Δραχ. 200

Μηνάρδος

1920

ΝΙΚΟΛΑΟΥ Π. ΛΕΚΟΥ
Καθηγητοῦ ἐν τῷ Γυμνασίῳ Πειραιῶς.

ΠΡΑΚΤΙΚΗ
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ

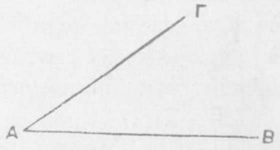
ΤΩΝ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΕΙΩΝ

Ἡ μόνη ἐγκεκριμένη κατὰ τὸν νόμον ,ΓΣΑ΄ διὰ τὴν τετραετίαν 1913—1917.

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΕΚΔΟΤΗΣ ΜΙΧΑΗΛ ΜΑΝΤΖΕΒΕΛΑΚΗΣ
1913

15. *Γωνία* καλεῖται τὸ σχῆμα, ὅπερ ἀποτελοῦσι δύο εὐθεῖαι ἐξ ἑνὸς σημείου ἀρχίζουσαι, χωρὶς ν' ἀποτελῶσι μίαν εὐθεῖαν. Τὸ σημεῖον Α, ἐξ οὗ ἀρχίζουσιν αἱ δύο εὐθεῖαι, λέγεται *κορυφὴ* τῆς γωνίας, αἱ δὲ εὐθεῖαι ΑΒ, ΑΓ, *πλευραὶ* τῆς γωνίας (Σχ. 13). Π. χ. τὰ δύο σκέλη ἀνοικτοῦ διαβήτου ἢ ψαλίδος, δύο δάκτυλοι τῆς χειρός, ἡ διασταύρωσις δύο ὁδῶν, παριστῶσι, γωνίας.

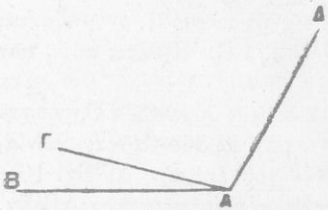
Τὴν γωνίαν δυνάμεθα νὰ ὀνομάζωμεν ἢ διὰ γράμματος τιθεμένου ἐπὶ τῆς κορυφῆς π.χ. ἡ γωνία Α, ἢ διὰ τριῶν γραμμάτων γραφομένων τοῦ ἑνὸς εἰς τὴν κορυφὴν καὶ ἑκατέρου τῶν ἄλλων εἰς τὰ ἄκρα τῶν πλευρῶν Κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τὸ γράμμα τῆς κορυφῆς *θέτομεν πάντοτε μεταξὺ τῶν δύο ἄλλων*· οὕτω λέγομεν ἡ γωνία ΒΑΓ (Σχ. 13). Ἡ ἀνάγνωσις τῆς γωνίας διὰ τριῶν γραμμάτων εἶνε ἀπαραίτητος, ὅταν πολλαὶ γωνίαι ἔχωσι τὴν αὐτὴν κορυφήν· π.χ. ἵνα διακρίνωμεν τὰς γωνίας τοῦ σχ. 10, λέγομεν αἱ γωνίαι ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΒΑΔ.



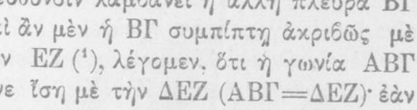
Σχ. 13.

Περὶ γωνιῶν.

16. Σύγκρισις δύο γωνιῶν ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ (Σχ. 15.)— Ἐπιθέτομεν τὴν μίαν ἐπὶ τῆς ἄλλης οὕτως, ὥστε ἡ κορυφὴ Β νὰ πέσῃ εἰς τὴν κορυφὴν Α καὶ ἡ μία πλευρὰ ΒΑ νὰ συμπέσῃ μὲ τὴν ΔΕ· τότε βλέπομεν ποίαν διεύθυνσιν λαμβάνει ἡ ἄλλη πλευρὰ ΒΓ καὶ ἂν μὲν ἡ ΒΓ συμπίπτῃ ἀκριβῶς μὲ τὴν ΕΖ (¹), λέγομεν, ὅτι ἡ γωνία ΑΒΓ εἶνε ἴση μὲ τὴν ΔΕΖ (ΑΒΓ=ΔΕΖ)· ἐὰν δὲ ἡ ΒΓ πίπτῃ ἐντὸς τῆς γωνίας ΔΕΖ, τότε ἡ γωνία ΑΒΓ εἶνε μικροτέρΕ τῆς ΔΕΖ (ΑΒΓ <ΔΕΖ)· τέλος, ἐὰν ἡ ΒΓ πίπτῃ ἐκτὸς τῆς γωνίας ΔΖα τότε ἡ γωνία ΑΒΓ εἶνε μεγαλειτερα τῆς ΔΕΖ (ΑΒΓ >ΔΕΖ). Ἐντεῦθεν βλέπομεν, ὅτι τὸ μέγεθος μιᾶς γωνίας δὲν ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ μήκους τῶν πλευρῶν, ἀλλὰ μόνον ἐκ τοῦ ἀνοίγματος αὐτῶν· π.χ. ὅταν δύο ὡρολόγια δεικνύωσι τὴν αὐτὴν ὥραν, οἱ δύο δεῖκται ἑκάστου σχηματίζουσιν ἴσας γωνίας ὁσονδήποτε καὶ ἂν εἶνε τὸ μῆκος τῶν δεικτῶν. Μία γωνία αὐξάνει, ὅταν ἀπομακρύνωμεν τὰς δύο πλευράς της, π. χ. ὁ διαβήτης ὅταν εἶνε κλει-



Σχ. 14.

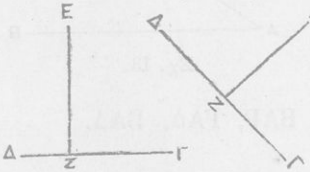


Σχ. 15.

1) Ἡ σύμπτωσις τῶν πλευρῶν ἀναφέρεται εἰς τὴν διεύθυνσιν καὶ οὐχὶ εἰς τὸ μῆκος αὐτῶν.

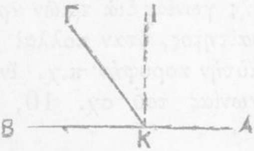
στός, ἡ γωνία τῶν δύο σκελῶν του εἶνε 0, ὅσῳδὲ μᾶλλον ἀνοίγομεν ταῦτα τόσῳ ἡ γωνία των αὐξάνει. Ἡ γωνία τῶν δεικτῶν ὡρολογίου, ὅταν τὸ ὡρολόγιον δεικνύῃ 3 ὥρας, εἶνε μεγαλειτέρα παρὰ ὅταν δεικνύῃ 2 ὥρας, καὶ ἀκόμη μεγαλειτέρα, ὅταν δεικνύῃ 4 ὥρας.

17. Ἄθροισμα δύο γωνιῶν.—Θέτομεν αὐτὰς ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου οὕτως, ὥστε νὰ ἔχωσι τὴν αὐτὴν κορυφὴν Α καὶ μίαν πλευρὰν κοινὴν τὴν ΑΓ (Σχ. 14) φροντίζοντες, ὥστε αἱ δύο ἄλλαι πλευραὶ ΑΒ καὶ ΑΔ νὰ κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς κοινῆς· ἡ γωνία ΒΑΔ, ἡ ἀποτελουμένη ἐκ τῶν ἄκρων πλευρῶν, καλεῖται *ἄθροισμα* τῶν δύο δοθεισῶν γωνιῶν, ἡ δὲ πρᾶξις αὕτη λέγεται *πρόσθεσις* τῶν δύο γωνιῶν. Ἐννοεῖται, ὅτι ἐὰν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον παραθέσωμεν τρίτην γωνίαν εἰς τὴν ΒΑΔ, θὰ ἔχωμεν τὸ ἄθροισμα τριῶν γωνιῶν, καὶ ἐξακο-λουθοῦντες οὕτω λαμβάνομεν τὸ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε γωνιῶν, ὅπερ εἶνε ἀνεξάρτητον τῆς τάξεως, καθ' ἣν προσθέτομεν τὰς γωνίας.



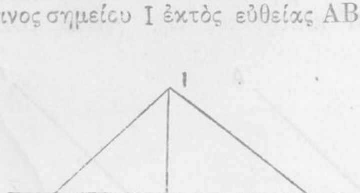
Σχ. 16ί

18. Γωνίαι ἐφεξῆς.—Δύο γωνίαι ἔχουσαι τὴν αὐτὴν κορυφὴν καὶ μίαν πλευρὰν κοινὴν ἐὰν κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς κοινῆς πλευρᾶς, ὀνομάζονται *ἐφεξῆς γωνίαι*· π. χ. αἱ γωνίαι ΒΑΓ, ΓΑΔ (Σχ. 14). Ἡ θέσις αὕτη τῶν δύο γωνιῶν προκύπτει ἐκ τῆς προσθέσεως αὐτῶν.



Σχ. 17.

19. Εὐθεῖαι κάθετοι.—Ὅταν μία εὐθεῖα συναντᾷ ἄλλην, σχηματίζει μετ' αὐτῆς δύο γωνίας ἐφεξῆς. Ἐὰν μὲν αἱ δύο αὗται γωνίαι εἶνε ἴσαι, λέγομεν, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΕΖ εἶνε *κάθετος* ἐπὶ τὴν ΔΓ (Σχ. 16), ἐὰν δὲ εἶνε ἄνισοι, λέγομεν ὅτι ἡ εὐθεῖα ΓΚ εἶνε *πλαγία* πρὸς τὴν ΑΒ (Σχ. 17). Τὸ κοινὸν σημεῖον Ζ ἢ Κ τῶν δύο εὐθειῶν λέγεται *ποῦς* τῆς καθέτου ἢ τῆς πλαγίας. Ἀληθεύουσι δὲ περὶ τούτων αἱ ἑξῆς ἰδιότητες α') *Ἔκ τινος σημείου Ι ἐκτὸς εὐθείας ΑΒ κειμένου* (Σχ. 18) *μίαν μόνην κάθετον δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἐπ' αὐτήν*, τὴν ΙΚ· πᾶσα δὲ ἄλλη εὐθεῖα ΙΛ διὰ τοῦ Ι διερχομένη εἶνε πλαγία πρὸς τὴν ΑΒ καὶ μεγαλειτέρα τῆς καθέτου ΙΚ· ὥστε *ἡ κάθετος εἶνε μικροτέρα πάσης πλαγίας*, δι' ὃ λαμβάνεται ὡς ἀπόστασις τοῦ σημείου Ι ἀπὸ τῆς εὐθείας ΑΒ. β') *Δύο πλάγιαι, ὧν οἱ πόδες ἀπέχουσιν ἴσον ἀπὸ τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου, εἶνε ἴσαι* (¹)· γ') *Ἐὰν ἐκ τοῦ μέσου Η μιᾶς εὐθείας ΑΒ* (Σχ. 26) *φέρωμεν κάθετον ἐπ'*

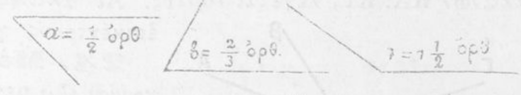


Σχ. 18.

1) δηλ. ἐὰν ΚΛ=ΚΜ, θὰ εἶνε καὶ ΙΜ=ΙΛ.

αὐτήν, πᾶν σημεῖον Κ τῆς καθέτου ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν ἄκρων Α καὶ Β τῆς εὐθείας ΑΒ, ἤτοι ΑΚ=ΒΚ. Καὶ ἀντιστρόφως. *Ἐὰν αἱ ἀποστάσεις σημείου τινὸς Κ ἀπὸ τῶν ἄκρων μιᾶς εὐθείας ΑΒ εἶνε ἴσαι, ἡ κάθετος ἡ ἐκ τοῦ μέσου Η τῆς εὐθείας, ἀγομένη θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ Κ.*

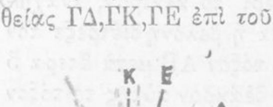
20. Γωνία ὀρθή. — Ἡ γωνία, τῆς ὁποίας ἡ μία πλευρὰ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν ἄλλην, ὀνομάζεται *ὀρθὴ γωνία*· π.χ. ἡ γωνία ΔΖΕ εἶνε ὀρθή, καθὼς καὶ ἡ γωνία ΕΖΓ (Σχ. 16). *Πᾶσαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι εἶνε ἴσαι*, δηλ. τῆς ὀρθῆς γωνίας τὸ μέγεθος εἶνε ἀμετάβλητον· διὰ τοῦτο τὰς ἄλλας γωνίας συγκρίνομεν πρὸς τὴν ὀρθήν· π.χ. λέγομεν ἡ γωνία α [2] εἶνε $^1/_2$ τῆς ὀρθῆς, ἡ γωνία β=$^2/_3$ τῆς ὀρθῆς, ἡ γωνία γ=1 $^1/_2$ ὀρθῆς (Σχ. 19). Πᾶσα γωνία μικροτέρα μιᾶς ὀρθῆς καλεῖται ὀξεῖα, πᾶσα δὲ γωνία μεγαλειτέρα μιᾶς ὀρθῆς καλεῖται *ἀμβλεῖα*· π.χ. αἱ γωναι α καὶ β εἶνε ὀξεῖαι, ἐνῷ ἡ γ εἶνε ἀμβλεῖα (Σχ. 19). Ἐὰν ὡρολόγιον δεικνύῃ τρεῖς ὥρας, οἱ δεῖκταί του σχηματίζουσιν γωνίαν ὀρθήν· ἐὰν δεικνύῃ 2 ὥρας, ἡ γωνία εἶνε ὀξεῖα, καὶ ἐὰν δεικνύῃ 4 ὥρας, ἡ γωνία εἶνε ἀμβλεῖα.



Σχ. 19.

21. Γωνίαι παραπληρωματικαί. — Ὅταν τὸ ἄθροισμα δύο γωνιῶν ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθὰς γωνίας, ἑκατέρα αὐτῶν λέγεται *παραπλήρωμα* τῆς ἄλλης, αἱ δύο ὁμοῦ λέγονται *γωνίαι παραπληρωματικαί*· π. χ. ὅταν ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου Κ εὐθείας ΑΒ ἀχθῇ ἄλλη εὐθεῖα ΓΚ οὐχὶ κάθετος, σχηματίζονται δύο γωνίαι, ὧν τὸ ἄθροισμα ΓΚΑ+ΓΚΒ=2ὀρθ.(Σχ. 17). Διότι, ἐὰν φέρωμεν τὴν κάθετον ΚΙ, βλέπομεν, ὅτι ΓΚΑ+ΓΚΒ= ΑΚΙ+ΙΚΒ.

Παρατήρησις. α΄) Ἐὰν ἐξ ἑνὸς σημείου Γ εὐθείας ΑΒ φέρωμεν ἄλλας εὐθείας ΓΔ, ΓΚ, ΓΕ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου (τοῦ χαρτίου ἢ τοῦ μαυροπίνακος) καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΑΒ (ἄνω ἢ κάτω), σχηματίζονται διάφοροι γωνίαι· πασῶν τούτων τὸ ἄθροισμα ἰσοῦται πρὸς δύο ὀρθὰς (Σχ. 20). Διότι, ἐὰν ἐκ τοῦ Γ φέρωμεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ, βλέπομεν, ὅτι αἱ διαδοχικαὶ γωνίαι ΒΓΔ, ΔΓΕ, ΕΓΖ ΖΓΑ κατέχουσιν οἵαν ἔκτασιν καὶ αἱ δύο ὀρθαὶ γωνίαι ΚΓΑ, ΚΓΒ.



Σχ. 20.

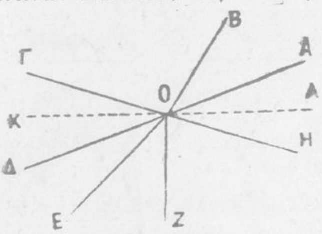
β΄) Ἐὰν ἔκ τινος οἱουδήποτε σημείου Ο ἑνὸς ἐπιπέδου φέρωμεν διαφόρους ἀπ' αὐτοῦ εὐθείας, τὸ ἄθροισμα πασῶν τῶν σχηματιζομένων διαφόρων γωνιῶν ἰσοῦται πρὸς 4 ὀρθάς. Διότι, ἐὰν διὰ τοῦ Ο ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΚΛ (Σχ. 21), ὅπως πᾶσαι αἱ γωνίαι αἱ κείμεναι πρὸς τὸ ἓν μέρος τῆς ΚΛ ἰσοῦνται πρὸς 2 ὀρθάς, οὕτω καὶ αἱ πρὸς τὸ ἕτερον μέ-

2) Τὴν γωνίαν ὀνομάζομεν συντόμως καὶ δι' ἑνὸς μικροῦ γράμματος γραφομένου ἐντὸς τῆς γωνίας.

ρος κείμεναι .αὶ ἑπομένως ἀμφοτέρων τῶν μερῶν πρὸς 4 ὀρθάς.

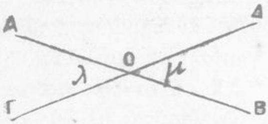
22. Γωνία κατὰ κορυφήν.—Ἐὰν προεκτείνωμεν τὰς πλευρὰς μιᾶς γωνίας ΑΟΓ ἀπὸ τὴν κορυφήν, σχηματίζεται ἑτέρα γωνία ΒΟΔ .Αἱ γωνίαι αὗται λέγονται *κατὰ κορυφὴν*(Σχ. 22), ἐπίσης αἱ γωνίαι ΑΟΔ, ΒΟΓ λέγονται κατὰ κορυφήν. Ὥστε δύο γωνίαι λέγονται κατὰ κορυφήν, ὅταν ἔχωσι τὴν αὐτὴν κορυφὴν καὶ αἱ πλευραὶ τῆς μιᾶς εἶνε προεκτάσεις τῶν πλευρῶν τῆς ἄλλης. *Αἱ κατακορυφὴν γωνίαι λ καὶ μ* εἶνε ἴσαι, διότι ἀμφότεραι εἶνε παραπληρώματα τῆς αὐτῆς γωνίας ΑΟΔ.'Επίσης αἱ γωνίαι ΑΟΔ καὶ ΒΟΓ εἶνε ἴσαι.

23. *Ἐπίκεντρος γωνία* λέγεται ἡ ἔχουσα τὴν κορυφήν της εἰς τὸ κέντρον κύκλου· π.χ. ἡ γωνία ΑΚΓ, πρὸς ἣν ἀντιστοιχεῖ τὸ τόξον ΑΜΓ (Σχ. 10). Τὸ μέρος τοῦ κύκλου τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τόξου ΑΜΓ καὶ δύο ἀκτίνων ΚΑ. ΚΓ, λέγεται *τομεύς*. Αἱ ἀκτῖνες τροχοῦ ἁμάξης ποιοῦσιν ἐπικέντρους γωνίας.



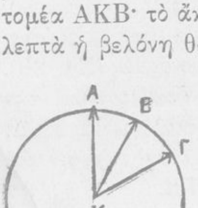
Σχ. 21.

24. Μέτρησις γωνιῶν.—Αἱ γωνίαι εἶνε μεγέθη δυνάμενα νὰ μετρηθῶσιν· ἐν ἐδ. 20 ἐλάβομεν ὡς μονάδα μετρήσεως αὐτῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν·ἀλλ' ἐν τῇ πράξει δὲν εἶνε εὔκολον νὰ εὕρωμεν, μὲ ποῖον κλάσμα τῆς ὀρθῆς ἰσοῦται μία γωνία καὶ μάλιστα, ὅταν εἶνε πολὺ μικρά· Διὰ τοῦτο ἀνάγομεν τὴν μέτρησιν γωνίας εἰς μέτρησιν τόξου, ἥτις εἶνε εὐκολωτέρα.



Σχ. 22.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ περιφέρεια Κ (Σχ. 23) εἶνε διῃρημένη εἰς 12 ἴσα τόξα καὶ ὅτι βελόνη τις κινεῖται ἰσοταχῶς περὶ τὸ κέντρον, ἀναχωροῦσα ἐκ τῆς θέσεως ΚΑ. Ἔστω ὅτι μετα 5 λεπτὰ ἡ βελόνη διέτρεξε τὸν τομέα ΑΚΒ· τὸ ἄκρον αὐτῆς θὰ ἔχῃ διατρέξει τὸ τόξον ΑΒ·μετὰ ἕτερα 5 λεπτὰ ἡ βελόνη θὰ διατρέξῃ τὸν τομέα ΒΚΓ, τὸ δὲ ἄκρον αὐτῆς τὸ τόξον ΑΓ, κ.ο.κ. Εἰς ἴσους χρόνους ἡ βελόνη θὰ διατρέχῃ ἴσας γωνίας ΑΚΒ, ΒΚΓ,...τὸ δὲ ἄκρον αὐτῆς ἴσα τόξα ΑΒ,ΒΓ...Τὸ αὐτὸ ἀληθεύει,ἐὰν θεωρήσωμεν συγχρόνως δύο ὡρολόγια ἴσα.Ὅθεν:

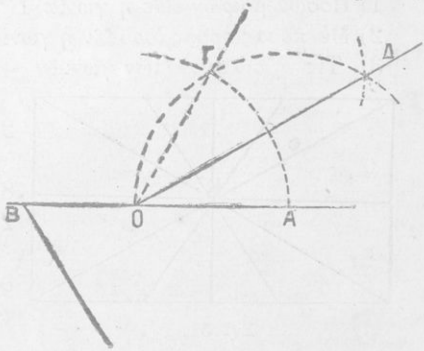


Σχ. 23.

Ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ ἢ εἰς ἴσους κύκλους, δύο ἐπίκεντροι γωνίαι ἴσαι ἔχουσιν ἀντίστοιχα τόξα ἴσα· καὶ ἀντιστρόφως, εἰς ἴσα τόξα ἀντιστοιχοῦσιν ἐπίκεντροι γωνίαι ἴσαι.

Ἐντεῦθεν ἕπεται, ὅτι, ἐὰν λάβωμεν ὡς μονάδα μετρήσεως τῶν τόξων τὸ τόξον τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς ἐπικέντρου γωνίας, ἥτις ἐλήφθη ὡς μονάς, τότε *πᾶσα γωνία, ἐπίκεντρος οὖσα ἔχει μέτρον τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ὃν καὶ τὸ τόξον τὸ μεταξὺ τῶν πλευρῶν της περιεχόμενον.* Λοιπὸν ἀντὶ νὰ μετρήσωμεν τὴν γωνίαν τὴν δοθεῖσαν γωνίαν Α. Διότι ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν χορδῶν ΒΓ, ΔΕ, ἕπεται ὅτι τόξ. ΒΑΓ=τόξ. ΔΕ (ἐδ. 14 γ')· ἄρα αἱ ἐπίκεντροι γωνίαι ΒΑΕ, ΔΟΑ, εἶνε ἴσαι. (ἐδ. 24).

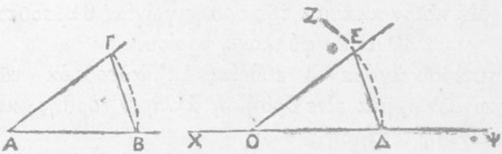
ΣΗΜ. Ἵνα κατασκευάσωμεν γωνίαν διπλασίαν, τριπλασίαν κτλ. τῆς Α, ἀρκεῖ ἐπὶ τοῦ τόξου ΔΖ νὰ λάβωμεν κατὰ συνέχειαν δύο, τρία, ἀνοίγματα τοῦ διαβήτου ἴσα τῇ χορδῇ ΒΓ καὶ νὰ ἑνώσωμεν τὸ Ο μὲ τὸ πέρας τοῦ 2ου, 3ου κ.τ.λ. ἀνοίγματος.



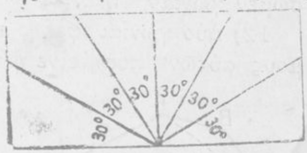
Σχ. 28.

Ἐπανάληψις δι' ἐρωτήσεων καὶ ἀσκήσεων.

Τί καλεῖται ὄγκος σώματος; ἐπιφάνεια; γραμμή; σημεῖον; Τί καλεῖται μέτρησις ποσοῦ; Τί διδάσκει ἡ Γεωμετρία; Τίνα τὰ ἁπλούστερα γεωμετρικὰ σώματα καὶ τίνα σώματα γνωρίζεις ἔχοντα τοιοῦτος σχῆμα; Τίς ἡ εἰκὼν εὐθείας γραμμῆς; ἀνάφερ- παραδείγματα τεθλασμένων καὶ καμπύλων γραμμῶν. Τίνας ἰδιότητας ἔχει ἡ εὐθεῖα; Πῶς ἐξελέγχομεν α') τὴν εὐθύτητα τοῦ κανόνος; β') ἐὰν ἐπιφάνειά τις εἶνε ἐπίπεδος; Διὰ φύλλου χαρτίου πῶς δυνάμεθα νὰ χαράξωμεν εὐθεῖαν; Ποίαν ἰδιότητα ἔχουσι α) τὰ σημεῖα περιφερείας κύκλου, β') τὰ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας σφαίρας; Πῶς χαράσσομεν μίαν περιφέρειαν; Ποῖον ἐπίπεδον σχῆμα προκύπτει ἐὰν κόψωμεν σφαῖραν δι' ἐπιπέδου; Τί καλεῖται ἀκτίς, διάμετρος, κύκλου ἢ σφαίρας; Τίς καλεῖται μέγιστος κύκλος τῆς σφαίρας καὶ πῶς διαιρεῖ αὐτήν; Τί καλεῖται τόξον καὶ χορδὴ αὐτοῦ; Πῶς δοκιμάζομεν, ἂν δύο σχήματα εἶνε ἴσα; Τί καλεῖται γωνία καὶ πῶς ἀπαγγέλλεται; πῶς βλέπομεν ἂν δύο γωνίαι εἶνε ἴσαι; Πῶς προσθέτομεν γωνίας; ποῖαι γωνίαι καλοῦνται ἐφεξῆς; πότε λέγομεν ὅτι εὐθεῖά τις εἶνε κάθετος ἐπὶ ἄλλην; Τίνες ἰδιότητες ἀληθεύουσι περὶ τῆς καθέτου καὶ τῶν πλαγίων; Ποία γωνία λέγεται ὀρθή, ὀξεῖα, ἀμβλεῖα; Ποῖαι γωνίαι καλοῦνται παραπληρωματικαὶ καὶ ποῖαι κατὰ κορυφήν; Τί γωνία καλεῖται ἐπίκεντρος καὶ τίνα σχέσιν ἔχει πρὸς τὸ ἀντίστοιχον τόξον; Τί εἶνε τὸ μοιρογνωμόνιον καὶ πῶς δι' αὐτοῦ μετροῦμεν μίαν γωνίαν; Τόξον 1° τί μέρος τῆς περιφερείας εἶνε; Πόσων μοιρῶν εἶνε τὸ $^1/_3$ περιφε-



Σχ. 29.



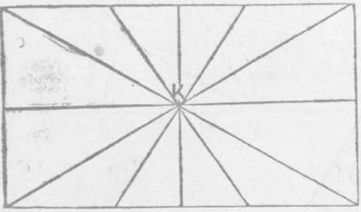
Σχ. 30.

ρείας; τὸ $^1/_6$; τὸ $^1/_{20}$;τὰ $^3/_5$;Διὰ τοῦ διαβήτου κατασκευάσοντὰς γωνίας 60°, 120°, 30°.Πῶς κατασκευάζομεν, ἐν γένει, γωνίαν ἴσηνπρὸς δοθεῖσαν;

1) Πόσων μοιρῶν εἶνε ἡ γωνία 1 $^2/_3$ ὀρθ.;

2) Μὲ πόσας ὀρθὰς ἰσοῦται ἡ γωνία 125° 45΄;

3) Τίς ἡ διαφορὰ τῶν γωνιῶν 45° 42′ καὶ 31° 57′;



Σχ. 31.

4) Τετραπλασίασον τὴνγωνίαν23° 24΄.

5) Εὑρὲ τὸ πέμπτον τῆς γωνίας 89° καὶ τὸ τέταρτον τῆς γωίας 107ν 25′.

6) Γωνία τις εἶνε 125° 47΄· εὑρὲ διὰ κατασκευῆς καὶ δι' ὑπολογισμοῦ τὴν παραπληρωματικὴν αὐτῆς.

7) Τῆς προηγουμένης γωνίας κατασκεύασον τὴν κατὰ κορυφὴν καὶ ὑπολόγισον τὰς δύο ἄλλας σχηματιζομένας γωνίας.

8) Διά τινος σημείου τῆς εὐθείας ΑΒ (Σχ. 30) ἄγομεν 5 εὐθείας (ἐπὶ τοῦ πίνακος ἢ τοῦ χαρτίου) ἄνωθεν τῆς ΑΒ οὕτως, ὥστε αἱ σχηματιζόμεναι γωνίαι νὰ ὦσιν ἴσαι. Μὲ ποῖον κλάσμα τῆς ὀρθῆς γωνίας θὰ ἰσοῦται ἑκάστη; Κατασκεύασον τὸ σχῆμα 30 μὲ ἓν φύλλον χαρτίου.

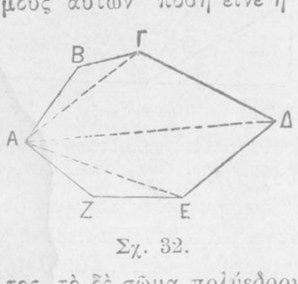
9) Ἐκ σημείου τινὸς ἐπιπέδου ἄγομεν 4 εὐθείας ἐπ' αὐτοῦ· ἐκ τῶν σχηματιζομένων οὕτω 4 γωνιῶν ἡ μία εἶνε ὀρθή, ἡ ἄλλη $^1/_4$ ὀρθῆς καὶ ἡ τρίτη 1 $^1/_8$ ὀρθῆς· πόση εἶνε ἡ τετάρτη ;

10) Πέριξ ἑνὸς σημείου Κ σχηματίζομεν ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέδου 12 γωνίας ἴσας καὶ ἐφεξῆς οὕτως, ὥστε νὰμ ἡ μένῃ οὐδὲν μέρος περὶτὴν κοινὴν κορυφὴ Κ πόση θὰ εἶνε ἑκάστη;Κατασκεύασον τὸ σχ.31 μὲ ἓν φύλλον χαρτίου.

11) Μὲ φύλλον χαρτίου (Σχ. 30 ἢ 31) πῶς δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν γωνίαν 45°;

12) Δύο γωνίαι ἐφεξῆς εἶνε παραπληρωματικαί. Φέρομεν τὰς διχοτόμους αὐτῶν· πόση εἶνε ἡ γωνία, ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ τῶν διχοτόμων;

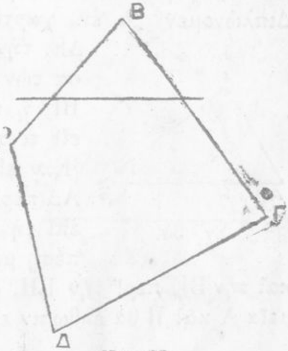
13) Ἡ ἀπόστασις σημείου Ι ἀπὸ εὐθείας ΑΒ (Σχ.18) εἶνε 32 γραμμῶν.Νὰ ἀχθῶσιν ἐκ τοῦ Ι δύο πλάγιαι, ἡ μία 40 καὶ ἡ ἄλλη 36 γρ.



Σχ. 32.

Πολύγωνα. Τρίγωνα.

26. Αἱ ἐπίπεδοι ἐπιφάνειαι εἰς ἃς περατοῦται ὁ κύβος, τὸ παραλληλεπίπεδον, τὸ πρίσμα καὶ ἡ πυραμίς, λέγονται ἕδραι τοῦ σώματος, τὸ δὲ σῶμα *πολύεδρον*·αἱ ἕδραι. θεωρούμεναι χωριστὰ ἀπὸ τὸ σῶμα, ὀνομάζονται *πολύγωνα*· ἐν γένει πολύγωνον εἶνε ἐπίπεδος ἐπιφάνεια περιοριζομένη πανταχόθεν ὑπὸ εὐθειῶν τεμνομένων ἀνὰ δύο. Τοιοῦτον εἶνε τὸν ΑΒΔΕΖ (Σχῆμα 32) Αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ λέγονται *πλευραὶ* τοῦ πολυγώνου, τὸ δὲ ἄθροισμα αὐτῶν καλεῖται *περίμετρος* αὐτοῦ. Τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ εἶνε *αἱ κορυφαὶ* τῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου.



Σχ. 33.

Πᾶσα εὐθεῖα συνδέουσα δύο κορυφὰς μὴ διαδοχικάς, καθὼς εἶνε αἱ ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ (Σχ. 32), καλεῖται *διαγώνιος* τοῦ πολυγώνου. Ἡ ὑπὸ τῆς περιμέτρου ἑνὸς πολυγώνου σχηματιζομένη γραμμὴ εἶνε τεθλασμένη γραμμή, ἀλλὰ κλειστή. *Κυρτὸν* λέγεται τὸ πολύγωνον ἐὰν ἡ περίμετρος αὐτοῦ τέμνηται ὑπὸ εὐθείας εἰς δύο μόνον σημεῖα· π.χ. τὸ σχ. 33 εἶνε πολύγωνον κυρτόν, ἐνῷ τὸ σχ. 34 δὲν εἶνε κυρτόν (1)·

Τὰ συνηθέστερα πολύγωνα εἶνε:

Τὸ τρίγωνον (2) ὅπερ ἔχει 3 πλευρὰς

Τὸ τετράπλευρον	» 4	»	Τὸ πεντάγωνον ὅπερ ἔχει	5	πλευρὰς
Τὸ ἑξάγωνον	» 6	»	Τὸ ὀκτάγωνον	» 8	»
Τὸ δεκάγωνον	» 10	»	Τὸ δωδεκάγωνον	» 12	»

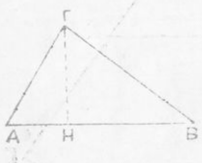
27. Ἐκ τούτων ἁπλούστερον εἶνε τὸ τρίγωνον (Σχ. 35), ὅπερ ἔχει 3 γωνίας Α, Β, Γ καὶ 3 πλευρὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ (*στοιχεῖα* τοῦ τριγώνου).

Σχ. 34.

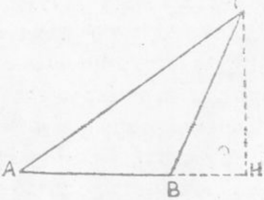
Ἐὰν ἔκ τινος κορυφῆς Γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ φέρωμεν τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ἀπέναντι πλευράν, ἡ κάθετος αὕτη ΓΗ ὀνομάζεται *ὕψος* τοῦ τριγώνου καὶ ἡ πλευρὰ ΑΒ, ἐφ' ἧς εἶνε κάθετος, ὀνομάζεται *βάσις*. Ὡς βάσις δύναται νὰ ληφθῇ καὶ πᾶσα ἄλλη πλευρὰ τοῦ τριγώνου, ἑπομένως εἰς πᾶν τρίγωνον δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν τρία ὕψη. Τὸ ὕψος ἑνὸς τριγώνου δυνατὸν νὰ συναντᾷ τὴν βάσιν κατὰ τὴν ἐπέκτασιν αὐτῆς, ἐκτὸς τοῦ τριγώνου, ὡς εἰς τὸ σχ. 36, τοῦθ' ὅπερ συμβαίνει, ὅταν μία τῶν παρὰ τὴν βάσιν γωνιῶν τοῦ τριγώνου εἶνε ἀμβλεῖα. Τὸ ὕψος τριγώνου ἐκ χαρτίου, ἔχοντος ἀμφοτέρας τὰς παρὰ τὴν βάσιν γωνίας ὀξείας, εὑρίσκομεν εὐκόλως, ἐὰν θλάσωμεν αὐτὸ κατὰ εὐθεῖαν διερχομένην διὰ τοῦ Γ (Σχ. 35) οὕτως, ὥστε ἡ γωνία ΓΗΑ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς γωνίας ΓΗΒ.

1) Ἐνταῦθα περὶ κυρτῶν πολυγώνων θὰ κάμωμεν λόγον.
2) Τὸ πολύγωνον ἔχει τόσας γωνίας, ὅσας καὶ πλευράς.

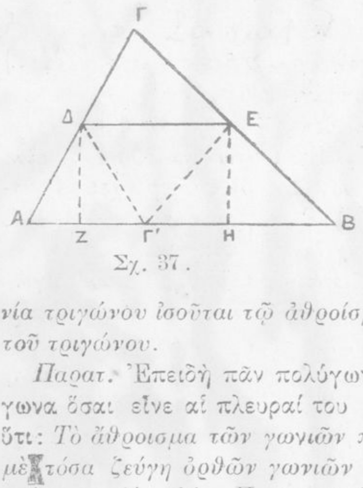
28. *Ἰδιότητες τοῦ τριγώνου.* α΄) Τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν παντὸς τριγώνου ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθάς. Περὶ τούτου βεβαιούμεθα ὡς ἑξῆς. Διπλώνομεν τὸ ἐκ χαρτίου τρίγωνον ΑΒΓ (Σχ. 37) κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΔΕ, τὴν συνδέουσαν τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΓ καὶ ΒΓ· ἡ κορυφὴ Γ θὰ ἔλθῃ εἴς τι σημεῖον Γ΄ τῆς ΑΒ΄. Ἐὰν εἶτα στρέψωμεν τὴν ΑΔ περὶ τὴν ΔΖ (κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ) ὥστε νὰ συμπέσῃ μὲ τὴν ἴσην της ΔΓ΄ καὶ τὴν ΒΕ περὶ τὴν ΕΗ, ὥστε νὰ συμπέσῃ μὲ τὴν ἴσην της ΕΓ΄, τὰ σημεῖα Α καὶ Β θὰ ἔλθωσιν εἰς τὸ Γ΄. Αἱ 3 γωνίαι τοῦ τριγώνου ἔγιναν ἐφεξῆς μὲ κοινὴν κορυφὴν τὸ Γ΄ καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΖΗ (Σχ. 38), ἄρα (ἐδ. 21 α΄) Α+Β+Γ=2 ὀρθ.



Σχ. 35.



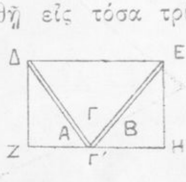
Σχ. 36.



Σχ. 37.

ΣΗΜ. Ἡ γωνία ΓΒΗ (Σχ. 36) ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ τῆς πλευρᾶς ΓΒ καὶ τῆς προεκβολῆς τῆς ΑΒ, καλεῖται *ἐξωτερικὴ γωνία* τοῦ τριγώνου. Ἐπειδὴ Α+Β+Γ = 2 ὀρθ. καὶ ΑΒΓ+ΓΒΗ=2 ὀρθ., ἕπεται ὅτι ΓΒΗ=Α+Γ, ἤτοι *ἡ ἐξωτερικὴ γωνία τριγώνου ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν δύο ἐντὸς καὶ ἀπέναντι γωνιῶν τοῦ τριγώνου.*

Παρατ. Ἐπειδὴ πᾶν πολύγωνον δύναται νὰ χωρισθῇ εἰς τόσα τρίγωνα ὅσαι εἶνε αἱ πλευραί του πλὴν δύο, ἕπεται ὅτι: *Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν πολυγώνου ἰσοῦται μὲ τόσα ζεύγη ὀρθῶν γωνιῶν ὅσαι εἶνε αἱ πλευραί του πλὴν δύο.* Π. χ. τοῦ ἑξαγώνου (Σχ. 32) τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν θὰ εἶνε 6—2=4 ζεύγη ὀρθῶν ἢ 8 ὀρθαὶ γωνίαι.



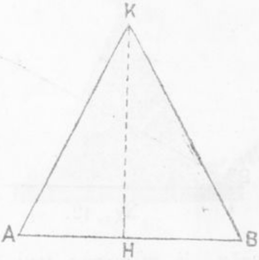
Σχ. 38.

Τὸ	ἄθροισμα	τῶν	γωνιῶν	τετραπλεύρου	= 4	ὀρθ.	γωνίαι
»	»	»	»	πενταγώνου	= 6	»	»
»	»	»	»	ὀκταγώνου	=12	»	»
»	»	»	»	δεκαγώνου	=16	»	»
»	»	»	»	δωδεκαγώνου	=20	»	»

β΄) *Μία οἱαδήποτε πλευρὰ τοῦ τριγώνου εἶνε μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων.* Διότι ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἶνε μικροτέρα τῆς τεθλασμένης ΑΓ+ΓΒ (Σχ. 35).

29. Διάφορα εἴδη τριγώνου. Καλεῖται *σκαληνόν*, ἐὰν ἔχῃ τὰς τρεῖς πλευρὰς ἀνίσους (Σχ. 36), *ἰσοσκελὲς* ἐὰν ἔχῃ δύο πλευρὰς (σκέλη)

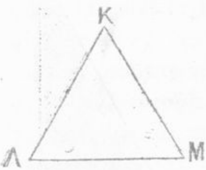
ΛΑ, ΚΒ ἴσας (Σχ. 39) καὶ *ἰσόπλευρον*, ἐὰν ἔχῃ τὰς 3 πλευρὰς ἴσας (Σχ. 40). Τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ὡς βάσις λαμβάνεται ἡ ἄνισος πρὸς τὰς δύο ἄλλας πλευράς, πλὴν τῶν ἰδιοτήτων τοῦ ἐδ. 28 ἔχει καὶ ἄλλας δύο :



Σχ. 39.

α΄) *Αἱ παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι Α καὶ Β εἶνε ἴσαι* [1].

β΄) *Τὸ ὕψος ΚΗ χωρίζει τὴν βάσιν ΑΒ εἰς δύο ἴσα μέρη καὶ τὴν γωνίαν Κ εἰς δύο ἴσας γωνίας* [1]. Περὶ τούτου δυνάμεθα νὰ βεβαιωθῶμεν, ἐὰν κατασκευάσωμεν τρίγωνον ἰσοσκελὲς ἐκ χαρτίου καὶ διπλώσωμεν αὐτὸ κατὰ τὸ ὕψος ΚΗ. Συχνὰ ἀπαντῶμεν ἰσοσκελῆ τρίγωνα· π.χ. εἰς τὰ ἀετώματα τῶν οἰκιῶν καὶ τῶν παραθύρων (Σχ. 41).



Σχ. 40.

Τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ἔχει καὶ τὰς τρεῖς γωνίας ἴσας, ἕκαστον δὲ ὕψος χωρίζει τὴν ἀντίστοιχον πλευρὰν εἰς δύο ἴσα μέρη καὶ τὴν γωνίαν τοῦ τριγώνου εἰς δύο ἴσας γωνίας.

Τρίγωνον, ὅπερ ἔχει μίαν γωνίαν ὀρθήν, ὀνομάζεται ὀρθογώνιον, ὡς τὸ ΑΒΓ (Σχ. 42). Ἡ πλευρὰ ΒΓ ἡ ἀπέναντι τῆς ὀρθῆς γωνίας Α λέγεται *ὑποτείνουσα.*

Εἰς πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ὀξειῶν γωνιῶν Β καὶ Γ ἰσοῦται μὲ μίαν ὀρθὴν (ἐδ. 28).

ΣΗΜ. Πᾶν τρίγωνον δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἄθροισμα ἢ διαφορὰ δύο τριγώνων ὀρθογωνίων, καθόσον τὸ ὕψος πίπτει ἐντὸς ἢ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου (Σχ. 35, 36).


Σχ. 41.

30. Γνώμων.—Εἶνε μία λεπτὴ σανὶς ξυλίνη ἔχουσα σχῆμα τριγώνου ὀρθογωνίου (Σχ.43)· χρησιμεύει δὲ ὅπως κατασκευάζωμεν ὀρθὰς γωνίας, ὅπως σύρωμεν καθέτους καὶ δι' ἄλλα προβλήματα, ὡς θὰ ἴδωμεν κατωτέρω. Ὁ γνώμων τῶν ξυλουργῶν καὶ τῶν κτιστῶν ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο κανόνας (ξυλίνους ἢ σιδηροῦς) συνηνωμένους κατ' ὀρθὴν γωνίαν (Σχ. 44).

31. Ἐξέλεγξις τοῦ γνώμονος.—Πρὶν μεταχειρισθῶμεν τὸν γνώμονα, πρέπει νὰ βεβαιωθῶμεν, ἂν εἶνε ἀκριβής, δηλ. ἂν ἡ γωνία του Α εἶνε ὀρθή. Πρὸς τοῦτο ἐφαρμόζομεν τὴν πλευρὰν ΑΒ τοῦ γνώμονος ἐπί τινος κανόνος καὶ διὰ γραφίδος γράφομεν μίαν εὐθεῖαν κατὰ μῆκος τῆς ΑΓ· εἶτα ἀναστρέφομεν τὸν γνώμονα θέτοντες τὴν πλευρὰν ΑΒ εἰς τὴν θέσιν ΑΒ΄, ὡς δεικνύει τὸ σχ.45, καὶ γράφομεν νέαν εὐθεῖαν κατὰ

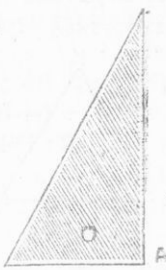
1) Ἀντιστρόφως, πᾶν τρίγωνον ἔχον τὴν ἰδιότητα ταύτην, εἶνε ἰσοσκελές.

μῆκος τῆς ΑΓ. Ἐὰν αἱ δύο ἀχθεῖσαι εὐθεῖαι συμπέσωσι (Σχ. 46) ὁ γνώμων εἶνε ἀκριβής, διότι αἱ δύο γωνίαι ΓΑΒ, ΓΑΒ′ εἶνε ἴσαι· ἀλλ᾽ ἐὰν αἱ εὐθεῖαι αὗται δὲν συμπέσωσι, καθὼς αἱ ΑΓ, ΑΓ″ εἰς τὸ σχ. 45, ἡ γωνία ΓΑΒ δὲν εἶνε πλέον ἴση μὲ τὴν Α′Β′Γ′ καὶ ἑπομένως ἡ γωνία Α τοῦ γνώμονος δὲν εἶνε ὀρθή.

Σχ. 42.

32. Ἰσότης τριγώνων. — (Βλ. ἐδ. 13). Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ἔχει 6 στοιχεῖα (3 πλευρὰς καὶ 3 γωνίας), δύο τρίγωνα ἴσα ἔχουσι τὰ ἓξ στοιχεῖα αὐτῶν ἴσα ἀνὰ δύο καὶ κατὰ σειράν, τοῦθ᾽ ὅπερ δίδει 6 συνθήκας, εἰς ἃς δέον νὰ ὑπόκεινται τὰ δύο ταῦτα τρίγωνα. Ὥστε δύο τρίγωνα εἶνε ἴσα, ἐὰν τὰ 6 στοιχεῖα τοῦ ἑνὸς εἶνε ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς τὰ ἀντίστοιχα 6 τοῦ ἑτέρου. Ἐν τούτοις ὑπάρχουσι περιπτώσεις τινές, καθ᾽ ἃς βεβαιούμεθα περὶ τῆς ἰσότητος δύο τριγώνων, ἐκ τῆς ἰσότητος τινῶν μόνον τῶν στοιχείων αὐτῶν, ἐξ ἧς συνάγεται καὶ ἡ ἰσότης τῶν λοιπῶν.

α′) **περίπτωσις.** *Δύο τρίγωνα εἶνε ἴσα, ὅταν μία πλευρὰ τοῦ ἑνὸς εἶνε ἴση πρὸς μίαν πλευρὰν τοῦ ἄλλου και αἱ γωνίαι, αἵτινες κεῖνται εἰς τὰ ἄκρα αὐτῶν εἶνε ἴσαι.*



Σχ. 43.

β′) **περίπτωσις.** *Δύο τρίγωνα εἶνε ἴσα, ὅταν μία γωνία τοῦ ἑνὸς εἶνε ἴση πρὸς μίαν γωνίαν τοῦ ἄλλου καὶ αἱ πλευραί, αἱ περιέχουσαι τὰς γωνίας ταύτας εἶνε ἴσαι.*

γ′) **περίπτωσις.** *Δύο τρίγωνα εἶνε ἴσα, ἐὰν ἔχωσι καὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς ἴσας μίαν πρὸς μίαν* (1).

ΣΗΜ. Ἡ ἰσότης τῶν τριγώνων εὑρίσκει συχνοτάτην ἐφαρμογὴν ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ· ὅταν πρόκειται νὰ δειχθῇ, ὅτι δύο τμήματα εὐθείας εἶνε ἴσα ἢ δύο γωνίαι εἶνε ἴσαι. Αἱ ἀνωτέρω τρεῖς περιπτώσεις τῆς ἰσότητος τριγώνων ἐφαρμόζονται καὶ εἰς τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα· ἀλλ᾽ ἐπειδὴ πᾶσαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι εἶνε ἴσαι, αἱ μὲν δύο πρῶται περιπτώσεις διατυποῦνται οὕτω. Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα εἶνε ἴσα

Σχ. 44.

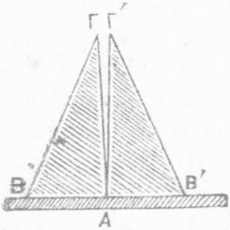
α′) *Ὅταν ἔχωσι τὴν μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ μίαν ὀξεῖαν γωνίαν ἴσην* (2).

---

1) Αἱ δύο πρῶται περιπτώσεις ἃς ἀποδειχθῶσιν ὑπὸ τοῦ διδασκάλου διὰ τῆς ἐπιθέσεως τῶν δύο τριγώνων.

2) Ὅταν δύο τρίγωνα ἔχωσι δύο γωνίας ἴσας, ἔχουσι καὶ τὴν τρίτην ἴσην (ἐδ. 28).

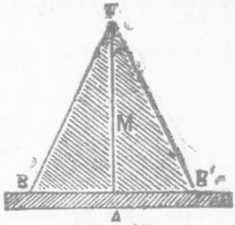
β΄ Ὅταν ἔχωσι τὰς πλευρὰς τὰς περιεχούσας τὴν ὀρθὴν γωνίαν ἴσας.



Σχ. 45.

Ἡ δὲ τρίτη περίπτωσις ἁπλοποιεῖται οὕτω·

γ΄) *Δύο τρίγωνα ὀρθογώνια εἶνε ἴσα, ὅταν ἔχουσι τὴν ὑποτείνουσαν ἴσην καὶ μίαν τῶν ἄλλων πλευρῶν ἴσην.*



Σχ. 46.

Ἐπανάληψις δι᾽ ἐρωτήσεων καὶ ἀσκήσεων.

Τί καλεῖται πολύγωνον καὶ τί διαγώνιος αὐτοῦ ; Τί καλεῖται βάσις καὶ ὕψος τριγώνου ; Εἰς πάντα τὰ τρίγωνα ποίαν ἰδιότητα ἔχουσιν αἱ 3 γωνίαι αὐτῶν ; αἱ 3 πλευραὶ αὐτῶν ; Πῶς εὑρίσκομεν μὲ πόσας ὀρθὰς γωνίας ἰσοῦται τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς πολυγώνου ; Ἐὰν πᾶσαι αἱ γωνίαι τετραπλεύρου εἶνε ἴσαι, πόσων μοιρῶν θὰ εἶνε ἑκάστη ; Ἐὰν αἱ τρεῖς γωνίαι τετραπλεύρου εἶνε ὀρθαί, πόσον θὰ εἶνε ἡ δ΄ ; Ποῖον τρίγωνον καλεῖται ἰσοσκελὲς καὶ τίνας σπουδαίας ἰδιότητας ἔχει ; Ποῖον τρίγωνον καλεῖται ἰσόπλευρον ; ἔχει τὰς αὐτὰς ἰδιότητας μὲ τὸ ἰσοσκελές ; Ποῖον τρίγωνον καλεῖται ὀρθογώνιον ; Ποία πλευρὰ αὐτοῦ καλεῖται ὑποτείνουσα ; Τί εἶνε ὁ γνώμων ; τί χρησιμεύει ; πῶς βεβαιούμεθα, ἂν εἶνε ἀκριβής ; Τίνες αἱ περιπτώσεις καθ᾽ ἃς δύο τρίγωνα εἶνε ἴσα ;

1) Τριγώνου τινὸς ἡ μία γωνία εἶνε $^3/_4$ ὀρθῆς, ἡ δὲ ἄλλη $^{13}/_{20}$· Πόση εἶνε ἡ γ΄ ;

2) Ὁποίου εἴδους τρίγωνον εἶνε τὸ ΑΒΓ (Σχ. 35), ἐὰν $Γ = Α + Β$;

3) Ὅταν ὁ γνώμων εἶνε ἰσοσκελής, πόσον εἶνε ἑκάστη τῶν ὀξειῶν γωνιῶν του ;

4) Πόσων μοιρῶν εἶνε ἑκάστη γωνία ἰσοπλεύρου τριγώνου ;

5) Ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἡ περίμετρος εἶνε 26 μ., ἡ βάσις 6 μ. Πόσον εἶνε ἑκατέρα τῶν ἄλλων πλευρῶν ;

6) Ἡ περίμετρος ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶνε **18μ**,729· πόσον εἶνε ἑκάστη πλευρά ;

7) Τριγώνου ΑΒΓ ἡ γωνία $Α = 63^0 48' 25''$, $Β = 36^0 19'$. Πόσον εἶνε ἡ Γ;

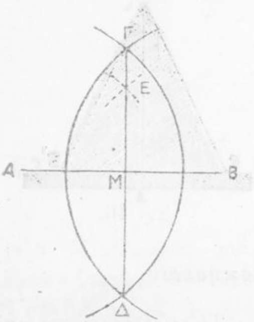
8) Εἰς τρίγωνον ἰσοσκελὲς ἡ γωνία ἡ ἀπέναντι τῆς βάσεως εἶνε 50^0· πόσον εἶνε ἑκατέρα τῶν δύο ἄλλων ;

9) Εἰς τρίγωνον ἰσοσκελὲς μία τῶν παρὰ τὴν βάσιν γωνιῶν εἶνε 18^0· Πόση εἶνε ἡ ἀπέναντι τῆς βάσεως γωνία ;

10) Ἐὰν πᾶσαι αἱ γωνίαι δωδεκαγώνου εἶνε ἴσαι, πόσον εἶνε ἑκάστη;

33. Προβλήματα κατασκευῆς καθέτων.

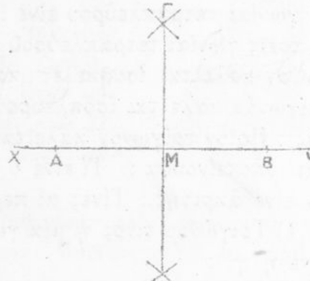
I. *Δοθείσης εὐθείας ΑΒ (Σχ. 47) νὰ εὕρωμεν τὸ μέσον αὐτῆς καὶ ἐκ τοῦ μέσου νὰ φέρωμεν τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ.* Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου μᾶς χρειάζεται κανὼν καὶ διαβήτης. Μὲ κέντρον τὸ ἓν ἄκρον Α καὶ ἄνοιγμα τοῦ διαβήτου (ἀκτῖνα) μεγαλείτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ ΑΒ, γράφομεν τόξον κύκλου· μὲ κέντρον τὸ ἄλλο ἄκρον Β καὶ μὲ τὸ αὐτὸ ἄνοιγμα τοῦ διαβήτου γράφομεν ἄλλο τόξον κόπτον τὸ πρῶττόν εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ· ἡ εὐθεῖα ΓΔ εἶνε ἡ ζητουμένη κάθετος καὶ Μ τὸ μέσον τῆς ΑΒ. Ἡ κατασκευὴ αὕτη στηρίζεται ἐπὶ τῆς δ' ἰδιότητος τοῦ ἐδ. 19. Ἐπειδὴ ΓΑ=ΓΒ καὶ ΔΑ=ΔΒ, ἕπεται ὅτι τὰ σημεῖα Γ, Δ κεῖνται ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ· ἀλλ' ἐξ ἑνὸς σημείου Γ εἰς ἄλλο Δ μίαν μόνον εὐθεῖαν δυνάμεθα νὰ φέρωμεν (ἐδ. 5)· ἄρα ἡ ΓΔ εἶνε κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ.



Σχ. 47.

Παρατ. Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον, ἐφ' οὗ ἐργαζόμεθα, ἐκτείνηται ἄνωθεν μόνον τῆς εὐθείας ΑΒ, ζητοῦμεν μὲ ἑτέραν ἀκτῖνα δεύτερον σημεῖον Ε ἴσον ἀπέχον ἀπὸ τῶν ἄκρων τῆς ΑΒ· εἶτα φέρομεν τὴν ΓΕ.

ΙΙ. *Ἔκ τινος σημείου νὰ φέρωμεν κάθετον ἐπὶ δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΧΨ.* Ἐὰν μὲν τὸ σημεῖον κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΧΨ, ὡς τὸ Μ. (Σχ.48), λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς ἑκατέρωθεν τοῦ Μ δύο μήκη ἴσα, ΜΑ καὶ ΜΒ· οὕτω δὲ καταλήγομεν εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα, διότι Μ εἶνε τὸ μέσον τῆς ΑΒ. Ἐὰν δὲ τὸ σημεῖον

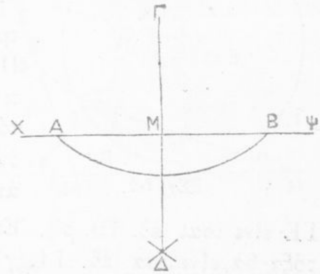


Σχ. 48.

κεῖται ἐκτὸς τῆς εὐθείας ΧΨ, ὡς τὸ Γ (Σχ. 49), μὲ κέντρον τὸ Γ καὶ ἀκτῖνα μεγαλειτέραν τῆς ἀποστάσεως τοῦ Γ ἀπὸ τῆς εὐθείας ΧΨ γράφομεν τόξον, ὅπερ τέμνει τὴν ΧΨ εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Ἐκ τῶν σημείων τούτων, ὡς κέντρων, γράφομεν δύο τόξα (μὲ τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα, μεγαλειτέραν τοῦ $^1/_2$ τῆς ΑΒ) τεμνόμενα εἰς τὸ Δ, ἡ εὐθεῖα ΓΔ εἶνε ἡ ζητουμένη κάθετος· ἡ κατασκευὴ ἐξηγεῖται ὡς εἰς τὸ πρόβλημα Ι.

ΣΗΜ. Τὸ πρόβλ. ΙΙ λύεται πρακτικῶς 1ον διὰ τοῦ γνώμονος (ἐδ. 30). (Ἐφαρμόζομεν μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν του ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας· εἶτα μετακινοῦμεν τὸν γνώμονα, μέχρις οὗ ἡ ἄλλη κάθετος πλευρὰ αὐτοῦ διέλθῃ διὰ τοῦ δοθέντος σημείου. Ὁ λιθοξόος ἔχει ἀνάγκην τοῦ γνώμονος, ὡσαύτως ὁ ξυλουργὸς πρὸς κατασκευὴν παραθύρου, θύρας, ἐπίπλου, ποιεῖ συχνὴν χρῆσιν τοῦ γνώμονος, ὁ ῥάπτης κ.λ.π.

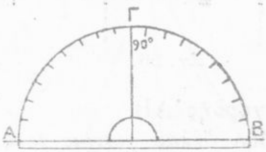
2ον Διὰ τοῦ μοιρογνωμονίου. Π.χ. ἵνα φέρωμεν ἐκ τοῦ Μ τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ (Σχ. 50), θέτομεν τὴν διάμετρον τοῦ μοιρογνωμονίου ἐπὶ τῆς ΑΒ, τὸ κέντρον εἰς τὸ Μ καὶ σημειοῦμεν διὰ γραφίδος τὸ σημεῖον Γ, ἔνθα ὑπάρχει ἡ διαίρεσις 90°. Ἀφαιροῦντες τὸ μοιρογνωμόνιον σύρομεν τὴν εὐθεῖαν ΜΓ. Ὁμοίως, ἵνα φέρωμεν ἐκ τοῦ σημείου Γ κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΧΨ (Σχ. 51), θέτομεν ἐπὶ τῆς ΧΨ τὸ κέντρον τοῦ μοιρογνωμονίου καὶ τὴν διαίρεσιν 90°· ἔπειτα σύρομεν τὸ μοιρογνωμόνιον, μέχρις οὗ ἡ διάμετρος αὐτοῦ ΑΒ διέλθῃ διὰ τοῦ σημείου Γ καὶ τότε ἄγομεν τὴν ΑΓΒ.



Σχ. 49.

III. *Νὰ γράψωμεν περιφέρειαν διερχομένην διὰ τριῶν δοθέντων σημείων Α, Β καὶ Γ.*

Πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ κέντρον· πρὸς τοῦτο φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΒΓ. εἶτα τὴν ΜΔ κάθετον εἰς τὸ μέσον Μ τῆς ΑΒ καὶ τὴν ΝΕ κάθετον εἰς τὸ μέσον Ν τῆς ΒΓ· αἱ δύο κάθετοι προεκτεινόμεναι θὰ τέμνωνται εἴς τι σημεῖον Ο, ὅπερ εἶνε τὸ ζητούμενον κέντρον. Ἐὰν μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα τὴν ΟΑ γράψωμεν περιφέρειαν, θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τῶν σημείων Β, Γ (Σχ. 52). Διότι πᾶν σημεῖον τῆς καθέτου ΜΔ ἀπέχει ἴσον τῶν ἄκρων τῆς εὐθείας ΑΒ (ἐδ. 19, γ'), ἐπομένως ΟΑ =ΟΒ· ἐπίσης ΟΒ=ΟΓ· ὥστε αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ εἶνε ἴσαι).

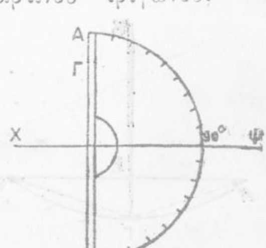


Σχ. 50.

Παρατ. α') Ἐὰν φέρωμεν τὴν κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς ΓΑ, ὀφείλει καὶ αὕτη νὰ διέρχηται διὰ τοῦ σημείου Ο· ὥστε *αἱ τρεῖς κάθετοι, ἃς φέρομεν ἐκ τοῦ μέσου ἑκάστης πλευρᾶς ἑνὸς τριγώνου διέρχονται δι' ἑνὸς σημείου.* Τοῦτο δυνάμεθα νὰ ἴδωμεν ἐπαληθεῦον πρακτικῶς δι' ἑνὸς χαρτίνου τριγώνου, ἐὰν θλάσωμεν αὐτὸ κατὰ τὰς τρεῖς ταύτας καθέτους.

β') Τὰ 3 σημεῖα Α, Β, Γ *πρέπει νὰ μὴ κεῖνται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας*, διότι τότε αἱ κάθετοι ΜΔ, ΝΕ (Σχ. 53) δὲν θὰ τέμνωνται ὅσον καὶ ἂν προεκταθῶσι (ἐδ. 34, 35).

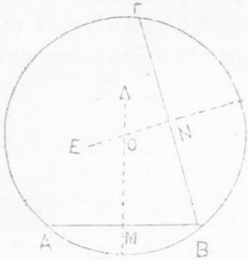
Παρατ. γ') Τρίγωνον εἶνε *ἐγγεγραμμένον* ἐν κύκλῳ, ὅταν αἱ κορυφαί του κεῖνται ἐπὶ τῆς περιφερείας, αἱ δὲ πλευραί του εἶνε χορδαὶ τοῦ κύκλου· τότε ὁ κύκλος λέγεται *περιγεγραμμένος* εἰς τὸ τρίγωνον. Τὸ πρόβλημα «Νὰ κατασκευασθῇ κύκλος περιγεγραμμένος εἰς δοθὲν τρίγωνον» ἀνάγεται εἰς τὸ προηγούμενον.



Σχ. 51.

IV. *Εὑρεῖν τὸ κέντρον καὶ τὴν ἀκτῖνα περιφερείας ἢ τόξου.*

Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν 3 σημεῖα Α, Β, Γ ἐπὶ τῆς περιφερείας ἢ ἐπὶ τοῦ τόξου καὶ νὰ ζητήσωμεν τὸ κέντρον καὶ τὴν ἀκτῖνα τῆς δι᾽ αὐτῶν διερχομένης περιφερείας (Σχ. 52).

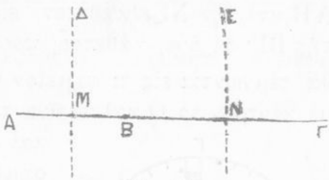


Σχ. 52.

V. *Τόξον ΑΒ (Σχ. 54) νὰ χωρισθῇ εἰς δύο μέρη ἴσα.*

Ἄγομεν τὴν χορδὴν ΑΒ καὶ ἐκ τοῦ κέντρου Κ τὴν κάθετον ΚΕ ἐπ᾽ αὐτὴν (πρόβλ. ΙΙΙ) ἥτις προεκτεινομένη συναντᾷ τὸ τόξον εἴς τι σημεῖον Γ. Διὰ τοῦ σημείου Γ διῃρέθη τὸ τόξον ΑΒ εἰς δύο ἴσα τόξα ΑΓ καὶ ΓΒ. Τῷ ὄντι, ΑΕ=ΕΒ· ἄρα αἱ πλάγιαι ΓΑ, ΓΒ, ὡς ἀπέχουσαι ἴσον ἀπὸ τοῦ ποδὸς Ε τῆς καθέτου ΓΕ εἶνε ἴσαι (ἐδ. 19, β′). Ἐπειδὴ δὲ αἱ χορδαὶ ΓΑ, ΓΒ εἶνε ἴσαι καὶ τὰ τόξα θὰ εἶνε ἴσα (ἐδ. 14, γ′).

Παρατ. Ἡ εὐθεῖα ΚΓ προεκτεινομένη γίνεται διάμετρος· ἄρα: *Πᾶσα διάμετρος κάθετος ἐπὶ χορδὴν διαιρεῖ τὴν χορδὴν καὶ τὸ ἀντίστοιχον τόξον εἰς δύο μέρη ἴσα.*

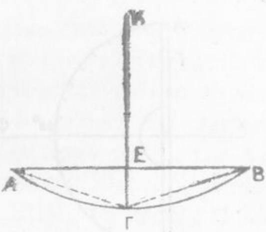


Σχ. 53.

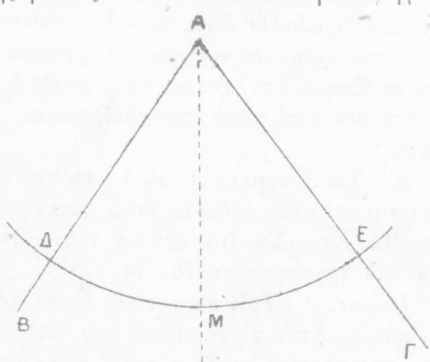
Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι τὸ πρόβλ. λύεται καὶ ὅταν εἶνε ἄγνωστον τὸ κέντρον Κ, ἀρκεῖ νὰ φέρωμεν κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς χορδῆς ΑΒ.

VI. *Γωνία ΒΑΓ (Σχ. 55) νὰ χωρισθῇ εἰς δύο ἄλλας γωνίας ἴσας, δηλ. νὰ χαραχθῇ ἡ διχοτόμος αὐτῆς.* (ἐδ. 25 γ′).

Μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν Α τῆς γωνίας καὶ ἀκτῖνα οἱανδήποτε, γρά-



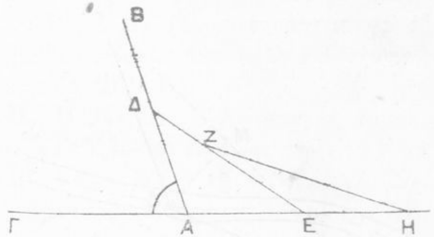
Σχ. 54.



Σχ. 55.

φομεν τόξον τέμνον τὰ πλευρὰς τῆς γωνίας εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε· τοῦ τόξου ΔΕ εὑρίσκομεν τὸ μέσον Μ (πρόβλ. V), ὅπερ συνδέομεν μὲ τὸ Α διὰ τῆς εὐθείας ΑΜ· ἡ ΑΜ εἶνε διχοτόμος τῆς γωνίας ΒΑΓ, διότι αἱ γωνίαι ΒΑΜ καὶ ΜΑΓ εἶνε ἴσαι, ὡς ἐπίκεντροι ἀντιστοιχοῦσαι εἰς ἴσα τόξα, (ἐδ. 24).

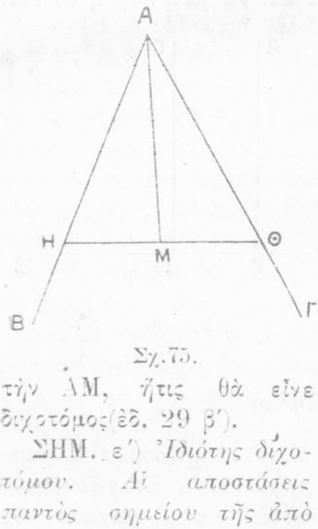
ΣΗΜ. α′) Ἐὰν τὰς γωνίας ΒΑΜ καὶ ΜΑΓ, διαιρέσωμεν εἰς δύο ἴσα μέρη, καὶ πάλιν ἕκαστον τούτων εἰς δύο ἴσαμέρη κ. ο. κ., τότε ἡ γωνία ΒΑΓ θὰ διαιρεθῇ εἰς 4, 8 κτλ. ἴσα μέρη.



Σχ. 56.

ΣΗΜ. β′) Ἐὰν γωνίαν ΒΑΓ ἐκ χαρτίου διπλώσωμεν οὕτως, ὥστε ἡ πλευρὰ ΑΒ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΑΓ, τότε ἡ θλάσις, ἥτις θὰ σχηματισθῇ, εἶνε ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας ΒΑΓ.

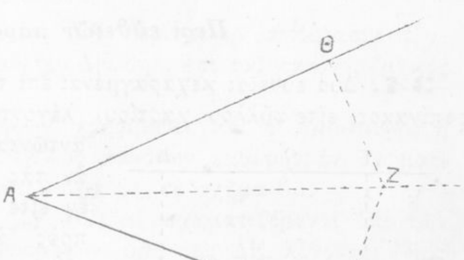
ΣΗΜ. γ′) Ἐὰν ἐπρόκειτο νὰ εὕρωμεν γωνίαν, ἥτις νὰ εἶνε τὸ $^1/_2$, τὸ $^1/_4$, τὸ $^1/_8$, δοθείσης γωνίας ΒΑΓ (Σχ. 56), λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ΑΒ καὶ ἐπὶ τῆς προεκβολῆς τῆς ΓΑ μήκη ἴσα ΑΔ, ΑΕ καὶ ἄγομεν τὴν ΔΕ· ἡ γωνία ΔΕΑ εἶνε τὸ $^1/_2$ τῆς δοθείσης [1]· εἶτα, λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ΕΔ καὶ τῆς προεκβολῆς τῆς ΑΕ, ΕΖ=ΕΗ καὶ ἄγομεν τὴν ΖΗ· ἡ γωνία ΖΗΕ εἶνε τὸ $^1/_2$ τῆς ΔΕΑ, ἑπομένως τὸ $^1/_4$ τῆς δοθείσης κ.ο.κ.



Σχ. 75.

ΣΗΜ. δ′) Τὸ προβλ. VII δύναται νὰ λυθῇ εὐκόλως διὰ τοῦ γνώμονος: Ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α λαμβάνομεν ἐπὶ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας ΒΑΓ (Σχ. 57) τὰ τμήματα ΑΗ καὶ ΑΘ ἴσα. Φέρομεν τὴν ΗΘ καὶ ἐκ τοῦ Α κάθετον ἐπ᾽ αὐτὴν τὴν ΑΜ, ἥτις θὰ εἶνε διχοτόμος (ἐδ. 29 β′).

ΣΗΜ. ε′) *Ἰδιότης διχοτόμου. Αἱ ἀποστάσεις παντὸς σημείου τῆς ἀπὸ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας ἤτοι αἱ κάθετοι ΖΗ, ΖΘ (Σχ. 58) εἶνε ἴσαι.*



Σχ. 58.

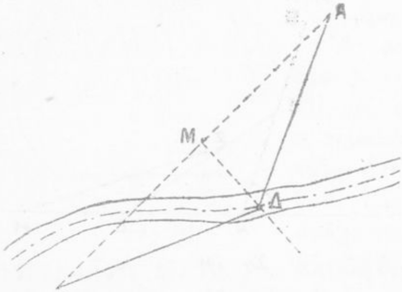
Ἡ ἀλήθεια αὕτη ἕπεται ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΖΑΘ, ΖΑΗ (ἐδ 32, σημ. α′).

---

1) Τὸ διατὶ στηριζόμενον ἐπὶ τῶν ἐδ. 28 Σημ. α′ καὶ 29 δύναται νὰ εὑρεθῇ ἀπὸ τῶν μαθητῶν, βοηθοῦντος ἐν ἀνάγκῃ τοῦ διδάσκοντος.

Ἐπανάληψις δι᾿ ἐρωτήσεων καὶ ἀσκήσεων.

Τίς ἡ ἐλαχίστη γραμμή, ἥτις ἄγεται ἐκ σημείου εἰς εὐθεῖαν; Πῶς εὑρίσκομεν διὰ τοῦ διαβήτου τὸ μέσον εὐθείας καὶ τὴν ἐξ αὐτοῦ κάθετον; Πῶς ἄγομεν ἔκ τινος σημείου κάθετον ἐπὶ εὐθεῖαν; Πῶς περιγράφομεν κύκλον εἰς δοθὲν τρίγωνον; Πῶς χωρίζομεν τόξον ἢ γωνίαν εἰς δύο ἴσα μέρη; Τί καλεῖται διχοτόμος γωνίας; τίνα ἰδιότητα ἔχουσι πάντα τὰ σημεῖά της;



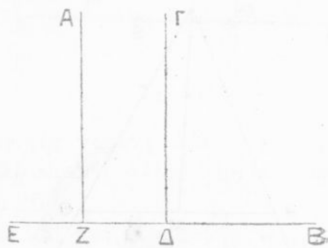
Σχ. 59.

1) Εἰς τὰ ἄκρα εὐθείας ΑΒ = 25 γραμμαῖς νὰ ἀχθῶσιν ἐπ᾿ αὐτὴν κάθετοι, ἡ μία 15 γρ., ἡ ἄλλη 7 γρ. καὶ νὰ μετρηθῇ ἡ εὐθεῖα, ἡ συνδέουσα τὰ ἄκρα αὐτῶν.

2) Νὰ κατασκευασθῇ τὸ $^1/_8$ δοθείσης γωνίας.

3) Νὰ κατασκευασθῇ γωνία τριπλασία δοθείσης.

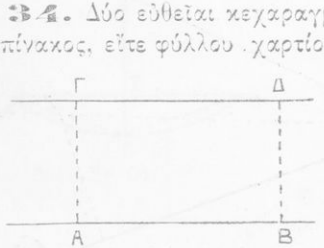
4) Δύο χωρία Α καὶ Β κεῖνται ἑκατέρωθεν ποταμοῦ. Εἰς ποῖον σημεῖον πρέπει νὰ στηθῇ γέφυρα ἴσον ἀπέχουσα ἀπ᾿ αὐτῶν; (ἡ λύσις στηριζομένη ἐπὶ τῆς γ΄ ἰδιότητος τῆς καθέτου ἐδ. 19, δίδεται ὑπὸ τοῦ σχήματος 59).



Σχ. 60.

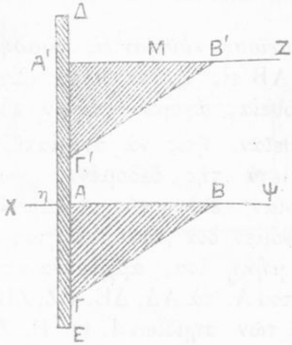
Περὶ εὐθειῶν παραλλήλων.

34. Δύο εὐθεῖαι κεχαραγμέναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου (εἴτε μαυροπίνακος, εἴτε φύλλου χαρτίου) λέγονται *παράλληλοι*, ὅταν δὲν συναντῶνται ποτέ, ὅσον μακρὰν καὶ ἂν τὰς προεκτείνωμεν εἴτε πρὸς τὸ ἓν εἴτε πρὸς τὸ ἕτερον μέρος εἴτε πρὸς ἀμφότερα. Τοιαῦται εἶνε αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ (Σχ. 8). Αἱ γραμμαί, ἃς οἱ μαθηταὶ χαράσσουσιν ἐπὶ τοῦ τετραδίου, ἵνα ὁδηγῶνται εἰς τὴν γραφήν, εἶνε εὐθεῖαι παράλληλοι· αἱ δύο ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ πατώματος, τοῦ μαυροπίνακος, εἶνε συνήθως παράλληλοι.



Σχ. 61.

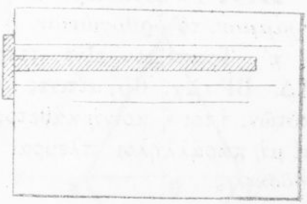
35. Ἰδιότης τῶν παραλλήλων εὐθειῶν. — Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ΑΖ, ΓΔ, εἶνε κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΕΒ, εἶνε παράλληλοι (Σχ. 60). Ἡ ἀπόστασις δύο παραλλήλων εὐθειῶν μετρεῖται ὑπὸ τῆς κοινῆς αὐτῶν καθέτου ΓΑ ἢ ΔΒ. (Σχ. 61) ἀγομένης ἐξ οἱουδήποτε σημείου τῆς μιᾶς ἐπὶ τὴν ἄλλην· εἶνε δὲ ΑΓ=ΒΔ.



Σχ. 62.

36. Πρόβλημα. Ι. *Κατασκευὴ παραλλήλου.* Ἐὰν θέλωμεν ἔκ τινος σημείου Γ νὰ σύρωμεν παράλληλον τῇ εὐθείᾳ ΑΖ (Σχ. 60), ἄγομεν τὴν κάθετον ΕΒ ἐπὶ τὴν ΑΖ, εἶτα δὲ ἐκ τοῦ Γ τὴν κάθετον ΓΔ ἐπὶ τὴν ΕΒ. Αἱ δύο εὐθεῖαι ΑΖ, ΓΔ εἶνε παράλληλοι (ἐδ. 35).

Εἰς τὴν ἀνωτέρω κατασκευὴν παραλλήλου εὐκολυνόμεθα διὰ τοῦ γνώμονος καὶ τοῦ κανόνος. Ἐὰν π. χ. θέλωμεν ἔκ τινος σημείου Μ νὰ σύρωμεν παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΧΨ (Σχ. 62), τοποθετοῦμεν μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν ΑΒ τοῦ γνώμονος κατὰ μῆκος τῆς εὐθείας ΧΨ (Σχ. 62), ἐπὶ τῆς ἄλλης δὲ πλευρᾶς ΑΓ προσαρμόζομεν καλῶς τὸν κανόνα, εἶτα διατηροῦντες ἀκίνητον τὸν κανόνα, μετακινοῦμεν τὸν γνώμονα, μέχρις οὗ ἡ πλευρὰ ΑΒ συναντήσῃ τὸ σημεῖον Μ, ὁπότε ἄγομεν τὴν ΜΖ· αὕτη εἶνε ἡ ζητουμένη παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ, διότι ἀμφότεραι εἶνε κάθετοι ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΔΕ (ἐδ. 35).


Σχ. 63.

Ἐὰν ἡ ζητουμένη παράλληλος θέλωμεν νὰ ἀπέχῃ ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας ΧΨ ὡρισμένην ἀπόστασιν (π. χ. 0^{μ}, 03), λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς καθέτου ΔΕ, δηλ. ἐπὶ τοῦ κανόνος, μῆκος 0,03 ἀπὸ τοῦ σημείου Α.

ΣΗΜ. Πρὸς χάραξιν παραλλήλων χρησιμεύει καὶ ὁ *ἡμίσταυρος* ἢ Ταῦ (Σχ. 63), ὅστις ἀποτελεῖται ἐκ δύο κανόνων καθέτων, ἐν σχήματι τοῦ γράμματος Τ. Τὴν χρῆσιν αὐτοῦ δεικνύει τὸ σχῆμα 63.

Παρατ. α') Αἱ γωνίαι *ι* καὶ *η* (Σχ. 62), αἱ σχηματιζόμεναι ὑπὸ τῶν δύο παραλλήλων ΧΨ, ΜΖ, τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΔΕ, λέγονται *ἐντὸς ἐναλλάξ*· αἱ δὲ ΜΑ'Δ, ΧΑΓ, λέγονται *ἐκτὸς ἐναλλάξ*. Αἱ γωνίαι αὗται εἶνε ἀνὰ δύο ἴσαι εἴτε ἡ τέμνουσα ΔΕ εἶνε κάθετος ἐπὶ τῶν παραλλήλων, ὁπότε εἶνε ὀρθαί, εἴτε καὶ μή. Ἄρα:

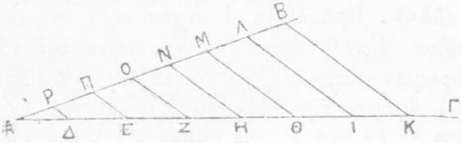
Ὅταν δύο εὐθεῖαι παράλληλοι τέμνωνται ὑπὸ τρίτης,

1) *αἱ ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίαι εἶνε ἴσαι.*

2) *αἱ ἐκτὸς ἐναλλὰξ γωνίαι εἶνε ἴσαι.*

Παρατ. β') Αἱ γωνίαι Β, Β' (Σχ. 62) εἶνε προφανῶς ἴσαι· αἱ πλευραὶ ΑΒ, Β'Α', εἶνε παράλληλοι καθὼς καὶ αἱ ΒΓ, Β'Γ'. Ἄρα: *Ἐὰν δύο γωνίαι ἔχωσι τὰς πλευράς των, παραλλήλους καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς, εἶνε ἴσαι.*

37. Πρόβλημα Η. *Νὰ διαιρέσωμεν δοθεῖσαν εὐθεῖαν εἰς ὁσαδήποτε ἴσα μέρη.* Ἔστω νὰ διαιρέσωμεν τὴν ΑΒ εἰς 7 ἴσα μέρη (Σχ. 64). Διὰ τοῦ ἑνὸς ἄκρου Α τῆς δοθείσης εὐθείας ἄγομεν ἑτέραν εὐθεῖαν, ἥτις νὰ σχηματίζῃ μετὰ τῆς δεδομένης γωνίαν· ἐπὶ ταύτης λαμβάνομεν διὰ τοῦ διαβήτου 7 μήκη ἴσα, ἀρχόμενα ἀπὸ τοῦ Α, τὰ ΑΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΙ, ΙΚ. Σύρομεν τὴν εὐθεῖαν ΚΒ καὶ ἐκ τῶν σημείων Ι, Θ, Η, Ζ, Ε, Δ, ἄγομεν παραλλήλους πρὸς τὴν ΚΒ (εὐκόλως ἄγονται διὰ τοῦ γνώμονος), αἱ ὁποῖαι διαιροῦσι τὴν ΑΒ εἰς 7 μέρη ΒΛ, ΛΜ, ΜΝ, ΟΝ, ΟΠ, ΠΡ, ΡΑ, ἅτινα εἶνε ἴσα, ὡς εὐκόλως πειθόμεθα διὰ τοῦ διαβήτου.

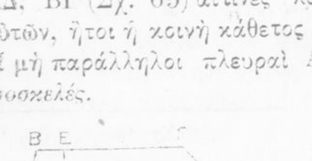


Σχ. 64.

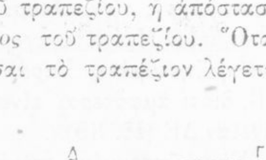
Περὶ τετραπλεύρων.

38. Τὰ κυριώτερα τετράπλευρα εἶνε: τὸ *τραπέζιον*, τὸ *παραλληλόγραμμον*, τὸ *ὀρθογώνιον*, ὁ *ῥόμβος* καὶ τὸ *τετράγωνον*.

α') Τραπέζιον εἶνε τετράπλευρον ἔχον δύο πλευρὰς παραλλήλους ΑΔ, ΒΓ (Σχ. 65) αἵτινες λέγονται *βάσεις* τοῦ τραπεζίου, ἡ ἀπόστασις αὐτῶν, ἤτοι ἡ κοινὴ κάθετος ΕΖ, εἶνε καὶ *ὕψος* τοῦ τραπεζίου. Ὅταν αἱ μὴ παράλληλοι πλευραὶ ΑΒ, ΓΔ εἶναι ἴσαι τὸ τραπέζιον λέγεται *ἰσοσκελές*.



Σχ. 65.



Σχ. 66.

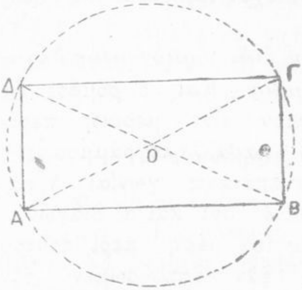
β') **Παραλληλόγραμμον** εἶνε τετράπλευρον, τοῦ ὁποίου αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶνε παράλληλοι, ἡ ΑΒ, εἶνε παράλληλος τῇ ΓΔ (Σχ. 66) καὶ ἡ ΑΓ παράλληλος τῇ ΑΔ. *Βάσις* τοῦ παραλληλογράμμου καλεῖται μία οἱαδήποτε τῶν πλευρῶν του, συνήθως ἡ μεγαλειτέρα ὡς ἡ ΑΒ· ἡ κάθετος ΔΕ ἐπὶ τὴν βάσιν, ἀγομένη ἔκ τινος σημείου τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς, καλεῖται *ὕψος*.

Τὸ παραλληλόγραμμον ἔχει τὰς ἑξῆς ἰδιότητας:

1) *Αἱ παράλληλοι πλευραὶ εἶνε ἴσαι*, ἤτοι ΑΒ=ΓΔ, ΒΓ=ΑΔ.

2) *Αἱ ἀπέναντι γωνίαι εἶνε ἴσαι.*

3) *Αἱ δύο διαγώνιοι ΑΓ, ΒΔ τέμνονται εἴς τι σημεῖον Μ, ὅπερ εἶνε μέσον ἑκατέρας καὶ καλεῖται* **κέντρον** *τοῦ παραλληλογράμμου.*

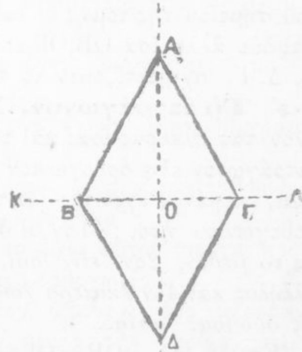


Σχ. 67.

γ') **Τὸ ὀρθογώνιον,** (Σχ. 67), εἶνε τετράπλευρον οὗ αἱ 4 γωνίαι εἶνε ἴσαι, καὶ ἐπομένως ὀρθαί.

Δύο διαδοχικαὶ πλευραὶ ΑΒ καὶ ΒΓ ὀνομάζονται διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου. τούτων ἡ μία εἶνε ἡ βάσις καὶ ἡ ἄλλη τὸ ὕψος. (1) Αἱ ἀπέναντι πλευραὶ ΑΔ. ΒΓ εἶνε παράλληλοι, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΑΒ· ἐπίσης αἱ ΔΓ, ΑΒ, εἶνε παράλληλοι. *Εἶνε λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον μερικὴ περίπτωσις τοῦ παραλληλογράμμου ἔχον τὰς διαγωνίους ἴσας.* Αἱ ἀποστάσεις ΟΑ. ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ εἶνε ἴσαι. Ἐὰν λοιπὸν μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα ΟΑ γράψωμεν περιφέρειαν, θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τῶν λοιπῶν κορυφῶν Β, Γ, Δ τοῦ ὀρθογωνίου. Ὅθεν, *τὸ ὀρθογώνιον δύναται νὰ ἐγγραφῇ εἰς κύκλον.*

Τὸ ὀρθογώνιον εἶνε σχῆμα, ὅπερ βλέπομεν, ὅπου καὶ ἂν στρέψωμεν σχεδὸν τοὺς ὀφθαλμούς μας· οὕτω τὰ φύλλα τῶν τετραδίων τῶν βιβλίων, αἱ τράπεζαι, τὰ πατώματα, καὶ οἱ τοῖχοι τῶν δωματίων, αἱ θύραι καὶ τὰ παράθυρα κτλ. ἔχουσιν ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον σχῆμα ὀρθογωνίου. Τὰ πλαίσια τῶν εἰκόνων, αἱ ἕδραι τοῦ παραλληλεπιπέδου (ἐδ. 3).



Σχ. 68.

Παρατ. Αἱ γωνίαι Α, Β, Γ, Δ (Σχ. 67) αἵτινες ἔχουσι τὰς κορυφάς των ἐπὶ τῆς περιφερείας, αἱ δὲ πλευραί των εἶνε χορδαὶ τοῦ κύκλου, λέγονται *γωνίαι ἐγγεγραμμέναι εἰς τὸν κύκλον.* Ἐπειδὴ ἡ ΒΔ εἶνε διάμετρος, ἡ γωνία Α εἶνε ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ ἡμικύκλιον ΔΑΒ, καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία αὕτη ἐξ ὁρισμοῦ εἶνε ὀρθὴ, πορίζόμεθα ὅτι: *ὀρθὴ γωνία δύναται νὰ ἐγγραφῇ εἰς ἡμικύκλιον.* ἢ ἀντιστρόφως, *πᾶσα εἰς ἡμικύκλιον ἐγγεγραμμένη γωνία εἶνε ὀρθή.*

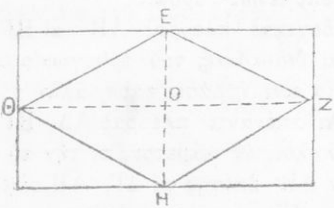
δ') **Ὁ ῥόμβος** (Σχ. 68) εἶνε τετράπλευρον ἔχον 4 πλευρὰς ἴσας.

Ἵνα κατασκευάσωμεν ῥόμβον, λαμβάνομεν ἓν ὀρθογώνιον φύλλον χαρτίου καὶ διπλώνομεν αὐτὸ κατὰ τὰς εὐθείας ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ (Σχ. 69), ἔνθα τὰ σημεῖα Ε, Ζ, Η καὶ Θ εἶνε τὰ μέσα τῶν πλευρῶν. Τὰ τέσ-

1) Ἡ βάσ

σαρα σχηματιζόμενα ὀρθογώνια τρίγωνα εἶνε ἴσα ὡς ἔχοντα τὰς καθέτους αὐτῶν πλευρὰς ἴσας, ἑπομένως αἱ ὑποτείνουσαι ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ καὶ ΘΕ εἶνε ἴσαι καὶ τὸ τετράπλευρον ΕΖΗΘ ὡς ἔχον τὰς τέσσαρας πλευράς του ἴσας εἶνε ῥόμβος.

Λοιπὸν συνδέοντες τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ἑνὸς ὀρθογωνίου λαμβάνομεν ῥόμβον. Καὶ ὁ ῥόμβος ὡς τὸ ὀρθογώνιον εἶνε μερικὴ περίπτωσις τοῦ παραλληλογράμμου (¹)· ἑπομένως αἱ ἀπέναντι γωνίαι Α καὶ Δ, Β καὶ Γ εἶνε ἴσαι καὶ αἱ διαγώνιοι τέμνονται εἰς ἴσα μέρη· περὶ τούτου βεβαιούμεθα, ἐὰν διπλώσωμεν τὸν ῥόμβον ΑΒΓΔ (Σχ. 68) κατὰ τὴν



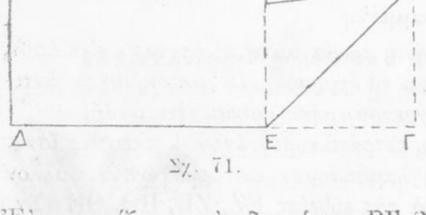
Σχ. 69.

ΒΓ ἢ κατὰ τὴν ΑΔ. Αἱ διαγώνιοι τοῦ ῥόμβου ἔχουσι προσέτι καὶ τὰς ἑξῆς ἰδιότητας. 1ον *Εἶνε κάθετοι μεταξύ των.* 2ον *Ἑκατέρα χωρίζει τὰς γωνίας, τῶν ὁποίων ἑνώνει τὰς κορυφάς, εἰς δύο μέρη ἴσα.* Ἐντεῦθεν πορίζόμεθα δεύτερον τρόπον κατασκευῆς ῥόμβου : λαμβάνομεν δύο εὐθείας καθέτους ἐν σχήματι σταυροῦ ΚΛ, ΚΜ (Σχ. 68) καὶ ἐκ τοῦ σημείου τῆς τομῆς Ο λαμβάνομεν δύο μήκη ἴσα ΟΑ,ΟΔ ἐπὶ τῆς μιᾶς καὶ δύο ἄλλα ἴσα ΟΒ,ΟΓ ἐπὶ τῆς ἄλλης· ἑνοῦντες δι᾿εὐθειῶν τὰ ἄκρα Α, Β, Δ, Γ, σχηματίζομεν τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ ὅπερ εἶνε ῥόμβος.

ε´) **Τὸ τετράγωνον,** (Σχ. 70) εἶνε τετράπλευρον ἔχον τὰς πλευρὰς ἴσας καὶ τὰς γωνίας ὀρθάς· ἤτοι τὸ τετράγωνον εἶνε ὀρθογώνιον οὗ αἱ δύο διαστάσεις εἶνε ἴσαι, ἑπομένως ἔχει τὰς ἰδιότητας τοῦ ῥόμβου καὶ τοῦ ὀρθογωνίου, ἤτοι : 1ον *αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ τέμνονται εἰς τὸ μέσον,* 2ον *εἶνε ἴσαι,* 3ον *εἶνε κάθετοι πρὸς ἀλλήλας καὶ* 4ον *ἑκατέρα χωρίζει τὰς ἀπέναντι γωνίας εἰς δύο ἴσας γωνίας.*

Σχ. 70.

Ἐπειδὴ ΟΑ=ΟΒ=ΟΓ=ΟΔ, ἐὰν μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα ΟΑ γράψωμεν περιφέρειαν, θὰ διέλθῃ δι᾿ ὅλων τῶν κορυφῶν τοῦ τετραγώνου. Ἄρα *τὸ τετράγωνον δύναται νὰ ἐγγραφῇ εἰς κύκλον* (ἐδ. 43).



Σχ. 71.

ΣΗΜ. Ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν ἑνὸς τετραγώνου, ἡ κατασκευή του τελεῖται εὐκόλως. Ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν διαγώνιον ΒΓ (Σχ. 70), φέρομεν κάθετον εἰς τὸ

1) Τὴν ἀπόδειξιν τούτου δύναται νὰ κάμῃ ὁ διδάσκων κατὰ τὴν ἐπανάληψιν.

μέσον αὐτῆς καὶ λαμβάνομεν μήκη ΟΑ καὶ ΟΔ ἴσα μὲ τὸ ἥμισυ τῆς δοθείσης διαγωνίου· ἔπειτα ἑνοῦντες δι' εὐθειῶν τὰ σημεῖα Α, Β, Δ, Γ, ἔχομεν τὸ ζητούμενον τετράγωνον. Ἀπὸ ὀρθογώνιον φύλλον χαρτίου ΑΒΓΔ (Σχ. 71) δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν τετράγωνον ὡς ἑξῆς· διπλώνομεν αὐτὸ οὕτως, ὥστε ἡ ΒΓ νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΒΖ λαμβάνουσα τὴν διεύθυνσιν τῆς ΒΑ εἶτα κόπτομεν τὸ περισσεῦον καὶ ξεδιπλώνομεν τὸ φύλλον.

ΜΕΧΡΙ

Ἐπανάληψις δι' ἐρωτήσεων καὶ ἀσκήσεων.

Ποῖαι εὐθεῖαι λέγονται παράλληλοι ; ποῖαι αἱ σπουδαιότεραι ἰδιότητες αὐτῶν ; Πῶς σύρομεν ἔκ τινος σημείου παράλληλον εἰς μίαν εὐθεῖαν ; Νὰ διαιρεθῇ δοθεῖσα εὐθεῖα εἰς 16 μέρη ἴσα. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα μήκους 15 δακτύλων καὶ νὰ διαιρεθῇ εἰς 5 μέρη ἴσα. Τίνα τὰ σπουδαιότερα τετράπλευρα καὶ τίνας ἰδιότητας ἔχει ἕκαστον ; Ἐντὸς τῆς αἰθούσης ποῖα ὀρθογώνια βλέπεις ; Πῶς κατασκευάζομεν ῥόμβον ; τετράγωνον ;

1) Κῆπος ἔχει σχῆμα τετραγώνου, οὗ ἡ πλευρὰ εἶνε 25 μ.· πόση εἶνε ἡ περίμετρος αὐτοῦ ;

2) Ἀγρὸς ἔχει σχῆμα τετραγώνου, οὗ ἡ περίμετρος εἶνε 3840 μ.· πόσον μῆκος ἔχει ἑκάστη πλευρά ;

3) Πόση εἶνε ἡ περίμετρος ὀρθογωνίου ἔχοντος διαστάσεις 8 μ. 50 καὶ 4 μ., 60 ;

4) Κατασκεύασον ῥόμβον, οὗ αἱ διαγώνιοι νὰ ἔχωσι μήκη 33 γραμμῶν καὶ 40 γραμμῶν. Μέτρησον τὴν πλευράν.

5) Ἡ περίμετρος ῥόμβου ἰσοῦται τῇ πριμέτρῳ ἰσοπλεύρου τριγώνου. Τίς ἡ πλευρὰ τοῦ ῥόμβου ἐὰν ἡ τοῦ τριγώνου εἶνε 12 μ. ;

6) Ἡ περίμετρος ὀρθογωνίου εἶνε 60 μ., τὸ ὕψος αὐτοῦ ἰσοῦται πρὸς τὰ $^2/_3$ τῆς βάσεως. Ζητοῦνται αἱ διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου.

7) Κατάσκευασον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δίδονται δύο πλευραί, ΒΑ=24 γραμμαί, ΒΓ=48 γραμμαί, καὶ ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν περιέχουσιν ἴση πρὸς 60°. Μέτρησον τὰς δύο ἄλλας γωνίας.

8) Κατασκεύασον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δίδεται μία πλευρὰ ΑΒ=54 γρ. καὶ αἱ εἰς τὰ ἄκρα της γωνίαι Α=36°, Β=72°. Μέτρησον ἔπειτα τὰς πλευρὰς ΑΓ καὶ ΒΓ.

9) Κατασκεύασον τρίγωνον ἰσόπλευρον [1], τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ νὰ ἔχῃ μῆκος 3 δακτύλων.

10) Κατασκεύασον τρίγωνον [1] ἔχον πλευρὰς 35, 40 καὶ 45 γραμμῶν· μέτρησόν τὰς γωνίας του καὶ τὰ ὕψη.

11) Δύναται νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἔχον πλευρὰς 5, 10 καὶ 15 δακτύλων.

12) Κατασκεύασον τετράγωνον ἔχον διαγώνιον 32 γρ.

---

1) Διὰ τοῦ διαβήτου, τῇ βοηθείᾳ τοῦ διδάσκοντος.

13) Κατασκεύασον ὀρθογώνιον τοῦ ὁποίου ἡ διαγώνιος νὰ εἶνε 40γρ. καὶ ἡ βάσις 37 γρ.

14) Κατασκεύασον παραλληλόγραμμον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ πλευρὰς 35 καὶ 32 γρ., τὴν δὲ περιεχομένην γωνίαν 45^0.

Ἐφαπτομένη εἰς κύκλον.

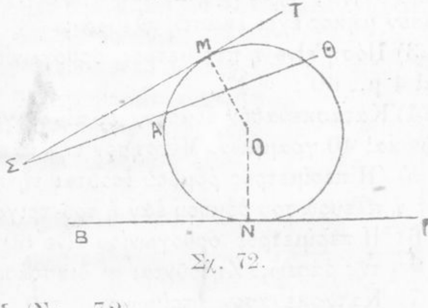
39. *Τέμνουσα* λέγεται πᾶσα εὐθεῖα συναντῶσα τὴν περιφέρειαν εἰς δύο σημεῖα· π.χ. ἡ ΣΑΒ (Σχ. 72).

Ἐφαπτομένη λέγεται εὐθεῖά τις, ἐὰν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον ἔχῃ μὲ τὴν περιφέρειαν, π.χ. ἡ ΣΤ· τὸ κοινὸν σημεῖον Μ καλεῖται *σημεῖον ἐπαφῆς*.

Αἱ σιδηραῖ ῥάβδοι τῶν σιδηροδρόμων εἶνε ἐφαπτόμεναι τῶν τροχῶν οἵτινες κυλίονται ἐπ' αὐτῶν.

Ὅταν εὐθεῖα εἶνε ἐφαπτομένη περιφερείας καὶ ἡ περιφέρεια λέγεται ἐφαπτομένη τῆς εὐθείας.

Ἡ ἐφαπτομένη περιφερείας ἔχει τὴν ἀξιοσημείωτον ἰδιότητα *νὰ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα τὴν καταλήγουσαν εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς*. Οὕτως ἡ ἐφαπτομένη ΒΓ (Σχ. 72) εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα ΟΝ. Καὶ ἀντιστρόφως: *ἐὰν εὐθεῖά τις ΒΓ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα ΟΝ (εἰς τὸ ἄκρον αὐτῆς Ν) εἶνε ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας*[1].

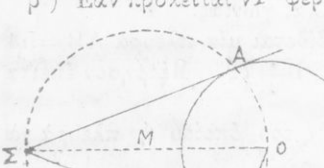


Σχ. 72.

Ι. *Νὰ φέρωμεν ἐφαπτομένην εἰς περιφέρειαν.*

α') Ἐὰν γνωρίζωμεν τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς Μ, ἀρκεῖ ἐκ τοῦ Μ νὰ σύρωμεν τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα ΟΜ (Σχ. 72).

β') Ἐὰν πρόκειται νὰ φέρωμεν τὴν ἐφαπτομένην ἔκ τινος σημείου Σ κειμένου ἐκτὸς τῆς περιφερείας (Σχ. 73), ἑνώνομεν τὸ Σ μὲ τὸ κέντρον, λαμβάνομεν τὸ μέσον Μ τῆς ΣΟ καὶ γράφομεν τὴν περιφέρειαν, ἥτις ἔχει διάμετρον τὴν ΣΟ· αὕτη τέμνει τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν εἰς δύο σημεῖα Α καὶ Β. Αἱ εὐθεῖαι ΣΑ, ΣΒ εἶνε ἐφαπτόμεναι εἰς τὴν περιφέρειαν Ο. Διότι ἡ γωνία ΣΒΟ εἶνε ὀρθὴ ὡς

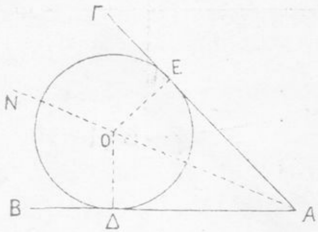


Σχ. 73.

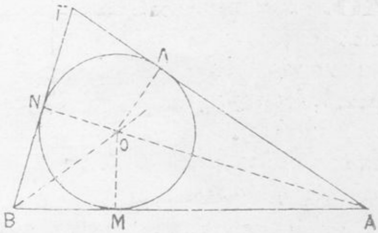
1) Τὴν ἰδιότητα ταύτην ὡς καὶ τὴν τῆς διχοτόμου (σελ. 14) θὰ ἐφαρμόσωμεν εἰς 3 προβλήματα.

ἐγγεγραμμένη εἰς ἡμικύκλιον (σελ. 29, Παρατ.)· ἑπομένως ἡ ΣΒ, κάθετος οὖσα ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα ΟΒ, εἶνε ἐφαπτομένη. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΣΟΑ, ΣΟΒ εἶνε ἴσα· ἄρα ΣΑ=ΣΒ.

ΙΙ. *Περιφέρειαι ἐφαπτόμεναι εἰς δύο εὐθείας τεμνομένας ΑΒ, ΑΓ.*

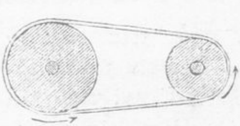


Σχ. 74.

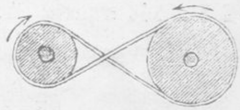


Σχ. 75.

Ἐὰν ἐξ ἑνὸς οἱουδήποτε σημείου Ο τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας ΒΑΓ φέρωμεν καθέτους ἐπὶ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας, αἱ δύο αὗται κάθετοι εἶνε ἴσαι καὶ ἡ περιφέρεια ἡ γραφομένη μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα τὴν ΟΔ εἶνε ἐφαπτομένη εἰς τὰς δύο εὐθείας ΑΒ, ΑΓ (Σχ. 74). Μετακινοῦντες τὸ σημεῖον Ο ἐπὶ τῆς διχοτόμου ΑΝ δυνάμεθα νὰ γράψωμεν ὁσασδήποτε περιφερείας ἐφαπτομένας εἰς τὰς δύο δοθείσας εὐθείας.



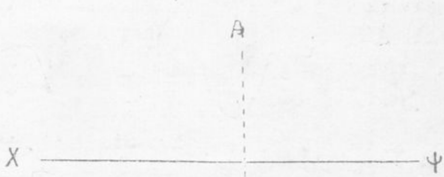
Σχ. 76



Σχ. 77.

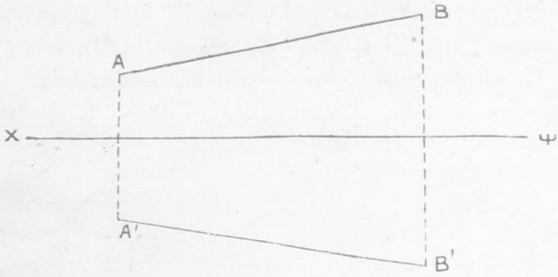
ΙΙΙ. *Περιφέρεια ἐφαπτομένη εἰς τρεῖς εὐθείας τεμνομένας ἀνὰ δύο.*

Ἵνα εὕρωμεν τὸ κέντρον μιᾶς περιφερείας ἐφαπτομένης εἰς τρεῖς τοιαύτας εὐθείας, φέρομεν τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν Α καὶ Β (Σχ. 75)· τὸ σημεῖον, ἔνθα συναντῶνται εἶνε τὸ ζητούμενον κέντρον, διότι, ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου Ν φέρωμεν καθέτους ἐπὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, αἱ κάθετοι αὗται ΟΛ, ΟΜ, ΟΝ εἶνε ἴσαι.



Σχ. 78.

ΣΗΜ. Ὁ *κύκλος* Ο (Σχ. 75), τοῦ ὁποίου ἡ περιφέρεια εἶνε ἐφαπτομένη εἰς τὰς 3 πλευρὰς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, λέγεται *ἐγγεγραμμένος* εἰς τὸ τρίγωνον, τὸ δὲ τρίγωνον *περιγεγραμμένον* εἰς τὸν κύκλον.



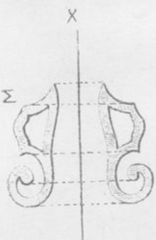
Σχ. 79.

40. Δύο περιφέρειαι δυνατὸν νὰ ἔχωσι κοινὴν ἐφαπτομένην, *ἐξωτερικὴν* (ὅταν 2 κύκλοι κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς) ἢ *ἐσωτερικὴν* (ὅταν κεῖνται ἑκατέρωθεν αὐτῆς.

Ἐφαρμογὴν τῶν κοινῶν ἐφαπτομένων βλέπομεν εἰς διάφορα ἐργοστάσια, ἔνθα διὰ λωρίδων μεταδίδεται ἡ περιστροφικὴ κίνησις τροχοῦ εἰς ἄλλον (Σχ. 76, 77). Τὸ λωρίον εἶνε ἐξωτερικόν, ἐὰν οἱ δύο τροχοὶ στρέφωσι κατὰ τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν, ἐσωτερικὸν δὲ ἐὰν στρέφωσι ἀντιθέτως.

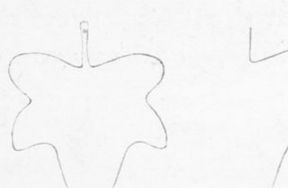
Σχήματα συμμετρικά.

41. Δύο σημεῖα Α, Α′ λέγονται *συμμετρικά*, πρός τινα εὐθεῖαν ΧΨ (Σχ. 78), ἐὰν ἡ ἑνοῦσα τὰ σημεῖα ταῦτα εὐθεῖα ΑΑ′ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν ΧΨ καὶ τέμνηται ὑπ' αὐτῆς δίχα, ἤτοι ΑΟ=Α′Ο. Ἡ εὐθεῖα καλεῖται *ἄξων συμμετρίας*.



Σχ. 80.

Δύο εὐθεῖαι ΑΒ Α′Β′ λέγονται *συμμετρικαὶ* πρός τινα ἄξονα ΧΨ, ἐὰν τὰ ἄκρα αὐτῶν Α, Α′ καὶ Β, Β′, εἶνε συμμετρικὰ σημεῖα (Σχ. 79).


Σχ. 81.

Ἐν γένει δύο (ἐπίπεδα) σχήματα εἶνε *συμμετρικά* (1), ἐὰν ἔχωσι πάντα τὰ σημεῖα αὐτῶν συμμετρικά (Σχ. 80).

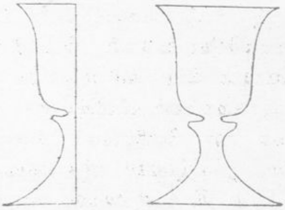
Ἐὰν τὸ φύλλον χάρτου, ἐφ' οὗ ἐσχεδιάσαμεν δύο συμμετρικὰ σχήματα, διπλώσωμεν κατὰ τὸν ἄξονα τῆς συμμετρίας, τότε τὰ δύο συμμετρικὰ σχήματα ἐφαρμόζουσιν ἀκριβῶς ἐπ' ἀλλήλων καθ' ὅλα τὰ σημεῖα αὐτῶν.

---

1) πρός τινα ἄξονα κείμενον ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτῶν.

Ἐὰν σχεδιάσωμεν σχῆμά τι Σ (Σχ. 80) καὶ διπλώσωμεν τὸ φύλλον, κατά τινα εὐθεῖαν ΧΨ, τὸ παραχθησόμενον ἀποτύπωμα Σ′ θὰ εἶνε σχῆμα συμμετρικὸν τοῦ Σ.

Παραδείγματα ἄξονος συμμετρίας συνήθη εἶνε : τὸ ὕψος ΚΗ τριγώνου ἰσοσκελοῦς (Σχ. 39), αἱ εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν ὀρθογωνίου ἢ τετραγώνου, αἱ διάμετροι τοῦ κύκλου. Ὡσαύτως οὐκ ὀλίγων φυτῶν τὰ φύλλα (ἀκακίας κλπ.) ἔχουσιν ἐν τῷ μέσῳ ἄξονα συμμετρίας.



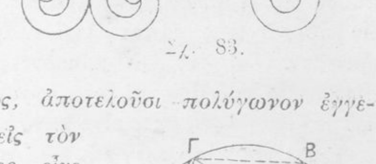
Σχ. 82′

Ὁ σχεδιαστὴς καὶ ὁ χαράκτης, ὅταν πρόκειται συμμετρικὰ σχήματα νὰ ἐκτελέσωσι, σχεδιάζουσι τὸ ἥμισυ, τούτου δὲ λαμβάνουσι τὸ ἀποτύπωμα (Σχ. 81 82,83).

Πολύγωνα κανονικά.

42. Πολύγωνόν τι λέγεται *κανονικόν*, ὅταν ἔχῃ τὰς πλευράς του ἴσας καὶ τὰς γωνίας του ἴσας· π. χ. τὸ τετράγωνον (Σχ. 70), τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον (Σχ. 40). Τὸ ὀρθογώνιον (Σχ. 67) δὲν εἶνε κανονικόν.

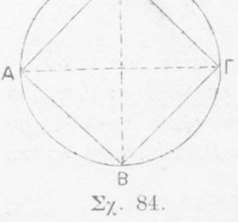
Πολύγωνόν τι εἶνε *ἐγγεγραμμένον* εἰς κύκλον ὅταν πᾶσαι αἱ κορυφαί του κεῖνται ἐπὶ τῆς περιφερείας (σελ. , παρατ. γ′)· εἶνε δὲ *περιγεγραμμένον* εἰς κύκλον, ὅταν πᾶσαι αἱ πλευραί του εἶνε ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου (σελ. σημ.).



Σχ. 83.

43. Ἡ ὕπαρξις καὶ ἡ κατασκευὴ κανονικῶν πολυγώνων στηρίζεται ἐπὶ τῆς ἑξῆς ἀληθείας :

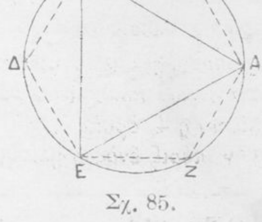
Ἐὰν περιφέρεια διαιρεθῇ εἰς τόξα ἴσα αἱ χορδαί, αἱ συνδέουσαι διαδοχικῶς τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως, ἀποτελοῦσι πολύγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον, ὅπερ εἶνε κανονικόν.



Σχ. 84.

Παραδείγματα :

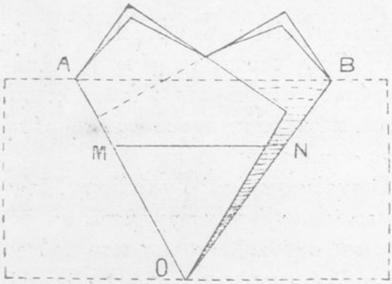
α′) Ἵνα κατασκευάσωμεν *τετράγωνον ἐγγεγραμμένον* εἰς δοθέντα κύκλον **Κ**, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὴν περιφέρειαν



Σχ. 85.

αὐτοῦ εἰς 4 ἴσα τόξα, πρὸς τοῦτο φέρομεν δύο διαμέτρους καθέτους, ΑΓ, ΒΔ (Σχ. 84), ἔπειτα τὰς 4 χορδὰς τὰς συνδεούσας τὰ ἄκρα των.

β') Ἐὰν ἕκαστον τῶν ἴσων τόξων ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ διαιρέσωμεν εἰς δύο ἴσα μέρη (1) καὶ φέρωμεν τὰς χορδάς, θὰ ἔχωμεν *κανονικὸν ὀκτάγωνον*.

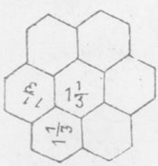


Σχ. 86.

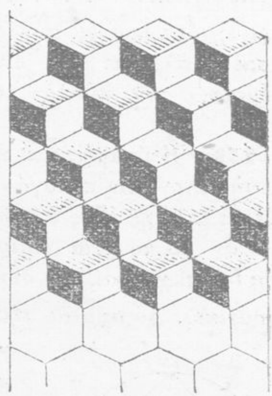
γ') Ἵνα κατασκευάσωμεν ἑξάγωνον κανονικὸν ἐγγεγραμμένον (Σχ. 85), στηριζόμεθα ἐπὶ τῆς ἀληθείας τοῦ ἐδ. 25 Ι, ἤτοι ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ σημείου Α περιφερείας καὶ λαμβάνοντες ἄνοιγμα τοῦ διαβήτου ἴσον τῇ ἀκτῖνι, χωρίζομεν τὴν περιφέρειαν εἰς ἓξ ἴσα μέρη διὰ τῶν σημείων Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ· ἡ ἕνωσις τῶν ἓξ τούτων σημείων διὰ χορδῶν ΑΒ, ΒΓ,... παρέχει τὸ ζητούμενον ἑξάγωνον.

Ἐὰν ἑνώσωμεν τὰς κορυφὰς Α, Γ καὶ Ε τοῦ ἑξαγώνου, λαμβάνομεν *ἰσόπλευρον τρίγωνον* ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον (Σχ. 85). Ἐὰν ἕκαστον τῶν ἴσων τόξων ΑΒ, ΒΓ κτλ. διαιρέσωμεν εἰς δύο ἴσα μέρη καὶ φέρωμεν τὰς χορδάς, θὰ ἔχωμεν *κανονικὸν δωδεκάγωνον* ἐγγεγραμμένον.

ΣΗΜ. Μὲ ἓν ὀρθογώνιον φύλλον χάρτου δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν ἑξάγωνον κανονικὸν ὡς ἑξῆς: Θλῶμεν τὸ φύλλον εἰς δύο (ἡ θλάσις ἂς εἶνε παράλληλος πρὸς τὸ πλάτος τοῦ ὀρθογωνίου). Εἴς τι σημεῖον Ο (Σχ. 86) τῆς θλάσεως σχηματίζομεν διὰ διπλώσεως 3 γωνίας ἴσας (ἑκάστη 60°). Ἐπὶ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας ΑΟΒ λαμβάνομεν μήκη ἴσα ΟΜ καὶ ΟΝ· κόπτοντες διὰ ψαλίδος κατὰ τὴν ΜΝ καὶ ξεδιπλώνοντες λαμβάνομεν ἑξάγωνον, ὅπερ εἶνε κανονικόν (2).



Σχ. 87.

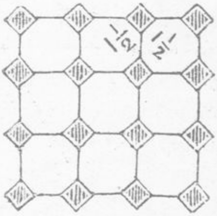

Σχ. 88.

44. Ἐφαρμογαί. — Αἱ πλάκες τῶν ὁποίων γίνεται συχνὴ χρῆσις εἰς ἐπίστρωσιν αἰθουσῶν, διαδρόμων, αὐλῶν κτλ., ἔχουσι σχῆμα κανονικῶν πολυγώνων. Πρέπει ὅμως ἡ γωνία τῶν τοιούτων κανονικῶν πολυγώνων νὰ εἶνε τοιαύτη, ὥστε πολλαπλάσιόν τι αὐτῆς νὰ ἀποτελῇ 4 ὀρθὰς ἢ 360°, διότι τὸ ἄθροισμα τῶν σχηματιζομένων γωνιῶν πέριξ ἑνὸς σημείου, ὅταν ἐξ αὐτοῦ ἀχθῶσιν εὐθεῖαι εἶνε 4 ὀρθαί.

1) Σελ. 24 V.

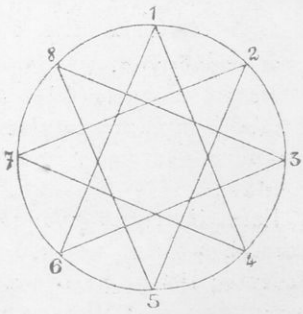
2) Τὸ διατί ἂς εὑρεθῇ ὑπὸ τῶν μαθητῶν, τῇ βοηθείᾳ τοῦ διδάσκοντος.

π.χ. τρίγωνα ἰσόπλευρα δυνάμεθα νὰ μεταχειρισθῶμεν εἰς πλακόστρωσιν διότι ἑκάστη γωνία τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶνε 60°, ἓξ δὲ τοιαῦται γωνίαι τοποθετούμεναι περὶ μίαν κοινὴν κορυφήν, δὲν ἀφίνουσι κενὸν μέρος ἐν τῷ μεταξὺ ($6 \times 60^\circ = 360^\circ$). Πλάκες ἑξαγωνικαὶ εἶνε κατάλληλοι πρὸς στρῶσιν, διότι ἓξ γωνίαι τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου κάμνουσιν 8 ὀρθὰς 720°, καὶ κάθε μία θὰ εἶνε $\frac{720^\circ}{5} = 120^\circ$. Ἐὰν λάβωμεν 3 τοιαύτας πλάκας καὶ πλησιάσωμεν 3 γωνίας αὐτῶν περὶ μίαν κοινὴν κορυφὴν ἀποτελοῦσι 360°, ἤτοι δὲν ἀφίνουσι κενὸν μέρος (Σχ. 87). Ἐνίοτε χωρίζουσιν ἕκαστον κανονικὸν ἑξάγωνον εἰς 3 ῥόμβους, οὓς βάφουσιν μὲ διάφορα χρώματα, ὁπότε τὸ ἑξάγωνον φαίνεται ὡς κῦβος (Σχ. 88). Συνήθως συνδυάζουσι πολύγωνα κανονικὰ δύο διαφόρων εἰδῶν· π.χ. ὀκτάγωνα καὶ τετράγωνα (Σχ. 89).



Σχ. 89.

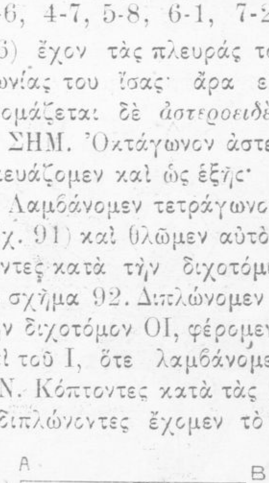
45. Πολύγωνα ἀστεροειδῆ. — Ἐὰν διαιρέσωμεν περιφέρειαν εἰς 8 ἴσα μέρη (Σχ. 90) καὶ συνδέσωμεν δι' εὐθειῶν τὰ σημεῖα 1-4, 2-5, 3-6, 4-7, 5-8, 6-1, 7-2, 8-3 προκύπτει πολύγωνον (μὴ κυρτὸν ἐδ. 26) ἔχον τὰς πλευράς του ἴσας καὶ τὰς γωνίας του ἴσας· ἄρα εἶνε κανονικόν· ὀνομάζεται δὲ *ἀστεροειδὲς* (ὀκτάγωνον).



Σχ. 90.

ΣΗΜ. Ὀκτάγωνον ἀστεροειδὲς κατασκευάζομεν καὶ ὡς ἑξῆς·

Λαμβάνομεν τετράγωνον ἐκ χαρτίου (Σχ. 91) καὶ θλῶμεν αὐτὸ εἰς 4. Διπλώνοντες κατὰ τὴν διχοτόμον ΟΑ ἔχομεν τὸ σχῆμα 92. Διπλώνομεν ἐκ νέου κατὰ τὴν διχοτόμον ΟΙ, φέρομεν τὸ σημεῖον Ο ἐπὶ τοῦ Ι, ὅτε λαμβάνομεν τὴν θλάσιν ΜΝ. Κόπτοντες κατὰ τὰς ΜΙ κα ΝΙ καὶ ξεδιπλώνοντες ἔχομεν τὸ ζητούμενον.

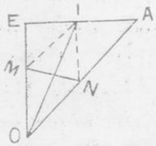


Σχ. 91.

46. Διαιροῦντες τὴν περιφέρειαν εἰς 12 μέρη ἴσα καὶ συνδέοντες τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως ἕκαστον μετὰ πᾶν πέμπτον τόξον, λαμβάνομεν κανονικὸν δωδεκάγωνον ἀστεροειδές.

Τὸ ἀστεροειδὲς ἑξάγωνον προκύπτει διὰ τοῦ συνδυασμοῦ δύο τριγώνων ἰσοπλεύρων (Σχ. 93, 94).

Ἐὰν διαιρέσωμεν τὴν περιφέρειαν εἰς 16 μέρη ἴσα καὶ συνδέσωμεν τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως ἕκαστον μετὰ πᾶν ἕβδομον τόξον, λαμβάνομεν δεκαεξάγωνον ἀστεροειδές (Σχ. 95)



Σχ. 92.

47. Ῥοδοειδῆ. — Καλεῖται ῥοδοειδὲς τὸ σχῆμα τὸ ἀποτελούμενον ἐκ τόξων κύκλων διερχομένων ἐν γένει διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, ὅπερ εἶνε κέντρον τοῦ ῥοδοειδοῦς καὶ καταληγόντων ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας (Σχ. 96, 97).


Σχ. 92.

Ἐπανάληψις δι' ἐρωτήσεων καὶ ἀσκήσεων.

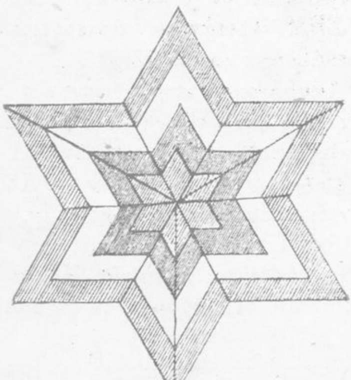
Τί καλεῖται ἐφαπτομένη καὶ ποίαν ἰδιότητα ἔχει ; Πόσας ἐφαπτομένας δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἔκ τινος σημείου εἰς περιφέρειαν καὶ πῶς ; ποῦ εὑρίσκεται τὸ κέντρον περιφερείας ἐφαπτομένης εἰς δύο εὐθείας 1) παραλλήλους, 2) τεμνομένας ;

Πῶς εὑρίσκομεν τὸ κέντρον περιφερείας, ἥτις ἐφάπτεται τῶν τριῶν πλευρῶν τριγώνου ;

Δύο περιφέρειαι εἶνε δυνατὸν νὰ ἔχωσι κοινὴν ἐφαπτομένην ; ἀνάφερε παράδειγμα.

Πότε δύο σημεῖα (ἢ δύο εὐθεῖαι ἢ καὶ δύο σχήματα ἐν γένει) λέγονται συμμετρικὰ πρός τινα εὐθεῖαν ;

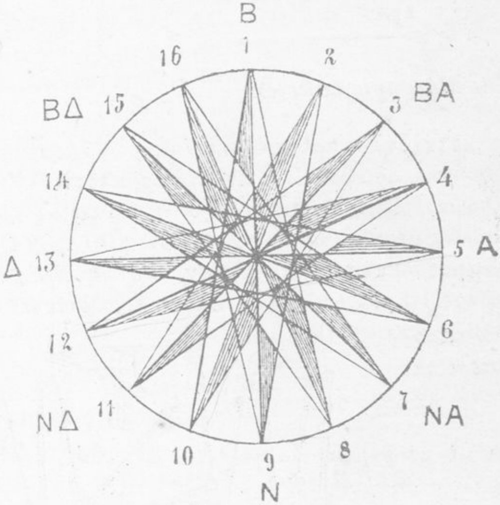
Ποίαν ἰδιότητα ἔχουσι τὰ συμμετρικὰ σχήματα καὶ ποῦ ἐφαρμόζεται ; Ποῖον πολύγωνον λέγεται κανονικόν ; Πότε πολύγωνον λέγεται ἐγγεγραμμένον καὶ πότε περιγεγραμμένον εἰς κύκλον ; Ἐπὶ τίνος ἀληθείας στηρίζεται ἡ κατασκευὴ κανονικῶν πολυγώνων ; Κατασκεύασον τετράγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον, ἐπίσης ἑξάγωνον, ὀκτάγωνον (κανονικὰ) καὶ τρίγωνον ἰσόπλευρον.


Σχ. 94.

Μὲ φύλλον χάρτου κατασκεύασον ἑξάγωνον κανονικόν.

Πλάκες τετραγωνικαὶ εἶνε κατάλληλοι πρὸς στρῶσιν καὶ διατί ; πλάκες πενταγωνικαί ;

Κατασκεύασον ὀκτάγωνον κανονικὸν ἀστεροειδὲς 1ον διὰ διαιρέσεως τῆς περιφερείας 2ον διὰ φύλλου χάρτου. Κατασκεύασον ἑξάγωνον κανονικὸν ἀστεροειδὲς καὶ δεκαεξάγωνον τοιοῦτον.



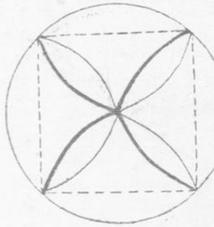
Σχ. 95.

Τί καλεῖται ῥοδοειδές ; Κατασκεύασον ῥοδοειδὲς 1ον μὲ 6 κλάδους (Σχ. 97), 2ον μὲ 2 κλάδους.

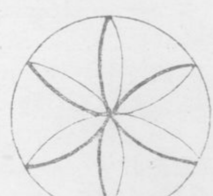
1) Γράψον 2 περιφερείας μὲ κέντρα τὰ ἄκρα εὐθείας ΑΒ=4 δακτ. καὶ μὲ ἀκτῖνας 27 καὶ 22 γρ. Γράψον τὴν κοινὴν χορδὴν καὶ μέτρησον αὐτήν.

2) Μὲ ἀκτῖνα 15 γρ. γράψον περιφέρειαν ἐφαπτομένην εἰς τὰς πλευρὰς γωνίας 43°.

3) Γράψον περιφέρειαν ἐφαπτομένην τῶν πλευρῶν γωνίας 25°· τὸ κέντρον νὰ ἀπέχῃ 3 δακτ. ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς γωνίας. Μέτρησον τὴν ἀκτῖνα.


Σχ. 96.

4) Εἰς κύκλον ἀκτῖνος 15 γρ. νὰ ἐγγραφῇ ἑξάγωνον κανονικὸν καὶ νὰ εὑρεθῇ ἡ περίμετρος αὐτοῦ.


Σχ. 97.

5) Περιφέρεια νὰ διαιρεθῇ εἰς 5 μέρη ἴσα [1] καὶ νὰ συνδεθῶσι τὰ σημεῖα διαιρέσεως ἀνὰ δύο (δηλ. τὸ 1ον μὲ τὸ 3ον, τὸ 2ον μὲ τὸ 4ον,...) Προκύπτει πεντάγωνον κανονικὸν στεροειδές.

6) Ἐὰν ἡ περιφέρεια διαιρεθῇ εἰς 10 μέρη ἴσα καὶ συνδεθῶσι τὰ σημεῖα διαιρέσεως ἀνὰ τρία, προκύπτει δεκάγωνον κανονικὸν ἀστεροειδές.

1) Ἡ διαίρεσις περιφερείας εἰς ὁσαδήποτε μέρη ἴσα (π. χ. εἰς 5) ἐπιτυγχάνεται ἐν τῇ πράξει 1ον διὰ δοκιμῶν, ἀνοιγομένου τοῦ διαβήτου καταλλη-

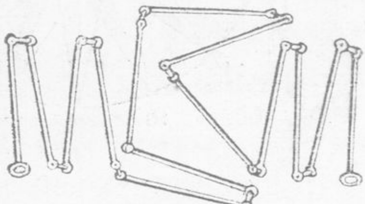
ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΜΕΡΟΣ Β΄.

Μέτρησις εὐθειῶν.

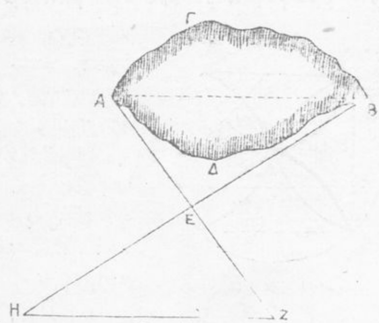
48. Τὸ μέτρον εἶνε κατάλληλον πρὸς μέτρησιν μικρῶν ἀποστάσεων, π. χ. τοῦ μήκους τῆς αἰθούσης, τοῦ θρανίου, ἑνὸς ὑφάσματος κτλ. Ἀλλ' ἐὰν πρόκειται νὰ μετρήσωμεν τὸ μῆκος μιᾶς μεγάλης πλατείας ἢ μιᾶς ὁδοῦ, ἠθέλομεν κουρασθῆ νὰ μεταφέρωμεν τὸ μέτρον 200 ἢ 300 φορὰς συνεχῶς. Διὰ τοῦτο λαμβάνομεν τὴν ταινίαν (Σχ. 98) ἢ τὴν ἄλυσιν (Σχ. 99), ἅτινα ἔχουσι μῆκος 10 μέτρων. Ἡ ταινία περιτυλίσσεται περὶ ἄξονα ἐντὸς θήκης διὰ στροφάλου. Ἡ ἄλυσις ἀποτελεῖται

Σχ. 98.



Σχ. 99.

ἐκ 50 τεμαχίων ἡνωμένων διὰ κρίκων, ἐπομένως δύο κρίκοι διαδοχικοὶ ἀπέχουσιν ἀπ' ἀλλήλων δύο παλάμας. Ἡ μέτρησις εὐθείας εἶνε εὔκολος, ὅταν δυνάμεθα νὰ μεταβῶμεν ἀπὸ τοῦ ἑνὸς ἄκρου αὐτῆς εἰς τὸ ἄλλο ἄνευ οὐδεμιᾶς διακοπῆς· ἀλλ' ἐὰν πρόκειται νὰ μετρήσωμεν τὸ μῆκος λίμνης τὸ ὕψος ἑνὸς δένδρου, ἑνὸς πύργου κτλ. τὸ ζήτημα δὲν εἶνε τόσον εὔκολον.



Σχ. 100.

49. *Νὰ μετρήσωμεν τὸ μῆκος τῆς λίμνης ΑΓΒΔ,* εἰς ἣν δὲν δυνάμεθα νὰ εἰσέλθωμεν δηλ. τὸ μῆκος τῆς εὐθείας ΑΒ (Σχ. 100). Τινὲς ἐκ τῶν μαθητῶν ἤθελον ἴσως προτείνει νὰ ἐκτείνωμεν ἓν σχοινίον ἀπὸ τοῦ ἑνὸς ἄκρου Α εἰς τὸ ἄλλο Β καὶ ἔπειτα νὰ μετρή-

---

λως· 2ον διὰ τοῦ μοιρογνωμονίου· τὸ 1/5 τῶν 360° εἶνε 72°· ποιοῦμεν διαδοχικῶς περὶ τὸ κέντρον Ζ γωνίας 72°. Τὰ ἀντίστοιχα τόξα τῶν γωνιῶν τούτων εἶνε ἴσα (ἐδ. 24).

σωμεν τὸ μῆκος τοῦ σχοινίου διὰ τοῦ μέτρου. Ναί· ἀλλ᾽ ἐὰν τὸ σχοινίον δὲν ἐξαρκῇ; Λαμβάνομεν σημεῖόν τι Ε ἐκτὸς τῆς λίμνης καὶ μετροῦμεν τὰς ἀποστάσεις ΕΑ καὶ ΕΒ· ἔστωσαν ΕΑ=33 μέτρ., ΕΒ=42 μέτρ. Προεκτείνομεν τὰς ΑΕ, ΒΕ καὶ λαμβάνομεν ΕΖ=ΑΕ, ΕΗ=ΒΕ· ἡ εὐθεῖα ΗΖ θὰ εἶνε ἴση μὲ τὴν ΑΒ, διότι τὸ τρίγωνον ΕΗΖ εἶνε ἴσον μὲ τὸ ΕΒΑ (ἐδ. 32, β΄). Ὥστε μετροῦντες τὴν ΖΗ εὑρίσκομεν τὴν ζητουμένην ἀπόστασιν.

30. ΣΗΜ. Τὸ ἔδαφος, ἐφ᾽ οὗ ἐργαζόμεθα, ὑποτίθεται ἐπίπεδον *ὁριζόντιον*, ὅπως ἡ ἐπιφάνεια ὕδατος ἠρεμοῦντος ἐντὸς λεκάνης· πᾶσα δὲ εὐθεῖα ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου κειμένη ἢ τὴν διεύθυνσιν αὐτοῦ ἀκολουθοῦσα λέγεται *ὁριζοντία*, π.χ. κανὼν ἐπιπλέων εἰς τὸ ὕδωρ λεκάνης.

Κατακόρυφος λέγεται ἡ εὐθεῖα γραμμή, ἡ παρισταμένη ὑπὸ τοῦ νήματος τῆς στάθμης, ὅταν τοῦτο ἀκινητῇ· ἂς μὴ συγχέωμεν τὰς λέξεις: κατακόρυφος καὶ κάθετος· ἡ κατακόρυφος δὲν δύναται νὰ λάβῃ ἄλλην διεύθυνσιν ἀπὸ τὴν τοῦ νήματος τῆς στάθμης, ἐνῷ ἡ κάθετος ΕΖ ἐπὶ εὐθεῖαν ΔΓ (Σχ. 16) ἔχει διεύθυνσιν μεταβαλλομένην μετὰ τῆς διευθύνσεως τῆς εὐθείας ΔΓ.

31. Νὰ μετρήσωμεν τὸ ὕψος δένδρου.—Τινὲς ἐκ τῶν μαθητῶν θὰ ἔλυον ἴσως τὸ ζήτημα ἀναρριχώμενοι μέχρι τῆς κορυφῆς τοῦ δένδρου μετὰ σχοινίου, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος θὰ ἔδιδε τὸ ζητούμενον ὕψος· ἀλλ᾽ ἡ ἐργασία αὕτη εἶνε ἐπικίνδυνος καὶ οὐχὶ πάντοτε κατορθωτή. Εὐκολώτερον ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: Κατασκευάζομεν ἐκ χαρτονίου τρίγωνον ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελὲς ΑΒΓ (ἢ λαμβάνομεν ἕνα γνώμονα ἰσοσκελῆ) καὶ απομακρυνόμενοι ὀλίγα μέτρα ἀπὸ τοῦ δένδρου, τοποθετοῦμεν τὴν γωνίαν Β τοῦ τριγώνου ἔμπροσθεν τοῦ ὀφθαλμοῦ, κρατοῦντες αὐτὸ οὕτως, ὥστε ἡ ΒΑ νὰ ἔχῃ ὁριζοντίαν διεύθυνσιν (Σχ. 101) ἔπειτα σκοπεύομεν κατὰ τὴν ΒΓ, φροντίζοντες, ὥστε ἡ κορυφὴ Κ νὰ κεῖται εἰς τὴν προέκτασιν τῆς ΒΓ. Μετροῦμεν τὴν ἀπόστασιν ΒΔ καὶ ἔστω ΒΔ=10 μ. 75. Λέγω, ὅτι τὸ ζητούμενον ὕψος θὰ εἶνε ἴσον μὲ τὴν ἀπόστασιν ΒΔ ηὐξημένην κατὰ τὸ ἀνάστημα τοῦ σκοπεύσαντος μαθητοῦ 1 μ. 25, ἤτοι 10,75+1,25 μ. Διότι τὸ τρίγωνον ΚΒΔ εἶνε ὀρθογώνιον εἰς τὸ Δ, ἑπομένως Κ+Β=90° καὶ ἐπειδὴ Β=45° ἄρα Κ=45°, ἤτοι εἶνε καὶ ἰσοσκελὲς (ἐδ. 29)· ὅθεν ΚΔ=ΒΔ (ἄλλην μέθοδον βλ. ἐδ. 78).

Σχ. 101.

32. Μέτρησις περιφερείας (ἐδ. 10, Σχ. 9).—Ἐὰν μετρήσωμεν διὰ μετροταινίας (Σχ. 98) τὴν περιφέρειαν κυκλικῶν τινων ἀντικειμένων, π.χ. πινακίων, νομισμάτων, μελανοδοχείων, μετρήσωμεν δὲ καὶ τὴν διάμετρον αὐτῶν καὶ διαιρέσωμεν τὸ μῆκος Γ τῆς περιφερείας διὰ τοῦ μήκους δ τῆς διαμέτρου, εὑρίσκομεν ὅτι ἕκαστον πηλίκον λίαν προσεγγίζει τὸν ἀριθμὸν 3,14. Τὸ ἀμετάβλητον τοῦτο πηλίκον παρίσταται διὰ τοῦ γράμματος π ὥστε $\Gamma:\delta=\pi$, ὅθεν $\Gamma=\delta\times\pi$ καὶ $\delta=\Gamma:\pi$.

Κανών. *Ἵνα εὕρωμεν τὸ μῆκος περιφερείας, πολλαπλασιάζομεν τὸ μῆκος τῆς διαμέτρου ἐπὶ 3,14.* (1) Π. χ. ποῖον μῆκος ἔχει περιφέρεια ἀκτῖνος 3μ,20; Τὸ μῆκος τῆς διαμέτρου εἶνε 3μ,20 × 2 = 6μ.40· ἄρα τὸ μῆκος τῆς περιφερείας θὰ εἶνε

$$6{,}40\times3{,}1416=20\mu,10.$$

ΣΗΜ. Δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ τὸ μῆκος τόξου τινὸς τῆς περιφερείας· π.χ. 36^0. Ἐπειδὴ ὅλη ἡ περιφέρεια, ἥτις περιέχει 360^0, ἔχει μῆκος 20μ,10 τόξον 1^0, θὰ ἔχῃ μῆκος 20μ,10 : 360 καὶ τόξον 36^0 θὰ εἶνε 20μ,10 × 36 : 360 = 2μ,01.

Τὸ μῆκος τόξου 36^0 εἰς περιφέρειαν ἀκτῖνος διπλασίας (3μ.20 × 2) θὰ εἶνε διπλάσιον, ἤτοι 4μ.02.

Ἐπανάληψις δι' ἐρωτήσεων καὶ ἀσκήσεων.

Τί σημαίνει νὰ μετρήσωμεν ἓν ποσόν; Πῶς μετροῦμεν μεγάλας ἀποστάσεις; Πῶς δυνάμεθα νὰ μετρήσωμεν τὸ μῆκος μιᾶς λίμνης; τὸ ὕψος ἑνὸς δένδρου; Τί καλεῖται περιφέρεια; Ποῖον κανόνα ἔχομεν ἵνα λογαριάζωμεν τὸ μῆκος μιᾶς περιφερείας, ἧς γνωρίζομεν τὴν ἀκτῖνα;

1) Τὸ ναυτικὸν μίλλιον εἶνε τὸ ἓν 60ὸν τῆς μοίρας τοῦ μεσημβρινοῦ τῆς γῆς· πόσα μέτρα ἔχει; (Ἡ περιφέρεια τοῦ μεσημβρινοῦ τῆς γῆς ἔχει μῆκος 40,000,000).

2) Ἑνὸς ἱπποδρομίου ἡ ἀκτὶς εἶνε 17 μ. Πόσα μέτρα διέτρεξεν ὁ ἵππος, ὅστις ἐπανέλαβεν 25 φορὰς τὸν γῦρον τοῦ ἱπποδρομίου;

3). Πρόκειται νὰ κατασκευάσωμεν λουτῆρα κυκλικὸν ἔχοντα περιφέρειαν 9 μ.· πόσην ἀκτῖνα πρέπει νὰ λάβωμεν;

4) Πεζὸς καὶ ἱππεὺς ἀναχωροῦντες ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου μιᾶς περιφερείας, διατρέχουσιν αὐτὴν ἀντιθέτως καὶ συναντῶνται μετὰ 15′ τῆς ὥρας. Ὁ πεζὸς διανύει 5000 μ. καθ' ὥραν καὶ ὁ ἱππεὺς 15000. Πόση εἶνε ἡ ἀκτὶς τῆς περιφερείας;

5) Ἡ διάμετρος τοῦ χαλκίνου δεκαλέπτου ἔχει μῆκος 30 γραμμῶν καὶ τοῦ πενταλέπτου 25 γραμμῶν. Κυλίομεν καὶ τὰ δύο ἐπὶ αὔλακος μήκους 16 μ.,270. Πόσας στροφὰς θὰ κάμῃ τὸ β′ περισσοτέρας τοῦ α′;

6) Ποῖον εἶνε τὸ μῆκος τόξου $40^0 30'$ εἰς περιφέρειαν ἀκτῖνος 14μ.,25.

7) Εἰς κύκλον ἀκτῖνος 2μ.,25 ἓν τόξον ἔχει μῆκος 3 μέτρων· πόσων μοιρῶν εἶνε τὸ τόξον τοῦτο;

8) Ἅμαξα διέτρεξε μίαν ἀπόστασιν. Οἱ τροχοί της ἔχοντες ἀκτῖνα 0μ.,50 ἔκαμον 170 στροφάς· πόσων μέτρων ἦτο ἡ ἀπόστασις;

9) Ἡ διάμετρος τοῦ βαρούλκου (μακαρᾶ) ἑνὸς φρέατος εἶνε 0μ.,45·

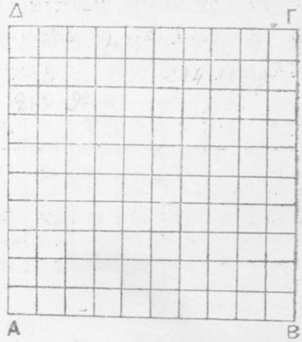
1) Ἡ ἀκριβέστερον 3,1416.

πόσον εἶνε τὸ βάθος τοῦ φρέατος, ἐὰν τὸ σχοινίον, ὅπερ φθάνει μέχρι τοῦ πυθμένος, ἐκτυλίσσηται 20 φορὰς περὶ τὸ βαροῦλκον;

Μέτρησις εὐθυγράμμων σχημάτων.

33. Ὡς μονὰς τῶν ἐπιφανειῶν, αἵτινες δὲν εἶνε πολὺ μεγάλαι (π. χ. οἰκόπεδα, κῆποι, πατώματα), λαμβάνεται *τὸ τετραγωνικὸν μέτρον* (τ. μ.), δηλ. τὸ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἑκάστη πλευρὰ εἶνε ἴση μὲ ἓν μέτρον. Διὰ μεγάλας ἐκτάσεις (π. χ. χωράφια, λειβάδια, ἀμπελῶνας, δάση) μεταχειρίζονται παρ' ἡμῖν *τὸ βασιλικὸν στρέμμα*, ὅπερ ἰσοδυναμεῖ μὲ 1000 τ.μ. Διὰ μεγαλειτέρας ἐκτάσεις (πόλεως, χώρας) μεταχειρίζονται οἱ τοπογράφοι *τὸ τετραγωνικὸν χιλιόμετρον*, ἤτοι τὸ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἑκάστη πλευρὰ εἶνε 1000 μέτρα. Ὁ ἐκ τῆς μετρήσεως μιᾶς ἐπιφανείας προκύπτων ἀριθμὸς ὀνομάζεται *ἐμβαδὸν αὐτῆς*· ἐξαρτᾶται δ' ἐκ τῆς ἐκλογῆς τῆς μονάδος, π.χ. ἡ Ἑλλὰς ἔχει ἐμβαδὸν 65119 τετραγ. χιλιόμετρα.

34. Ὑποδιαιρέσεις τοῦ τ. μ. — Κατασκευάζομεν ἐπὶ τοῦ πίνακος ἓν τ. μ. καὶ διαιροῦμεν ἑκάστην πλευρὰν εἰς 10 ἴσα μέρη, δηλ. εἰς παλάμας. Ἐὰν ἑνώσωμεν δι' εὐθειῶν τὰ σημεῖα διαιρέσεως τῶν παραλλήλων πλευρῶν τοῦ τετραγώνου, προκύπτει ἓν δίκτυον ἐκ πολλῶν τετραγώνων ἐχόντων πλευρὰν μιᾶς παλάμης (Σχ. 102), καλοῦνται δὲ *τετρ. παλάμαι*. Πόσαι εἶνε αὗται; Ἐὰν μετρήσωμεν τὰ τετράγωνα, ἅτινα εὑρίσκονται κατὰ μῆκος τῆς ΑΒ βλέπομεν ὅτι εἶνε 10· ἀλλ' ὑπάρχουσι 10 ὅμοιαι σειραί, ἡ μία ἐπάνω εἰς τὴν ἄλλην. Ἄρα δέκα σειραὶ ἐκ 10 τετραγώνων ἑκάστη δίδουσιν 100 τετράγωνα. Ὥστε 1 τ. μ. περιέχει 100 τ. π. Ὁμοίως βλέπομεν, ὅτι μία τετρ. π. περιέχει 100 τετραγ. δακτύλους (τ. δ.) καὶ 1 τ. δ. περιέχει 100 τετρ. γραμμὰς (τ. γ.). Ὅθεν



Σχ. 102.

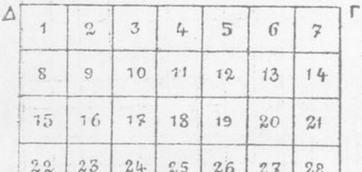
1 τ. μ. = 100 τ. π. = 10000 τ. δ. = 1000000 τ. γ., ἤτοι ἡ τ. π. εἶνε τὸ ἑκατοστὸν τοῦ τ. μ., ὁ τ. δ. εἶνε τὸ δεκάκις χιλιοστὸν τοῦ τ.μ., ἡ τ. γρ. εἶνε τὸ ἑκατομμυριοστὸν τοῦ τ.μ. Κατὰ ταῦτα, νὰ μετρήσωμεν μίαν ἐπιφάνειαν σημαίνει νὰ εὕρωμεν πόσα τ. μ. περιέχει, πόσας τ. π., πόσους τ. δ. καὶ πόσας τ. γρ. Ἐὰν εὕρωμεν ὡς ἐμβαδὸν τοῦ πατώματος τῆς αἰθούσης 15 τ. μ. 76 τ. π. 25 τ. δ., τοῦ μαυροπίνακος 1 τ. μ., 4 τ. π., τοῦ βιβλίου 0 τ. μ. 2, τ. π., 9 τ. δ., οἱ συμμιγεῖς οὗτοι ἀριθμοὶ θὰ γραφῶσιν ὡς δεκαδικοὶ οὕτω: 15 τ. μ., 7625· 1 τ.μ., 04· 0 τ.μ., 0209. Ἀντιστρόφως: ἐὰν θέλωμεν ν' ἀπαγγείλωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν

ἐκφράζοντα ἐμβαδόν, ἀπαγγέλλομεν κατ᾽ ἀρχὰς τὸ ἀκέραιον μέρος (τ.μ.) κατόπιν χωρίζομεν τὸ δεκαδικὸν μέρος εἰς διψήφια τμήματα· τὸ πρῶτον τμῆμα μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν δεικνύει τὰς τ. π., τὸ δεύτερον τοὺς τ. δ., τὸ τρίτον τὰς τ. γρ. Ἐὰν τὸ τελευταῖον τμῆμα ἔχῃ ἓν ψηφίον, γράφομεν δεξιά του μηδέν· π. χ. οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοί: 0 τ.μ., 08· 0 τ. μ., 0045· 855 τ. μ. 627. 7 τ. μ., 00345 ἀπαγγέλλονται οὕτω: 0τ.μ., 8 τ. π.· 0 τ. μ., 0 τ. π., 45 τ. δ.· 855 τ. μ., 62 τ. π., 70 τ. δ.· 7 τ. μ., 0 τ. π., 34 τ. δ., 50 τ. μ.

55. *Πῶς θὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πατώματος τῆς αἰθούσης;* Τινὲς ἐκ τῶν μαθητῶν ἴσως νομίσωσιν, ὅτι πρέπει νὰ λάβωμεν ἕνα πίνακα ξύλινον (ἢ ἕνα τελάρο), τὸ ὁποῖον νὰ περιφέρωμεν ὅσας φορὰς εἶνε δυνατὸν (καθὼς κάμνομεν διὰ τὸ μῆκος τῆς εὐθείας γραμμῆς, ἐφ᾽ ἧς ἐφαρμόζομεν τὸ μέτρον ὅσας φορὰς εἶνε δυνατόν. Ἀλλ᾽ ὁ τρόπος οὗτος εἶνε δύσκολος καὶ δὲν ἐφαρμόζεται εἰς τὴν πρᾶξιν. Ἡ Γεωμετρία διδάσκει ἡμᾶς νὰ μετρῶμεν τὰς ἐπιφανείας εὐκολώτερον· μετροῦμεν γραμμάς τινας τῆς ἐπιφανείας καὶ ἐξ αὐτῶν διὰ τοῦ λογαριασμοῦ εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδόν, ὡς θὰ ἴδωμεν ἀμέσως κατωτέρω.

56. Ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου.—Εὑρίσκεται ὡς ἑξῆς: *Μετροῦμεν μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα τὴν βάσιν καὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ καὶ πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο εὑρεθέντας ἀριθμούς· τὸ γινόμενον δίδει τὸ ἐμβαδόν.*

Παράδειγμα 1ον. Ἂς ὑποθέσωμεν κατ᾽ ἀρχὰς ὅτι ἡ μὲν βάσις ΑΒ



Σχ. 103.

τοῦ ὀρθογωνίου εἶνε 7 μέτρα, τὸ δὲ ὕψος ΒΓ=4 μ. (Σχ. 103)· λέγω ὅτι τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ θὰ περιέχῃ $7 \times 4 = 28$ τ. μ. Διότι, ἂν διαιρέσωμεν τὸ ὕψος ΑΔ, εἰς 4 μέρη, ἴσα μὲ ἓν μέτρον, καὶ ἐκ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως φέρωμεν παραλλήλους τῆς βάσεως ΑΒ, διαιρεῖται τὸ ὀρθογώνιον εἰς 4 ταινίας (λωρίδας) ὕψους ἑνὸς μέτρου ἑκάστη· ἐὰν ἔπειτα διαιρέσωμεν τὴν βάσιν εἰς 7 μέρη, ἴσα μὲ ἓν μέτρον, καὶ ἐκ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως φέρομεν καθέτους ἐπ᾽ αὐτήν, ἑκάστη τῶν εἰρημένων 4 ταινιῶν διαιρεῖται εἰς 7 τετράγωνα ἔχοντα πλευρὰν ἑνὸς μέτρου, δηλ. εἰς 7 τ. μ. Ἄρα τὸ δοθὲν ὀρθογώνιον περιέχει $7 \times 4 = 28$ τ. μ. Ἐὰν ΑΒ=7 παλάμαι καὶ ΑΔ=4 π., τότε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου θὰ ἦτο 28 τ.π. Ἐὰν ΑΒ=7 δάκτυλοι καὶ ΑΔ=4 δ., τότε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου θὰ ἦτο 28 τ. δ. Ἐὰν ΑΒ=7 γραμμαὶ καὶ ΑΔ=4 γρ., τότε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου θὰ ἦτο 28 τ. γρ.

Παράδειγμα 2ον. Ἐὰν οἱ τὴν βάσιν καὶ τὸ ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου παριστῶντες ἀριθμοὶ εἶνε κλασματικοί, π.χ. ΑΒ$=5\frac{4}{25}$, ΒΓ$=\frac{169}{200}$, τρέπομεν αὐτοὺς εἰς δεκαδικοὺς 5μ,16 καὶ 0μ.845. Ἐὰν μονάδα μήκους λάβωμεν τὴν γραμμήν, μονὰς ἐπιφανείας θὰ τ. γρ., ἡ δὲ βάσις τότε καὶ τὸ ὕψος θὰ ἐκφράζωνται ὑπὸ τῶν ἀκεραίων 5160 καὶ 845· ἡ δὲ ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθογωνίου θὰ περιέχῃ 5160×845 φορὰς τὴν τ. γρ, (κατὰ τὸν συλλογισμὸν τοῦ 1ου παραδ.), ἤτοι τὸ ἐμβαδὸν θὰ εἶνε 4360200 τ.γρ., ἃς τρέποντες εἰς τ.μ. εὑρίσκομεν 4τ.μ.,3602 τοῦθ' ὅπερ ἠθέλομεν εὕρει πολλαπλασιάζοντες τοὺς δεκαδικοὺς 5,16 καὶ 0,345.

* *Παράδειγμα 3ον*. Ἐὰν οἱ δοθέντες κλασματικοὶ ἀριθμοὶ δὲν τρέπωνται εἰς δεκαδικοὺς ἀκριβῶς ἢ ἐὰν τρεπόμενοι ἔχωσι δεκαδικὰ ψηφία πλείονα τῶν τριῶν, ὁ κανὼν καὶ πάλιν ἀληθεύει.

Ἔστω $AB=\frac{3}{8}$ μ., $B\Gamma=\frac{7}{12}$ μ. ἢ $\frac{7}{24}$ καὶ $\frac{14}{24}$. Ἐὰν ὡς μονάδα μήκους λάβωμεν τὸ $\frac{1}{24}$ τοῦ μ., ἡ μονὰς ἐπιφανείας θὰ γίνῃ $\frac{1}{24\times24}=\frac{1}{576}$ τοῦ τ. μ. (Διότι τὸ τ. μ. χωρίζεται εἰς 24×24 τετράγωνα, ἐδ. 56). Ἡ δὲ βάσις τότε καὶ τὸ ὕψος θὰ ἐκφράζωνται ὑπὸ τῶν ἀκεραίων 9 καὶ 14· ἡ δὲ ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθογωνίου θὰ περιέχῃ 9×14 φορὰς τὴν νέαν μονάδα ἐπιφανείας, ἤτοι θὰ εἶνε 9×14 φορὰς τὸ $\frac{1}{576}$ τοῦ τ. μ. δηλ. $\frac{9\times14}{576}=\frac{9}{24}\times\frac{14}{24}=\frac{3}{8}\times\frac{7}{12}$.

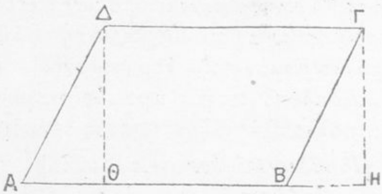
ΣΗΜ. Ἐκ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ὀρθογωνίου πορίζόμεθα τὰ ἐμβαδὰ τῶν διαφόρων τετραπλεύρων (ἐδ. 38), τριγώνων (ἐδ. 29) καὶ παντὸς πολυγώνου.

37 Ἐμβαδὸν τετραγώνου. — Ἐπειδὴ τὸ τετράγωνον εἶνε ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος εἶνε ἴσα, διὰ τοῦτο τὸ *ἐμβαδόν του εὑρίσκεται, ἐὰν μετρήσωμεν μίαν πλευρὰν αὐτοῦ καὶ πολλαπλασιάσωμεν τον εὑρεθέντα ἀριθμὸν ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του*. Π. χ. τὸ ἐμβαδὸν τετραγώνου ἔχοντος πλευρὰν 3 μέτρα εἶνε 3×3=9τ. μέτρα, τὸ δὲ ἐμβαδὸν τετραγώνου ἔχοντος πλευρὰν 3 μ., 25 εἶνε

$$3,25\times3,25 = 10\text{τ. μ. } 5625$$

ΣΗΜ. 3×3 λέγεται δευτέρα δύναμις τοῦ 3 καὶ γράφεται συντόμως 3^2· ἐπειδὴ ἐκφράζει τὸ ἐμβαδὸν τετραγώνου ἔχοντος πλευρὰν 3 μονάδας μήκους, διὰ τοῦτο λέγεται καὶ *τετράγωνον* τοῦ 3. Ἀντιστρόφως ὁ 3 λέγεται τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 9· ἑπομένως γνωρίζοντες τὸ ἐμβαδὸν τετραγώνου ὅτι εἶνε α τ.μ., συνάγομεν τὴν πλευρὰν αὐτοῦ εὑρίσκοντες τὴν τετρ. ῥίζαν τοῦ α) ἤτοι ἀριθμόν, ὅστις ἐφ' ἑαυτὸν πολαπλασιαζόμενος νὰ δίδῃ τὸν α.

38. Ἐμβαδὸν παραλληλογράμμου. —Εὑρίσκεται καθ' ὃν τρόπον καὶ τοῦ ὀρθογωνίου, δηλ. *πολλαπλασιάζομεν τὸ μῆκος τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ μῆκος τοῦ ὕψους*. Π. χ. εἰς τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ(Σχ. 104), ἐὰν ΑΒ=20 μ. καὶ ΔΘ=15 μ.,8, τὸ ἐμβαδόν του θὰ εἶνε $20 \times 15{,}8 = 316$ τ. μ. Διότι, ἐὰν ἀποκόψωμεν τὸ τρίγωνον ΑΔΘ καὶ τὸ μεταφέρωμεν εἰς τὴν θέσιν ΒΓΗ, τὸ δοθὲν παραλληλόγραμμον μετασχηματίζεται εἰς τὸ ὀρθογώνιον ΔΘΗΓ ὅπερ ἔχει τὸ αὐτὸ ἐμβαδόν, καθὼς καὶ τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος μὲ τὸ παραλληλόγραμμον. Ἐντεῦθεν βλέπομεν,

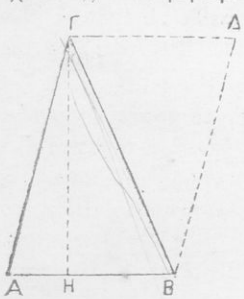


Σχ. 104.

ὅτι τὰ ἐμβαδὰ δύο σχημάτων δύνανται μὲν νὰ ὦσιν ἴσα, δηλ. νὰ ἐκφράζωνται ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, δὲν ἐφαρμόζουσιν ὅμως ἀκέραια· τότε λέγονται *ἰσοδύναμα*· τοιαῦτα εἶνε τὸ ὀρθογώνιον ΔΘΗΓ καὶ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ.

Ἐπίσης, ἐὰν δύο φύλλα χάρτου ἴσα (σχ. ὀρθογωνίου) διαιρέσωμεν εἰς 3 ἴσα μέρη, τὸ ἓν κατὰ μῆκος, τὸ ἕτερον κατὰ πλάτος, ἕκαστον τεμάχιον τοῦ ἑνὸς φύλλου εἶνε ἰσοδύναμον ἀλλ' οὐχὶ ἴσον πρὸς ἕκαστον τεμάχιον τοῦ ἄλλου.

59. Ἐμβαδὸν τριγώνου.— Τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ (Σχ. 105), ὅταν φέρωμεν μίαν διαγώνιον, χωρίζεται εἰς δύο τρίγωνα ἴσα ΑΓΒ καὶ ΒΓΔ (ἐδ. 32, γ΄). Τοῦτο δυνάμεθα νὰ ἐπαληθεύσωμεν, ἐὰν ἐπιθέσωμεν καταλλήλως τὸ ἓν τρίγωνον ἐπὶ τοῦ ἄλλου. Ἐντεῦθεν ὁ **κανών.** *Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου εὑρίσκεται ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὴν βάσιν ἐπὶ τὸ ὕψος καὶ τοῦ γινομένου λάβωμεν τὸ ἥμισυ.*



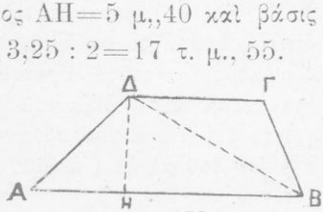
Σχ. 105.

Π.χ. 1ον Ἔστω ΑΒ=3μ.,26, ΓΗ=5μ.,70 (Σχ. 105). Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ θὰ εἶνε

$$5{,}703 \times 25 : 2 = 9 \text{ τ. μ. } 2625$$

2ον. Ἔστω τὸ ἀμβλυγώνιον τρίγωνον ΑΒΓ (Σχ. 36), τοῦ ὁποίου ὕψος εἶνε ἡ κάθετος ΑΗ=5 μ.,40 καὶ βάσις ἡ ΒΓ=3μ.,25. Τὸ ἐμβαδὸν θὰ εἶνε $5{,}40 \times 3{,}25 : 2 = 17$ τ. μ., 55.

3ον). Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ (Σχ. 42), τοῦ ὁποίου βάσις δύναται νὰ θεωρηθῇ μία τῶν καθέτων πλευρῶν, π. χ. ἡ ΑΒ=5 μ., τότε τὸ ὕψος θὰ εἶνε ἡ ἄλλη κάθετος ΑΓ=2. Τὸ ἐμβαδόν του θὰ εἶνε $5 \times 2 : 2 = 5$ τ. μ.



Σχ. 106.

60. Ἐμβαδὸν τραπεζίου. — *Εὑρίσκεται, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο βάσεων ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψους ἢ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν δύο βάσεων ἐπὶ τὸ ὕψος.*

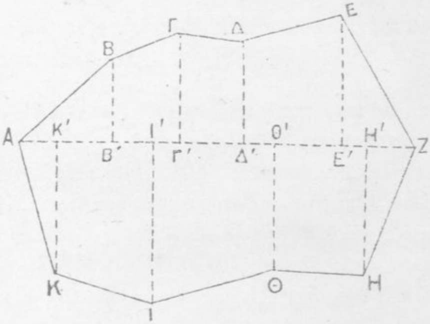
Ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ μεγαλειτέρα βάσις τοῦ τραπεζίου ΑΒ (Σχ. 106) ἔχει μῆκος 11 μ., 45, ἡ μικρὰ ΓΔ=8δ.,15 καὶ τὸ ὕψος ΔΗ=6 μ. Τὸ ἄθροισμα τῶν βάσεων εἶνε 19μ.,60 καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου θὰ εἶνε $19{,}60 \times 6 : 2 = 160 \times 3 = 58$.μ. 80. Διότι ἄγοντες τὴν διαγώνιον ΒΔ χωρίζομεν τὸ τραπέζιον εἰς δύο τρίγωνα, ΒΓΔ καὶ ΑΒΔ, ἅτινα ἔχουσι τὸ αὐτὸ ὕψος ΔΗ (ἐὰν λάβωμεν ὡς βάσεις τὰς ΓΔ καὶ ΑΒ)· ἐπομένως τὰ ἐμβαδά των εἶνε $8{,}15 \times 3$ καὶ $11{,}45 \times 3$. Τοῦ τραπεζίου θὰ εἶνε

$$8{,}15 \times 3 + 11{,}45 \times 3 = 19{,}60 \times 3.$$

61. Ἐμβαδὸν ῥόμβου. — Ὁ ῥόμβος εἶνε παραλληλόγραμμον· ἐπομένως τὸ ἐμβαδόν του εὑρίσκεται, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὴν βάσιν (δηλ. μίαν τῶν πλευρῶν του) ἐπὶ τὸ ὕψος (δηλ. ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν δύο παραλλήλων πλευρῶν). Δύναται ὅμως νὰ εὑρεθῇ καὶ ἐκ τῶν διαγωνίων του ΑΔ=18 μ., ΒΓ=10 μ. (Σχ. 68). Τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ, ΒΔΓ εἶνε ἴσα· ἑκατέρου τὸ ἐμβαδὸν εἶνε $10 \times 9 : 2$ καὶ τοῦ ῥόμβου $10 \times 9 = 10 \times 8 : 2$.

Ἤτοι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ῥόμβου ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ γινόμενον τῶν δύο διαγωνίων του.

62. Ἐμβαδὸν πολυγώνου. — Συνήθως ἀναλύομεν τὸ πολύγωνον εἰς τρίγωνα διὰ διαγωνίων (ἀγομένων ἐκ τῆς αὐτῆς κορυφῆς) ἢ δι' εὐθειῶν ἀγομένων ἐκ σημείου ἐντὸς αὐτοῦ εἰς τὰς κορυφὰς τοῦ πολυγώνου. Εὑρίσκομεν χωριστὰ τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου τῶν τριγώνων τούτων καὶ προσθέτομεν.



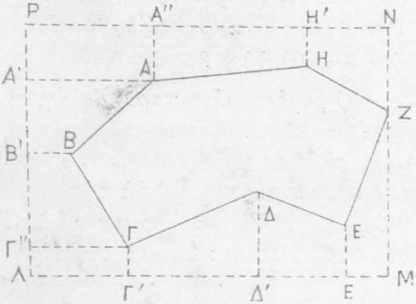
Σχ. 107.

Ἑτέρα μέθοδος, ἣν μεταχειρίζονται ἰδιαιτέρως ἐπὶ τοῦ ἐδάφους, εἶνε ἡ ἑξῆς: Ἄγομεν τὴν μεγαλειτέραν (περίπου) ἐκ τῶν διαγωνίων τοῦ πολυγώνου ΑΖ (Σχ. 107) καὶ ἀπὸ τῶν λοιπῶν κορυφῶν σύρομεν ἐπ' αὐτὴν καθέτους ΒΒ′, ΓΓ′ κ.λ.π. Οὕτω διαιρεῖται τὸ πολύγωνον εἰς τρίγωνα ὀρθογώνια καὶ εἰς τραπέζια ἔχοντα δύο γωνίας ὀρθάς. Οἱ μαθηταί, ἐὰν ἐκτελέσωσι τὰς πράξεις κατὰ τὰ ἑξῆς δεδομένα:

ΒΒ′=10μ.,4. ΓΓ′=13μ.,4. ΔΔ′=9μ.,6. ΕΕ′=11μ. ΚΚ′=12μ. ΙΙ′=15μ.,3. ΘΘ′=11μ.,5. ΗΗ′=12μ. ΑΚ′=3μ.,5 Κ′Β′=4μ. Β′Ι′=3μ.,8. Ι′Γ′=2μ.,2. Γ′Δ′=5μ. Δ′Θ′=3μ. Θ′Ε′=6μ. Ε′Η′=3μ. Η′Ζ=4μ.,7, θὰ εὕρωσι 703 τ. μ. 33.

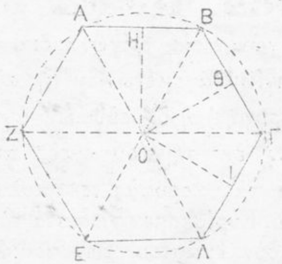
63. Διὰ νὰ μετρήσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν λίμνης (ἢ ἕλους ἢ δάσους) εἰς ἣν δὲν δυνάμεθα νὰ εἰσέλθωμεν, σχηματίζομεν πέριξ αὐτῆς ἓν ὀρθογώνιον, ἐντὸς τοῦ ὁποίου νὰ περιέχηται ἡ λίμνη. Ἔπειτα ἐκ τῶν κο-

...ων Α, Β, Γ,... (Σχ. 108) φέρομεν καθέτους πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ ὀρθογωνίου, ὅτε σχηματίζονται τραπέζια καὶ ὀρθογώνια. Μετροῦντες τὰς καθέτους ταύτας, ὡς καὶ τὰ τμήματα, τὰ ὁποῖα τέμνουσι τὰς πλευρὰς τοῦ ὀρθογωνίου εὑρίσκομεν τὰ ἐμβαδὰ τῶν τραπεζίων καὶ τῶν ὀρθογωνίων, τὰ ὁποῖα ἀφαιροῦντες ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὅλου ὀρθογωνίου ΛΜΝΡ, θὰ εὕρωμεν προφανῶς τὸ ζητούμενον ἐμβαδόν.



Σχ. 108.

64. Ἐμβαδὸν κανονικοῦ πολυγώνου. —Ἐὰν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, εἰς ὃν ἐγγράφεται κανονικὸν πολύγωνον, φέρωμεν εὐθείας εἰς τὰς κορυφάς, χωρίζεται τὸ πολύγωνον εἰς τρίγωνα ἴσα (ἐδ. 32 γ΄), Π. χ. τὸ κανονικὸν ἑξάγωνον εἰς 6 τρίγωνα ἴσα (Σχ. 109).



Σχ. 109.

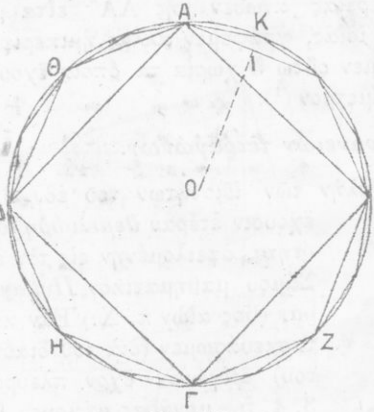
Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ἐξ αὐτῶν, ὡς τοῦ ΑΘΒ, εἶνε $\frac{AB \times OH}{2}$ καὶ τῶν 6 τριγώνων, ἤτοι τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου θὰ εἶνε 6 φορὰς $\frac{AB \times OH}{2}$. Ἀλλὰ $\frac{6\ AB}{2}$ παριστᾷ τὴν ἡμιπερίμετρον τοῦ πολυγώνου καὶ ΟΗ τὴν ἀπόστασιν τοῦ κέντρου ἀπὸ τῆς πλευρᾶς ΑΒ· αἱ ἀποστάσεις ΟΗ, ΟΘ, ΘΙ,... εἶνε ἴσαι. Ὥστε *τὸ ἐμβαδὸν παντὸς κανονικοῦ πολυγώνου εὑρίσκεται, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὴν ἡμιπερίμετρον αὐτοῦ ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν τοῦ κέντρου ἀπὸ τῶν πλευρῶν.* Π. χ. ἐὰν ΑΒ = 20 μ. καὶ Ο=Η16 μ., ἡ ἡμιπερίμετρος θὰ εἶνε $6 \times 20 : 2 = 60$ μ. καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἑξαγώνου θὰ εἶνε

$$60 \times 16 = 960 \text{ τ. μ.}$$

Μέτρησις κύκλου.

64. Ἐὰν διαιρέσωμεν τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου εἰς 4 ἴσα μέρη, ἔπειτα εἰς 8, 16 ἴσα μέρη (Σχ. 110) καὶ φέρωμεν τὰς χορδάς, σχηματίζονται τετράγωνον ΑΒΓΔ, κανονικὸν ὀκτάγωνον ΑΕΒΖΓΗΔΘ καὶ κανονικὸν δεκαεξάγωνον, ὧν τὰ ἐμβαδὰ εὑρίσκομεν πολλαπλασιάζοντες τὴν ἡμιπερίμετρον ἑκάστου ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν τοῦ κέντρου Ο ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν του. Ὁ κύκλος τοῦ μὲν ὀκταγώνου διαφέρει κατὰ 8 τεμάχια, ὡς τὸ ΑΚΕΙΑ, τοῦ δὲ δεκαεξαγώνου κατὰ 16 μικρότερα τεμάχια, ὡς τὸ ΑΚ. Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι ὅσῳ περισσοτέρας πλευρὰς ἔχει τὸ πολύγωνον, τόσῳ ὀλιγώτερον διαφέρει τοῦ κύκλου· καὶ ἡ μὲν ἀπόστασις

ΟΙ πλησιάζει πρὸς τὴν ἀκτῖνα ΟΑ, ἡ δὲ περίμετρος τοῦ πολυγώνου πρὸς τὴν περίμετρον τοῦ κύκλου. Ὅθεν ὁ **κανών.** *Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου εὑρίσκεται, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἥμισυ τοῦ μήκους τῆς περιφερείας του ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα.* Ἐπειδὴ τὸ ἥμισυ τῆς περιφερείας εἶνε τὸ γινόμενον τῆς ἀκτῖνος ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν π (ἐδ. 52), ἕπεται ὅτι:



Σχ. 110.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου εὑρίσκομεν ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὴν ἀκτῖνα ἐφ' ἑαυτήν, εἶτα δὲ ἐπὶ τὸν π. Π.χ. τράπεζα κυκλικὴ ἔχει διάμετρον 2 μ. 4· ἐκ πόσων τ.μ. σύγκειται ὁ μουσαμᾶς ὅστις καλύπτει αὐτήν; Ἐπειδὴ ἡ ἀκτὶς εἶνε 1μ, 2 τὸ ἐμβαδὸν τῆς τραπέζης θὰ εἶνε $1{,}2\times1,\ 2\times\pi=4$ τ. μ. 5216.

Ἐν γένει ἂν ἡ ἀκτὶς κύκλου ἦνε α μέτρων, τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ Ε θὰ περιέχῃ $\alpha^2\times\pi$ τετραγωνικὰ μέτρα, τ. ἔ. θὰ ἔχωμεν $E=\alpha^2\times\pi$.

66. Ἐμβαδὸν τομέως. (ἐδ. 23).—Ἔστω ΟΑ=3μ, 20 καὶ τόξον ΑΒ=36° (σχ. 111). Τὸ ἔμβαδὸν τοῦ κύκλου εἶνε $3{,}20\times3{,}20\times\pi$. Τὸ ἐμβαδὸν τομέως μιᾶς μοίρας θὰ εἶνε $\frac{3{,}20\times3{,}20\times\pi}{360}$ καὶ τὸ ἐμβαδὸν τομέως 36 θὰ εἶνε $\frac{3{,}20\times3{,}20\times\pi\times36}{360}=3$τ.μ., 216998

Σχ. 111.

Παρατηρητέον ὅτι τὸ τελευταῖον κλάσμα γράφεται $\frac{6{,}40\times\pi\times36\times1{,}60}{360}$ παραλειπομένου δὲ τοῦ παράγοντος 1,60 (ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος) τὸ λειπόμενον παριστᾷ τὸ μῆκος τόξου 36° (ἐδ. 52, σημ.) εἰς κύκλον ἀκτῖνος 3μ, 20. Ἐντεῦθεν ἕπεται ὁ κανών:

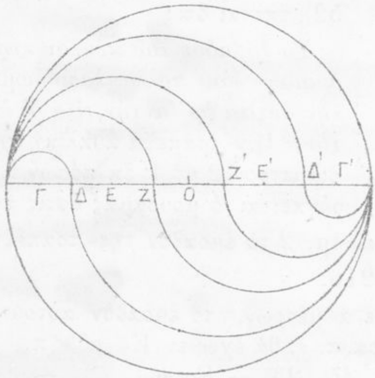
Τὸ ἐμβαδὸν τομέως ἰσοῦται μὲ τὸ μῆκος τοῦ τόξου αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος. Ὁ κανὼν οὗτος ὁμοιάζει πρὸς τὸν κανόνα τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου (ἐδ. 59)· τῷ ὄντι ὁ τομεὺς δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἄθροισμα πολλῶν τριγώνων.

67. Ἐμβαδὸν στεφάνης ἀκτίνων 8 μ. καὶ 5 μ. (ἐδ. 14, σχ. 12) εἶνε $\pi\times8^2-\pi\times5^2=\pi\times(8^2-5^2)=\pi\times(64-25)=\pi\times39=122$, τ. μ. 5224.

***68.** Διαίρεσις κύκλου εἰς ὁσαδήποτε χωρία ἰσοδύναμα καὶ ἰσοπερίμετρα. Ἔστω ΑΑ' ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου ὃν θέλομεν νὰ διαιρέσωμεν εἰς 5 τοιαῦτα χωρία. Διαιροῦμεν τὴν ΑΑ' εἰς $5\times2=10$ μέρη ἴσα (ἐδ. 37). Μὲ κέντρα τὰ σημεῖα Γ,Δ,Ε,Ζ (Σχ. 112) καὶ ἀκτῖνας ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ, ΑΖ γράφομεν ἡμιπεριφερείας ἄνωθεν τῆς ΑΑ'· εἶτα μὲ κέντρα Γ,'Δ,'Ε,'Ζ' καὶ ἀκτῖνας τὰς ἰδίας, γράφομεν ἄλλας ἡμιπεριφερείας κάτωθεν τῆς ΑΑ'. Λαμβάνομεν οὕτω 5 χωρία τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὸ αὐτὸ ἐμβαδὸν καὶ τὴν αὐτὴν περίμετρον [1].

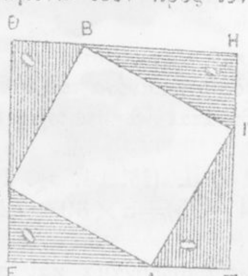
Ἰσότητες μεταξὺ ἐπιφανειῶν τετραγώνων.

69. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα πλὴν τῶν ἰδιοτήτων τοῦ ἐδ. 28, ἔχουσιν ἑτέραν *θεμελιώδη ἰδιότητα*, ὀφειλομένην εἰς τὸν ἐκ Σάμου μαθηματικὸν *Πυθαγόραν* (6ος αἰὼν π. Χ.) Ἐὰν κατασκευάσωμεν (διὰ τοῦ διαβήτου) τρίγωνον ἔχον πλευρὰς 3, 4, 5, μονάδας μήκους, θὰ ἴδωμεν ὅτι ἡ γωνία τοῦ τριγώνου τούτου ἡ ἀπέναντι τῆς πλευρᾶς 5 εἶνε *ὀρθή*, ἐπομένως τὸ τρίγωνον εἶνε ὀρθογώνιον ἔχον ὑποτείνουσαν 5. Μεταξὺ τῶν τριῶν τετραγώνων τῶν κατασκευαζομένων μὲ πλευρὰς 3, 4 καὶ 5, ὑπάρχει

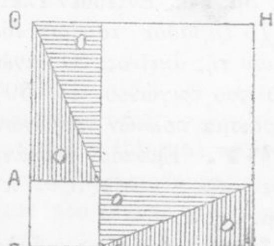


Σχ. 112.

ἡ ἑξῆς σχέσις: $2^2+4^2=5^2$ ἤτοι *τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν*. Ἡ ἰδιότης αὕτη ἀληθεύει οὐ μόνον εἰς τὸ ἐν λόγῳ τρίγωνον ἀλλὰ καὶ εἰς πᾶν ἄλλο ὀρθογώνιον τρίγωνον. Πρὸς ἐπαλήθευσιν λαμβάνομεν γνώμονα (ἐδ. 30) καὶ κατασκευάζομεν τετράγωνον ἔχον πλευρὰν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πλευρῶν ΕΔ+ΔΖ τῆς ὀρθῆς γωνίας (Σχ. 113, 114), ἐφ' ἑκάστης δὲ γωνίας τοῦ τετραγώνου ΕΖΗΘ ἐπιθέτομεν ἀνὰ ἕνα γνώμονα ἴσον πρὸς τὸν πρῶτον· τὸ ὑπολειπόμενον χωρίον, ὅπερ δὲν καλύπτεται ὑπὸ τῶν γνωμόνων, ἤτοι τὸ ΑΒΓΔ, εἶνε τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης τοῦ γνώμονος· διότι αἱ εἰς τὸ Δ. ὀξεῖαι γωνίαι ΑΔΕ καὶ ΓΔΖ



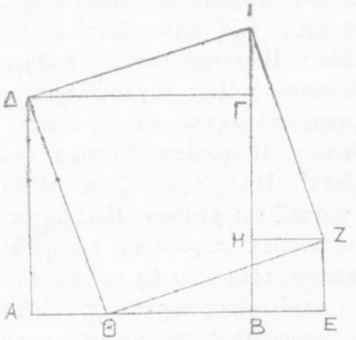
Σχ. 113·



Σχ. 114.

1) Τίς ὁ λόγος;

ἀποτελοῦσι 1 ὀρθὴν ἄρα ΑΔΙ=1 ὀρθ. (ἐδ. 21, α')· ἐπίσης καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ εἶνε ὀρθαί, αἱ δὲ πλευραί του εἶνε ἴσαι. Παραθέτομεν νῦν δύο γνώμονας οὕτως ὥστε νὰ συμπέσωσιν αἱ ὑποτείνουσαι αὐτῶν, τὸ δὲ προκύπτον ὀρθογώνιον θέτομεν εἰς μίαν τῶν γωνιῶν τοῦ τετραγώνου ΕΖΗΘ (Σχ. 114)· ἐπίσης, θέτομεν τοὺς δύο ἄλλους γνώμονας εἰς τὴν ἀπέναντι κορυφὴν Ζ τοῦ τετραγώνου. Τὸ οὕτως ἀκάλυπτον χωρίον ὅπερ ὑπολείπεται, εἶνε 2 τετράγωνα, ἔχοντα πλευρὰς τὰς πλευρὰς τῆς ὀρθῆς γωνίας τοῦ γνώμονος. Κατὰ τὰς δύο περιπτώσεις ἀφῃρέσαμεν ἐκ τοῦ αὐτοῦ τετραγώνου ΕΖΗΘ ἐπιφανείας ἴσας (δηλ. τοὺς 4 γνώμονας), τὰ ὑπόλοιπα εἶνε ἰσοδύναμα (ἐδ. 58).



Σχ. 115.

70. Προβλήματα.

I. *Ἐκ δύο τετραγώνων νὰ συντεθῇ νέον τετράγωνον ἰσοδύναμον τῷ ἀθροίσματι αὐτῶν.*

Παραθέτομεν τὰ δύο τετράγωνα ΑΒΓΔ καὶ ΒΖΕΗ ὡς δεικνύει τὸ σχ. 115· λαμβάνομεν τὸ μῆκος ΑΘ, ἴσον τῇ ΒΕ· ἄγοντες τὰς ΔΘ, ΘΖ σχηματίζομεν τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΔΘ καὶ ΕΖΘ, τὰ ὁποῖα ἀποκόπτοντες καὶ θέτοντες τὸ μὲν εἰς τὸ ΓΔΙ, τὸ δὲ εἰς τὸ ΙΗΖ, σχηματίζομεν οὕτω τὸ τετράγωνον ΔΘΖΙ, ὅπερ εἶνε τὸ ζητούμενον. (Διατί;)

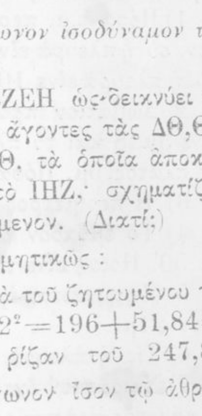
ΣΗΜ. Δυνάμεθα νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλ. καὶ ἀριθμητικῶς:

Ἔστω ΑΒ=14 δάκ. ΒΕ=7δ,2· ἐὰν ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου κληθῇ χ, πρέπει νὰ ἔχωμεν $\chi^2=14^2+7,2^2=196+51,84=247,84$ ὅθεν, εὑρίσκοντες τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ 247,84 χ=15δ,74. Ὁμοίως δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τετράγωνον ἴσον τῷ ἀθροίσματι τριῶν ἢ καὶ πλειόνων τετραγώνων.

II. *Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον διπλάσιον δοθέντος τετραγώνου* ΑΒΓΔ (Σχ. 116).

Ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου εἶνε ἡ διαγώνιος ΑΓ τοῦ δοθέντος· πράγματι, κατὰ τὴν ἰδιότητα τοῦ Πυθαγόρα ἔχομεν τετρ. ΑΓ= τετρ. ΑΔ+τετρ. ΔΓ ἢ (ΑΓΕΖ)=(ΑΒΓΔ)+(ΑΒΓΔ).

ΣΗΜ. Ἠδυνάμεθα νὰ ἐπαναλάβωμεν τὴν κατασκευὴν τοῦ σχ. 115.



Σχ. 116

Ἐπανάληψις δι᾽ ἐρωτήσεων καὶ ἀσκήσεων.

Ποῖον σχῆμα λαμβάνομεν ὡς μονάδα τῶν ἐπιφανειῶν; Ποῖα εἶνε τὰ πολλαπλάσια καὶ αἱ ὑποδιαιρέσεις τοῦ τ.μ.; Ἐξήγησον, διατί ἓν τ.μ. ἰσοῦται μὲ 100 τ.π., ; Τί λέγεται ἐμβαδόν ; Πῶς γράφονται οἱ ἀριθμοί, οἱ παριστῶντες ἐμβαδόν ; Πῶς ἀπαγγέλλονται ; Πῶς λογαριάζομεν τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου, τοῦ ὁποίου ἐμετρήσαμεν τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος ; Πῶς λογαριάζομεν τὸ ἐμβαδὸν τετραγώνου ; Ἡ δευτέρα δύναμις ἑνὸς ἀριθμοῦ λέγεται καὶ τετράγωνον αὐτοῦ· διατί ; Πῶς λογαριάζομεν τὸ ἐμβαδὸν παραλληλογράμμου ; τριγώνου ; τραπεζίου; ῥόμβου ; Πῶς μετρεῖται τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς πολυγώνου ; Πῶς μετροῦμεν ἐπιφάνειαν, εἰς ἣν δὲν δυνάμεθα νὰ εἰσέλθωμεν; Ποῖος εἶνε ὁ κανὼν πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐμβαδοῦ ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου ; Ποῖος εἶνε ὁ κανὼν πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐμβαδοῦ ἑνὸς κύκλου; Πῶς ἄλλως δύναται νὰ ἐκφωνηθῇ ὁ προηγούμενος κανών ; Τί καλεῖται τομεύς ; πῶς εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδόν του ; Ποῖα σχήματα λέγονται ἰσοδύναμα; Τίνα σχέσιν ἔχουσι τὰ τετράγωνα, τὰ κατασκευαζόμενα ἐπὶ τῶν πλευρῶν τριγώνου ὀρθογωνίου; πῶς ἐπαληθεύομεν τὴν σχέσιν ταύτην ;

1) Πόσα τ.μ. περιέχει ἓν τετραγωνικὸν δεκάμετρον (δηλ. ἓν τετράγωνον, οὗ ἡ πλευρὰ εἶνε 10 μ.); ἓν τετραγ. ἑκατόμετρον (δηλ. τετράγωνον, οὗ ἡ πλευρὰ εἶνε 100 μ.); ἓν τετράγων. χιλιόμετρον ;

2) Δωμάτιον πρόκειται νὰ στρωθῇ διὰ σανίδων, τῶν ὁποίων τὸ μῆκος εἶνε 3μ.,8 καὶ τὸ πλάτος 0μ.,32. Τοῦ δωματίου τὸ μῆκος εἶνε 8μ. καὶ τὸ πλάτος 5μ. Πόσαι σανίδες χρειάζονται ;

3) Ἡ περίμετρος τετραγώνου εἶνε 38μ.,40· πόσον εἶνε τὸ ἐμβαδόν του.

4) Τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου εἶνε 492972 τ.μ., ἡ βάσις του εἶνε 372 μ. 50. Ποῖον εἶνε τὸ ὕψος;

5) Ζητεῖται τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου ἔχοντος βάσιν 12μ. καὶ διαγώνιον 21μ.

6) Τίς ἡ πλευρὰ τετραγώνου ἔχοντος διαγώνιον 7μ. 50, (σχ. 116).

7) Χωράφιον ἔχει σχῆμα τριγώνου, οὗ ἡ μία πλευρὰ εἶνε 101μ. καὶ ἡ κάθετος πρὸς αὐτήν, ἥτις ἄγεται ἐκ τῆς ἀπέναντι κορυφῆς, εἶνε 68 μ. πόσα στρέμματα ἔχει τὸ χωράφιον τοῦτο ;

8) Κῆπος ἔχει σχῆμα τραπεζίου· ἡ μία τῶν παραλλήλων πλευρῶν του εἶνε 327 μ., 60· ἡ δ᾽ ἄλλη 672 μ., 40 ἡ ἀπόστασις αὐτῶν εἶνε 124 μ. ἐκ πόσων στρεμάτων σύγκειται ὁ κῆπος ;

9) Ἀγρός τις ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου τριγώνου· ἡ μία τῶν καθέτων πλευρῶν εἶνε 300 μ. ἡ ἄλλη 500μ.,ἐκ πόσων στρεμ. σύγκειται ὁ ἀγρός;

10) Τρίγωνον καὶ παραλληλόγραμμον ἔχουσι τὴν αὐτὴν βάσιν. ποίαν σχέσιν πρέπει νὰ ἔχωσι τὰ ὕψη των, διὰ νὰ ὦσιν ἰσοδύναμα.

11) Πῶς δυνάμεθα νὰ μετασχηματίσωμεν ἓν τραπέζιον εἰς τρίγωνον ἰσοδύναμον ;

12) Τὰ δύο τρίγωνα, εἰς ἃ χωρίζεται ~~ἓν τραπέζιον~~ διὰ μιᾶς διαγωνίου, εἶνε ἰσοδύναμα;

13) Παραλληλόγραμμον καὶ τραπέζιον ἔχουσι τὸ αὐτὸ ὕψος· ποίαν σχέσιν πρέπει νὰ ἔχωσιν αἱ βάσεις των, διὰ νὰ ὦσιν ἰσοδύναμα;

14) Κῆπος ἔχει σχῆμα τετραπλεύρου, τοῦ ὁποίου ἡ μία διαγώνιος εἶνε 84 μ. αἱ δ' ἀποστάσεις τῶν δύο ἄλλων κορυφῶν ἀπ' αὐτῆς εἶνε 25 μ. καὶ 11. μ. πόσον εἶνε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου;

15) Ἐγγράφομεν κανονικὸν ἑξάγωνον εἰς κύκλον ἀκτῖνος 2μ. 55· πόση εἶνε ἡ περίμετρος τοῦ ἑξαγώνου;

16) Τοῦ προηγουμένου ἑξαγώνου ζητεῖται τὸ ἐμβαδὸν (θὰ εὑρεθῇ πρότερον ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου ἀπὸ μιᾶς πλευρᾶς τῇ βοηθείᾳ τῆς ἰδιότητος 69).

17) Τριγώνου ὀρθογωνίου καὶ ἰσοσκελοῦς μία τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶνε 15μ, 25. Ζητεῖται τὸ ἐμβαδόν.

18) Τριγώνου ἰσοπλεύρου μία πλευρὰ εἶνε 15μ. Ποῖον εἶνε τὸ ἐμβαδόν του;

19) Ὀρθογωνίου αἱ διαστάσεις εἶνε 20μ, 25 καὶ 14μ, 25. Ἐὰν διπλασιάσωμεν αὐτάς, ποῖον εἶνε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ νέου ὀρθογωνίου;

20) Δίδονται 9 τετράγωνα ἴσα· νὰ συντεθῇ νέον τετράγωνον ἴσον τῷ ἀθροίσματι αὐτῶν.

21) Δοθὲν τετράγωνον νὰ χωρισθῇ εἰς 9 ἴσα τετράγωνα.

22) Τράπεζα ὀρθογώνιος μήκους 9 μ, καὶ πλάτους 4 μ. ζητεῖται νὰ μετατραπῇ εἰς τετραγωνικὴν ἰσοδύναμον· ποία θὰ εἶνε ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου;

(Λύσις γραφικὴ καὶ ἀριθμητική).

23) Πόσα δένδρα δύνανται νὰ περιληφθῶσιν ἐν ἀγρῷ ὀρθογωνίῳ μήκους 120 ποδῶν, πλάτους 70π., ἐὰν διαταχθῶσι (κατὰ δύο σειράς, παραλλήλους πρὸς τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος) ἀνὰ 5 πόδας;

(Τὸ $^1/_5$ τοῦ μήκους εἶνε 24, τοῦ πλάτους 14· ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν δένδρων εἶνε $25 \times 15 = 375$).

24) Ὁ Πέτρος ἔχει ἀγρὸν τετραγωνικὸν περιμέτρου οἱασδήποτε (π.χ. 500 μ.). Ὁ Ἰωάννης ἔχων ἀγρὸν τῆς αὐτῆς ποιότητος καὶ τῆς αὐτῆς περιμέτρου, ἀλλὰ σχήματος ὀρθογωνίου, προτείνει εἰς τὸν Πέτρον ἀνταλλαγήν. Συμφέρει αὕτη εἰς τὸν Πέτρον.

5) Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον, ὅπερ νὰ εἶνε τὸ $\frac{1}{2}$ δοθέντος τετραγώνου (Σχ. 116).

26) Πόσον μῆκος σιδηροῦ ἐλάσματος χρειαζόμεθα, ἵνα περιβάλωμεν τροχὸν ἀκτῖνος 0μ.,95;

27) Σανίδα τετραγωνικὴν καλύπτομεν μὲ ἀργυρᾶ τάλληρα, τῶν ὁποίων ἡ διάμετρος εἶνε 37 γραμμῶν. Ἐπὶ ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου χωροῦσι 15 τάλληρα. Νὰ ὑπολογισθῇ ποῖον ἐμβαδὸν καταλείπουσι τὰ μεταξὺ τῶν ταλλήρων κενά;

28) Ἡ περιφέρεια πύργου κυκλοτεροῦς εἶνε 65μ.,94· πόσον εἶνε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ;

29) Ἡ κυκλικὴ πλὰξ ὡρολογίου περιβάλλεται ὑπὸ τετραγώνου τοῦ ὁποίου ἑκάστη πλευρὰ μήκους 65 δακτύλων εἶνε ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου. Πρόκειται νὰ ἐπιχρυσώσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν, ἥτις περιέχεται μεταξὺ τοῦ κύκλου καὶ τοῦ τετραγώνου πρὸς 8δρ.,50 τὴν τετρ. παλάμην. Πόσον θὰ πληρώσωμεν ;

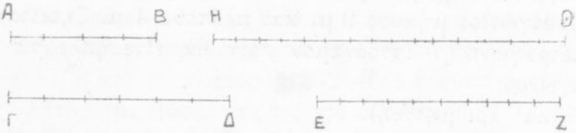
30) Γλύκισμα κυκλοτερὲς θέλομεν νὰ διαιρέσωμεν εἰς 8 ἴσους τομεῖς. Ζητεῖται τὸ μῆκος τοῦ τόξου ἑκάστου τομέως καὶ τὸ ἐμβαδόν. Ἡ διάμετρος τοῦ γλυκίσματος εἶνε 0μ.,40.

31) Τὸ τριγωνικὸν γήπεδον ΑΒΓ νὰ μοιρασθῇ εἰς 5 μέρη ἰσοδύναμα ἔχοντα κοινὴν κορυφὴν τὸ σημεῖον Β.

32) Τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ νὰ μοιρασθῇ εἰς 3 μέρη ἰσοδύναμα δι' εὐθειῶν συνδεουσῶν τὰς δύο βάσεις.

Περὶ ὁμοίων ἐπιπέδων σχημάτων.

71. Λόγος δύο ποσῶν ὁμοειδῶν εἶνε τὸ πηλίκον τῶν δύο ἀριθμῶν, οἵτινες παριστῶσι τὰ ποσὰ ταῦτα μετρηθέντα διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος. Ἔστωσαν π.χ. δύο εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ (Σχ. 117) καὶ 4 καὶ 6 οἱ ἀριθμοὶ οἱ μετροῦντες αὐτάς· ἔχομεν



Σχ. 117.

$$\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{4}{6}$$

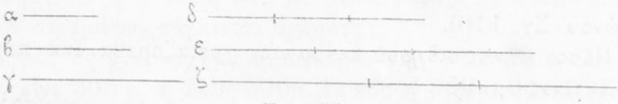
Ἔστωσαν ΕΖ καὶ ΗΘ δύο ἄλλαι εὐθεῖαι, ὑπὸ τῶν ἀριθμῶν 10 καὶ 15 μετρούμεναι· ἔχομεν

$$\frac{EZ}{H\Theta} = \frac{10}{15}$$

Τὰ δύο κλάσματα $\frac{4}{6}$ καὶ $\frac{10}{15}$ ὡς ἴσα τῷ $\frac{2}{3}$ εἶνε καὶ μεταξύ των ἴσα· ὅθεν

$$\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{EZ}{H\Theta}$$

Ἡ ἰσότης αὕτη καλεῖται *ἀναλογία*, αἱ δὲ εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ λέγονται



Σχ. 118.

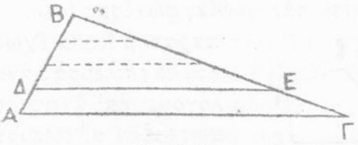
ἀνάλογοι πρὸς τὰς ΕΖ, ΗΘ. Ἐν γένει, ἀνάλογοι λέγονται αἱ εὐθεῖαι α, β, γ,... πρὸς τὰς δ, ε, ζ,... ὅταν ὁ λόγος ἑκάστης τῶν πρώτων πρὸς τὴν ἀντίστοιχον τῶν δευτέρων εἶνε ὁ αὐτός. Π. χ.

$$\frac{\delta}{\alpha}=\frac{\varepsilon}{\beta}=\frac{\zeta}{\gamma}=3 \text{ ἢ } \frac{\alpha}{\delta}=\frac{\beta}{\varepsilon}=\frac{\gamma}{\zeta}=\frac{1}{3}$$

Πᾶσα εὐθεῖα ΔΕ παράλλη-λος πρὸς μίαν τῶν πλευρῶν ΑΓ τριγώνου (Σχ. 119) τέμνει τὰς δύο ἄλλας ΒΑ, ΑΓ εἰς μέρη ἀνάλογα· ἤτοι

$$\frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΑΔ}}=\frac{\text{ΒΕ}}{\text{ΓΕ}}$$

72. Περὶ ὁμοιότητος.—α΄) Θεωρήσωμεν ἓν κάλυμμα τράζης καὶ ἓν ῥινόμακτρον ἀμφότερα ὡς τετράγωνα, ἔστωσαν δὲ αἱ διαστάσεις τοῦ 1ου διπλάσιαι τῶν τοῦ 2ου. Αἱ διαστάσεις εἶνε αὗται ἀνάλογοι (ἐδ. 71)· προσέτι αἱ γωνίαι τοῦ 1ου εἶνε ἴσαι πρὸς τὰς τοῦ 2ου, διότι εἶνε ὀρθαί. Τὰ δύο ταῦτα γεωμετρικὰ σχήματα εἶνε ὅμοια. Ἐπίσης τὸ τετρ. μ. καὶ ὁ τ. δ.



Σχ. 119.

β΄) Ἐὰν λάβωμεν δύο τρίγωνα ἰσόπλευρα ἄνισα, αἱ πλευραὶ τοῦ ἑνὸς εἶνε ἀνάλογοι πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ ἄλλου καὶ αἱ γωνίαι εἶνε ἴσαι, διότι ἑκάστη εἶνε 60^{0}.

γ΄) Ἐὰν ὁ ζωγράφος θέλῃ νὰ μεγεθύνῃ φωτογραφίαν τινὰ (Σχ. 120), πρέπει νὰ διπλασιάσῃ ἢ τριπλασιάσῃ κ.τ.λ. πάσας τὰς γραμμὰς αὐτῆς, δέον ὅμως νὰ προσέχῃ ὥστε αἱ γωνίαι, ἃς ποιοῦσιν αἱ γραμμαὶ αὗται νὰ μείνωσιν ἴσαι· οὕτω προκύπτει τὸ σχ. 121 ὅμοιον τῷ σχ. 120. Ἐκ τῶν παραδειγμάτων τούτων βλέπομεν, ὅτι δύο διακριτικοὶ χαρακτῆρες συνιστῶσι τὴν ὁμοιότητα: 1ος αἱ πλευραὶ ἢ αἱ γραμμαὶ τοῦ ἑνὸς σχήματος πρέπει νὰ ὦσιν ἀνάλογοι πρὸς τὰς ἀντιστοίχους πλευρὰς ἢ γραμμὰς τοῦ ἄλλου· 2ος αἱ γωνίαι τοῦ ἑνὸς πρέπει νὰ ὦσιν ἴσαι πρὸς τὰς γωνίας τοῦ ἄλλου.


Σχ. 120.

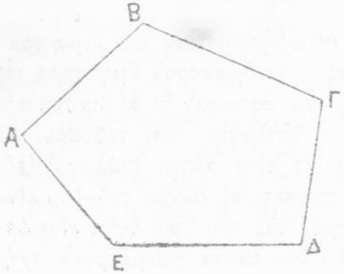
Π. χ. Δύο πολύγωνα (ἴσον ἀριθμὸν πλευρῶν ἔχοντα) εἶνε *ὅμοια*, ὅταν αἱ γωνίαι των λαμβανόμεναι κατὰ σειρὰν εἶνε ἴσαι μία πρὸς μίαν, καὶ αἱ πλευραὶ αἱ προσκείμεναι εἰς τὰς ἴσας γωνίας εἶνε ἀνάλογοι. Π. χ. τὰ δύο πεντάγωνα ΑΒΓΔΕ καὶ αβγδα (Σχ. 122) εἶναι ὅμοια, ἐὰν ἔχωσι τὰς γωνίας ἴσας: Α=α, Β=6, Γ=γ, Δ=δ, Ε=ε καὶ τὰς ἀντιστοιχούσας πλευρὰς ΑΒ καὶ αб, ΒΓ καὶ бγ,.... ἀναλόγους, ἤτοι ἐὰν ἡ ΑΒ εἶνε τριπλασία τῆς αб, τότε καὶ ἡ ΒΓ ἔσται τριπλασία τῆς бγ, κ. ὁ. κ. Ὥστε θὰ ἔχωμεν $\frac{\text{ΑΒ}}{\alpha\beta}=\frac{\text{ΒΓ}}{\beta\gamma}=\frac{\text{ΓΔ}}{\gamma\delta}=\frac{\text{ΔΕ}}{\delta\varepsilon}=\frac{\text{ΕΑ}}{\varepsilon\alpha}=3.$

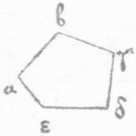

Σχ. 121.

Ὁ ἀριθμὸς 3 καλεῖται *λόγος ὁμοιότητος*.

73. Ὁμοιότης τριγώνων. Ἔστωσαν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ (Σχ. 123). Ἐὰν ἔχωμεν 1ον Α=Δ, Β=Ε, Γ=Ζ, 2ον $\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΔΕ}}=\frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΕΖ}}=\frac{\text{ΓΑ}}{\text{ΖΔ}}$ τότε τὰ τρίγωνα εἶνε ὅμοια.

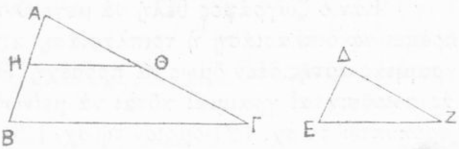
Δοθέντος τριγώνου ΑΒΓ (Σχ. 123) *προκύπτει ὅμοιον αὐτῷ ΑΗΘ, ἐὰν ἀχθῇ παράλληλος πρὸς μίαν πλευράν, τέμνουσα τὰς λοιπὰς δύο·* τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΗΘ ἐπειδὴ ἔχουσι τὰς γωνίας των ἴσας (σελ. . παρατ. β'), θὰ ἔχωσι καὶ τὰς πλευρὰς ἀναλόγους· καὶ ἀντιστρόφως: ἐὰν αἱ πλευραὶ δύο τριγώνων εἶνε λογοι, θὰ εἶνε αἱ γωνίαι των ἴσαι, ἑπομένως τὰ τρίγωνα ὅμοια.





Σχ. 122.

Παρατ. I. Ἐὰν ὁ λόγος τῆς ὁμοιότητος δύο ὁμοίων πολυγώνων εἶνε 3 (Σχ. 122), τὸ ἐμβαδὸν τοῦ α θὰ εἶνε 3×3 ἢ 9 φορὰς μεγαλείτερον τοῦ β'. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (Σχ. 123) εἶνε 2×2 ἢ 4 φορὰς μεγαλείτερον τοῦ ΔΕΖ.



Σχ. 123.

Παρατ. II. Δύο πολύγωνα κανονικὰ μὲ ἰσαρίθμους πλευρὰς εἶνε ὅμοια. Π.χ. 2 κανονικὰ ἑξάγωνα ΓΔΑΒΕΖ καὶ αβγδεζ ἔχουσι τὰς γωνίας των ἴσας (120^0 ἑκάστην) καὶ τὰς πλευρὰς ἀναλόγους, διότ. ΑΒ=ΒΓ=ΓΔ=ΔΕ=ΕΖ=ΖΑ καὶ αβ=βγ=γδ=δε=εζ=ζα· ἑπομένως

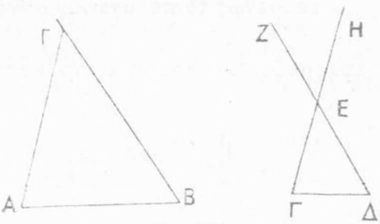
$$\frac{\text{ΑΒ}}{\alpha\beta}=\frac{\text{ΒΓ}}{\beta\gamma}=\frac{\text{ΓΔ}}{\gamma\delta}=\frac{\text{ΔΕ}}{\delta\varepsilon}=\frac{\text{ΕΖ}}{\varepsilon\zeta}=\frac{\text{ΖΑ}}{\zeta\alpha}.$$

Παρατ. III. Ἐὰν ἔχωμεν πίνακα δίδοντα τὰ ἐμβαδὰ τῶν κανονικῶν πολυγώνων τῶν ἐχόντων πλευρὰν 1 μ., εὑρίσκομεν τὰ ἐμβαδὰ τῶν ἄλλων κανονικῶν πολυγώνων πολλαπλασιάζοντες τὰ ἐμβαδὰ τῶν πρώτων ἐπὶ τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς τῶν δευτέρων.

Τὸ ἐμβαδὸν	τετραγώνου	ἔχοντος πλευρὰν	1 μ.	=	1 τ.μ.
»	ἰσοπλεύρου τριγώνου	»	»	=	0 τ.μ., 4330
»	κανονικοῦ πενταγώνου	»	»	=	2 τ.μ., 3774
»	» ἑξαγώνου	»	»	=	2 τ.μ., 5980
»	» ὀκταγώνου	»	»	=	4 τ.μ., 8284
»	» δεκαγώνου	»	»	=	7 τ.μ., 6939

Κατὰ ταῦτα, ἡ ἐν σελ. 53 ἄσκησις 16η λύεται ἀμέσως:

Τὸ ἐμβαδὸν ἑξαγώνου κανονικοῦ ἔχοντος πλευρὰν 2 μ. 55 εἶνε



Σχ. 124.

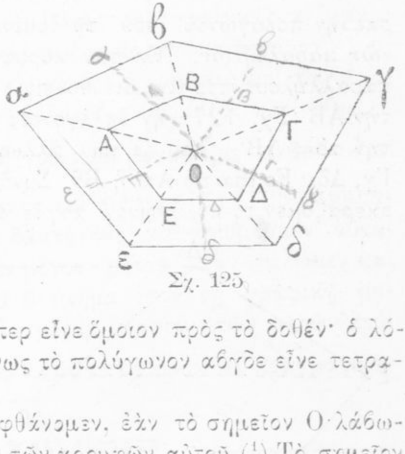
$2{,}598 \times (2{,}55)^2 = 2{,}598 \times 6{,}5025$
$= 16$τ. μ., 893495.

74. Προβλήματα.

I. *Δοθέντος τριγώνου ΑΒΓ* (Σχ. 124) *νὰ κατασκευασθῇ ὅμοιον, οὗτινος μία πλευρὰ νὰ εἶνε τὸ* $^1/_2$ *τῆς ΑΒ.* Ἔστω ΓΔ $= ^1/_2$ ΑΒ· εἰς τὸ σημεῖον Γ ποιοῦμεν τὴν γωνίαν ΗΓΔ ἴσην τῇ Δ (σελ. 14, πρόβλ. II) καὶ εἰς τὸ Δ τὴν γωνίαν ΖΔΓ ἴσην τῇ Β. Αἱ εὐθεῖαι ΓΗ, ΔΖ τεμνόμεναι προσδιορίζουσι τὴν γ΄ κορυφὴν Ε τοῦ ζητουμένου τριγώνου.

ΣΗΜ. Ἡ κατασκευὴ τριγώνου ἴσου τῷ ΑΒΓ τελεῖται, διὰ τοῦ διαβήτου (σελ. 7).

II. Δοθέντος πολυγώνου ΑΒΓΔΕ (Σχ. 125) νὰ κατασκευασθῇ ὅμοιον. Λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Ο ἐντὸς τοῦ πολυγώνου καὶ ἄγομεν ἐκ τοῦ Ο εἰς τὰς κορυφὰς τοῦ πολυγώνου τὰς εὐθείας ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ, ΟΕ. Πολλαπλασιάζοντες ταύτας ἐπὶ τὸν τυχόντα ἀριθμόν, ἔστω ἐπὶ τὸν 2, καὶ συνδέοντες τὰ ἄκρα των διὰ τῶν εὐθειῶν αβ, βγ, γδ, δε, εα σχηματίζομεν νέον πολύγωνον αβγδε, ὅπερ εἶνε ὅμοιον πρὸς τὸ δοθέν· ὁ λόγος δὲ τῆς ὁμοιότητος εἶνε 2· ἐπομένως τὸ πολύγωνον αβγδε εἶνε τετραπλάσιον τοῦ δοθέντος.



Σχ. 125

ΣΗΜ. α΄) Εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον φθάνομεν, ἐὰν τὸ σημεῖον Ο λάβωμεν ἐκτὸς τοῦ πολυγώνου ἢ εἰς μίαν τῶν κορυφῶν αὐτοῦ.[1] Τὸ σημεῖον καλεῖται *κέντρον ὁμοιότητος*.

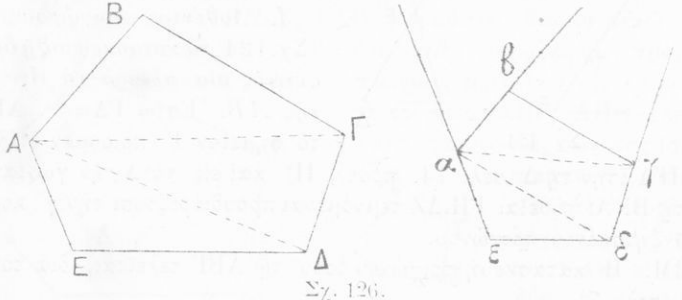
ΣΗΜ. β΄) Ἐὰν ἀντὶ 2 λάβωμεν ἄλλον ἀριθμόν, σχηματίζομεν ἄλλο πολύγωνον ὅμοιον πρὸς τὸ δοθέν· ὥστε ὑπάρχουσιν ἄπειρα πολύγωνα ὅμοια πρὸς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ πολύγωνον.

Ἑτέρα μέθοδος: τῶν διαγωνίων. Ἐκ τῆς τυχούσης κορυφῆς Α τοῦ δοθέντος πολυγώνου ΑΒΓΔΕ (Σχ. 126) φέρομεν τὰς διαγωνίους ΑΓ, ΑΔ αἵτινες, διαιροῦσι τὸ πολύγωνον εἰς τρίγωνα· ἐὰν θέλωμεν αἱ πλευραὶ τοῦ νέου πολυγώνου νὰ εἶνε τὰ ἡμίση τῶν ἀντιστοίχων τοῦ δοθέντος, λαμβάνομεν τὴν αβ $= ^1/_2$ ΑΒ καὶ κατασκευάζομεν ἐπ᾽ αὐτῆς τὸ τρίγωνον αβγ, ὅμοιον τῷ ΑΒΓ (προβλ. I). Ἐπὶ τῆς αγ κατασκευάζομεν τὸ τρίγωνον αγδ ὅμοιον τῷ ΑΓΔ· τέλος ἐπὶ τῆς αδ κατασκευάζομεν τὸ αδε ὅμοιον τῷ

1) Ἂς γίνῃ ἡ κατασκευὴ τοῦ σχ. ὑπὸ τοῦ μαθητοῦ.

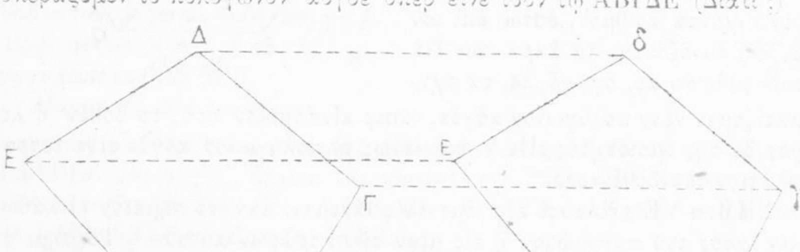
ΑΔΕ· οὕτω κατεσκευάσθη τὸ πολύγωνον αβγδε, ὅπερ εἶνε ὅμοιον τῷ δοθέντι. Ὁ λόγος τῆς ὁμοιότητος εἶνε $\frac{1}{2}$, ἐπομένως τὸ πολύγωνον αβγδε εἶνε $\frac{1}{4}$ τοῦ δοθέντος.

ΣΗΜ. Αἱ ἀνωτέρω δύο μέθοδοι ἐφαρμόζονται καὶ διὰ τὴν κατα-



Σχ. 126.

σκευὴν πολυγώνου ἴσου τῷ δοθέντι, ἀλλ' ὑπάρχει καὶ ἡ ἑξῆς *μέθοδος τῶν παραλλήλων*. Ἐκ τῶν κορυφῶν τοῦ δοθέντος πολυγώνου ἄγομεν παραλλήλους πρός τινα διεύθυνσιν, π.χ. πρὸς μίαν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, τὴν ΑΒ (Σχ. 127), ἣν ἐκλέγοντες ὡς βάσιν, λαμβάνομεν μὲ τὸν διαβήτην αβ=ΑΒ· ἐπὶ δὲ τῶν ἄλλων παραλλήλων λαμβάνομεν τὰ μήκη Γγ, Δδ, Εε ἴσα τῷ Αα ἢ Ββ. Συνδέοντες τὰ σημεῖα β, γ, δ, ε, α, κατασκευάζομεν τὸ πολύγωνον αβγδε ὅπερ εἶνε ἴσον τῷ ΑΒΓΔΕ (Διατί;)

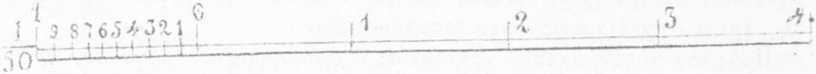


Σχ. 127.

73. Ἀπεικόνισις ἐπιπέδου σχήματος ὑπὸ κλίμακα. Ἡ κατασκευὴ πολυγώνου ὁμοίου πρὸς ἄλλο χρησιμεύει πρὸ πάντων εἰς τοὺς ἀρχιτέκτονας, σχεδιαστάς, χαρτογράφους, οἵτινες ἔχουσιν ἀνάγκην ν' ἀντιγράφωσι σχέδιόν τι (οἰκοδομῆς, πεδιάδος, πόλεως κ.τ.λ.) οὐχὶ μὲ τὰς πραγματικὰς διαστάσεις, ἀλλὰ μὲ ἠλαττωμένας καθ' ὡρισμένην ἀναλογίαν· καὶ πᾶν μὲν σχέδιον παριστᾷ ἐν μικρογραφίᾳ μεγάλας ἐκτάσεις, ὁ σταθερὸς δὲ λόγος γραμμῆς τινὸς τοῦ σχεδίου καὶ τῆς ἀντιστοίχου γραμμῆς τοῦ ἐδάφους [1] καλεῖται *κλῖμαξ*· Π. χ. λέγοντες

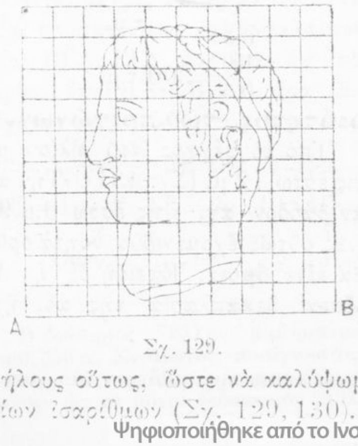
1) Ὑποτιθεμένου ὁριζοντίου.

ὅτι σχέδιον κατεσκευάσθη ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{500}$, $\frac{1}{10000}$, $\frac{1}{80000}$, ἐννοοῦμεν ὅτι μῆκος ἑνὸς μέτρου ἐπὶ τοῦ χάρτου, παριστᾷ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους 500, 10000, 80000 μ. καὶ μῆκος 1 γραμμῆς ἐπὶ τοῦ χάρτου παριστᾷ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους 0μ.,50, 10 μ., 80 μ. Συνήθως τὰς ἐπὶ σχεδίου



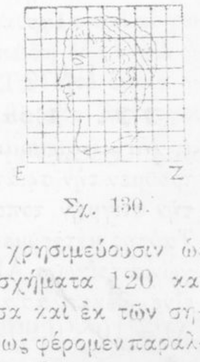
Σχ. 128.

ἢ χάρτου ἀποστάσεις μετροῦμεν διὰ τοῦ κανόνος, π. χ. ἁπλοῦ ἢ διπλοῦ ὑποδεκαμέτρου διῃρημένου εἰς γραμμάς· γνωρίζοντες δὲ ἐκ τῆς κλίμακος ποῖον μῆκος ἐπὶ τοῦ ἐδάφους ἀντιστοιχεῖ εἰς μῆκος μιᾶς γραμμῆς τοῦ χάρτου συνάγομεν τὴν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους ἀπόστασιν τὴν παρισταμένην ὑπὸ γνωστῆς ἐπὶ τοῦ χάρτου ἀποστάσεως. Ἐπειδὴ πολλάκις συμβαίνει νὰ στερώμεθα κανόνος ἐπενόησαν τὴν γραφικὴν κλίμακα κατασκευαζομένην εὐκόλως ἔν τινι γωνίᾳ τοῦ χάρτου. Βάσις τῆς γραφικῆς κλίμακος εἶνε *ἡ γραφικὴ μονάς*, τ. ἔ. τὸ ἐπὶ χάρτου μῆκος τὸ παριστάνον 1 μ. μήκους ἐπὶ τοῦ ἐδάφους. Οὕτως εἰς κλίμακα $^1/_{500}$, μῆκος ἐπὶ τοῦ χάρτου 40 γραμ. παριστᾷ μῆκος ἐπὶ τοῦ ἐδάφους 0μ..50$\times$40$=$20μ. Π. χ. εἰς τὴν κλίμακα $\frac{1}{50}=\frac{2}{100}$, ἡ γραφικὴ μονὰς εἶνε 2 δάκτυλοι. Πρὸς κατασκευὴν τῆς γραφικῆς κλίμακος ἐπὶ εὐθείας (Σχ. 128) λαμβάνομεν ἐφεξῆς τμήματα ἴσα πρὸς 2 δακτύλους καὶ ἀριθμοῦμεν αὐτά. Διὰ τῆς κλίμακος ταύτης εὑρίσκομεν μόνον μέτρα· ἐὰν θέλωμεν καὶ παλάμας, λαμβάνομεν ἀριστερὰ τοῦ 0 τμῆμα ἴσον τῇ γραφικῇ μονάδι 2 δ., ὅπερ διαιροῦμεν εἰς 10 ἴσα μέρη· ἕκαστον τῶν μερῶν τούτων εἶνε τὸ $\frac{1}{10}$ τῆς γραφικῆς μονάδος καὶ ἀντιπροσωπεύει πραγματικὸν μῆκος μιᾶς παλάμης.



Σχ. 129.

76. Πρὸς ταχυτέραν ἀντιγραφὴν σχήματος ὑπὸ κλίμακα προτιμᾶται ἡ *μέθοδος τῶν τετραγωνιδίων*.

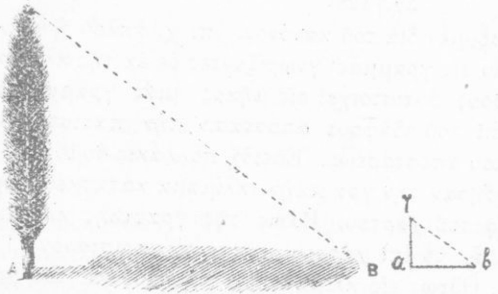


Σχ. 130.

Διαιροῦμεν τὰς **πλευρὰς τῶν τε**τραγώνων, ἅτινα χρησιμεύουσιν ὡς περιθώρια εἰς τὰ σχήματα 120 καὶ 121 εἰς 10 μέρη ἴσα καὶ ἐκ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως φέρομεν παραλλήλους οὕτως, ὥστε νὰ καλύψωμεν τὰ σχήματα διὰ δικτύου τετραγωνιδίων ἰσαρίθμων (Σχ. 129, 130). Ἐὰν ἡ πλευρὰ AB εἶνε διπλασία τῆς

ΑΒ φανερὸν ὅτι ἕκαστον τετραγωνίδιον τοῦ σχ. 129 ἔχει διαστάσεις διπλασίας ἑκάστου τετραγωνίου τοῦ σχ. 130 οὕτως, ὥστε οἱονδήποτε σημεῖον τῆς κεφαλῆς εἶνε τοποθετημένον κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ὡς πρὸς τὰ τετραγωνίδια· π. χ. ὁ ὀφθαλμὸς κεῖται ἐν τῷ τετραγωνιδίῳ, ὅπερ εἶνε τὸ 4ον ἐξ ἀριστερῶν καὶ τὸ 7ον ἐκ τῶν κάτω. Τὰ κατὰ τὴν τοιαύτην σχεδίασιν λάθη ἐν τοῖς τετραγωνιδίοις εἶνε πολὺ μικρότερα τῶν λαθῶν τῆς ἀμέσου σχεδιάσεως (ἄνευ τετραγωνιδίων).

Πρὸς τὸν αὐτὸν σκοπὸν χρησιμεύει ὁ *ὁμοιογράφος*, ὄργανον, δι' οὗ γράφονται σχήματα ὅμοια (1).



Σχ. 131.

ΣΗΜ. *Εὕρεσις ἐμβαδοῦ κατὰ προσέγγισιν.* Πρακτικῶς, ὅταν δὲν ἔχωμεν ἀνάγκην μεγάλης ἀκριβείας, σχεδιάζομεν ἐπὶ χαρτονίου παχέως ἐπιφάνειαν ὁμοίαν πρὸς ἐκείνην, ἧς τὸ ἐμβαδὸν ζητοῦμεν (οἰκοπέδου, πεδιάδος, λίμνης, ...), ὑπὸ κλίμακα καταλλήλου, π.χ. $\frac{1}{100}$. Εἶτα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ χαρτονίου καὶ ὑπὸ τὴν αὐτὴν κλίμακα σχεδιάζομεν τετράγωνον ἀπεικονίζον τὴν μονάδα τῶν ἐπιφανειῶν (τὸ τ. μ.), ἤτοι ἕνα τετρ. δάκτ. Ἀποκόπτοντες προσεκτικῶς τὰ δύο σχέδια, ζυγίζομεν αὐτά. Τὸ πηλίκον τοῦ βάρους τοῦ α'. σχεδίου διὰ τοῦ βάρους τοῦ β'. δίδει τὸν ἀριθμὸν τῶν τ.μ., ἤτοι τὸ ζητούμενον ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας. Ἔστω π. χ. 150 γραμμάρ. τὸ βάρος τοῦ α'. σχεδίου καὶ 0γρ.,5 τὸ βάρος τοῦ β'. (τοῦ τ.δ.). Θὰ εἴπωμεν :

0γρ.,5	παριστῶσι	1	τ.μ.
1γρ.	θὰ παριστᾷ	$\frac{1}{0,5}$	τ.μ.
150γρ.	θὰ παριστῶσι	$\frac{150}{0,5}=300$	τ.μ.

77. Ἐφαρμογαὶ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων.— *I. Νὰ μετρήσωμεν τὸ ὕψος δένδρου.* Ὑπὸ τὸ φέγγος τοῦ ἡλίου μετροῦμεν τὴν σκιὰν ΑΒ τοῦ δένδρου, ἥτις ἔστω 12 μ. (Σχ. 131). Τὴν αὐτὴν στιγμὴν τοποθετοῦμεν ὀρθίαν μίαν ῥάβδον αγ, ἥτις ἔστω 0,μ,90. Ταύτης μετροῦμεν τὴν σκιὰν αβ=1μ.,2· οὕτως ἔχομεν δύο νοητὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ αβγ, τὰ ὁποῖα εἶνε ὅμοια. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΑΒ εἶνε δεκαπλασία τῆς αβ καὶ ἡ ΑΓ ἔσται δεκαπλασία τῆς αβ, ἤτοι ΑΓ=10×0,90=9 μέτρα.

1) Ἡ περιγραφὴ καὶ ὁ τρόπος τῆς χρήσεως αὐτοῦ προτιμώτερον νὰ γίνῃ ἐκ τοῦ πραγματικοῦ, εἰ δυνατόν.

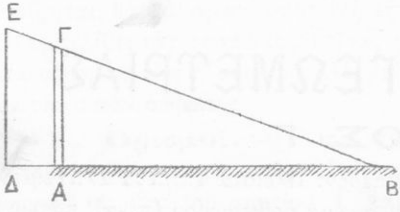
* II. *Μέτρησις οριζοντίας αποστάσεως ΑΒ* (Σχ. 132) *ής τὸ ἐν ἄκρον* Β *εἶνε ἀπρόσιτον* π.χ. τοῦ πλάτους ποταμοῦ. Εἰς τὸ προσιτὸν ἄκρον Α πηγνύομεν ῥάβδον ΑΓ κατά τι μικροτέραν τοῦ ἀναστήματος ἡμῶν (π.χ. ἑνὸς μέτρου)· χωροῦμεν πρὸς τὰ ὄπισθεν τοῦ Α, μέχρις οὗ ἴδωμεν τὰ σημεῖα Γ καὶ Β ἐπὶ τῆς σκοπευτικῆς ἀκτῖνος τοῦ ὀφθαλμοῦ Ε. Ἐν τῇ θέσει ταύτῃ ἔχομεν δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΒΕ (τὴν πλευρὰν ΔΕ ἀντικαθιστᾷ τὸ σῶμα τοῦ παρατηρητοῦ μέχρι τοῦ ὀφθαλμοῦ), τῶν ὁποίων αἱ γωνίαι εἶνε ἴσαι (σελ. 27, παρατ. β')· ἄρα τὰ τρίγωνα εἶνε ὅμοια (ἐδ. 73) καὶ αἱ πλευραί των θὰ εἶνε ἀνάλογοι :

$$\frac{ΑΒ}{ΑΓ}=\frac{ΔΒ}{ΔΕ} \text{ ἢ } \frac{ΔΒ-ΑΒ}{ΔΕ-ΑΓ}=\frac{ΑΒ}{ΑΓ} \text{ ἢ } \frac{ΑΒ}{ΑΓ}=\frac{ΔΑ}{ΔΕ-ΑΓ}$$

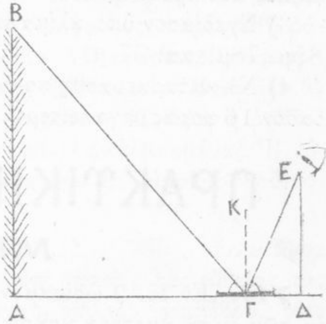
Τὰ μήκη ΑΓ, ΑΔ, ΔΕ προσδιορίζονται εὐκόλως καὶ ἔστω ΑΓ=1μ. ΑΔ=0,75, ΔΕ=1μ.,25. Τότε $ΑΒ=\frac{0,75}{0,25}=3$ μέτρα.

* III. Πρὸς μέτρησιν ὕψους τινος ΑΒ (Σχ. 133) διὰ τῶν ὁμοίων τριγώνων, δύναται νὰ γίνῃ χρῆσις καὶ *κατόπτρου*. Ὁ Εὐκλείδης[1] ἔδωκε τὴν ἑξῆς μέθοδον :

Τοῦ κατόπτρου τιθεμένου ὁριζοντίως κατὰ τὸ Γ, ὁ παρατηρητὴς μετα-



Σχ. 132.



Σχ. 133.

κινεῖται, μέχρις οὗ ἴδῃ ἐν τῷ κατόπτρῳ τὸ εἴδωλον τοῦ σημείου Β. Αἱ γωνίαι προσπτώσεως καὶ ἀνακλάσεως ΒΓΚ, ΕΓΚ, εἶνε ἴσαι· ἄρα καὶ αἱ γωνίαι ΒΓΑ, ΕΓΔ, εἶνε ἴσαι ὡς ὑπόλοιπα τῶν ὀρθῶν. Ἐπειδὴ δὲ Α=Δ ὡς ὀρθαί, ἕπεται ὅτι Β=Ε. ἄρα τὰ τρίγωνα ΒΓΑ καὶ ΕΓΔ εἶνε ὅμοια ὡς ἔχοντα τὰς γωνίας των ἴσας· λοιπὸν αἱ πλευραί των θὰ εἶνε ἀνάλογοι, ἤτοι $\frac{ΑΒ}{ΑΓ}=\frac{ΔΕ}{ΔΓ}$ (ΔΕ εἶνε τὸ ὕψος τοῦ ὀφθαλμοῦ ὑπὲρ τὸ ἔδαφος). Ἔστω ΔΕ=1μ.,25, ΑΓ=2μ.,40, ΔΓ=0μ.,80.

$$\text{Ὅθεν } \frac{ΑΒ}{2,40}=\frac{1,25}{0,80}, \quad ΑΒ=\frac{1,25\times2,40}{0,80}=1,25\times3 \quad ΑΒ=3μ.,75.$$

1) Διάσημος Ἕλλην μαθηματικὸς διδάξας ἐν Ἀλεξανδρείᾳ εἰς τὰς ἀρχὰς τοῦ 3ου π. Χ. αἰῶνος, πασίγνωστος τῇ ἀνθρωπότητι ἐκ τοῦ περιφήμου, συγγράμματός του, ὅπερ, μεταφρασθὲν εἰς ὅλας τὰς γλώσσας, ἐπὶ 1000 ἔτη ἐχρησίμευεν ὡς τὸ μόνον διδακτικὸν βιβλίον γεωμετρίας καὶ ἀριθμητικῆς.

Ἐπανάληψις δι' ἐρωτήσεων καὶ ἀσκήσεων.

Τί καλεῖται λόγος δύο ποσῶν τοῦ αὐτοῦ εἴδους; Τί καλεῖται ἀναλογία; Ἐὰν φέρῃς παράλληλον πρὸς μίαν πλευρὰν τριγώνου, ποία ἀναλογία σχηματίζεται; Διὰ τίνων παραδειγμάτων λαμβάνομεν ἰδέαν τῆς ὁμοιότητος; Πότε δύο πολύγωνα εἶνε ὅμοια; δύο τρίγωνα; Ὁ λόγος ὁμοιότητος δύο πολυγώνων εἶνε 5· τίνα σχέσιν ἔχουσι τὰ ἐμβαδὰ αὐτῶν; Ποῖον εἶνε τὸ ἐμβαδὸν λεκανοπεδίου σχήματος ἑξαγώνου κανονικοῦ ἔχοντος πλευρὰν 20 μ.; Διὰ τίνων μεθόδων κατασκευάζομεν πολύγωνον ὅμοιον ἢ ἴσον τῷ δοθέντι; Τί καλεῖται κλίμαξ; Πῶς εὑρίσκομεν τὴν πραγματικὴν ἀπόστασιν δύο πόλεων ἐπὶ τοῦ χάρτου; Πῶς κατασκευάζομεν γραφικὴν κλίμακα; Πῶς δυνάμεθα νὰ μετρήσωμεν τὸ ὕψος δένδρου;

1) Νὰ παραστήσωμεν ὑπὸ κλίμακα 0,001 τρίγωνον ἰσοσκελὲς ἔχον βάσιν 12μ.,50 καὶ ὕψος 19 μ.

2) Τὸ πεντάγωνον ΑΒΓΔΕ (Σχ. 127) παριστᾷ ὑπὸ κλίμακα 0,002 τὸ σχέδιον οἰκοπέδου· νὰ μετρηθῇ ἡ ΑΒ καὶ νὰ εὑρεθῇ ποῖον πραγματικὸν μῆκος ἀντιπροσωπεύει;

3) Σχεδίασον ὑπὸ κλίμακα 0,001 τριγωνικὸν γήπεδον ἔχον πλευρὰς 85μ.,78μ. καὶ 37 μ.

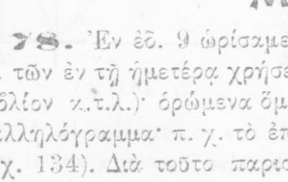
4) Νὰ κατασκευασθῇ πολύγωνον ὅμοιον τῷ ΑΒΓΔΕ (Σχ. 122) ἔχον ἐμβαδὸν 16 φορὰς μεγαλείτερον.

ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΜΕΡΟΣ Γ΄.

78. Ἐν ἐδ. 9 ὡρίσαμεν τὸ ἐπίπεδον. Πλεῖστα ἐπίπεδα ἀντικείμενα ἐκ τῶν ἐν τῇ ἡμετέρᾳ χρήσει ἔχουσι σχῆμα ὀρθογωνίου (πίναξ· πάτωμα, βιβλίον κ.τ.λ.)· ὁρώμενα ὅμως ἐξ ἀποστάσεως φαίνονται σχεδὸν ὡς παραλληλόγραμμα· π. χ. τὸ ἐπὶ τῆς τραπέζης βιβλίον ἔχει τοιαύτην ὄψιν (Σχ. 134). Διὰ τοῦτο παριστῶμεν ἐπίπεδόν τι διὰ παραλληλογράμμου ὀνομαζομένου δι' ἑνὸς γράμματος· π.χ. τὸ ἐπίπεδον Ε (Σχ. 135).

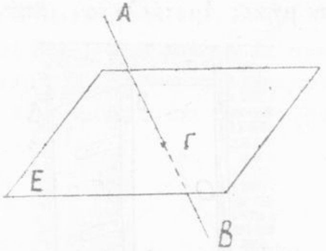
Εὐθεῖα ΑΒ τέμνει ἐπίπεδον εἰς ἓν μόνον σημεῖον, Γ (Σχ. 135) ὅπερ λέγεται *πούς* τῆς εὐθείας.



Σχ. 134.

79. Προσδιορισμὸς ἐπιπέδου.—Δι' ἑνὸς σημείου ἢ διὰ δύο σημείων (ἤτοι δι' εὐθείας) διέρχονται ἐπίπεδα ὅσα θέλωμεν· π.χ. θύρα στρεφομένη δύναται νὰ λάβῃ πολλὰς θέσεις· τοὐναντίον, *διὰ μιᾶς εὐθείας* (π.χ. τῆς ὁριζομένης ὑπὸ τῶν δύο στηριγμάτων τῆς θύρας (σχ. 138) *καὶ ἑνὸς σημείου ἐκτὸς αὐτῆς* (π. χ. τῆς ὀπῆς Ο, εἰς ἣν θὰ εἰσέλθῃ ὁ σύρτης) *διέρχεται ἓν μόνον ἐπίπεδον.* Τὰ δύο στηρίγματα τῆς θύρας καὶ ἡ *όπὴ Ο δεικνύουσιν ὅτι τρία σημεῖα μὴ ἐπ' εὐθείας κείμενα ὁρίζουσι τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου.*

80. Ἐν ἐδ. 9 εἴπομεν ὅτι *ἡ τομὴ δύο ἐπιπέδων εἶνε εὐθεῖα γραμμή.* Συχνὴ χρῆσις τῆς ἰδιότητος ταύτης γίνεται ἐν τῇ ζωγραφικῇ πρὸς ἀπεικόνισιν ἀντικειμένου τινὸς ἐπὶ πίνακος. Ἔστω εὐθεῖα ΑΒ



Σχ. 135.

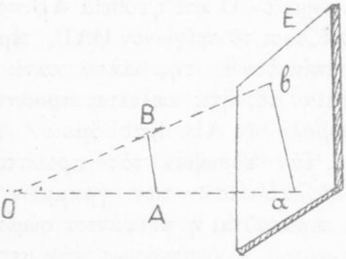
ὁρωμένη ἔκ τινος σημείου Ο διὰ μέσου τοῦ ὑελοπαραθύρου Ε (Σχ. 136). Τὸ σημεῖον Ο καὶ ἡ εὐθεῖα ΑΒ προσδιορίζουσι τὸ τρίγωνον ΟΑΒ, τέμνον τὸ ἐπίπεδον Ε τῆς ὑάλου κατὰ τὴν εὐθεῖαν αβ, ἥτις καλεῖται *προοπτικὴ προβολὴ* τῆς ΑΒ. Καθ' ὅμοιον τρόπον, ἐὰν εὕρωμεν τὰς προοπτικὰς προβολὰς πασῶν τῶν γραμμῶν, εἰς ἃς περατοῦται ἡ ἐπιφάνεια σώματος λαμβάνομεν τὴν προοπτικὴν προβολὴν αὐτοῦ. Ἀντιστρόφως ἐὰν μεταξὺ φωτεινοῦ τινος σημείου Ο καὶ ἐπιπέδου Ε (μὴ διαφανοῦς) παρεντεθῇ ῥάβδος ΑΒ (Σχ. 137), τὸ σημεῖον Ο καὶ ἡ εὐθεῖα ΑΒ προσδιορίζουσι τρίγωνον ΟΑΒ τέμνον τὸ ἐπίπεδον Ε κατὰ τὴν εὐθεῖαν αβ. Ἡ αβ δὲν θὰ φωτίζηται, θὰ φαίνηται σκοτεινὴ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Ε, διότι ἡ ῥάβδος ΑΒ ἐμποδίζει τὰς φωτεινὰς ἀκτῖνας τὰς ἐκ τοῦ Ο ἐκπεμπομένας. Ἡ εὐθεῖα αὕτη αβ εἶνε ἡ *σκιὰ* τῆς ΑΒ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Ε. Ὁμοίως εὑρίσκομεν τὴν σκιὰν σώματος.

81. Ὁρισμοί. — Ὅταν εὐθεῖα ΑΒ (Σχ. 135), συναντῶσα ἐπίπεδον εἴς τι σημεῖον Γ, εἶνε κάθετος ἐπὶ πάσας τὰς εὐθείας τὰς διερχομένας διὰ τοῦ σημείου Γ καὶ κειμένας ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, τότε λέγομεν ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΓ εἶνε *κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον*· π.χ. οἱ πόδες τῆς τραπέζης εἶνε κάθετοι ἐπὶ τὸ πάτωμα, τὰ καρφία προσηλοῦνται καθέτως (συνήθως ἐπὶ τὸν τοῖχον. Ὅταν ἡ εὐθεῖα ΑΓ δὲν εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον, λέγεται *πλαγία* (ἐδ. 19)· π.χ. ἡ θέσις τῆς γραφίδος (ὅταν γράφωμεν) εἶνε πλαγία πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ χάρτου.

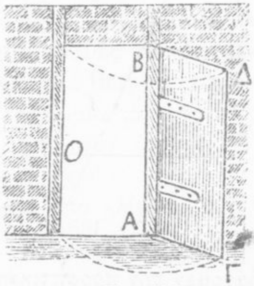
Σχ. 136.

Κατὰ τὴν κίνησιν τῆς θύρας ΑΒΓΔ (Σχ. 138) περὶ τὴν ΑΒ, ἡ ΑΒ παραμένει κάθετος ἐπὶ πᾶσαν θέσιν τῆς ΑΓ· ἐπομένως ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ πατώματος. Ἡ ΑΓ ἐν τῇ κινήσει της περὶ τὴν ΑΒ προσδιορίζει ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΑΒ εἶνε κατακόρυφος (ἐδ. 50) τὸ δὲ πάτωμα ὁριζόντιον ἕπεται ὅτι *ἡ κατακόρυφος εὐθεῖα εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον* [1].

82. Ἐὰν λάβωμεν γνώμονα ΑΒΓ (Σχ. 139) καὶ στρέφωμεν αὐτὸν περὶ μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν ΑΒ, ἡ ἑτέρα πλευρὰ ΒΓ παραμένουσα κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ θὰ προσδιορίσῃ ἐπίπεδον Μ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ. Ἡ ὑποτείνουσα ΑΓ εἶνε πλαγία εἰς τὸ ἐπίπεδον Μ. Κατὰ τὴν κίνησιν ταύτην, ἡ εὐθεῖα ΑΓ διατηροῦσα μῆκος ἀμετάβλητον ἀπέχει



Σχ. 137.

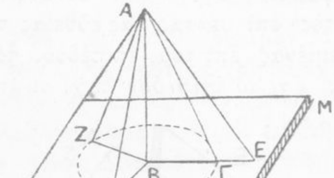


Σχ. 138.

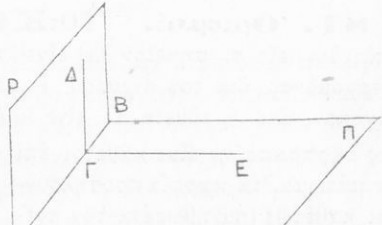
ἀπὸ τοῦ ποδὸς Β τῆς καθέτου ἀπόστασιν ἴσην τῇ ΒΓ.

Προσέτι ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἶνε μικροτέρα τῆς ΑΓ καὶ ἡ πλαγία ΑΓ μικροτέρα τῆς πλαγίας ΑΕ· διὰ τοῦτο ἡ ΑΒ λέγεται *ἀπόστασις* τοῦ σημείου Α ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου Μ (παράβλ. ἐδ. 19).

Τὰ σημεῖα Γ, Δ, Ζ, κεῖνται ἐπὶ τῆς περιφερείας τῆς γραφομένης μὲ



Σχ. 139.



Σχ. 140

κέντρον τὸ Β καὶ ἀκτῖνα ΒΓ, διότι ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ Β, ἴσον τῇ ΒΓ.

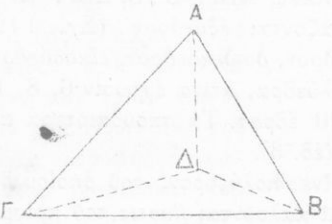
83. Ἐπίπεδα κάθετα καὶ παράλληλα.—Ἐὰν θεωρήσωμεν τὸν τοῖχον Ρ τοῦ δωματίου καὶ τὸ πάτωμα Π (Σχ. 140) ἔχομεν τὴν εἰκόνα δύο ἐπιπέδων τἀδποῖα συναντῶνται σχηματίζοντα γωνίαν· τὸ συνάντημα ΑΒ τῶν δύο ἐπιπέδων καλεῖται *ἀκμὴ* τῆς γωνίας τῶν δύο ἐπιπέδων.

1) Ὁ διδάσκων δύναται νὰ ἀναφέρῃ ἐνταῦθα τὴν περιγραφὴν καὶ χρῆσιν τοῦ **ἀλφαδίου**.

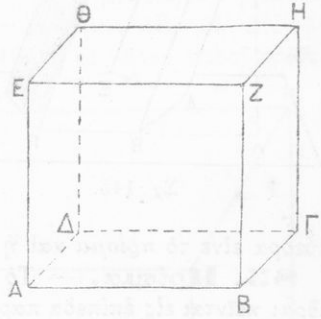
Ἐκ τινος σημείου Γ τῆς ἀκμῆς φέρομεν τὴν ΓΔ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ Ρ καὶ τὴν ΓΕ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ Π, τὴν δὲ σχηματιζομένην γωνίαν ΔΓΕ μετροῦμεν διὰ τοῦ γνώμονος· ἐὰν εἶνε ὀρθή, θὰ εἴπωμεν ὅτι τὸ ἐπίπεδον Ρ εἶνε *κάθετον* ἐπὶ τὸ Π.

Παράλληλα λέγονται τὰ ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα δὲν συναντῶνται ὅσον καὶ ἂν αὐξηθῶσι· π.χ. τὸ πάτωμα καὶ ἡ ὀροφή.

Ἰδιότητες. — *1) Ὅταν δύο ἐπίπεδα εἶνε κάθετα ἐπὶ τρίτον καὶ ἡ τομὴ αὐτῶν εἶνε κάθετος ἐπ' αὐτό·* π.χ. ἡ ἀκμὴ δύο τοίχων τοῦ δωματίου, οἵτινες εἶνε κάθετοι ἐπὶ τὸ πάτωμα.



Σχ. 141.



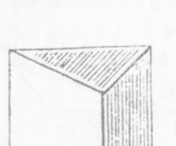
Σχ. 142.

2) Ὅταν δύο ἐπίπεδα εἶνε κάθετα ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν, εἶνε παράλληλα· π.χ. οἱ ἀπέναντι τοῖχοι τοῦ δωματίου (οἵτινες εἶνε κάθετοι ἐπὶ τὴν ἀκμὴν τοῦ πατώματος) εἶνε παράλληλα ἐπίπεδα.

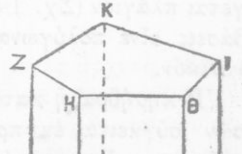
3) *Αἱ τομαὶ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων* (π. χ. τῆς ὀροφῆς καὶ τοῦ πατώματος) *ὑπὸ 3ου* (τοῦ τοίχου) *εἶνε εὐθεῖαι παράλληλοι.*

Ι. ΠΡΙΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΥΡΑΜΙΔΕΣ.

84. Ὁρισμοί. — Τὸ ἄνοιγμα δύο ἐπιπέδων τεμνομένων (π.χ. δύο φύλλων βιβλίου) καλεῖται συνήθως *δίεδρος γωνία*, ἤτοι γωνία μὲ δύο ἕδρας· π.χ. τὸ Σχ. 140 εἶνε δίεδρος γωνία ὀρθή. Εἰς τὰς οἰκίας βλέπομεν γωνίας σχηματιζομένας ὑπὸ τριῶν ἐπιπέδων (τῶν δύο τοίχων καὶ τοῦ πατώματος ἢ τῆς ὀροφῆς)· αὗται καλοῦνται *τρίεδροι γωνίαι*· τέλος, τὸ ἐσωτερικὸν κωδωνοστασίου ἀποτελεῖ γωνίαν σχηματιζομένην ὑπὸ πλειόνων ἐπιπέδων· αὕτη



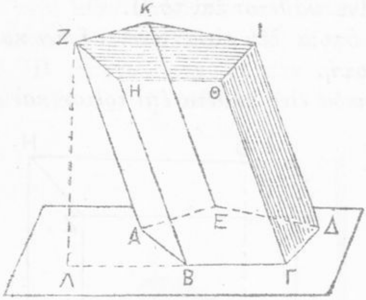
Σχ. 143.



Σχ. 144.

εἶνε *πολύεδρος γωνία*. Σῶμά τι καλεῖται *πολύεδρον*, ὅταν περιορίζηται πανταχόθεν ἀπὸ πολύγωνα, τὰ ὁποῖα εἶνε αἱ ἕδραι τοῦ πολυέδρου (ἐδ. 26).

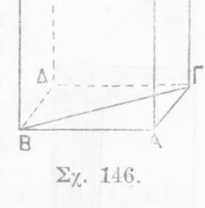
Τὸ σύνολον τῶν ἑδρῶν ἀποτελεῖ τὴν *ἐπιφάνειαν* τοῦ πολυέδρου. Αἱ τομαὶ τῶν ἑδρῶν (ἢ αἱ πλευραὶ τῶν πολυγώνων) εἶνε *αἱ ἀκμαὶ ἢ κόψεις* τοῦ πολυέδρου. Οἱ ἀκρογωνιαῖοι λίθοι (τὰ ἀγκωνάρια), τὰ τοῦβλα, σωροὶ χαλίκων κανονικῶς ἐστρωμένων ἐπὶ τῶν δρόμων, οἱ ἀδάμαντες κ.τ.λ. ἔστωσαν παραδείγματα πολυέδρων. Τὰ πολύεδρα λαμβάνουσιν ὀνόματα ὑπενθυμίζοντα τὸν ἀριθμὸν τῶν ἑδρῶν· τὸ ἁπλούστερον πάντων εἶνε τὸ *τετράεδρον* (Σχ. 141), ὅπερ ἔχει 4 ἕδρας τριγωνικάς, ΑΒΓ, ΔΑΒ, ΔΒΓ, ΔΓΑ. Ὀνομάζονται *ἑξάεδρον* (Σχ. 142), *ὀκτάεδρον, δωδεκάεδρον, εἰκοσάεδρον* τὰ πολύεδρα, ἅτινα ἔχουσιν 6, 8, 12 καὶ 20 ἕδρας. Τὰ σπουδαιότερα πολύεδρα εἶνε τὸ *πρίσμα* καὶ ἡ *πυραμὶς* (ἐδ. 3).



Σχ. 145.

88. Πρίσμα. — Τὸ πρίσμα εἶνε πολύεδρον, τοῦ ὁποίου δύο ἕδραι κεῖνται εἰς ἐπίπεδα παράλληλα καὶ καλοῦνται *βάσεις* τοῦ πρίσματος, αἱ δ' ἄλλαι εἶνε παραλληλόγραμμα, ἐξ ὧν ἕκαστον ἔχει κοινὴν πλευρὰν μεθ' ἑκατέρας ἐκ τῶν βάσεων· αἱ βάσεις εἶνε πολύγωνα ἴσα. Τὸ πρίσμα λέγεται *τριγωνικόν, πενταγωνικὸν* κτλ., ὅταν αἱ βάσεις αὐτοῦ εἶνε τρίγωνα, πεντάγωνα κτλ. (Σχ. 143, 144). Ἐὰν γνωρίζωμεν μίαν τῶν βάσεων τοῦ πρίσματος καὶ τὸ μῆκος καὶ τὴν διεύθυνσιν μιᾶς τῶν πέριξ ἀκμῶν, ἡ κατασκευὴ αὐτοῦ εἶνε εὐκολωτάτη [1].

Ὀρθὸν λέγεται τὸ πρίσμα, ὅταν αἱ πέριξ ἀκμαὶ εἶνε κάθετοι ἐπὶ τὰς βάσεις, ὅτε τὰ πέριξ παραλληλόγραμμα εἶνε ὀρθογώνια (Σχ. 144), εἰ δὲ μή, λέγεται πλάγιον (Σχ. 145). Πᾶν πρίσμα ὀρθόν, οὗ αἱ βάσεις εἶνε πολύγωνα κανονικά, εἶνε *πρίσμα κανονικόν.*



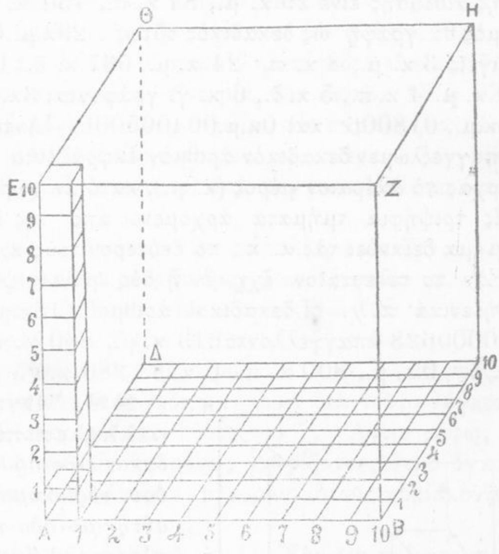
Σχ. 146.

Ἡ κηρήθρα ἡ κατασκευαζομένη ὑπὸ τῶν μελισσῶν σύγκειται ἐκ πρισμάτων ἑξαγωνικῶν. *Ὕψος* πρίσματος εἶνε ἡ ἀπόστασις τῶν δύο βάσεων· εἰς τὰ ὀρθὰ πρίσματα (Σχ. 144) ὕψος εἶνε μία τῶν πέριξ ἀκμῶν, ἡ ΖΑ, εἰς δὲ τὰ πλάγια, ὕψος εἶνε ἡ κάθετος ΖΛ (Σχ. 145) ἡ ἀγομένη ἔκ τινος σημείου τῆς μιᾶς βάσεως ἐπὶ τὴν ἄλλην.

Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον, ἐφ' οὗ στηρίζεται τὸ πρίσμα, εἶνε ὁριζόντιον, τὸ ὕψος ΖΑ εὑρίσκεται διὰ τοῦ νήματος τῆς στάθμης, δηλ. δένομεν εἰς τὴν κορυφὴν Ζ ἓν νῆμα, εἰς τὸ ἄκρον τοῦ ὁποίου κρέμαται τεμάχιον μολύβδου.

1) Ἂς δειχθῇ ὑπὸ τοῦ διδάσκοντος.

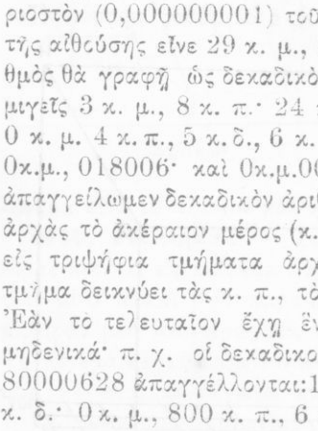
86. Παραλληλεπίπεδον. — Εἶνε πρίσμα, τοῦ ὁποίου καὶ αἱ βάσεις εἶνε παραλληλόγραμμα. Τὸ παραλληλεπίπεδον εἶνε ὀρθὸν ἢ πλάγιον, καθὼς καὶ τὸ πρίσμα· ὅταν δὲ εἶνε ὀρθὸν καὶ αἱ βάσεις του εἶνε ὀρθογώνιοι, τότε ὀνομάζεται *ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον* (ἐδ. 3)· π.χ. τὸ δωμάτιον, οὗ τὸ πάτωμα καὶ ἡ ὀροφὴ εἶνε ὀρθογώνια. Ὁ *κύβος* (Σχ. 147) εἶνε μερικὴ περίπτωσις τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, καθ' ἣν πᾶσαι αἱ ἕδραι εἶνε τετράγωνα ἴσα. Οἱ κρύσταλλοι τοῦ θαλασσίου ἅλατος εἶνε κύβοι. Εὐκόλως βλέπομεν, ὅτι τὸ μὲν παραλληλεπίπεδον (ὀρθογώνιον) προσδιορίζεται διὰ τῶν τριῶν ἀκμῶν ΔΒ, ΔΓ, ΔΚ τῶν ἀγομένων ἐκ τῆς αὐτῆς κορυφῆς Δ (Σχ. 146), ὁ δὲ κύβος προσδιορίζεται διὰ μιᾶς τῶν ἀκμῶν του. Εἴς τι παραλληλεπίπεδον ὀρθογώνιον τὰ μήκη τῶν τριῶν ἀκμῶν τῶν ἀγομένων ἐκ τῆς αὐτῆς κορυφῆς ὀνομάζονται *διαστάσεις* τοῦ στερεοῦ· ἡ μία ΔΓ λέγεται *μῆκος*, ἡ ἄλλη ΔΒ *πλάτος* καὶ ἡ τρίτη ΔΚ *ὕψος*. Τὸ ὕψος ἐνίοτε καλεῖται καὶ βάθος ἢ πάχος· π. χ. λέγομεν τὸ βάθος τάφρου, τὸ πάχος φύλλου χάρτου.



Σχ. 147.

87. Μονὰς μετρήσεως τῶν ὄγκων. — Ἐὰν ἡ ἀκμὴ τοῦ κύβου ἔχῃ μῆκος ἑνὸς μέτρου, ὁ κύβος λέγεται *κυβικὸν μέτρον* (κ. μ.), λαμβάνεται δὲ ὡς μονὰς ἀρχική. Ἐὰν ἡ ἀκμὴ ἔχῃ μῆκος μιᾶς παλάμης, ἑνὸς δακτύλου, μιᾶς γραμμῆς, ὁ κύβος λέγεται *κυβικὴ παλάμη* (κ. π.), *κυβικὸς δάκτυλος* (κ. δ.), *κυβικὴ γραμμὴ* (κ. γ.). Ἡ μέτρησις τῶν ὄγκων δὲν γίνεται διὰ τῆς ἐπιθέσεως (ἐδ. 55)· π. χ. ἵνα εὕρωμεν τὸν ὄγκον τοῦ ἀέρος τῆς αἰθούσης, δὲν θὰ γεμίσωμεν αὐτὴν μὲ κ. μ., κ. π., κ. δ., ἀλλὰ μετροῦμεν τὰς διαστάσεις αὐτῆς καὶ ἐξ αὐτῶν διὰ τοῦ ὑπολογισμοῦ εὑρίσκομεν τὸν ὄγκον, ὡς θὰ ἴδωμεν ἀμέσως κατωτέρω.

88. Ὑποδιαιρέσεις τοῦ κυβικοῦ μέτρου. — Ἂς φαντασθῶμεν ἓν κενὸν κιβώτιον κυβικὸν ἔχον πλευρὰν ἑνὸς μέτρου, ἤτοι ἓν κυβ. μέτρον. Ἐπειδὴ ἡ βάσις ΑΒΓΔ (Σχ. 147) εἶνε ἓν τετραγωνικὸν μέτρον, γνωρίζομεν (ἐδ. 55), ὅτι δύναται νὰ διαιρεθῇ εἰς 100 τ. π. καὶ ἐπειδὴ τὸ ὕψος ΑΕ περιέχει 10 παλάμας, δυνάμεθα ἐφ' ἑκάστης τετραγωνικῆς παλάμης τῆς βάσεως νὰ θέσωμεν 10 κ. π. τὴν μίαν ἐπάνω εἰς τὴν ἄλλην, ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα. Διὰ νὰ πληρωθῇ τὸ κ. μ.. χρειάζονται 100 στῆλαι τοιαῦται· ἐπειδὴ δ' ἑκάστη αὐτῶν περιέχει 10 κ. π.. τὸ ὅλον χρειάζονται 1000 κ. π. Ὥστε ἓν κ.μ. περιέχει 1000 κ. π. Ὁμοίως βλέπομεν, ὅτι μία κ. π. περιέχει 1000 κ. δ., εἷς κ. δ. περιέχει 1000 κ. γ. Ὥστε 1 κ. μ.=1000 κ. π.=1000000 κ. δ.=1000000000 κ. γ., ἤτοι ἡ κ. π. εἶνε τὸ χιλιοστὸν (0,001) τοῦ κ. μ., ὁ κ. δ. εἶνε τὸ ἑκατομμυριοστὸν (0,000001) τοῦ κ. μ. καὶ ἡ κ. γ. εἶνε τὸ δισεκατομμυριοστὸν (0,000000001) τοῦ κ. μ. Ἐὰν εὕρωμεν, ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ ἀέρος τῆς αἰθούσης εἶνε 29 κ. μ., 87 κ. π., 750 κ. δ., ὁ συμμιγὴς οὗτος ἀριθμὸς θὰ γραφῇ ὡς δεκαδικὸς οὕτως: 29κ.μ.,087750. Ὁμοίως οἱ συμμιγεῖς 3 κ. μ., 8 κ. π.· 24 κ. μ., 637 κ. δ.· 0 κ. μ., 18 κ. π., 6 κ. δ.· 0 κ. μ. 4 κ. π., 5 κ. δ., 6 κ. γ. γράφονται 3κ.μ.,008· 24 κ.μ.,000637· 0κ.μ., 018006· καὶ 0κ.μ.004005006. Ἀντιστρόφως: ἐὰν θέλωμεν νὰ ἀπαγγείλωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν ἐκφράζοντα ὄγκον, ἀπαγγέλλομεν κατ' ἀρχὰς τὸ ἀκέραιον μέρος (κ. μ.), κατόπιν χωρίζομεν τὸ δεκαδικὸν μέρος εἰς τριψήφια τμήματα ἀρχόμενοι ἀπὸ τῆς ὑποδιαστολῆς, τὸ πρῶτον τμῆμα δεικνύει τὰς κ. π., τὸ δεύτερον τοὺς κ. δ. καὶ τὸ τρίτον τὰς κ. γ. Ἐὰν τὸ τελευταῖον ἔχῃ ἓν ἢ δύο μόνον ψηφία, γράφομεν δύο ἢ ἓν μηδενικά· π. χ. οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοί: 13κ.μ.,86· 0κ.μ.,0732· 0κ.μ., 80000628 ἀπαγγέλλονται: 13 κ. μ., 860 κ. π.· 0 κ. μ., 73 κ. π., 200 κ. δ.· 0 κ. μ., 800 κ. π., 6 κ. δ., 280 κ. γ..



Σχ. 148.

88. Ὄγκος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Κανών. — *Τὸν ὄγκον ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εὑρίσκομεν, ἐὰν μετρήσωμεν μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα τὰς διαστάσεις του (μῆκος, πλάτος καὶ ὕψος) καὶ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς τρεῖς ἀριθμούς.*

Παράδειγμα 1ον. Ἂς ὑποθέσωμεν κατ' ἀρχὰς ὅτι αἱ τρεῖς διαστάσεις ἐκφράζονται ὑπ' ἀκεραίων ἀριθμῶν, καὶ ἔστω ΑΒ=4μ., ΒΓ=2μ. καὶ ΒΖ=3μ. (Σχ. 148). Τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ δύναται νὰ χωρισθῇ εἰς $4 \times 2 = 8$ τετρ. μέτρα· ἐφ' ἑκάστου τῶν τετραγώνων τούτων δυνάμεθα νὰ θέσωμεν στήλην ἐκ τριῶν κ. μ., διότι τὸ ὕψος ΑΕ εἶνε 3 μ. Ἑπομένως τὸ παραλληλεπίπεδον περιέχει $4 \times 2 \times 3$, ἤτοι 24 κ. μ. Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ 4, 2, 3 παρίστανον παλάμας, ὁ ὄγκος θὰ ἦτο 24 κ.π., ἐὰν δὲ δακτύλους, ὁ ὄγκος θὰ ἦτο 24 κ. δ.

Παράδειγμα 2ον. Ἔστωσαν δεύτερον οἱ ἀριθμοὶ οἱ ἐκφράζοντες τὰς διαστάσεις δεκαδικοί: ΑΒ=3μ.,5, ΒΓ=1μ.,5, ΒΖ=2μ.,64. Τὴν περίπτωσιν ταύτην ἀνάγομεν εἰς τὴν πρώτην, ἐὰν τρέψωμεν τοὺς δεκαδικοὺς εἰς δακτύλους καὶ λάβωμεν ὡς μονάδα ὄγκου τὸν κ. δ. Τὸ μῆκος ΑΒ περιέχει 350 δακτ., τὸ πλάτος ΒΓ περιέχει 150 δακτ. καὶ τὸ ὕψος ΒΖ=264 δ. Ποιοῦντες τὸν συλλογισμὸν τοῦ α΄ παραδείγματος βλέπομεν, ὅτι τὸ παραλληλεπίπεδον περιέχει $350\times150\times264=13860000$ κ. δ., οὓς τρέποντες εἰς κ. μ. εὑρίσκομεν 13κ.μ.,860, ἤτοι ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον θὰ εὑρίσκομεν ἐκτελοῦντες τὸ γινόμενον $3{,}5\times1{,}5\times2{,}64$. Ὥστε ὁ κανὼν ἀληθεύει εἰς πᾶσαν περίπτωσιν.

Παρατηρήσεις. α) Ἐκτελοῦντες τὸ γινόμενον τῶν δύο διαστάσεων ΑΒ, ΒΓ τῆς βάσεως εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν αὐτῆς, ἤτοι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ· δυνάμεθα λοιπὸν νὰ ἐκφωνήσωμεν τὸν ἀνωτέρω κανόνα καὶ ὡς ἑξῆς: «*Τὸν ὄγκον τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εὑρίσκομεν, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του*».

β΄) Ὁ κανὼν εἶνε ἀληθὴς καὶ ὅταν τὸ παραλληλεπίπεδον εἶνε οἱονδήποτε· τότε ὅμως ὕψος τοῦ στερεοῦ δὲν εἶνε μία τῶν ἀκμῶν ΑΕ ἢ ΒΖ, ἀλλ' ἡ κάθετος ἡ καταβιβαζομένη ἔκ τινος σημείου τοῦ παραλληλογράμμου ΕΖΗΘ ἐπὶ τὴν βάσιν ΑΒΓΔ· ἐπίσης πλάτος τοῦ στερεοῦ δὲν εἶνε μία τῶν πλευρῶν ΑΔ ἢ ΒΓ, ἀλλ' ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν ΑΒ τοῦ παραλληλογράμμου.

89. Ὄγκος κύβου. — Ὁ κύβος εἶνε παραλληλεπίπεδον, οὗ αἱ τρεῖς διαστάσεις εἶνε ἴσαι· ἀρκεῖ νὰ μετρήσωμεν μίαν ἐξ αὐτῶν· π. χ. ὁ ὄγκος κύβου ἔχοντος ἀκμὴν 5 δακτ. εἶνε $5\times5\times5=125$ κ. δ. Ὁ ὄγκος κύβου ἔχοντος πλευρὰν 1μ., 2 εἶνε $1{,}2\times1{,}2\times1{,}2=$1κ.μ.,728.

ΣΗΜ. Ἐπειδὴ ἡ τρίτη δύναμις παντὸς ἀριθμοῦ, π.χ. 5^3, ἐκφράζει τὸν ὄγκον κύβου ἔχοντος πλευρὰν 5 μονάδας μήκους, διὰ τοῦτο λέγεται καὶ κύβος τοῦ 5· ὁμοίως 7^3 λέγεται καὶ κύβος τοῦ 7. Ἀντιστρόφως ὁ 5 λέγεται *κυβικὴ ῥίζα* τοῦ $5^3=125$· ἑπομένως γνωρίζοντες ὅτι ὁ ὄγκος κύβου περιέχει Θ κυβ. μέτρα, συνάγομεν πλευρὰν αὐτοῦ, εὑρίσκοντες τὴν κυβικὴν ῥίζαν τοῦ Θ.

90. Ὄγκος πρίσματος ὀρθοῦ. — 1) Ἐὰν διὰ πρίονος σχίσωμεν ἓν ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον (Σχ. 146) ἀρχόμενοι ἀπὸ τῆς ἀκμῆς ΒΘ καὶ κατὰ τὴν διεύθυνσιν ΘΙ μέχρι τῆς ἄλλης ΓΙ, θὰ λάβωμεν δύο ὀρθὰ τριγωνικὰ πρίσματα ἴσα (Σχ. 143)· ἑπομένως ἕκαστον τούτων εἶνε τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλεπιπέδου. Ἀλλὰ τοῦ παραλληλεπιπέδου ὁ ὄγκος ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος ἤτοι (ΑΓΔΒ)×ΑΗ· ἄρα ὄγκος τριγωνικοῦ πρίσματος $=\dfrac{(\text{ΑΓΔΒ})\times\text{ΑΗ}}{2}$ ἢ (ΑΒΓ)×ΑΗ, διότι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶνε τὸ ἥμισυ τοῦ ὀρθογωνίου ΑΓΔΒ· π.χ. ἐὰν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ΑΒΓ εἶνε 1 τ.π., 6 καὶ τὸ ὕψος εἶνε 4μ.,52, ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος θὰ εἶνε 1τ.π.,6×45π.,2=73κ.π.320.

2) Ἂς λάβωμεν ἓν πολυγωνικὸν πρίσμα ὀρθὸν (Σχ. 144)· δύναται νὰ χωρισθῇ εἰς τριγωνικὰ πρίσματα, ἀρκεῖ νὰ φέρωμεν τὰς διαγωνίους ΑΓ, ΖΘ, ΑΔ, ΖΙ. Ἔχομεν : ὄγκος πρίσματος (ΑΒΓΖΗΘ)=(ΑΒΓ)×ΒΗ ὄγκος πρίσματος (ΑΓΔΖΘΙ)=(ΑΓΔ)×ΒΗ· ὄγκος πρίσματος (ΑΔΕΖΙΚ

=(ΑΔΕ)×ΒΗ· ἐπομένως ὁ ὄγκος ὅλου τοῦ πενταγωνικοῦ πρίσματος θὰ εὑρεθῇ, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν τριγώνων ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΕ, δηλ. *τὴν βάσιν ΑΒΓΔΕ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸ ὕψος ΒΗ.*

ΣΗΜ. Ὅταν τὸ πρίσμα εἶνε πλάγιον (Σχ. 145), ὁ ὄγκος του εὑρίσκεται κατὰ τὸν ἴδιον κανόνα· δηλ. πολλαπλασιάζομεν τὴν βάσιν ἐπὶ τὸ ὕψος ΖΛ. Τὸν κανόνα τοῦτον δυνάμεθα νὰ ἐπαληθεύσωμεν ὡς ἑξῆς· Κατασκευάζομεν ἐκ λευκοσιδήρου πρίσμα ἀνοικτὸν ἄνωθεν (Σχ. 144) καὶ πληροῦμεν αὐτὸ ὕδατος· μετροῦμεν τὸν ὄγκον τοῦ ὕδατος διά τινος κύβου (κ. π. ἢ κ. δ.), δι᾽ οὗ ἐκκενοῦντες τὸ ὕδωρ τοῦ πρίσματος βλέπομεν ποσάκις ὁ ὄγκος τοῦ κύβου εἰσέρχεται εἰς τὸν ὄγκον τοῦ πρίσματος.

91. Ἐπιφάνεια πρίσματος.—*Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας ὀρθοῦ πρίσματος ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῆς περιμέτρου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος. Παράπλευρος ἐπιφάνεια* εἶνε τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν πέριξ ὀρθογωνίων ΑΒΗΖ, ΒΓΗΘ κτλ. (Σχ. 144). Τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου τῶν ὀρθογωνίων τούτων ἰσοῦται τῷ γινομένῳ μιᾶς πλευρᾶς τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος ἐπὶ τὸ ὕψος· π.χ. (ΑΒΗΖ)=ΑΒ×ΑΖ, ἐπομένως τὸ ἄθροισμά των θὰ ἰσῶται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως (δηλ. μὲ τὴν περίμετρον ΑΒΓΔΕΑ) ἐπὶ τὸ ὕψος. Ἐὰν δὲ θέλωμεν *ὅλην τὴν ἐπιφάνειαν* τοῦ πρίσματος, πρέπει εἰς τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν νὰ προσθέσωμεν καὶ τὸ διπλάσιον ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ΑΒΓΔΕ.

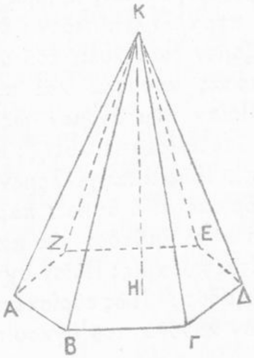
Παραδείγματα. 1) Κάδος ἔχει ἐσωτερικὰς διαστάσεις ΑΒ=1μ., 10 ΒΓ=0μ.,75 ΒΖ=0μ.,50. Ζητεῖται ἡ χωρητικότης τοῦ κάδου. Ἔχομεν 1,10×0,75×0,50=0κ.μ., 412 500 ἢ 412κ.π., 500.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ χωρητικότης μιᾶς κυβ. παλάμης λέγεται *λίτρα*, ἡ ζητουμένη χωρητικότης εἶνε 412λ.,5.

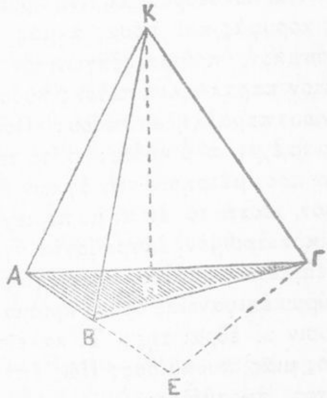
2) Κανονικὸν πρίσμα πενταγωνικὸν (Σχ. 144) ἔχει ὕψος 3μ.,20 καὶ ἑκάστη τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως εἶνε 1μ.,08. Ζητεῖται ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια αὐτοῦ καὶ ὁ ὄγκος. Ἔχομεν : περίμετρος τῆς βάσεως = 1,08×5· ἄρα ἐμβαδὸν παραπλ. ἐπιφ.=1,08×5×3,20=17 τ.μ.,28.

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ὄγκου χρειάζεται τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως, δηλ. τοῦ πενταγώνου ΑΒΓΔΕ· ἐπειδὴ εἶνε κανονικὸν τὸ ἐμβαδόν του, κατὰ τὸν πίνακα σελ. 56, θὰ εἶνε 2τ.μ.,3774×1,08· ἄρα ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος= 2,3774×1,08×3,20 = 8κ.μ.,216294...

92. Πυραμίς.—Ἡ πυραμὶς εἶνε πολύεδρον, οὗτινος μία ἕδρα εἶνε πολύγωνον οἱονδήποτε ΑΒΓΔΕΖ(Σχ. 149), αἱ δὲ λοιπαὶ εἶνε τρίγωνα ΚΑΒ, ΚΒΓ,..., ἔχοντα βάσιν μὲν τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΒΓ,... τοῦ πολυγώνου, κορυφὴν δὲ Κ κοινήν, κειμένην ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου τοῦ πολυγώνου. Τὸ πολύγωνον, ἐφ᾽ οὗ ἡ πυραμὶς στηρίζεται, ὀνομάζεται *βάσις* τῆς πυραμίδος, τὸ δὲ σημεῖον Κ *κορυφὴ* αὐτῆς. Ἡ πυραμὶς λέγεται τριγωνική, τετραγωνική, πενταγωνικὴ κτλ., ὅταν ἡ βάσις της εἶνε τρίγωνον τετράπλευρον, πεντάγωνον κτλ.· τὸ σχ. 149 παριστᾷ ἑξαγωνικὴν πυραμίδα, τὸ σχ. 150 παριστᾷ τριγωνικὴν πυραμίδα. Ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς εἶνε ἐν τετράεδρον (Σχ. 141). Ὅταν καὶ τὰ 4 τρίγωνα ΚΑΒ, ΚΒΓ, ΚΓΑ καὶ ΑΒΓ εἶνε ἰσόπλευρα καὶ ἴσα μεταξύ των, τότε ἔχομεν τὸ *κανονικὸν τετράεδρον*. Ἡ κάθετος ΚΗ (Σχ. 149 καὶ 150), ἥτις ἄγεται ἐκ τῆς κορυφῆς Κ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως, εἶνε τὸ *ὕψος* τῆς πυραμίδος. Ἡ πυραμὶς προσδιορίζεται, ὅταν εἶνε γνωστὴ ἡ βάσις καὶ ἡ κορυφὴ αὐτῆς.



Σχ. 149.



Σχ. 150.

93. Ὄγκος πυραμίδος. — Εἶνε ἀποδεδειγμένον, ὅτι πᾶσα πυραμὶς εἶνε τὸ τρίτον πρίσματος ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος· ἐπομένως *ὁ ὄγκος μιᾶς πυραμίδος ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεως αὐτῆς ἐπὶ τὸ τρίτον τοῦ ὕψους της*· π. χ. μία πυραμὶς ἔχουσα βάσιν τετράγωνον μὲ πλευρὰν 6 μ. καὶ ὕψος 5 μ. ἔχει ὄγκον $= \frac{1}{3} \times 6 \times 6 \times 5$ ἢ 12×5 ἢ 60 κ. μ. Τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος ΚΑΒΓ (Σχ. 150) ἵνα εὕρωμεν τὸν ὄγκον, πρέπει νὰ μετρήσωμεν μίαν τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως ΑΒΓ (π. χ. τὴν ΑΒ) καὶ τὴν κάθετον ἐπ' αὐτὴν ΓΕ ἐκ τῆς ἀπέναντι κορυφῆς, καὶ τὸ ὕψος ΚΗ τῆς πυραμίδος· ἔστω ΑΒ=5 μ., ΓΕ=8 μ., 6 καὶ ΚΗ=9 μ. Τότε τὸ μὲν ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ΑΒΓ εἶνε $5 \times 8,6 : 2 = 5 \times 4,3 = 21$ τ. μ., 5 ὁ δὲ ὄγκος τῆς πυραμίδος εἶνε

$$21,5 \times 9 : 3 = 21,5 \times 3 = 64 \text{ κ. μ., } 5.$$

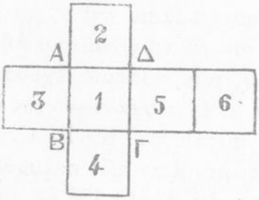
ΣΗΜ. Τὸν κανόνα τοῦτον δυνάμεθα νὰ ἐπαληθεύσωμεν ὡς ἑξῆς: Κατασκευάζομεν ἐκ σώματος μαλακοῦ (κηροῦ, στόκου,...) πρίσμα τριγωνικὸν (σχ. 143) καὶ πυραμίδα τριγωνικὴν ἔχουσαν ἴσην βάσιν ΑΒΓ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος. Ἐὰν ζυγίσωμεν τὸ πρίσμα καὶ τὴν πυραμίδα, θὰ εὕρωμεν ὅτι ἡ πυραμὶς ἔχει βάρος τὸ τρίτον τοῦ βάρους τοῦ πρίσματος.

Ἐπανάληψις δι' ἐρωτήσεων καὶ ἀσκήσεων.

Τί εἶνε τὸ ἐπίπεδον; ποῖον σχῆμα ἔχουσιν ὡς τὸ πολὺ τὰ ἐπίπεδα ἀντικείμενα; Διατί παριστῶμεν ἐπίπεδόν τι διὰ παραλληλογράμμου; Πόσα δεδομένα σημεῖα (ἢ εὐθεῖαι) ἀρκοῦσιν ἵνα ὁρίσωσι τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου; (παράδ.) Τί καλεῖται προοπτικὴ προβολὴ εὐθείας ΑΒ; Τί καλεῖται σκιὰ τῆς ΑΒ;

Πότε δύο ἐπίπεδα λέγονται παράλληλα; Πότε μία εὐθεῖα λέγεται κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον; Ποίαν ἰδιότητα ἔχει ἡ κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον ἡ ἀγομένη ἐκ σημείουἐκτὸς αὐτοῦ; Πότε δὲ δύο ἐπίπεδα λέγονται κάθετα; Τί καλεῖται πολύεδρον; Τί εἶνε πρίσμα; Πότε τὸ πρίσμα λέγεται ὀρθόν; Πόσας κορυφὰς καὶ πόσας ἀκμὰς ἔχει ἓν πρίσμα τριγωνικόν, πρίσμα πενταγωνικόν, πρίσμα ἑξαγωνικόν; Τί λέγεται παραλληλεπίπεδον; ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον; κύβος; Τί ὀνομάζομεν διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου; Πόσας ἕδρας, πόσας κορυφὰς καὶ πόσας ἀκμὰς ἔχει α΄ ὁ κύβος; β΄ τὸ τετράεδρον; Ποίαν λαμβάνομεν ὡς μονάδα πρὸς μέτρησιν τῶν ὄγκων; καὶ τίνες αἱ ὑποδιαιρέσεις αὐτῆς; Ἐξήγησον, διατὶ τὸ ἓν κ. μ. περιέχει 1000 κ. π.; Πῶς ἀπαγγέλλομεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν ἐκφράζοντα ὄγκον; Πῶς εὑρίσκεται ὁ ὄγκος παραλληλεπιπέδου, κύβου, πρίσματος; Μὲ τί ἰσοῦται τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας ὀρθοῦ πρίσματος; Τί καλεῖται πυραμίς; Ποῖον σχῆμα ἔχουσιν αἱ ἕδραι της; Τί καλεῖται ὕψος πυραμίδος; Πῶς εὑρίσκεται ὁ ὄγκος μιᾶς πυραμίδος; Πῶς ἐπαληθεύομεν τὸν κανόνα τοῦ ὄγκου πρίσματος, πυραμίδος;

1) Διὰ τίνος ἁπλουστάτου μέσου κατασκευάζομεν κύβον ἐκ χαρτονίου; (τοῦτο δεικνύεται ἐν τῷ σχ. 151, ὅπερ εἶνε τὸ ἀνάπτυγμα τῆς ἐπιφανείας κύβου).



Σχ. 151.

2) Μία αἴθουσα σχολείου ἔχει μῆκος 8 μ. 40, πλάτος 6 μ., 50 καὶ ὕψος 3 μ., 30, διδάσκονται δ᾽ ἐν αὐτῇ 45 μαθηταί. Πόσαι λίτραι ἀέρος ἀναλογοῦσιν εἰς ἕκαστον μαθητήν;

3) Πόσους κ. δ. δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν μὲ μίαν ῥίγαν μήκους 40δ.; Τὸ ἐμβαδὸν τῆς καθέτου πρὸς τὸ μῆκος τομῆς εἶνε 1 τ. δ.

4) Κρουνὸς δίδει 15 λίτρας ὕδατος εἰς ἕκαστον πρῶτον λεπτόν. Πόσον χρόνον χρειάζεται, ἵνα γεμίσῃ δεξαμενὴν μήκους 2μ., 80, πλάτους 1 μ. 20 καὶ βάθους 0μ., 65.

5) Ξύλινον κιβώτιον σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου πρόκειται νὰ ἐπιστρωθῇ ἐσωτερικῶς διὰ λαμαρίνης. Αἱ ἐσωτερικαὶ διαστάσεις αὐτοῦ εἶνε 1 μ., 85.1 μ., 25.0 μ., 40. Ἡ λαμαρίνα τιμᾶται 55 λεπτὰ τὸ τ. μ. Ζητεῖται ἡ ἀξία τῆς ἀπαιτηθησομένης λαμαρίνης.

6) Αἱ ἐσωτερικαὶ διαστάσεις κιβωτίου ἔχοντος σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶνε 1 μ., 20· 0 μ., 50· 0 μ., 25. Πόσα τεμάχια σάπωνος δύναται νὰ χωρέσῃ, ἐὰν ἕκαστον τεμάχιον ἔχῃ σχῆμα κύβου, οὗ ἡ πλευρὰ εἶνε 0 μ., 10;

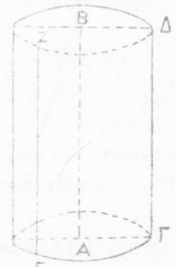
7) Μιᾶς πυραμίδος ἡ βάσις εἶνε κανονικὸν ἑξάγωνον ἔχον πλευρὰν

0μ., 25· ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου τοῦ ἑξαγώνου ἀπὸ μιᾶς πλευρᾶς εἶνε 0μ., 20. Τὸ δὲ ὕψος τῆς πυραμίδος 3 μ. Ζητεῖται ὁ ὄγκος.

8) Μία ὁδὸς ἔχει μῆκος 4000 μ. καὶ πλάτος 12 μ. Πρόκειται νὰ στρωθῇ διὰ χαλικίων εἰς ὕψος 0 μ., 25. Πόσα κ μ. χαλικίων χρειάζονται;

ΙΙ. ΠΕΡΙ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ ΚΑΙ ΚΩΝΟΥ

94. Τὸ σῶμα τοῦτο [1] λέγεται *κύλινδρος*. Ἐξετάζοντες αὐτὸ βλέπομεν, ὅτι δὲν ὁμοιάζει μὲ τὰ πολύεδρα, διότι δὲν περιορίζεται πανταχόθεν ὑπὸ ἐπιπέδων σχημάτων· ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ ἀποτελεῖται ἐκ 3 μερῶν, ἀλλὰ τούτων μόνον τὰ δύο εἶναι κύκλοι ἴσοι καὶ παράλληλοι, τὸ τρίτον δὲν εἶνε ἐπίπεδον, εἶνε καμπύλη ἐπιφάνεια (ἐδ. 9). Οἱ δύο ἴσοι κύκλοι λέγονται *βάσεις* τοῦ κυλίνδρου· ἡ εὐθεῖα ΑΒ, ἥτις ἑνώνει τὰ κέντρα τῶν κύκλων, εἶνε τὸ *ὕψος* τοῦ κυλίνδρου. Ἐπὶ τῆς καμπύλης ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου δυνάμεθα νὰ χαράξωμεν εὐθείας γραμμὰς **μήκους** ἴσου πρὸς τὸ ὕψος καὶ παραλλήλους, καθὼς τὰς ΓΔ, ΕΖ. Αἱ *ἀκτῖνες* τῶν βάσεων εἶνε ΑΓ καὶ ΒΔ (σχ. 152).



Σχ. 152.

95. Γένεσις κυλίνδρου. — Ἐὰν στρέψωμεν ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ περὶ τὴν πλευρὰν αὐτοῦ ΑΒ (σχ. 152), ἥτις μένει ἀκίνητος, πάντοτε κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν, μέχρις οὗ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν προτέραν του θέσιν, γεννᾶται στερεόν, τὸ ὁποῖον εἶνε κύλινδρος. Ἡ ἀκίνητος πλευρὰ ΑΒ τοῦ ὀρθογωνίου λέγεται καὶ *ἄξων* τοῦ κυλίνδρου, ἡ ΓΔ λέγεται *γενέτειρα*, διότι περιστρεφομένη γεννᾷ τὴν καμπύλην ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου· αἱ δύο ἄλλαι πλευραὶ ΑΓ καὶ ΒΔ γράφουσι τοὺς δύο ἴσους κύκλους (τὰς βάσεις τοῦ κυλίνδρου), τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ γράφουσι τὰς περιφερείας τῶν κύκλων τούτων. Οὕτω μία θύρα στρεφομένη περὶ τὸ στήριγμα αὐτῆς γεννᾷ κύλινδρον (Σχ. 138).

96. Ἐπιφάνεια καὶ ὄγκος κυλίνδρου. — Ὁ κύλινδρος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς πρίσμα, οὗ αἱ βάσεις εἶνε κύκλοι ἴσοι.

Ἐντεῦθεν ἕπονται οἱ *κανόνες*:

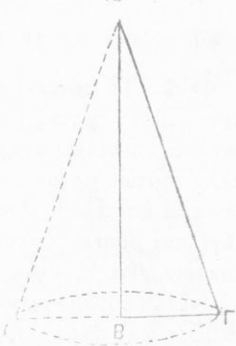
1ον. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς καμπύλης ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου εὑρίσκεται, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος.

2ον. Ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου εὑρίσκεται, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος. Π. χ. Στήλης κυλινδρικῆς τὸ ὕψος ἔστω 11 μ.,50 καὶ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως 2 μ.,50. Τότε ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως ἔχει μῆκος $5 \times 3,14 = 15$ μ., 70 καὶ ἡ καμπύλη ἐπιφάνεια θὰ εἶνε $15,70 \times 11,50 = 180$ τ. μ. 55. Ἐὰν προσθέσωμεν καὶ τὰ ἐμβαδὰ τῶν δύο βάσεων, τὰ ὁποῖα εἶνε $2 \times 15,70 \times 1,25 = 2 \times 19$ τ. μ., 6250, θὰ

1) Ὁ διδάσκων δεικνύει κύλινδρον (ἐδ. 3).

ἔχωμεν *τὴν ὁλικὴν ἐπιφάνειαν* τοῦ κυλίνδρου. Ὁ δὲ ὄγκος τῆς στήλης εἶνε $3,14 \times (2,5)^2 \times 11,50 = 125$ κ. μ.,6875.

97. Περὶ κώνου.—Τὸ σῶμα τοῦτο (1) λέγεται *κῶνος*· ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ περιορίζεται ὑπὸ ἑνὸς κύκλου, ὅστις καλεῖται *βάσις* τοῦ κώνου, καὶ ὑπὸ εὐθειῶν συνδεουσῶν τὰ διάφορα σημεῖα τῆς περιφερείας τῆς βάσεως μεθ' ἑνὸς σημείου Κ ἐκτὸς τῆς βάσεως κειμένου (Σχ. 153) ὅπερ καλεῖται *κορυφὴ* τοῦ κώνου. Ἡ εὐθεῖα ΚΒ ἡ συνδέουσα τὴν κορυφὴν μὲ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου καὶ ὀνομάζεται *ὕψος* τοῦ κώνου. Μία τῶν εὐθειῶν ΚΑ, ΚΓ,... εἶνε ἡ *πλευρὰ* τοῦ κώνου.

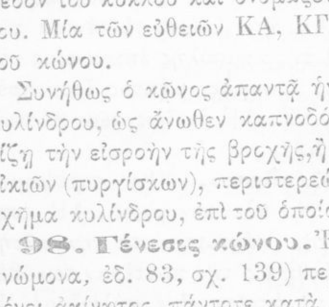


Σχ. 153.

Συνήθως ὁ κῶνος ἀπαντᾷ ἡνωμένος μετὰ τοῦ κυλίνδρου, ὡς ἄνωθεν καπνοδόχης, ὅπως ἐμποδίζῃ τὴν εἰσροὴν τῆς βροχῆς, ἢ ἄνωθεν ἐξοχικῶν οἰκιῶν (πυργίσκων), περιστερεώνων, ἀνεμομύλων, ἅτινα ἔχουσι συνήθως σχῆμα κυλίνδρου, ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἐπικάθηται στέγη κωνική.

98. Γένεσις κώνου.—Ἐὰν στρέφωμεν τρίγωνον ὀρθογώνιον (π.χ. γνώμονα, ἐδ. 83, σχ. 139) περὶ μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν ΑΒ, ἥτις μένει ἀκίνητος, πάντοτε κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν, μέχρις οὗ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν προτέραν του θέσιν, γεννᾶται στερεόν, τὸ ὁποῖον εἶνε κῶνος. Ἡ ἀκίνητος πλευρὰ ΑΒ λέγεται ὕψος ἢ *ἄξων* τοῦ κώνου, ἡ ΑΓ, *γενέτειρα* τῆς καμπύλης ἐπιφανείας τοῦ κώνου, εἶνε ἡ πλευρὰ αὐτοῦ.

99. Ἐπιφάνεια κώνου.—Ἔστω εἷς κῶνος ΚΑΓ (σχ. 153) καλύπτομεν τὴν καμπύλην ἐπιφάνειαν αὐτοῦ διὰ φύλλου χάρτου, εἶτα σχίζομεν αὐτὸ κατὰ μίαν πλευρὰν ΚΓ καὶ ἀναπτύσσομεν ἐπὶ ἐπιπέδου. Εἶνε φανερὸν ὅτι ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως θὰ ἐκτυλιχθῇ εἰς κυκλικόν τι τόξον ΓΔΓ′ (Σχ. 154) ἡ δὲ καμπύλη ἐπιφάνεια εἰς τομέα ΑΓΓ′. Ἡ ἀκτὶς ΑΓ τοῦ τομέως εἶνε ἴση μὲ τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου καὶ τὸ τόξον ΓΔΓ′ ἔχει μῆκος ἴσον μὲ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως τοῦ κώνου. Ὥστε ἡ καμπύλη ἐπιφάνεια τοῦ κώνου ἀναπτυσσομένη ἐπὶ ἐπιπέδου μεταβάλλεται εἰς κυκλικὸν τομέα, οὗ τὸ ἐμβαδὸν ἰσοῦται, ὡς γνωστόν, μὲ τὸ μῆκος τοῦ τόξου ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος (ἐδ. 67).



Σχ. 154

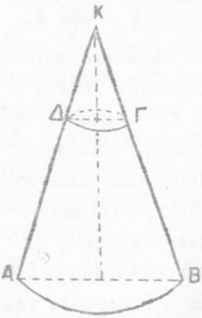
Ἄρα τὸ ἐμβαδὸν τῆς καμπύλης ἐπιφανείας κώνου εὑρίσκομεν, ἂν

(1) Ὁ διδάσκων δεικνύει κῶνον ὀρθόν (ἐδ. 3).

πολλαπλασιάσωμεν τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς του. Π. χ. ἐὰν ΒΓ=0μ.,3 καὶ ΑΓ=1μ., τότε τὸ ἐμβαδὸν τῆς καμπύλης ἐπιφανείας=3,14×0,6×0,5=0 τ. μ.,9420. Προσθέτοντες καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως, τὸ ὁποῖον εἶνε 3.14×0,09=0 τ. μ., 2826 ἔχομεν 1 τ. μ., 2246 διὰ *τὴν ὁλικὴν ἐπιφάνειαν* τοῦ κώνου.

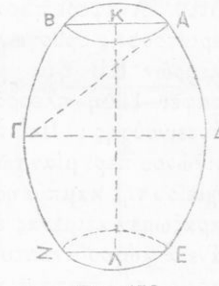
100. Ὄγκος κώνου.— Ὁ κανὼν τῆς εὑρέσεως τοῦ ὄγκου πυραμίδος (ἐδ. 93) ἀληθεύει καὶ ἐπὶ τοῦ κώνου, ἤτοι *πολλαπλασιάζομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ τρίτον τοῦ ὕψους*. Πράγματι. ὁ κῶνος δύναται νὰ νοηθῇ ὡς πυραμίς, ἧς ἡ βάσις εἶνε πολύγωνον κανονικὸν ἔχον ἄπειρον πλῆθος πλευρῶν. Π.χ. ὁ ὄγκος κώνου ἔχοντος ὕψος 0 μ.,95 καὶ ἀκτῖνα βάσεως 0 μ.,3 εἶνε

0 τ. μ.,2826×0,95 : 3=0,0942×0,95=0 κ. μ.,089490.



Σχ. 155

101. Ἐὰν κόψωμεν κῶνον δι' ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν, ἡ τομὴ εἶνε κύκλος· καὶ ἐὰν ἀφαιρέσωμεν τὸν μικρὸν κῶνον ΚΓΔ (Σχ.155) τὸ ἀπομένον στερεὸν ΑΒΓΔ λέγεται *κόλουρος κῶνος*· τοιοῦτο σχῆμα ἔχουσιν αἱ γάστραι, αἱ λεκάναι, καλύμματά τινα τῶν λαμπῶν, ἵνα πίπτῃ τὸ φῶς πρὸς τὰ κάτω (ἀμπαζούρ).



Σχ. 156.

102. Ὄγκος βαρελίων.—Πολλαὶ μέθοδοι ἐπροτάθησαν πρὸς μέτρησιν τῆς χωρητικότητος βαρελίου· ἡ ἁπλουστέρα συνίσταται εἰς τὸ νὰ ἐξομοιώσωμεν αὐτὸ μὲ κύλινδρον ἔχοντα ὕψος τὴν ἀπόστασιν ΚΛ τῶν δύο βάσεων τοῦ βαρελίου καὶ διάμετρον τὸν μέσον ὅρον τῆς διαμέτρου ΕΖ (τῆς βάσεως) καὶ τῆς διαμέτρου ΓΔ (τοῦ μέσου). Ἔστω βαρέλιον (σχ. 156) ἔχον τὰς ἑξῆς διαστάσεις : Ὕψος ΚΛ=1 μ.,40. ΕΖ=0μ.,68 καὶ ΓΔ=0μ.,80· μέσος ὅρος τῶν διαμέτρων : $\frac{0,68+0,80}{2}$ =0 μ.,74. Ὁ ὄγκος κυλίνδρου ἔχοντος ὕψος 1 μ.,40 καὶ διάμετρον 0 μ.,74=$3,14\times(0,37)^2\times1,40$=602 λίτραι (περίπου).

ΣΗΜ. Εἰς τὰ τελωνεῖα μεταχειρίζονται διὰ τὸν ὄγκον βαρελίων τὸν τύπον $0,525\times\delta^3$, ὅπου *δ* παριστᾷ τὸ μῆκος τῆς διαγωνίου ΓΑ. Π.χ. ἐὰν ΓΑ=1 μ. ἢ 10 π., τότε ὄγκος=$0,525\times10^3$=0,525×1000=525 λίτρας. Ἐὰν ΓΑ=2 μ. ἢ 20 π. τότε ὄγκος=0.525×20^3=0,525×8000=4200 λίτρας. Κατασκευάζουσι πίνακα διαφόρων τιμῶν τοῦ ὄγκου ἀντιστοιχουσῶν εἰς διαφόρους τιμὰς τῆς διαγωνίου ΓΑ. Διὰ τῶν τιμῶν τούτων βαθμολογοῦσι μίαν ῥάβδον, τὴν ὁποίαν εἰσάγοντες εἰς τὸ βαρέλιον κατὰ τὴν διεύθυνσιν ΓΑ, ἀναγινώσκουσιν ἀμέσως τὴν χωρητικότητα.

Ἐπανάληψις δι' ἐρωτήσεων καὶ ἀσκήσεων.

Πῶς γεννᾶται εἷς κύλινδρος; Ποία γραμμὴ γεννᾷ τὴν καμπύλην ἐπιφάνειαν αὐτοῦ; Δι' ἑκάστου σημείου τῆς καμπύλης ἐπιφανείας ἑνὸς κυλίνδρου πόσας εὐθείας δυνάμεθα νὰ χαράξωμεν κειμένας ἐπ' αὐτῆς; Ἀνάφερε παραδείγματα σωμάτων ἐχόντων σχῆμα κυλίνδρου. Πῶς εὑρίσκεται τὸ ἐμβαδὸν τῆς καμπύλης ἐπιφανείας κυλίνδρου; Θέλομεν νὰ καλύψωμεν διὰ χαρτίου τὴν καμπύλην ἐπιφάνειαν κυλίνδρου ἔχοντος ὕψος 12 δακτύλων καὶ περιφέρειαν βάσεως 20 δ., ποῖον σχῆμα πρέπει ν' ἀποκόψωμεν ἐκ τοῦ χαρτίου; Πῶς εὑρίσκεται ὁ ὄγκος κυλίνδρου; Σχεδίασον ἕνα κῶνον καὶ δεῖξον τὴν κορυφήν, τὸ ὕψος, τὴν πλευρὰν καὶ τὴν βάσιν αὐτοῦ. Ἀνάφερε παραδείγματα κώνου. Ποῖον στερεὸν γεννᾶται διὰ τῆς περιστροφῆς ὀρθογωνίου τριγώνου ΚΒΓ περὶ μίαν τῶν καθέτων αὐτοῦ πλευρῶν ΚΒ ἥτις μένει ἀκίνητος; Κατὰ τὴν περιστροφὴν ταύτην τ γράφει 1) ἡ πλευρὰ ΒΓ. 2) ἡ ὑποτείνουσα ΚΓ, 3) ἓν σημεῖον τῆς ὑποτεινούσης; Ποῖον στερεὸν γεννᾶται διὰ τῆς περιστροφῆς οἱουδήποτε τριγώνου περὶ μίαν τῶν πλευρῶν του; (Βλ. σελ. 23, Σημ.). Δι' ἑκάστου σημείου τῆς καμπύλης ἐπιφανείας ἑνὸς κώνου πόσας εὐθείας δυνάμεθα νὰ χαράξωμεν κειμένας ἐπ' αὐτῆς; Ποῖον σχῆμα λαμβάνει καμπύλη ἐπιφάνεια κώνου ἀναπτυσσομένη ἐπὶ ἐπιπέδου; Θέλομεν νὰ καλύψωμεν διὰ χαρτίου τὴν ἐπιφάνειαν κώνου, οὗ ἡ πλευρὰ εἶνε 6 δ. καὶ ἡ διάμετρος τῆς βάσεως 6 δάκ., ποῖον σχῆμα πρέπει νὰ σχεδιάσωμεν καὶ ἀποκόψωμεν ἐκ τοῦ χαρτίου; Πῶς εὑρίσκεται τὸ ἐμβαδὸν 1) τῆς καμπύλης ἐπιφανείας τοῦ κώνου καὶ 2) ὁ ὄγκος αὐτοῦ; Τί καλεῖται κόλουρος κῶνος; Ἀνάφερε παραδείγματα αὐτοῦ. Πῶς εὑρίσκεται ὁ ὄγκος τῶν βαρελίων;

1) Πρόκειται νὰ βερνικώσωμεν κυλινδρικὸν σωλῆνα, οὗ ἡ περιφέρεια εἶνε 3μ.,25 καὶ τὸ ὕψος 13 μ.,40, πόσον θὰ πληρώσωμεν πρὸς 75 λεπτ. τὸ τ. μέτρον;

2) Πόσα κ. μ. χώματος πρέπει νὰ ἀφαιρέσωμεν ἐκ τῆς γῆς, ἵνα κατασκευάσωμεν φρέαρ κυλινδρικὸν βάθους 12 μ. καὶ διαμέτρου 1 μ.,25;

3) Δύο δεξαμεναί, ἡ μία κυλινδρικὴ ὕψους 4μ. καὶ βάσεως 12 τ. μ. καὶ ἡ ἄλλη κυβικὴ πλευρᾶς 4 μ. εἶνε πλήρεις ὕδατος· ποία περιέχει περισσότερον ὕδωρ;

4) Ἡ χωρητικότης δεξαμενῆς κυλινδρικῆς εἶνε 150028 λίτραι καὶ τὸ βάθος 0 μ., 56. Ζητεῖται τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως τῆς δεξαμενῆς.

5) Πόσος τσίγκος χρειάζεται, διὰ νὰ καλύψωμεν στέγην κωνικὴν ἔχουσαν περιφέρειαν βάσεως 9 μ. καὶ πλευρὰν 5 μέτρ.

6) Ἀξιωματικός τις θέλει νὰ στήσῃ σκηνὴν κωνικοῦ σχήματος, ἧς ὁ ἐσωτερικὸς ὄγκος νὰ εἶνε 2 κ. μ. καὶ τὸ ὕψος 2 μ. ποῖον θὰ εἶνε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως;

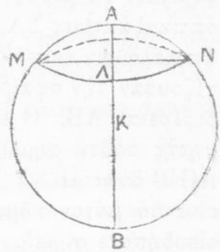
7) Κηπουρὸς θέλων νὰ διπλασιάσῃ τὴν εἰς τὸν κῆπόν του εἰσερχομένην ποσότητα ὕδατος, πληρώνει διπλάσια καὶ διπλασιάζει τὴν διάμετρον τοῦ ἀγωγοῦ σωλῆνος. Ὁ ὑδρονομεὺς τὸν καταγγέλλει καὶ ἐνάγεται εἰς δίκην. Τίς ὁ λόγος;

8) Ἐδανείσθη τις σάκκον σίτου ὕψους 4 ποδῶν καὶ περιφερείας 6 ποδῶν. Ἵνα ἀπαλλαγθῇ τῆς ὑποχρεώσεως, ἀποδίδει δύο σάκκους ὕψους 4 ποδῶν καὶ περιφερείας 3 ποδῶν. Ζητεῖται, ἐὰν ἀπέδωκε τὴν δανεισθεῖσαν ποσότητα σίτου· (Οἱ σάκκοι εἶνε κυλινδρικοί).

III. ΠΕΡΙ ΣΦΑΙΡΑΣ

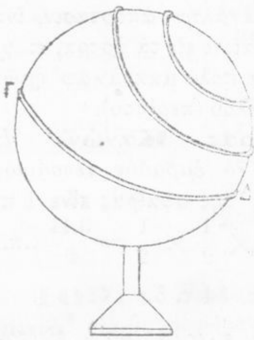
Ἐν ἐδ. 10—12 εἴπομεν περὶ σφαίρας, τῆς ὁποίας ἡ ἐπιφάνεια ἔχει ἰδιότητα ἀνάλογον πρὸς τὴν περιφέρειαν κύκλου· δυνάμεθα ὅμως νὰ ὁρίσωμεν τὴν σφαῖραν καὶ ὡς ἑξῆς:

103. Γένεσις σφαίρας. — Ἐὰν στρέψωμεν ἡμικύκλιον ΑΜΒΚΑ (Σχ. 157) περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ ΑΒ, θὰ ἔλθῃ διαδοχικῶς εἰς διαφόρους θέσεις ἐκτοπίζον οὕτως ὡρισμένον χῶρον κατὰ τὴν διάβασίν του, ὅστις λέγεται *ὄγκος τῆς σφαίρας*. Ἡ ἡμιπεριφέρεια ΑΜΒ κατὰ τὴν περιστροφὴν γεννᾷ *τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας*. Πᾶν σημεῖον Μ τῆς ἡμιπεριφερείας γράφει κατὰ τὴν περιστροφὴν περιφέρειαν ΜΝ ἔχουσαν τὸ κέντρον Λ ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΑΒ καὶ ἀκτῖνα ΛΜ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ.



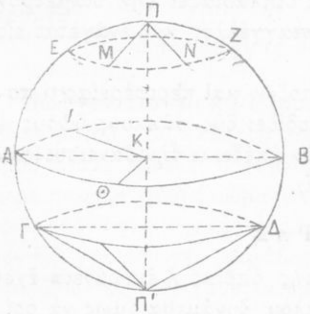
Σχ. 157.

104. Ἐξέλεγξις σφαιρικῆς ἐπιφανείας. — Κατασκευάζομεν ἐκ σύρματος διαφόρους κύκλους ἀκτῖνος μικροτέρας ἢ τὸ πολὺ ἴσης μὲ τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας καὶ ἐφαρμόζομεν ἕκαστον ἐπὶ τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας εἰς διαφόρους θέσεις (Σχ. 158). Ἐὰν τις ἐξ αὐτῶν δὲν ἐφαρμόσῃ ἀκριβῶς, συμπεραίνομεν ὅτι εἰς τὸ μέρος τοῦτο ἡ ἐπιφάνεια δὲν εἶνε σφαιρική. Ἐὰν ἡ διάμετρος τοῦ δακτυλίου ΓΔ εἶνε ἀκριβῶς ἴση μὲ τὴν διάμετρον τῆς σφαίρας, θὰ διέλθῃ οὗτος μετά τινος τριβῆς.



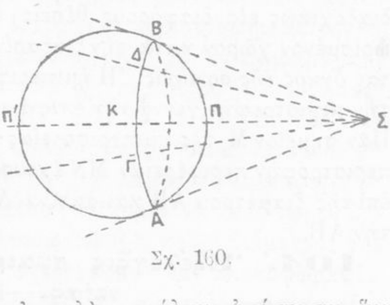
Σχ. 158.

105. Πόλοι κύκλου. — Λέγονται *πόλοι* ἑνὸς κύκλου ΕΖ κεχαραγμένου ἐπὶ σφαίρας τὰ δύο ἄκρα Π καὶ Π′ τῆς διαμέτρου, ἥτις εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου (Σχ. 159). Ἐκ τοῦ τρόπου τῆς γενέσεως τῆς σφαίρας βλέπομεν ὅτι αἱ ἀπὸ τῶν διαφόρων σημείων τῆς περιφερείας ἀποστάσεις ΠΕ, ΠΜ, ΠΝ, ΠΖ, κλπ. τοῦ πόλου Π εἶνε ἴσαι· διότι, ὅταν τὸ ἡμικύκλιον ΠΕΠ′ στρέφηται περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ, τὸ σημεῖον Π μένει ἀκίνητον, τὸ σημεῖον Ε γράφει τὴν περιφέρειαν ΕΖ καὶ κατὰ τὴν κίνησιν ταύτην ἡ χορδὴ ΠΕ δὲν ἀλλάσσει μῆκος. Ὅλοι οἱ κύκλοι ΕΖ, ΑΒ, ΓΔ,... ὧν τὰ ἐπίπεδα εἶνε παράλληλα, ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς πόλους Π καὶ Π΄. Μεταξὺ τῶν ἀπείρων τούτων κύκλων, εἷς εἶνε ὁ μέγιστος, ὁ ΑΒ. Τὰ κέντρα των κεῖνται ἐπὶ τῆς γραμμῆς τῶν πόλων ΠΠ΄. Οἱ κύκλοι οὗτοι λέγονται *παράλληλοι* τῆς σφαίρας.



Σχ. 159.

106. Ζώνη. — Οἱ παράλληλοι τῆς σφαίρας διαιροῦσι τὴν ἐπιφάνειαν αὐτῆς εἰς λωρίδας, αἱ ὁποῖαι καλοῦνται *ζῶναι*. Ἀφ' οἱουδήποτε σημείου Σ πόρρω τῆς σφαίρας κειμένου καὶ ἂν παρατηρήσωμεν αὐτὴν δὲν θὰ τὴν ἴδωμεν ὁλόκληρον ἀλλὰ μέρος μόνον αὐτῆς, μικρότερον ἡμισφαιρίου, τὸ ὁποῖον περιορίζεται πάντοτε ὑπὸ περιφερείας. Τὸ μέρος τοῦτο ΑΠΒ ὁρατὸν ἐκ τοῦ Σ εἶνε ζώνη (σχ. 160). Αἱ ὀπτικαὶ ἀκτῖνες ΣΑ, ΣΒ, ΣΓ, ΣΔ,... ἀποτελοῦσιν ἐπιφάνειαν κώνου ἐγγίζουσαν τὴν σφαῖραν κατὰ τὴν περιφέρειαν ΑΒ. Ὁ εἰς τὸ Σ παρατηρητὴς οὐδὲν σημεῖον τοῦ μέρους ΑΠ΄Β δύναται νὰ ἴδῃ. Ἡ σφαῖρα εἶνε τὸ μόνον σῶμα, τὸ ὁποῖον ἀφ' οἱουδήποτε σημείου καὶ ἂν παρατηρῆται, προσπίπτει πάντοτε εἰς τὸν ὀφθαλμὸν περιοριζόμενον ὑπὸ κυκλικοῦ γύρου. Πρέπει νὰ τεθῇ τις εἰς πολὺ μεγάλην ἀπόστασιν, ἵνα ἴδῃ τὸ ἥμισυ περίπου τῆς σφαίρας. Τοῦτο συμβαίνει εἰς τὰ ἄστρα, π. χ. εἰς τὸν ἥλιον, εἰς τὴν σελήνην κτλ.. τὰ ὁποῖα εἶνε πολὺ μακρὰν ἀφ' ἡμῶν καὶ περιορίζονται ὑπὸ περιφερείας μεγίστου κύκλου (περίπου).



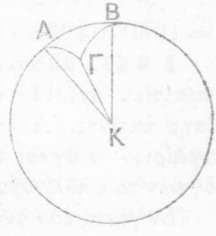
Σχ. 160.

107. Ἐμβαδὸν ἐπιφανείας σφαίρας. Κανών. — *Ἡ ἐπιφάνεια μιᾶς σφαίρας ἔχει ἐμβαδὸν ἴσον πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τεσσάρων μεγίστων κύκλων αὐτῆς.* Π. χ. ἐὰν ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας εἶνε 1 π. εἷς μέγιστος κύκλος αὐτῆς θὰ ἔχῃ ἐμβαδὸν $2{,}14 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3.14}{4}$ τ.π., ἡ δὲ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας $\frac{3{,}14}{4} \times 4 = 3$ τ. π. 14 τ. δ.

Ἡ ἐξήγησις τοῦ κανόνος τούτου δὲν εἶνε τόσον εὔκολος ὅσον εἰς τὸν κύλινδρον (ἐδ. 98) καὶ εἰς τὸν κῶνον (ἐδ. 100), διότι αἱ ἐπιφάνειαι τοῦ κυλίνδρου καὶ τοῦ κώνου εἶνε ἀναπτυκταί, δηλ. ἐκτυλίσσονται ἢ ἀναπτύσσονται ἐπὶ ἐπιπέδου, ἐν ᾧ, ἂν ἐπιχειρήσωμεν νὰ ἀναπτύξωμεν ἐπὶ ἐπιπέδου καὶ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας, θὰ ἴδωμεν ὅτι τοῦτο εἶνε ἀδύνατον, ἐκτὸς ἂν σχίσωμεν ἢ συμπτύξωμεν μέρος τι αὐτῆς.

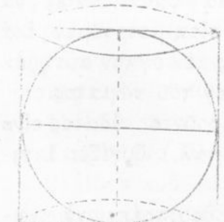
108. Ὄγκος σφαίρας. Κανών. — *Ὁ ὄγκος μιᾶς σφαίρας* *εὑρίσκεται, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας της ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνός της.* Π. χ. ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας, ἥτις ἔχει διάμετρον 1 π., θὰ εἶνε 3 τ. π., $14 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{3,14}{6} = 523$ κ.δ.(περίπου).

Ἵνα ἐξηγήσωμεν τὸν κανόνα τοῦτον ἑνώνομεν τὸ κέντρον τῆς σφαίρας μὲ τρία σημεῖα Α, Β, Γ τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς πολὺ πλησίον ἀλλήλων κείμενα (σχ. 161). Τὸ στερεὸν ΚΑΒΓ θὰ διαφέρῃ πολὺ ὀλίγον μιᾶς τριγωνικῆς πυραμίδος καὶ ἑπομένως ὁ ὄγκος του εἶνε ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεως ΑΒΓ ἐπὶ τὸ τρίτον τοῦ ὕψους (ἐδ. 94), δηλ. ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας. Ἐὰν νοήσωμεν τὴν σφαῖραν διῃρημένην εἰς πολλὰς τοιαύτας τριγωνικὰς πυραμίδας, βλέπομεν ὅτι ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας θὰ εἶνε ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν βάσεών των (δηλ. μὲ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας) ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος.



Σχ. 161.

***Σημ.** τοὺς κανόνας ἐδ. 107; 108, ἀπέδειξε τὸ πρῶτον ὁ Ἀρχιμήδης, ὁ διασημότερος μαθηματικὸς τῆς ἀρχαιότητος, γνωστὸς ἡμῖν καὶ ἐκ τῆς Φυσικῆς· εἶνε ὁ πρῶτος ὅστις ἔδωκε τὴν κατὰ προσέγγισιν 0,01 τιμὴν τοῦ π (ἐδ. 51), ἤτοι εὗρε $\pi = \frac{22}{7} = 3,142...$ Ἡ τελευταία ἀνακάλυψις τοῦ Ἀρχιμήδους, δι' ἣν ἐφαίνετο λίαν ὑπερήφανος, ἦτο ἡ ἑξῆς: *Ὁ εἰς σφαῖραν περιγεγραμμένος κύλινδρος* (σχ. 162) *ὅστις ἔχει βάσιν μέγιστον κύκλον τῆς σφαίρας καὶ ὕψος τὴν διάμετρον αὐτῆς, ἰσοῦται μὲ τὸ τριπλάσιον τοῦ ἡμισφαιρίου· ἡ δὲ ὁλικὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου ἰσοῦται ἐπίσης μὲ τὸ τριπλάσιον τῆς ἐπιφανείας τοῦ αὐτοῦ ἡμισφαιρίου.*


Σχ. 162.

Ὁ Πλούταρχος ἀναφέρει ὅτι οἱ συγγενεῖς καὶ φίλοι τοῦ Ἀρχιμήδους, κατὰ παράκλησίν του, ἐχάραξαν ἐπὶ τοῦ μνημείου του τὸ σχ. 162 καὶ ἀντὶ ὑπογραφῆς τὸν λόγον 3 : 2, τῆς ἐπιφανείας (ἢ τοῦ ὄγκου) τοῦ κυλίνδρου πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν (ἢ τὸν ὄγκον) τῆς σφαίρας.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

109. α') *Νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν τῆς γῆς εἰς τετρ. χιλιόμετρα.* (Θὰ ὑποθέσωμεν τὴν γῆν σφαιρικήν, τὸν δὲ μεσημβρινὸν αὐτῆς 40000 χιλιόμ.). Ἡ ἀκτὶς εἶνε $\frac{40000}{2\pi}$ (ἐδ. 52)· τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς μεγίστου κύκλου εἶνε $\pi. \left(\frac{40000}{2\pi}\right)^2 = \pi. \frac{40000^2}{4\pi^2}$ ἄρα τὸ ἐμβαδὸν τῆς γηΐνης ἐπιφανείας θὰ εἶνε (ἐδ. 108) $4 \times \pi \times \frac{40000^2}{4\pi^2} = \frac{1600000000}{3,14159265} =$ 509295818 τ. χ.

6') *Νὰ ὑπολογίσωμεν τὸν ὄγκον τῆς γῆς εἰς κυβ. μυριάμ.*

Ἡ ἀκτὶς εἶνε $\frac{4000}{2\pi}=\frac{2000}{\pi}$ μυριάμ. Ἡ ἐπιφάνεια εἰς τετρ. μυρ. εἶνε $4\times\pi\times\left(\frac{2000}{\pi}\right)^2=\frac{4\times\pi\times2000^2}{\pi^2}$. Ἑπομένως ὁ ὄγκος θὰ εἶνε :

$$\frac{4\times\pi\times2000^2}{\pi^2}\times\frac{1}{3}\cdot\frac{2000}{\pi}=\frac{4\times\pi\times2000^3}{3\times\pi^2\times\pi}=\frac{4\times8000000000}{3\times\pi^2}=\frac{32000000000}{29,60895168}$$

$=1080754238$ κυβ. μυριάμ.

110. Παρατ. Δεξαμεναί τινες, στέρναι, κτλ. ἔχουσι σχῆμα ἡμισφαιρίου (σχ. 11)· ὁ ὄγκος των ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ὄγκου σφαίρας ἴσης ἀκτῖνος. Ἄλλαι ἔχουσι σχῆμα κυλίνδρου ἐφ' οὗ ἐπικάθηται ἡμισφαίριον· ὁ ὄγκος τῆς τοιαύτης δεξαμενῆς ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τοῦ κυλίνδρου καὶ τοῦ ἡμισφαιρίου.

Ἐν γένει, ἐὰν σῶμά τι χωρίζηται εἰς μέρη, τῶν ὁποίων ὁ ὄγκος εὑρίσκεται διὰ τῶν γεωμετρικῶν μεθόδων, τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν μερῶν τούτων ἰσοῦται τῷ ὄγκῳ τοῦ σώματος.

111. Ὄγκος οἱουδήποτε σώματος. — Ὅταν τὸ σῶμα δὲν δύναται νὰ χωρισθῇ εἰς ἄλλα γεωμετρικά, εὑρίσκομεν, εἴς τινας περιπτώσεις, τὸν ὄγκον αὐτοῦ μὲ ἀρκετὴν προσέγγισιν, διὰ τῶν ἑξῆς μεθόδων·

α') Πληροῦντες ὕδατος δοχεῖον, θέτομεν ἐντὸς αὐτοῦ τὸ σῶμα· συλλέγομεν ἐπιμελῶς τὸ ἐκχυθὲν ὕδωρ ὅπερ μετροῦμεν διά τινος λίτρας· ὁ προκύπτων ἀριθμὸς θὰ ἐκφράζῃ τὸν ὄγκον τοῦ σώματος εἰς κυβ. παλ.

6') Εἰσάγομεν τὸ σῶμα ἔν τινι δοχείῳ γνωστῆς χωρητικότητος καὶ πληροῦμεν τὰ κενὰ δι' ἄμμου. Ἀποσύρομεν τὸ σῶμα φροντίζοντες νὰ τινάξωμεν τὴν ἄμμον ἥτις προσκολλᾶται ἐπ' αὐτοῦ· εἶτα μετροῦμεν διά τινος λίτρας τὴν ἐν τῷ δοχείῳ ἄμμον καὶ ἀφαιροῦντες τὸν ὄγκον αὐτῆς ἐκ τῆς χωρητικότητος τοῦ δοχείου, εὑρίσκομεν τὸν ὄγκον τοῦ σώματος.

γ') Τὸ βάρος τοῦ ἐν τῷ κάδῳ τῆς σελ. 70 χωροῦντος ὕδατος εἶνε 412.5 χιλιόγρ., διότι 1 λίτρα ὕδατος (δηλ. 1 κυβ. παλ.) ζυγίζει 1 χιλιόγρ., ἢ 312$^1/_2$ δρμ.

Ἐὰν ὁ κάδος ἦτο πλήρης οὐχὶ ὕδατος ἀλλὰ μολύβδου, πρέπει νὰ γνωρίζωμεν ὅτι ὁ μόλυβδος εἶνε 11$^1/_2$ φορὰς βαρύτερος ἴσου ὄγκου ὕδατος. Ὅταν συγκρίνωμεν τὸ βάρος σώματός τινος πρὸς τὸ βάρος ἴσου ὄγκου ὕδατος, εὑρίσκομεν ἀριθμόν, ὅστις ἐν τῇ Φυσικῇ καλεῖται *εἰδικὸν βάρος* τῆς ὕλης, ἐξ ἧς τὸ σῶμα σύγκειται· ὁ ἀριθμὸς οὗτος δύναται νὰ εἶνε μεγαλύτερος ἢ μικρότερος τῆς μονάδος, καθόσον τὸ σῶμα εἶνε βαρύτερον ἴσου ὄγκου ὕδατος (καθὼς τὰ βαρέα μέταλλα, τὸ μάρμαρον) ἢ ἐλαφρότερον (οἰνόπνευμα, ἔλαιον, ξύλον κτλ.) Ἡ γνῶσις τοῦ εἰδικοῦ βάρους τῶν σωμάτων εἶνε πολὺ χρήσιμος, διότι 1ον *εὑρίσκομεν τὸ βάρος ἑνὸς σώματος εἰς χιλιόγραμμα* χωρὶς νὰ τὸ ζυγίσωμεν, ἀρκεῖ νὰ γνωρίζωμεν τὸν ὄγκον του εἰς κ. π. *Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν τὸν ὄγκον ἐπὶ τὸ εἰδικὸν βάρος.* 2ον *Εὑρίσκομεν τὸν ὄγκον σώματος εἰς κυβ. παλ.*, ὅταν γνωρίζωμεν τὸ βάρος αὐτοῦ εἰς χιλιόγραμμα. *Πρὸς τοῦτο διαιροῦμεν τὸ βάρος* *διὰ τοῦ εἰδικοῦ βάρους.* Π. χ. τεμάχιον σιδήρου ζυγίζει 11,7 χιλιόγρ. Ἐπειδὴ τὸ εἰδ. βάρος τοῦ σιδήρου εἶνε 7,8,ὁ ὄγκος τοῦ τεμαχίου θὰ εἶνε 11,7 : 7,8=1,500 κυβ. π.

δ') Τέλος, δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν τὴν ὑδροστατικὴν ἀρχὴν τοῦ Ἀρχιμήδους : Ἔστω 11,7 χιλιόγρ. τὸ βάρος τοῦ σώματος ἐν τῷ ἀέρι καὶ 10,2 χιλιόγρ. τὸ βάρος αὐτοῦ ἐν τῷ ὕδατι· ἡ διαφορὰ 11,7—10,2 =1,5 χιλγρ. παριστᾷ τὸ βάρος τοῦ ἐκτοπισθέντος ὕδατος· ἀλλὰ 1,5 χιλιόγρ. ὕδατος ἔχουσιν ὄγκον 1,5 κυβ. παλ. Ἄρα τόσος θὰ εἶνε καὶ ὁ ὄγκος τοῦ σώματος.

Τὸ βάρος τοῦ ἀνθρωπίνου σώματος πολὺ ὀλίγον διαφέρει τοῦ βάρους ἴσου ὄγκου ὕδατος,διότι εὐκόλως αἰωρούμεθα ἐν τῇ θαλάσσῃ κολυμβῶντες ὕπτιοι (ἀνάσκελα).Ἄρα, ἐὰν ὁ ἄνθρωπος ἔχῃ βάρος 70 χιλιόγρ. θὰ κατέχῃ ὄγκον 70 κυβ. παλ. περίπου.

Ἐπανάληψις δι' ἐρωτήσεων καὶ ἀσκήσεων.

Ποίαν ἰδιότητα ἔχουσιν ὅλα τὰ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας μιᾶς σφαίρας ; Ποῖα σχήματα πρέπει νὰ στρέψωμεν περὶ ἀκίνητον ἄξονα, ἵνα παραχθῶσι 1) κύλινδρος ; 2) κῶνος ; 3) κόλουρος κῶνος ; 4) σφαῖρα ; Ἀνάφερε παραδείγματα σφαιρικῶν σωμάτων. Τί καλεῖται ἀκτὶς καὶ τί διάμετρος σφαίρας ; Ποῖοι καλοῦνται μέγιστοι κύκλοι μιᾶς σφαίρας καὶ πόσους δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ; Πῶς ἐξελέγοχμεν, ἂν μία ἐπιφάνεια εἶνε σφαιρική ; Τί λέγονται πόλοι ἑνὸς κύκλου τῆς σφαίρας ; Τί λέγονται παράλληλοι τῆς σφαίρας καὶ τί ζῶναι ; Πῶς εὑρίσκεται 1) τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ; 2) ὁ ὄγκος αὐτῆς ; Διὰ τίνων μεθόδων εὑρίσκομεν τὸν ὄγκον οἱουδήποτε σώματος ;

1) Πόσα τετραγ. μέτρα ὑφάσματος χρειάζονται δι' ἀερόστατον σφαιρικὸν ἀκτῖνος 10 μέτρων ;

2) Πόσα κυβ. μέτρα φωταερίου χρειάζονται πρὸς πλήρωσιν τοῦ προηγουμένου ἀεροστάτου ;

3) Ἐὰν διπλασιασθῇ ἡ ἀκτὶς σφαίρας, τί γίνεται ὁ ὄγκος αὐτῆς ;

4) Ἡ περιφέρεια μεγίστου κύκλου μιᾶς σφαίρας εἶνε 18 μέτρα. Ζητεῖται ὄγκος τῆς σφαίρας.

5) Μάρμαρον τοῦ σχήματος 148 ἔχει διαστάσεις 1,μ.50, 1,μ.20 καὶ 0,μ.80. Πόσον εἶνε τὸ βάρος του ; (Εἰδ. βάρος μαρμάρου 2,7).

6) Τεμάχιον μολύβδου ζυγίζει 345 χιλιόγρ. Ποῖος εἶνε ὁ ὄγκος του ;

7) Εἰς κιβώτιον τοῦ σχ. 148, διαστάσεων 1,μ.20, 0,μ.40 καὶ 0,μ.32 ἐτέθη ἄγαλμά τι· πρὸς συμπλήρωσιν τῶν κενῶν τοῦ κυβωτίου προσετέθησαν 75 λίτραι ἄμμου. Ζητεῖται ὁ ὄγκος τοῦ ἀγάλματος.

8) Ἡ ἀκτὶς τῆς σελήνης ἰσοῦται πρὸς τὰ $^3/_{11}$ τῆς ἀκτῖνος τῆς γῆς, τοῦ δὲ ἡλίου πρὸς 112 ἀκτῖνας τῆς γῆς. Νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον τῆς σελήνης καὶ τοῦ ἡλίου ἐν συγκρίσει πρὸς τὸν ὄγκον τῆς γῆς.

IV. ΠΕΡΙ ΠΡΟΒΟΛΩΝ

112. Ὁρισμοί. *Προοπτικὴ ἢ κεντρικὴ προβολὴ* σημείου Α ἐπὶ ἐπίπεδον Ε (σχ. 136) καλεῖται τὸ σημεῖον α καθ᾽ ὃ ἡ εὐθεῖα ἡ ἔκ τινος σταθεροῦ κέντρου Ο, ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου κειμένου, ἀγομένη πρὸς τὸ Α συναντᾷ τὸ ἐπίπεδον.

Πλαγία προβολὴ σημείου Α ἐπὶ ἐπίπεδον Ε καλεῖται τὸ σημεῖον Γ (σχ.136) εἰς ὃ ἡ ἐκ τοῦ Α ἀγομένη εὐθεῖα παράλληλος δοθείσης εὐθείας Ε, συναντᾷ τὸ ἐπίπεδον. Ἡ εὐθεῖα ΑΓ λέγεται *προβάλλουσα.*

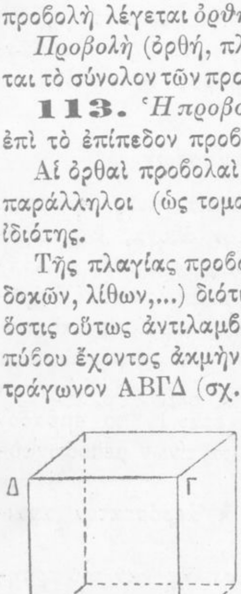
Τέλος, ἐὰν ἡ προβάλλουσα εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον προβολῆς, ἡ προβολὴ λέγεται *ὀρθή.*

Προβολὴ (ὀρθή, πλαγία ἢ κεντρικὴ) σχήματος ἐπὶ ἐπίπεδον Ε, λέγεται τὸ σύνολον τῶν προβολῶν τῶν σημείων τοῦ σχήματος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Ε.

113. *Ἡ προβολὴ εὐθείας ΑΒ εἶνε εὐθεῖα·* ἐὰν ἡ ΑΒ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον προβολῆς, τότε ἡ ὀρθὴ προβολή της εἶνε σημεῖον.

Αἱ ὀρθαὶ προβολαὶ ὡς καὶ αἱ πλάγιαι εὐθειῶν παραλλήλων εἶνε εὐθεῖαι παράλληλοι (ὡς τομαὶ παραλλήλων ἐπιπέδων ὑπὸ τρίτου, σελ. 81 3η ἰδιότης.

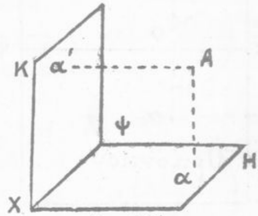
Τῆς πλαγίας προβολῆς γίνεται χρῆσις πρὸς παράστασιν πολυέδρων δοκῶν, λίθων,...) διότι παρουσιάζονται εἰς τὸν θεατὴν περισσότεραι ἕδραι, ὅστις οὕτως ἀντιλαμβάνεται σαφέστερα τὸ σῶμα. Π.χ. ἡ πλαγία προβολὴ πύξου ἔχοντος ἀκμὴν 2 δακ. εὑρίσκεται ὡς ἑξῆς: Κατασκευάζομεν τετράγωνον ΑΒΓΔ (σχ. 163) ἔχον πλευρὰν 2 δακ. Δι᾽ ἑκάστης κορυφῆς του ἄγομεν παραλλήλους τῇ Ε ἴσας (ἑκάστην) πρὸς τὸ $1/_2$ τῆς ΑΒ ἤτοι 1 δακ. καὶ συνδέομεν τὰ ἄκρα τῶν παραλλήλων.



Σχ. 163.

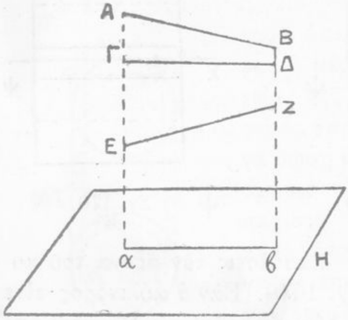
114. Ἡ ἀπεικόνισις τῶν στερεῶν ἐπὶ ἐπιπέδου (χαρτίου ἢ πίνακος) δὲν δύναται νὰ γίνῃ ἀκριβῶς, διότι αἱ γραμμαὶ τοῦ στερεοῦ δὲν κεῖνται πᾶσαι ἐφ᾽ ἑνὸς ἐπιπέδου, ὅθεν δέον νὰ φανταζώμεθα καλῶς τὸ ὑπὸ τοῦ σχήματος παριστώμενον στερεόν· π. χ. τὸ σχ. 141 παριστᾷ τετράεδρον, οὗ ἡ κορυφὴ Δ δέον νὰ ὑποτεθῇ ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου, τοῦ χαρτίου. Αἱ ἴσαι ἀκτῖνες ΚΙ, ΚΕ, ΚΑ τῆς σφαίρας (σχ. 162) παρίστανται ὑπὸ εὐθειῶν ἀνίσων. Ἐὰν θέλωμεν νὰ ἔχωμεν σχέδιον, οὗ πάντα τὰ μέρη μετρημένα διὰ τοῦ διαβήτου νὰ ἀπεικονίζωσιν ἀκριβῶς τὰ μέρη τοῦ ἀντικειμένου καταφεύγομεν εἰς *τὴν μέθοδον τῶν προβολῶν.* Λαμβάνομεν ἓν ὁριζόντιον ἐπίπεδον (ἐδ. 50) καὶ ἕτερον περιέχον τὴν κατακόρυφον εὐθεῖαν, ὅπερ λέγεται *κατακόρυφον ἐπίπεδον.* Τὰ δύο ταῦτα ἐπίπεδα εἶνε κάθετα μεταξύ των (ἐδ. 83) καὶ τέμνονται κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΧΨ (σχ. 164) ἥτις καλεῖται *γραμμὴ τοῦ ἐδάφους.* Ἐὰν νοήσωμεν βιβλίον τι ἀνοικτὸν ἐπὶ τραπέζης καὶ ὑψώσωμεν ἓν φύλλον αὐτοῦ οὕτως, ὥστε νὰ μὴ κλίνῃ οὔτε πρὸς τὸ ἓν μέρος τοῦ βιβλίου οὔτε πρὸς τὸ ἄλλο, τὸ ἐπὶ τῆς τραπέζης κείμενον ἀνοικτὸν βιβλίον μᾶς παρέχει ἰδέαν τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου, τὸ δὲ ὑψωθὲν φύλλον, τοῦ κατακορύφου.

115. Ἡ ὀρθὴ προβολὴ σημείου Α ἐπὶ τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον Η λέγεται *ὁριζοντία προβολή*· ἐπίσης α′ εἶνε ἡ κατακόρυφος προβολὴ τοῦ σημείου Α (σχ. 164). Ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν μίαν μόνον ἐκ τῶν δύο προβολῶν α, α′, δὲν θὰ γνωρίζωμεν ἀκριβῶς τὴν θέσιν τοῦ σημείου Α· διότι πάντα τὰ σημεῖα τῆς κατακορύφου Αα ἔχουσι τὴν αὐτὴν ὁριζοντίαν προβολήν, ἐπίσης πάντα τὰ σημεῖα τῆς Αα′ ἔχουσι τὴν αὐτὴν κατακόρυφον προβολήν.



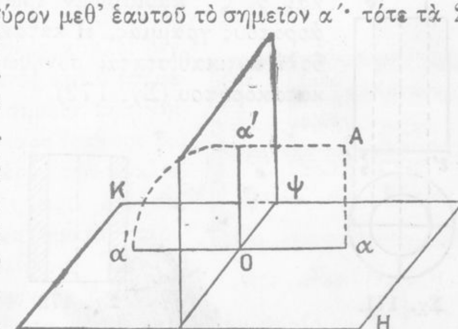
Σχ. 164.

Ἐὰν ὅμως γνωρίζωμεν τὰς δύο προβολὰς α, α′, δυνάμεθα ἐξ αὐτῶν νὰ προσδιορίσωμεν τὸ σημεῖον. Πρὸς τοῦτο, ἀρκεῖ νὰ φέρωμεν ἐκ τοῦ α κάθετον ἐπὶ τὸ Η καὶ ἐκ τοῦ α′ κάθετον ἐπὶ τὸ Κ. Ἡ συνάντησις τῶν καθέτων θὰ δώσῃ τὸ σημεῖον Α. Ὁμοίως βλέπομεν ὅτι μόνον ἡ ὁριζοντία προβολὴ αϐ εὐθείας τινος ΑΒ (σχ. 165) δὲν ἀρκεῖ νὰ προσδιορίσῃ τὴν θέσιν αὐτῆς διότι καὶ αἱ ΓΔ, ΕΖ (κείμεναι εἰς τὸ ἐπίπεδον τῶν παραλλήλων Αα, Βϐ) τὴν αὐτὴν ἔχουσι προβολήν. Ὡς τὸ σημεῖον καὶ ἡ εὐθεῖα ὁρίζονται τελείως ἐκ τῶν δύο προβολῶν αὐτῶν, οὕτω καὶ πᾶν ἀντικείμενον ὁρίζεται διὰ τῶν δύο προβολῶν του.



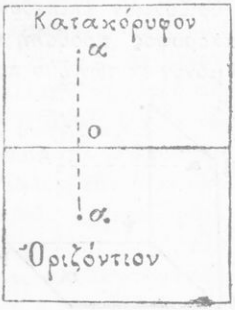
Σχ. 165.

116. *Κατάκλισις τοῦ ἐπιπέδου Κ.* Ἐὰν τὸ κατακόρυφον ἐπίπεδον στραφῇ περὶ τὴν ΧΨ (σχ.166) ὑπὸ γωνίαν 90°, θὰ τοποθετηθῇ κατὰ τὴν προεκβολὴν τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου παρασῦρον μεθ' ἑαυτοῦ τὸ σημεῖον α′· τότε τὰ 2 ἐπίπεδα ταὐτίζονται εἰς ἕν, ἡ δὲ γραμμὴ αα′ εἶνε εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὴν γραμμὴν τοῦ ἐδάφους. Ἐὰν τὰ 2 ταὐτισθέντα ἐπίπεδα (ἤτοι τὸ ΚΗ) στραφῶσι κατὰ 90° οὕτως, ὥστε νὰ λάβωσι τὴν ἐν τῷ σχ. 167 θέσιν, τότε τὸ μὲν ἄνωθεν τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους εὑρισκόμενον μέρος παριστᾷ τὸ κατακόρυφον ἐπίπεδον, τὸ δὲ κάτωθεν παριστᾷ τὸ ὁριζόντιον



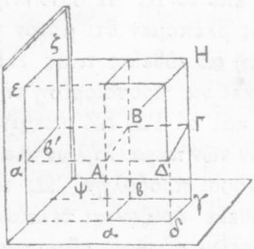
Σχ. 166.

Παραδείγματα. *α') Προβολαὶ κύβου ἔχοντος μίαν ἕδραν παράλληλον τῷ ὁριζοντίῳ ἐπιπέδῳ καὶ ἑτέραν παράλληλον τῷ κατακορύφῳ.* Εἶνε εὔκολον νὰ ἴδωμεν ὅτι ὁ κύβος ΑΗ (Σχ. 168) ἔχει καὶ τὰς δύο προβολάς του ἴσας πρὸς μίαν τῶν ἑδρῶν του, δηλ. πρὸς τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ.

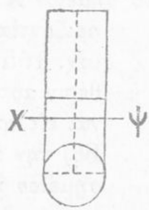


Σχ. 167.

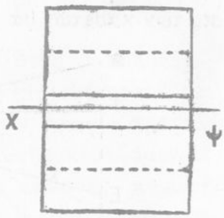
β') Προβολαὶ κυλίνδρου ἔχοντος βάσιν παράλληλον τῷ ὁριζοντίῳ ἐπιπέδῳ. Ἡ ὁριζοντία προβολὴ τοῦ κυλίνδρου εἶνε ὁ κύκλος τῆς βάσεως, ἡ δὲ κατακόρυφος ὀρθογώνιον ἔχον διαστάσεις τὴν διάμετρον τῆς βάσεως καὶ τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου (σχ. 169). Ἐὰν ὁ ἄξων (τὸ ὕψος) τοῦ κυλίνδρου εἶνε παράλληλος πρός τε τὸ ὁριζόντιον καὶ τὸ κατακόρυφον ἐπίπεδον, τότε ὁ κύλινδρος προ-



Σχ. 168.

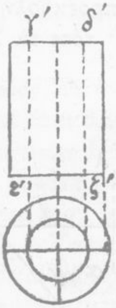


Σχ. 169.

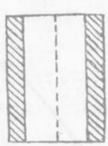


Σχ. 170.

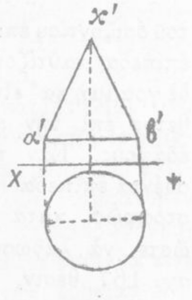
βάλλεται κατὰ δύο ὀρθογώνια ἴσα ἔχοντα διαστάσεις τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου καὶ τὴν διάμετρον τῆς βάσεως (σχ. 170). Ἐὰν ὁ κύλινδρος εἶνε κοῖλος, οὗ αἱ παρειαὶ ἔχουσι πάχος τι, αἱ δύο προβολαί του δίδονται ὑπὸ τοῦ σχ. 171. Αἱ ἐστιγμέναι γραμμαὶ γ΄ε΄ καὶ δ΄ ζ΄ παριστῶσιν ἐσωτερικὰς καὶ ἀοράτους γραμμάς. Ἡ κατακόρυφος προβολὴ ἀντικαθίσταται συνήθως διὰ τομῆς κατακορύφου (Σχ. 172).



Σχ. 171.



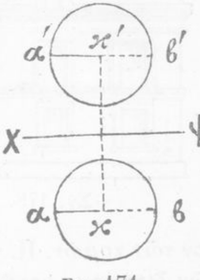
Σχ. 172.



Σχ. 173.

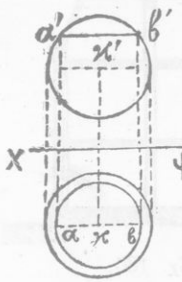
γ') Προβολαὶ κώνου ἔχοντος τὴν βάσιν παράλληλον τῷ ὁριζοντίῳ ἐπιπέδῳ. Ἡ ὁριζοντία προβολὴ τοῦ κώνου εἶνε ὁ κύκλος τῆς βάσεως (σχ. 173) καὶ ἡ κατακόρυφος τρίγωνον ἰσοσκελὲς ἔχον βάσιν α′ β′, τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου ὕψος τὸ τοῦ κώνου καὶ πλευρὰς κ′α′, κ′β′ ἴσας τῇ πλευρᾷ τοῦ κώνου.

δ′) Προβολαὶ σφαίρας. Οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶνε ἡ θέσις σφαίρας, δυνάμεθα πάντοτε νὰ φέρωμεν δύο μεγίστους κύκλους καθέτους πρὸς ἀλλήλους, ὧν ὁ εἷς νὰ εἶνε παράλληλος τῷ ὁριζοντίῳ ἐπιπέδῳ καὶ ὁ ἄλλος τῷ κατακορύφῳ. Οἱ δύο οὗτοι κύκλοι, ὧν τομὴ εἶνε μία διάμετρος ἔχουσα προβολὰς αβ, α′β′ (σχ. 174), προβάλλονται ἐπὶ τῶν δύο ἐπιπέδων εἰς τὸ ἀληθὲς αὐτῶν μέγεθος. αἱ προβολαὶ τούτων εἶνε προβολαὶ τῆς σφαίρας. Ἡ τομὴ σφαίρας ὑπὸ ἐπιπέδου εἶνε κύκλος (ἐδ. 10), ὅστις, ἐὰν εἶνε παράλληλος τῷ ὁριζοντίῳ ἐπιπέδῳ, προβάλλεται ἐν αὐτῷ μὲν κατὰ κύκλον ἴσον, ἐν δὲ τῷ κατακορύφῳ κατ᾽ εὐθεῖαν α′β′ ἴσην τῇ διαμέτρῳ τῆς τομῆς (σχ.175.)

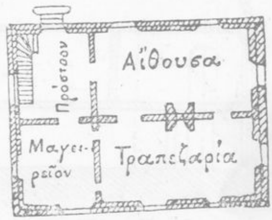


Σχ 174.

117. Καλεῖται *γεωγραφικὸς χάρτης* ἡ ἐπὶ ἐπιπέδου (φύλλου χάρτου) ἀπεικόνισις ὁλοκλήρου ἢ μέρους τῆς ἐπιφανείας τῆς γῆς. Ὁ γεωγραφικὸς χάρτης δὲν δύναται νὰ δώσῃ μετ᾽ ἀκριβείας τὸ σχῆμα τῶν μερῶν, ἅτινα παριστᾷ καὶ τὴν σχετικὴν θέσιν αὐτῶν, διότι ἡ γηίνη ἐπιφάνεια, πολὺ ὀλίγον διαφέρουσα τῆς σφαιρικῆς, δὲν ἀναπτύσσεται ἐπὶ ἐπιπέδου (ἐδ. 107). Διὰ τὴν παράστασιν τῶν ἡμισφαιρίων τῆς γῆς ἐπὶ χάρτου καταφεύγομεν εἰς τὴν μέθοδον τῶν προβολῶν.

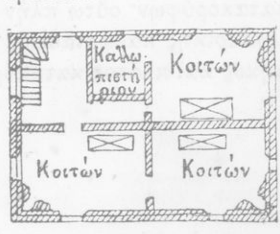


Σχ. 175.



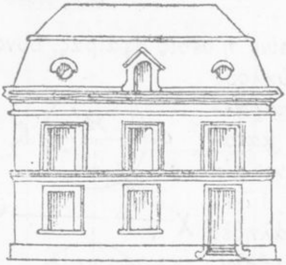
Σχ, 176,

Π.χ. νοήσωμεν ὅτι οἱ δύο κάθετοι κύκλοι (σχ. 174) εἶνε ὁ πρῶτος μεσημβρινὸς καὶ ὁ ἰσημερινὸς τῆς γῆς. Τὰ διάφορα σημεῖα τῆς γηίνης ἐπιφανείας δύνανται νὰ παρασταθῶσι διὰ τῶν προβολῶν των ἐπὶ τοῦ ἑτέρου τῶν κύκλων τούτων· καὶ ἂν μὲν προβληθῶσιν ἐπὶ τοῦ μεσημβρινοῦ, ὁρίζουσι δύο σχήματα παριστῶντα τὸ Α. καὶ Δ ἡμισφαίριον. Ἐὰν δὲ προβληθῶσιν ἐπὶ τοῦ ἰσημερινοῦ, ὁρίζουσιν ὁμοίως δύο σχήματα παριστῶντα τὸ Β. καὶ Ν. ἡμισφαίριον.

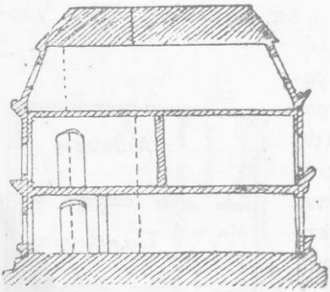


Σχ. 177.

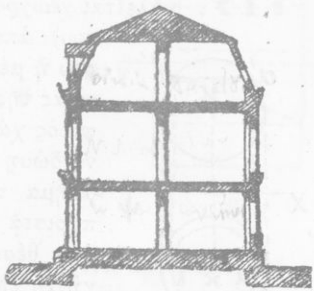
118. Περὶ προόψεως καὶ κατόψεως. — Εἰς τὰς ἐφαρμογὰς ἡ ὁριζοντία προβολὴ στερεοῦ σχήματος λέγεται *κάτοψις* αὐτοῦ, ἡ δὲ ἄλλη *πρόοψις*. Ἡ πρόοψις εἶνε *εὐθεῖα* ἢ *πλαγία* (profil), καθόσον στερεὸν ὁρᾶται ἀπ᾽ εὐθείας παρουσιάζον μίαν τῶν ἑδρῶν του ἢ πλαγίως παρουσιάζον μίαν τῶν ἀκμῶν ἢ γωνιῶν του. Εἰς τὰ παραδείγματα τοῦ ἐδ. 116 αἱ δύο προβολαὶ εἶνε ἀρκεταί, ἵνα προσδιορίσωσι τὸν κύβον, τὸν κύλινδρον κτλ. Ἀλλὰ τὰ σώματα τὰ ἔχοντα κατασκευὴν πολυπλοκωτέραν, ὡς αἱ οἰκίαι, αἱ μηχαναὶ (κοχλίας, τροχαλία, στρόφιγξ) δὲν προσδιορίζονται τελείως διὰ τῆς κατόψεως καὶ τῆς προόψεως. Καταφεύγομεν τότε εἰς τὴν μέθοδον *τῶν τομῶν*. Π. χ., ἵνα δείξωμεν ἐν σχεδίῳ τὴν ἐσωτερικὴν διάταξιν τῶν διαφόρων μερῶν οἰκίας, ὑποθέτομεν αὐτὴν τεμνομένην 1ον δι᾽ ὁριζοντίων ἐπιπέδων τόσων, ὅσα εἶνε τὰ πατώματα· οὕτως ἔχομεν τὴν



Σχ. 178.



Σχ. 179.



Σχ. 180.

κάτοψιν τῶν ὑπογείων, τὴν κάτοψιν τοῦ ἰσογείου πατώματος (Σχ. 176), τὴν κάτοψιν τοῦ πρώτου πατώματος (Σχ. 177) κτλ.· 2ον δι᾽ ἐπιπέδων κατακορύφων· οὕτω πλὴν τῆς προόψεως τῆς οἰκίας (Σχ. 178), ἤτοι τῆς ἐξωτερικῆς παραστάσεως αὐτῆς ὁρωμένης ἀπ᾽ εὐθείας, ἔχομεν τὴν κατὰ μῆκος καὶ πλάτος κατακόρυφον τομὴν (Σχ. 179, 180).

ΤΕΛΟΣ

ΓΕΩΡΓΙΚΟΣ ΠΙΣΤΩΤΙΚΟΣ ΣΥΝΕΤΑΙΡΙΣΜΟΣ

ΓΕΩΡΓΙΚΟΣ ΠΙΣΤΩΤΙΚΟΣ ΣΥΝΕΤΑΙΡΙΣΜΟΣ ΣΟΥΔΕΝΕΤΚΩΝ

Παρεσπιώθη. Γεωργουσούλα

Αρ. 53ον 1916.

ημέρα Τετάρτη. 30ῃ Μαρτίου

Ὁ βιβλιο[illegible] καί μό[illegible] [illegible] τό δημοσιεύ-
ματος [illegible] καί ἐξαρμό-
ζε χρήσιμα [illegible] ἐπί [illegible] καί ἡ τεῖρα του
εἰς [illegible] καί ωσαν. καί ἡ τεῖρα του
ναί ρεση.

Γ. [illegible]

Παναγιώτης.
Γεωργόπουλος. Αρ. 53. 1916