ΣΠΥΡΙΔΩΝΟΣ Ν. ΠΑΠΑΝΙΚΟΛΑΟΥ
ΑΡΙΣΤΟΥΧΟΥ ΔΙΔΑΚΤΟΡΟΣ ΤΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

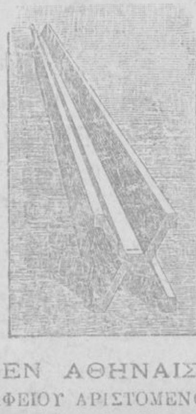
ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ
ΤΩΝ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΕΙΩΝ
ΚΑΙ ΠΑΡΘΕΝΑΓΩΓΕΙΩΝ

ΕΓΚΡΙΘΕΙΣΑ
ΕΝ ΤΩι ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩι ΤΩΝ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΔΙΑ ΤΗΝ ΠΕΝΤΑΕΤΙΑΝ 1902—1907

«Ἡ περὶ τοὺς ἀριθμοὺς διατριβὴ—τὸν νυστάζοντα καὶ ἀμαθῆ φύσει ἐγείρει καὶ εὐμαθῆ καὶ μνήμονα καὶ ἀγχίνουν ἀπεργάζεται». Πλάτ. Νομ. 747.

ΕΚΔΟΣΙΣ ΔΕΥΤΕΡΑ



ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΕΚ ΤΟΥ ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΥ ΑΡΙΣΤΟΜΕΝΟΥΣ Ζ. ΔΙΑΛΗΣΜΑ
6 — Ὁδὸς Βορέου — 6
1904

42119

ΣΠΥΡΙΔΩΝΟΣ Ν. ΠΑΠΑΝΙΚΟΛΑΟΥ
ΑΡΙΣΤΟΥΧΟΥ ΔΙΔΑΚΤΟΡΟΣ ΤΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

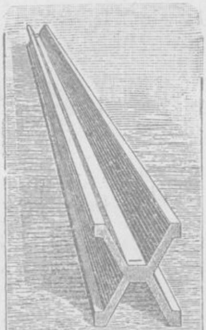
ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ
ΤΩΝ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΕΙΩΝ
ΚΑΙ ΠΑΡΘΕΝΑΓΩΓΕΙΩΝ

ΕΓΚΡΙΘΕΙΣΑ
ΕΝ ΤΩ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩ ΤΩΝ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΔΙΑ ΤΗΝ ΠΕΝΤΑΕΤΙΑΝ 1902—1907

«Ἡ περὶ τοὺς ἀριθμοὺς διατριβὴ—τὸν νυστάζοντα καὶ ἀμαθῆ φύσει ἐγείρει καὶ εὐμαθῆ καὶ μνήμονα καὶ ἀγχίνουν ἀπεργάζεται». Πλάτ. Νομ. 747.

ΕΚΔΟΣΙΣ ΔΕΥΤΕΡΑ



ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΕΚ ΤΟΥ ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΥ ΑΡΙΣΤΟΜΕΝΟΥΣ Ζ. ΔΙΑΛΗΣΜΑ
6 — Ὁδὸς Βορέου — 6
1904

Πᾶν γνήσιον ἀντίτυπον φέρει τὴν ἰδιόχειρον ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως.

Σ. Ν. Παπανικολάου

ΤΩι

ΣΕΒΑΣΤΩι ΜΟΙ ΘΕΙΩι

ΔΗΜΗΤΡΙΩι Η. ΣΑΛΤΑΦΕΡΑι

ΕΛΑΧΙΣΤΟΝ ΤΟΔΕ ΑΓΑΠΗΣ ΚΑΙ ΕΥΓΝΩΜΟΣΥΝΗΣ ΤΕΚΜΗΡΙΟΝ

ΑΝΑΤΙΘΗΜΙ

Ο ΓΡΑΨΑΣ

’Αριθ. { Πρωτ. 7963 / Διεκ. 7893 }

’Εν ’Αθήναις τῇ 25 Μαΐου 1902.

ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

ΤΟ ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΤΩΝ ΕΚΚΛΗΣΙΑΣΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΗΣ ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΕΩΣ

Πρὸς τὸν κ. Σπυρίδωνα Ν. Παπανικολάου

Ἔχοντες ὑπ’ ὄψει τὸν Νόμον ͵ΒΤΓ΄ τῆς 12 Ἰουλίου 1895 περὶ διδακτικῶν βιβλίων τῆς μέσης καὶ δημοτικῆς ἐκπαιδεύσεως καὶ τὸ Β. Διάταγμα τῆς 10 Ὀκτωβρίου 1895 καὶ τὴν ἔκθεσιν τῆς οἰκείας ἐπιτροπείας τῶν κριτῶν τῶν διδακτικῶν βιβλίων, τῶν εἰς τὰ Ἑλληνικὰ Σχολεῖα εἰσακτέων, γνωρίζομεν ὑμῖν, ὅτι ἐγκρίνομεν τὴν γνώμην τῆς ἐπιτροπείας ταύτης, ὅπως τὸ ὑμέτερον σύγγραμμα **«’Αριθμητική»**, τὸ κατὰ τὸν εἰρημένον Νόμον ἐγκριθέν, εἰσαχθῇ ἐν τοῖς δημοσίοις, δημοσυντηρήτοις καὶ ἰδιωτικοῖς Ἑλληνικοῖς Σχολείοις ἐπὶ πέντε σχολικὰ ἔτη, ἀπὸ τοῦ σχολικοῦ ἔτους 1902-1907.

Ὁ Ὑπουργὸς

Α. ΜΟΜΦΕΡΡΑΤΟΣ

Στέφ. Μ. Παρίσης

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Οὐδεὶς βεβαίως ἀρνεῖται ὅτι πρωτεύουσαι ἀρεταὶ βιβλίου τινὸς διδακτικοῦ εἶνε τὸ μὲν **ἡ μεθοδικὴ διάταξις τῆς ὕλης,** τὸ δὲ **ἡ μετ' ἀκριβείας καὶ σαφηνείας ἔκθεσις τοῦ περιεχομένου,** οὕτως ὥστε ὁ μαθητὴς νὰ δύνηται καὶ ἄνευ σχεδὸν τῆς βοηθείας τοῦ διδασκάλου νὰ διεξέρχηται εὐαρέστως αὐτό.

Ἀλλ' ἂν τοῦτο ἀληθεύῃ λεγόμενον περὶ πάντων συλλήβδην τῶν διδακτικῶν βιβλίων, τί δύναταί τις νὰ εἴπῃ προκειμένου περὶ τῆς **Ἀριθμητικῆς,** τῆς θαυμασίας ταύτης πνευματικῆς πύλης, δι' ἧς εἰσερχόμενος ὁ παῖς εἰς τὰ μυστήρια τῆς ἐρεύνης ὀξύνει τὸν νοῦν καὶ ἐνισχύει τὸ παρατηρητικὸν αὐτοῦ προπαρασκευάζων οὕτω τὸ ἔδαφος τῆς περαιτέρω πνευματικῆς ἀναπτύξεως ;

Ἐκ τῶν λόγων τούτων ἀγόμενοι, καὶ ἐκ τῆς πείρας, ἣν ἐπὶ ὀκταετίαν διδάσκοντες τὸ μάθημα τοῦτο ἐκτησάμεθα, καθοδηγούμενοι, προέβημεν εἰς τὴν παροῦσαν συγγραφήν. Ἐλπίζομεν δ' ὅτι διὰ ταύτης θέλομεν εὐτυχήσει νὰ φανῶμεν ἔστω καὶ κατ' ἐλάχιστον ὠφέλιμοι τῇ σπουδαζούσῃ νεολαίᾳ τῆς ἡμετέρας πατρίδος.

Ἔγραφον ἐν Ἀθήναις τῇ 10 Ἰουνίου 1902.

Δρ Σ. Ν. ΠΑΠΑΝΙΚΟΛΑΟΥ

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΟΥΣ
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

ΒΙΒΛΙΟΝ Α΄.

ΑΚΕΡΑΙΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Προκαταρκτικαὶ ἔννοιαι.

1.—*Ἀριθμητικὴ* καλεῖται ἡ ἐπιστήμη, ἡ ὁποία πραγματεύεται περὶ τῶν ἀριθμῶν.

Ἀριθμὸς λέγεται τὸ πλῆθος πολλῶν μονάδων ἢ καὶ μία μόνη μονάς.

Μονὰς δὲ καλεῖται ἓν ἐκ τῶν πολλῶν πραγμάτων ἢ καὶ πολλὰ ὁμοῦ πράγματα, τὰ ὁποῖα θεωροῦμεν ὡς ἀποτελοῦντα ἓν σύνολον.

Π. χ. ἐντὸς μιᾶς τάξεως ὁ εἷς μαθητὴς εἶνε μονάς, οἱ δὲ πολλοὶ μαθηταὶ τῆς τάξεως ἀποτελοῦσι τὸν ἀριθμόν. Ἀλλὰ δυνάμεθα πάντας τούτους τοὺς μαθητὰς νὰ θεωρήσωμεν ὡς ἀποτελοῦντας ἓν ὅλον, μίαν δηλ. τάξιν. Τότε ἡ μία τάξις θὰ εἶνε μονάς, πολλαὶ δὲ τοιαῦται τάξεις θὰ ἀποτελέσωσι τὸν ἀριθμόν.

Σχηματισμός, ὀνομασία καὶ γραφὴ τῶν ἀριθμῶν.

2.—Ἡ μονὰς ὑπὸ τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀριθμοῦ λέγεται ἓν καὶ γράφεται διὰ τοῦ σημείου **1**. Ἀντιστρόφως τὸ ἓν τῶν πραγμάτων, λαμβανόμενον ὑπὸ τὴν ἔννοιαν τῆς συγκρίσεως πρὸς σχηματισμὸν ἀριθμοῦ, καλεῖται *μονάς*.

Ἐὰν εἰς τὸν ἀριθμὸν ἓν προσθέσωμεν καὶ ἄλλην μίαν μονάδα, σχηματίζεται νέος ἀριθμός, ὅστις λέγεται *δύο* καὶ γράφεται διὰ τοῦ σημείου **2**. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον :

2	καὶ	ἓν	κάμνουσι	....	*τρία*	3
3	»	»	»	....	*τέσσαρα*	4
4	»	»	»	....	*πέντε*	5
5	»	»	»	....	*ἓξ*	6
6	»	»	»	....	*ἑπτὰ*	7
7	»	»	»	....	*ὀκτὼ*	8
8	»	»	»	....	*ἐννέα*	9

Ἐὰν εἰς τὸν ἀριθμὸν 9 προσθέσωμεν ἀκόμη μίαν μονάδα, θὰ σχηματισθῇ νέος ἀριθμός, ὁ *δέκα* **10**. Ὁ ἀριθμὸς οὗτος, τὸν ὁποῖον ἐσχηματίσαμεν λαβόντες ἐν ὅλῳ δέκα μονάδας, θεωρεῖται ὡς νέα μονάς, ἥτις λέγεται *δεκάς*.

3. — Ὅπως ἐκ τῆς προηγουμένης, τοιουτοτρόπως καὶ ἐκ τῆς νέας ταύτης μονάδος δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν νέους ἀριθμοὺς ὡς ἑξῆς :

Ἐὰν εἰς τὸν ἀριθμὸν 10 προστεθῇ ἄλλη μία δεκάς, γίνεται νέος ἀριθμός, ὁ *εἴκοσι* **20**. Ἐὰν καὶ εἰς τὸν 20 προστεθῇ μία δεκάς, θὰ σχηματισθῇ νέος ἀριθμός, ὁ *τριάκοντα* **30**· καὶ οὕτω καθεξῆς θὰ γείνωσιν οἱ ἀριθμοὶ *τεσσαράκοντα* **40**, *πεντήκοντα* **50**, *ἑξήκοντα* **60**, *ἑβδομήκοντα* **70**, *ὀγδοήκοντα* **80**, *ἐνενήκοντα* **90**. Καὶ ἐὰν καὶ εἰς τὸν ἐνενήκοντα προστεθῇ ἄλλη μία δεκάς, σχηματίζεται νέος ἀριθμός, ὁ *ἑκατὸν* **100**.

Σημείωσις. Τοὺς ἀριθμοὺς οἱ ὁποῖοι περιλαμβάνονται μεταξὺ τοῦ **10** καὶ **20**, τοῦ **20** καὶ **30**..., τοῦ **90** καὶ **100**, σχηματίζομεν προσθέτοντες εἰς τὰς δεκάδας τοῦ ἀριθμοῦ ἀπὸ μίαν ἕως ἐννέα μονάδας. Π. χ. 20 καὶ 1 κάμνουσιν *εἴκοσι ἓν* (**21**), 20 καὶ 2 κάμνουσιν *εἴκοσι δύο* (**22**), 20 καὶ 3 *εἴκοσι τρία* (**23**) καὶ οὕτω καθεξῆς.

Μόνον ἀντὶ *δέκα ἓν* λέγομεν *ἕνδεκα* καὶ ἀντὶ *δέκα δύο*, *δώδεκα*.

Καὶ ὁ ἀριθμὸς **100**, τὸν ὁποῖον ἐσχηματίσαμεν λαβόντες τὴν δεκάδα δέκα ἐν ὅλῳ φοράς, θεωρεῖται ὡς νέα μονάς, ἥτις λέγεται *ἑκατοντάς*.

4. — Ὅπως ἐκ τῶν προηγουμένων, τοιουτοτρόπως καὶ ἐκ τῆς νέας ταύτης μονάδος δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν νέους ἀριθμοὺς ὡς ἑξῆς :

Ἐὰν εἰς τὸν ἀριθμὸν 100 προσθέσωμεν ἄλλην μίαν ἑκατοντάδα, σχηματίζεται νέος ἀριθμός, ὁ *διακόσια* **200**. Ἐκ τούτου κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον σχηματίζεται ὁ *τριακόσια* **300**, καὶ οὕτω καθεξῆς οἱ ἀριθμοὶ *τετρακόσια* **400**, *πεντακόσια* **500**, *ἑξακόσια* **600**, *ἑπτακόσια* **700**, *ὀκτακόσια* **800**, *ἐννεακόσια* **900**, *χίλια* **1000**.

Σημείωσις. Τοὺς ἀριθμοὺς οἱ ὁποῖοι περιλαμβάνονται μεταξὺ τοῦ 100 καὶ 200, τοῦ 200 καὶ 300 ..., τοῦ 900 καὶ 1000 σχηματίζομεν προσθέτοντες εἰς τὰς ἑκατοντάδας τοῦ ἀριθμοῦ ἀπὸ 1 ἕως 99 μονάδας. Π.χ. *ἑκατὸν ἓν* (**101**), *ἑκατὸν δύο* (**102**), *ἑκατὸν δέκα πέντε* (**115**), *ἑκατὸν ἑβδομήκοντα τρία* (**173**) κ.τ.λ.

Ὁ ἀριθμὸς 1000, τὸν ὁποῖον ἐσχηματίσαμεν λαβόντες τὴν ἑκατοντάδα δεκάκις, θεωρεῖται ὡς νέα μονάς, ἡ ὁποία ὀνομάζεται *χιλιάς*.

5. — Ἐκ τῆς νέας ταύτης μονάδος σχηματίζονται πάλιν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον νέοι ἀριθμοί:

Εἰς τὸν ἀριθμὸν 1000 προσθέτομεν ἄλλην μίαν χιλιάδα καὶ σχηματίζεται νέος ἀριθμός, ὁ *δύο χιλιάδες* **2 000**. Εἰς τὸν ἀριθμὸν δύο χιλιάδες προσθέτομεν ἀκόμη μίαν χιλιάδα καὶ σχηματίζεται νέος ἀριθμός, ὁ *τρεῖς χιλιάδες* **3 000** καὶ οὕτω καθεξῆς σχηματίζονται οἱ ἀριθμοὶ *τέσσαρες χιλιάδες* **4 000**, *πέντε χιλιάδες* **5 000**, *ἓξ χιλιάδες* **6 000**, *ἑπτὰ χιλιάδες* **7 000**, *ὀκτὼ χιλιάδες* **8 000**, *ἐννέα χιλιάδες* **9 000**. Ἐὰν δὲ εἰς τὸν ἀριθμὸν 9 000 προσθέσωμεν ἀκόμη μίαν χιλιάδα, σχηματίζεται ὁ ἀριθμὸς *δέκα χιλιάδες* **10 000**.

Καὶ ὁ ἀριθμὸς οὗτος, τὸν ὁποῖον ἀπετελέσαμεν λαβόντες τὴν χιλιάδα δεκάκις, θεωρεῖται ὡς νέα μονάς, ἥτις ὀνομάζεται *δεκὰς χιλιάδων* ἢ *μυριάς*.

6. — Ἐκ τῆς μονάδος ταύτης σχηματίζονται κατὰ τὸν ἀνωτέρω τρόπον νέοι ἀριθμοί, οἱ ἑξῆς: *εἴκοσι χιλιάδες* **20 000**, *τριάκοντα χιλιάδες* **30 000**, *τεσσαράκοντα χιλιάδες* **40 000**, *πεντήκοντα χιλιάδες* **50 000**, *ἑξήκοντα χιλιάδες* **60 000**, *ἑβδομήκοντα χιλιάδες* **70 000**, *ὀγδοήκοντα χιλιάδες* **80 000**, *ἐνενήκοντα χιλιάδες* **90 000**. Καὶ ἐὰν εἰς τὸν ἀριθμὸν 90 000 προστεθῇ ἀκόμη μία μυριάς, θὰ σχηματισθῇ νέος ἀριθμός, ὁ *ἑκατὸν χιλιάδες* **100 000**, ὁ ὁποῖος θὰ περιέχῃ τὴν μυριάδα δεκάκις.

Καὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον θεωροῦμεν ὡς νέαν μονάδα, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν *ἑκατοντάδα χιλιάδων*.

7. — Ἐκ τῆς νέας ταύτης μονάδος κατὰ τὸν αὐτὸν πάντοτε τρόπον σχηματίζεται νέα σειρὰ ἀριθμῶν, ἡ ἑξῆς:
διακόσιαι χιλιάδες **200 000**, *τριακόσιαι χιλιάδες* **300 000**, *τετρακόσιαι χιλιάδες* **400 000**, *πεντακόσιαι χιλιάδες* **500 000**, *ἑξακόσιαι χιλιάδες* **600 000**, *ἑπτακόσιαι χιλιάδες* **700 000**, *ὀκτακόσιαι χιλιάδες* **800 000**, *ἐννεακόσιαι χιλιάδες* **900 000**.

Ἐὰν δὲ εἰς τὸν ἀριθμὸν 900 000 προσθέσωμεν ἄλλην μίαν ἑκατοντάδα χιλιάδων, σχηματίζεται ὁ ἀριθμὸς *χίλιαι χιλιάδες* ἤτοι ἓν *ἑκατομμύριον* **1 000 000**, περιέχων τὴν ἑκατοντάδα τῶν χιλιάδων δεκάκις καὶ ἑπομένως δυνάμενος νὰ θεωρηθῇ ὡς νέα μονάς.

8.—Τὰς διαφόρους μονάδας, τὰς ὁποίας μέχρι τοῦδε ἐσχηματίσαμεν, ἂς γράψωμεν εἰς μίαν σειρὰν καὶ ἂς ἐξετάσωμεν ἐν συνόλῳ τὴν σημασίαν ἑκάστης καὶ τὴν σχέσιν, ἥτις ὑφίσταται μεταξύ των.

μονὰς	δεκὰς	ἑκατοντὰς	χιλιὰς	μυριὰς	ἑκ. χιλιάδων	μονὰς ἑκατομ.
1	**10**	**100**	**1 000**	**10 000**	**100 000**	**1 000 000**

Ἑκάστη ἐκ τῶν μονάδων τούτων ἐσχηματίσθη ἐκ τῆς προηγουμένης δεκάκις ἐπαναληφθείσης, διὰ νὰ σχηματίσῃ δὲ τὴν ἀμέσως ἑπομένην εἶνε ἀνάγκη νὰ ἐπαναληφθῇ καὶ αὐτὴ δεκάκις. Ἑπομένως μία οἱαδήποτε μονὰς τῆς σειρᾶς ταύτης εἶνε δεκάκις μὲν μεγαλειτέρα τῆς προηγουμένης, δεκάκις δὲ μικροτέρα τῆς ἀμέσως ἑπομένης.

Ἡ μονὰς **1** καλεῖται καὶ μονὰς *πρώτης τάξεως*, ἡ δεκὰς καλεῖται μονὰς *δευτέρας τάξεως*, ἡ ἑκατοντὰς μονὰς *τρίτης τάξεως*, ἡ χιλιὰς *τετάρτης*, ἡ δεκὰς χιλιάδων *πέμπτης* καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἐξ ἑκάστης δὲ τούτων τῶν μονάδων σχηματίζεται, ὡς εἴδομεν, καὶ νέα σειρὰ ἀριθμῶν.

9.—Τὸ *ἑκατομμύριον*, εἰς τὸ ὁποῖον ἐφθάσαμεν ἀνωτέρω, δὲν εἶνε καὶ ἡ τελευταία μονάς. Κατὰ τὸν αὐτὸν πάντοτε τρόπον δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν καὶ ὁσασδήποτε ἄλλας ἀνωτέρας μονάδας. Τοιουτοτρόπως:

ἐκ 10 ἑκατομμυρίων σχηματίζεται μία *δεκὰς ἑκατομ.* **10 000 000**
» 10 δεκάδ. » » » *ἑκατ.* » **100 000 000**
» 10 ἑκατοντάδ. » » » *χιλιὰς* » ἤτοι
ἓν *δισεκατομμύριον* **1 000 000 000**

Καὶ οὕτω καθεξῆς σχηματίζονται αἱ μονάδες: *δεκὰς δισεκατομμυρίου* **10 000 000 000**, *ἑκατοντὰς δισεκατομμυρίου* **100 000 000 000**, *χιλιὰς δισεκατομ.* ἤτοι ἓν *τρισεκατομμύριον* **1 000 000 000 000**, *δεκὰς τρισεκατομμυρίου* **10 000 000 000 000**, *ἑκατοντὰς τρισεκατομμυρίου* **100 000 000 000 000** κ.τ.λ.

10.—Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ πλῆθος τῶν μονάδων, τὰς ὁποίας δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν, δὲν εἶνε ὡρισμένον, καὶ ἐπειδὴ ἐξ ἑκάστης μονάδος προκύπτει πάντοτε καὶ νέα σειρὰ ἀριθμῶν, δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν ὅτι οἱ ἀριθμοὶ εἶνε *ἄπειροι*. Ὁσονδήποτε μέγαν ἀριθμὸν καὶ ἂν θεωρήσωμεν, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν εἰς αὐτὸν μίαν μονάδα διὰ νὰ προκύψῃ νέος ἀριθμὸς μεγαλείτερος.

11.—Τὸ ἄπειρον τοῦτο πλῆθος τῶν ἀριθμῶν κατορθοῦμεν ἐν τούτοις νὰ γράφωμεν μὲ μόνον δέκα σημεῖα, τὰ ἑξῆς:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.

Τὰ σημεῖα ταῦτα λέγονται *ψηφία* ἢ *ἀραβικοὶ χαρακτῆρες*, διότι οἱ Ἕλληνες παρέλαβον αὐτὰ παρὰ τῶν Ἀράβων κατὰ τὸν 12ον μ.Χ. αἰῶνα. Καὶ τὰ μὲν ἐννέα πρῶτα καλοῦνται ψηφία *σημαντικά*, τὸ δὲ τελευταῖον *μηδὲν* ἢ *μηδενικόν*. Τοῦτο καθ' ἑαυτὸ μὲν οὐδεμίαν ἔχει ἀξίαν, χρησιμεύει δὲ μόνον, ὡς θὰ ἴδωμεν κατωτέρω (*ἐδ.* **14** *β'.*), εἰς τὸ νὰ καταλαμβάνῃ τὴν θέσιν ἐκείνων τῶν μονάδων, αἵτινες ἐλλείπουσιν ἀπό τινος ἀριθμοῦ.

Ἡ εὐκολία αὕτη τοῦ νὰ δυνάμεθα μὲ τὰ ὀλίγα ταῦτα σημεῖα νὰ γράφωμεν πάντας τοὺς ἀριθμοὺς καὶ νὰ ἐκφράζωμεν αὐτοὺς μὲ λέξεις ὀλίγον διαφερούσας, εἶνε σπουδαιοτάτη. Διότι ἐὰν διὰ κάθε ἀριθμὸν εἴχομεν καὶ ἰδιαίτερον σημεῖον καὶ ἰδιαίτερον ὄνομα, τότε διὰ νὰ φθάσωμεν μόνον μέχρι τοῦ *ἑκατομμυρίου*, θὰ ἐχρειαζόμεθα καὶ ἓν ἑκατομμύριον διάφορα σημεῖα καὶ ἰσάριθμα ὀνόματα, τὰ ὁποῖα θὰ ἦτο ἀδύνατον νὰ ἐνθυμηθῶμεν καὶ νὰ διακρίνωμεν.

Στηρίζεται δὲ ἡ εὐκολία αὕτη πρῶτον μὲν ἐπὶ τοῦ σχηματισμοῦ τῶν ἀριθμῶν ἐκ μονάδων διαφόρων τάξεων (οὐχὶ περισσοτέρων τῶν ἐννέα ἐξ ἑκάστης τάξεως) καὶ δεύτερον ἐπὶ τῆς ἑξῆς συνθήκης:

Ἕκαστον ψηφίον γεγραμμένον πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἄλλου φανερώνει μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως.

Κατὰ τὴν συνθήκην ταύτην τὸ τελευταῖον πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφίον ἀριθμοῦ τινος φανερώνει μονάδας πρώτης τάξεως, τὸ πρὸ αὐτοῦ φανερώνει μονάδας δευτέρας τάξεως, τὸ πρὸ τούτου μονάδας τρίτης τάξεως καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἐπομένως ἡ σημασία ἑκάστου ψηφίου ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς θέσεως, τὴν ὁποίαν τοῦτο κατέχει ἐν τῷ ἀριθμῷ.

Σημείωσις.—*Μονοψήφιοι* λέγονται οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι γράφονται μὲ ἓν μόνον ψηφίον· *διψήφιοι* οἱ γραφόμενοι μὲ δύο ψηφία, ὡς ὁ **93**· *τριψήφιοι* οἱ γραφόμενοι μὲ τρία, ὡς ὁ **652** καὶ *πολυψήφιοι* οἱ μὲ πολλά· τοιοῦτοι εἶνε οἱ ἀριθμοὶ **56, 489, 4567** κ.τ.λ.

Ἡ μέθοδος κατὰ τὴν ὁποίαν γράφομεν καὶ ἀπαγγέλλομεν τοὺς ἀριθμοὺς ἀποτελεῖ τὸ καλούμενον *σύστημα ἀριθμήσεως*. Βάσις τοῦ συστήματος τούτου εἶνε ὁ ἀριθμὸς *δέκα* (**10**), ὅστις παριστᾷ πόσαι μονάδες μιᾶς τάξεως ἀποτελοῦσι μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας. Ἐκ τοῦ ὀνόματος δὲ τῆς βάσεως ὠνομάσθη καὶ τὸ σύστημα *δεκαδικόν*.

Πᾶς ἀριθμὸς ἀποτελεῖται ἀπὸ μονάδας τῶν διαφόρων τάξεων, ἀλλ' ἐξ ἑκάστης τάξεως δὲν δύναται νὰ περιέχῃ περισσοτέρας τῶν ἐννέα.

Πρωτεύουσαι ἢ ἀρχικαὶ μονάδες.

12. — Ἐκ τῶν μονάδων τῶν διαφόρων τάξεων *πρωτεύουσαι* ἢ *ἀρχικαὶ* καλοῦνται αἱ ἑξῆς: *μονάς, χιλιάς, ἑκατομμύριον, δισεκατομμύριον* κ.τ.λ. Ἑκάστη ἐξ αὐτῶν ἀποτελεῖται ἐκ τῆς προηγουμένης ἐπαναλαμβανομένης χιλιάκις.

Πῶς ἀπαγγέλλεται ἀριθμὸς γεγραμμένος.

13. — Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς ἔχῃ δύο μόνον ψηφία, τότε τὸ ὄνομα αὐτοῦ θὰ ἀποτελεσθῇ ἐκ τοῦ ὀνόματος τῶν δεκάδων καὶ ἐκ τοῦ ὀνόματος τῶν μονάδων αὐτοῦ (ἐὰν ἔχῃ). Π. χ. ὁ ἀριθμὸς **54** θὰ ἀπαγγελθῇ *πεντήκοντα τέσσαρα*, ὁ δὲ ἀριθμὸς **90** θὰ ἀπαγγελθῇ *ἐνενήκοντα*.

Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς ἔχῃ τρία ψηφία, τὸ ὄνομα αὐτοῦ θὰ ἀποτελεσθῇ ἐκ τοῦ ὀνόματος τῶν ἑκατοντάδων αὐτοῦ, τῶν δεκάδων (ἐὰν ἔχῃ) καὶ τῶν μονάδων (ἐὰν ἔχῃ). Π. χ. ὁ ἀριθμὸς **682** ἀπαγγέλλεται **6** *ἑκατοντάδες*, **8** *δεκάδες* καὶ **2** *μονάδες* ἢ ἁπλούστερον *ἑξακόσια ὀγδοήκοντα δύο*. Ὁ ἀριθμὸς **403** ἀπαγγέλλεται *τετρακόσια τρία* καὶ ὁ ἀριθμὸς **130** *ἑκατὸν τριάκοντα*.

Ἐὰν ὅμως ὁ ἀριθμὸς ἔχῃ ψηφία περισσότερα τῶν τριῶν, τότε χωρίζομεν πρῶτον αὐτὸν εἰς τριψήφια τμήματα ἀρχόμενοι ἐκ δεξιῶν. Κατὰ τὴν τοιαύτην διαίρεσιν τοῦ ἀριθμοῦ εἰς τμήματα παρατηροῦμεν πρῶτον μὲν ὅτι τὸ τελευταῖον τμῆμα, τὸ ὁποῖον θὰ μείνῃ πρὸς τὰ ἀριστερὰ δύναται νὰ εἶνε καὶ διψήφιον ἢ καὶ μονοψήφιον, δεύτερον δὲ ὅτι ἕκαστον ἐκ τῶν τμημάτων τούτων σχηματίζεται καὶ ἐξ ἰδίας πρωτευούσης μονάδος. Τοιουτοτρόπως τὸ τελευταῖον πρὸς τὰ δεξιὰ τμῆμα σχηματίζει ἡ *μονάς*, τὸ πρὸ αὐτοῦ ἡ *χιλιάς*, τὸ πρὸ τούτου τὸ *ἑκατομμύριον* καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἀφ' οὗ λοιπὸν χωρίσωμεν τὸν ἀριθμὸν εἰς τμήματα τριψήφια, ἀπαγγέλλομεν πρῶτον τὸν ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον ἀποτελεῖ τὸ τελευταῖον πρὸς τὰ ἀριστερὰ τμῆμα. Ὁ ἀριθμὸς οὗτος θὰ σημαίνῃ κατὰ τὰ ἀνωτέρω *χιλιάδας* μέν, ἐὰν μετ' αὐτὸν ἀκολουθῇ ἓν μόνον τριψήφιον τμῆμα· *ἑκατομμύρια*, ἐὰν ἀκολουθῶσι δύο τριψήφια τμήματα· *δισεκατομμύρια*, ἐὰν τρία· *τρισεκατομμύρια*, ἐὰν τέσσαρα καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἔστω π. χ. ὁ ἀριθμὸς **52318**, τὸν ὁποῖον πρόκειται νὰ ἀπαγγείλωμεν. Πρὸς τοῦτο χωρίζομεν πρῶτον αὐτὸν εἰς τριψήφια τμήματα ἀρχόμενοι ἐκ δεξιῶν **52.318**, ἔπειτα ἀπαγγέλλομεν τὸν ἀριθμὸν τὸν ἀποτελούμενον ὑπὸ τοῦ τελευταίου πρὸς τὰ ἀριστερὰ τμήματος, τὸ ὁποῖον ἔτυχε νὰ εἶνε διψήφιον, λέγοντες *πεντήκοντα δύο*. Ἐπειδὴ δὲ μετὰ τὸ **52** ἀκολουθεῖ ἓν μόνον τριψήφιον τμῆμα, δίδομεν εἰς τὸ **52** τὸ ὄνομα *χιλιάδες*. Ἔπειτα προχωροῦντες πρὸς τὰ δεξιὰ ἀπαγγέλλομεν καὶ τὸ χωρισθὲν τριψήφιον τμῆμα λέγοντες **318** *μονάδες*.

Τὸν ἀριθμὸν **13089652** ἀφ' οὗ χωρίσωμεν εἰς τριψήφια τμήματα **13.089.652** θὰ ἀπαγγείλωμεν κατὰ τὰ ἀνωτέρω **13** *ἑκατομμύρια*, **89** *χιλιάδες* καὶ **652** *μονάδες*.

Σημείωσις. Λέγομεν **13** *ἑκατομμύρια*, διότι μετὰ τὸ **13** ἀκολουθοῦσι δύο τριψήφια τμήματα. Ἐπίσης λέγομεν ὅτι αἱ **89** εἶνε *χιλιάδες*, διότι κατόπιν αὐτῶν ἀκολουθεῖ ἓν μόνον τριψήφιον τμῆμα ἢ καὶ διότι τὸ **89** εὑρίσκεται ἀμέσως μετὰ τὸ τμῆμα τῶν ἑκατομμυρίων.

Καὶ τέλος τὸν ἀριθμὸν **72054389756** θὰ ἀπαγγείλωμεν **72** *δισεκατομμύρια*, **54** *ἑκατομμύρια*, **389** *χιλιάδες* καὶ **756** *μονάδες*.

Πῶς γράφεται ἀριθμὸς ἀπαγγελλόμενος.

14.—*α'.)* Ἐὰν μᾶς ἀπαγγείλωσιν ἀριθμὸν διψήφιον, π. χ. τὸν ἀριθμὸν *ἑβδομήκοντα τέσσαρα*, γράφομεν πρῶτον τὸ ψηφίον **7** τῶν δεκάδων, μετ' αὐτὸ δὲ τὸ ψηφίον **4** τῶν μονάδων καὶ τοιουτοτρόπως ὁ ἀπαγγελθεὶς ἀριθμὸς γράφεται οὕτω : **74**.

Διὰ νὰ γράψωμεν δὲ τὸν ἀριθμὸν *ἑβδομήκοντα*, ὅστις ἔχει μόνον δεκάδας οὐχὶ δὲ καὶ μονάδας, γράφομεν τὸ ψηφίον **7** τῶν δεκάδων, κατόπιν δὲ αὐτοῦ ἓν μηδενικόν, καὶ ὁ ἀριθμὸς γράφεται οὕτω : **70**.

β'.) Ἐάν ὁ ἀπαγγελλόμενος ἀριθμὸς εἶνε τριψήφιος, π. χ. ὁ ἀριθμὸς *τετρακόσια πεντήκοντα δύο*, γράφομεν πρῶτον τὸ ψηφίον 4 τῶν ἑκατοντάδων, κατόπιν αὐτοῦ τὸ ψηφίον 5 τῶν δεκάδων καὶ τέλος τὸ ψηφίον 2 τῶν μονάδων καὶ ὁ ἀριθμὸς γράφεται οὕτω: 452.

Τὸν ἀριθμὸν *ἑξακόσια ἐννέα*, ὁ ὁποῖος ἔχει 6 ἑκατοντάδας καὶ 9 μονάδας θὰ γράψωμεν 609 σημειοῦντες 0 εἰς τὴν θέσιν τῶν δεκάδων. Διότι ἐὰν τὸν ἀριθμὸν τοῦτον ἐγράφομεν οὕτω : 69, τότε τὸ ψηφίον 6 κατὰ τὴν ἀνωτέρω (*ἐν ἐδ.* 11) ἐκτεθεῖσαν συνθήκην θὰ ἐσήμαινε 6 *δεκάδας* καὶ οὐχὶ 6 *ἑκατοντάδας*. Πρέπει λοιπόν, διὰ νὰ ἔλθῃ τὸ 6 εἰς τὴν θέσιν τῶν ἑκατοντάδων, νὰ γράψωμεν σημεῖόν τι εἰς τὴν θέσιν τῶν δεκάδων· καὶ διὰ τοῦτο γράφομεν ἐκεῖ τὸ 0, τὸ ὁποῖον, ὅπως ἐμάθομεν ἤδη (*ἐν ἐδ.* 11), οὐδεμίαν ἔχει καθ' ἑαυτὸ ἀξίαν.

Διὰ νὰ γράψωμεν δὲ τὸν ἀριθμὸν *ἐννεακόσια ἑβδομήκοντα*, ὅστις δὲν ἔχει μονάδας, γράφομεν πρῶτον τὸ ψηφίον 9 τῶν ἑκατοντάδων, κατόπιν αὐτοῦ τὸ ψηφίον 7 τῶν δεκάδων καὶ εἰς τὴν θέσιν τῶν μονάδων μηδενικόν. Τοιουτοτρόπως ὁ ἀριθμὸς οὗτος θὰ γραφῇ 970.

γ'.) Ἐὰν ὁ ἀπαγγελλόμενος ἀριθμὸς ἔχῃ χιλιάδας, γράφομεν πρῶτον τὰς χιλιάδας, ὅσας ἔχει (δυνατὸν δὲ νὰ ἔχῃ ἀπὸ 1 ἕως 999 *). Κατόπιν τῶν χιλιάδων γνωρίζομεν ὅτι πρέπει νὰ ἀκολουθῇ ἓν μόνον τμῆμα, τὸ τμῆμα τῶν μονάδων. Τοῦτο θὰ ἀποτελῆται ἐκ τριῶν ψηφίων, τὰ ὁποῖα θὰ σημαίνωσι κατὰ σειρὰν τὸ πρῶτον ἑκατοντάδας, τὸ δεύτερον δεκάδας καὶ τὸ τρίτον μονάδας. Ἀφ' οὗ λοιπὸν γράψωμεν τὰς χιλιάδας, συμπληροῦμεν τὸ μετ' αὐτὰς τριψήφιον τμῆμα γράφοντες κατὰ σειρὰν τὰς ἑκατοντάδας, τὰς δεκάδας, καὶ τέλος τὰς μονάδας. Ἐὰν δὲ ὁ ἀπαγγελλόμενος ἀριθμὸς τύχῃ νὰ μὴ ἔχῃ εἴτε ἑκατοντάδας, εἴτε δεκάδας, εἴτε μονάδας, τότε εἰς τὴν θέσιν αὐτῶν γράφομεν 0.

Π. χ. τὸν ἀριθμὸν *τεσσαράκοντα ὀκτὼ χιλιάδες καὶ ἑκατὸν εἴκοσι τρεῖς μονάδες* γράφομεν 48 123. Τὸν ἀριθμὸν *ἑπτακόσιαι τριάκοντα ἐννέα χιλιάδες καὶ εἴκοσι τρεῖς μονάδες* γράφομεν 739 023. Τὸν ἀριθμὸν *τρεῖς χιλιάδες καὶ τρεῖς μονάδες* θὰ γράψωμεν 3 003. καὶ τέλος ὁ ἀριθμὸς *δέκα τρεῖς χιλιάδες* θὰ γραφῇ 13 000.

δ'.) Διὰ νὰ γράψωμεν ἀριθμὸν ὅστις ἔχει ἑκατομμύρια, γράφομεν

(*) Διότι 1000 χιλιάδες ἀποτελοῦσιν **ἓν ἑκατομμύριον** (ἐδ. 7).

πρῶτον τὰ ἑκατομμύρια, ὅσα ἔχει (δύναται δὲ νὰ ἔχῃ ἀπὸ 1 ἕως 999). Κατόπιν τῶν ἑκατομμυρίων γνωρίζομεν ὅτι πρέπει νὰ ἀκολουθῶσι δύο τμήματα, ἐξ ὧν τὸ μὲν πρῶτον θὰ ἀνήκῃ εἰς τὰς χιλιάδας, τὸ δὲ δεύτερον εἰς τὰς μονάδας. Ἕκαστον τμῆμα θὰ ἀποτελῆται ἐκ τριῶν ψηφίων, τὰ ὁποῖα κατὰ σειρὰν θὰ σημαίνωσιν ἑκατοντάδας, δεκάδας καὶ μονάδας. Ἐπομένως ὅσας χιλιάδας ἔχει ὁ ἀριθμὸς (ἐκτὸς τῶν ἑκατομμυρίων) θὰ τὰς γράψωμεν εἰς τὸ τμῆμα τῶν χιλιάδων, ὅσας δὲ μονάδας, εἰς τὸ τμῆμα τῶν μονάδων. Τοιουτοτρόπως ὁ ἀριθμὸς *τριάκοντα δύο ἑκατομμύρια, δέκα τέσσαρες χιλιάδες καὶ ἐννέα μονάδες* θὰ γραφῇ **32 014 009**.

ε.) Διὰ νὰ γράψωμεν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος ἔχει δισεκατομμύρια, γράφομεν πρῶτον τὰ δισεκατομμύρια ὅσα ἔχει (ἀπὸ 1 ἕως 999). Κατόπιν αὐτῶν γνωρίζομεν ὅτι πρέπει νὰ ἀκολουθῶσι τρία τριψήφια τμήματα σημαίνοντα κατὰ σειρὰν τὸ πρῶτον τὰ ἑκατομμύρια, τὸ δεύτερον τὰς χιλιάδας καὶ τὸ τελευταῖον τὰς μονάδας. Π. χ. ὁ ἀριθμὸς *τρία δισεκατομμύρια, ἑκατὸν τρεῖς χιλιάδες καὶ ἑξήκοντα πέντε μονάδες* γράφεται **3 000 103 065**.

15.—*Συγκεκριμένος* λέγεται ἀριθμός τις, ὅταν ἀναφέρηται εἰς ὡρισμένον πρᾶγμα, ὡς **9** *μαθηταί*, **6** *βιβλία*.

16 —*Ἀφῃρημένος* δέ, ὅταν δὲν ἀναφέρηται εἰς ὡρισμένον πρᾶγμα, ἀλλ' ἁπλῶς φανερώνῃ πλῆθος μονάδων π.χ. **4, 7, 11** κτλ.

17.—Οἱ συγκεκριμένοι ἀριθμοὶ δύνανται νὰ εἶνε ἢ *ὁμοειδεῖς* ἢ *ἑτεροειδεῖς*.

18.—*Ὁμοειδεῖς* μὲν λέγονται οἱ ἀριθμοί, τῶν ὁποίων αἱ μονάδες παριστάνουσι πᾶσαι τὸ αὐτὸ πρᾶγμα· π. χ. **3** *μῆλα*, **9** *μῆλα*.

19.—*Ἑτεροειδεῖς* δὲ ἐκεῖνοι, τῶν ὁποίων αἱ μονάδες παριστάνουσι διάφορα πράγματα· π. χ. **7** *μῆλα*, **3** *βιβλία*, **6** *τετράδια*.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Πῶς ἀπαγγέλλονται οἱ ἑξῆς ἀριθμοί:

209 001, 30 030 070, 507 001 900, 11 100 001 604;

2) Πῶς γράφεται διὰ ψηφίων ὁ ἀριθμὸς *τρία δισεκατομμύρια δέκα τρεῖς χιδιάδες καὶ ἑπτὰ μονάδες*;

3) Ὁ ἀριθμὸς **23 049** πόσας ἐν συνόλῳ δεκάδας καὶ πόσας μονάδας περιέχει;

4) Πόσας ἐν συνόλῳ ἑκατοντάδας καὶ πόσας μονάδας περιέχει ὁ ἀριθμὸς 7 085 761 ;

5) Ποῖοι ἀριθμοὶ ἔχουσιν ἐν συνόλῳ 7 902 δεκάδας ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

20. — *Ἡ πρόσθεσις εἶνε πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας σχηματίζομεν ἕνα ἀριθμόν, ὅστις περιέχει ὅλας ὁμοῦ τὰς μονάδας, ὅσας ἔχουσι δύο ἢ περισσότεροι δοθέντες ἀριθμοὶ καὶ μόνον ταύτας.*

Οἱ ἀριθμοὶ οἱ ὁποῖοι πρέπει νὰ προστεθῶσι λέγονται *προσθετέοι*. Τὸ δὲ ἐξαγόμενον τῆς προσθέσεως λέγεται *ἄθροισμα* ἢ *κεφάλαιον*.

Σημεῖον τῆς προσθέσεως εἶνε τὸ +, τὸ ὁποῖον γράφεται μεταξὺ τῶν προσθετέων καὶ ἀπαγγέλλεται *σύν*.

Οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι μᾶς δίδονται εἰς τὴν πρόσθεσιν, δύνανται νὰ εἶνε ἢ συγκεκριμένοι ἢ ἀφῃρημένοι. Ἐὰν ὅμως εἶνε συγκεκριμένοι, πρέπει νὰ εἶνε καὶ ὁμοειδεῖς. Δὲν δυνάμεθα π. χ. νὰ προσθέσωμεν 5 *οἰκίας* καὶ 3 *βιβλία*.

1) Πρόσθεσις ἀριθμῶν μονοψηφίων.

21. — Διὰ νὰ προσθέσωμεν δύο μονοψηφίους ἀριθμούς, προσθέτομεν εἰς τὰς μονάδας τοῦ μεγαλειτέρου ἀνὰ μίαν τὰς μονάδας τοῦ μικροτέρου. Π. χ. ἐὰν ἔχωμεν νὰ προσθέσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 5 καὶ 3, προσθέτομεν τὰς τρεῖς μονάδας τοῦ 3 ἀνὰ μίαν εἰς τὰς μονάδας τοῦ 5. Λέγομεν δηλ. 5 καὶ 1 γίνονται 6, ἕξ καὶ 1 *ἑπτά*, 7 καὶ 1 *ὀκτώ*. Λοιπὸν ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν 5 καὶ 3 εἶνε ὁ ἀριθμὸς 8.

Τὴν πρόσθεσιν ταύτην δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν καὶ κατ' ἄλλον τρόπον : εἰς τὰς μονάδας δηλ. τοῦ 3 νὰ προσθέσωμεν ἀνὰ μίαν τὰς μονάδας τοῦ 5. Εὐκολώτερος ὅμως καὶ ἑπομένως προτιμότερος εἶνε ὁ πρῶτος τρόπος.

Σημείωσις. Τὸ ἄθροισμα δύο μονοψηφίων ἀριθμῶν εὑρίσκομεν ἀμέσως ἀπὸ μνήμης.

Ἐὰν ἔχωμεν νὰ προσθέσωμεν περισσοτέρους τῶν δύο μονοψηφίους ἀριθμούς, τότε προσθέτομεν πρῶτον κατὰ τὰ ἀνωτέρω τοὺς δύο πρώτους, εἰς τὸ ἄθροισμα αὐτῶν προσθέτομεν τὸν τρίτον, εἰς τὸ νέον ἄθροισμα τὸν τέταρτον καὶ οὕτω καθεξῆς, ἕως ὅτου λάβωμεν πάντας. Π.χ. ἐὰν ἔχωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν: $2+5+7+4$, θὰ εἴπωμεν $2+5=7$, $7+7=14$, $14+4=18$. Ἑπομένως τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων δοθέντων ἀριθμῶν εἶνε 18·

Τὸ αὐτὸ ἄθροισμα εὑρίσκομεν καὶ ἂν ἐκτελέσωμεν τὴν πρόσθεσιν κατ' ἄλλην τάξιν. Π. χ. $5+4=9$, $9+2=11$, $11+7=18$. Διότι τὸ ἄθροισμα εἶνε πλέον ἐντελῶς ὡρισμένον, ἀφ' οὗ ἔχουσι δοθῆ αἱ μονάδες, αἱ ὁποῖαι θὰ ἀποτελέσωσιν αὐτό. Ἑπομένως ἡ τάξις, κατὰ τὴν ὁποίαν θὰ λάβωμεν τοὺς προσθετέους, οὐδόλως μᾶς ἐνδιαφέρει.

Σημείωσις. Τὸ σημεῖον $=$ γράφεται μεταξὺ δύο ἴσων ἀριθμῶν καὶ ἀπαγγέλλεται *ἴσον*.

Πρόσθεσις οἱωνδήποτε ἀριθμῶν.

22.—Εἴδομεν ἀνωτέρω (ἐδ. 20) ὅτι εἰς πᾶσαν πρόσθεσιν τὸ ἄθροισμα ἀποτελεῖται ἐκ πασῶν τῶν μονάδων, ὅσας ἔχουσι πάντες ὁμοῦ οἱ δοθέντες ἀριθμοί. Διὰ νὰ εὕρωμεν λοιπὸν τὸ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν χωριστὰ τὰς μονάδας αὐτῶν, χωριστὰ τὰς δεκάδας, τὰς ἑκατοντάδας κ.τ.λ. καὶ νὰ ἑνώσωμεν ἔπειτα πάντα ταῦτα τὰ ἀθροίσματα. Ἀλλ' ἑκάστη ἐκ τῶν μερικῶν τούτων προσθέσεων εἶνε πρόσθεσις ἀριθμῶν μονοψηφίων. Συμπεραίνομεν ὅθεν ὅτι πᾶσα πρόσθεσις ἀνάγεται εἰς τὴν ἁπλῆν πρόσθεσιν ἀριθμῶν μονοψηφίων.

Ἂς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν τοὺς ἀριθμούς:

24 089, 837 καὶ 106

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται χάριν εὐκολίας ὡς ἑξῆς:

$$\begin{array}{r} 24\,089 \\ 837 \\ 106 \\ \hline 25\,032 \end{array}$$

Πρῶτον προσθέτομεν τὰς ἁπλᾶς μονάδας: *ἓξ καὶ ἑπτὰ γίνονται* 13, *καὶ ἐννέα* 22 *μονάδες*. Τὸ ἄθροισμα τοῦτο τῶν ἁπλῶν μονάδων ἔχει 2 *δεκάδας καὶ* 2 *μονάδας*. Γράφομεν λοιπὸν εἰς τὴν στήλην τῶν ἁπλῶν μονάδων μόνον τὸ ψηφίον 2 τῶν μονάδων, τὰς δὲ 2 δεκάδας κρατοῦμεν διὰ νὰ τὰς προσθέσωμεν εἰς τὰς δεκάδας τῶν προσθετέων.

Ἔπειτα προσθέτομεν τὰς δεκάδας ὡς ἑξῆς: *δύο δεκάδες, τὰς ὁποίας ἔχομεν κρατήσει καὶ 0 γίνονται πάλιν 2, καὶ τρεῖς 5, καὶ ὀκτὼ 13 δεκάδες, ἤτοι 1 ἑκατοντὰς καὶ 3 δεκάδες.* Καὶ τὰς μὲν 3 δεκάδας γράφομεν εἰς τὴν στήλην τῶν δεκάδων, τὴν δὲ 1 ἑκατοντάδα κρατοῦμεν διὰ νὰ τὴν προσθέσωμεν εἰς τὰς ἑκατοντάδας τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Μετὰ ταῦτα προσθέτομεν τὰς ἑκατοντάδας: *Μία ἑκατοντάς, τὴν ὁποίαν ἔχομεν κρατήσει καὶ μία γίνονται 2, καὶ ὀκτὼ 10, καὶ μηδὲν 10 ἑκατοντάδες, ἤτοι 1 χιλιὰς καὶ 0 ἑκατοντάδες.* Καὶ εἰς μὲν τὴν στήλην τῶν ἑκατοντάδων γράφομεν 0, τὴν δὲ 1 χιλιάδα κρατοῦμεν διὰ νὰ προσθέσωμεν εἰς τὰς χιλιάδας τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Κατόπιν ἐρχόμεθα εἰς τὴν στήλην τῶν χιλιάδων καὶ λέγομεν: *1 χιλιάς, τὴν ὁποίαν ἐκρατήσαμεν, καὶ 4 γίνονται 5·* ταύτας γράφομεν εἰς τὴν στήλην τῶν χιλιάδων.

Τέλος δὲ καταβιβάζομεν καὶ τὰς 2 δεκάδας χιλιάδων, καὶ τοιουτοτρόπως εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ζητούμενον ἄθροισμα εἶνε **25 032**.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἑπόμενον κανόνα:

23 — *Διὰ νὰ προσθέσωμεν δύο ἢ περισσοτέρους ἀριθμούς, γράφομεν πρῶτον αὐτοὺς τὸν ἕνα ὑπὸ τὸν ἄλλον οὕτως ὥστε τὰ ψηφία τὰ δηλοῦντα τὸ πλῆθος τῶν μονάδων ἑκάστης τάξεως νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν κατακόρυφον στήλην. Ἔπειτα ἄγομεν ὑπ' αὐτοὺς γραμμὴν ὁριζοντίαν καὶ προσθέτομεν χωριστὰ τὰ ψηφία ἑκάστης στήλης ἀρχόμενοι ἀπὸ τῆς στήλης τῶν μονάδων. Καὶ ἂν μὲν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τῆς στήλης ταύτης δὲν ὑπερβαίνῃ τὸν ἀριθμὸν 9, γράφομεν αὐτὸ ὁλόκληρον εἰς τὴν αὐτὴν στήλην. Ἂν ὅμως ὑπερβαίνῃ τὸν 9, τότε γράφομεν μόνον τὰς μονάδας τοῦ ἀθροίσματος τούτου εἰς τὴν στήλην τῶν μονάδων, τὰς δεκάδας δὲ ὅσας περιέχει προσθέτομεν εἰς τὴν στήλην τῶν δεκάδων καὶ ἐξακολουθοῦμεν τοιουτοτρόπως τὴν πρόσθεσιν μέχρι τῆς τελευταίας πρὸς τὰ ἀριστερὰ στήλης.*

Βάσανος τῆς προσθέσεως.

24. — *Βάσανος ἢ δοκιμὴ μιᾶς πράξεως λέγεται δευτέρα τις* *πρᾶξις, τὴν ὁποίαν κάμνομεν διὰ νὰ βεβαιωθῶμεν ἂν ἡ πρώτη ἐγένετο ἄνευ λάθους.*

Ἡ δοκιμὴ τῆς προσθέσεως γίνεται ὡς ἑξῆς: Ἐπαναλαμβάνομεν τὴν πρόσθεσιν, ἀλλὰ κατ' ἀντίθετον τάξιν. Ἐὰν δηλ. ἀρχικῶς εἴχομεν προσθέσει ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω, ἔπειτα προσθέτομεν πάλιν τοὺς ἀριθμοὺς ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω. Ἐὰν καὶ τὴν δευτέραν φορὰν εὕρωμεν τὸ αὐτὸ ἄθροισμα, ἡ πρᾶξις ἐγένετο (πιθανῶς) ἄνευ λάθους.

1864
43
1907

Προβλήματα.

1) Ἀποθανών τις ἀφῆκε διὰ διαθήκης εἰς τὴν σύζυγόν του 8500 δρχ, εἰς τὴν θυγατέρα του 12400 δρχ. καὶ εἰς ἕκαστον ἐκ τῶν δύο υἱῶν του ἀπὸ 6800. Πόσας δραχμὰς ἀφῆκεν ἐν ὅλῳ;
(Ἀπ. 34 500).

2) Ἐγεννήθη τις τῷ 1888 καὶ ἀπέθανε ζήσας 12 ἔτη. Πότε ἀπέθανε; (Ἀπ. τῷ 1900).

3) Ἄνθρωπός τις ἐγεννήθη τῷ 1864. Πότε θὰ εἶνε 43 ἐτῶν;
(Ἀπ. τῷ 1907).

4) Πόσαι ὧραι εἶνε ἀπὸ τῆς 7ης π. μ. μεχρι τῆς 10ης μ. μ. τῆς αὐτῆς ἡμέρας; (Ἀπ. 15).

5) Ἡ ἐν Σαλαμῖνι ναυμαχία ἐγένετο τῷ 480 π. Χ. Πόσα ἔτη εἶνε μέχρι σήμερον (1094);

Λύσις. Ἀπὸ τοῦ 480 π. Χ. μέχρι τῆς γεννήσεως τοῦ Ἰ. Χριστοῦ παρῆλθον 480 ἔτη· ἀπὸ δὲ τῆς γεννήσεως τοῦ Χριστοῦ μέχρι σήμερον ἄλλα 1904 ἔτη. Ὥστε ἐν ὅλῳ ἔχουσι παρέλθει $480+1904=2384$ ἔτη.

6) Ἠγόρασέ τις μίαν βιβλιοθήκην ἀντὶ 5000 δρχ, ἐν διαστήματι ἑνὸς ἔτους προσέθηκεν εἰς αὐτὴν βιβλία ἀξίας 850 δρχ, ἐπλήρωσε δὲ καὶ εἰς ἀσφαλιστικήν τινα ἑταιρείαν διὰ νὰ τὴν ἀσφαλίσῃ κατὰ τοῦ πυρὸς δρχ. 15. Πόσον τοῦ κοστίζει ἡ βιβλιοθήκη μετὰ ἓν ἔτος; (Ἀπ. 5865 δρχ.)

7) Μήτηρ τις ἦτο 27 ἐτῶν, ὅτε ἐγεννήθη τὸ πρῶτον τέκνον της· σήμερον τοῦτο εἶνε 38 ἐτῶν. Ποίαν ἡλικίαν ἔχει σήμερον ἡ μήτηρ;
(Ἀπ. 65 ἐτῶν).

27
38

8) Ἐπώλησέ τις μίαν ἄμπελον ἀντὶ 8730 δρχ. καὶ ἐκ τῆς πωλήσεως ταύτης ἐζημιώθη 670 δρχ. Πόσον τὴν εἶχεν ἀγοράσει; (Ἀπ. 9400 δρχ).

9) Μία οἰκογένεια ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸν πατέρα, τὴν μητέρα καὶ δύο υἱούς. Ὁ πατὴρ εἶνε 53 ἐτῶν, ἡ μήτηρ 41, ὁ μεγαλείτερος υἱὸς 20 καὶ ὁ μικρότερος 16. Ποῖον ἀριθμὸν ἀποτελοῦσιν αἱ ἡλικίαι καὶ τῶν τεσσάρων ὁμοῦ; (Ἀπ. τὸν ἀριθ. 130).

10) Εἷς ἔμπορος ἤρχισεν ἐπιχείρησιν μὲ 13 590 δρχ. Μετὰ 5 μῆνας προσέλαβε καὶ συνέταιρον ὅστις κατέβαλε 17 895 δρχ. καὶ μετὰ ἄλλους 9 μῆνας προσέλαβε καὶ τρίτον συνέταιρον, ὅστις κατέβαλε 9 175 δρχ. Ποῖον ποσὸν ἀποτελοῦσι τὰ ὑπὸ τῶν τριῶν τούτων συνεταίρων καταβληθέντα κεφάλαια; (Ἀπ. 40 660 δρχ.)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

25.—*Ἡ ἀφαίρεσις εἶνε πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας ἐλαττώνομεν δοθέντα ἀριθμὸν κατὰ τόσας μονάδας, ὅσας ἔχει ἄλλος τις δοθεὶς ἀριθμός.*

Ὁ πρῶτος ἐκ τῶν δύο δοθέντων ἀριθμῶν, ὁ ὁποῖος πρέπει νὰ ἐλαττωθῇ, λέγεται *μειωτέος*· ὁ δεύτερος ὁ ὁποῖος δεικνύει κατὰ πόσας μονάδας πρέπει νὰ ἐλαττώσωμεν τὸν μειωτέον λέγεται *ἀφαιρετέος*, τὸ δὲ ἐξαγόμενον τῆς ἀφαιρέσεως *ὑπόλοιπον* ἢ *διαφορά*.

Σημεῖον τῆς ἀφαιρέσεως εἶνε τὸ —, τὸ ὁποῖον ἀπαγγέλλεται *πλὴν* καὶ γράφεται μεταξὺ τοῦ μειωτέου καὶ τοῦ ἀφαιρετέου (γραφομένου πρώτου τοῦ μειωτέου).

Οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι δίδονται εἰς τὴν ἀφαίρεσιν, δύνανται νὰ εἶνε ἢ συγκεκριμένοι ἢ ἀφῃρημένοι. Ἐὰν ὅμως εἶνε συγκεκριμένοι, πρέπει νὰ εἶνε καὶ ὁμοειδεῖς. Δὲν δυνάμεθα δηλ. νὰ ἀφαιρέσωμεν 3 *μῆλα* ἀπὸ 7 *βιβλία*.

Ἀφαίρεσις μονοψηφίου ἀριθμοῦ ἀπὸ ἄλλον οἱονδήποτε.

26.—Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ οἱονδήποτε ἀριθμὸν ἄλλον μονοψήφιον, ἀφαιροῦμεν ἀπὸ αὐτὸν ἀνὰ μίαν τὰς μονάδας τοῦ μονοψηφίου.

Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν π. χ. 3 ἀπὸ 8, ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὰς 8 μονάδας τοῦ μειωτέου πρῶτον 1 μονάδα καὶ μένουν 7· ἔπειτα ἀπὸ τὰς 7 αὐτὰς μονάδας ἀφαιροῦμεν ἄλλην 1 καὶ μένουν 6 καὶ τέλος ἀπὸ τὰς 6 ἀφαιροῦμεν καὶ τὴν τελευταίαν μονάδα τοῦ 3 καὶ μένουν 5. Ἡ ζητουμένη λοιπὸν διαφορὰ εἶνε 5, ἤτοι 8—3=5.

Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν 4 ἀπὸ 13, λέγομεν 13 πλὴν 1 μένουν 12, 12 πλὴν 1 μένουν 11, 11 πλὴν 1 μένουν 10, 10 πλὴν 1 μένουν 9. Εὕρομεν λοιπὸν ὅτι ἡ ζητουμένη διαφορὰ εἶνε 9.

Καὶ τέλος διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν 7 ἀπὸ τὸν 529, ἀφαιροῦμεν αὐτὸν μόνον ἀπὸ τὰς 9 μονάδας τοῦ 529 καὶ εὑρίσκομεν ὡς ὑπόλοιπον 522.

Σημείωσις. Ἡ ἀφαίρεσις μονοψηφίου ἀριθμοῦ ἀπὸ ἄλλον ἐκτελεῖται ἀμέσως ἀπὸ μνήμης.

Ἀφαίρεσις πολυψηφίου ἀπὸ πολυψήφιον.

27.—Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν πολυψήφιον ἀριθμὸν ἀπὸ ἄλλον πολυψήφιον, πρέπει κατὰ τὰ ἀνωτέρω νὰ ἀφαιρέσωμεν τὰς μονάδας τοῦ ἀφαιρετέου ἀνὰ μίαν ἀπὸ τὰς μονάδας τοῦ μειωτέου. Π. χ. διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν 124 ἀπὸ τὸν 476, πρέπει νὰ εἴπωμεν: 476 πλὴν 1 μένουν 475, 475 πλὴν 1 μένουν 474 καὶ οὕτω καθεξῆς, ἕως ὅτου ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν 476 πάσας τὰς 124 μονάδας τοῦ ἀφαιρετέου μίαν πρὸς μίαν.

Ἐπειδὴ ὅμως τοῦτο δὲν εἶνε εὔκολον, ὡς ἀπαιτοῦν χρόνον πολύν, μεταχειριζόμεθα ἄλλον τινὰ τρόπον, διὰ τοῦ ὁποίου ἡ ἀφαίρεσις γίνεται μετὰ μεγάλης εὐκολίας καὶ συντομίας. Ὁ τρόπος οὗτος στηρίζεται ἐπὶ τῶν ἑξῆς δύο ἀρχῶν:

α΄.) Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα ἀπὸ ἄλλον, δυνάμεθα νὰ ἀφαιρέσωμεν χωριστὰ τὰς μονάδας αὐτοῦ, τὰς δεκάδας, τὰς ἑκατοντάδας κ.τ.λ.

Π. χ. διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν 23 ἀπὸ 57, ἀφαιροῦμεν πρῶτον τὰς 3 μονάδας καὶ μένουν 54, ἔπειτα δὲ ἀπὸ τὸν 54 ἀφαιροῦμεν καὶ τὰς 2 δεκάδας. Τοιουτοτρόπως εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 34.

β΄.) Ἐὰν καὶ εἰς τὸν μειωτέον καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον προστεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμός, ἡ διαφορὰ δὲν μεταβάλλεται.

Ἀφαιροῦμεν π. χ. 5 ἀπὸ 9 καὶ εὑρίσκομεν διαφορὰν 4. Ἐὰν ἤδη καὶ εἰς τὸν 9 καὶ εἰς τὸν 5 προσθέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, οἷον τὸν 8, ὁ μὲν μειωτέος θὰ γείνῃ 17, ὁ δὲ ἀφαιρετέος 13, καὶ ἡ διαφορὰ αὐτῶν 17—13 θὰ εἶνε πάλιν 4.

Ἐπὶ τῶν δύο τούτων ἀρχῶν στηριζόμενοι δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν ὁποιανδήποτε ἀφαίρεσιν. Πρὸς τοῦτο γράφομεν πρῶτον τὸν ἀφαιρετέον ὑπὸ τὸν μειωτέον οὕτως ὥστε τὰ ψηφία τὰ δηλοῦντα τὸ πλῆθος τῶν μονάδων ἑκάστης τάξεως νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν κατακόρυφον στήλην· ἔπειτα δὲ ἀφαιροῦμεν κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον :

$$\text{Α΄.}\quad \begin{array}{r} 476 \\ 124 \\ \hline 352 \end{array}$$

Ἀφαιροῦμεν πρῶτον τὰς 4 μονάδας τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὰς 6 τοῦ μειωτέου καὶ λαμβάνομεν ὑπόλοιπον 2 μονάδας, τὰς ὁποίας γράφομεν εἰς τὴν θέσιν τῶν μονάδων· ἔπειτα ἀφαιροῦμεν τὰς 2 δεκάδας ἀπὸ τὰς 7 καὶ εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 5 δεκάδας, τὰς ὁποίας καὶ γράφομεν εἰς τὴν θέσιν τῶν δεκάδων· καὶ τέλος ἀφαιροῦμεν τὴν 1 ἑκατοντάδα ἀπὸ τὰς 4, τὰς δὲ 3 ἑκατοντάδας, τὰς ὁποίας λαμβάνομεν ὡς ὑπόλοιπον, γράφομεν εἰς τὴν θέσιν τῶν ἑκατοντάδων. Ἐπομένως ἡ διαφορὰ τῶν δύο δοθέντων ἀριθμῶν εὑρέθη ὅτι εἶνε 352.

$$\text{Β΄.}\quad \begin{array}{r} 1900 \\ 1821 \\ \hline 79 \end{array}$$

Μία μονὰς ἀπὸ 0 δὲν ἀφαιρεῖται. Διὰ νὰ γείνῃ δυνατὴ ἡ ἀφαίρεσις, προσθέτομεν εἰς τὸν μειωτέον μονάδας 10. Τότε ἡ 1 μονὰς τοῦ ἀφαιρετέου ἀφαιρεῖται ἀπὸ τὰς 10 τοῦ μειωτέου καὶ ἀφήνει ὑπόλοιπον 9 μονάδας. Ἀλλ' ἐπειδὴ εἰς τὸν μειωτέον προσεθέσαμεν 10 μονάδας, πρέπει, διὰ νὰ μὴ μεταβληθῇ τὸ ὑπόλοιπον, νὰ προσθέσωμεν ἄλλας 10 μονάδας καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον (*ἐδ.* 27, *β΄.*). Ἐπειδὴ ὅμως εὑρισκόμεθα ἤδη εἰς τὰς δεκάδας, τὰς 10 αὐτὰς μονάδας τρέπομεν εἰς 1 *δεκάδα*, τὴν ὁποίαν προσθέτομεν εἰς τὰς 2 δεκάδας τοῦ ἀφαιρετέου καὶ γίνονται 3. Ἔπειτα λέγομεν : 3 δεκάδες ἀπὸ 0 δὲν ἀφαιροῦνται. Διὰ τοῦτο εἰς τὸν μειωτέον προσθέτομεν 10 δεκάδας. Τότε ἀφαιροῦμεν 3 ἀπὸ 10 καὶ μᾶς μένουν 7 δεκάδες. Ἐπειδὴ ὅμως εἰς τὸν μειωτέον προσεθέσαμεν 10 δεκάδας, πρέπει ἄλλας τόσας νὰ προσθέσωμεν καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον, διὰ νὰ μὴ μεταβληθῇ ἡ διαφορά. Εὑρισκόμεθα ὅμως ἤδη εἰς τὰς ἑκατοντάδας καὶ δὲν δυνάμεθα εἰς αὐτὰς νὰ προσθέσωμεν δεκάδας. Διὰ τοῦτο τὰς 10 δεκάδας τρέπομεν εἰς 1 *ἑκατοντάδα*, τὴν ὁποίαν προσθέτομεν εἰς τὰς 8 τοῦ ἀφαιρετέου καὶ γίνονται 9 ἑκατοντάδες. Ταύτας ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὰς 9 τοῦ μειωτέου καὶ εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 0. Τέλος ἀφαιροῦμεν καὶ τὴν 1 χιλιάδα τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὴν 1 τοῦ μειωτέου καὶ εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 0 χιλιάδας. Ἑπομένως ἡ ζητουμένη διαφορὰ εἶνε 79.

Σημείωσις. Ἀφ' οὗ ἐννοήσωμεν καλῶς τὸν ἀνωτέρω ἐκτεθέντα τρόπον, τὴν αὐτὴν ἀφαίρεσιν δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν καὶ συντομώτερον ὡς ἑξῆς : *ἓν ἀπὸ δέκα* 9· *ἓν τὸ κρατούμενον καὶ δύο* 3, *ἀπὸ δέκα* 7· *ἓν κὸ κρατούμενον καὶ ὀκτὼ* 9, *ἀπὸ ἐννέα* 0· *ἓν ἀπὸ ἓν* 0.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον δύναται νὰ γείνῃ καὶ ἡ ἀφαίρεσις μονοψηφίου ἀπὸ πολυψήφιον. Π. χ :

$$\begin{array}{r} 3405 \\ 7 \\ \hline 3398 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 218 \\ 9 \\ \hline 209 \end{array}$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἑπόμενον κανόνα :

28.—*Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα ἀπὸ ἄλλον, γράφομεν πρῶτον τὸν ἀφαιρετέον ὑπὸ τὸν μειωτέον οὕτως ὥστε τὰ ψηφία τὰ δηλοῦντα τὸ πλῆθος τῶν μονάδων ἑκάστης τάξεως νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν κατακόρυφον στήλην. Ἔπειτα ἄγομεν ὑπ' αὐτοὺς γραμμὴν ὁριζοντίαν καὶ ἀφαιροῦμεν τὰς μονάδας τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὰς μονάδας τοῦ μειωτέου, τὰς δεκάδας ἀπὸ τὰς δεκάδας, τὰς ἑκατοντάδας ἀπὸ τὰς ἑκατοντάδας καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἐὰν δὲ τύχῃ ψηφίον τι τοῦ μειωτέου νὰ εἶνε μικρότερον ἀπὸ τὸ ἀντίστοιχον ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου, τότε αὐξάνομεν αὐτὸ κατὰ* 10. *Ἔπειτα ὅμως ἐρχόμενοι εἰς τὸ ἀκόλουθον πρὸς τὰ ἀριστερὰ ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου προσθέτομεν εἰς αὐτὸ* 1 *μονάδα τῆς τάξεώς του.*

Βάσανος τῆς ἀφαιρέσεως.

29. — Ἡ βάσανος τῆς ἀφαιρέσεως γίνεται ὡς ἑξῆς : *Προσθέτομεν τὸ ὑπόλοιπον καὶ τὸν ἀφαιρετέον, καὶ ἂν εὕρωμεν ὡς ἄθροισμα τὸν μειωτέον, ἡ πρᾶξις ἐγένετο ἄνευ λάθους.*

Προβλήματα.

1) Ἀποθήκη τις χωρεῖ 3135 ὀκάδας σίτου. Μία ἄλλη ἀποθήκη χωρεῖ 2879 ὀκ. σίτου. Πόσας ὀκάδας χωρεῖ ἡ πρώτη περισσότερον ἀπὸ τὴν δευτέραν ; ('Απ. 256 ὀκ.).

2) Ἠγόρασέ τις ἓν πλοῖον ἀντὶ 17 850 δρχ· κατόπιν διὰ νὰ τὸ ἐπιδιορθώσῃ ἐξώδευσε 2375 δρχ. Ἐὰν τὸ πωλήσῃ ἀντὶ 22 500 δρχ, πόσον θὰ κερδίσῃ ; ('Απ. 2275 δρχ.)

3) Ἐγεννήθη τις τῷ 1879· Ποίαν ἡλικίαν ἔχει σήμερον (1904); ('Απ. 25 ἐτῶν).

4) Κατὰ πόσον πρέπει νὰ αὐξηθῇ ὁ ἀριθμὸς 569, διὰ νὰ γείνῃ ἴσος πρὸς τὸν 3412 ; ('Απ. κατὰ 2843).

5) Δύο ἀριθμοὶ ἔχουσιν ἄθροισμα 2309. Ὁ εἷς ἐξ αὐτῶν εἶνε 1768. Ποῖος εἶνε ὁ ἕτερος ; ('Απ. 541).

6) Δύο ἀριθμοὶ ἔχουσι διαφορὰν 856. Ὁ μεγαλείτερος ἐξ αὐτῶν εἶνε 913. Ποῖος εἶνο ὁ ἕτερος ;

Λύσις. Ὅταν γνωρίζωμεν τὸν μειωτέον καὶ τὴν διαφοράν, ἀφαιροῦντες τὴν διαφορὰν ἀπὸ τὸν μειωτέον εὑρίσκομεν τὸν ἀφαιρετέον. Ἐπομένως ἐνταῦθα ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶνε 913—856=57.

7) Ἀπέθανέ τις τῷ 1894 εἰς ἡλικίαν 65 ἐτῶν. Πότε εἶχε γεννηθῇ ; ('Απ. τῷ 1829).

8) Ἐπλήρωσέ τις 2 879 δρχ. ἀπέναντι χρέους του ἐκ δραχμῶν 7 125. Πόσα ὀφείλει ἀκόμη ; ('Απ. 4 246 δρχ.)

9) Ἀγοράσας τις βούτυρον ἀξίας 43 δρχ. καὶ καφὲν ἀξίας 29 δρχ, ἔδωκεν εἰς τὸν παντοπώλην πρὸς πληρωμὴν ἓν χαρτονόμισμα τῶν 100 δρχ. Πόσα ὀφείλει νὰ ἐπιστρέψῃ εἰς αὐτὸν ὁ παντοπώλης ὡς ὑπόλοιπον ; ('Απ. 28 δρχ.).

10) Ὀπωροπώλης ἀγοράσας 1655 λεμόνια, μετεπώλησεν ἐξ αὐτῶν ἀμέσως τὰ 975. Πόσα ἔμειναν εἰς αὐτόν ; ('Απ. 680).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

30.— *Ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶνε πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας ἐπαναλαμβάνομεν δοθέντα ἀριθμὸν τόσας φοράς, ὅσας μονάδας ἔχει δεύτερος δοθεὶς ἀριθμός, σχηματίζοντες τοιουτοτρόπως ἐξ αὐτοῦ τρίτον τινὰ ἀριθμόν.*

Ὁ πρῶτος ἐκ τῶν δύο δοθέντων ἀριθμῶν λέγεται *πολλαπλασιαστέος*, ὁ δεύτερος *πολλαπλασιαστής*, τὸ δὲ ἐξαγόμενον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ *γινόμενον*.

Ὁ πολλαπλασιαστέος καὶ ὁ πολλαπλασιαστὴς μὲ ἓν ὄνομα λέγονται καὶ *παράγοντες* τοῦ γινομένου.

Σημεῖον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἶνε τὸ $\times$, τὸ ὁποῖον ἀπαγγέλλεται ἐπὶ καὶ γράφεται μεταξὺ τῶν δύο παραγόντων.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν **4** ἐπὶ **3** σημαίνει νὰ ἐπαναλάβωμεν τὸν **4** τρεῖς φοράς. τ. ἔ: $4\times3=4+4+4=12$· Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶνε ἀλλεπάλληλος πρόσθεσις ἀριθμοῦ τινος εἰς τὸν ἑαυτόν του.

Πολλαπλάσιον ἀριθμοῦ τινος λέγεται ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος γίνεται ἐξ αὐτοῦ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Π. χ. ὁ **12** εἶνε πολλαπλάσιον τοῦ **3**, ὁ **32** τοῦ **8** κ.τ.λ.

Πολλαπλασιασμὸς μονοψηφίου ἀριθμοῦ ἐπὶ μονοψήφιον.

31.—Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν μονοψήφιον ἀριθμὸν ἐπὶ ἄλλον μονοψήφιον, ἐπαναλαμβάνομεν κατὰ τὰ ἀνωτέρω τὸν μονοψήφιον πολλαπλασιαστέον τόσας φοράς, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ μονοψήφιος πολλαπλασιαστὴς καὶ ἀντὶ πολλαπλασιασμοῦ κάμνομεν τότε πρόσθεσιν. Π. χ. $7\times3=7+7+7=21$.

Τὰ γινόμενα πάντων τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν, ἀνὰ δύο λαμβανομένων, εὑρίσκονται κατατεταγμένα ἐν τῷ πίνακι τῷ λεγομένῳ *Πυθαγορείῳ*, ἐκ τοῦ ὀνόματος τοῦ Πυθαγόρου, ὅστις ἐπενόησεν αὐτόν.

Τὸν πίνακα τοῦτον σχηματίζομεν ὡς ἑξῆς :

Εἰς μίαν ὁριζοντίαν σειρὰν γράφομεν τοὺς ἀριθμοὺς ἀπὸ τὸ **1** ἕως τὸ **9**. Ἔπειτα εἰς δευτέραν ὁριζοντίαν σειρὰν γράφομεν τὰ διπλάσια τῶν ἀριθμῶν τῆς πρώτης σειρᾶς, εἰς τρίτην ὁριζοντίαν σειρὰν τὰ τριπλάσια, εἰς τετάρτην τὰ τετραπλάσια, εἰς πέμπτην τὰ πενταπλάσια καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρι τῆς ἐνάτης σειρᾶς, ἡ ὁποία θὰ περιέχῃ τὰ ἐννεαπλάσια τῶν ἀριθμῶν τῆς πρώτης σειρᾶς. Τοιουτοτρόπως καταρτίζεται ὁ κατωτέρω πίναξ :

Πυθαγόρειος πίναξ

1	2	3	4	5	6	7	**8**	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	**32**	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Εἰς τὸν πίνακα τοῦτον παρατηροῦμεν ὅτι καὶ ἡ πρώτη ὁριζοντία σειρὰ καὶ ἡ πρώτη κατακόρυφος στήλη περιέχουσιν ἑκάστη τοὺς ἀριθμοὺς ἀπὸ τὸ **1** ἕως τὸ **9**. Ἐὰν λοιπὸν μᾶς ζητηθῇ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον δύο ὁποιωνδήποτε μονοψηφίων ἀριθμῶν, π. χ. **8×4**, εὑρίσκομεν τὸν μὲν εἰς τὴν πρώτην ὁριζοντίαν σειράν, τὸν δὲ εἰς τὴν πρώτην κατακόρυφον στήλην· καὶ ἐκ μὲν τοῦ πρώτου ἄγομεν γραμμὴν κατακόρυφον, ἐκ δὲ τοῦ δευτέρου ὁριζοντίαν. Ἐκεῖ ὅπου αἱ δύο αὗται γραμμαὶ θὰ συναντηθῶσι, θὰ εὑρίσκηται τὸ ζητούμενον γινόμενον **32** τῶν δύο δοθέντων ἀριθμῶν.

Παρατήρησις. Πάντα τὰ γινόμενα τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν ἀνὰ δύο, τὰ ὁποῖα περιέχονται ἐν τῷ ἀνωτέρω πίνακι, πρέπει νὰ γνωρίζωμεν ἀπὸ μνήμης· διότι, ὅπως κατωτέρω θέλομεν ἴδει, πᾶς πολλαπλασιασμὸς ἀνάγεται εἰς πολλαπλασιασμὸν μονοψηφίου ἐπὶ μονοψήφιον.

Σημείωσις α'. Πᾶς ἀριθμὸς πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὴν μονάδα δίδει ὡς γινόμενον τὸν ἑαυτόν του. Π.χ. $\mathbf{9\times1=9}$. Διότι κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ 9×1 σημαίνει νὰ ληφθῇ ὁ 9 ἅπαξ.

Σημείωσις β'. Τὸ **0** *πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ οἱονδήποτε ἀριθμὸν δίδει γινόμενον* 0. Π. χ. $\mathbf{0\times3=0}$. Διότι κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ $0\times3=0+0+0=0$.

Πολλαπλασιασμὸς πολυψηφίου ἀριθμοῦ ἐπὶ μονοψήφιον.

32.— Ἂν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν π.χ. τὸν **482** ἐπὶ **3**, πρέπει κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ νὰ ἐπαναλάβωμεν τὸν 482 τρεῖς φοράς, νὰ κάμωμεν δηλ. τὴν ἑξῆς πρόσθεσιν :

$$\begin{array}{r}\mathbf{482}\\ \mathbf{482}\\ \underline{\mathbf{482}}\end{array}$$

Ἀλλὰ τότε βλέπομεν ὅτι καὶ αἱ 2 μονάδες τοῦ ἀριθμοῦ 482 ἐπαναλαμβάνονται τρεῖς φορὰς ἤτοι πολλαπλασιάζονται ἐπὶ 3, καὶ αἱ 8 δεκάδες καὶ αἱ 4 ἑκατοντάδες ἐπίσης. Ἐπειδὴ λοιπὸν οἱ τρεῖς οὗτοι μερικοὶ πολλαπλασιασμοὶ τῶν 2 μον. $\times$ 3, 8 δεκ. $\times$ 3 καὶ 4 ἑκατοντ. $\times$ 3 εἶνε πολλαπλασιασμοὶ μονοψηφίου ἐπὶ μονοψήφιον, τοὺς ὁποίους προηγουμένως ἐμάθομεν νὰ ἐκτελῶμεν, διὰ τοῦτο γράφομεν τὸν **3** ὑπὸ τὸν **482** καὶ ἀφ' οὗ σύρωμεν ὑπ' αὐτοὺς ὁριζοντίαν γραμμὴν

$$\begin{array}{r}\mathbf{482}\\ \underline{\mathbf{3}}\end{array}$$

ἀρχίζομεν τὴν πρᾶξιν ὡς ἑξῆς :

Πολλαπλασιάζομεν πρῶτον τὰς **2** μονάδας τοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ **3** καὶ εὑρίσκομεν **6** *μονάδας*, τὰς ὁποίας γράφομεν ὑπὸ τὴν ὁριζοντίαν γραμμὴν ὡς μονάδας τοῦ γινομένου. Κατόπιν πολλαπλασιάζομεν τὰς **8** δεκάδας ἐπὶ **3** καὶ εὑρίσκομεν **24** δεκάδας, ἤτοι **4** δεκάδας, τὰς ὁποίας γράφομεν ὡς δεκάδας τοῦ γινομένου, καὶ 2 ἑκατοντάδας τὰς ὁποίας κρατοῦμεν διὰ νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸ γινόμενον τῶν ἑκατοντάδων τοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ τὸν μονοψήφιον πολλαπλασιαστήν. Τέλος πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰς 4 ἑκατοντάδας ἐπὶ 3, εἰς δὲ τὰς 12 ἑκατοντάδας, τὰς ὁποίας εὑρίσκομεν, προσθέτομεν καὶ τὰς 2, τὰς ὁποίας ἔχομεν πρὸς τοῦτο κρατήσει καὶ γίνονται ἐν ὅλῳ 14 ἑκατοντάδες. Ταύτας γράφομεν τότε πρὸς τὰ ἀριστερὰ τῶν δεκάδων καὶ τοιουτοτρόπως εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον γινόμενον 1446.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἑπόμενον κανόνα :

33.—*Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν πολυψήφιον ἀριθμὸν ἐπὶ μονοψήφιον, γράφομεν τὸν μονοψήφιον ὑπὸ τὰς μονάδας τοῦ πολυψηφίου, ἔπειτα ἄγομεν ὑπ' αὐτοὺς ὁριζοντίαν γραμμὴν καὶ πολλαπλασιάζομεν ἕκαστον ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστέου χωριστὰ ἐπὶ τὸν μονοψήφιον πολλαπλασιαστὴν ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ ψηφίου τῶν ἁπλῶν μονάδων. Καὶ ἂν μὲν τὸ γινόμενον τῶν μονάδων δὲν ὑπερβαίνῃ τὸν* 9, *γράφομεν αὐτὸ εἰς τὴν στήλην τῶν μονάδων· ἐὰν ὅμως ὑπερβαίνῃ τὸν* 9, *τότε χωρίζομεν αὐτὸ εἰς μονάδας καὶ δεκάδας, καὶ τὰς μὲν μονάδας γράφομεν εἰς τὴν στήλην τῶν μονάδων, τὰς δὲ δεκάδας προσθέτομεν εἰς τὸ γινόμενον τῶν δεκάδων τοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ τὸν μονοψήφιον πολλαπλασιαστήν, καὶ προχωροῦμεν τοιουτοτρόπως μέχρι τοῦ τελευταίου πρὸς τὰ ἀριστερὰ ψηφίου.*

Συντομίαι τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

34.—Εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν εἶνε δυνατὸν νὰ γείνωσιν αἱ ἑξῆς συντομίαι :

1*η) Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμόν τινα ἐπὶ* 10, *ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν εἰς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ ἓν μηδενικόν· διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν ἐπὶ* 100, *γράφομεν εἰς τὰ δεξιά του δύο μηδενικά· ἐπὶ* 1000, *γράφομεν τρία μηδενικά, καὶ οὕτω καθεξῆς.*

Π. χ. $2537 \times 10 = 25\,370$.

Διότι διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν 2537 ἐπὶ 10, πρέπει προφανῶς νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 10 πάντα τὰ μέρη του, δηλ. καὶ τὰς 7 μονάδας του, καὶ τὰς 3 δεκάδας, καὶ τὰς 5 ἑκατοντάδας καὶ τὰς 2 χιλιάδας. Ἀλλ' ὅταν αἱ 7 μονάδες πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ 10, γίνονται 70 μονάδες ἤτοι 7 δεκάδες· ἐπίσης ὅταν αἱ 3 δεκάδες τοῦ ἀριθμοῦ πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ 10, θὰ γείνωσι 30 δεκάδες ἤτοι 3 *ἑκατοντάδες*· κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον καὶ αἱ 5 ἑκατοντάδες πολλαπλασιαζόμεναι ἐπὶ 10 γίνονται 50 ἑκατοντάδες ἤτοι 5 *χιλιάδες*, καὶ τέλος αἱ 2 χιλιάδες δεκαπλασιαζόμεναι καὶ αὐταὶ γίνονται 20 χιλιάδες ἤτοι 2 *δεκάδες χιλιάδων*. Ταῦτα πάντα ὅμως ἐπιτυγχάνονται ἀμέσως, ἐὰν εἰς τὸ τέλος τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ γράψωμεν ἓν μηδενικόν, τὸ ὁποῖον νὰ καταλάβῃ τὴν θέσιν τῶν μονάδων τοῦ ἀριθμοῦ.

2α) *Ὅταν ὁ εἷς ἐκ τῶν παραγόντων ἢ καὶ ἀμφότεροι λήγωσιν εἰς μηδενικά, τότε εὑρίσκομεν τὸ γινόμενον μόνον τῶν ἀριθμῶν οἵτινες ἀπομένουσι μετὰ τὴν ἀποκοπὴν τῶν πρὸς τὸ τέλος μηδενικῶν, πρὸς τὰ δεξιὰ δὲ τοῦ γινομένου τούτου γράφομεν καὶ τὰ μηδενικά, τὰ ὁποῖα ἀπεκόψαμεν.*

Π. χ. διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν **623** ἐπὶ **9000**, πολλαπλασιάζομεν τὸν **623** ἐπὶ **9**, καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν **5607** γράφομεν τὰ τρία μηδενικὰ τοῦ **9000**. Τοιουτοτρόπως εὑρίσκομεν ὡς γινόμενον τῶν δύο δοθέντων ἀριθμῶν **5 607 000**.

Ἐπίσης διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν **700×32 000**, εὑρίσκομεν τὸ γινόμενον τοῦ **32** ἐπὶ **7**, καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ **(224)** γράφομεν τὰ πέντε μηδενικά· ὥστε τὸ ζητούμενον γινόμενον εἶνε **22 400 000**.

Πολλαπλασιασμὸς πολυψηφίου ἐπὶ πολυψήφον.

35.—Νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ **3021** ἐπὶ **476**.

Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν τὸν **3021** πρῶτον ἐπὶ **6**

$$\begin{array}{r} 3021 \\ 6 \\ \hline 18\,126, \end{array}$$

ἔπειτα ἐπὶ **70** καὶ τέλος ἐπὶ **400**.

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ὅμως τὸν **3021** ἐπὶ **70**, ἀρκεῖ, κατὰ τὰς ἀνωτέρω συντομίας, νὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν μόνον ἐπὶ **7** καὶ εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ γινομένου νὰ γράψωμεν ἓν μηδενικόν.

$$\begin{array}{r} 3021 \\ 70 \\ \hline 211\,470 \end{array}$$

Ἐπίσης διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν **3021** ἐπὶ **400**, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν ἐπὶ **4** καὶ εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ γινομένου νὰ γράψωμεν δύο μηδενικά.

$$\begin{array}{r} 3021 \\ 400 \\ \hline 1\,208\,400 \end{array}$$

Ἑπομένως οἱ τρεῖς οὗτοι μερικοὶ πολλαπλασιασμοί, τοὺς ὁποίους πρέπει νὰ ἐκτελέσωμεν, ἀνάγονται εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν πολυψηφίου ἐπὶ μονοψήφιον.

Τέλος προσθέτοντες τὰ τρία προκύπτοντα μερικὰ γινόμενα εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον γινόμενον τῶν δύο δοθέντων ἀριθμῶν

$$\begin{array}{r} 18\,126 \\ 211\,470 \\ 1\,208\,400 \\ \hline 1\,437\,996 \end{array}$$

Ἐνταῦθα ὅμως δυνάμεθα νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι τὰ μηδενικά, τὰ ὁποῖα ἐγράφησαν εἰς τὸ τέλος τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου μερικοῦ γινομένου, εἶνε δυνατὸν καὶ νὰ παραλειφθῶσιν ἄνευ ἀλλοιώσεώς τινος τοῦ ἀποτελέσματος. Ἀρκεῖ ἡ σχετικὴ θέσις τῶν ἄλλων ψηφίων νὰ διατηρηθῇ ἡ αὐτή, φυλασσομένης κενῆς τῆς θέσεως τῶν μηδενικῶν. Τότε ἡ ἀνωτέρω πρᾶξις δύναται νὰ γραφῇ ὡς ἑξῆς:

$$\begin{array}{r} 3021 \\ 476 \\ \hline 18\,126 \\ 211\,47 \\ 1\,208\,4 \\ \hline 1\,437\,996 \end{array}$$

Ὁ δὲ πολλαπλασιασμὸς τοῦ **3021** ἐπὶ **476** ἀνάγεται τοιουτοτρόπως εἰς πολλαπλασιασμὸν τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐφ' ἕκαστον ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἑξῆς γενικὸν κανόνα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ:

36.—*Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμόν τινα ἐπὶ ἄλλον, γράφομεν τὸν ἕνα ὑπὸ τὸν ἄλλον οὕτως ὥστε τὰ ψηφία τὰ δηλοῦντα τὸ πλῆθος τῶν μονάδων ἑκάστης τάξεως νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν* *αὐτὴν κατακόρυφον στήλην, ἄγομεν ὑπ' αὐτοὺς γραμμὴν ὁριζοντίαν καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸν πρῶτον ἐπὶ ἕκαστον ψηφίον τοῦ δευτέρου κατὰ σειρὰν ἀρχόμενοι ἐκ δεξιῶν. Τοιουτοτρόπως εὑρίσκομεν τόσα μερικὰ γινόμενα, ὅσα ψηφία ἔχει ὁ δεύτερος ἐκ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν. Τὰ διάφορα ταῦτα μερικὰ γινόμενα γράφομεν τὸ ἓν ὑπὸ τὸ ἄλλο οὕτως ὥστε τὸ τελευταῖον πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφίον ἑκάστου ἐξ αὐτῶν νὰ εὑρίσκηται ὑπὸ τὸ ψηφίον ἐκεῖνο τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ἐπὶ τὸ ὁποῖον ἐπολλαπλασιάσθη ὁ πολλαπλασιαστέος. Τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν μερικῶν γινομένων θὰ εἶνε τὸ ζητούμενον γινόμενον.*

Σημείωσις. Ὡς πολλασιαστὴν θέτομεν ἐκεῖνον ἐκ τῶν δύο δοθέντων ἀριθμῶν, ὁ ὁποῖος ἔχει τὰ ὀλιγώτερα ψηφία. Διότι τοιουτοτρόπως θὰ ἔχωμεν νὰ εὕρωμεν ὀλιγώτερα μερικὰ γινόμενα (*).

Βάσανος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

37. — Διὰ νὰ δοκιμάσωμεν ἂν π. χ. ὁ ἀνωτέρω ἐκτελεσθεὶς πολλαπλασιασμὸς τοῦ 3021 ἐπὶ 476 ἔγεινεν ἄνευ λάθους, κάμνομεν ὡς ἑξῆς :

Προσθέτομεν τὰ ψηφία τοῦ πολλαπλασιαστέου καὶ εὑρίσκομεν μονοψήφιον ἄθροισμα **6**, τὸ ὁποῖον γράφομεν εἰς μίαν ἐκ τῶν ἄνω γωνιῶν ἑνὸς σταυροῦ $\begin{array}{c|c} 6 & \\ \hline & \end{array}$ (**).

Ἔπειτα προσθέτομεν καὶ τὰ ψηφία τοῦ πολλαπλασιαστοῦ καὶ εὑρίσκομεν ἄθροισμα **17**. Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τοῦτο δὲν εἶνε ἀριθμὸς μονοψήφιος, προσθέτομεν καὶ αὐτοῦ τὰ ψηφία, καὶ τὸν οὕτω προκύπτοντα μονοψήφιον ἀριθμὸν **8** γράφομεν εἰς τὴν ἑτέραν ἐκ τῶν ἄνω γωνιῶν τοῦ σταυροῦ $\begin{array}{c|c} 6 & 8 \\ \hline & \end{array}$.

Τοὺς δύο τούτους ἀριθμοὺς πολλαπλασιάζομεν, καὶ τοῦ γινομένου

(*) Ἐν ἐδαφ. 39 α'. θέλομεν μάθει ὅτι τὸ γινόμενον δύο παραγόντων εἶνε τὸ αὐτό, ὁποιοσδήποτε ἐκ τῶν δύο καὶ ἂν γραφῇ ὡς πολλαπλασιαστής.

(**) Ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τοῦ πολλαπλασιαστέου τύχῃ νὰ μὴ εἶνε μονοψήφιος ἀριθμός, προσθέτομεν καὶ αὐτοῦ τὰ ψηφία, καὶ τοῦτο κάμνομεν ἕως ὅτου εὕρωμεν ἄθροισμα μονοψήφιον.

αὐτῶν **48** (ἐπειδὴ τοῦτο δὲν εἶνε μονοψήφιον) προσθέτομεν τὰ ψηφία, τὸ αὐτὸ δὲ πράττομεν καὶ εἰς τὸ τότε προκῦπτον ἄθροισμα **12**, ὁπότε τέλος λαμβάνομεν μονοψήφιον ἄθροισμα **3**, το ὁποῖον γράφομεν εἰς μίαν ἐκ τῶν κάτω γωνιῶν τοῦ σταυροῦ $\begin{array}{c|c} 6 & 8 \\ \hline 3 & \end{array}$.

Τέλος προσθέτομεν καὶ τὰ ψηφία τοῦ γινομένου, καὶ τοῦ προκύπτοντος ἀθροίσματος **39**, ἐπειδὴ τοῦτο δέν εἶνε ἀριθμὸς μονοψήφιος, προσθέτομεν ἐπίσης τὰ ψηφία, τὸ αὐτὸ δὲ πράττομεν καὶ εἰς τὸ τότε προκῦπτον ἄθροισμα **12**, ὁπότε λαμβάνομεν μονοψήφιον ἄθροισμα **3**, τὸ ὁποῖον γράφομεν εἰς τὴν ἑτέραν ἐκ τῶν κάτω γωνιῶν τοῦ σταυροῦ $\begin{array}{c|c} 6 & 8 \\ \hline 3 & 3 \end{array}$.

Ἤδη ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ οἱ γεγραμμένοι εἰς τὰς δύο κάτω γωνίας τοῦ σταυροῦ εἶνε οἱ αὐτοί, συμπεραίνομεν ὅτι ἡ πρᾶξις ἐγένετο (πιθανῶς) ἄνευ λάθους.

Σημείωσις. Ἐκτὸς τῆς ἀνωτέρω βασάνου, ἥτις δὲν εἶνε πάντοτε ἀσφαλής, δυνάμεθα νὰ μεταχειρισθῶμεν καὶ τὴν ἑξῆς :

Γράφομεν τὸν πολλαπλασιαστὴν ὡς πολλαπλασιαστέον καὶ τὸν πολλαπλασιαστέον ὡς πολλαπλασιαστὴν καὶ ἐπαναλαμβάνομεν τὸν πολλαπλασιασμόν. Ἐὰν καὶ πάλιν εὕρωμεν τὸ αὐτὸ γινόμενον (ὅρα *ἐδ. 39 α'.*), ἡ πρᾶξις ἐγένετο ἄνευ λάθους.

Γινόμενον πολλῶν παραγόντων.

38.—*Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων, εὑρίσκομεν πρῶτον τὸ γινόμενον δύο ἐξ αὐτῶν, τοῦτο κατόπιν πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ ἕνα ἄλλον, τὸ νέον γινόμενον ἐπὶ ἄλλον καὶ οὕτω καθεξῆς, ἕως ὅτου λάβωμεν πάντας.*

Διὰ νὰ εὕρωμεν π. χ. τὸ γινόμενον τῶν ἑξῆς παραγόντων.

$$3 \times 4 \times 2 \times 5 \times 10,$$

πολλαπλασιάζομεν 3 ἐπὶ 4 καὶ εὑρίσκομεν γινόμενον 12, ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν τὸν 12 ἐπὶ 2 καὶ εὑρίσκομεν 24, ἔπειτα τὸν 24 ἐπὶ 5 καὶ εὑρίσκομεν 120, καὶ τέλος πολλαπλασιαζομεν τὸν 120 ἐπὶ 10 καὶ εὑρίσκομεν 1200. Τὸ γινόμενον λοιπὸν τῶν δοθέντων ἀριθμῶν **3, 4, 2, 5** καὶ **10** εἶνε **1200**.

Γενικαὶ ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

39. — Ὁ πολλαπλασιασμὸς ἔχει τὰς ἑξῆς γενικὰς ἰδιότητας:

α΄.) *Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν μεταβληθῇ ἡ τάξις τῶν παραγόντων· ἐὰν δηλ. ὁ πολλαπλασιαστέος γείνῃ πολλαπλασιαστὴς καὶ ὁ πολλαπλασιαστὴς πολλαπλασιαστέος.*

Τ. ἔ. $5\times6=6\times5$.

Διότι κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἔχομεν

$$5\times6=5+5+5+5+5+5=30.$$

καὶ $6\times5=6+6+6+6+6=30$.

Σημείωσις. Καὶ ὁσωνδήποτε παραγόντων τὸ γινόμενον δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν ἀλλαχθῇ ἡ τάξις αὐτῶν.

Π. χ. $3\times4\times2\times5=2\times3\times5\times4$.

β΄.) *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἄθροισμα ἐπὶ ἀριθμόν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕκαστον ἐκ τῶν προσθετέων τοῦ ἀθροίσματος ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ μερικὰ γινόμενα.*

Ἐὰν π. χ. ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἄθροισμα $2+7+8$ ἐπὶ 5, ἢ προσθέτομεν πρῶτον τοὺς δοθέντας προσθετέους καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν 17 πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 5, ἢ πολλαπλασιάζομεν χωριστὰ πρῶτον τὸν 2 ἐπὶ 5, ἔπειτα τὸν 7 ἐπὶ 5 καὶ ἔπειτα τὸν 8 ἐπὶ 5, καὶ προσθέτομεν τέλος τὰ τρία ταῦτα μερικὰ γινόμενα.

Δηλ. $17\times5 = 85$

καὶ

$$\begin{aligned} 2\times5 &= 10\\ 7\times5 &= 35\\ 8\times5 &= 40\\ \hline &\ 85 \end{aligned}$$

Σημείωσις. Τὸ γινόμενον τοῦ ἀθροίσματος $2+7+8$ ἐπὶ 5 παρίσταται οὕτω $(2+7+8)\times5$. Ἐπομένως ἡ ἀνωτέρω ἰδιότης ἐκφράζεται διὰ τῆς ἑξῆς ἰσότητος:

$$(2+7+8)\times5=(2\times5)+(7\times5)+(8\times5).$$

γ΄.) *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν γινόμενον ἐπὶ ἀριθμόν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕνα ἐκ τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον.*

Π. χ. διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ γινόμενον $4\times5\times3\times2$ ἐπὶ

6, ἢ σχηματίζομεν τὸ γινόμενον τῶν δοθέντων παραγόντων καὶ τοῦτο (120) πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 6, ὁπότε εὑρίσκομεν γινόμενον **720**, ἢ πολλαπλασιάζομεν ἕνα παράγοντα οἷον τὸν 5 ἐπὶ 6. Κατὰ τὸν δεύτερον τοῦτον τρόπον θὰ ἔχωμεν ὡς γινόμενον $4\times30\times3\times2$ ἤτοι πάλιν **720**.

Περὶ δυνάμεων.

40.—*Δύναμις λέγεται γινόμενον παραγόντων ἴσων.*

Δύναμις ἀριθμοῦ τινος λέγεται γινόμενον παραγόντων, ἴσων πρὸς τὸν ἀριθμὸν τοῦτον. Π. χ. τὸ γινόμενον $4\times4\times4\times4\times4$ εἶνε δύναμις τοῦ **4**.

Ἐὰν οἱ παράγοντες εἶνε δύο, τὸ γινόμενον λέγεται *δευτέρα δύναμις* ἢ *τετράγωνον*· ἐὰν οἱ παράγοντες εἶνε τρεῖς, λέγεται *τρίτη δύναμις* ἢ *κύβος*· ἐὰν τέσσαρες, *τετάρτη δύναμις* καὶ οὕτω καθεξῆς.

Π. χ. 7×7 λέγεται *δευτέρα δύναμις* ἢ *τετράγωνον* τοῦ **7**, $9\times9\times9$ *τρίτη δύναμις* ἢ *κύβος* τοῦ **9**, $6\times6\times6\times6$ *τετάρτη δύναμις* τοῦ **6** κ.τ.λ.

Τὰς δυνάμεις, ἀντὶ νὰ τὰς γράφωμεν ἀνεπτυγμένας ὡς ἀνωτέρω, συμπτύσσομεν συνήθως ὡς ἑξῆς: Γράφομεν μόνον ἕνα παράγοντα καὶ εἰς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ καὶ ὀλίγον ἀνωτέρω τὸν ἀριθμόν, ὅστις δεικνύει πόσοι εἶνε οἱ παράγοντες. Ὁ ἀριθμὸς οὗτος καλεῖται *ἐκθέτης*.

Τοιουτοτρόπως ἀντὶ νὰ γράφωμεν $2\times2\times2\times2\times2$, γράφομεν συντόμως 2^5, τὸ ὁποῖον ἀπαγγέλλεται *δύο εἰς τὴν πέμπτην δύναμιν* ἢ *πέμπτη δύναμις τοῦ* **2**.

Ποῖα προβλήματα λύονται δι' ἑνὸς πολλαπλασιασμοῦ.

41.—Δι' ἑνὸς πολλαπλασιασμοῦ λύονται ἐκεῖνα τὰ προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα μᾶς δίδεται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος καὶ μᾶς ζητεῖται ἡ τιμὴ τῶν πολλῶν. Τοιοῦτο εἶνε π. χ. τὸ ἑξῆς πρόβλημα:

Ὁ 1 *πῆχυς ἑνὸς ὑφάσματος ἀξίζει* 25 *λεπτά· πόσον ἀξίζουν* 3 *πήχεις ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος;*

πρὸς λύσιν τοῦ ὁποίου σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς: *Ἀφ' οὗ ὁ* 1 *πῆχυς τιμᾶται* 25 *λεπ, οἱ* 2 *πήχεις θὰ τιμῶνται δύο φορὰς* 25, *καὶ οἱ* 3 *πήχεις τρεῖς φορὰς* 25, *ἤτοι* $25\times3=75$ *λεπ.*

Παρατήρησις. Τὸ γινόμενον εἶνε πάντοτε ὁμοειδὲς μὲ τὸν πολλαπλασιαστέον, διότι γίνεται ἐξ αὐτοῦ, πολλάκις ἐπαναλαμβανομένου. Οὕτω εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα τὸ γινόμενον 75 σημαίνει λεπτά, διότι ἔγεινεν ἐκ τοῦ πολλαπλασιαστέου 25 λεπ, τρὶς ἐπαναληφθέντος. Ὁ δὲ πολλαπλασιαστὴς θεωρεῖται ὡς ἀριθμὸς ἀφῃρημένος, δεικνύων μόνον ποσάκις πρέπει νὰ ἐπαναληφθῇ ὁ πολλαπλασιαστέος.

Προβλήματα

1) Πατήρ τις διέταξεν ἐν τῇ διαθήκῃ του νὰ μερισθῇ ἡ περιουσία του μεταξὺ τῶν τριῶν υἱῶν του, οὕτως ὥστε ὁ μεγαλείτερος νὰ λάβῃ τριπλάσια τοῦ δευτέρου, ὁ δὲ δεύτερος διπλάσια τοῦ μικροτέρου. Ὁ μικρότερος ἔλαβε 12 450 δρχ. Πόσας ἔλαβεν ἕκαστος ἐκ τῶν δύο ἄλλων καὶ πόση ἦτο ἡ περιουσία τοῦ πατρός ;

('Απ. ὁ β'. ἔλαβεν 24 900 δρχ, ὁ α'. 74 700 δρχ, ἡ δὲ περιουσία ἀπετελεῖτο ἐξ 112 050 δρχ).

2) Ἠγοράσαμεν 38 ᾠὰ πρὸς 8 λεπτὰ τὸ ἕν. Πόσον θὰ πληρώσωμεν ; ('Απ. 304 λεπ. ἤτοι 3 δρχ. καὶ 4 λεπ.).

3) 193 δραχμαὶ πόσα λεπτὰ κάμνουσι ; ('Απ. 19 300 λεπ.).

4) Ἀγοράσας τις 48 ὀκ. σίτου πρὸς 37 λεπ. τὴν ὀκᾶν καὶ 25 ὀκ. ἅλατος πρὸς 15 λεπτὰ ἐπλήρωσεν ἀπέναντι τῆς ἀξίας αὐτῶν δραχμὰς 17. Πόσα χρεωστεῖ νὰ πληρώσῃ ἀκόμη ;

('Απ. 451 λεπ. ἤτοι 4 δρχ. καὶ 51 λεπ.).

5) Ὑπάλληλός τις λαμβάνει μισθὸν 146 δρχ. τὸν μῆνα. Πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ ἐν ὅλῳ, ἐὰν μείνῃ ἐν τῇ ὑπηρεσίᾳ ταύτῃ ἐπὶ 5 ἔτη ; ('Απ. 8760).

6) Ἔχει τις τρεῖς οἰκίας, τὰς ὁποίας ἔχει ἐνοικιάσει. Καὶ ἀπὸ μὲν τὴν πρώτην λαμβάνει ἐνοίκιον 75 δρχ. τὸν μῆνα, ἀπὸ τὴν δευτέραν 110, καὶ ἀπὸ τὴν τρίτην 145. Πόσας δραχμὰς εἰσπράττει ἐν ὅλῳ κατ' ἔτος ; ('Απ. 3 960).

7) Μία βιβλιοθήκη ἔχει 7 σειρὰς βιβλίων. Ἐκ τούτων αἱ μὲν δύο ἀνώτεραι ἔχουσιν ἀπὸ 19 τόμους ἑκάστη, ἡ τρίτη 27 καὶ ἑκάστη ἐκ τῶν ἄλλων ἀπὸ 36. Πόσους τόμους ἔχει ἐν συνόλῳ ἡ βιβλιοθήκη αὕτη ; Καὶ ἂν μόνον οἱ τόμοι τῶν τριῶν κατωτέρων σειρῶν εἶνε δεδεμένοι, πόσοι εἶνε οἱ ἄδετοι ;

('Απ. Ἡ βιβλιοθήκη αὔτη ἔχει ἐν συνόλῳ 209 τόμους, ἐξ ὧν οἱ μὲν 108 εἶνε δεδεμένοι, οἱ δὲ λοιποὶ 101 ἄδετοι).

8) Ἐὰν παρατηρῶμεν μακρόθεν τηλεβόλον, τὸ ὁποῖον ἐκπυρσοκροτεῖ, καὶ ἀπὸ τῆς στιγμῆς καθ' ἣν ἴδωμεν τὴν λάμψιν μέχρι τῆς στιγμῆς καθ' ἣν θὰ ἀκούσωμεν τὸν κρότον, παρέλθωσι 17 δεύτερα λεπτὰ τῆς ὥρας, πόσον μακρὰν τοῦ τηλεβόλου εὑρισκόμεθα ; (Εἶνε γνωστὸν ὅτι ὁ μὲν ἦχος διατρέχει 340 μέτρα εἰς ἕκαστον δευτερόλεπτον, τὸ δὲ φῶς τρέχει μετὰ παμμεγίστης ταχύτητος καὶ ἐπομένως δυνάμεθα νὰ παραδεχθῶμεν ὅτι ἀπὸ τοῦ τηλεβόλου μέχρις ἡμῶν ἔρχεται αὐτοστιγμεί). ('Απ. 5780 μ.).

9) Ἠγόρασέ τις 67 ὀκ. ἐλαίου πρὸς 135 λεπ. τὴν ὀκᾶν. Πόσα ὀφείλει νὰ πληρώσῃ ; ('Απ. 90 δρχ. καὶ 45 λεπ.).

10) Οἰνοπώλης ἠγόρασε 47 βαρέλια πλήρη οἴνου πρὸς 79 δρχ. ἕκαστον. Ἐπλήρωσε δὲ καὶ 2 δρχ. διὰ τὴν μεταφορὰν ἑκάστου βαρελίου. Ἕκαστον βαρέλιον περιεῖχε 145 ὀκ. οἴνου, τὰς ὁποίας μετεπώλησε πρὸς 65 λεπ. ἑκάστην. Πόσον ἐκέρδισεν ἐκ τῆς μεταπωλήσεως ὅλου τοῦ οἴνου ; ('Απ. 622 δρχ. καὶ 75 λεπ.).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

42. — *Ἡ διαίρεσις εἶνε πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας μοιράζομεν ἀριθμόν τινα εἰς ἴσα μέρη.*

Ἁπλούστατα παραδείγματα διαιρέσεως ἔστωσαν τὰ ἑξῆς :

Α'.) *Νὰ μοιρασθῶσιν 28 δραχμαὶ εἰς 7 ἀνθρώπους.*

Ὁ ἀριθμὸς 28, τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ μοιράσωμεν, λέγεται *διαιρετέος*, ὁ δὲ 7, ὁ ὁποῖος δεικνύει εἰς πόσα ἴσα μέρη πρέπει νὰ μοιράσωμεν τὸν 28, λέγεται *διαιρέτης*.

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ δοθὲν πρόβλημα, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς : Ἀπὸ τὰς 28 δρχ. λαμβάνομεν 7 καὶ δίδομεν εἰς τὸν καθένα ἀπὸ μίαν. Τότε μᾶς μένουν 21 δρχ, ἀπὸ τὰς ὁποίας λαμβάνομεν πάλιν 7 καὶ δίδομεν εἰς τὸν καθένα ἀπὸ μίαν, μᾶς μένουν δὲ 14 δρχ. Ἀπὸ αὐτὰς λαμβάνομεν ἄλλας 7 καὶ δίδομεν εἰς τὸν καθένα ἀπὸ ἄλλην μίαν. Τὴν φορὰν αὐτὴν θὰ μᾶς μείνουν 7 δρχ, τὰς ὁποίας λαμβάνομεν ὅλας καὶ δίδομεν εἰς τὸν καθένα ἀπὸ μίαν ἀκόμη. Ὅταν τοιουτοτρόπως τελειώση ἡ διανομή, θέλομεν εὕρει ὅτι ἕκαστος ἐκ τῶν 7 ἀνθρώπων ἔλαβεν ἀπὸ 4 *δραχμὰς* ἐν ὅλῳ καὶ ὅτι δὲν ἐπερίσσευσε τίποτε.

Διὰ νὰ ἐννοήσωμεν ταῦτα καλλίτερον, διατάσσομεν τὴν πρᾶξιν ὡς ἑξῆς :

28 δρχ.
7 . . . . 1 δρχ.
———
21 +
7 . . . . 1 »
———
14 +
7 . . . . 1 »
———
7 +
7 . . . . 1 »
——— ———
0 4 »

Τὸ ἐξαγόμενον τῆς πράξεως, ὁ ἀριθμὸς δηλ. 4 *δρχ.* καλεῖται *πηλίκον*, ἤ, ἐπειδὴ ἐνταῦθα πρόκειται περὶ *μερισμοῦ*, *μερίδιον*. Εἰς τὸ ἀνωτέρω λοιπὸν πρόβλημα θὰ εἴπωμεν ὅτι τὸ *μερίδιον* ἑκάστου ἐκ τῶν 7 ἀνθρώπων εἶνε 4 *δρχ.*

Σημείωσις. Ἂν μᾶς ἐζητεῖτο νὰ μοιράσωμεν 30 δρχ. εἰς 7 ἀνθρώπους, ἐκτελοῦντες τὴν πρᾶξιν ὅπως καὶ εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα, ἠθέλομεν εὕρει, ὅτι ἕκαστος ἐξ αὐτῶν θὰ ἐλάμβανε πάλιν ἀπὸ 4 δρχ, θὰ μᾶς ἐπερίσσευον ὅμως καὶ 2 δρχ. ὡς *ὑπόλοιπον.*

30 δρχ.
7 . . . . 1 δρχ.
———
23 +
7 . . . . 1 »
———
16 +
7 . . . . 1 »
———
9 +
7 . . . . 1 »
——— ———
2 »(ὑπόλ.) 4 » (μερίδιον)

Σημεῖον τῆς διαιρέσεως εἶνε τὸ : , τὸ ὁποῖον ἀπαγγέλλεται *διὰ* καὶ γράφεται μεταξὺ τοῦ διαιρετέου καὶ τοῦ διαιρέτου (γραφομένου πρώτου τοῦ διαιρετέου). Ὅθεν ἐν τοῖς ἀνωτέρω παραδείγμασιν ἡ διαίρεσις θὰ σημειωθῇ ὡς ἑξῆς :

28 : 7 καὶ **30 : 7**

43. Β'.) *Νὰ εὑρεθῇ πόσας φορὰς ὁ ἀριθμὸς 7 χωρεῖ εἰς τὸν 28.*

Ἐνταῦθα ζητεῖται νὰ μετρήσωμεν τὸν 28 διὰ τοῦ 7, ὅπως εὕρωμεν ποσάκις ὁ πρῶτος περιέχει τὸν δεύτερον. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἡ διαίρεσις δύναται διὰ τοῦτο νὰ ὀνομασθῇ καὶ *μέτρησις*.

Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς : Ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸν 28 μίαν φορὰν τὸν 7 καὶ μᾶς μένει ὑπόλοιπον 21. Ἀπὸ τὸν 21 ἀφαιροῦμεν ἄλλην μίαν φορὰν τὸν 7 καὶ μᾶς μένει ὑπόλοιπον 14. Ἀπὸ τὸν 14 ἀφαιροῦμεν ἀκόμη μίαν φορὰν τὸν 7 καὶ εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 7. Ἀπὸ τὸν 7 ἀφαιροῦμεν καὶ διὰ τελευταίαν φορὰν τὸν 7 καὶ μᾶς μένει ὑπόλοιπον 0.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς :

$$
\begin{array}{rl}
28 & \\
7 \cdots\cdots\cdots & \mathbf{1} \text{ φορὰ} \\
\hline
21 & + \\
7 \cdots\cdots\cdots & \mathbf{1} \;\text{»} \\
\hline
14 & + \\
7 \cdots\cdots\cdots & \mathbf{1} \;\text{»} \\
\hline
7 & + \\
7 \cdots\cdots\cdots & \mathbf{1} \;\text{»} \\
\hline
0 & 4
\end{array}
$$

Τὸ εὑρεθὲν πηλίκον 4, τὸ ὁποῖον δεικνύει πόσας φορὰς ἐν ὅλῳ ὁ 7 χωρεῖ εἰς τὸν 28, καλεῖται καὶ *λόγος*.

Σημείωσις. Ἐὰν ἐζητεῖτο νὰ εὑρεθῇ πόσας φορὰς ὁ 7 χωρεῖ εἰς τὸν 30, ἐκτελοῦντες τὴν πρᾶξιν, ὅπως καὶ εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα, ἠθέλομεν εὕρει ὅτι πάλιν **4** φορὰς χωρεῖ, ἀλλ' ὅτι μᾶς μένει καὶ ὑπόλοιπον **2**.

Τελεία καὶ ἀτελὴς διαίρεσις.

44.—*Τελεία* λέγεται ἡ διαίρεσις, ἡ ὁποία δὲν ἀφήνει ὑπόλοιπον. Π. χ. **36 : 4=9**.

Εἰς πᾶσαν τελείαν διαίρεσιν ὁ διαιρετέος ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον (ἤτοι $36=4\times9$).

45. — Ἀτελὴς δὲ λέγεται ἡ διαίρεσις, ὅταν ἀφήνῃ καὶ ὑπόλοιπον. Π. χ. ἡ διαίρεσις **39 : 9**, τῆς ὁποίας πηλίκον μὲν εἶνε **4**, ὑπόλοιπον δὲ **3**.

Εἰς πᾶσαν ἀτελῆ διαίρεσιν ὁ διαιρετέος ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον σὺν τῷ ὑπολοίπῳ. Ἤτοι $39=(9\times4)+3$.

Παρατήρησις.

46. — Ἀνωτέρω εἴδομεν ὅτι ἡ διαίρεσις ἐκτελεῖται διὰ τῆς ἀλλεπαλλήλου ἀφαιρέσεως. Δυνάμεθα ὅμως καὶ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν.

Ἔστω π. χ. ἡ διαίρεσις **20 : 5**

Πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην κατὰ σειρὰν ἐπὶ **1, 2, 3...** κ.τ.λ., ἕως ὅτου εὕρωμεν ἀριθμόν, ἐπὶ τὸν ὁποῖον πολλαπλασιαζόμενος ὁ διαιρέτης νὰ δίδῃ γινόμενον, τὸ ὁποῖον ἢ νὰ εἶνε ἀκριβῶς ἴσον μὲ τὸν διαιρετέον, ἢ νὰ εἶνε τὸ μεγαλείτερον πολλαπλάσιον τοῦ διαιρέτου, τὸ ὁποῖον χωρεῖ εἰς τὸν διαιρετέον.

$$5\times1=5,\quad 5\times2=10,\quad 5\times3=15,\quad 5\times4=20.$$

Ἐπομένως τὸ ζητούμενον πηλίκον εἶνε **4**.

Ἔστω πρὸς τούτοις καὶ ἡ ἑξῆς διαίρεσις :

23 : 5

Ἐπειδὴ $5\times4=20$, ἀλλὰ $5\times5=25$, συμπεραίνομεν ὅτι πηλίκον καὶ τῆς διαιρέσεως ταύτης θὰ εἶνε ὁ **4**. Ἀφαιροῦντες δὲ τὸ 20 ἀπὸ τὸν διαιρετέον 23 εὑρίσκομεν καὶ τὸ ὑπόλοιπον **3**.

Ἀριθμὸς τῶν ψηφίων τοῦ πηλίκου.

47. — Διὰ νὰ εὕρωμεν πόσα ψηφία θὰ ἔχῃ τὸ πηλίκον μιᾶς διαιρέσεως, ἥτις δὲν ἔχει ἀκόμη ἐκτελεσθῆ, ἀκολουθοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα :

Γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρέτου τόσα μηδενικά, ὅσα χρειάζεται οὗτος διὰ νὰ γείνῃ μεγαλείτερος τοῦ διαιρετέου. Ὅσα μηδενικὰ χρειασθῶσι πρὸς τοῦτο, τόσα ψηφία θὰ ἔχῃ τὸ πηλίκον.

Π. χ. τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως **35478 : 49** θὰ ἔχῃ τρία ψηφία, διότι ὅταν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρέτου 49 γράψωμεν τρία μηδενικά, προκύπτει ὁ ἀριθμὸς 49000, ὁ ὁποῖος εἶνε μεγαλείτερος τοῦ διαιρετέου.

Τοῦτο ἐξηγοῦμεν ὡς ἑξῆς :

Ὅταν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρέτου γράψωμεν τρία μηδενικά, πολλαπλασιάζεται οὗτος ἐπὶ 1000 (ἐδ. **34**, *συντ.* 1η). Ἀλλὰ τότε γίνεται 49000, δηλ. μεγαλείτερος τοῦ διαιρετέου. Ἐκ τούτου συμπεραίνομεν ὅτι πηλίκον δὲν δύναται νὰ εἶνε ὁ ἀριθμὸς **1000** (ἀφ' οὗ πολλαπλασιαζόμενος οὗτος ἐπὶ τὸν διαιρέτην δίδει γινόμενον μεγαλείτερον τοῦ διαιρετέου (ἐδ. **46**). Ἄρα τὸ πηλίκον τῆς δοθείσης διαιρέσεως θὰ εἶνε *μικρότερον τοῦ* **1000**, *ὄχι ὅμως καὶ μικρότερον τοῦ* **100**· ἑπομένως θὰ ἔχῃ *τρία ψηφία*.

Περιπτώσεις διαιρέσεως.

48. — Εἰς τὴν διαίρεσιν διακρίνομεν δύο περιπτώσεις :

α'.) τὴν περίπτωσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ πηλίκον εἶνε μονοψήφιον καὶ

β'.) τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν τοῦτο εἶνε πολυψήφιον.

α'. Διαίρεσις μὲ πηλίκον μονοψήφιον.

49.—Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην, ἐὰν καὶ ὁ διαιρέτης εἶνε μονοψήφιος, ἡ διαίρεσις γίνεται εὐκόλως ἀπὸ μνήμης· διότι ἐκ τοῦ Πυθαγορείου πίνακος ἐνθυμούμεθα τὰ γινόμενα τοῦ διαιρέτου ἐπὶ ἕκαστον τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν.

Ἔστω π. χ. ἡ διαίρεσις **72 : 9**

Εἰς τὴν διαίρεσιν ταύτην εὐκόλως ἀναγνωρίζομεν ἐν πρώτοις ὅτι τὸ πηλίκον θὰ εἶνε μονοψήφιον· διότι ἐὰν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρέτου γράψωμεν ἓν μηδενικόν, γίνεται οὗτος μεγαλείτερος τοῦ διαιρετέου. Διὰ νὰ εὕρωμεν ἤδη τὸ πηλίκον τοῦτο, ἀρκεῖ νὰ ἴδωμεν ποῖον εἶνε τὸ μεγαλείτερον πολλαπλάσιον τοῦ 9, τὸ περιεχόμενον εἰς τὸν 72. Τοιουτοτρόπως εὑρίσκομεν ἀμέσως ὅτι τὸ ζητούμενον πηλίκον εἶνε **8**.

Ἔστω πρὸς τούτοις καὶ ἡ ἑξῆς διαίρεσις

76 : 9

Ἐπειδὴ **9×8=72**, ἀλλὰ **9×9=81**,

συμπεραίνομεν ὅτι πηλίκον καὶ τῆς διαιρέσεως ταύτης θὰ εἶνε ὁ ἀριθμὸς 8. Ἀφαιροῦντες δὲ τὸ 72 ἀπὸ τὸν διαιρετέον 76 εὑρίσκομεν καὶ τὸ ὑπόλοιπον **4**.

50.—Ἂς ὑποθέσωμεν ἤδη ὅτι ὁ διαιρέτης εἶνε πολυψήφιος. Ἔστω π. χ. ἡ ἑξῆς διαίρεσις **97 : 42**, τῆς ὁποίας τὸ πηλίκον θὰ εἶνε ἐπίσης μονοψήφιον (διότι 42×10 ὑπερβαίνει τὸν διαιρετέον). Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον τοῦτο, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς:

Ὁ 42 δὲν εἶνε δυνατὸν νὰ χωρῇ εἰς τὸν 97 περισσοτέρας φοράς, ἀπὸ ὅσας χωροῦσιν αἱ 4 δεκάδες τοῦ διαιρέτου εἰς τὰς 9 δεκάδας τοῦ διαιρετέου. Ἐπειδὴ δὲ διὰ τοῦ Πυθαγορείου πίνακος εὑρίσκομεν ὅτι αἱ 4 δεκάδες χωροῦσιν εἰς τὰς 9 δύο φοράς, συμπεραίνομεν ὅτι καὶ ὁλόκληρος ὁ διαιρέτης εἰς ὁλόκληρον τὸν διαιρετέον δὲν δύναται νὰ χωρῇ περισσότερον ἀπὸ 2 φοράς, ὅτι δηλ. τὸ πηλίκον εἶνε ἢ 2 ἢ μικρότερον τοῦ 2. Διὰ νὰ βεβαιωθῶμεν περὶ τούτου, δοκιμάζομεν ὡς ἑξῆς: πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην 42 ἐπὶ 2 καὶ εὑρίσκομεν γινόμενον 84, μικρότερον τοῦ διαιρετέου. Ἄρα τὸ ζητούμενον πηλίκον εἶνε **2**. Ἀφαιροῦντες δὲ τὸ 84 ἀπὸ τὸν διαιρετέον 97 εὑρίσκομεν καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως **13**.

Ἔστω πρὸς τούτοις καὶ ἡ ἑξῆς διαίρεσις **5439 : 671**, τῆς ὁποίας τὸ πηλίκον εἶνε ἐπίσης μονοψήφιον. Διὰ νὰ εὕρωμεν τοῦτο, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς:

Ὁ 671 δὲν δύναται νὰ χωρῇ εἰς τὸν 5439 περισσοτέρας φοράς, ἀπὸ ὅσας χωροῦν αἱ 6 ἑκατοντάδες τοῦ διαιρέτου εἰς τὰς 54 τοῦ διαιρετέου, δηλ. περισσότερον ἀπὸ 9 φοράς. Ἐπομένως τὸ πηλίκον θὰ εἶνε ἢ 9 ἢ μικρότερον τοῦ 9. Διὰ νὰ δοκιμάσωμεν τὸ 9, πολλαπλασιάζομεν ἐπ' αὐτὸ τὸν διαιρέτην 671 καὶ εὑρίσκομεν γινόμενον 6039, μεγαλείτερον τοῦ διαιρετέου. Ἄρα τὸ πηλίκον θὰ εἶνε μικρότερον τοῦ 9. Δοκιμάζομεν τότε τὸ 8. Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν τὸν 671 ἐπὶ 8 καὶ ἐπειδὴ εὑρίσκομεν γινόμενον 5368, μικρότερον τοῦ διαιρετέου, συμπεραίνομεν ὅτι τὸ ζητούμενον πηλίκον εἶνε **8**. Ἀφαιροῦντες δὲ τὸ 5368 ἀπὸ τὸν διαιρετέον 5439 εὑρίσκομεν καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως **71**.

Ἐπίσης διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ μονοψήφιον πηλίκον τῆς ἑξῆς διαιρέσεως **25378 : 3049**,
σκεπτόμεθα ὅτι ὁ διαιρέτης θὰ χωρῇ εἰς τὸν διαιρετέον ἢ ὅσας φορὰς αἱ 3 χιλιάδες τοῦ 3049 χωροῦσιν εἰς τὰς 25 τοῦ 25378 (δηλ. 8

φορὰς) ἢ ὀλιγώτερον. Δοκιμάζοντες εὑρίσκομεν τὸ ἀκριβὲς πηλίκο-τῆς πράξεως καὶ τὸ ὑπόλοιπον, ἂν αὕτη ἀφήνῃ.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν διὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην τὸν ἀκόλουθον κανόνα :

31.— *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως πολυψηφίου ἀριθμοῦ δι' ἄλλου πολυψηφίου, ὅταν τὸ πηλίκον τοῦτο εἶνε μονοψήφιον, διαιροῦμεν τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ πρώτου ψηφίου τοῦ διαιρέτου, ἐὰν διαιρῆται. Ἄλλως διαιροῦμεν τὸν ἀριθμὸν τὸν ἀποτελούμενον ὑπὸ τῶν δύο πρώτων ψηφίων τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ πρώτου πρὸς τὰ ἀριστερὰ ψηφίου τοῦ διαιρέτου. Ἐπὶ τὸ εὑρισκόμενον πηλίκον πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην καὶ ἂν εὕρωμεν γινόμενον τὸ πολὺ ἴσον μὲ τὸν διαιρετέον, τότε τὸ πηλίκον τοῦτο εἶνε τὸ ζητούμενον. Ἄλλως ἐλαττώνομεν αὐτὸ κατὰ μονάδα καὶ δοκιμάζομεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον. Ὅταν τοιουτοτρόπως εὕρωμεν τὸ ἀληθὲς πηλίκον, πολλαπλασιάζομεν ἐπ' αὐτὸ τὸν διαιρέτην, ἀφαιροῦντες δὲ τὸ γινόμενον ἀπὸ τὸν διαιρετέον εὑρίσκομεν καὶ τὸ ὑπόλοιπον.*

β'.) Διαίρεσις μὲ πηλίκον πολυψήφιον.

32.— Ἔστω ἡ ἑξῆς διαίρεσις **9431 : 4**, τὴν ὁποίαν θὰ ἔπρεπε νὰ ἐκτελέσωμεν, ἐὰν ἐπρόκειτο π. χ. νὰ μοιράσωμεν 9431 δρχ. εἰς 4 ἀνθρώπους. Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης θὰ εἶνε πολυψήφιον, διότι εἶνε ἀνάγκη νὰ γραφῶσιν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρέτου περισσότερα τοῦ ἑνὸς μηδενικά, διὰ νὰ γείνῃ οὗτος μεγαλείτερος τοῦ διαιρετέου (ἐδ. **47**).

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ πολυψήφιον τοῦτο πηλίκον, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς :

Μοιράζομεν πρῶτον τὰς 9 χιλιάδας εἰς τοὺς 4 ἀνθρώπους καὶ εὑρίσκομεν ὅτι ἕκαστος ἐξ αὐτῶν θὰ λάβῃ ἀπὸ **2** χιλιάδας· καὶ ἐπειδὴ οἱ 4 θὰ λάβωσιν ἐν ὅλῳ 2×4 ἤτοι 8 χιλιάδας, θὰ μείνῃ καὶ **1** χιλιάς.

Τὴν 1 ταύτην χιλιάδα τρέπομεν εἰς 10 ἑκατοντάδας. Εἰς ταύτας προσθέτομεν καὶ τὰς 4 ἑκατοντάδας τοῦ διαιρετέου καὶ γίνονται ἐν ὅλῳ 14 ἑκατοντάδες.

Ταύτας μοιράζομεν ἐπίσης εἰς τοὺς 4 ἀνθρώπους καὶ εὑρίσκομεν ὅτι ἕκαστος θὰ λάβῃ ἀπὸ **3** ἑκατοντάδας (ἤτοι 300 δρχ).

Καὶ ἐπειδὴ οἱ 4 θὰ λάβωσιν ἐν ὅλῳ 3×4 ἤτοι 12 ἑκατοντάδας, θὰ μᾶς περισσεύσωσι καὶ **2** ἑκατοντάδες. Ταύτας τρέπομεν εἰς 20 δεκάδας, προσθέτομεν καὶ τὰς 3 δεκάδας τοῦ διαιρετέου καὶ γίνονται ἐν ὅλῳ 23 δεκάδες.

Τὰς 23 αὐτὰς δεκάδας μοιράζομεν πάλιν εἰς τοὺς 4 ἀνθρώπους. Ἕκαστος ἐξ αὐτῶν θὰ λάβῃ ἀπὸ **5** *δεκάδας* (ἤτοι 50 δρχ.). Καὶ ἐπειδὴ οἱ 4 ὁμοῦ θὰ λάβωσι 5×4 ἤτοι 20 δεκάδας, θὰ μείνωσι καὶ **3** δεκάδες.

Τὰς 3 δεκάδας, αἱ ὁποῖαι ἔμειναν, τρέπομεν εἰς 30 μονάδας, προσθέτομεν εἰς αὐτὰς καὶ τὴν 1 μονάδα τοῦ διαιρετέου καὶ γίνονται 31 μονάδες.

Μοιράζομεν τέλος καὶ τὰς 31 μονάδας (ἤτοι τὰς 31 δρχ.) εἰς τοὺς 4 ἀνθρώπους καὶ εὑρίσκομεν ὅτι ἕκαστος θὰ λάβῃ ἀπὸ **7** *μονάδας*. Ἐπειδὴ δὲ καὶ οἱ 4 ὁμοῦ θὰ λάβωσιν 7×4 ἤτοι 28 δρχ, θὰ περισσεύσωσι καὶ **3** *δραχμαὶ ὡς ὑπόλοιπον*.

Εὕρομεν λοιπὸν ὅτι ἕκαστος ἐκ τῶν 4 ἀνθρώπων θὰ λάβῃ ἐν ὅλῳ **2** *χιλιάδας*, **3** *ἑκατοντάδας*, **5** *δεκάδας καὶ* **7** *μονάδας* ἤτοι **2357** *δρχ*, θὰ μείνωσι δὲ καὶ **3** δρχ. *ὡς ὑπόλοιπον*.

53.—Ἂς ὑποθέσωμεν ἤδη ὅτι ὁ διαιρέτης εἶνε πολυψήφιος. Ἔστω π. χ. ἡ ἑξῆς διαίρεσις **57123 : 59**.

Νὰ μοιρασθῶσι δηλ. **57123** *δραχμαὶ εἰς* **59** *ἀνθρώπους*.

Λαμβάνομεν πρῶτον τὰς 57 χιλιάδας διὰ νὰ τὰς μοιράσωμεν εἰς τοὺς 59 ἀνθρώπους. Ἀλλ' ἐπειδὴ δὲν ἐπαρκοῦσιν ὥστε νὰ λάβῃ ἕκαστος ἀπὸ μίαν, τρέπομεν αὐτὰς εἰς 570 ἑκατοντάδας. Εἰς αὐτὰς προσθέτομεν καὶ τὴν 1 ἑκατοντάδα τοῦ διαιρετέου καὶ γίνονται 571.

Ταύτας μοιράζομεν εἰς τοὺς 59 ἀνθρώπους (ἐδ. **51**) καὶ εὑρίσκοσκομεν ὅτι ἕκαστος θὰ λάβῃ ἀπὸ **9** *ἑκατοντάδας*. Ἐπειδὴ δὲ οἱ 59 ἄνθρωποι θὰ λαβωσιν ἐν ὅλῳ 9×59 ἤτοι 531 ἑκατοντάδας, θὰ περισσεύσωσι καὶ 40 ἑκατοντάδες. Ταύτας τρέπομεν εἰς 400 δεκάδας, προσθέτομεν καὶ τὰς 2 τοῦ διαιρετέου καὶ γίνονται ἐν ὅλῳ 402 δεκάδες.

Τὰς 402 αὐτὰς δεκάδας μοιράζομεν εἰς τοὺς 59 ἀνθρώπους καὶ εὑρίσκομεν ὅτι ἕκαστος ἐξ αὐτῶν θὰ λάβῃ ἀπὸ **6** *δεκάδας*. Ἐπειδὴ δὲ οἱ 59 θὰ λάβωσιν ἐν ὅλῳ 6×59 ἤτοι 354, θὰ μείνωσι καὶ 48 δεκάδες. Ταύτας τρέπομεν εἰς 480 μονάδας, προσθέτομεν καὶ τὰς 3 τοῦ διαιρετέου καὶ γίνονται 483 μονάδες.

Μοιράζομεν τέλος καὶ τὰς 483 αὐτὰς μονάδας εἰς τοὺς 59 ἀνθρώπους καὶ εὑρίσκομεν ὅτι ἕκαστος θὰ λάβῃ ἀπὸ **8** *δρχ*. Ἐπειδὴ δὲ οἱ 59 ἄνθρωποι θὰ λάβωσιν 8×59 ἤτοι 472, θὰ μείνωσι καὶ **11** *δραχμαὶ ὡς ὑπόλοιπον* εἰς τὸ τέλος τῆς πράξεως.

Εὕρομεν λοιπὸν ὅτι ἕκαστος ἐκ τῶν 59 ἀνθρώπων θὰ λάβῃ ἐν ὅλῳ **9** *ἑκατοντάδας*, **6** *δεκάδας καὶ* **8** *μονάδας*, ἤτοι **968** *δραχμάς*, θὰ περισσεύσωσι δὲ καὶ **11** *δρχ*.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς :

```
57́1́2́3́ | 59
531     |----
----    | 900
 402    |  60
 354    |   8
 ----
  483
  472
  ---
   11
```

ἢ συντομώτερον

```
57́1́2́3́ | 59
 402    |----
  483   | 968
   11
```

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἑξῆς γενικὸν κανόνα τῆς διαιρέσεως :

34. — *Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα δι' ἄλλου χωρίζομεν ἀπὸ τὰ ἀριστερὰ τοῦ διαιρετέου τόσα ψηφία ὅσα χρειάζονται διὰ νὰ λάβωμεν πηλίκον μονοψήφιον* (χωρίζομεν δηλ. ἢ τόσα ψηφία ὅσα ἔχει ὁ διαιρέτης ἢ ἓν περισσότερον). *Τὸ οὕτω χωρισθὲν μέρος καλοῦμεν* **πρῶτον μερικὸν διαιρετέον,** *διαιροῦντες δὲ αὐτὸν διὰ τοῦ διαιρέτου εὑρίσκομεν τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ πηλίκου. Ἐπὶ τοῦτο πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην καὶ τὸ γινόμενον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸν πρῶτον μερικὸν διαιρετέον. Εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου, τὸ ὁποῖον θὰ εὕρωμεν, καταβιβάζομεν τὸ ἀμέσως ἑπόμενον ψηφίον τοῦ διαιρετέου καὶ τοιουτοτρόπως λαμβάνομεν* **δεύτερον μερικὸν διαιρετέον.** *Τοῦτον διαιροῦμεν διὰ τοῦ διαιρέτου καὶ* *εὑρίσκομεν τὸ δεύτερον ψηφίον τοῦ πηλίκου. Ἐπὶ τὸ ψηφίον τοῦτο πολλαπλασιάζομεν πάλιν τὸν διαιρέτην καὶ τὸ γινόμενον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸν δεύτερον μερικὸν διαιρετέον. Τοιουτοτρόπως εὑρίσκομεν δεύτερον ὑπόλοιπον, εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ ὁποίου καταβιβάζοντες τὸ ἀμέσως ἑπόμενον ψηφίον τοῦ διαιρετέου λαμβάνομεν* **τρίτον μερικὸν διαιρετέον.** *Τοῦτον διαιροῦμεν διὰ τοῦ διαιρέτου, ὅπως καὶ τοὺς προηγουμένους μερικοὺς διαιρετέους, καὶ ἐξακολουθοῦμεν τοιουτοτρόπως ἕως ὅτου καταβιβασθῶσιν πάντα τὰ ψηφία τοῦ διαιρετέου. Ὅσοι μερικοὶ διαιρετέοι ἀποτελεσθῶσι, τόσα θὰ εἶνε καὶ τὰ ψηφία τοῦ πηλίκου. Ἐὰν δὲ μερικός τις διαιρετέος δὲν διαιρῆται διὰ τοῦ διαιρέτου, εἰς τὸ πηλίκον γράφομεν* **0.**

Βάσανος τῆς διαιρέσεως.

55.—Αὕτη γίνεται ὡς ἑξῆς :

Πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ πηλίκον καὶ εἰς τὸ γινόμενον αὐτῶν προσθέτομεν καὶ τὸ ὑπόλοιπον (ἂν ὑπάρχῃ). *Ἂν εὕρωμεν τότε τὸν διαιρετέον, ἡ πρᾶξις ἔγεινεν ἄνευ λάθους.*

Ἰδιότητες τῆς διαιρέσεως.

56.—Ἡ διαίρεσις ἔχει τὰς ἑξῆς ἰδιότητας :

1) *Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν καὶ τὸν διαιρετέον καὶ τὸν διαιρέτην πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.*

Π. χ. τῆς διαιρέσεως **15 : 3** πηλίκον εἶνε **5.**

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὸν διαιρετέον καὶ τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, οἷον τὸν 4, θὰ λάβωμεν τοὺς ἀριθμοὺς **60** καὶ **12**. Διαιροῦντες ἤδη τὸν 60 διὰ τοῦ 12, εὑρίσκομεν πάλιν πηλίκον **5**.

2) *Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἄθροισμα δι' ἀριθμοῦ, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν ἕκαστον ἐκ τῶν προσθετέων τοῦ ἀθροίσματος διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ προκύπτοντα πηλίκα.*

Π. χ. διὰ νὰ διαιρέσωμεν τὸ ἄθροισμα **6+15+12** διὰ τοῦ **3**, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν καὶ τὸν 6 διὰ τοῦ 3, καὶ τὸν 15 διὰ τοῦ 3 καὶ τὸν 12 διὰ τοῦ 3 καὶ νὰ ἀθροίσωμεν τὰ τρία ἐξαγόμενα. Τοιουτοτρόπως θέλομεν εὕρει ὅτι τὸ ἄθροισμα 6+15+12 διαιρούμενον διὰ 3 δίδει πηλίκον 2+5+4 ἤτοι **11**· τὸ αὐτὸ δὲ πηλίκον εὑρίσκομεν καὶ ἂν προσθέσωμεν τοὺς δοθέντας προσθετέους 6, 15, 12, καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν 33 διαιρέσωμεν διὰ τοῦ 3.

3) *Διὰ νὰ διαιρέσωμεν γινόμενον πολλῶν παραγόντων δι' ἑνὸς ἀριθμοῦ, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν μόνον ἕνα παράγοντα τοῦ γινομένου διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου.*

Ἐὰν π. χ. ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν τὸ **5×8×3** διὰ τοῦ **4**, ἀντὶ νὰ σχηματίσωμεν τὸ γινόμενον τῶν παραγόντων **5**, **8**, καὶ **3**, καὶ τοῦτο **(120)** νὰ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ **4**, ἀρκεῖ κατὰ τὴν ἰδιότητα ταύτην νὰ διαιρέσωμεν μόνον τὸν παράγοντα **8** διὰ τοῦ **4**. Τότε δηλ. εὑρίσκομεν ὡς πηλίκον **5×2×3=30**, τὸ ὁποῖον θέλομεν εὕρει καὶ ἂν τὸ **120** διαιρέσωμεν διὰ **4**.

4) *Διὰ νὰ διαιρέσωμεν γινόμενον πολλῶν παραγόντων δι' ἑνὸς ἐκ τῶν παραγόντων του, ἀρκεῖ νὰ ἐξαλείψωμεν τὸν παράγοντα τοῦτον.*

Π. χ. τῆς διαιρέσεως τοῦ **7×5×3** διὰ τοῦ **5**, πηλίκον θὰ εἶνε **7×3=21**. Ἀλλὰ καὶ ἐὰν τὸ γινόμενον τῶν παραγόντων **7×5×3**, δηλ. τὸν ἀριθμὸν **105**, διαιρέσωμεν διὰ τοῦ **5**, θέλομεν εὕρει τὸ αὐτὸ ἀκριβῶς ἐξαγόμενον, ἐπειδὴ **105 : 5=21**.

Συντομίαι τῆς διαιρέσεως.

57.—Εἰς τὴν διαίρεσιν εἶνε δυνατὸν νὰ γείνωσιν αἱ ἑξῆς συντομίαι :

1) *Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα διὰ* **10**, *χωρίζομεν τὸ τελευταῖον αὐτοῦ ψηφίον, καὶ τοῦτο μὲν θὰ εἶνε τὸ ὑπόλοιπον, ὁ δὲ ἀριθμὸς ὁ ὑπὸ τῶν λοιπῶν ψηφίων ἀποτελούμενος θὰ εἶνε τὸ πηλίκον.*

Π. χ. Ἐκ τῆς διαιρέσεως **3127 : 10** λαμβάνομεν κατὰ τὴν συντομίαν ταύτην πηλίκον μὲν **312**, ὑπόλοιπον δὲ **7**. Ἐξηγεῖται δὲ ἡ συντομία αὕτη ὡς ἑξῆς :

Νὰ διαιρέσωμεν τὸν 3127 διὰ 10 σημαίνει νὰ εὕρωμεν πόσας φορὰς χωρεῖ τὸ 10, ἤτοι ἡ μία δεκάς, εἰς τὸν 3127. Ἀλλ' ἡ δεκὰς μόνον εἰς τὰς δεκάδας χωρεῖ, δεκάδας δὲ ὁ διαιρετέος ἔχει 312. Εἰς αὐτὰς λοιπὸν θὰ χωρῇ ἡ δεκὰς 312 φοράς, αἱ δὲ 7 μονάδες τοῦ διαιρετέου θὰ μείνωσιν ὡς ὑπόλοιπον. Διὰ τοῦτο πηλίκον μὲν θὰ εἶνε **312**, ὑπόλοιπον δὲ **7**.

Δι' ὅμοιον λόγον καὶ *διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα διὰ τοῦ* **100**, *χωρίζομεν τὰ δύο τελευταῖα ψηφία αὐτοῦ, καὶ ὁ ὑπὸ τούτων μὲν ἀποτελούμενος ἀριθμὸς θὰ εἶνε τὸ ὑπόλοιπον, ὁ δὲ ὑπὸ τῶν πρὸς τὰ ἀριστερὰ ψηφίων θὰ εἶνε τὸ πηλίκον.* Π. χ. ἡ διαίρεσις **3127 : 100** δίδει πηλίκον **31** καὶ ὑπόλοιπον **27**.

2) *Ὅταν ὁ διαιρέτης ἔχῃ εἰς τὸ τέλος μηδενικά, παραλείπομεν αὐτά, παραλείπομεν δὲ καὶ ἄλλα τόσα ψηφία ἀπὸ τὸ τέλος τοῦ διαιρετέου. Ἔπειτα διαιροῦμεν τὸν ἀριθμὸν τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦσι τὰ λοιπὰ ψηφία τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ἀποτελουμένου ὑπὸ τῶν σημαντικῶν ψηφίων τοῦ διαιρέτου, εἰς τὰ δεξιὰ δὲ τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως ταύτης καταβιβάζομεν καὶ τὰ παραλειφθέντα ψηφία τοῦ διαιρετέου.*

Ἔστω π. χ. ἡ ἑξῆς διαίρεσις **42673 : 400**.

Κατὰ τὴν συντομίαν ταύτην χωρίζομεν τὰ δύο μηδενικὰ τοῦ διαιρέτου καὶ τὰ δύο τελευταῖα ψηφία τοῦ διαιρετέου, καὶ διαιροῦμεν τὸν ἀριθμὸν **426** διὰ τοῦ **4**. Τὸ πηλίκον **106**, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν ἐκ τῆς διαιρέσεως ταύτης, εἶνε τὸ ζητούμενον· ἐὰν δὲ εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου **2** γράψωμεν καὶ τὰ δύο ψηφία, τὰ ὁποῖα παραλείψαμεν ἀπὸ τὸ τέλος τοῦ διαιρετέου, εὑρίσκομεν καὶ τὸ ἀληθὲς ὑπόλοιπον **273**.

4́2́6́(73	4(00
·26	106
273	

Ὁ λόγος τῆς συντομίας ταύτης εἶνε ὁ ἑξῆς :

Αἱ 4 ἑκατοντάδες τοῦ διαιρέτου μόνον εἰς τὰς ἑκατοντάδας τοῦ διαιρετέου χωροῦσιν. Ἑκατοντάδας ὁ διαιρετέος ἔχει 426, εἰς ταύτας δὲ αἱ 4 τοῦ διαιρέτου χωροῦσιν 106 φορὰς καὶ μένει καὶ ὑπόλοιπον 2. Τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο τῆς διαιρέσεως τῶν ἑκατοντάδων παριστᾷ βεβαίως ἑκατοντάδας· ἐκτὸς τούτων ὅμως θὰ ἔχωμεν ὡς ὑπόλοιπον καὶ τὰς 7 δεκάδας καὶ 3 μονάδας τοῦ διαιρετέου, εἰς τὰς ὁποίας δὲν χωρεῖ ὁ διαιρέτης. Ἄρα τὸ ἀληθὲς ὑπόλοιπον θὰ εἶνε **273**, τὸ δὲ πηλίκον **106**.

Ποῖα προβλήματα λύονται διὰ μιᾶς διαιρέσεως.

58. — Διὰ μιᾶς διαιρέσεως λύονται:

α'.) Τὰ προβλήματα ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται νὰ μοιρασθῇ ἀριθμός τις εἰς ἴσα μέρη (*μερισμός*)·

καὶ β'.) Τὰ προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ποσάκις ἀριθμός τις χωρεῖ εἰς ἄλλον, νὰ μετρηθῇ δηλ. ἀριθμός τις δι' ἄλλου (*μέτρησις*).

Παραθέτομεν ἐνταῦθα ἀπὸ ἓν παράδειγμα ἐξ ἑκατέρου εἴδους:

Α'.) 9 *πήχεις ἑνὸς ὑφάσματος ἐπωλήθησαν* 27 *δρχ. Πόσον ἐπωλήθη ὁ εἷς πῆχυς ;*

Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου πρέπει προφανῶς νὰ μοιράσωμεν τὰς 27 δραχμὰς εἰς τοὺς 9 πήχεις, διὰ νὰ ἴδωμεν πόσον ἀντιστοιχεῖ εἰς ἕκαστον πῆχυν. Θὰ κάμωμεν λοιπὸν διαίρεσιν, εἰς τὴν ὁποίαν αἱ 27 δρχ. θὰ εἶνε διαιρετέος (ἀφ' οὗ αὐταὶ πρέπει νὰ μοιρασθῶσιν), οἱ δὲ 9 πηχ. διαιρέτης (ἀφ' οὗ ὁ ἀριθμὸς 9 δεικνύει εἰς πόσα ἴσα μέρη πρέπει νὰ μοιρασθῶσιν αἱ 27 δραχμαί). Ἐκ τῆς διαιρέσεως ταύτης 27 : 9 εὑρίσκομεν πηλίκον 3. Ἕκαστος λοιπὸν πῆχυς ἐπωλήθη 3 δρχ.

Β'.) *Ὁ πῆχυς ἑνὸς ὑφάσματος ἀξίζει 9 δραχμάς. Πόσους πήχεις θὰ ἀγοράσωμεν μὲ 27 δραχμάς ;*

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς: Μὲ 9 δρχ. ἀγοράζομεν ἕνα πῆχυν· μὲ ἄλλας 9 δρχ. θὰ ἀγοράσωμεν ἄλλον ἕνα πῆχυν, καὶ ἑπομένως μὲ 27 δρχ. θὰ ἀγοράσωμεν τόσους πήχεις ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ 9 εἰς τὸν 27. Ἐπειδὴ δὲ ὁ 9 χωρεῖ εἰς τὸν 27 τρεῖς φοράς, συμπεραίνομεν ὅτι 3 πήχεις θὰ ἀγοράσωμεν.

Παρατήρησις.

59. — Τὰ προβλήματα τῆς μετρήσεως (ὡς τὸ δεύτερον ἐκ τῶν ἀνωτέρω) ἀναγνωρίζονται εὐκόλως ἐκ τοῦ ὅτι οἱ δύο δεδομένοι ἀριθμοὶ εἶνε ὁμοειδεῖς, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον οὔτε εἰς τὸν *πολλαπλασιασμὸν* οὔτε καὶ εἰς τὸν *μερισμὸν* συμβαίνει.

Καὶ φαίνεται μὲν ἐκ πρώτης ὄψεως εἴς τινα προβλήματα μερισμοῦ ὅτι οἱ ἀριθμοὶ εἶνε ὁμοειδεῖς. Ἐξετάζοντες ὅμως καλλίτερον τὰ πράγματα βεβαιούμεθα ὅτι ὑφίσταται οὐσιώδης διαφορὰ μεταξὺ των, καὶ ὅτι ἐπομένως ἡ ὁμοιότης αὐτῶν εἶνε μόνον φαινομενική. Τοῦτο θέλομεν ἐννοήσει ἐκ τῶν ἑξῆς δύο παραδειγμάτων:

α'.) Μὲ 265 δραχμὰς ἐμπορευθείς τις ἐκέρδισε 53 δρχ. Πόσον κέρδος ἀντιστοιχεῖ εἰς ἑκάστην δραχμὴν τοῦ κεφαλαίου του;

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο φέρουσι μὲν ἀμφότεροι οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ τὸ ὄνομα τῆς *δραχμῆς*, ἀλλ' αἱ μὲν 265 δρχ. εἶνε *κεφάλαιον*, ἐνῷ αἱ 53 δρχ. εἶνε *κέρδος*. Ἐπομένως δύνανται εὐκόλως νὰ διακριθῶσι.

β'.) 10 ὀκ. σίτου ἀνταλλάσσονται μὲ 16 ὀκ. κριθῆς. Μὲ πόσας ὀκάδας κριθῆς ἀνταλλάσσεται ἡ 1 ὀκᾶ τοῦ σίτου;

Καὶ ἐνταῦθα ἀμφότεροι οἱ ἀριθμοὶ σημαίνουσιν *ὀκάδας*· ἀλλ' ὁ μὲν πρῶτος ὀκάδας *σίτου*, ὁ δὲ δεύτερος ὀκάδας *κριθῆς*· ἐπομένως ἀκριβέστερον ἐξεταζόμενοι εὑρίσκονται ὅτι εἶνε ἑτεροειδεῖς.

60. — Ἐκ τῆς λύσεως τῶν ἀνωτέρω προβλημάτων διδασκόμεθα πρὸς τούτοις ὅτι εἰς μὲν τὸν μερισμὸν τὸ πηλίκον εἶνε πάντοτε ὁμοειδὲς μὲ τὸν διαιρετέον, ἐν ᾧ εἰς τὴν μέτρησιν τὸ εἶδος τοῦ πηλίκου ὁρίζεται ἐκ τοῦ προβλήματος.

Προβλήματα.

1) Ἠγόρασέ τις 37 ὀκάδας ἐξ ἑνὸς πράγματος ἀντὶ 222 δραχμῶν. Πόσον ἠγόρασε τὴν ὀκᾶν. ('Απ. 6 δρχ.)

2) Πόσους πήχεις δυνάμεθα νὰ ἀγοράσωμεν μὲ 76 δραχμάς, ἐὰν ὁ εἷς πῆχυς ἀξίζῃ 4 δραχμάς; ('Απ. 19 πηχ.).

3) Ἐν διαστήματι ἑνὸς ἔτους ὑπάλληλός τις ἔλαβεν ἀπὸ μισθοὺς του 2 220 δρχ. Πόσον ἐπληρώνετο κατὰ μῆνα; ('Απ. 185 δρχ.).

4) Δύο ἀριθμοὶ ἔχουσι γινόμενον 377. Ὁ εἷς ἐξ αὐτῶν εἶνε 13· ποῖος εἶνε ὁ ἕτερος;

Λύσις. Γνωρίζομεν (ἐδ. 44) ὅτι εἰς πᾶσαν τελείαν διαίρεσιν ὁ διαιρετέος ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον· τὸν 377 λοιπόν, ὁ ὁποῖος εἶνε γινόμενον δύο παραγόντων, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς διαιρετέον, τὸν δὲ δοθέντα παράγοντα 13 ὡς διαιρέτην· τότε ὁ ζητούμενος δεύτερος παράγων θὰ εὑρεθῇ ὡς πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 377 διὰ 13 ὅτι εἶνε ὁ 29.

5) Τελείας τινὸς διαιρέσεως ὁ μὲν διαιρετέος εἶνε 3 626, τὸ δὲ πηλίκον 37. Ποῖος εἶνε ὁ διαιρέτης; ('Απ. 98).

6) 11 600 δράμια πόσας ὀκάδας ἀποτελοῦσιν; ('Απ. 29 ὀκ.).

7) 45 621 λεπτὰ πόσας δραχμὰς ἀποτελοῦσι ;

('Απ. 456 δρχ. καὶ μένουν καὶ 21 λ.).

8) Ἠγόρασέ τις πρόβατα καὶ αἶγας ἐν ὅλῳ 64. Καὶ τὰ μὲν πρόβατα ἠγόρασε πρὸς 18 δρχ. ἕκαστον, τὰς δὲ αἶγας πρὸς 14. Διὰ τὴν ἀγορὰν ταύτην ἐπλήρωσεν ἐν ὅλῳ 940 δρχ. Πόσα ἦσαν τὰ πρόβατα καὶ πόσαι αἱ αἶγες ;

Λύσις. Ἂν ἦσαν ὅλα αἶγες, θὰ ἐπλήρωνε $14 \times 64 = 896$ δρχ. Ἤδη ὅμως ἐπλήρωσεν 940 δρχ, δηλ. 44 δρχ. περισσότερον. Τὰς 44 αὐτὰς δραχμὰς ἐπλήρωσε περιπλέον, διότι μεταξὺ τῶν 64 ζῴων, τὰ ὁποῖα ἠγόρασεν, ὑπῆρχον καὶ πρόβατα. Ἐπειδὴ δὲ δι' ἕκαστον πρόβατον ἐπλήρωσε 4 δρχ. περιπλέον, συμπεραίνομεν ὅτι τὰ πρόβατα θὰ ἦσαν τόσα, ὅσας φορὰς χωρεῖ τὸ 4 εἰς τὸ 44, ἤτοι 11. Αἱ δὲ αἶγες ἐπομένως ἦσαν $64 - 11 = 53$.

9) Ἀποθανών τις διέταξεν ἐν τῇ διαθήκῃ του νὰ μοιρασθῇ ἡ περιουσία του εἰς 3 ἴσα μέρη, ἐξ ὧν τὸ μὲν ἓν νὰ δοθῇ εἰς τὴν σύζυγόν του, τὰ δὲ δύο ἄλλα νὰ μοιρασθῶσιν ἐξ ἴσου εἰς τὰ τέσσαρα τέκνα του. Ἡ περιουσία του εὑρέθη ὅτι ἦτο 165 000 δρχ. Πόσα θὰ λάβῃ ἡ σύζυγος καὶ πόσα ἕκαστον ἐκ τῶν τέκνων ;

('Απ. ἡ μὲν σύζυγος θὰ λάβῃ 55 000 δρχ, ἕκαστον δὲ τέκνον 27 500).

10) Ἠγόρασέ τις ἓν βαρέλιον οἴνου πρὸς 65 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν. Κατόπιν ἐπώλησεν αὐτὸν πρὸς 80 λεπτὰ καὶ ἐκέρδισε 18 δρχ. Πόσας ὀκάδας οἴνου περιεῖχε τὸ βαρέλιον ;

Λύσις. Ἀπὸ μίαν ὀκᾶν ἐκέρδισε 15 λεπτά· ἄλλα 15 λεπτὰ ἐκέρδισεν ἀπὸ ἄλλην μίαν ὀκᾶν· καὶ ἐπομένως τὰ 1800 λεπτὰ τὰ ἐκέρδισεν ἀπὸ τόσας ὀκάδας, ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ 15 εἰς τὸν 1800, ἤτοι ἀπὸ 120 ὀκ. Τὸ βαρέλιον λοιπὸν περιεῖχεν 120 ὀκ. οἴνου

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

ΠΕΡΙ ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΟΣ

Ὁρισμοί.

61. — Ἀριθμός τις λέγεται *διαιρετὸς δι'* ἄλλου, ἐὰν διαιρῆται δι' αὐτοῦ ἀκριβῶς, χωρὶς δηλ. νὰ ἀφήνῃ ὑπόλοιπον. Οὕτω ὁ **24** εἶνε διαιρετὸς διὰ τοῦ **4**, ὁ **35** διὰ τοῦ **7** κ.τ.λ.

Ὁ ἀριθμὸς ὅστις διαιρεῖ ἀκριβῶς ἄλλον τινὰ ἀριθμὸν λέγεται *διαιρέτης* αὐτοῦ. Π.χ. ὁ **4** εἶνε διαιρέτης τοῦ **24**, ὁ **7** τοῦ **35** κτλ.

Ὁ **24**, ὅστις ὠνομάσθη *διαιρετὸς* διὰ **4**, λέγεται καὶ *πολλαπλάσιον* τοῦ **4**, διότι γίνεται ἐξ αὐτοῦ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (*ἐδ.* **30**). Ἐπίσης καὶ ὁ **35** εἶνε πολλαπλάσιον τοῦ **7**.

Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι εἶνε πολλαπλάσια ἄλλου, εἶνε καὶ διαιρετοὶ δι' αὐτοῦ, καὶ συμπεραίνομεν ὅτι *πᾶς ἀριθμὸς διαιρεῖ ἀκριβῶς τὰ πολλαπλάσιά του καὶ μόνον αὐτά.*

Ὁ **4**, τὸν ὁποῖον ὠνομάσαμεν *διαιρέτην* τοῦ **24**, λέγεται καὶ *παράγων* αὐτοῦ, διότι πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ ἀριθμόν τινα (τὸν 6) παράγει τὸν **24**. Ὁ παράγων καλεῖται πρὸς τούτοις καὶ *ὑποπολλαπλάσιον*.

Πρῶτος λέγεται ἀριθμός τις, ἐὰν δὲν ἔχῃ κανένα ἄλλον διαιρέτην παρὰ μόνον τὸν ἑαυτόν του καὶ τὴν μονάδα. Τοιοῦτοι εἶνε οἱ ἑξῆς ἀριθμοί: **2**, **3**, **5**, **7**, **11**, **13**, **17**. . . κ.τ.λ.

Ἄρτιοι (ἤτοι *ζυγοί*) λέγονται οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι διαιροῦνται ἀκριβῶς διὰ τοῦ **2**. Π. χ. οἱ ἀριθμοὶ **8**, **10**, **14**, **20**, κτλ.

Περιττοὶ δὲ (ἤτοι *μονοί*), ὅσοι δὲν διαιροῦνται ἀκριβῶς διὰ τοῦ **2**, καθὼς οἱ **5**, **9**, **15**, **21** κτλ.

Θεμελιώδης ἰδιότης τῆς διαιρετότητος.

62. — *Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν προστεθῇ εἰς τὸν διαιρετέον ἢ ἀφαιρεθῇ ἀπ' αὐτοῦ οἱονδήποτε πολλαπλάσιον τοῦ διαιρέτου.*

Ἔστω π. χ. ἡ ἑξῆς διαίρεσις **53 : 8**, ἥτις πηλίκον μὲν δίδει **6**, ὑπόλοιπον δὲ **5**. Ἂν προσθέσωμεν εἰς τὸν διαιρετέον τὸν 24 (πολλαπλάσιον τοῦ 8), λαμβάνομεν τὴν διαίρεσιν **77 : 8**, ἥτις καὶ αὐτὴ ἀφήνει ὑπόλοιπον **5**. Ἐπίσης ἂν ἀπὸ τὸν 53 ἀφαιρέσωμεν 16 (πολλαπλάσιον καὶ τοῦτο τοῦ 8) λαμβάνομεν τὴν διαίρεσιν **37 : 8**, ἥτις πάλιν ἀφήνει ὑπόλοιπον **5**.

Ἐπὶ τῆς ἰδιότητος ταύτης στηριζόμενοι δυνάμεθα νὰ ἐννοήσωμεν εὐκόλως τὴν ἀλήθειαν τῶν ἑπομένων προτάσεων.

Περὶ τῶν διαιρετῶν 2 καὶ 5.

63. — *Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως οἱουδήποτε ἀριθμοῦ διὰ*

2 *ἢ διὰ* **5** *εἶνε τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ τελευταίου ψηφίου του διὰ* **2** *ἢ διὰ* **5**.

Π. χ. ὁ ἀριθμὸς 4 318 διαιρούμενος διὰ 2 ἢ διὰ 5 θὰ ἀφήσῃ τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον ἀφήνει καὶ τὸ τελευταῖον αὐτοῦ ψηφίον 8, διαιρούμενον διὰ 2 ἢ διὰ 5. Ἐπομένως διὰ μὲν τοῦ 2 διαιρούμενος ὁ 4 318 θὰ ἀφήσῃ ὑπόλοιπον 0, διὰ δὲ τοῦ 5 θὰ ἀφήσῃ 3.

Ὁ λόγος εἶνε ὁ ἑξῆς :

Ὁ ἀριθμὸς 4 318 ἀποτελεῖται ἀπὸ 431 δεκάδας καὶ 8 μονάδας. Ἑκάστη δεκὰς εἶνε πολλαπλάσιον καὶ τοῦ 2 καὶ τοῦ 5 (διότι $10=2\times5$). Ἐπομένως ἂν ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ ἀφαιρέσωμεν πάσας τὰς δεκάδας του ἀνὰ μίαν, τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ 2 ἢ διὰ 5 δὲν μεταβάλλεται (*ἐδ.* **62**). Ἀλλὰ τότε θὰ ἔχωμεν μόνον τὰς 8 μονάδας. Ἄρα ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς διαιρούμενος διὰ 2 ἢ διὰ 5 θὰ ἀφήσῃ τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον ἀφήνει καὶ τὸ ψηφίον τῶν μονάδων του διαιρούμενον διὰ 2 ἢ διὰ 5.

Κατὰ ταῦτα ὁ ἀριθμὸς 67 935 διὰ μὲν τοῦ 2 διαιρούμενος ἀφήνει ὑπόλοιπον 1, διὰ δὲ τοῦ 5 ὑπόλοιπον 0. Οἱ δὲ ἀριθμοὶ 680, 75 100, 1 239 000 καὶ διὰ τοῦ 2 διαιρούμενοι ἀφήνουσιν ὑπόλοιπον 0 καὶ διὰ τοῦ 5 ἐπίσης.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι :

Διὰ τοῦ 2 διαιροῦνται οἱ ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ τελευταῖον ψηφίον εἶνε **0** *ἢ* **2** *ἢ* **4** *ἢ* **6** *ἢ* **8**. *Διὰ τοῦ* **5** *δὲ διαιροῦνται ὅσοι ὡς τελευταῖον ψηφίον ἔχουσι* **5** *ἢ* **0**.

Περὶ τῶν διαιρετῶν 4 καὶ 25.

64.—*Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως οἱουδήποτε ἀριθμοῦ διὰ* **4** *ἢ διὰ* **25** *εἶνε τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διὰ* **4** *ἢ διὰ* **25** *διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ, τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦσι τὰ δύο τελευταῖα αὐτοῦ ψηφία.*

Π. χ. ὁ ἀριθμὸς 73 512 διαιρούμενος διὰ 4 ἢ διὰ 25 θὰ ἀφήσῃ τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον ἀφήνει καὶ ὁ ἀριθμὸς 12, τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦσι τὰ δύο τελευταῖα ψηφία του, διαιρούμενος διὰ 4 ἢ διὰ 25. Ἐπομένως διὰ μὲν τοῦ 4 διαιρούμενος ὁ 73 512 θὰ ἀφήσῃ ὑπόλοιπον 0, διὰ δὲ τοῦ 25 θὰ ἀφήσῃ 12.

Ὁ λόγος τούτου εἶνε ὁ ἑξῆς :

Ὁ ἀριθμὸς 73 512 ἀποτελεῖται ἀπὸ 735 ἑκατοντάδας καὶ 12 μονάδας (*σελ.* **16**, *ζήτ.* **4**ον) Ἑκάστη ἑκατοντὰς εἶνε πολλαπλάσιον καὶ τοῦ 4 καὶ τοῦ 25 (διότι $100=4\times25$). Ἑπομένως ἂν ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ ἀφαιρέσωμεν πάσας τὰς ἑκατοντάδας του ἀνὰ μίαν, τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ 4 ἢ διὰ 25 δὲν μεταβάλλεται (ἐδ. **62**). Ἀλλὰ τότε θὰ μᾶς μείνωσι μόνον αἱ 12 μονάδες. Ἄρα ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς διαιρούμενος διὰ 4 ἢ διὰ 25 θὰ ἀφήσῃ τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον ἀφήνει καὶ ὁ ὑπὸ τῶν δύο τελευταίων ψηφίων αὐτοῦ ἀποτελούμενος ἀριθμός, διαιρούμενος διὰ 4 ἢ διὰ 25.

Κατὰ ταῦτα ὁ ἀριθμὸς 458 675 διὰ μὲν τοῦ 4 διαιρούμενος ἀφήνει ὑπόλοιπον 3, διὰ δὲ τῶν 25 ὑπόλοιπον 0. Οἱ ἀριθμοὶ 398 750, 711 025 διὰ μὲν τοῦ 25 διαιρούμενοι ἀφήνουσιν ὑπόλοιπον 0, διὰ δὲ τοῦ 4 ὁ μὲν πρῶτος ἀφήνει ὑπόλοιπον 2, ὁ δὲ δεύτερος 1. Καὶ τέλος οἱ ἀριθμοὶ 56 800, 479 000 ἀφήνουσιν ὑπόλοιπον 0, εἴτε διὰ τοῦ 4 διαιρεθῶσιν εἴτε διὰ τοῦ 25.

Περὶ τῶν διαιρετῶν 3 καὶ 9.

65.—*Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως οἱουδήποτε ἀριθμοῦ διὰ 9 ἢ διὰ 3 εἶνε τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον ἀφήνει τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων αὐτοῦ διαιρούμενον διὰ* 9 *ἢ διὰ* 3.

Π. χ. ὁ ἀριθμὸς 5 487 διαιρούμενος διὰ 9 ἢ διὰ 3 θὰ ἀφήσῃ τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον ἀφήνει καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων αὐτοῦ 24 διαιρούμενον διὰ 9 ἢ διὰ 3. Ἑπομένως διὰ μὲν τοῦ 9 διαιρούμενος ὁ 5 487 θὰ ἀφήσῃ ὑπόλοιπον 6, διὰ δὲ τοῦ 3 θὰ ἀφήσῃ 0.

Τοῦτο ἐξηγοῦμεν ὡς ἑξῆς:

Γνωρίζομεν ὅτι ἂν ἀπὸ τὸν 10 ἀφαιρέσωμεν 9, θὰ μείνῃ ὑπόλοιπον 1. Ἐὰν ἔχωμεν πολλὰς δεκάδας καὶ ἐξ ἑκάστης ἀφαιρέσωμεν 9 μονάδας, θὰ μείνῃ ἐξ ἑκάστης δεκάδος ὑπόλοιπον 1 μονάς, ἤτοι ἐν ὅλῳ θὰ μείνωσι τόσαι μονάδες, ὅσας ἔχομεν δεκάδας. Ἑπομένως ἂν ἀπὸ τὰς 8 δεκάδας τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ ἀφαιρέσωμεν ὀκτὼ 9, θὰ ἔχωμεν ὑπόλοιπον 8 μονάδας.

Ἐπίσης ἂν ἀπὸ τὸν 100 ἀφαιρέσωμεν πάντα τὰ περιεχόμενα ἐν αὐτῷ 9, ἕνδεκα ἐν ὅλῳ ($9\times11=99$), θὰ μᾶς μείνῃ ὑπόλοιπον μία μονάς. Ἐὰν ἔχωμεν πολλὰς ἑκατοντάδας καὶ ἐξ ἑκάστης ἀφαιρέσωμεν 99 μονάδας, θὰ μείνῃ ἐξ ἑκάστης ἑκατοντάδος ὑπόλοιπον 1 μονάς, ἤτοι ἐν ὅλῳ θὰ μείνωσι τόσαι μονάδες ὅσας ἔχομεν ἑκατοντάδας. Ἑπομένως ἂν ἀπὸ τὰς 4 ἑκατοντάδας τοῦ ἀριθμοῦ ἀφαιρέσωμεν 4 φορὰς τὸ 99, θὰ λάβωμεν ὑπόλοιπον 4 μονάδας.

Καὶ τέλος ἂν ἀπὸ μίαν χιλιάδα ἀφαιρέσωμεν πάντα τὰ περιεχόμενα ἐν αὐτῇ 9, ἑκατὸν ἕνδεκα ἐν ὅλῳ $(9 \times 111 = 999)$, θὰ μείνῃ ὑπόλοιπον 1 μονάς. Ἐὰν ἔχωμεν πολλὰς χιλιάδας καὶ ἐξ ἑκάστης ἀφαιρέσωμεν 999 μονάδας, θὰ μείνῃ ἐξ ἑκάστης χιλιάδος ὑπόλοιπον 1 μονάς, ἤτοι ἐν ὅλῳ θὰ μείνωσι τόσαι μονάδες ὅσας ἔχομεν χιλιάδας. Ἑπομένως ἂν ἀπὸ τὰς 5 χιλιάδας τοῦ ἀριθμοῦ ἀφαιρέσωμεν 5 φορὰς τὸ 999, θὰ λάβωμεν ὑπόλοιπον 5 μονάδας.

Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι τα ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ 5 487 δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς παριστῶντα τὰς ἁπλᾶς μονάδας, αἵτινες μένουσιν ὡς ὑπόλοιπον, ὅταν ἀπὸ τῶν δεκάδων, ἑκατοντάδων καὶ χιλιάδων τοῦ ἀριθμοῦ ἀφαιρεθῶσιν ἅπαντα τὰ ἐν αὐταῖς περιεχόμενα 9. Τὸ ὁλικὸν ἑπομένως ὑπόλοιπον θὰ εἶνε τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τοῦ ἀριθμοῦ, ἤτοι $5+4+8+7$.

Διὰ τῆς ἀφαιρέσεως ὅμως πάντων τούτων τῶν 9 ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 5 487, γνωρίζομεν (ἐδ. **62**) ὅτι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ τοῦ 9 δὲν μεταβάλλεται. Ἄρα τὸ ὑπόλοιπον τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ διαιρουμένου διὰ τοῦ 9 καὶ τὸ ὑπόλοιπον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ψηφίων του, διαιρουμένου ἐπίσης διὰ τοῦ 9, εἶνε ἓν καὶ τὸ αὐτό.

Τὸ αὐτὸ ἀληθεύει καὶ ὡς πρὸς τὸν διαιρέτην 3. Διότι ὁ ἀφαιρεθεὶς ἀριθμὸς ὡς ἀποτελούμενος ἐκ πολλῶν 9 εἶνε πολλαπλάσιον καὶ τοῦ 3.

Κατὰ ταῦτα ὁ ἀριθμὸς 6 129 διαιρεῖται ἀκριβῶς καὶ διὰ τοῦ 9 καὶ διὰ τοῦ 3, διότι τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του εἶνε διαιρετὸν καὶ διὰ τοῦ 9 καὶ διὰ τοῦ 3. Ὁ 92 353 οὔτε διὰ τοῦ 9 οὔτε διὰ τοῦ 3 διαιρεῖται ἀκριβῶς, διότι τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του διὰ μὲν τοῦ 9 διαιρούμενον ἀφήνει ὑπόλοιπον 4, διὰ δὲ τοῦ 3 ὑπόλοιπον 1. Καὶ τέλος ὁ ἀριθμὸς 8 206 944 διαιρεῖται διὰ τοῦ 3 διότι τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του εἶνε 33, δηλ. διαιρετὸν διὰ 3· διὰ τοῦ 9 ὅμως διαιρούμενος θὰ ἀφήσῃ ὑπόλοιπον 6 (ὅσον ἀφήνει καὶ ὁ 33 διαιρούμενος διὰ 9).

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συμπεραίνομεν καὶ τὰ ἑξῆς:

Πᾶς ἀριθμὸς διαιρούμενος διὰ τοῦ 9 διαιρεῖται καὶ διὰ τοῦ 3.

Πᾶς ἀριθμὸς ὅμως διαιρούμενος διὰ τοῦ 3 δὲν διαιρεῖται πάντοτε καὶ διὰ τοῦ 9.

Περὶ τῶν διαιρετῶν 6, 10, 12 καὶ 100.

66.—*Διὰ τοῦ* 6 *διαιρεῖται πᾶς ἀριθμός, ἐὰν διαιρῆται καὶ διὰ* 2 *καὶ διὰ* 3. Π. χ. οἱ ἀριθμοὶ 45 132, 1 008 κτλ.

67.—*Διὰ τοῦ* 10 *διαιρεῖται ἀριθμός τις, ἐὰν λήγῃ εἰς* 0, οἷον οἱ ἀριθμοὶ 6 130, 72 300, 98 000 κτλ.

68.—*Διὰ τοῦ* 12 *διαιρεῖται πᾶς ἀριθμός, ἐὰν διαιρῆται καὶ διὰ τοῦ* 3 *καὶ διὰ τοῦ* 4. Τοιοῦτος εἶνε ὁ 31 524.

69.—Καὶ τέλος *διὰ τοῦ* 100 *διαιρεῖται ἀριθμός τις, ἐὰν λήγῃ εἰς δύο τοὐλάχιστον μηδενικά*. Τοιοῦτοι π. χ. εἶνε οἱ ἀριθμοὶ 74 500, 103 000 κ.τ.λ.

ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΜΕΓΙΣΤΟΥ ΚΟΙΝΟΥ ΔΙΑΙΡΕΤΟΥ

Ὁρισμοί.

70.—*Κοινὸς διαιρέτης* δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν λέγεται ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος διαιρεῖ πάντας ἀκριβῶς.

Π. χ. τῶν ἀριθμῶν 10, 35 καὶ 50 κοινὸς διαιρέτης εἶνε ὁ 5.

Εἶνε δυνατὸν ὅμως οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ νὰ ἔχωσι περισσοτέρους τοῦ ἑνὸς κοινοὺς διαιρέτας. Τοιοῦτοι π. χ. εἶνε οἱ ἀριθμοὶ 12, 36 καὶ 60, τῶν ὁποίων κοινοὶ διαιρέται εἶνε ὁ 2, ὁ 3, ὁ 4, ὁ 6 καὶ ὁ 12. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει ὁ μεγαλείτερος πάντων τῶν κοινῶν διαιρετῶν λέγεται *μέγιστος κοινὸς διαιρέτης*. Τῶν δοθέντων ἀριθμῶν ἑπομένως μέγιστος κοινὸς διαιρέτης εἶνε ὁ 12.

Πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους λέγονται οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι δὲν ἔχουσι κανένα ἄλλον κοινὸν διαιρέτην εἰμὴ μόνον τὴν μονάδα, π. χ. οἱ ἀριθμοὶ 4 καὶ 7.

Εὕρεσις τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου δύο ἀριθμῶν.

71.—Πρὸς εὕρεσιν τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου δύο ἀριθμῶν ἀκολουθοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα:

Διαιροῦμεν τὸν μεγαλείτερον διὰ τοῦ μικροτέρου, καὶ ἂν μὲν εὕρωμεν ὑπόλοιπον 0, *τότε ὁ μικρότερος εἶνε ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δύο ἀριθμῶν. Ἄλλως διαιροῦμεν τὸν μικρότερον διὰ τοῦ ὑπολοίπου, κατόπιν τὸ πρῶτον ὑπόλοιπον διὰ τοῦ δευτέρου, τὸ δεύτερον διὰ τοῦ τρίτου καὶ οὕτω καθεξῆς, ἕως ὅτου εὕρωμεν ὑπόλοιπον* 0. *Ὁ τελευταῖος διαιρέτης θὰ εἶνε ὁ ζητούμενος μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.*

Ἐφαρμογαὶ τοῦ ἀνωτέρω κανόνος.

α'.) Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ.κ.δ. τῶν ἀριθμῶν 36 καὶ 9

36	9
36	4
0	

(Ἀπ. Μ.κ.δ. τῶν ἀριθμῶν τούτων εἶνε ὁ 9).

β'.) Τίς ὁ μ.κ.δ. τῶν ἀριθμῶν 584 καὶ 16;

584	16		16	8
48	36		16	2
104			0	
96				
8				

(Ἀπ. Ὁ ζητούμενος μ.κ.δ. εἶνε ὁ 8).

γ'.) Ποῖος εἶνε ὁ μ.κ.δ. τῶν ἀριθμῶν 584 καὶ 14;

584	14,	14	10,	10	4,	4	2		
56	41	10	1	8	2	4	2		
24		4		2		0			
14									
10									

(Ἀπ. Μ.κ.δ. εἶνε ὁ 2).

Χάριν εὐκολίας διατάσσομεν τὴν πρᾶξιν ὡς ἑξῆς:

	41	1	2	2
584	14	10	4	2
56	10	8	4	
24	4	2	0	
14				
10				

Τὸ πηλίκον δηλ. ἑκάστης διαιρέσεως γράφομεν ὑπεράνω τοῦ διαιρέτου καὶ τὸ χωρίζομεν ἀπ' αὐτοῦ διὰ μικρᾶς ὁριζοντίας γραμμῆς.

δ'.) Ποῖον μ. κ. δ. ἔχουσιν οἱ ἀριθμοὶ 584 καὶ 17;

	34	2	1	5
584	17	6	5	1.
51	12	5	5	
74	5	1	0	
68				
6				

('Απ. μ.κ.δ. αὐτῶν εἶνε ἡ μονάς· ἑπομένως οἱ ἀριθμοὶ 584 καὶ 17 εἶνε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους).

Εὕρεσις τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου πολλῶν ἀριθμῶν.

72.—Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν, ἀκολουθοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα :

Γράφομεν τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς εἰς μίαν ὁριζοντίαν σειράν· ἔπειτα γράφομεν πάλιν τὸν μικρότερον πάντων κάτωθι τῆς θέσεώς του καὶ μεταχειριζόμενοι αὐτὸν ὡς διαιρέτην διαιροῦμεν δι' αὐτοῦ πάντας τοὺς ἄλλους, γράφοντες κάτωθι ἑκάστου τὸ ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον ἀφήνει ἡ διαίρεσίς του. Ἂν τότε πάντα τὰ ὑπόλοιπα εἶνε 0, *ὁ ἀριθμός, τὸν ὁποῖον ἐλάβομεν ὡς διαιρέτην, θὰ εἶνε ὁ ζητούμενος μέγιστος κοινὸς διαιρέτης. Ἄλλως ἐπαναλαμβάνομεν τὰ αὐτὰ καὶ εἰς τὴν δευτέραν σειράν, τὴν ὁποίαν ἀποτελοῦσι τὰ ὑπόλοιπα τῶν διαφόρων διαιρέσεων καὶ ὁ ληφθεὶς διαιρέτης, καὶ ἐξακολουθοῦμεν τοιουτοτρόπως ἕως ὅτου εὕρωμεν πάντα τὰ ὑπόλοιπα* 0. *Ὁ ἀριθμός, τὸν ὁποῖον θὰ ἔχωμεν λάβει εἰς τὴν τελευταίαν σειρὰν ὡς διαιρέτην, θὰ εἶνε ὁ ζητούμενος μέγιστος κοινὸς διαιρέτης.*

Π. χ. ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 26, 34, 42 καὶ 50 εὑρίσκεται κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα ὡς ἑξῆς :

26	34	42	50
26	8	16	24
2	8	0	0
2	0	0	0

(Ὁ ζητούμενος μ. κ. δ. εἶνε ὁ 2.)

Προβλήματα.

1) Εἰς πόσα τὸ πολὺ παιδία δυνάμεθα νὰ μοιράσωμεν 40 μῆλα, 64 σῦκα καὶ 48 ῥοδάκινα, οὕτως ὥστε τὸ καθὲν παιδίον νὰ λάβῃ ἴσον ἀριθμὸν ἐξ ἑκάστου εἴδους ;

('Απ. Εἰς 8 τὸ πολὺ παιδία. Ἕκαστον δὲ ἐξ αὐτῶν θὰ λάβῃ 5 μῆλα, 8 σῦκα καὶ 6 ῥοδάκινα).

2) Ἐπιθυμεῖ τις νὰ μάθῃ πόσα τὸ πολὺ ὀρφανὰ κοράσια δύναται νὰ προικίσῃ διανέμων εἰς αὐτὰ ἐξ ἴσου 49 600 δρχ. καὶ 3 080

πήχεις πανίου; καὶ πόσας δραχμὰς καὶ πόσους πήχεις πανίου πρέπει νὰ δώσῃ ὡς προῖκα εἰς ἕκαστον κοράσιον;

('Απ. 40 τὸ πολὺ κοράσια, ἕκαστον ἐκ τῶν ὁποίων θὰ λάβῃ 1 240 δρχ. καὶ 77 πήχεις πανίου.)

3) Μαθητὴς ἀνήκων εἰς εὔπορον οἰκογένειαν θέλει νὰ διανείμῃ ἐξ ἴσου 60 τετράδια, 48 μολυβδοκόνδυλα καὶ 12 ἀναγνωσματάρια εἰς ὅσον τὸ δυνατὸν περισσοτέρους ἐκ τῶν ἀπορωτέρων συμμαθητῶν του. Εἰς πόσους θὰ διανεμηθῶσι ταῦτα καὶ πόσα ἐξ ἑκάστου εἴδους θὰ λάβῃ ἕκαστος;

('Απ. εἰς 12· ἕκαστος δὲ ἐξ αὐτῶν θὰ λάβῃ ἀπὸ 5 τετράδια, 4 μολυβδοκόνδυλα καὶ 1 ἀναγνωσματάριον.)

4) Προκειμένου νὰ διανεμηθῶσιν ὑπὸ φιλανθρωπικῆς τινος εταιρείας εἰς διαφόρους πτωχὰς οἰκογενείας 1 300 ὀκ. ἀλεύρου, 455 δρχ. καὶ 780 πηχ. μαλλίνου ὑφάσματος, ζητεῖται ποῖος εἶνε ὁ μεγαλείτερος ἀριθμὸς τῶν πτωχῶν οἰκογενειῶν, εἰς τὰς ὁποίας εἶνε δυνατὸν νὰ μοιρασθῶσι ταῦτα ἐξ ἴσου, καὶ πόσαι ὀκάδες ἀλεύρου, πόσαι δραχμαὶ καὶ πόσοι πήχεις ὑφάσματος θὰ δοθῶσιν εἰς ἑκάστην τῶν οἰκογενειῶν τούτων;

('Απ. 65. Ἑκάστη δὲ οἰκογένεια θὰ λάβῃ ἀπὸ 20 ὀκ. ἀλεύρου, 7 δρχ, καὶ 12 πηχ. μαλλίνου ὑφάσματος.)

5) 58 πίνακες, 145 χάρται καὶ 261 θρανία εἰς πόσα τὸ πολὺ σχολεῖα καὶ κατὰ τίνα τρόπον εἶνε δυνατὸν νὰ διανεμηθῶσιν ἐξ ἴσου;

('Απ. Εἰς 29 σχολεῖα, ἕκαστον ἐκ τῶν ὁποίων θὰ λάβῃ ἀπὸ 2 πίνακας, 5 χάρτας καὶ 9 θρανία.)

Περὶ τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου.

73. — Γνωρίζομεν ἤδη (ἐδ. **30**) ὅτι ἀριθμός τις λέγεται πολλαπλάσιον ἄλλου, ἐὰν γίνεται ἐξ αὐτοῦ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ· οὕτω ὁ **40** εἶνε πολλαπλάσιον τοῦ **8**, ὁ **21** τοῦ **3** κτλ.

Ἀριθμός τις λέγεται *κοινὸν πολλαπλάσιον* δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν, ἐὰν εἶνε πολλαπλάσιον ἑκάστου ἐξ αὐτῶν· οἷον ὁ **36** εἶνε κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν **4**, **6**, **9** καὶ **12**, διότι εἶνε πολλαπλάσιον καὶ τοῦ **4** καὶ τοῦ **6** καὶ τοῦ **9** καὶ τοῦ **12**.

Ἀλλ' οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι ἐκτὸς τοῦ **36** ἔχουσι καὶ ἄλλα κοινὰ πολλαπλάσια, οἷον τὸν **72**, τὸν **108**, καὶ ἐν γένει πάντα τὰ πολλαπλάσια τοῦ 36. Ἐκ πάντων τούτων μικρότερον εἶνε ὁ 36· διὰ τοῦτο ὁ 36 λέγεται καὶ **ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον** τῶν ἀριθμῶν 4, 6, 9 καὶ 12.

Ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν λέγεται λοιπὸν ὁ μικρότερος ἐκ πάντων τῶν ἀριθμῶν, οἵτινες εἶνε κοινὰ πολλαπλάσια τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον ὁσωνδήποτε δεδομένων ἀριθμῶν εὑρίσκομεν κατὰ τὸν ἑξῆς κανόνα:

74.—*Γράφομεν πρῶτον πάντας τοὺς ἀριθμοὺς τούτους εἰς μίαν ὁριζοντίαν σειράν. Ἔπειτα δὲ παρατηροῦμεν ἐὰν πρῶτός τις ἀριθμὸς διαιρῇ δύο τοὐλάχιστον ἐξ αὐτῶν. Πρὸς τοῦτο ἀρχίζομεν τὰς δοκιμὰς ἀπὸ τὸν μικρότερον ἐκ τῶν πρώτων ἀριθμῶν, ἤτοι ἀπὸ τὸν 2. Καὶ ὅταν εὕρωμεν τοιοῦτόν τινα πρῶτον ἀριθμόν, διαιροῦμεν πάντας τοὺς δι' αὐτοῦ διαιρουμένους, κάτωθι δὲ ἑκάστου γράφομεν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεώς του. Γράφομεν δὲ πρὸς τούτοις κάτωθι τῆς θέσεώς των καὶ τοὺς μὴ διαιρουμένους ἀκριβῶς ἀριθμούς. Τοιουτοτρόπως λαμβάνομεν δευτέραν σειρὰν ἀριθμῶν εἰς τὴν ὁποίαν ἐπαναλαμβάνομεν τὰ αὐτὰ καὶ ἐξακολουθοῦμεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἕως ὅτου λάβωμεν ἀριθμούς, οἵτινες ἀνὰ δύο τοὐλάχιστον λαμβανόμενοι νὰ μὴ ἔχωσιν ἄλλον κοινὸν διαιρέτην ἐκτὸς τῆς μονάδος. Τὸ γινόμενον τότε τῶν ἀριθμῶν τῆς τελευταίας σειρᾶς καὶ πάντων τῶν ληφθέντων διαιρετῶν θὰ εἶνε τὸ ζητούμενον ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.*

Παραδείγματα.

α'.) Ποῖον ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον ἔχουσιν οἱ ἀριθμοὶ 18 καὶ 24;

διαιρέται		
2	18	24
3	9	12
	3	4

(Ἀπ. τὸ ζητούμενον ἐλ. κ. πολ. εἶνε $3\times4\times2\times3$ ἤτοι 72.)

β'.) Ποῖον εἶνε τὸ ἐλ. κ. πολ. τῶν ἀριθμῶν 12, 15 καὶ 18;

διαιρέται			
2	12	15	18
3	6	15	9
	2	5	3

(Ἀπ. $2\times5\times3\times2\times3=180$.)

γ'.) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐλ. κ. πολ. τῶν ἀριθμῶν 4, 5, 8 καὶ 12

διαιρέται				
2	4	5	8	12
2	2	5	4	6
	1	5	2	3

(Ἀπ. $1 \times 5 \times 2 \times 3 \times 2 \times 2$ ἤτοι 120.)

δ'.) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐλ. κ. πολ. τῶν ἀριθμῶν 5, 7, 9, 11.

(Ἀπ. Ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι ἀνὰ δύο λαμβανόμενοι δὲν ἔχουσι κανένα ἄλλον κοινὸν διαιρέτην ἐκτὸς τῆς μονάδος, ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον αὐτῶν θὰ εἶνε τὸ γινόμενόν των $5 \times 7 \times 9 \times 11$ ἤτοι 3 465).

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΟΥΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

ΒΙΒΛΙΟΝ Β'.

ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Ὁρισμοί.

75.—Ἐὰν διαιρέσωμεν τὴν ἀκεραίαν μονάδα εἰς ἴσα μέρη καὶ ἐξ αὐτῶν λάβωμεν τὸ ἕν, τοῦτο λέγεται *κλασματικὴ μονάς*. Ἐὰν π. χ. κόψωμεν ἓν μῆλον εἰς 2 ἴσα μέρη καὶ λάβωμεν τὸ ἕν, τοῦτο ἐκφράζεται διὰ μιᾶς κλασματικῆς μονάδος, ἥτις λέγεται *ἓν δεύτερον* καὶ γράφεται $\frac{1}{2}$. Ἐὰν τὸ μῆλον τὸ κόψωμεν εἰς 3 ἴσα μέρη καὶ λάβωμεν τὸ ἕν, προκύπτει νέα κλασματικὴ μονάς, ἥτις λέγεται *ἓν τρίτον* καὶ γράφεται $\frac{1}{3}$. Τοιουτοτρόπως γεννῶνται προσέτι αἱ κλασματικαὶ μονάδες $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{19}$, $\frac{1}{100}$ . . . . κ.τ.λ.

Ὥστε *κλασματικὴ μονὰς λέγεται τὸ ἓν ἐκ τῶν ἴσων μερῶν, εἰς τὰ ὁποῖα ἔχει διαιρεθῇ ἡ ἀκεραία μονάς.*

Ἐπειδὴ δὲ τὴν ἀκεραίαν μονάδα δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν εἰς ὁσαδήποτε ἴσα μέρη θελήσωμεν, συμπεραίνομεν ὅτι *αἱ κλασματικαὶ μονάδες εἶνε ἄπειροι.*

Κλασματικοὶ ἀριθμοὶ λέγονται οἱ γινόμενοι ἔκ τινος κλασματικῆς μονάδος διὰ τῆς ἐπαναλήψεως αὐτῆς. Ἂν π. χ. τὴν κλασματικὴν μονάδα $\frac{1}{2}$ λάβωμεν ἅπαξ, γίνεται ὁ κλασματικὸς ἀριθμὸς $\frac{1}{2}$. Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι *καὶ μία μόνον κλασματικὴ μονὰς δύναται νὰ ἀποτελέσῃ κλασματικὸν ἀριθμόν.* Ἂν τὴν αὐτὴν μονάδα $\frac{1}{2}$

ἐπαναλάβωμεν δίς, γίνεται ὁ κλασματικὸς ἀριθμὸς $\frac{2}{2}$· ἂν τρίς, ὁ $\frac{3}{2}$ καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἄς λάβωμεν ἤδη ἑτέραν κλασματικὴν μονάδα, οἷον τὴν $\frac{1}{3}$. Καὶ ἐξ αὐτῆς δυνάμεθα κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον νὰ σχηματίσωμεν νέους κλασματικοὺς ἀριθμούς, τοὺς $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{3}$.... κ.τ.λ. Ὥστε ἐξ ἑκάστης κλασματικῆς μονάδος σχηματίζεται καὶ νέα σειρὰ κλασματικῶν ἀριθμῶν. Οἱ κλασματικοὶ ἀριθμοὶ λέγονται καὶ ἁπλῶς κλάσματα.

Γραφὴ καὶ ἀπαγγελία τῶν κλασμάτων.

76. — Ἕκαστον κλάσμα σημειοῦται διὰ δύο ἀκεραίων, οἵτινες γράφονται ὁ εἷς ὑπὸ τὸν ἕτερον καὶ χωρίζονται ἀπ' ἀλλήλων διὰ μιᾶς ὁριζοντίας γραμμῆς. Ὁ ἀκέραιος ὁ ὑπεράνω τῆς γραμμῆς λέγεται *ἀριθμητής*, ὁ δὲ ὑπ' αὐτὴν *παρονομαστής*. Καὶ ὁ μὲν παρονομαστὴς δίδει τὸ ὄνομα τῶν κλασματικῶν μονάδων τοῦ ἀριθμοῦ, δεικνύων εἰς πόσα ἴσα μέρη ἔχει διαιρεθῆ ἡ ἀκεραία μονάς, ὁ δὲ ἀριθμητὴς φανερώνει πόσα ἐκ τῶν ἴσων τούτων μερῶν ἐλάβομεν, ἀριθμεῖ δηλ. τὸ πλῆθος τῶν κλασματικῶν μονάδων, ἐξ ὧν συγκροτεῖται ὁ ἀριθμός. Π. χ. $\frac{4}{5}$ τοῦ μήλου σημαίνει ὅτι διῃρέσαμεν ἓν ἀκέραιον μῆλον εἰς 5 ἴσα μέρη καὶ ἐξ αὐτῶν ἐλάβομεν τὰ 4.

Ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς μὲ ἓν ὄνομα λέγονται ὁμοῦ *ὅροι* τοῦ κλάσματος. Καὶ ὁ μὲν ἀριθμητὴς ἀπαγγέλλεται ὡς ἀριθμητικὸν ἀπόλυτον (*ἕν, δύο, τρία* κ.τ.λ.), ὁ δὲ παρονομαστὴς ὡς τακτικὸν (*πρῶτα, δεύτερα, τρίτα* κτλ.). Οὕτω τὸ κλάσμα $\frac{7}{9}$ ἀπαγγέλλεται ἑπτὰ ἔνατα.

Σχέσεις τῶν κλασμάτων πρὸς τὴν ἀκεραίαν μονάδα.

77. — Ἂν τὴν κλασματικὴν μονάδα $\frac{1}{7}$ ἐπὶ παραδείγματι ἐπαναλάβωμεν 5 φοράς, γίνεται, ὡς ἀνωτέρω εἴδομεν, τὸ κλάσμα $\frac{5}{7}$. Ἂν τὴν αὐτὴν μονάδα ἐπαναλάβωμεν ἑπτὰ φοράς, γίνεται τὸ κλάσμα $\frac{7}{7}$· καὶ ἂν ἐννέα φοράς, τὸ $\frac{9}{7}$.

Ἂς ἐξετάσωμεν ἤδη ἕκαστον ἐκ τῶν τριῶν τούτων κλασμάτων συγκρίνοντες αὐτὸ πρὸς τὴν ἀκεραίαν μονάδα.

α'.) $\frac{5}{7}$ τοῦ μήλου σημαίνει, ὡς ἐμάθομεν, ὅτι ἐκόψαμεν ἓν μῆλον εἰς 7 ἴσα μέρη καὶ ἐξ αὐτῶν ἐλάβομεν τὰ 5. Τότε ὅμως εἶνε φανερὸν ὅτι δὲν ἔχομεν ὅλον τὸ μῆλον, ἀλλ' ἓν μέρος αὐτοῦ. Ἑπομένως συμπεραίνομεν ὅτι *πᾶν κλάσμα εἶνε μικρότερον τῆς ἀκεραίας μονάδοι, ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς αὐτοῦ εἶνε μικρότερος τοῦ παρονομαστοῦ.* Τοιαῦτα κλάσματα ἐκτὸς τοῦ $\frac{5}{7}$ εἶνε καὶ τὰ ἑξῆς $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{6}{11}$ κ.τ.λ.

β'.) $\frac{7}{7}$ τοῦ μήλου σημαίνει ὅτι ἐκόψαμεν ἓν μῆλον εἰς 7 ἴσα μέρη καὶ τὰ ἐλάβομεν καὶ τὰ 7. Τότε ὅμως εἶνε φανερὸν ὅτι ἔχομεν ὅλον τὸ μῆλον, μὲ μόνην τὴν διαφορὰν ὅτι τοῦτο δὲν εἶνε πλέον ἀκέραιον ἀλλὰ διῃρημένον. Ἑπομένως συμπεραίνομεν ὅτι *πᾶν κλάσμα ἰσοῦται πρὸς τὴν ἀκεραίαν μονάδα, ἐὰν ὁ ἀριθμητής του ἰσοῦται μὲ τὸν παρονομαστήν του.* Τοιαῦτα κλάσματα εἶνε καὶ τὰ ἑξῆς : $\frac{6}{6}$, $\frac{9}{9}$, $\frac{11}{11}$, $\frac{25}{25}$ κ.τ.λ, τὰ ὁποῖα ἑπομένως εἶνε πάντα ἴσα μεταξύ των, ἀφ' οὗ τὸ καθὲν ἐξ αὐτῶν ἰσοῦται πρὸς μίαν ἀκεραίαν μονάδα.

γ'.) Ἂς ἐξετάσωμεν τέλος καὶ τὸ κλάσμα $\frac{9}{7}$ τοῦ μήλου. Τοῦτο σημαίνει ὅτι διῃρέσαμεν μῆλά τινα εἰς 7 ἴσα μέρη ἕκαστον καὶ ἐκ τῶν προκυψάντων τεμαχίων ἐλάβομεν 9. Εἶνε λοιπὸν φανερὸν ὅτι ἔχομεν κἄτι περισσότερον λάβει ἀπὸ ἓν μῆλον, διότι διὰ νὰ ἀποτελεσθῇ ἓν μῆλον δὲν θὰ ἦτο ἀνάγκη νὰ λάβωμεν παρὰ μόνον 7 τοιαῦτα τεμάχια $\left(\frac{7}{7}\right)$, ἐν ᾧ ἡμεῖς ἔχομεν λάβει 9. Ἑπομένως συμπεραίνομεν ὅτι : *Πᾶν κλάσμα εἶνε μεγαλείτερον τῆς ἀκεραίας μονάδος, ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς αὐτοῦ εἶνε μεγαλείτερος τοῦ παρονομαστοῦ.* Τοιαῦτα κλάσματα εἶνε πρὸς τούτοις καὶ τὰ ἑξῆς : $\frac{11}{4}$, $\frac{17}{6}$, $\frac{22}{9}$ κ.τ.λ.

Ἐξαγωγὴ τῶν ἀκεραίων μονάδων ἑνὸς κλάσματος.

78. —Εἴδομεν ἀνωτέρω ὅτι ὅταν ὁ ἀριθμητὴς ἑνὸς κλάσματος εἶνε μεγαλείτερος τοῦ παρονομαστοῦ, τότε τὸ κλάσμα εἶνε μεγαλείτερον τῆς ἀκεραίας μονάδος, καὶ ἐπομένως ἐμπεριέχει μίαν ἢ περισσοτέρας ἀκεραίας μονάδας. Θὰ μάθωμεν ἤδη πῶς δυνάμεθα νὰ ἐξαγάγωμεν αὐτάς.

Ἄς λάβωμεν ὡς παράδειγμα τὸ κλάσμα $\frac{22}{9}$. Ἄν ἐξ αὐτοῦ ἀποχωρίσωμεν $\frac{9}{9}$, ὅσα δηλ. χρειάζονται διὰ νὰ ἀποτελεσθῇ μία ἀκεραία μονάς, τότε θὰ μᾶς μείνωσι $\frac{13}{9}$. Ἐκ τούτων δυνάμεθα νὰ ἀφαιρέσωμεν ἄλλα $\frac{9}{9}$, καὶ τότε θὰ μᾶς μείνῃ τὸ κλάσμα $\frac{4}{9}$, τὸ ὁποῖον εἶνε πλέον μικρότερον τῆς ἀκεραίας μονάδος. Ἐπομένως λέγομεν ὅτι τὸ δοθὲν κλάσμα $\frac{22}{9}$ ἐμπεριέχει **2** ἀκεραίας μονάδας καὶ $\frac{4}{9}$ αὐτῆς.

Ἄς λάβωμεν ἤδη καὶ δεύτερον παράδειγμα, οἷον τὸ κλάσμα $\frac{18}{9}$. Ἄν ἀφαιρέσωμεν ἀπ' αὐτοῦ $\frac{9}{9}$, δηλ. 1 ἀκεραίαν μονάδα, θὰ μᾶς μείνωσιν ἄλλα $\frac{9}{9}$, ἤτοι ἄλλη 1 ἀκεραία μονάς. Ἐπομένως τὸ δοθὲν κλάσμα $\frac{18}{9}$ ἰσοδυναμεῖ ἀκριβῶς μὲ **2** ἀκεραίας μονάδας.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα :

79. — *Διὰ νὰ ἐξαγάγωμεν τὰς ἀκεραίας μονάδας ἑνὸς κλάσματος, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητήν του διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του· καὶ τὸ μὲν πηλίκον, τὸ ὁποῖον θὰ εὕρωμεν θὰ παριστᾷ τὰ ἀκεραίας μονάδας, τὸ δὲ ὑπόλοιπον, ἂν μείνῃ, γράφομεν ὡς ἀριθμητὴν κλάσματος, τὸ ὁποῖον παρονομαστὴν θὰ ἔχῃ τὸν διαιρέτην.*

Ἐφαρμογαί.

$$\frac{21}{9}=2\frac{3}{9},\quad \frac{53}{7}=7\frac{4}{7},\quad \frac{11}{2}=5\frac{1}{2},\quad \frac{62}{5}=12\frac{2}{5}.$$

Τροπὴ ἀκεραίου εἰς κλάσμα

80.—Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι μᾶς ἐδόθη νὰ τρέψωμεν τὸν ἀκέραιον 4 εἰς κλάσμα, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ ὡρισμένον παρονομαστήν, οἷον τὸν 7. Τοῦτο σημαίνει ὅτι πρέπει ἕκαστον ἐκ τῶν 4 π.χ. μήλων νὰ κοπῇ εἰς 7 ἴσα τεμάχια καὶ πάντα ταῦτα τὰ τεμάχια νὰ προστεθῶσι. Πρὸς τοῦτο σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς: Τὸ 1 μῆλον θὰ κοπῇ εἰς 7 ἴσα τεμάχια, τὰ ὁποῖα θὰ λέγωνται ἕβδομα, ἤτοι εἰς $\frac{7}{7}$· τὰ 2 μῆλα θὰ κοπῶσιν εἰς 2 φορὰς $\frac{7}{7}$, καὶ ἐπομένως τὰ 4 μῆλα εἰς 4 φορὰς $\frac{7}{7}$, ἤτοι εἰς $\frac{7}{7}+\frac{7}{7}+\frac{7}{7}+\frac{7}{7}=\frac{28}{7}$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἑπόμενον κανόνα :

81.—*Διὰ νὰ τρέψωμεν ἀκέραιον εἰς κλάσμα, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ δοθέντα παρονομαστήν, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀκέραιον ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦτον καὶ τὸ μὲν γινόμενον γράφομεν ὡς ἀριθμητήν, παρονομαστὴν δὲ γράφομεν τὸν δοθέντα.*

Τροπὴ μεικτοῦ εἰς κλάσμα.

82.—*Μεικτὸς* ἀριθμὸς λέγεται ὁ συγκείμενος ἐξ ἀκεραίου καὶ κλάσματος. Τοιοῦτοι π. χ. εἶνε οἱ ἀνωτέρω (*ἐν ἐδ.* 79) εὑρεθέντες ἀριθμοὶ $2\frac{3}{9}$, $7\frac{4}{7}$, $5\frac{1}{2}$, $12\frac{2}{5}$ κ.τ.λ.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι μᾶς ἐδόθη νὰ τρέψωμεν τὸν μεικτὸν $3\frac{2}{5}$ εἰς κλάσμα. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἔχομεν 3 π. χ. μῆλα ἀκέραια, ἐξ ἑνὸς δὲ ἄλλου μήλου διῃρημένου εἰς 5 ἴσα μέρη ὅτι ἔχομεν λάβει 2 τεμάχια, καὶ ζητεῖται ἤδη νὰ διαιρεθῶσι καὶ τὰ ἀκέραια μῆλα εἰς 5 ἴσα μέρη ἕκαστον, πάντα δὲ ταῦτα τὰ ἴσα τεμάχια νὰ προστεθῶσι.

Πρὸς τοῦτο σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς: Τὸ ἓν ἀκέραιον μῆλον θὰ κοπῇ εἰς $\frac{5}{5}$, τὰ 2 θὰ κοπῶσιν εἰς 2 φορὰς $\frac{5}{5}$ καὶ τὰ 3 μῆλα εἰς 3 φορὰς $\frac{5}{5}$, ἤτοι εἰς $\frac{5}{5}+\frac{5}{5}+\frac{5}{5}=\frac{15}{5}$. Εἰς ταῦτα προσθέτομεν καὶ τὰ $\frac{2}{5}$, τὰ ὁποῖα ἐπὶ πλέον ἔχει ὁ μεικτός, καὶ γίνονται ἐν ὅλῳ $\frac{17}{5}$· ὥστε ὁ μεικτὸς $3\frac{2}{5}$ τραπεὶς εἰς κλάσμα ἔγεινε $\frac{17}{5}$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἑπόμενον κανόνα:

83. —*Διὰ νὰ τρέψωμεν μεικτὸν εἰς κλάσμα ἰσοδύναμον, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀκέραιον ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος, εἰς τὸ γινόμενον προσθέτομεν τὸν ἀριθμητήν, καὶ τὸ μὲν ἄθροισμα, τὸ ὁποῖον τότε θὰ εὕρωμεν, γράφομεν ὡς ἀριθμητήν, παρονομαστὴν δὲ ἀφήνομεν τὸν τοῦ κλάσματος.*

Ἰδιότητες τῶν κλασμάτων.

84.—1) *Πᾶν κλάσμα, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν παρονομαστήν του, δίδει γινόμενον τὸν ἀριθμητήν του.*

ἤτοι $\frac{2}{3}\times 3=2$.

Διότι $\frac{2}{3}\times 3$ σημαίνει, ὡς γνωστόν, ὅτι πρέπει τὸ $\frac{2}{3}$ νὰ ἐπαναληφθῇ 3 φοράς. Ἀλλὰ τότε γίνεται $\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}$ ἤτοι $\frac{6}{3}$, τὸ ὁποῖον ἰσοδυναμεῖ μὲ 2 ἀκεραίας μονάδας.

85. —2) *Πᾶν κλάσμα εἶνε πηλίκον τῆν διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ του διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του.*

Π. χ. τὸ $\frac{2}{3}$ εἶνε πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 2 διὰ τοῦ 3.

Ἤτοι $2:3=\frac{2}{3}$.

Διότι ἐκτελοῦντες τὴν δοκιμὴν τῆς διαιρέσεως εὑρίσκομεν ὅτι

$\frac{2}{3} \times 3$ δίδει (κατὰ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα) γινόμενον τὸν διαιρετέον 2. Ἄρα τὸ $\frac{2}{3}$ εἶνε πραγματικῶς τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 2 διὰ τοῦ 3, ἤτοι τοῦ ἀριθμητοῦ του διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του.

Ἐκ τῆς δευτέρας ταύτης ἰδιότητος συνάγομεν καὶ τὴν ἑξῆς :

86. — 3) *Ὅταν ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν ἀκέραιον δι' ἀκεραίου* (π. χ. τὸν 2 διὰ τοῦ 3 ἐν τῷ ἀνωτέρω παραδείγματι), *τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης δυνάμεθα νὰ γράψωμεν ὡς κλάσμα* $\left(\frac{2}{3}\right)$, *τὸ ὁποῖον ἀριθμητὴν μὲν νὰ ἔχῃ τὸν διαιρετέον, παρονομαστὴν δὲ τὸν διαιρέτην.*

Κατὰ τὴν ἰδιότητα ταύτην τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 15 διὰ τοῦ 5 θὰ εἶνε $\frac{15}{5}$, τοῦ 19 διὰ τοῦ 7 θὰ εἶνε $\frac{19}{7}$ καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἐκ τῆς τελευταίας ταύτης ἰδιότητος συνάγομεν τὸ ἑξῆς σπουδαῖον συμπέρασμα : Ὅτι δηλ. διὰ τῆς παραδοχῆς τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν ἡ διαίρεσις γίνεται πλέον πρᾶξις *πάντοτε τελεία.* Διὰ μόνων τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἡ διαίρεσις π.χ. 7 : 19 δὲν θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ ἐκτελεσθῇ, διότι ὁ 19 δὲν χωρεῖ εἰς τὸν 7, ἡ δὲ διαίρεσις 19 : 7 θὰ ἦτο ἀτελής, διότι θὰ μᾶς ἄφηνε καὶ ὑπόλοιπον. Ἤδη ὅμως διὰ τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν καὶ αἱ δύο αὗται διαιρέσεις εἶνε δυνατὸν νὰ γείνωσι καὶ μάλιστα τέλειαι, καὶ ἐκ μὲν τῆς πρώτης τῆς ὁποίας ὁ διαιρετέος εἶνε μικρότερος τοῦ διαιρέτου λαμβάνομεν πηλίκον τὸ κλάσμα $\frac{7}{19}$ μὴ περιέχον ἀκεραίας μονάδας, ἐκ δὲ τῆς δευτέρας, τῆς ὁποίας ὁ διαιρετέος εἶνε μεγαλείτερος τοῦ διαιρέτου, λαμβάνομεν πηλίκον τὸ κλάσμα $\frac{19}{7}$ περιέχον καὶ ἀκεραίας μονάδας. Τὰς ἀκεραίας ταύτας μονάδας ἐξάγομεν διαιροῦντες τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ. Τὸ ἀκριβὲς ὅμως πηλίκον θὰ σύγκειται ἐκ τοῦ ἀκεραίου πηλίκου, τὸ ὁποῖον διὰ τῆς διαιρέσεως ταύτης εὑρίσκομεν, καὶ ἐκ κλάσματος ἀριθμητὴν μὲν ἔχοντος τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως, παρονομαστὴν δὲ τὸν διαιρέτην (*ὅρα καὶ ἐδ.* **79**).

87. — 4) *Ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς ἑνὸς κλάσματος πολλαπλασιασθῇ* *ἐπί τινα ἀριθμόν, καὶ ὁλόκληρον τὸ κλάσμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν. Ἐὰν δὲ ὁ ἀριθμητὴς αὐτοῦ διαιρεθῇ διά τινος ἀριθμοῦ, καὶ ὅλον τὸ κλάσμα διαιρεῖται διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου.*

Ἔστω π. χ. τὸ κλάσμα $\frac{4}{7}$. Ἐὰν τὸν ἀριθμητὴν αὐτοῦ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 3, προκύπτει τὸ κλάσμα $\frac{12}{7}$, τὸ ὁποῖον προφανῶς εἶνε 3 φορὰς μεγαλείτερον τοῦ $\frac{4}{7}$. Διότι καὶ τὰ δύο κλάσματα ἔχειναν ἐκ τῆς αὐτῆς κλασματικῆς μονάδος $\frac{1}{7}$, ἀλλὰ τὸ μὲν πρῶτον περιέχει αὐτὴν 4 φοράς, τὸ δὲ δεύτερεν 12.

Ἐὰν ἤδη λάβωμεν τὸ κλάσμα $\frac{12}{7}$ καὶ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμητὴν αὐτοῦ διὰ τοῦ 3, προκύπτει τὸ κλάσμα $\frac{4}{7}$, τὸ ὁποῖον κατὰ τὸν αὐτὸν ἁπλούστατον τρόπον ἀποδεικνύεται ὅτι εἶνε 3 φορὰς μικρότερον τοῦ $\frac{12}{7}$.

Παρατήρησις.—Κατόπιν τῆς ἀνωτέρω ἀποδείξεως συγκρίνοντες τὰ κλάσματα $\frac{3}{7}$ καὶ $\frac{12}{7}$, ἐξάγομεν τὸ ἑξῆς συμπέρασμα:

Ἐκ διαφόρων κλασμάτων ἐχόντων τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν μεγαλείτερον εἶνε ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἔχει τὸν μεγαλείτερον ἀριθμητήν.

88.—5) *Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς ἑνὸς κλάσματος πολλαπλασιασθῇ ἐπί τινα ἀριθμόν, τὸ κλάσμα διαιρεῖται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ· ἐὰν δὲ ὁ παρονομαστὴς αὐτοῦ διαιρεθῇ διά τινος ἀριθμοῦ, τὸ κλάσμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον.*

Ἔστω π.χ. τὸ κλάσμα $\frac{7}{11}$. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν παρονομαστὴν αὐτοῦ ἐπὶ 3, προκύπτει τὸ κλάσμα $\frac{7}{33}$, τὸ ὁποῖον λέγομεν ὅτι εἶνε τρεῖς φορὰς μικρότερον τοῦ $\frac{7}{11}$. Διότι $\frac{7}{11}$ π. χ. τοῦ μήλου σημαίνει ὅτι ἐλάβομεν 7 τεμάχια ἐξ ἑνὸς μήλου, τὸ ὁποῖον ἔχει διαιρεθῆ εἰς 11 ἴσα μέρη· ἐν ᾧ $\frac{7}{33}$ τοῦ μήλου σημαίνει ὅτι πάλιν 7 τεμάχια ἐλάβομεν, ἀλλ' ἐκ μήλου τὸ ὁποῖον αὐτὴν τὴν φορὰν ἔχει διαιρεθῆ εἰς 33 ἴσα μέρη· ἑπομένως ταῦτα εἶνε ἤδη τρεῖς φορὰς μικρότερα τῶν προηγουμένων.

Ἂς θεωρήσωμεν ἤδη τὸ κλάσμα $\frac{7}{33}$. Ἂν διαιρέσωμεν τὸν παρονομαστὴν αὐτοῦ διὰ 3, προκύπτει τὸ κλάσμα $\frac{7}{11}$, τὸ ὁποῖον κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύεται ὅτι εἶνε τρεῖς φορὰς μεγαλείτερον τοῦ $\frac{7}{33}$.

Παρατήρησις.—Συγκρίνοντες κατόπι τῆς ἀνωτέρω ἀποδείξεως τὰ δύο κλάσματα $\frac{7}{11}$ καὶ $\frac{7}{33}$, συμπεραίνομεν ὅτι:

Ἐκ διαφόρων κλασμάτων ἐχόντων τὸν αὐτὸν ἀριθμητὴν μεγαλείτερον εἶνε ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἔχει τὸν μικρότερον παρονομαστήν.

89.—6) *Ἐὰν καὶ οἱ δύο ὅροι ἑνὸς κλάσματος πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος δὲν μεταβάλλεται. Ἐπίσης καὶ ἂν διαιρεθῶσιν ἀμφότεροι οἱ ὅροι αὐτοῦ δι' ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, προκύπτει πάλιν κλάσμα ἰσοδύναμον.*

Ἔστω π. χ. τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους αὐτοῦ ἐπὶ 5, προκύπτει τὸ κλάσμα $\frac{15}{20}$, τὸ ὁποῖον λέγομεν ὅτι εἶνε ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $\frac{3}{4}$. Διότι ὅταν ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος $\frac{3}{4}$ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 5, τὸ κλάσμα τοῦτο γίνεται (κατὰ τὴν 4ην ἰδιότ.) 5 φορὰς μεγαλείτερον· ὅταν δὲ πολλαπλασιασθῇ καὶ ὁ παρονομαστής του ἐπὶ 5, τὸ κλάσμα γίνεται 5 φορὰς μικρότερον (κατὰ τὴν 5ην ἰδιότ.) Ἄρα ἡ ἀξία αὐτοῦ τοιουτοτρόπως οὐδαμῶς μεταβάλλεται.

Ἂς θεωρήσωμεν ἤδη τὸ κλάσμα $\frac{15}{20}$. Ἂν διαιρέσωμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους αὐτοῦ διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, οἷον τοῦ 5, προκύπτει τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$, τὸ ὁποῖον λέγομεν ὅτι εἶνε ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $\frac{15}{20}$. Διότι διαιρουμένου τοῦ ἀριθμητοῦ του διὰ 5, τὸ κλάσμα $\frac{15}{20}$ γίνεται πεντάκις μικρότερον· διαιρουμένου δὲ κατόπιν καὶ τοῦ παρονομαστοῦ του διὰ 5, γίνεται πεντάκις μεγαλείτερον. Ἄρα ἡ ἀξία αὐτοῦ τοιουτοτρόπως οὐδόλως μετεβλήθη.

Ἁπλοποίησις τῶν κλασμάτων.

90. — Ἐκ τῆς τελευταίας τῶν ἀνωτέρω ἰδιοτήτων ἐμάθομεν ὅτι ἐὰν καὶ οἱ δύο ὅροι ἑνὸς κλάσματος διαιρεθῶσι διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος δὲν μεταβάλλεται. Εἰς τοῦτο στηρίζεται ἡ ἁπλοποίησις τῶν κλασμάτων.

Εἶνε δὲ ἡ ἁπλοποίησις πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας ἐξ ἑνὸς κλάσματος, τὸ ὁποῖον ἔχει μεγάλους σχετικῶς ὅρους, εὑρίσκομεν ἄλλο κλάσμα ἰσοδύναμον καὶ μὲ ὅρους μικροτέρους.

Εἶνε φανερὸν ὅτι ἐκεῖνα μόνον τὰ κλάσματα ἁπλοποιοῦνται, τῶν ὁποίων οἱ ὅροι ἔχουσι κοινόν τινα διαιρέτην. Π. χ. τὸ κλάσμα $\frac{3}{5}$ δὲν ἁπλοποιεῖται, διότι δὲν ὑπάρχει ἀριθμός, ὁ ὁποῖος νὰ διαιρῇ συγχρόνως καὶ τοὺς δύο ὅρους του, μόνον δὲ τὴν μονάδα ἔχουσιν οὗτοι κοινὸν διαιρέτην. Τὰ τοιαῦτα κλάσματα, τῶν ὁποίων οἱ ὅροι εἶνε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ τὰ ὁποῖα ἑπομένως δὲν εἶνε δυνατὸν νὰ ἁπλοποιηθῶσι, τ. ἔ. νὰ ἀναχθῶσιν εἰς ἁπλουστέραν μορφήν, καλοῦνται *ἀνάγωγα.*

Τὸ κλάσμα $\frac{10}{25}$ δύναται νὰ ἁπλοποιηθῇ, διότι οἱ ὅροι αὐτοῦ ἔχουσι κοινὸν διαιρέτην, τὸν 5. Διαιροῦντες λοιπὸν δι' αὐτοῦ ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους του εὑρίσκομεν τὸ ἰσοδύναμον κλάσμα $\frac{2}{5}$, τὸ ὁποῖον ἔχει ὅρους μικροτέρους.

Ὑπάρχουσιν ὅμως καὶ κλάσματα, τῶν ὁποίων οἱ ὅροι δὲν ἔχουσιν ἕνα μόνον κοινὸν διαιρέτην. Π. χ. τοῦ κλάσματος $\frac{24}{60}$ οἱ ὅροι ἔχουσι πλείονας κοινοὺς διαιρέτας, τοὺς ἑξῆς : **2, 3, 4, 6** καὶ **12**. Ἐὰν τότε τὸ κλάσμα $\frac{24}{60}$ ἁπλοποιήσωμεν διαιροῦντες ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους αὐτοῦ δι' ἑνὸς ἐκ τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 4, 6, τὸ κλάσμα, τὸ ὁποῖον θέλει προκύψει, θὰ εἶνε δυνατὸν νὰ ἁπλοποιηθῇ καὶ πάλιν. Ἐν ᾧ ἂν ἁπλοποιήσωμεν τὸ δοθὲν κλάσμα διαιροῦντες τοὺς ὅρους του διὰ τοῦ 12, τοῦ *μεγίστου* δηλ. *κοινοῦ διαιρέτου* αὐτῶν, θέλει προκύψει τὸ κλάσμα $\frac{2}{5}$, τὸ ὁποῖον εἶνε ἀνάγωγον. Ἐκ τούτου συμπεραίνομεν ὅτι προτιμότερον εἶνε νὰ ἁπλοποιῶμεν κλάσμα τι διὰ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου τῶν ὅρων αὐτοῦ.

Τροπὴ ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα.

91. — *Ὁμώνυμα* κλάσματα λέγονται ὅσα ἔχουσι τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, ἤτοι ὅσα γίνονται ἐκ τῆς αὐτῆς κλασματικῆς μονάδος. Π. χ. τὰ κλάσματα $\frac{3}{8}$ καὶ $\frac{7}{8}$ ἢ $\frac{4}{11}$, $\frac{7}{11}$, $\frac{10}{11}$ κ.τ.λ. *Ἑτερώνυμα* δὲ ὅσα ἔχουσι διαφόρους παρονομαστάς, ἤτοι ὅσα γίνονται ἐκ διαφόρων κλασματικῶν μονάδων. Π. χ. τὰ κλάσματα $\frac{4}{5}$ καὶ $\frac{3}{7}$.

Διὰ νὰ τρέψωμεν ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα, στηριζόμεθα εἰς τὴν ἰδιότητα τῶν κλασμάτων (6ην), καθ' ἣν ἡ ἀξία ἑνὸς κλάσματος δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν καὶ οἱ δύο ὅροι αὐτοῦ πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

92. — Ἀκολουθοῦμεν δὲ διὰ τὴν τοιαύτην τροπὴν τὸν ἀκόλουθον κανόνα :

α'.) Εὑρίσκομεν (κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ἐδ. **74**) *τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον πάντων τῶν παρονομαστῶν τῶν δοθέντων κλασμάτων, καὶ τοῦτο καθιστῶμεν κοινὸν παρονομαστὴν ὡς ἑξῆς : Διαιροῦμεν αὐτὸ δι' ἑνὸς ἑκάστου ἐκ τῶν παρονομαστῶν γράφοντες συγχρόνως κάτωθι ἑκάστου κλάσματος ἕκαστον εὑρισκόμενον πηλίκον. Ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους ἑκάστου κλάσματος ἐπὶ τὸ ἀντίστοιχον πηλίκον.*

Σημείωσις α'. — Ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν εἶνε ὁ μεγαλείτερος ἐξ αὐτῶν, ἐὰν οὗτος διαιρῆται διὰ πάντων τῶν ἄλλων παρονομαστῶν· ἐν ἐναντίᾳ δὲ περιπτώσει τὸ διπλάσιον, τριπλάσιον κτλ. αὐτοῦ, ἐὰν τοῦτο διαιρῆται διὰ πάντων τῶν παρονομαστῶν τῶν δοθέντων κλασμάτων.

Παραδείγματα.

Νὰ τραπῶσιν εἰς ὁμώνυμα τὰ ἑξῆς κλάσματα :

1) $\frac{7}{60}$ καὶ $\frac{5}{12}$ (ἐλάχ. κ. πολ. τῶν παρονομαστῶν ὁ 60)

$$\overset{(1)}{\frac{7\times1}{60\times1}} \quad \overset{(5)}{\frac{5\times5}{12\times5}}$$

$$\frac{7}{60} \quad \frac{25}{60}$$

2) $\frac{2}{3}$ $\frac{5}{6}$ καὶ $\frac{7}{12}$ (ἐλ. κ. πολ. ὁ 12)

$$\overset{(4)}{\frac{2\times4}{3\times4}} \quad \overset{(2)}{\frac{5\times2}{6\times2}} \quad \overset{(1)}{\frac{7\times1}{12\times1}}$$

$$\frac{8}{12} \quad \frac{10}{12} \quad \frac{7}{12}$$

3) $\frac{5}{8}$ καὶ $\frac{7}{12}$ (ἐλ. κ. πολ. τὸ διπλάσιον τοῦ 12, ἤτοι ὁ 24)

$$\overset{(3)}{\frac{5\times3}{8\times3}} \quad \overset{(2)}{\frac{7\times2}{12\times2}}$$

$$\frac{15}{24} \quad \frac{14}{24}$$

4) $\frac{1}{3}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{3}{8}$ (ἐλ.κ.πολ.τὸ τριπλάσιον τοῦ 8, ἤτοι ὁ 24).

$$\overset{(8)}{\frac{1\times8}{3\times8}} \quad \overset{(4)}{\frac{5\times4}{6\times4}} \quad \overset{(3)}{\frac{3\times3}{8\times3}}$$

$$\frac{8}{24} \quad \frac{20}{24} \quad \frac{9}{24}$$

5) $\frac{5}{7}$ $\frac{4}{9}$ (*Ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ 7 καὶ 9 εἶνε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἐλ. κ. πολ. αὐτῶν θὰ εἶνε (ἐδ.* **74** *δ'.) τὸ γινόμενόν των* **63**)

(9) (7)

$\frac{5\times9}{7\times9}$ $\frac{4\times7}{9\times7}$

$\frac{45}{63}$ $\frac{28}{63}$

6) $\frac{5}{12}$ $\frac{4}{15}$ $\frac{11}{18}$ (*ἐλ. κ. πολ. τῶν παρονομαστῶν εὑρίσκομεν κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ἐδ. 74 ὅτι εἶνε ὁ* **180**)

(15) (12) (10)

$\frac{5\times15}{12\times15}$ $\frac{4\times12}{15\times12}$ $\frac{11\times10}{18\times10}$

$\frac{75}{180}$ $\frac{48}{180}$ $\frac{110}{180}$

7) $\frac{2}{7}$ $\frac{4}{9}$ $\frac{3}{5}$ (*Ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ 7, 9 καὶ 5 ἀνὰ δύο λαμβανόμενοι εἶνε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἐλ. κ. πολ. αὐτῶν θὰ εἶνε (ἐδ.* **74**, *δ'.) τὸ γινόμενόν των* **315**)

(45) (35) (63)

$\frac{2\times45}{7\times45}$ $\frac{4\times35}{9\times35}$ $\frac{3\times63}{5\times63}$

$\frac{90}{315}$ $\frac{140}{315}$ $\frac{189}{315}$

8) $\frac{3}{4}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{2}{9}$ $\frac{4}{11}$ (ἐλ. κ. πολ. ὁ **396**)

(99) (66) (44) (36)

$\frac{3\times99}{4\times99}$ $\frac{5\times66}{6\times66}$ $\frac{2\times44}{9\times44}$ $\frac{4\times36}{11\times36}$

$\frac{297}{396}$ $\frac{330}{396}$ $\frac{88}{396}$ $\frac{144}{396}$

9) $\frac{2}{4}$ $\frac{4}{12}$ (*ἐλ. κ. πολ. ὁ* **12**)

(3) (1)

$\frac{2\times3}{4\times3}$ $\frac{4\times1}{12\times1}$

$\frac{6}{12}$ $\frac{4}{12}$

10) $\frac{7}{14}$ $\frac{3}{7}$ $\frac{2}{4}$ (*ἐλ. κ. πολ. τὸ διπλάσιον τοῦ 14, ὁ* **28**)

(2) (4) (7)

$\frac{7\times2}{14\times2}$ $\frac{3\times4}{7\times4}$ $\frac{2\times7}{4\times7}$

$\frac{14}{28}$ $\frac{12}{28}$ $\frac{14}{28}$

Σημείωσις β'. — Ἀντὶ τῶν δοθέντων κλασμάτων, ἐὰν δὲν εἶνε πάντα ἀνάγωγα, καλὸν εἶνε νὰ λαμβάνωμεν τὰ ἀνάγωγα αὐτῶν, ὁσάκις τοῦτο εἶνε εὔκολον. Διότι τότε ὁ κοινὸς παρονομαστής, τὸν ὁποῖον τὰ νέα ταῦτα κλάσματα (τὰ ἀνάγωγα) θὰ ἀποκτήσωσι τρεπόμενα εἰς ὁμώνυμα, θὰ εἶνε μικρότερος τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου τῶν παρονομαστῶν τῶν δοθέντων κλασμάτων.

Παραδείγματα.

Νὰ τραπῶσιν εἰς ὁμώνυμα τὰ ἑξῆς κλάσματα :

1) $\frac{5}{30}$ $\frac{21}{56}$

Καθιστῶμεν πρῶτον αὐτὰ ἀνάγωγα διαιροῦντες ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους ἑκατέρου διὰ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου τῶν ὅρων αὐτοῦ, καὶ τοιουτοτρόπως λαμβάνομεν :

$\frac{1}{6}$ $\frac{3}{8}$ (*τῶν παρονομαστῶν τῶν κλασμάτων τούτων ἐλ. κ. πολ. ὁ* **24**.)

(4) (3)

$\frac{1\times4}{6\times4}$ $\frac{3\times3}{8\times3}$

$\frac{4}{24}$ $\frac{9}{24}$

2) $\frac{18}{84}$ $\frac{3}{12}$ $\frac{18}{63}$

ἀντὶ τῶν κλασμάτων τούτων λαμβάνομεν τὰ ἀνάγωγα αὐτῶν :

$\frac{3}{14}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{2}{7}$ (ἐλ. κ. πολ. δ **28**)

(2) (7) (4)

$\frac{3\times2}{14\times2}$ $\frac{1\times7}{4\times7}$ $\frac{2\times4}{7\times4}$

$\frac{6}{28}$ $\frac{7}{28}$ $\frac{8}{28}$

3) $\frac{3}{13}$ $\frac{4}{16}$ $\frac{1}{9}$ $\frac{2}{7}$

καθιστῶμεν καὶ τὸ δεύτερον τῶν κλασμάτων τούτων ἀνάγωγον καὶ λαμβάνομεν :

$\frac{3}{13}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{9}$ $\frac{2}{7}$

(252) (819) (364) (468)

$\frac{3\times252}{13\times252}$ $\frac{1\times819}{4\times819}$ $\frac{1\times364}{9\times364}$ $\frac{2\times468}{7\times468}$

$\frac{756}{3276}$ $\frac{819}{3276}$ $\frac{364}{3276}$ $\frac{936}{3276}$

(*Ἐπειδὴ τῶν κλασμάτων τούτων οἱ παρονομασταὶ 13, 4, 9 καὶ 7 ἀνὰ δύο λαμβανόμενοι εἶνε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἐλ. κ. πολ. αὐτῶν θὰ εἶνε τὸ γινόμενόν των* **3276**.

Σημείωσις γ'.—Ὅταν τὰ δοθέντα κλάσματα εἶνε δύο, καὶ οἱ παρονομασταὶ αὐτῶν εἶνε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, συντομώτερον δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον :

Πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους ἑκάστου κλάσματος ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ ἑτέρου. (Οὕτω δὲ τὰ κλάσματα τρεπόμενα εἰς ὁμώνυμα ἔχουσι πάλιν κοινὸν παρονομαστὴν τὸ ἐλ. κ. πολ. τῶν δύο παρονομαστῶν, ἤτοι τὸ γινόμενόν των).

Παραδείγματα.

1) $\frac{3}{5}$ $\frac{4}{7}$ 2) $\frac{1}{10}$ $\frac{3}{13}$ 3) $\frac{5}{7}$ $\frac{4}{9}$

$\frac{3\times7}{5\times7}$ $\frac{4\times5}{7\times5}$ $\frac{1\times13}{10\times13}$ $\frac{3\times10}{13\times10}$ $\frac{5\times9}{7\times9}$ $\frac{4\times7}{9\times7}$

$\frac{21}{35}$ $\frac{20}{35}$ $\frac{13}{130}$ $\frac{30}{130}$ $\frac{45}{63}$ $\frac{28}{63}$

Σημείωσις δ'.—Ὅταν τὰ δοθέντα κλάσματα εἶνε περισσότερα τῶν δύο καὶ οἱ παρονομασταὶ αὐτῶν ἀνὰ δύο λαμβανόμενοι εἶνε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, συντομώτερον δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον :

Πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους ἑκάστου ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν πάντων τῶν λοιπῶν κλασμάτων. (Τοιουτοτρόπως δὲ τὰ κλάσματα γινόμενα ὁμώνυμα ἔχουσι πάλιν κοινὸν παρονομαστὴν τὸ ἐλ. κ. πολ. πάντων τῶν παρονομαστῶν τῶν δοθέντων κλασμάτων, ἤτοι τὸ γινόμενον αὐτῶν).

Παραδείγματα.

1) $$\frac{1}{7} \quad \frac{2}{9} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{4}{5}$$

$$\frac{1\times(9\times4\times5)}{7\times(9\times4\times5)} \quad \frac{2\times(7\times4\times5)}{9\times(7\times4\times5)} \quad \frac{3\times(7\times9\times5)}{4\times(7\times9\times5)} \quad \frac{4\times(7\times9\times4)}{5\times(7\times9\times4)}$$

$$\frac{1\times180}{7\times180} \quad \frac{2\times140}{9\times140}, \quad \frac{3\times315}{4\times315}, \quad \frac{4\times252}{5\times252}$$

$$\frac{180}{1260} \quad \frac{280}{1260} \quad \frac{945}{1260} \quad \frac{1008}{1260}$$

2) $$\frac{2}{7} \quad \frac{4}{9} \quad \frac{3}{5}$$

$$\frac{2\times(9\times5)}{7\times(9\times5)} \quad \frac{4\times(7\times5)}{9\times(7\times5)} \quad \frac{3\times(7\times9)}{5\times(7\times9)}$$

$$\frac{2\times45}{7\times45} \quad \frac{4\times35}{9\times35} \quad \frac{3\times63}{5\times63}$$

$$\frac{90}{315} \quad \frac{140}{315} \quad \frac{189}{315}$$

3) $$\frac{3}{13} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{9} \quad \frac{2}{7}$$

$$\frac{3\times(4\times9\times7)}{13\times(4\times9\times7)} \quad \frac{1\times(13\times9\times7)}{4\times(13\times9\times7)} \quad \frac{1\times(13\times4\times7)}{9\times(13\times4\times7)} \quad \frac{2\times(13\times4\times9)}{7\times(13\times4\times9)}$$

$$\frac{3\times252}{13\times252} \quad \frac{1\times819}{4\times819} \quad \frac{1\times364}{9\times364} \quad \frac{2\times468}{7\times468}$$

$$\frac{756}{3276} \quad \frac{819}{3276} \quad \frac{364}{3276} \quad \frac{936}{3276}$$

Παρατήρησις. — Κατὰ τὸν ἐν ταῖς σημ. γ'. καὶ δ'. ὑποδειχθέντα σύντομον τρόπον δυνάμεθα καὶ οἱαδήποτε κλάσματα νὰ τρέψωμεν εἰς ὁμώνυμα. Ὅταν ὅμως οἱ παρονομασταὶ αὐτῶν ἀνὰ δύο λαμβανόμενοι δὲν εἶνε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, τρεπόμενα τὰ κλάσματα κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον εἰς ὁμώνυμα εὑρίσκονται ἔχοντα ὡς κοινὸν παρονομαστὴν κοινόν τι πολ. τῶν παρονομαστῶν, οὐχὶ ὅμως καὶ τὸ ἐλάχιστον.

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

93. — Ὁ ὁρισμὸς τῆς προσθέσεως, ὅστις ἐδόθη εἰς τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς (ἐδ. 20), μένει ὁ αὐτὸς καὶ εἰς τοὺς κλασματικοὺς μὲ μόνην τὴν διαφορὰν ὅτι αἱ μονάδες τῶν προσθετέων εἶνε ἐνταῦθα κλασματικαὶ ἢ καὶ ἀκέραιαι καὶ κλασματικαί.

Πρόσθεσις κλασμάτων.

94. — *Διὰ νὰ προσθέσωμεν κλάσματα ὁμώνυμα, προσθέτομεν τοὺς ἀριθμητὰς αὐτῶν, καὶ τὸ μὲν προκῦπτον ἄθροισμα γράφομεν ὡς ἀριθμητήν, παρονομαστὴν δὲ ἀφήνομεν τὸν κοινὸν πάντων τῶν δοθέντων κλασμάτων* Π.χ. $\frac{3}{11}+\frac{7}{11}+\frac{6}{11}=\frac{3+7+6}{11}=\frac{16}{11}=1\ \frac{5}{11}$.

Ἐὰν τὰ κλάσματα, τὰ ὁποῖα πρόκειται νὰ προσθέσωμεν εἶνε ἑτερώνυμα, τρέπομεν πρῶτον αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα καὶ ἔπειτα προσθέτομεν ὡς ἀνωτέρω.

Π. χ. $\frac{4}{9}+\frac{5}{27}=\frac{12}{27}+\frac{5}{27}=\frac{17}{27}$.

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{7}{8}+\frac{5}{12}=\frac{16}{24}+\frac{18}{24}+\frac{21}{24}+\frac{10}{24}=\frac{65}{24}=2\frac{17}{24}.$$

Πρόσθεσις μεικτῶν.

95. — *Διὰ νὰ προσθέσωμεν μεικτοὺς ἀριθμούς, προσθέτομεν χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα, καὶ ἔπειτα προσθέτομεν τὰ δύο εὑρεθέντα ἀθροίσματα.*

Παραδείγματα.

1) $5\frac{2}{7} + 3\frac{1}{7} = 8 + \frac{3}{7} = 8\frac{3}{7}$.

2) $3\frac{4}{5} + 7\frac{1}{5} = 10 + \frac{5}{5} = 10 + 1 = 11$.

3) $8\frac{2}{3} + 4\frac{5}{7} + 2\frac{1}{5}$. Εἰς τὸ παράδειγμα τοῦτο τῶν μὲν ἀκεραίων τὸ ἄθροισμα εἶνε 14· διὰ νὰ προσθέσωμεν δὲ καὶ τὰ κλάσματα, τρέπομεν πρῶτον αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα.

$$\frac{70}{105} + \frac{75}{105} + \frac{21}{105} = \frac{166}{105} = 1 + \frac{61}{105}.$$

προσθέτοντες τέλος τὰ δύο εὑρεθέντα ἀθροίσματα λαμβάνομεν

$$(14) + \left(1 + \frac{61}{105}\right) = 15 + \frac{61}{105} = 15\frac{61}{105}.$$

Σημείωσις. — Καὶ κατ' ἄλλον τρόπον δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν μεικτοὺς ἀριθμούς· τρέποντες δηλ. πρῶτον αὐτοὺς εἰς κλάσματα. Ἀλλ' ὁ ἀνωτέρω ἐκτεθεὶς τρόπος εἶνε προτιμότερος. Διότι ἐὰν π. χ. προκειμένου νὰ προσθέσωμεν τοὺς μεικτοὺς τοῦ τελευταίου ἐκ τῶν ἀνωτέρω παραδειγμάτων ἐτρέπομεν πρῶτον αὐτοὺς εἰς κλάσματα, εἰς τὸ τέλος θὰ εἴχομεν νὰ ἐξαγάγωμεν 15 ὅλας ἀκεραίας μονάδας, ἐν ᾧ προσθέσαντες, ὡς ἐδείξαμεν, ἀπεχωρίσαμεν εὐθὺς ἐξ ἀρχῆς τὰς ἀκεραίας μονάδας καὶ μόνον μία προέκυψεν ἐκ τῆς προσθέσεως τῶν κλασμάτων τῶν μεικτῶν.

Πρόσθεσις ἀκεραίου καὶ μεικτοῦ.

96. — *Διὰ νὰ προσθέσωμεν ἀκέραιον εἰς μεικτόν, προσθέτομεν αὐτὸν εἰς τὸν ἀκέραιον τοῦ μεικτοῦ.*

Π. χ. $5\frac{3}{4} + 3 = 5 + 3 + \frac{3}{4} = 8\frac{3}{4}$.

Πρόσθεσις κλάσματος καὶ μεικτοῦ.

97. — *Διὰ νὰ προσθέσωμεν κλάσμα εἰς μεικτόν, προσθέτομεν αὐτὸ εἰς τὸ κλάσμα τοῦ μεικτοῦ.*

Π. χ. $12\frac{3}{5} + \frac{2}{9} = 12 + \frac{37}{45} = 12\frac{37}{45}$.

Σημείωσις.—Ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο κλασμάτων περιέχῃ καὶ ἀκεραίας μονάδας, ἐξάγομεν αὐτὰς καὶ τὰς προσθέτομεν εἰς τὸν ἀκέραιον τοῦ μεικτοῦ.

Π. χ. $7\frac{4}{9}+\frac{8}{9}=7+\frac{12}{9}=7+1+\frac{3}{9}=8\frac{3}{9}=8\frac{1}{3}.$

Ἐπίσης $6\frac{3}{5}+\frac{4}{7}=6+\frac{41}{35}=6+1+\frac{6}{35}=7\frac{6}{35}.$

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

98.—Καὶ τῆς ἀφαιρέσεως ὁ ὁρισμὸς μένει ὁ αὐτὸς ὡς ἐδόθη εἰς τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς (ἐδ. 25), μὲ μόνην τὴν διαφορὰν ὅτι αἱ μονάδες κατὰ τὰς ὁποίας θὰ ἐλαττωθῇ ὁ μειωτέος εἶνε ἐνταῦθα κλασματικαὶ ἢ καὶ ἀκέραιαι καὶ κλασματικαί.

Ἀφαίρεσις κλάσματος ἀπὸ κλάσμα.

99.—*Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν κλάσμα τι ἀπὸ ἄλλο κλάσμα, ἐὰν εἶνε ὁμώνυμα, ἀφαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ μειωτέου καὶ ὑπὸ τὴν διαφορὰν αὐτῶν γράφομεν παρονομαστὴν τὸν κοινὸν ἀμφοτέρων τῶν δοθέντων κλασμάτων.*

Π.χ. $\frac{13}{8}-\frac{6}{8}=\frac{7}{8}.$

Ἐὰν δὲ τὰ κλάσματα εἶνε ἑτερώνυμα, τότε τρέπομεν πρῶτον αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα καὶ ἔπειτα ἀφαιροῦμεν ὡς ἀνωτέρω.

Π. χ. $\frac{6}{7}-\frac{7}{11}=\frac{66}{77}-\frac{49}{77}=\frac{17}{77}.$

Ἀφαίρεσις μεικτοῦ ἀπὸ μεικτόν.

100.—*Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν μεικτὸν ἀπὸ μεικτόν, ἀφαιροῦμεν χωριστὰ πρῶτον τὸν ἀκέραιον τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὸν ἀκέραιον τοῦ μειωτέου καὶ δεύτερον τὸ κλάσμα τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὸ κλάσμα τοῦ μειωτέου, ἔπειτα δὲ προσθέτομεν τὰ δύο εὑρεθέντα ὑπόλοιπα.*

Π. χ. $9\frac{4}{5}-4\frac{1}{5}=5+\frac{3}{5}=5\frac{3}{5}.$

Ἐπίσης $6\frac{3}{4}-2\frac{5}{7}=4+\frac{1}{28}=4\frac{1}{28}.$

$\frac{17}{28}$ $\frac{10}{28}$ $\frac{7}{28}$

Ἔστω τέλος καὶ τὸ ἑξῆς παράδειγμα :

$$11\frac{4}{9} - 4\frac{2}{3}.$$

Ἐὰν τρέψωμεν τὰ κλάσματα $\frac{4}{9}$ καὶ $\frac{2}{3}$ εἰς ὁμώνυμα, γίνονται $\frac{4}{9}$ καὶ $\frac{6}{9}$. Ἀλλὰ τὸ $\frac{6}{9}$ δὲν ἀφαιρεῖται ἀπὸ τὸ $\frac{4}{9}$. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην λαμβάνομεν μίαν ἀκεραίαν μονάδα ἀπὸ τὸν ἀκέραιον τοῦ μειωτέου, τὴν ὁποίαν τρέπομεν εἰς $\frac{9}{9}$. Ταῦτα προσθέτομεν εἰς τὰ $\frac{4}{9}$ καὶ γίνονται $\frac{13}{9}$. Τοιουτοτρόπως ἡ δοθεῖσα ἀφαίρεσις μετατρέπεται εἰς τὴν ἑξῆς : $10\frac{13}{9} - 4\frac{6}{9}$, τὴν ὁποίαν ἐκτελοῦντες εὑρίσκομεν διαφορὰν $6\frac{7}{9}$.

Σημείωσις.— Τὴν ἀφαίρεσιν μεικτοῦ ἀπὸ μεικτὸν δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν καὶ κατ' ἄλλον τρόπον· τρέπομεν δηλ. πρῶτον τοὺς μεικτοὺς εἰς ἰσοδυνάμους κλασματικοὺς καὶ κατόπιν ἀφαιροῦμεν κλάσμα ἀπὸ κλάσμα.

Ἀφαίρεσις ἀκεραίου ἀπὸ μεικτόν.

101.—*Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀκέραιον ἀπὸ μεικτόν, ἀφαιροῦμεν αὐτὸν ἀπὸ τὸν ἀκέραιον τοῦ μεικτοῦ.*

Π. χ. $15\frac{3}{8} - 6 = 9\frac{3}{8}$.

Ἀφαίρεσις κλάσματος ἀπὸ μεικτόν.

102.—*Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν κλάσμα ἀπὸ μεικτόν, ἀφαιροῦμεν αὐτὸ ἀπὸ τὸ κλάσμα τοῦ μεικτοῦ.*

Παραδείγματα.

α'.) $13\frac{7}{9} - \frac{5}{9} = 13\frac{2}{9}$.

β'.) $8\frac{2}{3} - \frac{4}{7}$.

Ἡ διαφορὰ τῶν δύο κλασμάτων εὑρίσκεται ὅτι εἶνε $\frac{2}{21}$. Ἐπομένως ἡ ζητουμένη διαφορὰ τοῦ κλάσματος $\frac{4}{7}$ ἀπὸ τὸν μεικτὸν $8\frac{2}{3}$ θὰ εἶνε $8\frac{2}{21}$.

γ'.) $8\frac{4}{7}-\frac{2}{3}$.

Τὰ κλάσματα τρεπόμενα εἰς ὁμώνυμα γίνονται $\frac{12}{21}-\frac{14}{21}$. Ἐπειδὴ ὅμως $\frac{14}{21}$ δὲν ἀφαιρεῖται ἀπὸ $\frac{12}{21}$, λαμβάνομεν ἀπὸ τὸν ἀκέραιον 8 τοῦ μειωτέου μίαν ἀκεραίαν μονάδα, τρέπομεν αὐτὴν εἰς $\frac{21}{21}$ καὶ ταῦτα προσθέτομεν εἰς τὰ $\frac{12}{21}$. Τότε ἀφαιροῦμεν $\frac{14}{21}$ ἀπὸ $\frac{33}{21}$ καὶ εὑρίσκομεν $\frac{19}{21}$. Ἐπομένως ἡ ζητουμένη διαφορὰ εἶνε $7\frac{19}{21}$.

δ'.) $17\frac{2}{9}-\frac{7}{3}$.

Ἐπειδὴ τὸ κλάσμα $\frac{7}{3}$ περιέχει ἀκεραίας μονάδας, ἐξάγομεν αὐτὰς καὶ τοιουτοτρόπως τρέπομεν τὸ κλάσμα τοῦτο εἰς μεικτὸν $2\frac{1}{3}$. Κατόπιν δὲ ἀφαιροῦμεν μεικτὸν ἀπὸ μεικτόν.

$$17\frac{2}{9}-2\frac{1}{3}=17\frac{2}{9}-2\frac{3}{9}=16\frac{11}{9}-2\frac{3}{9}=14\frac{8}{9}.$$

Σημείωσις.—Τὴν ἀφαίρεσιν κλάσματος ἀπὸ μεικτὸν δυνάμεθα καὶ κατ' ἄλλον τρόπον νὰ ἐκτελέσωμεν: τρέπομεν δηλ. καὶ τὸν μεικτὸν εἰς κλάσμα ἰσοδύναμον καὶ κατόπιν ἀφαιροῦμεν κλάσμα ἀπὸ κλάσμα.

Π. χ. $12\frac{2}{3}-\frac{4}{11}=\frac{38}{3}-\frac{4}{11}=\frac{418}{33}-\frac{12}{33}=\frac{406}{33}=12\frac{10}{33}$.

Ἀφαίρεσις κλάσματος ἀπὸ ἀκέραιον.

103.—*Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν κλάσμα ἀπὸ ἀκέραιον, τρέπομεν* *μίαν ἀκεραίαν μονάδα τοῦ ἀκεραίου εἰς κλάσμα ὁμώνυμον πρὸς τὸν κλασματικὸν ἀφαιρετέον, καὶ ἀφαιροῦμεν τότε κλάσμα ἀπὸ μεικτόν.*

Π. χ. $7-\frac{2}{5}=6\frac{5}{5}-\frac{2}{5}=6\frac{3}{5}$.

Σημείωσις α΄. — Ἐὰν τὸ κλάσμα τὸ ὁποῖον μᾶς ἐδόθη νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν ἀκέραιον, εἶνε μεγαλείτερον τῆς ἀκεραίας μονάδος, τρέπομεν αὐτὸ εἰς μεικτὸν (ἐξάγοντες τὰς ἐν αὐτῷ περιεχομένας ἀκεραίας μονάδας), καὶ τότε ἀφαιροῦμεν μεικτὸν ἀπὸ ἀκέραιον κατὰ τὸν ἀμέσως ἑπόμενον κανόνα (ἐδ. **104**).

Π. χ. $11-\frac{23}{7}=11-3\frac{2}{7}$.

Σημείωσις β΄. — Τὴν ἀφαίρεσιν κλάσματος ἀπὸ ἀκέραιον δυνάμεθα καὶ ἄλλως νὰ ἐκτελέσωμεν· τρέπομεν δηλ. τὸν ἀκέραιον εἰς κλάσμα ὁμώνυμον πρὸς τὸν ἀφαιρετέον (ἐδ. **81**), καὶ τότε ἀφαιροῦμεν κλάσμα ἀπὸ κλάσμα.

Π. χ $7-\frac{2}{5}=\frac{35}{5}-\frac{2}{5}=\frac{33}{5}=6\frac{3}{5}$.

$11-\frac{23}{7}=\frac{77}{7}-\frac{23}{7}=\frac{54}{7}=7\frac{5}{7}$.

Ἀφαίρεσις μεικτοῦ ἀπὸ ἀκέραιον.

104.—*Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν μεικτὸν ἀπὸ ἀκέραιον, τρέπομεν, ὅπως καὶ ἀνωτέρω* (ἐδ. **100** *καὶ* **103**), *μίαν ἀκεραίαν μονάδα τοῦ ἀκεραίου εἰς κλάσμα ὁμώνυμον πρὸς τὸ κλάσμα τοῦ ἀφαιρετέου, καὶ ἀφαιροῦμεν τότε μεικτὸν ἀπὸ μεικτόν.*

Π. χ. $9-3\frac{4}{7}=8\frac{7}{7}-3\frac{4}{7}=5\frac{3}{7}$.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

105. — Τὸν πολλαπλασιασμὸν ἐν τοῖς κλασματικοῖς ἀριθμοῖς θὰ ὁρίσωμεν *ὡς πρᾶξιν διὰ τῆς ὁποίας ἐπαναλαμβάνομεν πολλάκις ἢ ὁλόκληρον τὸν πολλαπλασιαστέον ἢ ἓν μέρος αὐτοῦ.* Καὶ ὁλόκληρον μὲν τὸν πολλαπλασιαστέον ἐπαναλαμβάνομεν, ἐὰν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶνε ἀκέραιος, ἓν μέρος δὲ αὐτοῦ, ἐὰν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶνε κλασματικός. Διακρίνομεν ἑπομένως ἐνταῦθα δύο περιπτώσεις:

Α'.) Πολλαπλασιαστὴς ἀκέραιος.

106. — *Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶνε ἀκέραιος, ἐπαναλαμβάνομεν τὸν πολλαπλασιαστέον τόσας φοράς, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἀκέραιος πολλαπλασιαστής.*

Παραδείγματα.

α'.) $5 \times 3 = 5 + 5 + 5 = 15$, ὅπως τοῦτο εἶνε γνωστὸν ἐκ τῶν ἀκεραίων (ἐδ. 30).

β'.) $\frac{2}{5} \times 3 = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{2+2+2}{5} = \frac{2 \times 3}{5} = \frac{6}{5}$.

Ἐκ τούτου συνάγομεν τὸν ἑπόμενον κανόνα:

107. — *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν κλάσμα ἐπὶ ἀκέραιον, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος ἐπὶ τὸν ἀκέραιον· καὶ τὸ μὲν προκῦπτον γινόμενον γράφομεν ὡς ἀριθμητήν, παρονομαστὴν δὲ ἀφήνομεν τὸν τοῦ κλάσματος.*

Ἀλλ' εἶνε γνωστὸν (ἐδ. 88) ὅτι κλάσμα τι πολλαπλασιάζεται καὶ ἐὰν διαιρεθῇ ὁ παρονομαστής του. Ἑπομένως συμπεραίνομεν ὅτι δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν κλάσμα ἐπὶ ἀκέραιον καὶ κατὰ τὸν ἑξῆς κανόνα:

108. — *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν κλάσμα ἐπὶ ἀκέραιον, διαιροῦμεν τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος διὰ τοῦ ἀκεραίου, ἂν διαιρῆται, καὶ τὸ μὲν πηλίκον γράφομεν ὡς παρονομαστήν, ἀριθμητὴν δὲ ἀφήνομεν τὸν τοῦ κλάσματος.*

Π. χ. $\frac{2}{15} \times 5 = \frac{2}{15:5} = \frac{2}{3}$.

Σημείωσις. — Ἐὰν τὸν αὐτὸν πολλαπλασιασμὸν ἐκτελέσωμεν κατὰ τὸν προηγούμενον κανόνα (ἐδ. 107), θέλομεν εὕρει γινόμενον $\frac{10}{15}$. Ἀλλὰ τοῦτο εἶνε ἴσον μὲ τὸ $\frac{2}{3}$. διὰ νὰ δείξωμεν δὲ τὴν ἰσότητα ταύτην, ἀρκεῖ νὰ ἁπλοποιήσωμεν τὸ κλάσμα $\frac{10}{15}$, ὁπότε θέλει προκύψει ἐξ αὐτοῦ τὸ $\frac{2}{3}$.

γ'.) $4\frac{2}{5} \times 3$.

Καὶ ἐνταῦθα πρέπει νὰ ἐπαναλάβωμεν τὸν πολλαπλασιαστέον τρεῖς φοράς, ἤτοι $4\frac{2}{5}+4\frac{2}{5}+4\frac{2}{5}$. Διὰ νὰ προσθέσωμεν δὲ τοὺς μεικτοὺς τούτους, προσθέτομεν χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα (ἐδ. 95).

Τοιουτοτρόπως λαμβάνομεν :

$$(4+4+4)+\left(\frac{2}{5}+\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\right)=(4\times3)+\left(\frac{2}{5}\times3\right).$$

Ἐκ τούτου συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα :

109. — *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν μεικτὸν ἐπὶ ἀκέραιον, πολλαπλασιάζομεν χωριστὰ τὰ μέρη τοῦ μεικτοῦ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον καὶ κατόπιν προσθέτομεν τὰ δύο μερικὰ γινόμενα* (*).

Σημείωσις.— Ἀντὶ νὰ κάμωμεν τοῦτο, δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν τὸν μεικτὸν εἰς κλάσμα καὶ τοῦτο νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν ἀκέραιον.

Β'.) Πολλαπλασιαστὴς κλασματικός.

110. — *Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶνε κλασματικός, λαμβάνομεν τόσον μέρος τοῦ πολλαπλασιαστέου, ὅσον δεικνύει ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλασματικοῦ πολλαπλασιαστοῦ, καὶ τοῦτο ἐπαναλαμβάνομεν τόσας φοράς, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἀριθμητὴς τοῦ αὐτοῦ πολλαπλασιαστοῦ.*

Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι καὶ κλασματικὸς ἐὰν εἶνε ὁ πολλαπλασιαστής, πάλιν ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶνε ἐπανάληψις, οὐχὶ ὅμως ὁλοκλήρου τοῦ πολλαπλασιαστέου, ἀλλ' ἑνὸς μέρους αὐτοῦ.

Παραδείγματα.

α'.) $4\times\frac{3}{5}$.

Κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα πρέπει πρῶτον νὰ λάβωμεν τὸ πέμπτον τοῦ 4. Πρὸς τοῦτο διαιροῦμεν τὸ 4 διὰ τοῦ 5 καὶ εὑρίσκομεν (ἐδ. 86)

(*) Τοῦτο γίνεται, διότι ὁ μεικτὸς εἶνε ἄθροισμα τοῦ ἀκεραίου καὶ τοῦ κλάσματος, καὶ ἑπομένως εἶνε ὡς νὰ ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἄθροισμα ἐπὶ ἀριθμὸν (ἐδ. 39, 6'.)

πηλίκον $\frac{4}{5}$, τὸ ὁποῖον ἔπειτα ἐπαναλαμβάνομεν 3 φοράς, ἤτοι πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 3. Τοιουτοτρόπως εὑρίσκομεν ὅτι

$$4 \times \frac{3}{5} = \frac{4}{5} \times 3 = \frac{4 \times 3}{5}.$$

Ἐκ τούτου συνάγομεν τὸν ἑπόμενον κανόνα:

111. — *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀκέραιον ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀκέραιον ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος καὶ τὸ μὲν προκῦπτον γινόμενον γράφομεν ὡς ἀριθμητήν, παρονομαστὴν δὲ ἀφήνομεν τὸν τοῦ κλάσματος.*

β'.) $\frac{4}{7} \times \frac{3}{5}$.

Καὶ ἐνταῦθα, ἐπειδὴ ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶνε κλασματικός, πρέπει πρῶτον νὰ λάβωμεν τὸ πέμπτον τοῦ $\frac{4}{7}$ διαιροῦντες τὸ $\frac{4}{7}$ διὰ τοῦ 5. Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν τὸν παρονομαστὴν τοῦ $\frac{4}{7}$ ἐπὶ 5 (ἐδ. 88) καὶ εὑρίσκομεν τοιουτοτρόπως ὅτι τὸ πέμπτον τοῦ $\frac{4}{7}$ εἶνε $\frac{4}{7 \times 5}$. Τοῦτο κατόπιν πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 3 καὶ εὑρίσκομεν $\frac{4 \times 3}{7 \times 5} = \frac{12}{35}$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἑπόμενον κανόνα:

112. — *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν κλάσμα ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιάζομεν ἀριθμητὴν ἐπὶ ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν ἐπὶ παρονομαστήν· καὶ τὸ μὲν γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν γράφομεν ὡς ἀριθμητήν, τὸ δὲ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν ὡς παρονομαστήν.*

γ'.) $2\frac{4}{7} \times \frac{3}{5}$.

Εἰς τὸ παράδειγμα τοῦτο τρέπομεν τὸν μεικτὸν εἰς κλάσμα καὶ πολλαπλασιάζομεν ἔπειτα κλάσμα ἐπὶ κλάσμα κατὰ τὰ ἀνωτέρω· ἤτοι: $2\frac{4}{7} \times \frac{3}{5} = \frac{18}{7} \times \frac{3}{5} = \frac{18 \times 3}{7 \times 5} = \frac{54}{35} = 1\frac{19}{35}$.

Σημείωσις α'. — Ἀντὶ νὰ κάμωμεν τοῦτο, δυνάμεθα νὰ πολλα-

πλασιάσωμεν χωριστὰ τὰ μέρη τοῦ μεικτοῦ ἐπὶ τὸ κλάσμα καὶ ἔπειτα νὰ προσθέσωμεν τὰ δύο μερικὰ γινόμενα.

Π.χ. $2\frac{4}{7}\times\frac{3}{5}=\left(2\times\frac{3}{5}\right)+\left(\frac{4}{7}\times\frac{3}{5}\right)=\frac{6}{5}+\frac{12}{35}=$

$=\frac{42}{35}+\frac{12}{35}=\frac{54}{35}=1\frac{19}{35}.$

Σημείωσις β΄. — Ἐὰν ὁ πολλαπλασιαστὴς τύχῃ νὰ εἶνε μεικτός, τρέπομεν αὐτὸν εἰς κλάσμα καὶ τοιουτοτρόπως μεταπίπτομεν εἰς τὴν δευτέραν ἐκ τῶν ἀνωτέρω δύο περιπτώσεων.

Παραδείγματα.

α΄.) $9\times2\frac{3}{4}=9\times\frac{11}{4}=\frac{9\times11}{4}=\frac{99}{4}=24\frac{3}{4}.$

β΄.) $\frac{8}{9}\times2\frac{3}{4}=\frac{8}{9}\times\frac{11}{4}=\frac{8\times11}{9\times4}=\frac{88}{36}=\frac{22}{9}=2\frac{4}{9}.$

γ΄.) $5\frac{7}{8}\times2\frac{3}{4}=\frac{47}{8}\times\frac{11}{4}=\frac{47\times11}{8\times4}=\frac{517}{32}=16\frac{5}{32}.$

Σημείωσις γ΄. — Μεικτὸν ἐπὶ μεικτὸν δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν καὶ ὡς ἑξῆς· *πολλαπλασιάζομεν :*

1) *τοὺς δύο ἀκεραίους,*
2) *τὰ δύο κλάσματα,*
3) *τὸν ἀκέραιον τοῦ πρώτου μεικτοῦ ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ δευτέρου*

καὶ 4) *τὸν ἀκέραιον τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ πρώτου· ἔπειτα δὲ προσθέτομεν τὰ τέσσαρα ταῦτα μερικὰ γινόμενα.*

Π. χ. $5\frac{7}{8}\times2\frac{3}{4}=(5\times2)+\left(\frac{7}{8}\times\frac{3}{4}\right)+\left(5\times\frac{3}{4}\right)+$

$+\left(2\times\frac{7}{8}\right)=10+\frac{21}{32}+\frac{15}{4}+\frac{14}{8}=10+\frac{21}{32}+\frac{120}{32}+\frac{56}{32}=$

$=10+\frac{197}{32}=10+6\frac{5}{32}=16\frac{5}{32}.$

Γινόμενον πολλῶν παραγόντων.

113. — Τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων κλασματικῶν, ἢ κλασματικῶν ἅμα καὶ ἀκεραίων, εὑρίσκεται ὅπως καὶ τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων ἀκεραίων (ἐδ. 38). Ἂς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι ζητεῖται νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον τῶν ἑξῆς παραγόντων :

$$\frac{2}{7} \times \frac{3}{5} \times 6 \times \frac{4}{9} \times 7.$$

Πολλαπλασιάζομεν κατὰ τοὺς γνωστοὺς κανόνας (*) κατ' ἀρχὰς τὸν πρῶτον ἐπὶ τὸν δεύτερον καὶ εὑρίσκομεν γινόμενον $\frac{2 \times 3}{7 \times 5}$· τοῦτο κατόπιν πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν τρίτον καὶ εὑρίσκομεν $\frac{2 \times 3 \times 6}{7 \times 5}$· τὸ νέον τοῦτο γινόμενον πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν τέταρτον καὶ λαμβάνομεν $\frac{2 \times 3 \times 6 \times 4}{7 \times 5 \times 9}$, τὸ ὁποῖον τέλος πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ 7 εὑρίσκομεν ὡς γινόμενον πάντων τῶν δοθέντων παραγόντων τὸ ἑξῆς :

$$\frac{2 \times 3 \times 6 \times 4 \times 7}{7 \times 5 \times 9}$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα :

114. — *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων κλασματικῶν ἢ κλασματικῶν ἅμα καὶ ἀκεραίων, σχηματίζομεν ἓν κλάσμα, τὸ ὁποῖον ἀριθμητὴν μὲν νὰ ἔχῃ τὸ γινόμενον πάντων τῶν ἀριθμητῶν καὶ τῶν ἀκεραίων, παρονομαστὴν δὲ τὸ γινόμενον πάντων τῶν παρονομαστῶν.*

Σημείωσις. — Ἐνθυμούμενοι ἤδη πῶς γινόμενον πολλῶν ἀκεραίων παραγόντων διαιρεῖται δι' ἑνὸς ἀριθμοῦ ἢ δι' ἑνὸς ἐκ τῶν παραγόντων αὐτοῦ (ἐδ. 56, 3ον καὶ 4ον), δυνάμεθα νὰ προβῶμεν εἰς ἁπλοποιήσεις τινὰς τοῦ εὑρεθέντος γινομένου $\frac{2 \times 3 \times 6 \times 4 \times 7}{7 \times 5 \times 9}$. Καὶ πρῶτον διαιροῦμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους αὐτοῦ διὰ τοῦ 7 ἐξαλείφοντες ἀφ' ἑκατέρου τὸν παράγοντα τοῦτον· τότε θὰ ἔχωμεν $\frac{2 \times 3 \times 6 \times 4}{5 \times 9}$. Τοῦ νέου τούτου κλάσματος διαιροῦμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους διὰ 3, ἀπὸ μὲν τοῦ ἀριθμητοῦ ἐξαλείφοντες τὸν παράγοντα 3, ἐν δὲ τῷ παρονομαστῇ διαιροῦντες τὸν παράγοντα 9 διὰ 3. Μετὰ τὴν δευτέραν ταύτην ἁπλοποίησιν λαμβάνομεν

(*) Ὅρα ἐδ. 112 καὶ 107.

$\dfrac{2\times6\times4}{5\times3}$. Τέλος διαιροῦμεν τοῦ κλάσματος τούτου τοὺς ὅρους διὰ 3 καὶ λαμβάνομεν $\dfrac{2\times2\times4}{5}$ ἤτοι $\dfrac{16}{5}=3\,\dfrac{1}{5}$. Ὥστε τὸ γινόμενον πάντων τῶν δοθέντων παραγόντων εἶνε $3\,\dfrac{1}{5}$.

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

115. — *Τὴν διαίρεσιν ὁρίζομεν ἐνταῦθα ὡς πρᾶξιν, ἐν τῇ ὁποίᾳ δίδονται δύο ἀριθμοὶ καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τρίτος, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν δεύτερον νὰ δίδῃ ὡς γινόμενον τὸν πρῶτον· (ὅρα καὶ ἐδ. 46).*

Καὶ εἰς τὴν διαίρεσιν τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν διακρίνομεν δύο περιπτώσεις :

Α΄.) Διαιρέτης ἀκέραιος.

Ἔστωσαν τὰ ἑξῆς παραδείγματα :

α΄.) **7 : 13**

116. — Ἐκ τῶν ἰδιοτήτων τῶν κλασμάτων (*ἐδ.* 86) ἐμάθομεν ὅτι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ἀκεραίου δι' ἀκεραίου παρίσταται ὡς κλάσμα, ἀριθμητὴν μὲν ἔχον τὸν διαιρετέον, παρονομαστὴν δὲ τὸν διαιρέτην. Ἑπομένως τὸ πηλίκον τῆς δοθείσης διαιρέσεως 7 : 13 θὰ εἶνε $\dfrac{7}{13}$. Τοιουτοτρόπως καὶ $9 : 25=\dfrac{9}{25}$ κτλ.

β΄.) $\dfrac{15}{3} : 3$

Ἐκ τῶν αὐτῶν ἰδιοτήτων τῶν κλασμάτων (*ἐδ.* 87 καὶ 88) ἐμάθομεν πρὸς τούτοις ὅτι κλάσμα τι διαιρεῖται ἢ διαιρουμένου τοῦ ἀριθμητοῦ του ἢ πολλαπλασιαζομένου τοῦ παρονομαστοῦ του. Ἐκ τούτου συνάγομεν τὸν ἑπόμενον κανόνα :

117. — *Διὰ νὰ διαιρέσωμεν κλάσμα δι' ἀκεραίου, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος διὰ τοῦ ἀκεραίου* (ἐὰν διαιρῆται)· *καὶ τὸ μὲν πηλίκον γράφομεν ὡς ἀριθμητήν, παρονομαστὴν δὲ ἀφήνομεν τὸν τοῦ κλάσματος. Ἢ πολλαπλασιάζομεν τὸν παρονομαστὴν αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον καὶ τὸ μὲν γινόμενον γράφομεν ὡς παρονομαστήν, ἀριθμητὴν δὲ ἀφήνομεν τὸν τοῦ κλάσματος.*

Ἑπομένως τὸ πηλίκον τῆς δοθείσης διαιρέσεως $\frac{15}{7} : 3$

θὰ εἶνε $\frac{15:3}{7}=\frac{5}{7}$ ἢ $\frac{15}{7\times3}=\frac{15}{21}$.

Σημείωσις.—Τὰ δύο πηλίκα $\frac{5}{7}$ καὶ $\frac{15}{21}$ τῆς αὐτῆς διαιρέσεως $\frac{15}{7} : 3$, τὰ εὑρεθέντα κατὰ δύο διαφόρους τρόπους, εἶνε φανερὸν ὅτι εἶνε ἴσα. Διότι ἀρκεῖ νὰ ἁπλοποιήσωμεν τὸ δεύτερον διὰ νὰ προκύψῃ ἐξ αὐτοῦ τὸ πρῶτον.

γ'.) $5\frac{6}{7} : 4$

118. — *Διὰ νὰ διαιρέσωμεν μεικτὸν δι' ἀκεραίου, τρέπομεν τὸν μεικτὸν εἰς ἰσοδύναμον κλασματικόν, καὶ τότε διαιροῦμεν κλάσμα δι' ἀκεραίου* κατὰ τὸ προηγούμενον παράδειγμα.

Κατὰ ταῦτα $5\frac{6}{7} : 4 = \frac{41}{7} : 4 = \frac{41}{7\times4} = \frac{41}{28} = 1\frac{13}{28}$.

Σημείωσις.—Τὴν διαίρεσιν μεικτοῦ δι' ἀκεραίου δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν καὶ ὡς ἑξῆς: *Διαιροῦμεν χωριστὰ τὰ μέρη τοῦ μεικτοῦ διὰ τοῦ ἀκεραίου καὶ ἔπειτα προσθέτομεν τὰ δύο προκύπτοντα πηλίκα.*

Κατὰ ταῦτα

$$5\frac{6}{7} : 4 = (5:4) + \left(\frac{6}{7} : 4\right) = \frac{5}{4} + \frac{6}{28} = \frac{35}{28} + \frac{6}{28} = \frac{41}{28} = 1\frac{13}{28}.$$

ἐπίσης $20\frac{8}{9} : 4 = (20:4) + \left(\frac{8}{9} : 4\right) = 5 + \frac{2}{9} = 5\frac{2}{9}$.

Β'.) Διαιρέτης κλασματικός.

119. — *Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶνε κλασματικός, ἀντιστρέφομεν τοὺς ὅρους αὐτοῦ καὶ ἀντὶ διαιρέσεως κάμνομεν πολλαπλασιασμόν.*

Παραδείγματα

α'.) $8 : \frac{3}{11} = 8\times\frac{11}{3} = \frac{8\times11}{3} = \frac{88}{3} = 29\frac{1}{3}$.

β'.) $\frac{4}{5} : \frac{2}{7} = \frac{4}{5}\times\frac{7}{2} = \frac{4\times7}{5\times2} = \frac{28}{10} = 2\frac{8}{10} = 2\frac{4}{5}$.

γ'.) $3\frac{4}{5} : \frac{4}{9} = 3\frac{4}{5} \times \frac{9}{4} = \frac{19}{5} \times \frac{9}{4} = \frac{19 \times 9}{5 \times 4} = \frac{171}{20} = 8\frac{11}{20}$.

Ὁ λόγος τούτου εἶνε ὁ ἑξῆς:

Ἔστω π.χ. ἡ διαίρεσις $8 : \frac{3}{11}$.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς διαιρέσεως πρέπει νὰ εὕρωμεν ἀριθμόν, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ $\frac{3}{11}$ νὰ δίδῃ γινόμενον τὸν 8. Τὸ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ὅμως ἀριθμόν τινα ἐπὶ $\frac{3}{11}$, σημαίνει (ἐδ. **110**) νὰ λάβωμεν τὰ τρία ἑνδέκατα αὐτοῦ. Ὥστε:

τὰ $\frac{3}{11}$ τοῦ ζητουμένου πηλίκου . . . . εἶνε 8

τὸ $\frac{1}{11}$ » » » . . . . » $\frac{8}{3}$

καὶ τὰ $\frac{11}{11}$ » » » ἤτοι ὅλον τὸ πηλίκον » $\frac{8 \times 11}{3}$ ἢ $8 \times \frac{11}{3}$

Διαιρέτης μεικτός.

120. — Ἡ περίπτωσις αὐτὴ μεταπίπτει εἰς τὴν δευτέραν ἐκ τῶν δύο ἀνωτέρω, διότι *τὸν μεικτὸν διαιρέτην τρέπομεν πάντοτε εἰς κλάσμα.*

Παραδείγματα.

α'.) $7 : 4\frac{2}{5} = 7 : \frac{22}{5} = 7 \times \frac{5}{22} = \frac{35}{22} = 1\frac{13}{22}$.

β'.) $\frac{3}{7} : 4\frac{2}{5} = \frac{3}{7} : \frac{22}{5} = \frac{3}{7} \times \frac{5}{22} = \frac{15}{154}$.

γ'.) $6\frac{3}{7} : 4\frac{2}{5} = 6\frac{3}{7} : \frac{22}{5} = 6\frac{3}{7} \times \frac{5}{22} = \frac{45}{7} \times \frac{5}{22} = \frac{225}{154} = 1\frac{71}{154}$.

Προβλήματα.

1) Ἡ ὀκᾶ τοῦ καφὲ ἀξίζει 5 δραχμάς. Πόσον ἀξίζουν τὰ $\frac{3}{8}$ τῆς ὀκᾶς;

Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς:

Ἀφ' οὗ ἡ 1 ὀκᾶ ἀξίζει .... 5 δρχ.

τὸ $\frac{1}{8}$ τῆς ὀκ. θὰ ἀξίζ. 8 φορ. ὀλιγώτ. τῶν 5 δρχ. ἤτοι $\frac{5}{8}$ » (*)

καὶ τὰ $\frac{3}{8}$ » » » » 3 » περισσότ. » $\frac{5}{8}$ » » $\frac{5 \times 3}{8}$ » $=$

$$= \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8} \text{ δρχ.}$$

121. — Ὁ τρόπος οὗτος, κατὰ τὸν ὁποῖον ἐλύσαμεν τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα, καλεῖται *ἀναγωγὴ εἰς τὴν μονάδα*. Διότι κατ' αὐτὸν διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τῆς ζητουμένης ποσότητος (ἐνταῦθα τῶν $\frac{3}{8}$ τῆς ὀκ.), εὑρίσκομεν πρῶτον τὴν τιμὴν τῆς μιᾶς μονάδος αὐτῆς (τοῦ $\frac{1}{8}$ ἐν τῷ ἀνωτέρω προβλήματι).

Σημείωσις. — Τὸ αὐτὸ πρόβλημα δυνάμεθα νὰ λύσωμεν καὶ δι' ἑνὸς πολλαπλασιασμοῦ· διότι μᾶς ἐδόθη ἐν αὐτῷ ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς ὀκᾶς καὶ μᾶς ζητεῖται ἡ τιμὴ τῶν πολλῶν μερῶν αὐτῆς (**) Πολλαπλασιαστέος γνωρίζομεν ὅτι θὰ εἶνε ἐκεῖνος ἐκ τῶν δύο δοθέντων ἀριθμῶν, ὁ ὁποῖος σημαίνει δραχμάς· διότι καὶ τὸ γινόμενον δραχμὰς θὰ σημαίνῃ (ἐδ. **41**, παρατ.). Ἔχομεν λοιπὸν $5 \times \frac{3}{8}$. Καὶ ἐκτελοῦντες τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦτον εὑρίσκομεν πάλιν γινόμενον $\frac{15}{8}$ ἤτοι $1\frac{7}{8}$ δρχ.

2) Ὁ πῆχυς ἑνὸς ὑφάσματος πωλεῖται 3 δραχμάς. Πόσον θὰ ἀγοράσωμεν ἐκ τοῦ ὑφάσματος τούτου μὲ $\frac{8}{9}$ τῆς δραχμῆς;

(*) Διὰ νὰ καταστήσωμεν τὰς 5 δρχ. 8 φορὰς ὀλιγωτέρας, διαιροῦμεν (κατὰ τὸν ἐν ἐδ. 86 κανόνα) τὸ 5 διὰ τοῦ 8.

(**) Συμπληροῦντες τὰ ἐν ἐδ. 41 λέγομεν ὅτι δι' ἑνὸς πολλαπλασιασμοῦ λύονται τὰ προβλήματα ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα δίδεται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς ἀκεραίας μονάδος καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ τῶν πολλῶν τοιούτων ἢ (ἐδ. 110) καὶ τῶν πολλῶν μερῶν τῆς ἀκεραίας μονάδος.

Λύσις.

α'.) Διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα :

Ἀφ'οὖ μὲ 3 δρχ. ἀγοράζομεν . . . . 1 πηχ.

» 1 » θὰ ἀγοράσωμεν 3 φορ. ὀλιγώτ. τοῦ 1 πηχ. ἤτοι . . . . $\frac{1}{3}$ »

» $\frac{1}{9}$ » » » 9 » » » $\frac{1}{3}$ » » $\frac{1}{3\times 9}=\frac{1}{27}$ »

καὶ » $\frac{8}{9}$ » » » 8 » περισ. » $\frac{1}{27}$ » » $\frac{1\times 8}{27}=\frac{8}{27}$ »

β'.) Διὰ μιᾶς διαιρέσεως ἀναγομένης εἰς μέτρησιν (*). Τοῦτο ἐννοοῦμεν σκεπτόμενοι ὡς ἑξῆς :

Μὲ 3 δρχ. ἀγοράζομεν ἕνα πῆχυν· μὲ ἄλλας 3 δρχ. θὰ ἀγοράσωμεν ἄλλον ἕνα πῆχυν· καὶ ἑπομένως μὲ $\frac{8}{9}$ τῆς δραχμῆς θὰ ἀγοράσωμεν τόσους πήχεις, ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ 3 εἰς τὸν $\frac{8}{9}$. Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι πρέπει νὰ γείνῃ ἡ ἑξῆς διαίρεσις $\frac{8}{9}:3$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν πηλίκον $\frac{8}{27}$. Συμπεραίνομεν λοιπὸν ὅτι $\frac{8}{27}$ τοῦ πήχεως θὰ ἀγοράσωμεν μὲ $\frac{8}{9}$ τῆς δραχμῆς.

3) Μὲ 15 $\frac{2}{3}$ δρχ. ἠγοράσαμεν 8 ὀκ. ζακχάρεως. Πόσον ἀξίζει ἡ μία ὀκᾶ ;

Λύσις.

α'.) Διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα :

Ἀφ'οὗ αἱ 8 ὀκ. ἀξίζουν . . . . 15 $\frac{2}{3}$ δρχ. ἤτοι $\frac{47}{3}$ δρχ. (**)

(*) Ὅτι πράγματι εἶνε πρόβλημα μετρήσεως ἐννοοῦμεν καὶ ἐκ τοῦ ὅτι οἱ δύο δοθέντες ἀριθμοὶ εἶνε ὁμοειδεῖς (**ἐδ. 59**).

(**) Ὁσάκις λύοντες πρόβλημά τι **διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα** ἀπαντῶμεν μεικτοὺς ἀριθμούς, χάριν μεγαλειτέρας εὐκολίας τρέπομεν αὐτοὺς εἰς κλασματικούς.

312
400
72 48,8

ἡ 1 ὀκ. θὰ ἀξίζῃ 8 φορὰς ὀλιγώτερον τῶν $\frac{47}{3}$ δρχ. ἤτοι $\frac{47}{3\times 8}$ δρχ. $=$

$$=\frac{47}{24}=1\frac{23}{24} \text{ »}$$

β'.) Διὰ μιᾶς διαιρέσεως ἀναγομένης εἰς μερισμόν. Διότι εἶνε φανερὸν ὅτι πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου πρέπει νὰ μοιράσωμεν τὰς $15\frac{2}{3}$ δρχ. εἰς τὰς 8 ὀκάδας, διὰ νὰ ἴδωμεν πόσαι δραχμαὶ ἀντιστοιχοῦσιν εἰς ἑκάστην ὀκᾶν. Πρέπει ἑπομένως νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν ἑξῆς διαίρεσιν $15\frac{2}{3}:8$, ἐκ τῆς ὁποίας (ἐδ. **118**) εὑρίσκομεν πάλιν πηλίκον $1\frac{23}{24}$ δρχ.

4) Ἡ ὀκᾶ τῶν μήλων πωλεῖται $\frac{3}{5}$ τῆς δραχμῆς. Πόσας ὀκάδας ἀγοράζομεν μὲ $4\frac{2}{7}$ δρχ;

Λύσις.

α'.) Διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα.

Ἀφ' οὗ μὲ $\frac{3}{5}$ δρχ. ἀγοράζομεν . . . . 1 ὀκ.

» $\frac{1}{5}$ » θὰ ἀγοράσ. 3 φορ. ὀλιγ. τῆς 1 ὀκ. ἤτοι $\frac{1}{3}$ »

» $\frac{5}{5}$ » ἤτοι μὲ 1 δρ. » » 5 » περισ. τοῦ $\frac{1}{3}$ » » $\frac{5}{3}$ »

» $\frac{1}{7}$ » » » 7 » ὀλιγ. τῶν $\frac{5}{3}$ » » $\frac{5}{3\times 7}$ »

καὶ μὲ $4\frac{2}{7}$ » ἤτοι μὲ $\frac{30}{7}$ ». » » 30 » περισ. » $\frac{5}{3\times 7}$ » » $\frac{5\times 30}{3\times 7}$ »

$$=\frac{150}{21}\text{ ὀκ.}=7\frac{1}{7}\text{ ὀκ.}$$

β'.) Διὰ μιᾶς διαιρέσεως ἀναγομένης εἰς μέτρησιν. Τοῦτο ἐννοοῦμεν σκεπτόμενοι ὡς ἑξῆς: Μὲ $\frac{3}{5}$ δρχ. ἀγοράζομεν 1 ὀκᾶν μήλων· μὲ ἄλλα $\frac{3}{5}$ δρχ. θὰ ἀγοράσωμεν ἄλλην 1 ὀκᾶν· καὶ ἐπομένως μὲ $4\frac{2}{7}$ δρχ. θὰ ἀγοράσωμεν τόσας ὀκάδας, ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ $\frac{3}{5}$ εἰς τὸν $4\frac{2}{7}$. Πρέπει ἐπομένως νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν ἑξῆς διαίρεσιν: $4\frac{2}{7} : \frac{3}{5}$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν πηλίκον $7\frac{1}{7}$. Συμπεραίνομεν λοιπὸν ὅτι $7\frac{1}{7}$ ὀκ. μήλων θὰ ἀγοράσωμεν μὲ $4\frac{2}{7}$ δρχ.

5) Διένειμέ τις ἕνα ἄρτον εἰς δύο πτωχούς· καὶ εἰς μὲν τὸν πρῶτον ἔδωκε τὰ $\frac{5}{7}$ αὐτοῦ, εἰς δὲ τὸν δεύτερον τὰ $\frac{14}{49}$. Εἰς ποῖον ἐκ τῶν δύο ἔδωκε περισσότερον;

('Απ. εἰς τὸν α'. ἔδωκε $\frac{3}{7}$ περισσότερον).

6) Πατήρ τις ἔδωκε τὴν πρώτην τοῦ ἔτους εἰς τὸν μεγαλείτερον υἱόν του $12\frac{3}{7}$ δρχ, εἰς τὸν δεύτερον $11\frac{2}{5}$, εἰς τὸν μικρότερον $4\frac{1}{3}$ καὶ εἰς τὴν σύζυγόν του τόσα, ὅσα ἔδωκε καὶ εἰς τὰ τρία τέκνα ὁμοῦ. Πόσας δραχμὰς ἔλαβεν ἡ σύζυγός του καὶ πόσας ὁμοῦ καὶ οἱ τέσσαρες;

('Απ. ἡ σύζυγος ἔλαβεν $28\frac{17}{105}$ δρχ. καὶ οἱ τέσσαρες δὲ ὁμοῦ δρχ. $56\frac{34}{105}$).

7) Ἠγοράσαμεν $47\frac{3}{7}$ ὀκ. ἀλεύρου πρὸς 55 λεπ. τὴν ὀκᾶν. Πόσον θὰ πληρώσωμεν; ('Απ. 26 δρχ. καὶ 9 περίπου λεπτά).

8) Μαθητής τις ἔλαβε παρὰ τοῦ πατρός του 9 δραχμὰς διὰ νὰ ἀγοράσῃ διάφορα βιβλία. Ἠγόρασε λοιπὸν πρῶτον μίαν Ἀριθμητικὴν καὶ τοῦ ἔμειναν $7\frac{1}{3}$ δρχ. Κατόπιν ἠγόρασε καὶ μίαν Γεωμε-

τρίαν καὶ τότε τοῦ ἔμειναν $5\frac{3}{4}$ δρχ. Πόσον ἠγόρασε τὴν Ἀριθμητικὴν καὶ πόσον τὴν Γεωμετρίαν;

(Ἀπ. τὴν μὲν Ἀριθμ. $1\frac{2}{3}$ δρχ, τὴν δὲ Γεωμετρ. $1\frac{7}{12}$ δρχ.)

9) Ποῖος ἀριθμὸς προστιθέμενος εἰς τὸν $\frac{4}{7}$ δίδει μετ' αὐτοῦ ἄθροισμα τὸν $\frac{7}{4}$;

(Ἀπ. ὁ $1\frac{5}{28}$)

10) Ποῖος ἀριθμὸς πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ $\frac{5}{9}$ δίδει γινόμενον $\frac{9}{5}$;

(Ἀπ. ὁ $3\frac{6}{25}$.)

11) Πατήρ τις ἔδωκεν εἰς τὸν υἱόν του τὰ $\frac{4}{13}$ ἑνὸς γλυκίσματος, εἰς τὴν θυγατέρα του τὰ $\frac{3}{7}$ αὐτοῦ, τὸ δὲ ὑπόλοιπον ἔφαγεν αὐτός. Ποῖον μέρος τοῦ γλυκίσματος ἔφαγεν ὁ πατήρ;

(Ἀπ. τὰ $\frac{24}{91}$.)

12) Ὑπάλληλός τις λαβὼν τὸν μισθόν του ἔδωκε τὰ $\frac{2}{5}$ αὐτοῦ διὰ νὰ ἀγοράσῃ μίαν ἐνδυμασίαν, τὰ $\frac{2}{9}$ διὰ τὸ ἐνοίκιον τῆς οἰκίας του καὶ τὸ $\frac{1}{4}$ διὰ διάφορα χρέη του· τότε δὲ τοῦ ἔμειναν 46 δραχμαί. Πόσος ἦτο ὁ μισθός του καὶ πόσον ἐπλήρωσε διὰ τὴν ἐνδυμασίαν, πόσον διὰ τὸ ἐνοίκιον καὶ πόσον διὰ τὰ χρέη του;

(Ἀπ. ὁ μισθός του ἦτο 360 δρχ. Διὰ τὴν ἐνδυμασίαν ἐπλήρωσεν 144 δρχ, διὰ τὸ ἐνοίκιον 80 καὶ διὰ τὰ χρέη του 90).

13) Τὰ $\frac{4}{7}$ τῆς ὅλης ζωῆς ἀνθρώπου τινὸς εἶνε 20 ἔτη. Εἰς ποίαν ἡλικίαν ὁ ἄνθρωπος οὗτος ἀπέθανεν;

(Ἀπ. εἰς ἡλικίαν 35 ἐτῶν).

14). Διανύσας τις τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ μήκους μιᾶς ὁδοῦ ἔχει ἀκόμη νὰ διανύσῃ 12 στάδια (*). Πόσων μέτρων μῆκος ἔχει ἡ ὁδὸς αὕτη ;
(Ἀπ. 30 000 μέτρ.).

15) Ποιμήν τις ἐπώλησε τὰ $\frac{7}{12}$ τῶν προβάτων του πρὸς 22 δρχ. ἕκαστον, καὶ τοῦ ἔμειναν 30 πρόβατα. Πόσας δραχμὰς ἔλαβεν ἀπὸ τὰ πωληθέντα ;
(Ἀπ. 924).

(*) 1 στάδιον=1000 μέτρ.

$\frac{3}{5}$ $\frac{2}{5}$

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΟΥΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

ΒΙΒΛΙΟΝ Γ'.

ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Ὁρισμοί.

122.—Ἐὰν ἐκ τῆς σειρᾶς τῶν κλασματικῶν μονάδων :

$$\frac{1}{2}\ldots\frac{1}{5}\ldots\frac{1}{10}\ldots\frac{1}{17}\ldots\frac{1}{98}\ldots\frac{1}{100}\ldots\frac{1}{156}\ldots\frac{1}{1000}\ldots\ldots$$

ἀποχωρίσωμεν ἐκείνας αἵτινες ἔχουσι παρονομαστὴν 10, 100, 1000 . . . . . καὶ ἐν γένει τὴν μονάδα ἀκολουθουμένην ὑπὸ μηδενικῶν, ἔχομεν τὰς λεγομένας *δεκαδικὰς κλασματικὰς μονάδας*. Αὗται εἶνε κατὰ σειρὰν αἱ ἑξῆς :

$$\frac{1}{10}\quad\frac{1}{100}\quad\frac{1}{1000}\quad\frac{1}{10\,000}\quad\frac{1}{100\,000}\ldots$$

Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι καὶ αἱ δεκαδικαὶ μονάδες εἶνε ἐπίσης κλασματικαί, μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι οἱ παρονομασταὶ αὐτῶν, ἀντὶ νὰ εἶνε ὁποιοιδήποτε ἀριθμοί, εἶνε πάντοτε εἷς ἐκ τῶν ἀριθμῶν 10, 100, 1000 κτλ. Ἑπομένως *δεκαδικὴ μονὰς λέγεται τὸ ἓν ἐκ τῶν* **10** *ἢ* **100** *ἢ* **1000** *κ.τ.λ. ἴσων μερῶν, εἰς τὰ ὁποῖα διηρέθη ἡ ἀκεραία μονάς.*

Δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ λέγονται οἱ γινόμενοι ἔκ τινος δεκαδικῆς μονάδος διὰ τῆς ἐπαναλήψεως αὐτῆς.

Ἐὰν π.χ. τὴν δεκαδικὴν κλασματικὴν μονάδα $\frac{1}{10}$ λάβωμεν ἅπαξ, γίνεται ὁ δεκαδικὸς κλασματικὸς ἀριθμὸς $\frac{1}{10}$. Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι καὶ μία μόνη μονὰς δεκαδικὴ ἀποτελεῖ δεκαδικὸν ἀριθμόν. Ἐὰν τὴν αὐτὴν δεκαδικὴν κλασματικὴν μονάδα $\frac{1}{10}$ ἐπαναλάβωμεν δίς, γίνεται νέος δεκαδικὸς κλασματικὸς ἀριθμός, ὁ $\frac{2}{10}$· ἐὰν τρίς, ὁ $\frac{3}{10}$ καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἐὰν ἤδη λάβωμεν ἑτέραν δεκαδικὴν κλασματικὴν μονάδα, οἷον τὴν $\frac{1}{1000}$, δυνάμεθα καὶ ἐξ αὐτῆς νὰ σχηματίσωμεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον νέαν σειρὰν δεκαδικῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν: $\frac{1}{1000}$. . . . . $\frac{5}{1000}$. . . . . $\frac{27}{1000}$. . . . κ.τ.λ. Ὥστε ἐξ ἑκάστης δεκαδικῆς μονάδος σχηματίζεται καὶ νέα σειρὰ δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω βλέπομεν, ὅτι οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ ὑπάγονται εἰς τὰ κλάσματα καὶ ἐπομένως ὅσα ἐμάθομεν περὶ τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν ἀληθεύουσι καὶ ἐπὶ τῶν δεκαδικῶν.

123.—Ἂν θεωρήσωμεν κατὰ σειρὰν τὰς διαφόρους κλασματικὰς δεκαδικὰς μονάδας $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10\,000}$, $\frac{1}{100\,000}$, $\frac{1}{1\,000\,000}$ κ.τ.λ, παρατηροῦμεν ὅτι πᾶσαι ἔχουσι τὸν αὐτὸν ἀριθμητήν, ἀλλ' ὅτι ὁ παρονομαστὴς ἑκάστης προηγουμένης εἶνε δεκάκις μικρότερος τοῦ παρονομαστοῦ τῆς ἀμέσως ἑπομένης. Ἄρα (ἐδ. 88, *παρατ.*) ἑκάστη ἐκ τῶν δεκαδικῶν τούτων μονάδων εἶνε δεκαπλασία τῆς ἀκολούθου. Οὕτω τὸ $\frac{1}{10}$ ἰσοδυναμεῖ πρὸς $\frac{10}{100}$, τὸ $\frac{1}{100}$ σχηματίζεται ἐκ $\frac{10}{1000}$ καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἐκ τούτου συμπεραίνομεν ὅτι δυνάμεθα νὰ γράφωμεν τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς ὅπως καὶ τοὺς ἀκεραίους στηριζόμενοι ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἀρχῆς, τὴν ὁποίαν καὶ ἐν ἀρχῇ τοῦ βιβλίου τούτου (ἐδ. 11) ἐγνωρίσαμεν, καθ' ἣν *πᾶν ψηφίον γραφόμενον πρὸς τὰ δεξιὰ ἄλλου παριστᾷ μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως.*

Κατὰ ταῦτα λοιπὸν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ ψηφίου τῶν ἀκεραίων μονάδων δυνάμεθα νὰ γράφωμεν τὸ ψηφίον τῶν δεκάτων, κατόπιν τούτου τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοστῶν, μετὰ τοῦτο τὸ τῶν χιλιοστῶν καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἵνα δὲ διακρίνωμεν τὸ ἀκέραιον μέρος ἀπὸ τοῦ δεκαδικοῦ, γράφομεν μεταξὺ αὐτῶν *ὑποδιαστολήν.*

Καὶ τὸ μὲν $\frac{1}{10}$ καλοῦμεν δεκαδικὴν μονάδα *πρώτης τάξεως*, τὸ $\frac{1}{100}$ *δευτέρας*, τὸ $\frac{1}{1000}$ *τρίτης* καὶ οὕτω καθεξῆς. Εὐκόλως δὲ δυνάμεθα νὰ διακρίνωμεν τὴν τάξιν δεκαδικῆς τινος κλασματικῆς μονάδος ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μηδενικῶν τοῦ παρονομαστοῦ της. Π. χ. ἡ δεκαδικὴ κλασματικὴ μονὰς $\frac{1}{1\,000\,000}$, τῆς ὁποίας ὁ παρονομαστὴς ἔχει ἓξ μηδενικά, εἶνε *ἕκτης τάξεως*, ἡ $\frac{1}{100\,000}$ *πέμπτης* κ.τ.λ.

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω εἶνε πλέον φανερὸν ὅτι διὰ νὰ γράψωμεν π.χ. τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν τὸν ἔχοντα 9 *ἀκεραίας μονάδας*, 7 *δέκατα*, 2 *ἑκατοστὰ* καὶ 4 *χιλιοστά*, πρέπει πρῶτον νὰ γράψωμεν τὰς 9 ἀκεραίας μονάδας, τὰς ὁποίας καὶ νὰ χωρίσωμεν διὰ τῆς ὑποδιαλῆς, ἔπειτα νὰ γράψωμεν τὰ 7 δέκατα, κατόπιν τὰ 2 ἑκατοστὰ καὶ τέλος τὰ 4 χιλιοστά. Τότε δὲ ὁ ἀριθμὸς θὰ ἔχῃ γραφῆ οὕτω: **9,724.**

Ἐὰν δεκαδικός τις ἀριθμὸς δὲν ἔχῃ ἀκέραιον μέρος ἢ δέκατα ἢ ἑκατοστὰ κτλ., ἀναπληροῦμεν αὐτὰ διὰ μηδενικῶν. Π.χ. ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς ὁ ἔχων 5 *ἑκατοστὰ* καὶ 8 *δεκάκις χιλιοστὰ* γράφεται **0,0508.**

Ὅσα ψηφία εὑρίσκονται κατόπιν τῆς ὑποδιαστολῆς, λέγονται *δεκαδικά*. Ἕκαστον δεκαδικὸν ψηφίον προσέχομεν ὥστε νὰ γράφηται μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν εἰς τὴν θέσιν, τὴν ὁποίαν δεικνύει ἡ τάξις τῶν μονάδων, ὧν τὸ πλῆθος δηλοῖ τὸ ψηφίον τοῦτο. Οὕτω τὸ ψηφίον τὸ ὁποῖον παριστᾷ ἑκατοστά, δηλ. δεκαδικὰς μονάδας *δευτέρας τάξεως*, πρέπει νὰ κατέχῃ τὴν *δευτέραν* θέσιν μετὰ τὴν ὑποδιαστολήν· τὸ ψηφίον τὸ ὁποῖον παριστᾷ τὰ χιλιοστά, δηλ. τὰς δεκαδικὰς μονάδας τῆς *τρίτης τάξεως*, τὴν τρίτην θέσιν· τὸ ψηφίον τὸ παριστῶν τὰ δεκάκις χιλιοστά, τὴν *τετάρτην*· τὸ παριστῶν τὰ ἑκατοντάκις χιλιοστὰ τὴν *πέμπτην* καὶ οὕτω καθεξῆς.

Γραφὴ τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων ὡς δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

124. — Ἔστωσαν τὰ δεκαδικὰ κλάσματα :

$$\frac{6}{10} \qquad \frac{15}{10} \qquad \frac{234}{10}$$

γινόμενα ἐκ τῆς δεκαδικῆς κλασματικῆς μονάδος $\frac{1}{10}$.

Ἵνα γράψωμεν τὸ πρῶτον ἐξ αὐτῶν ὡς δεκαδικὸν ἀριθμόν, παρατηροῦμεν πρῶτον ἂν περιέχῃ ἀκεραίας μονάδας. Ἀλλὰ διὰ νὰ ἔχῃ μίαν τοὐλάχιστον ἀκεραίαν μονάδα, ἔπρεπε νὰ ἔχῃ $\frac{10}{10}$. Ἐπειδὴ λοιπὸν δὲν ἔχει ἀκεραίας μονάδας, γράφομεν 0 *ἀκέραιον* χωρίζοντες συνάμα τοῦτον διὰ τῆς ὑποδιαστολῆς. Κατόπιν δὲ ταύτης γράφομεν ἀμέσως τὰ 6 δέκατα, οὕτω : **0,6.**

Τὸ δεύτερον δεκαδικὸν κλάσμα $\mathbf{\frac{15}{10}}$ περιέχει 1 *ἀκεραίαν* μονάδα καὶ 5 *δέκατα*· διότι $\frac{15}{10} = \frac{10}{10} + \frac{5}{10} = 1 + \frac{5}{10}$· ἑπομένως θὰ γραφῇ **1,5.**

Ἐπίσης ἐπειδὴ τὸ τρίτον κλάσμα $\mathbf{\frac{234}{10}}$ ἰσοδυναμεῖ πρὸς $\frac{230}{10} + \frac{4}{10}$, τὸ δὲ $\frac{230}{10}$ περιέχει ἀκριβῶς 23 ἀκεραίας μονάδας, διὰ τοῦτο τὸ δεκαδικὸν τοῦτο κλάσμα $\frac{234}{10}$ τρεπόμενον εἰς δεκαδικὸν ἀριθμὸν γράφεται **23,4.**

Ἄς θεωρήσωμεν ἤδη τὰ δεκαδικὰ κλάσματα.

$$\mathbf{\frac{8}{100} \qquad \frac{13}{100} \qquad \frac{542}{100}}$$

γινόμενα ἐκ τῆς δεκαδικῆς μονάδος $\frac{1}{100}$.

Τὸ πρῶτον ἐξ αὐτῶν δὲν περιέχει ἀκεραίας μονάδας. Ἀλλ' οὔτε καὶ δέκατα ἔχει· διότι ἔπρεπε νὰ ἔχῃ $\frac{10}{100}$ διὰ νὰ ἀποτελεσθῇ $\frac{1}{10}$ (ἐδ. **123**). Ἐπομένως διὰ νὰ γράψωμεν τὸ δεκαδικὸν τοῦτο κλάσμα ὡς δεκαδικὸν ἀριθμόν, πρέπει νὰ γράψωμεν 0 *ἀκέραιον*, τὸ ὁποῖον νὰ χωρίσωμεν διὰ τῆς ὑποδιαστολῆς, ἔπειτα νὰ γράψωμεν 0 *δέκατα*, καὶ τέλος 8 *ἑκατοστά*, δηλ : **0,08.**

Τὸ δεύτερον δεκαδικὸν κλάσμα $\mathbf{\frac{13}{100}}$ ἀκεραίας μονάδας δὲν ἔχει· θὰ σημειώσωμεν λοιπὸν 0 *ἀκέραιον*. Κατόπιν θὰ γράψωμεν 1 *δέκατον* καὶ τέλος 3 *ἑκατοστά*, οὕτω: **0,13.** Διότι $\frac{13}{100} = \frac{10}{100} + \frac{3}{100} =$

$$= \frac{1}{10} + \frac{3}{100}.$$

Τὸ δὲ τρίτον ἐκ τῶν ληφθέντων δεκαδικῶν κλασμάτων $\frac{542}{100}$ ἰσοῦται πρὸς $\frac{500}{100}+\frac{40}{100}+\frac{2}{100}$. Ἀλλὰ $\frac{500}{100}=5$ ἀκερ. μον., καὶ $\frac{40}{100}=\frac{4}{10}$. Ἐπομένως τρέπεται εἰς τὸν ἑξῆς δεκαδικὸν ἀριθ. **5,42**.

Ἔστωσαν τέλος τὰ δεκαδικὰ κλάσματα :

$$\frac{6}{1000} \quad \frac{27}{1000} \quad \frac{453}{1000} \quad \frac{6781}{1000}$$

γινόμενα πάντα ἐκ τῆς δεκαδικῆς μονάδος $\frac{1}{1000}$.

Τὸ πρῶτον ἔχει μόνον 6 *χιλιοστά*. Ἐπομένως εἰς τὴν θέσιν τοῦ ἀκεραίου, τῶν δεκάτων καὶ τῶν ἑκατοστῶν θὰ σημειώσωμεν 0, καὶ μετὰ ταῦτα, εἰς τὴν τρίτην θέσιν μετὰ τὴν ὑποδιαστολήν, θὰ γράψωμεν τὰ 6 *χιλιοστά*, οὕτω : **0,006**.

Τὸ δεύτερον περιέχει $\frac{20}{1000}$, τὰ ὁποῖα ἰσοδυναμοῦσι πρὸς $\frac{2}{100}$, περιέχει δὲ πρὸς τούτοις καὶ $\frac{7}{1000}$. Ἀκεραίας μονάδας καὶ δέκατα δὲν ἔχει. Ἐπομένως θὰ γραφῇ : **0,027**.

Τὸ δὲ τρίτον κλάσμα $\frac{453}{1000}$ ἰσοδυναμεῖ πρὸς $\frac{400}{1000}+\frac{50}{1000}+$ $+\frac{3}{1000}$. Ἐκ τούτων ὅμως τὸ μὲν $\frac{400}{1000}$ ἰσοδυναμεῖ πρὸς $\frac{4}{10}$, τὸ δὲ $\frac{50}{1000}$ πρὸς $\frac{5}{100}$. Ἀκεραίας μονάδας δὲν ἔχει. Ἐπομένως θὰ γραφῇ : **0,453**.

Καὶ τέλος τὸ $\frac{6781}{1000}$ περιέχει 6 *ἀκεραίας μονάδας* $\left(\text{ἐκ τῶν } \frac{6000}{1000}\right)$, 7 *δέκατα* $\left(\text{ἐκ τῶν } \frac{700}{1000}\right)$, 8 *ἑκατοστὰ* $\left(\text{ἐκ τῶν } \frac{80}{1000}\right)$ καὶ 1 *χιλιοστόν*. Διὰ τοῦτο γράφεται : **6,781**.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἑπόμενον κανόνα :

125. — *Διὰ νὰ τρέψωμεν δεκαδικὸν κλάσμα εἰς δεκαδικὸν ἀριθμόν, παραλείπομεν τὸν παρονομαστήν, ἀπὸ δὲ τὸν ἀριθμητὴν* χωρίζομεν δι' ὑποδιαστολῆς τόσα δεκαδικὰ ψηφία ἀρχόμενοι ἀπὸ τὰ δεξιά, ὅσα μηδενικὰ εἶχε πρὶν ὁ παρονομαστής του.

Π. χ. τὸ $\frac{23}{10}$ γράφεται **2,3.** Τὸ $\frac{5429}{1000}$ γράφεται **5,429** κ.τ.λ.

Σημείωσις.—Ἐὰν τὰ ψηφία τοῦ ἀριθμητοῦ δὲν εἶνε ἀρκετά, γράφομεν εἰς τὴν ἀρχὴν αὐτοῦ μηδενικά, ὁπότε οὗτος δὲν μεταβάλλεται.

Π. χ. $\frac{49}{100\,000}=\frac{000049}{100\,000}=$ **0,00049.**

Γραφὴ τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν ὡς κοινῶν κλασμάτων.

126.— *Διὰ νὰ γράψωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν ὡς κοινὸν κλάσμα, ἀρκεῖ νὰ παραλείψωμεν τὴν ὑποδιαστολήν, καὶ τὸν μὲν τότε προκύπτοντα ἀκέραιον νὰ γράψωμεν ὡς ἀριθμητήν, παρονομαστὴν δὲ νὰ γράψωμεν τὴν μονάδα ἀκολουθουμένην ὑπὸ τόσων μηδενικῶν, ὅσα δεκαδικὰ ψηφία εἶχε πρὶν ὁ δεκαδικὸς ἀριθμός.*

Π. χ. $2{,}3=\frac{23}{10}$ $\qquad 4{,}512=\frac{4512}{1000}$ κ.τ.λ.

Ἀπαγγελία τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

127.— Πάντα δεκαδικὸν ἀριθμὸν δυνάμεθα νὰ ἀπαγγείλωμεν κατὰ τοὺς ἑξῆς τρόπους :

α'.) Ἀπαγγέλλομεν ἕκαστον αὐτοῦ ψηφίον χωριστὰ μὲ τὸ ὄνομα τῶν μονάδων, ὧν τὸ πλῆθος παριστᾷ. Π. χ. ὁ **7,05238** ἀπαγγέλλεται 7 *ἀκέραιος*, 0 *δέκατα*, 5 *ἑκατοστά*, 2 *χιλιοστά*, 3 *δεκάκις χιλιοστὰ* καὶ 8 *ἑκατοντάκις χιλιοστά*.

β'.) Ἀπαγγέλλομεν πρῶτον τὸν ἀκέραιον καὶ ἔπειτα ὁλόκληρον τὸν ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦσι τὰ δεκαδικὰ ψηφία του προσαρτῶντες εἰς τὸ τέλος καὶ τὸ ὄνομα τῶν μονάδων, ὧν τὸ πλῆθος δηλοῖ τὸ τελευταῖον δεκαδικὸν ψηφίον.

Π. χ. ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς **34,1506** ἀπαγγέλλεται 34 *ἀκέραιος* καὶ 1506 *δεκάκις χιλιοστά*.

γ'.) Ἀπαγγέλλομεν ὁλόκληρον τὸν ἀριθμὸν ὡσὰν νὰ ἦτο ἀκέραιος, χωρὶς δηλ. νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψει τὴν ὑποδιαστολήν, καὶ εἰς τὸ τέλος προσαρτῶμεν καὶ τὸ ὄνομα τῶν μονάδων, ὧν τὸ πλῆθος δηλοῖ τὸ τελευταῖον αὐτοῦ δεκαδικὸν ψηφίον. Π. χ. τὸν δεκαδικὸν **1,247** ἀπαγγέλλομεν 1247 χιλιοστά.

δ'.) Ὅταν ὁ ἀριθμὸς ἔχῃ πολλὰ δεκαδικὰ ψηφία, τότε χωρίζομεν αὐτὰ εἰς τριψήφια τμήματα ἀρχόμενοι ἀπὸ τῆς ὑποδιαστολῆς. Ἔπειτα δὲ ἀπαγγέλλομεν κατὰ σειρὰν ἕκαστον τμῆμα ὡς ἐὰν ἦτο ἀκέραιος ἀριθμός, προσαρτῶντες κατόπιν ἑκάστου τμήματος καὶ τὸ ὄνομα τῶν μονάδων, τῶν ὁποίων τὸ πλῆθος δηλοῖ τὸ τελευταῖον αὐτοῦ ψηφίον. Π. χ. ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς **23,716.475** ἀπαγγέλλεται 23 *ἀκέραιος,* 716 *χιλιοστὰ* καὶ 475 *ἑκατομμυριοστά.*

Σημείωσις α'.—Δυνάμεθα νὰ χωρίσωμεν τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ ἀριθμοῦ καὶ εἰς τμήματα οἱαδήποτε (*), καὶ ἔπειτα νὰ ἀπαγγείλωμεν αὐτὰ καθ' ὃν τρόπον εἴπομεν ἀνωτέρω. Π. χ. τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 23,71.64.75 δυνάμεθα νὰ ἀπαγγείλωμεν καὶ ὡς ἑξῆς: 23 *ἀκέραιος,* 71 *ἑκατοστά,* 64 *δεκάκις χιλιοστὰ* καὶ 75 *ἑκατομμυριοστά.*

Σημείωσις β'.—Τὸ τελευταῖον πρὸς τὰ δεξιὰ τμῆμα δύναται νὰ εἶνε καὶ μονοψήφιον. Ἂν ὅμως θέλωμεν, δυνάμεθα νὰ καταστήσωμεν καὶ τοῦτο διψήφιον ἢ τριψήφιον γράφοντες εἰς τὸ τέλος τοῦ ἀριθμοῦ ἓν ἢ δύο μηδενικά. Διότι, καθὼς θέλομεν ἴδει εὐθὺς κατωτέρω, ἡ ἀξία τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ τοιουτοτρόπως οὐδαμῶς μεταβάλλεται.

Ἰδιότητες τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

128.—Οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ ἔχουσι τὰς ἑξῆς ἰδιότητας:

α'.) Ἡ ἀξία ἑνὸς δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν γραφῶσιν ὁσαδήποτε μηδενικὰ εἰς τὸ τέλος αὐτοῦ.

Ἔστω π. χ. ὁ δεκαδικὸς **3,27**. Ἐὰν εἰς τὸ τέλος αὐτοῦ γράψωμεν ἓν μηδενικόν, προκύπτει ὁ δεκαδικὸς **3,270** ὁ ὁποῖος λέγομεν ὅτι εἶνε ἴσος μὲ τὸν δοθέντα.

Οἱ ἀριθμοὶ 3,27 καὶ 3,270 εἶνε πράγματι ἴσοι, διότι ἑκάτερος ἔχει 3 ἀκεραίας μονάδας, 2 δέκατα καὶ 7 ἑκατοστά, τοῦτ' ἔστιν ἀποτελεῖται ἐκ τοῦ αὐτοῦ πλήθους μονάδων ἑκάστης τάξεως.

Ἡ ἰσότης τῶν ἀριθμῶν τούτων καταφαίνεται, καὶ ἐὰν γρά-

(*) Συνήθως ὅμως εἰς τμήματα διψήφια ἢ τριψήφια.

ψωμεν αὐτοὺς ὡς κοινὰ κλάσματα : $\frac{327}{100}$ καὶ $\frac{3270}{1000}$, ὁπότε ἁπλοποιουμένου τοῦ δευτέρου προκύπτει ἐξ αὐτοῦ τὸ πρῶτον.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύομεν ὅτι καὶ ὁσαδήποτε μηδενικὰ ἂν γράψωμεν εἰς τὸ τέλος τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ 3,27 ἡ ἀξία αὐτοῦ πάλιν δὲν μεταβάλλεται.

Παρατήρησις.—Ἐκ τῆς πρώτης ταύτης ἰδιότητος τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν ἕπεται ὅτι καὶ *πάντα ἀκέραιον δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν ὡς δεκαδικόν. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ τὴν ὑποδιαστολὴν καὶ κατόπιν ὁσαδήποτε μηδενικὰ ὡς δεκαδικὰ ψηφία*. Π. χ. **67=67,000**. . .

β'.) Ἐὰν ἐν δεκαδικῷ τινι ἀριθμῷ μετατεθῇ ἡ ὑποδιαστολὴ κατὰ μίαν θέσιν πρὸς τὰ δεξιά, ὁ ἀριθμὸς οὗτος πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 10. Ἐὰν κατὰ δύο θέσεις, ἐπὶ 100 καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἔστω π. χ. ὁ δεκαδικὸς **4,57**. Ἐὰν μεταθέσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν κατὰ μίαν θέσιν πρὸς τὰ δεξιά, προκύπτει ὁ ἀριθμὸς **45,7** ὁ ὁποῖος λέγομεν ὅτι εἶνε 10 φορὰς μεγαλείτερος τοῦ δοθέντος. Διότι τοῦ ἀριθμοῦ 4,57 αἱ μὲν 4 ἀκέραιαι μονάδες ἔγειναν διὰ τῆς μεταθέσεως τῆς ὑποδιαστολῆς 4 δεκάδες ἤτοι ἐπολλαπλασιάσθησαν ἐπὶ 10· ἐπίσης τὰ 5 δέκατα ἔγειναν 5 ἀκέραιαι μονάδες ἤτοι ἐπολλαπλασιάσθησαν καὶ αὐτὰ ἐπὶ 10, καὶ τέλος τὰ 7 ἑκατοστὰ ἔγειναν 7 δέκατα, δηλ. καὶ αὐτὰ ἐδεκαπλασιάσθησαν $\left(\text{διότι } \frac{7}{100}\times 10=\frac{70}{100}=\frac{7}{10}\right)$. Ἀφ' οὗ λοιπὸν αἱ μονάδες τῶν διαφόρων τάξεων, ὧν τὸ πλῆθος παριστᾷ ἕκαστον ψηφίον καὶ ἐξ ὧν ἀποτελεῖται ὁ ἀριθμός, ἐπολλαπλασιάσθησαν πᾶσαι ἐπὶ 10, συμπεραίνομεν (ἐδ. **39**, 6'.) ὅτι καὶ ὅλος ὁ ἀριθμὸς ἐπολλαπλασιάσθη ἐπὶ 10.

Ἡ ἰδιότης αὕτη ἀποδεικνύεται καὶ γραφομένων τῶν ἀριθμῶν ὑπὸ κλασματικὴν μορφήν. Ἂν συγκρίνωμεν τότε τὰ δύο κλάσματα $\frac{457}{100}$ καὶ $\frac{457}{10}$, βλέπομεν ὅτι ἔχουσιν ἀμφότερα τὸν αὐτὸν ἀριθμητήν, ἀλλ' ὅτι ὁ παρονομαστὴς τοῦ δευτέρου εἶνε δεκάκις μικρότερος τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ πρώτου. Συμπεραίνομεν λοιπὸν (ἐδ. **88**, παρατ.) ὅτι τὸ δεύτερον κλάσμα εἶνε δεκάκις μεγαλείτερον τοῦ πρώτου, ἄρα καὶ ὁ 45,7 δεκαπλάσιος τοῦ 4,57.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύεται καὶ ὅτι ἐὰν ἡ ὑποδιαστολὴ μετατεθῇ κατὰ δύο θέσεις πρὸς τὰ δεξιά, ὁ ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 100 καὶ οὕτω καθεξῆς.

Σημείωσις.—Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς δὲν ἔχῃ ἀρκετὰ δεκαδικὰ ψηφία διὰ νὰ μεταθέσωμεν τὴν ὑποδιαστολήν, γράφομεν μηδενικὰ εἰς τὸ τέλος αὐτοῦ. Ἄς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν **29,8×1000**. Πρὸς τοῦτο πρέπει νὰ μεταθέσωμεν ἐν τῷ ἀριθμῷ τούτῳ τὴν ὑποδιαστολὴν κατὰ τρεῖς θέσεις πρὸς τὰ δεξιά. Ἐπειδὴ ὅμως τὰ δεκαδικὰ ψηφία αὐτοῦ δὲν ἐπαρκοῦσι, γράφομεν εἰς τὸ τέλος αὐτοῦ μηδενικὰ καὶ γίνεται 29,800. . . . Τότε πολλαπλασιάζοντες αὐτὸν ἐπὶ 1000 εὑρίσκομεν ὡς γινόμενον τὸν ἀκέραιον ἀριθμὸν **29800**.

γ΄.) *Ἐὰν ἐν δεκαδικῷ τινι ἀριθμῷ μετατεθῇ ἡ ὑποδιαστολὴ κατὰ μίαν θέσιν πρὸς τὰ ἀριστερά, ὁ ἀριθμὸς οὗτος διαιρεῖται διὰ τοῦ 10· ἐὰν κατὰ δύο θέσεις, διὰ τοῦ 100 καὶ οὕτω καθεξῆς.*

Π. χ. **67,42** : 10 = **6,742**

Ὁ λόγος τούτου εἶνε ὅμοιος μὲ τὸν τῆς προηγουμένης ἰδιότητος.

Σημείωσις.—Ἐὰν καὶ ἐνταῦθα ὁ ἀριθμὸς δὲν ἔχῃ ἀρκετὰ ψηφία πρὸς τὰ ἀριστερὰ διὰ νὰ μετατεθῇ ἡ ὑποδιαστολή, γράφομεν πρὸ τοῦ ἀκεραίου μέρους ὁσαδήποτε θέλομεν μηδενικά, τοῦθ' ὅπερ δὲν μεταβάλλει τὴν ἀξίαν τοῦ ἀριθμοῦ. Π. χ. διὰ νὰ διαιρέσωμεν τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν **3,621** διὰ 1000, γράφομεν πρῶτον αὐτὸν ὡς ἑξῆς 0003,621 καὶ ἔπειτα μεταθέτομεν τὴν ὑποδιαστολήν. Τοιουτοτρόπως εὑρίσκομεν πηλίκον **0,003621**.

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

129. — *Διὰ νὰ προσθέσωμεν δεκαδικοὺς ἀριθμούς, κάμνομεν πρῶτον αὐτοὺς νὰ ἔχωσιν ἴσον ἀριθμὸν δεκαδικῶν ψηφίων. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν ἓν ἢ περισσότερα μηδενικὰ εἰς τὸ τέλος τῶν προσθετέων τῶν ἐχόντων τὰ ὀλιγώτερα δεκαδικὰ ψηφία. Ἔπειτα γράφομεν αὐτοὺς τὸν ἕνα ὑπὸ τὸν ἄλλον, οὕτως ὥστε τὰ ψηφία τὰ δηλοῦντα τὸ πλῆθος τῶν μονάδων ἑκάστης τάξεως νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν κατακόρυφον στήλην, καὶ προσθέτομεν αὐτοὺς ὅπως καὶ τοὺς ἀκεραίους, εἰς δὲ τὸ ἄθροισμα γράφομεν τὴν ὑποδιαστολὴν εἰς τὴν στήλην τῶν ὑποδιαστολῶν.*

Παράδειγμα.

Νὰ προστεθῶσιν οἱ ἀριθμοί : 0,42 41,679 καὶ 2,8514.

$$\begin{array}{r} 0,4200 \\ 41,6790 \\ 2,8514 \\ \hline 44,9504 \end{array}$$

Σημείωσις α'.—Ἡ πρόσθεσις αὕτη ἐκτελεῖται καθ'ὃν τρόπον ἐδείξαμεν εἰς τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς (ἐδ. 22).

Σημείωσις β'.– Τὰ μηδενικά, τὰ ὁποῖα ἐγράψαμεν εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου καὶ τοῦ δευτέρου προσθετέου, δύνανται καὶ νὰ παραλειφθῶσιν. Ἡ πρᾶξις τότε θέλει διαταχθῆ ὡς ἑξῆς :

$$\begin{array}{r} 0,42 \\ 41,679 \\ 2,8514 \\ \hline 44,9504. \end{array}$$

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

130. — *Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν ἀπὸ ἄλλον δεκαδικόν, κάμνομεν πρῶτον αὐτοὺς νὰ ἔχωσιν ἴσον ἀριθμὸν δεκαδικῶν ψηφίων· ἔπειτα δὲ γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον ὑπὸ τὸν μειωτέον οὕτως ὥστε τὰ ψηφία τὰ δηλοῦντα τὸ πλῆθος τῶν μονάδων ἑκάστης τάξεως νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν κατακόρυφον στήλην καὶ ἀφαιροῦμεν ὡς νὰ ἦσαν ἀκέραιοι. Εἰς δὲ τὸ ὑπόλοιπον γράφομεν τὴν ὑποδιαστολὴν εἰς τὴν στήλην τῶν ὑποδιαστολῶν.*

Παράδειγμα.

Νὰ ἀφαιρεθῇ ὁ 2,95 ἀπὸ τὸν 47,6218.

$$\begin{array}{r} 47,6218 \\ 2,9500 \\ \hline 44,6718 \end{array}$$

Σημείωσις α'.—Ἡ ἀφαίρεσις αὕτη ἐκτελεῖται καθ'ὃν τρόπον ἐδείξαμεν εἰς τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς (ἐδ. 27).

Σημείωσις β'.—Τὰ εἰς τὸ τέλος μηδενικὰ δύνανται καὶ νὰ παραλειφθῶσιν. Ἡ πρᾶξις τότε θέλει διαταχθῆ ὡς ἑξῆς :

1ον $\begin{array}{r} 47,6218 \\ 2,95 \\ \hline 44,6718 \end{array}$ 2ον $\begin{array}{r} 5,62 \\ 0,41527 \\ \hline 5,20473. \end{array}$

Σημείωσις γ΄.—Ἐὰν ὁ μειωτέος εἶνε ἀκέραιος, παριστῶμεν αὐτὸν ὡς δεκαδικόν, μὲ μηδενικὰ ὡς δεκαδικὰ ψηφία (ἐδ. **128** α΄. παρατ.). Π. χ. ἡ ἀφαίρεσις 13—9,0147 διατάσσεται καὶ ἐκτελεῖται ὡς ἑξῆς:

$$\begin{array}{r} 13{,}0000 \\ 9{,}0147 \\ \hline 3{,}9853 \end{array}$$

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

131.—*Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον δύο δεκαδικῶν ἀριθμῶν, πολλαπλασιάζομεν αὐτοὺς ὡς νὰ ἦσαν ἀκέραιοι, εἰς δὲ τὸ γινόμενον χωρίζομεν τόσα δεκαδικὰ ψηφία, ὅσα ἔχουσι καὶ οἱ δύο ὁμοῦ παράγοντες.*

Παράδειγμα.

Νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν 21,35 καὶ 4,3.

$$\begin{array}{r} 21{,}35 \\ 4{,}3 \\ \hline 6405 \\ 8540 \\ \hline 91{,}805 \end{array}$$

Ὁ λόγος τούτου εἶνε ὁ ἑξῆς: Ἂν τοὺς δύο παράγοντας τοῦ ἀνωτέρω παραδείγματος γράψωμεν ὡς κοινὰ κλάσματα, θὰ ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν $\frac{2135}{100} \times \frac{43}{10}$. Τὸ γινόμενον τότε αὐτῶν θὰ εἶνε

$$\frac{2135 \times 43}{100 \times 10} = \frac{91805}{1000} = 91{,}805.$$

Σημείωσις α΄.—Ὁ αὐτὸς κανὼν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἰσχύει καὶ ὅταν ὁ ἕτερος τῶν παραγόντων εἶνε ἀκέραιος. Π. χ. 7,029×8.

$$\begin{array}{r} 7{,}029 \\ 8 \\ \hline 56{,}232 \end{array}$$

Σημείωσις β΄.—Ἐὰν τὸ γινόμενον δὲν ἔχῃ ἀρκετὰ ψηφία, διὰ νὰ χωρίσωμεν μετὰ τὴν πρᾶξιν τὰ δεκαδικά, γράφομεν εἰς τὴν ἀρχὴν αὐτοῦ μηδενικά. Π. χ. 0,27×0,0000013.

```
      0,27
 0,0000013
 ─────────
        81
       27
 ─────────
0,000000351
```

Παρατήρησις.—Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω παραδείγματος μανθάνομεν καὶ ὅτι ἐν τοῖς δεκαδικοῖς μόνον τῶν ὑπὸ τῶν σημαντικῶν ψηφίων ἀποτελουμένων ἀριθμῶν πρέπει νὰ σχηματίζωμεν τὸ γινόμενον.

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

132.—Εἰς τὴν διαίρεσιν τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν διακρίνομεν δύο περιπτώσεις:

α΄.) Διαιρέτης ἀκέραιος.

133.—*Διὰ νὰ διαιρέσωμεν δεκαδικὸν δι' ἀκεραίου, διαιροῦμεν πρῶτον τὸ ἀκέραιον αὐτοῦ μέρος καὶ κατόπιν τὸ δεκαδικὸν διὰ τοῦ ἀκεραίου. Καὶ ὅσα μὲν ψηφία τοῦ πηλίκου προκύψωσιν ἐκ τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀκεραίου μέρους τοῦ διαιρετέου, θὰ εἶνε ἀκέραια· ὅσα δὲ προκύψωσιν ἐκ τῆς διαιρέσεως τοῦ δεκαδικοῦ μέρους, θὰ εἶνε δεκαδικά.*

Παράδειγμα.

```
25,7484 | 6
 1 7    |──────
  54    | 4,2914
   08
    24
     0
```

Τὴν 1 ἀκ. μονάδα, ἥτις ἔμεινεν ὑπόλοιπον ἐκ τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀκεραίου μέρους, ἐτρέψαμεν εἰς 10 δέκατα· εἰς ταῦτα δὲ προσεθέσαμεν καὶ τὰ 7 δέκατα τοῦ διαιρετέου.—Κατόπιν τὰ 5 δέκατα (ὑπόλ. τῆς διαιρέσεως τῶν 17 δεκάτων) ἐτρέψαμεν εἰς 50 ἑκατοστά, τὰ ὁποῖα μαζὶ μὲ τὰ 4 τοῦ διαιρετέου ἔγειναν 54 ἑκατοστά.

Τέλος τὰ 2 χιλιοστὰ (ὑπόλ. τῆς προτελευταίας διαιρέσεως) ἐτρέψαμεν εἰς 20 δεκάκις χιλιοστά, εἰς τὰ ὁποῖα προσεθέσαμεν καὶ τὰ 4 δεκάκις χιλιοστὰ τοῦ διαιρετέου.

Ἐὰν εἴς τινα διαίρεσιν δὲν εὕρωμεν ἐπὶ τέλους ὑπόλοιπον **0**, τότε γράφομεν εἰς τὸ τέλος τοῦ διαιρετέου μηδενικά τινα, διὰ τῶν ὁποίων οὐδόλως μεταβάλλεται, ὡς γνωστόν, ἡ ἀξία του, καὶ ἐξακολουθοῦμεν τὴν διαίρεσιν.

Παραδείγματα.

```
α'.)  5,27  | 4
      1 2   |------
        07    1,31
         3
```

Ἐπειδὴ εἰς τὴν διαίρεσιν ταύτην δὲν εὕρομεν ὑπόλοιπον **0**, ἐξακολουθοῦμεν αὐτὴν γράφοντες εἰς τὸ τέλος τοῦ διαιρετέου μηδενικά :

```
      5,2700  | 4
      1 2     |--------
        07      1,3175
         30
          20
           0
```

```
β'.)  451,207  | 18
       91      |--------
        120      25,067
         127
           1
```

καὶ εἰς τὸ παράδειγμα τοῦτο γράφομεν εἰς τὸ τέλος τοῦ διαιρετέου μηδενικά, διὰ νὰ ἐξακολουθήσωμεν τὴν διαίρεσιν :

```
451,207000  | 18
 91         |-------------
  120         25,067055 . . .
  127
     100
      100
       10
```

Ἐνταῦθα ὅμως δυνάμεθα νὰ σταματήσωμεν· λέγομεν δὲ ὅτι εὕρομεν τὸ πηλίκον *κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς ἑκατομμυριοστοῦ*. Τοῦτο σημαίνει ὅτι τὸ λάθος, τὸ ὁποῖον τώρα κάμνομεν μὴ ἐξακολουθοῦντες περαιτέρω τὴν πρᾶξιν, εἶνε μικρότερον τοῦ ἑνὸς ἑκατομμυριοστοῦ.

Καὶ πραγματικῶς τὸ ἀκριβὲς πηλίκον θὰ ἦτο $25,067055\frac{10}{18}$· ἡμεῖς ὅμως λαμβάνομεν ὡς πηλίκον 25,067055· παραλείπομεν δηλ. τὸ κλάσμα $\frac{10}{18}$ τοῦ ἑκατομμυριοστοῦ, τὸ ὁποῖον εἶνε ὀλιγώτερον τοῦ ἑνὸς ἑκατομμυριοστοῦ.

Παρατήρησις.—Εἰς τὴν ἀνωτέρω διαίρεσιν τὸ κλάσμα $\frac{10}{18}$, τὸ ὁποῖον παραλείπομεν, ὑπερβαίνει τὸ $\frac{1}{2}$. Ἐπομένως προσεγγίζομεν ἔτι μᾶλλον πρὸς τὸ ἀληθὲς πηλίκον, ἂν δεχθῶμεν ὅτι τοῦτο εἶνε ὡς ἔγγιστα 25,067056.

Ἔστω τέλος καὶ ἡ ἑξῆς διαίρεσις : **0,001243 : 63**

Ταύτην ἐκτελοῦμεν κατὰ τὸν ἀκόλουθον τρόπον : Πρῶτον διαιροῦμεν τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ 63 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 0, τὸ ὁποῖον χωρίζομεν διὰ τῆς ὑποδιαστολῆς. Κατόπιν διαιροῦμεν τὰ δέκατα καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 0 δέκατα. Μετὰ ταῦτα διαιροῦμεν τὰ ἑκατοστὰ καὶ γράφομεν πάλιν 0 ἑκατοστὰ εἰς τὸ πηλίκον. Ἔπειτα διαιροῦμεν τὸ 1 χιλιοστὸν καὶ ἐκ τῆς διαιρέσεως ταύτης εὑρίσκομεν πηλίκον 0 χιλιοστά. Τὸ 1 χιλιοστὸν τοῦ διαιρετέου τὸ τρέπομεν εἰς 10 δεκάκις χιλιοστά, τὰ ὁποῖα μαζὶ μὲ τὰ ἄλλα 2 δεκάκις χιλιοστὰ τοῦ ἀριθμοῦ γίνονται 12. Ταῦτα διαιροῦμεν διὰ τοῦ 63 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 0 δεκάκις χιλιοστά. Τὰ 12 δεκάκις χιλιοστὰ τρέπομεν εἰς 120 ἑκατοντάκις χιλιοστά, τὰ ὁποῖα μαζὶ μὲ τὰ 4 ἑκατοντάκις χιλιοστὰ τοῦ διαιρετέου γίνονται 124. Ταῦτα διαιροῦντες διὰ τοῦ 63 εὑρίσκομεν πηλίκον 1 ἑκατοντάκις χιλιοστὸν καὶ ὑπόλοιπον 61. Τὰ 61 αὐτὰ ἑκατοντάκις χιλιοστὰ τρέπομεν εἰς 610 ἑκατομμυριοστά, τὰ ὁποῖα μετὰ τῶν τριῶν τοῦ διαιρετέου γίνονται 613. Διαιροῦντες τέλος καὶ ταῦτα διὰ τοῦ 63 εὑρισκομεν πηλίκον 9 ἑκατομμυριοστὰ καὶ ὑπόλοιπον 46. Τῆς διαιρέσεως λοιπὸν ταύτης τὸ πηλίκον εὑρέθη *κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς ἑκκατομμυριοστοῦ* ὅτι εἶνε **0,000019**.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς :

```
´ ´ ´ ´ ´ ´ ´
9,001243 | 63
         |---------
     613 | 0,000019
      46
```

Πηλίκον δεκαδικὸν ἐκ τῆς διαιρέσεως ἀκεραίων.

134.—Καὶ τὴν διαίρεσιν ἀκεραίου δι' ἀκεραίου δυνάμεθα νὰ ἀναγάγωμεν εἰς διαίρεσιν δεκαδικοῦ δι' ἀκεραίου, διότι τὸν ἀκέραιον διαιρετέον δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς δεκαδικόν, τοῦ ὁποίου τὰ δεκαδικὰ ψηφία εἶνε μηδενικὰ (ἐδ. 128 α'. παρατ.). Τοιουτοτρόπως τὸ πηλίκον τοῦ 23 διὰ 37 εὑρίσκομεν καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\begin{array}{r|l} 23{,}000 & 37 \\ \cline{2-2} 80 & 0{,}621\ldots \\ 60 & \\ 23 & \end{array}$$

Τροπὴ κλάσματος εἰς ἀριθμὸν δεκαδικόν.

135. — Ἐκ τῶν ἰδιοτήτων τῶν κλασμάτων γνωρίζομεν ὅτι πᾶν κλάσμα εἶνε πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ του διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του (ἐδ. 85). Ἀλλὰ καὶ ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς εἶνε ἀριθμοὶ ἀκέραιοι, καὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης δύναται κατὰ τὸ προηγούμενον ἐδάφιον νὰ προκύψῃ καὶ ὡς δεκαδικὸς ἀριθμός. Ἐκ τούτου συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα:

Διὰ νὰ τρέψωμεν κλάσμα τι εἰς δεκαδικὸν ἀριθμόν, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητήν του διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του· προτοῦ ἀρχίσωμεν ὅμως τὴν πρᾶξιν, γράφομεν εἰς τὸ τέλος τοῦ διαιρετέου ὑποδιαστολὴν καὶ κατόπιν ταύτης μηδενικὰ ὡς δεκαδικὰ ψηφία. Π. χ. τὸ κλάσμα $\frac{4}{7}$ τρέπεται εἰς δεκαδικὸν ὡς ἑξῆς:

$$\begin{array}{r|l} 4{,}0000 & 7 \\ \cline{2-2} 50 & 0{,}5714\ldots \\ 10 & \\ 30 & \\ 2 & \end{array}$$

εὕρομεν λοιπὸν ὅτι $\frac{4}{7} = 0{,}5714\ldots$

β'.) Διαιρέτης δεκαδικός.

136.—*Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶνε δεκαδικός, μεταθέτομεν ἐν αὐτῷ τὴν ὑποδιαστολὴν κατὰ τόσας θέσεις πρὸς τὰ δεξιά, ὅσας χρειάζεται διὰ νὰ γείνῃ ἀκέραιος.* Ἐπειδὴ ὅμως διὰ τῆς τοιαύτης μετα-

θέσεως τῆς ὑποδιαστολῆς ὁ διαιρέτης πολλαπλασιάζεται (ἐδ. 128 *β'.) ἐπὶ* 10 *ἢ* 100 *κλπ., διὰ τοῦτο πρέπει νὰ πολλαπλασιάζωμεν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν καὶ τὸν διαιρετέον, διὰ νὰ μὴ μεταβάλληται τὸ πηλίκον.*

Παραδείγματα.

α'.) Ἔστω ἡ ἑξῆς διαίρεσις **452,137 : 3,2**

Ἐπειδὴ ὁ διαιρέτης εἶνε δεκαδικός, μεταθέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν κατὰ μίαν θέσιν πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ γίνεται ἀκέραιος 32. Τοιουτοτρόπως ὅμως πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 10· πρέπει ἑπομένως νὰ πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὸν διαιρετέον ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 10, διὰ νὰ μὴ μεταβληθῇ τὸ πηλίκον (*ἐδ.* 56 *α'.*). Ἐπειδὴ δὲ καὶ ὁ διαιρετέος εἶνε δεκαδικός, διὰ νὰ τὸν πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 10, μεταθέτομεν καὶ τούτου τὴν ὑποδιαστολὴν κατὰ μίαν θέσιν πρὸς τὰ δεξιά. Τότε θὰ ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν 4521,37 διὰ 32, δηλ. δεκαδικὸν δι' ἀκεραίου κατὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν.

β'.) **710,42 : 0,23**

Μεταθέτομεν εἰς τὸν διαιρέτην τὴν ὑποδιαστολὴν κατὰ δύο θέσεις πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ γίνεται ἀκέραιος 23· ἀλλὰ τοιουτοτρόπως ὁ διαιρέτης πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 100, καὶ διὰ τοῦτο πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὸν διαιρετέον ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν. Ἐπειδὴ δὲ καὶ ὁ διαιρετέος ἔτυχε νὰ εἶνε δεκαδικός, διὰ νὰ τὸν πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 100, μεταθέτομεν καὶ τούτου τὴν ὑποδιαστολὴν κατὰ δύο θέσεις πρὸς τὰ δεξιά. Τότε θὰ ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν 71 042 διὰ 23.

γ'.) **314,7 : 0,125**

Εἰς τὸ παράδειγμα τοῦτο τρέπομεν τὸν διαιρέτην εἰς ἀκέραιον μεταθέτοντες τὴν ὑποδιαστολὴν αὐτοῦ κατὰ τρεῖς θέσεις πρὸς τὰ δεξιά. Ἀλλὰ τοιουτοτρόπως πολλαπλασιάζεται οὗτος ἐπὶ 1000. Διὰ νὰ μὴ μεταβληθῇ λοιπὸν τὸ πηλίκον, πολλαπλασιάζομεν καὶ τὸν διαιρετέον ἐπὶ 1000 κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, διότι καὶ αὐτὸς εἶνε δεκαδικός. Ἐπειδὴ ὅμως δὲν ἔχει ἀρκετὰ δεκαδικὰ ψηφία, γράφομεν πρῶτον εἰς τὸ τέλος αὐτοῦ δύο μηδενικὰ καὶ κατόπιν μεταθέτομεν τὴν ὑποδιαστολήν. Τοιουτοτρόπως ἡ δοθεῖσα διαίρεσις μετατρέπεται εἰς τὴν ἑξῆς : 314 700 : 125, δηλ. εἰς διαίρεσιν ἀκεραίου δι' ἀκεραίου.

δ'.) Ἔστω τέλος καὶ ἡ ἑξῆς διαίρεσις **6418 : 2,31** εἰς τὴν ὁποίαν ὁ διαιρετέος εἶνε ἀκέραιος.

Διὰ νὰ ἐκτελέσωμεν καὶ ταύτην, μεταθέτομεν πάλιν τὴν ὑποδιαστολὴν εἰς τὸν διαιρέτην κατὰ δύο θέσεις πρὸς τὰ δεξιά, ὁπότε οὗτος γίνεται ἀκέραιος. Ἐπειδὴ ὅμως τοιουτοτρόπως πολλαπλασιάζεται ὁ διαιρέτης ἐπὶ 100, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὸν διαιρετέον ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν. Ἀλλ' ἐπειδὴ ὁ διαιρετέος ἐνταῦθα εἶνε ἀκέραιος διὰ νὰ τὸν πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 100, γράφομεν εἰς τὸ τέλος αὐτοῦ δύο μηδενικὰ (ἐδ. **34** α'.). Τότε θὰ ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν 641 800 διὰ 231.

Προβλήματα.

1) $\frac{5}{7}$ τῆς δραχμῆς μὲ πόσα λεπτὰ ἰσοδυναμοῦσι ; (Ἀπ. μὲ 71 . . λ.)

2) Ὁ πῆχυς ἑνὸς ὑφάσματος ἀξίζει 1,65 δρχ. Πόσον ἀξίζουν τὰ $\frac{5}{8}$ τοῦ πήχεως ; (Ἀπ. 1,03 δρχ.)

3) Ἠγόρασέ τις 17 ᾠὰ πρὸς 0,25 δρχ. τὸ ζεῦγος. Πόσον θὰ πληρώσῃ ; (Ἀπ. 2,12 .δρχ.)

4) Πόσας ὀκάδας ἀλεύρου ἀγοράζομεν μὲ 13,25 δρχ, ὅταν ἡ 1 ὀκᾶ πωλῆται 0,53 δρχ. ; (Ἀπ. 25 ὀκ.)

5) Μαθητής τις ἠγόρασεν 7 τετράδια πρὸς 0,25 δρχ. ἕκαστον, 3 μολυβδοκόνδυλα πρὸς 0,15 δρχ ,ἐπλήρωσε δὲ καὶ 0,75 δρχ. δι' ἓν μελανοδοχεῖον. Πόσα ἐπλήρωσεν ἐν ὅλῳ ; (Ἀπ. 2,95 δρχ.)

6) Ἐπὶ ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ 2,53 διὰ νὰ δώσῃ γινόμενον 3,51923 ; (Ἀπ. ἐπὶ 1,391.)

7) Ἀγοράσας τις 5 ζεύγη ὀρνίθων πρὸς 2,75 δρχ. ἕκαστον ζεῦγος, ἐπώλησεν ἔπειτα πρὸς 1,85 δρχ. ἑκάστην ὄρνιθα. Πόσον ἐκέρδισε ; (Ἀπ. 4,75 δρχ.)

8) Οἰνοπώλης τις ἠγόρασεν ἓν βαρέλιον οἴνου πρὸς 0,52 δρχ. τὴν ὀκᾶν καὶ πωλήσας ἔπειτα αὐτὸν πρὸς 0,65 δρχ. ἐκέρδισε 32,11 δρχ. Πόσας ὀκάδας οἴνου περιεῖχε τὸ βαρέλιον ; (Ἀπ. 247 ὀκ.)

9) Ἐὰν ἐξοδεύῃ τις κατὰ μέσον ὅρον 4,60 δρχ. καθ' ἑκάστην πρὸς συντήρησιν τῆς οἰκογενείας του, πληρώνῃ δὲ καὶ 75 δρχ. δι' ἐνοίκιον κατὰ μῆνα, πόσον ἐξοδεύει ἐν ὅλῳ εἰς ἓν ἔτος (κοινόν) ; (Ἀπ. 2579 δρχ.)

10) Στήλη τις ἔχουσα ὕψος 11,453 μέτρ. ἀποτελεῖται ἐκ 13 μαρμαρίνων σπονδύλων ἰσοπαχῶν. Ποῖον εἶνε τὸ πάχος ἑκάστου σπονδύλου; (Ἀπ. 0,881 μ.)

11) Πατήρ τις ἔδωκεν εἰς τὸν υἱόν του δρχ. 21,55 διὰ νὰ ἀγοράσῃ τὰ βιβλία του. Ἐπανελθὼν ὅμως ὁ υἱὸς εἶπεν εἰς τὸν πατέρα ὅτι τὰ δοθέντα εἰς αὐτὸν χρήματα δὲν ἐπαρκοῦσι, διότι τὰ βιβλία τιμῶνται 26,75 δρχ. Τότε ὁ πατὴρ τῷ ἔδωκε τὰ $\frac{2}{9}$ ἀκόμη τῶν χρημάτων, τὰ ὁποῖα ἔτυχε νὰ ἔχῃ μεθ' ἑαυτοῦ, καὶ τοιουτοτρόπως συνεπληρώθη ἡ ἀξία τῶν βιβλίων. Πόσα χρήματα εἶχεν ὁ πατὴρ μεθ' ἑαυτοῦ ; (Ἀπ. 23,40 δρχ.)

12) Ἔμπορός τις ἠγόρασεν 6 δωδεκάδας πίλων. Μεταπωλήσας δ' αὐτὰς ἀντὶ 1260 δρχ. ἐκέρδισε 3,45 δρχ. ἐξ ἑκάστου πίλου. Πόσον εἶχεν ἀγοράσει ἑκάστην δωδεκάδα ; (Ἀπ. 168,60 δρχ.)

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΟΥΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

ΒΙΒΛΙΟΝ Δ'.

ΣΥΜΜΙΓΕΙΣ ΑΡΙΘΜΟΙ

Ὁρισμοί.

137. — *Ποσὸν καλεῖται πᾶν ὅ,τι ἐπιδέχεται αὔξησιν καὶ ἐλάττωσιν.*

Ὑπάρχουσι δύο εἰδῶν ποσά : *διακεκριμένα* καὶ *συνεχῆ*.

Διακεκριμένα λέγονται τὰ ποσὰ τὰ ἀποτελούμενα ἐκ μονάδων αὐθυπάρκτων ἢ αὐτοτελῶν καὶ ἐπομένως ἐνέχοντα τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀριθμοῦ. Π. χ. μία τάξις μαθητῶν, ἓν σμῆνος μελισσῶν κ.τ.λ. Ἐὰν *ἀριθμήσωμεν* τοὺς ἐν τῇ τάξει μαθητὰς ἢ τὰς μελίσσας τὰς ἀποτελούσας τὸ σμῆνος, θέλομεν εὕρει ἀριθμόν τινα καθορίζοντα τὸ πλῆθος τῶν μαθητῶν ἢ τῶν μελισσῶν.

Συνεχῆ δὲ ποσὰ λέγονται ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα δύνανται μὲν νὰ αὐξηθῶσιν ἢ νὰ ἐλαττωθῶσι, δὲν συνίστανται ὅμως ἐκ μονάδων αὐτοτελῶν καὶ ἐπομένως δὲν περιέχουσιν ἐν ἑαυτοῖς τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀριθμοῦ. Π. χ. τὸ *μῆκος*, τὸ *βάρος*, ὁ *χρόνος* εἶνε ποσὰ *συνεχῆ*.

138.—Διὰ νὰ ἐκτιμήσωμεν ἓν τοιοῦτο ποσόν, πρέπει νὰ τὸ *μετρήσωμεν*, νὰ συγκρίνωμεν δηλ. αὐτὸ πρὸς ἄλλο τι ποσὸν ὁμοειδὲς καὶ *ὡρισμένον*, τὸ ὁποῖον καλεῖται *μονάς*· Ἐκ τῆς συγκρίσεως ταύτης, τῆς καλουμένης *μετρήσεως*, εὑρίσκομεν ποσάκις ἡ μονὰς καὶ τὰ μέρη αὐτῆς περιέχονται ἐν τῷ μετρητέῳ ποσῷ, τὸ δὲ ἐξαγόμενον παριστῶμεν δι' ἀριθμοῦ (*).

Διὰ νὰ μετρήσωμεν π. χ. χρονικόν τι διάστημα, λαμβάνομεν ὡς μονάδα τὸ *ἡμερονύκτιον*, καὶ ἂν ἴδωμεν ὅτι ἀποτελεῖται ἐκ τεσσάρων π. χ. ἡμερονυκτίων, παριστῶμεν αὐτὸ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 4 *ἡμ.*

(*) Ὁ ἀριθμὸς οὗτος καλεῖται καὶ τιμὴ τοῦ ποσοῦ (ἐδ. 168, 170 κ.τ.λ.).

Ἐὰν ἄλλο τι χρονικὸν διάστημα εὕρωμεν ὅτι ἀποτελεῖται ἐκ τεσσάρων ἡμερονυκτίων καὶ ἑπτὰ εἰκοστῶν τετάρτων τοῦ ἡμερονυκτίου, τὸ νέον τοῦτο ποσὸν θὰ παραστήσωμεν τότε διὰ τοῦ ἀριθμοῦ $4\frac{7}{24}$ ἡμ.

Ἐὰν ἤδη τὸ $\frac{1}{24}$ τοῦ ἡμερονυκτίου καλέσωμεν *ὥραν*, δυνάμεθα τὸ αὐτὸ ποσὸν νὰ παραστήσωμεν καὶ ὡς ἑξῆς: **4** ἡμ. **7** ὡρ.

Ὁ νέος οὗτος ἀριθμὸς καλεῖται *συμμιγής*.

139.—*Συμμιγὴς λοιπὸν λέγεται ὁ ἀριθμὸς ὁ συγκείμενος ἐκ δύο ἢ περισσοτέρων ἁπλῶν ἀριθμῶν, ἕκαστος ἐκ τῶν ὁποίων γίνεται ἐξ ἰδίας μονάδος. Αἱ μονάδες αὗται φέρουσαι ἰδιαίτερον ἑκάστη ὄνομα, εἶνε πολλαπλάσια ἢ ὑποπολλαπλάσια μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς ἀρχικῆς μονάδος.*

Π. χ. ὁ ἀνωτέρω συμμιγὴς **4** ἡμ. **7** ὡρ. ἀποτελεῖται ἐκ δύο ἁπλῶν ἀριθμῶν, ἐξ ὧν ὁ μὲν πρῶτος γίνεται ἐκ τῆς μονάδος **1** ἡμ., ὁ δὲ δεύτερος ἐκ τῆς μονάδος **1** ὡρ. Ἐκ τῶν μονάδων τούτων ἡ μὲν δευτέρα εἶνε ὑποπολλαπλάσιον τῆς πρώτης, ἂν τὴν πρώτην λάβωμεν ὡς ἀρχικήν, ἡ δὲ πρώτη πολλαπλάσιον τῆς δευτέρας, ἂν ὡς ἀρχικὴν λάβωμεν τὴν δευτέραν.

Οἱ συμμιγεῖς ἀριθμοὶ προκύπτουσιν ἐκ τῆς μετρήσεως τῶν διαφόρων ποσῶν, ἐὰν εἰς τὰ μέρη ἑκάστης ἀρχικῆς μονάδος δώσωμεν ἰδιαίτερα ὀνόματα, ἐὰν δηλ. τὸ $\frac{1}{400}$ τῆς ὀκᾶς καλέσωμεν *ἓν δράμιον*, τὸ $\frac{1}{100}$ τῆς δραχμῆς *ἓν λεπτόν*, τὸ $\frac{1}{60}$ τῆς ὥρας *ἓν πρῶτον λεπτὸν* καὶ οὕτω καθεξῆς.

Μονάδες διαφόρων ποσῶν.

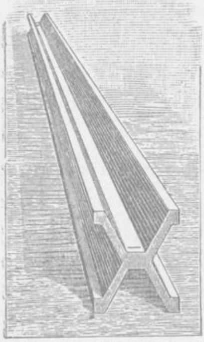
140. — Αἱ κυριώτεραι ἐν χρήσει μονάδες πρὸς μέτρησιν τῶν διαφόρων ποσῶν εἶνε αἱ ἑξῆς:

α'.) Μονάδες μήκους.

1) *Γαλλικὸν μέτρον ἢ βασιλικὸς πῆχυς.*

Ἡ κυριωτέρα μονὰς τοῦ μήκους εἶνε τὸ *Γαλλικὸν μέτρον*. Τοῦτο ἐλήφθη ἴσον πρὸς τὸ $\frac{1}{10\,000\,000}$ τοῦ τετάρτου τοῦ μεσημβρινοῦ τῆς γῆς. Ἐπιστημονικὴ δηλ. ἐπιτροπεία ὁρισθεῖσα κατὰ τὸ ἔτος 1792 ὑπὸ τῆς Γαλλικῆς Κυβερνήσεως κατεμέτρησε τὴν περιφέρειαν τοῦ μεσημβρινοῦ τῆς Γῆς, καὶ διαιρέσασα ταύτην εἰς 40 000 000 ἴσα μέρη ἔλαβε τὸ μῆκος ἑνὸς ἐξ αὐτῶν ὡς μονάδα, τὴν ὁποίαν ὠνόμασε *Γαλλικὸν μέτρον*.

Τὸ ἐν τοῖς ἀρχείοις τῶν Παρισίων κατατεθειμένον διεθνὲς πρότυπον τοῦ μέτρου εἶνε κατεσκευασμένον ἐξ *ἰριδιούχου λευκοχρύσου*, μὴ ἀλλοιουμένου ἐν τῷ ἀέρι· ἔχει δὲ σχῆμα συμμετρικοῦ στερεοῦ, οὗτινος ἡ κυρία τομὴ ὁμοιάζει πρὸς X (σχ. 1). Τὸ μῆκος τοῦ μέτρου ὁρίζεται διὰ δύο μικρῶν παραλλήλων γραμμῶν, κεχαραγμένων ἐπὶ τῆς ὁριζοντίας ῥάβδου, τῆς κατεχούσης τὸ κεντρικὸν μέρος τοῦ στερεοῦ. Ἡ ἀπόστασις τῶν δύο τούτων γραμμῶν ἐν τῇ θερμοκρασίᾳ τοῦ 0^0 εἶνε ἀκριβῶς ἴση πρὸς 1 μέτρον.



Σχ. 1

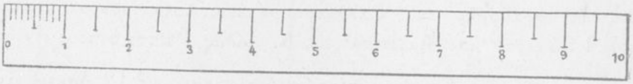
Τὸ Γαλλικὸν μέτρον παρεδέχθη τῷ 1836 καὶ ἡ Ἑλλὰς ὀνομάσασα αὐτὸ *βασιλικὸν πῆχυν*.

Ὁ βασιλικὸς πῆχυς διαιρεῖται εἰς 10 ἴσα μέρη, ἕκαστον ἐκ τῶν ὁποίων καλεῖται *παλάμη*. Εἶνε λοιπὸν ἡ παλάμη τὸ δέκατον τοῦ β. πήχεως.

Καὶ ἡ παλάμη ὑποδιαιρεῖται εἰς 10 ἴσα μέρη, ἕκαστον ἐκ τῶν ὁποίων καλεῖται *δάκτυλος*. Ὥστε ὁ δάκτυλος εἶνε τὸ δέκατον τῆς παλάμης, τοῦ δὲ β. πήχεως τὸ ἑκατοστὸν (διότι 1 β. πῆχυς=100 δακτ.).

Τέλος ὁ δάκτυλος ὑποδιαιρεῖται εἰς 10 ἴσα μέρη, ἕκαστον ἐκ τῶν ὁποίων καλεῖται *γραμμή*. Ἐπειδὴ δὲ ἡ μὲν παλάμη ἔχει 100 γραμμάς, ὁ δὲ β. πῆχυς 1000, διὰ τοῦτο ἡ γραμμὴ εἶνε τοῦ μὲν δακτύλου τὸ $\frac{1}{10}$, τῆς παλάμης τὸ $\frac{1}{100}$ καὶ τοῦ β. πήχεως τὸ $\frac{1}{1000}$.

Τὸ κατωτέρω σχῆμα παριστᾷ μίαν παλάμην διῃρημένην εἰς δακτύλους καὶ γραμμάς.



Σχ. 2

Διὰ μεγαλείτερα μήκη λαμβάνομεν ὡς μονάδα τὸ στάδιον, ἀποτελούμενον ἐκ 1000 μέτρων, διὰ τοῦτο δὲ καλούμενον καὶ *χιλιόμετρον*.

Σημείωσις.—Ἐπειδὴ ἡ μὲν παλάμη εἶνε τὸ $\frac{1}{10}$ τοῦ β. πήχεως, ὁ δάκτυλος τὸ $\frac{1}{100}$ αὐτοῦ καὶ ἡ γραμμὴ τὸ $\frac{1}{1000}$, ἕπεται ὅτι πάντα συμμιγῆ ἀριθμὸν παριστῶντα μῆκος μεμετρημένον διὰ τοῦ β. πήχεως καὶ τῶν ὑποδιαιρέσεων αὐτοῦ, οἷον τὸν συμμιγῆ 72 β. *πηχ.* 3 *παλ.* 8 *δακτ.* 2 *γραμ.*, δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν καὶ ὡς δεκαδικὸν **72,382** *β. πηχ.*

Τὸ δυνατὸν τῆς μετατροπῆς τῶν τοιούτων συμμιγῶν εἰς ἀριθμοὺς δεκαδικοὺς ἀποτελεῖ ἓν ἐκ τῶν σπουδαιοτέρων πλεονεκτημάτων τῆς μονάδος ταύτης· διότι μὲ τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς αἱ πράξεις γίνονται πολὺ εὐκολώτεραι.

2) *Τεκτονικὸς πῆχυς.*

Ὁ τεκτονικὸς πῆχυς εἶνε τὰ $\frac{3}{4}$ ἤτοι τὰ 0,75 τοῦ βασιλικοῦ πήχεως· ἀποτελεῖται δηλ. ἐξ 75 δακτύλων. Εἶνε δὲ ἐν χρήσει εἰς τὰς οἰκοδομὰς καὶ εἰς τὰ οἰκόπεδα.

3) *Πήχεις τοῦ ἐμπορίου.*

Χρῆσις τούτων γίνεται εἰς τὸ ἐμπόριον πρὸς μέτρησιν τῶν ὑφασμάτων· εἶνε δὲ δύο : *Ὁ μικρὸς πῆχυς τῆς Κωνσταντινουπόλεως*, ὅστις ὀνομάζεται *ἐνδεζὲ* καὶ εἶνε τὰ 0,648 τοῦ β. πήχεως (τοῦτ' ἔστιν ἀποτελεῖται ἐξ 648 γραμμῶν), καὶ *ὁ μέγας πῆχυς τῆς Κωνσταντινουπόλεως*, ὅστις καλεῖται *ἀρσὶν* (παρ' ἡμῖν *μπράτσον*) καὶ εἶνε τὰ 0,669 τοῦ β. πήχεως. Ἑκάτερος τῶν πήχεων τούτων διαιρεῖται εἰς 8 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται *ῥούπια*.

4) *Ὀργυιά.*

Ἡ *ὀργυιὰ* ἦτο ἐν χρήσει ἐν Γαλλίᾳ ὡς ἀρχικὴ μονὰς τοῦ μήκους πρὸ τῆς παραδοχῆς τοῦ Γαλλικοῦ μέτρου. Αὕτη ἰσοῦται περίπου πρὸς 1,95 μετρ. και διαιρεῖται εἰς 6 *πόδας*. Ὥστε ὁ πούς εἶνε τὸ $\frac{1}{6}$ τῆς ὀργυιᾶς. Ἕκαστος πούς ὑποδιαιρεῖται εἰς 12 *δακτύλους*· ἑπομένως ὁ δάκτυλος εἶνε τὸ $\frac{1}{12}$ τοῦ ποδός, τῆς δὲ ὀργυιᾶς τὸ $\frac{1}{72}$ (διότι 1 ὀργ.=72 δακτ.). Τέλος ὁ δάκτυλος ὑποδιαιρεῖται καὶ οὗτος εἰς 12 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται *γραμμαί*. Ἡ γραμμὴ εἶνε τὸ $\frac{1}{12}$ τοῦ δακτύλου, τὸ $\frac{1}{144}$ τοῦ ποδὸς (διότι 1 πούς=144 γραμ.) καὶ τὸ $\frac{1}{864}$ τῆς ὀργυιᾶς (διότι 1 ὀργ.=864 γραμ.).

5) *Ὑάρδα.*

Τὴν *ὑάρδαν* μεταχειρίζονται ὡς μονάδα μήκους οἱ Ἄγγλοι. Αὕτη ἰσοῦται πρὸς 0,91439 μέτρ. καὶ διαιρεῖται εἰς 3 *πόδας*, ἕκαστος δὲ πούς ὑποδιαιρεῖται εἰς 12 *δακτύλους*.

6) *Μίλια.*

Διὰ πολὺ μεγάλας ἀποστάσεις λαμβάνομεν ὡς μονάδα μήκους τὸ *μίλιον*.

Τὸ *γεωγραφικὸν μίλιον* ἀποτελεῖται ἐξ 7420 περίπου μέτρων· τὸ δὲ *ναυτικὸν μίλιον* ἐκ 1855 περίπου.

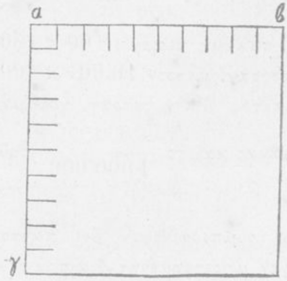
6'.) Μονάδες ἐπιφανείας.

Ὡς μονὰς τῆς ἐπιφανείας λαμβάνεται τὸ *τετραγωνικὸν μέτρον*.

Τετραγωνικὸν μέτρον λέγεται τὸ τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἑκάστη πλευρὰ ἰσοῦται πρὸς ἓν μέτρον.

Ἐὰν ἑκάστη πλευρὰ τοῦ τετραγώνου εἶνε μία παλάμη, τότε τὸ τετράγωνον λέγεται *τετραγωνικὴ παλάμη*. Ἐὰν ἑκάστη πλευρά του εἶνε εἷς δάκτυλος, τὸ τετράγωνον λέγεται *τετραγωνικὸς δάκτυλος*· καὶ ἐὰν εἶνε μία γραμμή, τὸ τετράγωνον ὀνομάζεται *τετραγωνικὴ γραμμή*.

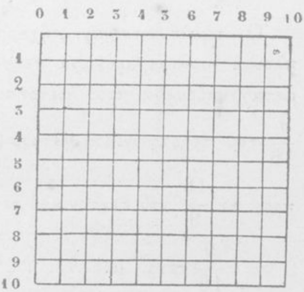
Ἓν τετραγωνικὸν μέτρον περιέχει 100 τετραγωνικὰς παλάμας.



Σχ. 3

Τοῦτο εὐκόλως δεικνύεται ὡς ἑξῆς : Ἐὰν τὰς δύο προσκειμένας πλευρὰς *αβ* καὶ *αγ* ἑνὸς τετραγωνικοῦ μέτρου (π. χ. τοῦ σχήματος **3**) διαιρέσωμεν εἰς 10 ἴσα μέρη (δηλ. εἰς 10 παλάμας) ἑκάστην, καὶ ἐκ τῶν σημείων τῶν διαιρέσεων φέρωμεν παραλλήλους πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ τετραγώνου, τὸ τετραγωνικὸν μέτρον θέλει εὑρεθῆ διῃρημένον εἰς 100 τετραγωνικὰς παλάμας (σχ. **4**). Εἶνε λοιπὸν ἡ τετραγωνικὴ παλάμη τὸ $\frac{1}{100}$ τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου (*).

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον δεικνύομεν ὅτι καὶ ἑκάστη τετραγωνικὴ παλάμη ἀποτελεῖται ἐξ 100 τετραγωνικῶν δακτύλων. Ἐπομένως συμπεραίνομεν ὅτι ὁ τετραγωνικὸς δάκτυλος εἶνε τὸ $\frac{1}{100}$ τῆς τετραγωνικῆς παλάμης. Ἐπειδὴ δὲ τὸ 1 τετραγ. μέτρον περιέχει 100×100 ἤτοι 10 000 τετραγ. δακτύλους, ἕπεται ὅτι ὁ τετραγωνικὸς δάκτυλος εἶνε τὸ $\frac{1}{10\,000}$ τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου.



Σχ. 4

Ἐπίσης ἕκαστος τετραγωνικὸς δάκτυλος περιέχει 100 τετραγωνι-

(*) Ἐὰν οἱ μαθηταὶ ἔχωσιν ἀρκούσας γεωμετρικὰς γνώσεις, δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν αὐτοῖς τοῦτο καὶ ὡς ἑξῆς :

Εἶνε γνωστὸν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τετραγώνου εὑρίσκεται, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ὁ ἀριθμὸς ὁ παριστῶν τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του. Τοῦ ἐν σχ. 3 τετραγώνου (τὸ ὁποῖον ὑπετέθη 1 τετραγ. μέτρον) ἡ πλευρὰ εἶνε 10 παλ. Ἄρα τὸ ἐμβαδὸν θὰ εἶνε $10 \times 10 = 100$ τετραγ. παλάμαι.

κὰς γραμμάς· ἐπομένως ἡ τετραγ. γραμμὴ εἶνε τὸ $\frac{1}{100}$ τοῦ τετραγ. δακτύλου. Ἐπειδὴ δὲ μία μὲν τετραγ. παλάμη περιέχει 100×100 ἤτοι 10 000 τετραγ. γραμμάς, ἓν δὲ τετραγ. μέτρον $10\,000 \times 100$ ἤτοι 1 000 000 τετραγ. γραμμάς, ἕπεται ὅτι ἡ τετραγ. γραμμὴ εἶνε τὸ $\frac{1}{10\,000}$ τῆς τετραγωνικῆς παλάμης καὶ τὸ $\frac{1}{1\,000\,000}$ τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου.

Σημείωσις. — Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συμπεραίνομεν ὅτι πάντα ἀριθμὸν συμμιγῆ παριστῶντα ἐπιφάνειαν μεμετρημένην διὰ τοῦ τετραγ. μέτρου καὶ τῶν ὑποδιαιρέσεων αὐτοῦ δυνάμεθα νὰ γράψωμεν καὶ ὡς δεκαδικόν. Π. χ. τὸν συμμιγῆ 49 *τετρ. μ.* 8 *τετρ. παλ.* 13 *τετρ. δακτ.* 27 *τετρ. γραμ.* γράφομεν καὶ **49,08.13.27** *τετραγ. μέτρ.* (Ὅρα καὶ *ἐδ.* **127**, *σημ. α'*.).

2) *Τεκτονικὸς τετραγ. πῆχυς.*

Ὁ *τεκτον. τετραγ. πῆχυς* εἶνε τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἑκάστη πλευρὰ ἰσοῦται πρὸς ἕνα τεκτονικὸν πῆχυν. Τὴν μονάδα ταύτην μεταχειριζόμεθα πρὸς μέτρησιν οἰκοπέδων, ἰσοῦται δὲ πρὸς τὰ $\frac{9}{16}$ τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου (*), ἐν ᾧ τὸ τετραγ. μέτρον ἰσοῦται πρὸς τὰ $\frac{16}{9}$ τοῦ τεκτονικοῦ τετραγ. πήχεως, διότι

$\frac{9}{16}$ τετρ. μ. . . . . = 1 τετρ. τεκτ. πηχ.

$\frac{1}{16}$ » » . . . . = $\frac{1}{9}$ » » »

καὶ τὰ $\frac{16}{16}$ » » [ἤτοι τὸ 1 τετρ. μ. = $\frac{16}{9}$ » » »

(*) Διότι ἀφ' οὗ ἡ μία πλευρά του εἶνε $\frac{3}{4}$ τοῦ μέτρου, τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ θὰ εἶνε $\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$ τετραγ. μετρ.

3) *Βασιλικὸν στρέμμα.*

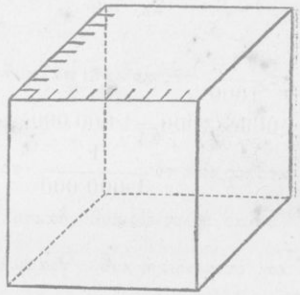
Διὰ τὰς μεγάλας ἐκτάσεις μεταχειριζόμεθα ἐν Ἑλλάδι ὡς μονάδα ἐπιφανείας τὸ *βασιλικὸν στρέμμα*, τὸ ὁποῖον ἰσοῦται πρὸς 1000 τετραγ. μέτρα. Ἐὰν τὸ βασιλικὸν στρέμμα ἔχῃ σχῆμα τετραγώνου, ἡ πλευρά του θὰ εἶνε 31,62 μετρ. περίπου.

Τὸ *παλαιὸν στρέμμα* εἶνε τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἑκάστη πλευρὰ εἶνε 55 μικροὶ πήχεις Κωνσταντινουπόλεως. Τὸ παλαιὸν στρέμμα ἰσοῦται πρὸς 1,27 βασ. στρεμ., τὸ δὲ βασ. στρέμμα πρὸς 0,787 παλ. στρεμ.

γ'.) Μονάδες ὄγκου ἢ χωρητικότητος.

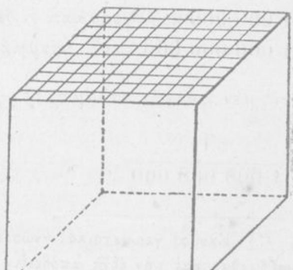
Ὡς μονὰς τοῦ ὄγκου λαμβάνεται τὸ *κυβικὸν μέτρον*.

Κυβικὸν μέτρον λέγεται ὁ κύβος τοῦ ὁποίου ἑκάστη ἕδρα ἰσοῦται πρὸς ἓν τετραγωνικὸν μέτρον.



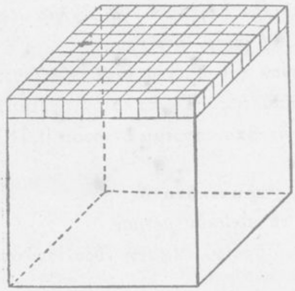
Σχ. 5

Ἐὰν ἑκάστη ἕδρα τοῦ κύβου εἶνε μία τετραγωνικὴ παλάμη, τότε ὁ κύβος λέγεται *κυβικὴ παλάμη*. Ἐὰν ἑκάστη ἕδρα του εἶνε εἷς τετραγωνικὸς δάκτυλος, ὁ κύβος λέγεται *κυβικὸς δάκτυλος*· καὶ ἐὰν εἶνε μία τετραγωνικὴ γραμμή, ὁ κύβος ὀνομάζεται *κυβικὴ γραμμή*.



Σχ. 6

Τὸ κυβικὸν μέτρον περιέχει 1000 κυβικὰς παλάμας. Τοῦτο δεικνύεται ὡς ἑξῆς. Ἂς διαιρέσωμεν τὰς δύο προσκειμένας πλευρὰς τῆς ἄνω βάσεως ἑνὸς κυβικοῦ μέτρου (οἷον τοῦ ἐν *Σχ.* **5** κύβου) εἰς 10 ἴσα μέρη, δηλ. εἰς 10 παλάμας ἑκάστην, καὶ κατόπιν ἐκ τῶν σημείων τῶν διαιρέσεων ἂς φέρωμεν παραλλλήλους πρὸς τὰς πλευρὰς τῆς βάσεως ταύτης. Τότε ἡ ἐπιφάνεια τῆς ἄνω βάσεως τοῦ κυβικοῦ μέτρου θέλει εὑρεθῆ διῃρημένη εἰς 100 τετραγωνικὰς παλάμας (*Σχ.* **6**). Ἂν ἤδη τὰς διαιρέσεις ταύτας προεκτείνωμεν δι' ἐπιπέδων παραλλήλων πρὸς τὰς ἕδρας τοῦ κύβου μέχρι βάθους μιᾶς παλάμης, θέλουσι σχηματισθῆ 100 κυβικαὶ παλάμαι (Σχ. 7). Ἀφ' οὗ λοιπὸν μία παλάμη βάθους τοῦ κυβ. μέτρου περιέχει 100 κυβ. παλάμας, αἱ 10 παλάμαι (δηλ. 1 μέτρον) βάθους αὐτοῦ θὰ περιέχωσιν 100×10 ἤτοι 1000 κυβικὰς παλάμας. Ἑπομένως ἡ κυβικὴ παλάμη εἶνε τὸ $\frac{1}{1000}$ τοῦ κυβ. μέτρου.



Σχ. 7

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύομεν ὅτι καὶ μία κυβ. παλάμη περιέχει 1000 κυβ. δακτύλους (*). Ἑπομένως ὁ κυβ. δάκτυλος εἶνε τὸ $\frac{1}{1000}$ τῆς κυβικῆς παλάμης. Ἐπειδὴ δὲ ἓν κυβικὸν μέτρον ἔχει $1000 \times 1000 = 1\,000\,000$ κυβ. δακτύλους, ἕπεται ὅτι ὁ κυβ. δάκτυλος εἶνε τὸ $\frac{1}{1\,000\,000}$ τοῦ κυβ. μέτρου.

Καὶ τέλος εἷς κυβ. δάκτυλος σύγκειται ἐκ 1000 κυβ. γραμμῶν, καὶ ἑπομένως ἡ κυβ. γραμμὴ εἶνε τὸ $\frac{1}{1000}$ τοῦ κυβ. δακτύλου. Ἐπειδὴ δὲ μία μὲν κυβικὴ παλάμη περιέχει 1000×1000 ἤτοι 1 000 000 κυβ. γραμμάς, ἓν δὲ κυβ. μέτρον $1\,000\,000 \times 1000$ ἤτοι 1 000 000 000 κυβ. γραμμάς, διὰ τοῦτο ἡ κυβικὴ γραμμὴ εἶνε τῆς μὲν κυβικῆς παλάμης τὸ $\frac{1}{1\,000\,000}$, τοῦ δὲ κυβικοῦ μέτρου τὸ $\frac{1}{1\,000\,000\,000}$.

(*) Ἐὰν αἱ γεωμετρικαὶ γνώσεις τῶν μαθητῶν τὸ ἐπιτρέπωσι, μεταχειριζόμεθα καὶ τὴν ἑξῆς ἀπόδειξιν τούτου: Ἐκ τῆς Γεωμετρίας γνωρίζομεν ὅτι ὁ ὄγκος παντὸς κύβου εὑρίσκεται, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς ὁ παριστῶν τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ πολλαπλασιασθῇ τρὶς ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του. Τοῦ κυβ. μέτρου ἡ πλευρὰ ἔχει μῆκος 1 μ., ἤτοι 10 παλ. Ἄρα ὁ ὄγκος αὐτοῦ εἶνε $10 \cdot 10 \times 10 = 1000$ κυβ. παλ.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συμπεραίνομεν ὅτι πάντα συμμιγῆ ἀριθμὸν παριστῶντα ὄγκον μεμετρημένον διὰ τοῦ κυβ. μέτρου καὶ τῶν ὑποδιαιρέσεων αὐτοῦ δυνάμεθα νὰ γράψωμεν καὶ ὡς δεκαδικόν. Π. χ. τὸν συμμιγῆ 15 *κυβ. μετρ.* 6 *κυβ. παλ.* 139 *κυβ. δ.* 48 *κυβ. γραμ.* γράφομεν καὶ οὕτω : **15,006.139.048** *κυβ. μετρ.*

Λίτρα λέγεται ἡ χωρητικότης μιᾶς κυβικῆς παλάμης. Ἑπομένως ἓν κυβικὸν μέτρον περιέχει 1000 λίτρας. Ταύτην μεταχειριζόμεθα πρὸς μέτρησιν τῶν ὑγρῶν.

Κοιλὸν λέγεται ἡ χωρητικότης 100 κυβικῶν παλαμῶν. Ἑπομένως τὸ κοιλὸν εἶνε τὸ $\frac{1}{10}$ τοῦ κυβ. μέτρου. Χρησιμεύει δὲ πρὸς μέτρησιν τῶν δημητριακῶν καρπῶν.

δ'.) Μονάδες βάρους.

Αἱ κυριώτεραι μονάδες βάρους εἶνε ἐκεῖναι, τὰς ὁποίας ἔχουσι παραδεχθῆ ἐν Γαλλίᾳ σχετίσαντες αὐτὰς πρὸς τὸ γαλλικὸν μέτρον. Αἱ μονάδες αὗται εἶνε αἱ ἑξῆς :

Τὸ *γραμμάριον*. — Οὕτω καλεῖται τὸ βάρος τοῦ ὕδατος τοῦ πληροῦντος ἕνα κυβ. δάκτυλον.

Σημ. — Τὸ ὕδωρ τοῦτο πρέπει νὰ εἶνε *ἀπεσταγμένον* μὲν διὰ νὰ μὴ περιέχῃ ξένας οὐσίας διαλελυμένας, *θερμοκρασίας δὲ 4 βαθμῶν* Κελσίου, διότι εἰς τὴν θερμοκρασίαν ταύτην τὸ ὕδωρ ἔχει τὴν μεγίστην αὐτοῦ πυκνότητα.

Χιλιόγραμμον λέγεται τὸ βάρος χιλίων γραμμαρίων, τὸ βάρος τοῦτ' ἔστι τοῦ ὕδατος τοῦ πληροῦντος 1000 κυβ. δακτύλους ἤτοι 1 κυβ. παλάμην. Εἶνε λοιπὸν χιλιόγραμμον τὸ βάρος μιᾶς λίτρας ὕδατος.

Τόννος εἶνε τὸ βάρος 1000 χιλιογράμμων, δηλ. τὸ βάρος τοῦ ὕδατος τοῦ χωροῦντος εἰς 1000 λίτρας ἤτοι εἰς 1 κυβ. μέτρον.

Παρ' ἡμῖν εἶνε ἀκόμη ἐν χρήσει αἱ ἑξῆς μονάδες βάρους :

Ἡ *ὀκᾶ*, λαμβανομένη ὡς ἀρχικὴ μονάς.

Ὁ *στατήρ*, ἀποτελούμενος ἐκ 44 ὀκάδων.

Τὸ *δράμιον*, ἴσον πρὸς $\frac{1}{400}$ τῆς ὀκᾶς.

Ἡ σχέσις τῶν μονάδων τούτων πρὸς τὰς προηγουμένας εἶνε ἡ ἑξῆς:

Ἡ *ὀκᾶ* ἰσοδυναμεῖ πρὸς 1280 γραμμάρια

Τὸ *δράμιον* πρὸς $3 \frac{1}{5}$ γραμ.

Τὸ δὲ *χιλιόγραμμον* πρὸς $312 \frac{1}{2}$ δραμ.

Διὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ βάρους τῆς σταφίδος γίνεται χρῆσις τῆς *ἑνετικῆς λίτρας*, ἥτις ἰσοδυναμεῖ πρὸς 150 δράμια.

ε'.) Μονάδες νομισμάτων.

1ον) *Τῆς λατινικῆς ἑνώσεως.*

Ἡ Γαλλία, ἡ Ἰταλία, τὸ Βέλγιον καὶ ἡ Ἑλβετία ἀπετέλεσαν τὴν λεγομένην *λατινικὴν νομισματικὴν ἕνωσιν*. Συνεφώνησαν δηλ. νὰ κόπτωσι νομίσματα ὅμοια καὶ τῆς αὐτῆς ἀξίας πρὸς διευκόλυνσιν τοῦ ἐμπορίου. Εἰς τὴν ἕνωσιν ταύτην προσεχώρησε κατὰ τὸ 1865 καὶ ἡ Ἑλλάς, νομοθετήσασα τὴν 10 Ἀπριλίου 1867 τὸ νέον νομισματικὸν σύστημα.

Κατὰ τὸ σύστημα τοῦτο ὡς ἀρχικὴ μονὰς ἐλήφθη ἡ *δραχμή*, ἰσοδυναμοῦσα πρὸς ἓν *φράγκον*. Τὸ νόμισμα τοῦτο εἶνε ἀργυροῦν καὶ ἔχει βάρος 5 γραμμαρίων. Διαιρεῖται δὲ εἰς 100 ἴσα μέρη, ἕκαστον ἐκ τῶν ὁποίων ἐν Ἑλλάδι καλεῖται *λεπτόν*.

Ἕτερα ἀργυρᾶ νομίσματα εἶνε τὰ ἑξῆς: Τὸ *ἥμισυ τῆς δραχμῆς*, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀξίαν 50 λεπτῶν καὶ βάρος $2 \frac{1}{2}$ γραμ.

Τὸ *εἰκοσάλεπτον* τὸ ὁποῖον ἔχει ἀξίαν 20 λεπτῶν καὶ βάρος ἑνὸς γραμμαρίου.

Τὸ *δίδραχμον* ἔχον βάρος 10 γραμμαρίων.

Σημείωσις.—Πάντα τὰ ἀνωτέρω ἀργυρᾶ νομίσματα ἔχουσι *βαθμὸν καθαρότητος* 0,835. Τοῦτο σημαίνει ὅτι εἰς 1000 μέρη βάρους αὐτῶν μόνον τὰ 835 εἶνε καθαρὸς ἄργυρος, τὰ δὲ λοιπὰ 165 ἀποτελοῦνται ἐκ χαλκοῦ καὶ ἄλλων κοινῶν μετάλλων (*ὅρα καὶ ἐδ.* **193**).

Ἀργυροῦν ἐπίσης νόμισμα εἶνε καὶ τὸ *πεντάδραχμον*. Τούτου τὸ βάρος εἶνε 25 γραμ. καὶ ὁ βαθμὸς καθαρότητος 0,900.

Χρυσᾶ δὲ εἶνε:

Τὸ *πεντάδραχμον*, τὸ *δεκάδραχμον*, τὸ *εἰκοσάδραχμον*, τὸ *πεντηκοντάδραχμον* καὶ τὸ *ἑκατοντάδραχμον*. Τούτων πάντων ὁ βαθμὸς καθαρότητος εἶνε 0,900· βάρος δὲ ἔχουσι τὸ μὲν πεντάδραχμον 1,6129 γραμ., τὰ δὲ λοιπὰ ἀναλόγως.

Τέλος ἐκ χαλκοῦ εἶνε τὰ ἑξῆς:

Τὸ *μονόλεπτον* ἔχον βάρος 1 γραμ.

Τὸ *δίλεπτον* » » 2 »

ὁ *ὀβολὸς* ἢ *πεντάλεπτον* βάρους 5 »

καὶ τὸ *διώβολον* ἢ *δεκάλεπτον* » 10 »

Σημείωσις.—Παρ' ἡμῖν ἐσχάτως ἐκόπησαν καὶ *νικέλινα* νομίσματα τῶν 5, τῶν 10 καὶ τῶν 20 λεπτῶν.

2ον) *Ἀγγλικαὶ μονάδες.*

Ὡς ἀρχικὴ μονὰς τῶν νομισμάτων ἐν Ἀγγλίᾳ λαμβάνεται ἡ *λίρα*. Αὕτη ἰσοδυναμεῖ πρὸς 25 δραχμὰς καὶ διαιρεῖται εἰς 20 *σελίνια*. Ἑπομένως ἕκαστον σελίνιον ἔχει 1,25 δρχ.

Τὸ σελίνιον ὑποδιαιρεῖται εἰς 12 *πέννας*, ἑκάστη δὲ πέννα εἰς 4 *φαρδίνια*.

Ἐκ τῶν νομισμάτων τούτων χρυσᾶ εἶνε ἡ λίρα καὶ τὸ ἥμισυ τῆς λίρας· ἀργυρᾶ τὸ σελίνιον καὶ τὰ νομίσματα τῶν $2\frac{1}{2}$ καὶ 5 σελινίων· χάλκινα δὲ ἡ πέννα καὶ τὸ φαρδίνιον.

3ον) *Μονάδες Γερμανικαί.*

Ἀρχικὴ τῶν νομισμάτων μονὰς ἐν Γερμανίᾳ εἶνε τὸ *μάρκον*, τὸ ὁποῖον ἀξίζει 1,25 δρχ. Τοῦτο διαιρεῖται εἰς 100 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται *πφένιγ*.

Ἀργυρᾶ νομίσματα εἶνε τὸ μάρκον, τὸ δίμαρκον, τὸ πεντάμαρκον καὶ τὰ νομίσματα τοῦ $\frac{1}{2}$ καὶ τοῦ $\frac{1}{5}$ τοῦ μάρκου· χρυσᾶ τὰ νομίσματα τῶν 5, τῶν 10 καὶ τῶν 20 μάρκων· καὶ χάλκινα τὰ πφένιγ.

4ον) *Μονάδες Αὐστριακαί.*

Μονὰς ἀρχικὴ τῶν νομισμάτων ἐν Αὐστρίᾳ εἶνε τὸ *φιορίνιον*, τὸ ὁποῖον ἰσοδυναμεῖ πρὸς 2 μάρκα, τοῦτ' ἔστι πρὸς 2,50 δρχ. Διαιρεῖται δὲ εἰς 100 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται *κρόϊτσερ*.

Ἀργυρᾶ νομίσματα εἶνε τὸ φιορίνιον, τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ φιορινίου καὶ τὸ νόμισμα τῶν 2 φιορινίων· χρυσᾶ τὰ νομίσματα τῶν 4 καὶ τῶν 8 φιορινίων, τὸ *δουκᾶτον* ἀξίας 11,85 δρχ. καὶ τὸ νόμισμα τῶν 4 δουκάτων· χάλκινα δὲ τὰ κρόϊτσερ.

5ον) *Μονάδες Τουρκικαί.*

Ἐν Τουρκίᾳ μονὰς τῶν νομισμάτων εἶνε τὸ *γρόσιον* τὸ ὁποῖον ἰσοδυναμεῖ πρὸς 23 λεπτά. Τοῦτο διαιρεῖται εἰς 40 *παράδες*, καὶ ἕκαστος παρᾶς ὑποδιαιρεῖται εἰς 3 *ἄσπρα*. Πάντα ταῦτα εἶνε χάλκινα.

Ἀργυρᾶ νομίσματα ἔχει ἡ Τουρκία τὸ *μετζίτιον*, τὸ ὁποῖον ἰσοδυναμεῖ πρὸς 20 γρόσια, τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ μετζιτίου καὶ τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτοῦ. Χρυσοῦν δὲ νόμισμα ἔχει τὴν *λίραν*, ἥτις ἰσοδυναμεῖ πρὸς 100 γρόσια.

6ον) *Ῥωσικαὶ μονάδες.*

Ἐν Ῥωσίᾳ ὡς μονὰς τῶν νομισμάτων λαμβάνεται τὸ *ῥούβλιον*. Τοῦτο ἔχει ἀξίαν 4 δραχμῶν καὶ διαιρεῖται εἰς 100 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται *καπίκια*. Τὰ νομίσματα ταῦτα εἶνε ἀργυρᾶ. Χρυσᾶ δὲ νομίσματα ἔχει ἡ Ῥωσία τὸ *πὼλ-ἐμπεριάλ*, τὸ ὁποῖον ἀξίζει 5 ῥούβλια καὶ τὸ *Ῥωσικὸν δουκᾶτον*, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀξίαν 3 ῥουβλίων.

7ον) *Μονάδες τῶν Ἡνωμένων Πολιτειῶν.*

Ἀρχικὴ μονὰς νομισμάτων εἶνε τὸ *δολλάριον*, τὸ ὁποῖον εἶνε ἀργυροῦν καὶ ἔχει ἀξίαν 5,18 δρχ.

Ϛ'.) Μονάδες χρόνου.

Ὡς ἀρχικὴ μονὰς τοῦ χρόνου λαμβάνεται ἡ *ἡμέρα* ἢ τὸ *ἡμερονύκτιον*. Ἡ ἡμέρα διαιρεῖται εἰς 24 *ὥρας* (*), ἑκάστη ὥρα ὑποδιαιρεῖται εἰς 60 *πρῶτα λεπτὰ* καὶ ἕκαστον πρῶτον λεπτὸν εἰς 60 *δεύτερα*. Ἑπομένως ἡ ὥρα εἶνε τὸ $\frac{1}{24}$ τῆς ἡμέρας· τὸ ἓν πρῶτον λεπτὸν εἶνε τὸ $\frac{1}{60}$ τῆς ὥρας· καὶ τὸ ἓν δεύτερον εἶνε τοῦ μὲν πρώτου λεπτοῦ τὸ $\frac{1}{60}$ τῆς δὲ ὥρας τὸ $\frac{1}{3600}$.

(*) Ἡ ἐργάσιμος ἡμέρα λογίζεται συνήθως ἴση πρὸς 12 ὥρας. Δύναται ὅμως τὸ πρόβλημα νὰ ὁρίζῃ καὶ ἄλλως τὰς ὥρας πρὸς τὰς ὁποίας ἰσοῦται αὐτή.

Τὰ πρῶτα λεπτὰ σημειοῦνται διὰ μιᾶς ὀξείας, τὰ δὲ δεύτερα διὰ δύο.

Π. χ. 23 *πρῶτα λεπτὰ καὶ* 41 *δεύτερα γράφονται* 23′ 41″.

7 ἡμέραι ἀποτελοῦσι μίαν *ἑβδομάδα*· 30 δὲ ἡμέραι ἀποτελοῦσι μίαν ἀνωτέραν μονάδα χρόνου, ἥτις λέγεται *μήν*. 12 μῆνες ἀποτελοῦσιν ἓν ἔτος. Εἶνε δὲ οἱ μῆνες κατὰ σειρὰν οἱ ἑξῆς: Ἰανουάριος, Φεβρουάριος, Μάρτιος, Ἀπρίλιος, Μάϊος, Ἰούνιος, Ἰούλιος, Αὔγουστος, Σεπτέμβριος, Ὀκτώβριος, Νοέμβριος καὶ Δεκέμβριος.

Ἐκ τούτων οἱ: Ἀπρίλιος, Ἰούνιος, Σεπτέμβριος καὶ Νοέμβριος ἔχουσιν ἀπὸ 30 ἡμέρας, ὁ δὲ Φεβρουάριος ἔχει 28 μὲν ὅταν τὸ ἔτος εἶνε *κοινὸν* (365 ἡμ.), 29 δὲ ὅταν εἶνε *δίσεκτον* (366 ἡμ.).

Οἱ λοιποὶ 7 μῆνες ἔχουσιν ἀπὸ 31 ἡμέρας ἕκαστος.

Τὰ *δίσεκτα* ἔτη ἀναγνωρίζονται ἐκ τοῦ ὅτι ὁ ἀριθμὸς δι' οὗ γράφεται ἕκαστον διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 4. Π. χ. τὸ ἔτος 1862 λέγομεν ὅτι ἦτο *κοινόν*, διότι ὁ ἀριθμὸς οὗτος δὲν διαιρεῖται διὰ τοῦ 4. Τὸ ἔτος ὅμως 1864 ἦτο *δίσεκτον*, διότι ὁ ἀριθμὸς 1864 διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 4.

Τροπὴ συμμιγοῦς εἰς ἁπλοῦν ἀριθμὸν φέροντα τὸ ὄνομα μιᾶς ἐκ τῶν μονάδων του.

141.—Α′.) *Ἐὰν ὁ συμμιγὴς τραπῇ εἰς μονάδας τῆς κατωτάτης αὐτοῦ ὑποδιαιρέσεως, γίνεται ἀκέραιος ἀριθμός.*

Ἂς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι μᾶς ἐδόθη νὰ τρέψωμεν τὸν συμμιγῆ 11 *ὀργ.* 4 *ποδ.* 7 *δακτ.* εἰς μονάδας τῆς τελευταίας του ὑποδιαιρέσεως, δηλ. εἰς δακτύλους. Πρὸς τοῦτο σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς:

Ἡ μία ὀργυιὰ ἔχει 6 πόδας· ἄρα αἱ 11 ὀργ. θὰ ἔχωσιν 6×11 ἤτοι 66 πόδας. Εἰς τούτους προσθέτομεν καὶ τοὺς 4 πόδας, τοὺς ὁποίους ἔχει ὁ συμμιγὴς καὶ γίνονται ἐν ὅλῳ 70 πόδες. Τούτους τρέπομεν κατόπιν εἰς δακτύλους σκεπτόμενοι οὕτω: Ἀφ' οὗ ὁ 1 ποὺς ἔχει 12 δακτύλους, οἱ 70 πόδες θὰ ἔχωσι 12×70 ἤτοι 840 δακτύλους. Προσθέτομεν εἰς τούτους καὶ τοὺς 7 δακτύλους τοῦ συμμιγοῦς καὶ εὑρίσκομεν ἐν ὅλῳ **847** *δακτύλους*. Ὥστε ὁ δοθεὶς συμμιγὴς τραπεὶς εἰς δακτύλους ἔγεινεν ἀριθμὸς ἀκέραιος.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς :

$$
\begin{array}{l}
11 \text{ ὀργ.} \quad 4 \text{ ποδ.} \quad 7 \text{ δακτ.} \\
\underline{\quad 6 \quad} \\
66 \text{ ποδ.} \\
\underline{\quad 4 \quad} \\
70 \text{ ποδ.} \\
\underline{\quad 12 \quad} \\
840 \text{ δακτ.} \\
\underline{\quad 7 \quad} \\
847 \text{ δακτ.}
\end{array}
$$

142. — Β'.) *Ἐὰν ὁ συμμιγὴς τραπῇ εἰς μονάδας πάσης ἄλλης ὑποδιαιρέσεως αὐτοῦ ἐκτὸς τῆς τελευταίας, γίνεται ἀριθμὸς κλασματικὸς ἢ μεικτός.*

α'.) Τροπὴ συμμιγοῦς εἰς ἰσοδύναμον κλασματικόν.

1) Ἃς τρέψωμεν π. χ. τὸν συμμιγῆ 3 ἡμ. 14 ὡρ. 20' 35'' εἰς κλάσμα τῆς ἡμέρας.

Πρὸς τοῦτο τρέπομεν πρῶτον κατὰ τὰ ἀνωτέρω τὸν δοθέντα συμμιγῆ εἰς ἀριθμὸν τῆς τελευταίας του ὑποδιαιρέσεως, δηλ. εἰς δεύτερα λεπτά, καὶ εὑρίσκομεν τὸν ἀκέραιον 310 835''. Κατόπιν σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς : Ἡ μία ἡμέρα ἔχει 86 400''· ἐπομένως τὸ 1'' εἶνε τὸ $\frac{1}{86\ 400}$ τῆς ἡμέρας, καὶ τὰ 310 835'' θὰ εἶνε τὰ $\frac{310\ 835}{86\ 400}$ τῆς ἡμέρας. Εὑρέθη λοιπὸν ὅτι 3 ἡμ. 14 ὡρ. 20' 35'' $= \frac{\mathbf{310\ 835}}{\mathbf{86\ 400}}$ ἡμ.

Τὸν αὐτὸν συμμιγῆ ἃς τρέψωμεν ἤδη καὶ εἰς ἰσοδύναμον κλάσμα τῆς ὥρας.— Κατὰ πρῶτον τρέπομεν αὐτόν, ὅπως καὶ ἀνωτέρω, εἰς 310 835''. Ἔπειτα δὲ σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς: Τὸ 1'' εἶνε τὸ $\frac{1}{3\ 600}$ τῆς ὥρας· ἄρα τὰ 310 835'' θὰ εἶνε τὰ $\frac{310\ 835}{3\ 600}$ τῆς ὥρας. Ὥστε εὑρέθη ὅτι 3 ἡμ. 14 ὡρ. 20' 35'' $= \frac{\mathbf{310\ 835}}{\mathbf{3\ 600}}$ ὡρ.

Τέλος τὸν δοθέντα συμμιγῆ ἃς τρέψωμεν καὶ εἰς κλάσμα τοῦ πρώτου λεπτοῦ.—Πάλιν θὰ τρέψωμεν αὐτὸν εἰς 310 835'', καὶ τότε θὰ σκεφθῶμεν ὡς ἑξῆς : Ἀφ' οὗ τὸ 1'' εἶνε τὸ $\frac{1}{60}$ τοῦ ἑνὸς πρώτου λεπτοῦ, τὰ 310 835'' θὰ εἶνε τὰ $\frac{310\,835'}{60}$. Ἑπομένως εὕρομεν ὅτι 3 ἡμ. 14 ὥρ. 20' 35'' $= \frac{\mathbf{310\,835'}}{\mathbf{60}}$.

2) *Ὁ συμμιγὴς 7 πηχ. $5\frac{2}{3}$ ῥουπ. νὰ τραπῇ εἰς κλάσμα τοῦ πήχεως.*

Τρέπομεν πρῶτον τοὺς 7 πηχ. καὶ τὰ 5 ῥ. εἰς ῥούπια καὶ εὑρίσκομεν 61 τοιαῦτα, τὰ ὁποῖα παριστῶμεν ὡς $\frac{61}{8}$ πηχ. Διὰ δὲ τὸ κλάσμα $\frac{2}{3}$ ῥ. σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς :

$$1 \text{ ῥ.} = \frac{1}{8} \text{ πηχ.}$$

$$\frac{1}{3} \text{ »} = \frac{1}{8\times 3} \text{ »} = \frac{1}{24} \text{ πηχ.}$$

$$\frac{2}{3} \text{ »} = \frac{2}{24} \text{ »} = \frac{1}{12} \text{ »}$$

Τέλος προσθέτομεν τὸ $\frac{1}{12}$ πηχ. καὶ τὰ $\frac{61}{8}$ πηχ. καὶ εὑρίσκομεν τὸ κλάσμα $\frac{185}{24}$ πηχ. πρὸς τὸ ὁποῖον ἰσοδυναμεῖ ὁ δοθεὶς συμμιγής.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα :

143. — *Διὰ νὰ τρέψωμεν συμμιγῆ ἀριθμὸν εἰς ἰσοδύναμον κλάσμα ὁποιασδήποτε ὑποδιαιρέσεώς του (ἐκτὸς τῆς τελευταίας), τρέπομεν αὐτὸν εἰς μονάδας τῆς τελευταίας αὐτοῦ ὑποδιαιρέσεως, καὶ τὸν μὲν ἀκέραιον ὅστις τότε θέλει προκύψει γράφομεν ὡς ἀριθμητήν, παρονομαστὴν δὲ γράφομεν τὸν ἀριθμὸν ὅστις δεικνύει μὲ πόσας μονάδας τῆς τελευταίας ὑποδιαιρέσεως ἰσοδυναμεῖ μία μονὰς τῆς ὁρισθείσης.*

β'.) *Τροπὴ συμμιγοῦς εἰς ἰσοδύναμον μεικτόν.*

1) *Νὰ τραπῇ ὁ συμμιγὴς* 13 *ὀργ.* 3 *ποδ.* 6 *δακ.* 5 *γραμ. εἰς μεικτὸν ἀριθμὸν φέροντα τὸ ὄνομα τῆς ὀργυιᾶς.*

Ὁ ἀριθμὸς 13 ὀργ. θὰ μείνῃ ὅπως εἶνε· τὸν δὲ ἀριθμὸν 3 ποδ. 6 δακτ. 5 γραμ. τρέπομεν εἰς γραμμὰς (κατὰ τὸ ἐδ. **141**) καὶ εὑρίσκομεν 509 γραμ. Κατόπιν σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς: Ἡ 1 ὀργυιὰ ἔχει 864 γραμμάς· ἄρα ἡ 1 γραμμὴ εἶνε τὸ $\frac{1}{864}$ τῆς ὀργυιᾶς καὶ αἱ 509 γραμμαὶ θὰ εἶνε τὰ $\frac{509}{864}$ τῆς ὀργυιᾶς. Εὑρέθη λοιπὸν ὅτι 13 ὀργ. 3 ποδ. 6 δακτ. 5 γραμ. $=$ **13 $\frac{509}{864}$** ὀργ.

Τὸν αὐτὸν συμμιγῆ ἂς τρέψωμεν ἤδη καὶ εἰς μεικτὸν φέροντα τὸ ὄνομα τοῦ ποδός.

Τὰς ὀργυιὰς καὶ τοὺς πόδας τρέπομεν εἰς ἀκέραιον ἀριθμὸν ποδῶν καὶ εὑρίσκομεν 81 πόδας, τὸν δὲ ἀριθμὸν 6 δακτ. 5 γραμ. τρέπομεν εἰς γραμμὰς καὶ εὑρίσκομεν 77 γραμμάς. Ἔπειτα σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς: ὁ 1 ποὺς ἔχει 144 γραμμάς· ἄρα ἡ 1 γραμμὴ εἶνε τὸ $\frac{1}{144}$ τοῦ ποδὸς καὶ αἱ 77 γραμμαὶ θὰ εἶνε τὰ $\frac{77}{144}$ τοῦ ποδός. Ὥστε εὑρέθη ὅτι 13 ὀργ. 3 ποδ. 6 δακτ. 5 γραμ. $=$ **81 $\frac{77}{140}$** ποδ.

Τέλος τὸν δοθέντα συμμιγῆ ἂς τρέψωμεν καὶ εἰς μεικτὸν ἀριθμὸν φέροντα τὸ ὄνομα τοῦ δακτύλου.

Τὰς ὀργυιάς, τοὺς πόδας καὶ τοὺς δακτύλους τρέπομεν εἰς ἀκέραιον ἀριθμὸν δακτύλων καὶ εὑρίσκομεν 978 δακτύλους. Ἔπειτα δὲ σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς: Ἡ 1 γραμμὴ εἶνε τὸ $\frac{1}{12}$ τοῦ δακτύλου· ἐπομένως αἱ 5 γραμμαὶ τοῦ συμμιγοῦς θὰ εἶνε τὰ $\frac{5}{12}$ τοῦ δακτύλου. Εὕρομεν λοιπὸν ὅτι 13 ὀργ. 3 ποδ. 6 δακτ. 5 γραμ. $=$ **978 $\frac{5}{12}$** δακτ.

2) *Ὁ συμμιγὴς 7 δρχ. 45 λ. νὰ τραπῇ εἰς μεικτὸν ἀριθμὸν φέροντα τὸ ὄνομα τῆς δραχμῆς.*

Τὸν ἀριθμὸν 7 δρχ. ἀφήνομεν ἀκέραιον. Τὰ δὲ 45 λ. παριστῶμεν ὡς $\frac{45}{100}$ δρχ. Τοιουτοτρόπως δὲ ὁ δοθεὶς συμμιγὴς τρέπεται εἰς τὸν μεικτὸν **7 $\frac{45}{100}$** δρχ.

3) *συμμιγὴς* 5 *ὀκ.* 23 $\frac{3}{7}$ *δρμ.* *νὰ τραπῇ εἰς μεικτὸν φέροντα τὸ ὄνομα τῆς ὀκᾶς.*

Τὰς μὲν 5 ὀκ. καὶ 23 δρμ. θὰ παραστήσωμεν ὡς 5 $\frac{23}{400}$ ὀκ. Διὰ δὲ τὸ κλάσμα $\frac{3}{7}$ δρμ. θὰ σκεφθῶμεν ὡς ἑξῆς :

$$1 \text{ δρμ.} = \frac{1}{400} \text{ ὀκ.}$$

$$\frac{1}{7} \text{ » } = \frac{1}{400 \times 7} \text{ » } = \frac{1}{2800} \text{ ὀκ.}$$

$$\text{καὶ } \frac{3}{7} \text{ » } = \frac{3}{2800} \text{ »}$$

Τέλος προσθέτομεν τὰ $\frac{3}{2800}$ ὀκ. εἰς τὸν μεικτὸν 5 $\frac{23}{400}$ ὀκ. καὶ λαμβάνομεν.

$$5\frac{23}{400} + \frac{3}{2800} = 5 + \frac{161}{2800} + \frac{3}{2800} = 5\frac{164}{2800} = 5\frac{41}{700} \text{ ὀκ.}$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἑπόμενον κανόνα :

144. — *Διὰ νὰ τρέψωμεν συμμιγῆ ἀριθμὸν εἰς μεικτὸν φέροντα τὸ ὄνομα οἱασδήποτε τῶν μονάδων του (ἐκτὸς τῆς τελευταίας), τρέπομεν τοὺς ἀριθμοὺς τῶν ὁποίων αἱ μονάδες εἶνε ἀνώτεραι τῆς δοθείσης εἰς ἀκέραιον ἀριθμὸν τῆς μονάδος ταύτης, τοὺς δὲ ἀριθμοὺς τῶν ὁποίων αἱ μονάδες εἶνε κατώτεραι τρέπομεν εἰς κλάσμα τῆς αὐτῆς μονάδος. Τὸ κλάσμα τοῦτο ἀριθμητὴν μὲν θὰ ἔχῃ τὸν ἀκέραιον τὸν ὁποῖον λαμβάνομεν τρέποντες τοὺς ἀριθμούς, ὧν αἱ μονάδες εἶνε κατώτεραι τῆς δοθείσης, εἰς μονάδας τῆς τελευταίας ὑποδιαιρέσεως, παρονομαστὴν δὲ τὸν ἀριθμὸν ὅστις δεικνύει μὲ πόσας μονάδας τῆς τελευταίας ὑποδιαιρέσεως ἰσοδυναμεῖ ἡ ὁρισθεῖσα μονάς.*

Τροπὴ κλασματικοῦ ἀριθμοῦ εἰς συμμιγῆ.

145. — *Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι μᾶς ἐδόθη νὰ τρέψωμεν τὸ κλάσμα* $\frac{27}{4}$ *ὀργ. εἰς ἀριθμὸν συμμιγῆ.* — Τὸ κλάσμα τοῦτο παριστᾷ τὸ μερίδιον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν, ὅταν 27 ὀργυιὰς μοιράσωμεν εἰς 4 ἴσα μέρη (ἐδ. **86**). Ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν ταύτην εὑρίσκομεν ὅτι ἕκαστον ἐκ τῶν τεσσάρων τούτων ἴσων μερῶν ἀποτελεῖται ἀπὸ 6 ὀργυιὰς καὶ ὅτι ὑπολείπονται καὶ 3 ὀργ. Ταύτας τρέπομεν εἰς $6 \times 3 = 18$ πόδας, τοὺς ὁποίους διαιροῦμεν πάλιν εἰς 4 ἴσα μέρη. Ἐκ τῆς δευτέρας ταύτης διαιρέσεως εὑρίσκομεν μερίδιον 4 πόδας καὶ ὑπόλοιπον 2. Τοὺς 2 τούτους πόδας τρέπομεν εἰς 24 δακτ, τοὺς ὁποίους διαιροῦντες διὰ τοῦ 4 εὑρίσκομεν πηλίκον 6 δακτύλους. Ἰσοδυναμεῖ λοιπὸν τὸ δοθὲν κλάσμα $\frac{27}{4}$ ὀργ. πρὸς τὸν συμμιγῆ **6** *ὀργ.* **4** *ποδ.* **6** *δακτ.*

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται οὕτω :

27 ὀργ.	4
24	6 ὀργ. 4 ποδ. 6 δακτ.
3	
6	
18 π.	
16	
2	
12	
24 δ.	
24	
0	

Ἐὰν ἐζητεῖτο νὰ τρέψωμεν τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$ ὀργ. εἰς συμμιγῆ, πάλιν ἔπρεπε νὰ μοιράσωμεν τὰς 3 ὀργ. εἰς 4 ἴσα μέρη. Ἐπειδὴ ὅμως δὲν μοιράζονται, τρέπομεν αὐτὰς εἰς $6 \times 3 = 18$ πόδας καὶ ἐξακολουθοῦμεν ὅπως καὶ εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἑπόμενον κανόνα :

146.—*Διὰ νὰ τρέψωμεν κλάσμα εἰς συμμιγῆ, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν αὐτοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ· καὶ τὸ μὲν πηλίκον θὰ εἶνε ὁμοειδὲς μὲ τὸ κλάσμα, ἂν δὲ ἐκ τῆς διαιρέσεως ταύτης μείνῃ καὶ ὑπόλοιπον, τρέπομεν αὐτὸ εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας αὐτοῦ ὑποδιαιρέσεως καὶ διαιροῦμεν πάλιν τὸ ἐξαγόμενον διὰ τοῦ παρονομαστοῦ. Τοιουτοτρόπως εὑρίσκομεν δεύτερον πηλίκον, τὸ ὁποῖον θὰ παριστᾷ μονάδας τῆς νέας ταύτης ὑποδιαιρέσεως τοῦ διαιρετέου, καὶ τὸ ὁποῖον γράφομεν πλησίον τοῦ πρώτου εὑρεθέντος πηλίκου ση-*

μειοῦντες πλησίον ἑκάστου καὶ τὸ ὄνομά του. Ἂν τότε καὶ ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως μείνῃ ὑπόλοιπον, τρέπομεν αὐτὸ εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας ὑποδιαιρέσεως καὶ προχωροῦμεν ὡς ἀνωτέρω μέχρις ὅτου φθάσωμεν εἰς τὴν τελευταίαν ὑποδιαίρεσιν.

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

147.—*Διὰ νὰ προσθέσωμεν συμμιγεῖς ἀριθμούς, γράφομεν πρῶτον αὐτοὺς τὸν ἕνα ὑπὸ τὸν ἄλλον οὕτως ὥστε οἱ ἀριθμοὶ οἱ δηλοῦντες τὸ πλῆθος τῶν μονάδων ἑκάστης ὑποδιαιρέσεως νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν κατακόρυφον στήλην. Ἔπειτα προσθέτομεν τοὺς ἀριθμοὺς ἑκάστης ὑποδιαιρέσεως χωριστά, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὴν κατωτάτην. Ἐὰν δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν ὑποδιαιρέσεώς τινος τῶν συμμιγῶν περιέχῃ καὶ μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας, ἐξάγομεν αὐτὰς καὶ τὰς προσθέτομεν μετὰ τῶν ἀριθμῶν ἐκείνης.*

Παράδειγμα.—Νὰ προστεθῶσιν οἱ ἑξῆς συμμιγεῖς: 3 μετρ. 7 δακτ. 4 γρ., 14 μετρ. 6 παλ. 9 γρ., 2 παλ. 3 δακτ. 1 γραμ.

Διάταξις τῆς πράξεως.

3 μ.	0 παλ.	7 δ.	4 γρ.
14	6	0	9
	2	3	1
17 μ.	9 π.	1 δ.	4 γρ.

Προσθέσαντες τὰς γραμμὰς εὕρομεν 14, ἀλλ' αἱ 10 ἐξ αὐτῶν ἀποτελοῦσιν 1 δάκτυλον. Διὰ τοῦτο ἐγράψαμεν μόνον 4 γραμμὰς εἰς τὸ ἄθροισμα, τὸν δὲ ἕνα δάκτυλον προσεθέσαμεν εἰς τοὺς ἄλλους δακτύλους καὶ εὕρομεν ἄθροισμα 11 δακτ. Ἐξ αὐτῶν ἐγράψαμεν μόνον 1. Διότι οἱ ἄλλοι 10 ἀποτελοῦσι 1 παλάμην, τὴν ὁποίαν προσεθέσαμεν εἰς τὰς ἄλλας παλάμας τῶν ἀριθμῶν.

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

148.—Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν ἑξῆς ἀφαίρεσιν:

13 ὀργ.	5 ποδ.	7 δακ.	8 γραμ.
4	3	8	6

Ἀφαιροῦμεν πρῶτον τὰς 6 γραμμὰς τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὰς 8 τοῦ μειωτέου καὶ εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 2 γραμ. Κατόπιν ἐρχόμεθα νὰ ἀφαιρέσωμεν τοὺς δακτύλους τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τοὺς τοῦ μειωτέου· ἐπειδὴ ὅμως 8 δὲν ἀφαιροῦνται ἀπὸ 7, προσθέτομεν εἰς τοὺς 7 δακτύλους ἕνα πόδα ἤτοι 12 δακτύλους καὶ γίνονται 19 δακτ. Τότε ἀφαιροῦμεν 8 ἀπὸ 19 καὶ εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 11 δακτύλους. Ἀλλ' ἐπειδὴ εἰς τὸν μειωτέον προσεθέσαμεν ἕνα πόδα, πρέπει διὰ νὰ μὴ μεταβληθῇ τὸ ὑπόλοιπον, νὰ προσθέσωμεν ἄλλον ἕνα πόδα καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον (ἐδ. **27** *β΄*.). Τότε ὁ ἀφαιρετέος θὰ ἔχῃ 4 πόδας τοὺς ὁποίους ἀφαιροῦντες ἀπὸ τοὺς 5 τοῦ μειωτέου εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 1 πόδα. Τέλος ἀφαιροῦμεν καὶ τὰς 4 ὀργυιὰς ἀπὸ τὰς 13 καὶ λαμβάνομεν ὑπόλοιπον 9 ὀργ. Εὑρέθη λοιπὸν ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν δοθέντων συμμιγῶν εἶνε : **9** *ὀργ.* 1 *π.* **11** *δ.* **2** *γραμ.*

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἑπόμενον κανόνα :

149. — *Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν συμμιγῆ ἀπὸ ἄλλον συμμιγῆ γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον ὑπὸ τὸν μειωτέον οὕτως ὥστε οἱ ἀριθμοὶ οἱ δηλοῦντες τὸ πλῆθος τῶν μονάδων ἑκάστης ὑποδιαιρέσεως νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν κατακόρυφον στήλην. Ἔπειτα ἀφαιροῦμεν ἕκαστον ἀριθμὸν τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὸν ἀντίστοιχον τοῦ μειωτέου ἀρχίζοντες ἀπὸ τὴν κατωτάτην ὑποδιαίρεσιν. Ἐὰν δὲ τύχῃ ἀριθμός τις τοῦ μειωτέου νὰ εἶνε μικρότερος ἀπὸ τὸν ἀντίστοιχον τοῦ ἀφαιρετέου, προσθέτομεν εἰς αὐτὸν τόσας μονάδας, ὅσαι χρειάζονται διὰ νὰ ἀποτελέσωσι μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας ὑποδιαιρέσεως· ἔπειτα ὅμως ἐρχόμενοι εἰς τὸν ἀκόλουθον πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἀριθμὸν τοῦ ἀφαιρετέου τὸν ἀνήκοντα εἰς τὴν ἀμέσως ἀνωτέραν ὑποδιαίρεσιν, αὐξάνομεν αὐτὸν κατὰ μίαν μονάδα, πρὶν τὸν ἀφαιρέσωμεν.*

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

α΄.) Πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ ἀκέραιον.

150. — *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῆ ἐπὶ ἀκέραιον, πολλαπλασιάζομεν ἕκαστον τῶν μερῶν του χωριστὰ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον, ἀρχόμενοι ἀπὸ τῆς τελευταίας ὑποδιαιρέσεως. Ἐὰν δὲ μερικόν τι γινόμενον περιέχῃ μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας ὑπο-*

διαιρέσεως, ἐξάγομεν αὐτὰς καὶ τὰς προσθέτομεν εἰς τὸ γινόμενον τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ἀνήκοντος εἰς τὴν ἀμέσως ἀνωτέραν ὑποδιαίρεσιν.

Παράδειγμα.

	13 ὀργ.	4 ποδ.	7 δακτ.	9 γρ.
				6
	78 ὀργ.	24 ποδ.	42 δακτ.	54 γρ.
καὶ μετὰ τὴν κατάταξιν τῶν μονάδων:	82 ὀργ.	3 ποδ.	10 δακτ.	6 γρ.

β'.) Διαίρεσις συμμιγοῦς δι' ἀκεραίου.

151.— *Διὰ νὰ διαιρέσωμεν συμμιγῆ δι' ἀκεραίου, διαιροῦμεν τὰ μέρη του χωριστὰ τὸ καθὲν διὰ τοῦ ἀκεραίου, ἀρχόμενοι ἀπὸ τῆς ἀνωτάτης ὑποδιαιρέσεως. Ἐὰν δὲ μερική τις διαίρεσις ἀφήσῃ ὑπόλοιπον, τρέπομεν αὐτὸ εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας ὑποδιαιρέσεως, εἰς αὐτὰς προσθέτομεν καὶ ὅσας τοιαύτας ἔχει ἀκόμη ὁ διαιρετέος, μεθ' ὃ ἐξακολουθοῦμεν τὴν διαίρεσιν.*

Παράδειγμα.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι πρόκειται νὰ μοιράσωμεν 37 ταλ. 4 δρχ. 75 λεπτ. εἰς 9 ἀνθρώπους.

Κατὰ πρῶτον μοιράζομεν τὰ 37 τάλληρα καὶ εὑρίσκομεν ὅτι θὰ λάβῃ ἕκαστος ἀπὸ 4 καὶ θὰ περισσεύσῃ καὶ 1 τάλληρον. Τοῦτο τὸ τρέπομεν εἰς 5 δραχμάς, εἰς αὐτὰς προσθέτομεν καὶ τὰς 4 τοῦ διαιρετέου, τὰς δὲ 9 δραχμὰς αἱ ὁποῖαι τοιουτοτρόπως ἀποτελοῦνται μοιράζομεν εἰς τοὺς 9 ἀνθρώπους. Ἐκ τῆς διαιρέσεως ταύτης εὑρίσκομεν ὅτι ἕκαστος ἄνθρωπος θὰ λάβῃ ἀπὸ 1 δραχμὴν χωρὶς νὰ μείνῃ ὑπόλοιπον. Τέλος μοιράζομεν καὶ τὰ 75 λεπτὰ καὶ εὑρίσκομεν ὅτι ἕκαστος ἐκ τῶν 9 ἀνθρώπων θὰ λάβῃ καὶ ἐξ αὐτῶν 8, θὰ μᾶς μείνωσι δὲ 3 λεπτὰ ὡς ὑπόλοιπον. Ὥστε τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης εἶνε **4** *τάλ.* **1** *δρχ.* **8** *λ.* $\frac{3}{9}$.

Χάριν εὐκολίας ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς :

```
37 τάλ.  4 δρχ.  75 λεπ.  | 9
36                        |_______________________
 1 τάλ.                      4 τάλ. 1 δρχ. 8 λ. 1/3
 5
 5 δρχ.
 4
 9 δρχ.
 9
 0 δρ.
75 λεπ.
72
 3 λεπ.
```

Πολαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ κλασματικόν.

152. — *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῆ ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιάζομεν τὸν συμμιγῆ ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ.*

Παράδειγμα.

Νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ συμμιγὴς 5 στ. 20 ὀκ. 50 δρμ. ἐπὶ $\frac{3}{4}$.

Διάταξις τῆς πράξεως.

```
 5 στ.   20 ὀκ.   50 δρμ.
                   3   (*)
-------------------------
16 στ.   16 ὀκ.  150 δρμ. | 4
16                        |______________________
 0 στ.                      4 στ. 4 ὀκ. 37 δρμ. 1/2
16 ὀκ.
16
 0 ὀκ.
150
148
  2
```

(*) Κυρίως πρέπει (**ἐδ. 110**) νὰ λάβωμεν τὸ τέταρτον τοῦ συμμιγοῦς, καὶ

Πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ μεικτόν.

133.—*Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῆ ἐπὶ μεικτόν, πολλαπλασιάζομεν τὸν συμμιγῆ πρῶτον ἐπὶ τὸν ἀκέραιον τοῦ μεικτοῦ καὶ κατόπιν ἐπὶ τὸ κλάσμα· εἰς τὸ τέλος δὲ προσθέτομεν τὰ δύο μερικὰ γινόμενα.*

Παράδειγμα.

Νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ συμμιγὴς 17 *πηχ.* 6 *ῥούπ. ἐπὶ τὸν μεικτὸν* $3\frac{2}{5}$.

Διάταξις τῆς πράξεως :

α′.) 17 π. 6 ῥ.
× 3
53 πηχ. 2

β′.) 17 π. 6 ῥ.
× 2
35 π. 4 ῥ. | 5
35 | 7 π. 0 ῥ. $\frac{4}{5}$
0 π.
4 ῥ.

γ′,) Πρόσθεσις τῶν δύο μερικῶν γινομένων :

53 π.	2 ῥ.	
7	0	$\frac{4}{5}$
60 πηχ.	2 ῥ.	$\frac{4}{5}$

Σημείωσις.—Δυνάμεθα ὅμως καὶ νὰ τρέψωμεν τὸν μεικτὸν εἰς ἰσοδύναμον κλασματικόν, ἔπειτα δὲ νὰ πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῆ ἐπὶ κλάσμα.

Πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ δεκαδικόν.

134. — *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῆ ἐπὶ δεκαδικόν,*

τοῦτο νὰ ἐπαναλάβωμεν τρίς. Τοῦτ' ἔστι πρῶτον νὰ διαιρέσωμεν τὸν συμμιγῆ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ κλάσματος καὶ κατόπιν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ προκῦπτον πηλίκον ἐπὶ τὸν ἀριθμητήν. Ἀλλὰ καὶ κατὰ τοὺς δύο τρόπους καταλήγομεν εἰς τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα.

τρέπομεν τὸν δεκαδικὸν εἰς κοινὸν κλάσμα, καὶ τότε πολλαπλασιάζομεν συμμιγῆ ἐπὶ κλάσμα κατὰ τὰ ἀνωτέρω.

Π. χ. οἱ πολλαπλασιασμοί:

α'.) (5 ὀκ. 150 δρμ.) × 0,75 δρχ.

καὶ β'.) (2 ταλ. 3 δρχ. 45 λ.) × 3,1 μετρ. (*)

μετατρέπονται εἰς τοὺς ἑξῆς:

α'.) (5 ὀκ. 150 δρμ.) × $\frac{75}{100}$ δρχ.

καὶ β'.) (2 ταλ. 3 δρχ. 45 λ.) × $\frac{31}{10}$ μετρ.

Διαίρεσις συμμιγοῦς διὰ κλάσματος.

155. — *Διὰ νὰ διαιρέσωμεν συμμιγῆ διὰ κλάσματος, ἀντιστρέφομεν τοὺς ὅρους τοῦ κλασματικοῦ διαιρέτου καὶ ἀντὶ διαιρέσεως κάμνομεν πολλαπλασιασμόν.*

Π. χ. (5 ὀργ. 7 δακτ.) : $\frac{6}{11}$ = (5 ὀργ. 7 δακτ.) × $\frac{11}{6}$.

Διαίρεσις συμμιγοῦς διὰ μεικτοῦ.

156. — *Διὰ νὰ διαιρέσωμεν συμμιγῆ διὰ μεικτοῦ τρέπομεν τὸν μεικτὸν εἰς ἰσοδύναμον κλασματικόν, καὶ κατόπιν διαιροῦμεν συμμιγῆ διὰ κλάσματος ὡς ἀνωτέρω.*

Π. χ. (3 μετρ. 6 παλ. 9 δακτ.) : $3\frac{2}{5}$ = (3 μ. 6 π. 9 δ.) : $\frac{17}{5}$.

Διαίρεσις συμμιγοῦς διὰ δεκαδικοῦ.

157. — *Διὰ νὰ διαιρέσωμεν συμμιγῆ διὰ δεκαδικοῦ, τρέπομεν τὸν δεκαδικὸν εἰς κοινὸν κλάσμα, καὶ κατόπιν διαιροῦμεν συμμιγῆ διὰ κλάσματος κατὰ τὰ ἀνωτέρω.*

Παράδειγμα.

Τὰ 3,85 μετρ. ἑνὸς ὑφάσματος ἐπωλήθησαν ἀντὶ 2 ταλ. 4 δρχ. 25 λ. Πόσον ἐπωλήθη τὸ μέτρον;

(*) Ἐκ τῶν ἑξῆς προβλημάτων:

α'.) Μὲ 1 δρχ. ἀγοράζομεν 5 ὀκ. 150 δρμ. (π. χ. ἅλατος). Πόσον θὰ ἀγοράσωμεν μὲ 0,75 δρχ;

β'.) Τὸ 1 μέτρ. ἑνὸς ὑφάσματος ἀξίζει 2 ταλ. 3 δρχ. 45 λ. Πόσον ἀξίζουν τὰ 3,1 μ.;

Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου εἶνε φανερὸν ὅτι πρέπει νὰ μοιράσωμεν τὰ 2 τάλ. 4 δρχ. 25 λ. εἰς τὰ 3,85 μέτρ, διὰ νὰ ἴδωμεν πόσον ἀντιστοιχεῖ εἰς ἕκαστον μέτρον. Πρέπει ἑπομένως νὰ γείνῃ ἡ ἑξῆς διαίρεσις :

(2 ταλ. 4 δρχ. 25 λ.) : 3,85 μ.

Ταύτην κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα μετατρέπομεν εἰς τὴν ἑξῆς :

$$(2 \text{ ταλ. } 4 \text{ δρχ. } 25 \text{ λ.}) : \frac{385}{100} \text{ μ.},$$

τὴν ὁποίαν ἐκτελοῦμεν συμφώνως πρὸς τὸν κανόνα τοῦ *ἐδαφ.* **155**.

Πολλαπλασιαστὴς συμμιγής.

158. — *Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶνε συμμιγής, τρέπομεν αὐτὸν εἰς ἁπλοῦν ἀριθμὸν φέροντα τὸ ὄνομα τῆς μονάδος, τῆς ὁποίας ἔχει δοθῇ ἡ τιμή. Κατόπιν δὲ πολλαπλασιάζομεν τὸν πολλαπλασιαστέον ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον (ὅστις τότε θὰ εἶνε ἢ ἀκέραιος ἢ κλασματικὸς ἢ μεικτός).*

Σημείωσις. — Ὁ κανὼν οὗτος ἐφαρμόζεται ὁποιοσδήποτε καὶ ἂν εἶνε ὁ πολλαπλασιαστέος.

Παραδείγματα.

α'.) Τὸ 1 δράμιον ἐξ ἑνὸς πράγματος ἀξίζει 2 δρχ. 15 λ. Πόσον ἀξίζουν 3 ὀκ. 150 δρμ. ἐκ τοῦ αὐτοῦ πράγματος ;

Λύσις. Τὸ πρόβλημα τοῦτο θὰ λυθῇ δι' ἑνὸς πολλαπλασιασμοῦ, διότι ἔχει δοθῇ ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς δραμίου καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ τῶν πολλῶν. Πολλαπλασιαστέος δὲ θὰ εἶνε ὁ συμμιγὴς 2 δρχ. 15 λ. ὡς ὁμοειδὴς μὲ τὸ γινόμενον. Ἔχομεν λοιπὸν τὸν ἑξῆς πολλαπλασιασμὸν (2 δρχ. 15 λ.) × (3 ὀκ. 150 δρμ.), πρὸς ἐκτέλεσιν τοῦ ὁποίου πρέπει κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα νὰ τρέψωμεν τὸν πολλαπλασιαστὴν εἰς δράμια, διότι τοῦ δραμίου ἡ τιμὴ ἐδόθη. Τοιουτοτρόπως ὁ ἀνωτέρω πολλαπλασιασμὸς μετατρέπεται εἰς τὸν ἑξῆς : (2 δρχ. 15 λ.) × 1350 δρμ., τὸν ὁποῖον ἐκτελοῦντες εὑρίσκομεν (ὡς τιμὴν τῶν 1350 δραμίων, ἤτοι τῶν 3 ὀκ. 150 δρμ.) 2902 δρχ. 50 λεπ.

β'.) Ἡ ὀκᾶ ἑνὸς πράγματος ἀξίζει 3 δρχ. 75 λεπ. Πόσον ἀξί- 8 ὀκ. 100 δρμ. ἐκ τοῦ ἰδίου πράγματος ;

Λύσις. (3 δρχ. 75 λ.) × (8 ὀκ. 100 δρμ.).

Ἐπειδὴ καὶ εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦτον ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶνε συμμιγής, τρέπομεν αὐτὸν εἰς ἁπλοῦν ἀριθμὸν ὀκάδων, διότι ἐνταῦθα τῆς ὀκᾶς ἡ τιμὴ ἐδόθη. Τοιουτοτρόπως λαμβάνομεν :

$$(3 \text{ δρχ. } 75 \text{ λ.}) \times 8 \frac{100}{400} \text{ ὀκ.}$$

ἢ ἁπλούστερον $(3 \text{ δρχ. } 75 \text{ λ.}) \times 8 \frac{1}{4}$ ὀκ.

Ἐκτελοῦντες δὲ τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦτον (ἐδ. **153**) εὑρίσκομεν 30 δρχ. $93 \frac{3}{4}$ λ. ὡς ἀξίαν τῶν 8 ὀκάδων καὶ 100 δραμίων.

Σημείωσις. — Τὸν πολλαπλασιαστέον 3 δρχ. 75 λ. δυνάμεθα χάριν μεγαλειτέρας εὐκολίας νὰ παραστήσωμεν καὶ ὡς δεκαδικὸν 3,75 δρχ. Τοῦτο δὲ δυνάμεθα πάντοτε νὰ κάμνωμεν εἰς τὸν πολλαπλασιαστέον, ὅταν οὗτος σημαίνῃ δραχμὰς καὶ λεπτά, ἢ Γαλλικὰ μέτρα καὶ ὑποδιαιρέσεις αὐτοῦ.

γ') Ἐργάτης τις εἰς μίαν ὥραν κτίζει τοῖχον ὕψους 2 πήχεων. Πόσον θὰ κτίσῃ εἰς 5 ὥρ. 20' ;

Λύσις. $2 \text{ πηχ.} \times (5 \text{ ὡρ. } 20')$.

ἢ $2 \text{ πηχ.} \times 5 \frac{20}{60}$ ὡρ.

καὶ ἁπλούστερον : $2 \text{ πήχ.} \times 5 \frac{1}{3}$ ὡρ.

Ἐκτελοῦντες τὸν τελευταῖον τοῦτον πολλαπλασιατμὸν λαμβάνομεν γινόμενον $10 \frac{2}{3}$ πηχ. Τόσον λοιπὸν θὰ κτίσῃ εἰς 5 ὡρ. καὶ 20'

δ'.) Ἔκ τινος κρήνης εἰς 1'' ῥέει $\frac{1}{5}$ ὀκ. ὕδατος. Πόσον ὕδωρ θὰ ἐκρεύσῃ εἰς 3 ὥρ. 15' ;

Λύσις. $\frac{1}{5}$ ὀκ. $\times$ (3 ὡρ. 15'.)

Ἐνταῦθα ὁ συμμιγὴς 3 ὥρ. 15' πρέπει νὰ τραπῇ εἰς δεύτερα λεπτά, διότι τοῦ 1'' ἔχει δοθῇ ἡ τιμή. Ὁ ἀνωτέρω λοιπὸν πολλαπλασιασμὸς θέλει τοιουτοτρόπως μετατραπῇ εἰς τὸν ἑξῆς :

$$\frac{1}{5} \text{ ὀκ.} \times 11700''$$

ἐκ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν 2340 ὀκ.

Διαίρεσις συμμιγοῦς διὰ συμμιγοῦς.

159. — Εἰς τὴν διαίρεσιν ταύτην διακρίνομεν τὰς ἑξῆς δύο περιπτώσεις:

Α'.) ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης συμμιγεῖς ἑτεροειδεῖς.

160. — *Ὅταν ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης εἶνε συμμιγεῖς ἑτεροειδεῖς* (τοῦθ' ὅπερ συμβαίνει εἰς τὰ προβλήματα τοῦ μερισμοῦ), *τρέπομεν τὸν διαιρέτην εἰς ἁπλοῦν ἀριθμὸν φέροντα τὸ ὄνομα τῆς μονάδος, τῆς ὁποίας ἡ τιμὴ ζητεῖται. Κατόπιν δὲ διαιροῦμεν τὸν διαιρετέον διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου* (ὄντος τότε ἀκεραίου ἢ κλασματικοῦ ἢ μεικτοῦ).

Σημείωσις. — Ὁ αὐτὸς κανὼν ἐφαρμόζεται καὶ ὅταν ὁ διαιρετέος εἶνε ἀκέραιος, κλασματικὸς κτλ.

Παραδείγματα.

α'.) *17 ὀκ. 350 δρμ. κρέατος ἠγοράσθησαν ἀντὶ 9 ταλ. 3 δρχ. 25 λ. Ἀντὶ πόσου ἠγοράσθη ἡ μία ὀκᾶ;*

Λύσις. Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο, ἀρκεῖ νὰ μοιράσωμεν τὰ 9 τάλ. 3 δρχ. 25 λεπ. εἰς τὰς 17 ὀκ. 350 δρμ, τοῦτ' ἔστι νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν ἑξῆς διαίρεσιν (9 ταλ. 3 δρχ. 25 λ.) : (17 ὀκ. 350 δρμ.). Πρὸς τοῦτο πρέπει κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα νὰ τρέψωμεν τὸν συμμιγῆ 17 ὀκ. 350 δρμ. εἰς ὀκάδας, διότι τῆς 1 ὀκᾶς ἡ τιμὴ ζητεῖται. Τότε ἡ ἀνωτέρω διαίρεσις μετατρέπεται εἰς τὴν ἑξῆς:

$$(9 \text{ τάλ. } 3 \text{ δρχ. } 25 \text{ λ.}) : 17\frac{350}{400} \text{ ὀκ.}$$

$$\text{ἢ } (9 \text{ τάλ. } 3 \text{ δρχ. } 25 \text{ λ.}) : 17\frac{7}{8} \text{ ὀκ,}$$

τὴν ὁποίαν ἐκτελοῦντες εὑρίσκομεν 2 δρχ. 70 λ. περίπου.

β'.) *Μία μηχανὴ εἰς 4 ὥρ. 15′ 20″ ὑφαίνει 20 πήχεις ὑφάσματας. Πόσον ὑφαίνει εἰς 1′;*

Λύσις. Πρέπει προφανῶς νὰ μοιράσωμεν τοὺς 20 πήχεις εἰς τὰ πρῶτα λεπτά, πρὸς τὰ ὁποῖα ἰσοδυναμεῖ ὁ συμμιγὴς 4 ὡρ 15′ 20″ διὰ νὰ εὕρωμεν πόσοι πήχεις ἀντιστοιχοῦσιν εἰς ἕκαστον πρῶτον λεπτόν. Πρέπει δηλ. νὰ κάμωμεν τὴν ἑξῆς διαίρεσιν: 20 πηχ: (4 ὡρ. 15′ 20″). Πρὸς τοῦτο τρέπομεν τὸν διαιρέτην εἰς πρῶτα λεπτά, ἀφ' οὗ ζητεῖται ἡ τιμὴ τοῦ 1', καὶ διαιροῦντες τότε 20 πηχ: $\frac{15320'}{60}$ εὑρίσκομεν ὅτι εἰς 1' ἡ μηχανὴ αὕτη ὑφαίνει $\frac{30}{383}$ πηχ.

γ'.) Μὲ 2 ταλ. 3 δρχ. 40 λ. ἀγοράζομεν $\frac{3}{4}$ στ. ἐξ ἑνὸς πράγματος. Πόσον ἀγοράζομεν μὲ 1 δρχ. ;

Λύσις. $\frac{3}{4}$ στ : (2 ταλ. 3 δρχ. 40 λ.)

Τρέπομεν τὸν διαιρέτην εἰς ἁπλοῦν ἀριθμὸν φέροντα τὸ ὄνομα τῆς δραχμῆς καὶ λαμβάνομεν :

$$\frac{3}{4} \text{ στ.} \; : \; \frac{67}{5} \text{δρχ.}$$

καὶ ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν ταύτην εὑρίσκομεν $\frac{15}{268}$ στ., ἤτοι 2 ὀκ. 185 $\frac{5}{67}$ δρμ.

Β'.) Ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης συμμιγεῖς ὁμοειδεῖς.

161. — *Ὅταν ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης εἶνε συμμιγεῖς ὁμοειδεῖς, τρέπομεν καὶ τοὺς δύο εἰς μονάδας τῆς κατωτάτης αὐτῶν ὑποδιαιρέσεως, ὥστε νὰ γείνωσιν ἀκέραιοι ὁμοειδεῖς, κατόπιν δὲ διαιροῦμεν ἀκέραιον δι' ἀκεραίου.*

Σημείωσις. — Τὸ εἶδος τοῦ πηλίκου ὁρίζεται ἐνταῦθα ἐκ τοῦ προβλήματος (ἐδ. **60**).

Παραδείγματα.

α'.) Ἡ ὀκᾶ τοῦ τυροῦ τιμᾶται 3 δρχ. 60 λ. Πόσας ὀκάδας ἀγοράζομεν μὲ 11 δρχ ;

Λύσις. Μὲ 3 δρχ. 60 λ. ἀγοράζομεν 1 ὀκ., μὲ ἄλλας 3 δρχ. 60 λ. θὰ ἀγοράσωμεν ἄλλην 1 ὀκ. καὶ μὲ τὰς 11 δρχ. θὰ ἀγοράσωμεν τόσας ὀκάδας, ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ συμμιγὴς 3 δρχ. 60 λ. εἰς τὰς 11 δρχ. Πρέπει ἑπομένως νὰ κάμωμεν τὴν ἑξῆς διαίρεσιν :

11 δρχ : (3 δρχ. 60 λ.).

Πρὸς τοῦτο κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα τρέπομεν καὶ τὸν διαιρετέον καὶ τὸν διαιρέτην εἰς λεπτά. Διαιροῦντες δὲ τότε 1100 λ. διὰ 3600 λ. εὑρίσκομεν, ὅτι μὲ 11 δρχ. θὰ ἀγοράσωμεν 3 ὀκ. 22 $\frac{2}{9}$ δρμ. ἐκ τοῦ τυροῦ τούτου.

β'.) *Μὲ 1 δραχμὴν ἀγοράζομεν 2 ὀκ. 100 δρμ. σταφυλῶν. Πόσον θὰ δώσωμεν διὰ νὰ ἀγοράσωμεν ἐξ αὐτῶν 15 ὀκ. καὶ 300 δρμ ;*

Λύσις. Αἱ 2 ὀκ. καὶ τὰ 100 δρμ. ἀξίζουν 1 δρχ., ἄλλαι 2 ὀκ. καὶ 100 δρμ. ἀξίζουν ἄλλην 1 δρχ. καὶ ἑπομένως αἱ 15 ὀκ. καὶ τὰ 300 δρμ. θὰ ἀξίζουν τόσας δραχμάς, ὅσας φορὰς χωροῦν αἱ 2 ὀκ. 100 δρμ. εἰς τὰς 15 ὀκ. 300 δρμ. Διὰ νὰ εὕρωμεν ὅμως τοῦτο, ἀρκεῖ νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν ἑξῆς διαίρεσιν :

(15 ὀκ. 300 δρμ.) : (2 ὀκ. 100 δρμ.)

ἢ κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα

6300 δρμ : 900 δρμ.

Ἐκ τῆς διαιρέσεως ταύτης εὑρίσκομεν πηλίκον 7· ἄρα διὰ τὰς 15 ὀκ. καὶ τὰ 300 δρμ. τῶν σταφυλῶν τούτων θὰ πληρώσωμεν 7 δρχ.

γ'.) *Ἐργάτης ἐργαζόμενος 1 ἡμέραν λαμβάνει ἡμερομίσθιον 4 δρχ. 75 λ. Πόσας ἡμέρας πρέπει νὰ ἐργασθῇ διὰ νὰ λάβῃ 16 τάλληρα καὶ 75 λεπτά ;*

Λύσις. (16 τάλ. 75 λ.) : (4 δρχ. 75 λ.).

ἢ 8075 λ. : 475 λ. = 17 ἡμ.

Λύσις τῶν προβλημάτων τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως τῶν συμμιγῶν διὰ τῆς μεθόδου τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα.

162.—Πᾶν πρόβλημα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἢ τῆς διαιρέσεως τῶν συμμιγῶν, δυνάμεθα νὰ λύσωμεν καὶ διὰ τῆς μεθόδου *τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα*. Πρὸς τοῦτο ὅμως τρέπομεν πρῶτον τοὺς δοθέντας συμμιγεῖς (*) εἰς τὴν τελευταίαν αὐτῶν ὑποδιαίρεσιν, ὅπως γείνωσιν ἀκέραιοι.

(*) Ἐὰν μόνον ὁ εἷς ἐκ τῶν δύο δοθέντων ἀριθμῶν εἶνε συμμιγής, τότε μόνον αὐτὸν τρέπομεν εἰς τὴν τελευταίαν του ὑποδιαίρεσιν, τὸν δὲ ἄλλον ἀφήνομεν ὅπως εἶνε. Τοῦτο π. χ. συμβαίνει εἰς τὸ 3*ον*, 4*ον*, 6*ον* καὶ 7*ον* ἐκ τῶν κατωτέρω παραδειγμάτων.

Τὴν ἁπλουστάτην ταύτην μέθοδον θέλομεν δείξει ἐπὶ τῶν προβλημάτων ἀκριβῶς ἐκείνων, τὰ ὁποῖα ἀνωτέρω ἐλάβομεν.

1) *Τὸ ἓν δράμιον ἐξ ἑνὸς πράγματος ἀξίζει 2 δρχ. 15 λ. Πόσον ἀξίζουν 3 ὀκ. 150 δρμ. ἐκ τοῦ αὐτοῦ πράγματος ;*

Λύσις. Τρέπομεν καὶ τοὺς δύο δοθέντας συμμιγεῖς εἰς ἀκεραίους καὶ εὑρίσκομεν 215 λ. καὶ 1350 δρμ. Ἔπειτα σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς :

Τὸ 1 δρμ. ἀξίζει 215 λ.

ἄρα τὰ 1350 » θὰ ἀξίζουν $215 \times 1350 = 290\,250$ λ.

ἤτοι 2902 δρχ. 50 λ.

2) *Ἡ ὀκᾶ ἑνὸς πράγματος ἀξίζει 3 δρχ. 75 λ. Πόσον ἀξίζουν 8 ὀκ. 100 δρμ. τοῦ αὐτοῦ πράγματος ;*

Λύσις. Ἀφ' οὗ πρῶτον τρέψωμεν τοὺς δοθέντας συμμιγεῖς εἰς ἀκεραίους (375 λ. καὶ 3300 δρμ.), σκεπτόμεθα κατόπιν ὡς ἑξῆς :

Ἡ 1 ὀκ. ἤτοι τὰ 400 δρμ. ἀξίζουν . . . 375 λ.

τὰ 1 » θὰ ἀξίζῃ . . $\frac{375}{400}$ »

καὶ τὰ 3300 » θὰ ἀξίζουν .. $\frac{375 \times 3300}{400} =$

$= 3093 \frac{3}{4}$ λ. ἤτοι 30 δρχ. $93 \frac{3}{4}$ λ.

3) *Ἐργάτης τις εἰς 1 ὥρ. κτίζει τοῖχον ὕψους 2 πηχ. Πόσον θὰ κτίσῃ εἰς 5 ὥρ. 20' ;*

Λύσις. Τὸν μὲν συμμιγῆ 5 ὥρ. 20' τρέπομεν εἰς πρῶτα λεπτὰ (320'), τὸν δὲ ἀριθμὸν 2 πηχ. ἀφήνομεν ὅπως εἶνε, διότι παρουσιάζεται ὡς ἀκέραιος. Κατόπιν σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς :

Εἰς 1 ὥρ. ἤτοι εἰς 60' κτίζει 2 πηχ.

εἰς 1' » $\frac{2}{60}$ » $= \frac{1}{30}$ π.

καὶ εἰς 320' » $\frac{1}{30} \times 320 = \frac{320}{30}$ » ἤτοι $10 \frac{2}{3}$ π.

4) *Ἐκ τινος κρήνης εἰς 1'' ῥέει $\frac{1}{5}$ τῆς ὀκᾶς ὕδατος. Πόσον ὕδωρ θὰ ῥεύσῃ ἐξ αὐτῆς εἰς 3 ὥρ. 15';*

Λύσις. Τὸ μὲν $\frac{1}{5}$ ὀκ. ἀφήνομεν ὅπως ἔχει, διότι δὲν εἶνε συμμιγής, τὸν δὲ 3 ὥρ. 15′ τρέπομεν εἰς 195′. Ἔπειτα σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς :

Εἰς 1″ ἐκρέει...... $\frac{1}{5}$ ὀκ.

» 60″ ἤτοι εἰς 1′ » ...... $\frac{60}{5} = 12$ ὀκ.

καὶ » 195′ θὰ ἐκρεύσωσι $12 \times 195 = 2340$ ὀκ. ὕδατος.

5) *17 ὀκ. 350 δρμ. κρέατος ἠγοράσθησαν ἀντὶ 9 ταλ. 3 δρχ. 25 λ. Ἀντὶ πόσου ἠγοράσθη ἡ 1 ὀκᾶ ;*

Λύσις. Τρέπομεν πρῶτον τοὺς δύο δοθέντας συμμιγεῖς εἰς ἀκεραίους καὶ λαμβάνομεν ἐκ μὲν τοῦ πρώτου 7150 δρμ., ἐκ δὲ τοῦ δευτέρου 4825 λεπ. Ἔπειτα σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς :

Τὰ 7150 δρμ. ἀξίζ. 4825 λεπ.

τὸ 1 » » $\frac{4825}{7150}$ »

καὶ τὰ 400 » ἤτοι ἡ ὀκᾶ » $\frac{4825}{7150} \times 400$ » =

$= 269\frac{133}{143}$ λ. ἤτοι 2δρχ. 70λ. περίπου.

6) *Μία μηχανὴ εἰς 4 ὥρ. 15′ 20″ ὑφαίνει 20 πηχ. ὑφάσματος. Πόσον ὑφαίνει εἰς 1′ ;*

Λύσις. Τρέπομεν καὶ τὸν συμμιγῆ 4 ὥρ. 15′ 20″ εἰς ἀκέραιον (15 320″) καὶ κατόπιν σκεπτόμεθα οὕτω :

Εἰς 15 320″ ὑφαίνει 20 πηχ.

» 1″ » $\frac{20}{15320}$ »

καὶ » 60″ ἤτοι εἰς 1′ » $\frac{20 \times 60}{15320}$ » $= \frac{30}{383}$ πηχ.

7) *Μὲ 2 ταλ. 3 δρχ. 40 λεπ. ἀγοράζομεν $\frac{3}{4}$ στ. ἐξ ἑνὸς πράγματος. Πόσον ἀγοράζομεν μὲ 1 δρχ. ;*

Λύσις. Τρέπομεν τὸν συμμιγῆ 2 ταλ. 3 δρχ. 40 λ. εἰς 1340 λ. καὶ ἔπειτα σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς :

Μὲ 1340 λ. ἀγοράζομεν .. $\frac{3}{4}$ στ.

» 1 » » $\frac{3}{4\times1340}$ »

καὶ » 100 » ἤτοι μὲ 1 δρχ. » $\frac{300}{4\times1340}=\frac{15}{268}$ στ.

ἤτοι 2 ὀκ. 185 $\frac{5}{67}$ δρμ.

8) *Ἡ ὀκᾶ τοῦ τυροῦ τιμᾶται 3 δρχ. 60 λ.* Πόσας ὀκάδας ἀγοράζομεν μὲ 11 *δραχμάς ;*

Λύσις. Τρέπομεν τὸν συμμιγῆ 3 δρχ. 60 λ. εἰς 360 λ. καὶ κατόπιν σκεπτόμεθα οὕτω :

Μὲ 360 λεπ. ἀγοράζομεν 1 ὀκ.

» 1 » » $\frac{1}{360}$ »

» 100 » ἤτοι μὲ 1 δρχ. » $\frac{100}{360}$ »

καὶ » 11 » » $\frac{100\times11}{360}=3$ ὀκ. $22\frac{2}{9}$ δρμ.

9) *Μὲ 1 δρχ. ἀγοράζομεν 2 ὀκ. 100 δρμ. σταφυλῶν. Πόσον θὰ δώσωμεν, διὰ νὰ ἀγοράσωμεν ἐκ τῶν αὐτῶν σταφυλῶν 15 ὀκ. καὶ 300 δρμ ;*

Λύσις. Τρέπομεν καὶ τοὺς δύο συμμιγεῖς εἰς ἀκεραίους ὁμοειδεῖς καὶ λαμβάνομεν 900 δρμ. καὶ 6300 δρμ. Κατόπιν δὲ σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς :

Τὰ 900 δρμ. ἀξίζ. 1 δρχ.

τὸ 1 » » $\frac{1}{900}$ »

καὶ τὰ 6300 » » $\frac{6300}{900}$ » = 7 δρχ.

10) *Ἐργάτης ἐργαζόμενος 1 ἡμέραν λαμβάνει 4 δρχ. 75 λ. Πόσας ἡμέρας πρέπει νὰ ἐργασθῇ, διὰ νὰ λάβῃ 16 τάλ. 75 λ. ;*

Λύσις. Τρέποντες ἀμφοτέρους τοὺς συμμιγεῖς εἰς ἀκεραίους λαμβάνομεν 475 λεπ. καὶ 8075 λεπ. Τότε δὲ σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς:

475 λεπ. λαμβάνει εἰς . . . . **1** ἡμ.

1 » » » . . . . $\frac{1}{475}$ »

καὶ 8075 » » » . . . . $\frac{8075}{475}$ » = 17 ἡμ.

* Πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ ἀκέραιον κατὰ τὴν μέθοδον τῶν ἁπλῶν μερῶν.

163. — Καὶ κατὰ τὴν μέθοδον ταύτην πολλαπλασιάζομεν ἕκαστον μέρος τοῦ συμμιγοῦς χωριστὰ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον, ἀρχίζοντες ὅμως ἀπὸ τὴν ἀνωτάτην τοῦ συμμιγοῦς ὑποδιαίρεσιν (*).

Παραδείγματα.

Α′) *Νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ συμμιγὴς 5 στατ. 33 ὀκ. 240 δρμ. ἐπὶ τὸν ἀκέραιον 440.*

Πολλαπλασιάζομεν πρῶτον τοὺς 5 στατῆρας ἐπὶ 440 καὶ εὑρίσκομεν γινόμενον **2200** στ.

Κατόπιν διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον τῶν 33 ὀκάδων ἐπὶ 440, ἀναλύομεν αὐτὰς εἰς 22 ὀκ. καὶ 11 ὀκ., τοῦτ' ἔστιν εἰς ὑποπολλαπλάσια τοῦ στατῆρος, καὶ εὑρίσκομεν τὰ γινόμενα αὐτῶν ἐπὶ 440 κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον :

Ὁ 1 στατ. (=44 ὀκ.) πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 440 δίδει γινόμενον 440 στ.

Ὅθεν :

αἱ 22 ὀκ. (ἥμισυ τοῦ στ.)$\times 440 = \frac{440}{2}$ στ. = **220** στ.

καὶ » 11 » (» τῶν 22 ὀκ.)$\times 440 = \frac{220}{2}$ » = **110** »

ἑπομένως » $\overline{33}$ » . . . . . . $\times 440 =$ . . . . $\overline{\textbf{330}}$ »

Τέλος διὰ νὰ εὕρωμεν καὶ τὸ γινόμενον τῶν 240 δρμ. ἐπὶ 440, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς :

Εὕρομεν ἀνωτέρω ὅτι αἱ 11 ὀκάδες πολλαπλασιαζόμεναι ἐπὶ 440

(*) Τὴν μέθοδον ταύτην προτιμῶμεν ἰδίως, ὅταν ὁ ἀκέραιος πολλαπλασιαστὴς εἶνε πολυψήφιος.

δίδουσι γινόμενον 110 στατ. Ἄρα ἡ 1 ὀκ. (=400 δρμ.) πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ 440 θὰ δώσῃ γινόμενον $\frac{110}{11}$ στ. = 10 στ.

Ὅθεν :

τὰ 200 δρμ. (ἥμισυ τῆς ὀκᾶς) $\times$ 440 = $\frac{10}{2}$ στ. = **5** στ.

καὶ » 40 » $\left(\frac{1}{5}\right.$ τῶν 200 δρμ.$\left.\right)$ $\times$ 440 = $\frac{5}{5}$ » = **1** »

ἄρα » 240 » . . . . $\times$ 440 = **6** »

Ἀθροίζοντες ἤδη τὰ τρία εὑρεθέντα μερικὰ γινόμενα (2200 στ., 330 στ. καὶ 6 στ.) εὑρίσκομεν ὡς ὁλικὸν γινόμενον τοῦ συμμιγοῦς ἐπὶ τὸν ἀκέραιον, **2536** στατ.

Ἡ πρᾶξις χάριν συντομίας διατάσσεται ὡς ἑξῆς :

5 στ. 33 ὀκ. 240 δρμ.
440
2200 στ.

(1 στ. $\times$ 440 = 440 στ).

33 ὀκ. { 22 ὀκ. (ἥμισυ τοῦ στ.) $\times$ 440 = **220** »
11 » (» τῶν 22 ὀκ.) $\times$ 440 = **110** »

(1 ὀκ. $\times$ 440 = 10 στ.)

240 δ. { 200 δ. (ἥμισυ τῆς ὀκ.) $\times$ 440 = **5** »
40 » ($\frac{1}{5}$ τῶν 200 δρμ.) $\times$ 440 = **1** »

2536 στατ.

Β'.) *Μηχανή τις εἰς 1 ὥραν ὑφαίνει 3 ὀργ. 4 ποδ. 9 δακτ. 11 γρ. ἑνὸς ὑφάσματος. Πόσον θὰ ὑφάνῃ εἰς 180 ὥρας ;*

Λύσις.

3 ὀργ. 4 π. 9 δ. 11 γρ.
180
540 ὀργ.

(1 ὀργ. $\times$ 180 = 180 ὀργ.)

4 ποδ. { 3 ποδ. (ἥμισυ τῆς ὀργ.) $\times$ 180 = **90** »
1 πούς (τρίτον τῶν 3 π.) $\times$ 180 = **30** »

9 δακ. { 6 δακ. (ἥμισυ τοῦ ποδός) $\times$ 180 = **15** »
3 » (» τῶν 6 δακ.) $\times$ 180 = **7** » **3** π.

[1 δ. $\times$ 180 = (7 ὀρ. 3 π) : 3 = 2 ὀρ. 3 π.]

11 γρ. { 6 γρ. (ἥμισυ τοῦ 1 δακ.) $\times$ 180 = **1** » **1** » **6** δ.
3 » (» τῶν 6 γρ.) $\times$ 180 = **3** » **9** »
2 » (τρίτον τῶν 6 ») $\times$ 180 = **2** » **6** »

684 ὀργ. **4** π. **9** δ.

Γ'.) *Παντοπώλης τις ἠγόρασεν 194 ὀκάδας βουτύρου πρὸς 3 δρχ. 20 λ. ἑκάστην ὀκᾶν. Πόσον θὰ πληρώσῃ;*

Λύσις.

3 δρχ. 20 λεπ.
194

582 δρχ.

(1 δρχ. × 194 = 194 δρχ.)

20 λεπ. (πέμπτον τῆς δρχ.) $\times 194 = \frac{194}{5}$ δρχ. = **38** » **80** λεπ.

620 δρχ. **80** λεπ.

Δ'.) *Μὲ 1 δρχ. ἀγοράζει τις 2 πηχ. 5 ῥούπ. ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος. Πόσους πήχεις θὰ ἀγοράσῃ μὲ 140 δραχμάς;*

2 πηχ. 5 ῥούπ.
140

280 πηχ.

(1 πηχ. × 140 = 140 πηχ.)

5 ῥουπ. { 4 ῥουπ. (ἥμισυ τοῦ πηχ.) × 140 = **70** »
{ 1 » (τέταρτον τῶν 4 ῥουπ.) × 140 = **17** » **4** ῥουπ.

367 πηχ. **4** ῥουπ.

Πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ συμμιγῆ κατὰ τὴν μέθοδον τῶν ἁπλῶν μερῶν.

164.—Τὴν χρῆσιν τῆς μεθόδου ταύτης θέλομεν ἐννοήσει ἐκ τῶν ἑπομένων παραδειγμάτων.

Παράδειγμα πρῶτον.—*Ἡ ὀκᾶ ἑνὸς πράγματος ἀξίζει 3 δρχ. 75 λεπ. Πόσον ἀξίζουν 12 ὀκ. 300 δρμ. τοῦ αὐτοῦ πράγματος;*

Λύσις. (3 δρχ. 75 λ.) × (12 ὀκ. 300 δρμ.)

Κατὰ τὴν μέθοδον ταύτην εὑρίσκομεν χωριστὰ πόσον ἀξίζουν πρῶτον αἱ 12 ὀκ. καὶ κατόπιν τὰ 300 δρμ. Διὰ τοῦτο ἀναλύομεν τὸ δοθὲν πρόβλημα εἰς δύο ἄλλα, τὰ ἑξῆς:

α'.) *Ἡ 1 ὀκ. ἀξίζει 3 δρχ. 75 λ. Πόσον ἀξίζουν αἱ 12 ὀκάδες;*

β'.) *Ἡ 1 ὀκ. ἀξίζει 3 δρχ. 75 λ. Πόσον ἀξίζουν τὰ 300 δράμια;*

Καὶ τὸ μὲν πρῶτον ἐκ τῶν προβλημάτων τούτων λύομεν ἀμέσως πολλαπλασιάζοντες τὸν συμμιγῆ 3 δρχ. 75 λ. ἐπὶ 12, καὶ εὑρίσκομεν τοιουτοτρόπως ὅτι αἱ 12 ὀκ. τιμῶνται **45** δρχ.

Διὰ νὰ λύσωμεν δὲ καὶ τὸ δεύτερον σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς: Ἡ

1 όκ. (ήτοι τὰ 400 δρμ.) εἶνε γνωστὸν ἐκ τοῦ προβλήματος ὅτι ἀξίζει 3 δρχ. 75 λ.

Ὅθεν :

Τὰ 200 δρμ.($\frac{1}{2}$ όκ.) θὰ ἀξίζ.(3 δρχ.75 λ.): 2 ἤτοι 1 δρ.87$\frac{1}{2}$ λ.

» 100 » (» τῶν 200 δ.) » (1 » 87 $\frac{1}{2}$ »): 2 » 0 » 93$\frac{3}{4}$ λ.

ἄρα τὰ 300 » » ...... 2 δρχ.81$\frac{1}{4}$ λ.

Ἀθροίζοντες ἤδη τὰ δύο ἐξαγόμενα εὑρίσκομεν ὅτι αἱ 12 όκ. καὶ τὰ 300 δρμ. ἀξίζουν ὁμοῦ **47** *δρχ.* **81 $\frac{1}{4}$** *λ.*

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς :

α'.) αἱ 12 όκ. ἀξίζουν (3 δρχ. 75 λ.)×12=**45** *δρχ.*

β'.) [ἡ 1 » (ἤτοι τὰ 400 δρμ.) ἀξίζ. 3 δρχ. 75 λ.]

300 δ. { τὰ 200 δρμ. ἀξίζ. (3 δρχ. 75 λ.) : 2 = **1** » **87$\frac{1}{2}$** *λ.*

τὰ 100 » » (1 δρχ. 87 $\frac{1}{2}$ λ.) : 2 = **0** » **93$\frac{3}{4}$** »

Ἐπομένως αἱ 12 όκ. 300 δρμ. ἀξίζουν ... **47** δρχ. **81** λ. **$\frac{1}{4}$**.

Παράδειγμα δεύτερον. — Μὲ 1 δρχ. ἀγοράζει τις 4 πηχ. 5 ῥούπ., ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος. Πόσον ἀγοράζει μὲ 7 ταλ. 3 δρχ. 75 λ;

Λύσις.

(4 πηχ. 5 ῥ.) × (7 ταλ. 3 δρχ. 75 λ.)

α'.) Μὲ 1 δρχ. ἀγοράζει 4 π. 5 ῥ.

μὲ 5 » ἤτοι μὲ 1 τάλ. » (4 π. 5 ῥ)×5=23 π. 1 ῥ.

καὶ μὲ 7 τάλ. ..... » (23 » 1 »)×7= .... **161** π. **7** ῥ.

β'.) μὲ 1 δρχ. ..... » 4 » 5 »

μὲ 3 » ...... » (4 » 5 »)×3= .... **13** » **7** »

γ') μὲ 1 δρχ. ἤτοι μὲ 100 λ. » 4 » 5 »

75 λ. { » 50 » » (4 π. 5 ῥ.) : 2= .... **2** » **2$\frac{1}{2}$**»

» 25 » » (2 » 2$\frac{1}{2}$ »): 2 = ... **1** » **1$\frac{1}{4}$**»

Ἐν ὅλῳ **179** π. **1$\frac{3}{4}$**ῥ.

Παράδειγμα τρίτον. — Ἐργάτης τις διὰ 1 ὥραν ἐργασίας λαμβάνει 2 δρχ. 25 λ. Πόσον θὰ λάβῃ, ἂν ἐργασθῇ 5 ἡμ. 7 ὡρ. 30′ ;

Λύσις. (2 δρχ. 25 λ.)×(5 ἡμ. 7 ὡρ. 30′).

α′.) Διὰ 1 ὥρ. λαμβάνει 2 δρχ. 25 λ.
» 12 » ἤτοι διὰ 1 ἡμ. λαμβάνει (2 δρχ. 25 λ.)×12=27 δρχ.
καὶ διὰ 5 ἡμ. λαμβάνει 27×5=...... 135 δρχ.

β′.) Διὰ 1 ὥρ. » 2 δρχ. 25 λ.
» 7 » » (2 » 25 »)×7= 15 » 75 λ.

γ′.) Διὰ 1 ὥρ. ἤτοι διὰ 60′ λαμβάνει 2 δρχ. 25 λ.
» 30′ λαμβάνει (2 δρχ. 25 λ.) : 2= 1 » 12 » $\frac{1}{2}$

Ἐν ὅλῳ... 151 δρχ. 87 λ. $\frac{1}{2}$

Προβλήματα.

1) Ἄνθρωπος ζήσας 65 ἔτη πόσας ἡμέρας ἔζησε ;

Λύσις. 365×65=23725 ἡμέρας. Εἰς τὰ 65 ὅμως ἔτη ἐμπεριέχονται καὶ 16 δίσεκτα. Καὶ ἐπειδὴ τὸ 1 δίσεκτον ἔτος ἔχει 1 ἡμέραν περισσότερον ἀπὸ τὰ κοινά, τὰ 16 δίσεκτα θὰ ἔχωσι 16 περιπλέον ἡμέρας, τὰς ὁποίας πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὰς εὑρεθείσας 23725 ἡμέρας. Τοιουτοτρόπως εὑρίσκομεν ὅτι ὁ ἄνθρωπος οὗτος ἔζησεν 23741 ἡμέρας.

2) Ταξειδεύων τις ἐπὶ 3 ἡμέρας, ἐδαπάνησε τὴν μὲν πρώτην ἡμέραν 3 τάλ. 3 δρχ. 30 λ., τὴν δευτέραν 2 τάλ. 4 δρχ. καὶ τὴν τρίτην 4 τάλ. 95 λ. Ἀναχωρῶν εἶχε λάβει μαζί του 135 δρχ. Πόσα τοῦ ἐπερίσσευσαν ; (Ἀπ. 81 δρχ. 75 λ.)

3) Πόσον χρόνον θὰ χρειασθῇ τις διὰ νὰ ἀντιγράψῃ βιβλίον ἀποτελούμενον ἐξ 139 φύλλων, ὅταν δι᾽ ἑκάστην σελίδα χρειάζηται κατὰ μέσον ὅρον 15′ 40″ ; (Ἀπ. 72 ὡρ. 35′ 20″)

4) Ἡ πλευρὰ κανονικοῦ τινος πενταγώνου, ἔχοντος δηλ. πάσας τὰς πλευρὰς αὐτοῦ ἴσας καὶ πάσας τὰς γωνίας ἴσας) ἔχει μῆκος 2 ὀργ. 5 π. 2 δ. 6 γρ. Πόσον εἶνε τὸ μῆκος ὅλων ὁμοῦ τῶν πλευρῶν του ; (Ἀπ. 14 ὀργ. 2 π. 6 γρ.)

5) Ἐργάται τινὲς ἀνέλαβον νὰ κτίσωσιν ἐντὸς τριῶν ἡμερῶν τοῖχον ὕψους 7 ὀργ. 4 π. 5 δ. Ἔκτισαν δὲ τὴν μὲν α′ ἡμέραν 2 ὀργ. 5 π. 8 γρ., τὴν δὲ β′ 3 ὀργ. 8 δ. 2 γρ. Πόσον ὑπολείπεται νὰ κτίσωσι τὴν τρίτην ἡμέραν ; (Ἀπ. 1 ὀργ. 4 π. 8 δ. 2 γρ.)

6) Παντοπώλης τις ἀγοράσας 17 ὀκ. καφὲ πρὸς 1 τάλ. 35 λ. τὴν ὀκᾶν, ἐπώλησε κατόπιν αὐτὸν καὶ ἐκέρδισε 2 τάλ. 2 δρχ. 75 λ. Νὰ εὑρεθῇ α′) πόσον τὸν ἐπώλησε κατ᾽ ὀκᾶν, β′) πόσα ἔλαβεν ἐν ὅλῳ ἐκ τῆς πωλήσεως αὐτοῦ καὶ γ′.) πόσον κέρδος ἀντιστοιχεῖ εἰς ἑκάστην δραχμὴν τοῦ κεφαλαίου του ;

['Απ. α') 1 τάλ. 1 δρχ. 10 λ., β') 5 εἰκ. 3 δρχ. 70 λ. καὶ γ') 14... λ.]

7) Δαπανήσας τις τὰ $\frac{8}{11}$ τῶν χρημάτων του ἔχει ἀκόμη 13 εἰκ. 3 τάλ. 3 δρχ. Πόσα χρήματα εἶχε;

('Απ. 50 εἰκ. 3 τάλ. 4 δρχ. 33 λ. $\frac{1}{3}$)

8) Εἰς πελάτην ἀγοράσαντα ἐμπορεύματα ἀξίας 18 εἰκ. 3 ταλ. 4 δρχ. ἐγένετο ὑπὸ τοῦ καταστήματος ἔκπτωσις 2 εἰκ. 1 ταλ. 4 δρχ. Πόσας δραχμὰς θὰ πληρώσῃ ὁ πελάτης διὰ τὰ ἐμπορεύματα, τὰ ὁποῖα ἠγόρασε, καὶ πόση ἔκπτωσις ἀντιστοιχεῖ εἰς ἑκάστην δραχμήν;

('Απ θὰ πληρώσῃ 330 δρχ. Ἡ δὲ ἔκπτωσις εἰς ἑκάστην δραχμὴν εἶνε 13 περίπου λεπτά).

9) 157 τετραγ. μέτρα πρὸς πόσους τεκτον. τετραγ. πήχ. ἰσοδυναμοῦσι;

('Απ. πρὸς 279 $\frac{1}{9}$ τεκτ. τετρ. π.)

10) 364 τεκτ. τετραγ. πήχεις πρὸς πόσα τετραγ. μέτρα ἰσοδυναμοῦσι; ('Απ. πρὸς 204,75 τετρ. μέτρ. ἤτοι πρὸς 204 τετρ. μέτρ. καὶ 75 τετρ. παλ.).

11) Ἠγόρασέ τις οἰκόπεδον 378 τετραγ. μέτρων πρὸς 3 τάλ. 4 δρχ. 35 λ. τὸ τετραγ. μέτρον, καὶ ἐπώλησεν ἔπειτα αὐτὸ πρὸς 1 εἰκ. 2 δρχ. 50 λ. τὸν τεκτον. τετραγ. πῆχυν. Πόσον ὠφελήθη; ('Απ. 390 εἰκ. 1 τάλ. 70 λ.

12) Ἐγεννήθη τις τὴν 5 Ἰουλίου 1868, ὥραν 7 π. μ. καὶ ἀπέθανε τὴν 13 Δεκεμβρίου 1899, ὥραν 11 μ. μ. Εἰς ποίαν ἀκριβῶς ἡλικίαν ἀπέθανε;

Λύσις. Τρέπομεν πρῶτον τὰς δύο χρονολογίας εἰς ἀριθμοὺς συμμιγεῖς καὶ ἔπειτα κάμνομεν ἀφαίρεσιν. Τὴν τροπὴν ταύτην ἐκτελοῦμεν σκεπτόμενοι ὡς ἑξῆς:

Τὸ ἔτος 1868, κατὰ τὸ ὁποῖον ἐγεννήθη, δὲν ἦτο ἀκόμη συμπεπληρωμένον. Ἄρα συμπεπληρωμένα ἔτη ἔχομεν 1867. Ἐπίσης ὁ Ἰούλιος, ὅστις εἶνε 7ος μήν, καὶ αὐτὸς δὲν εἶχε παρέλθει ὁλόκληρος· ἑπομένως ἔχομεν 6 μόνον μῆνας συμπεπληρωμένους. Τέλος καὶ ἡ 5η Ἰουλίου δὲν εἶχε λήξει ἀκόμη (θὰ ἔληγε τὸ μεσονύκτιον, διότι τὸ ἡμερονύκτιον λογίζεται ἀπὸ μεσονυκτίου εἰς μεσονύκτιον)· διὰ τοῦτο λαμβάνομεν 4 ἡμέρας πλήρεις. Ἔχομεν δὲ πρὸς τούτοις καὶ 7 ὥρας ἀπὸ τὴν 5ην Ἰουλίου. Τοιουτοτρόπως ἡ πρώτη χρονολογία τρέπεται εἰς τὸν συμμιγῆ:

1867 ἔτ. 6 μην. 4 ἡμ. 7 ὥρ.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἐργαζόμενοι καὶ ἐπὶ τῆς δευτέρας χρονολογίας λαμβάνομεν ἐξ αὐτῆς τὸν συμμιγῆ:

1898 ἔτ. 11 μην. 12 ἡμ. 23 ὥρ.

Ἀφαιροῦντες ἤδη τὸν πρῶτον ἀπὸ τὸν δεύτερον εὑρίσκομεν, ὅτι ὁ περὶ οὗ πρόκειται ἄνθρωπος ἔζησε:

31 ἔτ. 5 μην. 8 ἡμ. 16 ὥρ.

13) Ἐγεννήθη τις τὴν 6ην Αὐγούστου 1854 εἰς τὰς 4 μ. μ., καὶ ἀπέθανε ζήσας 21 ἔτ. 21 ἡμ. 21 ὥρ. Πότε ἀπέθανε;

Λύσις. Τρέπομεν πρῶτον τὴν χρονολογίαν τῆς γεννήσεως εἰς ἀριθμὸν συμμιγῆ, κατὰ τὰ ἀνωτέρω, καὶ εὑρίσκομεν 1853 ἔτ. 7 μην. 5 ἡμ. 16 ὡρ. Εἰς τοῦτον προσθέτομεν καὶ τὰ ἔτη τὰ ὁποῖα ἔζησε, καὶ εὑρίσκομεν 1874 ἔτ. 7 μην. 27 ἡμ. 13 ὡρ. Τέλος δὲ τὸν συμμιγῆ τοῦτον τρέπομεν εἰς χρονολογίαν σκεπτόμενοι ὡς ἑξῆς : Τὸ 1874 εἶνε συμπεπληρωμένον, ἔχομεν δὲ καὶ μῆνάς τινας ἀκόμη. Οἱ μῆνες οὗτοι θὰ ἀνήκωσι βεβαίως εἰς τὸ ἀμέσως ἑπόμενον ἔτος 1875. Κατόπιν παρατηροῦμεν ὅτι ἔχομεν τὸν 7ον μῆνα συμπεπληρωμένον, ἀκόμη δὲ καὶ ἡμέρας τινάς. Αἱ ἡμέραι λοιπὸν αὗται θὰ ἀνήκωσιν εἰς τὸν ἑπόμενον μῆνα, ἤτοι τὸν 8ον, ὁ ὁποῖος εἶνε ὁ Αὔγουστος. Ἡ 27η ἡμέρα τοῦ μηνὸς τούτου εἶνε καὶ αὐτὴ συμπεπληρωμένη, ἔχομεν δὲ καὶ 13 ἀκόμη ὥρας. Ἄρα εὑρισκόμεθα εἰς τὴν 28ην Αὐγούστου. Αἱ 13 ὧραι τέλος σημαίνουσι τὴν 1 μ. μ. Ἀπέθανε λοιπὸν τὴν 28ην Αὐγούστου 1875, τὴν 1 ὡρ μ. μ.

14) Μετὰ ἀποδημίαν 5 ἐτ. 9 μην. 26 ἡμ. καὶ 9 ὡρ. ἐπέστρεψέ τις εἰς τὴν πατρίδα του τὴν 27ην Ὀκτωβρίου 1900, εἰς τὰς 9 μ. μ. Πότε εἶχεν ἀναχωρήσει ;

Λύσις. Τρέπομεν πρῶτον τὴν χρονολογίαν τῆς ἐπανόδου εἰς ἀριθμὸν συμμιγῆ. Ἀπὸ τοῦτον ἀφαιροῦμεν ἔπειτα τὰ ἔτη, τοὺς μῆνας, τὰς ἡμέρας καὶ τὰς ὥρας τῆς ἀποδημίας, καὶ τέλος τὴν προκύπτουσαν διαφορὰν τρέπομεν εἰς χρονολογίαν. Τοιουτοτρόπως εὑρίσκομεν ὅτι ὁ ἄνθρωπος οὗτος εἶχεν ἀναχωρήσει ἐκ τῆς πατρίδος του τὴν 1ην Ἰανουαρίου 1895, ἀκριβῶς τὴν μεσημβρίαν.

15) Παντοπώλης ἠγόρασε 16 σάκκους, ἕκαστος τῶν ὁποίων περιεῖχε 83 χιλιογρ. καὶ 500 γραμ. καφέ, πρὸς 3 δρχ. 70 λ. τὸ χιλιόγραμμον. Πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ τὴν ὀκᾶν, ἐὰν θέλῃ ἐκ τῆς πωλήσεως τοῦ ὅλου καφὲ νὰ κερδίσῃ 156 δρχ. καὶ 80 λεπτά ; (Ἀπ. 4,88...δρχ.).

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΟΥΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

ΒΙΒΛΙΟΝ Ε'.

ΠΕΡΙ ΜΕΘΟΔΩΝ

Ὁρισμοί.

Ποσὰ ἀνάλογα.

165. — Δύο ποσὰ λέγονται *ἀνάλογα*, ἐὰν πολλαπλασιαζομένου τοῦ ἑνὸς ἐπί τινα ἀριθμὸν πολλαπλασιάζηται καὶ τὸ ἄλλο ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν· ἢ ἐὰν διαιρουμένου τοῦ ἑνὸς διά τινος ἀριθμοῦ διαιρῆται καὶ τὸ ἄλλο διὰ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ.

Ἂς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι 6 ὀκ. πράγματός τινος ἀξίζουν 14 δρχ. Ἐὰν αἱ ὀκάδες διπλασιασθῶσι καὶ γείνωσι 12, καὶ αἱ δραχμαὶ ἐπίσης θὰ διπλασιασθῶσι καὶ θὰ γείνωσιν 28. Ἐὰν δὲ ὁ ἀριθμὸς τῶν ὀκάδων διαιρεθῇ διὰ τοῦ 2 καὶ γείνῃ 3, καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν δραχμῶν θὰ διαιρεθῇ διὰ τοῦ 2 καὶ θὰ γείνῃ 7. Ἄρα αἱ ὀκάδες καὶ αἱ δραχμαὶ εἶνε ποσὰ *ἀνάλογα*.

Σημείωσις. — Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι ὅταν δύο ποσὰ ἁπλῶς συναυξάνωνται, δὲν δύνανται νὰ ὀνομασθῶσι διὰ τοῦτο καὶ ἀνάλογα. Π.χ. τὸ ἀνάστημα ἑνὸς παιδίου αὐξάνεται μετὰ τῆς ἡλικίας αὐτοῦ (μέχρις ὁρίου τινός), ἀλλ' ἐν τούτοις τὰ δύο ταῦτα ποσὰ δὲν εἶνε ἀνάλογα· διότι εἰς διπλασίαν ἡλικίαν δὲν ἀντιστοιχεῖ καὶ ἀκριβῶς διπλάσιον ἀνάστημα.

166. — *Ἀντίστροφα* ἢ *ἀντιστρόφως ἀνάλογα* λέγομεν δύο ποσά, ἐὰν ἐπ' αὐτῶν παρατηρήσωμεν ὅτι, ὅταν τὸ ἓν πολλαπλασιασθῇ ἐπί τινα ἀριθμόν, τὸ ἄλλο διαιρεῖται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ· ἢ ὅτι, ὅταν τὸ ἓν διαιρεθῇ διά τινος ἀριθμοῦ, τὸ ἄλλο πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Π.χ. ἐργάτης ἐργαζόμενος 4 ὥρας τὴν ἡμέραν, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τελειώνει ἔργον τι εἰς 20 ἡμέρας. Ἐὰν ἐργάζηται 8 ὥρας τὴν ἡμέραν, θὰ τελειώσῃ τὸ αὐτὸ ἔργον εἰς 10 μόνον ἡμέρας· ἐὰν δὲ ἐργάζηται 2 ὥρας τὴν ἡμέραν, θὰ χρειασθῇ 40 ἡμέρας διὰ νὰ τὸ τελειώσῃ. Παρατηροῦμεν δηλ. εἰς τὸ παράδειγμα τοῦτο ὅτι ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν ὡρῶν διπλασιασθῇ, ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν γίνεται ὁ ἥμισυς, καὶ ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν ὡρῶν γείνῃ ὁ ἥμισυς, ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν διπλασιάζεται. Ἄρα αἱ ὧραι τῆς καθημερινῆς ἐργασίας καὶ αἱ ἡμέραι, εἰς τὰς ὁποίας περατοῦται ἔργον τι, εἶνε ποσὰ *ἀντίστροφα*.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ

167.— *Μέθοδος* λέγεται γενικός τις τρόπος, κατὰ τὸν ὁποῖον λύομεν εὐκόλως εἶδός τι προβλημάτων.

168.— Διὰ τῆς *μεθόδου τῶν τριῶν* λύομεν ἐκεῖνα τὰ προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα δίδονται αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ δύο ποσῶν ἀναλόγων ἢ ἀντιστρόφων καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τί γίνεται ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν, ὅταν ἡ τιμὴ τοῦ ἄλλου μεταβληθῇ. Λέγεται δὲ μέθοδος *τῶν τριῶν*, διότι εἰς τὰ δι' αὐτῆς λυόμενα προβλήματα δίδονται τρεῖς ἀριθμοὶ καὶ δι' αὐτῶν ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ὁ ἄγνωστος τέταρτος.

Ἕκαστον πρόβλημα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς δύο ἁπλούστερα, λυόμενα τὸ μὲν ἓν δι' ἑνὸς πολλαπλασιασμοῦ τὸ δὲ ἕτερον διὰ μιᾶς διαιρέσεως.

Πρόβλημα πρῶτον.— *7 πήχεις ἑνὸς ὑφάσματος ἀξίζουν 13 δρχ. Πόσον ἀξίζουν 19 πήχεις ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος;*

Λύσις. Κατατάσσομεν πρῶτον τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς ὡς ἑξῆς:

$$\begin{array}{cc} \text{πηχ.} & \text{δρχ.} \\ 7 & 13 \\ \hline 19 & \chi \end{array}$$

γράφοντες δηλ. εἰς μίαν σειρὰν τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῶν δύο ποσῶν, εἰς δευτέραν δὲ σειρὰν τὴν νέαν τιμὴν τοῦ ἑνὸς καὶ τὴν ζητουμένην νέαν τιμὴν τοῦ ἄλλου, ἀλλ' οὕτως ὥστε τὰ ὁμοειδῆ ποσὰ νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν κατακόρυφον στήλην. Τὴν ἄγνωστον τιμὴν τοῦ ἑτέρου τῶν δύο ποσῶν παριστῶμεν διὰ τοῦ γράμματος χ.

Ἔπειτα παρατηροῦμεν ὅτι τὸ πρόβλημα τοῦτο δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς τὰ ἑξῆς δύο ἁπλούστερα:

α'.) Οἱ 7 πήχ. ἀξίζουν 13 δρχ. Πόσον ἀξίζει ὁ 1 πῆχυς ;

$\left(\text{'Απ.} \frac{13}{7} \text{ δρχ.}\right)$

β'.) Ὁ 1 πηχ. ἀξίζει $\frac{13}{7}$ *δρχ. Πόσον ἀξίζουν οἱ 19 πήχεις ;*

$\left(\text{'Απ.} \frac{13 \times 19}{7} \text{ δρχ.}\right)$

Τὰ δύο ταῦτα στοιχειώδη προβλήματα ἐλύσαμεν διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα σκεπτόμενοι ὡς ἑξῆς :

Ἀφ' οὗ οἱ 7 πηχ. ἀξίζουν 13 δρχ., ὁ 1 πῆχυς θὰ ἀξίζῃ 7 φορὰς ὀλιγώτερον τῶν 13 δρχ., ἤτοι $\frac{13}{7}$ δρχ.

Καὶ ἀφ' οὗ 1 πῆχυς ἀξίζει $\frac{13}{7}$ δρχ., οἱ 19 πηχ. θὰ ἀξίζουν 19 φορὰς περισσότερον τῶν $\frac{13}{7}$ δρχ. ἤτοι $\frac{13}{7} \times 19$ δρχ.

Ἐκ τοῦ εὑρεθέντος ἀποτελέσματος $\left(\frac{13 \times 19}{7} \text{δρχ.}\right)$ συνάγομεν ὅτι:

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ἄγνωστον χ, ὅταν τὰ ποσὰ εἶνε ἀνάλογα, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ὑπεράνω αὐτοῦ ὁμοειδῆ ἀριθμὸν ἐπὶ τὸ κλάσμα, τὸ ὁποῖον ἀποτελοῦσιν οἱ δύο ἄλλοι ἀριθμοί, ἀντεστραμμένον.

Πρόβλημα δεύτερον. — *9 ἐργάται ἐκτελοῦσιν ἔργον τι εἰς 20 ἡμέρας· 15 ἐργάται εἰς πόσας ἡμέρας θὰ ἐκτελέσωσι τὸ αὐτὸ ἔργον ;*

Διάταξις τῶν ἀριθμῶν τοῦ προβλήματος :

ἐργ.	ἡμ.
9	20
15	χ

Λύσις. Καὶ τὸ πρόβλημα τοῦτο δυνάμεθα νὰ ἀναλύσωμεν εἰς τὰ ἑξῆς δύο :

α'.) 9 ἐργάται ἐκτελοῦσιν ἔργον τι εἰς 20 ἡμέρας. Ὁ 1 ἐργ. εἰς πόσας ἡμέρας θὰ ἐκτελέσῃ μόνος τὸ αὐτὸ ἔργον ;

('Απ. εἰς 20×9 ἡμ.)

β'.) Ὁ 1 ἐργ. ἐκτελεῖ τὸ ἔργον εἰς 20×9 *ἡμ. Οἱ 15 ἐργάται εἰς πόσας ἡμέρας θὰ ἐκτελέσωσι τὸ αὐτὸ ἔργον ;* $\left(\text{'Απ. εἰς } \frac{20 \times 9}{15} \text{ ἡμ.}\right)$

Τὰ δύο ταῦτα προβλήματα ἐλύσαμεν ἐπίσης διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα σκεπτόμενοι κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον:

Ἀφ' οὗ οἱ 9 ἐργάται ἐκτελοῦσιν ἓν ἔργον εἰς 20 ἡμέρας, ὁ 1 ἐργ., διὰ νὰ ἐκτελέσῃ μόνος τὸ αὐτὸ ἔργον, θὰ χρειασθῇ ἐννεαπλασίας ἡμέρας, ἤτοι 20×9 ἡμ.

Καὶ ἀφ' οὗ ὁ 1 ἐργ. χρειάζεται 20×9 ἡμέρας, οἱ 15 ἐργάται θὰ χρειασθῶσι βεβαίως 15 φορὰς ὀλιγώτερον χρόνον ἤτοι $\frac{20 \times 9}{15}$ ἡμ.

Ἐκ τοῦ ἀποτελέσματος τούτου $\left(\frac{20 \times 9}{15}\text{ ἡμ.}\right)$ συνάγομεν ὅτι:

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ἄγνωστον χ, ὅταν τὰ ποσὰ εἶνε ἀντίστροφα, ὡς ἐν τῷ προβλήματι τούτῳ, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ὑπεράνω αὐτοῦ ὁμοειδῆ ἀριθμὸν ἐπὶ τὸ κλάσμα, τὸ ὁποῖον ἀποτελοῦσιν οἱ δύο ἄλλοι ἀριθμοί, λαμβανόμενον ὅπως ἔχει.

Γενικὸς κανών.

Οἱ δύο κανόνες, τοὺς ὁποίους ἐμορφώσαμεν ἀνωτέρω διὰ τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων τῆς μεθόδου τῶν τριῶν, δύνανται νὰ περιληφθῶσιν εἰς ἕνα μόνον, τὸν ἑξῆς:

169. — *Διὰ νὰ λύσωμεν πᾶν πρόβλημα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν, μετὰ τὴν κατάλληλον διάταξιν τῶν ἀριθμῶν πολλαπλασιάζομεν τὸν ὑπεράνω τοῦ χ ἀριθμὸν ἐπὶ τὸ κλάσμα, τὸ ὁποῖον ἀποτελοῦσιν οἱ δύο ἄλλοι ἀριθμοί, ἀντεστραμμένον μὲν ἐὰν τὰ ποσὰ εἶνε ἀνάλογα, ὅπως ἔχει δὲ ἐὰν ταῦτα εἶνε ἀντίστροφα.*

Σημείωσις α'. — Τὸν κανόνα τοῦτον ἐφαρμόζομεν οὐ μόνον ὅταν οἱ ἀριθμοὶ εἶνε ἀκέραιοι, ὅπως εἰς τὰ δύο ἀνωτέρω παραδείγματα, ἀλλὰ καὶ ὅταν εἶνε ὁποιοιδήποτε, οἷον κλασματικοὶ ἢ μεικτοὶ ἢ δεκαδικοὶ ἢ συμμιγεῖς.

Σημείωσις β'. — Οἱ δύο ἀριθμοὶ οἱ ἀποτελοῦντες τὸ κλάσμα πρέπει νὰ γίνωνται ἐκ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς μονάδος.

	ὀκ.		δρχ.
Π. χ.	10	τιμῶνται	42
	2 στ. 3 ὀκ. 25 δρμ.	»	χ

Τρέπομεν ἀμφοτέρους τοὺς ἀριθμοὺς τοὺς ἀποτελοῦντας τὸ κλάσμα εἰς δράμια, ὥστε νὰ γίνωνται ἐκ τῆς αὐτῆς μονάδος, καὶ λαμβάνομεν:

δρμ.		δρχ.
4000	τιμῶνται	42
36425	»	χ

Ἔπειτα δὲ κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα εὑρίσκομεν ὅτι

$$\chi = 42 \times \frac{36425}{4000} = 382{,}46 \text{ δρχ.}$$

Προβλήματα.

1) Μὲ 87 δρχ. 75 λ. ἠγοράσαμεν 65 ὀκ. ἐλαίου. Πόσας ὀκάδας ἐκ τοῦ αὐτοῦ ἐλαίου δυνάμεθα νὰ ἀγοράσωμεν μὲ 55 δραχμάς;
('Απ. 40 ὀκ. 296 δρμ.)

2) Ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος ἔχοντος πλάτος 5 ῥουπίων, χρειαζόμεθα 5 πηχ. 7 ῥ., διὰ νὰ κατασκευάσωμεν μίαν ἐνδυμασίαν. Πόσους πήχεις θὰ χρειασθῶμεν πρὸς τὸν αὐτὸν σκοπὸ, ἐξ ἑνὸς ἄλλου ὑφάσματος ἔχοντος πλάτος 7 ῥουπίων;
('Απ. 4 πηχ. 1 ῥ. $\frac{4}{7}$)

3) Ἐργαζόμενος 10 ὥρ. τὴν ἡμέραν ἐτελείωσεν ἐργάτης τις ἓν ἔργον εἰς 17 ἡμ. Ἐὰν εἰργάζετο 7 ὥρ. καθ' ἑκάστην, εἰς πόσας ἡμέρας θὰ ἐτελείωνε τὸ αὐτὸ ἔργον; ('Απ. εἰς 24 ἡμ. 2 ὥρ.)

4) 5 ὀκ. 150 δρμ. βουτύρου ἀξίζουν 24 δρχ. 50 λ. Πόσον ἀξίζουν 7 ὀκ. τοῦ αὐτοῦ βουτύρου; ('Απ. 31 δρχ. 90 λ.)

5) Μία ῥάπτρια κατεσκεύασεν ἐκ δύο διαφόρων ὑφασμάτων δύο φορέματα ἴσα καὶ ὅμοια. Ἐκ τοῦ ἑνὸς ὑφάσματος, τὸ ὁποῖον εἶχε πλάτος 1 π. 3 ῥ., ἐχρειάσθη 10 π., ἐκ δὲ τοῦ ἑτέρου ἐχρειάσθη 13 π. 4 ῥ. Πόσον ἦτο τὸ πλάτος τοῦ δευτέρου ὑφάσματος;
('Απ. 1 π. $\frac{4}{27}$ ῥ.)

6) Ἐργάτης τις ἐργασθεὶς 18 ἡμ. ἔλαβεν ὡς ἀμοιβὴν 46 δρχ. 20 λ. Ἐὰν ἐργασθῇ 1 μην. 20 ἡμ. μὲ τὸ αὐτὸ ἡμερομίσθιον, πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ; (Απ. 128 δρχ. 33 λ. $\frac{1}{3}$.)

ΣΥΝΘΕΤΟΣ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ

170.— Διὰ τῆς μεθόδου ταύτης λύονται τὰ προβλήματα ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα μᾶς δίδονται αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τριῶν ἢ περισσοτέρων ποσῶν καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τί γίνεται ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν, ὅταν αἱ τιμαὶ πάντων τῶν ἄλλων μεταβληθῶσιν.

Ἕκαστον πρόβλημα τῆς μεθόδου ταύτης ἀναλύεται εἰς δύο ἢ περισσότερα προβλήματα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν. Διὰ τοῦτο ἡ νέα αὕτη μέθοδος καλεῖται *σύνθετος μέθοδος τῶν τριῶν* πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τῆς προηγουμένης, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν *ἁπλῆν μέθοδον τῶν τριῶν*.

Τὸν τρόπον, καθ' ὃν λύονται τὰ προβλήματα τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν, θέλομεν ἐννοήσει ἐκ τῶν ἑπομένων παραδειγμάτων :

Πρόβλημα πρῶτον. — *Τεμάχιον ὑφάσματος ἔχον μῆκος 12 πηχ. καὶ πλάτος 3 πηχ., ἀξίζει 70 δρχ. Πόσον ἀξίζει ἄλλο τεμάχιον ὑφάσματος τῆς αὐτῆς ποιότητος, τὸ ὁποῖον ἔχει μῆκος 30 πηχ. καὶ πλάτος 2 πήχεων ;*

	π. μηκ.	π. πλ.	δρχ.
Διάταξις :	12	3	70
	30	2	χ

Λύσις. Ἄς ὑποθέσωμεν κατὰ πρῶτον ὅτι μόνον τὸ μῆκος τοῦ ὑφάσματος μετεβλήθη ἀπὸ 12 πηχ. εἰς 30, τὸ δὲ πλάτος ὅτι ἐξακολουθεῖ νὰ μένῃ τὸ αὐτό, δηλ. 3 πηχ. Θὰ ἔχωμεν τότε τὸ ἑξῆς πρόβλημα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν :

			πηχ.		δρχ.
Τεμάχιον	*ὑφάσματος*	*ἔχον μῆκος*	12	*τιμᾶται*	70
ἄλλο »	*τοῦ αὐτοῦ* »	» »	30	»	χ

τὸ ὁποῖον λύοντες κατὰ τὸν γνωστὸν κανόνα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν εὑρίσκομεν $\frac{70 \times 30}{12}$ δρχ.

Ἄν ἤδη ὑποθέσωμεν ὅτι καὶ τὸ πλάτος μεταβάλλεται, καὶ ἀπὸ 3 πηχ. ὅτι γίνεται 2, λαμβάνομεν καὶ δεύτερον πρόβλημα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν, τὸ ἑξῆς :

Τεμάχ. ὑφάσμ. . . . . . *ἔχον πλάτ.* 3 *π. τιμᾶται* $\frac{70 \times 30}{12}$ δρχ. (*)

» » *τῆς αὐτῆς ποιότ.*
καὶ τοῦ αὐτοῦ μήκ. » 2 » » χ

Λύοντες δὲ καὶ τοῦτο κατὰ τὸν αὐτὸν κανόνα εὑρίσκομεν, ὅτι ὅταν τὸ ὕφασμα ἔχῃ μῆκος 30 πήχ. καὶ πλάτος 2 πηχ, θὰ ἀξίζῃ $\frac{70 \times 30 \times 2}{12 \times 3} = 116,66....$ δρχ.

(*) Τὸ μῆκος ἤδη ὑποτίθεται 30 πηχ.

Σημείωσις.—Τὸ αὐτὸ πρόβλημα δυνάμεθα νὰ λύσωμεν καὶ διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα, ὡς ἑξῆς:

Ὅταν τὸ ὕφασμα ἔχῃ	12π. μηκ.	καὶ	3 π.πλ.,	τιμᾶται	70	δρχ.
» » »	» 1	»	3	» »	$\frac{70}{12}$	»
» » »	» 1	»	1	» »	$\frac{70}{12\times3}$	»
» » »	» 30	»	1	» »	$\frac{70\times30}{12\times3}$	»
καὶ » » »	» 30	»	2	» »	$\frac{70\times30\times2}{12\times3}$	»

Πρόβλημα δεύτερον.—8 *ἐργάται ἐργαζόμενοι* 10 *ὥρας καθ' ἑκάστην ἔσκαψαν εἰς* 20 *ἡμέρας τάφρον ἔχουσαν μῆκος* 120 *πήχεων. Πόσας ὥρας τὴν ἡμέραν πρέπει νὰ ἐργάζωνται* 12 *ἐργάται διὰ νὰ σκάψωσιν εἰς* 18 *ἡμ. ἑτέραν τάφρον ἔχουσαν τὸ αὐτὸ βάθος καὶ τὸ αὐτὸ πλάτος, μῆκος δὲ* 100 *πήχεων;*

	ἐργ.	ὡρ.	ἡμ.	π. μηκ.
Διάταξις :	8	10	20	120
	12	χ	18	100

Λύσις. Τὸ πρόβλημα τοῦτο τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν θὰ ἀναλύσωμεν εἰς τρία ἄλλα τῆς ἁπλῆς. Καὶ πρῶτον ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι μόνον ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν μεταβάλλεται, καὶ ἀπὸ 8 ὅτι γίνεται 12, τὰ δὲ ἄλλα ὅτι μένουσι τὰ αὐτά· θὰ ἔχωμεν τότε τὸ ἑξῆς πρόβλημα:

ἐργ.			ὡρ.	
8	*διὰ νὰ τελειώσωσιν*	*ἔργον τι, ἐργάζονται*	10	*καθ' ἑκάστην*
12	» » »	*τὸ αὐτὸ ἔργον* »	χ	» »

τὸ ὁποῖον λύοντες εὑρίσκομεν $10\times\frac{8}{12}$ ὡρ.

Κατόπιν ὑποθέτομεν ὅτι καὶ τῶν ἡμερῶν ὁ ἀριθμὸς μεταβάλλεται καὶ ἀπὸ 20 ὅτι γίνεται 18, τὸ δὲ μῆκος ὅτι μένει τὸ αὐτὸ (120 μ.). Τότε λαμβάνομεν τὸ ἑξῆς δεύτερον πρόβλημα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν:

Ἵνα περατωθῇ ἔργον τι εἰς 20 ἡμ., πρέπει νὰ ἐργάζ. οἱ ἐργ. (*) $10 \times \frac{8}{12}$ ὡρ. καθ' ἑκάστ.

» τὸ αὐτὸ ἔργον » 18 » » » » οἱ αὐτοὶ » x »

Ἐκ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν $\frac{10 \times 8 \times 20}{12 \times 18}$ ὡρ.

Τέλος μεταβάλλομεν καὶ τὸ μῆκος καὶ λαμβάνομεν τὸ ἑξῆς τελευταῖον πρόβλημα :

Ἵνα σκάψ. 120 μ. μηκ., πρέπει οἱ ἐργ. νὰ ἐργάζωνται $\frac{10 \times 8 \times 20}{12 \times 18}$ ὡρ. καθ' ἑκάστ.

» » 100 » » » οἱ αὐτοὶ ἐργ. » » x » »

Λύοντες δὲ καὶ τοῦτο εὑρίσκομεν $\frac{10 \times 8 \times 20 \times 100}{12 \times 18 \times 120} = 6$ ὡρ. 10'.

Ἐκ τῆς λύσεως τῶν ἀνωτέρω προβλημάτων συνάγομεν τὸν ἑξῆς γενικὸν κανόνα :

171. — *Διὰ νὰ λύσωμεν πᾶν πρόβλημα τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν, μετὰ τὴν κατάλληλον διάταξιν τῶν ἀριθμῶν πολλαπλασιάζομεν τὸν ὑπεράνω τοῦ χ ἀριθμὸν ἐπὶ τὸ γινόμενον πάντων τῶν κλασμάτων, τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦνται ἐκ τῶν δύο τιμῶν ἑκάστου ποσοῦ. Ἕκαστον τῶν κλασμάτων τούτων λαμβάνομεν ἀντεστραμμένον μέν, ἐὰν τὸ ποσὸν αὐτοῦ καὶ τὸ ποσὸν τοῦ ἀγνώστου εἶνε ἀνάλογα, ὅπως ἔχει δὲ ἐὰν τὰ δύο ταῦτα ποσὰ εἶνε ἀντίστροφα.*

Σημείωσις α'. — Καὶ ἐνταῦθα οἱ δύο ἀριθμοὶ οἱ ἀποτελοῦντες ἕκαστον κλάσμα πρέπει νὰ γίνωνται ἐκ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς μονάδος.

Σημείωσις β'. — Καὶ τὸ δεύτερον ἐκ τῶν ἀνωτέρω δύο προβλημάτων δυνάμεθα νὰ λύσωμεν διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον :

8 ἐργ. διὰ νὰ σκάψ. εἰς	20 ἡμ.	120 μ. μηκ., πρέπει νὰ ἐργάζ. καθ' ἑκάστην	10	ὡρ.
1 » » » » »	20 »	120 » » » » »	10×8	»
1 » » » » »	1 »	120 » » » » »	$10 \times 8 \times 20$	»
1 » » » » »	1 »	1 » » » » »	$\frac{10 \times 8 \times 20}{120}$	»
12 » » » » »	1 »	1 » » » » »	$\frac{10 \times 8 \times 20}{120 \times 12}$	»
12 » » » » »	18 »	1 » » » » »	$\frac{10 \times 8 \times 20}{120 \times 12 \times 18}$	»
καὶ 12 » » » » »	18 »	100 » » » » »	$\frac{10 \times 8 \times 20 \times 100}{120 \times 12 \times 18} =$	»

$= 6$ ὡρ. 10'...

(*) Οἱ 12.

Προβλήματα.

1) Διὰ τὰς ἐνδυμασίας 14 ἀνδρῶν ἐχρειάσθησαν 60 μέτρα ὑφάσματος ἔχοντος πλάτος 1,50 μ. Πόσα μέτρα θὰ χρειασθῶσιν 22 ἄνδρες διὰ νὰ κατασκευάσωσι τὰς ἐνδυμασίας αὐτῶν ἐξ ἑνὸς ἄλλου ὑφάσματος, ἔχοντος πλάτος 1,25 μ ; ('Απ. 113,143 μ.)

2) Ἐργαζόμενος 5 ὥρ. τὴν ἡμέραν ἀντιγράφει τις τὰ $\frac{2}{7}$ ἑνὸς βιβλίου εἰς 11 ἡμ. Ἐὰν ἐργάζηται 8 ὥρ. καθ' ἑκάστην εἰς πόσας ἡμέρας θὰ ἀντιγράψῃ τὸ ὑπόλοιπον ; ('Απ. εἰς 17 ἡμ. 1 ὥρ. 30'.)

3) Μὲ 350 δρχ. ἠγόρασέ τις 28 πήχ. ἑνὸς ὑφάσματος τοῦ ὁποίου τὸ πλάτος ἦτο 6 ῥουπίων. Μὲ πόσας δραχμὰς θὰ ἀγοράσῃ 18 πηχ. ἐξ ἑνὸς ἄλλου ὑφάσματος τῆς αὐτῆς μὲν ποιότητος, ἔχοντος ὅμως πλάτος 1 πήχεως ; ('Απ. μὲ 300 δρχ.)

4) Διὰ νὰ στρώσωμεν διὰ τάπητος αἴθουσαν ἔχουσαν 8 μετρ. μῆκος καὶ 7 μ. πλάτος, πληρώνομεν 280 δρχ. Πόσον θὰ πληρώσωμεν διὰ νὰ στρώσωμεν διὰ τάπητος τῆς αὐτῆς ποιότητος ἑτέραν αἴθουσαν, ἔχουσαν 6 μετρ. μῆκος καὶ 5 μ. πλάτος ; ('Απ. 150 δρχ.).

5) Διὰ νὰ στρώσωμεν τὴν πρώτην αἴθουσαν (*προβλ.* 4), τῆς ὁποίας τὸ μῆκος εἶνε 8 μετρ. καὶ τὸ πλάτος 7 μ. ἐχρειάσθημεν 56 μέτρα τάπητος ἔχοντος πλάτος 1 μετρ. Διὰ νὰ στρώσωμεν τὴν δευτέραν αἴθουσαν, ἥτις ἔχει 6 μετρ. μῆκος καὶ 5 μ. πλάτος, πόσα μέτρα θὰ χρειασθῶμεν ἐξ ἑτέρου τάπητος τῆς αὐτῆς ποιότητος, τοῦ ὁποίου τὸ πλάτος εἶνε 6 ῥουπίων ; (8 ῥ=0.648 μ.) ('Απ. 61,728 μ.)

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΚΟΥ

172.—*Τόκος* λέγεται τὸ κέρδος τὸ ὁποῖον λαμβάνει ὁ δανείζων χρήματα.

Εἰς τὰ προβλήματα τοῦ τόκου παρουσιάζονται 4 ποσά :

α'.) τὸ *κεφάλαιον*, τοῦτ' ἔστι τὸ ποσὸν τῶν χρημάτων, τὸ ὁποῖον δανείζει τις.

β'.) ὁ *τόκος*.

γ'.) τὸ *ἐπιτόκιον*, ἤτοι ὁ τόκος τῶν 100 δραχμῶν εἰς ἓν ἔτος.

καὶ *δ'.)* ὁ *χρόνος*, καθ' ὃν διαρκεῖ τὸ δάνειον.

173.— Ὁ τόκος εἶνε *ἁπλοῦς* ἢ *σύνθετος*. Καὶ ἁπλοῦς μὲν λέγεται ὁ τόκος, ὅταν τὸ κεφάλαιον μένῃ τὸ αὐτὸ καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τοῦ δανείου· *σύνθετος* δέ, ὅταν ὁ τόκος ἑκάστου ἔτους προστίθεται εἰς τὸ κεφάλαιον καὶ δίδῃ καὶ αὐτὸς τόκον εἰς τὰ ἑπόμενα ἔτη. Π. χ. ἐὰν δανεισθῶμεν 100 δρχ. μὲ ἐπιτόκιον 10 καὶ τόκον ἁπλοῦν, εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου ἔτους θὰ χρεωστῶμεν 110 δρχ., εἰς τὸ τέλος τοῦ δευτέρου 120, εἰς τὸ τέλος τοῦ τρίτου 130 καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἐὰν ὅμως τὰς αὐτὰς δραχμὰς δανεισθῶμεν μὲ τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον ἀλλὰ μὲ σύνθετον τόκον, τότε εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου ἔτους θὰ χρεωστῶμεν 110 δραχμὰς (κεφ. 100, καὶ τόκ. 10), εἰς τὸ τέλος τοῦ δευτέρου 121 (κεφ. 110, καὶ τόκ.

11), εἰς τὸ τέλος τοῦ τρίτου 133,10 (121 κεφ., καὶ τόκ. 12,10) καὶ οὕτω καθεξῆς.

174.— Ἐκ τῶν τεσσάρων ποσῶν, τὰ ὁποῖα παρουσιάζονται εἰς τὰ προβλήματα ταῦτα, ὁ μὲν τόκος καὶ ἕκαστον ἐκ τῶν ἄλλων εἶνε ποσὰ ἀνάλογα· διότι, ἐὰν π. χ. τὸ κεφάλαιον διπλασιασθῇ (ὁ δὲ χρόνος καὶ τὸ ἐπιτόκιον μείνωσι τὰ αὐτά), τότε καὶ ὁ τόκος διπλασιάζεται. Ἐπίσης ἐὰν ὁ χρόνος μόνον διπλασιασθῇ (τὸ δὲ κεφάλαιον καὶ τὸ ἐπιτόκιον μείνωσιν ἀμετάβλητα), καὶ ὁ τόκος πάλιν διπλασιάζεται. Καὶ τέλος ἐὰν τὸ ἐπιτόκιον ὁρισθῇ διπλάσιον (τοῦ κεφαλαίου καὶ τοῦ χρόνου μενόντων τῶν αὐτῶν), καὶ ὁ τόκος θέλει προκύψει διπλάσιος.

Τὸ κεφάλαιον ὅμως καὶ ὁ χρόνος ἢ τὸ κεφάλαιον καὶ τὸ ἐπιτόκιον εἶνε ποσὰ ἀντίστροφα. Διότι ἐὰν τὸ κεφάλαιον διπλασιασθῇ, διὰ νὰ φέρῃ τὸν αὐτὸν τόκον (πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον), θὰ χρειασθῇ μόνον τὸν ἥμισυν χρόνον. Ἐπίσης ἐὰν τὸ κεφάλαιον διπλασιασθῇ, διὰ νὰ προκύψῃ ὁ αὐτὸς τόκος εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον, πρέπει τὸ ἐπιτόκιον νὰ ὁρισθῇ τὸ ἥμισυ τοῦ ἀρχικοῦ.

Τέλος τὸ ἐπιτόκιον καὶ ὁ χρόνος εἶνε ἐπίσης ποσὰ ἀντίστροφα. Διότι ἐὰν (τοῦ κεφαλαίου μένοντος ἀμεταβλήτου) τὸ ἐπιτόκιον διπλασιασθῇ, διὰ νὰ προκύψῃ ὁ αὐτὸς τόκος, πρέπει ὁ χρόνος νὰ ἐλαττωθῇ κατὰ τὸ ἥμισυ.

175.— Εἰς ἕκαστον πρόβλημα τοῦ τόκου δίδονται τρία ἐκ τῶν ἀνωτέρω ποσῶν καὶ ζητεῖται τὸ τέταρτον. Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶνε δυνατὸν νὰ ζητῆται εἴτε ὁ τόκος, εἴτε τὸ κεφάλαιον, εἴτε τὸ ἐπιτόκιον, εἴτε ὁ χρόνος, ἕπεται ὅτι τὰ προβλήματα τοῦ τόκου εἶνε τεσσάρων εἰδῶν.

Πᾶν πρόβλημα τόκου λύεται κατὰ τὴν σύνθετον μέθοδον τῶν τριῶν.

Πρόβλημα τοῦ α΄. εἴδους (ἐν τῷ ὁποίῳ ζητεῖται ὁ τόκος).

Πόσον τόκον φέρουσιν 920 δρχ. εἰς 2 ἔτη πρὸς 4 ταῖς ἑκατόν ;

Σημ. τὸ 4 ταῖς ἑκατὸν γράφεται 4 %.

Τὸ πρόβλημα τοῦτο διατάσσομεν πρῶτον ὡς ἑξῆς :

δρχ. κεφ.	ἐτ.	δρχ. τοκ.
100	1	4
920	2	χ

Ἔπειτα δὲ λύοντες αὐτὸ κατὰ τὸν γνωστὸν κανόνα τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν εὑρίσκομεν $X = \frac{4 \times 920 \times 2}{100}$ ἤτοι 73,60 δρχ.

Ἐκ τούτου συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα :

176.—*Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν τόκον, σχηματίζομεν τὸ γινόμενον πάντων τῶν δεδομένων, δηλ. κεφαλαίου, ἐπιτοκίου καὶ χρόνου, καὶ τοῦτο διαιροῦμεν διὰ τοῦ 100.*

Σημείωσις α΄.—Ἐὰν ὁ χρόνος ἔχῃ δοθῇ εἰς μῆνας ἢ εἰς ἡμέρας, τρέπομεν αὐτὸν κατὰ τὴν ἐφαρμογὴν τοῦ κανόνος τούτου εἰς κλάσμα τοῦ ἔτους, ὅπως φαίνεται ἐκ τῶν ἑπομένων παραδειγμάτων :

1ον) *Πόσον τόκον φέρουσι 240 δρχ. εἰς 2 ἔτ. καὶ 5 μην. πρὸς 5 %;*

Λύσις. Τὰ 2 ἔτ. καὶ οἱ 5 μην. ἀποτελοῦσιν 29 μῆνας ἤτοι $\frac{29}{12}$ τοῦ ἔτους.

Ἐφαρμόζοντες ἤδη τὸν ἀνωτέρω εὑρεθέντα κανόνα λαμβάνομεν:

$$\chi=\frac{240\times5\times\frac{29}{12}}{100}=\frac{240\times5\times29}{100\times12}=29 \text{ δρχ.}$$

2ον) *Πόσον τόκον φέρουσι 3600 δρχ. εἰς 8 μην. καὶ 16 ἡμ. πρὸς 10 %;*

Λύσις. Οἱ 8 μην. καὶ αἱ 16 ἡμ. ἀποτελοῦσι 256 ἡμ. ἤτοι $\frac{256}{360}$ τοῦ ἔτους (*). Ἑπομένως κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα εὑρίσκομεν ὅτι ὁ ζητούμενος τόκος θὰ εἶνε $\frac{3600\times10\times256}{360\times100}=256$ δρχ.

Σημείωσις 6΄.—Τὰ ἀνωτέρω προβλήματα δυνάμεθα νὰ λύσωμεν καὶ διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα :

α΄) 100	δρχ.	κεφ.	εἰς	1	ἔτ.	φέρ.	4	δρχ. τόκ.
1	»	»	»	1	»	»	$\frac{4}{100}$	» »
920	»	»	»	1	»	»	$\frac{4\times920}{100}$	» »
καὶ 920	»	»	»	2	»	»	$\frac{4\times920\times2}{100}$	» »
β΄.) 100	δρχ.	κεφ.	εἰς	12	μην.	φέρ.	5	δρχ. τόκ.
1	»	»	»	12	»	»	$\frac{5}{100}$	» »
1	»	»	»	1	»	»	$\frac{5}{100\times12}$	» »
240	»	»	»	1	»	»	$\frac{5\times240}{100\times12}$	» »
240	»	»	»	29	»	»	$\frac{5\times240\times29}{100\times12}$	» »

(*) Ἐν ταῖς ἐμπορικαῖς συναλλαγαῖς τὸ ἔτος χάριν εὐκολίας λογίζεται ὡς ἀποτελούμενον ἐκ 360 ἡμερῶν.

γ΄.) 100 δρχ. κεφ. εἰς 360 ἡμ. φέρ. 10 δρχ. τόκ.

1 » » » 360 » » $\frac{10}{100}$ » »

1 » » » 1 » » $\frac{10}{100\times360}$ » »

3600 » » » 1 » » $\frac{10\times3600}{100\times360}$ » »

καὶ 3600 » » » 256 » » $\frac{10\times3600\times256}{100\times360}$ » »

Πρόβλημα 6΄. εἴδους (ἐν τῷ ὁποίῳ ζητεῖται τὸ κεφάλαιον)

Ποῖον κεφάλαιον τοκισθὲν πρὸς 8 $_0/^0$ ἔφερεν εἰς 3 ἔτη 800 δρχ. τόκον;

	δρχ. κεφ.	ἔτ.	δρχ. τόκ.
Διάταξις	100	1	8
	χ	3	800

Λύσις. $\chi=100\times\frac{1}{3}\times\frac{800}{8}=\frac{100\times800}{3\times8}=3333,33$ δρχ.

Ἐκ τῶν πράξεων, ἃς βλέπομεν σεσημειωμένας εἰς τὸ ἐξαγόμενον $\frac{100\times800}{3\times8}$, συνάγομεν τὸν ἑπόμενον κανόνα:

177.—*Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ κεφάλαιον, πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων, δηλ. τοῦ χρόνου καὶ τοῦ ἐπιτοκίου.*

Σημείωσις.— Καὶ εἰς τὰ προβλήματα τοῦ εἴδους τούτου, ἐὰν ὁ χρόνος δοθῇ εἰς μῆνας ἢ εἰς ἡμέρας, τρέπομεν πρῶτον αὐτὸν εἰς κλάσμα τοῦ ἔτους καὶ ἔπειτα ἐφαρμόζομεν τὸν ἀνωτέρω κανόνα.

Παράδειγμα.— *Ποῖον κεφάλαιον τοκισθὲν πρὸς 5 $^0/_0$ ἔφερεν εἰς 2 ἔτ. καὶ 8 μην. 650 δρχ. τόκον;*

Λύσις. Τὰ 2 ἔτ. καὶ οἱ 8 μην. ἰσοδυναμοῦσι πρὸς 32 μῆνας ἤτοι πρὸς $\frac{32}{12}$ τοῦ ἔτους. Ἔχομεν λοιπὸν $\chi=\frac{650\times100}{5\times\frac{32}{12}}$. Διὰ νὰ καταστήσωμεν δὲ τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο ἁπλούστερον, πολλαπλασιάζομεν καὶ τὸν ἀριθμητὴν καὶ τὸν παρονομαστὴν αὐτοῦ ἐπὶ 12, ὁπότε λαμβάνομεν $\frac{650\times100\times12}{5\times32}=4875$ δρχ.

Σημείωσις β΄.—Καὶ τοῦ εἴδους τούτου τὰ προβλήματα δυνάμεθα νὰ λύσωμεν διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα. Κατὰ τὴν μέθοδον ταύτην τὰ ἀνωτέρω δύο προβλήματα λύονται εὐκολώτατα ὡς ἑξῆς :

α΄.)	8	δρχ.	τόκ.	προέρχ.	εἰς	1 ἔτ.	ἀπὸ	κεφ.		100	δρχ.
	1	»	»	»	»	1 »	»	»		$\frac{100}{8}$	»
	800	»	»	»	»	1 »	»	»		$\frac{100\times800}{8}$	»
καὶ	800	»	»	»	»	3 »	»	»		$\frac{100\times800}{8\times3}$	»
β΄.)	5	δρχ.	τόκ.	προέρχ.	εἰς	12 μην.	ἀπὸ	κεφ.		100	δρχ.
	1	»	»	»	»	12 »	»	»		$\frac{100}{5}$	»
	1	»	»	»	»	1 »	»	»		$\frac{100\times12}{5}$	»
	650	»	»	»	»	1 »	»	»		$\frac{100\times12\times650}{5}$	»
καὶ	650	»	»	»	»	32 »	»	»		$\frac{100\times12\times650}{5\times32}$	»

Πρόβλημα γ΄. εἴδους (ἐν τῷ ὁποίῳ ζητεῖται ὁ χρόνος).

Ἐπὶ πόσον χρόνον κεφάλαιον 5600 δρχ. τοκισθὲν πρὸς 5 $^0/_0$ ἔφερε τόκον 850 δρχ. ;

	δρχ. κεφ.	ἔτ.	δρχ. τόκ.
Διάταξις	$\frac{100}{5600}$	$\frac{1}{\chi}$	$\frac{5}{850}$

Λύσις. $\chi=1\times\frac{100}{5600}\times\frac{850}{5}=\frac{100\times850}{5600\times5}$

ἤτοι 3 ἔτ. καὶ 13 περίπου ἡμ.

Ἐκ τούτου συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα :

178.— *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν χρόνον, πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων, δηλ. τοῦ κεφαλαίου καὶ τοῦ ἐπιτοκίου.*

Σημείωσις.— Καὶ διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα εἶνε δυνατὸν νὰ λυθῶσι τὰ τοιαῦτα προβλήματα:

100 δρχ.κεφ.διὰ νὰ φέρ.τόκ.	5 δρχ.,χρειάζ.	1	ἔτ.
1 » » » » » »	5 » »	1×100	»
1 » » » » » »	1 » »	$\frac{1\times100}{5}$	»
5600 » » » » » »	1 » »	$\frac{1\times100}{5\times5600}$	»
καὶ 5600 » » » » » »	850 » »	$\frac{1\times100\times850}{5\times5600}$	»

Πρόβλημα δ'. εἴδους(ἐν τῷ ὁποίῳ ζητεῖται τὸ ἐπιτόκιον).

Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον τοκισθὲν κεφάλαιον 1500 *δρχ. ἐπὶ* 5 *ἔτη ἔφερε τόκον* 400 *δρχ.;*

	δρχ. κεφ.	ἔτ.	δρχ. τοκ.
Διάταξις.	$\frac{1500}{100}$	$\frac{5}{1}$	400
			χ

Λύσις. $\chi=400\times\frac{100}{1500}\times\frac{1}{5}=\frac{400\times100}{1500\times5}$ ἤτοι 5,33 %.

Ἐκ τούτου συνάγομεν τὸν ἑπόμενον κανόνα :

179.— *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐπιτόκιον, πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων, δηλ. τοῦ κεφαλαίου καὶ τοῦ χρόνου.* (*)

Σημ.—Καὶ τοῦ εἴδους τούτου τὰ προβλήματα δυνάμεθα νὰ λύσωμεν διὰ τῆς μεθόδου τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα. Οὕτω τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα λύεται καὶ ὡς ἑξῆς :

Κεφ. 1500 δρχ. εἰς 5 ἔτη φέρ. τοκ.	400	δρχ.
» 1 » » 5 » » »	$\frac{400}{1500}$	»
» 1 » » 1 » » »	$\frac{400}{1500\times5}$	»
καὶ » 100 » » 1 » » »	$\frac{400\times100}{1500\times5}$	»

180.—Τοὺς κανόνας, τοὺς ὁποίους ἀνωτέρω ἐμορφώσαμεν διὰ τὰ τέσσαρα διάφορα εἴδη τῶν προβλημάτων τοῦ τόκου, δυνάμεθα νὰ συμπτύξωμεν εἰς δύο μόνον, τοὺς ἑξῆς :

1ον) *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν τόκον, σχηματίζομεν τὸ γινόμενον*

(*) Ἐὰν ὁ χρόνος ἔχῃ δοθῆ εἰς μῆνας ἢ εἰς ἡμέρας, τρέπομεν αὐτὸν κατὰ τὴν ἐφαρμογὴν τοῦ κανόνος τούτου εἰς κλάσμα τοῦ ἔτους.

τῶν τριῶν δεδομένων (κεφαλαίου, χρόνου καὶ ἐπιτοκίου) *καὶ τοῦτο διαιροῦμεν διὰ τοῦ* 100.

2ον) *Διὰ νὰ εὕρωμεν ἓν ἐκ τῶν τριῶν ἄλλων* (ἢ δηλ. τὸ κεφ. ἢ τὸν χρόν. ἢ τὸ ἐπιτ.), *πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ* 100 *καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων δεδομένων.*

Προβλήματα.

1) Πόσον τόκον φέρει κεφάλαιον 4870 δρχ. εἰς 4 ἔτη καὶ 8 μῆνας πρὸς 8 $^0|_0$; ('Απ. 1818,13. . . δρχ.)

2) Κεφάλαιον 9600 δρχ. ἐπὶ πόσον χρόνον τοκισθὲν πρὸς 6 $^0[_0$ ἔφερε τόκον 720 δρχ. ; ('Απ. ἐπὶ 1 ἔτ. 3 μην.)

3) Ποῖον κεφάλαιον τοκισθὲν πρὸς 12 $^0[_0$ ἐπὶ 2 ἔτη καὶ 4 μῆνας ἔφερε τόκον 114,80 δρχ. ; ('Απ. κεφ. 410 δρχ.)

4) Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον τοκισθὲν κεφάλαιον 1458 δρχ., ἔφερεν εἰς 8 μην. καὶ 20 ἡμ. τόκον 90 δρχ. ; ('Απ. πρὸς 8,55 $^0/_0$ περίπου)

5) Δανείσας τις χρήματα πρὸς 5 $^0[_0$ ἔλαβε μετὰ 4 ἔτη κεφαλαιον καὶ τόκον ὁμοῦ 2400 δρχ. Πόσον ἦτο τὸ κεφάλαιον καὶ πόσος ὁ τόκος;

Λύσις. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἐδάνεισεν 100 δρχ. ἐπὶ 4 ἔτη πρὸς 5 $^0]_0$. Τότε κατὰ τὴν λῆξιν τῶν 4 ἐτῶν θὰ ἐλάμβανε κεφάλαιον καὶ τόκον ὁμοῦ 120 δρχ. (100 τὸ κεφ. καὶ 20 ὁ τόκος). Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ καταστρώσωμεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν :

120 δρχ. κεφ. καὶ τόκ. προέρχ. ἀπὸ κεφ. 100 δρχ.

2400 » » » » . » » χ

ἐκ τῆς λύσεως τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν ὅτι τὸ κεφάλαιον ἦτο 2000 δρχ. Ἑπομένως ὁ τόκος ἦτο δρχ. 400

6) Δανείσας τις 7200 δρχ. πρὸς 9 $^0]_0$ ἔλαβε μετά τινα χρόνον κεφάλαιον καὶ τόκον ὁμοῦ 8010 δρχ. Ἐπὶ πόσον χρόνον ἔμειναν τὰ χρήματά του εἰς τὸν τόκον ; ('Απ. ἐπὶ 1 ἔτ. 3 μην.)

7) Κεφάλαιον 6837 δρχ. εἰς πόσον χρόνον τοκιζόμενον πρὸς 10 $^0]_0$ διπλασιάζεται ; (*)

Λύσις. $\dfrac{6837\times 100}{6837\times 10}=\dfrac{100}{10}=10$ ἔτ.

Ἐκ τούτου συνάγομεν καὶ τὸν ἑξῆς κανόνα :

181. — *Διὰ νὰ εὕρωμεν εἰς πόσον χρόνον οἰονδήποτε κεφάλαιον τοκιζόμενον πρὸς ὡρισμένον ἐπιτόκιον διπλασιάζεται, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὸ 100 δι' τοῦ ἐπιτοκίου.*

8) Τοκίσας τις ποσὸν χρημάτων πρὸς 4 $^0]_0$ ἔλαβε μετὰ 3 ἔτη 600 δρχ. τόκον. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἔπρεπε νὰ τοκίσῃ τὸ αὐτὸ κεφάλαιον διὰ νὰ λάβῃ μετὰ 5 ἔτη τόκον 1550 δραχ ; ('Απ. πρὸς 6,20 $^0]_0$.)

(*) Φέρει δηλ. τόκον 6837 δρχ., ὅσον εἶνε καὶ τὸ κεφάλαιον.

9) Ἀγοράσας τις 850 ὀκ. σίτου πρὸς 42 λεπ. τὴν ὀκᾶν ἐπώλησε αὐτὸν μετὰ 8 μῆνας ἀντὶ 433,50 δρχ. Πόσον ταῖς ἑκατὸν ὠφελήθη;
(Ἀπ. 32,14 $^0]_0$)

10) Ἠγόρασέ τις οἰκίαν ἀντὶ 25400 δρχ. Μετὰ 2 ἔτη θέλει νὰ τὴν πωλήσῃ καὶ νὰ κερδίσῃ 12 $^0]_0$ ἐπὶ τῶν χρημάτων του. Πόσον πρέπει νὰ τὴν πωλήσῃ;
(Ἀπ. 31496 δρχ.)

11) Κεφάλαιον 5729 δρχ. πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον τοκιζόμενον ἐπὶ 5 ἔτη διπλασιάζεται;
(Ἀπ. πρὸς 20 $^0]_0$.)

Σημ.—Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος τούτου ποῖον κανόνα συνάγομεν;

12) Παντοπώλης τις ἀγοράσας ζάκχαριν πρὸς 1,60 δρχ. τὴν ὀκᾶν μετεπώλησεν αὐτὴν μετὰ 4 μῆνας πρὸς 1,80 δρχ. τὴν ὀκᾶν. Πόσον ταῖς ἑκατὸν ἐκέρδισεν;
(Ἀπ. 37,50 $^0]_0$.)

13) Δανείσας τις εἴς τινα 5000 δρχ. διὰ 2 ἔτη πρὸς 5 $^0]_0$ ἐκράτησεν ἀμέσως τὸν τόκον καὶ ἔδωκεν εἰς αὐτὸν τὰ ἐπίλοιπα. Πρὸς πόσον ταῖς 100 πραγματικῶς τῷ ἐδάνεισε;
(Ἀπ. πρὸς 5,55 $^0]_0$.)

14) Τοκίσας τις 6000 δρχ. πρὸς 5 $^0]_0$ ἔλαβε μετά τινα χρόνον 750 δρχ. τόκον. Ποῖον κεφάλαιον ἔπρεπε νὰ τοκίσῃ πρὸς 7 $^0]_0$ διὰ νὰ λάβῃ εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον 890 δρχ. τόκον;
(Ἀπ. 5085,71 δρχ.)

15) Ἐτόκισέ τις 5820 δρχ. πρὸς 10 $^0]_0$. Μετὰ πόσον χρόνον θὰ λάβῃ τόκον ἴσον πρὸς τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ κεφαλαίου του;
(Ἀπ. μετὰ 4 ἔτη)

ΥΦΑΙΡΕΣΙΣ

182.—*Ὑφαίρεσις* λέγεται τὸ ποσόν, κατὰ τὸ ὁποῖον ἐλαττοῦται ἡ ἀξία ἑνὸς γραμματίου, ὅταν τοῦτο πληρωθῇ πρὸ τοῦ λήξῃ ἡ προθεσμία του.

183.—Θὰ ἐξηγήσωμεν πρῶτον τὸν τρόπον, κατὰ τὸν ὁποῖον συντάσσονται τὰ γραμμάτια.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχοντες ἀνάγκην νὰ δανεισθῶμεν 500 δρχ. διὰ δύο ἔτη καταφεύγομεν πρὸς τοῦτο εἴς τινα δανειστήν. Οὗτος θὰ ὑπολογίσῃ πόσον τόκον φέρουσιν αἱ 500 αὐταὶ δραχμαὶ εἰς 2 ἔτη πρὸς ἐπιτόκιόν τι, τὸ ὁποῖον αὐτὸς ὁρίζει, οἷον πρὸς 6 $^0/_0$ τὸν τόκον δὲ τοῦτον, ἀνερχόμενον εἰς δρχ. 60, θὰ προσθέσῃ εἰς τὰς 500, τὰς ὁποίας ζητοῦμεν νὰ δανεισθῶμεν. Τοιουτοτρόπως θὰ ἐκδοθῇ γραμμάτιον, διὰ τοῦ ὁποίου δανειζόμενοι σήμερον 500 δρχ. ὑποχρεούμεθα νὰ ἐπιστρέψωμεν μετὰ 2 ἔτη δρχ. 560.

Καὶ ἐὰν μὲν ὁ κάτοχος τοῦ γραμματίου περιμείνῃ τὴν λῆξιν τούτου, θὰ λάβῃ παρ' ἡμῶν 560 δρχ. Ἐὰν ὅμως κατὰ τὸ χρονικὸν τοῦτο διάστημα τῶν δύο ἐτῶν λάβῃ ἀνάγκην χρημάτων καὶ ζητήση παρ' ἄλλου τὴν προεξόφλησιν τοῦ γραμματίου, τότε τὸ γραμμάτιον θὰ πάθη ἔκπτωσίν τινα. Ἡ ἔκπτωσις αὕτη εἶνε ἡ καλουμένη ὑφαίρεσις.

184.—Ἡ ὑφαίρεσις εἶνε δύο εἰδῶν, *ἐξωτερικὴ* καὶ *ἐσωτερική*.

α'.) Ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις.

185.—*Ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις εἶνε ὁ τόκος ὅλου τοῦ ποσοῦ, τὸ ὁποῖον ἀναγράφεται ἐν τῷ γραμματίῳ, διὰ τὸν χρόνον ὅστις θέλει παρέλθει ἀπὸ τῆς ἡμέρας τῆς προεξοφλήσεως μέχρι τῆς ἡμέρας τῆς λήξεως τοῦ γραμματίου.*

Πρόβλημα α'.) Ἂν ὑποτεθῇ ὅτι τὸ ὡς ἀνωτέρω συνταχθὲν γραμμάτιον τῶν 560 δρχ. ἐξοφλεῖται 10 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 6 $^0/_0$, ποία θὰ εἶνε ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσίς του;

Λύσις. Εὑρίσκομεν πόσον τόκον φέρουσιν αἱ 560 δρχ. τοῦ γραμματίου εἰς 10 μῆνας πρὸς 6 $^0/_0$, καὶ ὁ τόκος οὗτος, δηλ. αἱ 28 δρχ., θὰ εἶνε ἡ ζητουμένη ἐξωτ. ὑφαίρεσις τοῦ ἐν λόγῳ γραμματίου.

Ὥστε ἐὰν τὸ γραμμάτιον τῶν 560 δρχ. ἐξοφληθῇ 10 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του, θὰ πάθη ἔκπτωσιν 28 δρχ., καὶ ἑπομένως θὰ πληρωθῇ μόνον ἀντὶ 560—28 ἤτοι 532 δρχ.

Τὸ ποσὸν τοῦτο τῶν 532 δρχ. τὸ ὁποῖον πληρώνεται κατὰ τὴν προεξόφλησιν τοῦ γραμματίου καλεῖται *παροῦσα ἀξία* αὐτοῦ. Τὸ δὲ ποσὸν τῶν 560 δρχ., τὸ ἀναφερόμενον ἐν τῷ γραμματίῳ, καλεῖται *ὀνομαστικὴ ἀξία* τοῦ γραμματίου.

Ἡ παροῦσα λοιπὸν ἀξία ἑνὸς γραμματίου εὑρίσκεται, ἐὰν ἀπὸ τὴν ὀνομαστικὴν ἀξίαν αὐτοῦ ἀφαιρεθῇ ἡ ὑφαίρεσις.

Παρατήρησις.—Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι ἐν ᾧ πληρώνονται 532 μόνον δρχ., κρατεῖται ἐν τούτοις ὁ τόκος τῶν 560 δρχ. Ἑπομένως ἡ ἐξωτ. ὑφαίρεσις εἶνε ἄδικος· ἀδικεῖται δὲ διὰ ταύτης ὁ κάτοχος τοῦ γραμματίου.

Πρόβλημα β'.) Ποῖον γραμμάτιον ἐξοφληθὲν 10 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 6 $^0/_0$ εἶχεν ὑφαίρεσιν ἐξωτερικὴν 28 δρχ;

Λύσις. Ἐμάθομεν ἤδη ὅτι ἡ ἐξωτ. ὑφαίρεσις εἶνε ὁ τόκος τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας τοῦ γραμματίου· ἄρα τὸ πρόβλημα τοῦτο ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ ἑξῆς: «Ποῖον κεφάλαιον τοκισθὲν ἐπὶ 10 μῆνας πρὸς

6 $^0/_0$ ἔδωκε τόκον 28 δρχ.;» Ἐκ τούτου εὑρίσκομεν 560 δρχ· ἡ ζητουμένη λοιπὸν ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου εἶνε 560 δρχ.

Πρόβλημα γ΄.) *Ποῖον γραμμάτιον ἐξωφλήθη μὲ ὑφαίρεσιν ἐξωτερικὴν 10 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 6 $^0/_0$ ἀντὶ 532 δρχ.;*

Λύσις. Ἐνταῦθα εἶνε δεδομένη ἡ παροῦσα ἀξία καὶ ζητεῖται ἡ ὀνομαστική. Πρὸς εὕρεσιν ταύτης σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς:

Ὑποθέτομεν ὅτι ἔχομεν γραμμάτιον 100 δρχ. καὶ πρόκειται νὰ τὸ προεξοφλήσωμεν μὲ ὑφαίρεσιν ἐξωτερικὴν πρὸς 6 $^0/_0$, 10 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του (ὅπως δηλ. συμβαίνει καὶ μὲ τὸ δοθέν.) Τὸ γραμμάτιον τοῦτο θὰ εἶχεν ἐξωτερ. ὑφαίρ. 5 δρχ. καὶ ἑπομένως θὰ ἐπληρώνετο μόνον ἀντὶ 95 δρχ. Μετὰ ταῦτα καταστρώνομεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν:

95 δρχ. παροῦσα ἀξία προέρχ. ἀπὸ ὀνομαστ. ἀξίαν 100 δρχ.
532 » » » » » » χ

Ἐκ τῆς λύσεως τούτου εὑρίσκομεν 560 δρχ. Ἄρα τὸ γραμμάτιον ἦτο συντεταγμένον διὰ δρχ. 560.

β΄.) Ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις.

186.—*Ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις εἶνε ὁ τόκος τῆς παρούσης ἀξίας τοῦ γραμματίου ἀπὸ τῆς ἡμέρας τῆς προεξοφλήσεως αὐτοῦ μέχρι τῆς ἡμέρας τῆς λήξεως.* Εἶνε δηλ. ἡ ἐσωτ. ὑφαίρεσις ὁ τόκος οὐχὶ ὁλοκλήρου τοῦ ποσοῦ τὸ ὁποῖον ἀναγράφεται ἐν τῷ γραμματίῳ, ἀλλ᾽ ἐκείνου τὸ ὁποῖον πληρώνεται κατὰ τὴν προεξόφλησιν.

Τὸν τρόπον καθ᾽ ὃν λύονται τὰ διάφορα προβλήματα τῆς ἐσωτ. ὑφαιρέσεως θέλομεν ἐννοήσει ἐκ τῶν ἑπομένων παραδειγμάτων:

Πρόβλημα α΄.) *Ποία εἶνε ἡ ἐσωτ. ὑφαίρεσις γραμματίου ἐξοφληθέντος 10 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 6 $^0/_0$ ἀντὶ 533,33 δρχ. ;*

Λύσις. Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο ἔχει δοθῆ ἡ παροῦσα ἀξία καὶ ζητεῖται ἡ ἐσωτ. ὑφαίρεσις. Ἀλλὰ γνωρίζομεν ὅτι ἡ ἐσ. ὑφαίρεσις εἶνε ὁ τόκος τῆς παρούσης ἀξίας. Ἑπομένως τὸ δοθὲν πρόβλημα ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὸ ἑξῆς : «Πόσον τόκον φέρει κεφάλαιον 533,33 δρχ. τοκιζόμενον ἐπὶ 10 μῆνας πρὸς 6 $^0/_0$;». Λύοντες δὲ τοῦτο εὑρίσκομεν 26,67 δρχ. Ἄρα ἡ ζητουμένη ἐσωτ. ὑφαίρεσις εἶνε 26,67 δρχ.

Σημ.—Προσθέτοντες τὴν εὑρεθεῖσαν ὑφαίρεσιν εἰς τὴν παροῦσαν ἀξίαν εὑρίσκομεν καὶ τὴν ὀνομαστικὴν ἀξίαν τοῦ γραμματίου, ἥτις εἶνε 560 δρχ.

Πρόβλημα β΄.) *Γραμμάτιον ἐξωφλήθη 10 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 6 $^0/_0$ μὲ ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν 26,67 δρχ. Ποία εἶνε ἡ παροῦσα ἀξία του ;*

Λύσις. Τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶνε ἰσοδύναμον μὲ τὸ ἑξῆς: «Ποῖον κεφάλαιον τοκισθὲν ἐπὶ 10 μῆνας πρὸς 6 $^0/_0$ ἔφερε τόκον 26,67 δρχ.;», ἐκ τῆς λύσεως τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν 533,33 δρχ. (περίπου).

Πρόβλημα γ΄.) *Γραμμάτιον 560 δρχ. ἐξωφλήθη 10 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 6 $^0/_0$. Ποία εἶνε ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσίς του;*

Λύσις. Ἐνταῦθα ἡ ζητουμένη ὑφαίρεσις δὲν εἶνε πλέον ὁ τόκος τῶν 560 δρχ. Διὰ τοῦτο σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς:

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν ἀνάγκην νὰ δανεισθῶμεν 100 δρχ. διὰ 10 μῆνας πρὸς 6 $^0/_0$ (ὅπως συμβαίνει καὶ μὲ τὸ δοθὲν γραμμάτιον). Τότε θὰ συνταχθῇ γραμμάτιον διὰ 105 δρχ., περιέχον δηλ. ἐκτὸς τῶν 100, τὰς ὁποίας θὰ λάβωμεν, καὶ τὸν τόκον αὐτῶν εἰς 10 μῆνας πρὸς 6 $^0/_0$ ὅστις εἶνε 5 δρχ. Τὸ ὑποθετικὸν τοῦτο γραμμάτιον, ἐὰν πληρωθῇ εἰς τὴν λῆξίν του, θὰ ἀξίζῃ 105 δρχ. Ἐὰν ὅμως ἐξοφληθῇ κατὰ τὴν ἡμέραν τῆς συντάξεώς του, θὰ ἀξίζῃ μόνον 100 δρχ. Θὰ πάθῃ δηλ. ἔκπτωσιν 5 δρχ.· καὶ ἐπειδὴ αὗται εἶνε ὁ τόκος οὐχὶ τῶν 105 δρχ. αἱ ὁποῖαι ἀνεγράφοντο ἐν τῷ γραμματίῳ ὡς ὀνομαστικὴ ἀξία, ἀλλὰ τῶν 100 δρχ· αἱ ὁποῖαι ἐπληρώθησαν ὡς παροῦσα αὐτοῦ ἀξία, διὰ τοῦτο τὰς 5 αὐτὰς δρχ. δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς ἐσωτ. ὑφαίρεσιν. Μετὰ τοῦτο καταστρώνομεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν:

Γραμ. 105 δρχ. ἔχει ἐσωτ. ὑφ. 5 δρχ.

» 560 » » » » χ

τὸ ὁποῖον λύοντες εὑρίσκομεν $\chi = \dfrac{5 \times 560}{105} = 26,67$ δρχ.

Ἐὰν δὲ τὴν εὑρεθεῖσαν ταύτην ὑφαίρεσιν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὴν ὀνομαστικὴν ἀξίαν τοῦ γραμματίου εὑρίσκομεν καὶ τὴν παροῦσαν αὐτοῦ ἀξίαν 533,33 δρχ.

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος συνάγομεν τὸν ἑπόμενον κανόνα:

187.—*Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν, πολλαπλασιάζομεν τὴν ὀνομαστικὴν ἀξίαν τοῦ γραμματίου ἐπὶ τὸν τόκον τῶν 100 δρχ. ἀπὸ τῆς ἡμέρας τῆς προεξοφλήσεως μέχρι τῆς ἡμέρας τῆς λήξεως τοῦ γραμματίου πρὸς τὸ ὡρισμένον ἐπιτόκιον, καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀθροίσματος τοῦ 100 καὶ τοῦ ῥηθέντος τόκου.*

188.—Τοῦ αὐτοῦ γραμματίου τῶν 560 δρχ. εἴδομεν ἀνωτέρω ὅτι ἡ μὲν ἐξωτ. ὑφαίρεσις εἶνε 28 δρχ., ἡ δὲ ἐσωτερικὴ 26,67 δρχ. Διαφέρουσι δηλ. αἱ δύο ὑφαιρέσεις κατὰ 1,33 δρχ. *Ἡ διαφορὰ αὕτη τῶν δύο ὑφαιρέσεων εἶνε ὁ τόκος τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως* ἤτοι τῶν 26,67 δρχ. (εἰς 10 μην. πρὸς 6 $^0/_0$.)

Πρόβλημα δ'.) *Γραμμάτιον 560 δρχ. ἐξωφλήθη μὲ ὑφαίρεσιν ἐσωτερικὴν 10 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 6 $^0/_0$. Ποία εἶνε ἡ παροῦσα ἀξία αὐτοῦ ;*

Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου ἢ εὑρίσκομεν ὡς ἀνωτέρω τὴν ἐσωτ. ὑφαίρεσιν, τὴν ὁποίαν ἔπειτα ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὴν ὀνομαστικὴν ἀξίαν τοῦ γραμματίου, ἢ τροποποιοῦμεν ἐν τέλει τὸ ὡς ἀνωτέρω καταστρωθὲν πρόβλημα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν διατυποῦντες αὐτὸ τοιουτοτρόπως :

Γραμ. 105 δρχ. ἔχει παροῦσαν ἀξίαν 100 δρχ.
» 560 » » » » χ

καὶ λύοντες αὐτὸ εὑρίσκομεν ἀμέσως τὴν ζητουμένην παροῦσαν ἀξίαν 533,33 δρχ.

Προβλήματα.

1) Ποία εἶνε ἡ ἐξωτ. ὑφαίρεσις γραμματίου ἐξοφληθέντος 5 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 12 $^0]_0$ ἀντὶ 2850 δρχ ; ('Απ. 150 δρχ.)

2) Γραμμάτιον 2460 δρχ. ἐξωφλήθη μὲ ὑφαίρεσιν ἐξωτερικὴν 5 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του ἀντὶ 2320 δρχ· Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐγένετο ἡ προεξόφλησις ; ('Απ. πρὸς 13,66 $^0]_0$)

3) Τὸ αὐτὸ γραμμάτιον πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον προεξωφλήθη, ἂν ἡ ὑφαίρεσις ἐγένετο ἐσωτερική ; ('Απ. πρὸς 14,48 $^0]_0$)

4) Γραμμάτιον 1320 δρχ. προεξωφλήθη μὲ ὑφαίρεσιν ἐξωτερικὴν πρὸς 6 $^0/_0$ ἀντὶ 1260,60 δρχ. Πόσον χρόνον πρὸ τῆς λήξεώς του ἐγένετο ἡ προεξόφλησις ; ('Απ. 9 μην.)

5) Τοῦ αὐτοῦ γραμματίου πόσον χρόνον πρὸ τῆς λήξεώς του ἐγένετο ἡ προεξόφλησις, ἂν ἡ ὑφαίρεσις ἦτο ἐσωτερική ;
('Απ. 9 μην. καὶ 13 περίπου ἡμ.)

6) Ποίου γραμματίου ἐξοφλουμένου 6 μην.πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 10 $^0]_0$ ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῆς ἐσωτερικῆς καὶ ἐξωτερικῆς ὑφαιρέσεως εἶνε 10 δρχ; (ὅρα ἐδ. 188). ('Απ. γραμ. 4200 δρχ.)

7) Ποία εἶνε ἡ παροῦσα ἀξία γραμματίου 3600 δρχ. ἐξοφλουμένου μὲ ἐξωτ. ὑφαίρεσιν 7 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 10 $^0]_0$;
('Απ 3390 δρχ.)

8) Ποῖον γραμμάτιον ἐξωφλήθη μὲ ἐσωτ. ὑφαίρεσιν 8 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 8 $^0]_0$ ἀντὶ 2400 δρχ ; ('Απ. γρ. 2528 δρχ.)

9) Ποῖον γραμμάτιον ἐξωφλήθη 4 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 4 $^0]_0$ μὲ ἐσωτ. ὑφαίρεσιν 88 δρχ ; ('Απ. γρ. 6688 δρχ.)

10) Ποία εἶνε ἡ παροῦσα ἀξία γραμματίου ἐξοφλουμένου 10 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 6 $^0]_0$ μὲ ἐξωτ. ὑφαίρεσιν 28 δρχ ; ('Απ. 532 δρχ.)

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ ΜΕΡΙΣΜΟΥ ΕΙΣ ΜΕΡΗ ΑΝΑΛΟΓΑ

189. — Οὕτω καλεῖται γενικῶς τις τρόπος, κατὰ τὸν ὁποῖον μοιράζομεν ἀριθμόν τινα εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς δύο ἢ περισσοτέρους ἄλλους δοθέντας ἀριθμούς.

Δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ λέγονται *ἀνάλογοι* πρὸς ἄλλους ἴσους τὸ πλῆθος, ἐὰν προκύπτωσιν οἱ μὲν ἐκ τῶν δὲ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν. Π. χ. οἱ ἀριθμοὶ 2, 8, 11 εἶνε ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἑξῆς τρεῖς ἄλλους 8, 32, 44. Διότι οἱ δεύτεροι προκύπτουσιν ἐκ τῶν πρώτων, ὅταν ἕκαστος ἐξ ἐκείνων πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 4. — Ἐπίσης οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ 9, 15, 21, 24 εἶνε ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἄλλους τέσσαρας 3, 5, 7, 8, διότι οἱ πρῶτοι προκύπτουσιν ἐκ τῶν δευτέρων, ὅταν ἕκαστος ἐκ τούτων πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 3.

Θὰ δείξωμεν ἤδη πῶς λύονται τὰ προβλήματα τῆς μεθόδου ταύτης.

Πρόβλημα Α'.) *Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 500 εἰς τέσσαρα μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 2, 3, 5, 10.*

Λύσις. Ἂν ὁ μεριστέος ἀριθμὸς ἦτο $2+3+5+10$ ἤτοι ὁ 20, τὰ μέρη του θὰ ἦσαν 2, 3, 5, 10. Ἂν ὁ μεριστέος ἀριθμὸς ἦτο 1, δηλ. 20 φορὰς μικρότερος, καὶ τὰ μέρη του θὰ ἦσαν 20 φορὰς μικρότερα ἕκαστον ἤτοι $\frac{2}{20}, \frac{3}{20}, \frac{5}{20}, \frac{10}{20}$. Ἐπειδὴ δὲ τώρα μεριστέος ἀριθμὸς εἶνε ὁ 500, τὰ μέρη αὐτοῦ θὰ εἶνε 500 φορὰς μεγαλείτερα ἤτοι

$$\frac{500\times2}{20}=50, \frac{500\times3}{20}=75, \frac{500\times5}{20}=125 \text{ καὶ } \frac{500\times10}{20}=250.$$

Οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι εἶνε πράγματι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς δοθέντας, διότι γίνονται ἐξ ἐκείνων διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν $\frac{500}{20}$ ἤτοι 25.

Ἐντεῦθεν συνάγομεν τὸν ἑξῆς γενικὸν κανόνα :

190. — *Διὰ νὰ μερίσωμεν ἀριθμόν τινα εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς δύο ἢ περισσοτέρους δεδομένους ἀριθμούς, πολλαπλασιάζομεν τὸν μεριστέον ἀριθμὸν ἐπὶ ἕκαστον ἐκ τῶν ἀριθμῶν τούτων, καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν.*

Σημείωσις. — Πρὸ τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ κανόνος τούτου δυνάμεθα καὶ νὰ ἁπλοποιῶμεν τοὺς ἀριθμούς, ἀναλόγως πρὸς τοὺς ὁποίους πρόκειται νὰ γείνῃ ὁ μερισμός, διαιροῦντες πάντας δι' ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ (ἐὰν ἔχωσι κοινόν τινα διαιρέτην).

Πρόβλημα Β'.) Πρὸς παραγωγὴν 1796 χιλιογράμμων ὕδατος εἶνε ἀνάγκη νὰ ἑνωθῶσι χημικῶς 1596 Χγρ. ὀξυγόνου καὶ 200 Χγρ.

ὑδρογόνου. Πόσα χιλιόγραμμα ἐξ ἑκατέρου τῶν ἀερίων τούτων ἡνώθησαν, ὅπως ἀποτελέσωσι τὰ 16164 Χγρ. ὕδατος (*) μικρᾶς τινος λίμνης ;

Λύσις. Διὰ νὰ ἀποτελεσθῶσι 1796 Χγρ. ὕδατος, ἡνώθησαν 1596 Χγρ. ὀξυγόνου καὶ 200 Χγρ. ὑδρογόνου· διὰ νὰ ἀποτελεσθῇ 1 Χγρ. ὕδατος πρέπει νὰ ἑνωθῶσι 1796 φορὰς μικρότερα βάρη ἐξ ἑκατέρου τῶν στοιχείων τούτων, ἤτοι $\frac{1596}{1796}$ Χγρ. ὀξυγόνου καὶ $\frac{200}{1796}$ Χγρ. ὑδρογόνου. Καὶ ἑπομένως διὰ νὰ ἀποτελεσθῶσι τὰ 16164 χιλιόγραμ. τοῦ ὕδατος τῆς λίμνης, ἡνώθησαν 16164 φορὰς μεγαλείτερα βάρη, ἤτοι $\frac{1596}{1796} \times 16164 = 14364$ Χγρ. ὀξυγόνου, καὶ

$$\frac{200}{1769} \times 16164 = 1800 \text{ Χγρ. ὑδρογόνου.}$$

Πρόβλημα Γ'.) Μία λίτρα ἀτμοσφαιρικοῦ ἀέρος εἶνε μεῖγμα ἀποτελούμενον ἐκ $\frac{4}{5}$ λιτρ. ἀζώτου καὶ $\frac{1}{5}$ λιτρ. ὀξυγόνου (**). Πόσον ἄζωτον καὶ πόσον ὀξυγόνον εἶνε ἀναμεμειγμένον εἰς 1 κυβ. μέτρον ἀέρος ;

Λύσις. Ἐν τῷ προβλήματι τούτῳ εἶνε ὡς νὰ ζητῆται νὰ μερίσωμεν τὸν ἀριθμὸν 1000 (διότι 1 κυβ. μέτρ. = 1000 λίτρ.) εἰς δύο μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς $\frac{4}{5}$ καὶ $\frac{1}{5}$.

Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ, καθ' ἣν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ εἶνε κλασματικοί, λαμβάνομεν ἀντ' αὐτῶν ἄλλους ἀναλόγους των, οἱ ὁποῖοι ὅμως νὰ εἶνε ἀκέραιοι. Τοὺς ἀριθμοὺς τούτους εὑρίσκομεν, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς δοθέντας $\frac{4}{5}$ καὶ $\frac{1}{5}$ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 5. Τότε προκύπτουσιν οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ 4 καὶ 1, καὶ μερίζοντες τὸν 1000 εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς τούτους εὑρίσκομεν $\frac{1000\times4}{5} = 800$ λιτρ. ἀζώτου καὶ $\frac{1000\times1}{5} = 200$ λιτρ. ὀξυγόνου.

(*) Τὸ ὕδωρ εἶνε σῶμα σύνθετον, συνιστάμενον ἐκ δύο ἀερωδῶν στοιχείων, τοῦ *ὀξυγόνου* καὶ τοῦ *ὑδρογόνου*. 15,96 μέρη βάρους ὀξυγόνου καὶ 2 μέρη βάρους ὑδρογόνου ἀποτελοῦσιν ἓν μόριον *ὕδατος*.

(**) Ἐκτὸς τῶν δύο τούτων ἀερωδῶν στοιχείων ὑπάρχουσιν ἐν τῷ ἀτμοσφαιρικῷ ἀέρι καὶ ἄλλα τινὰ ἀερώδη σώματα, οἷον *διοξείδιον τοῦ ἄνθρακος, ὑδρατμοί, ἀμμωνία* κτλ., εἰς ἐλαχίστην ὅμως ἀναλογίαν. Ἑπομένως τὸ ὀξυγόνον καὶ τὸ ἄζωτον δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν ὡς τὰ κυριώτερα αὐτοῦ συστατικά.

Σημείωσις.—Ἐὰν οἱ δοθέντες κλασματικοὶ ἀριθμοὶ εἶνε ἑτερώνυμοι, τρέπομεν πρῶτον αὐτοὺς εἰς ὁμωνύμους, καὶ ἔπειτα προχωροῦμεν ὡς ἀνωτέρω.

Προβλήματα.

1) Κύριός τις ἑορτάζων τὴν ἡμέραν τῶν γενεθλίων του θέλει νὰ διανείμῃ εἰς τοὺς τρεῖς ὑπηρέτας του 240 δρχ. θέλει ὅμως νὰ διανείμῃ αὐτὰς ἀναλόγως πρὸς τὰς ἡλικίας των. Ὁ μικρότερος ἐκ τῶν ὑπηρετῶν του ἦτο 20 ἐτῶν, ὁ δεύτερος 25 καὶ ὁ τρίτος 35. Πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ ἕκαστος ;
(Ἀπ. ὁ α'. 60, ὁ β'. 75 καὶ ὁ γ'. 105)

2) Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 680 εἰς δύο μέρη, ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς $\frac{2}{5}$ καὶ $\frac{4}{7}$
(Ἀπ. 280 καὶ 400)

3) Εἴς τινα συναναστροφὴν ἦσαν 30 ἄτομα ἄνδρες, γυναῖκες καὶ παιδία. Ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀνδρῶν ἦτο διπλάσιος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν γυναικῶν, ὁ δὲ ἀριθμὸς τῶν γυναικῶν τριπλάσιος τοῦ τῶν παιδίων. Πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες, πόσαι αἱ γυναῖκες καὶ πόσα τὰ παιδία ;
(Ἀπ. 18 ἄνδρες, 9 γυναῖκες καὶ 3 παιδία)

4) Πρόκειται νὰ διανεμηθῶσι 400 δρχ. εἰς 3 ἀνθρώπους οὕτως ὥστε ὁ δεύτερος νὰ λάβῃ τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ μεριδίου τοῦ πρώτου, ὁ δὲ τρίτος τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν δραχμῶν τὰς ὁποίας θὰ λάβωσιν ὁμοῦ ὁ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος. Πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ ἕκαστος ; (Ἀπ. ὁ α'. 150, ὁ β'. 90 καὶ ὁ γ'. 160)

5) Τρεῖς κρουνοὶ ἀνοιχθέντες συγχρόνως τὴν 8 ὥρ. π. μ. ἐπλήρωσαν δεξαμενὴν ἔχουσαν χωρητικότητα 9600 λιτρῶν. Εἰς μίαν ὥραν ἐκ μὲν τοῦ πρώτου κρουνοῦ ῥέουσι 1300 λίτραι ὕδατος, ἐκ τοῦ δευτέρου 900 λ. καὶ ἐκ τοῦ τρίτου 1800. Νὰ εὑρεθῇ πόσαι λίτραι ἔρρευσαν ἐξ ἑκάστου κρουνοῦ πρὸς πλήρωσιν τῆς δεξαμενῆς, καὶ ποίαν ὥραν αὕτη ἦτο πλήρης ;
(Ἀπ. ἐκ τοῦ α'. 3120, ἐκ τοῦ β'. 2160 καὶ ἐκ τοῦ γ'. 4320.
ἦτο δὲ ἡ δεξαμενὴ πλήρης τὴν 10ην ὥρ. καὶ 24'.)

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

191.— Διὰ τῆς μεθόδου ταύτης λύονται τὰ προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται νὰ μοιρασθῇ τὸ κέρδος ἢ ἡ ζημία μιᾶς ἐπιχειρήσεως εἰς τοὺς συνεταίρους, οἵτινες τὴν ἀνέλαβον.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ κέρδος ἢ ἡ ζημία θὰ μοιρασθῇ ἀναλόγως πρὸς τὰ κεφάλαια, τὰ ὁποῖα κατέθεσεν ἕκαστος τῶν συνεταίρων (ἢ, ὅταν οἱ χρόνοι εἶνε διάφοροι, οὐ μόνον ἀναλόγως πρὸς τὰ κεφάλαια, ἀλλὰ καὶ ἀναλόγως πρὸς τοὺς χρόνους καθ' οὓς παρέμειναν ἐν τῇ ἐπιχειρήσει αἱ καταθέσεις τῶν συνεταίρων), διὰ τοῦτο τὰ προβλήματα τῆς ἑταιρείας δύνανται νὰ θεωρηθῶσι καὶ ὡς προβλήματα τῆς μεθόδου τοῦ *μερισμοῦ εἰς μέρη ἀνάλογα*, καὶ νὰ λυθῶσιν ἑπομένως κατὰ τὸν κανόνα τῆς μεθόδου ἐκείνης.

Ἐπειδὴ δὲ εἶνε δυνατὸν νὰ καταβάλλωνται ὑπὸ τῶν συνεταίρων εἴτε ἴσα ποσὰ εἰς ἴσους χρόνους, εἴτε ἄνισα ποσὰ εἰς ἴσους χρόνους, εἴτε ἴσα ποσὰ εἰς ἀνίσους χρόνους, εἴτε τέλος ἄνισα ποσὰ εἰς ἀνίσους χρόνους, διὰ τοῦτο τὰ προβλήματα τῆς ἑταιρείας εἶνε τεσσάρων εἰδῶν.

Πρόβλημα α΄. εἴδους.

Τρεῖς ἔμποροι κατέθεσαν τῇ 1η Ἰανουαρίου 1896 ἀπὸ 8000 δρχ. ἕκαστος, μετὰ 4 δὲ ἔτη εὗρον ὅτι ἐκέρδισαν 9000 δρχ. Πῶς πρέπει νὰ τὰς μοιρασθῶσι ;

Λύσις. Πρέπει νὰ τὰς μοιρασθῶσιν ἐξ ἴσου καὶ νὰ λάβῃ ἀπὸ 3000 δρχ ἕκαστος, διότι καὶ τὸ αὐτὸ ποσὸν κατέθεσαν πάντες καὶ τὸν αὐτὸν χρόνον ἔμειναν τὰ χρήματά των εἰς τὴν ἐπιχείρησιν. Τὰ τοιαῦτα ἑπομένως προβλήματα καταντῶσιν εἰς ἁπλῆν διαίρεσιν τοῦ κέρδους ἢ τῆς ζημίας διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν συνεταίρων.

Πρόβλημα β΄. εἴδους.

Τέσσαρες ἔμποροι συνεταιρισθέντες κατέβαλον ὁ α΄. 3000 δρχ., ὁ β΄. 1000, ὁ γ΄. 4000 καὶ ὁ δ΄. 6000. Μετὰ 3 ἔτη εὗρον ὅτι ἐζημιώθησαν 2000 δρχ. Πόση ζημία ἀναλογεῖ εἰς ἕκαστον ;

Λύσις. Ἐπειδὴ καὶ τῶν τεσσάρων τὰ κεφάλαια ἔμειναν τὸν αὐτὸν χρόνον εἰς τὴν ἐπιχείρησιν, εἶνε φανερὸν ὅτι πρέπει νὰ μοιράσωμεν τὴν ζημίαν, μόνον ἀναλόγως πρὸς τὰ κεφάλαια. Κατὰ τὸν κανόνα λοιπὸν τῆς μεθόδου τοῦ μερισμοῦ εὑρίσκομεν ὅτι θὰ ζημιωθῶσιν :

ὁ α΄. $\frac{2000 \times 3000}{14000} = 428,57$ δρχ.

ὁ β΄. $\frac{2000 \times 1000}{14000} = 142,86$ »

ὁ γ΄. $\frac{2000 \times 4000}{14000} = 571,43$ »

καὶ ὁ δ΄. $\frac{2000 \times 6000}{14000} = 857,14$ »

Τὸ πρόβλημα τοῦτο δυνάμεθα νὰ λύσωμεν καὶ διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα. Πρὸς τοῦτο σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς:

Εἰς τὰς 14000 δρχ., τὰς ὁποίας κατέθεσαν καὶ οἱ 4 ὁμοῦ, ἀντιστοιχεῖ ὁλόκληρος ἡ ζημία τῶν 2000 δρχ. Εἰς κεφάλαιον 1 δρχ. θὰ ἀντιστοιχῇ ζημία 14000 φορὰς μικροτέρα, ἤτοι $\frac{2000}{14000}$ καὶ ἑπομένως :

Εἰς τὰς 3000 δρχ. τοῦ α'. θὰ ἀντιστοιχῇ ζημία $\frac{2000}{14000}\times 3000$ δρχ.

» » 1000 » » β'. » » » $\frac{2000}{14000}\times 1000$ »

» » 4000 » » γ'. » » » $\frac{2000}{14000}\times 4000$ »

καὶ » » 6000 » » δ'. » » » $\frac{2000}{14000}\times 6000$ »

Πρόβλημα γ'. εἴδους.

Ἔμπορός τις ἀρχίζει ἐπιχείρησιν μὲ 5000 δρχ. μετὰ 4 μῆνας προσλαμβάνει καὶ συνέταιρον ὅστις καταβάλλει καὶ αὐτὸς 5000 δρχ. Ἓν ἔτος μετὰ ταῦτα εὗρον ὅτι ἐκέρδισαν 2400 δρχ. Πῶς πρέπει νὰ τὰς μοιρασθῶσι ;

Λύσις. Ἐπειδὴ ἐνταῦθα καὶ τῶν δύο συνεταίρων τὰ κεφάλαια εἶνε τὰ αὐτά, ἀλλὰ τοῦ μὲν β'. ἔμειναν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν 12 μῆνας, τοῦ δὲ α'. 4 μῆνας περισσότερον, ἤτοι ἐν ὅλῳ 16 μῆνας, διὰ τοῦτο πρέπει νὰ μοιράσωμεν τὸ κέρδος μόνον ἀναλόγως πρὸς τοὺς χρόνους. Τοιουτοτρόπως εὑρίσκομεν ὅτι

ὁ μὲν α'. θὰ λάβῃ $\frac{2400\times 16}{28}=1371,43$ δρχ.

» δὲ β'. » » $\frac{2400\times 12}{28}=1028,57$ »

Πρόβλημα δ'. εἴδους.

Ἔμπορός τις ἤρχισεν ἐπιχείρησιν μὲ 10000 δρχ. 6 μῆνας μετὰ ταῦτα προσέλαβε συνέταιρον, ὅστις κατέβαλε 12000 δρχ. καὶ μετὰ ἄλλους 7 μῆνας προσέλαβε καὶ τρίτον συνέταιρον, ὅστις κατέβαλεν 8000 δρχ. 4 ἔτη μετὰ τὴν ἔναρξιν τῆς ἐπιχειρήσεως εὗρον ὅτι ἐκέρδισαν 6000 δρχ. Πόσας πρέπει νὰ λάβῃ ἕκαστος ;

Λύσις. Ἐν πρώτοις βλέπομεν ὅτι τοῦ μὲν α'. τὰ χρήματα ἔμειναν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν ἀπ' ἀρχῆς μέχρι τέλους αὐτῆς ἤτοι ἐπὶ 48 μῆνας, τοῦ β'. 6 μῆνας ὀλιγώτερον ἤτοι 42 μῆνας, καὶ τοῦ γ'. 7 ἀκόμη μῆνας ὀλιγώτερον ἤτοι 35 μῆνας. Μετὰ ταῦτα σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς :

Ὁ α'. ἔμπορος ὅστις κατέβαλε τὰς 10 000 δρχ. ἐπὶ 48 μῆνας, ἐὰν κατέβαλλε 48πλάσια χρήματα, ἤτοι $(10\,000\times 48)$ δρχ. ἐπὶ 1 μῆνα, θὰ ἐλάμβανε τὸ αὐτὸ μερίδιον ἐκ τοῦ κέρδους.

Ὁ β' κατέθεσε 12 000 δρχ. ἐπὶ 42 μῆνας· τὸ αὐτὸ λοιπὸν μερίδιον θὰ λάβῃ ἐκ τοῦ κέρδους, τὸ ὁποῖον θὰ ἐλάμβανε καὶ ἐὰν κατέθετε $(12\,000\times 42)$ δρχ. ἐπὶ 1 μῆνα.

Καὶ ὁ γ' καταθέσας 8 000 δρχ. ἐπὶ 35 μῆνας δικαιοῦται νὰ λάβῃ ἐκ τοῦ κέρδους, ὅσον θὰ ἐλάμβανε καὶ ἐὰν κατέθετε 35πλάσια χρήματα ἤτοι (8 000×35) δρχ. ἐπὶ 1 μῆνα.

Δυνάμεθα ἐπομένως νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι οἱ τρεῖς οὗτοι ἔμποροι κατέθεσαν συγχρόνως ὁ μὲν α'. 10 000×48=480 000 δρχ., ὁ β'. 12 000×42=504 000 δρχ. καὶ ὁ γ'. 8 000×35=280 000 δρχ., καὶ ὅτι ἡ ἐπιχείρησις αὕτη διήρκεσεν 1 μῆνα.

Μετὰ τὰς ὑποθέσεις ταύτας προσθέτομεν τὰ τρία ταῦτα ποσά, καὶ προχωροῦμεν σκεπτόμενοι ὡς ἑξῆς:

Ἐὰν εἷς μόνος κατέθετεν ὅλας τὰς 1 264 000 δρχ., θὰ ἐλάμβανεν ὁλόκληρον τὸ κέρδος τῶν 6000 δρχ. Ἐὰν κατέθετε 1 δραχ., θὰ ἐλάμβανεν $\frac{6\,000}{1\,264\,000}$ δρχ. Ἄρα:

ὁ α'. καταθέσας 480 000 δρ., θὰ λάβῃ $\frac{6\,000}{1\,264\,000}\times 480\,000 = 2278,48$ δρχ

ὁ β'. » 504 000 » » » $\frac{6\,000}{1\,264\,000}\times 504\,000 = 2\,392,40$ »

καὶ ὁ γ' » 280 000 » » » $\frac{6\,000}{1\,264\,000}\times 280\,000 = 1\,329,12$ »

Προβλήματα.

1) Τρεῖς ἐργάται ἐπληρώθησαν 150 δρχ. δι' ἓν ἔργον, τὸ ὁποῖον ἐξετέλεσαν. Ἀλλ' ὁ μὲν πρῶτος εἶχεν ἐργασθῆ 8 ἡμέρας, ὁ β'. 12 καὶ ὁ γ' 10. Πῶς πρέπει νὰ μοιρασθῶσι τὴν ἀμοιβήν;

(Ἀπ. ὁ α'. πρέπει νὰ λάβῃ 40 δρχ, ὁ β'. 60 καὶ ὁ γ'. 50)

2) Τρεῖς ἔμποροι συνεταιρισθέντες κατέθεσαν ὁ μὲν α'. 16 000 δρχ., ὁ β'. 20 000 καὶ ὁ γ'. 24 000. Ἐκ τοῦ κέρδους τὸ ὁποῖον ἀπέφερεν ἡ ἐπιχείρησις αὕτη ἔλαβεν ὁ α 2 000 δρχ. Πόσας ἔλαβεν ἑκάτερος τῶν ἄλλων;

(Ἀπ, ὁ β'. 2 500 καὶ ὁ γ'. 3 000 δρχ.)

3) Ἔμπορός τις ἤρχισεν ἐπιχείρησιν μὲ 6 000 δραχμάς· 4 μῆνας μετὰ ταῦτα προσέλαβε συνέταιρον ὅστις κατέβαλε 5 000 δρχ μετὰ 8 δὲ ἀκόμη μῆνας προσέλαβε καὶ τρίτον συνέταιρον ὅστις κατέβαλεν 9 000 δρχ. 2 ἔτη μετὰ ταῦτα εὗρον ὅτι ἐκέρδισαν ἐκ τῆς ἐπιχειρήσεως ταύτης 10 000 δρχ. Πόσας πρέπει νὰ λάβῃ ἕκαστος;

(Ἀπ. ὁ α'. καὶ ὁ γ'. ἀπὸ 3648, 65 δρχ. ὁ δὲ β'. 2702,70)

4) Τρεῖς συνέταιροι ἐκέρδισαν ἔκ τινος ἐπιχειρήσεως 4 200 δρχ. Ὁ α'. εἶχε καταθέσει 4 000 δρχ ἐπὶ 6 μῆνας, ὁ β'. 8 000 δρχ. ἐπὶ 2 μῆνας καὶ ὁ γ'. 5 000 δρχ. ἐπὶ 4 μῆνας. Ποῖον μέρος τοῦ κέρδους ἀνήκει εἰς ἕκαστον;

(Ἀπ. εἰς τὸν α'. 1680 δρχ., εἰς τὸν β'. 1120 καὶ εἰς τὸν γ'. 1400)

5) Τέσσαρες ἔμποροι συνεταιρίσθησαν διά τινα ἐπιχείρησιν. Ὁ α'. τούτων κατέθεσε 10 000 δρχ., ὁ β'. 7 500, ὁ γ'. 4 500 καὶ ὁ δ'. 8 000. Ἐκ τῆς ἐπιχειρήσεως ὅμως ταύτης προέκυψε ζημία 15 000 δρχ. Πόσον ἀνήκει ἐξ αὐτῆς εἰς ἕκαστον τῶν συνεταίρων;

(Ἀπ. εἰς τὸν α'. 5 000 δρχ., εἰς τὸν β'. 3 750, εἰς τὸν γ'. 2 250 καὶ εἰς τὸν δ. 4 000).

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΜΕΙΞΕΩΣ

192. — Διὰ τῆς μεθόδου ταύτης λύονται δύο εἰδῶν προβλήματα :

α'.) Προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα δίδονται αἱ ποσότητες τῶν ἀναμιγνυομένων πραγμάτων καὶ ἡ τιμὴ τῆς μονάδος ἑκάστου ἐξ αὐτῶν, ζητεῖται δὲ ἡ τιμὴ τῆς μονάδος τοῦ μείγματος.

καὶ β'.) Προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα δίδεται ἡ τιμὴ τῆς μονάδος τῶν ἀναμειχθησομένων (δύο) πραγμάτων, καὶ ζητεῖται πόσον πρέπει νὰ λάβωμεν ἐξ ἑκατέρου διὰ νὰ ἀποτελέσωμεν μεῖγμα ὡρισμένης ποσότητος, τῆς ὁποίας ἡ μονὰς νὰ ἔχῃ ὡρισμένην τιμήν.

Πρόβλημα τοῦ α'. εἴδους.

Οἰνοπώλης τις ἀνέμειξε τρία εἴδη οἴνου· καὶ ἐκ μὲν τοῦ πρώτου, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἐπωλεῖτο 50 λεπτὰ ἔλαβε 300 ὀκ., ἐκ τοῦ δευτέρου τὸ ὁποῖον ἐπώλει πρὸς 70 λεπτ. τὴν ὀκᾶν ἔλαβε 450 ὀκ. καὶ ἐκ τοῦ τρίτου πωλουμένου πρὸς 65 λεπ. 200 ὀκ. Πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὴν ὀκᾶν τοῦ μείγματος διὰ νὰ λάβῃ ἐκ τῆς πωλήσεως αὐτοῦ τὰ αὐτὰ χρήματα, τὰ ὁποῖα θὰ ἐλάμβανεν ἐὰν ἐπώλει χωριστὰ ἕκαστον εἶδος μὲ τὴν τιμήν του ;

Λύσις.

Αἱ	300 ὀκ.	τοῦ α'.	οἴνου	ἀξίζουν	$50\times300=15000$	λεπ
»	450 »	» β'.	»	»	$70\times450=31500$	»
καὶ »	200 »	» γ'.	»	»	$65\times200=13000$	»
Ὥστε						
ὅλαι ὁμοῦ αἱ	950 »	» μείγματος	»	....	59500	λεπ·

καὶ ἑπομένως ἡ 1 ὀκ. θὰ ἀξίζῃ $\frac{59500}{950} = 63$ λεπ. περίπου.

Πρὸς λύσιν λοιπὸν τῶν τοιούτων προβλημάτων εὑρίσκομεν πρῶτον πόσον ἀξίζει χωριστὰ ἕκαστον ἐκ τῶν ἀναμιγνυομένων εἰδῶν, ἔπειτα ἀθροίζοντες τὰς μερικὰς ταύτας τιμὰς εὑρίσκομεν πόσον ἀξίζει ὅλον ὁμοῦ τὸ μεῖγμα· τέλος δὲ διαιροῦντες τὴν ὁλικὴν ἀξίαν τοῦ ἀποτελεσθέντος μείγματος διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὅλων ὀκάδων, τὰς ὁποίας ἐλάβομεν, εὑρίσκομεν πόσον ἀξίζει ἑκάστη ὀκᾶ τοῦ μείγματος.

Πρόβλημα β'. εἴδους.

Οἰνοπώλης τις ἔχει δύο εἴδη οἴνου· τοῦ πρώτου ἡ ὀκᾶ πωλεῖται 55 λεπτά, τοῦ δὲ δευτέρου 75. Πόσας ὀκάδας πρέπει νὰ λάβῃ ἀπὸ τὸ κάθε εἶδος, διὰ νὰ σχηματίσῃ μεῖγμα 500 ὀκάδων, ἐκ τοῦ ὁποίου πωλῶν τὴν ὀκᾶν πρὸς 60 λεπ. νὰ λάβῃ τὰ αὐτὰ χρήματα ;

Λύσις. Τὸ πρόβλημα τοῦτο θὰ λύσωμεν σκεπτόμενοι ὡς ἑξῆς :

Ἑκάστη ὀκᾶ τοῦ α΄. εἴδους ἐν ὅσῳ εὑρίσκεται χωριστά, πωλεῖται 55 λεπ. Ὅταν ὅμως ἀποτελέσῃ μέρος τοῦ μείγματος, θὰ πωληθῇ 60 λεπ. Ἑπομένως ἀπὸ κάθε ὀκᾶν τοῦ α΄. εἴδους θὰ προκύψῃ κέρδος 5 λεπ.

Ἐπίσης ἑκάστη ὀκᾶ τοῦ β΄. εἴδους ἐν ὅσῳ εὑρίσκεται χωριστά, πωλεῖται 75 λεπ. ὅταν ὅμως εἰσέλθῃ εἰς τὸ μεῖγμα, θὰ πωληθῇ 60 λεπ. Ἑπομένως ἀπὸ κάθε ὀκᾶν τοῦ β΄. εἴδους θὰ προκύψῃ ζημία 15 λεπ.

Ἐπειδὴ ὅμως ὁ οἰνοπώλης δὲν θέλει οὔτε νὰ ζημιωθῇ οὔτε νὰ ὠφεληθῇ, πρέπει νὰ λάβῃ ἐκ μὲν τοῦ α΄ 15 ὀκ., ἐκ δὲ τοῦ β΄ 5.

Διότι τότε : Ἀφ' οὗ εἰς 1 ὀκ. τοῦ α΄. ὠφελεῖται 5 λεπ.
Εἰς τὰς 15 » » » θὰ ὠφεληθῇ 5×15 »
Ἐπίσης ἀφ' οὗ εἰς 1 ὀκ. τοῦ β΄ ζημιοῦται 15 »
Εἰς τὰς 5 » » » θὰ ἔχῃ ζημ. 15×5 »

Ἐπειδὴ δὲ τὰ δύο γινόμενα 5×15 καὶ 15×5 εἶνε ἴσα (ἐδ. 39, α΄), ἕπεται ὅτι τοιουτοτρόπως οὔτε ζημίαν θὰ ἔχῃ οὔτε ὠφέλειαν.

Διὰ νὰ σχηματίσῃ λοιπὸν μεῖγμα 20 ὀκ. ἐκ τοῦ ὁποίου νὰ μὴ ἔχῃ οὔτε ζημίαν οὔτε ὠφέλειαν, πρέπει νὰ λαβῃ ἐκ μὲν τοῦ α΄. 15 ὀκ. ἐκ δὲ τοῦ β΄ 5. Ἐὰν θελήσῃ νὰ σχηματίσῃ τοιοῦτο μεῖγμα 1 ὀκᾶς, πρέπει νὰ λάβῃ 20 φορὰς ὀλιγώτερον ἀπὸ τὸ κάθε εἶδος, ἤτοι $\frac{15}{20}$ ὀκ. ἐκ τοῦ α΄., καὶ $\frac{5}{20}$ ὀκ. ἐκ τοῦ β΄. Καὶ ἑπομένως διὰ νὰ σχηματίσῃ τὸ ζητούμενον μεῖγμα τῶν 500 ὀκ., συμπεραίνομεν ὅτι πρέπει νὰ λάβῃ ἀπὸ τὸ καθὲν 500 φορὰς περισσότερον, ἤτοι ἐκ μὲν τοῦ πρώτου $\frac{15}{20} \times 500 = 375$ ὀκ., ἐκ δὲ τοῦ β΄. $\frac{5}{20} \times 500 = 125$ ὀκ.

Προβλήματα.

1) Ἐὰν ἀναμείξῃ τις 450 ὀκ. σίτου, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ πωλεῖται 40 λεπ. μὲ 300 ὀκ. ἄλλου σίτου πωλουμένου πρὸς 44 λεπτά, πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὴν ὀκᾶν τοῦ μείγματος, διὰ νὰ λάβῃ τὰ αὐτὰ χρήματα ; (Ἀπ 42 λεπ περίπου)

2) Ἔχει τις 2800 ὀκ οἴνου, τὸν ὁποῖον ἐσκόπευε νὰ πωλήσῃ πρὸς 85 λεπ. τὴν ὀκᾶν. Διὰ νὰ δυνηθῇ νὰ ἐλαττώσῃ τὴν τιμήν του εἰς 70 λεπ χωρὶς νὰ ζημιωθῇ, πόσον ὕδωρ πρέπει νὰ ἀναμείξῃ μετ' αὐτοῦ ; (Ἀπ. 600 ὀκ.)

3) Οἰνοπώλης τις ἔχει 2100 ὀκ. οἴνου, τὸν ὁποῖον εἶχε σκοπὸν νὰ πωλήσῃ πρὸς 65 λεπ. τὴν ὀκᾶν Διὰ νὰ δυνηθῇ νὰ ἐλαττώσῃ τὴν τιμήν του, ἀνέμειξε μετ' αὐτοῦ 300 ὀκ. ὕδατος. Πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τώρα τὴν ὀκᾶν διὰ νὰ λάβῃ τὰ αὐτὰ χρήματα ; (Ἀπ 57 λεπ. περίπου)

4) Παντοπώλης ἀγοράσας 100 ὀκ βουτύρου πρὸς 3,80 δρχ. τὴν ὀκᾶν

ἀνέμειξε μετ' αὐτοῦ 25 ὀκ. στέατος, τὸ ὁποῖον ἠγόρατε πρὸς 1,60 δρχ. τὴν ὀκᾶν. Πόσον τῷ κοστίζει ἡ ὀκᾶ τοῦ μείγματος; ('Απ. 3,36 δρχ.)

5) Τὰ $\frac{4}{9}$ βαρελίου χωροῦντος 360 ὀκ. ἐπλήρωσεν οἰνοπώλης τις δι' οἴνου πωλουμένου πρὸς 45 λεπ. τὴν ὀκᾶν, τὸ δὲ ὑπόλοιπον δι' οἴνου τῶν 60 λεπ. Πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ μετὰ ἓν ἔτος τὴν ὀκᾶν τοῦ ἀποτελεσθέντος μείγματος, ἐὰν θέλῃ νὰ κερδίσῃ καὶ 20 $^0|_0$; ('Απ 64 λεπ)

ΤΙΤΛΟΙ ΚΡΑΜΑΤΩΝ

193.—Τὰ πλεῖστα τῶν μετάλλων δύνανται νὰ ἑνωθῶσι μετ' ἀλλήλων, ὅταν εὑρεθῶσιν ἐν τετηγμένῃ ἤτοι ἐν ὑγρᾷ καταστάσει. Αἱ ἑνώσεις αὗται τῶν μετάλλων μετ' ἀλλήλων καλοῦνται *κράματα*. Τὰ πλεῖστα τῶν κραμάτων εὑρίσκουσιν ἐκτεταμένην ἐφαρμογὴν εἰς τὰς τέχνας ὡς ἔχοντα πολυτίμους ἰδιότητας, τῶν ὁποίων στεροῦνται ἐν καθαρᾷ καταστάσει τὰ ἀποτελοῦντα τὸ κρᾶμα μέταλλα. Τοιουτοτρόπως ὁ χρυσὸς καὶ ὁ ἄργυρος ἐν καθαρευούσῃ καταστάσει εἶνε μέταλλα πολὺ ἁπαλὰ καὶ δὲν δύνανται νὰ χρησιμοποιηθῶσι π. χ. πρὸς ἐκκοπὴν νομισμάτων, διότι ταῦτα πολὺ ταχέως ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει θὰ ἀπετρίβοντο. Τῇ προσθήκῃ ὅμως χαλκοῦ λαμβάνονται ἐκ τῶν μετάλλων τούτων κράματα σκληρὰ καὶ ἀντέχοντα.

Τίτλος ἢ *βαθμὸς καθαρότητος* κράματος πολυτίμου τινὸς μετάλλου καὶ ἄλλων μικροτέρας ἀξίας μετάλλων καλεῖται τὸ ποσὸν τοῦ πολυτίμου μετάλλου τὸ περιεχόμενον εἰς τὴν μονάδα τοῦ κράματος. Ὅταν λοιπὸν λέγωμεν ὅτι ὁ τίτλος τοῦ ἀργυροῦ πενταδράχμου εἶνε 0,900, ἐννοοῦμεν ὅτι εἰς ἕκαστον δράμιον ἢ εἰς ἕκαστον γραμμάριον τοῦ νομίσματος τούτου μόνον τὰ 900 χιλιοστὰ εἶνε καθαρὸς ἄργυρος, τὰ δὲ λοιπὰ 100 χιλιοστὰ εἶνε ἄλλα μέταλλα κατωτέρας ἀξίας.

Παραθέτομεν παραδείγματά τινα προβλημάτων, ἀναφερομένων εἰς τίτλους κραμάτων χρυσοῦ ἢ ἀργύρου.

Πρόβλημα Α'.) Πόσον καθαρὸν χρυσὸν περιέχει κρᾶμα χρυσοῦ καὶ χαλκοῦ ἔχον βάρος 30 δρμ. καὶ τίτλον 0,800;

Λύσις. 'Αφ' οὗ τὸ 1 δρμ. τοῦ κράματος ἔχει 0,800 δρμ. καθαροῦ χρυσοῦ (διότι τοῦτο δεικνύει ὁ τίτλος αὐτοῦ), ἕπεται ὅτι τὰ 30 δρμ. θὰ περιέχωσιν $0,800 \times 30 = 24$ δρμ. καθαροῦ χρυσοῦ.

Πρόβλημα Β'.) Ποῖος εἶνε ὁ τίτλος κράματος ληφθέντος διὰ συντήξεως 24 δρμ. ἀργύρου καὶ 3 δρμ. χαλκοῦ;

Λύσις. 'Αφ' οὗ εἰς τὰ 27 δρμ. τοῦ κράματος περιέχονται 24 δρμ. καθαροῦ ἀργύρου, εἰς τὸ 1 δρμ. αὐτοῦ θὰ περιέχωνται $\frac{24}{27} = 0,889$ δρμ. περίπου καθαροῦ ἀργύρου. Ὁ ζητούμενος λοιπὸν τίτλος τοῦ κράματος εἶνε 0,889.

Πρόβλημα Γ'.) Ἐὰν συντήξωμεν κρᾶμα χρυσοῦ καὶ χαλκοῦ ἔχον βάρος 10 δρμ. καὶ τίτλον 0,850 μετὰ κράματος τῶν αὐτῶν μετάλλων ἔχοντος βάρος 25 δρμ. καὶ τίτλον 0,900, ποῖος θὰ εἶνε ὁ βαθμὸς καθαρότητος τοῦ ἀποτελεσθησομένου νέου κράματος.

Λύσις. Πρῶτον εὑρίσκομεν (κατὰ τὸ Α'. πρόβλημα) ὅτι καθαρὸν χρυσὸν περιέχει τὸ μὲν α'. κρᾶμα 8,5 δρμ., τὸ δὲ δεύτερον 22,5 δρμ. Ἐπομένως τὸ προκῦπτον νέον κρᾶμα θὰ ἔχῃ ἐν ὅλῳ 31 δρμ. καθαροῦ χρυσοῦ. Κατόπιν διαιροῦντες τὰ 31 αὐτὰ δρμ. τοῦ καθαροῦ χρυσοῦ διὰ τῶν 35 δρμ. τοῦ νέου κράματος εὑρίσκομεν ὅτι ὁ ζητούμενος τίτλος εἶνε 0,886.

Σημείωσις. — Ἐὰν ἐν τῷ προβλήματι τούτῳ θεωρήσωμεν τὸν τίτλον ὡς τιμὴν τῆς μονάδος ἑκάστου ἐκ τῶν συντηκομένων μερικῶν κραμάτων, δυνάμεθα τὰ τοιούτου εἴδους προβλήματα νὰ θεωρήσωμεν ὡς ἀνήκοντα εἰς τὸ α'. εἶδος τῶν προβλημάτων τῆς μείξεως, καθὼς φαίνεται καὶ ἐκ τῆς ἑπομένης διατάξεως:

$$\begin{array}{l} 10\times0,850=\ \ 8,5 \\ 25\times0,900=22,5 \\ \hline 35 \qquad\qquad\quad 31 \end{array} \qquad 31 : 35=0,886.$$

Πρόβλημα Δ'.) Ἐὰν ἔχωμεν 27 δρμ. καθαροῦ χρυσοῦ, μὲ πόσον χαλκὸν πρέπει νὰ τὰ συντήξωμεν, διὰ νὰ λάβωμεν κρᾶμα, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ τίτλον 0,900 ;

Λύσις. Ἀφ' οὗ ὁ τίτλος θὰ εἶνε 0,900, ἕπεται ὅτι διὰ νὰ ἀποτελέσωμεν ἓν δράμιον κράματος, πρέπει νὰ λάβωμεν 0,900 δρμ. ἐκ τοῦ καθαροῦ χρυσοῦ, τὸν ὁποῖον ἔχομεν, καὶ 0,100 δρμ. χαλκοῦ. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον διὰ νὰ ἀποτελέσωμεν ἄλλο ἓν δράμιον κράματος, πρέπει νὰ λάβωμεν πάλιν 0,900 δρμ. καθαροῦ χρυσοῦ καὶ 0,100 δρμ. χαλκοῦ, καὶ οὕτω καθεξῆς. Παρατηροῦμεν δηλ. ὅτι ὅταν λαμβάνωμεν 0,900 δρμ. χρυσοῦ, λαμβάνομεν συγχρόνως καὶ 0,100 δρμ. χαλκοῦ ὅπως ἀποτελέσωμεν διὰ τῆς συντήξεως αὐτῶν 1 δρμ. κράματος. Ἐπομένως ὅσας φορὰς λάβωμεν τὰ 0,900 δρμ. τοῦ χρυσοῦ, τόσας φορὰς ἀκριβῶς θὰ λάβωμεν καὶ τὰ 0,100 δρμ. τοῦ χαλκοῦ. Ἀλλὰ τὰ 0,900 δρμ. χρυσοῦ δὲν δυνάμεθα νὰ τὰ λάβωμεν παρὰ μόνον ὅσας φορὰς χωροῦσι ταῦτα εἰς τὰ δεδομένα 27 δρμ. τοῦ καθαροῦ χρυσοῦ, ἤτοι 30 φοράς. Ἐπομένως 30 φορὰς θὰ λάβωμεν ἐν ὅλῳ καὶ τὰ 0,100 δρμ. τοῦ χαλκοῦ, καὶ διὰ τοῦτο θὰ χρειασθῶμεν 0,100 δρμ.×30=3 δρμ. χαλκοῦ.

Προβλήματα.

1) Ἐὰν συντήξωμεν 4 ἀργυρᾶ διδραχμα μετὰ 10 ἀργυρῶν πενταδράχμων, ποῖος θὰ εἶνε ὁ τίτλος τοῦ ἀποτελεσθησομένου κράματος ;

(Ἀπ. 0,891)

2) Μὲ πόσον καθαρὸν χρυσὸν πρέπει νὰ συντήξωμεν 3 δρμ. χαλκοῦ, διὰ νὰ λάβωμεν κρᾶμα τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ τίτλον 0,900;
('Απ. Μὲ 27 δρμ. καθ. χρ.)

3) Χρυσοχόος συνέτηξε χρυσοῦν δακτύλιον ἔχοντα βάρος 32 γραμ. καὶ τίτλον 0,840 μετὰ 15 γραμ. καθαροῦ χρυσοῦ καὶ 3 γραμ. χαλκοῦ. Ποῖος εἶνε ὁ τίτλος τοῦ ἀποτελεσθέντος κράματος ; ('Απ. 0,838 περίπου.)

Περὶ μέσου ὅρου.

194.—*Μέσος ὅρος ἢ ἀριθμητικὸν μέσον* τῶν τιμῶν δύο ἢ περισσοτέρων ὁμοειδῶν ποσῶν λέγεται τὸ πηλίκον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν διαιροῦντες τὸ ἄθροισμα τῶν τιμῶν τούτων διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ δηλοῦντος τὸ πλῆθος τῶν ποσῶν.

Παράδειγμα.—Ταξειδεύων τις ἐπὶ 3 ἡμέρας ἐδαπάνησε τὴν μὲν πρώτην ἡμέραν 11,65 δρχ., τὴν δευτέραν 13,35 καὶ τὴν τρίτην 20 δρχ. Πόσον ἐξώδευσε κατὰ μέσον ὅρον ἑκάστην ἡμέραν;

Λύσις. 'Αθροίζομεν τὰ τρία δαπανηθέντα ποσὰ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν 45 δρχ. διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 3 τῶν ἡμερῶν. Εὑρίσκομεν τοιουτοτρόπως ὅτι κατὰ μέσον ὅρον ἐξώδευε 15 δρχ. τὴν ἡμέραν.

Προβλήματα.

1) Γραμμή τις ἐμετρήθη τρίς. Τὴν α'. φορὰν εὑρέθη ὅτι εἶνε 1,266 μετρ., τὴν β'. 1,267 καὶ τὴν τρίτην 1,262. Πόσον θὰ λάβωμεν κατὰ μέσον ὅρον τὸ μῆκος τῆς γραμμῆς ταύτης ; ('Απ. 1,265 μετρ.)

2) 'Εργασθείς τις ἐπὶ 3 ἡμέρας ἔλαβε τὴν μὲν α'. ἡμέραν 3,25 δρχ., τὴν β'. 2,80 καὶ τὴν γ'. 4,20. Πόσον ἐλάμβανε κατὰ μέσον ὅρον ἑκάστην ἡμέραν ; ('Απ. 3,41 δρχ.)

ΤΕΛΟΣ

ΠΑΡΟΡΑΜΑΤΑ

'Εν τῇ *σελ.* 19, *προβλ.* 5 ἀντὶ 1094 γράφε 1904

Ἀριθ. $\frac{\text{Πρωτ. } 14473}{\text{Διεκπ. } 11491}$ *Ἐν Ἀθήναις τῇ 29 Αὐγούστου 1902.*

ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

ΤΟ ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΤΩΝ ΕΚΚΛΗΣΙΑΣΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΗΣ ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΕΩΣ

Πρὸς τὸν κ. Σπυρίδωνα Ν. Παπανικολάου

Ἔχοντες ὑπ᾽ ὄψει τὸν Νόμον ,ΒΤΓ´ τῆς 12 Ἰουλίου 1895 περὶ διδακτικῶν βιβλίων τῆς μέσης καὶ δημοτικῆς ἐκπαιδεύσεως καὶ τὸ Β. Διάταγμα τῆς 10 Ὀκτωβρίου 1895, καὶ τὴν ἔκθεσιν τῆς οἰκείας ἐπιτροπείας τῶν κριτῶν τῶν διδακτικῶν βιβλίων, τῶν εἰς τὰ Ἑλληνικὰ Σχολεῖα εἰσακτέων, γνωρίζομεν ὑμῖν, ὅτι ἐγκρίνομεν τὴν γνώμην τῆς ἐπιτροπείας ταύτης, καθ᾽ ἣν τὸ ὑμέτερον σύγγραμμα «**Ἀριθμητική**», τὸ κατὰ τὸν εἰρημένον Νόμον ἐγκριθέν, εἶναι καλῶς καὶ κατὰ τὸν Νόμον ἐκτετυπωμένον. Συμφώνως δὲ τῇ γνώμῃ τῆς ἐπιτροπείας ὁρίζομεν τιμὴν αὐτοῦ εἰς **δραχμὴν μίαν καὶ λεπτὰ τριάκοντα πέντε** δι᾽ ἕκαστον ἀντίτυπον.

Ὁ Ὑπουργὸς

Α. ΜΟΜΦΕΡΡΑΤΟΣ

Στέφ. Μ. Παρίσης