ΠΡΑΚΤΙΚΗ
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ
ΤΩΝ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΕΙΩΝ
ΑΡΡΕΝΩΝ ΤΕ ΚΑΙ ΘΗΛΕΩΝ
ΚΑΙ ΤΩΝ ΠΡΑΚΤΙΚΩΝ ΣΧΟΛΩΝ

ΥΠΟ

ΝΙΚΟΛΑΟΥ Π. ΛΕΚΟΥ

Ἐγκριθεῖσα
ἐν τῷ κατὰ τὸν νόμον ΓΣΑ' διαγωνισμῷ
διὰ τὴν τετραετίαν 1909-1913

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΕΚΔΟΤΗΣ Δ. Χ. ΤΕΡΖΟΠΟΥΛΟΣ
1910

ΔΡΑΧ. 1.60

ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

ΤΟ ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΤΩΝ ΕΚΚΛΗΣΙΑΣΤΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΤΗΣ ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΕΩΣ

Ἀριθ. *Πρωτ.* 11,300 / *Διεκπ.* 10,823 — *Ἐν Ἀθήναις τῇ 13ῃ Αὐγούστου 1909.*

Πρὸς τὸν κ. Δ. Χ. ΤΕΡΖΟΠΟΥΛΟΝ

Γνωρίζομεν ὑμῖν ὅτι κατ' ἀπόφασιν τῆς ἐπὶ τῆς ἐκδόσεως τῶν διδακτικῶν βιβλίων ἐποπτικῆς Ἐπιτροπείας ἡ τιμὴ τῆς ***Πρακτικῆς Γεωμετρίας*** ὑπὸ ***Νικολάου Π. Λεκοῦ*** ἐκ φύλλων τυπογραφικῶν 8 ὡρίσθη εἰς δραχμὰς μίαν καὶ λεπτὰ ἑξήκοντα (1,60), τὸ δὲ ἐπιθετέον βιβλιόσημον χρώματος ῥοδίνου ἔσται ἀξίας λεπτῶν ἑξήκοντα καὶ δύο (62).

Ἐντελλόμεθα, ὅπως συμμορφωθῆτε πρὸς τὰς ἀποφάσεις ταύτας, ἐκτυπώσητε δὲ τὴν παροῦσαν ἐπὶ τῆς ἐσωτερικῆς ὄψεως τοῦ περικαλύμματος τοῦ βιβλίου κάτωθι τῆς θέσεως, εἰς ἣν κατὰ νόμον ἐπικολλᾶται τὸ βιβλιόσημον.

Ὁ Ὑπουργὸς

Κ. ΓΕΡΟΚΩΣΤΟΠΟΥΛΟΣ

Γ. ΒΕΝΘΥΛΟΣ

ΝΙΚΟΛΑΟΥ Π. ΛΕΚΟΥ
Ἀριστούχου διδάκτορος τῶν Μαθηματικῶν, καθηγητοῦ ἐν Πειραιεῖ

ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΕΓΚΡΙΘΕΙΣΑ

Ἐν τῷ κατὰ τὸν νόμον ͵ΓΣΑ΄ διαγωνισμῷ τῶν διδακτικῶν βιβλίων διὰ τὴν τετραετίαν 1909—1913.

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ
ΤΩΝ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΕΙΩΝ
ΑΡΡΕΝΩΝ ΤΕ ΚΑΙ ΘΗΛΕΩΝ
ΚΑΙ ΤΩΝ ΠΡΑΚΤΙΚΩΝ ΣΧΟΛΩΝ

Ἔκθεσις τῶν κ. κ. κριτῶν :«Τὸ βιβλίον τοῦτο εἶνε γεγραμμένον ἐπὶ τὸ πρακτικώτερον. Ἡ ἐν αὐτῷ περιεχομένη ὕλη, μετ' ἀλληλουχίας χωροῦσα ἐκ τῶν ἁπλουστέρων πρὸς τὰ συνθετώτερα, ἐκτίθεται μετὰ σαφηνείας· τὸ λεκτικὸν αὐτοῦ εἶνε ὁμαλὸν καὶ εὔληπτον· αἱ ἔννοιαι τῶν γεωμετρικῶν σχημάτων ὡς καὶ αἱ ἀποδείξεις τῶν πλείστων θεωρημάτων παρέχονται ἐποπτικῶς. Ὅ,τι χαρακτηρίζει τὸ βιβλίον τοῦτο καὶ τὸ καθιστᾷ χρήσιμον καὶ λίαν καταλληλον διὰ διδακτικὸν εἶνε αἱ πολλαὶ ἐν αὐτῷ ἀπαντῶσαι γεωμετρικαὶ ἐφαρμογαί, αἵτινες εἶνε εἰλημμέναι ἐκ τοῦ πρακτικοῦ βίου καὶ ἡ γνῶσις τῶν ὁποίων εἶνε χρήσιμος εἰς πάντα ἄνθρωπον, καὶ αἱ ὁποῖαι ἐκτίθενται κατὰ τρόπον ἁπλοῦν καὶ λίαν σαφῶς, προχείρως δὲ προσιτὸν τοῖς μαθηταῖς.»

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΕΚΔΟΤΗΣ Δ. Χ. ΤΕΡΖΟΠΟΥΛΟΣ
1910

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ἡ μέχρι τοῦδε γινομένη διδασκαλία τῆς Γεωμετρίας ἔχει ἀνάγκην ἀνακαινισμοῦ, ἀνασκευῆς· τῆς ἰδέας μου ταύτης ὀπαδοὶ θὰ εἶνε ἴσως οἱ πλεῖστοι ἐκ τῶν κ. κ. συναδέλφων, οἵτινες ἐξ ἰδίας πείρας θὰ ἀντελήφθησαν, ὅτι οἱ καρποὶ τῆς γεωμετρικῆς αὐτῶν διδασκαλίας δὲν εἶνε οἷοι ἀνεμένοντο.

Ἡ Πρακτικὴ γεωμετρία, ἐξασκοῦσα τὸν νοῦν ἐπὶ πραγμάτων ὑλικῶν, ἁπλῶν καὶ παρέχουσα ὠφέλιμα ἐξαγόμενα εἰς πάσας τὰς περιστάσεις τοῦ βίου, ἔπρεπε νὰ προσφέρῃ πολλὴν εὐχαρίστησιν εἰς τὸν σπουδάζοντα αὐτήν. Ἀλλὰ πῶς δύναταί τις νὰ ἀπαιτήσῃ ἀπὸ μαθητὴν δεκαετῆ, ὅστις πρώτην φορὰν εἰσάγεται εἰς τὴν ἐπιστήμην τῆς μετρήσεως τῶν σωμάτων, νὰ ἐννοήσῃ τοὺς πολυπλόκους ὁρισμοὺς (θεωρήματος, πορίσματος κτλ.) καὶ νὰ παρακολουθήσῃ τὴν σειρὰν τῶν συλλογισμῶν πρὸς ἀπόδειξιν καὶ τοῦ ἁπλουστέρου θεωρήματος;

Αἱ πνευματικαὶ δυνάμεις τοιούτου μαθητοῦ δὲν ἐπιτρέπουσι τὴν χρῆσιν βιβλίου ὑπὲρ τὸ μέτρον θεωρητικοῦ, διότι ἐθίζει εἰς τὴν ξηρὰν ἀποστήθισιν, ἥτις ἀφαιρεῖ ἀπ' αὐτοῦ τὴν ἱκανότητα τῆς ἰδίας ἀναπτύξεως καὶ τῆς αὐτενεργείας.

Ἀπὸ τοιαύτης ἰδέας ὁρμώμενος, ἐξέδωκα πρὸ δύο ἐτῶν Γεωμετρίαν μᾶλλον συγκεκριμένην, ἀπηλλαγμένην τῶν ἀφῃρημένων καὶ ἀκατανοήτων θεωριῶν, αἵτινες ἀποθαρρύνουσαι τὸν μικρὸν μαθητὴν ἀναγκάζουσιν αὐτὸν νὰ ἀποστρέφηται τόσον ὠφέλιμον μάθημα.

Ὀφείλω ὅμως νὰ ὁμολογήσω, ὅτι τὸ νέον πρόγραμμα μοῦ ἐχρη-

σίμευσεν ὡς πολύτιμος ὁδηγὸς διὰ τὴν ἐπισταμένην ἀναθεώρησιν καὶ συμπλήρωσιν τοῦ βιβλίου μου.

Διὰ μὲν τῶν ἐρωτήσεων, ἃς ἐν τέλει ἑκάστου κεφαλαίου ἔθηκα, ἠθέλησα νὰ διευκολύνω ἀφ' ἑνὸς τὸν μαθητήν, ἀφ' ἑτέρου τὸν διδάσκοντα κατὰ τὴν ἐξέτασιν· οὕτω καὶ τὸ ἔργον τοῦ διδάσκοντος ὑποβοηθεῖται καὶ ἡ κατ' οἶκον μελέτη τοῦ μαθητοῦ συμπληροῦται. Διὰ δὲ τῶν ἀφθόνων ἀσκήσεων, ὁ μαθητὴς λαμβάνει ἀφορμὴν 1ον νὰ ἐφαρμόσῃ τὰς γεωμετρικάς του γνώσεις εἰς τὸν πρακτικὸν βίον· 2ον νὰ ἐπαναλάβῃ τὴν διδαχθεῖσαν Ἀριθμητικὴν καὶ νὰ ἐξασκηθῇ εἰς αὐτὴν ἔτι μᾶλλον. Ἐκ τῆς σφαίρας τὰ σχετιζόμενα πρὸς τὴν Μαθηματικὴν γεωγραφίαν ἢ Κοσμογραφίαν (ἐκτιθέμενα ἀτελῶς εἰς τὰς Γεωγραφίας), δὲν ἠδυνάμην νὰ παραλείψω.

Τέλος, μὴ φεισθεὶς κόπων, παρέθεσα πλεῖστα καὶ ποικίλα κανονικὰ σχήματα, ἅτινα φρονῶ, ὅτι δύνανται νὰ χρησιμεύσωσιν ὡς ἄριστα ὑποδείγματα διὰ τὴν Ἰχνογραφίαν. Ἄλλως τε ἡ Πρακτικὴ γεωμετρία στενῶς συνδεομένη μετὰ τῆς Ἰχνογραφίας, πρέπει νὰ λαμβάνῃ ὑπ' ὄψιν τὰς ἀνάγκας τῆς διδασκαλίας ταύτης.

Ἐν Πειραιεῖ, τῇ 16ῃ Ἰανουαρίου 1908.

ΝΙΚ. Π. ΛΕΚΟΣ

ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΜΕΡΟΣ Α'.

ΣΧΗΜΑΤΟΓΡΑΦΙΑ

1. Σκοπὸς τῆς Γεωμετρίας.— Ἡ Γεωμετρία σκοπὸν ἔχει τὴν σπουδὴν τοῦ σχήματος τῶν σωμάτων καὶ τῆς ἐκτάσεως αὐτῶν, ἀδιαφοροῦσα περὶ τῆς ὕλης,ἐξ ἧς ταῦτα συγκεινται. Ὁ γεωμέτρης ἐκτελεῖ τὴν καταμέτρησιν ἀγροῦ, ἀδιαφορῶν περὶ τῆς καλῆς ἢ κακῆς ποιότητος αὐτοῦ, ἢ σχεδιάζει θύραν ἀδιαφορῶν περὶ τῆς ποιότητος τοῦ ξύλου, ὅπερ ὁ ξυλουργὸς θὰ μεταχειρισθῇ πρὸς κατασκευὴν αὐτῆς.

2. Ὄγκος, ἐπιφάνεια, γραμμή, σημεῖον.— Τὰ διάφορα σώματα κατέχουσι μέρος τοῦ χώρου, ὅπερ καλεῖται *ὄγκος* αὐτῶν· τὰ ἁπλούστερα στερεὰ σώματα εἶνε ὁ κύβος, τὸ πρίσμα, ἡ πυραμίς, ὁ κύλινδρος, ὁ κῶνος καὶ ἡ σφαῖρα (1). Ἐὰν κρατήσωμεν εἰς τὰς χεῖράς μας ἓν τούτων, ἐγγίζομεν μόνον τὰ ἄκρα, εἰς ἃ τελειώνει· ταῦτα ἐν τῷ συνόλῳ ἀποτελοῦσι τὴν *ἐπιφάνειαν* τοῦ σώματος, ἥτις εἶνε τὸ περικάλυμμα οὕτως εἰπεῖν αὐτοῦ· π. χ. ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύβου εἶνε τὰ διάφορα ταῦτα μέρη (2), τὰ ὁποῖα ὀνομάζονται ἕδραι τοῦ κύβου·

(1) Τὰ ὁποῖα ὁ διδάσκων ἔχων πρὸ τῶν μαθητῶν δεικνύει αὐτοῖς τὸν ὄγκον, τὴν ἐπιφάνειαν κ.τ.λ.

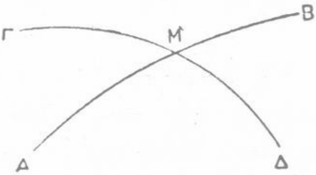
(2) Ὁ διδάσκων δεικνύει καὶ ἀριθμεῖ τὰς ἕδρας τοῦ κύβου.

τῶν ἄλλων στερεῶν ἡ ἐπιφάνεια ἂς δειχθῇ ὑπὸ τῶν μαθητῶν.

Τὰ ἄκρα τῆς ἐπιφανείας ἢ μέρους αὐτῆς λέγονται *γραμμαί*· ἡ γραμμὴ χωρίζει δύο μέρη ἐπιφανείας συνεχόμενα ἢ εἶνε τὸ συνάντημα δύο μερῶν ἐπιφανείας τοῦ σώματος· π. χ. αἱ ἕδραι τοῦ κύβου συναντῶνται ἀνὰ δύο, τὰ μέρη δὲ αὐτοῦ, εἰς ἃ ἀκριβῶς γίνεται ἡ συνάντησις, εἶνε αἱ γραμμαί.

Τὰ ἄκρα γραμμῆς λέγονται *σημεῖα*· ὅταν στηρίζωμεν ἐλαφρῶς ἐπὶ χαρτίου τὴν αἰχμὴν γραφίδος, ὁρίζομεν ἓν σημεῖον (1), ὅπερ ὀνομάζομεν δι' ἑνὸς γράμματος τοῦ ἀλφαβήτου γραφομένου πλησίον αὐτοῦ· οὕτω λέγομεν τὸ σημεῖον Α, τὸ σημεῖον Β, τὸ σημεῖον Γ (σχ. 1.).

Σχ 1.



Σχ. 2.

Σημ. Ὁ ὄγκος, ἡ ἐπιφάνεια καὶ ἡ γραμμὴ εἶνε μεγέθη γεωμετρικά, ἅτινα, θεωρούμενα ἀνεξαρτήτως τῶν σωμάτων, δύνανται νὰ παραχθῶσιν ὡς ἑξῆς.

α') Ὅταν σημεῖον κινῆται ἐν τῷ διαστήματι κατὰ συνέχειαν, παράγει γραμμήν· π. χ. ἡ αἰχμὴ γραφίδος συρομένη ἐπὶ χαρτίου χαράσσει γραμμὴν (σχ. 2)· τὴν γραμμὴν ὀνομάζομεν διὰ δύο συνήθως γραμμάτων γραφομένων εἰς τὰ ἄκρα αὐτῆς· π. χ. λέγομεν ἡ γραμμὴ ΑΒ, ἡ γραμμὴ ΓΔ. Ὅταν δύο

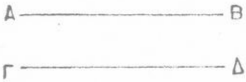
(1) Ὅσον λεπτὴ καὶ ἂν εἶνε ἡ γραφίς, τὸ δι' αὐτῆς ὁριζόμενον σημεῖον ἔχει ἔκτασίν τινα· ἀλλ' ἡ Γεωμετρία θεωρεῖ τὰ σημεῖα χωρὶς καμμίαν ἔκτασιν. Εἰς τὰς γραμμὰς ἐξετάζει τὸ μῆκος θεωροῦσα αὐτὰς ἄνευ πλάτους.

γραμμαὶ ΑΒ καὶ ΓΔ συναντῶνται, προσδιορίζουσιν ἓν σημεῖον Μ (σχ. 2). Ὥστε *τὸ σημεῖον εἶνε ἡ τομὴ δύο γραμμῶν.*

β') Ἡ ἐπιφάνεια παράγεται ὑπὸ γραμμῆς κινουμένης συνεχῶς ἐν τῷ διαστήματι· π. χ. ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου (1).

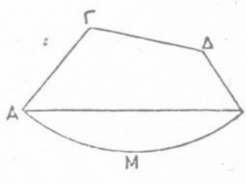
γ') Ὁ ὄγκος παράγεται ὑπὸ ἐπιφανείας κινουμένης (1).

3. Εὐθεῖα γραμμή.— Πᾶσαι αἱ γραμμαὶ τοῦ κύβου (καθὼς καὶ τοῦ πρίσματος ἢ τῆς πυραμίδος) ἔχουσι τὴν αὐτὴν μορφήν, τὴν αὐτὴν εἰκόνα, ἣν ἔχει καὶ κλωστὴ λεπτὴ ἢ θρὶξ *καλῶς τεταμένη*. Αἱ γραμμαὶ αὗται λέγονται *εὐθεῖαι γραμμαὶ* ἢ ἁπλῶς *εὐθεῖαι*, παρίστανται δὲ ἐπὶ τοῦ χάρτου ἢ τοῦ πίνακος οὕτω : σχ. 3 καὶ ὀνομάζονται: ἡ εὐθεῖα ΑΒ, ἡ εὐθεῖα ΓΔ.



Σχ. 3.

4. Γραμμὴ τεθλασμένη καὶ καμπύλη.—Πᾶσα γραμμή, ἥτις ἀποτελεῖται ἀπὸ εὐθείας τεμνομένας χωρὶς νὰ εἶνε εὐθεῖα, καλεῖται *τεθλασμένη*· π. χ. ἡ ΑΓΔΒ (σχ. 4). Τὸ μέτρον τοῦ τεχνίτου ξετυλιγμένον δίδει ἰδέαν τεθλασμένης γραμμῆς.



Σχ. 4.

Πᾶσα δὲ γραμμή, ἥτις δὲν εἶνε εὐθεῖα οὔτε δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς εὐθείας, καλεῖται *καμπύλη*· π. χ. ἡ γραμμὴ ΑΜΒ (σχ. 2 καὶ 4). Καμπύλη γραμμὴ εἶνε τὸ σχῆμα, ὅπερ λαμβάνει κλωστὴ ἢ ἅλυσις ἐξηρτημένη ἐκ τῶν δύο ἄκρων καὶ μὴ τεταμένη. Τὸ σχοινίον, δι' οὗ δένεται τὸ πλοῖον εἰς τὸν λιμένα, ἢ τὰ σχοινία τὰ ὁποῖα προσδένονται εἰς τοὺς ἱστούς, παριστάνουσι καμπύλας γραμμάς. Αἱ περισσότεραι γραμμαί,

(1) Ὁ διδάσκων δεικνύει τὸν τρόπον τῆς γενέσεως.

ἃς χαράσσομεν εἰς τὴν Ἰχνογραφίαν πρὸς ἀπεικόνισιν φύλλου, ἄνθους, ῥινός, στόματος κ.τ.λ. εἶνε καμπύλαι.

5. Ἰδιότητες τῆς εὐθείας.—*α΄) Μία εὐθεῖα γραμμὴ δύναται νὰ αὐξηθῇ καὶ ἀπὸ τὰ δύο ἄκρα της ὅσον θέλομεν* (σχ. 5). Τὸ μέρος αὐτῆς, τὸ περιεχόμενον μεταξὺ δύο σημείων Α καὶ Β, λέγεται *τμῆμα τῆς εὐθείας* καὶ ἔχει μῆκος ὡρισμένον.

Σχ. 5.

β΄) Ἀπὸ ἓν σημεῖον Α εἰς ἄλλο σημεῖον Β, μίαν μόνον εὐθεῖαν δυνάμεθα νὰ φέρωμεν, τὴν ΑΒ. Ὥστε, ἐὰν τὰ σημεῖα Α καὶ Β ἀνήκωσι καὶ εἰς ἄλλην εὐθεῖαν γραμμήν, αὕτη θὰ συμπέσῃ μετὰ τῆς πρώτης καὶ θὰ ἀποτελέσωσι μίαν εὐθεῖαν, ὅσον καὶ ἂν αὐξηθῶσιν.

γ΄) Ἐὰν ἔκ τινος σημείου Α εἰς ἄλλο Β σύρωμεν εὐθεῖαν γραμμὴν καὶ ἄλλας τεθλασμένας ἢ καμπύλας ΑΓΔΒ, ΑΜΒ, ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἶνε συντομωτέρα ἀπὸ ὅλας τὰς ἄλλας γραμμὰς τὰς ἐχούσας τὰ αὐτὰ ἄκρα Α καὶ Β (σχ. 4). Διὰ τοῦτο λέγεται *ἀπόστασις* τῶν δύο σημείων Α καὶ Β.

6. Πῶς χαράσσομεν εὐθεῖαν.—Πρὸς χάραξιν εὐθείας γραμμῆς ἐπὶ χαρτίου μεταχειριζόμεθα τὸν **κανόνα**· ἐὰν δ' ἡ εὐθεῖα θέλωμεν νὰ ἔχῃ καὶ ὡρισμένον μῆκος, τότε μεταχειριζόμεθα κανόνα μήκους δύο παλαμῶν (δύο δεκάτων τοῦ μέτρου) διῃρημένον εἰς δακτύλους (ἑκατοστὰ τοῦ μέτρου) καὶ εἰς γραμμὰς (χιλιοστὰ τοῦ μέτρου). Οἱ ξυλουργοί, ἵνα χαράξωσιν εὐθεῖαν ἐπὶ σανίδος ἢ ἐπὶ δοκοῦ, ἣν πρόκειται νὰ σχίσωσι διὰ πρίονος, μεταχειρίζονται μακρὸν κανόνα ἢ συνηθέστερον σπάγγον βαμμένον διὰ χρώματος. Τείνουσι τὸν σπάγγον ἀπὸ τοῦ ἑνὸς εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον, ἔπειτα ὑψώνουσιν αὐτὸν ἐκ τοῦ μέσου καὶ ἀφίνουσιν ἀποτόμως νὰ κτυπήσῃ τὴν σκνίδα, ἐφ' ἧς χαράσσεται ἡ εὐθεῖα γραμμή. Οἱ κηπουροὶ διὰ νὰ χαράξωσιν ἐπὶ τοῦ κήπου εὐθείας πρὸς τοποθέτησιν τῶν δένδρων κατὰ σειράν, οἱ κτίσται διὰ νὰ κτίσωσι τὴν μάνδραν κατὰ εὐθεῖαν, μεταχειρίζονται σχοινίον δεμένον ἀπὸ ἓν ἄκρον διὰ πασσάλου καὶ ἐκτεινόμενον εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον.

7. *Ἐξέλεγξις τοῦ κανόνος.* — Πρὶν μεταχειρισθῶμεν τὸν κανόνα, πρέπει νὰ βεβαιωθῶμεν, ἐὰν ἡ χαρασσομένη δι' αὐτοῦ γραμμὴ εἶνε ἀκριβῶς εὐθεῖα· πρὸς τοῦτο, σύρομεν γραμμὴν ΑΒ διὰ τοῦ κανόνος, ἔπειτα ἀναστρέφομεν τὸν κανόνα,

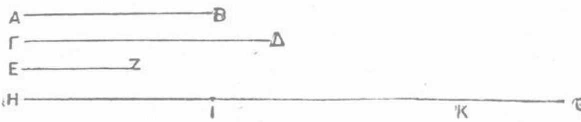
Σχ. 6.

καθὼς δεικνύει τὸ σχῆμα 6, καὶ σύρομεν νέαν γραμμὴν διὰ τῆς ἰδίας ἀκμῆς τοῦ κανόνος. Ἐὰν αἱ δύο χαραχθεῖσαι γραμμαὶ συμπίπτωσι καθ' ὅλον των τὸ μῆκος, τότε βεβαιούμεθα, ὅτι ὁ κανὼν εἶνε ἀκριβής. Ἐὰν ὅμως χαραχθῶσι δύο διάφοροι γραμμαί, καθὼς ΑΜΒ, ΑΝΒ, τότε ὁ κανὼν δὲν εἶνε ἀκριβής. Τὴν εὐθύτητα τοῦ κανόνος διακρίνομεν εὐκόλως καὶ διὰ τοῦ ὀφθαλμοῦ σκοπεύοντες κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ κανόνος.

8. *Ἰσότης εὐθειῶν, ἄθροισμα εὐθειῶν.* — Διὰ νὰ ἴδωμεν, ἂν δύο εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ (σχ. 3) εἶνε *ἴσαι*, θέτομεν τὴν μίαν ἐπὶ τῆς ἄλλης οὕτως, ὥστε τὸ ἓν ἄκρον Α τῆς μιᾶς νὰ συμπέσῃ μὲ τὸ ἓν ἄκρον Γ τῆς ἄλλης· ἂν τότε συμπέσωσι καὶ τὰ δύο ἄλλα ἄκρα αὐτῶν Β καὶ Δ, λέγομεν, ὅτι αἱ εὐθεῖαι εἶνε *ἴσαι*.

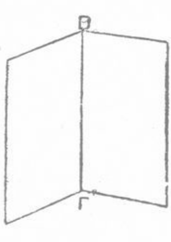
Ἄθροισμα δύο ἢ περισσοτέρων εὐθειῶν ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ λέγεται ἡ εὐθεῖα ΗΘ, ἣν εὑρίσκομεν λαμβάνοντες ἐπὶ εὐθείας τρία κατὰ συνέχειαν τμήματα ΗΙ, ΙΚ, ΚΘ ἴσα πρὸς τὰς δοθείσας εὐθείας: ΗΙ=ΑΒ, ΙΚ=ΓΔ, ΚΘ=ΕΖ (σχ. 7).

Διαφορὰ δύο ἀνίσων εὐθειῶν λέγεται ἡ εὐθεῖα, ἥτις μένει, ὅταν ἀπὸ τὸ ἓν ἄκρον τῆς μεγαλητέρας ἀποκόψωμεν τμῆμα ἴσον μὲ τὴν μικροτέραν· π.χ. ἡ διαφορὰ τῶν εὐθειῶν ΗΚ καὶ ΑΒ εἶνε ἡ εὐθεῖα ΙΚ (σχ. 7).



Σχ. 7.

9. *Ἐπίπεδον.*—Ἐὰν ἐπὶ τῆς τραπέζης τοποθετήσωμεν νῆμα τεταμένον ἢ κανόνα, παρατηροῦμεν ὅτι ἐφαρμόζει ἐπ' αὐτῆς καθ' οἱανδήποτε διεύθυνσιν· τὸ αὐτὸ συμβαίνει ἐπὶ τοῦ μαυροπίνακος, τοῦ πατώματος καὶ τοίχων δωματίων, τοῦ καθρέπτου, τῆς ἐπιφανείας ἠρεμοῦντος ὕδατος. Αἱ ἐπιφάνειαι αὗται, ἐφ' ὧν τὸ τεταμένον νῆμα, ἤτοι ἡ εὐθεῖα, ἐφαρμόζει κατὰ πάσας τὰς διευθύνσεις ἀκριβῶς (1), καλοῦνται ***ἐπίπεδοι ἐπιφάνειαι*** ἢ ἁπλῶς ***ἐπίπεδα.*** Αἱ ἕδραι τοῦ κύβου, τοῦ πρίσματος καὶ τῆς πυραμίδος εἶνε ἐπίπεδα. Οἱ ξυλουργοὶ καθιστῶσι τὴν ἐπιφάνειαν ξύλου ἐπίπεδον διὰ τῆς *πλάνης*. Ἐὰν φύλλον χαρτίου θλάσωμεν κατά τινα διεύθυνσιν, προκύπτει εὐθεῖα γραμμὴ ΒΓ (σχ. 8). Ὥστε ***ἡ τομὴ δύο ἐπιπέδων δίδει εὐθεῖαν γραμμήν.***



Σχ. 8.

(1) Ὁ διδάσκων δεικνύει τὰς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου καὶ τοῦ κώνου, ἐφ' ὧν ὁ κανὼν ἐφαρμόζει κατὰ μίαν μόνον διεύθυνσιν.

Σημ. Καθὼς ἡ εὐθεῖα εἶνε ἡ ἁπλουστάτη τῶν γραμμῶν, οὕτω καὶ τὸ ἐπίπεδον εἶνε ἡ ἁπλουστάτη τῶν ἐπιφανειῶν.

Ἀσκήσεις διὰ τοῦ κανόνος.

1. Διὰ δοθέντος σημείου Α νὰ διέλθῃ εὐθεῖα γραμμή. 2. Διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου νὰ διέλθωσι 5 εὐθεῖαι. 3. Ἡ εὐθεῖα ΑΒ νὰ ἐπεκταθῇ. 4. Δοθέντων τριῶν σημείων πῶς θὰ γνωρίσωμεν, ἂν κεῖνται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας; 5. Νὰ χαραχθῶσι δύο εὐθεῖαι, ἡ μία 30 γραμμῶν, ἡ ἄλλη διπλασία. 6. Νὰ χαραχθῶσι δύο εὐθεῖαι, ἡ μία 18 γραμμῶν, ἡ ἄλλη τριπλασία. 7. Τρεῖς εὐθεῖαι ἔχουσι μήκους 3,9 καὶ 27 γραμμῶν. Νὰ χαραχθῇ εὐθεῖα ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν. 8. Δύο εὐθεῖαι ἔχουσι μήκη 85 γραμμῶν καὶ 32. Νὰ χαραχθῇ εὐθεῖα ἴση τῇ διαφορᾷ των. 9. Νὰ χαραχθῇ εὐθεῖα γραμμὴ μήκους 14 δακτύλων καὶ νὰ διαιρεθῇ εἰς 20 μέρη ἴσα. (Οἱ 14 δάκτυλοι κάμνουν 140 γραμμάς, αἵτινες διαιρούμεναι διὰ 20 δίδουσι πηλίκον 7 γραμμάς).

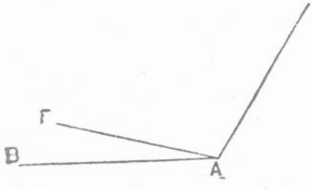
ΠΕΡΙ ΓΩΝΙΩΝ

10. Γωνία καλεῖται τὸ σχῆμα, ὅπερ ἀποτελοῦσι δύο εὐθεῖαι ἐξ ἑνὸς σημείου ἀρχίζουσαι χωρὶς νὰ ἀποτελῶσι μίαν εὐθεῖαν. Τὸ σημεῖον Α, ἐξ οὗ ἀρχίζουσιν αἱ δύο εὐθεῖαι, λέγεται *κορυφὴ* τῆς γωνίας, αἱ δὲ εὐθεῖαι ΑΒ, ΑΓ, *πλευραὶ* τῆς γωνίας (σχ. 9).

Σχ. 9.

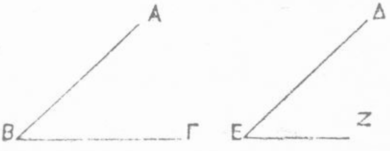
Ὀνομάζομεν μίαν γωνίαν ἢ διὰ τοῦ γράμματος τοῦ κειμένου ἐπὶ τῆς κορυφῆς π. χ. ἡ γωνία Α, ἢ διὰ τριῶν γραμμάτων γραφομένων τοῦ ἑνὸς εἰς τὴν κορυφὴν καὶ ἑκατέρου τῶν ἄλλων εἰς τὰ ἄκρα τῶν πλευρῶν. Κατὰ τὴν ἀνάγνωσιν τὸ γράμμα τῆς κορυφῆς θέτομεν πάντοτε μεταξὺ τῶν δύο ἄλλων·

οὕτω λέγομεν ἡ γωνία ΒΑΓ (σχ. 9). Ἡ ἀνάγνωσις τῆς γωνίας διὰ τριῶν γραμμάτων εἶνε ἀπαραίτητος, ὅταν πολλαὶ γωνίαι ἔχωσι τὴν αὐτὴν κορυφήν· π. χ. ἵνα διακρίνωμεν τὰς γωνίας τοῦ σχ. 10, λέγομεν αἱ γωνίαι ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΒΑΔ.



Σχ. 10.

11. *Σύγκρισις δύο γωνιῶν ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ* (σχ. 11). — Ἐπιθέτομεν τὴν μίαν ἐπὶ τῆς ἄλλης οὕτως, ὥστε ἡ κορυφὴ Β νὰ πέσῃ εἰς τὴν κορυφὴν Ε καὶ ἡ μία πλευρὰ ΒΑ νὰ συμπέσῃ μὲ τὴν ΕΔ· τότε βλέπομεν, ποίαν διεύθυνσιν λαμβάνει ἡ ἄλλη πλευρὰ ΒΓ· καὶ ἂν μὲν ἡ ΒΓ συμπίπτῃ ἀκριβῶς μὲ τὴν ΕΖ (¹), λέγομεν, ὅτι ἡ γωνία ΑΒΓ εἶνε ἴση μὲ τὴν ΔΕΖ (ΑΒΓ=ΔΕΖ)· ἐὰν



Σχ. 11.

δὲ ἡ ΒΓ πίπτῃ ἐντὸς τῆς γωνίας ΔΕΖ, τότε ἡ γωνία ΑΒΓ εἶνε μικροτέρα τῆς ΔΕΖ (ΑΒΓ < ΔΕΖ)· τέλος, ἐὰν ἡ ΒΓ πίπτῃ ἐκτὸς τῆς γωνίας ΔΕΖ, τότε ἡ γωνία ΑΒΓ εἶνε μεγαλειτέρα τῆς ΔΕΖ (ΑΒΓ > ΔΕΖ). Ἐντεῦθεν βλέπομεν, ὅτι τὸ μέγεθος μιᾶς γωνίας δὲν ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ μήκους τῶν πλευρῶν, ἀλλὰ μόνον ἐκ τοῦ ἀνοίγματος αὐτῶν· π. χ. ὅταν δύο ὡρολόγια δεικνύουσι τὴν αὐτὴν ὥραν, αἱ δύο βελόναι ἑκάστου σχηματίζουσιν ἴσας γωνίας ὁσονδήποτε

(1) (Ἡ σύμπτωσις τῶν πλευρῶν ἀναφέρεται εἰς τὴν διεύθυνσιν καὶ οὐχὶ εἰς τὸ μῆκος αὐτῶν).

καὶ ἂν εἶνε τὸ μῆκος τῶν βελονῶν. Μία γωνία αὐξάνει, ὅταν ἀπομακρύνωμεν τὰς δύο πλευράς της· π. χ. ὁ διαβήτης (1) ὅταν εἶνε κλειστός, ἡ γωνία τῶν δύο σκελῶν του εἶνε 0, ὅσον δὲ τὸν ἀνοίγομεν, τόσον ἡ γωνία των αὐξάνει. Ἡ γωνία τῶν βελονῶν ὡρολογίου, ὅταν τὸ ὡρολόγιον δεικνύῃ 3 ὥρας, εἶνε μεγαλειτέρα παρὰ ὅταν δεικνύῃ 2 ὥρας καὶ ἀκόμη μεγαλειτέρα, ὅταν δεικνύῃ 4 ὥρας.

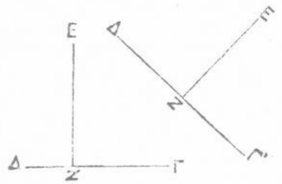
12. *Ἄθροισμα δύο γωνιῶν.* — Θέτομεν αὐτὰς ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου οὕτως, ὥστε νὰ ἔχωσι τὴν αὐτὴν κορυφὴν Α καὶ μίαν πλευρὰν κοινὴν τὴν ΑΓ (σχ. 10) φροντίζοντες, ὥστε αἱ δύο ἄλλαι πλευραὶ ΑΒ καὶ ΑΔ νὰ κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς κοινῆς· ἡ γωνία ΒΑΔ, ἡ ἀποτελουμένη ἐκ τῶν ἄκρων πλευρῶν, καλεῖται *ἄθροισμα* τῶν δύο δοθεισῶν γωνιῶν, ἡ δὲ πρᾶξις αὐτὴ λέγεται *πρόσθεσις* τῶν δύο γωνιῶν. Ἐννοεῖται, ὅτι ἐὰν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον παραθέσωμεν τρίτην γωνίαν εἰς τὴν ΒΑΔ, θὰ ἔχωμεν τὸ ἄθροισμα τριῶν γωνιῶν, καὶ ἐξακολουθοῦντες οὕτω λαμβάνομεν τὸ ἄθροισμα ἑσωνδήποτε γωνιῶν, ὅπερ εἶνε ἀνεξάρτητον τῆς τάξεως, καθ' ἣν προσθέτομεν τὰς γωνίας.

13. *Γωνίαι ἐφεξῆς.* — Δύο γωνίαι ἔχουσαι τὴν αὐτὴν κορυφὴν καὶ μίαν πλευρὰν κοινήν, ἐὰν κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς κοινῆς πλευρᾶς, ὀνομάζονται *ἐφεξῆς γωνίαι*· π. χ. αἱ γωνίαι ΒΑΓ, ΓΑΔ (σχ. 10). Ἡ θέσις αὐτὴ τῶν δύο γωνιῶν προκύπτει ἐκ τῆς προσθέσεως αὐτῶν.

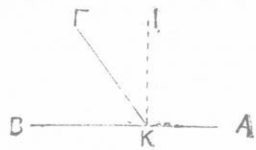
14. *Εὐθεῖαι κάθετοι.* — Ὅταν μία εὐθεῖα συναντᾷ ἄλλην, σχηματίζει μετ' αὐτῆς δύο γωνίας ἐφεξῆς. Ἐὰν μὲν αἱ δύο αὐται γωνίαι εἶνε ἴσαι, λέγομεν, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΕΖ εἶνε

(1) Τὸν ὁποῖον ὁ διδάσκων δεικνύει τοῖς μαθηταῖς.

κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΓ (σχ. 12), ἐὰν δὲ εἶνε ἄνισοι, λέγομεν, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΓΚ εἶνε *πλαγία* πρὸς τὴν ΑΒ (σχ. 13). Τὸ κοι-



Σχ. 12.



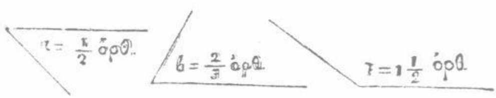
Σχ. 13.

νὸν σημεῖον τῶν δύο εὐθειῶν Ζ ἢ Κ λέγεται *ποῦς* τῆς καθέτου ἢ τῆς πλαγίας.

Περὶ τῆς καθέτου καὶ τῶν πλαγίων ἀληθεύουσιν αἱ ἑξῆς ἰδιότητες. *α΄*) Ἐὰν ἔκ τινος σημείου Ι φέρωμεν ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ τὴν κάθετον ΙΚ (σχ. 14), πᾶσα ἄλλη εὐθεῖα ΙΛ διὰ τοῦ Ι διερχομένη εἶνε πλαγία πρὸς τὴν ΑΒ καὶ μεγαλειτέρα αὐτῆς. Ὥστε *ἡ κάθετος ΙΚ εἶνε μικροτέρα πάσης πλαγίας*, διὰ τοῦτο λαμβάνεται ὡς *ἀπόστασις* τοῦ σημείου Ι ἀπὸ τῆς εὐθείας ΑΒ. ***β΄*)** *Δύο πλάγιαι, ὧν οἱ πόδες ἀπέχουσιν ἴσον ἀπὸ τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου, εἶνε ἴσαι.* ***γ΄*)** *Ἐὰν ἐκ τοῦ μέσου Η μιᾶς εὐθείας ΑΒ* (*σχ. 26*) *φέρωμεν κάθετον ἐπ᾽ αὐτήν, πᾶν σημεῖον Κ τῆς καθέτου ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν ἄκρων Α καὶ Β τῆς εὐθείας ΑΒ, ἤτοι ΑΚ =ΒΚ.* Καὶ ἀντιστρόφως. *Ἐὰν αἱ ἀποστάσεις σημείου τινὸς Κ ἀπὸ τῶν ἄκρων μιᾶς εὐθείας ΑΒ εἶνε ἴσαι, ἡ κάθετος ἡ ἐκ τοῦ μέσου Η τῆς εὐθείας ἀγομένη θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ Κ.*

Σχ. 14.

15. Γωνία ὀρθή.—Ἡ γωνία, τῆς ὁποίας ἡ μία πλευρὰ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν ἄλλην, ὀνομάζεται *ὀρθὴ γωνία*· π.χ. ἡ γωνία ΔΖΕ εἶνε ὀρθή, καθὼς καὶ ἡ γωνία ΕΖΓ (σχ. 12). *Πᾶσαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι εἶνε ἴσαι,* δηλ. τῆς ὀρθῆς γωνίας τὸ μέγεθος εἶνε ἀμετάβλητον· διὰ τοῦτο τὰς ἄλλας γωνίας συγκρίνομεν πρὸς τὴν ὀρθήν· π. χ. λέγομεν ἡ γωνία α [1] εἶνε $^1/_2$ τῆς ὀρθῆς, ἡ γωνία β=$^2/_3$ τῆς ὀρθῆς, ἡ γωνία γ=$1^1/_2$ ὀρ-



Σχ. 15.

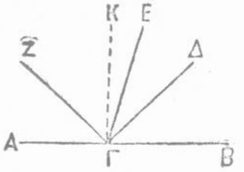
θῆς (σχ. 15). Πᾶσα γωνία μικροτέρα μιᾶς ὀρθῆς καλεῖται *ὀξεῖα*, πᾶσα δὲ γωνία μεγαλειτέρα μιᾶς ὀρθῆς καλεῖται *ἀμβλεῖα*· π. χ. αἱ γωνίαι α καὶ β εἶνε ὀξεῖαι, ἐνῷ ἡ γ εἶνε ἀμβλεῖα (σχ. 15). Ἐὰν ὡρολόγιον δεικνύῃ 3 ὥρας, αἱ βελόναι του σχηματίζουσι γωνίαν ὀρθήν· ἐὰν δεικνύῃ 2 ὥρας, ἡ γωνία εἶνε ὀξεῖα καὶ ἐὰν δεικνύῃ 4 ὥρας, ἡ γωνία εἶνε ἀμβλεῖα.

16. Γωνίαι παραπληρωματικαί.— Ὅταν τὸ ἄθροισμα δύο γωνιῶν ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθὰς γωνίας, ἑκατέρα αὐτῶν λέγεται *παραπλήρωμα* τῆς ἄλλης, αἱ δύο ὁμοῦ λέγονται *γωνίαι παραπληρωματικαί*· π. χ. ὅταν ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου Κ εὐθείας ΑΒ ἀχθῇ ἄλλη εὐθεῖα ΚΓ, σχηματίζονται δύο γωνίαι, ὧν τὸ ἄθροισμα ΓΚΑ+ΓΚΒ = 2 ὀρθ. (σχ. 13). Διότι, ἐὰν φέρωμεν τὴν κάθετον ΚΙ, βλέπομεν, ὅτι οἵαν ἔκτασιν κατέχουσιν αἱ δύο γωνίαι ΑΚΓ καὶ ΓΚΒ, τὴν αὐτὴν κατέχουσι καὶ αἱ δύο ὀρθαὶ γωνίαι ΑΚΙ καὶ ΙΚΒ.

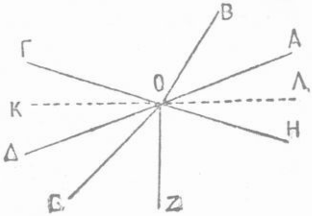
Παρατήρησις. ***α´)*** Ἐὰν ἐξ ἑνὸς σημείου Γ εὐθείας ΑΒ φέρωμεν ἄλλας εὐθείας ΓΔ, ΓΕ, ΓΖ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου

(1) Τὴν γωνίαν ὀνομάζομεν καὶ δι᾽ ἑνὸς μικροῦ γράμματος γραφομένου ἐντὸς τῆς γωνίας.

(τοῦ χαρτίου ἢ τοῦ μαυροπίνακος) καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΑΒ (ἄνω ἢ κάτω), σχηματίζονται διάφοροι γωνίαι, ὧν τὸ ἄθροισμα ἰσοῦται μὲ 2 ὀρθὰς (σχ. 16). Διότι, ἐὰν ἐκ τοῦ Γ φέρωμεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ, βλέπομεν, ὅτι αἱ διαδοχικαὶ



Σχ. 16.



Σχ. 17.

γωνίαι ΒΓΔ, ΔΓΕ, ΕΓΖ, ΖΓΑ κατέχουσιν οἵαν ἔκτασιν καὶ αἱ δύο ὀρθαὶ γωνίαι ΚΓΑ, ΚΓΒ.

β') Ἐὰν ἐξ ἑνὸς σημείου Ο φέρωμεν διαφόρους εὐθείας ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου,σχηματίζονται διάφοροι γωνίαι, ὧν τὸ ἄθροισμα ἰσοῦται μὲ 4 ὀρθ. (σχ. 17). Διότι, ἐὰν διὰ τοῦ Ο φέρωμεν τὴν εὐθεῖαν ΚΛ, πᾶσαι αἱ γωνίαι αἱ σχηματιζόμεναι ἐκ τοῦ ἑνὸς μέρους αὐτῆς ἀποτελοῦσι 2 ὀρθ. (παρατήρ. α') καὶ πᾶσαι αἱ γωνίαι αἱ σχηματιζόμεναι ἐκ τοῦ ἄλλου μέρους ἀποτελοῦσιν ἐπίσης 2. ὀρθ., ἤτοι ἐν συνόλῳ 4 ὀρθάς.

17. *Γωνίαι κατὰ κορυφήν.* — Ἐὰν προεκτείνωμεν τὰς πλευρὰς μιᾶς γωνίας ΑΟΓ ἀπὸ τὴν κορυφήν, σχηματίζεται ἑτέρα γωνία ΒΟΔ, ἥτις λέγεται *κατὰ κορυφὴν* τῆς δοθείσης (σχ. 18)· ἐπίσης αἱ γωνίαι ΑΟΔ, ΒΟΓ λέγονται κατὰ κορυφήν. Ὥστε δύο γωνίαι λέγονται κατὰ κορυφήν, ὅταν ἔχωσι τὴν αὐτὴν κορυφὴν καὶ αἱ πλευραὶ τῆς μιᾶς εἶνε προε-

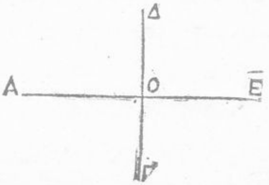
Σχ. 18.

κτάσεις τῶν πλευρῶν τῆς ἄλλης. *Αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι εἶνε ἴσαι,* ἤτοι ΑΟΓ = ΒΟΔ, ΑΟΔ = ΒΟΓ.

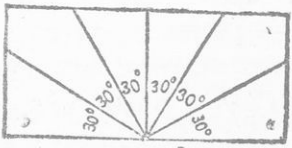
Ἐπανάληψις δι' ἐρωτήσεων καὶ ἀσκήσεων.

Τίνα σκοπὸν ἔχει ἡ Γεωμετρία; Τί καλεῖται ὄγκος σώματος; Τίνα τὰ ἁπλούστερα γεωμετρικὰ στερεά; Τί καλεῖται ἐπιφάνεια, γραμμή, σημεῖον; Πῶς γεννᾶται μία γραμμή; Τίνα εἴδη γραμμῶν ἔχομεν; Τίνες αἱ ἰδιότητες τῆς εὐθείας; Πόσα σημεῖα μιᾶς εὐθείας ἀρκοῦσιν, ἵνα σύρωμεν αὐτήν; Πῶς ἐξελέγχεται ἡ εὐθύτης τοῦ κανόνος; Πῶς χαράττουσιν εὐθεῖαν ἐπὶ σανίδος ἢ ἐδάφους; Τί εἶνε ἐπίπεδον; Τί καλεῖται γωνία; Πῶς ἀπαγγέλλεται; Πότε δύο γωνίαι εἶναι ἴσαι; Πῶς γίνεται ἡ πρόσθεσις 1ον τῶν εὐθειῶν, 2ον τῶν γωνιῶν; Ποῖαι γωνίαι καλοῦνται ἐφεξῆς; Πότε λέγομεν ὅτι μία εὐθεῖα εἶνε κάθετος ἐπὶ ἄλλης; Τί καλεῖται ἀπόστασις δύο σημείων; ἀπόστασις σημείου ἀπὸ εὐθείας; Πότε ἡ γωνία καλεῖται ὀρθή, ὀξεῖα, ἀμβλεῖα; Ποῖαι γωνίαι καλοῦνται παραπληρωματικαὶ καὶ ποῖαι κατὰ κορυφήν;

1. Γωνία τις εἶνε 1 $^2/_3$ ὀρθ. Προεκτείνοντες μίαν τῶν πλευρῶν της (ἀπὸ τὴν κορυφὴν) σχηματίζομεν δευτέραν γωνίαν· πόσον εἶνε αὕτη καὶ πῶς καλοῦνται αὗται αἱ 2 γωνίαι; 2. Ἐὰν προεκτείνωμεν καὶ τὰς δύο πλευρὰς τῆς προηγουμένης γωνίας, σχηματίζον-

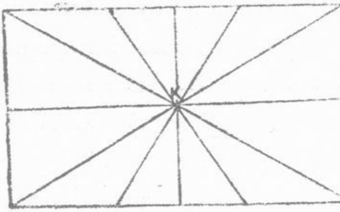


Σχ. 19.



Σχ. 20.

ται 3 νέαι γωνίαι. Πόσον εἶνε ἑκάστη; 3. Διά τινος σημείου τῆς εὐθείας ΑΒ (σχ.20) ἄγομεν 5 εὐθείας (ἐπὶ τοῦ πίνακος ἢ τοῦ χαρτίου) ἄνωθεν τῆς ΑΒ οὕτως, ὥστε αἱ σχηματιζόμεναι γωνίαι νὰ ὦσιν ἴσαι. Μὲ ποῖον κλάσμα τῆς ὀρθῆς γωνίας θὰ ἰσοῦται ἑκάστη; Κατασκεύασον τὸ σχῆμα 20 μὲ ἓν φύλλον χαρτίου. 4. Ἐξ ἑνὸς σημείου ἄγομεν 4 εὐθείας ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέδου, ὅτε σχηματίζονται 4 γωνίαι, ἐξ ὧν ἡ μία εἶνε ὀρθή, ἡ ἄλλη $^1/_4$ ὀρθῆς καὶ ἡ τρίτη $1^1/_8$ ὀρθῆς· πόση εἶνε ἡ τετάρτη ; 5. Πέριξ ἑνὸς σημείου Κ σχηματίζομεν ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέδου 12 γωνίας ἴσας καὶ ἐφεξῆς οὕτως, ὥστε

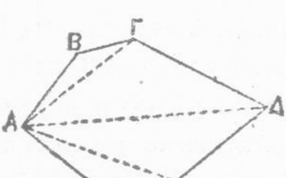


Σχ. 21.

νὰ μὴ μένῃ οὐδὲν μέρος περὶ τὴν κοινὴν κορυφὴν Κ· πόση θὰ εἶνε ἑκάστη ; Κατασκεύασον τὸ σχ. 21 μὲ ἓν φύλλον χαρτιοῦ.

ΠΕΡΙ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

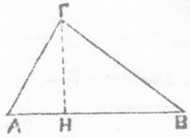
18. *Πολύγωνον.* Ὀνομάζεται *πολύγωνον* πᾶν σχῆμα περιοριζόμενον ὑπὸ σειρᾶς εὐθειῶν, ὧν ἑκάστη ἔχει διεύθυνσιν διάφορον τῆς προηγουμένης, συνιστῶσι δὲ διὰ τοῦ συνόλου αὐτῶν ἕνα γῦρον κλειστόν. Τοιοῦτον εἶνε τὸ ΑΒΓΔΕΖ (σχῆμα 22). Αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ λέγονται *πλευραὶ* τοῦ πολυγώνου, καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶνε ἡ *περίμετρος* αὐτοῦ. Τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ εἶνε *αἱ κορυφαὶ* τῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου.



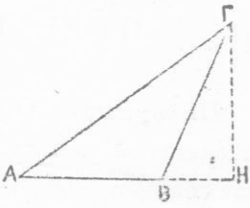
Σχ. 22.

Πᾶσα εὐθεῖα συνδέουσα δύο κορυφὰς μὴ διαδοχικάς, καθὼς εἶνε αἱ ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ (σχ. 22), καλεῖται *διαγώνιος* τοῦ πολυγώνου. Ἡ ὑπὸ τῆς περιμέτρου ἑνὸς πολυγώνου σχηματιζομένη γραμμὴ εἶνε τεθλασμένη γραμμή, ἀλλὰ κλειστή. Ἐὰν πᾶσαι αἱ πλευραὶ τεθλασμένης γραμμῆς κεῖνται ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέδου, ἡ γραμμὴ εἶναι ἐπίπεδος· εἰ δὲ μή, εἶνε *στρεβλή*. Καὶ τὸ πολύγωνον εἶνε *ἐπίπεδον* ἢ *στρεβλόν*, καθόσον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν α' ἢ τὴν β' περίπτωσιν. Ἐνταῦθα γενήσεται λόγος περὶ τῶν ἐπιπέδων πολυγώνων. Τὰ πολύγωνα λαμβάνουσιν ὀνόματα ὑπενθυμίζοντα τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν ἢ τῶν γωνιῶν αὐτῶν. Οὕτω λέγομεν *τρίγωνον, τετράπλευρον, πεντάγωνον, ἑξάγωνον, ὀκτάγωνον, δεκάγωνον, εἰκοσάγωνον* κ.τ.λ., τὰ πολύγωνα ἅτινα ἔχουσι 3, 4, 5, 6, 8, 10, 20 πλευρὰς κ. λ.

19. Τρίγωνον. Τὸ ἁπλούστερον τῶν πολυγώνων εἶνε τὸ τρίγωνον (σχ. 23), ὅπερ ἔχει τρεῖς γωνίας, τὴν γωνίαν Α,



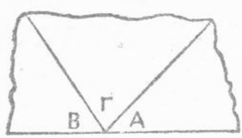
Σχ. 23.



Σχ. 24.

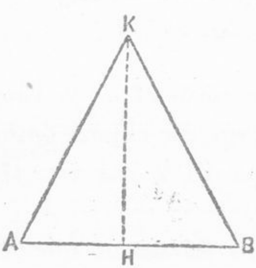
τὴν γωνίαν Β καὶ τὴν γωνίαν Γ καὶ τρεῖς πλευρὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ. Ἐὰν ἔκ τινος κορυφῆς Γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ φέρωμεν τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ἀπέναντι πλευράν, ἡ κάθετος αὕτη ΓΗ ὀνομάζεται *ὕψος* τοῦ τριγώνου καὶ ἡ πλευρὰ ΑΒ, πρὸς ἣν εἶνε κάθετος, ὀνομάζεται *βάσις*. Ὡς βάσις δύναται νὰ ληφθῇ οἱαδήποτε πλευρὰ τοῦ τριγώνου, ἑπομένως εἰς πᾶν τρίγωνον δυνάμεθα νὰ φέρωμεν τρία ὕψη. Τὸ ὕψος ἑνὸς τριγώνου δυνατὸν νὰ συναντᾷ τὴν βάσιν κατὰ τὴν ἐπέκτασιν αὐτῆς, ἐκτὸς τοῦ τριγώνου, ὡς εἰς τὸ σχ. 24, τοῦθ' ὅπερ συμβαίνει, ὅταν μία τῶν παρὰ τὴν βάσιν γωνιῶν τοῦ τριγώνου εἶνε ἀμβλεῖα. Τὸ ὕψος τριγώνου ἐκ χαρτίου, ἔχοντος ἀμφοτέρας τὰς παρὰ τὴν βάσιν γωνίας ὀξείας, εὑρίσκομεν εὐκόλως, ἐὰν θλάσωμεν αὐτὸ κατὰ εὐθεῖαν διερχομένην διὰ διὰ τοῦ Γ (σχ. 23) οὕτως, ὥστε τὰ τμήματα ΑΗ, ΒΗ, εἰς ἃ θὰ διαιρεθῇ ἡ βάσις, νὰ συμπέσωσιν.

20. *Ἰδιότητες τοῦ τριγώνου.* ***α΄)*** *Τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν παντὸς τριγώνου ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθάς.* Περὶ τούτου δυνάμεθα νὰ βεβαιωθῶμεν, ἐὰν κατασκευάσωμεν τρίγωνον ἐκ χαρτίου καί, ἀφοῦ ἀποκόψωμεν τὰς γωνίας του, τὰς παραθέσωμεν ἐφεξῆς περὶ τὴν κοινὴν κορυφήν, ἤτοι τὰς προσθέσωμεν (ἐδ. 12)· τότε βλέπομεν, ὅτι ἡ πρώτη πλευρὰ τῆς γωνίας Α καὶ ἡ δευτέρα τῆς Β κεῖνται ἐπ' εὐθείας (σχ. 25) ἐπομένως κατὰ τὴν παρατήρ. α΄ ἐδ. 16, Α+Β+Γ=2 ὀρθαί.

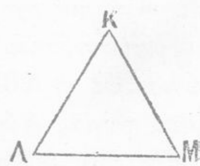


Σχ. 25.

β΄) *Μία οἱαδήποτε πλευρὰ τοῦ τριγώνου εἶνε μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων.* Διότι ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἶνε μικροτέρα τῆς τεθλασμένης ΑΓ+ΓΒ(σχ.23).



Σχ. 26.



Σχ. 27

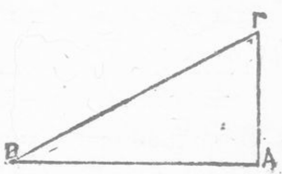
21. *Διάφορα εἴδη τριγώνου.* — Καλεῖται *σκαληνόν*, ἐὰν ἔχῃ τὰς τρεῖς πλευρὰς ἀνίσους (σχ. 24), *ἰσοσκελές*, ἐὰν ἔχῃ δύο πλευρὰς (σκέλη) ΚΑ, ΚΒ ἴσας (σχ. 26) καὶ *ἰσόπλευρον*, ἐὰν ἔχῃ τὰς 3 πλευρὰς ἴσας (σχ. 27). Τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ὡς βάσις λαμβάνεται ἡ ἄνισος πρὸς τὰς δύο ἄλλας πλευράς, πλὴν τῶν ἰδιοτήτων τοῦ ἐδ. 20 ἔχει καὶ ἄλλας δύο:

α') Αἱ παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι Α καὶ Β εἶνε ἴσαι.

β') Τὸ ὕψος ΚΗ χωρίζει τὴν βάσιν ΑΒ εἰς δύο ἴσα μέρη καὶ τὴν γωνίαν Κ εἰς δύο ἴσας γωνίας. Περὶ τούτου δυνάμεθα νὰ βεβαιωθῶμεν, ἐὰν κατασκευάσωμεν τρίγωνον ἰσοσκελὲς ἐκ χαρτίου καὶ διπλώσωμεν αὐτὸ κατὰ τὸ ὕψος ΚΗ. Συχνὰ ἀπαντῶμεν ἰσοσκελῆ τρίγωνα· π. χ. εἰς τὰ ἀετώματα τῶν οἰκιῶν καὶ τῶν παραθύρων (σχ. 28).

Τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ἔχει καὶ τὰς τρεῖς γωνίας ἴσας, ἕκαστον δὲ ὕψος χωρίζει τὴν ἀντίστοιχον πλευρὰν εἰς δύο

Σχ. 28.



Σχ. 29.

ἴσα μέρη καὶ τὴν γωνίαν τοῦ τριγώνου εἰς δύο ἴσας γωνίας.

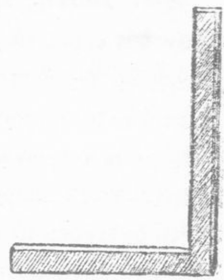
Τρίγωνον, ὅπερ ἔχει μίαν γωνίαν ὀρθήν, ὀνομάζεται *ὀρθογώνιον*, ὡς τὸ ΑΒΓ (σχ. 29). Ἡ πλευρὰ ΒΓ ἡ ἀπέναντι τῆς ὀρθῆς γωνίας Α λέγεται *ὑποτείνουσα.*

Εἰς πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ὀξειῶν γωνιῶν Β καὶ Γ ἰσοῦται μὲ μίαν ὀρθήν (ἐδ. 20).

Σημ. Πᾶν τρίγωνον δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἄθροισμα ἢ διαφορὰ δύο τριγώνων ὀρθογωνίων, καθόσον τὸ ὕψος πίπτει ἐντὸς ἢ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου (σχ. 23, 24).

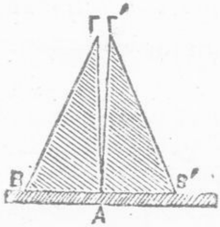
22. Γνώμων.— Εἶνε μία λεπτὴ σανὶς ξυλίνη ἔχουσα σχῆμα ὀρθογωνίου (σχ. 30)· χρησιμεύει διὰ νὰ κατασκευάζωμεν ὀρθὰς γωνίας, διὰ νὰ σύρωμεν καθέτους καὶ δι' ἄλλα προβλήματα, ὡς θὰ ἴδωμεν κατωτέρω. Ὁ γνώμων τῶν ξυλουργῶν καὶ τῶν κτιστῶν ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο κανόνας (ξυλίνους ἢ σιδηροῦς) συνηνωμένους κατ' ὀρθὴν γωνίαν (σχ. 31).

Σχ. 30.

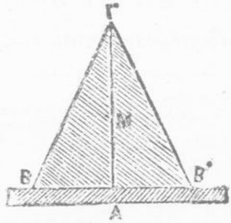


Σχ. 31.

23. *Ἐξέλεγξις τοῦ γνώμονος.* — Πρὶν μεταχειρισθῶμεν τὸν γνώμονα, πρέπει νὰ βεβαιωθῶμεν, ἂν εἶνε ἀκριβής, δηλ. ἂν ἡ γωνία του εἶνε ὀρθή. Πρὸς τοῦτο ἐφαρμόζομεν τὴν πλευρὰν ΑΒ τοῦ γνώμονος ἐπί τινος κανόνος καὶ φέρομεν διὰ γραφίδος μίαν εὐθεῖαν κατὰ μῆκος τῆς ΑΓ· εἶτα ἀναστρέφομεν τὸν γνώμονα θέτοντες τὴν πλευρὰν ΑΒ εἰς τὴν θέσιν ΑΒ′, ὡς δεικνύει τὸ σχ. 32, καὶ φέρομεν νέαν εὐθεῖαν κατὰ



Σχ. 32.



Σχ. 33.

μῆκος τῆς ΑΓ. Ἐὰν αἱ δύο ἀχθεῖσαι εὐθεῖαι συμπέσωσι (σχ. 33) ὁ γνώμων εἶνε ἀκριβής, διότι αἱ δύο γωνίαι **ΓΑΒ, ΓΑΒ′**

εἶνε ἴσαι· ἀλλ' ἐὰν αἱ εὐθεῖαι αὗται δὲν συμπέσωσι, καθὼς αἱ ΑΓ, ΑΓ' εἰς τὸ σχ. 32, ἡ γωνία ΓΑΒ δὲν εἶνε πλέον ἴση μὲ τὴν Γ'Α'Β' καὶ ἑπομένως ἡ γωνία τοῦ γνώμονος δὲν εἶνε ὀρθή.

24. *Ἰσότης τριγώνων.*— *Ἴσα* λέγονται δύο σχήματα· ὅταν δύνανται νὰ ἐφαρμόσωσι, δηλ. νὰ τεθῇ τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου οὕτως, ὥστε νὰ συμπέσωσι καθ' ὅλα τὰ σημεῖα αὐτῶν(1). Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ἔχει 6 στοιχεῖα (3 πλευρὰς καὶ 3 γωνίας), δύο τρίγωνα ἴσα ἔχουσι τὰ ἓξ στοιχεῖα αὐτῶν ἴσα ἀνὰ δύο καὶ κατὰ σειράν, τοῦθ' ὅπερ δίδει 6 συνθήκας, εἰς ἃς δέον νὰ ὑπόκεινται τὰ δύο ταῦτα τρίγωνα. Ὥστε δύο τρίγωνα εἶνε ἴσα, ἐὰν τὰ 6 στοιχεῖα τοῦ ἑνὸς εἶνε ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς τὰ 6 τοῦ ἄλλου στοιχεῖα. Ἐν τούτοις ὑπάρχουσι περιπτώσεις τινές, καθ' ἃς βεβαιούμεθα περὶ τῆς ἰσότητος δύο τριγώνων, ἐκ τῆς ἰσότητος τινῶν μόνον τῶν στοιχείων αὐτῶν, ἐξ ἧς συνάγεται καὶ ἡ ἰσότης τῶν λοιπῶν.

α' περίπτωσις. *Δύο τρίγωνα εἶνε ἴσα, ὅταν μία πλευρὰ τοῦ ἑνὸς εἶνε ἴση πρὸς μίαν πλευρὰν τοῦ ἄλλου καὶ αἱ γωνίαι, αἵτινες κεῖνται εἰς τὰ ἄκρα αὐτῶν, εἶνε ἴσαι.*

β' περίπτωσις. *Δύο τρίγωνα εἶνε ἴσα, ὅταν μία γωνία τοῦ ἑνὸς εἶνε ἴση πρὸς μίαν γωνίαν τοῦ ἄλλου καὶ αἱ πλευραὶ αἱ περιέχουσαι τὰς γωνίας ταύτας εἶναι ἴσαι.*

---

(1). Ἐὰν γράψωμεν ἐπὶ χαρτίου τὰ γράμματα ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ καὶ ξεσηκώσωμεν αὐτὰ ἐπὶ λεπτοῦ χαρτίου, λαμβάνομεν σχῆμα ἴσον· ἀλλ' ἐὰν γράψωμεν διὰ μελάνης τὸ αὐτὸ σχῆμα καὶ πρὶν ἡ μελάνη ξηρανθῇ ἐπιθέσωμεν στυπόχαρτον, θὰ λάβωμεν ἐπ' αὐτοῦ τὸ ἑξῆς σχῆμα ΑΙΡΤΞΜΩΞΓ, ὅπερ εἶνε ἴσον τῷ ἀρχικῷ, διότι συμπίπτει ἐπ' αὐτοῦ ἀκριβῶς, δὲν παρουσιάζει ὅμως τὴν αὐτὴν ὄψιν πρὸς τὸ ἀρχικόν, εἶνε ἴσον ἐξ ἀντιστροφῆς. Ἐὰν θέλωμεν νὰ ἐκ α εὕρωμεν τὴν συνήθη ὄψιν τῶν γραμμάτων, βλέπομεν τὸ εἴδωλον αὐτῶν εἰς καθρέπτην.

*γ') **περίπτωσις.*** *Δύο τρίγωνα εἶνε ἴσα, ἐὰν ἔχωσι καὶ τὰς πλευρὰς 3 ἴσας μίαν πρὸς μίαν* (¹).

Σημ. Ἡ ἰσότης τῶν τριγώνων εὑρίσκει συχνοτάτην ἐφαρμογὴν ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ, ὅταν πρόκειται νὰ δειχθῇ, ὅτι δύο τμήματα εὐθείας εἶνε ἴσα ἢ δύο γωνίαι ἴσαι. Αἱ ἀνωτέρω 3 περιπτώσεις τῆς ἰσότητος τριγώνων ἐφαρμόζεται καὶ εἰς τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα· ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ ὀρθὴ γωνία εἶνε ἀμετάβλητος, αἱ μὲν δύο πρῶται περιπτώσεις διατυποῦνται οὕτω : Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα εἶνε ἴσα.

α') *Ὅταν ἔχωσι τὴν ὑποτείνουσαν ἴσην καὶ μίαν ὀξεῖαν γωνίαν ἴσην.*

β') *Ὅταν ἔχωσι τὰς πλευρὰς τὰς περιεχούσας τὴν ὀρθὴν γωνίαν ἴσας.*

Ἡ δὲ γ' περίπτωσις ἁπλοποιεῖται οὕτω:

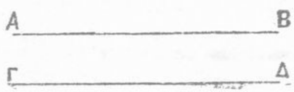
γ') *Δύο τρίγωνα ὀρθογώνια εἶνε ἴσα, ὅταν ἔχωσι τὴν ὑποτείνουσαν ἴσην καὶ μίαν τῶν ἄλλων πλευρῶν ἴσην.*

ΕΥΘΕΙΑΙ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΙ
ΚΑΙ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ

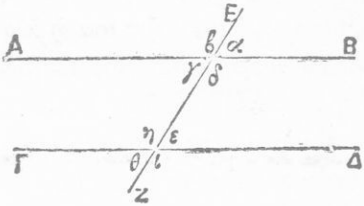
25. Δύο εὐθεῖαι κεχαραγμέναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου (δηλ. ἐπὶ τοῦ μαυροπίνακος, ἐπὶ φύλλου χαρτίου) λέγονται *παράλληλοι*, ὅταν δὲν συναντῶνται ποτέ, ὅσον μακρὰν καὶ ἂν τὰς προεκτείνωμεν καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη. Τοιαῦται εἶνε αἱ

(¹) Αἱ δύο πρῶται περιπτώσεις ἂς ἀποδειχθῶσιν ὑπὸ τοῦ διδάσκοντος διὰ τῆς ἐπιθέσεως τῶν δύο τριγώνων.

εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ (σχ. 34). Αἱ γραμμαί, ἃς οἱ μαθηταὶ χαράσσουσιν ἐπὶ τοῦ τετραδίου, ἵνα ὁδηγῶνται εἰς τὴν γραμμήν, εἶνε εὐθεῖαι παράλληλοι· αἱ δύο ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ πα-



Σχ. 34.



Σχ. 35.

τώματος τῆς αἰθούσης, τοῦ μαυροπίνακος εἶνε παράλληλοι.

26. *Ἰδιότητες τῶν παραλλήλων εὐθειῶν. α')*.— Ὅταν μία εὐθεῖα ΕΖ (σχ. 35) τέμνῃ δύο παραλλήλους ΑΒ, ΓΔ, σχηματίζει μετ' αὐτῶν 8 γωνίας α, β, γ, δ, ε, θ, η, ι· ἐκ τούτων 4 εἶνε ὀξεῖαι, α, γ, ε, θ καὶ 4 ἀμβλεῖαι β, δ, η, ι· *αἱ ὀξεῖαι εἶναι πᾶσαι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, καθὼς καὶ αἱ ἀμβλεῖαι· προσέτι ἡ τυχοῦσα ἐκ τῶν ὀξειῶν γωνιῶν εἶνε παραπληρωματικὴ τῆς τυχούσης ἐκ τῶν ἀμβλειῶν·* π. χ. $\delta+\varepsilon=2$ ὀρθ. ἢ $\alpha+\eta=2$ ὀρθ.

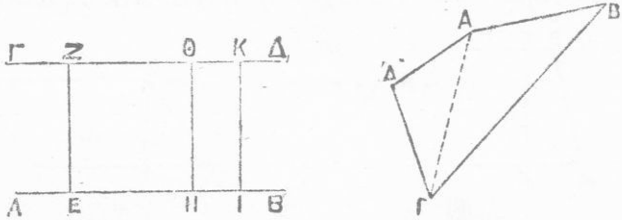
β') Ὅταν δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι ὑπὸ τρίτης (πλαγίας) σχηματίζωσι πάσας τὰς ὀξείας γωνίας ἴσας ἢ πάσας τὰς ἀμβλείας ἴσας ἢ μίαν ὀξεῖαν καὶ μίαν ἀμβλεῖαν (μὴ ἐφεξῆς) παραπληρωματικάς, αἱ εὐθεῖαι αὗται εἶνε παράλληλοι.

γ') Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ΑΖ, ΓΔ εἶνε κάθετοι πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΕΒ, εἶνε παράλληλοι (σχ. 36).

Σχ. 36.

Ὥστε, ἵνα λάβωμεν δύο εὐθείας παραλλήλους ἐπὶ χαρτίου, θλῶμεν αὐτὸ κατὰ μίαν εὐθεῖαν ΕΒ καὶ ἐκ δύο σημείων Ζ καὶ Δ αὐτῆς φέρομεν καθέτους.

δ') Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ εἶνε παράλληλοι, πᾶσα κάθετος ἐπὶ μίαν ἐξ αὐτῶν εἶνε κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ἄλλην (σχ. 37). Ἡ κοινὴ αὕτη κάθετος εἰς τὰς δύο παραλλήλους



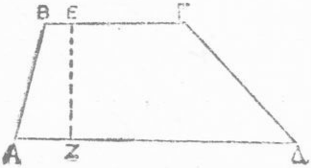
Σχ. 37. *Σχ. 38.*

εὐθείας ἔχει τὸ αὐτὸ μῆκος ἀπὸ οἱονδήποτε σημεῖον τῆς ΑΒ καὶ ἂν ἀχθῇ, δηλ. ΕΖ = ΗΘ = ΙΚ.

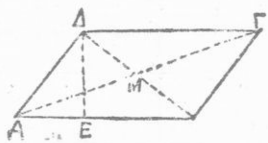
27. Ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς πολυγώνου.— *Παντὸς τετραπλεύρου ΑΒΓΔ (σχ. 38) αἱ 4 γωνίαι ἔχουσιν ἄθροισμα 4 ὀρθάς.* Διότι ἄγοντες ἐκ μιᾶς κορυφῆς Α τὴν διαγώνιον ΑΓ χωρίζομεν τὸ τετράπλευρον εἰς δύο τρίγωνα· τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑκάστου τριγώνου ἰσοῦται μὲ 2 ὀρθ. (ἐδ. 20 α'), ἑπομένως αἱ γωνίαι τῶν δύο τριγώνων, ἤτοι τοῦ τετραπλεύρου, ἀποτελοῦσι 4 ὀρθάς. Καὶ εἰς πᾶν πολύγωνον δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν, μὲ πόσας ὀρθὰς ἰσοῦται τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν του· διότι ἄγοντες ἐκ μιᾶς κορυφῆς Α τὰς διαγωνίους ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ (σχ. 22), χωρίζομεν τὸ ἑξάγωνον εἰς 4 τρίγωνα.

28. Τοῦ τετραπλεύρου διακρίνομεν τὰς ἑξῆς μερικὰς περιπτώσεις: ***α') Τὸ τραπέζιον,*** τοῦ ὁποίου δύο πλευραὶ εἶνε παράλληλοι (σχ. 39). Αἱ δύο παράλληλοι πλευραὶ ΑΔ, ΒΓ λέγονται *βάσεις* τοῦ τραπεζίου· ἡ κάθετος ΕΖ ἡ περιεχομένη μεταξὺ τῶν δύο βάσεων λέγεται *ὕψος* τοῦ τραπεζίου. Ὅταν αἱ μὴ παράλληλοι πλευραὶ ΑΒ, ΓΔ εἶνε ἴσαι, τὸ τραπέζιον λέγεται *ἰσοσκελές*.

*β') **Τὸ παραλληλόγραμμον***, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶνε παράλληλοι ἀνὰ δύο (σχ. 40)· ἡ ΑΒ εἶνε παράλληλος τῇ



Σχ. 39.



Σχ. 40.

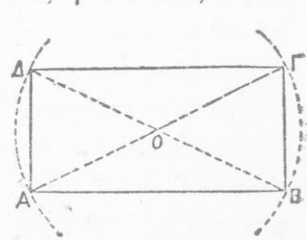
ΓΔ καὶ ἡ ΒΓ παράλληλος τῇ ΑΔ. *Βάσις* τοῦ παραλληλογράμμου καλεῖται μία οἱαδήποτε τῶν πλευρῶν του, συνήθως ἡ μεγαλειτέρα, ὡς ἡ ΑΒ· ἡ κάθετος ΔΕ ἐπὶ τὴν βάσιν, ἀγομένη ἔκ τινος σημείου τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς, καλεῖται *ὕψος*.

Τὸ παραλληλόγραμμον ἔχει τὰς ἑξῆς ἰδιότητας :

1ον *Αἱ παράλληλοι πλευραὶ εἶνε ἴσαι,* ἤτοι ΑΒ=ΓΔ, ΒΓ=ΑΔ.

2ον *Αἱ ἀπέναντι γωνίαι εἶναι ἴσαι,* ἤτοι Α=Γ, Β=Δ.

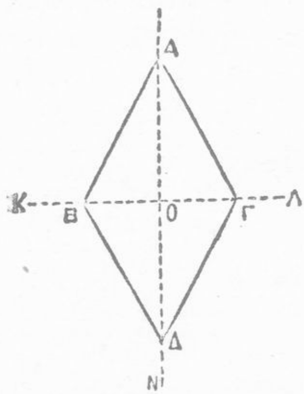
3ον Αἱ δύο διαγώνιοι ΑΓ, ΒΔ τέμνονται εἴς τι σημεῖον Μ, ὅπερ εἶνε μέσον ἑκατέρας καὶ καλεῖται ***κέντρον*** τοῦ παραλληλογράμμου.



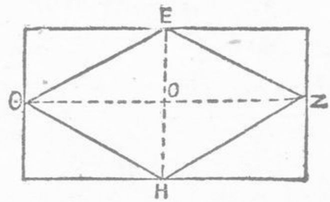
Σχ. 41.

*γ') **Τὸ ὀρθογώνιον*** (σχ. 41), οὗ αἱ 4 γωνίαι εἶνε ἴσαι, καὶ ἐπομένως ὀρθαὶ (ἐδ.27). Δύο διαδοχικαὶ πλευραὶ ΑΒ καὶ ΒΓ ὀνομάζονται *διαστάσεις* τοῦ ὀρθογωνίου, ἡμία εἶνε ἡ βάσις καὶ ἡ ἄλλη τὸ ὕψος. Αἱ ἀπέναντι πλευραὶ ΑΔ, ΒΓ εἶνε παράλληλοι, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΑΒ· ἐπίσης αἱ ΔΓ, ΑΒ εἶνε παράλληλοι. *Λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον εἶνε μερικὴ περίπτωσις τοῦ παραλληλογράμμου, ἔχον τὰς διαγωνίους ἴσας*. Αἱ ἀποστάσεις ΟΑ, ΟΒ, ΟΔ εἶνε ἴσαι. Τὸ ὀρθογώνιον εἶνε σχῆμα, ὅπερ βλέπομεν, ὅπου καὶ ἂν στρέψωμεν σχεδὸν τοὺς ὀφθαλμούς μας· οὕτω τὰ φύλλα τῶν τετραδίων τῶν βιβλίων, αἱ τράπεζαι, τὰ πατώματα καὶ οἱ τοῖχοι τῶν δωματίων, αἱ θύραι καὶ τὰ παράθυρα κ.τ.λ. ἔχουσιν ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον σχῆμα ὀρθογωνίου.

δ΄) Τὸν ῥόμβον, τοῦ ὁποίου αἱ 4 πλευραὶ εἶνε ἴσαι (σχ. 42). Ἵνα κατασκευάσωμεν ῥόμβον, λαμβάνομεν ἓν ὀρθο-



Σχ 42.

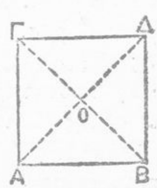


Σχ 43.

γώνιον φύλλον χαρτίου καὶ διπλώνομεν αὐτὸ κατὰ τὰς εὐθείας ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ (σχ. 43), ἔνθα τὰ σημεῖα Ε, Ζ, Η καὶ Θ εἶνε τὰ μέσα τῶν πλευρῶν. Τὰ τέσσαρα σχηματιζόμενα ὀρθογώνια τρίγωνα εἶνε ἴσα ὡς ἔχοντα τὰς καθέτους αὐτῶν πλευρὰς ισας, ἐπομένως αἱ ὑποτείνουσαι ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ καὶ ΘΕ εἶνε ἴσαι καὶ τὸ τετράπλευρον ΕΖΗΘ ὡς ἔχον τὰς τέσσαρας πλευράς του ἴσας εἶνε ῥόμβος.

Λοιπὸν συνδέοντες τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ἑνὸς ὀρθογωνίου λαμβάνομεν ῥόμβον. Ὁ ῥόμβος εἶνε μερικὴ περίπτωσις τοῦ παραλληλογράμμου (1)· ἑπομένως αἱ ἀπέναντι γωνίαι Α καὶ Δ, Β καὶ Γ εἶνε ἴσαι καὶ αἱ διαγώνιοι τέμνονται εἰς ἴσα μέρη· περὶ τούτου βεβαιούμεθα, ἐὰν διπλώσωμεν τὸν ῥόμβον ΑΒΔΓ (σχ. 42) κατὰ τὴν ΒΓ ἢ κατὰ τὴν ΑΔ. Αἱ διαγώνιοι τοῦ ῥόμβου ἔχουσι προσέτι καὶ τὰς ἑξῆς ἰδιότητας· 1ον *εἶνε κάθετοι μεταξύ των· 2ον ἑκατέρα χωρίζει τὰς γωνίας, τῶν ὁποίων ἑνώνει τὰς κορυφάς, εἰς δύο μέρη ἴσα.* Ἐντεῦθεν πορίζόμενα δεύτερον τρόπον κατασκευῆς ῥόμβου: σύρομεν δύο εὐθείας καθέτους ΚΛ, ΚΜ (σχ. 42) καὶ ἐκ τοῦ σημείου τῆς τομῆς Ο λαμβάνομεν δύο μήκη ἴσα ΟΑ, ΟΔ ἐπὶ τῆς μιᾶς καὶ δύο ἄλλα μήκη ἴσα ΟΒ, ΟΓ ἐπὶ τῆς ἄλλης· σύροντες τὰς εὐθείας ΑΒ, ΒΔ, ΔΓ, ΓΑ σχηματίζομεν τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ, ὅπερ εἶνε ῥόμβος.

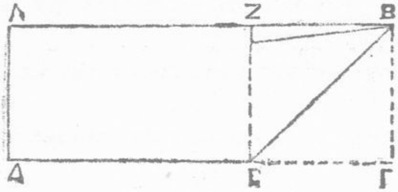
ε′) Τὸ τετράγωνον (σχ. 44) τοῦ ὁποίου αἱ τέσσαρες πλευραὶ καὶ αἱ τέσσαρες γωνίαι εἶνε ἴσαι. Αἱ γωνίαι αὗται εἶνε ἑπομένως ὀρθαί, καθὼς καὶ εἰς τὸ ὀρθογώνιον· ἤτοι τὸ τετράγωνον εἶνε ὀρθογώνιον, οὗ αἱ δύο διαστάσεις εἶνε ἴσαι· ἑπομένως ἔχει τὰς ἰδιότητας τοῦ ῥόμβου καὶ τοῦ ὀρθογωνίου: 1ον *αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ τέμνονται εἰς τὸ μέσον των· 2ον εἶνε ἴσαι, 3ον εἶνε κάθετοι πρὸς ἀλλήλας καὶ 4ον ἑκατέρα χωρίζει τὰς ἀπέναντι γωνίας εἰς δύο ἴσας γωνίας.*



Σχ. 44.

(1) Τὴν ἀπόδειξιν τούτου δύναται νὰ κάμῃ ὁ διδάσκων κατὰ τὴν ἐπανάληψιν.

Ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν ἑνὸς τετραγώνου, ἡ κατασκευή του τελεῖται εὐκόλως. Ἐὰν γνωρίζωμεν μίαν διαγώνιον ΒΓ (σχ. 44), φέρομεν κάθετον εἰς τὸ μέσον αὐτῆς καὶ λαμβάνομεν μήκη ΟΑ καὶ ΟΔ ἴσα μὲ ΟΒ· ἔπειτα ἄγομεν τὰς εὐθείας ΑΒ, ΒΔ, ΔΓ, ΓΑ. Ἀπὸ ἓν ὀρθογώνιον φύλλον χαρτίου ΑΒΓΔ (σχ. 45) δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν τετράγωνον ὡς ἑξῆς:



Σχ. 45,

διπλώνομεν αὐτὸ οὕτως, ὥστε ἡ ΒΓ νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΒΖ λαμβάνουσα τὴν διεύθυνσιν τῆς ΒΑ, εἶτα κόπτομεν τὸ περισσεῦον καὶ ξεδιπλώνομεν τὸ φύλλον.

Ἐπανάληψις δι' ἐρωτήσεων καὶ ἀσκήσεων.

Τί ὀνομάζεται πολύγωνον; Τί εἶνε διαγώνιος; Πῶς ὀνομάζονται τὰ πολύγωνα, ἃ ἔχουσι 3,4,5,6,8,10,11,12 πλευράς; Τί καλεῖται ὕψος καὶ βάσις ἑνὸς τριγώνου; Ποίαν ἰδιότητα ἔχουσιν αἱ 3 γωνίαι ἑνὸς τριγώνου; Ποῖον τρίγωνον καλεῖται ἰσοσκελὲς καὶ ποίας σπουδαίας ἰδιότητας ἔχει; Ποῖον τρίγωνον καλεῖται ἰσόπλευρον; ἔχει τὰς αὐτὰς ἰδιότητας μὲ τὸ ἰσοσκελές; Ποῖον τρίγωνον καλεῖται ὀρθογώνιον; Ποία πλευρὰ αὐτοῦ καλεῖται ὑποτείνουσα; Μὲ τί ἰσοῦται τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ὀξειῶν γωνιῶν ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου; Τί εἶνε ὁ γνώμων καὶ πῶς βεβαιούμεθα, ἂν εἶνε ἀκριβής; Πότε λέγομεν, ὅτι δύο τρίγωνα εἶνε ἴσα; Τίνες αἱ περιπτώσεις τῆς ἰσότητος δύο τριγώνων; Ποῖαι εὐθεῖαι λέγονται παράλληλοι καὶ ποῖαι εἶνε αἱ σπουδαιότεραι ἰδιότητες αὐτῶν; Τὸ ἄθροισμα τῶν 4 γωνιῶν παντὸς τετραπλεύρου μὲ πόσας ὀρθὰς ἰσοῦται; Ἐὰν ὅλαι αἱ γωνίαι ἑνὸς τετραπλεύρου εἶνε ἴσαι, πόσον θὰ εἶνε ἑκάστη; Ἐὰν αἱ 3 γωνίαι τετραπλεύρου εἶνε ὀρθαί, πόση θὰ εἶνε ἡ δ'; Τίνα εἶνε τὰ σπουδαιότερα ἐκ τῶν τετραπλεύρων καὶ τίνας ἰδιότητας ἔχουσιν; Ἐντὸς τῆς αἰθούσης ποῖα ὀρθογώνια βλέπεις ; Πῶς κατασκευάζομεν τετράγωνον ;

1. Ἑνὸς τριγώνου ἡ μία γωνία εἶνε $^3/_4$ ὀρθῆς, ἡ δὲ ἄλλη $^{13}/_{20}$· πόση εἶνε ἡ τρίτη ;

2. Ἑνὸς τριγώνου ἡ μία γωνία εἶνε ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων· ὁποίου εἴδους τρίγωνον εἶνε ;

3. Ὅταν ὁ γνώμων εἶνε ἰσοσκελής, πόσον εἶνε ἑκάστη τῶν ὀξειῶν γωνιῶν ;

4. Ἑκάστη γωνία ἰσοπλεύρου τριγώνου μὲ ποῖον κλάσμα τῆς ὀρθῆς ἰσοῦται ;

5. Κῆπος ἔχει σχῆμα τετραγώνου, οὗ ἡ πλευρὰ εἶνε 25 μ.· πόση εἶνε ἡ περίμετρος αὐτοῦ ;

6. Ἀγρὸς ἔχει σχῆμα τετραγώνου, οὗ ἡ περίμετρος εἶνε 3840 μ.· πόσον μῆκος ἔχει ἑκάστη πλευρά ;

7. Τριγώνου ἰσοσκελοῦς ἡ περίμετρος εἶνε 26 μ., ἡ βάσις 6 μ.· πόσον εἶνε ἑκάτερα τῶν ἄλλων πλευρῶν ;

8. Ἡ περίμετρος ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶνε 18 μ., 729· πόσον εἶνε ἑκάστη πλευρά ;

9. Πόση εἶνε ἡ περίμετρος ὀρθογωνίου ἔχοντος διαστάσεις 8 μ, 50 καὶ 4 μ., 60;

10. Κατασκεύασον ῥόμβον, οὗ αἱ διαγώνιοι νὰ ἔχωσι μήκη 33 γραμμῶν καὶ 40 γραμμῶν. Μέτρησον τὴν πλευράν.

11. Κατασκεύασον τετράγωνον μὲ πλευρὰν τριῶν δακτύλων καὶ μέτρησον τὴν διαγώνιον αὐτοῦ· εἶτα κατασκεύασον τετράγωνον μὲ πλευρὰν τὴν διαγώνιον τοῦ προηγουμένου τετραγώνου καὶ δεῖξον, ὅτι τὸ δεύτερον τετράγωνον εἶνε διπλάσιον τοῦ πρώτου.

Σημ. Περὶ τούτου βεβαιούμεθα, ἐὰν ἀποκόψωμεν τὸ μεγαλείτερον τετράγωνον καὶ τὸ διαιρέσωμεν εἶτα εἰς 4 τρίγωνα, κόπτοντες αὐτὸ διὰ ψαλίδος κατὰ τὰς διαγωνίους· παραθέτοντες ἀνὰ δύο τὰ 4 ταῦτα τρίγωνα λαμβάνομεν 2 τετράγωνα ἴσα πρὸς τὸ μικρόν.

ΠΕΡΙ ΚΥΚΛΟΥ

29. *Κύκλος* καλεῖται τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου τὸ περιοριζόμενον ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς, ἧς πάντα τὰ σημεῖα ἀπέχουσιν ἴσην ἀπόστασιν ἀπό τινος σημείου Κ τοῦ ἐπιπέδου (σχ. 46).

Τὸ σημεῖον τοῦτο καλεῖται *κέντρον* τοῦ κύκλου, ἡ ἀμετάβλητος ἀπόστασις εἶνε ἡ *ἀκτὶς* καὶ ἡ περιορίζουσα τὸν κύκλον γραμμὴ εἶνε ἡ *περιφέρεια* αὐτοῦ. Ἡ περιφέρεια δὲν εἶνε εὐθεῖα γραμμὴ οὔτε τεθλασμένη, διότι 3 σημεῖα εὐθείας δὲν εἶνε δυνατὸν νὰ ἀπέχωσιν ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ Κ (ἐδ. 14, 6'). Ἄρα ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου εἶνε *γραμμὴ καμπύλη*, χαρασσομένη ἐπὶ χαρτίου ἢ πίνακος διὰ *τοῦ διαβήτου*, ὅστις ἀποτελεῖται ἐκ δύο σκελῶν καταληγόντων εἰς αἰχμὰς λεπτοτάτας. Ἐὰν ἀνοίξωμεν τὸν διαβήτην καὶ στηρίξωμεν καλῶς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τὴν μίαν αἰχμήν, ἐπὶ δὲ τῆς ἄλλης προσδέσωμεν γραφίδα καὶ περιφέρωμεν αὐτήν, θὰ γράψῃ *περιφέρειαν*· ἡ κινητὴ αἰχμὴ πρέπει νὰ ἐπανέλθῃ ἀκριβῶς εἰς τὸ σημεῖον, ἐξ οὗ ἀνεχώρησε, τοῦθ' ὅπερ ἐπιτρέπει νὰ εἴπωμεν, ὅτι ἡ περιφέρεια εἶνε καμπύλη γραμμὴ κλειστή (1).

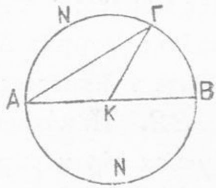
Σχ. 46.

Σημ. Οἱ κηπουροὶ διὰ νὰ χαράξωσι περιφέρειαν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους λαμβάνουσι σχοινίον, οὗ τὸ ἓν ἄκρον δένουσιν εἰς πάσσαλον ἐμπηγμένον εἰς τὸ κέντρον, καὶ περὶ αὐτὸν περι-

(1) Εἶνε ἡ ἁπλουστέρα καὶ σπουδαιοτέρα τῶν καμπύλων γραμμῶν· ἂς μὴ συγχέωμεν αὐτὴν μὲ τὸν κύκλον, ὅστις εἶνε ἐπιφάνεια, ἐνῷ αὕτη εἶνε γραμμή.

φέρουσι χονδρὸν καρφίον δεμένον εἰς τὸ ἄλλον ἄκρον τοῦ σχοινίου. Τὸ σχοινίον πρέπει κατὰ τὴν περιφορὰν νὰ εἶνε καλῶς τεταμένον. Τὴν αὐτὴν μέθοδον μεταχειρίζονται καὶ οἱ ξυλουργοί, προκειμένου νὰ χαράξωσι περιφέρειαν ἐπὶ σανίδος.

30. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ἀμέσως: *α') ὅτι πᾶσαι αἱ ἀκτῖνες ἑνὸς κύκλου, π.χ. αἱ ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ (σχ. 47) εἶνε ἴσαι.*



Σχ. 47.

β') Δύο κύκλοι ἔχοντες ἴσας ἀκτῖνας εἶνε ἴσοι καὶ αἱ περιφέρειαι αὐτῶν εἶνε ἴσαι.

Διάμετρος τοῦ κύκλου καλεῖται πᾶσα εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου καὶ περατουμένη ἑκατέρωθεν εἰς τὴν περιφέρειαν· π. χ. ἡ ΑΚΒ (σχ. 47).

α') Ἡ διάμετρος εἶνε ἄθροισμα δύο ἀκτίνων, ἤτοι διπλασία τῆς ἀκτῖνος.

β') Πᾶσαι αἱ διάμετροι ἑνὸς κύκλου εἶνε ἴσαι.

γ') Ἡ διάμετρος χωρίζει τὴν περιφέρειαν εἰς δύο ἴσα μέρη (ἡμιπεριφερείας) καὶ τὸν κύκλον εἰς δύο ἴσα μέρη (ἡμικύκλια).

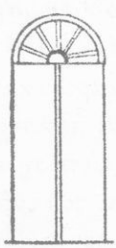
Περὶ τούτου πειθόμεθα, ἐὰν θλάσωμεν κύκλον ἐκ χάρτου κατὰ μίαν διάμετρον ΑΚΒ (σχ. 47) εἰς δύο τεμάχια καὶ περιστρέψωμεν τὸ ἓν περὶ τὴν διάμετρον ταύτην, μέχρις οὗ πέσῃ εἰς τὸ ἄλλο· τότε τὸ τόξον ΑΜΓΒ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΝΒ· ὅταν δ' ἐφαρμόσωσι τὰ τόξα, θὰ ἐφαρμόσωσι καὶ τὰ τεμάχια τοῦ κύκλου.

31. Τόξον, χορδή.—Μέρος οἱονδήποτε τῆς περιφερείας καλεῖται *τόξον*, καὶ ἡ εὐθεῖα ἡ συνδέουσα τὰ ἄκρα τοῦ τόξου καλεῖται *χορδὴ* αὐτοῦ· π. χ. τὸ τόξον ΑΜΓ ἔχει χορδὴν τὴν εὐθεῖαν ΑΓ (σχ. 47). Τὸ μέρος τοῦ κύκλου τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τόξου καὶ τῆς χορδῆς του ὀνομάζεται *τμῆμα κύκλου*· π.χ. τὸ ΑΓΜΑ (σχ. 47). Ὅταν δύο τόξα εἶνε τῆς αὐτῆς περιφερείας ἢ ἴσων περιφερειῶν, δυνάμεθα νὰ τὰ συγκρίνωμεν (δηλ. νὰ ἴδωμεν, ἂν εἶνε *ἴσα ἢ ἄνισα*) διὰ τῆς ἐπιθέσεως. Πᾶσα χορδὴ μὴ διὰ τοῦ κέντρου διερχομένη εἶνε μικροτέρα τῆς διαμέτρου· π. χ. ἡ χορδὴ ΑΓ εἶνε μικροτέρα τῆς τεθλασμένης γραμμῆς ΑΚΓ, ἥτις ἀποτελεῖ δύο ἀκτῖνας (σχ. 47). Ὥστε ἡ διάμετρος εἶνε ἡ μεγαλειτέρα χορδὴ τοῦ κύκλου.

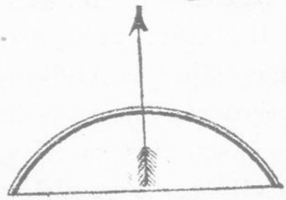
32. Ἐν κύκλῳ καλεῖται *ἐπίκεντρος γωνία* πᾶσα γωνία ἔχουσα τὴν κορυφήν της εἰς τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, ὡς ἡ ΑΚΓ (σχ. 47), εἰς ἣν ἀντιστοιχεῖ τὸ τόξον ΑΜΓ.

Τὸ μέρος τοῦ κύκλου τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τόξου ΑΜΓ καὶ δύο ἀκτίνων ΚΑ, ΚΓ λέγεται *τομεύς*.

Παραδείγματα. Ἡ περιφέρεια εἶνε ἓν σχῆμα, ὅπερ συχνότατα εὑρίσκομεν εἰς τὰ πλέον συνήθη ἀντικείμενα. Οὕτως οἱ τροχοὶ τῶν ἁμαξῶν, τὰ στεφάνια τῶν βαρελίων τελειώνουσιν εἰς περιφέρειαν· ἐπίσης τὰ μεταλλικὰ νομίσματα, τὰ πινάκια, αἱ πλάκες τῶν ὡρολογίων, τὰ ἱπποδρόμια, τὰ ἁλώνια ἔχουσι σχῆμα κυκλικόν.



Σχ. 50.



Σχ. 51.

Οἱ θόλοι (αἱ καμάραι) καί τινες θύραι καὶ παράθυρα τελειώνουσιν εἰς ἡμιπεριφέρειαν (σχ. 50). Τὸ ὅπλον, ὅπερ μετεχειρίζοντο τὸ πάλαι οἱ τοξόται, ἵνα ῥίπτωσι βέλη, εἶχε σχῆμα τόξου (σχ. 51) μετὰ χορδῆς.

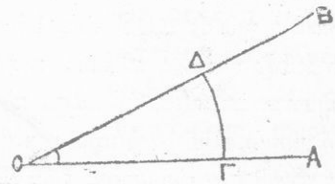
33. Μέτρησις τῶν γωνιῶν. — Αἱ γωνίαι εἶνε μεγέθη δυνάμενα νὰ μετρηθῶσιν· ἐν ἐδ. 15 ἐλάβομεν ὡς μονάδα μετρήσεως αὐτῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν· ἀλλ' ἐν τῇ πράξει δὲν εἶνε εὔκολον νὰ εὕρωμεν, μὲ ποῖον κλάσμα τῆς ὀρθῆς ἰσοῦται μία γωνία καὶ μάλιστα, ὅταν εἶνε πολὺ μικρά. Διὰ τοῦτο ἀνάγομεν τὴν μέτρησιν γωνίας εἰς μέτρησιν τόξου, ἥτις εἶνε εὐκολωτέρα. Ἡ ἀντικατάστασις τῆς μιᾶς μετρήσεως ὑπὸ τῆς ἄλλης δικαιολογεῖται διὰ τῶν ἑξῆς ἀληθειῶν :

Ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ ἢ εἰς ἴσους κύκλους

α') *Δύο ἐπίκεντροι γωνίαι ἴσαι ἔχουσιν ἀντίστοιχα τόξα ἴσα, καὶ ἀντιστρέφως εἰς ἴσα τόξα ἀντιστοιχοῦσιν ἐπίκεντροι γωνίαι ἴσαι.*

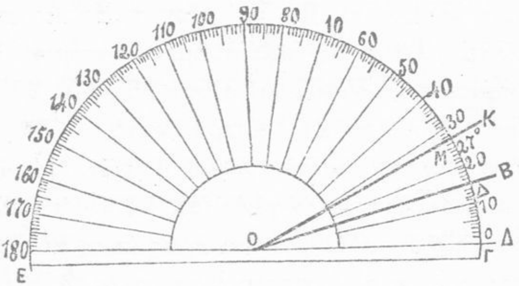
β') *Αἱ ἐπίκεντροι γωνίαι εἶνε ἀνάλογοι τῶν ἀντιστοίχων τόξων.*

γ') Ἐντεῦθεν ἕπεται, ὅτι, ἐὰν λάβωμεν ὡς μονάδα μετρήσεως τῶν τόξων τὸ τόξον τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς ἐπικέντρου γωνίας, ἥτις ἐλήφθη ὡς μονάς, τότε *πᾶσα γωνία, ἀφοῦ γίνῃ ἐπίκεντρος, παρίσταται ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ὑφ' οὗ καὶ τὸ τόξον τὸ μεταξὺ τῶν πλευρῶν της περιεχόμενον.* Λοιπὸν ἀντὶ νὰ μετρήσωμεν τὴν γωνίαν ΑΟΒ (σχ.



Σχ. 48.

48), μετροῦμεν τὸ τόξον ΓΔ· πρὸς τοῦτο κατασκευάζουσιν ἓν ἡμικύκλιον ἐκ κέρατος διαφανοῦς ἢ ἐκ χαλκοῦ, τοῦ ὁποίου τὴν ἡμιπεριφέρειαν διαιροῦσιν εἰς 180 μέρη, τὰ ὁποῖα καλοῦνται *μοῖραι* (ὅλη ἡ περιφέρεια περιέχει 360 μοίρας). Τὸ κέντρον τοῦ ἡμικυκλίου σημειοῦται διὰ μικρᾶς ὀπῆς. Τὸ οὕτως ἑτοιμασθὲν ἡμικύκλιον ὀνομάζεται *μοιρογνωμόνιον* (σχ. 49).



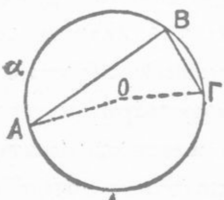
Σχ. 49.

Ἵνα μετρήσωμεν διὰ τοῦ μοιρογνωμονίου τὴν γωνίαν ΑΟΒ, θέτομεν τὸ κέντρον αὐτοῦ εἰς τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας καὶ τὴν διάμετρον ΕΓ ἐπὶ μιᾶς πλευρᾶς ΟΑ· τότε ἡ ἄλλη πλευρὰ τῆς γωνίας, ΟΒ, θὰ συναντᾷ τὴν ἡμιπεριφέρειαν εἴς τι σημεῖον Δ· ὁ ἀριθμός, ὁ εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο γεγραμμένος, δεικνύει, πόσων μοιρῶν εἶνε τὸ τόξον ΓΔ τὸ μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας περιεχόμενον· ἐὰν τὸ τόξον ΓΔ εἶνε 15 μοιρῶν, λέγομεν, ὅτι καὶ ἡ γωνία ΑΟΒ εἶνε 15 μοιρῶν. Ἐὰν ἡ δοθεῖσα γωνία εἶνε ὀρθή, ἡ ἄλλη πλευρὰ τῆς ΟΒ θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ μέσου τῆς ἡμιπεριφερείας, δηλ. ἀπὸ τὴν 90ὴν μοίραν· ἑπομένως *μία ὀρθὴ γωνία εἶνε 90 μοιρῶν*, καὶ ἀντιστρόφως: *γωνία μιᾶς μοίρας εἶνε τὸ 90ὸν μέρος τῆς ὀρθῆς*. Τὰς μοίρας παριστῶμεν συντόμως δι' ἑνὸς μικροῦ μηδενικοῦ τιθεμένου δεξιὰ καὶ ἄνω τοῦ ἀριθμοῦ· οὕτω 15 μοῖραι, 90 μοῖραι, γράφονται 15^0, 90^0.

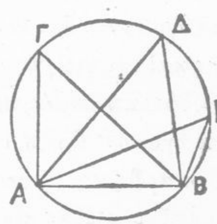
Ἐὰν τὸ σημεῖον Δ, εἰς ὃ ἡ πλευρὰ ΟΒ συναντᾷ τὴν ἡμιπεριφέρειαν, πίπτῃ μεταξὺ τῆς 15ης καὶ 16ης μοίρας, τότε ἡ γωνία ΑΟΒ θὰ ἰσοῦται μὲ 15° καὶ μὲ κλάσμα τι τῆς μοίρας. Τοιαῦται ἀκριβεῖς μετρήσεις γωνιῶν γίνονται εἰς τὴν ἀστρονομίαν, πρὸς ἀποφυγὴν δὲ τῶν κλασμάτων τῆς μοίρας διαιροῦσιν ἑκάστην μοῖραν εἰς 60 ἴσα, τὰ ὁποῖα καλοῦνται *λεπτά*, καὶ ἕκαστον λεπτὸν εἰς 60 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα καλοῦνται *δεύτερα λεπτά*. Τὰ λεπτὰ παριστῶμεν συντόμως διὰ μιᾶς ὀξείας, τὰ δεύτερα διὰ δύο ὀξειῶν. Οὕτω 15°, 35′, 27″ σημαίνει 15 μοίρας, 35 λεπτά, 27 δεύτερα λεπτά.

Σημ. Δύο τόξα τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ μοιρῶν, λεπτῶν πρώτων καὶ δευτέρων δὲν εἶνε ἐν γένει ἴσα· ἵνα ὦσιν ἴσα, πρέπει νὰ ἀνήκωσιν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους· ἀλλ' αἱ ἐπίκεντροι γωνίαι αἱ ἀντιστοιχοῦσαι πρὸς τὰ τόξα ταῦτα εἶνε πάντοτε ἴσαι.

34. Γωνία ἐγγεγραμμένη εἰς κύκλον λέγεται πᾶσα γωνία σχηματιζομένη ὑπὸ δύο χορδῶν συναντωμένων ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας· π.χ. ἡ γωνία ΑΒΓ (σχ. 49α).



Σχ. 49α.



Σχ. 50α.

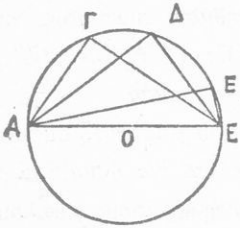
Εἰς ἑκάστην ἐγγεγραμμένην γωνίαν ΑΒΓ ἀντιστοιχεῖ καὶ μία ἐπίκεντρος γωνία ΑΟΓ, ἔχουσι δὲ ἀμφότεραι βάσιν τὸ αὐτὸ τόξον ΑΔΓ.

Πᾶσα ἐγγεγραμμένη γωνία εἶνε τὸ $^1/_2$ ***τῆς ἀντιστοίχου ἐπικέντρου***· περὶ τῆς ἀληθείας ταύτης βεβαιούμεθα διὰ τοῦ μοιρογνωμονίου. Ἐκ ταύτης πορίζόμεθα τὰ ἑξῆς:

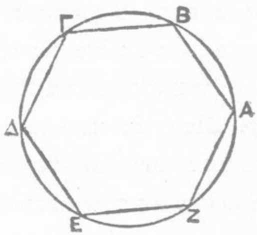
α′) Πᾶσαι αἱ ἐγγεγραμμέναι γωνίαι, αἱ βαίνουσαι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου, εἶνε ἴσαι· π. χ. αἱ ΑΓΒ, ΑΔΒ, ΑΕΒ (σχ. 50α).

β') Πᾶσαι αἱ εἰς ἡμικύκλιον ἐγγεγραμμέναι γωνίαι εἶνε ὀρθαί· π. χ. αἱ γωνίαι ΑΓΒ, ΑΔΒ, ΑΕΒ (σχ. 51α).

35. Πολύγωνα ἐγγεγραμμένα καὶ κανονικά.— Πολύγωνον λέγομεν, ὅτι εἶνε *ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον*, ὅταν



Σχ. 51α.



Σχ. 52.

ὅλαι αἱ κορυφαί του κεῖνται ἐπὶ τῆς περιφερείας, αἱ δὲ πλευραί του εἶνε χορδαὶ τοῦ κύκλου· π.χ. τὸ ΑΒΓΔΕΖ (σχ. 52). Πολύγωνον λέγεται *κανονικόν*, ὅταν ἔχῃ τὰς πλευράς του ἴσας καὶ τὰς γωνίας του ἴσας· ἐν τοῖς προηγουμένοις ἐγνωρίσαμεν δύο κανονικὰ πολύγωνα: τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον καὶ τὸ τετράγωνον· ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιον δὲν εἶνε κανονικόν· (διατί;) Ἡ ὕπαρξις καὶ ἡ κατασκευὴ κανονικῶν πολυγώνων στηρίζεται ἐπὶ τῆς ἑξῆς ἀληθείας:

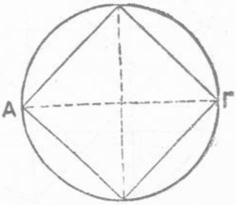
Ἐαν περιφέρεια διαιρεθῇ εἰς ὁσαδήποτε μέρη ἴσα, αἱ χορδαί, αἱ συνδέουσαι διαδοχικῶς τὰ σημεῖα διαιρέσεως, ἀποτελοῦσι πολύγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον, ὅπερ εἶνε κανονικόν (1).

Παραδείγματα: α') Ἵνα κατασκευάσωμεν *τετράγωνον ἐγγεγραμμένον* εἰς δοθέντα κύκλον Κ, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν

(1) Διότι ἔχει τὰς πλευράς του ἴσας, ὡς χορδὰς ἴσων τόξων, καὶ τὰς γωνίας του ἴσας, ὡς ἐγγεγραμμένας βαινούσας ἐπὶ ἴσων τόξων.

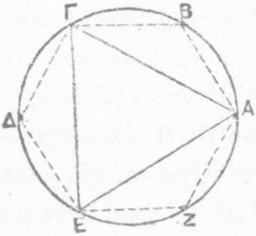
τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ εἰς 4 ἴσα τόξα· πρὸς τοῦτο φέρομεν δύο διαμέτρους καθέτους, ΑΓ. ΒΔ (σχ. 53), ἔπειτα τὰς 4 χορδὰς τὰς συνδεούσας τὰ ἄκρα των.

β') Ἐὰν ἕκαστον τῶν ἴσων τόξων ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ διαιρέσωμεν εἰς δύο ἴσα μέρη καὶ φέρωμεν τὰς χορδάς, ἔχομεν *κανονικὸν ὀκτάγωνον.*

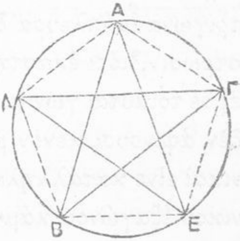


Σχ. 53.

γ') Ἵνα διαιρέσωμεν μίαν περιφέρειαν εἰς 6 ἴσα μέρη, δίδομεν εἰς τὸν διαβήτην ἄνοιγμα ἴσον μὲ τὴν ἀκτῖνα τῆς περιφερείας καὶ ἀρχίζοντες ἀπό τινος σημείου Α (σχ. 52) φέρομεν ἓξ χορδὰς διαδοχικὰς ἴσας μὲ τὴν ἀκτινα, ὁπότε βλέπομεν, ὅτι τὸ ἄκρον τῆς 6ης χορδῆς πίπτει ἀκριβῶς εἰς τὸ σημεῖον Α. Ἔχομεν οὕτω τὸ ἐγγεγραμμένον *κανονικὸν ἑξάγωνον.* Ἐὰν ἑνώσωμεν τὰς κορυφὰς Α, Γ καὶ Ε τοῦ ἑξαγώνου, λαμβάνομεν *ἰσόπλευρον τρίγωνον* ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον (σχ. 54). Ἐὰν ἕκαστον τῶν ἴσων τόξων ΑΒ, ΒΓ κ.τ.λ. διαιρέσωμεν εἰς δύο ἴσα μέρη καὶ φέρωμεν τὰς χορδάς, θὰ ἔχωμεν *κανονικὸν δωδεκάγωνον* ἐγγεγραμμένον.

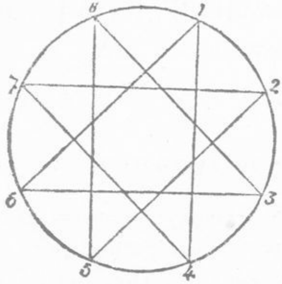


Σχ. 54.



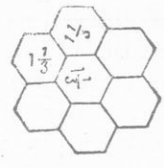
Σχ. 55.

36. *Πολύγωνα ἀστεροειδῆ.* — Ἐὰν διαιρέσωμεν μίαν περιφέρειαν εἰς 5 ἴσα μέρη καὶ συνδέσωμεν τὰ σημεῖα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ (σχ. 55), ἔχομεν *κανονικὸν πεντάγωνον ἀστεροειδὲς* ΑΒΓΔΕ, ἐνῷ συνδέοντες τὰ σημεῖα ταῦτα διαδοχικῶς ἔχομεν τὸ κανονικὸν πεντάγωνον ΑΔΒΕΓ. Ἵνα κατασκευάσωμεν *ὀκτάγωνον ἀστεροειδὲς* διαιροῦμεν τὴν περιφέρειαν εἰς 8 ἴσα μέρη καὶ συνδέομεν τὰ σημεῖα 1· 4, 2· 5, 3· 6, 4· 7, 5· 8, 6· 1, 7· 2, 8· 3 (σχ. 56).



Σχ. 56.

37. Ἐφαρμογαί.—Αἱ πλάκες, τῶν ὁποίων γίνεται συχνὴ χρῆσις εἰς ἐπίστρωσιν αἰθουσῶν, διαδρόμων, αὐλῶν, κ.τ.λ., ἔχουσι σχῆμα κανονικῶν πολυγώνων. Πρέπει ὅμως νὰ γνωρίζωμεν, ποῖα κανονικὰ πολύγωνα παρατιθέμενα οὕτως, ὥστε μία γωνία τοῦ ἑνὸς νὰ εἶνε ἐφεξῆς γωνίας τινὸς τοῦ ἄλλου, δὲν ἀφίνουσι κενὸν μέρος μεταξύ των· δηλ. ἡ γωνία τῶν τοιούτων κανονικῶν πολυγώνων πρέπει νὰ εἶνε τοιαύτη ὥστε πολλαπλάσιόν τι αὐτῆς νὰ ἀποτελῇ 4 ὀρθὰς ἢ 360°, διότι τὸ ἄθροισμα τῶν σχηματιζομένων γωνιῶν πέριξ ἑνὸς σημείου, ὅταν ἐξ αὐτοῦ ἀχθῶσιν εὐθεῖαι, εἶνε 4 ὀρθαί· π. χ. τρίγωνα ἰσόπλευρα δυνάμεθα νὰ μεταχειρισθῶμεν εἰς πλακόστρωσιν, διότι ἑκάστη γωνία τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶνε 60°, ἓξ δὲ τοιαῦται γωνίαι τοποθετούμεναι περὶ μίαν κοινὴν κορυφήν, δὲν ἀφίνουσι κενὸν μέρος ($6 \times 60^\circ = 360^\circ$). Πλάκες ἑξαγωνικαὶ εἶνε κατάλληλοι πρὸς στρῶσιν, διότι ἓξ γωνίαι τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου κάμνουν 8 ὀρθ. ἢ 720° (ἐδ. 27), καὶ κάθε μία θὰ εἶνε $\frac{720^\circ}{6} = 120^\circ$. Ἐὰν λοιπὸν λάβωμεν 3 τοιαύτας πλάκας καὶ πλησιάσωμεν 3 γωνίας αὐτῶν περὶ μίαν κοινὴν κορυφὴν ἀποτελοῦσι 360°, ἤτοι δὲν ἀφίνουσι κενὸν μέρος (σχ. 57). Ἐνίοτε χωρίζουσιν ἕκαστον κανονικὸν ἑξάγωνον εἰς 3 ῥόμβους, οὓς βάφοντες μὲ διάφορα χρώματα, ἐξομοιώνουσι τὸ ὅλον μὲ κύβους (βλ. Παράρτ. σχ. 10). Συνήθως συνδυάζουσι πολύγωνα κανονικὰ δύο διαφόρων εἰδῶν· π. χ. ὀκτάγωνα καὶ τετράγωνα (βλ. Παράρτ. σχ. 11).



Σχ. 57.

Ἐπανάληψις δι' ἐρωτήσεων καὶ ἀσκήσεων.

Τί καλεῖται κύκλος καὶ τί περιφέρεια ; Πῶς χαράσσομεν μίαν περιφέρειαν ; Τί καλεῖται ἀκτίς, διάμετρος, τόξον, χορδή, τμῆμα, τομεύς ; Τίς ἡ μεγαλειτέρα χορδὴ ἑνὸς κύκλου ; Πῶς διαιρεῖ ἡ διάμετρος τὴν περιφέρειαν καὶ τὸν κύκλον ; Ποία γωνία καλεῖται ἐπίκεντρος καὶ τίνα σχέσιν ἔχει πρὸς τὸ ἀντίστοιχον τόξον ; Τί εἶνε τὸ μοιρογνωμόνιον ; Πῶς δι' αὐτοῦ μετροῦμεν μίαν γωνίαν ; Ποῖον μέρος τῆς περιφερείας εἶνε τὸ τόξον μιᾶς μοίρας; Ποία γωνία καλεῖται ἐγγεγραμμένη καὶ τίνα σχέσιν ἔχει πρὸς τὴν ἀντίστοιχον ἐπίκεντρον ; Πότε ἓν πολύγωνον λέγεται ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον; Ποία πολύγωνα λέγονται κανονικὰ καὶ πῶς ἐγγράφονται εἰς κύκλον ; Κατασκεύασον πολύγωνον ἀστεροειδές. Πλάκες τετραγωνικαὶ εἶνε κατάλληλοι πρὸς στρῶσιν ; καὶ διατί ; Πλάκες πενταγωνικαί ;

1. Πόσων μοιρῶν εἶνε τὸ τόξον, ὅπερ ἰσοῦται μὲ $^1/_3$ μιᾶς περιφερείας ; μὲ $^1/_6$; μὲ $^1/_{20}$; 2. Πόσαι μοῖραι περιέχονται εἰς τὰ $^3/_5$ μιᾶς περιφερείας ; 3. Πόσων μοιρῶν εἶνε ἡ γωνία, ἥτις ἰσοῦται πρὸς 1 $^2/_3$ ὀρθῆς ; 4. Μὲ πόσας ὀρθὰς ἰσοῦται ἡ γωνία 125° 45′ ; 5. Ἐκ τῶν 4 γωνιῶν, ἃς σχηματίζουσι δύο εὐθεῖαι διασταυρούμεναι, ἡ μία εἶνε 45°· πόσον εἶνε ἑκάστη τῶν λοιπῶν; Μὲ ἓν φύλλον χαρτίου πῶς δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν γωνίαν 45° ; 6. Ἑνὸς τριγώνου ἡ μία γωνία εἶνε 63°, 48′, 25″, ἡ δ' ἄλλη 36°, 19′· πόσον εἶνε ἡ τρίτη ; 7. Εἰς τρίγωνον ἰσοσκελὲς ἡ γωνία τῆς κορυφῆς εἶνε 50°· πόσον εἶνε ἑκατέρα τῶν δύο ἄλλων ; 8. Εἰς τρίγωνον ἰσοσκελὲς μία τῶν παρὰ τὴν βάσιν γωνιῶν εἶνε 18°· πόση εἶνε ἡ γωνία τῆς κορυφῆς ; 9. Πόση εἶνε ἡ περίμετρος ἑξαγώνου κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἀκτῖνος 4 μ. 25;

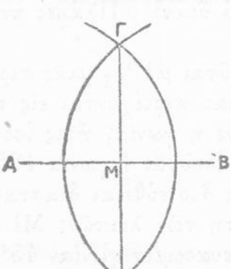
10. Ἐγγεγραμμένη τις γωνία εἶνε 39°· πόση εἶνε ἡ ἀντιστοιχοῦσα ἐπίκεντρος; Νὰ γίνῃ ἡ ἐπαλήθευσις διὰ τοῦ μοιρογνωμονίου. 11. Αἱ δύο πλευραὶ ἐγγεγραμμένης γωνίας, ὡς χορδαί, ἀντιστοιχοῦσιν εἰς τόξα 40°, 30′ ἡ μία, 30°, 40′ ἡ ἄλλη· πόσων μοιρῶν εἶνε αὕτη; 12. Τετραπλεύρου τινὸς ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἡ μία γωνία εἶνε 38°, 25′· πόση εἶνε ἡ ἀπέναντι αὐτῆς γωνία;

ΛΥΣΙΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ
ΔΙΑ ΤΟΥ ΚΑΝΟΝΟΣ, ΤΟΥ ΓΝΩΜΟΝΟΣ, ΤΟΥ ΔΙΑΒΗΤΟΥ
ΚΑΙ ΤΟΥ ΜΟΙΡΟΓΝΩΜΟΝΙΟΥ

38. Πρόβλημα λέγεται πρότασις, ἐν ᾗ ζητεῖται νὰ γίνῃ τι ἐξαρτώμενον ἐξ ἄλλων δεδομένων· ὁ προσδιορισμὸς τῶν ζητουμένων τοῦ προβλήματος λέγεται *λύσις* αὐτοῦ.

I. Εὑρεῖν τὴν ἐλαχίστην γραμμήν, ἥτις ἄγεται ἐκ δοθέντος σημείου εἰς δοθεῖσαν εὐθεῖαν.

Ἡ λύσις τοῦ προβλήματος τούτου εἶνε ἄμεσος ἐφαρμογὴ τῆς α′ ἰδιότητος τοῦ ἐδ. 14.

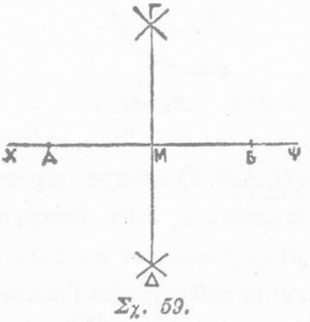


Σχ. 58.

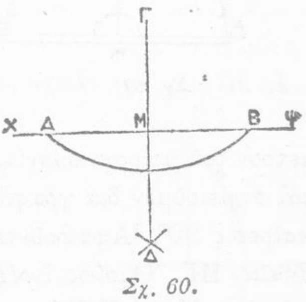
II. Δοθείσης εὐθείας ΑΒ (σχ. 58) νὰ εὕρωμεν τὸ μέσον αὐτῆς καὶ ἐκ τοῦ μέσου νὰ φέρωμεν τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ. Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου μᾶς χρειάζεται *κανὼν καὶ διαβήτης*. Μὲ κέντρον τὸ ἓν ἄκρον Α καὶ μὲ ἄνοιγμα τοῦ διαβήτου (ἀκτῖνα) μεγαλείτερον τοῦ ἡμίσεος τῆς ΑΒ, γράφομεν τόξον κύκλου ἀπὸ τὰ δύο μέρη τῆς ΑΒ·

μὲ κέντρον τὸ ἄλλο ἄκρον Β καὶ μὲ τὸ αὐτὸ ἄνοιγμα τοῦ διαβήτου γράφομεν ἄλλο τόξον κόπτον τὸ πρῶτον εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ· ἡ εὐθεῖα ΓΔ εἶνε ἡ ζητουμένη κάθετος καὶ Μ τὸ μέσον τῆς ΑΒ. Ἡ κατασκευὴ αὕτη στηρίζεται ἐπὶ τῆς γ΄ ἰδιότητος τοῦ ἐδ. 14. Ἐπειδὴ ΓΑ=ΓΒ καὶ ΔΑ=ΔΒ, ἕπεται, ὅτι τὰ σημεῖα Γ, Δ κεῖνται ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ· ἀλλ᾽ ἐξ ἑνὸς σημείου Γ εἰς ἄλλο Δ μίαν μόνον εὐθεῖαν δυνάμεθα νὰ φέρωμεν (ἐδ. 5)· ἄρα ἡ ΓΔ εἶνε κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ.

III. *Ἐκ τινος σημείου νὰ φέρωμεν κάθετον ἐπὶ δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΧΨ.* Ἐὰν μὲν τὸ σημεῖον κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΧΨ, ὡς τὸ Μ (σχ. 59), λαμβάνομεν ἐπ᾽ αὐτῆς ἑκατέρωθεν τοῦ Μ δύο μήκη ἴσα, ΜΑ καὶ ΜΒ· οὕτω φθάνομεν εἰς τὸ προη-



Σχ. 59.



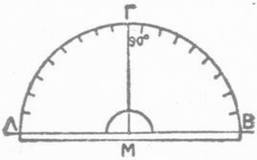
Σχ. 60.

γούμενον πρόβλημα, διότι Μ εἶνε τὸ μέσον τῆς ΑΒ. Ἐὰν δὲ τὸ σημεῖον κεῖται ἐκτὸς τῆς εὐθείας ΧΨ, ὡς τὸ Γ (σχ. 60), μὲ κέντρον τὸ Γ καὶ ἀκτῖνα μεγαλειτέραν τῆς ἀποστάσεως τοῦ Γ ἀπὸ τῆς εὐθείας ΧΨ, γράφομεν τόξον, ὅπερ τέμνει τὴν ΧΨ εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Ἐκ τῶν σημείων τούτων, ὡς κέντρων, γράφομεν δύο τόξα (μὲ τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα, μεγαλειτέραν τοῦ

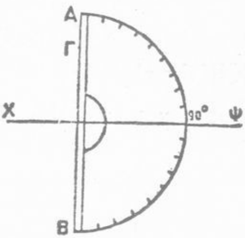
$^1/_2$ τῆς ΑΒ) τεμνόμενα εἰς τὸ Δ, ἡ εὐθεῖα ΓΔ εἶνε ἡ ζητουμένη κάθετος· ἡ κατασκευὴ ἐξηγεῖται ὡς εἰς τὸ πρόβλ. II.

Σημ. Τὸ πρόβλ. III λύεται πρακτικῶς 1ον διὰ τοῦ γνώμονος (ἐδ. 22). Ἐφαρμόζομεν μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν του ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας· εἶτα μετακινοῦμεν τὸν γνώμονα, μέχρις οὗ ἡ ἄλλη κάθετος πλευρὰ αὐτοῦ διέλθῃ διὰ τοῦ δοθέντος σημείου.

2ον Διὰ τοῦ μοιρογνωμονίου. Π.χ. ἵνα φέρωμεν ἐκ τοῦ Μ τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ (σχ. 61), θέτομεν τὴν διά-



Σχ. 61.

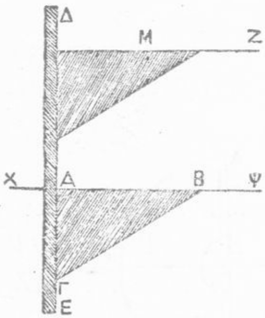


Σχ. 62.

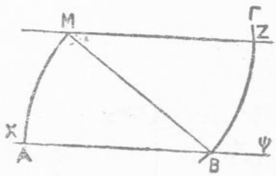
μετρον τοῦ μοιρογνωμονίου ἐπὶ τῆς ΑΒ, τὸ κέντρον εἰς τὸ Μ καὶ σημειοῦμεν διὰ γραφίδος τὸ σημεῖον Γ, ἔνθα ὑπάρχει ἡ διαίρεσις 90°. Ἀφαιροῦντες τὸ μοιρογνωμόνιον σύρομεν τὴν εὐθεῖαν ΜΓ. Ὁμοίως, ἵνα φέρωμεν ἐκ τοῦ σημείου Γ κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΧΨ (σχ. 62), θέτομεν ἐπὶ τῆς ΧΨ τὸ κέντρον τοῦ μοιρογνωμονίου καὶ τὴν διαίρεσιν 90°· ἔπειτα σύρομεν τὸ μοιρογνωμόνιον, μέχρις οὗ ἡ διάμετρος αὐτοῦ ΑΒ διέλθῃ διὰ τοῦ σημείου Γ.

IV. *Ἐκ τινος σημείου Μ νὰ σύρωμεν παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΧΨ.*

1ον *Διὰ τοῦ γνώμονος καὶ τοῦ κανόνος.* Τοποθετοῦμεν μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν ΑΒ τοῦ γνώμονος κατὰ μῆκος τῆς εὐθείας ΧΨ (σχ. 63). Ἐφαρμόζομεν ἕνα κανόνα ἐπὶ τῆς ἄλλης πλευρᾶς ΑΓ καί, διατηροῦντες ἀκίνητον τὸν κανόνα, μετακινοῦμεν τὸν γνώμονα, μέχρις οὗ ἡ πλευρὰ ΑΒ περάσῃ ἀπὸ τὸ σημεῖον Μ, ὁπότε σύρομεν τὴν ΜΖ, ἥτις εἶνε ἡ ζητου-



Σχ. 63.



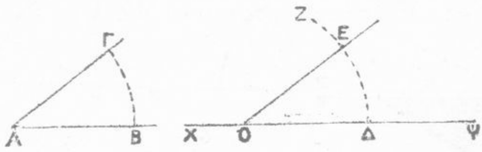
Σχ. 64.

μένη παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ, διότι ἀμφότεραι εἶνε κάθετοι πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΔΕ (ἐδ. 26 γ′).

2ον *Διὰ τοῦ διαβήτου.* Μὲ κέντρον τὸ δοθὲν σημεῖον Μ καὶ ἀκτῖνα ΜΒ (σχ. 64) γράφομεν ἓν τόξον ΒΓ, ὅπερ τέμνει τὴν ΧΨ εἰς τὸ σημεῖον Β. Μὲ κέντρον τὸ Β καὶ ἀκτῖνα τὴν ἰδίαν γράφομεν τὸ τόξον ΜΑ, ὅπερ τέμνει τὴν ΧΨ εἰς τὸ σημεῖον Α. Μὲ τὸν διαβήτην λαμβάνομεν ἐπὶ τοῦ τόξου ΒΓ τὸ τμῆμα ΒΖ ἴσον τῷ ΑΜ. Ἡ εὐθεῖα ΜΖ εἶνε ἡ ζητουμένη παράλληλος. Διότι αἱ δύο ἐπίκεντροι γωνίαι ΑΒΜ, ΒΜΖ εἶνε ἴσαι ὡς βαίνουσαι ἐπὶ ἴσων τόξων (ἐδ. 33 α′) καὶ κατὰ τὴν β′ ἰδιότητα τῶν παραλλήλων (ἐδ. 26) ἕπεται, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΜΖ, ΧΨ εἶνε παράλληλοι.

V. ***Νὰ κατασκευάσωμεν γωνίαν ἴσην μὲ δοθεῖσαν γωνίαν.***

1ον *Διὰ τοῦ διαβήτου*. Δίδεται ἡ γωνία Α, μία εὐθεῖα ΧΨ καὶ τὸ σημεῖον Ο ἐπ' αὐτῆς· θέλομεν νὰ φέρωμεν δευτέραν εὐθεῖαν, ἥτις μὲ τὴν ΟΨ νὰ σχηματίζῃ γωνίαν ἴσην μὲ τὴν γωνίαν Α (σχ. 65). Πρὸς τοῦτο μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Α



Σχ. 65.

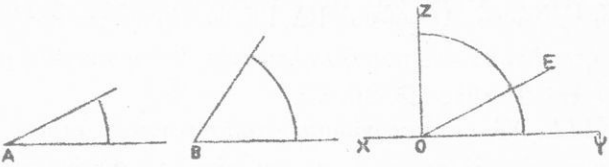
καὶ μὲ ἀκτῖνα οἱανδήποτε γράφομεν τόξον, ὅπερ κόπτει τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ· μὲ τὴν ἰδίαν ἀκτῖνα καὶ μὲ κέντρον τὸ Ο γράφομεν δεύτερον τόξον ΔΖ, ἐπὶ τοῦ ὁποίου λαμβάνομεν μὲ τὸν διαβήτην τὸ τμῆμα ΔΕ ἴσον μὲ τὸ ΒΓ. Ἑνώνομεν τὸ Ο μὲ τὸ Ε καὶ ἡ γωνία ΔΟΕ εἶνε ἴση μὲ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν Α (ἐδ. 33 α').

2ον *Διὰ τοῦ μοιρογνωμονίου*. Μετροῦμεν τὴν γωνίαν Α, (καθὼς εἴπομεν εἰς τὸ ἐδ. 33) καὶ ἔστω 27°. Ἔπειτα θέτομεν τὸ κέντρον τοῦ μοιρογνωμονίου εἰς τὸ σημεῖον Ο, τὴν διάμετρον αὐτοῦ κατὰ μῆκος τῆς ΧΨ. Σημειοῦμεν διὰ γραφίδος τὸ σημεῖον Μ, ἔνθα ὑπάρχει ἡ διαίρεσις 27°. Ἀφαιροῦμεν τὸ μοιρογνωμόνιον καὶ σύρομεν τὴν εὐθεῖαν ΟΜΚ· ἡ σχηματιζομένη γωνία εἶναι ἴση μὲ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν Α (σχ. 49).

Σημ. Διὰ τοῦ β' τρόπου δὲν ἠμποροῦμεν νὰ κατασκευάσωμεν γωνίαν ἀκριβῶς ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν παρὰ μόνον μὲ προσέγγισιν μιᾶς ἢ ἡμισείας μοίρας, διότι ἡ πλευρὰ ΑΓ τῆς δοθείσης γωνίας δὲν διέρχεται πάντοτε ἀκριβῶς ἔκ τινος διαιρέσεως τοῦ μοιρογνωμονίου.

VI. Γνωρίζοντες δύο γωνίας ἑνὸς τριγώνου νὰ κατασκευάσωμεν τὴν τρίτην.

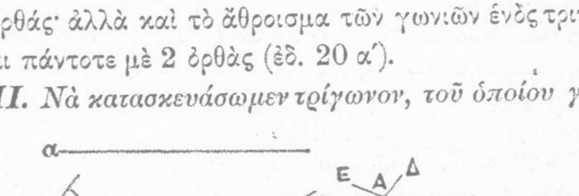
Ἔστωσαν Α καὶ Β αἱ δύο δοθεῖσαι γωνίαι (σχ. 66)· γρά-



Σχ. 66.

φομεν μίαν εὐθεῖαν ΧΨ καὶ κατασκευάζομεν εἰς τὸ σημεῖον Ο αὐτῆς τὴν γωνίαν ΨΟΕ ἴσην τῇ γωνίᾳ Α, καὶ τὴν γωνίαν ΕΟΖ ἴσην τῇ γωνίᾳ Β, ἤτοι προσθέτομεν τὰς δύο γωνίας Α καὶ Β (ἐδ. 12)· ἡ γωνία ΖΟΧ εἶνε ἡ τρίτη γωνία τοῦ τριγώνου. Διότι τὸ ἄθροισμα τῶν 3 γωνιῶν ΨΟΕ, ΕΟΖ, ΖΟΧ =2 ὀρθάς· ἀλλὰ καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου ἰσοῦται πάντοτε μὲ 2 ὀρθὰς (ἐδ. 20 α′).

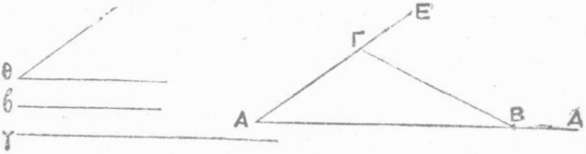
VII. Νὰ κατασκευάσωμεν τρίγωνον, τοῦ ὁποίου γνωρί-



Σχ. 67.

ζομεν μίαν πλευρὰν καὶ δύο γωνίας (σχ. 67). Διὰ νὰ λύηται τὸ πρόβλημα, πρέπει τὸ ἄθροισμα τῶν δοθεισῶν γωνιῶν θ καὶ η νὰ εἶναι μικρότερον ἀπὸ 2 ὀρθάς· ἂς ὑποθέσωμεν ἀκόμη, ὅτι αἱ κορυφαὶ τῶν δοθεισῶν γωνιῶν κεῖνται εἰς τὰ ἄκρα τῆς δοθείσης πλευρᾶς. Τούτου τεθέντος, σύρομεν μίαν εὐθεῖαν ΒΓ ἴσην τῇ α καὶ κατασκευάζομεν εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ γωνίας ἴσας μὲ τὰς δοθείσας. Τὸ σημεῖον Α, ὅπου τέμνονται αἱ εὐθεῖαι ΒΔ, ΓΕ, εἶνε ἡ τρίτη κορυφὴ τοῦ ζητουμένου τριγώνου. Αἱ εὐθεῖαι ΒΔ, ΓΕ θὰ τέμνωνται κατ᾽ ἀνάγκην (ἤτοι δὲν θὰ εἶνε παράλληλοι), διότι $\theta+\eta$ ὑπετέθη μικρότερον ἀπὸ 2 ὀρθὰς (ἐδ. 26, 6′).

VIII. *Νὰ κατασκευάσωμεν τρίγωνον, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν δύο πλευρὰς β, γ καὶ τὴν ὑπ᾽ αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ϑ* (σχ. 68).

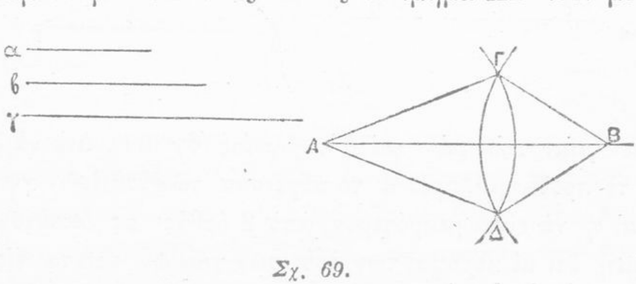


Σχ. 68.

Κατασκευάζομεν τὴν γωνίαν ΔΑΕ ἴσην μὲ τὴν θ καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ΑΔ μῆκος ΑΒ ἴσον μὲ τὴν γ, ἐπὶ δὲ τῆς ΑΕ τὸ μῆκος ΑΓ ἴσον μὲ τὴν 6. Σύρομεν τὴν ΒΓ καὶ ἔχομεν τὸ ζητούμενον τρίγωνον ΑΒΓ.

IX. *Νὰ κατασκευάσωμεν τρίγωνον, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὰς 3 πλευρὰς α, β, γ.*

Λαμβάνομεν ἐπί τινος εὐθείας τὸ τμῆμα ΑΒ ἴσον μὲ τὴ

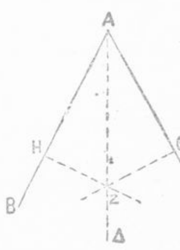


Σχ. 69.

γ (σχ. 69). Μὲ κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα τὴν 6 γράφομεν κύκλον, ἐπίσης μὲ κέντρον τὸ Β καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν α γράφομεν ἄλλον κύκλον τέμνοντα τὸν πρῶτον εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ. Σύροντες τὰς εὐθείας ΓΑ καὶ ΓΒ, καθὼς καὶ τὰς ΔΑ, ΔΒ, σχηματίζομεν δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΒΔ, τὰ ὁποῖα εἶνε ἴσα (ἐδ. 24, γ′).

Σημ. Ἡ κατασκευὴ τοῦ τριγώνου δὲν εἶνε πάντοτε δυνατή· τὰ μήκη τῶν εὐθειῶν α, β, γ δὲν πρέπει νὰ εἶνε οἷα δήποτε, ἀλλ' ἡ μεγαλειτέρα ἐξ αὐτῶν νὰ εἶνε μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων, κατὰ τὴν δευτέραν ἰδιότητα τοῦ τριγώνου.

Χ. *Νὰ χωρίσωμεν μίαν γωνίαν ΒΑΓ εἰς δύο ἄλλας γωνίας ἴσας*, δηλ. νὰ φέρωμεν μίαν εὐθεῖαν ΑΔ, ἥτις νὰ διαιρῇ τὴν γωνίαν εἰς δύο γωνίας ἴσας ΒΑΔ, ΓΑΔ (σχ. 70). Ἡ εὐθεῖα αὕτη ΑΔ ὀνομάζεται *διχοτόμος τῆς γωνίας.* Κόπτομεν ἐκ χαρτίου μίαν γωνίαν καὶ διπλώνομεν αὐτὴν οὕτως, ὥστε ἡ πλευρὰ ΑΒ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΑΓ, τότε ἡ θλάσις, ἥτις θὰ σχηματισθῇ, παριστᾷ τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας.



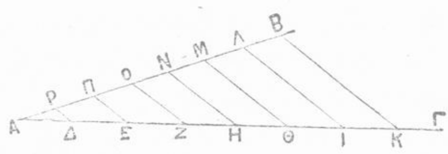
Σχ. 70.

1ον *Διὰ τοῦ μοιρογνωμονίου.* Ἀρκεῖ νὰ μετρήσωμεν τὴν δοθεῖσαν γωνίαν καὶ νὰ κατασκευάσωμεν γωνίαν ἴσην μὲ τὸν ἥμισυν ἀριθμὸν τῶν μοιρῶν, ἃς περιέχει ἡ δοθεῖσα γωνία. Ἀλλ' ὁ τρόπος οὗτος δὲν εἶνε πολὺ ἀκριβής, διότι ἡ γωνία μετρεῖται κατὰ προσέγγισιν.

2ον *Διὰ τοῦ γνώμονος.* Ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α λαμβάνομεν ἐπὶ τῶν πλευρῶν τῆς δοθείσης γωνίας τὰ τμήματα ΑΗ καὶ ΑΘ ἴσα, καὶ ἐκ τῶν σημείων Θ καὶ Η φέρομεν καθέτους ἐπὶ τὰς πλευράς, αἵτινες τέμνονται εἰς τὸ Ζ. Ἡ εὐθεῖα ΑΖ εἶνε ἡ ζητουμένη διχοτόμος. Αἱ γωνίαι ΒΑΔ καὶ ΓΑΔ εἶνε ἴσαι, διότι τὰ τρίγωνα ΗΑΖ,ΘΑΖ εἶνε ἴσα (ἐδ. 24,σημ. γ').

Ἰδιότης τῆς διχοτόμου.— Αἱ ἀποστάσεις παντὸς σημείου τῆς διχοτόμου ἀπὸ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας, ἤτοι αἱ κάθετοι ΖΗ καὶ ΖΘ, εἶνε ἴσαι (σχ. 70).

XI. *Νὰ διαιρέσωμεν δοθεῖσαν εὐθεῖαν εἰς ὁσαδήποτε ἴσα μέρη.* Ἔστω νὰ διαιρέσωμεν τὴν ΑΒ εἰς 7 ἴσα μέρη (σχ. 71). Διὰ τοῦ σημείου Α φέρομεν οἱανδήποτε εὐθεῖαν ΑΓ,

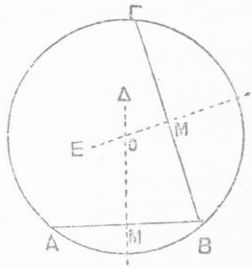


Σχ. 71.

ἐπὶ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν μὲ τὸν διαβήτην 7 μήκη ἴσα, ἀρχόμενα ἀπὸ τοῦ Α, τὰ ΑΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΙ, ΙΚ. Σύρομεν τὴν εὐθεῖαν ΚΒ καὶ ἐκ τῶν σημείον Ι, Θ, Η, Ζ, Ε, Δ ἄγομεν παραλλήλους πρὸς τὴν ΚΒ (εὐκόλως ἄγονται διὰ τοῦ γνώμονος), αἱ ὁποῖαι διαιροῦσι τὴν ΑΒ εἰς 7 μέρη ΒΛ, ΛΜ, ΜΝ, ΝΟ, ΟΠ, ΠΡ, ΡΑ, ἅτινα εἶνε ἴσα, ὡς εὐκόλως πειθόμεθα διὰ τοῦ διαβήτου.

XII. *Νὰ γράψωμεν τὴν περιφέρειαν τὴν διερχομένην διὰ τριῶν δοθέντων σημείων Α, Β καὶ Γ.*

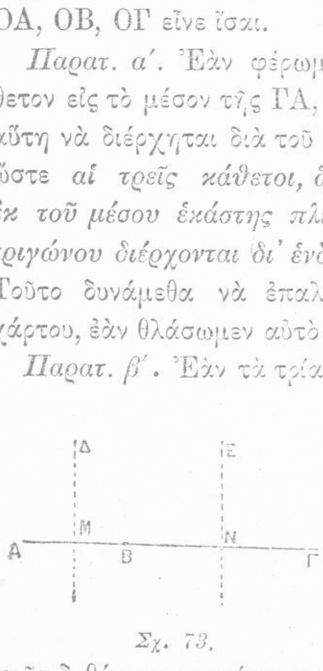
Πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ κέντρον· πρὸς τοῦτο φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΒΓ, εἶτα τὴν ΜΔ κάθετον εἰς τὸ μέσον Μ τῆς ΑΒ καὶ τὴν ΝΕ κάθετον εἰς τὸ μέσον Ν τῆς ΒΓ· αἱ δύο κάθετοι προεκτεινόμεναι θὰ τέμνωνται εἴς τι σημεῖον Ο, ὅπερ εἶνε τὸ ζητούμενον κέντρον. Ἐὰν μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα τὴν ΟΑ γράψωμεν περιφέρειαν, θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τῶν σημείων Β, Γ (σχ. 72). Διότι πᾶν σημεῖον τῆς καθέτου ΜΔ ἀπέχει ἴσον τῶν ἄκρων τῆς εὐθείας ΑΒ (ἐδ. 14, γ'), ἑπομένως ΟΑ = ΟΒ· ἐπίσης ΟΒ = ΟΓ· ὥστε αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ εἶνε ἴσαι.



Σχ. 72.

Παρατ. α'. Ἐὰν φέρωμεν τὴν κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς ΓΑ, ὀφείλει καὶ αὕτη νὰ διέρχηται διὰ τοῦ σημείου Ο· ὥστε *αἱ τρεῖς κάθετοι, ἃς φέρομεν ἐκ τοῦ μέσου ἑκάστης πλευρᾶς ἑνὸς τριγώνου διέρχονται δι' ἑνὸς σημείου.* Τοῦτο δυνάμεθα νὰ ἐπαληθεύσωμεν δι' ἑνὸς τριγώνου ἐκ χάρτου, ἐὰν θλάσωμεν αὐτὸ κατὰ τὰς τρεῖς ταύτας καθέτους.

Παρατ. β'. Ἐὰν τὰ τρία σημεῖα Α, Β, Γ ἔκειντο ἐπὶ μιᾶς εὐθείας, τότε αἱ ΜΔ, ΝΕ, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν, θὰ ἦσαν παράλληλοι καὶ δὲν θὰ ἐπροσδιορίζετο πλέον τὸ σημεῖον Ο (σχ. 73).



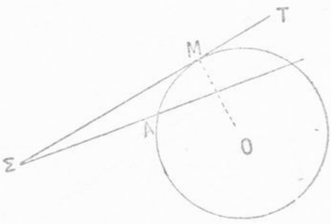
Σχ. 73.

Ὥστε, ἵνα γράψωμεν περιφέρειαν, ἥτις νὰ διέρχηται διὰ τριῶν δοθέντων σημείων, *πρέπει ταῦτα τὰ τρία σημεῖα νὰ μὴ κεῖνται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας.*

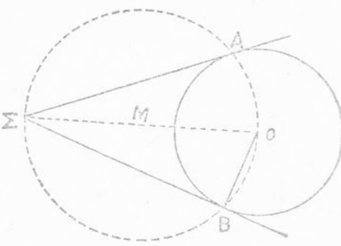
Τέμνουσα καὶ ἐφαπτομένη.—Τέμνουσα λέγεται πᾶσα εὐθεῖα ΣΑΒ συναντῶσα μίαν περιφέρειαν εἰς δύο σημεῖα Α καὶ Β. Ἐφαπτομένη λέγεται μία εὐθεῖα ΣΜΤ, ἥτις ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον ἔχει μὲ τὴν περιφέρειαν· τὸ κοινὸν τοῦτο σημεῖον καλεῖται *σημεῖον ἐπαφῆς* (σχ. 74). *Ἡ ἐφαπτομένη εἰς μίαν* *περιφέρειαν εἶνε κάθετος εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος ΟΜ* (σχ. 74).

XIII. *Νὰ φέρωμεν ἐφαπτομένην εἰς περιφέρειαν.*

α') Ἐὰν γνωρίζωμεν τὸ σημεῖον ἐπαφῆς Μ, ἀρκεῖ ἐκ τοῦ Μ νὰ σύρωμεν τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα ΟΜ (σχ. 74).



Σχ. 74.

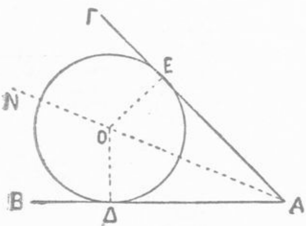


Σχ. 75.

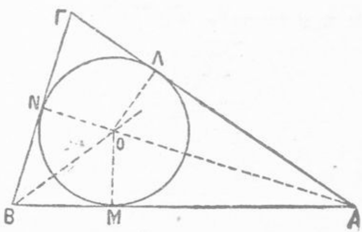
β') Ἐὰν πρόκειται νὰ φέρωμεν τὴν ἐφαπτομένην ἔκ τινος σημείου Σ κειμένου ἐκτὸς τῆς περιφερείας (σχ. 75), ἑνώνομεν τὸ Σ μὲ τὸ κέντρον, λαμβάνομεν τὸ μέσον Μ τῆς ΣΟ καὶ γράφομεν τὴν περιφέρειαν, ἥτις ἔχει διάμετρον τὴν ΣΟ· αὕτη τέμνει τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν εἰς δύο σημεῖα Α καὶ Β. Αἱ εὐθεῖαι ΣΑ, ΣΒ εἶνε ἐφαπτόμεναι εἰς τὴν περιφέρειαν Ο. Διότι ἡ γωνία ΣΒΟ εἶνε ὀρθὴ ὡς ἐγγεγραμμένη εἰς ἡμικύκλιον (ἐδ. 34, 6')· ἑπομένως ἡ ΣΒ, κάθετος οὖσα εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος ΟΒ, εἶνε ἐφαπτομένη.

XIV. *Περιφέρειαι ἐφαπτόμεναι εἰς δύο εὐθείας τεμνομένας ΑΒ, ΑΓ.* Ἐὰν ἐξ ἑνὸς οἱουδήποτε σημείου Ο τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας ΒΑΓ φέρωμεν καθέτους ἐπὶ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας, αἱ δύο αὗται κάθετοι εἶνε ἴσαι καὶ ἡ περιφέρεια ἡ γραφομένη μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα τὴν ΟΔ εἶνε ἐφαπτομένη εἰς τὰς δύο εὐθείας ΑΒ, ΑΓ (σχ. 76). Μετακινοῦντες τὸ σημεῖον Ο ἐπὶ τῆς διχοτόμου ΑΝ δυνάμεθα νὰ γράψωμεν δσασδήποτε περιφερείας ἐφαπτομένας εἰς τὰς δύο δοθείσας εὐθείας.

XV. *Περιφέρεια ἐφαπτομένη εἰς τρεῖς εὐθείας τεμνομένας ἀνὰ δύο.* Ἵνα εὕρωμεν τὸ κέντρον μιᾶς περιφερείας ἐφαπτομένης εἰς τρεῖς τοιαύτας εὐθείας, φέρομεν τὴν διχοτό-



Σχ. 76.

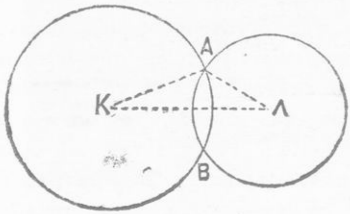


Σχ. 77.

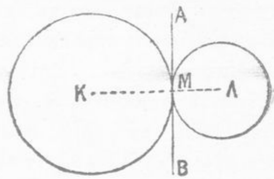
μον τῆς γωνίας Β (σχ. 77)· τὸ σημεῖον, ἔνθα συναντῶνται, εἶνε τὸ ζητούμενον κέντρον, διότι, ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου Ο φέρωμεν καθέτους ἐπὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, αἱ κάθετοι αὗται ΟΛ, ΟΜ, ΟΝ εἶνε ἴσαι.

Παρατ. Δυνάμεθα νὰ γράψωμεν περιφέρειαν ἐφαπτομένην εἰς τὰς τέσσαρας πλευρὰς ἑνὸς ῥόμβου, διότι τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰς τέσσαρας πλευράς. Ὁμοίως, ὅταν ἓν πολύγωνον εἶνε *κανονικόν*, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν περιφέρειαν ἐφαπτομένην εἰς ὅλας τὰς πλευράς του· λέγομεν τότε, ὅτι ἡ περιφέρεια εἶνε *ἐγγεγραμμένη* εἰς τὸ πολύγωνον ἢ ὅτι τὸ πολύγωνον εἶνε *περιγεγραμμένον* εἰς τὴν περιφέρειαν.

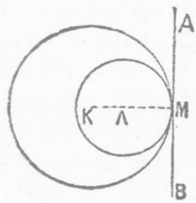
39. Περιφέρειαι ἐφαπτόμεναι. — Ἐὰν δύο περιφέρειαι κείμεναι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον (τοῦ χαρτίου, τοῦ πίνακος κ. τ. λ.) τέμνωνται εἰς δύο σημεῖα, λέγονται *τέμνουσαι* (σχ. 78). Ἐὰν ἔχωσιν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον, λέγονται *ἐφα-*



Σχ. 78.



Σχ. 79.



Σχ. 80.

πτόμεναι ἐξωτερικῶς (σχ. 79) ἢ ἐσωτερικῶς (σχ. 80). Ἐὰν φέρωμεν τὴν ἐφαπτομένην τῆς περιφερείας Κ κατὰ κοινὸν σημεῖον Μ, αὕτη θὰ εἶνε ἐφαπτομένη καὶ τῆς ἄλλης περιφερείας Λ· ὥστε ἡ ΑΒ εἶνε κοινὴ ἐφαπτομένη καὶ τὸ σημεῖον Μ τῆς ἐπαφῆς κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἥτις ἑνώνει τὰ κέντρα.

Ἐπανάληψις δι' ἐρωτήσεων καὶ ἀσκήσεων.

Τί καλεῖται πρόβλημα; Τίς ἡ ἐλαχίστη γραμμή, ἥτις ἄγεται ἐκ σημείου εἰς εὐθεῖαν; Πῶς εὑρίσκομεν διὰ τοῦ διαβήτου τὸ μέσον μιᾶς εὐθείας καὶ τὴν ἐξ αὐτοῦ κάθετον; Πῶς κατασκευάζομεν τὴν κάθετον εἰς δοθὲν σημεῖον εὐθείας; Πῶς ἄγομεν ἔκ τινος σημείου κειμένου ἐκτὸς δοθείσης εὐθείας κάθετον ἐπ' αὐτήν; Πῶς σύρομεν ἔκ τινος σημείου τὴν παράλληλον εἰς μίαν εὐθεῖαν; Πῶς κατασκευάζομεν γωνίαν ἴσην πρὸς δοθεῖσαν γωνίαν; Τί καλεῖται διχοτόμος μιᾶς γωνίας; Πῶς ἄγεται; Ποίαν ἰδιότητα ἔχουσιν ὅλα τὰ σημεῖα τῆς διχοτόμου; Πῶς διαιρεῖται μία εὐθεῖα εἰς πολλὰ ἴσα μέρη; Δοθέντων τριῶν σημείων μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων, εὑρεῖν σημεῖον ἀπέχον ἴσον ἀπὸ τούτων (τὸ ζητούμενον σημεῖον εἶνε τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, τὸν ὁποῖον προσδιορίζουσι τὰ τρία δοθέντα σημεῖα). Τί καλεῖται τέμνουσα εἰς περιφέρειαν; Τί καλεῖται ἐφαπτομένη; καὶ ποίαν ἰδιότητα ἔχει; Πόσας ἐφαπτομένας δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἔκ τινος σημείου εἰς περιφέρειαν; Ἐπὶ τίνος γραμμῆς δέον νὰ κεῖται τὸ κέντρον περιφερείας ἐφαπτομένης εἰς δύο εὐθείας; Πῶς εὑρίσκομεν τὸ κέντρον τῆς περιφερείας, ἥτις ἐφάπτεται τῶν τριῶν πλευρῶν τριγώνου; Πότε ἓν πολύγωνον λέγεται περιγεγραμμένον εἰς κύκλον; Ποῖον ἐκ τῶν παραλληλογράμμων εἶνε περιγράψιμον εἰς κύκλον;

1. Κατασκεύασον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δίδονται δύο πλευραί, ΒΑ=24 γραμμαί, ΒΓ=48 γραμμαί, καὶ ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν περιέχουσιν, ἴση μὲ 60°. Μέτρησον τὰς δύο ἄλλας γωνίας 2. Κατασκεύασον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δίδεται μία πλευρὰ ΑΒ=54 γρ. καὶ αἱ εἰς τὰ ἄκρα της γωνίαι Α=36°, Β=72°. Μέτρησον ἔπειτα τὰς πλευρὰς ΑΓ καὶ ΒΓ. 3. Δύναται νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἔχον πλευρὰς 5, 10, 15 δακτύλων; 4. Κατασκεύασον τρίγωνον ἰσόπλευρον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ νὰ ἔχῃ μῆκος τριῶν δακτύλων. 5. Δύο γωνίαι ἐφεξῆς εἶνε παραπληρωματικαί· φέρομεν τὰς διχοτόμους αὐτῶν· πόση εἶνε ἡ γωνία ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ τῶν διχοτόμων; 6. Νὰ γραφῶσι διὰ τοῦ μοιρογνωμονίου αἱ γωνίαι 75°, 90°, 125° καὶ νὰ διαιρεθῶσιν ἡ α' εἰς 2 ἴσα μέρη, ἡ β' εἰς τρία ἴσα μερη καὶ ἡ γ' εἰς 5 ἴσα μέρη.

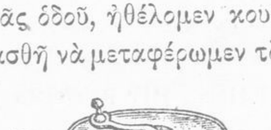
ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΜΕΡΟΣ Β΄.

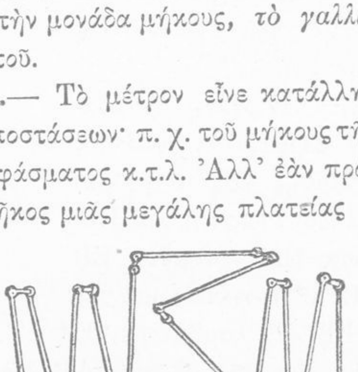
Ι. ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΓΡΑΜΜΩΝ

40. *Νὰ μετρήσωμεν* ποσόν τι σημαίνει νὰ συγκρίνωμεν αὐτὸ πρὸς ἄλλο ὁμοειδὲς καὶ γνωστόν, ὅπερ ὀνομάζομεν *μονάδα*. Ἐκ τῆς συγκρίσεως ταύτης εὑρίσκομεν, ἐκ πόσων μονάδων ἢ μερῶν αὐτῆς ἀποτελεῖται τὸ μετρούμενον ποσόν· π. χ. νὰ μετρήσωμεν τὸ μῆκος τῆς αἰθούσης, σημαίνει νὰ εὕρωμεν πόσας φορὰς περιέχει τὴν μονάδα μήκους, *τὸ γαλλικὸν μέτρον*, καὶ τὰ μέρη αὐτοῦ.

41. *Μέτρησις εὐθείας.*— Τὸ μέτρον εἶνε κατάλληλον πρὸς μέτρησιν μικρῶν ἀποστάσεων· π. χ. τοῦ μήκους τῆς αἰθούσης, τοῦ θρανίου, ἑνὸς ὑφάσματος κ.τ.λ. Ἀλλ' ἐὰν πρόκειται νὰ μετρήσωμεν τὸ μῆκος μιᾶς μεγάλης πλατείας ἢ μιᾶς ὁδοῦ, ἠθέλομεν κουρασθῆ νὰ μεταφέρωμεν τὸ



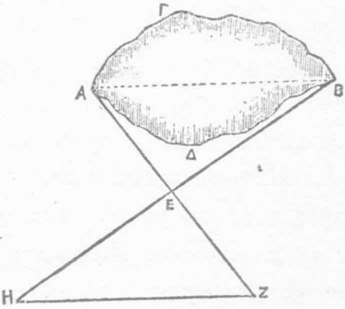
Σχ. 81.



Σχ, 82.

μέτρον 200 ἢ 300 φορὰς συνεχῶς. Διὰ τοῦτο λαμβάνομεν τὴν ταινίαν (σχ. 81) η τὴν ἄλυσιν (σχ.82), αἵτινες ἔχουσι μῆκος 10 μέτρων. Η ταινία περιτυλίσσεται περὶ ἄξονα ἐντὸς θήκης διὰ στροφάλου. Η ἅλυσις ἀποτελεῖται ἀπὸ 50 στελέχη ἡνωμένα διὰ κρίκων, ἑπομένως δύο κρίκοι διαδοχικοὶ ἀπέχουσιν ἀπ' ἀλλήλων δύο παλάμας. Η μέτρησις εὐθείας εἶνε εὔκολος, ὅταν δυνάμεθα νὰ μεταβῶμεν ἀπὸ τοῦ ἑνὸς ἄκρου της εἰς τὸ ἄλλο χωρὶς καμμίαν διακοπήν· ἀλλ' ἐὰν πρόκειται νὰ μετρήσωμεν τὸ μῆκος λίμνης, τὸ ὕψος ἑνὸς δένδρου, ἑνὸς πύργου κ.τ.λ., τὸ ζήτημα δὲν εἶνε τόσον εὔκολον.

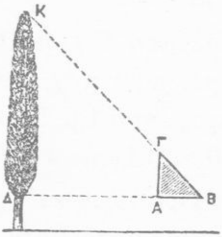
42. ***Νὰ μετρήσωμεν τὸ μῆκος τῆς λίμνης ΑΓΒΔ***, εἰς ἣν δὲν δυνάμεθα νὰ εἰσέλθωμεν, δηλ. τὸ μῆκος τῆς εὐθείας ΑΒ (σχ. 83). Τινὲς ἐκ τῶν μαθητῶν ἤθελον προτείνει νὰ τεντώσωμεν ἓν σχοινίον ἀπὸ τοῦ ἑνὸς ἄκρου Α εἰς τὸ ἄλλο Β καὶ ἔπειτα νὰ μετρήσωμεν τὸ μῆκος τοῦ σχοινίου διὰ τοῦ μέτρου. Ναί· ἀλλ' ἐὰν τὸ σχοινίον δὲν φθάνῃ; Λαμβάνομεν σημεῖόν τι Ε ἐκτὸς τῆς λίμνης καὶ μετροῦμεν τὰς ἀποστάσεις ΕΑ καὶ ΕΒ· ἔστωσαν ΕΑ=33 μέτρ., ΕΒ = 42 μ. Προεκτείνομεν τὰς ΑΕ, ΒΕ καὶ λαμβάνομεν ΕΖ = ΑΕ, ΕΗ = ΒΕ· ἡ εὐθεῖα ΗΖ θὰ εἶνε ἴση μὲ τὴν ΑΒ, διότι τὸ τρίγωνον ΕΗΖ εἶνε ἴσον μὲ τὸ ΕΒΑ (ἐδ. 24,β'.). Ὥστε μετροῦντες τὴν ΖΗ εὑρίσκομεν τὴν ζητουμένην ἀπόστασιν (1).



Σχ. 83.

(1) Τὸ ἔδαφος, ἐφ' οὗ ἐργαζόμεθα, ὑποτίθεται ὁριζόντιον (ἴδε ἐδ. 95).

43. Νὰ μετρήσωμεν τὸ ὕψος δένδρου.— Τινὲς ἐκ τῶν μαθητῶν θὰ ἔλυον ἴσως τὸ ζήτημα ἀναρριχώμενοι μέχρι τῆς κορυφῆς τοῦ δένδρου μὲ ἕνα σπάγγον, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος θὰ ἔδιδε τὸ ζητούμενον ὕψος· ἀλλ' ἡ ἐργασία αὕτη εἶνε ἐπικίνδυνος καὶ οὐχὶ πάντοτε κατορθωτή. Εὐκολώτερον ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς : Κατασκευάζομεν ἐκ χαρτονίου τρίγωνον ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελὲς ΑΒΓ (ἢ λαμβάνομεν ἕνα γνώμονα ἰσοσκελῆ) καὶ ἀπομακρυνόμεθα ὀλίγα μέτρα ἀπὸ τοῦ δένδρου. Τοποθετοῦμεν τὴν γωνίαν Β τοῦ τριγώνου ἔμπροσθεν τοῦ ὀφθαλμοῦ, κρατοῦντες αὐτὸ οὕτως, ὥστε ἡ ΒΑ νὰ ἔχῃ ὁριζοντίαν διεύθυνσιν (1) (σχ. 84)· ἔπειτα σκοπεύομεν κατὰ τὴν ΒΓ, φροντίζοντες, ὥστε ἡ κορυφὴ Κ νὰ κεῖται εἰς τὴν προέκτασιν τῆς ΒΓ. Μετροῦμεν τὴν ἀπόστασιν ΒΔ καὶ ἔστω ΒΔ = 10 μ. 75. Λέγω, ὅτι τὸ ζητούμενον ὕψος θὰ εἶνε ἴσον μὲ τὴν ἀπόστασιν ΒΔ ηὐξημένην κατὰ τὸ ἀνάστημα τοῦ σκοπεύσαντος μαθητοῦ 1 μ. 25, ἤτοι 10,75 + 1,25 = 12 μ. Διότι τὸ τρίγωνον ΚΒΔ εἶνε ὀρθογώνιον εἰς τὸ Δ, ἑπομένως Κ + Β = 90° καὶ ἐπειδὴ Β = 45° ἄρα Κ = 45°, ἤτοι εἶνε καὶ ἰσοσκελές· ὅθεν ΒΔ = ΚΔ (ἄλλην μέθοδον βλ. ἐδ. 62, III).



Σχ. 84.

44. *Μέτρησις περιφερείας.*— Τὸ ἁπλούστερον καὶ ἀκριβέστερον μέσον εἶνε νὰ περιβάλωμεν αὐτὴν διὰ νήματος, εἶτα τείνοντες τὸ νῆμα ἔχομεν μίαν εὐθεῖαν, ἥτις δίδει προφανῶς τὸ μῆκος τῆς περιφερείας· διὰ τοῦ τρόπου τούτου με-

(1) Ὁριζοντία λέγεται ἡ διεύθυνσις τῆς ἐπιφανείας ὕδατος ἠρεμοῦντος ἐντὸς δοχείου, κάθετος ἐπὶ τὴν κατακόρυφον (ἐδ. 95).

τροῦμεν τὴν περιφέρειαν στήλης μαρμαρίνης, μύλου, τροχοῦ κ.τ.λ. Ἡ Γεωμετρία εὑρίσκει τὸ μῆκος μιᾶς περιφερείας οὐχὶ διὰ τῆς ἀμέσου μετρήσεως αὐτῆς, ἀλλὰ διὰ τοῦ λογαριασμοῦ. *Ἀποδεικνύει, ὅτι, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸ μῆκος Γ οἱασδήποτε περιφερείας διὰ τοῦ μήκους δ τῆς διαμέτρου αὐτῆς, εὑρίσκομεν πάντοτε ὡς πηλίκον τὸν αὐτὸν ἀριθμόν*. Τὸ ἀμετάβλητον τοῦτο πηλίκον εἶνε *ὁ λόγος* πάσης περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον αὐτῆς, ἰσοῦται δὲ μὲ 3,1416 κατὰ προσέγγισιν 0,0001 καὶ παρίσταται διὰ τοῦ γράμματος π· ὥστε $Γ : δ = π$, ὅθεν $Γ = δ \times π$ καὶ $δ = Γ : π$.

Κανών. Τὸ μῆκος περιφερείας εὑρίσκομεν, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὴν διάμετρον ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν π (1)· π. χ. ἐὰν ἡ ἀκτὶς περιφερείας εἶνε 0 μ.,75, ἡ διάμετρος ἔσται 1 μ.,50 καὶ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας θὰ εἶνε $1,50 \times 3,14 = 4$ μ.,71.

Σημ. Ὅταν γνωρίζωμεν τὰς μοίρας ἑνὸς τόξου καὶ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου, εἰς ὃν ἀνήκει, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ μῆκος τοῦ τόξου· π. χ. ἵνα εὕρωμεν τὸ μῆκος τόξου 36° ἀνήκοντος εἰς κύκλον ἀκτῖνος 6 μ., σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς: Τὸ μῆκος ὅλης τῆς περιφ., ἥτις περιέχει 360° εἶνε $3,14 \times 12$. Τὸ μῆκος τόξου 1° εἶνε $3,14 \times 12 : 360$ καὶ τὸ μῆκος τόξου 36° θὰ εἶνε·

$3,14 \times 12 \times 36 : 360 = 3,14 \times 12 : 10 = 0,314 \times 12 =$ 3 μ.,768.

Τὸ μῆκος τόξου 36° εἰς κύκλον ἄλλης ἀκτῖνος, π. χ. διπλασίας, θὰ εἶνε διπλάσιον, ἤτοι 7 μ.,536.

---

(1) Διὰ τὰς ἐφαρμογάς, αἵτινες δὲν ἀπαιτοῦσι πολλὴν ἀκρίβειαν, $π = 3,14$.

Ἐπανάληψις δι' ἐρωτήσεων καὶ ἀσκήσεων.

Τί σημαίνει νὰ μετρήσωμεν ἓν ποσόν; Πῶς μετροῦμεν μεγάλας ἀποστάσεις; Πῶς δυνάμεθα νὰ μετρήσωμεν το μῆκος μιᾶς λίμνης; τὸ ὕψος ἑνὸς δένδρου; Τί καλεῖται περιφερεια; Ποῖον κανόνα ἔχομεν,ἵνα λογαριαζωμεν τὸ μῆκος μιᾶς περιφερείας,ἧς γνωρίζομεν τὴν ἀκτῖνα;

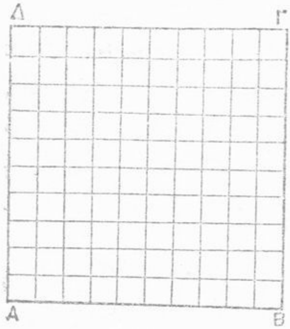
1. Τὸ ναυτικὸν μίλλιον εἶνε τὸ ἓν 60όν τῆς μοίρας τοῦ μεσημβρινοῦ τῆς γῆς· πόσα μέτρα ἔχει; (Ἡ περιφέρεια τοῦ μεσημβρινοῦ τῆς γῆς ἔχει μῆκος 40,000,000). 2. Ἑνὸς ἱπποδρομίου ἡ ἀκτὶς εἶνε 17 μ. Πόσα μέτρα διέτρεξεν ἵππος, ὅστις ἐπανέλαβεν 25 φορὰς τὸν γῦρον τοῦ ἱπποδρομίου; 3. Πρόκειται νὰ κατασκευάσωμεν λουτῆρα κυκλικὸν ἔχοντα περιφέρειαν 9 μ.· πόσην ἀκτῖνα πρέπει νὰ λάβωμεν; 4. Πεζὸς καὶ ἱππεὺς ἀναχωροῦντες ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου μιᾶς περιφερείας, διατρέχουσιν αὐτὴν ἀντιθέτως καὶ συναντῶνται μετὰ 15΄ τῆς ὥρας. Ὁ πεζὸς διανύει 5000 μ. καθ' ὥραν καὶ ὁ ἱππεὺς 15000 μ. Πόση εἶνε ἡ ἀκτὶς τῆς περιφερείας; 5. Ἡ διάμετρος τοῦ χαλκίνου δεκαλέπτου ἔχει μῆκος 30 γραμμῶν καὶ τοῦ πενταλέπτου 25 γραμμῶν. Κυλίομεν καὶ τὰ δύο ἐπὶ αὔλακος μήκους 17 μ.,270. Πόσας στροφὰς θὰ καμῃ τὸ β΄ περισσοτέρας τοῦ α΄; 6. Ποῖον εἶνε τὸ μῆκος τόξου 40°, 30΄ εἰς περιφέρειαν ἀκτῖνος 14 μ., 25; 7. Εἰς κύκλον ἀκτῖνος 2 μ.,25 ἓν τόξον ἔχει μῆκος 3 μέτρων· πόσων μοιρῶν εἶνε τὸ τόξον τοῦτο; 8. Ἅμαξα διέτρεξε μίαν ἀπόστασιν. Οἱ τροχοί της ἔχοντες ἀκτῖνα 0μ., 50 ἔκαμον 170 στροφάς· πόσων μέτρων ἦτο ἡ ἀπόστασις; 9. Ἡ διάμετρος τοῦ βαρούλκου (μακαρᾶ) ἑνὸς φρέατος εἶνε 0 μ.,45· πόσον εἶνε τὸ βάθος τοῦ φρέατος, ἐὰν τὸ σχοινίον, ὅπερ φθανει μέχρι τοῦ πυθμένος, ἐκτυλίσσηται 20 φορὰς περὶ τὸ βαροῦλκον;

II. ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

45. Ὡς μονὰς τῶν ἐπιφανειῶν, αἵτινες δὲν εἶνε πολὺ μεγάλαι (π. χ. οἰκόπεδα, κῆποι, πατώματα) λαμβάνεται *τὸ τετραγωνικὸν μέτρον (τ. μ.)*, δηλ., τὸ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἑκάστη πλευρὰ εἶνε ἴση μὲ ἓν μέτρον. Διὰ μεγάλας ἐκτάσεις (π. χ. χωράφια, λειβάδια, ἀμπελῶνας, δάση) μεταχειρίζονται παρ' ἡμῖν τὸ *βασιλικὸν στρέμμα*, ὅπερ ἰσοδυναμεῖ μὲ 1000 τ. μ. Διὰ μεγαλειτέρας ἐκτάσεις (πόλεως, χώρας) μεταχειρίζονται οἱ τοπογράφοι τὸ *τετραγωνικὸν χιλιόμετρον*, ἤτοι τὸ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἑκάστη πλευρὰ εἶνε 1000 μέτρα. Ὁ ἐκ τῆς μετρήσεως μιᾶς ἐπιφανείας προκύπτων ἀριθμὸς ὀνομάζεται *ἐμβαδὸν* αὐτῆς· ἐξαρτᾶται δὲ ἐκ τῆς ἐκλογῆς τῆς μονάδος· π. χ. ἡ Ἑλλὰς ἔχει ἐμβαδὸν 65119 τετραγ. χιλιόμετρα.

46. *Πῶς θὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πατώματος τῆς αἰθούσης ;* Τινὲς ἐκ τῶν μαθητῶν ἴσως νομίσωσιν, ὅτι πρέπει νὰ λάβωμεν ἕνα πίνακα ξύλινον (ἢ ἕνα τελάρο), τὸν ὁποῖον νὰ περιφέρωμεν ἐπὶ τοῦ πατώματος ὅσας φορὰς εἶνε δυνατὸν (καθὼς κάμνομεν διὰ τὸ μῆκος τῆς εὐθείας γραμμῆς, ἐφ' ἧς ἐφαρμόζομεν τὸ μέτρον ὅσας φορὰς εἶνε δυνατόν). Ἀλλ' ὁ τρόπος οὗτος εἶνε δύσκολος καὶ δὲν ἐφαρμόζεται εἰς τὴν πρᾶξιν. Ἡ Γεωμετρία μᾶς διδάσκει νὰ μετρῶμεν τὰς ἐπιφανείας εὐκολώτερον· μετροῦμεν γραμμάς τινας τῆς ἐπιφανείας καὶ ἐξ αὐτῶν διὰ τοῦ λογαριασμοῦ εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδόν, καθὼς θὰ ἴδωμεν ἀμέσως κατωτέρω.

47. ***Ὑποδιαίρεσις τοῦ τ. μ.***— Κατασκευάζομεν ἐπὶ τοῦ πίνακος ἓν τ. μ. καὶ διαιροῦμεν ἑκάστην πλευρὰν εἰς 10 ἴσα μέρη, δηλ. εἰς παλάμας. Ἐὰν ἑνώσωμεν δι' εὐθειῶν τὰ σημεῖα διαιρέσεως τῶν παραλλήλων πλευρῶν τοῦ τετραγώνου, προκύπτει ἓν δίκτυον ἀπὸ πολλὰ τετράγωνα ἔχοντα πλευρὰν μιᾶς παλάμης (σχ. 85), καλοῦνται δὲ *τετραγ. παλάμαι*. Πόσαι εἶνε ; Ἐὰν μετρήσωμεν τὰ τετράγωνα, ἅτινα εὑρίσκονται κατὰ μῆκος τῆς ΑΒ βλέπομεν, ὅτι εἶνε 10· ἀλλ' ὑπάρχουν 10 ὅμοιαι σειραί, ἡ μία ἐπάνω εἰς τὴν ἄλλην. Δέκα σειραὶ ἀπὸ 10 τετράγωνα ἑκάστη κάμνουσιν 100 τετράγωνα. Ὥστε 1 τ.μ. περιέχει 100 τ.π. Ὁμοίως βλέπομεν, ὅτι μία τ.π. περιέχει 100 τετραγ. δακτύλους (τ. δ.) καὶ 1 τ. δ. περιέχει 100 τετραγ. γραμμὰς (τ. γ.). Ὅθεν

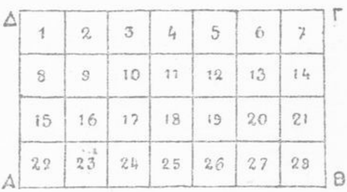


Σχ. 85.

1. τ. μ. = 100 τ. π. = 10000 τ. δ. = 1000000 τ. γρ., ἤτοι ἡ τ. π. εἶνε τὸ ἑκατοστὸν τοῦ τ. μ., ὁ τ. δ. εἶνε τὸ δεκάκις χιλιοστὸν τοῦ τ. μ., ἡ τ. γρ. εἶνε τὸ ἑκατομμυριοστὸν τοῦ τ.μ. Κατὰ ταῦτα, νὰ μετρήσωμεν μίαν ἐπιφάνειαν σημαίνει νὰ εὕρωμεν πόσα τ. μ. περιέχει, πόσας τ. π., πόσους τ. δ. καὶ πόσας τ. γρ. Ἐὰν εὕρωμεν ὡς ἐμβαδὸν τοῦ πατώματος τῆς αἰθούσης 15 τ. μ., 76 τ. π., 25 τ. δ.· τοῦ μαυροπίνακος 1 τ. μ., 4 τ. π., τοῦ βιβλίου 0 τ. μ., 2 τ. π., 9 τ. δ., οἱ συμμιγεῖς οὗτοι ἀριθμοὶ θὰ γραφῶσιν ὡς δεκαδικοὶ οὕτω: 15 τ. μ., 7625· 1 τ.,μ., 04· 0 τ. μ.,0209. Ἀντιστρόφως: ἐὰν θέλωμεν νὰ ἀπαγγείλωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν ἐκφράζοντα ἐμβαδόν, ἀπαγγέλλομεν κατ' ἀρχὰς τὸ ἀκέραιον μέρος (τ. μ.), κατόπιν χωρίζομεν τὸ δεκαδικὸν μέρος εἰς διψήφια τμήματα· τὸ πρῶτον τμῆμα μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν δεικνύει τὰς τ. π., τὸ δεύτερον τοὺς τ. δ., τὸ τρίτον τὰς τ. γρ. Ἐὰν τὸ τελευταῖον τμῆμα ἔχῃ ἓν ψηφίον, γράφομεν δεξιά του μηδὲν· π. χ. οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοί: 0 τ. μ.,08· 0 τ. μ., 0045· 854 τ. μ.,627· 7 τ. μ.,00345 ἀπαγγέλλονται οὕτω: 0 τ. μ., 8 τ. π.· 0 τ. μ.,0 τ. π.. 45 τ. δ.· 854 τ. μ., 62 τ. π., 70 τ. δ.· 7 τ. μ., 0 τ. π. 34 τ. δ. 50 τ. γρ.

48. *Ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου.*— Εὑρίσκεται ὡς ἑξῆς: *Μετροῦμεν μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα τὴν βάσιν του καὶ τὸ ὕψος του* (1) *καὶ πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο εὑρεθέντας ἀριθμούς· τὸ γινόμενον δίδει τὸ ἐμβαδόν.*

Παράδειγμα 1ον. Ἂς ὑποθέσωμεν κατ' ἀρχάς, ὅτι ἡ μὲν βάσις ΑΒ τοῦ ὀρθογωνίου εἶνε 7 μέτρα, τὸ δὲ ὕψος ΒΓ = 4 μ. (σχ. 86)· λέγω, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ θὰ περιέχῃ 7 × 4 = 28 τ. μ. Διότι, ἂν διαιρέσωμεν το ὕψος ΑΔ εἰς 4 μέρη, ἴσα μὲ ἓν μέτρον, καὶ ἐκ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως φέρωμεν παραλλήλους τῆς βάσεως ΑΒ, διαιρεῖται τὸ ὀρθογώνιον εἰς 4 ταινίας (λωρίδας) ὕψους ἑνὸς μέτρου· ἔπειτα διαιροῦμεν τὴν βάσιν εἰς 7 μέρη, ἴσα μὲ ἓν μέτρον, καὶ ἐκ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως φέρομεν καθέτους ἐπ' αὐτήν, δι' ὧν ἑκάστη τῶν 4 ταινιῶν διαιρεῖται εἰς 7 τετράγωνα ἔχοντα πλευρὰν ἑνὸς μέτρου, δηλ. εἰς 7 τ. μ. Ἄρα τὸ δοθὲν ὀρθογώνιον περιέχει 7×4 = 28 τ. μ. Ἐὰν ΑΒ = 7 παλάμαι καὶ ΑΔ = 4 π., τότε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου θὰ ἦτο 28 τ. π. Ἐὰν ΑΒ = 7 δάκτυλοι καὶ ΑΔ = 4 δ., τότε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου θὰ ἦτο 28 τ. δ. Ἐὰν ΑΒ = 7 γραμμαὶ καὶ ΑΔ = 4 γρ., τότε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου θὰ ἦτο 28 τ. γραμμαί.



Σχ. 86.

Παράδειγμα 2ον. Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι οἱ ἀριθμοί, οἵτινες

(1) Ἡ βάσις ΑΒ λέγεται συνήθως *μῆκος* καὶ τὸ ὕψος ΒΓ *πλάτος*.

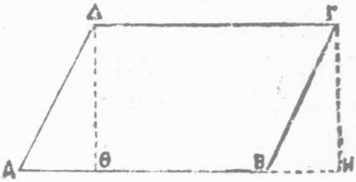
παριστῶσιν τὴν βάσιν καὶ τὸ ὕψος, δὲν εἶνε ἀκέραιοι, καὶ ἔστω ΑΒ = 5 μ.,16, ΒΓ=0 μ.,845. Τὴν περίπτωσιν ταύτην ἀνάγομεν εἰς τὴν πρώτην, ἐὰν τρέψωμεν τοὺς δεκαδικοὺς εἰς γραμμὰς καὶ λάβωμεν ὡς μονάδα ἐπιφανείας τὴν τετραγ. γραμμήν· ἡ βάσις ΑΒ περιέχει 5160 γραμ. καὶ τὸ ὕψος ΒΓ = 845· ἑπομένως, ἐπαναλαμβάνοντες τὸν συλλογισμὸν τοῦ 1ου παραδείγματος, βλέπομεν, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου ἰσοῦται μὲ 5160×845, ἤτοι 4360200 τετρ. γραμμάς, ἃς τρέποντες εἰς τ. μ. (χωρίζοντες 6 ψηφία) εὑρίσκομεν 4 τ.μ. 360200 ἢ 4 τ. μ.,3602, ἤτοι ἐκεῖνο, ὅπερ θὰ εὑρίσκομεν πολλαπλασιάζοντες ἀμέσως τοὺς δύο δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς 5 μ., 16 καὶ 0 μ.,845. Ἐκ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ὀρθογωνίου πορίζόμεθα τὰ ἐμβαδὰ τῶν ἄλλων εὐθυγράμμων σχημάτων (τριγώνου, τετραπλεύρου καὶ παντὸς πολυγώνου), διότι ἀποδεικνύεται, ὅτι *πᾶν πολύγωνον μετασχηματίζεται εἰς ὀρθογώνιον.*

49. Ἐμβαδὸν τετραγώνου.— Ἐπειδὴ τὸ τετράγωνον εἶνε ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος εἶνε ἴσα, διὰ τοῦτο *τὸ ἐμβαδόν του εὑρίσκεται, ἐὰν μετρήσωμεν μίαν πλευρὰν αὐτοῦ καὶ πολλαπλασιάσωμεν τὸν εὑρεθέντα ἀριθμὸν ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του.* Π. χ. τὸ ἐμβαδὸν τετραγώνου ἔχοντος πλευρὰν 3 μέτρα εἶνε 3×3 = 9 τ. μέτρα, τὸ δὲ ἐμβαδὸν τετραγώνου ἔχοντος πλευρὰν 3 μ.,25 εἶνε

3,25×3,25 = 10 τ. μ., 5625.

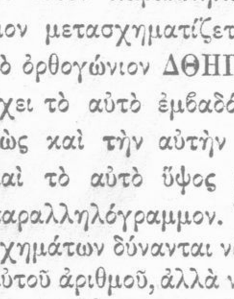
Σημ. 3×3 λέγεται δευτέρα δύναμις τοῦ 3 καὶ γράφεται συντόμως 3^2· ἐπειδὴ δ' ἐκφράζει τὸ ἐμβαδὸν τετραγώνου ἔχοντος πλευρὰν 3 μονάδας μήκους, διὰ τοῦτο λέγεται καὶ *τετράγωνον* τοῦ 3.

50. Ἐμβαδὸν παραλληλογράμμου.—Εὑρίσκεται καθ' ὃν τρόπον καὶ τοῦ ὀρθογωνίου, δηλ. *πολλαπλασιάζομεν τὸ* *μῆκος τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ μῆκος τοῦ ὕψους.* Π. χ. εἰς τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ (σχ. 87), ἐὰν ΑΒ = 20 μ. καὶ ΔΘ = 15 μ.,8, τὸ ἐμβαδόν του θὰ εἶνε **20×15,8 = 316 τ. μ.** Διότι, ἐὰν ἀποκόψωμεν τὸ τρίγωνον ΑΔΘ καὶ τὸ μεταφέρωμεν εἰς τὴν θέσιν ΒΓΗ, τὸ δοθὲν παραλληλόγραμμον μετασχηματίζεται εἰς τὸ ὀρθογώνιον ΔΘΗΓ, ὅπερ ἔχει τὸ αὐτὸ ἐμβαδόν, καθὼς καὶ τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος μὲ τὸ παραλληλόγραμμον. Ἐντεῦθεν βλέπομεν, ὅτι τὰ ἐμβαδὰ δύο σχημάτων δύνανται νὰ ὦσιν ἴσα, δηλ. νὰ ἐκφράζωνται ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἀλλὰ νὰ μὴ ἐφαρμόζωσιν ἀκέραια· τότε λέγονται *ἰσοδύναμα*· τοιαῦτα εἶνε τὸ ὀρθογώνιον ΔΘΗΓ καὶ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ (σχ. 87).



Σχ. 87.

51. Ἐμβαδὸν τριγώνου.— Τὸ παράλληλόγραμμον ΑΒΓΔ (σχ. 88), ὅταν φέρωμεν μίαν διαγώνιον, χωρίζεται εἰς δύο τρίγωνα ἴσα ΑΓΒ καὶ ΒΓΔ (ἐδ. 24, γ'). Τοῦτο δυνάμεθα νὰ ἐπαληθεύσωμεν, ἐὰν ἐπιθέσωμεν καταλλήλως τὸ ἓν τρίγωνον ἐπὶ τοῦ ἄλλου. Ἐντεῦθεν ὁ ***κανών***· *Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου εὑρίσκεται, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὴν βάσιν του ἐπὶ τὸ ὕψος του καὶ τοῦ γινομένου λάβωμεν τὸ ἥμισυ.*



Σχ. 88.

Π. χ. 1ον. Ἔστω ΑΒ = 3 μ.,25, ΓΗ = 5 μ.,70 (σχ. 88). Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ θὰ εἶνε

5,703,×25 : 2 = 9 τ. μ.,2625.

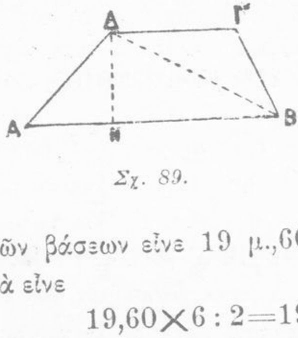
2ον. Ἔστω τὸ ἀμβλυγώνιον τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 24), τοῦ ὁποίου ὕψος εἶνε ἡ κάθετος ΑΗ = 5 μ.,40 καὶ βάσις ἡ ΒΓ = 3 μ.,25. Τὸ ἐμβαδὸν θὰ εἶνε

5,40×3,25 : 2 = 17 τ. μ.,55.

3ον. Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 29), τοῦ ὁποίου βάσις δύναται νὰ θεωρηθῇ μία τῶν καθέτων πλευρῶν, π. χ. ἡ ΑΒ = 5 μ., τότε τὸ ὕψος θὰ εἶνε ἡ ἄλλη κάθετος ΑΓ = 2 μ. Τὸ ἐμβαδόν του θὰ εἶνε

5×2 : 2 = 5 τ. μ.

52. Ἐμβαδὸν τραπεζίου.— *Εὑρίσκεται, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο βάσεων ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψους ἢ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν δύο βάσεων ἐπὶ τὸ ὕψος.*



Σχ. 89.

Ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ μεγαλειτέρα βάσις τοῦ τραπεζίου ΑΒ (σχ. 89) ἔχει μῆκος 11 μ.,45, ἡ μικρὰ ΓΔ = 8 μ.,15 καὶ τὸ ὕψος ΔΗ = 6 μ. Τὸ ἄθροισμα τῶν βάσεων εἶνε 19 μ.,60 καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου θὰ εἶνε

19,60×6 : 2=19,60×3 = 58 τ. μ.,80.

Διότι ἄγοντες τὴν διαγώνιον ΒΔ χωρίζομεν τὸ τραπέζιον εἰς δύο τρίγωνα, ΒΓΔ καὶ ΑΒΔ, ἅτινα ἔχουσι τὸ αὐτὸ ὕψος ΔΗ (ἐὰν λάβωμεν ὡς βάσεις τὰς ΓΔ καὶ ΑΒ)· ἐπομένως τὰ ἐμβαδά των εἶνε 8,15×3 καὶ 11,45×3. Τοῦ τραπεζίου θὰ εἶνε

8,15×3+11,45×3 = 19,60×3.

53. Ἐμβαδὸν ῥόμβου.— Ὁ ῥόμβος εἶνε παραλληλόγραμμον· ἐπομένως τὸ ἐμβαδόν του εὑρίσκεται, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὴν βάσιν (δηλ. μίαν τῶν πλευρῶν του) ἐπὶ τὸ ὕψος (δηλ. ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν δύο παραλλήλων πλευρῶν). Δύναται ὅμως νὰ εὑρεθῇ καὶ ἐκ τῶν διαγωνίων του ΑΔ=18 μ., ΒΓ = 10 μ. (σχ. 42). Τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ, ΒΔΓ εἶνε ἴσα· ἑκατέρου τὸ ἐμβαδὸν εἶνε $10 \times 9 : 2$ καὶ τοῦ ῥόμβου

$$10 \times 9 = 10 \times 18 : 2.$$

Ἤτοι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ῥόμβου ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ γινόμενον τῶν δύο διαγωνίων του.

54. Ἐμβαδὸν πολυγώνου.— Συνήθως ἀναλύομεν τὸ πολύγωνον εἰς τρίγωνα διὰ διαγωνίων (ἀγομένων ἐκ τῆς αὐτῆς κορυφῆς ἢ ἐκ διαφόρων) ἢ δι' εὐθειῶν ἀγομένων ἐκ σημείου ἐντὸς αὐτοῦ εἰς τὰς κορυφὰς τοῦ πολυγώνου. Εὑρίσκομεν χωριστὰ τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου τῶν τριγώνων τούτων καὶ προσθέτομεν.

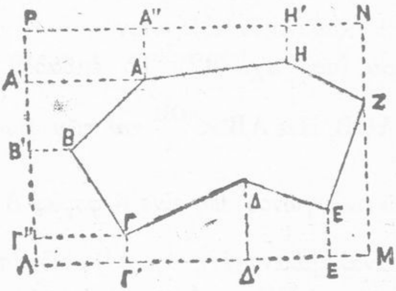
Ἑτέρα μέθοδος, ἣν μεταχειρίζονται ἰδιαιτέρως ἐπὶ τοῦ ἐδάφους, εἶνε ἡ ἑξῆς: Ἄγομεν τὴν μεγαλειτέραν (περίπου) ἐκ τῶν διαγωνίων τοῦ πολυγώνου ΑΖ (σχ. 90) καὶ ἀπὸ τῶν λοιπῶν κορυφῶν σύρομεν ἐπ' αὐτὴν καθέτους ΒΒ', ΓΓ' κ.τ.λ. Οὕτω διαιρεῖται τὸ πολύγωνον εἰς τρίγωνα ὀρθογώνια καὶ εἰς τραπέζια ἔχοντα δύο γωνίας ὀρθάς. Οἱ μαθηταί, ἐὰν ἐκτελέσωσι τὰς πράξεις κατὰ τὰ ἑξῆς δεδομένα

Σχ. 90.

ΒΒ' = 10 μ.,4. ΓΓ' = 13 μ., 4. ΔΔ' = 9 μ., 6. ΕΕ'=11 μ.

ΚΚ′ = 12 μ. ΙΙ′ = 15 μ.,3. ΘΘ′ = 11 μ.,5. ΗΗ′ = 12 μ. ΑΚ′ = 3 μ.,5. Κ′Β′ = 4 μ. Β′Ι′ = 3 μ.,8. Ι′Γ′ = 2 μ., 2. Γ′Δ′ = 5 μ. Δ′Θ′ = 3 μ. Θ′Ε′ = 6 μ. Ε′Η′ = 3 μ. Η′Ζ = 4 μ., 7, θὰ εὕρωσι 703 τ. μ. 33.

55. Διὰ νὰ μετρήσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν λίμνης (ἢ ἕλους ἢ δάσους), εἰς ἣν δὲν δυνάμεθα νὰ εἰσέλθωμεν, σχηματίζομεν πέριξ αὐτῆς ἓν ὀρθογώνιον, ἐντὸς τοῦ ὁποίου νὰ περιέχηται ἡ λίμνη. Ἔπειτα ἐκ τῶν κορυφῶν Α, Β, Γ,.... (σχ. 91) φέρομεν

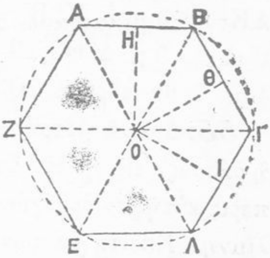


Σχ. 91.

καθέτους πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ ὀρθογωνίου, ὅτε σχηματίζονται τραπέζια καὶ ὀρθογώνια. Μετροῦντες τὰς καθέτους ταύτας, ὡς καὶ τὰ τμήματα, εἰς τὰ ὁποῖα τέμνουσι τὰς πλευρὰς τοῦ ὀρθογωνίου, εὑρίσκομεν τὰ ἐμβαδὰ τῶν τραπεζίων καὶ τῶν ὀρθογωνίων, τὰ ὁποῖα ἀφαιροῦντες ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου ΛΜΝΡ, θὰ εὕρωμεν προφανῶς τὸ ζητούμενον ἐμβαδόν.

Σημ. Πρακτικῶς, ὅταν δὲν ἔχωμεν ἀνάγκην μεγάλης ἀκριβείας, δυνάμεθα νὰ σχεδιάσωμεν τὸ σχῆμα, οὗ τὸ ἐμβαδὸν ζητοῦμεν, ἐπὶ χαρτονίου καὶ ἀφ᾽ οὗ ἀποκόψωμεν αὐτὸ διὰ ψαλίδος, τὸ *ζυγίζομεν*. Ἐὰν ζυγίσωμεν καὶ μίαν τετραγ.

παλ. ἐκ τοῦ αὐτοῦ χαρτονίου, τὸ πηλίκον τοῦ βάρους τοῦ σχήματος διὰ τοῦ βάρους τῆς τετραγ. παλ. δίδει τὸν ἀριθμὸν τῶν τετραγ. παλ. τοῦ σχήματος, ἤτοι τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.



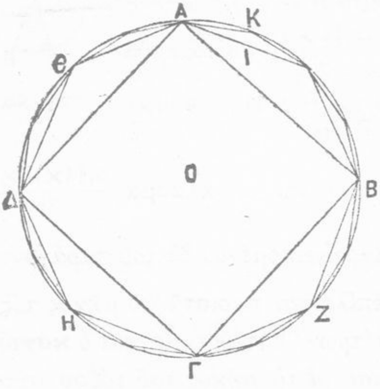
Σχ. 92.

56. Ἐμβαδὸν κανονικοῦ πολυγώνου.— Ἐὰν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, εἰς ὃν ἐγγράφεται κανονικὸν πολύγωνον, φέρωμεν εὐθείας εἰς τὰς κορυφάς, χωρίζεται τὸ πολύγωνον εἰς τρίγωνα ἴσα (ἐδ. 24, γ΄.). Π. χ. τὸ κανονικὸν ἑξάγωνον εἰς 6 τρίγωνα ἴσα (σχ. 92). Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ἐξ αὐτῶν, ὡς τοῦ AOB, εἶνε $AB \times \frac{OH}{2}$ καὶ τῶν 6 τριγώνων (ἤτοι τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου) θὰ εἶνε 6 φορὰς $AB \times \frac{OH}{2}$. Ἀλλὰ ἓξ φορὰς ἐπαναλαμβανομένη ἡ AB δίδει τὴν περίμετρον τοῦ πολυγώνου, καὶ OH παριστᾷ τὴν ἀπόστασιν τοῦ κέντρου ἀπὸ τῆς πλευρᾶς AB· αἱ ἀποστάσεις OH, OΘ, ΘI,.... εἶνε ἴσαι. Ὥστε *τὸ ἐμβαδὸν παντὸς κανονικοῦ πολυγώνου εὑρίσκεται, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὴν περίμετρον αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀποστάσεως τοῦ κέντρου ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν*. Π. χ. ἐὰν AB=20 μ. καὶ OH=16 μ., ἡ περίμετρος θὰ εἶνε $6 \times 20 = 120$ μ. καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἑξαγώνου θὰ εἶνε

$$120 \times \frac{16}{2} = 120 \times 8 = 960 \text{ τ. μ.}$$

57. Ἐμβαδὸν κύκλου.— Ἐὰν διαιρέσωμεν τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου εἰς 4 ἴσα μέρη, ἔπειτα εἰς 8, 16 ἴσα μέρη (σχ. 93) καὶ φέρωμεν τὰς χορδάς, σχηματίζονται τετράγωνον ΑΒΓΔ, κανονικὸν ὀκτάγωνον ΑΕΒΖΓΗΔΘ καὶ κανονικὸν δεκαεξάγωνον, ὧν τὰ ἐμβαδὰ εὑρίσκομεν πολλαπλασιάζοντες τὴν περίμετρον ἑκάστου ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀποστάσεως τοῦ κέντρου Ο ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν του. Ὁ κύκλος ἀπὸ μὲν τὸ ὀκτάγωνον διαφέρει κατὰ 8 τεμάχια, ὡς τὸ ΑΚΕΙΑ, ἀπὸ δὲ τὸ δεκαεξάγωνον κατὰ 16 μικρότερα τεμάχια, ὡς τὸ ΑΚ. Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι ὅσῳ περισσοτέρας πλευρὰς ἔχει τὸ πολύγωνον, τόσῳ ὀλιγώτερον διαφέρει τοῦ κύκλου· καὶ ἡ μὲν ἀπόστασις ΟΙ πλησιάζει πρὸς τὴν ἀκτῖνα ΟΑ, ἡ δὲ περίμετρος τοῦ πολυγώνου πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου. Ὅθεν ὁ ***κανών***· *Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου εὑρίσκεται, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας του ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος*. Π. χ. Στρογγύλη τράπεζα ἔχει διάμετρον 2 μ., 4. Ἐκ πόσων τ. μ. σύγκειται ὁ μουσαμᾶς, ὅστις τὴν καλύπτει; Ἡ περιφέρεια τῆς τραπέζης ἔχει μῆκος $3{,}14\times2{,}4$· ἐπειδὴ ἡ ἀκτὶς εἶνε 1 μ., 2, τὸ ἐμβαδὸν τῆς τραπέζης θὰ εἶνε $\frac{3{,}14\times2{,}4\times1{,}2}{2}=3{,}14\times1{,}2\times1{,}2$

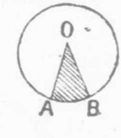
$=3{,}14\times(1{,}2)^2=4$ τ. μ., 5216. Ἐκ τοῦ παραδείγματος τούτου βλέπομεν ὅτι ὁ ἀνωτέρω κανὼν δύναται νὰ ἐκφωνηθῇ καὶ οὕτω: *Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου εὑρίσκεται, ἐὰν πολλαπλασιά-*



Σχ. 93.

σωμεν τὸν ἀριθμὸν 3,14 ἐπὶ τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος.

58. Ἐμβαδὸν τομέως.—Ἔστω ΟΑ = 4μ. καὶ τόξον ΑΒ = 60^0 (σχ. 94). Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου εἶνε $3,14 \times 16 = 50$ τ.μ., 24. Τὸ ἐμβαδὸν τομέως μιᾶς μοίρας θὰ εἶνε $\frac{3,14 \times 16}{360}$ καὶ τὸ ἐμβαδὸν τομέως 60^0 θὰ εἶνε $\frac{3,14 \times 16 \times 60}{360} = \frac{3,14 \times 8}{3}$ = 8 τ. μ., 37. Παρατηρητέον ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{3,14 \times 16 \times 60}{360}$ γράφεται $\frac{3,14 \times 8 \times 60 \times 2}{360}$, παραλειπομένου δὲ τοῦ παράγοντος 2 (ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος), τὸ ἐπίλοιπον παριστᾷ τὸ μῆκος τόξου 60^0 εἰς κύκλον ἀκτῖνος 4 μέτρων. Ἐντεῦθεν ἕπεται ὁ ***κανών***· *Τὸ ἐμβαδὸν τομέως ἰσοῦται μὲ τὸ μῆκος τοῦ τόξου αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος.* Ὁ κανὼν οὗτος ὁμοιάζει μὲ τὸν κανόνα τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου (ἐδ. 51)· τῷ ὄντι ὁ τομεὺς δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἄθροισμα πολλῶν τριγώνων.



Σχ. 94.

Ἐπανάληψις δι' ἐρωτήσεων καὶ ἀσκήσεων.

Ποῖον σχῆμα λαμβάνομεν ὡς μονάδα τῶν ἐπιφανειῶν; Ποῖα εἶνε τὰ πολλαπλάσια καὶ αἱ ὑποδιαιρέσεις τοῦ τ.μ.; Ἐξήγησον, διατί ἓν τ. μ. ἰσοῦται μὲ 100 τ. π.; Τί λέγεται ἐμβαδόν; Πῶς γράφονται οἱ ἀριθμοί, οἱ παριστῶντες ἐμβαδόν; Πῶς ἀπαγγέλλονται; Πῶς λογαριάζομεν τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου, τοῦ ὁποίου ἐμετρήσαμεν τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος; Πῶς λογαριάζομεν τὸ ἐμβαδὸν τετραγώνου; Ἡ δευτέρα δύναμις ἑνὸς ἀριθμοῦ λέγεται καὶ τετράγωνον αὐτοῦ· διατί; Πῶς λογαριάζομεν τὸ ἐμβαδὸν παραλληλογράμμου; τριγώνου; τραπεζίου; ῥόμβου; Πῶς μετρεῖται τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς πολυγώνου; Πῶς μετροῦμεν ἐπιφάνειαν, εἰς ἣν δὲν δυνάμεθα νὰ εἰσέλθωμεν; Ποῖος εἶνε ὁ κανὼν πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐμβαδοῦ ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου; Ποῖος εἶνε ὁ κανὼν πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐμβαδοῦ ἑνὸς κύκλου; Πῶς ἄλλεως δύναται νὰ ἐκφωνηθῇ ὁ προηγούμενος κανών; Τί καλεῖται τομεύς; πῶς εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδόν του; Ποῖα σχήματα λέγονται ἰσοδύναμα;

1. Πόσα τ. μ. περιέχει ἓν τετραγωνικὸν δεκάμετρον (δηλ. ἓν τετράγωνον, οὗ ἡ πλευρὰ εἶνε 10 μ.); ἓν τετραγ. ἑκατόμμετρον (δηλ. τετράγωνον, οὗ ἡ πλευρὰ εἶνε 100 μ.); ἓν τετράγων. χιλιόμετρον;

2. Δωμάτιον πρόκειται νὰ στρωθῇ διὰ σανίδων, τῶν ὁποίων τὸ μῆκος εἶνε 3 μ.,8 καὶ τὸ πλάτος 0μ,. 32. Τοῦ δωματίου τὸ μῆκος εἶνε 8 μ. καὶ τὸ πλάτος 5 μ. Πόσαι σανίδες χρειάζονται;

3. Ἡ περίμετρος τετραγώνου εἶνε 38 μ.,40· πόσον εἶνε τὸ ἐμβαδόν του;

4. Χωράφιον ἔχει σχῆμα τριγώνου, οὗ ἡ μία πλευρὰ εἶνε 101 μ. καὶ ἡ κάθετος πρὸς αὐτήν, ἥτις ἄγεται ἐκ τῆς ἀπέναντι κορυφῆς, εἶνε 68 μ.· πόσα στρέμματα ἔχει τὸ χωράφιον τοῦτο;

5. Κῆπος ἔχει σχῆμα τραπεζίου· ἡ μία τῶν παραλλήλων πλευρῶν του εἶνε 327 μ., 60, ἡ δ' ἄλλη 672 μ.,40· ἡ ἀπόστασις αὐτῶν εἶνε 124 μ.· ἐκ πόσων στρεμμάτων σύγκειται ὁ κῆπος;

6. Ἀγρός τις ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου τριγώνου· ἡ μία τῶν καθέτων πλευρῶν εἶνε 300 μ. ἡ ἄλλη 500 μ.· ἐκ πόσων στρεμμάτων σύγκειται ὁ ἀγρός;

7. Τρίγωνον καὶ παραλληλόγραμμον ἔχουσι τὴν αὐτὴν βάσιν· ποίαν σχέσιν πρέπει νὰ ἔχωσι τὰ ὕψη των, διὰ νὰ ὦσιν ἰσοδύναμα;

8. Πῶς δυνάμεθα νὰ μετασχηματίσωμεν ἓν τραπέζιον εἰς τρίγωνον ἰσοδύναμον;

9. Τὰ δύο τρίγωνα, εἰς ἃ χωρίζεται ἓν τραπέζιον διὰ μιᾶς διαγωνίου, εἶνε ἰσοδύναμα;

10. Παραλληλόγραμμον καὶ τραπέζιον ἔχουσι τὸ αὐτὸ ὕψος· ποίαν σχέσιν πρέπει νὰ ἔχωσιν αἱ βάσεις των, διὰ νὰ ὦσιν ἰσοδύναμα;

11. Κῆπος ἔχει σχῆμα τετραπλεύρου, τοῦ ὁποίου ἡ μία διαγώνιος εἶνε 84 μ., αἱ δ' ἀποστάσεις τῶν δύο ἄλλων κορυφῶν ἀπ' αὐτῆς εἶνε 25 μ. καὶ 11 μ.· πόσον εἶνε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου;

12. Ἐγγράφομεν κανονικὸν ἑξάγωνον εἰς κύκλον ἀκτῖνος 2 μ., 55· πόση εἶνε ἡ περίμετρος τοῦ ἑξαγώνου;

13. Τοῦ προηγουμένου ἑξαγώνου ζητεῖται τὸ ἐμβαδόν, ἐὰν ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου ἀπὸ μιᾶς πλευρᾶς εἶνε 2 μ.,208. (Ἁπλού-

στερον μέσον εὑρέσεως τοῦ ἐμβαδοῦ κανονικοῦ πολυγώνου, ἄνευ εὑρέσεως τῆς ἀποστάσεως τοῦ κέντρου ἀπὸ μιᾶς πλευρᾶς, βλ. ἐν ἐδ. 60, Παρατ. III.)

14. Πόσον μῆκος σιδηροῦ ἐλάσματος χρειαζόμεθα, ἵνα περιβάλωμεν τροχὸν ἀκτῖνος 0 μ.,95 ;

15. Σανίδα τετραγωνικὴν καλύπτομεν μὲ ἀργυρᾶ τάλληρα, τῶν ὁποίων ἡ διάμετρος εἶνε 37 γραμμῶν. Ἐπὶ ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου χωροῦσι 15 τάλληρα. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῶν κενῶν, τὰ ὁποῖα θὰ ἀφήσουν μεταξύ των τὰ τάλληρα.

16. Ἡ περιφέρεια πύργου κυκλοτεροῦς εἶνε 65 μ.,94.· πόσον εἶνε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ;

17. Ἡ κυκλικὴ πλὰξ ὡρολογίου περιβάλλεται ὑπὸ τετραγώνου, τοῦ ὁποίου ἑκάστη πλευρὰ μήκους 65 δακτύλων εἶνε ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου. Πρόκειται νὰ ἐπιχρυσώσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν, ἥτις περιέχεται μεταξὺ τοῦ κύκλου καὶ τοῦ τετραγώνου πρὸς 8 δρχ., 50 τὴν τετραγ. παλάμην. Πόσον θὰ πληρώσωμεν ;

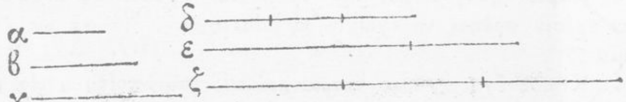
18. Γλύκισμα κυκλοτερὲς θέλομεν νὰ διαιρέσωμεν εἰς 8 ἴσους τομεῖς. Ζητεῖται τὸ μῆκος τοῦ τόξου ἑκάστου τομέως καὶ τὸ ἐμβαδόν. Ἡ διάμετρος τοῦ γλυκίσματος εἶνε 0 μ.,40.

19. Τὸ τριγωνικὸν γήπεδον ΑΒΓ νὰ μοιρασθῇ εἰς 5 μέρη ἰσοδύναμα ἔχοντα κοινὴν κορυφὴν τὸ σημεῖον Β.

20. Τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ νὰ μοιρασθῇ εἰς 3 μέρη ἰσοδύναμα δι᾽ εὐθειῶν συνδεουσῶν τὰς δύο βάσεις.

III. ΠΕΡΙ ΟΜΟΙΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

59. *Ἀνάλογοι* λέγονται αἱ εὐθεῖαι δ, ε, ζ πρὸς τὰς α, β, γ,



Σχ. 95.

ἐὰν προκύπτωσιν ἐκ τούτων διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν. Π. χ. ἐὰν εἶνε $\delta = \alpha \times 3$, $\varepsilon = \beta \times 3$, $\zeta = \gamma \times 3$ (σχ. 95).

Δύο σχήματα λέγονται *ὅμοια*, ὅταν ἔχωσι τὴν αὐτὴν μορφήν, ἀλλ᾽ οὐχὶ καὶ τὸ αὐτὸ μέγεθος. Π. χ. τὰ σχήματα 96 καὶ 97 εἶνε ὅμοια, παριστῶσι τὴν αὐτὴν κεφαλήν· αἱ διάφοροι γραμμαὶ τοῦ ἑνὸς εἶνε πᾶσαι διπλάσιαι τῶν τοῦ ἄλλου· θὰ λέγωμεν ὅτι ὁ λόγος τῆς *ὁμοιότητος* τοῦ μεγαλειτέρου σχή-

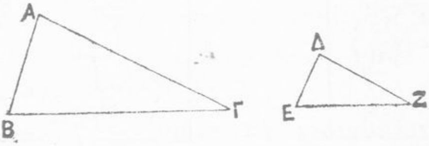
Σχ. 96.

Σχ. 97.

ματος πρὸς τὸ μικρότερον εἶνε 2. (Ὁ λόγος ὁμοιότητος τοῦ μικροτέρου πρὸς τὸ μεγαλείτερον εἶνε $^1/_2$).Συνέπεια τῆς ὁμοιομορφίας τῶν σχημάτων εἶνε ἡ ἰσότης τῶν γωνιῶν, ἃς ποιοῦσιν αἱ διάφοροι γραμμαὶ αὐτῶν καὶ ἡ ἀναλογία τῶν γραμμῶν τούτων.

Σχ. 98.

60. Δύο πολύγωνα (ἴσον ἀριθμὸν πλευρῶν ἔχοντα)εἶνε *ὅμοια*,ὅταν αἱ γωνίαι των λαμβανόμεναι κατὰ σειρὰν εἶνε ἴσαι μία πρὸς μίαν, καὶ αἱ πλευραὶ αἱ προσκείμεναι εἰς τὰς ἴσας γωνίας εἶνε ἀνάλογοι. Π. χ. τὰ δύο πεντάγωνα ΑΒΓΔΕ καὶ αϐγδε (σχ. 98) εἶνε ὅμοια, ἐὰν ἔχωσι τὰς γωνίας ἴσας: Α = α, Β = ϐ, Γ = γ, Δ = δ, Ε = ε καὶ τὰς ἀντιστοιχούσας πλευρὰς ΑΒ καὶ αϐ, ΒΓ καὶ ϐγ,...ἀναλόγους, ἤτοι ἐὰν ἡ ΑΒ εἶνε τριπλασία τῆς αϐ, τότε καὶ ἡ ΒΓ ἔσται τριπλασία τῆς ϐγ, κ. ο. κ. Ὥστε θὰ ἔχωμεν $\frac{ΑΒ}{αϐ}=\frac{ΒΓ}{ϐγ}=\frac{ΓΔ}{γδ}=\frac{ΔΕ}{δε}=\frac{ΕΑ}{εα}=3$, λόγος ὁμοιότητος. Προκειμένου περὶ τριγώνων, ἡ ἀναλογία τῶν πλευρῶν συνάγεται ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν γωνιῶν



Σχ. 99.

καὶ τἀνάπαλιν. Π. χ. τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ (σχ. 99) εἶνε ὅμοια, ἐὰν Α=Δ, Β=Ε, Γ=Ζ. Ἐπομένως $\frac{ΑΒ}{ΔΕ}=\frac{ΒΓ}{ΕΖ}=\frac{ΓΑ}{ΖΔ}=2$, λόγος ὁμοιότητος.

Παρατ. Ι. Ἐὰν ὁ λόγος ὁμοιότητος δύο ὁμοίων πολυγώνων εἶνε 3 (σχ. 98), τὸ ἐμϐαδὸν τοῦ α′ θὰ εἶνε 3×3 ἢ 9 φορὰς μεγαλείτερον τοῦ ϐ′.

Παρατ. ΙΙ. Δύο πολύγωνα κανονικὰ μὲ ἰσαρίθμους πλευρὰς εἶνε ὅμοια. Π.χ. 2 κανονικὰ ἑξάγωνα ΓΔΑΒΕΖ καὶ αϐγδεζ ἔχουσι τὰς γωνίας των ἴσας (120^0 ἑκάστην) καὶ τὰς πλευρὰς ἀναλόγους, διότι ΑΒ=ΒΓ=ΓΔ=ΔΕ=ΕΖ=ΖΑ καὶ αϐ=βγ=γδ=δε=εζ=ζα· ἐπομένως $\frac{ΑΒ}{αϐ}=\frac{ΒΓ}{ϐγ}=\frac{ΓΔ}{γδ}=\frac{ΔΕ}{δε}=\frac{ΕΖ}{εζ}=\frac{ΖΑ}{ζα}$.

Παρατ. ΙΙΙ. Ἐὰν ἔχωμεν πίνακα δίδοντα τὰ ἐμϐαδὰ τῶν κανονικῶν πολυγώνων τῶν ἐχόντων πλευρὰν 1 μ., εὑρίσκομεν τὰ ἐμβαδὰ τῶν ἄλλων κανονικῶν πολυγώνων πολλαπλασιάζοντες τὰ ἐμβαδὰ τῶν πρώτων ἐπὶ τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς τῶν δευτέρων.

Τὸ ἐμβαδὸν	τετραγώνου	ἔχοντος πλευρὰν	1 μ.	= 1 τ. μ.
»	ἰσοπλεύρου τριγώνου	»	»	= 0 τ.μ., 4330
»	κανονικοῦ πενταγώνου	»	»	= 2 τ.μ., 3774
»	» ἑξαγώνου	»	»	= 2 τ.μ., 5980
»	» ὀκταγώνου	»	»	= 4 τ.μ., 8284
»	» δεκαγώνου	»	»	= 7 τ.μ., 6939

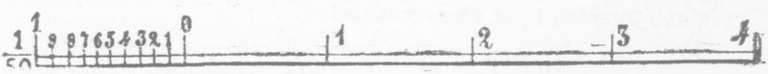
Κατὰ ταῦτα, ἡ ἐν σελ. 51 ἄσκησις 13η λύεται ἀμέσως: Τὸ ἐμβαδὸν ἑξαγώνου κανονικοῦ ἔχοντος πλευρὰν 2 μ.,55 εἶνε $2{,}598 \times (2{,}55)^2 = 2{,}598 \times 6{,}5025 = 16$τ. μ., 893495.

61. Ἀπεικόνισις ἐπιπέδου σχήματος ὑπὸ κλίμακα.— Ὅταν πρόκειται νὰ παραστήσωμεν ἐπὶ χαρτίου τὸ σχέδιον ἑνὸς ἀντικειμένου (οἰκοδομῆς, πεδιάδος, πόλεως κ.τ.λ.), ἐλαττοῦμεν πάσας τὰς διαστάσεις αὐτοῦ καθ' ὡρισμένην ἀναλογίαν· ὥστε πᾶν σχέδιον παριστᾷ ἐν μικρογραφίᾳ μεγάλας ἐκτάσεις· ἡ δὲ ὑπάρχουσα σχέσις μεταξὺ τῶν μηκῶν τοῦ σχεδίου καὶ τῶν μηκῶν τῆς πραγματικῆς ἐκτάσεως ὀνομάζεται *κλίμαξ*. Δέον ὅμως νὰ τηρῆται ἡ αὐτὴ ἀναλογία εἰς ὅλα τὰ μήκη, πρὸς ἐπιτυχίαν τῆς ἐπιδιωκομένης ὁμοιότητος τοῦ σχεδίου πρὸς τὸ ἀντικείμενον.

Εἴς τινα τῶν γωνιῶν γεωγραφικοῦ χάρτου βλέπομεν εὐθεῖαν διῃρημένην εἰς ἴσα μέρη καὶ κλάσμα $\frac{1}{500}$, $\frac{1}{10000}$, $\frac{1}{80000}$ κ.τ.λ., τοῦ ὁποίου προτάσσεται ἡ λέξις κλίμαξ. Ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος ἐμφαίνει ἓν μέτρον τοῦ χάρτου, ὁ παρονομαστής, ὅτι τὸ ἐπὶ τοῦ χάρτου ἓν μέτρον ἰσοδυναμεῖ μὲ 500, 10000, 80000 κ.τ.λ. μέτρα τοῦ ἐδάφους, ὁ δὲ χάρτης ὁλόκληρος θὰ εἶνε 500 × 500,10000 × 10000,80000 × 80000 φορὰς μικρότερος τῆς παριστανομένης ἐκτάσεως. Τῆς εὐθείας τὰ μέρη ἐμφαίνουσι γραφικὰς μονάδας, ἵνα τῇ βοηθείᾳ τοῦ διαβήτου εὑρίσκωμεν τὰς ἀναλογίας αὐτῶν πρὸς τὰς πραγματικάς, Πρὸς διάκρισιν θὰ λέγωμεν τὸ μὲν κλάσμα *ἀριθμητικὴν κλίμακα*, τὴν δὲ εὐθεῖαν *γεωμετρικὴν κλίμακα*.

62. Ἐπειδὴ τὰς ἐπὶ τοῦ χάρτου ἀποστάσεις μετροῦμεν συνήθως διὰ τοῦ κανόνος διῃρημένου εἰς γραμμὰς (χιλιοστὰ τοῦ μέτρου), εὑρίσκομεν τὸ πραγματικὸν μῆκος τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς μίαν γραμμὴν τοῦ χάρτου.

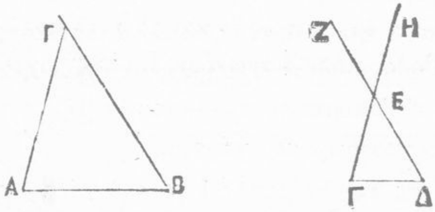
Π. χ. εἰς τὰς ἄνω κλίμακας 1 γρ. τοῦ χάρτου παριστᾷ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους 1)2 μ., 10 μέτρ., 80 μ. Ἑπομένως, ἵνα εὕρωμεν τὴν πραγματικὴν ἀπόστασιν δύο πόλεων εἰς χάρτην κατασκευασθέντα ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{80000}$, μετροῦμεν διὰ τοῦ κανόνος τὴν ἐπὶ τοῦ χάρτου ἀπόστασιν αὐτῶν, ἥτις ἔστω 193 γρ., καὶ λέγομεν : 1 γρ. παριστᾷ 80 μ., 193 γρ. θὰ παριστῶσιν 193 ×80, ἤτοι 15 χιλιόμ. 440 μέτρα. Ἐὰν ὁ μελετῶν χάρτην στερῆται κανόνος, ὁδηγεῖται ὑπὸ τῆς γεωμετρικῆς κλίμα-



Σχ. 100.

κος, ἥτις κατασκευάζεται εὐκόλως. Π. χ. εἰς τὴν κλίμακα $\frac{1}{50}=\frac{2}{100}$, ἡ γραφικὴ μονὰς εἶνε 2 δάκτυλοι. Ἐπὶ εὐθείας (σχ. 100) λαμβάνομεν συνεχῶς τμήματα ἴσα πρὸς 2 δακτύλους καὶ ἀριθμοῦμεν αὐτά. Διὰ τῆς κλίμακος ταύτης εὑρίσκομεν μόνον μέτρα· ἐὰν θέλωμεν καὶ παλάμας, λαμβάνομεν ἀριστερὰ τοῦ Ο τμῆμα ἴσον τῇ γραφικῇ μονάδι 2 δακτ., ὅπερ διαιροῦμεν εἰς 10 ἴσα μέρη· ἕκαστον τῶν μερῶν τούτων εἶνε τὸ $\frac{1}{10}$ τῆς γραφικῆς μονάδος καὶ ἀντιπροσωπεύει πραγματικὸν μῆκος μιᾶς παλάμης.

Προβλήματα. Ι. *Δοθέντος τριγώνου ΑΒΓ (σχ.101) νὰ*



Σχ. 101.

κατασκευασθῇ ὅμοιον, οὗτινος μία πλευρὰ νὰ εἶνε τὸ 1)2 τῆς ΑΒ. Ἔστω ΓΔ=1)2 ΑΒ· εἰς τὸ σημεῖον Γ ποιοῦμεν τὴν γωνίαν ΗΓΔ ἴσην τῇ Α (ἐδ.38, πρόβλ.V) καὶ εἰς τὸ Δ ποιοῦμεν τὴν γωνίαν ΖΔΓ ἴσην τῇ Β. Αἱ εὐθεῖαι ΓΗ, ΔΖ τεμνόμεναι προσδιορίζουσι τὴν γ΄ κορυφὴν Ε τοῦ ζητουμένου τριγώνου.

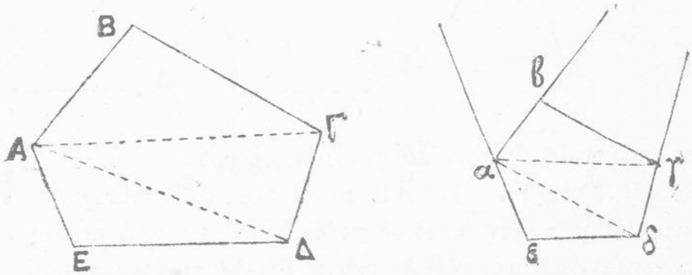
Σημ. Ἡ κατασκευὴ τριγώνου ἴσου τῷ ΑΒΓ τελεῖται κατὰ τὸ πρόβλ.ΙΧ, ἐδ.38.

Σχ. 102.

ΙΙ. *Δοθέντος πολυγώνου ΑΒΓΔΕ (σχ.102) νὰ κατασκευασθῇ ὅμοιον.* Λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Ο ἐντὸς τοῦ πολυγώνου καὶ ἄγομεν ἐκ τοῦ Ο εἰς τὰς κορυφὰς τοῦ πολυγώνου τὰς εὐθείας ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ, ΟΕ. Πολλαπλασιάζοντες ταύτας ἐπὶ τὸν τυχόντα ἀριθμόν, ἔστω ἐπὶ τὸν 2, καὶ συνδέοντες τὰ ἄκρα των διὰ τῶν εὐθειῶν αϐ, ϐγ, γδ, δε, εα λαμϐάνομεν τὸ πολύγωνον αϐγδε, ὅπερ εἶνε ὅμοιον πρὸς τὸ δοθέν, καὶ ὁ λόγος τῆς ὁμοιότητος εἶνε 2· ἑπομένως τὸ πολύγωνον αϐγδε εἶνε τετραπλάσιον τοῦ δοθέντος.

Σημ. Ἐὰν ἀντὶ 2 λάϐωμεν ἄλλον ἀριθμόν, σχηματίζομεν ἄλλο πολύγωνον ὅμοιον πρὸς τὸ δοθέν· ὥστε ὑπάρχουσιν ἄπειρα πολύγωνα ὅμοια πρὸς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ πολύγωνον.

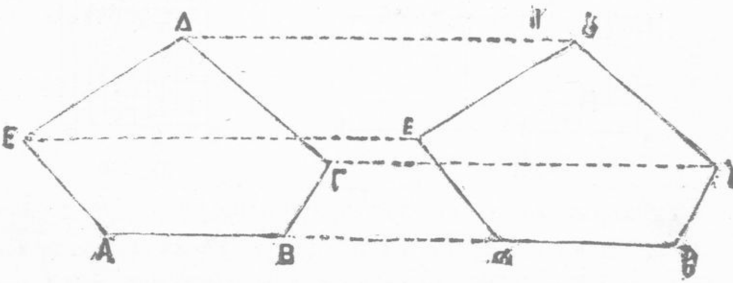
Ἑτέρα μέθοδος : τῶν διαγωνίων. Ἐκ τῆς τυχούσης κορυφῆς Α τοῦ δοθέντος πολυγώνου ΑΒΓΔΕ (σχ. 103) φέρομεν



Σχ. 103.

τὰς διαγωνίους ΑΓ, ΑΔ, αἵτινες διαιροῦσι τὸ πολύγωνον εἰς τρία τρίγωνα· ἐὰν θέλωμεν αἱ πλευραὶ τοῦ νέου πολυγώνου νὰ εἶνε τὰ ἡμίση τῶν ἀντιστοίχων τοῦ δοθέντος, λαμϐάνομεν τὴν αϐ=1)2 ΑΒ καὶ κατασκευάζομεν ἐπ' αὐτῆς τὸ τρίγωνον αϐγ, ὅμοιον τῷ ΑΒΓ (πρϐλ.Ι). Ἐπὶ τῆς αγ κατασκευάζομεν τὸ τρίγωνον αγδ ὅμοιον τῷ ΑΓΔ· τέλος ἐπὶ τῆς αδ κατασκευάζομεν τὸ αδε ὅμοιον τῷ ΑΔΕ· οὕτω κατεσκευάσθη τὸ πολύγωνον αϐγδε, ὅπερ εἶνε ὅμοιον τῷ δοθέντι. Ὁ λόγος τῆς ὁμοιότητος εἶνε 1)2, ἑπομένως τὸ πολύγωνον αϐγδε εἶνε 1)4 τοῦ δοθέντος.

Σημ. α΄. Αἱ ἀνωτέρω δύο μέθοδοι ἐφαρμόζονται καὶ διὰ τὴν κατασκευὴν πολυγώνου ἴσου τῷ δοθέντι, ἀλλ' ὑπάρχει καὶ ἡ ἑξῆς *μέθοδος τῶν παραλλήλων*. Ἐκ τῶν κορυφῶν τοῦ δοθέντος πολυγώνου ἄγομεν παραλλήλους πρὸς μίαν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ. Π. χ. τὴν ΑΒ (σχ. 104) ἐκλέγοντες ὡς βά-

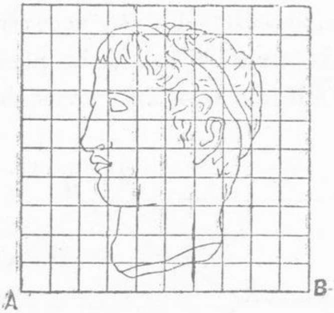


Σχ. 104.

σιν λαμβάνομεν μὲ τὸν διαβήτην αϐ=ΑΒ· ἐπὶ δὲ τῶν ἄλλων παραλλήλων λαμβάνομεν τὰ μήκη Γγ,Δδ.Εε ἴσα τῷ Αα ἢ Βϐ. Συνδέοντες τὰ σημεῖα ϐ, γ, δ, ε, α, κατασκευάζομεν τὸ πολύγωνον αϐγδε ἴσον τῷ ΑΒΓΔΕ.

Σημ. β΄. Ἑτέρα μέθοδος ἀντιγραφῆς σχήματος ὑπὸ κλίμακα ὡρισμένην εἶνε διὰ τῶν *τετραγωνιδίων*. Διαιροῦμεν τὰς πλευρὰς τῶν τετραγώνων, ἅτινα χρησιμεύουσιν ὡς περιθώρια εἰς τὰ σχ. 96 καὶ 97, εἰς 10 μέρη ἴσα καὶ ἐκ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως φέρομεν παραλλήλους οὕτως, ὥστε νὰ καλύψωμεν τὰ σχήματα διὰ δικτύου τετραγωνιδίων ἰσαρίθμων (σχ. 105, 106). Ἐὰν ἡ πλευρὰ ΑΒ εἶνε διπλασία τῆς

ΕΖ, φανερὸν ὅτι ἕκαστον τετραγωνίδιον τοῦ σχ. 105 ἔχει διαστάσεις διπλασίας ἑκάστου τετραγωνιδίου τοῦ σχ. 106, οὕτως ὥστε οἱονδήποτε σημεῖον τῆς κεφαλῆς εἶνε τοποθετημένον κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ὡς πρὸς τὰ τετραγωνίδια· π. χ.



Σχ. 105.

Σχ. 106.

ὁ ὀφθαλμὸς κεῖται ἐν τῷ τετραγωνιδίῳ, ὅπερ εἶνε τὸ 4ον ἐξ ἀριστερῶν καὶ τὸ 7ον ἐκ τῶν κάτω. Τὰ κατὰ τὴν τοιαύτην σχεδίασιν λάθη ἐν τοῖς τετραγωνιδίοις εἶνε πολὺ μικρότερα τῶν λαθῶν τῆς ἀμέσου σχεδιάσεως (ἄνευ τετραγωνιδίων).

Πρὸς τὸν αὐτὸν σκοπὸν χρησιμεύει ὁ *ὁμοιογράφος*, ὄργανον, δι' οὗ γράφονται σχήματα ὅμοια (1).

Σχ. 107.

Πρόβλημ. III. *Νὰ μετρήσωμεν τὸ ὕψος δένδρου.* Ὅταν

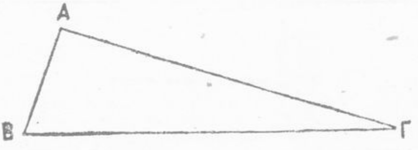
(1) Ἡ περιγραφὴ καὶ ὁ τρόπος τῆς χρήσεως αὐτοῦ προτιμότερον νὰ γίνῃ ἐκ τοῦ πραγματικοῦ, εἰ δυνατόν.

φαίνηται ὁ ἥλιος, μετροῦμεν τὴν σκιὰν τοῦ δένδρου ΑΒ=12 μ. (σχ. 107). Τὴν αὐτὴν στιγμὴν τοποθετοῦμεν ὀρθίαν μίαν ῥάβδον αγ μήκους 0μ.,90, τῆς ὁποίας μετροῦμεν τὴν σκιὰν αβ=1μ.,2· οὕτως ἔχομεν δύο νοητὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ αβγ, τὰ ὁποῖα εἶνε ὅμοια. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΑΒ εἶνε δεκαπλασία τῆς αβ καὶ ἡ ΑΓ ἔσται δεκαπλασία τῆς αγ, ἤτοι

$$ΑΓ=10\times0{,}90=9 \text{ μέτρα.}$$

Ἐπανάληψις δι' ἐρωτήσεων καὶ ἀσκήσεων.

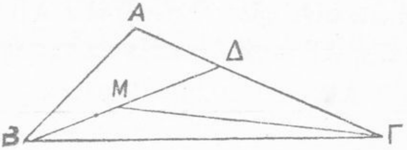
Πότε δύο ἢ πλείονες εὐθεῖαι λέγονται ἀνάλογοι πρὸς ἄλλας ἰσαρίθμους ; Πότε δύο σχήματα λέγονται ὅμοια ; Τίνες συνθῆκαι ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν ὁμοιότητα τῆς εἰκόνος προσώπου ἢ πράγματος πρὸς τὸ παριστώμενον ; Πότε δύο πολύγωνα εἶνε ὅμοια ; δύο τρίγωνα ; Ὁ λόγος τῆς ὁμοιότητος δύο πολυγώνων εἶνε 5· τίνα σχέσιν ἔχουσι τὰ ἐμβαδὰ αὐτῶν ; Τὸ ἐμβαδὸν κανονικοῦ ἑξαγώνου ἔχοντος πλευρὰν 1 μ. εἶνε 2 τ. μ.,5980· ποῖον θὰ εἶνε τὸ ἐμβαδὸν λεκανοπεδίου ἑξαγωνικοῦ ἔχοντος πλευρὰν 20 μέτρων ; Τί καλεῖται κλίμαξ ; Πῶς εὑρίσκομεν τὴν πραγματικὴν ἀπόστασιν δύο πόλεων ἐπὶ τοῦ χάρτου ; Πῶς κατασκευάζομεν γεωμετρικὴν κλίμακα ; Διὰ τίνων μεθόδων κατασκευάζομεν πολύγωνον



Σχ. 108.

ὅμοιον ἢ ἴσον τῷ δοθέντι ; Εἰς τί συνίσταται ἡ μέθοδος τῶν παραλλήλων ; ἡ μέθοδος τῶν τετραγωνιδίων ; Πῶς δυνάμεθα νὰ μετρήσωμεν τὸ ὕψος δένδρου ; Δοθέντος πολυγώνου θέλω νὰ κατασκευάσω ἄλλο ὅμοιον καὶ ἔχον ἐμβαδὸν 16 φορὰς μεγαλείτερον.

ἐπὶ τίνα ἀριθμὸν πρέπει νὰ πολλαπλασιάσω τὰς πλευρὰς τοῦ δοθέντος ; Οἰκόπεδον ἐσχεδιάσθη ὑπὸ κλίμακα 0,001· ποσάκις μικροτέρα θὰ εἶνε ἡ ἐπιφάνεια τοῦ σχεδίου ; Σχεδίασον ὑπὸ κλίμακα 0,001 τὸ τριγωνικὸν γήπεδον ΑΒΓ (σχ. 108), οὗ αἱ πλευραὶ



Σχ. 109.

εἶνε 85,78 καὶ 37 μ. Τὸ προηγούμενον τρίγωνον νὰ μοιρασθῇ εἰς 3 μέρη ἰσοδύναμα δι' εὐθειῶν ἀγομένων ἀπὸ τῶν Β καὶ Γ. (Λαμβάνω τὴν ΑΔ ἴσην τῷ τρίτῳ τῆς ΑΓ, σύρω τὴν ΒΔ καὶ εἰς τὸ μέσον αὐτῆς τὴν ΓΜ, (σχ. 109).

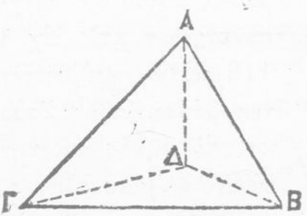
ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΜΕΡΟΣ Γ'.

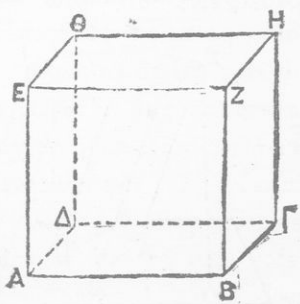
I. ΠΡΙΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΥΡΑΜΙΔΕΣ

63. *Ὁρισμοί.*—Δύο ἐπίπεδα λέγονται *παράλληλα*, ὅταν δὲν συναντῶνται, ὅσον καὶ ἂν αὐξηθῶσι· π. χ. οἱ ἀπέναντι τοῖχοι τοῦ δωματίου· τὸ πάτωμα καὶ ἡ ὀροφή. Ὅταν μία εὐθεῖα συναντῶσα ἓν ἐπίπεδον εἴς τι σημεῖον Π εἶναι κάθετος ἐπὶ πάσας τὰς εὐθείας τὰς διερχομένας διὰ τοῦ σημείου Π καὶ κειμένας ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, τότε λέγομεν ὅτι ἡ εὐθεῖα εἶνε *κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον*· π. χ. οἱ πόδες τῆς τραπέζης εἶνε κάθετοι πρὸς τὸ πάτωμα, τὰ καρφία προσηλοῦνται καθέτως (συνήθως) πρὸς τοὺς τοίχους. Ὅταν ἡ εὐθεῖα συναντῶσα τὸ ἐπίπεδον δὲν εἶνε κάθετος ἐπ' αὐτό, λέγεται *πλαγία*· π.χ. ἡ θέσις τῆς γραφίδος (ὅταν γράφωμεν) εἶνε πλαγία πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ χάρτου. Ἡ κάθετος, ἡ ἀγομένη ἐπὶ ἐπίπεδον ἔκ τινος σημείου ἐκτὸς αὐτοῦ, εἶνε μικροτέρα πάσης πλαγίας ἀγομένης ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου πρὸς τὸ ἐπίπεδον, διὰ τοῦτο λαμβάνεται αὕτη ὡς *ἀπόστασις* τοῦ σημείου ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου. Ὅταν μία εὐθεῖα εἶνε κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον, πᾶν ἐπίπεδον περιέχον τὴν εὐθεῖαν ταύτην λέγεται κάθετον ἐπὶ τὸ πρώτον· π.χ. οἱ τοῖχοι τοῦ δωματίου εἶνε ἐπίπεδα κάθετα πρὸς τὸ πάτωμα.

64. *Πολύεδρα.* —Καλεῖται *πολύεδρον* τὸ στερεὸν σῶμα, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται πανταχόθεν ἀπὸ πολύγωνα, τὰ ὁποῖα καλοῦνται *ἕδραι* τοῦ πολυέδρου. Τὸ σύνολον τῶν ἑδρῶν ἀποτελεῖ τὴν *ἐπιφάνειαν* τοῦ πολυέδρου. Αἱ πλευραὶ τῶν πολυγώνων εἶνε αἱ *ἀκμαὶ* ἢ *κόψεις* τοῦ πολυέδρου καὶ αἱ κορυφαί των εἶνε αἱ *κορυφαὶ* τοῦ πολυέδρου. Ἑκάστη ἀκμὴ χωρίζει μίαν ἕδραν ἀπὸ ἄλλας πλησίον κειμένας. Ἐξ ἑκάστης κορυφῆς ἀναχωροῦσι τρεῖς ἀκμαὶ τοὐλάχιστον. Οἱ ἀκρογωνιαῖοι λίθοι (τὰ ἀγκωνάρια), τὰ τοῦβλα, σωροὶ χαλίκων κανονικῶς ἐστρωμένων ἐπὶ τῶν δρόμων, οἱ ἀδάμαντες κτλ. ἔστωσαν παραδείγματα πολυέδρων. Τὰ πολύεδρα λαμβάνουσιν ὀνόματα ὑπενθυμίζοντα τὸν ἀριθμὸν τῶν ἑδρῶν· τὸ ἁπλούστερον πάντων εἶνε τὸ *τετράεδρον* (σχ. 110), ὅπερ ἔχει 4 ἕδρας τριγωνικὰς ΑΒΓ, ΔΑΒ, ΔΒΓ, ΔΓΑ. Ὀνομάζονται *ἑξάεδρον* (Σχ. 111), *ὀκτάεδρον*, *δωδεκάεδρον*, *εἰκοσάεδρον*, **τὰ** πολύεδρα, ἅτινα ἔχουσιν 6, 8, 12 καὶ 20 ἕδρας. Ἐκ τῶν δια-



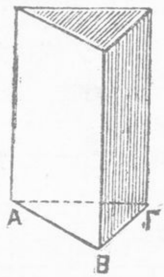
Σχ. 110.



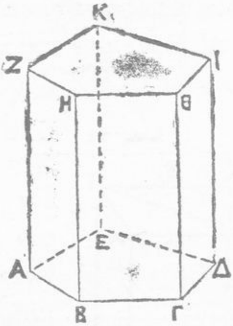
Σχ. 111.

φόρων πολυέδρων ἰδιαιτέρως ἐνδιαφέρουσιν ἡμᾶς τὸ *πρίσμα καὶ ἡ πυραμίς*.

65. Πρίσμα. Τὸ πρίσμα εἶνε πολύεδρον, τοῦ ὁποίου δύο ἕδραι κεῖνται εἰς ἐπίπεδα παράλληλα καὶ καλοῦνται *βάσεις* τοῦ πρίσματος, αἱ δὲ ἄλλαι εἶνε παραλληλόγραμμα, ἐξ ὧν ἕκα-

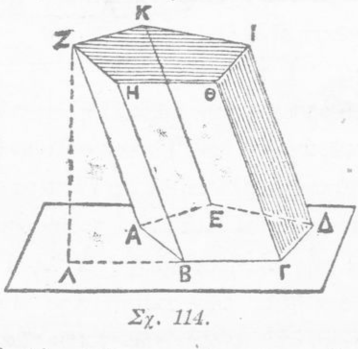


Σχ. 112.



Σχ. 113.

στον ἔχει κοινὴν πλευρὰν μεθ' ἑκατέρας ἐκ τῶν βάσεων· αἱ βάσεις εἶνε πολύγωνα ἴσα. Τὸ πρίσμα λέγεται *τριγωνικόν, πενταγωνικὸν* κτλ., ὅταν αἱ βάσεις αὐτοῦ εἶνε τρίγωνα, πεντάγωνα κτλ. (Σχ. 112, 113). Ἐὰν γνωρίζωμεν μίαν τῶν βάσεων τοῦ πρίσματος καὶ τὸ μῆκος καὶ τὴν διεύθυνσιν μιᾶς τῶν πέριξ ἀκμῶν, ἡ κατασκευὴ αὐτοῦ εἶνε εὐκολωτάτη (1).



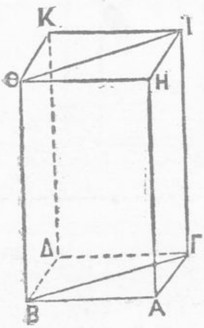
Σχ. 114.

Ὀρθὸν λέγεται τὸ πρίσμα, ὅταν αἱ πέριξ ἀκμαὶ εἶνε κά-

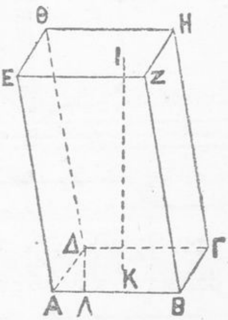
(1) Ἂς δειχθῇ ὑπὸ τοῦ διδάσκοντος.

θετοι ἐπὶ τὰς βάσεις, ὅτε τὰ πέριξ παραλληλόγραμμα εἶνε ὀρθογώνια (Σχ. 113), εἰ δὲ μή, λέγεται πλάγιον (Σχ. 114). Πᾶν πρίσμα ὀρθόν, οὗ αἱ βάσεις εἶνε πολύγωνα κανονικά, εἶνε *πρίσμα κανονικόν*.

66. Παραλληλεπίπεδον.— Ἐκ τῶν διαφόρων πρισμάτων ἰδιαιτέρως ἐξετάζομεν τὸ *παραλληλεπίπεδον*, πρίσμα, οὗ πᾶσαι αἱ ἕδραι εἶνε παραλληλόγραμμα. Τὸ παραλληλεπίπεδον δύναται νὰ εἶνε *ὀρθὸν* (Σχ. 115) ἢ *πλάγιον* (Σχ. 116), καθὼς καὶ τὸ πρίσμα. Ὅταν εἶνε ὀρθὸν καὶ αἱ βάσεις του εἶνε ὀρθογώνια, τότε ὀνομάζεται *παραλληλεπίπεδον ὀρθογώνιον*: π. χ. τὰ κιβώτια τοῦ πετρελαίου, τὰ δωμάτια, ὧν τὸ πάτωμα καὶ ἡ ὀροφὴ εἶνε ὀρθογώνια. Ὁ κύβος εἶνε μερικὴ περίπτωσις τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, καθ' ἣν πᾶσαι αἱ ἕδραι εἶνε τετράγωνα ἴσα. Τὸ κοκκάλινον ζάρι τοῦ παιγνιδίου εἶνε κύβος. Εὐκόλως βλέπομεν, ὅτι ἓν παραλληλεπίπεδον ὀρθογώνιον προσδιορίζεται διὰ τῶν τριῶν ἀκμῶν ΔΒ, ΔΓ, ΔΚ τῶν ἀγομένων ἐκ τῆς αὐτῆς κορυφῆς Δ (Σχ. 115), ὁ δὲ κύβος προσδιορίζεται διὰ μιᾶς τῶν ἀκμῶν του. Εἴς τι παραλληλεπίπεδον ὀρθογώνιον τὰ μήκη τῶν τριῶν ἀκμῶν τῶν ἀγομένων ἐκ τῆς αὐτῆς κορυφῆς ὀνομάζονται *διαστάσεις* τοῦ στερεοῦ· ἡ μία ΔΓ λέγεται *μῆκος*, ἡ ἄλλη ΔΒ *πλάτος*



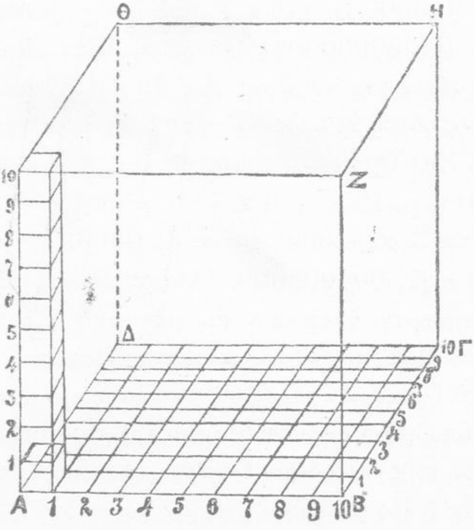
Σχ. 115.



Σχ. 116.

καὶ ἡ τρίτη ΔΚ *ὕψος*. Τὸ ὕψος ἐνίοτε καλεῖται καὶ βάθος ἢ πάχος· π.χ. λέγομεν τὸ βάθος τάφρου, τὸ πάχος φύλλου χάρτου.

67. *Μονὰς μετρήσεως τῶν ὄγκων.* — Ἐὰν ἡ ἀκμὴ τοῦ κύβου ἔχει μῆκος ἑνὸς μέτρου, ὁ κύβος λέγεται *κυβικὸν μέτρον* (κ. μ.), λαμβάνεται δὲ ὡς μονὰς ἀρχική. Ἐὰν ἡ ἀκμὴ ἔχει μῆκος μιᾶς παλάμης, ἑνὸς δακτύλου, μιᾶς γραμμῆς, ὁ κύβος λέγεται *κυβικὴ παλάμη* (κ. π.) *κυβικὸς δάκτυλος* (κ. δ.) *κυβικὴ γραμμὴ* (κ. γ.). Ἡ μέτρησις τῶν ὄγκων δὲν γίνεται διὰ τῆς ἐπιθέσεως (ἐδ. 46)· π. χ. ἵνα εὕρωμεν τὸν ὄγκον τοῦ ἀέρος τῆς αἰθούσης, δὲν θὰ γεμίσωμεν αὐτὴν μὲ κ. μ., κ. π., κ. δ., ἀλλὰ μετροῦμεν τὰς διαστάσεις αὐτῆς καὶ ἐξ αὐτῶν διὰ τοῦ ὑπολογισμοῦ εὑρίσκομεν τὸν ὄγκον ὡς θὰ ἴδωμεν ἀμέσως κατωτέρω.



Σχ. 117.

68. *Ὑποδιαιρέσεις τοῦ κυβικοῦ μέτρου.* — Ἂς φαντασθῶμεν ἓν κενὸν κιβώτιον κυβικὸν ἔχον πλευρὰν ἑνὸς μέτρου, ἤτοι ἓν κυβ. μέτρον. Ἐπειδὴ ἡ βάσις ΑΒΓΔ (σχ. 117) εἶνε ἓν τετραγωνικὸν μέτρον, γνωρίζομεν (ἐδ. 47), ὅτι δύναται νὰ διαιρεθῇ εἰς 100 τ. π. καὶ ἐπειδὴ τὸ ὕψος ΑΕ περιέχει

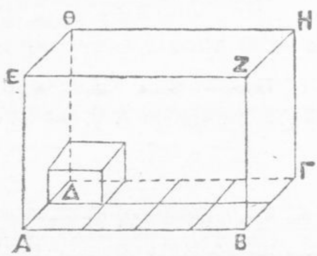
10 παλάμας, δυνάμεθα ἐπὶ ἑκάστης τετραγωνικῆς παλάμης τῆς βάσεως νὰ θέσωμεν 10 κ. π. τὴν μίαν ἐπάνω εἰς τὴν ἄλλην, ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα. Διὰ νὰ γεμίσῃ τὸ κ. μ. χρειάζονται 100 στῆλαι τοιαῦται· ἀπὸ 10 κ. π. ἑκάστη μᾶς κάμνουν 1000 κ. π. Ὥστε ἓν κ. μ. περιέχει 1000 κ. μ. Ὁμοίως βλέπομεν, ὅτι μία κ. π. περιέχει 1000 κ. δ., εἷς κ. δ. περιέχει 1000 κ. γ. Ὥστε

1 κ. μ. = 1000 κ. π.=1000000 κ. δ.=1000000000 κ. γ. ἤτοι ἡ κ. π. εἶνε τὸ χιλιοστὸν (0,001) τοῦ κ. μ., ὁ κ. δ. εἶνε τὸ ἑκατομμυριοστὸν (0,000001) τοῦ κ. μ. καὶ ἡ κ. γ. εἶνε τὸ δισεκατομμυριοστὸν (0,000000001) τοῦ κ. μ. Ἐὰν εὕρωμεν, ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ ἀέρος τῆς αἰθούσης εἶνε 29 κ.μ.,87 κ.π., 750 κ. δ., ὁ συμμιγὴς οὗτος ἀριθμὸς θὰ γραφῇ ὡς δεκαδικὸς οὕτως : 29 κ. μ.,087750. Ὁμοίως οἱ συμμιγεῖς 3 κ. μ. 8 κ. π.. 24 κ. μ. 637 κ. δ.· 0 κ. μ. 18 κ. π. 6 κ. δ.· 0 κ. μ. 4 κ. π. 5 κ. δ. 6 κ. γ. γράφονται 3 κ. μ.,008· 24 κ. μ., 000637· 0 κ. μ., 018006· καὶ 0 κ. μ·, 004005006. Ἀντιστρόφως : ἐὰν θέλωμεν νὰ ἀπαγγείλωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν ἐκφράζοντα ὄγκον, ἀπαγγέλλομεν κατ᾽ ἀρχὰς τὸ ἀκέραιον μέρος (κ. μ.), κατόπιν χωρίζομεν τὸ δεκαδικὸν μέρος εἰς τριψήφια τμήματα ἀρχόμενοι ἀπὸ τῆς ὑποδιαστολῆς, τὸ πρῶτον τμῆμα δεικνύει τὰς κ. π., τὸ δεύτερον τοὺς κ. δ. καὶ τὸ τρίτον τὰς κ. γ. Ἐὰν τὸ τελευταῖον ἔχῃ ἓν ἢ δύο μόνον ψηφία, γράφομεν δύο ἢ ἓν μηδενικά· π.χ. οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοί: 13 κ.μ.,86· 0 κ.μ.,0732· 0 κ. μ., 80000628 ἀπαγγέλλονται : 13 κ. μ., 860 κυβ. παλ. 0 κ. μ., 73 κ.π., 200 κ.δ.· 0 κ.μ., 800 κ.π., 6 κ.δ., 280 κ. γ.

69. Ὄγκος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Κανών.— *Ὁ ὄγκος ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εὑρίσκεται, ἐὰν μετρήσωμεν μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα τὰς διαστά-*

σεις του (μῆκος, πλάτος καὶ ὕψος) καὶ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς τρεῖς ἀριθμούς.

Παράδειγμα 1ον. Ἂς ὑποθέσωμεν κατ' ἀρχάς, ὅτι αἱ τρεῖς διαστάσεις ἐκφράζονται ὑπὸ ἀκεραίων ἀριθμῶν, καὶ ἔστω ΑΒ=4 μ.,ΒΓ=2 μ. καὶ ΒΖ=3 μ. (σχ.118). Τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ δύναται νὰ χωρισθῇ εἰς 4×2=8 τετραγ. μέτρα· ἐπὶ ἑκάστου τῶν τετραγώνων τούτων δυνάμεθα νὰ θέσωμεν στήλην ἐκ τριῶν κ. μ.,διότι τὸ ὕψος ΑΕ εἶνε 3 μ. Ἐπομένως τὸ παραλληλεπίπεδον περιέχει 4×2×3, ἤτοι 24 κ. μ. Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ 4,2,3 παρίστανον παλάμας, ὁ ὄγκος θὰ ἦτο 24 κ. π., ἐὰν δὲ δακτύλους, ὁ ὄγκος θὰ ἦτο 24 κ. δ.



Σχ. 118.

Παράδειγμα 2ον. Ἔστωσαν δεύτερον οἱ ἀριθμοὶ οἱ ἐκφράζοντες τὰς διαστάσεις δεκαδικοί: ΑΒ=3 μ.,5,ΒΓ=1μ.,5, ΒΖ = 2 μ., 64. Τὴν περίπτωσιν ταύτην ἀνάγομεν εἰς τὴν πρώτην, ἐὰν τρέψωμεν τοὺς δεκαδικοὺς εἰς δακτύλους καὶ λάβωμεν ὡς μονάδα ὄγκου τὸν κ. δ. Τὸ μῆκος ΑΒ περιέχει 350 δακτ., τὸ πλάτος ΒΓ περιέχει 150 δακτ. καὶ τὸ ὕψος ΒΖ=264 δ. Ποιοῦντες τὸν συλλογισμὸν τοῦ α' παραδείγματος βλέπομεν, ὅτι τὸ παραλληλεπίπεδον περιέχει 350×150 ×264=13860000 κ. δ., οὓς τρέποντες εἰς κ. μ. εὑρίσκομεν 13 κ. μ.,860, ἤτοι ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον θὰ εὑρίσκομεν ἐκτελοῦντες τὸ γινόμενον 3,5×1,5×2,64. Ὥστε ὁ κανὼν ἀληθεύει εἰς πᾶσαν περίπτωσιν.

Παρατηρήσεις. 1η) Ἐκτελοῦντες τὸ γινόμενον τῶν δύο διαστάσεων ΑΒ, ΒΓ τῆς βάσεως, εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν αὐτῆς, ἤτοι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ· δυνάμεθα λοιπὸν νὰ ἐκφωνήσωμεν τὸν ἀνωτέρω κανόνα καὶ ὡς ἑξῆς: «*ὁ ὄγκος τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εὑρίσκεται, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του*». ***2α)*** Ὁ κανὼν εἶνε ἀληθής, καὶ ὅταν τὸ παραλληλεπίπεδον εἶνε οἱονδήποτε (σχ. 116)· τότε ὅμως ὕψος τοῦ στερεοῦ δὲν εἶνε μία τῶν ἀκμῶν ΑΕ ἢ ΒΖ, ἀλλ' ἡ κάθετος ΙΚ ἡ καταβιβαζομένη ἔκ τινος σημείου τοῦ παραλληλογράμμου ΕΖΗΘ ἐπὶ τὴν βάσιν ΑΒΓΔ· ἐπίσης πλάτος τοῦ στερεοῦ δὲν εἶνε μία τῶν πλευρῶν ΑΔ ἢ ΒΓ, ἀλλ' ἡ κάθετος ΔΛ ἐπὶ τὴν βάσιν ΑΒ τοῦ παραλληλογράμμου.

70. Ὄγκος κύβου.—Ὁ κύβος εἶνε παραλληλεπίπεδον, οὗ αἱ τρεῖς διαστάσεις εἶνε ἴσαι· ἀρκεῖ νὰ μετρήσωμεν μίαν ἐξ αὐτῶν· π. χ. ὁ ὄγκος κύβου ἔχοντος ἀκμὴν 5 δακτ. εἶνε $5\times5\times5=125$ κ. δ. Ὁ ὄγκος κύβου ἔχοντος πλευρὰν 1 μ. 2 εἶνε $1,2\times1,2\times1,2=1$ κ. μ., 728.

Σημ. Ἐπειδὴ ἡ τρίτη δύναμις παντὸς ἀριθμοῦ, π. χ. 5^3, ἐκφράζει τὸν ὄγκον κύβου ἔχοντος πλευρὰν 5 μονάδας μήκους, διὰ τοῦτο λέγεται καὶ κύβος τοῦ 5· ὁμοίως 7^3 λέγεται καὶ κύβος τοῦ 7

71. Ὄγκος πρίσματος ὀρθοῦ. — 1ον Ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι δι' ἑνὸς πρίονος σχίζομεν ἓν ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον (σχ. 115) ἀρχίζοντες ἀπὸ τῆς ΒΘ καὶ φθάνοντες εἰς τὴν ΓΙ (ἀκολουθοῦντες τὴν διαγώνιον ΘΙ), θὰ λάβωμεν δύο ὀρθὰ τριγωνικὰ πρίσματα ἴσα (σχ. 112)· ἑπομένως ἕκαστον τούτων εἶνε τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλεπιπέδου. Ἀλλὰ τοῦ παραλληλεπιπέδου ὁ ὄγκος ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος, ἤτοι (ΑΓΔΒ) × ΑΗ· ἄρα ὄγκος τριγωνικοῦ πρίσματος $= \frac{(\text{ΑΓΔΒ}) \times \text{ΑΗ}}{2}$ ἢ (ΑΒΓ) $\times$ ΑΗ, διότι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶνε τὸ ἥμισυ τοῦ ὀρθογωνίου ΑΓΔΒ· π. χ. ἐὰν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ΑΒΓ εἶνε 1 τ. π., 6 καὶ τὸ ὕψος εἶνε 4 μ., 52, ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος θὰ εἶνε 1 τ. π., 6$\times$45 π., 2=73 κ. π., 320.

2ον. Ἄς λάβωμεν ἓν πολυγωνικὸν πρίσμα ὀρθὸν (σχ. 113)· δύναται νὰ χωρισθῇ εἰς τριγωνικὰ πρίσματα, ἀρκεῖ νὰ φέρωμεν τὰς διαγωνίους ΑΓ, ΖΘ, ΑΔ, ΖΙ. Ἔχομεν: ὄγκος πρίσματος (ΑΒΓΖΗΘ) = (ΑΒΓ)$\times$ΒΗ· ὄγκος πρίσματος (ΑΓΔΖΘΙ) = (ΑΓΔ)$\times$ΒΗ· ὄγκος πρίσματος (ΑΔΕΖΙΚ) = (ΑΔΕ) $\times$ ΒΗ· ἑπομένως ὁ ὄγκος ὅλου τοῦ πενταγωνικοῦ πρίσματος θὰ εὑρεθῇ, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν τριγώνων ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΕ, δηλ. *τὴν βάσιν ΑΒΓΔΕ, πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸ ὕψος ΒΗ.*

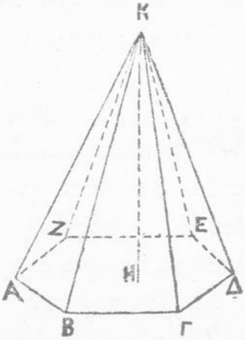
Σημ. Ὅταν τὸ πρίσμα εἶνε πλάγιον (σχ. 114) ὁ ὄγκος του εὑρίσκεται κατὰ τὸν ἴδιον κανόνα· δηλ. πολλαπλασιάζομεν τὴν βάσιν ἐπὶ τὸ ὕψος· ἐδῶ τὸ ὕψος δὲν συμπίπτει μὲ τὴν ἀκμὴν ΖΑ, ἀλλ' εἶνε ἡ κάθετος ΖΛ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως. Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον, ἐφ' οὗ στηρίζεται τὸ πρίσμα, εἶνε ὁριζόντιον (1), τὸ ὕψος ΖΛ εὑρίσκεται διὰ τοῦ νήματος τῆς στάθμης, δηλ. δένομεν εἰς τὴν κορυφὴν Ζ ἓν νῆμα, εἰς τὸ ἄκρον τοῦ ὁποίου κρέμαται τεμάχιον μολύβδου.

72. Ἐπιφάνεια πρίσματος.—*Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας ὀρθοῦ πρίσματος ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῆς περιμέτρου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος. Παράπλευ-*

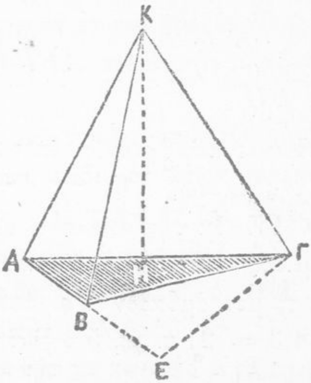
(1) Ὁριζόντιον λέγεται ἓν ἐπίπεδον, ὅταν τὸ νῆμα τῆς στάθμης εἶνε κάθετον ἐπ' αὐτό: ἡ ἐπιφάνεια ἠρεμοῦντος ὕδατος ἐντὸς δοχείου εἶνε ἐπίπεδον ὁριζόντιον.

ρος ἐπιφάνεια εἶνε τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν πέριξ ὀρθογωνίων ΑΒΗΖ, ΒΓΗΘ, κ. τ. λ. (σχ. 113). Τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου τῶν ὀρθογωνίων τούτων ἰσοῦται τῷ γινομένῳ μιᾶς πλευρᾶς τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος ἐπὶ τὸ ὕψος· π. χ. (ΑΒΗΖ) $=$ ΑΒ $\times$ ΑΖ· ἑπομένως τὸ ἄθροισμά των θὰ ἰσῶται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως (δηλ. μὲ τὴν περίμετρον ΑΒΓΔΕ) ἐπὶ τὸ ὕψος. Ἐὰν θέλωμεν *ὅλην τὴν ἐπιφάνειαν* τοῦ πρίσματος, πρέπει εἰς τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν νὰ προσθέσωμεν καὶ τὸ διπλάσιον ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ΑΒΓΔΕ.

73. *Πυραμίς*.— Ἡ πυραμὶς εἶνε πολύεδρον, οὗτινος μία ἕδρα εἶνε πολύγωνον οἱονδήποτε ΑΒΓΔΕΖ (σχ. 119), αἱ δὲ



Σχ. 119.



Σχ. 120.

λοιπαὶ εἶνε τρίγωνα ΚΑΒ, ΚΒΓ,..., τὰ ὁποῖα ἔχουσι κοινὴν κορυφὴν Κ κειμένην ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου τοῦ πολυγώνου. Τὸ πολύγωνον, ἐφ᾽ οὗ ἡ πυραμὶς στηρίζεται, ὀνομάζεται *βάσις* τῆς πυραμίδος, τὸ δὲ σημεῖον Κ *κορυφὴ* αὐτῆς. Ἡ πυραμὶς λέγεται τριγωνική, τετραγωνική, πενταγωνικὴ κ.τ.λ., ὅταν ἡ βάσις της εἶνε τρίγωνον, τετράπλευρον, πεντάγωνον, κ.τ.λ.·

τὸ σχ. 119 παριστᾷ ἑξαγωνικὴν πυραμίδα, τὸ σχ. 120 παριστᾷ τριγωνικὴν πυραμίδα. Ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς εἶνε ἓν τετράεδρον (σχ. 110). Ὅταν καὶ τὰ 4 τρίγωνα ΚΑΒ, ΚΒΓ, ΚΓΑ καὶ ΑΒΓ εἶνε ἰσόπλευρα καὶ ἴσα μεταξύ των, τότε ἔχομεν *τὸ κανονικὸν τετράεδρον*. Ἡ κάθετος ΚΗ (σχ. 119 καὶ 120), ἥτις ἄγεται ἐκ τῆς κορυφῆς Κ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως, εἶνε τὸ *ὕψος* τῆς πυραμίδος. Ἡ πυραμὶς προσδιορίζεται, ὅταν εἶνε γνωστὴ ἡ βάσις καὶ ἡ κορυφὴ αὐτῆς.

74. *Ὄγκος πυραμίδος.*— Ἀποδεικνύεται, ὅτι πᾶσα πυραμὶς εἶνε τὸ τρίτον πρίσματος ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος· ἑπομένως *ὁ ὄγκος μιᾶς πυραμίδος ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεως αὐτῆς ἐπὶ τὸ τρίτον τοῦ ὕψους της*· π. χ. μία πυραμὶς ἔχουσα βάσιν τετράγωνον μὲ πλευρὰν 6 μ. καὶ ὕψος 5 μ. ἔχει ὄγκον $= {}^1/_3 \times 6 \times 6 \times 5$ ἢ 12×5 ἢ 60 κ. μ. Τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος ΚΑΒΓ (σχ. 120) ἵνα εὕρωμεν τὸν ὄγκον, πρέπει νὰ μετρήσωμεν μίαν τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως ΑΒΓ (π. χ. τὴν ΑΒ) καὶ τὴν κάθετον ἐπ' αὐτὴν ΓΕ ἐκ τῆς ἀπέναντι κορυφῆς, καὶ τὸ ὕψος ΚΗ τῆς πυραμίδος· ἔστω ΑΒ = 5 μ., ΓΕ = 8 μ., 6 καὶ ΚΗ = 9 μ. Τότε τὸ μὲν ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ΑΒΓ εἶνε $5 \times 8{,}6 : 2 = 5 \times 4{,}3 = 21$ τ. μ., 5 ὁ δὲ ὄγκος τῆς πυραμίδος εἶνε

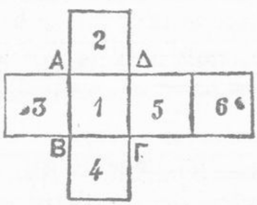
$$21{,}5 \times 9 : 3 = 21{,}5 \times 3 = 64 \text{ κ. μ., } 5.$$

Σημ. *Παράπλευρος ἐπιφάνεια* πυραμίδος εἶνε τὸ ἄθροισμα τῶν πέριξ τριγώνων.

Ἐπανάληψις δι' ἐρωτήσεων καὶ ἀσκήσεων.

Πότε δύο ἐπίπεδα λέγονται παράλληλα ; Πότε μία εὐθεῖα λέγεται κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον ; Ποίαν ἰδιότητα ἔχει ἡ κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον ἡ ἀγομένη ἐκ σημείου ἐκτὸς αὐτοῦ ; Πότε δὲ δύο ἐπίπεδα λέγονται κάθετα; Τί καλεῖται πολύεδρον; Τίεἶνε πρίσμα; Πότε τὸ πρίσμα λέγεται ὀρθόν; Πόσας κορυφὰς καὶ πόσας ἀκμὰς ἔχει ἓν πρίσμα τριγωνικόν, πρίσμα πενταγωνικόν, πρίσμα ἑξαγωνικόν; Τί λέγεται παραλληλεπίπεδον; ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον; κύβος; Τί ὀνομάζομεν διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου; Πόσας ἕδρας, πόσας κορυφὰς καὶ πόσας ἀκμὰς ἔχει α΄ ὁ κύβος; β΄ τὸ τετράεδρον; Ποίαν λαμβάνομεν ὡς μονάδα πρὸς μέτρησιν τῶν ὄγκων; καὶ τίνες αἱ ὑποδιαιρέσεις αὐτῆς; Ἐξήγησον, διατὶ τὸ ἓν κ. μ. περιέχει 1000 κ.π.; Πῶς ἀπαγγέλλομεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν ἐκφράζοντα ὄγκον; Πῶς εὑρίσκεται ὁ ὄγκος παραλληλεπιπέδου; κύβου; πρίσματος; Μὲ τί ἰσοῦται τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας ὀρθοῦ πρίσματος; Τί καλεῖται πυραμίς; Ποῖον σχῆμα ἔχουσιν αἱ ἕδραι της; Τί καλεῖται ὕψος πυραμίδος; Πῶς εὑρίσκεται ὁ ὄγκος μιᾶς πυραμίδος;

1. Διὰ τίνος ἁπλουστάτου μέσου κατασκευάζομεν κύβον ἐκ χαρτονίου; (τοῦτο δεικνύεται ἐν τῷ σχ. 121, ὅπερ εἶνε τὸ ἀνάπτυγμα



Σχ. 121.

τῆς ἐπιφανείας κύβου). 2. Μία αἴθουσα σχολείου ἔχει μῆκος 8 μ. 40, πλάτος 6 μ., 50 καὶ ὕψος 3 μ., 30, διδάσκονται δὲ ἐν αὐτῇ 45 μαθηταί. Πόσαι λίτραι (1) ἀέρος ἀναλογοῦσιν εἰς ἕκαστον μαθητήν;

3. Πόσους κ. δ. δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν μὲ μίαν ῥίγαν μήκους 40 δ.; Τὸ ἐμβαδὸν τῆς καθέτου πρὸς τὸ μῆκος τομῆς εἶνε 1 τ. δ. 4. Κρουνὸς δίδει 15 λίτρας ὕδατος εἰς ἕκαστον πρῶτον

(1) Λίτρα λέγεται ἡ χωρητικότης μιᾶς κυβ. παλάμης.

λεπτόν. Πόσον χρόνον χρειάζεται, ἵνα γεμίσῃ δεξαμενὴν μήκους 2μ., 80, πλάτους 1 μ., 20 καὶ βάθους 0μ., 65.

5. Ξύλινον κιβώτιον σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου πρόκειται νὰ ἐπιστρωθῇ ἐσωτερικῶς διὰ λαμαρίνης. Αἱ ἐσωτερικαὶ διαστάσεις αὐτοῦ εἶνε 1 μ., 85. 1 μ., 25·0 μ., 40. Ἡ λαμαρίνα τιμᾶται 55 λεπτὰ τὸ τ. μ. Ζητεῖται ἡ ἀξία τῆς ἀπαιτηθησομένης λαμαρίνης. 6. Αἱ ἐσωτερικαὶ διαστάσεις κιβωτίου ἔχοντος σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶνε 1 μ., 20· 0 μ., 50· 0 μ, 25. Πόσα τεμάχια σάπωνος δύναται νὰ χωρέσῃ, ἐὰν ἕκαστον τεμάχιον ἔχῃ σχῆμα κύβου, οὗ ἡ πλευρὰ εἶνε 0 μ. 10 ;

7. Μιᾶς πυραμίδος ἡ βάσις εἶνε κανονικὸν ἑξάγωνον ἔχον πλευρὰν 0 μ., 25· ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου τοῦ ἑξαγώνου ἀπὸ μιᾶς πλευρᾶς εἶνε 0 μ., 20. Τὸ δὲ ὕψος τῆς πυραμίδος 3 μ. Ζητεῖται ὁ ὄγκος. 8. Μία ὁδὸς ἔχει μῆκος 4000 μ. καὶ πλάτος 12 μ. Πρόκειται νὰ στρωθῇ διὰ χαλικίων εἰς ὕψος 0 μ., 25. Πόσα κ.μ. χαλικίων χρειάζονται ;

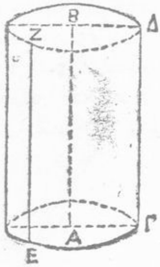
ΠΕΡΙ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ ΚΑΙ ΚΩΝΟΥ

75. Τὸ σῶμα τοῦτο [1] λέγεται *κύλινδρος*. Ἐξετάζοντες αὐτὸ βλέπομεν, ὅτι δὲν ὁμοιάζει μὲ τὰ πολύεδρα, διότι δὲν περιορίζεται πανταχόθεν ὑπὸ ἐπιπέδων σχημάτων· ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ ἀποτελεῖται ἀπὸ 3 μέρη, ὧν τὰ δύο εἶναι κύκλοι ἴσοι καὶ παράλληλοι, τὸ δὲ ἄλλο δὲν εἶνε ἐπίπεδον, εἶνε καμπύλη ἐπιφάνεια. Οἱ δύο ἴσοι κύκλοι λέγονται *βάσεις* τοῦ κυλίνδρου· ἡ εὐθεῖα AB, ἥτις ἑνώνει τὰ κέντρα τῶν κύκλων, εἶνε τὸ *ὕψος* τοῦ κυλίνδρου. Ἐπὶ τῆς καμπύλης ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου δυνάμεθα νὰ χαράξωμεν εὐθείας γραμμὰς μή-

(1) Ὁ διδάσκων δεικνύει κύλινδρον.

κους ἴσου πρὸς τὸ ὕψος καὶ παραλλήλους, καθὼς τὰς ΓΔ, ΕΖ. Αἱ ΑΓ καὶ ΒΔ εἶνε αἱ *ἀκτῖνες* τῶν βάσεων (σχ. 122).

76. *Παραδείγματα.*— Τὰ παραδείγματα τῶν κυλίνδρων εἶνε πολυάριθμα: αἱ καπνοδόχοι τῶν ἀτμοπλοίων, οἱ σωλῆνες οἱ μεταφέροντες τὸ ὕδωρ, τὸ φωταέριον κ. τ. λ., οἱ ὑάλινοι σωλῆνες, μαρμάρινοι στῆλαι, οἱ ὁδοστρωτῆρες, οἱ ἀνεμόμυλοι; οἱ κορμοὶ δένδρων τινῶν, τὰ μολυβδοκόνδυλα (1), οἱ λαιμοὶ τῶν στερνῶν καὶ τῶν φρεάτων, τινὰ ποτήρια κτλ. εἶνε



Σχ. 122.

Σχ. 123.

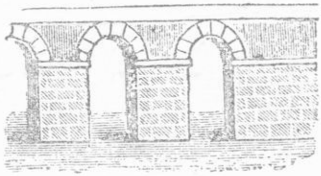
κύλινδροι. Τὸ σπουδαιότερον μέρος τῶν ἀντλιῶν εἶνε εἷς κύλινδρος (2). Τὰ διάφορα μέτρα πρὸς μέτρησιν τῶν ὑγρῶν (σχ. 123) εἶνε κύλινδροι, ὧν τὸ ὕψος εἶνε διπλάσιον τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως. Τὰ νομίσματα εἶνε κύλινδροι, ὧν τὸ ὕψος (ἢ μᾶλλον τὸ πάχος) εἶνε πολὺ μικρότερον τῆς διαμέτρου· π. χ. εἰς τὴν δεκάραν τὸ πάχος εἶνε μόλις τὸ $\frac{1}{20}$ τῆς διαμέτρου. Αἱ ὑδρορρόαι τῶν στεγῶν (τὰ λούκια), οἱ θόλοι τῶν

(1) Τινὰ ἐξ αὐτῶν εἶνε πρισματικά.
(2) Βλέπε Φυσικήν.

ὑδραγωγείων καί τινων γεφυρῶν ἔχουσι σχῆμα ἡμίσεος κυλίνδρου (σχ. 124,125).

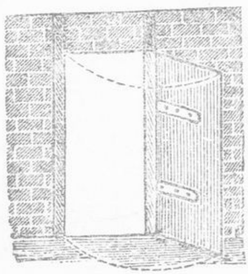
77. *Γένεσις κυλίνδρου.*— Δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν τὸν κύλινδρον καὶ ὡς ἑξῆς: Ἐὰν στρέψωμεν ἓν ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ

Σχ. 125.



Σχ. 124.

περὶ τὴν πλευρὰν αὐτοῦ ΑΒ (σχ. 122), ἥτις μένει ἀκίνητος, πάντοτε κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν, μέχρις οὗ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν προτέραν του θέσιν, γεννᾶται στερεόν, τὸ ὁποῖον λέγεται κύλινδρος. Ἡ ἀκίνητος πλευρὰ ΑΒ τοῦ ὀρθογωνίου λέγεται καὶ *ἄξων* τοῦ κυλίνδρου, ἡ ΓΔ λέγεται *γενέτειρα*, διότι περιστρεφομένη γεννᾷ τὴν καμπύλην ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου· αἱ δύο ἄλλαι πλευραὶ ΑΓ καὶ ΒΔ γράφουσι τοὺς δύο ἴσους κύκλους (τὰς βάσεις τοῦ κυλίνδρου), τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ γράφουσι τὰς περιφερείας τῶν κύκλων τούτων. Οὕτω μία θύρα στρεφομένη περὶ τὸ στήριγμα αὐτῆς γεννᾷ κύλινδρον (σχ. 126).



Σχ. 126.

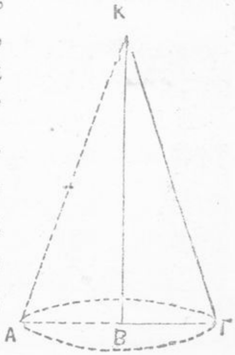
78. *Ἐπιφάνεια καὶ ὄγκος κυλίνδρου.*— Ὁ κύλινδρος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς πρίσμα, οὗ αἱ βάσεις εἶνε κύκλοι ἴσοι. Ἐντεῦθεν ἕπονται ***οἱ κανόνες:***

***1ον.** Τὸ ἐμβαδὸν τῆς καμπύλης ἐπιφανείας τοῦ κυλίν-*

δρου εὑρίσκεται, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος.

2ον. Ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου εὑρίσκεται, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος. Π. χ. Στήλης κυλινδρικῆς τὸ ὕψος ἔστω 11 μ., 50 καὶ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως 2 μ., 50. Τότε ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως ἔχει μῆκος $5\times3{,}14=15$ μ.,70 καὶ ἡ καμπύλη ἐπιφάνεια θὰ εἶνε $15{,}70 \times 11{,}50 = 180$ τ. μ.,55. Ἐὰν προσθέσωμεν καὶ τὰ ἐμβαδὰ τῶν δύο βάσεων, τὰ ὁποῖα εἶνε $2\times15{,}70\times1{,}25 = 2 \times 19$ τ. μ., 6250, θὰ ἔχωμεν *τὴν ὁλικὴν ἐπιφάνειαν* τοῦ κυλίνδρου. Ὁ δὲ ὄγκος τῆς στήλης εἶνε $3{,}14\times(2{,}5)^2\times11{,}50 = 125$ κ. μ.,6875.

79. Περὶ κώνου.— Τὸ σῶμα τοῦτο [1] λέγεται *κῶνος*· ἐπιφάνεια αὐτοῦ περιορίζεται ὑπὸ ἑνὸς κύκλου, ὅστις καλεῖται *βάσις* τοῦ κώνου, καὶ ὑπὸ εὐθειῶν συνδεουσῶν τὰ διάφορα σημεῖα τῆς περιφερείας τῆς βάσεως μεθ' ἑνὸς σημείου Κ ἐκτὸς τῆς βάσεως κειμένου (σχ. 127), ὅπερ καλεῖται *κορυφὴ* τοῦ κώνου. Ἡ εὐθεῖα ΚΒ ἡ συνδέουσα τὴν κορυφὴν μὲ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου καὶ ὀνομάζεται *ὕψος* τοῦ κώνου. Μία τῶν εὐθειῶν ΚΑ, ΚΓ,.... εἶνε ἡ *πλευρὰ* τοῦ κώνου.

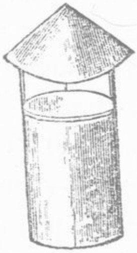


Σχ. 127.

80. Παραδείγματα.— Τὰ χωνία καὶ αἱ σβοῦραι τῶν παίδων (τὸ κατώτερον μέρος αὐτῶν) ἔχουσι σχῆμα κώνου.

(1) Ὁ διδάσκων δεικνύει κῶνον ὀρθόν.

Συνήθως ὁ κῶνος ἀπαντᾶται ἡνωμένος μετὰ τοῦ κυλίνδρου οὕτως: ἄνωθεν τῆς καπνοδόχης θέτουσι κῶνον, ὅστις ἐμποδίζει τὴν βροχὴν νὰ εἰσέλθῃ εἰς τὸν σωλῆνα (σχ. 128). Μι-

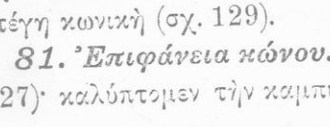


Σχ. 128.

Σχ. 129.

κραὶ ἐξοχικαὶ οἰκίαι (πυργίσκοι), περιστερεῶνες, ἀνεμόμυλοι ἔχουσί συνήθως σχῆμα κυλίνδρου, ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἐπικάθηται στέγη κωνικὴ (σχ. 129).

81. Ἐπιφάνεια κώνου.— Ἔστω εἷς κῶνος ΚΑΓ (σχ. 127)· καλύπτομεν τὴν καμπύλην ἐπιφάνειαν αὐτοῦ διὰ φύλλου χάρτου· εἶτα σχίζομεν αὐτὸ κατὰ μίαν πλευρὰν ΚΓ καὶ ἀναπτύσσομεν ἐπὶ ἐπιπέδου. Εἶνε φανερὸν ὅτι ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως θὰ τραπῇ εἰς κυκλικόν τι τόξον ΓΔΓ′(σχ.130), ἡ δὲ καμπύλη ἐπιφάνεια εἰς τομέα ΑΓΓ′. Ἡ ἀκτὶς ΑΓ τοῦ τομέως εἶνε ἴση μὲ τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου, καὶ τὸ τόξον ΓΔΓ′ ἔχει μῆκος ἴσον μὲ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως τοῦ κώνου. Ὥστε

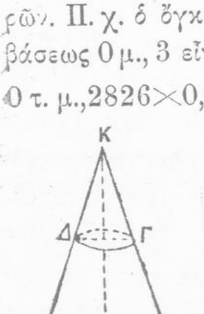


Σχ. 130.

ἡ καμπύλη ἐπιφάνεια τοῦ κώνου ἀναπτυσσομένη ἐπὶ ἐπιπέδου τρέπεται εἰς κυκλικὸν τομέα· ἀλλὰ τὸ ἐμβαδὸν τομέως ἰσοῦται μὲ τὸ μῆκος τοῦ τόξου ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος (ἐδ. 58). Ἄρα *τὸ ἐμβαδὸν τῆς καμπύλης ἐπιφανείας κώνου εὑρίσκεται, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς του.* Π.χ. ἐὰν ΒΓ=0 μ.,3 καὶ ΑΓ = 1 μ., τότε τὸ ἐμβαδὸν τῆς καμπύλης ἐπιφανείας =3,14×0,6×0,5=0 τ. μ.,9420. Προσθέτοντες καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως, τὸ ὁποῖον εἶνε 3,14×0,09=0 τ.μ., 2826 ἔχομεν 1 τ. μ., 2246 διὰ *τὴν ὁλικὴν ἐπιφάνειαν* τοῦ κώνου.

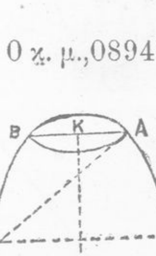
82. Ὄγκος κώνου.— Ὁ κανὼν τῆς εὑρέσεως τοῦ ὄγκου πυραμίδος (ἐδ. 74) ἀληθεύει καὶ διὰ τὸν κῶνον, ἤτο *πολλαπλασιάζομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ τρίτον τοῦ ὕψους.* Πράγματι, ὁ κῶνος δύναται νὰ νοηθῇ ὡς πυραμίς, ἧς ἡ βάσις εἶνε πολύγωνον κανονικὸν ἔχον ἄπειρον πλῆθος πλευρῶν. Π. χ. ὁ ὄγκος κώνου ἔχοντος ὕψος 0 μ.,95 καὶ ἀκτῖνα βάσεως 0 μ., 3 εἶνε

0 τ. μ.,2826×0,95: 3 =0,0942×0,95 = 0 κ. μ.,089490.



Σχ. 131.

83. Ἐὰν κόψωμεν κῶνον δι' ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν, ἡ τομὴ εἶνε κύκλος καὶ ἐὰν ἀφαιρέσωμεν τὸν μικρὸν κῶνον ΚΓΔ (σχ. 131) τὸ ἀπομένον στερεὸν ΑΒΓΔ λέγεται *κόλουρος κῶνος*· τοιοῦτο σχῆμα ἔχουσιν αἱ γάστραι, αἱ λεκάναι, καλύμματά τινα τῶν λαμπῶν, ἵνα πίπτῃ τὸ φῶς πρὸς τὰ κάτω (ἀμπαζούρ).



Σχ. 132.

84. Ὄγκος τῶν βαρελίων.— Πολλαὶ μέθοδοι ἐπροτάθησαν πρὸς μέτρησιν τῆς χωρητικότητος ἑνὸς βαρελίου· ἡ ἁπλουστέρα συνίσταται εἰς τὸ νὰ ἐξομοιώσωμεν τὸ βαρέλιον μὲ κύλινδρον ἔχοντα ὕψος τὴν ἀπόστασιν ΚΛ τῶν δύο βάσεων τοῦ βαρελίου καὶ διάμετρον τὸν μέσον ὅρον τῆς διαμέτρου ΕΖ (τῆς βάσεως) καὶ τῆς διαμέτρου ΓΔ (τοῦ μέσου). Ἔστω βαρέλιον (σχ. 132) ἔχον τὰς ἑξῆς διαστάσεις: Ὕψος ΚΛ = 1 μ. 40. ΕΖ=0 μ.,68 καὶ ΓΔ=0 μ.,80· μέσος ὅρος τῶν διαμέτρων: $\frac{0,68+0,80}{2}$ = 0 μ.,74. Ὁ ὄγκος κυλίνδρου ἔχοντος ὕψος 1 μ.,40 καὶ διάμετρον 0 μ.,74 $=3,14\times(0,37)^2\times1,40$ = 602 λίτραι (περίπου).

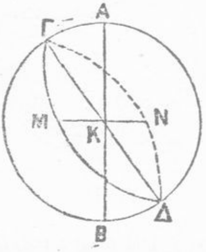
Σημ. Εἰς τὰ τελωνεῖα μεταχειρίζονται τὸν τύπον: ὄγκος $= 0,525\times\delta^3$, ὅπου δ παριστᾷ τὸ μῆκος τῆς διαγωνίου ΓΑ. Π.χ. ἐὰν ΓΑ = 1 μ. ἢ 10 π., τότε ὄγκος $= 0,525\times10^3 = 0,525\times1000 = 525$ λίτρας. Ἐὰν ΓΑ = 2 μ. ἢ 20 π., τότε ὄγκος $=0,525\times20^3=0,525\times8000=4200$ λίτρας. Κατασκευάζουσι πίνακα διαφόρων τιμῶν τοῦ ὄγκου ἀντιστοιχουσῶν εἰς διαφόρους τιμὰς τῆς διαγωνίου ΓΑ. Διὰ τῶν τιμῶν τούτων βαθμολογοῦσι μίαν ῥάβδον, τὴν ὁποίαν εἰσάγοντες εἰς τὸ βαρέλιον κατὰ τὴν διεύθυνσιν ΓΑ, ἀναγινώσκουσιν ἀμέσως τὴν χωρητικότητα.

Ἐπανάληψις δι' ἐρωτήσεων καὶ ἀσκήσεων.

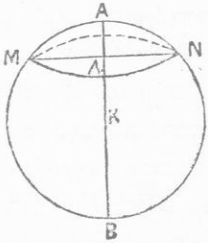
Πῶς γεννᾶται εἷς κύλινδρος; Ποία γραμμὴ γεννᾷ τὴν καμπύλην ἐπιφάνειαν αὐτοῦ; Δι' ἑκάστου σημείου τῆς καμπύλης ἐπιφανείας ἑνὸς κυλίνδρου πόσας εὐθείας δυνάμεθα νὰ χαράξωμεν κειμένας ἐπ' αὐτῆς; Ἀνάφερε παραδείγματα σωμάτων ἐχόντων σχῆμα κυλίνδρου. Πῶς εὑρίσκεται τὸ ἐμβαδὸν τῆς καμπύλης ἐπιφανείας κυλίνδρου; Θέλομεν νὰ καλύψωμεν διὰ χαρτίου τὴν καμπύλην ἐπιφάνειαν κυλίνδρου ἔχοντος ὕψος 12 δακτύλων καὶ περιφέρειαν βάσεως 20 δ., ποῖον σχῆμα πρέπει νὰ ἀποκόψωμεν ἐκ τοῦ χαρτίου; Πῶς εὑρίσκεται ὁ ὄγκος κυλίνδρου; Σχεδίασον ἕνα κῶνον καὶ δεῖξον τὴν κορυφήν, τὸ ὕψος, τὴν πλευρὰν καὶ τὴν βάσιν αὐτοῦ. Ἀνάφερε παραδείγματα κώνου. Ποῖον στερεὸν γεννᾶται διὰ τῆς περιστροφῆς ὀρθογωνίου τριγώνου ΚΒΓ περὶ μίαν τῶν καθέτων αὐτοῦ πλευρῶν ΚΒ (σχ. 127), ἥτις μένει ἀκίνητος; Κατὰ τὴν περιστροφὴν ταύτην τί γράφει 1) ἡ πλευρὰ ΒΓ, 2) ἡ ὑποτείνουσα ΚΓ, 3) ἓν σημεῖον τῆς ὑποτεινούσης; Ποῖον στερεὸν γεννᾶται διὰ τῆς περιστροφῆς οἱουδήποτε τριγώνου περὶ μίαν τῶν πλευρῶν του; (Βλ. ἐδ. 21, Σημ.). Δι' ἑκάστου σημείου τῆς καμπύλης ἐπιφανείας ἑνὸς κώνου πόσας εὐθείας δυνάμεθα νὰ χαράξωμεν κειμένας ἐπ' αὐτῆς; Ποῖον σχῆμα λαμβάνει καμπύλη ἐπιφάνεια κώνου ἀναπτυσσομένη ἐπὶ ἐπιπέδου; Θέλομεν νὰ καλύψωμεν διὰ χαρτίου τὴν ἐπιφάνειαν κώνου, οὗ ἡ πλευρὰ εἶνε 6 δ. καὶ ἡ διάμετρος τῆς βάσεως 6 δακ., ποῖον σχῆμα πρέπει νὰ σχεδιάσωμεν καὶ ἀποκόψωμεν ἐκ τοῦ χαρτίου; Πῶς εὑρίσκεται τὸ ἐμβαδὸν 1) τῆς καμπύλης ἐπιφανείας τοῦ κώνου καὶ 2) ὁ ὄγκος αὐτοῦ; Τί καλεῖται κόλουρος κῶνος; Ἀνάφερε παραδείγματα αὐτοῦ. Πῶς εὑρίσκεται ὁ ὄγκος τῶν βαρελίων; 1. Πρόκειται νὰ βερνικώσωμεν κυλινδρικὸν σωλῆνα, οὗ ἡ περιφέρεια εἶνε 3 μ.,25 καὶ τὸ ὕψος 13 μ.,40· πόσον θὰ πληρώσωμεν πρὸς 75 λεπτ. τὸ τ. μέτρον; 2. Πόσα κ. μ. χώματος πρέπει νὰ ἀφαιρέσωμεν ἐκ τῆς γῆς, ἵνα κατασκευάσωμεν φρέαρ κυλινδρικὸν βάθους 12 μ. καὶ διαμέτρου 1 μ.,25; 3. Δύο δεξαμεναί, ἡ μία κυλινδρικὴ ὕψους 4 μ. καὶ βάσεως 12 τ. μ. καὶ ἡ ἄλλη κυβικὴ πλευρᾶς 4 μ. εἶνε πλήρεις ὕδατος· ποία περιέχει περισσότερον ὕδωρ; 4. Ἡ χωρητικότης δεξαμενῆς κυλινδρικῆς εἶνε 150028 λίτραι καὶ τὸ βάθος 0 μ., 56. Ζητεῖται τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως τῆς δεξαμενῆς. 5. Πόσος τσίγκος χρειάζεται, διὰ νὰ καλύψωμεν στέγην κωνικὴν ἔχουσαν περιφέρειαν βάσεως 9 μ. καὶ πλευρὰν 5 μέτρ.; 6. Ἀξιωματικὸς θέλει νὰ στήσῃ σκηνὴν κωνικοῦ σχήματος, ἧς ὁ ἐσωτερικὸς ὄγκος νὰ εἶνε 2 κ.μ. καὶ τὸ ὕψος 2 μ.· ποῖον θὰ εἶνε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως;

III. ΠΕΡΙ ΣΦΑΙΡΑΣ

85. Τὸ σῶμα τοῦτο (1) καλεῖται σφαῖρα. Τὰ ἐξ ἐλαστικοῦ τόπια καὶ οἱ βῶλοι τῶν παίδων, αἱ σφαῖραι (μπάλλαι) τῶν τηλεβόλων, τὰ πορτοκάλλια, τινὰ ἀερόστατα κτλ. ἔστωσαν παραδείγματα σφαίρας. Ὁ ὁρισμὸς τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας εἶνε ἀνάλογος πρὸς τὸν τῆς περιφερείας κύκλου (ἐδ. 29), διότι ἐντὸς αὐτῆς ὑπάρχει ἓν σημεῖον Κ (Σχ. 133), καλούμενον *κέντρον*, ὅπερ ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπ' ὅλα τὰ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας Α, Β, Γ, Δ, ... Αἱ ἴσαι αὗται ἀποστάσεις ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ, ΚΔ, ΚΜ, ΚΝ καλοῦνται *ἀκτῖνες* τῆς σφαίρας. Καλεῖται *διάμετρος* τῆς σφαίρας πᾶσα εὐθεῖα, ἥτις διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου καὶ ἔχει τὰ ἄκρα της εἰς τὴν ἐπιφάνειαν· π. χ. αἱ εὐθεῖαι ΑΚΒ, ΓΚΔ, ΜΚΝ. Ἑκάστη διάμετρος εἶνε διπλασία τῆς ἀκτῖνος, ἑπομένως πᾶσαι αἱ διάμετροι εἶνε ἴσαι.



Σχ. 133.



Σχ. 134.

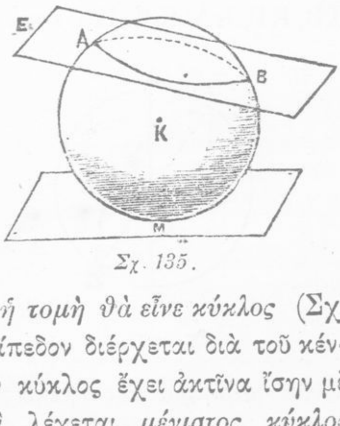
86. ***Γένεσις σφαίρας.***— Ἐὰν στρέψωμεν ἡμικύκλιον ΑΜΒΚΑ (σχ. 134) περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ ΑΒ, θὰ ἔλθῃ

---

(1) Ὁ διδάσκων δεικνύει σφαῖραν.

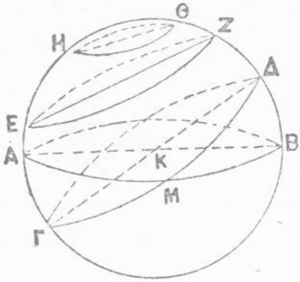
διαδοχικῶς εἰς διαφόρους θέσεις ἐκτοπίζον οὕτως ὡρισμένον χῶρον κατὰ τὴν διάβασίν του, ὅστις λέγεται *ὄγκος τῆς σφαίρας*. Ἡ ἡμιπεριφέρεια ΑΜΒ κατὰ τὴν περιστροφὴν γεννᾷ *τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας*. Πᾶν σημεῖον Μ τῆς ἡμιπεριφερείας γράφει κατὰ τὴν περιστροφὴν περιφέρειαν ΜΝ ἔχουσαν τὸ κέντρον Λ ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΑΒ καὶ ἀκτῖνα ΛΜ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ.

87. Ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον.— Ἐὰν θέσωμεν σφαῖραν ἐπὶ ἐπιπέδου, δι' ἑνὸς μόνου σημείου της στηρίζεται ἐπ' αὐτοῦ· ἐὰν θελήσωμεν νὰ ἐφαρμόσωμεν μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, ἡ σφαῖρα θὰ διαρραγῇ ἢ θὰ μετασχηματισθῇ, καθὼς συμβαίνει εἰς τὸ ἐξ ἐλαστικοῦ τόπι. *Ἐφαπτόμενον* εἰς σφαῖραν λέγεται ἓν ἐπίπεδον, ὅταν ἔχῃ ἓν μόνον σημεῖον Μ κοινὸν μὲ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας, ὅπερ λέγεται *σημεῖον ἐπαφῆς* (σχ. 135). *Ἐὰν κόψωμεν μίαν σφαῖραν δι' ἐπιπέδου* Ε, *ἡ τομὴ θὰ εἶνε κύκλος* (Σχ. 135). Καὶ ἂν μὲν τὸ τέμνον ἐπίπεδον διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, ὁ προκύπτων κύκλος ἔχει ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας καὶ λέγεται *μέγιστος κύκλος* τῆς σφαίρας, διότι εἶνε ὁ μεγαλύτερος κύκλος, ὃν δυνάμεθα νὰ γράψωμεν ἐπ' αὐτῆς· π. χ. οἱ κύκλοι ΑΜΒ, ΓΜΔ (σχ. 136) εἶνε μέγιστοι. Ἐὰν δὲ τὸ τέμνον ἐπίπεδον δὲν διέρχηται διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, ὁ προκύπτων κύκλος λέγεται *μικρός*· π. χ. οἱ κύκλοι ΕΖ, ΗΘ εἶνε μικροί. Οἱ μικροὶ κύκλοι γίνονται τόσον μικρότεροι, ὅσον τὸ τέμνον ἐπίπεδον ἀπομακρύνε-

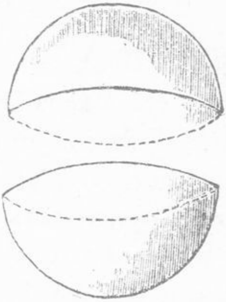


Σχ. 135.

ται περισσότερον ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. *Ἡμισφαίρια* λέγονται τὰ δύο ἴσα μέρη, εἰς ἃ πᾶς μέγιστος κύκλος διαιρεῖ τὴν σφαῖραν (σχ. 137).

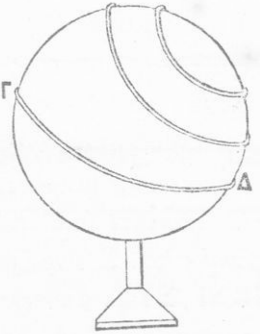


Σχ. 136.



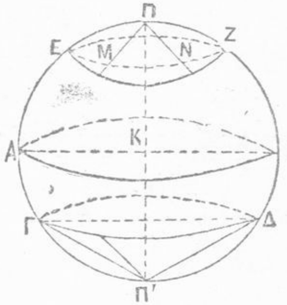
Σχ. 137.

88. *Ἐξέλεγξις σφαιρικῆς ἐπιφανείας.* — Κατασκευάζομεν ἐκ σύρματος διαφόρους κύκλους ἀκτῖνος μικροτέρας ἢ τὸ πολὺ ἴσης μὲ τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας, καὶ ἐφαρμόζομεν ἕκαστον ἐπὶ τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας εἰς διαφόρους θέσεις (σχ.138). Ἐάν τις ἐξ αὐτῶν δὲν ἐφαρμόσῃ ἀκριβῶς, συμπεραίνομεν ὅτι εἰς τὸ μέρος τοῦτο ἡ ἐπιφάνεια δὲν εἶνε σφαιρική. Ἐὰν ἡ διάμετρος τοῦ δακτυλίου ΓΔ εἶνε ἀκριβῶς ἴση μὲ τὴν διάμετρον τῆς σφαίρας, θὰ διέλθῃ οὗτος μετά τινος τριβῆς.



Σχ. 138.

89. *Πόλοι κύκλου.* — Λέγονται *πόλοι* ἑνὸς κύκλου ΕΖ κεχαραγμένου ἐπὶ σφαίρας τὰ δύο ἄκρα Π καὶ Π′ τῆς διαμέτρου, ἥτις εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου (σχ. 139). Ἐκ τοῦ τρόπου τῆς γενέσεως τῆς σφαίρας βλέπομεν ὅτι αἱ ἀποστάσεις ΠΕ, ΠΜ, ΠΝ, ΠΖ κτλ. τοῦ πόλου Π ἀπὸ τὰ διάφορα σημεῖα τῆς περιφερείας εἶνε ἴσαι· διότι, ὅταν τὸ ἡμικύκλιον ΠΕΠ′ στρέφηται περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ, τὸ σημεῖον Π μένει ἀκίνητον, τὸ σημεῖον Ε γράφει τὴν περιφέρειαν ΕΖ καὶ κατὰ τὴν κίνησιν ταύτην ἡ χορδὴ ΠΕ δὲν ἀλλάσσει μῆκος. Ὅλοι οἱ κύκλοι ΕΖ, ΑΒ, ΓΔ,... ὧν τὰ ἐπίπεδα εἶνε παράλληλα, ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς πόλους Π καὶ Π′.



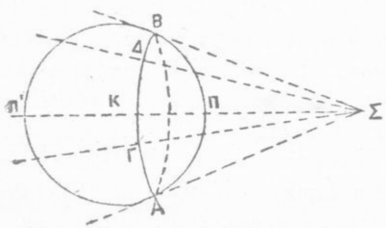
Σχ. 139.

Μεταξὺ τῶν ἀπείρων τούτων κύκλων, εἷς εἶνε ὁ μέγιστος, ὁ ΑΒ Τὰ κέντρα των κεῖνται ἐπὶ τῆς γραμμῆς τῶν πόλων ΠΠ′ Οἱ κύκλοι οὗτοι λέγονται *παράλληλοι* τῆς σφαίρας.

90. *Ζώνη*.— Οἱ παράλληλοι τῆς σφαίρας διαιροῦσι τὴν ἐπιφάνειαν αὐτῆς εἰς λωρίδας, αἱ ὁποῖαι καλοῦνται *ζῶναι*. Ἀφ᾽ οἱουδήποτε σημείου Σ καὶ ἂν ἴδωμεν μίανσφαῖραν, δὲν φαίνεται ὁλόκληρος, ἀλλὰ μέρος μόνον αὐτῆς μικρότερον ἡμισφαιρίου, τὸ ὁποῖον περιορίζεται πάντοτε ὑπὸ περιφερείας. Τὸ μέρος τοῦτο ΑΠΒ ὁρατὸν ἐκ τοῦ Σ εἶνε ζώνη (σχ. 140.). Αἱ ὀπτικαὶ ἀκτῖνες ΣΑ, ΣΒ, ΣΓ, ΣΔ,.... ἀποτελοῦσιν ἐπιφάνειαν κώνου ἐγγίζουσαν τὴν σφαῖραν κατὰ τὴν περιριφέρειαν ΑΒ. Ὁ εἰς τὸ Σ παρατηρητὴς οὐδὲν σημεῖον τοῦ μέρους ΑΠ′Β δύναται νὰ ἴδῃ. Ἡ σφαῖρα εἶνε τὸ μόνον σῶμα, τὸ ὁποῖον ἀφ᾽ οἱουδήποτε σημείου καὶ ἂν φαίνηται, περιορίζεται πάντοτε ὑπὸ κυκλικοῦ γύρου. Πρέπει νὰ τεθῇ τις εἰς πολὺ μεγάλην ἀπόστασιν, ἵνα ἴδῃ τὸ ἥμισυ περίπου τῆς σφαίρας. Τοῦτο συμβαίνει εἰς τὰ ἄστρα, π. χ. εἰς τὸν ἥλιον, εἰς τὴν σελήνην κτλ., τὰ ὁποῖα εἶνε πολὺ μακρὰν ἀφ' ἡμῶν καὶ περιορίζονται ὑπὸ περιφερείας μεγίστου κύκλου (περίπου).

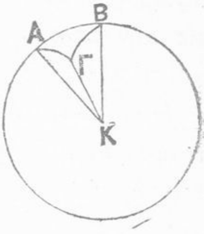
91. *Ἐμβαδὸν ἐπιφανείας σφαίρας. Κανών.* — *Ἡ ἐπιφάνεια μιᾶς σφαίρας ἔχει ἐμβαδὸν ἴσον πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τεσσάρων μεγίστων κύκλων αὐτῆς.* Π. χ. ἐὰν ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας εἶνε 1 π. εἷς μέγιστος κύκλος αὐτῆς θὰ ἔχῃ ἐμβαδὸν $3{,}14 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3{,}14}{4}$ τ. π., ἡ δὲ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας $\frac{3{,}14}{4} \times 4 = 3$ τ. π. 14 τ. δ.

Ἡ ἐξήγησις τοῦ κανόνος τούτου δὲν εἶνε τόσον εὔκολος, ὅσον εἰς τὸν κύλινδρον (ἐδ. 78) καὶ εἰς τὸν κῶνον (ἐδ. 81), διότι αἱ ἐπιφάνειαι τοῦ κυλίνδρου καὶ τοῦ κώνου εἶνε ἀναπτυκταί, δηλ. ἐκτυλίσσονται ἢ ἀναπτύσσονται ἐπὶ ἐπιπέδου, ἐν ᾧ, ἂν ἐπιχειρήσωμεν νὰ ἀναπτύξωμεν ἐπὶ ἐπιπέδου καὶ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας, θὰ ἴδωμεν ὅτι τοῦτο εἶνε ἀδύνατον, ἐκτὸς ἂν σχίσωμεν ἢ συμπτύξωμεν μέρος τι αὐτῆς.



Σχ. 140.

92. *Ὄγκος σφαίρας. Κανών.* *Ὁ ὄγκος μιᾶς σφαίρας εὑρίσκεται, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας της ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνός της.* Π. χ. ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας, ἥτις ἔχει διάμετρον 1 π., θὰ εἶνε 3 τ. π.,14 $\times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{3{,}14}{6} = 523$ κ. δ. (περίπου). Ἵνα ἐξηγήσωμεν τὸν κανόνα τοῦτον, ἑνώνομεν τὸ κέντρον τῆς σφαίρας μὲ τρία σημεῖα Α, Β, Γ τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς πολὺ πλησίον ἀλλήλων κείμενα (σχ. 141). Τὸ στερεὸν ΚΑΒΓ θὰ διαφέρῃ πολὺ ὀλίγον μιᾶς τριγωνικῆς πυραμίδος καὶ ἑπομένως ὁ ὄγκος του εἶνε ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεως ΑΒΓ ἐπὶ τὸ τρίτον τοῦ ὕψους (ἐδ. 74), δηλ. ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας. Ἐὰν νοήσωμεν τὴν σφαῖραν διῃρημένην εἰς πολλὰς



Σχ. 141.

τοιαύτας τριγωνικὰς πυραμίδας, βλέπομεν ὅτι ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας θὰ εἶνε ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν βάσεών των (δηλ. μὲ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας) ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος.

Επανάληψις δι' ἐρωτήσεων καὶ ἀσκήσεων.

Ποίαν ἰδιότητα ἔχουσιν ὅλα τὰ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας μιᾶς σφαίρας ; Ποῖα σχήματα πρέπει νὰ στρέφωμεν περὶ ἀκίνητον ἄξονα, ἵνα παραχθῶσι 1) κύλινδρος ; 2) κῶνος ; 3) κόλουρος κῶνος ; 4) σφαῖρα ; Ἀνάφερε παραδείγματα σφαιρικῶν σωμάτων. Τί καλεῖται ἀκτὶς καὶ τί διάμετρος σφαίρας ; Τί καλεῖται ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον εἰς σφαῖραν ; Κατὰ ποίαν γραμμὴν ἓν ἐπίπεδον κόπτει τὴν ἐπιφάνειαν σφαίρας ; Ποῖοι καλοῦνται μέγιστοι κύκλοι μιᾶς σφαίρας καὶ πόσους δυνάμεθα νὰ χαράξωμεν ἐπ' αὐτῆς ; Πῶς ἐξελέγχομεν, ἂν μία ἐπιφάνεια εἶνε σφαιρική ; Τί λέγονται πόλοι ἑνὸς κύκλου τῆς σφαίρας ; Τί λέγονται παράλληλοι τῆς σφαίρας καὶ τί ζῶναι ; Πῶς εὑρίσκεται 1) τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας; 2) ὁ ὄγκος αὐτῆς;

1. Πόσον ὕδωρ χωρεῖ σφαιρικὸν δοχεῖον ἀκτῖνος 0 μ., 25 ; (Εὑρίσκομεν ὅτι ὁ ὄγκος του εἶνε 65 κ. π. $^5/_{12}$. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ βάρος τοῦ ἐν τῷ δοχείῳ χωροῦντος ὕδατος, πρέπει νὰ γνωρίζωμεν ὅτι μία λίτρα ὕδατος (δηλ. μία κ. π.) ζυγίζει ἓν χιλιόγραμμον ἢ $312\ ^1/_2$ δρμ.· ἑπομένως $65\ ^5/_{12}$ κ.π. θὰ ζυγίζωσιν $65\ ^5/_{12} \times 312\ ^1/_2 = 20442\ ^{17}/_{24}$ δρμ., ἤτοι 51 ὀκ. $42\ ^{17}/_{24}$ δρ.).

Σημ. Ἐὰν τὸ δοχεῖον περιεῖχεν ὑδράργυρον, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ βάρος, πρέπει νὰ γνωρίζωμεν ὅτι ὁ ὑδράργυρος εἶνε $13\ ^1/_2$ φορὰς βαρύτερος ἴσου ὄγκου ὕδατος. Ὅταν συγκρίνωμεν τὸ βάρος σώματός τινος πρὸς τὸ βάρος ἴσου ὄγκου ὕδατος, εὑρίσκομεν ἀριθμόν, ὅστις ἐν τῇ Φυσικῇ καλεῖται *εἰδικὸν βάρος* τῆς ὕλης, ἐξ ἧς τὸ σῶμα σύγκειται· ὁ ἀριθμὸς οὗτος δύναται νὰ εἶνε μεγαλύτερος ἢ μικρότερος τῆς μονάδος, καθόσον τὸ σῶμα εἶνε βαρύτερον ἴσου ὄγκου ὕδατος (καθὼς τὰ μέταλλα, τὸ μάρμαρον) ἢ ἐλαφρότερον (οἰνόπνευμα, ἔλαιον, ξύλον κτλ.) Ἡ γνῶσις τοῦ εἰδικοῦ βάρους τῶν σωμάτων εἶνε πολὺ χρήσιμος, διότι 1ον *εὑρίσκομεν τὸ βάρος ἑνὸς σώματος εἰς χιλιόγραμμα* χωρὶς νὰ τὸ ζυγίσωμεν, ἀρκεῖ νὰ γνωρίζωμεν τὸν ὄγκον του εἰς κ. π. *Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν τὸν ὄγκον ἐπὶ τὸ εἰδικὸν βάρος.* 2ον *Εὑρίσκομεν τὸν ὄγκον σώματος εἰς κυβ. παλ.*, ὅταν γνωρίζωμεν τὸ βάρος αὐτοῦ εἰς χιλιόγραμμα. *Πρὸς τοῦτο διαιροῦμεν τὸ βάρος διὰ τοῦ εἰδικοῦ βάρους.*

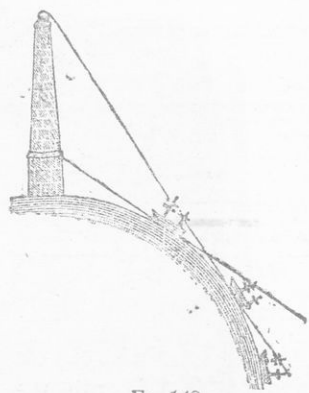
2ον Τεμάχιον μαρμάρου ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, οὗ αἱ διαστάσεις εἶνε 1 μ.,50· 1 μ.,20 καὶ 0 μ.,80· πόσον εἶνε τὸ βάρος του; Εἰδ. βάρ. μαρμάρου : 2,7 (Ἀπ. 3888 χιλιόγρ. ἢ 3037 ὀκ. 200 δρμ.). 3. Τεμάχιον μολύβδου ζυγίζει 345 χιλιόγρ· ποῖος εἶνε ὁ ὄγκος του : Εἰδ. βάρ. μολύβδου: 11, 5 (Ἀπ. 30 κυβ. παλ. . 4. Πόσα τετραγ. μέτρα ὑφάσματος χρειάζονται δι' ἓν ἀερόστατον ἔχον διάμετρον 3 μ.,14 ; Πόσα κυβ. μέτ. φωταερίου χρειάζονται πρὸς πλήρωσιν τοῦ ἀεροστάτου ; 5. Ἡ περιφέρεια μεγίστου κύκλου μιᾶς σφαίρας εἶνε 18 μ. Ζητεῖται ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας.

IV. ΕΚ ΤΗΣ ΚΟΣΜΟΓΡΑΦΙΑΣ ΤΑ ΣΧΕΤΙΖΟΜΕΝΑ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΣΦΑΙΡΑΝ

93. *α') Ἡ γῆ εἶνε σῶμα μεμονωμένον εἰς τὸ διάστημα, δὲν ὑποβαστάζεται ὑπὸ ἄλλου σώματος.* Τοῦτο συμπεραίνομεν ἐκ τῶν πολλῶν ταξειδίων, τὰ ὁποῖα διάφοροι θαλασσοπόροι ἔκαμον περὶ τὴν γῆν· εἰς οὐδὲν μέρος αὐτῆς εὗρον ὑποστήριγμα.

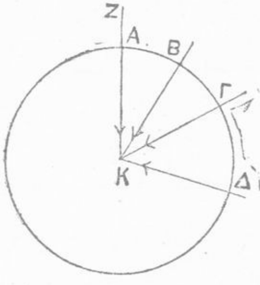
β') Ἡ ἐπιφάνεια τῶν θαλασσῶν δὲν εἶνε ἐπίπεδος, καθὼς ἐνόμιζον οἱ ἀρχαῖοι, ἀλλὰ καμπύλη. Περὶ τούτου πειθόμεθα, ἐὰν σταθῶμεν εἰς παραλίαν καὶ παρατηρῶμεν πλοῖον ἀπαμακρυνόμενον αὐτῆς. Καθόσον τὸ πλοῖον ἀπομακρύνεται, φαίνεται μὲν μικρότερον, ἀλλὰ τὸ βλέπομεν ὁλόκληρον, μέχρις ὅτου φθάσῃ ἐκεῖ, ὅπου ὁ οὐρανὸς φαίνεται ὅτι ἐγγίζει τὴν γῆν (δηλ. εἰς τὴν γραμμὴν τοῦ ὁρίζοντος). Ἀπ' ἐκεῖ, ἐὰν τὸ πλοῖον ἐξακολουθήσῃ νὰ ἀπομακρύνηται, τὸ σκάφος ἐξαφανίζεται πρῶτον καὶ κατόπιν οἱ ἱστοὶ (σχ 142). Ἐὰν μεταχειρισθῶμεν καὶ τὸ ἰσχυρότερον τηλεσκόπιον, δὲν θὰ τὸ ἴδωμεν πλέον, παρὰ μόνον, ἐὰν ἀναβῶμεν εἰς ὑψηλότερον μέρος.

γ'. Ἡ ἐπιφάνεια τῶν θαλασσῶν καλύπτει τὰ $^3/_4$ περίπου τῆς ἐπιφανείας τῆς γῆς. Ἡ ξηρὰ κεῖται ὀλίγον ὑψηλότερον ἀπὸ τὴν θάλασσαν (280 μ. κατὰ μέσον ὅρον): αἱ ἀνωμαλίαι αὐτῆς (ὄρη κτλ.) δὲν μᾶς ἐμποδίζουσι νὰ θεωρήσωμεν τὴν ξηρὰν ὡς συνέχειαν τῆς θαλάσσης, διότι ἡ ὑψηλοτέρα κορυφὴ τῶν Ἱμαλαΐων ὀρέων (Γκαουρι-ζάγκαρ 8840 μ.) συγκρινομένη πρὸς τὸ μέγεθος τῆς γῆς, εἶνε καθὼς αἱ ἀνωμαλίαι τοῦ φλοιοῦ τοῦ πορτοκαλλίου πρὸς τὸ μέγεθος αὐτοῦ.



Σχ. 142.

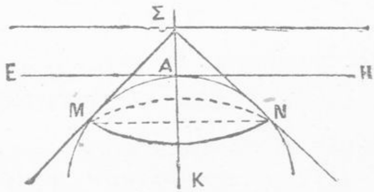
δ'. Ἡ γῆ ἔχει σχῆμα περίπου σφαιρικόν. Ἐὰν εὑρεθῶμεν εἰς ἀνοικτὸν πέλαγος, ὥστε νὰ μὴ βλέπωμεν ξηράν, φαίνεται ἡ θάλασσα περιοριζομένη ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς, ἡ ὁποία ὁμοιάζει μὲ περιφέρειαν κύκλου· τὸ φαινόμενον τοῦτο συμβαίνει εἰς οἱανδήποτε ἀνοικτὴν θάλασσαν καὶ ἂν εὑρεθῶμεν. Ἀλλ' εἴπομεν (ἐδ. 90) ὅτι ἡ σφαῖρα εἶνε τὸ μόνον σῶμα, τὸ ὁποῖον ὁρώμενον ἐξ οἱουδήποτε σημείου περιορίζεται πάντοτε ὑπὸ κυκλικοῦ γύρου. Συμπεραίνομεν λοιπὸν ὅτι ἡ γῆ ἔχει σχῆμα περίπου σφαιρικόν· ἐὰν δὲ ἐκ πρώτης ὄψεως μᾶς φαίνεται ὡς δίσκος, τοῦτο ὀφείλεται εἰς τὸν ὀφθαλμόν μας, ὅστις δὲν δύναται νὰ περιλάβῃ μέγα τμῆμα αὐτῆς.



Σχ. 143.

94. *Κατακόρυφος* (1) λέγεται ἡ διεύθυνσις τοῦ νήματος τῆς στάθμης, ὅταν τοῦτο εἶνε ἀκίνητον· ἡ κατακόρυφος εἶνε κάθετος εἰς τὴν ἐπιφάνειαν ἠρεμοῦντος ὕδατος (λίμνης, θαλάσσης ἐν γαλήνῃ κτλ.) καὶ διευθύνεται πρὸς τὸ κέντρον τῆς γῆς, δηλ. ἀκολουθεῖ μίαν ἀκτῖνα. Τοῦτο δεικνύει ὅτι ὅλα τὰ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς γῆς σώματα ἕλκονται ὑπ' αὐτῆς πρὸς τὸ κέντρον· ἡ ἕλξις αὕτη καλεῖται *βαρύτης* (σχ. 143). Πᾶν ἐπίπεδον διὰ τῆς κατακορύφου ἀγόμενον λέγεται *κατακόρυφον*.

95. Εἰς ἕνα τόπον Α (σχ. 144), *ὁριζόντιον* λέγεται τὸ ἐπίπεδον ΕΗ, τὸ ὁποῖον εἶνε κάθετον ἐπὶ τὴν κατακόρυφον ΚΑΣ τοῦ σημείου Α. Ἐὰν τὸ σημεῖον Α κεῖται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς γῆς, τὸ ἐπίπεδον ΕΗ εἶνε ἐφαπτόμενον τῆς σφαίρας· ἐὰν ἀνέλθωμεν εἰς τὸ Σ ὀλίγον ὑψηλότερον τῆς γηΐνης ἐπιφανείας, τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον τοῦ Σ δὲν συναντᾷ τὴν

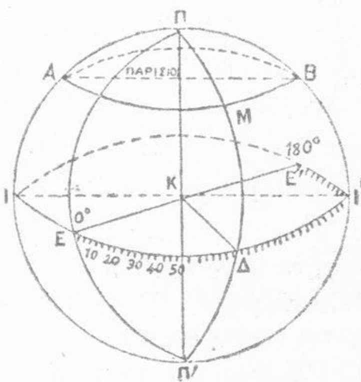


Σχ. 144.

(1) Δὲν πρέπει νὰ συγχέωμεν τὴν κάθετον ἐπὶ εὐθεῖαν μὲ τὴν κατακόρυφον.

γῆν· τὸ μέρος τῆς γηίνης ἐπιφανείας, τὸ ὁποῖον βλέπομεν ἐκ τοῦ Σ εἶνε μία ζώνη ΑΜΝ πολὺ μικρὰ πάντοτε καὶ διὰ τοῦτο φαίνεται ἐπίπεδος.

96. *Ἡ γῆ στρέφεται περὶ μίαν τῶν διαμέτρων της.* Καθ' ἡμέραν (24 ὥρ.) ἐκτελεῖ μίαν περιστροφήν· ἡ διάμετρος αὕτη ΠΠ' καλεῖται *ἄξων* τῆς γῆς· τὰ δύο ἄκρα τοῦ ἄξονος καλοῦνται *πόλοι*· ὁ βόρειος πόλος Π καὶ ὁ νότιος πόλος Π' (σχ. 145). *Ἰσημερινὸς* καλεῖται ὁ μέγιστος κύκλος ΙΔΙ' τῆς γῆς, οὗ τὸ ἐπίπεδον εἶνε κάθετον εἰς τὸν ἄξονα· διαιρεῖ τὴν γῆν εἰς δύο ἡμισφαίρια, τὸ βόρειον καὶ τὸ νότιον. Πᾶν σημεῖον Μ τῆς γῆς στρεφόμενον περὶ τὴν ΠΠ' γράφει κύκλον ΑΜΒ, ὅστις καλεῖται *παράλληλος* τοῦ σημείου Μ. Μεσημβρινὸς τοῦ σημείου Μ λέγεται ὁ μέγιστος κύκλος, ὅστις διέρχεται διὰ τῆς κατακορύφου τοῦ σημείου Μ καὶ διὰ τῶν δύο πόλων Π καὶ Π'.



Σχ. 145.

97. Γεωγραφικὸν μῆκος καὶ πλάτος.— Ἐκ τῶν πολλῶν μεσημβρινῶν, οὓς δυνάμεθα νὰ φαντασθῶμεν κεχαραγμένους ἐπὶ τῆς γηίνης σφαίρας, ἂς λάβωμεν ἕνα, π.χ. τὸν διερχόμενον διὰ τῶν Παρισίων, τὸν ὁποῖον θὰ καλέσωμεν *πρῶτον μεσημβρινόν.* Ἔστω ΠΕΠ' τὸ ἥμισυ τοῦ μεσημβρινοῦ τούτου, τὸ ὁποῖον κόπτει τὸν ἰσημερινὸν εἰς ἓν σημεῖον Ε (σχ. 145). Ὑποθέσωμεν τὸν ἰσημερινὸν διῃρημένον εἰς μοίρας ἀπὸ τοῦ σημείου Ε. Ὁ ἡμιμεσημβρινὸς ἑνὸς οἱουδήποτε τόπου Μ κόπτει τὸν ἰσημερινὸν εἰς τὸ σημεῖον Δ. Καλεῖται *γεωγραφικὸν μῆκος* τοῦ τόπου Μ τὸ τόξον ΕΔ τοῦ ἰσημερινοῦ τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τοῦ πρώτου μεσημβρινοῦ καὶ τοῦ μεσημβρινοῦ τοῦ τόπου. Γνωρίζομεν ὅτι μία περιφέρεια διαιρεῖται εἰς 360 μοίρας, ἑκάστη μοῖρα εἰς 60 πρῶτα λεπτὰ καὶ ἕκαστον πρῶτον εἰς 60 δεύτερα λεπτά. Ὁ ἰσημερινὸς δὲν διαιρεῖται εἰς 360°, ἀλλὰ εἰς 180° ἀπὸ τοῦ Ε κατὰ τὴν διεύθυνσιν ΕΔΙ΄Ε΄καὶ εἰς ἄλλας 180° ἀπὸ τοῦ Ε κατὰ τὴν ἀντίθετον διεύθυνσιν ΕΙΕ΄. Τὸ μῆκος λέγεται *ἀνατολικὸν ἢ δυτικόν*, καθόσον ὁ τόπος κεῖται πρὸς Α. ἢ πρὸς Δ. τοῦ πρώτου μεσημβρινοῦ. Ὅλα τὰ σημεῖα τὰ κείμενα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἡμιμεσημβρινοῦ ἔχουσι τὸ αὐτὸ μῆκος· οὕτως ὅλα τὰ σημεῖα τὰ κείμενα ἐπὶ τοῦ μεσημβρινοῦ τῶν Παρισίων ἔχουσι μῆκος 0°, ἀλλὰ τὸ μῆκος τῶν Ἀθηνῶν εἶνε 21° 23′ Α. διότι αἱ Ἀθῆναι κεῖνται ἀνατολικὰ τῶν Παρισίων· τὸ μῆκος τῆς Κωνσταντινουπόλεως εἶνε 26° 38′ 50″, διότι ἡ Κων)πολις κεῖται ἀνατολικώτερον τῶν Ἀθηνῶν, ἐν ᾧ ἡ Νέα Ὑόρκη ἔχει μῆκος 76° 20′ 12″ Δ. Οἱ Ἄγγλοι λαμβάνουσιν ὡς πρῶτον μεσημβρινὸν τὸν διερχόμενον διὰ τοῦ ἀστεροσκοπείου τοῦ Γρήνουιτς (προαστείου τοῦ Λονδίνου), τὸ ὁποῖον κεῖται 2° 10′ 14″ πρὸς Δ. τῶν Παρισίων. Τρέπομεν γαλλικὰ μήκη εἰς ἀγγλικὰ καὶ τἀνάπαλιν διὰ μιᾶς προσθέσεως ἢ ἀφαιρέσεως. Καλεῖται *γεωγραφικὸν πλάτος* τοῦ τόπου Μ (σχ. 145) τὸ τόξον ΔΜ τοῦ μεσημβρινοῦ του, τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τοῦ ἰσημερινοῦ καὶ τοῦ τόπου. Τὰ πλάτη μετροῦνται πάντοτε ἀπὸ τοῦ ἰσημερινοῦ καὶ δὲν ὑπερβαίνουσι τὰς 90°. Τὸ πλάτος λέγεται *βόρειον ἢ νότιον*, καθόσον ὁ τόπος κεῖται εἰς τὸ Β. ἢ Ν. ἡμισφαίριον, π. χ. τὸ πλάτος τῶν Ἀθηνῶν εἶνε 37°

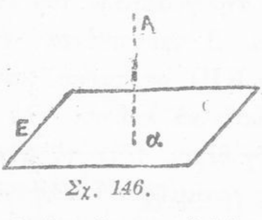
58′ 20″ Β., τὸ πλάτος τῶν Παρισίων εἶνε 48° 50′ 13″ Β., τὸ πλάτος τῆς Πετρουπόλεως εἶνε 59° 56′ 30″ Β, τὸ πλάτος τοῦ ἀκρωτηρίου τῆς Καλῆς Ἐλπίδος εἶνε 33° 66′ 3′′ Ν. Ὅσοι τόποι κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἰσημερινοῦ ἔχουσι πλάτος 0° 0′ 0′′. Οὕτως ἡ πόλις Κούιτον τῆς Ν. Ἀμερικῆς οὖσα πολὺ πλησίον τοῦ ἰσημερινοῦ ἔχει πλάτος 0° 14′ 0′′ Ν. Ὅσοι τόποι κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ παραλλήλου ἔχουσι τὸ αὐτὸ πλάτος. Κατασκευάζουσι *σφαίρας ἐκ χαρτονίου* συνήθως,ἐφ᾽ ὧν παριστῶσι μετὰ τῆς μεγαλυτέρας ἀκριβείας τοὺς διαφόρους κύκλους τῆς γηίνης σφαίρας, τὰς ἠπείρους, τὰς νήσους,τὰς θαλάσσας καὶ τὰ λοιπὰ σπουδαιότερα σημεῖα (πόλεις κτλ.) αὐτῆς, ὧν γνωρίζομεν τὸ γ. μ. καὶ τὸ γ.πλ.

Ἄσκησις. Νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν καὶ τὸν ὄγκον τῆς γῆς, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ὁ μεσημβρινὸς αὐτῆς εἶνε 40000 χιλιόμετρα.

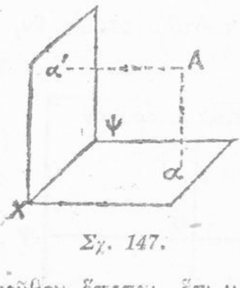
V. ΠΕΡΙ ΠΡΟΒΟΛΩΝ.

98. Ἡ ἀπεικόνισις τῶν στερεῶν ἐπὶ ἐπιπέδου (χαρτίου ἢ πίνακος) δὲν δύναται νὰ γίνῃ ἀκριβῶς, διότι αἱ γραμμαὶ τοῦ στερεοῦ δὲν κεῖνται πᾶσαι ἐφ᾽ ἑνὸς ἐπιπέδου· ὅθεν δέον νὰ φανταζώμεθα καλῶς τὸ ὑπὸ τοῦ σχήματος παριστώμενον στερεόν· π.χ. τὸ σχ. 110 παριστᾷ τετράεδρον, οὗ ἡ κορυφὴ Δ δέον νὰ ὑποτεθῇ ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου τοῦ χαρτίου. Αἱ ἴσαι ἀκτῖνες ΚΙ, ΚΕ, ΚΔ τῆς σφαίρας (σχ. 145) παρίστανται ὑπὸ εὐθειῶν ἀνίσων. Ἐὰν θέλωμεν νὰ ἔχωμεν σχέδιον, οὗ πάντα τὰ μέρη μετρημένα διὰ τοῦ διαβήτου νὰ ἀπεικονίζωσιν ἀκριβῶς τὰ μέρη τοῦ ἀντικειμένου, καταφεύγομεν *εἰς τὴν μέθοδον τῶν προβολῶν*. Λαμβάνομεν δύο ἐπίπεδα *κάθετα* (ἐδ. 63), τὸ ἓν *κατακόρυφον* καὶ τὸ ἄλλο *ὁριζόντιον* (ἐδ. 94, 95). Ἂν νοήσωμεν βιβλίον τι ἀνοικτὸν ἐπὶ τραπέζης καὶ ὑψώσωμεν ἓν φύλλον αὐτοῦ οὕτως, ὥστε νὰ μὴ κλίνῃ οὔτε πρὸς τὸ ἓν μέρος τοῦ βιβλίου οὔτε πρὸς τὸ ἄλλο, τὸ ἐπὶ τῆς τραπέζης κείμενον ἀνοικτὸν βιβλίον μᾶς παρέχει ἰδέαν τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου, τὸ δὲ ὑψωθὲν φύλλον, τοῦ κατακορύφου.

99. Προβολὴ σημείου ἐπὶ ἐπίπεδον λέγεται ὁ πούς τῆς καθέτου (ἐδ. 14) τῆς ἀγομένης ἐκ τοῦ σημείου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (ἐδ. 63). Τὸ σημεῖον α εἶνε ἡ προβολὴ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Ε (σχ. 146) τοῦ σημείου Α. Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον Ε εἶνε ὁριζόντιον, τὸ α εἶνε ἡ *ὁριζοντία προβολὴ* τοῦ Α. Ἡ ὁριζοντία προβολὴ δίδει τὴν διεύθυνσιν μόνον τοῦ σημείου Α ἐν τῷ διαστήματι, ἀλλ' οὐχὶ καὶ τὴν ἀπόστασιν αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου Ε, διότι πάντα τὰ σημεῖα τῆς καθέτου Αα ἔχουσι τὴν



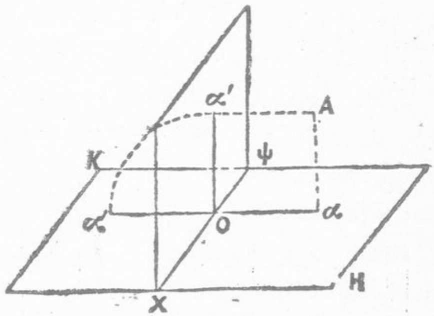
Σχ. 146.



Σχ. 147.

αὐτὴν ὁριζοντίαν προβολὴν α. Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι μόνη ἡ ὁριζοντία προβολὴ ἑνὸς σημείου δὲν ἀρκεῖ νὰ προσδιορίσῃ τελείως τὴν θέσιν αὐτοῦ. Χρειάζεται *καὶ ἡ κατακόρυφος προβολὴ* α′, δηλ. ἡ προβολὴ τοῦ σημείου ἐπὶ τὸ κατακόρυφον ἐπίπεδον (σχ. 147). Ἐὰν ἔχωμεν τὰς δύο ταύτας προβολὰς α, α′, δυνάμεθα ἐξ αὐτῶν νὰ προσδιορίσωμεν τὸ σημεῖον· πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ ὑψώσωμεν ἐξ ἑκατέρας κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῆς. Ἡ συνάντησις τῶν καθέτων θὰ δώσῃ τὸ σημεῖο· Α. Καθὼς τὸ σημεῖον εἶνε τελείως ὡρισμένον ἐκ τῶν δύο προβολῶν αὐτοῦ, οὕτω καὶ πᾶν ἀντικείμενον ὁρίζεται διὰ τῶν δύο προβολῶν του.

Παρατήρ. Ἡ τομὴ ΧΨ (σχ 147, 148) τῶν δύο ἐπιπέδων καλεῖται *γραμμὴ τοῦ ἐδάφους.* Ἐὰν τὸ κατακόρυφον ἐπίπεδον στραφῇ περὶ τὴν ΧΨ (σχ. 147β) ὑπὸ γωνίαν 90°, θὰ τοποθετηθῇ κατὰ τὴν προέκβολὴν τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου παρασύρον μεθ' ἑαυτοῦ καὶ τὸ σημεῖον α'· τότε τὰ 2 ἐπίπεδα ταυτίζονται εἰς ἕν, ἡ δὲ γραμμὴ αα' εἶνε εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὴν γραμμὴν τοῦ ἐδάφους.



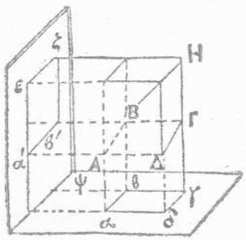
Σχ. 147β.

Ἐὰν τὰ 2 ταυτισθέντα ἐπίπεδα (ἤτοι τὸ ΚΗ) στραφῶσι κατὰ 90° οὕτως, ὥστε νὰ λάβωσι τὴν ἐν τῷ σχ. 147γ θέσιν, τότε τὸ μὲν ἄνωθεν τῆς γραμμῆς τοῦ ἐδάφους εὑρισκόμενον μέρος παριστᾷ τὸ κατακόρυφον ἐπίπεδον, τὸ δὲ κάτωθεν παριστᾷ τὸ ὁριζόντιον.

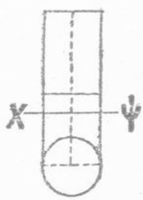
Σχ. 147γ.

Παραδείγματα. ***α') Προβολαὶ κύβου ἔχοντος μίαν ἕδραν παράλληλον τῷ ὁριζοντίῳ ἐπιπέδῳ καὶ ἑτέραν παράλληλον τῷ κατακορύφῳ.*** Εἶνε εὔκολον νὰ ἴδωμεν ὅτι ὁ κύβος ΑΗ (σχ. 148) ἔχει καὶ τὰς δύο προβολάς του ἴσας πρὸς μίαν τῶν ἐδρῶν του, δηλ. πρὸς τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ.

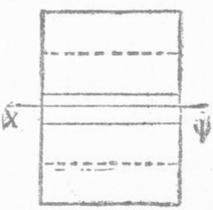
β') Προβολαὶ κυλίνδρου ἔχοντος βάσιν παράλληλον τῷ ὁριζοντίῳ ἐπιπέδῳ. Ἡ ὁριζοντία προβολὴ τοῦ κυλίνδρου εἶνε ὁ κύκλος τῆς βάσεως, ἡ δὲ κατακόρυφος ὀρθογώνιον ἔχον διαστάσεις τὴν διάμετρον τῆς βάσεως καὶ τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου (σχ. 149). Ἐὰν ὁ ἄξων (τὸ ὕψος) τοῦ κυλίνδρου εἶνε παράλληλος πρός τε τὸ ὁριζόντιον καὶ τὸ κατακόρυφον ἐπίπε-



Σχ. 148.



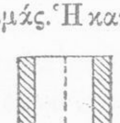
Σχ. 149.



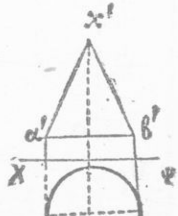
Σχ. 150.

δον, τότε ὁ κύλινδρος προβάλλεται κατὰ δύο ὀρθογώνια ἴσα ἔχοντα διαστάσεις τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου καὶ τὴν διάμετρον τῆς βάσεως (σχ. 150). Ἐὰν ὁ κύλινδρος εἶνε κοῖλος, οὗ αἱ παρειαὶ ἔχουσι πάχος τι, αἱ δύο προβολαί του δίδονται ὑπὸ τοῦ σχ. 151. Αἱ ἐστιγμέναι γραμμαὶ γ' ε' καὶ δ' ζ' παριστῶσιν ἐσωτερικὰς καὶ ἀοράτους γραμμάς. Ἡ κατακόρυφος

Σχ. 151.



Σχ. 152.

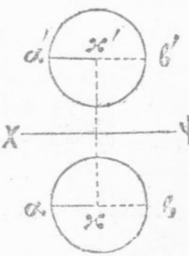


Σχ. 153.

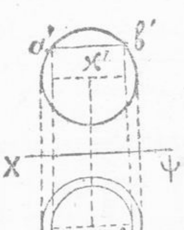
προβολὴ ἀντικαθίσταται συνήθως διὰ τομῆς κατακορύφου (σχ. 152).

γ') Προβολαὶ κώνου ἔχοντος τὴν βάσιν παράλληλον τῷ ὁριζοντίῳ ἐπιπέδῳ. Ἡ ὁριζοντία προβολὴ τοῦ κώνου εἶνε ὁ κύκλος τῆς βάσεως (σχ. 153) καὶ ἡ κατακόρυφος τρίγωνον ἰσοσκελὲς ἔχον βάσιν α' β', τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου, ὕψος τὸ τοῦ κώνου καὶ πλευρὰς κ'α', κ'β' ἴσας τῇ πλευρᾷ τοῦ κώνου.

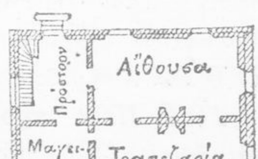
δ') Προβολαὶ σφαίρας. Οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶνε ἡ θέσις τῆς σφαίρας, δυνάμεθα πάντοτε νὰ φέρωμεν δύο μεγίστους κύκλους καθέτους πρὸς ἀλλήλους, ὧν ὁ εἷς νὰ εἶνε παράλληλος τῷ ὁριζοντίῳ ἐπιπέδῳ καὶ ὁ ἄλλος τῷ κατακορύφῳ. Οἱ δύο οὗτοι κύκλοι, ὧν τομὴ εἶνε μία διάμετρος ἔχουσα προβολὰς αβ, α'β' (σχ. 154), προβάλλονται ἐπὶ τῶν δύο ἐπιπέδων εἰς τὸ ἀληθὲς αὐτῶν μέγεθος. Αἱ προβολαὶ τούτων εἶνε προβολαὶ τῆς σφαίρας. Ἡ τομὴ σφαίρας ὑπὸ ἐπιπέδου εἶνε κύκλος (ἐδ. 87), ἔστις, ἐὰν εἶνε παράλληλος τῷ ὁριζοντίῳ ἐπιπέδῳ, προβάλλεται ἐν αὐτῷ μὲν κατὰ κύκλον ἴσον, ἐν δὲ τῷ κατακορύφῳ κατ᾽ εὐθεῖαν α'β' ἴσην τῇ διαμέτρῳ τῆς τομῆς (σχ. 155).



Σχ. 154.

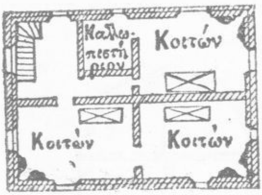


Σχ. 155.



Σχ. 156.

100. Καλεῖται *γεωγραφικὸς χάρτης* ἡ ἐπὶ ἐπιπέδου (φύλλου χάρτου) ἀπεικόνισις ὁλοκλήρου ἢ μέρους τῆς ἐπιφανείας τῆς γῆς. Ὁ γεωγραφικὸς χάρτης δὲν δύναται νὰ δώσῃ μετ' ἀκριβείας τὸ σχῆμα τῶν μερῶν, ἅτινα παριστᾷ, καὶ τὴν σχετικὴν θέσιν αὐτῶν, διότι ἡ γηίνη ἐπιφάνεια πολὺ ὀλίγον διαφέρουσα τῆς σφαιρικῆς (ἐδ. 93, δ') δὲν ἀναπτύσσεται ἐπὶ ἐπιπέδου (ἐδ. 91). Διὰ τὴν παράστασιν τῶν ἡμισφαιρίων τῆς γῆς ἐπὶ χάρτου καταφεύγομεν εἰς τὴν μέθοδον τῶν προβολῶν (ἐδ. 97). Π. χ. νοήσωμεν ὅτι οἱ δύο κάθετοι κύκλοι (ἐδ. 98, δ') εἶνε ὁ πρῶτος μεσημβρινὸς καὶ ὁ ἰσημερινὸς τῆς γῆς. Τὰ διάφορα σημεῖα τῆς γηίνης ἐπιφανείας δύνανται νὰ παρασταθῶσι διὰ τῶν προβολῶν των ἐπὶ τοῦ ἑτέρου τῶν κύκλων τούτων· καὶ ἂν μὲν προβληθῶσιν ἐπὶ τοῦ μεσημβρινοῦ, ὁρίζουσι δύο σχήματα παριστῶντα τὸ Α. καὶ Δ. ἡμισφαίριον. Ἐὰν δὲ προβληθῶσιν ἐπὶ τοῦ ἰσημερινοῦ, ὁρίζουσιν ὁμοίως δύο σχήματα παριστῶντα τὸ Β. καὶ Ν. ἡμισφαίριον.

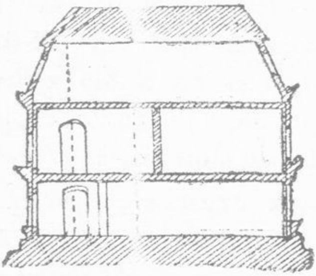


Σχ. 157.

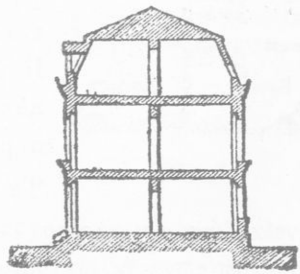
101. *Περὶ προόψεως καὶ κατόψεως.* —Εἰς τὰς ἐφαρμογὰς ἡ ὁριζοντία προβολὴ στερεοῦ σχήματος λέγεται *κάτοψις* αὐτοῦ, ἡ δὲ ἄλλη *πρόοψις*. Ἡ πρόοψις εἶνε ***εὐθεῖα*** ἢ ***πλαγία*** (profil), καθόσον τὸ στερεὸν θεᾶται ἀπ' εὐθείας παρουσιάζον μίαν τῶν ἑδρῶν του ἢ πλαγίως παρουσιάζον μίαν τῶν ἀκμῶν ἢ γωνιῶν του. Εἰς τὰ παραδείγματα τοῦ ἐδ. 98 αἱ δύο προβολαὶ εἶνε ἀρκεταί, ἵνα προσδιορίσωσι τὸν κύβον,

Σχ. 158.

τὸν κύλινδρον κτλ. Ἀλλὰ τὰ σώματα τὰ ἔχοντα κατασκευὴν πολυπλοκωτέραν, ὡς αἱ οἰκίαι, αἱ μηχαναὶ (κοχλίας, τροχαλία, στρόφιγξ) δὲν προσδιορίζονται τελείως διὰ τῆς κατόψεως καὶ τῆς προόψεως. Καταφεύγομεν τότε εἰς τὴν μέθοδον *τῶν τομῶν*. Π. χ. ἵνα δείξωμεν ἐν σχεδίῳ τὴν ἐσωτερικὴν διάταξιν τῶν διαφόρων μερῶν οἰκίας, ὑποθέτομεν αὐτὴν τεμνο-



Σχ. 159.



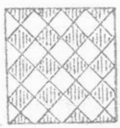
Σχ. 160.

μένην *1ον* δι᾽ ὁριζοντίων ἐπιπέδων, τόσων ὅσα εἶνε τὰ πατώματα· οὕτως ἔχομεν τὴν κάτοψιν τῶν ὑπογείων, τὴν κάτοψιν τοῦ ἰσογείου πατώματος (σχ. 156), τὴν κάτοψιν τοῦ πρώτου πατώματος (σχ. 157) κτλ. *2ον* δι᾽ ἐπιπέδων κατακορύφων· οὕτω πλὴν τῆς προόψεως τῆς οἰκίας (σχ.158), ἤτοι τῆς ἐξωτερικῆς παραστάσεως αὐτῆς ὁρωμένης ἀπ᾽ εὐθείας, ἔχομεν τὴν κατὰ μῆκος καὶ πλάτος κατακόρυφον τομὴν (σχ. 159, 160).

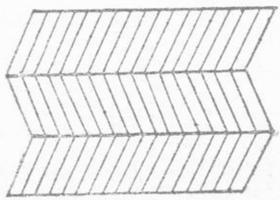
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Τὰ ποικίλα κανονικὰ σχήματα τοῦ βιβλίου δύνανται νὰ χρησιμεύσωσιν ὡς ἄριστα ὑποδείγματα ***Ἰχνογραφίας***. Ἀλλὰ πλὴν αὐτῶν προτείνομεν πρὸς ἀντιγραφὴν καὶ τὰ ἑξῆς :

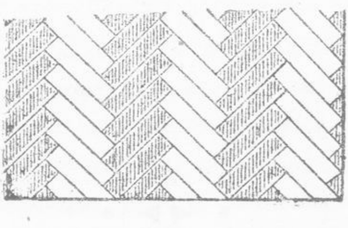
Σχ. 1.



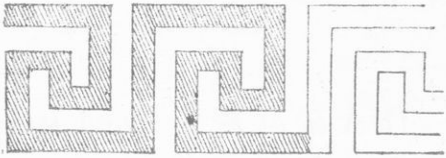
Σχ. 2.



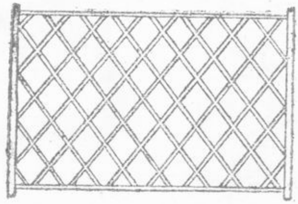
Σχ. 3.



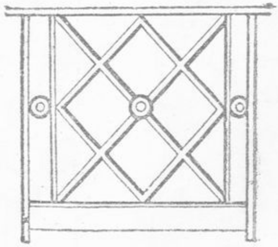
Σχ. 4.



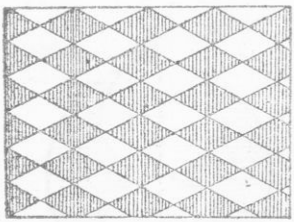
Σχ. 5.



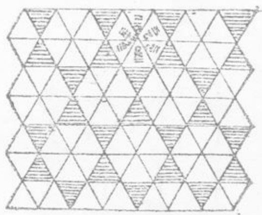
Σχ. 6.



Σχ. 7.



Σχ. 8.



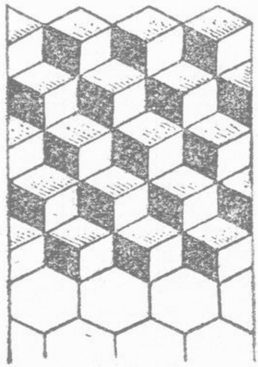
Σχ. 9.

Σημ. Τὰ σχ. 1, 2 ἐκτελοῦνται εὐκόλως, ἐὰν διαιρέσωμεν εἰς ἴσα μέρη τὰς πλευρὰς τοῦ τετραγώνου ἢ τοῦ ὀρθογωνίου. Εἰς τὸ σχ. 4 τὸ μῆκος ἑκάστου ὀρθογωνίου εἶνε τετραπλάσιον τοῦ πλάτους, ἑπομένως ἕκαστον ὀρθογώνιον ἰσοῦται μὲ 4 τετραγωνίδια· ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ χαράξωμεν δίκτυον τετραγώνων (βλ. σχ. 2) καὶ εἶτα διὰ μελάνης νὰ σημειώσωμεν τὰς πλευρὰς τῶν διαφόρων ὀρθογωνίων.

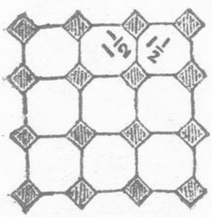
Διὰ τὸ σχ. 5 χαράσσομεν πρῶτον δίκτυον τετραγώνων, ὡς ἐν τῷ σχ. 85, εἶτα τεθλασμένας τινὰς γραμμάς, ὧν αἱ πλευραὶ εἶνε κάθετοι.

Τὰ σχ. 6,7,8, παριστῶσι συνδυασμοὺς ῥόμβων καὶ ἀπαντῶσιν εἰς διαφράγματα κήπων, εἰς ἐξώστας, εἰς κεντήματα κ.τ.λ.

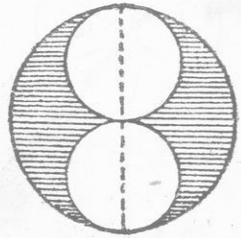
Διὰ τὰ σχ. 9, 10 καὶ 11 βλ. ἐδ. 37.



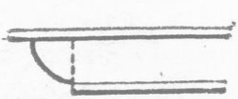
Σχ. 10.



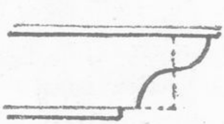
Σχ. 11.



Σχ. 12.

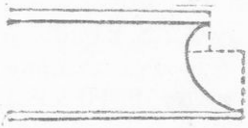


Σχ. 13.

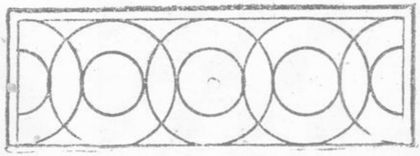


Σχ. 14.

Σχ. 15.

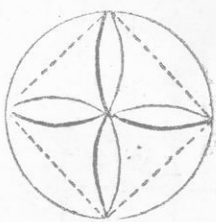


Σχ. 16

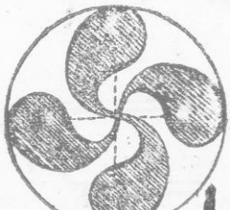


Σχ. 17.

Σχ. 18.

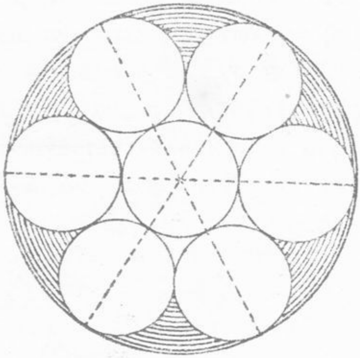


Σχ. 19.

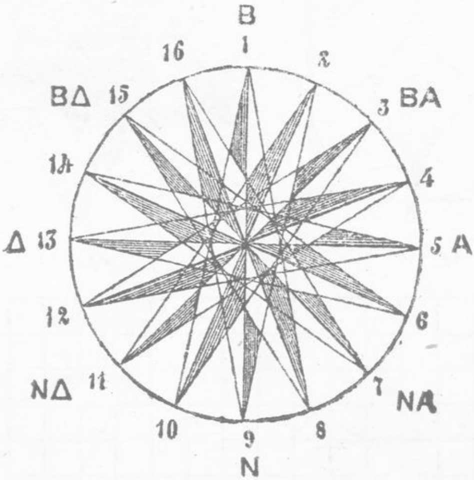


Σχ. 20.

Σχ. 21.



Σχ. 22.

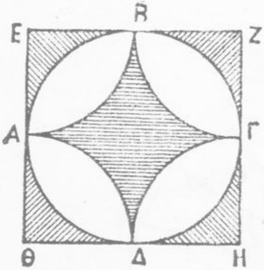


Σχ. 23.

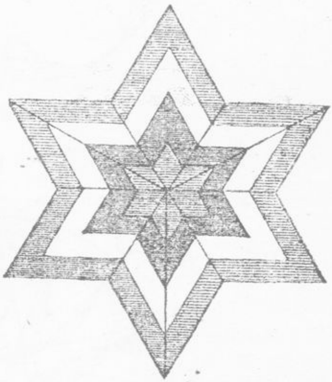
Τὰ σχ. 13, 14, 15, 16 παριστῶσι κορωνίδας, ἃς μεταχειρίζονται εἰς οἰκοδομὰς καὶ ἔπιπλα· σχηματίζονται δὲ διὰ συναρμογῆς [1] τόξων κύκλου πρὸς ἄλληλα ἢ πρὸς εὐθείας·

[1] Ἡ συναρμογὴ ἂς δειχθῇ ὑπὸ τοῦ διδάσκοντος.

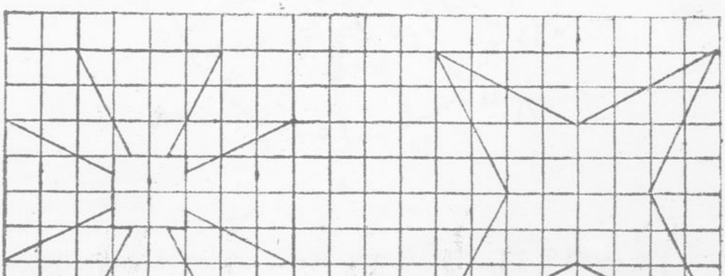
ἐπίσης τὰ σχ. 17, 18, 19, 20 τελοῦνται διὰ συναρμογῆς τόξων κύκλου ἢ κύκλων ἐφαπτομένων. Διὰ τὰ σχ. 21 καὶ 23 βλ. ἐδ. 36. Διὰ τὸ σχ. 22 διαιροῦμεν τὴν περιφέρειαν εἰς 6 ἴσα μέρη καὶ ἑκάστην ἀκτῖνα εἰς 3 ἴσα μέρη. Διὰ τὸ σχ. 24 περιγράφομεν εἰς κύκλον τετράγωνον, μὲ κέντρον δὲ ἑκάστην κορυφὴν τοῦ τετραγώνου καὶ ἀκτῖνα τὸ $^1/_2$ τῆς πλευρας του γράφομεν τεταρτοκύκλια.



Σχ. 24.

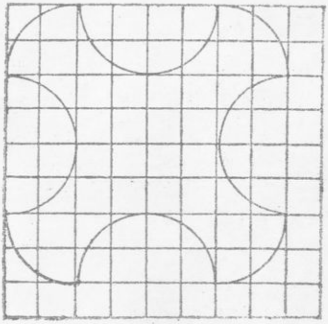


Σχ. 25.

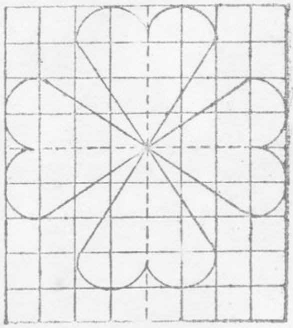


Σχ. 26.

Σχ. 27.



Σχ. 28.



Σχ. 29.

ΤΕΛΟΣ