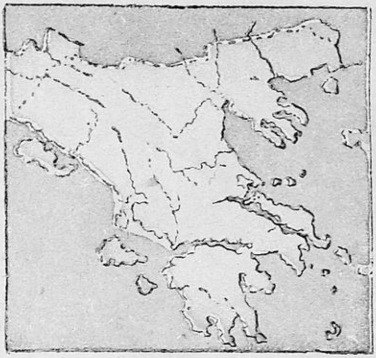
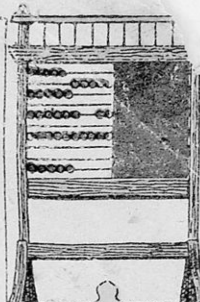




ΤΡΥΦΩΝΟΣ ΞΗΡΟΥ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ

τῆς Ε' καὶ ΣΤ' τάξεως
τῶν δημοτ. σχολείων

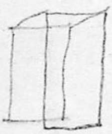
ΕΚΔΟΤΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ
Δ. & Π. ΔΗΜΗΤΡΑΚΟΥ
ΑΘΗΝΑΙ

ΤΡΥΦΩΝΟΣ ΞΗΡΟΥ

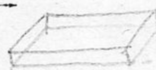
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ

τῆς Ε' καὶ ΣΤ' τάξεως τῶν δημοτικῶν σχολείων








Ἐν Ἀθήναις
Ἐκδοτικὸς Οἶκος Δ. καὶ Π. Δημητράκου
Ὁδὸς Σταδίου 56

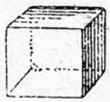
Ἔκδοσις 6η

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

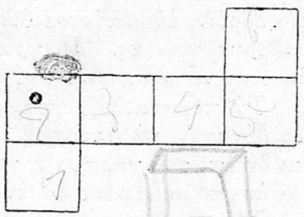
Κύβος.

Πᾶν ἀντικείμενον, τὸ ὁποῖον καταλαμβάνει χῶρόν τινα, λέγεται σῶμα. Π. χ. τὸ βιβλίον, ὁ λίθος, ἡ ἕδρα, ὁ μελανοπίναξ, ἡ κιμωλία κλπ. λέγονται σώματα.

Τὸ ἀντικείμενον τοῦτο (1), τὸ ὁποῖον λέγεται κύβος (σχ. 2), εἶναι σῶμα. Ὁ κύβος, ὡς καὶ κάθε ἄλλο σῶμα, ἐκτείνεται κατὰ μῆκος, πλάτος καὶ ὕψος. Τὸ μῆκος, τὸ πλάτος καὶ τὸ ὕψος κάθε σώματος λέγονται διαστάσεις αὐτοῦ.



Σχ. 1.



Σχ. 2.

Ὁ κύβος ἔχει καὶ τὰς τρεῖς διαστάσεις αὐτοῦ ἴσας πρὸς ἀλλήλας.

Πᾶν σῶμα, τοῦ ὁποίου ἐξετάζομεν τὸ σχῆμα καὶ τὰς διαστάσεις αὐτοῦ, χωρὶς νὰ λαμβάνωμεν ὑπ' ὄψιν τὴν ὕλην, ἐκ τῆς ὁποίας ἀποτελεῖται, καλοῦμεν στερεόν.

Ὁ κύβος, τὸν ὁποῖον ἐξετάζομεν ἀπὸ τὴν ἔποψιν τοῦ σχήματος καὶ τῶν διαστάσεων, εἶναι σῶμα στερεόν.

Ἐπιφάνεια, ἕδραι, ἀκμαὶ καὶ κορυφαὶ κύβου.

Τὰ πέρατα παντὸς σώματος, ἤτοι τὸ ἔξω μέρος αὐτοῦ, λέγεται ἐπιφάνεια τοῦ σώματος. Τὸ μῆλον, τὸ ᾠὸν ἔχουσι μίαν ἐπιφάνειαν, ἄλλα σώματα ἔχουσ περισσοτέρας ἐπι-

1. Ὁ διδάσκαλος δεικνύει εἰς τοὺς μαθητὰς κύβον.

φανείας. Ὁ κύβος ἔχει ἕξ ἐπιφανείας, αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦσι τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κύβου.

Ἑκάστη τῶν ἕξ ἐπιφανειῶν λέγεται ἕδρα τοῦ κύβου. Αἱ ἕξ ἕδραι τοῦ κύβου εἶναι τοῦ αὐτοῦ μεγέθους. Αἱ ἐπιφάνειαι δύνανται νὰ μετρηθῶσι κατὰ δύο διαστάσεις, κατὰ μῆκος καὶ κατὰ πλάτος.

Τὰ πέρατα τῆς ἐπιφανείας λέγονται γραμμαί. Ἡ γραμμή, εἰς τὴν ὁποίαν δύο ἕδραι τοῦ κύβου συναντῶνται, ὀνομάζεται ἀκμή. Ὁ κύβος ἔχει δώδεκα ἀκμάς. Ὅλαι αἱ ἀκμαὶ τοῦ κύβου εἶναι ἴσαι. Δύο ἀκμαὶ συναντώμεναι σχηματίζουσι μίαν ἐπίπεδον γωνίαν. Ὁ κύβος ἔχει 24 ἐπιπέδους γωνίας. Ἑκάστη ἕδρα τοῦ κύβου περιβάλλεται ἀπὸ τέσσαρας ἀκμάς. Ἡ γωνία, ἡ ὁποία σχηματίζεται ἐκ τῆς ἑνώσεως τῶν δύο ἑδρῶν, ὀνομάζεται δίεδρος γωνία. Ὁ κύβος ἔχει δώδεκα διέδρους γωνίας. Ἡ γραμμὴ μόνον κατὰ μίαν διεύθυνσιν δύναται νὰ μετρηθῇ· ἔχει ἐπομένως μίαν διάστασιν, μῆκος.

Τὰ πέρατα τῆς γραμμῆς λέγονται σημεῖα. Τὸ σημεῖον δὲν δύναται νὰ μετρηθῇ, οὐδεμίαν ἔχει διάστασιν, παρίσταται δὲ ἐπὶ τοῦ χάρτου ἢ τοῦ μελανοπίνακος διὰ μιᾶς στιγμῆς καὶ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους δι' ἑνὸς πασσάλου ἢ λίθου κλπ.

Τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον συναντῶνται τρεῖς ἕδραι τοῦ κύβου, ὀνομάζεται κορυφὴ αὐτοῦ. Ἔχει δὲ ὁ κύβος ὀκτὼ κορυφάς. Ἡ γωνία, ἡ σχηματιζομένη ἐκ τῆς ἑνώσεως τριῶν ἑδρῶν, ὀνομάζεται τρίεδρος ἢ στερεὰ γωνία. Ὁ κύβος ἔχει ὀκτὼ στερεὰς γωνίας.

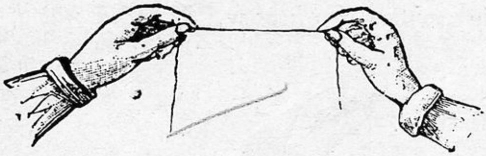
Ἀσκήσεις.

Ποῖον λέγεται σῶμα; πόσας διαστάσεις ἔχει τὸ σῶμα; πῶς λέγονται αἱ διαστάσεις τοῦ σώματος; Τί εἶναι αἱ διαστάσεις τοῦ κύβου; τί λέγεται στερεὸν σῶμα; Τί λέγεται ἐπιφάνεια; πόσας ἐπιφανείας ἔχει ὁ κύβος; πῶς λέγονται αἱ ἐπιφάνειαι τοῦ κύβου; κατὰ πόσας διαστάσεις μετρεῖται ἡ ἐπιφάνεια; Τί λέγεται γραμμή, ἀκμή, κορυφή; Πόσας τοιαύτας ἔχει ὁ κύβος; Πόσας διέδρους γωνίας ἔχει τὸ δωμά-

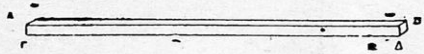
τιον καὶ πόσας ἀκμάς; πόσας στερεὰς γωνίας ἔχει; Δείξατέ μοι μίαν τρίεδρον γωνίαν; δείξατε τὰς ἕδρας, τὰς ἀκμὰς καὶ τὴν κορυφὴν αὐτῆς.

Σχῆμα, εὐθεῖα γραμμή, νῆμα στάθμης, ἐπίπεδον κατακόρυφον, ὁριζόντιον καὶ πλάγιον.

Τὰ σώματα, τὰς ἐπιφανείας καὶ τὰς γραμμὰς παριστῶμεν ἐπὶ τοῦ μελανοπίνακος ἢ τοῦ χάρτου δι' εἰκόνων. Αἱ εἰκόνες αὗται ὀνομάζονται σχήματα. Τὸ σχῆμα, τὸ ὁποῖον λαμβάνει νῆμα τεντωμένον, (σχ.3) λέγεται εὐθεῖα γραμμή. Αἱ ἀκμαὶ τοῦ κύβου εἶναι εὐθεῖαι γραμμαὶ καὶ ἴσαι πρὸς ἀλλήλας. Πρὸς χάραξιν εὐθείας γραμμῆς ἐπὶ χάρτου μεταχειριζόμεθα τὸν κανόνα. Ὁ κανὼν εἶναι συνήθως λεπτὴ σανὶς (σχ. 4) καὶ ἐπιμήκης, ἡ ὁποία ἔχει τὰς ἀκμὰς ΑΒ καὶ ΓΔ εὐθυγράμμους. Οἱ ξυλουργοὶ μεταχειρίζονται ράμμα ἠλειμμένον διὰ χρώματος, οἱ δὲ γεωργοὶ σχοινίον, τὸ ὁποῖον ἐξαρτῶσιν ἐκ δύο πασσάλων. (σχ.5).



Σχ. 3.



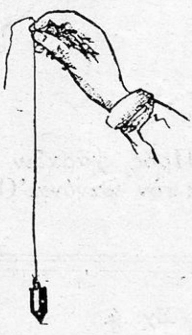
Σχ. 4.

Σχ. 5.

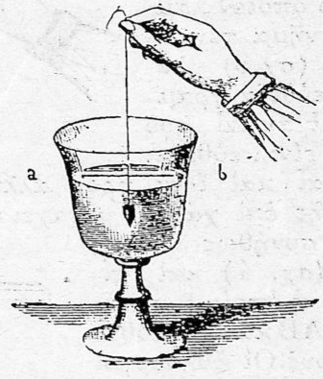
Ἐπίπεδος ἐπιφάνεια ἢ ἁπλῶς ἐπίπεδον λέγεται ἡ ἐπιφάνεια, ἐπὶ τῆς ὁποίας εὐθεῖα γραμμὴ ἐφαρμόζεται πανταχοῦ ἀκριβῶς. Αἱ ἕδραι τοῦ κύβου εἶναι πᾶσαι ἐπίπεδοι.

Περὶ στάθμης.

Ἡ στάθμη εἶναι γεωμετρικὸν ἐργαλεῖον (σχ. 6). Ἀποτελεῖται ἀπὸ νῆμα, εἰς τὸ ἄκρον τοῦ ὁποίου προσδένομεν βαρὺ σῶμα. Ἡ διεύθυνσις, τὴν ὁποίαν λαμβάνει τὸ νῆμα κρατούμενον ἀπὸ τὸ ἕτερον ἄκρον, λέγεται κατακόρυφος. Πᾶν ἐπίπεδον, ὅταν ἔχῃ τὴν διεύθυνσιν τοῦ νήματος τῆς στάθμης, λέγεται κατακόρυφον. Οἱ τοῖχοι τοῦ δωματίου, αἱ θύραι, τὰ παράθυρα, αἱ τέσσαρες ἕδραι τοῦ κύβου (ἡ ἔμπροσθεν, ἡ ὄπισθεν, ἡ δεξιὰ καὶ ἡ ἀριστερὰ) εἶναι ἐπί-



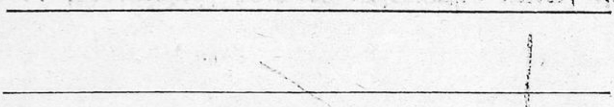
Σχ. 6.



Σχ. 7.

πεδα κατακόρυφα. Πᾶν ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τῆς κατακορύφου λέγεται ὁριζόντιον· (σχ. 7). Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πατώματος, τῆς τραπέζης, ἠρεμοῦντος ὕδατος εἶναι ἐπίπεδα ὁριζόντια. Αἱ δύο ἕδραι τοῦ κύβου ἡ ἄνω καὶ ἡ κάτω εἶναι ἐπίπεδα ὁριζόντια. Ἡ ὁριζόντιος διεύθυνσις εὑρίσκεται διὰ τοῦ ὑδροστάτου.

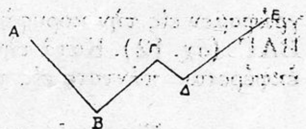
Δύο γραμμαὶ λέγονται παράλληλοι (σχ. 8), ὅταν εὑρίσκωνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ προεκβαλλόμεναι ἑκατέρωθεν δὲν συναντῶνται. Αἱ γραμμαὶ τοῦ σιδηροδρόμου εἶναι παράλληλοι. Δύο ἐπίπεδα λέγονται παράλληλα, ὅταν, ὅσον καὶ ἂν προεκταθῶσι καθ' ὅλα αὐτῶν τὰ μέρη δὲν συναντῶνται. Αἱ ἀπέναντι ἕδραι τοῦ κύβου, τὸ πάτωμα καὶ ἡ ὀροφὴ τοῦ δωματίου καὶ οἱ ἀπέναντι τοῖχοι αὐτοῦ εἶναι



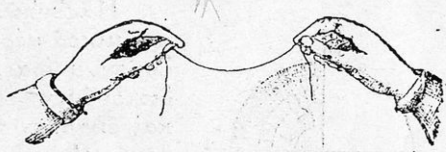
Σχ. 8.

ἐπίπεδα παράλληλα. Πλάγιον ἐπίπεδον εἶναι ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον δὲν ἔχει τὴν διεύθυνσιν τοῦ νήματος τῆς στάθμης οὐδὲ κάθετον πρὸς αὐτὴν εἶναι.

Ἡ κάθετος γραμμὴ εἶναι ἐκείνη, τὴν ὁποίαν σχηματίζει τὸ νῆμα τῆς στάθμης. Αἱ 4 ἀκμαὶ τοῦ κύβου εἶναι κάθετοι. Ὁριζοντία γραμμὴ εἶναι ἡ κάθετος πρὸς τὸ νῆμα τῆς στάθμης. Αἱ 8 ἀκμαὶ τοῦ κύβου εἶναι ὁριζόντιαι. Τεθλασμένη γραμμὴ (σχ. 9) εἶναι ἡ ἀποτελουμένη ἀπὸ εὐθείας χωρὶς νὰ εἶναι εὐθεῖα. Καμπύλη δὲ (σχ. 10) εἶναι ἐκείνη, τῆς ὁποίας οὐδὲν μέρος εἶναι εὐθεῖα.



Σχ. 9.



Σχ. 10.

Ἡ εὐθεῖα εἶναι ἡ συντομωτέρα πάσης ἄλλης, ἐχούσης τὰ αὐτὰ πέρατα.

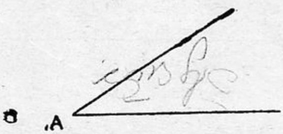
Περὶ γωνιῶν.

Ὅταν δύο εὐθεῖαι γραμμαὶ συναντῶνται εἰς ἓν σημεῖον παράγουσι μίαν γωνίαν.

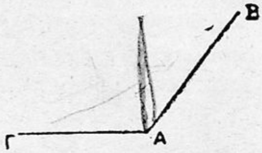
Αἱ δύο εὐθεῖαι λέγονται σκέλη ἢ πλευραὶ τῆς γωνίας καὶ τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον γίνεται ἡ συνάντησις, κορυφὴ αὐτῆς.

Τὴν γωνίαν σημειοῦμεν δι᾽ ἑνὸς γράμματος, τὸ ὁποῖον

Σχ. 10α.



Σχ. 11.

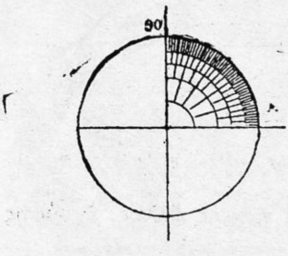


Σχ. 12.

γράφομεν εἰς τὴν κορυφὴν (σχ. 11), ἢ διὰ τριῶν γραμμάτων ΒΑΓ (σχ. 12). Κατὰ τὴν ἀνάγνωσιν τὸ γράμμα τῆς κορυφῆς ἐκφέρεται πάντοτε εἰς τὸ μέσον.

Καταμέτρησις γωνιῶν· ἀγωγεύς.

Αἱ γωνίαι δὲν μετροῦνται διὰ τῶν συνήθων γραμμικῶν μέτρων, ἀλλὰ διὰ τοῦ κύκλου.



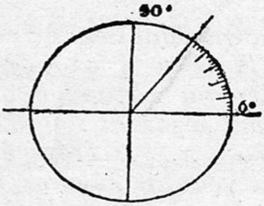
Σχ. 13.

Πᾶς κύκλος διαιρεῖται εἰς 360 ἴσα μικρὰ μέρη, τὰ ὁποῖα ὀνομάζομεν μοίρας. Ἑκάστην μοῖραν διαιροῦμεν εἰς 60 πρῶτα λεπτὰ καὶ ἕκαστον πρῶτον εἰς 60 δεύτερα. Προσδιορίζομεν δὲ τὴν γωνίαν κατὰ τὸν ἀριθμὸν τῶν μοιρῶν, τὰς ὁποίας ἔχει τὸ τόξον, τὸ ὁποῖον περιβάλλει τὰ σκέλη τῆς γωνίας. Ἡ γωνία, ἡ ὁποία ὑποτείνεται εἰς τὸ τέταρτον τοῦ κύκλου, ἤτοι εἰς τόξον 90 μοιρῶν, λέγεται ὀρθὴ γωνία (σχ.13). Ἡ ὀρθὴ γωνία σχηματίζεται ἀπὸ μίαν κάθετον καὶ ἀπὸ μίαν ὁριζοντίαν. Ὅλαι αἱ γωνίαι τοῦ κύβου εἶναι ὀρθαί. Τὰς ὀρθὰς γωνίας σχηματίζομεν μὲ

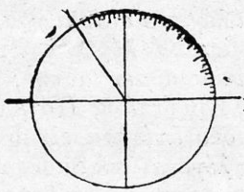
τὸν γνώμονα (σχ.14) (*). Ἡ γωνία, ἥτις ὑποτείνεται εἰς τόξον μικρότερον τῶν 90 μοιρῶν, λέγεται ὀξεῖα (σχ. 14α)

Σχ 14.

καὶ ἐκείνη, ἥτις ὑποτείνεται εἰς τόξον μεγαλύτερον τῶν 90 μοιρῶν, λέγεται ἀμβλεῖα (σχ.14β).

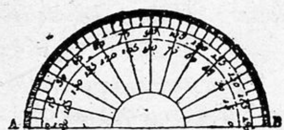


Σχ. 14α.



Σχ. 14β.

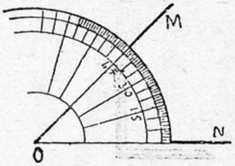
Ἀναγωγεὺς (σχ. 14γ) εἶναι ἡμικύκλιον ἐκ μετάλλου ἢ πυκνοῦ χάρτου διῃρημένον εἰς 180 μοίρας· τῇ βοηθείᾳ αὐτοῦ προσδιορίζομεν τὰς μοίρας, τὰς ὁποίας γωνία τις περιέχει. Ἐὰν θέλωμεν νὰ μετρήσωμεν γωνίαν διὰ τοῦ ἀναγωγέως, θέτομεν τὴν ἀκτῖνα αὐτοῦ ἐπὶ τοῦ ἑνὸς σκέλους τῆς γωνίας οὕτως, ὥστε τὸ κέντρον αὐτοῦ



Σχ. 14 γ.

(*) Γνώμων εἶνε μία λεπτὴ σανὶς ξυλίνη, ἔχουσα σχῆμα τριγώνου ὀρθογωνίου. Ὁ γνώμων τῶν ξυλουργῶν καὶ τῶν κτιστῶν ἀποτελειται ἀπὸ δύο κανόνας ξυλίνους ἢ σιδηροῦς συνηνωμένους κατ' ὀρθὴν γωνίαν.

νὰ πίπτῃ ἐπὶ τῆς κορυφῆς τῆς γωνίας. (σχ. 14δ). Ὁ ἀριθμὸς τοῦ ἀναγωγέως, ἐπὶ τοῦ ὁποίου πίπτει τὸ ἕτερον σκέλος τῆς γωνίας, δεικνύει τὰς μοίρας, τὰς ὁποίας ἡ γωνία περιέχει.



Σχ. 14 δ.

Περὶ τετραγώνου.

Τὸ τετράπλευρον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς πλευρὰς ἴσας πρὸς ἀλλήλας καὶ τὰς γωνίας ὀρθάς, λέγεται τετράγωνον (σχ. 17).

Αἱ ἕδραι τοῦ κύβου ὡς ἔχουσαι τὰς γραμμὰς (πλευρὰς) ἴσας καὶ τὰς γωνίας ὀρθὰς εἶναι τετράγωνα.

Ἀσκήσεις.

Τί λέγεται εὐθεῖα γραμμή; Πῶς χαράσσομεν τὰς εὐθείας γραμμάς; Τί λέγεται ἐπίπεδον; Τί εἶναι ἡ στάθμη; ποῦ χρησιμοποιοῦμεν αὐτήν; Ποῖον λέγεται κατακόρυφον ἐπίπεδον; ὁριζόντιον; Πότε δύο γραμμαὶ λέγονται παράλληλοι; Πότε δύο ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα; π. χ.; Πότε ἓν ἐπίπεδον λέγεται πλάγιον; Πότε μία γραμμὴ λέγεται τεθλασμένη, καμπύλη, κάθετος, ὁριζοντία; Ποία γωνία λέγεται ὀξεῖα, ἀμβλεῖα, ὀρθή; Πῶς μετροῦνται αἱ γωνίαι; τί εἶναι αἱ γωνίαι τοῦ κύβου; τί εἶναι ὁ ἀναγωγεύς; Πῶς χρησιμοποιεῖται; τί εἶναι κανών; γνώμων; Πόσων εἰδῶν γνώμονας ἔχομεν; Ποῖον λέγεται τετράγωνον;

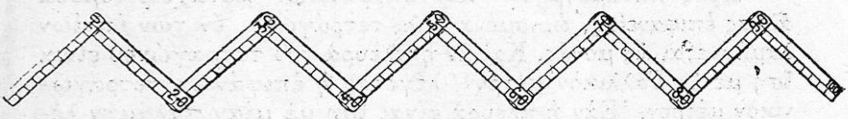
Μέτρα μήκους.

Ἵνα μετρήσωμεν τὰ πράγματα, ἔχομεν ἀνάγκην μέτρων.

Τοὺς δημητριακοὺς καρποὺς μετροῦμεν μὲ τὸ κοιλόν, τὰ ὑγρὰ μὲ τὴν ὀκᾶν καὶ τὰς ἐκτάσεις μὲ τὰ μέτρα τοῦ μήκους. Ὡς μονὰς τοῦ μήκους λαμβάνεται συνήθως τὸ Γαλλικὸν μέτρον ἢ Β. πῆχυς(*).

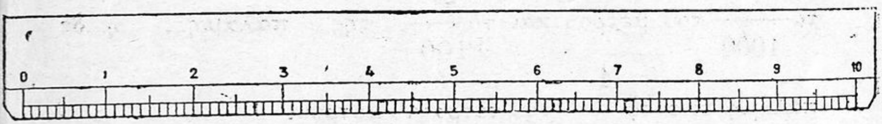
(*) Τὸ γαλλικὸν μέτρον ὡρίσθη οὕτως, ὥστε 40000000 τοιαῦτα μέτρα νὰ ἀποτελῶσι τὴν περιφέρειαν τοῦ ἰσημερινοῦ τῆς γῆς. Εἶναι δηλαδὴ τὸ $\frac{1}{40000000}$ τοῦ ἰσημερινοῦ τῆς γῆς.

Τὸ Γαλλικὸν μέτρον διαιρεῖται εἰς 10 ἴσα μέρη, ἕκαστον τῶν ὁποίων λέγεται ὑποδεκάμετρον ἢ παλάμη (σχ 15). Ἕκα-



Σχ. 15.

στον ὑποδεκάμετρον ἢ παλάμη διαιρεῖται εἰς δέκα ἴσα μέρη, ἕκαστον τῶν ὁποίων λέγεται ὑφεκατόμετρον ἢ δάκτυλος καὶ ἕκαστον ὑφεκατόμετρον ἢ δάκτυλος διαιρεῖται πάλιν εἰς δέκα ἴσα μέρη, ἕκαστον τῶν ὁποίων λέγεται ὑποχιλιόμετρον ἢ γραμμή. Χάριν συντομίας σημειοῦνται ὡς ἑξῆς: μέτρον=μ.,



Σχ. 16.

παλάμη=ὑδμ., δάκτυλος=ὑφμ., γραμμὴ = ὑχμ., δεκάμετρον=δμ., ἑκατόμετρον=ἑκμ., χιλιόμετρον=χμ. Ὥστε ὁ Β. πῆχυς ἰσοῦται μὲ 10 παλάμας ἢ 100 δακτύλους ἢ 1000 γραμμάς. Μία παλάμη ἰσοῦται μὲ 10 δακτύλους ἢ 100 γραμμάς, καὶ εἷς δάκτυλος ἰσοῦται μὲ 10 γραμμάς.

Διὰ τὴν μέτρησιν τῶν οἰκοδομῶν λαμβάνεται ὡς μονὰς ὁ τεκτονικὸς πῆχυς, ὁ ὁποῖος εἶναι ἴσος μὲ 75 δακτύλους ἢ 0,75 ἢ 3)4 τοῦ μέτρου. Τὸ μέτρον ἰσοῦται μὲ 4)3 τοῦ τεκτ. πήχεως.

Πρὸς μέτρησιν τῶν ὑφασμάτων γίνεται χρῆσις τοῦ μικροῦ (0,648 τοῦ μέτρου) καὶ τοῦ μεγάλου πήχεως τῆς Κωνσταντινουπόλεως (0,669 τοῦ μέτρου). Διαιρεῖται δὲ ἑκάτερος τούτων εἰς 8 ἴσα μέρη, (ρούπια).

Μέτρα ἐπιφανείας.

Πρὸς καταμέτρησιν τῶν ἐπιφανειῶν μεταχειριζόμεθα ἄλλας ἐπιφανείας, ὡρισμένα δηλ. τετράγωνα, ἕν τῶν ὁποίων λαμβάνεται ὡς μονάς. Καὶ ἂν ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου εἶναι ἴση μὲ ἓν Γαλλικὸν μέτρον, λέγεται ἡ ἐπιφάνεια τετραγωνικὸν μέτρον. Ἐὰν ἡ πλευρὰ εἶναι ἴση μὲ μίαν παλάμην λέγεται τετραγωνικὴ παλάμη, ἐὰν ἡ πλευρὰ εἶναι ἴση μὲ ἕνα δάκτυλον, λέγεται τετραγωνικὸς δάκτυλος.

1 τετρ. μέτρ. ἔχει 100 παλ. ἢ 10000 δακτ. ἢ 1000000 γρμ.
1 παλ. ἔχει 100 » ἢ 10000 »
1 παλ. ἔχει 100 γρμ.

ἑπομένως ἡ γραμμὴ εἶναι τὸ 0,000001 τοῦ μέτρου, τὸ 0,0001 τῆς παλάμης καὶ τὸ 0,01 τοῦ δακτύλου. Ὁ δάκτυλος εἶναι τὸ $\frac{1}{1000}$ τοῦ μέτρου καὶ τὸ $\frac{1}{100}$ τῆς παλάμης, ἡ δὲ παλάμη εἶνε τὸ $\frac{1}{100}$ τοῦ τετραγ. μέτρου.

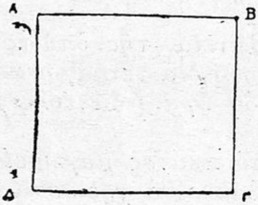
Ἡ ἐπιφάνεια σώματός τινος γράφεται ὡς δεκαδικὸς καὶ ἀπαγγέλλομεν κατ' ἀρχὰς τὸ ἀκέραιον μέρος τ.μ., κατόπιν χωρίζομεν τὸν δεκαδικὸν εἰς διψήφια τμήματα, τὸ πρῶτον τμῆμα εἶναι αἱ τ. π., τὸ δεύτερον οἱ τ. δ. καὶ τὸ τρίτον αἱ τ. γραμμαί. Συμπληροῦμεν τὰ τμήματα μὲ μηδενικά, ὅταν εἶναι μονοψήφια, ὡς 10 τετραγ. μετρ. 35 τετρ. παλ. 6 τετρ. δακ. 25 τετ. γρ. γράφεται 10,350625.

Διὰ τὴν μέτρησιν τῶν οἰκοδομῶν λαμβάνεται ὡς μονὰς ἡ τετραγωνικὴ ἐπιφάνεια, τῆς ὁποίας ἡ πλευρὰ ἰσοῦται μὲ ἕνα τεκτονικὸν πῆχυν. Ὁ τεκτονικὸς τετραγωνικὸς πῆχυς εἶναι τὰ $\frac{9}{16}$ τοῦ τετραγ. μέτρου, τὸ τετραγ. μέτρον εἶναι τὰ $\frac{16}{9}$ τοῦ τεκτ. τετρ. πήχεως.

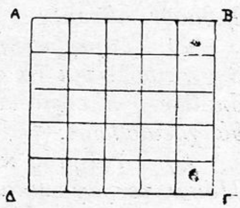
Τὸ ἐξαγόμενον τῆς μετρήσεως μιᾶς ἐπιφανείας λέγεται ἐμβαδόν.

Εὕρεσις τῆς ἐπιφανείας, τοῦ τετραγώνου καὶ τοῦ κύβου.

Ἔστω τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ (σχ. 17). Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ πλευρὰ αὐτοῦ ΔΓ μετρηθεῖσα εὑρέθη ἴση μὲ 5 πήχεις, διαιροῦμεν αὐτὴν εἰς 5 ἴσα μέρη καὶ ἐκ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως ἄγομεν καθέτους καὶ προεκτείνομεν αὐτὰς μέχρις οὗ συναντήσωσι τὴν πλευρὰν ΑΒ. Ἔπειτα διαιροῦμεν καὶ τὴν πλευρὰν ΔΑ εἰς 5 ἴσα μέρη καὶ ἐκ τοῦ σημείου τῆς διαιρέσεως ἄγομεν καθέτους ἐπὶ τὴν ΑΔ καὶ προεκτείνομεν αὐτὰς μέχρις οὗ συναντήσωσι τὴν πλευρὰν ΒΓ· τοιουτοτρόπως τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ διῃρέθη εἰς 25 τετράγωνα (σχ. 18) ἴσα ἐκ κατασκευῆς, διότι ἔχουσι τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἴσας μὲ ἕνα πῆχυν καὶ τὰς γωνίας ὀρθάς, ἀλλὰ ὁ ἀριθμὸς 25 εἶναι γινόμενον τοῦ ἀριθμοῦ 5, ὁ ὁποῖος παριστᾷ τὸ μῆκος τῆς βάσεως τοῦ τετραγώνου ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 5, ὁ ὁποῖος παριστᾷ τὸ μῆκος τοῦ ὕψους αὐτοῦ, ἄρα διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ τετραγώνου, πολλαπλασιάζομεν τὸ μῆκος τῆς μιᾶς πλευρᾶς, τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν ὡς βάσιν, ἐπὶ τὸ μῆκος της καθέτου πρὸς τὴν βάσιν, τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν ὡς ὕψος, καὶ ἐπειδὴ ὅλαι αἱ πλευραὶ τοῦ τετραγώνου εἶναι ἴσαι, ἵνα εὕρωμεν τὴν ἐπιφάνειαν, πολλαπλασιάζομεν τὴν βάσιν ἐπὶ τὸν ἑαυτόν της.



Σχ. 17.



Σχ 18.

Ἕκαστος κύβος ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕξ τετράγωνα ἴσα, ἄρα τὸ ἑξαπλάσιον τῆς ἐπιφανείας τοῦ τετραγώνου ἀποτελεῖ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κύβου.

8,90

Προβλήματα.

1) Ἡ πλευρὰ τετραγώνου εἶναι 27 μέτρα. Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ;

2) Οἰκόπεδον τετραγωνικόν, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι 45 μ., ἠγοράσθη ἀντὶ 12,300 δραχ. Ποία ἡ ἀξία τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου;

3) Ἡ περίμετρος τετραγώνου εἶναι 66,8 μ. Ποῖον τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ;

4) Τετραγωνικὴ πλατεῖα, τῆς ὁποίας ἡ πλευρὰ εἶναι 8 μ., πρόκειται νὰ στρωθῇ διὰ τετραγωνικῶν πλακῶν, τῶν ὁποίων ἡ πλευρὰ εἶνε 30 ὑφμ. (δάκτυλοι). Πόσαι πλάκες θὰ χρειασθῶσι;

5) Τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος μαγειρείου εἶναι 8,90 μ. Πόσαι τετραγωνικαὶ πλάκες θὰ χρειασθῶσιν, ἐὰν ἡ πλευρὰ ἑκάστης πλακὸς εἶναι 18 ὑφμ.;

6) Ἐκ δύο τετραγώνων τὸ μὲν ἔχει μῆκος 3 ὑφμ., τὸ δὲ 12 ὑφμ. Ποσάκις ἡ περίμετρος τοῦ ἑνὸς περιέχεται εἰς τὴν τοῦ ἄλλου καὶ ποσάκις ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἑνὸς περιέχεται εἰς τὴν τοῦ ἄλλου;

7) Οἰκόπεδον ἔχει σχῆμα τετραγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι 18 μέτρων. Ἐκ πόσων τεκτονικῶν τετραγ. πήχεων ἀποτελεῖται τὸ οἰκόπεδον τοῦτο;

8) Ἡ πλευρὰ τετραγωνικῆς ἀμπέλου ἔχει μῆκος 185 τεκτονικοὺς πήχεις. Ἐκ πόσων τετραγωνικῶν μέτρων ἀποτελεῖται ἡ ἄμπελος αὕτη;

9) Τετράγωνον ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα δύο ἄλλων τετραγώνων, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ μὲν ἓν ἔχει πλευρὰν 12 τεκτονικοὺς πήχεις, τὸ δὲ 17 τεκτ. πήχεις, πρόκειται νὰ στρωθῇ διὰ τετραγωνικῶν πλακῶν, ἑκάστης τῶν ὁποίων ἡ πλευρὰ εἶναι 32 ὑφμ. Πόσαι πλάκες θὰ χρειασθῶσι;

Καταμέτρησις στερεῶν σωμάτων.

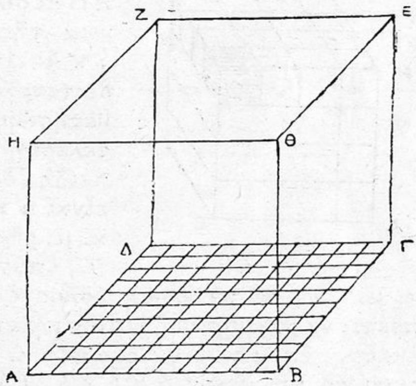
Πρὸς καταμέτρησιν τοῦ ὄγκου τῶν στερεῶν σωμάτων μεταχειριζόμεθα ἄλλα σώματα, κύβους δηλ., τῶν ὁποίων τὸ μέγεθος εἶναι γνωστόν. Διὰ τοῦτο τὰ μέτρα ταῦτα ὀνομάζονται κυβικά.

Κυβικὰ μέτρα ἔχομεν ὅσα καὶ γραμμικά, διότι ἕκαστον γραμμικὸν δύναται νὰ εἶναι πλευρὰ ἑνὸς κύβου. Τὸ κυβικὸν μέτρον εἶναι κύβος, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος, τὸ πλάτος καὶ τὸ ὕψος εἶναι ἕν μέτρον. Ἡ κυβικὴ παλάμη εἶναι κύβος, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος, τὸ πλάτος καὶ τὸ ὕψος εἶναι μία παλάμη κλ.

Ἕν κυβικὸν μέτρον ἔχει 1000 κ. ὑδμ. (παλάμας).
ἕν κυβικὸν ὑδμ. (παλάμη) ἔχει 1000 κ. ὑφμ. (δακτύλους)
ἕν κυβικὸν ὑφμ. (δάκτυλος) ἔχει 1000 κ. ὑχμ. (γραμμὰς)

1κ.μ.=1000 κ.παλ.=1000000 κ. δακ.=1000000000 κ. γρ.
1 κ. παλάμη=1000 κ. δακ.=1000000 κ. γρ.
1 κ. δάκ.=1000 κ. γρ.

Ἡ ὑποδιαίρεσις τοῦ κυβικοῦ μέτρου φαίνεται καλύτερον εἰς τὸ σχῆμα 19. Τὸ κενὸν κιβώτιον τοῦτο ἔχει πλευρὰν ἑνὸς τετρ. μέτρου. Ἐπειδὴ ἡ βάσις εἶναι ἕν τετραγωνικὸν μέτρον, δύναται νὰ διαιρεθῇ εἰς 100 τετρ. παλάμας καὶ ἐπειδὴ τὸ ὕψος ΑΗ περιέχει δέκα τετρ. παλάμας, δυνάμεθα ἐφ' ἑκάστης τετραγωνικῆς παλάμης τῆς βάσεως νὰ θέσωμεν 10 κ.π. τὴν μίαν ἐπάνω εἰς τὴν ἄλλην. Διὰ νὰ πληρωθῇ δὲ τὸ κ. μ., χρειάζονται 100 στῆλαι τοιαῦται. Ἐπειδὴ δὲ ἑκάστη περιέχει 10 κ.π. τὸ ὅλον χρειάζονται 1000 κ. π. Ὥστε ἕν κ. μ. περιέχει 1000 κ. π. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι 1 κ. π. περιέχει 1000 κ. δ., εἷς κ. δ. περιέχει 1000 κ. γ. Ἡ κ.π. εἶναι τὸ 0,001 τοῦ κ. μ., ὁ κ. δ. εἶναι τὸ 0,000001 τοῦ κ. μ. καὶ ἡ κ.γ. εἶναι τὸ 0,000000001.

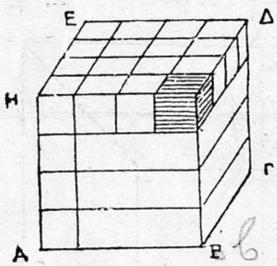


Σχ. 19.

῾Ο ὄγκος σώματος γράφεται ὡς δεκαδικὸς ἀριθμὸς καὶ ἀπαγγέλλομεν κατ᾽ ἀρχὰς τὸ ἀκέραιον μέρος (κ. μ.) κατόπιν χωρίζομεν τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν εἰς τριψήφια τμήματα ἀρχόμενοι ἀπὸ τῆς ὑποδιαστολῆς. Τὸ πρῶτον τριψήφιον εἶναι κ. π., τὸ δεύτερον κ. δ. καὶ τὸ τρίτον κ. γ. Ὅταν τὰ τμήματα δὲν εἶναι πλήρη, συμπληροῦμεν αὐτὰ μὲ μηδενικά, ὡς 8 κ. μ., 65 κ. π., 3 κ. δ. καὶ 8 κ. γ. θὰ γραφῆ 8,065 003,008.

Μέτρησις κυβικοῦ σώματος.

Ἵνα μετρήσωμεν τὸ κυβικὸν σῶμα ΑΒΓΔ (σχ. 20), λαμβάνομεν τὴν ὡρισμένην μονάδα, τὸ μέτρον, καὶ παρατηροῦμεν ὅτι ἡ μονὰς χωρεῖ εἰς τὴν ἀκμὴν ΑΒ τέσσαρας φοράς· ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τῆς βάσεως τοῦ κύβου εἶναι $4 \times 4 = 16$ τετ. μέτρα, εἰς ἕκαστον δὲ τετρ. μέτρον δυνάμεθα νὰ τοποθετήσωμεν ἓν κ. μ., ὅτε θὰ ἀποτελεσθῇ ἡ βάσις ἀπὸ 16 κ. μ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἀκμὴ ΑΗ (τὸ ὕψος) εἶναι 4 κ. μ., δυνάμεθα ἐφ᾽ ἑκάστου κ. μ. τῆς βάσεως νὰ θέσωμεν ἓν κ. μ., ὁπότε θὰ ἔχωμεν στήλην ἐκ 4 κ. μ., ἵνα δὲ πληρωθῇ ὅλος ὁ κενὸς χῶρος τοῦ κύβου πρέπει νὰ σχηματισθοῦν 16 στῆλαι ἀποτελούμεναι ἀπὸ 4 κ. μ. ἑκάστη, ἑπομένως θὰ ἔχωμεν κ. μ. 64· ἀλλὰ ὁ ἀριθμὸς 64 εἶναι τὸ γινόμενον $4 \times 4 \times 4 = 64$. Ἄρα, ἵνα εὕρωμεν τὸν ὄγκον κυβικοῦ τινος σώματος, εὑρίσκομεν τὸν κύβον τοῦ ἀριθμοῦ, ὁ ὁποῖος φανερώνει ποσάκις ἡ ὡρισμένη μονὰς χωρεῖ εἰς τὴν ἀκμὴν τοῦ κύβου.



Σχ. 20.

Προβλήματα.

1) Ποῖος εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ κύβου, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκμὴ εἶναι 24 μ.;

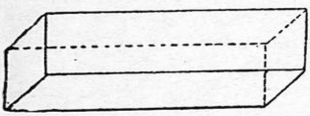
2) Πόσας ὀκάδας ὕδατος χωρεῖ κυβικὴ ὑδαταποθήκη, τῆς ὁποίας ἡ ἀκμὴ εἶναι 1,65 μ.;

3) Πόσας κυβικὰς πλάκας σάπωνος δύναται νὰ περιλάβῃ κυβικὸν κιβώτιον κενόν, ἔχον ἀκμὴν 2,50 μ., ὅταν ἑκάστη πλὰξ ἔχῃ ἀκμὴν 8 δακτύλων;

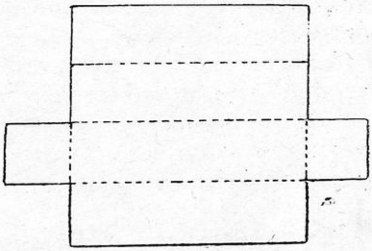
4) Ἡ ἀκμὴ ἑνὸς κύβου εἶναι 0,45. Ποία εἶναι ἡ ἐπιφάνεια μιᾶς ἕδρας; Ποία εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύβου, καὶ ποῖος ὁ ὄγκος αὐτοῦ;

Ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον.

Τὸ σχῆμα, τὸ ὁποῖον βλέπετε (σχ. 21), ὀνομάζεται ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον. Τοῦτο ἔχει ἓξ ἐπιφανείας (ἕδρας), αἵτινες ἀποτελοῦσι τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὀρθογωνίου



Σχ. 21.



Σχ. 22.

παραλληλεπιπέδου. Ἐκ τῶν ἑδρῶν ἡ ἄνω καὶ ἡ κάτω εἶναι ὁριζόντιαι, αἱ δὲ ἔμπροσθεν, ὄπισθεν, δεξιὰ καὶ ἡ ἀριστερὰ κάθετοι, εἶναι δὲ καὶ παράλληλοι ἡ ἄνω καὶ ἡ κάτω, ἡ δεξιὰ καὶ ἡ ἀριστερά, ἡ ἔμπροσθεν καὶ ἡ ὄπισθεν. Τὸ ὀρθὸν παραλληλεπίπεδον ἔχει 12 ἀκμάς, ἐκ τῶν ὁποίων αἱ 8 εἶναι ὁριζόντιαι καὶ παράλληλοι ἀνὰ δύο, αἱ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου εὑρισκόμεναι, καὶ 4 κάθετοι καὶ παράλληλοι. Τὸ ὀρ. παρ. ἔχει κορυφὰς ἢ στερεὰς γωνίας 8, διέδρους γωνίας 12 καὶ ἐπιπέδους 24, εἶναι δὲ ἅπασαι αἱ γωνίαι ὀρθαί. Αἱ ἕδραι του ἔχουν τὰς ἀπέναντι πλευρὰς ἴσας καὶ παραλλήλους καὶ τὰς γωνίας ὀρθάς. Τὸ τετράπλευρον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς ἀπέναντι πλευρὰς ἴσας καὶ παραλλήλους καὶ τὰς γωνίας ὀρθάς, λέγεται ὀρθογώνιον τετράπλευρον ἢ ὀρθογ. παραλληλόγραμμον (σχ. 23). Αἱ ἕδραι τοῦ ὀρθοῦ παραλληλεπιπέδου λέγονται ὀρθογώνια τετράπλευρα ἢ ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα.

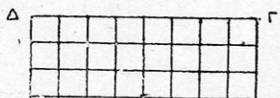
Ἀσκήσεις.

Πόσας ἕδρας, πόσας ἀκμὰς καὶ πόσας κορυφὰς ἔχει τὸ ὀρθ. παραλληλεπίπεδον; Ποῖαι εἶναι αἱ θέσεις τῶν ἑδρῶν; ποῖαι τῶν ἀκμῶν; Ποῖον τὸ σχῆμα τῶν ἑδρῶν; Ποῖαι εἶναι αἱ σχέσεις αὐτῶν πρὸς ἀλλήλας; ποῖαι λέγονται δίεδροι καὶ ποῖαι στερεαὶ γωνίαι; πῶς σχηματίζονται αὗται καὶ πόσας τοιαύτας ἔχει τὸ ὀρθογ. παραλληλεπίπεδον. Πόσων μοιρῶν εἶναι αἱ γωνίαι τοῦ ὀρθ. παραλληλεπιπέδου; Ποῖα ἀντικείμενα ἔχουν τὸ σχῆμα τοῦ ὀρθ. παραλληλεπιπέδου; (τὰ κυτία, τεμάχιά τινα σάπωνος, τὰ πλεῖστα κιβώτια καὶ τεμάχιά τινα κιμωλίας κλπ.)

Μὲ τί ὁμοιάζει τὸ ὀρθογ. παραλληλόγραμμον; τί διαφέρει τοῦ τετραγώνου; κατὰ τί ὁμοιάζει καὶ κατὰ τί διαφέρει τὸ ὀρθ. παραλληλεπίπεδον τοῦ κύβου;

Ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου.

Ἵνα εὕρωμεν τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου (σχ. 23), λαμβάνομεν ὡρισμένην μονάδα μή-



Σχ. 23.

Σχ. 24.

κους (μέτρον, τεκτ. πῆχυν, παλάμην, δάκτυλον), μετροῦμεν τὴν βάσιν ΑΒ καὶ διαιροῦμεν αὐτὴν εἰς τόσα μέρη, ὅσας φορὰς περιέχει τὴν ληφθεῖσαν μονάδα· ἐκ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως φέρομεν καθέτους εἰς τὴν παράλληλόν της ΔΓ, ὅπως ἐπράξαμεν καὶ εἰς τὸ τετράγωνον. Ὁμοίως πράττοντες καὶ ἐπὶ τῆς ΑΔ, βλέπομεν ὅτι τὸ ὀρθ. παραλληλόγραμμον διῃρέθη εἰς 36 τετράγωνα, ἀλλὰ ὁ ἀριθμὸς 36 εἶναι γινόμενον τοῦ 9 (τῆς βάσεως) ἐπὶ 4 (τοῦ ὕψους τοῦ παραλληλογράμμου). Ἐπομένως ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθ. παραλληλογράμμου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιφανειῶν τῶν παραλληλογράμμων ἀποτελεῖ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

Διαγώνιος λέγεται ἡ εὐθεῖα, ἡ ἑνώνουσα δύο γωνίας, αἱ ὁποῖαι δὲν ἔχουσι κοινὴν πλευράν. Διαγώνιος εἶναι ἡ ΒΔ (σχ. 24).

Προβλήματα.

1) Ἓν ὀρθογώνιον ἔχει μῆκος 36,4 καὶ πλάτος 28,7. Ποῖον τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ;

2) Τὸ ἔδαφος δωματίου τινὸς πρόκειται νὰ στρωθῇ διὰ σανίδων, τῶν ὁποίων τὸ μῆκος εἶναι 2,90 καὶ τὸ πλάτος 0,22. Πόσαι σανίδες θὰ χρειασθῶσιν, ὅταν τὸ μῆκος τοῦ δωματίου εἶναι 6 μ., τὸ δὲ πλάτος 5 μ.;

3) Οἰκόπεδον σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου ἔχει μῆκος 24,6 μ. καὶ πλάτος 33,8· ἐπωλήθη ἀντὶ 18640 δραχ. Πόσον ἀξίζει ὁ τετραγ. πῆχυς; Πόσον τὸ τετραγ. μ.;

4) Ποία ἡ ἀξία ἀγροῦ, ἔχοντος μῆκος 95,6 μ. καὶ πλάτος 75 μ., ἐὰν ἡ ἀξία τῶν 200 μέτρων εἶναι 60 δραχμαί;

5) Ποῖον εἶναι τὸ μῆκος ὀρθ. παραλληλογράμμου, ἔχοντος ἐπιφάνειαν 175,8 τ. μ. καὶ πλάτος 13, 5 μ.;

6) Δωμάτιον, ἔχον σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος εἶναι 6 μ. καὶ τὸ πλάτος 4,80, πρόκειται νὰ στρωθῇ διὰ τάπητος, ἔχοντος πλάτος 0,95. Πόσα μέτρα χρειάζεται;

7) Δωμάτιον σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου ἔχει ἐπιφάνειαν 18,48 τ. μ. Διὰ νὰ στρωθῇ τοῦτο διὰ τάπη-

τος ἐχρειάσθησαν 21 μ. Πόσον εἶναι τὸ πλάτος τοῦ τάπητος;

8) Ποῖος εἶναι ὁ χῶρος κιβωτίου, ἐὰν ἐσωτερικῶς ἔχῃ βάθος 1,30 μ. καὶ βάσιν τετραγωνικήν, τῆς ὁποίας ἡ πλευρὰ εἶναι 0,95 μ. καὶ πόσας ὀκάδας ὕδατος θὰ χωρῇ τὸ κιβώτιον τοῦτο; (1)

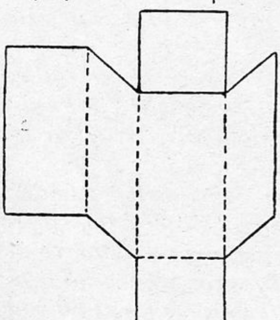
9) Σανὶς ἔχει μῆκος 4 μ. πλάτος 0,45 καὶ πάχος 0,035. Ποῖος ὁ ὄγκος αὐτῆς;

10) Ἐπιπέδου πλατείας, τῆς ὁποίας τὸ μῆκος εἶναι 85,3 καὶ τὸ πλάτος 72,4, πρόκειται νὰ ἀναβιβασθῇ ἡ ἐπιφάνεια της κατὰ 0,30μ. Πόσα κυβικὰ μέτρα χώματος πρέπει νὰ προστεθῶσιν;

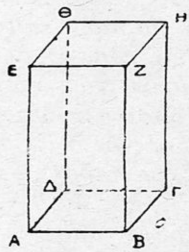
11) Εἴς τινα τάφρον μήκους 45μ. καὶ πλάτους 2,50μ. εὑρίσκεται ὕδωρ εἰς ὕψος 0.65. Πόσα κ.μ. ὕδατος ἔχει ἡ τάφρος;

Πλάγιον παραλληλεπίπεδον.

Τὸ σῶμα, τὸ ὁποῖον βλέπετε (σχ. 26), ὀνομάζεται πλά-



Σχ. 26.



Σχ. 25.

γιον ἢ κεκλιμένον παραλληλεπίπεδον. Ἔχει δέ, ὡς καὶ ὁ

1. Τὸν ὄγκον τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου εὑρίσκομεν, ὅπως καὶ τὸν ὄγκον τοῦ κύβου, πολλαπλασιάζοντες δηλ. τὴν βάσιν ἐπὶ τὸ μῆκος καὶ ἐπὶ τὸ ὕψος, τὰ ὁποῖα εἰς τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον εἶναι διαφόρων μεγεθῶν.

κύβος καὶ τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, 6 ἕδρας, 8 τριέδρους στερεὰς γωνίας, 12 ἀκμάς, 12 διέδρους γωνίας καὶ 24 ἐπιπέδους. Οὐδεμία τῶν γωνιῶν εἶναι ὀρθή.

Ἐκ τῶν ἑδρῶν τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου ἡ ἄνω καὶ κάτω εἶναι ὁριζόντιαι, ἡ ἔμπροσθεν καὶ ἡ ὄπισθεν κάθετοι καὶ ἡ δεξιὰ καὶ ἡ ἀριστερὰ πλάγιαι. Εἶναι δὲ ἀνὰ δύο ἴσαι καὶ παράλληλοι.

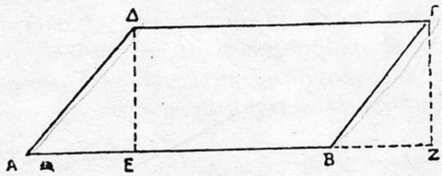
Ἐκ τῶν ἀκμῶν αἱ 4 τῆς ἄνω καὶ αἱ 4 τῆς κάτω ἕδρας εἶνε ὁριζόντιαι ἴσαι καὶ παράληλοι, αἱ δὲ λοιπαὶ πλάγιαι ἢ κεκλιμέναι ἴσαι καὶ παράλληλοι.

Ἐκ τῶν γωνιῶν 4 εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ὀρθῆς (ἀμβλεῖαι) καὶ 4 μικρότεραι τῆς ὀρθῆς (ὀξεῖαι).

Αἱ ἕδραι τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου λέγονται πλάγια ἢ κεκλιμένα παραλληλόγραμμα. Τὸ πλάγιον παραλληλόγραμμον ἔχει 4 πλευρὰς καὶ 4 γωνίας, αἱ ἀπέναντι πλευραὶ αὐτοῦ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι καὶ αἱ ἀπέναντι γωνίαι εἶναι ἴσαι.

Ἐπιφάνεια τοῦ πλαγίου παραλληλογράμμου.

Ἵνα εὕρωμεν τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ πλαγίου παραλληλογράμμου, πολλαπλασιάζομεν τὴν βάσιν μὲ τὴν ἐκ τῆς ἀπέναντι τῆς βάσεως καταβιβαζομένην κάθετον (ὕψος), διότι, ἂν ἀπὸ τὰς γωνίας Δ καὶ Γ τοῦ πλαγίου παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ (σχ. 27) καταβιβάσωμεν τὰς καθέτους ΔΕ καὶ ΓΖ ἐπὶ τὴν ΑΖ, καὶ ἂν κόψωμεν τὸ τμῆμα ΑΕΔ καὶ τὸ θέσωμεν καταλλήλως εἰς τὴν θέσιν τοῦ τμήματος ΒΖΓ, θὰ ἴδωμεν ὅτι ταῦτα εἶναι ἴσα καὶ ἐπομένως τὸ πλάγιον παραλληλληλόγραμμον ΑΒΓΔ μετεβλήθη εἰς ὀρθὸν παραλληλόγραμμον ΕΖΓΔ, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν τὴν ΕΖ, ἡ ὁποία



Σχ. 27.

εἶναι ἴση μὲ τὴν ΑΒ καὶ ὕψος τὴν ΔΕ, ἤτοι ἔχει τὴν βάσιν καὶ τὸ ὕψος τοῦ πλαγίου παραλληλογράμμου (1). Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιφανειῶν καὶ τῶν ἕξ ἑδρῶν ἀποτελεῖ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου.

Ὁ ὄγκος τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου εὑρίσκεται, ὅπως καὶ ὁ ὄγκος τοῦ ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου, διότι τὸ πλάγιον παραλληλεπίπεδον εἶναι ἰσοδύναμον μὲ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος. Ἰσοδύναμα λέγονται δύο σώματα ἢ σχήματα, ὅταν δύνανται νὰ εἶναι ἴσα χωρὶς νὰ ἐφαρμόζωνται ἀκέραια. Τὸ παραλληλόγραμμον, τὸ ὁποῖον ἔχει ὅλας τὰς πλευρὰς ἴσας, λέγεται ρόμβος.

Τὸ παραλληλόγραμμον, τὸ ὁποῖον ἔχει μόνον τὰς ἀπέναντι πλευρὰς ἴσας, λέγεται ρομβοειδές.

Ἀσκήσεις.

*Πόσας ἕδρας καὶ κορυφὰς καὶ ἀκμὰς ἔχει τὸ **πλάγιον παραλληλεπίπεδον**; Πόσας **γωνίας** ἔχει; Πῶς εἶναι αἱ **γωνίαι** του; Πῶς λέγονται αἱ ἕδραι του; Ποίαν θέσιν ἔχουν αἱ **ἕδραι** πρὸς ἀλλήλας; Ποίαν αἱ ἀκμαί; Ποία λέγεται **ἀμβλεῖα** γωνία; Ποία ὀξεῖα, ποία ὀρθή; Μὲ τί μετροῦμεν τὰς **γωνίας**; Κατὰ τί ὁμοιάζει τὸ πλάγ. παραλληλεπίπεδον μὲ τὸν **κύβον**; Κατὰ τί διαφέρει; Κατὰ τί ὁμοιάζει τὸ ὀρθὸν **παραλληλεπίπεδον**, κατὰ τί διαφέρει; Κατὰ τί ὁμοιάζει τὸ **πλάγιον** παραλληλόγραμμον μὲ τὸ τετράγωνον; μὲ τὸ **ὀρθογώνιον** παραλληλόγραμμον; Κατὰ τί διαφέρει αὐτῶν; **Ποῖον λέγεται** ρόμβος; Ποῖον ρομβοειδές;*

4

Προβλήματα.

*1) Τὸ ὕψος πλαγίου παραλληλογράμμου εἶναι **45,6 μ.**, ἡ δὲ βάσις αὐτοῦ 65,8 μ. ποία εἶναι ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ;*

---

1. Τοῦτο φαίνεται καλύτερον εἰς τεμάχιον χάρτου, σχήματος παραλληλογράμμου, τὸ ὁποῖον ἀποκόπτομεν καταλλήλως καὶ μεταβάλλωμεν εἰς ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον, ἔχον τὴν αὐτὴν **βάσιν** καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.

2) Ποῖον τὸ ὕψος τοῦ πλαγίου παραλληλογράμμου ἔχοντος βάσιν 26,3 καὶ ἐπιφάνειαν 412,50 μ.;

3) Ἄμπελός τις ἔχει σχῆμα πλαγίου παραλληλογράμμου, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι 45 μ. καὶ τὸ ὕψος 32,6, ἐπωλήθη ἀντὶ 1500 δραχμῶν. Πόσον ἀξίζει τὸ τετραγωνικὸν μέτρον;

4) Ποῖος ὁ ὄγκος πλαγίου παραλληλεπιπέδου, τοῦ ὁποίου αἱ διαστάσεις εἶναι 4,6 καὶ 7 μέτρα;

5) Τὸ πλάτος κήπου τινὸς εἶναι 66,8 μέτρα, ἡ δὲ ἐπιφάνεια 3 στρέμματα. Ποῖον τὸ μῆκος αὐτοῦ;

Περὶ πρισμάτων.

Πρίσμα λέγεται τὸ στερεὸν σῶμα, τὸ ὁποῖον περιορίζεται πανταχόθεν ἀπὸ ἐπίπεδα, ἐκ τῶν ὁποίων δύο εἶναι ἴσα καὶ παράλληλα, τὰ δὲ λοιπὰ παραλληλόγραμμα. Τὰ ἐπίπεδα ταῦτα λέγονται **ἕδραι τοῦ πρίσματος.**

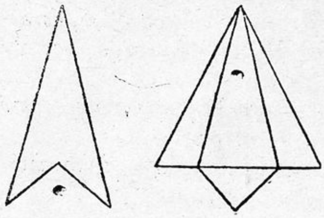
Βάσεις τοῦ πρίσματος λέγονται αἱ δύο ἴσαι καὶ παράλληλοι ἕδραι, ὕψος δὲ ἡ μεταξὺ τῶν δύο βάσεων ἀγομένη κάθετος. Ὅλαι αἱ μεταξὺ δύο παραλλήλων ἀγόμεναι κάθετοι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας. Τὸ πρίσμα ὀνομάζεται ἐκ τῆς βάσεως, ἐὰν αὕτη εἶναι τρίγωνον, τετράγωνον, πεντάγωνον κλπ. Τὸ πρίσμα ὀνομάζεται τριγωνικόν, τετραγωνικόν, πενταγωνικὸν κλπ.

Ἐὰν αἱ ἀκμαὶ τοῦ πρίσματος εἶναι κάθετοι πρὸς τὴν βάσιν, τὸ πρίσμα λέγεται ὀρθόν. Ἐὰν δὲ δὲν εἶναι κάθετοι, τὸ πρίσμα λέγεται πλάγιον. Ἐὰν ὅλαι αἱ ἕδραι τοῦ πρίσματος εἶναι παραλληλόγραμμα, τὸ πρίσμα λέγεται παραλληλεπίπεδον. Ὁ κύβος, τὸ ὀρθὸν καὶ τὸ πλάγιον παραλληλεπίπεδον εἶναι πρίσματα.

Ὁ κύβος λέγεται κανονικὸν ἑξάεδρον, διότι ἔχει καὶ τὰς 6 ἕδρας ἴσας.

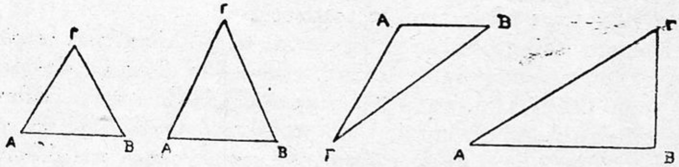
Τριγωνικὴ πυραμίς.

Τὸ σῶμα, τὸ ὁποῖον βλέπετε (σχ. 28), λέγεται τριγωνικὴ πυραμίς. Ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς ἔχει 4 ἕδρας· ἐκ τῶν ἑδρῶν τούτων ἡ μὲν μία ἀποτελεῖ τὴν βάσιν τῆς πυραμίδος, αἱ δὲ ἄλλαι τρεῖς ἑνοῦνται εἰς ἓν σημεῖον, τὸ ὁποῖον λέγεται κορυφὴ τῆς πυραμίδος. Ἀκμὰς ἔχει ἡ πυραμὶς 6. Ὕψος τῆς πυραμίδος λέγεται ἡ κάθετος ἡ καταβιβαζομένη ἐκ τῆς κορυφῆς εἰς τὴν βάσιν. Ἡ κάθετος δύναται νὰ πέσῃ καὶ ἐκτὸς τῆς βάσεως. Ἡ πυραμὶς εἶναι τὸ τρίτον τοῦ πρίσματος τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος. Αἱ ἕδραι τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος λέγονται τρίγωνα. Τὸ τρίγωνον ὀνομάζεται διὰ τριῶν ψηφίων ΑΒΓ (σχ. 29).



Σχ. 28.

Τὰ τρίγωνα διαιροῦνται κατὰ τὰς πλευρὰς εἰς ἰσόπλευρα,



Σχ. 29. Σχ. 30. Σχ. 31. Σχ. 32.

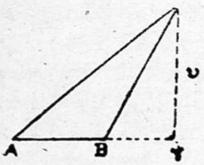
ἰσοσκελῆ καὶ σκαληνά. Ἰσόπλευρον (σχ. 29) λέγεται τὸ τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει καὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς αὐτοῦ ἴσας πρὸς ἀλλήλας. Ἰσοσκελὲς (σχ. 30) λέγεται τὸ τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς δύο πλευρὰς ἴσας καὶ (σχ. 31) σκαληνὸν ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἔχει καὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς ἀνίσους. Κατὰ τὰς γωνίας διαιροῦνται τὰ τρίγωνα εἰς ὀρθογώνια, ὀξυγώνια καὶ ἀμβλυγώνια.

Τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον (σχ. 32) ἔχει μίαν γωνιαν ὀρθήν, τὸ ὀξυγώνιον (σχ.29) ἔχει καὶ τὰς τρεῖς γωνίας ὀξείας καὶ τὸ ἀμβλυγώνιον (σχ. 31) ἔχει μίαν γωνίαν ἀμβλεῖαν. Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντὸς τριγώνου ἰσοῦται μὲ δύο γωνίας ὀρθάς. Εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ὀνομάζονται κάθετοι αἱ δύο πλευραί, αἱ ἀποτελοῦσαι τὴν ὀρθὴν γωνίαν. Ὑποτείνουσα δὲ ἡ ἀπέναντι τῆς ὀρθῆς γωνίας πλευρά.

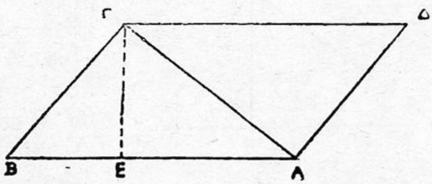
Βάσις τοῦ τριγώνου ὀνομάζεται ἡ πλευρά, ἐπὶ τῆς ὁποίας τὸ τρίγωνον στηρίζεται. Δύναται ὅμως καὶ πᾶσα ἄλλη πλευρὰ νὰ θεωρηθῇ ὡς βάσις, διότι διὰ περιστροφῆς τοῦ τριγώνου δύναται καὶ πᾶσα ἄλλη πλευρὰ νὰ λάβῃ ὁριζοντίαν θέσιν. Τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου βάσις λαμβάνεται ἡ ἄνισος πλευρά.

Κορυφὴ τοῦ τριγώνου λέγεται ἡ γωνία, ἡ ἀπέναντι τῆς βάσεως.

Ἡ κάθετος, ἡ ἀγομένη ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν,



Σχ. 33.



Σχ. 34.

ὀνομάζεται ὕψος τοῦ τριγώνου· ἡ κάθετος αὕτη δύναται νὰ πέσῃ καὶ ἐκτὸς τῆς βάσεως ἐπὶ τὴν προεκβολὴν αὐτῆς (σχ. 33). Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 33) βάσις εἶναι ἡ ΑΒ καὶ ἡ ἐκ τῆς κορυφῆς Γ εἰς τὴν βάσιν ΑΒ καταβιβαζομένη κάθετος Γγ.

Τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου βάσιν καὶ ὕψος λαμβάνομεν συνήθως τὰς δύο καθέτους αὐτοῦ πλευράς.

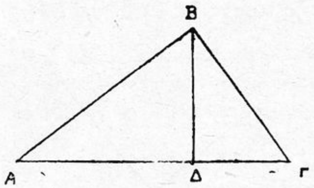
Πᾶν τρίγωνον εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλογράμμου, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος. Διότι, ἂν κόψωμεν τὸ παραλληλόγραμμον (σχ. 34) κατὰ τὴν διαγώνιον αὐτοῦ ΓΑ, θὰ σχηματισθῶσι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΑΓ, τὰ ὁποῖα τιθέμενα τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἑτέρου καταλαμβάνουσι τὸ αὐτὸν τόπον· ἄρα θὰ σχηματισθῶσι δύο ἴσα τρίγωνα. Ἑκάτερον δὲ τῶν δύο τούτων τριγώνων ἔχει βάσιν καὶ ὕψος τὴν βάσιν καὶ τὸ ὕψος τοῦ παραλληλογράμμου.

Ἑπομένως τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν τὴν ΑΒ καὶ ὕψος τὴν ΓΕ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΒ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος ΓΕ (1).

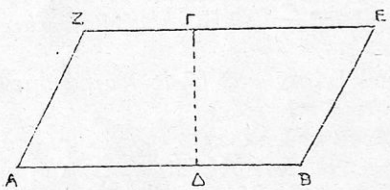
Ἐπιφάνεια τριγώνου.

Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος.

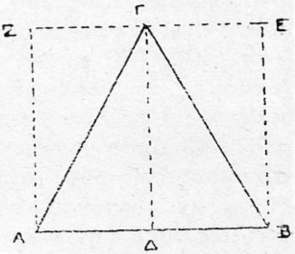
Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 35)· ἂν λάβωμεν ὡς βάσιν αὐτοῦ τὴν πλευρὰν ΑΓ, ὕψος θὰ εἶναι ἡ ἐκ τῆς ἀπέναντι κορυφῆς Β ἐπ' αὐτὴν ἀγομένη κάθετος ΒΔ. Ἂν ἡ βάσις ΑΓ εἶναι 4 μέτρα, τὸ δὲ ὕψος 6 μέτρα, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τριγώνου θὰ εἶναι $4 \times 6 = 24 : 2 = 12$ τ.μ. Διότι μὲ βάσιν ΑΒ=ΑΓ καὶ ὕψος ΓΔ=ΒΔ σχηματίζομεν τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΕΖ (σχ. 36), τὸ ὁποῖον ἰσοῦται μὲ δύο τρίγωνα ἔχοντα τὴν αὐτὴν



Σχ. 35.



Σχ. 36.



Σχ. 37.

βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος. Ἑπομένως τὸ ἓν τρίγωνον ΑΒΓ

1 Τοῦτο φαίνεται καλύτερον εἰς τεμάχιον χάρτου σχήματος παραλληλογράμου καταλλήλως κοπτόμενον.

(σχ. 35) ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΕΖ (σχ. 36), ἢ μὲ βάσιν ΑΒ καὶ ὕψος ΓΔ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 37) σχηματίζομεν τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΕΖ. Ἐὰν κόψωμεν τὰ τρίγωνα ΓΒΕ καὶ ΓΑΖ καὶ τοποθετήσωμεν αὐ ὰ καταλλήλως ἐπὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (τὸ ΓΒΕ ἐπὶ τοῦ ΓΔΒ καὶ ΓΑΖ ἐπὶ τοῦ ΓΔΑ) θὰ ἴδωμεν ὅτι καταλαμβάνουσι τὸν αὐτὸν τόπον. Ἑπομένως τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΕΖ, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν καὶ ὕψος τὴν βάσιν καὶ τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Ἐπιφάνεια πυραμίδος.

Ἡ ἐπιφάνεια, ἥτις ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ πέριξ τρίγωνα τῆς πυραμίδος, λέγεται παράπλευρος ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος. Τὸ ἄθροισμα δὲ τῆς ἐπιφανείας τῆς βάσεως καὶ τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας ἀποτελεῖ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος. Ἡ βάσις τῆς πυραμίδος δύναται νὰ εἶναι τριγωνικὴ ἢ τετραγωνική, πενταγωνικὴ κλπ., αἱ ἄλλαι ὅμως ἕδραι δὲν δύνανται νὰ εἶναι ἢ τριγωνικαί.

Ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος ἰσοῦται μὲ τὸ τρίτον πρίσματος, ἔχοντος βάσιν καὶ ὕψος τὴν βάσιν καὶ τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος.

Εἴδη πυραμίδων.—Ἡ πυραμὶς ὀνομάζεται ἐκ τῆς βάσεώς της. Ἐὰν ἡ βάσις εἶναι τρίγωνον, ἡ πυραμὶς λέγεται τριγωνική. Ἐὰν ἡ βάσις εἶναι τετράγωνον πεντάγωνον ἢ πολύγωνον τετραγωνική, πενταγωνικὴ ἢ πολυγωνικὴ κλπ. Ἡ πυραμὶς λέγεται κανονική, ἂν ἡ βάσις αὐτῆς εἶναι κανονικὸν πολύγωνον, ἡ δὲ ἐκ τῆς κορυφῆς ἀγομένη κάθετος ἐπὶ τῆς βάσεως πίπτει εἰς τὸ κέντρον αὐτῆς.

Ἀσκήσεις.

Πόσας ἕδρας, ἀκμὰς καὶ κορυφὰς ἔχει ἡ πυραμίς; Ποία ἕδρα λέγεται βάσις τῆς πυραμίδος; Ποῖον λέγεται ὕψος αὐτῆς; Πῶς λέγονται αἱ ἕδραι τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος;

Πῶς λέγονται τὰ τρίγωνα ἐκ τῶν πλευρῶν, ἐκ τῶν γωνιῶν; Μὲ τί ἰσοῦται τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντὸς τριγώνου; Ποίαν συνήθως λαμβάνομεν ὡς βάσιν τοῦ τριγώνου; Ποῖον τὸ ὕψος αὐτοῦ; Ποία εἶναι ἡ σχέσις τριγώνου καὶ παραλληλογράμμου; Πῶς εὑρίσκεται ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τριγώνου; ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος ; ὁ ὄγκος αὐτῆς; Ποία εἶναι ἡ σχέσις πυραμίδος καὶ πρίσματος ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος πρὸς αὐτήν;

Πόσα εἴδη πυραμίδων ἔχομεν; Ἀπὸ τί ὀνομάζονται αἱ πυραμίδες; Ἐκ ποίου σχήματος ἕδρας ἀποτελεῖται ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια ὅλων τῶν πυραμίδων; Πῶς εὑρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν τῶν ἑδρῶν οἱασδήποτε πυραμίδος;

Προβλήματα.

1) Ποία εἶναι ἡ περίμετρος ἰσοπλεύρου τριγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι 18,4 μ.;

2) Ποία ἡ περίμετρος ἰσοσκελοῦς τριγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι 4 μέτρα, τὸ δὲ σκέλος 7;

3) Ἡ ἐπιφάνεια ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι 146,5 τ. μ., ἡ μία κάθετος εἶναι 13,2 μ. Πόση εἶναι ἡ ἄλλη κάθετος;

4) Ἡ ἐπιφάνεια τριγώνου εἶναι 85,65 τ. μ. ἡ κάθετος ἡ καταβιβαζομένη ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν εἶναι 11,5 μ. Ποῖον εἶναι τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς ταύτης;

5) Ἄμπελος τριγωνικὴ ἔχει βάσιν 22,3 καὶ ὕψος 16,3. Ποῖον θὰ εἶναι τὸ ὕψος ἄλλης ἀμπέλου σχήματος παραλληλογράμμου, τῆς ὁποίας τὸ μῆκος εἶναι 25 μ. καὶ ἡ ἐπιφάνεια ἴση πρὸς τὴν τοῦ πρώτου;

6) Νὰ μοιρασθῇ τριγωνικὴ ἄμπελος εἰς τρεῖς κληρονόμους ἐξ ἴσου καὶ νὰ ἔχωσι κοινὴν εἴσοδον.

Λύσις.—Ἵνα διαιρέσωμεν τριγωνικὴν ἐπιφάνειαν εἰς δύο ἢ τρία ἢ τέσσαρα κλπ. μέρη, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὴν βάσιν αὐτοῦ εἰς 2, 3, 4 κλπ. μέρη καὶ ἔπειτα νὰ ἑνώσωμεν τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως μὲ τὴν κορυφὴν διὰ σχοινίου καλῶς τεταμένου.

7) Πυραμὶς τις ἔχει βάσιν τετραγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι 12,80 μ. Τὸ δὲ ὕψος 18,20 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος αὐτῆς;

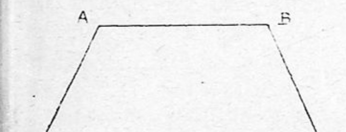
8) Ἡ ἐπιφάνεια τῆς βάσεως τριγωνικῆς πυραμίδος εἶναι 35 τ. μ., τὸ δὲ ὕψος 18,20 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος αὐτῆς;

9) Ἡ μεγαλυτέρα πυραμὶς τῆς Αἰγύπτου ἔχει βάσιν τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι 232,75 μ., τὸ δὲ ὕψος αὐτῆς 146 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος αὐτῆς;

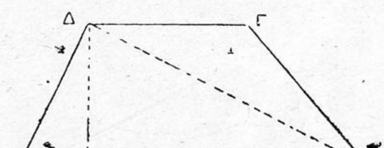
Κόλουρος πυραμίς.

Τὸ σῶμα, τὸ ὁποῖον βλέπετε, ὀνομάζεται κόλουρος πυραμὶς (σχ. 38). Σχηματίζεται δὲ αὕτη, ἂν δι' ἑνὸς ἐπιπέδου, παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν, ἀποκόψωμεν τὸ ἄνω μέρος τῆς πυραμίδος. Ἡ κόλουρος πυραμὶς ἔχει δύο παραλλήλους καὶ ἀνίσους βάσεις. Αἱ βάσεις αὗται ἔχουσι τὸ αὐτὸ σχῆμα. Αἱ ἕδραι τῆς κολούρου πυραμίδος εἶναι κατὰ δύο περισσότεραι τῶν πλευρῶν τῆς μιᾶς βάσεως, αἱ ἀκμαὶ αὐτῆς εἶναι τριπλάσιαι τῶν ἀκμῶν τῆς βάσεως. Γωνίας στερεὰς ἔχει τὸ διπλάσιον τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν τῆς βάσεως. Αἱ παράπλευροι ἕδραι τῆς κολούρου πυραμίδος ἔχουσι σχῆμα τραπεζίου.

Σχ. 38.



Σχ. 39.



Σχ. 40.

Τραπέζιον λέγεται τὸ τετράπλευρον, τοῦ ὁποίου μόνον δύο ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι παράλληλοι (οὐχὶ δὲ καὶ ἴσαι) (σχ. 39). Βάσεις τοῦ τραπεζίου εἶναι αἱ δύο παράλληλοι πλευραί, ὕψος δὲ ἡ μεταξὺ τῶν δύο παραλλήλων ἀγομένη κάθετος.

Ἐπιφάνεια τραπεζίου.—Ἡ ἐπιφάνεια τραπεζίου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἡμίσεος ἀθροίσματος τῶν βάσεών του ἐπὶ τὸ ὕψος του. Ἔστω τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ (σχ. 40)· τοῦτο διαιρεῖ ἡ διαγώνιος ΔΒ εἰς δύο τρίγωνα, τὸ ΑΒΔ καὶ τὸ ΔΒΓ. Ἡ ἐπιφάνεια ἑκάστου τῶν τριγώνων τούτων ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος, καὶ ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ βάσις ΑΒ τοῦ τριγώνου ΑΒΔ εἶναι ἴση μὲ 10 μέτρα, καὶ τὸ ὕψος ΔΕ ὕψος τῶν τραπεζίων, ἴσον μὲ 12 μέτρα, ἡ ἐπιφάνεία αὐτοῦ θὰ ἰσοῦται μὲ $\frac{10\times12.}{2}$

Ὁμοίως ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ βάσις ΔΓ τοῦ τριγώνου ΔΒΓ εἶναι 8 μ. καὶ ὕψος τὸ τοῦ τραπεζίου ΔΕ ἴσον μὲ 12μ. (διότι πᾶσαι αἱ μεταξὺ δύο παραλλήλων κάθετοι εἶναι ἴσαι), ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τριγώνου ΔΒΓ θὰ ἰσοῦται μὲ $\frac{8\times12}{2}$

ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τραπεζίου θὰ ἰσοῦται μὲ $\frac{10\times12}{2}$

$$\frac{8\times12}{2}=\frac{10\times12+8\times12}{2}=\frac{10+8\times12.}{2}.$$ Ἑπομένως τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο βάσεων ἐπὶ τὸ ὕψος ἀποτελεῖ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου. Τὸ τετράπλευρον, τοῦ ὁποίου οὐδεμία πλευρὰ εἶναι παράλληλος πρὸς ἄλλην, λέγεται τραπεζοειδές.

Ἡ ἐπιφάνεια τῆς κολούρου πυραμίδος ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιφανειῶν τῶν ἑδρῶν αὐτῆς.

Ὄγκος κολούρου πυραμίδος.—Ὁ ὄγκος τῆς κολούρου πυραμίδος εὑρίσκεται κατὰ προσέγγισιν, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν δύο βάσεων ἐπὶ τὸ ὕψος. Εὑρίσκεται δὲ ἀκριβῶς, ἂν ἀπὸ τὸν ὄγκον τῆς ὅλης πυραμίδος ἀφαιρεθῇ ὁ ὄγκος τῆς ἀποτετμημένης πυραμίδος.

Ἀσκήσεις.

Τί εἶναι κόλουρος πυραμίς; Πῶς σχηματίζεται; Πόσας βάσεις ἔχει; Πόσας ἕδρας, ἀκμὰς καὶ στερεὰς γωνίας ἔχει; Κατὰ τί ὁμοιάζει μὲ τὴν ἀκεραίαν πυραμίδα; Κατὰ τί διαφέρει αὐτῆς; Πῶς λέγεται ἡ παράπλευρος ἕδρα τῆς ἀκεραίας; Πῶς τῆς κολούρου; Τί λέγεται τραπέζιον; Κατὰ τί ὁμοιάζει καὶ κατὰ τί διαφέρει τὸ τραπέζιον τοῦ παραλληλογράμμου; Πῶς εὑρίσκεται τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου; Πῶς ἡ ἐπιφάνεια τῆς κολούρου πυραμίδος; Πῶς εὑρίσκεται ὁ ὄγκος αὐτῆς;

Προβλήματα.

1) Αἱ δύο παράλληλοι πλευραὶ τραπεζίου εἶναι 18,3 καὶ 21,7 καὶ ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ 800 τ. μ. Ποῖον τὸ ὕψος τοῦ τραπεζίου;

2) Κῆπος ἔχει σχῆμα τραπεζίου. Αἱ δύο παράλληλοι πλευραὶ αὐτοῦ εἶναι 45,5 καὶ 34,5, ἡ δὲ ἀπόστασις ἀπ' ἀλλήλων 28 μέτρα. Ποία ἡ ἀξία τοῦ κήπου, ὅταν τὰ 60 τ. μ. τιμῶνται 80 δραχμάς;

3) Αἱ δύο παράλληλοι πλευραὶ ἀγροῦ τινος, σχήματος τραπεζίου, εἶναι ὁμοῦ 250 μέτρα, τὸ δὲ ὕψος 150 μέτρα. Ἐκ πόσων στρεμμάτων ἀποτελεῖται;

4) Νὰ μοιρασθῇ ἄμπελος, ἡ ὁποία ἔχει σχῆμα τραπεζίου εἰς τέσσαρας κληρονόμους ἐξ ἴσου.

Λύσις. Διαιροῦμεν ἑκατέραν τῶν βάσεων εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη καὶ ἑνώνομεν τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως διὰ σχοινίου καλῶς τεταμένου.

5) Ἡ διαγώνιος τραπεζίου εἶναι 18 μ. Τὰ ἐπὶ τῆς διαγωνίου ταύτης ὕψη τῶν δύο τριγώνων εἶναι 12 μ. καὶ 14 μ. Ποία ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τραπεζίου;

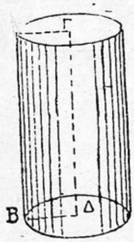
6) Ποία ἡ ἐπιφάνεια κολούρου πυραμίδος τετραγωνικῆς, τῆς ὁποίας ἡ πλευρὰ τῆς μιᾶς βάσεως εἶναι 5, τῆς ἄλλης 3 καὶ τὸ ὕψος τοῦ τραπεζίου 2.10; καὶ πόσος ὁ ὄγκος αὐτῆς, ὅταν τὸ ὕψος της εἶναι 2 μ.;

7) Τετραγωνικὴ κόλουρος πυραμὶς ἔχει βάσεις τετράγωνα, τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ εἶνε 0,60 καὶ 0,30. Τὸ ὕψος τῶν τραπεζίων, τῶν ἀποτελούντων τὰς πλευράς, εἶναι 0,45. Ζητεῖται α' τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστης βάσεως, β' τὸ ἐμβαδὸν τῶν πλευρῶν, γ' τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐξωτερικῆς ἐπιφανείας καὶ δ' ὁ ὄγκος τῆς κολούρου πυραμίδος, ὅταν τὸ ὕψος εἶναι 0,4.

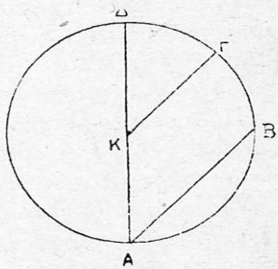
Περὶ κυλίνδρου.

Τὸ σῶμα τοῦτο λέγεται κύλινδρος (σχ. 41). Οὗτος δὲν ὁμοιάζει μὲ τὰ πολύεδρα, διότι δὲν περιορίζεται πανταχόθεν ὑπὸ ἐπιπέδων σχημάτων, ἀλλὰ περιορίζεται ὑπὸ μιᾶς κυρτῆς ἐπιφανείας καὶ δύο ἐπιπέδων ἴσων καὶ παραλλήλων.

Γένεσις κυλίνδρου.—Ἂν στρέψωμεν τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ περὶ τὴν πλευρὰν αὐτοῦ ΓΔ (σχ. 41), ἥτις μένει ἀκίνητος, πάντοτε κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν, μέχρις οὗ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν προτέραν του θέσιν, θὰ σχηματίσωμεν τὸν κύ-



Σχ. 41.



Σχ. 42.

λινδρον. Ἡ ἀκίνητος πλευρὰ ΓΔ λέγεται ἄξων τοῦ κυλίνδρου, ἡ ΑΒ λέγεται γενέτειρα, διότι περιστρεφομένη γεννᾷ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου. Αἱ δὲ ἄλλαι πλευραὶ ΑΒ καὶ ΓΔ γράφουσι τὰ δύο ἴσα κυκλικὰ ἐπίπεδα (τὰς βάσεις τοῦ κυλίνδρου). Τὰ σημεῖα Α καὶ Β γράφουσι τὰ ἄκρα τῶν κυκλικῶν ἐπιφανειῶν τοῦ κυλίνδρου. Αἱ ἐπίπεδοι ἐπιφάνειαι τοῦ κυλίνδρου λέγονται κύκλοι. Κύκλος λέγεται ἐπίπεδος ἐπιφάνεια περικλειομένη ὑπὸ καμπύλης γραμμῆς, τῆς ὁποίας ὅλα τὰ σημεῖα ἀπέχουσιν ἐξ ἴσου ἀπὸ ἕν σημεῖον τῆς ἐπιφανείας (σχ. 42). Τὸ σημεῖον τοῦτο λέγεται κέντρον τοῦ κύκλου. Ἡ καμπύλη γραμμὴ λέγεται περιφέρεια τοῦ κύκλου καὶ σημειοῦται διὰ τοῦ γράμματος Π. Ἡ εὐθεῖα, ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου εἰς τὴν περιφέρειαν ἀγομένη, καλεῖται ἀκτὶς ἢ ἡμιδιάμετρος τοῦ κύκλου καὶ σημειοῦται διὰ τοῦ γράμματος α. Ὅλαι αἱ ἀκτῖνες τοῦ αὐτοῦ κύκλου εἶναι ἴσαι. Ἡ εὐθεῖα ΔΑ, ἡ συνδέουσα δύο σημεῖα τῆς περιφερείας καὶ διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου καλεῖται διάμετρος καὶ σημειοῦται διὰ τοῦ γράμματος δ. Ὅλαι αἱ διάμετροι τοῦ κύκλου εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας. Ἑκάστη δὲ ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ἀκτῖνας.

Πᾶσα διάμετρος διαιρεῖ τὸν κύκλον εἰς δύο ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται ἡμικύκλια.

Ἡ περιφέρεια παντὸς κύκλου διαιρουμένη διὰ τῆς διαμέτρου αὐτοῦ δίδει πηλίκον 3,14 καὶ σημειοῦται διὰ τοῦ γράμματος π. Ὥστε διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας παντὸς κύκλου, πολλαπλασιάζομεν τὴν διάμετρον αὐτοῦ ἐπὶ τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν 3,14 ($\Pi=\delta\times\pi$) καὶ ἐπειδὴ ἡ διάμετρος ἰσοῦται μὲ δύο ἀκτῖνας, ἔχομεν ($\Pi=\delta\times\pi$)=($\Pi=2\ \alpha\ \pi$). Διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ τὴν διάμετρον, διαιροῦμεν τὴν περιφέρειαν διὰ τοῦ δεκαδικοῦ 3,14 $\left(\delta=\frac{\Pi}{\pi}\right)=\frac{\Pi}{3,14}$

Περιφέρειαν χαράσσομεν ἐπὶ τοῦ χάρτου ἢ τοῦ πίνακος διὰ τοῦ διαβήτου. Οἱ γεωργοὶ καὶ οἱ ξυλουργοὶ διὰ νὰ χαράξωσι περιφέρειαν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους λαμβάνουσι σχοινίον, τοῦ ὁποίου τὸ ἕν ἄκρον δένουσιν ἐπὶ πασσάλου ἐμπεπηγμένου ἐπὶ τοῦ ἐδάφους καὶ περιστρέφουσι τὸ καλῶς τεταμένον σχοινίον, εἰς τὸ ἄκρον τοῦ ὁποίου εἶναι προσδεδεμένον χονδρὸν καρφίον, διὰ τοῦ ὁποίου χαράσσεται ἡ περιφέρεια.

Ἡ εὐθεῖα ΑΒ, ἡ ἑνώνουσα δύο σημεῖα τῆς περιφερείας χωρὶς νὰ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου, λέγεται χορδή. Ἡ διάμετρος εἶναι μεγαλυτέρα πάσης χορδῆς τοῦ ἰδίου κύκλου.

Ἡ ἐκτὸς τοῦ κύκλου εὐθεῖα, ἥτις, ὅσον καὶ ἂν προεκβληθῇ, συναντᾷ τὸν κύκλον μόνον εἰς ἓν σημεῖον, καλεῖται ἐφαπτομένη.

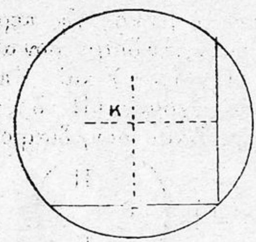
Μέρος τῆς περιφερείας καλεῖται τόξον, ὡς τὸ ΔΓ.

Τὸ μέρος ἑνὸς κύκλου ΔΚΓ, τὸ σχηματιζόμενον διὰ δύο ἀκτίνων καὶ ἑνὸς τόξου, καλεῖται τομεύς.

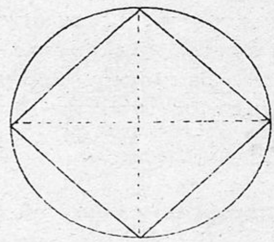
Τὸ μέρος τοῦ κύκλου ΑΒ, τὸ σχηματιζόμενον διὰ μιᾶς χορδῆς καὶ ἑνὸς τόξου, καλεῖται τμῆμα τοῦ κύκλου.

Ἐὰν διαιρεθῇ χορδή τις εἰς δύο ἴσα μέρη καὶ ἐκ τοῦ σημείου τῆς διαιρέσεως ἀχθῇ πρὸς τὰ ἔσω κάθετος, ἡ κάθετος προεκβαλλομένη ἐπαρκῶς θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ κέντρου. Τὸ μέσον τῆς γραμμῆς ταύτης προεκβαλλομένης ἑκατέρωθεν μέχρι τῆς περιφερείας εἶναι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

Ἐπίσης εὑρίσκομεν τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, ἐὰν διαιρέσωμεν δύο χορδὰς μὴ παραλλήλους εἰς δύο ἴσα μέρη καὶ



Σχ. 43.



Σχ. 44.

ἀπὸ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως ὑψώσωμεν καθέτους. Τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον αἱ κάθετοι θὰ συναντηθῶσιν, εἶναι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου (σχ. 43).

Ἐγγραφὴ κανονικοῦ πολυγώνου εἰς κύκλον.

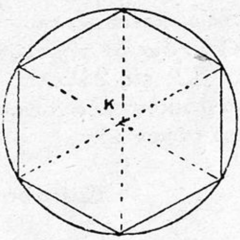
Τὸ πολύγωνον λέγεται ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον, ἂν αἱ κορυφαὶ αὐτοῦ εἶναι σημεῖα περιφερείας, αἱ δὲ πλευραὶ αὐτοῦ χορδαί.

Διὰ νὰ ἐγγράψωμεν τετράγωνον εἰς δοθέντα κύκλον, φέρομεν δύο διαμέτρους καθέτους πρὸς ἀλλήλας (σχ. 44) καὶ συνδέοντες τὰ τέσσαρα αὐτῶν ἄκρα σχηματίζομεν τὸ τετράγωνον.

Ἐὰν ἕκαστον ἐκ τῶν ἀνωτέρω τόξων διαιρέσωμεν εἰς δύο ἴσα μέρη καὶ ἑνώσωμεν τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως διὰ χορδῶν, σχηματίζομεν κανονικὸν ὀκτάγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον. Ἐὰν πάλιν ἕκαστον τῶν νέων τόξων διαιρέσωμεν εἰς δύο ἴσα μέρη καὶ ἑνώσωμεν τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως διὰ χορδῶν, σχηματίζομεν κανονικὸν δεκαεξάγωνον καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Ἐγγραφὴ κανονικοῦ ἑξαγώνου εἰς δοθέντα κύκλον.

Ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον κανονικοῦ ἑξαγώνου εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου. Ἐπομένως διὰ νὰ ἐγγράψωμεν κανονικὸν ἑξάγωνον εἰς κύκλον (σχ. 45), ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὴν περιφέρειαν εἰς 6 τόξα μὲ τὸν διαβήτην ἀνοίγοντες αὐτὸν τόσον, ὅση εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου καὶ ἑνώσωμεν τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως διὰ χορδῶν. Ἐὰν δὲ ἕκαστον τῶν ἀνωτέρω ἴσων τόξων (σχ. 45) διαιρέσωμεν εἰς δύο ἴσα μέρη, ἡ περιφέρεια θὰ διαιρεθῇ εἰς 12 ἴσα μέρη, καὶ ἂν ἑνώσωμεν τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως διὰ χορδῶν, θὰ σχηματίσωμεν ἐγγεγραμμένον κανονικὸν δωδεκάγωνον.



Σχ. 45

Ἐὰν πάλιν ἕκαστον τῶν νέων τόξων διαιρέσωμεν εἰς δύο ἴσα μέρη καὶ ἑνώσωμεν διὰ χορδῶν τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως, θὰ σχηματίσωμεν κανονικὸν εἰκοσιτετράγωνον καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Ἂν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου αὐξάνεται ἐπ' ἄπειρον διὰ τῆς διαιρέσεως τῶν ἑκάστοτε νέων τόξων καὶ τῆς ἑνώσεως τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως διὰ χορδῶν, θὰ καταντήσῃ ἡ πλευρὰ τοῦ πολυγώνου μικροτέρα πάσης εὐθείας καὶ ἐπομένως ἡ περίμετρος αὐτοῦ θὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, εἰς τὸν ὁποῖον εἶνε ἐγγεγραμμένον τὸ πολύγωνον, τοῦ ὁποίου ἐπ' ἄπειρον ηὐξήθησαν αἱ πλευραί.

Τὸ πρίσμα δέ, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν βάσιν κανονικὸν πολύγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς τὰς βάσεις τοῦ κυλίνδρου καὶ τοῦ ὁποίου πολυγώνου αἱ πλευραὶ αὐξάνουσιν ἐπ' ἄπειρον, εἶναι ἴσον μὲ τὸν κύλινδρον κατ' ὄγκον καὶ κατ' ἐπιφάνειαν.

Διὰ νὰ ἐγγράψωμεν ἰσόπλευρον τρίγωνον εἰς δοθέντα κύκλον, ἀρκεῖ πρῶτον νὰ ἐγγράψωμεν τὸ ἀνωτέρω κανονικὸν ἑξάγωνον καὶ ἔπειτα νὰ ἑνώσωμεν τὰς κορυφὰς αὐτοῦ ἐναλλάξ.

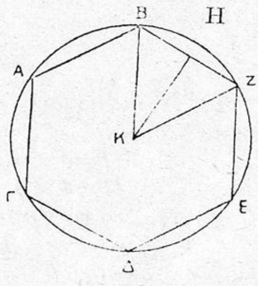
Διαίρεσις τῆς περιφερείας.—Ἡ περιφέρεια διαιρεῖται α' διὰ τοῦ διαβήτου, β' διὰ τοῦ ἀναγωγέως καὶ γ' διὰ γεωμετρικῆς κατασκευῆς, ὡς τὸ τετράγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον ἐσχηματίσθη διὰ δύο καθέτων διαμέτρων καὶ διὰ τῆς διαιρέσεως τῶν τόξων ἐσχηματίσθη τὸ 8γωνον, 16γωνον κλπ., διὰ δὲ τῆς ἀκτῖνος διῃρέθη ἡ περιφέρεια εἰς 6, εἰς 3, εἰς 12, εἰς 24 κλπ. καὶ ἐσχηματίσθησαν τὸ ἐγγεγραμμένον κανονικὸν ἑξάγωνον, τρίγωνον, δωδεκάγωνον, εἰκοσιτετράγωνον κλπ.

Ἐμβαδὸν κανονικοῦ πολυγώνου.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου εὑρίσκεται, ἐὰν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, εἰς τὸν ὁποῖον εἶναι ἐγγεγραμμένον τὸ κανονικὸν πολύγωνον (σχ. 45), φέρωμεν εὐθείας εἰς τὰς κορυφὰς τοῦ πολυγώνου. Διὰ τῶν εὐθειῶν τούτων χωρίζομεν τὸ πολύγωνον εἰς τόσα τρίγωνα ἴσα πρὸς ἄλληλα, ὅσαι εἶναι αἱ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου. Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ἐξ αὐτῶν εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψους. Τὸ ἄθροισμα δὲ τῶν ἐμβαδῶν ὅλων τῶν τριγώνων θὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πυλυγώνου εὑρίσκεται ἑπομένως, ἐὰν μετρηθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τῶν τριγώνων καὶ ληφθῇ τοσάκις, ὅσαι εἶναι αἱ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου.

Εὕρεσις τῆς ἐπιφανείας τοῦ κύκλου.

Λαμβάνομεν τὸ κανονικὸν πολύγωνον ΒΑΓΔΕΖ (σχ. 46) καὶ διαιροῦμεν τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, εἰς τὸν ὁποῖον εἶναι ἐγγεγραμμένον τὸ κ. πολύγωνον, εἰς 24, 48, 96 κλπ. μέρη διπλασιάζοντες πάντοτε τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν ἑκάστου νέου πολυγώνου διὰ τῆς διαιρέσεως τῶν νέων τόξων καὶ ἑνώσεως διὰ χορδῶν τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως (σχ. 46) Τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου τῶν ἐγγραφομένων κανονικῶν πολυγώνων θὰ εἶναι πάντοτε γινόμενον τῆς περιμέτρου του ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς καθέτου ΚΗ, τῆς ἀγομένης ἀπὸ τὸ κέντρον εἰς μίαν τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου (ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψους του). Ἀλλὰ ὅσον αὐξάνει ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου, τόσον πλησιάζει ἡ κάθετος ΚΗ πρὸς τὴν ἀκτῖνα, ἡ δὲ πλευρὰ τοῦ πολυγώνου μὲ τὰς ἀλλεπαλλήλους διαιρέσεις καταντᾷ μικροτέρα πάσης εὐθείας καὶ ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου πλησιάζει πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, τὸ δὲ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου. Ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου καὶ εὑρίσκεται, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὴν περιφέρειαν (βάσιν) ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος (ἥμισυ τοῦ ὕψους) ἢ ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἥμισυ τῆς περιφερείας (ἥμισυ τῆς βάσεως) ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα (ὕψος).



Σχ. 46.

Σημειοῦται δὲ διὰ τοῦ τύπου.

$$\text{Ε (ἐμβαδὸν)} = \frac{\text{Π (περιφέρειαν)} \times \text{α (ἀκτῖνα)}}{2} \quad \text{Ε} = \frac{\text{Π} \times \text{α}}{2}$$

ἢ $\text{Ε} = \alpha \times \alpha \times \pi = \text{Ε}\ \alpha^2 \times \pi$, διότι τὸ γινόμενον τῆς διαμέτρου ἐπὶ π (3,14) ἀποτελεῖ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου. Ἀκτὶς δὲ (τὸ ἥμισυ τῆς διαμέτρου) ἐπὶ π ἀποτελεῖ τὸ ἥμισυ τῆς περιφερείας. Τὸ ἥμισυ τῆς περιφερείας $=\alpha\times\pi$ ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα α ἀποτελεῖ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κύκλου. Ὅθεν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύκλου ἰσοῦται μὲ $\alpha\times\pi\times\alpha=\alpha\times\alpha\times\pi=\alpha^2\times\pi$.

Ἐκ τούτου καταφαίνεται ὅτι ὁ κύκλος εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν μὲν τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, ὕψος δὲ τὴν ἀκτῖνα αὐτοῦ.

Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τομέως εἶναι γινόμενον τοῦ τόξου ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος, διότι ὁ τομεὺς ἰσοῦται μὲ τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν τὸ τόξον τοῦ τομέως καὶ ὕψος τὴν ἀκτῖνα αὐτοῦ.

Προβλήματα.

1) Ἡ διάμετρος κύκλου εἶναι 4 μέτρα. Ποία ἡ περιφέρεια αὐτοῦ;

$$\Pi=\delta\times 3,14$$
$$\Pi=4\times 3,14=12,56.$$

2) Ποῖον τὸ ἐμβαδὸν κύκλου, τοῦ ὁποίου ἡ διάμετρος εἶναι 8,4 μέτρα; $E=\dfrac{\Pi\times\alpha}{2}=\dfrac{8,4\times 3,14\times 4,2}{2}=\dfrac{100,792}{2}$

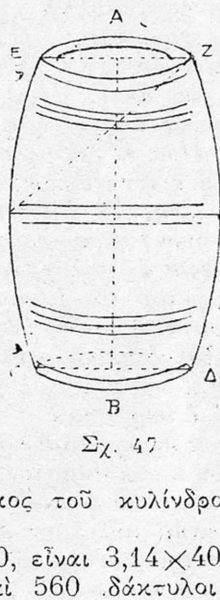
3) Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν κυκλικῆς τραπέζης, τῆς ὁποίας ἡ περιφέρεια εἶναι 6,8 μ;

$$\delta=\frac{6,8}{3,14}=2,16 \quad \text{ἀκτὶς } \alpha=\frac{2,16}{2}=1,08 \quad E=\frac{\Pi\times\alpha}{2}=\frac{6,8\times 1,08}{2}=3,672 \text{ τ. μ.}$$

Εὕρεσις τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου.

Ὁ κύλινδρος ἀποτελεῖται ἐκ δύο κυκλικῶν καὶ μιᾶς κυρτῆς ἐπιφανείας. Τὸ ἄθροισμα δὲ τῶν τριῶν τούτων ἐπιφανειῶν ἀποτελεῖ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου. Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου εἶνε ἴση μὲ ὀρθογώνιον τετράπλευρον, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις ἰσοῦται μὲ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου καὶ τὸ ὕψος μὲ τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου.

Ὄγκος τοῦ κυλίνδρου.— Τὸν ὄγκον τοῦ κυλίνδρου εὑρίσκομεν, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν, ὡς εἰς τὸ πρίσμα, τὴν βάσιν ἐπὶ τὸ ὕψος. Ἡ βάσις τοῦ κυλίνδρου εἶναι κύκλος. Τὸ ἐμβαδὸν ἑπομένως αὐτῆς εὑρίσκομεν, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὴν περιφέρειαν ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος ἢ τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος ἐπὶ τὸν λόγον τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον (3,14), ὅτε θὰ ἔχωμεν $B = \frac{\Pi \times \alpha \times \upsilon}{2}$ (ὕψος κυλίνδρου) ἢ $\alpha^2 \times \pi \times \upsilon$.



Σχ. 47

Ὄγκος βαρελίων.—Ἵνα εὕρωμεν τὸν ὄγκον τοῦ βαρελίου (σχ. 47), ἐξομοιοῦμεν τοῦτο μὲ τὸν κύλινδρον, ὁ ὁποῖος ἔχει ὕψος τὴν ἀπόστασιν ΑΒ τῶν δύο βάσεων τοῦ βαρελίου καὶ διάμετρον τὸν μέσον ὅρον τῆς διαμέτρου ΗΘ τοῦ μέσου. Ἔστω τὸ ὕψος ΑΒ = 1,90 ΓΔ=0,76 ΗΘ =0,84. Ὁ μέσος ὅρος τῶν δύο διαμέτρων $\frac{0{,}76 \times 0{,}84}{2} = 0{,}80$. Ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου, ἔχοντος ὕψος 1,90 καὶ διάμετρον 0,80, εἶναι $3{,}14 \times 40^2 \times 1{,}90 = 0{,}954560$ = 954 παλάμαι καὶ 560 δάκτυλοι ἢ μέτρα χωρητικότητος εἶναι 0 τόννοι, 954 λίτραι καὶ 560 γραμμάρια. Ἵνα δὲ μετατραποῦν εἰς ὀκάδας, πρέπει νὰ διαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 0,954560 διὰ τοῦ 0,001280=745 ὀκάδες καὶ 300 δράμια.

Ε ς τὰ τ λωνεῖα μεταχειρίζονται τὸν τύπον $0{,}525 \times \delta^3$. Ὁ δ παριστᾷ τὸ μῆκος τῆς διαγωνίου ΖΗ καὶ ἂν ἡ ΖΗ εἶναι 8 παλάμαι, ὁ ὄγκος θὰ εἶναι $0{,}525 \times 8 \times 8 \times 8$. Ἐπὶ τῇ βάσει δὲ τοῦ μήκους τῆς διαγωνίου ταύτης βαθμολογοῦσι μίαν ράβδον, τὴν ὁποίαν εἰσάγοντες εἰς τὸ βαρέλιον κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς ΖΗ εὑρίσκουσιν ἀμέσως τὴν χωρητικότητα.

Ἀσκήσεις.

Διατί ὁ κύλινδρος δὲν ὁμοιάζει μὲ τὰ πολύεδρα; Πῶς γίνεται ὁ κύλινδρος; Ποία γραμμὴ λέγεται ἄξων; Ποία γενέτειρα αὐτοῦ; Πῶς λέγονται αἱ ἐπίπεδοι ἐπιφάνειαι τοῦ κυλίνδρου; Τί λέγεται κύκλος; Τί λέγεται περιφέρεια, διάμετρος, ἀκτίς; Πῶς σημειοῦνται; Ποία ἡ σχέσις τῆς περιφερείας καὶ τῆς διαμέτρου, τῆς διαμέτρου καὶ τῆς ἀκτῖνος;

Πῶς λέγονται τὰ τμήματα, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖ ἡ διάμετρος τὸν κύκλον; Τί λέγεται χορδή, τόξον, τομεύς, ἐφαπτομένη; Τί λέγεται τμῆμα κύκλου; Πῶς εὑρίσκεται τὸ κέντρον τοῦ κύκλου; Πῶς κατασκευάζεται ὁ κύκλος; Πότε λέγεται ἓν πολύγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον; Πῶς ἐγγράφεται τὸ 4γωνον, 8γωνον, 16γωνον κλπ.; Πῶς τὸ 6γωνον, 3γωνον, 12γωνον κλπ.; Κατὰ πόσους τρόπους διαιρεῖται ἡ περιφέρεια; Ποία εἶναι ἡ σχέσις τῆς περιμέτρου τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ αὐξάνουν ἐπ' ἄπειρον καὶ ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου, εἰς τὸν ὁποῖον εἶναι ἐγγεγραμμένον τὸ πολύγωνον; Ποία ἡ σχέσις κυλίνδρου καὶ πρίσματος, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τὰς βάσεις τοῦ κυλίνδρου καὶ τοῦ πολυγώνου, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ αὐξάνουν ἐπ' ἄπειρον; Πῶς εὑρίσκεται τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου; Πῶς εὑρίσκεται ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύκλου; Διὰ τίνος τύπου σημειοῦται; Πῶς εὑρίσκεται τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τομέως ; ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου ; ὁ ὄγκος αὐτοῦ;

Προβλήματα.

1) Ἡ διάμετρος κύκλου τινὸς εἶναι 4 μέτρα. Πόση εἶναι ἡ περιφέρεια αὐτοῦ;

2) Ἡ διάμετρος τῆς βάσεως ἑνὸς κυλίνδρου εἶναι 3,4 *καὶ τὸ ὕψος 8,2. Ποῖον τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας καὶ ποῖος ὁ ὄγκος αὐτοῦ;*

3)Κυλινδρικὴ σκάφη ἀναβρυτηρίου ἔχει ἐσωτερικῶς διάμετρον 8 μέτρων καὶ βάθος 2,4. Ζητεῖται α΄) ποία εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ βυθοῦ, β΄) ποία εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας καὶ γ΄) πόσα κυβικὰ μέτρα ὕδατος περιέχει;

4)Οἱ ὀπίσθιοι τροχοὶ ἁμάξης τινὸς ἔχουσι διάμετρον 1,5. Πόσας στροφὰς θὰ κάμουν, ὅταν ἡ ἅμαξα διανύσῃ ἀπόστασιν 3000 μέτρων;

5) Η ἀκτὶς ἡμικυκλίου εἶναι 5 μέτρα. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ;

6) Κυκλικὴ τράπεζα, ἔχουσα περιφέρειαν 6,3 μ., πρόκειται νὰ στρωθῇ δι᾽ ὑφάσματος ἔχοντος πλάτος 0,60 τοῦ μέτρου. Πόσα μέτρα ὑφάσματος χρειάζεται;

7) Κυκλικὴ πλατεῖα, τῆς ὁποίας ἡ περιφέρεια εἶναι 86 μέτρα, πρόκειται νὰ πλακοστρωθῇ. Πόσαι πλάκες ἀπαιτοῦνται, ἐὰν ἡ πλευρὰ αὐτῶν εἶναι 0,20 τοῦ μέτρου;

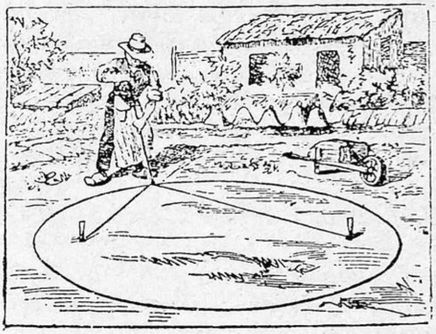
8)᾽Εκ δύο κύκλων ὁ εἷς ἔχει διάμετρον 6 καὶ ὁ ἕτερος 12 μέτρων. Ποσάκις τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἑνὸς χωρεῖ εἰς τὸ τοῦ ἑτέρου;

9) Περὶ κυκλικὴν τράπεζαν, τῆς ὁποίας ἡ διάμετρος εἶναι 2,4 μ., κάθηνται 12 πρόσωπα. Τί μέρος τῆς περιφερείας ἀναλογεῖ εἰς ἕκαστον;

10) Κορμὸς δένδρου ἔχει περιφέρειαν 2,4 μέτρων. Πόση ἡ διάμετρος αὐτοῦ καὶ πόσα κυβικὰ μέτρα εἶναι ὁ κορμός, τοῦ ὁποίου τὸ ὕψος εἶναι 4 μέτρα;

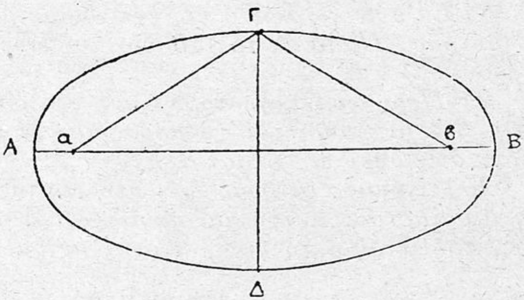
Ἔλλειψις.

Ἡ ἔλλειψις εἶναι κεκλεισμένον ἐπίμηκες στρογγύλον σχῆμα, τὸ ὁποῖον ὁμοιάζει πρὸς τὸν κύκλον (σχ. 48). Τοιοῦτον σχῆμα δύναται νὰ παραχθῇ ἐκ τῆς πλαγίας τομῆς τοῦ κυλίνδρου ἢ τοῦ κώνου. Ἔχει δὲ δύο διαμέτρους μίαν μεγίστην καὶ μίαν ἐλαχίστην. Αἱ διάμετροι αὗται τέμνονται καθέτως εἰς τὸ κέντρον καὶ ὀνομάζονται ἄξονες.—Ἡ ἔλλειψις γράφεται ὡς ἑξῆς:



Σχ. 48.

Ἐμπήγομεν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους ἢ τοῦ χάρτου δύο ἥλους, εἰς τοὺς ὁποίους δένομεν τὰ ἄκρα νήματος, ἔχοντος τὸ μῆκος τοῦ μεγάλου ἄξονος τῆς ἐλλείψεως. Τείνομεν κατόπιν τὸ νῆμα διὰ μολυβδοκονδύλου, τὸ ὁποῖον σύρομεν συνεχῶς ἐπὶ τοῦ νήματος, διατηρουμένου πάντοτε τεταμένου. Ἡ αἰχμὴ τοῦ μολυβδοκονδύλου θέλει γράψει τοιουτοτρόπως τὴν ἔλλειψιν.

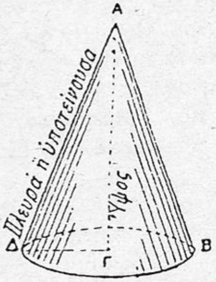


Τὴν ἐπιφάνειαν τῆς ἐλλείψεως εὑρίσκομεν, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸ γινόμενον τῆς μεγάλης ΑΟ καὶ τῆς μικρᾶς ΟΓ ἀκτῖνος ἐπὶ 3,14. Μεγάλη ἀκτὶς εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ μεγάλου ἄξονος ΑΒ καὶ μικρὰ ἀκτὶς τὸ ἥμισυ τοῦ μικροῦ ΓΔ.

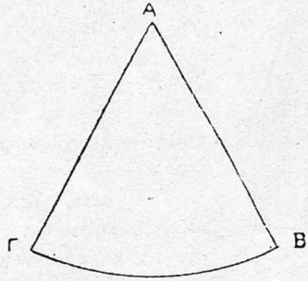
Τὴν περιφέρειαν τῆς ἐλλείψεως εὑρίσκομεν κατὰ προσέγγισιν, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ἀξόνων ἐπὶ 3,14.

Περὶ κώνου.

Τὸ σῶμα τοῦτο (σχ. 49) λέγεται κῶνος. Ὁ κῶνος εἶναι στερεὸν σῶμα. Περιορίζεται ἀπὸ ἕνα κύκλον καὶ ἀπὸ τὴν πέριξ αὐτοῦ κυρτὴν ἐπιφάνειαν, ἡ ὁποία ἀπολήγει εἰς σημεῖον τι Α, τὸ ὁποῖον λέγεται κορυφὴ τοῦ κώνου. Γεννᾶται δὲ ὁ κῶνος ἀπὸ ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὅταν τοῦτο περιστραφῇ περὶ μίαν τῶν καθέτων αὐτοῦ πλευρῶν πάντοτε κατὰ τὴν



Σχ. 49.

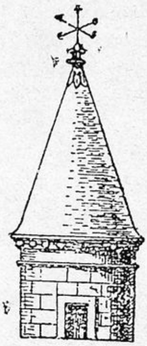


Σχ. 50.

αὐτὴν φοράν, μέχρις ὅτου ἐπανέλθῃ εἰς τὴν θέσιν, ἐκ τῆς ὁποίας ἤρχισε νὰ στρέφηται. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΔΓ στρέφεται περὶ τὴν ΑΓ, μέχρις ὅτου ἐπανέλθῃ εἰς τὴν πρώτην θέσιν του. Κατὰ τὴν περιστροφήν του ταύτην ἡ μὲν πλευρὰ ΓΔ θὰ γράψῃ κύκλον, ὁ ὁποῖος λέγεται βάσις τοῦ κώνου, ἡ δὲ πλειρὰ ΓΑ, ἡ ὁποία μένει ἀκίνητος, λέγεται ἄξων τοῦ κώνου ἢ ὕψος αὐτοῦ.

Κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου λέγεται ἡ ἐπιφάνεια, τὴν ὁποίαν θὰ γράψῃ ἡ ὑποτείνουσα τοῦ τριγώνο ΑΔ κατὰ τὴν περιστοφήν της. Ἡ ὑποτείνουσα δὲ αὕτη λέγεται πλευρὰ ἢ ἀπόστημα τοῦ κώνου. Ὅλαι αἱ πλευραὶ αὗται τοῦ κώνου εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

Ἐπιφάνεια τοῦ κώνου.—Καλύπτομεν τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου ΑΓΒΔ (σχ. 49) διὰ φύλλου χάρτου καὶ ἀναπτύσσομεν αὐτὸ ἐπὶ ἐπιπέδου. Εἶναι φανερὸν ὅτι θὰ σχηματισθῆ εἷς τομεὺς (σχ. 50), τοῦ ὁποίου τὸ τόξον θὰ εἶναι ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως ΒΓ καὶ κορυφὴ τοῦ τομέως ἢ κέντρον τοῦ κύκλου ἡ κορυφὴ τοῦ κώνου Α. Ὅθεν ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια κώνου ἰσοῦται μὲ τὸν τομέα, τοῦ ὁποίου τόξον εἶναι ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως τοῦ κώνου, ἀκτὶς δὲ ἡ πλευρὰ τοῦ κώνου.



Σχ. 50α

Εὑρίσκομεν δὲ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ τομέως, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὴν βάσιν (τὸ τόξον) ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος. Ἐπειδὴ ἡ βάσις τοῦ κώνου ἔχει σχῆμα κύκλου, εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ πολλαπλασιάζοντες τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος ἐπὶ 3,14 ($\alpha^2 \times \pi$). Τὸ ἄθροισμα τῶν δύο τούτων ἐπιφανειῶν ἀποτελεῖ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου.

Ὄγκος τοῦ κώνου.—Ὁ κῶνος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς πυραμίς, τῆς ὁποίας ἡ βάσις εἶναι κανονικὸν πολύγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον (τὴν βάσιν τοῦ κώνου), ἔχον ἀπείρους πλευράς, καὶ τὸ ὕψος εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ κώνου. Ἑπομένως ὁ ὄγκος τοῦ κώνου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ τρίτον τοῦ ὕψους $\left(0 = \dfrac{\alpha^2 \times \pi \times \upsilon}{3} \right)$

Συνήθως ὁ κῶνος ἀπαντᾶται ἡνωμένος μετὰ τοῦ κυλίνδρου, ὡς ἄνωθεν καπνοδόχων διὰ νὰ ἐμποδίζῃ τὴν εἰσροὴν τῶν βροχῶν, ἢ ἄνωθεν πυργίσκων, περιστερεώνων, ἀνεμομύλων κλπ., τὰ ὁποῖα ἔχουσι σχῆμα κυλίνδρου, ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἐπικάθηται στέγη κωνική.

Ἀσκήσεις.

Τί λέγεται κῶνος; Πόσας ἐπιφανείας ἔχει; Πῶς γίνεται ὁ κῶνος; Ποῖος λέγεται ἄξων; Ποία λέγεται πλευρὰ καὶ ποία κορυφὴ τοῦ κώνου; Ποίαν σχέσιν ἔχουν αἱ πλευραὶ τοῦ *κώνου; Τί σχηματίζει ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου; Πῶς εὑρίσκεται ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου; Μὲ τί ὁμοιάζει ὁ κῶνος; Πῶς εὑρίσκεται ὁ ὄγκος αὐτοῦ;*

Προβλήματα.

1) Ποῖος ὁ ὄγκος τοῦ κώνου, τοῦ ὁποίου ἡ διάμετρος τῆς βάσεως εἶναι 4 μέτρα καὶ τὸ ὕψος 10 μέτρα;

$$O = \frac{B \times \upsilon}{3} = \frac{\alpha^2 \times 3,14 \times \upsilon}{3} = \frac{2 \times 2 \times 3,14 \times 10}{3} = 41,86.$$

2) Ποία ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου, ὁ ὁποῖος ἔχει περιφέρειαν 6,68 μέτρα καὶ πλευρὰν 15 μ.;

$$\delta = \frac{\Pi}{\pi} = \frac{6,68}{3,14} = 2,12 \text{ ἡ ἀκτὶς } 1,06.$$

$B = \alpha^2 \times \pi = 1,06 \times 1,06 \times 1,14$, *κυρτὴ ἐπιφάνεια* $\Pi \times$

$$\upsilon = \frac{6,68 \times 15}{3} \text{ ἄθροισμα } \left(1,06 \times 1,06 \times 3,14 + \left(\frac{6,68 \times 15}{3}\right)\right.$$

$= 51,864.$

3) Ἡ περιφέρεια κώνου τινὸς εἶναι 48,6 μ., ἡ κυρτὴ αὐτοῦ ἐπιφάνεια ἔχει πλευρὰν 9 μέτρων. Ποία ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ;

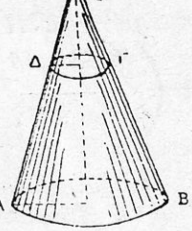
4) Ποῖος ὁ ὄγκος κώνου, ὁ ὁποῖος ἔχει διάμετρον 0,86 μ. καὶ ὕψος 2,30 μ.;

Περὶ κολούρου κώνου.

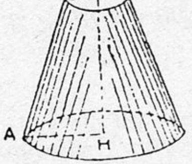
Ἐὰν ὁ κῶνος ΑΒΕ (σχ. 51) τμηθῇ δι' ἐπιπέδου παραλλήλου τομῆς πρὸς τὴν βάσιν, τὸ μεταξὺ τῆς βάσεως καὶ τῆς τομῆς μέρος τοῦ κώνου ΑΒΓΔ (σχ. 52) λέγεται κόλουρος κῶνος.

Ὁ κόλουρος κῶνος ἔχει τρεῖς ἐπιφανείας, δύο κυκλικὰς καὶ μίαν κυρτήν. Αἱ κυκλικαὶ ἐπιφάνειαι λέγονται βάσεις τοῦ κολούρου κώνου. Ἄξων αὐτοῦ λέγεται ἡ ΖΗ, ἡ ὁποία συνδέει τὰ κέντρα τῶν δύο βάσεων. Πλευρὰ αὐτοῦ λέγεται ἡ ΒΓ. Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κολούρου κώνου εὑρίσκεται, ἐὰν ἐκ τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν δύο ἀκτίνων σχηματισθῇ ἡ μέση περιφέρεια καὶ πολλαπλασιασθῇ αὕτη ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ κολούρου κώνου. Ἡμιάθροισμα τῶν δύο ἀκτίνων $\frac{A+\alpha}{2}$

Ἡ διάμετρος $2 \times \frac{A+\alpha}{2}$ Ἡ μέση περιφέρεια $2 \times \frac{A+\alpha}{2}$ $\times 3,14$ καὶ ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια $2 \times \frac{A+\alpha}{2} \times 3,14 \times \rho$ (ρ= πλευρὰ)$=A \times \alpha \times 3,14 \times \rho$.



Σχ. 51.



Σχ. 52.

Ἡ ἐπιφάνεια αὕτη μὲ τὰς δύο ἐπιφανείας τῶν βάσεων ἀποτελεῖ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κολούρου κώνου.

Ὄγκος τοῦ κολούρου κώνου. — Ὁ ὄγκος τοῦ κολούρου κώνου εὑρίσκεται κατὰ προσέγγισιν, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν δύο βάσεων ἐπὶ τὸ ὕψος. Ἀκριβέστερον εὑρίσκομεν τὸν ὄγκον τοῦ κολούρου **κώνου**, ἐὰν ἀπὸ τὸν ὄγκον ὁλοκλήρου τοῦ κώνου ἀφαιρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ ἀποτετμημένου κώνου.

Ἐὰν ὀνομάσωμεν Α τὴν ἀκτῖνα τῆς μεγάλης βάσεως, α τὴν ἀκτῖνα τῆς μικρᾶς βάσεως, Υ τὸ ὕψος τοῦ ὅλου κώνου καὶ υ τὸ ὕψος τὸ ἀποτετμημένον, ὁ ὄγκος τοῦ κολούρου εἶναι

$$O = \frac{A^2 \times \pi \times \Upsilon}{3} = \frac{\alpha^2 \times \pi \times \upsilon}{3} =$$

’Ασκήσεις.

Πῶς μεταβάλλεται ὁ κῶνος εἰς κόλουρον τοιοῦτον; Πόσας ἐπιφανείας ἔχει; Ποῖαι λέγονται βάσεις αὐτοῦ; Ποῖος λέγεται ἄξων; Ποία λέγεται πλευρά; Πῶς εὑρίσκεται τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας; Πῶς εὑρίσκεται ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κολούρου κώνου; Πῶς εὑρίσκεται ὁ ὄγκος αὐτοῦ;

Προβλήματα.

1) Ἡ διάμετρος τῶν δύο βάσεων κολούρου κώνου εἶναι 0,46 καὶ 0,32 μ., ἡ πλευρὰ αὐτοῦ 0,60. α΄) Ποῖον τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο βάσεων; β΄) ποῖον τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας; καὶ γ΄) ποῖον τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὅλης ἐξωτερικῆς ἐπιφανείας;

2) Ὁ κορμὸς δένδρου μήκους 6 μ. ἔχει διάμετρον κάτω 0,8 μ. καὶ ἄνω 0,5. Ποῖος ὁ ὄγκος αὐτοῦ;

3) Ποία ἡ ἀξία κορμοῦ καρυδιᾶς, τῆς ὁποίας τὸ ὕψος εἶναι 9 μ., ἡ ἄνω διάμετρος αὐτῆς 0,36 καὶ ἡ κάτω 1.20, ἐὰν ἡ ἀξία τοῦ κυβικοῦ μέτρου εἶναι 240 δραχ.;

Περὶ σφαίρας.

Σφαῖρα λέγεται τὸ στερεὸν σῶμα, τοῦ ὁποίου ἕν σημεῖον κείμενον ἐντὸς αὐτοῦ ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ ὅλα τὰ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας τοῦ στερεοῦ (Σχ. 53).

Τὸ σημεῖον τοῦτο λέγεται κέντρον τῆς σφαίρας.

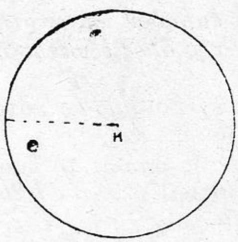
’Ακτὶς τῆς σφαίρας λέγεται πᾶσα εὐθεῖα, ἡ ὁποία ἄγεται ἐκ τοῦ κέντρου εἴς τι σημεῖον τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. (σχ. 54) Πᾶσαι αἱ ἀκτῖνες εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

Διάμετρος λέγεται πᾶσα εὐθεῖα ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου καὶ ἔχει τὰ ἄκρα της ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας. Πᾶσαι αἱ διάμετροι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας. ’Εὰν σφαῖρα τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου, ἡ τομὴ θὰ εἶναι κύκλος. Ὅταν τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν σφαῖραν, διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου αὐτῆς·

ὁ παραγόμενος κύκλος ἔχει κέντρον τὸ κέντρον τῆς σφαίρας καὶ ἀκτῖνα τὴν ἀκτῖνα αὐτῆς καὶ λέγεται μέγιστος κύκλος τῆς σφαίρας. Πᾶς μέγιστος κύκλος διαιρεῖ τὴν σφαῖραν εἰς δύο ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται ἡμισφαίρια. Ὅταν δὲ τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον τέμει τὴν σφαῖραν, δὲν διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου αὐτῆς, ὁ παραγόμενος κύκλος λέγεται μικρὸς κύκλος.

Σχ. 53.

Οἱ ἐκ τῆς τομῆς τῆς σφαίρας ὑπὸ ἐπιπέδου προκύπτοντες κύκλοι εἶναι τόσον μικρότεροι, ὅσον περισσότερον ἀπέχουσιν ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας.



Σχ. 54.

Ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας.

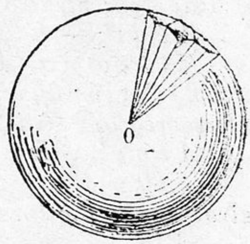
Ἡ ἐξωτερικὴ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας περιέχει τετράκις τὴν ἐπιφάνειαν ἑνὸς τῶν μεγίστων κύκλων. Εὑρίσκομεν ἑπομένως τὴν ἐξωτερικὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας, ἐὰν διὰ τῆς ἀκτῖνος εὕρωμεν τὴν ἐπιφάνειαν ἑνὸς μεγίστου κύκλου καὶ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὴν ἐπὶ 4. Ἡ ἐξωτερικὴ λοιπὸν ἐπιφάνεια ἰσοῦται μὲ τὴν ἀκτῖνα ἐπὶ 3,14 καὶ ἐπὶ 4

$$E = 4 \times \alpha^2 \times \pi.$$

Ἐπειδὴ ὅμως $4 \times \alpha^2 \times \pi = (2 \times 2 \times \alpha \times \pi)$ ἰσοῦται μὲ τὸ $2\alpha =$ (μὲ δύο ἀκτῖνας = μίαν διάμετρον, καὶ $2\alpha\ \pi = 2\alpha \times 3{,}14$ = (διάμετρον ἐπὶ 3,14) = μὲ τὴν περιφέρειαν, ἕπεται ὅτι ἡ ἐξωτερικὴ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς διαμέτρου ἐπὶ τὴν περιφέρειαν.

Ὄγκος τῆς σφαίρας.—Ἡ σφαῖρα δύναται νὰ θεωρηθῇ ὅτι ἀποτελεῖται ἀπὸ πυραμίδας, τῶν ὁποίων αἱ κορυφαὶ συμπίπτουσιν εἰς τὸ κέντρον τῆς σφαίρας καὶ αἱ βάσεις εἶναι τεμάχια τῆς ἐξωτερικῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. (σχ. 55).

῾Ο ὄγκος ἑπομένως τῆς σφαίρας εὑρίσκεται, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὴν ἐξωτερικὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας καὶ τὸ γινόμενον διαιρέσωμεν διὰ 3. ᾿Επειδὴ ἡ ἐξωτερικὴ ἐπιφάνεια ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς περιφερείας ἐπὶ τὴν διάμετρον, ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας εὑρίσκεται, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ἡ περιφέρεια ἐπὶ τὴν διάμετρον καὶ ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα, τὸ δὲ γινόμενον διαιρεθῇ διὰ 3.



Σχ. 55.

$$O = \frac{2\alpha\pi + 2\alpha \times \alpha}{3} = \frac{4 \times \alpha \times \alpha \times \alpha \times \pi}{3} = \frac{4\alpha^3 \times \pi}{3}.$$

$2\alpha\pi$=περιφέρειαν $2 \times \alpha\pi$=διάμετρος$\times 3{,}14$ = περιφέρειαν

$2\ \alpha$ = διάμετρος (2α=δύο ἀκτῖνας = διάμετρον)

α = ἀκτὶς

$2\alpha\pi \times 2\alpha \times \alpha$=ἐπιφάνεια σφαίρας

$\frac{2\alpha\pi \times 2\alpha \times \alpha}{3}$ = ὄγκος σφαίρας.

᾿Ασκήσεις.

Τί λέγεται σφαῖρα; Τί λέγεται κέντρον τῆς σφαίρας; Τί λέγεται ἀκτὶς αὐτῆς, τί διάμετρος; Ποῖοι λέγονται μέγιστοι κύκλοι; μικροὶ κύκλοι; Εἰς τί διαιρεῖ τὴν σφαῖραν ὁ μέγιστος κύκλος; Μὲ τί ἰσοῦται ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας; Πῶς εὑρίσκεται ὁ ὄγκος αὐτῆς;

Προβλήματα.

1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξωτερικὴ ἐπιφάνεια σφαίρας, τῆς ὁποίας ἡ διάμετρος εἶναι 8 μ.

Λ ύ σ ι ς.— $E=8\times3,14\times 8=200,96$ τ. μ. ἢ

$E=4\times\alpha^2\times\pi=4\times 4\times4\times 3,14=200,96$ τ. μ.

2) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξωτερικὴ ἐπιφάνεια σφαίρας, τῆς ὁποίας ἡ περιφέρεια εἶναι 8,80 μ.

Λ ύ σ ι ς.—Ἐὰν ἡ περιφέρεια εἶναι 8,80 μ., ἡ διάμετρος εἶναι $\frac{8,80}{3,14}=2,80$

ἡ ἐξωτερικὴ ἐπιφάνεια θὰ εἶναι $8,80\times2,80=24,640$.

3) Σφαῖρα κωδωνοστασίου, τῆς ὁποίας ἡ περιφέρεια εἶναι 4,2 πρόκειται νὰ χρυσωθῇ. Ποία ἡ ἀπαιτουμένη δαπάνη, ἐὰν διὰ τὴν χρύσωσιν ἑνὸς τ. μ. ἀπαιτοῦνται 450 δραχ.;

Λ ύ σ ι ς.—Ἐὰν ἡ περιφέρεια εἶναι 4,2, ἡ διάμετρος θὰ εἶνε $\frac{4,2}{3,14}=1,337$, ἡ ἐξωτερικὴ ἐπιφάνεια θὰ εἶνε $4,2\times 1,337=5,6154$.

Ἡ χρύσωσις ἑπομένως τῆς σφαίρας ἀπαιτεῖ δαπάνην $450\times5,6154=2526,93$.

4) Ποῖος ὁ ὄγκος σφαίρας, τῆς ὁποίας ἡ περιφέρεια εἶναι 0,80 μ.

Λ ύ σ ι ς.—Ἐὰν ἡ περιφέρεια εἶνε 0,80 μ., ἡ διάμετρος αὐτῆς εἶνε $\frac{0,80}{3,14}=0,25$ καὶ ἡ ἀκτὶς 0,125. Ἡ ἐξωτερικὴ ἐπιφάνεια $0,80\times0,25=0,2$ καὶ ὁ ὄγκος $\frac{0,2\times0,125}{3}=0,0085$.

5) Ἡ διάμετρος σφαίρας εἶναι 0,9. Ζητεῖται α΄) ἡ

περιφέρεια αὐτῆς, β΄) ἡ ἐξωτερικὴ ἐπιφάνεια καὶ γ΄) ὁ ὄγκος αὐτῆς.

6) Ἡ περιφέρεια σφαίρας εἶναι 6,40 μ. Ζητεῖται α΄) ἡ διάμετρος, β΄) ἡ ἐξωτερικὴ ἐπιφάνεια καὶ γ΄) ὁ ὄγκος αὐτῆς.

7) Ἡ διάμετρος τῆς γῆς εἶναι 1720 μίλια. Ποία ἡ ἐξωτερικὴ αὐτῆς ἐπιφάνεια;

8) Ποῖος ὁ ὄγκος σφαίρας, τῆς ὁποίας ἡ ἐξωτερικὴ ἐπιφάνεια εἶναι 12,40 τ. μ.;

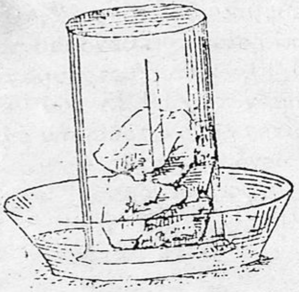
9) Ποία ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας, τῆς ὁποίας ἡ ἐξωτερικὴ ἐπιφάνεια εἶναι 45,6 τ. μ. καὶ ποῖος ὁ ὄγκος αὐτῆς;

10) Ποία ἡ περιφέρεια σφαίρας, τῆς ὁποίας ἡ ἐξωτερικὴ ἐπιφάνεια εἶναι 26 τ. μ. καὶ ποῖος ὁ ὄγκος αὐτῆς;

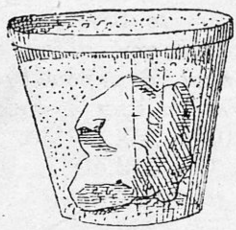
11) Πόσον ζυγίζει σφαῖρα ἐκ μολύβδου, τῆς ὁποίας ἡ διάμετρος εἶναι 0,45 μ., ἐὰν ὁ μόλυβδος εἶναι 11,4 βαρύτερος τοῦ ὕδατος;

Ὄγκος οἱουδήποτε σώματος.

Ὅταν σῶμά τι δὲν δύναται νὰ μετρηθῇ κατὰ τρεῖς διαστάσεις, δὲν εἶναι γεωμετρικὸν σῶμα. Τοῦ σώματος τούτου



Σχ. 56.

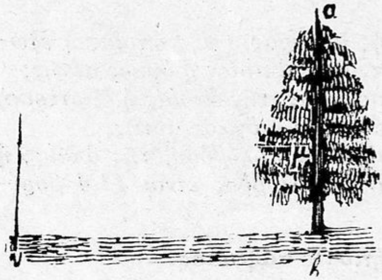


Σχ. 57.

τὸν ὄγκον εὑρίσκομεν μὲ ἀρκετὴν προσέγγισιν διὰ τῶν ἑξῆς μεθόδων.

α΄) Εἰσάγομεν τὸ σῶμα εἰς δοχεῖον τι γνωστῆς χωρητικότητος καὶ γεμίζομεν τὰ κενὰ δι᾽ ἄμμου. Ἀποσύρομεν τὸ σῶμα καὶ μετροῦμεν διά τινος μέτρου (κ. μ., κ.π , κ.δ.) τὴν εἰς τὸ δοχεῖον ἄμμον καὶ ἀφαιροῦντες τὸν ὄγκον αὐτῆς ἐκ τῆς χωρητικότητος τοῦ δοχείου εὑρίσκομεν τὸν ὄγκον τοῦ σώματος.

β') Γεμίζοντες δοχεῖόν τι μὲ ὕδωρ θέτομεν ἐντὸς αὐτοῦ τὸ σῶμα. Ἐὰν δὲ συλλέξωμεν τὸ ὕδωρ, τὸ ὁποῖον θὰ χυθῇ καὶ ζυγίσωμεν αὐτό, θὰ εὕρωμεν ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ σώματος ἰσοῦται μὲ τόσας κυβικὰς παλάμας, ὅσα χιλιόγραμμα εἶναι τὸ χυθὲν ὕδωρ. (σχ. 56)



Σχ. 58.

Διάφοροι καταμετρήσεις.

Νὰ μετρηθῇ τὸ ὕψος ἑνὸς δένδρου.

Ὑπὸ τὸ φέγγος τοῦ Ἡλίου μετροῦμεν τὴν σκιὰν τοῦ δένδρου (σχ. 58), τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν π. χ. 2,40 τοῦ μέτρου. Ἀκολούθως ἐμπήγομεν πλησίον τοῦ δένδρου ράβδον ὡρισμένου μεγέθους, π. χ. 0,90, καὶ μετροῦμεν τὴν σκιὰν αὐτοῦ, τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν π. χ. 0,25 τοῦ μέτρου.

Ἡ σκιὰ τῆς ράβδου ἔχει τοιοῦτον λόγον πρὸς τὴν ράβδον, ὁποῖον λόγον ἔχει ἡ σκιὰ τοῦ δένδρου πρὸς αὐτό. Ἐπομένως 0,90 : 0,25=36 2,40 (ὕψος δένδρου) καὶ

$$\frac{0,90\times 2,40}{9,00} = \frac{90\times 240}{2500} = 8,64 \text{ μέτρα}$$

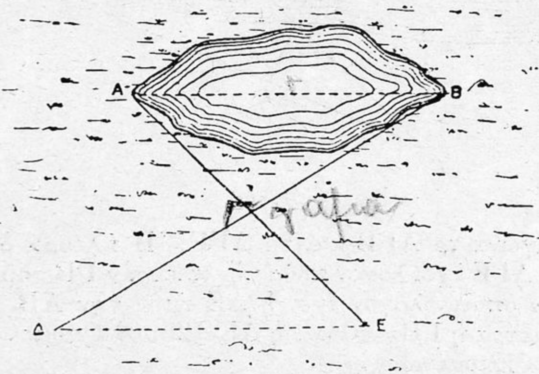
ἤ

Ἀφοῦ τὰ	0,25	προέρχονται	ἀπὸ	9,00
τὸ	0,01	»	»	0,90
				0,25

καὶ τὰ 2,40 προέρχονται ἀπὸ $\dfrac{0{,}90 \times 2{,}40}{0{,}25} =$

$\dfrac{90 \times 240}{2500} = 8{,}64$ μέτρα

Νὰ μετρηθῇ τὸ μῆκος τῆς λίμνης ΑΒ (σχ. 59), εἰς τὴν ὁποίαν δὲν δυνάμεθα νὰ εἰσέλθωμεν.

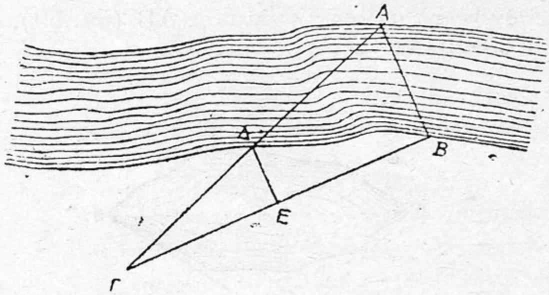


Σχ. 59.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ μῆκος τῆς εὐθείας ΑΒ, λαμβάνομεν σημεῖόν τι ἐκτὸς τῆς λίμνης τὸ Γ καὶ μετροῦντες τὰς ἀποστάσεις ΑΓ καὶ ΒΓ εὑρίσκομεν π. χ. τὴν ΑΓ=26 μέτρα καὶ τὴν ΒΓ=32 μέτρα. Ἔπειτα προεκτείνομεν τὰς ΑΓ καὶ ΒΓ καὶ λαμβάνομεν τὴν ΕΓ=ΓΑ καὶ τὴν ΒΓ=ΓΔ. Ἡ εὐθεῖα ΔΕ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΑΒ, διότι τὰ τρίγωνα ΑΓΒ καὶ ΔΓΕ εἶναι ἴσα. Ὥστε μετροῦντες τὴν ΔΕ εὑρίσκομεν τὴν ΑΓ.

Εὕρεσις τοῦ πλάτους ποταμοῦ.

Λαμβάνομεν δύο σημεῖα τὸ Α καὶ τὸ Β, κείμενα ἐπὶ τῶν ὀχθῶν τοῦ ποταμοῦ (σχ. 60), καὶ σημεῖον τι, Γ, τὸ ὁποῖον μετὰ τοῦ Α καὶ Β σχηματίζει διὰ τῆς ὀπτικῆς ἀκτῖνος τὸ τρίγωνον ΑΓΒ. Ἐὰν δὲ ἀπό τινος σημείου τῆς ὀπτικῆς ἀκτῖνος ΓΑ φέρωμεν παράλληλον τῆς ΑΒ τὴν ΔΕ, σχηματίζομεν δύο



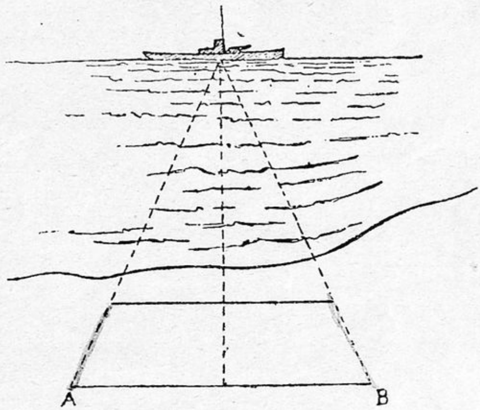
Σχ. 60.

ὅμοια τρίγωνα τὸ ΑΓΒ καὶ τὸ ΔΓΕ. Ἡ πλευρὰ δὲ ΓΕ τοῦ τριγώνου ΔΓΕ ἔχει λόγον πρὸς τὴν πλευρὰν ΓΒ τοῦ τριγώνου ΑΓΒ, τὸν ὁποῖον λόγον ἔχει ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΑΒ. Καὶ ἂν ἡ ΓΕ=20 μέτρα ἡ ΓΒ=40 καὶ ἡ ΔΕ=25, θὰ ἔχωμεν 20 : 40= 25 : ΑΒ. Ἑπομένως ἡ

$$\mathrm{AB}=\frac{40\times 25}{20}=50.$$

Εὕρεσις τῆς ἀποστάσεως τόπου τινὸς ἀπὸ σημείου ἀπροσίτου.

Ἵνα εὕρωμεν τὴν ἀπὸ τῆς παραλίας ἀπόστασιν σκοπέλου τινὸς ἢ πλοίου ἱσταμένου, χαράσσομεν ἐπὶ τῆς παραλίας δύο εὐθείας παραλλήλους καὶ ἐκ τῶν σημείων Α καὶ Β τῆς πρώτης εὐθείας (σχ. 61) διευθύνομεν ὀπτικὰς ἀκτῖνας εἰς τὸν σκόπελον ἢ τὸ πλοῖον καὶ σημειοῦμεν ἐπὶ τῆς δευτέρας εὐθείας τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ, διὰ τῶν ὁποίων διέρχεται ἡ ὀπτικὴ ἀκτίς. Οὕτως ἐσχηματίσθη ἐπὶ τῆς παραλίας τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ. Τὸ τραπέζιον τοῦτο μεταφέρομεν ὑπὸ κλίμακα 0,01 ἢ 0,001 ἢ καὶ 0,0001 ἐπὶ τοῦ χάρτου καὶ προεκτείνομεν τὰς εὐθείας ΑΓ καὶ ΒΔ, μέχρις οὗ συναντηθῶσιν. Ἐκ τοῦ σημείου δὲ Π τῆς συναντήσεως φέρομεν κάθετον ἐπὶ τῆς ΑΒ τὴν ΠΕ. Τὸ μῆκος δὲ τῆς ΠΕ, πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῆς κλίμακος, ἀποτελεῖ τὴν ἀπόστασιν τῆς παραλίας ἀπὸ τὸν σκόπελον ἢ τὸ πλοῖον.



Σχ. 61.

Καθ' ὅμοιον τρόπον εὑρίσκεται καὶ ἡ ἀπόστασις τόπου τινὸς ἀπὸ τὴν κορυφὴν τοῦ ἀπέναντι ὄρους. Ἐπειδὴ ὅμως τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον θὰ σχηματίσῃ ἡ πρώτη εὐθεῖα μὲ τὴν κορυφὴν τοῦ ὄρους θὰ εἶναι πλάγιον καὶ οὐχὶ ὁριζόντιον, ὡς εἰς τὸ προηγούμενον, διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ ἐμπήγομεν δύο πασσάλους εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ τῆς δευτέρας εὐθείας οὕτως, ὥστε αἱ ἐκ τοῦ Α καὶ Β εἰς τὴν κορυφὴν τοῦ ὄρους διευθυνόμεναι ὀπτικαὶ ἀκτῖνες νὰ διέρχωνται διὰ τῶν κορυφῶν τῶν πασσάλων.

ΤΕΛΟΣ