὺ τῶν $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$ εὑρισκομένων κλασμάτων, δηλαδὴ νὰ ὑπολογισθῇ τὸ $\Sigma-\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\gamma}{\delta}=\frac{x}{y}$. 3ον. νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{x}{y}$ εἶναι ἀνάγωγον. 4ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τοῦ κλάσματος $\frac{x}{y}$ κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς ἑκατοστοῦ κατ' ἔλλειψιν.

1859. Δίδεται μία ἀριθμητικὴ πρόοδος, ἡ ὁποία ἔχει πρῶτον ὅρον τὸ 1 καὶ λόγον ω. 1ον. Ποῖος πρέπει νὰ εἶναι ὁ λόγος, ἵνα τὸ ἄθροισμα τῶν 100 πρώτων ὅρων της εἶναι ἴσον μὲ 34. 2ον. Ποῖος πρέπει νὰ εἶναι ὁ λόγος ω, ἵνα ὁ λόγος τοῦ δεκάτου ὅρου της πρὸς τὸν εἰκοστὸν ὅρον της εἶναι ἴσος μὲ δύο πέμπτα. 3ον. Σχηματίζομεν τὸ γινόμενον τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου ὅρου της καὶ τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου καὶ τετάρτου ὅρου της. Νὰ ὁρισθῇ ὁ λόγος ω εἰς τρόπον, ὥστε ὁ λόγος τοῦ πρώτου γινομένου πρὸς τὸ δεύτερον γινόμενον νὰ εἶναι ἴσος μὲ τὸν δοθέντα ἀριθμὸν k. Διερεύνησις. (Nancy 1933)

1860. Νὰ ὁρισθῇ ὁ λ, ἵνα αἱ τέσσαρες ρίζαι τῶν κάτωθι ἐξισώσεων ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον.

1. $x^4-(3\lambda+5)x^2+(\lambda+1)^2=0.$ (Πολυτεχνεῖον)
2. $x^4-(3\lambda+4)x^2+(\lambda+1)^2=0.$ 3. $x^4-(3\lambda+2)x^2+\lambda+4=0.$

1861. Ποία σχέσις πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν λ καὶ k, ἵνα αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^4+\lambda x^2+k=0$ ἀποτέλοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον.

Ἐφαρμογὴ διὰ τὴν ἐξίσωσιν $x^4-\frac{5}{2}x^2+k=0.$

1862. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ρίζαι x_1 καὶ x_2 καὶ οἱ συντελεσταὶ k, λ, μ, τοῦ τριωνύμου $kx^2+\lambda x+\mu$, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι οἱ x_1, k, λ, μ, x_2 ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον.

1863. Θεωροῦμεν τὴν ἀριθμητικὴν πρόοδον 4, 11, 18, 25, 32, . . . καὶ μορφώνομεν τὸν ἀπέρατον δεκαδικὸν ἀριθμὸν 0, 4111 82532 . . . . Δείξατε, ὅτι ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς εἶναι ἀσύμμετρος. (Πολυτεχν. 1939-1940)

1864. Δίδονται $3\nu+2$ τὸ πλῆθος ἀριθμοί, ὅπου ν φυσικὸς ἀριθμὸς καὶ τοιοῦτοι, ὥστε $\alpha_1=\alpha_2=1$, $\alpha_{\mu+1}=\alpha_\mu+\alpha_{\mu-1}$ (1) ἔνθα $\mu=2, 3, \ldots, 3\nu+1$. Δείξατε, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ν πρώτων ἐξ αὐτῶν ἰσοῦται μὲ $\alpha_\nu \cdot \alpha_{\nu+1}$ καὶ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων μὲ δείκτας ἀποτελοῦντας ἀριθμητικὴν πρόοδον μὲ λόγον 3 καὶ πρῶτον δείκτην τὸν 3 ἰσοῦται μὲ

$\frac{1}{2}(\alpha_{3\nu+2}-1).$ (Πολυτεχνεῖον)

Β΄. Προβλήματα ἐπὶ τῶν γεωμετρικῶν προόδων

Α΄ Ὁμάς. 1865. Τὸ ἄθροισμα τῶν 5 ὅρων γεωμετρικῆς προόδου εἶναι 341, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν ἀρτίας τάξεως ὅρων εἶναι 68. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ 5 ὅροι της.

1866. Νὰ εὑρεθοῦν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀποτελοῦντες γεωμετρικὴν πρόοδον, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ἄθροισμά των εἶναι 15, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των 85.

1867. Ὁ πέμπτος ὅρος γεωμετρικῆς προόδου, ἐκ δέκα ὅρων, εἶναι 1|2 ὁ δὲ τελευταῖος ὅρος εἶναι 2. Νὰ δοθῇ ὑπὸ μορφὴν δυνάμεων μὲ ἐκθέτας κλασματικούς, ὁ λόγος τῆς προόδου, ὁ πρῶτος ὅρος αὐτῆς καὶ τὸ γινόμενον τῶν ὅρων της.

1868. Δίδονται αἱ πρόοδοι $\div$ α, β, γ, δ, . . . $\div\!\div$ α, Β, Γ, Δ, . . . , αἱ ὁποῖαι ἔχουν κοινὸν τὸν πρῶτον ὅρον α. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ λόγοι τῶν προόδων οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι γ=Γ καὶ δ=Δ. Νὰ γραφοῦν οἱ τέσσαρες πρῶτοι ὅροι τῶν προόδων τούτων.

1869. Οἱ ἀριθμοὶ 12, 20, 35 δύνανται νὰ εἶναι ὅροι μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου ; (Σχολὴ Δοκίμων 1935)

Β΄ Ὁμάς. 1870. Γεωμετρικῆς προόδου μὲ ν ὅρους δίδεται τὸ ἄθροισμα τῶν $\nu-1$ πρώτων ὅρων της καὶ τὸ ἄθροισμα Σ′ τῶν $\nu-1$ τελευταίων ὅρων της. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος καὶ ὁ πρῶτος ὅρος τῆς προόδου.

1871. Εἰς μίαν γεωμετρικὴν πρόοδον μὲ 2ν ὅρους, τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων ἀρτίας τάξεως εἶναι Σ καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῆς περιττῆς τάξεως εἶναι Σ′. Νὰ σχηματισθῇ ἡ πρόοδος.

1872. Νὰ εὑρεθῇ ἡ σχέσις, ἡ ὁποία συνδέει τὰ ἀθροίσματα $\Sigma_{1\nu}, \Sigma_{2\nu}, \Sigma_{3\nu}$ τῶν ν, 2ν, 3ν πρώτων ὅρων μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου.

1873. Ἐὰν προσθέσωμεν τοὺς ὁμοταγεῖς ὅρους δύο γεωμετρικῶν προόδων, αἱ ποῖαι δὲν ἔχουν τὸν αὐτὸν λόγον, τὰ προκύπτοντα ἐξαγόμενα δὲν σχηματίζουν γεωμετρικὴν πρόοδον, ἀλλὰ ἕκαστος ὅρος θὰ δύναται νὰ προκύψῃ, ἐκ τῶν δύο προηγουμένων ὅρων, ἐὰν τοὺς πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ σταθεροὺς ἀριθμοὺς καὶ προσθέσωμεν τὰ ἐξαγόμενα.

Γ΄ Ὁμάς. 1874. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ x, y, ω ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον, θὰ εἶναι $(x+y+\omega)(x-y+\omega)=x^2+y^2+\omega^2$.

1875. Ἐὰν ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν x, y, ω εἶναι μέσος ἀνάλογος τῶν δύο ἄλλων νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι

$$x^3y^3+y^3\omega^3+\omega^3x^3=xy\omega(x^3+y^3+\omega^3).$$

1876. Ἐὰν οἱ x, y, ω ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι $\dfrac{(x+y)^2}{(x+\omega)^2}=\dfrac{x}{\omega}$.

1877. Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ, δ ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι $(\alpha+\delta)(\beta+\gamma)-(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)=(\beta-\gamma)^2$.

1878. Ἐαν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ, δ ἀποτελοῦν γεωμετρ. πρόοδον νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι $(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2+(\delta-\beta)^2=(\alpha-\delta)^2$.

1879. Ἐὰν $\alpha+\beta-\gamma=0$ καὶ $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=0$, νὰ δειχθῇ οτι οἱ ἀριθμοὶ $\alpha,\ \gamma,\ \dfrac{3\beta}{2}$ ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον.

1880. Ἐὰν οἱ α, β, γ, . . . μ, ν, ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\cdots+\mu^2)(\beta^2+\gamma^2+\cdots\nu^2)=(\alpha\beta+\beta\gamma+\cdots+\mu\nu)^2.$$

1881. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ γινόμενον τριῶν διαδοχικῶν ὅρων μιᾶς γεωμετρικῆς προοδου εἶναι πάντοτε κύβος ἑνὸς ἀριθμοῦ καὶ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν ὅρων.

Δ΄ Ὁμάς. 1882. Τὸ γινόμενον τῶν τριῶν πρώτων ὅρων γεωμετρικῆς προόδου εἶναι 216, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν κύβων των εἶναι 1971. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων της.

1883 Ἐὰν Α εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων μιᾶς φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου, α ὁ πρῶτος ὅρος της καὶ ω ὁ λόγος της, νὰ εὑρεθῇ ἡ πρόοδος ἐκ τῶν σχέσεων

$$A-\alpha=\frac{3}{4}\quad(1)\qquad\text{καὶ}\qquad A+\omega=\frac{31}{12}\quad(2).\qquad(\text{Πολυτεχν.})$$

1884. Αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ εἶναι x′ καὶ x″ (ἢ x″

εἶναι μεγαλυτέρα τῆς x΄ κατ' ἀπόλυτον τιμήν). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων $1+\frac{x'}{x''}+\left(\frac{x'}{x''}\right)^2+\left(\frac{x'}{x''}\right)^3+\cdots$

'Εφαρμογὴ εἰς τὴν ἐξίσωσιν $x^2+3x-1=0$.

1885. Δίδεται μία φθίνουσα γεωμετρικὴ πρόοδος, τῆς ὁποίας πρῶτος ὅρος εἶναι ὁ α καὶ ὁ λόγος ω. Ὑπολογίζομεν τὰ ἀθροίσματα Σ_1, Σ_2, Σ_3 . . . . τῶν ν διαδοχικῶν ὅρων τῆς προόδου αὐτῆς, οὕτως ὥστε τὸ ἄθροισμα Σ_1 ἀρχίζει ἀπὸ τὸν πρῶτον ὅρον τῆς προόδου, τὸ Σ_2 ἀπὸ τὸν δεύτερον κ.ο.κ. 1ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἀθροίσματα Σ_1, Σ_2, Σ_3 . . . . 2ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα $\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3+\cdots$ μὲ ἄπειρον πλῆθος ὅρων.

1886. Μεταξὺ τῶν διαδοχικῶν ὅρων μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου

$$\div\div\ 1,\ \omega,\ \omega^2,\ \ldots\ \omega^\nu$$

παρεμβάλλομεν k ἀριθμητικοὺς μέσους. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν παρεμβαλλομένων ἀριθμητικῶν μέσων συναρτήσει τῶν ω, ν, k. Τί γίνεται τὸ ἄθροισμα αὐτό, ἐὰν ἡ δοθεῖσα πρόοδος εἶναι φθίνουσα γεωμετρικὴ πρόοδος μὲ ἄπειρον πλῆθος ὅρων.

Ε΄ Ὁμάς. *1887*. Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ. Σχηματίζομεν ἕνα ἄλλο τρίγωνον $A_1B_1\Gamma_1$, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι ἴσαι μὲ τὰς διαμέσους τοῦ ΑΒΓ· ἔπειτα σχηματίζομεν ἕνα τρίτον τρίγωνον $A_2B_2\Gamma_2$, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι ἴσαι μὲ τὰς διαμέσους τοῦ τριγώνου $A_1B_1\Gamma_1$ καὶ οὕτω καθεξῆς. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἀπείρων τριγώνων $A_1B_1\Gamma_1$, $A_2B_2\Gamma_2$, . .

1888. Θεωροῦμεν μίαν σειρὰν τριγώνων ΑΒΓ, $A_1B_1\Gamma_1$, . . . $A_\nu B_\nu \Gamma_\nu$ ἕκαστον τῶν ὁποίων ἔχει κορυφὰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ προηγουμένου τριγώνου. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἀπείρων τούτων τριγώνων, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πρώτου τριγώνου εἶναι Ε.

1889. Διαιροῦμεν τὸ ὕψος ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ εἰς $\mu+1$ ἴσα μέρη· δι' ἑκάστου τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως φέρομεν, παραλλήλως πρὸς τὴν βάσιν τοῦ τριγώνου, μίαν εὐθεῖαν, τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν ὡς βάσιν ἑνὸς ὀρθογωνίου, τὸ ὁποῖον ἔχει ὕψος τὴν ἀπόστασιν τῶν δύο παραλλήλων. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν οὕτω προκυπτόντων ὀρθογωνίων καὶ ποῦ τείνει τὸ ἄθροισμα αὐτό, ἐὰν τὸ μ τείνῃ εἰς τὸ ἄπειρον.

1890. Δίδεται κύκλος Ο ἀκτῖνος R, μία διάμετρος αὐτοῦ $AB=2R$ καὶ μία χορδὴ $\Gamma\Delta=\lambda$, ἡ ὁποία τέμνει τὴν διάμετρον εἰς τὸ σημεῖον Μ· διαιροῦμεν τὸ ἥμισυ ΓΕ τῆς χορδῆς ΓΔ εἰς ν ἴσα μέρη. Ζητεῖται νὰ ὑπολογισθῇ τὸ τμῆμα ΟΜ, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ ΕΜ παριστάνει μ διαιρέσεις. 2ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ΜΖ, ὅταν τὸ μ μεταβάλλεται ἐκ τοῦ μηδενὸς πρὸς τὸ ν, ὅπου ΜΖ εἶναι ἡ κάθετος πρὸς τὴν ΟΜ.

1891. Δίδεται ἕνα τετράεδρον T_1 καὶ κατασκευάζομεν διαδοχικῶς τὰ τετράεδρα T_2, T_3, . . . T_ν ἕκαστον τῶν ὁποίων ἔχει κορυφὰς τὰ κέντρα βάρυτητος τῶν ἑδρῶν τοῦ προηγουμένου. Ζητεῖται νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν ἀπείρων τούτων τετραέδρων.

1892. Εἰς ἰσόπλευρον κῶνον πλευρᾶς 2α ἐγγράφομεν σφαῖραν ἐφαπτομένην τῆς βάσεώς του καὶ τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας του· ἔπειτα ἐγγράφομεν ἄλλην σφαῖραν ἐφαπτομένην τῆς προηγουμένης καὶ τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ κώνου· ἔπειτα ἐγγράφομεν ἄλλην σφαῖραν ἐφαπτομένην τῆς προηγουμένης καὶ τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ κώνου κ.ο.κ. Νὰ εὑρεθῇ : 1ον. τὸ ὑπολειφθησόμενον μέρος τοῦ ὄγκου τοῦ κώνου, μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τῶν ὄγκων τῶν ἀπείρων τούτων σφαιρῶν καὶ 2ον. τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν ὅλων τῶν κύκλων ἐπαφῆς.

1893 Εἰς ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς α, ἐγγράφομεν κύκλον, τὴν ἀκτῖνα τοῦ ὁποίου παριστῶμεν μὲ ϱ_1. Εἰς τὸν κύκλον τοῦτον ἐγγράφομεν ἰσόπλευρον τρίγωνον, τὴν πλευρὰν τοῦ ὁποίου παριστῶμεν μὲ α_1. Εἰς τὸ τρίγωνον τοῦτο ἐγγράφομεν κύκλον, τὴν ἀκτῖνα τοῦ ὁποίου παριστῶμεν μὲ ϱ_2 κ.ο.κ. Νὰ ὑπολογισθῇ : 1ον. Τὸ ἄθροισμα $\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3\ldots$ (ἐπ' ἄπειρον) τῶν ἀκτίνων τῶν ἐγγεγραμμένων κύκλων. 2ον. Τὸ ἄθροισμα $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\ldots$ (ἐπ' ἄπειρον) τῶν πλευρῶν τῶν ἰσοπλεύρων τριγώνων. 3ον. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν κύκλων τούτων. 4ον. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων τούτων. 5ον. Τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν στερεῶν τῶν παραγομένων ὑπὸ τῶν τριγώνων τούτων στρεφομένων περὶ τὸ ὕψος των.

1894. Εἰς σφαῖραν Σ ἀκτῖνος R ἐγγράφομεν κύβον Κ· εἰς τὸν κύβον αὐτὸν ἐγγράφομεν σφαῖραν Σ_1· εἰς τὴν σφαῖραν αὐτὴν ἐγγράφομεν νέον κύκλον K_1 καὶ οὕτω καθεξῆς. Ζητεῖται : 1ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἀκτῖνες τῶν σφαιρῶν $\Sigma, \Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \ldots$ καὶ τὸ ἄθροισμά των. 2ον. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ὄγκοι τῶν σφαιρικῶν τμημάτων, μὲ μίαν βάσιν, τῶν περιλαμβανομένων μεταξὺ Σ καὶ Σ_1, μεταξὺ Σ_1 καὶ Σ_2 κ.ο.κ. 3ον. Νὰ ἐπαληθευθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων τούτων ὄγκων εἶναι ἴσον μὲ τὸν ὄγκον τῆς σφαίρας Σ.

1895. Δίδεται μία σφαῖρα Ο διαμέτρου $AB=2R$, ἕνας κύλινδρος περιγεγραμμένος περὶ τὴν σφαῖραν, τοῦ ὁποίου ὁ ἄξων εἶναι ἡ διάμετρος ΑΒ καὶ ἕνας κῶνος, ὁ ὁποῖος ἔχει κορυφὴν τὸ Α καὶ τοῦ ὁποίου ἡ βάσις συμπίπτει μὲ τὴν βάσιν τοῦ κυλίνδρου. Φέρομεν ἕνα ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ εἰς ἀπόστασιν x ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α, τὸ ὁποῖον τέμνει τὸν κῶνον, τὴν σφαῖραν καὶ τὸν κύλινδρον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις x, ἵνα τὰ ἐμβαδὰ τῶν τομῶν τοῦ κώνου, σφαίρας καὶ κυλίνδρου, ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου νὰ σχηματίζουν : 1ον ἀριθμητικὴν πρόοδον· 2ον γεωμετρικὴν πρόοδον.

Γ΄. Προβλήματα ἐπὶ τῶν Ἀριθμητικῶν—Γεωμετρικῶν—Ἁρμονικῶν προόδων

Α΄ Ὁμάς. ***1896***. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐὰν τρεῖς ἀριθμοὶ σχηματίζουν ἀριθμητικὴν καὶ γεωμετρικὴν πρόοδον, εἶναι ἴσοι.

1897. Ἀριθμητικὴ πρόοδος καὶ φθίνουσα γεωμετρικὴ τοιαύτη ἔχουν τοὺς δευτέρους ὅρους των ἴσους. Ὁ λόγος τῆς γεωμετρικῆς εἶναι τὸ τέταρτον τοῦ λόγου τῆς ἀριθμητικῆς· τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων τῆς γεωμετρικῆς εἶναι 40, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν 10 ὅρων τῆς ἀριθμητικῆς εἶναι 170. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ πρόοδοι.

1898. **Τὸ** ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν x, y, z εἶναι 147. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοὶ αὐτοί, ἐὰν γνωρίζωμεν ὅτι ἡ σειρὰ x, y, z ἀποτελεῖ ἀριθμητικὴν πρόοδον, ἡ δὲ σειρὰ x z, y ἀποτελεῖ γεωμετρικὴν πρόοδον.

(Πανεπιστήμιον. Σχολὴ Δοκίμων 1949)

1899. Δύο πρόοδοι, ἡ μία ἀριθμητικὴ καὶ ἡ ἄλλη γεωμετρική, ἔχουν κοινοὺς τοὺς δύο πρώτους ὅρους. Ὁ τέταρτος ὅρος ὑπερβαίνει τὸν δεύτερον κατὰ 10 εἰς τὴν ἀριθμητικὴν καὶ κατὰ 30 εἰς τὴν γεωμετρικήν. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ δύο πρόοδοι.

1900. Ἀριθμητικὴ καὶ γεωμετρικὴ πρόοδος ἔχουν κοινὸν τὸν λόγον. Ὁ 5ος ὅρος τῆς ἀριθμητικῆς εἶναι διπλάσιος τοῦ πρώτου ὅρου τῆς γεωμετρικῆς, ἐνῷ ὁ δεύτερος ὅρος τῆς γεωμετρικῆς εἶναι κατὰ 24 μικρότερος τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀντιστοίχου ὅρου τῆς ἀριθμητικῆς. Τὸ ἄθροισμα τῶν πρώτων ὅρων τῶν προόδων καὶ τοῦ κοινοῦ λόγου αὐτῶν εἶναι 12.

1901. Νὰ εὑρεθοῦν τέσσαρες ἀριθμοὶ α, β, γ, δ, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι οἱ α, γ, δ σχηματίζουν ἀριθμητικὴν πρόοδον, οἱ α, β, δ σχηματίζουν γεωμετρικὴν πρόοδον καὶ ὅτι $\alpha+\delta=150$ καὶ $\gamma-\delta=15$.

1902. Νὰ εὑρεθοῦν τέσσαρες ἀριθμοὶ x, y, ω, z, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι οἱ x, ω, z σχηματίζουν ἀριθμητικὴν πρόοδον, οἱ x, y, z σχηματίζουν γεωμετρικὴν πρόοδον, καὶ ὅτι $x+y+\omega+z=126$, καὶ $\omega-y=14$.

1903. Ἀριθμητικὴ πρόοδος καὶ φθίνουσα γεωμετρικὴ πρόοδος ἔχουν τὸν αὐτὸν πρῶτον ὅρον καὶ τὸν αὐτὸν λόγον. Τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν πρώτων ὅρων τῆς ἀριθμητικῆς προόδου εἶναι $27/2$, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων τῆς φθινούσης γεωμ. προόδου εἶναι ἴσον μὲ τὰ $8/5$ τοῦ τρίτου ὅρου τῆς ἀριθμητικῆς. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ πρόοδοι. (Σχολὴ Εὐελπίδων 1947)

1904. Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ x καὶ y εἶναι οἱ δύο πρῶτοι ὅροι γεωμετρικῆς προόδου, τότε ὁ τέταρτος ὅρος αὐτῆς ὑπερβαίνει τὸν τρίτον κατὰ 18. Ἐὰν δὲ οἱ x καὶ y εἶναι οἱ δύο πρῶτοι ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου, τότε ὁ τέταρτος ὅρος αὐτῆς ὑπερβαίνει τὸν δεύτερον ὅρον κατὰ 16. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ x καὶ y. (Πολυτεχνεῖον)

1905. Τρεῖς ἀκέραιοι ἀριθμοὶ σχηματίζουν γεωμετρικὴν πρόοδον· ἐὰν αὐξήσωμεν τὸν δεύτερον κατὰ 8 ἡ πρόοδος γίνεται ἀριθμητική· ἀλλ' ἐὰν αὐξηθῇ καὶ ὁ τρίτος κατὰ 64 ἡ πρόοδος γίνεται πάλιν γεωμετρική. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ τρεῖς ἀριθμοί.

1906. Τρεῖς ἀκέραιοι ἀριθμοὶ σχηματίζουν γεωμετρικὴν πρόοδον. Ἐὰν ἐλαττώσωμεν τὸν τρίτον κατὰ 16, ἡ πρόοδος γίνεται ἀριθμητική. Ἐὰν ἐλαττώσωμεν καὶ τὸν δεύτερον ὅρον κατὰ 2 ἡ πρόοδος γίνεται πάλιν γεωμετρική. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ τρεῖς ἀριθμοί.

1907. Νὰ εὑρεθοῦν τρεῖς ἀριθμοὶ x, y, z ἀποτελοῦντες γεωμετρικὴν πρόοδον, ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ xy, yz, zx, xyz ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον. (Πολυτεχνεῖον)

1908. Νὰ εὑρεθοῦν τέσσαρες ἀριθμοὶ x, y, z, ω ἀκέραιοι καὶ θετικοὶ ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι οἱ x, y, z, ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον, οἱ δὲ y, z, ω ἀριθμητικὴν πρόοδον καὶ ὅτι $z+\omega=44$. Ἐὰν παραλειφθῇ ὁ ὅρος «θετικοὶ» νὰ εὑρεθῇ πόσας ἀκεραίας λύσεις ἔχει τὸ πρόβλημα. (Μαθηματικὴ Σχολὴ 1949)

1909. Οἱ ἀριθμοὶ x, y, z ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον, οἱ δὲ ἀριθμοὶ xy, yz, zx ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ x, y, z, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῆς ἀριθμητικῆς προόδου εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῆς γεωμετρικῆς προόδου.

Β' Ὁμάς. 1910. Ἀριθμητικὴ καὶ γεωμετρικὴ πρόοδος ἔχουν : 1ον τοὺς πρώτους ὅρους των ἴσους. 2ον Τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων ὅρων τῆς ἀριθμητικῆς εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο πρώτων ὅρων τῆς γεωμετρικῆς καὶ ἡ διαφορὰ τῶν δύο αὐτῶν ἀθροισμάτων εἶναι ἴση μὲ τὸ τριπλάσιον τοῦ πρώτου ὅρου. 3ον Τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν πρώτων ὅρων τῆς ἀριθμητικῆς προόδου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν πρώτων ὅρων τῆς γεωμετρικῆς προόδου. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λόγος τῆς γεωμετρικῆς προόδου καὶ νὰ δοθοῦν δύο ἀριθμητικὰ παραδείγματα.

1911. Θεωροῦμεν τὴν γεωμετρικὴν πρόοδον $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_\mu$, μὲ $\alpha_1=3$ καὶ $\omega=7$. Καλοῦμεν $\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3, \ldots \upsilon_\mu \ldots$, τὰ ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων τῶν ἀριθμῶν α_μ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 5. Δείξατε, ὅτι ὁ ἀπέρατος δεκαδικὸς ἀριθμὸς $0{,}46\upsilon_1\upsilon_2\upsilon_3 \ldots \upsilon_\mu \ldots$ εἶναι σύμμετρος ἀριθμὸς καὶ θέσατέ τον ὑπὸ κλασματικὴν μορφήν. (Πολυτεχνεῖον 1939 - 1940)

1912. Δίδεται μία γεωμετρικὴ πρόοδος $\div\!\div\ \alpha, \alpha\omega, \alpha\omega^2, \alpha\omega^3 \ldots$ καὶ μία ἀριθμητικὴ προοδος $\div\ \beta, \beta+\lambda, \beta+2\lambda \ldots$ Νὰ εὑρεθοῦν αἱ συνθῆκαι, ἵνα : 1ον. Τὸ γινόμενον δύο τυχόντων ὅρων τῆς πρώτης νὰ εἶναι ὅρος τῆς προόδου αὐτῆς 2ον. Τὸ ἄθροισμα δύο τυχόντων ὅρων τῆς δευτέρας νὰ εἶναι ὅρος τῆς προόδου αὐτῆς. 3ον. Τὸ ἄθροισμα δύο τυχόντων ὅρων τῆς δευτέρας προόδου νὰ ἀντιστοιχῇ πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ὅρων τῆς αὐτῆς τάξεως τῆς πρώτης προόδου.

1913. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐὰν $\alpha>\beta>0$, ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ καὶ τοῦ γεωμετρικοῦ μέσου $\sqrt{\alpha\beta}$ περιέχεται μεταξὺ $\frac{(\alpha-\beta)^2}{8\alpha}$ καὶ $\frac{(\alpha-\beta)^2}{8\beta}$. Ἐφαρμογή : $\alpha=17$, $\beta=15$.

1914. Δίδεται ἡ σχέσις $\sqrt[\mu]{\alpha}=\sqrt[\mu_1]{\alpha_1}=\sqrt[\mu_2]{\alpha_2}=\ldots\ldots=\sqrt[\mu_\nu]{\alpha_\nu}$. Ἐὰν οἱ $\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_\nu$ εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου, νὰ δειχθῇ, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_\nu$ εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι γεωμετρικῆς προόδου καὶ ἀντιστρόφως.

1915. Ἀριθμητικῆς προόδου οἱ ὅροι τάξεως $\mu+1$, $\nu+1$, $\rho+1$ ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον, ἐνῷ οἱ ἀριθμοὶ $\frac{1}{\mu}$, $\frac{1}{\nu}$, $\frac{1}{\rho}$ ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοοδον. Νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ πηλίκον τοῦ λόγου τῆς ἀριθμητικῆς προόδου διὰ τοῦ πρώτου ὅρου της εἶναι ἴσον μὲ $-\frac{2}{\nu}$.

1916. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἐὰν εἰς μίαν ἀριθμητικὴν πρόοδον λάβωμεν τὸ ἄθροισμα τῶ ν πρώτων ὅρων της, ἔπειτα τὸ ἄθροισμα τῶν ν ἑπομένων ὅρων της καὶ οὕτω καθεξῆς, τὰ διαδοχικὰ αὐτὰ ἀθροίσματα σχηματίζουν ὅρους μιᾶς νέας ἀριθμητικῆς προόδου. 1ον. Νὰ δοθῇ ἕνα ἀριθμητικὸν παράδειγμα. 2ον Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ αὐτὸ ἰσχύει καὶ διὰ τὰς γεωμετρικὰς προόδους.

Γ' Ὁμάς. 1917. Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον, νὰ δειχθῇ ὅτι οἱ κάτωθι ἀριθμοὶ ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν πρόοδον

1. $\alpha-\beta, \alpha-\gamma, \alpha+\beta$, 2. $2\alpha-\beta, \beta, 2\gamma-\beta$.

1918. Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ ἀποτελοῦν ἀριθμητ. πρόοδον, νὰ δειχθῇ ὅτι οἱ ἀριθμοὶ βγδ, γδα, δαβ, αβγ ἀποτελοῦν ἁρμον. πρόοδον.

1919. Ἐὰν οἱ x, y, ω ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον, οἱ δὲ x, λy, ω γεωμετρικήν, νὰ δειχθῇ ὅτι οἱ x, $\lambda^2 y$, ω ἀποτελοῦν ἁρμον. πρόοδον.

1920. Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον, οἱ β, γ, δ γεωμετρικήν, οἱ δὲ γ, δ, x ἁρμονικήν, νὰ ὑπολογισθῇ ὁ x συναρτήσει τῶν α καὶ β.

1921. Εἰς μίαν ἁρμονικὴν πρόοδον ὁ μυοστὸς ὅρος εἶναι ν, ὁ δὲ νυοστὸς ὅρος εἶναι μ. Νὰ δειχθῇ, ὅτι ὁ ὅρος ὁ κατέχων τὴν τάξιν $(\mu+\nu)$ εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ἁρμονικοῦ μέσου τῶν μ καὶ ν.

1922. Τὸ ἄθροισμα τριῶν διαδοχικῶν ὅρων μιᾶς ἁρμονικῆς προόδου εἶναι $\frac{33}{40}$, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν ἀντιστρόφων των εἶναι 15. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ τρεῖς ἀριθμοί.

1923. Ἂν $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots, \alpha_\nu$ εἶναι οἱ διαδοχικοὶ ὅροι μιᾶς ἁρμονικῆς προόδου, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι

$$\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_4+\ldots+\alpha_{(\nu-1)}\alpha_\nu=(\nu-1)\alpha_1\alpha_\nu$$

Περαιτέρω νὰ παρεμβληθοῦν μεταξὺ τῶν α καὶ β, λ ἁρμονικοὶ μέσοι. (Ἐφαρμογή: $\alpha=-4$, $\beta=8$, $\lambda=4$). (Πολυτεχνεῖον 1937)

1924. Ἐὰν ὁ ἀριθμητικὸς μέσος δύο ἀριθμῶν εἶναι ἴσος μὲ 1, ὁ ἁρμονικὸς μέσος τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν εἶναι ἴσος μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ γεωμετρικοῦ μέσου των.

1925. Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ μ, g, h τὸν ἀριθμητικὸν μέσον, τὸν γεωμετρικὸν μέσον καὶ τὸν ἁρμονικὸν μέσον τῶν ἀριθμῶν x καὶ y, θὰ ἔχωμεν τὰς σχέσεις $\mu=\frac{x+y}{2}$, $g=\sqrt{xy}$, $\frac{1}{h}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$

1ον. Νὰ ἀποδειχθοῦν αἱ ἀνισότητες $\mu>g>h$ καὶ $\mu-g>g-h$.

2ον. Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ x καὶ y, ἂν γνωρίζομεν τὰς διαφορὰς $\mu-g=\lambda$ καὶ $g-h=k$· ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή: $\lambda=1{,}5$, $k=1{,}44$.

3ον. Νὰ ὁρισθοῦν οἱ x καὶ y, ἂν γνωρίζωμεν τὸν μ καὶ ὅτι οἱ ἀριθμοὶ x, h, μ, y σχηματίζουν γεωμ. πρόοδον. Ἐφαρμογὴ $\mu=2$. (Lyon 1933)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΙ

477. Ὁρισμοί. Γνωρίζομεν, ὅτι $100=10^2$. Ὁ ἐκθέτης 2 τῆς δυνάμεως τοῦ 10 λέγεται λογάριθμος τοῦ 100 ὡς πρὸς βάσιν τὸ 10.

Ἐπίσης ἐπειδὴ $8=2^3$, ὁ ἐκθέτης 3 λέγεται λογάριθμος τοῦ 8 ὡς πρὸς βάσιν τὸ 2.

Γενικῶς. Ἔστω α^x μία τυχοῦσα δύναμις ἑνὸς θετικοῦ ἀριθμοῦ α διαφόρου τῆς μονάδος. Ἐὰν εἶναι $\alpha^x=A$, θὰ λέγωμεν, ὅτι ὁ x εἶναι λογάριθμος τοῦ A πρὸς βάσιν α καὶ θὰ γράφωμεν

$$x=\text{λογ}_\alpha A. \qquad (1)$$

Ἡ ἰσότης (1) ἀπαγγέλλεται : Ὁ x εἶναι λογάριθμος τοῦ A πρὸς βάσιν α.

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω :

ἐὰν $\boxed{\alpha^x=A}$ θὰ εἶναι $\boxed{x=\text{λογ}_\alpha A}$

Ὥστε : ***Λογάριθμος ἑνὸς ἀριθμοῦ A, ὡς πρὸς βάσιν α, εἶναι ὁ ἐκθέτης τῆς δυνάμεως εἰς τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ὑψωθῇ ὁ α διὰ νὰ δώσῃ τὸν A.***

Π. χ. Ἐπειδὴ $10^3=1000$, ὁ 3 εἶναι λογάριθμος τοῦ 1000 πρὸς βάσιν 10, δηλ. εἶναι $3=\text{λογ}_{10}1000$.

Ὁμοίως ἐπειδὴ $2^4=16$, ὁ 4 εἶναι ὁ λογάριθμος τοῦ 16 πρὸς βάσιν 2· δηλ. εἶναι $4=\text{λογ}_2 16$.

478. Παρατηρήσεις. I. Ἡ δύναμις α^x, ὅπου α εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς εἶναι ὡρισμένη καὶ ***πάντοτε θετική*** διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x, ἀκεραίαν ἢ κλασματικήν, θετικὴν ἢ ἀρνητικήν.

Ἄς λάβωμεν ἕνα συγκεκριμένον παράδειγμα : Ἔστω ἡ δύναμις 10^x, τὴν ὁποίαν παριστάνομεν μὲ y, δηλ. ἔστω ἡ συνάρτησις $y=10^x$. Ἄς δώσωμεν εἰς τὸν x μερικὰς τιμάς...

$$-3,\quad -2,\quad -1,\quad -\frac{1}{2},\quad 0,\quad \frac{1}{2},\quad 1,\quad 2,\ldots$$

καὶ ἄς εὕρωμεν τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τοῦ y. Ὁ κάτωθι πίναξ περιέχει τὰς τιμὰς τοῦ x καὶ τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τοῦ y.

x	.. -3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$y=10^x$	.. 10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	$10^{-\frac{1}{2}}$	10^0	$10^{\frac{1}{2}}$	10^1	10^2
ἢ y=	.. 0,001	0,01	0,1	0,316..	1	3,16..	10	100

Ἀπὸ τὸν ἀνωτέρω πίνακα συνάγομεν τὰ κάτωθι, τὰ ὁποῖα καὶ ἀποδεικνύονται :

1ον. ***Ὅτι ἡ συνάρτησις $y=10^x$ καὶ γενικῶς ἡ συνάρτησις $y=\alpha^x$, ὅπου α θετικὸς ἀριθμός, εἶναι πάντοτε θετικὴ διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x ἀκεραίαν ἢ κλασματικὴν, θετικὴν ἢ ἀρνητικήν.***

2ον. ***Ὅταν τὸ x αὐξάνῃ ἀπὸ $-\infty$ ἕως $+\infty$ καὶ ἡ συνάρτησις $y=10^x$ αὐξάνει.***

3ον. ***Ὅταν τὸ x λαμβάνῃ τιμὰς ἀρνητικάς, ἡ συνάρτησις $y=10^x$ εἶναι μικροτέρα τῆς μονάδος καὶ βαίνει ἐλαττουμένη, ὅταν ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ x αὐξάνῃ.***

4ον. ***Εἰς κάθε ὡρισμένην τιμὴν τοῦ x ἀντιστοιχεῖ μία καὶ μόνον θετικὴ τιμὴ τοῦ y.***

Σημ. Τὰ ἀνωτέρω ἀληθεύουν καὶ ὅταν ὁ x λάβῃ ἀσυμμέτρους τιμάς, διότι παραδεχόμεθα, ὅτι αἱ ἰδιότητες τῶν δυνάμεων ἀληθεύουν καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν, πρὺ οἱ ἐκθέται των εἶναι ἀσύμμετροι ἀριθμοί.

II. Ἐπειδὴ ἡ δύναμις α^x εἶναι πάντοτε θετικὴ καὶ ὡρισμένη διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x συνάγομεν, ὅτι :

1ον. ***Μόνον οἱ θετικοὶ ἀριθμοὶ ἔχουν λογαρίθμους.***

2ον. ***Ἐὰν δύο θετικοὶ ἀριθμοὶ ἔχουν τὸν αὐτὸν λογάριθμον ὡς πρὸς τὴν αὐτὴν βάσιν, οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ εἶναι ἴσοι.***

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ

479. Ἰδιότης I. ***Εἰς κάθε σύστημα λογαρίθμων ὁ λογάριθμὸς τῆς μονάδος 1 εἶναι μηδὲν καὶ ὁ λογάριθμος τῆς βάσεως εἶναι ἡ μονὰς 1.***

Γνωρίζομεν, ὅτι οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ βάσις α μιᾶς δυνάμεως, θὰ εἶναι $\alpha^0=1$ καὶ $\alpha^1=\alpha$

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων αὐτῶν, καὶ κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν λογαρίθμων, συνάγομεν, ὅτι $0=\text{λογ}_\alpha 1$ καὶ $1=\text{λογ}_\alpha \alpha$.

480. Ἰδιότης II. ***Ὁ λογάριθμος ἑνὸς γινομένου πολλῶν παραγόντων εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν λογαρίθμων τῶν παραγόντων αὐτῶν.***

Ἔστωσαν οἱ θετικοὶ ἀριθμοὶ Α, Β, Γ. Θὰ δείξωμεν ὅτι

$$\text{λογ}(Α.Β.Γ)=\text{λογ}Α+\text{λογ}Β+\text{λογ}Γ$$

Ὑποθέτομεν, ὅτι οἱ θετικοὶ ἀριθμοὶ Α Β,Γ εἶναι ἴσοι μὲ μίαν δύναμιν τοῦ α καὶ ἔστω, ὅτι

$$Α=\alpha^x, \quad Β=\alpha^y, \quad Γ=\alpha^\omega \qquad (1)$$

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν λογαρίθμων θὰ εἶναι

$$x = \lambda o\gamma_\alpha A, \quad y = \lambda o\gamma_\alpha B, \quad \omega = \lambda o\gamma_\alpha \Gamma \qquad (2)$$

Πολλαπλασιάζομεν τὰς ἰσότητας (1), (2), (3) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$A.B.\Gamma = \alpha^x . \alpha^y . \alpha^\omega \quad \text{ἢ} \quad A.B.\Gamma = \alpha^{x+y+\omega} \qquad (3)$$

Ἀπὸ τὴν ἰσότητα (3) συνάγομεν, ὅτι ὁ ἐκθέτης $x+y+\omega$ τοῦ α εἶναι λογάριθμος τοῦ Α.Β.Γ πρὸς βάσιν α· δηλ. εἶναι

$$\lambda o\gamma_\alpha (A.B.\Gamma) = x+y+\omega$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα αὐτὴν τὰ x, y, ω μὲ τὰ ἴσα των, ποὺ δίδουν αἱ ἰσότητης (2) καὶ ἔχομεν

$$\lambda o\gamma_\alpha (A.B.\Gamma) = \lambda o\gamma_\alpha A + \lambda o\gamma_\alpha B + \lambda o\gamma_\alpha \Gamma.$$

Ἐπειδὴ ἡ σχέσις αὐτὴ ὑφίσταται, οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ βάσις α τῶν λογαρίθμων, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν ἁπλῶς

$$\boxed{\lambda o\gamma(A.B.\Gamma) = \lambda o\gamma A + \lambda o\gamma B + \lambda o\gamma \Gamma}$$

Π.χ. Θὰ εἶναι $\lambda o\gamma(5.12.40) = \lambda o\gamma 5 + \lambda o\gamma 12 + \lambda o\gamma 40$
καὶ ἀντιστρόφως: $\lambda o\gamma 50 + \lambda o\gamma 75 + \lambda o\gamma 8 = \lambda o\gamma(50.75.8)$

481. **Ἰδιότης III.** ***Ὁ λογάριθμος ἑνὸς πηλίκου δύο ἀριθμῶν εἶναι ἴσος μὲ τὴν διαφορὰν μεταξὺ τοῦ λογαρίθμου τοῦ διαιρετέου καὶ τοῦ λογαρίθμου τοῦ διαιρετου.***

Ἔστω τὸ πηλίκον $\frac{A}{B}$ τῶν θετικῶν ἀριθμῶν. Θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$\lambda o\gamma \frac{A}{B} = \lambda o\gamma A - \lambda o\gamma B$$

οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι βάσις τοῦ λογαρίθμου.

Θέτομεν $\frac{A}{B} = \Pi$, ὁπότε θὰ εἶναι $A = B\Pi$. (1)

Ἂν λάβωμεν τοὺς λογαρίθμους καὶ τῶν δύο μελῶν τῆς ἰσότητος (1) θὰ ἔχωμεν $\lambda o\gamma A = \lambda o\gamma(B.\Pi)$.

Κατὰ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα ἡ ἰσότης αὐτὴ γράφεται

$$\lambda o\gamma A = \lambda o\gamma B + \lambda o\gamma \Pi \quad \text{ἢ} \quad \lambda o\gamma \Pi = \lambda o\gamma A - \lambda o\gamma B$$

Ἐπειδὴ $\Pi = \frac{A}{B}$ ἡ τελευταία ἰσότης γράφεται

ἢ $$\boxed{\lambda o\gamma \frac{A}{B} = \lambda o\gamma A - \lambda o\gamma B.}$$

Π.χ. $\lambda o\gamma \frac{3}{5} = \lambda o\gamma 3 - \lambda o\gamma 5$ καὶ ἀντιστρόφως

$$\lambda o\gamma 8 - \lambda o\gamma 15 = \lambda o\gamma \frac{8}{15}.$$

482. **Ἰδιότης IV** ***Ὁ λογάριθμος μιᾶς δυνάμεως ἑνὸς ἀριθμοῦ***

εἶναι ἴσος μὲ τὸν ἐκθέτην τῆς δυνάμεως ἐπὶ τὸν λογάριθμον τοῦ ἀριθμοῦ.

Ἔστω ἡ δύναμις A^{ν}. Θὰ δείξωμεν ὅτι $\lambda o\gamma A^{\nu}=\nu\lambda o\gamma A$.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν δυνάμεων ἡ δύναμις A^{ν} εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενον ν παραγόντων ἴσων μὲ Α· δηλ. εἶναι

$$A^{\nu}=A.A.A.A\ldots A \quad (\nu \text{ παράγοντες})$$

Λαμβάνομεν λογαρίθμους καὶ τῶν δύο μελῶν τῆς ἰσότητος αὐτῆς καὶ ἔχομεν $\lambda o\gamma A^{\nu}=\lambda o\gamma(A.A.A.A\ldots A)$

ἢ $\lambda o\gamma A^{\nu}=\lambda o\gamma A+\lambda o\gamma A+\lambda o\gamma A+\ldots+\lambda o\gamma A$, (ν προσθετέοι)

ἢ
$$\boxed{\lambda o\gamma A^{\nu}=\nu\lambda o\gamma A.}$$

Π.χ. $\lambda o\gamma 75^4=4\lambda o\gamma 75$ καὶ ἀντιστρόφως $3\lambda o\gamma 28=\lambda o\gamma 28^3$

483. **Ἰδιότης V.** ***Ὁ λογάριθμος τῆς ρίζης ἑνὸς ἀριθμοῦ εἶναι ἴσος μὲ τὸν λογάριθμον τοῦ ἀριθμοῦ διῃρημένον διὰ τοῦ δείκτου τῆς ρίζης.***

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ ὑπολογίσωμεν τὸν λογάριθμον τῆς $\sqrt[\nu]{A}$

Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\lambda o\gamma\sqrt[\nu]{A}=\dfrac{\lambda o\gamma A}{\nu}$.

Α' Ἀπόδειξις. Θέτομεν $\sqrt[\nu]{A}=P$, ὁπότε $A=P^{\nu}$. (1)

Κατὰ τὴν ἰδιότητα IV, ἀπὸ τὴν ἰσότητα (1) ἔχομεν

$$\lambda o\gamma A=\nu\lambda o\gamma P \quad \text{ἢ} \quad \lambda o\gamma P=\frac{\lambda o\gamma A}{\nu}$$

Ἐπειδὴ $P=\sqrt[\nu]{A}$ ἡ τελευταία ἰσότης γράφεται

$$\boxed{\lambda o\gamma\sqrt[\nu]{A}=\frac{\lambda o\gamma A}{\nu}}$$

Β' Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ $\sqrt[\nu]{A}=A^{\frac{1}{\nu}}$ θὰ εἶναι

$$\lambda o\gamma\sqrt[\nu]{A}=\lambda o\gamma A^{\frac{1}{\nu}}=\frac{1}{\nu}\lambda o\gamma A=\frac{\lambda o\gamma A}{\nu}$$

Π.χ. $\lambda o\gamma\sqrt[3]{605}=\dfrac{1}{3}\lambda o\gamma 605$ καὶ ἀντιστρόφως

$$\frac{1}{5}\lambda o\gamma 1240=\lambda o\gamma\sqrt[5]{1240}.$$

Ἀσκήσεις. ***1926.*** Νὰ ἐφαρμοσθοῦν αἱ ἰδιότητες τῶν λογαρίθμων εἰς τοὺς κάτωθι λογαρίθμους :

1. $\lambda o\gamma(5\times 7\times 9)$. 2. $\lambda o\gamma(8\alpha\beta\gamma)$.

3. $\lambda o\gamma\dfrac{5}{6}$. 4. $\lambda o\gamma\dfrac{\beta}{\gamma}$. 5. $\lambda o\gamma\dfrac{\alpha\cdot\beta}{\gamma}$.

1927. Νὰ ἐφαρμοσθοῦν αἱ ἰδιότητες τῶν λογαρίθμων εἰς τοὺς κάτωθ λογαρίθμους :

1. $\lambda o\gamma 3\alpha^5$. 2. $\lambda o\gamma(5\alpha^2\beta\gamma^3)$. 3. $\lambda o\gamma \dfrac{\alpha\beta^3}{\gamma}$.

1928. Νὰ ἐφαρμοσθοῦν αἱ ἰδιότητες τῶν λογαρίθμων εἰς τοὺς κάτωθι λογαρίθμους

1. $\lambda o\gamma\sqrt{5\alpha}$. 2. $\lambda o\gamma\sqrt[3]{8\alpha\beta\gamma}$. 3. $\lambda o\gamma 3\sqrt[3]{3\alpha^2\beta^5}$.

1929. Νὰ ἐφαρμοσθοῦν αἱ ἰδιότητες τῶν λογαρίθμων εἰς τοὺς κάτωθι λογαρίθμους

1. $\lambda o\gamma \dfrac{3\alpha^3\beta}{\sqrt{\gamma}}$. 2. $\lambda o\gamma\dfrac{5\sqrt{\alpha\beta^2}}{6\alpha^2}$. 3. $\lambda o\gamma\dfrac{\alpha^3\sqrt{\beta}}{4\sqrt{\alpha}\cdot\beta^3}$.

4. $\lambda o\gamma\dfrac{2\alpha^2\sqrt{\beta}}{\sqrt[3]{\gamma\delta^2}}$. 5. $\lambda o\gamma \dfrac{3\alpha^3\beta\gamma^4}{5\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma^2}}$. 6. $\lambda o\gamma \dfrac{3\alpha^3\sqrt[4]{\beta^2\gamma}}{5\beta^2\sqrt[3]{\alpha^2\beta\gamma^2}}$.

1930 Νὰ ἀποδειχθῇ ἡ ἀλήθεια τῶν κάτωθι ἰσοτήτων:

1. $\lambda o\gamma 60=\lambda o\gamma 3+\lambda o\gamma 4+\lambda o\gamma 5$.
2. $\lambda o\gamma 7+\lambda o\gamma 8=\lambda o\gamma 2+\lambda o\gamma 28$.
3. $6\lambda o\gamma 2-2\lambda o\gamma 8=0$.
4. $\lambda o\gamma 3+\lambda o\gamma 8-\lambda o\gamma 6=\lambda o\gamma 4$.
5. $\lambda o\gamma 5+\lambda o\gamma 6-\lambda o\gamma 30=0$.
6. $\lambda o\gamma 3+2\lambda o\gamma 4-\lambda o\gamma 12=2\lambda o\gamma 2$.
7. $\dfrac{1}{2}\lambda o\gamma 25+\dfrac{1}{3}\lambda o\gamma 8+\dfrac{1}{5}\lambda o\gamma 32=2\lambda o\gamma 2+\lambda o\gamma 5$.

ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

484. Διάφορα συστήματα λογαρίθμων. Ἐπειδὴ ἡ βάσις α τῆς δυνάμεως α^x δύναται νὰ εἶναι οἱοσδήποτε θετικὸς ἀριθμός, διάφορος τῆς μονάδος, διὰ τοῦτο δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν ἄπειρα λογαριθμικὰ συστήματα.

Τὰ ἐν χρήσει ὅμως λογαριθμικὰ συστήματα εἶναι :

1ον. ***Οἱ Νεπέρειοι*** (*) ***λογάριθμοι***, δηλ. ἕνα λογαριθμικὸν σύστημα τοῦ ὁποίου ἡ βάσις α εἶναι ὁ ἀσύμμετρος ἀριθμὸς $e=2,71828\,1828\ldots$ Οἱ νεπέρειοι λογάριθμοι χρησιμοποιοῦνται εἰς τὰ ἀνώτερα μαθηματικὰ καὶ παρίστανται μὲ τὸ γράμμα L.

2ον. Οἱ ***κοινοὶ λογάριθμοι*** ἢ ***δεκαδικοὶ λογάριθμοι***, δηλ. ἕνα λογαριθμικόν, σύστημα τοῦ ὁποίου ἡ βάσις α εἶναι ὁ ἀριθμὸς 10. Οἱ δεκαδικοὶ λογάριθμοι παρίστανται μὲ τὸ σύμβολον ***λογ*** χωρὶς δείκτην.

485. Δεκαδικοὶ λογάριθμοι. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν λογαρίθμων: ***Δεκαδικὸς λογάριθμος ἑνὸς ἀριθμοῦ εἶναι ὁ ἐκθέτης τῆς δυ-***

(*) Ἐκ τοῦ ὀνόματος τοῦ ἐπινοήσαντος αὐτοὺς Neper, μαθηματικοῦ ἐκ Σκωτίας (1550—1617).

νάμεως τοῦ 10, εἰς τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ὑψωθῇ ἡ βάσις 10 διὰ νὰ δώσῃ τὸν δοθέντα ἀριθμόν.

Π.χ. Ἐπειδὴ $100=10^2$, θὰ εἶναι λογ$100=2$.

Ἐπίσης ἐπειδὴ $0{,}001=\frac{1}{1000}=\frac{1}{10^3}=10^{-3}$, θὰ εἶναι λογ$0{,}001=-3$.

Ὁ κάτωθι πίναξ δίδει τοὺς λογαρίθμους τῶν διαδοχικῶν δυνάμεων τοῦ 10.

Ἀριθμοὶ	...... 0,001 ἢ $10^{-\nu}...10^{-3}$,	0,01 10^{-2}	0,1 10^{-1}	1 10^0	10 10^1	100 10^2	1000...... $10^3...10^\nu$..
Λογάριθμοι	$-\nu$ .... -3,	-2,	-1,	0,	1,	2,	3 .... ν

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω πίνακος συνάγομεν:

1ον. ***Ὁ λογάριθμος μιᾶς δυνάμεως τοῦ 10 εἶναι ἴσος μὲ τὸν ἐκθέτην τῆς δυνάμεως τοῦ 10.***

2ον. ***Αἱ διαδοχικαὶ δυνάμεις τοῦ 10 εἶναι οἱ μόνοι ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἔχουν, ὡς λογαρίθμους ἀκεραίους ἀριθμούς. Ὅλοι οἱ ἄλλοι ἀριθμοὶ ἔχουν, ὡς λογαρίθμους, ἀσυμμέτρους ἀριθμούς.***

Π.χ. Ἔστω ὁ ἀριθμὸς $A=85$· ὁ 85 περιέχεται μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 10 καὶ 100 καὶ ἑπομένως ὁ λογάριθμός του θὰ περιέχεται μεταξὺ τοῦ 1 καὶ 2, οἱ ὁποῖοι εἶναι οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν 10 καὶ 100.

Ὁ λογάριθμος τοῦ ἀριθμοῦ $A=85$ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι σύμμετρος ἀριθμός· διότι, ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι ὁ λογάριθμος τοῦ 85 ἦτο ἴσος μὲ τὸν σύμμετρον ἀριθμὸν $\frac{\mu}{\nu}$, δηλ. ὅτι εἶναι λογ$85=\frac{\mu}{\nu}$

τότε κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν λογαρίθμων, θὰ εἶναι $10^{\frac{\mu}{\nu}}=85$

ἢ $10^\mu=85^\nu$ ἢ $(2.5)^\mu=(5.17)^\nu$ ἢ $2^\mu.5^\mu=5^\nu.17^\nu$

Ἡ τελευταία ὅμως ἰσότης εἶναι ἀδύνατος· ἄρα ὁ λογάριθμος τοῦ 85 δὲν εἶναι σύμμετρος ἀριθμός.

Ὥστε οἱ λογάριθμοι ὅλων τῶν ἀριθμῶν, ἐκτὸς τῶν δυνάμεων τοῦ 10, δὲν δύνανται νὰ ὑπολογισθοῦν ἀκριβῶς, ἀλλὰ κατὰ προσέγγισιν μιᾶς δεκαδικῆς μονάδος· συνήθως ὑπολογίζονται κατὰ προσέγγισιν 0,00001.

Τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ λογαρίθμου ἑνὸς ἀριθμοῦ λέγεται ***χαρακτηριστικόν.***

3ον. ***Οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν, τῶν μεγαλυτέρων τῆς μονάδος, εἶναι θετικοί.***

4ον. ***Οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν, τῶν μικροτέρων τῆς μονάδος, εἶναι ἀρνητικοί.***

Π.χ. Ἔστω, ὅτι ὁ ἀριθμὸς A περιέχεται μεταξὺ 0,001 καὶ 0,01.

Ὁ λογάριθμός του θὰ περιέχεται, ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸν ἀνωτέρω πίνακα, μεταξὺ -3 καὶ -2.

486. Τροπὴ ἀρνητικοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ εἰς ἐν μέρει ἀρνητικὸν ἀριθμόν. Εἴδομεν ἀνωτέρω, ὅτι οἱ θετικοὶ ἀριθμοὶ οἱ μικρότεροι τῆς μονάδος ἔχουν ἀρνητικοὺς λογαρίθμους.

Ἐπειδὴ οἱ τοιοῦτοι λογάριθμοι δὲν εἶναι εὔχρηστοι εἰς τὸν λογισμόν, διὰ τοῦτο θὰ ἀντικαταστήσωμεν αὐτοὺς δι' ἄλλων λογαρίθμων, τῶν ὁποίων ***μόνον τὸ χαρακτηριστικὸν εἶναι ἀρνητικόν***.

Πράγματι· ἔστω, ὅτι

$$\alpha=-2,45673 \quad \text{ἤ} \quad \alpha=-2-0,45673. \qquad (1)$$

Προσθέτομεν καὶ ἀφαιροῦμεν τὴν μονάδα 1 εἰς τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἰσότητος (1) καὶ ἔχομεν

$$\alpha=-2-1+1-0,45673=(-2-1)+(1-0,45673)=-3+0,54327.$$

Ὥστε εἶναι $\alpha=-2,45673=-3+0,54327. \qquad (2)$

Ὑπὸ τὴν μορφὴν αὐτὴν βλέπομεν, ὅτι ὁ ἀρνητικὸς λογάριθμος ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕνα ***ἀρνητικὸν ἀκέραιον μέρος*** -3 καὶ ἀπὸ ἕνα ***θετικὸν δεκαδικὸν μέρος*** 0,54327. Τὸ ἀκέραιον μέρος -3 λέγεται ***ἀρνητικὸν χαρακτηριστικόν***. Τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἰσότητος (2) γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς: $\overline{3},54327$, διὰ νὰ δηλώσωμεν, ὅτι μόνον τὸ ἀκέραιον μέρος εἶναι ἀρνητικόν. Ὥστε θὰ εἶναι

$$\boxed{-2,45673=\overline{3},54327}$$

Ἂν ἐργασθῶμεν ὁμοίως, δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν, γενικῶς, ἕνα δεκαδικὸν ἀριθμόν, ὅλως ἀρνητικόν, εἰς ἄλλον ἰσοδύναμον ἀριθμόν, τοῦ ὁποίου μόνον τὸ ἀκέραιον μέρος νὰ εἶναι ἀρνητικόν. Εὐκολύνομεν τὰς πράξεις, ἐὰν ἐργασθῶμεν ὡς ἑξῆς:

Προσθέτομεν μίαν ἀρνητικὴν μονάδα εἰς τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ ἀριθμοῦ καὶ γράφομεν τὸ — ὑπεράνω τοῦ ἀθροίσματος· ἔπειτα ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ 9 ἕκαστον ψηφίον τοῦ δεκαδικοῦ μέρους του, ἐκτὸς τοῦ τελευταίου σημαντικοῦ ψηφίου, τὸ ὁποῖον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ 10.

Π.χ. $-3,85782=\overline{4},14218, \qquad -0,70490=\overline{1},29510$

Ἀσκήσεις. ***1931.*** Νὰ τραποῦν οἱ κάτωθι ἀρνητικοὶ δεκαδικοὶ ἀριθμοί, εἰς ἰσοδυνάμους ἀριθμούς, τῶν ὁποίων μόνον τὸ ἀκέραιον μέρος νὰ εἶναι ἀρνητικόν:

1. $-5,73241$,	3. $-2,97119$,	5. $-1,73804$.
2. $-0,69804$,	4. $-0,00498$,	6. $-0,29990$

ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΟΥ ΕΝΟΣ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΥ

487. **Προσδιορισμὸς τοῦ χαρακτηριστικοῦ ἑνὸς λογαρίθμου.** Εἴδομεν ἀνωτέρω, ὅτι ὁ λογάριθμος οἱουδήποτε ἀριθμοῦ ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕνα ἀκέραιον μέρος καὶ ἀπὸ ἕνα δεκαδικὸν μέρος μὲ ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία μὴ περιοδικά.

Τὸ ἀκέραιον μέρος ἑνὸς λογαρίθμου λέγεται ***χαρακτηριστικόν.***

Διὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ χαρακτηριστικοῦ τοῦ λογαρίθμου ἑνὸς ἀριθμοῦ διακρίνομεν δύο περιπτώσεις:

1ον. ***Ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶναι μεγαλύτερος τῆς μονάδος***
Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ χαρακτηριστικον τοὺ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ 835,75.

Ὁ ἀριθμὸς 835,75 περιέχεται μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 100 καὶ 1000, δηλ. εἶναι

$$100<835,75<1000 \quad \text{ἢ} \quad 10^2<835,75<10^3$$

ἄρα ὁ λογάριθμός του θὰ περιέχεται μεταξὺ τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν 10^2 καὶ 10^3, δηλ. μεταξὺ 2 καὶ 3 καὶ ἑπομένως ὁ λογάριθμός του θὰ ἔχῃ ὡς ἀκέραιον μέρος, δηλ. ὡς ***χαρακτηριστικόν***, τὸν ἀριθμὸν 2.

Ὥστε εἶναι λογ835,72=2,....

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ 23456 εἶναι 4. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι:

Τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου ἑνὸς ἀριθμοῦ, μεγαλυτέρου τῆς μονάδος, εἶναι ἴσον μὲ τόσας ἀκεραίας μονάδας, ὅσον εἶναι τὸ πλῆθος τῶν ψηφίων τοῦ ἀκεραίου μέρους τοῦ ἀριθμοῦ, ἐλαττωθὲν κατὰ μονάδα.

2ον. ***Ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶναι μικρότερος τῆς μονάδος 1.***
Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ 0,00456.

Ἐπειδὴ $$0,00456=\frac{456}{100000}$$

θὰ εἶναι $$\text{λογ}0,00456=\text{λογ}456-\text{λογ}100000 \qquad (1)$$

Ὁ λογάριθμος τοῦ ἀριθμοῦ 456 ἔχει χαρακτηριστικὸν 2 καὶ ἕνα δεκαδικὸν μέρος θετικόν, ἔστω δ, δηλ. ὑποθέτομεν ὅτι λογ456=2+δ. Ἐπειδὴ λογ100000=λογ10^5=5, ἡ ἰσότης (1) γράφεται

$$\text{λογ}0,00456=2+\delta-5=-3+\delta$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ 0,00456 εἶναι −3, δηλ. τόσαι ἀρνητικαὶ ἀκέραιαι μονάδες, ὅσα εἶναι τὰ μηδενικά, τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται εἰς τὴν ἀρχὴν αὐτοῦ, συμπεριλαμβανομένου καὶ τοῦ μηδὲν τοῦ ἀκεραίου μέρους.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ 0,0705 εἶναι —2.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι:

Ὁ λογάριθμος ἑνὸς ἀριθμοῦ μικροτέρου τῆς μονάδος ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕνα ἀρνητικὸν χαρακτηριστικὸν καὶ ἀπὸ ἕνα θετικὸν δεκαδικὸν μέρος.

Τὸ ἀρνητικὸν χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου αὐτοῦ εἶναι ἴσον, κατ᾿ ἀπόλυτον τιμήν, μὲ τὸ πλῆθος τῶν μηδενικῶν, τὰ ὁποῖα ὑπάρχουν εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ ἀριθμοῦ (συμπεριλαμβανομένου καὶ τοῦ μηδενὸς τοῦ ἀκεραίου μέρους).

Ἀσκήσεις. 1932. Νὰ προσδιορισθῇ τὸ χαρακτηριστικὸν τῶν:

1. λογ 75	4. λογ 8,685	7. λογ0,68
2. λογ 983	5. λογ 14,607	8. λογ0,000345
3. λογ5965	6. λογ325,7	9. λογ0,00,94.

1933. Πόσα ἀκέραια ψηφία ἔχει ὁ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου ὁ λογάριθμος ἔχει χαρακτηριστικὸν 2, 5, 4, 3, 1, 9.

1934. Ἐὰν λογ2=0,30103 καὶ λογ3=0,47712 νὰ εὑρεθῇ τὸ πλῆθος τῶν ψηφίων τῶν ἀριθμῶν

1. 2^{100} 2. 2^{54} 3. 3^{50} 4. 3^{75}.

488. Θεώρημα. ***Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν (ἢ διαιρέσωμεν) ἕνα ἀριθμὸν ἐπὶ 10, 100, 1000, . . . , καὶ γενικῶς ἐπὶ δύναμιν τοῦ 10, τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου δὲν μεταβάλλεται.***

Ἔστω ἕνας ἀριθμὸς Α, τοῦ ὁποίου ὁ λογάριθμος ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕνα ἀκέραιον μέρος, ἔστω 5 καὶ ἀπὸ ἕνα δεκαδικὸν μέρος δ. Δηλαδὴ ἔστω, ὅτι εἶναι $\lambda o\gamma A = 5 + \delta$.

1ον. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν Α ἐπὶ μίαν δύναμιν τοῦ 10 ἔστω τὴν 10^3, θὰ λάβωμεν τὸ ἀριθμὸν $A \times 10^3$. Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ $A \times 10^3$ εἶναι πάλιν δ

Πράγματι ἔχομεν

$$\begin{aligned}\lambda o\gamma(A \times 10^3) &= \lambda o\gamma A + \lambda o\gamma 10^3\\ &= \lambda o\gamma A + 3\lambda o\gamma 10 = \lambda o\gamma A + 3 \cdot 1.\end{aligned}$$

Επειδὴ $\lambda o\gamma A = 5 + \delta$, ἡ τελευταία ἰσότης γράφεται

$$\lambda o\gamma(A \times 10^3) = 5 + \delta + 3 = (5 + 3) + \delta.$$

Γενικῶς θὰ εἶναι

$$\boxed{\lambda o\gamma(A \times 10^\nu) = \lambda o\gamma A + \nu}$$

2ον. Ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν Α διὰ 10^3, θὰ ἔχωμεν $\frac{A}{10^3}$, ὁπότε $\lambda o\gamma \frac{A}{10^3} = \lambda o\gamma A - \lambda o\gamma 10^3$

ἢ $λογ\frac{A}{10^3}=λογA-3λογ10=λογA-3=(5+δ)-3=(5-3)+δ.$

Γενικῶς θὰ εἶναι $$\boxed{\textbf{λογ}\frac{A}{10^ν}=\textbf{λογ}A-ν}$$

489. **Πόρισμα.** ***Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἔχουν τὰ αὐτὰ ψηφία καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν καὶ διαφέρουν μόνον κατὰ τὴν θέσιν τῆς ὑποδιαστολῆς, οἱ λογάριθμοί των διαφέρουν μόνον κατὰ τὸ χαρακτηριστικόν τῶν.***

Πράγματι, ἐὰν εἶναι $λογ6245 =3,79553$
θὰ εἶναι $λογ6,245 =0,79553$
$λογ624,5 =2,79553$
$λογ0,6245 =\bar{1},79553$
$λογ624500=5,79553$

διότι τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου ἑνὸς ἀριθμοῦ δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς πολλαπλασιασθῇ (ἢ διαιρεθῇ) ἐπὶ $10^ν$.

Ἀσκήσεις 1935. Ἐὰν λογ4567=3,65963, νὰ εὑρεθῇ ὁ λογάριθμος τῶν ἀριθμῶν : 0,4567· 4,567· 0,004567· 4567000.

1936. Ὁ λογάριθμος τοῦ 65 εἶναι 1,81291. Ποῖοι ἄλλοι ἀριθμοὶ ἔχουν τὸ αὐτὸ δεκαδικὸν μέρος.

9

ΣΥΛΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

490. **Συλλογάριθμος.** ***Συλλογάριθμος ἑνὸς ἀριθμοῦ λέγεται ὁ λογάριθμος τοῦ ἀντιστρόφου τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ.***

Ἔστω ἕνας ἀριθμὸς A. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν θὰ εἶναι

$$συλλογA=λογ\frac{1}{A}.$$

Ἐπειδὴ $λογ\frac{1}{A}=λογ1-λογA=0-λογA=-λογA$

συνάγομεν, ὅτι $$\boxed{\textbf{συλλογ}A=-\textbf{λογ}A}$$

Δηλ. ***Ὁ συλλογάριθμος ἑνὸς ἀριθμοῦ A εἶναι ἴσος μὲ τὸν ἀντίθετον τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ A.***

Χρῆσις τῶν συλλογαρίθμων. Ἡ εἰσαγωγὴ τῶν συλλογαρίθμων μᾶς ἐπιτρέπει νὰ ἀντικαταστήσωμεν μίαν διαφορὰν λογαρίθμων διὰ τοῦ ἀθροίσματός των.

Π.χ. Ἔχομεν

$$λογ\frac{A^μ B^ν Γ}{Δ\cdot E}=μλογA+νλογB+λογΓ-λογΔ-λογE. \quad (1)$$

Ἂν ἀντικαταστήσωμεν τὸ $-λογΔ$ διὰ τοῦ συλλογΔ καὶ τὸ

—λογΕ διὰ τοῦ συλλογΕ, λαμβάνομεν τὸ κατωτέρω ἄθροισμα, τὸ ὁποῖον ὑπολογίζεται εὐκολώτερον

$$\lambda o\gamma \frac{A^{\mu} B^{\nu} \Gamma}{\Delta \cdot E} = \mu\lambda o\gamma A + \nu\lambda o\gamma B + \lambda o\gamma \Gamma + \sigma\upsilon\lambda\lambda o\gamma \Delta + \sigma\upsilon\lambda\lambda o\gamma E.$$

491. **Ὑπολογισμὸς ἑνὸς συλλογαρίθμου, ἂν γνωρίζωμεν τὸν λογάριθμον.** Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ ὑπολογίσωμεν τὸν συλλογάριθμον ἑνὸς ἀριθμοῦ Α, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι λογΑ=3,45982.

Γνωρίζομεν, ὅτι συλλογΑ=—λογΑ=—3.45982. (1)

Ἐπειδὴ —3,45982=$\overline{4}$,54018, ἡ ἰσότης (1) γίνεται

συλλογΑ=$\overline{4}$,54018.

Ὥστε. *Κ α ν ώ ν :* ***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν συλλογάριθμον ἑνὸς ἀριθμοῦ, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὸν λογάριθμον, προσθέτομεν +1 εἰς τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου καὶ ἀλλάσσομεν τὸ σημεῖον του· ἔπειτα ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ 9 ἕκαστον ψηφίον τοῦ δεκαδικοῦ μέρους του, ἐκτὸς τοῦ τελευταίου σημαντικοῦ ψηφίου, τὸ ὁποῖον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ 10.***

Π.χ.

$$\begin{cases} \lambda o\gamma 0{,}05648 = \overline{2}{,}75189 \\ \sigma\upsilon\lambda\lambda o\gamma 0{,}05648 = 1{,}24811 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda o\gamma 4{,}327 = 0{,}63619 \\ \sigma\upsilon\lambda\lambda o\gamma 4{,}327 = \overline{1}{,}36381 \end{cases}$$

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΚΑΙ ΧΡΗΣΙΣ ΤΩΝ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ

492. Διὰ νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὰς ἰδιότητας τῶν λογαρίθμων εἶναι ἀπαραίτητον νὰ ἔχωμεν ἕνα πίνακα λογαρίθμων, ὁ ὁποῖος νὰ περιέχῃ ὅλους τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς ἀπὸ 1 μέχρις ἑνὸς ὡρισμένου ἀριθμοῦ καί, ἀπέναντί των τοὺς λογαρίθμους των, οἱ ὁποῖοι ἔχουν ὑπολογισθῆ μὲ μίαν ὡρισμένην δεκαδικὴν προσέγγισιν.

Οἱ συνηθέστεροι πίνακες, οἱ ὁποῖοι λέγονται ***μικροὶ πίνακες,*** περιέχουν τοὺς λογαρίθμους, μὲ 5 δεκαδικὰ ψηφία, τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀπὸ 1 ἕως 10000. Τοιοῦτοι εἶναι οἱ πίνακες τοῦ Dupuis κλπ.

Οἱ ἄλλοι πίνακες, οἱ ὁποῖοι λέγονται ***μεγάλοι πίνακες***, περιέχουν τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀπὸ 1 ἕως 100000 μὲ 7 δεκαδικά. Τοιοῦτοι εἶναι οἱ πίνακες τοῦ Callet κλπ.

Ὅλοι οἱ πίνακες αὐτοὶ ἔχουν σχεδὸν τὴν αὐτὴν διάταξιν καὶ συνοδεύονται μὲ ὁδηγίας διὰ τὴν χρῆσιν των.

Γενικῶς, εἰς τοὺς μικροὺς πίνακας, οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν ἀπὸ 1 ἕως 10000 δίδονται εἰς δύο πίνακας :

Ὁ πίναξ 1 δίδει τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀπὸ 1 ἕως 100. Ἀπέναντι ἑκάστου ἀριθμοῦ εὑρίσκεται ὁ λογάριθμός του.

Ὁ πίναξ II δίδει τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀπὸ 100 ἕως 10000. Ἡ στήλη Α περιέχει τὰς δεκάδας τῶν ἀριθμῶν καὶ τὸ ψηφίον τῶν μονάδων εὑρίσκεται ἄνω ἢ κάτω ἑκάστης τῶν ἄλλων στηλῶν.

Καὶ οἱ δύο πίνακες δίδουν μόνον τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου· τὸ χαρακτηριστικόν του δὲν ἀναγράφεται εἰς τοὺς πίνακας, διότι εὑρίσκεται εὐκόλως.

Εἰς τὸν πίνακα II, τὰ δύο πρῶτα ψηφία τοῦ δεκαδικοῦ μέρους τοῦ λογαρίθμου εὑρίσκονται εἰς τὸ πρῶτον μέρος τῆς στήλης 0 καὶ τὰ ἄλλα τρία εἰς τὴν στήλην, εἰς τὴν ὁποίαν ἀναγράφεται τὸ ψηφίον τῶν μονάδων.

493. **Χρῆσις τῶν πινάκων τοῦ** Dupuis (*). Διὰ νὰ χρησιμοποιήσωμεν γενικῶς ἕνα πίνακα λογαρίθμων, πρέπει νὰ γνωρίζωμεν τὰ κατωτέρω προβλήματα:

1. ***Νὰ εὑρεθῇ ὁ λογάριθμος ἑνὸς δοθέντος ἀριθμοῦ.***

2. ***Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἀντιστοιχεῖ εἰς δοθέντα λογάριθμον.***

Α	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
670	82 607	614	620	627	633	640	646	653	659	666
1	672	679	685	692	698	705	711	718	724	730
2	737	743	750	756	763	769	776	782	789	795
3	802	808	814	821	827	834	840	847	853	860
4	866	872	879	885	892	898	905	911	918	924
5	930	937	943	950	956	963	969	975	982	988
6	995	*001	*008	*014	*020	*027	*033	*040	*046	*052
7	83 059	065	072	078	085	091	097	104	110	117
8	123	129	136	142	149	155	161	168	174	181
9	187	193	200	206	213	219	225	232	238	245
680	251	257	264	270	276	283	289	296	302	308
1	315	321	327	334	340	347	353	359	366	372
2	378	385	391	398	404	410	417	423	429	436
9	448	454	460	466	473	479	485	491	497	504
Α	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Πρόβλημα I. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λογάριθμος ἑνὸς δοθέντος ἀριθμοῦ. Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις:

(*) Βλέπε ἑλληνικὴν ἔκδοσιν Π. Τόγκα.

I ***Περίπτωσις. Ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εὑρίσκεται εἰς τοὺς πίνακας*** δηλ. ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ἔχει 4 ψηφία ἢ ὀλιγώτερα.

Π.χ. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν λογάριθμον τοῦ 6758. Γράφομεν κατ' ἀρχὰς τὸ χαρακτηριστικόν του 3· ἔπειτα ἀναζητοῦμεν εἰς τὴν στήλην Α τὸν ἀριθμὸν 675 καὶ γράφομεν παραπλεύρως τοῦ χαρακτηριστικοῦ τὰ δύο πρῶτα ψηφία 82, τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται εἰς τὴν στήλην 0 καὶ ἀπέναντι τοῦ 675 καὶ ἔπειτα τὰ τρία ἄλλα δεκαδικὰ ψηφία 982, τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται εἰς τὴν τομὴν τῆς στήλης, ἡ ὁποία ἔχει ἄνω καὶ κάτω σημειωμένον τὸν αριθμὸν 8 καὶ τῆς ὁριζοντίας γραμμῆς τοῦ ἀριθμοῦ 675.

Θὰ εἶναι λοιπὸν $\qquad$ λογ6758=3,82982

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι $\qquad$ λογ6709=3,82666.

Ἐὰν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶναι τοιοῦτος, ὥστε μετὰ τὴν ἀπαλοιφὴν τῆς τυχὸν ὑπαρχούσης ὑποδιαστολῆς καὶ τῶν μηδενικῶν, εἰς τὰ ὁποῖα δύναται νὰ καταλήγῃ, ἔχῃ 4 ἢ ὀλιγώτερα ψηφία, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἀμέσως τὸν λογάριθμόν του.

Π.χ. Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ

67,85 $\qquad$ 0,06785 $\qquad$ 6785000

οἱ ὁποῖοι διαφέρουν τοῦ ἀριθμοῦ 6785 κατὰ τὴν θέσιν τῆς ὑποδιαστολῆς. Οἱ λογάριθμοί των ἔχουν τὸ αὐτὸ δεκαδικὸν μέρος, τὸ ὁποῖον ἔχει καὶ ὁ ἀριθμὸς 6785 καὶ διαφέρουν μόνον κατὰ τὸ χαρακτηριστικὸν (§ 487).

Ἐπειδὴ $\qquad$ λογ6785=3,83155

Θὰ εἶναι $\quad$ λογ67,85=1,83155, $\quad$ λογ0,6785=$\bar{1}$,83155, $\quad$ λογ6785000=6,83155.

II ***Περίπτωσις. Ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς δὲν εὑρίσκεται εἰς τοὺς πίνακας*** δηλ. ὁ δοθεὶς ἀριθμός, μετὰ τὴν ἀπαλοιφὴν τῆς τυχὸν ὑπαρχούσης ὑποδιαστολῆς ἢ τῶν μηδενικῶν, εἰς τὰ ὁποῖα δύναται νὰ καταλήγῃ, ἔχει περισσότερα τῶν 4 ψηφίων. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὁρίζομεν κατ' ἀρχὰς τὸ χαρακτηριστικόν του· ἔπειτα διαιροῦμεν ἢ πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμὸν αὐτὸν ἐπὶ 10 ἢ ἐπὶ 100 ἢ ἐπὶ 1000 κλπ. εἰς τρόπον, ὥστε νὰ λάβωμεν ἕνα ἀκέραιον ἀριθμὸν μὲ 4 ψηφία· ἔπειτα, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ ἐργαζόμεθα ὅπως εἰς τὰ κατωτέρω παραδείγματα.

Παράδειγμα 1ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λογάριθμος τοῦ 679578.

Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς 679578 ἔχει 6 ψηφία, τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου του εἶναι 5.

Διαιροῦμεν τὸν ἀριθμὸν 679578 διὰ 100 καὶ εὑρίσκομεν 6795,78.

Εὑρίσκομεν εἰς τοὺς πίνακας τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ 6795, τὸ ὁποῖον εἶναι 83219, ἐνῷ τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ 6796 εἶναι 83225. Ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ δεκαδικοῦ μέρους τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν 6795 καὶ 6796 εἶναι 6 μονάδες τῆς πέμπτης δεκαδικῆς τάξεως· ἔπειτα, ὑποθέτοντες, ὅτι αἱ αὐξήσεις τῶν λογαρίθμων εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς αὐξήσεις τῶν ἀριθμῶν, λέγομεν

Ἐὰν ὁ 6795 αὐξήσῃ κατὰ 1, τὸ δεκ. μέρος τοῦ λογ. αὐξάνει κατὰ 6
Ἐὰν ὁ 6795 » » 0,78, » » » » » θὰ αὐξήσῃ κατὰ

$6\times0{,}78=4{,}68$ εἴτε 5

Ὥστε τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογ6795,78 εἶναι $83219+5=83224$.

Ἐπειδὴ τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου ἑνὸς ἀριθμοῦ δὲν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν θέσιν τῆς ὑποδιαστολῆς, συνάγομεν ὅτι

λογ679578=5,83224

Διάταξις τῶν πράξεων:

Χαρακτηριστικὸν τοῦ 679578		. . .	5	Δ=6
Δεκαδ. μέρος	λογ6795	. . .	83219	
Δι' αὔξησιν	0,78	. . .	5	
Ὥστε	λογ679578	=	5,83224	

Παράδειγμα 2ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λογάριθμος τοῦ 0,00672457.

Τὸ χαρακτηριστικόν τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ 0,00672457 εἶναι $\overline{3}$.

Μεταφέρομεν τὴν ὑποδιαστολὴν μετὰ τὸ ψηφίον 4 καὶ λαμβάνομεν τὸν ἀριθμὸν 6724,57.

Ὁ λογάριθμος τοῦ 6724 ἔχει ὡς δεκαδικὸν μέρος τὸ 82763, ἐνῷ ὁ λογάριθμος τοῦ 6725 ἔχει ὡς δεκαδικὸν μέρος τὸ 82769. Ἐπειδὴ ἡ διαφορά μεταξὺ τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν 6724 καὶ 6725 εἶναι 6 μονάδες τῆς 5ης δεκαδικῆς τάξεως, λέγομεν

Ἐὰν ὁ 6724 αὐξήσῃ κατὰ 1, τὸ δεκ. μέρος τοῦ λογ. αὐξάνει κατὰ 6
Ἐὰν ὁ 6724 » » 0,57, » » » » » θὰ αὐξήσῃ κατὰ

$6\times0{,}57=3{,}42$, εἴτε 3.

Ὥστε τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογ6724,57 εἶναι $82763+3=82766$.

Ἐπειδὴ τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου ἑνὸς ἀριθμοῦ δὲν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν θέσιν τῆς ὑποδιαστολῆς, συνάγομεν, ὅτι

λογ0,0672457=$\overline{3}$,82766.

Διάταξις τῶν πράξεων:

Χαρακτηριστικὸν τοῦ 0,00672457		. . .	$\overline{3}$	
Δεκαδ. μέρος	λογ6724	. . .	82763	Δ=6
Δι' αὔξησιν	0,58	. . .	3	
Ὥστε	λογ0,00672457		$\overline{3}$,82766	

Πρόβλημα ΙΙ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἀντιστοιχεῖ εἰς δοθέντα λογάριθμον.

Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις:

Ι ***Περίπτωσις. Τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου εὑρίσκεται εἰς τοὺς πίνακας.***

Π.χ. Ἔστω ὅτι ζητεῖται ὁ ἀριθμὸς x, τοῦ ὁποίου ὁ λογάριθμος εἶναι 2,82840, δηλ. ἔστω, ὅτι εἶναι

λογx=2,82840

Χωρὶς νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψει τὸ χαρακτηριστικὸν 2, ἀναζητοῦμεν πρῶτον εἰς τὴν στήλην 0 (σελ. 500), τὸν ἀριθμὸν 82, ποὺ ἀποτελοῦν τὰ δύο πρῶτα ψηφία τοῦ δεκαδικοῦ μέρους τοῦ λογαρίθμου καὶ ἔπειτα εἰς τὴν στήλην 6, τὰ τρία ἄλλα ψηφία 840 τοῦ δεκαδικοῦ μέρους. Εἰς τὸ δεκαδικὸν μέρος 82840 ἀντιστοιχεῖ ὁ ἀριθμὸς 6736, τοῦ ὁποίου τὰ μὲν τρία πρῶτα ψηφία εὑρίσκομεν εἰς τὴν πρώτην στήλην τῆς ὁριζοντίου γραμμῆς τοῦ 840 καὶ τὸ τέταρτον ψηφίον 6 ἄνω ἢ κάτω τῆς στήλης τοῦ 840.

Ἔπειτα παρατηροῦμεν τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου. Τὸ χαρακτηριστικὸν 2 τοῦ δοθέντος λογαρίθμου δεικνύει, ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς ἔχει τρία ψηφία, ὡς ἀκέραιον μέρος· ὁ ζητούμενος λοιπὸν ἀριθμὸς x εἶναι 673,6. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου $\overline{3},83020$ εἶναι ὁ 6764. Τὸ χαρακτηριστικόν του $\overline{3}$, δεικνύει ὅτι ὑπάρχουν 3 μηδενικὰ πρὸ τοῦ πρώτου σημαντικοῦ ψηφίου 6 τοῦ 6764· ἄρα ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 0,006764.

II ***Περίπτωσις. Τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου δὲν ὑπάρχει εἰς τοὺς πίνακας.***

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν ἀριθμὸν x, τοῦ ὁποίου ὁ λογάριθμος εἶναι 5,83305· δηλ. ἔστω ὅτι εἶναι

$$\lambda o\gamma x = 5{,}83305$$

Ἀναζητοῦμεν εἰς τοὺς πίνακας τὸ δεκαδικὸν μέρος 83305 τοῦ λογαρίθμου.

Παρατηροῦμεν ὅτι τοῦτο περιλαμβάνεται μεταξὺ 83302 καὶ 83308, τὰ ὁποῖα εἶναι τὰ δεκαδικὰ μέρη τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν 6808 καὶ 6809.

Λαμβάνομεν τὸ μικρότερον δεκαδικὸν μέρος 83302, εἰς τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ ὁ ἀριθμὸς 6808 καὶ ὁ ὁποῖος ἀποτελεῖ τὰ τέσσαρα πρῶτα σημαντικὰ ψηφία τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ.

Ἡ διαφορὰ μεταξὺ 83302 καὶ τοῦ ἑπομένου του 83308 εἶναι 6.

Ἡ διαφορὰ μεταξὺ 83302 καὶ τοῦ δοθέντος λογαρίθμου 83305 εἶναι 3· ἔπειτα λέγομεν:

Ἐὰν τὸ δεκ. μέρος τοῦ λογ. αὐξηθῇ κατὰ 6, ὁ ἀριθμὸς αὐξ. κατὰ 1
» » » » » » » 3 » θὰ αὐξήσῃ κατὰ

$$\frac{1 \times 3}{6} = 0{,}5$$

Ὥστε ὁ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου ὁ λογάριθμος ἔχει δεκαδικὸν μέρος 83305 εἶναι ὁ $6808 + 0{,}5 = 6808{,}5$.

Ἐπειδὴ ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ἔχει χαρακτηριστικὸν 4, ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς θὰ ἔχῃ 5 ἀκέραια ψηφία, δηλ. θὰ εἶναι ὁ 68085.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι

Ἐὰν $\lambda o\gamma x = 0{,}82650$ θὰ εἶναι $x = 6{,}70657$.

Ἀσκήσεις: ***1937.*** Νὰ εὑρεθοῦν οἱ λογάριθμοι τῶν κάτωθι ἀριθμῶν:

1.	63	4.	20400	7.	25,2065
2.	308	5.	45,72	8.	3,16878
3.	2184	6.	0,078	0.	0,00016585.

1938. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοὶ οἱ ὁποῖοι ἀντιστοιχοῦν εἰς τοὺς κάτωθι λογαρίθμους:

1.	4,86605	3.	0,00670	5.	$\overline{4}$,58602
2.	$\overline{3}$,15106	4.	5,58615	6.	1,78611

1939. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ συλλογάριθμοι, τῶν λογαρίθμων, οἱ ὁποῖοι δίδονται εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ

494. **Πρόσθεσις.** Οἱ λογάριθμοι, τῶν ὁποίων τὸ χαρακτηριστικὸν εἶναι θετικόν, προστίθενται, ὅπως οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοί.

Π. χ. διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα 3,75604+0,82991 ἐργαζόμεθα, ὅπως εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν καὶ εὑρίσκομεν τὸ ἄθροισμα 4,58595.

$$\begin{array}{r} 3,75604 \\ 0,82991 \\ \hline 4,58595 \end{array}$$

Ἐὰν μερικοὶ ἐξ αὐτῶν ἔχουν ἀρνητικὰ χαρακτηριστικά, προσθέτομεν τὰ δεκαδικὰ μέρη των καὶ ἔπειτα προσθέτομεν τὰς μονάδας τοῦ ἐξαγομένου εἰς τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν χαρακτηριστικῶν.

Π. χ. διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα

$$1,45673+\overline{3},94489+0,78304$$

προσθέτομεν τὰ δεκαδικὰ μέρη των ὡς συνήθως, ὅταν δὲ φθάσωμεν εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν ἀκεραίων λέγομεν : 2 τὰ κρατούμενα καὶ 0 ἴσον 2 καὶ —3 ἴσον —1 καὶ +1 ἴσον 0. Οὕτω εὑρίσκομεν τὸ ἄθροισμα 0,18466

$$\begin{array}{r} 1,45\,673 \\ \overline{3},94\,489 \\ 0,78\,304 \\ \hline 0,18\,466 \end{array}$$

495. **Ἀφαίρεσις.** Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν $\overline{1}$,45 927—5,63 532.

Ἀφαιροῦμεν τὰ δεκαδικὰ μέρη των ὡς συνήθως· ὅταν ὅμως φθάσωμεν εἰς τοὺς ἀκεραίους λέγομεν : 1 τὸ κρατούμενον καὶ +5 ἴσον +6 καὶ διὰ τὴν ἀφαίρεσιν —6 καὶ —1 ἴσον —7. Οὕτω ἡ διαφορὰ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν εἶναι $\overline{7}$,82395.

$$\begin{array}{r} \overline{1},45\,927 \\ 5,63\,532 \\ \hline \overline{7},82\,395 \end{array}$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν:

$$\begin{array}{r} \overline{2},95\,842 \\ \overline{5},48\,465 \\ \hline 3,47\,377 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0,35\,794 \\ \overline{2},84\,585 \\ \hline 1,51\,209 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3,48\,765 \\ 5,75\,600 \\ \hline \overline{3},73\,165 \end{array}$$

496. **Πολλαπλασιασμός.** Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον $\overline{4}$,98215 × 3.

Ἐπειδὴ $\overline{4}$,98 215=—4+0,98215 τὸ δοθὲν γινόμενον γράφεται

$$(-4+0,98215)\times 3=-4\times 3+0,98215\times 3=-12+2,94645=\overline{10},94645.$$

Εἰς τὴν πρᾶξιν θέτομεν τὸν πολλαπλασιαστὴν κάτωθεν τοῦ πολλαπλασιαστέου καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον ὡς συνήθως· ὅταν ὅμως φθάσωμεν εἰς τοὺς ἀκεραίους λέγομεν : 2 τὰ κρατούμενα· 3×(—4) ἴσον —12 καὶ 2

$$\begin{array}{r} \overline{4},98\,215 \\ \times\ 3 \\ \hline \overline{10},94645 \end{array}$$

νὰ κρατούμενα ἴσον -10. Οὕτω τὸ γινόμενον $\overline{4},98215 \times 3$ εἶναι ἴσον μὲ $\overline{10},94645$.

497. Διαίρεσις ἑνὸς λογαρίθμου δι' ἀκεραίου ἀριθμοῦ. Ὅταν ζητοῦμεν τὸν λογάριθμον μιᾶς ρίζης ὁδηγούμεθα εἰς τὴν διαίρεσιν ἑνὸς λογαρίθμου δι' ἑνὸς ἀκεραίου ἀριθμοῦ.

Ἡ διαίρεσις αὐτὴ δὲν παρουσιάζει καμμίαν δυσκολίαν, ὅταν τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου εἶναι θετικόν.

Ὅταν τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου εἶναι ἀρνητικόν, ἐργαζόμεθα ὅπως εἰς τὸ κάτωθι παράδειγμα:

Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον $\overline{1},85760 : 5$.

Προσθέτομεν εἰς τό ἀρνητικὸν χαρακτηριστικὸν $\overline{1}$ τόσας ἀρνητικὰς μονάδας, ὅσαι χρειάζονται διὰ νὰ γίνῃ διαιρετὸν διὰ τοῦ διαιρέτου 5· ἐδῶ προσθέτομεν -4. Ἐπίσης προσθέτομεν τὸ αὐτὸ πλῆθος θετικῶν μονάδων, δηλ. 4, εἰς τὸ θετικὸν δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου· δηλαδὴ γράφομεν τὸν διαιρετέον ὡς ἑξῆς: $\overline{5}+4,85760$ καὶ διαιροῦμεν ἕκαστον τῶν μερῶν του χωριστὰ διὰ 5 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον $-1+0,97132$, τὸ ὁποῖον γράφοφεν ὡς ἑξῆς: $\overline{1},97132$.

Διάταξις τῆς πράξεως:

$$\overline{1},85760 : 5 = (\overline{1} + \overline{4} + 4 + 0,85760) : 5$$
$$= (\overline{5} + 4,85760) : 5 = \overline{1} + 0,97132 = \overline{1},97132.$$

Ἀσκήσεις. 1940. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κάτωθι ἀθροίσματα:

1. $3,75612 + \overline{5},65321 + 0,47001 + \overline{2},95600.$
2. $\overline{6},35148 + 0,04871 + \overline{1},95607 + 2,35604.$

1941. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ κάτωθι διαφοραί:

1. $0,60704 - \overline{2},79713$ 3. $\overline{1},25904 - \overline{6},47136$
2. $\overline{5},41707 - 3,85447$ 4. $\overline{4},38015 - 4,57673.$

1942. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐξαγόμενον τῶν κάτωθι πράξεων:

1. $0,78964 + \overline{5},47905 - \overline{3},75062.$
2. $0,35113 + \overline{2},82439 - \overline{5},60405 - 2,73801.$

1943. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι γινόμενα:

1. $\overline{5},78321 \times 4.$ 2. $\overline{3},85403 \times 5.$ 3. $\overline{1},04812 \times 6.$

1944. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι διαιρέσεις:

1. $\overline{1},60912 : 2.$ 2. $\overline{5},76343 : 3.$ 3. $\overline{1},65700 : 4.$

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΩΝ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ

498. Ἐφαρμογαὶ τῶν λογαρίθμων. Μὲ τὴν βοήθειαν τῶν ἰδιοτήτων τῶν λογαρίθμων καὶ τῶν λογαριθμικῶν πινάκων δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν, εἰς ἕνα ὑπολογισμόν, τὰ γινόμενα διὰ προσθέσεων, τὰ πηλίκα δι' ἀφαιρέσεων, τὴν ὕψωσιν μιᾶς δυνάμεως δι' ἑνὸς πολλαπλασιασμοῦ καὶ τὴν ἐξαγωγὴν μιᾶς ῥίζης διὰ μιᾶς διαιρέσεως.

499. Ἐφαρμογαί. **Παράδειγμα 1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ διὰ τῶν λογαρίθμων τὸ γινόμενον** $268 \times 0{,}7854 \times 0{,}00763$

Παριστάνομεν μὲ x τὸ δοθὲν γινόμενον καὶ ἔχομεν

$$x = 268 \times 0{,}7854 \times 0{,}00763 \qquad (1)$$

Λαμβάνομεν λογαρίθμους καὶ τῶν δύο μελῶν τῆς ἰσότητος (1) καὶ ἔχομεν

$$\lambda o\gamma x = \lambda o\gamma 268 + \lambda o\gamma 0{,}7854 + \lambda o\gamma 0{,}00763 \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν πινάκων εὑρίσκομεν, ὅτι

$$\lambda o\gamma 268 = 2{,}42813, \quad \lambda o\gamma 0{,}7853 = \overline{1}{,}89509, \quad \lambda o\gamma 0{,}00763 = \overline{3}{,}88252 \qquad (2)$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (2) τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν μὲ τὰ ἴσα των καὶ ἔχομεν

$$\lambda o\gamma x = 2{,}42813 + \overline{1}{,}89509 + \overline{3}{,}88252 = 0{,}20374$$

Ἐκ τῶν πινάκων εὑρίσκομεν $x = 1{,}59859$.

Ὥστε τὸ δοθὲν γινόμενον εἶναι ἴσον μὲ 1,59859.

Παράδειγμα 2ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ $\sqrt[3]{5764}$.

Παριστάνομεν μὲ x τὴν δοθεῖσαν κυβικὴν ρίζαν καὶ ἔχομεν

$$x = \sqrt[3]{5764} \qquad (1)$$

Λαμβάνομεν λογαρίθμους καὶ τῶν δύο μελῶν τῆς ἰσότητος (1) καὶ ἔχομεν

$$\lambda o\gamma x = \frac{1}{3} \lambda o\gamma 5764 \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ $\lambda o\gamma 5764 = 3{,}7\ ,072$ ἡ (2) γράφεται

$$\lambda o\gamma x = \frac{1}{3} \times 3{,}76072 = 1{,}25357$$

Ἐκ τῶν πινάκων εὑρίσκομεν $x = 17{,}9295$.

Ὥστε $\sqrt[3]{5764} = 17{,}9295$ κατὰ προσέγγισιν.

Παράδειγμα 3ον. Νὰ ὑπολογισθῇ διὰ τῶν λογαρίθμων τὸ πηλίκον

$$\frac{3{,}476 \times 56{,}97}{0{,}0852^3}$$

Παριστάνομεν μὲ x τὸ δοθὲν πηλίκον καὶ ἔχομεν

$$x = \frac{3{,}476 \times 56{,}97}{0{,}0852^3} \qquad (1)$$

Λαμβάνομεν λογαρίθμους καὶ τῶν δύο μελῶν τῆς (1) καὶ ἔχομεν

$$\lambda o\gamma x = (\lambda o\gamma 3{,}476 + \lambda o\gamma 56{,}97) = 3\lambda o\gamma 0{,}0852 \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν πινάκων εὑρίσκομεν

$$\lambda o\gamma 3{,}476 = 0{,}54108, \quad \lambda o\gamma 56{,}97 = 1{,}75565, \quad \lambda o\gamma 0{,}0852 = \overline{2}{,}93044$$

ὁπότε $\quad 3 \cdot \lambda o\gamma 0{,}0852, \quad 3 \times \overline{2}{,}93044 = \overline{4}{,}79132$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (2) τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν διὰ τῶν ἴσων των καὶ ἔχομεν

$$\lambda o\gamma x = (0{,}54108 + 1{,}75565) - \overline{4}{,}79132 =$$

$=2,29673-\overline{4},79132=5,50541$

Ἐκ τῶν πινάκων εὑρίσκομεν $x=320192,46$.

Διάταξις τῶν πράξεων	*Βοηθητικαὶ πράξεις*
λογ 3,476 $=0,54108$	λογ0,0852$=\overline{2},93044$
λογ56,97 $=1,75465$	$\times\ 3$
ἄθροισμα$=2,29673$	$\overline{4},79132$
3λογ0,0852$=\overline{4},79132$	
λογx$=5,50541$	
ἄρα $=320192,46$	

Παράδειγμα 4ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ παράστασις

$$x=\frac{3564\times 28^4\sqrt[5]{75,48}}{36^3\times\sqrt[4]{5364^3}}$$

Λαμβάνομεν λογαρίθμους καὶ τῶν δύο μελῶν τῆς δοθείσης ἰσότητος καὶ ἔχομεν

$$\text{λογ}x=\left(\text{λογ}3564+4\text{λογ}28+\frac{1}{5}\text{λογ}75,48\right)-\left(3\text{λογ}36+\frac{3}{4}\text{λογ}5364\right)\ (1)$$

ἢ $\text{λογ}x=\left(3,55194+4\cdot 1,44716+\frac{1}{5}\cdot 1,87783\right)-\left(3\cdot 1,55630+\frac{3}{4}\cdot 3,72949\right)$

$=(3,55194+5,78864+0,37557)-(4,66890+2,79712)$

$=9,71615-7,46602=2,25013$

Ἐκ τῶν πινάκων εὑρίσκομεν $x=177,88$.

Ὑπολογισμὸς τῆς δοθείσης παραστάσεως διὰ τῶν συλλογαρίθμων.

Ἡ ἰσότης (1) γράφεται

$$\text{λογ}x=\text{λογ}3564+4\text{λογ}28+\frac{1}{5}\text{λογ}75,48+3\text{συλλογ}36+\frac{3}{4}\text{συλλογ}5364$$

Βοηθητικαὶ πράξεις	*Τελικαὶ πράξεις*
λογ28 $=1,44716$	λογ3564 $=3,55194$
4λογ28 $=5,78864$	4λογ28 $=5,78864$
λογ75,48 $=1,87783$	$\frac{1}{5}$ λογ3548 $=0,37557$
$\frac{1}{5}$ λογ75,48 $=0,37557$	3συλλογ36 $=\overline{5},33110$
λογ36 $=1,55630$	$\frac{3}{4}$ συλλογ5364 $=\overline{3},20288$
συλλογ36 $=\overline{2},44370$	λογ x $=2,25013$
3συλλογ36 $=\overline{5},33110$	ἄρα x $=177,88$
λογ5364 $=3,72949$	
συλλογ5364 $=\overline{4},27051$	
$\frac{3}{4}$ συλλογ5364 $=\overline{3},20288$	

500. Παρατήρησις. Δὲν δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν, διὰ τῶν λογαρίθμων, μίαν παράστασιν εἰς τὴν ὁποίαν σημειώνεται πρόσθεσις ἢ ἀφαίρεσις. Πρέπει νὰ ὑπολογίσωμεν χωριστὰ κάθε ὅρον τῆς παραστάσεως καὶ νὰ προσθέσωμεν ἔπειτα τὰ ἐξαγόμενα.

Παράδειγμα. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν παράστασιν:

$$x = \sqrt[4]{386^5} + \frac{\sqrt[3]{4528}}{35^4}$$

Ὑπολογίζομεν διὰ τῶν λογαρίθμων χωριστά:

$$y = \sqrt[4]{386^5} \quad \text{καὶ} \quad \omega = \frac{\sqrt[3]{4528}}{35^4}$$

καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι $x = y + \omega$.

Ἀσκήσεις. 1945. Νὰ ὑπολογισθοῦν διὰ τῶν λογαρίθμων αἱ κάτωθι παραστάσεις: 1. $47,25 \times 369,2 \times 0,724$. 2. $479,8 \times 8,003058$.

1946. Νὰ ὑπολογισθοῦν διὰ τῶν λογαρίθμων αἱ κάτωθι παραστάσεις: 1. $73,5^6$. 2. $0,5603^4$. 3. $104,7^3$.

1947. Νὰ ὑπολογισθοῦν διὰ τῶν λογαρίθμων αἱ κάτωθι παραστάσεις: 1. $\sqrt[3]{367}$. 2. $\sqrt[5]{6,8885}$. 3. $\sqrt[4]{0,7594}$.

1948. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ παράστασις $x = \dfrac{347,41 \times 128,45}{675,98}$.

1949. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ παράστασις $x = \dfrac{0,84}{6,73 \times 0,42}$.

1950. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ παράστασις $x = \sqrt{\dfrac{0,5675}{4 \times 849}}$.

1951. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ παράστασις $x = \sqrt[3]{\dfrac{38,9}{0,04598}}$.

1952. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ παράστασις $x = \sqrt[4]{\dfrac{577,8 \times 69}{0,75 \times 3,107}}$.

1953. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ παράστασις $x = \sqrt{\dfrac{0,012^3 \times 2,7522^5}{\sqrt{0,0002}}}$.

1954. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ παράστασις $x = \dfrac{2423 \times 17^4 \times \sqrt[5]{23,257}}{35^3 \times \sqrt[4]{4253^3}}$.

1955. Νὰ ὑπολογισθῇ διὰ τῶν λογαρίθμων ἡ παράστασις

$$x = \frac{35 \times \sqrt[3]{48^2}}{\sqrt{0,0258}} + \frac{7,5^4 \cdot \sqrt[5]{0,0009945}}{\sqrt[4]{725,4}}.$$

Β' Ὁμάς. 1956. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ $3\alpha^2\beta$, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι

$$\log\alpha = 2,41250 \quad \text{καὶ} \quad \log\beta = \overline{2},25090.$$

1957. Ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι $\log 2 = 0,30103$ καὶ $\log 3 = 0,47712$, νὰ ὑπολογισθῇ, χωρὶς πίνακας, ὁ $\log 288$.

1958. Νὰ ὑπολογισθοῦν διὰ τῶν λογαρίθμων αἱ κάτωθι παραστάσεις:

1. $x = \pi\left(\sqrt[3]{\frac{3\upsilon}{4\pi}}\right)^2$ ἐὰν $\upsilon=9$. 2. $x=\sqrt[3]{28{,}95^2}+\sqrt{1764^3}$.

1959. Ἂν $\lambda o\gamma 2=0{,}30103$ καὶ $\lambda o\gamma 5=0{,}69897$, νὰ ὑπολογισθοῦν, χωρὶς πίνακας, οἱ:

1. $\lambda o\gamma 8$. 2. $\lambda o\gamma 125$. 3. $\lambda o\gamma 250$. 4. $\lambda o\gamma 128^3$.

1960. Νὰ ὑπολογισθῇ διὰ τῶν λογαρίθμων ἡ ἀκτὶς μιᾶς σφαίρας, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ὁ ὄγκος της εἶναι 65,728 κ. μ.

1961. Νὰ ὑπολογισθῇ διὰ τῶν λογαρίθμων ὁ ὄγκος μιᾶς κανονικῆς πυραμίδος, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ βάσις της εἶναι ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς 1,825 μέτρ. καὶ τὸ ὕψος της διπλάσιον τῆς πλευρᾶς τῆς βάσεως.

ΑΛΛΑΓΗ ΤΗΣ ΒΑΣΕΩΣ ΤΩΝ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ

501. Πρόβλημα. ***Ἐὰν γνωρίζωμεν τὸν λογάριθμον ἑνὸς ἀριθμοῦ εἰς ἕνα σύστημα μὲ βάσιν α, νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λογάριθμος τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἰς ἕνα νέον σύστημα μὲ βάσιν β.***

Ἔστω x ὁ ἄγνωστος λογάριθμος ἑνὸς ἀριθμοῦ A εἰς τὸ σύστημα μὲ βάσιν β· ἤτοι ἔστω, ὅτι $x=\lambda o\gamma_\beta A$. (1)

Ἐπειδὴ ὁ x εἶναι λογάριθμος τοῦ A εἰς τὸ σύστημα μὲ βάσιν β, θὰ ἔχωμεν κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν λογαρίθμων $\beta^x = A$.

Λαμβάνομεν τοὺς λογαρίθμους καὶ τῶν δύο μελῶν τῆς ἰσότητος αὐτῆς εἰς ἕνα σύστημα μὲ βάσιν α.

$$x\lambda o\gamma_\alpha \beta=\lambda o\gamma_\alpha A \quad \text{ἢ} \quad x=\frac{\lambda o\gamma_\alpha A}{\lambda o\gamma_\alpha \beta} \quad \text{ἢ} \quad x=\frac{1}{\lambda o\gamma_\alpha \beta}\cdot\lambda o\gamma_\alpha A.$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν τελευταίαν ἰσότητα τὸ x μὲ τὸ ἴσον του, ποὺ δίδει ἡ ἰσότης (1), καὶ ἔχομεν

$$\boxed{\lambda o\gamma_\beta A = \frac{1}{\lambda o\gamma_\alpha \beta}\cdot\lambda o\gamma_\alpha A} \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἰσότητα συνάγομεν, ὅτι:

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν λογάριθμον ἑνὸς ἀριθμοῦ ὡς πρὸς νέαν βάσιν, πολλαπλασιάζομεν τὸν λογάριθμον τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ὡς πρὸς τὴν παλαιὰν βάσιν ἐπὶ ἕνα κλάσμα (module), ***τὸ ὁποῖον ἔχει ἀριθμητὴν τὴν μονάδα καὶ παρονομαστὴν τὸν λογάριθμον τῆς νέας βάσεως, ὡς πρὸς τὴν παλαιὰν βάσιν.***

502. Παρατήρησις. Ἐὰν εἰς τὴν ἰσότητα (2) θέσωμεν ἀντὶ τοῦ A τὸ α θὰ ἔχωμεν $\lambda o\gamma_\beta \alpha = \frac{1}{\lambda o\gamma_\alpha \beta}\cdot\lambda o\gamma_\alpha \alpha$. **(3)**

Ἐπειδὴ $\lambda o\gamma_\alpha \alpha = 1$, διότι εἰς κάθε λογαριθμικὸν σύστημα ὁ λογάριθμος τῆς βάσεως εἶναι ἴσος μὲ 1, ἡ ἰσότης (3) γράφεται

$$\boxed{\lambda o\gamma_\beta\, \alpha = \frac{1}{\lambda o\gamma_\alpha\, \beta}}$$

Ἡ σχέσις αὐτὴ δεικνύει, ὅτι τὸ κλάσμα τοῦ μετασχηματισμοῦ εἶναι ***ἐπίσης*** ὁ λογάριθμος τῆς παλαιᾶς βάσεως ὡς πρὸς βάσιν τὴν νέαν. Οὕτω διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τοὺς Νεπερείους λογαρίθμους, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δεκαδικοὺς λογαρίθμους ἐπὶ $\frac{}{\lambda o\gamma_{10} e}$.

ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

503. Λογαριθμικαὶ ἐξισώσεις. ***Μία ἐξίσωσις, ἡ ὁποία περιέχει τὸν λογάριθμον ἑνὸς ἀγνώστου ἢ ἀγνώστων, λέγεται λογαριθμικὴ ἐξίσωσις.***

Π. χ. Αἱ ἐξισώσεις

$$\lambda o\gamma x + \lambda o\gamma 3 = \lambda o\gamma 12, \qquad \lambda o\gamma(3x-4) = 1 - \lambda o\gamma 5$$

εἶναι λογαριθμικαὶ ἐξισώσεις.

Διὰ νὰ λύσωμεν μίαν λογαριθμικὴν ἐξίσωσιν, μὲ ἕνα ἄγνωστον προσπαθοῦμεν νὰ δώσωμεν εἰς αὐτὴν μίαν ἀπὸ τὰς μορφάς·

$$\lambda o\gamma x = \lambda o\gamma\alpha, \qquad \lambda o\gamma\sigma(x) = \lambda o\gamma\alpha, \qquad \lambda o\gamma\sigma(x) = \lambda o\gamma\varphi(x)$$

ὅπου $\sigma(x)$ καὶ $\varphi(x)$ εἶναι πολυώνυμα τοῦ x.

Διὰ νὰ κατορθώσωμεν αὐτό, πρέπει νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψει τὰς κάτωθι γνωστὰς ἰδιότητας τῶν λογαρίθμων:

I. $\lambda o\gamma(\alpha\beta\gamma) = \lambda o\gamma\alpha + \lambda o\gamma\beta + \lambda o\gamma\gamma$	**II.** $\lambda o\gamma\alpha^\nu = \nu\lambda o\gamma\alpha$
III. $\lambda o\gamma\sqrt[\nu]{\alpha} = \frac{1}{\nu}\lambda o\gamma\alpha$	**IV.** $\lambda o\gamma\frac{\alpha}{\beta} = \lambda o\gamma\alpha - \lambda o\gamma\beta$.

504. **Παράδειγμα 1ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις**

$$2\lambda o\gamma x - \lambda o\gamma 3 = \lambda o\gamma 6 + \lambda o\gamma 2.$$

Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται $\lambda o\gamma\left(\frac{x^2}{3}\right) = \lambda o\gamma(6\cdot 2)$.

Ἐπειδὴ οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν $\frac{x^2}{3}$ καὶ $6\cdot 2$ εἶναι ἴσοι, ἕπεται, ὅτι καὶ οἱ λογάριθμοι αὐτοὶ εἶναι ἴσοι· δηλαδὴ εἶναι

$$\frac{x^2}{3} = 6\cdot 2 \quad \text{ἢ} \quad x^2 = 36, \quad \text{ἄρα} \quad x = \pm 6.$$

Ἡ τιμὴ $x = -6$ ἀποκλείεται, διότι οἱ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ δὲν ἔχουν λογάριθμον. Ὥστε ἡ ρίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι $x = 6$.

505. **Παράδειγμα 2ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις**

$$\lambda o\gamma\sqrt{2x+3} + \frac{1}{2}\lambda o\gamma(5x+1) = \lambda o\gamma 12.$$

Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται

$$\lambda o\gamma\left(\sqrt{2x+3}\cdot\sqrt{5x+1}\right) = \lambda o\gamma 12 \quad \text{ἢ} \quad \sqrt{2x+3}\cdot\sqrt{5x+1} = 12. \qquad (1)$$

Ὑψώνομεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (1) εἰς τὸ τετράγωνον καὶ ἔχομεν

$$(2x+3)(5x+1)=144 \quad ἢ \quad 10x^2+17x-141=0. \qquad (2)$$

Αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως (2) εἶναι $x'=3$ καὶ $x''=-\frac{47}{10}$.

Ἐκ τούτων μόνον ἡ ρίζα $x=3$ εἶναι παραδεκτή, ἡ ὁποία εἶναι καὶ ρίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

506. **Παράδειγμα 3ον. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα**

$$\begin{cases} x^2+y^2=425 & (1) \\ λογx+λογy=2. & (2) \end{cases}$$

Ἡ ἐξίσωσις (2) γράφεται

$λογx+λογy=λογ100$ ἢ $λογ(xy)=λογ100$ ἢ $xy=100$. (2′)

Ἀντικαθιστῶμεν τὴν ἐξίσωσιν (2) διὰ τῆς (2′) καὶ ἔχομεν νὰ λύσωμεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα

$$\mathrm{I}\begin{cases} x^2+y^2=425 & (1) \\ xy=100. & (2') \end{cases}$$

Λύομεν, κατὰ τὰ γνωστὰ (§ 442) τὸ σύστημα I καὶ εὑρίσκομεν τὴν λύσιν $x=20$ καὶ $y=5$.

Ἀσκήσεις. Α′ Ὁμάς. *1962*. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $λογ3x+λογ4=λογ24$

1963. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $λογx=λογ24-λογ3$.

1964. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $λογ(3x+2)+λογ(2x-3)=λογ119$.

1965. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $λογ(x+1)+λογ(x-2)=λογ18$.

1966. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $λογ(27-x^2)-λογ(5-x)=λογ9$.

1967. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $λογ(x-4)+λογ3=λογ(2x+11)-λογ7$.

1968. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $λογ(10-x)+λογ(x+2)=λογ5+λογ7$.

Β′ Ὁμάς. *1969*. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $2λογx=λογ192+λογ\frac{3}{4}$.

1970. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $2λογx+3λογ5=λογ5x+λογ125$.

1971. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $5λογx=λογ288+3λογ\frac{x}{2}$.

1972. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $λογ(2x-5)+λογ(3x+7)=4λογ2$.

1973. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $2λογx-λογ4=λογ(x+1)-λογ3$.

1974. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $λογ(35-x^3)=3λογ(5-x)$.

1975 Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $4λογ\frac{x}{2}+3λογ\frac{x}{3}=5λογx-λογ27$

1976. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $3λογx-λογ324=5λογ\frac{3x}{2}$.

1977. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $λογ\frac{2x}{3}=2λογ(x-1)-λογ\left(\frac{5x}{4}+2\right)$.

1978. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $2λογx+λογ4+2λογα=λογ9+2λογβ$.

Γ′ Ὁμάς. *1979*. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\frac{1}{2}λογ(x+1)+λογ\sqrt{5x}=1$.

1980. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $λογ\sqrt{x+1}+\frac{1}{2}λογ(x-1)=λογ5$.

1981. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\frac{1}{2}λογ(x+2)+λογ\sqrt{x-3}=1+λογ\sqrt{3}$.

1982. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\lambda o\gamma\sqrt{7x+5} + \lambda o\gamma\sqrt{2x+3} = 1 + \lambda o\gamma 4,5.$

1983. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\lambda o\gamma(7x-9)^2 + \lambda o\gamma(3x-4)^2 = 2.$

(Πολυτεχνεῖον)

1984. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\dfrac{\lambda o\gamma x+3}{\lambda o\gamma x} + \dfrac{\lambda o\gamma x-2}{\lambda o\gamma x-3} = \dfrac{9}{2}.$

1985. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\dfrac{\lambda o\gamma x}{\lambda o\gamma x+2} + \dfrac{\lambda o\gamma x+3}{\lambda o\gamma x-1} = \dfrac{11}{2}.$

Δ' Ὁμάς. *1986.* Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\lambda o\gamma[\lambda o\gamma(3x-5)] = 0.$

1987. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\lambda o\gamma[\lambda o\gamma(2x^2+x-11)] = 0.$

1988. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $\lambda o\gamma\left(\lambda o\gamma \dfrac{5x+3}{-2x+4}\right) > 0.$ (Πολυτεχνεῖον)

1989. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $\lambda o\gamma\left(\lambda o\gamma \dfrac{x+5}{x-8}\right) < 0.$

1990. Νά λυθῇ ἡ ἀνισότης $\lambda o\gamma\left(\lambda o\gamma \dfrac{2x-7}{x+1}\right) > 0.$

Ε' Ὁμάς. *1991.* Νὰ εὑρεθῇ ἕνας ἀκέραιος ἀριθμὸς x τοιοῦτος, ὥστε τὸ διπλάσιον τοῦ λογαρίθμου του νὰ ὑπερβαίνῃ κατὰ μονάδα τὸν λογάριθμον τοῦ ἀριθμοῦ $x+11$.

1992. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ μ ἡ ἐξίσωσις $x^2 + x\sqrt{2} + \lambda o\gamma\mu = 0$ ἔχει δύο ρίζας ἴσας ;

1993. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ μ ἡ ἐξίσωσις $x^2 - 6x - 3\lambda o\gamma\mu = 0$ ἔχει δύο ρίζας ἴσας ;

1994. Τὸ αὐτὸ διὰ τὴν ἐξίσωσιν $x^2 + (2\lambda o\gamma\mu)x + 4 = 0.$

1995. Τὸ αὐτὸ διὰ τὴν ἐξίσωσιν $x^2 + x\lambda o\gamma\mu + 1 = 0.$

1996. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ μ ἡ ἐξίσωσις $x^2 - 2(1+\lambda o\gamma\mu)x + 1 - (\lambda o\gamma\mu)^2 = 0$ ἔχει ρίζας πραγματικάς,

1997. Τὸ αὐτὸ διὰ τὴν ἐξίσωσιν $(4\lambda o\gamma\mu)x^2 - (8 - 2\lambda o\gamma\mu)x + 1 = 0.$

1998. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ α ἡ ἐξίσωσις $(\lambda o\gamma\alpha - 2)x^2 - (\lambda o\gamma\alpha + 3)x + 9 = 0$ ἔχει ρίζας : 1ον. πραγματικὰς καὶ ἴσας. 2ον. πραγματικὰς καὶ ἀνίσους.

1999. Ποία εἶναι ἡ βάσις τοῦ λογαριθμικοῦ συστήματος εἰς τὴν ὁποίαν ὁ ἀριθμὸς α ἔχει λογάριθμον τὸν ἀριθμὸν β.

2000. Ποία εἶναι ἡ βάσις τοῦ λογαριθμικοῦ συστήματος εἰς τὴν ὁποίαν ὁ ἀριθμὸς 47 ἔχει λογάριθμον 0,75 ;

2001. Νὰ εὑρεθῇ ἡ βάσις x τοῦ συστήματος διὰ τὸ ὁποῖον εἶναι

$$\lambda o\gamma_x 100 = [\lambda o\gamma_x 10)^2 + 2.$$

2002. Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ α καὶ β εἰς τρόπον, ὥστε αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\dfrac{\lambda o\gamma(\alpha - x^3)}{\lambda o\gamma(\beta - x)} = 3$ νὰ ἔχουν ἄθροισμα 3 καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ριζῶν αὐτῶν νὰ εἶναι 5.

2003. Ἐὰν εἶναι $\alpha^2 + \beta^2 = 7\alpha\beta$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

$$\lambda o\gamma \frac{\alpha+\beta}{3} = \frac{1}{2}(\lambda o\gamma\alpha + \lambda o\gamma\beta).$$

ΣΤ' Ὁμάς. *2004.* Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} x+y=65 \\ \lambda o\gamma x + \lambda o\gamma y = 3. \end{cases}$

2005. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} 5x^2 - 3y^2 = 11300 \\ \lambda o\gamma x + \lambda o\gamma y = 3. \end{cases}$

2006. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} x^4 + y^4 = 641 \\ 3\lambda o\gamma x + 2\lambda o\gamma y = 2. \end{cases}$

2007. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} 2\lambda o\gamma x + 2\lambda o\gamma y = \lambda o\gamma 250 \\ 2\lambda o\gamma x - 2\lambda o\gamma y = \lambda o\gamma 4. \end{cases}$

2008. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} \lambda o\gamma(xy) = 1{,}5 \\ \lambda o\gamma \dfrac{x}{y} = 0{,}5. \end{cases}$

2009. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} \lambda o\gamma x - \lambda o\gamma 5 = \lambda o\gamma 10 \\ \lambda o\gamma x^3 + \lambda o\gamma y^2 = \lambda o\gamma 32. \end{cases}$

2010. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} \lambda o\gamma\sqrt{x} - \lambda o\gamma\sqrt{5} = 0{,}5 \\ 3\lambda o\gamma x + 2\lambda o\gamma y = 1{,}50515. \end{cases}$

2011. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} 2\lambda o\gamma y - \lambda o\gamma x = 0{,}12494 \\ \lambda o\gamma 3 + 2\lambda o\gamma x + \lambda o\gamma y = 1{,}73239. \end{cases}$

ΕΚΘΕΤΙΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

507. Ἐκθετικαὶ ἐξισώσεις. ***Κάθε ἐξίσωσις, ἡ ὁποία ἔχει τὸν ἄγνωστον ὡς ἐκθέτην, λέγεται ἐκθετικὴ ἐξίσωσις.***

Π. χ. αἱ ἐξισώσεις $3^x = 81$ $\quad 2^{3x-4} = 128$
εἶναι ἐκθετικαὶ ἐξισώσεις.

Λύσις ἐκθετικῆς ἐξισώσεως λέγεται ἡ εὕρεσις τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων, αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν.

Τὰς ἐκθετικὰς ἐξισώσεις δυνάμεθα νὰ κατατάξωμεν εἰς τὰς κάτωθι μορφάς:

508. Α΄. Ἐκθετικαὶ ἐξισώσεις τῆς μορφῆς $\alpha^x = \beta$ (α καὶ β θετικοί). Διὰ νὰ λύσωμεν μίαν ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς $\alpha^x = \beta$ διακρίνομεν δύο περιπτώσεις:

I ***Περίπτωσις. Ὁ β εἶναι δύναμις τοῦ α.*** Ἔστω, ὅτι $\beta = \alpha^\nu$ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ἐξίσωσις $\alpha^x = \beta$ γράφεται

$$\alpha^x = \alpha^\nu$$

Ἐδῶ ἔχομεν δύο ἴσας δυνάμεις μὲ τὴν αὐτὴν βάσιν· ἄρα οἱ ἐκθέται των θὰ εἶναι ἴσοι, δηλ. θὰ εἶναι **$x = \nu$.**

Παράδειγμα. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $3^x = 243$. Ἐπειδὴ $243 = 3^5$, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται

$$3^x = 3^5, \quad \text{ἄρα} \quad x = 5.$$

II. ***Περίπτωσις. Ὁ β δὲν εἶναι βάσις τοῦ α.*** Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λαμβάνομεν λογαρίθμους καὶ τῶν δύο μελῶν τῆς ἐξισώσεως $\alpha^x = \beta$ καὶ ἔχομεν

$$x\lambda o\gamma\alpha = \lambda o\gamma\beta, \quad \text{ἄρα} \quad x = \frac{\lambda o\gamma\beta}{\lambda o\gamma\alpha}.$$

Παράδειγμα. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $38{,}75^x = 0{,}2987$.

Λαμβάνομεν λογαρίθμους καὶ τῶν δύο μελῶν τῆς δοθείσης ἐξισώσεως καὶ ἔχομεν

$$x\lambda o\gamma 38{,}75 = \lambda o\gamma 0{,}2987 \quad x = \frac{\lambda o\gamma 0{,}2987}{\lambda o\gamma 38{,}75} \quad \text{ἢ} \quad x = \frac{\overline{1}{,}47524}{1{,}58827}.$$

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον δύο λογαρίθμων, εἰς τὴν περίπτωσιν ποὺ ὁ ἕνας ἐξ αὐτῶν εἶναι ἀρνητικός, ἀρκεῖ νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὸν ἀρνητικὸν λογάριθμον διὰ τοῦ συλλογαρίθμου του. (Ὁ κανὼν αὐτὸς γενικεύεται, εἰς τὴν περίπτωσιν ποὺ καὶ οἱ δύο ὅροι τοῦ πηλίκου ἔχουν τὸ χαρακτηριστικὸν ἀρνητικόν). Θὰ εἶναι λοιπὸν

$$x = -\frac{0{,}52476}{1{,}58827} = -0{,}3303.$$

Ἀσκήσεις. 2012. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

1. $2^{2x} = 32$. 2. $(-2)^x = 16$. 3. $3^{\sqrt{x}} = 243$. 4. $3^x = 177147$.

Ἀσκήσεις. 2013. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

1. $2^x = 10$. 2. $0{,}491^x = 213$. 3. $3^{\sqrt{x}} = 768$.

509. Β΄. Ἐκθετικαὶ ἐξισώσεις τῆς μορφῆς $\alpha^{\sigma(x)} = \beta$.

Αἱ ἐκθετικαὶ ἐξισώσεις τῆς μορφῆς $\alpha^{\sigma(x)} = \beta$ λύονται ὅπως καὶ αἱ ἐξισώσεις τῆς μορφῆς $\alpha^x = \beta$.

Παράδειγμα 1ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $7^{x^2-5x+9} = 343$.

Ἐπειδὴ $343 = 7^3$, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται

$$7^{x^2-5x+9} = 7^3$$

ἄρα $\quad x^2-5x+9=3 \quad$ ἢ $\quad x^2-5x+6=0 \qquad (1)$

Αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως (1) εἶναι $x'=2$ καὶ $x''=3$, αἱ ὁποῖαι εἶναι καὶ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

Παράδειγμα 2ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $(5^{3-x})^{2-x} = 1$.

Λαμβάνομεν τοὺς λογαρίθμους καὶ τῶν δύο μελῶν τῆς δοθείσης ἐξισώσεως καὶ ἔχομεν $(2-x)\lambda o\gamma(5^{3-x}) = 0$.

Ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ ἀληθεύει διὰ

$2-x=0 \quad (1) \qquad$ καὶ διὰ $\qquad \lambda o\gamma(5^{3-x})=0 \qquad (2)$

Ἡ ἐξίσωσις (1) ἀληθεύει διὰ $x=2$.

Ἡ ἐξίσωσις (2) γράφεται $(3-x)\lambda o\gamma 5 = 0$

καὶ ἐπειδὴ $\lambda o\gamma 5 \neq 0$, ἀληθεύει διὰ $3-x=0$ ἢ $x=3$.

Ὥστε ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει τὰς ρίζας $x'=2$ καὶ $x''=3$.

Ἀσκήσεις. 2014. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $5^{x^2-3x} = 625$.

2015. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $12^{x-3} = 1728$.

2016. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $3^{x^2-5x+10} = 81$.

2017. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $3^{x^2-9x-24} = 4096$.

2018. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $3^{x^2+x+3}=19683$.

2019. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $7^{x^2-5x+9}=343$.

2020. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $3^{2x-8}=405$.

2021. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $24^{3x-2}=10000$.

2022. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $5^{4x^2-3x-1}=437$.

2023. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $(10^{5-x})^{6-x}=10^2$.

2024. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $(4^{3-x})^{2-x}=1$.

2025. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^{x^3-7x+13}=1$.

2026. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^{x^4-10x^2+9}=1$.

2027. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $100\cdot 10^x=\sqrt[x]{1000^5}$.

2028. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt[x-2]{27^{x+1}}=3^{2x-4}$.

2029. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt[x+1]{\alpha^4}=\alpha^3\sqrt[x+1]{\alpha^{-8}}$.

2030. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt[x+1]{125^{x-1}}=5^{2x-1}$.

2031. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\alpha^{2x}\cdot\alpha^{x-4}=\alpha^{20}\sqrt[x-5]{\alpha^{3x}}$.

2032. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $5^3\sqrt[x]{5^{2+3x}}=\sqrt[x]{5^8}$.

510. Γ΄. Ἐκθετικαὶ ἐξισώσεις τῆς μορφῆς $\alpha\nu^{2x}+\beta\nu^x+\gamma=0$

Διὰ νὰ λύσωμεν μίαν ἐκθετικὴν ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς

$$\alpha\nu^{2x}+\beta\nu^x+\gamma=0 \qquad (1)$$

χρησιμοποιοῦμεν βοηθητικὸν ἄγνωστον.

Πρὸς τοῦτο θέτομεν $\nu^x=y$ (2) καὶ ἡ (1) γίνεται

$$\alpha y^2+\beta y+\gamma=0 \qquad (3)$$

Ἐὰν ἡ ἐπιλύουσα ἐξίσωσις (3) ἔχῃ δύο ρίζας y' καὶ y'', ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (2) τὸ y μὲ τὰς τιμάς του y' καὶ y'' καὶ οὕτω ἀγόμεθα εἰς τὴν λύσιν τῶν ἐξισώσεων

$$\nu^x=y' \quad \text{καὶ} \quad \nu^x=y''$$

αἱ ὁποῖαι εἶναι τῆς μορφῆς $\alpha^x=\beta$.

Παράδειγμα. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $5\cdot 3^{2x}-2\cdot 3^x=387$.

Θέτομεν $3^x=y$ (1) καὶ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται

$$5y^2-2y-387=0.$$

Αἱ ρίζαι αὐτῆς εἶναι $y'=9$ καὶ $y''=-\frac{43}{5}$.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (1) τὸ y μὲ τὰς τιμάς του καὶ ἔχομεν

$$3^x = 9 \quad (2) \qquad \text{καὶ} \qquad 3^x = -\frac{43}{5} \qquad (3)$$

Ἡ ἐξίσωσις (2) γράφεται $3^x = 3^2$ καὶ ἀληθεύει διὰ $x=2$.
Ἡ ἐξίσωσις (3) δὲν ἔχει λύσιν.
Ὥστε ἡ ρίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι $x=2$.

Ἀσκήσεις. ***2033.*** Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $5 \cdot 3^{2x} - 7 \cdot 3^x - 3456 = 0$.

2034. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $5^{2x} - 7 \cdot 5^x = 450$.

2035. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $8 \cdot 4^x - 33 \cdot 2^x + 4 = 0$.

2036. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $4^x - 5 \cdot 2^x + 6 = 0$.

2037. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $2^x + 4^x = 272$.

2038. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $2^x - 5 \cdot \sqrt{2^x} + 4 = 0$.

511. Ἐκθετικαὶ ἐξισώσεις τῆς μορφῆς $\alpha\nu^{x\pm\mu} + \beta\nu^{x\pm\varrho} + \ldots = 0$.

Παράδειγμα. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$5^{x+1} - 5^{x-2} + 5^{x+3} - 5^{x-4} = 81224.$$

Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται

$$5^x \cdot 5 - \frac{5^x}{5^2} + 5^x \cdot 5^3 - \frac{5^x}{5^4} = 81224 \qquad (1)$$

Θέτομεν $5^x = y$ (2) καὶ ἡ (1) γράφεται

$$5y - \frac{y}{25} + 125y - \frac{y}{625} = 81224.$$

Ἐξαλείφομεν παρονομαστὰς κλπ. καὶ εὑρίσκομεν $y=625$.
Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (2) τὸ y μὲ τὸ ἴσον του 625 καὶ ἔχομεν

$$5^x = 625 \quad \text{ἢ} \quad 5^x = 5^4, \quad \text{ἄρα} \quad x = 4.$$

Ὥστε ἡ ρίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι $x = 4$.

Ἀσκήσεις. ***2038΄.*** Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 54$.

2039. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $3^{x+1} + 3^{x-3} - 3^{x-3} + 3^{x-4} = 750$.

2040. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $3^{x-1} + 3^{x+2} - 3^{x-2} + 5 \cdot 3^x = 128$.

2041. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $3^x + 3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} + 3^{x-4} = 363$.

2042. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $3^{x+1} + 9^{x-2} = 28$.

2043. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $3^{x+2} + 9^{x+1} = 810$.

2044. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $2^{x+1} + 4^x = 80$.

2045. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $2^{x+3} + 4^x = 128$.

2046. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $5^{x-2} + 25^x = 626$.

2047. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $7 \cdot 3^{x+1} + 2 \cdot 9^{x-1} = 207$.

2048. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $3^{x+1} + \dfrac{18}{3^x} = 29$.

2049. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $4^{x+1} + \dfrac{64}{4^x} = 257$.

2050. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $3 \cdot 2^{x+2} + \dfrac{320}{2^x} = 1546$.

2051. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $2 \cdot 7^{x+1} - \dfrac{245}{7^x} - 681 = 0$.

2052. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $3^{x+1}+3^{x-2}-\frac{15}{3^{x-1}}=\frac{247}{3^{x-2}}$.

2053. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $2^{x+2}+7.2^{x+2}-\frac{24}{2^{x-1}}=\frac{468}{2^{x-2}}$.

2054. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $3^{x+2}+5.3^{x-2}-\frac{93}{3^{x-1}}+\frac{8}{3^{x-2}}=53$.

2055. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $5^{x-1}=2+\frac{3}{5^{x-2}}$.

512. Ἐκθετικαὶ ἐξισώσεις μὴ ἀναγόμεναι εἰς τὰς προηγουμένας μορφάς.

Παράδειγμα. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$2.5^{x-2}+2^x=12.5^{x-3}+3.2^{x-3}.$$

Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται

$$2.\frac{5^x}{5^2}+2^x=12.\frac{5^x}{5^3}+3.\frac{2^x}{2^3} \quad \text{ἢ} \quad 2^x\left(1-\frac{3}{2^3}\right)=5^x\left(\frac{12}{5^3}-\frac{2}{5^2}\right)$$

$$\text{ἢ} \quad 2^x.\frac{5}{8}=5^x.\frac{2}{125} \quad \text{ἢ} \quad \frac{2^x}{5^x}=\frac{16}{625} \quad \text{ἢ} \quad \left(\frac{2}{5}\right)^x=\left(\frac{2}{5}\right)^4, \quad \text{ἄρα} \quad x=4.$$

Ἀσκήσεις. 2056. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $3^{x+2}.2^{2x-1}=7776$.

2057. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $3.2^{x+3}=192.3^{x-2}$.

2058. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $5^{2x-3}=7^{x-1}.4^{x+3}$.

2059. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $3^{x+1}-2^x=3^{x-1}+2^{x+3}$.

2060. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $2^{x-1}-3^{x-4}=2^{x-3}+3^{x-5}$.

2061. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $2^{x-1}-3^{x-3}-2^{x-3}-3^{x-4}=0$.

2062. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $3^{2x}.5^{2x-3}=7^{x-1}.4^{x+3}$.

2063. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $18^{8+4x}=(54\sqrt{2})^{3x-2}$.

2064. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\left(\frac{3}{4}\right)^{3x-7}=\left(\frac{4}{3}\right)^{7x-3}$.

2065. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $(\alpha^4-2\alpha^2\beta^2+\beta^4)^{x-1}=\frac{(\alpha-\beta)^{2x}}{(\alpha+\beta)^2}$.

2066. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $3^{x-2}=2.2^{x-3}$.

(Πανεπιστήμιον—Τμ. Φυσιογνωστικὸν)

2067. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $2^{3x}(1-2^{3x})+3(2^{5x}-4^{2x})=0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΙΝ ΕΠΙ ΤΩΝ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Α' Ὁμάς. 2068. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $2^x+16\ 2^{-x}-10=0$.

2069. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^x-x^{-x}=3(1+x^{-x})$.

2070. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $5^{\lambda o\gamma x}-\frac{175}{5^{\lambda o\gamma x}}=18$.

2071. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^{\lambda o\gamma x}+10^5.x^{-\lambda o\gamma x}=10010$.

2072. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\lambda o\gamma(3^x-5)-x\lambda o\gamma 3=-0{,}35218$.

2073. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\lambda o\gamma(2^x+2\,.\,3^x)+\lambda o\gamma 81 = x\lambda o\gamma 3+\lambda o\gamma 178$

2074. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt{x^{\lambda o\gamma\sqrt{x}}} = 10.$ (Πολυτεχνεῖον)

2075. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $5^{\lambda o\gamma 2x}+3\,.\,5^{4-\lambda o\gamma 2x}=100.$

2076. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $2^{\lambda o\gamma x}+3\,.\,4^{\lambda o\gamma x}=52.$

2077. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $(100x)^{\lambda o\gamma(100x)-2}=1000.$

2078. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $10\,.\,x^{\lambda o\gamma x}= x^2\sqrt{x}\,.$

2079. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\lambda o\gamma 1838-\lambda o\gamma(31^x-42)=\lambda o\gamma 2.$

2080. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $1525-\lambda o\gamma(4^x+9)=\lambda o\gamma 61.$

2081. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\dfrac{x^{\lambda o\gamma x}}{x^2\sqrt{x}}=\dfrac{1}{10}.$ (Πολυτεχνεῖον)

2082. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $2^{2x}=4\,.\,3^{x-1}.$

2083. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $12^{x+1}=27\,.\,4^{x+1}.$

2084. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\alpha\,.\,\alpha^3.\,\alpha^5.\,\alpha^7.\,\ldots\,\alpha^{2x-1}=\nu.$

2085. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $2\,.\,2^2.\,2^3.\,2^4.\,\ldots\,2^{2x-1}=65536.$

2086. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $2^{3x}(1-2^{3x})+3(2^{5x}-4^{2x})=0.$

Β' Ὁμάς. *2087.* Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\lambda o\gamma x+\lambda o\gamma y=1,\quad \dfrac{100^x}{10^y}=\dfrac{1}{10}$

2088. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$4+\sqrt[x]{9y^2}=5\sqrt[x]{3y}\,,\qquad 2\lambda o\gamma y+x\lambda o\gamma 2=\lambda o\gamma 1024-\lambda o\gamma 9.$$

2089. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\sqrt[\lambda o\gamma y]{5^{4x}}=25,\quad \sqrt[x+2]{y^{\lambda o\gamma y}}=10000.$

2090. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases}\left(\dfrac{x}{5}\right)^{\lambda o\gamma 5}=\left(\dfrac{y}{7}\right)^{\lambda o\gamma 7}.\\ 7^{\lambda o\gamma x}=5^{\lambda o\gamma y}.\end{cases}$

2091. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases}\sqrt[x]{x+y}=2\\ (x+y)3^x=279936.\end{cases}$

2092. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases}x^{\lambda o\gamma y}+y^{\lambda o\gamma x}=20.\\ \lambda o\gamma\sqrt{xy}=1.\end{cases}$

2093. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases}x^{12}=y^{2(1+\lambda o\gamma y)}\\ xy=1000.\end{cases}$

2094. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\sqrt[\lambda o\gamma y]{5^{4x}}=25,\quad \sqrt[x+2]{y^{\lambda o\gamma x}}=10000.$

2095. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases}3^x+4^y=13.\\ 3^{2x}-4^{2y}=8.\end{cases}$

2096. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases}3^x-5^y=4.\\ 27^x-125^y=604.\end{cases}$

2097. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases}2^{x+2}+5^y=57\\ 4^{x-3}+5^{y-1}=6.\end{cases}$

2098. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} 5^{3x-2y} = 3125 \\ 11^{6x-7y} = 14641. \end{cases}$

2099. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} 2^{2x+y} = 1024 \\ 5^{3x-4y} = 625. \end{cases}$

2100. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} 4^{x-1} \,.\, 2^{y-2} = 8 \\ 3^{x-2} \,.\, 3^{y-4} = 3^{-1}. \end{cases}$

2101. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\alpha^{2x} . \alpha^{3y} = \alpha^8, \quad \dfrac{\alpha^{2x}}{\alpha^{3y}} = \dfrac{1}{\alpha^6}.$

2102. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $5^{3x} . 5^{4y} = (5^6)^3, \quad \dfrac{5^{2x}}{5^{7y}} = 5^{-17}.$

2103 Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} 2^{\lambda o\gamma x} - 3^{\lambda o\gamma y} = 1. \\ 4^{\lambda o\gamma x} + 9^{\lambda o\gamma y} = 25. \end{cases}$

2104. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} 3^{\lambda o\gamma x} + 2^{\lambda o\gamma y} = 11 \\ 9^{\lambda o\gamma x} - 4^{\lambda o\gamma y} = 77. \end{cases}$

2105. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\sqrt[x]{y} = 3, \quad y^x = 19683.$

2106. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $xy = 500, \quad x^{\lambda o\gamma y} = 25.$

2107. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\alpha^{x^y - y^x} = 1, \quad x = y^2.$

2108. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα

1. $\begin{cases} 3^x . 4^y = 3981312 \\ 2^y . 5^x = 400000. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 4^x . 12^y = 9216 \\ \sqrt[x]{8} . \sqrt[y]{9^x} = 51. \end{cases}$

2109. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} 5^x - 2^y = 1. \\ x\lambda o\gamma 5 + y\lambda o\gamma 2 = \lambda o\gamma 20. \end{cases}$

2110. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα

1. $\begin{cases} x^y = y^x \\ x^3 = y^2. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x^y = y^x \\ x^\alpha = y^\beta. \end{cases}$

2111. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$\sqrt[y]{x} + 2 . x^{\frac{2}{y}} = 10, \quad 2\lambda o\gamma x + y\lambda o\gamma 5 = 2\lambda o\gamma 20.$$

2112. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$x^y = 243, \quad \sqrt[y]{1024} = \left(\frac{2x}{3}\right)^2$$ (Πολυτεχνεῖον)

2113. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} \sqrt[x]{4} . 5^y = 250 \\ 3^x . 2^{2y} = 576. \end{cases}$ (Πολυτεχνεῖον)

2114. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$y^x(1+y^x) = 10100, \quad \lambda o\gamma\sqrt{xy} - \lambda o\gamma\sqrt{\frac{x}{y}} = 3.$$ (Πολυτεχνεῖον)

2115. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$x+\lambda o\gamma y=1, \qquad \sqrt[x]{y^2}+10=11\sqrt[x]{y}. \qquad \text{(Πολυτεχνεῖον)}$$

2116. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$x^{\lambda o\gamma y}+y^{\lambda o\gamma x}=200, \qquad \sqrt[x]{(\lambda o\gamma x\,.\,\lambda o\gamma y)^y}=1024.$$

2117. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$x^{\lambda o\gamma y}+y^{\lambda o\gamma x}=200, \qquad \sqrt{x^{\lambda o\gamma y}\,.\,y^{\lambda o\gamma x}}=y^2.$$

2118. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$\sqrt[x y \omega]{y^2+55}=2, \qquad 2^{xy\omega}(y^2+55)=4096, \qquad \lambda o\gamma(x+y+\omega)=2\lambda o\gamma\sqrt{y(y-1)}.$$

2119. Ἐὰν εἶναι $\dfrac{\lambda o\gamma x}{y-\omega}=\dfrac{\lambda o\gamma y}{\omega-x}=\dfrac{\lambda o\gamma \omega}{x-y}$, νὰ δειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι $x^x\,.\,y^y\,.\,\omega^\omega=1.$

2120. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι τιμαὶ τῶν x καὶ y, αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν λύσιν τοῦ συστήματος :

$$\begin{cases} \lambda o\gamma y=4\lambda o\gamma\,(-1-i\sqrt{3}\,)^3-10^{\lambda o\gamma\,(2\lambda o\gamma x)}+4\lambda o\gamma\,\dfrac{5}{4} \\[2ex] \dfrac{1}{\lambda o\gamma\sqrt[-x]{10}}=\lambda o\gamma\sqrt{x\sqrt{y}}+\sqrt[4]{y}\sqrt[3]{\dfrac{y}{\sqrt[4]{y}}}-26. \end{cases}$$

(Πολυτεχνεῖον 1948)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'

ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΣ—ΙΣΑΙ ΚΑΤΑΘΕΣΕΙΣ—ΧΡΕΩΛΥΣΙΑ

Α'. ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΣ

513. **Ἀνατοκισμός**. Λέγομεν, ὅτι ἕνα κεφάλαιον ***ἀνατοκίζεται*** ἢ ὅτι ἔχει τοκισθῇ μὲ ***σύνθετον τόκον***, ὅταν εἰς τὸ τέλος κάθε χρονικῆς μονάδος, ὁ τόκος, τοῦ τοκισθέντος κεφαλαίου, προστίθεται εἰς τὸ κεφάλαιον καὶ οὕτω ἀποτελεῖ, μαζὶ μὲ τὸν τόκον, τὸ νέον κεφάλαιον τῆς ἑπομένης χρονικῆς μονάδος.

Συνήθως ἡ χρονικὴ μονάς, κατὰ τὴν ὁποίαν ἀνατοκίζεται ἕνα κεφάλαιον, εἶναι τὸ ἔτος ἢ ἡ ἑξαμηνία

Παράδειγμα. Ἔστω ὅτι ἔχομεν καταθέσει εἰς μίαν Τράπεζαν 1000 δρχ. μὲ ἀνατοκισμὸν κατ' ἔτος πρὸς 4 %.

Εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου ἔτους αἱ 1000 δρχ. θὰ φέρουν τόκον

$$\frac{\mathrm{K}\cdot\mathrm{E}\cdot\mathrm{X}}{100}=\frac{1000\cdot4\cdot1}{100}=40 \text{ δρχ.}$$

Ὁ τόκος αὐτὸς τῶν 1000 δρχ., δηλ. αἱ 40 δρχ., προστίθενται εἰς τὰς 1000 δρχ. καὶ οὕτω ἔχομεν καταθέσει 1040 δρχ., κατὰ τὸ δεύτερον ἔτος, εἰς τὴν Τράπεζαν.

Εἰς τὸ τέλος τοῦ δευτέρου ἔτους αἱ 1040 δρχ. φέρουν τόκον

$$\frac{1040\cdot4\cdot1}{100}=41,60 \text{ δρχ.}$$

Ὁ νέος αὐτὸς τόκος, δηλ. αἱ 41,60 δρχ., προστίθενται εἰς τὸ κεκεφάλαιον τῶν 1040 δρχ. καὶ ἔχομεν οὕτω ἕνα νέον κεφάλαιον $1040+41,60=1081,60$ δρχ. καὶ οὕτω καθ᾽ἑξῆς.

514. Θεμελιώδης τύπος τοῦ ἀνατοκισμοῦ. Πρόβλημα Ι. ***Νὰ ὑπολογισθῇ πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ τις ἐὰν καταθέσῃ, μὲ ἀνατοκισμόν, εἰς μίαν Τράπεζαν ἕνα κεφάλαιον α, ἐπὶ ν ἔτη, ἐὰν ὁ τόκος τῆς μιᾶς δραχμῆς εἰς ἕνα ἔτος εἶναι τ δραχμαί.***

Ἀφοῦ ἡ 1 δρχ. εἰς 1 ἔτος φέρει τ δρχ. τόκον

αἱ α δρχ. εἰς 1 ἔτος φέρουν ατ δρχ. τόκον.

Εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου ἔτους τὸ κεφάλαιον α, μαζὶ μὲ τοὺς τόκους του ατ, θὰ γίνῃ $\alpha+\alpha\tau$ ἢ $\alpha(1+\tau)$ δραχμαί.

Κατὰ τὸ δεύτερον ἔτος

ἀφοῦ ἡ 1 δρχ. φέρει εἰς 1 ἔτος τόκον τ δρχ.

αἱ $\alpha(1+\tau)$ » » » 1 » » $\alpha(1+\tau)\cdot\tau$.

Ἑπομένως εἰς τὸ τέλος τοῦ δευτέρου ἔτους τὸ κεφάλαιον $\alpha(1+\tau)$, μαζὶ μὲ τοὺς τόκους του $\alpha(1+\tau)\cdot\tau$ θὰ γίνῃ

$$\alpha(1+\tau)+\alpha(1+\tau)\tau \qquad \alpha(1+\tau)(1+\tau) \qquad \text{ἢ} \qquad \alpha(1+\tau)^2.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι εἰς τὸ τέλος τοῦ τρίτου ἔτους τὸ κεφάλαιον θὰ γίνῃ $\alpha(1+\tau)^3$ καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἄρα εἰς τὸ τέλος τῶν ν ἐτῶν τὸ κεφάλαιον, θὰ γίνῃ $\alpha(1+\tau)^\nu$.

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ Σ τὸ τελικὸν αὐτὸ κεφάλαιον, θὰ ἔχωμεν

$$\boxed{\Sigma=\alpha(1+\tau)^\nu}$$

Αὐτὸς εἶναι ὁ τύπος τοῦ ἀνατοκισμοῦ.

515. Γενικὴ περίπτωσις. Πρόβλημα ΙΙ. ***Πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ τις, ἐὰν ἀνατοκίσῃ κατ᾽ ἔτος α δραχμὰς ἐπὶ ν ἔτη καὶ η ἡμέρας, ἐὰν ὁ τόκος τῆς 1 δραχμῆς εἰς 1 ἔτος εἶναι τ δραχμαί.***

Αἱ α δραχμαί, ἀνατοκιζόμεναι κατ᾽ ἔτος, γίνονται εἰς τὸ τέλος τῶν ν ἐτῶν $\alpha(1+\tau)^\nu$.

Αἱ $\alpha(1+\tau)^\nu$ δραχμαὶ τοκιζόμεναι μὲ ἁπλοῦν τόκον, ἐπὶ η ἡμέρας, φέρουν τόκον

$$T=\frac{K\cdot E\cdot X\cdot}{36000}=\frac{\alpha(1+\tau)^\nu\cdot 100\tau\cdot\eta}{36000}=\frac{\alpha(1+\tau)^\nu\cdot\tau\cdot\eta}{360}.$$

Ὥστε εἰς τὸ τέλος τῶν ν ἐτῶν καὶ τῶν η ἡμερῶν θὰ λάβῃ ἐν ὅλῳ, τόκον καὶ κεφάλαιον,

$$\Sigma=\alpha(1+\tau)^\nu+\frac{\alpha(1+\tau)^\nu\,\tau\eta}{360}$$

ἤ, ἐὰν θέσωμεν ἐκτὸς παρενθέσεως τὸν κοινὸν παράγοντα $\alpha(1+\tau)^\nu$,

$$\boxed{\Sigma=\alpha(1+\tau)^\nu\left(1+\frac{\tau\eta}{360}\right)}$$

Σημ. Εἰς τὴν πρᾶξιν ἀντικαθιστῶμεν συνήθως τὸν τύπον

$$\Sigma=\alpha(1+\tau)^\nu\left(1+\frac{\tau\eta}{360}\right)\ \text{διὰ τοῦ}\ \boxed{\Sigma=\alpha(1+\tau)^{\nu+\frac{\eta}{360}}},$$

Ὁ τελευταῖος αὐτὸς τύπος δίδει σχεδὸν τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον μὲ τὸν προηγούμενον τύπον καὶ εἶναι πλέον εὔχρηστος διὰ τοὺς ὑπολογισμούς.

Παρατήρησις. Ἐὰν ὁ ἀνατοκισμὸς δὲν γίνεται κατ' ἔτος, ἀλλὰ κατ' ἴσα χρονικὰ διαστήματα, ἤτοι καθ' ἑξαμηνίαν, ἢ κατὰ τριμηνίαν ἢ κατὰ μῆνα κλπ. δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὸν εὑρεθέντα τύπον $\Sigma=\alpha(1+\tau)^\nu$ μόνον εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν τὸ τ παριστάνει τὸν τόκον τῆς 1 δραχμῆς εἰς ἕνα ἐκ τῶν διαστημάτων τούτων καὶ τὸ ν τὸ πλῆθος τῶν χρονικῶν αὐτῶν διαστημάτων.

Ἐὰν τὸ τ παριστάνῃ τὸν τόκον τῆς μιᾶς δραχμῆς εἰς ἕνα ἔτος καὶ ὁ ἀνατοκισμὸς γίνεται καθ' ἑξαμηνίαν, ἢ κατὰ τριμηνίαν, ἢ κατα μῆνα, τότε τὸ ἐπιτόκιον δὲν εἶναι τὸ ἥμισυ, ἢ τὸ τέταρτον ἢ τὸ δωδέκατον, ἀντιστοίχως, τοῦ ἐτησίου ἐπιτοκίου, ἀλλὰ ἄλλο, τὸ ὁποῖον ὑπολογίζεται ὡς ἀκολούθως:

Ἔστω, ὅτι ἀνατοκίζομεν α δραχμὰς καθ' ἑξαμηνίαν καὶ ἔστω τ_1 ὁ τόκος τῆς μιᾶς δραχμῆς καθ' ἑξαμηνίαν.

Σκεπτόμενοι ὅπως εἰς τὴν § 514 εὑρίσκομεν, ὅτι αἱ α δραχμαὶ εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου ἑξαμήνου θὰ γίνουν $\alpha(1+\tau_1)$, εἰς τὸ τέλος τοῦ δευτέρου ἑξαμήνου θὰ γίνουν $\alpha(1+\tau_1)^2$.

Ἀλλὰ εἰς τὸ τέλος τῶν δύο ἑξαμήνων, δηλ. εἰς τὸ τέλος τοῦ ἑνὸς ἔτους αἱ α δραχμαὶ ἀνατοκιζόμεναι μὲ τ (τόκον τῆς μιᾶς δραχμῆς εἰς ἕνα ἔτος) θὰ γίνουν $\alpha(1+\tau)$.

Πρέπει λοιπὸν νὰ εἶναι $\alpha(1+\tau_1)^2=\alpha(1+\tau)$ ἢ

$$1+\tau_1=\sqrt{1+\tau}\quad \text{ἢ}\quad \boxed{\tau_1=\sqrt{1+\tau}-1}$$

Οὕτω, ἐὰν τὸ ἐτήσιον ἐπιτόκιον τῆς μιᾶς δραχμῆς εἶναι $\tau=0{,}05$, τὸ ἑξαμηνιαῖον εἶναι $\tau_1=\sqrt{1{,}05}-1=0{,}025695$.

Ἐὰν ὁ ἀνατοκισμὸς γίνεται κατὰ τριμηνίαν (4 τριμηνίαι=1 ἔτος) καὶ παραστήσωμεν μὲ τ_2 τὸν τόκον τῆς μιᾶς δραχμῆς κατὰ τριμηνίαν, σκεπτόμενοι ὡς ἀνωτέρω εὑρίσκομεν

$$\alpha(1+\tau_2)^4=\alpha(1+\tau) \quad \text{ἢ} \quad \tau_2=\sqrt[4]{1+\tau}-1.$$

Ἐὰν ὁ ἀνατοκισμὸς γίνεται κατὰ μῆνα (12 μῆνες=1 ἔτος) εὑρίσκομεν ὁμοίως

$$\alpha(1+\tau_3)^{12}=\alpha(1+\tau) \quad \text{ἢ} \quad \tau_3=\sqrt[12]{1+\tau}-1.$$

Εἰς τὴν πρᾶξιν ὅμως λαμβάνομεν συνήθως ὡς ἑξαμηνιαῖον, τριμηνιαῖον, μηνιαῖον ἐπιτόκιον τὸ ἥμισυ, τὸ τρίτον, τὸ δωδέκατον τοῦ ἐτησίου ἐπιτοκίου.

516. **Προβλήματα ἀνατοκισμοῦ**. Ὁ τύπος τοῦ ἀνατοκισμοῦ

$$\Sigma=\alpha(1+\tau)^{\nu} \tag{1}$$

συνδέει τὰ τέσσαρα ποσὰ Σ, α, τ, ν. Ἐὰν δοθοῦν τρία ἀπὸ τὰ ποσὰ αὐτὰ δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ τέταρτον καὶ ἑπομένως ἔχομεν τὰ κάτωθι τέσσαρα διάφορα προβλήματα τοῦ ἀνατοκισμοῦ.

517. **Ὑπολογισμὸς τοῦ Σ**. ***Πρόβλημα Ι***. ***Ἐὰν τοκίσωμεν 560 000 δρχ. μὲ ἀνατοκισμὸν πρὸς 4%, ἐτησίως, πόσα θὰ λάβωμεν ἐν ὅλῳ μετὰ 6 ἔτη ;***

Εἰς τὸν τύπον $\Sigma=\alpha(1+\tau)^{\nu}$ θέτομεν $\alpha=560000$ $\tau=0{,}04$, $\nu=6$ καὶ ἔχομεν

$$\Sigma=560000(1{,}04)^6 \tag{1}$$

Λαμβάνομεν λογαρίθμους καὶ τῶν δύο μελῶν τῆς ἰσότητος (1) καὶ ἔχομεν

$$\lambda o\gamma\Sigma=\lambda o\gamma 560000+6\lambda o\gamma 1{,}04 \tag{2}$$

Ἐπειδὴ $\lambda o\gamma 560000=5{,}74819$, $\lambda o\gamma 1{,}04=0{,}01703$ ἡ (2) γίνεται

$$\lambda o\gamma\Sigma=5{,}74819+6\times 0{,}01703=5{,}74819+0{,}10218=5{,}85037.$$

Ἐκ τῶν πινάκων εὑρίσκομεν $x=708550$.

Ὥστε μετὰ 6 ἔτη θὰ λάβωμεν ἐν ὅλῳ 708550 δρχ.

Σημ. Ἡ δύναμις $1{,}04^6$ εὑρίσκεται εἰς τοὺς πίνακας τῶν λογαρίθμων (σελὶς 128) καὶ εἶναι ἴση μὲ 1,265319. Ἂν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν ἰσότητα ( ) τὸ $(1{,}04)^6$ μὲ τὸ ἴσον του εὑρίσκομεν ἀμέσως ὅτι

$$\Sigma=560000\times 1{,}265319=708578{,}64.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι μεταξὺ τῆς εὑρεθείσης αὐτῆς τιμῆς τοῦ Σ καὶ τῆς εὑρεθείσης ἀνωτέρω τιμῆς του, διὰ τῶν λογαρίθμων, ὑπάρχει ἡ διαφορὰ

$$708578{,}64-708550=28{,}64 \text{ δρχ.}$$

Ἡ διαφορὰ αὐτὴ προέρχεται ἐκ τοῦ ὅτι ἡ δύναμις $(1{,}04)^6$ ὑπελογίσθη μὲ μεγαλυτέραν προσέγγισιν.

Ἀσκήσεις. *2121*. Πόσα χρήματα θὰ λάβωμεν, ἂν ἀνατοκίσωμεν :

1. 750 000 δρχ. πρὸς 6 % ἐπὶ 5 ἔτη ;
2. 600 000 δρχ. πρὸς 7,5 ἐπὶ 10 ἔτη ;

2122. Πόσα χρήματα θὰ λάβωμεν, ἂν ἀνατοκίσωμεν :

1. 675 000 δρχ. πρὸς 5 % ἐπὶ 10 ἔτη καὶ 8 μῆνας ;

2. 765 400 δρχ. πρὸς 4 % ἐπὶ 12 ἔτη καὶ 4 μῆνας ;

2123. Πόσην αὔξησιν παθαίνει κεφάλαιον 100 000 δρχ. εἰς 8 ἔτη καὶ 8 μῆνας ἀνατοκιζόμενον κατ' ἔτος πρὸς 4 % ;

518*. Ὑπολογισμὸς τοῦ α. *Πρόβλημα ΙΙ. Ποῖον κεφάλαιον πρέπει νὰ καταθέσωμεν εἰς μίαν Τράπεζαν, μὲ ἀνατοκισμὸν πρὸς 4,5 % ἐτησίως, διὰ νὰ λάβωμεν μετὰ 8 ἔτη 4 500 000 δρχ. συνολικῶς ;

Εἰς τὸν τύπον $\Sigma=\alpha(1+\tau)^{\nu}$ θέτομεν $\Sigma=4\,500\,000$, $\tau=0{,}045$, $\nu=8$ καὶ ἔχομεν
$$4\,500\,000=\alpha(1{,}045)^{8}$$
ἢ
$$\lambda o\gamma 4500\,000=\lambda o\gamma\alpha+8\lambda o\gamma 1{,}045$$
ἢ
$$\lambda o\gamma\alpha=\lambda o\gamma 4\,500\,000-8\lambda o\gamma 1{,}045 \qquad (1)$$
Ἐπειδὴ $\lambda o\gamma 4\,500\,000=6{,}65321$ καὶ $\lambda o\gamma 1{,}045=0{,}01912$ ἡ (1) γράφεται
$$\lambda o\gamma\alpha=6{,}65321-8\times 0{,}01912=6{,}65321-0{,}15296=6{,}50025.$$
Ἐκ τῶν πινάκων εὑρίσκομεν $\alpha=3\,164\,007{,}69$.

Ὥστε πρέπει νὰ καταθέσωμεν 3 164 007,69 δρχ.

Ἀσκήσεις. 2124. Ποῖον κεφάλαιον πρέπει νὰ καταθέσωμεν εἰς μίαν Τράπεζαν μὲ ἀνατοκισμὸν κατ' ἔτος :

1. πρὸς 4,5 % διὰ νὰ λάβωμεν 500 000 δρχ. μετὰ 12 ἔτη
2. πρὸς 5 % » » » 1 264 000 » » 10 ἔτη.

2125. Ποῖον κεφάλαιον πρέπει νὰ καταθέσωμεν μὲ ἀνατοκισμὸν κατ' ἔτος πρὸς 4,5 % διὰ νὰ λάβωμεν 726 800 δρχ. μετὰ 9 ἔτη καὶ 3 μῆνας.

2126. Ποία ἡ παροῦσα ἀξία κεφαλαίου 45896 δρχ. πληρωτέου μετὰ 15 ἔτη καὶ 210 ἡμέρας μὲ ἀνατοκισμὸν κατ' ἔτος πρὸς 8 %.

519*. Ὑπολογισμὸς τοῦ τ. *Πρόβλημα ΙΙΙ. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον πρέπει νὰ ἀνατοκίσωμεν 100 000 δρχ. διὰ νὰ λάβωμεν μετὰ 15 ἔτη 203 600 δρχ. συνολικῶς.

Εἰς τὸν τύπον $\Sigma=\alpha(1+\tau)^{\nu}$, θέτομεν $\Sigma=203600$, $\alpha=100000$, $\nu=15$ καὶ ἔχομεν
$$203600=100000\cdot(1+\tau)^{15}$$
ἢ
$$\lambda o\gamma 203600=\lambda o\gamma 100000+15\lambda o\gamma(1+\tau)$$
ἢ
$$\lambda o\gamma 1(+\tau)=\frac{\lambda o\gamma 203600-\lambda o\gamma 100000}{15}=\frac{5{,}30878-5{,}00000}{15}$$
$$=\frac{0{,}30878}{15}=0{,}0250$$
Ἐκ τῶν πινάκων εὑρίσκομεν, ὅτι $1+\tau=1{,}049$ ἄρα $\tau=0{,}049$ καὶ ἑπομένως τὸ ἐπιτόκιον εἶναι 4,90 %.

Ἀσκήσεις. 2127. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον πρέπει νὰ ἀνατοκίσωμεν κατ' ἔτος :

1. 125 400 δρχ. διὰ νὰ λάβωμεν μετὰ 7 ἔτη 176 450 δρχ.;
2. 254 300 δρχ. » » » » 24 ἔτη μῆν. 10 ἡμ. 74 600 δρχ.;

2128. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον πρέπει νὰ ἀνατοκισθῇ ἕνα κεφάλαιον κατ' ἔτος διὰ νὰ τριπλασιασθῇ μετὰ 31 ἔτη ;

520. Ὑπολογισμὸς τοῦ ν. ***Πρόβλημα IV.*** ***Εἰς πόσον χρόνον κεφάλαιον 40 000 δραχμ. ἀνατοκιζόμενον κατ᾽ ἔτος πρὸς 4,5 % γίνεται 60 000 δρχ.***

Ἐὰν εἰς τὸν τύπον τοῦ ἀνατοκισμοῦ $\Sigma=\alpha(1+\tau)^{\nu}$ θέσωμεν $\Sigma=60000$, $\alpha=40000$, $\tau=0{,}045$ λαμβάνομεν

$$60000=40000\,(1{,}045)^{\nu}\,. \qquad (1)$$

Λαμβάνομεν λογαρίθμους καὶ τῶν δύο μελῶν τῆς ἰσότητος (1) καὶ ἔχομεν $\quad \lambda o\gamma 60000=\lambda o\gamma 40000+\nu\lambda o\gamma 1{,}045$

ἢ
$$\nu=\frac{\lambda o\gamma 60000-\lambda o\gamma 40000}{\lambda o\gamma 1{,}045}=\frac{4{,}77815-4{,}60206}{0{,}01912}=\frac{0{,}17609}{0{,}01912}.$$

Ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν τοῦ 0,17609 διὰ 0,01912 εὑρίσκομεν πηλίκον 9 καὶ ὑπόλοιπον 0,00401. Ὥστε ὁ ζητούμενος χρόνος ἀποτελεῖται ἀπὸ 9 ἔτη καὶ ἀπὸ ἕνα ἀριθμὸν ἡμερῶν η. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὰς ἡμέρας ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

Γνωρίζομεν, ὅτι ὁ τύπος τοῦ ἀνατοκισμοῦ, ὅταν ὁ χρόνος ἀποτελεῖται ἀπὸ ἔτη καὶ ἡμέρας, εἶναι $\quad \Sigma=\alpha(1+\tau)^{\nu}\left(1+\frac{\tau\eta}{360}\right)$.

Ἐὰν εἰς τὸν τύπον αὐτὸν θέσωμεν $\Sigma=60000$, $\alpha=40000$, $\tau=0{,}045$, $\nu=9$, λαμβάνομεν $\quad 60000=40000(1{,}045)^{9}\cdot\left(1+\frac{0{,}045\,\eta}{360}\right)$

Λαμβάνομεν λογαρίθμους καὶ τῶν δύο μελῶν τῆς ἰσότητος αὐτῆς καὶ ἔχομεν

$$\lambda o\gamma 60000=\lambda o\gamma 40000+9\lambda o\gamma 1{,}045+\lambda o\gamma\left(1+\frac{0{,}045\,\eta}{360}\right).$$

ἢ
$$\lambda o\gamma\left(1+\frac{0{,}045\,\eta}{360}\right)=\lambda o\gamma 60000-(\lambda o\gamma 40000+9\lambda o\gamma 1{,}045)$$

ἢ
$$\lambda o\gamma\left(1+\frac{0{,}045\,\eta}{360}\right)=4{,}77815-(4{,}60206+9\,.\,0{,}1912)=0{,}00401 \qquad (2)$$

ἄρα
$$1+\frac{0{,}045\,\eta}{360}=1{,}00928.$$

Λύοντες αὐτὴν ὡς πρὸς η εὑρίσκομεν $\eta=12$.

Ὥστε ὁ ζητούμενος χρόνος εἶναι 9 ἔτη καὶ 12 ἡμέρας.

Παρατήρησις. Ὅταν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν τοῦ 0,17609 διὰ 0,01912 εὑρίσκομεν πηλίκον 9 καὶ ὑπόλοιπον 0,00401. Ἀπὸ τὴν ἰσότητα (2) παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ ὑπόλοιπον αὐτὸ 0,00401 εἶναι ἴσον μὲ τὸν $\lambda o\gamma\left(1+\frac{0{,}045\,\eta}{360}\right)$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὰς ἐπὶ πλέον τῶν ἐτῶν ἡμέρας, κατὰ τὰς ὁποίας πρέπει νὰ μείνῃ ἕνα κεφάλαιον ἀνατοκισμένον, ἐξισοῦμεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως, ἡ ὁποία ὁρίζει τὸν χρόνον, μὲ $\lambda o\gamma\left(1+\frac{0{,}045\,\eta}{360}\right)$, δηλ. πρέπει νὰ θέτωμεν ἀμέσως $\lambda o\gamma\left(1+\frac{\tau\eta}{360}\right)=\upsilon$ καὶ ἐκ τοῦ τύπου αὐτοῦ νὰ ὑπολογίσωμεν τὰς ἡμέρας.

'Ασκήσεις. *2129*. Εἰς πόσον χρόνον κεφάλαιον 40 χιλιάδων δραχμῶν ἀνατοκιζόμενον κατ' ἔτος πρὸς 4,5 % γίνεται 678357.

2130. Εἰς πόσον χρόνον 358 χιλ. δρχ. ἀνατοκιζόμεναι κατ' ἔτος πρὸς 4,5 % γίνονται 560 χιλ. δρχ.;

2131. 'Επὶ πόσον χρόνον πρέπει νὰ ἀνατοκίσωμεν ἕνα κεφάλαιον πρὸς 6 % διὰ νὰ αὐξηθῇ κατὰ τὸ ἥμισυ;

2132. Εἰς πόσον χρόνον ἕνα κεφάλαιον α δρχ ἀνατοκιζόμενον πρὸς 3,6 % πενταπλασιάζεται;

521. Προβλήματα ἐπὶ τοῦ πληθυσμοῦ τῶν πόλεων. Εἰς τὰ προβλήματα τοῦ ἀνατοκισμοῦ ὑπάγονται καὶ μερικὰ προβλήματα σχετικὰ μὲ τὴν αὔξησιν ἢ ἐλάττωσιν τοῦ πληθυσμοῦ μιᾶς πόλεως ἢ μιᾶς χώρας καὶ λύονται, ὅπως αὐτά, μὲ τὴν βοήθειαν τῶν λογαρίθμων.

Παράδειγμα. 'Ο σημερινὸς πληθυσμὸς μιᾶς πόλεως εἶναι Π κάτοικοι καὶ αὐξάνει κατ' ἔτος κατὰ τὸ $^1/_\mu$ τοῦ προηγουμένου ἔτους. Πόσος θὰ εἶναι ὁ πληθυσμός της μετὰ ν ἔτη;

Μετὰ 1 ἔτος ὁ πληθυσμὸς τῆς πόλεως θὰ ἀποτελῆται ἀπὸ τοὺς Π κατοίκους της καὶ ἀπὸ μίαν αὔξησιν $\Pi\cdot\frac{1}{\mu}$, δηλαδὴ θὰ εἶναι

$$\Pi+\Pi\cdot\frac{1}{\mu} \quad \text{ἢ} \quad \Pi\left(1+\frac{1}{\mu}\right).$$

Εἰς τὸ τέλος τοῦ δευτέρου ἔτους ὁ πληθυσμὸς τῆς πόλεως θὰ ἀποτελῆται ἀπὸ τοὺς $\Pi\left(1+\frac{1}{\mu}\right)$ κατοίκους καὶ ἀπὸ μίαν αὔξησιν $\Pi\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\cdot\frac{1}{\mu}$, δηλ. θὰ εἶναι

$$\Pi\left(1+\frac{1}{\mu}\right)+\Pi\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\cdot\frac{1}{\mu} \quad \text{ἢ} \quad \Pi\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^2.$$

'Ομοίως σκεπτόμενοι εὑρίσκομεν, ὅτι ὁ πληθυσμὸς τῆς πόλεως εἰς τὸ τέλος τοῦ τρίτου ἔτους θὰ εἶναι $\Pi\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^3$ καὶ εἰς τὸ τέλος τῶν ν ἐτῶν θὰ εἶναι $\Pi\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^\nu$. Ἂν παραστήσωμεν μὲ Π' τὸν πληθυσμὸν τῆς πόλεως μετὰ ν ἔτη θὰ ἔχωμεν τὸν τύπον

$$\boxed{\Pi'=\Pi\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^\nu.}$$

Σημ. 'Εὰν ὁ πληθυσμὸς Π ***ἐλαττοῦται*** κατὰ τὸ $^1/_\mu$ τοῦ προηγουμένου ἔτους, τότε ὁ προηγούμενος τύπος γίνεται

$$\boxed{\Pi'=\Pi\left(1-\frac{1}{\mu}\right)^\nu.}$$

'Ασκήσεις. *2133*. 'Ο σημερινὸς πληθυσμὸς μιᾶς πόλεως εἶναι 50 χιλιάδ. κάτοικοι. 'Εὰν ἡ αὔξησις τοῦ πληθυσμοῦ τῆς πολεως εἶναι ἴση μὲ τὸ ὀγδοηκοστὸν τοῦ προηγουμένου ἔτους, πόσος θὰ εἶναι ὁ πληθυσμός της μετὰ 25 ἔτη;

2134. 'Ο πληθυσμὸς μιᾶς πόλεως αὐξάνει κατ' ἔτος κατὰ τὸ $^1/_{100}$ τοῦ προηγουμένου ἔτους. Μετὰ πόσα ἔτη θὰ διπλασιασθῇ ὁ πληθυσμός;

2135. 'Ο πληθυσμὸς μιᾶς πόλεως αὐξάνει κατ' ἔτος κατὰ τὸ ὀγδοηκοστὸν τοῦ προηγουμένου ἔτους. Μετὰ πόσα ἔτη θὰ τριπλασιασθῇ ὁ πληθυσμός;

2136. Μία πόλις ἔχει 8 χιλιάδες κατοίκους καὶ ὁ πληθυσμός της ἐλαττοῦται κατὰ 160 κατοίκους ἐτησίως. Ἐὰν ἡ ἐλάττωσις ἐξακολουθήσῃ κατὰ τὴν αὐτὴν ἀναλογίαν, μετὰ πόσα ἔτη θὰ ἔχῃ 5 χιλιάδες κατοίκους.

2137. Εἰς μίαν πόλιν ἡ θνησιμότης εἶναι τὸ $^1|_{42}$ τοῦ πληθυσμοῦ της, αἱ δὲ γεννήσεις της το $^1|_{35}$ τοῦ πληθυσμοῦ της. Ἐὰν παραδεχθῶμεν, ὅτι ἡ ἀναλογία αὐτὴ ἰσχύει καὶ διὰ τὰ ἄλλα ἔτη, νὰ εὑρεθῇ μετὰ πόσον χρόνον θὰ διπλασιασθῇ ὁ πληθυσμός της; (Πολυτεχνεῖον 1934)

2138 Πρὸ 15 ἐτῶν μία πόλις εἶχε πληθυσμὸν 80 χιλιάδας κατοίκων. Σήμερον ἔχει 60 χιλ. κατοίκους. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐλάττωσις, ποὺ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸν πληθυσμόν, κατ' ἔτος.

2139. Ἡ αὔξησις τοῦ πληθυσμοῦ μιᾶς πόλεως τῶν 64 χιλ. κατοίκων κατὰ τὸ 1904 ἦτο τοιαύτη, ὥστε ὁ πληθυσμὸς τῆς πόλεως ἐδιπλασιάσθη κατὰ τὸ 1940. Πόσον πληθυσμὸν εἶχεν ἡ πόλις αὕτη κατὰ τὸ 1913;

ΙΣΑΙ ΚΑΤΑΘΕΣΕΙΣ

522. **Ἴσαι καταθέσεις.** ***Ἴση κατάθεσις*** λέγεται ἕνα σταθερὸν ποσόν, τὸ ὁποῖον καταθέτομεν ἐπὶ ἕνα ὡρισμένον χρονικὸν διάστημα εἴτε εἰς τὴν ἀρχὴν ἑκάστου ἔτους, διὰ νὰ ἀποκτήσωμεν ἕνα κεφάλαιον εἴτε εἰς τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους, διὰ νὰ ἐξοφλήσωμεν ἕνα χρέος (***ἴσαι πληρωμαί***).

Αἱ ἴσαι καταθέσεις δύνανται νὰ γίνωνται καθ' ἑξαμηνίαν ἢ κατὰ τριμηνίαν καὶ ἐπὶ ἕνα ὡρισμένον χρόνον.

523. **Σχηματισμὸς ἑνὸς κεφαλαίου δι' ἴσων καταθέσεων.** ***Πρόβλημα Ι. Καταθέτομεν εἰς μίαν Τράπεζαν καὶ εἰς τὴν ἀρχὴν ἑκάστου ἔτους ἕνα σταθερὸν ποσὸν α δραχμῶν. Νὰ εὑρεθῇ ποῖον κεφάλαιον θὰ σχηματίσωμεν μετὰ τὴν νυοστὴν κατάθεσιν, ἐὰν ἡ κατάθεσις γίνεται μὲ ἀνατοκισμὸν καὶ μὲ τόκον τ τῆς 1 δραχμῆς εἰς ἕνα ἔτος;***

Ἡ πρώτη κατάθεσις τῶν α δρ. θὰ μείνῃ εἰς τὴν τράπεζαν ἐπὶ ν ἔτη καὶ ἀνατοκιζομένη, θὰ γίνῃ εἰς τὸ τέλος τοῦ χρόνου αὐτοῦ $\alpha(1+\tau)^\nu$. Ἡ δευτέρα κατάθεσις τῶν α δρχ. θὰ μείνῃ ἐπὶ $\nu-1$ ἔτη καὶ θὰ γίνῃ εἰς τὸ τέλος τοῦ χρόνου αὐτοῦ $\alpha(1+\tau)^{\nu-1}$.

Ἡ προτελευταία κατάθεσις τῶν α δρχ. θὰ μείνῃ ἐπὶ 2 ἔτη καὶ θὰ γίνῃ εἰς τὸ τέλος τοῦ χρόνου αὐτοῦ $\alpha(1+\tau)^2$.

Ἡ τελευταία κατάθεσις τῶν α δρχ. θὰ μείνῃ ἐπὶ 1 ἔτος καὶ θὰ γίνῃ εἰς τὸ τέλος τοῦ χρόνου αὐτοῦ $\alpha(1+\tau)$.

Ἕνα ἔτος μετὰ τὴν τελευταίαν κατάθεσιν δικαιούμεθα νὰ λάβωμεν ἕνα ποσόν.

$$\Sigma=\alpha(1+\tau)+\alpha(1+\tau)^2+\ldots+\alpha(1+\tau)^{\nu-1}+\alpha(1+\tau)^\nu . \quad (1)$$

Τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἰσότητος αὐτῆς εἶνε τὸ ἄθροισμα τῶν ν ὅρων μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου, τῆς ὁποίας ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι ὁ $\alpha(1+\tau)$ καὶ λόγος ὁ $(1+\tau)$. Κατὰ τὸν τύπον τῆς § 470, ποὺ δίδει τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου, ἡ ἰσότης (1) γράφεται

$$\boxed{\Sigma=\frac{\alpha(1+\tau)[(1+\tau)^\nu-1]}{\tau}}$$

Ὁ ἀνωτέρω τύπος χρησιμοποιεῖται καὶ ὅταν ἡ κατάθεσις γίνεται καθ' ἑξαμηνίαν, ἢ κατὰ τριμηνίαν, ἢ κατὰ μῆνα, ἀρκεῖ νὰ δώσωμεν τὰς καταλλήλους τιμὰς εἰς τὰ ν καὶ τ.

524. Προβλήματα ἴσων καταθέσεων. Ὁ τύπος

$\Sigma = \frac{\alpha(\alpha+\tau)[(1+\tau)^\nu - 1]}{\tau}$ συνδέει τὰ τέσσαρα ποσὰ Σ, α, ν, τ καὶ ἑπομένως δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ ἕνα ἐξ αὐτῶν, ὅταν δοθοῦν τὰ τρία ἄλλα.

525. Ὑπολογισμὸς τοῦ Σ. ***Πρόβλημα. Καταθέτει τις εἰς τὴν ἀρχὴν ἑκάστου ἔτους 75 000 δραχ. μὲ ἀνατοκισμὸν πρὸς 4 %. Πόσα χρήματα θὰ λάβῃ μετὰ 15 ἔτη;***

Εἰς τὸν τύπον

$\Sigma = \frac{\alpha(1+\tau)[(1+\tau)^\nu - 1]}{\tau}$ θέτομεν $\alpha=75000$, $\tau=0{,}04$ $\nu=15$

καὶ ἔχομεν $\Sigma = \frac{75000\times1{,}04\ [(1{,}04)^{15}-1]}{0{,}04}$.

Ἐπειδὴ $1{,}04^{15} = 1{,}800944$ (σελ. 128 λογαριθμικῶν πινάκων), ἡ ἰσότης (1) γράφεται

$$\Sigma = \frac{75000\times1{,}04\times0{,}800944}{0{,}04} = 1561740{,}8.$$

Σημ. Ἡ τιμὴ τοῦ Σ ὑπολογίζεται, εἴτε ἀπ' εὐθείας, εἴτε διὰ τῶν λογαρίθμων.

Ἀσκήσεις. 2140. Ἕνας καταθέτει εἰς τὴν ἀρχὴν ἑκάστου ἔτους 150 χιλ. δρχ. μὲ ἀνατοκισμὸν πρὸς 5 %. Πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ μετὰ 12 ἔτη;

2141. Πατὴρ ἤρχισε νὰ καταθέτῃ εἰς μίαν Τράπεζαν ἀπὸ τῆς ἡμέρας τῆς γεννήσεως τῆς κορης του 100 000 δρχ. ἐτησίως μὲ ἀνατοκισμὸν πρὸς 4 %. Ποσας δραχμὰς θὰ λάβῃ ἡ κόρη του, ὅταν γίνῃ 20 ἐτῶν;

2142. Ἕνας καπνιστὴς ἐξοδεύει ἀπὸ τοῦ 16ου ἔτους τῆς ἡλικίας του κατὰ μέσον ὅρον 1200 δραχμὰς ἡμερησίως. Νά ὑπολογισθῇ τί ποσὸν θὰ ἐλάμβανε κατὰ τὴν ἀρχὴν τοῦ 60οῦ ἔτους τῆς ἡλικίας του, ἐὰν κατέθετε εἰς τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους τὰ χρήματα, ποὺ διέθετε διὰ τὸν καπνόν, εἰς μίαν Τράπεζαν μὲ ἀνατοκισμὸν πρὸς 5 %.

2143. Πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ καταθέτῃ ἕνας ἐργάτης κατ' ἔτος εἰς μίαν Τράπεζαν μὲ ἀνατοκισμὸν πρὸς 3,5 % ἀπὸ τοῦ 21ου ἔτους τῆς ἡλικίας του μέχρι τοῦ 60οῦ ἔτους, διὰ νὰ λάβῃ κατὰ τὸ 60ὸν ἔτος τῆς ἡλικίας του 3 ἑκατομμύρια δραχμῶν;

526. Ὑπολογισμὸς τοῦ α. ***Πρόβλημα. Πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ καταθέτωμεν κατ' ἔτος εἰς μίαν Τράπεζαν καὶ εἰς τὴν ἀρχὴν ἑκάστου ἔτους, μὲ ἀνατοκισμὸν πρὸς 4,5 % διὰ νὰ λάβωμεν μετὰ 10 ἔτη 8 000 000 δρχ.***

Εἰς τὸν τύπον $\Sigma = \frac{\alpha(1+\tau)[(1+\tau)^\nu - 1]}{\tau}$ τῶν ἴσων καταθέσεων θέτομεν $\Sigma=8000000$, $\tau=0{,}045$, $\nu=10$ καὶ ἔχομεν

$$8000000 = \frac{\alpha\,.\,1{,}045\,.\,[1{,}045^{10}-1]}{0{,}45}. \qquad (1)$$

Ἐκ τῶν λογαριθμικῶν πινάκων εὑρίσκομεν $1{,}045^{10}=1{,}5529$ καὶ ἑπομένως ἡ (1) γράφεται

$$8\,000\,000 = \frac{\alpha\times1{,}045\times0{,}5529}{0{,}045}.$$

Λαμβάνομεν τοὺς λογαρίθμους καὶ τῶν δύο μελῶν τῆς ἰσότητος αὐτῆς καὶ ἔχομεν :

$$\lambda o\gamma 8\,000\,000 = \lambda o\gamma\alpha + \lambda o\gamma 1{,}045 + \lambda o\gamma 0{,}5529 - \lambda o\gamma 0{,}045$$

ἢ $$\lambda o\gamma\alpha = (\lambda o\gamma 8\,000\,000 + \lambda o\gamma 0{,}045) - (\lambda o\gamma 1{,}045 + \lambda o\gamma 0{,}5529) =$$

$$= (6{,}90306 + \overline{2}{,}65321) - (\lambda o\gamma 1{,}01912 + \overline{1}{,}74265) =$$

$$= 5{,}55630 - \overline{1}{,}76177 = 5{,}79453.$$

Ἐκ τῶν πινάκων εὑρίσκομεν $\alpha = 623057{,}14$.

Ὥστε πρέπει νὰ καταθέτωμεν ἐτησίως 623057,14 δρχ.

527. Ὑπολογισμὸς τοῦ ν. Πρόβλημα. ***Ἕνας ὑπάλληλος καταθέτει εἰς τὴν ἀρχὴν ἑκάστου ἔτους 50 000 δρχ. μὲ ἀνατοκισμὸν πρὸς 3 %. Πόσας τοιαύτας καταθέσεις πρέπει νὰ κάμῃ διὰ νὰ λάβῃ 1 878 215 δρχ.***

Εἰς τὸν τύπον $\Sigma = \dfrac{\alpha(1+\tau)[(1+\tau)^\nu - 1]}{\tau}$ θέτομεν $\Sigma = 1\,878\,215$ $\alpha = 50\,000$, $\tau = 0{,}03$ καὶ ἔχομεν

$$1878215 = \frac{50\,000 \,.\, 1{,}03 \,.\, [1{,}03^\nu - 1]}{0{,}03} \quad \text{ἢ} \quad (1{,}03^\nu - 1) = \frac{1878215 \times 0{,}03}{50\,000 \times 1{,}03}$$

Λαμβάνομεν τοὺς λογαρίθμους καὶ τῶν δύο μελῶν τῆς ἰσότητος αὐτῆς καὶ ἔχομεν

$$\lambda o\gamma(1{,}03^\nu - 1) = (\lambda o\gamma 1878215 + \lambda o\gamma 0{,}03) - (\lambda o\gamma 50000 + \lambda o\gamma 1{,}03) =$$

$$= (6{,}27375 + \overline{2}{,}47712) - (4{,}69897 + 0{,}01284) =$$

$$= 4{,}75087 - 4{,}71181 = 0{,}03906.$$

Ὥστε εἶναι $\lambda o\gamma(1{,}03^\nu - 1) = 0{,}03906$.

Ἐκ τῶν πινάκων εὑρίσκομεν

$$(1{,}03^\nu - 1) = 1{,}0941 \quad \text{ἢ} \quad 1{,}03^\nu = 2{,}0941.$$

Λαμβάνομεν τοὺς λογαρίθμους καὶ τῶν δύο μελῶν τῆς τελευταίας ἰσότητος καὶ ἔχομεν

$$\nu\lambda o\gamma 1{,}03 = \lambda o\gamma 2{,}0941, \qquad \nu = \frac{\lambda o\gamma 2{,}0241}{\lambda o\gamma 1{,}03} = \frac{0{,}32100}{0{,}01284} = 25.$$

Ὥστε πρέπει νὰ κάμῃ 25 καταθέσεις τῶν 50 000 δρχ.

Σημ. Λόγῳ τῆς φύσεως τοῦ προβλήματος ὁ ν πρέπει νὰ εἶναι ἀκέραιος, διότι παριστάνει τὸ πλῆθος τῶν ἴσων καταθέσεων, ἄλλως τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον.

Ἄσκησις. 2144. Ἕνας καταθέτει εἰς τὴν ἀρχὴν ἑκάστου ἔτους 90 χιλιάδας δρχ. μὲ ἀνατοκισμὸν πρὸς 5 %. Πόσας τοιαύτας καταθέσεις πρέπει νὰ κάμῃ διὰ νὰ λάβῃ 1615200 δραχμάς ;

528. Παρατήρησις. Ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ τ εἶναι ἀδύνατος, διότι δὲν δυνάμεθα νὰ λύσωμεν τὸν τύπον $\Sigma = \dfrac{\alpha(1+\tau)[(1+\tau)^\nu - 1]}{\tau}$ (1) ὡς πρὸς τ.

Πράγματι, ἐὰν λάβωμεν ὡς ἄγνωστον τὸ $(1+\tau)$ καὶ θέσωμεν $1+\tau = x$, ὁ τύπος (1) γίνεται

$$\Sigma = \alpha x \frac{x^\nu - 1}{x - 1} \quad \text{ἢ} \quad \Sigma = \alpha(x^\nu + x^{\nu-1} + x^{\nu-2} + \ldots + x^2 + x)$$

ἢ $$\alpha x^\nu + \alpha x^{\nu-1} + \alpha x^{\nu-2} + \ldots + \alpha x^2 + \alpha x - \Sigma = 0, \qquad (2).$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι προκύπτει μία πλήρης ἐξίσωσις τοῦ νυοστοῦ βαθμοῦ, τὴν ὁποίαν δὲν δυνάμεθα νὰ λύσωμεν μὲ τὰ στοιχειώδη μαθηματικά. Ἐξ ἄλλου τὸ πρόβλημα αὐτό, δηλ. ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ τ, δὲν παρουσιάζεται ποτὲ εἰς τὴν πρᾶξιν.

ΧΡΕΩΛΥΣΙΑ

529. **Χρεωλύσιον.** Ὑποθέτομεν, ὅτι ἕνα ἄτομον, ἢ μία Κοινότης ἢ καὶ ἕνα Κράτος, δανείζεται μὲ ἀνατοκισμὸν ἕνα χρηματικὸν ποσὸν α καὶ ὑπόσχεται, ὅτι θὰ ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος του δι᾽ ἴσων δόσεων, αἱ ὁποῖαι θὰ γίνωνται εἰς τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους ἀπὸ τῆς ἡμέρας τοῦ δανεισμοῦ.

Τὸ σταθερὸν αὐτὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ πληρώνεται εἰς τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους πρὸς ἐξόφλησιν τοῦ χρέους, λέγεται ***χρεωλύσιον.***

Ἕνα μέρος τοῦ χρεωλυσίου διατίθεται διὰ τὴν βαθμιαίαν ἀπόσβεσιν τοῦ χρέους καὶ τὸ ὑπόλοιπον διὰ τὴν πληρωμὴν τῶν τόκων τοῦ χρέους.

530. Πρόβλημα. ***Μία Κοινότης ἐδανείσθη α δραχμὰς μὲ ἀνατοκισμὸν κατ᾽ ἔτος καὶ μὲ τὴν συμφωνίαν νὰ ἐξοφλήσῃ τὸ δάνειον αὐτὸ διὰ ν ἴσων ἐτησίων δόσεων. Πόσον θὰ εἶναι τὸ χρεωλύσιον, ἐὰν ὁ τόκος τῆς μιᾶς δραχμῆς εἰς ἕνα ἔτος εἶναι τ δραχμαί;***

Ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ Κοινότης δὲν εἶχε νὰ πληρώσῃ τίποτε κατὰ τὴν διάρκειαν τῶν ν ἐτῶν, ἔπρεπε νὰ πληρώσῃ εἰς τὸ τέλος τῶν ν ἐτῶν συνολικῶς $\alpha(1+\tau)^\nu$ δραχ. (1)

Ἀλλὰ ἡ Κοινότης πληρώνει εἰς τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους ἕνα χρεωλύσιον **x**. Δικαιοῦται λοιπὸν νὰ ζητήσῃ καὶ αὐτὴ τοὺς τόκους τῶν ἐτησίων δόσεων, τοὺς ὁποίους ἄλλως τε θὰ ἐλάμβανε, ἐὰν ἀνετόκιζε ἑκάστην δόσιν.

Ἡ πρώτη δόσις τῶν x δραχμῶν, ἐπειδὴ πληρώνεται εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτους ἔτους, θὰ μείνῃ ἀνατοκιζομένη ἐπὶ ν—1 ἔτη καὶ ἐπομένως θὰ γίνῃ $x(1+\tau)^{\nu-1}$.

Ἡ δευτέρα δόσις θὰ μείνῃ ν—2 ἔτη καὶ θὰ γίνῃ $x(1+\tau)^{\nu-2}$.

Ἡ τρίτη δόσις θὰ μείνῃ ν—3 ἔτη καὶ θὰ γίνῃ $x(1+\tau)^{\nu-3}$.

. . . .

Ἡ προτελευταία δόσις θὰ μείνῃ 1 ἔτος καὶ θὰ γίνῃ $x(1+\tau)$ καὶ ἡ τελευταί δόσις, ἡ ὁποία θὰ πληρωθῇ εἰς τὸ τέλος τῶν ν ἐτῶν, θὰ εἶναι **x** δραχμαὶ καὶ θὰ ἐξοφλῇ τὸ χρέος.

Ἡ Κοινότης λοιπὸν ἔχει πληρώσει ἐν ὅλῳ :

$$x+x(1+\tau)+x(1+\tau)^2+\ldots+x(1+\tau)^{\nu-2}+x(1+\tau)^{\nu-1}.$$

Τὸ ἄθροισμα αὐτὸ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου, ἡ ὁποία ἔχει πρῶτον ὅρον τὸν **x** καὶ λόγον $(1+\tau)$ καὶ τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον μὲ

$$\frac{x(1+\tau)^{\nu-1}(1+\tau)-x}{\tau} \quad \text{ἢ} \quad \frac{x\,[(1+\tau)^\nu-1]}{\tau} \qquad (2)$$

Διὰ νὰ ἐξοφληθῇ τὸ χρέος (1), πρέπει τὰ ποσὰ (1) καὶ (2) νὰ εἶναι ἴσα, δηλαδὴ πρέπει νὰ εἶναι

$$\boxed{\alpha(1+\tau)^\nu=\frac{x\,[(1+\tau)^\nu-1]}{\tau}} \qquad (3)$$

Αὐτὸς εἶναι ***ὁ τύπος τῆς χρεωλυσίας,*** ὁ ὁποῖος συνδέει τὸ δανεισθὲν ποσὸν α, τὸ χρεωλύσιον x, τὸν τόκον τ τῆς μιᾶς δραχμῆς εἰς 1 ἔτος καὶ τὰς ν ἐτησίας δόσεις. Ἂν λύσωμεν τὸν τύπον (3) πρὸς x λαμβάνομεν

$$\boxed{x = \frac{\alpha\tau(1+\tau)^{\nu}}{(1+\tau)^{\nu}-1}} \qquad (4)$$

531. **Παρατήρησις 1η.** Τὸ δεύτερον μέλος τοῦ τύπου (3) παριστάνει τὸ συνολικὸν ποσόν, τὸ ὁποῖον θὰ λάβωμεν, ἐὰν καταθέτωμεν ***εἰς τὸ τέλος*** ἑκάστου ἔτους καὶ ἐπὶ ν ἔτη ἕνα ποσὸν x δραχμῶν. Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν μὲ Σ τὸ συνολικὸν αὐτὸ ποσὸν καὶ μὲ α τὸ κατατιθέμενον ποσόν, θὰ ἔχωμεν τὸν τύπον

$$\boxed{\Sigma = \frac{\alpha[(1+\tau)^{\nu}-1]}{\tau}}$$

ὁ ὁποῖος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς τύπος ***τῶν ἴσων καταθέσεων ἢ τῶν ἴσων πληρωμῶν***, ὅταν ἡ κατάθεσις ἢ ἡ πληρωμὴ τῶν α δρχ. γίνεται εἰς τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους.

532. **Παρατήρησις 2α.** Ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ πρώτη δόσις τοῦ χρεωλυσίου γίνῃ μετὰ μ ἔτη ἀπὸ τῆς συνάψεως τοῦ δανείου, τότε ἡ πρώτη χρεωλυτικὴ δόσις θὰ μείνῃ ἐπὶ ν—μ ἔτη καὶ θὰ γίνῃ ἀνατοκιζομένη $x(1+\tau)^{\nu-\mu}$.

Ἡ δευτέρα θὰ μείνῃ ἐπὶ (ν—μ)—1 ἢ ν—μ—1 ἔτη καὶ θὰ γίνῃ

$$x(1+\tau)^{\nu-\mu-1}$$

ἡ προτελευταία θὰ μείνῃ ἐπὶ ἕνα ἔτος καὶ θὰ γίνῃ $x(1+\tau)$ καὶ ἡ τελευταία δόσις θὰ εἶναι x καὶ θὰ ἐξοφλῇ τὸ χρέος. Ἐν συνόλῳ λοιπὸν ἔχει πληρώσει

$$x+x(1+\tau)+x(1+\tau)^2+\ldots+x(1+\tau)^{\nu-\mu-1}+x(1+\tau)^{\nu-\mu}.$$

Τὸ ἄθροισμα αὐτὸ εἶναι ἴσον μὲ

$$\frac{x(1+\tau)^{\nu-\mu}.(1+\tau)-x}{\tau} \quad \text{ἢ} \quad \frac{x[(1+\tau)^{\nu-\mu+1}-1]}{\tau}. \qquad (1)$$

Διὰ νὰ ἐξοφληθῇ τὸ χρέος πρέπει νὰ εἶναι

$$\boxed{\alpha(1+\tau)^{\nu} = \frac{x[(1+\tau)^{\nu-\mu+1}-1]}{\tau}}$$

533. **Ὑπολογισμὸς τοῦ x Πρόβλημα.** ***Ἔμπορος ἐδανείσθη 5 000 000 δρχ. πρὸς 6 %ο μὲ τὴν συμφωνίαν νὰ ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος του διὰ 30 ἴσων ἐτησίων χρεωλυτικῶν δόσεων. Πόσον χρεωλύσιον πρέπει νὰ πληρώνῃ;***

Εἰς τὸν τύπον $\alpha(1+\tau)^{\nu} = \dfrac{x[(1+\tau)^{\nu}-1]}{\tau}$ θέτομεν

$\alpha=5\,000\,000$, $\tau=0{,}06$, $\nu=30$ καὶ ἔχομεν

$$5\,000\,000(1{,}06)^{30}=\frac{x[(1{,}06)^{30}-1]}{0{,}06} \quad \text{ἢ} \quad x=\frac{5\,000\,000.(1{,}06)^{30}\,0{,}06}{(1{,}06)^{30}-1}.$$

Ἐπειδὴ $1{,}06^{30}=5{,}74349$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γράφεται

$$x = \frac{5\,000\,000 \,.\, 5{,}74349 \,.\, 0{,}06}{4{,}74349}$$

ἤ $λογx = (λογ5\,000\,000 + λογ5{,}74349 + λογ0{,}06) - λογ4{,}74349 =$
$= 6{,}69897 + 0{,}75917 + \bar{2}{,}77815) - 0{,}67610 =$
$= 6{,}23629 - 0{,}67610 = 5{,}56019.$

Ἐκ τῶν πινάκων εὑρίσκομεν $x = 363233{,}33$. Ὥστε πρέπει νὰ πληρώνῃ ἐτησίως 363 233,33 δρχ.

Ἀσκήσεις. 2145. Μία Κοινότης ἐδανείσθη 5 ἑκατομμύρια δρχ. πρὸς 4 % καὶ θέλει νὰ ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος της εἰς 20 ἔτη. Πόσον θὰ εἶναι τὸ ἐτήσιον χρεωλύσιον ;

534. Ὑπολογισμὸς α. Πρόβλημα. ***Πόσον δάνειον δυνάμεθα νὰ δανεισθῶμεν πρὸς 5 %, ἐὰν δυνάμεθα νὰ διαθέτωμεν ἐπὶ 15 ἔτη ἐτήσιον χρεωλύσιον 250 000 δρχ.***

Εἰς τὸν τύπον $α(1+τ)^ν = \frac{x[(1+τ)^ν - 1]}{τ}$ θέτομεν

$x = 250\,000$, $τ = 0{,}05$, $ν = 15$ καὶ ἔχομεν

$$α(1{,}05)^{15} = \frac{250\,000 \,.\, [(1{,}05)^{15} - 1]}{0{,}05} \quad ἢ \quad α = \frac{250\,000\, [(1{,}05)^{15} - 1]}{0{,}05\, (1{,}05)^{15}}.$$

Ἐπειδὴ $(1{,}05)^{15} = 2{,}0789$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γράφεται

$$α = \frac{250\,000 \,.\, 1{,}0789}{0{,}05 \,.\, 2{,}0789}$$

ἢ $λογα = (λογ250\,000 + λογ1{,}0789) - (λογ0{,}05 + λογ2{,}0789) =$
$= (5{,}39794 + 0{,}03298) - (\bar{2}{,}69807 + 0{,}31783)$
$= 5{,}43092 - \bar{1}{,}01520 = 6{,}41412.$

Ἐκ τῶν πινάκων εὑρίσκομεν $α = 2594882{,}35$.

Ὥστε δυνάμεθα νὰ δανεισθῶμεν 2 594 882,35 δρχ.

Ἀσκήσεις. 2146. Πόσα χρήματα δύναται νὰ δανεισθῇ μία Κοινότης πρὸς 6 %, ἐὰν δύναται νὰ πληρώνῃ ἐπὶ 20 ἔτη ἐτήσιον χρεωλύσιον 300 χιλιάδων δραχμῶν.

2147. Διὰ νὰ ἐξοφλήσῃ ἕνας ἔμπορος ἕνα ὑπόλοιπον ἑνὸς χρέους του πρέπει νὰ πληρώνῃ ἕνα χρεωλύσιον 250 χιλ. δρχ. ἐπὶ 6 ἔτη πρὸς 4,5 %. Ἂν θέλῃ νὰ ἐξωφλήσῃ τὸ χρέος του μὲ μίαν πληρωμήν, πόσα πρέπει νὰ πληρώσῃ;

535. Ὑπολογισμὸς τοῦ ν. Πρόβλημα. ***Εἰς πόσα ἔτη ἐξοφλεῖται δάνειον α δραχμῶν, ἐὰν τὸ ἐτήσιον χρεωλύσιον εἶναι x δρχ. καὶ ὁ ἐτήσιος τόκος τῆς 1 δραχμῆς εἶναι τ δραχμαί.***

Ἀπὸ τὸν τύπον τῆς χρεωλυσίας $α(1+τ)^ν = \frac{x[(1+ν)^ν - 1]}{τ}$

λαμβάνομεν

$$ατ(1+τ)^ν = x[(1+τ)^ν - 1] \quad ἢ \quad x(1+τ)^ν - ατ(1+τ)^ν = x$$

$$ἢ \quad (1+τ)^ν\,(x - ατ) = x \quad ἢ \quad (1+τ)^ν = \frac{x}{x - ατ}. \qquad (1)$$

Λαμβάνομεν λογαρίθμους καὶ τῶν δύο μελῶν τῆς ἰσότητος (1) καὶ ἔχομεν

$$νλογ(1+τ) = λογx - λογ(x - ατ) \quad ἢ \quad ν = \frac{λογx - λογ(x - ατ)}{λογ(1+τ)}.$$

Διὰ νὰ εἶναι τὸ πρόβλημα δυνατόν, πρέπει ἡ διαφορὰ $x-ατ$ νὰ εἶναι θετική, δηλ. πρέπει νὰ εἶναι $x>ατ$, διότι οἱ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ δὲν ἔχουν λογαρίθμους.

Ἐπειδὴ τὸ $ατ$ παριστάνει τὸν ἐτήσιον τόκον τοῦ κεφαλαίου $α$ καὶ τὸ x παριστάνει τὸ χρεωλύσιον, πρέπει τὸ χρεωλύσιον x νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἐτησίου τόκου τοῦ ἀρχικοῦ κεφαλαίου· τοῦτο εἶναι φανερόν, διότι ἄλλως δὲν θὰ ἐγίνετο ποτὲ ἡ ἐξόφλησις τοῦ χρέους.

Παράδειγμα. Ἔμπορος ἐδανείσθη 4 500 000 δραχμὰς πρὸς 6 ο]ο. Πόσας ἐτησίας χρεωλυτικὰς δόσεις τῶν 300 000 δρχ. πρέπει νὰ πληρώσῃ διὰ νὰ ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος του ;

Εἰς τὸν τύπον (1), ποὺ εὑρήκαμεν ἀνωτέρω θέτομεν $α=4\,500\,000$, $τ=0{,}06$, $x=300\,000$ καὶ ἔχομεν

$$(1{,}06)^ν=\frac{300\,000}{300\,000-4\,500\,000\,.\,0{,}06} \quad ἢ \quad 1{,}06^ν=10.$$

Λαμβάνομεν λογαρίθμους καὶ τῶν δύο μελῶν τῆς ἰσότητος αὐτῆς καὶ ἔχομεν

$$ν\,λογ1{,}06=λογ10 \quad ἢ \quad ν=\frac{λογ10}{λογ1{,}06}=\frac{1}{0{,}02531}=39\ldots.$$

Ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν τοῦ 1 διὰ 0,02531 εὑρίσκομεν πηλίκον 39 καὶ ὑπόλοιπον 0,01291. Ὥστε πρέπει νὰ πληρώσῃ 39 δόσεις τῶν 300 000 δραχ καὶ μίαν ἀκόμη, ἡ ὁποία θὰ εἶναι μικροτέρα τῶν 300 000 δρχ. καὶ ἡ ὁποία ὑπολογίζεται ὡς ἑξῆς :

Ὑπολογίζομεν πόσον γίνεται τὸ χρέος εἰς τὸ τέλος τῶν 39 ἐτῶν, δηλ. ὑπολογίζομεν τὸ ποσὸν $Σ=4\,500\,000(1{,}06)^{39}$.

Ἔπειτα ὑπολογίζομεν τὸ ποσὸν $Σ'$, τὸ ὁποῖον ἔχει πληρώσει μὲ τὰς 39 δόσεις τῶν 300 000, δηλ. ὑπολογίζομεν τὸ ποσὸν

$$Σ'=\frac{300\,000[(1{,}06)^{39}-1]}{0{,}06}.$$

Ἡ διαφορὰ $Σ-Σ'$ θὰ ἀποτελῇ τὸ ποσὸν τῆς τελευταίας δόσεως διά νὰ ἐξοφληθῇ τὸ χρέος.

Ὑπολογίζομεν τὸ $Σ=4\,500\,000(1{,}06)^{39}$

$$λογΣ=λογ4\,500\,000+39\,.\,λογ1{,}06=$$
$$=6{,}65321+39\,.\,0{,}09531=6{,}65321+0{,}98709=7{,}64030.$$

Ἐκ τῶν πινάκων εὑρίσκομεν $Σ=43682000$ δρχ.

Ὑπολογίζομεν τὸ $Σ=\dfrac{300\,000[(1{,}06)^{39}-1]}{0{,}06}$. (2)

Ἐν πρώτοις ὑπολογίζομεν τὴν δύναμιν $1{,}06^{39}$. Πρὸς τοῦτο θέτοθεν $y=1{,}06^{39}$ καὶ ἔχομεν

$$λογy=39\,.\,λογ1{,}06=39\;0{,}02531=0{,}98700 \quad ἄρα \quad y=9{,}707.$$

Ἐπειδὴ $1{,}06^{39}=9{,}707$, ἡ ἰσότης (2) γράφεται

$$Σ=\frac{300\,000\,.\,8{,}707}{0{,}06}=43535000.$$

Ὥστε ἡ τελευταία δόσις θὰ εἶναι

$$Σ-Σ=43682000-43535000=147\,000 \text{ δρχ.}$$

Ἀσκήσεις. 2148. Ἔμπορος ἐδανείσθη 4526000 δρχ. πρὸς 3,5 ο]ο. Πόσας χρεωλυτικὰς δόσεις τῶν 140 χιλ. δραχ. πρέπει νὰ πληρώσῃ διὰ νὰ ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος του ;

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΙΝ ΕΠΙ ΤΟΥ ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΥ—ΙΣΩΝ ΚΑΤΑΘΕΣΕΩΝ—ΧΡΕΩΛΥΣΙΑΣ

Α΄ Ὁμάς. 2149. Ἕνα κεφάλαιον 120 χιλιάδων δραχμῶν κατετέθη μὲ ἀνατοκισμὸν πρὸς 5 ο|ο ἐπὶ 8 ἔτη. Ποῖον κεφάλαιον πρέπει νὰ καταθέσωμεν πρὸς 5,5 ο|ο, μὲ ἁπλοῦν τόκον διὰ νὰ λάβωμεν τὸν αὐτὸν τόκον εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον ;

2150. Δύο κεφάλαια, τὰ ὁποῖα διέφερον κατὰ 3930 δρχ., κατετέθησαν μὲ ἀνατοκισμόν, τὸ μὲν μεγαλύτερον πρὸς 3,35 ο|ο, τὸ δὲ μικρότερον πρὸς 5,25 ο|ο. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κεφάλαια, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι μετὰ 40 ἔτη τὸ μικρότερον ἔγινε διπλάσιον τοῦ μεγαλυτέρου.

2151. Θεῖος θέλει νὰ μοιράσῃ 6 ἑκατομμύρια δρχ. εἰς τοὺς τρεῖς ἀνεψιούς του ἡλικίας 5, 9, 11 ἐτῶν, εἰς τρόπον ὥστε νὰ λάβουν τὸ αὐτὸ ποσόν, κατὰ τὸ 21ον ἔτος τῆς ἡλικίας των, ἂν ἀνατοκίσουν τὰ χρήματά των πρὸς 5 ο|ο, Πόσα θὰ λάβῃ ἕκαστος ;

2152. Δύο κεφάλαια 500 χιλ. δραχμῶν καὶ 1200000 δρχ. ἀνατοκιζονται τὸ μὲν πρῶτον πρὸς 5 ο|ο καὶ τὸ δεύτερον πρὸς 4 ο|ο. Μετὰ πόσον χρόνον θὰ γίνουν ἴσα ;

2153. Δανείζει τις δι' 6 ἔτη μὲ ἀνατοκισμὸν κατ'. ἔτος πρὸς 5 ο|ο τὸ κεφάλαιον τῶν 284000 δρχ. Ἐπὶ πόσον χρόνον ἔπρεπε νὰ δανείσῃ τὸ αὐτὸ κεφάλαιον πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον μὲ ἁπλοῦν τόκον, διὰ νὰ πραγματοποιήσῃ τὴν αὐτὴν αὔξησιν τοῦ κεφαλαίου του.

2154. Ἕνα κεφάλαιον ἀνατοκιζόμενον κατ' ἔτος γίνεται μετὰ 3 ἔτη 562500 δρχ. μετὰ ἄλλα δὲ δύο ἔτη ἀκόμη γίνεται 608400 δραχ. Ποῖον εἶναι τὸ ἐπιτόκιον ;

2155. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον πρέπει νὰ τοκίσωμεν 100 χιλιάδ. δραχ. μὲ ἁπλοῦν τόκον διὰ νὰ λάβωμεν μετὰ 6 ἔτη τὸ αὐτὸ ποσὸν ποὺ θὰ ἐλαμβάνομεν, ἐὰν ἀνετοκίζομεν τὸ αὐτὸ ποσὸν πρὸς 4 ο|ο κατὰ τὸν αὐτὸν χρόνον.

2156. Ἕνα κεφάλαιον 400 χιλιάδων δραχμῶν εἶχε τοκισθῆ μὲ ἀνατοκισμόν. Ἐὰν τὸ κεφάλαιον αὐτὸ ἔμενε τοκισμένον ἐπὶ ἕνα ἔτος ὀλιγώτερον θὰ εἰσεπράττομεν 22 050 δρχ. ὀλιγώτερον· ἐὰν τοὐναντίον, ἔμενε ἐπὶ ἕνα ἔτος περισσότερον θὰ εἰσεπράττομεν 23152,50 δρχ. περισσότερον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐπιτόκιον καὶ ὁ χρόνος κατὰ τὸν ὁποῖον ἔμεινεν τοκισμένον. (Σχολὴ Δοκίμων)

2157. Ἕνα κεφάλαιον 50 χιλ. δρχ. εἶχε κατατεθῆ μὲ ἀνατοκισμόν. Ἐὰν τὸ κεφάλαιον αὐτὸ ἔμενε τοκισμένον ἐπὶ 2 ἔτη ὀλιγώτερον θὰ εἰσεπράττομεν 4412,93 δρχ, ὀλιγώτερον· ἐὰν τοὐναντίον ἔμενεν τοκισμένον ἐπὶ 2 ἔτη περισσότερον θὰ εἰσεπράττομεν 4773 δρχ. περισσότερον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐπιτόκιον καὶ ὁ χρόνος τῆς καταθέσεως. (Ἀνωτάτη Γεωπονικὴ Σχολὴ 1934)

2158. Ἔμπορος, ὁ ὁποῖος ἔχει δύο κεφάλαια τῶν 600 χιλ. δρχ. καὶ τῶν 500 χιλ. δρχ. ὑπολογίζει, ὅτι ἐὰν καταθέσῃ τὸ μεγαλύτερον κεφάλαιον μὲ τὸ μεγαλύτερον ἐπιτόκιον καὶ τὸ μικρότερον κεφάλαιον μὲ τὸ μικρότερον ἐπιτόκιον, θὰ λάβῃ μετὰ 4 ἔτη 1314130 δρχ.· ἐνῷ ἐὰν καταθέσῃ τὸ μεγαλύτερον κεφάλαιον μὲ τὸ μικρότερον ἐπιτόκιον καὶ τὸ μικρότερον κεφάλαιον μὲ τὸ μεγαλύτερον ἐπιτόκιον, θὰ λάβῃ μόνον 1309670 δραχ. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐπιτόκια τῶν δύο αὐτῶν κεφαλαίων.

2159. Κατέθετε τις εἰς τὴν ἀρχὴν ἑκάστου ἔτους καὶ ἐπὶ ν ἔτη τὰ ποσὰ α, αx, αx^2 . . . μὲ ἀνατοκισμὸν πρὸς 100τ ο|ο. Πόσα θὰ λάβῃ μετὰ ν ἔτη ; (Ἐφαρμογή : $\alpha=1000$, $x=1{,}25$, $\tau=0{,}05$, $\nu=20$).

2160. Ἐδανείσθη τις 100 χιλιάδας δραχμάς, τὰς ὁποίας θὰ ἐξοφλήσῃ διὰ δύο χρεωλυτικῶν δόσεων τῶν 52760 δραχ. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐδανείσθη τὰ χρήματα ;

2161. Ἐδανείσθη τις 40 ἑκατομμύρια δραχμῶν διὰ νὰ ἀγοράσῃ μίαν οἰκιαν. Ἡ καθαρὰ πρόσοδος τοῦ ἀκινήτου εἶναι 300 χιλ. δρχ. Ἀπὸ τὸ ποσὸν αὐτὸ διαθέτει ἐτησίως 240 χιλ. πρὸς ἐξόφλησιν τοῦ χρέους του. Μετὰ πόσα ἔτη θὰ ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος του, ἐὰν τὸ ἐπιτόκιον εἶναι 4,5 ο|ο.

2162. Ἕνας κτηματίας ἐδανείσθη 4500000 δραχ. διὰ 50 ἔτη. Κατὰ τὴν διάρκειαν τῶν 20 πρώτων ἐτῶν ἔδωσε εἰς τὸν δανειστήν του 2 245 000 δραχ. Πόσον χρεωλύσιον πρέπει νὰ πληρώνῃ κατὰ τὰ ὑπόλοιπα 30 ἔτη ;

2163. Ἑνὰς ἔμπορος ἐδανείσθη α δρχ. μὲ τόκον τ τῆς 1 δρχ. εἰς ἕνα ἔτος. Πόσον χρεωλύσιον πρέπει νὰ πληρώνῃ ἐτησίως, ἵνα μετὰ ν ἔτη ἐλαττωθῇ τὸ χρέος του κατὰ τὸ ἥμισυ. (Ἐφαρμογή : τ=0,05, ν=50).

2164 Ἕνας ἐργάτης κατέθετε εἰς τὴν ἀρχὴν ἑκάστου ἔτους 600 χιλιάδας δρχ. καὶ ἐπὶ 20 ἔτη πρὸς 4 ο|ο. Ἕνα ἔτος μετὰ τὴν τελευταίαν κατάθεσιν ἀπέσυρε 1 200 000 δρχ. καὶ ἐξηκολούθει νὰ ἀποσύρῃ ἐπὶ 10 ἔτη 1 200 000 δρχ. Νὰ ὑπολογισθῇ τί ποσὸν δικαιοῦται νὰ λάβῃ ἀκόμη ;

2165. Τὴν 1 Ἰανουαρίου ἑκάστου ἔτους καὶ ἐπὶ 25 ἔτη συνεχῶς ἀπὸ τοῦ 1916 κατέθετε τις 345000 δρχ. εἰς μίαν Τράπεζαν μὲ ἀνατοκισμὸν πρὸς 4 ο|ο. Ποῖον κεφάλαιον πρέπει νὰ πληρώσῃ εἰς τὸν καταθέτην ἡ Τράπεζα εἰς τὸ τέλος τῶν 25 ἐτῶν. 2ον. Ὁ καταθέτης ὅμως, ἀντὶ νὰ λάβῃ τὰ χρήματά του ἐφ' ἅπαξ ἐπιθυμεῖ νὰ ἀποσύρῃ ἐτησίως ἐπὶ 10 ἔτη ἴσα ποσά, ἀρχῆς γενομένης ἀπὸ τὴν 31 Δεκεμβρίου 1945. Ποῖον ποσὸν δικαιοῦται νὰ λαμβάνῃ ἐτησίως ἀπὸ τὴν Τράπεζαν, ἐὰν τὸ ἐπιτόκιον εἶναι πάλιν 4 ο|ο ·

2166. Θεῖος θέλει νὰ μοιράσῃ 41 ἑκατομ. δρχ. μεταξὺ τῶν δύο ἀνεψιῶν του ἡλικίας 14 ἐτῶν καὶ 10 ἐτῶν εἰς τρόπον, ὥστε νὰ λάβουν τὸ αὐτὸ ποσὸν κατὰ τὸ 21ον ἔτος τῆς ἡλικίας των, ἂν τοκίσουν τὰ μερίδιά των μὲ ἁπλοῦν τόκον πρὸς 5 ο|ο καὶ ἐὰν γνωρίζωμεν ὅτι κάθε ἀνεψιὸς πρέπει νὰ πληρώνῃ ἐτησίως 300 χιλ. δι' ἔξοδα σπουδῶν. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μερίδιον κάθε ἀνεψιοῦ καὶ τὸ ποσὸν τὸ ὁποῖον θὰ εἰσπράξῃ κάθε ἀνεψιὸς κατὰ τὴν ἐνηλικίωσίν του. Νὰ λυθῇ τὸ αὐτὸ πρόβλημα, ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ κατάθεσις γίνεται μὲ ἀνατοκισμὸν πρὸς 5 ο|ο.

2167. Ἐδανείσθη τις τὴν 1ην Ἀπριλίου 1925 2 000 000 δραχ. ἐξοφλητέας χρεωλυτικῶς ἐντὸς 20 ἐτῶν πρὸς 6 ο|ο. Κατέβαλε κανονικῶς τὰ μέχρι τοῦ 1939 χρεωλύσια, ἐπιθυμεῖ δὲ τὴν 1ην Ὀκτωβρίου 1940 νὰ ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος του τελείως. Τί ποσὸν θὰ χρειασθῇ ;

2168. Μία Κοινότης ἐδανείσθη ἕνα ποσὸν πρὸς 4 ο|ο μὲ τὴν συμφωνίαν νὰ πληρώνῃ ἐπὶ 10 ἔτη χρεωλύσιον 15 ἑκατ. δρχ. ἐτησίως. Πόσον εἶναι τὸ δανεισθὲν ποσόν, ἐὰν ἡ χρεωλυτικὴ ἐξόφλησις ἤρχισε 3 ἔτη μετὰ τὴν σύναψιν τοῦ δανείου ;

2169. Χρέος 15 ἑκατ. δραχ. πρέπει νὰ ἐξοφληθῇ διὰ 20 ἐτησίων δόσεων, ἀρχομένων 5 ἔτη μετὰ τὴν σύναψιν τοῦ δανείου. Πόσον θὰ εἶναι τὸ χρεωλύσιον, ἐὰν τὸ ἐπιτόκιον εἶναι 4,5 ο|ο ;

2170. Ἔμπορος κατέθετεν ἐπὶ 8 συνεχῆ ἔτη πρὸς 4 ο|ο καὶ εἰς τὴν ἀρχὴν ἑκάστου ἔτους ἕνα ποσὸν καὶ εἰσέπραξε 5 ἔτη μετὰ τὴν καταβολὴν τῆς τελευταίας καταθέσεως 25 ἑκατ. δραχ. Πόση ἦτο ἡ κατάθεσις ;

2171. Καταθέτομεν εἰς μίαν Τράπεζαν καὶ εἰς τὴν ἀρχὴν ἑκάστου ἔτους 75 ἑκατ. δραχ. ἐπὶ 8 ἔτη πρὸς 5 ο|ο. Πόσα θὰ εἰσπράξωμεν εἰς τὸ τέλος τοῦ δωδεκάτου ἔτους ἀπὸ τῆς πρώτης καταθέσεως ;

2172. Ἔμπορος δικαιοῦται νὰ εἰσπράξῃ μετὰ 4 ἔτη 20 ἑκατ. δραχ. Ἀντὶ τούτου ἐπιθυμεῖ νὰ εἰσπράττῃ εἰς τὸ τέλος ἑκάστου τῶν 4 ἐτῶν τὸ αὐτὸ ποσόν. Πόσον πρέπει νὰ εἰσπράττῃ κατ' ἔτος, ἐὰν τὸ ἐπιτόκιον εἶναι 6 ο|ο ;

2173. Ἐδανείσθη τις μὲ ἀνατοκισμὸν 2000000 δρχ. πρὸς 4 ο|ο μὲ τὴν ὑπόσχεσιν νὰ ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος του διὰ 10 τοκοχρεωλυτικῶν ἴσων δόσεων. 1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ χρεωλύσιον, ἐὰν ἡ πρώτη δόσις ἀρχίσῃ 3 ἔτη μετὰ τὴν σύναψιν τοῦ δανείου.

2174. Μία ἑταιρία ἐδανείσθη 20 000 000 δρχ. μὲ τὴν ὑποχρέωσιν νὰ ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος αὐτὸ ἐντὸς 20 ἐτῶν δι' ἴσων ἑξαμηνιαίων δόσεων καὶ μὲ ἐπιτόκιον 3 ο|ο καθ' ἑξαμηνίαν. Δέκα ἔτη μετὰ τὴν σύναψιν τοῦ δανείου εὑρέθη ἕνα πιστωτικὸν ἵδρυμα, τὸ ὁποῖον προσεφέρθη νὰ δανείσῃ εἰς τὴν ἑταιρείαν πρὸς 5 ο|ο ἐτησίως τὸ ἀναγκαιοῦν ποσὸν πρὸς ἐξόφλησιν τοῦ πρώτου δανείου, μὲ ἐπιβάρυνσιν, λόγῳ προμηθείας 1 ο|ο ἐπὶ τοῦ ἀπομείναντος πρὸς ἐξόφλησιν ποσοῦ. Ἡ ἑταιρεία ἐδέχθη καὶ συνῆψε ἕνα νέον δάνειον πληρωτέον διὰ 20 ἐτησίων δόσεων. Νὰ εὑρεθῇ 1ον. Πόσον πρέπει νὰ πληρώσῃ πρὸς ἐξόφλησιν τοῦ πρώτου δανείου καὶ 2ον Πόση εἶναι ἡ τοκοχρεωλυτικὴ δόσις τοῦ δευτέρου δανείου.

2175. Καταθέτει τις μὲ ἀνατοκισμὸν εἰς μίαν Τράπεζαν α δραχμὰς εἰς τὴν ἀρχὴν ἑκάστου ἔτους πρὸς 2,5 ο|ο μὲ τὴν συμφωνίαν ἀφοῦ κάμῃ ν καταθέσεις νὰ ἀρχίσῃ νὰ λαμβάνῃ ἕνα ἔτος μετὰ τὴν τελευταίαν κατάθεσιν 2α δραχμὰς ἐτησίως ἐπὶ 2ν ἔτη. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ν.

2176. Κατέθεσέ τις εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ πρώτου ἔτους α δραχμάς εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ δευτέρου ἔτους $\alpha+\beta$ δραχμάς, εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ τρίτου ἔτους $\alpha+2\beta$ δρχ. κ.ο.κ. Νὰ ὑπολογισθῇ πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ μετὰ ν ἔτη, ἐὰν αἱ καταθέσεις γίνωνται μὲ ἀνατοκισμόν, καὶ ἐὰν ὁ ἐτήσιος τόκος τῆς 1 δρχ. εἶναι τ δραχμαί. (Ἐφαρμογή : $\alpha=100\,000$, $\beta=50000$, $\nu=0{,}05$, $\nu=21$).

2177. Ἐδανείσθη τις ἕνα ποσὸν α δραχμῶν μὲ τὴν ὑπόσχεσιν νὰ ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος διὰ δύο δόσεων ἐκ. β δραχμῶν ἑκάστην· ἡ πρώτη δόσις θὰ πληρωθῇ εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου ἔτους καὶ ἡ δευτέρα εἰς τὸ τέλος τοῦ δευτέρου ἔτους. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ὑπελογίσθη τὸ δάνειον, ἐὰν ὁ δανεισμὸς ἔγινε μὲ ἀνατοκισμόν ; (Διερεύνησις)

2178. Καταθέτομεν εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ πρώτου ἔτους α δραχμάς· ἔπειτα εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ δευτέρου ἔτους $\alpha\omega$ δρ. εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ τρίτου ἔτους $\alpha\omega^2$ καὶ οὕτω καθεξῆς. Νὰ εὑρεθῇ ποῖον ποσὸν θὰ λάβωμεν μετὰ ν ἔτη, ἂν αἱ καταθέσεις γίνωνται μὲ ἀνατοκισμόν, καὶ ἐὰν ὁ ἐτήσιος τόκος τῆς 1 δραχμῆς εἶναι τ δραχμαί. (Ἐφαρμογή : $\alpha=100000$, $\omega=12{,}5$, $\tau=0{,}05$, $\tau=20$.

2179. Ἕνα πρόσωπον ὑποχρεοῦται νὰ καταβάλῃ εἰς μίαν ἀσφαλιστικὴν ἑταιρείαν ν δόσεις ἴσας πρὸς α ἑκάστην, ὑπὸ τὸν ὅρον, ὅτι ἡ ἑταιρεία θὰ πληρώνῃ εἰς αὐτὸ κατὰ τὰ 2ν ἑπόμενα ἔτη β δραχμὰς ἐτησίως ἡ πρώτη ἐκ τῶν πληρωμῶν αὐτῶν θὰ γίνῃ μετὰ τὴν τελευταίαν κατάθεσιν τῶν α δραχμῶν. Αἱ καταθέσεις καὶ αἱ πληρωμαὶ γίνονται μὲ ἀνατοκισμὸν πρὸς τ δραχμὰς τὸν ἐτήσιον τόκον τῆς 1 δραχμῆς. Ζητεῖται : 1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λόγος $\frac{\alpha}{\beta}$. 2ον. Νὰ ὁρισθῇ ἡ τιμὴ τοῦ ν, ἵνα ὁ λόγος $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι ἴσος μὲ τὸ λ.

Ἐφαρμογή : $\tau = 0{,}025$, $\lambda = \frac{1}{2}$.

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'
ΙΔΙΟΤΗΣΕΣ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΑΥΤΩΝ

ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

536. **Ὁρισμοί.** Ἕνα ἀκέραιον πολυώνυμον, τὸ ὁποῖον περιέχει τὰ γράμματα x, y, ω, εἶναι τὸ ἄθροισμα μονωνύμων τῆς μορφῆς $Ax^{\mu} y^{\nu} \omega^{\rho}$, ὅπου Α εἶναι ἕνας ἀλγεβρικὸς ἀριθμός, θετικὸς ἢ ἀρνητικὸς καὶ οἱ μ, ν, ρ εἶναι ἀκέραιοι ἐκθέται θετικοὶ ἢ μηδέν.

Τὰ γράμματα x, y, ω, τὰ ὁποῖα δύνανται νὰ λάβουν οἱανδήποτε ἀριθμητικὴν τιμὴν λέγονται ***μεταβληταί.***

Ἕνα ἀκέραιον πολυώνυμον παρίσταται συνήθως μὲ ἕνα ἀπὸ τὰ γράμματα π, φ, f, σ, . . . ἀκολουθούμενον ὑπὸ τῶν μεταβλητῶν, οἱ ὁποῖοι τίθενται ἐντὸς παρενθέσεως.

Π.χ. Π(x) παριστάνει ἕνα πολυώνυμον τῆς μεταβλητῆς x.
φ(x,y) παριστάνει ἕνα πολυώνυμον μὲ δύο μεταβλητὰς x,y.
f(x,y,ω) παριστάνει ἕνα πολυώνυμον μὲ τρεῖς μεταβλητὰς x,y,ω

Παριστάνομεν μὲ Π(α), φ(α,β), f(α,β,γ) . . . τὰς **ἀριθμητικὰς τιμάς,** **ποὺ λαμβάνουν τὰ πολυώνυμα αὐτά,** ὅταν ἀντικαταστήσωμεν τὰς μεταβλητὰς x,y,ω ἀντιστοίχως μὲ τοὺς ἀριθμοὺς α, β, γ.

Λέγομεν, ὅτι ἕνα πολυώνυμον τῶν x, y, ω εἶναι ***ἐκ ταυτότητος μηδέν,*** ὅταν λαμβάνῃ μίαν ἀριθμητικὴν τιμὴν μηδέν, οἱαιδήποτε καὶ ἂν εἶναι αἱ ἀριθμητικαὶ τιμαί, τὰς ὁποίας δίδομεν αὐθαιρέτως εἰς τὰ γράμματα x, y, ω.

Λέγομεν ὅτι δύο ἀκέραια πολυώνυμα Π καὶ Π', τὰ ὁποῖα περιέχουν τὰ αὐτὰ γράμματα x, y, ω, εἶναι ***ἐκ ταυτότητος ἴσα***, ὅταν λαμβάνουν τὰς αὐτὰς ἀριθμητικὰς τιμάς, τὰς ὁποίας δίδομεν εἰς τὰ γράμματα x, y, ω.

537. **Θεώρημα Ι.** ***Ὅταν ἕνα ἀκέραιον πολυώνυμον*** φ(x) ***εἶναι διαιρετὸν, χωριστά, διὰ τῶν δυωνύμων*** x—α, x—β, x—γ, . . .

ὅπου α, β, γ, . . . εἶναι ἀριθμοὶ διάφοροι μεταξύ των, τὸ πολυώνυμον $\varphi(x)$ ***εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ γινομένου*** $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$.

Βλέπε ἀπόδειξιν θεωρήματος καὶ ἐφαρμογὰς αὐτοῦ εἰς § 161.

* *538.* Πόρισμα. *Ἐὰν ἕνα ἀκέραιον πολυώνυμον*

$$\varphi(x)=A_0x^\mu+A_1x^{\mu-1}+A_2x^{\mu-2}+\ldots+A_{\mu-1}x+A_\mu$$

μηδενίζεται διὰ μ ***διαφόρους τιμὰς τοῦ*** x***, ἔστω τὰς*** $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$ ***τὸ πολυώνυμον αὐτὸ εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον***

$$A_0(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots(x-\lambda).$$

Βλέπε ἀπόδειξιν τοῦ πορίσματος εἰς § 163.

539. Θεώρημα ΙΙ. ***Ἐὰν ἕνα ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ*** x ***εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν, ὅλοι οἱ συντελεσταί του εἶναι μηδέν.***

Ἔστω τὸ πολυώνυμον

$$\Pi(x)=A_0x^\mu+A_1x^{\mu-1}+A_2x^{\mu-2}+\ldots+A_{\mu-1}x+A_\mu$$

τὸ ὁποῖον ἐξ ὑποθέσεως εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν, δηλ. εἶναι

$$\Pi(x)=A_0x^\mu+A_1x^{\mu-1}+A_2x^{\mu-2}+\ldots+A_{\mu-1}x+A_\mu\equiv 0. \quad (1)$$

Θὰ δείξωμεν, ὅτι $A_0=0,\ A_1=0,\ A_2=0, \ldots, A_\mu=0$.

Ἐπειδὴ τὸ πολυώνυμον $\Pi(x)$ εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν, δηλ. εἶναι μηδὲν διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x, θὰ εἶναι μηδὲν καὶ διὰ $x=0$, ὁπότε ἡ (1) γίνεται $\Pi(0)=0+A_\mu\equiv 0$, ἄρα $A_\mu=0$.

Ἂν $A_\mu=0$, τὸ δοθὲν λοιπὸν πολυώνυμον γίνεται

$$\Pi(x)=A_0x^\mu+A_1x^{\mu-1}+A_2x^{\mu-2}+\ldots+A_{\mu-2}x^2+A_{\mu-1}x=0.$$

Θέτομεν τὸν x ὡς παράγοντα καὶ ἔχομεν

$$\Pi(x)\equiv x(A_0x^{\mu-1}+A_1x^{\mu-2}+A_2x^{\mu-3}+\ldots+A_{\mu-2}x+A_{\mu-1})\equiv 0.$$

Διὰ νὰ εἶναι τὸ γινόμενον αὐτὸ ἐκ ταυτότητος μηδέν, πρέπει ὁ ἕνας ἐκ τῶν παραγόντων νὰ εἶναι ἴσος μὲ μηδέν. Ἐκ τῶν δύο παραγόντων ὁ πρῶτος μηδενίζεται μόνον διὰ τὴν τιμὴν $x=0$. Πρέπει λοιπὸν ὁ δεύτερος παράγων νὰ εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν· δηλαδὴ πρέπει νὰ εἶναι

$$A_0x^{\mu-1}+A_1x^{\mu-2}+A_2x^{\mu-3}+\ldots+A_{\mu-1}\equiv 0. \quad (2)$$

Ἐπειδὴ τὸ πολυώνυμον αὐτὸ πρέπει νὰ εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδὲν διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x, θὰ εἶναι μηδὲν καὶ διὰ $x=0$ ὁπότε τὸ πολυώνυμον (2) γίνεται $0+A_{\mu-1}\equiv 0$ ἢ $A_{\mu-1}=0$.

Ἐργαζόμενοι ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι ὅλοι οἱ συντελεσταὶ εἶναι μηδέν.

540. Θεώρημα ΙΙΙ. ***Ἐὰν ἕνα ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ*** x***, βαθμοῦ*** μ***, μηδενίζεται διὰ*** $\mu+1$ ***διαφόρους τιμὰς τοῦ*** x***, τὸ πολυώνυμον τοῦτο εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν.***

Ἔστω $\Pi(x)=Ax^\mu+A_1x^{\mu-1}+A_2x^{\mu-2}+\ldots+A_\mu$ ἕνα ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ x, τὸ ὁποῖον μηδενίζεται διὰ τὰς $\mu+1$ διαφόρους τιμὰς τοῦ x, ἤτοι διὰ $x=\alpha$, $x=\beta, \ldots x=\lambda$, $x=\rho$.

Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ πολυώνυμον τοῦτο εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν, δηλ. οἱ συντελεσται ὅλων τῶν δυνάμεων τοῦ x καὶ ὁ ἀνεξάρτητος ὅρος εἶναι μηδέν· ἤτοι θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$A=0, \quad A_1=0, \quad A_2=0, \ldots, \quad A_\mu=0.$$

Πράγματι· ἐπειδὴ τὸ Π(x) μηδενίζεται διὰ τὰς μ διαφόρους τιμὰς $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$, τοῦ x ἕπεται, ὅτι τοῦτο δύναται (§ 539), νὰ λάβῃ τὴν μορφὴν

$$\Pi(x)\equiv A(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots(x-\lambda). \qquad (1)$$

Ἐὰν εἰς τὴν ταυτότητα (1) ἀντικαταστήσωμεν τὸ x διὰ τοῦ ρ θὰ ἔχωμεν $\Pi(\rho)\equiv A(\rho-\alpha)(\rho-\beta)(\rho-\gamma)\ldots(\rho-\lambda)$. (2)

Ἐπειδὴ ὅμως ἐξ ὑποθέσεως τὸ Π(x) μηδενίζεται διὰ $x=\rho$ ἕπεται, ὅτι θὰ εἶναι $\Pi(\rho)=0$ καὶ ἑπομένως ἡ (2) γράφεται

$$0=A(\rho-\alpha)(\rho-\beta)(\rho-\gamma)\ldots(\rho-\lambda).$$

Διὰ νὰ εἶναι τὸ γινόμενον τοῦτο ἴσον μὲ τὸ μηδὲν πρέπει ἕνας τουλάχιστον ἐκ τῶν παραγόντων του νὰ ἰσοῦται μὲ μηδέν. Ἐπειδὴ ὅμως οἱ παράγοντες $(\rho-\alpha)$ $(\rho-\beta), \ldots, (\rho-\lambda)$ εἶναι διάφοροι τοῦ μηδενός, διότι ἐξ ὑποθέσεως αἱ τιμαὶ $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda, \rho$, εἶναι διάφοροι μεταξύ των, ἕπεται, ὅτι πρέπει νὰ εἶναι ἴσος μὲ μηδὲν ὁ παράγων A, ἤτοι πρέπει νὰ εἶναι $A=0$,

Διὰ $A=0$, τὸ δοθὲν πολυώνυμον γίνεται

$$\Pi(x)\equiv A_1x^{\mu-1}+A_2x^{\mu-2}+\ldots+A_\mu. \qquad (3)$$

Ἐργαζόμενοι ὁμοίως καὶ εἰς τὸ πολυώνυμον (3) ἀποδεικνύομεν ὅτι $A_1=0$. Ἐξακολουθοῦντες κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον εὑρίσκομεν διαδοχικῶς, ὅτι $A_2=0$, $A_3=0, \ldots, A_\mu=0$.

Παράδειγμα. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ πολυώνυμον

$$\Pi(x)\equiv(x-\alpha)^2(\beta-\gamma)+(x-\beta)^2(\gamma-\alpha)+(x-\gamma)^2(\alpha-\beta)+(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$$

εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν.

Τὸ δοθὲν πολυώνυμον, διὰ $x=\alpha$, γίνεται

$$\Pi(\alpha)=(\alpha-\alpha)(\beta-\gamma)+(\alpha-\beta)^2(\gamma-\alpha)+(\alpha-\gamma)^2(\alpha-\beta)+(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$$
$$=0+(\alpha-\beta)(\gamma-\alpha)[(\alpha-\beta)+(\gamma-\alpha)+(\beta-\gamma)]$$
$$=(\alpha-\beta)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta+\gamma-\alpha+\beta-\gamma)=0.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ δοθὲν πολυώνυμον μηδενίζεται καὶ διὰ $x=\beta$ καὶ διὰ $x=\gamma$.

Ἐπειδὴ τὸ Π(x) εἶναι δευτέρου βαθμοῦ πρὸς x καὶ μηδενίζεται διὰ τιμὰς τοῦ x πλείονας τοῦ βαθμοῦ του ἕπεται, ὅτι τὸ Π(x) εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν.

541. Θεώρημα IV. ***Ἐὰν δύο ἀκέραια πολυώνυμα τοῦ x***

εἶναι ἐκ ταυτότητος ἴσα, οἱ συντελεσταὶ τῶν ὅρων τῶν αὐτῶν δυνάμεων τοῦ x καὶ οἱ γνωστοὶ ὅροι εἶναι ἴσοι.

Ἔστωσαν τὰ ἀκέραια πολυώνυμα

$$Ax^{\mu}+A_1x^{\mu-1}+A_2x^{\mu-2}+\ldots+A_{\mu}$$
$$Bx^{\mu}+B_1x^{\mu-1}+B_2x^{\mu-2}+\ldots+B_{\mu}$$

τὰ ὁποῖα εἶναι ἐκ ταυτότητος ἴσα, ἤτοι εἶναι

$$Ax^{\mu}+A_1x^{\mu-1}+A_2x^{\mu-2}\ldots+A_{\mu}\equiv Bx^{\mu}+B_1x^{\mu-1}+B_2x^{\mu-2}+\ldots+B_{\mu} \quad (1)$$

Θὰ δείξωμεν, ὅτι εἶναι

$$A=A,\quad A_1=B_1,\quad A_2=B\,,\ \ldots,\ A_{\mu}=B_{\mu},$$

Πράγματι· ἐὰν μεταφέρωμεν ὅλους τοὺς ὅρους τῆς ταυτότητος (1) εἰς τὸ πρῶτον μέλος καὶ κάμωμεν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων, θὰ ἔχωμεν

$$(A-B)x^{\mu}+(A_1-B_1)x^{\mu-1}+(A_2-B_2)x^{\mu-2}+\ldots+(A_{\mu}-B_{\mu})\equiv 0.$$

Ἐπειδὴ τὸ πολυώνυμον αὐτὸ εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν, ὅλοι οἱ συντελεσταί του εἶναι μηδὲν (§ 539)· ἤτοι εἶναι

$$A-B=0,\quad A_1-B_1=0\quad A_2-B_2=0,\ \ldots\ A_{\mu}-B_{\mu}=0$$

ἐκ τῶν ὁποίων εὑρίσκομεν

$$A=B,\quad A_1=B_1,\quad A_2=B_2,\ \ldots\ A_{\mu}=B_{\mu}.$$

Παράδειγμα. Ἐὰν τὰ πολυώνυμα

$$5x^3-x+6 \quad \text{καὶ} \quad \alpha x^4+\beta x^3+2\gamma x^2+\delta x+\varepsilon$$

εἶναι ἐκ ταυτότητος ἴσα, θὰ εἶναι

$$\alpha=0,\quad \beta=5,\quad \gamma=0,\quad \delta=-1,\quad \varepsilon=6.$$

542. **Πόρισμα.** ***Διὰ νὰ εἶναι τὸ πηλίκον δύο ἀκεραίων πολυωνύμων x ἴσον μὲ μίαν σταθεράν, διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x, πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὰ δύο πολυώνυμα νὰ εἶναι τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ καὶ οἱ συντελεσταί των νὰ εἶναι ἀνάλογοι.***

Ἔστω ὅτι τὸ πηλίκον $\frac{\alpha x^2+\beta x+\gamma}{\alpha' x^2+\beta' x+\gamma'}$ εἶναι ἴσον μὲ μίαν σταθερὰν k, διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x· δηλ. ἔστω, ὅτι εἶναι

$$\frac{\alpha x^2+\beta x+\gamma}{\alpha' x^2+\beta' x+\gamma'}\equiv k \quad \text{ἢ} \quad \alpha x^2+\beta x+\gamma\equiv\alpha' kx^2+\beta' kx+\gamma' k. \qquad (1)$$

Διὰ νὰ ὑφίσταται ἡ σχέσις (1) πρέπει (§ 541) οἱ συντελεσταὶ τῶν αὐτῶν δυνάμεων τοῦ x καὶ οἱ γνωστοὶ ὅροι νὰ εἶναι ἴσοι δηλ. πρέπει νὰ εἶναι $\alpha=\alpha' k,\ \beta=\beta' k,\ \gamma=\gamma' k.$

Ἀπὸ τὰς σχέσεις αὐτὰς λαμβάνομεν

$$\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}=\frac{\gamma}{\gamma'}=k \qquad (2)$$

δηλ. οἱ συντελεσταὶ τῶν δύο πολυωνύμων

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma \quad \text{καὶ} \quad \alpha' x^2+\beta' x+\gamma'$$

εἶναι ἀνάλογοι

Ἀντιστρόφως. Ἐὰν ὑφίσταται ἡ σχέσις (2) θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ πηλίκον $\frac{\alpha x^2+\beta x+\gamma}{\alpha' x^2+\beta' x+\gamma'}$ εἶναι ἴσον μὲ τὴν σταθερὰν k.

Πράγματι, ἀπὸ τὴν σχέσιν (2) λαμβάνομεν

$$\frac{\alpha x^2}{\alpha' x^2}=\frac{\beta x}{\beta' x}=\frac{\gamma}{\gamma'}=k. \qquad (3)$$

Κατὰ τὴν ἰδιότητα τῶν ἴσων κλασμάτων ἡ σχέσις (3) γράφεται

$$\frac{\alpha x^2+\beta x+\gamma}{\alpha' x^2+\beta' x+\gamma'}=k.$$

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Διὰ νὰ εἶναι τὸ πηλίκον . . . . .***

543. **Θεώρημα V.** ***Ἐὰν δύο ἀκέραια πολυώνυμα τοῦ x, βαθμοῦ μ, μηδενίζωνται διὰ μ διαφόρους τιμὰς τοῦ x, ἀλλὰ κοινὰς εἰς ἕκαστον τούτων, οἱ συντελεσταὶ τῶν ἀντιστοίχων ὅρων τῶν αὐτῶν δυνάμεων τοῦ x εἶναι ἀνάλογοι.***

Ἔστωσαν τὰ δύο ἀκέραια πολυώνυμα τοῦ x βαθμοῦ μ

$$\Pi(x)\equiv A_0 x^{\mu}+A_1 x^{\mu-1}+A_2 x^{\mu-2}+\dots+A_{\mu} \qquad (1)$$

καὶ $$\Pi'(x)\equiv A'_0 x^{\mu}+A'_1 x^{\mu-1}+A'_2 x^{\mu-2}+\dots+A'_{\mu} \qquad (2)$$

τὰ ὁποῖα μηδενίζονται διὰ τὰς διαφόρους τιμὰς α, β, γ, ... λ, τοῦ x. Θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$\frac{A_0}{A'_0}=\frac{A_1}{A'_1}=\frac{A_2}{A'_2}=\dots\dots=\frac{A_{\mu}}{A'_{\mu}}.$$

Πράγματι· ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὴν (1) ἐπὶ A'_0 καὶ τὴν (2) ἐπὶ A_0 καὶ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸ πρῶτον γινόμενον τὸ δεύτερον, θὰ ἔχωμεν

$$A'_0\Pi(x)-A_0\Pi'(x)\equiv(A'_0A_1-A_0A'_1)x^{\mu-1}+(A'_0A_2-A_0A'_2)x^{\mu-2}+$$
$$+\dots+(A'_0A_{\mu}-A_0A'_{\mu}).$$

Ἐπειδὴ τὸ πολυώνυμον $A'_0\Pi(x)-A_0\Pi'(x)$ εἶναι βαθμοῦ μ−1 καὶ μηδενίζεται διὰ μ διαφόρους τιμὰς τοῦ x, δηλ. διὰ πλείονας τοῦ βαθμοῦ του, ἕπεται (§ 540), ὅτι τοῦτο εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν. Ἑπομένως οἱ συντελεσταὶ τῶν ὅρων του θὰ εἶναι ἴσοι μὲ μηδέν ἤτοι θὰ εἶναι

$$A'_0A_1-A_0A'_1=0,\quad A'_0A_2-A_0A'_2=0,\dots,A'_0A_{\mu}-A_0A'_{\mu}=0$$

ἢ $$A'_0A_1=A_0A'_1,\quad A'_0A_2=A_0A'_2,\dots,A'_0A_{\mu}=A_0A'_{\mu}$$

ἐκ τῶν ὁποίων λαμβάνομεν

$$\frac{A_0}{A'_0}=\frac{A_1}{A'_1},\qquad \frac{A_0}{A'_0}=\frac{A_2}{A'_2},\dots\dots\frac{A_0}{A'_0}=\frac{A_{\mu}}{A'_{\mu}}$$

ἢ $$\frac{A_0}{A'_0}=\frac{A_1}{A'_1}=\frac{A_2}{A'_2}=\dots\dots=\frac{A_{\mu}}{A'_{\mu}}.$$

544. **Θεώρημα IV.** ***Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐὰν τὰ ἀκέραια πολυώνυμα***

$$A x^2+2Bxy+\Gamma y^2+2\Delta x+2Ey+Z$$
$$\alpha x^2+2\beta xy+\gamma y^2+2\delta x+2\varepsilon y+\zeta$$

εἶναι ἐκ ταυτότητος ἴσα, θὰ εἶναι

$$A=\alpha,\quad B=\beta,\quad \Gamma=\gamma,\quad \Delta=\delta,\quad E=\varepsilon,\quad Z=\zeta.$$

Ἐπειδὴ τὰ δοθέντα πολυώνυμα εἶναι ἐκ ταυτότητος ἴσα, θὰ ἔχωμεν

$$Ax^2+2Bxy+\Gamma y^2+2\Delta x+2Ey+Z\equiv \alpha x^2+2\beta xy+\gamma y^2+2\delta x+2\varepsilon y+\zeta$$

ἢ $$Ax^2+(2By+2\Delta)x+(\Gamma y^2+2Ey+Z)\equiv \alpha x^2+(2\beta y+2\delta)x+(\gamma y^2+2\varepsilon y+\zeta).$$

Ἐπειδὴ τὰ δύο αὐτὰ πολυώνυμα τοῦ x εἶναι ἐκ ταυτότητος ἴσα, οἱ συντελεσταὶ τῶν ὅρων τῶν αὐτῶν δυνάμεων τοῦ x καὶ οἱ ἀνεξάρτητοι τοῦ x ὅροι θὰ εἶναι ἴσοι ἤτοι θὰ εἶναι

$$A\equiv\alpha$$
$$2By+2\Delta\equiv 2\beta y+2\delta$$
$$\Gamma y^2+2Ey+Z\equiv\gamma y^2+2\varepsilon y+\zeta.$$

Αἱ δύο τελευταῖαι ταυτότητες εἶναι ἀκέραια πολυώνυμα τοῦ y ἐκ ταυτότητος ἴσα ἄρα θὰ εἶναι

$$2B=2\beta,\quad 2\Delta=2\delta,\quad \Gamma=\gamma,\quad 2E=2\varepsilon,\quad Z=\zeta$$

ἢ $$B=\beta,\quad \Delta=\delta,\quad \Gamma=\gamma,\quad E=\varepsilon,\quad Z=\zeta.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΩΝ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ ΤΩΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ
ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΕΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ

545. Πρόβλημα 1ον. Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ συντελεσταὶ α καὶ β εἰς τρόπον ὥστε τὸ πολυώνυμον $x^4-3x^3+\alpha x+\beta$ νὰ εἶνε διαιρετὸν διὰ τοῦ x^2-2x+4.

Α΄ μέθοδος. Ἐὰν τὸ δοθὲν πολυώνυμον εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ x^2-2x+4 θὰ δίδῃ, ὡς πηλίκον, ἕνα πολυώνυμον τοῦ δευτέρου βαθμοῦ και τῆς μορφῆς $x^2+\mu x+\nu$.

Ἐπειδὴ εἰς κάθε τελείαν διαίρεσιν, ὁ διαιρετέος εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον, θὰ ἔχωμεν τὴν ταυτότητα

$$x^4-3x^3+\alpha x+\beta\equiv(x^2-2x+4)(x^2+\mu x+\nu).$$

Ἐκτελοῦμεν πράξεις κλπ. εἰς τὸ δεύτερον μέλος τῆς ταυτότητος αὐτῆς καὶ λαμβάνομεν τὴν ταυτότητα

$$x^4-3x^3+\alpha x+\beta\equiv x^4+(\mu-2)x^3+(4-2\mu+\nu)x^2+(4\mu-2\nu)x+4\nu.$$

Διά νὰ ὑφίσταται ἡ ταυτότης αὕτη πρέπει (§ 541), οἱ συντελεσταὶ τῶν αὐτῶν δυνάμεων τοῦ x καὶ οἱ γνωστοὶ ὅροι νὰ εἶναι ἴσοι, δηλαδὴ πρέπει νὰ εἶναι

$$\left\{\begin{array}{rll} \mu-2= & -3 & \quad(1)\\ 4-2\mu+\nu= & 0 & \quad(2)\\ 4\mu-2\nu= & \alpha & \quad(3)\\ 4\nu= & \beta & \end{array}\right.$$

Ἀπὸ τὴν (1) εὑρίσκομεν $\mu=-1$. Θέτομεν εἰς τὴν (2) ἀντὶ τοῦ μ τὴν τιμήν του -1 καὶ εὑρίσκομεν $\nu=-6$. Τὰς τιμὰς τῶν μ καὶ ν θέτομεν εἰς τὰς (3) καὶ (4) καὶ εὑρίσκομεν $\alpha=8$ καὶ $\beta=-24$.

Πρέπει λοιπὸν νὰ εἶναι $\alpha=8$ καὶ $\beta=24$, διὰ νὰ εἶναι τὸ δοθὲν πολυώνυμον διαιρετὸν διὰ τοῦ x^2-2x+4. Τὸ πηλίκον θὰ εἶναι x^2-x-6.

Σημ. Ἡ ἀνωτέρω μέθοδος, διὰ τῆς ὁποίας προσδιορίζομεν τοὺς ἀγνώστους συντελεστὰς α, β, μ, ν, λέγεται ***μέθοδος τῶν προσδιοριστέων συντελεστῶν***.

Β΄ μέθοδος. Ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν τοῦ $x^4-3x^3+\alpha x+\beta$ διὰ τοῦ x^2-2x+4 εὑρίσκομεν πηλίκον x^2-x-6 καὶ ὑπόλοιπον

$$(\alpha-8)x+\beta+24=0.$$

Διὰ νὰ εἶναι διαιρετὸν τὸ δοθὲν πολυώνυμον διὰ τοῦ x^2-2x+4 πρέπει τὸ ὑπόλοιπον νὰ εἶναι μηδέν· δηλ. πρέπει νὰ εἶναι

$$(\alpha-8)x+\beta+24\equiv 0$$

Τὸ ὑπόλοιπον αὐτὸ εἶναι μηδὲν διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x, ἐὰν εἶναι

$$\alpha-8=0 \quad \text{καὶ} \quad \beta+24=0$$

δηλ. ἐὰν εἶναι $\alpha=8$ καὶ $\beta=-24$.

546. ***Πρόβλημα 2ον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ πολυωνύμου***

$$5x^4-2x^3+6x^2-4x+1 \;\; \textit{διὰ τοῦ} \;\; x^2-5x-1$$

χωρὶς νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ διαίρεσις.

Ἐπειδὴ ὁ διαιρετέος εἶναι τετάρτου βαθμοῦ, ὁ δὲ διαιρέτης δευτέρου βαθμοῦ, τὸ πηλίκον θὰ εἶναι δευτέρου βαθμοῦ καὶ τῆς μορφῆς $5x^2+\alpha x+\beta$, τὸ δὲ ὑπόλοιπον θὰ εἶναι πρώτου βαθμοῦ καὶ τῆς μορφῆς $\mu x+\nu$.

Ἐπειδὴ εἰς κάθε διαίρεσιν ὁ διαιρετέος εἶναι ἴσος μὲ τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ πηλίκον σὺν τῷ ὑπολοίπῳ, ἔχομεν τὴν ταυτότητα

$$5x^4-2x^3+6x^2-4x+1\equiv(x^2-5x-1)(5x^2+\alpha x+\beta)+\mu x+\nu$$

Ἐκτελοῦντες τὰς πράξεις εἰς τὸ δεύτερον μέλος κλπ. εὑρίσκομεν

$$5x^4-2x^3+6x^2-4x+1\equiv 5x^4+(\alpha-25)x^3+(\beta-5\alpha-5)x^2-(5\beta+\alpha+\mu)x+(\nu-\beta)$$

Διὰ νὰ ὑφίσταται ἡ ταυτότης αὐτή, πρέπει οἱ συντελεσταὶ τῶν αὐτῶν δυνάμεων τοῦ x καὶ οἱ γνωστοὶ ὅροι νὰ εἶναι ἴσοι δηλαδὴ πρέπει νὰ εἶναι

$$\left\{\begin{aligned} -2&=\alpha-25 && (1)\\ 6&=\beta-5\alpha-5 && (2)\\ 4&=5\beta+\alpha+\mu && (3)\\ 1&=\nu-\beta && (4)\end{aligned}\right.$$

Ἀπὸ τὴν (1) εὑρίσκομεν $\alpha=23$. Τὴν τιμὴν αὐτὴν τοῦ α θέτομεν εἰς τὴν (2) καὶ εὑρίσκομεν $\beta=126$. Τὰς τιμὰς αὐτὰς τῶν α καὶ β θέτομεν εἰς τὰς (3) καὶ (4) καὶ εὑρίσκομεν ἀπὸ τὴν (3) $\mu=649$, ἀπὸ δὲ τὴν (4) $\nu=127$.

Τὸ πηλίκον λοιπὸν εἶναι $5x^2+23x+126$ καὶ τὸ ὑπόλοιπον $649x+127$.

Ἀσκήσεις. ***2180.*** Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ συντελεσταὶ α καὶ β, ἵνα τὸ πολυώνυμον $x^3+\alpha x+\beta$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $(x-1)(x-2)$.

2181 Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ συντελεσταὶ α καὶ β, ἵνα τὸ πολυώνυμον $x^3+\alpha x+\beta$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $(x-1)^2$.

2182. Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ συντελεσταὶ α καὶ β, ἵνα τὸ πολυώνυμον $x^3+\alpha x^2+\beta x-3$ εἶναι διαιρετὸν διὰ (x^2-x+1).

2183. Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ συντελεσταὶ α καὶ β, ἵνα τὸ πολυώνυμον $x^3+\alpha x^2+\beta$ εἶναι διαιρετὸν διὰ x^2+x+1.

2184. Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ συντελεσταὶ α καὶ β, ἵνα τὸ πολυώνυμον x^4+1 εἶναι διαιρετὸν διὰ $x^2+\alpha x+\beta$.

2185. Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ συντελεσταὶ α καὶ β, ἵνα τὸ πολυώνυμον $x^3+3x^2+\alpha x+\beta$ εἶναι διαιρετὸν διὰ x^2-x-1.

2186. Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ συντελεσταὶ α καὶ β, ἵνα τὸ πολυώνυμον $5x^4-7x^3+\alpha x-\beta$ εἶναι διαιρετὸν διὰ x^4-4.

2187. Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ συντελεσταὶ α καὶ β, ἵνα τὸ πολυώνυμον $x^4+\alpha x^2+\beta$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $x^2+5x-12$.

2188. Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ συντελεσταὶ α καὶ β, ἵνα τὸ πολυώνυμον $x^4+\alpha x^2+\beta$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $x^2+\alpha x+\beta$

547. *Πρόβλημα 3ον. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ πολυωνύμου* $9x^4-30x^3+49x^2-40x+16$.

Ἐπειδὴ τὸ δοθὲν πολυώνυμον εἶναι 4ου βαθμοῦ, ἡ τετραγωνικὴ ρίζα του, ἐὰν εἶναι τέλειον τετράγωνον ἄλλου, θὰ εἶναι δευτέρου βαθμοῦ καὶ τῆς μορφῆς $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ (1) Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν τὴν ταυτότητα

$$9x^4-30x^3+49x^2-40x+16\equiv(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^2$$

ἢ

$$9x^4-30x^3+49x^2-40x+16\equiv\alpha^2x^4+\beta^2x^2+\gamma^2+2\alpha\beta x^3+2\alpha\gamma x^2+2\beta\gamma x$$
$$\equiv\alpha^2x+2\alpha\beta x^3+(\beta^2+2\alpha\gamma)x^2+2\beta\gamma x+\gamma^2,$$

Διὰ νὰ ὑφίσταται ἡ ταυτότης αὐτὴ πρέπει οἱ συντελεσταὶ τῶν αὐτῶν δυνάμεων τοῦ x καὶ οἱ γνωστοὶ ὅροι νὰ εἶναι ἴσοι· δηλ. πρέπει νὰ εἶναι

$\alpha^2=9$	ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν	$\alpha=\pm3$
$2\alpha\beta=-30$	» » »	$\beta=\mp5$
$\beta^2+2\alpha\gamma=49$	» » »	$\gamma=\pm4$
$2\beta\gamma=-40$		
$\gamma^2=16$.		

Τὰς τιμὰς τῶν α, β, γ θέτομεν εἰς τὴν παράστασιν (1), ἡ ὁποία παριστάνει τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ δοθέντος πολυωνύμου καὶ εὑρίσκομεν, ὅτι ἡ ζητουμένη τετραγωνικὴ ρίζα εἶναι ἡ $\pm(3x^2-5x+4)$.

Ἀσκήσεις. *2189.* Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τῶν κάτωθι πολυωνύμων
1. $x^6-6x^5+15x^4-20x^3+15x^2-6x+1$. 2. $x^4+6x^3+5x^2-12x+4$.

2190. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ πολυωνύμου

$$4x^6-12x^5+13x^4-22x^3+25x^2-8x+16.$$

2191. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ πολυωνύμου

$$\alpha^2x^4-4\alpha\beta x^3+2(2\beta^2-3\alpha\gamma)x^2+12\beta\gamma x+9\gamma^2.$$

2192. Νὰ εὑρεθῇ ἡ κυβικὴ ρίζα τοῦ πολυωνύμου

$$x^6-9x^5+30x^4-45x^3+30x^2-9x+11.$$

2193. Νὰ εὑρεθῇ ἡ κυβικὴ ρίζα τοῦ πολυωνύμου

$$27x^6+108x^5+90x^4-80x^3-60x^2+48x-8.$$

2194. Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ συντελεσταὶ $\alpha, \beta, \ldots$, ἵνα τὰ κάτωθι ποτωθι πολυώνυμα εἶναι τετράγωνα ἄλλων πολυωνύμων καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα ἑκάστου

1. $x^4+2\alpha x^3-4\alpha x+4$. 2. $x^4-8x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma$.

2195. Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ συντελεσταὶ μ καὶ ν, ἵνα τὸ πολυώνυμον $x^4+\mu x^3+\nu x^2+4x+1$ εἶναι ἕνα τέλειον τετράγωνον Νὰ ὑπολογισθῇ ἔπειτα ἡ τετραγωνικὴ ρίζα του.

2196. Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ συντελεσταὶ μ καὶ ν, ἵνα τὸ πολυώνυμον $x^4+\mu x^3+29x^2+\nu x+4$ εἶναι ἕνα τέλειον τετράγωνον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἔπειτα ἡ τετραγωνικὴ ρίζα του.

2197. Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ συντελεσταὶ α καὶ β, ἵνα τὰ κάτωθι πολυώνυμα εἶναι τετράγωνα ἄλλων καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα ἑκάστου πολυωνύμου :

$x^4+6x^3+7x^2+\alpha x+\beta$, $x^4+\alpha x^3+\beta x^2+12x+9$, $4x^4+12x^3+5x^2+\alpha x+\beta$.

2198. Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ συντελεσταὶ α καὶ β εἰς τρόπον, ὥστε τὸ πολυώνυμον $x^3+4x^2+\alpha x+\beta$ νὰ εἶναι τέλειος κύβος.

548. Πρόβλημα 4ον. ***Ἕνα ἀκέραιον πολυώνυμον $\varphi(x)$ διαιρούμενον διὰ $x-1$ δίδει ὑπόλοιπον 6, διαιρούμενον διὰ $x+1$ δίδει ὑπόλοιπον 2 καὶ διαιρούμενον διὰ $x+2$ δίδει ὑπόλοιπον -18. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ $\varphi(x)$ διὰ $(x-1)(x+1)(x+2)$.***

Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $\varphi(1)=6$, $\varphi(-1)=2$, $\varphi(-2)=-18$.

Τὸ πολυώνυμον $\varphi(x)$ διαιρούμενον διὰ τοῦ γινομένου $(x-1)(x+1)(x+2)$, τὸ ὁποῖον εἶναι τρίτου βαθμοῦ, θὰ δώσῃ ἕνα πηλίκον $\Pi(x)$ καὶ ἕνα ὑπόλοιπον δευτέρου βαθμοῦ τῆς μορφῆς $\alpha x^2+\beta x+\gamma$.

Ἐπειδὴ εἰς κάθε διαίρεσιν ὁ διαιρετέος ἰσοῦται μὲ τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ πηλίκον σὺν τῷ ὑπολοίπῳ, θὰ ἔχωμεν τὴν ταυτότητα

$$\varphi(x)\equiv(x-1)(x+1)(x+2)\,.\,\Pi(x)+\alpha x^2+\beta x+\gamma. \quad (1)$$

Ἡ ταυτότης αὐτὴ πρέπει νὰ ὑφίσταται διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x. Ἂν λοιπὸν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν ταυτότητα (1) τὸ x διαδοχικῶς μὲ 1, -1, -2, λαμβάνομεν

$$\varphi(1)=\alpha+\beta+\gamma,\quad \varphi(-1)=\alpha-\beta+\gamma,\quad \varphi(-2)=4\alpha-2\beta+\gamma$$

Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $\varphi(1)=6$, $\varphi(-1)=2$, $\varphi(-2)=-18$ ἔχομεν

$$(\mathrm{A})\left\{\begin{array}{l}\alpha+\beta+\gamma=6\\ \alpha-\beta+\gamma=2\\ 4\alpha-2\beta+\gamma=-18\end{array}\right.$$

Λύομεν τὸ σύστημα (Α) καὶ εὑρίσκομεν τὴν λύσιν $\alpha=-6$, $\beta=2$, $\gamma=10$. Ὥστε τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον θὰ εἶναι $-6x^2+2x+10$.

Ἀσκήσεις. 2199. Ἕνα πολυώνυμον $\varphi(x)$ διαιρούμενον διὰ $x-2$ δίδει ὑπόλοιπον 9, διαιρούμενον διὰ $x-3$ δίδει ὑπόλοιπον 11. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ $\varphi(x)$ διὰ τοῦ γινομένου $(x-2)(x-3)$.

√*2200.* Ἕνα πολυώνυμον $\varphi(x)$ διαιρούμενον δια $x-1$, διὰ $x+2$, διὰ $x-3$, δίδει ἀντιστοίχως ὑπόλοιπα 12, 9, 44. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ πολυωνύμου αὐτοῦ διὰ τοῦ γινομένου $(x-1)(x+2)(x-3)$.

2201. Νὰ εὑρεθῇ ἕνα πολυώνυμον τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, τὸ ὁποῖον διαιρούμενον διὰ $x-1$ ἢ διὰ $x-2$, δίδει ἕνα ὑπόλοιπον ἴσον μὲ 3 καὶ τὸ ὁποῖον μηδενίζεται διὰ $x=0$.

2202. Ἕνα πολυώνυμον $\varphi(x)$ διαιρούμενον διὰ $x+1$, $x-2$, $x-3$, δίδει ἀντιστοίχως ὑπόλοιπα 3, 18, 31. 1ον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ πολυωνύμου $\varphi(x)$ διὰ τοῦ γινομένου $(x+1)(x-2)(x-3)$. 2ον. Ἐὰν ἀπὸ τὸ δοθὲν πολυώνυμον ἀφαιρέσωμεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεώς του διὰ τοῦ γινομένου $(x+1)(x-2)(x-3)$ προκύπτει ἕνα πολυώνυμον διαιρετὸν διὰ $3x-1$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ πολυώνυμον τοῦτο, ἐὰν εἶναι τετάρτου βαθμοῦ.

2203. Ἕνα πολυώνυμον Δ διαιρούμενον διὰ x^2+x+1 δίδει ὑπόλοιπον $1-x$ καὶ διαιρούμενον διὰ x^2-x+1 δίδει ὑπόλοιπον $3x+5$. Ποῖον εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ Δ διὰ x^4+x^2+1.

549. Πρόβλημα 5ον. ***Νὰ ἀναλυθῇ τὸ κλάσμα*** $\dfrac{x^2+x+1}{x(x^2-1)}$ ***εἰς ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τριῶν κλασμάτων, τῶν ὁποίων οἱ παρονομασταὶ νὰ εἶναι οἱ παράγοντες τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ δοθέντος κλάσματος.***

Ὁ παρονομαστὴς $x(x^2-1)$ ἀναλύεται εἰς γινόμενον τριῶν παραγόντων $x(x+1)(x-1)$. Ἂν λοιπὸν παραστήσωμεν τοὺς ἀριθμητὰς τῶν τριῶν κλασμάτων μὲ α, β, γ, θά ἔχωμεν τὴν ταυτότητα:

$$\frac{x^2+x+1}{x(x^2-1)} \equiv \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x+1} + \frac{\gamma}{x-1}. \qquad (1)$$

ἢ

$$\frac{x^2+x+1}{x(x+1)(x-1)} \equiv \frac{\alpha(x^2-1)+\beta x(x-1)+\gamma x(x+1)}{x(x+1)(x-1)}$$

Ἐπειδὴ τὰ κλάσματα αὐτὰ εἶναι ἐκ ταυτότητος ἴσα καὶ ἔχουν τοὺς παρονομαστάς των ἴσους θὰ ἔχουν καὶ τοὺς ἀριθμητάς των ἴσους· δηλαδὴ θα εἶναι

$$x^2+x+1=\alpha(x^2-1)+\beta x(x-1)+\gamma x(x+1)$$
$$x^2+x+1 \equiv (\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\gamma-\beta)x-\alpha.$$

Ἐπειδὴ τὰ πολυώνυμα αὐτὰ εἶναι ἐκ ταυτότητος ἴσα, οἱ συντελεσταὶ τῶν αὐτῶν δυνάμεων τοῦ x καὶ οἱ γνωστοὶ ὅροι θά εἶναι ἴσοι· δηλαδὴ θὰ εἶναι

$$\left\{\begin{array}{r} \alpha+\beta+\gamma=1 \\ \gamma-\beta=1 \\ -\alpha=1 \end{array}\right.$$

Λύοντες τὸ σύστημα αὐτὸ εὑρίσκομεν $\alpha=-1$, $\beta=\frac{1}{2}$, $\gamma=\frac{3}{2}$.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (1) τὰ α, β, γ, μὲ τὰς τιμάς των καὶ εὑρίσκομεν $\dfrac{x^2+x+1}{x(x^2-1)}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2(x+1)}+\dfrac{3}{2(x-1)}$.

Ἀσκήσεις. *2204.* Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β, ἵνα

$$\frac{4x-7}{x^2-3x+2} \equiv \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x-2}.$$

2205. Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β, ἵνα

$$\frac{3x-1}{x^2-5x+6} \equiv \frac{\alpha}{x-2} + \frac{\beta}{x-3}.$$

2206. Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ, ἵνα

$$\frac{1}{x(x+1)(x+2)} \equiv \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x+1} + \frac{\gamma}{x+2}$$

2207. Νὰ ἀναλυθῇ τὸ κλάσμα $\frac{5x-13}{x^2-5x+6}$ εἰς ἄθροισμα κλασμάτων, τῶν ὁποίων οἱ παρονομασταὶ νὰ εἶναι οἱ παράγοντες τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ δοθέντος κλάσματος.

2208. Ὁμοίως διὰ τὸ κλάσμα $\frac{3x^2-16x+4}{x^3-3x^2+2x}$.

2209. Ὁμοίως διὰ τὸ κλάσμα $\frac{11x^2-23x}{(2x-1)(x^2-9)}$.

2210. Ὁμοίως διὰ τὸ κλάσμα $\frac{6x^2-25x+23}{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

2211. Ὁμοίως διὰ τὸ κλάσμα $\frac{x^2-9x+28}{(x-2)(x-3)(x+1)}$.

2212. Ὁμοίως διὰ τὸ κλάσμα $\frac{7x^2-6x+1}{(x-3)(x^2-3x+2)}$.

2213. Ὁμοίως διὰ τὸ κλάσμα $\frac{2x^2-5x}{x(x^2-1)(x^2-4)}$.

2214. Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ ἀριθμοὶ α, β καὶ γ, ἵνα

$$\frac{3x^2+3x+3}{x^3-3x+2} \equiv \frac{\alpha}{(x-1)^2}+\frac{\beta}{x-1}+\frac{\gamma}{x+2}.$$

2215. Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ ἀριθμοὶ α, β καὶ γ, ἵνα

$$\frac{x^3}{x^3-3x+2} \equiv 1+\frac{\alpha}{(x-1)^2}+\frac{\beta}{x-1}+\frac{\gamma}{x+2}.$$

2216. Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ, δ, ἵνα

$$\frac{x^3}{x^4-1} \equiv \frac{\alpha}{x-1}+\frac{\beta}{x+1}+\frac{\gamma x+\delta}{x^2+1}.$$

2217. Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ, ἵνα

$$\frac{x-2}{x^3+1} \equiv \frac{\alpha}{x+1}+\frac{\beta x+\gamma}{x^2-x+1}.$$

2218. Νὰ προσδιορισθοον οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ, ἵνα

$$\frac{x^2+3x+2}{x^2-1} \equiv \alpha+\frac{\beta}{x+1}+\frac{\gamma}{x-1}.$$

2219. Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ, δ, ἵνα

$$\frac{5x^2+3}{(x-1)^2(x^2+1)} \equiv \frac{\alpha}{(x-1)^2}+\frac{\beta}{x-1}+\frac{\gamma x+\delta}{x^2+1}.$$

2220. Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ, ἵνα

$$\frac{x^4+1}{x^3-4x^2+5x-2} \equiv x+4+\frac{\alpha}{(x-1)^2}+\frac{\beta}{x-1}+\frac{\gamma}{x-2}.$$

2221. Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ, δ, ε, ζ, ἵνα

$$\frac{6}{x^6-2} \equiv \frac{\alpha}{x-1}+\frac{\beta}{x+1}+\frac{\gamma x+\delta}{x^2-x+1}+\frac{\varepsilon x+\zeta}{x^2+x+1}$$

2222. Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ α, β, γ, δ, ε, ζ, ἵνα

$$\frac{x^1+1}{(x^3-1)^2} \equiv \frac{\alpha}{x-1}+\frac{\beta}{(x-1)^2}+\frac{\gamma x+\delta}{x^2+x+1}+\frac{\varepsilon x+\zeta}{(x^2+x+1)^2}.$$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΒΑΘΜΟΥ ΑΝΩΤΕΡΟΥ ΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ

550. Λύσις ἐξισώσεων βαθμοῦ ἀνωτέρου τοῦ δευτέρου. Πολλαὶ ἐξισώσεις ἀνωτέρου βαθμοῦ καὶ τῆς μορφῆς

$$\varphi(x)=A_0x^{\mu}+A_1x^{\mu-1}+A_2x^{\mu-2}+\ldots+A_{\mu-1}x+A_{\mu}=0 \qquad (1)$$

δύναται νὰ λυθοῦν, ὅταν τὸ πολυώνυμον $\varphi(x)$ δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον πρωτοβαθμίων ἢ δευτεροβαθμίων παραγόντων.

Διὰ νὰ τρέψωμεν τὸ πολυώνυμον $\varphi(x)$ εἰς γινόμενον παραγόντων ἐφαρμόζομεν τὴν μέθοδον τῆς § 164.

Κατὰ τὴν μέθοδον αὐτήν, ἀναζητοῦμεν ἕνα ἢ περισσοτέρους ἀριθμοὺς α, β, γ.... τοιούτους, ὥστε νὰ εἶναι $\varphi(\alpha)=0$, $\varphi(\beta)=0$.... Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ πολυώνυμον $\varphi(x)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ τῶν δυωνύμων $(x-\alpha)$, $(x-\beta)$... καὶ ἑπομένως εἶναι διαιρετὸν καὶ διὰ τοῦ γινομένου $(x-\alpha)(x-\beta)$...

Ἐλαττώνομεν τὸν ἀριθμὸν τῶν δοκιμῶν, ἐὰν ἔχωμεν ὑπ' ὄψει τὸ κάτωθι θεώρημα, τὸ ὁποῖον ἀποδεικνύεται εἰς τὴν Ἀνωτέραν Ἄλγεβραν.

551. Θεώρημα. ***Δίδεται ἡ ἐξίσωσις***

$$A_0x^{\mu}+A_1x^{\mu-1}+A_2x^{\mu-2}+\ldots+A_{\mu-1}x+A_{\mu}=0 \qquad (1)$$

τῆς ὁποίας οἱ συντελεσταὶ εἶναι ἀκέραιοι καὶ πραγματικοὶ ἀριθμοί:

1ον. Κάθε ἀκεραία ρίζα τῆς ἐξισώσεως (1) διαιρεῖ ἀκριβῶς τὸν σταθερὸν ὅρον A_{μ}.

2ον. Ἐὰν ἕνα ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως (1), ὁ ἀριθμητὴς α διαιρεῖ ἀκριβῶς τὸν σταθερὸν ὅρον A_{μ} καὶ ὁ παρονομαστὴς β διαιρεῖ ἀκριβῶς τὸν συντελεστὴν A_0 τῆς μεγαλυτέρας δυνάμεως τοῦ ἀγνώστου.

Τὰ κάτωθι παραδείγματα θὰ μᾶς δείξουν σαφέστερον τὸν τρόπον τῆς λύσεως τοιούτων ἐξισώσεων.

552. Παράδειγμα. ***1ον. Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις:***

$$\varphi(x)=x^4+x^3-31x^2-25x+150=0. \qquad \text{(Σχολὴ Ἀεροπορίας)}$$

Ἀναλύομεν τὸ πρῶτον μέλος τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἰς γινόμενον παραγόντων μὲ τὴν μέθοδον τῶν δυωνύμων παραγόντων (§ 164).

Οἱ διαιρέται τοῦ σταθεροῦ ὅρου 150 εἶναι ±1, ±2, ±3, ±5...

Σχηματίζομεν τὰ $\varphi(1)$, $\varphi(-1)$, $\varphi(2)$,... καὶ εὑρίσκομεν, ὅτι

$$\varphi(2)=0,\quad \varphi(-3)=0,\quad \varphi(5)=0,\quad \varphi(-5)=0.$$

Ἄρα τὸ $\varphi(x)$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ $(x-2)$, $(x+3)$, $(x-5)$, $(x+5)$ καὶ ἑπομένως διαιρεῖται ἀκριβῶς καὶ διὰ τοῦ γινομένου

$(x-2)(x+3)(x-5)(x+5)$ καὶ δίδει πηλίκον 1.

Θὰ εἶναι λοιπὸν

$$x^4+x^3-31x^2-25x+150=(x-2)(x+3)(x-5)(x+5).$$

Ἡ δοθεῖσα λοιπὸν ἐξίσωσις γράφεται

$$(x-2)\ (x+3)\ (x-5)\ (x+5)=0.$$

Αἱ ρίζαι αὐτῆς εἶναι 2, -3, 5, -5.

553. Παράδειγμα 2ον. ***Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις***

$$\varphi(x)=x^3-6x^2+11x-6=0.$$

Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις μηδενίζεται διὰ $x=1$ καὶ ἑπομένως διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ $x-1$ καὶ δίδει πηλίκον x^2-5x+6.

Θὰ εἶναι λοιπὸν $x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x^2-5x+6)$

καὶ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται $(x-1)(x^2-5x+6)=0.$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν προκύπτουν αἱ ἐξισώσεις

$$x-1=0 \quad (1), \qquad x^2-5x+6=0. \quad (2)$$

Ἡ ρίζα τῆς (1) εἶναι $x=1$. Αἱ ρίζαι τῆς (2) εἶναι 2 καὶ 3.

Ἄρα αἱ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$.

554. Παράδειγμα 3ον. ***Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις***

$$\varphi(x)=24x^4+4x^3-66x^2-x+15=0.$$

Ἐδῶ εἶναι $A_0=24$ καὶ $A_\mu=15$.

Οἱ διαιρέται τοῦ A_0 εἶναι $\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm4,\ \pm6,\ \pm12,\ \pm24.$

Οἱ διαιρέται τοῦ A_μ εἶναι $\pm1,\ \pm3,\ \pm5,\ \pm15.$

Σχηματίζομεν ὅλα τὰ κλάσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἀριθμητὰς τοὺς διαιρέτας τοῦ A_μ καὶ παρονομαστὰς τοὺς διαιρέτας τοῦ A_0. Τὰ κλάσματα αὐτὰ

$$\frac{1}{2},\quad -\frac{1}{2},\quad \frac{1}{3},\quad -\frac{1}{3},\quad \frac{1}{4},\quad -\frac{1}{4},\quad \frac{1}{6},\quad -\frac{1}{6}$$

$$\frac{2}{3},\quad -\frac{2}{3},\quad \frac{3}{4},\quad -\frac{3}{4},\quad \frac{3}{6}=\frac{1}{2},\quad -\frac{3}{6}=-\frac{1}{2},$$

$$\frac{5}{2},\quad -\frac{5}{2},\quad \frac{5}{3},\quad -\frac{5}{3},\quad \frac{5}{4},\quad -\frac{5}{4},\quad \frac{5}{6},\quad -\frac{5}{6},$$

$$\frac{15}{4},\quad -\frac{15}{4},\quad \frac{15}{6}=\frac{5}{2},\quad -\frac{15}{6}=-\frac{5}{2}.$$

Τὰ κλάσματα αὐτὰ δύνανται νὰ εἶναι ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως. Διὰ νὰ ἴδωμεν ποῖον ἀπὸ τὰ κλάσματα αὐτὰ εἶναι ρίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως ἐργαζόμεθα, ὅπως εἰς τὸ παράδειγμα τῆς § 551.

Διὰ τὸ κλάσμα $\frac{1}{2}$ ἔχομεν

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right)=24\cdot\frac{1}{16}+4\cdot\frac{1}{8}-66\cdot\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+15$$
$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}-\frac{33}{2}-\frac{1}{2}+15=0.$$

Ἄρα τὸ κλάσμα $\frac{1}{2}$ εἶναι ρίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως καὶ τὸ $\varphi(x)$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ $\left(x-\frac{1}{2}\right)$.

Διὰ τὸ κλάσμα $-\frac{1}{2}$ ἔχομεν

$$\varphi\left(-\frac{1}{2}\right) = 24 \cdot \frac{1}{16} - 4 \cdot \frac{1}{8} - 66 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 15$$
$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} - \frac{33}{2} + \frac{1}{2} + 15 = 0.$$

Ἄρα τὸ κλάσμα $-\frac{1}{2}$ εἶναι ρίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως καὶ τὸ $\varphi(x)$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ $\left(x + \frac{1}{2}\right)$.

Ὁμοίως ἐργαζόμεθα καὶ διὰ τὰ ἄλλα κλάσματα καὶ εὑρίσκομεν, ὅτ καὶ τὰ κλάσματα $\frac{3}{2}$ καὶ $-\frac{5}{3}$ εἶναι ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

Μετὰ τὴν εὕρεσιν τῶν δύο ριζῶν $\frac{1}{2}$ καὶ $-\frac{1}{2}$ εἶναι προτιμότερον νὰ ἐργασθῶμεν ὡς ἑξῆς:

Ἀφοῦ τὸ $\varphi(x)$ διαιρεῖται διὰ $\left(x - \frac{1}{2}\right)$ καὶ διὰ $\left(x + \frac{1}{2}\right)$ θὰ διαιρῆται καὶ διὰ τοῦ γινομένου $\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$, δηλ. διὰ $x^2 - \frac{1}{4}$ Ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν τοῦ $\varphi(x)$ διὰ $x^2 - \frac{1}{4}$ εὑρίσκομεν πηλίκον $24x^2+4x-60$ καὶ ὑπόλοιπον μηδέν ἄρα ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται $\left(x^2 - \frac{1}{4}\right)(24x^2+4x-60)=0.$

Ἀπὸ αὐτὴν προκύπτουν αἱ ἐξισώσεις

$$\left(x^2 - \frac{1}{4}\right) = 0 \quad (1), \qquad 24x^2+4x-60=0. \quad (2)$$

Ἀπὸ τὴν (1) εὑρίσκομεν $x = \frac{1}{2}$ καὶ $x = -\frac{1}{2}$. Αἱ ρίζαι τῆς (2) εἶναι $\frac{3}{2}$ καὶ $-\frac{5}{3}$.

Ὥστε αἱ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = -\frac{1}{2}, \quad x_3 = \frac{3}{2}, \quad x_4 = \frac{5}{3}.$$

Ἀσκήσεις. Α' Ὁμάς. *2223.* Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^3-13x^2+42x-36=0.$

2224. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^3-9x^2+26x-24=0.$

2225. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^3-2x^2-5x+6=0$

2226. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^3+x^2-17x+15=0$

2227. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^4-2x^3-10x^2+4x+16=0$

2228. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $4x^4+12x^3+3x^2-9x-65=0$

2229. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^4+14x^3+54x^2+35x-84=0$

2230. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^4-6x^3+5x^2+12x-60=0$

2231. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^4-6x^3+4x^2+15x+4=0.$

2232. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^5+3x^4-x^3-3x^2-12x-36=0.$

Β' Ὁμάς. 2233. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $8x^4-28x^3+22x^2+7x-6=0$.

2234. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $6x^4+x^3+17x^2+3x-3=0$

2235. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$x^5+\frac{x^4}{2}-\frac{3x^3}{4}-\frac{3x^2}{8}+\frac{x}{16}+\frac{1}{32}=0 \quad \text{(Σχολὴ Δοκίμων)}$$

2236. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\frac{x^5}{3}-\frac{2x^3}{8}+\frac{x}{24}=\frac{3x^4}{6}-\frac{6x^2}{16}+\frac{3}{48}$

2237. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\frac{x^4+x^2+1}{x^2}=\frac{x^2+x+1}{x}$

2238. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^3+\frac{1}{x^3}=6\left(x+\frac{1}{x}\right)$

2239. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\frac{(x^2+1)(x+1)^2+x^2}{x^2(x^2+1)+1}=x+\frac{1}{x}$

555. Σχέσεις μεταξὺ τῶν ριζῶν καὶ τῶν συντελεστῶν τῆς ἐξισώσεως $\varphi(x)=A_0x^\mu+A_1x^{\mu-1}+A_2x^{\mu-2}+\ldots+A_\mu=0$ (1)

Μεταξὺ τῶν συντελεστῶν καὶ τῶν ριζῶν $x_1, x_2, x_3, \ldots x_\mu$ τῆς ἐξισώσεως (1) ὑπάρχουν αἱ κάτωθι σχέσεις :

$$\boxed{\begin{array}{l}
\Sigma_1=x_1+x_2+x_3+\ldots\ldots\ldots+x_\mu=-\dfrac{A_1}{A_0}\\
\Sigma_2=x_1x_2+x_1x_3+\ldots\; x_2x_3+\ldots=+\dfrac{A_2}{A_0}\\
\Sigma_3=x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\ldots+x_1x_3x_4+\ldots=-\dfrac{A_3}{A_0}\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\Sigma_\mu=x_1x_2x_3\ldots\ldots\ldots\ldots x_\mu=(-1)^\mu\dfrac{A_\mu}{A_0}
\end{array}}$$

Αἱ ἀνωτέρω σχέσεις ἀποδεικνύονται εἰς τὴν Ἀνωτέραν Ἄλγεβραν καὶ λέγονται : ***σχέσεις μεταξὺ τῶν ριζῶν καὶ τῶν συντελεστῶν τῆς ἐξισώσεως (1)***.

556. Ἐφαρμογὴ Ι. ***Νὰ σχηματισθῇ μία ἐξίσωσις τοῦ τετάρτου βαθμοῦ, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ ὡς ρίζας τοὺς ἀριθμοὺς 1, 2, −3, 4.***

Ἐδῶ εἶναι
$$\begin{aligned}
\Sigma_1&=1+2-3+4=4\\
\Sigma_2&=1.2-1.3+1.4-2.3+2.4-3.4=-7\\
\Sigma_3&=-1.2.3+1.2.4-2.3.4-3.4.1=-34\\
\Sigma_4&=-1.2.3.4=-24
\end{aligned}$$

Ἑπομένως ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις εἶναι
$$x^4-4x^3-7x^2+34x-24=0$$

557. Ἐφαρμογὴ II. ***Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις***

$$x^3-3x^2-10x+24=0$$

ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι μία ἀπὸ τὰς ῥίζας της εἶναι διπλασία τῆς ἄλλης.

Ἔστωσαν α, 2α, β αἱ τρεῖς ῥίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

Γνωρίζομεν, ὅτι μεταξὺ τῶν ῥιζῶν καὶ τῶν συντελεστῶν ὑπάρχουν αἱ σχέσεις

$$\left.\begin{array}{l}\alpha+2\alpha+\beta=3\\ \alpha\cdot 2\alpha+\alpha\beta+2\alpha\beta=-10\\ \alpha\cdot 2\alpha\cdot\beta=-24\end{array}\right\} \quad \text{ἢ} \quad \left.\begin{array}{r}3\alpha+\beta=3\\ 2\alpha^2+3\alpha\beta=-10\\ 2\alpha^2\beta=-24.\end{array}\right\} \quad (1)$$

Ἀπὸ τὴν πρώτην ἐξίσωσιν τῆς (1) λαμβάνομεν $\beta=3-3\alpha$. (2)

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν τὸ β μὲ τὸ ἴσον του $3-3\alpha$ καὶ ἔχομεν $2\alpha^2+3\alpha(3-3\alpha)=-10$ ἢ $7\alpha^2-9\alpha-10=0$.

Αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εἶναι $\alpha=2$ καὶ $\alpha=-\frac{5}{7}$.

Ἐὰν λάβωμεν $\alpha=2$, ἡ ἐξίσωσις (2) δίδει $\beta=-3$, ὁπότε αἱ ῥίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι 2, 4, -3.

Ἐὰν λάβωμεν $\alpha=-\frac{5}{7}$, ἡ ἐξίσωσις (2) δίδει $\beta=\frac{36}{7}$ καὶ αἱ ῥίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι $-\frac{5}{7}$, $-\frac{10}{7}$, $\frac{36}{7}$.

Ἀσκήσεις. 2240. Νὰ σχηματισθῇ μία ἐξίσωσις τοῦ τρίτου βαθμοῦ, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ ὡς ῥίζας τοὺς ἀριθμούς :

1ον. $2,\ -3,\ +5$. 2ον. $\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4}$.

2241. Νὰ σχηματισθῇ μία ἐξίσωσις τοῦ τετάρτου βαθμοῦ, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ ὡς ῥίζας τοὺς ἀριθμούς :

1ον. $-2,\ -3,\ 4,\ 5$. 2ον. $\frac{1}{2},\ \frac{2}{5},\ 3,\ \frac{5}{2}$.

2242. **Νὰ** ὑπολογισθοῦν αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $3x^3+8x^2+13x+6=0$, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι μία ῥίζα της εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστρόφων τῶν δύο ἄλλων ῥιζῶν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΙΝ ΕΠΙ ΤΩΝ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

Α' Ὁμάς. 2243. Νὰ ὁρισθοῦν οἱ συντελεσταὶ α καὶ β, ἵνα τὸ κλάσμα $\frac{3x^2-9\alpha x+6\beta}{\beta x^2+(9\alpha-8\beta)x+3\alpha}$ εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ x. (Σχ. Ἀεροπορίας 1935)

2244. Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ συντελεσταὶ α, β, γ, ἵνα ὑφίσταται ἡ ταυτότης $x^2-5x-14\equiv\alpha(x-1)(x+1)+\beta x(x-1)+\gamma(x-2)(x+3)$.

2245. Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ συντελεσταὶ α, β, γ, δ, ... εἰς τρόπον, ὥστε νὰ ἔχωμεν τὴν ταυτότητα $\frac{1-x}{1+x+x^2}\equiv\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4+\dots$

2246. Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ, δ, ἵνα εἶναι

$$\frac{x-1}{(x+1)^2(x^2-3x+4)}=\frac{\alpha}{(x+1)^2}+\frac{\beta}{x+1}+\frac{\gamma x+\delta}{x^2-3x+4}.$$

2247. Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ Α, Β, Γ, α, β, ἵνα εἶναι

$$\frac{2x^4-1}{(x-2)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+\Gamma}{x^2+x+1}+\alpha x+\beta.$$

2248. Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ συντελεσταὶ α, β, γ, ἵνα τὸ πολυώνυμον $x^4+\alpha x^2+\beta x+\gamma$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $(x-3)^3$.

2249. Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ συντελεσταὶ α, β, ἵνα τὸ πολυώνυμον $3x^4-14x^3-23x^2+38x+\alpha$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $x^2-6x+\beta$.

2250. Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ συντελεσταὶ α, β, γ, ἵνα τὸ πολυώνυμον $x^4+3x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $(x^2-1)(x+2)$.

2251. Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ συντελεσταὶ α, β, ἵνα τὸ πολυώνυμον $x^4+2x^3-7x^2+\alpha x+\beta$ εἶναι διαιρετὸν διὰ x^2-3x+5.

2252. Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ συντελεσταὶ α, β, ἵνα τὸ πολυώνυμον $6x^4-7x^3+\alpha x^2+3x+2$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $x^2-x+\beta$.

2253. Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ συντελεσταί α, β, γ, ἵνα τὸ πολυώνυμον $x^4-3\alpha x^3+\alpha^2x^2+\alpha^3\beta x+\gamma\alpha^4$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $x^2-\alpha x+2\alpha^2$.

2254. Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ συντελεσταὶ α, β, ἵνα τὸ πολυώνυμον $20x^5-47x^4+6x^3-8x^2-\alpha x+\beta$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $5x^3-3x^2+4$.

2255. Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ συντελεσταὶ α, β, ἵνα τὸ πολυώνυμον $6x^5-3x^4-x^3+\alpha x+\beta$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $2x^2-x+1$.

2256. Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ συντελεσταὶ α, β, ἵνα τὸ πολυώνυμον

$$x^6+2x^5-(\alpha+\beta)x^4-(2\beta+1)x^3+(2\alpha+\beta)x^2-(\alpha-1)x+\beta+1$$

εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ x^2+2x-3.

2257. Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ συντελεσταὶ α, β, ἵνα τὸ πολυώνυμον $x^4+(\alpha-\beta)x^3+(\alpha-\beta)x+\beta^2$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $x^2-(\alpha-\beta)x+\beta^2$.

2258. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

$$x^\mu y^\nu+y^\mu\omega^\nu+\omega^\mu x^\nu-x^\nu y^\mu-y^\nu\omega^\mu-\omega^\nu x^\mu$$

εἶναι διαιρετὸν διὰ $(x-y)(y-\omega)(\omega-x)$.

Νὰ γίνῃ ἐφαρμογὴ εἰς τὴν τροπὴν τῆς παραστάσεως

$$xy^4-yx^4+y\omega^4-\omega y^4+\omega x^4-x\omega^4$$

εἰς γινόμενον παραγόντων.

2259. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ῥίζαι τοῦ πολυωνύμου

$$x^3+2(\alpha-\beta)x^2+\alpha x+15-2(\alpha-\beta)-\beta^2$$

ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τοῦτο εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ τριωνύμου

$$x^2+(\alpha-\beta)x+\beta-2.$$ (Πολυτεχνεῖον 1932)

2260. Νὰ εὑρεθῇ ἡ σχέσις, ἡ ὁποία πρέπει νὰ συνδέῃ τοὺς συντελεστὰς μ καὶ ν, ἵνα τὸ τριώνυμον $x^3+\mu x+\nu$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $x^3+\alpha x+1$. Μετὰ τὴν εὕρεσιν τῆς ζητουμένης σχέσεως νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^3+\mu x+\nu=0$.

2261. Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ συντελεσταὶ Α, Β, α, β εἰς τρόπον, ὥστε τὸ πολυώνυμον $x^3+6x^2+15x+14$ νὰ εἶναι ἐκ ταυτότητος ἴσον μὲ τὴν παράστασιν $A(x+\alpha)^2+B(x+\beta)$. Μετὰ ταῦτα νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$x^3+6x^2+15x+14=0.$$

2262. Δίδεται ἕνα πολυώνυμον τοῦ τετάρτου βαθμοῦ τῆς μορφῆς $x^4+4\lambda x^2+4\mu x+\nu$ καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἡ σχέσις, ἡ ὁποία πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν λ, μ, ν, ἵνα τὸ πολυώνυμον τοῦτο δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν $A(x+\alpha)^4+B(x+\beta)^4$. Νὰ προσδιορισθοῦν ἔπειτα οἱ α,β, Α,Β.

Ἐφαρμογή. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^4+\frac{8}{3}x^3-\frac{16}{3}x-4=0$.

Β' Ὁμάς. 2263. Δίδεται ἡ ἐξίσωσισις $\varphi(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x-30=0$· ζητεῖται νὰ προσδιορισθοῦν οἱ συντελεσταὶ α καὶ β εἰς τρόπον, ὥστε οἱ 2 καὶ 3 νὰ εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τρίτη ρίζα.

2264. Δίδεται ἡ ἐξίσωσις $\varphi(x)=x^4+\alpha x^3+\beta x^2-107x+60=0$ καὶ ζητεῖται νὰ προσδιορισθοῦν οἱ α καὶ β, ἵνα οἱ ἀριθμοὶ 1 καὶ 3 εἶναι ρίζαι αὐτῆς. Μετὰ ταῦτα νὰ εὑρεθοῦν καὶ αἱ ἄλλαι ρίζαι αὐτῆς.

2265. Νὰ εὑρεθῇ πολυώνυμον τρίτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x, τὸ ὁποῖον διὰ $x=0$ λαμβάνῃ τὴν τιμὴν -20, διὰ $x=1$, λαμβάνῃ τὴν τιμὴν 0, διὰ $x=3$, λαμβάνει τὴν τιμὴν 4 καὶ διὰ $x=-1$ τὴν τιμὴν -60. Νὰ εὑρεθοῦν ἔπειτα αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως, ἡ ὁποία προκύπτει, ἐὰν τὸ πολυώνυμον τοῦτο ἐξισωθῇ μὲ μηδέν.

2266. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\varphi(x)=x^4-4x^3-x^2+16x-12=0$, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι δύο ρίζαι της ἔχουν ἄθροισμα 3 καὶ γινόμενον 2.

2267. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ρίζαι τοῦ πολυωνύμου $\alpha x^4+\beta x^3+1$, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τοῦτο εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ τριωνύμου x^2-2x+1.

2268. 1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ πολυώνυμον $\varphi(x)=x^3+3\alpha\beta x+\alpha^3-\beta^3$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $x+\alpha-\beta$. 2ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^3+3\alpha\beta x+\alpha^3-\beta^3=0$.

2269. Νὰ προσδιορισθοῦν δύο ἀριθμοὶ α καὶ β, οὕτως·ὥστε ἡ ἐξίσωσις $x^3-81x-756=0$ νὰ δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν $\left(\frac{x-\alpha}{x-\beta}\right)^3=\frac{\alpha}{\beta}$. Νὰ λυθῇ ἔπειτα ἡ ἐξίσωσις.

2270. Διὰ νὰ εἶναι ἕνα ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ x διαιρετὸν διὰ $x^\nu-\alpha$ πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ διαιροῦνται διὰ $x^\nu-\alpha$ ὅλα τὰ πολυώνυμα, τὰ ὁποῖα προκύπτουν ἐκ τοῦ δοθέντος ὅταν λάβωμεν α) τοὺς ὅρους τῶν ὁποίων οἱ ἐκθέται εἶναι πολλαπλάσια τοῦ ν, β) τοὺς ὅρους, τῶν ὁποίων οἱ ἐκθέται εἶναι πολλαπλάσια τοῦ ν ηὐξημένα κατὰ μονάδα, γ) τοὺς ὅρους τῶν ὁποίων οἱ ἐκθέται εἶναι πολλαπλάσια τοῦ ν ηὐξημένα κατὰ 2 κ.ο.κ.

Γ' Ὁμάς. 2271. Νὰ εὑρεθῇ ἡ συνθήκη, ἵνα τὸ $Ax^2+Bx+\Gamma$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $\alpha x^2+\beta x+\gamma$.

2272. Λέγομεν, ὅτι ἕνα πολυώνυμον τοῦ τρίτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x, ὅπως τὸ $Ax^3+Bx^2+\Gamma x+\Delta$, εἶναι ἕνας κύβος, ὅταν δυνάμεθα νὰ θέσωμεν τὸ πολυώνυμον τοῦτο ὑπὸ τὴν μορφὴν $A(x+\mu)^3$. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ ἱκαναὶ καὶ ἀναγκαῖαι συνθῆκαι, ἵνα τὸ πολυώνυμον $Ax^3+Bx^2+\Gamma x+\Delta$ εἶναι ἕνας κύβος, εἶναι $\Gamma=\frac{B^2}{3A}$, $\Delta=\frac{B^3}{27A^2}$.

2273. Νὰ προσδιορισθοῦν τὰ α, β, γ, δ οὕτως, ὥστε τὸ πολυώνυμον $x^4-x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma$ διαιρούμενον διὰ $x^2+\delta$ νὰ δίδῃ ὑπόλοιπον x καὶ διαιρούμενον διὰ $x^2-\delta$ νὰ δίδῃ ὑπόλοιπον $-x$.

2274. Δίδεται τὸ πολυώνυμον $\varphi(x)\equiv x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$ καὶ ζητεῖται νὰ προσδιορισθοῦν οἱ συντελεσταὶ α, β, γ, δ οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι $\varphi(x)=\varphi(1-x)$ καὶ νὰ εἶναι συγχρόνως $\varphi(1)=4$ καὶ $\varphi(-1)=1$.

2275. Ἔστωσαν Α καὶ Β τὰ ὑπόλοιπα τῆς διαιρέσεως ἑνὸς πολυωνύμου $\varphi(x)$ διὰ $x-\alpha$ καὶ $x-\beta$, $(\alpha\neq\beta)$. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ πολυωνύμου τούτου διὰ $(x-\alpha)(x=\beta)$.

2276. Νὰ προσδιοθισθῇ ἕνα πολυώνυμον τοῦ δευτέρου βαθμοῦ $\varphi(x)$. χωρὶς ἀνεξάρτητον ὅρον, τὸ ὁποῖον νὰ ἐπαληθεύῃ τὴν ταυτότητα $\varphi(x)-\varphi(x-1)\equiv x$. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ἀκεραίων ἀριθμῶν εἶναι ἴσον μὲ $\varphi(\nu)$.

2277. Νὰ προσδιοριορισθῇ ἕνα πολυώνυμον τρίτου βαθμοῦ $\varphi(x)$ χωρὶς ἀνεξάρτητον ὅρον, τὸ ὁποῖον νὰ ἐπαληθεύῃ τὴν ταυτότητα $\varphi(x)-\varphi(x-1)\equiv x^2$. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ν πρώτων ἀκεραίων ἀριθμῶν εἶναι $\varphi(\nu)$.

2278. Νὰ προσδιορισθῇ ἕνα πολυώνυμον τετάρτου βαθμοῦ $\varphi(x)$, χωρὶς ἀνεξάρτητον ὅρον, τὸ ὁποῖον νὰ ἐπαληθεύῃ τὴν ταυτότητα $\varphi(x)-\varphi(x-1)\equiv x^3$. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν κύβων τῶν πρώτων ἀκεραίων ἀριθμῶν εἶναι ἴσον μὲ $\varphi(\nu)$.

2279. Εἰς τὸ πολυώνυμον $\varphi(x,y)=Ax^2+2Bxy+\Gamma y^2-31x-22y+35$ ἀντικαθιστῶμεν τὸ y διὰ τοῦ $5-3x$ καὶ λαμβάνομεν ἕνα πολυώνυμον $\varphi(x)$ τοῦ δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς x. Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ συντελεσταὶ Α, Β, Γ εἰς τρόπον, ὥστε τὸ πολυώνυμον $\varphi(x)$ νὰ εἶναι ἐκ ταυτότητος ἴσον μὲ μηδέν. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι διὰ τὰς τιμὰς αὐτὰς τῶν Α, Β, Γ τὸ πολυώνυμον $\varphi(x,y)$ ἀναλύεται εἰς γινόμενον δύο πρωτοβαθμίων παραγόντων.

2280. Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ εἶναι διάφοροι μεταξύ των καὶ ἐπαληθεύουν τὰς ἰσότητας

$$\alpha^3+\mu\alpha+\nu=0,\qquad \beta^3+\mu\beta+\nu=0,\qquad \gamma^3+\mu\gamma+\nu=0$$

νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\alpha+\beta+\gamma=0$. (Γεωπ. Σχολή)

2281. Ἐὰν εἰς τὸ πολυώνυμον $Ax^2+2Bxy+\Gamma y^2$ ἀντικαταστήσωμεν τὸ x διὰ τοῦ $\alpha x'+\beta y'$ καὶ τὸ y διὰ τοῦ $\gamma x'+\delta y'$, λαμβάνομεν ἕνα νέον πολυώνυμον $A'x'^2+2B'x'y'+\Gamma'y'^2$.

Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $A'\Gamma'-B'^2=(A\Gamma-B^2)(\alpha\delta-\gamma\beta)^2$,

2282. Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ συντελεσταὶ α, β, γ, τοῦ πολυωνύμου $\alpha x^4+\beta x^3+\gamma$, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ γινόμενον τῶν ὑπολοίπων, τὰ ὁποῖα λαμβάνομεν διαιροῦντες αὐτὸ διαδοχικῶς διὰ τῶν x^2+1 καὶ διὰ x^3+1 εἶναι $2(x-1)(x+5)$.

Δ' Ὁμάς. 2283. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} x-y=5 \\ x^3+y^3=2071. \end{cases}$

2284. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $x+\dfrac{1}{y^2}=2,\quad y+\dfrac{1}{x^2}=2.$

2285. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} 4x^3+3x^2y+y^3=8x \\ 2x^3-3x^2y+xy^2=1 \end{cases}$

2286. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} x+xy^3-xy-xy^2=3 \\ x^2+x^2y^6-x^2y^2-x^2y^4=45. \end{cases}$

2287. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} x^2y+yx+x=27 \\ xy^2+xy+y=5 \end{cases}$

2288. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$x+y+\omega=2$ (1), $x^2+y^2+\omega^2=14$ (2), $x^3+y^3+\omega^3=20.$ (3)

2289. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$x+y+\omega=20$ (1), $xy+y\omega+\omega x=121$ (2), $xy\omega=210.$ (3)

2290. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$xy+y\omega+\omega x=11$ (1), $x^2+y^2+\omega^2=14$ (2), $x^3+y^3+\omega^3=36.$ (3)

Ε' Ὁμάς. 2291. Νὰ εὑρεθῇ ὁ πρῶτος ὅρος καὶ ὁ λόγος μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν πρώτων ὅρων της εἶναι ἴσον μὲ $\nu(3\nu+1)$ διὰ κάθε τιμὴν τοῦ ν.

2292. Νὰ εὑρεθῇ μία ἀριθμητικὴ πρόοδος τοιαύτη, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων της καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν 2ν ἑπομένων ὅρων της νὰ ἔχουν ἕνα λόγον ἀνεξάρτητον τοῦ ν.

2293. Ὁ λόγος μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου μὲ τέσσαρας ὅρους εἶναι 4, τὸ γινόμενον τῶν τεσσάρων ὅρων εἶναι 585. Ποῖοι εἶναι οἱ ἀριθμοί;

2294. Μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου μὲ 15 ὅρους ὁ λόγος της εἶναι ω καὶ ὁ ὄγδοος ὅρος της εἶναι 1. 1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων της, ἐὰν $\omega=2$. 2ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ 7ος ὅρος τῆς προόδου, ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ ω εἶναι ἡ θετικὴ ῥίζα τῆς ἐξισώσεως

$$(1+x)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{x}{4}.$$

2295. Εἰς μίαν γεωμετρικὴν πρόοδον 6 ὅρων, τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄκρων ὅρων εἶναι 33, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν δύο μεσαίων ὅρων εἶναι 12. Νὰ σχηματισθῇ ἡ πρόοδος.

2296. Νὰ εὑρεθοῦν 4 ἀριθμοὶ ἀποτελοῦντες γεωμετρικὴν πρόοδον, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι 4, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων ὅρων εἶναι 60.

2297. Ἀριθμητικὴ πρόοδος καὶ φθίνουσα γεωμετρικὴ πρόοδος ἔχουν κοινὸν τὸν πρῶτον ὅρον καὶ τὸν λόγον. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ πρόοδοι, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι οἱ δεύτεροι ὅροι των διαφέρουν κατὰ 4,5 οἱ δὲ τρίτοι ὅροι των διαφέρουν κατὰ 7.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β.

ΟΜΟΓΕΝΗ ΚΑΙ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

558. **Ὁμογενῆ καὶ συμμετρικὰ πολυώνυμα.** Εἰς τὰς § 108 καὶ 312 ἐδώσαμεν τοὺς ὁρισμοὺς τῶν ὁμογενῶν παραστάσεων, τῶν συμμετρικῶν παραστάσεων καὶ τῆς κυκλικῆς ἐναλλαγῆς.

Ἐπίσης εἰς τὴν § 132 ἐδείξαμεν, ὅτι : ***Τὸ γινόμενον δύο ὁμογενῶν πολυωνύμων εἶναι ἕνα ὁμογενὲς πολυώνυμον, τοῦ ὁποίου ὁ βαθμὸς εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν βαθμῶν τῶν δύο πολυωνύμων.***

Διὰ τὰ συμμετρικὰ πολυώνυμα πρέπει νὰ ἔχωμεν ὑπ᾿ ὄψει τὰ κάτωθι :

I. Ὅταν τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ μέλη μιᾶς ταυτότητος εἶναι συμμετρικὸν θὰ εἶναι συμμετρικὸν καὶ τὸ ἄλλο μέλος· διότι ὅλαι αἱ πράξεις, αἱ ὁποῖαι γίνονται ἐπὶ τῶν συμμετρικῶν παραστάσεων θὰ δώσουν ἐξαγόμενα συμμετρικά. Αὐτὸ μᾶς διευκολύνει εἰς τὸν ἔλεγχον τῶν πράξεων καὶ εἰς τὴν εὕρεσιν τῶν τυχὸν σφαλμάτων κατὰ τὰς πράξεις.

II. Ὅταν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν $(\alpha+\beta)^\nu$, ἡ ὁποία εἶναι συμμετρικὴ ὡς πρὸς τὰ α καὶ β, τὸ ἐξαγόμενον θὰ εἶναι συμμετρικόν· εἰς κάθε ὅρον τῆς μορφῆς $A\alpha^\rho\beta^{\nu-\rho}$ θὰ ἀντιστοιχῇ ἕνας ὅρος $A\alpha^{\nu-\rho}\beta^\rho$ ὁ ὁποῖος θὰ ἔχῃ τὸν αὐτὸν συντελεστὴν A. Ἑπομένως, ἐὰν τὸ ἐξαγόμενον διαταχθῇ κατὰ τὰς ἀνιούσας ἢ κατιούσας δυνάμεις τοῦ α ἢ β, οἱ ὅροι οἱ ὁποῖοι ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰ ἄκρα, θὰ εἶναι ἴσοι· πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ γνωρίζωμεν $\left(\frac{\nu}{2}+1\right)$ πρώτους ὅρους, ἐὰν ν εἶναι ἄρτιος ἢ $\frac{\nu+1}{2}$ ὅρους, ἐὰν ν εἶναι περιττός, διὰ νὰ ἔχωμεν τοὺς ἄλλους.

Π.χ. διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν δύναμιν $(\alpha+\beta)^5$, δηλ. διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον $(\alpha+\beta)^3.(\alpha+\beta)^2$ ἢ $(\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3)(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)$ θὰ εὕρωμεν μόνον τρεῖς ὅρους :

1ον. Ἕνας μόνον ὅρος τῆς α^5, ποὺ προέρχεται ἀπὸ τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ α^3 ἐπὶ α^2. Ὁ συντελεστής του εἶναι 1.

2ον. Δύο ὅροι τοῦ $\alpha^4\beta$, οἱ ὁποῖοι προέρχονται ὁ μὲν ἕνας ἀπὸ τὸ γινόμενον $\alpha^3\times2\alpha\beta$, ὁ δὲ ἄλλος ἀπὸ τὸ γινόμενον $3\alpha^2\beta\times\alpha^2$. Τὸ ἄθροισμά των εἶναι $5\alpha^4\beta$.

3ον. Τρεῖς ὅροι τοῦ $\alpha^3\beta^2$, οἱ ὁποῖοι προέρχονται ἀπὸ τὰ γινόμενα

$$\alpha^3\times\beta^2,\quad 3\alpha^2\beta\times2\alpha\beta,\quad 3\alpha\beta^2\times\alpha^2$$

Τὸ ἄθροισμά των εἶναι $10\alpha^3\beta^2$. Ἄρα θὰ εἶναι

$$(\alpha+\beta)^5=\alpha^5+5\alpha^4\beta+10\alpha^3\beta^2+10\alpha^2\beta^3+5\alpha\beta^4+\beta$$

Ὅλοι οἱ ὅροι τοῦ ἐξαγομένου εἶναι ὁμογενεῖς καὶ τοῦ πέμπτου βαθμοῦ.

559. Θεώρημα. ***Ἐὰν ὁ διαιρετέος A καὶ ὁ διαιρέτης B μιᾶς τελείας διαιρέσεως εἶναι συμμετρικὰ πολυώνυμα, τότε καὶ τὸ πηλίκον εἶναι συμμετρικὸν πολυώνυμον.***

Ἔστω Γ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ πολυωνύμου A διὰ τοῦ B. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς διαιρέσεως θὰ ἔχωμεν τὴν ταυτότητα

$$A\equiv B.\Gamma \qquad \text{ἢ} \qquad \Gamma\equiv\frac{A}{B} \tag{1}$$

Ἐὰν γίνῃ κυκλικὴ ἐναλλαγὴ τῶν γραμμάτων τῶν περιεχομένων καὶ εἰς τὰ δύο μέλη τῆς ταυτότητος (1), ἡ ταυτότης διατηρεῖται. Ἐπειδὴ τὰ πολυώνυμα A καὶ B εἶναι συμμετρικά, ἐξ ὑποθέσεως, τὸ δεύτερον μέλος τῆς ταυτότητος (1) δὲν βλάπτεται διὰ κυκλικῆς ἐναλλαγῆς τῶν γραμμάτων των· ἄρα δὲν βλάπτεται καὶ τὸ πρῶτον μέλος αὐτῆς Γ διὰ κυκλικῆς ἐναλλαγῆς. Τὸ Γ λοιπὸν θὰ εἶναι συμμετρικόν.

560. Θεώρημα· ***Ἐὰν ἀκέραιον πολυώνυμον $\varphi(x, y, \omega)$ εἶναι συμμετρικὸν ὡς πρὸς τὰ γράμματα x, y, ω, τὰ ὁποῖα περιέχει καὶ διαιρῆται ἀκριβῶς διὰ $x+y$, θὰ διαιρῆται καὶ διὰ $y+\omega$ καὶ διὰ $\omega+x$.***

Ἔστω, ὅτι τὸ συμμετρικὸν πολυώνυμον $\varphi(x, y, \omega)$ διαιρούμενον διὰ $x+y$ δίδει ἕνα πηλίκον $\Pi(x, y, \omega)$. Τότε θὰ εἶναι

$$\varphi(x, y, \omega) \equiv (x+y).\Pi(x, y, \omega) \qquad (1)$$

Ἐὰν κάμωμεν κυκλικὴν ἐναλλαγὴν τῶν γραμμάτων εἰς τὴν ταυτότητα (1) θὰ ἔχωμεν τὴν ταυτότητα

$$\varphi(y, \omega, x) \equiv (y+\omega)\Pi(y, \omega, x) \qquad (2)$$

Ἀλλὰ τὸ πρῶτον μέλος τῆς (2) εἶναι ἐξ ὑποθέσεως συμμετρικὸν πολυώνυμον ὡς πρὸς x, y, ω καὶ ἑπομένως δὲν μεταβάλλεται, ἤτοι εἶναι $\varphi(y, \omega, x)=\varphi(x, y, \omega)$. Ἡ ταυτότης λοιπὸν (2) γράφεται

$$\varphi(x, y, \omega) \equiv (y+\omega)\Pi(y, \omega, x) \qquad (3)$$

Ἡ ταυτότης (3) δεικνύει ὅτι τὸ $\varphi(x, y, \omega)$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ $y+\omega$ καὶ δίδει πηλίκον $\Pi(y, \omega, x)$.

Ὁμοίως διὰ νέας κυκλικῆς ἐναλλαγῆς ἀποδεικνύομεν, ὅτι τὸ $\varphi(x, y, \omega)$ διαιρεῖται ἀκριβῶς καὶ διὰ $\omega+x$.

Σημ. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι, ὅταν ἕνα συμμετρικὸν πολυώνυμον $\varphi(x, y, \omega)$ διαιρῆται ἀκριβῶς διὰ $x-y$, θὰ διαιρῆται ἀκριβῶς καὶ διὰ $y-\omega$ καὶ διὰ $\omega-x$.

561 Πρόβλημα· ***Νὰ εὑρεθῇ ἡ γενικὴ μορφὴ ἑνὸς συμμετρικοῦ πολυωνύμου δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς τὰ γράμματα x, y, ω.***

Ἕνα πολυώνυμον τοῦ β΄ βαθμοῦ ὡς πρὸς x, y, ω, ἔχει τὴν μορφὴν

$$Ax^2+By^2+\Gamma\omega^2+\Delta xy+Ey\omega+Z\omega x+Hx+\Theta y+I\omega+N \qquad (1)$$

ὅπου μερικοὶ ἀπὸ τοὺς συντελεστὰς $A, B, \Gamma \ldots$, δύνανται νὰ εἶναι καὶ μηδέν.

Διὰ νὰ εἶναι τὸ πολυώνυμον (1) συμμετρικὸν ὡς πρὸς τὰ γράμματα x, y, ω, πρέπει νὰ μὴ μεταβάλλεται διὰ κυκλικῆς ἐναλλαγῆς τῶν γραμμάτων του.

Διὰ κυκλικῆς ἐναλλαγῆς τῶν γραμμάτων του τὸ (1) γίνεται

$$Ay^2+B\omega^2+\Gamma x^2+\Delta y\omega+E\omega x+Zxy+Hy+\Theta\omega+Ix+N \qquad (2)$$

Διὰ νὰ εἶναι τὰ πολυώνυμα (1) καὶ (2) ἐκ ταυτότητος ἴσα πρέπει οἱ συντελεσταὶ τῶν ὅρων τῶν αὐτῶν δυνάμεων τῶν x, y, ω νὰ εἶναι ἴσοι ἤτοι πρέπει νὰ εἶναι

$$A=\Gamma, \quad B=A, \quad \Gamma=B \qquad (3)$$
$$\Delta=Z, \quad E=\Delta, \quad Z=E \qquad (4)$$
$$H=I, \quad \Theta=H, \quad I=\Theta \qquad (5)$$

Ἐκ τῶν (3) ἔχομεν $A=B=\Gamma$.

Ἐκ τῶν (4) ἔχομεν $\Delta=E=Z$.

Ἐκ τῶν (5) ἔχομεν $H=\Theta=I$.

Ἐὰν θέσωμεν $A=B=\Gamma=k$, $\Delta=E=Z=\lambda$, $H=\Theta=I=\mu$ καὶ $N=\nu$ τὸ (1) λαμβάνει τὴν μορφὴν

$$k(x^2+y^2+\omega^2)+\lambda(xy+y\omega+\omega x)+\mu(x+y+\omega)+\nu$$

Σημ. Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι ἡ γενικὴ μορφὴ ἑνὸς συμμετρικοῦ πολυωνύμου, ὡς πρὸς τὰ γράμματα x, y, ω τοῦ πρώτου βαθμοῦ εἶναι $k(x+y+\omega)+\lambda$, τοῦ δὲ τρίτου βαθμοῦ εἶναι

$$k(x^3+y^3+\omega^3)+\lambda(x^2y+x^2\omega+y^2x+y^2\omega+\omega^2x+\omega^2y)+\mu xy\omega+$$
$$\nu(x^2+y^2+\omega^2)+\rho(xy+y\omega+\omega x)+\sigma(x+y+\omega)+\tau$$

ἔνθα $k, \lambda, \mu, \ldots \tau$ εἶναι σταθεροὶ ἀριθμοί.

561. Θεώρημα. ***Ἐὰν ἕνα πολυώνυμον $\varphi(x, y)$ συμμετρικὸν ὡς πρὸς x καὶ y, εἶναι διαιρετὸν διὰ $(x-y)$, θὰ εἶναι διαιρετὸν καὶ διὰ $(x-y)^2$.***

Ἔστω, ὅτι τὸ πολυώνυμον $\varphi(x, y)$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ $x-y$ καὶ δίδει πηλίκον $\Pi(x, y)$. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς διαιρέσεως θὰ ἔχωμεν τὴν ταυτότητα $\varphi(x, y)=(x-y).\Pi(x, y)$ (1)

Ἡ ταυτότης (1) ὑφίσταται διὰ κάθε τιμὴν τῶν x καὶ y, ἄρα ὑφίσταται καὶ ἐὰν ἐναλλάξωμεν τὰ x καὶ y.

Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν $\varphi(y, x)=(y-x).\Pi(y, x)$ (2)

καὶ ἐπειδὴ τὰ πρῶτα μέλη τῶν (1) καὶ (2) εἶναι ἴσα, διότι ἡ ἐναλλαγὴ τῶν x καὶ y δὲν μεταβάλλει τὸ $\varphi(x, y)$, ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως τὸ $\varphi(x,y)$ εἶναι συμμετρικὸν ὡς πρὸς τὰ x καὶ y, θὰ ἔχωμεν

$$(x-y)\,\Pi(x, y)=(y-x)\,\Pi(y, x)$$

ἤ, διαιροῦντες καὶ τὰ δύο μέλη διὰ $x-y$, $\Pi(x, y)=-\Pi(y, x)$ (3)

Ἐὰν εἰς τὴν ταυτότητα (3) ἀντικαταστήσωμεν τὸ x διὰ τοῦ y, αὕτη δὲν μεταβάλλεται καὶ θὰ ἔχωμεν $\Pi(y, y)=-\Pi(y, y)$ ἢ $\Pi(y, y)=0$

Ἐπειδὴ $\Pi(y,y)=0$ ἕπεται, ὅτι τὸ πολυώνυμον $\Pi(x,y)$ μηδενίζεται, ὅταν ἀντικαταστήσωμεν τὸ x διὰ τοῦ y, καὶ ἑπομένως τὸ $\Pi(x,y)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $x-y$, καὶ ἔστω, ὅτι δίδει ἕνα πηλίκον $\Pi_1(x,y)$, ὁπότε θὰ ἔχωμεν τὴν ταυτότητα $\Pi(x,y)=(x-y).\Pi_1(x,y)$.

Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὸ $\Pi(x,y)$ διὰ τῆς τιμῆς του εἰς τὴν (1) θὰ ἔχωμεν τὴν ταυτότητα $\varphi(x,y)=(x-y)^2.\Pi_1(x,y)$

ἐκ τῆς ὁποίας συνάγομεν, ὅτι τὸ $\varphi(x,y)$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ $(x-y)^2$.

562. Ἐφαρμογαὶ τῶν συμμετρικῶν πολυωνύμων. Τὰ κατωτέρω παραδείγματα θὰ μᾶς δείξουν πῶς δυνάμεθα νὰ ἁπλοποιήσωμεν τὰς ἀλγεβρικὰς πράξεις ἐπὶ τῶν συμμετρικῶν παραστάσεων πρὸ παντός, ὅταν αὗται εἶναι συγχρόνως καὶ ὁμογενεῖς.

563. Παράδειγμα 1ον. ***Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ $(x+y+\omega)^3$.***

Ἔχομεν $(x+y+\omega)^3=(x+y+\omega)^2(x+y+\omega)$

$$=(x^2+y^2+\omega^2+2xy+2x\omega+2y\omega)(x+y+\omega) \quad (1)$$

Ἀντὶ νὰ ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμόν, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: Τὸ ἐξαγόμενον πρέπει νὰ εἶναι ἕνα πολυώνυμον ὁμογενὲς τρίτου βαθμοῦ καὶ συγχρόνως συμμετρικὸν ὡς πρὸς τὰ γράμματα x,y,ω. Οἱ ὅροι τοῦ ἐξαγομένου θὰ εἶναι λοιπὸν τρίτου βαθμοῦ καὶ τῆς μορφῆς

$$x^3, \quad x^2y \quad \text{καὶ} \quad xy\omega$$

διότι δὲν δυνάμεθα νὰ φαντασθῶμεν, ὅτι ὑπάρχουν ὅροι τρίτου βαθμοῦ, ποὺ νὰ ἔχουν διαφορετικὴν μορφὴν ἀπὸ τὰς ἀνωτέρω, δηλ. ἀπὸ τὸν κύβον ἑνὸς γράμματος, ἀπὸ τὸ γινόμενον τοῦ τετραγώνου ἑνὸς οἱουδήποτε γράμματος ἐπὶ ἕνα ἄλλο γράμμα καὶ ἀπὸ τὸ γινόμενον τῶν τριῶν γραμμάτων.

Ὁ συντελεστὴς τοῦ ὅρου τῆς μορφῆς x^2y θὰ εἶναι ὁ αὐτὸς δι' ὅλους τοὺς ὅρους $x^2y,\ x^2\omega,\ y^2x,\ y^2\omega,\ \omega^2x,\ \omega^2y,$ τοὺς ὁποίους εὑρίσκομεν, ἐὰν λάβωμεν, καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους, τὸ γινόμενον τοῦ τετραγώνου ἑνὸς γράμματος ἐπὶ ἕνα ἄλλο γράμμα.

Τὸ ζητούμενον ἐξαγόμενον θὰ ἔχῃ λοιπὸν τὴν μορφὴν

$$\lambda(x^3+y^3+\omega^3)+\mu(x^2y+x^2\omega+y^2x+y^2\omega+\omega^2x+\omega^2y)+\nu xy\omega \qquad (2)$$

1ον. *Ὑπολογισμὸς τοῦ λ.* Ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸ δεύτερον μέλος τῆς (1), τὸ γινόμενον θὰ περιέχῃ ἕνα μόνον ὅρον ὡς πρὸς x^3, τὸ γινόμενον τοῦ $x^2\times x$· θὰ εἶναι λοιπὸν $\lambda=1$.

2ον. *Ὑπολογισμὸς τοῦ μ.* Οἱ ὅροι τοῦ γινομένου τῆς μορφῆς x^2y προέρχονται ἀπὸ τὸ γινόμενον τοῦ x^2 ἐπὶ y καὶ ἀπὸ τὸ γινόμενον τοῦ $2xy$ ἐπὶ x· θὰ εἶναι λοιπὸν $x^2y+2x^2y=3x^2y$, ὥστε $\mu=3$.

3ον. *Ὑπολογισμὸς τοῦ ν.* Τὸ ἐξαγόμενον περιέχει τρεῖς ὅρους τῆς μορφῆς $xy\omega$, οἱ ὁποῖοι προέρχονται ἀπὸ τὰ γινόμενα

$$2xy\times\omega, \quad 2x\omega\times y \quad \text{καὶ} \quad 2y\omega\times x$$

τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι $6xy\omega$· θὰ εἶναι λοιπὸν $\nu=6$.

Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν

$$(x+y+\omega)^3=x^3+y^3+\omega^3+3(x^2y+x^2\omega+y^2x+y^2\omega+\omega^2x+\omega^2y)+6xy\omega.$$

564. Παράδειγμα 2ον. ***Νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον παραγόντων ἡ παράστασις*** $y=\alpha(\beta+\gamma)^2+\beta(\gamma+\alpha)^2+\gamma(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\gamma$

Ἐὰν θέσωμεν $\beta=-\gamma$ εὑρίσκομεν

$$y=\alpha(-\gamma+\gamma)^2-\gamma(\gamma+\alpha)^2+\gamma(\alpha-\gamma)^2+4\alpha\gamma^2$$
$$=0-\gamma(\gamma^2+2\alpha\gamma+\alpha^2)+\gamma(\alpha^2-2\alpha\gamma+\gamma^2)+4\alpha\gamma^2$$
$$=-\gamma^3-2\alpha\gamma^2-\alpha^2\gamma+\alpha^2\gamma-2\alpha\gamma^2+\gamma^3+4\alpha\gamma^2=0.$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ παράστασις y μηδενίζεται διὰ $\beta=-\gamma$, ἄρα εἶναι διαιρετὴ διὰ $(\beta+\gamma)$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι μηδενίζεται διὰ $\gamma=-\alpha$ καὶ διὰ $\alpha=-\beta$, ἄρα εἶναι διαιρετὴ καὶ διὰ $(\gamma+\alpha)$ καὶ διὰ $(\alpha+\beta)$. Ἀφοῦ διαιρεῖται ἀκριβῶς χωριστὰ διὰ $(\beta+\gamma)$, $(\gamma+\alpha)$, $(\alpha+\beta)$ θὰ διαιρῆται καὶ διὰ τοῦ γινομένου $(\beta+\gamma)\,(\gamma+\alpha)\,(\alpha+\beta)$.

Ἐπειδὴ ὁ διαιρετέος y καὶ ὁ διαιρέτης $(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)$ εἶναι πολυώνυμα ὁμογενῆ καὶ συμμετρικὰ τρίτου βαθμοῦ, ὡς πρὸς τὰ γράμματα α, β, γ ἕπεται, ὅτι τὸ πηλίκον θὰ εἶναι σταθερὸς ἀριθμὸς λ. Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν

$$\alpha(\beta+\gamma)^2+\beta(\gamma+\alpha)^2+\gamma(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\gamma=\lambda(\beta+\gamma)\,(\gamma+\alpha)\,(\gamma+\alpha) \qquad (1)$$

Ἡ ταυτότης (1) ἀληθεύει διὰ κάθε τιμὴν τῶν α, β, γ· ἄρα θὰ ἀληθεύῃ καὶ διὰ $\alpha=\beta=\gamma=1$.

Θέτοντες $\alpha=\beta=\gamma=1$ εἰς τὴν (1) εὑρίσκομεν

$$2^2+2^2+2^2-4=\lambda 2.2.2 \quad \text{ἢ} \quad 8=8\lambda \quad \text{ἢ} \quad \lambda=1$$

Θὰ εἶναι λοιπὸν

$$\alpha(\beta+\gamma)^2+\beta(\gamma+\alpha)^2+\gamma(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\gamma=(\beta+\gamma)\,(\gamma+\alpha)\,\alpha+\beta).$$

565. **Παράδειγμα 3ον.** ***Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ συμμετρικὸν πολυώνυμον*** $A_\mu = x^\mu(y-\omega)+y^\mu(\omega-x)+\omega^\mu(x-y)$ ***εἶναι διαιρετὸν διὰ*** $B=(y-\omega)(\omega-x)(x-y)$ ***ὅταν τὸ*** μ ***εἶναι ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἀριθμός. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ πηλίκον διὰ*** $\mu=2$, $\mu=3$, $\mu=4$. (Πολυτεχνεῖον, 1933)

Ἐὰν εἰς τὸ δοθὲν πολυώνυμον A_μ θέσωμεν $y=\omega$ εὑρίσκομεν

$$A_\mu = x^\mu(\omega-\omega)+\omega^\mu(\omega-x)+\omega^\mu(x-\omega)$$
$$= \quad 0 \quad +\omega^\mu(\omega-x)-\omega^\mu(\omega-x)=0$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ A_μ μηδενίζεται διὰ $y=\omega$· ἄρα διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ $y-\omega$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ A_μ μηδενίζεται διὰ $\omega=x$ καὶ διὰ $x=y$· ἄρα διαιρεῖται ἀκριβῶς καὶ διὰ $\omega-x$ καὶ διὰ $x-y$.

Ἀφοῦ τὸ A_μ διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ $y-\omega$, $\omega-x$, $x-y$, θὰ διαιρῆται καὶ διὰ τοῦ γινομένου $B=(y-\omega)(\omega-x)(x-y)$.

Ἐπειδὴ ὁ διαιρετέος A_μ εἶναι $\mu+1$ βαθμοῦ, ὁ δὲ διαιρέτης B εἶναι τρίτου βαθμοῦ, τὸ πηλίκον θὰ εἶναι $(\mu+1)-3$ ἢ $\mu-2$ βαθμοῦ, ὁμογενὲς καὶ συμμετρικὸν ὡς πρὸς τὰ x, y, ω.

Ἂν παραστήσωμεν μὲ Π τὸ πηλίκον αὐτό, θὰ ἔχωμεν τὴν ταυτότητα

$$A_\mu = B.\Pi$$

ἢ
$$x^\mu(y-\omega)+y^\mu(\omega-x)+\omega^\mu(x-y)=(y-\omega)(\omega-x)(x-y).\Pi \qquad (1)$$

1ον. Ἐὰν $\mu=2$, τότε ὁ διαιρετέος A_μ καὶ ὁ διαιρέτης B εἶναι τρίτου βαθμοῦ καὶ ἑπομένως τὸ πηλίκον Π εἶναι μηδενικοῦ βαθμοῦ, ἤτοι σταθερὰ ποσότης καὶ ἔστω αὕτη ἡ λ.

Ἡ ταυτότης λοιπὸν (1) διὰ $\mu=2$ γίνεται

$$x^2(y-\omega)+y^2(\omega-x)+\omega^2(x-y)=\lambda(y-\omega)(\omega-x)(x-y) \qquad (2)$$

Ἡ ταυτότης (2) ὑφίσταται διὰ κάθε τιμὴν τῶν x,y,ω, ἄρα καὶ διὰ
$$x=1, \quad y=-1, \quad \omega=0$$

Διὰ $x=1$, $y=-1$, $\omega=0$, ἡ (2) δίδει

$$1(-1)+1(-1)=\lambda(-1)(-1)2 \quad ἢ \quad -2=2\lambda \quad ἄρα \quad \lambda=-1$$

Θέτοντες εἰς τὴν (2) ἀντὶ τοῦ λ τὴν τιμήν του -1 εὑρίσκομεν τὴν ταυτότητα

$$x^2(y-\omega)+y^2(\omega-x)+\omega^2(x-y)=-(y-\omega)(\omega-x)(x-y) \qquad (3)$$

2ον. Ἐὰν $\mu=3$ τότε ὁ διαιρετέος A_μ εἶναι τετάρτου βαθμοῦ, ὁ διαιρέτης B τρίτου βαθμοῦ καὶ τὸ πηλίκον Π πρώτου βαθμοῦ. Ἐπειδὴ τὸ πηλίκον εἶναι ὁμογενὲς καὶ συμμετρικὸν ὡς πρὸς τὰ x,y,ω, θὰ εἶναι τῆς μορφῆς $\lambda(x+y+\omega)$.

Διὰ $\mu=3$ θὰ ἔχωμεν λοιπὸν τὴν ταυτότητα

$$x^3(y-\omega)+y^3(\omega-x)+\omega^3(x-y)=(y-\omega)(\omega-x)(x-y).\lambda(x+y+\omega) \qquad (4)$$

Ἡ ταυτότης (4) ὑφίσταται διὰ κάθε τιμὴν τῶν x, y, ω, ἄρα καὶ διὰ
$$x=1, \quad y=2, \quad \omega=0$$

Διὰ $x=1$, $y=2$, $\omega=0$, ἡ (4) δίδει

$$1.2+8(-1)=2(-1)(-1)\lambda 3 \quad ἢ \quad -6=6\lambda \quad ἄρα \quad \lambda=-1$$

Θέτοντες εἰς τὴν (3) ἀντὶ τοῦ λ τὴν τιμήν του εὑρίσκομεν τὴν ταυτότητα

$$x^3(y-\omega)+y^3(\omega-x)+\omega^3(x-y)=-(y-\omega)(\omega-x)(x-y)(x+y+\omega) \quad (5)$$

3ον. Ἐὰν $\mu=4$, τότε ὁ διαιρετέος A_μ εἶναι πέμπτου βαθμοῦ, ὁ διαιρέτης Β τρίτου βαθμοῦ καὶ τὸ πηλίκον Π δευτέρου βαθμοῦ. Ἐπειδὴ τὸ πηλίκον εἶναι ὁμογενὲς καὶ συμμετρικὸν πολυώνυμον ὡς πρὸς x, y, ω, θὰ εἶναι τῆς μορφῆς $\Gamma(x^2+y^2+\omega^2)+\Delta(xy+y\omega+\omega x)$

Διὰ $\mu=4$ ἡ ταυτότης (1) γράφεται

$$x^4(y-\omega)+y^4(\omega-x)+\omega^4(x-y)=$$
$$=(y-\omega)(\omega-x)(x-y)[\Gamma(x^2+y^2+\omega^2)+\Delta(xy+y\omega+\omega x)] \quad (6)$$

Ἡ ταυτότης (6) ὑφίσταται διὰ κάθε τιμὴν τῶν x, y, ω, ἄρα καὶ διὰ $x=1, \; y=-1, \; \omega=0$ καὶ διὰ $x=2, \; y=1, \; \omega=0$

Διὰ $x=1, \; y=-1$ καὶ $\omega=0$ ἡ (6) δίδει

$$1(-1)+1(-1)=(-1)(-1).2[2\Gamma+\Delta(-1)] \text{ ἢ } -2=2(2\Gamma-\Delta) \text{ ἢ } 2\Gamma-\Delta=-1 \quad (7)$$

Διὰ $x=2, \; y=1, \; \omega=0$ ἡ (6) δίδει $\quad 5\Gamma+2\Delta=-7 \quad (8)$

Ἐκ τῶν (7) καὶ (8) εὑρίσκομεν, ὅτι $\Gamma=-1, \; \Delta=-1$.

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (6) τὰ Γ καὶ Δ διὰ τῶν τιμῶν των εὑρίσκομεν τὴν ταυτότητα.

$$x^4(y-\omega)+y^4(\omega-x)+\omega^4(x-y)=$$
$$=-(y-\omega)(\omega-x)(x-y)(x^2+y^2+\omega^2+xy+y\omega+\omega x)$$

Ἀσκήσεις. *2298.* Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ πολυώνυμον $x^3+y^3+\omega^3-3xy\omega$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $x+y+\omega$ καὶ νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον.

2299. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ παράστασις $\alpha^3\beta^3+\beta^3\gamma^3+\gamma^3\alpha^3-3\alpha^2\beta^2\gamma^2$ εἶναι διαιρετὴ διὰ $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$ καὶ νὰ ὑπολογισθῇ τὸ πηλίκον.

2300. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ πολυώνυμον

$$A=(\alpha+\beta+x)^4+\alpha^4+\beta^4+x^4-(\alpha+\beta)^4-(\beta+x)^4-(x+\alpha)^4$$

εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ $B=\alpha\beta x(\alpha+\beta+x)$ καὶ νὰ ὑπολογισθῇ τὸ πηλίκον χωρὶς νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ διαίρεσις.

2301. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ πηλίκον τοῦ $\alpha^2(\beta+\gamma)+\beta^2(\gamma+\alpha)+\gamma^2(\alpha+\beta)+2\alpha\beta$ διὰ τοῦ $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$.

2802. Ἐὰν μ εἶναι ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἀριθμός, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ πολυώνυμον $(\alpha+\beta+\gamma)^\mu-\alpha^\mu-\beta^\mu-\gamma^\mu$ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ $(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)$. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ πηλίκον διὰ $\mu=3$ καὶ διὰ $\mu=5$.

2303. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ πολυώνυμον

$$A=(\beta^2\gamma^2+\alpha^2\delta^2)(\beta-\gamma)(\alpha-\delta)+(\gamma^2\alpha^2+\beta^2\delta^2)(\gamma-\alpha)(\beta-\delta)+(\alpha^2\beta^2+\gamma^2\delta^2)(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)$$

εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ $B=(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)(\gamma-\delta)$ καὶ νὰ ὑπολογισθῇ τὸ πηλίκον.

2304. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ πολυώνυμον

$$A=x^\mu[\omega^2(x-y)^2-y^2(\omega-x)^2]+y^\mu[x^2(y-\omega)^2-\omega^2(x-y)^2]+$$
$$+\omega^\mu[y^2(\omega-x)^2-x^2(y-\omega)^2]$$

ὅπου μ εἶναι ἀκέραιος καὶ θετικὸς εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ $B=(y-\omega)(\omega-x)(x-y)$. καὶ νὰ ὑπολογισθῇ τὸ πηλίκον.

2305. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ πηλίκον Π τῆς διαιρέσεως τοῦ πολυωνύμου $A=x^\mu(y-\omega)+y^\mu(\omega-x)+\omega^\mu(x-y)$ διὰ τοῦ $B=(x-\omega)(\omega-x)(x-y)$ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν ὅρων, τοὺς ὁποίους λαμβάνομεν, ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὸ $-x^\alpha y^\beta \omega^\gamma$ (1) τὰ α, β, γ δι' ὅλων τῶν ἀκεραίων τιμῶν θετικῶν ἢ μηδέν, οἱ ὁποῖοι ἐπαληθεύουν τὴν σχέσιν $\alpha+\beta+\gamma=\mu-2$.

2306. Νὰ ἐπαληθευθῇ ἡ ταυτότης

$$4(x+y+\omega)^3-15[x(y-\omega)^2+y(\omega-x)^2+\omega(x-y)^2]-x(2x-y-\omega)^2-$$
$$-y(2y-\omega-x)^2-\omega(2\omega-x-y)^2=108xy\omega.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

ΜΟΡΦΑΙ ΤΟΥ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ $\alpha x^2+\beta x+\gamma$

566. **Μορφαί τοῦ τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$.** Τὸ τριώνυμον τοῦ δευτέρου βαθμοῦ δύναται νὰ λάβῃ ὡρισμένας μορφάς, ὑπὸ τὰς ὁποίας δυνάμεθα νὰ σπουδάσωμεν εὐκολώτερον τὰς ἰδιότητάς του.

Πράγματι· ἔστω τὸ τριώνυμον

$$\varphi(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma.$$

Ἐὰν θέσωμεν τὸ α ὡς παράγοντα, τὸ τριώνυμον γράφεται

$$\varphi(x)=\alpha\left(x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}\right) \quad \text{ἢ} \quad \varphi(x)=\alpha\left(x^2+2\cdot\frac{\beta}{2\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}\right).$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι οἱ δύο πρῶτοι ὅροι x^2 καὶ $2\cdot\frac{\beta}{2\alpha}$ τῆς παρενθέσεως εἶναι οἱ δύο πρῶτοι ὅροι τοῦ τετραγώνου τοῦ $\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)$. Διὰ νὰ συμπληρώσωμεν τὸ τετράγωνον αὐτό, προσθέτομεν τὸ $\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$ ἢ $\frac{\beta^2}{4\alpha^2}$. Ἀλλὰ διὰ νὰ μὴ μεταβληθῇ τὸ ἐντὸς τῆς παρενθέσεως ἄθροισμα, προσθέτομεν καὶ ἀφαιροῦμεν τὸ $\frac{\beta^2}{4\alpha^2}$. Ἡ προηγουμένη λοιπὸν ἰσότης γράφεται

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=\alpha\left(x^2+2\cdot\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\beta^2}{4\alpha^2}-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}+\frac{\gamma}{\alpha}\right)\\&=\alpha\left[\left(x^2+2\cdot\frac{\beta}{2\alpha}x+\frac{\beta^2}{4\alpha^2}\right)-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}\right]\\&=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}\right].\end{aligned}$$

Ἡ μορφὴ

$$\boxed{\varphi(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}\right]} \quad (1)$$

λέγεται ***κανονικὴ μορφὴ τοῦ τριωνύμου***.

Διακρίνομεν τὰς κάτωθι περιπτώσεις :

I. Ἐὰν $\beta^2-4\alpha\gamma>0$, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὴν παράστασιν, ἡ ὁποία εὑρίσκεται ἐντὸς τῆς ἀγγύλης, ὡς διαφορὰν δύο τετραγώνων, ὁπότε ἡ (1) γράφεται

$$\boxed{\varphi(x)=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}\right)^2\right]} \qquad (2)$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι : ***τὸ τριώνυμον δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν ἑνὸς γινομένου τοῦ α ἐπὶ τὴν διαφορὰν δύο τετραγώνων.***

Π.χ. Εἰς τὸ τριώνυμον $x^2-8x+15$ εἶναι $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=8^2-4\,.\,15=4$.

Ἐπειδὴ $\Delta>0$, τὸ τριώνυμον ἔχει τὴν μορφὴν (2).

Ἐδῶ εἶναι $\alpha=1$, $\beta=-8$, $\gamma=15$· ἑπομένως θὰ εἶναι

$$x^2-8x+15=(x+4)^2-1.$$

Σημ. Ἀπὸ τὴν μορφὴν (2) δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν γνωστὴν μορφὴν $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-x')(x-x'')$.

Πράγματι· τὸ δεύτερον μέλος τῆς (2), ὡς διαφορὰ δύο τετραγώνων, δύναται νὰ γραφῇ :

$$\varphi(x)=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}-\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}\right)\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}+\frac{\sqrt{\beta^4-4\alpha\gamma}}{2\alpha}\right)\right]$$

$$=\alpha\left[\left(x-\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}\right)\left(x-\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}\right)\right]$$

ἢ $$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-x')(x-x'').$$

II. Ἐὰν $\beta^2-4\alpha\gamma=0$, ἡ κανονικὴ μορφὴ (1) γίνεται

$$\varphi(x)=\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2. \qquad (3)$$

Ἐπειδὴ τὸ $-\frac{\beta}{2\alpha}$ παριστάνει τὴν διπλῆν ρίζαν x' τοῦ τριωνύμου $\varphi(x)$, ἡ μορφὴ (3) γράφεται

$$\boxed{\varphi(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-x')^2}$$

Ὥστε : ***Τὸ τριώνυμον δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν ἑνὸς τελείου τετραγώνου.***

III. Ἐὰν $\beta^2-4\alpha\gamma<0$, ἡ κανονικὴ μορφὴ (1) δύναται νὰ γραφῇ $\varphi(x)=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha^2}\right]$.

Ἐπειδὴ $\beta^2-4\alpha\gamma<0$, θὰ εἶναι $4\alpha\gamma-\beta^2>0$ καὶ ἑπομένως ἡ ἀνωτέρω ἰσότης γράφεται

$$\boxed{\varphi(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}}{2\alpha}\right)^2\right]} \qquad (4)$$

Ὥστε : ***Τὸ τριώνυμον δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν ἑνὸς γινομένου τοῦ α ἐπὶ τὸ ἄθροισμα δύο τετραγώνων.***

Π.χ. Εἰς τὸ τριώνυμον $5x^2+2x+3$ εἶναι $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=2^2-4\,.\,5\,.\,3=-56$.

Ἐπειδὴ $\Delta<0$, τὸ τριώνυμον θὰ ἔχῃ τὴν μορφὴν (4)

Ἐδῶ εἶναι $\alpha=5$, $\beta=2$, $\gamma=3$· ἑπομένως θὰ εἶναι

$$5x^2+2x+3=5\left[\left(x+\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{56}}{10}\right)^2\right].$$

Ἀσκήσεις. Α' Ὁμάς. *2307.* **Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ λ, τὰ κάτωθι τριώνυμα** εἶναι 1ον. τέλεια τετράγωνα ; 2ον. ἴσα μὲ τὸ ἄθροισμα δύο τετραγώνων, 3ον. ἴσα μὲ τὴν διαφορὰν δύο τετραγώνων ;

1. $5x^2-4x+\lambda$. 2. $(\lambda+1)x^2-(2\lambda+1)x+\lambda+3$.

2308. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ, τὰ κάτωθι τριώνυμα εἶναι τέλεια τετράγωνα ;

1. $(\lambda+1)x^2-6\lambda x+\lambda$. 3. $(\lambda+1)x^2+(5\lambda-3)x+2\lambda+3$.
2. $3x^2-(\lambda-2)x+\lambda+7$. 4. $(\lambda+9)x^2-(30+\lambda)x+\lambda-15$.

2309. Νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον παραγόντων ἡ παράστασις :

$$(\alpha^2-4\beta^2)x^2+2(\alpha^3+2\beta^3)x+\alpha^4-\beta^4.$$

2310. Νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον παραγόντων ἡ παράστασις :

$$(\alpha^2+\alpha-2)x^2+(2\alpha^2+\alpha+3)x+\alpha^2-1.$$

2311. Νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον παραγόντων ἡ παράστασις :

$$(\alpha-\beta)^2x^2+3(\alpha^2+\beta^2)x+(\alpha+\beta)^2.$$

2312. Νὰ ὁρισθῇ ὁ ν, ἵνα τὸ πολυώνυμον $\Pi=\alpha x^2+\beta x+\gamma+\nu(x^2+1)$, εἶναι τέλειον τετράγωνον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ προκύπτουσα, ὡς πρὸς ν, ἐξίσωσις ἔχει ρίζας πραγματικάς.

Β' Ὁμάς. *2313.* **Διά ποίας τιμὰς τοῦ λ ἡ παράστασις**

$$x^2+\lambda yx+2y^2+2x+y-3$$

δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον δύο συμμέτρων παραγόντων.

2314. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ ἡ παράστασις

$$A=x^2+\lambda xy+2y^2-4x-7y+3$$

δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον δύο συμμέτρων παραγόντων.

2315. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ τιμὴ τοῦ λ εἰς τρόπον, ὥστε τὸ πολυώνυμον $\varphi(x,y)=10x^2+(\lambda+3)xy-(\lambda-7)y^2-x+(\lambda-3)y-2$ νὰ ἀναλύεται εἰς γινόμενον δύο πρωτοβαθμίων παραγόντων ὡς πρὸς x καὶ y.

2316. Νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ παράστασις $A=\alpha(x^2-y^2)-(\beta-\gamma)xy$ ἀναλύεται εἰς γινόμενον δύο πρωτοβαθμίων πραγματικῶν παραγόντων πρὸς x καὶ y.

2317. 1ον. Ἐὰν α, β, γ παριστάνουν τὰς πλευρὰς ἑνὸς τριγώνου, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τριώνυμον $\varphi(x)=\beta^2x^2+(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)x+\gamma^2$ εἶναι θετικὸν διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x. 2ον. Ποία σχέσις πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν α, β, γ, ἵνα τὸ φ(x) εἶναι τέλειον τετράγωνον.

2318. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ἐὰν τὰ δύο πολυώνυμα $(\alpha x+\beta)^2+(\alpha' x+\beta')^2$ καὶ $(\alpha x+\gamma)^2+(\alpha' x+\gamma')^2$ εἶναι τετράγωνα, εἶναι ἐπίσης τετράγωνον καὶ τὸ πολυώνυμον $(\beta x+\gamma)^2+(\beta' x+\gamma')^2$.

2319. Λέγομεν, ὅτι ἕνα πολυώνυμον τοῦ δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς x, δηλ. τῆς μορφῆς $Ax^2+Bx+\Gamma$, εἶναι ἕνα τετράγωνον, ὅταν δυνάμεθα νὰ θέσωμεν τὸ πολυώνυμον αὐτὸ ὑπὸ τὴν μορφὴν $A(x+\mu)^2$. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα τὸ πολυώνυμον $Ax^2+Bx+\Gamma$ εἶναι ἕνα τετράγωνον, εἶναι ἡ $B^2-4A\Gamma=0$.

2320. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα τὸ πολυώνυμον $(\alpha x+\beta)^2+(\alpha' x+\beta')^2$ εἶναι ἕνα τετράγωνον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ.

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΩΝ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ

1. ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΙΣ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

567. Διερεύνησις μιᾶς ἐξισώσεως τοῦ δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς τὰς τιμὰς μιᾶς παραμέτρου λ. Διὰ νὰ ***διερευνήσωμεν*** μίαν ἐξίσωσιν τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, ἡ ὁποία ἔχει ***μίαν μεταβλητὴν παράμετρον λ***, δηλ. διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ***εἶδος*** καὶ τὸ ***σημεῖον*** τῶν ριζῶν της κατὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τῆς παραμέτρου λ, πρέπει νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψει τὸν κάτωθι γνωστὸν πίνακα (§ 396), ὁ ὁποῖος συνδυάζει τὰ ἐξαγόμενα τοῦ εἴδους καὶ τοῦ σημείου τῶν ριζῶν μιᾶς ἐξισώσεως τοῦ δευτέρου βαθμοῦ.

Πίναξ διερευνήσεως τοῦ εἴδους καὶ τοῦ σημείου τῶν ριζῶν x', x'' ($x' < x''$) τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, χωρὶς νὰ ὑπολογισθοῦν προηγουμένως αἱ ρίζαι αὐταί.

I. Ἐὰν $\frac{\gamma}{\alpha} < 0$ ἡ ἐξίσωσις ἔχει δύο ρίζας ἑτεροσ.	$-\frac{\beta}{\alpha} > 0$		μεγαλυτέρα κατ' ἀπόλυτον τιμὴν εἶναι ἡ θετική.
	$-\frac{\beta}{\alpha} < 0$		μεγαλυτέρα κατ' ἀπόλυτον τιμὴν εἶναι ἡ ἀρνητική.
	$-\frac{\beta}{\alpha} = 0$		αἱ δύο ρίζαι εἶναι ἀντίθετοι
II. Ἐὰν $\frac{\gamma}{\alpha} > 0$ Πρέπει νὰ ἐξετάσωμεν τὴν διακρίνουσαν $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$	$\Delta > 0$ ἔχει δύο ρίζας	$-\frac{\beta}{\alpha} > 0$	αἱ δύο ρίζαι εἶναι θετικαί, δηλαδὴ $0 < x' < x''$
		$-\frac{\beta}{\alpha} < 0$	αἱ δύο ρίζαι εἶναι ἀρνητικαί, δηλαδὴ $x'' < x' < 0$
	$\Delta = 0$		ἔχει δύο ρίζας ἴσας μὲ $-\frac{\beta}{2\alpha}$ δηλ. εἶναι $x' = x'' = -\frac{\beta}{2\alpha}$
	$\Delta < 0$		δὲν ἔχει ρίζας
III. Ἐὰν $\frac{\gamma}{\alpha} = 0$	ἡ μία ρίζα εἶναι ἴση μὲ 0 καὶ ἡ ἄλλη ἴση μὲ $-\frac{\beta}{\alpha}$.		

568. Παράδειγμα 1ον. *Δίδεται ἡ ἐξίσωσις :*

$$(\lambda-1)x^2 - 2(\lambda-2)x - 7\lambda - 1 = 0.$$

Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ ἔχει

1ον. Δύο ρίζας ἑτεροσήμους; 2ον. Δύο ρίζας πραγματικὰς καὶ θετικάς; 3ον. Δύο ρίζας πραγματικὰς καὶ ἀρνητικάς;

1ον. Διὰ νὰ ἔχῃ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις δύο ρίζας ἑτεροσήμους, πρέπει τὸ γινόμενον $\Gamma = \dfrac{\gamma}{\alpha}$ τῶν ριζῶν της νὰ εἶναι ἀρνητικόν· ἤτοι πρέπει νὰ εἶναι

$$\frac{-7\lambda-1}{\lambda-1} < 0 \qquad (1)$$

Ἡ ἀνισότης (1) εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν

$$-(7\lambda+1)(\lambda-1) < 0 \quad \text{ἤ} \quad (7\lambda+1)(\lambda-1) > 0 \qquad (1)$$

καὶ ἀληθεύει διὰ $\lambda < -\dfrac{1}{7}$ καὶ διὰ $\lambda > 1$.

Ὥστε διὰ $\lambda < -\dfrac{1}{7}$, εἴτε διὰ $\lambda > 1$ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει δύο ρίζας ἑτεροσήμους.

2ον. Διὰ νὰ ἔχῃ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις δύο ρίζας θετικάς, πρέπει πρῶτον ἡ διακρίνουσά της Δ νὰ εἶναι θετική δεύτερον τὸ γινόμενον $\Gamma = \dfrac{\gamma}{\alpha}$ τῶν ριζῶν της νὰ εἶναι θετικὸν καὶ τρίτον τὸ ἄθροισμα $\Sigma = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$ τῶν ριζῶν νὰ εἶναι θετικόν· ἤτοι πρέπει νὰ συναληθεύουν αἱ ἀνισότητες $\Delta > 0,\ \Gamma > 0,\ \Sigma > 0$ δηλ. αἱ

$$(\lambda-2)^2+(7\lambda+1)(\lambda-1) > 0 \ \ (2), \qquad \frac{-7\lambda-1}{\lambda-1} > 0 \ \ (3), \qquad \frac{2(\lambda-2)}{\lambda-1} > 0 \ \ (4)$$

Ἡ ἀνισότης (2) γράφεται $\quad 8\lambda^2-10\lambda^2+3 > 0 \qquad (2)$

Αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου $8\lambda^2-10\lambda+3$ εἶναι $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{3}{4}$ ἄρα ἡ ἀνισότης (2) ἀληθεύει διὰ $\lambda < \dfrac{1}{2}$ καὶ διὰ $\lambda > \dfrac{3}{4}$.

Ἡ ἀνισότης (3) εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν $(7\lambda+1)(\lambda-1) < 0$ καὶ ἀληθεύει διὰ $-\dfrac{1}{7} < \lambda < 1$.

Ἡ ἀνισότης (4) εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν $2(\lambda-2)(\lambda-1) > 0$ καὶ ἀληθεύει διὰ $\lambda < 1$ καὶ διὰ $\lambda > 2$.

Κατὰ τὰ γνωστά, εὑρίσκομεν, ὅτι αἱ ἀνισότητες (2), (3), (4) συναληθεύουν διὰ $-\dfrac{1}{7} < \lambda < \dfrac{1}{2}$ καὶ διὰ $\dfrac{3}{4} < \lambda < 1$.

$$-\infty \ \cdots\cdots \ -\frac{1}{7} \ \cdots\cdots \ \frac{1}{2} \ \cdots\cdots \ \frac{3}{4} \ \cdots\cdots \ 1 \ \cdots\cdots \ 2 \ \cdots\cdots \ +\infty$$

Ὥστε, διὰ $-\dfrac{1}{7} < \lambda < \dfrac{1}{2}$ καὶ διὰ $\dfrac{3}{4} < \lambda < 1$, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει δύο ρίζας θετικάς.

3ον. Διὰ νὰ ἔχῃ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις δύο ρίζας πραγματικὰς καὶ ἀρνητικὰς πρέπει νὰ συναληθεύουν αἱ ἀνισότητες

$$\Delta > 0, \quad \Gamma > 0, \quad \Sigma < 0$$

ἤτοι αἱ $(\lambda-2)^2+(7\lambda+1)(\lambda-1)>0$ (2′), $\frac{-7\lambda-1}{\lambda-1}>0$ (3′), $\frac{2(\lambda-2)}{\lambda-1}>0$ (4′)

Ἡ ἀνισότης (2) ἀληθεύει διὰ $\lambda<\frac{1}{2}$ καὶ διὰ $\lambda>\frac{3}{4}$.

Ἡ ἀνισότης (3′) ἀληθεύει διὰ $-\frac{1}{7}<\lambda<1$.

Ἡ ἀνισότης (4′) εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν $2(\lambda-2)(\lambda-1)<0$ καὶ ἀληθεύει διὰ $1<\lambda<2$.

Κατὰ τὰ γνωστά, εὑρίσκομεν, ὅτι καὶ αἱ τρεῖς ἀνισότητες (2) (3′), (4′) δὲν συναληθεύουν ποτέ.

569. Παράδειγμα 2ον. ***Νὰ διερευνηθοῦν αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως*** $(\mu-3)x^2-2(3\mu-4)x+7\mu-6=0$ ***δι᾽ ὅλας τὰς πραγματικὰς τιμὰς τοῦ*** μ ***ἀπὸ*** $-\infty$ ***ἕως*** $+\infty$.

Ἐξετάζομεν κατ᾽ ἀρχὰς τὰ σημεῖα τῶν ποσοτήτων

Δ, Γ (γινόμενον ῥιζῶν), Σ (ἄθροισμα ῥιζῶν),

δηλ. εὑρίσκομεν εἰς ποῖα διαστήματα τῶν τιμῶν τοῦ μ, αἱ ποσότητες αὗται εἶναι ἀρνητικαὶ ἢ θετικαί, διότι ἀπὸ τὸ σημεῖον αὐτῶν ἐξαρτᾶται τὸ εἶδος καὶ τὸ σημεῖον τῶν ῥιζῶν τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

Ἐδῶ εἶναι $\Delta=(3\mu-4)^2-(\mu-3)(7\mu-6)=2\mu^2+3\mu-2$

$$\Gamma=\frac{7\mu-6}{\mu-3},\qquad \Sigma=\frac{2(3\mu-4)}{\mu-3}.$$

I. Εὑρίσκομεν διὰ ποίας τιμὰς τοῦ μ ἡ διακρίνουσα Δ εἶναι θετική· δηλ. λύομεν τὴν ἀνισότητα

$$\Delta>0 \quad \text{ἢ} \quad 2\mu^2+3\mu-2>0. \qquad (1)$$

Αἱ ῥίζαι τοῦ τριωνύμου $2\mu^2+3\mu-2$ τοῦ πρώτου μέλους τῆς (1) εἶναι -2 καὶ $\frac{1}{2}$. Ἄρα ἡ ἀνισότης (1) ἀληθεύει διὰ $\mu<-2$ καὶ διὰ $\mu>\frac{1}{2}$.

II. Εὑρίσκομεν διὰ ποίας τιμὰς τοῦ μ τὸ γινόμενον Γ τῶν ῥιζῶν τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι θετικόν· ἤτοι λύομεν τὴν ἀνισότητα

$$\Gamma>0 \quad \text{ἢ} \quad \frac{7\mu-6}{\mu-3}>0. \qquad (2)$$

Ἡ ἀνισότης (2) εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν $(7\mu-6)(\mu-3)>0$ καὶ ἀληθεύει διὰ $\mu<\frac{6}{7}$ καὶ διὰ $\mu>3$.

III. Εὑρίσκομεν διὰ ποίας τιμὰς τοῦ μ τὸ ἄθροισμα Σ τῶν ῥιζῶν τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι θετικὸν ἤτοι λύομεν τὴν ἀνισότητα

$$\Sigma>0 \quad \text{ἢ} \quad \frac{2(3\mu-4)}{\mu-3}>0. \qquad (3)$$

Ἡ ἀνισότης (3) εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν $(3\mu-4)(\mu-3)>0$ καὶ ἀληθεύει διὰ $\mu<\frac{4}{3}$ καὶ διὰ $\mu>3$.

Κατασκευάζομεν ἔπειτα ἕνα πίνακα μὲ 5 στήλας, ὅπως φαίνεται κατωτέρω.

Εἰς τὴν πρώτην στήλην θέτομεν κατὰ σειρὰν μεγέθους τὰς χαρακτηριστικὰς τιμὰς τοῦ μ, εἰς καθεμίαν δὲ ἀπὸ τὰς ἄλλας στήλας τὰ σημεῖα καθεμιᾶς τῶν ποσοτήτων Δ, Γ, Σ.

Πρὸς συμπλήρωσιν τοῦ κατωτέρω πίνακος ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

Συμπλήρωσις τῆς στήλης Δ. Εὑρήκαμεν, ὅτι εἶναι $\Delta > 0$ διὰ $\mu < -2$ καὶ διὰ $\mu > \frac{1}{2}$· θέτομεν λοιπὸν τὸ σημεῖον $+$ εἰς διαστήματα τὰ εὑρισκόμενα ἄνωθεν τοῦ -2 καὶ τὰ κάτωθεν τοῦ $\frac{1}{2}$· εἰς τὰ λοιπὰ διαστήματα θέτομεν τὸ σημεῖον $-$.

μ	Δ	Γ	Σ	Συμπέρασμα
$-\infty$				
	$+$	$+$	$+$	ρίζαι θετικαὶ $0 < x' < x''$
-2	....	....	....	$x' = x'' = 2$
	$-$	$+$	$+$	Δὲν ἔχει ρίζας πραγματ.
$\frac{1}{2}$	....	....	....	$x' = x' = 1$
	$+$	$+$	$+$	ρίζαι θετικαὶ $0 < x' < x''$
$\frac{6}{7}$	....	....	....	$x' = 0, \quad x'' = \frac{4}{3}$
	$+$	$-$	$+$	ἑτερόσημοι $x' < 0 < x''$
$\frac{4}{3}$	....	....	....	$x' = -\sqrt{2}, \quad x' = \sqrt{2}$
	$+$	$-$	$-$	ἑτερόσημοι $x' < 0 < x''$
3	....	....	....	μία μόνον ρίζα $\frac{3}{4}$
	$+$	$+$	$+$	ρίζαι θετικαὶ $0 < x' < x''$
$+\infty$				

Συμπλήρωσις τῆς στήλης Γ. Εὑρήκαμεν, ὅτι εἶναι $\Gamma > 0$ διὰ $\mu < \frac{6}{7}$ καὶ διὰ $\mu > 3$· θέτομεν τὸ σημεῖον $+$ εἰς τὰ διαστήματα, ποὺ εὑρίσκονται ἄνω τοῦ $\frac{6}{7}$ καὶ κάτωθεν τοῦ 3 καὶ εἰς τὰ λοιπὰ τὸ σημεῖον $-$.

Συμπλήρωσις τῆς στήλης Σ. Εὑρήκαμεν, ὅτι εἶναι $\Sigma > 0$ διὰ $\mu < \frac{4}{3}$ καὶ διὰ $\mu > 3$· θέτομεν λοιπὸν τὸ σημεῖον $+$ εἰς τὰ διαστήματα τὰ εὑρισκόμενα ἄνωθεν τοῦ $\frac{4}{3}$ καὶ κάτωθεν τοῦ 3 καὶ εἰς τὰ λοιπὰ τὸ σημεῖον $-$.

Συμπλήρωσις τῆς στήλης: Συμπέρασμα. Ἡ συμπλήρωσις τῆς στήλης αὐτῆς γίνεται ἐπὶ τῇ βάσει τῶν συμπερασμάτων τοῦ πίνακος τῆς διερευνήσεως (§ 567).

ἐὰν $\Delta > 0$,	$\Gamma > 0$,	$\Sigma > 0$	αἱ ρίζαι εἶναι θετικαὶ
ἐὰν $\Delta > 0$,	$\Gamma > 0$,	$\Sigma < 0$	αἱ ρίζαι εἶναι ἀρνητικαὶ
ἐὰν $\Delta > 0$,	$\Gamma < 0$,		αἱ ρίζαι εἶναι ἑτερόσημοι
ἐὰν $\Delta < 0$,			δὲν ἔχει ρίζας.

Ἰδιαίτεραι περιπτώσεις. Διὰ νὰ συμπληρωθῇ πλήρως ἡ διερεύνησις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως πρέπει νὰ ἐξετασθῇ τὸ εἶδος καὶ τὸ σημεῖον τῶν ριζῶν τῆς δοθείσης ἐξισώσεως καὶ διὰ τὰς συνοριακὰς τιμὰς τῶν διαστημάτων τοῦ μ. Οὕτω :

Διὰ $\mu=-2$, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γίνεται $x^2-4x+4=0$ καὶ ἔχει ρίζας $x'=x''=2$.

Διὰ $\mu=\frac{1}{2}$, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γίνεται x^2-2x+1 καὶ ἔχει ρίζας $x'=x''=1$.

Διὰ $\mu=\frac{6}{7}$, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γίνεται $3x^2-4x=0$ καὶ ἔχει ρίζας $x'=0$, $x''=\frac{4}{3}$.

Διὰ $x=\frac{4}{3}$, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γίνεται $x^2-2=0$ καὶ ἔχει ρίζας $x'=-\sqrt{2}$, $x''=\sqrt{2}$.

Διὰ $\mu=3$, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γίνεται $2x-3=0$ καὶ ἔχει τὴν ρίζαν $x'=\frac{3}{2}$.

Σημ. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὰς ρίζας, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν τιμὴν $\pm\infty$, διαιροῦμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς δοθείσης ἐξισώσεως διὰ μ, ὁπότε προκύπτει ἡ ἐξίσωσις

$$\left(1-\frac{3}{\mu}\right)x^2-2\left(3-\frac{4}{\mu}\right)x+7-\frac{6}{\mu}=0.$$

Διὰ $\mu=\pm\infty$ θὰ εἶναι $\frac{3}{\mu}=0$, $\frac{4}{\mu}=0$ καὶ $\frac{6}{\mu}=0$ καὶ ἑπομένως ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις γίνεται $x^2-6x+7=0$.

καὶ αἱ ρίζαι αὐτῆς εἶναι 1 καὶ 6.

570. Παρατήρησις. Εἶναι προτιμότερον, πρὸ παντὸς κατὰ τὴν διερεύνησιν τῶν γεωμετρικῶν προβλημάτων, νὰ ἀναζητῶμεν κατ' ἀρχὰς τὰς τιμὰς τοῦ μ, διὰ τὰς ὁποίας ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει μίαν *μόνον* ρίζαν θετικήν· διότι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἐξετάζομεν μόνον τὴν ἀνισότητα $\Gamma<0$. Ἐνῶ, ἂν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὰς τιμὰς τοῦ μ, διὰ τὰς ὁποίας ἡ ἐξίσωσις ἔχει *δύο ρίζας θετικάς*, πρέπει νὰ ἐξετάζωμεν τὰς ἀνισότητας, $\Delta>0$, $\Gamma>0$, $\Sigma>0$.

Ἀσκήσεις. 2321. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ μ ἡ ἐξίσωσις $5x^2-\mu x+\mu+2=0$ ἔχει δύο ρίζας ἑτεροσήμους ;

2322. Νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^2-2(\mu-1)x+2\mu+1=0$.

2323. Νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις $(\mu-6)x^2-4(\mu-1)x+\mu-3=0$.

2324. Νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις $\mu x^2-(2\mu+1)x+3\mu-1=0$.

2325. Νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις $\mu x^2+(2\mu-1)x+\mu+2=0$.

2326. Νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις $(\mu-2)x^2+(\mu-3)x+\mu-4=0$.

2327. Νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^2-2(\mu-1)x+4\mu-7=0$.

2328. Νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις $(\mu-1)x^2-2\mu x+\mu-2=0$.

2329. Νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις $(2\mu-5)x^2+6(\mu-3)x+3(\mu-5)=0$.

2330. Νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις $3\mu x^2-2(3\mu-2)x+3(\mu-1)=0$.

2331. Νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις $(\mu-2)x^2-2\mu x+2\mu-3=0$.

2332. Νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις $\mu x^2-(1-\mu)x+\mu-1=0$.

2333. Νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις $(69+4\mu)x^2-15(9-\mu)x+25(4-\mu)=0$.

2334. Νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις $(\mu-5)x^2-4\mu x+\mu-2=0$.

2335. Νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις $9x^2-6(\mu+1)x+\mu^2-4=0$.

2336. Νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις $(\mu-1)x^2+2(\mu+1)x+\mu=0$.

2337. Νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις $(\mu-1)x^2-2(\mu-2)x+3(\mu+3)=0$.

2338. Νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^2+4\mu x+2\mu^2+3\mu-1=0$.

2339. Νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις $(\mu-2)x^2-6\mu x+2\mu-10=0$.

2340. Νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^2-2(\alpha-5)x+\alpha^2-1=0$.

2341. Νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις $(\mu-1)x^2-(2\mu-1)x+\mu-4=0$.

2342. Νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις $(\mu-1)x^2-\mu x+\mu-2=0$.

2343. Νὰ λυθῇ καὶ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις $\dfrac{x-1}{2x-1}+\dfrac{2x+1}{x-1}=\mu$.

2344. 1ον. Νὰ λυθῇ καὶ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις $\varphi(x)=3x^2-2(\mu+1)x+\mu=0$. 2ον. Νὰ ὁρισθῇ ὁ μ, ἵνα μεταξὺ τῶν ριζῶν x' καὶ x'' ὑπάρχῃ ἡ σχέσις $x'+2x''=1$.

2345. 1ον. Νὰ ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις

$$A=\frac{2x^2-x}{2x^2-5x+2}-\frac{63x^2-84x+23}{(21x-14)(2x-3)}+\frac{\mu x}{4x-5}+\frac{12-6x}{3x^2-12x+12}.$$

2ον. Ἐξισοῦμεν τὴν νέαν παράστασιν μὲ $\dfrac{3\mu+9}{2}$ καὶ λαμβάνομεν μίαν ἐξίσωσιν τοῦ δευτέρου βαθμοῦ. Νὰ διερευνηθῇ ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις.

2346. 1ον. Νὰ σχηματισθῇ μία ἐξίσωσις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, τῆς ὁποίας αἱ ρίζαι x', x'' νὰ ἱκανοποιοῦν τὰς ἰσότητας

$$x'+x''+2x'x''=4 \quad (1) \qquad \text{καὶ} \qquad \lambda(x'+x'')-x'x''=3\lambda. \quad (2)$$

2ον. Νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις αὐτή.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΙΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ

571. Διερεύνησις ἀνισοτήτων τοῦ δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς τὰς τιμὰς μιᾶς παραμέτρου. Τὰ κάτωθι παραδείγματα θὰ μᾶς δείξουν τὸν τρόπον τῆς διερευνήσεως τῶν ἀνισοτήτων τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, αἱ ὁποῖαι ἔχουν μίαν παράμετρον.

572. Παράδειγμα 1ον. ***Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ τὸ τριώνυμον***

$$\varphi(x)=(\lambda+1)x^2+\lambda x+\lambda$$

εἶναι διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x : 1ον θετικόν 2ον ἀρνητικόν;

Γνωρίζομεν (§ 404, III) ὅτι, ὅταν ἡ διακρίνουσα Δ ἑνὸς τριωνύμου εἶναι ἀρνητική, τὸ τριώνυμον ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ συντελεστοῦ τοῦ πρώτου ὅρου του.

1ον. Κατὰ τὸ πρόβλημα πρέπει νὰ ἀληθεύῃ ἡ ἀνισότης

$$(\lambda+1)x^2+\lambda x+\lambda>0 \qquad (1)$$

Διὰ νὰ ἀληθεύῃ ἡ (1) διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x, πρέπει ἡ διακρίνουσα Δ νὰ εἶναι ἀρνητικὴ καὶ ὁ συντελεστὴς $\lambda+1$ τοῦ x^2 νὰ εἶναι θετικός δηλ. πρέπει νὰ συναληθεύουν αἱ ἀνισότητες

$$\Delta=\lambda^2-4(\lambda+1)\lambda<0 \quad (1) \qquad \text{καὶ} \quad \lambda+1>0 \qquad (2)$$

Ἡ ἀνισότης (1) γράφεται

$$\lambda^2-4\lambda^2-4\lambda<0 \quad ἢ \quad -3\lambda^2-4\lambda<0 \quad ἢ \quad 3\lambda^2+4\lambda>0 \quad ἢ \quad \lambda(3\lambda+4)>0 \qquad (1')$$

Αἱ ρίζαι τοῦ πρώτου μέλους τῆς (1′) εἶναι $\lambda'=0$ καὶ $\lambda=-\dfrac{4}{3}$

καὶ ἑπομένως ἡ (1′) ἀληθεύει διὰ $\lambda<-\dfrac{4}{3}$ καὶ $\lambda>0$.

Ἡ ἀνισότης (2) ἀληθεύει διὰ $\lambda>-1$.

Κατὰ τὰ γνωστὰ εὑρίσκομεν, ὅτι αἱ δύο ἀνισότητες (1) καὶ (2) συναληθεύουν διὰ $\lambda>0$.

$$-\infty \cdots -\frac{4}{3} \cdots -1 \cdots 0 \cdots +\infty$$

2ον. Διὰ νὰ εἶναι τὸ δοθὲν τριώνυμον ἀρνητικόν, δηλ. διὰ νὰ ἀληθεύῃ ἡ ἀνισότης $(\lambda+1)x^2+\lambda x+\lambda<0$ (2)
διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x, πρέπει ἡ διακρίνουσά του Δ νὰ εἶναι ἀρνητικὴ καὶ ὁ συντελεστὴς τοῦ πρώτου ὅρου του ἀρνητικός· δηλ. πρέπει νὰ συναληθεύουν αἱ ἀνισότητες $\lambda(3\lambda+4)>0$ (1′) καὶ $\lambda+1<0$ (3)

Ἡ ἀνισότης (1′) ἀληθεύει διὰ $\lambda<-\dfrac{4}{3}$ καὶ διὰ $\lambda>0$.

Η ἀνισότης (3) ἀληθεύει διὰ $\lambda<-1$.

Καὶ αἱ δύο ἀνισότητες συναληθεύουν διὰ $\lambda<-\dfrac{4}{3}$

$$-\infty \cdots -\frac{4}{3} \cdots -1 \cdots 0 \cdots +\infty$$

573. Παράδειγμα 2ον. ***Νὰ διερευνηθῇ ἡ ἀνισότης***

$$\varphi(x)=(\lambda+1)x^2-2(\lambda-1)x+2(\lambda-1)>0$$

Ὑπολογίζομεν κατ' ἀρχὰς τὴν διακρίνουσαν Δ. Ἐδῶ εἶναι

$$\Delta=(\lambda-1)^2-2(\lambda+1)(\lambda-1)=-\lambda^2-2\lambda+3.$$

I. Ἔστω $\Delta<0$, ἤτοι $-\lambda^2-2\lambda+3<0$ ἤ $\lambda^2+2\lambda-3>0$ (1)

Αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου $\lambda^2+2\lambda-3$ εἶναι -3 καὶ 1· ἄρα ἡ ἀνισότης (1) ἀληθεύει διὰ $\lambda<-3$, εἴτε διὰ $\lambda>1$.

Ἐὰν λοιπὸν εἶναι $\lambda<-3$, εἴτε $\lambda>1$, ἡ Δ εἶναι ἀρνητικὴ καὶ τὸ $\varphi(x)$ ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ συντελεστοῦ $\lambda+1$ τοῦ x^2.

Ἐὰν $\lambda<-3$, ὁ συντελεστὴς $\lambda+1$ εἶναι ἀρνητικὸς καὶ ἑπομένως καὶ τὸ $\varphi(x)$ εἶναι ἀρνητικόν· ἄρα ἡ δοθεῖσα ἀνισότης δὲν ἀληθεύει οὐδέποτε.

Ἐὰν $\lambda>1$, ὁ συντελεστὴς $\lambda+1$ εἶναι θετικὸς καὶ ἑπομένως καὶ τὸ $\varphi(x)$ εἶναι θετικόν· ἄρα ἡ δοθεῖσα ἀνισότης ἀληθεύει διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x.

II. Ἔστω $\Delta=0$, ἤτοι $-\lambda^2-2\lambda+3=0$. Αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εἶναι -3 καὶ 1.

Ἐὰν $\lambda=-3$, εἴτε $\lambda=1$, ἡ $\Delta=0$ καὶ τὸ τριώνυμον $\varphi(x)$ ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ συντελεστοῦ $\lambda+1$ τοῦ πρώτου ὅρου του, δι' ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ x, ἐκτὸς τῆς ρίζης του.

Ἐὰν λοιπὸν εἶναι $\lambda=-3$, ὁ συντελεστὴς $\lambda+1$ γίνεται $-3+1=-2$, ἤτοι ἀρνητικὸς καὶ ἑπομένως καὶ τὸ $\varphi(x)$ εἶναι ἀρνητικόν· ἄρα ἡ δοθεῖσα ἀνισότης δὲν ἀληθεύει ποτὲ διὰ $\lambda=-3$.

Ἐὰν εἶναι $\lambda=1$, ὁ συντελεστὴς $\lambda+1$ γίνεται $1+1=2$, ἤτοι θετικὸς καὶ ἑπομένως καὶ τὸ $\varphi(x)$ εἶναι θετικόν· ἄρα ἡ δοθεῖσα ἀνισότης ἀληθεύει διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x, ἐκτὸς τῆς ρίζης

$$x=\frac{2(\lambda-1)}{2(\lambda+1)}=\frac{2(1-1)}{2(1+1)}=0$$

III. Ἔστω $\Delta>0$, ἤτοι $-\lambda^2-2\lambda+3>0$ ἤ $\lambda^2+2\lambda-3<0$. Ἡ ἀνισότης αὐτὴ ἀληθεύει διὰ $-3<\lambda<1$. Ὥστε ἐὰν εἶναι $-3<\lambda<1$, ἡ διακρίνουσα Δ εἶναι θετικὴ καὶ ἑπομένως τὸ τριώνυμον $\varphi(x)$ ἔχει δύο ρίζας x', x'', $(x'<x'')$. Καὶ ἐὰν μὲν τὸ x λάβῃ τιμὰς κειμένας ἐκτὸς τῶν ριζῶν x' καὶ x'', τὸ $\varphi(x)$ ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ συντελεστοῦ $\lambda+1$ τοῦ πρώτου ὅρου του ἐὰν δὲ λάβῃ τιμὰς κειμένας μεταξὺ τῶν ριζῶν του x', x'' τὸ $\varphi(x)$ ἔχει σημεῖον ἀντίθετον τοῦ συντελεστοῦ $\lambda+1$. Ὥστε ἐὰν εἶναι

$$-3<\lambda<1 \quad \text{καὶ} \quad \lambda+1>0 \tag{2}$$

ἡ δοθεῖσα ἀνισότης ἀληθεύει διὰ τιμὰς τοῦ x κειμένας ἐκτὸς τῶν ριζῶν x' καὶ x''.

Αἱ ἀνισότητες (2) συναληθεύουν διὰ $-1<\lambda<1$. Ὥστε διὰ $-1<\lambda<1$ ἡ δοθεῖσα ἀνισότης ἀληθεύει διὰ τιμὰς τοῦ x κειμένας ἐκτὸς τῶν ριζῶν x' καὶ x''

Ἐὰν
$$-3<\lambda<1 \quad \text{καὶ} \quad \lambda+1<0 \tag{3}$$

ἡ δοθεῖσα ἀνισότης ἀληθεύει διὰ τιμὰς τοῦ x κειμένας μεταξὺ τῶν ριζῶν x' καὶ x''.

Αἱ ἀνισότητες (3) συναληθεύουν διὰ $-3<\lambda<-1$. Ὥστε διὰ $-3<\lambda<-1$, ἡ δοθεῖσα ἀνισότης ἀληθεύει διὰ τιμὰς τοῦ x κειμένας μεταξὺ τῶν ριζῶν x' καὶ x''.

Ἰδιαίτεραι περιπτώσεις. Ἐὰν $\lambda=-1$, ἡ δοθεῖσα ἀνισότης γίνεται $4x-4>0$ καὶ ἀληθεύει διὰ $x>1$.

Ἐὰν $\lambda=1$, εὑρήκαμεν ὅτι ἀληθεύει διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x, ἐκτὸς τῆς τιμῆς $x=0$.

Ἀσκήσεις. Α' Ὁμάς. *2347.* Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ τὰ κάτωθι τριώνυμα εἶναι θετικὰ διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x ;

1. $(3\lambda-1)x^2+2x+4\lambda-1$. 2. $\lambda x^2+(\lambda+1)x+\lambda$.

2348. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ τὰ κάτωθι τριώνυμα

1. $(\lambda-2)x^2+2(2\lambda-3)x+5\lambda-6$. 2. $(\lambda-4)x^2-6x+(\lambda+4)$

εἶναι θετικὰ διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x.

2349. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ τὰ κάτωθι τριώνυμα

1. $x^2-4\lambda x+3\lambda^2+7\lambda-10$. 2. $(\lambda-1)x^2+2\lambda x+\lambda+3$

εἶναι θετικὰ διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x.

2350. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ τὰ κάτωθι τριώνυμα εἶναι ἀρνητικά, διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x ;

1. $(\lambda+1)x^2-4x+2\lambda$. 2. $(\lambda+1)x^2-4x+2\lambda$.

εἶναι ἀρνητικὰ διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x.

2351. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ τὰ κάτωθι τριώνυμα

1. $(\lambda+1)x^2-2(\lambda-1)x+3\lambda-3$. 2. $\lambda x^2-2(\lambda+3)x+\lambda-1$

εἶναι ἀρνητικὰ διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x.

2352. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ τὰ κάτωθι τριώνυμα

1. $\lambda x^2+(\lambda-1)x+\lambda-1$. 2. $(\lambda+1)x^2+\lambda x+\lambda$

εἶναι ἀρνητικὰ διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x.

Β' Ὁμάς. *2353.* Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ ἡ ἀνισότης $\lambda x^2+(\lambda-1)x+\lambda-1>0$ ἀληθεύει διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x.

2354. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ ἡ ἀνισότης $(\lambda-4)x^2+3x-(\lambda+4)<0$ ἀληθεύει διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x.

2355. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ αἱ κάτωθι ἀνισότητες

1. $(\lambda-1)x^2-2\lambda x+(6-\lambda)>0$. 2. $x^2+(4\lambda-2)x+15\lambda^2-2\lambda-8>0$

ἀληθεύουν διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x.

2356. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ αἱ κάτωθι ἀνισότητες

1. $(\lambda-2)x^2+2(2\lambda-3)x+5\lambda-6>0$. 2. $(\lambda-1)x^2-4(\lambda-2)x+2(\lambda-2)>0$

ἀληθεύουν διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x.

2357. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ αἱ κάτωθι ἀνισότητες

1. $(\lambda+1)x^2-2(\lambda-1)x+3(\lambda-1)<0$, 2. $(\lambda-2)x^2+8x-8(\lambda+1)<0$

ἀληθεύουν διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x.

2358. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ αἱ κάτωθι ἀνισότητες

1. $(\lambda-1)x^2-(\lambda-5)x+\lambda-1>0$, 2. $(\lambda+1)x^2-2(\lambda-1)x+2(\lambda-1)>0$

ἀληθεύουν διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x.

2359. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ ἡ ἀνισότης

$$x^2-(8\lambda-2)x+15\lambda^2-2\lambda-7>0$$

ἀληθεύει διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x.

2360. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ μ ἡ ἀνισότης

$$\mu x^2+(2\mu+1)x+\mu+2>0$$

ἀληθεύει διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x.

2361. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ ἡ ἀνισότης $x^2+2\lambda x+\lambda > \frac{3}{16}$ ἀληθεύει διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x.

2362. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ ἡ ἀνισότης $\frac{5x^2+4x+4}{x^2+x+1} > \lambda$ ἀληθεύει διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x.

2363. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ ἡ ἀνισοτης $\frac{2x^2+2\lambda x+\lambda}{4x^2+6x+3} < 1$ ἀληθεύει διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x.

2364. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ ἡ ἀνισότης $\frac{(\alpha+1)x^2+\lambda x+\lambda}{x^2+x+1} > \lambda$ ἀληθεύει διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x. Ὁ α εἶναι δοθεὶς ἀριθμός.

2365. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ ἡ ἀνισότης $\frac{(\lambda+1)x^2+\lambda x+\lambda}{x^2+x+1} > k$ ἀληθεύει διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x. Ὁ k εἶναι γνωστὸς ἀριθμός.

2366. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ μ ἡ ἀνισότης

$$\frac{3(2\mu+1)x^2-2(4\mu+5)x+5\mu+9}{5x^2-6x+5} < \mu+2$$

ἀληθεύει διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x.

Γ' Ὁμάς. *2367.* Νὰ διενευνηθῇ ἡ ἀνισότης

$$3(\mu+1)x^2-6(\mu^2+\mu+1)x+7(\mu^3-1) < 0.$$

2368. Νὰ διερευνηθῇ ἡ ἀνισότης $(\lambda-1)x^2-4x+2\lambda < 0$.

2369. Νὰ διερευνηθῇ ἡ ἀνισότης $(\lambda-2)x^2-2(\lambda+3)x+5 > 0$.

2370. Νὰ διερευνηθῇ ἡ ἀνισότης $\lambda x^2-2(\lambda-1)x+\lambda+2 > 0$.

2371. Νὰ διερευνηθῇ ἡ ἀνισότης $(\mu-1)x^2-4(\mu-2)x+2(\mu-2) > 0$.

2372. Νὰ διερευνηθῇ ἡ ἀνισότης $(\mu-4)x^2-(\mu-6)x+\mu-5 < 0$.

2373. Νὰ διερευνηθῇ ἡ ἀνισότης $(\mu-1)x^2-2(\mu+1)x+\mu-3 > 0$.

2374. Νὰ διερευνηθῇ ἡ ἀνισότης $(\mu-2)x^2-6x+5 < 0$.

2375. Νὰ διερευνηθῇ ἡ ἀνισότης $\frac{\mu(x+1)}{x-1} > 1$.

2376. Νὰ διερευνηθῇ ἡ ἀνισότης $\frac{\lambda(x-1)}{x-2} > 1$.

Δ' Ὁμάς. *2377.* Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ τὸ κλάσμα $\frac{x^2-\lambda x+1}{x^2+x+1}$ περιέχεται μεταξὺ −3 καὶ +3 διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x.

2378. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ τὸ κλάσμα $\frac{x^2+\lambda x+\alpha}{x^2+1}$ περιέχεται μεταξὺ −2 καὶ +2 διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x.

2379. Νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{(x+\mu)^2-4\lambda\mu}{2(x-\lambda)}$ δύναται νὰ λάβῃ ὅλας τὰς τιμάς, ἐκτὸς τῶν περιεχομένων μεταξὺ 2λ καὶ 2μ, ἐὰν ὁ x εἶναι πραγματικὸς ἀριθμός.

2380. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ τὸ κλάσμα $\frac{x-\lambda}{x^2-3x+2}$ δύναται νὰ λάβῃ ὅλας τὰς τιμὰς διὰ κάθε πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x.

2381. Νὰ ὁρισθῇ ὁ λ, ἵνα τὸ κλάσμα $\frac{x^2-\lambda x+1}{x^2-5x+6}$ λαμβάνῃ ὅλας τὰς τιμὰς διὰ κάθε πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x.

2382. Διὰ ποίας τιμὰς τῶν λ καὶ μ τὸ κλάσμα $\frac{3x^2+\lambda x+\mu}{x^2+1}$ λαμβάνει ὅλας τὰς τιμάς τὰς μεταξὺ -3 καὶ 4, καθὼς ἐπίσης καὶ τὰς τιμὰς -3 καὶ 4 διὰ κάθε πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x.

2383. Νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{x^2-2x+\lambda^2}{x^2+2x+\lambda^2}$ διὰ $\lambda>1$ περιέχεται μεταξὺ $\frac{\lambda-1}{\lambda+1}$ καὶ $\frac{\lambda+1}{\lambda-1}$ διὰ κάθε πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x.

2384. Δίδεται τὸ κλάσμα $\frac{\lambda x^2+6x+k}{5(x^2+1)}$ καὶ ζητεῖται νὰ προσδιορισθοῦν οἱ λ καὶ k εἰς τρόπον, ὥστε ἡ τιμὴ τοῦ κλάσματος νὰ περιέχεται μεταξὺ -1 καὶ $+1$ συμπεριλαμβανομένων καὶ τῶν -1 καὶ $+1$, διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x.

2385. Νὰ ὁρισθοῦν οἱ λ καὶ μ εἰς τρόπον, ὥστε τὸ κλάσμα $\frac{2\lambda x+\mu}{x^2+x+1}$ νὰ περιέχεται μεταξὺ -6 καὶ $+4$ διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x.

2386. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $(\mu+1)x^2-(\mu-1)x-2\mu>0$, ὅταν τὸ μ παριστάνῃ ἕνα ἀριθμὸν περιεχόμενον μεταξὺ -1 καὶ 11. Νὰ διερευνηθῇ.

ΣΥΓΚΡΙΣΙΣ ΑΡΙΘΜΩΝ ΠΡΟΣ ΤΑΣ ΡΙΖΑΣ ΕΝΟΣ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ ΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

574. Σύγκρισις τῆς θέσεως ἑνὸς ἀριθμοῦ ξ ὡς πρὸς τὰς ρίζας ἑνὸς τριωνύμου τοῦ δευτέρου βαθμοῦ. Πρόβλημα. ***Νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις ἑνὸς ἀριθμοῦ ὡς πρὸς τὰς ρίζας ἑνὸς τριωνύμου τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, χωρὶς νὰ ὑπολογισθοῦν προηγουμένως αἱ ρίζαι του.***

Ἔστω $\varphi(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ ἕνα τριώνυμον τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, τὸ ὁποῖον ἔχει, ἐξ ὑποθέσεως, δύο ρίζας x' καὶ x'' ἀνίσους $(x'<x'')$. Ἔστω ἐπίσης ξ ἕνας δοθεὶς ἀριθμός, τοῦ ὁποίου ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν τὴν θέσιν, ὡς πρὸς τὰς ρίζας x' καὶ x''· δηλ. ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν, ἐὰν

εἶναι $x' \ldots \xi \ldots x''$

εἴτε $\xi \ldots x' \ldots x''$

εἴτε $x' \ldots x'' \ldots \xi$

Γνωρίζομεν (§ 404) ὅτι, ὅταν τὸ x λαμβάνῃ τιμὰς κειμένας ἐκτὸς τῶν ριζῶν x' καὶ x'' τοῦ τριωνύμου $\varphi(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, τὸ τριώνυμον $\varphi(x)$ ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ α· ὅταν τὸ x λαμβάνῃ τιμὰς κειμένας μεταξὺ τῶν ριζῶν του, τὸ τριώνυμον $\varphi(x)$ ἔχει σημεῖον ἀντίθετον τοῦ α.

Διὰ νὰ συγκρίνωμεν λοιπὸν τὸν ἀριθμὸν ξ πρὸς τὰς ρίζας x' καὶ x'' τοῦ τριωνύμου $\varphi(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, ἐξετάζομεν τί σημεῖον λαμβάνει τὸ τριώνυμον διὰ $x=\xi$, δηλ. ὑπολογίζομεν τὴν ποσότητα

$$\varphi(\xi)=\alpha\xi^2+\beta\xi+\gamma.$$

Διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις :

I. Ἐὰν τὸ φ(ξ) ἔχῃ σημεῖον ἀντίθετον τοῦ α, δηλ. ἐὰν εἶναι $\alpha\varphi(\xi)<0$, ὁ ξ περιέχεται μεταξὺ τῶν ριζῶν x΄ καὶ x΄΄ τοῦ τριωνύμου φ(x)· ἤτοι εἶναι
$$x'<\xi<x''$$

II. Ἐὰν τὸ φ(ξ) ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ α, δηλ. ἐὰν $\alpha\varphi(\xi)>0$, ὁ ξ κεῖται ἐκτὸς τῶν ριζῶν x΄ καὶ x΄΄.

Διὰ νὰ καθορίσωμεν ἀκριβῶς τὴν θέσιν τοῦ ξ πρὸς τὰς ρίζας x΄ καὶ x΄΄, δηλ. διὰ νὰ ἴδωμεν, ἐὰν ὁ ξ εἶναι μικρότερος τῆς μικροτέρας ρίζης x΄, ἢ μεγαλύτερος τῆς μεγαλυτέρας ρίζης x΄΄, δηλ. ἐὰν ἔχῃ τὴν θέσιν $\xi<x'<x''$ (1), εἴτε $x'<x''<\xi$ (2)
ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς :

Ἔστω, ὅτι ὁ ξ ἔχῃ τὴν θέσιν (1)· τότε θὰ εἶναι
$$\xi<x' \quad \text{καὶ} \quad \xi<x''$$

Προσθέτομεν τὰς ἀνισότητας αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν
$$2\xi<x'+x'' \quad \text{ἢ} \quad 2\xi<-\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{ἢ} \quad \xi<-\frac{\beta}{2\alpha}$$

Ὥστε, ἐὰν $\xi<-\frac{\beta}{2\alpha}$, δηλ. ἐὰν ὁ ἀριθμὸς ξ εἶναι μικρότερος τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν ριζῶν x΄ καὶ x΄΄, θὰ εἶναι $\xi<x'<x''$.

Ἔστω τώρα, ὅτι ὁ ξ ἔχει τὴν θέσιν (2). Τότε θὰ εἶναι
$$\xi>x' \quad \text{καὶ} \quad \xi>x''$$

Προσθέτομεν τὰς ἀνισότητας αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν
$$2\xi>x'+x'' \quad \text{ἢ} \quad 2\xi>-\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{ἢ} \quad \xi>-\frac{\beta}{2\alpha}$$

Ὥστε, ἐὰν $\xi>-\frac{\beta}{2\alpha}$, δηλ. ἐὰν ὁ ἀριθμὸς ξ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν ριζῶν x΄ καὶ x΄΄, θὰ εἶναι $x'<x''<\xi$.

III. Ἐὰν $\varphi(\xi)=0$, ὁ ἀριθμὸς ξ εἶναι ἴσος μὲ μίαν ἀπὸ τὰς ρίζας x΄ καὶ x΄΄, δηλ. θὰ εἶναι εἴτε $\xi=x'$ εἴτε $\xi=x''$.

Τὰ συμπεράσματα αὐτὰ συνοψίζονται εἰς τὸν κάτωθι πίνακα :

Ἐὰν $\alpha\varphi(\xi)<0$,	θὰ εἶναι		$x'<\xi<x''$
Ἐὰν $\Delta>0$,	$\alpha\varphi(\xi)>0$,	$\xi<-\frac{\beta}{2\alpha}$	$\xi<x'<x''$
Ἐὰν $\Delta>0$,	$\alpha\varphi(\xi)>0$,	$\xi>-\frac{\beta}{2\alpha}$	$x'<x''<\xi$
Ἐὰν $\varphi(\xi)=0$,	. . . .		$\xi=x'$, εἴτε $\xi=x''$

575. Ἐφαρμογαὶ τοῦ πίνακος. Παράδειγμα 1ον. ***Νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις τοῦ ἀριθμοῦ 1 ὡς πρὸς τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως***
$$\varphi(x)=4x^2-31x+21=0$$
χωρὶς νὰ ὑπολογισθοῦν προηγουμένως αἱ ρίζαι της.

Σχηματίζομεν τὸ αφ(1). Ἐδῶ εἶναι $\alpha\varphi(1)=4(4\cdot1^2-31\cdot1+21)=-24$.
Ἐπειδὴ $\alpha\varphi(1)<0$ ἔπεται, ὅτι ὁ ἀριθμὸς 1 κεῖται μεταξὺ τῶν ρι-

ζῶν τῆς δοθείσης ἐξισώσεως· ἤτοι, ἂν παραστήσωμεν μὲ x', x'' $(x'<x'')$ τὰς ρίζας τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, θὰ εἶναι $x'<1<x''$.

576. Παράδειγμα 2ον. ***Νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις τοῦ ἀριθμοῦ $\frac{1}{2}$ πρὸς τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως*** $\varphi(x)=3x^2-12x+8=0$, ***χωρὶς νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ρίζαι της.***

Σχηματίζομεν τὸ $\alpha\varphi\left(\frac{1}{2}\right)$. Ἐδῶ εἶναι

$$\alpha\varphi\left(\frac{1}{2}\right)=3\left(3.\frac{1}{4}-12.\frac{1}{2}+8\right)=\frac{33}{4}>0.$$

Ἐπειδὴ τὸ $\alpha\varphi\left(\frac{1}{2}\right)>0$ καὶ $\Delta>0$, ὁ ἀριθμὸς $\frac{1}{2}$ κεῖται ἐκτὸς τῶν ριζῶν x' καὶ x'' τῆς ἐξισώσεως.

Συγκρίνομεν τώρα τὸν ἀριθμὸν $\frac{1}{2}$ πρὸς τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ριζῶν τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, δηλ. πρὸς τὸ $\frac{12}{2.3}$ ἢ 2. Ἐπειδὴ $\frac{1}{2}<2$ ἕπεται, ὅτι ὁ ἀριθμὸς $\frac{1}{2}$ εἶναι μικρότερος τῆς μικροτέρας ρίζης· ἑπομένως θὰ εἶναι $\frac{1}{2}<x'<x''$

Ἀσκήσεις. *2387.* Νὰ συγκριθοῦν οἱ ἀριθμοί, -1, 2, 7 πρὸς τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως $x^2-6x-2=0$

2388. Νὰ συγκριθοῦν οἱ ἀριθμοί, -1, 3, 8 πρὸς τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως x^2-7x-1.

2389. Νὰ συγκριθοῦν οἱ ἀριθμοὶ -3, 4, 6 πρὸς τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως $\varphi(x)=x^2-6x+4=0$.

2390. Νὰ συγκριθοῦν οἱ ἀριθμοὶ -2, 4, 5 πρὸς τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως $\varphi(x)=x^2-5x+3$.

2391. Νὰ συγκριθοῦν οἱ ἀριθμοὶ -6, -3, 1 πρὸς τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως $\varphi(x)=4x^2+20x+5=0$.

577. Παράδειγμα 3ον. ***Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ ὁ ἀριθμὸς 2 περιέχεται μεταξὺ τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως***

$$\lambda x^2-(\lambda+1)x+3-\lambda=0$$

Διὰ νὰ περιέχεται ὁ ἀριθμὸς 2 μεταξὺ τῶν ριζῶν x', x'' τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, δηλ. διὰ νὰ ἀληθεύῃ ἡ σχέσις $x'<2<x''$, πρέπει νὰ εἶναι $\alpha\varphi(2)<0$. (1)

Ἐπειδὴ $\alpha=\lambda$ καὶ $\varphi(2)=\lambda 2^2-(\lambda+1)2+3-\lambda=\lambda+1$

ἡ σχέσις (1) γράφεται $\lambda(\lambda+1)<0$ (1') καὶ ἀληθεύει διὰ $-1<\lambda<0$

Ὥστε διὰ $-1<\lambda<0$, θὰ εἶναι $x'<2<x''$.

Ἀσκήσεις. *2392.* Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ μ ὁ ἀριθμὸς -1 περιέχεται μεταξὺ τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $\varphi(x)=\mu x^2-(\mu-3)x+2-\mu=0$.

2393. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ μ ὁ ἀριθμὸς -1 περιέχεται μεταξὺ τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $\mu x^2-(\mu-2)x+4-\mu=0$.

2394. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ ὁ ἀριθμὸς 1 περιέχεται μεταξὺ τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $\varphi(x)=(2\lambda-1)x^2+(3\lambda-2)x-6\lambda=0$.

2395. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ ὁ ἀριθμὸς 3 περιέχεται μεταξὺ τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $\varphi(x)=(\lambda+2)x^2-4\lambda x+\lambda-1=0$.

2396. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ μ ἡ ἐξίσωσις $2x^2-2(2\mu+1)x+\mu(\mu-1)=0$ ἔχει δύο ρίζας x', x'' τοιαύτας, ὥστε νὰ εἶναι $x'<\mu<x''$;

2397. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ, ὁ ἀριθμὸς 1 περιέχεται μεταξὺ τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $x(x-1)(\lambda^2-3\lambda+1)+2\lambda-3=0$.

2398. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ μ αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως

$(\mu^2+3\mu+3)x(x+1)+\mu^2=0$ περιέχουν τὸν ἀριθμὸν $-\dfrac{1}{2}$.

578. Παράδειγμα 4ον. ***Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ ἡ ἐξίσωσις***

$$\varphi(x)=(\lambda-1)x^2-3\lambda x+4\lambda=0$$

ἔχει ρίζας μεγαλυτέρας τοῦ 2.

Διὰ νὰ ἔχῃ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις δύο ρίζας x', x'' μεγαλυτέρας τοῦ 2, δηλ. διὰ νὰ εἶναι $2<x'<x''$, πρέπει νὰ συναληθεύουν αἱ ἀνισότητες

$$\Delta>0 \quad (1), \qquad \alpha\varphi(2)>0 \quad (2), \qquad 2<-\frac{\beta}{2\alpha} \quad (3)$$

Ἐδῶ εἶναι $\Delta=9\lambda^2-16\lambda(\lambda-1)=-7\lambda^2+16\lambda=-\lambda(7\lambda-16)$ καὶ εἶναι $\Delta>0$ διὰ $0<\lambda<\dfrac{16}{7}$.

Ἐπειδὴ $\alpha=\lambda-1$ καὶ $\varphi(2)=(\lambda-1)4-6\lambda+4\lambda=2\lambda-4$, ἡ (2) γράφεται $(\lambda-1)(2\lambda-4)>0$ καὶ ἀληθεύει διὰ $\lambda<1$ καὶ διὰ $\lambda>2$.

Ἡ ἀνισότης (3) γράφεται $2<\dfrac{3\lambda}{2(\lambda-1)}$ καὶ εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν $(\lambda-1)(\lambda-4)<0$, ἡ ὁποία ἀληθεύει διὰ $1<\lambda<4$.

Εὑρίσκομεν τὰς κοινὰς λύσεις τῶν ἀνισοτήτων (1), (2), (3). Πρὸς τοῦτο σχηματίζομεν τὸν κάτωθι πίνακα τῶν χαρακτηριστικῶν τιμῶν τοῦ λ.

$$-\infty\,\underbrace{\ldots\ldots}\,0\,\underbrace{\ldots\ldots}\,1\,\underbrace{\ldots\ldots}\,2\ldots\ldots\frac{16}{7}\,\underbrace{\ldots\ldots}\,4\,\underbrace{\ldots\ldots}\,+\infty$$

καὶ κατὰ τὰ γνωστά, εὑρίσκομεν, ὅτι αἱ ἀνισότητες (1), (2), (3) συναληθεύουν διὰ $2<\lambda<\dfrac{16}{7}$. Ὥστε διὰ $2<\lambda<\dfrac{16}{7}$ εἶναι $2<x'<x''$.

579. Παράδειγμα 5ον. ***Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ ἡ ἐξίσωσις***

$$(\lambda+1)x^2-4x+2\lambda=0$$

ἔχει δύο ρίζας μικροτέρας τοῦ 3.

Διὰ νὰ ἔχῃ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις δύο ρίζας μικροτέρας τοῦ 3, ἤτοι διὰ νὰ ἀληθεύῃ ἡ σχέσις $x'<x''<3$, πρέπει νὰ συναληθεύουν αἱ ἀνισότητες

$$\Delta>0 \quad (1), \qquad \alpha\varphi(3)>0 \quad (2), \qquad 3>-\frac{\beta}{2\alpha}. \quad (3)$$

Ἐδῶ εἶναι $\Delta=16-8\lambda(\lambda+1)=-8\lambda^2+8\lambda+16=-8(\lambda+2)(\lambda-1)$ καὶ θὰ εἶναι

$$\Delta>0 \quad \text{διὰ} \quad -2<\lambda<1. \qquad (1')$$

Ἐπειδὴ $\alpha=(\lambda+1)$ καὶ $\varphi(3)=(\lambda+1)3^2-4\cdot3+2\lambda=11\lambda-3$, ἡ (2) γράφεται $(\lambda+1)(11\lambda-3)>0$ καὶ ἀληθεύει διὰ $\lambda<-1$ καὶ $\lambda>\frac{3}{11}$. (2')

Ἡ ἀνισότης (3) γράφεται

$$3>\frac{4}{2(\lambda+1)} \quad ἢ \quad 3-\frac{2}{\lambda+1}>0 \quad ἢ \quad \frac{3(\lambda+1)-2}{\lambda+1}>0 \quad ἢ \quad \frac{3\lambda+1}{\lambda+1}>0.$$

καὶ εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν $(3\lambda+1)(\lambda+1)>0$, ἡ ὁποία ἀληθεύει διὰ $\lambda<-1$ καὶ διὰ $\lambda>-\frac{1}{3}$.

Εὑρίσκομεν τὰς κοινὰς λύσεις τῶν ἀνισοτήτων (1), (2), (3). Πρὸς τοῦτο σχηματίζομεν τὸν κάτωθι πίνακα τῶν χαρακτηριστικῶν τιμῶν τοῦ λ,

$$-\infty \ldots\ldots -2 \ldots\ldots -1 \ldots\ldots -\frac{1}{3} \ldots\ldots \frac{3}{11} \ldots\ldots 1 \ldots\ldots +\infty$$

καί, κατὰ τὰ γνωστά, εὑρίσκομεν, ὅτι αἱ (1), (2) καὶ (3) συναληθεύουν διὰ $-2<\lambda<-1$ καὶ διὰ $\frac{3}{11}<\lambda<1$.

Ὥστε διὰ $-2<\lambda<-1$ εἴτε διὰ $\frac{3}{11}<\lambda\,1$, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει δύο ῥίζας μικροτέρας τοῦ 3.

Ἀσκήσεις. *2399.* Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ μ, ἡ ἐξίσωσις $4x^2+(\mu-2)x+\mu-5=0$ ἔχει δύο ῥίζας μικροτέρας τοῦ 2.

2400. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ μ ἡ ἐξίσωσις $(\mu+1)x^2-3\mu x+4\mu=0$ ἔχει δύο ῥίζας μεγαλυτέρας τοῦ -1.

2401. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ ἡ ἐξίσωσις $(\lambda-1)x^2-(3\lambda+1)x+5\lambda=0$ ἔχει δύο ῥίζας μεγαλυτέρας τοῦ -1.

2402. Δίδεται ἡ ἐξίσωσις $(\mu-2)x^2+2(\mu-1)x+\mu-3=0$.

1ον. Μεταξὺ ποίων τιμῶν πρέπει νὰ περιέχεται ὁ μ, ἵνα ἡ ἐξίσωσις ἔχῃ δύο ῥίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους. 2ον. Μεταξὺ ποίων τιμῶν πρέπει νὰ περιέχεται ὁ μ, ἵνα αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως εἶναι μεγαλύτεραι τοῦ 1.

580. Πρόβλημα. *Νὰ ὁρισθοῦν αἱ διάφοροι θέσεις τοῦ ἀριθμοῦ -1, ὡς πρὸς τὰς ῥίζας τῆς ἐξισώσεως*

$$\varphi(x)=(\lambda+1)x^2-4\lambda x+2\lambda+3=0$$

ὅταν τὸ λ λαμβάνῃ τιμὰς ἀπὸ $-\infty$ ἕως $+\infty$.

Σχηματίζομεν τὰ $\alpha\varphi(\xi)$, Δ, καὶ $\xi-\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)$ ἢ $\xi+\frac{\beta}{2\alpha}$ καὶ ἐξετάζομεν τὰ σημεῖα των.

α'. Ἐδῶ εἶναι

$$\alpha\varphi(\xi)=(\lambda+1)\varphi(-1)=(\lambda+1)(\lambda+1+4\lambda+2\lambda+3)=(\lambda+1)(7\lambda+4)$$

καὶ εἶναι $\alpha\varphi(\xi)>0$ διὰ $\lambda<-1$ καὶ διὰ $\lambda>-\frac{4}{7}$.

β'. Ἐπίσης εἶναι $\Delta=4\lambda^2-(\lambda+1)(2\lambda+3)=2\lambda^2-5\lambda-3$.

Αἱ ῥίζαι τοῦ τριωνύμου $2\lambda^2-5\lambda-3$ εἶναι 3 καὶ $-\frac{1}{2}$, ἄρα θὰ εἶναι $\Delta=2\lambda^2-5\lambda-3=2(\lambda-3)\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)$.

Εἶναι δὲ $\Delta > 0$ διὰ $\lambda < -\frac{1}{2}$ καὶ διὰ $\lambda > 3$.

γ. Ὁμοίως εἶναι $\xi + \frac{\beta}{2\alpha} = -1 - \frac{4\lambda}{2(\lambda+1)} = \frac{-3\lambda-1}{\lambda+1}$.

Εἶναι δὲ $\xi + \frac{\beta}{2\alpha} > 0$, ἐὰν $\frac{-3\lambda-1}{\lambda+1} > 0$. Ἡ ἀνισότης αὐτὴ εἶναι εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν $(-3\lambda-1)(\lambda+1) > 0$ ἢ $(3\lambda+1)(\lambda+1) < 0$ ἢ $(\lambda+1)(3\lambda+1) < 0$ καὶ ἀληθεύει διὰ $-1 < \lambda < -\frac{1}{3}$.

Κατασκευάζομεν ἔπειτα ἕνα πίνακα μὲ 5 στήλας, ὅπως φαίνεται κατωτέρω.

Εἰς τὴν πρώτην στήλην θέτομεν κατὰ σειρὰν μεγέθους τὰς χαρακτηριστικὰς τιμὰς τοῦ λ, εἰς καθεμίαν δὲ ἀπὸ τὰς ἄλλας, τὰ σημεῖα τῶν ποσοτήτων Δ, $\alpha\varphi(-1)$ καὶ $-1+\frac{\beta}{2\alpha}$.

Πρὸς συμπλήρωσιν τοῦ πίνακος αὐτοῦ ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς :

Συμπλήρωσις τῆς στήλης Δ. Εὑρήκαμεν ἀνωτέρω, ὅτι εἶναι $\Delta > 0$ διὰ $\lambda < -\frac{1}{2}$ καὶ διὰ $\lambda > 3$· ἐπομένως εἰς τὴν στήλην Δ θέτομεν +, εἰς τὰ διαστήματα τὰ εὑρισκόμενα ἄνωθεν τοῦ $-\frac{1}{2}$ καὶ εἰς τὰ κάτωθεν τοῦ 3. Εἰς τὰ λοιπὰ διαστήματα θέτομεν τὸ σημεῖον —.

Συμπλήρωσις τῆς στήλης αφ(—1). Εὑρήκαμεν, ὅτι εἶναι $\alpha\varphi(-1) > 0$ διὰ $\lambda < -1$ καὶ διὰ $\lambda > -\frac{4}{7}$. Ἐπομένως θέτομεν τὸ ση-

λ	Δ	$\alpha\varphi(-1)$	$-1+\frac{\beta}{2\alpha}$	Συμπέρασμα
$-\infty$				
	+	+	—	$-1 < x' < x''$
-1	......	......	......	....
	+	—	+	$x' < - < x''$
$-\frac{4}{7}$	......	......	......	....
	+	+	+	$x' < x'' < -1$
$-\frac{1}{2}$	......	......	......	....
	—	+	+	Δὲν ἔχει ρίζας
$-\frac{1}{3}$	......	......	......	....
	—	+	—	Δὲν ἔχει ρίζας
3	......	......	......	....
	+	+	—	$-1 < x' < x''$
$+\infty$				

μεῖον + εἰς τὰ διαστήματα τὰ εὑρισκόμενα ἄνωθεν τοῦ -1 καὶ κάτωθεν τοῦ $-\frac{4}{7}$. Εἰς τὰ λοιπὰ διαστήματα θέτομεν τὸ —.

Συμπλήρωσις τῆς στήλης $-1+\frac{\beta}{2\alpha}$. Εὑρήκαμεν, ὅτι $-1+\frac{\beta}{2\alpha}>0$ διὰ $-1<\lambda<-\frac{1}{3}$. Ἑπομένως εἰς τὴν στήλην αὐτὴν θέτομεν + εἰς τὰ διαστήματα τὰ εὑρισκόμενα μεταξὺ τοῦ -1 καὶ $-\frac{1}{3}$ καὶ εἰς τὰ λοιπὰ θέτομεν —.

Συμπλήρωσις τῆς στήλης : Συμπέρασμα. Ἡ συμπλήρωσις τῆς στήλης αὐτῆς γίνεται ἐπὶ τῇ βάσει τῶν πορισμάτων τοῦ πίνακος τῆς § 574.

Ἀσκήσεις. *2403.* Νὰ ὁρισθοῦν αἱ διάφοροι θέσεις τοῦ ἀριθμοῦ 1 πρὸς τὰς ῥίζας τῆς ἐξισώσεως $\varphi(x)=(\lambda-2)x^2-2\lambda x+2\lambda+3=0$ κατὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τοῦ λ.

2404. Νὰ συγκριθῇ ὁ ἀριθμὸς 3 ὡς πρὸς τὰς ῥίζας τῆς ἐξισώσεως $(\mu+1)x^2-4x+2\mu=0$ κατὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τοῦ μ.

2405. Νὰ καθορισθῇ ἡ θέσις τοῦ 1 πρὸς τὰς ῥίζας τῆς ἐξισώσεως $\varphi(x)=\lambda x^2-2(3\lambda-1)x+9\lambda-1=0$ κατὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τοῦ λ.

2406. Νὰ συγκριθῇ ὁ ἀριθμὸς 2 πρὸς τὰς ῥίζας τῆς ἐξισώσεως $\mu x^2-2(\mu-1)x+\mu-5=0$ κατὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τοῦ μ

2407. Νὰ συγκριθῇ ὁ ἀριθμὸς 1 πρὸς τὰς ῥίζας τῆς ἐξισώσεως $3x^2-(5\lambda+7)x+4(\lambda^2-4\lambda+6)=0$ κατὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τοῦ λ.

581. Σύγκρισις τῆς θέσεως δύο ἀριθμῶν ξ_1 καὶ ξ_2 ὡς πρὸς τὰς ῥίζας ἑνὸς τριωνύμου τοῦ δευτέρου βαθμοῦ.— Θεώρημα.

Δίδεται τὸ τριώνυμον $\varphi(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$. ***Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι :***

I. Ἐὰν εἶναι $\alpha\varphi(\xi)<0$, ***ὅπου*** ξ ***τυχὸν δοθεὶς ἀριθμός, τὸ τριώνυμον*** $\varphi(x)$ ***ἔχει δύο ῥίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους καὶ ὁ ἀριθμὸς*** ξ ***περιέχεται μεταξὺ τῶν ῥιζῶν τοῦ τριωνύμου.***

II. Ἐὰν $\varphi(\xi_1)$ ***καὶ*** $\varphi(\xi_2)$ ***εἶναι ἑτερόσημα, ὅπου*** ξ_1 ***καὶ*** ξ_2 ***εἶναι δύο δοθέντες ἀριθμοί, δηλ. ἐὰν*** $\varphi(\xi_1)\varphi(\xi_2)<0$, ***τὸ τριώνυμον*** $\varphi(x)$ ***ἔχει δύο ῥίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους καὶ ἡ μία ἀπὸ αὐτὰς περιέχεται μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν*** ξ_1 ***καὶ*** ξ_2.

Ὑποθέτομεν, ὅτι $\alpha>0$.

I. Ἐὰν τὸ τριώνυμον $\varphi(x)$ *δὲν ἔχῃ ῥίζας*, τότε τὸ τριώνυμον θὰ ἔχῃ τὸ σημεῖον τοῦ α· καὶ ἐπειδὴ τὸ α εἶναι θετικὸν ἐξ ὑποθέσεως, τὸ $\alpha\varphi(x)$ θὰ εἶναι θετικὸν διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x.

Ἐὰν τὸ τριώνυμον $\varphi(x)$ *ἔχῃ μίαν διπλῆν ῥίζαν*, τότε τὸ $\varphi(x)$ θὰ ἔχῃ τὸ σημεῖον τοῦ α, δι' ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ x, ἐκτὸς τῆς τιμῆς $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$ καὶ ἐπομένως τὸ $\alpha\varphi(x)$ θὰ εἶναι θετικὸν διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x, ἐκτὸς τῆς τιμῆς $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$, διὰ τὴν ὁποίαν τιμὴν θὰ εἶναι μηδέν.

Ὥστε καὶ κατὰ τὰς δύο ἀνωτέρω ὑποθέσεις, τὸ $\alpha\varphi(x)$ δὲν εἶναι ποτὲ ἀρνητικόν. Συνεπῶς, ἐὰν $\alpha\varphi(\xi)$ εἶναι ἀρνητικόν, πρέπει νὰ συμπεράνωμεν, ὅτι τὸ τριώνυμον $\varphi(x)$ ἔχει δύο ρίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους καὶ ὅτι ὁ ξ περιέχεται μεταξὺ τῶν ριζῶν.

II. Ἐὰν $\varphi(\xi_1)$ καὶ $\varphi(\xi_2)$ εἶναι ἑτερόσημα, θὰ εἶναι ἑτερόσημοι καὶ οἱ ἀριθμοὶ $\alpha\varphi(\xi_1)$ καὶ $\alpha\varphi(\xi_2)$ καὶ ἑπομένως ὁ ἕνας ἀπό τοὺς ἀριθμοὺς αὐτοὺς θὰ εἶναι ἀρνητικός. Ἀλλὰ τότε τὸ τριώνυμον, ὅπως ἐδείχθη εἰς τὴν περίπτωσιν I, θὰ ἔχῃ δύο ρίζας x', x'', $(x'<x'')$, πραγματικὰς καὶ ἀνίσους.

Ὑποθέτομεν, ὅτι $\xi_1<\xi_2$.

Ἐὰν εἶναι $\alpha\varphi(\xi_1)<0$, τότε θὰ εἶναι $\alpha\varphi(\xi_2)>0$, ὁπότε ὁ μὲν ἀριθμὸς ξ_1 θὰ περιέχεται μεταξὺ τῶν ριζῶν x', x'', ὁ δὲ ξ_2 θὰ κεῖται ἐκτὸς τῶν ριζῶν. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θὰ εἶναι

$$x' < \xi_1 < x'' < \xi_2.$$

Ἐὰν εἶναι $\alpha\varphi(\xi_1)>0$, τότε θὰ εἶναι $\alpha\varphi(\xi_2)<0$, ὁπότε ὁ ξ_2 θὰ κεῖται μεταξὺ τῶν ριζῶν, ὁ δὲ ξ_1 ἐκτὸς τῶν ριζῶν. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θὰ εἶναι $\xi_1 < x' < \xi_2 < x''$.

Παρατηροῦμεν, ὅτι καὶ εἰς τὰς δύο αὐτὰς περιπτώσεις, μία ἀπὸ τὰς ρίζας τοῦ τριωνύμου $\varphi(x)$ περιέχεται μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν ξ_1 καὶ ξ_2.

582. Πρόβλημα. ***Νὰ καθορισθῇ ἡ θέσις δύο δοθέντων ἀριθμῶν ξ_1 καὶ ξ_2 πρὸς τὰς ρίζας μιᾶς ἐξισώσεως τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, χωρὶς προηγουμένως νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ρίζαι της.***

Ἔστω $\varphi(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$

μία ἐξίσωσις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, ἡ ὁποία ἔχει δύο ρίζας x' καὶ x'' ἀνίσους $(x'<x'')$. Ἔστωσαν ἐπίσης δύο δοθέντες ἀριθμοὶ ξ_1 καὶ ξ_2 $(\xi_1<\xi_2)$ τῶν ὁποίων ζητοῦμεν νὰ καθορίσωμεν τὴν θέσιν πρὸς τὰς ρίζας x' καὶ x''.

Γνωρίζομεν (§ 574), ὅτι, ἐὰν $\alpha\varphi(\xi_1)<0$, τὸ ξ_1 περιέχεται μεταξὺ τῶν ριζῶν x' καὶ x'', ἤτοι εἶναι $x' < \xi_1 < x''$. (1)

Ἐπίσης, ἐὰν $\alpha\varphi(\xi_2)<0$, θὰ εἶναι $x' < \xi_2 < x''$. (2)

I. Ὥστε, ἐὰν $\alpha\varphi(\xi_1)<0$ καὶ $\alpha\varphi(\xi_2)<0$ ἢ $\varphi(\xi_1)\times\varphi(\xi_2)>0$, τότε θὰ εἶναι $x' < \xi_1 < \xi_2 < x''$.

II. Ἐὰν εἶναι $\alpha\varphi(\xi_1)<0$ καὶ $\alpha(\xi_2)>0$, τότε τὸ ξ_1 περιέχεται μεταξὺ τῶν ριζῶν x' καὶ x'' καὶ τὸ ξ_2 κεῖται ἐκτὸς τῶν ριζῶν αὐτῶν· ἐπειδὴ δὲ εἶναι $\xi_1<\xi_2$ θὰ εἶναι

$$x' < \xi_1 < x'' < \xi_2.$$

III. Ἐὰν εἶναι $\alpha\varphi(\xi_1)>0$ καὶ $\alpha\varphi(\xi_2)<0$, τότε ὁ ξ_1 κεῖται ἐκτὸς τῶν ριζῶν x' καὶ x'', ὁ δὲ ξ_2 περιέχεται μεταξὺ τῶν ριζῶν αὐτῶν.

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $\xi_1<\xi_2$ θὰ ἔχωμεν

$$\xi_1 < x' < \xi_2 < x''.$$

IV. Ἐὰν εἶναι $\alpha\varphi(\xi_1)>0$ καὶ $\alpha\varphi(\xi_2)>0$, οἱ ἀριθμοὶ ξ_1 καὶ ξ_2 κεῖνται ἐκτὸς τῶν ριζῶν x' καὶ x''. Διὰ νὰ καθορίσωμεν ἀκριβῶς τὴν θέσιν των πρὸς τὰς ρίζας αὐτάς, εἶναι ἀνάγκη νὰ τοὺς συγκρίνωμεν πρὸς τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ριζῶν, δηλ. πρὸς τὸ $-\dfrac{\beta}{2\alpha}$.

1ον. Ἐὰν εἶναι $\xi_1 < -\frac{\beta}{2\alpha}$ καὶ $\xi_2 > -\frac{\beta}{2\alpha}$, τότε τὸ ξ_1 εἶναι μικρότερον τῆς μικροτέρας ρίζης x' καὶ τὸ ξ_2 μεγαλύτερον τῆς μεγαλυτέρας ρίζης x''. Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν $\xi_1 < x' < x'' < \xi_2$.

2ον. Ἐὰν εἶναι $\xi_1 < -\frac{\beta}{2\alpha}$ καὶ $\xi_2 < -\frac{\beta}{2\alpha}$, οἱ ἀριθμοὶ ξ_1 καὶ ξ_2 εἶναι μικρότεροι τῆς μικροτέρας ρίζης x' καὶ ἐπειδὴ εἶναι $\xi_1 < \xi_2$, θὰ εἶναι

$$\xi_1 < \xi_2 < x' < x''$$

3ον. Ἐὰν εἶναι $\xi_1 > -\frac{\beta}{2\alpha}$, τότε ὁ ξ_1 θὰ εἶναι μεγαλύτερος τῆς μεγαλυτέρας ρίζης x'' καὶ ἐπειδὴ $\xi_1 < \xi_2$, θὰ εἶναι $x' < x'' < \xi_1 < \xi_2$.

Τὰ ἀνωτέρω συμπεράσματα συνοψίζονται εἰς τὸν κάτωθι πίνακα.

Πίναξ καθορίζων τὴν θέσιν τῶν ἀριθμῶν ξ_1 καὶ ξ_2, ($\xi_1 < \xi_2$) ὡς πρὸς τὰς ρίζας x' καὶ x'' τῆς ἐξισώσεως $\varphi(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$

Ἐὰν	$\alpha\varphi(\xi_1) < 0$	καὶ	$\alpha\varphi(\xi_2) < 0$	$x' < \xi_1 < \xi_2 < x''$
Ἐὰν	$\alpha\varphi(\xi_1) < 0$	καὶ	$\alpha\varphi(\xi_2) > 0$	$x' < \xi_1 < x'' < \xi_2$
Ἐὰν	$\alpha\varphi(\xi_1) > 0$	καὶ	$\alpha\varphi(\xi) < 0$	$\xi_1 < x' < \xi_2 < x''$
Ἐὰν	$\varphi(\xi_1).\varphi(\xi_2) < 0$	μία καὶ μόνον ρίζα περιέχεται μεταξὺ ξ_1 καὶ ξ_2		
Ἐὰν	$\beta^2-4\alpha\gamma > 0$	$\xi_1 < -\frac{\beta}{2\alpha}$,	$\xi_2 > -\frac{\beta}{2\alpha}$	$\xi_1 < x' < x'' < \xi_2$
	$\alpha\varphi(\xi_1) > 0$	$\xi_1 < -\frac{\beta}{2\alpha}$	$\xi_2 < -\frac{\beta}{2\alpha}$	$\xi_1 < \xi_2 < x' < x''$
	$\alpha\varphi(\xi_2) > 0$	$\xi_1 > -\frac{\beta}{2\alpha}$,	. . . .	$x' < x'' < \xi_1 < \xi_2$

583.* Ἐφαρμογὴ τοῦ πίνακος.** — Παράδειγμα **1ον.** ***Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ ἡ ἐξίσωσις $\lambda x^2-(\lambda-2)x+3=0$ ***ἔχει :***

1ον. Μίαν μόνον ρίζαν περιεχομένην μεταξὺ −1 καὶ +1.

2ον. Δύο ρίζας περιεχομένας μεταξὺ −1 καὶ +1.

3ον. Δύο ρίζας μικροτέρας τοῦ −1 καὶ +1.

4ον. Μίαν ρίζαν μικροτέραν τοῦ −1 καὶ τὴν ἄλλην μεγαλυτέραν τοῦ 1.

1ον. Διὰ νὰ περιέχεται μία καὶ μόνον ρίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως μεταξὺ −1 καὶ +1, πρέπει τὰ $\alpha\varphi(-1)$ καὶ $\alpha\varphi(1)$ νὰ εἶναι ἑτερόσημα· ἤτοι πρέπει νὰ εἶναι $\varphi(-1)\varphi(1)<0$.

Ἐπειδὴ $\varphi(-1)=\lambda(-1)^2-(\lambda-2)(-1)+3=2\lambda+1$

$$\varphi(1)=\lambda-(\lambda-2)+3=5$$

πρέπει νὰ εἶναι $(2\lambda+1)\,.\,5<0$ ἢ $\lambda < -\frac{1}{2}$.

Ὥστε, διὰ $\lambda < -\frac{1}{2}$, ἡ μία ἐκ τῶν ριζῶν τῆς δοθείσης ἐξισώσεως περιέχεται μεταξὺ −1 καὶ +1· ἤτοι εἶναι, εἴτε

$$-1<x'<1<x'', \quad \text{εἴτε} \quad x'<-1<x''<1 \qquad (1)$$

2ον. Διὰ νὰ ἔχῃ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις δύο ρίζας περιεχομένας μεταξὺ -1 καὶ $+1$, ἤτοι διὰ νὰ ὑφίσταται ἡ σχέσις $-1<x'<x''<+1$, πρέπει νὰ συναληθεύουν αἱ ἀνισότητες

$$\Delta>0 \quad (1), \qquad \alpha\varphi(-1)>0 \quad (2), \qquad \alpha\varphi(1)>0 \quad (3),$$

$$-1<-\frac{\beta}{2\alpha} \quad (4), \qquad 1>-\frac{\beta}{2\alpha}. \qquad (5)$$

α' Ἐδῶ εἶναι $\Delta=(\lambda-2)^2-12\lambda=\lambda^2-16\lambda+4$

καὶ εἶναι $\Delta>0$ ἢ $\lambda^2-16\lambda+4>0$

διὰ $\lambda<8-2\sqrt{15}$ καὶ διὰ $\lambda>8+2\sqrt{15}$.

β'. Ἐπειδὴ $\alpha=\lambda$ καὶ $\varphi(-1)=2\lambda+1$, ἡ (2) γράφεται $\lambda(2\lambda+1)>0$ καὶ ἀληθεύει διὰ $\lambda<-\frac{1}{2}$ καὶ διὰ $\lambda>0$.

γ' Ἐπειδὴ $\alpha=\lambda$ καὶ $\varphi(1)=5$, ἡ ἀνισότης (5) γράφεται $5\lambda>0$ καὶ ἀληθεύει διὰ $\lambda>0$.

δ'. Ἡ ἀνισότης (4) γράφεται

$$-1<\frac{\lambda-2}{2\lambda} \quad \text{ἢ} \quad -1-\frac{\lambda-2}{2\lambda}<0 \quad \text{ἢ} \quad \frac{-3\lambda+2}{2\lambda}<0$$

ἢ $$(-3\lambda+2)\lambda<0 \quad \text{ἢ} \quad \lambda(3\lambda-2)>0$$

ἡ ὁποία ἀληθεύει διὰ $\lambda<0$ καὶ διὰ $\lambda>\frac{2}{3}$.

ε'. Ἡ ἀνισότης (5) γράφεται

$$1>\frac{\lambda-2}{2\lambda} \quad \text{ἢ} \quad 1-\frac{\lambda-2}{2\lambda}>0 \quad \text{ἢ} \quad \frac{\lambda+2}{2\lambda}>0 \quad \text{ἢ} \quad 2\lambda(\lambda+2)>0,$$

ἡ ὁποία ἀληθεύει διὰ $\lambda<-2$ καὶ διὰ $\lambda>0$.

Εὑρίσκομεν τὰς κοινὰς λύσεις τῶν ἀνισοτήτων (1), (2), (3), (4), (5).

Πρὸς τοῦτο σχηματίζομεν τὸν κάτωθι πίνακα τῶν χαρακτηριστικῶν τιμῶν τοῦ λ.

$$-\infty \ldots -2 \ldots -\frac{1}{2} \ldots 0 \ldots 8-2\sqrt{15} \ldots \frac{2}{3} \ldots 8+2\sqrt{15} \ldots +\infty$$

καί, κατὰ τὰ γνωστά, εὑρίσκομεν, ὅτι αἱ ἀνισότητες αὐταὶ συναληθεύουν διὰ $\lambda>8+2\sqrt{15}$.

Ὥστε διὰ $\lambda>8+2\sqrt{15}$ θὰ εἶναι $-1<x'<x''<1$.

3ον. Διὰ νὰ ἔχῃ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις δύο ρίζας μικροτέρας τοῦ -1 καὶ ἑπομένως καὶ τοῦ $+1$, ἤτοι διὰ νὰ ὑφίσταται ἡ σχέσις

$$x'<x''<-1<+1$$

πρέπει νὰ συναληθεύουν αἱ ἀνισότητες

$$\Delta>0 \quad (1), \qquad \alpha\varphi(-1)>0 \quad (2), \qquad \alpha\varphi(1)>0 \quad (3), \qquad -1>-\frac{\beta}{2\alpha}. \quad (4)$$

Ἡ ἀνισότης (1) ἀληθεύει διὰ $\lambda<8-2\sqrt{15}$ καὶ διὰ $\lambda>8+2\sqrt{15}$.

Ἡ ἀνισότης (2) ἀληθεύει διὰ $\lambda<-\frac{1}{2}$ καὶ διὰ $\lambda>0$.

Ἡ ἀνισότης (3) ἀληθεύει διὰ $\lambda>0$.

Ἡ ἀνισότης (4) γράφεται

$$-1>\frac{\lambda-2}{2\lambda} \quad \text{ἢ} \quad \lambda(3\lambda-2)<0 \quad \text{καὶ ἀληθεύει διὰ} \quad 0<\lambda<\frac{2}{3}.$$

Αἱ ἀνισότητες (1), (2), (3), (4) συναληθεύουν διὰ $0 < \lambda < 8-2\sqrt{15}$.

$$\underbrace{-\infty \ldots -2}\underbrace{\ldots -\tfrac{1}{2}}\underbrace{\ldots 0}\ldots 8-2\sqrt{15}\ldots \underbrace{\tfrac{2}{3}}\underbrace{\ldots 8+2\sqrt{15}}\underbrace{\ldots +\infty}.$$

Ὥστε διὰ $0 < \lambda < 8-2\sqrt{15}$, θὰ εἶναι $x' < x'' < -1 < +1$.

4ον. Διὰ νὰ ἔχῃ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις μίαν ρίζαν μικροτέραν τοῦ -1 καὶ τὴν ἄλλην μεγαλυτέραν τοῦ $+1$, ἤτοι διὰ νὰ ὑφίσταται ἡ σχέσις $x' < -1 < +1 < x''$, πρέπει νὰ συναληθεύουν αἱ ἀνισότητες

$$\alpha\varphi(-1) < 0 \quad (1) \qquad \alpha\varphi(1) < 0 \quad (2).$$

Ἡ ἀνισότης (1) γράφεται $\lambda(2\lambda+1) < 0$ καὶ ἀληθεύει διὰ $-\frac{1}{2} < \lambda < 0$.

Ἡ ἀνισότης (2) γράφεται $5\lambda < 0$ καὶ ἀληθεύει διὰ $\lambda < 0$.

Αἱ ἀνισότητες (1) καὶ (2) συναληθεύουν διὰ $-\frac{1}{2} < \lambda < 0$.

$$\underbrace{-\infty \ldots -\tfrac{1}{2}}\ldots \underbrace{0 \ldots +\infty}.$$

Ὥστε διὰ $-\frac{1}{2} < \lambda < 0$, θὰ εἶναι $x' < -1 < +1 < x''$.

Ἀσκήσεις. Α' Ὁμάς. 2408. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ μία καὶ μόνον ρίζα τῆς ἐξισώσεως $\varphi(x)=(\mu-1)x^2-3\mu x+2\mu=0$ περιέχεται μεταξὺ -1 καὶ $+1$.

2409. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ μ ἡ ἐξίσωσις $\mu x^2-(\mu-2)x+4-\mu=0$ ἔχει μίαν ρίζαν περιεχομένην μεταξὺ -1 καὶ $+1$.

2410. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ μ ἡ ἐξίσωσις $\varphi(x)=\mu x^2-(\mu-3)x+5-\mu=0$ ἔχει μίαν ρίζαν περιεχομένην μεταξὺ -1 καὶ $+1$.

2411. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ μ ἡ ἐξίσωσις $\varphi(x)=(3\mu-2)x^2+2\mu x+3\mu=0$ ἔχει μίαν μόνον ρίζαν περιεχομένην μεταξὺ 0 καὶ -1.

2411. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ μ αἱ κάτωθι ἐξισώσεις ἔχουν μίαν μόνον ρίζαν παρεχομένην μεταξὺ 0 καὶ 1

1. $\mu x^2-4\mu x+2-\mu=0$. 2. $3x^2+(\mu+1)x+3\mu+6=0$.

Β' Ὁμάς. 2412. Διὰ ποίας τοῦ λ αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\varphi(x)=(\lambda+4)x^2-(2\lambda+1)x+\lambda-1=0$ περιέχονται μεταξὺ τῶν -1 καὶ $+1$.

2413. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ μ αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\varphi(x)=(\mu-2)x^2-(2\mu+1)x+2\mu=0$ περιέχονται μεταξὺ -1 καὶ 5.

2414. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ μ ἡ ἐξίσωσις $\varphi(x)=(2\mu+2)x^2+(\mu+1)x+4=0$. ἔχει δύο ρίζας περιεχομένας μεταξὺ -1 καὶ 2.

2415. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ μ ἡ ἐξίσωσις $\varphi(x)=x^2-2\mu x-(1-\mu^2)=0$ ἔχει δύο ρίζας περιεχομένας μεταξὺ -2 καὶ 4.

2416. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ ἡ ἐξίσωσις $\varphi(x)=(\lambda-1)x^2-\lambda x+2-\lambda=0$ ἔχει δύο ρίζας περιεχομένας μεταξὺ -1 καὶ 2.

2417. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ ἡ ἐξίσωσις $\varphi(x)=(\lambda-1)x^2-2\lambda x-3\lambda+4=0$ ἔχει δύο ρίζας περιεχομένας μεταξὺ -1 καὶ $+1$.

2418. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ μ αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως

$$\varphi(x)=(\mu+1)x^2+2(\mu+2)x+\mu+1=0$$

περιέχονται μεταξὺ 0 καὶ 1.

2419. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ ἡ ἐξίσωσις

$$\varphi(x)=x(x+1)(\lambda^2-3\lambda+1)+2\lambda-3=0$$

ἔχει δύο ρίζας περιεχομένας μεταξὺ -1 καὶ $+1$,

2420. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ αἱ κάτωθι ἐξισώσεις ἔχουν δύο ρίζας περιεχομένας μεταξὺ -1 καὶ $+1$:

1. $(\lambda-1)x^2-\lambda x+2-\lambda=0$. 3. $2x^2+(\lambda-3)x+3-\lambda=0$.
2. $(2\lambda+5)x^2+(\lambda-2)x-3\lambda+4=0$. 4. $(\lambda^2-1)x^2-2(\lambda-1)x+\lambda=0$.

2421. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ μ ἡ ἐξίσωσις $(\mu-2)x^2-2(\mu+3)x+4\mu=0$ ἔχει μίαν ρίζαν μεγαλυτέραν τοῦ 3 καὶ μίαν ρίζαν μικροτέραν τοῦ 2.

2422. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ μ ἡ ἐξίσωσις $\varphi(x)=3x^2+(\lambda-1)x+3\lambda+2=0$ ἔχει τὴν μίαν ρίζαν μεγαλυτέραν τοῦ 3 καὶ τὴν ἄλλην μικροτέραν τοῦ 2.

2423. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ μ ἡ ἐξίσωσις $\varphi(x)=3x^2-7x-6\lambda+2=0$ ἔχει τὴν μίαν ρίζαν μικροτέραν τοῦ 1 καὶ τὴν ἄλλην μεγαλυτέραν τοῦ -1.

2424. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ ἡ ἐξίσωσις $\varphi(x)=(2-3\lambda)x^2-2\lambda x-3\lambda=0$ ἔχει : 1ον. μίαν ἐκ τῶν ριζῶν της κειμένην μεταξὺ -1 καὶ 0. 2ον. δύο ρίζας κειμένας ἐκτὸς τοῦ διαστήματος $(-1,0)$.

2425. Δίδεται ἐξίσωσις $\varphi(x)=x^2+(3\lambda-1)x+\lambda-1=0$ (1). Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ : 1ον. οἱ ἀριθμοὶ 0 καὶ 4 περιέχονται μεταξὺ τῶν ριζῶν τῆς (1)· 2ον. μία ρίζα τῆς (1) περιέχεται μεταξὺ τῶν 0 καὶ 4· 3ον. καὶ αἱ δύο ρίζαι της περιέχονται μεταξὺ τῶν 0 καὶ 4· 4ον. οἱ ἀριθμοὶ 0, 1, 4 περιέχονται μεταξὺ τῶν ριζῶν της, οἱ δὲ ἀριθμοὶ -1 καὶ 5 κεῖνται ἐκτὸς τῶν ριζῶν της,

583. **Παράδειγμα 2ον.** ***Νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις τῶν ἀριθμῶν -1 καὶ 0 πρὸς τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως***

$$\varphi(x)=(\lambda-1)x^2-2(3\lambda+1)x+9\lambda=0$$

κατὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τοῦ λ.

Ἐξετάζομεν κατ' ἀρχὰς τὰ σημεῖα τῶν ποσοτήτων

$$\Delta, \quad \alpha\varphi(-1), \quad \alpha\varphi(0), \quad -1+\frac{\beta}{2\alpha}, \quad 0+\frac{\beta}{2\alpha}$$

δηλ. εὑρίσκομεν εἰς ποῖα διαστήματα τῶν τιμῶν τοῦ λ, αἱ ποσότητες αὐταὶ εἶναι ἀρνητικαὶ ἢ θετικαί, διότι ἀπὸ τὸ σημεῖον αὐτῶν ἐξαρτᾶται ἡ θέσις τῶν ἀριθμῶν -1 καὶ 0.

α'. Ἐδῶ εἶναι $\Delta=(3\lambda+1)^2-(\lambda-1)9\lambda=15\lambda+1$.

Εἶναι δὲ $\Delta>0$, διὰ $\lambda>-\dfrac{1}{15}$.

β'. Ἐπειδὴ $\alpha=\lambda-1$ καὶ $\varphi(-1)=16\lambda+1$, θὰ εἶναι

$$\alpha\varphi(-1)=(\lambda-1)(16\lambda+1)\cdot$$

εἶναι δὲ $\alpha\varphi(-1)>0$, διὰ $\lambda<-\dfrac{1}{16}$ καὶ διὰ $\lambda>1$.

γ'. Ἐπειδὴ $\varphi(0)=9\lambda$, θὰ εἶναι $\alpha\varphi(0)=(\lambda-1)9\lambda$,

Εἶναι δὲ $\alpha\varphi(0)>0$, διὰ $\lambda<0$ καὶ διὰ $\lambda>1$.

δ'. Ἔχομεν $-1+\dfrac{\beta}{2\alpha}=-1+\dfrac{2(3\lambda+1)}{2(\lambda-1)}=\dfrac{-2(\lambda-1)-2(3\lambda+1)}{2(\lambda-1)}=\dfrac{-4\lambda}{\lambda-1}$

Εἶναι δὲ $-1+\dfrac{\beta}{2\alpha}>0$ ἢ $\dfrac{-4\lambda}{\lambda-1}>0$ ἢ $4\lambda(\lambda-1)<0$ διὰ $0<\lambda<1$

ε'. Ἔχομεν $0+\frac{\beta}{2\alpha}=0-\frac{2(3\lambda+1)}{2(\lambda-1)}=-\frac{3\lambda+1}{\lambda-1}$

Εἶναι δὲ $0+\frac{\beta}{2\alpha}>0$ ἢ $-\frac{3\lambda+1}{\lambda-1}>0$ ἢ $-(3\lambda+1)(\lambda-1)>0$

ἢ $(3\lambda+1)(\lambda-1)<0$ διὰ $-\frac{1}{3}<\lambda<1$.

Κατασκευάζομεν ἔπειτα ἕνα πίνακα μὲ 7 στήλας, ὅπως φαίνεται κατωτέρω.

Εἰς τὴν πρώτην στήλην θέτομεν κατὰ σειρὰν μεγέθους τὰς χαρακτηριστικὰς τιμὰς τοῦ λ, εἰς καθεμίαν δὲ ἀπὸ τὰς ἄλλας, θέτομεν τὰ σημεῖα τῶν ποσοτήτων Δ, $\alpha\varphi(-1)$, $\alpha\varphi(0)$, $-1+\frac{\beta}{2\alpha}$, $0+\frac{\beta}{2\alpha}$.

Πρὸς συμπλήρωσιν τοῦ πίνακος ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς :

Συμπλήρωσις τῆς στήλης Δ. Εὑρήκαμεν, ὅτι εἶναι $\Delta>0$ διὰ

λ	Δ	$\alpha\varphi(-1)$	$\alpha\varphi(0)$	$-1+\frac{\beta}{2\alpha}$	$0+\frac{\beta}{2\alpha}$	Συμπέρασμα
$-\infty$						
	$-$					Δὲν ἔχει ρίζας
$-\frac{1}{3}$	....	....	....	....	....	
	$-$					Δὲν ἔχει ρίζας
$-\frac{1}{15}$	....	....	....	....	....	$x'=x''=-\frac{3}{4}$
	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$	$-1<x'<x''<0$
$-\frac{1}{16}$	....	....	....	....	....	$x'<-1,\ x=-\frac{9}{17}$
	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$x'<-1<x''<0$
0	....	....	....	....	....	$x'=-2,\ x''=0$
	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$x'<-1<0<'$.
1	....	....	....	....	....	μία ρίζα μόνον $^9/_8$
	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-1<0<x'<x''$
$+\infty$	....	....	....	....	....	

$\lambda>-\frac{1}{15}$. Ἐπομένως εἰς τὴν στήλην Δ θέτομεν $+$ εἰς τὰ διαστήματα τὰ εὑρισκόμενα κάτωθεν τοῦ $-\frac{1}{15}$ καὶ $-$ εἰς τὰ διαστήματα τὰ ἄνωθεν τοῦ $-\frac{1}{15}$.

Συμπλήρωσις τῆς στήλης $\alpha\varphi(-1)$. Εὑρήκαμεν, ὅτι εἶναι $\alpha\varphi(-1)>0$ διὰ $\lambda<-\frac{1}{16}$ καὶ διὰ $\lambda>1$· ἐπομένως εἰς τὴν στήλην $\alpha\varphi(-1)$ θέτομεν $+$

εἰς τὰ διαστήματα τὰ εὑρισκόμενα ἄνωθεν τοῦ $-\frac{1}{16}$ καὶ κάτωθεν τοῦ 1 καὶ — εἰς τὰ λοιπὰ διαστήματα.

Ὁμοίως γίνεται ἡ συμπλήρωσις καὶ τῶν στηλῶν $\alpha\varphi(0)$, $-1+\frac{\beta}{2\alpha}$ καὶ $0+\frac{\beta}{2\alpha}$.

Σημ. Εἰς τὰ διαστήματα, εἰς τὰ ὁποῖα εἶναι $\Delta<0$, δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ συμπληροῦνται αἱ στῆλαι τῶν $\alpha\varphi(-1)$ κλπ., διότι ἡ ἐξίσωσις δὲν ἔχει ῥίζας.

Συμπλήρωσις τῆς στήλης : Συμπέρασμα. Εἰς τὴν στήλην αὐτὴν καὶ μεταξὺ τῶν διαστημάτων τῶν χαρακτηριστικῶν τιμῶν τοῦ λ, γράφομεν τὴν θέσιν τῶν ῥιζῶν ὡς πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς −1 καὶ 0, βασιζόμενοι εἰς τὰ συμπεράσματα τοῦ πίνακος τῆς § 582.

Οὕτω, ἐὰν λάβωμεν π.χ. τὸ διάστημα $\left(-\frac{1}{15}, -\frac{1}{16}\right)$ παρατηροῦμεν ὅτι ἡ $\Delta>0$, ἄρα ἔχει δύο ῥίζας x', x'', ὅτι $\alpha\varphi(-1)>0$, ἄρα τὸ −1 κεῖται ἐκτὸς τῶν ῥιζῶν x', x''· ὅτι $\alpha\varphi(0)>0$, ἄρα τὸ 0 κεῖται ἐκτὸς τῶν ῥιζῶν· ὅτι $-1+\frac{\beta}{2\alpha}<0$, ἄρα τὸ −1 εἶναι μικρότερον τῆς μικροτέρας ῥίζης· ὅτι $0+\frac{\beta}{2\alpha}>0$, ἄρα τὸ 0 εἶναι μεγαλύτερον τῆς μεγαλυτέρας ῥίζης· ἤτοι συνάγομεν, ὅτι $-1<x'<x''<0$.

Ἰδιαίτεραι περιπτώσεις. Διὰ νὰ συμπληρωθῇ πλήρως ἡ διερεύνησις αὐτή, πρέπει νὰ ἐξετασθῇ ἡ θέσις τῶν ῥιζῶν ὡς πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς −1 καὶ 0 καὶ διὰ τὰς συνοριακὰς τιμὰς τῶν διαστημάτων τοῦ λ.

Οὕτω διὰ $\lambda=-\frac{1}{15}$, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γίνεται $16x^2+24x+9=0$ καὶ ἔχει μίαν ῥίζαν $-\frac{3}{4}$ (διπλῆ).

Διὰ $\lambda=-\frac{1}{16}$, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γίνεται $17x^2+26x+9=0$ καὶ ἔχει ῥίζας $x'=-1$ καὶ $x''=-\frac{9}{17}$.

Διὰ $\lambda=0$, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γίνεται $x^2+2x=0$ καὶ ἔχει ῥίζας $x'=2$, $x''=0$.

Διὰ $\lambda=1$, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γίνεται $8x-9=0$ καὶ ἔχει τὴν ῥίζαν $x=\frac{9}{8}$.

Ἀσκήσεις. *2426.* Νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις τῶν ἀριθμῶν 1 καὶ 2 πρὸς τὰς ῥίζας τῆς ἐξισώσεως $x^2-6(\lambda+1)x+12\lambda+5=0$ κατὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τοῦ λ.

2427. Νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις τῶν ἀριθμῶν −1 καὶ 0 πρὸς τὰς ῥίζας τῆς ἐξισώσεως $\varphi(x)=(\lambda-1)x^2-2(3\lambda+1)x+9\lambda=0$ κατὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τοῦ λ.

2428. Νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις τῶν ἀριθμῶν 0 καὶ 1 πρὸς τὰς ῥίζας τῆς ἐξισώσεως $\varphi(x)=x^2-2(3\lambda+2)x+6\lambda=0$ κατὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τοῦ λ.

2429. Νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις τῶν ἀριθμῶν -1 καὶ $+1$ πρὸς τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως $\varphi(x)=3(\lambda+1)x^2-3(3\lambda+2)x+2(3\lambda+2)=0$ κατὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τοῦ λ.

2430. Νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις τῶν ἀριθμῶν -1 καὶ $+1$ πρὸς τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως $\varphi(x)=(3\lambda+2)x^2+(\lambda-1)x+4\lambda+3=0$ κατὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τοῦ λ.

2431. Νὰ συγκριθοῦν οἱ ἀριθμοὶ 1 καὶ 2 πρὸς τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως $\varphi(x)=x^2-2\mu x+2\mu^2-4\mu+3=0$ κατὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τοῦ μ.

2432. Νὰ συγκριθοῦν οἱ ἀριθμοὶ -1 καὶ 2 πρὸς τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως $\varphi(x)=\lambda^2x^2+(2\lambda-1)x+1=0$ κατὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τοῦ λ.

2433. Νὰ συγκριθοῦν οἱ ἀριθμοὶ -1 καὶ $+1$ πρὸς τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως $\varphi(x)=(\lambda-1)x^2-2(\lambda-2)x-7\lambda-1=0$ κατὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τοῦ λ.

2434. Νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις τῶν ἀριθμῶν -1 καὶ $+1$ πρὸς τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως $\varphi(x)=\alpha(x+1)^2+\beta(x-1)^2-2\lambda(x^2+1)=0$, $(\alpha > \beta)$ κατὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τοῦ λ.

2435. Νὰ καθορισθῇ ἡ θέσις τῶν ἀριθμῶν -1 καὶ $+1$ πρὸς τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως $\varphi(x)=\mu x^2+(2\mu-1)x+1=0$ κατὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τοῦ μ.

2436. Νὰ συγκριθοῦν οἱ ἀριθμοὶ 0 καὶ 2R πρὸς τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως $\varphi(x)=(2\mu+1)x^2-2\mu Rx-4\mu R^2=0$ κατὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τοῦ λ.

2437. Νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις τῶν ἀριθμῶν 0 καὶ 1 πρὸς τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως $\varphi(x)=(4\lambda-1)x^2+2(2\lambda-3)x-(4\lambda+9)=0$ κατὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τοῦ λ.

3438. Νὰ τεθοῦν κατὰ τάξιν μεγέθους αἱ ρίζαι τῶν ἐξισώσεων

$$\varphi(x)=x^2+2x-1=0 \quad \text{καὶ} \quad f(x)=x^2+2\alpha x-1=0$$

ἔνθα α, εἶναι τυχὼν ἀριθμός.

2439. Δίδονται αἱ ἐξισώσεις

$$\varphi(x)=x^2-x-1=0 \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad f(x)=x^2+\alpha x-1=0 \quad (2)$$

καὶ ζητεῖται νὰ τεθοῦν κατὰ τάξιν μεγέθους αἱ ρίζαι τῶν ἐξισώσεων αὐτῶν κατὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τοῦ α.

585. Ἐφαρμογή. Τὸ θεώρημα τῆς § 581 μᾶς ἐπιτρέπει, εἰς μερικὰς περιπτώσεις, νὰ διακρίνωμεν, ἐὰν μία ἐξίσωσις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ ἔχῃ ρίζας πραγματικάς, χωρὶς νὰ σχηματίσωμεν τὴν διακρίνουσαν $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$.

586. Παράδειγμα 1ον. ***Νὰ ἀποδειχθῇ, χωρὶς νὰ χρησιμοποιηθῇ ἡ διακρίνουσα, ὅτι ἡ ἐξίσωσις***

$$\varphi(x)=(x-1)(x+2)+(x+1)(x-2)-(x-1)(x-2)=0$$

ἔχει δύο ρίζας πραγματικάς, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία περιέχεται μεταξὺ 1 καὶ 2.

Σχηματίζομεν τὰ $\varphi(1)$ καὶ $\varphi(2)$. Ἐδῶ εἶναι $\varphi(1)=-2$ καὶ $\varphi(2)=4$. Ἐπειδὴ τὰ $\varphi(1)$ καὶ $\varphi(2)$ εἶναι ἑτερόσημα, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει δύο ρίζας πραγματικὰς καὶ ἡ μία περιέχεται μεταξὺ τῶν 1 καὶ 2.

587. Παράδειγμα 2ον. ***Νὰ ἀποδειχθῇ, χωρὶς νὰ χρησιμο-***

ποιηθῇ ἡ διακρίνουσα, ὅτι ἡ ἐξίσωσις $\frac{A^2}{x-\alpha}+\frac{B^2}{x-\beta}=\Gamma^2$ ***ἔχει δύο ρίζας πραγματικάς.***

Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται

$$A^2(x-\beta)+B^2(x-\alpha)-\Gamma^2(x-\alpha)(x-\beta)=0$$

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ $f(x)$ τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως καὶ ἀντικαταστήσωμεν τὸ x πρῶτον μὲ α καὶ ἔπειτα μὲ β, θὰ ἔχωμεν

$$f(\alpha)=A^2(\alpha-\beta) \quad (1) \qquad f(\beta)=B^2(\beta-\alpha) \quad (2)$$

Ἐπειδὴ τὰ $f(\alpha)$ καὶ $f(\beta)$ εἶναι ἑτερόσημα, ἕπεται ὅτι ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει δύο ρίζας πραγματικὰς καὶ ἡ μία ἀπὸ αὐτὰς κεῖται μεταξὺ τῶν α καὶ β.

Ἀσκήσεις. *2440.* Νὰ ἀποδειχθῇ, χωρὶς νὰ σχηματισθῇ ἡ διακρίνουσα, ὅτι ἡ ἐξίσωσις $(x-\alpha)(x-\beta)-\gamma^2=0$ ἔχει ρίζας πραγματικάς.

2441. Νὰ ἀποδειχθῇ, χωρὶς νὰ χρησιμοποιηθῇ ἡ διακρίνουσα, ὅτι ἡ ἐξίσωσις $(x-\alpha)(x-\beta)+A(x-\alpha)+B(x-\beta)=0$, ἔνθα $AB>0$, καὶ $\alpha<\beta$, ἔχει δύο ρίζας πραγματικάς.

2442. Νὰ ἀποδειχθῇ, χωρὶς νὰ χρησιμοποιηθῇ ἡ διακρίνουσα, ὅτι ἡ ἐξίσωσις $\frac{1}{x-\alpha}+\frac{1}{x-\beta}+\frac{1}{x-\gamma}=0$, $(\alpha<\beta<\gamma)$ ἔχει δύο ρίζας πραγματικάς.

2443. Νὰ ἀποδειχθῇ, χωρὶς νὰ χρησιμοποιηθῇ ἡ διακρίνουσα, ὅτι ἡ ἐξίσωσις $\frac{\beta+\gamma}{x-\alpha}+\frac{\gamma+\alpha}{x-\beta}+\frac{\alpha+\beta}{x-\gamma}=0$, ὅπου $\alpha^2<\beta^2<\gamma^2$, ἔχει δύο ρίζας πραγματικάς.

2444. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ἐξίσωσις

$$\lambda^2(\beta^2+x)+\mu^2(\alpha^2+x)-(\alpha^2+x)(\beta^2+x)=0$$

ὅπου $\alpha^2\neq\beta^2$, $\lambda\neq0$, $\mu\neq0$, ἔχει δύο ρίζας πραγματικάς, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία περιέχεται μεταξὺ $-\alpha^2$ καὶ $-\beta^2$.

2445. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ἐξίσωσις

$$\varphi(x)=(2\alpha^2-\alpha-2)x^2+(\alpha^2+7\alpha+2)x-\alpha^2-2\alpha=0$$

ἔχει ρίζας πραγματικάς, χωρὶς νὰ χρησιμοποιηθῇ ἡ διακρίνουσα.

2446. Νὰ ἀποδειχθῇ, χωρὶς νὰ χρησιμοποιηθῇ ἡ διακρίνουσα, ὅτι ἡ ἐξίσωσις $\varphi(x)=(x-1)(x-5)-\mu(x-2)=0$ ἔχει ρίζας πραγματικάς.

2447. Δίδεται ἡ ἐξίσωσις

$$\varphi(x)=x^2-(A+B+\Gamma)x+B\Gamma+\Gamma A+AB-\mu^2-\lambda^2=0$$

ὅπου A, B, Γ εἶναι ἀριθμοὶ διάφοροι μεταξύ των καὶ διάφοροι τοῦ μηδενός. Ἐκτὸς αὐτοῦ ἔχομεν καὶ τὴν σχέσιν $AB\Gamma-\mu^2B-\lambda^2\Gamma=0$. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ἐξίσωσις (1) ἔχει δύο ρίζας πραγματικάς.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΙΣ ΤΗΣ ΔΙΤΕΤΡΑΓΩΝΟΥ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ $\alpha x^4+\beta x^2+\gamma=0$

588. Διερεύνησις τῆς διτετραγώνου ἐξισώσεως. Ἡ διερεύνησις τῆς διτετραγώνου ἐξισώσεως $\alpha x^4+\beta x^2+\gamma=0$ (1) δηλ. ὁ προσδιορισμὸς τοῦ εἴδους καὶ τοῦ σημείου τῶν ριζῶν της, χωρὶς νὰ λυθῇ προηγουμένως ἡ ἐξίσωσις, ἀνάγεται εἰς τὴν διερεύνησιν τῆς ἐπιλυούσης ἐξισώσεως $\alpha y^2+\beta y+\gamma=0$ (2)

I. Πράγματι· ἐὰν $\Delta>0$, $\frac{\gamma}{\alpha}>0$, $-\frac{\beta}{\alpha}>0$ ἡ ἐπιλύουσα (2) ἔχει δύο ρίζας πραγματικὰς καὶ θετικάς. Ἐπειδὴ εἰς κάθε θετικὴν ρίζαν τῆς ἐπιλυούσης ἀντιστοιχοῦν δύο ρίζαι τῆς διτετραγώνου, ἡ διτετράγωνος ἐξίσωσις θὰ ἔχῃ 4 ρίζας πραγματικάς.

Π.χ. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $3x^4-14x^2+5=0$.

Ἡ διακρίνουσα τῆς ἐπιλυούσης εἶναι $\Delta=14^2-4.3.5=$θετική. Ἄρα ἡ ἐπιλύουσα ἔχει δύο ρίζας πραγματικάς.

Ἐπειδὴ $\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{5}{3}=$ θετικόν, αἱ ρίζαι τῆς ἐπιλυούσης εἶναι ὁμόσημοι.

Ἐπειδὴ $-\frac{\beta}{\alpha}=\frac{14}{3}=$ θετικόν, αἱ δύο ρίζαι τῆς ἐπιλυούσης εἶναι θετικαί.

Ἄρα ἡ διτετράγωνος ἐξίσωσις ἔχει 4 ρίζας πραγματικάς.

II. Ἐὰν $\Delta>0$, $\frac{\gamma}{\alpha}>0$, $-\frac{\beta}{\alpha}<0$, ἡ ἐπιλύουσα (2) ἔχει δύο ρίζας ἀρνητικάς· ἑπομένως ἡ διτετράγωνος ἔχει 4 ρίζας φανταστικάς.

Π.χ. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $5x^4+12x^2+4=0$.

Ἐδῶ εἶναι $\Delta=12^2-4.5.4=64=$θετικόν, ἄρα ἡ ἐπιλύουσα ἔχει δύο ρίζας πραγματικάς.

Ἐπειδὴ $\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{4}{5}=$ θετικόν, ἡ ἐπιλύουσα ἔχει δύο ρίζας ὁμοσήμους.

Ἐπειδὴ $-\frac{\beta}{\alpha}=-\frac{12}{5}=$ ἀρνητικόν, ἡ ἐπιλύουσα ἔχει δύο ρίζας ἀρνητικάς.

Ἄρα ἡ διτετράγωνος ἔχει 4 ρίζας φανταστικάς.

III. Ἐὰν $\frac{\gamma}{\alpha}<0$, ἡ ἐπιλύουσα ἔχει δύο ρίζας ἑτεροσήμους.

Εἰς τὴν θετικὴν ρίζαν τῆς ἐπιλυούσης ἀντιστοιχοῦν δύο ρίζαι πραγματικαὶ καὶ συμμετρικαὶ τῆς διτετραγώνου. Εἰς τὴν ἀρνητικὴν ρίζαν τῆς ἐπιλυούσης ἀντιστοιχοῦν δύο ρίζαι φανταστικαὶ τῆς διτετραγώνου.

Π.χ. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $3x^2+4x-8=0$.

Ἐπειδὴ $\frac{\gamma}{\alpha}=-\frac{8}{3}=$ ἀρνητικόν, ἡ ἐπιλύουσα ἔχει δύο ρίζας ἑτεροσήμους· ἄρα ἡ διτετράγωνος ἔχει δύο ρίζας πραγματικὰς καὶ δύο ρίζας φανταστικάς.

IV. Ἐὰν $\Delta<0$, ἡ ἐπιλύουσα δὲν ἔχει ρίζας πραγματικάς· ἔχει 2 ρίζας φανταστικάς· ἄρα ἡ διτετράγωνος ἔχει 4 ρίζας φανταστικάς.

Ὁ κάτωθι πίναξ συνοψίζει τὴν διερεύνησιν τῆς ἐπιλυούσης καὶ τῆς διτετραγώνου ἐξισώσεως.

Πίναξ διερευνήσεως τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^4+\beta x+\gamma=0$

Ἐπιλύουσα $\alpha y^2+\beta y+\gamma=0$			Διτετράγ. $\alpha x^4+\beta x^2+\gamma=0$
$\beta^2-4\alpha\gamma>0$	$\frac{\gamma}{\alpha}>0$	$-\frac{\beta}{\alpha}>0$ 2 ρίζ. θετικαὶ	4 ρίζαι πραγματικαὶ
		$-\frac{\beta}{\alpha}<0$ 2 ρίζαι ἀρνητ.	4 ρίζαι φανταστικαὶ
	$\frac{\gamma}{\alpha}<0$	Δύο ρίζαι ἑτερόσημ.	2 ρίζαι πραγματικαὶ 2 ρίζαι φανταστικαὶ
	$\frac{\gamma}{\alpha}=0$	$y'=0$	1 διπλῆ ρίζα μηδὲν
		$y''=-\frac{\beta}{\alpha}$	Ἐὰν $-\frac{\beta}{\alpha}>0$ 2 ρ. πραγ. Ἐὰν $-\frac{\beta}{\alpha}<0$ 2 ρ. φαντ.
$\beta^2-4\alpha\gamma=0$	Μία διπλῆ ρίζα $y'=y''=-\frac{\beta}{2\alpha}$		$-\frac{\beta}{\alpha}>0$ 2 διπλ. ρίζαι $-\frac{\beta}{\alpha}<0$ 2 ρίζαι φαντ.
$\beta^2-4\alpha\gamma<0$	2 ρίζαι φανταστικαί . . .		4 ρίζαι φανταστικαὶ

589. **Ἐφαρμογαὶ τοῦ πίνακος. Πρόβλημα. I.** ***Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ ἡ ἐξίσωσις*** $x^4-(\lambda+1)x^2+\lambda-2=0$ ***ἔχει: 1ον. Δύο ῥίζας πραγματικάς; 2ον. Τέσσαρας ῥίζας πραγματικάς;***

1ον. Διὰ νὰ ἔχῃ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις δύο ρίζας πραγματικάς, πρέπει νὰ εἶναι $\frac{\gamma}{\alpha}<0$, δηλ. $\lambda-2<0$, ἢ $\lambda<2$.

2ον. Διὰ νὰ ἔχῃ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις τέσσαρας ρίζας πραγματικὰς πρέπει νὰ συναληθεύουν αἱ ἀνισότητες

$$\Delta>0, \quad \frac{\gamma}{\alpha}>0 \quad \text{καὶ} \quad -\frac{\beta}{\alpha}>0.$$

Ἐδῶ εἶναι $\Delta=(\lambda+1)^2-4(\lambda-2)=\lambda^2-2\lambda+7$. Τὸ τριώνυμον $\lambda^2-2\lambda+7$ δὲν ἔχει ρίζας, διότι ἡ διακρίνουσά του εἶναι ἀρνητικὴ κοὶ ἑπομένως ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ πρώτου ὅρου του· δηλαδὴ εἶναι θετικὸν διὰ κάθε) τιμὴν τοῦ λ.

Τὸ γινόμενον τῶν ριζῶν εἶναι $\frac{\gamma}{\alpha}=\lambda-2$ καὶ εἶναι $\lambda-2>0$ διὰ $\lambda>2$.

Τὸ ἄθροισμα τῶν ριζῶν εἶναι $-\frac{\beta}{\alpha}=\lambda+1$ καὶ εἶναι $\lambda+1>0$ διὰ $\lambda>-1$. Αἱ τρεῖς ἀνισότητες συναληθεύουν διὰ $\lambda>2$. Ὥστε διὰ $\lambda>2$ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει 4 ρίζας πραγματικάς.

590. Πρόβλημα. II. ***Νὰ διερευνηθῇ ἡ διτετράγωνος ἐξίσωσις***

$$x^4-2(\lambda-2)x^2+7-\lambda=0$$

κατὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τῆς παραμέτρου λ.

Ἡ ἐπιλύουσα ἐξίσωσις τῆς δοθείσης εἶναι

$$y^2-2(\lambda-2)y+7-\lambda=0.$$

Ἐξετάζομεν τὰ σημεῖα τῶν Δ, $\Gamma=\dfrac{\gamma}{\alpha}$, καὶ $\Sigma=-\dfrac{\beta}{\alpha}$.

Ἐδῶ εἶναι $\Delta=(\lambda-2)^2-(7-\lambda)=\lambda^2-3\lambda-3$.

Αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου $\lambda^2-3\lambda-3$ εἶναι $\lambda=\dfrac{3\pm\sqrt{21}}{2}$. Ἄρα θὰ εἶναι $\Delta>0$ διὰ $\lambda<\dfrac{3-\sqrt{21}}{2}$ καὶ διὰ $\lambda>\dfrac{3+\sqrt{21}}{2}$.

Τὸ γινόμενον Γ τῶν ριζῶν τῆς ἐπιλυούσης εἶναι $\dfrac{\gamma}{\alpha}=7-\lambda$. Εἶναι δὲ $\Gamma>0$, δηλ. $7-\lambda>0$ διὰ $\lambda<7$.

Τὸ ἄθροισμα $\Sigma=-\dfrac{\beta}{\alpha}$ τῶν ριζῶν εἶναι $2(\lambda-2)$. Εἶναι δὲ $2(\lambda-2)>0$ διὰ $\lambda>2$.

Ὁ κάτωθι πίναξ μᾶς δίδει τὰ ἐξαγόμενα τῆς διερευνήσεως τῆς δοθείσης διτετραγώνου ἐξισώσεως.

λ	Δ	Γ	Σ	Ἐπιλύουσα	Διτετράγωνος
$-\infty$					
	+	+	−	2 ρίζαι ἀρνητικαὶ	4 ρίζαι φανταστικαὶ
$\frac{3-\sqrt{21}}{2}$					
	−			2 ρίζαι φανταστικαὶ	4 ρίζαι φανταστικαὶ
2					
	−			2 ρίζαι φανταστικαὶ	4 ρίζαι φανταστικαὶ
$\frac{3+\sqrt{21}}{2}$					
	+	+	+	2 ρίζαι θετικαὶ	4 ρίζαι πραγματικαὶ
7					
	+	−	+	2 ρίζαι ἑτερόσημοι	2 ρίζαι πραγματικαὶ 2 ρίζαι φανταστικαὶ
$+\infty$					

Ἀσκήσεις. *2449.* Νὰ ὁρισθῇ ὁ λ, ἵνα ἡ ἐξίσωσις

$$\varphi(x)=x^4-2(\lambda-2)x^2+(\lambda-3)=0$$

ἔχῃ: 1ον. Δύο ρίζας πραγματικάς. 2ον. Τέσσαρας ρίζας πραγματικάς.

2450. Τὸ αὐτὸ διὰ τὴν ἐξίσωσιν $(\lambda-1)x^4-2\lambda x^2+\lambda-2=0$.

2451. Τὸ αὐτὸ διὰ τὴν ἐξίσωσιν $(\lambda-1)x^4+(\lambda+1)x^2+\lambda-2=0$.

2452. Νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις $(\lambda-1)x^4-4x^2+\lambda+2=0$.

2453. Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$\mu x^4+4(\mu+1)x^2+\mu-2=0.$$

2454. Νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις $(\lambda-1)x^4-2(\lambda+2)x^2+5-3\lambda=0$.

2455. Νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^4-2(\lambda-1)x^2+2\lambda+1=0$.

2456. Νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις $(\lambda-3)x^4-2(3\lambda-4)x^2+7\lambda-6=0$.

2457. Νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^4-2(\lambda+5)x^2+\lambda^2-7=0$.

2458. Νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^4-2\mu^2x^2+\mu^2(\alpha^2+\beta^2)-\alpha^2\beta^2=0$.

2459. Νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις $(x+\alpha)^4+(x-\alpha)^4=2\beta^4$.

2460. Νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις $(x+\alpha)^5-(x-\alpha)^5=2\beta^5$.

2461. Νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις $\dfrac{(1+x)^2}{1+x^3}+\dfrac{(1-x)^2}{1-x^3}=\alpha$.

2462. Νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις $\dfrac{(x+1)^5+(x-1)^5}{(x+1)^3+(x-1)^3}=\lambda$.

2463. Νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις $\dfrac{(x+\alpha)^5+(x-\alpha)^5}{(x+\beta)^5+(x-\beta)^5}=\lambda$.

591. **Σύγκρισις τῆς θέσεως ἑνὸς ἀριθμοῦ ξ πρὸς τὰς ρίζας μιᾶς διτετραγώνου ἐξισώσεως.** Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὴν θέσιν ἑνὸς ἀριθμοῦ ξ πρὸς τὰς ρίζας τῆς διτετραγώνου ἐξισώσεως $\varphi(x)=\alpha x^4+\beta x^2+\gamma=0$.

Ἐν πρώτοις πρέπει ἡ διτετράγωνος ἐξίσωσις νὰ ἔχῃ ρίζας, δηλ. πρέπει νὰ εἶναι $\beta^2-4\alpha\gamma>0$.

Ἡ ἐπιλύουσα ἐξίσωσις τῆς διτετραγώνου ἐξισώσεως εἶναι

$$f(y)=\alpha y^2+\beta y+\gamma. \qquad (1)$$

Ὑποθέτομεν, ὅτι ἡ ἐπιλύουσα (1) ἔχει δύο ρίζας θετικὰς y' καὶ y'' $(y'<y'')$, ὁπότε ἡ διτετράγωνος θὰ ἔχῃ τέσσαρας ρίζας πραγματικὰς $\pm\sqrt{y'}$ καὶ $\pm\sqrt{y''}$. Θὰ εἶναι δὲ

$$-\sqrt{y''}<-\sqrt{y'}<\sqrt{y'}<\sqrt{y''}.$$

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν θέσιν ἑνὸς ἀριθμοῦ ξ πρὸς τὰς ρίζας τῆς διτετραγώνου ἐξισώσεως συγκρίνομεν τὴν θέσιν τοῦ ξ^2 πρὸς τὰς ρίζας τῆς ἐπιλυούσης. Πρὸς τοῦτο ἐξετάζομεν τὸ σημεῖον τοῦ $\alpha f(\xi^2)$.

1ον. Ἐὰν $\alpha f(\xi^2)<0$, ὁ ἀριθμὸς ξ^2 περιέχεται μεταξὺ τῶν ριζῶν y' καὶ y'' τῆς ἐπιλυούσης, δηλαδὴ εἶναι $y'<\xi^2<y''$. Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν λαμβάνομεν $\sqrt{y'}<\xi<\sqrt{y''}$ καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι

$$-\sqrt{y''}<-\sqrt{y'}<\sqrt{y'}<\xi<\sqrt{y''}, \quad \text{ἐὰν } \xi>0$$

καὶ

$$-\sqrt{y''}<\xi<-\sqrt{y'}<\sqrt{y'}<\sqrt{y''}, \quad \text{ἐὰν } \xi<0$$

2ον. Ἐὰν $\alpha f(\xi^2)>0$, τότε ὁ ἀριθμὸς ξ^2 κεῖται ἐκτὸς τῶν ριζῶν y' καὶ y'' τῆς ἐπιλυούσης· διὰ τοῦτο εἶναι ἀνάγκη νὰ ἐξετάσωμεν τὸ ἡμιάθροισμα $-\dfrac{\beta}{2\alpha}$ τῶν ριζῶν τῆς ἐπιλυούσης.

Ἐὰν $\xi<-\dfrac{\beta}{2\alpha}$, θὰ εἶναι $\xi^2<y'<y''$.

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν λαμβάνομεν $\xi<\sqrt{y'}<\sqrt{y''}$ καὶ ἑπομένως

θὰ εἶναι $-\sqrt{y''}<-\sqrt{y'}<\xi<\sqrt{y'}<\sqrt{y''}$, ἐὰν $\xi>0$
καὶ $\xi<-\sqrt{y''}<-\sqrt{y'}<\sqrt{y'}<\sqrt{y''}$, ἐὰν $\xi<0$.

Ἐὰν $\xi^2>-\frac{\beta}{2\alpha}$, θὰ εἶναι $y'<y''<\xi^2$ ἢ $\sqrt{y'}<\sqrt{y''}<\xi$ καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι

$-\sqrt{y''}<-\sqrt{y'}<\sqrt{y'}<\sqrt{y''}<\xi$, ἐὰν $\xi>0$
καὶ $\xi<-\sqrt{y''}<-\sqrt{y'}<\sqrt{y'}<\sqrt{y''}$, ἐὰν $\xi<0$.

II. Ὑποθέτομεν, ὅτι ἡ ἐπιλύουσα $f(y)=0$ ἔχει μίαν μόνον ρίζαν θετικήν, y'. Τότε ἡ διτετράγωνος θὰ ἔχῃ δύο ρίζας πραγματικάς, $-\sqrt{y'}$ καὶ $+\sqrt{y'}$.

Συγκρίνομεν τὸν ἀριθμὸν ξ^2 πρὸς τὰς ρίζας τῆς ἐπιλυούσης.

1ον. Ἔστω, ὅτι $\xi^2>y'$. Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν λαμβάνομεν

$\xi>\sqrt{y'}$, ἐὰν $\xi>0$
καὶ $\xi<-\sqrt{y'}$, ἐὰν $\xi<0$.

2ον. Ἔστω, ὅτι εἶναι $\xi^2<y'$. Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν λαμβάνομεν $\xi<\sqrt{y'}$, ἐὰν $\xi>0$
καὶ $\xi>-\sqrt{y'}$, ἐὰν $\xi<0$
δηλαδὴ εἶναι $-\sqrt{y'}<\xi<\sqrt{y'}$.

592. Παράδειγμα 1ον. ***Νὰ συγκριθῇ ὁ ἀριθμὸς 2 πρὸς τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως*** $\varphi(x)=x^4-14x^2+2=0$.

Ἡ ἐπιλύουσα τῆς δοθείσης διτετραγώνου ἐξισώσεως εἶναι

$$f(y)=y^2-14y+2=0 \qquad (1)$$

Συγκρίνομεν τὸ τετράγωνον τοῦ ἀριθμοῦ 2, δηλ. τὸν 4, πρὸς τὰς ρίζας y' καὶ y'' ($y'<y''$) τῆς ἐπιλυούσης (1). Πρὸς τοῦτο ἐξετάζομεν τὸ σημεῖον τοῦ $f(4)$. Ἐδῶ εἶναι $f(4)=4^2-14.4+2=-38$.

Ἐπειδὴ $f(4)<0$, ὁ ἀριθμὸς 4 περιέχεται μεταξὺ τῶν ριζῶν y' καὶ y'' τῆς ἐπιλυούσης (1), ἤτοι εἶναι

$$y'<4<y'' \quad ἢ \quad y'<2^2<y''.$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν σχέσιν λαμβάνομεν $\sqrt{y'}<2<\sqrt{y''}$ καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι

$$-\sqrt{y''}<-\sqrt{y'}<\sqrt{y'}<2<\sqrt{y''}$$

δηλαδὴ ὁ 2 περιέχεται μεταξὺ τῶν δύο θετικῶν ριζῶν τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

593. Παράδειγμα 2ον. ***Νὰ συγκριθῇ ὁ ἀριθμὸς −3, πρὸς τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως*** $\varphi(x)=5x^4-12x^2+1=0$.

Ἡ ἐπιλύουσα αὐτῆς εἶναι $f(y)=5y^2-12y+1=0$.

Ἐδῶ εἶναι $f(9)=5 \,.\, 9^2-12 \,.\, 9+1=298>0$.

Ἐπειδὴ $f(9)>0$, ὁ 9 κεῖται ἐκτὸς τῶν ριζῶν y', y'' τῆς ἐπιλυούσης. Συγκρίνομεν τώρα τὸν 9 πρὸς τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ριζῶν, ἤτοι πρὸς τὸ $\frac{12}{10}$. Ἐπειδὴ $9 > \frac{12}{10}$, ὁ 9 εἶναι μεγαλύτερος τῆς μεγαλυτέρας ρίζης· θὰ εἶναι λοιπὸν

$$y' < y'' < 9 \quad \text{καὶ} \quad \sqrt{y'} < \sqrt{y''} < 3$$

ἢ ἀλλάσσοντες τὸ σημεῖον, $\quad -\sqrt{y'} > -\sqrt{y''} > -3$

ἢ τέλος $\quad -3 < -\sqrt{y''} < -\sqrt{y'} < \sqrt{y'} < \sqrt{y''}$.

594. Παράδειγμα 3ον. ***Νὰ συγκριθῇ ὁ ἀριθμὸς −1 πρὸς τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως*** $\varphi(x)=x^4-4x^2-5=0$.

Ἡ ἐπιλύουσα αὐτῆς εἶναι $f(y)=y^2-4y-5=0$ καὶ ἔχει μίαν μόνον ρίζαν θετικὴν y', ἡ δὲ διτετράγωνος ἔχει δύο ρίζας $\pm\sqrt{y'}$.

Ἐπειδὴ $f(1)=1-4-5<0$ θὰ εἶναι

$$1 < y', \quad 1 < \sqrt{y'} \quad \text{ἢ} \quad -1 > -\sqrt{y'}$$

καὶ $\quad -\sqrt{y'} < -1 < \sqrt{y'}$.

Ἀσκήσεις. *2464*. Νὰ συγκριθῇ ὁ ἀριθμὸς 2 πρὸς τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως $x^4-15x^2+3=0$.

2465. Νὰ συγκριθῇ ὁ −3 πρὸς τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως

$$\varphi(x)=15x^4-18x^2+1=0.$$

2466. Νὰ συγκριθῇ ὁ −1 πρὸς τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως

$$\varphi(x)=x^4-x^2-1=0.$$

2467. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ μ ἡ ἐξίσωσις $\mu x^4-(\mu-3)x^2+3\mu=0$ ἔχει μίαν ρίζαν μικροτέραν τοῦ −2 καὶ τρεῖς ρίζας μεγαλυτέρας τοῦ −1.

2468. Πότε ἡ ἐξίσωσις $2x^4-(\alpha^2+\beta^2)x^2+\alpha^4-\beta^4=0$ ἔχει ρίζας κειμένας μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 0 καὶ β καὶ πόσας. Ὑποτίθεται ὅτι, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ καὶ ὅτι $\alpha < \beta$.

2469. Τὸ αὐτὸ καὶ διὰ τὴν ἐξίσωσιν $x^4-\alpha(3\beta-\alpha)x^2-\beta^2(3\alpha-\beta)^2=0$.

2470. Νὰ ἐξετασθῇ, ἐὰν τὸ κλάσμα $\frac{2x^4+8x^2+3}{2x^4+x^2-1}$ δύναται νὰ λάβῃ ὅλας τὰς πραγματικὰς τιμὰς ἀπὸ $-\infty$ ἕως $+\infty$, διὰ πραγματικὰς τιμὰς τοῦ x.

2471. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\lambda x^4-\lambda x^2+\lambda+1=0$, 1ον περιέχονται μεταξὺ −1 καὶ +1 ; 2ον περιέχονται μεταξὺ −1 καὶ 3 ;

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΙΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

595. Διερεύνησις τῶν ἀντιστρόφων ἐξισώσεων. Πρόβλημα. ***Νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις*** $\varphi(x)=\alpha x^4+\beta x^3+\gamma x^2+\beta x+\alpha=0$.

Γνωρίζομεν (§ 417), ὅτι ἂν θέσωμεν $x+\frac{1}{x}=y$ εὑρίσκομεν τὴν ἐπιλύουσαν ἐξίσωσιν $\quad f(y)=\alpha y^2+\beta y+\gamma-2\alpha=0 \quad (1)$

τῆς δοθείσης ἀντιστρόφου ἐξισώσεως.

Ἐὰν y' εἶναι μία ρίζα τῆς ἐπιλυούσης (1) ἔχομεν νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν $\quad x+\frac{1}{x}=y' \quad$ ἢ $\quad x^2-y'x+1=0. \quad (2)$

Διὰ νὰ ἔχῃ ἡ ἐξίσωσις (2) δύο ρίζας πραγματικάς, πρέπει νὰ εἶναι

$$\Delta=y'^2-4>0 \quad \text{ἢ} \quad (y'+2)(y'-2)>0.$$

Ἡ ἀνισότης αὐτὴ ἀληθεύει διὰ $y' < -2$ καὶ διὰ $y' > 2$.

Ὥστε διὰ νὰ ἔχῃ ἡ ἐξίσωσις (2) ρίζας πραγματικάς, πρέπει τὸ y' νὰ κεῖται ἐκτὸς τοῦ διαστήματος

$$-2 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, +2.$$

Ἐὰν ἡ ἐπιλύουσα (1) ἔχῃ μίαν ρίζαν κειμένην ἐκτὸς τοῦ διαστήματος $(-2, +2)$, ἡ δοθεῖσα ἀντίστροφος ἐξίσωσις ἔχει δύο ρίζας.

Ἐὰν ἡ ἐπιλύουσα (1) ἔχῃ δύο ρίζας ἐκτὸς τοῦ διαστήματος $(-2, +2)$, ἡ ἀντίστροφος ἔχει τέσσαρας ρίζας.

Ἐὰν ἡ ἐπιλύουσα ἔχῃ δύο ρίζας, περιεχομένας εἰς τὸ διάστημα $(-2, +2)$, ἢ ἐὰν δὲν ἔχῃ ρίζας, ἡ ἀντίστροφος ἐξίσωσις δὲν ἔχει ρίζας.

596. Παράδειγμα. ***Νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις***

$$\varphi(x)=x^4+2\lambda x^3-3(\lambda+2)x^2+2\lambda x+1=0.$$

Ἡ ἐπιλύουσα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι

$$f(y)=y^4+2\lambda y-3\lambda-8=0 \qquad (1)$$

Συγκρίνομεν τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως (1) πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς -2 καὶ $+2$. Πρὸς τοῦτο σχηματίζομεν τὰ $f(-2)$ καὶ $f(2)$. Ἐδῶ εἶναι

$$f(-2)=-7\lambda-4 \quad \text{καὶ} \quad f(2)=\lambda-4$$

Εἶναι δὲ $f(-2)>0$ ἢ $-7\lambda-4>0$ διὰ $\lambda<-\frac{4}{7}$.

Ἐπίσης εἶναι $f(2)>0$ ἢ $\lambda-4>0$ διὰ $\lambda>4$.

Ὁ κάτωθι πίναξ μᾶς δεικνύει τὰ σημεῖα τῶν $f(-2)$ καὶ $f(2)$ κατὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τοῦ λ, ἀπὸ $-\infty$ ἕως $+\infty$ καὶ τὴν θέσιν τῶν ἀριθμῶν -2 καὶ 2 πρὸς τὰς ρίζας τῆς ἐπιλυούσης.

λ	$f(-2)$	$f(2)$	ρίζαι ἐπιλυούσης	ρίζαι ἀντιστρ. ἐξισώσεως
$-\infty$				
	$+$	$-$	$-2<y'<2<y''$	2 ρίζαι
$-\frac{4}{7}$	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
	$-$	$-$	$y'<-2<2<y''$	4 ρίζαι
4	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
	$-$	$+$	$y'<-2<y''<2$	2 ρίζαι
$-\infty$				

Ἀσκήσεις. *2464.* Νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$x^4+2(\lambda-2)x^3-3\lambda x^2+2(\lambda-2)x+1=0$$

2465. Νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις $(\lambda-1)x^4+3\lambda x^3+x^2-3\lambda x+(\lambda-1)=0$

2466. Νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$(2\lambda+1)x^4+(\lambda-3)x^3-3x^2-(3-\lambda)x+2\lambda+1=0$$

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΙΣ ΑΡΡΗΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

597. **Διερεύνησις ἀρρήτων ἐξισώσεων.** Γνωρίζομεν (§ 430), ὅτι διὰ νὰ λύσωμεν μίαν ἄρρητον ἐξίσωσιν, ὑψοῦμεν καὶ τὰ δύο μέλη της εἰς κατάλληλον δύναμιν διὰ νὰ ἐξαλειφθοῦν τὰ ριζικά. Ἀλλὰ γνωρίζομεν ἐπίσης, ὅτι ἐὰν ὑψώσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη μιᾶς ἀρρήτου ἐξισώσεως εἰς τὸ τετράγωνον καὶ γενικῶς εἰς ἀρτίαν δύναμιν, ἡ ἐπιλύουσα δύναται νὰ ἔχῃ καὶ ξένας λύσεις. Κατωτέρω θὰ ἐξετάσωμεν τὰς περιπτώσεις, τὰς ἁπλουστέρας, αἱ ὁποῖαι δύνανται νὰ παρουσιασθοῦν καὶ νὰ ὑποδείξωμεν συντόμως τὸν τρόπον τῆς διερευνήσεώς των.

1ον. ***Ἔστω ἡ ἐξίσωσις*** $A=\sqrt{B}$ (1)

Ὑψοῦμεν εἰς τὸ τετράγωνον καὶ τὰ δύο μέλη της καὶ ἔχομεν

$$A^2=B \qquad (2)$$

Ἡ ἐξίσωσις (2) ἔχει ὅλας τὰς λύσεις τῆς ἐξισώσεως (1). Ἀλλὰ τὸ ἀντίστροφον δύναται νὰ μὴν εἶναι ἀληθές μία λύσις τῆς ἐξισώσεως (2) θὰ εἶναι παραδεκτή, ἐὰν καθιστᾷ τὰ Α καὶ Β θετικά· ἀλλὰ τὸ Β εἶναι θετικόν, ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὴν (1)· πρέπει λοιπὸν νὰ εἶναι θετικὸν καὶ τὸ Α· ὥστε ἡ μόνη συνθήκη, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ἐπαληθεύῃ μία ρίζα τῆς ἐξισώσεως (2) εἶναι ***νὰ καθιστᾷ τὸ Α θετικόν***.

2ον. ***Ἔστω ἡ ἐξίσωσις*** $\sqrt{A}=\pm\sqrt{B}$

Ἐὰν λάβωμεν τὸ σημεῖον — πρὸ τοῦ δευτέρου ριζικοῦ, τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως δὲν δύνανται νὰ εἶναι ἴσα, ἐκτὸς τῆς περιπτώσεως καθ' ἣν $A=0$ καὶ $B=0$

Ἂς λάβωμεν λοιπὸν τὴν ἐξίσωσιν $\sqrt{A}=\sqrt{B}$ (3).

Ὑψοῦμεν εἰς τὸ τετράγωνον καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (3) καὶ ἔχομεν

$$A=B \qquad (4).$$

Αἱ ρίζαι τῆς (4) δὲν δύνανται νὰ ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν $\sqrt{A}=-\sqrt{B}$ (ἐκτὸς ἐὰν $A=B=0$)· θὰ ἐπαληθεύουν λοιπὸν τὴν ἐξίσωσιν (3), ἐὰν αἱ ὑπόρριζοι ποσότητες Α καὶ Β εἶναι θετικαί. Ἐὰν τὸ Α εἶναι θετικόν, τότε τὸ Β, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον μὲ τὸ Α, θὰ εἶναι ἐπίσης θετικόν : ὥστε ἡ μόνη συνθήκη, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ἐπαληθεύῃ μία ρίζα τῆς ἐξισώσεως (4) εἶναι ***νὰ καθιστᾷ πάλιν τὸ Α θετικόν.***

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $A=\sqrt{B}+\sqrt{\Gamma}$ (5)

Ὑψοῦμεν εἰς τὸ τετράγωνον καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (1) καὶ λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$A^2=B+\Gamma+2\sqrt{B\Gamma} \quad \text{ἢ} \quad A^2-B-\Gamma=2\sqrt{B\Gamma} \qquad (6)$$

Ὑψοῦμεν πάλιν εἰς τὸ τετράγωνον καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώ σεως (6) καὶ λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$(A^2-B-\Gamma)^2=4B\Gamma \qquad (7)$$

ἡ ὁποία εἶναι ρητὴ ἐξίσωσις.

Αἱ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως (5) εἶναι προφανῶς ρίζαι καὶ τῆς τελευταίας ἐξισώσεως (7)˙ ἀλλὰ τὸ ἀντίστροφον δὲν εἶναι ἀναγκαστικῶς ἀληθές˙ εἶναι λοιπὸν ἀνάγκη νὰ εὕρωμεν ὑπὸ ποίους ὅρους μία ρίζα τῆς ἐξισώσεως (7) εἶναι καὶ ρίζα τῆς ἐξισώσεως (5).

Ἐν πρώτοις μία ρίζα τῆς ἐξισώσεως (7) πρέπει νὰ εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως (6), δηλ. ἡ ρίζα αὐτὴ πρέπει νὰ δίδῃ μίαν πραγματικὴν τιμὴν εἰς τὴν $\sqrt{B\Gamma}$. Ἀλλὰ διὰ νὰ συμβαίνῃ αὐτὸ πρέπει τὸ ΒΓ νὰ εἶναι θετικόν˙ ἀλλὰ τὸ ΒΓ εἶναι θετικόν, διότι εἶναι ἴσον μὲ τὸν θετικὸν $\frac{(A^2-B-\Gamma)^2}{4}$, ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (7).

Ἐφ᾽ ὅσον τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἐξισώσεως (6) εἶναι θετικόν, πρέπει νὰ εἶναι θετικὸν καὶ τὸ πρῶτον μέλος της˙ ἤτοι πρέπει νὰ εἶναι

$$A^2-B-\Gamma>0 \qquad (8)$$

Μία ρίζα, ἡ ὁποία ἐπαληθεύει τὴν σχέσιν (8), θὰ εἶναι ρίζα καὶ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, ἐὰν δίδῃ εἰς ὅλους τοὺς ὅρους τῆς δοθείσης ἐξισώσεως μίαν πραγματικὴν τιμήν, δηλ. ἐὰν εἶναι θετικοὶ οἱ Β καὶ Γ.

Ἐπειδὴ τὸ δεύτερον μέλος τῆς δοθείσης ἐξισώσεως (5) εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα δύο ριζικῶν ἔμπροσθεν τῶν ὁποίων ὑπάρχει τὸ σημεῖον $+$, ἕπεται ὅτι, καὶ τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς πρέπει νὰ εἶναι θετικόν.

Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι διὰ νὰ εἶναι μία ρίζα τῆς ἐξισώσεως (8) καὶ ρίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως (5), πρέπει ἡ τιμὴ τῆς ρίζης αὐτῆς, ὅταν τεθῇ εἰς τὰ Α, Β, Γ νὰ ἐπαληθεύῃ τὰς σχέσεις

$$A^2-B-\Gamma>0, \quad A>0, \quad B>0, \quad \Gamma>0$$

Θὰ δείξωμεν τώρα, ὅτι αἱ σχέσεις $B>0$ καὶ $\Gamma>0$ ἐπαληθεύονται ***ἀναγκαστικῶς.***

Πράγματι, ἡ ἐξίσωσις (7) γράφεται

$$[A^2-(B+\Gamma)]^2=4B\Gamma \quad \text{ἢ} \quad A^4-2A^2(B+\Gamma)+(B+\Gamma)^2-4B\Gamma=0$$

ἢ

$$A^4+(B+\Gamma)^2-4B\Gamma=2A^2(B+\Gamma) \qquad \text{ἢ}$$

$$A^4+B^2+2B\Gamma+\Gamma^2-4B\Gamma=2A^2(B+\Gamma)$$

ἢ $A^4+(B^2-2B\Gamma+\Gamma^2)=2A^2(B+\Gamma)$ ἢ $A^4+(B-\Gamma)^2=2A^2(B+\Gamma)$

Ἐπειδὴ τὸ πρῶτον μέλος τῆς τελευταίας ἰσότητος εἶναι θετικόν, ὡς ἄθροισμα δύο θετικῶν ἀριθμῶν, θὰ εἶναι θετικὸν καὶ τὸ δεύτερον μέλος, ἤτοι θὰ εἶναι $2A^2(B+\Gamma)>0$

Ἐὰν διαιρέσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἀνισότητος αὐτῆς μὲ τὸν θετικὸν ἀριθμὸν $2A^2$ λαμβάνομεν $B+\Gamma>0$.

Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα $B+\Gamma$ εἶναι θετικὸν καὶ τὸ γινόμενον $B\Gamma$ εἶναι θετικόν, ὅπως ἐδείχθη ἀνωτέρω, ἕπεται ὅτι καὶ οἱ B καὶ Γ θὰ εἶναι θετικοί. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι αἱ μόναι συνθῆκαι τὰς ὁποίας πρέπει νὰ ζητῶμεν, ἵνα μία ρίζα τῆς ἐπιλυούσης εἶναι καὶ ρίζα τῆς δοθείσης εἶναι αἱ $A^2-B-\Gamma>0$ καὶ $A>0$.

Ὁ αὐτὸς συλλογισμὸς ἐφαρμόζεται καὶ εἰς τὰς ἐξισώσεις

$$A=\sqrt{B}-\sqrt{\Gamma} \quad \text{καὶ} \quad A=-\sqrt{B}-\sqrt{\Gamma}$$

καὶ μᾶς ὁδηγεῖ εἰς ἀναλόγους συνθήκας.

Ἀλλὰ εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις : ***εἶναι ἀνωφελὲς νὰ θέτωμεν τοὺς περιορισμούς, ὅτι αἱ ὑπόρριζοι ποσότητες πρέπει νὰ εἶναι θετικαί.***

Τὰ κάτωθι παραδείγματα θὰ μᾶς δείξουν καλύτερον τὸν τρόπον τῆς διερευνήσεως μιᾶς ἀρρήτου ἐξισώσεως, ἡ ὁποία ἔχει μίαν παράμετρον.

598. **Παράδειγμα 1ον.** ***Νὰ λυθῇ καὶ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις***

$$\sqrt{x-8}+\sqrt{x-3}=\alpha$$

Ὑψοῦμεν εἰς τὸ τετράγωνον καὶ τὰ δύο μέλη τῆς δοθείσης ἐξισώσεως καὶ ἔχομεν

$$x-8+2\sqrt{(x-8)(x-3)}+x-3=\alpha^2 \quad \text{ἢ} \quad 2\sqrt{(x-8)(x-3)}=\alpha^2-2x+11 \qquad (1)$$

Ὑψοῦμεν πάλιν εἰς τὸ τετράγωνον καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (1) καὶ ἔχομεν

$$4(x-8)(x-3)=\alpha^4+4x^2+121-4\alpha^2x+22\alpha^2-44x$$

ἢ

$$4\alpha^2x=\alpha^4+22\alpha^2+25 \qquad (2)$$

Ἐὰν $\alpha\neq0$, ἡ τελευταία ἐξίσωσις δίδει

$$x=\frac{\alpha^4+22\alpha^2+25}{4\alpha^2}$$

Διερεύνησις. Ἐπειδὴ τὸ πρῶτον μέλος τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι θετικόν, διότι αἱ ὑπόρριζοι ποσότητες $x-8$ καὶ $x-3$ εἶναι θετικαί, ὅπως ἐδείξαμεν εἰς τὴν παράγραφον 597, πρέπει νὰ εἶναι θετικὸν καὶ τὸ δεύτερον μέλος της, ἤτοι πρέπει νὰ εἶναι

$$\alpha>0 \qquad (3)$$

Ἐπίσης πρέπει νὰ εἶναι θετικὸν καὶ τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἐξισώσεως (1), ἤτοι πρέπει νὰ εἶναι

$$\alpha^2-2x+11>0 \quad \text{ἢ} \quad x<\frac{\alpha^2+11}{2} \qquad (4)$$

Ἡ ρίζα λοιπὸν $x=\dfrac{\alpha^4+22\alpha^2+25}{4\alpha^2}$ τῆς ἐξισώσεως (2) θὰ εἶναι καὶ ρίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, ἐὰν συναληθεύουν αἱ ἀνισότητες (3) καὶ (4), δηλ. αἱ

$$\alpha>0 \quad (3) \qquad \frac{\alpha^4+22\alpha^2+25}{4\alpha^2}<\frac{\alpha^2+11}{2} \qquad (4')$$

Ἡ ἀνισότης (4΄) εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν

$$\frac{\alpha^4+22\alpha^2+25}{4\alpha^2}-\frac{\alpha^2+11}{2}<0 \quad \text{ἢ} \quad \frac{25-\alpha^4}{4\alpha^2}<0 \quad \text{ἢ} \quad 25-\alpha^4<0$$

$$\text{ἢ} \quad \alpha^4-25>0 \quad \text{ἢ} \quad (\alpha^2+5)(\alpha^2-5)>0$$

Διαιροῦμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς τελευταίας ἀνισότητος διὰ τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ α^2+5 καὶ ἔχομεν

$$\alpha^2-5>0 \quad \text{ἢ} \quad (\alpha+\sqrt{5})(\alpha-\sqrt{5})>0$$

Ἡ τελευταία ἀνισότης ἀληθεύει διὰ $\alpha<-\sqrt{5}$ καὶ διὰ $\alpha>\sqrt{5}$

Αἱ ἀνισότητες (3) καὶ (4΄) συναληθεύουν διὰ $\alpha>\sqrt{5}$.

Ὥστε ἐὰν $\alpha>\sqrt{5}$, ἡ τιμὴ $x=\dfrac{\alpha^4+22\alpha^2+25}{4\alpha^2}$ εἶναι καὶ ρίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

599. Παράδειγμα 2ον. ***Νὰ λυθῇ καὶ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις***

$$\sqrt{3x-\alpha}+2x-\alpha=0$$

Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται

$$\sqrt{3x-\alpha}=\alpha-2x \tag{1}$$

Ὑψοῦμεν εἰς τὸ τετράγωνον καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως (1) καὶ ἔχομεν $\quad 3x-\alpha=\alpha^2-4\alpha x+4x^2$

ἢ

$$\varphi(x)=4x^2-(4\alpha+3)x+\alpha(\alpha+1)=0 \tag{2}$$

Αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εἶναι

$$x'=\frac{4\alpha+3-\sqrt{8\alpha+9}}{8}, \qquad x''=\frac{4\alpha+3+\sqrt{8\alpha+9}}{8}$$

Διερεύνησις. Ἐν πρώτοις πρέπει ἡ ἐξίσωσις (2) νὰ ἔχῃ ρίζας καὶ ἔπειτα αἱ ρίζαι αὐταὶ νὰ εἶναι καὶ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

Διὰ νὰ ἔχῃ ἡ ἐξίσωσις (2) ρίζας πραγματικάς, πρέπει ἡ διακρίνουσά της νὰ εἶναι θετικὴ ἢ μηδέν· ἤτοι πρέπει νὰ εἶναι

$$8\alpha+9\geqslant 0 \quad \text{ἢ} \quad \alpha\geqslant-\frac{9}{8} \tag{3}$$

Διὰ νὰ εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως (2) καὶ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, πρέπει νὰ καθιστοῦν τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἐξισώσεως (1) θετικόν· ἤτοι πρέπει νὰ εἶναι

$$\alpha-2x>0 \quad \text{ἢ} \quad x<\frac{\alpha}{2} \tag{4}$$

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν συνάγομεν, ὅτι αἱ ρίζαι x' καὶ x'' πρέπει νὰ εἶναι μικρότεραι τοῦ $\dfrac{\alpha}{2}$.

Ἐξετάζομεν τώρα τὴν θέσιν τοῦ ἀριθμοῦ $\dfrac{\alpha}{2}$ πρὸς τὰς ρίζας x' καὶ x'' (βλέπε § 574).

Πρὸς τοῦτο ὑπολογίζομεν τὸ $\varphi\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$. Ἐδῶ εἶναι

$$\varphi\left(\frac{\alpha}{2}\right)=4\cdot\frac{\alpha^2}{4}-(4\alpha+3)\frac{\alpha}{2}+\alpha^2+\alpha=-\frac{\alpha}{2}$$

I. Ἐὰν $\varphi\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)<0$, δηλ. ἐὰν $-\dfrac{\alpha}{2}<0$ ἢ $\alpha>0$, τὸ $\dfrac{\alpha}{2}$

κεῖται μεταξὺ τῶν ριζῶν x' καὶ x'' τῆς ἐξισώσεως (2)· δηλ. μεταξὺ τῶν ριζῶν x' καὶ x'' καὶ τοῦ ἀριθμοῦ $\frac{\alpha}{2}$ ὑπάρχει ἡ σχέσις

$$x' < \frac{\alpha}{2} < x''$$

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν ἀπὸ τὴν (4) συνάγομεν, ὅτι ἡ μικροτέρα ρίζα x' εἶναι καὶ ρίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

II. Ἐὰν $\Delta > 0$ καὶ $\varphi\left(\frac{\alpha}{2}\right) > 0$, ἤτοι, ἐὰν συναληθεύουν αἱ ἀνισότητες $\alpha > -\frac{9}{8}$ (3) καὶ $-\frac{\alpha}{2} > 0$ (5)

τὸ $\frac{\alpha}{2}$ κεῖται ἐκτὸς τῶν ριζῶν x' καὶ x''.

Αἱ ἀνισότητες (3) καὶ (5) συναληθεύουν διὰ $-\frac{9}{8} < \alpha < 0$.

Ὥστε, ἐὰν ὑφίσταται ἡ ἀνωτέρω σχέσις, ὁ ἀριθμὸς $\frac{\alpha}{2}$ κεῖται ἐκτὸς τῶν ριζῶν x' καὶ x''.

Διὰ νὰ καθορίσωμεν ἀκριβῶς τὴν θέσιν του πρὸς τὰς ρίζας x' καὶ x'' συγκρίνομεν τὸ $\frac{\alpha}{2}$ πρὸς τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ριζῶν, δηλ. πρὸς τὸ $\frac{4\alpha+3}{8}$. Ἐδῶ εἶναι $\frac{4\alpha+3}{8} - \frac{\alpha}{2} = \frac{3}{8}$.

Ἐπειδὴ ἡ διαφορὰ αὐτὴ μεταξὺ τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν ριζῶν καὶ τοῦ $\frac{\alpha}{2}$ εἶναι θετική, ὁ ἀριθμὸς $\frac{\alpha}{2}$ εἶναι μικρότερος τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν ριζῶν x' καὶ x'' καὶ ἑπομένως ὁ $\frac{\alpha}{2}$ εἶναι μικρότερος καὶ τῶν δύο ριζῶν· ἤτοι θὰ ὑπάρχῃ ἡ σχέσις

$$\frac{\alpha}{2} < x' < x''$$

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν καὶ ἀπὸ τὴν σχέσιν (4) συνάγομεν, ὅτι αἱ ρίζαι x' καὶ x'' δὲν εἶναι ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

Ἀσκήσεις. *2476*. Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$\sqrt{3x^2+2x+\lambda} = x+2.$$

2477. Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$x = t + \sqrt{x^2+2(t+1)x+4t}.$$

2478. Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$x + \sqrt{\alpha^2 - x^2} = \beta.$$

2479. Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$(\lambda-1)x + \lambda\sqrt{1-x^2} = \lambda + 1.$$

2480. Νὰ λυθῇ καὶ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$x + \sqrt{x(\alpha-x)} = \beta, \quad (\alpha > 0, \quad \beta > 0).$$

2481. Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$\sqrt{\alpha^2 + x\sqrt{x^2+\beta^2-\alpha^2}} = x - \alpha.$$

2482. Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$\sqrt{2x+1}-\sqrt{x-1}=\alpha.$$

2483. Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$\sqrt{\alpha+x}+\sqrt{\beta+x}=\mu, \quad (\mu>0).$$

2484. Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$\sqrt{x+\alpha}-\sqrt{x-1}=\sqrt{2x-1}.$$

2485. Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$\sqrt{x+\alpha}+\sqrt{\alpha-x}+2\sqrt{\alpha^2-x^2}=0.$$

2486. Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$\sqrt{x+\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{x-\sqrt{1-x^2}}=\mu.$$

2487. Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2}=\alpha.$$

2488. Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{x^2-\frac{1}{x^2}}=\mu x.$$

ΛΥΣΙΣ ΚΑΙ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΙΣ ΑΡΡΗΤΩΝ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ

600. **Ἄρρητοι ἀνισότητες.** Ἡ λύσις τῶν ἀρρήτων ἀνισοτήτων δύναται νὰ ἀναχθῇ εἰς τὴν λύσιν ἀρρήτων ἐξισώσεων, ἐάν ἐφαρμόσωμεν τὰ κάτωθι θεωρήματα :

601. **Θεώρημα Ι.** ***Ἐὰν ὑψώσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη μιᾶς ἀνισότητος εἰς τὴν αὐτὴν δύναμιν μὲ ἐκθέτην περιττόν, λαμβάνομεν ὁμοιόστροφον ἀνισότητα·***

Ἔστω ἡ ἀνισότης $A>B$. Ἐὰν μ εἶναι περιττὸς ἀριθμός, θὰ δείξωμεν, ὅτι $A^\mu>B^\mu$.

Διακρίνομεν τὰς κάτωθι περιπτώσεις :

Ι. ***Οἱ Α καὶ Β εἶναι θετικοί.*** Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ α καὶ β τὰς ἀπολύτους τιμὰς τῶν Α καὶ Β θὰ ἔχωμεν

$$A=+\alpha \quad \text{καὶ} \quad B=+\beta$$

ὁπότε θὰ εἶναι καὶ $A^\mu=+\alpha^\mu$ » $B^\mu=+\beta^\mu$

Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $A>B$ θὰ εἶναι καὶ $\alpha>\beta$, ὁπότε καὶ θὰ εἶναι καὶ $\alpha^\mu>\beta^\mu$ ἢ $A^\mu>B^\mu$.

ΙΙ. ***Ὁ $A>O$ καὶ $B<O$.*** Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ A^μ εἶναι θετικὴ καὶ ἡ B^μ ἀρνητική ἄρα θὰ εἶναι $A^\mu>B^\mu$.

ΙΙΙ. ***Οἱ Α καὶ Β εἶναι ἀρνητικοί.*** Θὰ εἶναι τότε $A=-\alpha$ καὶ $B=-\beta$. Ἀλλ᾽ ἐπειδὴ $A>B$ θὰ εἶναι $-\alpha>-\beta$ ἢ $\alpha<\beta$, ὁπότε καὶ $\alpha^\mu<\beta^\mu$. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἀνισότητος αὐτῆς ἐπὶ τὴν ἀρνητικὴν μονάδα λαμβάνομεν τὴν ἀνισότητα

$$-\alpha^\mu > -\beta^\mu \quad \text{ἢ} \quad A^\mu > B^\mu .$$

Ἐδείχθη λοιπὸν καὶ εἰς τὰς τρεῖς περιπτώσεις, ὅτι : ***Ἐὰν ὑψώσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη μιᾶς ἀνισότητος . . .***

602. Θεώρημα ΙΙ. ***Ἐὰν ὑψώσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη μιᾶς ἀνισότητος εἰς τὴν αὐτὴν δύναμιν μὲ ἐκθέτην ἄρτιον λαμβάνομεν :***

1ον μίαν ὁμοιόστροφον ἀνισότητα, ἐὰν καὶ τὰ δύο μέλη της εἶναι θετικά,

2ον μίαν ἑτερόστροφον ἀνισότητα, ἐὰν καὶ τὰ δύο μέλη της εἶναι ἀρνητικά·

3ον μίαν ἀνισότητα ὁμοιόστροφον ἢ ἑτερόστροφον ἢ μίαν ἰσότητα, ἐὰν καὶ τὰ δύο μέλη της εἶναι ἑτερόσημα.

Ἔστω ἡ ἀνισότης $\quad A > B.$

1ον. Ἔστω, ὅτι μ εἶναι ἄρτιος καὶ Α καὶ Β εἶναι θετικά· θὰ δείξωμεν, ὅτι $\quad A^\mu > B^\mu .$

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ α καὶ β τὰς ἀπολύτους τιμὰς τῶν Α καὶ Β, θὰ ἔχωμεν $\quad A = +\alpha \quad$ καὶ $\quad B = +\beta.$

Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $A > B$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha > \beta$ καὶ ἑπομένως καὶ $\alpha^\mu > \beta^\mu$· ἄρα θὰ εἶναι καὶ $A^\mu > B^\mu$.

2ον. Ἔστω, ὅτι ὁ μ εἶναι ἄρτιος καὶ Α καὶ Β εἶναι ἀρνητικά, θὰ δείξωμεν, ὅτι $\quad A^\mu < B^\mu .$

Πράγματι ἔστω, ὅτι εἶναι $A = -\alpha \quad$ καὶ $\quad B = -\beta.$

Ἐὰν ὑψώσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῶν ἰσοτήτων αὐτῶν εἰς τὴν μυοστὴν (ἀρτίαν) δύναμιν θὰ ἔχωμεν

$$A^\mu = \alpha^\mu \quad \text{καὶ} \quad B^\mu = \beta^\mu .$$

Ἀλλ᾽ ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $A > B$ θὰ εἶναι

$$-\alpha > -\beta \quad \text{ἢ} \quad \alpha < \beta$$

ὁπότε θὰ εἶναι καὶ $\alpha^\mu < \beta^\mu$ καὶ συνεπῶς $A^\mu < B^\mu$.

3ον. Ἔστω, ὅτι ὁ μ εἶναι ἄρτιος καὶ τὰ Α καὶ Β ἑτερόσημα· ἔστω, ὅτι τὸ Α εἶναι θετικὸν καὶ τὸ Β ἀρνητικόν· εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θὰ εἶναι

$$A = +\alpha \quad \text{καὶ} \quad B = -\beta$$

ὁπότε καὶ $\quad A^\mu = +\alpha^\mu \quad$ » $\quad B^\mu = +\beta^\mu .$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι ἡ στροφὴ τῆς ἀνισότητος ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὰς σχετικὰς τιμὰς τῶν α καὶ β, π.χ.

Ι	**ἐὰν**	$\alpha > \beta$	**θὰ εἶναι** $\alpha^\mu > \beta^\mu$,	**ὁπότε καὶ**	$A^\mu > B^\mu$
ΙΙ	**ἐὰν**	$\alpha < \beta$	» » $\alpha^\mu < \beta^\mu$,	» »	$A^\mu < B^\mu$
ΙΙΙ	**ἐὰν**	$\alpha = \beta$	» » $\alpha^\mu = \beta^\mu$,	» »	$A^\mu = B^\mu$

Π. χ. αἱ ἀνισότητες

$$6>-4 \qquad 8>-8 \qquad 6>-7$$

δίδουν $\quad 6^2>(-4)^2 \quad 8^2=(-8)^2 \quad 6^2<(-7)^2$.

Σημ. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι πρὶν ὑψώσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη μιᾶς ἀνισότητος εἰς τὴν αὐτὴν δύναμιν μὲ ἐκθέτην ἄρτιον, πρέπει προηγουμένως νὰ ἐξετάζωμεν ποῖον εἶναι τὸ σημεῖον κάθε μέλους τῆς δοθείσης ἀνισότητος.

603. Λύσις ἀρρήτων ἀνισοτήτων. Διὰ νὰ λύσωμεν μίαν ἄρρητον ἀνισότητα ἐργαζόμεθα ὅπως καὶ εἰς τὴν λύσιν ἀρρήτων ἐξισώσεων· πρέπει ὅμως πρὶν καταλήξωμεν εἰς ρητὴν ἀνισότητα νὰ ὁρίζωμεν τὰ ὅρια μεταξύ, τῶν ὁποίων πρέπει νὰ μεταβάλλεται ὁ ἄγνωστος διὰ νὰ εἶναι αἱ ὑπόρριζοι ποσότητες θετικαί.

Ἐπίσης πρέπει νὰ ὁρίζωμεν καὶ τὰ ὅρια μεταξύ, τῶν ὁποίων πρέπει νὰ μεταβάλλεται ὁ ἄγνωστος διὰ νὰ εἶναι θετικὰ καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἀνισότητος.

Ἔπειτα ἐξετάζομεν, ἐὰν αἱ λύσεις τῆς ρητῆς ἀνισότητος ἱκανοποιοῦν τοὺς τεθέντας ἀνωτέρω ὅρους.

Τὰ κάτωθι παραδείγματα θὰ μᾶς δείξουν καλύτερον τὸν τρόπον τῆς λύσεως τῶν ἀρρήτων ἀνισοτήτων.

604. Παράδειγμα 1ον. ***Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης***

$$2x-1<\sqrt{4x^2-3x+5}.$$

Ἡ ὑπόρριζος ποσότης $4x^2-3x+5$ εἶναι θετική, διότι εἶναι ἕνα τριώνυμον, τὸ ὁποῖον δὲν ἔχει ρίζας.

1ον. Ἐὰν $2x-1<0$, δηλ. ἐὰν $x<\frac{1}{2}$, τὸ πρῶτον μέλος τῆς δοθείσης ἀνισότητος εἶναι ἀρνητικὸν καὶ ἑπομένως ἡ ἀνισότης αὐτὴ ἀληθεύει πάντοτε.

2ον. Ἐὰν $2x-1>0$, δηλ. $x>\frac{1}{2}$, (1) τὸ πρῶτον μέλος της εἶναι θετικόν. Ἐπειδὴ καὶ τὰ δύο μέλη της εἶναι θετικά, δυνάμεθα νὰ ὑψώσωμεν εἰς τὸ τετράγωνον καὶ τὰ δύο μέλη της καὶ νὰ λάβωμεν τὴν ἰσοδύναμον ἀνισότητα

$$(2x-1)^2<4x^2-3x+5 \quad \text{ἢ} \quad 4x^2-4x+1<4x^2-3x+5$$

$$\text{ἢ} \qquad -x<+4 \quad \text{ἢ} \quad x>-4. \qquad (2)$$

Ὥστε ἡ ἀνισότης (2) ἀληθεύει διὰ $x>-4$. Διὰ νὰ εἶναι ὅμως αἱ τιμαὶ αὐταὶ τοῦ x, καὶ ρίζαι τῆς δοθείσης ἀνισότητος πρέπει νὰ ἱκανοποιοῦν καὶ τὴν σχέσιν (1). Δηλ. πρέπει νὰ συναληθεύουν αἱ ἀνισότητες $\quad x>\frac{1}{2}$ καὶ $x>-4$.

Αἱ ἀνισότητες αὗται συναληθεύουν διὰ $x>\frac{1}{2}$.

Ὥστε ἡ δοθεῖσα ἀνισότης ἀληθεύει διὰ $x>\frac{1}{2}$.

605. Παράδειγμα 2ον. *Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης*

$$3x-1 > \sqrt{x^2-5x+6}$$

Ἐν πρώτοις πρέπει ἡ ὑπόρριζος ποσότης x^2-5x+6 νὰ εἶναι θετικὴ καὶ τὸ πρῶτον μέλος της $3x-1$ νὰ εἶναι θετικόν· δηλ. πρέπει νὰ συναληθεύουν αἱ $x^2-5x+6>0$ (1) καὶ $3x-1>0$ (2)

Αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου x^2-5x+6 εἶναι 2 καὶ 3· ἄρα ἡ ἀνισότης (1) ἀληθεύει διὰ $x<2$, καὶ διὰ $x>3$.

Ἡ ἀνισότης (2) ἀληθεύει διὰ $x>\frac{1}{3}$.

Καὶ αἱ δύο ἀνισότητες (1) καὶ (2) συναληθεύουν διὰ

$$\frac{1}{3}<x<2 \quad \text{καὶ διὰ} \quad x>3 \qquad (3)$$

Ἐὰν ὑφίστανται αἱ σχέσεις (3), θὰ εἶναι θετικὰ καὶ τὰ δύο μέλη τῆς δοθείσης ἀνισότητος καὶ δυνάμεθα νὰ ὑψώσωμεν αὐτὰ εἰς τὸ τετράγωνον καὶ νὰ λάβωμεν τὴν ἰσοδύναμον ἀνισότητα

$$9x^2-6x+1>x^2-5x+6 \quad \text{ἢ} \quad 8x^2-x-5>0 \qquad (4)$$

Αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου $8x^2-x-5$ εἶναι $\frac{1\pm\sqrt{161}}{16}$· ἄρα ἡ ἀνισότης (4) ἀληθεύει διὰ $x<\frac{1-\sqrt{161}}{16}$, εἴτε διὰ $x>\frac{1+\sqrt{161}}{16}$ (4΄)

Διὰ νὰ εἶναι αἱ τιμαὶ αὐταὶ τοῦ x λύσεις τῆς δοθείσης ἀνισότητος πρέπει νὰ ἱκανοποιοῦν καὶ τὰς σχέσεις (3)· δηλ. πρέπει νὰ συναληθεύουν αἱ ἀνισότητες (3) καὶ (4΄).

Κατὰ τὰ γνωστὰ εὑρίσκομεν, ὅτι αἱ ἀνισότητες (3) καὶ (4΄) συναληθεύουν διὰ $\frac{1+\sqrt{161}}{16}<x<2$ καὶ διὰ $x>3$ (5)

$$-\infty \cdots \frac{1-\sqrt{161}}{16} \cdots \frac{1}{3} \cdots \frac{1+\sqrt{161}}{16} \cdots 2 \cdots 3 \cdots +\infty$$

Ὥστε ἡ δοθεῖσα ἀνισότης ἀληθεύει, ἐὰν ἀληθεύουν αἱ σχέσεις (5).

606. Παράδειγμα 3ον. *Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης*

$$\sqrt{3x+4}-\sqrt{x-3}>3$$

Ἐν πρώτοις πρέπει αἱ ὑπόρριζοι ποσότητες $3x+4$ καὶ $x-3$ νὰ εἶναι θετικαί· δηλ. πρέπει νὰ εἶναι $3x+4>0$ καὶ $x-3>0$.

Ἡ πρώτη ἀνισότης ἀληθεύει διὰ $x>-\frac{4}{3}$. Ἡ δευτέρα ἀληθεύει διὰ $x>3$. Καὶ αἱ δύο αὐταὶ ἀνισότητες συναληθεύουν διὰ $x>3$. (1)

Ἡ δοθεῖσα ἀνισότης γράφεται $\sqrt{3x+4}=3+\sqrt{x-3}$. (2)

Ἐπειδὴ καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (2) εἶναι θετικά, δυνάμεθα νὰ τὰ ὑψώνομεν εἰς τὸ τετράγωνον καὶ νὰ λάβωμεν τὴν ἰσοδύναμον ἀνισότητα $(\sqrt{3x+4})^2=(3+\sqrt{x-3})^2$

ἢ $3x+4=9+6\sqrt{x-3}+x-3$ ἢ $x-1>3\sqrt{x-3}$. (3)

Ἐπειδὴ καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (3) εἶναι θετικά, διότι ὑπετέθη, ὅτι

$x > 3$, ὑψώνομεν πάλιν εἰς τὸ τετράγωνον καὶ τὰ δύο μέλη της καὶ ἔχομεν $x^2-2x+1 > 9(x-3)$ ἢ $x^2-11x+28 > 0$. (4)

Αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου $x^2-11x+28$ εἶναι $x'=4$ καὶ $x''=7$· ἄρα ἡ ἀνισότης (4) ἀληθεύει διὰ $x < 4$ καὶ διὰ $x > 7$. (5)

Διὰ νὰ εἶναι ὅμως αἱ τιμαὶ αὐταὶ τοῦ x καὶ ρίζαι τῆς δοθείσης ἀνισότητος πρέπει νὰ ἱκανοποιοῦν καὶ τὴν σχέσιν (1)· δηλαδὴ πρέπει νὰ συναληθεύουν αἱ ἀνισότητες (1) καὶ (5). Αἱ ἀνισότητες αὐταὶ συναληθεύουν διὰ $x > 7$. Ὥστε ἡ δοθεῖσα ἀνισότης ἀληθεύει διὰ $x > 7$.

607. Παράδειγμα 4ον. *Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης*

$$\sqrt{2x+9} > \sqrt{x-4} + \sqrt{x-11}.$$

Ἐν πρώτοις πρέπει νὰ εἶναι

$$2x+9 > 0, \quad x-4 > 0 \quad \text{καὶ} \quad x-11 > 0.$$

Αἱ ἀνισότητες αὐταὶ συναληθεύουν διὰ $x > 11$. (1)

Ἐπειδὴ καὶ τὰ δύο μέλη τῆς δοθείσης ἀνισότητος εἶναι θετικά, ὑψώνομεν αὐτὰ εἰς τὸ τετράγωνον καὶ λαμβάνομεν τὴν ἰσοδύναμον ἀνισότητα $2x+9 > x-4+2\sqrt{(x-4)(x-11)}+x-11$

ἢ $$12 > \sqrt{(x-4)(x-11)}. \qquad (2)$$

Ὑψώνομεν πάλιν εἰς τὸ τετράγωνον καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (2) καὶ ἔχομεν $144 > (x-4)(x-11)$ ἢ $x^2-15x-100 > 0$. (3)

Αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου $x^2-15x-100$ εἶναι -5 καὶ 20· ἄρα ἡ ἀνισότης (3) ἀληθεύει διὰ $x < -5$ καὶ διὰ $x > 20$. (4)

Αἱ τιμαὶ αὐταὶ τοῦ x θὰ εἶναι λύσεις τῆς δοθείσης ἀνισότητος, ἐὰν ἱκανοποιοῦν καὶ τὴν σχέσιν (1)· δηλαδή, ἐὰν συναληθεύουν αἱ ἀνισότητες (1) καὶ (4).

Αἱ ἀνισότητες αὐταὶ συναληθεύουν διὰ $x > 20$.

Ὥστε ἡ δοθεῖσα ἀνισότης ἀληθεύει διὰ $x > 20$.

608. Παράδειγμα 5ον. *Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης*

$$x+3 < \sqrt[3]{x^3+27}$$

Ἐὰν ὑψώσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς δοθείσης ἀνισότητος εἰς τὴν τρίτην δύναμιν (περιττὴν δύναμιν), θὰ λάβωμεν τὴν ἰσοδύναμον ἀνισότητα

$$(x+3)^3 < \left(\sqrt[3]{x^3+27}\right)^3 \quad \text{ἢ} \quad x^3+3x^2.3+3x.3^2+3^3 < x^3+27$$

$$\text{ἢ} \quad 9x^2+27x < 0 \quad \text{ἢ} \quad x(x+3) < 0$$

Ἡ τελευταία ἀνισότης ἀληθεύει διὰ $-3 < x < 0$, ἄρα καὶ ἡ δοθεῖσα ἀνισότης ἀληθεύει διὰ $-3 < x < 0$.

Ἀσκήσεις. *2489.* Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἀνισότης $x+1 > \sqrt{1-x}$.

2490. Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἀνισότης $2x < 1+\sqrt{x+3}$.

2491. Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἀνισότης $x-1 < \sqrt{x^2+2x+4}$.

2492. Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἀνισότης $x-1 < \sqrt{x^2-x-2}$.

2493. Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἀνισότης $6x+3 < \sqrt{-x^2-x+6}$.

2494. Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἀνισότης $x-2 < \sqrt{x^2-2x+5}$.

2495. Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἀνισότης $3x-1 > \sqrt{2x^2-3x+1}$.

2496. Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἀνισότης $2x-8 < \sqrt{(x-2)(9-x)}$.

2497. Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἀνισότης $3x-4 < \sqrt{(x-8)(5x-2)}$.

2498. Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἀνισότης $3x-1 > \sqrt{x^2-5x+6}$.

2499. Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἀνισότης $2x-1 > \sqrt{x^2-3x+2}$.

2500. Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἀνισότης

$$4(x-1) < \sqrt{(x+5)(3x+4)}.$$

2501 Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἀνισότης

$$2(2x+1)+3\sqrt{-x^2-x+6} > 0.$$

2502. Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἀνισότης

$$\sqrt[3]{2x^2+1}-\sqrt[3]{2x-1} < 0.$$

2503. Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἀνισότης $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1} < 1$.

2504. Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἀνισότης $\sqrt{x+6}+\sqrt{x+1} > 5$.

2505. Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἀνισότης $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x-8} > 3$.

2506. Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἀνισότης $\sqrt{3x-1}-\sqrt{x-2} > 0$.

2507. Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἀνισότης

$$\sqrt{(x-3)(x-5)} > \sqrt{(x+2)(x-1)}-4.$$

2508. Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἀνισότης

$$x+\sqrt{x^2-10x+9} > \sqrt{x+2\sqrt{x^2-10x+9}}.$$

2509. Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἀνισότης

$$\sqrt{2x-3}+\sqrt{3x-2} > \sqrt{x+10}.$$

2510. Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διευρευνηθῇ ἡ ἀνισότης

$$\sqrt{x+6} > \sqrt{x+1}+\sqrt{2x-5}.$$

2511. Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἀνισότης

$$\sqrt{7x-13}-\sqrt{3x-19} > \sqrt{5x-27}.$$

2512. Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἀνισότης

$$\sqrt{3x-4}+\sqrt{2x-5} > \sqrt{x+11}.$$

2513. Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἀνισότης

$$\sqrt{2x+3}+\sqrt{5-8x} < \sqrt{4x+7}.$$

2514. Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἀνισότης $\sqrt{2x+1} < \dfrac{2(x+1)}{2-x}$.

2515. Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἀνισότης $\dfrac{\sqrt{x-1}}{x+1} < \dfrac{\sqrt{x+1}}{x-1}$.

2516. Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἀνισότης $\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+4}} < \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΙΝ ΕΠΙ ΤΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ ΤΩΝ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ

Ὁμὰς Α΄. 2517. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ ἡ ἐξίσωσις $\frac{\lambda x^2+2x-5}{3x^2+8x+5}=$ α ἔχει ρίζας πραγματικὰς διὰ κάθε τιμὴν τοῦ α.

2518. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ x ἀληθεύει ἡ ἀνισότης

$$\frac{x}{x-\alpha}-\frac{2\alpha}{x+\alpha}>\frac{8\alpha^2}{x^2-\alpha^2}$$

2519. Νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ ἀνισότης $\frac{3x-1}{x^2+7}<\frac{1}{2}$ ἀληθεύει δι' ὅλας τὰς πραγματικὰς τιμὰς τοῦ x, ἐκτὸς τῆς τιμῆς $x=3$.

2520. Ποία ἀπὸ τὰς παραστάσεις x^3+1 καὶ x^2+x εἶναι μεγαλυτέρα. Ὁ x ὑποτίθεται πραγματικὸς ἀριθμός.

2521. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ x ἀληθεύει ἡ ἀνισότης $\frac{(x+\alpha)^2}{(x+\beta)^2}<\frac{\alpha^2+x^2}{\beta^2+x^2}$ ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι οἱ α καὶ β εἶναι θετικοὶ καὶ ὅτι $\alpha>\beta$.

Β΄ Ὁμάς. 2522. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ y ἡ ἐξίσωσις

$$x^2-3xy+y^2+2x-9y+1=0$$

λυομένη ὡς πρὸς x, ἔχει δύο ρίζας ἴσας; Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ y αἱ τιμαὶ τοῦ x εἶναι πραγματικαί;

2523. Διὰ ποίας πραγματικὰς τιμὰς τῶν x καὶ y ἀληθεύει ἡ ἐξίσωσις

$$x^2+12xy+4x^2+4x+8y+20=0.$$

2524. Τὸ αὐτὸ καὶ διὰ τὰς ἐξισώσεις:

1. $5x^2-12xy+4y^2+54x-4y-139=0$. 2. $4x^2-6xy+5y^2-3x+4y=0$.
3. $4x^2-12xy+9y^2-7x-10y-1=0$.

2525. Νὰ δειχθῇ, ὅτι αἱ κάτωθι ἐξισώσεις δίδουν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ y διὰ κάθε πραγματικὴν τοῦ x καὶ ἀντιστρόφως:

1. $x^2-3xy+2y^2-8x+14y+12=0$. 2. $x^2-3xy+2y^2-2x-3y-35=0$.

2526. Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ x καὶ y ἱκανοποιοῦν τὴν ἐξίσωσιν

$$9x^2+2xy+y^2-92x-20y+244=0.$$

νὰ εὑρεθῇ εἰς ποῖον διάστημα τιμῶν περιέχεται ἕκαστος;

Γ΄ Ὁμάς. 2527. Δίδεται ἡ ἐξίσωσις $\varphi(x)=\frac{x^2}{4}+x+1=\mu x+\lambda$. Νὰ προσδιορισθῇ ὁ λ, συναρτήσει τοῦ μ, ἵνα αἱ δύο ρίζαι x΄ καὶ x΄΄ τῆς ἐξισώσεως συνδέωνται διὰ τῆς σχέσεως $x'x''+3(x'+x'')+8=0$. Μετὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ λ νὰ εὑρεθῇ διὰ ποίας τιμὰς τοῦ μ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει ρίζας πραγματικάς.

(Γεωπονικὴ Σχολὴ 1947)

2528. Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ συντελεσταὶ α καὶ β εἰς τρόπον, ὥστε τὸ πολυώνυμον $\varphi(x)=x^4+x^3-7x^2+\alpha x+\beta$ νὰ μηδενίζεται διὰ $x=1$ καὶ διὰ $x=-3$. Μετὰ τὴν ἀντικατάστασιν τῶν α καὶ β διὰ τῶν τιμῶν των, νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $\varphi(x)>0$.

2529. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{x^2+2x-11}{2(x-3)}$ δὲν δύναται νὰ λάβῃ τιμὰς περιεχομένας μεταξὺ 2 καὶ 6, ἐὰν ὁ x εἶναι πραγματικὸς ἀριθμός.

2530. 1ον. Νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{4x-3}{x^2-1}$ δύναται νὰ λάβῃ ὅλας τὰς πραγματικὰς τιμὰς διὰ πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x. 2ον. Τὸ κλάσμα $\frac{4x-3}{x^2+1}$ ποίας πραγματικὰς τιμὰς δὲν δύναται νὰ λάβῃ. (Πολυτεχνεῖον 1936)

2531. Νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ παράστασις $\frac{(\alpha x-\beta)(\delta x-\gamma)}{(\beta x-\alpha)(\gamma x-\delta)}$ δύναται νὰ λάβῃ ὅλας τὰς πραγματικὰς τιμὰς διὰ κάθε πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x, ὅταν αἱ παραστάσεις $\alpha^2-\beta^2$ καὶ $\gamma^2-\delta^2$ εἶναι ὁμόσημοι.

Δ' Ὁμάς. *2532.* Ὅταν εἰς τὸ τριώνυμον $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ ἀντικαταστήσωμεν 1ον. τὸ x διὰ 1 εὑρίσκομεν $(\lambda+k)^2$. 2ον. τὸ x διὰ τοῦ -1 εὑρίσκομεν $-3(\lambda-k)^2$ 3ον. τὸ x διὰ τοῦ ἀριθμοῦ $\frac{-\lambda}{k}$ εὑρίσκομεν $\frac{(\lambda^2-k^2)^2}{k^2}$. Ὑποτίθεται, ὅτι λ, k καὶ λ^2-k^2 εἶναι διάφοροι τοῦ μηδενός. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ συντελεσταὶ α, β, γ συναρτήσει τῶν λ καὶ k. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τριώνυμον αὐτὸ ἔχει ῥίζας πραγματικάς, αἱ ὁποῖαι δύνανται νὰ τεθοῦν ὑπὸ τὴν μορφὴν πηλίκων δύο διωνύμων τοῦ πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς λ καὶ k.

2533. 1ον. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ μ τὸ τριώνυμον

$$\varphi(x)=(9\mu^2-12\mu+4)x^2-(12\mu^2-8\mu)x+4\mu^2-9$$

ἔχει ῥίζας πραγματικάς ; Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ῥίζαι. 2ον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σημεῖον τῶν ῥιζῶν τοῦ τριωνύμου φ(x).

2534. 1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ἐξίσωσις $\mu x^2+4x-(\mu+1)=0$ (1) ἔχει πάντοτε ῥίζας πραγματικὰς διὰ κάθε τιμὴν τοῦ μ. 2ον. Νὰ ὁρισθῇ διὰ ποίας τιμὰς τοῦ μ ἡ ἐξίσωσις (1) ἔχει ῥίζας ἑτεροσήμους ; 3ον. Πληρουμένης τῆς συνθήκης αὐτῆς, νὰ ὁρισθῇ ὁ μ εἰς τρόπον, ὥστε αἱ δύο ῥίζαι νὰ διαφέρουν κατὰ 4.

2535. Δίδονται αἱ ἐξισώσεις $y=x^2-4x+3$ (1), $y=\lambda x+2-4\lambda$ (2). 1ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων x καὶ y κατὰ προσέγγισιν 0,01 ἐὰν λ=1,2. 2ον. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) ἔχει λύσιν. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ σημεῖα τῶν τιμῶν τοῦ x κατὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τοῦ λ.

2536. Δίδεται ἡ ἐξίσωσις $(x-\alpha+1)^2=2x-3\alpha+21$. 1ον. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ α ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ ἔχει ῥίζας ; 2ον. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ α αἱ ῥίζαι της εἶναι θετικαί ; 3ον. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ α αἱ θετικαὶ αὐταὶ ῥίζαι εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί ; 4ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὑπάρχει ἀπειρία τιμῶν τοῦ ά διὰ τὰς ὁποίας αἱ ἀρνητικαὶ ῥίζαι ἔχουν ὡς ἀπόλυτον τιμὴν ἕνα ἀκέραιον ἀριθμόν.

2537. 1ον. Νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις $y^2-2(\mu+5)y+\mu^2+9\mu+9=0$. 2ον. Νὰ δειχθῇ, ὅτι διὰ $\mu=x^2-4$ ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἔχει πάντοτε ῥίζας καὶ νὰ ὑπολογισθοῦν αὗται. 3ον. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ μ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει ῥίζας συμμέτρους ;

2538. Δίδεται ἡ ἐξίσωσις $\varphi(x)=(\mu+1)x^2-2(\mu-1)x+\mu-5=0$. 1ον. Νὰ ὁρισθῇ διὰ ποίας τιμὰς τοῦ μ ἡ ἐξίσωσις ἔχει δύο ῥίζας θετικάς ; Νὰ γίνῃ ἐπαλήθευσις διὰ δύο παραδειγμάτων. 2ον. Νὰ εὑρεθῇ μεταξὺ τῶν ῥιζῶν μία σχέσις ἀνεξάρτητος τοῦ μ. 3ον. Νὰ ὁρισθῇ ὁ μ, ἵνα αἱ ῥίζαι x′ καὶ x″ τῆς ἐξισώσεως συνδέωνται διὰ τῆς σχέσεως $9x'x''^2+3x'^3+9x'^2x''+3x''^3=192$.

2539. Ἔστωσαν x', x'', αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2-(1+\alpha)x+\alpha^2=0$. 1ον. Νὰ σχηματισθῇ ἡ ἐξίσωσις, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ ρίζας $y'=\frac{x'}{x''}$, $y''=\frac{x''}{x'}$. 2ον. Ποίαν τιμὴν πρέπει νὰ ἔχῃ ὁ α, ἵνα ἡ ἐξίσωσις, ὡς πρὸς y, ἔχῃ ρίζας πραγματικάς. 3ον. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ α ἡ μία ἐκ τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως ὡς πρὸς y, εἶναι ἴση μὲ $\frac{1}{4}$. Ποῖαι εἶναι τότε αἱ τιμαὶ αἱ ἀντίστοιχοῦσαι εἰς τὸ x.

Ε' Ὁμάς. 2540. Δίδεται ἡ ἐξίσωσις $2\mu x^2-2x-3\mu-2=0$. 1ον. Νὰ προσδιορισθῇ τὸ μ εἰς τρόπον, ὥστε μία ρίζα νὰ εἶναι μηδὲν καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἄλλη ρίζα. 2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ ἔχει ρίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους. 3ον. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τοῦ μ διὰ τὰς ὁποίας μία ρίζα εἶναι μεγαλυτέρα καὶ ἡ ἄλλη μικροτέρα τοῦ 1.

2541. Δίδεται ἡ ἐξίσωσις $\varphi(x)=x^2+2(2\mu-1)x+3\mu^2+5=0$ καὶ ζητεῖται ; 1ον. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ μ ἡ ἐξίσωσις ἔχει ρίζας πραγματικάς. 2ον. Νὰ ἐξετασθῇ, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς 1 περιέχεται μεταξὺ τῶν ριζῶν τῆς δοθείσης ἐξισώσεως. 3ον. Νὰ ὑπολογισθῇ συναρτήσει τοῦ μ ἡ παράστασις $\frac{x'^2}{x''^2}+\frac{x''^2}{x'^2}$.

2542. Δίδεται ἡ ἐξίσωσις $\varphi(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ (1), ἡ ὁποία ἔχει ρίζας x', x''. 1ον. Νὰ σχηματισθῇ μία ἐξίσωσις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ ρίζας $x'-\lambda$ καὶ $x''-\lambda$. Συναρτήσει τῆς ἐξισώσεως, ποὺ θὰ προκύψῃ, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὁ λ περιέχεται μεταξὺ τῶν ριζῶν x' καὶ x''.

2543. Δίδεται τὸ πολυώνυμον $\Pi=\mu^2x^2+\mu(3x-5)-2(2x^2+3x-5)$. 1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ Π εἶναι διαιρετὸν διὰ $\mu-2$ καὶ νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον $\varphi(x)$ τῆς διαιρέσεως. Νὰ λυθῇ, ἐὰν $\mu=2$, ἡ ἐξίσωσις $\Pi(x)=0$.

2ον. Νὰ δειχθῇ, ὅτι μεταξὺ τῶν ριζῶν x', x'' τῆς ἐξισώσεως $\varphi(x)=0$ ὑπάρχει μία σχέσις ἀνεξάρτητος τοῦ μ καὶ τῆς μορφῆς $\frac{1}{x'}+\frac{1}{x''}=\frac{\lambda}{k}$.

3ον. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ μ ὁ ἀριθμὸς $\frac{10}{3}$ περιέχεται μεταξὺ τῶν ριζῶν x' καὶ x''.

ΣΤ' Ὁμάς. *2544.* Δίδεται ἡ ἐξίσωσις $\varphi(x)=x^2+\lambda x+k=0$ (1), τῆς ὁποίας αἱ ρίζαι εἶναι x', x''. 1ον. Νὰ σχηματισθῇ δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ ρίζας $\frac{x'-\alpha}{\beta-x'}$ καὶ $\frac{x''-\alpha}{\beta-x''}$, $(\alpha<\beta)$. 2ον. Νὰ ἐξαχθῇ ἡ συνθήκη, ἵνα ἡ ἐξίσωσις (1) ἔχῃ τὴν μίαν μόνον ρίζαν περιεχομένην μεταξὺ τῶν α καὶ β.

2545. Δίδεται ἡ ἐξίσωσις $\varphi(x)=4(x+1)-\mu(x^2-x-2)=0$, ὅπου μ δοθεὶς θετικὸς ἀριθμός. 1ον. Νὰ δειχθῇ, ὅτι ὁ ἀριθμὸς 2 περιέχεται μεταξὺ τῶν ριζῶν τῆς δοθείσης ἐξισώσεως. 2ον. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ μ ἡ μία ἐκ τῶν ριζῶν τῆς δοθείσης ἐξισώσεως περιέχεται μεταξὺ 2 καὶ 3. 3ον. Νὰ ἐκφρασθῇ ὁ μ συναρτήσει τοῦ x. Διὰ ποίαν ἀκεραίαν τιμὴν τοῦ x, τὸ προκύπτον κλάσμα εἶναι ἀνάγωγον ; Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ x τὸ ἀνάγωγον αὐτὸ κλάσμα εἶναι ἴσον μὲ ἕνα δεκαδικὸν ἀριθμὸν μὲ τρία δεκαδικὰ ψηφία ;

2546. Ἔστω $\varphi(x)$ ἕνα ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ x τυχόντος βαθμοῦ. 1ον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ $\varphi(x)$ διὰ τοῦ γινομένου

$(x-2)(x-6)$, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τὰ ἀντίστοιχα ὑπόλοιπα τῆς διαιρέσεως τοῦ $\varphi(x)$ διὰ $x-2$ καὶ διὰ $x-6$ εἶναι 2 καὶ 18. 2ον. Ἐὰν τὸ $\varphi(x)$ εἶναι ἕνα πολυώνυμον τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, νὰ σχηματισθῇ ἡ ἐξίσωσις $\varphi(x)=0$. Ὑπὸ ποίους ὅρους αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς περιέχονται μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 1 καὶ 4. 3ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ γινόμενον $(x'-2)(x''-2)$, ἐὰν x', x'' εἶναι αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $\varphi(x)=0$.

2547. Νὰ σχηματισθῇ ἡ ἐξίσωσις δευτέρου βαθμοῦ, τῆς ὁποίας αἱ ῥίζαι x', x'' νὰ ἐπαληθεύουν τὰς σχέσεις

$$5x''-(4x''-5)x'-4=0$$
$$(\beta-1)(x'-1)(x''-1)+1=0$$

καὶ νὰ προσδιορισθοῦν αἱ τιμαί, τὰς ὁποίας πρέπει νὰ λαμβάνῃ ὁ β, ἵνα αἱ ῥίζαι τῆς ζητουμένης ἐξισώσεως πληροῦν τὰς ἑξῆς συνθήκας: 1ον. ἡ μία τούτων νὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ -1 καὶ ἡ ἄλλη μεγαλυτέρα τοῦ $+1$. 2ον. νὰ εἶναι καὶ αἱ δύο μεγαλύτεραι τοῦ 1. 3ον. νὰ κεῖνται καὶ αἱ δύο μεταξὺ τῶν -1 καὶ $+1$.

(Σχολὴ Εὐελπίδων)

2548. Νὰ σχηματισθῇ ἐξίσωσις δευτέρου βαθμοῦ, τῆς ὁποίας αἱ ῥίζαι x', x'' νὰ ἐπαληθεύουν τὰς σχέσεις

$$\lambda(\lambda-1)(x'-2)(x''-2)=(\lambda+9)(\lambda-1) \quad \text{καὶ} \quad 3x'-(x'-3)x''=\frac{5\lambda-14}{\lambda}$$

καὶ νὰ εὑρεθῇ διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις ἔχει: 1ον, δύο ῥίζας περιεχομένας μεταξὺ 0 καὶ 2 καὶ 2ον. μίαν ἐκ τῶν ῥιζῶν της περιεχομένην μεταξὺ 0 καὶ 2.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄

ΣΥΝΘΗΚΗ ΙΝΑ ΔΥΟ ΤΡΙΩΝΥΜΑ ΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΕΧΟΥΝ ΡΙΖΑΣ ΑΙ ΟΠΟΙΑΙ ΠΛΗΡΟΥΝ ΩΡΙΣΜΕΝΗΝ ΣΧΕΣΙΝ

609. Συνθήκη ἵνα δύο τριώνυμα ἔχουν ῥίζας ἀντιθέτους. Πρόβλημα. ***Ποία σχέσις πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν συντελεστῶν τῶν τριωνύμων***

$$\varphi(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma \quad \textbf{\textit{καὶ}} \quad f(x)=\alpha' x^2+\beta' x+\gamma',$$

ἵνα τὰ τριώνυμα αὐτὰ ἔχουν ῥίζας ἀντιθέτους.

Ἐὰν x', x'' εἶναι αἱ ῥίζαι τοῦ τριωνύμου $\varphi(x)$, τότε αἱ ῥίζαι τοῦ τριωνύμου $f(x)$ θὰ εἶναι $-x'$ καὶ $-x''$.

Ἀπὸ τὸ τριώνυμον $\varphi(x)$ θὰ ἔχωμεν

$$x'+x''=-\frac{\beta}{\alpha} \quad (1) \qquad \text{καὶ} \qquad x'x''=\frac{\gamma}{\alpha} \quad (2)$$

Ἀπὸ τὸ τριώνυμον $f(x)$ θὰ ἔχωμεν

$$(-x')+(-x'')=-\frac{\beta'}{\alpha'} \qquad \text{ἢ} \qquad x'+x''=\frac{\beta'}{\alpha'} \quad (3)$$

καὶ

$$(-x')(-x'')=\frac{\gamma'}{\alpha'} \qquad \text{ἢ} \qquad x'x''=\frac{\gamma'}{\alpha'} \quad (4)$$

Ἐπειδὴ τὰ πρῶτα μέλη τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (3) εἶναι ἴσα, θὰ εἶναι ἴσα καὶ τὰ δεύτερα μέλη των, ἤτοι θὰ εἶναι

$$-\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\beta'}{\alpha'} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\alpha}{\alpha'}=-\frac{\beta}{\beta'} \qquad (5)$$

Ὁμοίως ἀπὸ τὰς (2) καὶ (4) λαμβάνομεν $\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\gamma'}{\alpha'}$ ἢ $\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\gamma}{\gamma'}$ (6)

Ἀπὸ τὰς σχέσεις (5) καὶ (6) λαμβάνομεν τὴν σχέσιν

$$\boxed{\frac{\alpha}{\alpha'}=-\frac{\beta}{\beta'}=\frac{\gamma}{\gamma'}}$$

ἡ ὁποία εἶναι καὶ ἡ ζητουμένη σχέσις.

Ἄσκησις. **2549.** Νὰ προσδιορισθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν λ καὶ μ, ἵνα τὰ τριώνυμα $\varphi(x)=x^2-(2\lambda+1)x+10$ καὶ $f(x)=x^2+(\mu-3)x+3\lambda+1$ ἔχουν ρίζας ἀντιθέτους.

610 Συνθήκη ἵνα δύο τριώνυμα ἔχουν ρίζας ἀντιστρόφους. Πρόβλημα. ***Ποία σχέσις πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν συντελεστῶν τῶν τριωνύμων***

$$\varphi(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma \quad \text{καὶ} \quad f(x)=\alpha' x^2+\beta' x+\gamma',$$

ἵνα τὰ τριώνυμα αὐτὰ ἔχουν ρίζας ἀντιστρόφους.

Ἐὰν x′ καὶ x″ εἶναι αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου φ(x), τότε αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου f(x) θὰ εἶναι $\frac{1}{x'}$ καὶ $\frac{1}{x''}$. Ἀπὸ τὴν σχέσιν, ἡ ὁποία ὑπάρχει μεταξὺ τῶν ριζῶν καὶ τῶν συντελεστῶν ἑνὸς τριωνύμου τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, ἔχομεν ἀπὸ τὸ τριώνυμον φ(x)

$$x'+x''=-\frac{\beta}{\alpha} \quad (1), \qquad x'x''=\frac{\gamma}{\alpha} \qquad (2)$$

Ἐπίσης ἀπὸ τὸ τριώνυμον f(x) ἔχομεν

$$\frac{1}{x'}+\frac{1}{x''}=-\frac{\beta'}{\alpha'} \quad (3), \qquad \frac{1}{x'}\cdot\frac{1}{x''}=\frac{\gamma'}{\alpha'} \qquad (4)$$

Ἡ (3) γράφεται $\frac{x'+x''}{x'x''}=-\frac{\beta'}{\alpha'}$ ἢ $\frac{-\frac{\beta}{\alpha}}{\frac{\gamma}{\alpha}}=-\frac{\beta'}{\alpha'}$ ἢ

$$-\frac{\beta}{\gamma}=-\frac{\beta'}{\alpha'} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\beta}{\beta'}=\frac{\gamma}{\alpha'} \qquad (3')$$

Ἡ (4) γράφεται $\frac{1}{\frac{\gamma}{\alpha}}=\frac{\gamma'}{\alpha'}$ ἢ $\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\gamma'}{\alpha'}$ ἢ $\frac{\alpha}{\gamma'}=\frac{\gamma}{\alpha'}$ (4′)

Ἀπὸ τὰς (3′) καὶ (4′) λαμβάνομεν τὴν σχέσιν

$$\boxed{\frac{\alpha}{\gamma'}=\frac{\beta}{\beta'}=\frac{\gamma}{\alpha'}}$$

ἡ ὁποία εἶναι καὶ ἡ ζητουμένη σχέσις.

Ἄσκησις. **2550.** Ποίαν τιμὴν πρέπει νὰ λάβουν οἱ λ καὶ μ, ἵνα τὰ τριώνυμα $\varphi(x)=(\lambda+2)x^2-(2\mu+3)x+3$, $f(x)=(\mu-2)x^2-13x+2\lambda$ ἔχουν ρίζας ἀντιστρόφους;

611. Συνθήκη ἵνα δύο τριώνυμα ἔχουν ρίζας ἀναλόγους.

Πρόβλημα. ***Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα τὰ τριώνυμα*** $\varphi(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ ***καὶ*** $f(x)=\alpha' x^2+\beta' x+\gamma'$ ***ἔχουν ρίζας ἀναλόγους, μὲ λόγον*** k.

Ἔστωσαν x, x'' αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου $\varphi(x)$ καὶ ρ', ρ'' αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου $f(x)$ καὶ τοιαῦται, ὥστε

$$\frac{x'}{\rho'}=\frac{x''}{\rho''}=k \qquad (1)$$

Ἀπὸ τὴν σχέσιν (1) λαμβάνομεν $x'=k\rho'$ καὶ $x''=k\rho''$ (2)

Προσθέτοντες τὰς ἀνισότητας (2) κατὰ μέλη λαμβάνομεν

$$x'+x''=k(\rho'+\rho'') \quad \text{ἢ} \quad -\frac{\beta}{\alpha}=k\left(-\frac{\beta'}{\alpha'}\right) \quad \text{ἢ} \quad \frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta' k} \qquad (3)$$

Πολλαπλασιάζοντες τὰς ἰσότητας (2) κατὰ μέλη λαμβάνομεν

$$x'x''=k^2\rho'\rho'', \quad \text{ἢ} \quad \frac{\gamma}{\alpha}=k^2\frac{\gamma'}{\alpha'} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\gamma}{\gamma' k^2} \qquad (4)$$

Ἀπὸ τὰς σχέσεις (3) καὶ (4) λαμβάνομεν

$$\boxed{\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta' k}=\frac{\gamma}{\gamma' k^2}} \qquad (5)$$

Ἡ σχέσις (5) εἶναι ἡ ζητουμένη σχέσις

Ἀντιστρόφως. ***Ἐὰν ὑφίσταται ἡ σχέσις*** (5), ***τὰ τριώνυμα*** $\varphi(x)$ ***καὶ*** $f(x)$ ***ἔχουν ρίζας ἀναλόγους μὲ λόγον*** k.

Πράγματι· ἐὰν παραστήσωμεν μὲ λ τοὺς ἴσους λόγους (5) θὰ

θὰ ἔχωμεν $$\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta' k}=\frac{\gamma}{\gamma' k^2}=\lambda.$$

Ἐκ τῆς σχέσεως αὐτῆς λαμβάνομεν

$$\alpha=\alpha'\lambda, \quad \beta=\beta' k\lambda, \quad \gamma=\gamma' k^2\lambda \qquad (6)$$

Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τοὺς συντελεστὰς α, β, γ τοῦ τριωνύμου $\varphi(x)$ μὲ τὰ ἴσα των, ποὺ δίδουν αἱ ἰσότητες (6), θὰ ἔχωμεν

$$\varphi(x)=\alpha'\lambda x^2+\beta' k\lambda x+\gamma' k^2\lambda=\lambda(\alpha' x^2+\beta' kx+\gamma' k^2).$$

Αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου αὐτοῦ εἶναι

$$x=\frac{-\beta' k\pm\sqrt{\beta'^2k^2-4\alpha'\gamma' k^2}}{2\alpha'}=k\left(\frac{-\beta'\pm\sqrt{\beta'^2-4\alpha'\gamma'}}{2\alpha'}\right)$$

ἤτοι εἶναι $$x'=k\cdot\frac{-\beta-\sqrt{\beta'^2-4\alpha'\gamma'}}{2\alpha'} \quad \text{ἢ} \quad x'=k\rho'$$

καὶ $$x'=k\,.\,\frac{-\beta'+\sqrt{\beta'^2-4\alpha'\gamma'}}{2\alpha'} \quad \text{ἢ} \quad x''=k\rho''$$

Ἀπὸ τὰς σχέσεις $x'=k\rho'$ καὶ $x''=k\rho''$ λαμβάνομεν

$$\frac{x'}{\rho'}=\frac{x''}{\rho''}=k.$$

Ὥστε τὰ τριώνυμα $\varphi(x)$ καὶ $f(x)$ ἔχουν ρίζας ἀναλόγους μὲ λόγον k.

Ἄσκησις. 2551. Νὰ προσδιορισθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν λ καὶ μ, ἵνα τὰ τριωνυμα $\varphi(x)=x^2-(\mu+3)x+3\lambda$ καὶ $f(x)=x^2-\lambda x+\mu-2$ ἔχουν ρίζας ἀναλόγους μὲ λόγον 2.

612. Κοιναὶ ρίζαι δύο ἐξισώσεων. ***Πρόβλημα. Ποία σχέσις πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν συντελεστῶν τῶν δύο ἐξισώσεων***

$$\varphi(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma=0 \qquad (1)$$
$$f(x)=\alpha' x^2+\beta' x+\gamma'=0 \qquad (2)$$

ἵνα αἱ δύο αὐταὶ ἐξισώσεις ἔχουν: 1ον μίαν κοινὴν ρίζαν ; 2ον δύο ρίζας κοινάς ;

1ον. Μία κοινὴ ρίζα. Ἔστω x_0 ἡ κοινὴ ρίζα τῶν δύο ἐξισώσεων (1) καὶ (2). Ἐπειδὴ ἡ x_0 εἶναι ἡ κοινὴ ρίζα τῶν ἐξισώσεων αὐτῶν, πρέπει νὰ ἐπαληθεύῃ αὐτάς, δηλαδὴ πρέπει νὰ εἶναι

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha x_0^2+\beta x_0+\gamma=0\\ \alpha' x_0^2+\beta' x_0+\gamma'=0\end{array}\right. \quad \text{ἢ} \quad \mathrm{I}\left\{\begin{array}{l}\alpha x_0^2+\beta x_0=-\gamma\\ \alpha' x_0^2+\beta' x_0=-\gamma'\end{array}\right.$$

Λύομεν τὸ σύστημα I ὡς πρὸς ἀγνώστους τοὺς x_0^2 καὶ x. Ἐὰν $\alpha\beta'-\beta\alpha'\neq 0$ εὑρίσκομεν, κατὰ τὰ γνωστά, τὴν λύσιν

$$x_0^2=\frac{\beta\gamma'-\gamma\beta'}{\alpha\beta'-\beta\alpha'} \quad \text{καὶ} \quad x'_0=\frac{\gamma\alpha'-\alpha\gamma'}{\alpha\beta'-\beta\alpha'}.$$

Διὰ νὰ εἶναι ἡ ρίζα x_0 κοινὴ πρέπει νὰ εἶναι

$$\frac{\beta\gamma'-\gamma\beta'}{\alpha\beta'-\beta\alpha'}=\left(\frac{\gamma\alpha'-\alpha\gamma'}{\alpha\beta'-\beta\alpha'}\right)^2$$

ἢ
$$(\alpha\beta'-\beta\alpha')(\beta\gamma'-\gamma\beta')=(\gamma\alpha'-\alpha\gamma')^2.$$

Ἐπειδὴ $(\gamma\alpha'-\alpha\gamma')^2=(\alpha\gamma'-\gamma\alpha')^2$, ἡ ἀνωτέρω σχέσις γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς : $(\alpha\gamma'-\gamma\alpha')^2-(\alpha\beta'-\beta\alpha')(\beta\gamma'-\gamma\beta')=0.$

Τὸ πρῶτον μέλος τῆς σχέσεως αὐτῆς λέγεται ***ἀπαλείφουσα*** ἢ ***συναρμόζουσα*** τῶν δύο ἐξισώσεων (1) καὶ (2) καὶ παρίσταται μὲ τὸ γράμμα R· δηλαδὴ εἶναι

$$\boxed{\mathbf{R}=(\alpha\gamma'-\gamma\alpha')^2-(\alpha\beta'-\beta\alpha')(\beta\gamma'-\gamma\beta')}$$

Ὥστε διὰ νὰ ἔχουν αἱ δύο ἐξισώσεις (1) καὶ (2) μίαν ρίζαν κοινὴν πρέπει νὰ εἶναι

$$\boxed{\mathbf{R=0} \quad \textbf{καὶ} \quad \alpha\beta'-\beta\alpha'\neq 0}$$

καὶ ἡ κοινὴ ρίζα εἶναι

$$\boxed{x_0=\frac{\gamma\alpha'-\alpha\gamma'}{\alpha\beta'-\beta\alpha'}=-\frac{\alpha\gamma'-\gamma\alpha'}{\alpha\beta'-\beta\alpha'}}$$

2ον. Δύο ρίζαι κοιναί. Ἔστω, ὅτι αἱ δύο ἐξισώσεις (1) καὶ (2) ἔχουν δύο κοινὰς ῥίζας x′ καὶ x″. Ἐπειδὴ αἱ x′ καὶ x″ εἶναι ῥίζαι ἑκάστης τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2), θὰ εἶναι

$$\left| \begin{array}{l} x'+x''=-\dfrac{\beta}{\alpha} \\ x'+x''=-\dfrac{\beta'}{\alpha'} \end{array} \right. \quad \text{καὶ} \quad \left\{ \begin{array}{l} x'x''=\dfrac{\gamma}{\alpha} \\ x'x''=\dfrac{\gamma'}{\alpha'} \end{array} \right.$$

Ἀπὸ τὰς σχέσεις αὐτὰς λαμβάνομεν

$$-\frac{\beta}{\alpha}=-\frac{\beta'}{\alpha'} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\gamma'}{\alpha'} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\gamma}{\gamma'}.$$

Ἀπὸ τὰς δύο τελευταίας σχέσεις λαμβάνομεν τὴν σχέσιν

$$\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}=\frac{\gamma}{\gamma'}$$

ἡ ὁποία εἶναι καὶ ἡ ζητουμένη σχέσις. Ὥστε διὰ νὰ ἔχουν αἱ δύο ἐξισώσεις (1) καὶ (2) δύο ῥίζας κοινὰς πρέπει νὰ εἶναι

$$\boxed{\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}=\frac{\gamma}{\gamma'}}$$

δηλαδὴ οἱ συντελεσταὶ τῶν ὅρων τῆς μιᾶς ἐξισώσεως νὰ εἶναι ἀνάλογοι τῶν συντελεστῶν τῶν ὅρων τῆς ἄλλης.

613. Παράδειγμα 1ον. ***Νὰ προσδιορισθῇ ὁ λ, ἵνα αἱ ἐξισώσεις*** $\varphi(x)=x^2-(\lambda+2)x+2\lambda=0$ καὶ $f(x)=3x^2-(5\lambda+3)x+8\lambda=0$ ***ἔχουν μίαν κοινὴν ῥίζαν καὶ νὰ ὑπολογισθῇ αὕτη.***

Διὰ νὰ ἔχουν αἱ δοθεῖσαι ἐξισώσεις μίαν κοινὴν ρίζαν, πρέπει νὰ εἶναι

$$R=(\alpha\gamma'-\gamma\alpha')^2-(\alpha\beta'-\beta\alpha')(\beta\gamma'-\gamma\beta')=0 \quad \text{καὶ} \quad \alpha\beta'-\beta\alpha'\neq 0.$$

Ἐπειδὴ $\alpha\gamma'-\gamma\alpha'=8\lambda-2\lambda\,.\,3=2\lambda$

$\alpha\beta'-\beta\alpha'=-(5\lambda+3)+(\lambda+2)\,.\,3=-2\lambda+3$

$\beta\gamma'-\gamma\beta'=-(\lambda+2)8\lambda+2\lambda(5\lambda+3)=2\lambda^2-10\lambda=2\lambda(\lambda-5)$

θὰ εἶναι $R=4\lambda^2-(-2\lambda+3)\,.\,2\lambda(\lambda-5)=\lambda(4\lambda^2-22\lambda+30)$

ἤ, ἐπειδὴ τὸ τριώνυμον $4\lambda^2-22\lambda+30$ ἔχει ὡς ρίζας τοὺς ἀριθμοὺς 3 καὶ $\frac{5}{2}$, $\quad R=\lambda(\lambda-3)\left(\lambda-\frac{5}{2}\right).$

Πρέπει λοιπὸν νὰ εἶναι

$$\lambda(\lambda-3)\left(\lambda-\frac{5}{2}\right)=0 \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad -2\lambda+3\neq 0 \quad (2).$$

Ἀπὸ τὴν (2) λαμβάνομεν $\lambda\neq\frac{3}{2}$. Αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως (1) εἶναι $\lambda=0$, $\lambda=3$, $\lambda=\frac{5}{2}$.

Παρατηροῦμεν, ὅτι καμμία ἀπὸ τὰς τιμὰς $0, 3, \frac{5}{2}$ τοῦ λ δὲν μηδενίζει τὴν ἐξίσωσιν (2).

Ὥστε αἱ δοθεῖσαι ἐξισώσεις ἔχουν μίαν κοινὴν ρίζαν

$$x_0 = -\frac{\alpha\gamma' - \gamma\alpha'}{\alpha\beta' - \beta\alpha'} = -\frac{2\lambda}{-2\lambda+3}$$

διὰ $\lambda=0$, εἴτε διὰ $\lambda=2$, εἴτε διὰ $\lambda=\frac{5}{2}$.

Διὰ $\lambda=0$ αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2) ἔχουν τὴν κοινὴν ρίζαν

$$x_0 = -\frac{2.0}{-2.0+3} = 0.$$

Πράγματι, διὰ $\lambda=0$ αἱ δοθεῖσαι ἐξισώσεις γίνονται

$$x^2-2x=0 \quad \text{καὶ} \quad 3x^2-3x=0$$

καὶ ἔχουν, ἡ μὲν πρώτη τὰς ρίζας 0 καὶ 2, ἡ δὲ δευτέρα τὰς ρίζας 0 καὶ 1· ἤτοι ἔχουν κοινὴν τὴν ρίζαν 0.

Διὰ $\lambda=3$ αἱ δοθεῖσαι ἐξισώσεις ἔχουν κοινὴν ρίζαν

$$x_0 = -\frac{2.3}{-2.3+3} = -\frac{6}{-3} = 2.$$

Πράγματι, διὰ $\lambda=3$, αἱ δοθεῖσαι ἐξισώσεις γίνονται

$$x^2-5\lambda+6=0 \quad \text{καὶ} \quad 3x^2-18x+24=0$$

καὶ ἔχουν ἡ πρώτη τὰς ρίζας 2 καὶ 3, ἡ δὲ δευτέρα τὰς ρίζας 2 καὶ 4 ἤτοι ἔχουν κοινὴν τὴν ρίζαν 2.

Διὰ $\lambda=\frac{5}{2}$, αἱ δοθεῖσαι ἐξισώσεις ἔχουν κοινὴν τὴν ρίζαν

$$x_0 = -\frac{2.\frac{5}{2}}{-2.\frac{5}{2}+3} = -\frac{5}{-5+3} = \frac{5}{2}.$$

Πράγματι, διὰ $\lambda=\frac{5}{2}$, αἱ δοθεῖσαι ἐξισώσεις γίνονται

$$2x^2-9x+10=0 \quad \text{καὶ} \quad 6x^2-31x+40=0$$

καὶ ἔχουν, ἡ μὲν πρώτη ρίζας τὰς 2 καὶ $\frac{5}{2}$, ἡ δευτέρα τὰς ρίζας $\frac{5}{2}$ καὶ $\frac{8}{3}$· ἤτοι ἔχουν κοινὴν τὴν ρίζαν $\frac{5}{2}$.

614. Παράδειγμα 2ον. ***Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ λ καὶ μ, ἵνα αἱ ἐξισώσεις*** $x^2-7\mu x+3\lambda+1=0$ ***καὶ*** $x^2-(2\lambda+1)x+10\mu=0$ ***ἔχουν τὰς αὐτὰς ρίζας.***

Διὰ νὰ ἔχουν αἱ δοθεῖσαι ἐξισώσεις τὰς αὐτὰς ρίζας, πρέπει οἱ συντελεσταὶ τῶν αὐτῶν δυνάμεων τοῦ x καὶ οἱ γνωστοὶ ὅροι νὰ εἶναι ἀνάλογοι· ἤτοι πρέπει νὰ εἶναι $\frac{1}{1}=\frac{7\mu}{2\lambda+1}=\frac{3\lambda+1}{10\mu}$.

Ἐκ τῆς σχέσεως αὐτῆς λαμβάνομεν τὰς σχέσεις

$$1=\frac{7\mu}{2\lambda+1} \quad \text{ἢ} \quad 2\lambda-7\mu=-1 \quad (1), \quad \text{καὶ} \quad 1=\frac{3\lambda+1}{10\mu} \quad \text{ἢ} \quad 10\mu-3\lambda=1. \quad (2)$$

Λύοντες τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν ($\lambda=3$, $\mu=1$)

Ὥστε, ἐὰν $\lambda=3$, $\mu=1$, αἱ δοθεῖσαι ἐξισώσεις ἔχουν τὰς αὐτὰς ρίζας. Πράγματι· διὰ $\lambda=3$ καὶ $\mu=1$, αἱ δοθεῖσαι ἐξισώσεις γίνονται $\varphi(x)=x^2-7x+10=0$ καὶ $f(x)=x^2-7x+10=0$ καὶ ἔχουν τὰς αὐτὰς ρίζας 2 καὶ 5.

Ἀσκήσεις. Α΄ Ὁμάς. ***2552.*** Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ λ καὶ μ, ἵνα αἱ ἐξισώσεις $(5\mu-52)x^2-(\mu-4)x+4=0$ καὶ $(2\lambda+1)x^2-5\lambda x+20=0$ ἔχουν τὰς αὐτὰς ρίζας.

2553. Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ λ καὶ μ, ἵνα αἱ ἐξισώσεις

$$x^2-3\mu x+\lambda^2=0 \quad \text{καὶ} \quad x^2-2\lambda x+3\mu=0$$

ἔχουν τὰς αὐτὰς ρίζας.

2554. Νὰ ὁρισθοῦν οἱ λ καὶ μ, ἵνα αἱ ἐξισώσεις

$$(2\mu+1)x^2-(3\mu-1)x+2=0 \quad \text{καὶ} \quad (\lambda+2)x^2-(2\lambda+1)x-1=0$$

ἔχουν δύο κοινὰς ρίζας.

2555. Νὰ ὁρισθοῦν οἱ λ καὶ μ, ἵνα αἱ ἐξισώσεις

$$(\lambda+\mu)x^2-(\lambda+4)x+2\mu=0 \quad \text{καὶ} \quad (\lambda+\mu)^2x^2+(\mu-5)x+5\mu=0$$

ἔχουν δύο κοινὰς ρίζας.

Β΄ Ὁμάς. ***2556.*** Νὰ ὁρισθῇ ὁ λ, ἵνα αἱ ἐξισώσεις

$$(1-2\lambda)x^2-6\lambda x-1=0 \quad \text{καὶ} \quad \lambda x^2-x+1=0$$

ἔχουν μίαν κοινὴν ρίζαν καὶ νὰ ὑπολογισθῇ αὕτη.

2557. Νὰ ὁρισθῇ ὁ λ, ἵνα αἱ ἐξισώσεις $x^2+x-1=0$ καὶ $x^2+\lambda x+1=0$ ἔχουν μίαν κοινὴν ρίζαν καὶ νὰ ὑπολογισθῇ αὕτη.

2558. Νὰ ὁρισθῇ ὁ λ, ἵνα αἱ ἐξισώσεις

$$x^2+\lambda x+1=0 \quad \text{καὶ} \quad 3x^2-2x-8=0$$

ἔχουν μίαν κοινὴν ρίζαν καὶ νὰ ὑπολογισθῇ αὕτη.

2559. Νὰ ὁρισθῇ ὁ λ, ἵνα αἱ ἐξισώσεις

$$x^2-3x+2\lambda-4=0 \quad \text{καὶ} \quad x^2-4x+(3\lambda-5)=0$$

ἔχουν μίαν κοινὴν ρίζαν καὶ νὰ ὑπολογισθῇ αὕτη.

2560. Νὰ ὁρισθῇ ὁ λ, ἵνα αἱ ἐξισώσεις

$$5x^2-(2\lambda+1)x=2\lambda \quad \text{καὶ} \quad 3x^2-(\lambda-1)x=5+\lambda$$

ἔχουν μίαν κοινὴν ρίζαν καὶ νὰ ὑπολογισθῇ αὕτη.

2561. Νὰ ὁρισθῇ ὁ λ, ἵνα αἱ ἐξισώσεις

$$x^2-4x+\lambda+2=0 \quad \text{καὶ} \quad x^2-5x+5\lambda+1=0$$

ἔχουν μίαν κοινὴν ρίζαν καὶ νὰ ὑπολογισθῇ αὕτη.

2562. Νὰ ὁρισθῇ ὁ λ, ἵνα αἱ ἐξισώσεις

$$x^2+\lambda x+1=0 \quad \text{καὶ} \quad x^2+x+\lambda=0$$

ἔχουν μίαν κοινὴν ρίζαν καὶ νὰ ὑπολογισθῇ αὕτη.

2563. Ὁμοίως καὶ διὰ τὰς ἐξισώσεις

$$\varphi(x)=\lambda x^2+(2\lambda-1)x+1=0 \quad \text{καὶ} \quad (\lambda+1)x^2+2\lambda x+(3\lambda-1)=0$$

2564. Ὁμοίως καὶ διὰ τὰς ἐξισώσεις

$$x^2+(\lambda-8)x+2(\lambda-4)=0 \quad \text{καὶ} \quad x^2+(2\lambda-19)x+2(2\lambda-3)=0.$$

2565. Ὁμοίως καὶ διὰ τὰς ἐξισώσεις

$$(\lambda-1)x^2-(2\lambda+1)x+2=0 \quad \text{καὶ} \quad (\lambda+1)x^2-(4\lambda-1)x-2=0.$$

2566. Ὁμοίως διὰ τὰς ἐξισώσεις

$$(3\lambda-2)x^2-(8\lambda-5)x+4\lambda-3=0 \quad \text{καὶ} \quad (2\lambda-1)x^2-(3\lambda-1)x-2\lambda=0.$$

2567. Ὁμοίως διὰ τὰς ἐξισώσεις

$$5x^2-(\lambda+8)x+2\lambda^2-4\lambda=0 \quad \text{καὶ} \quad x^2-(7\lambda-8)x+4\lambda=0.$$

2568. Ὁμοίως διὰ τὰς ἐξισώσεις

$$2x^2-(2\lambda+1)x+2\lambda=0 \quad \text{καὶ} \quad x^2-3\lambda x+(\lambda+1)=0.$$

2569. Ὁμοίως διὰ τὰς ἐξισώσεις

$$(1-2\lambda)x^2-6\lambda x-1=0 \quad \text{καὶ} \quad \lambda x^2-x+1=0.$$

2570. Ὁμοίως διὰ τὰς ἐξισώσεις

$$x^2-2(1+\lambda)x+\lambda=0 \quad \text{καὶ} \quad x^2-2\lambda x-3=0.$$

2571. Ὁμοίως διὰ τὰς ἐξισώσεις

$$x^2-2(\lambda+3)x+1 \quad \text{καὶ} \quad x^2-(3\lambda-1)x+1=0.$$

2572. Δοθέντος, ὅτι τὰ τριώνυμα $x^2-8x+\mu$ καὶ $x^2-\mu x+\beta$ ἔχουν μίαν κοινὴν ρίζαν, νὰ σχηματισθῇ δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ διπλῆν ρίζαν τὴν κοινὴν ρίζαν τῶν δύο τριωνύμων. (Σχολὴ Ἰκάρων 1949)

615. Διάταξις τῶν ριζῶν δύο τριωνύμων τοῦ δευτέρου βαθμοῦ κατὰ σειρὰν μεγέθους των. Θεώρημα Ι. ***Ἐὰν x_0 εἶναι ἡ κοινὴ ρίζα τῶν δύο τριωνύμων***

$$\varphi(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma \quad \text{καὶ} \quad f(x)=\alpha' x^2+\beta' x+\gamma'$$

καὶ R ἡ ἀπαλείφουσά των, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι

$$R=\frac{(\alpha\beta'-\beta\alpha')^2}{\alpha}\cdot\varphi(x_0)=\frac{(\alpha\beta'-\beta\alpha')^2}{\alpha'}f(x_0).$$

Ἐπειδὴ ἡ κοινὴ ρίζα τῶν δύο τριωνύμων $\varphi(x)$ καὶ $f(x)$ εἶναι (§ 612) ἡ

$$x_0=-\frac{\alpha\gamma'-\gamma\alpha'}{\alpha\beta'-\beta\alpha'},$$

θὰ εἶναι

$$\varphi(x_0)=\alpha\cdot\left(\frac{\alpha\gamma'-\gamma\alpha'}{\alpha\beta'-\beta\alpha'}\right)^2-\beta\cdot\frac{\alpha\gamma'-\gamma\alpha'}{\alpha\beta'-\beta\alpha'}+\gamma.$$

Πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος αὐτῆς ἐπὶ $\dfrac{(\alpha\beta'-\beta\alpha')^2}{\alpha}$ καὶ ἔχομεν

$$\frac{(\alpha\beta'-\beta\alpha')^2}{\alpha}\cdot\varphi(x_0)=\frac{(\alpha\beta'-\beta\alpha')^2}{\alpha}\cdot\left[\alpha\left(\frac{\alpha\gamma'-\gamma\alpha'}{\alpha\beta'-\beta\alpha'}\right)^2-\beta\cdot\frac{\alpha\gamma'-\gamma\alpha'}{\alpha\beta'-\beta\alpha'}+\gamma\right]=$$

$$=(\alpha\gamma'-\gamma\alpha')^2-\frac{\beta}{\alpha}(\alpha\gamma'-\gamma\alpha')(\alpha'\beta-\beta\alpha')+\frac{\gamma}{\alpha}(\alpha\beta'-\beta\alpha')^2=$$

$$=(\alpha\gamma'-\gamma\alpha')^2-(\alpha\beta'-\beta\alpha')\left[\frac{\beta}{\alpha}(\alpha\gamma'-\gamma\alpha')-\frac{\gamma}{\alpha}(\alpha\beta'-\beta\alpha')\right]=$$

$$=(\alpha\gamma'-\gamma\alpha')^2-(\alpha\beta'-\beta\alpha')(\beta\gamma'-\gamma\beta').$$

Ἐπειδὴ τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἰσότητος αὐτῆς παριστάνει τὴν ἀπαλείφουσαν R, θὰ εἶναι

$$\boxed{\frac{(\alpha\beta'-\beta\alpha')^2}{\alpha}\cdot\varphi(x_0)=R}$$

Ἐὰν λάβωμεν τὸ τριώνυμον $f(x)$ καὶ ἐργασθῶμεν ὁμοίως εὑρίσκομεν

$$\boxed{R=\frac{(\alpha\beta'-\beta\alpha')^2}{\alpha'}f(x_0)}$$

616. Θεώρημα ΙΙ. ***Ἐὰν x', x'' εἶναι αἱ ῥίζαι τοῦ τριωνύμου $\varphi(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ καὶ ϱ', ϱ'' εἶναι αἱ ῥίζαι τοῦ τριωνύμου $f(x)=\alpha' x^2+\beta' x+\gamma'$ νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι***

$$R=\alpha^2 f(x') \,.\, f(x'')=\alpha'^2\varphi(\varrho') \,.\, \varphi(\varrho'').$$

Ἐὰν εἰς τὸ τριώνυμον $f(x)$ θέσωμεν ἀντὶ τοῦ x τὰς ῥίζας x' καὶ x'' λαμβάνομεν

$$f(x')=\alpha' x'^2+\beta' x'+\gamma' \quad \text{καὶ} \quad f(x'')=\alpha' x''^2+\beta' x''+\gamma'.$$

Πολλαπλασιάζομεν κατὰ μέλη αὐτὰς καὶ ἔχομεν

$$f(x') \,.\, f(x'')=(\alpha' x'^2+\beta' x'+\gamma')(\alpha' x''^2+\beta' x''+\gamma')=$$

$$=\alpha'^2 x'^2 x''^2+\alpha'\beta' x' x''(x'+x'')+\alpha'\gamma'(x'^2+x''^2)+\beta'^2 x' x''+\beta'\gamma'(x'+x'')+\gamma'^2.$$

Ἐπειδὴ $x'+x''=-\dfrac{\beta}{\alpha}$, $\quad x'x''=\dfrac{\gamma}{\alpha}$, $\quad x'^2+x''^2=\dfrac{\beta^2-2\alpha\gamma}{\alpha^2}$,

ἡ προηγουμένη σχέσις γράφεται

$$f(x') \,.\, f(x'')=\alpha'^2 \,.\, \frac{\gamma^2}{\alpha^2}-\alpha'\beta' \,.\, \frac{\beta\gamma}{\alpha^2}+\frac{\alpha'\gamma'(\beta^2-2\alpha\gamma)}{\alpha^2}+\beta'^2 \,.\, \frac{\gamma}{\alpha}-\beta'\gamma' \,.\, \frac{\beta}{\alpha}+\gamma'^2$$

$$=\frac{1}{\alpha^2}(\alpha'^2\gamma^2-\alpha'\beta'\beta\gamma+\alpha'\gamma'\beta^2-2\alpha\gamma\alpha'\gamma'+\alpha\gamma\beta'^2-\beta'\gamma'\alpha\beta+\alpha^2\gamma'^2$$

$$=\frac{1}{\alpha^2}[(\alpha^2\gamma'^2-2\alpha\gamma\alpha'\gamma'+\alpha'^2\gamma^2)-(\beta'\gamma'\alpha\beta-\alpha\gamma\beta'^2)(\alpha'\gamma'\beta^2-\alpha'\beta'\beta\gamma)]$$

$$=\frac{1}{\alpha^2}[(\alpha\gamma'-\gamma\alpha')^2-\alpha\beta'(\beta\gamma'-\gamma\beta')+\beta\alpha'(\beta\gamma'-\beta\gamma')]$$

$$=\frac{1}{\alpha^2}[(\alpha\gamma'-\gamma\alpha')^2-(\beta\gamma'-\gamma\beta')(\alpha\beta'-\beta\alpha')=\frac{1}{\alpha^2} \,.\, R.$$

ἄρα $\quad \boxed{\alpha^2 f(x') \,.\, f(x'')=R}$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι $\quad \boxed{\alpha'^2\varphi(\varrho') \,.\, \varphi(\varrho'')=R}$

617. Θεώρημα ΙΙΙ. ***Ἐὰν ἡ ἀπαλείφουσα δύο ἐξισώσεων τοῦ δευτέρου βαθμοῦ εἶναι ἀρνητική, αἱ ῥίζαι τῶν ἐξισώσεων αὐτῶν εἶναι πραγματικαὶ καὶ χωρίζονται μεταξύ των, δηλ. μεταξὺ τῶν ῥιζῶν τῆς μιᾶς περιέχεται μία ῥίζα τῆς ἄλλης.***

Ἔστωσαν αἱ ἐξισώσεις

$$\varphi(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma=0 \quad (1), \qquad f(x)=\alpha' x^2+\beta' x+\gamma'=0 \quad (2)$$

καὶ R ἡ ἀπαλείφουσά των.

1ον. Ἐὰν $R<0$, θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2) ἔχουν ῥίζας πραγματικάς.

Γνωρίζομεν (§ 615), ὅτι

$$R=\frac{(\alpha\beta'-\beta\alpha')^2}{\alpha}\varphi(x_0)) \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad R=\frac{(\alpha\beta'-\beta\alpha')^2}{\alpha'}f(x_0).$$

Ἐπειδή, ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $R<0$, θὰ εἶναι

$$\frac{(\alpha\beta'-\beta\alpha')^2}{\alpha}\varphi(x_0)<0 \quad \text{καὶ} \quad \frac{(\alpha\beta'-\beta\alpha')^2}{\alpha'}f(x_0)<0.$$

Αἱ ἀνισότητες αὗται εἶναι ἰσοδύναμοι μὲ τὰς

$$(\alpha\beta'-\beta\alpha')^2\alpha\varphi(x_0)<0 \quad \text{καὶ} \quad (\alpha\beta'-\beta\alpha')^2\alpha' f(x_0)<0$$

ἤ, ἐὰν παραλείψωμεν τὸν θετικόν παράγοντα $(\alpha\beta'-\beta\alpha')^2$, μὲ τὰς

$$\alpha\varphi(x_0)<0 \qquad \alpha' f(x_0)<0.$$

Ἐπειδὴ $\alpha\varphi(x_0)<0$, ἡ ἐξίσωσις (1) ἔχει δύο ῥίζας πραγματικάς. ἔστω τὰς x' καὶ x'', $(x'<x'')$.

Ἐπίσης ἐπειδὴ $\alpha' f(x_0)<0$, ἡ ἐξίσωσις (2) ἔχει δύο ῥίζας πραγματικὰς ἔστω τὰς ρ' καὶ ρ'', $(\rho'<\rho'')$.

2ον. Ἐάν $R<0$, θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ ῥίζαι τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) χωρίζονται μεταξύ των, δηλαδὴ μεταξὺ αὐτῶν ὑπάρχει μία ἀπὸ τὰς σχέσεις

$$\varrho'<x'<\varrho''<x'', \qquad x'<\varrho'<x''<\varrho''.$$

Γνωρίζομεν (§ 616), ὅτι $R=\alpha'^2\varphi(\rho')\varphi(\rho'')$. Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $R<0$ θὰ εἶναι $\alpha'^2\varphi(\rho')\varphi(\rho'')<0$ ἢ $\varphi(\rho')\varphi(\rho'')<0$.

Ἐπειδὴ τὸ γινόμενον $\varphi(\rho')\varphi(\rho'')$ εἶναι ἀρνητικὸν ἕπεται, ὅτι ἕνας ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς ρ', ρ'' περιέχεται μεταξὺ τῶν ριζῶν x', x'', τῆς ἐξισώσεως $\varphi(x)=0$· ἤτοι θὰ εἶναι

εἴτε $\quad \varrho'<x'<\varrho''<x'' \quad$ εἴτε $\quad x'<\varrho'<x''<\varrho''$

Ὥστε, ἐὰν $R<0$, αἱ ῥίζαι τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) χωρίζονται μεταξύ των.

618. Πρόβλημα. ***Νὰ ταχθοῦν κατά σειρὰν μεγέθους αἱ ῥίζαι τῶν ἐξισώσεων***

$$\varphi(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma=0 \qquad (1)$$

$$f(x)=\alpha' x^2+\beta' x+\gamma'=0 \qquad (2)$$

χωρὶς νὰ ὑπολογισθοῦν προηγουμένως αἱ ῥίζαι των.

Ἔστωσαν x', x'', $(x'<x'')$ αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως (1) καὶ ρ', ρ'' $(\rho'<\rho'')$ αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως (2).

Διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις:

Ι περίπτωσις $R=0$.

Ἐὰν $\alpha\beta'-\beta\alpha'\neq0$, αἱ δοθεῖσαι ἐξισώσεις (1) καὶ (2) ἔχουν μίαν κοινὴν ῥίζαν $\quad x_0=-\dfrac{\alpha\gamma'-\gamma\alpha'}{\alpha\beta'-\beta\alpha'}.$

Γνωρίζοντες τὴν κοινὴν αὐτὴν ῥίζαν, εὑρίσκομεν εὐκόλως καὶ τὰς δύο ἄλλας ῥίζας των, ἀρκεῖ νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὸν τύπον, ὁ ὁποῖος δίδει τὸ ἄθροισμα ἢ τὸ γινόμενον τῶν ριζῶν καθεμιᾶς ἐκ τῶν ἐξισώσεων αὐτῶν. Ἔπειτα δυνάμεθα εὐκόλως νὰ θέσωμεν αὐτὰς κατὰ σειρὰν μεγέθους.

Ἐὰν $\alpha\beta'-\beta\alpha'=0$ καὶ $\alpha\gamma'-\gamma\alpha'\neq0$, αἱ δύο δοθεῖσαι ἐξισώσεις ἔχουν δύο κοινάς ῥίζας.

Ἐὰν $\alpha\beta'-\beta\alpha'=0$ καὶ $\alpha\gamma'-\gamma\alpha'=0$, αἱ δοθεῖσαι ἐξισώσεις δὲν ἔχουν ῥίζας.

ΙΙ περίπτωσις $R<0$.

Ἐδείξαμεν (§ 617), ὅτι, ἐὰν ἡ ἀπαλείφουσα R εἶναι ἀρνητική, αἱ ῥίζαι x', x'' καὶ ρ', ρ'' τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) χωρίζονται μεταξύ των καὶ ἔχομεν μίαν ἀπὸ τὰς σχέσεις

$$\rho'<x'<\rho''<x'' \quad (\mathrm{I}). \qquad x'<\rho'<x''<\rho''. \quad (\mathrm{II})$$

Θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν (Ι), ἐὰν $x'+x''>\rho'+\rho''$ ἢ $-\frac{\beta}{\alpha}>-\frac{\beta'}{\alpha'}$

καὶ τὴν σχέσιν (ΙΙ), ἐὰν $-\frac{\beta}{\alpha}<-\frac{\beta'}{\alpha'}$.

ΙΙΙ περίπτωσις $R>0$.

Ὑποθέτομεν, ὅτι αἱ δοθεῖσαι ἐξισώσεις ἔχουν ῥίζας, ἤτοι, ὅτι

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma>0, \qquad \Delta'=\beta'^2-4\alpha'\gamma'>0.$$

Γνωρίζομεν (§ 616), ὅτι $R=\alpha^2 f(x')f(x'')$.

Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $R>0$, θὰ εἶναι καὶ

$$\alpha^2 f(x')f(x'')>0 \quad \text{ἢ} \quad f(x')f(x'')>0.$$

Διὰ νὰ εἶναι τὸ γινόμενον $f(x')f(x'')$ θετικόν, πρέπει οἱ παράγοντές του $f(x')$ καὶ $f(x'')$ νὰ εἶναι ὁμόσημοι· ἤτοι πρέπει νὰ εἶναι

εἴτε $f(x')<0$ καὶ $f(x'')<0$, εἴτε $f(x')>0$ καὶ $f(x'')>0$.

Ἐὰν εἶναι $f(x')<0$ καὶ $f(x'')<0$, τότε καὶ τὸ ἄθροισμά των $\Sigma=f(x')+f(x'')$ θὰ εἶναι ἀρνητικόν.

Ὁμοίως, ἐὰν εἶναι $f(x')>0$ καὶ $f(x'')>0$, θὰ εἶναι καὶ τό ἄθροισμά των $\Sigma=f(x')+f(x'')$ θετικόν.

Τὸ ἄθροισμα ὅμως $\Sigma=f(x')+f(x'')$ δύναται νὰ ὑπολογισθῇ, χωρὶς νὰ γνωρίζωμεν τὰς ῥίζας x' καὶ x''. Πράγματι ἔχομεν

$$\Sigma=f(x')+f(x'')=(\alpha'x'^2+\beta'x'+\gamma')+(\alpha'x''^2+\beta'x''+\gamma')$$
$$=\alpha'(x'^2+x''^2)+\beta'(x'+x'')+2\gamma'.$$

Ἐπειδὴ $x'^2+x''^2=\frac{\beta^2-2\alpha\gamma}{\alpha^2}$ καὶ $x'+x''=-\frac{\beta}{\alpha}$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γράφεται

$$\Sigma=f(x')+f(x'')=\alpha'.\frac{\beta^2-2\alpha\gamma}{\alpha^2}-\beta'.\frac{\beta}{\alpha}+2\gamma'.$$

1ον. Ἐὰν λοιπὸν εἶναι $\alpha'\Sigma<0$, δηλ. ἐὰν $\alpha'[f(x')+f(x'')]<0$ οἱ ὁμόσημοι ἀριθμοὶ $f(x')$ καὶ $f(x'')$ θὰ ἔχουν σημεῖα ἀντίθετα τοῦ α' καὶ ἑπομένως οἱ ἀριθμοὶ x' καὶ x'' θὰ περιέχωνται μεταξὺ τῶν ῥιζῶν ρ', ρ'' τῆς ἐξισώσεως $f(x)=0$· ἤτοι θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν

$$\rho'<x'<x''<\rho'' \qquad (\mathrm{III})$$

Ὁμοίως ἀπὸ τὴν σχέσιν $R=\alpha'^2\varphi(\rho')\varphi(\rho'')<0$ συνάγομεν, ὅτι οἱ $\varphi(\rho')$ καὶ $\varphi(\rho'')$ ἔχουν τὸ σημεῖον τοῦ ἀθροίσματός των $\Sigma'=\varphi(\rho')+\varphi(\rho'')$.

Ἐὰν εἶναι $\alpha\Sigma'<0$, δηλ. ἐὰν $\alpha[\varphi(\rho')+\varphi(\rho'')]<0$ οἱ ὁμόσημοι ἀριθμοὶ $\varphi(\rho')$ καὶ $\varphi(\rho'')$ θὰ ἔχουν σημεῖα ἀντίθετα τοῦ α· ἑπομένως οἱ ἀριθμοὶ ρ' καὶ ρ'' θὰ περιέχωνται μεταξὺ τῶν ῥιζῶν x_1 καὶ x_2 τῆς ἐξισώσεως $\varphi(x)=0$· ἤτοι θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν

$$x' < \varrho' < \varrho'' < x''. \qquad \text{(IV)}$$

2ον. Ἐὰν ε α΄$\Sigma > 0$, δηλ. ἐὰν εἶναι $\alpha'[f(x')+f(x'')] > 0$ οἱ ὁμόσημοι ἀ .. $f(x')$ καὶ $f(x'')$ ἔχουν τὸ αὐτὸ σημεῖον μὲ τὸ α'. Εἰς τὴν περ σιν αὐτὴν αἱ x' καὶ x'' κεῖνται ἐκτὸς τῶν ριζῶν ρ' καὶ ρ'' τῆς ἐξισώσεως $f(x)=0$ καὶ θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν

$$\varrho' < \varrho'' < x' < x'' \quad \text{(V)}, \qquad \text{ἐὰν} \quad -\frac{\beta}{\alpha} > -\frac{\beta'}{\alpha'}$$

ἢ τὴν σχέσιν

$$x' < x'' < \varrho' < \varrho'' \quad \text{(VI)}, \qquad \text{ἐὰν} \quad -\frac{\beta}{\alpha} < -\frac{\beta'}{\alpha'}.$$

Ὁμοίως, ἐὰν $\alpha\Sigma' > 0$ εὑρίσκομεν τὰς αὐτὰς σχέσεις (V) καὶ (VI).

Ὁ κάτωθι πίναξ συνοψίζει τὰ ἀνωτέρω συμπεράσματα.

Πίναξ καθορίζων τὴν θέσιν τῶν ῥιζῶν x', x'' τῆς ἐξισώσεως $\varphi(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ πρὸς τὰς ῥίζας ϱ', ϱ'' τῆς ἐξισώσεως

$$f(x)=\alpha' x^2+\beta' x+\gamma'=0.$$

$R<0$	$-\frac{\beta}{\alpha} > -\frac{\beta'}{\alpha'}$		$\varrho' < x' < \varrho'' < x''$
	$-\frac{\beta}{\alpha} < -\frac{\beta'}{\alpha'}$		$x' < \varrho' < x'' < \varrho''$
$R>0$	$\alpha'[f(x')+f(x'')] < 0$		$\varrho' < x' < x'' < \varrho''$
$\Delta>0$	$\alpha[\varphi(\varrho')+\varphi(\varrho'')] < 0$		$x' < \varrho' < \varrho'' < x''$
$\Delta'>0$	$\alpha'[f(x')+f(x'')] > 0$	$-\frac{\beta}{\alpha} > -\frac{\beta'}{\alpha'}$	$\varrho' < \varrho'' < x' < x''$
	$\alpha[\varphi(\varrho')+\varphi(\varrho'')] > 0$	$-\frac{\beta}{\alpha} < -\frac{\beta'}{\alpha'}$	$x' < x'' < \varrho' < \varrho''$

619. Παράδειγμα 1ον. ***Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ αἱ ῥίζαι x', x'' τοῦ τριωνύμου $\varphi(x)=x^2+(\lambda^2+2\lambda+1)x+4\lambda^2$ περιέχονται μεταξὺ τῶν ῥιζῶν ϱ', ϱ'' τοῦ τριωνύμου $f(x)=x^2+(\lambda^2+2\lambda+3)x+4\lambda^2$.***

Διὰ νὰ εἶναι $\rho' < x' < x'' < \rho''$ πρέπει νὰ συναληθεύουν αἱ ἀνισότητες $R>0$, $\Delta>0$, $\Delta'>0$, $\alpha'[f(x')+f(x'')] < 0$. (1)

Ἐδῶ εἶναι

$$R=(4\lambda^2-4\lambda^2)^2-[(\lambda^2+2\lambda+3)-(\lambda^2+2\lambda+1)][(\lambda^2+2\lambda+1)4\lambda^2-4\lambda^2(\lambda^2+2\lambda+3)]$$
$$=-2(-8\lambda^2)=16\lambda^2$$

καὶ εἶναι $R>0$ διὰ κάθε τιμὴν τοῦ λ.

$$\Delta=(\lambda^2+2\lambda+1)^2-16\lambda^2=(\lambda^2+2\lambda+1+4\lambda)(\lambda^2+2\lambda+1-4\lambda)$$
$$=(\lambda^2+6\lambda+1)(\lambda^2-2\lambda+1).$$
$$=(\lambda+3+2\sqrt{2})\ (\lambda^2+3-2\sqrt{2}).(\lambda-1)^2$$

καὶ εἶναι $\Delta>0$ διὰ $\lambda<-3-2\sqrt{2}$ καὶ διὰ $\lambda>-3+2\sqrt{2}$.

$$\Delta'=(\lambda^2+2\lambda+3)^2-16\lambda^2=(\lambda^2+2\lambda+3-4\lambda)(\lambda^2+2\lambda+3+4\lambda)$$
$$=(\lambda^2-2\lambda+3)(\lambda^2+6\lambda+3)$$

καὶ εἶναι $\Delta'>0$ διὰ $\lambda<-3-\sqrt{6}$ καὶ διὰ $\lambda>-3+\sqrt{6}$.

$$\alpha'[f(x')+f(x'')]=[x'^2+(\lambda^2+2\lambda+3)x'+4\lambda^2]+[x''^2+(\lambda^2+2\lambda+3)x''+4\lambda^2]$$
$$=(x'^2+x''^2)+(\lambda^2+2\lambda+3)(x'+x'')+8\lambda^2$$
$$=(\lambda^2+2\lambda+1)^2-8\lambda^2+(\lambda^2+2\lambda+3)^2+8\lambda^2$$
$$=-4\lambda^2-8\lambda-8$$

καὶ εἶναι $\alpha'[f(x')+f(x'')]<0$ διὰ κάθε τιμὴν τοῦ λ.

Αἱ ἀνισότητες (1) συναληθεύουν διὰ $\lambda<-3-2\sqrt{2}$ καὶ διὰ $\lambda>-3+2\sqrt{2}$. Ὥστε διὰ $\lambda<-3-2\sqrt{2}$, εἴτε διὰ $\lambda>-3+2\sqrt{2}$ θὰ ἔχωμεν $\rho'<x'<x''<\rho''$.

Ἀσκήσεις. *2573.* Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ αἱ ῥίζαι x_1, x_2 τῆς ἐξισώσεως $\varphi(x)=x^2-3x+\lambda+2=0$ εἶναι μικρότεραι καὶ τῶν δύο ῥιζῶν ϱ_1, ϱ_2 τῆς ἐξισώσεως $f(x)=x^2-7x+3\lambda+12=0$.

2574. Δίδονται τὰ τριώνυμα $\varphi(x)=\lambda^2x^2+(\lambda^2-3\lambda+5)x-1$ καὶ $f(x)=\lambda^2x^2+(\lambda^2-5\lambda+2)x-1$, τὰ ὁποῖα ἔχουν ῥίζας x', x'' τὸ πρῶτον καὶ ϱ', ϱ'' τὸ δεύτερον. Νὰ ὁρισθῇ ἡ τιμὴ τοῦ λ, ἵνα μεταξὺ τῶν ῥιζῶν ὑφίσταται ἡ σχέσις: 1ον. $x'<\varrho'<-1<x''<\varrho''$. 2ον. $\varrho'<0<x'<x''<\varrho''$.

2575. Δίδονται τριώνυμα

$\varphi(x)=\lambda^2x^2+(2\lambda^2-\lambda+2)x-1$ καὶ $f(x)=\lambda^2x^2+(2\lambda^2-8\lambda+6)x-1$,

τὰ ὁποῖα ἔχουν ῥίζας x', x'' τὸ πρῶτον καὶ ϱ', ϱ'' τὸ δεύτερον. Νὰ προσδιορισθῇ ὁ λ, ἵνα μεταξὺ τῶν ῥιζῶν ὑφίστανται αἱ σχέσεις:

1ον. $x'<\varrho'<x''<\varrho''$. 2ον. $\varrho'<x'<\varrho''<x''$. 3ον. $x'<\varrho'<x''<\varrho''<1$

4ον. $x'<\varrho'<\varrho''<x''<0$.

620. Παράδειγμα 2ον. ***Νὰ διαταχθοῦν κατὰ σειρὰν μεγέθους αἱ ῥίζαι τῶν ἐξισώσεων***

$$\varphi(x)=x^2-2(\lambda+1)x+\lambda=0 \quad (1), \qquad f(x)=x^2-2\lambda x+1=0 \quad (2)$$

κατὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τοῦ λ.

Ἔστωσαν x', x'' αἱ ῥίζαι τῆς (1) καὶ ρ', ρ'' αἱ ῥίζαι τῆς (2).

Ὑπολογίζομεν κατ' ἀρχὰς τὰς ποσότητας

$$R,\ \Delta,\ \Delta',\ \alpha A'=\alpha[\varphi(\rho')+\varphi(\rho'')],\quad \alpha'A=\alpha'[(f(x')+f(x'')],\quad \Sigma-\Sigma'=-\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\beta'}{\alpha'}$$

Ἐδῶ εἶναι

$R=-3\lambda^2+2\lambda+5=-3(\lambda+1)(\lambda-5/3)$ καὶ εἶναι $R>0$ διὰ $-1<\lambda<5/3$

$\Delta=(\lambda+1)^2-\lambda=\lambda^2+\lambda+1$ καὶ εἶναι πάντοτε $\Delta>0$.

$\Delta'=\lambda^2-1=(\lambda-1)(\lambda+1)$ καὶ εἶναι $\Delta'>0$ διὰ $\lambda<-1$, $\lambda>1$

$$\alpha A'=\alpha[\varphi(\rho')+\varphi(\rho'')]=[\rho'^2-2(\lambda+1)\rho'+\lambda+\rho''^2-2(\lambda+1)\rho''+\lambda]=$$
$$=(\rho'^2+\rho''^2)-2(\lambda+1)(\rho'+\rho'')+2\lambda=4\lambda^2-2-2(\lambda+1)2\lambda+2\lambda=-(\lambda+1)$$

εἶναι δὲ $\alpha A'>0$ διὰ $\lambda<-1$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι $\alpha'A=\alpha'[f(x')+f(x'')]=2(\lambda+3)$ καὶ ὅτι $\alpha'A>0$ διὰ $\lambda>-3$.

$\Sigma-\Sigma'=2(\lambda+1)-2\lambda=2$ καὶ εἶναι $\Sigma-\Sigma'>0$ διὰ κάθε τιμὴν τοῦ λ

Καταρτίζομεν ἔπειτα, κατὰ τὰ γνωστά, τὸν πίνακα

λ	R	Δ	Δ'	$\alpha A'$	$\alpha' A$	$\Sigma-\Sigma'$	Συμπέρασμα
$-\infty$							
	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$	$\rho'<x'<\rho''<x''$
-3							
	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$\rho'<x'<\rho''<x''$
-1							
	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	ἡ (2) δὲν ἔχει ρίζας
1							
	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$x'<\rho'<\rho''<x''$
$\frac{5}{3}$							
	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$\rho'<x'<\rho''<x''$
$+\infty$							

Διὰ νὰ συμπληρώσωμεν τὴν στήλην «Συμπέρασμα» πρέπει νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψει τὰ ἐξαγόμενα, τὰ ὁποῖα περιέχονται εἰς τὸν πίνακα τῆς § 618.

Σημ. Διὰ τὰς τιμάς, διὰ τὰς ὁποίας ἡ ἀπαλείφουσα εἶναι ἀρνητική, δὲν εἶναι ἀπαραίτητον νὰ συμπληροῦνται αἱ ἀντίστοιχοι θέσεις τῶν στηλῶν Δ, Δ', $\alpha A'$, $\alpha' A$, διότι ἡ διάταξις τῶν ριζῶν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν R καὶ τὴν $\Sigma-\Sigma'$.

Ἰδιαίτεραι περιπτώσεις. Διὰ $\lambda=-1$, εἶναι $R=0$ καὶ αἱ δύο ἐξισώσεις ἔχουν μίαν κοινὴν ρίζαν $x_0=-1$.

Διὰ $\lambda=-1$, αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2) γίνονται $x^2-1=0$, $(x+1)^2=0$ καὶ ἔχουν ρίζας $x=\pm 1$ καὶ $x=-1$ (διπλῆ ρίζα).

Διὰ $\lambda=5/3$ εὑρίσκομεν $x_0=1/3$· αἱ ἐξισώσεις γίνονται $3x^2-16x+5=0$ καὶ $3x^2-10x+3=0$ καὶ ἔχουν ἀντιστοίχως ρίζας 1/3, 6, καὶ 1/3, 3.

***Ἀσκήσεις.* 2576.** Νὰ διαταχθοῦν κατὰ σειρὰν μεγέθους αἱ ρίζαι τῶν ἐξισώσεων $\varphi(x)=x^2-\lambda x-1=0$ καὶ $f(x)=x^2+\lambda x+1=0$ κατὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τοῦ λ.

2577. Νὰ διαταχθοῦν κατὰ σειρὰν μεγέθους αἱ ρίζαι τῶν ἐξισώσεων

$$\varphi(x)=(\lambda-1)x^2+(3\lambda-2)x+5\lambda=0 \quad \text{καὶ} \quad f(x)=(\lambda+1)x^2+(\lambda+2)x+3\lambda=0$$

κατὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τοῦ λ.

2578. Νὰ διαταχθοῦν κατὰ σειρὰν μεγέθους αἱ ρίζαι τῶν ἐξισώσεων

$$\varphi(x)=x^2-2\lambda x+5\lambda=0 \quad \text{καὶ} \quad f(x)=x^2+2(\lambda+2)x+9\lambda=0$$

κατὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τοῦ λ.

2579. Ὁμοίως διὰ τὰς ἐξισώσεις
$\varphi(x)=x^2-2\lambda x+(1-\lambda)=0$ καὶ $f(x)=x^2-2\lambda x+(1+\lambda)=0$

2580. Ὁμοίως διὰ τὰς ἐξισώσεις
$\varphi(x)=x^2-2\lambda x+7\lambda-6=0$ καὶ $f(x)=x^2+2\lambda x+7\lambda-10=0.$

2581. Ὁμοίως διὰ τὰς ἐξισώσεις
$\varphi(x)=x^2-2(\lambda+1)x+7\lambda+1=0$ καὶ $f(x)=x^2+2(\lambda+1)x+7\lambda+3=0$

2582. Ὁμοίως διὰ τὰς ἐξισώσεις
$\varphi(x)=x^2-2\lambda x+5\lambda=0$ καὶ $f(x)=x^2+2(\lambda+2)x+9\lambda=0.$

2583. Ὁμοίως διὰ τὰς ἐξισώσεις
$\varphi(x)=x^2-2(\lambda-1)x-2\lambda(\lambda-1)=0$ καὶ $f(x)=x^2-2(2\lambda-1)x-\lambda(\lambda-2)=0.$

2584. Ὁμοίως διὰ τὰς ἐξισώσεις
$\varphi(x)=x^2+2(\lambda-1)x+\lambda^2=0$ καὶ $f(x)=x^2-2(2\lambda+1)x+4\lambda^2=0.$

2585. Ὁμοίως διὰ τὰς ἐξισώσεις
$\varphi(x)=x^2-6x+\lambda=0$ καὶ $f(x)=x^2-4x+8-\lambda=0.$

2586. Ὁμοίως διὰ τὰς ἐξισώσεις
$\varphi(x)=x^2-2(2-\lambda)x+\lambda^2-3\lambda-5=0$ καὶ $f(x)=x^2-2(3-\lambda)x+\lambda^2-3\lambda-15=0.$

2587 Ὁμοίως διὰ τὰς ἐξισώσεις
$\varphi(x)=2x^2-(2\lambda+1)x+\lambda-1=0$ καὶ $f(x)=2x^2+(4\lambda-1)x-(\lambda+1)=0.$

2588. Ὁμοίως διὰ τὰς ἐξισώσεις
$\varphi(x)=x^2-2(2\lambda-1)x+2\lambda^2+6\lambda-11=0$ καὶ $f(x)=x^2-4\lambda x+2\lambda^2+\lambda=0.$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΙΝ ΕΠΙ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ Ε΄.

Α΄ Ὁμάς. 2589. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ συντελεσταὶ β καὶ γ τῆς ἐξισώσεως $x^2+\beta x+\gamma=0$ (1), ἐὰν γνωρίζωμεν ὅτι αἱ ρίζαι αὐτῆς αὐξανόμεναι κατὰ 1, γίνονται ρίζαι τῆς $x^2-\beta^2 x+\beta\gamma=0.$ (2)

2590. Νὰ ὁρισθοῦν οἱ ἀριθμοὶ β καὶ γ, εἰς τρόπον ὥστε, ἐὰν ἀντικατασταθῇ ὁ x εἰς τὴν ἐξίσωσιν $x^2+\beta x+\gamma=0$ διὰ τοῦ $\dfrac{\beta+y}{\beta-y}$, ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις, ὡς πρὸς y, νὰ εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν ἀρχικήν.

2591. Δίδεται ἡ ἐξίσωσις $x^2+\lambda x+k=0$ (1), τῆς ὁποίας αἱ ρίζαι εἶναι x', x''. 1ον. Νὰ σχηματισθῇ ἡ ἐξίσωσις, ἡ ὁποία ἔχει ὡς ρίζας x'^2, καὶ x''^2. 2ον. Νὰ εὑρεθῇ ἡ συνθήκη, ἵνα ἡ νέα ἐξίσωσις ἔχῃ τὰς ρίζας της ἴσας. 3ον. Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ λ καὶ k εἰς τρόπον, ὥστε ἡ ἐξίσωσις (1) καὶ ἡ ζητουμένη νὰ ἔχουν τὰς αὐτὰς ρίζας.

2592. Δίδεται ἡ ἐξίσωσις $\varphi(x)=x^2-\mu x+\mu+\alpha=0$ (1), ὅπου μ εἶναι μία μεταβλητὴ ποσότης καὶ α δοθεὶς ἀριθμός. 1ον. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ μ ἡ ἐξίσωσις $\varphi(x)=0$ ἔχει δύο ρίζας x' καὶ x'' διαφόρους. 2ον. Νὰ σχηματισθῇ ἡ ἐξίσωσις (2), ἡ ὁποία ἔχει ρίζας x'^2 καὶ x''^2 καὶ ἡ ἐξίσωσις (3), ἡ ὁποία ἔχει ρίζας $\dfrac{1}{x'^2}$ καὶ $\dfrac{1}{x''^2}$. 3ον. Διὰ ποίας τιμὰς μ αἱ ἐξισώσεις (2) καὶ (3) εἶναι ἰσοδύναμοι. Ποίαν λεπτομέρειαν παρουσιάζουν τότε αἱ ρίζαι τῆς (1). Νὰ ἐπαληθευθῇ τὸ εὑρεθὲν ἐξαγόμενον διὰ $\alpha=2$.

2593. Ἐὰν x' καὶ x'' εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2+\lambda x+k=0$ ζητεῖται: 1ον. Νὰ σχηματισθῇ ἡ ἐξίσωσις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, ἡ ὁποία θὰ ἔχῃ ρίζας $y'=\dfrac{x'+1}{x'-1}$ καὶ $y''=\dfrac{x''+1}{x''-1}$. 2ον. Νὰ ὁρισθοῦν οἱ λ καὶ k, ἵνα αἱ δύο ἐξισώσεις ἔχουν τὰς αὐτὰς ρίζας.

2594. 'Εὰν x_1, x_2 εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\varphi(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ καὶ ϱ_1, ϱ_2 αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $f(x)=\alpha' x^2+\beta' x+\gamma'=0$, νὰ ἀποδειχθῇ,

1ον. $R=\alpha^2\alpha'^2(\varrho_1-x_1)(\varrho_1-x_2)(\varrho_2-x_1)(\varrho_2-x_2)$

2ον. $$R=\frac{1}{4}\left[(\beta\beta'-2\alpha\gamma'-2\gamma\alpha')-(\beta^2-4\alpha\gamma)(\beta'^2-4\alpha'\gamma')\right].$$

2595. Αἱ ἐξισώσεις $x^2+\beta x+\gamma=0$ (1) καὶ $x^2+\lambda x+k$ (2) ἔχουν μίαν κοινὴν ρίζαν. Νὰ δειχθῇ, ὅτι εἶναι $(\gamma-k)^2=(\beta k-\gamma\lambda)(\lambda-\beta)$.

2596, Δίδονται τὰ τριώνυμα

$$\varphi(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma \quad \text{καὶ} \quad f(x)=\alpha' x^2+\beta' x+\gamma'.$$

Νὰ δειχθῇ, ὅτι διὰ νὰ ἔχουν το τριώνυμα αὐτὰ μίαν κοινὴν ρίζαν, πρέπει νὰ εἶναι

$$\alpha f(x)-\alpha'\varphi(x)=0.$$

Καὶ ἀντιστρόφως, ἐὰν $\varphi(x)=0$ καὶ $\alpha f(x)-\alpha'\varphi(x)=0$, νὰ δειχθῇ, ὅτι τὰ $\varphi(x)$ καὶ $f(x)$ ἔχουν μίαν κοινὴν ρίζαν.

2597. 'Εὰν λ καὶ k εἶναι θετικοὶ ἀριθμοί, νὰ εὑρεθοῦν ὅλαι αἱ τιμαὶ τοῦ k, ἵνα αἱ ἐξισώσεις $\lambda x^2+x+1=0$ καὶ $\lambda x+k=0$ ἔχουν μίαν κοινὴν ρίζαν.

2598. 'Εὰν τὰ τριώνυμα $x^2+\alpha x+\beta$ καὶ $\alpha x^2+x+\beta$ ἔχουν μίαν κοινὴν ρίζαν, νὰ δειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι, εἴτε $\beta=0$, εἴτε $\alpha+\beta=-1$. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ κοινὴ ρίζα των δι' ἑκάστην ἐκ τῶν δύο ἀνωτέρω περιπτώσεων.

2599. Νὰ προσδιορισθῇ ὁ λ εἰς τρόπον, ὥστε, ἐὰν x' εἶναι ἡ μία ρίζα τῆς ἐξισώσεως $3x^2+5x+4-\lambda=0$ (1) καὶ ρ εἶναι ἡ μία ρίζα τῆς ἐξισώσεως $x^2-5x+1+\lambda=0$ (2) νὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν $3x'+\varrho'=1$.

2600. Τὸ τριώνυμον $\alpha x^2-4x+\gamma$ ἔχει μίαν κοινὴν ρίζαν x_0 μετὰ τοῦ τριωνύμου $\alpha x^2-2x-\gamma$. 'Υπάρχει δε τιμὴ τοῦ x διὰ τὴν ὁποίαν ἀληθεύουν αἱ ἰσότητες $\alpha x^2-4x+\gamma=-\dfrac{3}{4}$, $\alpha x^2-2x-\gamma=-\dfrac{15}{4}$. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ρίζαι τῶν τριωνύμων.

2601. Δίδονται τὰ τριώνυμα

$$\varphi(x)=x^2+\lambda x-(\mu+1) \quad \text{καὶ} \quad f(x)=x^2-(\mu+1)x+\lambda$$

τὰ ὁποῖα ἔχουν μίαν κοινὴν ρίζαν. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ρίζαι τῶν τριωνύμων $\varphi(x)$ καὶ $f(x)$, ἐὰν γνωρίζωμεν ὅτι τὰ λ καὶ μ εἶναι τοιαῦτα, ὥστε να καθιστοῦν ἐξίσωσιν, ὡς πρὸς αὐτὰ τὴν ἰσότητα $(\lambda^2+\mu^2)(\lambda+\mu+2)=0$.

2602. Δίδονται τὰ τριώνυμα $\varphi(x)=\alpha x^2+\beta x+3\gamma$ καὶ $f(x)=x^2+3x+\gamma$ τὰ ὁποῖα ἔχουν μίαν κοινὴν ρίζαν Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ συντελεσταὶ α, β, γ, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι αὐτὰ διαιρούμενα εἴτε διὰ $x-2$ εἴτε διὰ $x+1$, ἀφίνουν ἀντιστοίχως τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον.

2603. Νὰ σχηματισθῇ ἐξίσωσις δευτέρου βαθμοῦ, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ ὡς ρίζας τὰς δύο μὴ κοινὰς ρίζας τῶν ἐξισώσεων

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0 \quad \text{καὶ} \quad \alpha' x^2+\beta' x+\gamma'=0.$$

2604. Δίδεται ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ (1). Σχηματίζομεν ἐξίσωσιν (2), ἡ ὁποία ἔχει ρίζας τὰς $x'+\dfrac{1}{x'}$ καὶ $x''+\dfrac{1}{x''}$ καὶ ἐξίσωσιν (3), ἡ ὁποία ἔχει ρίζας τὰς $\dfrac{x'+1}{x'-1}$ καὶ $\dfrac{x''+1}{x''-1}$ καὶ ἐξίσωσιν (4), ἡ ὁποία ἔχει ρίζας τὰς x'^2 καὶ x''^2. Νὰ εὑρεθῇ ἡ συνθήκη ἵνα: 1ον ἡ ἐξίσωσις (2) ἔχῃ δύο ῥίζας ἴσας· 2ον ἡ ἐξίσωσις (3) ἔχῃ δύο ῥίζας ἀντιθέτους· 3ον ἡ ἐξίσωσις (4) ἔχῃ δύο ῥίζας ἴσας· 4ον αἱ (1) καὶ (4) ἔχουν μίαν κοινὴν ῥίζαν· 5ον αἱ (1) καὶ (4) ἔχουν δύο κοινὰς ῥίζας.

2605. Ζητοῦνται αἱ ῥίζαι x' καὶ x'' τοῦ τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, τὸ ὁποῖον δὲν ἔχει κοινὴν ῥίζαν μὲ τὸ τριώνυμον $\gamma x^2+\beta x+\alpha$, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι μεταξὺ τῶν ῥιζῶν του x', x'' ὑφίσταται ἡ σχέσις $\alpha x'^2+\beta x'x''+\gamma x''^2=0$ καὶ μεταξὺ τῶν συντελεστῶν του α, β, γ, ἡ σχέσις $x'\beta^2-(x'+x'')\beta\gamma+x''\gamma^2=0$. (Πολυτεχνεῖον 1932)

2606. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ τιμὴ τοῦ λ εἰς τρόπον, ὥστε αἱ ἐξισώσεις $\lambda x+y=\lambda$ καὶ $(\lambda-36\mu)x^2-xy+(\mu-1)y^2=\lambda^2(1-x^2)+(1-\lambda)x$ νὰ ἔχουν κοινὴν λύσιν δι' οἱανδήποτε τιμὴν τοῦ μ. (Πολυτεχνεῖον 1934)

2607. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἀπολύτως μικρότεραι ἀκέραιαι τιμαὶ τῶν συντελεστῶν λ καὶ μ τοῦ τριωνύμου $x^2+\mu x+\lambda$, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τοῦτο ἔχει μίαν κοινὴν ῥίζαν μετὰ τοῦ τριωνύμου $x^2+\lambda x+\mu$ καὶ ὅτι ἡ κοινὴ αὕτη ῥίζα εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἄλλης ῥίζης τοῦ πρώτου καὶ μικροτέρα τῆς ἄλλης ῥίζης τοῦ δευτέρου.

2608. Δίδεται ἡ ἐξίσωσις $x^2+\lambda x+k=0$, (1), ἡ ὁποία ἔχει δύο ῥίζας x' καὶ x'' διαφόρους τῆς 1. 1ον. Νὰ σχηματισθῇ ἡ ἐξίσωσις (2), ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ ῥίζας $\frac{x'-1}{x'-1}$ καὶ $\frac{x''+1}{x''-1}$. 2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ἐξίσωσις (1) θὰ προκύψῃ ἐκ τῆς ἐξισώσεως (2), ἐὰν ἐργασθῶμεν ὁμοίως. 3ον. Ποία σχέσις πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν λ καὶ k, ἵνα αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2) ἔχουν μίαν κοινὴν ῥίζαν. 4ον. Νὰ προσδιορισθοῦν τὰ λ καὶ k, ἵνα αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2) ἔχουν δύο κοινὰς ῥίζας.

2609. Δίδεται ἡ ἐξίσωσις $x^2-2\lambda x+1=0$ (1), ἡ ὁποία ἔχει ῥίζας x', x''. Ζητεῖται: 1ον νὰ σχηματισθῇ δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις (2), ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ ῥίζας $x'+\frac{\mu}{x'}$ καὶ $x''+\frac{\mu}{x''}$, ὅπου μ παριστάνει δοθεῖσαν ποσότητα διάφορον τοῦ μηδενός. 2ον. Ποία σχέσις πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν λ καὶ μ, ἵνα αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2) ἔχουν μίαν κοινὴν ῥίζαν. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ῥίζαι τῶν δύο ἐξισώσεων καὶ νὰ σχηματισθῇ ἡ σχέσις, ἡ ἀνεξάρτητος τοῦ λ καὶ μ, ἡ ἱκανοποιοῦσα τὰς ἀνίσους ῥίζας τῶν δύο ἐξισώσεων. 3ον. Ποία σχέσις πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν λ καὶ μ, ἵνα μία καὶ μόνον ῥίζα τῆς ἐξισώσεως (2) περιέχεται μεταξὺ τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως (1).

2610. Δίδονται αἱ ἐξισώσεις

$$\varphi(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma=0 \ (1) \quad \text{καὶ} \quad f(x)=\alpha' x^2+\beta' x+\gamma'=0 \quad (2),$$

αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἀντιστοίχως ῥίζας x', x'' καὶ ϱ', ϱ''.

Θέτομεν $t=\frac{(x'-\varrho')(x''-\varrho'')}{(x''-\varrho')(x'-\varrho'')}$ καὶ ζητεῖται νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ποσότης $Z=t+\frac{1}{t}$, συναρτήσει τῆς ἀπαλειφούσης R τῶν δύο ἐξισώσεων καὶ τῶν διακρινουσῶν των Δ καὶ Δ'.

2611. Νὰ ὁρισθοῦν οἱ συντελεσταὶ λ καὶ μ, ἵνα τὰ τριώνυμα

$$\lambda x^2+\mu x-1, \quad -x^2+\lambda x+\mu, \quad 5x^2-4x-1$$

ἔχουν κοινὴν ρίζαν, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι μεταξὺ τῶν συντελεστῶν λ καὶ μ ὑπάρχει ἡ σχέσις $\lambda\mu+6=0$.

2612. Ἀριθμητικὴ καὶ φθίνουσα γεωμετρικὴ πρόοδος ἔχουν τὸν αὐτὸν πρῶτον ὅρον. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων τῆς γεωμετρικῆς ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τιμῶν, τὰς ὁποίας πρέπει νὰ λάβουν οἱ λ καὶ μ, ἵνα αἱ ἐξισώσεις $(\lambda+4)x^2+(\lambda-8)x+6=0$, $(\mu+1)x^2+(\mu-5)x+3=0$ ἔχουν τὰς αὐτὰς ρίζας. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ πρόοδοι, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ὁ λόγος τῆς γεωμετρικῆς ἰσοῦται πρὸς τὸν ἀντίστροφον τοῦ λόγου τῆς ἀριθμητικῆς καὶ ὅτι ὁ δεύτερος ὅρος τῆς γεωμετρικῆς προόδου εἶναι ἴσος μὲ τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ δευτέρου ὅρου τῆς ἀριθμητικῆς προόδου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤ.

ΛΥΣΙΣ ΚΑΙ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΙΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

621. Λύσις καὶ διερεύνησις προβλημάτων τοῦ δευτέρου βαθμοῦ. Εἴπομεν εἰς τὴν § 397, ὅτι διὰ νὰ λύσωμεν ἕνα πρόβλημα τοῦ δευτέρου βαθμοῦ ἀκολουθοῦμεν τὴν αὐτὴν μέθοδον, ποὺ ἠκολουθήσαμεν κατὰ τὴν λύσιν ἑνὸς προβλήματος τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἢ περισσοτέρους ἀγνώστους. Δηλ.:

1ον. ***Ἐκλέγομεν τὸν ἄγνωστον ἢ τοὺς ἀγνώστους τοῦ προβλήματος.***

2ον. ***Εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν ἢ τὰς ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος.***

3ον. ***Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν ἢ τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων.***

4ον. ***Κάμνομεν τὴν ἐπαλήθευσιν καὶ τὴν διερεύνησιν τοῦ προβλήματος.***

Ἡ διερεύνησις τοῦ προβλήματος εἶναι πάντοτε ἀπαραίτητος, πρὸ παντός, ὅταν τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος εἶναι ἐγγράμματα. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, πρὶν παραδεχθῶμεν, ὡς λύσεις τοῦ προβλήματος, τὰς εὑρεθείσας τιμὰς τοῦ ἀγνώστου ἢ τῶν ἀγνώστων, πρέπει νὰ ἐξετάζωμεν, ἐὰν αἱ λύσεις αὐταὶ ἐπαληθεύουν μερικοὺς περιορισμούς, οἱ ὁποῖοι πηγάζουν ἀπὸ τὴν φύσιν τοῦ προβλήματος. Οἱ περιορισμοὶ αὐτοὶ κατατάσσονται κυρίως εἰς τρεῖς κατηγορίας :

I. ***Ρίζαι πραγματικαί.*** Διὰ νὰ εἶναι παραδεκταὶ αἱ τιμαὶ τοῦ ἀγνώστου πρέπει νὰ εἶναι πραγματικαὶ δηλ. πρέπει νὰ εἶναι

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma\geqslant 0.$$

II ***Σημεῖα τῶν ριζῶν.*** Εἰς πολλὰ προβλήματα αἱ τιμαὶ τοῦ ἀγνώστου πρέπει νὰ εἶναι θετικαί, διὰ νὰ εἶναι παραδεκταί. Διὰ τοῦτο πρέπει νὰ συναληθεύουν αἱ ἀνισότητες

$$\Delta \geqslant 0, \quad \Gamma > 0 \quad \text{καὶ} \quad \Sigma > 0.$$

III. ***Μέγεθος τῶν ῥιζῶν***. Εἰς πολλὰ προβλήματα, αἱ τιμαὶ τοῦ ἀγνώστου εἶναι παραδεκταί, ὅταν εἶναι μεγαλύτεραι ἢ μικρότεραι ἑνὸς ἀριθμοῦ ξ. Ὁ ἀριθμὸς ξ δύναται νὰ δοθῇ αὐθαιρέτως ἢ νὰ προκύπτῃ ἀπὸ τὴν φύσιν τοῦ ἀγνώστου,

Π. χ. Ὅταν ὁ ἄγνωστος x ἑνὸς προβλήματος εἶναι μία πλευρὰ ἑνὸς τριγώνου, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὸ ἄθροισμα σ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του, ἡ τιμὴ τοῦ x θὰ εἶναι παραδεκτὴ μόνον ὅταν θὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ σ, διότι, ὅπως γνωρίζομεν ἐκ τῆς Γεωμετρίας, κάθε πλευρὰ τριγώνου εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων.

Διὰ νὰ καθορίσωμεν τὴν θέσιν τοῦ ἀριθμοῦ ξ πρὸς τὰς ῥίζας τῆς ἐξισώσεως τοῦ προβλήματος χρησιμοποιοῦμεν τὰ ἐξαγόμενα, τὰ ὁποῖα περιέχονται εἰς τὸν πίνακα τῆς § 574.

Ἐπίσης εἰς ἄλλα προβλήματα αἱ τιμαὶ τοῦ ἀγνώστου εἶναι παραδεκταί ὅταν περιέχωνται μεταξὺ δύο ἀριθμῶν ξ_1 καὶ ξ_2 ($\xi_1 < \xi_2$). Διὰ νὰ καθορίσωμεν τὴν θέσιν τῶν ἀριθμῶν ξ_1 καὶ ξ_2 χρησιμοποιοῦμεν τὰ ἐξαγόμενα, τὰ ὁποῖα περιέχονται εἰς τὸν πίνακα τῆς § 582.

622. Παράδειγμα 1ον. Πρόβλημα. ***Ἕνα σῶμα ἐκσφενδονίζεται κατακορύφως εἰς τὸ κενὸν μὲ μίαν ἀρχικὴν ταχύτητα*** v_0. ***Μετὰ πόσον χρόνον θὰ φθάσῃ εἰς ἕνα ὕψος*** h ***καὶ ποία θὰ εἶναι τότε ἡ ταχύτης του; (Ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν).***

Γνωρίζομεν, ὅτι ἕνα σῶμα κινεῖται πρὸς τὰ ἄνω μὲ μίαν ἐπιβραδυνομένην κίνησιν καὶ ὅτι τὸ διάστημα, ποὺ διανύει, δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

ὅπου s παριστάνει τὸ διανυθὲν διάστημα καὶ t τὸν χρόνον. Ἐπειδὴ ἐδῶ τὸ διάστημα s εἶναι ἴσον μὲ h ὁ προηγούμενος τύπος γίνεται

$$h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad \text{ἢ} \quad g t^2 - 2 v_0 t + 2h = 0. \qquad (1)$$

Διερεύνησις. Διὰ νὰ ἔχῃ ἡ ἐξίσωσις (1) ῥίζας πραγματικὰς πρέπει νὰ εἶναι

$$\Delta = v_0^2 - 2gh \geqslant 0 \quad \text{ἢ} \quad h \leqslant \frac{v_0^2}{2g}.$$

Ἐὰν $h = \dfrac{v_0^2}{2g}$, ἡ ἐξίσωσις (1) ἔχει μίαν διπλῆν ῥίζαν

$$t = -\frac{\beta}{2\alpha} = \frac{v_0}{g}.$$

Ἡ τιμὴ αὐτὴ τοῦ t ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸν χρόνον, τὸν ὁποῖον χρειάζεται τὸ κινητὸν διὰ νὰ ἀνέλθῃ εἰς τὸ μεγαλύτερον δυνατὸν ὕψος. Τὸ κινητὸν τότε θὰ ἔχῃ μίαν ταχύτητα

$$v=v_0-gt \quad ἢ \quad v=v_0-g\,\frac{v_0}{g}=0.$$

Ἐὰν $h<\frac{v_0^2}{2g}$, ἡ ἐξίσωσις (1) ἔχει δύο ρίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους.

Ἐπειδὴ τὸ γινόμενον τῶν ριζῶν εἶναι $\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{2h}{g}>0$ καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ριζῶν εἶναι $-\frac{\beta}{\alpha}=\frac{2v_0}{g}>0$, αἱ δύο ρίζαι τῆς (1) εἶναι θετικαὶ καὶ ἄνισοι καὶ δίδονται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$t=\frac{v_0\pm\sqrt{v_0^2-2gh}}{g}.$$

Καὶ αἱ δύο ρίζαι t_1 καὶ t_2 εἶναι παραδεκταί, διότι τὸ σῶμα διέρχεται δύο φορὰς ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται εἰς ἕνα ὕψος h, τὴν πρώτην φορὰν κατὰ τὴν ἄνοδόν του καὶ τὴν δευτέραν φορὰν κατὰ τὴν κάθοδόν του.

Ἐὰν $h=0$, αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως (1) εἶναι $t_1=0$ καὶ $t_2=\frac{2v_0}{g}$

Ὁ χρόνος $t_1=0$ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ὡρισμένην στιγμήν, κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ σῶμα ἐκσφενδονίζεται· ὁ χρόνος $t_2=\frac{2v_0}{g}$ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸν τελικὸν χρόνον, κατὰ τὸν ὁποῖον τὸ σῶμα ἐπαναπίπτει εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἀναχωρήσεως.

Ἡ διάρκεια τῆς ἀνόδου εἶναι λοιπὸν ἴση μὲ τὴν διάρκειαν τῆς καθόδου.

Ἡ ταχύτης $v=v_0-gt$, τὴν ὁποίαν ἔχει τὸ σῶμα κατὰ τὴν στιγμὴν $t_1=0$ εἶναι $v=v_0$ καὶ κατὰ τὴν στιγμὴν $t_2=\frac{2v_0}{g}$ εἶναι

$$v=v_0-g\,.\,\frac{2v_0}{g}=-v_0.$$

Ἡ ἀρνητικὴ αὐτὴ τιμὴ δεικνύει, ὅτι, ὅταν τὸ σῶμα ἐπανέρχεται εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἀναχωρήσεως, ἔχει μίαν ταχύτητα ἀντίθετον τῆς ἀρχικῆς.

623. Παράδειγμα 2ον. Πρόβλημα. ***Δίδεται περιφέρεια κύκλου Ο ἀκτῖνος R καὶ ἕνα σημεῖον Α τῆς περιφερείας του. Νὰ ἀχθοῦν ἀπὸ τὸ Α δύο ἴσαι χορδαὶ ΑΓ καὶ ΑΔ καὶ τοιαῦται, ὥστε νὰ εἶναι***

$$\overline{A\Gamma}^2+\overline{A\Delta}^2+\overline{\Gamma\Delta}^2=4\mu^2$$

ὅπου μ εἶναι τὸ δοθὲν μῆκος.

Φέρομεν τὴν διάμετρον ΑΒ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν χορδὴν ΓΔ εἰς τὸ Ε. Ἐπειδὴ ΑΓ=ΑΔ, τὸ Ε εἶναι τὸ μέσον τῆς ΓΔ.

Θέτομεν ΑΕ=x. Φέρομεν τὴν ΒΓ. Ἀπὸ τὸ ὀρθογ. τρίγωνον ΑΓΒ ἔχομεν $\overline{A\Gamma}^2=AB\,.\,AE$ ἢ $\overline{A\Gamma}^2=2R\,.\,x.$

Ἐπίσης ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΓΒ ἔχομεν

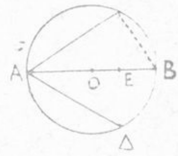
$$\overline{ΓΕ}^2 = ΑΕ \cdot ΕΒ \quad \text{ἢ} \quad \overline{ΓΕ}^2 = x(2R-x)$$

ὁπότε $\overline{ΓΔ}^2 = (2ΓΕ)^2 = 4\overline{ΓΕ}^2 = 4x(2R-x).$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν δοθεῖσαν σχέσιν τὰ ΑΓ, ΑΔ, ΓΔ με τὰ ἴσα των καὶ ἔχομεν

$$2Rx + 2Rx + 4x(2R-x) = 4\mu^2$$

ἢ $$\varphi(x) = x^2 - 3Rx + \mu^2 = 0. \qquad (1)$$



Σχ. 1

Διερεύνησις. Διὰ νὰ εἶναι τὸ πρόβλημα δυνατόν, πρέπει αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως (1) νὰ εἶναι *πραγματικαί, θετικαὶ καὶ μικρότεραι τοῦ* 2R.

1ον. Ρίζαι πραγματικαί. Ἡ ἐξίσωσις (1) ἔχει δύο ρίζας πραγματικάς, ἐὰν εἶναι $\Delta \geqslant 0$, δηλ. ἐὰν εἶναι $9R^2 - 4\mu^2 \geqslant 0$ ἢ $\mu \leqslant \frac{3R}{2}$.

2ον. Σημεῖον τῶν ριζῶν. Τὸ γινόμενον $\frac{\gamma}{\alpha}$ τῶν ριζῶν εἶναι ἴσον μὲ μ^2, δηλ. θετικόν, καὶ τὸ ἄθροισμα $-\frac{\beta}{\alpha}$ τῶν ριζῶν εἶναι ἴσον μὲ 3R, δηλαδὴ θετικόν· ἄρα αἱ δύο ρίζαι τῆς ἐξισώσεως (1) εἶναι θετικαί.

3ον. Σύγκρισις τοῦ 2R πρὸς τὰς ρίζας. Διὰ νὰ εἶναι αἱ δύο ρίζαι τῆς ἐξισώσεως (1) παραδεκταί, πρέπει νὰ εἶναι μικρότεραι τοῦ 2R. Διὰ νὰ συγκρίνωμεν λοιπὸν τὴν θέσιν τοῦ ἀριθμοῦ 2R πρὸς τὰς ρίζας x′ καὶ x″ τῆς ἐξισώσεως (1) σχηματίζομεν τὸ φ(2R). Ἐδῶ εἶναι

$$\varphi(2R) = 4R^2 - 6R^2 + \mu^2 = \mu^2 - 2R^2 = (\mu + R\sqrt{2})(\mu - R\sqrt{2}).$$

Ἐπειδὴ τὸ $\mu + R\sqrt{2}$ εἶναι θετικόν, τὸ φ(2R) ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ $\mu - R\sqrt{2}$.

α′) Ἐὰν $\varphi(2R) < 0$, δηλ. ἐὰν $\mu - R\sqrt{2} < 0$, ἢ $\mu < R\sqrt{2}$, ὁ ἀριθμὸς 2R κεῖται μεταξὺ τῶν δύο ριζῶν x′ καὶ x″ τῆς ἐξισώσεως (1)· δηλ. εἶναι $x' < 2R < x''$.

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν παρατηροῦμεν, ὅτι μόνον ἡ μικροτέρα ρίζα $x' = \frac{3R - \sqrt{9R^2 - 4\mu^2}}{2}$ εἶναι παραδεκτή.

β′) Ἐὰν συναληθεύουν αἱ ἀνισότητες $\Delta \geqslant 0$ καὶ $\varphi(2R) > 0$ (2) ὁ ἀριθμὸς 2R κεῖται ἐκτὸς τῶν ριζῶν x′ καὶ x″ τῆς ἐξισώσεως (1). Αἱ ἀνισότητες (2) συναληθεύουν διὰ $R\sqrt{2} < \mu < \frac{3R}{2}$.

Ἐὰν λοιπὸν εἶναι $R\sqrt{2} < \mu < \frac{3R}{2}$, ὁ ἀριθμὸς 2R κεῖται ἐκτὸς τῶν ριζῶν x′, x″ τῆς ἐξισώσεως καὶ ἐπειδὴ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ἡμιαθροίσματος $\frac{3R}{2}$ τῶν ριζῶν αὐτῶν, ἔπεται, ὅτι ὁ 2R εἶναι μεγαλύτερος τῶν δύο ριζῶν x′ καὶ x″, δηλ. εἶναι $x' < x'' < 2R$.

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν συνάγομεν, ὅτι καὶ αἱ δύο ρίζαι τῆς ἐξισώσεως (1) εἶναι μικρότεραι τοῦ $2R$ καὶ ἐπομένως εἶναι παραδεκταὶ καὶ αἱ δύο.

Ἰδιαίτεραι περιπτώσεις. Ἐὰν $\mu=R\sqrt{2}$, θὰ εἶναι $\varphi(2R)=0$ καὶ ἐπομένως ἡ μία ρίζα εἶναι ἴση μὲ $2R$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν αἱ χορδαὶ ΑΓ καὶ ΑΔ συμπίπτουν μὲ τὴν διάμετρον ΑΒ καὶ ἡ χορδὴ ΓΔ εἶναι μηδέν.

Ἡ ἄλλη ρίζα τῆς ἐξισώσεως εἶναι ἴση μὲ $x''=3R-2R=R$, ὁπότε αἱ χορδαὶ $ΑΓ=ΑΔ=R$ καὶ ἡ χορδὴ ΓΔ εἶναι ἴση μὲ τὴν διάμετρον.

Ἐὰν $\mu=\frac{3R}{2}$, ἡ ἐξίσωσις (1) ἔχει μίαν διπλῆν ρίζαν $x=\frac{3R}{2}$ καὶ αἱ χορδαὶ ΑΓ καὶ ΑΔ σχηματίζουν ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον.

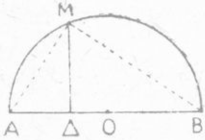
Ἐὰν $\mu=0$, τὸ γινόμενον τῶν ριζῶν εἶναι μηδὲν καὶ ἡ μία ρίζα εἶναι μηδέν, ἡ δὲ ἄλλη ἴση μὲ $2R$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν δὲν ὑπάρχει χορδή, ἡ δὲ ΓΔ εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας εἰς τὸ σημεῖον Α.

Συμπέρασμα. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἔχει μίαν λύσιν $x=\frac{3R-\sqrt{9R^2-4\mu^2}}{2}$, ὅταν $0<\mu<R\sqrt{2}$

καὶ ἔχει δύο λύσεις $x=\frac{3R\pm\sqrt{9R^2-4\mu^2}}{2}$, ὅταν $R\sqrt{2}<\mu<\frac{3R}{2}$.

624. Παράδειγμα 3ον. Πρόβλημα. ***Δίδεται ἡ ἡμιπεριφέρεια Ο διαμέτρου $AB=2R$. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς ἡμιπεριφερείας ἕνα σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε, ἐὰν φέρωμεν τὴν κάθετον ΜΔ ἐπὶ τὴν διάμετρον ΑΒ, νὰ ἔχωμεν $ΑΔ+ΜΔ=\lambda$, ὅπου λ εἶναι δοθεὶς θετικὸς ἀριθμός.***

Ἡ θέσις τοῦ σημείου Μ ὁρίζεται, ἂν ὁρισθῇ ἡ θέσις τοῦ σημείου Δ ἐπὶ τῆς ΑΒ. Θέτομεν $ΑΔ=x$.



Σχ. 2

Φέρομεν τὰς χορδὰς ΜΑ καὶ ΜΒ· ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΜΒ ἔχομεν

$$\overline{ΜΔ}^2=ΑΔ\times ΔΒ \quad ἢ \quad \overline{ΜΔ}^2=x(2R-x)$$

ἢ

$$ΜΔ=\sqrt{x(2R-x)}$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν δοθεῖσαν σχέσιν τὰ ΑΔ καὶ ΜΔ μὲ τὰ ἴσα των καὶ ἔχομεν

$$x+\sqrt{x(2R-x)}=\lambda \quad ἢ \quad \sqrt{x(2R-x)}=\lambda-x \qquad (1)$$

Ὑψώνομεν εἰς τὸ τετράγωνον καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (1) καὶ ἔχομεν

$$x(2R-x)=\lambda^2-2\lambda x+x^2 \quad ἢ \quad \varphi(x)=2x^2-2(R+\lambda)x+\lambda^2=0. \qquad (2)$$

Διερεύνησις. Διὰ νὰ εἶναι τὸ πρόβλημα δυνατὸν πρέπει αἱ ρίζαι τῆς (2) νὰ εἶναι *πραγματικαί*, *θετικαί*, μικρότεραι τοῦ $2R$ καὶ νὰ καθιστοῦν θετικὴν τὴν ποσότητα $\lambda-x$, δηλ. πρέπει νὰ εἶναι

$$\lambda-x>0 \quad ἢ \quad x<\lambda. \qquad (3)$$

1ον. Ρίζαι πραγματικαί. Ἡ ἐξίσωσις (2) ἔχει ρίζας πραγματικάς, ἐὰν $\Delta=(R+\lambda)^2-2\lambda^2\geqslant0$ ἢ $\lambda^2-2R\lambda-R^2\leqslant0.$ (4)

Αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου $\lambda^2-2R\lambda-R^2$ εἶναι

$$R\left(1-\sqrt{2}\right) \quad \text{καὶ} \quad R\left(1+\sqrt{2}\right)\cdot$$

ἄρα ἡ ἀνισότης (4) ἀληθεύει διὰ $R\left(1-\sqrt{2}\right)\leqslant\lambda\leqslant R\left(1+\sqrt{2}\right)$.

Ἐπειδὴ ὁ λ εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς πρέπει νὰ εἶναι

$$0<\lambda\leqslant R\left(1-\sqrt{2}\right)$$

διὰ νὰ ἔχῃ ἡ ἐξίσωσις (2) ρίζας πραγματικάς.

2ον. Σημεῖον τῶν ριζῶν. Τὸ γινόμενον τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως (2) εἶναι $\frac{\lambda^2}{2}$, δηλ. θετικὸν καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ριζῶν της εἶναι $R+\lambda$, δηλαδὴ θετικόν· ἄρα καὶ αἱ δύο ρίζαι τῆς ἐξισώσεως (2) εἶναι θετικαί.

3ον. Σύγκρισις τοῦ λ πρὸς τὰς ρίζας. Διὰ νὰ εἶναι καὶ αἱ δύο ρίζαι τῆς ἐξισώσεως (2) παραδεκταὶ πρέπει νὰ ἐπαληθεύουν τὴν σχέσιν (3), δηλαδὴ νὰ εἶναι μικρότεραι τοῦ λ. Διὰ νὰ συγκρίνωμεν τὴν θέσιν τοῦ λ πρὸς τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως (2) σχηματίζομεν τὸ $\varphi(\lambda)$. Ἐδῶ εἶναι $\quad \varphi(\lambda)=2\lambda^2-2(R+\lambda)\lambda+\lambda^2=\lambda(\lambda-2R)$.

α') Ἐὰν $\varphi(\lambda)<0$, δηλ. ἐὰν $\lambda(\lambda-2R)<0$ ἢ $0<\lambda<2R$, ὁ λ κεῖται μεταξὺ τῶν ριζῶν x' καὶ x'' τῆς ἐξισώσεως (2)· δηλ. εἶναι

$$x'<\lambda<x''.$$

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν καὶ ἀπὸ τὴν σχέσιν (3) συνάγομεν, ὅτι μόνον ἡ μικροτέρα ρίζα

$$x=\frac{R+\lambda-\sqrt{(R+\lambda)^2-2\lambda^2}}{2} \quad \text{εἶναι παραδεκτή.}$$

β') Ἐὰν συναληθεύουν αἱ ἀνισότητες $\Delta\geqslant0$ καὶ $\varphi(\lambda)>0$ (5)

ὁ ἀριθμὸς λ κεῖται ἐκτὸς τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως (2).

Ἐπειδὴ θέλομεν ὁ ἀριθμὸς λ νὰ εἶναι μεγαλύτερος τῶν ριζῶν, ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὴν σχέσιν (3), πρέπει ὁ λ νὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν ριζῶν· δηλ. πρέπει νὰ ἀληθεύῃ καὶ ἡ ἀνισότης

$$\lambda>\frac{R+\lambda}{2}. \qquad (6)$$

Ἡ ἀνισότης $\Delta\geqslant0$ ἀληθεύει διὰ $0<\lambda<R\left(1+\sqrt{2}\right)$.

Ἡ ἀνισότης $\varphi(\lambda)>0$ ἀληθεύει διὰ $\lambda>2R$,

Ἡ ἀνισότης (6) γράφεται $2\lambda>R+\lambda$ ἢ $\lambda>R$· καὶ αἱ τρεῖς ἀνισότητες συναληθεύουν διὰ $2R<\lambda<R\left(1+\sqrt{2}\right)$ (7)

Ὥστε, ἂν ἀληθεύῃ ἡ σχέσις (7), ὁ ἀριθμὸς λ θὰ εἶναι μεγαλύτερος τῶν ριζῶν x' καὶ x'' τῆς ἐξισώσεως (2), δηλ. θὰ εἶναι $x'<x''<\lambda$.

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν καὶ ἀπὸ τὴν σχέσιν (3) συνάγομεν, ὅτι καὶ αἱ δύο ρίζαι τῆς ἐξισώσεως (2) εἶναι παραδεκταί.

Ἰδιαίτεραι περιπτώσεις. Ἐὰν $\lambda=2R$ ἡ ἐξίσωσις (2) γίνεται $x^2-3Rx+2R^2=0$ καὶ ἔχει τὰς ρίζας R καὶ $2R$, αἱ ὁποῖαι εἶναι λύσεις τοῦ προβλήματος.

Ἐὰν $\lambda=R(1+\sqrt{2})$, ἡ διακρίνουσα εἶναι ἴση μὲ μηδὲν καὶ ἡ ἐξίσωσις (2) ἔχει τὴν διπλῆν ρίζαν $\frac{R(2+\sqrt{2})}{2}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΛΥΣΙΝ

2613. Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα Α καὶ Β, νὰ εὑρεθῇ ἕνα σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι $\overline{AM}^2=AB\times MB$. (1) Νὰ ἐξηγηθῇ ἡ ἀρνητικὴ τιμὴ τοῦ ἀγνώστου.

2614. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, ἐὰν γνωρίζωμεν τὰ ἀθροίσματα $AB+B\Gamma=\lambda$, $A\Gamma+B\Gamma=\mu$, ὅπου λ καὶ μ δοθέντες ἀριθμοί.

2615. Δίδεται ἕνα ὀρθ. τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου ἡ γωνία Γ εἶναι 30^0. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ καὶ μεταξὺ Α καὶ Β λαμβάνομεν ἕνα σημεῖον Μ καὶ φέρομεν τὴν ΜΔ κάθετον ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ΒΜ εἰς τρόπον, ὥστε τὰ τρίγωνα ΒΜΔ καὶ ΑΜΓ νὰ εἶναι ἰσοδύναμα.

2616. Ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ δίδονται αἱ δύο πλευραὶ α καὶ β καὶ τὸ ἐμβαδόν του Ε. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρά του γ. (Σχολὴ Εὐελπίδων)

2617. Δίδονται αἱ τρεῖς πλευραὶ α, β, γ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ. $(\alpha>\beta>\gamma)$. Νὰ εὑρεθῇ ἕνα μῆκος x θετικὸν ἢ ἀρνητικὸν καὶ τοιοῦτον ὥστε, ἐὰν αἱ πλευραί του αὐξηθοῦν κατ' αὐτό, νὰ εἶναι δυνατὴ ἡ κατασκευὴ ὀρθογωνίου τριγώνου. Διερεύνησις.

2618. Δίδεται τεταρτοκύκλιον ΟΑΒ μὲ καθέτους ἀκτῖνας τὰς ΟΑ καὶ ΟΒ· νὰ ὁρισθῇ ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΒ ἕνα σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε, ἐὰν φέρωμεν τὴν ΜΡ κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΒ, καὶ τὴν εὐθεῖαν ΜΑ, νὰ εἶναι ΜΡ=ΜΑ.

2619. Δίδεται ἡμικύκλιον Ο διαμέτρου ΑΒ=2R· νὰ ἀχθῇ ἐκ τοῦ Α μία χορδὴ ΑΓ τοιαύτη, ὥστε, ἐὰν φέρωμεν τὴν ΟΔ κάθετον ἀπὸ τὴν ΑΓ, νὰ ἔχωμεν $\overline{A\Gamma}^2+\overline{O\Delta}^2=\mu^2$. Διερεύνησις.

2620. Δίδεται ἡμιπεριφέρεια Ο διαμέτρου ΑΒ=2R. Νὰ προσδιορισθῇ ἐπὶ τῆς ἡμιπεριφερείας αὐτῆς ἕνα σημεῖον Μ, τοιοῦτον, ὥστε, ἐὰν φέρωμεν τὴν κάθετον ΜΔ ἐπὶ τὴν ΑΒ νὰ ἔχωμεν $AM+A\Delta=\alpha$, ὅπου α δοθεὶς θετικὸς ἀριθμός. Διερεύνησις.

2621. Δίδεται ἡμιπεριφέρεια διαμέτρου ΑΒ=2R νὰ ὁρισθῇ ἐπὶ τῆς ἡμιπεριφερείας αὐτῆς ἕνα σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε, ἐὰν φέρωμεν τὴν ΜΔ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ, νὰ ἔχωμεν $A\Delta+\Delta M=\Delta B$. Διερεύνησις.

2622. Ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ πλευρᾶς α εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἕνα κύκλον Ο. Νὰ ἀχθῇ μία χορδὴ ΜΝ τοῦ κύκλου παράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ Δ καὶ τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ε καὶ τοιαύτη, ὥστε νὰ εἶναι $M\Delta=\lambda$, ὅπου λ δοθεὶς θετικὸς ἀριθμός. Διερεύνησις.

2623. Δίδεται ἡμικύκλιον διαμέτρου ΑΒ=2R. Νὰ προσδιορισθῇ ἐπὶ τῆς ἡμιπεριφερείας αὐτοῦ ἕνα σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε, ἐὰν φέρωμεν τὴν ΜΔ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ νὰ ἔχωμεν $\overline{A\Delta}^2+\overline{\Delta B}^2+\overline{M\Delta}^2=\alpha^2$, ὅπου α δοθὲν μῆκος. Διερεύνησις.

2624. Εἰς δοθὲν ἡμικύκλιον ἀκτῖνος R νὰ ἐγγραφῇ ἕνα τραπέζιον, τοῦ ὁποίου ἡ μεγάλη βάσις νὰ συμπίπτῃ μὲ τὴν διάμετρον καὶ τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος νὰ εἶναι ἴση μὲ 2τ. Διερεύνησις.

2625. Δίδεται ἡμικύκλιον Ο διαμέτρου ΑΒ=2R. Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Μ τῆς ΑΒ φέρομεν κάθετον ΜΓ ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ Γ. Νὰ ὁρισθῇ τὸ μῆκος ΑΜ εἰς τρόπον, ὥστε νὰ εἶναι $\overline{AM}^2+4\overline{M\Gamma}^2=\lambda^2$, ὅπου λ δοθὲν μῆκος. Διερεύνησις.

2626. Δίδεται κύκλος Ο διαμέτρου ΑΒ=2R. Νὰ ὁρισθῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ ἕνα σημεῖον Γ τοιοῦτον, ὥστε, ἂν φέρωμεν τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ νὰ τέμνῃ τὴν περιφέρειαν Ο εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε καὶ νὰ εἶναι 2ΑΓ+ΔΕ=2α. Διερεύνησις.

2627. Δίδεται ἡμικύκλιον Ο διαμέτρου ΑΒ=2R. Νὰ ἀχθῇ μία χορδὴ ΓΔ παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον ΑΒ εἰς τρόπον, ὥστε ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῆς ἀποστάσεως ΟΗ=x ἀπὸ τοῦ κέντρου καὶ τοῦ μήκους της νὰ εἶναι ἴση μὲ δοθὲν μῆκος λ. Διερεύνησις.

2628. Δίδεται μία περιφέρεια Ο ἀκτῖνος R καὶ μία ἐφαπτομένη εἰς ἕνα σημεῖον Μ τῆς περιφερείας. Νὰ ἀχθῇ μία χορδὴ ΑΒ παράλληλος πρὸς τὴν ἐφαπτομένην καὶ τοιαύτη, ὥστε, ἐὰν φέρωμεν τὰς καθέτους ΑΔ καὶ ΒΓ ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην, τὸ σχηματιζόμενον ὀρθογώνιον ΑΒΔΓ νὰ ἔχῃ τὰς διαγωνίους του ἴσας μὲ δοθὲν μῆκος λ.

2629. Δίδεται ἡμικύκλιον Ο διαμέτρου ΑΒ=2R. Ἡ ἐφαπτομένη αὐτοῦ εἰς ἕνα σημεῖον Μ συναντᾷ τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ Β εἰς ἕνα σημεῖον Γ, τὴν δὲ ἐφαπτομένην εἰς τὸ σημεῖον Α εἰς τὸ σημεῖον Δ, καὶ τὴν κάθετον πρὸς τὴν ΑΒ, ἀκτῖνα εἰς τὸ σημεῖον Ζ Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ΒΓ=x εἰς τρόπον, ὥστε τὸ τραπέζιον ΟΒΓΖ νὰ ἔχῃ περίμετρον τ. Διερεύνησις.

2630. Δίδεται ἡμικύκλιον Ο διαμέτρου ΑΒ=2R. Νὰ ὁρισθῇ ἐπὶ τῆς ἡμιπεριφερείας αὐτοῦ ἕνα σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε, ἐὰν φέρωμεν τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ σημεῖον αὐτό, ἡ ὁποία συναντᾷ τὴν ΑΒ εἰς τὸ Γ, νὰ ἔχωμεν $\frac{M\Gamma}{MA}=\mu$, ὅπου μ δοθεὶς θετικὸς ἀριθμός. Διερεύνησις.

2631. Δίδεται ἡμιπεριφέρεια Ο διαμέτρου ΑΒ=2R, καὶ ζητεῖται νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος μιᾶς χορδῆς ΓΔ παραλλήλου πρὸς τὴν ΑΒ εἰς τρόπον, ὥστε νὰ εἶναι $\overline{A\Gamma}^2+\overline{\Gamma\Delta}^2+\overline{\Delta B}^2=4\mu^2$. Διερεύνησις.

2632. Δίδεται ἡμικύκλιον διαμέτρου ΑΒ=2R. Νὰ προσδιορισθῇ ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΑΒ ἕνα σημεῖον Γ τοιοῦτον, ὥστε, ἐὰν κατασκευάσωμεν ἡμιπεριφερείας μὲ διαμέτρους τὰς ΑΓ καὶ ΓΒ, εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ δοθέντος ἡμικυκλίου, ἡ ἐπιφάνεια ἡ περιλαμβανομένη μεταξὺ τῶν τριῶν ἡμιπεριφερειῶν νὰ εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν ἐπιφάνειαν κύκλου ἀκτῖνος μ. Διερεύνησις.

2633. Δίδεται ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ τοιοῦτον, ὥστε ΑΒ=α καὶ ΑΓ=2.ΑΒ=2α. Νὰ ὁρισθῇ ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης του ΒΓ ἕνα σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε, ἐὰν φέρωμεν τὰς καθέτους ΜΔ ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ ΜΕ ἐπὶ τὴν ΑΓ καὶ μὲ πλευρὰς τὰς ΑΔ καὶ ΑΕ κατασκευάσωμεν, ἐξωτερικῶς τοῦ τριγώνου, τετράγωνα ΑΘΚΔ καὶ ΑΕΖΗ, τὸ ἐμβαδὸν τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῆς γραμμῆς ΜΔΚΘΑΗΖΕΜ νὰ εἶναι ἴσον μὲ μ^2. Διερεύνησις.

2634. Δίδεται ἡμικύκλιον διαμέτρου ΑΒ=2R καὶ ἕνας κύκλος Γ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ ἡμικυκλίου, ἐφαπτόμενος τῆς ἡμιπεριφερείας εἰς τὸ σημεῖον Δ καὶ τῆς διαμέτρου εἰς τὸ Μ. Νὰ προσδιορισθῇ τὸ σημεῖον Μ εἰς τρόπον, ὥστε νὰ εἶναι $AM+2y=\mu$ ἔνθα $2y=$διάμετρος τοῦ κύκλου Γ καὶ μ δοθὲν μῆκος. Διερεύνησις.

2635. Δίδεται ἡμικύκλιον Ο διαμέτρου $AB=2R$· νὰ ὁρισθῇ ἐπὶ τῆς ἡμιπεριφερείας του ἕνα σημεῖον τοιοῦτον, ὥστε, ἐὰν φέρωμεν τὴν ΜΓ κάθετον ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ Α καὶ τὴν εὐθεῖαν ΜΒ νὰ ἔχωμεν
$\overline{MB}^2+k.\overline{M\Gamma}^2=2\overline{AB}^2$, ὅπου k δοθεὶς ἀριθμός. Διερεύνησις.

2636. Δίδεται ἡμικύκλιον Ο διαμέτρου $AB=2R$. Νὰ ὁρισθῇ ἐπὶ τῆς διαμέτρου ἕνα σημεῖον Γ τοιοῦτον, ὥστε, ἐὰν ὑψώσωμεν τὴν κάθετον ΓΔ ἐπὶ τὴν ΑΒ μέχρις ὅτου συναντήσῃ τὴν ἡμιπεριφέρειαν εἰς τὸ σημεῖον Δ, ἡ διάμεσος ΔΜ τοῦ ὀρθογ. τριγώνου ΑΓΔ νὰ ἔχῃ δοθὲν μῆκος μ. Διερεύνησις.

2637. Δίδεται ἡμικύκλιον Ο διαμέτρου $AB=2R$. Νὰ ὁρισθῇ ἐπὶ τῆς ἡμιπεριφερείας Ο ἕνα σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε, ἐὰν φέρωμεν τὴν ΜΗ κάθετον ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ Β νὰ ἔχωμεν $AM+2MH=\lambda$, ὅπου λ δοθὲν μῆκος καὶ ΑΜ χορδή. Διερεύνησις.

2638. Δίδεται μία εὐθεῖα $OA=\alpha$. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ ἀκτὶς x ἑνὸς κύκλου, ὁ ὁποῖος ἔχει κέντρον τὸ Ο οὕτως, ὥστε, ἐὰν φέρωμεν τὰς ἐφαπτομένας αὐτοῦ ΑΤ καὶ ΑΤ΄, ἡ χορδή, ἡ ὁποία συνδέει τὰ δύο σημεῖα ἐπαφῆς Τ καὶ Τ΄ νὰ εἶναι ἴση μὲ λ. Διερεύνησις.

2639. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου, ἐὰν γνωρίσωμεν, ὅτι ἡ ὑποτείνουσά του εἶναι ἴση μὲ α καὶ ὅτι τὸ γινόμενον τῶν καθέτων πλευρῶν του ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων των. Διερεύνησις.

2640. Δίδεται ἡμικύκλιον διαμέτρου $AB=2R$. Ζητεῖται νὰ προσδιορισθῇ ἐπὶ τῆς ἡμιπεριφερείας ἕνα σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι $MA+\lambda.MB=3R$, ὅπου λ δοθεῖσα σταθερὰ θετικὴ ἢ ἀρνητική. Διερεύνησις.

2641. Δίδεται κύκλος Ο καὶ μία διάμετρος αὐτοῦ $AB=2R$. Ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης αὐτοῦ εἰς τὸ σημεῖον Α λαμβάνομεν ἕνα μῆκος $AM=x$ μεγαλύτερον τῆς ἀκτῖνος καὶ ἐκ τοῦ Μ φέρομεν τὴν δευτέραν ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου, ἡ ὁποία συναντᾷ τὴν προέκτασιν τῆς ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Γ. Νὰ προσδιορισθῇ τὸ σημεῖον Μ εἰς τρόπον, ὥστε ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου ΑΜΓ νὰ εἶναι εἶναι ἴση μὲ 4R.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ΄.

ΑΠΟΛΥΤΟΣ ΤΙΜΗ ΤΩΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΑΠΟΛΥΤΩΝ ΤΙΜΩΝ ΤΩΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

625. **Ἀπόλυτος τιμὴ ἀριθμοῦ.** Γνωρίζομεν (§ 14) ὅτι :

Ἀπόλυτος τιμὴ ἢ μέτρον ἑνὸς ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι ὁ ἴδιος ὁ ἀριθμὸς χωρὶς τὸ σημεῖον του.

Οὕτω $|+7|=7,\quad |-8|=8$

Γενικῶς θὰ εἶναι

$$\boxed{\quad |\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \text{ἐὰν} \quad \alpha \geqslant 0 \\ -\alpha, & \text{ἐὰν} \quad \alpha < 0 \end{cases} \quad}$$

626. I. Ἰδιότης. ***Δύο ἀντίθετοι ἀριθμοὶ ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀπόλυτον τιμήν.***

Πράγματι εἶναι $|+5|=5$ καὶ $|-5|=5$
καὶ γενικῶς, ἐὰν α εἶναι ἀλγεβρικὸς ἀριθμός, θὰ εἶναι

$$\boxed{\quad |-\alpha| = |\alpha| \quad}$$

627. II. Ἰδιότης. ***Ἐὰν α_1 καὶ α_2 εἶναι δύο ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοί, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἶναι*** $|\alpha_1-\alpha_2| = |\alpha_2-\alpha_1|$

Ἐπειδὴ $\alpha_1-\alpha_2=-(\alpha_2-\alpha_1)$ θὰ εἶναι καὶ

$$|\alpha_1-\alpha_2| = |-(\alpha_2-\alpha_1)| \quad \text{ἢ} \quad \boxed{\ |\alpha_1-\alpha_2| = |\alpha_2-\alpha_1|\ }$$

Παράδειγμα $\begin{cases} |12-5| = |7| = 7 \\ |5-12| = |-7| = 7 \end{cases}$

628. III. Ἰδιότης. ***Ἐὰν α εἶναι ἕνας πραγματικὸς ἀριθμὸς θὰ εἶναι*** $-|\alpha| \leqslant \alpha \leqslant |\alpha|$

Ἐὰν $\alpha \geqslant 0$, θὰ εἶναι $|\alpha|=\alpha$, ἄρα καὶ $-|\alpha|=-\alpha$ (1)

Ἀλλὰ $-\alpha<\alpha$ ἢ $-\alpha<|\alpha|$, ὁπότε ἡ (1) γίνεται

$$-|\alpha| < |\alpha| = \alpha \qquad (2)$$

Ἐὰν $\alpha<0$, θὰ εἶναι

$$|\alpha| = -\alpha, \quad \text{ἢ} \quad -|\alpha| = \alpha = |\alpha| \qquad (3)$$

Ἀπὸ τὰς (2) καὶ (3) συνάγομεν, ὅτι

$$\boxed{\quad -|\alpha| \leqslant \alpha \leqslant |\alpha| \quad}$$

Παράδειγμα. Ἐὰν λάβωμεν τὸν ἀριθμὸν 8, κατὰ τὰ ἀνωτέρω θὰ εἶναι $-|8| < 8 = |8|$ ἢ $-8 < 8 = 8$

Ἐὰν λάβωμεν τὸν ἀριθμὸν -5 θὰ εἶναι

$$-|-5| = -5 < |-5| \quad \text{ἢ} \quad -5 = -5 < 5$$

629. IV. Ἰδιότης. ***Ἐὰν α καὶ β εἶναι δύο πραγματικοὶ ἀριθμοὶ καὶ ἐὰν εἶναι $|\alpha| \leqslant |\beta|$, θὰ εἶναι $-|\beta| \leqslant \alpha \leqslant |\beta|$. Καὶ ἀντιστρόφως.***

Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $|\alpha| \leqslant |\beta|$ (1)

Πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (1) ἐπὶ -1 καὶ ἔχομεν

$$-|\alpha| \geqslant -|\beta| \quad \text{ἢ} \quad -|\beta| \leqslant -|\alpha| \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ $-|\alpha| \leqslant \alpha \leqslant |+\alpha|$ (§ 628) ἡ (2) γράφεται

$$-|\beta| \leqslant \alpha \leqslant |\alpha| \qquad (3)$$

Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $|\alpha| \leqslant |\beta|$, ἡ (3) γίνεται
$$-|\beta| \leqslant \alpha \leqslant |\beta|.$$
Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι :

Ἐὰν εἶναι $|\alpha| \leqslant |\beta|$ θὰ εἶναι $-|\beta| \leqslant \alpha \leqslant |\beta|$

Ἀντιστρόφως. Εὐκόλως ἀποδεικνύεται, ὅτι

Ἐὰν εἶναι $-|\beta| \leqslant \alpha \leqslant |\beta|$ θὰ εἶναι καὶ $|\alpha| \leqslant |\beta|$

Παράδειγμα. Ἔστω, ὅτι $|5| < |8|$· Κατὰ τὰ ἀνωτέρω θὰ εἶναι καὶ $-|8| < 5 < |8|$ ἢ $-8 < 5 < 8$

2642. *Ἀσκήσεις.* Ἐὰν $\alpha > 0$ καὶ $|x| < \alpha$ (1) νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι $-\alpha < x < +\alpha$ · καὶ ἀντιστρόφως.

630. Ἀπόλυτος τιμὴ ἀθροίσματος ἢ διαφορᾶς ἀριθμῶν.

Θεώρημα. ***Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ ἀθροίσματος δύο ἢ περισσοτέρων ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν εἶναι μικροτέρα ἢ ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν ὅρων του.***

Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις καθόσο οἱ προσθετέοι εἶναι δύο ἢ περισσότεροι.

1η. Περίπτωσις. Οἱ προσθετέοι εἶναι δύο. Ἔστωσαν οἱ ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοὶ α_1 καὶ α_2. Θὰ δείξωμεν, ὅτι
$$|\alpha_1+\alpha_2| \leqslant |\alpha_1| + |\alpha_2|.$$
Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς προσθέσεως ύο ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν, ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν δύο αὐτῶν ἀριθμῶν, ἐὰ. εἶναι ὁμόσημοι ἢ ἴση μὲ τὴν διαφορὰν τῶν ἀπολύτων τιμῶν των, ἐὰν εἶναι ἑτερόσημοι.

Ἐὰν λοιπὸν οἱ ἀριθμοὶ α_1 καὶ α_2 εἶναι ὁμόσημοι θὰ εἶναι
$$|\alpha_1+\alpha_2| = |\alpha_1| + |\alpha_2|. \tag{1}$$
Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ α_1 καὶ α_2 εἶναι ἑτερόσημοι θὰ εἶναι
$$|\alpha_1+\alpha_2| = |\alpha_1| - |\alpha_2| \text{ καὶ συνεπῶς } |\alpha_1+\alpha_2| < |\alpha_1| + |\alpha_2|. \tag{2}$$
Ἀπὸ τὰς σχέσεις (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι
$$\boxed{|\alpha_1+\alpha_2| \leqslant |\alpha_1| + |\alpha_2|}$$

2α Περίστωσις. ***Οἱ προσθετέοι εἶναι περισσότεροι τῶν δύο.*** Ἔστωσαν οἱ ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοὶ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

Θὰ δείξωμεν, ὅτι $|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3| \leqq |\alpha_1| + |\alpha_2| + |\alpha_3|$.

Γνωρίζομεν, ὅτι $|\alpha_1+\alpha_2| \leqq |\alpha_1| + |\alpha_2|$.

Ἐὰν θεωρήσωμεν τὸ ἄθροισμα $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$, ὡς ἄθροισμα τοῦ $(\alpha_1+\alpha_2)$ καὶ α_3 θὰ ἔχωμεν
$$|(\alpha_1+\alpha_2)+\alpha_3| \leqq |(\alpha_1+\alpha_2)| + |\alpha_3|$$
ἢ
$$|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3| \leqq |\alpha_1+\alpha_2| + |\alpha_3|. \tag{2}$$

Ἐὰν εἰς τὴν σχέσιν (2) ἀντικαταστήσωμεν τὸ $|\alpha_1+\alpha_2|$ μὲ τὸ $|\alpha_1|+|\alpha_2|$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον του ἢ μεγαλύτερόν του, ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὴν σχέσιν (1), θὰ ἔχωμεν κατὰ μείζονα λόγον

$$|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3| \leq |\alpha_1|+|\alpha_2|+|\alpha_3|.$$

Τὸ θεώρημα ἐδείχθη λοιπὸν διὰ 2 καὶ διὰ 3 ἀριθμούς. Θὰ δείξωμεν τώρα, ὅτι, ἐὰν τὸ θεώρημα εἶναι ἀληθὲς διὰ ρ ἀριθμούς, θὰ εἶναι ἀληθὲς καὶ διὰ ρ+1 ἀριθμούς.

Ἔστω, ὅτι εἶναι

$$|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_\rho| \leqslant |\alpha_1|+|\alpha_2|+|\alpha_3|+\cdots+|\alpha_\rho|$$

Προσθέτομεν καὶ εἰς τὰ δύο μέλη τῆς σχέσεως (3) τὸ $|\alpha_{\rho+1}|$ καὶ ἔχομεν

$$|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_\rho|+|\alpha_{\rho+1}| \leqslant |\alpha_1|+|\alpha_2|+|\alpha_3|+\cdots+|\alpha_\rho|+|\alpha_{\rho+1}|. \quad (4)$$

Ἀλλὰ (I περίπτωσις)

$$|(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_\rho)+\alpha_{\rho+1}| \leqslant |\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_\rho|+|\alpha_{\rho+1}|. \quad (5)$$

Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν σχέσιν (4) τὸ $|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_\rho|+|\alpha_{\rho+1}|$ μὲ τὸ $|\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\rho+\alpha_{\rho+1}|$ τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον του ἢ μικρότερόν του, ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὴν σχέσιν (5), θὰ ἔχωμεν κατὰ μείζονα λόγον

$$\boxed{|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_\rho+\alpha_{\rho+1}| \leqslant |\alpha_1|+|\alpha_2|+|\alpha_3|+\ldots+|\alpha_\rho|+|\alpha_{\rho+1}|}$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ θεώρημα ἀληθεύει διὰ ν=ρ, διὰ ν=ρ+1, ἄρα θὰ ἀληθεύῃ καὶ διὰ ν=ρ+2 καὶ οὕτω καθεξῆς.

Σημ. Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ ἑνὸς ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν ὅρων του ***μόνον***, ὅταν **οἱ** ὅροι του εἶναι ὁμόσημοι. Οὕτω·

$$\begin{cases} |+5+7+9|=|+21|=21 \\ |+5+7+9|=|+5|+|+7|+|+9|=5+7+9=21 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |-2-8-15|=|-25|=25 \\ |-2-8-15|=|-2|+|-8|+|-15|=2+8+15=25 \end{cases}$$

Ἐνῶ $\begin{cases} |+8-3+10|=|+15|=15 \\ |+8-3+10|=|+8|+|-3|+|+10|=8+3+10=21. \end{cases}$

Ἀσκήσεις. ***2643.*** Ἐὰν εἶναι $|x-y|<\alpha$ καὶ $|y-\omega|<\alpha$, νὰ δειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι $|x-\omega|<2\alpha$.

631. **Θεώρημα.** ***Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν εἶναι μεγαλυτέρα ἢ ἴση μὲ τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τῆς διαφορᾶς τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν δύο ἀριθμῶν.***

Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ α_1 καὶ α_2. Θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$|\alpha_1+\alpha_2| \geqslant \Big| |\alpha_1|-|\alpha_2| \Big|$$

Ἐπειδὴ $\alpha_1=\alpha_1+\alpha_2-\alpha_2$, θὰ εἶναι καὶ

$$|\alpha_1|=|\alpha_1+\alpha_2-\alpha_2| \quad \text{ἢ} \quad |\alpha_1|=|\alpha_1+\alpha_2+(-\alpha_2)|. \quad (1)$$

'Αλλὰ $\quad |\alpha_1+\alpha_2+(-\alpha_2)| \leqslant |\alpha_1+\alpha_2| + |-\alpha_2|$

ἢ $\quad |\alpha_1+\alpha_2+(-\alpha_2)| \leqslant |\alpha_1+\alpha_2| + |\alpha_2|. \qquad (2)$

'Από τὰς (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι

$$|\alpha_1| \leqslant |\alpha_1+\alpha_2| + |\alpha_2| \quad \text{ἢ} \quad |\alpha_1| - |\alpha_2| \leqslant |\alpha_1+\alpha_2|$$

ἢ $$|\alpha_1+\alpha_2| \geqslant |\alpha_1| - |\alpha_2|. \qquad (3)$$

'Ομοίως ἐπειδὴ $\alpha_2=\alpha_2+\alpha_1-\alpha_1$, θὰ εἶναι

$$|\alpha_2| = |\alpha_2+\alpha_1-\alpha_1| = |\alpha_2+\alpha_1+(-\alpha_1)| \leqslant |\alpha_2+\alpha_1| + |-\alpha_1| \leqslant$$
$$\leqslant |\alpha_2+|\alpha_1| + |\alpha_1|$$

ἄρα θὰ εἶναι

$$|\alpha_2| - |\alpha_1| \leqslant |\alpha_2| + |\alpha_1| \quad \text{ἢ} \quad |\alpha_1| + |\alpha_2| \geqslant |\alpha_2| - |\alpha_1|. \qquad (4)$$

'Από τὰς (3) καὶ (4) συνάγογεν, ὅτι

$$|\alpha_1+\alpha_2| \geqslant \Big|\, |\alpha_1| - |\alpha_2| \,\Big|.$$

Παρατήρησις. Θὰ ἐξετάσωμεν τώρα εἰς ποίαν περίπτωσιν εἶναι

$$|\alpha_1+\alpha_2| = \Big|\, |\alpha_1| - |\alpha_2| \,\Big|$$

'Εὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι εἶναι

$$|\alpha_1+\alpha_2| = \Big|\, |\alpha_1| - |\alpha_2| \,\Big|, \text{ θὰ ἦτο } (\alpha_1+\alpha_2)^2 = \Big(|\alpha_1| - |\alpha_2|\Big)^2$$

ἢ $\quad \alpha_1^2+\alpha_2^2+2\alpha_1\alpha_2 = \alpha_1^2+\alpha_2^2-2|\alpha_1|.|\alpha_2| \quad$ ἢ $\quad 2\alpha_1\alpha_2 = -2|\alpha_1 . \alpha_1|$ *

ἢ $\quad -\alpha_1\alpha_2 = |\alpha_1\alpha_2|, \quad$ ὁπότε $\quad \alpha_1\alpha_2 \leqslant 0.$

Ἀντιστρόφως. 'Εὰν $\alpha_1\alpha_2 \leqslant 0$, θὰ εἶναι $-\alpha_1\alpha_2 = |\alpha_1\alpha_2|$

ἢ $\quad \alpha_1\alpha_2 = -|\alpha_1\alpha_2| \quad$ ἢ $\quad \alpha_1^2+\alpha_2^2+2\alpha_1\alpha_2 = \alpha_1^2+\alpha_2^2-2|\alpha_1\alpha_2|$

ἢ $\quad (\alpha_1+\alpha_2)^2 = |\alpha_1|^2+|\alpha_2|^2-2|\alpha_1|.\alpha_2| \quad$ ἢ $\quad (\alpha_1+\alpha_2)^2 = \Big(|\alpha_1| - |\alpha_2|\Big)^2$

ἢ $$|\alpha_1+\alpha_2| = \Big|\, |\alpha_1| - |\alpha_2| \,\Big|.$$

'Εκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι :

'Εὰν εἶναι $\alpha_1\alpha_2 < 0$, **θὰ εἶναι** $|\alpha_1+\alpha_2| = \Big|\, |\alpha_1| - |\alpha_2| \,\Big|$

'Εὰν εἶναι $\alpha_1\alpha_2 \geqslant 0$, **θὰ εἶναι** $|\alpha_1+\alpha_2| > \Big|\, |\alpha_1| - |\alpha_2| \,\Big|$

Παράδειγμα. Ἡ $\quad |(-10)+(+3)| = \Big|\, |(-10)| - |+3| \,\Big|$

διότι $\quad (-10) . (+3) < 0.$

Πράγματι εἶναι $\quad \begin{cases} \Big|(-10)+(+3)\Big| = |-7| = 7 \\ \Big|\,|(-10)| - |+3|\,\Big| = |10-3| = |7| = 7. \end{cases}$

* Εἰς τὴν § 633 ἀποδεικνύεται, ὅτι $|\alpha_1 . \alpha_2| = |\alpha_1| . |\alpha_2|$.

$|5+8| > ||5|-|8||$

Ἡ $\quad |5+8| > \Big| |5| - |8| \Big|$, διότι $5 \cdot 8 > 0$.

Πράγματι εἶναι $\begin{cases} |5+8| = |13| = 13 \\ \Big| |5| - |8| \Big| = |5-8| = |-3| = 3. \end{cases}$

632. Θεώρημα. ***Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τῆς διαφορᾶς δύο ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν εἶναι μεγαλυτέρα ἢ ἴση μὲ τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τῆς διαφορᾶς τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν δύο ἀριθμῶν.***

Ἔστωσαν οἱ ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοὶ α_1 καὶ α_2· θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$|\alpha_1 - \alpha_2| \geqslant \Big| |\alpha_1| - |\alpha_2| \Big|.$$

Ἐπειδὴ $\alpha_1 = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_2$, θὰ εἶναι καὶ $|\alpha_1| = |\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_2|$ (1)

Ἐπειδὴ $|\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_2| \leqslant |\alpha_1 - \alpha_2| + |\alpha_2|$, ἡ (1) γράφεται

$|\alpha| \leqslant |\alpha_1 - \alpha_2| + |\alpha_2|$ ἢ $|\alpha_1| - |\alpha_2| \leqslant |\alpha_1 - \alpha_2|$

ἢ $\quad |\alpha_1 - \alpha_2| \geqslant |\alpha_1| - |\alpha_2|$. (2)

Ὁμοίως ἀπὸ τὴν σχέσιν $\alpha_2 = \alpha_2 - \alpha_1 + \alpha_1$ εὑρίσκομεν

$$|\alpha_2 - \alpha_1| \geqslant |\alpha_2| - |\alpha_1|.$$

Γνωρίζομεν (§ 627), ὅτι $|\alpha_1 - \alpha_2| = |\alpha_2 - \alpha_1|$ (3)

Ἐπειδὴ $|\alpha_2 - \alpha_1| \geqslant |\alpha_2| - |\alpha_1|$, ἡ (3 γράφεται

$|\alpha_1 - \alpha_2| \geqslant |\alpha_2| - |\alpha_1|$ (4)

Ἀπὸ τὰς (2) καὶ (4) συνάγομεν, ὅτι

$$|\alpha_1 - \alpha_2| \geqslant \Big| |\alpha_1| - |\alpha_2| \Big|.$$

Παρατήρησις. Θὰ ἐξετάσωμεν τώρα εἰς ποίαν περίπτωσιν εἶναι

$$|\alpha_1 - \alpha_2| = \Big| |\alpha_1| - |\alpha_2| \Big|.$$

Ἐὰν εἶναι $\quad |\alpha_1 - \alpha_2| = \Big| |\alpha_1| - |\alpha_2| \Big|$

θὰ εἶναι καὶ $\quad (\alpha_1 - \alpha_2)^2 = \Big(|\alpha_1| - |\alpha_2| \Big)^2$

ἢ $\quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - 2\alpha_1\alpha_2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - 2|\alpha_1| \cdot |\alpha_2|$ ἢ $\alpha_1\alpha_2 = |\alpha_1| \cdot |\alpha_2|$ *

ἢ $\quad \alpha_1\alpha_2 = |\alpha_1\alpha_2|$, ὁπότε $\alpha_1\alpha_2 \geqslant 0$.

Ἀντιστρόφως. Ἐὰν $\alpha_1\alpha_2 \geqslant 0$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha_1\alpha_2 = |\alpha_1\alpha_2|$

ἢ $\quad 2\alpha_1\alpha_2 = 2|\alpha_1\alpha_2|$, ἢ $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - 2\alpha_1\alpha_2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - 2|\alpha_1\alpha_2|$

ἢ $\quad (\alpha_1 - \alpha_2)^2 = |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 - 2|\alpha_1| \cdot |\alpha_2| = \Big(|\alpha_1| - |\alpha_2| \Big)^2$

ἄρα $\quad |\alpha_1 - \alpha_2| = \Big| |\alpha_1| - |\alpha_2| \Big|.$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι

Ἐὰν $\alpha_1\alpha_2 \geqslant 0$, θὰ εἶναι $|\alpha_1 - \alpha_2| = \Big| |\alpha_1| - |\alpha_2| \Big|$

Ἐὰν $\alpha_1\alpha_2 < 0$, θὰ εἶναι $|\alpha_1 - \alpha_2| > \Big| |\alpha_1| - |\alpha_2| \Big|$

* Εἰς τὴν § 633 ἀποδεικνύεται, ὅτι $|\alpha_1 \cdot \alpha_2| = |\alpha_1| \cdot |\alpha_2|$.

Παράδειγμα. Ἡ $|5-9| = \big||5|-|9|\big|$, διότι $5 \cdot 9 > 0$.

Πράγματι $\begin{cases} |5-9| = |-4| = 4 \\ \big||5|-|9|\big| = |5-9| = |-4| = 4. \end{cases}$

Ἡ $|(-8)-3| > \big||-8|-|3|\big|$, διότι $(-8) \cdot 3 < 0$.

Πράγματι $\begin{cases} |(-8)-3| = |-11| = 11 \\ \big||-8|-|3|\big| = |8-3| = |5| = 5. \end{cases}$

633. **Ἀπόλυτος τιμὴ γινομένου ἀριθμῶν. Θεώρημα.** ***Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ γινομένου δύο ἢ περισσοτέρων ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν παραγόντων των.***

Ἔστωσαν οἱ ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοὶ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_\nu$. Θὰ δείξωμεν, ὅτι $|\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot \ldots \alpha_\nu| = |\alpha_1| \cdot |\alpha_2| \cdot |\alpha_3| \ldots |\alpha_\nu|$

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ γινομένου ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν, ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ γινομένου δύο ἢ περισσοτέρων ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν παραγόντων του· ἄρα θὰ εἶναι

$$\boxed{|\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \ldots \alpha_\nu| = |\alpha_1| \cdot |\alpha_2| \cdot |\alpha_3| \ldots |\alpha_\nu|}$$

Παράδειγμα $\begin{cases} |5 \cdot (-4) \cdot (-8) \cdot (+3)| = |+480| = 480 \\ |5| \cdot |-4| \cdot |-8| \cdot |+3| = 5 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 3 = 480. \end{cases}$

634. **Ἀπόλυτος τιμὴ πηλίκου δύο ἀριθμῶν. Θεώρημα.** ***Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ πηλίκου δύο ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἴση μὲ τὸ πηλίκον τῆς ἀπολύτου τιμῆς τοῦ διαιρετέου διὰ τῆς ἀπολύτου τιμῆς τοῦ διαιρέτου.***

Ἔστωσαν οἱ ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοὶ α καὶ β. Θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}.$$

Οἱοιδήποτε καὶ ἂν εἶναι οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β, θὰ ἔχωμεν τὴν ἰσότητα $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \beta = \alpha$ καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι $\left|\frac{\alpha}{\beta} \cdot \beta\right| = |\alpha|$. (1)

Κατὰ τὸ θεώρημα 633 θὰ εἶναι $\left|\frac{\alpha}{\beta} \cdot \beta\right| = \left|\frac{\alpha}{\beta}\right| \cdot |\beta|$ καὶ ἑπομένως ἡ ἰσότης (1) γράφεται $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| |\beta| = |\alpha|$. (2)

Διαιροῦμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος (2) διὰ $|\beta|$ καὶ ἔχομεν

$$\boxed{\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}}$$

Παράδειγμα $\begin{cases} \left|\dfrac{+20}{-5}\right| = |-4| = 4 \\ \left|\dfrac{+20}{-5}\right| = \dfrac{|+20|}{|-5|} = \dfrac{20}{5} = 4. \end{cases}$

635. **Ἀπόλυτος τιμὴ δυνάμεως ἀριθμοῦ. Θεώρημα.** ***Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ δυνάμεως ἀριθμοῦ εἶναι ἴση μὲ δύναμιν ἀριθμοῦ ἡ ὁποία ἔχει βάσιν τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τῆς βάσεως τοῦ ἀριθμοῦ καὶ ἐκθέτην τὸν αὐτόν.***

Ἔστω ὁ ἀλγεβρικὸς ἀριθμὸς α καὶ ν ἕνας ἀκέραιος ἀριθμὸς καὶ τοιοῦτος ὥστε $|\nu| > 0$. Θὰ δείξωμεν, ὅτι $|\alpha^\nu| = |\alpha|^\nu$.

Ἐπειδὴ $\alpha^\nu = \alpha.\alpha.\alpha\ldots\alpha$, (ν παράγοντες) θὰ εἶναι

$|\alpha^\nu| = |\alpha.\alpha.\alpha\ldots\alpha|$ ἢ $|\alpha^\nu| = |\alpha|.|\alpha|.|\alpha|\ldots|\alpha|$ (ν παράγοντες)

ἄρα $$\boxed{|\alpha^\nu| = |\alpha|^\nu}$$

Ὁμοίως θὰ δείξωμεν, ὅτι $|\alpha^{-|\nu|}| = |\alpha|^{-|\nu|}$.

Ἐπειδὴ $\alpha^{-|\nu|} = \dfrac{1}{\alpha^{|\nu|}}$, θὰ εἶναι $\left|\alpha^{-|\nu|}\right| = \left|\dfrac{1}{\alpha^{|\nu|}}\right|$

ἢ $|\alpha^{-|\nu|}| = \dfrac{|1|}{|\alpha^{|\nu|}|}$ ἢ $|\alpha^{-|\nu|}| = \dfrac{1}{|\alpha|^{|\nu|}}$

ἢ $$\boxed{|\alpha^{-|\nu|}| = |\alpha|^{-|\nu|}}$$

Ἀσκήσεις. *2644.* Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς x περιέχεται μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν α καὶ β, $(\alpha < \beta)$ νὰ δειχθῇ, ὅτι

$$\Big|\,|\alpha - x| - |\beta - x|\,\Big| = |\alpha + \beta - 2x| \qquad (1)$$

Ἐὰν ὁ x κεῖται ἐκτὸς τοῦ διαστήματος (α, β), νὰ δειχθῇ, ὅτι

$$\Big|\,|\alpha - x| - |\beta - x|\,\Big| = \beta - \alpha. \qquad (2)$$

2845. Ἐὰν $\alpha < x < 1$, νὰ δειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι

$$\Big|\,|x - 1| + |x - \alpha|\,\Big| > |1 - x| - |\alpha - x|.$$

2646. 1ον. Δίδεται ἡ ἀνισότης $|\alpha| + |\beta| > 0$, Τί δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν περὶ τῶν ἀριθμῶν α καὶ β.

2ον. Ἐὰν εἶναι $\alpha|\beta| - \beta|\alpha| = 0$, νὰ δειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι καὶ $|\alpha + \beta| > |\alpha - \beta|$ καὶ ἀντιστρόφως.

3ον. Ἐὰν εἶναι $\alpha|\beta| + \beta|\alpha| = 0$, νὰ δειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι καὶ $|\alpha + \beta| < |\alpha - \beta|$ καὶ ἀντιστρόφως.

2647. Ἐὰν $y = \dfrac{x}{1 - |x|}$ (1), ὅπου $|x| > 1$, νὰ δειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι καὶ $x = \dfrac{y}{1 - |y|}$ (2).

2648. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ παράστασις $\big|\alpha|x| + \beta x\big|$ δύναται νὰ τεθῇ πάντοτε ὑπὸ τὴν μορφὴν $A|x| + Bx$. (Πολυτεχνεῖον)

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΑΠΟΛΥΤΩΝ ΤΙΜΩΝ ΤΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

636. **Ἀπόλυτος τιμὴ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ.** Γνωρίζομεν (§ 368) ὅτι ***ἀπόλυτος τιμὴ*** ἢ ***μέτρον*** τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ $\alpha+\beta i$ εἶναι ὁ θετικὸς ἀριθμὸς $+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$. Δηλ. εἶναι

$$|\alpha+\beta i| = +\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \quad \text{καὶ} \quad |\alpha-\beta i| = +\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

637. **Ἀπόλυτος τιμὴ ἀθροίσματος μιγαδικῶν ἀριθμῶν. Θεώρημα.** ***Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ ἀθροίσματος δύο μιγαδικῶν ἀριθμῶν εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀπολύτων τιμῶν των καὶ μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς τῶν ἀπολύτων τιμῶν των.***

Ἔστωσαν οἱ μιγαδικοὶ ἀριθμοὶ $\alpha+\beta i$ καὶ $\alpha'+\beta' i$. Τὰ μέτρα των εἶναι $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ καὶ $\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2}$. Τὸ ἄθροισμα τῶν δύο αὐτῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν εἶναι $\alpha+\alpha'+(\beta+\beta')i$ καὶ τὸ μέτρον του εἶναι

$$\sqrt{(\alpha+\alpha')^2+(\beta+\beta')^2}$$

1ον. Θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$|(\alpha+\beta i)+(\alpha'+\beta i)| < |\alpha+\beta' i|+|\alpha'+\beta' i|$$

ἢ
$$\sqrt{(\alpha+\alpha')^2+(\beta+\beta')^2} < \sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2}$$

Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ διαφορὰ

$$A = \sqrt{(\alpha+\alpha')^2+(\beta+\beta')^2} - (\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2})$$

εἶναι ἀρνητική.

Ἐπειδὴ ἡ διαφορὰ δύο θετικῶν ἀριθμῶν ἔχει τὸ σημεῖον τῆς διαφορᾶς τῶν τετραγώνων των, ἡ παράστασις A ἔχει τὸ σημεῖον τῆς

$$(\sqrt{(\alpha+\alpha')^2+(\beta+\beta')^2})^2-(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2})^2$$

ἢ
$$(\alpha+\alpha')^2+(\beta+\beta')^2-(\alpha^2+\beta^2)-2\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)(\alpha'^2+\beta'^2)}-(\alpha'^2+\beta'^2)$$

ἢ
$$(\alpha^2+2\alpha\alpha'+\alpha'^2+\beta^2+2\beta\beta'+\beta'^2-\alpha^2-\beta^2-2\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)(\alpha'^2+\beta'^2)}-\alpha'^2-\beta'^2$$

ἢ
$$B=2(\alpha\alpha'+\beta\beta')-2\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)(\alpha'^2+\beta'^2)}.$$

Ἐὰν $\alpha\alpha'+\beta\beta'$ εἶναι ἀρνητικόν, ἡ παράστασις B εἶναι ἀρνητικὴ καὶ ἑπομένως καὶ ἡ A εἶναι ἀρνητική.

Ἐὰν $\alpha\alpha'+\beta\beta'$ εἶναι θετικόν, ἡ B ἔχει τὸ σημεῖον τῆς

$$4(\alpha\alpha'+\beta\beta')^2-(2\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)(\alpha'^2+\beta'^2)})^2$$

ἢ
$$4\alpha^2\alpha'^2+8\alpha\alpha'\beta\beta'+4\beta^2\beta'^2-4[(\alpha^2+\beta^2)(\alpha'^2+\beta'^2)]$$

ἢ
$$4\alpha^2\alpha'^2+8\alpha\alpha'\beta\beta'+4\beta^2\beta'^2-4\alpha^2\alpha'^2-4\beta^2\alpha'^2-4\alpha^2\beta'^2-4\beta^2\beta'^2$$

ἢ
$$-(4\alpha^2\beta'^2-8\alpha\alpha'\beta\beta'+4\alpha'^2\beta) \quad \text{ἢ} \quad -4(\alpha\beta'-\beta\alpha')^2.$$

Ἄρα ἡ παράστασις B εἶναι ἀκόμη ἀρνητικὴ καὶ ἑπομένως καὶ ἡ A.

2ον. Θὰ δείξωμεν, ὅτι $|(\alpha+\beta i|+(\alpha'+\beta' i)| > |\alpha+\beta i|-|\alpha'+\beta' i)|$

ἢ
$$\sqrt{(\alpha+\alpha')^2+(\beta+\beta')^2} > \sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2}.$$

(ὑποθέτομεν, ὅτι $\sqrt{\alpha^2+\beta^2} > \sqrt{\alpha'^2+\beta'^2}$).

Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ διαφορὰ

$$A'=\sqrt{(\alpha+\alpha')^2+(\beta+\beta')^2}-(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2})$$

εἶναι θετική.

Ἐπειδὴ ἡ διαφορὰ δύο θετικῶν ἀριθμῶν ἔχει τὸ σημεῖον τῆς διαφορᾶς τῶν τετραγώνων των, ἡ παράστασις A′ ἔχει τὸ σημεῖον τῆς

$$(\sqrt{(\alpha+\alpha')^2+(\beta+\beta')^2})^2-(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2})^2$$

ἢ τῆς $(\alpha+\alpha')^2+(\beta+\beta')^2-(\alpha^2+\beta^2)+2\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)(\alpha'^2+\beta'^2)}-(\alpha'^2+\beta'^2)$

ἢ τῆς $\qquad B'=2(\alpha\alpha'+\beta\beta')+2\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)+(\alpha'^2+\beta'^2)}$.

Ἐὰν $\alpha\alpha'+\beta\beta'$ εἶναι θετικόν, ἡ B′ εἶναι θετικὴ καὶ ἡ A′ εἶναι ἐπίσης θετική.

Ἐὰν $\alpha\alpha'+\beta\beta'$ εἶναι ἀρνητικόν, ἡ B′ ἔχει τὸ σημεῖον τῆς

$$[2\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)(\alpha'^2+\beta'^2)}]^2-4(\alpha\alpha'+\beta\beta')^2$$

ἢ τῆς $\qquad 4(\alpha^2+\beta^2)(\alpha'^2+\beta'^2)-4(\alpha^2\alpha'^2+2\alpha\alpha'\beta\beta'+\beta^2\beta'^2)$

ἢ τῆς $4(\alpha\beta'-\beta\alpha')^2$, ἡ ὁποία εἶναι θετική· ἄρα ἡ B′ εἶναι ἀκόμη θετικὴ καὶ ἑπομένως καὶ ἡ A′ εἶναι ἐπίσης θετική.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι

$$\boxed{\begin{gathered}|\alpha+\beta i|-|\alpha'+\beta' i|<|(\alpha+\beta i)+(\alpha'+\beta' i)|<|\alpha+\beta i|+|\alpha'+\beta' i|\\ \text{ἢ}\quad \sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2}<\sqrt{(\alpha+\alpha')^2+(\beta+\beta')^2}<\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2},\end{gathered}}$$

Ἰδιαιτέρα περίπτωσις. Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα εἶναι ἀληθές, ἐὰν $\alpha\beta'-\beta\alpha'\neq 0$.

Ὑποθέτομεν τώρα, ὅτι $\alpha\beta'-\beta\alpha'=0$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν εἶναι $\qquad |\alpha\alpha'+\beta\beta'|=\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)(\alpha'^2+\beta'^2)}$.

Ἐὰν $\alpha\alpha'+\beta\beta'$ εἶναι θετικόν, ἡ B εἶναι μηδέν, ἐπίσης καὶ ἡ A καὶ ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ ἀθροίσματος δύο μιγαδικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπολύτων τιμῶν των.

Ἐὰν $\alpha\alpha'+\beta\beta'$ εἶναι ἀρνητικόν, θὰ εἶναι $B'=0$, $A'=0$ καὶ ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ ἀθροίσματος δύο μιγαδικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἴση μὲ τὴν διαφορὰν τῶν ἀπολύτων τιμῶν των.

Ὥστε :

$$\boxed{\begin{gathered}\textbf{Ἐὰν εἶναι}\quad \alpha\beta'-\beta\alpha'=0,\quad \textbf{θὰ εἶναι}\\ |(\alpha+\beta i)+(\alpha'+\beta i)|=|\alpha+\beta i|+|\alpha'+\beta' i|,\quad \textbf{ἐὰν}\ \alpha\alpha'+\beta\beta'>0\\ |(\alpha+\beta i)+(\alpha'+\beta i)|=|\alpha+\beta i|-|\alpha'+\beta' i|,\quad \textbf{ἐὰν}\ \alpha\alpha'+\beta\beta'<0\end{gathered}}$$

Συνοψίζοντες τὴν γενικὴν περίπτωσιν καὶ τὴν ἰδιαιτέραν συνάγομεν, ὅτι

$$\boxed{\begin{gathered}|\alpha+\beta i|-|\alpha'+\beta' i|\leqslant|(\alpha+\beta i)+(\alpha'+\beta' i)|\leqslant|\alpha+\beta i|+|\alpha'+\beta' i|\\ \text{ἢ}\quad \sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2}\leqslant\sqrt{(\alpha+\alpha')^2+(\beta+\beta')^2}\leqslant\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2}\end{gathered}}$$

638. Θεώρημα. *Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ ἀθροίσματος πολλῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν εἶναι μικροτέρα ἢ ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν ἀριθμῶν.*

Γνωρίζομεν, ὅτι τὸ θεώρημα αὐτό εἶναι ἀληθὲς διὰ δύο μιγαδικοὺς ἀριθμούς. Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ θεώρημα εἶναι ἀληθὲς διὰ ν—1 ἀριθμούς· θὰ δείξωμεν, ὅτι εἶναι ἀληθὲς καὶ διὰ ν ἀριθμούς.

Παριστάνομεν μὲ $A_1, A_2, A_3, \ldots A_{\nu-1}, A_\nu$ τοὺς μιγαδικοὺς ἀριθμοὺς καὶ ὑποθέτομεν, ὅτι

$$|A_1+A_2+\ldots+A_{\nu-1}| \leqslant |A_1|+|A_2|+\ldots+|A_{\nu-1}|$$

Προσθέτομεν καὶ εἰς τὰ δύο μέλη τῆς σχέσεως αὐτῆς τὸν ἀριθμὸν $|A_\nu|$ καὶ ἔχομεν

$$|A_1+A_2+\ldots+A_{\nu+1}|+|A_\nu| \leqslant |A_1|+|A_2|+\ldots+|A_{\nu-1}|+|A_\nu| \quad (1)$$

Ἀλλὰ κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα εἶναι

$$|(A_1+A_2+\ldots+A_{\nu-1})+A_\nu| \leqslant |A_1+A_2+\ldots+A_{\nu-1}|+|A_\nu| \quad (2)$$

Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν σχέσιν (1) τὸ

$|A_1+A_2+\ldots+A_{\nu-1}|+|A_\nu|$ μὲ τὸ $|A_1+A_2+\ldots+A_{\nu-1}+A_\nu|$

τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον ἢ μικρότερόν του, ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὴν σχέσιν (2), θὰ ἔχωμεν κατὰ μείζονα λόγον

$$\boxed{|\mathbf{A}_1+\mathbf{A}_2+\ldots+\mathbf{A}_{\nu-1}+\mathbf{A}_\nu| \leqslant |\mathbf{A}_1|+|\mathbf{A}_2|+\ldots+|\mathbf{A}_{\nu-1}|+|\mathbf{A}_\nu|}$$

Ἀσκήσεις. 2649. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

$$\sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2}+\sqrt{\alpha_2^2+\beta_2^2}+\ldots+\sqrt{\alpha_\nu^2+\beta_\nu^2} \geqslant$$
$$\geqslant \sqrt{(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu)^2+(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_\nu)^2}\,. \quad \text{(Πολυτεχνεῖον)}$$

639. **Ἀπόλυτος τιμὴ τῆς διαφορᾶς δύο μιγαδικῶν ἀριθμῶν.** Γνωρίζομεν, ὅτι ἡ διαφορὰ μεταξὺ δύο μιγαδικῶν ἀριθμῶν $\alpha+\beta i$ καὶ $\alpha'+\beta' i$ εἶναι ἴση μὲ $(\alpha-\alpha')+(\beta-\beta')i$. Αὐτὴ ἡ ποσότης εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀριθμῶν $\alpha+\beta i$ καὶ $-\alpha'-\beta' i$. Ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ $\alpha'+\beta' i$ καὶ $-\alpha'-\beta' i$ ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀπόλυτον τιμήν, δηλ. τὰ αὐτὰ μέτρα, δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν, ὅτι :

Θεώρημα. *Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τῆς διαφορᾶς δύο μιγαδικῶν ἀριθμῶν εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀπολύτων τιμῶν των καὶ μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς των.* Δηλ. εἶναι

$$\boxed{|\alpha+\beta i|-|\alpha'+\beta' i| < |(\alpha+\beta i)-(\alpha'+\beta' i)| < |\alpha+\beta i|+|\alpha'+\beta' i|}$$

640. **Ἀπόλυτος τιμὴ γινομένου μιγαδικῶν ἀριθμῶν.** *Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ γινομένου πολλῶν μιγαδικῶν παραγόντων εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν παραγόντων.*

Ἔστωσαν κατ' ἀρχὰς οἱ δύο παράγοντες $\alpha+\beta i$ καὶ $\alpha'+\beta' i$. Θὰ δείξωμεν, ὅτι $|(\alpha+\beta i).(\alpha'+\beta' i)| = |\alpha+\beta i|.|\alpha'+\beta' i|$ (1)

Γνωρίζομεν (§ 370), ὅτι $(\alpha+\beta i)(\alpha'+\beta' i)=\alpha\alpha'-\beta\beta'+(\alpha\beta'+\beta\alpha')i$.

Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ (μέτρον) τοῦ γινομένου αὐτοῦ εἶναι

$$\sqrt{(\alpha\alpha'-\beta\beta')^2+(\alpha\beta'+\beta\alpha')^2} = \sqrt{\alpha^2\alpha'^2-2\alpha\alpha'\beta\beta'+\beta^2\beta'^2+\alpha^2\beta'^2+2\alpha\alpha'\beta\beta'+\beta^2\alpha'^2} =$$
$$= \sqrt{\alpha^2\alpha'^2+\beta^2\beta'^2+\alpha^2\beta'^2+\beta^2\alpha'^2} = \sqrt{(\alpha^2+\beta^2)(\alpha'^2+\beta'^2)}\,. \quad (2)$$

Ἐπειδὴ $|\alpha+\beta i| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ καὶ $|\alpha'+\beta' i| = \sqrt{\alpha'^2+\beta'^2}$ θὰ εἶναι

$$|\alpha+\beta i|.|\alpha'+\beta' i| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,.\,\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2} = \sqrt{(\alpha^2+\beta^2)(\alpha'^2+\beta'^2)}\,. \quad (3)$$

Ἀπὸ τὰς (2) καὶ (3) συνάγομεν, ὅτι ἡ ἰσότης (1) ἀληθεύει.

Ὑποθέτομεν τώρα, ὅτι τὸ θεώρημα εἶναι ἀληθὲς διὰ ν παράγοντας· θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ θεώρημα εἶναι ἀληθὲς καὶ διὰ ν+1 παράγοντας.

Ἔστωσαν οἱ μιγαδικοὶ ἀριθμοὶ $A_1, A_2, A_3, \ldots A_\nu, A_{\nu+1}$.

Ὑποθέτομεν, ὅτι εἶναι

$$|A_1.A_2.A_3\ldots A_\nu| = |A_1|.|A_2|.|A_3|\ldots|A_\nu|.$$

Πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος αὐτῆς ἐπὶ $|A_{\nu+1}|$ καὶ ἔχομεν

$$|A_1.A_2.A_3\ldots A_\nu|.|A_{\nu+1}| = |A_1|.|A_2|.|A_3|\ldots|A_\nu|.|A_{\nu+1}| \quad (1)$$

Ἐπειδὴ τὸ γινόμενον $A_1.A_2.A_3\ldots A_\nu.A_{\nu+1}$ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς γινόμενον τῶν δύο παραγόντων $A_1.A_2.A_3\ldots A_\nu$ καὶ $A_{\nu+1}$, θὰ εἶναι

$$|(A_1.A_2.A_3\ldots A_\nu).A_{\nu+1}| = |A_1.A_2.A_3\ldots A_\nu|.|A_{\nu+1}|. \quad (2)$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (1) τὸ πρῶτον μέλος μὲ τὸ ἴσον του, ποὺ δίδει ἡ ἰσότης (2) καὶ ἔχομεν

$$\boxed{|\mathbf{A}_1.\mathbf{A}_2.\mathbf{A}_3\ldots\mathbf{A}_\nu.\mathbf{A}_{\nu+1}| = |\mathbf{A}_1|.|\mathbf{A}_2|\,|\mathbf{A}_3|\ldots|\mathbf{A}_\nu|.|\mathbf{A}_{\nu+1}|}$$

641. Ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ πηλίκου δύο μιγαδικῶν ἀριθμῶν. Θεώρημα. ***Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ πηλίκου δύο μιγαδικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἴση μὲ τὸ πηλίκον τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν ἀριθμῶν.***

Ἔστωσαν οἱ μιγαδικοὶ ἀριθμοὶ $\alpha+\beta i$ $\alpha'+\beta' i$· θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$\left|\frac{\alpha+\beta i}{\alpha'+\beta' i}\right| = \frac{|\alpha+\beta i|}{|\alpha'+\beta' i|}\,,$$

Ἐπειδὴ $\alpha+\beta i = \dfrac{\alpha+\beta i}{\alpha'+\beta' i}\cdot(\alpha'+\beta' i)$, θὰ εἶναι

$$|\alpha+\beta i| = \left|\frac{\alpha+\beta i}{\alpha'+\beta' i}\cdot(\alpha'+\beta' i)\right| \quad \text{ἢ (§ 640)} \quad |\alpha+\beta i| = \left|\frac{\alpha+\beta i}{\alpha'+\beta' i}\right|\cdot|\alpha'+\beta' i|.$$

Διαιροῦμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος αὐτῆς διὰ $|\alpha'+\beta' i|$ καὶ ἔχομεν

$$\frac{|\alpha+\beta i|}{|\alpha'+\beta' i|} = \left|\frac{\alpha+\beta i}{\alpha'+\beta' i}\right| \quad \text{ἢ} \quad \boxed{\left|\frac{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta} i}{\boldsymbol{\alpha}'+\boldsymbol{\beta}' i}\right| = \frac{|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta} i|}{|\boldsymbol{\alpha}'+\boldsymbol{\beta}' i|}}$$

Ἀσκήσεις. *2650*. Ἐὰν α καὶ β εἶναι θετικοὶ ἀριθμοί, νὰ δειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι $|\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}| \leqslant \sqrt{|\alpha-\beta|}$. (1) (Πολυτεχνεῖον)

2651. 1ον. Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β εἶναι ἀρνητικοὶ νὰ δειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι $|\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}| \leqslant \sqrt{|\alpha-\beta|}$.

2ον. Ἐὰν ὁ ἕνας ἐκ τῶν ἀριθμῶν α καὶ β εἶναι θετικὸς καὶ ὁ ἄλλος ἀρνητικὸς νὰ δειχθῇ, ὅτι $|\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}| = \sqrt{|\alpha-\beta|}$.

2652. Ἐὰν οἱ Α καὶ Β εἶναι τυχόντες πραγματικοὶ ἢ μιγαδικοὶ ἀριθμοὶ καὶ $\Gamma > 0$ νὰ δειχθῇ, ὅτι $|A+B|^2 \leqslant (1+\Gamma)|A|^2 + \left(1+\frac{1}{\Gamma}\right)|B|^2$.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΕΡΙΕΧΟΥΣΑΙ ΤΗΝ ΑΠΟΛΥΤΟΝ ΤΙΜΗΝ ΤΟΥ ΑΓΝΩΣΤΟΥ

642. **Ἐξισώσεις τῆς μορφῆς $\alpha|x|+\beta=0$.** ***Πρόβλημα 1ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις*** $5|x|-9=0$.

Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται

$$5|x|=9 \quad \text{ἢ} \quad |x|=\frac{9}{5} \tag{1}$$

Ἡ τιμὴ $x=\frac{9}{5}$ ἐπαληθεύει τὴν (1), ἄρα καὶ τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν.

Ἐπίσης καὶ ἡ τιμὴ $x=-\frac{9}{5}$ ἐπαληθεύει τὴν (1), ἄρα καὶ τὴν δοθεῖσαν, διότι $\left|-\frac{9}{5}\right|=\frac{9}{5}$.

Ὥστε ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει τὰς ρίζας $x=\pm\frac{9}{5}$. Τὰς αὐτὰς ρίζας $\pm\frac{9}{5}$ ἔχει καὶ ἡ ἐξίσωσις

$$\left(x-\frac{9}{5}\right)\left(x+\frac{9}{5}\right)=0 \quad \text{ἢ} \quad x^2=\frac{81}{25}.$$

Ὥστε αἱ ἐξισώσεις $5|x|-9=0$ καὶ $x^2=\frac{81}{25}$ εἶναι ἰσοδύναμοι.

643. ***Πρόβλημα 2ον.*** (Γενικόν). ***Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις*** $\alpha|x|+\beta=0$ ***ὅπου α καὶ β εἶναι διάφοροι τοῦ μηδενός.***

Ἐὰν οἱ συντελεσταὶ α καὶ β εἶναι ὁμόσημοι ἀριθμοί, δηλ. ἐὰν $\alpha\beta>0$, τὸ πρῶτον μέλος τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι πάντοτε θετικὸν ἢ ἀρνητικόν, δηλ. διάφορον τοῦ μηδενὸς καὶ ἑπομένως ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις (1) δὲν ἔχει λύσιν.

Ἔστω ὅτι οἱ α καὶ β εἶναι ἑτερόσημοι ἀριθμοί, δηλ. ἔστω ὅτι $\alpha\beta<0$.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται

$$|x|=-\frac{\beta}{\alpha}, \quad \text{ὅπου} \quad -\frac{\beta}{\alpha}>0$$

καὶ ἔχει τὰς ρίζας

$$x_1 = -\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{καὶ} \quad x_2 = -\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) = \frac{\beta}{\alpha}.$$

777
774

Ἀλλὰ τὰς αὐτὰς ρίζας ἔχει καὶ ἡ ἐξίσωσις

$$\left(x + \frac{\beta}{\alpha}\right)\left(x - \frac{\beta}{\alpha}\right) = 0 \quad \text{ἢ} \quad x^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}.$$

Ὥστε αἱ ἐξισώσεις $\alpha|x| + \beta = 0$ καὶ $x^2 = \dfrac{\beta^2}{\alpha^2}$ εἶναι ἰσοδύναμοι.

Τὰ ἀνωτέρω συμπεράσματα συνοψίζονται εἰς τὸν κάτωθι πίνακα:

Ἐὰν $\alpha\beta > 0$, ἡ ἐξίσωσις $\alpha|x| + \beta = 0$ εἶναι ἀδύνατος
Ἐὰν $\alpha\beta < 0$, ἡ ἐξίσωσις $\alpha|x| + \beta = 0$ εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν $x^2 = \dfrac{\beta^2}{\alpha^2}$

644. **Ἐφαρμογὴ τοῦ πίνακος**. ***Παράδειγμα***. ***Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις*** $-5|x| + 2 = 0$.

Ἐπειδὴ $\alpha \cdot \beta = (-5) \cdot 2 = -10 < 0$, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν $x^2 = \dfrac{4}{25}$. Ὥστε αἱ ρίζαι τῆς δοθείσης εἶναι

$$x_1 = \frac{2}{5} \quad \text{καὶ} \quad x_2 = -\frac{2}{5}.$$

Ἀσκήσεις. *2653*. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $3|x| - 5 = 0$.

2654. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $-8|x| + 3 = 0$.

2655. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\dfrac{3}{4}|x| - 1 = 0$.

645. **Ἐξισώσεις τῆς μορφῆς $\alpha|x| + \beta x + \gamma = 0$**. ***Πρόβλημα 1ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις*** $3|x| + 5x - 8 = 0$.

Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις καθόσον ὁ x εἶναι θετικὸς ἢ ἀρνητικὸς ἀριθμός.

1η Περίπτωσις. ***Ἔστω*** $x > 0$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θὰ εἶναι $|x| = x$ καὶ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται

$$3x + 5x = 8 \quad \text{ἢ} \quad 8x = 8, \quad \text{ἄρα} \quad x = 1.$$

2α Περίπτωσις. ***Ἔστω*** $x < 0$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θὰ εἶναι $|x| = -x$ καὶ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται

$$-3x + 5x = 8 \quad \text{ἢ} \quad 2x = 8, \quad \text{ἄρα} \quad x = 4.$$

Ἡ τιμὴ ὅμως $x = 4$ ἀποκλείεται διότι ὑπεθέσαμεν, ὅτι $x < 0$.

Ἄρα ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει μόνον τὴν λύσιν $x = 1$.

646. ***Πρόβλημα 2ον. (Γενικόν). Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις***

$$\alpha|x| + \beta x + \gamma = 0, \quad \text{ὅπου} \quad (\alpha, \beta, \gamma \neq 0).$$

Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις καθόσον ὁ x εἶναι θετικὸς ἢ ἀρνητικὸς ἀριθμός.

1η Περίπτωσις. ***Ἔστω*** $x > 0$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θὰ εἶναι $|x| = x$ καὶ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται

$$\alpha x + \beta x + \gamma = 0 \quad \text{ἢ} \quad (\alpha + \beta)x + \gamma = 0 \quad \text{ἢ} \quad (\alpha + \beta)x = -\gamma \qquad (1)$$

Ἐὰν $(\alpha+\beta)\neq 0$, δηλ. ἐὰν $\alpha\neq-\beta$, ἡ (1) ἔχει τὴν λύσιν $x=-\frac{\gamma}{\alpha+\beta}$
Διὰ νὰ εἶναι ἡ τιμὴ αὐτὴ τοῦ x παραδεκτὴ πρέπει νὰ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ μηδενός, διότι ὑπετέθη $x>0$· δηλ. πρέπει νὰ εἶναι

$$-\frac{\gamma}{\alpha+\beta}>0 \quad \text{ἢ} \quad \frac{\gamma}{\alpha+\beta}<0 \quad \text{ἢ} \quad \gamma(\alpha+\beta)<0$$

2α Περίπτωσις. ***Ἔστω*** $x<0$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θὰ εἶναι $|x|=-x$ καὶ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται

$$-\alpha x+\beta x+\gamma=0 \quad \text{ἢ} \quad (\beta-\alpha)x=-\gamma \tag{2}$$

Ἐὰν $(\beta-\alpha)\neq 0$, δηλ. ἐὰν $\alpha\neq\beta$, ἡ (2) ἔχει τὴν λύσιν $x=-\frac{\gamma}{\beta-\alpha}$.

Διὰ νὰ εἶναι παραδεκτὴ ἡ τιμὴ αὐτὴ τοῦ x πρέπει νὰ εἶναι ἀρνητικὴ (διότι ὑπετέθη $x<0$)· δηλ. πρέπει νὰ εἶναι

$$-\frac{\gamma}{\beta-\alpha}<0 \quad \text{ἢ} \quad \frac{\gamma}{\beta-\alpha}>0 \quad \text{ἢ} \quad \gamma(\beta-\alpha)>0.$$

Τὰ ἀνωτέρω συνοψίζονται εἰς τὸν κάτωθι πίνακα:

Ἐὰν $\alpha\neq-\beta$ καὶ $\gamma(\alpha+\beta)<0$, ἡ $\alpha|x|+\beta x+\gamma=0$ ἔχει τὴν λύσιν $x=-\frac{\gamma}{\alpha+\beta}$.

Ἐὰν $\alpha\neq\beta$ καὶ $\gamma(\beta-\alpha)>0$, ἡ $\alpha|x|+\beta x+\gamma=0$ ἔχει τὴν λύσιν $x=-\frac{\gamma}{\beta-\alpha}$.

Ἰδιαίτεραι περιπτώσεις: 1ον. Ἐὰν $x=0$ ἡ ἐξίσωσις $\alpha|x|+\beta x+\gamma=0$ (1) εἶναι ἀδύνατος, ἐὰν εἶναι $\gamma\neq 0$.

2ον. Ἐὰν $\gamma=0$ καὶ $\beta=1$, ἡ (1) γίνεται

$$\alpha|x|+x=0 \quad \text{ἢ} \quad |x|=-\frac{x}{\alpha}. \tag{2}$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, ἐὰν $x>0$ θὰ εἶναι $|x|=x$ καὶ ἡ (2) γίνεται $x=-\frac{x}{\alpha}$ ἢ $x(\alpha+1)=0$ καὶ ἔχει τὴν λύσιν $x=0$, ἐὰν $(\alpha+1)\neq 0$, δηλ. ἐὰν $\alpha\neq-1$.

Ἐὰν $x<0$ θὰ εἶναι $|x|=-x$ καὶ ἡ (2) γίνεται $-x=-\frac{x}{\alpha}$ ἢ $x(\alpha-1)=0$ καὶ ἔχει τὴν λύσιν $x=0$, ἐὰν $\alpha-1\neq 0$, δηλ. ἐὰν $\alpha\neq 1$.

3ον. Ἐὰν $\alpha=1$, $\beta=1$ καὶ $\gamma=0$, ἡ (1) γίνεται

$$|x|+x=0 \quad \text{ἢ} \quad |x|=-x. \tag{3}$$

Ἡ (3) ἀληθεύει διὰ κάθε ἀρνητικὴν τιμὴν τοῦ x καὶ διὰ $x=0$.

4ον. Ἐὰν $\alpha=-1$, $\beta=1$, $\gamma=0$, ἡ (1) γίνεται $-|x|+x=0$ ἢ $|x|=x$ καὶ ἀληθεύει διὰ κάθε θετικὴν τιμὴν τοῦ x καὶ διὰ $x=0$.

647 ***Ἐφαρμογὴ τοῦ πίνακος. Παράδειγμα 1ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις*** $3|x|+4x-5=0$.

Ἐπειδὴ $\alpha=3$, $\beta=4$, $\gamma=-5$ θὰ εἶναι $\alpha\neq-\beta$ καὶ $\gamma(\alpha+\beta)=-5(3+4)=-35<0$· ἄρα ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει τὴν λύσιν

$$x = -\frac{\gamma}{\alpha+\beta} = \frac{5}{3+4} = \frac{5}{7}.$$

Παράδειγμα 2ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $-5|x|+2x+3=0$.

Ἐπειδὴ $\alpha=-5$, $\beta=2$, $\gamma=3$, θὰ εἶναι $\alpha\neq\beta$ καὶ $\gamma(\alpha+\beta)=3(-5+2)=3.(-3)=-9<0$· ἄρα ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει τὴν λύσιν $x=-\frac{\gamma}{\alpha+\beta}=-\frac{3}{-5+2}=1$.

Ἐπειδὴ εἶναι καὶ $\gamma(\beta-\alpha)=3(2+5)=21>0$, ἡ ἐξίσωσις ἔχει καὶ τὴν λύσιν $x=-\frac{\gamma}{\beta-\alpha}=-\frac{3}{2+5}=-\frac{3}{7}$.

Ἀσκήσεις. *2656.* Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $2|x|+3x-5=0$.

2657. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $5|x|-3x+1=0$.

2658. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $-8|x|+3x+2=0$.

2659. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $|x|+x+5=0$.

2660. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $|x|+x-8=0$.

2661. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $-5|x|-4x+9=0$.

648. Ἐξισώσεις τῆς μορφῆς $\alpha|x|^2+\beta|x|+\gamma=0$.

Πρόβλημα 1ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $|x|^2-8|x|+15=0$.

Θέτομεν $|x|=y$ καὶ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γίνεται

$$y^2-8y+15=0.$$

Αἱ ρίζαι αὐτῆς εἶναι $y_1=3$ καὶ $y_2=5$. Ἄρα θὰ εἶναι

$|x|=3$ (1) καὶ $|x|=5$ (2)

Ἡ (1) ἀληθεύει διὰ $x=3$ καὶ διὰ $x=-3$.

Ἡ (2) ἀληθεύει διὰ $x=5$ καὶ διὰ $x=-5$.

Ὥστε αἱ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι

$$x_1=3,\quad x_2=-3,\quad x_3=5,\quad x_4=-5.$$

649. Πρόβλημα 2ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $|x|^2+6|x|-16=0$.

Θέτομεν $|x|=y$ καὶ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται $y^2+6y-16=0$. Αἱ ρίζαι αὐτῆς εἶναι $y_1=2$ καὶ $y_2=-8$· Ἄρα θὰ εἶναι $|x|=2$ (1) καὶ $|x|=-8$. (2)

Ἡ (1) ἀληθεύει διὰ $x=2$ καὶ διὰ $x=-2$.

Ἡ (2) εἶναι ἀδύνατος.

Ὥστε αἱ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι $x_1=2$ καὶ $x_2=-2$.

650. Πρόβλημα 3ον. (Γενικόν). Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις

$\alpha|x|^2+\beta|x|+\gamma=0$, ***ὅπου*** $(\alpha, \beta, \gamma\neq0)$.

Θέτομεν $|x|=y$ καὶ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γίνεται

$$\alpha y^2+\beta y+\gamma=0. \qquad (1)$$

Αἱ ρίζαι αὐτῆς εἶναι $y=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$.

1ον. Ἐὰν $\beta^2-4\alpha\gamma>0$, ἡ ἐξίσωσις (1) ἔχει δύο ρίζας y_1 καὶ y_2· δηλ. θὰ εἶναι $|x|=y_1$ (2) καὶ $|x|=y_2$. (3)

Ἐὰν $y_1>0$, ἡ (2) ἀληθεύει διὰ $x=y_1$ καὶ διὰ $x=-y_1$.

Ἐὰν $y_1<0$, ἡ (2) δὲν ἀληθεύει.

Ἐὰν $y_2>0$, ἡ (3) ἀληθεύει διὰ $x=y_2$ καὶ διὰ $x=-y_2$.

'Εὰν $y_2<0$, ἡ (3) δὲν ἀληθεύει.

Ὥστε ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει τέσσαρας ρίζας, ἐὰν $y_1>0$ καὶ $y_2>0$, τὰς $x_1=y_1$, $x_2=-y_1$, $x_3=y_2$, $x_4=-y_2$.

'Εὰν $\frac{\gamma}{\alpha}<0$, θὰ εἶναι $y_1>0$ καὶ $y_2<0$, εἴτε $y_1<0$ καὶ $y_2>0$ καὶ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει δύο ρίζας.

'Εὰν $\frac{\gamma}{\alpha}>0$ καὶ $-\frac{\beta}{\alpha}<0$, θὰ εἶναι $y_1<0$ καὶ $y_2<0$, καὶ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις δὲν ἔχει ρίζας.

2ον. 'Εὰν $\beta^2-4\alpha\gamma=0$ ἡ ἐξίσωσις (1) ἔχει τὴν διπλῆν ρίζαν $y=-\frac{\beta}{2\alpha}$.

'Εὰν $-\frac{\beta}{2\alpha}>0$, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει τὰς ρίζας $x_1=-\frac{\beta}{2\alpha}$ καὶ $x_2=\frac{\beta}{2\alpha}$.

'Ασκήσεις. *2662.* Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $|x|^2-7|x|+12=0$.

2663. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $|x|^2+6|x|-7=0$

2664. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $3|x|^2-3|x|+2=0$.

2665. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $12|x|^2+|x|-6=0$.

2666. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $|x|^3-7|x|^2+10|x|=0$.

2667. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $20|x|^3+3|x|^2-2|x|=0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΙΝ ΕΠΙ ΤΩΝ ΑΠΟΛΥΤΩΝ ΤΙΜΩΝ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

2668. Δίδεται ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^2+\beta xy-\gamma y^2=0$. 'Εὰν μεταξὺ τῶν ριζῶν της x_1 καὶ x_2 ὑφίστανται αἱ σχέσεις

$$\frac{|x_1+x_2|}{|x_1x_2|+|x_1+x_2|}=|\alpha| \quad (1), \qquad 1-|\alpha|=\frac{2}{|\beta|} \quad (2),$$

καὶ $\alpha\gamma=-6$ (3), νὰ ὑπολογισθῇ ὁ y.

2669. Ὑποθέτομεν, ὅτι ἡ $|\alpha|$ εἶναι μικροτέρα ἑκάστης τῶν $|\beta|$, $|\gamma|$ καὶ $|\delta|$. Νὰ ἐξετασθῇ, ἐὰν εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπάρχουν πραγματικοὶ ἀριθμοὶ x, y, z, οἱ ὁποῖοι νὰ ἱκανοποιοῦν συγχρόνως τὰς σχέσεις :

$$|x|+|y|+|z|\leqslant|\alpha| \quad (1), \qquad \frac{x^2}{\beta^2}+\frac{y^2}{\gamma^2}+\frac{z^2}{\delta^2}\geqslant 1. \quad (2)$$

2670. Νὰ δειχθῇ, ὅτι, ἐὰν ἀληθεύῃ μία ἐκ τῶν σχέσεων

$$\left|\frac{x+zy}{y+zx}\right|<1 \quad (1), \qquad \left|\frac{y}{x}\right|<1 \quad (2), \qquad \left|\frac{xy+zy^2}{xy+zx^2}\right|<1 \quad (3),$$

θὰ ἀληθεύουν καὶ αἱ ἄλλαι δύο., ἐὰν $|z|>1$.

2671. 'Εὰν οἱ ἀριθμοὶ x, y, z, οἱ ὁποῖοι εἶναι διάφοροι τοῦ μηδενός, ἐπαληθεύουν τὰς σχέσεις :

$$x^2z^2+x^2y^2=y^2z^2 \quad (1), \qquad z^2+x^2>|xy|+|yz| \quad (2),$$

νὰ δειχθῇ, ὅτι $|x|<|y|<|z|$.

2672. Δίδεται ἡ ἐξίσωσις $x^2+\beta x+\gamma=0$, τῆς ὁποίας οἱ συντελεσταὶ β καὶ γ εἶναι ἀρνητικοί. Ἂν ρ_1 καὶ ρ_2 εἶναι αἱ ρίζαι της ($\rho_1>0$ καὶ $\rho_2<0$ καὶ $|\beta|>|\gamma|$, νὰ δειχθῇ, ὅτι $|\rho_2|<\rho_1<1+|\beta|$.

2673. Ἐὰν x′, x″ εἶναι αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου

$$x^2+\frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}x-\frac{\lambda^2}{4(\lambda^2-3\lambda+2)}$$

νὰ εὑρεθῇ διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ ἀληθεύει ἡ ἀνισότης

$$\left|\frac{x'+x''}{x'-x''}\right|<|\lambda|.$$

2674. Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β πληροῦν τὴν σχέσιν $|\alpha|-|\beta|>1$ νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ ἐξίσωσις $x^2+\alpha x+\beta=0$ δὲν ἔχει ἀκεραίας ρίζας.

(Πολυτεχνεῖον)

2675. Αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2+\beta x+\gamma=0$ εἶναι x_1 καὶ x_2. Νὰ σχηματισθῇ μία ἐξίσωσις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ ρίζας:

1ον. $|x_1|$ καὶ $|x_2|$. 2ον. $\big||x_1|-3|x_2|\big|$ καὶ $\big||x_2|-3|x_1|\big|$.

2676. Νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ ἡ ἐξίσωσις $\alpha|x^3|+\beta x^2+\beta|x|+\alpha=0$ ἔχει τὸ πολὺ τέσσαρας λύσεις διαφόρους, ἐὰν $\frac{\beta}{\alpha}<-1$.

2677. Ἐὰν ρ εἶναι μία πραγματικὴ ρίζα τοῦ πολυωνύμου

$$\varphi(x)=x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\alpha_{\nu-2}x^{\nu-2}+\ldots+\alpha_0,$$

νὰ δειχθῇ, ὅτι $|\rho|<1+|\alpha_{\nu-1}|+|\alpha_{\nu-2}|+\ldots+|\alpha_0|$.

2678. Νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ σύστημα

$$x|y|+y|z|+z|x|=0,\qquad y|x|+z|y|+x|z|=0$$

εἶναι ἀδύνατον, ἐὰν οἱ ἄγνωστοι x, y, z εἶναι διάφοροι τοῦ μηδενός.

(Πολυτεχνεῖον)

2679. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀκέραιος x, ὁ ἐπαληθεύων τὴν ἐξίσωσιν

$$3^{2(x+1)}+9\left(-\frac{3}{2}+i\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^{3x}-810\cdot 3^x=0.$$

(Πολυτεχνεῖον 1947)

2680. Ἐὰν α, β καὶ γ εἶναι πραγματικοὶ ἀριθμοί, νὰ δειχθῇ, ὅτι ἀπὸ τὰς σχέσεις $2|\beta|\leq\alpha<\gamma$ (1) ἕπεται ἡ $\alpha\leqslant\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\alpha\gamma-\beta^2}$ (τὰ ριζικὰ νοοῦνται μὲ τὸ σημεῖον +). Κατόπιν τούτου νὰ δειχθῇ, ὅτι οἱ μόνοι ἀριθμοὶ ποὺ πληροῦν τὰς ἄνω σχέσεις εἶναι μόνον οἱ $\alpha=1$, $\beta=0$, $\gamma=1$. Καὶ γενικῶς νὰ δειχθῇ, ὅτι ὑπάρχουν πεπερασμέναι τριάδες ἀριθμῶν, αἱ ὁποῖαι πληροῦν τὰς ἄνω σχέσεις, ἐφ᾽ ὅσον τὸ $\alpha\gamma-\beta^2$ ἔχει ὡρισμένην δοθεῖσαν ἀκεραίαν τιμήν.

(Πολυτεχνεῖον)

2681. Ἐὰν α καὶ β πραγματικοὶ ἀριθμοὶ νὰ δειχθῇ, ὅτι ἀπὸ τὴν σχέσιν

$$2\beta(1+|\alpha|)=1+\alpha+|\alpha|\qquad(1)$$

ἕπονται αἱ σχέσεις

$$|2\beta-1|<1\quad(2),\qquad \alpha(1+|2\beta-1|)=2\beta-1\quad(3)$$

καὶ ἀντιστρόφως ἀπὸ τὰς δύο τελευταίας σχέσεις ἕπεται ἡ πρώτη. Ποίας τιμὰς δύνανται νὰ λάβουν οἱ α καὶ β, ἵνα πληροῦν τὰς ἄνω σχέσεις;

'Επίσης νὰ δειχθῇ, ὅτι, ἂν θέσωμεν $\gamma_\nu = \frac{\delta_1\sqrt{3}}{2\nu} + \frac{\delta_1\sqrt{3}}{2(\nu-1)}$,

ὅπου δ_1, δ_2, ν εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοὶ καὶ ἐπὶ πλέον εἶναι $\nu \geqslant 5$, $\delta_1\delta_2 = -1$, ὅτι πρέπει νὰ ἔχωμεν $40\,|\gamma_\nu| \leqslant 3$. (Πολυτεχνεῖον 1948)

2682. Νὰ δειχθῇ, ὅτι αἱ σχέσεις

$$\alpha = \frac{\gamma}{1+|\gamma|+|\delta|} \quad (1), \qquad \beta = \frac{\delta}{1+|\gamma|+|\delta|} \quad (2).$$

συνεπάγονται τὰς σχέσεις

$$|\alpha|+|\beta|<1 \quad (3), \qquad \gamma = \frac{\alpha}{1-|\alpha|-|\beta|} \quad (4), \qquad \delta = \frac{\beta}{1-|\alpha|-|\beta|}. \quad (5)$$

Καὶ ἀντιστρόφως : αἱ τρεῖς τελευταῖαι σχέσεις συνεπάγονται τὰς δύο πρώτας.

(Πολυτεχνεῖον)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Η'

ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΙ

ΟΡΙΣΜΟΙ

651. **'Ορισμοί**. Λέγομεν ὅτι μία σειρὰ ἀριθμῶν

$$x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots,\ x_\nu \ldots \qquad (1)$$

ἀποτελεῖ ***ἀκολουθίαν ἀριθμῶν***, ὅταν οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ προκύπτουν ἀπὸ τοὺς προηγουμένους των κατὰ ἕνα ὡρισμένον νόμον.

Π. χ. οἱ ἀριθμοὶ $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3}, \ldots\ldots, \frac{1}{\nu}$

ἀποτελοῦν μίαν ἀκολουθίαν ἀριθμῶν.

Οἱ ἀριθμοὶ $x_1, x_2, \ldots\ldots$ λέγονται ***ὅροι τῆς ἀκολουθίας***.

'Ο ὅρος τῆς ἀκολουθίας, ὁ ὁποῖος κατέχει τὴν ν τάξιν λέγεται ***γενικὸς ὅρος τῆς ἀκολουθίας***.

'Η ἀριθμητικὴ πρόοδος

$$\alpha,\ \alpha+\omega,\ \alpha+2\omega, \ldots\ldots, \alpha+(\nu-1)\omega$$

εἶναι μία ἀκολουθία ἀριθμῶν, τῆς ὁποίας ὁ γενικὸς ὅρος εἶναι ὁ

$$x_\nu = \alpha + (\nu-1)\omega.$$

'Επίσης ἡ γεωμετρικὴ πρόοδος

$$\alpha,\ \alpha\omega,\ \alpha\omega^2,\ \alpha\omega^3, \ldots\ldots, \alpha\omega^{\nu-1}.$$

εἶναι μία ἀκολουθία ἀριθμῶν, τῆς ὁποίας ὁ γενικὸν ὅρος εἶναι ὁ

$$x_\nu = \alpha\omega^{\nu-1}.$$

Μία ἀκολουθία ἀριθμῶν ***παρίσταται συνήθως διὰ τοῦ γενικοῦ ὅρου της***. Θὰ λέγωμεν : ἡ ***ἀκολουθία*** (x_ν) καὶ θὰ ἐννοοῦμεν, ὅτι πρόκειται περὶ τῆς ἀκολουθίας

$$x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots\ldots, x_\nu.$$

'Εὰν γνωρίζωμεν τὸν γενικὸν ὅρον μιᾶς ἀκολουθίας δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν τὴν ἀκολουθίαν αὐτήν.

Π.χ. 1ον. Ἔστω ἡ ἀκολουθία $(x_\nu)=\left(\frac{1}{\nu}\right)$.

Ἐὰν θέσωμεν $\nu=1, 2, 3, \ldots\ldots, \nu$, οἱ ὅροι της εἶναι

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \ldots\ldots, \frac{1}{\nu}.$$

2ον. Ἡ ἀκολουθία, ἡ ὁποία ἔχει γενικὸν ὅρον $x_\nu=\frac{1}{\nu(\nu+1)}$, ἀποτελεῖται ἀπὸ τὴν σειρὰν τῶν ἀριθμῶν :

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{12}, \quad \frac{1}{20}, \ldots\ldots, \frac{1}{\nu(\nu+1)}.$$

3ον. Ἐὰν εἶναι $x_1=2$ καὶ $x_\nu=x_{\nu-1}+\frac{1}{\nu}$, θὰ εἶναι

$$x_2=x_1+\frac{1}{\nu}=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}, \quad x_3=x_2+\frac{1}{\nu}=\frac{5}{2}+\frac{1}{3}=\frac{17}{6},$$

$$x_4=x_3+\frac{1}{\nu}=\frac{17}{6}+\frac{1}{4}=\frac{37}{12}, \quad \text{κλπ.}$$

καὶ ἔχομεν τὴν ἀκολουθίαν

$$2, \quad \frac{5}{2}, \quad \frac{17}{6}, \quad \frac{37}{12}, \ldots\ldots$$

Μία ἀκολουθία ἀριθμῶν λέγεται ***πεπερασμένου πλήθους*** ἢ ***πεπερατωμένη***, ἂν ἀποτελῆται ἀπὸ περασμένον πλῆθος ὅρων.

Μία ἀκολουθία ἀριθμῶν λέγεται ***ἀπέραντος***, ἐὰν ἔχῃ ἄπειρον πλῆθος ὅρων.

Ἀσκήσεις. *2683.* Νὰ εὑρεθῇ ὁ γενικὸς ὅρος τῆς ἀκολουθίας

$$0, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{2}{3}. \quad \frac{3}{4}, \ldots\ldots$$

2684. Νὰ εὑρεθῇ ὁ 8ος ὅρος τῆς ἀκολουθίας, $2, 16, 72 \ldots, \nu^2 \cdot 2^\nu, \ldots$

2685. Νὰ εὑρεθῇ ὁ 10ος ὅρος τῆς ἀκολουθίας

$$1, \quad \frac{3}{5}, \quad \frac{4}{10}, \ldots\ldots, \frac{\nu+1}{\nu^2+1}.$$

2686. Νὰ εὑρεθῇ ὁ 6ος ὅρος τῆς ἀκολουθίας

$$1, \quad \frac{4}{\sqrt{2}-1}, \quad \frac{8}{\sqrt{3}+1}, \ldots\ldots, \frac{2^\nu}{\sqrt{\nu}-(-1)^\nu},$$

2687. Ἐὰν εἶναι $x_1=3$ καὶ $x_\nu=x_{\nu-1}+\frac{1}{\nu}$ νὰ εὑρεθοῦν οἱ πέντε πρῶτοι ὅροι τῆς ἀκολουθίας (x_ν).

652. **Αὔξουσαι καὶ φθίνουσαι ἀκολουθίαι.** ***Μία ἀκολουθία λέγεται μονοτόνως αὔξουσα ἢ ἁπλῶς αὔξουσα, ὅταν κάθε ὅρος της εἶναι μικρότερος ἢ ἴσος μὲ τὸν ἑπόμενόν του.***

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἡ ἀκολουθία

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \ldots\ldots, x_\nu$$

θὰ εἶναι αὔξουσα, ἐὰν εἶναι

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \ldots\ldots < x_\nu < x_{\nu+1} < \ldots\ldots$$

Π. χ. ἡ ἀκολουθία $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots \frac{\nu}{\nu+1} \ldots$

εἶναι αὔξουσα, διότι $\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{3} < \ldots$

Μία ἀκολουθία λέγεται μονοτόνως φθίνουσα ἢ ἁπλῶς φθίνουσα, ὅταν κάθε ὅρος της εἶναι μεγαλύτερος ἢ ἴσος μὲ τὸν ἑπόμενον.

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἡ ἀκολουθία

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \ldots, x_\nu, \ldots$$

θὰ εἶναι φθίνουσα, ἐὰν εἶναι

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant \ldots \geqslant x_\nu \geqslant x_{\nu+1} \geqslant \ldots$$

Π.χ. Ἡ ἀκολουθία $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{\nu}$

εἶναι φθίνουσα, διότι $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} >$.

Συνήθως μία αὔξουσα ἢ φθίνουσα ἀκολουθία λέγεται ***μονότονος ἀκολουθία***.

653. **Φράγμα ἢ φραγμὸς μιᾶς ἀκολουθίας.** ***Μία ἀκολουθία λέγεται περιωρισμένη, ὅταν ἡ ἀπόλυτος τιμὴ κάθε ὅρου της εἶναι μικροτέρα ἢ ἴση μὲ ἕνα ἀριθμὸν Α μεγαλύτερον τοῦ μηδενός.***

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἡ ἀκολουθία x_ν θὰ εἶναι περιωρισμένη, ἐὰν εἶναι $|x_\nu| \leqslant A$ ἢ $-A \leqslant x_\nu \leqslant A$.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὁ ἀριθμὸς Α λέγεται ***φραγμὸς*** ἢ ***φράγμα*** τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν ὅρων τῆς ἀκολουθίας x_ν.

Ἐὰν ὑπάρχῃ ἕνας ἀριθμὸς A_1 τοιοῦτος, ὥστε νὰ εἶναι $A_1 \leqq x_\nu$, ὁ A_1 λέγεται ***ἀριστερὸς φραγμὸς*** ἢ ***πρὸς τὰ κάτω φραγμός*** τῆς ἀκολουθίας x_ν.

Π.χ. Εἰς τὴν ἀκολουθίαν $3^1, 3^2, 3^3, \ldots, 3^\nu, \ldots$ εἶναι $3 \leqslant 3^\nu$· ἄρα ὁ 3 εἶναι *ἀριστερὸς φραγμὸς* ἢ *πρὸς τὰ κάτω φραγμὸς* τῆς ἀκολουθίας αὐτῆς.

Ἐπίσης, ἐὰν ὑπάρχῃ ἕνας ἀριθμὸς A_2 τοιοῦτος, ὥστε νὰ εἶναι $x_\nu \leqslant A_2$, ὁ ἀριθμὸς A_2 λέγεται ***δεξιὸς φραγμὸς*** ἢ ***πρὸς τὰ ἄνω φραγμὸς*** τῆς ἀκολουθίας.

Π.χ. Εἰς τὴν ἀκολουθίαν $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{\nu}$ εἶναι $\frac{1}{\nu} \leqslant 1$· ἄρα ὁ ἀριθμὸς 1 εἶναι *δεξιὸς φραγμὸς* ἢ *πρὸς τὰ ἄνω φραγμὸς* τῆς ἀκολουθίας.

Ἐπειδὴ καὶ διὰ κάθε ἀριθμὸν φ μεγαλύτερον τῆς μονάδος εἶναι $\frac{1}{\nu} < \varphi$ ἕπεται, ὅτι ὁ φ εἶναι δεξιὸς φραγμὸς τῆς ἀκολουθίας αὐτῆς.

ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΤΩΝ ν ΟΡΩΝ ΜΙΑΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ

654. Συμβολικὴ παράστασις τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὅρων μιᾶς ἀκολουθίας. Τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων μιᾶς ἀκολουθίας παρίσταται γενικῶς μὲ τὸ γράμμα Σ ἢ S, παραπλεύρως τοῦ ὁποίου γράφομεν τὸν γενικὸν ὅρον. Ἐπίσης παραπλεύρως καὶ ἄνωθεν καὶ κάτωθεν τοῦ Σ θέτομεν δύο δείκτας, οἱ ὁποῖοι δηλώνουν τὰς ἀκραίας τιμὰς τῆς μεταβλητῆς τοῦ γενικοῦ ὅρου. Οὕτω τὸ σύμβολον

$$\sum_1^{\nu} \nu^2 \qquad \text{ἢ} \qquad S_1^{\nu}\, \nu^2$$

παριστάνει τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων μιᾶς ἀκολουθίας, οἱ ὁποῖοι σχηματίζονται ἀπὸ τὸν γενικὸν ὅρον ν^2, ὅταν δώσωμεν εἰς τὸν ν τὰς διαδοχικὰς τιμὰς 1, 2, 3, ... , ν. Δηλ. εἶναι

$$\sum_1^{\nu} \nu^2 = 1^2+2^2+3^2+\dots+\nu^2$$

Ὁμοίως θὰ εἶναι

$$\sum_1^{\nu} \nu(\nu+1) = 1.2+2.3+3.4+\dots+\nu(\nu+1)$$

$$\sum_1^{\nu} \frac{1}{\nu(\nu+1)} = \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\dots+\frac{1}{\nu(\nu+1)}$$

$$\sum_1^{\nu} \nu x^{\nu-1} = 1x^{1-1}+2x^{2-1}+3x^{3-1}+\dots+\nu x^{\nu-1}$$

$$= 1 + 2x + 3x^2 + \dots + \nu x^{\nu-1}$$

$$3\sum^{\nu} \nu^3 = 3(1^3+2^3+3^3+\dots+\nu^3)$$

$$\sum_1^{\nu} \frac{\nu}{(2\nu-1)(2\nu+1)} = \frac{1}{1.3}+\frac{2}{3.5}+\dots+\frac{\nu}{(2\nu-1)(21+1)}.$$

655. Ὑπολογισμὸς τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὅρων μιᾶς ἀκολουθίας ἀριθμῶν. Ἀκολουθίαι μὲ ἀκεραίους ὅρους. Ἐὰν ὁ γενικὸς ὅρος τῆς ἀκολουθίας εἶναι ***μία ἀκεραία καὶ ῥητὴ συνάρτησις τοῦ πλήθους ν τῶν ὅρων*** μιᾶς ἀκολουθίας, δυνάμεθα μὲ τὴν βοήθειαν γνωστῶν τύπων, νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων κάθε τοιαύτης ἀκολουθίας.

Παράδειγμα 1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς ἀκολουθίας $1.2+2.3+3.4+\dots+\nu(\nu+1)$.

Ὁ γενικὸς ὅρος $\nu(\nu+1)$ τῆς δοθείσης ἀκολουθίας γράφεται $\nu^2+\nu$. Ἐὰν λοιπὸν χρησιμοποιήσωμεν τὴν συμβολικὴν παράστασιν τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὅρων τῆς δοθείσης ἀκολουθίας, θὰ ἔχωμεν

$$\sum_1^{\nu} \nu(\nu+1) = \sum_1^{\nu}(\nu^2+\nu) = \sum_1^{\nu}\nu^2+\sum_1^{\nu}\nu. \qquad (1)$$

Ἀλλὰ $\sum_1^{\nu}\nu^2$ παριστάνει τὸ ἄθροισμα $1^2+2^2+3^2+\dots+\nu^2$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον μὲ $\dfrac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}$ (§ 460) καὶ $\sum_1^{\nu}\nu$ παριστάνει τὸ ἄθροισμα τῶν ν ὅρων τῆς ἀριθμητικῆς προόδου $1+2+3+\ldots+\nu$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον μὲ $\frac{\nu(\nu+1)}{2}$ (§ 458). Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὰ $\sum_1^\nu \nu^2$ καὶ $\sum_1^\nu \nu$ μὲ τὰ ἴσα των καὶ ἔχομεν

$$\sum_1^\nu \nu(\nu+1)=\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}+\frac{\nu(\nu+1)}{2}=\frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)}{3}.$$

Παράδειγμα 2ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς ἀκολουθίας :

$$1.2.3+2.3.4+3.4.5+\ldots+\nu(\nu+1)(\nu+2)$$

Ὁ γενικὸς ὅρος $\nu(\nu+1)(\nu+2)$ τῆς δοθείσης ἀκολουθίας γράφεται $\nu^3+3\nu^2+2\nu$. Ἐὰν λοιπὸν χρησιμοποιήσωμεν τὴν συμβολικὴν παράστασιν τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὅρων τῆς δοθείσης ἀκολουθίας θὰ ἔχωμεν

$$\sum_1^\nu \nu(\nu+1)(\nu+2) = \sum_1^\nu (\nu^3+3\nu^2+2\nu)$$
$$= \sum_1^\nu \nu^3+\sum_1^\nu 3\nu^2+\sum_1^\nu 2\nu$$
$$= \sum_1^\nu \nu^3+3\sum_1^\nu \nu^2+2\sum_1^\nu \nu. \quad (1)$$

Ἀλλὰ $\sum_1^\nu \nu^3$ παριστάνει τὸ ἄθροισμα $1^3+2^3+3^3+\ldots+\nu^3$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον μὲ $\frac{\nu^2(\nu+1)^2}{4}$ (§ 461),

$\sum_1^\nu \nu^2$ παριστάνει τὸ ἄθροισμα $1^2+2^2+3^2+\ldots+\nu^2$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον μὲ $\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}$

καὶ $\sum_1^\nu \nu$ παριστάνει τὸ αθροισμα $1+2+3+\ldots+\nu$, τὸ ὁπὄιον εἶναι ἴσον μὲ $\frac{\nu(\nu+1)}{2}$.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (1) τὰ $\sum_1^\nu \nu^3$, $\sum_1^\nu \nu^2$ καὶ $\sum_1^\nu \nu$ μὲ τὰ ἴσα των καὶ ἔχομεν

$$\sum_1^\nu \nu(\nu+1)(\nu+2)=\frac{\nu^2(\nu+1)^2}{4}+3.\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}+2.\frac{\nu(\nu+1)}{2}=$$
$$=\frac{\nu}{4}(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3).$$

Ἀσκήσεις. ***2688.*** Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ν ὅρων τῆς ἀκολουθίας $1.3+2.5+3.7+\ldots+\nu(2\nu+1)$.

2689. Ὁμοίως τῆς ἀκολουθίας $1.3+2.4+3.5+\ldots+\nu(\nu+2)$

2690. Ὁμοίως τῆς ἀκολουθίας $1.3+3.5+5.7+\ldots+(2\nu-1)(2\nu+1)$.

2591. Ὁμοίως τῆς ἀκολουθίας $1.3+2.5+3.7+\ldots+\nu(2\nu+1)$.

2692. Ὁμοίως τῆς ἀκολουθίας $1.4+2.7+3.10+\ldots+\nu(3\nu+1)$.

2693. Ὁμοίως τῆς ἀκολουθίας $2.4+4.6+6.8+\ldots+2\nu(2\nu+2)$.

2694. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ν ὅρων τῆς ἀκολουθίας

$$1.3.5+3.5.7+5.7.9+\ldots+(2\nu-1)(2\nu+1)(2\nu+3)$$

2695. Ὁμοίως τῆς ἀκολουθίας

$$2.4.6+4.6.8+6.8.10+\ldots+2\nu(2\nu+2)(2\nu+4).$$

2696. Ὁμοίως τῆς ἀκολουθίας

$1.4.7+2.5.8+3.6.9+\ldots+\nu(\nu+3)(\nu+6).$

2697. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ν ὅρων τῆς ἀκολουθίας

$3+6+10+16+\ldots+(2\nu+2^{\nu-1}).$

2698. Ὁμοίως τῆς ἀκολουθίας $1+5+13+29+\ldots+(2^{\nu}-3).$

2699. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς ἀκολουθίας

$1.2^2+2.3^2+3.4^2+\ldots+\nu(\nu+1)^2.$

2700. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ν ὅρων τῆς ἀκολουθίας

$1+3+7+11+21+\ldots+(\nu+2^{\nu-1}).$

2701. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ν ὅρων τῆς ἀκολουθίας

$2^2+4^2+6^2+\ldots+(2\nu)^2.$

2702. Ὁμοίως τῆς ἀκολουθίας $2^3+4^3+6^3+\ldots+(2\nu)^3$

2703. Ὁμοίως τῆς ἀκολουθίας $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2\nu-1)^2.$

2704. Ὁμοίως τῆς ἀκολουθίας $1^3+3^3+5^3+\ldots+(2\nu-1)^3.$

2705. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ν ὅρων τῆς ἀκολουθίας

$1.3^2+3.5^2+5.7^2+\ldots+(2\nu-1)(2\nu+1)^2.$

2706. Ὁμοίως τῆς ἀκολουθίας

$2.4^2+4.6^2+6.8^2+\ldots+2\nu(2\nu+2)^2.$

656. **Ακολουθίαι μὲ κλασματικοὺς ὅρους.** Ὅταν οἱ ὅροι μιᾶς ἀκολουθίας εἶναι κλασματικοί, ἀναλύομεν τὸν γενικὸν ὅρον εἰς ἕνα ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα ἁπλῶν κλασμάτων, τὰ ὁποῖα ἔχουν παρονομαστὰς τοὺς παράγοντας τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ γενικοῦ ὅρου καὶ ἔπειτα ἐργαζόμεθα, ὅπως εἰς τὸ κάτωθι παράδειγμα.

***Παράδειγμα* Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ν ὅρων τῆς ἀκολουθίας** $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}\ldots\frac{1}{\nu(\nu+1)}.$

Ἀναλύομεν κατὰ τὰ γνωστὰ (§ 549) τὸν γενικὸν ὅρον $\frac{1}{\nu(\nu+1)}$ εἰς ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα ἁπλῶν κλασμάτων. Πρὸς τοῦτο θέτομεν

$$\frac{1}{\nu(\nu+1)}=\frac{A}{\nu}+\frac{B}{\nu+1}. \qquad (1)$$

Ἐξαλείφομεν παρονομαστὰς κλπ. καὶ ἔχομεν

$$1=A(\nu+1)+B\nu \quad \text{ἢ} \quad 1=(A+B)\nu+A.$$

Διὰ νὰ ὑφίσταται ἡ ταυτότης αὐτὴ πρέπει οἱ συντελεσταὶ τῶν αὐτῶν δυνάμεων τοῦ ν νὰ εἶναι ἴσοι (§ 541)· ἤτοι πρέπει νὰ εἶναι

$$A+B=0 \quad \text{καὶ} \quad A=1.$$

Ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις αὐτὰς εὑρίσκομεν $A=1$ καὶ $B=-1$.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ταυτότητα (1) τὰ A καὶ B μὲ τὰς τιμάς των καὶ ἔχομεν

$$\frac{1}{\nu(\nu+1)}=\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu+1}. \qquad (2)$$

Ἐὰν εἰς τὴν ταυτότητα (2) ἀντικαταστήσωμεν τὸ ν διαδοχικῶς μὲ τοὺς ἀριθμοὺς 1, 2, 3, ... ν, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{1}{1.2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2.3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3.4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{1}{\nu(\nu+1)}=\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu+1}.$$

Προσθέτομεν τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ λαμβάνομεν

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\dots+\frac{1}{\nu(\nu+1)}=1-\frac{1}{\nu+1}=\frac{\nu}{\nu+1}.$$

Ἀσκήσεις. *2707.* Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα ν τῶν ὅρων τῆς ἀκολουθίας $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\dots+\frac{1}{(2\nu-1)(2\nu+1)}$.

2708. Ὁμοίως τῆς ἀκολουθίας

$$\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{4.7}+\dots+\frac{1}{(\nu+1)(2\nu+1)}.$$

2709. Ὁμοίως τῆς ἀκολουθίας

$$\frac{1}{1.4}+\frac{1}{4.7}+\frac{1}{7.10}+\dots+\frac{1}{(3\nu-2)(3\nu+1)}.$$

2710. Ὁμοίως τῆς ἀκολουθίας

$$\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+\dots+\frac{1}{(\nu-1)\,\nu\,(\nu+1)}.$$

2711. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ν ὅρων τῆς ἀκολουθίας

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\dots$$

εἰς τὴν ὁποίαν οἱ παρονομασταὶ εἶναι τὰ τετράγωνα τῶν διαδοχικῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἠλαττωμένα κατὰ 1.

657. **Ἰδιαίτεροι μέθοδοι (τεχνάσματα).** ***Παράδειγμα 1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ν ὅρων τῆς ἀκολουθίας***

$$\Sigma=-1^2+2^2-3^2+4^2-\dots-(2\nu-1)^2+(2\nu)^2.$$

Τὸ δοθὲν ἄθροισμα γράφεται

$$(2^2-1)+(4^2-3^2)+(6^2-5^2)+\dots+[(2\nu)^2-(2\nu-1)^2]=3+7+11+\dots+(4\nu-1).$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ ζητούμενον ἄθροισμα εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ν ὅρων τῆς ἀριθμητικῆς προόδου, ἡ ὁποία ἔχει πρῶτον ὅρον τὸν 3, λόγον 4 καὶ τελευταῖον ὅρον $(4\nu-1)$, ἄρα θὰ εἶναι

$$\Sigma=\frac{[3+(4\nu-1)]\nu}{2}=\nu(2\nu+1).$$

658. ***Παράδειγμα 2ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ν ὅρων τῆς ἀκολουθίας***

$$\Sigma=-1^3+2^3-3^3+4^3-\dots-(2\nu-1)^3+(2\nu)^3.$$

Τὸ δοθὲν ἄθροισμα γράφεται

$$\Sigma=(2^3-1^3)+(4^3-3^3)+(6^3-5^3)+\ldots+[(2\nu)^3-(2\nu-1)^3]. \quad (1)$$

Ὁ γενικὸς ὅρος $(2\nu)^3-(2\nu-1)^3$ τῆς ἀκολουθίας (1) γράφεται

$(2\nu)^3-[(2\nu)^3-3.(2\nu)^2.1+3.2\nu-1]$ ἢ $12\nu^2-6\nu+1$ ἢ $12\nu^2-6\nu+\nu^0$.

Ἐὰν λοιπὸν χρησιμοποιήσωμεν τὴν συμβολικὴν παράστασιν τοῦ ἀθροίσματος τῆς ἀκολουθίας (1) θὰ ἔχωμεν

$$\Sigma_1^\nu(12\nu^2-6\nu+\nu^0)=\Sigma_1^\nu 12\nu^2-\Sigma_1^\nu 6\nu+\Sigma_1^\nu\nu^0=12\Sigma_1^\nu\nu^2-6\,\Sigma_1^\nu\nu+\Sigma_1^\nu\nu^0. \quad (2)$$

Ἀλλὰ $\Sigma_1^\nu\nu^2=1^2+2^2+3^2+\ldots+\nu^2=\dfrac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}$

$$\Sigma_1^\nu=1+2+3+\ldots+\nu=\frac{\nu(\nu+1)}{2}$$

$$\Sigma_1^\nu\nu^0=1+1+1+\ldots+1=\nu$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (2) τὰ $\Sigma_1^\nu\nu^2$, $\Sigma_2^\nu\nu$, $\Sigma_1^\nu\nu^2$ μὲ τὰ ἴσα των καὶ ἔχομεν

$$\Sigma_1^\nu(12\nu^2-6\nu+\nu^0)=12.\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}-6.\frac{\nu(\nu+1)}{2}+\nu=\nu^2(4\nu+3).$$

Ἀσκήσεις. √*2712.* Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα

$$\frac{2}{5}+\frac{3}{5^2}+\frac{2}{5^3}+\frac{3}{5^4}+\frac{2}{5^5}+\ldots \text{ (ἐπ' ἄπειρον)}$$

√*2713.* Ὁμοίως τὸ $\dfrac{2x^2-1}{x}+\dfrac{4x^2-3}{x}+\dfrac{6x^2-5}{x}+\ldots$ (ν ὅροι)

√*2714.* Ὁμοίως τὸ

$$\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\alpha+\beta}{\gamma\delta}+\frac{\alpha+2\beta}{\gamma\delta^2}+\frac{\alpha+3\beta}{\gamma\delta^3}+\ldots+\frac{\alpha+(\nu-1)\beta}{\gamma\delta^{\nu-1}}.$$

√*2715.* Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ κάτωθι ἄθροισμα

$$1+2x+3x^2+4x^3+\ldots+\nu x^{\nu-1}$$

√*2716.* Ὁμοίως τὸ

$$\Sigma_1^\nu x^\nu(x^\nu+y^\nu)=x(x+y)+x^2(x^2+y^2)+x^3(x^3+y^3)+\ldots$$

2717. Ὁμοίως τὸ

$$\Sigma_1^\nu(\nu\alpha+x^\nu)=(\alpha+x)+(2\alpha+x^2)+(3\alpha+x^3)+\ldots$$

√*2718.* Ὁμοίως τὸ $1(2\nu-1)+2(2\nu-3)+3(2\nu-5)+\ldots+(\nu-1)3+\nu.1.$

2719. Ὁμοίως τὸ

$$1^2(\nu-1)+2^2(\nu-2)+3^2(\nu-3)+\ldots+(\nu-2)^2.2+(\nu-1)^2.1.$$

2720. Ὁμοίως τὸ $x+2x^3+3x^3+4x^4+\ldots$

2721. Νὰ εὑρεθῇ ὁ νυοστὸς ὅρος τῆς ἀκολουθίας

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

τῆς ὁποίας ὁ ὅρος ὁ κατέχων τὴν ν τάξιν εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα τοῦ ὅρου, ποὺ κατέχει τὴν ν—1 τάξιν καὶ τοῦ ὅρου, ποὺ κατέχει τὴν ν—2 τάξιν.

(Πολυτεχνεῖον)

2722. Νὰ εὑρεθῇ ὁ νυοστὸς ὅρος τῆς ἀκολουθίας 0, 1, 1, 8, 5, 11, 21, 43, ..., τῆς ὁποίας ὁ ὅρος ὁ κατέχων τὴν ν τάξιν εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα τοῦ ὅρου, ποὺ κατέχει τὴν ν—1 τάξιν καὶ τοῦ διπλασίου τοῦ ὅρου, ποὺ κατέχει τὴν ν—2 τάξιν.

ΟΡΙΑ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ

659. Ἀκολουθίαι τείνουσαι πρὸς τὸ μηδέν. ***Παράδειγμα 1ον.*** Ἔστω ἡ ἀπέραντος ἀκολουθία $\left(x_\nu = \frac{1}{\nu}\right)$

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots\ldots,\ \frac{1}{\nu},\ \ldots\ldots \qquad (1)$$

Ἔστω ἐπίσης ἕνας ἐλάχιστος θετικὸς ἀριθμὸς ε καὶ ἔστω, ὅτι εἶναι $\varepsilon = 0{,}000001$.

Ἂς ἐξετάσωμεν τώρα, ἂν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἕνα ὅρον τῆς ἀκολουθίας (1) οὕτως, ὥστε ἕκαστος τῶν ἑπομένων ὅρων της νὰ εἶναι ἀπολύτως μικρότερος τοῦ ε.

Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εἶναι $\frac{1}{\nu} < \varepsilon$. Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν εὑρίσκομεν $\frac{1}{\nu} < 0{,}000001$ ἢ $1 < 0{,}000001 \cdot \nu$ ἢ $\nu > 1\,000\,000$.

Ὥστε, ἐὰν δώσωμεν εἰς τὸν ν τιμὰς μεγαλυτέρας τοῦ $1\,000\,000 = \eta$, ἕκαστος τῶν ὅρων τῆς (1) θὰ εἶναι ἀπολύτως μικρότερος τοῦ ἐλαχίστου ἀριθμοῦ $\varepsilon = 0{,}000001$· δηλ. θὰ εἶναι $|x_\nu| < \varepsilon$.

Πράγματι, διὰ $\nu = 1\,000\,001$, θὰ εἶναι $\frac{1}{\nu} = \frac{1}{1\,000\,001}$, δηλαδὴ εὑρίσκομεν ἕνα ὅρον τῆς ἀκολουθίας ἀπολύτως μικρότερον τοῦ ε.

Ὁμοίως διὰ $\nu = 1\,000\,002$ εὑρίσκομεν τὸν ὅρον $\frac{1}{1\,000\,002}$, ὁ ὁποῖος εἶναι μικρότερος τοῦ ε.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θὰ λέγωμεν, ὅτι ἡ ἀκολουθία $\left(\frac{1}{\nu}\right)$ ***τείνει εἰς τὸ μηδὲν*** ἢ ***ἔχει ὅριον τὸ μηδὲν*** καὶ θὰ γράφωμεν τοῦτο συμβολικῶς ὡς ἑξῆς :

$$\left(\frac{1}{\nu}\right) \to 0 \quad \text{ἢ} \quad \text{ορ}\left(\frac{1}{\nu}\right) = 0.$$

Παράδειγμα 2ον. Ἔστω ἡ ἀκολουθία $\left(x_\nu = \frac{1}{2\nu}\right)$

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{8},\ \ldots\ldots,\ \frac{1}{2\nu},\ \ldots\ldots$$

Ἔστω ἐπίσης ἕνας ἐλάχιστος ἀριθμὸς $\varepsilon = \frac{1}{999\,000}$.

Ἐὰν θέλωμεν νὰ εἶναι $|x_\nu| < \varepsilon$, ἀρκεῖ νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ ν, ὥστε νὰ εἶναι $\frac{1}{2\nu} < \varepsilon$ ἢ $\frac{1}{2\nu} < \frac{1}{999\,000}$ ἢ $\nu > 499500$.

Ὥστε, ἐὰν δώσωμεν εἰς τὸν ν τιμὰς ἀκεραίας καὶ μεγαλυτέρας τοῦ $499500 = \eta$, θὰ εἶναι $|x_\nu| < \varepsilon$. Ἑπομένως ἡ δοθεῖσα ἀκολουθία ***τείνει πρὸς τὸ μηδὲν*** ἢ ***ἔχει ὅριον τὸ μηδέν***.

Γενικῶς. *Θὰ λέγωμεν, ὅτι μία ἀπέραντος ἀκολουθία ἀριθμῶν*

$$(x_\nu) = x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_\nu \ldots,$$

τείνει εἰς τὸ μηδὲν ἢ ὅτι ἔχει ὅριον τὸ μηδέν, ὅταν εἰς δοθέντα θετικὸν ἀριθμὸν ε, ὁσονδήποτε μικρόν, ἀντιστοιχῇ ἀκέραιος θετικὸς ἀριθμὸς η καὶ τοιοῦτος ὥστε διὰ κάθε ἀκεραίαν καὶ θετικὴν τιμὴν τοῦ $\nu > \eta$, νὰ ἔχωμεν $|x_\nu| < \varepsilon$.

Διὰ νὰ δηλώσωμεν, ὅτι μία ἀκολουθία (x_ν) τείνει εἰς τὸ μηδὲν ἢ ἔχει ὅριον τὸ μηδέν, θὰ γράφωμεν συμβολικῶς

$$(x_\nu) \rightarrow 0 \quad \text{ἢ} \quad \text{ορ}\,(x_\nu) = 0.$$

660. Ἀκολουθίαι τείνουσαι εἰς τὸ ἄπειρον. *Παράδειγμα.* Ἔστω ἡ ἀκολουθία $(x_\nu = 2\nu)$

$$2,\ 4,\ 6,\ 8, \ldots\ldots, 2\nu, \ldots\ldots \qquad (1)$$

Ἔστω ἐπίσης ἕνας μεγάλος θετικὸς ἀριθμὸς Μ καὶ ἔστω, ὅτι εἶναι $M = 10\,000\,000$.

Ἂς ἐξετάσωμεν τώρα, ἂν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἕνα ὅρον τῆς ἀκολουθίας (1), οὕτως ὥστε ἕκαστος τῶν ἑπομένων ὅρων της νὰ εἶναι ἀπολύτως μεγαλύτερος τοῦ Μ.

Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εἶναι

$$2\nu > M \quad \text{ἢ} \quad 2\nu > 10\,000\,000.$$

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν εὑρίσκομεν $\nu > 5\,000\,000$· ὥστε, ἐὰν δώσωμεν εἰς τὸν ν τιμὰς μεγαλυτέρας τοῦ $5\,000\,000 = H$, ἕκαστος τῶν ὅρων τῆς (1) θὰ εἶναι ἀπολύτως μεγαλύτερος τοῦ μεγάλου ἀριθμοῦ $M = 10\,000\,000$. δηλ. θὰ εἶναι πάντοτε $|x_\nu| > M$.

Πράγματι διὰ $\nu = 5\,000\,001$ εὑρίσκομεν $2\nu = 2 . 5\,000\,001 = 10\,000\,002$ δηλ. εὑρίσκομεν ἕνα ὅρον τῆς ἀκολουθίας, ἀπολύτως μεγαλύτερον τοῦ $M = 10\,000\,000$.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θὰ λέγωμεν, ὅτι ἡ ἀκολουθία $(x_\nu = 2\nu)$ ***τείνει εἰς τὸ ἄπειρον*** ἢ ὅτι ἔχει ***ὅριον τὸ ἄπειρον*** καὶ θὰ γράφωμεν τοῦτο συμβολικῶς ὡς ἑξῆς:

$$(2\nu) \rightarrow \infty \quad \text{ἢ} \quad \text{ορ}(2\nu) = \infty.$$

Γενικῶς. *Θὰ λέγωμεν, ὅτι μία ἀπέραντος ἀκολουθία ἀριθμῶν*

$$(x_\nu) = x_1\ \ x_3,\ x_2, \ldots\ x_\nu \ldots$$

τείνει εἰς τὸ ἄπειρον ἢ ἔχει ὅριον τὸ ἄπειρον, ὅταν εἰς δοθέντα θετικὸν ἀριθμὸν Μ, ὁσονδήποτε μεγάλον, ἀντιστοιχῇ ἕνας ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἀριθμὸς Η τοιοῦτος. ὥστε διὰ κάθε ἀκεραίαν καὶ θετικὴν τοῦ $\nu > H$ νὰ ἔχωμεν $|x_\nu| > M$.

Διὰ νὰ δηλώσωμεν, ὅτι μία ἀκολουθία (x_ν) τείνῃ εἰς τὸ ἄπειρον ἢ ὅτι ἔχει ὅριον τὸ ἄπειρον, θὰ γράφωμεν συμβολικῶς·

$$(x_\nu) \rightarrow \infty \quad \text{ἢ} \quad \text{ορ}(x_\nu) = \infty.$$

661. Ἀκολουθίαι τείνουσαι εἰς ὡρισμένον ἀριθμὸν $A \neq 0$. *Θὰ λέγωμεν, ὅτι μία ἀπέραντος ἀκολουθία ἀριθμῶν*

$$(x_\nu) = x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\nu, \ldots$$

τείνει πρὸς ἕνα ὡρισμένον ἀριθμὸν A, *ἢ ὅτι ἔχει ὅριον τὸν* A, *ἐὰν ἡ ἀκολουθία* $(x_\nu - A)$ *τείνῃ εἰς τὸ μηδὲν ἢ ἔχῃ ὅριον τὸ μηδέν.*

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἡ ἀκολουθία

$$(x_\nu) \to A \quad ἢ \quad ορ(x_\nu) = A$$

ἐὰν

$$(x_\nu - A) \to 0 \quad ἢ \quad ορ(x_\nu - A) = 0.$$

Π.χ ἡ ἀκολουθία $\left(x_\nu = \frac{\nu+1}{\nu}\right)$ τείνει εἰς τὴν 1, διότι ἡ ἀκολουθία $\left(\frac{\nu+1}{\nu} - 1\right)$ τείνει εἰς τὸ 0.

Πράγματι ἡ ἀκολουθία $\left(\frac{\nu+1}{\nu} - 1\right)$ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀκολουθίαν $\left(\frac{1}{\nu}\right)$, ἡ ὁποία τείνει εἰς τὸ μηδέν.

Ὁμοίως ἡ ἀκολουθία $\left(x_\nu = 8 + \frac{1}{\nu}\right)$ ἔχει ὅριον τὸ 8, διότι ἡ ἀκολουθία $\left[\left(8 + \frac{1}{\nu}\right) - 8\right]$ ἡ ὁποία εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀκολουθίαν $\frac{1}{\nu}$ ἔχει ὅριον τὸ μηδέν.

Ἀσκήσεις. *2723.* Δίδεται ἡ ἀκολουθία $2\frac{1}{2}, \quad 2\frac{2}{3}, \ldots, 2\frac{\nu}{\nu+1} \ldots\ldots$ Νὰ εὑρεθῇ θετικὸς ἀριθμὸς η τοιοῦτος, ὥστε ἐὰν $\nu \geq \eta$ νὰ εἶναι

$$\left| 2 + \frac{\nu}{\nu+1} - 3 \right| < 0{,}00001.$$

2724. Δίδεται ἡ ἀκολουθία $\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{18}, \ldots \frac{1}{2\nu^2}, \ldots$ Νὰ εὑρεθῇ θετικὸς ἀριθμὸς η τοιοῦτος, ὥστε, ἐὰν $\nu > \eta$, νὰ εἶναι

$$\frac{1}{2\nu^2} < 0{,}0005.$$

2725. Δίδονται αἱ ἀκολουθίαι $(x_\nu) = 3 + \frac{1}{\nu}$ καὶ $(\omega_\nu) = 5 - \frac{1}{\nu^2}$. Νὰ δειχθῇ, ὅτι αἱ ἀκολουθίαι αὐταὶ τείνουν εἰς τοὺς ἀριθμοὺς 3 καὶ 5 ὅταν $\nu \to \infty$.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ

662. Ἰδιότης Ι. *Ἐὰν μία ἀπέραντος ἀκολουθία ἀριθμῶν* (x_ν) *τείνῃ εἰς τὸ μηδέν, τότε καὶ ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τῆς ἀκολουθίας τείνει εἰς τὸ μηδέν· καὶ ἀντιστρόφως.*

Ἔστω ὅτι ἡ ἀκολουθία $(x_\nu) \rightarrowtail 0$· θὰ δείξωμεν, ὅτι καὶ ἡ ἀκολουθία $|x_\nu| \rightarrowtail 0$.

Τοῦτο εἶναι συνέπεια τοῦ ὁρισμοῦ κατὰ τὸν ὁποῖον ἡ ἀκολουθία $(x_\nu) \rightarrowtail 0$ (§ 659).

Ὥστε $\boxed{\text{Ἐὰν } (x_\nu) \rightarrowtail 0, \text{ τότε } |x_\nu| \rightarrowtail 0}$

662. Ἰδιότης ΙΙ. ***Ἐὰν μία ἀκολουθία ἀριθμῶν***

$$(x_\nu) = x_1, x_2, x_3, \ldots x_\nu, \ldots\ldots$$

τείνῃ εἰς τὸ μηδέν, τότε ἡ ἀκολουθία

$$\left(\frac{1}{x_\nu}\right) = \frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}, \ldots, \frac{1}{x_\nu} \ldots$$

τείνει εἰς τὸ ἄπειρον καὶ ἀντιστρόφως.

Ἐπειδὴ ἡ ἀκολουθία (x_ν) τείνει εἰς τὸ μηδὲν (§ 659) διὰ $\nu > \eta$, θὰ ἔχωμεν τὴν ἀνισότητα $|x_\nu| < \varepsilon$, ὅπου ε εἶναι ἐλάχιστος θετικὸς ἀριθμός. Ἄρα θὰ εἶναι καὶ

$$\frac{1}{|x_\nu|} > \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{ἢ} \quad \left|\frac{1}{x_\nu}\right| > \frac{1}{\varepsilon}. \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ ὁ ε εἶναι οἱοσδήποτε ἐλάχιστος ἀριθμός, ὁ $\frac{1}{\varepsilon}$ εἶναι οἱοσδήποτε μεγάλος ἀριθμός· ἄρα ἀπὸ τὴν σχέσιν (1) συνάγομεν (§ 660), ὅτι ἡ ἀκολουθία $\left(\frac{1}{x_\nu}\right)$ ἔχει ὅριον τὸ ἄπειρον.

Π.χ. ἡ ἀκολουθία $\left(\frac{1}{x_\nu}\right) = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{\nu}, \ldots$

ἔχει ὅριον τὸ 0, ἐνῷ ἡ ἀκολουθία

$$1, 2, 3, 4, \ldots\ldots, \nu$$

ἔχει ὅριον τὸ ἄπειρον.

Εὐκόλως ἀποδεικνύεται, ὅτι, ἐὰν $\text{ορ}(x_\nu) = \infty$, ἡ ἀκολουθία

$$\left(\frac{1}{x_\nu}\right) \rightarrowtail 0.$$

Ὥστε $\boxed{\text{Ἐὰν } (x_\nu) \rightarrowtail 0, \text{ τότε } \left(\frac{1}{x_\nu}\right) \rightarrowtail \infty}$

καὶ ἀντιστρόφως

$$\boxed{\text{Ἐὰν } \left(\frac{1}{x_\nu}\right) \rightarrowtail \infty, \text{ τότε } (x_\nu) \rightarrowtail 0}$$

663. Ἰδιότης ΙΙΙ. ***Ἐὰν ἡ ἀκολουθία*** $(x_\nu) \rightarrowtail 0$ ***καὶ λ σταθερὰ ποσότης, τότε καὶ ἡ ἀκολουθία*** $(\lambda x_\nu) \rightarrowtail 0$.

Ἀφοῦ ἡ ἀκολουθία $(x_\nu) \rightarrowtail 0$, διὰ $\nu > \eta$, θὰ ἔχωμεν τὴν ἀνισότητα $|x_\nu| < \varepsilon$, ὅπου ε εἶναι οἱοσδήποτε ἐλάχιστος θετικὸς ἀριθμός.

Ἀπὸ τὴν σχέσιν $|x_\nu|<\varepsilon$ λαμβάνομεν

$$|x_\nu|.|\lambda|<\varepsilon.|\lambda| \quad \text{ἢ} \quad |\lambda x_\nu|<\varepsilon.|\lambda| \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ τὸ $\varepsilon.|\lambda|$ δύναται νὰ γίνῃ ὅσον θέλομεν μικρὸς ἀριθμός, ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν τὸ ε ὅσον θέλομεν μικρὸν ἀριθμόν, ἕπεται ἀπὸ τὴν (1), ὅτι $(\lambda x_\nu) \rightarrow 0$.

Ἐδέχθη λοιπόν, ὅτι

$$\boxed{\text{Ἐὰν } (x_\nu)\twoheadrightarrow 0 \quad \text{τότε } (\lambda x_\nu)\twoheadrightarrow 0}$$

664. **Ἰδιότης IV**. ***Ἐὰν αἱ ἀκολουθίαι*** (x_ν), (x'_ν) ***τείνουν εἰς τὸ μηδέν, τότε καὶ αἱ ἀκολουθίαι: 1ον.*** $(x_\nu + x'_\nu)$ ***2ον.*** $(x_\nu - x'_\nu)$, ***3ον.*** $(x_\nu\ x'_\nu)$ ***τείνουν εἰς τὸ μηδέν.***

1ον. Ἔστω, ὅτι $(x_\nu)\twoheadrightarrow 0$ καὶ $(x'_\nu)\twoheadrightarrow 0$· θὰ δείξωμεν, ὅτι καὶ

$$(x_\nu + x'_\nu)\twoheadrightarrow 0.$$

Ἐπειδὴ $(x_\nu)\twoheadrightarrow 0$, διὰ $\nu>\eta$, θὰ εἶναι $|x_\nu|<\frac{\varepsilon}{2}$ (1)

Ὁμοίως ἐπειδὴ $(x'_\nu)\twoheadrightarrow 0$, διὰ $\nu>\eta_1$, θὰ εἶναι $|x'_\nu|<\frac{\varepsilon}{2}$ (2)

Προσθέτομεν τὰς ἀνισότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$|x_\nu|+|x'_\nu|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} \qquad |x_\nu|+|x'_\nu|<\varepsilon \qquad (3)$$

Ἐπειδὴ (§ 630) $|x_\nu + x'_\nu|\leqslant|x_\nu|+|x'_\nu|$, ἡ (3) γίνεται κατὰ μείζονα λόγον $|x_\nu + x'_\nu|<\varepsilon$. (4)

Ἀπὸ τὴν (4) συνάγομεν, ὅτι

$$(x_\nu + x'_\nu)\twoheadrightarrow 0 \quad \text{ἢ} \quad \text{ορ}(x_\nu + x'_\nu)=0.$$

2ον. Ἔστω, ὅτι $(x_\nu)\twoheadrightarrow 0$ καὶ $(x'_\nu)\twoheadrightarrow 0$ θὰ δείξωμεν, ὅτι καὶ $(x_\nu - x'_\nu)\twoheadrightarrow 0$.

Ἔχομεν $|x_\nu - x'_\nu|=|x_\nu + (-x'_\nu)|$ (5)

Ἐπειδὴ (§ 630)

$$|x_\nu + (-x'_\nu)|\leqslant|x_\nu|+|-x'_\nu|=|x_\nu|+|x'_\nu|$$

ἡ (5) γράφεται $|x_\nu - x'_\nu|\leqslant|x_\nu|+|x'_\nu|$ (5')

Ἀλλὰ ὡς ἐδείχθη ἀνωτέρω (1ον) εἶναι $|x_\nu|+|x'_\nu|<\varepsilon$ ἄρα θὰ εἶναι καὶ $|x_\nu - x'_\nu|<\varepsilon$.

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν σχέσιν συνάγομεν, ὅτι

$$(x_\nu - x'_\nu)\twoheadrightarrow 0 \quad \text{ἢ} \quad \text{ορ}(x_\nu - x'_\nu)=0.$$

3ον. Ἔστω, ὅτι $(x_\nu)\twoheadrightarrow 0$ καὶ $(x'_\nu)\twoheadrightarrow 0$· θὰ δείξωμεν, ὅτι καὶ $(x_\nu\,.\,x'_\nu)\twoheadrightarrow 0$

Ἐπειδὴ $(x_\nu)\twoheadrightarrow 0$ διὰ $\nu>\eta$, θὰ εἶναι $|x_\nu|<\sqrt{\varepsilon}$ (6), ὅπου ε εἶναι ἐλάχιστος θετικὸς ἀριθμός. Ἐπίσης ἐπειδὴ

$(x'_\nu)\twoheadrightarrow 0$ διὰ $\nu>\eta_1$ θὰ εἶναι $|x'_\nu|<\sqrt{\varepsilon}$. (7)

Πολλαπλασιάζομεν τὰς (6) καὶ (7) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$|x_\nu| \,.\, |x'_\nu| < \sqrt{\varepsilon}\,.\,\sqrt{\varepsilon} \quad \text{ἢ} \quad |x_\nu \,.\, x'_\nu| < \varepsilon.$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν σχέσιν συνάγομεν, ὅτι

$$(x_\nu \,.\, x'_\nu) \to 0 \quad \text{ἢ} \quad \text{ορ}(x_\nu \,.\, x'_\nu) = 0.$$

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι

Ἐὰν $(\mathbf{x}_\nu) \to 0$, $(\mathbf{x}'_\nu \to) 0$ τότε
1ον καὶ 2ον $(\mathbf{x}_\nu \pm \mathbf{x}'_\nu) \to 0$.
3ον $(\mathbf{x}_\nu \,.\, \mathbf{x}'_\nu) \to 0$.

ΟΡΙΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΠΟΣΟΤΗΤΩΝ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΥΤΩΝ

665. **Ὁρισμοί.** Ἔστω μία μεταβλητὴ ποσότης x, ἡ ὁποία λαμβάνη διαδοχικῶς ὡς τιμὰς τοὺς ὅρους μιᾶς ἀπεράντου ἀκολουθίας ἀριθμῶν

$$(x_\nu) = x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots\ x_\nu,\ \ldots \tag{1}$$

1ον. ***Θὰ λέγωμεν, ὅτι ἡ μεταβλητὴ ποσότης x ἔχει ὅριον τὸ μηδὲν ἢ ὅτι τείνει εἰς τὸ μηδὲν καὶ θὰ γράφωμεν***

$$\text{ορ}\,\mathbf{x} = 0 \quad \text{ἢ} \quad \mathbf{x} \to 0,$$

ἐὰν ἡ ἀκολουθία ($\mathbf{x}_\nu$) ἔχῃ ὅριον τὸ μηδὲν ἢ τείνῃ εἰς τὸ μηδέν, δηλ. ἐὰν $\quad \text{ορ}(\mathbf{x}_\nu) = 0 \quad \text{ἢ} \quad (\mathbf{x}_\nu) \to 0.$

2ον. ***Θὰ λέγωμεν, ὅτι ἡ μεταβλητὴ x ἔχει ὅριον τὸ ἄπειρον ἢ τείνῃ εἰς τὸ ἄπειρον καὶ θὰ γράφωμεν***

$$\text{ορ}\,\mathbf{x} = \infty \quad \text{ἢ} \quad \mathbf{x} \to \infty$$

ἐὰν $\quad \text{ορ}(\mathbf{x}_\nu) = \infty \quad \text{ἢ} \quad (\mathbf{x}_\nu) \to \infty.$

3ον. ***Θὰ λέγωμεν, ὅτι ἡ μεταβλητὴ x ἔχει ὅριον ἕνα ὡρισμένοα ἀριθμὸν α ἢ ὅτι τείνει εἰς τὸν α καὶ θὰ γράφωμεν***

$$\text{ορ}\,\mathbf{x} = \alpha \quad \text{ἢ} \quad \mathbf{x} \to \alpha$$

ἐὰν $\quad \text{ορ}(\mathbf{x}_\nu - \alpha) = 0 \quad \text{ἢ} \quad (\mathbf{x}_\nu - \alpha) \to 0.$

Αἱ μεταβληταὶ ποσότητες, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ὅριον τὸ μηδὲν λέγονται ***ἀπειροσταί***.

Ἀπὸ τὰς ἰδιότητας τῶν ἀκολουθιῶν ἕπονται αἱ κάτωθι ἰδιότητες τῶν μεταβλητῶν ποσοτήτων.

666. **Ἰδιότης I.** ***Ἐὰν ορ$\mathbf{x} = 0$, θὰ εἶναι καὶ ορ$\lambda\mathbf{x} = 0$, ὅπου λ σταθερὸς ἀριθμός.***

667. **Ἰδιότης II.** ***Ἐὰν ορ$\mathbf{x} = 0$, θὰ εἶναι*** (§ 662) ***ορ $\frac{1}{\mathbf{x}} = \infty$ καὶ ἐὰν ορ$\mathbf{x} = \infty$ θὰ εἶναι ορ $\frac{1}{\mathbf{x}} = 0$.***

668. Ἰδιότης III. ***Ἐὰν ορ$\mathbf{x}=\infty$, θὰ εἶναι ορ$\lambda\mathbf{x}=\infty$, ὅπου λ σταθερὸς ἀριθμός.***

669. Ἰδιότης **IV**. ***Ἐὰν ορ$\mathbf{x}=\alpha$ θὰ εἶναι ορ$(\lambda\mathbf{x})=\lambda\alpha$.***

Πράγματι· ἐπειδὴ ορ$x=\alpha$, δηλ. ἐπειδὴ $x \twoheadrightarrow \alpha$ θὰ εἶναι

$$(x-\alpha)\twoheadrightarrow 0 \quad \text{ἢ} \quad \lambda(x-\alpha)\twoheadrightarrow 0, \quad \text{ἢ} \quad (\lambda x-\lambda\alpha)\twoheadrightarrow 0\cdot$$

ἄρα $\lambda x \twoheadrightarrow \lambda\alpha$ ἢ ορ$(\lambda x)=\lambda\alpha$.

670. Ἰδιότης **V**. ***Ἐὰν εἶναι ορ$\mathbf{x}=0$, ορ$\mathbf{y}=0$ θὰ εἶναι ορ$(\mathbf{x}+\mathbf{y})=0$, ορ$(\mathbf{x}-\mathbf{y})=0$, ορ$(\mathbf{xy})=0$.***

Τοῦτο ἕπεται ἀπὸ τὴν IV ἰδιότητα τῶν ἀκολουθιῶν (§ 664).

Ἡ ἀνωτέρω ἰδιότης ἐκφράζεται καὶ ὡς ἑξῆς:

Τὸ ἄθροισμα, ἡ διαφορά, τὸ γινόμενον ἀπειροστῶν ποσοτήτων πεπερασμένων τὸ πλῆθος εἶναι ἀπειροστὴ ποσότης.

671 Ἰδιότης **VI**. ***Ἐὰν ορ$\mathbf{x}=\alpha$, ὅπου α σταθερὰ ποσότης διάφορος τοῦ μηδενός, θὰ εἶναι ορ $\frac{1}{\mathbf{x}}=\frac{1}{\alpha}$.***

Ἐπειδὴ ορ$x=\alpha$ θὰ εἶναι ορ$(x-\alpha)=0$.

Θέτομεν $x-\alpha=\varepsilon$, ὁπότε $x=\alpha+\varepsilon$.

Ἐπειδὴ ορ$(x-\alpha)=0$, θὰ εἶναι καὶ ορ $\varepsilon=0$.

Λαμβάνομεν τὴν διαφορὰν $\frac{1}{x}-\frac{1}{\alpha}$ καὶ ἔχομεν κατὰ σειρὰν

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\alpha+\varepsilon}-\frac{1}{\alpha}=\frac{\alpha-\alpha-\varepsilon}{(\alpha+\varepsilon)\alpha}=\frac{-\varepsilon}{\alpha^2+\alpha\cdot\varepsilon} \qquad (1)$$

Διαιροῦμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{-\varepsilon}{\alpha^2+\alpha\varepsilon}$ διὰ ε καὶ ἡ (1) γίνεται

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{\alpha}=-\frac{1}{\frac{\alpha^2}{\varepsilon}+\alpha} \quad \text{ἢ} \quad \text{ορ}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\alpha}\right)=\text{ορ}\left(-\frac{1}{\frac{\alpha^2}{\varepsilon}+\alpha}\right).$$

Ἐπειδὴ ορ $\varepsilon=0$, θὰ εἶναι (§ 662) καὶ ορ $\frac{1}{\varepsilon}=\infty$.

Ἐπειδὴ ορ $\frac{1}{\varepsilon}=\infty$, θὰ εἶναι (§ 668) καὶ ορ $\frac{\alpha^2}{\varepsilon}=\infty$, ὁπότε κατὰ τὴν § 664 θὰ εἶναι ορ$\left(\frac{\alpha^2}{\varepsilon}+\alpha\right)=\infty$

Ἐπειδὴ ορ $\left(\frac{\alpha^2}{\varepsilon}+\alpha\right)=\infty$, θὰ εἶναι (§ 667) ορ $\frac{1}{\frac{\alpha^2}{\varepsilon}+\alpha}=0$.

Ἡ ἰσότης λοιπὸν (2) γίνεται

$$\text{ορ}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\alpha}\right)=0, \quad \text{ἄρα} \quad \text{ορ}\ \frac{1}{x}=\frac{1}{\alpha}.$$

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι

$$\boxed{\textbf{Ἐὰν ορ}\mathbf{x}=\alpha,\ \textbf{τότε ορ}\ \frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\mathbf{x}}}$$

ΟΡΙΟΝ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ, ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ, ΠΗΛΙΚΟΥ, ΔΥΝΑΜΕΩΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΠΟΣΟΤΗΤΩΝ

672. Ὅριον ἀθροίσματος μεταβλητῶν ποσοτήτων. ***Τὸ ὅριον τοῦ ἀθροίσματος, πεπερασμένων τὸ πλῆθος, μεταβλητῶν ποσοτήτων εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ὁρίων τῶν ποσοτήτων αὐτῶν.***

Ἔστωσαν αἱ μεταβληταὶ ποσότητες x καὶ y καὶ ἔστω, ὅτι ορx=α καὶ ορy=β. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ορ(x+y)=ορx+ορy.

Ἐπειδὴ ορx=α καὶ ορy=β θὰ εἶναι

$$\text{ορ}(x-\alpha)=0 \quad \text{καὶ} \quad \text{ορ}(y-\beta)=0.$$

καὶ κατὰ τὴν ἰδιότητα V (§ 670) θὰ εἶναι

$$\text{ορ}[(x-\alpha)+(y-\beta)]=0 \quad \text{ἢ} \quad \text{ορ}(x+y-\alpha-\beta)=0 \quad \text{ἢ} \quad \text{ορ}[(x+y)-(\alpha+\beta)]=0\cdot$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἰσότητα συνάγομεν, ὅτι

$$\text{ορ}(x+y)=\alpha+\beta \quad \text{ἢ} \quad \boxed{\textbf{ορ}\,(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\textbf{ορ}\,\mathbf{x}+\textbf{ορ}\,\mathbf{y}}$$

Παρατήρησις. Ἡ ἀνωτέρω ἰδιότης ἰσχύει δι᾽ ὁσασδήποτε μεταβλητὰς x, y, ω, ... , αἱ ὁποῖαι ἔχουν ὅρια, ἀλλὰ ὅταν τὸ ***πλῆθος των εἶναι πεπερασμένον.***

Πράγματι· ἔστω τὸ ἄθροισμα $\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\ldots$ (1),

μὲ ἄπειρον πλῆθος προσθετέων καὶ ἔστω, ὅτι ορx=∞, ὁπότε

$$\text{ορ}\,\frac{1}{x}=0.$$

Ἐφ᾽ ὅσον ορ $\frac{1}{x}=0$, ἕπεται κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα, ὅτι τὸ ἄθροισμα (1) θὰ εἶχεν ὅριον τὸ μηδέν. Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα (1) δὲν ἔχει ὅριον τὸ μηδέν, διότι, ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὸ ἄθροισμα αὐτὸ μὲ $\frac{x}{x}$ (τοῦ x αὐξανομένου ἀπεριορίστως) εὑρίσκομεν, ὡς ὅριον αὐτοῦ τὴν μονάδα.

673. Ὅριον γινομένου μεταβλητῶν ποσοτήτων. ***Τὸ ὅριον τοῦ γινομένου, πεπερασμένου τὸ πλῆθος, μεταβλητῶν ποσοτήτων εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν ὁρίων τῶν μεταβλητῶν αὐτῶν ποσοτήτων.***

Ἔστωσαν αἱ μεταβληταὶ ποσότητες x καὶ y καὶ ἔστω, ὅτι ορx=α καὶ ορy=β· θὰ δείξωμεν, ὅτι ορ(x . y)=ορx . ορy=α . β.

Ἐπειδὴ ορx=α καὶ ορy=β, θὰ εἶναι

$$\text{ορ}(x-\alpha)=0 \quad \text{καὶ} \quad \text{ορ}(y-\beta)=0.$$

Ἐὰν θέσωμεν $x-\alpha=\varepsilon$ καὶ $y-\beta=\eta$ (1), θὰ εἶναι

$$\text{ορ}\,\varepsilon=0 \quad \text{καὶ} \quad \text{ορ}\,\eta=0.$$

Ἀπὸ τὰς (1) ἔχομεν $x=\alpha+\varepsilon$ καὶ $y-\beta+\eta$· ἄρα θὰ εἶναι

$$xy=(\alpha+\varepsilon)(\beta+\eta) \quad \text{ἢ} \quad xy=\alpha\beta+\alpha\eta+\varepsilon\beta+\varepsilon\eta \qquad (2)$$

Κατὰ τὴν ἰδιότητα τοῦ ὁρίου ἀθροίσματος μεταβλητῶν ποσοτήτων θὰ εἶναι $ορ(xy)=ο\rho\alpha\beta+ο\rho\alpha\eta+ο\rho\varepsilon\beta+ο\rho\varepsilon\eta$ (3)

Ἀλλὰ $ο\rho\alpha\beta=\alpha\beta$, διότι αἱ ποσότητες α καὶ β εἶναι σταθεραί.

Ἐπειδὴ $ο\rho\eta=0$, θὰ εἶναι (§ 666) $ο\rho\alpha\eta=0$. Ὁμοίως εἶναι $ο\rho\varepsilon\beta=0$· ἐπίσης ἐπειδὴ $ο\rho\varepsilon=0$ καὶ $ο\rho\eta=0$, θὰ εἶναι (§ 666) $ο\rho\varepsilon\eta=0$.
Ἄρα ἡ (3) γίνεται

$$ο\rho xy=\alpha\beta+0+0+0 \quad \text{ἢ} \quad \boxed{ο\rho\, xy=\alpha\beta=ο\rho\, x\,.\,ο\rho\, y}$$

Ἡ ἀνωτέρω ἰδιότης ἰσχύει καὶ διὰ τρεῖς ἢ περισσοτέρας μεταβλητὰς ποσότητας, πεπερασμένας τὸ πλῆθος.

674. Ὅριον τοῦ πηλίκου δύο μεταβλητῶν ποσοτήτων. ***Τὸ ὅριον τοῦ πηλίκου δύο μεταβλητῶν ποσοτήτων, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ὅρια, εἶναι ἴσον μὲ τὸ πηλίκον τοῦ ὁρίου τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ ὁρίου τοῦ διαιρέτου.***

(Ὑποτίθεται, ὅτι τὸ ὅριον τοῦ διαιρέτου εἶναι διάφορον τοῦ μηδενός).

Ἔστωσαν αἱ μεταβληταὶ ποσότητες x καὶ y καὶ ἔστω, ὅτι $ο\rho x=\alpha$ καὶ $ο\rho y=\beta$, ὅπου $\beta\neq 0$. Θὰ δείξωμεν, ὅτι,

$$ο\rho\,\frac{x}{y}=\frac{ο\rho x}{ο\rho y}=\frac{\alpha}{\beta}.$$

Ἐπειδὴ $\dfrac{x}{y}=x\,.\,\dfrac{1}{y}$ θὰ εἶναι $ο\rho\,\dfrac{x}{y}=ο\rho\left(x\,.\,\dfrac{1}{y}\right)$ (1)

ἢ $$ο\rho\,\frac{x}{y}=ο\rho x\,.\,ο\rho\,\frac{1}{y} \qquad (2) \qquad (\S\ 673)$$

Ἐπειδὴ $ο\rho y=\beta$, θὰ εἶναι (§ 671) $ο\rho\,\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{\beta}$ καὶ ἐπειδὴ $ο\rho x=\alpha$ ἡ (2) γίνεται

$$ο\rho\,\frac{x}{y}=\alpha\,.\,\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta} \quad \text{ἢ} \quad \boxed{ο\rho\,\frac{x}{y}=\frac{ο\rho x}{ο\rho y}}\,.$$

675. Ὅριον δυνάμεως μιᾶς μεταβλητῆς. ***Τὸ ὅριον τῆς μυοστῆς δυνάμεως μιᾶς μεταβλητῆς ποσότητος εἶναι ἴσον μὲ τὴν μυοστὴν δύναμιν τοῦ ὁρίου της.***

Ἔστω μία μεταβλητὴ ποσότης x καὶ ἔστω, ὅτι $ο\rho x=\alpha$· θὰ δείξωμεν, ὅτι $ο\rho(x^{\mu})=\alpha^{\mu}=(ο\rho x)^{\mu}$

1ον. Ἔστω, ὅτι ὁ ἐκθέτης μ εἶναι ἀκέραιος καὶ θετικός. Θὰ εἶναι
$$x^{\mu}=x\,.\,x\,.\,x\,\ldots\ldots\,x \quad (\mu \text{ παράγοντες}).$$

Λαμβάνομεν τὰ ὅρια καὶ τῶν δύο μελῶν τῆς ἰσότητος αὐτῆς καὶ ἔχομεν

$$ο\rho(x^{\mu})=ο\rho(x\,.\,x\,.\,x\,\ldots\ldots\,x)$$

ἢ $$ο\rho(x^{\mu})=ο\rho x\,.\,ο\rho x\,.\,ο\rho x\,\ldots\ldots\,ο\rho x \quad (\mu \text{ παράγοντες})$$

ἢ $$ο\rho(x^{\mu})=(ο\rho x)^{\mu}=\alpha^{\mu}.$$

2ον. Ἔστω, ὅτι ὁ ἐκθέτης μ εἶναι ἀρνητικὸς καὶ ἀκέραιος καὶ ἔστω, ὅτι $\mu=-|\nu|$. Θὰ εἶναι $x^{-|\nu|}=\dfrac{1}{x^{|\nu|}}$

ὁπότε $\quad \text{ορ}x^{-|\nu|} = \text{ορ}\dfrac{1}{x^{|\nu|}} = \dfrac{1}{\text{ορ}(x^{|\nu|})} = \dfrac{1}{(\text{ορ}x)^{|\nu|}} = (\text{ορ}x)^{-|\nu|}$

3ον. Ἔστω, ὅτι ὁ ἐκθέτης μ εἶναι κλασματικὸς ἀριθμός. Ἔστω, ὅτι εἶναι $\quad \mu = \dfrac{\kappa}{\lambda}$.

Θέτομεν $\quad y = x^{\frac{\kappa}{\lambda}}$ (1). Ὑψοῦμεν εἰς τὴν λ δύναμιν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (1) καὶ ἔχομεν $\quad y^{\lambda} = x^{\kappa}$.

Ἐπειδὴ οἱ ἐκθέται λ καὶ κ εἶναι ἀκέραιοι, θὰ ἔχωμεν κατὰ τὴν ἀνωτέρω περίπτωσιν

$$\text{ορ}(y^{\lambda}) = \text{ορ}(x^{\kappa}) \quad \text{ἢ} \quad (\text{ορ}y)^{\lambda} = (\text{ορ}x)^{\kappa} \quad \text{ἢ} \quad (\text{ορ}y)^{\lambda\cdot\frac{1}{\lambda}} = (\text{ορ}x)^{\kappa\cdot\frac{1}{\lambda}}$$

ἢ

$$\text{ορ}y = (\text{ορ}x)^{\frac{\kappa}{\lambda}} \quad \text{ἢ} \quad \text{ορ}\left(x^{\frac{\kappa}{\lambda}}\right) = (\text{ορ}x)^{\frac{\kappa}{\lambda}}.$$

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι

$$\boxed{\textbf{ἐὰν } \text{ορ}x = \alpha, \textbf{ θὰ εἶναι } \text{ορ}(x^{\mu}) = \alpha^{\mu} = (\text{ορ}x)^{\mu}}$$

οἱοσδήποτε καὶ ἐὰν εἶναι ὁ ἐκθέτης μ.

676. **Ὅριον τῆς μυοστῆς ρίζης μιᾶς μεταβλητῆς.** ***Τὸ ὅριον τῆς μυοστῆς ρίζης μιᾶς μεταβλητῆς ποσότητος εἶναι ἴσον μὲ τὴν μυοστὴν ρίζαν τοῦ ὁρίου της.***

Ἔστω μία μεταβλητὴ ποσότης x καὶ ἔστω, ὅτι $\text{ορ}x = \alpha$· θὰ δείξωμεν, ὅτι $\qquad \text{ορ}\sqrt[\mu]{x} = \sqrt[\mu]{\alpha} = \sqrt[\mu]{\text{ορ}x}$.

Ἐπειδὴ

$$\sqrt[\mu]{x} = x^{\frac{1}{\mu}}, \text{ θὰ εἶναι } \text{ορ}\sqrt[\mu]{x} = \text{ορ}\left(x^{\frac{1}{\mu}}\right) = (\text{ορ}x)^{\frac{1}{\mu}} = \alpha^{\frac{1}{\mu}} = \sqrt[\mu]{\alpha}.$$

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι

$$\boxed{\textbf{Ἐὰν } \text{ορ}x = \alpha, \textbf{ θὰ εἶναι } \text{ορ}\sqrt[\mu]{x} = \sqrt[\mu]{\alpha} = \sqrt[\mu]{\text{ορ}x}.}$$

Ἀσκήσεις. *2726*. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ $\text{ορ}(3x^2+5x-1)$: 1ον ἐὰν $x \rightarrow 0$. 2ον. ἐὰν $x \rightarrow \infty$.

2727. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ $\quad \text{ορ}\dfrac{x^2+3x}{5-2x^2}$, ἐὰν $x \rightarrow \infty$.

2728. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\quad \text{ορ}\dfrac{x^2+2x}{5-3x^2} = -\dfrac{1}{3}$, ἐὰν $x \rightarrow \infty$.

2729. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\quad \text{ορ}\dfrac{x+1}{x} = 1$, ἐὰν $x \rightarrow \infty$.

2730. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\quad \text{ορ}\dfrac{x^2-2x+5}{x^2+7} = \dfrac{1}{2}$, ἐὰν $x \rightarrow 1$.

2731. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\quad \text{ορ}\dfrac{3x^3+6x^2}{2x^4-15x^2} = -\dfrac{2}{3}$, ἐὰν $x \rightarrow 0$.

2732. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\quad \text{ορ}\dfrac{4x^2-5x+1}{2x^2+7x-2} = 2$, ἐὰν $x \rightarrow \infty$.

2733. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\text{ορ}\,\dfrac{2x^3+3x^2}{x^3}=\infty$, ἐὰν $x \to 0$.

2734. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\text{ορ}\,\dfrac{x^3-1}{x-1}=3$. ἐὰν $x \to 1$.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΑΠΟΔΕΙΚΝΥΟΝΤΑ ΤΗΝ ΥΠΑΡΞΙΝ ΟΡΙΟΥ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΠΟΣΟΤΗΤΟΣ

677. Θεώρημα Ι. ***Ἐὰν αἱ ἄπειροι εἰς πλῆθος τιμαὶ μιᾶς μεταβλητῆς ποσότητος x βαίνουν αὐξανόμεναι, ἀλλὰ μένουν ἀπό τινος τάξεως καὶ ἐφεξῆς μικρότεραι δοθέντος ἀριθμοῦ Α, τότε ἡ μεταβλητὴ ἔχει ὅριον ἕναν ἀριθμὸν α μικρότερον ἢ ἴσον τοῦ Α.***

Ἔστωσαν 3 καὶ 4 οἱ διαδοχικοὶ ἀκέραιοι ἀριθμοί, μεταξύ τῶν ὁποίων περιέχεται ὁ Α· δηλ. ἔστω, ὅτι εἶναι $3<A\leqslant 4$ καὶ ἔστω, ὅτι αἱ τιμαὶ τῆς x εἶναι μεγαλύτεραι τοῦ 3.

Διαιροῦμεν τὸ διάστημα (3, 4) εἰς 10 ἴσα διαστήματα διὰ τῶν ἀριθμῶν:

$$3\cdot\ 3{,}1\cdot\ 3{,}2\cdot\ 3{,}3\cdot\ 3{,}4\cdot\ 3{,}5\cdot\ 3{,}6\cdot\ 3{,}7\cdot\ 3{,}8\cdot\ 3{,}9\cdot\ 4. \qquad (1)$$

Ἐξ ὑποθέσεως αἱ τιμαὶ τῆς x βαίνουν αὐξανόμεναι καὶ εἶναι μεγαλύτεραι τοῦ 3· ἄρα θὰ ὑπερβαίνουν ἀπό τινος καὶ ἐφεξῆς μερικοὺς ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς (1)· ἔστω, ὅτι ὑπερβαίνουν καὶ τὸν ἀριθμὸν 3,5, ἀλλὰ εἶναι μικρότεραι τοῦ 3,6· δηλ. ἔστω, ὅτι αἱ τιμαὶ τῆς μεταβλητῆς x περιέχονται εἰς τὸ διάστημα (3,5· 3,6). Διαιροῦμεν πάλιν τὸ διάστημα (3,5· 3,6) εἰς δέκα ἴσα διαστήματα διὰ τῶν ἀριθμῶν

$$3{,}5\cdot\ 3{,}51\cdot\ 3{,}52\cdot\ 3{,}53\cdot\ 3{,}54\cdot\ 3{,}55\cdot\ 3{,}56\cdot\ 3{,}57\cdot\ 3{,}58\cdot\ 3{,}59\cdot\ 3{,}6.$$

Ἐπειδὴ αἱ τιμαὶ τῆς x βαίνουν αὐξανόμεναι καὶ εἶναι ἀπό τινος καὶ ἐφεξῆς μεγαλύτεραι τοῦ 3,5, θὰ εὑρίσκωνται εἰς ἕνα ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω διαστήματα, ἔστω εἰς τὸ διάστημα (3,57· 3,58)· δηλ. θὰ εἶναι μεγαλύτεραι τοῦ 3,57, ἀλλὰ μικρότεραι τοῦ 3,58.

Προχωροῦντες καθ' ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν, ὅτι αἱ τιμαὶ τῆς x θὰ περιέχωνται μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν ἔστω τῶν 3,578426 καὶ 3,578427 οἱ ὁποῖοι διαφέρουν μεταξύ των κατὰ ἕνα ἑκατομμυριοστὸν

$$\left(\frac{1}{1\,000\,000} \quad \text{ἢ} \quad \frac{1}{10^6}\right).$$

Ἐὰν συνεχίσωμεν τὴν ἐργασίαν αὐτὴν ἐπ ἄπειρον, θὰ εὕρωμεν, ὅτι αἱ τιμαὶ τῆς μεταβλητῆς x ἀπό τινος καὶ ἐφεξῆς θὰ περιέχωνται μεταξὺ δύο ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι διαφέρουν μεταξύ των κατὰ $\dfrac{1}{10^\nu}$, τὸ ὁποῖον τείνει εἰς τὸ μηδέν, ὅταν τὸ ν τείνῃ εἰς τὸ ἄπειρον. Συνεπῶς ἐὰν παραστήσωμεν μὲ α τὸν μικρότερον ἀπὸ τοὺς δύο αὐτοὺς ἀριθμούς, αἱ τιμαὶ τῆς μεταβλητῆς x θὰ τείνουν εἰς τὸν α· δηλ. θὰ εἶναι $\text{ορ}x=\alpha$, ὅπου α εἶναι μικρότερος τοῦ Α ἢ τὸ πολὺ ἴσος μὲ Α. Ὁ α θὰ εἶναι ἴσος μὲ τὸν Α μόνον εἰς τὴν περίπτωσιν ποὺ αἱ τιμαὶ τῆς μεταβλητῆς x διαφέρουν ἀπολύτως τοῦ Α κατὰ ποσότητα, ὅσον θέλομεν μικράν. Ὥστε γενικῶς θὰ εἶναι $\text{ορ}x\leqslant A$.

Σημ. Ἡ ἀπόδειξις τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος γίνεται ὁμοίως, ἐὰν ἀντὶ τῶν ἀκεραίων 3 καὶ 4 λάβωμεν γενικῶς τοὺς ἀκεραίους ρ καὶ ρ+1, ὅπου ρ δύναται νὰ εἶναι θετικὸς ἢ ἀρνητικὸς ἢ μηδέν.

678. Θεώρημα ΙΙ. ***Ἐὰν αἱ ἄπειροι τὸ πλῆθος τιμαὶ μιᾶς μεταβλητῆς ποσότητος x βαίνουν ἐλαττούμεναι, ἀλλὰ μένουν ἀπό τινος καὶ ἐφεξῆς μεγαλύτεραι δοθέντος ἀριθμοῦ B, ἡ μεταβλητὴ x ἔχει ὅριον ἕνα ἀριθμὸν β μεγαλύτερον ἢ ἴσον τοῦ B.***

Ἐπειδὴ αἱ τιμαὶ τῆς μεταβλητῆς x βαίνουν ἐλαττούμεναι, ἀλλὰ ἀπό τινος τάξεως καὶ ἐφεξῆς εἶναι μεγαλύτεραι τοῦ A, αἱ τιμαὶ τῆς −x θὰ βαίνουν αὐξανόμεναι καὶ θὰ εἶναι ἀπό τινος τάξεως καὶ ἐφεξῆς μικρότεραι τοῦ −B. Ἀλλὰ τότε κατὰ τὸ θεώρημα Ι (§ 677) θὰ εἶναι

$$\text{ορ}(-x) \leqslant -B \quad \text{ἢ} \quad \text{ορ}(x) \geqslant B.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Θ.

ΜΕΤΑΒΟΛΑΙ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΙ

679. Ὁρισμοί. Εἰς τὴν § 260 ἐδώσαμεν τοὺς κάτωθι ὁρισμούς:

Μεταβλητὴ ποσότης ἢ ἁπλῶς μεταβλητὴ λέγεται κάθε ποσότης, ἡ ὁποία δύναται νὰ λαμβάνῃ διαφόρους τιμάς.

Κάθε ποσότης, ἡ ὁποία διατηρεῖ τὴν αὐτὴν τιμήν, δηλ. μένει ἀμετάβλητος, λέγεται σταθερὰ ποσότης ἢ ἁπλῶς σταθερά.

Ἐπίσης εἰς τὴν § 261 ἐδώσαμεν τοὺς ὁρισμοὺς τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς καὶ τῆς συναρτήσεως καὶ γενικῶς ὡρίσαμεν, ὅτι:

Ἐὰν δύο μεταβληταὶ x καὶ y συνδέωνται μεταξύ των κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε εἰς κάθε δοθεῖσαν τιμὴν τῆς x νὰ ἀντιστοιχῇ ὡρισμένη τιμὴ τῆς y, τότε ἡ y λέγεται συνάρτησις τῆς x.

Ἐπίσης εἰς τὴν § 249 ἐδώσαμεν τὸν ὁρισμὸν τοῦ διαστήματος καὶ εἴπομεν ὅτι:

Ἐὰν εἶναι $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$, τὸ διάστημα (α,β) λέγεται ***κλειστόν***.
Ἐὰν » $\alpha < x < \beta$, τὸ διάστημα (α,β) » ***ἀνοικτόν***.
Ἐὰν » $\alpha \leqslant x < \beta$, τὸ διάστημα (α,β) » ***κλειστὸν πρὸς τὰ ἀριστερά***.
Ἐὰν » $\alpha < x \leqslant \beta$, τὸ διάστημα (α,β) » ***κλειστὸν πρὸς τὰ δεξιά***.

680. **Αὔξουσα συνάρτησις.** Ἔστω ἡ συνάρτησις

$$y = 5x - 4. \qquad (1)$$

Ἐὰν δώσωμεν εἰς τὴν ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν x τὰς τιμὰς 1, 2, 3 . . . ἡ συνάρτησις y λαμβάνει ἀντιστοίχως τὰς τιμὰς 1, 6, 11 . . .

Ἐπίσης, ἂν δώσωμεν εἰς τὴν x τὰς τιμὰς —1, — 2, — 3... ἡ συνάρτησις y λαμβάνει ἀντιστοίχως τὰς τιμὰς —9, —14, —19....

Ὁ κάτωθι πίναξ δεικνύει τὴν ἀντιστοιχίαν τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς x καὶ τῆς συναρτήσεως y.

x	1	2	3....	—1	— 2	— 3...
y	1	6	11....	—9	—14	—19....

Παρατηροῦμεν, ὅτι, ὅταν αἱ τιμαὶ τῆς x αὐξάνουν, τότε αὐξάνουν καὶ αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τῆς y καὶ ὅταν αἱ τιμαὶ τῆς x ἐλαττοῦται, τότε καὶ αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τῆς y ἐλαττοῦται. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν, ὅτι ἡ συνάρτησις (1) εἶναι ***αὔξουσα***. Ὥστε :

Μία συνάρτησις εἶναι αὔξουσα, ὅταν μεταβάλλεται κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν μετὰ τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς.

Οὕτω ἡ τιμὴ ἑνὸς ἐμπορεύματος εἶναι αὔξουσα συνάρτησις τοῦ βάρους του· διότι, ὅταν τὸ βάρος αὐξάνῃ καὶ ἡ τιμή του αὐξάνει.

Ἐπίσης τὸ μῆκος μιᾶς μεταλλικῆς ράβδου εἶναι αὔξουσα συνάρτησις τῆς θερμοκρασίας διότι, ὅταν ἡ θερμοκρασία ἀνυψοῦται, τὸ μῆκος τῆς ράβδου ἐπιμηκύνεται.

Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τετραγώνου εἶναι αὔξουσα συνάρτησις τῆς πλευρᾶς του.

***681*. Φθίνουσα συνάρτησις.** Ἔστω ἡ συνάρτησις

$$y = -2x + 3. \qquad (1)$$

Ἐὰν δώσωμεν εἰς τὴν x τὰς τιμὰς 1, 2, 3, ... ἡ συνάρτησις y λαμβάνει ἀντιστοίχως τὰς τιμὰς 1, —1, —3....

Ἐὰν δώσωμεν εἰς τὴν x τὰς τιμὰς —1, —2, —3, ... ἡ συνάρτησις y λαμβάνει ἀντιστοίχως τὰς τιμὰς 5, 7, 9, ...

Ὁ κάτωθι πίναξ δίδει τὴν ἀντιστοιχίαν τῶν τιμῶν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς x καὶ τῆς συναρτήσεως y.

x	1	2	3....	—1	—2	—3....
y	1	—1	—3 ...	5	7	9....

Παρατηροῦμεν, ὅτι, ὅταν αἱ τιμαὶ τῆς x αὐξάνουν, αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τῆς y ἐλαττοῦνται καὶ ὅταν αἱ τιμαὶ τῆς x ἐλαττοῦνται, αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τῆς y αὐξάνουν.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν, ὅτι ἡ συνάρτησις (1) εἶναι ***φθίνουσα συνάρτησις***. Ὥστε :

Μία συνάρτησις εἶναι φθίνουσα, ὅταν μεταβάλλεται κατ' ἀντίθετον φορὰν μετὰ τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς.

Οὕτω ὁ ὄγκος τοῦ ἀέρος, ὁποῖος εὑρίσκεται ἐντὸς κυλινδρικοῦ δοχείου, τὸ ὁποῖον ἔχει κλεισθῆ μὲ ἕνα ἔμβολον, εἶναι μία ***φθίνουσα συνάρτησις*** τῆς πιέσεως, τὴν ὁποίαν ἐξασκοῦμεν ἐπὶ τοῦ ἐμβόλου.

διότι, ὅσον αὐξάνῃ ἡ πίεσις ἐπὶ τοῦ ἐμβόλου, τόσον καὶ ὁ ὄγκος τοῦ ἀέρος ἐλαττοῦται.

682. **Παρατηρήσεις** : *1η*. Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι διὰ νὰ ἴδωμεν, ἐὰν μία συνάρτησις εἶναι αὔξουσα ἢ φθίνουσα, ἀρκεῖ νὰ δώσωμεν εἰς τὴν ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν δύο τυχούσας τιμὰς καὶ νὰ παρατηρήσωμεν, ποία εἶναι μεγαλυτέρα ἀπὸ τὰς δύο τιμάς, ποὺ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν συνάρτησιν.

Ἐὰν εἰς τὴν μεγαλυτέραν τιμὴν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς ἀντιστοιχῇ *πάντοτε* ἡ μεγαλυτέρα τιμὴ τῆς συναρτήσεως, ἡ συνάρτησις αὐτὴ εἶναι αὔξουσα.

Ἐὰν εἰς τὴν μεγαλυτέραν τιμὴν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς ἀντιστοιχῇ τοὐναντίον *πάντοτε* ἡ μικροτέρα τιμὴ τῆς συναρτήσεως, ἡ συνάρτησις αὐτὴ εἶναι φθίνουσα.

2α. Μία συνάρτησις δύναται νὰ εἶναι αὔξουσα δι' ὡρισμένας τιμὰς τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς καὶ φθίνουσα δι ἄλλας τιμὰς αὐτῆς.

Πράγματι ἀπὸ τὴν φυσικὴν γνωρίζομεν, ὅτι ὁ ὄγκος V, τὸν ὁποῖον καταλαμβάνει μία ποσότης ὕδατος, εἶναι συνάρτησις τῆς θερμοκρασίας θ^0 τοῦ ὕδατος, Μὲ πειράματα ἔχει ἀποδειχθῆ, ὅτι, ὅταν ἡ θερμοκρασία θ^0 αὐξηθῆ ἀπὸ 0^0 μέχρι 4^0, ὁ ὄγκος V τοῦ ὕδατος ἐλαττοῦται ἀλλ' ὅταν ἡ θερμοκρασία θ^0 αὐξηθῆ ἀπὸ 4^0 μέχρι 100^0, ὁ ὄγκος V αὐξάνει.

Ὥστε ὁ ὄγκος V τοῦ ὕδατος εἶναι μία *φθίνουσα* συνάρτησις τῆς τῆς θερμοκρασίας, ὅταν ἡ θερμοκρασίαν θ^0 μεταβάλλεται εἰς τὸ διάστημα $(0^0, 4^0)$, καὶ *αὔξουσα συνάρτησις*, ὅταν ἡ θερμοκρασία μεταβάλλεται εἰς τὸ διάστημα $(4^0, 100^0)$.

Ἐπίσης, ἔστω ἡ συνάρτησις $y=x^2-5x+6$. (1)

Ἐὰν δώσωμεν εἰς τὴν ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν τὰς τιμὰς

$$-3, \ -1, \ 0, \ 2. \ 2{,}1 \ \ 2{,}5, \ 3, \ 100$$

αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τῆς συναρτήσεως θὰ εἶναι

$$30, \ 12, \ 6, \ 0, \ -0{,}09, \ -0{,}25 \ -0, \ 6, \ 9506$$

Ὁ κάτωθι πίναξ μᾶς δίδει τὴν ἀντιστοιχίαν τῶν τιμῶν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς x καὶ τῆς συναρτήσεως y.

x	—3	—1	0	2	2, 1	2, 5	3	5	100
y	30	12	6	0	—0,09	—0,25	0	6	9506

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ συνάρτησις (1) εἶναι φθίνουσα εἰς τὸ διάστημα (—3, 2,5) καὶ αὔξουσα εἰς τὸ διάστημα (2,5 , 100)

683. **Μέγιστον καὶ ἐλάχιστον μιᾶς συναρτήσεως**. Ὅταν ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητή, αὐξανομένη ἀπὸ μιᾶς τιμῆς εἰς μίαν ἄλλην, περάσῃ ἀπὸ μίαν τιμὴν τοιαύτην, ὥστε ἡ συνάρτησις παύει νὰ αὐξάνῃ διὰ νὰ ἀρχίσῃ νὰ ἐλαττοῦται, λέγομεν, ὅτι διά τὴν τιμὴν αὐτὴν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, ἡ συνάρτησις διέρχεται ἀπὸ ἕνα ***μέγιστον***.

Τοὐναντίον, ἐὰν ἡ συνάρτησις παύῃ νὰ ἐλαττοῦται καὶ ἀρχίζει νὰ αὐξάνῃ λέγομεν, ὅτι ἡ συνάρτησις διέρχεται ἀπὸ ἕνα ***ἐλάχιστον***.

Δηλαδὴ μία συνάρτησις τῆς x ἔχει ἕνα μέγιστον διὰ μίαν τιμὴν $x=x_0$, ἡ ὁποία περιέχεται μεταξὺ τῶν α καὶ β, ἐὰν ἡ συνάρτησις εἶναι αὔξουσα εἰς τὸ διάστημα $(\alpha,\ x_0)$ καὶ φθίνουσα εἰς τὸ διάστημα $(x_0,\ \beta)$.

Ἐπίσης μία συνάρτησις τῆς x ἔχει ἕνα ἐλάχιστον διὰ μίαν τιμὴν $x=x_0$, ἡ ὁποία περιέχεται μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν α καὶ β, ἐὰν εἶναι φθίνουσα εἰς τὸ διάστημα $(\alpha,\ x_0)$ καὶ αὔξουσα εἰς τὸ διάστημα $(x_0,\ \beta)$.

684. **Συνάρτησις ὡρισμένη.** 1ον. Ἔστω ἡ ἀκεραία συνάρτησις

$$y=3x^2-2x+1. \tag{1}$$

Εἶναι φανερόν, ὅτι εἰς κάθε τιμὴν τῆς x ἀντιστοιχεῖ μία καὶ μόνον τιμὴ τῆς y, ἡ ὁποία εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ τριωνύμου $3x^2-2x+1$. Τὸ y λοιπὸν εἶναι συνάρτησις τῆς x *ὡρισμένη* δι' ὅλας τὰς τιμὰς τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς x.

2ον. Ἔστω ἡ συνάρτησις $y=\sqrt{x-5}$. (2). Ἐδῶ ἡ τιμὴ τῆς y εἶναι ὡρισμένη δι' ὅλας τὰς τιμὰς τῆς x, αἱ ὁποῖαι καθιστοῦν τὴν ὑπόρριζαν ποσότητα $x-5$ θετικὴν ἢ ἴσην μὲ μηδέν. Ὥστε ἡ συνάρτησις (2) εἶναι ὡρισμένη διὰ $x\geqslant 5$.

3ον. Ἔστω ἡ συνάρτησις

$$y=\frac{3\omega-1}{\omega+4}. \tag{3}$$

Ἐδῶ ἡ τιμὴ τῆς y (δηλ. ἡ συνάρτησις) εἶναι ὡρισμένη δι' ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ ω, ἐκτὸς τῆς τιμῆς $\omega=-4$, ἡ ὁποία μηδενίζει τὸν παρονομαστὴν $\omega+4$. Διότι διὰ $\omega=-4$, ἡ συνάρτησις γίνεται $y=\frac{-13}{0}$ ἡ ὁποία δὲν ἔχει καμμίαν ἔννοιαν. Ὥστε ἡ συνάρτησις (3) εἶναι ὡρισμένη διὰ τιμὰς τοῦ ω, αἱ ὁποῖαι εἶναι διάφοροι τοῦ -4· ἤτοι διὰ τιμὰς μικροτέρας τοῦ -4 καὶ μεγαλυτέρας τοῦ -4. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν, ὅτι ἡ συνάρτησις (3) εἶναι ὡρισμένη διὰ διὰ τιμὰς τοῦ ω κειμένας εἰς τὰ διαστήματα

$$(-\infty,-4) \quad \text{καὶ} \quad (-4,+\infty).$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν :

Μία συνάρτησις $y=\sigma(x)$ εἶναι ὡρισμένη εἰς ἕνα διάστημα (α,β) ὅταν λαμβάνῃ μίαν τελείως ὡρισμένην τιμὴν διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x περιεχομένην εἰς τὸ διάστημα $(\alpha,\ \beta)$.

Ἐπίσης ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν :

I. ***Μία ἀκεραία συνάρτησις εἶναι ὡρισμένη δι' ὅλας τὰς τιμὰς τῆς μεταβλητῆς της.***

II. ***Μία κλασματικὴ συνάρτησις εἶναι ὡρισμένη δι' ὅλας τὰς τιμὰς τῆς μεταβλητῆς της ἐκτὸς ἐκείνων, αἱ ὁποῖαι μηδενίζουν τὸν παρονομαστήν της.***

685. **Αὔξησις μεταβλητῆς**. Ὅταν μία μεταβλητὴ x λάβῃ κατ' ἀρχὰς μίαν τιμὴν x_1 (ἀρχικὴ τιμὴ) καὶ ἔπειτα μίαν δευτέραν τιμὴν x_2 (τελικὴ τιμὴ) λέγομεν, ὅτι ἡ μεταβλητὴ x ἔλαβε μίαν αὔξησιν x_2-x_1,

Π.χ. ἐὰν ἡ μεταβλητὴ x λάβῃ δύο τιμὰς $x=1$ καὶ $x=3$ ἡ *ἀρχικὴ τιμὴ* εἶναι 1, ἡ *τελικὴ τιμὴ* εἶναι 3 καὶ ἡ αὔξησις εἶναι $3-1=2$.

Ἡ αὔξησις μιᾶς μεταβλητῆς εἶναι θετική, ἀρνητικὴ ἢ μηδέν, καθόσον ἡ τελικὴ τιμὴ εἶναι μεγαλυτέρα, μικροτερα ἢ ἴση μὲ τὴν ἀρχικὴν τιμήν. Ἡ λέξις λοιπὸν «αὔξησις» δὲν ἔχει ἐδῶ τὴν κοινὴν σημασίαν τῆς λέξεως, ἀλλ' ἔχει τὴν ἔννοιαν τῆς μεταβολῆς.

Διὰ νὰ παραστήσωμεν τὴν αὔξησιν μιᾶς μεταβλητῆς προτάσσομεν πρὸ τοῦ γράμματος, τὸ ὁποῖον παριστάνει τὴν μεταβλητήν, τὸ γράμμα Δ. Οὕτω τὸ Δx παριστᾷ τὴν *αὔξησιν* τῆς μεταβλητῆς x καὶ Δy παριστάνει τὴν αὔξησιν τῆς συναρτήσεως x καὶ ἀπαγγέλλονται: δέλτα x, δέλτα y.

Συνήθως θέτομεν $\Delta x=\varepsilon$ καὶ $\Delta y=\eta$. Θὰ κάμωμεν χρῆσιν καὶ τῶν δύο συμβολισμῶν.

Σημ. Δx εἶναι σύμβολον καὶ παριστάνει ἕνα μόνον ἀριθμὸν καὶ ὄχι τὸ γινόμενον τοῦ Δ ἐπὶ x.

686. **Αὔξησις μιᾶς συναρτήσεως.** Ἔστω ἡ συνάρτησις

$$y = 2x - 3. \qquad (1)$$

Διὰ $x=1$, ἡ (1) δίδει $y=-1$

Διὰ $x=5$, ἡ (1) δίδει $y=\ 7$.

Παρατηροῦμεν, ὅτι, ὅταν ἡ μεταβλητὴ x διέρχεται ἀπὸ μίαν ἀρχικὴν τιμὴν $x=1$ εἰς μίαν τελικὴν τιμὴν $x=5$, ἡ μεταβλητὴ λαμβάνει μίαν αὔξησιν $\Delta x=5-1=4$.

Ταὐτοχρόνως ἡ συνάρτησις y διέρχεται ἀπὸ τὴν τιμὴν -1 εἰς τὴν τιμὴν 7 καὶ ἑπομένως λαμβάνει καὶ αὐτὴ μίαν αὔξησιν

$$\Delta y=7-(-1)=8.$$

Ἡ αὔξησις $\Delta y=8$ λέγεται *αὔξησις* τῆς συναρτήσεως y καὶ *ἀντιστοιχεῖ* πρὸς τὴν αὔξησιν $\Delta x=4$ τῆς μεταβλητῆς x.

Γενικῶς· Ἔστω $y=\sigma(x)$ μία ὡρισμένη συνάρτησις τῆς x. Ἐὰν ἡ μεταβλητὴ x διέρχεται ἀπὸ μίαν ἀρχικὴν τιμὴν x_0, εἰς μίαν τελικὴν τιλικὴν τιμὴν x_1, ἡ συνάρτησις $y=\sigma(x)$ διέρχεται ἀπὸ τὴν τιμὴν $y_0=\sigma(x_0)$ εἰς τὴν τιμὴν $y_1=\sigma(x_1)$.

Ἡ διαφορὰ $x_1-x_0=\Delta x$ (1) παριστάνει τὴν αὔξησιν τῆς μεταβλητῆς x. Ἡ διαφορὰ $\sigma(x_1)-\sigma(x_0)=\Delta y$ (2), παριστάνει τὴν αὔξησιν τῆς συναρτήσεως $y=\sigma(x)$.

Ἐὰν εἰς τὴν ἰσότητα (2) ἀντικαταστήσωμεν τὸ x_1 μὲ τὸ ἴσον του $x_0+\Delta x$, ἡ αὔξησις Δy γράφεται

$$\boxed{\Delta y=\sigma(x_0+\Delta x)-\sigma(x_0)} \quad \text{ἢ} \quad \boxed{\eta=\sigma(x_0+\varepsilon)-\sigma(x_0)}$$

687. **Ὅριον μιᾶς συναρτήσεως.** Ἔστω, ὅτι ἡ μεταβλητὴ x λαμβάνει διαδοχικῶς τὰς τιμὰς τῆς ἀπεράντου ἀκολουθίας

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ldots,\ x_\nu,\ldots \qquad (1)$$

καί, ὅτι ἡ μεταβλητὴ y, ἡ ὁποία εἶναι συνάρτησις τῆς x, λαμβάνει ἀντιστοίχως τὰς τιμὰς

$$y_1,\ y_2,\ y_3, \ldots, y_\nu, \ldots \qquad (2)$$

1ον. Ἐὰν ἡ x ἔχῃ ὅριον ἕνα ἀριθμὸν α καὶ ἡ y ἕνα ἀριθμὸν β, θὰ λέγωμεν, ὅτι τὸ β εἶναι ὅριον τῆς συναρτήσεως y, διὰ ορx=α· θὰ σημειοῦμεν δὲ αὐτὸ ὡς ἑξῆς :

$$\boxed{\underset{x \to \alpha}{\text{ορ}}\, y = \beta \quad \text{ἢ} \quad \underset{x \to \alpha}{\text{ορ}}\, \sigma(x) = \beta}$$

καὶ θὰ ἀπαγγέλλωμεν : τὸ ὅριον τῆς y, ἢ τῆς σ(x), ὅταν ἡ x τείνῃ εἰς τὸ α, εἶναι β.

2ον. Ἐὰν ἡ x ἔχῃ ὅριον ἕνα ἀριθμὸν α, ἡ δὲ y τείνῃ νὰ ὑπερβῇ κάθε θετικὸν ἀριθμόν, θὰ λέγωμεν, ὅτι ορy=+∞ διὰ $x \to \alpha$ καὶ θὰ σημειοῦμεν αὐτὸ ὡς ἑξῆς :

$$\boxed{\underset{x \to \alpha}{\text{ορ}}\, y = +\infty \quad \text{ἢ} \quad \underset{x \to \alpha}{\text{ορ}}\, \sigma(x) = +\infty}$$

3ον. Ἐὰν ἡ x ἔχῃ ὅριον ἕνα ἀριθμόν α, ἡ δὲ y τείνῃ νὰ γίνῃ μικροτέρα παντὸς ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ, θὰ λέγωμεν, ὅτι ορy=−∞ διὰ $x \to \alpha$ καὶ θὰ σημειοῦμεν αὐτὸ ὡς ἑξῆς :

$$\boxed{\underset{x \to \alpha}{\text{ορ}}\, y = -\infty \quad \text{ἢ} \quad \underset{x \to \alpha}{\text{ορ}}\, \sigma(x) = -\infty}$$

688. **Συνεχὴς συνάρτησις. Ὁρισμός.** Α. ***Λέγομεν, ὅτι μία συνάρτησις σ(x), ὡρισμένη εἰς ἕνα διάστημα, εἰς τὸ ὁποῖον ἀνήκει ὁ ἀριθμὸς x_0, εἶναι συνεχὴς διὰ τὴν τιμὴν x_0 τῆς μεταβλητῆς x, ἐὰν ἡ σ(x) τείνῃ εἰς τὴν $\sigma(x_0)$, ὅταν ἡ x τείνῃ εἰς τὸ x_0.***

Τοῦτο ἐκφράζεται καὶ ὡς ἑξῆς :

Β. ***Λέγομεν, ὅτι μία συνάρτησις σ(x), ὡρισμένη εἰς ἕνα διάστημα, εἰς τὸ ὁποῖον ἀνήκει ὁ ἀριθμὸς x_0, εἶναι συνεχὴς διὰ τὴν τιμὴν x_0 τῆς μεταβλητῆς x ἐὰν δοθέντος θετικοῦ ἀριθμοῦ ε, ὁσονδήποτε μικροῦ δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἕνα ἀντίστοιχον ἀριθμὸν η τοιοῦτον, ὥστε διὰ κάθε θετικὴν τιμὴν τῆς x περιεχομένην εἰς τὸ ἐξεταζόμενον διάστημα καὶ πληροῦσαν τὴν ἀνισότητα***

$$|x - x_0| < \eta$$

νὰ ἔχωμεν

$$|\sigma(x) - \sigma(x_0)| < \varepsilon.$$

Ἐὰν ἔχωμεν ὑπ' ὄψει μας τὰς αὐξήσεις Δx καὶ Δy τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς x καὶ τῆς συναρτήσεως y, δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν τὴν συνέχειαν μιᾶς συναρτήσεως καὶ ὡς ἑξῆς :

Γ. ***Λέγομεν, ὅτι μία συνάρτησις y=σ(x) εἶναι συνεχὴς διὰ μίαν τιμὴν x_0 τῆς μεταβλητῆς x, ἐὰν εἶναι ὡρισμένη διὰ x καὶ ἐὰν ἡ αὔξησις $\Delta y = \sigma(x_0 + \Delta x) - \sigma(x_0)$ τῆς συναρτήσεως τείνῃ εἰς τὸ μηδέν, ὅταν ἡ αὔξησις Δx τείνῃ εἰς τὸ μηδέν.***

689. Παράδειγμα. Ἔστω ἡ συνάρτησις $y=x^3$.

Ἔστω x_0 μία τυχοῦσα τιμὴ τῆς μεταβλητῆς x, θετικὴ ἢ ἀρνητική, ἀλλὰ τελείως ὡρισμένη· εἰς τὴν τιμὴν αὐτὴν τῆς μεταβλητῆς x ἀντιστοιχεῖ διὰ τὴν συνάρτησιν y, ἡ τιμὴ $y_0 = x_0^3$ (1)
ἡ ὁποία εἶναι τελείως ὡρισμένη.

Ἐὰν δώσωμεν εἰς τὴν x, ἀπὸ τῆς x_0, μίαν αὔξησιν ε, ἡ συνάρτησις y θὰ λάβῃ μίαν αὔξησιν η τοιαύτην, ὥστε

$$y_0 + \eta = (x_0 + \varepsilon)^3. \tag{2}$$

Ἀφαιροῦμεν τὰς ἰσότητας (2) καὶ (1) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\begin{aligned} \eta &= (x_0+\varepsilon)^3 - x_0^3 \\ &= (x_0^3 + 3x_0^2\varepsilon + 3x_0\varepsilon^2 + \varepsilon^3 - x_0^3 \\ &= 3x_0^2\varepsilon + 3x_0\varepsilon^2 + \varepsilon_0^3. \end{aligned} \tag{3}$$

Ὅταν ἡ αὔξησις ε τείνῃ εἰς τὸ μηδέν, οἱ τρεῖς ὅροι τοῦ δευτέρου μέλους, οἱ ὁποῖοι περιέχουν τὸν ε ὡς παράγοντα, τείνουν εἰς τὸ μηδέν· ἄρα καὶ τὸ ἄθροισμα των τείνει εἰς τὸ μηδέν.

Παρατηροῦμεν, ὅταν ἡ ε τείνῃ εἰς τὸ μηδὲν τότε καὶ ἡ η τείνει εἰς τὸ μηδέν· ἄρα ἡ συνάρτησις $y=x^3$ εἶναι συνεχὴς διὰ $x=x_0$.

Ἐπειδὴ ἡ τιμὴ x_0 εἶναι τυχοῦσα, ἕπεται, ὅτι: ***ἡ συνάρτησις $y=x^3$ εἶναι συνεχὴς διὰ κάθε τιμὴν τῆς μεταβλητῆς x.***

Ἂν μία συνάρτησις δὲν εἶναι συνεχὴς διά τινα τιμὴν τῆς x, λέγεται ***ἀσυνεχὴς συνάρτησις*** διὰ τὴν τιμὴν αὐτήν.

690. Συνεχὴς συνάρτησις εἰς ἕνα διάστημα. Ὁρισμοί. ***Λέγομεν, ὅτι μία συνάρτησις σ(x), ὡρισμένη εἰς ἕνα διάστημα (α,β), εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ διάστημα αὐτό, ἐὰν εἶναι ὡρισμένη καὶ συνεχὴς διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x, ἡ ὁποία περιέχεται εἰς τὸ διάστημα αὐτό.***

691. Ἰδιότητες τῶν συνεχῶν συναρτήσεων. Διὰ τὰς συνεχεῖς συναρτήσεις ἰσχύουν αἱ κάτωθι ἰδιότητες, τὰς ὁποίας δεχόμεθα χωρὶς ἀπόδειξιν:

I. ***Ὅταν μία συνάρτησις σ(x) ἔχῃ μίαν σταθερὰν τιμήν, ἡ συνάρτησις αὐτὴ εἶναι συνεχὴς διὰ κάθε τιμὴν τῆς μεταβλητῆς x.***

II. ***Τὸ ἄθροισμα πολλῶν συναρτήσεων, συνεχῶν διὰ μίαν τιμὴν τῆς μεταβλητῆς x, εἶναι συνεχὴς συνάρτησις διὰ τὴν τιμὴν αὐτὴν τῆς μεταβλητῆς.***

III. ***Τὸ γινόμενον πολλῶν συναρτήσεων συνεχῶν διὰ μίαν τιμὴν τῆς μεταβλητῆς x, εἶναι συνεχὴς συνάρτηστς διὰ τὴν τιμὴν αὐτὴν τῆς μεταβλητῆς.***

IV. ***Τὸ πηλίκον δύο συναρτήσεων, συνεχῶν διὰ μίαν τιμὴν τῆς μεταβλητῆς x, εἶναι συνεχὴς συνάρτησις δ ὰ τὴν τιμὴν αὐτὴν*** *τῆς μεταβλητῆς*· (ὑποτίθεται, ὅτι ὁ παρονομαστὴς εἶναι συνάρτησις, ἡ ὁποία δὲν μηδενίζεται διὰ τὴν τιμὴν αὐτὴν τῆς μεταβλητῆς).

V. ***Κάθε συνάρτησις τῆς μορφῆς*** $y=x^{\mu}$, ***ὅπου μ ἀκέραιος καὶ θετικὸς εἶναι συνεχὴς συνάρτησις διὰ κάθε τιμὴν τῆς μεταβλητῆς*** x.

VI. ***Κάθε συνάρτησις τῆς μορφῆς*** $y=\alpha x^{\mu}$, ***ὅπου τὸ α εἶναι σταθερὰ ποσότης, ὁ δὲ μ ἀκέραιος καὶ θετικός, εἶναι συνεχὴς συνάρτησις διὰ κάθε τιμὴν τῆς μεταβλητῆς*** x.

VII. ***Κάθε συνάρτησις τῆς μορφῆς***

$$y=A_0x^{\mu}+A_1x^{\mu-1}+\ldots+A_{\mu}$$

ἔνθα μ ἀκέραιος καὶ θετικὸς εἶναι συνεχὴς συνάρτησις διὰ κάθε τιμὴν τῆς μεταβλητῆς x.

Π.χ. ἡ συνάρτησις $y=2x^2-5x+6$ εἶναι συνεχὴς διὰ κάθε τιμὴν τῆς x.

VIII. ***Κάθε ρητὴ συνάρτησις τῆς μορφῆς***

$$y=\frac{A_0x^{\mu}+A_1x^{\mu-1}+\ldots+A_{\mu}}{B_0x^{\mu}+B_1x^{\mu-1}+\ldots+B_{\mu}}$$

ὅπου μ ἀκέραιος καὶ θετικός, εἶναι συνεχὴς διὰ κάθε τιμὴν τῆς μεταβλητῆς, ποὺ δὲν μηδενίζει τὸν παρονομαστήν.

ΣΠΟΥΔΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$

692. Θεώρημα. ***Ἡ συνάρτησις*** $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ ***εἶναι ὡρισμένη καὶ συνεχὴς διὰ κάθε τιμὴν τῆς μεταβλητῆς*** x.

1ον. Ἡ συνάρτησις $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ εἶναι ὡρισμένη συνάρτησις διότι εἰς κάθε τιμὴν τοῦ x περιεχομένην εἰς τὸ διάστημα $(-\infty, +\infty)$, ἀντιστοιχεῖ μία τελείως ὡρισμένη τιμὴ τῆς συναρτήσεως y.

2ον. Ἡ συνάρτησις $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ (1) εἶναι συνεχὴς κατὰ τὴν ἰδιότητα VII τῆς § 691. Δυνάμεθα ὅμως νὰ τὸ ἀποδείξωμεν ὡς κάτωθι:

Ἔστω x_0 μία τυχοῦσα τιμὴ τῆς μεταβλητῆς x, θετικὴ ἢ ἀρνητική, ἀλλὰ τελείως ὡρισμένη εἰς τὴν τιμὴν αὐτὴν τῆς μεταβλητῆς x ἀντιστοιχεῖ διὰ τὴν συνάρτησιν y ἡ τιμὴ

$$y_0=\alpha x_0^2+\beta x_0+\gamma. \tag{2}$$

Ἐὰν δώσωμεν εἰς τὴν x, ἀπὸ τῆς τιμῆς x_0, μίαν αὔξησιν ε, ἡ συνάρτησις y θὰ λάβῃ μίαν αὔξησιν η τοιαύτην ὥστε

$$y_0+\eta=\alpha(x_0+\varepsilon)^2+\beta(x_0+\varepsilon)+\gamma. \tag{3}$$

Ἀφαιροῦμεν τὰς ἰσότητας (3) καὶ (2) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\eta=[\alpha(x_0+\varepsilon)^2+\beta(x_0+\varepsilon)+\gamma]-(\alpha x_0^2+\beta x_0+\gamma)$$

$$=\alpha x_0^2+2\alpha x_0\varepsilon+\alpha\varepsilon^2+\beta x_0+\beta\varepsilon+\gamma-\alpha x_0^2-\beta x_0-\gamma=$$

$$=2\alpha x\varepsilon+\alpha\varepsilon^2+\beta\varepsilon. \tag{4}$$

Ὅταν ἡ αὔξησις ε τείνῃ εἰς τὸ μηδέν, οἱ τρεῖς ὅροι τοῦ δευτέρου μέλους τῆς (4), οἱ ὁποῖοι περιέχουν τὸν ε ὡς παράγοντα, τείνουν εἰς τὸ μηδέν· ἄρα καὶ τὸ ἄθροισμά των τείνει εἰς τὸ μηδέν.

Παρατηροῦμεν, ὅτι, ὅταν ἡ αὔξησις ε τῆς μεταβλητῆς x, τείνῃ εἰς τὸ μηδέν, τότε καὶ ἡ αὔξησις η τῆς συναρτήσεως y τείνει εἰς τὸ μηδέν ἄρα ἡ συνάρτησις (1) εἶναι συνεχὴς διὰ $x=x_0$.

Ἐπειδὴ ἡ τιμὴ x_0 εἶναι τυχοῦσα, ἕπεται, ὅτι ἡ συνάρτησις $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ εἶναι συνεχὴς διὰ κάθε τιμὴν τῆς μεταβλητῆς x.

693. **Μεταβολὴ τοῦ τριωνύμου** $\alpha x^2+\beta x+\gamma$. Ἔστω τὸ τριώνυμον $\alpha x^2+\beta x+\gamma$. Ἐὰν θέσωμεν αὐτὸ ἴσον μὲ y, θὰ ἔχωμεν τὴν συνάρτησιν $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$. (1)

Ἐν πρώτοις ἡ συνάρτησις (1) εἶναι ὡρισμένη καὶ συνεχής, ὅπως ἐδείχθη εἰς τὴν § 692.

Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν, πῶς μεταβάλλεται ἡ συνάρτησις y, ὅταν ἡ x μεταβάλλεται ἀπὸ $-\infty$ μέχρι $+\infty$, λαμβάνουσα κατὰ ἕνα συνεχῆ τρόπον ὅλας τὰς ἐνδιαμέσους πραγματικὰς τιμάς.

Διὰ νὰ σπουδάσωμεν εὐκολώτερον τὴν μεταβολὴν τῆς συναρτήσεως (1) δίδομεν εἰς τὸ τριώνυμον $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ τὴν μορφὴν (§ 566)

$$y=\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha^2}\right].$$

Ὑπὸ τὴν μορφὴν αὐτὴν παρατηροῦμεν, ὅτι :

1ον. Ἐὰν εἶναι $\alpha>0$, τὸ τριώνυμον θὰ ἔχῃ τὸ σημεῖον τῆς ποσότητος, ἡ ὁποία εὑρίσκεται ἐντὸς τῶν ἀγκυλῶν.

2ον. Ἐὰν εἶναι $\alpha<0$, τὸ τριώνυμον θὰ ἔχῃ σημεῖον ἀντίθετον τῆς ποσότητος αὐτῆς.

I. Περίπτωσις. Ἔστω, ὅτι εἶναι $\alpha>0$. Ὅταν ἡ $x \rightarrow -\infty$ τὸ $\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 \rightarrow +\infty$· ἐὰν δὲ εἰς αὐτὸν προστεθῇ ὁ σταθερὸς ἀριθμὸς $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha^2}$ λαμβάνομεν ἄθροισμα, τὸ ὁποῖον $\rightarrow +\infty$.

Ἡ ποσότης λοιπόν, ἡ ὁποία εὑρίσκεται ἐντὸς τῶν ἀγκυλῶν τείνει πρὸς τὸ $+\infty$.

Ὥστε, ὅταν ἡ $x \rightarrow -\infty$ ἡ συνάρτησις y τείνει εἰς τὸ $+\infty$.

Ἐὰν ἡ x αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ $-\infty$ μέχρι τοῦ $-\frac{\beta}{2\alpha}$, ἡ ποσότης $\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)$ εἶναι ἀρνητική, ἀλλὰ τὸ τετράγωνόν της $\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$ εἶναι θετικὸν καὶ ἐλαττοῦται συνεχῶς.

Ὅταν ἡ x λάβῃ τὴν τιμὴν $-\frac{\beta}{2\alpha}$, ἡ ποσότης $\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)$ γίνεται 0, ἡ δὲ συνάρτησις y λαμβάνει τὴν τιμὴν

$$\alpha\cdot\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha^2}, \quad \text{ἢ} \quad \frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}.$$

Ὅταν ἡ x αὐξάνεται ἀπὸ τῆς τιμῆς $-\frac{\beta}{2\alpha}$, συνεχῶς τείνουσα εἰς τὸ $+\infty$, ἡ ποσότης $\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)$ εἶναι θετικὴ καὶ αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ τοῦ 0 τείνουσα εἰς τὸ $+\infty$. Ἄρα καὶ ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως y αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ τῆς τιμῆς $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$, τείνουσα εἰς τὸ $+\infty$.

Ὁ κάτωθι πίναξ συνοψίζει τὴν μεταβολὴν τῆς συναρτήσεως $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, ὅταν ἡ x μεταβάλλεται ἀπὸ $-\infty$ μέχρι $+\infty$ καὶ ὅταν $\alpha>0$.

$\alpha>0$					
x	$-\infty$	αὐξ.	$-\frac{\beta}{2\alpha}$	αὐξ.	$+\infty$
y	$+\infty$	ἐλατ.	$\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ *(ἐλάχιστον)*	αὐξ.	$+\infty$

Παρατηροῦμεν, ὅτι, ἂν $\alpha>0$, ἡ συνάρτησις y εἶναι φθίνουσα εἰς τὸ διάστημα $\left(-\infty,\ -\frac{\beta}{2\alpha}\right)$ καὶ αὔξουσα εἰς τὸ διάστημα $\left(-\frac{\beta}{2\alpha},\ +\infty\right)$, ἄρα (§ 683) ἡ συνάρτησις y, δηλαδὴ τὸ τριώνυμον $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, παρουσιάζει ἕνα *ἐλάχιστον*

$$\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha} \quad \text{διὰ} \quad x=-\frac{\beta}{2\alpha}.$$

II. Περίπτωσις. Ἔστω, ὅτι εἶναι $\alpha<0$. Ὅταν τὸ α εἶναι ἀρνητικόν, ἡ σπουδὴ τῆς μεταβολῆς τῆς συναρτήσεως $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ γίνεται κατ' ἀνάλογον τρόπον. Οὕτω

ὅταν $x \to -\infty$ ἡ συνάρτησις $y \to -\infty$

ὅταν $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$ ἡ συνάρτησις y λαμβάνει τὴν τιμὴν $\frac{4\alpha\gamma-\beta^3}{4\alpha}$

ὅταν $x \to +\infty$ ἡ συνάρτησις $y \to -\infty$.

Ὁ κάτωθι πίναξ σύνοψίζει τὴν μεταβολὴν τῆς συναρτήσεως $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, ὅταν ἡ x μεταβάλλεται ἀπὸ $-\infty$ μέχρι $+\infty$ καὶ ὅταν $\alpha<0$.

$\alpha<0$					
x	$-\infty$	αὐξ.	$-\frac{\beta}{2\alpha}$	αὐξ.	$+\infty$
y	$-\infty$	αὐξ.	$\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ *(μέγιστον)*	ἐλατ.	$+\infty$

Παρατηροῦμεν, ὅτι, ἐὰν $\alpha<0$, ἡ συνάρτησις y εἶναι αὔξουσα εἰς τὸ διάστημα $\left(-\infty,\ -\frac{\beta}{2\alpha}\right)$ καὶ φθίνουσα εἰς τὸ διάστημα $\left(-\frac{\beta}{2\alpha},\ +\infty\right)$· ἄρα (§ 683) ἡ συνάρτησις παρουσιάζει ἕνα μέγιστον

$$\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha} \quad \text{διὰ} \quad x=-\frac{\beta}{2\alpha}.$$

694. **Συμπεράσματα**. *1ον*. *Ὅταν τὸ α εἶναι θετικόν, ἡ συνάρτησις* $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ *ἔχει ἐλάχιστον*

$$\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha} \quad \text{διὰ} \quad x=-\frac{\beta}{2\alpha}.$$

2ον. *Ὅταν τὸ α εἶναι ἀρνητικόν, ἡ συνάρτησις* $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ *ἔχει ἕνα μέγιστον* $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ διὰ $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$.

Παραδείγματα. Τὸ τριώνυμον $2x^2-5x+1$ ἔχει ἕνα ἐλάχιστον διότι $\alpha>0$, διὰ $x=-\frac{\beta}{2\alpha}=\frac{5}{4}$.

Τὸ τριώνυμον $-4x^2+7x+6$ ἔχει ἕνα μέγιστον, διότι $\alpha<0$, διὰ

$$x=-\frac{\beta}{2\alpha}=\frac{-7}{2(-4)}=\frac{7}{8}.$$

Ἀσκήσεις. *2735*. Ποῖα ἀπὸ τὰ κάτωθι τριώνυμα ἔχουν μέγιστον ἢ ἐλάχιστον καὶ διὰ ποίαν τιμὴν τῆς x;

1. $x^2-8x+15$. 2. $4x^2-7x+3$. 3. $-x^2+2x+3$.
4. $4x^2-11x-3$. 5. $-x^2+6x-9$. 6. $9x^2-6x+1$.

2736. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον ἢ τὸ ἐλάχιστον τῆς συναρτήσεως

$$y=(x-2)^2+(2x-1)^2.$$

2737. Ὁμοίως τῆς συναρτήσεως $y=7-(2x+3)^2$.

695. Γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτήσεως $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$.

Δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν γραφικῶς τὴν μεταβολὴν τῆς συναρτήσεως $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, ὅταν ἡ x αὐξάνῃ ἀπὸ $-\infty$ ἕως $+\infty$, ὅπως ἐκάμαμεν καὶ διὰ τὴν συνάρτησιν $y=\alpha x+\beta$.

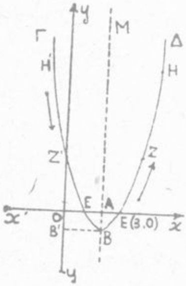
Πρὸς τοῦτο χαράσσομεν ἐπὶ ἑπὸς ἐπιπέδου δύο καθέτους ἄξονας x′x καὶ y′y καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ σημειοῦμεν τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ὡς τετμημένας τὰς τιμάς, τὰς ὁποίας δίδομεν εἰς τὴν x καὶ ὡς τεταγμένας τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῆς y. Συνδέομεν ἔπειτα τὰ σημεῖα αὐτὰ μὲ μίαν συνεχῆ γραμμήν. Ἡ γραμμὴ αὐτὴ παριστᾷ γραφικῶς τὴν μεταβολὴν τῆς συναρτήσεως $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$. (1)

Ἂν ἐργασθῶμεν ὡς ἀνωτέρω, θὰ παρατηρήσωμεν τὰ κάτωθι:

1ον. ***Ἔστω, ὅτι*** $\alpha>0$. Κατὰ τὸν πίνακα τῆς διερευνήσεως (§ 694), ὅταν τὸ x αὐξάνῃ ἀπὸ $-\infty$ ἕως $-\frac{\beta}{2\alpha}$, τὸ y ἐλαττοῦται ἀπὸ $+\infty$ ἕως $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$.

Ἑπομένως ἡ γραμμή, τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ συνάρτησις (1) θὰ ἀποτελῆται ἀπὸ ἕνα κλάδον συνεχῆ ΓΒ, ὁ ὁποῖος *θὰ ἀναχωρῇ* ἀπὸ ἕνα σημεῖον Γ, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται εἰς τὴν γωνίαν yOx′ καὶ εἶναι πολὺ ἀπομεμακρυσμένον (διότι ἔχει τετμημένην $x=-\infty$ καὶ τεταγμένην $y=+\infty$), θὰ *κατέρχεται* ἔπειτα συνεχῶς καὶ θὰ *καταλήγῃ* εἰς ἕνα σημεῖον Β τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον ἔχει τετμημένην $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$ καὶ τεταγμένην $y=\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ (Σχ. 19).

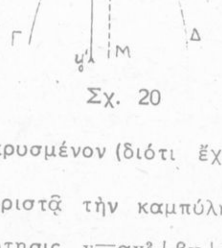
Ὅταν ἡ x αὐξάνῃ ἀπὸ τὸ $-\frac{\beta}{2\alpha}$ ἕως $+\infty$, ἡ y αὐξάνει ἀπὸ $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ ἕως $+\infty$ καὶ ἡ συνάρτησις (1) παριστάνει ἄλλον κλάδον συνεχῆ τῆς γραμμῆς, ὁ ὁποῖος ἀνέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Β καὶ ἀπομακρύνεται πρὸς ἕνα σημεῖον Δ, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται εἰς τὴν γωνίαν yOx καὶ εἶναι πολὺ ἀπομεμακρυσμένον (διότι ἔχει τετμημένην $x=+\infty$ καὶ τεταγμένην $y=+\infty$). Ὥστε, ὅταν $\alpha>0$, ἡ συνάρτησις $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ παριστᾷ τὴν καμπύλην ΓΒΔ.



Σχ. 19

2ον. Ἔστω, ὅτι $\alpha<0$. Κατὰ τὸν πίνακα τῆς διερευνήσεως (§ 693 II), ὅταν ἡ x αὐξάνῃ ἀπὸ τὸ $-\infty$ ἕως $\frac{\beta}{2\alpha}$, ἡ y αὐξάνει ἀπὸ τὸ $-$ ἕως τὸ $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$. Ἑπομένως ἡ γραμμή, τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ συνάρτησις (1), θὰ ἀποτελῆται ἀπὸ ἕνα κλάδον συνεχῆ ΓΒ (σχ. 20), ὁ ὁποῖος θὰ ἀναχωρῇ ἀπὸ ἕνα σημεῖον Γ, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται εἰς τὴν γωνίαν x′Oy′ καὶ εἶναι πολὺ ἀπομεμακρυσμένον (διότι ἔχει τετμημένην $x=-\infty$ καὶ τεταγμένην $y=-\infty$), θὰ ἀνέρχεται ἔπειτα συνεχῶς καὶ θὰ καταλήγῃ εἰς ἕνα σημεῖον Β τοῦ ἐπιπέδου τὸ ὁποῖον ἔχει τετμημένην $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$ καὶ τεταγμένην $y=\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$.

Ὅταν ἡ x αὐξάνῃ ἀπὸ $-\frac{\beta}{2\alpha}$ ἕως $+\infty$, ἡ y ἐλαττοῦται ἀπὸ $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ ἕως $-\infty$ καὶ ἡ συνάρτησις (1) παριστάνει ἄλλον κλάδον τῆς γραμμῆς, ὁ ὁποῖος κατέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Β πρὸς ἕνα σημεῖον Δ, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται εἰς τὴν γωνίαν xOy′ καὶ εἶναι πολὺ ἀπομεμακρυσμένον (διότι ἔχει τετμημένην $x=+\infty$ καὶ τεταγμένην $y=-\infty$).



Σχ. 20

Ὥστε, ὅταν $\alpha<0$, ἡ συνάρτησις (1) παριστᾷ τὴν καμπύλην ΓΒΔ (Σχ. 20).

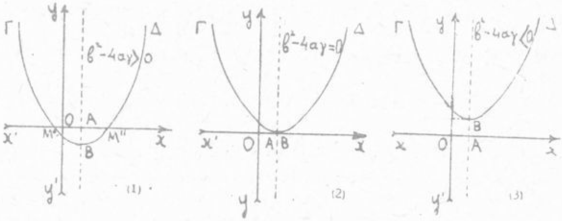
Ἡ καμπύλη, τὴν ὁποίαν παριστᾷ ἡ συνάρτησις $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, λέγεται ***παραβολή***.

696. **Παρατηρήσεις** 1ον. Τὰ σχήματα 21 (1), (2), (3) δεικνύουν τὰς διαφόρους θέσεις, τὰς ὁποίας λαμβάνει ἡ καμπύλη ΓΒΔ, ὅταν τὸ α εἶναι θετικόν.

Ἐὰν $\beta^2-4\alpha\gamma<0$, ἡ καμπύλη τέμνει τὸν ἄξονα x′x εἰς δύο σημεῖα Μ′ καὶ Μ″, τῶν ὁποίων αἱ τετμημέναι ΟΜ′ καὶ ΟΜ′, παριστάνουν τὰς πραγματικὰς ρίζας τοῦ τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ (σχ. 21. 3).

Ἐὰν $\beta^2-4\alpha\gamma=0$, ἡ καμπύλη ἐφάπτεται τοῦ ἄξονος $x'Ox$ εἰς ἕνα σημεῖον Β, τοῦ ὁποίου ἡ τετμημένη εἶναι $\frac{-\beta}{2\alpha}$ (Σχ. 21, 2).

Ἐὰν $\beta^2-4\alpha\gamma<0$, ἡ καμπύλη δὲν συναντᾷ τὸν ἄξονα $x'x$ (Σχ. 21, 3).

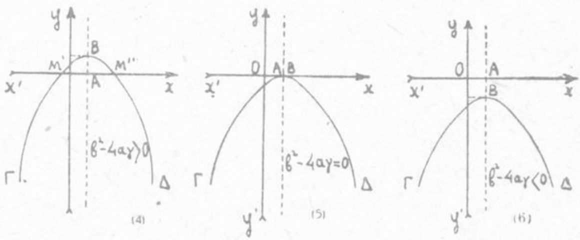


Σχ. 21

Καὶ εἰς τὰς τρεῖς περιπτώσεις ἡ τεταγμένη ΑΒ δίδει τὴν τιμὴν τοῦ ***ἐλαχίστου*** τοῦ τριωνύμου.

2ον. Τὰ σχήματα 22 (4), (5), (6) δεικνύουν διαφόρους θέσεις, τὰς ὁποίας λαμβάνει ἡ καμπύλη **ΓΒΔ**, ὅταν τὸ α εἶναι ἀρνητικόν.

Τὸ σχῆμα 22, (4) ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν περίπτωσιν, ὅπου εἶναι



Σχ. 22

$\beta^2-4\alpha\gamma>0$. Ἡ καμπύλη συναντᾷ τὸν ἄξονα $x'x$ εἰς δύο σημεῖα Μ' καὶ Μ'', τῶν ὁποίων αἱ τετμημέναι εἶναι αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου.

Τὸ σχῆμα 22, (5) ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν περίπτωσιν, ὅπου $\beta^2-4\alpha\gamma=0$. Ἡ καμπύλη ἐφάπτεται τοῦ ἄξονος $x'x$ εἰς τὸ σημεῖον Α, τοῦ ὁποίου ἡ τετμημένη εἶναι $-\frac{\beta}{2\alpha}$.

Τέλος τὸ σχῆμα 22, (6) ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν περίπτωσιν, ὅπου $\beta^2-4\alpha\gamma<0$. Ἡ καμπύλη δὲν συναντᾶ τὸν ἄξονα $x'x$. Καὶ εἰς τὰς τρεῖς περιπτώσεις ἡ τεταγμένη ΑΒ δίδει τὴν τιμὴν τοῦ ***μεγίστου*** τοῦ τριωνύμου.

697. Ἐφαρμογή. ***Νὰ παρασταθοῦν γραφικῶς αἱ μεταβολαὶ τῆς συναρτήσεως*** $y=x^2-4x+3$.

Ἡ δοθεῖσα συνάρτησις δύναται νὰ γραφῇ (§ 351)

$$y=(x-2)^2-1. \qquad (1)$$

Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ συντελεστὴς α τοῦ τριωνύμου x^2-4x+3 εἶναι θετικός. Ἄρα (§ 694) ἡ συνάρτησις (1) διὰ $x=-\dfrac{\beta}{2\alpha}=2$ ἔχει ἐλάχιστον $\dfrac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}=-1$. Ὁρίζομεν λοιπὸν τὸ σημεῖον Β, τὸ ὁποῖον ἔχει τετμημένην 2' καὶ τεταγμένην —1.(Σχ.19).

Δίδομεν τώρα εἰς τὴν x διαφόρους τιμὰς συνήθως δίδομεν τιμὰς αἱ ὁποῖαι νὰ κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς τιμῆς $\left(x=-\dfrac{\beta}{2\alpha}=2\right)$ καὶ εὑρίσκομεν ἀπὸ τὴν σχέσιν (1) τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῆς y. Ἔπειτα ὁρίζομεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τετμημένας τὰς τιμὰς τῆς x καὶ τεταγμένας τὰς τιμὰς τῆς y·

x	$-\infty$....	-1,	0	1	2	3	4	5....$+\infty$
y	$-\infty$....	8	3	0	-1, (ἐλαχ.)	0	3	8....$+\infty$
σημεῖα	....	Η′	Ζ′	Ε	Β	Ε	Ζ	Η

Ὁ ἀνωτέρω πίναξ δεικνύει τὰς τιμὰς τῶν x καὶ y καὶ τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἀντιστοίχως συντεταγμένας τὰς x καὶ y. Ἐὰν ἑνώσωμεν μὲ συνεχῆ γραμμὴν τὰ σημεῖα Η′, Ζ′, Ε′, Β, Ε, Ζ, Η, θὰ λάβωμεν μίαν καμπύλην γραμμὴν ΓΒΔ (σχ. 19), ἡ ὁποία θὰ παριστάνῃ γραφικῶς τὴν μεταβολὴν τῆς συναρτήσεως $y=x^2-4x+3$.

***698* Παρατηρήσεις.** I. Τὰ σημεῖα Ε′, Ζ′, Η′, ... τοῦ κλάδου ΓΒ (σχ. 19) εἶναι συμμετρικὰ τῶν σημείων Ε, Ζ, Η τοῦ κλάδου ΒΔ, ὡς πρὸς ἄξονα συμμετρίας, τὴν κάθετον ΒΑΜ ἐπὶ τὸν ἄξονα $x'x$, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Β, τὸ ὁποῖον ἔχει συντεταγμένας

$$x=-\frac{\beta}{2\alpha}=2 \quad \text{καὶ} \quad y=\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}=-1.$$

II. Ἡ καμπύλη ΓΒΔ (σχ. 19) τέμνει τὸν ἄξονα $x'x$ εἰς τὰ σημεῖα Ε′ (1 0) καὶ Ε (3,0). Παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ τετμημέναι τῶν σημείων Ε′ καὶ Ε τῆς τομῆς τῆς καμπύλης ΓΒΔ καὶ τοῦ ἄξονος $x'x$ εἶναι αἱ ρίζαι 1 καὶ 3 τοῦ τριωνύμου x^2-4x+3.

Ἐξ αὐτοῦ συνάγομεν, ὅτι, ἂν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν γραφικῶς τὰς ρίζας ἑνὸς τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, πρέπει νὰ κατασκευάσωμεν τὴν καμπύλην, τὴν ὁποίαν παριστᾷ ἡ συνάρτησις $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ καὶ νὰ εὕρωμεν τὰς τετμημένας τῶν σημείων τῆς τομῆς τῆς καμπύλης καὶ τοῦ ἄξονος $x'x$.

Ἀσκήσεις. ***2738.*** Νὰ σπουδασθῇ ἡ μεταβολὴ τῆς συναρτήσεως $y=x^2+3x-5$ καὶ νὰ παρασταθῇ γραφικῶς ἡ μεταβολὴ αὐτή.

2739. Ὁμοίως διὰ τὴν συνάρτησιν $y=x^2-8x+12$,

2740. Ὁμοίως διὰ τὴν συνάρτησιν $y=3x^2-8x+7$.

2741. Νὰ λυθῇ γραφικῶς ἡ ἐξίσωσις $x^2-x-6=0$.

ΜΕΤΑΒΟΛΑΙ ΚΑΙ ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΙΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

$$y=\frac{Ax+B}{\alpha x+\beta}$$

699. Ἡ συνάρτησις $y=\frac{\alpha}{x}$. *Συγκεκριμένον παράδειγμα.*

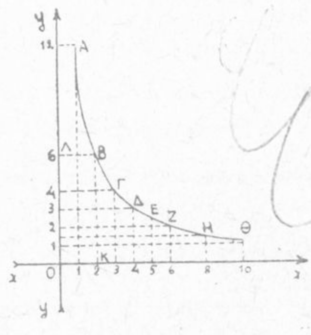
Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου εἶναι 12 τετραγωνικὰ μέτρα. Νὰ ἐκφρασθοῦν καὶ νὰ παρασταθοῦν αἱ μεταβολαὶ τοῦ μήκους του συναρτήσει τοῦ πλάτους του.

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ x τὸ πλάτος καὶ μὲ y τὸ μῆκος τοῦ ὀρθογωνίου, θὰ ἔχωμεν $xy=12$ ἢ $y=\frac{12}{x}$. (1)

Ἄς δώσωμεν εἰς τὸ x διαδοχικῶς τὰς τιμὰς 1, 2, 3, . . . καὶ ἄς ὑπολογίσωμεν τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τοῦ y ἀπὸ τὴν ἰσότητα (1). Ὁ κάτωθι πίναξ δεικνύει τὰς τιμάς, τὰς ὁποίας δίδομεν εἰς τὸν x καὶ τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τοῦ y.

x	1	2	3	4	5	6	8	10
y	12	6	4	3	2,4	2	1,5	1,2

Ἄν θέλωμεν νὰ παραστήσωμεν γραφικῶς τὴν μετοβολὴν τῆς συναρτήσεως (1) χαράσσομεν δύο ὀρθογωνίους ἄξονας x'Ox καὶ y'Oy καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν ἀξόνων σημειώνομεν τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ὡς τετμημένας τὰς τιμὰς τοῦ x καὶ ὡς τεταγμένας τὰς τιμάς τοῦ y. Ἄν συνδέσωμεν μὲ συνεχῆ γραμμὴν τὰ σημεῖα αὐτὰ λαμβάνομεν τὴν καμπύλην ΑΒΓ....Θ (σχ. 23). Κάθε ἕνα ἀπὸ τὰ ὀρθογώνια, ὅπως τὸ ΟΚΒΛ, ποὺ ἔχουν μίαν κορυφὴν ἐπὶ τῆς καμπύλης καὶ δύο πλευράς, αἱ ὁποῖαι συμπίπτουν μὲ τοὺς ἄξονας παριστάνει μίαν ἰδιαιτέραν περίπτωσιν τοῦ ζητήματος.



Σχ. 23

700. Σπουδὴ τῆς μεταβολῆς τῆς συναρτήσεως $y=\frac{1}{x}$.

Διὰ νὰ σπουδάσωμεν τὴν συνάρτησιν $y=\frac{1}{x}$ πρέπει νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψει, ὅτι :

1ον. Αἱ μεταβληταὶ x καὶ y εἶναι πάντοτε ***ὁμόσημοι***, διότι τὸ γινόμενόν των $xy=+1$.

2ον. Αἱ ἀπόλυτοι τιμαὶ τῶν x καὶ $\frac{1}{x}$ μεταβάλλονται κατ' ἀντίθετον φοράν· δηλ. ὅταν ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ x αὐξάνῃ, ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ $\frac{1}{x}$ ἐλαττοῦται.

3ον. Ὅταν τὸ x τείνῃ πρὸς τὸ ἄπειρον κατ' ἀπόλυτον τιμήν, τὸ $\frac{1}{x}$ τείνῃ πρὸς τὸ μηδὲν καὶ ὅταν τὸ x τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν, τὸ $\frac{1}{x}$ τείνῃ πρὸς τὸ ἄπειρον.

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω ἡ σπουδὴ τῆς μεταβολῆς τῆς συναρσεως $\frac{1}{x}$ γίνεται εὐκόλως.

Ὅταν $x \to \infty$, τὸ $\frac{1}{x} \to 0$. Ὅταν τὸ x αὐξάνῃ ἀπὸ $-\infty$ ἕως 0, ἡ συνάρτησις $y=\frac{1}{x}$ ἐλαττοῦται ἀπὸ 0 ἕως $-\infty$. Ὅταν τὸ x λάβῃ τὴν τιμήν 0, ἡ συνάρτησις $\frac{1}{x}$ δὲν ἔχει καμμίαν ἔννοιαν. Ὅταν τὸ x αὐξάνῃ ἀπὸ 0 ἕως $+\infty$ ἡ συνάρτησις $\frac{1}{x}$ ἐλαττοῦται ἀπὸ $+\infty$ ἕως 0.

Ὥστε ἡ συνάρτησις $\frac{1}{x}$ ἐλαττοῦται συνεχῶς.

Εἴδομεν, ὅτι διὰ $x=0$, ἡ συνάρτησις $y=\frac{1}{x}$ δὲν εἶναι ὡρισμένη καὶ ὅτι μεταπηδᾷ ἀποτόμως ἀπὸ τὸ $-\infty$ ἕως τὸ $+\infty$.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν, ὅτι ἡ τιμὴ $x=0$ εἶναι ***τιμὴ ἀσυνεχείας*** τῆς συναρτήσεως $y=\frac{1}{x}$.

Ὁ κάτωθι πίναξ συνοψίζει τὰ ἐξαγόμενα τῆς μεταβολῆς τῆς συναρτήσεως $y=\frac{1}{x}$.

x	$-\infty$	αὔξ.	0		αὔξ	$+\infty$
$y=\frac{1}{x}$	0	ἐλατ.	$-\infty$	$+\infty$	ἐλατ.	0

Κάτωθεν τῆς τιμῆς τοῦ 0 ἐφέραμεν μίαν γραμμὴν διὰ νὰ δείξωμεν, ὅτι δὲν ὑπάρχει ἀντίστοιχος τιμὴ τῆς συναρτήσεως $y=\frac{1}{x}$.

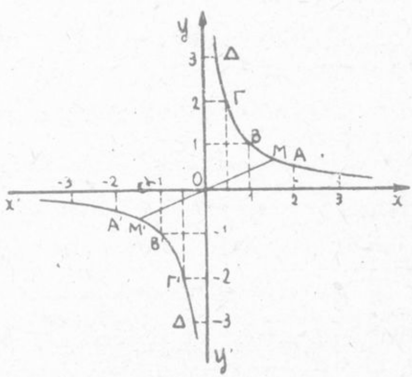
701. Γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτήσεως $y=\frac{1}{x}$.
Χαράσσομεν ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου δύο ὀρθογωνίους ἄξονας x'Ox καὶ y'Oy' καὶ σημειώνομεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν ἀξόνων τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ὡς τετμημένας τὰς τιμάς, τὰς ὁποίας δίδομεν εἰς τὴν x καὶ ὡς τεταγμένας τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῆς y. Ὁ κάτωθι πίναξ δίδει μερικὰς τιμὰς τῶν x καὶ y καὶ τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἀντιστοίχως συντεταγμένας x καὶ y.

x	$-\infty$....	-2,	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2....		$+\infty$
y	0.....	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-3		3	2	1	$\frac{1}{2}$....		0
Σημεῖα		Α'	Β'	Γ'	Δ'		Δ	Β	Γ	Α		

Ἂν συνδέσωμεν τὰ σημεῖα Α', Β' .... μὲ μίαν συνεχῆ γραμμήν, θὰ ἔχωμεν μίαν καμπύλην Α'Β'Γ'Δ' ...., ἡ ὁποία παριστᾷ τὸν ἕνα κλάδον τῆς καμπύλης, τὴν ὁποίαν παριστᾷ ἡ συνάρτησις $y=\frac{1}{x}$ καὶ ὁ ὁποῖος κεῖται εἰς τὴν γωνίαν x'Oy' (σχ. 24).

Ἂν συνδέσωμεν μὲ συνεχῆ γραμμὴν καὶ τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, θὰ ἔχωμεν καὶ ἕνα δεύτερον κλάδον τῆς καμπύλης, ὁ ὁποῖος κεῖται εἰς τὴν γωνίαν xOy (σχ. 24).

702. Παρατηρήσεις. *I. Φύσις τῆς καμπύλης.* Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ καμπύλη, τὴν ὁποίαν παριστᾷ ἡ συνάρτησις $y=\frac{1}{x}$ ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο κλάδους, οἱ ὁποῖοι ἐκτείνονται ἐπ' ἄπειρον. Ἡ καμπύλη αὐτὴ λέγεται ***ὑπερβολή***. Ἐπειδὴ τὰ x καὶ y εἶναι πάντοτε ὁμόσημα, τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα ἔχουν συντεταγμένας τὰς x καὶ y εὑρίσκονται πάντοτε ἐντὸς τῶν γωνιῶν xOy καὶ x'Oy'.



Σχ.

II. Συμμετρία. Ἐὰν ἕνα σημεῖον Μ τῆς καμπύλης ΑΒΓΔ ἔχῃ συντεταγμένας x καὶ y, τὸ συμμετρικόν του Μ' ὡς πρὸς κέντρον συμμετρίας τὸ Ο, θὰ ἔχῃ συντεταγμένας $-x$ καὶ $-y$ Ἐπειδὴ ἀπὸ τὴν ἰσότητα $y=\frac{1}{x}$ λαμβάνομεν καὶ $-y=-\frac{1}{x}$ συνάγομεν, ὅτι τὸ σημεῖον Μ΄ ἀνήκει εἰς τὴν καμπύλην, τὴν ὁποίαν παριστᾷ ἡ συνάρτησις $y = \frac{1}{x}$. Ἀπὸ τὴν παρατήρησιν αὐτὴν συνάγομεν, ὅτι, ὅταν προσδιορίσωμεν ἕνα κλάδον τῆς καμπύλης, δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν καὶ τὸν ἄλλον κλάδον τῆς καμπύλης, ἀρκεῖ νὰ χαράξωμεν τὸν συμμετρικὸν αὐτοῦ ὡς πρὸς κέντρον συμμετρίας τὴν ἀρχὴν Ο τῶν συντεταγμένων. Ὥστε ἡ ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων εἶναι κέντρον συμμετρίας τῶν δύο κλάδων τῆς καμπύλης, τὴν ὁποίαν παριστᾷ ἡ συνάρτησις $y = \frac{1}{x}$.

III. Ἀσυνέχεια. Ὅταν ἡ x λαμβάνῃ τιμάς, αἱ ὁποῖαι τείνουν πρὸς τὸ μηδέν, εἴτε ἐξ ἀρνητικῶν τιμῶν, εἴτε ἐκ θετικῶν τιμῶν, οἱ κλάδοι τῆς καμπύλης πλησιάζουν συνεχῶς τὸν ἄξονα τῶν $y'y$ χωρὶς νὰ τὸν συναντήσουν ποτέ. Ὁμοίως, ἐὰν ἡ x τείνῃ πρὸς τὸ $-\infty$ ἢ πρὸς τὸ $+\infty$, οἱ κλάδοι τῆς καμπύλης πλησιάζουν συνεχῶς τὸν ἄξονα $x'x$ χωρὶς νὰ τὸν συναντήσουν ποτέ. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν, ὅτι οἱ ἄξονες x καὶ y εἶναι ἀσύμπτωτοι πρὸς τοὺς κλάδους τῆς καμπύλης.

Δυνάμεθα ἐπίσης νὰ εἴπωμεν, ὅτι οἱ ***κλάδοι αὐτοὶ εἶναι ἀσύμπτωτοι πρὸς τοὺς ἄξονας.***

Γενικῶς. Λέγομεν, ὅτι ***μία εὐθεῖα εἶναι ἀσύμπτωτος πρὸς ἕνα κλάδον μιᾶς καμπύλης***, ἐὰν ἡ ἀπόστασις ἑνὸς σημείου τῆς καμπύλης ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν, τείνῃ εἰς τὸ μηδέν, ὅταν τὸ σημεῖον αὐτὸ ἀπομακρύνεται ἀπείρως ἐπὶ τοῦ κλάδου τῆς καμπύλης.

Ἀντιστρόφως : ὁ ***κλάδος τῆς καμπύλης*** λέγεται ***ἀσύμπτωτος πρὸς τὴν εὐθεῖαν.***

703. Μεταβολὴ τῆς συναρτήσεως $y = \frac{\alpha}{x}$. Διὰ νὰ σπουδάσωμεν εὐκόλως τὴν μεταβολὴν τῆς συναρτήσεως $y = \frac{\alpha}{x}$ θὰ λάβωμεν τὰ κάτωθι παραδείγματα :

Ἔστωσαν αἱ συναρτήσεις $y_1 = \frac{4}{x}$ (1) καὶ $y_2 = -\frac{4}{x}$. (2)

Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ τιμαὶ τῶν x καὶ y_1 εἶναι ὁμόσημοι, διότι ἀπὸ τὴν (1) ἔχομεν $xy_1 = +4$, ἐνῶ αἱ τιμαὶ τῶν x καὶ y_2 εἶναι ἑτερόσημοι, διότι ἀπὸ τὴν (2) ἔχομεν $xy_2 = -4$.

Ὅταν τὸ x τείνῃ πρὸς τὸ $+\infty$, τὰ y_1 καὶ y_2 τείνουν πρὸς τὸ μηδέν, τὸ μὲν y_1 μένον πάντοτε θετικόν, τὸ δὲ y_2 μένον πάντοτε ἀρνητικόν. Ὁμοίως, ὅταν τὸ x τείνῃ πρὸς τὸ $-\infty$, τὰ y_1 καὶ y_2 τείνουν πρὸς τὸ μηδέν, τὸ μὲν y_1 μένον πάντοτε ἀρνητικόν, τὸ δὲ y_2 μένον πάντοτε θετικόν. Ὁ κάτωθι πίναξ συνοψίζει τὴν μεταβολὴν τῶν συναρτήσεων $y = \frac{1}{x}$, $y_1 = \frac{4}{x}$, $y_2 = -\frac{4}{x}$.

x	$-\infty$	αὔξ.	0		αὔξ.	$+\infty$
$y=\frac{1}{x}$, $\alpha=1$	0	ἐλατ.	$-\infty$	$+\infty$	ἐλατ.	0
$y_1=\frac{4}{x}$, $\alpha>0$	0	ἐλατ.	$-\infty$	$+\infty$	ἐλατ.	0
$y_2=-\frac{4}{x}$, $\alpha<0$	0	αὔξ.	$+\infty$	$-\infty$	αὔξ.	0

704. Γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτήσεως $y=\frac{\alpha}{x}$. Διὰ νά παραστήσωμεν γραφικῶς τὴν μεταβολὴν τῶν συναρτήσεῶν $y_1=\frac{4}{x}$ καὶ $y_2=-\frac{4}{x}$ ἐργαζόμεθα, ὅπως εἰργάσθημεν καὶ διὰ γραφικὴν παράστασιν τῶν ἄλλων συναρτήσεων.

Οἱ κάτωθι πίνακες δίδουν μερικὰς τιμὰς τῶν x, y_1 καὶ y_2.

x	$-\infty$	-4	-2	-1	0		1	2	4	$+\infty$
$y_1=\frac{4}{x}$	0	-1	-2	-4	$-\infty$	$+\infty$	4	2	1	0
Σημεῖα		Α	Β	Γ			Β	Ε	Ζ	

x	$-\infty$	-4	-2	-1	0		1	2	4	$+\infty$
$y_2=-\frac{4}{x}$	0	$+1$	2	4	$+\infty$	$-\infty$	-4	-2	-1	0
Σημεῖα		Α′	Β′	Γ′			Β′	Ε′	Ζ′	

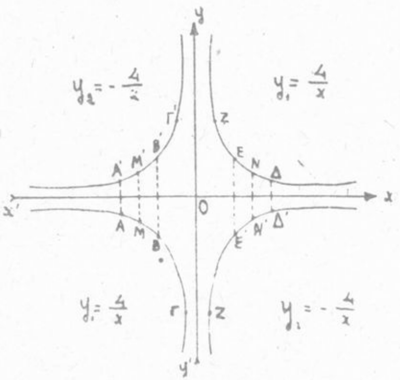
Ἐὰν συνδέσωμεν μὲ συνεχῆ γραμμὴν τὰ σημεῖα Α, Β, Γ καὶ τὰ σημεῖα Δ, Ε, Ζ . . . (σχ. 25) θὰ ἔχωμεν τοὺς δύο κλάδους τῆς καμπύλης, τὴν ὁποίαν παριστᾷ ἡ συνάρτησις $y_1=\frac{4}{x}$.

Ὁμοίως, ἐὰν συνδέσωμεν μὲ συνεχῆ γραμμὴν τὰ σημεῖα Α′,Β′ Γ′, καὶ τὰ σημεῖα Δ′, Ε′, Ζ′ . . . (σχ. 25) θὰ ἔχωμεν τοὺς δύο κλάδους τῆς καμπύλης, τὴν ὁποίαν παριστᾷ ἡ συνάρτησις $y_2=-\frac{4}{x}$.

705. Παρατηρήσεις. *I.* Οἱ δύο κλάδοι τῆς καμπύλης, τὴν ὁποίαν παριστᾷ ἡ συνάρτησις $y_1=\frac{4}{x}$ κεῖνται εἰς τὰς γωνίας xOy καὶ x′Oy′, διότι αἱ συντεταγμέναι x καὶ y εἶναι ὁμόσημοι. Οἱ δύο κλάδοι τῆς καμπύλης, τὴν ὁποίαν παριστᾷ ἡ συνάρτησις $y_2=-\frac{4}{x}$ κεῖνται εἰς τὰς γωνίας x′Oy καὶ y′Ox, διότι αἱ στντεταγμέναι x καὶ y εἶναι ἑτερόσημοι.

Αἱ καμπύλαι, τὰς ὁποίας παριστάνουν αἱ συνρατήσεις $y_1=\frac{4}{x}$ (1) καὶ $y_2=-\frac{4}{x}$ (2) λέγονται ***ὑπερβολαί***.

II. Κάθε μία ἀπὸ τὰς καμπύλας αὐτὰς ἔχει κέντρον συμμετρίας τὸ σημεῖον Ο τῆς τομῆς τῶν ἀξόνων.



Σχ. 25

Ἐὰν δώσωμεν εἰς τὴν x μίαν τιμήν, εὑρίσκομεν ἐκ τῶν (1) καὶ (2) δύο ἀντιθέτους τιμὰς τῆς y. Οὕτω θὰ ἔχωμεν δύο σημεῖα Μ καὶ Μ′, τὰ ὁποῖα θὰ ἔχουν τὴν αὐτὴν τετμημένην x καὶ ἀντιθέτους τεταγμένας. Τὰ σημεῖα λοιπὸν Μ καὶ Μ′ εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὸν ἄξονα Ox. Ὅταν τὸ σημεῖον Μ γράφῃ τὸν κλάδον ΑΒΓ τῆς καμπύλης, ποὺ παριστᾷ ἡ συνάρτησις $y_1=\frac{4}{x}$, τὸ συμμετρικόν του Μ′ γράφει τὸν κλάδον Α′ Β′ Γ′ τῆς καμπύλης, ποὺ παριστᾷ ἡ συνάρτησις $y_2=-\frac{4}{x}$.

III. Αἱ δύο συναρτήσεις εἶναι ***ἀσυνεχεῖς***.

IV. Αἱ δύο καμπύλαι εἶναι ***ἀσύμπτωτοι πρὸς τοὺς ἄξονας.***

Ἀσκήσεις. *2742*. Νὰ παρασταθῇ γραφικῶς ἡ συνάρτησις $y=\frac{6}{x}$,

2743. Ὁμοίως ἡ συνάρτησις $y=\frac{1}{4x}$.

2744. Ὁμοίως ἡ συνάρτησις $y=-\frac{1}{x}$.

2745. Ὁμοίως ἡ συνάρτησις $y=-\frac{3}{4}x$.

2746. Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου εἰς 18 τ. μ. Νὰ ἐκφρασθοῦν καὶ νὰ παρασταθοῦν αἱ μεταβολαὶ τοῦ μήκους τοῦ ὀρθογωνίου συναρτήσει τοῦ πλάτους του.

706. **Μεταβολὴ τῆς συναρτήσεως $y=\frac{Ax+B}{\alpha x+\beta}$** (1). Ἐν πρώτοις ὑποθέτομεν, ὅτι $\alpha\neq0$, διότι, ἐὰν $\alpha=0$, ἡ δοθεῖσα συνάρτησις θὰ ἐλάμβανε τὴν μορφὴν

$$y=\frac{Ax+B}{\beta} \quad \text{ἢ} \quad y=\frac{Ax}{\beta}+\frac{B}{\beta}$$

καὶ θὰ ἦτο μία γραμμικὴ συνάρτησις τῆς μορφῆς $y=\alpha x+\beta$.

Ἡ συνάρτησις (1) εἶναι ὡρισμένη καὶ συνεχὴς δι' ὅλας τας τιμὰς τῆς x ἐκτὸς τῆς τιμῆς $x=-\dfrac{\beta}{\alpha}$, ἡ ὁποία μηδενίζει τὸν παρονομαστήν. Ἡ τιμὴ αὐτὴ $x=-\dfrac{\beta}{\alpha}$ χωρίζει τὸ διάστημα $(-\infty, +\infty)$ εἰς δύο διαστήματα $\left[-\infty, \left(-\dfrac{\beta}{\alpha}-\varepsilon\right)\right]$ καὶ $\left[\left(-\dfrac{\beta}{\alpha}+\varepsilon\right), +\infty\right]$, ὅπου ε εἶναι ἐλάχιστος καὶ θετικὸς ἀριθμός.

Διὰ νὰ ἴδωμεν πῶς μεταβάλλεται ἡ συνάρτησις $y=\dfrac{Ax+B}{\alpha x+\beta}$, ὅταν ἡ x μεταβάλλεται εἰς τὰ δύο ἀνωτέρω διαστήματα, δίδομεν εἰς τὴν συνάρτησιν μίαν ἄλλην μορφήν:

Ὁ ἀριθμητὴς $Ax+B$ γράφεται

$$Ax+B=\frac{A}{\alpha}(\alpha x+\beta)-\frac{A\beta}{\alpha}+B \quad \text{ἢ} \quad Ax+B=\frac{A}{\alpha}(\alpha x+\beta)+\frac{B\alpha-A\beta}{\alpha}$$

καὶ ἑπομένως ἡ δοθεῖσα συνάρτησις γράφεται

$$y=\frac{\dfrac{A}{\alpha}(\alpha x+\beta)+\dfrac{B\alpha-A\beta}{\alpha}}{\alpha x+\beta} \quad \text{ἢ} \quad y=\frac{\dfrac{A}{\alpha}(\alpha x+\beta)}{\alpha x+\beta}+\frac{\dfrac{B\alpha-A\beta}{\alpha}}{\alpha x+\beta}$$

ἢ

$$y=\frac{A}{\alpha}+\frac{\dfrac{B\alpha-A\beta}{\alpha}}{\alpha x+\beta}.$$

Διαιροῦμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ δευτέρου κλάσματος διὰ α καὶ ἔχομεν

$$y=\frac{A}{\alpha}+\frac{\dfrac{B\alpha-A\beta}{\alpha^2}}{x+\dfrac{\beta}{\alpha}}.$$

Ἐὰν πρὸς εὐκολίαν τῆς γραφῆς, θέσωμεν $\dfrac{B\alpha-A\beta}{\alpha^2}=\mu$, ἡ συνάρτησις τίθεται ὑπὸ τὴν τελικὴν μορφὴν

$$y=\frac{A}{\alpha}+\frac{\mu}{x+\dfrac{\beta}{\alpha}}. \tag{2}$$

Ὑπὸ τὴν μορφὴν αὐτὴν δυνάμεθα νὰ σπουδάσωμεν εὐκόλως τὴν μεταβολὴν τῆς συναρτήσεως.

Ἐπειδὴ $\dfrac{A}{\alpha}$ εἶναι σταθερόν, ἡ μεταβολὴ τῆς συναρτήσεως y ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν μεταβολὴν τοῦ κλάσματος $\dfrac{\mu}{x+\dfrac{\beta}{\alpha}}$.

Διακρίνομεν τὰς κάτωθι περιπτώσεις:

Ι. Περίπτωσις. ***Ἔστω, ὅτι*** $\mu=0$, ***δηλ. ἔστω, ὅτι*** $B\alpha-A\beta=0$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ δεύτερον κλάσμα τοῦ δευτέρου μέλους τῆς ἰσότητος (2) εἶναι ἴσον μὲ μηδὲν καὶ ἑπομένως ἡ συνάρτησις εἶναι σταθερῶς ἴση μὲ $\frac{A}{\alpha}$.

ΙΙ. Περίπτωσις. ***Ἔστω, ὅτι*** $\mu>0$, ***δηλ ἔστω, ὅτι*** $B\alpha-A\beta>0$. Ὅταν ἡ $x\to-\infty$, ὁ παρονομαστὴς $x+\frac{\beta}{\alpha}$ τείνῃ εἰς τὸ $-\infty$ καὶ ἑπομένως τὸ κλάσμα $\frac{\mu}{x+\frac{\beta}{\alpha}}$ τείνῃ πρὸς τὸ μηδὲν ἐκ τιμῶν ἀρνητικῶν. Ἄρα ἡ συνάρτησις y τείνει πρὸς τὸ $\frac{A}{\alpha}$.

Ὅταν ἡ x μεταβάλλεται ἀπὸ $-\infty$ μέχρι $-\frac{\beta}{\alpha}-\varepsilon$, εἴτε ἀπὸ $-\frac{\beta}{\alpha}+\varepsilon$ μέχρι $+\infty$, τὸ $x+\frac{\beta}{\alpha}$ αὐξάνει συγχρόνως μὲ τὴν x καὶ ἑπομένως τὸ κλάσμα $\frac{\mu}{x+\frac{\beta}{\alpha}}$, ἄρα καὶ ἡ συνάρτησις y, ἐλαττοῦται. Ἡ συνάρτησις λοιπὸν y εἶναι φθίνουσα εἰς ἕκαστον τῶν ἀνωτέρω διαστημάτων.

Ὅταν ἡ x τείνῃ πρὸς τὸ $+\infty$, ὁ παρονομαστὴς $x+\frac{\beta}{\alpha}$ τείνῃ πρὸς τὸ $+\infty$· ἄρα τὸ κλάσμα $\frac{\mu}{x+\frac{\beta}{\alpha}}$ τείνει πρὸς τὸ μηδὲν καὶ συνεπῶς ἡ συνάρτησις y τείνει πρὸς $\frac{A}{\alpha}$.

Ὅταν ἡ x τείνῃ πρὸς τὸ $-\frac{\beta}{\alpha}$, μένον μικρότερον τοῦ $-\frac{\beta}{\alpha}$, τὸ $x+\frac{\beta}{\alpha}$ τείνει πρὸς τὸ μηδὲν ἐξ ἀρνητικῶν τιμῶν καὶ ἑπομένως τὸ κλάσμα $\frac{\mu}{x+\frac{\beta}{\alpha}}$, ἄρα καὶ ἡ συνάρτησις y τείνει πρὸς τὸ $-\infty$.

Ὅταν ἡ x τείνῃ πρὸς τὸ $-\frac{\beta}{\alpha}$, μένον μεγαλύτερον τοῦ $-\frac{\beta}{\alpha}$, ὁ παρονομαστὴς $x+\frac{\beta}{\alpha}$ τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν, ἐκ θετικῶν τιμῶν καὶ ἑπομένως τὸ κλάσμα $\frac{\mu}{x+\frac{\beta}{\alpha}}$, ἄρα καὶ ἡ συνάρτησις y τείνει πρὸς τὸ $+\infty$.

Ὅταν ἡ x μεταβαλλομένη ἀπὸ τῆς τιμῆς $-\frac{\beta}{\alpha}-\varepsilon$ εἰς τὴν τιμὴν

$-\frac{\beta}{\alpha}+\varepsilon$, διέρχεται ἀπὸ τὴν τιμὴν $-\frac{\beta}{\alpha}$, ἡ συνάρτησις y μεταπηδᾷ ἀποτόμως ἀπὸ τὸ $-\infty$ ἕως τὸ $+\infty$.

Ὁ κάτωθι πίναξ συνοψίζει τὴν μεταβολὴν τῆς συναρτήσεως

$$y=\frac{Ax+B}{\alpha x+\beta},\quad \text{ἐὰν } B\alpha-A\beta>0.$$

x	$-\infty$	αὔξ.	$-\frac{\beta}{\alpha}$		αὔξ.	$+\infty$
y	$\frac{A}{\alpha}$	ἐλατ.	$-\infty$	$+\infty$	ἐλατ.	$\frac{A}{\alpha}$

III. Περίπτωσις. ***Ἔστω, ὅτι $\mu<0$, δηλ. ἔστω ὅτι** $B\alpha-A\beta<0$.* Ἐργαζόμενοι, ὅπως εἰς τὴν περίπτωσιν II καταλήγομεν εἰς συμπεράσματα, τὰ ὁποῖα συνοψίζονται εἰς τὸν κάτωθι πίνακα.

$B\alpha-A\beta<0$						
x	$-\infty$	αὔξ.	$-\frac{\beta}{\alpha}$		αὔξ.	$+\infty$
y	$\frac{A}{\alpha}$	αὔξ.	$+\infty$	$-\infty$	αὔξ.	$\frac{A}{\alpha}$

707. Συμπεράσματα. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι ἡ συνάρτησις $y=\frac{Ax+B}{\alpha x+\beta}$ μεταβάλλεται πάντοτε κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν:

Ἐὰν $B\alpha-A\beta>0$, ἡ y εἶναι ***φθίνουσα***.

Ἐὰν $B\alpha-A\beta<0$, ἡ y εἶναι ***αὔξουσα***.

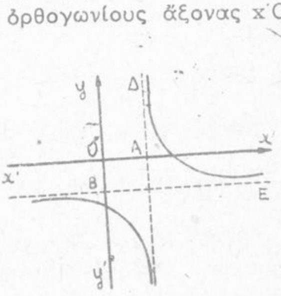
Ἐὰν $B\alpha-A\beta=0$, ἡ y εἶναι ***σταθερά***.

708. Γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτήσεως $y=\frac{Ax+B}{\alpha x+\beta}$.

1ον. Ὑποθέτομεν, ὅτι $\alpha>0$ καὶ ὅτι $B\alpha-A\beta>0$.

Χαράσσομεν ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου δύο ὀρθογωνίους ἄξονας x΄Ox καὶ y΄Oy. Ἐπὶ τοῦ ἄξονος Ox λαμβάνομεν τὸ σημεῖον A, τὸ ὁποῖον ἔχει τετμημένην $OA=-\frac{\beta}{\alpha}$ καὶ ἀπὸ τὸ A φέρομεν τὴν εὐθεῖαν Δ παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα y΄Oy.

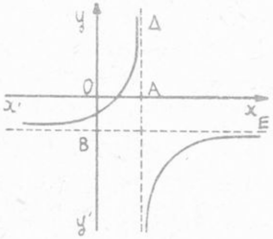
Ἔπειτα λαμβάνομεν ἐπὶ τοῦ ἄξονος y΄y τὸ σημεῖον B, τὸ ὁποῖον ἔχει τεταγμένην $OB=-\frac{A}{\alpha}$ καὶ ἀπὸ τὸ B φέρομεν τὴν εὐθεῖαν BE παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα x΄x. (Εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ σχήματος 26 τὸ $-\frac{\beta}{\alpha}$ εἶναι θετικὸν καὶ τὸ $\frac{A}{\alpha}$ ἀρνητικόν).



Σχ. 26

Ἔπειτα σημειώνομεν, κατὰ τὰ γνωστά, ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου διάφορα σημεῖα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τετμημένας τὰς τιμὰς τοῦ x καὶ ὡς τεταγμένας τὰς τιμὰς τοῦ y. Ἐὰν ἑνώσωμεν μὲ συνεχῆ γραμμὴν τὰ σημεῖα αὐτά, θὰ λάβωμεν δύο κλάδους τῆς καμπύλης, τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ συνάρτησις $y=\frac{Ax+B}{\alpha x+\beta}$.

Ὅταν ἡ x αὐξάνῃ ἀπὸ $-\infty$ ἕως $-\frac{\beta}{\alpha}$, ἡ y ἐλαττοῦται ἀπὸ τὸ $\frac{A}{\alpha}$ μέχρι τοῦ $-\infty$. Ἑπομένως ὁ ἕνας κλάδος τῆς καμπύλης, τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ συνάρτησις y, κεῖται κάτωθεν τῆς εὐθείας Ε πρὸς τὴν ὁποίαν πλησιάζει συνεχῶς χωρὶς νὰ τὴν συναντήσῃ (ἀσύμπτωτος) καὶ πρὸς τὰ ἀριστερὰ τῆς εὐθείας Δ, πρὸς τὴν ὁποίαν πλησιάζει χωρὶς νὰ τὴν συναντήσῃ.



Σχ. 27

Ὅταν ἡ x αὐξάνῃ ἀπὸ $-\frac{\beta}{\alpha}$ εἰς τὸ $+\infty$, ἡ y ἐλαττοῦται ἀπὸ τὸ $-\infty$ μέχρι τοῦ $\frac{A}{\alpha}$. Ἡ καμπύλη διακόπτουσα τὴν συνέχειάν της ἐμφανίζεται δεξιὰ τῆς εὐθείας Δ καὶ ἄνωθεν τῆς εὐθείας Ε. Οἱ κλάδοι τῆς καμπύλης αὐτῆς εἶναι ἀσύμπτωτοι πρὸς τὰς εὐθείας Δ καὶ Ε.

2ον. Ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι $\alpha>0$ καὶ ὅτι $B\alpha-A\beta<0$ καὶ ἐργασθῶμεν ὡς ἀνωτέρω θὰ εὕρωμεν, ὅτι ἡ συνάρτησις $y=\frac{Ax+B}{\alpha x+\beta}$ παριστάνει πάλιν μίαν καμπύλην, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο κλάδους (σχ. 27).

Ἀσκήσεις. *2747.* Νὰ σπουδασθῇ ἡ μεταβολὴ τῆς συναρτήσεως $y=\frac{2x+3}{x}$ καὶ νὰ παρασταθῇ αὕτη γραφικῶς.

2748. Ὁμοίως τῆς συναρτήσεως $y=\frac{1}{2x-3}$.

2749. Ὁμοίως τῆς συναρτήσεως $y=\frac{5x}{x-5}$.

2750. Ὁμοίως τῆς συναρτήσεως $y=\frac{2x+3}{4x-1}$.

2751. Ὁμοίως τῆς συναρτήσεως $y=\frac{-2x+5}{3x+7}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι΄.

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

709. Παράγωγος συναρτήσεως μιᾶς μεταβλητῆς. Ἔστω ἡ ἡ συνάρτησις $y=\sigma(x)$ (1), ἡ ὁποία εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ ὡρισμένον διάστημα (α, β). Ἐὰν δώσωμεν εἰς τὴν μεταβλητὴν x μίαν ὡρισμένην τιμὴν x_0, περιεχομένην εἰς τὸ διάστημα αὐτό, ἡ συνάρτησις y θὰ λάβῃ μίαν ἀντίστοιχον τιμὴν y_0, ἡ ὁποία εἶναι ἴση μὲ $\sigma(x_0)$, δηλαδὴ εἶναι

$$y_0=\sigma(x_0).$$

Ἐὰν δώσωμεν εἰς τὴν μεταβλητὴν x μίαν αὔξησιν Δx ἀπὸ τῆς τιμῆς x_0, ἡ συνάρτησις y θὰ λάβῃ μίαν ἀντίστοιχον αὔξησιν Δy. Ἑπομένως εἰς τὴν τελικὴν τιμὴν $x_0+\Delta y$ τῆς μεταβλητῆς x, θὰ ἀντιστοιχῇ μία τελικὴ τιμὴ $y_0+\Delta y$ τῆς συναρτήσεως y, ἡ ὁποία δίδεται ὑπὸ τῆς ἰσότητος $y_0+\Delta y=\sigma(x_0+\Delta x)$.

Ἡ ἀντίστοιχος λοιπὸν αὔξησις Δy τῆς συναρτήσεως θὰ εἶναι

$$\Delta y=\sigma(x_0+\Delta x)-y_0 \quad \text{ἢ} \quad \Delta y=\sigma(x_0+\Delta x)-\sigma(x_0). \tag{2}$$

Διαιροῦμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (2) διὰ Δx καὶ ἔχομεν

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sigma(x_0+\Delta x)-\sigma(x_0)}{\Delta x}. \tag{3}$$

Ὅταν ἡ αὔξησις Δx τείνῃ εἰς τὸ μηδέν, τότε καὶ ἡ αὔξησις Δy τείνῃ εἰς τὸ μηδέν, διότι ἡ συνάρτησις $y=\sigma(x)$ ὑπετέθη συνεχής· ἀλλὰ ὁ λόγος $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ἔχει γενικῶς ἕνα ὡρισμένον ὅριον. Αὐτὸ τὸ ὅριον λέγεται ***παράγωγος*** τῆς συναρτήσεως $y=\sigma(x)$ διὰ $x=x_0$.

Γενικῶς. Παράγωγος μιᾶς συναρτήσεως $y=\sigma(x)$ ***διά τινα τιμὴν*** x_0 ***τῆς μεταβλητῆς*** x ***λέγεται τὸ ὅριον (ἐὰν ὑπάρχῃ) πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει ὁ λόγος τῆς αὐξήσεως τῆς συναρτήσεως πρὸς τὴν ἀντίστοιχον αὔξησιν τῆς μεταβλητῆς, ὅταν ἡ αὔξησις τῆς μεταβλητῆς τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν.***

Ἡ παράγωγος μιᾶς συναρτήσεως $y=\sigma(x)$ παρίστατα διὰ y' ἢ διὰ $\sigma'(x)$.

Σημ. Ἐὰν παραστήσωμεν τὴν αὔξησιν Δx μὲ ε καὶ τὴν αὔξησιν Δy μὲ η, ἡ σχέσις (3) γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\frac{\eta}{\varepsilon}=\frac{\sigma(x_0+\varepsilon)-\sigma(x_0)}{\varepsilon}. \tag{3'}$$

710. Γενικὴ πορεία πρὸς εὕρεσιν τῆς παραγώγου μιᾶς συναρτήσεως. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν παράγωγον μιᾶς συναρτήσεως $y=\sigma(x)$ ἀκολουθοῦμεν τὴν κάτωθι πορείαν, ἡ ὁποία πηγάζει ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τῆς παραγώγου:

1ον. Δίδομεν εἰς τὴν μεταβλητὴν x μίαν αὔξησιν Δx.

2ον. Ὑπολογίζομεν τὴν ἀντίστοιχον αὔξησιν Δy τῆς συναρτήσεως.

3ον. Διαιροῦμεν τὴν αὔξησιν Δy τῆς συναρτήσεως διὰ τῆς αὐξήσεως Δx τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς.

4ον. Εὑρίσκομεν τὸ ὅριον τοῦ πηλίκου $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, ὅταν ἡ αὔξησις Δx_0 μεταβάλλεται καὶ τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν. Τὸ ὅριον τοῦ λόγου $\frac{\Delta y}{\Delta y}$, ἐὰν ὑπάρχῃ, εἶναι ἡ ζητουμένη παράγωγος.

711. Παρατήρησις. Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν παράγωγον μιᾶς συναρτήσεως $y=\sigma(x)$ ζητοῦμεν πάντοτε νὰ εὕρωμεν τὸ ὅριον ἑνὸς πηλίκου, τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστὴς ***τείνει πρὸς τὸ μηδέν.*** Διὰ νὰ ὑπάρχῃ αὐτὸ τὸ ὅριον, πρέπει καὶ ὁ ἀριθμητής του νὰ τείνῃ ἐπίσης πρὸς τὸ μηδέν, διότι ἄλλως τὸ πηλίκον θὰ ἔτεινε πρὸς τὸ ἄπειρον.

Ἀλλ' ὅταν αἱ αὐξήσεις Δx καὶ Δy τείνουν συγχρόνως πρὸς τὸ μηδέν, ὁ λόγος των δύναται νὰ τείνῃ πρὸς μίαν τιμήν, ἡ ὁποία νὰ εἶναι ἴση μὲ τὸ μηδὲν ἢ διάφορος τοῦ μηδενὸς ἢ ἴση μὲ τὸ ἄπειρον *.

712. Θεώρημα. ***Κάθε συνάρτησις*** $y=\sigma(x)$, ***ἡ ὁποία ἔχει μίαν παράγωγον διὰ*** $x=x_0$, ***εἶναι συνεχὴς διὰ τὴν τιμὴν αὐτὴν τῆς μεταβλητῆς.***

Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ αὔξησις Δy τῆς συναρτήσεως τείνει πρὸς τὸ μηδέν, ὅταν ἡ αὔξησις Δx τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν.

Ἐξ ὑποθέσεως ἡ συνάρτησις $y=\sigma(x)$ ἔχει μίαν παράγωγον διὰ $x=x_0$. Ἄρα ὁ λόγος $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ τείνει πρὸς ἕνα ὅριον, ὅταν ἡ αὔξησις Δx τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν. Ἐὰν ἡ αὔξησις Δy δὲν ἔτεινε πρὸς τὸ μηδέν, ἀλλὰ πρὸς ἕνα ὅριον Α, διάφορον τοῦ μηδενός, ὅταν ἡ Δx ἔτεινε πρὸς τὸ μηδέν, ὁ λόγος $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ θὰ ἔτεινε πρὸς τὸ ἄπειρον, τὸ ὁποῖον ἀντίκειπρὸς τὴν ὑπόθεσίν μας. Ἑπομένως ἡ Δy τείνει πρὸς τὸ μηδὲν συγχρόνως μὲ τὴν Δx καὶ κατὰ συνέπειαν ἡ συνάρτησις $y=\sigma(x)$ εἶναι συνεχής.

Τὸ ἀντίστροφον δὲν εἶναι ἀληθές. Δηλ. μία συνεχὴς συνάρτη-

(*) **Παράδειγμα 1ον.** Ἔστω ὁ λόγος $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Ἐὰν δώσωμεν εἰς τὴν Δx τιμάς, αἱ ὁποῖαι τείνουν πρὸς τὸ μηδέν, ἔστω τὰς 0,1, 0,01, 0,001, . . . καὶ ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ Δy λαμβάνει τιμάς, αἱ ὁποῖαι τείνουν ἐπίσης πρὸς τὸ μηδέν, ἔστω τὰς 0,01, 0,001, 0,0001, , . . . , ὁ λόγος $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ λαμβάνει διαδοχικῶς τὰς τιμὰς 0,1, 0,01, 0,001, . . . , αἱ ὁποῖαι τείνουν πρὸς τὸ μηδέν.

Παράδειγμα 2ον. Ἔστω ὁ λόγος $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Ἐὰν δώσωμεν εἰς τὸ Δx τιμάς, αἱ ὁποῖαι τείνουν πρὸς τὸ μηδέν, ἔστω τὰς 0,1, 0,01, 0,001, ... καὶ ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ Δy λαμβάνει τιμάς, αἱ ὁποῖαι τείνουν ἐπίσης πρὸς τὸ μηδέν, ἔστω τὰς 0,1, 0,01, 0,001, ... , ὁ λόγος $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ λαμβάνει διαδοχικῶς τὰς τιμὰς 10, 100, 1000, . . . , αἱ ὁποῖαι τείνουν πρὸς τὸ ἄπειρον.

σις δὲν ἔχει ἀναγκαστικῶς μίαν παράγωγον, διότι εἶναι δυνατὸν ὁ λόγος $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ νὰ μὴ τείνῃ πρὸς κανένα ὅριον, ὅταν αἱ Δx καὶ Δy τείνουν πρὸς τὸ μηδέν.

713. **Παράγωγοι μερικῶν ἁπλῶν συναρτήσεων**. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν παράγωγον μιᾶς συναρτήσεως $y=\sigma(x)$ (1) ἀκολουθοῦμεν τὴν πορείαν, τὴν ὁποίαν ὑπεδείξαμεν εἰς τὴν § 710. Θεωροῦμεν ἐν τούτοις καλὸν νὰ προσθέσωμεν, ὅτι πρέπει νὰ ἁπλοποιοῦμεν πάντοτε τὸν λόγον $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, δηλ. τὸ $\frac{\sigma(x_0+\Delta x)-\sigma(x_0)}{\Delta x}$.

Κατωτέρω θὰ εὕρωμεν τὰς παραγώγους μερικῶν ἁπλῶν συναρτήσεων:

714. **Παράγωγος μιᾶς σταθερᾶς**. Ἔστω ἡ συνάρτησις $y=C$ ὅπου C εἶναι μία σταθερὰ ποσότης. Ἐὰν δώσωμεν εἰς τὴν μεταβλητὴν x μίαν αὔξησιν Δx, ἡ σταθερὰ C καὶ κατὰ συνέπειαν ἡ y δὲν μεταβάλλεται. Ὥστε ἡ αὔξησις Δy τῆς συναρτήσεως y εἶναι μηδέν. Θὰ εἶναι λοιπὸν πάντοτε $\frac{\Delta y}{\Delta x}=0$· ἄρα καὶ $\text{ορ}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0$ ἢ $y'=0$.

Ὥστε: ***Ἡ παράγωγος μιᾶς σταθερᾶς εἶναι μηδέν***·

715. **Παράγωγος τῆς συναρτήσεως** $y=\alpha x+\beta$.

Δίδομεν εἰς τὴν x μίαν αὔξησιν Δx. Ἡ τελικὴ τιμὴ τῆς x εἶναι $x+\Delta x$. Ἡ τελικὴ τιμὴ τῆς y εἶναι·τότε $\alpha(x+\Delta x)+\beta$.

Ἡ αὔξησις Δy τῆς συναρτήσεως εἶναι

$$\Delta y=[\alpha(x+\Delta x)+\beta]-(\alpha x+\beta) \quad \text{ἢ} \quad \Delta y=\alpha\Delta x.$$

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν λαμβάνομεν $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\alpha$. Ἐπειδὴ ὁ λόγος $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ εἶναι σταθερὸς καὶ ἴσος μὲ α, τὸ ὅριόν του θὰ εἶναι ἴσον μὲ α, ὅταν ἡ Δx τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν· δηλ. θὰ εἶναι

$$\text{ορ}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\alpha \quad \text{ἢ} \quad y'=\alpha.$$

Ὥστε: ***Ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως*** $y=\alpha x+\beta$ ***εἶναι*** $y'=\alpha$.

Π.χ. Ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως $y=3x-8$ εἶναι $y'=3$.

Ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως $y=-5x+1$ εἶναι $y'=-5$.

716. **Ἰδιαιτέρα περίπτωσις**. 1ον· Ἐὰν $\alpha=1$ καὶ $\beta=0$ ἡ συνάρτησις $y=\alpha x+\beta$ λαμβάνει τὴν μορφὴν $y=x$ καὶ ἡ παράγωγός της εἶναι $y'=1$.

Ὥστε: ***Ἡ παράγωγος*** x ***τῆς εἶναι ἡ μονάς***·

717. **Παράγωγος τῆς συναρτήσεως** $y=\alpha x^{\mu}$. Ἔστω ἡ συνάρτησις $y=\alpha x^2$. Ἐὰν δώσωμεν εἰς τὴν μεταβλητὴν μίαν αὔξησιν Δx, ἡ τελικὴ τιμὴ τῆς x εἶναι $x+\Delta x$. Ἡ τελικὴ τιμὴ τῆς συναρτήσεως y θὰ εἶναι $\alpha(x+\Delta x)^2$ καὶ ἑπομένως ἡ αὔξησις Δy τῆς συναρτήσεως y θὰ εἶναι $\Delta y=\alpha(x+\Delta x)^2-\alpha x^2$ ἢ $\Delta y=\alpha[x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2]-\alpha x^2$ ἢ

$$\Delta y=2\alpha x\Delta x+(\Delta x)^2 \qquad (1)$$

Διαιροῦμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (1) διὰ Δx καὶ ἔχομεν

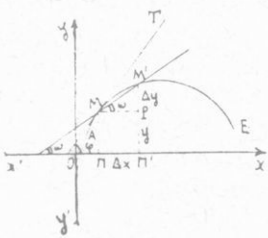
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2\alpha x + \Delta x.$$

Ὅταν τὸ Δx τείνῃ εἰς τὸ μηδέν, τότε ὁ λόγος $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ τείνῃ εἰς τὸ $2\alpha x$· δηλ. εἶναι ορ $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2\alpha x$ ἢ $y' = 2\alpha x$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως $y=\alpha x^3$ εἶναι $y'=3.\alpha x^2$ καὶ γενικῶς ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως $y=\alpha x^\mu$, ὅπου μ ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἀριθμός, εἶναι ἡ $y'=\mu \cdot \alpha x^{\mu-1}$.

Ὥστε: *Ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως* $y=\alpha x^\mu$ *εἶναι ἡ* $y'=\mu \cdot \alpha x^{\mu-1}$.

718. Γεωμετρικὴ σημασία τῆς παραγώγου. Ἔστω ἡ συνεχὴς συνάρτησις $y=\sigma(x)$, ἡ ὁποία ἔχει παράγωγον διὰ κάθε τιμὴν τῆς x περιεχομένην εἰς τὸ διάστημα (α, β). Ἔστω ΑΒ ἕνα τόξον τῆς καμπύλης, τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ συνάρτησις y εἰς τὸ διάστημα αὐτό. Ἔστω Μ ἕνα σημεῖον τῆς καμπύλης ΑΒ καὶ $\overline{O\Pi}=x$, $\overline{\Pi M}=y$ αἱ συντεταγμέναι του. Ἐὰν δώσωμεν εἰς τὴν τετμημένην x μίαν αὔξησιν $\overline{\Pi\Pi'}=\Delta x$, ἡ τεταγμένη y θὰ λάβῃ μίαν ἀντίστοιχον αὔξησιν $\overline{PM'}=\Delta y$. Ἔστω Μ′ τὸ σημεῖον τῆς καμπύλης ΑΒ, τὸ ὁποῖον ἔχει συντεταγμένας $x+\Delta x$ καὶ $y+\Delta y$.



Σχ.

Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΜΜ′, ἡ ὁποία σχηματίζει μὲ τὸν ἄξονα x′Ox γωνίαν ω καὶ τὴν εὐθεῖαν ΜΡ παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα x′Ox. Θὰ εἶναι

$$\overline{MP} = \overline{\Pi\Pi'} = \overline{O\Pi'} - \overline{O\Pi'} = (x+\Delta x) - x = \Delta x$$

καὶ $\overline{PM'} = \overline{\Pi'M'} - \overline{\Pi'P'} = (y+\Delta y) - y = \Delta y$.

Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΜΡΜ′ ἔχομεν·

$$\varepsilon\varphi\, \omega = \frac{\overline{PM'}}{\overline{MP}} \quad \text{ἢ} \quad \varepsilon\varphi\, \omega = \frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{1}$$

Ὅταν ἡ αὔξησις Δx τείνῃ πρὸς τὸ μηδὲν καὶ ἡ ἀντίστοιχος αὔξησις Δy τείνει πρὸς τὸ μηδέν, ὁ δὲ λόγος $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \varepsilon\varphi\, \omega$, τείνει πρὸς ἕνα ὅριον, τὸ ὁποῖον ἐκαλέσαμεν παράγωγον y′ τῆς συναρτήσεως y. Ἀλλ' ὅταν τὸ Δx τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν, τὸ σημεῖον Μ′ πλησιάζει συνεχῶς πρὸς τὸ Μ μέχρις ὅτου συμπέσῃ μὲ αὐτὸ καὶ ἑπομένως ἡ χορδὴ ΜΜ′, στρεφομένη περὶ τὸ Μ, τείνει νὰ γίνῃ ἡ ἐφαπτομένη ΜΤ τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον Μ. Ἀλλὰ τότε ἡ γωνία ω τείνει νὰ γίνῃ ἴση μὲ τὴν γωνίαν φ, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ ΜΤ μὲ τὸν ἄξονα x′Ox· δηλ. θὰ εἶναι ορ.εφ ω=ορ.εφ φ=ορ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Ἐπειδὴ δὲ ορ$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$, ὅταν ἡ $\Delta x \to 0$, ἕπεται, ὅτι θὰ εἶναι

$$y' = \varepsilon\varphi\, \varphi.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι:

Ἡ παράγωγος μιᾶς συνεχοῦς συναρτήσεως $y=\sigma(x)$ δι᾽ ὡρισμένην τιμὴν τῆς x εἶναι ἴση μὲ τὴν ἐφαπτομένην τῆς γωνίας, τὴν ὁποίαν σχηματίζει, μὲ τὸν ἄξονα $x'x$, ἡ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης, τὴν ὁποίαν παριστᾷ ἡ συνάρτησις y, εἰς τὸ σημεῖον, τὸ ἔχον τετμημένην τὴν ὡρισμένην αὐτὴν τιμὴν τῆς x.

Ἐπειδὴ ἡ εφ φ παριστάνει τὸν συντελεστὴν κατευθύνσεως τῆς MT δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν καὶ ὅτι:

Ἡ παράγωγος μιᾶς συνεχοῦς συναρτήσεως $y=\sigma(x)$ δι᾽ ὡρισμένην τιμὴν τῆς x εἶναι ἴση μὲ τὸν συντελεστὴν κατευθύνσεως τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης, τὴν ὁποίαν παριστᾷ ἡ συνάρτησις y, εἰς τὸ σημεῖον τὸ ἔχον τετμημένην τὴν ὡρισμένην αὐτὴν τιμὴν τῆς x.

719. Πόρισμα. ***Ὅταν ἡ παράγωγος μιᾶς συνεχοῦς συναρτήσεως $y=\sigma(x)$ εἶναι μηδέν, διά τινα τιμὴν x_0 τῆς μεταβλητῆς x, ἡ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἔχει τετμημένην x_0, εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα $x'Ox$.***

Πράγματι· ὅταν $y'=0$, θὰ εἶναι καὶ εφ φ$=0$, ὁπότε $\varphi=0$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ἐφαπτομένη MT τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον τὸ ἔχον τετμημένην x_0, εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα $x'Ox$.

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ, ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ, ΠΗΛΙΚΟΥ Κ.Λ.Π. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΤΗΣ x

720. Παράγωγος ἀθροίσματος συναρτήσεων τῆς x. Ἔστω ἡ συνάρτησις $y=\varphi+\omega+z$ (1),
ὅπου φ, ω, z εἶναι συναρτήσεις τῆς αὐτῆς μεταβλητῆς x καὶ αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἀντιστοίχως παραγώγους τὰς φ', ω', z'. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὴν παράγωγον y' τῆς y, ἡ ὁποία εἶναι καὶ αὐτὴ συνεχὴς συνάρτησις τῆς x.

Ἐὰν δώσωμεν εἰς τὴν ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν x μίαν αὔξησιν Δx, αἱ συναρτήσεις· φ, ω, z καὶ y θὰ λάβουν ἀντιστοίχως αὐξήσεις Δφ, Δω, Δz, Δy· θὰ εἶναι λοιπόν:

$$y+\Delta y=\varphi+\Delta\varphi+\omega+\Delta\omega+z+\Delta z. \qquad (1)$$

Ἀφαιροῦμεν τὴν (1) ἀπὸ τὴν (2) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\Delta y=\Delta\varphi+\Delta\omega+\Delta z.$$

Διαιροῦμεν καὶ τὰ δύο μέλη αὐτῆς διὰ Δx καὶ ἔχομεν

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}+\frac{\Delta\omega}{\Delta x}+\frac{\Delta z}{\Delta x} \quad \text{ἢ} \quad \text{ορ}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\text{ορ}\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}+\text{ορ}\frac{\Delta\omega}{\Delta x}+\text{ορ}\frac{\Delta z}{\Delta x}$$

Ὅταν ἡ Δx τείνῃ εἰς τὸ μηδέν, οἱ λόγοι

$$\frac{\Delta y}{\Delta x},\quad \frac{\Delta\varphi}{\Delta x},\quad \frac{\Delta\omega}{\Delta x},\quad \frac{\Delta z}{\Delta x}$$

τείνουν πρὸς ὅρια, τὰ ὁποῖα ἐκαλέσαμεν παραγώγους καὶ παρεστήσαμεν μὲ y', φ', ω', z'. Ὥστε, διὰ ορ$\Delta x=0$, ἡ (3) δίδει

$$\boxed{y'=\varphi'+\omega'+z'}$$

Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι : ***Ἡ παράγωγος ἑνὸς ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος συναρτήσεων τῆς αὐτῆς μεταβλητῆς εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν παραγώγων τῶν συναρτήσεων αὐτῶν.***

721. Παράγωγος γινομένου. I. Ἔστω ἡ συνάρτησις $y=\varphi\omega$ (1) ὅπου φ καὶ ω εἶναι δύο συνεχεῖς καὶ ὡρισμέναι συναρτήσεις τῆς x, αἱ ὁποῖαι ἐξ ὑποθέσεως ἔχουν ἀντιστοίχως παραγώγους φ′ καὶ ω′.

Ἐὰν δώσωμεν εἰς τὴν μεταβλητὴν x μίαν αὔξησιν Δx, αἱ συναρτήσεις φ, ω καὶ y θὰ λάβουν ἀντιστοίχως αὐξήσεις Δφ, Δω καὶ Δy θὰ εἶναι λοιπὸν

$$y+\Delta y=(\varphi+\Delta\varphi)\cdot(\omega+\Delta\omega) \quad \text{ἢ} \quad y+\Delta y=\varphi\omega+\omega\Delta\varphi+\varphi\Delta\omega+\Delta\varphi\Delta\omega. \quad (2)$$

Ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὴν (2) τὴν (1) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\Delta y=\omega\Delta\varphi+\varphi\Delta\omega+\Delta\varphi\Delta\omega.$$

Διαιροῦμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος αὐτῆς διὰ Δx καὶ ἔχομεν

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\omega\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}+\varphi\frac{\Delta\omega}{\Delta x}+\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}\cdot\Delta\omega. \quad (3)$$

Ὅταν ἡ Δx τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν, αἱ αὐξήσεις Δφ, Δω τείνουν ἐπίσης πρὸς τὸ μηδέν, διότι αἱ συναρτήσεις φ καὶ ω ὑπετέθησαν συνεχεῖς καὶ οἱ λόγοι $\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}$, $\frac{\Delta\omega}{\Delta x}$ τείνουν πρὸς ὅρια, τὰ ὁποῖα εἶναι αἱ παράγωγοι φ′ καὶ ω′. Τότε τὰ γινόμενα $\omega\cdot\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}$ καὶ $\varphi\cdot\frac{\Delta\omega}{\Delta x}$ τείνουν πρὸς ωφ′ καὶ φω′, τὸ δὲ $\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}\cdot\Delta\omega$ τείνει πρὸς τὸ μηδέν, διότι ὁ παράγων Δω τείνει πρὸς τὸ μηδέν. Τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἰσότητος (3) τείνει πρὸς τὸ $\omega\varphi'+\varphi\omega'$. Ἐπειδὴ τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἰσότητος (3) εἶναι ἴσον μὲ τὸ δεύτερον μέλος, θὰ ἔχῃ τὸ αὐτὸ ὅριον. Ἀλλὰ τὸ ὅριον τοῦ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, ὅταν τὸ Δx τείνῃ πρὸς τὸ μηδὲν εἶναι ἐξ ὁρισμοῦ ἡ παράγωγος y′ τῆς συναρτήσεως y. Θὰ εἶναι λοιπὸν

$$y'=\varphi'\omega+\omega'\varphi \quad \text{ἢ} \quad \boxed{(\varphi\omega)'=\varphi'\omega+\omega\varphi'}$$

II. Ἔστω ἤδη ἡ συνάρτησις $y=\varphi\omega z$ (1) ὅπου φ, ω, z εἶναι τρεῖς συνεχεῖς συναρτήσεις τῆς αὐτῆς μεταβλητῆς x καὶ αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἀντιστοίχως παραγώγους φ, ω′, z′.

Ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι οἱ δύο πρῶτοι παράγοντες τῆς (1) σχηματίζουν ἕνα μόνον παράγοντα, θὰ ἔχωμεν $y=(\varphi\omega)z$. Ἐδῶ ἔχομεν γινόμενον δύο παραγόντων καὶ ἑπομένως κατὰ τὴν προηγουμένην περίπτωσιν I θὰ εἶναι $y'=(\varphi\omega)z'+(\varphi\omega)'z$. Ἐὰν εἰς τὴν ἰσότητα αὐτὴν ἀντικαταστήσωμεν τὸ $(\varphi\omega)'$ διὰ τοῦ ἴσου του $\varphi'\omega+\omega'\varphi$, θὰ ἔχωμεν

$$y'=\varphi\omega z'+(\varphi'\omega+\omega'\varphi)z \quad \text{ἢ} \quad y'=\varphi\omega z'+\varphi'\omega z+\omega'\varphi z$$

ἢ

$$y'=\varphi'\omega z+\varphi\omega' z+\varphi\omega z'.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι

$$\boxed{(\varphi\omega z\upsilon)'=\varphi'\omega z\upsilon+\varphi\omega' z\upsilon+\varphi\omega z'\upsilon+\varphi\omega z\upsilon'}$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι:

Ἡ παράγωγος γινομένου πολλῶν συνεχῶν συναρτήσεων τῆς αὐτῆς μεταβλητῆς x εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων, τὰ ὁποῖα λαμβάνομεν, ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν διαδοχικῶς, εἰς τὸ δοθὲν γινόμενον τῶν συναρτήσεων, ἑκάστην συνάρτησιν διὰ τῆς παραγώγου της, τὰς δὲ ἄλλας ἀφήσωμεν ἀμεταβλήτους.

722. Παράγωγος γινομένου σταθερᾶς ἐπὶ συνάρτησιν. Ἔστω ἡ συνάρτησις $y=\alpha\varphi$ (1)
ὅπου α εἶναι μία σταθερὰ καὶ φ μία συνεχὴς συνάρτησις τῆς μεταβλητῆς x.

Ἐὰν θελήσωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν παράγωγον τῆς συναρτήσεως (1), θὰ ἔχωμεν κατὰ τὸν κανόνα τῆς § 721 $y'=\alpha'\varphi+\alpha\varphi'$ (2)

Ἐπειδὴ ἡ παράγωγος μιᾶς σταθερᾶς εἶναι μηδέν, θὰ εἶναι $\alpha'=0$ καὶ ἑπομένως ἡ (2) γίνεται $y'=\alpha\varphi'$. Ὥστε

Ἡ παράγωγος τοῦ γινομένου μιᾶς σταθερᾶς ἐπὶ μίαν συνάρτησιν εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενον τῆς σταθερᾶς ἐπὶ τὴν παράγωγον τῆς συναρτήσεως.

723. Παράγωγος δυνάμεως μιᾶς συναρτήσεως. Ἔστω ἡ συνάρτησις $y=\omega^{\mu}$ (1)
ὅπου ω εἶναι συνεχὴς συνάρτησις τῆς μεταβλητῆς x, ἡ ὁποία ἔχει ἐξ ὑποθέσεως παράγωγον ω' καὶ μ ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἀριθμός.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν παράγωγον τῆς y παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ y εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενον μ παραγόντων ἴσων μὲ ω· δηλ. εἶναι

$$y=\omega\,.\,\omega\,.\,\omega\,.\,\omega\ldots\omega \quad (\mu \text{ παράγοντες}).$$

Ἡ παράγωγος τῆς y, κατὰ τὸν κανόνα τῆς (§ 721), ὁ ὁποῖος δίδει τὴν παράγωγον ἑνὸς γινομένου πολλῶν παραγόντων, θὰ εἶναι

$$y'=\omega'.\overbrace{\omega.\omega\ldots\ldots\omega}^{\mu-1}+\omega'.\overbrace{\omega.\omega\ldots\omega}^{\mu-1}+\omega'.\overbrace{\omega.\omega\ldots\omega}^{\mu-1}+\ldots$$

ἢ $$y'=\omega'.\,\omega^{\mu-1}+\omega'.\,\omega^{\mu-1}+\omega'.\,\omega^{\mu-1} \quad (\mu \text{ προσθετέοι})$$

ἢ $$y'=\mu\omega^{\mu-1}.\,\omega' \quad \text{ἢ} \quad \boxed{(\omega^{\mu})'=\mu\omega^{\mu-1}.\,\omega'}$$

Ὥστε: ***Ἡ παράγωγος δυνάμεως μιᾶς συναρτήσεως εἶναι ἴση μὲ τό γινόμενον τριῶν παραγόντων· Ὁ πρῶτος παράγων εἶναι ὁ ἐκθέτης τῆς δυνάμεως· ὁ δεύτερος παράγων εἶναι ἡ συνάρτησις μὲ ἐκθέτην ἠλαττωμένον κατὰ μονάδα. Ὁ τρίτος παράγων εἶναι ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως.***

Σημ. Ὁ κανὼν αὐτὸς τῆς εὑρέσεως τῆς παραγώγου μιᾶς δυνάμεως εἶναι ἀληθὴς καὶ ἀποδεικνύεται καὶ ὅταν ὁ ἐκθέτης μ εἶναι κλασματικὸς ἢ καὶ ἀρνητικός,

724. Ἰδιαίτεραι περιπτώσεις. Ἔστω ἡ συνάρτησις $y=x^{\mu}$.
Κατὰ τὸν κανόνα τῆς (§ 723) θὰ εἶναι $y=\mu x^{\mu-1}x'$. (1)

Ἐπειδὴ $x'=1$, ἡ ἰσότης (1) γίνεται $y'=\mu x^{\mu-1}$

ἢ
$$\boxed{(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}}$$

Π.χ. Ἐὰν εἶναι $y=x^5$, θὰ εἶναι $y'=5x^4$.

Ἐὰν εἶναι $y=7x^6$, θὰ εἶναι $y'=7.(x^6)'=7.6x^5=42x^5$.

725. Παράγωγος ἑνὸς πηλίκου συναρτήσεων τῆς x. Ἔστω ἡ συνάρτησις
$$y=\frac{\varphi}{\omega} \qquad (\omega\neq 0) \qquad (1)$$
ὅπου φ καὶ ω εἶναι συνεχεῖς συναρτήσεις τῆς x, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἐξ ὑποθέσεως παραγώγους φ′ καὶ ω′ ἀντιστοίχως.

Ἂν δώσωμεν εἰς τὴν ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν x μίαν αὔξησιν Δx, αἱ συναρτήσεις φ, ω καὶ y θὰ λάβουν ἀντιστοίχως αὐξήσεις Δφ, Δω καὶ Δy. Θὰ εἶναι λοιπὸν
$$y+\Delta y=\frac{\varphi+\Delta\varphi}{\omega+\Delta\omega}. \qquad (2)$$
Ἀφαιροῦμεν κατὰ μέλη τὴν (1) ἀπὸ τὴν (2) καὶ ἔχομεν
$$\Delta y=\frac{\Delta\varphi+\varphi}{\omega+\Delta\omega}-\frac{\varphi}{\omega} \quad \text{ἢ} \quad \Delta y=\frac{\varphi\omega+\omega\Delta\varphi-\varphi\omega-\varphi\Delta\omega}{\omega^2+\omega\Delta\omega}$$
ἢ
$$\Delta y=\frac{\omega\Delta\varphi-\varphi\Delta\omega}{\omega^2+\omega\Delta\omega}. \qquad (3)$$
Διαιροῦμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (3) διὰ Δx καὶ ἔχομεν
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\omega.\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta x}-\varphi.\dfrac{\Delta\omega}{\Delta x}}{\omega^2+\omega\Delta\omega} \qquad (4)$$
Λαμβάνομεν τὰ ὅρια καὶ τῶν δύο μελῶν τῆς (4) διὰ ορΔx=0 καὶ ἔχομεν
$$\text{ορ}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\omega.\text{ορ}\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta x}-\varphi.\text{ορ}\dfrac{\Delta\omega}{\Delta x}}{\omega^2+\omega.\text{ορ}\Delta x}. \qquad (5)$$
Ὅταν ἡ Δx τείνῃ εἰς τὸ μηδέν, θὰ εἶναι $\text{ορ}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=y'$, $\text{ορ}\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta x}=\varphi'$ καὶ $\text{ορ}\dfrac{\Delta\omega}{\Delta x}=\omega'$ καὶ ἑπομένως ἡ (5) γίνεται
$$y'=\frac{\omega\varphi'-\varphi\omega'}{\omega^2} \quad \text{ἢ} \quad \boxed{\left(\frac{\varphi}{\omega}\right)'=\frac{\omega\varphi'-\varphi\omega'}{\omega^2}}$$
Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι:

Ἡ παράγωγος ἑνὸς πηλίκου δύο συναρτήσεων τῆς αὐτῆς μεταβλητῆς εἶναι ἴση μὲ κλάσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς ἀριθμητὴν τὸ γινόμενον τοῦ παρονομαστοῦ ἐπὶ τὴν παράγωγον τοῦ ἀριθμητοῦ, ἠλαττωμένον κατὰ τὸ γινόμενον τοῦ ἀριθμητοῦ ἐπὶ τὴν παράγωγον τοῦ παρονομαστοῦ καὶ ὡς παρονομαστὴν τὸ τετράγωνον τοῦ παρονομαστοῦ.

726. Ἰδιαιτέρα περίπτωσις. Ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς τῆς συναρτήσεως $y=\frac{\Phi}{\omega}$ ἦτο μία σταθερὰ ποσότης α, ἡ συνάρτησις θὰ ἦτο

$$y=\frac{\alpha}{\omega}.$$

Ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τὸν κανόνα τῆς (§ 725) θὰ ἔχωμεν.

$$y'=\frac{\omega\alpha'-\alpha\omega'}{\omega^2}. \tag{1}$$

Ἐπειδὴ ἡ παράγωγος μιᾶς σταθερᾶς εἶναι ἴση μὲ μηδέν, θὰ εἶναι $\alpha'=0$ καὶ $\omega\alpha'-\alpha\omega'=\omega.0-\alpha\omega'=-\alpha\omega'$ καὶ ἑπομένως ἡ (1) γίνεται

$$y'=-\frac{\alpha\omega'}{\omega^2} \quad \text{ἢ} \quad \boxed{\left(\frac{\alpha}{\omega}\right)'=-\frac{\alpha\omega'}{\omega^2}}$$

727. Παράγωγος τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης μιᾶς συναρτήσεως τῆς x. Ἔστω ἡ συνάρτησις $y=\sqrt{\omega}$, (1) ὅπου ω εἶναι μία συνάρτησις τῆς μεταβλητῆς x καὶ ἡ ὁποία ἔχει ἐξ ὑποθέσεως μίαν παράγωγον ω′.

Ἐὰν δώσωμεν εἰς τὴν ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν x μίαν αὔξησιν, αἱ συναρτήσεις y καὶ ω θὰ λάβουν ἀντιστοίχως τὰς αὐξήσεις Δy καὶ Δω. Θὰ εἶναι λοιπὸν $y+\Delta y=\sqrt{\omega+\Delta\omega}$. (2)

Ἀφαιροῦμεν κατὰ μέλη τὴν ἰσότητα (1) ἀπὸ τὴν (2) καὶ ἔχομεν

$$\Delta y=\sqrt{\omega+\Delta\omega}-\sqrt{\omega}.$$

Διαιροῦμεν διὰ Δx καὶ τὰ δύο μέλη αὐτῆς καὶ ἔχομεν

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt{\omega+\Delta\omega}-\sqrt{\omega}}{\Delta x}. \tag{3}$$

Πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος τοῦ δευτέρου μέλους τῆς (3) ἐπὶ $\sqrt{\omega+\Delta\omega}+\sqrt{\omega}$, δηλ. ἐπὶ τὴν συζυγῆ παράστασιν τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ ἔχομεν

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\omega+\Delta\omega-\omega}{\Delta x\,(\sqrt{\omega+\Delta\omega}+\sqrt{\omega})}$$

$$\text{ἢ} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta\omega}{\Delta x\,(\sqrt{\omega+\Delta\omega}+\sqrt{\omega})} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{\Delta\omega}{\Delta x}}{\sqrt{\omega+\Delta\omega}+\sqrt{\omega}}$$

Ὅταν ἡ Δx τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν, οἱ λόγοι $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ καὶ $\frac{\Delta\omega}{\Delta x}$ τείνουν πρὸς τὰς παραγώγους των y′ καὶ ω′. Ἐξ ἄλλου, ὅταν ἡ Δx τείνῃ πρὸς τὸ μηδὲν ἡ αὔξησις Δω τείνει ἐπίσης πρὸς τὸ μηδὲν καὶ ἑπομένως ἡ $\sqrt{\omega+\Delta\omega}$ τείνῃ πρὸς τὴν $\sqrt{\omega}$ καὶ ὁ παρονομαστὴς $\sqrt{\omega+\Delta\omega}+\sqrt{\omega}$ τείνει πρὸς τὸ $2\sqrt{\omega}$. Θὰ εἶναι λοιπὸν

$$y'=\frac{\omega}{2\sqrt{\omega}} \quad \text{ἢ} \quad \boxed{(\sqrt{\omega})'=\frac{\omega'}{2\sqrt{\omega}}}$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι

Ἡ παράγωγος τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης συναρτήσεώς τινος τῆς *x εἶναι ἴση μὲ τὴν παράγωγον τῆς ὑπορρίζου ποσότητος διὰ τοῦ διπλασίου τῆς ρίζης.*

Ἰδιαιτέρα περίπτωσις. Ἔστω ἡ συνάρτησις $y=\sqrt{x}$. Κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα θὰ εἶναι $y'=\dfrac{x'}{2\sqrt{x}}$ (1). Ἐπειδὴ $x'=1$, ἡ ἡ ἰσότης (1) γράφεται $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

Παρατήρησις. Ἡ συνάρτησις $y=\sqrt{\omega}$ γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς:

$$y=\omega^{\frac{1}{2}}, \qquad (1)$$

Κατὰ τὸν κανόνα τῆς παραγώγου δυνάμεως μιᾶς συναρτήσεως, τὸν ὁποῖον παρεδέχθημεν, ὅτι ἰσχύει καὶ διὰ δυνάμεις μὲ ἐκθέτας κλασματικούς, ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως (1) θὰ εἶναι

$$y'=\frac{1}{2}\omega^{\frac{1}{2}-1}.\omega'=\frac{1}{2}\omega^{-\frac{1}{2}}.\omega'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\omega^{\frac{1}{2}}}.\omega'$$

ἢ

$$y'=\frac{\omega'}{2\sqrt{\omega}}.$$

Δηλ. εὑρήκαμεν τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον, ποὺ εὑρέθη εἰς τὴν § 727.

728. Ἐφαρμογαί. *1η. Παράγωγος ἑνὸς πολυωνύμου.* Ἕνα ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ x εἶναι ἕνα ἄθροισμα ὅρων τῆς μορφῆς ax^{μ} ὅπου α εἶναι μία σταθερά. Ἡ παράγωγος λοιπὸν ἑνὸς ἀκεραίου πολυωνύμου τοῦ x εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν παραγώγων τῶν ὅρων του (§ 720). Οὕτω ἡ παράγωγος τοῦ πολυωνύμου

$$y=3x^4-5x^3+6x^2-14x+7$$

εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν παραγώγων τῶν ὅρων του

$$3x^4,\quad -5x^3,\quad 6x^2,\quad -14x \quad \text{καὶ } 7.$$

Ἐπειδὴ αἱ παράγωγοι τῶν ὅρων αὐτῶν εἶναι ἀντιστοίχως $4.3x^3$, $-3.5x^2$, $2.6x$, -1.14 ἕπεται, ὅτι ἡ παράγωγος τοῦ δοθέντος πολυωνύμου εἶναι $y'=12x^3-15x^2+12x-14$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι ἡ παράγωγος τοῦ πολυωνύμου

$y=x^5-4x^2+5x+9$ εἶναι $y'=5x^4-8x+5$.

Ὁμοίως, ἐὰν εἶναι

$y=-\dfrac{2}{3}x^3+\dfrac{1}{5}x^2+3x$, θὰ εἶναι $y'=-2x^2+\dfrac{2}{5}x+3$.

Ἀσκήσεις. **2752.** Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ παράγωγοι τῶν κάτωθι συναρτήσεων:

1. $y=3x^2-5x+6$. 2. $y=5x^4-7x^3+2x^2-1$.
3. $y=6x^5+7x^3-1$. 4. $y=7x^6+3x^2$.

2753. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ παράγωγοι τῶν κάτωθι συναρτήσεων:

1. $y=3x^{\frac{4}{3}}+5$. 2. $y=6x^{\frac{7}{2}}+8x^{\frac{5}{2}}+2x^{\frac{3}{2}}$.
3. $y=4x^{\frac{5}{4}}-8x^{\frac{3}{4}}+5x^{-\frac{1}{4}}$. 4. $y=15x^{\frac{5}{3}}-6x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{1}{2}}$.

2754. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ παράγωγοι τῶν κάτωθι συναρτήσεων :

1. $y=(2x^3-3x^2+4x-1)+(x^2-7)$.
2. $y=(7x+6)+(3x^2-15x+4)-(6x^2-5)$.
3. $y=(2x^3-5x+1)-(3x^3-6x^2+7)+(2x-4)$.

2755. Ἐὰν $\varphi=3x^3+2x-1$, $\omega=4x^2-1$, $z=5x^3-6x^2+2x-1$, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ παράγωνος τῆς συναρτήσεως $y=\varphi-\omega+z$.

2α. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως

$$y=(x-2)(x^2+3). \qquad (1)$$

1ος Τρόπος. Ἐκτελοῦμεν πράξεις κλπ. εἰς τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἰσότητος (1) καὶ εὑρίσκομεν $y=x^3-2x^2+3x-6$. (1΄)

Ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως (1΄) εἶναι (§ 728) $y'=3x^2-4x+3$.

2ος Τρόπος. Ἐφαρμόζομεν τὸν κανόνα τῆς παραγώγου ἑνὸς γινομένου συναρτήσεων (§ 721) εἰς τὴν (1) ἔχομεν

$$y'=(x-2)'(x^2+3)+(x-2).(x^2+3)'$$
$$=1.(x^2+3)+(x-2).2x=x^2+3+2x^2-4x=3x^2-4x+3.$$

Ἀσκήσεις. 2756. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ παράγωγοι τῶν κάτωθι συναρτήσεων : 1. $y=(3x-5)(7x+8)$, 2. $y=(x-16)(x^2+4)$.
3. $y=(x-1)(x^2+1)$, 4. $y=(3x^2-4x+1)(5x^2-6x-1)$.

2757. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ παράγωγοι τῶν κάτωθι συναρτήσεων :
1. $y=(x-1)(x-2)(x-3)$, 2. $y=(2x^2+1)(x-3)(x^2+1)$
3. $y=(x+1)(x-1)(2x-3)$.

2758. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ παράγωγοι τῶν κάτωθι συναρτήσεων :

1. $y=(x-3)(2x^2+1)-(x^2+1)(x-1)$.
2. $y=(x+2)(x-3)+(x-5)(x+1)$.
3. $y=(x-2)(2x^2+5)-(x^2-1)(x+1)$.

3η. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως

$$y=(5x^2-2x+8)^4.$$

Κατὰ κανόνα τῆς § 723 θὰ ἔχωμεν

$$y'=4(5x^2-2x+8)^3(5x^2-2x+8)'=4(5x^2-2x+8)^3.(10x-2)$$

Ἀσκήσεις. 2759. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ παράγωγοι τῶν κάτωθι σνναρτήσεων : 1. $y=(1-x)^4$, 2. $y=(x^2-5x+6)^3$, 3. $y=(x^2-3x+2)^4$.

2760. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ παράγωγοι τῶν κάτωθι συναρτήσεων :
1. $y=(x-1)(x+1)^2(x-2)^3$. 2. $y=x^2(x-1)^2(x+1)^4$.
3. $y=(x-1)^2(x+1)(4x-3)^4$. 4. $y=x^5(x+3)^3(x-8)^4$.

4η. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως

$$y=\frac{3x-5}{4x^2}.$$

Κατὰ τὸν κανόνα τῆς § 725 θὰ ἔχωμεν

$$y'=\frac{4x^2(3x-5)'-(3x-5).(4x^2)'}{(4x^2)^2}=\frac{4x^2.3-(3x-5).8x}{16x^4}=$$
$$=\frac{12x^2-24x^2+40x}{16x^4}=\frac{-12x^2+40x}{16x^4}=\frac{-3x+10}{4x^3}.$$

Ἀσκήσεις. 2761. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ παράγωγοι τῶν κάτωθι συναρτήσεων :

1. $y=\frac{x-1}{x+1}$, 2. $y=\frac{x-1}{x^2}$, 3. $y=\frac{x^3}{x-1}$.

2762. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ παράγωγοι τῶν κάτωθι συναρτήσεων :

1. $y=\dfrac{x}{x^2-1}$, 2. $y=\dfrac{2x-5}{x^2-3x+2}$, 3. $y=\dfrac{2x^2-9}{x^2-2x+1}$.

2763. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ παράγωγοι τῶν κάτωθι συναρτήσεων :

1. $y=\dfrac{(\omega+4)^2}{\omega+3}$, 2. $y=\dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$, 3. $y=\dfrac{(x^3-1)^2}{(x+1)^3}$.

2764. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ παράγωγοι τῶν κάτωθι συναρτήσεων :

1. $y=\dfrac{3}{x+1}$, 2. $y=\dfrac{1}{x^2-1}$, 3. $y=\dfrac{\alpha}{3x+1}$.

5η. ***Νὰ ὑπολογισθῇ** ἡ **παράγωγος τῆς συναρτήσεως***

$$y=\sqrt{3x^2+x+4}.$$

Κατὰ τὸν κανόνα τῆς § 727 θὰ ἔχωμεν

$$y=\frac{(3x^2+x+4)'}{2\sqrt{3x^2+x+4}}=\frac{6x+1}{2\sqrt{3x^2+x+4}}.$$

Ἀσκήσεις. 2765. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ παράγωγοι τῶν κάτωθι συναρτήσεων :

1. $y=\sqrt{3x^2-5x+1}$, 2. $y=\sqrt{x^4+5x^3+3}$, 3. $y=\sqrt{x^3-2x^2+1}$.

2766. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ παράγωγοι τῶν κάτωθι συναρτήσεων :

1. $\sqrt{(x+1)^3(x-2)}$, 2. $y=\sqrt{(3x^2-4)^3(x+1)}$.

2767. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ παράγωγοι τῶν κάτωθι συναρτήσεων :

1. $y=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$, 2. $y=\dfrac{x}{\sqrt{1-x}}$, 3. $y=\dfrac{\omega}{\sqrt{\alpha-\beta\omega^2}}$.

2768. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ παράγωγοι τῶν κάτωθι συναρτήσεων :

1. $y=\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}$, 2. $y=\sqrt{3x+5}-\sqrt{5x-4}$,
3. $y=3x-1+\sqrt{x^2+x+1}$, 4. $y=3x^2-2+5\sqrt{x^2-1}$.

2769. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ παράγωγοι τῶν κάτωθι συναρτήσεων :

1. $y=x\sqrt{2x^2+1}$, 2. $y=(15x^2-12x+8)\sqrt{(x+1)^3}$,
3. $y=x(1-x^2)\sqrt{1+x^2}$.

729. Παράγωγοι διαφόρων τάξεων.

Ἔστω ἡ συνάρτησις

$$y=x^5-2x^4+3x.$$

Ἡ παράγωγός της εἶναι $y'=5x^4-8x^3+3$.

Ἐπειδὴ ἡ παράγωγος y' τῆς δοθείσης συναρτήσεως εἶναι πολυώνυμον τοῦ x, θὰ ἔχῃ καὶ αὐτὴ μίαν παράγωγον, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν ***δευτέραν παράγωγον** ἢ **παράγωγον δευτέρας τάξεως*** καὶ παριστῶμεν αὐτὴν διὰ y''. Θὰ εἶναι λοιπὸν

$$y''=20x^3-24x^2.$$

Ἡ δευτέρα παράγωγος y'' τῆς δοθείσης συναρτήσεως ἔχει καὶ αὐτὴ μίαν παράγωγον, ἡ ὁποία καλεῖται ***τρίτη παράγωγος** ἢ **παράγωγος τρίτης τάξεως*** καὶ παρίσταται διὰ y'''. Θὰ εἶναι λοιπὸν

$$y'''=60x^2-48x.$$

Ὁμοίως ἡ παράγωγος τῆς y''' καλεῖται ***τετάρτη παράγωγος** ἢ **παράγωγος τετάρτης τάξεως*** καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἡ ἀρχικὴ παράγωγος τῆς δοθείσης συναρτήσεως καλεῖται ***πρώτη παράγωγος***.

Ἀσκήσεις. 2770. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ παράγωγοι δευτέρας τάξεως τῶν κατωτέρω συναρτήσεων :

1. $y=3x^4-5x^2+2x-1$, 2. $y=8x^3-8x^2+6x-1$,
3. $y=(3x-1)^3$ 4. $y=\sqrt{3x^2+1}$,
5. $y=\dfrac{x^2-1}{x+2}$, 6. $y=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}$.

***730.* Συνάρτησις συναρτήσεως.** Ἔστω μία συνεχὴς συνάρτησις $y=\sigma(\omega)$, ὅπου ω εἶναι συνεχὴς συνάρτησις τῆς μεταβλητῆς x, δηλ. εἶναι $\omega=\varphi(x)$.

Ἐὰν ἡ x μεταβάλλεται, μεταβάλλεται καὶ ἡ ω καί συνεπῶς μεταβάλλεται καὶ ἡ y. Ἡ συνάρτησις y ἐξαρτᾶται λοιπὸν ἐκ τῆς x διὰ μεσολαβήσεως τῆς ω. Διὰ τοῦτο ἡ y λέγεται ***συνάρτησις συναρτήσεως τῆς x.***

Π.χ. ἐὰν ἡ ω εἶναι μία συνάρτησις τῆς x, δηλ. ἔστω ὅτι $\omega=3x^2-1$ αἱ

$$y=\omega^4, \quad y=\frac{1}{\omega^3}, \quad y=\sqrt{\omega}.$$

εἶναι συναρτήσεις συναρτήσεως τῆς x.

***731.* Παράγωγος συναρτήσεως ἄλλης συναρτήσεως.** Ἔστω ἡ συνεχὴς συνάρτησις $y=\sigma(\omega)$, ὅπου ω εἶναι μία συνεχὴς συνάρτησις τῆς x, δηλ. εἶναι $\omega=\varphi(x)$.

Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὴν παράγωγον τῆς y ὡς πρὸς ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν τὴν x, δηλ. θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὴν παράγωγον τῆς y ὡς πρὸς x, ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν παράγωγον τῆς y ὡς πρὸς ω καὶ τὴν παράγωγον τῆς ω ὡς πρὸς x.

Ἔχομεν προφανῶς τὴν ἰσότητα

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta \omega}\cdot\frac{\Delta \omega}{\Delta x} \quad \text{ἢ} \quad \text{ορ}\,\frac{\Delta y}{\Delta x}=\text{ορ}\,\frac{\Delta y}{\Delta \omega}\cdot\text{ορ}\,\frac{\Delta \omega}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Ἐὰν ἡ αὔξησις Δx τείνῃ εἰς τὸ μηδέν, τότε καὶ αἱ αὐξήσεις Δy καὶ $\Delta \omega$ τείνουν εἰς τὸ μηδὲν καὶ οἱ λόγοι $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ καὶ $\dfrac{\Delta \omega}{\Delta x}$ ἔχουν ἀντιστοίχως ὡς ὅρια τὰς παραγώγους y' καὶ ω', τὰς ὁποίας παριστάνομεν μὲ y'_x καὶ ω'_x διὰ νὰ δείξωμεν, ὅτι εἶναι αἱ παράγωγοι τῶν συναρτήσεων y καὶ ω ὡς πρὸς x.

Ὁμοίως ἐπειδὴ ἡ αὔξησις $\Delta \omega$ τείνῃ εἰς τὸ μηδέν, ὁ λόγος $\dfrac{\Delta y}{\Delta \omega}$ τείνει πρὸς τὴν παράγωγον $\sigma'(\omega)$ τῆς συναρτήσεως $y=\sigma(\omega)$, τὴν ὁποίαν παριστάνομεν μὲ $\sigma'_\omega(\omega)$ διὰ νὰ δείξωμεν, ὅτι εἶναι παράγωγος τῆς συναρτήσεως $y=\sigma(\omega)$ ὡς πρὸς ω.

Ἡ ἰσότης λοιπὸν (1) γίνεται

$$\boxed{y'_x=\sigma'_\omega(\omega)\cdot\omega'_x} \quad \text{ἢ} \quad \boxed{y'_x=y'_\omega\cdot\omega'_x}$$

καὶ ἐκφράζει, ὅτι :

Ἐὰν $y=\sigma(\omega)$ ***καὶ*** $\omega=\varphi(x)$ ***ἡ παράγωγος τῆς*** y ***εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενον τῆς παραγώγου τῆς*** y ***ὡς πρὸς*** ω ***ἐπὶ τὴν παράγωγον τῆς*** ω ***ὡς πρὸς*** x.

Γενίκευσις. Ἔστω $y=\sigma(\omega)$ μία συνάρτησις τῆς ω ὑποθέτομεν ὅτι ἡ ω εἶναι συνάρτησις μιᾶς μεταβλητῆς t, δηλ. εἶναι $\omega=\varphi(t)$ καὶ ὅτι ἡ t εἶναι μία συνάρτησις τῆς μεταβλητῆς x, δηλ. εἶναι $t=f(x)$. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὴν παράγωγον τῆς y ὡς πρὸς x.

Ἀπὸ τὴν σχέσιν $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\Delta y}{\Delta \omega}\cdot\dfrac{\Delta \omega}{\Delta t}\cdot\dfrac{\Delta t}{\Delta x}$

λαμβάνομεν $$\text{ορ}\,\frac{\Delta y}{\Delta x}=\text{ορ}\,\frac{\Delta y}{\Delta \omega}\cdot\text{ορ}\,\frac{\Delta \omega}{\Delta t}\cdot\text{ορ}\,\frac{\Delta t}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Ὅταν ἡ Δx τείνῃ εἰς τὸ μηδὲν εὑρίσκομεν ὡς ἀνωτέρω, ὅτι

$$\boxed{y'_x=y'_\omega\cdot\omega'_t\cdot t'_x}$$

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΚΥΚΛΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

732. **Κυκλικαὶ συναρτήσεις.** Γνωρίζομεν ἀπὸ τὴν Τριγωνομετρίαν, ὅτι αἱ συναρτήσεις

$y=\eta\mu x$, $y=\sigma\upsilon\nu x$, $y=\varepsilon\varphi x$, $y=\sigma\varphi x$, $y=\tau\varepsilon\mu x$, $y=\sigma\tau\varepsilon\mu x$

λέγονται ***κυκλικαὶ συναρτήσεις.***

733. **Θεώρημα.** ***Ἡ συνάρτησις*** $y=\eta\mu x$ ***εἶναι συνεχὴς συνάρτησις τοῦ τόξου*** x, ***δι᾽ ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ*** x.

Ἔστω, ὅτι δίδομεν εἰς τὸ τόξον **x** μίαν ὡρισμένην τιμὴν x_0 καὶ ἔπειτα μίαν ἄλλην τιμὴν $x_0+\varepsilon$. Ἂν παραστήσωμεν μὲ y_0 καὶ $y_0+\eta$ τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῆς συναρτήσεως $y=\eta\mu x$, θὰ ἔχωμεν

$$y_0=\eta\mu x_0 \qquad (1)$$
$$y_0+\eta=\eta\mu(x_0+\varepsilon). \qquad (2)$$

Ἀφαιροῦμεν κατὰ μέλη τὴν (1) ἀπὸ τὴν (2) καὶ εὑρίσκομεν, ὅτι ἡ αὔξησις η τῆς συναρτήσεως $y=\eta\mu x$ εἶναι

$$\eta=\eta\mu(x_0+\varepsilon)-\eta\mu x_0$$

ἢ $$\eta=2\eta\mu\,\frac{(x_0+\varepsilon)-x_0}{2}\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{(x_0+\varepsilon)+x_0}{2}$$

ἢ $$\eta=2\eta\mu\,\frac{\varepsilon}{2}\,\sigma\upsilon\nu\left(x_0+\frac{\varepsilon}{2}\right). \qquad (3)$$

Ὅταν ἡ αὔξησις τοῦ τόξου x τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν, ὁ παράγων $\sigma\upsilon\nu\left(x_0+\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$ μένει ὡρισμένος, ἐπειδὴ τὸ συνημίτονον ἑνὸς τόξου εἶναι πάντοτε μικρότερον τῆς μονάδος 1 κατ᾽ ἀπόλυτον τιμήν· ὁ πρῶτος παράγων $2\eta\mu\dfrac{\varepsilon}{2}$, ὁ ὁποῖος εἶναι μικρότερος τοῦ $2\cdot\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$ κατ᾽ ἀπόλυτον τιμήν, τείνει πρὸς τὸ μηδέν· ἄρα καὶ τὸ πρῶτον μέλος της, δηλ. τὸ η θὰ τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν.

Ἑπομένως ἡ συνάρτησις $y=\eta\mu x$ εἶναι συνεχὴς συνάρτησις.

734. **Θεώρημα.** ***Ἡ συνάρτησις*** $y=\sigma\upsilon\nu x$ ***εἶναι συνεχὴς συνάρτησις τοῦ τόξου*** x, ***δι᾽ ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ*** x.

Ἔστω, ὅτι δίδομεν εἰς τὸ τόξον x μίαν ὡρισμένην τιμὴν x_0 καὶ ἔπειτα μίαν ἄλλην τιμὴν $x_0+\varepsilon$.

Ἂν παραστήσωμεν μὲ y_0 καὶ $y_0+\eta$ τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῆς συναρτήσεως $y=\sigma\upsilon\nu x$, θὰ ἔχωμεν

$$y_0=\sigma\upsilon\nu x_0 \quad (1) \qquad \text{καὶ} \quad y_0+\eta=\sigma\upsilon\nu(x_0+\varepsilon). \quad (2)$$

Ἂν ἀφαιρέσωμεν κατὰ μέλη τὴν (1) ἀπὸ τὴν (2) εὑρίσκομεν, ὅτι ἡ αὔξησις η τῆς συναρτήσεως εἶναι

$$\eta=\sigma\upsilon\nu(x_0+\varepsilon)-\sigma\upsilon\nu x_0$$

ἢ $$\eta=-2\eta\mu\frac{(x_0+\varepsilon)+x_0}{2}\,\eta\mu\frac{(x_0+\varepsilon)-x_0}{2}$$

ἢ $$\eta=-2\eta\mu\left(x+\frac{\varepsilon}{2}\right)\eta\mu\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ $\left|2\eta\mu\left(x+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right|\leqslant 0$ καὶ ἐπειδὴ τὸ $\eta\mu\frac{\varepsilon}{2}$ τείνει εἰς τὸ μηδέν, ὅταν τὸ ε τείνῃ εἰς τὸ μηδέν, τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἰσότητος (1) τείνῃ εἰς τὸ μηδέν, ὅταν τὸ ε τείνῃ εἰς τὸ μηδέν· ἄρα καὶ τὸ πρῶτον μέλος τῆς (1) δηλ. τὸ η τείνει εἰς τὸ μηδὲν καὶ ἑπομένως ἡ συνάρτησις $y=\sigma\upsilon\nu x$ εἶναι συνεχής.

735. Παρατήρησις. Ἐπειδὴ $\varepsilon\varphi x=\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$, $\sigma\varphi x=\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$, $\tau\varepsilon\mu x=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$, $\sigma\tau\varepsilon\mu x=\frac{1}{\eta\mu x}$, αἱ συναρτήσεις

$$y=\varepsilon\varphi x, \quad y=\sigma\varphi x, \quad y=\tau\varepsilon\mu x, \quad y=\sigma\tau\varepsilon\mu x$$

θὰ εἶναι συνεχεῖς συναρτήσεις δι' ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ τόξου x, ἐκτὸς ἐκείνων, αἱ ὁποῖαι μηδενίζουν τοὺς παρονομαστάς των.

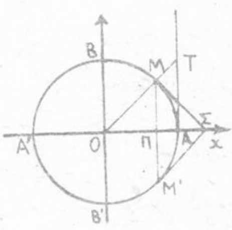
736. Ὅριον τοῦ $\frac{x}{\eta\mu x}$. Θεώρημα. *Ὁ λόγος $\frac{x}{\eta\mu x}$ τείνει πρὸς τὴν μονάδα 1, ὅταν τὸ τόξον x τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν.*

Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ τόξον x εἶναι θετικόν· διότι, ἐὰν ἦτο ἀρνητικόν, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν

$$\frac{x}{\eta\mu x}=\frac{-x}{\eta\mu(-x)}$$

καὶ θὰ ἐργαζώμεθα ἐπὶ τοῦ τόξου (−x), τὸ ὁποῖον εἶναι θετικόν.

Ἐπίσης ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ τόξον x εἶναι μικρότερον τοῦ $\frac{\pi}{2}$, ἐπειδὴ πρέπει νὰ τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν.



Σχ. 29

Ἔστω ἕνα τόξον $\overset{\frown}{AM}=x$ καὶ M' τὸ συμμετρικὸν τοῦ M πρὸς ἄξονα συμμετρίας τὸν ἄξονα τῶν συνημιτόνων A'A. Φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας τῆς περιφερείας O εἰς τὰ σημεῖα M καὶ M', αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Σ. Εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ τόξον MAM' περιλαμβάνεται μεταξὺ τῆς χορδῆς MM' καὶ τῆς τεθλασμένης γραμμῆς MΣM', δηλ. εἶναι

$$M'M<\overset{\frown}{MAM'}<M\Sigma M'. \qquad (1)$$

Φέρομεν τὸν ἄξονα τῶν ἐφαπτομένων, ὁ ὁποῖος τέμνεται ὑπὸ τῆς προεκτάσεως τῆς τελικῆς ἀκτῖνος ΟΜ εἰς τὸ σημεῖον Μ.

Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΑΤ καὶ ΟΜΣ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς καθέτους πλευρὰς ΟΑ καὶ ΟΜ ἴσας καὶ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν Ο κοινήν· ἄρα θὰ εἶναι $AT = M\Sigma$.

Ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸ σχῆμα εἶναι

$$\overline{\Pi M} = \eta\mu x, \quad \text{ἢ} \quad MM' = 2 . \overline{\Pi M} = 2\eta\mu x,$$

$$\widehat{MAM'} = 2x, \quad M\Sigma + \Sigma M' = 2AT = 2\varepsilon\varphi x,$$

Ἡ σχέσις (1) γράφεται λοιπὸν

$$2\eta\mu x < 2x < 2\varepsilon\varphi x \quad \text{ἢ} \quad \eta\mu x < x < \varepsilon\varphi x. \qquad (2)$$

Διαιροῦμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (2) διὰ ημx, τὸ ὁποῖον εἶναι θετικὸν καὶ ἔχομεν

$$1 < \frac{x}{\eta\mu x} < \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}. \qquad (3)$$

Ἀφαιροῦμεν καὶ ἀπὸ τὰ τρία μέλη τῆς σχέσεως (3) τὴν μονάδα 1 καὶ ἔχομεν

$$0 < \frac{x}{\eta\mu x} - 1 < \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} - 1$$

καὶ συνεπῶς

$$\left|\frac{x}{\eta\mu x} - 1\right| < \left|\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} - 1\right| \qquad (4)$$

Ἀλλά, ὅταν τὸ τόξον x τείνῃ εἰς τὸ μηδέν, τὸ συνx τείνῃ πρὸς τὴν μονάδα 1 καὶ ἑπομένως ὁ λόγος $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$ τείνει πρὸς τὸ 1· ὥστε τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἀνισότητος (4) τείνει πρὸς τὸ μηδέν· ἄρα καὶ τὸ πρῶτον μέλος της θὰ τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν· δηλ. θὰ εἶναι

$$\text{ορ}\left|\frac{x}{\eta\mu x} - 1\right| = 0.$$

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν συνάγομεν, ὅτι

$$\boxed{\text{ορ}\,\frac{x}{\eta\mu x} = 1}$$

737. Πόρισμα. ***Τὸ ορ*** $\frac{\eta\mu x}{x} = 1$, ***ὅταν τὸ τόξον x τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν.***

Πράγματι ἐπειδὴ εἶναι $\frac{\eta\mu x}{x} = \frac{1}{\frac{x}{\eta\mu x}}$,

θὰ εἶναι

$$\text{ορ}\,\frac{\eta\mu x}{x} = \text{ορ}\frac{1}{\frac{x}{\eta\mu x}} \qquad (1)$$

Ἀλλὰ § 736 $\text{ορ}\,\frac{1}{\frac{x}{\eta\mu x}} = \frac{\text{ορ}\,1}{\text{ορ}\,\frac{x}{\eta\mu x}} = \frac{1}{1} = 1.$

Ἄρα ἡ (1) γράφεται

$$\boxed{\text{ορ}\,\frac{\eta\mu x}{x} = 1}$$

Ἀσκήσεις. 2771. Νὰ δειχθῇ, ὅτι $\underset{x \to 0}{ορ} \dfrac{εφx}{x} = 1.$

2772. Νὰ δειχθῇ, ὅτι $\underset{x \to 0}{ορ} \dfrac{1 - συνx}{x^2} = \dfrac{1}{2}.$

2773. Νὰ δειχθῇ, ὅτι $\underset{x \to 0}{ορ} \dfrac{ημ(kx)}{x} = k.$

2774. Νὰ εὑρεθῇ τὸ $\underset{x \to 0}{ορ} \dfrac{ημ(kx)}{νx}.$

738. Παράγωγος τῆς συναρτήσεως $y = ημx$.

Γνωρίζομεν (§ 733), ὅτι ἡ συνάρτησις $y = ημx$ εἶναι συνεχὴς συνάρτησις τοῦ τόξου x δι' ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ x. Δίδομεν εἰς τὸ τόξον x μίαν αὔξησιν $Δx$ καὶ ἔστω $Δy$ ἡ ἀντίστοιχος αὔξησις τῆς συναρτήσεως· θὰ εἶναι λοιπὸν

$$y = ημx, \quad y + Δy = ημ(x + Δx).$$

Ἀπὸ αὐτὰς λαμβάνομεν $Δy = ημ(x + Δx) - ημx.$ (1)

Διαιροῦμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (1) διὰ $Δx$ καὶ ἔχομεν

$$\frac{Δy}{Δx} = \frac{ημ(x+Δx) - ημx}{Δx}$$

ἢ
$$\frac{Δy}{Δx} = \frac{2\,ημ\dfrac{(x+Δx)-x}{2}\,συν\dfrac{(x+Δx)+x}{2}}{Δx}$$

ἢ
$$\frac{Δy}{Δx} = \frac{2ημ\dfrac{Δx}{2}\,συν\left(x + \dfrac{Δx}{2}\right)}{Δx}$$

ἢ
$$\frac{Δy}{Δx} = \frac{ημ\dfrac{Δx}{2}}{\dfrac{Δx}{2}} \cdot συν\left(x + \dfrac{Δx}{2}\right)$$

ἢ
$$ορ\frac{Δy}{Δx} = ορ\frac{ημ\dfrac{Δx}{2}}{\dfrac{Δx}{2}} \cdot ορ\,συν\left(x + \dfrac{Δx}{2}\right). \qquad (2)$$

Ὅταν ἡ αὔξησις $Δx$ τείνῃ εἰς τὸ μηδέν, τότε καὶ τὸ ἥμισυ τῆς $\dfrac{Δx}{2}$ τείνῃ εἰς τὸ μηδέν.

Ὥστε, ὅταν $ορΔx = 0$, θὰ εἶναι καὶ $ορ\dfrac{Δx}{2} = 0$· ἄρα (§ 737)

$$ορ\frac{ημ\dfrac{Δx}{2}}{\dfrac{Δx}{2}} = 1 \quad καὶ \quad ορ\,συν\left(x + \dfrac{Δx}{2}\right) = συνx.$$

Ἐπειδὴ $ορ\dfrac{Δy}{Δx} = y'$ ἕπεται ἀπὸ τὴν (2), ὅτι

$$\boxed{\mathbf{y' = συνx} \quad ἢ \quad \mathbf{(ημx)' = συνx}}$$

Ὥστε: ***Ἡ παράγωγος τοῦ*** ημx ***εἶναι*** συνx ***διὰ κάθε τιμὴν τοῦ τόξου*** x.

739. Παράγωγος τῆς συναρτήσεως y=συνx. Γνωρίζομεν (§ 734), ὅτι ἡ συνάρτησις y=συνx εἶναι συνεχὴς δι' ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ τόξου x. Δίδομεν εἰς τὸ τόξον x μίαν αὔξησιν Δx καὶ ἔστω Δy ἡ ἀντίστοιχος αὔξησις τῆς συναρτήσεως. Θὰ εἶναι λοιπὸν

$$y=\text{συν}x \quad \text{καὶ} \quad y+\Delta y=\text{συν}(x+\Delta x).$$

Ἀπὸ αὐτὰς λαμβάνομεν $\Delta y=\text{συν}(x+\Delta x)-\text{συν}x.$ (1)

Διαιροῦμεν διὰ Δx καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (1) καὶ ἔχομεν

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\text{συν}(x+\Delta x)-\text{συν}x}{\Delta x}$$

ἢ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-2\text{ημ}\dfrac{(x+\Delta x)+x}{2}\,\text{ημ}\dfrac{(x+\Delta x)-x}{2}}{\Delta x}=$$

$$=\frac{-2\text{ημ}\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)\text{ημ}\dfrac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

ἢ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{\text{ημ}\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}\cdot\text{ημ}\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

ἢ

$$\text{ορ}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\text{ορ}\left(-\frac{\text{ημ}\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}\right)\cdot\text{ορ}\,\text{ημ}\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right). \quad (2)$$

Ὅταν $\text{ορ}\Delta x=0$, θὰ εἶναι καὶ $\text{ορ}\dfrac{\Delta x}{2}=0$· ἐπειδὴ

$$\text{ορ}\left(-\frac{\text{ημ}\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}\right)=-1,\quad \text{ορημ}\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\text{ημ}x \quad \text{καὶ} \quad \text{ορ}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'$$

ἡ (2) γίνεται

$$\boxed{y'=-\text{ημ}x \quad \text{ἢ} \quad (\text{συν}x)'=-\text{ημ}x}$$

Ὥστε: ***Ἡ παράγωγος τοῦ*** συνx ***εἶναι*** −ημx ***διὰ κάθε τιμὴν τοῦ τόξου*** x.

740. Παράγωγος τῆς συναρτήσεως y=εφx. Γνωρίζομεν, ὅτι ἡ συνάρτησις y=εφx εἶναι μία συνεχὴς συνάρτησις δι' ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ τόξου, αἱ ὁποῖαι δὲν καθιστοῦν τὴν εφx ἄπειρον.

Ἐπειδὴ $\text{εφ}x=\dfrac{\text{ημ}x}{\text{συν}x}$, θὰ εἶναι $(\text{εφ}x)'=\left(\dfrac{\text{ημ}x}{\text{συν}x}\right)'$

ἢ $$(\varepsilon\varphi x)' = \frac{\sigma\upsilon\nu x\cdot(\eta\mu x)' - \eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x(-\eta\mu x)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} =$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}.$$

Ὥστε εἶναι $$\boxed{(\varepsilon\varphi \mathbf{x})' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\mathbf{x}}}$$

Ὥστε : *Ἡ παράγωγος τῆς ἐφαπτομένης ἑνὸς τόξου* x *εἶναι ἴση μὲ* $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$.

741. **Παράγωγοι τῶν συναρτήσεων y=σφx, y=τεμx, y=στεμx.** Ἐργαζόμενοι, ὅπως εἰς τὴν § 740 εὑρίσκομεν, ὅτι

$$\boxed{(\sigma\varphi\mathbf{x})' = -\frac{1}{\eta\mu^2\mathbf{x}},\quad (\tau\varepsilon\mu\mathbf{x})' = \frac{\varepsilon\varphi\mathbf{x}}{\sigma\upsilon\nu\mathbf{x}},\quad (\sigma\tau\varepsilon\mu\mathbf{x}) = -\frac{\sigma\varphi\mathbf{x}}{\eta\mu\mathbf{x}}}$$

742. **Πίναξ περιέχων τὰς παραγώγους μερικῶν συναρτήσεων.** Αἱ φ, ω, z εἶναι συναρτήσεις τῆς x.

	Συναρτήσεις	Παράγωγοι
1.	$y = \varphi + \omega + z$	$y' = \varphi' + \omega' + z'$
2.	$y = \varphi\omega$	$y' = \varphi'\omega + \varphi\omega'$
3.	$y = \alpha\varphi$	$y' = \alpha\varphi'$
4.	$y = \varphi\omega z$	$y' = \varphi'\omega z + \varphi\omega' z + \varphi\omega z'$
5.	$y = \frac{\varphi}{\omega}$.	$y' = \frac{\omega\varphi' - \varphi\omega'}{\omega^2}$
6.	$y = \frac{\alpha}{\omega}$	$y' = -\frac{\alpha\omega'}{\omega^2}$
7.	$y = x^\mu$	$y' = \mu x^{\mu-1}$,
8.	$y = \omega^\mu$	$y' = \mu\omega^{\mu-1}.\ \omega'$
9.	$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
10.	$y = \sqrt{\omega}$	$y = \frac{\omega'}{2\sqrt{\omega}}$,
11.	$y = \eta\mu x$	$y' = \sigma\upsilon\nu x$
12.	$y = \sigma\upsilon\nu x$	$y' = -\eta\mu x$
13.	$y = \varepsilon\varphi x$	$y' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$
14.	$y = \sigma\varphi x$	$y' = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$
15.	$y = \tau\varepsilon\mu x$	$y = \frac{\varepsilon\varphi x}{\sigma\upsilon\nu x}$
16.	$y = \sigma\tau\varepsilon\mu x$	$y' = -\frac{\sigma\varphi x}{\eta\mu x}$.

Ἀσκήσεις. *2775.* Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ παράγωγοι τῶν συναρτήσεων:
$y=3\eta\mu x$, $y=5\sigma\upsilon\nu x$, $y=2\varepsilon\varphi x$, $y=\alpha\tau\varepsilon\mu x$

2776. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ παράγωγοι τῶν συναρτήσεων:
$y=\eta\mu^2 x$, $y=\sigma\upsilon\nu^2 x$, $y=\varepsilon\varphi^2 x$, $y=\tau\varepsilon\mu^2 x$.

2777. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ παράγωγοι τῶν συναρτήσεων:
$y=\eta\mu^3 x$, $y=\sigma\upsilon\nu^3 x$, $y=\varepsilon\varphi^3 x$.

2778. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ παράγωγοι τῶν συναρτήσεων:
$y=\eta\mu 2x$, $y=\sigma\upsilon\nu 2x$.

2779. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ παράγωγοι τῶν συναρτήσεων:
$y=\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x$, $y=\varepsilon\varphi x-\sigma\varphi x$.

2780. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ παράγωγοι τῶν συναρτήσεων:
$y=\sqrt{\eta\mu x}$, $y=\sqrt{\sigma\upsilon\nu x}$, $y=\sqrt{\varepsilon\varphi x}$,

2781. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως $y=x-\eta\mu x$.

2782. Ὁμοίως τῆς συναρτήσεως $y=x-\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x$.

2783. Ὁμοίως τῆς συναρτήσεως $y=(x^2+2x-1)\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x$.

2784. Ὁμοίως τῆς συναρτήσεως $y=(2x^2-1)\eta\mu x-(x^3+2x)\sigma\upsilon\nu x$.

2785. Ὁμοίως τῆς συναρτήσεως $y=(4x^3-5x)\sigma\upsilon\nu x+(x^4-x^3+1)\eta\mu x$.

2786. Ὁμοίως τῆς συναρτήσεως $y=\sigma\upsilon\nu x(\eta\mu^2 x+1)$.

2787. Ὁμοίως τῆς συναρτήσεως $y=2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu^3 x+3(\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x+x)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΑ΄.

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

ΣΧΕΣΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΗΣ ΦΟΡΑΣ ΤΗΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ ΚΑΙ ΤΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ ΤΗΣ

743. **Θεώρημα τῶν πεπερασμένων αὐξήσεων.** ***Ἐὰν μία συνάρτησις*** $y=\sigma(x)$ ***εἶναι ὡρισμένη καὶ συνεχὴς εἰς ἕνα διάστημα*** (α,β) ***καὶ ἔχῃ παράγωγον δι᾽ ὅλας τὰς τιμὰς τῆς*** x, ***τὰς περιεχομένας εἰς τὸ διάστημα*** (α,β), ***ὑπάρχει ἕνας τουλάχιστον ἀριθμὸς*** γ ***περιεχόμενος μεταξὺ*** α ***καὶ*** β ***καὶ τοιοῦτος, ὥστε***

$$\sigma(\beta)-\sigma(\alpha)=(\beta-\alpha)\sigma'(\gamma).$$

Ἔστω Κ (Σχ. 30) ἡ καμπύλη, τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ συνάρτησις καὶ ἔστωσαν Α καὶ Β δύο σημεῖα τῆς καμπύλης αὐτῆς, τὰ ὁποῖα ἔχουν ὡς τετμημένας α καὶ β. Αἱ συντεταγμέναι τοῦ Α εἶναι α καὶ $\sigma(\alpha)$ τοῦ δὲ Β εἶναι β καὶ $\sigma(\beta)$.

Φέρομεν τὴν χορδὴν ΑΒ· ἐξ ὑποθέσεως εἶναι

$$\overline{ΟΠ}=\alpha,\quad \overline{ΠΑ}=\sigma(\alpha),\quad \overline{ΟΠ'}=\beta,\quad \overline{Π'Β}=\sigma(\beta)$$

Φέρομεν τὴν ΑΔ παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα Οx, ἡ ὁποία τέμνει τὴν Π΄Β εἰς τὸ σημεῖον Δ· θὰ εἶναι

$$ΑΔ=\overline{ΠΠ'}=\overline{ΟΠ'}-\overline{ΟΠ}=\beta-\alpha$$

καὶ

$$ΔΒ=\overline{Π'Β}-\overline{Π'Δ}=\overline{Π'Β}-\overline{ΠΑ}=\sigma(\beta)-\sigma(\alpha).$$

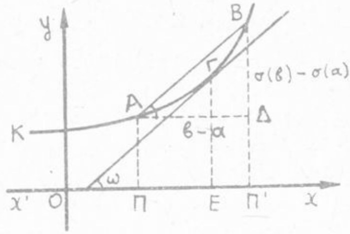
Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΔΒ ἔχομεν

$$ΔΒ = ΑΔ \cdot εφ\widehat{ΔΑΒ}$$

ἢ $$\frac{ΔΒ}{ΑΔ} = εφ\widehat{ΔΑΒ}$$

ἢ $$\frac{σ(β)-σ(α)}{β-α} = εφ\widehat{ΔΑΒ} =$$

συντελεστὴς κατευθύνσεως τῆς χορδῆς ΑΒ (1).



Σχ. 30

Μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β τῆς καμπύλης ὑπάρχει τουλάχιστον ἕνα σημεῖον, ὅπως τὸ Γ, ὅπου ἡ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον Γ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν χορδὴν ΑΒ. Ἐὰν ἡ τετμημένη τοῦ σημείου Γ εἶναι γ, ὁ συντελεστὴς κατευθύνσεως τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ Γ εἶναι (§ 718) ἴσος μὲ

$$εφω = σ'(γ) = εφ\widehat{ΔΑΒ}. \qquad (2)$$

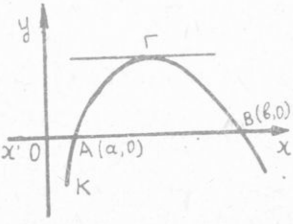
Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι

$$\frac{σ(β)-σ(α)}{β-α} = σ'(γ) \quad ἢ \quad \boxed{σ(β) - σ(α) = (β-α) \cdot σ'(γ)} \qquad (3)$$

Ὁ τύπος (3) εἶναι ὁ τύπος τῶν ***πεπερασμένων αὐξήσεων*** διὰ μίαν συνάρτησιν $y=σ(x)$.

744. Θεώρημα τοῦ Rolle. ***Ἔστω μία συνάρτησις*** $y=σ(x)$ ***ὡρισμένη καὶ συνεχὴς εἰς τὸ διάστημα*** $(α,β)$ ***καὶ ἡ ὁποία ἔχει παράγωγον διὰ κάθε τιμὴν τῆς x κειμένην εἰς τὸ διάστημα*** $(α,β)$. ***Ἐὰν ἡ συνάρτησις αὐτὴ*** $y=σ(x)$ ***μηδενίζεται διὰ*** $x=α$ ***καὶ διὰ*** $x=β$, ***ὑπάρχει μία τουλάχιστον τιμὴ*** γ ***τῆς μεταβλητῆς*** x, ***κειμένη μεταξὺ*** α ***καὶ*** β, ***διὰ τὴν ὁποίαν ἡ παράγωγος μηδενίζεται.***

Ἔστω Κ ἡ καμπύλη, τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ συνάρτησις $y=σ(x)$ καὶ ἔστωσαν Α καὶ Β τὰ σημεῖα τῆς καμπύλης, τὰ ὁποῖα ἔχουν ὡς τετμημένας τοὺς ἀριθμοὺς α καὶ β. Ἐπειδὴ ἡ συνάρτησις $y=σ(x)$ μηδενίζεται διὰ $x=α$ καὶ διὰ $x=β$, ἕπεται, ὅτι ἡ καμπύλη Κ διέρχεται διὰ τῶν σημείων Α καὶ Β.



Σχ. 31

Κατὰ τὸ θεώρημα τῶν πεπερασμένων αὐξήσεων, θὰ ὑπάρχῃ τουλάχιστον τιμὴ γ τῆς μεταβλητῆς x τοιαύτη, ὥστε νὰ εἶναι

$$σ(β) - σ(α) = (β-α)σ'(γ). \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ $σ(β)=0$, $σ(α)=0$, ἡ (1) γίνεται $0=(β-α)σ'(γ)$. (2)

Ἐπειδὴ ὁ παράγων $β-α \neq 0$ ἕπεται ἀπὸ τὴν (2), ὅτι $σ'(γ)=0$.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι : ***Ἐὰν ἡ συνάρτησις*** $y=σ(x)$. . . . .

745. Θεώρημα. ***Ἔστω μία συνάρτησις $y=\sigma(x)$ ὡρισμένη καὶ συνεχὴς εἰς ἕνα διάστημα (α,β) καὶ ἡ ὁποία ἔχει παράγωγον εἰς τὸ διάστημα αὐτό. Ἐὰν ἡ παράγωγος αὐτὴ μηδενίζεται διὰ κάθε τιμὴν τῆς μεταβλητῆς x περιεχομένην εἰς τὸ διάστημα (α,β) ἡ συνάρτησις $y=\sigma(x)$ ἔχει μίαν σταθερὰν τιμὴν εἰς τὸ διάστημα (α,β).***

Ἔστωσαν x_1 καὶ x_2 δύο οἱοιδήποτε ἀριθμοί τοῦ διαστήματος (α,β). Ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τὸ θεώρημα τῶν πεπερασμένων αὐξήσεων, θὰ ἔχωμεν $\sigma(x_2)-\sigma(x_1)=(x_2-x_1)\sigma'(\gamma)$ (1)
ὅπου γ εἶναι ἕνας ἀριθμὸς περιεχόμενος μεταξὺ x_1 καί x_2 καὶ ἑπομένως καὶ εἰς τὸ διάστημα (α,β)· ἄρα θὰ εἶναι $\sigma'(\gamma)=0$. Ἡ ἰσότης λοιπὸν (1) γίνεται $\sigma(x_2)-\sigma(x_1)=0$ ἢ $\sigma(x_2)=\sigma(x_1)$.

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν συνάγομεν, ὅτι ἡ συνάρτησις $y=\sigma(x)$ ἔχει τὴν αὐτὴν τιμὴν εἰς τὸ διάστημα (α,β)· δηλ. εἶναι μία σταθερά.

746. Θεώρημα. ***Ἔστω μία συνάρτησις $y=\sigma(x)$ ὡρισμένη καὶ συνεχὴς εἰς τὸ διάστημα (α,β) καὶ ἡ ὁποία ἔχει παράγωγον εἰς τὸ διάστημα αὐτό. Ἡ συνάρτησις $y=\sigma(x)$ εἶναι αὔξουσα ἢ φθίνουσα εἰς τὸ διάστημα αὐτό, ἐὰν ἡ παράγωγός της εἶναι, εἰς τὸ διάστημα αὐτό, θετικὴ ἢ ἀρνητική· καὶ ἀντιστρόφως.***

Ἔστωσαν x_1 καὶ x_2 δύο οἱοιδήποτε ἀριθμοὶ τοῦ διαστήματος (α, β) καὶ ἔστω, ὅτι $x_1<x_2$.

Κατὰ τὸ θεώρημα τῶν πεπερασμένων αὐξήσεων, θὰ εἶναι

$$\sigma(x_2)-\sigma(x_1)=(x_2-x_1)\,.\sigma'(\gamma) \qquad (1)$$

ὅπου γ εἶναι ἕνας ἀριθμὸς περιεχόμενος μεταξὺ τῶν x_1 καί x_2 καὶ ἑπομένως περιεχόμενος καὶ εἰς τὸ διάστημα (α,β).

Ἐπειδὴ $x_2>x_1$, θὰ εἶναι $x_2-x_1>0$.

1ον. ***Ἐὰν $\sigma'(\gamma)>0$***, τότε τὸ δεύτερον μέλος τῆς (1) εἶναι θετικὸν ὡς γινόμενον τῶν δύο θετικῶν παραγόντων (x_2-x_1) καὶ $\sigma'(\gamma)$· ἄρα θὰ εἶναι θετικὸν καὶ τὸ πρῶτον μέλος της· δηλ. θὰ εἶναι

$$\sigma(x_2)-\sigma(x_1)>0.$$

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν συνάγομεν, ὅτι ἡ συνάρτησις $\sigma(x)$ εἶναι αὔξουσα.

2ον. ***Ἐὰν $\sigma'(\gamma)<0$***, τότε τὸ δεύτερον μέλος τῆς (1) θὰ εἶναι ἀρνητικόν· ἄρα θὰ εἶναι καὶ $\sigma(x_2)-\sigma(x_1)<0$.

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν συνάγομεν, ὅτι ἡ συνάρτησις $\sigma(x)$ εἶναι φθίνουσα.

Τὸ ἀντίστροφον, τὸ ὁποῖον διατυποῦται συντόμως, ὡς κάτωθι:
ἐὰν ἡ συνάρτησις $y=\sigma(x)$ εἶναι αὔξουσα, τότε $\sigma'(\gamma)>0$
ἐὰν ἡ συνάρτησις $y=\sigma(x)$ εἶναι φθίνουσα, τότε $\sigma'(\gamma)<0$
ἀποδεικνύεται εὐκόλως.

Παρατήρησις. Ἐὰν ἦτο $\sigma'(\gamma)=0$, ἡ (1) γίνεται

$$\sigma(x_2)-\sigma(x_1)=0 \quad ἢ \quad \sigma(x_2)=\sigma(x_1)$$

δηλ. ἡ συνάρτησις θὰ ἦτο σταθερὰ εἰς τὸ διάστημα αὐτό. Διὰ τοῦτο, εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν πρέπει νὰ ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ $\sigma'(\gamma)$ εἶναι μηδὲν διὰ μεμονωμένας τιμὰς τῆς x.

ΜΕΓΙΣΤΑ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΔΙΑ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

746. Μέγιστον καὶ ἐλάχιστον μιᾶς συναρτήσεως. Ἐὰν μία ὡρισμένη καὶ συνεχὴς συνάρτησις $y=\sigma(x)$ εἶναι αὔξουσα εἰς ἕνα διάστημα (α, x_0) καὶ ἔπειτα φθίνουσα εἰς τὸ διάστημα (x_0, β) $(\alpha < x_0 < \beta)$ λέγομεν, ὅτι ἡ συνάρτησις y διέρχεται ἀπὸ ἕνα ***μέγιστον*** διὰ $x=x_0$. Δηλ. ἡ συνάρτησις y λαμβάνει διὰ $x=x_0$ μίαν τιμήν, ἡ ὁποία εἶναι μεγαλυτέρα ἀπὸ ὅλας τὰς γειτονικὰς τιμάς, αἱ ὁποῖαι προηγοῦνται ἢ ἕπονται αὐτῆς.

Τοὐναντίον, ὅταν ἡ συνάρτησις $y=\sigma(x)$ εἶναι φθίνουσα εἰς τὸ διάστημα (α, x_0) καὶ ἔπειτα αὔξουσα εἰς τὸ διάστημα (x_0, β) λέγομεν, ὅτι ἡ συνάρτησις y διέρχεται ἀπὸ ἕνα ***ἐλάχιστον*** διὰ $x=x_0$. Δηλ. ἡ συνάρτησις λαμβάνει διὰ $x=x_0$ μίαν τιμήν, ἡ ὁποία εἶναι μικροτέρα ἀπὸ ὅλας τὰς γειτονικὰς τιμάς, αἱ ὁποῖαι προηγοῦνται ἢ ἕπονται αὐτῆς.

747. Θεώρημα. ***Ὅταν μία συνάρτησις*** $y=\sigma(x)$ ***ὡρισμένη καὶ συνεχὴς εἰς ἕνα διάστημα*** (α, β), ***ἔχουσα παράγωγον εἰς τὸ διάστημα αὐτό, διέρχεται διά τινα τινα τιμὴν τῆς μεταβλητῆς*** x, ***ἔστω τὴν*** x_0, ***ἀπὸ ἕνα μέγιστον ἢ ἀπὸ ἕνα ἐλάχιστον, ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως μηδενίζεται διὰ τὴν τιμὴν αὐτὴν τῆς*** x. ***Δηλ. εἶναι*** $\sigma'(x_0)=0$.

Ἐπειδὴ ἡ συνάρτησις $y=\sigma(x)$ εἶναι συνεχὴς καὶ ἡ παράγωγός της y' εἶναι συνεχὴς συνάρτησις.

Ἡ τιμὴ $x=x_0$ διαιρεῖ τὸ διάστημα (α, β) εἰς τά διαστήματα (α, x_0) καὶ (x_0, β).

1ον. Ἔστω, ὅτι ἡ συνάρτησις $y=\sigma(x)$ εἶναι αὔξουσα εἰς τὸ διάστημα (α, x_0) καὶ φθίνουσα εἰς τὸ διάστημα (x_0, β).

Ἐπειδὴ ἡ συνάρτησις εἶναι αὔξουσα εἰς τὸ διάστημα (α, x_0), ἡ παράγωγός της θὰ εἶναι θετικὴ (§ 746). Ἐπίσης ἐπειδὴ ἡ συνάρτησις εἶναι φθίνουσα εἰς τὸ διάστημα (x_0, β), ἡ παράγωγός της θὰ εἶναι ἀρνητική.

Ἀλλὰ ἡ παράγωγος ὑπετέθη, ὅτι εἶναι συνεχὴς συνάρτησις· ἑπομένως διὰ νὰ γίνῃ ἀπὸ θετικὴ ἀρνητική, πρέπει νὰ διέλθῃ ἀπὸ τὴν τιμὴν 0, δηλ. πρέπει νὰ εἶναι $\sigma'(x_0)=0$, ὁπότε ἡ συνάρτησις θὰ γίνῃ μεγίστη διὰ $x=x_0$.

2ον. Ἔστω, ὅτι ἡ συνάρτησις $y=\sigma(x)$ εἶναι φθίνουσα εἰς τὸ διάστημα (α, x_0) καὶ αὔξουσα εἰς τὸ διάστημα (x_0, β). Ἀλλὰ τότε ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως θὰ εἶναι ἀρνητικὴ εἰς τὸ διάστημα (α, x_0) καὶ θετικὴ εἰς τὸ διάστημα (x_0, β) (§ 746).

Ἐπειδὴ ἡ παράγωγος ὑπετέθη, ὅτι εἶναι συνεχὴς συνάρτησις ἕπεται, ὅτι διὰ νὰ γίνῃ ἀπὸ ἀρνητικὴ θετική, πρέπει νὰ διέλθῃ ἀπὸ τὴν τιμὴν 0, δηλ. πρέπει νά εἶναι $\sigma'(x_0)=0$. Ἀλλὰ τότε ἡ συνάρτησις γίνεται ἐλαχίστη διὰ $x=x_0$.

748. Θεώρημα. (Ἀντίστροφον). ***Ἐὰν ἡ παράγωγος μιᾶς ὡρισμένης καὶ συνεχοῦς συναρτήσεως*** $y=\sigma(x)$ ***μηδενίζεται διά τινα τιμὴν τῆς μεταβλητῆς*** x, ***περιεχομένην εἰς ἕνα διάστημα*** (α,β) ***ἔστω τὴν*** $x=x_0$, ***ἡ συνάρτησις αὐτὴ διὰ*** $x=x_0$ ***διέρχεται ἀπὸ ἕνα μέγιστον ἢ ἕνα ἐλάχιστον, καθ᾿ ὅσον ἡ παράγωγος μηδενίζεται ἐκ θετικῶν ἢ ἀρνητικῶν τιμῶν.***

Ἡ τιμὴ x_0 διαιρεῖ τὸ διάστημα (α, β) εἰς τὰ διαστήματα (α, x_0) καὶ (x_0, β).

1ον. Ἔστω, ὅτι ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως $y=\sigma(x)$ εἶναι θετικὴ εἰς τὸ διάστημα (α, x_0) καὶ ἀρνητικὴ εἰς τὸ διάστημα (x_0,β). Ἀλλὰ τότε (§ 746) ἡ συνάρτησις $y=\sigma(x)$ εἶναι αὔξουσα εἰς τὸ διάστημα (α,x_0) καὶ φθίνουσα εἰς τὸ διάστημα (x_0,β). Συνεπῶς ἡ τιμὴ $\sigma(x_0)$ εἶναι μεγίστη ἐξ ὅλων τῶν τιμῶν, τὰς ὁποίας λαμβάνει ἡ συνάρτησις εἰς τὸ διάστημα (α, β)· ἄρα ἡ συνάρτησις $y=\sigma(x)$ ἔχει ἕνα μέγιστον διὰ $x=x_0$.

2ον. Ἔστω, ὅτι ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως $y=\sigma(x)$ εἶναι ἀρνητικὴ εἰς τὸ διάστημα (α, x_0) καὶ θετικὴ εἰς τὸ διάστημα (x_0, β). Ἀλλὰ τότε (§ 746) ἡ συνάρτησις $y=\sigma(x)$ εἶναι φθίνουσα εἰς τὸ διάστημα (α, x_0) καὶ αὔξουσα εἰς τὸ διάστημα (x_0, β). Συνεπῶς ἡ τιμὴ $\sigma(x_0)$ εἶναι ἡ ἐλαχίστη ἐξ ὅλων τῶν τιμῶν, τὰς ὁποίας λαμβάνει ἡ συνάρτησις εἰς τὸ διάστημα (α, β)· ἄρα ἡ συνάρτησις ἔχει ἕνα ἐλάχιστον διὰ $x=x_0$.

749. Θεώρημα. ***Ἔστω ἡ συνάρτησις*** $y=\sigma(x)$, ***ἡ ὁποία εἶναι ὡρισμένη καὶ συνεχὴς εἰς τὸ διάστημα*** (α, β) ***καὶ ἔχει μίαν παράγωγον*** y' ***εἰς τὸ διάστημα αὐτό.***

1ον. Ἐὰν ἡ συνάρτησις $y=\sigma(x)$ ***ἔχῃ μέγιστον διὰ*** $x=x_1$, ***τότε ἡ δευτέρα παράγωγός της*** y'' ***εἶναι ἀρνητικὴ διὰ*** $x=x_1$.

2ον. Ἐὰν ἡ συνάρτησις $y=\sigma(x)$ ***ἔχῃ ἐλάχιστον διὰ*** $x=x_2$, ***τότε ἡ δευτέρα παράγωγος*** y'' ***εἶναι θετικὴ διὰ*** $x=x_2$.

Καὶ ἀντιστρόφως.

Ἐξ ὑποθέσεως ἡ συνάρτησις $y=\sigma(x)$ εἶναι ὡρισμένη καὶ συνεχὴς εἰς τὸ διάστημα (α, β) καὶ ἔχει μίαν παράγωγον y'.

1ον. Ἐπειδὴ ἡ συνάρτησις $y=\sigma(x)$ ἔχει μέγιστον διὰ $x=x_1$, ἡ παράγωγός της y' θὰ εἶναι μηδὲν διὰ $x=x_1$ δηλ. θὰ εἶναι $\sigma'(x_1)=0$ καὶ θὰ μεταβαίνῃ ἐκ θετικῶν τιμῶν εἰς ἀρνητικάς· ἄρα ἡ y' εἶναι φθίνουσα συνάρτησις καὶ ἑπομένως ἡ παράγωγός της y'', δηλ. ἡ δευτέρα παράγωγος τῆς συναρτήσεως $y=\sigma(x)$, εἶναι ἀρνητική.

2ον. Ἐπειδὴ ἡ συνάρτησις $y=\sigma(x)$ ἔχει ἕνα ἐλάχιστον διὰ $x=x_2$, ἡ παράγωγός της y' θὰ εἶναι ἴση μὲ μηδὲν διὰ $x=x_2$, δηλ. θὰ εἶναι $\sigma'(x_2)=0$ καὶ θὰ μεταβαίνῃ ἐξ ἀρνητικῶν τιμῶν εἰς θετικὰς τιμάς· ἄρα ἡ y' εἶναι αὔξουσα συνάρτησις καὶ ἑπομένως ἡ παράγωγός της y''

δηλ. ἡ δευτέρα παράγωγος τῆς συναρτήσεως $y=\sigma(x)$, θὰ εἶναι θετική.

Τὸ ἀντίστροφον ἀποδεικνύεται εὐκόλως.

750. Εὕρεσις τοῦ μεγίστου ἢ τοῦ ἐλαχίστου μιᾶς συναρτήσεως διὰ τῶν παραγώγων. Κανών. ***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ μέγιστον ἢ τὸ ἐλάχιστον μιᾶς συναρτήσεως:***

1ον. Εὑρίσκομεν τὴν πρώτην παράγωγον τῆς συναρτήσεως.

2ον. Ἐξισώνομεν μὲ τὸ μηδὲν τὴν πρώτην παράγωγον καὶ εὑρίσκομεν τὰς ρίζας τῆς προκυπτούσης ἐξισώσεως. Αἱ ρίζαι αὗται δίδουν τὰς χαρακτηριστικὰς τιμὰς τῆς μεταβλητῆς.

3ον. Εὑρίσκομεν τὴν δευτέραν παράγωγον.

4ον. Ἀντικαθιστῶμεν κάθε χαρακτηριστικὴν τιμὴν τῆς μεταβλητῆς εἰς τὴν δευτέραν παράγωγον.

Ἐὰν τὸ ἐξαγόμενον εἶναι ἀρνητικόν, ἡ συνάρτησις διέρχεται ἀπὸ ἕνα μέγιστον διὰ τὴν χαρακτηριστικὴν αὐτὴν τιμήν.

Ἐὰν τὸ ἐξαγόμενον εἶναι θετικόν, ἡ συνάρτησις διέρχεται ἀπὸ ἕνα ἐλάχιστον.

751. Παράδειγμα 1ον. ***Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον ἢ τὸ ἐλάχιστον τῆς συναρτήσεως*** $y=2x^2-7x+3$. (1)

Γνωρίζομεν, ὅτι τὸ μέγιστον ἢ τὸ ἐλάχιστον μιᾶς συναρτήσεως λαμβάνει χώραν διὰ τὴν τιμὴν τῆς μεταβλητῆς x, διὰ τὴν ὁποίαν μηδενίζεται ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως. Διὰ τοῦτο εὑρίσκομεν τὴν πρώτην παράγωγον τῆς συναρτήσεως.

Ἡ πρώτη παράγωγος τῆς (1) εἶναι $y'=4x-7$.

Θέτομεν $y'=0$, δηλ. $4x-7=0$ καὶ εὑρίσκομεν $x=\frac{7}{4}$. Ὥστε ἡ παράγωγος y' μηδενίζεται διὰ $x=\frac{7}{4}$.

Ἄρα ἡ συνάρτησις $y=2x^2-7x+3$ ἔχει μέγιστον ἢ ἐλάχιστον διὰ $x=\frac{7}{4}$.

Τὸ μέγιστον ἢ τὸ ἐλάχιστον τῆς συναρτήσεως ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ σημεῖον τῆς δευτέρας παραγώγου της.

Εὑρίσκομεν τώρα τὸ σημεῖον τῆς δευτέρας παραγώγου τῆς συναρτήσεως.

Ἡ δευτέρα παράγωγος y'' τῆς (1) εἶναι $y''=4=$θετική· ἄρα ἡ συνάρτησις (1) ἔχει ἐλάχιστον διὰ $x=\frac{7}{4}$.

Διὰ $x=\frac{7}{4}$, ἡ (1) δίδει $y=-\frac{25}{8}$ ***(ἐλάχιστον).***

Σημ. Εἰς τὴν § 694 εἴδομεν, ὅτι ἕνα τριώνυμον $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ ἔχει ἐλάχιστον, ἐὰν $\alpha>0$ καὶ μέγιστον, ἐὰν $\alpha<0$, διὰ $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$.

Εἰς τὸ τριώνυμον $2x^2-7x+3$ εἶναι $\alpha>0$· ἄρα τὸ τριώνυμον αὐτὸ ἔχει ἐλάχιστον διὰ $x=\frac{7}{4}$.

752. Παράδειγμα 2ον. ***Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον ἢ τὸ ἐλάχιστον τῆς συναρτήσεως*** $y=2x^3-15x^2+36x+10$. (1)

Ἡ πρώτη παράγωγος τῆς (1) εἶναι $y'=6x^2-30x+36$.

Θέτομεν $6x^2-30x+36=0$ ἢ $x^2-5x+6=0$. (2)

Αἱ ρίζαι τῆς (2) εἶναι 2 καὶ 3.

Ὥστε ἡ παράγωγος y' μηδενίζεται διὰ $x=2$ καὶ διὰ $x=3$ (χαρακτηριστικαὶ τιμαὶ τῆς x). Ἄρα ἡ συνάρτησις (1) ἔχει μέγιστον ἢ ἐλάχιστον διὰ $x=2$ καὶ διὰ $x=3$.

Εὑρίσκομεν τὴν δευτέραν παράγωγον τῆς συναρτήσεως (1).

Ἡ δευτέρα παράγωγος τῆς (1) εἶναι $y''=12x-30$. Εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον τῆς y'' διὰ $x=2$ καὶ διὰ $x=3$.

Διὰ $x=2$ εἶναι $y''=12.2-30=-6<0$· ἄρα ἡ συνάρτησις (1) ἔχει μέγιστον· τὸ μέγιστον εἶναι ἴσον μὲ

$$2.2^3-15.2^2+36.2+10=16-60+72+10=38.$$

Διὰ $x=3$ εἶναι $y''=12.3-30=+6>0$· ἄρα ἡ συνάρτησις (1) ἔχει ***ἐλάχιστον***, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον μὲ

$$2.3^3-15.3^2+36.3+10=54-135+108+10=37.$$

Ἀσκήσεις. 2788. Νὰ εὑρεθῇ διὰ τῶν παραγώγων τὸ μέγιστον ἢ τὸ ἐλάχιστον τῆς συναρτήσεως $y=x\ \ -7x+6$.

2789. Ὁμοίως τῆς συναρτήσεως $y=-3x^2-x+2=0$.

2790. Ὁμοίως τῆς συναρτήσεως $3x^3-9x^2-27x+30$.

2791. Ὁμοίως τῆς συναρτήσεως $2x^3-21x^2+36x-20$.

2792. Ὁμοίως τῆς συναρτήσεως $\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+1$.

2793. Ὁμοίως τῆς συναρτησεως $x^3-9x^2+15x-3$.

2794. Ὁμοίως τῆς συναρτήσεως $2x^3-3x^2-12x+4$.

ΑΛΗΘΗΣ ΤΙΜΗ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ $\frac{\sigma(x)}{\varphi(x)}$

753. Κανὼν τοῦ Hopital. ***Ἡ ἀληθὴς τιμὴ ἑνὸς κλάσματος*** $\frac{\sigma(x)}{\varphi(x)}$, ***τὸ ὁποῖον λαμβάνει τὴν ἀπροσδιόριστον μορφὴν*** $\frac{0}{0}$ ***διὰ*** $x=\alpha$, ***εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν ἀληθῆ τιμὴν τοῦ λόγου*** $\frac{\sigma'(x)}{\varphi'(x)}$ ***τῶν παραγώγων τῶν συναρτήσεων*** $\sigma(x)$ ***καὶ*** $\varphi(x)$ ***διὰ τὴν αὐτὴν τιμὴν*** $x=\alpha$.

Σημ. Ἐὰν ὁ λόγος $\frac{\sigma'(x)}{\varphi'(x)}$ λαμβάνῃ καὶ αὐτὸς τὴν μορφὴν $\frac{0}{0}$

διὰ $x=\alpha$, εὑρίσκομεν τὴν ἀληθῆ τιμὴν τοῦ λόγου $\frac{\sigma''(x)}{\varphi''(x)}$ διὰ $x=\alpha$.

754. Ἐφαρμογὴ τοῦ κανόνος. Παράδειγμα 1ον. ***Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀληθὴς τιμὴ τοῦ κλάσματος***

$$\frac{\sigma(x)}{\varphi(x)}=\frac{2x^3-4x^2-9x+18}{4x^2-3x-10} \quad \text{διὰ} \quad x=2.$$

Διὰ $x=2$ τὸ κλάσμα λαμβάνει τὴν μορφὴν $\frac{0}{0}$.

Κατὰ τὸν κανόνα τοῦ Hopital ἡ ἀληθὴς τιμὴ τοῦ δοθέντος κλάσματος εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀληθῆ τιμὴν τοῦ λόγου $\frac{\sigma'(x)}{\varphi'(x)}$ διὰ $x=2$.

Ἐδῶ εἶναι
$$\frac{\sigma'(x)}{\varphi'(x)}=\frac{6x^2-8x-9}{8x-3}. \tag{2}$$

Διὰ $x=2$ ὁ λόγος αὐτὸς γίνεται
$$\frac{\sigma'(x)}{\varphi')x)}=\frac{24-16-9}{16-3}=-\frac{1}{13}.$$

Ἄρα ἡ ἀληθὴς τιμὴ τοῦ κλάσματος
$$\frac{2x^3-4x^2-9x+18}{4x^2-3x-10} \quad \text{διὰ} \quad x=2 \quad \text{εἶναι} \quad -\frac{1}{13}.$$

755. Παράδειγμα 2ον. ***Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀληθὴς τιμὴ τοῦ κλάσματος***
$$\frac{\sigma(x)}{\varphi(x)}=\frac{4x^6-8x^3+4}{3x^4-4x^3+1} \quad \textit{διὰ} \quad x=1.$$

Διὰ $x=1$ εἶναι $\frac{\sigma(1)}{\varphi(1)}=\frac{4-8+4}{3-4+1}=\frac{0}{0}$.

Εὑρίσκομεν τὸν λόγον $\frac{\sigma'(x)}{\varphi'(x)}$. Ἐδῶ εἶναι
$$\frac{\sigma'(x)}{\varphi'(x)}=\frac{24x^5-24x^2}{12x^3-12x^2}.$$

Διὰ $x=1$ θὰ εἶναι $\frac{\sigma'(1)}{\varphi'(1)}=\frac{24-24}{12-12}=\frac{0}{0}$.

Ἐπειδὴ ὁ λόγος $\frac{\sigma'(x)}{\varphi'(x)}$ διὰ $x=1$ λαμβάνει τὴν ἀπροσδιόριστον μορφὴν $\frac{0}{0}$, εὑρίσκομεν τὸν λόγον $\frac{\sigma''(x)}{\varphi''(x)}$ διὰ $x=1$.

Ἐδῶ εἶναι
$$\frac{\sigma''(x)}{\varphi''(x)}=\frac{120x^4-48x}{36x^2-24x}.$$

Διὰ $x=1$ εἶναι $\frac{\sigma''(1)}{\varphi''(1)}=\frac{120-48}{36-24}=\frac{72}{12}=6$.

Ὥστε ἡ ἀληθὴς τιμὴ τοῦ κλάσματος $\frac{\sigma(x)}{\varphi(x)}=\frac{4x^6-8x^3+4}{3x^4-4x^3+1}$ διὰ $x=1$ εἶναι 6.

Ἀσκήσεις. *2795.* Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀληθὴς τιμὴ τοῦ κλάσματος

$$\frac{\sigma(x)}{\varphi(x)}=\frac{x^2+x-2}{x^2-1} \quad \text{διὰ} \quad x=1.$$

2796. Ὁμοίως τοῦ κλάσματος $\frac{\sigma(x)}{\varphi(x)}=\frac{x^2-16}{x^2+x-20}$ διὰ $x=4$.

2797. Ὁμοίως τοῦ κλάσματος $\frac{\sigma(x)}{\varphi(x)}=\frac{x^2-4}{3x-6}$ διὰ $x=2$.

2798. Ὁμοίως τοῦ κλάσματος $\frac{\sigma(x)}{\varphi(x)}=\frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$ διὰ $x=1$.

2799. Ὁμοίως τοῦ κλάσματος $\frac{\sigma(x)}{\varphi(x)}=\frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$ διὰ $x=2$.

2800. Ὁμοίως τοῦ κλάσματος $\frac{\sigma(x)}{\varphi(x)}=\frac{x^2-4x+4}{x^3-5x^2+8x-4}$ διὰ $x=2$.

2801. Ὁμοίως τοῦ κλάσματος $\frac{\sigma(x)}{\varphi(x)}=\frac{2x^4-4x^3+2}{2x^3+x^2-3x}$ διὰ $x=1$.

2802. Ὁμοίως τοῦ κλάσματος $\frac{\sigma(x)}{\varphi(x)}=\frac{x^3-7x^2+16x-12}{x^3-3x^2+4}$ διὰ $x=2$.

2803. Ὁμοίως τοῦ κλάσματος $\frac{\sigma(x)}{\varphi(x)}=\frac{3x^2-12x+12}{2x^3-9x^2+12x-4}$ διὰ $x=2$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ ΕΙΣ ΤΗΝ ΜΗΧΑΝΙΚΗΝ

756. Γνωρίζομεν ἀπὸ τὴν Φυσικὴν (Μηχανικήν), ὅτι :

1ον. Ἡ ***ταχύτης*** v ***ἑνὸς κινητοῦ*** κατά τινα στιγμὴν t εἶναι ἡ ***παράγωγος τοῦ διαστήματος*** ὡς πρὸς τὸν χρόνον t.

2ον. Ἡ ***ἐπιτάχυνσις*** γ ***ἑνὸς κινητοῦ*** εἶναι ἴση μὲ τὴν ***παράγωγον τῆς ταχύτητος*** ὡς πρὸς τὸν χρόνον· δηλ. ἡ ἐπιτάχυνσις εἶναι ἴση μὲ τὴν ***δευτέραν παράγωγον τοῦ διαστήματος***.

Παράδειγμα. Ἔστω $s=4t^2-6t+1$ ἡ ἐξίσωσις ἑνὸς κινητοῦ.
Ἡ ταχύτης v τοῦ κινητοῦ εἶναι

$$v=(4t^2-6t+1)'$$
$$=8t-6. \qquad (1)$$

Ἡ ἐπιτάχυνσίς του γ εἶναι

$$\gamma=v'=(8t-6)'=8.$$

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ταχύτητα ἑνὸς κινητοῦ εἰς τὸ τέλος τοῦ 3 δευτερολέπτου ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (1) τὸ t μὲ 3 καὶ ἔχομεν

$v=8.3-6=18$ μέτρα κατὰ δευτερόλεπτον.

Ἀσκήσεις. *2804.* Δίδονται αἱ κάτωθι ἐξισώσεις τῆς εὐθ. κινήσεως καὶ ζητεῖται νὰ ὑπολογισθοῦν : τὸ διανυθὲν διάστημα, ἡ ταχύτης καὶ ἡ ἐπιτάχυνσις κατὰ τὴν ἀναφερομένην στιγμὴν

1. $s=t^3+2t^2$, ἐὰν $t=2$ δευτερόλεπτα
2. $s=t^2+2t$, ἐὰν $t=3$ δευτερόλεπτα

3. $s=2t^2-5t+1$, ἐὰν $t=5$ δευτερόλεπτα
4. $s=4t^2-6t+1$, ἐὰν $t=2$ δευτερόλεπτα
5. $s=3-4t$, ἐὰν $t=4$ δευτερόλεπτα
6. $s=2t-t^2$, ἐὰν $t=1$ δευτερόλεπτα

2805. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιτάχυνσις ἑνὸς κινητοῦ, ἐὰν γνωρίζωμεν ὅτι :

1. $v=t^2+2t$, ἐὰν $t=3$
2. $v=3t^2-t^3$, ἐὰν $t=2$.

2806. Μετὰ t δευτερόλεπτα ἕνα κινητὸν ἔχει ταχύτητα $3t^2+2t$ μέτρα κατὰ δευτερόλεπτον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιτάχυνσις : 1ον. Γενικῶς. 2ον. Εἰς τὸ τέλος τῶν 4 δευτερολέπτων.

ΣΠΟΥΔΗ ΤΩΝ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ $y=\sigma(x)$ ΜΕ ΤΗΝ ΒΟΗΘΕΙΑΝ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

757. Διὰ νὰ σπουδάσωμεν τὴν μεταβολὴν μιᾶς συναρτήσεως $y=\sigma(x)$ μὲ τὴν βοήθειαν τῶν παραγώγων ἀκολουθοῦμεν τὴν κάτωθι πορείαν :

1ον. Καθορίζομεν τὰ διαστήματα, εἰς τὰ ὁποῖα ἡ συνάρτησις εἶναι **ὡρισμένη καὶ συνεχής.**

2ον. Εὑρίσκομεν τὴν παράγωγον **τῆς** συναρτήσεως $y=\sigma(x)$.

3ον. Ἐξισώνομεν τὴν πρώτην **παράγωγον** τῆς συναρτήσεως μὲ τὸ μηδὲν καὶ εὑρίσκομεν τὰς πραγματικὰς ρίζας τῆς προκυπτούσης ἐξισώσεως.

4ον. **Θέτομεν κατὰ τὴν φυσικήν των σειρὰν τὰς ἰδιαιτέρας τιμὰς τῆς x, δηλ. τὰς τιμὰς $\mp\infty$ καὶ ἐκείνας, αἵ ὁποῖαι μηδενίζουν τὴν παράγωγον. Οὕτω τὰ εὑρεθέντα ἀρχικῶς διαστήματα χωρίζονται εἰς διάφορα διαστήματα.**

5ον. **Ὁρίζομεν τὸ** σημεῖον **τῆς παραγώγου εἰς ἕκαστον τῶν διαστημάτων αὐτῶν.** Τὸ σημεῖον **τῆς** παραγώγου δεικνύει **τὴν** φορὰν **τῆς μεταβολῆς τῆς** συναρτήσεως.

6ον. Εὑρίσκομεν τὰ **μέγιστα καὶ ἐλάχιστα** τῆς συναρτήσεως.

7ον. **Ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν** τί γίνεται **ἡ** συνάρτησις, **ὅταν ἡ μεταβλητὴ τείνῃ πρὸς τὰ** ὅρια τῶν διαστημάτων. **Ὅταν τοῦτο εἶναι δυνατόν, ὑπολογίζομεν τὰς τιμάς, διὰ τὰς ὁποίας ἡ** συνάρτησις **μηδενίζεται.**

8ον. Σχηματίζομεν **ἕνα πίνακα,** ὁ ὁποῖος συνοψίζει **τὰ** διάφορα **αὐτὰ ἐξαγόμενα.**

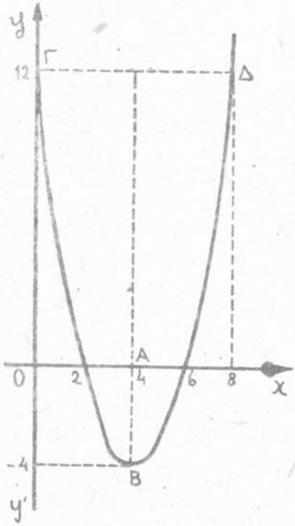
9ον. Κατασκευάζομεν **τὴν** καμπύλην, **τὴν** ὁποίαν **παριστᾷ ἡ συνάρτησις.**

758. Παράδειγμα. ***Νὰ σπουδασθῇ ἡ μεταβολὴ τῆς συναρτήσεως*** $y=x^2-8x+12$.

1ον. Ἡ δοθεῖσα συνάρτησις εἶναι ὡρισμένη καὶ συνεχὴς διὰ κάθε τιμὴν τῆς μεταβλητῆς x.

2ον. Ἡ παράγωγος τῆς δοθείσης συναρτήσεως εἶναι

$$y'=2x-8.$$



Σχ. 32

3ον. Θέτομεν $y'=0$, δηλ. $2x-8=0$ καὶ εὑρίσκομεν $x=4$.

4ον. Ἡ τιμὴ $x=4$ χωρίζει τὸ διάστημα $(-\infty, +\infty)$ εἰς τὰ διαστήματα

$$(-\infty, 4) \quad \text{καὶ} \quad (4, +\infty)\text{·}$$

ἔχομεν λοιπὸν τὸ διάστημα

$$-\infty \ldots\ldots\ldots 4 \ldots\ldots\ldots +\infty$$

5ον. Ἡ παράγωγος y' εἶναι θετική, δηλ. εἶναι $2x-8>0$ διὰ $x>4$ καὶ ἀρνητικὴ διὰ $x<4$. Ὥστε εἰς τὸ διάστημα $(-\infty, 4)$ ἡ παράγωγος εἶναι ἀρνητικὴ καὶ ἑπομένως ἡ συνάρτησις y εἶναι φθίνουσα.

Εἰς τὸ δεύτερον διάστημα $(4, +\infty)$ ἡ παράγωγος εἶναι θετικὴ καὶ ἑπομένως ἡ συνάρτησις y εἶναι αὔξουσα.

6ον. Ἡ δευτέρα παράγωγος τῆς συναρτήσεως y εἶναι $y''=2$· δηλ. εἶναι $y''>0$. Ἐπειδὴ ἡ δευτέρα παράγωγος τῆς συναρτήσεως y εἶναι θετικὴ ἕπεται, ὅτι ἡ συνάρτησις $y=x^2-8x+12$ ἔχει ἐλάχιστον διὰ $x=4$· τὸ ἐλάχιστον εἶναι ἐλάχιστον

$$y=4^2-8.4+12=-4.$$

7ον. Διὰ $x=\pm\infty$, ἡ συνάρτησις y γίνεται $+\infty$. Διὰ $x=4$ ἡ παράγωγος εἶναι μηδὲν καὶ ἡ συνάρτησις y παρουσιάζει, ὅπως εἴδομεν ἕνα ἐλάχιστον ἴσον μὲ $y=-4$.

8ον. Ὁ κάτωθι πίναξ συνοψίζει τὴν μεταβολὴν τῆς συναρτήσεως

$$y=x^2-8x+12.$$

x	$-\infty$ . . .	. . . . . .	4	. . . .	$+\infty$
y′		$-$	0	$+$	
y″			$+$		
y	$+\infty$	ἐλατ.	-4 (ἐλάχιστον)	αὔξ.	$+\infty$

9ον. Ἡ καμπύλη, τὴν ὁποίαν παριστᾷ ἡ συνάρτησις $y=x^2-8x+12$ εἶναι ἡ ΓΒΔ (Σχ. 32).

Ἀσκήσεις. *2807.* Νὰ σπουδασθῇ ἡ μεταβολὴ τῆς συναρτήσεως

$$y=x^2-4x+3.$$

2808. Ὁμοίως τῆς συναρτήσεως $y=x^2+3x+2$.

2809. Ὁμοίως τῆς συναρτήσεως $y=\frac{2x^3-3x^2+1}{2}$.

2810. Ὁμοίως τῆς συναρτήσεως $y=x^4-8x^2+10$.

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΝ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

759. **Διαφορικὸν μιᾶς συναρτήσεως.** Ἔστω ἡ συνεχὴς συνάρτησις $y=\sigma(x)$. Ἐὰν δώσωμεν εἰς τὴν ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν x μίαν ἐλαχίστην αὔξησιν Δx, ἡ συνάρτησις y θὰ λάβῃ μίαν ἀντίστοιχον αὔξησιν Δy.

Γνωρίζομεν, ὅτι, ὅταν ἡ αὔξησις Δx τείνῃ εἰς τὸ μηδέν, τότε καὶ ἡ Δy τείνει πρὸς τὸ μηδὲν καὶ ὅτι ὁ λόγος $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ τείνει πρὸς ἕνα ὅριον, τὸ ὁποῖον ἐκαλέσαμεν παράγωγον τῆς συναρτήσεως y καὶ παρεστήσαμεν διὰ y'. Δηλ, εἶναι $\text{ορ}\,\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'$. (1)

Ἀπὸ τὴν ἰσότητα αὐτὴν συνάγομεν, ὅτι τὸ ὅριον τοῦ πηλίκου $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ εἶναι τὸ y', δηλ. τὸ πηλίκον $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ πλησιάζει πρὸς τὸ y' τόσον, ὅσον θέλομεν· δηλ. τὸ πηλίκον αὐτὸ διαφέρει τοῦ y' κατὰ μίαν ἐλαχίστην ποσότητα ε, θετικὴν ἢ ἀρνητικὴν καὶ τόσον μικράν, ὅσον θέλομεν. Θὰ εἶναι λοιπὸν $\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'+\varepsilon$. (2)

ὅταν τὸ Δx καὶ ε τείνουν πρὸς τὸ μηδέν.

Ἀπὸ τὴν (2) λαμβάνομεν

$$\Delta y=y'\,.\,\Delta x+\varepsilon\Delta x.$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ αὔξησις Δy τῆς συναρτήσεως y ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ γινόμενον τῆς παραγώγου y' ἐπὶ Δx καὶ ἀπὸ τὸ γινόμενον τῆς αὐξήσεως Δx ἐπὶ ἕνα ἀριθμὸν ε, ὁ ὁποῖος ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν αὔξησιν Δx καὶ ἔχει ὅριον τὸ μηδέν, ὅταν $\text{ορ}\Delta x=0$.

Τὸ γινόμενον $y'.\Delta x$, ***δηλ. τὸ γινόμενον τῆς παραγώγου μιᾶς συναρτήσεως ἐπὶ τὴν αὔξησιν*** Δx ***τῆς μεταβλητῆς*** x ***λέγεται διαφορικὸν τῆς συναρτήσεως.***

Τὸ διαφορικὸν μιᾶς συναρτήσεως y παρίσταται μὲ τὸ σύμβολον dy· ὥστε ἐξ ὁρισμοῦ ἔχομεν

$$dy=y'\Delta x. \qquad (3)$$

760. **Διαφορικὸν τῆς μεταβλητῆς x.** Ἔστω ἡ συνάρτησις

$y=x$. Ἡ παράγωγος τῆς x εἶναι 1 καὶ ἐπομένως τὸ διαφορικὸν τῆς x εἶναι $1\times\Delta x=\Delta x$. Θὰ εἶναι λοιπὸν $dx=\Delta x$.

Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν (3) τὸ Δx μὲ dx θὰ εἶναι

$$\boxed{dy=y'dx} \quad ἢ \quad \boxed{d\sigma(x)=\sigma'(x)dx} \qquad (4)$$

Παρατήρησις. Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (4) λαμβάνομεν

$$y'=\frac{dy}{dx} \quad ἢ \quad \sigma'(x)=\frac{d\sigma(x)}{dx}.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι : ***ἡ παράγωγος μιᾶς συναρτήσεως εἶναι ἴση μὲ τὸ πηλίκον τοῦ διαφορικοῦ τῆς συναρτήσεως διὰ τοῦ διαφορικοῦ τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς.***

Διὰ τοῦτο ἡ παράγωγος y' μιᾶς συναρτήσεως y δύναται νὰ παρασταθῇ καὶ μὲ τὸ σύμβολον $\dfrac{dy}{dx}$.

761. Παραδείγματα. ***1ον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ διαφορικὸν τῆς συναρτήσεως*** $y=3x^4$.

Ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως y εἶναι $12x^3$· ἄρα τό διαφορικὸν τῆς y εἶναι $dy=12x^3.dx$.

2ον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ διαφορικὸν τῆς συναρτήσεως $y=ημx$.

Ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως y εἶναι συνx· ἄρα τὸ διαφορικὸν τῆς y εἶναι $dy=συνx\,dx$.

Ἀσκήσεις. 2811. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ διαφορικὸν τῶν κάτωθι συναρτήσεων :
1. $y=5x^2$, 2. $y=2x^3+5x^2$, 3. $y=4x^3-5x^2+1$

2812. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ διαφορικὸν τῶν συναρτήσεων :
1. $y=\dfrac{2x}{x-1}$, 2. $y=\dfrac{x^3}{(1+x)^2}$, 3. $y=\dfrac{\alpha+x}{\alpha-x}$.

2813. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ διαφορικὸν τῶν συναρτήσεων :
1. $y=\sqrt{3\alpha x}$, 2. $y=\dfrac{\alpha}{\beta}\sqrt{\alpha^2-x^2}$, 3. $y=\sqrt{x^2-4x+1}$.

2814. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ διαφορικὸν τῶν συναρτήσεων :
1. $y=συνx$, 2. $y=εφx$, 3. $y=σφx$.

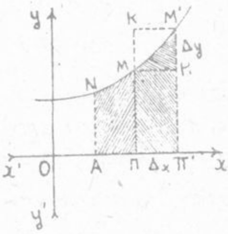
2815. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ διαφορικὸν τῶν συναρτήσεων :
1. $y=ημ(\alpha x^2)$, 2. $y=τεμ(\alpha x)$, 3. $y=συν(3\alpha x)$.

762. Παράγωγος καὶ διαφορικὸν ἐμβαδοῦ. Ἔστω μία συνεχὴς συνάρτησις $y=\sigma(x)$ τῆς μεταβλητῆς x. Κατασκευάζομεν, κατὰ τὰ γνωστὰ τὴν καμπύλην, τὴν ὁποίαν παριστᾷ ἡ συνάρτησις αὕτη. Ἐπὶ τῆς καμπύλης αὐτῆς λαμβάνομεν δύο τυχόντα σημεῖα Ν καὶ Μ καὶ φέρομεν τὰς καθέτους ΝΑ καὶ ΜΠ ἐπὶ τόν ἄξονα Οx. Θεωροῦμεν, ὅτι τὸ σημεῖον Ν εἶναι ὡρισμένον ἐπὶ τῆς καμπύλης, τὸ δὲ Μ, ὅτι κινεῖται ἐπ' αὐτῆς.

Ἔστωσαν $\overline{ΟΑ}=\alpha$ ἡ τετμημένη τοῦ Ν, $\overline{ΟΠ}=x$ ἡ τετμημένη τοῦ σημείου Μ καὶ Ε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μεικτογράμμου σχήματος ΑΠΜΝ, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἀπὸ τὴν καμπύλην ΝΜ τὰς καθέτους ΝΑ καὶ ΜΠ καὶ ἀπὸ τὸν ἄξονα Οx.

Εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ Ε ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν θέσιν τῆς μεταβλητῆς καθέτου ΜΠ. Ἀλλὰ ἡ θέσις τῆς ΜΠ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν τετμημένην $\overline{\text{ΟΠ}}=x$.

Ὥστε τὸ Ε εἶναι συνάρτησις τῆς μεταβλητῆς x, τὴν ὁποίαν παριστῶμεν διὰ Ε(x). Θὰ ζητήσωμεν τώρα νὰ εὕρωμεν τὴν παράγωγον τῆς συναρτήσεως Ε(x). Πρὸς τοῦτο δίδομεν εἰς τὴν x μίαν αὔξησιν $\Delta x=\overline{\text{ΠΠ}'}$.



Σχ. 33

Ἀλλὰ τότε ἡ κάθετος ΠΜ ἔρχεται εἰς τὴν θέσιν Π′Μ′, ἡ τεταγμένη $\overline{\text{ΠΜ}}$ λαμβάνει μίαν αὔξησιν $\overline{\text{ΗΜ}'}=\Delta y$ καὶ τὸ ἐμβαδὸν λαμβάνει μίαν ἀντίστοιχον αὔξησιν, τὴν ὁποίαν παριστάνομεν μὲ ΔΕ· δηλ. θὰ εἶναι ΔΕ=ΠΠ′Μ′Μ.

Ἀπὸ τὸ σημεῖον Μ′ φέρομεν τὴν Μ′Κ παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα Οx, ἡ ὁποία τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς ΠΜ εἰς τὸ σημεῖον Κ.

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ αὔξησις ΔΕ τοῦ ἐμβαδοῦ περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν ἐμβαδῶν τῶν ὀρθογωνίων ΠΠ′ΗΜ καὶ ΠΠ′Μ′Κ καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι

$$\text{ΠΜ}\times\text{ΠΠ}' < \Delta\text{Ε} < \text{Π}'\text{Μ}'\times\text{ΠΠ}' \quad \text{ἢ} \quad y\,.\,\Delta x<\Delta\text{Ε}<(y+\Delta y)\Delta x \qquad (1)$$

Διαιροῦμεν τὰ μέλη τῆς σχέσεως (1) διὰ Δx, τὸ ὁποῖον θεωροῦμεν ὡς θετικὸν καὶ ἔχομεν
$$y<\frac{\Delta\text{Ε}}{\Delta x}<y+\Delta y. \qquad (2)$$

Ὅταν ἡ αὔξησις Δx τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν, ἡ τεταγμένη y+Δy τοῦ σημείου Μ′ τείνῃ πρὸς τὴν y καὶ ὁ λόγος $\frac{\Delta\text{Ε}}{\Delta x}$, ὁ ὁποῖος εἶναι ὑποχρεωμένος νὰ περιέχηται μεταξὺ τοῦ y καὶ τῆς ποσότητος y+Δy, ποὺ τείνῃ πάλιν εἰς τὸ y, θὰ τείνῃ πρὸς τὸ y.

Ἀλλὰ τὸ ὅριον τοῦ λόγου $\frac{\Delta\text{Ε}}{\Delta x}$, ὅταν τὸ Δx τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν, εἶναι ἡ παράγωγος Ε′(x) τῆς συναρτήσεως y=E(x)· θὰ εἶναι λοιπὸν
$$E'(x)=y=\varphi(x). \qquad (3)$$

Δηλ. εἶναι $\boxed{\mathbf{E'=y}}$ ἢ $\boxed{\mathbf{E'dx=ydx}}$

Ἐπειδὴ (§ 760) $E'(x)=\frac{dE(x)}{dx}$, ἡ (3) γίνεται

$$\frac{dE(x)}{dx}=y \quad \text{ἢ} \quad \boxed{\mathbf{dE(x)=ydx}}$$

Ὥστε : ***Τὸ διαφορικὸν τοῦ ἐμβαδοῦ μιᾶς ἐπιφανείας περιεχομένης ὑπὸ τῆς καμπύλης* y=σ(x), *ὑπὸ τοῦ ἄξονος* x′Οx *τῶν***

τετμημένων καὶ ὑπὸ δύο τεταγμένων τῆς καμπύλης, εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς συναρτήσεως $y=\sigma(x)$ ***ἐπὶ τὸ διαφορικὸν*** dx ***τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς*** x.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΒ'.

ΑΡΧΙΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

763. **Ἀρχικὴ συνάρτησις.** Ἔστωσαν ἡ συνάρτησις $\Phi(x)$ καὶ μία ἄλλη συνάρτησις $\Phi(x)+C$, ἡ ὁποία προκύπτει ἀπὸ τὴν πρώτην, ἐὰν προσθέσωμεν εἰς αὐτὴν μίαν τυχοῦσαν ἀλγεβρικὴν σταθερὰν C. Αἱ δύο αὐταὶ συναρτήσεις ἔχουν τὰς αὐτὰς παραγώγους $\Phi'(x)$.

Ὥστε : ***Ἐὰν δύο συναρτήσεις τῆς*** x ***διαφέρουν κατὰ μίαν σταθεράν, αἱ παράγωγοι τῶν δύο αὐτῶν συναρτήσεων εἶναι αἱ αὐταί.***

Ἀντιστρόφως : ***Ἐὰν δύο συναρτήσεις ἔχουν τὰς αὐτὰς παραγώγους, αἱ συναρτήσεις αὐταὶ διαφέρουν κατὰ μίαν σταθεράν.***

Πράγματι· ἔστωσαν αἱ συναρτήσεις $F(x)$ καὶ $\Sigma(x)$, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ὡς παραγώγους τὰς $F'(x)$ καὶ $\Sigma'(x)$ ἀντιστοίχως· ἡ διαφορά των

$$\varphi(x)=F(x)-\Sigma(x)$$

ἔχει ὡς παράγωγον τὴν $F'(x)-\Sigma'(x)$, ἡ ὁποία εἶναι ἴση μὲ τὸ μηδέν, διότι ἐξ ὑποθέσεως αἱ παράγωγοι $F'(x)$ καὶ $\Sigma'(x)$ εἶναι ἴσαι· ἄρα (§ 745) ἡ συνάρτησις $\varphi(x)$ εἶναι μία σταθερά.

Π. χ. Αἱ συναρτήσεις $2x^4$ καὶ $2x^4+5$ ἔχουν τὴν αὐτὴν παράγωγον $8x^3$.

Αἱ συναρτήσεις $2x^4$ καὶ $2x^4+5$ λέγονται ***ἀρχικαὶ συναρτήσεις ἢ παράγουσαι*** τῆς συναρτήσεως $8x^3$.

Ὁμοίως αἱ συναρτήσεις x^3 καὶ x^3-8 ἔχουν τὴν αὐτὴν παράγωγον $3x^2$. Αἱ συναρτήσεις x^3 καὶ x^3-8 εἶναι ἀρχικαὶ συναρτήσεις ἢ παράγουσαι τῆς $3x^2$.

Ὥστε : ***Ἀρχικὴ συνάρτησις δοθείσης συναρτήσεως*** $\varphi(x)$ ***ἢ παράγουσα τῆς*** $\varphi(x)$, ***λέγεται μία ἄλλη συνάρτησις*** $\Phi(x)$, ***ἡ ὁποία ἔχει ὡς παράγωγον τὴν*** $\varphi(x)$.

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω, ἐὰν μία συνάρτησις $\Phi(x)$ εἶναι μία ἀρχικὴ μιᾶς δοθείσης συναρτήσεως $\varphi(x)$, κάθε συνάρτησις, ἡ ὁποία προκύπτει ἀπὸ τὴν $\Phi(x)$, ἐὰν προσθέσωμεν εἰς αὐτὴν μίαν τυχοῦσαν ἀλγεβρικὴν σταθερὰν C, εἶναι ἐπίσης μία ἀρχικὴ τῆς $\varphi(x)$· ὥστε ἡ ***γενικὴ μορφὴ*** τῶν ἀρχικῶν συναρτήσεων μιᾶς δοθείσης συναρτήσεως $\varphi(x)$ εἶναι

$$\Phi(x)+C.$$

ὅπου $\Phi(x)$· παριστάνει τὴν μίαν ἐξ αὐτῶν καὶ C μίαν τυχοῦσαν ἀλγεβρικὴν σταθεράν.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς ἀρχικῆς συναρτήσεως μιᾶς δοθείσης συναρτήσεως, ἡ $\Phi(x)$ θὰ εἶναι μία ἀρχικὴ συνάρτησις τῆς δοθείσης συναρτήσεως $\varphi(x)$, ἐὰν εἶναι $\Phi'(x)+C=\varphi(x)$. Ὥστε

$$\boxed{\Phi(x) = \text{ἀρχικὴ τῆς } \varphi(x), \quad \text{ἐὰν} \quad \Phi'(x)+C=\varphi(x)}$$

764. Ἀναζήτησις τῶν ἀρχικῶν συναρτήσεων. Ἡ εὕρεσις τῶν ἀρχικῶν συναρτήσεων, δηλ. τῶν συναρτήσεων, αἱ ὁποῖαι ἔχουν δοθεῖσαν παράγωγον, δὲν εἶναι εὔκολον πρᾶγμα. Δὲν ὑπάρχουν ὡρισμένοι κανόνες, ὅπως διὰ τὴν εὕρεσιν τῶν παραγώγων, οἱ ὁποῖοι νὰ μᾶς δίδουν τὰς ἀρχικὰς συναρτήσεις των, ὅταν μᾶς δίδονται αἱ παράγωγοί των.

Κατὰ τὴν ἀναζήτησιν τῶν ἀρχικῶν συναρτήσεων πρέπει νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψει τὰ κατωτέρω δύο θεωρήματα:

765. Θεώρημα. ***Ἡ ἀρχικὴ ἑνὸς ἀθροίσματος συναρτήσεων εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀρχικῶν των.***

Ἔστω τὸ ἄθροισμα

$$y=\sigma_1(x)+\sigma_2(x)+\sigma_3(x) \qquad (1)$$

τῶν τριῶν συναρτήσεων $\sigma_1(x)$, $\sigma_2(x)$, $\sigma_3(x)$, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἐξ ὑποθέσεως ὡς ἀρχικάς τὰς $\Sigma_1(x)$, $\Sigma_2(x)$, $\Sigma_3(x)$· δηλ. ἐξ ὑποθέσεως εἶναι

$$\Sigma_1'(x)=\sigma_1(x), \qquad \Sigma_2'(x)=\sigma_2(x) \quad \text{καὶ} \quad \Sigma_3'(x)=\sigma_3(x).$$

Τὸ ἄθροισμα

$$\Sigma=\Sigma_1(x)+\Sigma_2(x)+\Sigma_3(x)$$

ἔχει ὡς παράγωγον τὸ

$$\Sigma'=\Sigma_1'(x)+\Sigma_2'(x)+\Sigma_3'(x)$$

ἢ

$$\Sigma'=\sigma_1(x)+\sigma_2(x)+\sigma_3(x). \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι ἡ Σ εἶναι μία ἀρχικὴ τῆς y.

Κατὰ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα ἡ γενικὴ μορφὴ τῶν ἀρχικῶν τοῦ ἀθροίσματος $\varphi(x)+\sigma(x)$. εἶναι τὸ ἄθροισμα $\Phi(x)+\Sigma(x)+C$.

Π.χ. Αἱ ἀρχικαὶ τῶν $12x^2$, $-10x$ καὶ 3 εἶναι ἀντιστοίχως αἱ $4x^3+C$, $-5x^2+C$, $3x+C$. Ἑπομένως ἡ ἀρχικὴ τῆς

$$12x^2-10x+3 \quad \text{εἶναι ἡ} \quad 4x^3-5x^2+3x+C.$$

766. Θεώρημα ΙΙ. ***Τὸ γινόμενον μιᾶς συναρτήσεως ἐπὶ μίαν σταθεράν, ἔχει ὡς ἀρχικὴν τὸ γινόμενον τῆς σταθερᾶς αὐτῆς ἐπὶ τὴν ἀρχικὴν τῆς συναρτήσεως.***

Ἔστω τὸ γινόμενον $y=\alpha\varphi(x)$ (1)

ὅπου α εἶναι μία τυχοῦσα σταθερὰ καὶ $\varphi(x)$ μία δοθεῖσα συνάρτησις, τῆς ὁποίας ἡ ἀρχικὴ εἶναι ἡ $\Phi(x)$.

Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $\Phi'(x)=\varphi(x)$.

Τὸ γινόμενον $\Sigma=\alpha\,.\,\Phi(x)$.

ἔχει ὡς παράγωγον τὴν $\Sigma'=\alpha\,.\,\Phi'(x)$

ἢ $\Sigma'=\alpha\,.\,\varphi(x)$.

Ἀπὸ τὴν ἰσότητα αὐτὴν συνάγομεν, ὅτι ἡ Σ εἶναι ἀρχικὴ τῆς $\alpha\,.\,\varphi(x)$.

Γενικῶς κατὰ τὴν ἀναζήτησιν τῶν ἀρχικῶν συναρτήσεων πρέπει νὰ θέτωμεν πρὸς λύσιν τὸ ἀκόλουθον πρόβλημα:

Ποία εἶναι ἡ συνάρτησις, ἡ ὁποία, ὅταν λάβωμεν τὴν παράγωγόν της, θὰ μᾶς δώσῃ ὡς ἐξαγόμενον τὴν δοθεῖσαν συνάρτησιν.

Κατωτέρω θὰ εὕρωμεν ἀρχικὰς μερικῶν ἁπλῶν συναρτήσεων:

767. **Ἀρχικὴ μιᾶς σταθερᾶς** Ἡ ἀρχικὴ μιᾶς σταθερᾶς α εἶναι ἡ $\alpha x+C$, διότι ἡ παράγωγος τῆς $\alpha x+C$ εἶναι α.

768. **Ἀρχικαὶ τῶν συναρτήσεων x^μ καὶ αx^μ.** Ἡ ἀρχικὴ τῆς x^μ, ὅπου μ εἶναι ἕνας ἀκέραιος καὶ θετικός ἀριθμός, εἶναι ἡ $\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C$, διότι ἡ παράγωγος αὐτῆς εἶναι ἡ $\frac{(\mu+1)x^\mu}{\mu+1}$ δηλ. ἡ x^μ.

Ἡ ἀρχικὴ τῆς συναρτήσεως αx^μ εἶναι ἡ $\frac{\alpha x^{\mu+1}}{\mu+1}+C$.

Π. χ. Ἡ ἀρχικὴ τῆς x^4 εἶναι ἡ $\frac{x^5}{5}$, ἡ δὲ ἀρχικὴ τῆς $8x^4$ εἶναι ἡ $\frac{8x^5}{5}$.

769. **Ἀρχικὴ ἑνὸς πολυωνύμου.** Ἡ ἀρχικὴ ἑνὸς πολυωνύμου εἶναι ἴση μὲ τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν ἀρχικῶν τῶν ὅρων του (§ 765), οἱ ὁποῖοι ὅροι εἶναι τῆς μορφῆς α, αx, $\alpha x^2, \ldots, \alpha x^\mu$, ὅπου α εἶναι μία σταθερά, θετικὴ ἢ ἀρνητική.

Π. χ. ἡ ἀρχικὴ τοῦ πολυωνύμου x^3-4x^2+5x-8 εἶναι

$$\frac{x^4}{4}-\frac{4x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}-8x+C.$$

770. **Ὁ κάτωθι πίναξ περιέχει τὰς ἀρχικὰς μερικῶν συναρτήσεων.**

	Συναρτήσεις	Ἀρχικαὶ
1.	$y=0$	C
2.	$y=1$	$x+C$
3.	$y=\alpha$	$\alpha x+C$
4.	$y=x^\mu$	$\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C$
5.	$y=\alpha x^\mu$	$\frac{\alpha x^{\mu+1}}{\mu+1}+C$
6.	$y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$	$\frac{\alpha x^3}{3}+\frac{\beta x^2}{2}+\gamma x+C$
7.	$y=\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+C$
8.	$y=\sigma\upsilon\nu x$	$\eta\mu x+C$
9.	$y=\eta\mu x$	$-\sigma\upsilon\nu x+C$
10.	$y=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$	$\varepsilon\varphi x+C$
11.	$y=\frac{1}{\eta\mu^2 x}$	$\sigma\varphi x+C$

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

771. Ὁλοκλήρωμα. Ἔστω ἡ συνάρτησις $5x^4$. Ἡ παράγωγός της εἶναι $20x^3$ καὶ τὸ διαφορικόν της εἶναι $20x^3dx$. Γνωρίζομεν (§ 763) ὅτι $5x^4$ λέγεται ἀρχικὴ συνάρτησις ἢ παράγουσα τῆς συναρτήσεως $20x^3$.

Ἡ συνάρτησις $5x^4$ λέγεται καὶ ***ἀόριστον ὁλοκλήρωμα*** τοῦ διαφορικοῦ $20x^3dx$ καὶ παρίσταται μὲ τὸ σύμβολον $\int 20x^3dx$·

δηλαδὴ εἶναι $\int 20x^3dx = 5x^4$.

Ὁμοίως θὰ εἶναι $\int x^5dx = \frac{x^6}{6}$, διότι ἡ παράγωγος τῆς $\frac{x^6}{6}$ εἶναι ἡ x^5.

Γενικῶς: Ἔστω $\sigma(x)$ μία συνάρτησις, $\sigma'(x)$ ἡ παράγωγός της καὶ $\sigma'(x)dx$ τὸ διαφορικόν της. Ἡ $\sigma(x)$ εἶναι ἡ ἀρχική, ἢ ἡ παράγουσα ἢ τὸ ***ἀόριστον ὁλοκλήρωμα*** τοῦ διαφορικοῦ $\sigma'(x)dx$ καὶ παρίσταται μὲ τὸ σύμβολον $\int \sigma'(x)dx$· δηλ. εἶναι $\int \sigma'(x)dx = \sigma(x)$.

Ὥστε : ***Ἀόριστον ὁλοκλήρωμα τοῦ*** $\sigma'(x)dx$, ***λέγεται μία οἱαδήποτε συνάρτησις*** $\sigma(x)$, ***ἡ ὁποία ἔχει διαφορικὸν τὸ*** $\sigma'(x)dx$ ***ἢ παράγωγον τὴν*** $\sigma'(x)$.

Ἐπειδὴ δύο συναρτήσεις, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἴσας παραγώγους, διαφέρουν κατὰ σταθερὰν ποσότητα C (§ 763) ἕπεται, ὅτι, ἐὰν εἶναι

$\int \sigma'(x)dx = \sigma(x)$ (1) θὰ εἶναι καὶ $\int \sigma'(x)dx = \sigma(x) + C$. (2)

Π.χ. Ἐπειδὴ ἡ συνάρτησις $3x^2$ ἔχει παράγωγον τὴν $6x$ καὶ διαφορικὸν τὸ $6xdx$ θὰ εἶναι

$$\int 6xdx = 3x^2 + C.$$

Εἴδομεν ἀνωτέρω, ὅτι $\int \sigma'(x)dx = \sigma(x)$

ἄρα θὰ εἶναι καὶ $$d\int \sigma'(x)dx = d\sigma(x). \quad (3)$$

Ἐπειδὴ (§ 760) $d\sigma(x) = \sigma'(x)dx$, ἡ (3) γίνεται

$$d\int \sigma'(x)dx = \sigma'(x)dx. \quad (4)$$

Ἐὰν θέσωμεν $\sigma'(x) = \varphi(x)$, ἡ (4) γράφεται

$$\boxed{d\int \varphi(x)dx = \varphi(x)dx}$$

Ἀπὸ τὴν ἰσότητα αὐτὴν συνάγομεν, ὅτι :

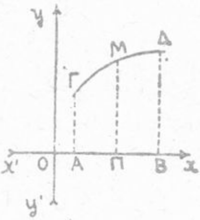
Ἡ παράγωγος ὁλοκληρώματος, ὡς πρὸς τὴν ἀνεξάρτητον μεταβλητήν, εἶναι ἴση μὲ τὴν ὑπὸ τὸ ὁλοκλήρωμα συνάρτησιν.

Ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω πρότασιν συνάγομεν, ὅτι :

Ἡ ὁλοκλήρωσις καὶ ἡ διαφόρησις εἶναι δύο πράξεις ἀντίστροφοι.

Ἑπομένως ἀπὸ κάθε κανόνα διαφορίσεως προκύπτει ἀντίστοιχος κανὼν ὁλοκληρώσεως καὶ ἀντιστρόφως· πρέπει ὅμως κατὰ τὴν ὁλοκλήρωσιν νὰ προσθέτωμεν τὴν σταθερὰν C.

772. Ἐφαρμογή. Ὑπολογισμὸς τοῦ ἐμβαδοῦ ἐπιπέδου ἐπιφανείας. Ἔστω μία συνάρτησις $y=\sigma(x)$ καὶ ΓΔ (σχ. 34) ἕνα τμῆμα τῆς καμπύλης, τὴν ὁποίαν παριστᾷ αὕτη.



Σχ. 34

Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ΑΓΔΒ, τὸ ὁποῖον περιλαμβάνεται μεταξὺ τῆς καμπύλης ΓΔ, τοῦ ἄξονος Ox καὶ τῶν καθέτων ΓΔ καὶ ΔΒ ἐπὶ τὸν ἄξονα Ox.

Ἔστωσαν $\overline{OA}=\alpha$ καὶ $\overline{OB}=x$ αἱ τετμημέναι τῶν σημείων Γ καὶ Δ. Εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν Ε τοῦ μεικτογράμμου χωρίου (τραπεζοειδοῦς) ΑΓΔΒ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν $\overline{OB}=x$· δηλ. τὸ ἐμβαδόν του Ε εἶναι μία συνάρτησις $E(x)$ τῆς x.

Γνωρίζομεν (§ 762), ὅτι

$$dE(x)=\sigma(x)dx. \qquad (1)$$

Ἔστω $\varphi(x)$ μία παράγουσα τῆς συναρτήσεως $\sigma(x)$. Θὰ εἶναι λοιπὸν

$$\int\sigma(x)dx=\varphi(x)+C \quad (2) \qquad \text{καὶ} \qquad \sigma(x)dx=d\varphi(x)\,,$$

ὁπότε ἡ (1) γίνεται $\qquad dE(x)=d\varphi(x).$

Ἐπειδὴ αἱ συναρτήσεις $E(x)$ καὶ $\varphi(x)$ ἔχουν ἴσα διαφορικά, θὰ διαφέρουν (§ 763) κατὰ μίαν σταθεράν. Θὰ εἶναι λοιπὸν

$$E(x)=\varphi(x)+C. \qquad (3)$$

Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν σταθεράν, δίδομεν εἰς τὴν μεταβλητὴν x τὴν τιμὴν $x=\alpha$, ὁπότε ἡ (1) γίνεται $E(\alpha)=\varphi(\alpha)+C$ (2). Ἀλλὰ $E(\alpha)$ παριστάνει τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μεικτογράμμου σχήματος, ὅταν ἡ μεταβλητὴ κάθετος ΔΒ ἔλθῃ εἰς τὴν θέσιν τῆς ΑΓ. Ἀλλὰ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ $E(\alpha)$ εἶναι μηδὲν καὶ ἑπομένως ἡ (3) γίνεται

$$0=\varphi(\alpha)+C \quad \text{ἢ} \quad C=-\varphi(\alpha).$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (3) τὸ C μὲ τὸ ἴσον του $-\varphi(\alpha)$ καὶ ἔχομεν

$$E(x)=\varphi(x)-\varphi(\alpha). \qquad (4)$$

Διὰ $x=\overline{OB}=\beta$, ἡ (4) γράφεται

$$E(\beta)=\varphi(\beta)-\varphi(\alpha) \quad \text{ἢ} \quad \text{ἐμβ.}\,\text{ΑΓΔΒ}=\varphi(\beta)-\varphi(\alpha).$$

Ἡ διαφορὰ $\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)$ παρίσταται συμβολικῶς ὡς ἑξῆς :

$$\int_\alpha^\beta \sigma(x)dx$$

καὶ λέγεται ***ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα*** τοῦ $\sigma(x)dx$.

Τὰ α καὶ β λέγονται ***ὅρια*** τοῦ ὁλοκληρώματος καὶ τὸ μὲν α λέγεται ***κατώτερον***, τὸ δὲ β ***ἀνώτερον*** ὅριον τοῦ ὁλοκληρώματος.

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω θὰ εἶναι

$$\boxed{E(x)=\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)=\int_\alpha^\beta \sigma(x)dx}$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι :

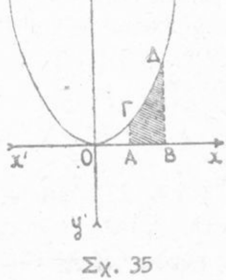
Τὸ ἐμβαδὸν E ***ἑνὸς μεικτογράμμου χωρίου*** ΑΓΒΔ, ***τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῆς καμπύλης, τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ συνάρτησις*** σ(x), ***τοῦ ἄξονος*** Ox, ***μιᾶς ὡρισμένης τεταγμένης*** ΑΓ, ***ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν τετμημένην*** x=α ***καὶ τῆς τεταγμένης*** ΔΒ, ***ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν τετμημένην*** x=β, ***δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου***

$$E=\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)=\int_\alpha^\beta \sigma(x)dx.$$

Τὸ ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta \sigma(x)dx$ ὑπολογίζεται ὡς ἑξῆς :

Εὑρίσκομεν τὸ ἀόριστον ὁλοκλήρωμα $\int \sigma(x)dx$· ἔστω, ὅτι αὐτὸ εἶναι τὸ φ(x). Εἰς αὐτὸ θέτομεν πρῶτον x=β καὶ ἔπειτα x=α καὶ εὑρίσκομεν τὴν διαφορὰν φ(β)−φ(α).

773. Παράδειγμα. ***Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μεικτογράμμου σχήματος, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως*** $y=x^2$ ***τοῦ ἄξονος*** Ox ***καὶ τῶν δύο καθέτων*** ΓΑ καὶ ΔΒ ***πρὸς τὸν ἄξονα*** Ox, ***αἱ ὁποῖαι ἔχουν τετμημένας 2 ἑκ. καὶ 5 ἑκ.***



Σχ. 35

Γνωρίζομεν, ὅτι :

$$E=\int_\alpha^\beta \sigma(x)dx=\varphi(\beta)-\varphi(\alpha). \qquad (1)$$

Ἐδῶ εἶναι $\sigma(x)=x^2$· ἄρα φ(x)=ἀρχικὴ τῆς $\sigma(x)=\frac{x^3}{3}$.

Ἐπειδὴ α=2 καὶ β=5 θὰ εἶναι

$$\varphi(\beta)=\frac{5^3}{3}=\frac{125}{3},$$

$$\varphi(\alpha)=\frac{2^3}{5}=\frac{8}{3}.$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (1) τὰ φ(β) καὶ φ(α) μὲ τὰς τιμάς των καὶ ἔχομεν $\text{ἐμβ.}\,ΑΓΔΒ=\frac{125}{3}-\frac{8}{3}=\frac{117}{3}=39$ τ. ἑκατ.

Σημ. Ἐὰν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ΟΒΔΟ θέτομεν $\alpha=0$ καὶ ὁ τύπος (1) δίδει

$$\text{ἐμβ.ΟΒΔΟ}=\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)=\frac{125}{3}-0=\frac{125}{3}=41{,}66 \text{ τ. ἑκατ.}$$

Ἀσκήσεις. *2816.* Ἡ καμπύλη, τὴν ὁποίαν παριστᾷ ἡ συνάρτησις $y=x^2+4x+3$ τέμνει πρὸς τον ἄξονα x'Ox εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μεικτογράμμου χωρίου, τοῦ περιεχομένου μεταξὺ τοῦ ἄξονος τῶν x καὶ τοῦ τόξου τῆς καμπύλης τοῦ περιεχομένου μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β.

2817. Ὁμοίως διὰ τὴν συνάρτησιν $y=x^2-3x+2$.

2818. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδόν, τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῆς παραβολῆς $y=-x^2-2x$ καὶ τοῦ ἄξονος τῶν x.

2819. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδόν, τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῆς παραβολῆς $y=\dfrac{x^2-2x-3}{4}$ καὶ τοῦ ἄξονυς τῶν x.

2820. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδόν, τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῆς παραβολῆς $y=\dfrac{x^2}{4}$ καὶ μιᾶς εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς καμπύλης εἰς τὴν κορυφήν της καὶ ἡ ὁποία ἀπέχει ἀπὸ τὴν κορυφήν της ἀπόστασιν ἴσην μὲ 1.

2821. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδόν, τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῆς καμπύλης $y^2=2\lambda x$ καὶ τῆς χορδῆς ΓΓ' καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα τῶν x εἰς τὸ σημεῖον Β, τοῦ ὁποίου ἡ τετμημένη εἶναι $OB=\beta$.

2822. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδόν, τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῆς καμπύλης $y=\dfrac{1}{x^2}$, τοῦ ἄξονος τῶν x καὶ τῶν τεταγμένων δύο σημείων Α' καὶ Β' τῆς καμπύλης, τῶν ὁποίων αἱ τετμημέναι εἶναι ἀντιστοίχως $\overline{OA}=\alpha$ καὶ $\overline{OB}=\lambda$. ($\alpha>0$, $\lambda>0$, $\lambda>\alpha$). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν αὐτὸ ἔχει ὅριον, ὅταν $\lambda \to \infty$.

2823 Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδόν, τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῆς καμπύλης $y=\eta\mu x$ καὶ τῶν σημείων Α (0,0) καὶ Β (π,0).

2824. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδόν, τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῆς καμπύλης $y=\sigma\upsilon\nu x$ καὶ τῶν σημείων Α (0,0) καὶ Γ (π,0).

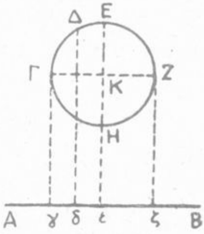
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΓ'.

ΜΕΓΙΣΤΑ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΑ

774. Τί εἶναι μέγιστον ἢ ἐλάχιστον μιᾶς συναρτήσεως. Εἰς τὴν § 746 ἐδώσαμεν τὸν ὁρισμὸν τοῦ μεγίστου καὶ ἐλαχίστου μιᾶς συναρτήσεως. Διὰ νὰ ἀντιληφθῶμεν ὅμως καλύτερον τὴν μεταβολὴν μιᾶς συναρτήσεως, ἡ ὁποία ἔχει μέγιστον καὶ ἐλάχιστον δίδομεν τὰ κάτωθι παραδείγματα :

Α'. Ἔστω ὅτι δίδονται μία περιφέρεια Κ καὶ μία εὐθεῖα ΑΒ, ἡ ὁποία κεῖται ἐκτὸς αὐτῆς (Σχ. 36). Ὑποθέτομεν, ὅτι ἕνα κινητὸν εὑρίσκεται εἰς τὸ σημεῖον Γ (τὸ ἄκρον τῆς διαμέτρου ΓΖ παραλλήλου πρὸς τὴν ΑΒ) καὶ κινεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας κατὰ τὴν διεύθυνσιν ΓΔ καὶ ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν πῶς μεταβάλλεται ἡ ἀπόστασις του κινητοῦ ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ.

Εἰς τὸ παράδειγμα αὐτὸ τὸ διανυόμενον τόξον ΓΔ εἶναι ἡ ***ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ*** καὶ ἡ ἀπόστασις τοῦ κινητοῦ ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν ***ἡ συνάρτησις***.

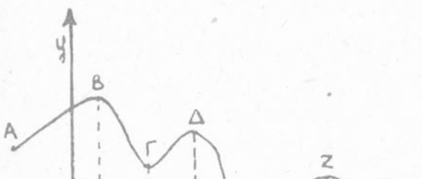


Σχ. 35

Ὅταν τὸ κινητὸν εὑρίσκεται εἰς τὸ Γ, τότε ἡ ἀπόστασίς του ἀπὸ τὴν ΑΒ εἶναι Γγ. Ὅταν τὸ κινητὸν ἔλθῃ εἰς τὴν θέσιν Δ, δηλ. διανύσῃ τὸ τόξον ΓΔ, ἡ ἀπόστασίς του εἶναι Δδ, ὅταν ἔλθῃ εἰς τὸ Ε, δηλ. εἰς τὸ ἀνώτερον ἄκρον τῆς διαμέτρου ΕΗ καθέτου ἐπὶ τὴν ΓΖ, ἡ ἀπόστασίς του εἶναι Εε καὶ ὅταν φθάσῃ εἰς τὸ Ζ ἡ ἀπόστασίς του εἶναι Ζζ.

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ ἀρχικὴ ἀπόστασις Γγ τοῦ κινητοῦ ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ αὐξάνει, ἐφ' ὅσον καὶ τὸ τόξον αὐξάνει ἀπὸ 0° μέχρι 90°. ἔπειτα ἐλαττοῦται, ὅταν τὸ κινητὸν διανύσῃ τόξον μεγαλύτερον τῶν 90°, Ἡ μεγαλυτέρα λοιπὸν ἀπόστασις τοῦ κινητοῦ ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ εἶναι ἡ Εε· αὐτὴ λοιπὸν εἶναι καὶ τὸ ***μέγιστον*** τῆς συναρτήσεως καὶ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν τιμὴν 90° τῆς μεταβλητῆς.

Ὅταν τὸ τόξον ἐξακολουθῇ νὰ αὐξάνῃ μέχρι τῶν 270°, τότε ἡ ἀπόστασις τοῦ κινητοῦ ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ ἐλαττοῦται σταθερῶς μέχρις ὅτου τὸ κινητὸν φθάσῃ εἰς τὴν θέσιν Η. Ἀλλ' ὅταν τὸ κινητὸν ὑπερβῇ τὸ τόξον 270°, τότε ἡ ἀπόστασίς του ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν ἀρχίζει νὰ αὐξάνῃ μέχρις ὅτου τὸ κινητὸν φθάσῃ εἰς τὴν ἀρχικὴν θέσιν του. Τὸ μῆκος Ηε εἶναι ἡ ἐλαχίστη τιμὴ ***(ἐλάχιστον)*** τῆς συναρτήσεως καὶ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν τιμὴν 270° τῆς μεταβλητῆς.



Σχ. 37

Ἐὰν τὸ κινητὸν ἐξακολουθήσῃ νὰ κινῆται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας, ἡ ἀπόστασίς του ἀπὸ τῆς εὐθείας θὰ παρουσιάσῃ πάλιν τὸ αὐτὸ μέγιστον καὶ τὸ αὐτὸ ἐλάχιστον.

Β'. Μία συνάρτησις δύναται νὰ ἔχῃ πολλὰ μέγιστα καὶ πολλὰ ἐλάχιστα· ἀλλὰ δύο μέγιστα χωρίζονται πάντοτε μὲ ἕνα ἐλάχιστον καὶ ἀντιστρόφως δύο ἐλάχιστα περιέχουν μεταξύ των ἕνα μέγιστον.

Ἕνα ἐλάχιστον εἶναι προφανῶς μικρότερον ἀπὸ καθένα ἀπὸ τὰ δύο μέγιστα ποὺ τὸ περιέχουν, ἀλλὰ δύναται νὰ εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ ἕνα μέγιστον.

Πράγματι, ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ προηγούμενον κινητὸν ἐκινεῖτο ἐπὶ τῆς καμπύλης ΑΘ (Σχ. 37), τότε ἡ ἀπόστασίς του ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν x′x θὰ παρουσίαζε μέγιστον, ὅταν θὰ εὑρίσκετο εἰς τὰ σημεῖα Β, Δ, Ζ καὶ ἐλάχιστον, ὅταν εὑρίσκετο εἰς τὰ σημεῖα Γ, Ε.

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ συνάρτησις, ἡ ὁποία παρίσταται ὑπὸ τῆς καμπύλης ΑΒΓΔΕΖΘ . . . . παρουσιάζει τρία μέγιστα βΒ, δΔ, ζΖ καὶ δύο ἐλάχιστα γΓ, εΕ μεταξὺ τῶν σημείων της Α καὶ Θ· τὸ μεγαλύτερον μέγιστον βΒ, ἐξ ὅλων αὐτῶν τῶν μεγίστων, λέγεται ***ἀπολύτως μέγιστον***, τὸ δὲ μικρότερον ἐλάχιστον εΕ λέγεται ***ἀπολύτως ἐλάχιστον***.

Ἐπίσης παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ ἐλάχιστον γΓ εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ μέγιστον ζΖ.

775. Εὕρεσις τῶν μεγίστων καὶ ἐλαχίστων τῶν συναρτήσεων. Ἡ ἀναζήτησις καὶ ἡ εὕρεσις τῶν μεγίστων καὶ ἐλαχίστων τῶν συναρτήσεων εἶναι ἔργον τῶν ἀνωτέρων μαθηματικῶν (*). Ἐν τούτοις δυνάμεθα νὰ σπουδάσωμεν τὴν μεταβολὴν μερικῶν συναρτήσεων καὶ ἑπομένως νὰ εὕρωμεν τὰ μέγιστα ἢ ἐλάχιστα αὐτῶν μὲ τὴν βοήθειαν τῶν στοιχειωδῶν μαθηματικῶν.

Ἡ φυσικωτέρα μέθοδος πρὸς εὕρεσιν τῶν μεγίστων ἢ ἐλαχίστων μιᾶς συναρτήσεως εἶναι ἡ σπουδὴ τῶν μεταβολῶν τῆς συναρτήσεως, ὅταν ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ μεταβάλλεται ἀπὸ $-\infty$ ἕως $+\infty$. Ἡ μέθοδος αὐτὴ καλεῖται ***ἄμεσος μέθοδος***.

Αὐτὴν τὴν μέθοδον ἐχρησιμοποιήσαμεν κατὰ τὴν σπουδὴν τῆς μεταβολῆς ἑνὸς τριωνύμου τοῦ δευτέρου βαθμοῦ καὶ κατελήξαμεν εἰς τὰ κάτωθι συμπεράσματα :

1ον. Ἐὰν $\alpha>0$, ***τὸ τριώνυμον*** $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ ***ἔχει ἕνα ἐλάχιστον*** $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ ***διὰ*** $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$.

2ον. Ἐὰν $\alpha<0$, ***τὸ τριώνυμον*** $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ ***ἔχει ἕνα μέγιστον*** $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ ***διὰ*** $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$.

Παραδείγματα. 1ον. Τὸ τριώνυμον x^2-4x+3 ἔχει ἐλάχιστον, διότι $\alpha>0$. Τὸ ἐλάχιστόν του εἶναι

(*) Βλέπε ἐφαρμογὴν παραγώγων σελ. 721—724.

$$\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}=\frac{4.1.3-4^2}{4}=-1 \quad \text{διὰ} \quad x=-\frac{\beta}{2\alpha}=\frac{4}{2}=2.$$

2ον. Τὸ τριώνυμον $-x^2+3x+5$ ἔχει μέγιστον, διότι $\alpha<0$. Τὸ μέγιστόν του εἶναι

$$\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}=\frac{4.(-1).5-3^2}{4(-1)}=\frac{-20-9}{-4}=\frac{29}{4}, \quad \text{διὰ} \quad x=-\frac{\beta}{2\alpha}=\frac{-3}{-2}=\frac{3}{2}.$$

Ἀσκήσεις. *2825*. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μέγιστον ἢ τὸ ἐλάχιστον τῶν κάτωθι τριωνύμων καὶ αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τοῦ x

1. $y=x^2-5x+4$
2. $y=3x^2-7x+2$
3. $y=-x^2+6x-9$
4. $y=9x^2-6x+1$
5. $y=-x^2+3x+5$
6. $y=-3x^2-4x+4$.

2826. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον ἢ τὸ ἐλάχιστον τῆς συναρτήσεως

$$y=(\alpha x+\beta)^2+(\alpha' x+\beta')^2.$$

2827. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον ἢ τὸ ἐλάχιστον τῆς παραστάσεως x^3+y^3 ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι $x+y=\alpha$, ὅπου α θετικὸς ἀριθμός.

2828. Νὰ ὁρισθῇ ὁ λ, ἵνα τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $x^2+(2-\lambda)x-\lambda-3=0$ εἶναι ἐλάχιστον.

776. **II: Ἔμμεσος μέθοδος** Ὅταν θέλωμεν νὰ προσδιορίσωμεν μόνον τὸ μέγιστον ἢ τὸ ἐλάχιστον μιᾶς συναρτήσεως καὶ οὐχὶ νὰ σπουδάσωμεν ὅλην τὴν μεταβολὴν αὐτῆς, μεταχειριζόμεθα ἄλλην μέθοδον, ἡ ὁποία καλεῖται ***ἔμμεσος μέθοδος***.

Κατ' αὐτὴν ἐξισοῦμεν τὴν δοθεῖσαν συνάρτησιν σ(x) μὲ μ ἢ μὲ y καὶ λύομεν τὴν προκύπτουσαν ἐξίσωσιν $\sigma(x)=\mu$ ὡς πρὸς x. Ἔπειτα διερευνῶμεν τὴν εὑρεθεῖσαν λύσιν ἢ λύσεις δηλ. ἀναζητοῦμεν τὰ διαστήματα, μεταξὺ τῶν ὁποίων πρέπει νὰ μεταβάλλεται ὁ μ ἢ y, ἵνα αἱ τιμαὶ τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς x εἶναι πραγματικαὶ ἢ νὰ περιέχωνται μεταξὺ τῶν ὁρίων, τὰ ὁποῖα ὁρίζει ἡ φύσις τοῦ προβλήματος. Αὐτὰ τὰ ὅρια δίδουν τὰς ζητουμένας τιμάς.

Διὰ νὰ ἐφαρμόσωμεν τὴν μέθοδον αὐτὴν πρέπει νὰ δυνάμεθα νὰ λύωμεν τὴν προκύπτουσαν ἐξίσωσιν.

Τὰ κάτωθι παραδείγματα θὰ μᾶς δείξουν τὴν πορείαν τῆς μεθόδου αὐτῆς :

777. Παράδειγμα 1ον. ***Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον ἢ τὸ ἐλάχιστον τοῦ τριωνύμου*** $\alpha x^2+\beta x+\gamma$.

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ μ τὸ ζητούμενον μέγιστον ἢ ἐλάχιστον τοῦ τριωνύμου, θὰ ἔχωμεν

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\mu \quad \text{ἢ} \quad \alpha x^2+\beta x+(\gamma-\mu)=0. \tag{1}$$

Αἱ ρίζαι τῆς (1) εἶναι

$$x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha(\gamma-\mu)}}{2\alpha}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma+4\alpha\mu}}{2\alpha}. \tag{2}$$

Ἀλλὰ διὰ νὰ ἔχῃ ἡ ἐξίσωσις (1) ρίζας πραγματικάς, πρέπει ἡ ὑπόρριζος ποσότης νὰ εἶναι θετική, ἤτοι πρέπει νὰ εἶναι

$$\beta^2-4\alpha\gamma+4\alpha\mu\geqslant 0 \quad \text{ἢ} \quad 4\alpha\mu\geqslant 4\alpha\gamma-\beta^2. \tag{3}$$

Ἐδῶ διακρίνομεν δύο περιπτώσεις, καθόσον τὸ α εἶναι θετικὸν ἢ ἀρνητικόν.

1ον. Τὸ α εἶναι θετικόν. Διαιροῦντες καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (3) διὰ 4α ἔχομεν

$$\mu\geqslant\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}.$$

Ἀπὸ αὐτὴν παρατηροῦμεν, ὅτι διὰ νὰ ἔχῃ ἡ ἐξίσωσις (1) ρίζας πραγματικάς, πρέπει τὸ μ νὰ εἶναι ἴσον ἢ μεγαλύτερον τοῦ $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$.

Ὥστε ***μικροτέρα τιμή***, τὴν ὁποίαν δύναται νὰ λάβῃ τὸ μ εἶναι ἡ

$$\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}\ \textit{(ἐλάχιστον)}.$$

Θέτοντες εἰς τὴν (2) ἀντὶ τοῦ μ τὴν τιμήν του $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ εὑρίσκομεν

$$x=\frac{-\beta}{2\alpha}.$$

Ὥστε, ὅταν $\alpha>0$ τὸ τριώνυμον $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ παρουσιάζει ***ἐλάχιστον*** $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$, διὰ $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$.

2ον. Τὸ α εἶναι ἀρνητικόν. Ἂν διαιρέσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (3) διὰ 4α ἡ ἀνισότης θὰ ἀλλάξῃ στροφήν, διότι τὸ α εἶναι ἀρνητικὸν καὶ θὰ ἔχωμεν

$$\mu\leqslant\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}.$$

Ἀπὸ αὐτὴν παρατηροῦμεν, ὅτι διὰ νὰ ἔχῃ ἡ ἐξίσωσις (1) ρίζας πραγματικάς, πρέπει τὸ μ νὰ εἶναι ἴσον ἢ μικρότερον τοῦ $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$.
Ὥστε ***ἡ μεγαλυτέρα τιμή***, τὴν ὁποίαν δύναται νὰ λάβῃ τὸ μ εἶναι ἡ

$$\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}\ \textit{(μέγιστον)}.$$

Θέτοντες εἰς τὴν (2) ἀντὶ τοῦ μ τὴν τιμήν του $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ εὑρίσκομεν πάλιν

$$x=\frac{-\beta}{2\alpha}.$$

Ὥστε, ὅταν τὸ $\alpha<0$ τὸ τριώνυμον $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, παρουσιάζει μέγιστον $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$, διὰ $x=\frac{-\beta}{2\alpha}$.

778. Παράδειγμα 2ον. ***Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον καὶ τὸ ἐλάχιστον τοῦ κλάσματος*** $\frac{x-4}{x^2-3x-3}$.

Θέτομεν $\frac{x-4}{x^2-3x-3}=\mu$, ἀπὸ τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν

$$x-4=\mu(x^2-3x-3) \quad \text{ἢ} \quad \mu x^2-(3\mu+1)x-3\mu+4=0. \tag{1}$$

Αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως (1) εἶναι

$$x = \frac{3\mu + 1 \pm \sqrt{21\mu^2 - 10\mu + 1}}{2\mu}. \qquad (2)$$

Διὰ νὰ ἔχῃ ἡ ἐξίσωσις (1) ρίζας πραγματικὰς πρέπει νὰ εἶναι

$$21\mu^2 - 10\mu + 1 \leqslant 0. \qquad (3)$$

Αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου $21\mu^2 - 10\mu + 1$ εἶναι $\frac{1}{3}$ καὶ $\frac{1}{7}$.

Ἡ ἀνισότης (3) ἀληθεύει διὰ

$$\mu \leqslant \frac{1}{7} \quad (4) \quad \text{καὶ διὰ} \quad \mu \geqslant \frac{1}{3}. \qquad (5)$$

Ἀπὸ τὴν (4) παρατηροῦμεν, ὅτι διὰ νὰ ἀληθεύῃ ἡ σχέσις (3) καὶ κατὰ συνέπειαν διὰ νὰ ἔχῃ ρίζας πραγματικὰς ἡ (1), πρέπει τὸ μ νὰ εἶναι ἴσον ἢ μικρότερον τοῦ $\frac{1}{7}$. Ὥστε ἡ ***μεγαλυτέρα τιμὴ (μέγιστον)***, τὴν ὁποίαν δύναται νὰ λάβῃ τὸ μ καὶ ἑπομένως καὶ τὸ δοθὲν κλάσμα, εἶναι ἡ $\frac{1}{7}$ ***(μέγιστον)***.

Διὰ νὰ εὕρωμεν διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ x γίνεται τὸ δοθὲν κλάσμα μέγιστον, θέτομεν εἰς τὴν (2) ἀντὶ τοῦ μ τὴν τιμήν του $\frac{1}{7}$, ὁπότε ἡ ἡ ὑπόρριζος ποσότης μηδενίζεται καὶ θὰ ἔχωμεν

$$x = \frac{3 \cdot \frac{1}{7} + 1}{2 \cdot \frac{1}{7}} = \frac{10}{2} = 5.$$

Ἐπίσης ἀπὸ τὴν (5) παρατηροῦμεν, ὅτι διὰ νὰ ἀληθεύῃ ἡ (3) καὶ συνεπῶς διὰ νὰ ἔχῃ ἡ (1) ρίζας πραγματικάς, πρέπει τὸ μ νὰ εἶναι ἴσον ἢ μεγαλύτερον τοῦ $\frac{1}{3}$. Ὥστε ἡ ***μικροτέρα τιμὴ (ἐλάχιστον)***, τὴν ὁποίαν δύναται νὰ λάβῃ τὸ μ καὶ ἑπομένως καὶ τὸ δοθὲν κλάσμα εἶναι ἡ $\frac{1}{3}$ ***(ἐλάχιστον)***.

Θέτοντες εἰς τὴν (2) ἀντὶ τοῦ μ τὴν τιμὴν τοῦ $\frac{1}{3}$ εὑρίσκομεν $x = 3$.

Ὥστε τὸ κλάσμα $\frac{x-4}{x^2-3x-3}$ ἔχει μέγιστον $\frac{1}{7}$ διὰ $x=5$ καὶ ἐλάχιστον $\frac{1}{3}$ διὰ $x=3$.

779. Παράδειγμα 3ον. ***Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον ἢ τὸ ἐλάχιστον τοῦ κλάσματος*** $\frac{x^2+2x-4}{x^2-5x-2}$.

Ἂν παραστήσωμεν μὲ μ τὴν τιμὴν τοῦ κλάσματος αὐτοῦ, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{x^2+2x-4}{x^2-5x-2} = \mu$$

ἢ $x^2+2x-4=\mu(x^2-5x-2)$ ἢ $(1-\mu)x^2+(2+5\mu)x+(2\mu-4)=0.$ (1)

Αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως (1) εἶναι :

$$x=\frac{-(2+5\mu)\pm\sqrt{(2+5\mu)^2-4(1-\mu)(2\mu-4)}}{2(1-\mu)}=\frac{-(2+5\mu)\pm\sqrt{33\mu^2-4\mu+20}}{2(1-\mu)}.$$

Διὰ νὰ ἔχῃ ἡ ἐξίσωσις (1) ρίζας πραγματικάς, πρέπει ἡ ὑπόρριζος ποσότης νὰ εἶναι θετική, δηλ. πρέπει νὰ εἶναι $33\mu^2-4\mu+20\geqslant 0$.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τώρα διὰ ποίας τιμὰς τοῦ μ τὸ τριώνυμον $33\mu^2-4\mu+20$ εἶναι θετικὸν εὑρίσκομεν τὰς ρίζας αὐτοῦ. Αἱ ρίζαι ὅμως αὐτοῦ εἶναι φανταστικαὶ καὶ ἑπομένως τὸ τριώνυμον αὐτὸ ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ πρώτου ὅρου του, δηλ. εἶναι θετικὸν δι' ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ μ.

Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ εὕρωμεν μίαν τιμὴν τῆς x, ἡ ὁποία νὰ καθιστᾷ τὸ δοθὲν κλάσμα ἴσον μὲ ἕνα ἀριθμὸν μ, τόσον μεγάλον ἢ τόσον μικρόν, ὅσον θέλομεν, καὶ ἑπομένως τὸ δοθὲν κλάσμα δὲν ἔχει οὔτε μέγιστον οὔτε ἐλάχιστον.

Ἀσκήσεις. *Α' Ὁμάς.* *2829.* Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον καὶ τὸ ἐλάχιστον τῆς συναρτήσεως $\dfrac{(x-8)(x-2)}{x}$.

2830. Ὁμοίως τῆς συναρτήσεως $\dfrac{x^2-x-2}{x^2-6x+9}$.

2831. Ὁμοίως τῆς συναρτήσεως $\dfrac{x^2+1}{3x^2-16x+33}$.

2832. Ὁμοίως τῆς συναρτήσεως $\dfrac{x^2-5}{2x-4}$.

2833. Ὁμοίως τῆς συναρτήσεως $\dfrac{x^2-6x+8}{2x-8}$.

2834. Ὁμοίως τῆς συναρτήσεως $\dfrac{x^2+3}{-x^2+2x+1}$.

2835. Ὁμοίως τῆς συναρτήσεως $\dfrac{x^2-4x+3}{x^2+4x+4}$.

2836. Ὁμοίως τῆς συναρτήσεως $\dfrac{x^2-4x+3}{x^2+5x-14}$.

2837. Ὁμοίως τῆς συναρτήσεως $\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-2x+1}$.

2838. Ὁμοίως τῆς συναρτήσεως $\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x-1}$.

2839. Ὁμοίως τῆς συναρτήσεως $\dfrac{x^2-4}{x^2+2x-3}$.

2840. Ὁμοίως τῆς συναρτήσεως $\dfrac{4x^2+1}{x^2-2x+1}$.

2841. Ὁμοίως τῆς συναρτήσεως $\dfrac{1-2x^2}{x^2+4x+4}$.

2842. Ὁμοίως τῆς συναρτήσεως $\dfrac{x^2+4}{x^2+2x+1}$.

2843. Ὁμοίως τῆς συναρτήσεως $\dfrac{x^2+4x-36}{2x-10}$.

2844. Ὁμοίως τῆς συναρτήσεως $\dfrac{x^2-6x+8}{2(x-4)}$.

2845. Ὁμοίως τῆς συναρτήσεως $\dfrac{2x-3}{x^2-2x+3}$.

2846. Ὁμοίως τῆς συναρτήσεως $\dfrac{x^2+2x-8}{x-2}$.

2847. Ὁμοίως τῆς συναρτήσεως $\dfrac{x^2+21}{x-2}$.

2848. Ὁμοίως τῆς συναρτήσεως $\dfrac{8x-16}{x^2-4}$.

2849. Ὁμοίως τῆς συναρτήσεως $\dfrac{x^2-10x+21}{2x-15}$.

2850. Ὁμοίως τῆς συναρτήσεως $\dfrac{x^2-5}{2(x-2)}$.

2851 Ὁμοίως τῆς συναρτήσεως $\dfrac{x^2-x-8}{x^2+x-2}$.

2852. Ὁμοίως τῆς συναρτήσεως $\dfrac{x^2+x-1}{x^2-x-1}$.

2853. Ὁμοίως τῆς συναρτήσεως $\dfrac{x^2+14x+9}{x^2+2x+3}$.

2854. Ὁμοίως τῆς συναρτήσεως $\dfrac{x-1}{x^2-5x+6}$.

2855. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον ἢ τὸ ἐλάχιστον τῆς συναρτήσεως

$$\frac{\beta(\alpha^2+x^2)}{2(\alpha+x)}.$$

2856. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον καὶ τὸ ἐλάχιστον τῆς συναρτήσεως

$$\frac{\alpha+x}{\alpha-x}+\frac{\alpha-x}{\alpha+x}.$$

2857. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον καὶ τὸ ἐλάχιστον τῆς συναρτήσεως

$$x+2\sqrt{\alpha^2-x^2}.$$

Β΄ Ὁμάς. *2858.* Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον ἢ τὸ ἐλάχιστον τῆς παραστάσεως

$$x-2y, \quad \text{ὅταν} \quad 5x^2+8y^2=10.$$

2859. Νὰ χωρισθῇ ὁ ἀριθμὸς 40 εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε τὸ ἄθροισμα τοῦ τριπλασίου τετραγώνου τοῦ πρώτου καὶ τοῦ τετραπλασίου τετραγώνου τοῦ δευτέρου νὰ εἶναι ἐλάχιστον.

2860. Νὰ χωρισθῇ ὁ ἀριθμὸς 20 εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν δύο λόγων του, τοῦ εὐθέως καὶ ἀντιστρόφου, νὰ εἶναι ἐλάχιστον.

2861. Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ λ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $x^2-(\lambda+2)x-(\lambda-3)=0$ εἶναι ἐλάχιστον.

2862. Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ συντελεσταὶ τοῦ τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ εἰς τρόπον, ὥστε τοῦτο νὰ εἶναι διαιρετὸν διὰ $x-2$ καὶ νὰ ἔχῃ ἐλάχιστον -1 διὰ $x=3$.

2863. Νὰ προσδιορισθῇ ὁ λ εἰς τρόπον, ὥστε τὸ τριώνυμον $x^2-(\lambda-1)x+\lambda-2$ νὰ εἶναι διαιρετὸν διὰ $x-3$ καὶ νὰ ἔχῃ ἐλάχιστον -1 διὰ $x=2$.

2864. Διὰ ποίας τιμὰς τῶν λ, μ, ν τὸ τριώνυμον $(\lambda-1)x^2-(\mu+\lambda)x+\nu$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $x-1$ καὶ ἔχει ἐλάχιστον -4 διὰ $x=3$.

2865. Δίδονται τρεῖς θετικοὶ ἀριθμοὶ α, β, γ καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθοῦν δύο θετικοὶ ἀριθμοὶ x καὶ y τοιοῦτοι, ὥστε νὰ εἶναι $\alpha x+\beta y=\gamma$ καὶ τὸ ἄθροισμα x^2+y^2 νὰ εἶναι ἐλάχιστον.

2866. Τὸ ἄθροισμα τριῶν ἀριθμῶν, ποὺ σχηματίζουν γεωμετρικὴν πρόοδον εἶναι α· ποῖον εἶναι τὸ μέγιστον καὶ τὸ ἐλάχιστον τοῦ γινομένου των ;

2867. Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ συντελεσταὶ λ καὶ μ τοῦ τριωνύμου $x^2+\lambda x+\mu$ εἰς τρόπον, ὥστε τὸ ἐλάχιστον νὰ εἶναι ἴσον μὲ α καὶ ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ τριώνυμον λαμβάνει, διὰ $x=\frac{1}{2}$, τὴν τιμὴν $\beta+\frac{1}{4}$.

('Εφαρμογή : $\alpha=-\frac{9}{4}$, $\beta=4$.

2868. Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ συντελεσταὶ λ καὶ μ εἰς τρόπον, ὥστε τὸ μέγιστον τοῦ $\dfrac{x^2+\lambda x+\mu}{x}$ νὰ εἶναι ἴσον μὲ α καὶ τὸ ἐλάχιστόν του μὲ β.

2869. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἵνα τὸ κλάσμα $\dfrac{x^2+\lambda x}{x^2-2x+3}$, διέρχεται ἀπὸ ἕνα μέγιστον καὶ ἀπὸ ἕνα ἐλάχιστον, ὅταν ὁ x μεταβάλλεται ἀπὸ $-\infty$ ἕως $+\infty$ πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἡ παράμετρος λ νὰ περιέχεται μεταξὺ -3 καὶ $+1$.

2870. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ λ καὶ λ', ἵνα τὸ κλάσμα $\dfrac{x^2+\lambda x-3}{x^2+\lambda' x+5}$ γίνεται μέγιστον ἢ ἐλάχιστον διὰ $x=2$ καὶ διὰ $x=3$.

2871. Νὰ εὑρεθῇ μεταξὺ ποίων ὁρίων πρέπει νὰ μεταβάλλεται ἡ παράστασις $\dfrac{x^3+2xy^2+3y^3}{x^2+y^2}$, ὅταν τὸ $x+y$ ἔχῃ δοθὲν ἄθροισμα α.

2872. Δίδονται τὰ τριώνυμα

$$(\lambda-4)x^2-(2\lambda+3)x+7\lambda+1 \quad (1) \qquad \text{καὶ} \qquad (4-\lambda)x^2+(3\mu+2)x-7 \quad (2)$$

καὶ ζητεῖται νὰ ὁρισθοῦν οἱ λ καὶ μ, ἵνα μία ρίζα τοῦ (1) εἶναι ἴση μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ριζῶν τοῦ (2) καὶ ἡ ἄλλη ρίζα τοῦ (1) νὰ εἶναι ἴση μὲ τὸ μέγιστον τοῦ (2).

780. 'Εφαρμογαί. Πρόβλημα 1ον. ***Δίδεται τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα*** $AB=\alpha$. ***Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τοῦ*** AB ***ἕνα σημεῖον*** M ***τοιοῦτον, ὥστε, ἂν κατασκευάσωμεν μὲ διαμέτρους τὰς*** AM ***καὶ*** BM ***δύο κύκλους, τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν κύκλων αὐτῶν νὰ εἶναι ἐλάχιστον.***

"Αν θέσωμεν $AM=x$, τότε $BM=\alpha-x$.

'Η ἀκτὶς τοῦ κύκλου K εἶναι $\frac{x}{2}$ καὶ ἑπομένως τὸ ἐμβαδόν του εἶναι

$$\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 \quad \text{ἢ} \quad \frac{\pi x^2}{4}.$$

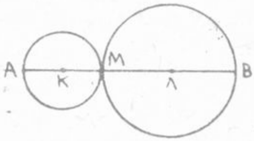
Ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου Λ εἶναι $\frac{\pi-x}{2}$ καὶ ἑπομένως τὸ ἐμβαδόν του εἶναι $\pi\left(\frac{\alpha-x}{2}\right)^2$ ἢ $\frac{\pi(\alpha-x)^2}{4}$.

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ μ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο κύκλων, θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{\pi x^2}{4}+\frac{\pi(\alpha-x)^2}{4}=\mu$$

ἢ $$\pi x^2+\pi(\alpha^2-2\alpha x+x^2)-4\mu=0$$

ἢ $$2\pi x^2-2\alpha\pi x+(\pi\alpha^2-4\mu)=0 \quad (1)$$



Σχ, 38

Αἱ ρίζαι αὐτῆς εἶναι

$$x=\frac{2\alpha\pi\pm\sqrt{4\alpha^2\pi^2-8\pi(\pi\alpha^2-4\mu)}}{4\pi}. \quad (2)$$

Διὰ νὰ ἔχῃ ἡ ἐξίσωσις (1) ρίζας πραγματικὰς πρέπει ἡ ὑπόρριζος ποσότης νὰ εἶναι θετική, δηλαδὴ πρέπει νὰ ἔχωμεν

$$4\alpha^2\pi^2-8\pi(\pi\alpha^2-4\mu)\geqslant 0 \quad \text{ἢ} \quad 32\pi\mu\geqslant 4\pi^2\alpha^2 \quad \text{καὶ} \quad \mu\geqslant\frac{\pi\alpha^2}{8}.$$

ἤτοι πρέπει τὸ μ νὰ εἶναι ἴσον ἢ μεγαλύτερον τοῦ $\frac{\pi\alpha^2}{8}$. Ὥστε ἡ ***μικροτέρα τιμὴ (ἐλάχιστον)***, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ λάβῃ ὁ μ εἶναι ἡ $\frac{\pi\alpha^2}{8}$. Θέτοντες εἰς τὴν (2) ἀντὶ τοῦ μ τὴν τιμήν του $\frac{\pi\alpha^2}{8}$ εὑρίσκομεν

$$x=\frac{2\alpha\pi}{4\pi}=\frac{\alpha}{2}.$$

Ὥστε οἱ κύκλοι, ποὺ θὰ κατασκευασθοῦν μὲ διαμέτρους τὰς ΑΜ καὶ ΜΒ θὰ ἔχουν ἄθροισμα ἐμβαδῶν ἐλάχιστον, ὅταν τὸ Μ κεῖται εἰς τὸ μέσον τοῦ ΑΒ.

781. Πρόβλημα 2ον. *Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον δυνάμεθα νὰ ἐγγράψωμεν εἰς δοθὲν τετράγωνον.*

Ἔστω ΑΒΓΔ τὸ δοθὲν τετράγωνον πλευρᾶς α. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν του ΑΒ καὶ ΑΔ λαμβάνομεν ΑΘ=ΑΚ=x· ὁμοίως λαμβάνομεν ΓΗ=ΓΖ=x. Ἐὰν φέρωμεν τὰς ΚΘ, ΘΗ, ΗΖ, ΖΚ, τὸ σχηματιζόμενον τετράπλευρον ΚΖΗΘ εἶναι ὀρθογώνιον.

Σχ. 39

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ Ε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ΚΖΗΘ, θὰ ἔχωμεν

$$KZ\,.\,K\Theta=E. \quad (1)$$

Ἀλλὰ ἀπὸ τὸ ἰσοσκελὲς ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΚΘ ἔχομεν

$$\overline{K\Theta}^2=x^2+x^2$$

ἢ $$\overline{K\Theta}^2=2x^2$$

καὶ $$K\Theta=x\sqrt{2}.$$

Ἐπίσης ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΚΔΖ ἔχομεν

$$\overline{KZ}^2=(\alpha-x)^2+(\alpha-x)^2 \quad \text{ἢ} \quad \overline{KZ}^2=2(\alpha-x)^2 \quad \text{καὶ} \quad \overline{KZ}=(\alpha-x)\sqrt{2}.$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) τὰ ΚΖ καὶ ΚΘ διὰ τῶν τιμῶν των ἔχομεν

$$x\sqrt{2}.(\alpha-x)\sqrt{2}=E \quad \text{ἢ} \quad 2x(\alpha-x)=E \quad \text{ἢ} \quad 2x^2-2\alpha x+E=0. \qquad (2)$$

Αἱ ρίζαι τῆς (2) εἶναι $x=\dfrac{2\alpha\pm\sqrt{4\alpha^2-8E}}{4}$. (3)

Ἀλλὰ διὰ νὰ ἔχῃ ἡ ἐξίσωσις (2) ρίζας πραγματικάς, πρέπει ἡ ὑπόρριζος ποσότης νὰ εἶναι θετική, ἤτοι πρέπει νὰ ἔχωμεν

$$4\alpha^2-8E\geqslant 0 \quad \text{ἢ} \quad 8E\leqslant 4\alpha^2 \quad \text{ἢ} \quad E\leqslant\frac{\alpha^2}{2},$$

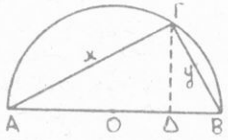
ἤτοι πρέπει τὸ Ε νὰ εἶναι ἴσον ἢ μικρότερον τοῦ $\dfrac{\alpha^2}{2}$ καὶ ἑπομένως ***ἡ μεγαλυτέρα τιμὴ (μέγιστον)***, τὴν ὁποίαν δύναται νὰ λάβῃ τὸ Ε εἶναι ἡ $\dfrac{\alpha^2}{2}$.

Διὰ $E=\dfrac{\alpha^2}{2}$, ἡ (3) δίδει $x=\dfrac{2\alpha}{4}=\dfrac{\alpha}{2}$.

Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον ΚΖΗΘ θὰ ἔχῃ τὸ μέγιστον ἐμβαδὸν $\dfrac{\alpha^2}{2}$, ἂν $x=\dfrac{\alpha}{2}$. Ἀλλὰ τότε τὸ ΚΖΗΘ εἶναι τετράγωνον. Ὥστε ἐξ ὅλων τῶν ὀρθογωνίων τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς δοθὲν τετράγωνον, μέγιστον ἐμβαδὸν ἔχει τὸ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου κορυφαὶ εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ δοθέντος τετραγώνου.

782. Πρόβλημα 3ον. ***Νὰ σπουδασθοῦν αἱ μεταβολαὶ τῆς περιμέτρου ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς δοθὲν ἡμικύκλιον.***

Ἔστω ΑΒΓ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸ ἡμικύκλιον Ο. Ἐπειδὴ ἡ ὑποτείνουσα ΑΒ εἶναι σταθερά, ἡ περίμετρός του ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ ἄθροισμα ΑΓ+ΓΒ τῶν καθέτων πλευρῶν του.



Σχ. 40

Θέτομεν ΑΓ$=x$ καὶ ΒΓ$=y$. Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ μ τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν ΑΓ καὶ ΓΒ θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν $x+y=\mu$. (1)

Ἐπίσης ἀπὸ τὸ ὀρθογών. τρίγωνον ΑΓΒ ἔχομεν $x^2+y^2=4R^2$. (2)

Λύομεν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2).

Ἀπὸ τὴν (1) ἔχομεν $x=\mu-y$. (3)

Τὴν τιμὴν αὐτὴν τοῦ x θέτομεν εἰς τὴν (2) καὶ ἔχομεν

$$(\mu-y)^2+y^2=4R^2 \quad \text{ἢ} \quad \mu^2-2\mu y+y^2+y^2-4R^2=0$$

ἢ

$$2y^2-2\mu y+(\mu^2-4R^2)=0. \qquad (4)$$

Αἱ ρίζαι τῆς (4) εἶναι $y=\dfrac{2\mu\pm\sqrt{4\mu^2-8(\mu^2-4R^2)}}{4}$. (5)

Διὰ νὰ ἔχῃ ἡ ἐξίσωσις (4) ρίζας πραγματικὰς πρέπει ἡ ὑπόρριζος ποσότης νὰ εἶναι θετική, δηλ. πρέπει νὰ εἶναι

$4\mu^2-8(\mu^2-4R^2)\geqslant 0$ ἢ $4\mu^2-8\mu^2+32R^2\geqslant 0$ ἢ $32R^2\geqslant 4\mu^2$ καὶ $\mu\leqslant 2R\sqrt{2}$

δηλ. πρέπει τὸ μ νὰ εἶναι ἴσον ἢ μικρότερον τοῦ $2R\sqrt{2}$. Ὥστε ἡ ***μεγαλυτέρα τιμὴ (μέγιστον)***, τὴν ὁποίαν δύναται νὰ λάβῃ τὸ μ εἶναι

$$\mu = 2R\sqrt{2}.$$

Διὰ $\mu=2R\sqrt{2}$, ἡ (5) δίδει $y=\dfrac{2\cdot 2R\sqrt{2}}{4}=R\sqrt{2}$.

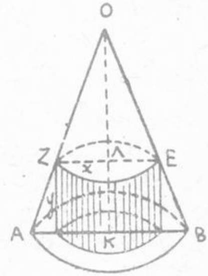
Θέτοντες τὰς τιμὰς αὐτὰς τοῦ y καὶ μ εἰς τὴν (3) εὑρίσκομεν

$$x=2R\sqrt{2}-R\sqrt{2}=R\sqrt{2}.$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι $x=y=R\sqrt{2}$· ἑπομένως τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές. Ὥστε ἐξ ὅλων τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς δοθὲν ἡμικύκλιον, τὴν μεγίστην περίμετρον ἔχει τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον.

783. Πρόβλημα 4ον. *Νὰ ἐγγραφῇ εἰς δοθέντα κῶνον, κύλινδρος, τοῦ ὁποίου ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια νὰ εἶναι μεγίστη.*

Ἔστω ΟΑΒ ὁ δοθεὶς κῶνος, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως εἶναι R καὶ τὸ ὕψος του ΟΚ=υ. Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ x τὴν ἀκτῖνα τῆς βάσεως ἑνὸς κυλίνδρου ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κῶνον καὶ μὲ y τὸ ὕψος του, τότε ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια του Ε ἀποτελεῖται ἀπὸ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν του $2\pi xy$ καὶ ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο βάσεών του $2\pi x^2$· ἤτοι θὰ εἶναι



Σχ. 41

$$E = 2\pi xy + 2\pi x^2. \qquad (1)$$

Ἀλλὰ ἀπὸ ὅμοια τρίγωνα ΟΖΛ καὶ ΟΑΚ ἔχομεν

$$\frac{Z\Lambda}{AK}=\frac{O\Lambda}{OK} \quad \text{ἢ} \quad \frac{x}{R}=\frac{\upsilon-y}{\upsilon}. \qquad (2)$$

Εἶναι ἀνάγκη τώρα νὰ προσδιορίσωμεν τὰ x καὶ y εἰς τρόπον, ὥστε ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια Ε νὰ εἶναι μεγίστη. Πρὸς τοῦτο λύομεν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2).

Ἀπὸ τὴν (2) ἔχομεν $R(\upsilon-y)=x\upsilon$ ἢ $R\upsilon-Ry=x\upsilon$

ἢ $$R\upsilon-x\upsilon=Ry \quad \text{ἢ} \quad y=\frac{R\upsilon-x\upsilon}{R}. \qquad (3)$$

Τὴν τιμὴν αὐτὴν τοῦ y θέτομεν εἰς τὴν (1) καὶ ἔχομεν

$$E=2\pi x\left(\frac{R\upsilon-x\upsilon}{R}\right)+2\pi x^2 \quad \text{ἢ} \quad ER=2\pi R\upsilon x-2\pi\upsilon x^2+2\pi Rx^2$$

ἢ $$2\pi(\upsilon-R)x^2-2\pi R\upsilon x+ER=0. \qquad (4)$$

Αἱ ρίζαι αὐτῆς εἶναι $x=\dfrac{2\pi R\upsilon\pm\sqrt{4\pi^2R^2\upsilon^2-8\pi(\upsilon-R)ER}}{4\pi(\upsilon-R)}$. (5)

Διὰ νὰ ἔχῃ ἡ ἐξίσωσις (4) ρίζας πραγματικάς, πρέπει ἡ ὑπόρριζος ποσότης νὰ εἶναι θετική· δηλ. πρέπει νὰ εἶναι

$$4\pi^2R^2\upsilon^2 - 8\pi(\upsilon - R)ER \geqslant 0 \quad \text{ἢ} \quad E \leqslant \frac{\pi R\upsilon^2}{2(\upsilon - R)}$$

ἤτοι πρέπει τὸ E νὰ εἶναι ἴσον ἢ μικρότερον τοῦ $\frac{\pi R\upsilon^2}{2(\upsilon-R)}$.

Ὥστε ***ἡ μεγαλυτέρα τιμὴ (μέγιστον)***, τὴν ὁποίαν δύναται νὰ λάβῃ τὸ E, δηλ. ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου εἶναι ἡ $\frac{\pi R\upsilon^2}{2(\upsilon-R)}$.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (5) τὸ E μὲ τὴν τιμήν του καὶ εὑρίσκομεν

$$x = \frac{2\pi R\upsilon}{4\pi(\upsilon-R)} = \frac{R\upsilon}{2(\upsilon-R)}.$$

Τὴν τιμὴν αὐτὴν τοῦ x θέτομεν εἰς τὴν (3) καὶ εὑρίσκομεν

$$y = \frac{R\upsilon - \frac{R\upsilon^2}{2(\upsilon-R)}}{R} = \frac{2R\upsilon(\upsilon-R) - R\upsilon^2}{2R(\upsilon-R)} = \frac{2R\upsilon^2 - 2R^2\upsilon - R\upsilon^2}{2R(\upsilon-R)} =$$

$$= \frac{R\upsilon^2 - 2R^2\upsilon}{2R(\upsilon-R)} = \frac{\upsilon^2 - 2R\upsilon}{2(\upsilon-R)}.$$

Ὥστε διὰ νὰ ἔχῃ ὁ κύλινδρος, ποὺ θὰ ἐγγραφῇ εἰς τὸν κῶνον, τὴν μεγίστην ὁλικὴν ἐπιφάνειαν $\frac{\pi R\upsilon^2}{2(\upsilon-R)}$, πρέπει νὰ ἔχῃ ἀκτῖνα βάσεως $x = \frac{R\upsilon}{2(\upsilon-R)}$ καὶ ὕψος $y = \frac{\upsilon^2 - 2R\upsilon}{2(\upsilon-R)}$.

Προβλήματα. ***2873.*** Νὰ ἐγγραφῇ εἰς δοθὲν τρίγωνον, ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ τὸ μέγιστον ἐμβαδόν.

2874. Εἰς δοθὲν ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς α νὰ ἐγγραφῇ ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ τὴν ἐλαχίστην ἐπιφάνειαν.

2875. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς δοθὲν τετράγωνον πλευρᾶς α, τὸ ἐλάχιστον τετράγωνον.

2876. Κύκλος ἀκτῖνος R ἐφάπτεται τῶν πλευρῶν ὀρθῆς γωνίας. Φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου καὶ σχηματίζομεν ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ περιγεγραμμένον περὶ τὸν κύκλον. Νὰ σπουδασθοῦν αἱ μεταβολαὶ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου καὶ συνεπῶς αἱ πλευραὶ τῆς ὀρθῆς γωνίας.

2877. Δίδεται ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου αἱ κάθετοι πλευραὶ εἶναι ΑΒ=γ καὶ ΑΓ=β. Ζητεῖται νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ τὸ μέγιστον ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου μία γωνία νὰ συμπίπτῃ μὲ τὴν ὀρθὴν γωνίαν Α τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

2878. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον ἢ τὸ ἐλάχιστον τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος εἶναι σταθερά.

2879. Ἐξ ὅλων τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν περίμετρον 2τ, ποῖον εἶναι ἐκεῖνο, ποὺ ἔχει τὴν μεγαλυτέραν ἐπιφάνειαν;

2880. Δίδεται ἡμικύκλιον διαμέτρου ΑΒ=2R. Ἀπὸ τὰ ἄκρα Α καὶ Β τῆς διαμέτρου ὑψοῦμεν καθέτους Ax καὶ By καὶ ζητεῖται νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη τῆς ἡμιπεριφερείας τοιαύτη, ὥστε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ οὕτω σχηματιζομένου ὀρθογωνίου τραπεζίου νὰ εἶναι ἐλάχιστον.

2881. Αἱ διαστάσεις ἑνὸς ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ εἶναι ΑΒ=α καὶ ΒΓ=β. Ἀπὸ κάθε κορυφὴν καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν λαμβάνομεν ἐπὶ τῶν πλευρῶν του μήκη ἴσα ΑΕ=ΒΖ=ΓΗ=ΔΘ=x. Νὰ ὁρισθῇ τὸ x, ἵνα τὸ παραλληλόγραμμον ΕΖΗΘ εἶναι ἐλάχιστον.

2882. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον ἢ τὸ ἐλάχιστον τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου ἐγγεγραμμένου εἰς σφαῖραν.

2883. Εἰς δοθεῖσαν σφαῖραν νὰ περιγραφῇ κῶνος, τοῦ ὁποίου ὁ ὄγκος νὰ εἶναι ἐλάχιστος.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΕΠΙ ΤΩΝ ΜΕΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ

784. Παραδεχόμεθα, ὅτι :

1ον. Κατὰ τὴν ἀναζήτησιν τῶν μεγίστων ἢ τῶν ἐλαχίστων μιᾶς παραστάσεως δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν (ἢ νὰ διαιρέσωμεν) αὐτὴν ἐπὶ μίαν σταθερὰν καὶ θετικὴν ποσότητα, χωρὶς νὰ ἀλλάξῃ ἡ τιμὴ τῶν ἀγνώστων, οἱ ὁποῖοι δίδουν τὰ μέγιστα ἢ τὰ ἐλάχιστα τῆς παραστάσεως.

2ον. Τὸ μέγιστον ἢ τὸ ἐλάχιστον μιᾶς παραστάσεως λαμβάνει χώραν συγχρόνως μὲ τὸ μέγιστον ἢ τὸ ἐλάχιστον τοῦ τετραγώνου τῆς παραστάσεως.

785. **Θεώρημα Ι.** ***Τὸ γινόμενον δύο μεταβλητῶν, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι σταθερόν, εἶναι μέγιστον, ὅταν οἱ παράγοντες αὐτοὶ εἶναι ἴσοι· (ἐὰν δύνανται νὰ γίνουν ἴσοι).***

Ἔστωσαν x καὶ y οἱ μεταβλητοὶ παράγοντες. Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ α τὸ σταθερὸν ἄθροισμά των καὶ μὲ μ τὸ γινόμενόν των, τοῦ ὁποίου ζητοῦμεν τὸ μέγιστον, θὰ ἔχωμεν τὰς ἐξισώσεις

$$x+y=\alpha \qquad xy=\mu.$$

Ἐπειδὴ γνωρίζομεν τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενον τῶν x καὶ y ἕπεται, ὅτι οἱ x καὶ y εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως

$$k^2-\alpha k+\mu=0. \tag{1}$$

Αἱ ρίζαι τῆς (1) εἶναι
$$\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}=\frac{\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-4\mu}}{2}. \tag{2}$$

Ἀλλὰ διὰ νὰ εἶναι αἱ ρίζαι αὐταὶ πραγματικαί, πρέπει ἡ ὑπόρριζος ποσότης νὰ εἶναι θετική, δηλ. πρέπει νὰ εἶναι

$$\alpha^2-4\mu\geqslant 0 \quad \text{ἢ} \quad \mu\leqslant\frac{\alpha^2}{4}$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι διὰ νὰ ἔχῃ ἡ (1) ρίζας πραγματικὰς πρέπει τὸ μ νὰ εἶναι ἴσον ἢ μικρότερον τοῦ $\frac{\alpha^2}{4}$. Ὥστε ***ἡ μεγαλυτέρα τιμή***, τὴν ὁποίαν δύναται νὰ λάβῃ τὸ μ εἶναι ἡ $\frac{\alpha^2}{4}$ ***(μέγιστον)***.

Θέτομεν εἰς τὴν (2) $\mu=\frac{\alpha^2}{4}$ καὶ εὑρίσκομεν $x=y=\frac{\alpha}{2}$.

Ὥστε διὰ νὰ εἶναι τὸ γινόμενον xy μέγιστον, πρέπει οἱ παράγοντες x καὶ y νὰ εἶναι ἴσοι.

Παράδειγμα 1ον. Τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν εἶναι 18· τὸ γινόμενον αὐτῶν θὰ εἶναι μέγιστον, ἂν οἱ ἀριθμοὶ εἶναι ἴσοι· δηλ. ἂν εἶναι 9 καὶ 9. Πράγματι ἔχομεν

$$9\times 9=81, \text{ ἐνῶ } 8\times 10=80, \quad 7\times 11=77 \text{ κλπ.}$$

Παράδειγμα 2ον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον τῆς παραστάσεως

$$(2+x^2)(10-x^2).$$

Οἱ παράγοντες $(2+x^2)$ καὶ $(10-x^2)$ τοῦ δοθέντος γινομένου ἔχουν ἄθροισμα $(2+x^2)+(10-x^2)=12=$ σταθερόν· ἄρα τὸ γινόμενον $(2+x^2)(10-x^2)$ θὰ εἶναι μέγιστον, ὅταν οἱ παράγοντές του εἶναι ἴσοι δηλ. ὅταν εἶναι $2+x^2=10-x^2$ ἢ $2x^2=8$ ἢ $x=\pm 2$.

Ὥστε τὸ μέγιστον τῆς δοθείσης παραστάσεως ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν τιμὴν $x=\pm 2$ καὶ εἶναι ἴσον μὲ

$$(2+4)(10-4)=6\,.\,6=36.$$

786. Θεώρημα ΙΙ. ***Ὅταν τὸ γινόμενον δύο μεταβλητῶν καὶ θετικῶν παραγόντων εἶναι σταθερόν, τὸ ἄθροισμά των εἶναι ἐλάχιστον, ὅταν οἱ παράγοντες αὐτοὶ εἶναι ἴσοι.***

Ἔστωσαν x καὶ y δύο μεταβλητοὶ καὶ θετικοὶ παράγοντες.

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ α τὸ σταθερὸν γινόμενόν των xy καὶ μὲ μ τὸ μεταβλητὸν ἄθροισμά των, τοῦ ὁποίου ζητοῦμεν τὸ μέγιστον, θὰ ἔχωμεν τὰς ἐξισώσεις

$$xy=\alpha \quad (1), \qquad x+y=\mu. \quad (2)$$

Ἀπὸ τὰς (1) καὶ (2) παρατηροῦμεν, ὅτι οἱ x καὶ y εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως

$$k^2-\mu k+\alpha=0. \quad (3)$$

Αἱ ρίζαι αὐτῆς εἶναι

$$\begin{matrix}x\\y\end{matrix}=\frac{\mu\pm\sqrt{\mu^2-4\alpha}}{2}. \quad (4)$$

Διὰ νὰ εἶναι αἱ ρίζαι αὐταὶ πραγματικαί, πρέπει ἡ ὑπόρριζος ποσότης νὰ εἶναι θετική· δηλ. πρέπει νὰ εἶναι

$$\mu^2-4\alpha \geqslant 0 \quad \text{ἢ} \quad \mu^2\geqslant 4\alpha \quad \text{καὶ} \quad \mu\geqslant 2\sqrt{\alpha}.$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι διὰ νὰ ἔχῃ ἡ (3) ρίζας πραγματικάς, πρέπει τὸ μ νὰ εἶναι ἴσον ἢ μεγαλύτερον τοῦ $2\sqrt{\alpha}$. Ὥστε ἡ ***μικροτέρα τιμὴ (ἐλάχιστον)***, τὴν ὁποίαν δύναται νὰ λάβῃ τὸ μ εἶναι ἡ $2\sqrt{\alpha}$.

Διὰ $\mu=2\sqrt{\alpha}$, ἡ (4) δίδει $x=y=\frac{2\sqrt{\alpha}}{2}=\sqrt{\alpha}$.

Ὥστε τὸ ἄθροισμα $x+y$ εἶναι ἐλάχιστον, ὅταν οἱ παράγοντες εἶναι ἴσοι.

Παράδειγμα. Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ x ἡ παράστασις $\frac{\alpha^4+x^4}{x^2}$ ***ἔχει ἐλάχιστον;***

Ἡ δοθεῖσα παράστασις γράφεται $\frac{\alpha^4}{x^2}+x^2$. (1)

Τὸ γινόμενον τῶν ὅρων τοῦ ἀθροίσματος (1) εἶναι ἴσον μὲ $\frac{\alpha^4}{x^2}\cdot x^2=\alpha^4=$σταθερόν· ἄρα τὸ ἄθροισμα (1) καὶ ἑπομένως καὶ ἡ δοθεῖσα παράστασις ἔχει ἐλάχιστον, ὅταν οἱ ὅροι του εἶναι ἴσοι· δηλ. ὅταν εἶναι $\frac{\alpha^4}{x^2}=x^2$ ἢ $x^4=\alpha^4$, ἄρα $x=\pm\alpha$.

Ὥστε διὰ $x=\pm\alpha$, ἡ δοθεῖσα παράστασις ἔχει ἐλάχιστον ἴσον μὲ

$$\frac{\alpha^4+\alpha^4}{\alpha^2}=2\alpha^2.$$

787. **Παρατήρησις.** Ἡ ἀπόδειξις τῶν θεωρημάτων I καὶ II προϋποθέτει, ὅτι οἱ δύο παράγοντες δύνανται νὰ γίνουν ἴσοι, διότι ὑπάρχουν περιπτώσεις κατὰ τὰς ὁποίας οἱ δύο παράγοντες, μεταβαλλόμενοι, δὲν δύνανται νὰ γίνουν ἴσοι, ὅπως π.χ. τὸ ὕψος ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου καὶ ἡ ὑποτείνουσα αὐτοῦ.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν χρησιμοποιοῦμεν τὴν κάτωθι μέθοδον, ἡ ὁποία ἀποτελεῖ συγχρόνως καὶ μίαν δευτέραν ἀπόδειξιν τῶν θεωρημάτων αὐτῶν.

Ἔστω ἡ προφανὴς ταυτότης

$$4xy=(x+y)^2-(x-y)^2 \qquad (1)$$

1ον. Ἐὰν τὸ ἄθροισμα $x+y$ εἶναι σταθερὸν καὶ ἴσον μὲ α, τότε ἡ ταυτότης (1) γράφεται $4xy=\alpha^2-(x-y)^2$.

Ἐπειδὴ οἱ x καὶ y εἶναι θετικοὶ τὸ γινόμενόν των xy ἢ καὶ τὸ 4xy, θὰ εἶναι μέγιστον, ὅταν ὁ θετικὸς ἀριθμὸς $(x-y)^2$ γίνῃ ἐλάχιστος.

Ὅταν οἱ παράγοντες x καὶ y ***δύνανται νὰ γίνουν ἴσοι,*** δηλαδή, ὅταν $x=y$, τὸ ἐλάχιστον $(x-y)^2$ εἶναι μηδὲν καὶ μεταπίπτομεν εἰς τὴν πρότασιν τοῦ θεωρήματος I.

Ὅταν ὅμως οἱ παράγοντες x καὶ y δὲν δύνανται νὰ εἶναι ἴσοι, τὸ γινόμενόν των θὰ εἶναι μέγιστον, ὅταν τὸ $(x-y)^2$, δηλ. τὸ τετράγωνον τῆς διαφορᾶς τῶν παραγόντων x καὶ y, γίνῃ ἐλάχιστον

Ἐπειδὴ τὸ ἐλάχιστον τοῦ $(x-y)^2$ λαμβάνει χώραν συγχρόνως μὲ τὸ ἐλάχιστον τοῦ $x-y$ συνάγομεν, ὅτι :

Ὅταν τὸ ἄθροισμα δύο θετικῶν μεταβλητῶν παραγόντων x καὶ y εἶναι σταθερόν, τὸ γινόμενόν των εἶναι μέγιστον ὅταν ἡ διαφορὰ αὐτῶν γίνῃ ἐλαχίστη.

2ον. Ἔστω ἤδη, ὅτι τὸ γινόμενον xy εἶναι σταθερὸν καὶ ἴσον μὲ α^2 τότε ἡ (1) γράφεται

$$4\alpha^2=(x+y)^2-(x-y)^2 \quad \text{ἢ} \quad (x+y)^2=4\alpha^2+(x-y)^2.$$

Τὸ ἐλάχιστον τοῦ $(x+y)^2$ ἢ τοῦ $(x+y)$, θὰ ὑφίσταται, ὅταν ὁ μεταβλητὸς προσθετέος $(x-y)^2$ γίνῃ ἐλάχιστος.

Ὅταν οἱ παράγοντες x καὶ y δύναται νὰ γίνουν ἴσοι, δηλ. ὅταν $x=y$, τὸ ἐλάχιστον $(x-y)^2$ εἶναι μηδὲν καί μεταπίπτομεν εἰς τὸ θεώρημα II.

Ὅταν ὅμως οἱ παράγοντες x καὶ y δὲν δύνανται νὰ γίνουν ἴσοι τότε καταλήγομεν εἰς τὸ ὅτι:

Ὅταν τὸ γινόμενον δύο μεταβλητῶν καὶ θετικῶν παραγόντων* x *καὶ* y *εἶναι σταθερόν, τὸ ἄθροισμα τῶν παραγόντων αὐτῶν εἶναι ἐλάχιστόν, ὅταν τὸ τετράγωνον τῆς διαφορᾶς των ἢ ἁπλῶς ἡ διαφορά των, γίνῃ ἐλάχιστον.

Παράδειγμα. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον τῆς παραστάσεως

$$(5+2x^2)(1-2x^2). \qquad (1)$$

Τὸ ἄθροισμα τῶν δύο παραγόντων εἶναι

$$(5+2x^2)+(1-2x^2)=6=\text{σταθερόν}.$$

Ὥστε τὸ γινόμενόν των θὰ εἶναι μέγιστον, ἐὰν οἱ παράγοντες εἶναι ἴσοι· ἤτοι ἐὰν εἶναι

$$5+2x^2=1-2x^2 \quad \text{ἢ} \quad 4x^2=-4 \quad \text{ἢ} \quad x^2=-1.$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ x εἶναι φανταστικὸν καὶ ἑπομένως οἱ παράγοντες δὲν δύνανται νὰ εἶναι ἴσοι πραγματικοὶ ἀριθμοί.

Διὰ τοῦτο σχηματίζομεν τὴν διαφορὰν τῶν παραγόντων καὶ ἔχομεν $(5+2x^2)-(1-2x^2)=4+4x^2=4(1+x^2)$·

Ἡ διαφορὰ αὐτὴ θὰ εἶναι ἐλαχίστη, ἐὰν $x^2=0$, ἤτοι ἐὰν $x=0$. Ὥστε τὸ δοθὲν γινόμενον εἶναι μέγιστον διὰ $x=0$. Διὰ $x=0$ ἡ (1) δίδει $5.1=5$. Ὥστε τὸ μέγιστον τῆς παραστάσεως (1) εἶναι 5.

788. Θεώρημα III. ***Ὅταν τὸ ἄθροισμα πολλῶν μεταβλητῶν καὶ θετικῶν παραγόντων εἶναι σταθερόν, τὸ γινόμενόν των εἶναι μέγιστον, ὅταν οἱ παράγοντες αὐτοὶ εἶναι ἴσοι.***

Ἔστωσαν ν μεταβληταὶ καὶ θετικαὶ ποσότητες $x, y, \varphi, \ldots, \omega$, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἄθροισμα σταθερὸν α· ἤτοι ἔστω, ὅτι εἶναι

$$x+y+z+\ldots+\omega=\alpha \qquad (1)$$

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ μ τὸ μέγιστον γινόμενόν των θὰ ἔχωμεν

$$xyz\ldots\omega=\mu. \qquad (2)$$

Ἐν πρώτοις τὸ γινόμενον $xyz\ldots\omega$ θὰ ἔχῃ ἕνα μέγιστον, διότι ὅλοι οἱ παράγοντες εἶναι θετικοὶ καὶ ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμά των εἶναι σταθερὸν καὶ ἴσον μὲ α, οἱ παράγοντες αὐτοὶ δύνανται νὰ μεταβάλλωνται μόνον ἀπὸ τοῦ 0 μέχρι τοῦ α καὶ ἑπομένως τὸ γινόμενόν των θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ $\alpha.\alpha.\alpha\ldots\alpha=\alpha^\nu$. Δὲν δύναται λοιπὸν τὸ γινόμενον $xyz\ldots\omega$ νὰ ὑπερβῇ πάντα δοθέντα ἀριθμὸν καὶ ἑπομένως θὰ ἔχῃ ἕνα μέγιστον.

Θὰ δείξωμεν τώρα, ὅτι τὸ γινόμενον αὐτὸ γίνεται μέγιστον, ὅταν

$$x=y=z=\ldots=\omega.$$

Ὑποθέτομεν, ὅτι δύο παράγοντες x καὶ y εἶναι ἄνισοι. Τὸ ἄθροισμά των $x+y$ δὲν ἀλλάσσει, ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν ἕκαστον ἐξ αὐτῶν μὲ τὸ ἡμιάθροισμά των $\frac{x+y}{2}$. Πράγματι εἶναι

$$\frac{x+y}{2}+\frac{x+y}{2}=\frac{2x+2y}{2}=x+y.$$

Τὸ γινόμενον ὅμως $\frac{x+y}{2}\cdot\frac{x+y}{2}$ τῶν ἴσων παραγόντων $\frac{x+y}{2}$ καὶ $\frac{x+y}{2}$ εἶναι, κατὰ τὸ θεώρημα I, μεγαλύτερον τοῦ γινομένου xy τῶν ἀνίσων παραγόντων x καί y· ἤτοι εἶναι

$$\frac{x+y}{2}\cdot\frac{x+y}{2}>xy.$$

Πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἀνισότητος αὐτῆς ἐπὶ τὸ θετικὸν γινόμενον $z \ldots \omega$ καὶ λαμβάνομεν

$$\frac{x+y}{2}\cdot\frac{x+y}{2}\cdot z \ldots \omega > xyz \ldots \omega.$$

Ἐκ τῶ ἀνωτέρω παρατηροῦμεν, ὅτι ὑπάρχει ἄλλο γινόμενον μεγαλύτερον τοῦ $xyz \ldots \omega$ καὶ τοῦ ὁποίου οἱ παράγοντες ἔχουν τὸ αὐτὸ σταθερὸν ἄθροισμα α καὶ ὅτι, ὅταν δύο παράγοντες ἑνὸς γινομένου εἶναι ἄνισοι καὶ τοὺς ἀντικαταστήσωμεν μὲ δύο ἄλλους παράγοντες ἴσους, χωρὶς ὅμως νὰ μεταβάλωμεν τὸ ἄθροισμα, τότε τὸ γιμενον αὐξάνει.

Ἐπειδὴ ὅμως τὸ γινόμενον $xyz \ldots \omega$ ἔχει μέγιστον ἕπεται, ὅτι τοῦτο θὰ εἶναι μέγιστον, ὅταν οἱ παράγοντές του γίνουν ἴσοι· ἤτοι ὅταν $x=y=z=\ldots=\omega$.

789. Θεώρημα IV. ***Ὅταν τὸ γινόμενον πολλῶν μεταβλητῶν καὶ θετικῶν παραγόντων εἶναι σταθερόν, τὸ ἄθροισμά των εἶναι ἐλάχιστον, ὅταν οἱ παράγοντες αὐτοὶ εἶναι ἴσοι.***

Ἔστωσαν x, y, ω, φ τέσσαρες μεταβλητοὶ καὶ θετικοὶ παράγοντες, τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον $xy\omega\varphi$ εἶναι σταθερὸν καὶ ἴσον μὲ α· ἤτοι ἔστω, ὅτι εἶναι

$$xy\omega\varphi=\alpha. \quad (1)$$

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ μ τὸ ἐλάχιστον ἄθροισμά των, θὰ ἔχωμεν

$$x+y+\omega+\varphi=\mu. \quad (2)$$

Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ ἄθροισμά των μ θὰ εἶναι ἐλάχιστον, ὅταν οἱ x, y, ω, φ εἶναι ἴσοι

Ὑποθέτομεν, ὅτι δύο προσθετέοι οἱ x καὶ y εἶναι ἄνισοι. Τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι $x+y$.

Τὸ γινόμενον αὐτῶν xy δὲν ἀλλάσσει, ἂν ἀντικαταστήσωμεν ἕκαστον ἐξ αὐτῶν μὲ τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν $\sqrt{xy}$ τοῦ γινομένου των.

Πράγματι ἔχομεν $\sqrt{xy}\cdot\sqrt{xy}=\sqrt{x^2y^2}=xy$.

Τὸ ἄθροισμα ὅμως $\sqrt{xy}+\sqrt{xy}$ τῶν ἴσων αὐτῶν προσθετέων $\sqrt{xy}$

καὶ $\sqrt{xy}$ εἶναι, κατὰ τὸ θεώρημα II, μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος $x+y$ τῶν ἀνίσων προσθετέων x καὶ y, δηλ. εἶναι

$$x+y > \sqrt{xy}+\sqrt{xy}$$

Προσθέτοντες καὶ εἰς τὰ δύο μέλη τῆς ἀνισότητος αὐτῆς τὸ θετικὸν ἄθροισμα $\omega+\varphi$ ἔχομεν

$$x+y+\varphi+\omega > \sqrt{xy}+\sqrt{xy}+\varphi+\omega.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παρατηροῦμεν, ὅτι, ὅταν δύο προσθετέοι ἑνὸς ἀθροίσματος εἶναι ἄνισοι καὶ τοὺς ἀντικαταστήσωμεν μὲ δύο ἄλλους προσθετέους ἴσους, χωρὶς ὅμως νὰ μεταβάλλωμεν τὸ γινόμενόν των, τότε τὸ ἄθροισμά των ἐλαττοῦται

Ἐὰν λοιπὸν ἀντικαταστήσωμεν ὅλους τοὺς προσθετέους δι' ἄλλων ἴσων, χωρὶς ὅμως νὰ μεταβάλλωμεν τὸ γινόμενόν των, τότε τὸ ἄθροισμά των θὰ γίνῃ ἐλάχιστον ὥστε τὸ ἄθροισμα θὰ εἶναι ἐλάχιστον, ἂν

$$x=y=\omega=\varphi.$$

790. Θεώρημα V. ***Ὅταν τὸ ἄθροισμα μεταβλητῶν καὶ θετικῶν παραγόντων*** x, y, ω, ***εἶναι σταθερόν, τὸ γινόμενον*** $x^\mu y^\nu \omega^\varrho$ ***εἶναι μέγιστον, ὅταν οἱ παράγοντες εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἐκθετῶν των.***

Ἔστω, ὅτι οἱ παράγοντες x, y, ω ἔχουν ἄθροισμα σταθερὸν α· ἤτοι ἔστω, ὅτι εἶναι $x+y+\omega=\alpha$.

Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ γινόμενον $x^\mu y^\nu \omega^\varrho$ εἶναι μέγιστον, ὅταν ἔχωμεν

$$\frac{x}{\mu}=\frac{y}{\nu}=\frac{\omega}{\rho}.$$

Τὸ γινόμενον $x^\mu y^\nu \omega^\varrho$ δύναται νὰ γραφῇ

$$x^\mu y^\nu \omega^\varrho=\frac{x^\mu}{\mu^\mu}\cdot\frac{y^\nu}{\nu^\nu}\cdot\frac{\omega^\varrho}{\rho^\varrho}\cdot\mu^\mu\cdot\nu^\nu\cdot\varrho^\varrho$$

ἢ

$$x^\mu y^\nu \omega^\varrho=\left(\frac{x}{\mu}\right)^\mu\cdot\left(\frac{y}{\nu}\right)^\nu\cdot\left(\frac{\omega}{\rho}\right)^\varrho\times\mu^\mu\cdot\nu^\nu\cdot\varrho^\varrho.$$

Τὸ γινόμενον αὐτὸ παρατηροῦμεν, ὅτι ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο μέρη ἐκ τῶν ὁποίων τὸ μὲν ἕνα $\left(\frac{x}{\mu}\right)^\mu\cdot\left(\frac{y}{\nu}\right)^\nu\cdot\left(\frac{\omega}{\rho}\right)^\varrho$

εἶναι μεταβλητόν, τὸ δὲ ἄλλο $\mu^\mu \nu^\nu \varrho^\varrho$ εἶναι σταθερόν.

Τὸ μέγιστον λοιπὸν τοῦ γινομένου $x^\mu y^\nu \omega^\varrho$ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ μέγιστον τοῦ γινομένου

$$\left(\frac{x}{\mu}\right)^\mu\cdot\left(\frac{y}{\nu}\right)^\nu\left(\frac{\omega}{\varrho}\right)^\varrho \qquad (1)$$

τὸ ὁποῖον δὲν διαφέρει τοῦ $x^\mu y^\nu \omega^\varrho$ παρὰ μόνον κατὰ τὸν σταθερὸν παράγοντα $\frac{1}{\mu^\mu\cdot\nu^\nu\cdot\varrho^\varrho}$.

Ἀλλὰ τὸ γινόμενον (1) δύναται νὰ γραφῆ

$$\overbrace{\left(\frac{x}{\mu}\cdot\frac{x}{\mu}\cdot\ldots\cdot\frac{x}{\mu}\right)}^{\mu \text{ παράγοντες}}\cdot\overbrace{\left(\frac{y}{\nu}\cdot\frac{y}{\nu}\cdot\ldots\cdot\frac{y}{\nu}\right)}^{\nu \text{ παράγοντες}}\cdot\overbrace{\left(\frac{\omega}{\rho}\cdot\frac{\omega}{\rho}\cdot\ldots\cdot\frac{\omega}{\rho}\right)}^{\rho \text{ παράγοντες}} \quad (2)$$

Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν παραγόντων (2) εἶναι

$$\mu\cdot\frac{x}{\mu}+\nu\cdot\frac{y}{\nu}+\rho\cdot\frac{\omega}{\rho}=x+y+\omega=\alpha \text{ (σταθερόν).}$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν παραγόντων (2) εἶναι σταθερόν· ἑπομένως τὸ γινόμενον (2) καὶ κατὰ συνέπειαν τὸ (1) θὰ εἶναι μέγιστον, ὅταν αἱ παράγοντες εἶναι ἴσοι (θεώρημα III)· ἤτοι, ὅταν εἶναι

$$\frac{x}{\mu}=\frac{y}{\nu}=\frac{\omega}{\rho}. \quad (3)$$

Σημ. Διὰ νὰ εὕρωμεν διὰ ποίας τιμάς τῶν x, y, ω τὸ γινόμενον (1) εἶναι μέγιστον ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

Ἐκ τῆς (3) ἔχομεν κατὰ γνωστὴν ἰδιότητα τῶν ἴσων κλασμάτων

$$\frac{x}{\mu}=\frac{y}{\nu}=\frac{\omega}{\rho}=\frac{x+y+\omega}{\mu+\nu+\rho}=\frac{\alpha}{\mu+\nu+\rho}.$$

Ἐκ τούτων προκύπτει

$$x=\frac{\alpha\mu}{\mu+\nu+\rho},\quad y=\frac{\alpha\nu}{\mu+\nu+\rho},\quad \omega=\frac{\alpha\rho}{\mu+\nu+\rho}.$$

Παράδειγμα. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον τοῦ γινομένου

$$(\alpha-x)^2x.$$

Ἐπειδὴ οἱ παράγοντες $\alpha-x$ καὶ x ἔχουν ἄθροισμα $(\alpha-x)+x=\alpha=$σταθερόν, τὸ γινόμενον $(\alpha-x)^2x$ θὰ εἶναι μέγιστον, ὅταν οἱ παράγοντες εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἐκθετῶν των· ἤτοι, ὅταν εἶναι

$$\frac{\alpha-x}{2}=\frac{x}{1}.$$

Ἀπὸ αὐτὴν ἔχομεν $\alpha-x=2x$ ἢ $x=\frac{\alpha}{3}$.

Ὥστε τὸ μέγιστον τοῦ δοθέντος γινομένου θὰ εὑρεθῇ, ἂν θέσωμεν εἰς αὐτὸ $x=\frac{\alpha}{3}$. Διὰ $x=\frac{\alpha}{3}$ τὸ μέγιστον εἶναι

$$\left(\alpha-\frac{\alpha}{3}\right)^2\cdot\frac{\alpha}{3} \quad \text{ἢ} \quad \left(\frac{2\alpha}{3}\right)^2\cdot\frac{\alpha}{3}=\frac{4\alpha^3}{27}.$$

791. Θεώρημα VI. ***Ὅταν τὸ γινόμενον δυνάμεων θετικῶν καὶ μεταβλητῶν ἀριθμῶν, εἶναι σταθερόν, τὸ ἄθροισμα τῶν μεταβλητῶν αὐτῶν ἀριθμῶν εἶναι ἐλάχιστον, ὅταν οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἐκθετῶν των.***

Ἔστωσαν x, y, ω τρεῖς μεταβλητοὶ θετικοὶ ἀριθμοί, τῶν ὁποίων αἱ τυχοῦσαι δυνάμεις x^μ, y^ν, ω^ρ, ὅπου μ, ν, ρ εἶναι ἀριθμοὶ ὡρισμένοι ἀκέραιοι καὶ θετικοί, ἔχουν γινόμενον σταθερόν· ἤτοι ἔστω, ὅτι

$$x^{\mu}\,.\,y^{\nu}\,.\,\omega^{\varrho}=\alpha.$$

Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα $x+y+\omega$ εἶναι ἐλάχιστον, ἐὰν

$$\frac{x}{\mu}=\frac{y}{\nu}=\frac{\omega}{\varrho}.$$

Τὸ ἄθροισμα $x+y+\omega$ δύναται νὰ γραφῇ

$$x+y+\omega=\frac{x}{\mu}\,.\,\mu+\frac{y}{\nu}\,.\,\nu+\frac{\omega}{\varrho}\,.\,\varrho$$

$$\text{ἢ}\quad x+y+\omega=\overbrace{\frac{x}{\mu}+\frac{x}{\mu}+\ldots+\frac{x}{\mu}}^{\mu\ \text{προσθετέοι}}+\overbrace{\frac{y}{\nu}+\frac{y}{\nu}+\ldots+\frac{y}{\nu}}^{\nu\ \text{προσθετέοι}}+\overbrace{\frac{\omega}{\varrho}+\frac{\omega}{\varrho}+\ldots+\frac{\omega}{\varrho}}^{\varrho\ \text{προσθετέοι}}. \qquad (2)$$

Ἀλλὰ τὸ γινόμενον τῶν προσθετέων τοῦ δευτέρου μέλους τῆς ἰσότητος (2) εἶναι

$$\left(\frac{x}{\mu}\cdot\frac{x}{\mu}\cdots\frac{x}{\mu}\right)\cdot\left(\frac{y}{\nu}\cdot\frac{y}{\nu}\cdots\frac{y}{\nu}\right)\cdot\left(\frac{\omega}{\varrho}\cdot\frac{\omega}{\varrho}\cdots\frac{\omega}{\varrho}\right)$$

$$\text{ἢ}\qquad \left(\frac{x}{\mu}\right)^{\mu}\cdot\left(\frac{y}{\nu}\right)^{\nu}\cdot\left(\frac{\omega}{\varrho}\right)^{\varrho}=$$

$$=\frac{x^{\mu}\,.\,y^{\nu}\,.\,\varrho^{\varrho}}{\mu^{\mu}\,.\,\nu^{\nu}\,.\,\varrho^{\varrho}}=\frac{\alpha}{\mu^{\mu}\,.\,\nu^{\nu}\,.\,\varrho^{\varrho}}=\text{σταθερόν}.$$

Ἐπειδὴ τὸ γινόμενον τῶν παραγόντων $\frac{x}{\mu},\ldots,\frac{y}{\nu},\ldots,\frac{\omega}{\varrho}$ εἶναι σταθερόν, τὸ ἄθροισμά των θὰ εἶναι ἐλάχιστον (§ 789), ἐὰν οἱ παράγοντες αὐτοὶ εἶναι ἴσοι· ἤτοι ἐὰν εἶναι

$$\frac{x}{\mu}=\frac{y}{\nu}=\frac{\omega}{\varrho}.$$

Ἀσκήσεις. Α΄ Ὁμάς. 2884. Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ x τὸ γινόμενον $x(\alpha^2-x^2)$ ἔχει μέγιστον; (τὸ α εἶναι σταθερόν).

2885. Τὸ αὐτὸ διὰ τὸ γινόμενον $x^4(4\alpha^2-x^2)$.

2886. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον τῆς παραστάσεως $x^2(\alpha-\beta x)$, ὅταν οἱ α καὶ β εἶναι θετικοί.

2887. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον τῆς παραστάσεως $\frac{x-2\alpha}{x^3}$.

2888. Ὁμοίως τῆς παραστάσεως $\frac{x^2-\alpha^2}{x^3}$.

2889. Ὁμοίως τῆς παραστάσεως $x\sqrt{x}\,.\,\sqrt{1-x^3}$.

2390. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐλάχιστον τῆς παραστάσεως $\frac{x^3}{(x-\alpha)^2}$.

2891. Ὁμοίως τῆς παραστάσεως $\frac{\alpha^8+\beta^2x^6}{x^2}$.

2892. Ὁμοίως τῆς παραστάσεως $x^2+\frac{\alpha^3}{x}$.

2893. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον ἢ τὸ ἐλάχιστον τῆς συναρτήσεως

$$y = x^3 + \frac{1}{x^2}.$$

2894. Νὰ χωρισθῇ ὁ ἀριθμὸς 25 εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε τὸ τετράγωνον τοῦ πρώτου πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν κύβον τοῦ δευτέρου νὰ εἶναι μέγιστον.

2895. Ἐὰν $\alpha x^\mu + \beta y^\nu =$ σταθερόν, νὰ εὑρεθῇ ὑπὸ ποίους ὅρους τὸ γινόμενον $x^\mu y^\nu$ εἶναι μέγιστον;

2896. Ἐὰν $x+y+\omega=$σταθερόν, νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον τοῦ γινομένου

$$(\alpha x+\alpha')(\beta x+\beta')(\gamma\omega+\gamma').$$

2897. Ἐὰν τὸ ἄθροισμα $x+y$ εἶναι σταθερόν, νὰ εὑρεθῇ, ἐὰν τὰ ἀθροίσματα x^2+y^2 καὶ x^3+y^3 ἔχουν μέγιστον ἢ ἐλάχιστον.

792. **Ἐφαρμογαί. Πρόβλημα 1ον** ***Ἐξ ὅλων τῶν ὀρθογωνίων, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν περίμετρον 2τ, ποῖον εἶναι ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἔχει τὸ μέγιστον ἐμβαδόν;***

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ x καὶ y τὰς διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου, θὰ εἶναι $2x+2y=2\tau$ ἢ $x+y=\tau$. (1)

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ Ε τό ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου, θὰ ἔχωμεν $xy=E$. (2)

Ἐδῶ ἔχομεν δύο μεταβλητὰς x καὶ y, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι σταθερὸν καὶ ἴσον μὲ τ· ἑπομένως τὸ γινόμενόν των xy καὶ κατὰ συνέπειαν τὸ ἐμβαδόν Ε τοῦ ὀρθογωνίου θὰ εἶναι μέγιστον, ὅταν οἱ παράγοντες εἶναι ἴσοι· ἤτοι ὅταν $x = y = \frac{\tau}{2}$.

Ἀλλ' ὅταν $x=y$ τότε τὸ ὀρθογώνιον γίνεται τετράγωνον.

Ὥστε ἐξ ὅλων τῶν ὀρθογωνίων, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν περίμετρον, μέγιστον εἶναι τὸ τετράγωνον.

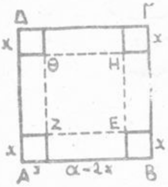
793. **Πρόβλημα 2ον.** ***Δίδεται ἕνα τετραγωνικὸν χαρτόνι πλευρᾶς α. Ἀπὸ τὰς τέσσαρας γωνίας τοῦ τετραγώνου αὐτοῦ ἀποκόπτομεν τέσσαρα τετράγωνα ἴσης πλευρᾶς x. Διπλώνομεν ἔπειτα τὰ μέρη ποὺ μένουν εἰς τρόπον, ὥστε νὰ σχηματισθῇ ἕνα κυτίον (παραλληλεπίπεδον). Νὰ εὑρεθῇ ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ πλευρὰ x τῶν τετραγώνων, ποὺ ἀποκόπτονται, ὥστε ὁ ὄγκος τοῦ κυτίου νὰ εἶναι μέγιστος.***

Τὸ κυτίον ποὺ θά σχηματισθῇ εἶναι ὀρθογώνιον παραλληλεπεδον καὶ ὁ ὄγκος του V ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν τριῶν διαστάσεών του· ἤτοι εἶναι $V=ZE \cdot Z\Theta \cdot ZK$ (Σχ.).

ἢ $V=(\alpha-2x)(\alpha-2x)x$ ἢ $V=(\alpha-2x)^2x$. (1)

ἢ $$V = (\alpha - 2x)^2 \cdot 2x \cdot \frac{1}{2}.$$

Ἐπειδὴ τὸ $\frac{1}{2}$ εἶναι σταθερόν, τὸ μέγιστον τοῦ V ἐξαρτᾶται ἀπὸ τοὺς μεταβλητοὺς παράγοντας $(\alpha-2x)$ καὶ $2x$. Τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι $(\alpha-2x)+2x=\alpha=$σταθερόν.



Σχ.

Ἑπομένως τὸ γινόμενόν των V θὰ εἶναι μέγιστον, ὅταν οἱ παράγοντες αὐτοὶ εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἐκθετῶν των· ἤτοι, ἂν εἶναι

$$\frac{\alpha-2x}{2}=\frac{2x}{1}.$$

Ἀπὸ αὐτὴν λαμβάνομεν

$$\alpha-2x=4x \quad \text{ἢ} \quad \alpha=6x \quad \text{καὶ} \quad x=\frac{\alpha}{6}.$$

$$\text{Διὰ} \quad x=\frac{\alpha}{6} \quad \text{εὑρίσκομεν} \quad V=\frac{2\alpha^3}{27}.$$

Ὥστε ὁ ὄγκος τοῦ σχηματιζομένου κυτίου θὰ εἶναι μέγιστος, ὅταν ἡ πλευρὰ τοῦ ἀποκοπτομένου τετραγώνου εἶναι ἴση μὲ τὸ ἕκτον τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγωνικοῦ χαρτονίου.

794. Πρόβλημα 3ον. ***Ἐξ ὅλων τῶν κυλίνδρων, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὴν αὐτὴν ὁλικὴν ἐπιφάνειαν, ποῖος ἔχει τὸν μέγιστον ὄγκον.***

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ x τὴν ἀκτῖνα τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου μὲ y τὸ ὕψος του, μὲ $2\pi\alpha^2$ τὴν γνωστὴν ὁλικὴν ἐπιφάνειάν του, με V τὸν ὄγκον του, τοῦ ὁποίου ζητοῦμεν τὸ μέγιστον, θὰ ἔχωμεν τὰς ἐξισώσεις $\quad 2\pi\alpha^2=2\pi x^2+2\pi xy \quad (1) \qquad V=\pi x^2 y \qquad (2)$

Ἐκ τῆς (1) ἔχομεν, ἂν λύσωμεν ὡς πρὸς y

$$y=\frac{2\pi\alpha^2-2\pi x^2}{2\pi x} \quad \text{ἢ} \quad y=\frac{\alpha^2-x^2}{x}. \qquad (3)$$

Θέτομεν τὴν τιμὴν τοῦ y εἰς τὴν (2) καὶ ἔχομεν

$$V=\pi x^2\frac{\alpha^2-x^2}{x} \quad \text{ἢ} \quad V=\pi x(\alpha^2-x^2). \qquad (4)$$

Ἡ ἐξίσωσις (4) δεικνύει, ὅτι τὸ x δὲν δύναται νὰ μεταβάλλεται παρὰ ἀπὸ τοῦ 0 μέχρι τοῦ α. Ἂν λοιπὸν $x=0$ τότε ὁ ὄγκος V εἶναι μηδέν· ἂν $x=\alpha$, ὁ ὄγκος V γίνεται πάλιν ἴσος μὲ μηδέν. Ἀφοῦ λοιπὸν ὁ ὄγκος ἀρχίζει ἀπὸ μηδὲν καὶ καταλήγει εἰς τὸ μηδέν, ἕπεται ὅτι διέρχεται ἀπὸ ἕνα μέγιστον.

Ὁ ὄγκος V θὰ ἔχῃ τὴν μεγίστην τιμήν, ὅταν καὶ τὸ γινόμενον $x(\alpha^2-x^2)$ ἢ τὸ τετράγωνόν του $x^2(\alpha^2-x^2)^2$ θὰ ἔχῃ τὴν μεγίστην τιμήν. Εἶναι ἀνάγκη λοιπὸν νὰ εὕρωμεν τὸ μέγιστον τοῦ γινομένου

$$x^2(\alpha^2-x^2)^2 \quad \text{ἢ} \quad (x^2)^1(\alpha^2-x^2)^2.$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι οἱ παράγοντες x^2 καὶ α^2-x^2 τοῦ γινομένου $(x^2)^1(\alpha^2-x^2)^2$ ἔχουν ἄθροισμα $x^2+\alpha^2-x^2=\alpha^2=$σταθερόν. Τὸ γινόμενον λοιπὸν θὰ εἶναι μέγιστον, ὅταν οἱ παράγοντες εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἐκθετῶν των 1 καὶ 2· δηλ. ὅταν $\quad \frac{x^2}{1}=\frac{\alpha^2-x^2}{2}.$

Ἀπὸ αὐτὴν εὑρίσκομεν $x = \frac{\alpha\sqrt{3}}{3}$.

Τὴν τιμὴν αὐτὴν τοῦ y θέτομεν εἰς τὴν (3) καὶ ἔχομεν

$$y = \frac{\alpha^2 - \frac{\alpha^2}{3}}{\frac{\alpha\sqrt{3}}{3}} = \frac{3\alpha^2 - \alpha^2}{\alpha^2\sqrt{3}} = \frac{2\alpha}{\sqrt{3}} = \frac{2\alpha\sqrt{3}}{3}. \quad \text{δηλ. εἶναι } y = 2x.$$

Θέτομεν ἐπίσης εἰς τὴν (4) ἀντὶ τοῦ x τὴν τιμήν του καὶ εὑρίσκομεν

$$V = \pi \cdot \frac{\alpha\sqrt{3}}{3}\left(\alpha^2 - \frac{\alpha^2}{3}\right) = \frac{2\pi\alpha^3\sqrt{3}}{9}$$

Ὥστε ἐξ ὅλων τῶν κυλίνδρων, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὴν αὐτὴν ὁλικὴν ἐπιφάνειαν, μέγιστον ὄγκον $\frac{2\pi\alpha^3\sqrt{3}}{9}$ ἔχει ὁ κύλινδρος, τοῦ ὁποίου τὸ ὕψος y εἶναι ἴσον μὲ τὴν διάμετρον τῆς βάσεως.

Προβλήματα. Α΄ Ὁμάς. *2898.* Ἐξ ὅλων τῶν τριγώνων, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν περίμετρον 2τ, ποῖον ἔχει τὸ μέγιστον ἐμβαδόν;

2899. Ἐξ ὅλων τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὸ αὐτὸ ἐμβαδόν, ποῖον ἔχει τὴν μικροτέραν ὑποτείνουσαν;

2900. Ἐξ ὅλων τῶν ὀρθογωνίων, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὸ αὐτὸ ἐμβαδὸν α^2, ποῖον ἔχει τὴν ἐλαχίστην περίμετρον;

2901. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς δοθέντα ρόμβον τὸ μέγιστον ὀρθογώνιον;

2902. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς ἕνα κύκλον ἀκτῖνος R, ἕνα ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ τὴν μεγίστην περίμετρον.

2903. Ἐξ ὅλων τῶν ὀρθογωνίων τῶν ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἀκτῖνος R, ποῖον ἔχει τὸ μέγιστον ἐμβαδόν;

2904. Εἰς κύκλον ἀκτῖνος R φέρομεν χορδὴν κάθετον ἐπὶ μίαν διάμετρον. Συνδέομεν τὰ ἄκρα τῆς χορδῆς μὲ τὰ ἄκρα τῆς διαμέτρου. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον τῆς διαφορᾶς τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο τριγώνων, ποὺ ἔχουν τὴν χορδὴν ὡς κοινὴν βάσιν.

2905. Δίδεται ἡμικύκλιον διαμέτρου AB=2R. Διαιροῦμεν τὴν διάμετρον εἰς δύο μέρη AM καὶ MB καὶ μὲ διαμέτρους τὰς AM καὶ MB γράφομεν ἡμικύκλια. Νὰ προσδιορισθῇ τὸ σημεῖον M οὕτως, ὥστε ἡ ἐπιφάνεια ἡ περιεχομένη μεταξὺ τῶν τριῶν ἡμικυκλίων νὰ εἶναι μεγίστη.

2906. Δίδεται ἕνα ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος εἶναι σταθερὰ καὶ ἴση μὲ 4τ. Μὲ διαμέτρους τὰς τέσσαρας πλευράς του κατασκευάζομεν ἡμικύκλια κείμενα ἐκτὸς τοῦ ὀρθογωνίου. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον ἢ τὸ ἐλάχιστον τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ σχηματιζομένου σχήματος.

2907. Νὰ περιγραφῇ περὶ δοθέντα κύκλον ἀκτῖνος R, ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ τὸ ἐλάχιστον ἐμβαδόν.

2908. Ἐξ ὅλων τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς ἕνα κύκλον ἀκτῖνος R, ποῖον ἔχει τὸ μέγιστον ἐμβαδόν;

Β΄ Ὁμάς. *2909.* Ἐξ ὅλων τῶν κώνων, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὸν αὐτὸν ὄγκον $\frac{\pi\alpha^3}{3}$, ποῖος ἔχει τὴν ἐλαχίστην κυρτὴν ἐπιφάνειαν;

2910. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς δοθεῖσαν σφαῖραν ἀκτῖνος R, κύλινδρος, τοῦ ὁποίου ὁ ὄγκος νὰ εἶναι μέγιστος.

2911. Ἐξ ὅλων τῶν κώνων, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὴν αὐτὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν $\pi\alpha^2$, ποῖος ἔχει τὸν μέγιστον ὄγκον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΠΙ ΤΩΝ ΜΕΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΠΡΟΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΙΝ

Α' Ὁμάς. 2912. Δίδεται ἡ εὐθεῖα $AB=625$ μ. καὶ ζητεῖται νὰ χωρισθῇ αὕτη εἰς δύο μέρη ΑΓ καὶ ΓΒ τοιαῦτα, ὥστε τὸ $\overline{A\Gamma}^2+2\,\overline{\Gamma B}^2$ νὰ εἶναι ἐλάχιστον.

2913. Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 50 εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε τὸ γινόμενον τῶν τετραγωνικῶν ριζῶν των νὰ εἶναι μέγιστον.

2914. Νὰ προσδιορισθῇ ὁ α οὕτως, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγωνικῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $x^2+(2-\alpha)x-\alpha-3=0$ νὰ εἶναι ἐλάχιστον.

2915. Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ συντελεσταὶ τοῦ τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ οὕτως, ὥστε νὰ μηδενίζεται διὰ $x=8$ καὶ νὰ ἔχῃ ἐλάχιστον -12 διὰ $x=6$.

2916. Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ β καὶ γ εἰς τρόπον, ὥστε τὸ μέγιστον τοῦ $\dfrac{x^2+\beta x+\gamma}{x}$ νὰ εἶναι μ καὶ τὸ ἐλάχιστον λ.

Β' Ὁμάς. 2917. Ἐξ ὅλων τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν ὑποτείνουσαν, ποῖον ἔχει τὸ μέγιστον ἐμβαδόν;

2918. Ἐξ ὅλων τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν ὑποτείνουσαν α, νὰ εὑρεθῇ τὸ ἔχον τὴν μεγίστην περίμετρον.

2919. Ἡ περίμετρος ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι σταθερὰ καὶ ἴση μὲ 2τ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον τῆς διαφορᾶς τῶν δύο καθέτων πλευρῶν του.

2920. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον τοῦ ἐμβαδοῦ ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῆς ὑποτεινούσης καὶ τοῦ ἀντιστοίχου ὕψους εἶναι ἴσον μὲ λ.

2921. Μεταξὺ ὅλων τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὸ αὐτὸ ἐμβαδόν, ποῖον εἶναι ἐκεῖνο, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ διαφορὰ $\alpha-\upsilon$ τῆς ὑποτεινούσης α καὶ τοῦ ἀντιστοίχου ὕψους υ εἶναι μεγίστη ἢ ἐλαχίστη.

2922. Μεταξὺ ὅλων τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων τῆς αὐτῆς περιμέτρου 2τ, νὰ εὑρεθῇ ἐκεῖνο εἰς τὸ ὁποῖον τὸ ἄθροισμα τῶν καθέτων πλευρῶν καὶ τῆς καθέτου τῆς ἀγομένης ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν, εἶναι μέγιστον.

2923. Μεταξὺ ὅλων τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων τῆς αὐτῆς περιμέτρου νὰ εὑρεθῇ ἐκεῖνο, τοῦ ὁποίου ἡ ὑποτείνουσα εἶναι ἐλαχίστη.

2924. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον ἢ τὸ ἐλάχιστον τοῦ ὕψους τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν καθέτων πλευρῶν εἶναι σταθερὸν καὶ ἴσον μὲ τ.

2925. Ἐξ ὅλων τῶν τριγώνων, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν διάμετρον καὶ τὴν αὐτὴν βάσιν ποῖον εἶναι τὸ μέγιστον.

2926. Εἰς κύκλον ἀκτῖνος R νὰ ἐγγραφῇ τὸ μέγιστον τρίγωνον.

2927. Ἐξ ἑνὸς σημείου κειμένου ἐντὸς γωνίας νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα, ἡ ὁποία νὰ ὁρίζῃ μὲ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας ἕνα τρίγωνον, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν νὰ εἶναι ἐλάχιστον.

2928. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου, τὸ ὁποῖον σχηματίζεται, ἂν ἑνώσωμεν τὸ κέντρον μὲ τὰ ἄκρα μιᾶς μεταβλητῆς χορδῆς κύκλου ἀκτῖνος R.

2929. Νὰ περιγραφῇ περὶ δοθὲν ὀρθογώνιον, ἰσοσκελὲς τρίγωνον μὲ ἐλαχίστην ἐπιφάνειαν.

2930. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς κύκλον ἀκτῖνος R ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους του νὰ εἶναι μέγιστον ἢ ἐλάχιστον.

2931. Μεταξὺ ὅλων τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὸ αὐτὸ ἐμβαδὸν $α^2$, ποῖον εἶναι ἐκεῖνο, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου εἶναι ἐλαχίστη.

2932. Δίδεται τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΓΔ ἢ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως αὐτῆς ἕνα σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε ὁ λόγος ΜΑ : ΜΒ νὰ εἶναι μέγιστος.

2933. Νὰ περιγραφῇ περὶ δοθέντα κύκλον ἀκτῖνος R ἕνας ῥόμβος, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν νὰ εἶναι ἐλάχιστον.

2934. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον τῆς περιμέτρου τοῦ τραπεζίου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς ἡμιπεριφέρειαν ἀκτῖνος R, ἂν ἡ μία ἐκ τῶν βάσεων τοῦ τραπεζίου εἶναι ἡ διάμετρος τῆς ἡμιπεριφερείας.

2935. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον τοῦ ἐμβαδοῦ τῶν τραπεζίων, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος υ καὶ εἶναι ἐγγεγραμμένα εἰς περιφέρειαν ἀκτῖνος R.

2936. Νὰ σπουδασθοῦν αἱ μεταβολαὶ τοῦ ἐμβαδοῦ ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τραπεζίου περιγεγραμμένου περὶ περιφέρειαν ἀκτῖνος R.

2937. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον ἐμβαδὸν ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τραπεζίου, ἂν γνωρίζωμεν τὴν μικρὰν βάσιν β καὶ τὰς μὴ παραλλήλους πλευράς του.

2938. Δίδεται ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ πλευρᾶς α. Φέρομεν μίαν παράλληλον ΔΕ πρὸς τὴν βάσιν ΒΓ καὶ ἑνώνομεν τὰ ἄκρα Δ καὶ Ε μὲ τὸ μέσον Ζ τῆς βάσεως ΒΓ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον ἢ τὸ ἐλάχιστον τῆς περιμέτρου τοῦ σχηματιζομένου τριγώνου ΔΖΕ.

2939. Δίδεται ἡ ὀρθὴ γωνία ΑΟΒ καὶ ἕνα σημεῖον Μ, τοῦ ὁποίου αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τὰς καθέτους πλευρὰς τῆς γωνίας εἶναι α καὶ β. Ζητεῖται νὰ ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου Μ μία εὐθεῖα, ἡ ὁποία νὰ σχηματίζῃ μὲ τὰς καθέτους πλευρὰς τῆς γωνίας ἕνα τρίγωνον, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν νὰ εἶναι ἐλάχιστον.

2940. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἕνα μεταβλητὸν τρίγωνον ΔΕΖ, τοῦ ὁποίου ἡ κορυφὴ Δ κεῖται εἰς τὸ μέσον τοῦ ΒΓ, αἱ δὲ ἄλλαι κορυφαὶ Ε καὶ Ζ εἶναι τὰ σημεῖα τῆς τομῆς τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ ὑπὸ τῶν κινητῶν παραλλήλων πρὸς τὴν ΒΓ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις τῆς παραλλήλου ΕΖ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως, ὥστε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μεταβλητοῦ τριγώνου ΔΕΖ νὰ εἶναι μέγιστον ἢ ἐλάχιστον.

2941. Δίδεται ἡ εὐθεῖα ΑΒ=20 μ. καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἐπ' αὐτῆς ἕνα σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο ἰσοπλεύρων τριγώνων, τὰ ὁποῖα κατασκευάζονται μὲ πλευρὰς τὰς ΑΜ καὶ ΜΒ νὰ εἶναι ἐλάχιστον.

2942. Δίδονται δύο σημεῖα Α καὶ Κ. Μὲ κέντρον τὸ Κ καὶ ἀκτῖνα μεταβλητὴν γράφομεν μίαν περιφέρειαν. Φέρομεν ἐκ τοῦ Α τὰς ἐφαπτομένας τῆς περιφερείας Κ. Ζητεῖται: 1ον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον τοῦ σχηματιζομένου ἰσοσκελοῦς τριγώνου ὑπὸ τῶν δύο ἐφαπτομένων καὶ τῆς χορδῆς, ἡ ὁποία συνδέει τὰ σημεῖα τῆς ἐπαφῆς. 2ον. Τὸ μέγιστον τοῦ τετραπλεύρου τοῦ σχηματιζομένου ἀπὸ τὰς δύο ἐφαπτομένας καὶ τὰς δύο ἀκτῖνας, αἱ ὁποῖαι ἄγονται εἰς τὰ σημεῖα τῆς ἐπαφῆς.

2943. Δίδεται εὐθεῖα ΑΒ=α, τὴν ὁποίαν χωρίζομεν εἰς δύο μέρη ΑΜ καὶ ΜΒ. Ἐπὶ τῆς ΑΜ κατασκευάζομεν ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΜΓ, ἐπὶ δὲ τῆς ΜΒ ἕνα τετράγωνον ΜΒΔΕ. Φέρομεν τὴν ΕΓ, ὁπότε σχηματίζεται ἕνα πεντάγωνον. Ζητεῖται νὰ προσδιορισθῇ τὸ σημεῖον Μ οὕτως, ὥστε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πενταγώνου νὰ εἶναι μέγιστον ἢ ἐλάχιστον.

2944. Αἱ διαστάσεις ἑνὸς ὀρθογωνίου εἶναι α καὶ β. Ἀπὸ κάθε κορυφὴν καὶ πρὸς τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν φέρομεν μίαν εὐθεῖαν μήκους x. Νὰ προσδιορισθῇ τὸ μῆκος x εἰς τρόπον, ὥστε τὸ σχηματιζόμενον παραλληλόγραμμον, ἂν ἑνώσωμεν τὰ τέσσαρα ἄκρα τῶν εὐθειῶν ποὺ ἐφέραμεν, νὰ εἶναι ἐλάχιστον.

2945. Αἱ διαστάσεις ἑνὸς ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ εἶναι α καὶ β· ἀπὸ τὰς ἀπέναντι κορυφὰς Α καὶ Δ λαμβάνομεν ἐπὶ τῶν προσκειμένων πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου τέσσαρα μήκη ἴσα μὲ x. Νὰ προσδιορισθῇ τὸ μῆκος x οὕτως, ὥστε τὸ σχηματιζόμενον παραλληλόγραμμον νὰ εἶναι μέγιστον.

2946. Δίδονται δύο παράλληλοι Ε καὶ E_1 καὶ μία τέμνουσα αὐτὰς ΒΓ. Ἀπὸ ἕνα ὡρισμένον σημεῖον Δ τῆς Ε φέρομεν μεταβλητὴν εὐθεῖαν ΔΑ, ἡ ὁποία συναντᾷ τὴν ΒΓ εἰς τὸ σημεῖον Ζ. Ἐὰν θέσωμεν ΒΖ=x καὶ ΒΓ=α, νὰ εὑρεθῇ διὰ ποίας τιμὰς τοῦ x τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων ΑΖΓ καὶ ΒΖΔ εἶναι ἐλάχιστον.

2947. Μεταξὺ ὅλων τῶν τραπεζίων, τὰ ὁποῖα ἔχουν δύο κορυφὰς εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Δ, τὰς βάσεις των ΑΒ καὶ ΓΔ καθέτους ἐπὶ μίαν δοθεῖσαν εὐθεῖαν μν καὶ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων των ἐπὶ τῆς εὐθείας μν, νὰ εὑρεθοῦν ἐκεῖνα ποὺ ἔχουν τὴν μεγίστην καὶ τὴν ἐλαχίστην ἐπιφάνειαν; Δίδονται ΑΔ=α, Αμ=υ, Δν=k.

2948. Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ζητεῖται νὰ ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ οὕτως, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ τραπεζίου, ποὺ θὰ σχηματισθῇ νὰ εἶναι ἐλάχιστον.

2949. Μὲ ὑποτεινούσας τὰς πλευρὰς ἑνὸς ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ κατασκευάζομεν τέσσαρα ὀρθογώνια καὶ ἰσοσκελῆ τρίγωνα. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ σχηματιζομένου σχήματος, ὅταν αἱ πλευραὶ τοῦ ὀρθογωνίου μεταβάλλωνται, εἰς τρόπον, ὥστε ἡ διαγώνιός του νὰ διατηρῇ πάντοτε τὸ αὐτὸ μῆκος.

2950. Δίδεται ἡ εὐθεῖα ΑΒ=α, τὴν ὁποίαν χωρίζομεν εἰς δύο μέρη ΑΜ καὶ ΜΒ. Ἐπὶ τοῦ ΑΜ κατασκευάζομεν τετράγωνον ΑΜΓΔ, ἐπὶ δὲ τοῦ ΜΒ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΜΒΖ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον ἢ τὸ ἐλάχισνον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο αὐτῶν σχημάτων.

2951. Ἡ περίμετρος ἑνὸς ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ εἶναι σταθερὰ καὶ ἴση μὲ 2τ. Μὲ διαμέτρους τὰς πλευράς του κατασκευάζομεν ἐκτὸς τοῦ ὀρθογωνίου ἡμικύκλια. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον ἢ τὸ ἐλάχιστον τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ σχηματιζομένου σχήματος.

2952. Δίδεται τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης του ΒΓ ἕνα σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε, ἂν φέρωμεν τὰς καθέτους ΜΔ καὶ ΜΕ ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ ἀντιστοίχως, ἡ διαφορὰ $\overline{ΜΔ}^2-\overline{ΜΕ}^2$ νὰ εἶναι ἐλαχίστη.

2953. Δίδεται τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, το μεσον Δ τῆς ΒΓ καὶ ἡ διάμεσος $ΑΔ=\mu$ καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς διαμέσου ΑΔ ἕνα σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε $\overline{ΜΑ}^2+\overline{ΜΒ}^2+\overline{ΜΓ}^2$ νὰ εἶναι ἐλάχιστον.

2954. Ἐξ ἑνὸς σημείου Μ κειμένου ἐντὸς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν τὴν ΜΔ παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ, ἡ ὁποία συναντᾷ τὴν ΑΒ εἰς τὸ Δ, τὴν ΜΕ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΓ καὶ συναντῶσαν τὴν ΒΓ εἰς τὸ Ε καὶ τὴν ΜΖ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ καὶ συναντῶσαν τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ζ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον τοῦ $\overline{ΜΔ}^2+\overline{ΜΕ}^2+\overline{ΜΖ}^2$.

2955. Δίδεται ἡμιπεριφέρεια διαμέτρου $ΑΒ=2R$ καὶ ζητεῖται νὰ ἀχθῇ κάθετος ΓΔ ἐπὶ τὴν διάμετρον ΑΒ καὶ τοιαύτη, ὥστε τὸ ἄθροισμα $ΓΔ+ΑΓ$ νὰ εἶναι μέγιστον ἢ ἐλάχιστον.

2956. Εἰς περιφέρειαν ἀκτῖνος R δίδεται μιὰ χορδὴ $ΑΒ=\alpha$ καὶ ζητεῖται νὰ ἀχθοῦν ἐκ τῶν ἄκρων της Α καὶ Β δύο χορδαὶ ΑΓ καὶ ΒΔ παράλληλοι εἰς τρόπον, ὥστε τὸ ἄθροισμα $ΑΓ+ΒΔ$ νὰ εἶναι μέγιστον.

2957. Δίδεται ἡμιπεριφέρεια διαμέτρου $ΑΒ=2R$. Φέρομεν δύο χορδὰς ΓΔ καὶ ΕΖ καθέτους ἐπὶ τὴν διάμετρον, τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ $ΓΔ-ΕΖ$ εἶναι γνωστὴ καὶ ἴση μὲ α. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον ἢ τὸ ἐλάχιστον τῆς ἀποστάσεως τῶν καθέτων αὐτῶν.

2958. Δίδεται κύκλος Κ ἀκτῖνος R. Φερομεν δύο καθέτους διαμέτρους ΑΒ καὶ ΓΔ καὶ ἐξ ἑνὸς σημείου Μ τοῦ τόξου ΓΔ φέρομεν τὰς καθέτους ΜΕ καὶ ΜΖ ἐπὶ τὰς διαμέτρους ΑΒ καὶ ΓΔ. Νὰ σπουδασθῇ ἡ μεταβολὴ τοῦ ἀθροίσματος $ΜΕ+ΜΖ$.

2959. Ἐκ δύο σημείων Α και Β φέρομεν τὰς καθέτους $ΑΓ=\alpha$ καὶ $ΒΔ=\beta$ πρὸς μίαν εὐθεῖαν xy. Ζητεῖται νὰ ὁρισθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας ἕνα σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε τὸ ἄθροισμα $ΑΜ+ΜΒ$ νὰ εἶναι ἐλάχιστον, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ ἀπόστασις ΓΔ τῶν ποδῶν τῶν καθέτων εἶναι ἴση μὲ δ.

2960. Δίδονται δύο σημεῖα Α καὶ Β, τῶν ὁποίων ἡ ἀπόστασις εἶναι $ΑΒ=2\alpha$ καὶ μία παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ, ἡ ὁποία ἀπέχει ἀπὸ αὐτὴν ἀπόστασιν υ. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς παραλλήλου αὐτῆς ἕνα σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεών του ἀπὸ τὰ δύο σημεῖα Α καὶ Β νὰ εἶναι μέγιστος ἢ ἐλάχιστος.

2961. Δύο σημεῖα Α καὶ Β εὑρίσκονται ἑκατέρωθεν μιᾶς εὐθείας. Νὰ γραφῇ περιφέρεια κύκλου, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται διὰ τῶν σημείων Α καὶ Β καὶ νὰ ἀποκόπτῃ ἀπὸ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὸ ἐλάχιστον μῆκος.

Δ' Ὁμάς. *2962.* Ἐξ ὅλων τῶν ὀρθογωνίων παραλληλεπιπέδων, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὸν αὐτὸν ὄγκον, ποῖον ἔχει τὴν ἐλαχίστην ἐπιφάνειαν ;

2963. Μεταξὺ ὅλων τῶν ὀρθογωνίων παραλληλεπιπέδων, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν περίμετρον 4τ νὰ εὑρεθῇ ἐκεῖνο ποὺ ἔχει τὸν μέγιστον ὄγκον.

2964. Ποῖον εἶναι τὸ μέγιστον πρῖσμα, τὸ ὁποῖον δυνάμεθα νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ μίαν πυραμίδα διὰ μιᾶς τομῆς παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν.

2965. Εἰς δοθεῖσαν σφαῖραν ἀκτῖνος R νὰ περιγραφῇ τριγωνικὴ κανονικὴ πυραμίς, τῆς ὁποίας ὁ ὄγκος νὰ εἶναι μέγιστος.

2966. Ἐξ ὅλων τῶν ὀρθογωνίων παραλληλεπιπέδων, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν ὁλικὴν ἐπιφάνειαν, ποῖον ἔχει τὸν μέγιστον ὄγκον ;

2967. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς σφαῖραν ἀκτῖνος R, τὸ μέγιστον ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον.

2968. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς δοθέντα κῶνον, κύλινδρος, τοῦ ὁποίου ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια νὰ εἶναι μεγίστη.

2969. Ἡ διάμετρος τοῦ κυλινδρικοῦ κορμοῦ ἑνὸς δένδρου εἶναι 30 ἑκ. μ. Ζητεῖται μὲ τὸν κορμὸν αὐτὸν νὰ κατασκευασθῇ ἕνα ὀρθογώνιον καδρόνι, τὸ ὁποῖον νὰ παρουσιάζῃ τὴν μεγίστην ἀντίστασιν εἰς τὸ λύγισμα. (Ἂν παραστήσωμεν μὲ x καὶ y τὰς διαστάσεις τῆς ὀρθογωνίου τομῆς τοῦ καδρονίου, θὰ ἔχωμεν τὰς ἐξισώσεις $x^2+y^2=50$ καὶ $xy^2=\mu$ ὅπου $xy^2=$ἀντίστασις).

2970. Δίδεται ἕνα τετράγωνον πλευρᾶς 2α. Εἰς τὸ ἐσωτερικὸν αὐτοῦ κατασκευάζομεν ἕνα ἄλλο τετράγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς διαγωνίους τοῦ πρώτου τετραγώνου. Συνδέομεν κάθε κορυφὴν τοῦ νέου τετραγώνου μὲ τὰς δύο γειτονικὰς κορυφὰς τοῦ πρώτου τετραγώνου, ὁπότε σχηματίζονται 4 ἰσοσκελῆ καὶ ἴσα τρίγωνα. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον τοῦ ὄγκου τῆς πυραμίδος, ἡ ὁποία ἔχει ὡς παραπλεύρους ἕδρας τὰ 4 αὐτὰ τρίγωνα καὶ 2ον τὸ μέγιστον τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας: (Παραστήσατε μὲ 2x τὴν πλευρὰν τοῦ νέου τετραγώνου).

2971. Νὰ εὑρεθῇ ὁ μέγιστος κύλινδρος, τὸν ὁποῖον δυνάμεθα νὰ ἐγγράψωμεν ὡς δοθέντα κῶνον.

2972. Ἐξ ὅλων τῶν κυλίνδρων, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὸν αὐτὰν ὄγκον $\pi\alpha^3$, νὰ εὑρεθῇ ἐκεῖνος ποὺ ἔχει τὴν ἐλαχίστην ὁλικὴν ἐπιφάνειαν.

2973. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου ἐγγεγραμμένου εἰς σφαῖραν ἀκτῖνος R.

2974. Ἐξ ὅλων τῶν κυλίνδρων, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὸν αὐτὸν ὄγκον $\pi\alpha^3$, ποῖος εἶναι ἐκεῖνος τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς τῆς περιγεγραμμένης σφαίρας εἶναι ἐλαχίστη.

2975. Μεταξὺ ὅλων τῶν κώνων, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὴν αὐτὴν πλευρὰν λ, ποῖος ἔχει τὴν μεγίστην ὁλικὴν ἐπιφάνειαν.

2976. Ἑνὸς κώνου δίδεται ἡ πλευρὰ λ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον τοῦ ὄγκου του.

2977. Μεταξὺ ὅλων τῶν κώνων, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὴν αὐτὴν πλευρὰν λ, ποῖος ἔχει τὴν μεγίστην κυρτὴν ἐπιφάνειαν.

2978. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς σφαῖραν ἀκτῖνος ρ, κῶνος τοῦ ὁποίου ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια νὰ εἶναι μεγίστη.

2979. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐλάχιστον τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κώνου περιγεγραμμένου περὶ σφαῖραν ἀκτῖνος R.

2980. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐλάχιστον τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας κώνου περιγεγραμμένου περὶ σφαῖραν ἀκτῖνος R.

2981. Ἐξ ὅλων τῶν κώνων, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὸν αὐτὸν ὄγκον, ποῖος εἶναι ἐκεῖνος, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς τῆς περιγεγραμμένης σφαίρας εἶναι ἐλαχίστη.

2982. Ἐξ ὅλων τῶν κώνων τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς δοθεῖσαν σφαῖραν ἀκτῖνος R, ποῖος ἔχει τὴν μεγίστην κυρτὴν ἐπιφάνειαν.

2983. Νὰ περιγραφῇ περὶ δοθέντα κύλινδρον, κῶνος, τοῦ ὁποίου ὁ ὄγκος νὰ εἶναι ἐλάχιστος.

2984. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς δοθεῖσαν σφαῖραν ὁ μέγιστος κῶνος.

2985. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κολούρου κώνου ἐγγεγραμμένου εἰς δοθὲν ἡμισφαίριον ἀκτῖνος R.

2986. Μεταξὺ ὅλων τῶν κολούρων κώνων, οἱ ὁποῖοι ἔχουν ὕψος υ καὶ τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων τῶν βάσεων εἶναι α, νὰ εὑρεθῇ ἐκεῖνος, τοῦ ὁποίου ὁ ὄγκος εἶναι μέγιστος ἢ ἐλάχιστος.

2987. Εἰς δοθεῖσαν σφαῖραν ἀκτῖνος R νὰ περιγραφῇ κόλουρος κῶνος, τοῦ ὁποίου ὁ ὄγκος νὰ εἶναι ἐλάχιστος.

2988. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς δοθεῖσαν σφαῖραν ἀκτῖνος R, ἕνας κόλουρος κῶνος, ὁ ὁποῖος νὰ ἔχῃ ὡς βάσιν ἕνα μέγιστον κύκλον τῆς σφαίρας καὶ τοῦ ὁποίου ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια νὰ εἶναι μεγίστη.

2989. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον τοῦ ὄγκου τοῦ παραγομένου ὑπὸ ἑνὸς τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς πλευρὰς δύο ἀκτῖνας και μίαν χορδὴν κύκλου ἀκτῖνος R καὶ τὸ ὁποῖον στρέφεται περὶ διάμετρον παράλληλον πρὸς τὴν χορδήν.

2990. Ποῖος εἶναι ὁ μέγιστος τῶν ὄγκων τῶν παραγομένων ὑπὸ ἑνὸς ὀρθογωνίου, περιμέτρου σταθερᾶς 4τ, στρεφομένου περὶ μίαν τῶν πλευρῶν του.

2991. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον τοῦ ὄγκου τοῦ παραγομένου ὑπὸ ἑνὸς ρόμβου περιγεγραμμένου περὶ περιφέρειαν ἀκτῖνος R καὶ ὁ ὁποῖος ρόμβος στρέφεται περὶ μίαν τῶν διαγωνίων του.

2992. Τὸ ὕψος ἑνὸς δισορθογωνίου τραπεζίου εἶναι υ, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν τριῶν ἄλλων πλευρῶν του εἶναι σταθερὸν καὶ ἴσον μὲ α. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον τοῦ ἐμβαδοῦ καὶ τὸ μέγιστον τοῦ ὄγκου, τὸ ὁποῖον παράγει τὸ τραπέζιον, ἂν περιστραφῇ περὶ τὴν πλευράν, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς δύο βάσεις.

2993. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς κύκλον ἀκτῖνος R ἰσοσκελὲς τρίγωνον τοιοῦτον, ὥστε ὁ ὄγκος ὁ παραγόμενος ὑπὸ τοῦ τριγώνου αὐτοῦ, στρεφομένου περὶ τὴν βάσιν του νὰ εἶναι μέγιστος.

2994. Δίδεται κύκλος ἀκτῖνος R. Ζητεῖται νὰ ἀχθῇ μία χορδὴ ΓΔ παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον ΑΒ, οὕτως, ὥστε ἡ ἐπιφάνεια ἡ παραγομένη ὑπὸ τοῦ τριγώνου ΟΓΔ στρεφομένου περὶ τὴν διάμετρον ΑΒ νὰ εἶναι μεγίστη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΔ'.

ΜΕΤΑΘΕΣΕΙΣ—ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ—ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ

ΜΕΤΑΘΕΣΕΙΣ

795. Μεταθέσεις. ***Μεταθέσεις μ διαφόρων πραγμάτων ὀνομάζονται οἱ διάφοροι τρόποι, κατὰ τοὺς ὁποίους δυνάμεθα νὰ τοποθετήσωμεν τὸ ἕνα κατόπιν τοῦ ἄλλου εἰς μίαν σειρὰν ἐπὶ μιᾶς γραμμῆς.***

Κατὰ τὸν ἀνωτέρω ὁρισμὸν κάθε μετάθεσις πρέπει νὰ περιέχῃ ὅλα τὰ πράγματα καὶ νὰ διαφέρῃ τῆς ἄλλης κατὰ τὴν θέσιν ἑνὸς τοὐλάχιστον πράγματος.

Αἱ μεταθέσεις τῶν μ πραγμάτων παρίστανται μὲ τὰ σύμβολα: M_μ ἢ $\mu!$

796. Σχηματισμὸς καὶ πλῆθος τῶν μεταθέσεων. Εἶναι φανερόν, ὅτι ἑνὸς πράγματος ὑπάρχει μία καὶ μόνον μετάθεσις· ὥστε

$$M_1 = 1.$$

Αἱ μεταθέσεις τῶν δύο πραγμάτων α καὶ β εἶναι

$$\alpha\beta \quad \text{καὶ} \quad \beta\alpha$$

Ὥστε εἶναι $$M_2 = 2 = 1 \,.\, 2.$$

Διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὰς μεταθέσεις τῶν τριῶν πραγμάτων, π.χ. τριῶν γραμμάτων α, β, γ, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

Εἰς ἑκάστην μετάθεσιν τῶν δύο γραμμάτων α, β θέτομεν τὸ τρίτον γράμμα εἰς ὅλας τὰς δυνατὰς θέσεις ἤτοι εἰς τὴν ἀρχήν, εἰς τὸ μέσον καὶ εἰς τὸ τέλος. Οὕτω ἀπὸ τὴν αβ λαμβάνομεν τὰς μεταθέσεις

$$\gamma\alpha\beta, \quad \alpha\gamma\beta, \quad \alpha\beta\gamma\text{· ἤτοι} \quad \alpha\beta \left\{ \begin{matrix} \gamma\alpha\beta \\ \alpha\gamma\beta \\ \alpha\beta\gamma \end{matrix} \right.$$

ἀπὸ δὲ τὴν βα λαμβάνομεν τὰς μεταθέσεις

$$\gamma\beta\alpha, \quad \beta\gamma\alpha, \quad \beta\alpha\gamma\text{· ἤτοι} \quad \beta\alpha \left\{ \begin{matrix} \gamma\beta\alpha \\ \beta\gamma\alpha \\ \beta\alpha\gamma \end{matrix} \right.$$

Οὕτω ἔχομεν σχηματίσει ***ὅλας*** τὰς μεταθέσεις τῶν τριῶν γραμμάτων α, β, γ.

Δὲν ἔχει δὲ παραλειφθῆ καμμία μετάθεσις· διότι μία οἱαδήποτε μετάθεσις τῶν τριῶν γραμμάτων, π. χ. ἡ αγβ, ἔγινε ἀπὸ μίαν μετάθεσιν τῶν δύο γραμμάτων α καὶ β, εἰς τὴν ὁποίαν ἐθέσαμεν εἰς ὅλας τὰς δυνατὰς θέσεις τὸ τρίτον γράμμα γ.

Ἐπίσης **ἡ αὐτὴ μετάθεσις δὲν ἐπαναλαμβάνεται δύο φοράς**· διότι δύο οἱαιδήποτε μεταθέσεις τῶν τριῶν γραμμάτων διαφέρουν τουλάχιστον εἴτε κατὰ τὴν θέσιν τοῦ γράμματος γ, εἴτε κατὰ τὴν θέσιν τῶν δύο ἄλλων γραμμάτων α καὶ β.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἀπὸ ἑκάστην μετάθεσιν τῶν δύο γραμμάτων λαμβάνομεν τρεῖς μεταθέσεις, ἀπὸ τὰς M_2 μεταθέσεις θὰ λάβωμεν $M_2 . 3$ μεταθέσεις· ἤτοι εἶναι

$$M_3 = M_2 . 3 = 1 . 2 . 3.$$

Ὁμοίως ἀπὸ τὰς μεταθέσεις τῶν τριῶν γραμμάτων α, β, γ λαμβάνομεν τὰς μεταθέσεις τῶν τεσσάρων γραμμάτων α, β, γ, δ, ἀρκεῖ νὰ τοποθετήσωμεν τὸ τέταρτον γράμμα δ εἰς ὅλας τὰς δυνατὰς θέσεις.

Ὁμοίως σχηματίζομεν τὰς μεταθέσεις τῶν 5, 6, . . . καὶ γενικῶς τῶν μ πραγμάτων.

Πράγματι, ἔστωσαν τὰ μ γράμματα α, β, γ, . . . ι, κ, λ. Ἐὰν εἰς ἑκάστην μετάθεσιν τῶν $\mu-1$ γραμμάτων α, β, γ, . . . , ι, κ θέσωμεν τὸ γράμμα λ εἰς ὅλας τὰς δυνατὰς θέσεις, θὰ λάβωμεν ὅλας τὰς μεταθέσεις τῶν μ γραμμάτων. Δὲν ἔχει δὲ παραλειφθῆ καμμία μετάθεσις· π.χ. ἡ μετάθεσις δβα . . . γλκ ἔχει σχηματισθῆ, διότι, ἐὰν παραλείψωμεν τὸ γραμμα λ λαμβάνομεν μίαν μετάθεσιν τῶν $\nu-1$ πρώτων δοθέντων γραμμάτων.

Ἐξ ἄλλου αἱ μεταθέσεις τῶν μ γραμμάτων εἶναι ***διάφοροι*** μεταξύ των· διότι ὅσαι μὲν προέρχονται ἀπὸ τὴν αὐτὴν μετάθεσιν τῶν $\mu-1$ γραμμάτων, διαφέρουν τουλάχιστον κατὰ τὴν θέσιν τοῦ γράμματος λ, ὅσαι δὲ προέρχονται ἀπὸ διαφόρους μεταθέσεις τῶν $\mu-1$ γραμμάτων διαφέρουν, ὡς μεταθέσεις τῶν $\mu-1$ γραμμάτων.

Οὕτω, ἔχομεν σχηματίσει ὅλας τὰς μεταθέσεις τῶν μ δοθέντων γραμμάτων καὶ ἑκάστην ἀπὸ μίαν φοράν.

Ἐπειδὴ ἀπὸ ἑκάστην μετάθεσιν τῶν $\mu-1$ πραγμάτων προέρχονται μ μεταθέσεις τῶν μ γραμμάτων, ἀπὸ τὰς $M_{\mu-1}$ θὰ προέλθουν $\mu . M_{\mu-1}$· ἤτοι θὰ εἶναι $M_\mu = \mu M_{\mu-1}$. (1)

Ἐὰν εἰς τὸν τύπον (1) θέσωμεν διαδοχικῶς $\mu=2, 3, 4, \ldots . \nu$ λαμβάνομεν

$$M_2 = 2M_1, \quad M_3 = 3M_2, \quad M_4 = 4M_3, \ldots , M_\mu = \mu M_{\mu-1}.$$

Πολλαπλασιάζοντες τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψει, ὅτι $M_1 = 1$, λαμβάνομεν

$$\boxed{M_\mu = 1 . 2 . 3 . 4 \ldots\ldots \mu = \mu!}$$

Ὥστε : ***Τὸ πλῆθος τῶν μεταθέσεων τῶν μ διαφόρων γραμ-***

μάτων εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν μ πρώτων διαδοχικῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.

Παράδειγμα. Κατὰ πόσους τρόπους δυνάμεθα νὰ παρατάξωμεν ἐπὶ εὐθείας γραμμῆς 8 μαθητάς.

Εἶναι φανερόν, ὅτι ὑπάρχουν τόσοι τρόποι, ὅσαι εἶναι αἱ μεταθέσεις τῶν 8 πραγμάτων· δηλ. εἶναι

$$M_8 = 1.2.3.4.5.6.7.8 = 40320 \text{ τρόποι.}$$

Ἀσκήσεις. ***2995.*** Κατὰ πόσους τρόπους δυνάμεθα νὰ παρατάξωμεν ἐπὶ εὐθείας γραμμῆς 10 μαθητάς.

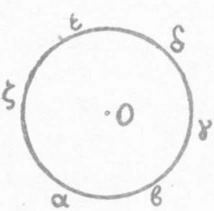
2996. Πόσους καὶ ποίους τριψηφίους ἀριθμοὺς δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν μὲ τὰ ψηφία 2, 3, 4;

797. Κυκλικαὶ μεταθέσεις. Ἐὰν ἡ γραμμὴ ἐπὶ τῆς ὁποίας τοποθετοῦμεν τὰ διάφορα πράγματα εἶναι κλειστή, ὅπως μία περιφέρεια ἑνὸς κύκλου, τότε αἱ μεταθέσεις λέγονται ***κλεισταὶ*** ἢ ***κυκλικαὶ μεταθέσεις.***

Αἱ κυκλικαὶ μεταθέσεις τῶν μ πραγμάτων παρίστανται μὲ τὸ σύμβολον $\mathring{M}_\mu$.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ πλῆθος τῶν κυκλικῶν μεταθέσεων σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς:

Ἐὰν λάβωμεν μίαν ἀπὸ τὰς κυκλικὰς μεταθέσεις τῶν 6 π.χ. γραμμάτων α, β, γ, δ, ε, ζ, αὕτη δὲν ἔχει οὔτε ἀρχὴν οὔτε τέλος. Ἂν ὅμως ἀνοίξωμεν, κατὰ διαφόρους τρόπους τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, εἰς μίαν ἀνοικτὴν γραμμήν, κόπτοντες αὐτὴν πρῶτον μεταξὺ α καὶ ζ, ἔπειτα μεταξὺ α καὶ β, ἔπειτα μεταξὺ β καὶ γ, ..καὶ τέλος μεταξὺ ε καὶ ζ, θὰ λάβωμεν ἀπὸ ***μίαν καὶ μόνον*** κυκλικὴν μετάθεσιν 6 ἀνοικτὰς μεταθέσεις, διαφόρους μεταξύ των τὰς αβγδεζ, βγδεζα, γδεζαβ, δεζαβγ, εζαβγδ, ζαβγδε.



Σχ. 43

Ὥστε ἀπὸ μίαν κυκλικὴν μετάθεσιν τῶν 6 πραγμάτων λαμβάνομεν 6 ἀνοικτὰς μεταθέσεις καὶ ἑπομένως ἀπὸ τὰς $\mathring{M}_6$ θὰ λάβωμεν $6.\mathring{M}_6$ ἀνοικτάς.

Ἔστω τώρα, ὅτι ἔχομεν μ κυκλικὰς μεταθέσεις, δηλ. ἔστω ὅτι ἔχομεν $\mathring{M}_\mu$ κυκλικὰς μεταθέσεις. Σκεπτόμενοι ὡς ἀνωτέρω εὑρίσκομεν, ὅτι κάθε κυκλικὴ μετάθεσις θὰ δώσῃ μ ἀνοικτὰς μεταθέσεις.

Ἑπομένως αἱ $\mathring{M}_\mu$ κυκλικαὶ μεταθέσεις θὰ δώσουν $\mu.M_\mu$ ἀνοικτὰς μεταθέσεις. Δηλ. θὰ εἶναι

$$\mu.\mathring{M}_\mu = M_\mu \quad \text{ἢ} \quad \mathring{M}_\mu = \frac{M_\mu}{\mu} \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ $M_\mu = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \ldots (\mu - 1) \,.\, \mu$ ὁ τύπος (1) γίνεται

$$\overset{\circ}{M}_\mu = \frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (\mu - 1) \,.\, \mu}{\mu} = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (\mu - 1)$$

ἢ

$$\boxed{\overset{\circ}{M}_\mu = M_{\mu-1} = (\mu - 1)!}$$

Παράδειγμα. Κατὰ πόσους τρόπους δύνανται νὰ παρακαθήσουν 6 ἄτομα πέριξ μιᾶς κυκλικῆς τραπέζης.

Οἱ δυνατοὶ τρόποι εἶναι τόσοι, ὅσοι αἱ κυκλικαὶ μεταθέσεις τῶν 6 ἀτόμων· δηλ. εἶναι

$$\overset{\circ}{M}_6 = M_{6-1} = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 = 120 \text{ τρόποι.}$$

ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ

798. Διατάξεις. ***Διατάξεις μ πραγμάτων ἀνὰ ν $(\mu \geqslant \nu)$ ὀνομάζομεν τοὺς διαφόρους τρόπους, κατὰ τοὺς ὁποίους δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ἀπὸ τὰ μ πράγματα τὰ ν καὶ νὰ τὰ θέσωμεν εἰς μίαν σειρὰν ἐπὶ μιᾶς εὐθείας γραμμῆς ἢ ἐπὶ μιᾶς ἀνοικτῆς γραμμῆς.***

Εἶναι φανερόν, ὅτι αἱ διατάξεις εἶναι πάλιν μεταθέσεις, ἀλλὰ ὄχι συγχρόνως ὅλων τῶν πραγμάτων. Συνεπῶς δύο τυχοῦσαι διατάξεις διαφέρουν εἴτε κατὰ ἕνα τουλάχιστον πρᾶγμα, εἴτε κατὰ τὴν θέσιν τῶν πραγμάτων.

Ὁ ἀριθμὸς τῶν διατάξεων τῶν μ πραγμάτων ἀνὰ ν παρίσταται μὲ τὸ σύμβολον Δ_μ^ν.

799. **Πλῆθος τῶν διατάξεων.** Ἔστω, ὅτι ἔχομεν μ διάφορα γράμματα $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \iota, \kappa, \lambda$.

Ἐὰν λάβωμεν τὰ γράμματα αὐτὰ ἀνὰ ἕνα, θὰ σχηματίσωμεν μ διατάξεις τὰς $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \iota, \kappa, \lambda$.

Ὥστε αἱ διατάξεις τῶν μ γραμμάτων ἀνὰ ἓν εἶναι μ· ἤτοι εἶναι

$$\Delta_\mu^1 = \mu.$$

Διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὰς διατάξεις τῶν μ αὐτῶν γραμμάτων ἀνὰ δύο ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

Λαμβάνομεν τὸ πρῶτον γράμμα α καὶ παραπλεύρως αὐτοῦ θέτομεν διαδοχικῶς ἕκαστον τῶν ἄλλων γραμμάτων· ἔπειτα λαμβάνομεν τὸ δεύτερον γράμμα β καὶ παραπλεύρως αὐτοῦ θέτομεν διαδοχικῶς ἕκαστον τῶν ἄλλων γραμμάτων καὶ οὕτω καθεξῆς:

Οὕτω σχηματίζομεν τὸν κατωθι πίνακα, ὁ ὁποῖος περιέχει τὰς διατάξεις τῶν μ γραμμάτων ἀνὰ δύο.

α	αβ	αγ	αδ	. . . .	αλ	
β	βα	βγ	βδ	. . . .	βλ	
γ	γα	γβ	γδ	. . . .	γλ	(1)
.	. . .	. . .	. . .	. . . .	. . .	
.	. . .	. . .	. . .	. . . .	. . .	
.	. . .	. . .	. . .	. . . .	. . .	
λ	λα	λβ	λγ	. . . .	λκ	

Ὁ πίναξ (1) περιλαμβάνει *ὅλας* τὰς διατάξεις τῶν μ γραμμάτων ἀνά δύο· διότι κάθε διάταξις τῶν μ γραμμάτων ἀνὰ δύο ἔγινε ἀπὸ κάθε διάταξιν τῶν μ γραμμάτων ἀνὰ ἕν, κατόπιν τῆς ὁποίας ἐθέσαμεν ἕκαστον τῶν ὑπολοίπων γραμμάτων.

Ἐπίσης αἱ διατάξεις τῶν μ γραμμάτων ἀνὰ δύο, αἱ ὁποῖαι περιέχονται εἰς τὸν πίνακα (1) εἶναι *διάφοροι* μεταξύ των, διότι ὅσαι μὲν διατάξεις προῆλθον ἐκ τοῦ αὐτοῦ γράμματος, διαφέρουν κατὰ τὸ δεύτερον γράμμα, ὅσαι δὲ προῆλθον ἀπὸ διάφορα γράμματα διαφέρουν κατὰ τὸ πρῶτον γράμμα.

Ἐπειδή, κατόπιν ἑκάστου τῶν μ γραμμάτων α, β, γ, . . . , λ θέτομεν διαδοχικῶς ἕκαστον τῶν ὑπολοίπων μ—1 γραμμάτων ἕπεται, ὅτι ἀπὸ ἕκαστον γράμμα σχηματίζονται μ—1 διατάξεις καὶ ἑπομένως ἀπὸ τὰ μ γράμματα θὰ σχηματισθοῦν μ(μ—1) διατάξεις· ὥστε θὰ εἶναι

$$\Delta_\mu^2 = \mu(\mu - 1).$$

Διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὰς διατάξεις τῶν μ γραμμάτων ἀνὰ τρία ἐργαζόμεθα ὁμοίως : ἤτοι κατόπιν ἑκάστης διατάξεως τῶν γραμμάτων ἀνὰ δύο θέτομεν διαδοχικῶς ἕκαστον τῶν ὑπολοίπων (μ—2) γραμμάτων.

Γενικῶς. Ἔστω, ὅτι ἔχομεν σχηματίσει τὰς διατάξεις τῶν μ γραμμάτων α, β, γ, ... ι, κ, λ ἀνὰ ν—1 καὶ θέλομεν νὰ σχηματίσωμεν τὰς διατάξεις τῶν μ αὐτῶν γραμμάτων ἀνὰ ν. Πρὸς τοῦτο κατόπιν ἑκάστης διατάξεως τῶν μ γραμμάτων ἀνὰ ν—1 θέτομεν διαδοχικῶς ἕκαστον τῶν ὑπολοίπων μ—(μ—1) ἢ μ—ν+1 γραμμάτων.

Αἱ διατάξεις τὰς ὁποίας θὰ σχηματίσωμεν οὕτω εἶναι *ὅλαι*· δὲν ἔχει παραλειφθῆ καμμία· π.χ. ἡ διάταξις αβγ . . . θκ τῶν μ γραμμάτων ἀνὰ ν ἔχει σχηματισθῆ, διότι ἐὰν παραλείψωμεν τὸ τελευταῖον γράμμα κ λαμβάνομεν μίαν διάταξιν αβγ . . . θ τῶν μ γραμμάτων ἀνὰ ν—1 κατόπιν, τῆς ὁποίας ἐθέσαμεν τὸ γράμμα κ.

Ἐξ ἄλλου ὅλαι αἱ σχηματισθεῖσαι διατάξεις εἶναι *διάφοροι* μεταξύ των· διότι ὅσαι διατάξεις προῆλθον ἐκ τῆς αὐτῆς διατάξεως τῶν μ γραμμάτων ἀνὰ ν—1 διαφέρουν κατὰ τὸ τελευταῖον γράμμα· ὅσαι δὲ προῆλθον ἀπὸ διαφόρους διατάξεις τῶν ἀνὰ ν—1 γραμμάτων διαφέρουν τουλάχιστον ὡς διατάξεις τῶν ἀνὰ ν—1 γραμμάτων.

Ὥστε οὕτω ἔχομεν σχηματίσει ὅλας τὰς διατάξεις τῶν μ γραμμάτων ἀνὰ ν καὶ ἑκάστην ἀπὸ μίαν φοράν.

Ἐπειδὴ δὲ ἀπὸ ἑκάστην διάταξιν τῶν ν—1 γραμμάτων προέρχονται μ—(ν—1) ἢ μ—ν+1 διατάξεις ἀπὸ τὰς $\Delta_\mu^{\nu-1}$ διατάξεις τῶν μ γραμμάτων ἀνά ν—1, θὰ προέλθουν (μ—ν+1). $\Delta_\mu^{\nu-1}$ διατάξεις· ἤτοι εἶναι

$$\Delta_\mu^\nu = (\mu - \nu + 1)\Delta_\mu^{\nu-1}. \qquad (2)$$

Ἐὰν εἰς τὸν τύπον (2) θέσωμεν διαδοχικῶς ν=2, 3, 4, . . . ν λαμ-

βάνομεν
$$\Delta_\mu^2 = (\mu-1)\,\Delta_\mu^1$$
$$\Delta_\mu^3 = (\mu-2)\,\Delta_\mu^2$$
$$\Delta_\mu^4 = (\mu-3)\,\Delta_\mu^3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Delta_\mu^\nu = (\mu-\nu+1)\,\Delta_\mu^{\nu-1}.$$

Πολλαπλασιάζοντες τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψει, ὅτι $\Delta_\mu^1 = \mu$, λαμβάνομεν

$$\boxed{\Delta_\mu^\nu = \mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)\ldots(\mu-\nu+1)} \qquad (2)$$

Ὥστε : ***Τὸ πλῆθος τῶν διατάξεων τῶν μ γραμμάτων ἀνὰ ν εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν ν διαδοχικῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ μ καὶ κάτω.***

Παράδειγμα. Πόσους τετραψηφίους ἀριθμοὺς διαφόρους δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν μὲ τὰ 9 σημαντικὰ ψηφία.

Τὸ ζητούμενον πλῆθος τῶν τετραψηφίων ἀριθμῶν εἶναι ἴσον μὲ τὰς διατάξεις τῶν 9 πραγμάτων ἀνὰ 4, ἤτοι εἶναι

$$\Delta_\mu^4 = 9\,.\,8\,.\,7\,.\,6 = 3024 \text{ ἀριθμοί.}$$

Ἀσκήσεις. 2997. Πόσοι εἶναι οἱ διψήφιοι ἀριθμοὶ τῶν ὁποίων τὰ σημαντικὰ ψηφία εἶναι διάφορα μεταξύ των ;

2998. Πόσοι εἶναι οἱ τριψήφιοι ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὰ σημαντικὰ ψηφία εἶναι διάφορα μεταξύ των ;

2999. Αἱ διατάξεις τῶν μ ἀντικειμένων ἀνὰ 3 εἶναι 448. Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ.

3000. Αἱ διατάξεις τῶν 6 ἀντικειμένων ἀνὰ ν εἶναι 120. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ν.

3001. Αἱ διατάξεις μ ἀντικειμένων ἀνὰ 4 εἶναι πενταπλάσιαι τῶν διατάξεων τῶν μ ἀντικειμένων ἀνὰ 3. Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ.

ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ

800. Συνδυασμοί. ***Συνδυασμοὶ μ διαφόρων γραμμάτων ἀνὰ ν*** λέγονται οἱ διάφοροι τρόποι, κατὰ τοὺς ὁποίους δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ἀπὸ τὰ μ αὐτὰ γράμματα τὰ ν οὕτως, ὥστε δύο διάφοροι συνδυασμοὶ νὰ διαφέρουν κατὰ ἕνα τουλάχιστον γράμμα.

Οὕτω οἱ συνδυασμοὶ τῶν τριῶν γραμμάτων α, β, γ ἀνὰ δύο, εἶναι οἱ

αβ, αγ, βγ,

ἐνῷ αἱ διατάξεις τῶν τριῶν γραμμάτων α, β, γ ἀνὰ δύο εἶναι αἱ

αβ, αγ, βγ
βα, γα, γβ.

Παρατηροῦμεν, ὅτι οἱ τρεῖς συνδυασμοὶ αβ, αγ, βγ ταυτίζονται μὲ τὰς τρεῖς διατάξεις αβ, γα, γβ, ἐνῷ αἱ ἄλλαι τρεῖς διατάξεις βα, γα, γβ προκύπτουν ἐκ τῶν αὐτῶν συνδυασμῶν διὰ μεταθέσεως τῶν γραμμάτων των.

801. Σχηματισμὸς τῶν συνδυασμῶν. Ἔστω, ὅτι ἔχομεν μ διάφορα γράμματα

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma, \ldots\ldots\ldots, \iota.\ \kappa,\ \lambda.$$

Διὰ νὰ σχηματίσωμεν τοὺς συνδυασμοὺς τῶν μ αὐτῶν γραμμάτων ἀνὰ δύο, θέτομεν κατόπιν ἑκάστου τῶν μ γραμμάτων ἕκαστον τῶν ἑπομένων καὶ λαμβάνομεν τὰ ἐξαγόμενα

$$\left.\begin{array}{llll} \alpha\beta, & \alpha\gamma, & \alpha\delta, \ldots\ldots\ldots, & \alpha\lambda \\ & \beta\gamma, & \beta\delta, \ldots\ldots\ldots & \beta\lambda \\ & & \gamma\delta, \ldots\ldots\ldots & \gamma\lambda \\ & & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ & & \ldots\ldots\ldots & \kappa\lambda \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Ὁ πίναξ (1) περιέχει ***ὅλους*** τοὺς συνδυασμοὺς τῶν μ γραμμάτων ἀνὰ δύο· διότι, ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχει παραλειφθῆ ἕνας συνδυασμός, ἔστω ὁ δθ καὶ ἀποκόψωμεν τὸ τελευταῖον γράμμα θ, μένει τὸ γράμμα δ, κατόπιν τοῦ ὁποίου ἐγράψαμεν ἕκαστον τῶν ἑπομένων γραμμάτων.

Ἐπίσης ὅλοι οἱ συνδυασμοὶ τῶν μ γραμμάτων ἀνὰ δύο, οἱ περιεχόμενοι εἰς τὸν πίνακα (1) εἶναι ***διάφοροι*** μεταξύ των· διότι ὅσοι μὲν προῆλθον ἐκ τοῦ αὐτοῦ γράμματος διαφέρουν κατὰ τὸ τελευταῖον γράμμα, ὅσοι δὲ προῆλθον ἐκ διαφόρων γραμμάτων διαφέρουν τοὐλάχιστον κατὰ τὸ πρῶτον.

Διὰ νὰ σχηματίσωμεν τοὺς συνδυασμοὺς τῶν μ γραμμάτων ἀνὰ τρία ἐργαζόμεθα ὁμοίως· ἤτοι θέτομεν κατὸπιν ἑκάστου συνδυασμοῦ τῶν γραμμάτων ἀνὰ δύο ἕκαστον τῶν ἑπομένων καὶ οὕτω καθεξῆς:

802. Πλῆθος τῶν συνδυασμῶν Ἔστω, ὅτι ἐσχηματίσαμεν τοὺς συνδυασμοὺς τῶν μ γραμμάτων ἀνὰ ν καὶ ἔστω αβγδ, ... ν ἕνας ἐκ τῶν συνδυασμῶν τούτων.

Ἐὰν εἰς τὰ ν γράμματα, τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦν ἕνα ἐκ τῶν συνδυασμῶν τούτων, τῆς μορφῆς αβγδ . . . . ν, ἐκτελέσωμεν ὅλας τὰς δυνατὰς μεταθέσεις, τῶν ὁποίων τὸ πλῆθος εἶναι $M_\nu = 1.2.3....\nu$ θὰ λάβωμεν προφανῶς τὰς ***διατάξεις*** τῶν μ γραμμάτων ἀνὰ ν.

Αἱ διατάξεις, τὰς ὁποίας σχηματίζομεν οὕτω εἶναι διάφοροι μεταξύ των· διότι ὅσαι μὲν προῆλθον ἐκ τοῦ αὐτοῦ συνδυασμοῦ διαφέρουν κατὰ τὴν θέσιν τῶν γραμμάτων, ὅσαι δὲ προῆλθον ἐκ διαφόρων συνδυασμῶν διαφέρουν κατὰ ἕνα τοὐλάχιστον γράμμα.

Ἐπίσης αἱ οὕτω σχηματισθεῖσαι διατάξεις εἶναι ὅλαι· διότι μία τυχοῦσα διάταξις ἀνὰ ν, π.χ. ἡ βγα . . . . θ προῆλθεν ἀπὸ τὸν συνδυασμὸν αβγ . . . θ, ὁ ὁποῖος ἔχει τὰ αὐτὰ γράμματα, διὰ ἀλλαγῆς τῆς θέσεως τῶν γραμμάτων του.

Ἐπειδὴ ἀπὸ κάθε συνδυασμὸν θὰ σχηματισθοῦν M_ν διατάξεις ἀπὸ τοὺς Σ^ν_μ συνδυασμοὺς θὰ σχηματισθοῦν $M_\nu . \Sigma^\nu_\mu$ διατάξεις· ἤτοι θὰ εἶναι

$$\Delta^\nu_\mu = M_\nu . \Sigma^\nu_\mu . \qquad (1)$$

Ἐκ τοῦ τύπου αὐτοῦ λαμβάνομεν

$$\boxed{\Sigma_{\mu}^{\nu} = \frac{\Delta_{\mu}^{\nu}}{M_{\nu}} = \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots\ldots(\mu-\nu+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\ldots\,\nu}}$$

Παράδειγμα. Ὁ ἀριθμὸς τῶν συνδυασμῶν τῶν 10 γραμμάτων ἀνὰ 4 εἶναι $\Sigma_{10}^{4} = \dfrac{10\,.\,9\,.\,8\,.\,7}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} = 210.$

803. Θεώρημα Ι. ***Ὁ ἀριθμὸς τῶν συνδυασμῶν τῶν* μ *πραγμάτων ἀνὰ* ν *εἶναι ἴσος μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν συνδυασμῶν τῶν* μ *πραγμάτων ἀνὰ* $\mu-\nu$.**

Γνωρίζομεν (§ 802), ὅτι

$$\Sigma_{\mu}^{\nu} = \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\nu+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\,\nu}. \qquad (1)$$

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος αὐτοῦ ἐπὶ $1\,.\,2\,.\,3\ldots.(\mu-\nu)$ λαμβάνομεν

$$\Sigma_{\mu}^{\nu} = \frac{\mu(\mu-1)\ldots.(\mu-\nu+1)\times 1\,.\,2\,.\,3\ldots.(\mu-\nu)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots.\nu\times 1\,.\,2\,.\,3\ldots.(\mu-\nu)} =$$

$$= \frac{\mu(\mu-1)\ldots.(\mu-\nu+1)(\mu-\nu)(\mu-\nu-1)\ldots.3\,.\,2\,.\,1}{1\,.\,2\,.\,3\ldots.\nu\times 1\,.\,2\,.\,3\ldots.(\mu-\nu)}$$

ἢ

$$\Sigma_{\mu}^{\nu} = \frac{M_{\mu}}{M_{\nu}\cdot M_{\mu-\nu}}. \qquad (2)$$

Ἡ σχέσις (2) εἶναι ἀληθὴς διὰ κάθε τιμὴν τοῦ ν ἴσην ἢ μικροτέραν τοῦ μ. Ἐὰν λοιπὸν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν (2) τὸ ν διὰ $\mu-\nu$ λαμβάνομεν

$$\Sigma_{\mu}^{\mu-\nu} = \frac{M_{\mu}}{M_{\mu-\nu}\cdot M_{\nu}}. \qquad (3)$$

Ἀπὸ τὰς σχέσεις (2) καὶ (3) συνάγομεν, ὅτι

$$\boxed{\Sigma_{\mu}^{\nu} = \Sigma_{\mu}^{\mu-\nu}}$$

Παράδειγμα. Νὰ εὑρεθῇ τὸ πλῆθος τῶν συνδυασμῶν τῶν 100 πραγμάτων ἀνὰ 97.

Γνωρίζομεν, ὅτι $\Sigma_{\mu}^{\nu} = \Sigma_{\mu}^{\mu-\nu}$. Θὰ εἶναι λοιπὸν

$$\Sigma_{100}^{97} = \Sigma_{100}^{100-97} = \Sigma_{100}^{3} = \frac{100\,.\,99\,.\,96}{1\,.\,2\,.\,3} = 158\,400.$$

804. Θεώρημα ΙΙ. ***Ὁ ἀριθμὸς τῶν συνδυασμῶν τῶν* μ *πραγμάτων ἀνὰ* ν *εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα τοῦ ἀριθμοῦ τῶν συνδυασμῶν τῶν* $(\mu-1)$ *πραγμάτων ἀνὰ* ν *καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν συνδυασμῶν τῶν* $(\mu-1)$ *πραγμάτων ἀνὰ* $(\nu-1)$.**

Οἱ συνδυασμοὶ τῶν μ γραμμάτων $\alpha, \beta, \gamma, \ldots.$, ἀνὰ ν δύνανται νὰ χωρισθοῦν εἰς δύο κατηγορίας: εἰς ἐκείνην, ἡ ὁποία περιλαμβάνει τοὺς συνδυασμούς, οἱ ὁποῖοι δὲν περιέχουν ἕνα γράμμα, π.χ. τὸ α καὶ εἰς ἐκείνην, ἡ ὁποία περιλαμβάνει τοὺς συνδυασμούς, οἱ ὁποῖοι περιέχουν τὸ γράμμα α. Ἡ πρώτη κατηγορία περιέχει λοιπὸν τοὺς συνδυασμοὺς τῶν μ—ν γραμμάτων β, γ, δ,. . . . ἀνὰ ν· δηλ. περιέχει $\Sigma^{\nu}_{\mu-1}$ συνδυασμούς. Ἕκαστος τῶν συνδυασμῶν τῆς δευτέρας κατηγορίας θὰ περιέχῃ ν γράμματα· ἐπειδὴ ὅμως περιέχει ὑποχρεωτικῶς τὸ γράμμα α, πρέπει νὰ περιέχῃ ν—1 ἀπὸ τὰ ἄλλα γράμματα β, γ, δ, ... Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ εὕρωμεν τοὺς συνδυασμοὺς τῆς κατηγορίας αὐτῆς, ἐὰν εἰς ἕκαστον συνδυασμὸν τῶν (μ—1) γραμμάτων ἀνὰ (ν—1), δηλ. εἰς τὸν $\Sigma^{\nu-1}_{\mu-1}$ παραθέσωμεν τὸ γράμμα α. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν

ὅτι $$\boxed{\Sigma^{\nu}_{\mu}=\Sigma^{\nu}_{\mu-\nu}+\Sigma^{\nu-1}_{\mu-1}}$$

Ἀσκήσεις. *3002*. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ πλῆθος τῶν συνδυασμῶν τῶν 25 πραγμάτων ἀνὰ 4.

3003. Μὲ 5 διάφορα χρώματα πόσας τριχρώμους σημαίας δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν ;

3004. Εἰς μίαν ἐκλογὴν εἶναι 10 ὑποψήφιοι καὶ κάθε ἐκλογεὺς πρέπει νὰ ἀναγράψῃ εἰς τὸ ψηφοδέλτιόν του 6 μόνον ὑποψηφίους. Κατὰ πόσους τρόπους δύναται νὰ καταρτίσῃ τὸ ψηφοδέλτιόν του ;

3005. Νὰ εὑρεθῇ τὸ πλῆθος τῶν συνδυασμῶν τῶν 60 πραγμάτων ἀνὰ 56.

3006. Τὰ 10 Σχολεῖα μιᾶς ἐκπαιδευτικῆς περιφερείας πρόκειται νὰ διαγωνισθοῦν διὰ τὴν ἀνάδειξιν τῆς νικητρίας ὁμάδος των εἰς τὸ βόλεϋ μπόλ. Πόσαι τοιαῦται συναντήσεις τῶν ὁμάδων θὰ γίνουν ;

3007. Ὁ περιστρεφόμενος δίσκος τῶν τηλεφωνικῶν συσκευῶν περιέχει τὰ ψηφία 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Πόσους πενταψηφίους ἀριθμοὺς δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν (χωρὶς ἐπανάληψιν τῶν ἰδίων ψηφίων).

3008. Ἀπὸ 10 μαθητὰς καὶ 4 καθηγητὰς πρόκειται νὰ σχηματίσωμεν ὁμάδας 7 προσώπων οὕτως, ὥστε εἰς κάθε ὁμάδα νὰ ὑπάρχῃ τουλάχιστον ἕνας καθηγητής. Πόσαι τοιαῦται ὁμάδες δύνανται νά σχηματισθοῦν ;

3009. Πόσους ἀριθμοὺς δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν ἐὰν λάβωμεν 4 ἐκ τῶν ψηφίων 1, 2, 3, 4, 5, 6 καὶ 2 ἐκ τῶν ψηφίων 7, 8, 9.

3010. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ πλῆθος τῶν διαγωνίων ἑνὸς πολυγώνου μὲ ν πλευράς.

3011. Ἀπὸ ὅλους τοὺς συνδυάσμοὺς τῶν μ ἀντικειμένων α, β, γ, . . . , τ ἀνὰ ν πόσοι εἶναι ἐκεῖνοι, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὸ ἀντικείμενον α.

3012. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ γινόμενον ν ἀκεραίων καὶ διαδοχικῶν ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ ν καὶ κάτω εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ γινομένου $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,. \ldots .\, \nu$.

3013. Ὁ ἀριθμὸς τῶν συνδυασμῶν τῶν ν πραγμάτων ἀνὰ 3 ἔχει λόγον πρὸς τὸν συνδυασμὸν τῶν ν—2 πραγμάτων ἀνὰ 2 εἶναι ἴσον μὲ $\frac{10}{7}$. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ν.

3014. Νὰ δειχθῇ, ὅτι

$$\Sigma^{\nu}_{\mu}=\Sigma^{\nu-1}_{\mu-1}+\Sigma^{\nu-1}_{\mu-2}+\Sigma^{\nu-1}_{\mu-3}+\ldots\ldots+\Sigma^{\nu-1}_{\nu}+\Sigma^{\nu-1}_{\nu-1}.$$

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ ΕΝΝΟΙΑ ΤΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

805. Ὁρισμός. ***Παράδειγμα 1ον.*** Ἔστω, ὅτι ρίπτομεν εἰς τὸν ἀέρα ἕνα νόμισμα· ὅταν τοῦτο πέσῃ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους εἶναι δυνατὸν νὰ μᾶς παρουσιάσῃ ἐξ ἴσου τὸ πρόσωπον ἢ τὰ γράμματα. Καὶ αἱ δύο περιπτώσεις εἶναι ἐξ ἴσου πιθαναί, δηλ. ἔχουν τὴν ἰδίαν πιθανότητα νὰ συμβοῦν. Διὰ τοῦτο λέγομεν, ὅτι ***ὁ ἀριθμὸς τῶν δυνατῶν περιπτώσεων*** εἶναι δύο.

Ἐπειδὴ μία μόνον ***εὐνοϊκὴ περίπτωσις*** ὑπάρχει διὰ νὰ παρουσιάσῃ τὸ νόμισμα κατὰ τὴν πτῶσιν του πρόσωπον, ἐνῷ αἱ δυναταὶ περιπτώσεις εἶναι δύο (πρόσωπον καὶ γράμματα) διὰ τοῦτο λέγομεν, ὅτι ἡ πιθανότης νὰ ἐμφανισθῇ πρόσωπον εἶναι $\frac{1}{2}$. Ἡ αὐτὴ πιθανότης $\frac{1}{2}$ ὑπάρχει διὰ νὰ μᾶς παρουσιάσῃ τὸ νόμισμα τὰ γράμματα.

Παράδειγμα 2ον. Ἔστω, ὅτι ἔχομεν ἕνα δοχεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον ὑπάρχουν 20 μικροὶ βῶλοι καθ' ὅλα ὅμοιοι, ἀλλὰ οἱ 13 ἐξ αὐτῶν εἶναι λευκοί, οἱ δὲ ἄλλοι 7 ἐρυθροὶ καὶ πρόκειται νὰ ἐξαχθῇ κατὰ τύχην ἕνας βῶλος.

Εἶναι φανερόν, ὅτι δύναται νὰ ἐξαχθῇ οἱοσδήποτε ἐξ αὐτῶν· ἄρα ***αἱ δυναταὶ περιπτώσεις*** εἶναι 20. Ἐπειδὴ οἱ λευκοὶ βῶλοι εἶναι 13 ***αἱ εὐνοϊκαὶ περιπτώσεις***, νὰ ἐξαχθῇ λευκὸς βῶλος, εἶναι 13. Διὰ τοῦτο λέγομεν, ὅτι ἡ πιθανότης νὰ ἐξαχθῇ λευκὸς βῶλος εἶναι $\frac{13}{20}$.

Ἡ πιθανότης νὰ ἐξαχθῇ ἐρυθρὸς βῶλος εἶναι $\frac{7}{20}$, διότι αἱ εὐνοϊκαὶ περιπτώσεις εἶναι 7.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω δυνάμεθα νὰ δώσωμεν τὸν κάτωθι ὁρισμόν: ***Πιθανότης τοῦ νὰ συμβῇ τι, λέγεται ὁ λόγος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν εὐνοϊκῶν περιπτώσεων πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν δυνατῶν περιπτώσεων ἂν ἡ πραγματοποίησις ὅλων εἶναι ἐξ ἴσου δυνατή.***

Κατὰ τὸν ἀνωτέρω ὁρισμὸν μία πιθανότης εἶναι ἕνα κλάσμα μικρότερον τῆς μονάδος, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀριθμητὴν τὸν ἀριθμὸν τῶν εὐνοϊκῶν περιπτώσεων καὶ παρονομαστὴν τὸν ἀριθμὸν ὅλων τὸ δυνατῶν περιπτώσεων. Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ $\frac{f}{p}$ τὴν πιθανότητα τοῦ νὰ συμβῇ τι, πρέπει νὰ εἶναι πάντοτε $0 < \frac{f}{p} < 1$.

Ἐὰν $\frac{f}{p} = 1$, ἡ πιθανότης λέγεται ***βεβαιότης.***

Ἐὰν $\frac{f}{p} = 0$, ἡ πιθανότης τοῦ νὰ συμβῇ τι εἶναι ***ἀδύνατος,*** δηλ. λέγομεν, ὅτι τὸ ζητούμενον νὰ συμβῇ εἶναι ἀδύνατον.

806. Κατωτέρω δίδομεν καὶ ἄλλα παραδείγματα πιθανοτήτων :

Παράδειγμα 1ον. Ποία εἶναι ἡ πιθανότης νὰ ἐξαχθῇ μία ντάμα ἀπὸ τὰ 32 παιγνιόχαρτα ;

Ἐπειδὴ εἰς τὰ 32 παιγνιόχαρτα ὑπάρχουν 4 ντάμες, ὁ ἀριθμὸς τῶν εὐνοϊκῶν περιπτώσεων εἶναι 4. Ὁ ἀριθμὸς ὅλων τῶν δυνατῶν περιπτώσεων εἶναι 32· ἄρα ἡ πιθανότης τοῦ νὰ ἐξαχθῇ ντάμα εἶναι

$$\frac{f}{p}=\frac{4}{32}=\frac{1}{8}.$$

Παράδειγμα 2ον. Ρίπτομεν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους δύο κύβους (ζάρια). Ποία εἶναι ἡ πιθανότης νὰ ἔλθουν ἄνω ἕδραι, τῶν ὁποίων αἱ στιγμαὶ (τελεῖαι) νὰ ἔχουν ἄθροισμα 8 ;

Ἐὰν ρίψωμεν τὸν ἕνα κύβον δύναται νὰ ἔλθῃ ἄνω μία ἀπὸ τὰς 6 ἕδρας του. Αἱ 6 αὐταὶ περιπτώσεις εἶναι ἐξ ἴσου δυναταί. Ἔστω ὅτι ὁ πρῶτος κύβος, μετά τὴν πτῶσιν του, ἔχει ἄνω μίαν ἕδραν τελείως ὡρισμένην.

Ἐαν τώρα ρίψωμεν καὶ τὸν δεύτερον κύβον δύναται νὰ ἔλθῃ ἄνω μία ἀπὸ τὰς 6 ἕδρας του· αἱ 6 αὐταὶ νέαι περιπτώσεις εἶναι ἐξ ἴσου δυναταί. Ἐπειδὴ κάθε μία ἕδρα τοῦ πρώτου κύβου δύναται νὰ συνδυασθῇ μὲ τὰς 6 δυνατὰς θέσεις τοῦ δευτέρου κύβου, αἱ 6 ἕδραι τοῦ πρώτου συνδυαζόμεναι μὲ τὰς 6 θέσεις τοῦ δευτέρου μᾶς παρουσιάζουν 6×6 ἢ 36 περιπτώσεις ἐξ ἴσου δυνατάς.

Μεταξὺ ὅλων αὐτῶν τῶν περιπτώσεων αἱ εὐνοϊκαὶ περιπτώσεις νὰ ἔλθουν ἄνω ἕδραι, τῶν ὁποίων αἱ στιγμαὶ νὰ ἔχουν ἄθροισμα 8 αἱ (2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)· δηλ. αἱ εὐνοϊκαὶ περιπτώσεις εἶναι 5·

Ἄρα ἡ ζητουμένη πιθανότης εἶναι $\frac{5}{36}$.

Παράδειγμα 3ον. Ποία εἶναι ἡ πιθανότης νὰ λάβωμεν τὸν ἄσσον κοῦπα μεταξὺ 5 παιγνιοχάρτων, τὰ ὁποῖα λαμβάνομεν κατὰ τύχην ἀπὸ τὰ 32 παιγνιόχαρτα.

Ὁ ἀριθμὸς τῶν δυνατῶν περιπτώσεων εἶναι ἴσος μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν συνδυασμῶν τῶν 32 παιγνιοχάρτων ἀνὰ 5· δηλαδὴ εἶναι

$$p=\Sigma_{32}^{5}=\frac{32\,.\,31\,.\,30\,.\,29\,.\,28}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}.$$

Ὁ ἀριθμὸς τῶν εὐνοϊκῶν περιπτώσεων εἶναι ἴσος μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν συνδυασμῶν, οἱ ὁποῖοι περιέχουν τὸν ἄσσον κοῦπα καὶ ὁ ὁποῖος εἶναι ἴσος μὲ $\Sigma_{\mu-1}^{\nu-1}$. Δηλ. ὁ ἀριθμὸς τῶν εὐνοϊκῶν περιπτώσεων εἶναι

$$f=\Sigma_{31}^{4}=\frac{31\,.\,30\,.\,29\,.\,28}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}.$$

Θὰ εἶναι λοιπὸν $\frac{f}{p}=\frac{\Sigma_{31}^{4}}{\Sigma_{32}^{5}}=\frac{5}{32}$.

Ὥστε ἡ ζητουμένη πιθανότης εἶναι $\frac{5}{32}$.

Ἀσκήσεις. *3015.* Εἰς ἕνα κυτίον ὑπάρχουν 5 βῶλοι λευκοὶ καὶ 4 ἐρυθροί. Ἐξαγάγομεν δὲ κατὰ τύχην δύο. Ποία εἶναι ἡ πιθανότης νὰ εἶναι καὶ οἱ δύο βῶλοι λευκοί.

3016. Λαχεῖον ἀποτελεῖται ἀπὸ 100 ἀριθμούς, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ ἕνας θὰ κερδίσῃ ἕνα ὡρολόγιον. 1ον. Ποίαν πιθανότητα κέρδους ἔχει ἐκεῖνος, ποὺ ἔχει τὸν ἀριθμὸν 38. 2ον. Ποίαν πιθανότητα κέρδους ἔχει ἐκεῖνος, ποὺ ἔχει δύο ἀριθμούς, τοὺς 49 καὶ 95;

3017. Εἰς ἕνα κυτίον ὑπάρχουν 5 λευκοὶ βῶλοι, 8 ἐρυθροὶ βῶλοι καὶ 10 πράσινοι βῶλοι. 1ον. Ἐξάγομεν κατὰ τύχην ἕνα βῶλον. Ποία εἶναι ἡ πιθανότης νὰ ἐξαχθῇ λευκὸς ἢ ἐρυθρὸς ἢ πράσινος βῶλος. 2ον. Ἐξάγομεν κατὰ τύχην τρεῖς βώλους. Ποία εἶναι ἡ πιθανότης νὰ εἶναι καὶ αἱ τρεῖς βῶλοι λευκοί.

3018. Ἔχομεν μίαν λαχειοφόρον ὁμολογίαν. Νὰ εὑρεθῇ ποίαν πιθανότητα ἔχομεν νὰ κερδίσωμεν, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ κληρωτὶς ἔχει μ ἀριθμοὺς ὁμολογιῶν καὶ ὅτι θὰ ἐξαχθοῦν ν κερδίζοντες ἀριθμοί.

ΔΥΩΝΥΜΟΝ ΤΟΥ NEWTON (ΝΙΟΥΤΟΝ)

807. **Γινόμενον πολλῶν δυωνύμων παραγόντων.** Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον μ δυωνύμων παραγόντων

$$\Gamma=(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma)\ldots\ldots(x+\lambda).$$

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ γινομένου πολλῶν παραγόντων πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τούς δύο πρώτους παράγοντας, τὸ ἐξαγόμενον νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν τρίτον παράγοντα, τὸ νέον ἐξαγόμενον νὰ πολλαπλασιάσωμεν εἰς τὸν τέταρτον παράγοντα κ.ο.κ.

Ἂν ἐργασθῶμεν ὡς ἀνωτέρω θὰ εὕρωμεν

$$(x+\alpha)(x+\beta)=x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha^2$$

$$(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma)=x^3+(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)x+\alpha\beta\gamma$$

$$(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma)(x+\delta)=x^4+(\alpha+\beta+\gamma+\delta)x^3+$$
$$+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta)x^2+(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)x+\alpha\beta\gamma\delta.$$

. . . .

. . . .

$$(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma)\ldots(x+\lambda)=x^\mu+(\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda)x^{\mu-1}+$$
$$+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\ldots)x^{\mu-2}+(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\ldots)x^{\mu-3}+\ldots+\alpha\beta\gamma\delta\ldots\lambda.$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ νόμος τοῦ σχηματισμοῦ τοῦ γινομένου αὐτοῦ εἶναι προφανής. Τὸ ἐξαγόμενον εἶναι ἕνα ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ x, βαθμοῦ μ καὶ διατεταγμένον κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ x. Ὁ πρῶτος ὅρος του εἶναι x^μ. Ὁ δεύτερος ὅρος ἔχει συντελεστὴν τὸ ἄθροισμα $(\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda)$, τὸ ὁποῖον παριστῶμεν μὲ τὸ σύμβολον Σ_1. Ὁ τρίτος ὅρος του ἔχει συντελεστὴν τὸ ἄθροισμα $(\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\ldots)$, τὸ ὁποῖον παριστῶμεν μὲ τὸ σύμβολον Σ_2. Ὁ τέταρτος ὅρος ἔχει συντελεστήν τὸ Σ_3 καὶ οὕτω καθεξῆς. Δηλ. ὁ συντελεστὴς τῆς τυχούσης δυνάμεως $x^{\mu-\nu}$ εἶναι τὸ ***ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν γραμμάτων α, β, γ, . . . λ λαμβανομένων ἀνὰ ν καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς συνδυασμούς.***

Θὰ εἶναι λοιπὸν

$$(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma)\ldots.(x+\lambda)=x^{\mu}+\Sigma_1 x^{\mu-1}+\Sigma_2 x^{\mu-2}+$$
$$+\Sigma_3 x^{\mu-3}+\ldots.+\Sigma_{\mu-1}x+\Sigma_{\mu} \qquad (1)$$

Κατὰ τὸν τύπον (1) θὰ εἶναι

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=x^4+(1+2+3+4)x^3+$$
$$+(1.2+1.3+1.4+2.3+2.4+3.4)x^2+(1.2.3+1.2.4.+1.3.4+2.3.4)x+1.2.3.4=$$
$$=x^4+10x^3+(2+3+4+6+8+12)x^2+(6+8+12+24)x+24=$$
$$=x^4+10x^3+35x^2+50x+24.$$

Ὁμοίως εἶναι

$$(x+1)(x+2)(x-3)(x-4)=x^4+(1+2-3-4)x^3+(2-3-4-6-8+12)x+$$
$$+(-6-8+12+24)x+24=x^4-4x^3-7x^2+22x+24.$$

808. **Τύπος τοῦ διωνύμου τοῦ Newton**. Ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι $\alpha=\beta=\gamma=\ldots..=\lambda$ τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἰσότητος (1) γίνεται $(x+\alpha)^{\mu}$.

Εἰς τὸ δεύτερον μέλος ὁ συντελεστὴς Σ_1 γίνεται $(\alpha+\alpha+\ldots+\alpha)=\mu\alpha$. Κάθε προσθετέος τοῦ ἀθροίσματος $\Sigma_2=(\alpha\beta+\alpha\gamma+\ldots.)$ γίνεται ἴσος μὲ α.α δηλ. μὲ α^2 καὶ ἐπειδὴ τὸ πλῆθος τῶν προσθετέων αὐτῶν εἶναι ἴσον μὲ τὸ πλῆθος τῶν συνδυασμῶν τῶν μ γραμμάτων ἀνὰ δύο, θὰ εἶναι $\Sigma_2=\frac{\mu(\mu-1)}{1,2}\cdot\alpha^2$.

Γενικῶς κάθε προσθετέος τοῦ ἀθροίσματος Σ_ν γίνεται ἴσος μὲ α^ν καὶ τὸ πλῆθος τῶν προσθετέων αὐτῶν εἶναι ἴσον μὲ τὸ πλῆθος τῶν συνδυασμῶν τῶν μ γραμμάτων ἀνὰ ν· δηλ. εἶναι

$$\Sigma_\nu=\Sigma_\mu^\nu\,\alpha^\nu=\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots.(\mu-\nu+1)}{1.2.3\ldots\nu}.\alpha^\nu$$

Τέλος ὁ τελευταῖος ὅρος Σ_μ γίνεται α^μ.

Ἐὰν λοιπὸν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὸν τύπον (1) τὰ γράμματα β, γ, δ, ... λ μὲ α καὶ τὰ $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots., \Sigma_\mu$ μὲ τὰ ἴσα των, λαμβάνομεν τὸν τύπον

$$\boxed{\begin{aligned}(\mathbf{x}+\alpha)^{\mu}&=\mathbf{x}^{\mu}+\Sigma_\mu^1\,\alpha\mathbf{x}^{\mu-1}+\Sigma_\mu^2\,\alpha^2\mathbf{x}^{\mu-2}+\Sigma_\mu^3\,\alpha^3\mathbf{x}^{\mu-3}+\\&+\ldots+\Sigma_\mu^{\mu-\nu}\alpha^\nu\,\mathbf{x}^{\mu-\nu}+\ldots+\Sigma_\mu^{\mu-2}\alpha^{\mu-2}\mathbf{x}^2+\Sigma_\mu^{\mu-1}\alpha^{\mu-1}\mathbf{x}+\alpha^\mu\end{aligned}}$$

ἢ

$$\boxed{\begin{aligned}(\mathbf{x}+\alpha)^{\mu}&=\mathbf{x}^{\mu}+\frac{\mu}{1}\alpha\mathbf{x}^{\mu-1}+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}\alpha^2\mathbf{x}^{\mu-2}+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}\alpha^3\mathbf{x}^{\mu-3}+\\&+\ldots+\frac{\mu(\mu-1)\ldots.(\mu-\nu+1)}{1.2.3\ldots.\nu}\alpha^\nu\,\mathbf{x}^{\mu-\nu}+\ldots.+\frac{\mu}{1}\alpha^{\mu-1}\mathbf{x}+\alpha^\mu\end{aligned}}$$

Ὁ ἀνωτέρω τύπος λέγεται ***τύπος τοῦ δυωνύμου ἢ τύπος τοῦ Νιούτον*** (Νεύτωνος).

Παραδείγματα. $(\alpha+x)^4=x^4+\frac{4}{1}\alpha x^3+\frac{4.3}{1.2}\alpha^2x^2+\frac{4.3.2}{1.2.3}\alpha^3x+\alpha^4=$
$=x^4+4\alpha x^3+6\alpha^2x^2+4\alpha^3x+\alpha^4$

$(x+\alpha)^5=x^5+\frac{5}{1}\alpha x^4+\frac{5.4}{1.2}\alpha^2x^3+\frac{5.4.3}{1.2.3}\alpha^3x^2+\frac{5.4.3.2}{1.2.3.4}\alpha^4x+\alpha^5=$
$=x^5+5\alpha x^4+10\alpha^2x^3+10\alpha^3x+5\alpha^4x+\alpha^5$

809. Παρατηρήσεις. *1η.* Ὁ τύπος τοῦ δυωνύμου περιέχει $\mu+1$ ὅρους μὲ πρῶτον ὅρον τὸν x^μ καὶ τελευταῖον τὸν α^μ.

2α. Οἱ ἐκθέται τοῦ x προχωροῦν ἐλαττούμενοι κατὰ μίαν μονάδα ἀπὸ ὅρον εἰς ὅρον, ἐνῷ οἱ ἐκθέται τοῦ α προχωροῦν αὐξανόμενοι κατὰ μίαν μονάδα. Ἑπομένως : ***Εἰς κάθε ὅρον τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν τοῦ*** x ***καὶ τοῦ*** α ***εἶναι ἴσον μὲ*** μ.

Ὥστε τὸ ἀνάπτυγμα τῆς δυνάμεως $(x+\alpha)^\mu$ εἶναι ἕνα ὁμογενὲς ἀκέραιον πολυώνυμον βαθμοῦ μ πρὸς α καὶ x.

3η. Ἐπειδὴ (§ 803) $\sum_\mu^1=\sum_\mu^{\mu-1}$, $\sum_\mu^2=\sum_\mu^{\mu-2}$ κλπ., συνάγομεν, ***οἱ συντελεσταὶ δύο ὅρων, ποὺ ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τοὺς ἄκρους ὅρους εἶναι ἴσοι.***

Ἐὰν μ εἶναι ἄρτιος, ὑπάρχει μεσαῖος ὅρος, ὁ ὁποῖος καταλαμβάνει τὴν $\frac{\mu}{2}+1$ τάξιν· ἀπό τοῦ ὅρου αὐτοῦ οἱ συντελεσταὶ ἐπαναλαμβάνονται κατ' ἀντίθετον τάξιν.

Ἐὰν μ εἶναι περιττὸς ἀριθμός, ὅλοι οἱ συντελεσταὶ ἐπαναλαμβάνονται ἀνὰ δύο.

Στηριζόμενοι εἰς τὰ ἀνωτέρω δὲν ἔχομεν ἀνάγκην νὰ ὑπολογίζωμεν ***ὅλους*** τοὺς συντελεστάς, ἀλλὰ μόνον τοὺς ἡμίσεις, ἐὰν μ εἶναι περιττὸς καὶ τοὺς ἡμίσεις +1, ἐὰν μ εἶναι ἄρτιος.

810. Κανὼν τοῦ σχηματισμοῦ τῶν ὅρων τοῦ ἀναπτύγματος $(x+\alpha)^\mu$. ***Διὰ νὰ μεταβῶμεν ἀπὸ ἕνα ὅρον τοῦ ἀναπτύγματος εἰς τὸν ἑπόμενον, πολλαπλασιάζομεν τὸν συντελεστὴν τοῦ ὅρου τούτου ἐπὶ τὸν ἐκθέτην τοῦ*** x ***καὶ διαιροῦμεν τὸ γινόμενον αὐτὸ διὰ τοῦ ἐκθέτου τοῦ*** α (εἰς τὸν ὅρον αὐτὸν) ***ηὐξημένου κατὰ μονάδα. Παραπλεύρως δὲ τοῦ πηλίκου αὐτοῦ γράφομεν τὸν*** α ***μὲ ἐκθέτην κατὰ μονάδα μεγαλύτερον καὶ τὸν*** x ***μὲ ἐκθέτην κατὰ μονάδα μικρότερον.***

Κατὰ τὸν κανόνα αὐτὸν θὰ εἶναι

$(x+\alpha)^7=x^7+7\alpha x^6+21\alpha^2x^5+35\alpha^3x^4+35\alpha^4x^3+21\alpha^5x^2+7\alpha^6x+\alpha^7.$

(Π.χ. διὰ νὰ μεταβῶμεν ἀπὸ τὸν δεύτερον ὅρον εἰς τὸν τρίτον λέγομεν $\frac{7\times6}{2}=21$· ὥστε ὁ συντελεστὴς τοῦ τρίτου ὅρου εἶναι 21).

811. Τύπος τοῦ δυωνύμου $(x-\alpha)^\mu$. Ἐὰν εἰς τὸν τύπον (2) τῆς § 807 θέσωμεν —α ἀντὶ α, θὰ εἶναι

$$(x-\alpha)^{\mu} = x^{\mu} - \Sigma_{\mu}^{1}\,\alpha x^{\mu-1} - \Sigma_{\mu}^{2}\,\alpha^{2} x^{\mu-2} - \ldots\ldots + (-1)^{\mu}\alpha^{\mu}$$

Κατὰ τὸν ἀνωτέρω τύπον θὰ εἶναι

$$(x-\alpha)^6 = x^6 - 6\alpha x^5 + 15\alpha^2 x^4 - 20\alpha^3 x^3 + 15\alpha^4 x^2 - 6\alpha^5 x + \alpha^6.$$

812: **Γενικὸς ὅρος**. Ὁ ὅρος τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ δυωνύμου $(x+\alpha)^{\mu}$, ὁ ὁποῖος κατέχει τὴν $\nu+1$ τάξιν, δηλ. ὁ ὅρος, ὁ ὁποῖος ἔχει πρὸ αὐτοῦ ν ὅρους εἶναι τῆς μορφῆς

$$T_{\nu+1} = \Sigma_{\mu}^{\nu}\,\alpha^{\nu} x^{\mu-\nu} = \frac{\mu(\mu-1)\ldots.(\mu-\nu+1)}{1.2.3\ldots.\nu}\alpha^{\nu} x^{\mu-\nu}. \qquad (1)$$

Ὁ ὅρος αὐτὸς λέγεται ***γενικὸς ὅρος*** τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ δυωνύμου $(x+\alpha)^{\mu}$.

Ἀπὸ τὸν γενικὸν αὐτὸν ὅρον δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ὅλους τοὺς ὅρους τοῦ ἀναπτύγματος, ἀπὸ τοῦ δευτέρου καὶ ἐφεξῆς, ἀρκεῖ νὰ δίδωμεν εἰς τὸν ν διαδοχικῶς τὰς τιμὰς $1, 2, 3, \ldots., \mu$.

Παράδειγμα 1ον. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν 16ον ὅρον τοῦ ἀναπτύγματος τῆς δυνάμεως $(x-3)^{28}$ θέτομεν εἰς τὸν τύπον (1) $\mu=28$, $\nu=15$ $\alpha=-3$ καὶ ἔχομεν

$$T_{16} = \Sigma_{28}^{15}(-3)^{15}x^{13} = -\frac{28.27.26\ldots.14}{1.2.3\ldots.15}\cdot 3^{15}\cdot x^{13}.$$

Παράδειγμα 2ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ 13ος ὅρος τοῦ ἀναπτύγματος

$$\left(x^2 - \frac{3}{x}\right)^{31}$$

Θέτομεν εἰς τὸν τύπον (1) $\mu=31$, $\nu=12$ καὶ ἀντικαθιστῶμεν τὸ x διὰ x^2 καὶ τὸ α διὰ $-\dfrac{3}{x}$ καὶ ἔχομεν

$$T_{13} = \Sigma_{31}^{12}\left(-\frac{3}{x}\right)^{12}(x^2)^{19} = \frac{31.30.29\ldots.18}{1.2.3\ldots.12}\cdot 3^{12}\cdot x^{26}.$$

Ἀσκήσεις. ***3019***. Νὰ ἀναπτυχθῇ ἡ δύναμις $(x\pm\alpha)^5$.

3020. Νὰ ἀναπτυχθῇ ἡ δύναμις $(x\pm\alpha)^6$.

3021. Νὰ ἀναπτυχθῇ ἡ δύναμις $(x\pm\alpha)^8$.

3022. Νὰ ἀναπτυχθῇ ἡ δύναμις $(x\pm1)^7$.

3023. Νὰ ἀναπτυχθῇ ἡ δύναμις $(x\pm1)^9$.

3024. Νὰ ἀναπτυχθῇ ἡ δύναμις $(\alpha\pm\beta)^5$.

3025. Νὰ ἀναπτυχθῇ ἡ δύναμις $(\alpha\pm\beta)^6$.

3026. Νὰ ἀναπτυχθῇ ἡ δύναμις $(\alpha^2\pm\beta^2)^5$.

3027. Νὰ εὑρεθῇ ὁ 12ος ὅρος τοῦ ἀναπτύγματος $(x-2)^{20}$.

3028. Νὰ εὑρεθῇ ὁ 15ος ὅρος τοῦ ἀναπτύγματος $\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^{25}$.

3029. Νὰ εὑρεθῇ ὁ 20ὸς ὅρος τοῦ ἀναπτύγματος $\left(x^2-\dfrac{2}{x}\right)^{30}$.

3030. Νὰ εὑρεθῇ ὁ 16ος ὅρος τοῦ ἀναπτύγματος $(x^2+5x^{-1})^{20}$.

3031. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $2^{\mu} = 1 + \Sigma_{\mu}^{1} + \Sigma_{\mu}^{2} + \ldots. + \Sigma_{\mu}^{\mu}$.

3032. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\Sigma_\mu^1+\Sigma_\mu^3+\Sigma_\mu^5+\ldots=1+\Sigma_\mu^2+\Sigma_\mu^4+\ldots$.

3033. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\Sigma_\mu^2+\Sigma_\mu^4+\Sigma_\mu^6+\ldots\ldots=2^{\mu-1}-1$.

3034. Νὰ εὑρεθῇ ὁ μεγαλύτερος συντελεστὴς τοῦ ἀναπτύγματος τῆς δυνάμεως $(x+\alpha)^\mu$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΕ΄.

ΟΡΙΖΟΥΣΑΙ

813. **Ὁρίζουσαι δευτέρας καὶ τρίτης τάξεως.** Εἰς τὴν § 297 εἴπομεν, ὅτι ἡ διαφορὰ $\alpha\beta'-\beta\alpha'$ λέγεται ὁρίζουσα τῶν ἀριθμῶν $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ καὶ παρίσταται μὲ τὸ σύμβολον $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}$.

Δηλ. ἐξ ὁρισμοῦ εἶναι

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} = \alpha\beta'-\beta\alpha'.$$

Ἡ διαφορὰ $\alpha\beta'-\beta\alpha'$ λέγεται ***ἀνάπτυγμα*** τῆς ὁριζούσης $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}$ (1), τὰ δὲ γράμματα $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ λέγονται στοιχεῖα τῆς ὁριζούσης.

Ἐπειδὴ τὰ στοιχεῖα τῆς ὁριζούσης (1) εἶναι γραμμένα εἰς δύο ὁριζοντίους γραμμὰς καὶ εἰς δύο στήλας, ἡ ὁρίζουσα (1) λέγεται: ***ὁρίζουσα δευτέρας τάξεως ἢ δευτέρου βαθμοῦ ἢ ὁρίζουσα τῶν τεσσάρων στοιχείων.***

Ἐπίσης εἰς τὴν § 307 εἴδομεν, ὅτι ἡ συμβολικὴ παράστασις

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$$

λέγεται ***ὁρίζουσα τρίτης τάξεως ἢ τρίτου βαθμοῦ ἢ ὁρίζουσα τῶν ἐννέα στοιχείων*** $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'\ \alpha'', \beta'', \gamma''$. Εἰς τὴν ἰδίαν § 307 εἴδομεν, ὅτι διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν μιᾶς ὁριζούσης τρίτης τάξεως χρησιμοποιοῦμεν τὸν κανόνα τοῦ Sarrus.

Κατὰ τὸν κανόνα τοῦ Sarrus θὰ εἶναι

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \alpha\beta'\gamma''+\beta\gamma'\alpha''+\gamma\alpha'\beta''-\gamma\beta'\alpha''-\alpha\gamma'\beta''-\beta\alpha'\gamma$$

Κατωτέρω θὰ ἐξετάσωμεν γενικώτερον τὰς ὁριζούσας. Προηγουμένως ὅμως θὰ δώσωμεν μερικοὺς ὁρισμούς, οἱ ὁποῖοι θὰ μᾶς διευκολύνουν εἰς τὴν ἐργασίαν αὐτήν.

814. **Θετικαὶ καὶ ἀρνητικαὶ μεταθέσεις.** Ἔστω, ὅτι ἔχομεν μίαν τυχοῦσαν μετάθεσιν τῶν ν φυσικῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3, ... , ν. Θὰ λέγωμεν, ὅτι εἰς τὴν μετάθεσιν αὐτὴν δύο οἱοιδήποτε ἀριθμοὶ παρουσιάζουν μίαν ***παράβασιν***, ὅταν ὁ μεγαλύτερος ἀπὸ τοὺς δύο αὐτοὺς ἀριθμοὺς εἶναι γραμμένος πρό τοῦ μικροτέρου.

Π.χ. εἰς τὴν μετάθεσιν 4253, τὸ 4 παρουσιάζει μίαν παράβασιν μὲ τὸ 2 καὶ μίαν μὲ τὸ 3: Ὥστε ἡ μετάθεσις 4253 παρουσιάζει τρεῖς παραβάσεις (4,2), (4,3), (5,3).

Μία μετάθεσις λέγεται ***θετικὴ ἢ ἀρτία***, ὅταν τὸ πλῆθος τῶν παραβάσεών της εἶναι ἄρτιον· μία μετάθεσις λέγεται ***ἀρνητικὴ ἢ περιττή***, ὅταν τὸ πλῆθος τῶν παραβάσεών της εἶναι περιττόν.

Π.χ. Ἡ μετάθεσις 3124 παρουσιάζει δύο παραβάσεις, τὰς (3,1), (3,2)· ἄρα ἡ μετάθεσις αὐτὴ εἶναι θετική.

Ἡ μετάθεσις 2413 παρουσιάζει τρεῖς παραβάσεις, τὰς (2,1), (4,1) καὶ (4,3)· ἄρα ἡ μετάθεσις αὐτὴ εἶναι ἀρνητική.

Δύο μεταθέσεις λέγονται ***ὁμόσημοι***, ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν παραβάσεων καὶ τῶν δύο μεταθέσεων εἶναι ἄρτιος. Ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν παραβάσεων δύο μεταθέσεων εἶναι ἀριθμὸς περιττός, αἱ μεταθέσεις λέγονται ***ἑτερόσημοι***.

815. Θεώρημα. ***Ἐὰν εἰς μίαν μετάθεσιν ἀνταλλάξωμεν τὴν θέσιν δύο ἀριθμῶν, ἡ μετάθεσις ἀλλάσσει σημεῖον.***

1ον. Ὑποθέτομεν, ὅτι οἱ δύο ἀριθμοὶ εἶναι διαδοχικοί. Ἔστω ἡ μετάθεσις ΑλμΒ, ὅπου Α παριστάνει τοὺς ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι εὑρίσκονται πρὸ τοῦ λ, Β παριστάνει τοὺς ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι εὑρίσκονται μετὰ τὸν μ καὶ λ, μ εἶναι οἱ δύο ἀριθμοί, τῶν ὁποίων ἀνταλλάσσομεν τὴν θέσιν. Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ μεταθέσεις ΑλμΒ (1) καὶ ΑμλΒ (2) ἔχουν διάφορα σημεῖα.

Αἱ παραβάσεις, τὰς ὁποίας παρουσιάζουν οἱ ἀριθμοὶ Α, εἴτε μεταξύ των, εἴτε μὲ τοὺς λ καὶ μ, εἴτε μὲ τοὺς ἀριθμοὺς Β, καθὼς καὶ αἱ παραβάσεις, τὰς ὁποίας παρουσιάζουν οἱ ἀριθμοὶ Β, εἴτε μεταξύ των εἴτε μὲ τοὺς λ καὶ μ, εἶναι αἱ αὐταὶ καὶ εἰς τὰς δύο μεταθέσεις. Ἐξ ἄλλου, ἐὰν οἱ λμ παρουσιάζουν μίαν παράβασιν εἰς τὴν δευτέραν μετάθεσιν, δὲν παρουσιάζουν τοιαύτην εἰς τὴν πρώτην μετάθεσιν. Ἐξ αὐτῶν συνάγομεν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν παραβάσεων τῶν δύο μεταθέσεων διαφέρει κατὰ μονάδα. Ἑπομένως αἱ μεταθέσεις (1) καὶ (2) εἶναι ἑτερόσημοι.

2ον. Ὑποθέτομεν, ὅτι οἱ δύο ἀριθμοὶ δὲν εἶναι διαδοχικοί. Ἔστω ἡ μετάθεσις ΑλΒμΓ, ὅπου Α, Β, Γ παριστάνουν διαφόρους ἀριθμοὺς καὶ λ, μ εἶναι οἱ δύο ἀριθμοί, τῶν ὁποίων ἀλλάσσομεν τὴν θέσιν. Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ μεταθέσεις ΑλΒμΓ (3) καὶ ΑμΒλΓ (4) ἔχουν διάφορα σημεῖα.

Ὑποθέτομεν, ὅτι ὁ Β ἔχει ρ ἀριθμούς. Διὰ νὰ μεταβῶμεν ἀπὸ τὴν μετάθεσιν (1) εἰς τὴν (2) ἀνταλλάσσομεν διαδοχικῶς τὸ λ μὲ τοὺς ρ ἀριθμοὺς τοῦ Β καὶ λαμβάνομεν τὴν μετάθεσιν ΑΒλμΓ, ἔπειτα ἀνταλλάσσομεν τὸ μ διαδοχικῶς μὲ τὸ λ καὶ μὲ τοὺς ρ ἀριθμοὺς τοῦ Β καὶ λαμβάνομεν τὴν μετάθεσιν (2). Ὥστε διὰ νὰ μεταβῶμεν ἀπὸ τὴν μετάθεσιν (1) εἰς τὴν (2), κάμνομεν $2\rho+1$ ἀνταλλαγὰς τῶν διαδοχικῶν ἀριθμῶν. Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμός $2\rho+1$ εἶναι περιττός ἀριθμός συνάγομεν, ὅτι αἱ μεταθέσεις (1) καὶ (2) εἶναι ἑτερόσημοι.

816. Ὁρίζουσαι ν τάξεως. Ἔστωσαν ν^2 ἀριθμοί, τοὺς ὁποίους ἔχομεν τοποθετήσει ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου εἰς ν ὁριζοντίας γραμμὰς καὶ ν στήλας, καθέτους ἐπὶ τὰς γραμμὰς αὐτάς.

$$\begin{array}{llll} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \ldots\ldots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \ldots\ldots & \alpha_{2\nu} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \ldots\ldots & \alpha_{3\nu} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \alpha_{\nu 3} \ldots\ldots & \alpha_{\nu\nu} \end{array} \qquad (1)$$

Κάθε ἀριθμὸς τοῦ ἀνωτέρω πίνακος φέρει δύο δείκτας: ὁ πρῶτος δείκτης δεικνύει τὴν ***γραμμὴν*** εἰς τὴν ὁποίαν εὑρίσκεται ὁ ἀριθμός καὶ ὁ δεύτερος δεικνύει τὴν ***στήλην***, εἰς τὴν ὁποίαν εὑρίσκεται ὁ ἀριθμός.

Ὀνομάζομεν ***ὁρίζουσαν τῶν ν^2*** αὐτῶν ἀριθμῶν τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα ὅλων τῶν γινομένων, τὰ ὁποῖα σχηματίζομεν, ἐὰν λάβωμεν ἀπὸ ἕνα ἀριθμὸν καὶ ἕνα μόνον ἀπὸ κάθε γραμμὴν καὶ κάθε στήλην καὶ ἔμπροσθεν, τῶν ὁποίων γινομένων θέτομεν τὸ σημεῖον $+$ ἢ τὸ σημεῖον $-$ κατὰ τὰ ὁριζόμενα κατωτέρω:

Καθένα ἀπὸ τὰ γινόμενα αὐτὰ περιέχει ν παράγοντας, οἱ ὁποῖοι ἀνήκουν εἰς διαφόρους γραμμὰς καὶ διαφόρους στήλας.

Ἡ σειρὰ τῶν δεικτῶν τῶν γραμμῶν σχηματίζει μίαν μετάθεσιν τῶν ν φυσικῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3, . . . , ν. Ὁμοίως ἡ σειρὰ τῶν δεικτῶν τῶν στηλῶν σχηματίζει μίαν ἄλλην μετάθεσιν τῶν αὐτῶν φυσικῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3, . . . , ν.

Εὑρίσκομεν τὰς παραβάσεις τῶν δύο αὐτῶν μεταθέσεων. Ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν παραβάσεων εἶναι ἀριθμὸς ἄρτιος, θέτομεν ἔμπροσθεν τοῦ γινομένου τὸ σημεῖον $+$· ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν παραβάσεων εἶναι ἀριθμὸς περιττὸς θέτομεν ἔμπροσθεν τοῦ γινομένου τὸ σημεῖον $-$.

Καθένα ἀπὸ τὰ γινόμενα, τὰ ὁποῖα σχηματίζομεν, ὡς ἀνεφέραμεν ἀνωτέρω, λέγεται ***ὅρος τῆς ὁριζούσης***.

Τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα ὅλων τῶν ὅρων τῆς ὁριζούσης τῶν ν^2 ἀριθμῶν παρίσταται μὲ τὸ σύμβολον

$$\left|\begin{array}{llll} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \ldots\ldots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \ldots\ldots & \alpha_{2\nu} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \ldots\ldots & \alpha_{3\nu} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \alpha_{\nu 3} \ldots\ldots & \alpha_{\nu\nu} \end{array}\right|$$

δηλ. θέτομεν τοὺς ἀριθμοὺς τοῦ πίνακος (1) μεταξὺ δύο παραλλήλων εὐθειῶν πρὸς τὰς στήλας τοῦ πίνακος.

Οἱ ν^2 ἀριθμοὶ α_{11}, α_{12}, α_{13}......, $\alpha_{\nu\nu}$ λέγονται ***στοιχεῖα τῆς ὁριζούσης.***

Ὁ ἀριθμὸς. ν λέγεται ***βαθμὸς τῆς ὁριζούσης,*** διότι εἰς κάθε γινόμενον ὑπάρχουν ν παράγοντες.

Ἐὰν $\nu=2$ ἔχομεν τὴν ὁρίζουσαν ***δευτέρας τάξεως ἢ δευτέρου βαθμοῦ***

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}$$

Κατὰ τὸν ὁρισμόν, ποὺ ἐδώσαμεν ἀνωτέρω, θὰ εἶναι

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}.$$

Ἐθέσαμεν εἰς τὸ γινόμενον $\alpha_{11}\alpha_{22}$ τὸ σημεῖον +, διότι αἱ μεταθέσεις 1,2 καὶ 1,2 τῶν πρώτων καὶ τῶν δευτέρων δεικτῶν εἶναι ὁμόσημοι. Εἰς τὸ δεύτερον γινόμενον $\alpha_{12}\alpha_{21}$ ἐθέσαμεν τὸ σημεῖον —, διότι αἱ μεταθέσεις 1,2 καὶ 2,1 τῶν πρώτων καὶ τῶν δευτέρων δεικτῶν εἶναι ἑτερόσημοι.

Ἐὰν ν=3, ἔχομεν τὴν ὁρίζουσαν ***τῆς τρίτης τάξεως ἢ τοῦ τρίτου βαθμοῦ.***

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$$

ἡ ὁποία εἶναι (κατὰ τὸν κανόνα τοῦ Sarrus) ἴση μὲ τὴν παράστασιν

$$\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}+\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31}+\alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32}-\alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31}-\alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32}-\alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{33}.$$

Εἰς τὸ γινόμενον $\alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31}$ ἐθέσαμεν ἔμπροσθέν του τὸ σημεῖον —, διότι αἱ μεταθέσεις 1,2,3 καὶ 3,2,1 τῶν πρώτων καὶ τῶν δευτέρων δεικτῶν εἶναι ἑτερόσημοι. Πράγματι· ἡ μετάθεσις 1,2,3 εἶναι θετική, διότι δὲν παρουσιάζει καμμίαν παράβασιν, ἡ δὲ μετάθεσις 3,2,1 εἶναι ἀρνητικοί, διότι παρουσιάζει 3 παραβάσεις τὰς (3,2), (3,1) καὶ (2,1).

817. Γενικὴ μορφὴ τῶν ὅρων μιᾶς ὁριζούσης. Γνωρίζομεν, ὅτι κάθε ὅρος τῆς ὁριζούσης τῶν ν^2 ἀριθμῶν εἶναι ἕνα γινόμενον ν ἀριθμῶν, τὸ ὁποῖον ἔχει ἕνα στοιχεῖον καὶ μόνον ἕνα ἀπὸ κάθε γραμμὴν καὶ ἀπὸ κάθε στήλην· ἐπομένως κάθε ὅρος τῆς ὁριζούσης τῶν ν^2 ἀριθμῶν εἶναι τῆς μορφῆς

$$(-1)^{\lambda+\mu}.\,\alpha_{1a}\,.\,\alpha_{2b}\,.\,\alpha_{3c}\,.\,\alpha_{4d}\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,\alpha_{\nu r}$$

ὅπου τὰ γράμματα a, b, c, d, ... , r παριστάνουν τοὺς ν φυσικοὺς ἀριθμοὺς 1, 2, 3, 4, ... , ν γραμμένους ὅπως τύχη καὶ οἱ ἐκθέται λ καὶ μ τῆς (−1) παριστάνουν τὸ πλῆθος τῶν παραβάσεων τῶν δεικτῶν τῶν γραμμῶν καὶ τῶν δεικτῶν τῶν στηλῶν.

818. Ἐλάσσονες ὁρίζουσαι. Ἐὰν εἰς μίαν ὁρίζουσαν ν βαθμοῦ παραλείψωμεν ρ γραμμὰς καὶ ρ στήλας, παράγεται μία ὁρίζουσα (ν—ρ) βαθμοῦ, ἡ ὁποία λέγεται ***ἐλάσσων ὁρίζουσα*** τῆς δοθείσης.

Ἂν παραλείψωμεν μόνον μίαν γραμμὴν καὶ μίαν στήλην, παράγεται μία ἐλάσσων ὁρίζουσα, ἡ ὁποία λέγεται ***ἀντίστοιχος*** τοῦ κοινοῦ στοιχείου τῆς παραλειπομένης γραμμῆς καὶ στήλης.

Π.χ. Ἔστω ἡ ὁρίζουσα τρίτου βαθμοῦ

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$$

Ἡ ἀντίστοιχος ἐλάσσων τοῦ στοιχείου α_{11} εἶναι ἡ $\begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$

Ἡ ἀντίστοιχος ἐλάσσων τοῦ στοιχείου α_{32} εἶναι ἡ $\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{23} \end{vmatrix}$

Τὸ κοινὸν στοιχεῖον τῆς παραλειπομένης γραμμῆς καὶ στήλης λέγεται ***συντελεστὴς*** τῆς προκυπτούσης ἐλάσσονος ὁριζούσης.

Ὁ συντελεστὴς τῆς προκυπτούσης ἐλάσσονος ὁριζούσης ἔχει τὸ σημεῖον + ἢ —, καθόσον τὸ ἄθροισμα τῶν δεικτῶν του εἶναι ἄρτιον ἢ περιττόν.

Π.χ. εἰς τὴν ὁρίζουσαν $\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$

ὁ συντελεστὴς α_{22} τῆς ἐλάσσονος ὁριζούσης $\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$

ἔχει τὸ σημεῖον +, διότι τὸ ἄθροισμα τῶν δεικτῶν του εἶναι

$2+2=4=$ἄρτιον.

Ὁ συντελεστὴς α_{32} τῆς ἐλάσσονος ὁριζούσης $\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{23} \end{vmatrix}$

ἔχει τὸ σημεῖον —, διότι τὸ ἄθροισμα τῶν δεικτῶν εἶναι

$3+2=5=$περιττόν.

819. **Ἀνάπτυγμα ὁριζούσης.** Τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν ὅρων μιᾶς ὁριζούσης λέγεται ***ἀνάπτυγμα*** αὐτῆς ἢ ***τιμὴ*** αὐτῆς.

Ἀποδεικνύεται, ὅτι: ***ἡ τιμὴ μιᾶς ὁριζούσης εὑρίσκεται, ἐὰν ὅλα τὰ στοιχεῖα μιᾶς γραμμῆς (ἢ μιᾶς στήλης) πολλαπλασιασθοῦν ἕκαστον ἐπὶ τὴν ἀντίστοιχον ἐλάσσονα ὁρίζουσαν καὶ προστεθοῦν τὰ προκύπτοντα γινόμενα.***

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω θὰ εἶναι

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = +\alpha_{11} \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} - \alpha_{21} \begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \alpha_{31} \begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{vmatrix} =$$

$$=\alpha_{11}(\alpha_{22}\alpha_{33}-\alpha_{23}\alpha_{32})-\alpha_{21}(\alpha_{12}\alpha_{33}-\alpha_{13}\alpha_{32})+\alpha_{31}(\alpha_{12}\alpha_{23}-\alpha_{13}\alpha_{22})=$$

$$=\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}-\alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32}-\alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{33}+\alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32}+\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31}-\alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31}.$$

Ἡ εὕρεσις τῆς τιμῆς τῆς ἀνωτέρω ὁριζούσης λέγεται ***ἀνάπτυξις τῆς ὁριζούσης κατὰ τὰ στοιχεῖα τῆς πρώτης στήλης***.

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ + τὰς θέσεις τῶν στοιχείων, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν δύο δεικτῶν του εἶναι ἄρτιον καὶ μὲ — τὰς θέσεις τῶν στοιχείων, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν δύο δεικτῶν του εἶναι περιττόν, θὰ ἔχωμεν τοὺς κάτωθι πίνακας διὰ τὸν κανονισμὸν τοῦ σημείου τοῦ συντελεστοῦ τοῦ κοινοῦ στοιχείου τῆς παραλειπομένης γραμμῆς καὶ στήλης.

$$\begin{vmatrix} + & - \\ - & + \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix} \quad \text{κλπ.}$$

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἡ ὁρίζουσα $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

ἀναπτυσσομένη κατὰ τὰ στοιχεῖα τῆς πρώτης στήλης εἶναι ἴση μὲ

$$=3\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$=3(6\cdot0-5\cdot1)-4(2\cdot0-1\cdot1)+2(2\cdot5-1\cdot6)=-15+4+8=-3.$$

Ἀσκήσεις. 3035. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἀνάπτυγμα τῶν ὁριζουσῶν

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha & 3\alpha' & 1 \\ -\alpha & \alpha & 2\alpha \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

3036. Νὰ ἀναπτυχθῇ ἡ ὁρίζουσα $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

3037. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & x & 2 \end{vmatrix} = 0.$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΟΡΙΖΟΥΣΩΝ

820. Θεώρημα Ι. ***Ἡ τιμὴ μιᾶς ὁριζούσης δὲν βλάπτεται, ἐὰν αἱ στῆλαι της γίνουν γραμμαὶ καὶ αἱ γραμμαί της στῆλαι.***

Ἔστω ἡ ὁρίζουσα $\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$

Ἐὰν αἱ γραμμαί της γίνουν στῆλαι, δηλ. ἡ πρώτη γραμμὴ νὰ γίνῃ πρώτη στήλη, ἡ δευτέρα γραμμὴ νὰ γίνῃ δευτέρα στήλη κ.ο.κ. θὰ προκύψῃ ἡ ὁρίζουσα

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix}$$

θὰ δείξωμεν, ὅτι $\Delta = \Delta'$.

Ἂν ἀναπτύξωμεν τὴν ὁρίζουσαν Δ κατὰ τὰ στοιχεῖα τῆς πρώτης στήλης θὰ εἶναι

$$\Delta = \alpha \begin{vmatrix} \beta' & \gamma' \\ \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} - \alpha' \begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} + \alpha'' \begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ \beta' & \gamma' \end{vmatrix} \quad (1)$$

Ἂν ἀναπτύξωμεν καὶ τὴν ὁρίζουσαν Δ΄ κατὰ τὰ στοιχεῖα τῆς πρώτης γραμμῆς θὰ εἶναι

$$\Delta' = \alpha \begin{vmatrix} \beta' & \beta'' \\ \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix} - \alpha' \begin{vmatrix} \beta & \beta'' \\ \gamma & \gamma'' \end{vmatrix} + \alpha'' \begin{vmatrix} \beta & \beta' \\ \gamma & \gamma' \end{vmatrix} \quad (2)$$

Ἐπειδὴ τὰ δεύτερα μέλη τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) εἶναι ἴσα, θὰ εἶναι ἴσα καὶ τὰ πρῶτα μέλη των· δηλ. θὰ εἶναι $\Delta = \Delta'$.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***ἡ τιμὴ μιᾶς ὁριζούσης*** . . . . .

821. Θεώρημα ΙΙ. ***Ἐὰν εἰς μίαν ὁρίζουσαν ἀνταλλάξωμεν δύο γραμμὰς ἢ δύο στήλας ἡ ὁρίζουσα ἀλλάσει σημεῖον***

Ἔστω ἡ ὁρίζουσα $\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$

Ἐὰν ἀνταλλάξωμεν τὰς δύο τελευταίας στήλας λαμβάνομεν τὴν ὁρίζουσαν

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{23} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} & \alpha_{32} \end{vmatrix}$$

Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\Delta = -\Delta'$.

Ἔστω ἕνας τυχὼν ὅρος τῆς Δ, ὁ $\alpha_{21}\ \alpha_{12}\ \alpha_{33}$. Ὁ ὅρος αὐτὸς ὑπάρχει καὶ εἰς τὴν ὁρίζουσαν Δ΄. Ἑπομένως οἱ ὅροι τῶν ὁριζουσῶν Δ καὶ Δ΄ ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀπόλυτον τιμήν.

Ὁ ὅρος αὐτὸς εἰς μὲν τὴν ὁρίζουσαν Δ δύναται νὰ γραφῇ $\tau = \alpha_{21}(\alpha_{12}\alpha_{33})$ εἰς δὲ τὴν ὁρίζουσαν Δ΄ δύναται νὰ γραφῇ $\tau' = \alpha_{21}(\alpha_{13}\alpha_{32})$· διότι ἔγινε ἀνταλλαγὴ τῶν δύο τελευταίων στηλῶν.

Τὸ σημεῖον τῶν ὅρων τ καὶ τ΄ τὸ ὁρίζουν αἱ μεταθέσεις τῶν δεικτῶν τῶν γραμμῶν καὶ τῶν στηλῶν των.

Παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ μεταθέσεις τῶν δεικτῶν τῶν γραμμῶν τῶν ὅρων τ καὶ τ εἶναι αἱ αὐταὶ (2,1,3 καὶ 2,1,3), ἐνῷ αἱ μεταθέσεις τῶν δεικτῶν τῶν στηλῶν των εἶναι διάφοροι (αἱ 1, 2, 3 καὶ 1, 3, 2), διότι ἔγινε ἀνταλλαγὴ τῶν δύο τελευταίων στηλῶν· ὥστε τὸ σημεῖον τῆς μεταθέσεως τῶν δεικτῶν τῶν γραμμῶν διατηρεῖται κατὰ τὴν ἀνταλλαγὴν τῶν δύο τελευταίων ὅρων, ἐνῷ τὸ σημεῖον τῶν μεταθέσεων τῶν δεικτῶν τῶν στηλῶν ἀλλάσσει (§ 815)

Ὥστε οἱ ὅροι τ καὶ τ΄ ἔχουν διάφορα σημεῖα. Ἐπειδὴ ὅμως τὸ ἴδιον συμβαίνει διὰ κάθε ὅρον, συμπεραίνομεν, ὅτι ἡ ὁρίζουσα ἤλλαξε σημεῖα. Δηλ. εἶναι $\Delta=-\Delta'$.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἐργαζόμεθα, ἐὰν ἡ ὁρίζουσα ἔχει ν γραμμὰς καὶ ν στήλας. Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἐὰν εἰς μίαν ὁρίζουσαν . . . . .***

822. **Πόρισμα.** ***Ἐὰν ὁρίζουσα ἔχῃ δύο γραμμὰς ἢ δύο στήλας τὰς αὐτάς, ἡ ὁρίζουσα εἶναι ἴση μὲ μηδέν.***

Ἔστω μία ὁρίζουσα Δ, τῆς ὁποίας δύο γραμμαί της εἶναι αἱ αὐταί. Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\Delta=0$.

Πράγματι, ἐὰν ἀνταλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν δύο αὐτῶν γραμμῶν, ἡ ὁρίζουσα ἀλλάσσει σημεῖον (§ 821)· θὰ εἶναι λοιπὸν

$$\Delta=-\Delta \quad \text{ἢ} \quad 2\Delta=0, \quad \text{ὁπότε} \quad \Delta=0.$$

Π.χ. εἶναι $\begin{vmatrix} 3 & 7 & 3 \\ 5 & 6 & 5 \\ 8 & 4 & 8 \end{vmatrix}=0,$ διότι ἡ πρώτη καὶ ἡ τρίτη στήλη εἶναι αἱ αὐταί

823. **Θεώρημα III.** ***Ἐὰν τὰ στοιχεῖα μιᾶς γραμμῆς ἢ μιᾶς στήλης μιᾶς ὁριζούσης πολλαπλασιασθοῦν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν λ, ὁλόκληρος ἡ ὁρίζουσα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν λ.***

Ἔστω ἡ ὁρίζουσα $\Delta=\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ λ τὰ στοιχεῖα τῆς πρώτης γραμμῆς

θὰ προκύψῃ ἡ ὁρίζουσα $\Delta'=\begin{vmatrix} \lambda\alpha & \lambda\beta & \lambda\gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$

Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\Delta'=\lambda\Delta$.

Ἐὰν ἀναπτύξωμεν τὴν Δ΄ κατὰ τὰ στοιχεῖα τῆς πρώτης γραμμῆς θὰ ἔχωμεν

$$\Delta'=\lambda\alpha\begin{vmatrix} \beta' & \gamma' \\ \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}-\lambda\beta\begin{vmatrix} \alpha' & \gamma' \\ \alpha'' & \gamma'' \end{vmatrix}+\lambda\gamma\begin{vmatrix} \alpha' & \beta' \\ \alpha'' & \beta'' \end{vmatrix}$$

$$=\lambda\left[\alpha\begin{vmatrix} \beta' & \gamma' \\ \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}-\beta\begin{vmatrix} \alpha' & \gamma' \\ \alpha'' & \gamma'' \end{vmatrix}+\gamma\begin{vmatrix} \alpha' & \beta' \\ \alpha'' & \beta'' \end{vmatrix}\right] \quad (1)$$

Ἐπειδὴ ἡ ἐντὸς ἀγκυλῶν παράστασις παριστάνει τὸ ἀνάπτυγμα τῆς ὁριζούσης Δ κατὰ τὰ στοιχεῖα τῆς πρώτης γραμμῆς, ἡ ἰσότης (1) γίνεται $\Delta'=\lambda\Delta$.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἐὰν τὰ στοιχεῖα μιᾶς . . . . .***

Παρατήρησις· Ἐὰν διαιρέσωμεν ὅλα τὰ στοιχεῖα μιᾶς γραμμῆς ἢ μιᾶς στήλης διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἡ ὁρίζουσα διαιρεῖται διὰ τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ.

Ἀρκεῖ, εἰς τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα νὰ ὑποθέσωμεν, ὅτι ὁ λ εἶναι κλασματικὸς ἀριθμός.

824. Πόρισμα 1ον. ***Ἐὰν εἰς μίαν ὁρίζουσαν τὰ στοιχεῖα μιᾶς γραμμῆς ἢ μιᾶς στήλης ἔχουν κοινὸν παράγοντα λ, οὗτος δύναται νὰ τεθῇ ἐκτὸς τῆς ὁριζούσης ὡς παράγων αὐτῆς.***

Ἐδείχθη (§ 823), ὅτι

$$\Delta'=\lambda\Delta \quad \text{ἢ} \quad \begin{vmatrix} \lambda\alpha & \lambda\beta & \lambda\gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$$

$$\text{Π.χ.} \quad \begin{vmatrix} 12 & 7 & 5 \\ 24 & 1 & 8 \\ 18 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 4 & 1 & 8 \\ 3 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 6.3 \begin{vmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 4 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

825. Πόρισμα 2ον. ***Δυνάμεθα νὰ καταστήσωμεν ὅλα τὰ στοιχεῖα μιᾶς γραμμῆς (ἢ μιᾶς στήλης) ἴσα μὲ 1.***

Ἔστω ἡ ὁρίζουσα $\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$

Ἐὰν διαιρέσωμεν τὰ στοιχεῖα τῆς πρώτης στήλης διὰ α, τῆς δευτέρας στήλης διὰ β καὶ τῆς τρίτης στήλης διὰ γ λαμβάνομεν τὴν ὁρίζουσαν

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{\alpha'}{\alpha} & \frac{\beta'}{\beta} & \frac{\gamma'}{\gamma} \\ \frac{\alpha''}{\alpha} & \frac{\beta''}{\beta} & \frac{\gamma''}{\gamma} \end{vmatrix}$$

Ἀλλὰ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ὁρίζουσα Δ ἔχει διαιρεθῆ διὰ α.β.γ. Ἑπομένως εἶναι $\Delta:\alpha\beta\gamma=\Delta'$ ἢ $\Delta=\alpha\beta\gamma\Delta'$. Ὥστε

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \alpha\beta\gamma \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{\alpha'}{\alpha} & \frac{\beta'}{\beta} & \frac{\gamma'}{\gamma} \\ \frac{\alpha''}{\alpha} & \frac{\beta''}{\beta} & \frac{\gamma''}{\gamma} \end{vmatrix}$$

826. Θεώρημα IV. ***Ἐὰν τὰ στοιχεῖα δύο γραμμῶν ἢ δύο στηλῶν εἶναι ἀνάλογα, ἡ ὁρίζουσα εἶναι ἴση μὲ μηδέν.***

Ἔστω ἡ ὁρίζουσα $\Delta = \begin{vmatrix} \lambda\alpha & \lambda\beta & \lambda\gamma \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix}$

εἰς τὴν ὁποίαν τὰ στοιχεῖα τῶν δύο πρώτων γραμμῶν εἶναι ἀνάλογα. Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\Delta=0$.

Ἡ δοθεῖσα ὁρίζουσα γράφεται (§ 824) $\Delta=\lambda \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix}$ (1)

Ἐπειδὴ ἡ ὁρίζουσα τοῦ δευτέρου μέλους τῆς ἰσότητος (1) εἶναι ἴση μὲ τὸ μηδέν, διότι δύο γραμμαί της εἶναι αἱ αὐταί, ἡ ἰσότης (1) γίνεται $\Delta = \lambda \, . \, 0 = 0.$

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι : ***Ἐὰν τὰ στοιχεῖα δύο γραμμῶν*** . . . . .

Π.χ. εἶναι $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 9 & 15 & 24 \\ 7 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 3.3 & 3.5 & 3.8 \\ 7 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

827. Θεώρημα V. ***Ἐὰν τὰ στοιχεῖα μιᾶς γραμμῆς ἢ μιᾶς στήλης μιᾶς ὁριζούσης εἶναι ἀθροίσματα μ ἀριθμῶν, ἡ ὁρίζουσα δύναται νὰ γραφῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν ἑνὸς ἀθροίσματος μ ὁριζουσῶν τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ.***

Θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$\begin{vmatrix} \alpha+\beta+\gamma & \delta & \varepsilon \\ \alpha'+\beta'+\gamma' & \delta' & \varepsilon' \\ \alpha''+\beta''+\gamma'' & \delta'' & \varepsilon'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \delta & \varepsilon \\ \alpha' & \delta' & \varepsilon' \\ \alpha'' & \delta'' & \varepsilon'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta & \delta & \varepsilon \\ \beta' & \delta' & \varepsilon' \\ \beta'' & \delta'' & \varepsilon'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \gamma & \delta & \varepsilon \\ \gamma' & \delta' & \varepsilon' \\ \gamma'' & \delta'' & \varepsilon'' \end{vmatrix} \quad (1)$$

Πράγματι, ἐὰν ἀναπτύξωμεν τὰς τέσσαρας αὐτὰς ὁριζούσας ὡς πρὸς τὰ στοιχεῖα τῆς πρώτης στήλης, αἱ προκύπτουσαι ἐλάσσονες ὁρίζουσαι εἶναι ἴσαι μία πρὸς μίαν.

Ἐὰν παραστήσωμεν τὰς ἐλάσσονας αὐτὰς ὁριζούσας μὲ A, A', A'', ἡ ὁρίζουσα τοῦ πρώτου μέλους τῆς ἰσότητος (1) εἶναι ἴση μὲ

$$(\alpha+\beta+\gamma)A+(\alpha'+\beta'+\gamma')A'+(\alpha''+\beta''+\gamma'')A''. \quad (2)$$

Αἱ δὲ τρεῖς ὁρίζουσαι τοῦ δευτέρου μέλους δίδουν

$$(\alpha A+\alpha' A'+\alpha'' A'')+(\beta A+\beta' A'+\beta'' A'')+(\gamma A+\gamma' A'+\gamma'' A''). \quad (3)$$

Ἐπειδὴ τὰ ἀθροίσματα (2) καὶ (3) εἶναι ἴσα ἕπεται, ὅτι ἡ ἰσότης (1) ὑφίσταται.

828. Θεώρημα VI. ***Μία ὁρίζουσα δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν προσθέσωμεν εἰς τὰ στοιχεῖα μιᾶς γραμμῆς (ἢ μιᾶς στήλης) τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα ἄλλων γραμμῶν (ἢ στηλῶν) πολλαπλασιασθέντα ἐπὶ τυχόντας ἀριθμούς, ἀλλὰ τοὺς αὐτοὺς διὰ κάθε γραμμὴν (ἢ διὰ κάθε στήλην).***

Ἔστω ἡ ὁρίζουσα $\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὰ στοιχεῖα τῆς δευτέρας στήλης ἐπὶ μ καὶ τὰ στοιχεῖα τῆς τρίτης στήλης ἐπὶ ν καὶ σχηματίσωμεν τὴν ὁρί-

ζουσαν $\Delta' = \begin{vmatrix} \alpha + \mu\beta + \nu\gamma & \beta & \gamma \\ \alpha' + \mu\beta' + \nu\gamma' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' + \mu\beta'' + \nu\gamma'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$ (2)

θὰ δείξωμεν, ὅτι $\Delta = \Delta'$.

Κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα ἡ (2) γράφεται

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mu\beta & \beta & \gamma \\ \mu\beta' & \beta' & \gamma' \\ \mu\beta'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \nu\gamma & \beta & \gamma \\ \nu\gamma' & \beta' & \gamma' \\ \nu\gamma'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} \qquad (3)$$

Αἱ δύο τελευταῖαι ὁρίζουσαι τῆς ἰσότητος (3) εἶναι ἴσαι μὲ μηδέν, διότι τὰ στοιχεῖα τῶν δύο στηλῶν των εἶναι ἀνάλογα· ἄρα θὰ εἶναι $\Delta = \Delta'$.

Σημ. Οἱ ἀριθμοὶ μ καὶ ν δύνανται νὰ εἶναι θετικοί, ἢ ἀρνητικοὶ ἢ μηδέν. Ἐὰν $\mu = \nu = 1$ τότε ἡ ὁρίζουσα Δ′ προκύπτει ἀπὸ τὴν Δ, ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὰ στοιχεῖα τῆς πρώτης στήλης διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν στοιχείων τῶν τριῶν στηλῶν.

829. Πόρισμα. ***Δυνάμεθα νὰ καταστήσωμεν ὅλα τὰ στοιχεῖα, ἐκτὸς ἑνός, μιᾶς γραμμῆς (ἢ μιᾶς στήλης) ἴσα μὲ μηδέν.***

Γνωρίζομεν (§ 825), ὅτι δυνάμεθα νὰ καταστήσωμεν ὅλα τὰ στοιχεῖα μιᾶς γραμμῆς (ἢ μιᾶς στήλης) ἴσα μὲ τὴν μονάδα. Ἔστω λοιπὸν

ἡ ὁρίζουσα $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix}$

Ἐὰν ἀφαιρέσωμεν τὴν δευτέραν στήλην ἀπὸ τὴν πρώτην καὶ τὴν τρίτην στήλην ἀπὸ τὴν δευτέραν λαμβάνομεν τὴν ὁρίζουσαν

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha - \beta & \beta - \gamma \\ \alpha' & \alpha' - \beta' & \beta' - \gamma' \end{vmatrix}$$

ἡ ὁποία ἔχει τὴν αὐτὴν τιμὴν μὲ τὴ Δ.

Παράδειγμα. Ἔστω ἡ ὁρίζουσα $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 9 & 2 \\ 10 & 12 & 3 \end{vmatrix}$

Ἐὰν διαιρέσωμεν τὰ στοιχεῖα τῆς πρώτης στήλης διὰ 2 καὶ τῆς δευτέρας στήλης διὰ 3 θὰ εἶναι $\Delta = 2.3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

Ἐὰν ἀφαιρέσωμεν τὴν δευτέραν στήλην ἀπὸ τὴν πρώτην καὶ τὴν τρίτην στήλην ἀπὸ τὴν δευτέραν, θὰ εἶναι

$$\Delta = 2.3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6(-1-1) = -12.$$

Ἀσκήσεις *3038.* Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & 5 \\ 6 & 8 & 12 \end{vmatrix} = 0.$

3039. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \\ 7 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0.$

3040. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\begin{vmatrix} \alpha^2 & \alpha & 1 \\ \beta^2 & \beta & 1 \\ \gamma^2 & \gamma & 1 \end{vmatrix} = (\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma).$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΣΤ'.

ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΟΣ ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

830. **Ἀκέραιαι λύσεις μιᾶς ἐξισώσεως τοῦ δευτέρου βαθμοῦ μὲ δύο ἀγνώστους.** Ἡ εὕρεσις τῶν ἀκεραίων λύσεων μιᾶς ἐξισώσεως τοῦ δευτέρου βαθμοῦ μὲ δύο ἢ περισσοτέρους ἀγνώστους δὲν εἶναι, γενικῶς, ἔργον τῶν στοιχειωδῶν μαθηματικῶν. Ἐν τούτοις ἡ εὕρεσις τῶν ἀκεραίων λύσεων μιᾶς ἐξισώσεως τοῦ δευτέρου βαθμοῦ μὲ δύο ἀγνώστους δὲν παρουσιάζει καμμίαν δυσκολίαν, ὅταν ὁ ἕνας ἀπὸ τοὺς ἀγνώστους εἶναι πρώτου βαθμοῦ.

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $Axy+By^2+\Gamma x+\Delta y+E=0$ (1)
ἡ ὁποία εἶναι πρώτου βαθμοῦ πρὸς x.

Λύομεν αὐτὴν πρὸς x καὶ ἔχομεν

$$Axy+\Gamma x=-(By^2+\Delta y+E) \quad ἢ \quad x=-\frac{By^2+\Delta y+E}{Ay+\Gamma}. \qquad (2)$$

Ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν εἰς τὸ δεύτερον μέλος τῆς (2).

Διὰ νὰ ἀποφύγωμεν τοὺς κλασματικοὺς συντελεστὰς πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (2) ἐπὶ A^2 καὶ ἔχομεν

$$A^2x=-\frac{A^2.By^2+A^2.\Delta y+A^2.E}{Ay+\Gamma}$$

ἢ

$$A^2x=-A.By+B.\Gamma-A.\Delta+\frac{A.\Delta.\Gamma-B.\Gamma^2-A^2.E}{Ay+\Gamma}. \qquad (3)$$

Ἐάν, πρὸς εὐκολίαν θέσωμεν $A.\Delta.\Gamma-B.\Gamma^2-A^2.E=k$, ἡ (3) γράφεται

$$A^2x=-A.By+B.\Gamma-A.\Delta+\frac{k}{Ay+\Gamma}. \qquad (4)$$

Ἐπειδὴ οἱ x καὶ y πρέπει νὰ εἶναι ἀκέραιοι, πρέπει ὁ παρονομαστῆς $Ay+\Gamma$ νὰ διαιρῇ ἀκριβῶς τὸν ἀριθμητὴν k. Ἐξισοῦμεν λοιπὸν τὸ $Ay+\Gamma$ διαδοχικῶς μὲ ἕκαστον τῶν διαιρετῶν τοῦ k, λαμβανομένων μὲ τὸ σημεῖον $+$ ἢ $-$ καὶ λύομεν τὰς προκυπτούσας ἐξισώσεις.

Ἐὰν μία ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις αὐτὰς δίδει μίαν ἀκεραίαν τιμὴν τοῦ y, ἀντικαθιστῶμεν αὐτὴν τὴν τιμὴν τοῦ y εἰς τὴν (4) καὶ εὑρίσκομεν μίαν ἀκεραίαν τιμὴν τοῦ A^2x καὶ ἐξ αὐτῆς λαμβάνομεν τὴν τιμὴν τοῦ x.

Εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀκεραίων λύσεων τῆς ἐξισώσεως (1) εἶναι περιωρισμένος καὶ πολλάκις δύναται νὰ συμβῇ, ὥστε ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις νὰ μὴν ἔχῃ ἀκεραίας λύσεις.

Παράδειγμα. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς ἐξισώσεως

$$3xy-2y^2+5x-4y-34=0. \qquad (1)$$

Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν (1) πρὸς x καὶ ἔχομεν

$$3xy+5x=2y^2+4y+34 \quad \text{ἢ} \quad x=\frac{2y^2+4y+34}{3y+5}. \qquad (2)$$

Πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (2) ἐπὶ 9 καὶ ἔχομεν

$$9x=\frac{18y^2+36y+306}{3y+5}. \qquad (3)$$

Ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν εἰς τὸ δεύτερον μέλος καὶ εὑρίσκομεν πηλῖκον $6y+2$ καὶ ὑπόλοιπον 296· ἄρα ἡ (3) γράφεται

$$9x=6y+2+\frac{296}{3y+5}. \qquad (4)$$

Οἱ διαιρέται τοῦ 296, θετικῶς καὶ ἀρνητικῶς λαμβανόμενοι, εἶναι

$$\pm1, \quad \pm2, \quad \pm4, \quad \pm8, \quad \pm37.$$

Θέτομεν λοιπὸν

$$3y+5=\pm1, \quad 3y+5=\pm2, \quad 3y+5=\pm4, \quad 3y+5=\pm8, \quad 3y+5=\pm37.$$

Ἀπὸ τὰς ἀνωτέρω ἐξισώσεις μόνον αἱ κατωτέρω ἐξισώσεις δίδουν ἀκεραίαν τιμὴν εἰς τὸ x.

$3y+5=-1$ ἀπὸ τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν $y=-2$
$3y+5=+2$ » » » » $y=-1$
$3y+5=-4$ » » » » $y=-3$
$3y+5=8$ » » » » $y=1$
$3y+5=-37$ » » » » $y=-14$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (4) διαδοχικῶς τὸ y μὲ τὰς τιμάς του καὶ εὑρίσκομεν, ὅτι αἱ τιμαὶ $y=-2$, $y=-3$ δὲν δίδουν ἀκεραίας τιμὰς εἰς τὸ x.

Διὰ $y=-1$, ἡ (4) δίδει $x=16$ καὶ ἔχομεν τὴν λύσιν $(x=16, \ y=-1)$.
Διὰ $y=1$, ἡ (4) δίδει $x=5$ καὶ ἔχομεν τὴν λύσιν $(x=5, \ y=1)$.
Διὰ $y=-14$, ἡ (4) δίδει $x=-12$ καὶ ἔχομεν τὴν λύσιν $(x=-12, \ y=-14)$.

Ὥστε ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει τὰς λύσεις

$$(x=16, \ y=-1), \quad (x=5, \ y=1), \quad (x=-12, \ y=-14).$$

Ἡ ἀκεραία καὶ ***θετικὴ*** λύσις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι ἡ

$$(x=5, \quad y=1).$$

Παρατήρησις. Ὅταν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ $By^2+\Delta y+E$ διὰ $Ay+\Gamma$ εἶναι μηδέν, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις λαμβάνει τὴν μορφὴν

$$(Ay+\Gamma)(Mx+Ny+P)=0.$$

Θὰ εὕρωμεν δὲ τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, ἐὰν λύσωμεν χωριστὰ τὰς ἐξισώσεις

$$Ay+\Gamma=0, \quad Nx+Ny+P=0.$$

Ἀσκήσεις. 3041. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς ἐξισώσεως

$$3xy+2y^2=5y+4x+5.$$

3042. Ὁμοίως τῆς ἐξισώσεως $3xy-2y^2+2x-3y+4=0$.

3043. Ὁμοίως τῆς ἐξισώσεως $2xy-3x^2+y=1$.

3044. Ὁμοίως τῆς ἐξισώσεως $5xy=2x+3y+8$.

3045. Ὁμοίως τῆς ἐξισώσεως $xy+x=2x+3y+29$.

3046. Ὁμοίως τῆς ἐξισώσεως $3xy-4y+3x=14$.

831. Ἰδιαιτέρα περίπτωσις. Ὅταν λείπῃ ὁ ὅρος xy ἡ μέθοδος τῆς § 830 εἶναι ἐλλειπής.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ἐξίσωσις

$$By^2+\Gamma x+\Delta y+E=0 \quad \text{δίδει} \quad x=-\frac{By^2+\Delta y+E}{\Gamma}. \qquad (1)$$

Κάθε ἀκεραία τιμὴ τοῦ y, θὰ εἶναι τῆς μορφῆς $\Gamma\lambda+\alpha$, ὅπου λ εἶναι τυχὼν ἀριθμὸς καί α ἕνας ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots\ldots, (\Gamma-1) \qquad (2)$$

ὁ ὁποῖος τιθέμενος εἰς τὴν (1) ἀντὶ τοῦ y καθιστᾷ τὸν ἀριθμητὴν $By^2+\Delta y+E$ διαιρετὸν διὰ Γ.

Ἂν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν (1) τὸ y διὰ $\Gamma\lambda+\alpha$ εὑρίσκομεν

$$x=-\frac{B(\Gamma\lambda+\alpha)^2+\Delta(\Gamma\lambda+\alpha)+E}{\Gamma}$$

ἢ

$$x=-\frac{B\alpha^2+\Delta\alpha+E}{\Gamma}-(B.\Gamma\lambda^2+2B\alpha\lambda+\Delta\lambda).$$

Διὰ νὰ εἶναι ἀκεραία αὐτὴ ἡ τιμὴ τοῦ x πρέπει τὸ $B\alpha^2+\Delta\alpha+E$ νὰ εἶναι διαιρετὸν διὰ Γ· δηλ. ἐὰν $y=\alpha$ εἶναι μία ἀκεραία λύσις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, θὰ εἶναι λύσις αὐτῆς καὶ ἡ $y=\Gamma\lambda+\alpha$ διὰ κάθε ἀκεραίαν τιμὴν τοῦ λ.

Ὥστε διὰ νὰ εὕρωμεν τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς ἐξισώσεως (1) δίδομεν εἰς τὸν y διαδοχικῶς τὰς τιμὰς $0, 1, 2, 3 \ldots, (\Gamma-1)$ καὶ παρατηροῦμεν, ποία ἐξ αὐτῶν καθιστᾷ τὸν ἀριθμητὴν $By^2+\Delta y+E$ διαιρετὸν διὰ Γ. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὁ x εἶναι ἀκέραιος.

Εἰς κάθε τιμὴν $y=\alpha$, ἡ ὁποία καθιστᾷ τὸν x ἀκέραιον, ἀντιστοιχοῦν ἄπειροι ἄλλαι τιμαὶ τοῦ y αἱ ὁποῖαι δίδονται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$y=\Gamma\lambda+\alpha$$

καὶ αἱ ὁποῖαι καθιστοῦν τὸν x ἐπίσης ἀκέραιον.

832. Παράδειγμα. ***Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς ἐξισώσεως***

$$3y^2+2y-5x-1=0. \qquad (1)$$

Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν (1) πρὸς x καὶ ἔχομεν

$$x=\frac{3y^2+2y-1}{5}. \qquad (2)$$

Δίδομεν εἰς τὸ y μίαν ἀπὸ τὰς τιμὰς 0, 1, 2, 3, 4, τὸ πλῆθος, τῶν ὁποίων ὁρίζει ὁ παρονομαστὸς 5 καὶ παρατηροῦμεν ποία ἀπὸ τὰς τιμὰς αὐτὰς τοῦ y καθιστᾷ τὸν x ἀκέραιον. Ἐὰν θέσωμεν $y=2$, ἡ (2) δίδει $x=3$.

Ὅλαι αἱ τιμαὶ τοῦ y, ποὺ καθιστοῦν τὸν x ἀκέραιον, δίδονται ὑπὸ τοῦ τύπου $y = 5\lambda + 2$. (3)
ὅπου λ τυχὼν ἀκέραιος ἀριθμός.

Ἐπίσης, ἐὰν θέσωμεν $y=4$, ἡ (2) δίδει $x=11$ καὶ ἑπομένως ὅλαι αἱ τιμαὶ τοῦ y, ποὺ καθιστοῦν τὸν x ἀκέραιον, δίδονται ὑπὸ τοῦ τύπου $y=5\lambda+4$ (3)
ὅπου λ τυχὼν ἀκέραιος ἀριθμός.

1ον. Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν (2) τὸ y μὲ τὴν πρώτην τιμήν του $y=5\lambda+2$ εὑρίσκομεν

$$x=\frac{3(5\lambda+2)^2+2(5\lambda+2)-1}{5}=\frac{3(25\lambda^2+20\lambda+4)+10\lambda+4-1}{5}=$$

$$=\frac{70\lambda^2+70\lambda+15}{5}=15\lambda^2+14\lambda+3.$$

Αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως δίδονται λοιπὸν ὑπὸ τῶν τύπων

$$\left.\begin{aligned} y&=5\lambda+2\\ x&=15\lambda^2+14\lambda+3\end{aligned}\right\}\quad (\mathrm{I})$$

Ὁ κάτωθι πίναξ δίδει τὰς ἀκεραίας τιμὰς τῶν x καὶ y, αἱ ὁποῖαι προκύπτουν ἀπὸ τοὺς τύπους (I), ἐὰν δώσωμεν εἰς τὸν λ τὰς τιμὰς

$$\ldots -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\ldots$$

λ	−2	−1	0	1	2	......
y	−8	−3	2	7	12	......
x	35	4	3	32	91	......

2ον. Ἐὰν τώρα ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν (2) τὸ y μὲ τὴν ἄλλην τιμήν του $y=5\lambda+4$ εὑρίσκομεν

$$x=\frac{3(5\lambda+4)^2+2(5\lambda+4)-1}{5}=\frac{3(25\lambda^2+40\lambda+16)+10\lambda+8-1}{5}=$$

$$=\frac{75\lambda^2+130\lambda+55}{5}=15\lambda^2+26\lambda+11.$$

Αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως δίδονται λοιπὸν ὑπὸ τῶν τύπων

$$\left.\begin{aligned} y&=5\lambda+4\\ x&=15\lambda^2+26\lambda+11\end{aligned}\right\}\quad (\mathrm{II})$$

Ὁ κάτωθι πίναξ δίδει τὰς ἀμοιβαίας τιμὰς τῶν x καὶ y, αἱ ὁποῖαι προκύπτουν ἀπὸ τοὺς τύπους (II), ἐὰν δώσωμεν εἰς τὸν λ τὰς τιμὰς $\ldots -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ldots$

λ	−2	−1	0	1	2	......
y	−6	−1	4	9	14	......
x	19	0	11	52	123	......

Ἀσκήσεις. *3047.* Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς ἐξισώσεως

$$5y^2-2y+3x+9=0.$$

3048. Ὁμοίως τῆς ἐξισώσεως $7x^2-3x-4y=10$.

3049. Ὁμοίως τῆς ἐξισώσεως $8x^2-2x+5y+9=0$.

833. Ἐκτὸς τῆς ἀνωτέρω (§ 830) γενικῆς μεθόδου πρὸς εὕρεσιν τῶν ἀκεραίων λύσεων μιᾶς ἐξισώσεως τοῦ δευτέρου βαθμοῦ μὲ δύο ἀγνώστους, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὰς λύσεις μερικῶν τοιούτων ἐξισώσεων καὶ κατ' ἄλλον τρόπον, ὅπως φαίνεται εἰς τὸ κατωτέρω παράδειγμα :

***Παράδειγμα.* Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι καὶ θετικαὶ λύσεις τῆς ἐξισώσεως** $(2x-5)(y-3)=45.$ (1)

Ἐδῶ ἔχομεν γινόμενον δύο ἀκεραίων παραγόντων, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον μὲ 45. Ἐπειδὴ $45=1\times45$, $45=3\times15$, $45=5\times9$ ἡ ἐξίσωσις (1) λαμβάνει τὰς μορφὰς

$(2x-5)(y-3)=1\times45$ (2), $(2x-5)(y-3)=3\times15$ (3)

$(2x-5)(y-3)=5\times9$ (4).

Ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὴν (2) δυνάμεθα νὰ θέσωμεν

εἴτε $2x-5=1$ καὶ $y-3=45$, ὁπότε $x=3$, $y=48$

εἴτε $2x-5=45$ καὶ $y-3=1$, ὁπότε $x=25$, $y=4$

Ἐὰν λάβωμεν τὴν (3), δυνάμεθα νὰ θέσωμεν

εἴτε $2x-5=3$ καὶ $y-3=15$, ὁπότε $x=4$, $y=18$

εἴτε $2x-5=15$ καὶ $y-3=3$, ὁπότε $x=10$, $y=6$.

Ἐὰν λάβωμεν τὴν (4) δυνάμεθα νὰ θέσωμεν

εἴτε $2x-5=5$ καὶ $y-3=9$, ὁπότε $x=5$, $y=12$

εἴτε $2x-5=9$ καὶ $y-3=5$, ὁπότε $x=7$, $y=8$.

Ὥστε ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει τὰς λύσεις $(x=3,\ y=48)$, $(x=25,\ y=4)$, $(x=4,\ y=18)$, $(x=10,\ y=6)$, $(x=5,\ y=12)$, $(x=7,\ y=8)$.

Ἀσκήσεις. *3050.* Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς ἐξισώσεως

$$x^2-(y-7)^2=21.$$

3051. Ὁμοίως τῆς ἐξισώσεως $(x+2)(3y-1)=24$.

3052. Νὰ εὑρεθοῦν, μεταξὺ τῶν ὀρθογωνίων, τῶν ὁποίων αἱ διαστάσεις εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί, ἐκεῖνα εἰς τὰ ὁποῖα τὸ ἐμβαδόν των εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετραπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος τῶν διαστάσεων καὶ τῆς διαγωνίου του.

834. Ἀκέραιαι λύσεις μερικῶν ὁμογενῶν ἐξισώσεων.

Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς ὁμογενοῦς ἐξισώσεως $\sigma(x,\ y,\ z,\ t)=0$, (1)

ἡ ὁποία εἶναι μ βαθμοῦ καὶ ἔχει ἀκεραίους συντελεστάς.

Ἐὰν διαιρέσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (1) διὰ t^{μ}, ἡ ἐξίσωσις λαμβάνει τὴν μορφὴν $\sigma\left(\frac{x}{t},\ \frac{y}{t},\ \frac{z}{t},\ 1\right)=0.$ (2)

Ἐὰν θέσωμεν $\frac{x}{t}=X$, $\frac{y}{t}=Y$, $\frac{z}{t}=Z$, ἡ (1) λαμβάνει τὴν μορφὴν $\sigma(X,\ Y,\ Z,\ 1)=0.$ (3)

Ἐὰν x, y, z, t εἶναι αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς (1), αἱ X, Y, Z εἶναι ρηταὶ λύσεις τῆς (3).

Ἀντιστρόφως. Ἔστω, ὅτι αἱ λύσεις τῆς (3) εἶναι αἱ

$X=\frac{\alpha}{\delta}, \quad Y=\frac{\beta}{\delta}, \quad Z=\frac{\gamma}{\delta}$ (4), (ὅπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ἀκέραιοι).

Ἐπειδὴ $X=\frac{x}{t}, \quad Y=\frac{y}{t}, \quad Z=\frac{z}{t}$, αἱ ἰσότητες (4) γίνονται

$$\frac{x}{t}=\frac{\alpha}{\delta}, \quad \frac{y}{t}=\frac{\beta}{\delta}, \quad \frac{z}{t}=\frac{\gamma}{\delta}$$

ἀπὸ τὰς ὁποίας λαμβάνομεν

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}=\frac{t}{\delta}. \qquad (5)$$

Διὰ νὰ εἶναι οἱ x, y, z, t ρητοὶ πρέπει καὶ ἀρκεῖ οἱ λόγοι (5) νὰ εἶναι ἴσοι μὲ ἕνα κλάσμα $\frac{k}{\rho}$, τὸ ὁποῖον ὑποθέτομεν ὡς ἀνάγωγον.

Ἐὰν λοιπὸν εἶναι $\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}=\frac{t}{\delta}=\frac{k}{\rho}$, θά εἶναι

$$x=\frac{\alpha k}{\rho}, \quad y=\frac{\beta k}{\rho}, \quad z=\frac{\gamma k}{\rho}, \quad t=\frac{\delta k}{\rho}. \qquad (6)$$

Οἱ τύποι (6) δίδουν ὅλας τὰς ***ρητὰς*** λύσεις τῆς ἐξισώσεως (1).

Διὰ νὰ εἶναι ἀκέραιαι αἱ ρηταὶ αὐταὶ λύσεις τῆς ἐξισώσεως (1) πρέπει νὰ εἶναι $\rho=1$, ἢ τουλάχιστον ὁ ρ νὰ εἶναι μ.κ.δ. τῶν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Ἂν παραστήσωμεν μὲ Δ τὸν μ. κ. δ. τῶν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, ὅλαι αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς ἐξισώσεως (1) δίδονται ὑπὸ τῶν τύπων

$$x=\frac{k\alpha}{\Delta}, \quad y=\frac{k\beta}{\Delta}, \quad z=\frac{k\gamma}{\Delta}, \quad t=\frac{k\delta}{\Delta}$$

ὅπου k τυχὼν ἀκέραιος ἀριθμός.

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω θὰ εὕρωμεν ἀμέσως τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς ἐξισώσεως $\sigma(x, y, z, t)=0$ (1), ἐὰν γνωρίζωμεν τὰς λύσεις τῆς ἐξισώσεως $\sigma(X, Y, Z, 1)=0$ (3).

Ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως (2) δὲν εἶναι πάντοτε εὔκολος.

Ἡ ἁπλουστέρα μέθοδος διὰ νὰ εὕρωμεν τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς (2) εἶναι ἡ κάτωθι:

Εὑρίσκομεν μίαν ἰδιαιτέραν λύσιν τῆς ἐξισώσεως (3).

Ἔστω, ὅτι αὕτη εἶναι ἡ (X_0, Y_0, Z_0) καὶ ἔστω (X, Y, Z) μία τυχοῦσα λύσις τῆς (3). Σχηματίζομεν τὰς διαφορὰς $X-X_0$, $Y-Y_0$, $Z-Z_0$.

Θέτομεν ἔπειτα $\frac{X-X_0}{\lambda}=\frac{Y-Y_0}{\mu}=\frac{Z-Z_0}{\nu}$ (7)

ὅπου λ, μ, μ εἶναι τυχόντες ἀκέραι ἀριθμοί.

Λύομεν ἔπειτα τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (3) καὶ (7) καὶ εὑρίσκομεν τὰς τιμὰς τῶν $X=\frac{x}{t}, \quad Y=\frac{y}{t}, \quad Z=\frac{z}{t}$.

Ἔπειτα ἐργαζόμεθα, ὅπως εἰς τὸ κατωτέρω παράδειγμα:

835. **Παράδειγμα 1ον.** ***Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς ἐξισώσεως*** $x^2+y^2=\omega^2$. (1)

Διαιροῦμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (1) διὰ ω^2 καὶ ἔχομεν

$$\frac{x^2}{\omega^2}+\frac{y^2}{\omega^2}=1. \qquad (2)$$

Θέτομεν $\frac{x}{\omega}=X$ καὶ $\frac{y}{\omega}=Y$ καὶ ἡ (2) γίνεται

$$X^2+Y^2=1. \qquad (3)$$

Ἡ ἐξίσωσις (3) ἔχει τὴν ἰδιαιτέραν ἀκεραίαν λύσιν $X=1$ καὶ $Y=0$.

Θέτομεν $$\frac{X-1}{\lambda}=\frac{Y-0}{\mu} \quad ἢ \quad \frac{X-1}{\lambda}=\frac{Y}{\mu}. \qquad (4)$$

Λύομεν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (3) καὶ (4).

Ἀπὸ τὴν (4) ἔχομεν $$Y=\frac{\mu}{\lambda}(X-1). \qquad (4')$$

Τὴν τιμὴν αὐτὴν τοῦ Y θέτομεν εἰς τὴν (3) καὶ ἔχομεν

$$X^2+\frac{\mu^2}{\lambda^2}(X-1)^2=1 \quad ἢ \quad \lambda^2X^2+\mu^2(X^2-2X+1)-\lambda^2=0$$

ἢ $$\lambda^2X^2+\mu^2X^2-2\mu^2X+\mu^2-\lambda^2=0 \quad ἢ \quad (\lambda^2+\mu^2)X^2-2\mu^2X+(\mu^2-\lambda^2)=0.$$

Αἱ ρίζαι αὐτῆς εἶναι

$$x=\frac{2\mu^2\pm\sqrt{4\mu^4-4(\lambda^2+\mu^2)(\mu^2-\lambda^2)}}{2(\lambda^2+\mu^2)}=\frac{2\mu^2\pm\sqrt{4\lambda^2}}{2(\lambda^2+\mu^2)}=\frac{2\mu^2\pm2\lambda^2}{2(\lambda^2+\mu^2)},$$

δηλ. εἶναι $$X=\frac{2\mu^2+2\lambda^2}{2(\lambda^2+\mu^2)}=1 \quad καὶ \quad X=\frac{\mu^2-\lambda^2}{\lambda^2+\mu^2}.$$

Τὴν δευτέραν τιμὴν τοῦ X θέτομεν εἰς τὴν (4′) καὶ ἔχομεν

$$Y=\frac{\mu}{\lambda}\left(\frac{\mu^2-\lambda^2}{\lambda^2+x^2}-1\right)=\frac{\mu}{\lambda}\cdot\frac{-2\lambda^2}{\lambda^2+\mu^2}=\frac{-2\lambda\mu}{\lambda^2+\mu^2}.$$

Τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (3) καὶ (4) ἔχει τὴν λύσιν

$$X=\frac{x}{\omega}=\frac{\mu^2-\lambda^2}{\lambda^2+\mu^2} \quad καὶ \quad Y=\frac{y}{\omega}=\frac{-2\lambda\mu}{\lambda^2+\mu^2}. \qquad (5)$$

Ἀπὸ τὰς (5) λαμβάνομεν $\frac{x}{\mu^2-\lambda^2}=\frac{\omega}{\lambda^2+\mu^2}$ καὶ $\frac{y}{-2\lambda\mu}=\frac{\omega}{\lambda^2+\mu^2}$

ἀπὸ τὰς ὁποίας συνάγομεν, ὅτι

$$\frac{x}{\mu^2-\lambda^2}=\frac{y}{-2\lambda\mu}=\frac{\omega}{\lambda^2+\mu^2}.$$

Ἑπομένως αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως δίδονται ὑπὸ τῶν τύπων $x=\frac{k}{\Delta}(\mu^2-\lambda^2)$, $y=\frac{-2\lambda\mu k}{\Delta}$, $\omega=\frac{k}{\Delta}(\lambda^2+\mu^2)$ (6)

ὅπου k τυχὼν ἀκέραιος, Δ ὁ μ.κ.δ. τῶν $\mu^2-\lambda^2$, $2\lambda\mu$ καὶ $\lambda^2+\mu^2$ καὶ λ, μ τυχόντες ἀριθμοί.

1ον. Ἐὰν $\lambda=1$, $\mu=2$, θὰ εἶνα $\mu^2-\lambda^2=4-1=3$, $2\lambda\mu=2.1.2=4$, $\mu^2+\lambda^2=1+4=5$, $\Delta=1$ καὶ οἱ τύποι (6) δίδουν

$$x=3k, \quad y=-4k, \quad \omega=5k.$$

Ἐὰν $k=1$, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει τὴν λύσιν $x=3$, $y=-4$, $\omega=5$

Ἐὰν $k=2$, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει τὴν λύσιν $x=6$, $y=-8$, $\omega=10$

2ον. Ἐὰν $\mu=3$, $\lambda=2$, θὰ εἶναι

$\mu^2-\lambda^2=9-4=5$, $2\lambda\mu=2.2\cdot 3=12$, $\mu^2+\lambda^2=9+4=13$, $\Delta=$μ.κ.δ. τῶν 5, 12, 13=1 καὶ οἱ τύποι (6) δίδουν

$$x=5k, \quad y=-12k, \quad \omega=13k.$$

Ἐὰν $k=1$ ἡ ἐξίσωσις (1) ἔχει τὴν λύσιν $x=5$, $y=-12$, $\omega=13$.

836. Πρόβλημα. ***Νὰ εὑρεθοῦν ὅλα τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα, τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ νὰ εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί.***

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ x, y τὰς καθέτους πλευρὰς ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου καὶ μὲ ω τὴν ὑποτείνουσάν του, θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$x^2+y^2=\omega^2. \tag{1}$$

Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ εὕρωμεν τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς ἐξισώσεως (1). Ε τὴν § 835 εἴδομεν, ὅτι αἱ λύσεις τῆς ἐξισώσεως (1) δίδονται ὑπὸ τῶν τύπων

$$x=\frac{k}{\Delta}(\mu^2-\lambda^2), \quad y=\frac{-2\lambda\mu k}{\Delta}, \quad \omega=\frac{k}{\Delta}(\lambda^2+\mu^2). \tag{2}$$

Διὰ νὰ εἶναι παραδεκταὶ αἱ λύσεις αὐταί, πρέπει νὰ εἶναι θετικαί.

Ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι x', y', ω' εἶναι μία λύσις τῆς (1), αἱ ἀπόλυται τιμαὶ τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν θὰ εἶναι ἐπίσης λύσις τῆς ἐξισώσεως (1) καὶ ἀντιστρόφως. Τὰ μήκη λοιπὸν τῶν πλευρῶν τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων θὰ εἶναι αἱ ἀπόλυται τιμαὶ τῶν x, y, ω ποὺ δίδουν οἱ τύποι (2)· ὥστε τὰ μήκη τῶν πλευρῶν ὅλων τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων δίδονται ὑπὸ τῶν τύπων:

$$\boxed{\mathbf{x}=\left|\frac{k}{\Delta}(\mu^2-\lambda^2)\right|, \quad \mathbf{y}=\left|\frac{-2\lambda\mu k}{\Delta}\right|, \quad \omega=\left|\frac{k}{\Delta}(\lambda^2+\mu^2)\right|}$$

ὅπου k, λ, μ τυχόντες ἀκέραιοι ἀριθμοὶ καὶ Δ ὁ μ. κ. δ. τῶν $\mu^2-\lambda^2$, $2\lambda\mu$ καὶ $\lambda^2+\mu^2$.

Ἐργαζόμενοι ὅπως εἰς τὴν § 835 εὑρίσκομεν, ὅτι;

Ἐὰν $\lambda=1$, $\mu=2$ εὑρίσκομεν $x=3k$, $y=4k$, $\omega=5k$.

Ἐὰν $\lambda=2$, $\mu=3$ εὑρίσκομεν $x=5k$, $y=12k$, $\omega=13k$.

Ἐὰν $\lambda=4$, $\mu=6$ εὑρίσκομεν $x=10k$, $y=24k$, $\omega=26k$.

837. Παράδειγμα 2ον. Πρόβλημα. ***Νὰ εὑρεθοῦν τρεῖς ἀκέραιοι ἀριθμοί, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τὰ τετράγωνά των σχηματίζουν ἀριθμητικὴν πρόοδον.***

Ἔστωσαν x, y, z, οἱ ζητούμενοι ἀριθμοί· τὰ τετράγωνά των εἶναι x^2, y^2, z^2. Διὰ νὰ σχηματίζουν ἀριθμητικὴν πρόοδον οἱ x^2, y^2, z^2 πρέπει νὰ εἶναι

$$x^2+z^2=2y^2. \tag{1}$$

Θὰ ζητήσωμεν τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς ἐξισώσεως (1).

Πρὸς τοῦτο διαιροῦμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (1) διὰ y^2 καὶ ἔχομεν

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{z^2}{y^2}=2. \tag{2}$$

Ἐὰν θέσωμεν $\dfrac{x}{y}=X$ καὶ $\dfrac{z}{y}=Z$, ἡ (2) γίνεται

$$X^2+Z^2=2. \tag{3}$$

Μία ἰδιαιτέρα λύσις τῆς (3) εἶναι $X_0=1$, $Z_0=1$.

Θέτομεν $\dfrac{X-X_0}{\lambda}=\dfrac{Z-Z_0}{\mu}$ ἢ $\dfrac{X-1}{\lambda}=\dfrac{Z-1}{\mu}$. (4)

Λύομεν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (2) καὶ (4) καὶ εὑρίσκομεν

$$X=\frac{x}{y}=\frac{-\lambda^2+\mu^2-2\lambda\mu}{\lambda^2+\mu^2},\quad Z=\frac{x}{y}=\frac{\lambda^2-\mu^2-2\lambda\mu}{\lambda^2+\mu^2}.$$

'Από αὐτὰς λαμβάνομεν

$$\frac{x}{-\lambda^2+\mu^2-2\lambda\mu}=\frac{y}{\lambda^2+\mu^2},\quad \frac{z}{\lambda^2-\mu^2-2\lambda\mu}=\frac{y}{\lambda^2+\mu^2}$$

ἀπὸ τὰς ὁποίας συνάγομεν, ὅτι

$$\frac{x}{-\lambda^2+\mu^2-2\lambda\mu}=\frac{y}{\lambda^2+\mu^2}=\frac{z}{\lambda^2-\mu^2-2\lambda\mu}.$$

'Επομένως ὅλαι αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς ἐξισώσεως (1) δίδονται ὑπὸ τῶν τύπων

$$x=\frac{k}{\Delta}(-\lambda^2+\mu^2-2\lambda\mu),\quad y=\frac{k}{\Delta}(\lambda^2+\mu^2),\quad z=\frac{k}{\Delta}(\lambda^2-\mu^2-2\lambda\mu) \quad (5)$$

ὅπου λ, μ, k τυχόντες ἀκέραιοι ἀριθμοὶ καὶ Δ ὁ μ.κ.δ. τῶν

$$(-\lambda^2+\mu^2-2\lambda\mu),\quad (\lambda^2+\mu^2)\quad \text{καὶ}\quad (\lambda^2-\mu^2-2\lambda\mu).$$

Ἐφαρμογή. 'Εὰν $\lambda=2$, $\mu=3$, θὰ εἶναι

$$-\lambda^2+\mu^2-2\lambda\mu=-4+9-12=-7,\quad \lambda^2+\mu^2=4+9=13,$$

$\lambda^2-\mu^2-2\lambda\mu=4-9-12=-17$ καὶ $\Delta=$μ.κ.δ. τῶν ἀριθμῶν 7, 13, 17$=1$ καὶ οἱ τύποι (5) δίδουν $x=-7k$, $y=13k$, $z=-17k$.

'Εὰν $k=1$ εὑρίσκομεν $x=-7$, $y=13$, $z=-17$. Τὰ τετράγωνα αὐτῶν εἶναι 49, 169, 289 καὶ σχηματίζουν πράγματι τὴν ἀριθμητικὴν πρόοδον $\div$ 49, 169, 289 (μὲ λόγον 120).

'Ομοίως εὑρίσκομεν καὶ ἄλλας προόδους, ἀρκεῖ νὰ δώσωμεν εἰς τὰ λ, μ, k ἄλλας τιμάς.

'Ασκήσεις. ***3053.*** Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς ἐξισώσεως

$$x^2=y^2+z^2-yz.$$

3054. 'Ομοίως τῆς ἐξισώσεως $x^2+z^2=y^2+t^2$.

3055. 'Ομοίως τῆς ἐξισώσεως $x^2+y^2+z^2=t^2$.

3056. 'Ομοίως τῆς ἐξισώσεως $x^\nu+y^\nu=z^{\nu-1}t$. ($\nu=$ἀκερ. θετικός).

3057. Νὰ εὑρεθοῦν δύο κλάσματα, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των νὰ εἶναι ἴσον μὲ 2.

ΠΙΝΑΞ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ

ΠΡΟΟΔΟΙ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ