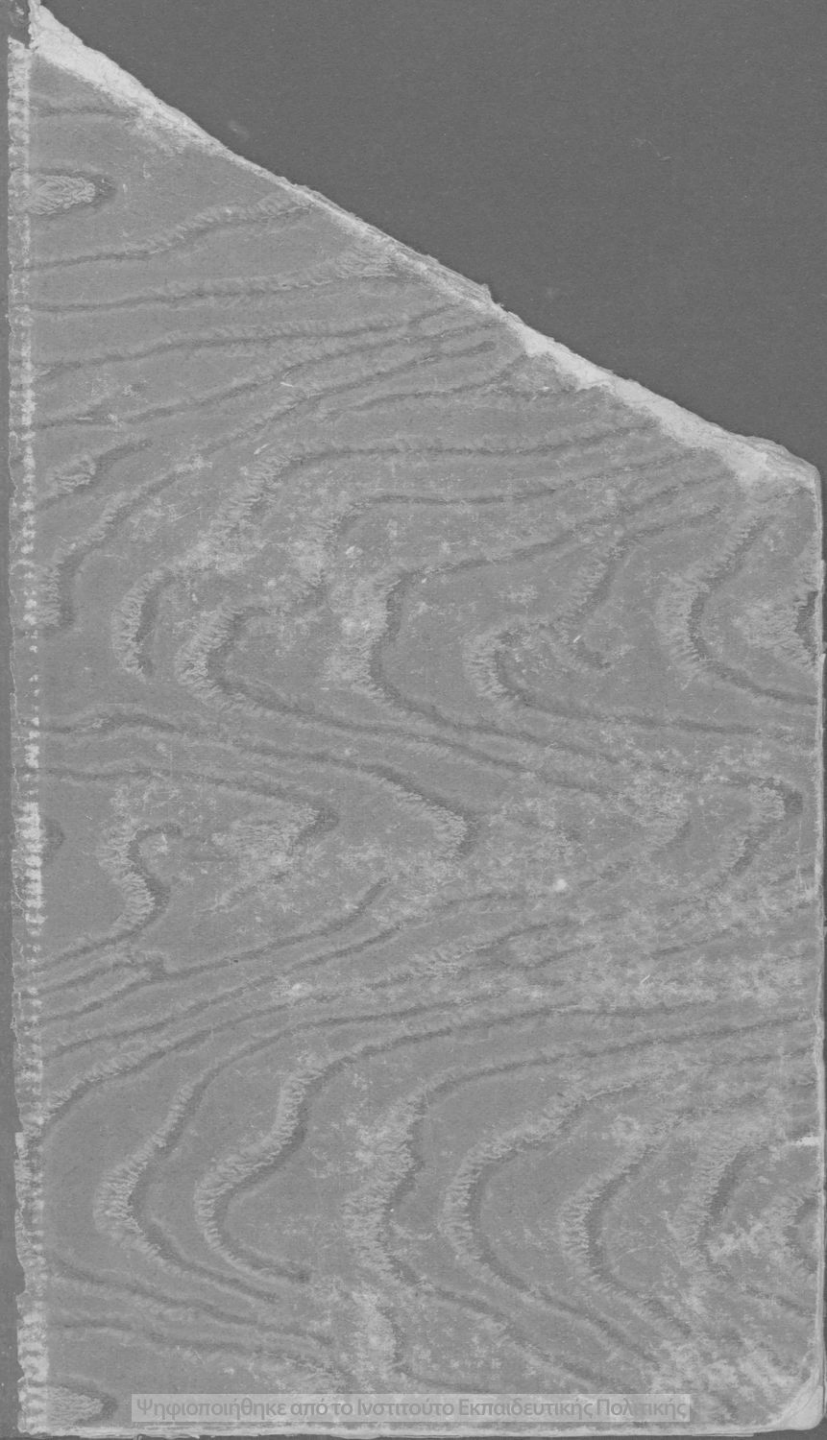




ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ

ΕΚΔΟΣΙΣ ΟΓΔΩΗ



ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ

ΕΚΔΟΤΗΣ ΙΩΑΝ. Δ. ΚΟΛΛΑΡΟΣ

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΤΗΣ «ΕΣΤΙΑΣ»

44 ΕΝ ΟΔΩ ΣΤΑΔΙΟΥ 44

1922

Πᾶν ἀντίτυπον μὴ φέρον τὴν ὑπογραφήν μου καὶ τὴν
σφραγίδα τοῦ Βιβλιοπωλείου τῆς Ἑστίας θεωρεῖται ἐκ τυ-
ποκλοπίας προερχόμενον.

I. D. Kollas



δεκάς ἑκατομμυρίου,
 ἑκατοντάς ἑκατομμυρίου
 μονάς δισεκατομμυρίου,
 δεκάς δισεκατομμυρίου,
 ἑκατοντάς δισεκατομμυρίου,
 μονάς τρισεκατομμυρίου,
 κτλ. κτλ.

5. Ἡ ἀπλῇ μονάς λέγεται μονάς πρώτης τάξεως, ἡ δεκάς λέγεται μονάς δευτέρας τάξεως, ἡ ἑκατοντάς τρίτης, ἡ χιλιάς τετάρτης καὶ οὕτω καθεξῆς.

6. Δυνάμεθα τώρα νὰ δεῖξωμεν, ὅτι πᾶς ἀριθμὸς δύναται νὰ σχηματισθῇ ἐκ τῶν μονάδων τούτων καὶ ἐξ ἑκάστης νὰ μὴ ἔχῃ περισσοτέρας τῶν ἑννέα. ✕

✕ Διότι, ἂς φαντασθῇ τις οἷονδήποτε θέλῃ ἀριθμὸν (παραδείγματος χάριν, τὸν ἀριθμὸν τῶν εἰς τινα σάκκον περιεχομένων κόκκων σίτου)· ἐὰν ἐνώσωμεν δέκα μονάδας τοῦ ἀριθμοῦ τούτου, θὰ σχηματίζωμεν ἐξ αὐτῶν μίαν δεκάδα· ἐὰν ἔπειτα ἐνώσωμεν ἄλλας δέκα μονάδας, θὰ σχηματίζωμεν μίαν νέαν δεκάδα· καὶ ἐὰν οὕτως ἐξακολουθῶμεν, θὰ χωρίσωμεν τὸν ἀριθμὸν εἰς δεκάδας· θὰ περισσεύσουν δὲ καὶ μονάδες ἀπλᾶι (ἂν περισσεύσουν), ἀλλ' ὅχι περισσότεραι τῶν ἑννέα· διότι ἂν ἔμενον δέκα, θὰ ἐγίνετο ἐξ αὐτῶν ἄλλη μία δεκάς.

Ἐὰν ἔπειτα κάμωμεν εἰς τὰς δεκάδας ὅ,τι ἐκάμαμεν εἰς τὰς ἀπλᾶς μονάδας, ἐὰν δηλονότι ἐνώσωμεν αὐτὰς ἀνὰ δέκα, θὰ σχηματίζωμεν ἐξ αὐτῶν ἑκατοντάδας τινὰς καὶ θὰ μείνωσιν (ἂν μείνωσι) καὶ τινες δεκάδες, ἀλλ' ὅχι περισσότεραι τῶν ἑννέα.

Ἐὰν ἔπειτα ἐνώσωμεν ὁμοίως καὶ τὰς ἑκατοντάδας, θὰ σχηματίσωμεν ἐξ αὐτῶν χιλιάδας τινὰς· ἐνδέχεται δὲ νὰ μείνωσι καὶ τινες ἑκατοντάδες, ἀλλ' ὅχι περισσότεραι τῶν ἑννέα.

Ἐξακολουθοῦντες τοιοῦτοτρόπως θὰ φθάσωμεν ἀναγκαίως εἰς τὰς εἰς τινὰ μονάδων, ἧτις δὲν θὰ ἔχῃ περισσότερας τῶν ἑννέα καὶ ἐπομένως δὲν θὰ εἶναι δυνατόν νὰ σχηματισθῇ ἐξ αὐτῶν μονάς ἀνωτέρας τάξεως (θὰ συμβῇ δὲ τοῦτο, διότι εἰς ἑκάστην τάξιν ὅσον προχωροῦμεν, τόσον αἱ μονάδες γίνονται ὀλιγώτεραι). Τότε ὁ ἀριθμὸς θὰ εἶναι ἀναλελυμένος εἰς μονάδας διαφόρων τάξεων καὶ εἰς ἑκάστην τάξιν θὰ εἶναι μονάδες ὅχι περισσότεραι τῶν ἑννέα. Ὡστε πᾶς ἀριθμὸς

δύναται νὰ ἀποτελεσθῇ ἐκ τῶν μονάδων τῶν διαφόρων τάξεων χωρὶς νὰ ληφθῶσιν ἐκ μηδεμιᾶς περισσότεραι τῶν ἐννέα.

7. Ἐκ τούτου ἔπεται, ὅτι, ἵνα ἐκφράσωμεν ἀριθμὸν τινα, ἀρκεῖ νὰ δηλώσωμεν πόσας μονάδας ἐκάστης τάξεως περιέχει.

Παραδείγματος χάριν, ἀριθμὸς τις εἶναι ἐντελῶς εἰς ἡμᾶς γνωστὸς καὶ ὠρισμένος, ὅταν ἡξεύρωμεν ὅτι σύγκειται :

ἐκ πέντε χιλιάδων, ὀκτὼ ἑκατοντάδων, ἑπτὰ δεκάδων καὶ ἕξ μονάδων.

Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον δυνάμεθα δι' ὀλίγων διαφορῶν λέξεων νὰ ὀνομάσωμεν μέγα πλῆθος ἀριθμῶν· διότι ἀρκοῦσι τὰ ὀνόματα τῶν ἐννέα πρώτων ἀριθμῶν καὶ τὰ ὀνόματα τῶν μονάδων τῶν διαφορῶν τάξεων.

8. Ὁ σχηματισμὸς τῶν ἀριθμῶν ἐκ μονάδων διαφορῶν τάξεων ὀδηγεῖ καὶ εἰς τὴν γραφὴν αὐτῶν διὰ τῶν σημείων ἢ ψηφίων.

Ἐάν, τῷ ὄντι, γράφωμεν διὰ τῶν ἐννέα ψηφίων τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων ἐκάστης τάξεως (ὅστις ἀριθμὸς δὲν ὑπερβαίνει τὸν ἐννέα) καὶ προσαρτῶμεν εἰς ἕκαστον ψηφίον τὸ ὄνομα τῶν μονάδων, ἃς παριστᾷ, δηλοῦται ἐπαρκῶς πᾶς ἀριθμὸς· οἷον

6 δεκάδες καὶ 7 μονάδες·

5 ἑκατοντάδες, 3 δεκάδες καὶ 9 μονάδες·

3 χιλιάδες, 2 ἑκατοντάδες, 8 δεκάδες καὶ 4 μονάδες·

Ἀλλὰ τώρα παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ ὄνομα τῶν μονάδων, ἃς παριστᾷ ἕκαστον ψηφίον, εἶναι περιττὸν νὰ γράφηται· διότι τοῦτο γίνεται δῆλον ἐκ τῆς θέσεως τοῦ ψηφίου, ὅταν τὰ ψηφία γραφῶσι κατὰ σειράν· οἷον

ἀντί: 6 δεκάδες καὶ 7 μονάδες γράφεται 67·

ἀντί: 5 ἑκατοντ., 3 δεκάδες καὶ 9 μονάδες γράφεται 539·

ἀντί: 3 χιλ., 2 ἑκατοντ., 8 δεκάδες καὶ 4 μονάδες γράφεται 3284, κάμνομεν δηλαδὴ τὴν ἑξῆς συμφωνίαν. Ἐκαστον ψηφίον γεγραμμένον ὀπισθεν ἄλλου (πρὸς τὰ ἀριστερὰ αὐτοῦ) δηλοῖ μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως ἢ τὸ ἄλλο ψηφίον· ὥστε τὸ τελευταῖον ψηφίον δηλοῖ ἀπλᾶς μονάδας ἢ πρώτης τάξεως, τὸ προτελευταῖον δηλοῖ δεκάδας ἢ μονάδας δευτέρας τάξεως, τὸ πρὸ αὐτοῦ δηλοῖ ἑκατοντάδας ἢ μονάδας τρίτης τάξεως, τὸ πρὸ τούτου χιλιάδας καὶ οὕτως καθ' ἑξῆς· ὥστε ἡ σημασία ἐκαστου ψηφίου ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς θέσεώς του.

9. Ὅταν ὁ ἀριθμὸς, τὸν ὁποῖον γράφομεν διὰ ψηφίων, δὲν ἔχη

ονάδας τάξεώς τινος, ἡ θέσις τῶν μονάδων τῆς τάξεως ταύτης δὲν ρέπει νὰ μένη κενή· διότι τότε τὰ προηγούμενα ψηφία χάνουνσι τὴν εἶν των καὶ ὑποβιβάζονται.

Παραδείγματος χάριν, ἂν ὁ ἀριθμὸς

5 ἑκατοντάδες καὶ 7 μονάδες γραφῇ ὡς ἑξῆς: 57,

τὸ ψηφίον 5 κατὰ τὴν ἀνωτέρω γενομένην συνθήκην δηλοῖ 5 δεκάδας καὶ ὄχι 5 ἑκατοντάδας· πρέπει λοιπὸν νὰ γραφῇ σημείον τι εἰς τὴν θέσιν τῶν δεκάδων, διὰ νὰ ἔλθῃ τὸ 5 εἰς τὴν θέσιν τῶν ἑκατοντάδων· διὰ τοῦτο ἐπενοήθη τὸ σημεῖον 0 (μηδὲν ἢ μηδενικόν), ὅπερ αὐτὸ καθ' ἑαυτὸ δὲν ἔχει ἀξίαν, χρησιμεύει δὲ μόνον εἰς τὸ νὰ κατέχῃ τὴν θέσιν τῶν μονάδων, αἵτινες λείπουνσι ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ· (τὰ λοιπὰ ψηφία. ὡς ἔχοντα ἀξίαν, λέγονται πρὸς διάκρισιν *σημαντικὰ* ψηφία)*.

Παραδείγματος χάριν, ὁ ἀριθμὸς

5 ἑκατοντάδες καὶ 7 μονάδες γράφεται 507.

ὁ ἀριθμὸς 8 χιλιάδες καὶ 5 δεκάδες γράφεται 8050.

ὁ δὲ ἀριθμὸς 3 ἑκατομμύρια, 4 χιλιάδες γράφεται 3 004 000.

Ἐπίσης 5870 σημαίνει

5 χιλιάδας, 8 ἑκατοντάδας καὶ 7 δεκάδας.

τὸ δὲ 13870 σημαίνει

1 μυριάδα, 3 χιλιάδας, 8 ἑκατοντάδας καὶ 7 δεκάδας.

Σημειώσεις. Αἱ μονάδες τῶν διαφόρων τάξεων γράφονται ὡς ἑξῆς.

1, 10, 100, 1000, 10000 κτλ.

10. Ἡ διὰ τῶν ψηφίων γραφὴ τῶν ἀριθμῶν εἶναι μία ἐκ τῶν εὐφυεστάτων ἐπινοήσεων τοῦ ἀνθρώπου· διότι καὶ σύντομος εἶναι καὶ δέκα μόνον σημεῖα χρειάζεται (διὰ τοῦτο δὲ καὶ τὰς πράξεις τῶν ἀριθμῶν καθιστᾷ εὐκολωτέρας), ἐν ᾧ ἡ διὰ λέξεων γραφὴ αὐτῶν καὶ μακρότερα εἶναι καὶ μέγα πλῆθος λέξεων ἀπαιτεῖ. Σηριζέται δὲ ἡ διὰ τῶν ψηφίων γραφή, ὡς εἶδομεν, πρῶτον μὲν ἐπὶ τοῦ σχηματισμοῦ τῶν ἀριθμῶν ἐκ μονάδων διαφόρων τάξεων καὶ δεύτερον ἐπὶ τῆς ἀνωτέρω εἰρημένης συμφωνίας (ἑδ. 8).

* Τὰ ψηφία ταῦτα λέγονται καὶ ἀραβικοὶ χαρακτῆρες· διότι ἡμεῖς ἐμά-
θομεν αὐτὰ παρὰ τῶν Ἀράβων (περὶ τοῦ 12^{ου} αἰῶνα μ. Χ.). Ἡ ἐφεύρεσις
ὁμως αὐτῶν καὶ ἡ μέθοδος τῆς γραφῆς τῶν ἀριθμῶν εἶναι ἐπινοήσεις τῶν Ἰνδῶν,
παρὰ τῶν ὁποίων ἔμαθον αὐτὴν οἱ Ἀραβες.

Σημείωσις.

Ἡ ὀνοματολογία τῶν ἀριθμῶν, ὡς ἐξετέθη ἐν τοῖς προηγουμένοις εἶναι θεωρητικῶς τελεία· ἀλλ' ἐν ἑκάστη γλώσσῃ γίνονται τροποποιήσεις τινὲς εἰς τὰ ὀνόματα τῶν ἀριθμῶν· μένουσι λοιπὸν λεπτομέρειαι τινες πρὸς συμπλήρωσιν τῶν περὶ ὀνοματολογίας εἰρημένων.

Οἱ ἀριθμοὶ τῶν δεκάδων ἐκφράζονται διὰ τῶν ἑξῆς λέξεων :
δέκα, εἴκοσι, τριάκοντα, τεσσαράκοντα, πενήκοντα, ἑξήκοντα, ἑβδομήκοντα, ὀγδοήκοντα, ἐνενήκοντα.

Οἱ δὲ ἀριθμοὶ τῶν ἑκατοντάδων ἐκφράζονται διὰ τῶν ἑξῆς :
ἑκατόν, διακόσια, τριακόσια, τετρακόσια, πεντακόσια, ἑξακόσια, ἑπτακόσια, ὀκτακόσια, ἑνακόσια

Οἱ ἀριθμοί, οἱ μικρότεροι τοῦ χίλια, δύνανται νὰ περιέχωσιν ἑκατοντάδας, δεκάδας καὶ μονάδας ἁπλᾶς, τὸ δὲ ὄνομα ἑκάστου ἐξ αὐτῶν ἀποτελεῖται ἐκ τοῦ ὀνόματος τῶν ἑκατοντάδων του καὶ ἐκ τοῦ ὀνόματος τῶν δεκάδων του καὶ ἐκ τοῦ ὀνόματος τῶν ἁπλῶν μονάδων του· παραδείγματος χάριν, ὁ ἀριθμὸς, ὅστις ἔχει δύο δεκάδας καὶ ὀκτὼ μονάδας, ἀπαγγέλλεται εἴκοσιν ὀκτὼ· ὁ δὲ ἀριθμὸς, ὅστις ἔχει πέντε ἑκατοντάδας καὶ τρεῖς δεκάδας καὶ ἑπτὰ μονάδας, ἀπαγγέλλεται πεντακόσια τριάκοντα ἑπτὰ· καὶ ὁ ἀριθμὸς, ὅστις ἔχει πέντε ἑκατοντάδας καὶ δύο δεκάδας, ἀπαγγέλλεται πεντακόσια εἴκοσι.

Ἀντὶ δέκα ἔν, δέκα δύο, λέγομεν ἑνδεκα, δώδεκα.

Οἱ μεταξὺ τοῦ χίλια καὶ τοῦ ἐνὸς ἑκατομμυρίου περιεχόμενοι ἀριθμοὶ δύνανται νὰ ἔχωσιν ἑκατοντάδας χιλιάδος, δεκάδας χιλιάδος καὶ μονάδας χιλιάδος, ἔτι δὲ καὶ ἑκατοντάδας, δεκάδας καὶ μονάδας ἁπλᾶς· τουτέστι σύγκεινται ἐκ τινων χιλιάδων (αἱ ὁποῖαι θὰ εἶναι ὀλιγότεραι τῶν χιλίων· διότι χίλια χιλιάδες ἀποτελοῦσιν ἓν ἑκατομμύριον) καὶ ἐκ τινος ἀριθμοῦ μικροτέρου τοῦ χίλια (τὸ δεύτερον τοῦτο μέρος δύνатаи καὶ νὰ λείπῃ) καὶ τὸ ὄνομα ἑκάστου ἐξ αὐτῶν σύγκειται ἐκ τῶν ὀνομάτων τῶν δύο μερῶν του· οἷον, ὁ ἀριθμὸς 215 873 ἀπαγγέλλεται : διακόσιαι δέκα πέντε χιλιάδες καὶ ὀκτακόσια ἑβδομήκοντα τρία.

Ὁ δὲ ἀριθμὸς 610 307 ἀπαγγέλλεται : ἑξακόσιαι δέκα χιλιάδες καὶ τριακόσια ἑπτὰ· καὶ ὁ ἀριθμὸς 67 000 ἀπαγγέλλεται : ἑξήκοντα ἑπτὰ χιλιάδες.

Οἱ μεταξὺ τοῦ ἑνὸς ἑκατομμυρίου καὶ τοῦ ἑνὸς δισεκατομμυρίου ὑπάρχοντες ἀριθμοὶ σύγκεινται ἐκ τινος ἀριθμοῦ ἑκατομμυρίων (ὅστις θὰ εἶναι μικρότερος τοῦ χίλια) καὶ ἐκ τινος ἀριθμοῦ χιλιάδων (ὅστις θὰ εἶναι μικρότερος τοῦ χίλια καὶ δύναται καὶ ὅλως νὰ λείπῃ) καὶ ἐκ τινος ἀριθμοῦ μικροτέρου τοῦ χίλια (ὅστις δύναται καὶ νὰ λείπῃ)· καὶ τὸ ὄνομα ἐκάστον ἐξ αὐτῶν σύγκειται ἐκ τῶν τριῶν ὀνομάτων τῶν τριῶν μερῶν του· οἷον, ὁ ἀριθμὸς 315 897 504 ἀπαγγέλλεται: τριακόσια δέκα πέντε ἑκατομμύρια, ὀκτακόσιοι ἑνενήκοντα ἑπτὰ χιλιάδες καὶ πεντακόσια τέσσαρα· ὁ δὲ ἀριθμὸς 58 004 310 ἀπαγγέλλεται: πεντήκοντα ὀκτὼ ἑκατομμύρια, τέσσαρες χιλιάδες καὶ τριακόσια δέκα.

Ὅμοίως σχηματίζομεν τὰ ὀνόματα τῶν ἀριθμῶν, τῶν μεταξὺ τοῦ ἑνὸς δισεκατομμυρίου καὶ τοῦ ἑνὸς τρισεκατομμυρίου περιεχομένων καὶ οὕτω καθεξῆς.

Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον τῆς ὀνομασίας τῶν ἀριθμῶν θεωροῦμεν αὐτοὺς ὡς συγκειμένους ἐκ μερῶν, τὰ ὁποῖα εἶναι μονάδες, χιλιάδες, ἑκατομμύρια, δισεκατομμύρια κτλ. Αἱ μονάδες αὗται, ἥτοι οἱ ἀριθμοί, ἔν, χίλια, ἑκατομμύριον κτλ., λέγονται πρωτεύουσαι καὶ ἐκάστη ἐξ αὐτῶν ἀποτελεῖται ἐκ χιλίων μονάδων τῆς ἀμέσως προηγουμένης τάξεως.

Περὶ διαφορῶν συστημάτων ἀριθμῆσεως.

11. Αἱ μονάδες τῶν διαφορῶν τάξεων, τὰς ὁποίας ἐσχηματίσαμεν ἐν ἀρχῇ καὶ ἐκ τῶν ὁποίων συντίθενται οἱ ἀριθμοί, προχωροῦσιν οὕτως, ὥστε ἐκάστη ἐξ αὐτῶν εἶναι δεκαπλασία τῆς ἀμέσως προηγουμένης· δηλαδή ἐκάστη περιέχει δεκάκις τὴν προηγουμένην. Ἐκφράζομεν δὲ ἕκαστον ἀριθμὸν δεικνύοντες πόσας μονάδας ἐκάστης τάξεως περιέχει ὁ ἀριθμὸς οὗτος. Εἰς τὴν γραφὴν τῶν ἀριθμῶν διὰ σημείων, ἐπειδὴ πᾶς ἀριθμὸς δύναται νὰ σχηματισθῇ ἐκ μονάδων τῶν διαφορῶν τάξεων χωρὶς νὰ ληφθῶσιν ἐκ τινος τάξεως περισσότεραι τῶν ἑννέα, παραδεχόμεθα ἑννέα σημεία ἢ ψηφία πρὸς παράστασιν τῶν ἑννέα πρώτων ἀριθμῶν καὶ συμφωνοῦμεν, ὅτι τὸ αὐτὸ ψηφίον θὰ παριστᾷ μονάδας διαφορῶν τάξεων κατὰ τὴν θέσιν αὐτοῦ· ἥτοι ἅπλᾳ μὲν μονάδας, ἐὰν κατέχῃ τὴν πρώτην ἐκ δεξιῶν θέσιν· δεκάδας δέ, ἐὰν κατέχῃ τὴν δευτέραν θέσιν, ἑκατοντάδας, ἐὰν τὴν τρίτην καὶ οὕτω καθεξῆς. Σητηρίζομενοι δὲ εἰς τὴν συνθήκην ταύτην (καὶ εἰς τὸν

σχηματισμὸν τῶν ἀριθμῶν ἐκ μονάδων διαφόρων τάξεων) δυνάμεθα νὰ γράψωμεν πάντα ἀριθμὸν διὰ ψηφίων· διότι ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ γράψωμεν πρῶτον τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τῆς ἀνωτάτης τάξεως, κατόπιν αὐτοῦ τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τῆς ἀμέσως ἐπομένης τάξεως καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρι τοῦ ψηφίου τῶν ἁπλῶν μονάδων. Ἐπειδὴ ὁμως εἶναι δυνατόν ὁ ἀριθμὸς νὰ μὴ ἔχῃ μονάδας τάξεώς τινος (ἐκ τῶν κατόπιν τῆς ἀνωτάτης ἐρχομένων), διὰ τοῦτο χρειάζεται καὶ δέκατον σημεῖον, τὸ 0, τὸ ὁποῖον γράφεται εἰς τὴν θέσιν τῶν μονάδων, τὰς ὁποίας δὲν ἔχει ὁ ἀριθμὸς.

12 Ἄλλ' εἶναι φανερόν ὅτι αἱ μονάδες τῶν διαφόρων τάξεων ἠδύναντο καὶ ἄλλως νὰ σχηματισθῶσιν· ἠδυνάμεθα π. χ., ἀντὶ νὰ λάβωμεν κατὰ προτίμησιν τὸν 10, νὰ λάβωμεν οἷονδήποτε ἄλλον ἀριθμόν, οἷον τὸν 8, καὶ νὰ σχηματίσωμεν τὰς μονάδας τῶν διαφόρων τάξεων οὕτως, ὥστε ἐκάστη νὰ εἶναι ὀκταπλασία τῆς ἀμέσως προηγούμενης, δηλαδὴ νὰ περιέχῃ αὐτὴν ὀκτάκις· τότε μονὰς δευτέρας τάξεως θὰ ἦτο ὁ ἀριθμὸς ὀκτὼ (ἢ ἡ ὀκτάς), μονὰς τρίτης τάξεως ὁ ὀκτάκις ὀκτὼ καὶ οὕτω καθεξῆς.

Τότε δέ, ἵνα ἐκφράσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς διὰ λέξεων, πρέπει νὰ δώσωμεν εἰς τὰς διαφορὰς ταύτας μονάδας ἴδια ὀνόματα καὶ νὰ δεικνύωμεν δι' ἕκαστον ἀριθμὸν πόσας μονάδας ἔξ ἐκάστης τάξεως περιέχει· θὰ περιέχῃ δὲ τότε πᾶς ἀριθμὸς ὀλιγωτέρας τῶν ὀκτὼ μονάδων ἔξ ἐκάστης τάξεως· (ἄλλως θὰ ἐσχηματίζετο ἔξ αὐτῶν μία ἀκόμη μονὰς τῆς ἀμέσως μεγαλυτέρας). Διὰ δὲ τὴν γραφὴν τῶν ἀριθμῶν, ἐὰν παραδεχθῶμεν τὴν αὐτὴν σύμφωνίαν (ὅτι δηλαδὴ τὸ αὐτὸ ψηφίον παριστᾷ μονάδας διαφόρων τάξεων κατὰ τὴν θέσιν του), θὰ ἐχρειάζοντο τότε μόνον ὀκτὼ σημεῖα· τουτέστι τὰ ἐπὶ πρῶτα σημαντικά ψηφία καὶ τὸ 0.

Παραδείγματος χάριν, ἐν τῷ συστήματι τούτῳ ὁ ἀριθμὸς ὀκτὼ θὰ γράφηται ὡς ἐξῆς: 10, ὁ ἐννέα 11, ὁ δέκα 12 κτλ., ὁ ὀκτάκις ὀκτὼ 100· ὁ δὲ ἑκατὸν ὡς ἐξῆς: 144 κτλ.

Ἐκ τούτων ἐννοοῦμεν ὅτι εἶναι δυνατόν νὰ σχηματισθῶσιν ἄπειρα συστήματα ἀριθμήσεως, διακρινόμενα ἀπ' ἀλλήλων ἐκ τῆς βάσεως, ἥτοι ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις δεικνύει πόσαι μονάδες ἐκάστης τάξεως ἀποτελοῦσι μίαν τῆς ἀκολουθοῦ.

Εἰς πᾶν δὲ σύστημα ἀριθμήσεως πάντες οἱ ἀριθμοὶ γράφονται διὰ τόσων ψηφίων, ὅσαι εἶναι αἱ μονάδες τῆς βάσεως.

Περὶ τῆς ἰσότητος καὶ ἀνισότητος.

13. Ἴσοι λέγονται δύο ἀριθμοί, ὅταν ἐκάστη μονὰς τοῦ ἑνὸς ἔχη μίαν τοῦ ἄλλου ἀντίστοιχον καὶ τᾶνάπαλιν.

Παραδείγματος χάριν, εἰς πληθὸς τι ἀρτιμελῶν ἀνθρώπων ὁ ἀριθμὸς τῶν δεξιῶν χειρῶν καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀριστερῶν εἶναι ἴσοι.

14. Ἄνισοι δὲ λέγονται, ὅταν μονάδες τινὲς τοῦ ἑνὸς δὲν ἔχωσιν ἀντιστοιχοῦς εἰς τὸν ἄλλον· τότε ὁ πρῶτος, ὁ τὰς περισσοτέρας μονάδας ἔχων λέγεται *μεγαλύτερος* τοῦ δευτέρου, ὁ δὲ δεύτερος *μικρότερος* τοῦ πρώτου.

Παραδείγματος χάριν, ὁ 10 εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 9, ὥς ἔχων μίαν μονάδα περισσοτέραν.

Σημεῖον τῆς ἰσότητος εἶναι τὸ ἕξῃς: $=$, γράφεται δὲ μεταξὺ τῶν δύο ἴσων ἀριθμῶν· οἷον $8=8$.

Σημεῖον τῆς ἀνισότητος εἶναι τὸ ἕξῃς: $<$, γράφεται δὲ ὁ μικρότερος ἀριθμὸς πρὸς τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας· οἷον

$$8 < 9, \quad 12 < 14, \quad 8 > 3.$$

15. Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἰσότητος τῶν ἀριθμῶν γίνονται φανεραὶ ἀμέσως αἱ ἕξῃς ιδιότητες αὐτῆς.

α') Οἱ τῷ αὐτῷ ἀριθμῷ ἴσοι εἶναι καὶ πρὸς ἀλλήλους ἴσοι.

β') Ἐὰν εἰς ἐκάτερον τῶν ἴσων ἀριθμῶν προσιεθῇ μία μονάς, οἱ προκύπτοντες ἀριθμοὶ εἶναι ἴσοι.

Διότι αἱ προστεθεῖσαι δύο μονάδες ἀντιστοιχοῦσι πρὸς ἀλλήλας. Καὶ γενικῶς:

ἐὰν εἰς ἴσους ἀριθμοὺς προσιεθῶσιν ἴσοι, οἱ προκύπτοντες ἀριθμοὶ εἶναι ἴσοι.

Ἐκ τῆς ιδιότητος δὲ ταύτης ἔπεται ἀμέσως ἡ ἕξῃς.

Οἱ διπλάσιοι τῶν ἴσων εἶναι ἴσοι καὶ οἱ τριπλάσιοι τῶν ἴσων εἶναι ἴσοι καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Ἐὰν δηλαδὴ λάβωμεν ἐκάτερον τῶν ἴσων δύο φορές, προκύπτουσιν ἕξ αὐτῶν ἀριθμοὶ ἴσοι· καὶ ἐὰν λάβωμεν ἐκάτερον τῶν ἴσων τρεῖς φορές, προκύπτουσιν ἕξ αὐτῶν ἀριθμοὶ ἴσοι καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Καὶ ἡ ἀνισότης ἔχει τὰς ἐξῆς ιδιότητας, αἵτινες εἶναι πρόδηλοι.

Ἐὰν εἰς ἀνίσους ἀριθμοὺς προστεθῶσιν ἴσοι, οἱ ἀριθμοὶ μένουσιν ἄνισοι.

Οἱ διπλάσιοι τῶν ἀνίσων εἶναι ὁμοίως ἄνισοι καὶ οἱ τριπλάσιοι τῶν ἀνίσων εἶναι ὁμοίως ἄνισοι καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἐὰν δηλαδὴ λάβωμεν ἑκάτερον τῶν ἀνίσων δύο φορές, προκύπτουσιν ἐξ αὐτῶν ἀριθμοὶ ἄνισοι (ἐκ τοῦ μεγαλύτερου ὁ μεγαλύτερος) καὶ ἂν λάβωμεν ἑκάτερον τῶν ἀνίσων τρεῖς φορές, προκύπτουσιν ὁμοίως ἄνισοι καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ὁρισμοί.

Ἀξίωμα λέγεται πρότασις ἀφ' ἑαυτῆς φανερά.

Ἀξίωμα, λόγου χάριν, εἶναι ἡ ἐξῆς πρότασις.

Καθ' οἷανδήποτε τάξιν καὶ ἂν ἐνωθῇ πλήθος τι μονάδων, πάντοτε ἀποτελεῖται ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς.

Ἡ καὶ ἡ ἐξῆς.

Παντὸς ἀριθμοῦ ὑπάρχει μεγαλύτερος.

Ἀποδείξεις λέγεται συλλογισμὸς (ἢ πολλοὶ συλλογισμοί), δι' οὗ πειθόμεθα ὅτι πρότασις τις εἶναι ἀληθής.

Θεώρημα δὲ λέγεται ἡ πρότασις, τῆς ὁποίας ἡ ἀλήθεια γίνεται φανερά διὰ τῆς ἀποδείξεως.

Θεώρημα, λόγου χάριν, εἶναι ἡ ἐξῆς πρότασις.

Πᾶς ἀριθμὸς δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς μονάδας διαφόρων τάξεων καὶ εἰς ἐκάστην τάξιν νὰ μὴ εἶναι περισσότεραι τῶν ἐννέα (τὴν ἀπόδειξιν ἴδὲ εἰς τὸ ἐδ. 6).

Πόρισμα δὲ λέγεται πρότασις στηριζομένη ἀμέσως ἐπὶ μιᾷ ἢ περισσοτέρων ἀληθῶν προτάσεων.

Πρόβλημα ἀριθμητικὸν λέγεται πρότασις, ἐν ᾗ ζητεῖται ἐκ δοθέντων ἀριθμῶν νὰ εὗρεθῇ ἄλλος ἀριθμὸς ἢ ἄλλοι ἀριθμοί.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

ΒΙΒΛΙΟΝ Α'

ΑΙ ΤΕΣΣΑΡΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΥΤΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

16 Ἡ πρόσθεσις εἶναι πρᾶξις, δι' ἧς σχηματίζομεν ἓνα ἀριθμὸν ἐκ πασῶν τῶν μονάδων, τὰς ὁποίας ἔχουσι δύο ἢ περισσότεροι δοθέντες ἀριθμοί.

Οἱ εἰς πρόσθεσιν δοθέντες ἀριθμοὶ λέγονται προσθετέοι· τὸ δὲ ἐξαγόμενον τῆς προσθέσεως λέγεται κεφάλαιον ἢ ἄθροισμα.

Τὸ ἄθροισμα σημειοῦται, ἐὰν γραφῶσιν οἱ προσθετέοι ἀριθμοὶ κατὰ σειρὰν καὶ τεθῇ μεταξὺ ἐκάστου αὐτῶν καὶ τοῦ ἐπομένου τὸ σημεῖον τῆς προσθέσεως, ἥτοι τὸ $+$, ὅπερ ἀναγινώσκεται σύν.

Παραδείγματος χάριν, τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν 5 καὶ 8 παρίσταται ὡς ἐξῆς $5+8$ · ἀναγινώσκεται δὲ πέντε σύν ὀκτώ.

17. Τὸ ἄθροισμα δεδομένων ἀριθμῶν εἶναι ἀριθμὸς ἐντελὺς ὁρισμένος· διότι εἶναι δεδομένοι πᾶσαι αἱ μονάδες, αἵτινες θὰ ἀποτελέσωσιν αὐτόν. Εἶναι λοιπὸν ἀδιάφορον κατὰ ποῖον τρόπον θὰ ἐνωθῶσιν αἱ μονάδες αὗται· ἀρκεῖ νὰ ληφθῶσι πᾶσαι.

Σημείωσις. Οἱ προσθετέοι ἀριθμοὶ ὑποτίθεται ὅτι παριστῶσιν ὁμοειδῆ ποσά· καὶ τὸ ἄθροισμα εἶναι ὁμοειδὲς πρὸς αὐτούς· ἀλλὰ τὰ πράγματα, τὰ ἐποῖα παριστῶσιν οἱ ἀριθμοί, εἶναι ἀδιάφορα ὡς πρὸς τὰς πράξεις, τὰς ὁποίας κάμνομεν ἐπ' αὐτῶν καὶ ὡς πρὸς τὰς σχέσεις αὐτῶν πρὸς ἀλλήλους· καθὼς, λόγου χάριν, δύο πρόβατα καὶ δύο

πρόβατα κάμνουν τέσσαρα πρόβατα, οὕτω καὶ δύο μῆλα καὶ δύο μῆλα κάμνουν τέσσαρα μῆλα καὶ οὕτω καθεξῆς· πάντοτε δύο καὶ δύο κάμνουν τέσσαρα, ἀρκεῖ νὰ εἶναι ὁμοειδῆ. Διὰ τοῦτο ἐν τῇ ἀριθμητικῇ θεωροῦμεν συνήθως τοὺς ἀριθμοὺς ὡς ἀφηρημένους, δηλαδή ὡς ἀριθμοὺς ἀπλῶς, χωρὶς νὰ ὀρίζωμεν καὶ τὸ πρᾶγμα, τὸ ὁποῖον οἱ ἀριθμοὶ παριστῶσιν· οἷον ὀκτώ, δύο, δέκα κτλ. Ὅταν δὲ ὀρίζωμεν καὶ τὸ πρᾶγμα, τὸ ὁποῖον οἱ ἀριθμοὶ παριστῶσι, τότε οἱ ἀριθμοὶ λέγονται *συγκεκριμένοι*· οἷον, ὀκτὼ ἄνθρωποι, τρία ἔτη, πέντε ὀκάδες κτλ.

Πρόσθεσις κατὰ τὰς ἀπλουστάτας περιπτώσεις.

18. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν δύο μονοψηφίους ἀριθμούς· οἷον, τοὺς 7 καὶ 3. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα, προσθέτομεν εἰς τὸν 7 τὰς μονάδας τοῦ 3, τὴν μίαν μετὰ τὴν ἄλλην· ἥτοι λέγομεν : 7 καὶ 1 κάμνουν 8, καὶ 1 κάμνουν 9, καὶ 1 κάμνουν 10.

Ἀντὶ νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν 7 τὰς μονάδας τοῦ 3, δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν 3 τὰς μονάδας τοῦ 7· εἶναι δὲ προφανές ὅτι θὰ εὕρωμεν ὡς ἄθροισμα πάλιν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 10· διότι τὸ ἄθροισμα σχηματίζεται ἐξ 7 μονάδων καὶ ἐκ 3 μονάδων· εἶναι δὲ ἀδιάφορον κατὰ ποῖον τρόπον θὰ ἐνωθῶσιν αἱ μονάδες αὗται.

Σημειώσεις. Τὴν πρόσθεσιν δύο μονοψηφίων ἀριθμῶν ἐκτελοῦμεν ἀμέσως ἀπὸ μνήμης· διότι εὐκόλως μανθάνομεν νὰ ἐνθυμώμεθα τὸ ἄθροισμα δι' οἷωνδῆποτε μονοψηφίων ἀριθμῶν.

19. Διὰ νὰ προσθέσωμεν πολλοὺς μονοψηφίους ἀριθμούς, προσθέτομεν δύο ἐξ αὐτῶν· ἔπειτα εἰς τὸ ἄθροισμα τούτων προσθέτομεν ἕνα ἄλλον· εἰς τὸ νέον ἄθροισμα ἕνα ἄλλον καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ λάβωμεν πάντας τοὺς δοθέντας ἀριθμούς.

Παραδείγματος χάριν, ἐὰν ἔχωμεν νὰ προσθέσωμεν τοὺς ἀριθμούς 6, 8, 2, 5, 6, 9· λέγομεν 6 καὶ 8 κάμνουν 14· 14 καὶ 2 κάμνουν 16· 16 καὶ 5 κάμνουν 21· 21 καὶ 6 κάμνουν 27· καὶ τέλος 27 καὶ 9 κάμνουν 36· τὰς διαδοχικὰς ταύτας πρὸςθέσεις ἐκτελοῦμεν ἢ ἀπὸ μνήμης ἢ προσθέτοντες εἰς τὸν πολυψήφιον τὰς μονάδας τοῦ μονοψηφίου, μίαν μετ' ἄλλην· ἐπομένως τὸ ζητούμενον ἄθροισμα εἶναι 36.

Σημειωτέον δὲ ὅτι, καὶ κατ' ἄλλην τάξιν οἵανδῆποτε ἂν λάβωμεν καὶ προσθέσωμεν τοὺς δοθέντας ἀριθμούς, πάλιν τὸ αὐτὸ ἄθροισμα θὰ

εὐρωμεν· διότι τὸ ἄθροισμα ἀποτελεῖται ἐκ παρῶν τῶν μονάδων τῶν δοθέντων ἀριθμῶν· εἶναι δὲ ἀδιάφορον πῶς θὰ ἐνωθῶσιν αἱ μονάδες αὗται· λόγον χάριν, ἡδυνάμεθα νὰ ἐνώσωμεν αὐτὰς ὡς ἑξῆς: λαμβάνομεν μίαν μονάδα τοῦ 6 καὶ προσθέτομεν αὐτὴν εἰς τὸν 9, ὅτε τοῦτο γίνεται 10, τὸ δὲ 6 γίνεται 5· τότε τὰ δύο 5 κάμνουν καὶ ἄλλο 10· καὶ τὸ 8 καὶ 2 κάμνουν ἄλλο 10· ἔχομεν λοιπὸν 30· τοῦτο μετὰ τοῦ ἄλλου 6 ἀποτελεῖ τέλος τὸν 36.

Πρόσθεσις ὅσωνδῆποτε καὶ οἷωνδῆποτε ἀριθμῶν.

20. Πᾶσα πρόσθεσις ἀνάγεται εἰς τὴν ἀπλὴν πρόσθεσιν μονοψηφίων ἀριθμῶν· διότι εἶναι φανερόν ὅτι, ἵνα προσθέσωμεν ὅσουσδήποτε ἀριθμούς, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν χωριστὰ τὰς μονάδας αὐτῶν, χωριστὰ τὰς δεκάδας, τὰς ἑκατοντάδας κτλ. καὶ νὰ ἐνώσωμεν ἔπειτα πάντα τὰ ἀθροίσματα ταῦτα· διότι τότε ἐνοῦνται πᾶσαι αἱ μονάδες τῶν δοθέντων ἀριθμῶν καὶ σχηματίζουν εἷνα μόνον, ὅστις θὰ εἶναι ἄθροισμα αὐτῶν.

Ἐὰς ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν τοὺς ἀριθμούς:

$$\begin{array}{r} 2\ 955 \\ 408 \\ 1\ 296 \end{array}$$

Ἡ προᾶξις χάριν εὐκολίας διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

$$2\ 955$$

$$408$$

$$1\ 296$$

$$4\ 659$$

Γράφομεν δηλονότι τοὺς ἀριθμούς τὸν εἷνα ὑπὸ τὸν ἄλλον οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὐρίσκονται εἰς τὴν αὐτὴν κατακόρυφον στήλην· ἔπειτα ἄγομεν ὑπ' αὐτοὺς ὀριζοντίαν γραμμὴν καὶ ὑποκάτω τῆς γραμμῆς ταύτης γράφομεν τὰ ψηφία τοῦ ἀθροίσματος, καθ' ὅσον εὐρίσκομεν αὐτά.

Κατὰ πρῶτον προσθέτομεν τὰς ἀπλᾶς μονάδας λέγοντες: 6 καὶ 8 κάμνουν 14· καὶ 5 κάμνουν 19· τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπλῶν μονάδων εἶναι λοιπὸν 19 μονάδες· ἐπειδὴ δὲ τὸ ἄθροισμα τοῦτο ἔχει μίαν δεκάδα καὶ 9 μονάδας, γράφομεν εἰς τὴν στήλην τῶν ἀπλῶν μονάδων μόνον τὸ

ψηφίον 9 τῶν μονάδων καὶ κρατοῦμεν τὴν μίαν δεκάδα, διὰ νὰ τὴν ἐνώσωμεν μετὰ τῶν δεκάδων τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Μεταβαίνοντες ἔπειτα εἰς τὴν στήλην τῶν δεκάδων λέγομεν : 1 τὸ κρατούμενον καὶ 9 κάμνουν 10· καὶ 5 κάμνουν 15· τὸ ἄθροισμα τῶν δεκάδων εἶναι λοιπὸν 15 δεκάδες, ἥτοι 1 ἑκατοντάς καὶ 5 δεκάδες καὶ τὸ μὲν ψηφίον 5 τῶν δεκάδων γράφομεν εἰς τὴν στήλην τῶν δεκάδων, τὴν δὲ ἑκατοντάδα κρατοῦμεν διὰ νὰ τὴν ἐνώσωμεν μετὰ τῶν ἑκατοντάδων τῶν προσθετέων ἀριθμῶν.

Μεταβαίνοντες ἔπειτα εἰς τὴν στήλην τῶν ἑκατοντάδων λέγομεν : 1 τὸ κρατούμενον καὶ 2 κάμνουν 3· καὶ 4 κάμνουν 7· καὶ 9 κάμνουν 16· τὸ ἄθροισμα τῶν ἑκατοντάδων λοιπὸν εἶναι 16 ἑκατοντάδες, τουτέστι 1 χιλιάς καὶ 6 ἑκατοντάδες· καὶ τὸ μὲν ψηφίον 6 τῶν ἑκατοντάδων γράφομεν εἰς τὴν στήλην τῶν ἑκατοντάδων, τὴν δὲ μίαν χιλιάδα κρατοῦμεν διὰ νὰ τὴν ἐνώσωμεν μετὰ τῶν χιλιάδων τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Μεταβαίνοντες τέλος εἰς τὴν στήλην τῶν χιλιάδων λέγομεν : 1 τὸ κρατούμενον καὶ 1 κάμνουν 2· καὶ 2 κάμνουν 4· λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν χιλιάδων εἶναι 4 χιλιάδες καὶ τὸ ψηφίον 4 τῶν χιλιάδων γράφομεν εἰς τὴν στήλην τῶν χιλιάδων.

Ὡστε τὸ ἄθροισμα τῶν δοθέντων ἀριθμῶν εἶναι 4659.

Κανὼν τῆς προσθέσεως.

21. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται ὁ ἐξῆς κανὼν τῆς προσθέσεως.

Ἵνα προσθέσωμεν δύο ἢ περισσοτέρους ἀριθμούς, γράφομεν αὐτοὺς τὸν ἓνα ὑπὸ τὸν ἄλλον οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες ἐκάστης τάξεως νὰ εὐρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν κατακόρυφον στήλην, καὶ ἄγομεν ὑπ' αὐτοὺς ὀριζοντίαν γραμμὴν. Ἐπειτα προσθέτομεν χωριστὰ τὰ ψηφία ἐκάστης στήλης ἀρχόμενοι ἀπὸ τῆς στήλης τῶν ἀπλῶν μονάδων· καὶ ὅταν μὲν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων μιᾶς στήλης δὲν ὑπερβαίνει τὸν 9, γράφομεν αὐτὸ ὑποκάτω τῆς αὐτῆς στήλης· ἐὰν ὅμως ὑπερβαίνει τὸν 9, γράφομεν μόνον τὰς μονάδας τοῦ ἀθροίσματος ὑποκάτω τῆς στήλης, τὰς δὲ δεκάδας αὐτοῦ προσθέτομεν εἰς τὴν ἀκόλουθον πρὸς τὰ ἀριστερὰ στήλην καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρι τῆς τελευταίας στήλης.

Σημειώσεις. Ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων εἰς ἐκάστην στήλην δὲν ὑπερβαίνει τὸν 9, εἶναι ἀδιάφορον, ἂν ἀρχίζωμεν τὴν πράξιν ἀπὸ

προσθέσεως τῶν ἀπλῶν μονάδων καὶ προχωροῦμεν πρὸς τὰ ἀριστερά, ἀρχίζομεν ἀπὸ τῆς προσθέσεως τῶν μονάδων τῆς ἀνωτάτης τάξεως καὶ προχωροῦμεν πρὸς τὰ δεξιὰ. Τοῦτο συμβαίνει, π.χ. εἰς τὴν ἐξῆς πρόσθεσιν.

442

114

321

12

989

Ἄλλ' ὅταν τὸ ἄθροισμα μιᾶς στήλης (ἢ καὶ περισσοτέρων) ὑπερβῇ τὸν 9, εἰς τὴν ἡμιτέλειαν τὴν πρόσθεσιν ἀπὸ τῶν μονάδων τῆς ἀνωτάτης τάξεως, θὰ ἡμεῖς ἡναγκασμένοι νὰ ἀλλάζωμεν τὸ ψηφίον, τὸ τοῖον ἐγράψαμεν· π. χ. εἰς τὴν ἐξῆς πρόσθεσιν

4854

797

1568

5

70

.....

7219.

Τὸ ἄθροισμα τῶν μυριάδων εἶναι 5· ἀλλὰ καὶ ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν χιλιάδων λαμβάνομεν προσέτι 2 μυριάδας· ὥστε τὸ πρῶτον ψηφίον 5 πρέπει νὰ γίνῃ 7. Ὁμοίως τὸ δεύτερον ψηφίον ἀπὸ 0 πρέπει νὰ γίνῃ 2 κτλ.

Διὰ τοῦτο ἀρχόμεθα πάντοτε ἀπὸ τῆς στήλης τῶν ἀπλῶν μονάδων.

Βάσανος τῆς προσθέσεως.

22. Βάσανος ἢ δοκιμὴ προῆξός τις λέγεται ἄλλη τις προᾶξις, δι' ἣν ἐξελέγχομεν, ἂν ἡ πρώτη ἐγένετο ἄνευ λάθους.

Ἡ βάσανος τῆς προσθέσεως γίνεται ὡς ἐξῆς.

Ἐπαναλαμβάνομεν τὴν προᾶξιν προσθέτοντες τὰ ψηφία ἐκάστης στήλης κατ' ἄλλην τάξιν· ἥτοι ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω, ἢ προηγουένως προεβαίνομεν ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω· ἢ καὶ ὅλως ἀτάκτως. Ἐὰν καὶ πάλιν εὐρωμεν τὸ αὐτὸ ἄθροισμα, τοῦτο εἶναι ἔνδειξις ὅτι ἡ πρόσθεσις ἐγένετο ἄνευ λάθους.

Γενικαὶ ἰδιότητες τῆς προσθέσεως.

23. Ἡ θεμελιώδης ἰδιότης τῆς προσθέσεως, ἐξ ἧς πᾶσαι αἱ ἄλλαι αὐτῆς ἰδιότητες πηγάζουσιν, εἶναι ἡ ἐξῆς.

Τὸ ἄθροισμα πολλῶν ἀριθμῶν μένει τὸ αὐτό, καθ' οἷανδήποτε εἰς αὐτὸ προστεθῶσιν.

Διότι, ὥς καὶ προηγουμένως παρατηρήσαμεν (ἐδ. 17), τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποτελεσθῆναι ἐκ τῆς ἐνώσεως τῶν μονάδων τῶν δεδομένων ἀριθμῶν πᾶς δὲ ἀριθμὸς εἶναι ἐντελῶς ὥρισμένος, ὅταν δοθῶσιν αἱ μονάδες αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦσιν αὐτόν.

Ἐκ τῆς θεμελιώδους ταύτης ἰδιότητος ἔπονται αἱ ἐξῆς.

1) Δυνάμεθα εἰς πᾶν ἄθροισμα νὰ ἀντικαταστήσωμεν προσθετέον τινα διὰ τοῦ εὐρεθέντος ἀθροίσματος αὐτῶν.

Δυνάμεθα, δηλονότι, νὰ συμπιῇσωμεν προσθετέους τινὰς εἰς ἓνα μό-

Ἄς ὑποθέσωμεν, π. χ., ὅτι ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς

8, 12, 10, 4, 25.

λέγω, ὅτι τὸ ἄθροισμα θὰ μείνῃ τὸ αὐτό, καὶ ὅταν ἀντὶ τῶν προσθετέων 10 καὶ 4 λάβωμεν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν 14· ἤτοι οἱ ἀριθμοὶ 8, 12, 14, 25 θὰ δώσωσι τὸ αὐτὸ ἄθροισμα, ὥς καὶ οἱ δοθέντες ἀριθμοί.

Ἀπόδειξις. Διότι, κατὰ τὴν προειρημένην θεμελιώδη ἰδιότητα δύναμαι νὰ προσθέσω τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς, καθ' οἷανδήποτε θέλω ἂν λοιπὸν ἀρχίσω τὴν πρόσθεσιν ἀπὸ τῶν 10 καὶ 4, θὰ εἶναι τὸ ἄθροισμα 14 καὶ θὰ ἔχω ἔπειτα νὰ προσθέσω τοὺς ἀριθμοὺς 8, 12, 25· ἐπομένως τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν τούτων καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν δοθέντων εἶναι εἷς καὶ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς.

Ἡ ἰδιότης αὕτη δύναται νὰ ἐκφρασθῇ καὶ ὥς ἐξῆς.

Εἰς πᾶν ἄθροισμα δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν οἷονδήποτε προσθετέον δι' ἄλλων ἀριθμῶν, ἐχόντων αὐτὸν ἄθροισμα.

Τουτέστι δυνάμεθα νὰ ἀναλύσωμεν ἓνα προσθετέον εἰς πολλοὺς ἄλλους

Παραδείγματος χάριν, εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν

14, 8, 12, 25,

δύναμαι πάλιν νὰ ἀντικαταστήσω τὸν 14 διὰ τῶν ἀριθμῶν 10 καὶ 4· οἵτινες ἔχουσιν αὐτὸν ἄθροισμα.

2) "Ινα προσθέσωμεν ἀριθμὸν εἰς ἄθροισμα, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν αὐτὸν εἰς ἓνα ἐκ τῶν προσθετέων τοῦ ἄθροίσματος.

Ἐπειδὴ οὖν ἔχουμεν νὰ προσθέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 8 εἰς τὸ ἐξῆς ἄθροισμα:

$$4 + 7 + 10 + 12.$$

Ἰνα γίνῃ τοῦτο, πρέπει νὰ εὗρωμεν πρῶτον τὸ ἄθροισμα, δηλαδή νὰ προσθέσωμεν πρῶτον τοὺς ἀριθμοὺς 4, 7, 10, 12, καὶ ἔπειτα εἰς τὸ εὗρεθὲν ἄθροισμα, νὰ προσθέσωμεν τὸν 8· ἀλλὰ τότε προφανῶς εὕρισκομεν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν 4, 7, 10, 12, 8·

ἢ καὶ τῶν ἐξῆς: $4, 15, 10, 12.$ (ἰδιότης 1)

Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι ὁ 8 προστετέθη εἰς ἓνα τῶν προσθετέων (τὸν 7) καὶ οὕτω προστετέθη εἰς τὸ ὅλον ἄθροισμα.

3) "Ινα προσθέσωμεν δύο ἄθροίσματα, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν ὁμοῦ πάντας τοὺς προσθετέους ἀμφοτέρων τῶν ἀθροισμάτων.

Ἀς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχουμεν νὰ προσθέσωμεν τὰ δύο ἄθροίσματα

$$5 + 12 + 8 \text{ καὶ } 7 + 22.$$

λέγω ὅτι τὸ ἄθροισμα αὐτῶν θὰ εὗρεθῇ, ἐὰν προστεθῶσιν ὁμοῦ πάντες οἱ προσθετέοι, δηλαδή ἂν προστεθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ 5, 12, 8, 7, 22.

Ἐπειδὴ οὖν ἔχουμεν νὰ προσθέσωμεν τὰ δύο ἄθροίσματα, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν ὁμοῦ πάντας τοὺς προσθετέους ἀμφοτέρων τῶν ἀθροισμάτων, ἢ καὶ νὰ προσθέσωμεν τοὺς δύο ἀριθμοὺς

$$5 + 12 + 8 \text{ καὶ } 7 + 22,$$

τούτέστι τὰ δύο ἄθροίσματα· ὥστε τὸ ἄθροισμα τούτων καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν 5, 12, 8, 7, 22 εἶναι ἓν καὶ τὸ αὐτό.

Σημείωσις. Τὰς ἰδιότητας ταύτας μετεχειρίσθημεν ἤδη πρόηγουμένως, ἵνα ἀναγάγωμεν τὴν πρόσθεσιν οἰωνδήποτε ἀριθμῶν εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν μονοψηφίων· πρὸς τοῦτο ἐθεωρήσαμεν ἕκαστον ἀριθμὸν ὡς ἄθροισμα μονάδων διαφόρων τάξεων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

24. Ἡ ἀφαίρεσις εἶναι πρᾶξις, δι' ἧς ἐλοιτοῦμεν δοθέντα ἀριθμοὶ κατὰ τόσας μονάδας, ὅσας ἔχει ἄλλος τις δοθείς ἀριθμός.

Ὁ πρῶτος ἀριθμός, ὅστις πρέπει νὰ ἐλαττωθῇ, λέγεται μειωτέος, ὁ δὲ δεύτερος ἀφαιρετέος· ὁ δὲ ἐκ τῆς ἀφαιρέσεως προκίπτων ἀριθμός λέγεται ὑπόλοιπον ἢ ὑπεροχὴ ἢ διαφορά.

Ὁ μειωτέος εἶναι ἄθροισμα τοῦ ἀφαιρετέου καὶ τῆς διαφορᾶς.

Διότι, κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς ἀφαιρέσεως, τὸ ὑπόλοιπον μένει, ἀφοῦ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ μειωτέου πάσας τὰς μονάδας τοῦ ἀφαιρετέου· εἰς λοιπὸν τὰς προσθέσωμεν πάλιν εἰς τὸ ὑπόλοιπον, θὰ εὕρωμεν προφανῶς τὸν μειωτέον.

Διὰ τοῦτο ἡ ἀφαίρεσις δύναται νὰ ὁρισθῇ καὶ ὥς ἑξῆς.

Ἡ ἀφαίρεσις εἶναι πρᾶξις, δι' ἧς, δοθέντα ν' δύο ἀριθμῶν, εὐρίσκεται τρίτος, ὅστις προσυθήμενος εἰς τὸν δεύτερον δίδει ἄθροισμα τὸν πρῶτον.

Ἡ ἀφαίρεσις σημειοῦται διὰ τοῦ σημείου —, τὸ ὁποῖον γράφεται μεταξὺ μειωτέου καὶ ἀφαιρετέου (γράφεται δὲ πρῶτος ὁ μειωτέος) καὶ ἀναγινώσκεται πλήν· οἷον 8 — 6 σημαίνει ὅτι ἀπὸ τοῦ 8 πρέπει νὰ ἀφαιρεθῇ ὁ 6 καὶ ἀναγινώσκεται ὀκτώ πλήν ἕξ.

Σημειώσεις. Καὶ εἰς τὴν ἀφαίρεσιν οἱ ἀριθμοὶ πρέπει νὰ εἶναι ὁμοειδεῖς, ὥς καὶ εἰς τὴν πρόσθεσιν· καὶ τὸ ὑπόλοιπον εἶναι ὁμοειδὲς πρὸς αὐτοὺς.

Ἀφαιρέσεις μονοψηφίου ἀριθμοῦ ἀπὸ ἄλλου.

25. Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν μονοψήφιον ἀριθμὸν ἀπὸ ἄλλου οἰουδήποτε, ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τούτου τὰς μονάδας τοῦ μονοψηφίου, τὴν μίαν μετὰ τὴν ἄλλην, ὁ δὲ ἀριθμός, ὅστις μένει, ὅταν ἀφαιρεθῇ καὶ ἡ τελευταία μονὰς τοῦ ἀφαιρετέου, εἶναι τὸ ὑπόλοιπον.

Παραδείγματος χάριν, διὰ νὰ ἀφαιρέσω 5 ἀπὸ 14 λέγω· 14 πλήν 1 μένουν 13· 13 πλήν 1 μένουν 12· 12 πλήν 1 μένουν 11· 11 πλήν 1 μένουν 10· 10 πλήν 1 μένουν 9· ἄρα τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον εἶναι 9.

Διὰ νὰ ἀφαιρέσω τὸν 6 ἀπὸ τοῦ 147, ἀφαιρῶ αὐτὸν μόνον ἀπὸ τῶν 7 μονάδων τοῦ 147 καὶ εὐρίσκω τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον 141.

Όταν ὁ μειωτέος δὲν εἶναι μέγας ἀριθμός, αἱ ἀφαιρέσεις αὐταὶ γίνονται ἀμέσως ἀπὸ μνήμης· ὥς τε λέγουμεν ἀμέσως: 9 ἀπὸ 15 μένουν 6· 8 ἀπὸ 17 μένουν 9· καὶ οὕτω καθέξης.

Σημείωσις. Όταν ἔχω νὰ ἀφαιρέσω 9, ἀφαιρῶ 10 καὶ ἔπειτα προσθέτω 1· οἶον, 9 ἀπὸ 537 μένουν 528. Ὅμοιως, όταν ἔχω νὰ προσθέσω 9, προσθέτω 10 καὶ ἔπειτα ἀφαιρῶ 1· οἶον, 165 καὶ 9 κάμνουν 174.

Ἀφαιρέσεις πολυψηφίου ἀπὸ ἄλλου.

26. Πᾶς ἀριθμός δύναται νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ ἄλλου (μεγαλυτέρου) κατὰ τὸν ἄνωτέρω εἰρημένον τρόπον· ὁ τρόπος ὅμως οὗτος διὰ τὴν ἀφαίρεσιν μεγάλων ἀριθμῶν θὰ ἦτο λίαν ἐπίπονος, ἀλλ' εὐκόλως εὐρίσκομεν ἄλλον, δι' οὗ γίνεται ἡ ἀφαίρεσις συντόμως καὶ εὐκόλως· ὁ τρόπος οὗτος στηρίζεται ἐπὶ τῶν ἐξῆς δύο ἰδιοτήτων, ὧν ἡ ἀλήθεια εἶναι προφανής.

1) Ἐν προσθέσωμεν καὶ εἰς τὸν μειωτέον καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἡ διαφορὰ αὐτῶν δὲν μεταβάλλεται.

2) Ἵνα ἀφαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα ἀπὸ ἄλλου, ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀ·λεπαλλήλως τὰς μονάδας του, τὰς δεκάδας του, τὰς ἑκατονταδας του κτλ., ἥγουν, ἵνα ἀφαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα, ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσωμεν πάντα τὰ μέρη του.

Ἐάν, παραδείγματος χάριν, ἔχω νὰ ἀφαιρέσω τὸν 12 ἀπὸ ἄλλου θριμοῦ, ἔστω ἀπὸ τοῦ 47, δύναμαι νὰ ἀφαιρέσω πρῶτον τὰς 2 μονάδας (ἵτε μένουν 45) καὶ ἔπειτα ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν 45, ὅστις μένει, νὰ ἀφαιρέσω τὴν μίαν δεκάδα (ἵτε μένουν 35).

Στηριζόμενοι ἐπὶ τῶν ἰδιοτήτων τούτων δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν οἰανδήποτε ἀφαιρέσιν, ἀνάγοντες αὐτὴν εἰς ἄλλας μερικὰς ἀφαιρέσεις, ἐν ἑκάστη τῶν ὁποίων ὁ ἀφαιρετέος δὲν ὑπερβαίνει τὸν 10.

Πρὸς τοῦτο γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον ὑποκάτω τοῦ μειωτέου, ὥς καὶ εἰς τὴν πρόσθεσιν· ἔπειτα κάμνομεν, ὥς φαίνεται εἰς τὰ ἐξῆς παραδείγματα.

Παράδειγμα Α'. Νὰ ἀφαιρεθῇ ὁ 512 ἀπὸ τοῦ 945.

945

512

433.

Κατὰ πρῶτον ἀφαιροῦμεν τὰς δύο μονάδας τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τῶν μονάδων τοῦ μειωτέου (λέγοντες: 2 ἀπὸ 5 μένουν 3) καὶ γράφομεν τὰς 3 μονάδας, αἱ ὁποῖαι μένουν, εἰς τὴν θέσιν τῶν μονάδων· ἔπειτα ἀφαιροῦμεν τὴν μίαν δεκάδα τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τῆς 4 δεκάδας τοῦ μειωτέου (λέγοντες: 1 ἀπὸ 4 μένουν 3) καὶ γράφομεν τὰς 3 δεκάδας, αἵτινες ἔμειναν, εἰς τὴν θέσιν τῶν δεκάδων· τέλος ἀφαιροῦμεν τὰς 5 ἑκατοντάδας ἀπὸ τῶν 9 ἑκατοντάδων καὶ γράφομεν εἰς τὴν θέσιν τῶν ἑκατοντάδων τὰς 4 ἑκατοντάδας, αἱ ὁποῖαι ἔμειναν· ὥστε τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον εἶναι 433 διότι τοῦτο εὗρήκαμεν ἀφαιρέσαντες ἀπὸ τοῦ μειωτέου 945 πάντα τὰ μέρη τοῦ ἀφαιρετέου 512.

Σημειώσεις. Εἰς τὸ παράδειγμα τοῦτο ἡδυνάμεθα νὰ ὀρχίσωμεν τὴν προᾶξιν ἀπὸ τὴν ἀφαίρεσιν τῶν ἑκατοντάδων καὶ ἔπειτα νὰ κάμωμεν τὴν ἀφαίρεσιν τῶν δεκάδων καὶ ἔπειτα τῶν μονάδων.

Παράδειγμα Β'. Νὰ ἀφαιρηθῇ ὁ 8472 ἀπὸ τοῦ 29548.

$$29548$$

$$8472$$

$$\hline 21076$$

Λέγομεν: 2 μονάδες ἀπὸ 8 μονάδων μένουν 6 μονάδες· 7 δεκάδες ἀπὸ 4 δεκάδων δὲν ἀφαιροῦνται· διὰ νὰ δυνηθῶμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν, προσθέτομεν εἰς τὸν μειωτέον 10 δεκάδας, ὥστε αἱ 4 δεκάδες του γίνονται 14, καὶ ἔπειτα λέγομεν: 7 ἀπὸ 14 μένουν 7· ἀλλὰ τώρα πρέπει νὰ προσθέσωμεν καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον 10 δεκάδας (διὰ νὰ μὴ μεταβληθῇ ἡ διαφορὰ) ἢ ἀντ' αὐτῶν μίαν ἑκατοντάδα· λέγομεν λοιπόν: ἔν τὸ κρατούμενον καὶ 4 κάμνουν 5· ἀπὸ 5, μένει 0· ἔπειτα ἀφαιροῦμεν τὰς 8 χιλιάδας τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τῶν 9 χιλιάδων τοῦ μειωτέου καὶ εὗρίσκομεν 1 χιλιάδα· τέλος γράφομεν καὶ τὰς 2 μυριάδας τοῦ μειωτέου, ἀπὸ τῶν ὁποίων δὲν ἔχομεν νὰ ἀφαιρέσωμέν τι· ὥστε τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον εἶναι 21076.

Καὶ ἡ ἀφαίρεσις μονοψηφίου ἀπὸ πολιψηφίου δύναται νὰ γίνη κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ὥς φαίνεται ἐκ τῶν ἑξῆς παραδειγμάτων.

$$\begin{array}{r} 128 \\ 2 \\ \hline 123 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 251 \\ 8 \\ \hline 243 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1001 \\ 7 \\ \hline 994 \end{array}$$

Ἰσάνων τῆς ἀφαιρέσεως.

27. Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγεται ὁ ἑξῆς κανὼν τῆς ἀφαιρέσεως. Ἵνα ἀφαιρέσωμεν ἀριθμὸν τινα ἀπὸ ἄλλου ἀριθμοῦ, γράφομεν τὸν ὑποκείμενον τοῦ μειωτέου, ὡς καὶ εἰς τὴν πρόσθεσιν ἔπειτα ζῶντες ἀπὸ τὰς ἀπλάς μονάδας ἀφαιροῦμεν ἕκαστον ψηφίον τοῦ μειωτέου ἀπὸ τοῦ ἀντιστοίχου ψηφίου τοῦ μειωτέου. Ἐὰν δὲ ψηφίον τοῦ μειωτέου εἶναι μικρότερον τοῦ ἀντιστοίχου ψηφίου τοῦ ἀφαιρέτου, προσθέτομεν εἰς αὐτὸ 10 (Ἵνα καταστήσωμεν δυνατὴν τὴν μερικὴν τὴν ἀφαίρεσιν), ἀλλ' ἔπειτα ἐρχόμενοι εἰς τὸ ἀκόλουθον πρὸς τὰ πρὸς τὸ ἀφαιρέσιμον τοῦ ἀφαιρέτου ἀνξάνομεν αὐτὸ κατὰ μίαν μονάδα καὶ τὸ ἀφαιρέσωμεν. Τὰ ὑπόλοιπα τῶν μερικῶν τούτων ἀφαιρέσεων εἰς τὰ ψηφία τοῦ ζητουμένου ὑπολοίπου.

Σημείωσις. Τὴν ἀφαίρεσιν ἀρχίζομεν ἐκ δεξιῶν διὰ τὸν αὐτὸν λόγον, δι' ὃν καὶ τὴν πρόσθεσιν.

Βάσανος τῆς ἀφαιρέσεως.

28. Ἵνα ἐξελέγξωμεν, ἂν ἀφαιρέσις τις ἔγινεν ἄνευ λάθους, προσέτιναι τὸν ἀφαιρέτεον καὶ τὸ ὑπόλοιπον· ἂν ὡς ἄθροισμα εὐρεθῇ τοῦ μειωτέου, τοῦτο εἶναι ἔνδειξις ὅτι εἰς τὴν ἀφαίρεσιν δὲν ἔγινεν λάθος (ἔδ. 24).

Γενικαὶ ἰδιότητες τῆς ἀφαιρέσεως.

29. Αἱ ἰδιότητες, ἐφ' ὧν ἐστηρίξαμεν τὴν ἐκτέλεσιν τῆς ἀφαιρέσεως οἰουδήποτε ἀριθμοῦ ἀπὸ ἄλλου, γενικεύονται εὐκόλως καὶ ἐκτείνονται ὡς ἑξῆς.

1) Ἐὰν προστιθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς εἰς τὸν ἀφαιρέτεον καὶ εἰς τὸν ἀφαιρέτον, ἡ διαφορὰ δὲν μεταβάλλεται.

2) Ἵνα ἀφαιρέσωμεν ἀριθμὸν ἀπὸ ἀθροίσματος ἄλλων, ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσωμεν αὐτὸν ἀπ' ἑνὸς τῶν προσθετέων.

Ἐὰν, παραδείγματος χάριν, ἔχω νὰ ἀφαιρέσω τὸν 12 ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος

$$15 + 6 + 20 + 9$$

ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσω αὐτὸν ἀπὸ τοῦ 20 (ὅτι τὸ 20 γίνεται 8) καὶ τὸ ὑπόλοιπον ἀθροισμα $15 + 6 + 8 + 9$ θὰ εἶναι τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον.

Διότι, κατὰ τὴν δευτέραν ἰδιότητα τῆς προσθέσεως (ἔδ. 23), ἂν προστιθῇ εἰς αὐτὸ ὁ ἀφαιρέτεος 12, προκύπτει ὁ μειωτέος.

3) "Ἴνα ἀφαιρέσωμεν ἄθροισμα ἀπὸ ἀριθμοῦ, ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τούτου πᾶντας τοὺς προσθετέους τοῦ ἀθροίσματος, τὸν μὲν ἄλλον.

Ἐάν, παραδείγματος χάριν, ἔχῃ νὰ ἀφαιρέσω τὸ ἄθροισμα

$$3 + 9 + 12$$

ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 30, φανερόν ἐστίν ὅτι ἀντὶ νὰ ἀφαιρέσω διὰ τὰς 24 μονάδας, ἔξ ὧν σύγκειται τὸ ἄθροισμα, δύναμαι νὰ ἀφαιρέσω πρῶτον τὰς 3 μονάδας, ἔπειτα τὰς 9 καὶ τέλος τὰς 12 μονάδας· ἀντὶ νὰ ἀφαιρέσω δὲ μίαν ὅλον τὸ ἄθροισμα, δύναμαι νὰ ἀφαιρέσω τὰ μέρη του, τὸ ἐν μετὰ τὸ ἄλλο· ἀφαιρῶ λοιπὸν τὸν 3 ἀπὸ μειωτέου 30 καὶ μένουν 27· ἔπειτα ἀπὸ τοῦ 27, ὅπερ ἔμεινεν, ἀφαιρῶ τὸν 9 καὶ μένουν 18· τέλος ἀπὸ τοῦ 18 ἀφαιρῶ καὶ τὸν 12 καὶ μένουν 6· τοῦτο εἶναι τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον.

30. Ἐκ τῶν ιδιοτήτων τούτων συνάγεται ἡ ἑξῆς.

"Ἴνα ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ ἀριθμοῦ τὴν διαφορὰν δύο ἄλλων, καὶ προηγουμένως νὰ εὗρωμεν αὐτήν, προσθέτομεν εἰς αὐτὸν τὸν ἀφαιρέτέον τῆς δοθείσης διαφορᾶς καὶ ἀπὸ τοῦ ἐξαγομένου ἀφαιροῦμεν τὸν μειωτέον αὐτῆς.

Ἄς ὑποθέσωμεν, π. χ., ὅτι ἔχομεν νὰ ἀφαιρέσωμεν τὴν διαφορὰν 12—8 ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 18.

Κατὰ τὴν πρώτην ιδιότητα τῆς ἀφαιρέσεως ἡ ζητούμενη διαφορὰ δὲν ἀλλάσσει, ἐὰν προστεθῇ καὶ εἰς τοὺς δύο ἀριθμοὺς ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς 8 ἀλλὰ τότε ὁ μὲν μειωτέος 18 γίνεται 18+8, ὁ δὲ ἀφαιρέτέος 12—8, γίνεται 12—8+8 ἥτοι 12· ὥστε ἔχομεν τώρα ἀπὸ ἀθροίσματος 18+8 νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 12· τοῦτο δὲ φανερῶς φανερὰν τὴν προκειμένην ιδιότητα.

Ἰδιότης τῆς ἰσότητος.

Ἐάν ἀπὸ ἴσων ἀριθμῶν ἀφαιρεθῶσιν ἴσοι, τὰ ὑπόλοιπα θὰ εἶναι ἴσα.

Διότι, ἂν εἰς τὰ ὑπόλοιπα προστεθῶσι πάλιν οἱ ἀφαιρεθέντες ἴσοι, πρέπει νὰ προκύψωσιν ἴσοι ἀριθμοὶ (οἱ ἴσοι μειωτέοι)· τὸ ὅμως δὲν θὰ ἐγίνετο, ἂν τὰ ὑπόλοιπα ἦσαν ἄνισα (ἐδάφ. 15).

ΚΕΦ. ΛΑΙΟΝ III

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

31. Ὁ πολλαπλασιασμός ἐστὶν ποῖσις, δι' ἣς ἐπαναλαμβάνομεν ἓνα ἀριθμὸν πλάκας καὶ σχηματίζομεν ἐξ αὐτοῦ ἄλλον ἀριθμὸν.

Ἐν, παραδείγματος χάριν, ἐπαναλάβω τὸν 9 τρεῖς φορές, 9 καὶ 9 καὶ 9, σχηματίζω ἐξ αὐτοῦ τὸν ἀριθμὸν 27· τοῦτο δὲ εἶναι πολλαπλασιασμός.

Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι ὁ πολλαπλασιασμός ἐστὶν πρόσθεσις ἀλλεπάλληλος ἑνὸς ἀριθμοῦ εἰς τὸν ἑαυτὸν του.

Εἰς ἕκαστον πολλαπλασιασμὸν δίδονται δύο ἀριθμοί· ἐκ τούτων ὁ μὲν εἰς πρέπει νὰ ἐπαναληφθῇ, ἥτοι νὰ πολλαπλασιασθῇ, καὶ λέγεται διὰ τοῦτο πολλαπλασιαστέος, ὁ δὲ ἄλλος δεικνύει, πόσας φορές θὰ ἐπαναληφθῇ ὁ πρῶτος καὶ λέγεται πολλαπλασιαστής.

Ὁ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ προκύπτων ἀριθμὸς λέγεται γινόμενον.

Εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα πολλαπλασιαστέος εἶναι ὁ 9, πολλαπλασιαστής ὁ 3 καὶ γινόμενον ὁ 27.

Ὁ πολλαπλασιαστέος καὶ ὁ πολλαπλασιαστής λέγονται καὶ μὲ ἓν ὄνομα παράγοντες τοῦ γινομένου.

Ὁ πολλαπλασιασμός σημειοῦται διὰ τοῦ σημείου $\times$, τὸ ὁποῖον ἀναγινώσκεται ἐπὶ οἷον 5×7 σημαίνει ὅτι ὁ 5 πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν 7, ἥτοι νὰ ἐπαναληφθῇ ἑπτάκις· ἀναγινώσκεται δὲ πέντε ἐπὶ ἑπτά.

Σημείωσις. Τὸ γινόμενον εἶναι ὁμοειδὲς μὲ τὸν πολλαπλασιαστέον, διότι γίνεται ἐκ τούτου πλάκας προστεθέντος εἰς ἑαυτὸν. Ὁ δὲ πολλαπλασιαστής θεωρεῖται πάντοτε ὡς ἀφηρημένος ἀριθμός, διότι σημαίνει μόνον, πόσας θὰ ληφθῇ ὁ πολλαπλασιαστέος.

Πολλαπλασιασμός ἀριθμοῦ μονοψηφίου ἐπὶ μονοψήφιον.

32. Ὁ πολλαπλασιασμός μονοψηφίου ἀριθμοῦ ἐπὶ μονοψήφιον γίνεται εὐκόλως διὰ τῆς προσθέσεως συμφώνως πρὸς τὸν ὅρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Ἐὰν ἔχω, λόγου χάριν, νὰ πολλαπλασιάσω τὸν 6 ἐπὶ 5, ἥτοι νὰ εὔρω τὸ ἄθροισμα

$$6 + 6 + 6 + 6 + 6,$$

λέγω· 6 καὶ 6 κάμνουν 12· καὶ 6 κάμνουν 18· καὶ 6 κάμνουν 24· καὶ 6 γίνονται 30· λοιπὸν τὸ γινόμενον τοῦ 6 ἐπὶ 5. ἦτοι τὸ 6×5) εἶναι 30. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εὐρίσκομεν τὸ γινόμενον δύο οἰωνδήποτε μονοψηφίων ἀριθμῶν. Εἶναι δὲ τὰ γινόμενα ταῦτα κατατεταγμένα εἰς τὸν ἀκόλουθον πίνακα, ὅστις λέγεται πυθαγόρειος· διότι, ὥς λέγουσιν, ὁ Πυθαγόρας ἐπενόησεν αὐτόν.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Ἡ πρώτη ὀριζοντία σειρά περιέχει τοὺς ἑννέα πρώτους ἀριθμούς· ἡ δευτέρα περιέχει τὰ γινόμενα αὐτῶν ἐπὶ 2, ἦτοι τὰ διπλάσια αὐτῶν· ἡ τρίτη τὰ γινόμενα αὐτῶν ἐπὶ 3, ἦτοι τὰ τριπλάσια αὐτῶν καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Ἵνα δὲ εὐρωμεν εἰς τὸν πίνακα τοῦτον τὸ γινόμενον δύο μονοψηφίων ἀριθμῶν, ζητοῦμεν τὸν πολλαπλασιαστέον εἰς τὴν πρώτην ὀριζοντίαν* σειράν, τὸν δὲ πολλαπλασιαστέον εἰς τὴν πρώτην κατακόρυφον· τὸ γινόμενον αὐτῶν εὐρίσκεται ἐκεῖ, ἔνθα συναντῶνται αἱ δύο σειραί, αἵτινες ἄρχονται ἀπὸ τῶν ἀριθμῶν τούτων.

Παραδείγματος χάριν, τὸ γινόμενον 35, τοῦ 5 ἐπὶ 7, εὐρίσκεται ἐκεῖ, θὰ συναντῶνται ἡ πέμπτη κατακόρυφος σειρὰ καὶ ἡ ἑβδόμη ὀριζοντία. **Σημειώσεις.** Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι 1, τὸ γινόμενον εἶναι πολλαπλασιαστέος, ἅπαξ μόνον λαμβανόμενος· ἥτοι 5×1 εἶναι 5· < 1 εἶναι 8 κτλ.

Παρατήρησις.

Πᾶς πολλαπλασιασμός, ὥς θὰ ἴδωμεν ἀκολούθως, ἀνάγεται εἰς τὸν πολλαπλασιασμόν μονοψηφίου ἐπὶ μονοψήφιον· διὰ τοῦτο πρέπει νὰ εὕρωμεν ἐκ στήθους τὰ εἰς τὸν πίνακα τοῦτον περιεχόμενα γινόμενα.

Θεωρήματα, ἐφ' ὧν στηρίζεται ἡ ἐκτέλεσις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Διὰ νὰ ἀναγάγωμεν τὸν πολλαπλασιασμόν οἰωνδήποτε ἀριθμῶν πολλαπλασιασμοὺς μονοψηφίων ἀριθμῶν, εἶναι ἀνάγκη νὰ μάθωμεν ἰδιότητάς τινας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, τὰς ὁποίας ἐκφράζουνσι τὰς θεωρήματα.

ΘΕΩΡΗΜΑ Α'

33. Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν δὲν ἀλλάσσει, ἂν ἀλλαχθῇ ἡ τάξις τῶν παραγόντων, ἥτοι ἂν γίνῃ ὁ πολλαπλασιαστέος πολλαπλασιαστής, καὶ τὰνάπαλιν.

Λέγω, παραδείγματος χάριν, ὅτι εἴτε τὸν 5 πολλαπλασιάσω ἐπὶ εἴτε τὸν 7 ἐπὶ 5, τὸ αὐτὸ γινόμενον θὰ εὔρω.

Ἀπόδειξις. Διὰ νὰ δείξω τοῦτο, ἀναλύω τὸν 7 εἰς τὰς μονάδας του καὶ γράφω αὐτὰς εἰς μίαν σειρὰν, ἐπαναλαμβάνω δε τὴν σειράν ταύτην πέντε φορές, ὥς ἑξῆς·

1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Ἐὰν τώρα θέλω νὰ εὕρω, πόσαι εἶναι αἱ μονάδες αὗται, δύνα νὰ ἀριθμήσω αὐτάς, ὡς ἐξῆς· ἡ πρώτη ὀριζοντία σειρά ἔχει 7 μονά καὶ ἡ δευτέρα ἄλλας 7, ἡ τρίτη ἄλλας 7 καὶ καθεξῆς· ὥστε αἱ μονά αὗται εἶναι $7+7+7+7+7$, ἥτοι 7×5 .

Ἀλλὰ δύναμαι καὶ ἄλλως νὰ ἀριθμήσω τὰς αὐτὰς μονάδας ἐξῆς· ἡ πρώτη κατακόρυφος στήλη ἔχει 5 μονάδας, ἡ δευτέρα ἄλλας 5 κτλ. ἄρα αἱ μονάδες αὗται εἶναι.

$$5+5+5+5+5+5+5, \text{ ἥτοι } 5 \times 7.$$

Ἀλλὰ εἶναι φανερόν, ὅτι ὅπωςδήποτε καὶ ἂν ἐ-ώσωμεν τὰς μονά ταύτας, πάντοτε ἓνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν θὰ εὕρωμεν· ἄρα θὰ εἶναι τὰ 2 γινόμενα 7×5 καὶ 5×7 εἶς· καὶ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς, τουτέστι

$$7 \times 5 = 5 \times 7.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ Β'

34. Ἐὰν ἄθροισμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀριθμὸν, ἔαν ἕκαστος τῶν προσθετέων πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν καὶ προτιεθῶσι πάλιν τὰ προκύπτοντα γινόμενα.

Λέγω, παραδείγματος χάριν, ὅτι διὰ νὰ πολλαπλασιάσω τὸ ἄθροισμα $12+8+6$ ἐπὶ τὸν 3 (χωρὶς νὰ εὕρω τὸ ἄθροισμα), ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσω τοὺς προσθετέους 12, 8, 6 ἐπὶ τὸν 3 καὶ τὰ τρία γινόμενα 12×3 , 8×3 , 6×3 νὰ προσθέσω, ἀφοῦ τὰ εὕρω.

Πρόδειξις. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, διὰ νὰ πολλαπλασιάσω τὸ ἄθροισμα $12+8+6$ ἐπὶ 3, πρέπει νὰ λάβω αὐτὰς τρεῖς, ἥτοι νὰ εὕρω τὸ ἐξῆς ἄθροισμα:

$$12+8+6$$

$$12+8+6$$

$$12+8+6$$

δηλονότι τὸ ἐξῆς:

(ἐδ. 23)

$$12+12+12+8+8+8+6+6+6,$$

$$\text{ἢ } (12 \times 3) + (8 \times 3) + (6 \times 3).$$

Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι, διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἄθροισμα ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ μέρη του.

Σημείωσις. Τὸ γινόμενον τοῦ ἄθροίσματος $12+8+6$ ἐπὶ 3 πα

ται ὡς ἐξῆς: $(12+8+6) \times 3$. ὥστε τὸ ἀποδειχθὲν θεώρημα ἐκ-
 ἄζεται διὰ τῆς ἰσότητος:

$$(12+8+6) \times 3 = (12 \times 3) + (8 \times 3) + (6 \times 3).$$

ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'

35. Ἀριθμὸς πολ' ἀπλασιάζεται ἐπὶ ἄθροισμα, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ
 ἕκαστον τῶν προσθετέων καὶ προσιεθῶσι πάντα τὰ προκύπτοντα
 όμενα.

Λέγω, παραδείγματος χάριν, ὅτι διὰ νὰ πολλαπλασιάσω τὸν ἀρι-
 θμὸν 8 ἐπὶ τὸ ἄθροισμα $5+7+20$ (χωρὶς νὰ τὸ εὔρω), ἀρκεῖ νὰ πολ-
 λασιάσω τὸν 8 ἐπὶ ἕνα ἕκαστον τῶν προσθετέων καὶ τὰ γινόμενα
 $<5, 8 \times 7$ καὶ 8×20 νὰ προσθέσω, ἀφοῦ τὰ εὔρω.

Ἀπόδειξις. Κατὰ τὸ πρῶτον θεώρημα, ἀντὶ νὰ πολλαπλασι-
 ασω τὸν 8 ἐπὶ τὸ ἄθροισμα $5+7+20$, δύναμαι νὰ πολλαπλασιάσω τὸ
 ἄθροισμα $5+7+20$ ἐπὶ τὸν 8 καὶ θὰ εὔρω τὸ αὐτὸ γινόμενον· ἀλλὰ
 εὔρισκω (κατὰ τὸ Β' θεώρημα).

$$(5 \times 8) + (7 \times 8) + 20 \times 8$$

$$\eta \quad (8 \times 5) + (8 \times 7) + (8 \times 20) \quad (\text{κατὰ τὸ Α' θεώρημα}).$$

Τοῦτο λοιπὸν εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ 8 ἐπὶ τὸ ἄθροισμα $5+7+20$.

Σημείωσις. Τὸ γινόμενον τοῦ ἀριθμοῦ 8 ἐπὶ τὸ ἄθροισμα $5+7+20$
 ῥίσταται ὡς ἐξῆς: $8 \times (5+7+20)$. ὥστε τὸ ἀποδειχθὲν θεώρημα
 ῥράζεται διὰ τῆς ἰσότητος

$$8 \times (5+7+20) = (8 \times 5) + (8 \times 7) + (8 \times 20).$$

ΘΕΩΡΗΜΑ Δ'

36. Ὅταν εἷς ἐκ τῶν παραγόντων λήγῃ εἰς μηδενικά, πολλαπλα-
 ζομεν αὐτὸν χωρὶς τὰ μηδενικά καὶ δεξιὰ τοῦ γινομένου γράφομεν
 παραλειφθέντα μηδενικά.

Λέγω, παραδείγματος χάριν, ὅτι διὰ νὰ πολλαπλασιάσω τοὺς ἀρι-
 θμοὺς 8500 καὶ 37 (τὸν ἕνα ἐπὶ τὸν ἄλλον), ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσω
 τοὺς 85 καὶ 37 καὶ δεξιὰ τοῦ γινομένου νὰ γράψω τὰ δύο μηδενικά,
 ὅποια παρέλειψα.

Ἀπόδειξις. Λαμβάνω ὡς πολλαπλασιαστέον τὸν ἀριθμὸν 8500 καὶ
 πολλαπλασιαστὴν τὸν 37 (τοῦτο ἐπιτρέπεται κατὰ τὸ Α' θεώρημα).

Διὰ τὴν ἀποκρίσιν τοῦ 8500 ἐπὶ 37, ἀρκεῖ νὰ εὕρω τὸ ἄθροισμα (ὅπερ ἔχει 37 προσθετέους).

8500

8500

8509

• • • •

8500

Διὰ τὸ εὖρω τὸ ἄθροισμα τοῦτο, ἀρκεῖ προφανῶς τὸ εὖρω τὸ

85

85

85

• •

85

καὶ δεξιὰ αὐτοῦ νὰ γράψω δύο μηδενικά.

Ἄλλὰ τὸ δεύτερον τοῦτο ἄθροισμα εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ 75
37· ἄρκεῖ λοιπὸν νὰ εὗρεθῇ τὸ γινόμενον τοῦτο καὶ δεξιὰ αὐτοῦ
γραφῶσι τὰ δύο μηδενικά. Ὁ οὕτω προκύπτων ἀριθμὸς θὰ εἶναι
ζητούμενον γινόμενον τῶν ἀριθμῶν 8500 καὶ 37.

Πόρισμα 1ον.

37. Ὡς ἀποπλασιάζωμεν ἀριθμὸν ἐπὶ 10 ἢ ἐπὶ 100 ἢ 1000 κτλ., ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ ἓν μηδεμίαν (διὰ τὸ 10), δύο (διὰ τὸ 100), τρία (διὰ τὸ 1000) κτλ.

Διότι παραλείποντες τὰ μηδενικά τοῦ πολλαπλασιαστοῦ θὰ
 μὲν νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 1 καὶ ἐπομένως θὰ εὗρωμεν ὡς γινόμενον
 τὸν πολλαπλασιαστέον, δεξιὰ τοῦ ὁποίου πρέπει νὰ γράψωμεν
 τὰ παραλειφθέντα μηδενικά.

Πόρισμα 2ου.

38. Ὅταν ἀμφότεροι οἱ παράγοντες λήγωσιν εἰς μηδενικά, πλείομεν αὐτιά, πολλαπλασιάζομεν αὐτοὺς χωρὶς τὰ μηδενικά καὶ τοῦ γινομένου γράφομεν τὰ παραλειφθέντα μηδενικά.

Διὰ τὴν πολλαπλασιάσω, παραδείγματος χάριν, τὸν ἀριθμὸν
Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Ἑκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

ἐπὶ 4000, ἄρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσω τὸν 18 ἐπὶ 4 καὶ δεξιὰ τοῦ γινομένου 72 νὰ γράψω τὰ παραλειφθέντα 5 μηδενικά.

Διότι, διὰ νὰ πολλαπλασιάσω τὸν 1800 ἐπὶ 4000, ἄρκεῖ (κατὰ τὸ θεώρημα) νὰ πολλαπλασιάσω τὸν 18 ἐπὶ 4000 καὶ δεξιὰ τοῦ γινομένου νὰ γράψω δύο μηδενικά. Ἀλλὰ πάλιν διὰ νὰ πολλαπλασιάσω τὸν 4000 ἐπὶ 18, ἄρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσω τὸν 4 ἐπὶ 18 καὶ νὰ γράψω δεξιὰ τοῦ γινομένου τρεῖς μηδενικά. Θὰ ἔχω λοιπὸν νὰ γράψω δεξιὰ τοῦ γινομένου 72 τὸ ὅλον 5 μηδενικά.

Πολλαπλασιασμὸς πολυψήφιου ἀριθμοῦ ἐπὶ μονοψήφιον.

39. Πᾶς πολυψήφιος ἀριθμὸς εἶναι ἄθροισμα μονάδων διαφόρων τάξεων· οἷον ὁ 7548 εἶναι ἄθροισμα 8 ἁπλῶν μονάδων καὶ 4 δεκάδων καὶ 5 ἑκατοντάδων καὶ 7 χιλιάδων· ἐπομένως (θεώρημα Β'), ἵνα πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν ἐπὶ ἄλλον ἀριθμὸν, ἄρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ μέρη του (τὰς μονάδας του, τὰς δεκάδας κτλ.) καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ μερικὰ γινόμενα.

Ἄς ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν 3078 ἐπὶ τὸν 6.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται συντομίας χάριν ὥς ἐξῆς·

$$\begin{array}{r} 3078 \\ 6 \\ \hline 18468 \end{array}$$

Πολλαπλασιάζομεν κατὰ πρῶτον τὰς 8 μονάδας ἐπὶ τὸν 6 λέγοντες 6 ἐπὶ 8 γίνονται 48· ἐπειδὴ δὲ αἱ 48 μονάδες κάμνουν 4 δεκάδας καὶ 8 μονάδας, γράφομεν μόνον τὰς 8 μονάδας εἰς τὴν θέσιν τῶν μονάδων τοῦ γινομένου καὶ κρατοῦμεν τὰς 4 δεκάδας, διὰ νὰ τὰς προσθέσωμεν εἰς τὰς δεκάδας, τὰς ὁποίας θὰ δώσῃ ὁ πολλαπλασιασμὸς τῶν 7 δεκάδων τοῦ ἀριθμοῦ.

Πολλαπλασιάζομεν ἔπειτα τὰς 7 δεκάδας ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν 6 λέγοντες 6 ἐπὶ 7 γίνονται 42 δεκάδες καὶ 4 αἱ κρατούμεναι γίνονται 46· ἐπειδὴ δὲ 46 δεκάδες κάμνουν 6 δεκάδας καὶ 4 ἑκατοντάδας, γράφομεν τὰς 6 δεκάδας εἰς τὴν θέσιν τῶν δεκάδων τοῦ γινομένου καὶ κρατοῦμεν τὰς 4 ἑκατοντάδας.

Τὰς 4 ταύτας ἑκατοντάδας γράφομεν ἀμέσως εἰς τὴν θέσιν τῶν ἑκατοντάδων τοῦ γινομένου· διότι ὁ πολλαπλασιαζόμενος ἀριθμὸς δὲν ἔχει ἑκατοντάδας καὶ ἐπομένως δὲν θὰ ἔχωμεν γινόμενον ἑκατοντάδων.

Τέλος πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰς 3 χιλιάδας ἐπὶ τὸν 6 καὶ εὐρίσκωμεν 18 χιλιάδας· καὶ τὰ ψηφία ταῦτα γράφομεν ὀπισθεν τῶν ἄλλων ψηφίων τοῦ γινομένου.

Τὰ ζητούμενον γινόμενον εἶναι λοιπὸν 18 468.

40. Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγεται ὁ ἐξῆς κανὼν.

Ἵνα πολλαπλασιώσωμεν πολυψηφίον ἀριθμὸν ἐπὶ μονοψηφίον, γράφομεν τὸν μονοψηφίον ὑποκάτω τοῦ πολυψηφίου καὶ ἄγωμεν ὑπ' αὐτοὺς ὀριζοντίαν γραμμὴν· ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν χωριστὰ ἑκάστον ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστήν ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ ψηφίου τῶν ἀπλῶν μονάδων. Καὶ ἂν μὲν γινόμενόν τι εἶναι μονοψηφίον, γράφομεν αὐτὸ ὑποκάτω τῆς γραμμῆς καὶ εἰς τὴν στήλην τοῦ ψηφίου, τὸ ὁποῖον ἐπολλαπλασιάσαμεν· ἂν δὲ εἶναι διψηφίον, γράφομεν ἐκεῖ μόνον τὰς μονάδας του, τὰς δὲ δεκάδας ἐνώσωμεν μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἀκολουθοῦντος πρὸς τὰ ἀριστερὰ ψηφίου καὶ οὕτω καθ'εξῆς.

Σημείωσις. Ὁ λόγος, διὰ τὸν ὁποῖον ἀρχίζομεν ἀπὸ τῶν ἀπλῶν μονάδων, ἐδόθη ἤδη εἰς τὴν πρόσθεσιν.

Πολλαπλασιασμὸς δύο οἰωνδῆποτε ἀριθμῶν.

41. Ὁ πολλαπλασιασμὸς δύο οἰωνδῆποτε ἀριθμῶν ἀνάγεται εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν μονοψηφίων κατὰ τὸν ἐξῆς τρόπον.

Ἄς υποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν 3722 ἐπὶ 782. Ἐὰν ὁ πολλαπλασιαστής 782 ἀναλινθῇ κατὰ τὴν ἀξίαν τῶν ψηφίων του, εἶναι ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν 700 καὶ 80 καὶ 2, ἧτοι εἶναι $700 + 80 + 2$. Ἐπομένως κατὰ τὸ θεώρημα Γ', ἵνα πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν 3722 ἐπὶ τὸν 782, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν ἐπὶ 700 καὶ ἐπὶ 80 καὶ ἐπὶ 2 καὶ νὰ ἐνώσωμεν τὰ τρία μερικὰ γινόμενα.

Οἱ μερικοὶ οὗτοι πολλαπλασιασμοὶ

3722	3722	3722
700	80	2
2605400	297760	7444,

ἀν παραλειφθῶσι τὰ μηδενικά, εἰς ἃ λήγουσιν οἱ πολλαπλασιασται 00 καὶ 80 (κατὰ τὸ Δ' θεώρημα), καταντῶσι πολλαπλασιασμοὶ πολυψηφίου ἐπὶ μονοψηφίον, οἵτινες ἐκτελοῦνται, ὡς ἐμάθομεν ἤδη (καὶ ἀγονται εἰς πολλαπλασιασμοὺς μονοψηφίου ἐπὶ μονοψηφίον).

Συντομίας χάριν διατάσσεται ἡ πρᾶξις ὡς ἑξῆς:

3722	πολλαπλασιαστέος,
7×2	πολλαπλασιαστής,
7444	μερικὸν γινόμενον τοῦ 2,
297760	μερικὸν γινόμενον τοῦ 80,
2605400	μερικὸν γινόμενον τοῦ 700,
2910604	ἄθροισμα τῶν μερ. γινόμενων, ἧτοι τὸ ὅλ. γινόμενον.

Τὰ μηδενικά, τὰ ὅποια γράφομεν δεξιὰ τῶν μερικῶν γινόμενων τοῦ 700 καὶ 80), δὲν λαμβάνουσι μέρος εἰς τὴν πρόσθεσιν· διὰ τοῦτο παραλείπομεν αὐτά· ἀφίνομεν ὅμως κενὸν τὸν τόπον αὐτῶν, ἵνα διαρηθῇ ἡ ἀξία τῶν ἄλλων ψηφίων. Τότε δὲ ἡ πρᾶξις ἀνάγεται εἰς τὴν νὰ πολλαπλασιάσωμεν διαδοχικῶς τὸν πολλαπλασιαστέον 3722 ἑκαστον τῶν σημαντικῶν ψηφίων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, πρῶτον ἐπὶ 2, ἔπειτα ἐπὶ 8 καὶ ἔπειτα ἐπὶ 7, νὰ γράφωμεν δὲ τὰ μερικὰ γινόμενα τὸ ἓν ὑπὸ τὸ ἄλλο οὕτως, ὥστε τὸ τελευταῖον ψηφίον ἑκάστου μερικοῦ γινόμενου νὰ εἶναι ὑποκάτω τοῦ ψηφίου, ἐπὶ τὸ ὁποῖον πολλαπλασιάσαμεν.

42. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ρηθέντων συνάγεται ὁ ἑξῆς κανὼν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν οἷονδήποτε ἀριθμὸν ἐπὶ ἄλλον, γράφομεν τὸν πολλαπλασιαστὴν ὑπὸ τὸν πολλαπλασιαστέον καὶ ὑποκάτω ἑκατέστου ὀριζοντίαν γραμμὴν, ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν τὸν πολλαπλασιαστέον χωριστὰ ἑφ' ἑκαστον σημαντικὸν ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ἀρχίζοντες ἐκ δεξιῶν καὶ γράφομεν ἑκαστον μερικὸν γινόμενον οὕτως, ὥστε τὸ τελευταῖον ψηφίον τοῦ νὰ εἶναι ὑποκάτω τοῦ ψηφίου, ἑφ' ὃ ἐπολλαπλασιάσαμεν, μετὰ ταῦτα ἄγομεν γραμμὴν καὶ προσθέτομεν τὰ μερικὰ γινόμενα· τὸ προκύπτον ἄθροισμα εἶναι τὸ ζητούμενον γινόμενον.

Παραδείγματα.

47082	1438	250004
33	801	30023
141246	1438	750012
141246	11504	500008
1553706	1151838	750012
		7505870092.

Βάσανος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

43. Διὰ νὰ δοκιμάσωμεν τὸν πολλαπλασιασμόν, ἐπαναλαμβάνομεν αὐτὸν λαμβάνοντες τὸν πολλαπλασιαστέον ὡς πολλαπλασιαστικόν καὶ τὰνάπαλιν. Ἐὰν καὶ πάλιν εὕρωμεν τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον, τότε εἶναι ἔνδειξις ὅτι ἡ πράξις ἐγένετο ἄνευ λάθους.

Ὁ κανὼν οὗτος στηρίζεται ἐπὶ τῆς πρώτης ιδιότητος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (θεώρημα Α').

Γινόμενον πολλῶν πηραγόντων.

44. Γινόμενον πολλῶν δεδομένων ἀριθμῶν λέγεται τὸ ἐξαγόμενον, τὸ ὁποῖον εὐρίσκομεν πολλαπλασιάζοντες τὸν πρῶτον ἐπὶ δεύτερον, τὸ γινόμενον τούτων ἐπὶ τὸν τρίτον, τὸ νέον γινόμενον τὸν τέταρτον καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, μέχρις οὗ λάβωμεν πάντας τοὺς θέντας ἀριθμούς.

Παραδείγματος χάριν, διὰ νὰ εὕρω τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν

5, 6, 7, 12,

τὸ ὁποῖον σημειοῦται ὡς ἑξῆς: $5 \times 6 \times 7 \times 12$, πολλαπλασιάζω τὸν 5 τὸν 6 καὶ εὐρίσκω 30· ἔπειτα πολλαπλασιάζω τὸν 30 ἐπὶ τὸν 7 εὐρίσκω 210· τέλος πολλαπλασιάζω τὸν 210 ἐπὶ 12 καὶ εὐρίσκω 2520 τοῦτο δὲ εἶναι τὸ ζητούμενον γινόμενον τῶν τεσσάρων δοθέντων ἀριθμῶν.

Σημειώσεις. Ὅταν πάντες οἱ παράγοντες λαμβάνονται ὡς ἀφηρημένοι ἀριθμοί, καὶ τὸ γινόμενον εἶναι ἀφηρημένος ἀριθμός· ὅταν δὲ εἷς ἐκ τῶν πηραγόντων λαμβάνηται ὡς συγκεκριμένος, οὗτος εἶναι ὁ πολλαπλασιαστέος πολλαπλασιάζεται ἁλλεπαλλήλως ἐφ' ἑκάστον τῶν ἄλλων, οἵτινες διὰ λαμβάνονται ἐν τῇ πράξει ὡς ἀφηρημένοι ἀριθμοί.

Γενικαὶ ιδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

45. Ὁ πολλαπλασιασμός ἔχει τὰς ἑξῆς δύο θεμελιώδεις ιδιότητες, ἀπὸ τῶν ὁποίων πηγάζουσι πᾶσαι αἱ ἄλλαι ιδιότητες αὐτοῦ.

1) Τὸ γινόμενον ὅσωνδῆποτε ἀριθμῶν δὲν ἀλλάσσει, καθ' οἷανδῆ-
τε τάξιν καὶ ἂν πολλαπλασιασθῶσιν.

2) Ἐὰν ἄθροισμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀριθμὸν, ἔαν ἕκαστος τῶν
προσθετέων πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν καὶ προστεθῶσι πάντα
προκύπτοντα γινόμενα.

Ἐκ τῶν ἰδιοτήτων τούτων τὴν μὲν δευτέραν ἀπεδείξαμεν ἤδη
(θεώρημα Β'), τὴν δὲ πρώτην ἀπεδείξαμεν διὰ δύο μόνον παράγον-
τας (θεώρημα Β'). Ἵνα δὲ ἀποδείξωμεν καὶ ταύτην γενικῶς, ὅσοιδῆποτε
ἂν εἶναι οἱ παράγοντες, ἔχομεν ἀνάγκην βοηθητικῶν τινων θεωρη-
ματων, τοιούτου τῶν ἑξῆς.

ΘΕΩΡΗΜΑ

46. Ἐὰν ἀριθμὸς πολλαπλασιασθῇ ἀλλεπαλλήλως ἐπὶ δύο ἄλλους,
καὶ τὸ αὐτό, ὥς νὰ πολλαπλασιασθῇ διὰ μιᾶς ἐπὶ τὸ γινόμενόν των.
Λέγω, παραδείγματος χάριν, ὅτι, ἔαν ὁ ἀριθμὸς 8 πολλαπλασια-
σθῇ ἀλλεπαλλήλως ἐπὶ τοὺς ἀριθμοὺς 4 καὶ 3 (ἥτοι πρῶτον ἐπὶ τὸν
ἔπειτα τὸ εὗρεθὲν γινόμενον ἐπὶ 3), εἶναι τὸ αὐτὸ ὥς νὰ πολλαπλά-
σασθῇ διὰ μιᾶς ἐπὶ τὸ γινόμενόν των 4×3 , ἥτοι ἐπὶ 12.

Ἀπόδειξις. Ὅταν πολλαπλασιάσω τὸν 8 ἐπὶ 4, εὗρίσκω γινόμε-
νον τὸ ἑξῆς:

$$8 + 8 + 8 + 8$$

ἀν δὲ καὶ τοῦτο πολλαπλασιάσω ἐπὶ 3, εὗρίσκω γινόμενον τὸ ἑξῆς:

$$8 + 8 + 8 + 8$$

$$8 + 8 + 8 + 8$$

$$8 + 8 + 8 + 8$$

ἀλλὰ τοῦτο σύγκειται ἐκ τοῦ 8 ληφθέντος 12 φορές καὶ διὰ τοῦτο
καὶ τὸ γινόμενον τοῦ 8 ἐπὶ τὸν 12.

ΘΕΩΡΗΜΑ

47. Τὸ γινόμενον ὅσωνδῆποτε ἀριθμῶν δὲν ἀλλάσσει, ἔαν ἀνταλ-
λαχθῶσι δύο ἐφεξῆς παράγοντες.

Λέγω, παραδείγματος χάριν, ὅτι τὸ γινόμενον

$$8 \times 15 \times 2 \times 7 \times 9$$

ἀν βλάπτεται, ἔαν ἀνταλλάξω τοὺς δύο ἐφεξῆς παράγοντας 2 καὶ 7.
Ἰσχυρίζομαι, ὅτι τὸ γινόμενον τοῦτο εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἑξῆς: $8 \times 15 \times 7 \times 2 \times 9$.

Ἀπόδειξις. Διὰ νὰ ἐκτελέσω τὸν πολλαπλασιασμόν
 $8 \times 15 \times 2 \times 7 \times 9$ κατὰ τὴν δεδομένην τάξιν, πρέπει, ἀφοῦ εὗρω τὸ

γινόμενον 8×15 , ἤτοι 120, νὰ πολλαπλασιάσω αὐτὸ πρῶτον ἐπὶ 7 καὶ ἔπειτα ἐπὶ 2. Ἄλλ' ἀντὶ τούτων δύναμαι, κατὰ τὸ προηγουμένον θεώρημα, νὰ πολλαπλασιάσω αὐτὸ διὰ μιᾶς ἐπὶ τὸ γινόμενον 2×7 ἐπὶ τὸ ἴσον του 7×2 . Καὶ πάλιν, κατὰ τὸ αὐτὸ θεώρημα, ἀποδύναμαι πολλαπλασιάσω τὸ 120 ἐπὶ τὸ γινόμενον 7×2 , δύναμαι νὰ πολλαπλασιάσω αὐτό, πρῶτον ἐπὶ 7 καὶ ἔπειτα ἐπὶ 2. Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι ἡ ἀνταλλαγή τῶν δύο ἐφεξῆς παραγόντων 2 καὶ 7 δὲν ἀλλοιώνει τὸ γινόμενον.

Ἐκ τοῦ θεωρήματος τούτου συνάγεται ἡ πρώτη θεμελιώδης πρότασις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὡς ἐξῆς.

ΘΕΩΡΗΜΑ

48. Τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν δὲν ἀλλάσει, καθ' οἷον ποτε τοῦ ϵ καὶ ἂν πολλαπλασιασθῶσιν.

Ἀποδείξις. Ἄν υποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 4, 5, 8, 12, 6 κατὰ τὴν ἐξῆς τάξιν: $4 \times 5 \times 8 \times 12 \times 6$ καὶ θέλομεν νὰ μετατρέψωμεν αὐτὴν εἰς ἄλλην οἵανδήποτε, οἷον τὴν ἐξῆς: $8 \times 5 \times 4 \times 6 \times 12$. Διὰ νὰ φέρωμεν τὸν 8 εἰς τὴν πρώτην θέσιν, ἀνταλλάσσομεν αὐτὸν μετὰ τοῦ ἀμέσως προηγουμένου του (ὅς ἔρχεται ὁ 5 μίαν θέσιν πρὸς τὰ ἔμπροσ) καὶ ἐξακολουθοῦμεν ἀνταλλάσσοντες αὐτὸν μετὰ τοῦ ἐκάστοτε προηγουμένου του, μέχρις οὗ ᾖ πρῶτος· ὁμοίως φέρομεν καὶ τὸν 5 εἰς τὴν δευτέραν θέσιν καὶ τὸν 4 εἰς τὴν τρίτην (ἐὰν εἶναι ἀνάγκη) καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Ἰδού αἱ ἀπαιτούμεναι ἀνταλλαγαί.

$$4 \times 5 \times 8 \times 12 \times 6,$$

$$4 \times 8 \times 5 \times 12 \times 6,$$

$$8 \times 4 \times 5 \times 12 \times 6,$$

$$8 \times 5 \times 4 \times 12 \times 6,$$

$$8 \times 5 \times 4 \times 6 \times 12.$$

Ἐπειδὴ εἰς ἐκάστην τῶν ἀνταλλαγῶν τούτων δὲν βλάπτεται τὸ γινόμενον, συμπεραίνομεν ὅτι εἴτε κατὰ τὴν δοθεῖσαν τάξιν ἐκτελεσθῇ ὁ πολλαπλασιασμός· εἴτε κατ' ἄλλην οἵανδήποτε, πάντοτε αὐτὸ θὰ προκύψῃ γινόμενον.

Σημείωσις. Ἐκ τῆς ἀποδείξεως ταύτης γίνεται φανερόν ὅτι εἰς σειρὰν πολλῶν πραγμάτων ἐπιτρέπεται ἡ ἀνταλλαγή δύο οἰκονομικῶν. Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ το Ἰνστιτούτο Εκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

τε ἐφ' ἑξῆς, ἡ σειρά τῶν πραγμάτων τούτων δύναται νὰ λάβῃ οἵαν-
ποτε τάξιν θέλομεν.

49. Ἐκ τῆς θεμελιώδους ταύτης ιδιότητος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ
ὄνται αἱ ἑξῆς:

1) Δυνάμεθα εἰς πᾶν γινόμενον νὰ ἀντικαταστήσωμεν παράγοντάς
αὐτοῦ διὰ τοῦ εὐρεθέντος γινομένου αὐτῶν. Δυνάμεθα, δηλονότι, νὰ
ἀπιδύσωμεν παράγοντάς τινας εἰς ἓνα μόνον.

Ἄς ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλα-
σώμεν τοὺς ἑξῆς ἀριθμοὺς

8, 12, 10, 4, 25.

Ὅτι τὸ γινόμενον θὰ μείνῃ τὸ αὐτό, καὶ ὅταν ἀντὶ τῶν παρα-
γόντων 10 καὶ 4 λάβωμεν τὸ γινόμενον αὐτῶν 40, ἦτοι οἱ ἀρι-
θοὶ 8, 12, 40, 25 θὰ δώσωσι τὸ αὐτὸ γινόμενον, ὥς καὶ οἱ δο-
θέντες.

Ἀπόδειξις. Διότι, κατὰ τὴν προειρημένην θεμελιώδη ιδιότητα,
νάμα νὰ πολλαπλασιάσω τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς καθ' οἷανδήποτε
τάξιν θέλω· ἂν λοιπὸν ἀρχίσω τὸν πολλαπλασιασμόν ἀπὸ τῶν 10
καὶ 4, θὰ εὕρω τὸ γινόμενον 40 καὶ θὰ ἔχω ἔπειτα νὰ πολλαπλα-
σιάσω τοὺς ἀριθμοὺς 40, 8, 12, 25, ἐπομένως τὸ γινόμενον τῶν
ἀριθμῶν τούτων καὶ τὸ γινόμενον τῶν δοθέντων εἶναι εἷς καὶ ὁ
αὐτὸς ἀριθμός.

Ἡ αὕτη ιδιότης δύναται νὰ ἐκφρασθῇ καὶ ὥς ἑξῆς.

Εἰς πᾶν γινόμενον δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν οἷονδήποτε πα-
ράγοντα δι' ἄλλων ἀριθμῶν, ἐχόντων αὐτὸν ὥς γινόμενον.

Τουτέστι νὰ ἀναλύσωμεν ἓνα παράγοντα εἰς πολλοὺς ἄλλους.

Παραδείγματος χάριν, εἰς τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν

40, 8, 12, 25,

νάμα πάλιν νὰ ἀντικαταστήσω τὸν 40 διὰ τῶν ἀριθμῶν 10 καὶ 4,
οἵτινες ἔχουσιν αὐτὸν γινόμενον.

2) Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν γινόμενον ἐπὶ ἀριθμόν, ἀρκεῖ νὰ πολλα-
πλασιάσωμεν ἐπ' αὐτὸν ἓνα τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου.

Ἀπόδειξις. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν
τὸ γινόμενον $4 \times 7 \times 10 \times 12$ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 8. Ἵνα γίνῃ τοῦτο,
ἔπει νὰ εὕρωμεν πρῶτον τὸ γινόμενον· δηλαδή νὰ πολλαπλασιά-
σωμεν πρῶτον τοὺς ἀριθμοὺς 4, 7, 10, 12 καὶ ἔπειτα τὸ εὐρεθὲν γι-

νόμενον νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 8· ἀλλὰ τότε προφανῶς εὐρίσκωμεν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν

4, 7, 10, 12, 8·
ἢ καὶ τῶν ἐξῆς: 4, 56, 10, 12. (ιδιότης)

Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι ὁ 8 ἐπολλαπλασίασεν ἓνα τῶν γόντων (τὸν 7) καὶ τοιοῦτοτρόπως ἐπολλαπλασίασεν τὸ ὅλον γινόμενον.

3) Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν δύο γινόμενα, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασώμεν ὁμοῦ πάντας τοὺς παράγοντας ἀμφοτέρων τῶν γινομένων.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ δύο γινόμενα

$$5 \times 12 \times 8 \text{ καὶ } 7 \times 22.$$

Λέγω, ὅτι τὸ γινόμενον αὐτῶν θὰ εὐρεθῇ, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ὁμοῦ πάντες οἱ ἀριθμοὶ 5, 12, 8, 7, 22.

Ἀπόδειξις. Ἄν εἰς τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν τούτων, εἰς τὸ $5 \times 12 \times 8 \times 7 \times 22$, ἀντικαταστήσωμεν τοὺς παράγοντας καὶ 8 διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν $5 \times 12 \times 8$, ἔτι δὲ καὶ τοὺς παράγοντας 7, 22 διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν 7×22 , θὰ ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο ἀριθμοὺς

$$5 \times 12 \times 8 \text{ καὶ } 7 \times 22,$$

τουτέστι τὰ δύο γινόμενα· ὥστε τὸ γινόμενον τούτων καὶ τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν 5, 12, 8, 7, 22 εἶναι ἓν καὶ τὸ αὐτό.

Σημειώσις. Ἡ ὁμοιότης τῶν ιδιοτήτων τούτων πρὸς τὰς ἰδίας τῆς προσθέσεως (ἑδ. 23) εἶναι καταφανής. Ἐννοοῦμεν δὲ τὴν εὐκόλως, ἐὰν ἐνθυμηθῶμεν ὅτι αἱ ιδιότητες, περὶ ὧν ὁ λόγος, ἀπόρροια τῆς αὐτῆς θεμελιώδους ιδιότητος, τὴν ὁποίαν αἱ δύο πράξεις ἔχουσι, τουτέστι τῆς ἀδιαφορίας πρὸς τὴν τάξιν τῶν ἀριθμῶν ὧν ἐκτελοῦνται.

50. Ἐκ τῆς δευτέρας θεμελιώδους ιδιότητος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἔπεται ἡ ἐξῆς.

Ἀθροισμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἄλλο ἄθροισμα (χωρὶς νὰ θῶσιν), ἐὰν ἕκαστον τῶν μερῶν τοῦ πρώτου πολλαπλασιασθῇ ἐφ' ἑαυτὸν τῶν μερῶν τοῦ δευτέρου καὶ προσιεθῶσι τὰ προκύπτοντα γινόμενα.

Ἄς ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ δύο ἄθροίσματα

$$3 + 5 + 10 \text{ ἐπὶ } 8 + 9 \text{ (πρὶν ἢ εὐρωμεν αὐτά).}$$

λέγω, ὅτι τὸ ζητούμενον γινόμενον θὰ εὐρεθῇ, ἂν προσθέσωμεν τὰ ἐξῆς γινόμενα:

$$\begin{array}{ll} 3 \times 8, & 3 \times 9, \\ 5 \times 8, & 5 \times 9, \\ 10 \times 8, & 10 \times 9. \end{array}$$

Ἀπόδειξις. Κατὰ τὸ θεώρημα Γ' τοῦ ἐδ. 35, διὰ νὰ πολλαπλασιάσω τὸν ἀριθμὸν $3+5+10$ ἐπὶ τὸ ἄθροισμα $8+9$ (χωρὶς νὰ τὸ εὐρω), πρέπει νὰ πολλαπλασιάσω αὐτὸν χωριστὰ ἐπὶ 8 καὶ ἐπὶ 9 καὶ νὰ προσθέσω τὰ δύο γινόμενα· τὰ δύο ταῦτα γινόμενα εἶναι τὰ ἐξῆς:

$$(3+5+10) \times 8 \text{ καὶ } (3+5+10) \times 9.$$

Ἀλλά, διὰ νὰ εὐρω τὰ γινόμενα ταῦτα, ἔχω νὰ πολλαπλασιάσω ἄθροισμα ἐπὶ ἀριθμὸν· ἄρα, κατὰ τὸ θεώρημα Β' τοῦ ἐδ. 34, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσω ἕκαστον ἐκ τῶν προσθετέων ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν καὶ νὰ ἐνώσω τὰ μερικὰ γινόμενα· οὕτως εὐρίσκω ὅτι τὸ γινόμενον $(3+5+10) \times 8$ ἀποτελεῖται ἐκ τῶν ἐξῆς γινομένων:

$$3 \times 8 \text{ καὶ } 5 \times 8 \text{ καὶ } 10 \times 8.$$

Τὸ δὲ γινόμενον $(3+5+10) \times 9$ ἀποτελεῖται ἐκ τῶν ἐξῆς τριῶν:

$$3 \times 9 \text{ καὶ } 5 \times 9 \text{ καὶ } 10 \times 9.$$

Ἐπομένως τὰ ἐξ ταῦτα γινόμενα ὁμοῦ ἀποτελοῦσι τὸ ζητούμενον γινόμενον τῶν δύο ἄθροισμάτων.

Πολλαπλασιασμὸς διαφορᾶς ἐπὶ ἀριθμὸν.

51. Διαφορὰ πολλαπλασιάζεται (χωρὶς νὰ εὐρεθῇ προηγουμένως) ; κατὰ τὸ ἐξῆς θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Διαφορὰ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀριθμὸν, ἔὰν πολλαπλασιασθῶσι καὶ ὁ μειωτέος καὶ ὁ ἀφαιρετέος αὐτῆς ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν καὶ ἀπὸ τοῦ πρώτου γινομένου ἀφαιρεθῇ τὸ δεύτερον.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὴν διαφορὰν $18-6$ ἐπὶ τὸν 3 (χωρὶς νὰ εὐρωμεν αὐτήν)· λέγω, ὅτι τὸ ζητούμενον γινόμενον εἶναι $(18 \times 3) - (6 \times 3)$.

Ἀπόδειξις. Διὰ νὰ πολλαπλασιάσω τὴν διαφορὰν ἐπὶ 3, πρέπει νὰ ἐπαναλάβω αὐτὴν τρίς· τότε εὐρίσκω

$$(18-6) + (18-6) + (18-6)$$

ἐὰν δὲ εἰς ἕκαστον ἐκ τῶν τριῶν προσθετέων τοῦ ἀθροίσματος τοῦτο προσθέσω τὸν ἀριθμὸν 5, εὗρισκω $18+18+18$, ἦτοι 18×3 . καὶ ἐπειδὴ ἠϋξησα τὸ ἀθροισμα κατὰ $6+6+6$, ἦτοι κατὰ τὸ 6×3 , καὶ ἔγινε 18×3 , συμπεραίνω ὅτι τὸ ἀθροισμα τούτου, ἦτοι τὸ γινόμενον $(18-6) \times 3$, εἶναι ἴσον μὲν $(18 \times 3) - (6 \times 3)$.

Περὶ τῶν δυνάμεων.

52. Ὅταν πάντες οἱ παράγοντες γινομένου τινὸς εἶναι ἴσοι, γινόμενον τοῦτο λέγεται δύναμις τοῦ ἐνὸς τῶν παραγόντων. Καὶ μὲν οἱ παράγοντες εἶναι δύο, τὸ γινόμενον λέγεται δευτέρα δύναμις ἢ τετράγωνον· ἂν δὲ τρεῖς, τρίτη δύναμις ἢ κύβος· ἂν δὲ τέσσαρες, τετάρτη δύναμις καὶ οὕτω καθεξῆς.

Παραδείγματος χάριν, τὸ γινόμενον $5 \times 5 \times 5 \times 5$ λέγεται τετάρτη δύναμις τοῦ 5· τὸ δὲ γινόμενον 3×3 λέγεται δευτέρα δύναμις (ἢ τετράγωνον) τοῦ 3, καὶ τὸ γινόμενον $8 \times 8 \times 8$ λέγεται τρίτη δύναμις (ἢ κύβος) τοῦ 8.

Τὰς δυνάμεις παριστῶμεν συντόμως ὡς ἑξῆς· γράφομεν μόνον τὸν ἕνα παράγοντα, πρὸς τὰ δεξιὰ δὲ αὐτοῦ καὶ ὑψηλότερα γράφομεν τὸν ἀριθμὸν, ὅστις δεικνύει τὸ πλῆθος τῶν ἴσων παραγόντων· καλεῖται δὲ ὁ ἀριθμὸς οὗτος ἐκθέτης.

Παραδείγματος χάριν,	ἀντὶ :	$8 \times 8 \times 8$	γράφομεν	8
	ἀντὶ :	$5 \times 5 \times 5 \times 5$	»	5
	ἀντὶ :	3×3	»	3

καὶ 7^5 σημαίνει $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Αἱ μονάδες τῶν διαφόρων τάξεων τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος αἱ μεγαλύτεραι τοῦ 10, ἦτοι οἱ ἀριθμοὶ 100, 1000, 10000 κτλ., εἶναι αἱ διάφοροι δυνάμεις τῆς βάσεως 10.

Διότι εἶναι	$10^2 = 10 \times 10 = 100,$
	$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$

καὶ οὕτω καθεξῆς.

Θεμελιώδης ἰδιότης τῶν δυνάμεων.

Ἐπειδὴ αἱ δυνάμεις εἶναι γινόμενα, αἱ ἰδιότητες αὐτῶν θὰ εὗρονται ἐκ τῶν ἰδιοτήτων τοῦ πολλαπλασιασμοῦ· εἶναι δὲ θεμελιώδης ἰδιότης τῶν δυνάμεων ἡ ἑξῆς.

53. Τὸ γινόμενον δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι πάλιν δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἐκθείη δ' ἔχει τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐκθειῶν.

Ἀπόδειξις. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰς δύο δυνάμεις 7^3 , 7^5 .

Ἡ πρώτη ἐκ τούτων εἶναι τὸ γινόμενον $7 \times 7 \times 7$, ἡ δὲ δευτέρα τὸ $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$. ἔχομεν λοιπὸν νὰ πολλαπλασιάσωμεν γινόμενον ἐπὶ γινόμενον· καί, κατὰ τὴν ιδιότητα 3 (ἐδ. 49), τὸ ζητούμενον γινόμενον θὰ ἔχη 8 παράγοντας καὶ ἴσους τῷ 7, ἥτοι θὰ εἶναι

$$7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$$

ἢ συντομώτερον 7^8 .

$$\text{Ἄρα ἐδείχθη ὅτι} \quad 7^3 \times 7^5 = 7^{3+5} = 7^8.$$

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Τὸ γινόμενον δύο οἰωνδήποτε ἀριθμῶν ἔχει τόσα ψηφία, ὅσα ἔχουσιν ὁμῶς οἱ δύο παράγοντες ἢ ἓν ὀλιγώτερον.

Ἄν, λόγου χάριν, ὁ εἶς ἔχη 3 ψηφία, ὁ δὲ ἄλλος 5, τὸ γινόμενόν των θὰ ἔχη 8 ψηφία ἢ 7.

(Διότι τὸ γινόμενον θὰ εἶναι μεγαλύτερον μὲν τοῦ 100×10000 , ἥτοι τοῦ 1 000 000 (ἢ τοῦλάχιστον ἴσον πρὸς τοῦτο), μικρότερον δὲ τοῦ $1000 \times 100 000$, ἥτοι τοῦ 100 000 000. Ἄρα θὰ ἔχη τοῦλάχιστον 7 ψηφία· δὲν δύναται ὅμως νὰ ἔχη 9).

2) Ἐκ τοῦ πίνακος, δι' οὗ ἀποδεικνύεται ὅτι $5 \times 6 = 6 \times 5$ (ἐδ. 33), ἀποδεικνύεται προσέτι ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 \text{ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου } 6 \times 5.$$

Νὰ ἀποδειχθῇ γενικῶς ὅτι τὸ ἄθροισμα $1 + 2 + 3 + \dots + n$ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου $n(n+1)$, οἷοσδήποτε ἀριθμὸς καὶ ἂν εἶναι ὁ n .

3) Πόσον μεταβίλλεται τὸ γινόμενον, ὅταν εἰς ἓνα παράγοντα προστεθῇ μία μονὰς ἢ καὶ περισσότεραι;

4) Εἰς γινόμενόν τι πρόκειται νὰ αὐξηθῇ εἰς παράγων κατὰ μονάδα· ποῖον παράγοντα πρέπει νὰ αὐξήσωμεν, ὥστε ἡ αὐξησης τοῦ γινομένου νὰ εἶναι μεγίστη;

5) Τὸ ἄθροισμα δύο οἰωνδήποτε ἀριθμῶν ἐπὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν πολλαπλασιασθὲν δίδει ὥς γινόμενον τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων αὐτῶν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

54. Ἡ διαίρεσις εἶναι *προᾶξις*, διὰ τῆς ὁποίας μερίζομεν δοθέντα ἀριθμὸν εἰς ἴσα μέρη.

Παραδείγματος χάριν, ἐὰν θέλωμεν νὰ μοιράσωμεν 18 δραχμὰς εἰς 3 ἀνθρώπους ἐξ ἴσου, ἢ προᾶξις, τὴν ὁποίαν θὰ κάμωμεν, εἶναι διαίρεσις.

Ὁ ἀριθμὸς, ὅστις πρέπει νὰ μερισθῇ, λέγεται *διαιρετέος*, ὁ δὲ ἀριθμὸς, ὅστις δεικνύει εἰς πόσα μέρη θὰ μερισθῇ, λέγεται *διαιρέτης*, τὸ δὲ ἔξαγόμενον τῆς διαιρέσεως λέγεται *πηλίκον*.

Εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα διαιρετέος εἶναι ὁ 18, διαιρέτης δὲ ὁ 3 καὶ πηλίκον ὁ 6.

Ὁ μερισμὸς δὲν γίνεται πάντοτε ἀκριβῶς*, ἀλλὰ περισσεύει πολλάκις ἀριθμὸς τις· ὁ ἀριθμὸς οὗτος λέγεται *ὑπόλοιπον*.

Ἐὰν, παραδείγματος χάριν, θέλω νὰ μοιράσω 16 δραχμὰς εἰς 3 ἀνθρώπους ἐξ ἴσου, βλέπω εὐκόλως, ὅτι ἕκαστος ἀνθρώπος θὰ λάβῃ 5 δραχμὰς καὶ θὰ περισσεύσῃ καὶ μία δραχμὴ· εἰς τὴν διαίρεσιν ταύτην διαιρετέος εἶναι ὁ 16, διαιρέτης ὁ 3, πηλίκον (ὄχι ἀκριβῶς) ὁ 5 καὶ ὑπόλοιπον 1.

Σημεῖον τῆς διαιρέσεως εἶναι τὸ :, ὅπερ ἀπαγγέλλεται διὰ γράφεται δὲ τὸ σημεῖον τοῦτο κατόπιν τοῦ διαιρετέου καὶ μετ' αὐτοῦ γράφεται ὁ διαιρέτης· οἷον 15:3 σημαίνει ὅτι ὁ 15 πρέπει νὰ διαιρεθῇ εἰς 3 ἴσα μέρη, ἥτοι νὰ διαιρεθῇ διὰ 3· ἀπαγγέλλεται δὲ 15 διαιρούμενος διὰ 3 ἢ συντομώτερον 15 διὰ 3.

55. Ἡ διαίρεσις δύναται νὰ ἀναχθῇ εἰς τὴν ἀφαίρεσιν (ὅπως πολλαπλασιασμὸς εἰς τὴν πρόσθεσιν).

Διότι, ἂν ἔχωμεν, π.χ. νὰ μοιράσωμεν 45 δραχμὰς εἰς 8 ἀνθρώπους, δυνάμεθα νὰ δώσωμεν κατὰ πρῶτον ἀνὰ μίαν δραχμὴν εἰς ἕκαστον· τότε θὰ μείνωσι 45—8, ἥτοι 37 δραχμαί· ἔπειτα ἐκ τῶν 37 δραχμῶν (αἱ ὁποῖαι ἔμειναν) νὰ δώσωμεν πάλιν εἰς ἕκαστον ἀνὰ μίαν δραχμὴν· τότε θὰ μείνωσι 37—8, ἥτοι 29 δραχμαί· καὶ ἐκ τούτων πάλιν νὰ δώσωμεν ἀνὰ μίαν εἰς καθένα καὶ οὕτω καθεξῆς· εἰς τὸ τέλος

* Ἐν τῷ τρίτῳ βιβλίῳ θὰ μάθωμεν ὅτι πᾶσα διαίρεσις γίνεται ἀκριβῶς τῇ βοηθείᾳ τῶν κλασμάτων.

λος ἢ δὲν θὰ μείνῃ τίποτε ἢ θὰ μείνῃ ἀριθμὸς τις δραχμῶν μικρότερος τοῦ 8. Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον τῆς διαιρέσεως γίνεται φανερόν ὅτι ἕκαστος θὰ λάβῃ τόσας δραχμὰς, ὅσας φορὰς ἀφηρέσαμεν τὸν 8· δηλαδή ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ 45 τὸν 8.

Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι δυνάμεθα νὰ δώσωμεν καὶ τὸν ἐξῆς ὁρισμὸν τῆς διαιρέσεως.

56. Ἡ διαίρεσις εἶναι *πρᾶξις*, δι' ἧς εὐρίσκομεν ποσάκις χωρεῖ εἰς ἀριθμὸς ἄλλον ἀριθμὸν.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι ἡ μονάς, τὸ πηλίκον εἶναι ἴσον πρὸς τὸν διαιρετέον· ὅταν δὲ ὁ διαιρέτης εἶναι ἴσος πρὸς τὸν διαιρετέον, τὸ πηλίκον εἶναι 1.

Τελεία διαίρεσις.

57. Ἡ διαίρεσις λέγεται *τελεία*, ὅταν ὁ διαιρετέος μερίζηται εἰς ἴσα μέρη, χωρὶς νὰ μείνῃ ὑπόλοιπον.

Παραδείγματος χάριν, ἡ διαίρεσις $18 : 3$ εἶναι τελεία καὶ πηλίκον αὐτῆς εἶναι ὁ 6· διότι $18 = 6 + 6 + 6$.

Εἰς τὴν τελείαν διαίρεσιν ὁ διαιρετέος ἀναλύεται εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ διαιρέτης, καὶ ἕκαστον μέρος εἶναι ἴσον μὲ τὸ πηλίκον· τὰ μέρη δὲ ταῦτα, ὅταν ἐνωθῶσι πάλιν, θὰ ἀποτελέσωσι τὸν διαιρετέον· ἄρα εἰς τὴν τελείαν διαίρεσιν ὁ διαιρετέος εἶναι γινόμενον τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ πηλίκου.

Ἀτελής διαίρεσις.

58. Ἀτελής λέγεται ἡ διαίρεσις, ἔὰν ἀφίνη ὑπόλοιπον. Παραδείγματος χάριν, ἡ διαίρεσις $17 : 3$ εἶναι ἀτελής· διότι ἀφαιροῦντες τὸν 3 ἀπὸ τοῦ 17, ὅσας φορὰς εἶναι δυνατόν (5 φορὰς), εὐρίσκομεν ὅτι μένει ὑπόλοιπον 2· ὥστε ἡ διαίρεσις $17 : 3$ δίδει πηλίκον 5 καὶ ὑπόλοιπον 2.

Ἐπειδὴ εἰς τὴν διαίρεσιν $17 : 3$ ἀφηρέσαμεν τὸν 3 πέντε φορὰς ἀπὸ τοῦ 17 καὶ ἔμεινε 2, τοῦτο σημαίνει ὅτι ὁ 17 σύγκειται ἐκ τοῦ 3, λαμβανομένου 5 φορὰς, καὶ ἐκ τοῦ 2, ἥτοι εἶναι

$$17 = (3 + 3 + 3 + 3 + 3) + 2$$

$$\text{ἢ } 17 = (3 \times 5) + 2$$

59. Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι

Εἰς πᾶσαν ἀτελῇ διαίρεσιν ὁ διαιρετέος εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ πηλίκου, ὅταν εἰς τὸ γινόμενον τοῦτο προστεθῇ καὶ τὸ ὑπόλοιπον.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἡ πρότασις αὕτη ἀληθεύει καὶ περὶ πάσης διαιρέσεως, ἀρκεῖ ὥς ὑπόλοιπον τῆς τελείας διαιρέσεως νὰ θεωρηθῇ τὸ 0

Κατὰ τὰ προηγουμένως λεχθέντα (ἐδ. 55) τὸ ὑπόλοιπον εἶναι πάντοτε μικρότερον τοῦ διαιρέτου.

Ἐκτελέσεις.

60. Ἡ διαίρεσις δύναται νὰ γίνῃ καὶ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὥς ἑξῆς.

Ἄς ὑποθέσωμεν, π.χ., ὅτι πρόκειται νὰ διαιρέσωμεν τὸν 53 διὰ τοῦ 9.

Πολλαπλασιάζω τὸν διαιρέτην 9 ἐπὶ 1, ἐπὶ 2, ἐπὶ 3 κτλ. κατὰ σειράν καὶ εὐρίσκω

$$9 \times 1 = 9, 9 \times 2 = 18, 9 \times 3 = 27, 9 \times 4 = 36,$$

$$9 \times 5 = 45, 9 \times 6 = 54.$$

Ἐκ τούτων βλέπω ὅτι ὁ 9 χωρεῖ εἰς τὸν 53 μόνον 5 φορές (διότι 9×5 εἶναι 45, ἀλλὰ 9×6 εἶναι 54· μεγαλύτερον δηλονότι τοῦ 53) ὥστε τὸ πηλίκον εἶναι 5, τὸ δὲ ὑπόλοιπον, τὸ ὅποιον μένει, ὅταν ἀπὸ τοῦ 53 ἀφαιρέσω τὸν 9 πέντε φορές, εἶναι 8.

Ἀλλὰ καὶ ὁ τρόπος οὗτος, ὥς καὶ ὁ ἄλλος, ὅστις ἀπαιτεῖ ἄλλεπαλλήλους ἀφαιρέσεις, δὲν εἶναι κατάλληλος, ὅταν οἱ ἀριθμοὶ εἶναι μεγάλοι, διότι καὶ χρόνον ἀπαιτοῦσι καὶ κόπον πολύν. Διὰ τοῦτο ἐπενόησαν ἄλλον τρόπον συντομώτερον, καθ' ὃν ἐκτελεῖται ἡ διαίρεσις καὶ τὸν ὅποιον θὰ μάθωμεν ἐν τοῖς ἐπομένοις.

Ἀριθμὸς τῶν ψηφίων τοῦ πηλίκου.

61. Ἄν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν, πρὶν ἀκόμη ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν, πόσα ψηφία θὰ ἔχῃ τὸ πηλίκον, κάμνομεν ὥς ἑξῆς.

Γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρέτου τόσα μηδενικά, ὅσα χρειάζονται, διὰ νὰ γίνῃ ὁ διαιρέτης μεγαλύτερος τοῦ διαιρετέου· ὅσα μηδενικά χρειάζονται, διὰ νὰ γίνῃ τοῦτο, τόσα ψηφία θὰ ἔχῃ τὸ πηλίκον.

Ἐστω, ὥς παράδειγμα, ἡ διαίρεσις 175 : 18.

Ἐὰν γράψω δεξιὰ τοῦ 18 ἓν μηδενικὸν (δηλαδὴ ἂν τὸν πολλαπλασιάσω ἐπὶ 10) γίνεται 180 καὶ ὑπερβαίνει τὸν διαιρετέον 175.

ἐκ τούτου βλέπω ὅτι τὸ δεκαπλάσιον τοῦ διαιρέτου 18 ὑπερβαίνει τὸν διαιρετέον 175· τοῦτο σημαίνει ὅτι δὲν ἐμπεριέχεται ὁ διαιρέτης 10 εἰς τὸν διαιρετέον 10 φορὰς, ἀλλ' ὀλιγώτερον ἄρα τὸ πηλίκον δὲν εἶναι 10, ἀλλὰ μικρότερον τοῦ 10 καὶ διὰ τοῦτο εἶναι μονοψήφιον.

Ἐστω καὶ ἡ διαίρεσις 5892: 65.

Διὰ νὰ γίνη ὁ διαιρέτης 65 μεγαλύτερος τοῦ διαιρετέου 5892, χρειάζονται δύο μηδενικά· διότι ὁ 6500 ὑπερβαίνει τὸν διαιρετέον, ἀλλ' ὁ 650 εἶναι μικρότερος αὐτοῦ. Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι ὁ διαιρέτης 5892 περιέχει τὸν διαιρέτην 10 φορὰς, ὅχι ὅμως 100 φορὰς· ἄρα τὸ πηλίκον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ 10, ἀλλὰ μικρότερον τοῦ 100· ἐπομένως θὰ ἔχη δύο ψηφία.

Διὰ τοῦ αὐτοῦ ὁμολογισμοῦ εὐρίσκω ὅτι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 185421: 12 ἔχει πέντε ψηφία, τὸ δὲ πηλίκον τῆς διαιρέσεως 89004: 905 ἔχει δύο ψηφία καὶ οὕτω καθέξης.

Περὶ τοῦ τρόπου, καθ' ὃν γίνεται ἡ διαίρεσις.

62 Διὰ νὰ ἐξηγήσωμεν τὸν τρόπον, καθ' ὃν ἐκτελεῖται συντόμως ἡ διαίρεσις, διακρίνομεν τὰς ἐξῆς δύο περιπτώσεις:

- 1) ὅταν τὸ πηλίκον εἶναι μονοψήφιον·
- 2) ὅταν τὸ πηλίκον εἶναι πολυψήφιον.

Διαίρεσις, ὅταν τὸ πηλίκον εἶναι μονοψήφιον.

63 Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην, ἂν εἶναι καὶ ὁ διαιρέτης μονοψήφιος, ἡ διαίρεσις γίνεται ἀπὸ μνήμης· διότι ἐκ τοῦ Πυθαγορείου πίνακος ἐνθυμούμεθα ἀμέσως τὸ μέγιστον πολλαπλάσιον τοῦ διαιρέτου, τὸ ὁποῖον ἐμπεριέχεται εἰς τὸν διαιρετέον.

Ἄν, παραδείγματος χάριν, πρόκειται νὰ διαιρέσωμεν τὸν 75 διὰ τοῦ 8, ἐνθυμούμεθα ἀμέσως ὅτι εἶναι $8 \times 9 = 72$, ἀλλὰ $8 \times 10 = 80$ · ἄρα πηλίκον εἶναι ὁ 9· τὸ δὲ ὑπόλοιπον εὐρίσκομεν ἀφαιροῦντες ἀπὸ τοῦ διαιρετέου 75 τὸ γινόμενον 72· εἶναι δὲ 3.

64. Ἄν δὲ ὁ διαιρέτης εἶναι πολυψήφιος, μεταχειριζόμεθα τὸν ἐξῆς τρόπον.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 3858 διὰ τοῦ 525, ἥτοι νὰ εὕρωμεν, πόσας φορὰς χωρεῖ ὁ 525 εἰς τὸν 3858.

Διὰ νὰ εὕρω τὸ πηλίκον, σκέπτομαι ὥς ἐξῆς.

Αἱ 5 ἑκατοντάδες τοῦ διαιρέτου δὲν περιέχονται εἰς τὰς μονάδας οὐδὲ εἰς τὰς δεκάδας τοῦ διαιρέτου, ἀλλὰ μόνον εἰς τὰς 38 ἑκατοντάδας αὐτοῦ· περιέχονται δὲ 7 φορές μόνον (διότι τὸ 5 εἰς τὸ 38 περιέχεται 7 φορές). Ἐκ τούτου συμπεραίνω ὅτι τὸ πηλίκον δὲν εἶναι μεγαλύτερον τοῦ 7· ἀλλ' εἶναι ἢ 7 ἢ μικρότερον τοῦ 7 (διότι αἱ 5 ἑκατοντάδες, ἦτοι ὁ 500, περιέχονται εἰς τὸν διαιρέτον 7 φορές· ἀλλὰ ὁ 525 ὥς μεγαλύτερος τοῦ 500 δυνατόν νὰ μὴ περιέχεται εἰς αὐτὸν 7 φορές).

Διὰ νὰ δοκιμάσω τὸ 7, πολλαπλασιάζω αὐτὸ ἐπὶ τὸν διαιρέτην 525 καὶ εὕρισκω γινόμενον 3675, ἦτοι μικρότερον τοῦ διαιρέτου. Ἐκ τούτου βλέπω ὅτι τὸ πηλίκον εἶναι 7· ἀφαιρῶν δὲ ἀπὸ τοῦ διαιρέτου τὸ γινόμενον 3675 (τοῦ πηλίκου 7 ἐπὶ τὸν διαιρέτην 525) εὕρισκω τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως, ὅπερ εἶναι 183.

Ὡς δεύτερον παράδειγμα ἔστω ἡ διαίρεσις

8569 : 2854.

Τὸ πηλίκον εἶναι μονοψήφιον (διότι 2854×10 εἶναι 28540, ἦτοι μεγαλύτερον τοῦ διαιρέτου) καὶ διὰ νὰ τὸ εὕρω, παρατηρῶ ὅτι αἱ 2 χιλιάδες τοῦ διαιρέτου περιέχονται εἰς τὸν διαιρέτον (δηλαδὴ εἰς τὰς 8 χιλιάδας του) 4 φορές μόνον, ὥστε καὶ ὅλος ὁ διαιρέτης 2854 δὲν περιέχεται εἰς τὸν διαιρέτον περισσότερον ἀπὸ 4 φορές· ἐπομένως τὸ πηλίκον εἶναι ἢ 4 ἢ μικρότερον τοῦ 4. Διὰ νὰ δοκιμάσω τὸ 4, πολλαπλασιάζω αὐτὸ ἐπὶ τὸν διαιρέτην 2854 καὶ εὕρισκω γινόμενον 11416, ὅπερ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ διαιρέτου· ὥστε τὸ πηλίκον εἶναι μικρότερον τοῦ 4. Διὰ νὰ δοκιμάσω τὸ 3, πολλαπλασιάζω αὐτὸ ἐπὶ τὸν διαιρέτην καὶ εὕρισκω γινόμενον 8562 μικρότερον τοῦ διαιρέτου· λοιπὸν τὸ πηλίκον εἶναι 3.

Διὰ νὰ εὕρω τὸ ὑπόλοιπον, ἀφαιρῶ ἀπὸ τοῦ διαιρέτου 8569 τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ πηλίκου, ἦτοι τὸ 8562, καὶ εὕρισκω τὸ ὑπόλοιπον 7· ὥστε ἐξετελέσθη ἡ διαίρεσις.

65. Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγεται ὁ ἐξῆς κανὼν.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο ἀριθμῶν, ὅταν εἶναι μονοψήφιον, λαμβάνομεν τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ διαιρέτου καὶ δι' αὐτοῦ διαιροῦμεν τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ διαιρέτου (ἂν εἶναι ἰσοψήφιοι) ἢ τὸ πρῶτον διψήφιον τμήμα αὐτοῦ (ἂν ἔχη ὁ διαιρέτος ἓν ψηφίον περισ

σότερον)· τὸ πηλίκον, ὅπερ εὐρίσκομεν, θὰ εἶναι ἴσον ἢ μεγαλύτερον τοῦ ζητουμένου.

Διὰ τὰ δοκιμάσωμεν δὲ τὸ εὐρεθὲν ψηφίον, πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπ' αὐτό, καὶ ἂν μὲν τὸ προκῦπτον γινόμενον χωρῇ εἰς τὸν διαιρετέον, τότε τὸ ψηφίον εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον, εἰ δὲ μὴ, δοκιμάζομεν τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον, καὶ οὕτω καθεξῆς, ἕως οὗ εὐρωμεν ἓν ψηφίον, τοῦ ὁποίου τὸ γινόμενον νὰ περιέχεται εἰς τὸν διαιρετέον.

Συνήθως ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς φαίνεται·

$$\begin{array}{r|l} 6083 & 703 \\ \hline 5624 & 8 \\ \hline 459. & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 50379 & 6902 \\ \hline 48314 & 7 \\ \hline 2065. & \end{array}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὅταν τὸ δεύτερον ψηφίον τοῦ διαιρέτου εἶναι μεγαλύτερον τοῦ 5, εἶναι προτιμότερον νὰ αὐξάνωμεν τὸ πρῶτον ψηφίον κατὰ μονάδα, πρὶν διαιρέσωμεν δι' αὐτοῦ τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ διαιρετέου (ἢ τὰ δύο πρῶτα)· διότι τοιοῦτοτρόπως εὐρίσκομεν ταχύτερον τὸ πηλίκον. Ἄν ἔχωμεν, π. χ., νὰ διαιρέσωμεν τὸν 8381 διὰ τοῦ 2954, κατὰ τὸν ἀνωτέρω τεθέντα κανόνα, θὰ διαιρέσωμεν τὸ 8 διὰ τοῦ 2· καὶ ἐπειδὴ τὸ 2 εἰς τὸ 8 περιέχεται 4 φορές, θὰ συμπεράνωμεν ὅτι τὸ πηλίκον εἶναι ἢ 4 ἢ μικρότερον τοῦ 4· δοκιμάζοντες δὲ εὐρίσκομεν ὅτι τὸ πηλίκον εἶναι 2· τοῦτο θὰ εὐρίσκομεν ταχύτερον, ἔὰν ἐσκεπτόμεθα ὅτι ὁ διαιρέτης ἔχει σχεδὸν 3 χιλιάδας καὶ ὅτι αἱ 3 χιλιάδες χωροῦσιν εἰς τὰς 8 χιλιάδας 2 μόνον φορές· ἐκ τούτου συμπεραίνομεν ὅτι τὸ πηλίκον θὰ εἶναι ἢ 2 ἢ μεγαλύτερον τοῦ 2 (διότι ὁ διαιρέτης 2954 ὡς μικρότερος τοῦ 3000 ἐνδέχεται νὰ χωρῇ περισσοτέρας φορές εἰς τὸν διαιρετέον).

Διαιρέσεις, ὅταν τὸ πηλίκον εἶναι πολυψήφιον.

66. Ὅταν τὸ πηλίκον εἶναι πολυψήφιον, ἡ διαίρεσις ἀναλύεται εἰς ἄλλας, ἕξ ὧν ἑκάστη ἔχει πηλίκον μονοψήφιον· γίνεται δὲ τοῦτο, ὡς φαίνεται ἐκ τοῦ ἑξῆς παραδείγματος.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν νὰ κάμωμεν τὴν διαίρεσιν
52629: 24,

ἥτοι νὰ μοιράσωμεν 52629 δραχμὰς ἕξ ἴσου εἰς 24 ἀνθρώπους.

Λαμβάνομεν τόσα μόνον ψηφία τοῦ διαιρετέου ἀπ' ἀρχῆς, ὅσα χρειάζονται διὰ νὰ ἔχωμεν πηλίκον μονοψήφιον.

Ἐνταῦθα λαμβάνομεν τὰς 52 χιλιάδας καὶ μοιράζομεν αὐτὰς εἰς τοὺς 24 ἀνθρώπους·

$$\begin{array}{r|l} 52 & 629 \quad 24 \\ 48 & 2 \\ \hline & 4 \end{array}$$

Εἰς τὴν πρώτην ταύτην μερικὴν διαίρεσιν διαιρετέος εἶναι ὁ 52 (χιλιάδες), διαιρέτης ὁ 24, πηλίκον 2 (χιλιάδες) καὶ ὑπόλοιπον 4 (χιλιάδες).

Αἱ 4 χιλιάδες, αἱ ὁποῖαι ἔμειναν, ὁμοῦ μὲ τὰς 629 μονάδας, τὰς ὁποίας ἀφήκαμεν ἐξ ἀρχῆς, ἀποτελοῦσι τὸν ἀριθμὸν 4629, ὅστις μένει ἀκόμῃ νὰ μοιρασθῇ εἰς τοὺς 24 ἀνθρώπους.

Καὶ εἰς τὴν νέαν ταύτην διαίρεσιν (ὥς καὶ εἰς τὴν πρώτην) λαμβάνομεν τόσα μόνον ψηφία τοῦ διαιρετέου ἀπ' ἀρχῆς αὐτοῦ, ὅσα χρειάζονται διὰ τὸ ἔχωμεν πηλίκον μονοψήφιον· λαμβάνομεν λοιπὸν τὰς 46 ἑκατοντάδας καὶ ταύτας μοιράζομεν εἰς τοὺς 24 ἀνθρώπους·

$$\begin{array}{r|l} 46 & 29 \quad 24 \\ 24 & 1 \\ \hline & 22 \end{array}$$

εὐρίσκομεν δὲ πηλίκον 1 ἑκατοντάδα καὶ ὑπόλοιπον 22 ἑκατοντάδας.

Αἱ 22 ἑκατοντάδες, αἵτινες ἔμειναν, ἐνωθεῖσαι μετὰ τῶν 29 μονάδων, τὰς ὁποίας ἀφήκαμεν, ἀποτελοῦσι τὸν ἀριθμὸν 2229, τὸν ὅποιον πρέπει ἀκόμῃ νὰ μοιράσωμεν εἰς τοὺς 24 ἀνθρώπους.

Καὶ εἰς τὴν νέαν ταύτην διαίρεσιν λαμβάνομεν τόσα μόνον ψηφία τοῦ διαιρετέου (ἀπ' ἀρχῆς), ὅσα χρειάζονται διὰ τὸ ἔχωμεν πηλίκον μονοψήφιον· λαμβάνομεν λοιπὸν τὰς 222 δεκάδας καὶ ταύτας μοιράζομεν εἰς τοὺς 24 ἀνθρώπους·

$$\begin{array}{r|l} 222 & 9 \quad 24 \\ 216 & 9 \\ \hline & 6 \end{array}$$

εὐρίσκομεν δὲ πηλίκον 9 δεκάδας καὶ ὑπόλοιπον 6 δεκάδας.

Αἱ 6 δεκάδες, αἵτινες ἔμειναν, καὶ αἱ 9 μονάδες, τὰς ὁποίας ἀφήκαμεν, ἀποτελοῦσι τὸν ἀριθμὸν 69, τὸν ὅποιον πρέπει νὰ μοιράσωμεν ἀκόμῃ εἰς τοὺς 24 ἀνθρώπους·

$$\begin{array}{r|l} 69 & 24 \\ 48 & 2 \\ \hline & 21 \end{array}$$

Ἡ διαίρεσις αὕτη δίδει πηλίκον μονοψήφιον, τὸ 2, καὶ κατάλοιπον τὸ 21.

Ὡστε ἡ διαίρεσις ἐξετελέσθη καὶ πηλίκον μὲν εὗρήκαμεν 2 χιλιάδας, 1 ἑκατοντάδα, 9 δεκάδας καὶ 2 μονάδας, ἥτοι τὸν ἀριθμὸν 2192· ὑπόλοιπον δὲ 21.

Ἡ πρᾶξις δύναται νὰ διαταχθῇ ὥς ἔπεται :

52 629	24
48	2000
46 29	100
24	90
222'9	2
216	
69'	
48	
21.	

Παρατηρησεις περὶ τῆς διατάξεως τῆς διαιρέσεως.

1) Δεξιὰ τοῦ πρώτου ὑπολοίπου 4 δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ καταβιβάζωμεν πάντα τὰ ψηφία τοῦ διαιρετέου, ὅσα ἀφήκαμεν εἰς τὴν πρώτην μερικὴν διαίρεσιν, ἥτοι τὰ 629, ἀλλὰ μόνον τὸ πρῶτον ἐξ αὐτῶν, ἥτοι τὸ 6, διότι αὐτὸ μόνον χρειάζεται εἰς τὴν δευτέραν μερικὴν διαίρεσιν· διότι εἰς αὐτὴν, μόνον τὸ 46 διαιροῦμεν, τὰ δὲ ἄλλα ψηφία τοῦ μερικοῦ διαιρετέου 4629 τὰ ἀφίνομεν. Ἐπίσης δεξιὰ τοῦ δευτέρου ὑπολοίπου 22 δυνάμεθα νὰ καταβιβάζωμεν μόνον τὸ πρῶτον ἐκ τῶν παραλειφθέντων ψηφίων, ἥτοι τὸ 2, διότι τὰ ἄλλα δὲν χρειάζονται εἰς τὴν τρίτην διαίρεσιν. Διὰ ταῦτα εἰς ἑκάστην μερικὴν διαίρεσιν καταβιβάζομεν ἀπὸ ἓν ψηφίον τοῦ διαιρετέου κατὰ σειράν.

2) Καὶ τὰ μηδενικά, τὰ ὅποια ἐγράψαμεν δεξιὰ τοῦ ψηφίου 2, ἵνα σημαίνῃ 2 χιλιάδας, καὶ δεξιὰ τοῦ ψηφίου 1, ἵνα σημαίνῃ μίαν ἑκατοντάδα, καὶ δεξιὰ τοῦ ψηφίου 9, διὰ νὰ σημαίνῃ 9 δεκάδας, τὰ μηδενικά, λέγω, ταῦτα δύνανται νὰ παραλείπωνται· ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν τὰ ψηφία τοῦ πηλίκου εἰς μίαν σειράν κατὰ τὴν τάξιν, καθ' ἣν εὗρίσκονται, ἥτοι 2192 διότι τότε τὸ 2 σημαίνει χιλιάδας καὶ τὸ 1

σημαίνει ἑκατοντάδας καὶ τὸ 9 δεκάδας. Ἡ πρᾶξις τότε διατάσσεται συντομώτερον ὥς ἑξῆς.

$$\begin{array}{r|l}
 52'629 & 24 \\
 \hline
 48 & 2192 \\
 \hline
 46 & \\
 24 & \\
 \hline
 222 & \\
 216 & \\
 \hline
 69 & \\
 48 & \\
 \hline
 21. &
 \end{array}$$

Ἄλλ' ὅταν διατάσσωμεν τὴν πρᾶξιν κατὰ τοῦτον τὸν τρόπον, πρέπει νὰ προσέχωμεν εἰς τὰ ἑξῆς.

Ἄν εἰς μερικὴν τινα διαίρεσιν, ἀφοῦ καταβιβάσωμεν ἐν ψηφίον τοῦ διαιρετέου, δὲν εὗρωμεν πηλίκον (ἂν δηλαδὴ ὁ διαιρέτης δὲν χωρῇ εἰς τὸν προκύπτοντα τότε ἀριθμόν), τότε πρέπει νὰ γράφωμεν ἐν μηδενικὸν δεξιὰ τῶν εὐρεθέντων ψηφίων τοῦ πηλίκου· τοῦτο δέ, ἵνα διατηρῇται ἡ ἀξία ἀδιῶν. Τοῦτο συμβαίνει λ. χ. εἰς τὸ ἑξῆς παράδειγμα:

$$\begin{array}{r|l}
 355'68 & 171 \\
 \hline
 342 & 208 \\
 \hline
 1368 & \\
 1368 & \\
 \hline
 0. &
 \end{array}$$

Τὸ πηλίκον τῆς διαίρεσεως ταύτης δὲν ἔχει δεκάδας· ἐγράψαμεν λοιπὸν 0 εἰς τὴν θέσιν των· ἄλλως τὸ ψηφίον 2 δὲν θὰ ἐσήμαινεν ἑκατοντάδας.

3) Ἐὰν ὁ διαιρέτης εἶναι μονοψήφιος, ἀφαιροῦμεν τὰ γινόμενα αὐτοῦ χωρὶς νὰ τὰ γράφωμεν· ἡ πρᾶξις τότε λαμβάνει τὴν ἑξῆς διάταξιν:

$$\begin{array}{r|l}
 58'74 & 8 \\
 \hline
 27 & 734 \\
 34 & \\
 \hline
 2. &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 21014 & 7 \\
 \hline
 0014 & 3002 \\
 \hline
 0. &
 \end{array}$$

Κανὼν τῆς διαιρέσεως.

67. Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγεται ὁ ἑξῆς γενικὸς κανὼν τῆς διαιρέσεως.

Ἵνα διαιρέσωμεν ἀριθμὸν δι' ἄλλου, χωρίζομεν ἀπ' ἀρχῆς τοῦ διαιρου τόσα ψηφία, ὅσα χρειάζονται διὰ νὰ ἔχωμεν πηλίκον μονοψήφιον (πρὸς τοῦτο χωρίζομεν ἢ τόσα ψηφία, ὅσα ἔχει ὁ διαιρέτης, ἢ περισσότερον)· διαιροῦμεν τὸ χωρισθὲν μέρος διὰ τοῦ διαιρέτου εὐρίσκομεν τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ πηλίκου. Πολλαπλασιάζομεν διαιρέτην ἐπὶ τὸ ψηφίον τοῦτο καὶ τὸ γινόμενον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ μέρους, τὸ ὅποιον διηγρέσαμεν, δεξιὰ δὲ τοῦ ὑπολοίπου καταβιβάζομεν τὸ ἀμέσως ἐπόμενον ψηφίον τοῦ διαιρετέου.

Τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν διαιροῦμεν διὰ τοῦ διαιρέτου καὶ εὐρίσκομεν τὸ δεύτερον ψηφίον τοῦ πηλίκου, ὅπερ γράφομεν δεξιὰ τοῦ πρώτου. Πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ δεύτερον ψηφίον τοῦ πηλίκου καὶ τὸ γινόμενον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ, τὸν ὅποιον διηγρέσαμεν, δεξιὰ δὲ τοῦ ὑπολοίπου καταβιβάζομεν τὸ ἀκόλουθον ψηφίον διαιρετέου. Τὸν προκύπτοντα τότε ἀριθμὸν διαιροῦμεν πάλιν διὰ τοῦ διαιρέτου καὶ ἑξακολουθοῦμεν τοιουτοτρόπως, μέχρις οὗ καταβιβάζομεν πάντα τὰ ψηφία τοῦ διαιρετέου.

Εἴν δὲ εἰς μερικὴν τινα διαίρεσιν, ἀφοῦ καταβιβάσωμεν τὸ ἀρμόγιον ψηφίον τοῦ διαιρετέου, δὲν διαιροῖται ὁ προκύπτων ἀριθμὸς διὰ τοῦ διαιρέτου, γράφομεν 0 εἰς τὸ πηλίκον, καταβιβάζομεν καὶ τὸ ἀκόλουθον ψηφίον τοῦ διαιρετέου καὶ ἑξακολουθοῦμεν τὴν διαίρεσιν.

Συντομίαι.

1η.

Ὅταν ὁ διαιρέτης εἴναι 10, ἡ διαίρεσις γίνεται τάχιστα, ὥς ἑξῆς. Χωρίζομεν τὸ τελευταῖον ψηφίον τοῦ διαιρετέου· τότε τὰ ἄλλα ψηφία αὐτοῦ ἀποτελοῦσι τὸ πηλίκον, τὸ δὲ χωρισθὲν ψηφίον εἴναι τὸ ὑπόλοιπον.

Οἶον, ἡ διαίρεσις $15489 : 10$ δίδει πηλίκον 1548 καὶ ὑπόλοιπον 9· ἡ δὲ διαίρεσις $8750 : 10$ δίδει πηλίκον 875 καὶ ὑπόλοιπον 0.

Ὁ λόγος τούτου εἴναι ὁ ἑξῆς.

Διὰ τὴν διαιρέσιν τὸν 15489 διὰ τοῦ 10, πρέπει νὰ εὐρω-
φορᾷ χωρεῖ ὁ 10 εἰς τὸν 15489, ἥτοι πόσας δεκάδας ἔχει ὁ
15489· ἀλλ' ὁ ἀριθμὸς οὗτος ἔχει τὸ ὅλον 1548 δεκάδας καὶ
9, ἄρα τὸ πηλίκον εἶναι 1548, τὸ δὲ ὑπόλοιπον εἶναι αἱ 9 μ.

Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι 100, ἡ διαίρεσις γίνεται τάχιστα
Χωρίζομεν τὰ δύο τελευταῖα ψηφία τοῦ διαιρετέου· τότε τὰ ἄλ-
φία αὐτοῦ ἀποτελοῦσι τὸ πηλίκον, τὰ δὲ χωρισθέντα εἶναι τὸ ὑπό-
λοιπον, ἡ διαίρεσις 5897: 100 δίδει πηλίκον 58 καὶ ὑπόλοιπον

Διότι τὸ πηλίκον δεικνύει, πόσας φορὰς χωρεῖ ὁ 100
5897, ἥτοι πόσας ἑκατοντάδας τὸ ὅλον ἔχει ὁ ἀριθμὸς 5897·
ὁ ἀριθμὸς οὗτος 58 ἑκατοντάδας (διότι αἱ 5 χιλιάδες ἀποτελοῦ-
ἑκατοντάδας).

Καὶ γενικῶς: Ὅταν ὁ διαιρέτης ἀποτελῇται ἐκ τῆς μονάδος
λουθουμένης ὑπὸ μηδενικῶν, χωρίζομεν εἰς τὸ τέλος τοῦ δια-
τεῖν πόσα ψηφία, ὅσα μηδενικά ἔχει ὁ διαιρέτης· τότε τὰ ἄλλα ψηφία
διαιρετέου ἀποτελοῦσι τὸ πηλίκον, τὰ δὲ χωρισθέντα τὸ ὑπόλοι-
πον.

Ἡ ἀπόδειξις τοῦ κανόνος τούτου γίνεται ὡς καὶ τῶν δύο
προηγούμενων.

2α.

Ὅταν ὁ διαιρέτης ἔχη εἰς τὸ τέλος μηδενικά, παραλείπομεν
παραλείπομεν δὲ καὶ ἴσον ἀριθμὸν ψηφίων εἰς τὸ τέλος τοῦ δια-
τεῖν τὸ πηλίκον, τὸ ὁποῖον τότε εὐρίσκομεν, εἶναι τὸ ζητούμενον, ἀλλ'
νὰ εὐρωμεν τὸ ἀληθὲς ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως, πρέπει δεξι-
τεῖν ὑπολοίπου τῆς συντομευθείσης διαιρέσεως νὰ γράψωμεν καὶ τὰ
λειψθέντα ψηφία τοῦ διαιρετέου μετὰ τὴν σειρὰν τῶν.

Ἄς ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι πρόκειται νὰ δι-
σωμεν τὸν ἀριθμὸν 759431 διὰ τοῦ 18000. Διὰ νὰ εὐρω τὸ πη-
πρέπει νὰ ἀφαιρέσω τὰς 18 χιλιάδας ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 759431,
φορὰς δύναμαι. Ἐπειδὴ ὅμως αἱ χιλιάδες δὲν δύνανται νὰ ἀφαι-
σιν ἀπὸ μονάδων οὔτε ἀπὸ δεκάδων οὔτε ἀπὸ ἑκατοντάδων, π-
νὰ ἀφαιρέσω τὰς 18 χιλιάδας ἀπὸ τῶν 759 χιλιάδων τοῦ διαιρε-
δὲ πόσας φορὰς δύναμαι, τουτέστι πρέπει νὰ διαιρέσω τὸν ἀριθμὸν
διὰ τοῦ 18, διὰ νὰ εὐρω τὸ πηλίκον· τὸ δὲ ὑπόλοιπον θὰ ἀπαρ-
ται ἐκ τῶν χιλιάδων, οἷτινες ἐνδέχεται νὰ μείνωσι, καὶ ἐκ τῶν
μονάδων, τὰς ὁποίας παρελείψαμεν.

αίς τῆς πράξεως φαίνεται ἐκ τῶν ἐπομένων παραδειγμάτων.

875(4	25(0	487(08	4(00
75	35	8	121
125		7	
125		308	
04.			

μείωσις. Εἰς τὴν συντομίαν ταύτην ὑπάγεται προδήλως καὶ ἡ ἀναφερόμεν δ' αὐτὴν ἰδιαιτέρως χάριν μείζονος σαφηνείας.

3η.

αν τὰ ψηφία τοῦ διαιρέτου εἶναι πάντα 9, ἡ διαίρεσις συντομῶς ἀκολουθῶς.

ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 589875421 ὑ 999, τουτέστι νὰ μοιράσωμεν 589875421 δραχμὰς εἰς 999 τοὺς.

νὰ εὐκολύνω τὴν διαίρεσιν, παραδέχομαι ἀκόμη ἓνα ἄνθρωπον γίνονται 1000· τότε (κατὰ τὴν 1ην συντομίαν) θὰ λάβῃ ἕκαστος 589875 δραχμὰς καὶ θὰ περισσεύσωσι 421.

ἄλλ' ἐπειδὴ ὁ εἰς ἄνθρωπος δὲν ὑπάρχει, τὸ μερίδιόν του, ἥτοι 5875 δραχμαί, ἔμεινε· τοῦτο δὲ ἐνούμενον μετὰ τοῦ ὑπολοίπου ἰδεῖ 590296 δραχμὰς, αἱ ὁποῖαι πρέπει ἀκόμη νὰ μοιρασθῶσι τοὺς 999 ἀνθρώπους· γίνεται δὲ τοῦτο διὰ νέας διαιρέσεως 6:999.

καὶ εἰς τὴν νέαν ταύτην διαίρεσιν κάμνω τὴν αὐτὴν συντομίαν εὐρίσκω ὅτι θὰ λάβῃ ἕκαστος ἐκ τῶν 999 ἀνθρώπων 590 δραχμαὶ καὶ θὰ μείνωσι καὶ 886 δραχμαί.

2στε ἡ διαίρεσις ἐξετελέσθη καὶ ἔδωκε πηλίκον 589875 + 590, 90465, κατάλοιπον δὲ 886.

Ἡ πράξις δύναται νὰ διαταχθῇ ὥς ἑξῆς·

589507	9999	175603	99
9507	58	3	1756
9565.		1759	17.
		59	1773 πηλίκον.
		76	

Δι' ὁμοίου τρόπου ἐσυντομεύθη καὶ ἡ ἐπομένη διαίρεσις ὅποιαν παρεδέχθη 2 ἀνθρώπους).

$$\begin{array}{r|l}
 21508954 & 998 \\
 \hline
 21508 & 21508 \\
 954 & 43 \\
 \hline
 43970 & 1 \\
 43 & 21552 \text{ πηλίκον} \\
 \hline
 970 & \\
 \hline
 1056 & \\
 1 & \\
 \hline
 56 & \\
 \hline
 58 & \text{ ὑπόλοιπον.}
 \end{array}$$

Σημείωσις. Ὄταν τὸ πηλίκον μέλλῃ νὰ ἔχῃ πολλὰ ψηφία δὲ καὶ ὁ διαιρέτης πολυψήφιος, σχηματίζομεν κατὰ πρῶτον περιέχοντα τὰ γινόμενα τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τοὺς ἑννέα μονοψήφιοι ἀριθμοὺς κατὰ σειράν· τότε δι' ἀπλῆς ἐπόψεως τοῦ πίνακος εὐρίσκομεν ἀμέσως εἰς ἑκάστην μερικὴν διαίρεσιν τὸ μέγιστον λαπλάσιον τοῦ διαιρέτου, τὸ περιεχόμενον εἰς τὸν διαιρετέον καὶ μένωσ εὐρίσκομεν τὸ ψηφίον τοῦ πηλίκου· ὥστε ἡ διαίρεσις καὶ τομώτερον ἐκτελεῖται καὶ ἀσφαλέστερον.

Τὸ αὐτὸ δὲ πρέπει νὰ κάμνωμεν, καὶ ὅταν δι' ἑνὸς καὶ τοῦ διαιρέτου ἔχωμεν νὰ ἐκτελέσωμεν πολλὰς διαιρέσεις· διότι τότε ναῖ, τὸν ὅποιον ἀπαξ ἐσχημάτισαμεν, χρησιμεύει εἰς ἀπάσας τὰς διαιρέσεις ταύτας.

Βάσανος τῆς διαιρέσεως.

68. Ἀφοῦ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν, ἂν θέλωμεν νὰ κάμωμεν δοκιμὴν αὐτῆς, πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ εὐρεθέν πηλίκον καὶ εἰς τὸ γινόμενον προσθέτομεν τὸ ὑπόλοιπον (ἐὰν ὑπάρχῃ) τότε εὐρεθῇ ὁ διαιρετέος, τοῦτο εἶναι ἐνδειξίς ὅτι ἡ διαίρεσις ἔστιν ἀνεκλήθους (ἐδ. 59).

Ἰδιότητες τῆς διαιρέσεως.

Αἱ γενικαὶ ἰδιότητες τῆς διαιρέσεως ἐκφράζονται διὰ τῶν ἑξῆς θεωρημάτων.

ΘΕΩΡΗΜΑ Α'

69. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὸν διαιρετέον καὶ τὸν διαιρέτην ἑφ' ἓνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, τὸ μὲν πηλίκον δὲν βλάπτεται, τὸ ὑπόλοιπον ὁμως πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν.

Ἐστω ἡ διαίρεσις $58:9$, ἣτις δίδει πηλίκον 6 καὶ ὑπόλοιπον 4· λέγω ὅτι, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσι καὶ ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης ἑφ' ἓνα οἷονδῆποτε ἀριθμὸν, ἔστω ἐπὶ τὸν 5, τὸ μὲν πηλίκον μένει πάλιν 6, τὸ δὲ ὑπόλοιπον 4 γίνεται 4×5 .

Ἀποδείξις. Ὅσας φορὰς δύναμαι νὰ ἀφαιρέσω τὸν 9 ἀπὸ τοῦ 58, τόσας φορὰς δύναμαι νὰ ἀφαιρέσω καὶ τὸ $9+9+9+9+9$ ἀπὸ τοῦ $58+58+58+58+58$ · διότι ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρῶ ἕκαστον 9 ἀπὸ τοῦ ἀντιστοίχου 58 (τὸ πρῶτον 9 ἀπὸ τοῦ πρώτου 58, τὸ δεύτερον ἀπὸ τοῦ δευτέρου καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς), ὥς φαίνεται·

$$58+58+58+58+58$$

$$9+9+9+9+9$$

$$49+49+49+49+49$$

.....

Ἀλλ' ὅταν ἀφαιρέσω 6 φορὰς τὸ 9 ἀπὸ τὸ 58, μένει ὑπόλοιπον 4· ἄρα, ὅταν ἀφαιρέσω 6 φορὰς τὸ $9+9+9+9+9+9$ ἀπὸ τοῦ $58+58+58+58+58+58$, θὰ μένη ὑπόλοιπον $4+4+4+4+4+4$.

Ἐκ τούτου βλέπω ὅτι τὸ γινόμενον 9×5 περιέχεται 6 φορὰς εἰς τὸ γινόμενον 58×5 · μένει δὲ ὑπόλοιπον 4×5 , ὅπερ εἶναι προφανῶς μικρότερον τοῦ 9×5 .

Ἐὰν ἡ διαίρεσις εἶναι τελεία, βλέπομεν ὅτι θὰ μείνη τελεία καὶ μετὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ διαιρετέου καὶ τοῦ διαιρέτου ἑφ' ἓνα οἷονδῆποτε ἀριθμὸν· ὅθεν ἔπεται ἡ πρότασις:

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν διαιρετέον καὶ τὸν διαιρέτην τελείας διαιρέσεως ἑφ' ἓνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, τὸ πηλίκον δὲν βλάπτεται καὶ ἡ διαίρεσις μένει τελεία.

Τὴν ιδιότητα ταύτην τῆς τελείας διαιρέσεως δυνάμεθα νὰ δείξωμεν καὶ ὥς ἑξῆς.

Ἐστω ὡς παράδειγμα ἡ διαίρεσις $36:4$, ἣτις δίδει πηλίκον 9. Κατὰ τὴν ιδιότητα πάσης τελείας διαιρέσεως (ἑδ. 57) θὰ εἶναι $36 = 4 \times 9$ · ἐὰν δὲ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο ἴσους ἀριθμοὺς (τὸν 36 καὶ τὸν

4×9) ἐπὶ τὸν τυχόντα ἀριθμόν, ἔστω ἐπὶ τὸν 5, πάλιν μένουσιν ἴσοι ὅθεν ἔπεται $36 \times 5 = (4 \times 9 \times 5,$
 ἢ $36 \times 5 = (4 \times 5) \times 9.$ (ἐδ. 49 ἰδιότη. 2).

Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης γίνεται φανερόν ὅτι ὁ ἀριθμὸς 36×5 σύγκειται ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ 4×5 ἐνεάκις ληφθέντος, ἥτοι περιέχῃ αὐτὸν ἐννέα φορές· ἐπομένως ὁ 36×5 διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 4×5 καὶ δίδει πηλίκον 9.

Σημείωσις. Δι' ὁμοίου τρόπου δύναται νὰ ἀποδειχθῇ καὶ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα ἐκ τῆς γενικῆς ἰδιότητος τῆς διαιρέσεως (ἐδ. 59), ἀλλ' ἡ τοιαύτη ἀπόδειξις εἶναι δυσκολωτέρα.

Ἵνα δώσωμεν ἐφαρμογὴν τινὰ τῆς ἰδιότητος ταύτης, ἃς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμόν τινὰ διὰ 5, ἔστω τὸν 587505· ἐὰν διπλασιάσωμεν ἀμφοτέρους, τὸ πηλίκον δὲν βλάπτεται, ἀλλ' ὁ διαιρέτης γίνεται 10 καὶ ἡ διαίρεσις ἐκτελεῖται ἀπλούστατα· οὕτως εὐρίσκομεν πηλίκον 171501. Ὅμοίως, ἀντὶ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμόν διὰ 25, πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν ἐπὶ 4 καὶ διαιροῦμεν τὸ γινόμενον δι' 100.

ΘΕΩΡΗΜΑ Β'

70. Ἵνα διαιρέσωμεν γινόμενον δι' ἀριθμοῦ, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν ἓνα τῶν παραγόντων αὐτοῦ (ἐὰν διαιρῇται ἀκριβῶς).

Ἔστω ὡς παράδειγμα τὸ γινόμενον

$$5 \times 12 \times 8 \times 7$$

καὶ ἃς ὑποθέσωμεν ὅτι πρόκειται νὰ διαιρεθῇ διὰ τοῦ 4· λέγω, ὅτι ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν ἓνα παράγοντα αὐτοῦ, οἷον τὸν 12, διὰ τοῦ 4· ἥτοι λέγω, ὅτι τὸ ζητούμενον πηλίκον θὰ εἶναι

$$5 \times 3 \times 8 \times 7.$$

Ἀπόδειξις. Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς οὗτος, τετρακὶς ληφθεὶς, δίδει τὸν διαιρετέον.

Τῷ ὄντι κατὰ τὴν δευτέραν ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (ἐδ. 49) εἶναι $(5 \times 3 \times 8 \times 7) \times 4 = 5 \times (3 \times 4) \times 8 \times 7 = 5 \times 12 \times 8 \times 7.$

Πόρισμα.

71. Ἵνα διαιρέσωμεν γινόμενον δι' ἑνὸς τῶν παραγόντων αὐτοῦ, ἀρκεῖ νὰ ἐξαλείψωμεν τὸν παράγοντα τοῦτον.

Διότι, ἂν, λόγου χάριν, πρόκειται νὰ διαιρέσωμεν τὸ γινόμενον $3 \times 4 \times 12 \times 9 \times 7$ διὰ τοῦ 9, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὸν παράγοντα διὰ τοῦ διαιρετοῦ 9· ὥστε τὸ ζητούμενον πηλίκον εἶναι

$$18 \times 4 \times 12 \times 1 \times 7$$

$$\text{ἢ } 18 \times 4 \times 12 \times 7.$$

ὅτι ἡ μονὰς 1 ὡς παράγων δύναται νὰ παραλείπηται.

ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'

72. Ἵνα διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ τοῦ γινομένου πολλῶν ἄλλων, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν αὐτὸν ἀλλεπαλλήλως διὰ πάντων τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου (τουτέστι πρῶτον διὰ τοῦ πρώτου παραγόντος, ἔπειτα τὸ εὔρεθὲν πηλίκον διὰ τοῦ δευτέρου, τὸ νέον πηλίκον διὰ τοῦ τρίτου καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς).

Αἱ διαιρέσεις ὑποτίθεται ὅτι γίνονται πᾶσαι ἀκριβῶς.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι πρόκειται νὰ διαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 360 διὰ τοῦ γινομένου $2 \times 3 \times 5$ · ἐὰν πρῶτον εὔρω τὸ γινόμενον τοῦτο (ὅπερ εἶναι 30) καὶ ἔπειτα ἐκτελέσω τὴν διαίρεσιν, εὐρίσκω πηλίκον 12· λέγω δέ, ὅτι αὐτὸ πηλίκον θὰ εὔρω, καὶ ἂν διαιρέσω τὸν 360, πρῶτον διὰ 2, ἔπειτα τὸ εὔρεθὲν πηλίκον διαιρέσω διὰ 3 καὶ ἔπειτα τὸ νέον πηλίκον διὰ 5.

Ἀπόδειξις. Ὁ διαιρετέος 360 εἶναι ἴσος τῷ γινομένῳ τοῦ διαιρετοῦ $2 \times 3 \times 5$ ἐπὶ τὸ πηλίκον 12·

$$\text{ἦτοι } 360 = (2 \times 3 \times 5) \times 12$$

$$\text{ἢ } 360 = 2 \times 3 \times 5 \times 12.$$

Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης βλέπομεν ὅτι, ἂν διαιρέσωμεν τὸν 360 διὰ τὸ ἴσον αὐτοῦ γινόμενον) διὰ 2, θὰ εὔρωμεν πηλίκον (ἐδ. 71) τὸ 6· ἔπειτα τὸ εὔρεθὲν πηλίκον 3· ἐὰν δὲ τὸ πηλίκον τοῦτο διαιρέσωμεν διὰ 3, θὰ εὔρωμεν πηλίκον 5· ἐὰν δὲ τὸ νέον τοῦτο πηλίκον διαιρέσωμεν διὰ 5, θὰ εὔρωμεν πηλίκον τὸ 12, τουτέστι τὸ αὐτὸ πηλίκον, ὅπερ εὔρωμεν διαιρῶντες τὸν 360 διὰ μιᾶς διὰ τοῦ γινομένου $2 \times 3 \times 5$.

ΘΕΩΡΗΜΑ Δ'

73. Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρεῖται δι' ἀριθμοῦ, ἐὰν διαιρεθῇ ἕκαστος τῶν παραγόντων διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου καὶ προστεθῶσι τὰ προκύπτοντα πηλίκια.

Αἱ διαιρέσεις ὑποτίθεται ὅτι γίνονται πᾶσαι ἀκριβῶς.

Ἄς ὑποθέσωμεν, λόγου χάριν, ὅτι πρόκειται νὰ διαιρέσωμε ἄθροισμα

$12 + 20 + 40$ διὰ τοῦ 4 (χωρὶς νὰ εὗρωμεν αὐτό).
ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν προσθετέον 12 διὰ τοῦ 4, εὐρίσκομεν πηλίκον 3, ἐὰν δὲ τὸν 20, εὐρίσκομεν πηλίκον 5, καὶ τέλος ὁ 40 δίδει πηλίκον 10· λέγω δέ, ὅτι τὸ ζητούμενον πηλίκον εἶναι

$$3 + 5 + 10.$$

Ἀπόδειξις. Διότι ὁ ἀριθμὸς οὗτος πολλαπλασιαζόμενος τὸν διαιρέτην δίδει (ἐδ. 84)

$$(3 + 5 + 10) \times 4 = (3 \times 4) + (5 \times 4) + (10 \times 4) = 12 + 20 + 40,$$

τουτέστι τὸν διαιρετέον.

Ἰδιότης τῆς ἰσότητος.

Ἰσοὶ ἀριθμοὶ διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ διαιρούμενοι δίδουσιν πηλικά (ἢ διαίρεσις ὑποτίθεται τελεία).

Διότι, ἂν τὰ πηλικά πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ τὸν διαιρέτην, πει νὰ δίδωσιν ἴσα γινόμενα (τοὺς ἴσους διαιρετέους): τοῦτο ὅμως δὲν θὰ ἐγίνετο, ἂν τὰ πηλικά ἦσαν ἄνισα· διότι τῶν ἀνίσων τὰ ἰσοποσιν πολλαπλάσια εἶναι ἄνισα.

Παρατήρησις.

74. Ἡ διαίρεσις, ὥς ἐξ ἀρχῆς εἶδομεν, δύναται νὰ ὀρισθῇ ἢ ὑπομερισμὸς ἀριθμοῦ εἰς μέρη ἴσα ἢ ὥς εὗρεσις τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις δὲ κινεῖ πόσας φορὰς χωρεῖ ἀριθμὸς τις ἄλλον. Διὰ τοῦτο ἡ διαίρεσις ἐμφανίζεται ὑπὸ δύο διαφόρους ὄψεις, αἵτινες ὡς πρὸς τὸν τρόπον, καθ' ἑκάστην ἐκτελεῖται ἡ διαίρεσις, καὶ ὡς πρὸς τὸ ἐξαγόμενον αὐτῆς εἶναι ἐντελῶς ἀδύνατον, διακρίνονται ὅμως σαφέστατα ἀπ' ἀλλήλων ἐν τοῖς προβλήμασι.

Ἵνα δείξωμεν τοῦτο, ἂς λάβωμεν ὡς παράδειγμα τὰ ἐξῆς προβλήματα.

1) Πόσον ἀξίζει 1 πῆχυν ὑφάσματος, τοῦ ὁποίου 15 πῆχεις ἀξίζουν 75 δραχμάς;

Φανερόν εἶναι ὅτι πρέπει νὰ μερίσωμεν τὸν ἀριθμὸν 75 τῶν δραχμῶν εἰς 15 ἴσα μέρη καὶ ἕκαστον μέρος θὰ εἶναι ἡ ἀξία τοῦ ἑνὸς πήχους.

Ἐν τῇ πράξει ταύτῃ ὁ διαιρετέος 75 δραχμαὶ εἶναι συγκεκριμένος ἀριθμὸς, ὁ δὲ διαιρέτης 15 εἶναι ἀφηρημένος· τὸ δὲ πηλίκον εἶναι μέρος τοῦ διαιρετέου 75 εἶναι ὁμοειδὲς πρὸς αὐτόν.

2) Μὲ 75 δραχμὰς πόσους πήχεις δύναμαι νὰ ἀγοράσω ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος, τοῦ ὁποίου ὁ πήχυς πωλεῖται 15 δραχμὰς;

Διὰ νὰ ἀγοράσω 1 πήχυν, πρέπει νὰ δώσω 15 δραχμὰς· τότε μοῦ μένουν 75 — 15, ἥτοι 60 δραχμαί· διὰ νὰ ἀγοράσω καὶ ἄλλον πρέπει ἐκ τῶν 60 δραχμῶν νὰ δώσω πάλιν 15 καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἐντεῦθεν βλέπω ὅτι τόσους πήχεις θὰ ἀγοράσω, ὅσας φορές χωρεῖ ὁ 75 τὸν 15· ὥστε πάλιν θὰ διαιρέσω τὸν 75 διὰ 15. Ἐν τῇ πράξει ταύτῃ ἀμφοτέροι οἱ ἀριθμοὶ 75 καὶ 15 θεωροῦνται ὡς ἀφηρημένοι καὶ τὸ ἐξαγόμενον τῆς πράξεως εἶναι ἐπίσης ἀφηρημένος ἀριθμός, λαμβάνει δὲ ἔπειτα τὴν σημασίαν, τὴν ὁποίαν ὀρίζει τὸ πρόβλημα καὶ ἣτις δύναται νὰ εἶναι οἰαδῆποτε.

Ὅταν θέλω νὰ διακρίνω τὰς δύο ταύτας διαιρέσεις ἀπ' ἀλλήλων, θὰ λέγω τὴν μὲν πρώτην μερισμὸν καὶ τὸ ἐξαγόμενον αὐτῆς μερίδιον, τὴν δὲ δευτέραν μέτρησιν καὶ τὸ ἐξαγόμενον αὐτῆς λόγον (ὑποθέτω τὰς διαιρέσεις τελείας).

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ἐὰν εἰς ἀριθμὸν, ἔχοντα δύο ἢ περισσότερα ψηφία, παραλείψωμεν τὸ τελευταῖον ψηφίον, προκύπτει ἄλλος ἀριθμός, ὅστις δεικνύει πόσας δεκάδας περιέχει ἐν συνόλῳ ὁ πρῶτος, ἥτοι πόσας δεκάδας ἀποτελοῦσι πᾶσαι αἱ μονάδες του ἐνούμεναι ἀνὰ δέκα.

Ἐὰν δὲ παραλείψωμεν τὰ δύο τελευταῖα ψηφία, ὁ προκύπτων νέος ἀριθμός δεικνύει πόσας ἑκατοντάδας περιέχει ἐν συνόλῳ ὁ δοθείς ἀριθμός.

Ἐὰν δὲ παραλείψωμεν τὰ τρία τελευταῖα, ὁ προκύπτων ἀριθμὸς δεικνύει πόσας χιλιάδας περιέχει ὁ δοθείς καὶ οὕτω καθεξῆς.

Παραδείγματος χάριν, ὁ ἀριθμὸς 58709 περιέχει ἐν συνόλῳ δεκάδας μὲν 5870, ἑκατοντάδας δὲ 587, χιλιάδας δὲ 58, μυριάδας δὲ 5.

2) Τὰ ψηφία τοῦ πηλίκου εἶναι τόσα, ὅσα ἔχει ὁ διαιρετέος περισσότερα τοῦ διαιρέτου ἢ ἀκόμη ἓν.

3) Νὰ εὗρεθῇ ἀριθμός, ὅστις πολλαπλασιάζων τὸν ἀριθμὸν 21 νὰ δίδῃ γινόμενον, τοῦ ὁποίου πάντα τὰ ψηφία νὰ εἶναι ὅμοια· λόγον χάριν 5.

(Ἀπ. Ὑπάρχουσιν ἄπειροι τοιοῦτοι ἀριθμοί· ὁ ἐλάχιστος ἐξ αὐτῶν εἶναι ὁ 26455).

4) Πότε τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δὲν βλάπτεται, ἂν προστεθῇ εἰς τὸν διαιρετέον μία μονὰς ἢ καὶ περισσότεραι; καὶ πόσας μονάδας πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν διαιρετέον, διὰ νὰ αὐξήσῃ τὸ πηλίκον κατὰ μίαν μονάδα;

5) Ἐὰν ὁ διαιρετέος πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τινὰ ἀριθμὸν, ὁ δὲ διαιρέτης μείνῃ ὁ αὐτός, ποίαν μεταβολὴν πάσχουσι τὸ πηλίκον καὶ τὸ ὑπόλοιπον;

6) Μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν διαιρέσεώς τινος ἃς ὑποθέσωμεν ὅτι διαιροῦμεν τὸν διαιρετέον διὰ τοῦ εὐρεθέντος πηλίκου· νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ πηλίκον τῆς νέας ταύτης διαιρέσεως θὰ εἶναι ἢ ἴσον ἢ μεγαλύτερον τοῦ διαιρετέου τῆς πρώτης διαιρέσεως· καὶ ἴσον μὲν θὰ εἶναι, ἂν τὸ ὑπόλοιπον τῆς πρώτης διαιρέσεως εἶναι μικρότερον τοῦ πηλίκου αὐτῆς, μεγαλύτερον δέ, ἂν τοῦναντίον.

7) Νὰ τραπῇ ὁ ἀριθμὸς 853 τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος εἰς ἀριθμὸν τοῦ ὀκταδικοῦ.

(Αἱ 853 ἀπλαῖ μονάδες τοῦ ἀριθμοῦ ἀπαρτίζουν τόσας μονάδας τῆς δευτέρας τάξεως (ἥτοι ὀκτάδας), ὅσας φορὰς χωρεῖ τὸν 8 ὁ 853· διότι 8 μονάδες ἐκάστης τάξεως ἀπαρτίζουν μίαν τῆς ἐπομένης· διαιροῦμεν λοιπὸν τὸν 853 διὰ τοῦ 8 καὶ εὐρίσκομεν ὅτι ἀπαρτίζονται 106 μονάδες δευτέρας τάξεως καὶ μένουσιν ἀπλαῖ μονάδες 5.

Αἱ 106 μονάδες τῆς δευτέρας τάξεως ἀπαρτίζουν ὁμοίως τόσας μονάδας τῆς τρίτης τάξεως, ὅσας φορὰς χωρεῖ τὸν 8 ὁ 106, ἥτοι 13· μένουσι δὲ καὶ 2 μονάδες τῆς δευτέρας τάξεως.

Ἐπειδὴ δὲ αἱ 13 μονάδες τῆς τρίτης τάξεως ἀπαρτίζουν μίαν τῆς τετάρτης τάξεως καὶ περισσεύουν καὶ 5 μονάδες τῆς τρίτης τάξεως, συνάγεται ὅτι ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς 853 θὰ γράφηται εἰς τὸ ὀκταδικὸν σύστημα ὡς ἐξῆς: 1525.

Ἡ πρᾶξις δύναται νὰ διαταχθῇ ὡς ἐξῆς:

853	8		
53	106	8	
5	26	13	8
	2	5	1.

Ἐπειδὴ αἱ μονάδες τῶν διαφόρων τάξεων ἐν τῷ ὀκταδικῷ συστήματι εἶναι αἱ ἐξῆς

1, 8, 8×8 , $8 \times 8 \times 8$, $8 \times 8 \times 8 \times 8$ κτλ.

ἢ 1, 8, 8^2 , 8^3 , 8^4 κτλ.,

ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς παρίσταται εἰς τὸ ὀκταδικὸν σύστημα ὡς ἄθροισμα τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν :

$$5 + (8 \times 2) + (8^2 \times 5) + (8^3 \times 1)$$

εἰς δὲ τὸ δεκαδικὸν σύστημα παρίσταται ὡς ἄθροισμα τῶν ἑξῆς :

$$3 + (10 \times 5) + (10^2 \times 8).$$

8) Νὰ τραπῶσιν οἱ ἀριθμοὶ 12, 17, 40 εἰς τὸ ὀκταδικὸν σύστημα.
(Ἀπ. 14, 21, 50).

9) Νὰ τραπῶσιν οἱ ἑξῆς ἀριθμοὶ τοῦ ὀκταδικοῦ συστήματος :
70, 107, 43 εἰς ἀριθμοὺς τοῦ δεκαδικοῦ. (Ἀπ. 56, 71, 35).

10) Νὰ γραφῇ ὁ ἀριθμὸς χίλια εἰς τὸ δυαδικὸν σύστημα.
(Ἀπ. 1111101000).

11) Νὰ τραπῇ ὁ ἀριθμὸς 101010 τοῦ δυαδικοῦ συστήματος εἰς ἀριθμὸν τοῦ δεκαδικοῦ.
(Ἀπ. 42).

12) Νὰ τραπῶσιν οἱ ἑξῆς ἀριθμοὶ τοῦ τριαδικοῦ συστήματος :
100, 200, 210 εἰς ἀριθμοὺς τοῦ πενταδικοῦ. (Ἀπ. 14, 33, 41).

13) Νὰ τραπῇ ὁ εἰς τὸ τριαδικὸν σύστημα γεγραμμένος ἀριθμὸς
1202 εἰς τὸ κοινὸν σύστημα.

(Ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι ἄθροισμα τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν :

$$2 + 3^2 \times 2 + 3^3 \times 1, \text{ ἥτοι τῶν } 2 + 18 + 27,$$

καὶ ἐπομένως εἶναι ὁ 47).

14) Εἰς ποῖον σύστημα ἀριθμήσεως ὁ ἀριθμὸς ὀγδοήκοντα ἔν
γράφεται ὡς ἑξῆς : 100;

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

ΒΙΒΛΙΟΝ Β΄

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

ΠΕΡΙ ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΟΣ

Ὁρισμοί.

75. Διαιρετὸς λέγεται ἀριθμὸς τις δι' ἄλλον, ἐὰν διαιρῇται δι' αὐτοῦ ἀκριβῶς (ἤτοι χωρὶς νὰ μένη ὑπόλοιπον). Οἷον, ὁ 15 εἶναι διαιρετὸς διὰ 5, ὁ 20 εἶναι διαιρετὸς διὰ 4 κτλ. Ὁ δὲ διαιρῶν ἀκριβῶς ἀριθμὸν τινα λέγεται *διαιρέτης* αὐτοῦ· παραδείγματος χάριν, ὁ 5 εἶναι διαιρέτης τοῦ 15, ὁ 4 εἶναι διαιρέτης τοῦ 20 κτλ.

Ἀριθμὸς τις λέγεται *πολλαπλάσιον* ἄλλου ἀριθμοῦ, ἐὰν γίνηται ἐξ αὐτοῦ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ· οἷον, ὁ 15 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 5 (διότι $15=5\times 3$), ὁ 24 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 6 (διότι $24=6\times 4$) κτλ. Ὁ δὲ ἀριθμὸς, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος παράγει ἄλλον, λέγεται *παράγων* αὐτοῦ· οἷον, ὁ 5 εἶναι παράγων τοῦ 15, ὁ 6 εἶναι παράγων τοῦ 24 κτλ.

Πᾶς ἀριθμὸς διαιρεῖ τὰ πολλαπλάσια αὐτοῦ καὶ ταῦτα μόνα.

Οἱ διαιρέται παντὸς ἀριθμοῦ καὶ οἱ παράγοντες αὐτοῦ εἶναι οἱ αὐτοὶ ἀριθμοί.

Σημειώσεις. Ὅταν λέγωμεν ὅτι ἀριθμὸς τις διαιρεῖ ἄλλον, ἐννοοῦμεν ὅτι διαιρεῖ αὐτὸν ἀκριβῶς.

Θεωρήματα περὶ τῆς διαιρετότητος.

ΘΕΩΡΗΜΑ Α'

76. Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῇ δύο ἢ περισσότερους ἀριθμούς, διαιρεῖ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν.

Παραδείγματος χάριν, ὁ 5 διαιρεῖ τοὺς ἀριθμούς 10 καὶ 25 καὶ λέγω, ὅτι διαιρεῖ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν $10 + 25 + 30$.

Ἀπόδειξις. Διότι ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν 10, 25 καὶ 30 εἶναι λαπλάσιον τοῦ 5, ἥτοι σύγκειται ἐκ πολλῶν 5·

καὶ ὁ μὲν 10 εἶναι $5 + 5$,

ὁ δὲ 25 εἶναι $5 + 5 + 5 + 5 + 5$,

ὁ δὲ 30 εἶναι $5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5$.

Ἄρα τὸ ἄθροισμα αὐτῶν $10 + 25 + 30$ εἶναι

$5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5$,

καὶ σύγκειται καὶ αὐτὸ ἐκ πολλῶν 5· ὥστε εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 5.

Πόρισμα.

77. Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῇ ἄλλον, διαιρεῖ καὶ τὰ πολλαπλάσια αὐτοῦ.

Παραδείγματος χάριν, ὁ 9 διαιρεῖ τὸν 27· λέγω, ὅτι θὰ διαιρῇ καὶ πολλαπλάσια αὐτοῦ, ἥτοι

27×2 27×3 , $27 \times 4, \dots$

Διότι τὸ 27×2 εἶναι $27 + 27$,

τὸ 27×3 εἶναι $27 + 27 + 27$ κτλ.

ΘΕΩΡΗΜΑ Β'

78. Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῇ δύο ἄλλους, διαιρεῖ καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν.

Παραδείγματος χάριν, ὁ 3 διαιρεῖ τοὺς ἀριθμούς 21 καὶ 12· λέγω, θὰ διαιρῇ καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν $21 - 12$.

Ἀπόδειξις. Διότι ὁ 21 εἶναι $3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$,

ὁ δὲ 12 εἶναι $3 + 3 + 3 + 3$.

Ἄρα ἡ διαφορὰ αὐτῶν εἶναι $3 + 3 + 3$.

καὶ σύγκειται καὶ αὐτὴ ἐκ πολλῶν 3· ὥστε εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 3.

Σημειώσεις. Τὸ θεώρημα τοῦτο δύναται νὰ ἐκφρασθῇ καὶ ἄλλως ἑξῆς.

79. Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῇ τὸ ἄθροισμα δύο ἄλλων καὶ τὸν ἐν αὐτῶν, θὰ διαιρῇ καὶ τὸν ἄλλον.

Διότι ὁ δευτέρος οὗτος ἀριθμὸς εἶναι ἡ διαφορά, τὴν ὁποίαν ἀφαιροῦμεν ἀφαιροῦντες ἀπὸ τοῦ ἄθροισματος τὸν πρῶτον.

ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'

80. Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν προστεθῇ εἰς τὸν διαιρετέον ἢ ἀφαιρεθῇ ἀπ' αὐτοῦ οἷονδήποτε πολλαπλάσιον τοῦ διαιρέτου.

Ἀπόδειξις. Διότι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως εὐρίσκεται, ἀπὸ τοῦ δευτέρου ἀφαιρεθῇ ὁ διαιρέτης, ὅσας φορές εἶναι δυνατὸν. Ἄν λοιπὸν προσθέσωμεν εἰς τὸν διαιρετέον πολλαπλάσιόν τι τοῦ διαιρέτου, μετὰ τινας ἀφαιρέσεις θὰ εὕρωμεν πάλιν τὸν πρῶτον διαιρετέον ἐπομένως καὶ τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον. Ἄν δὲ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ διαιρετέου πολλαπλάσιόν τι τοῦ διαιρέτου, ἡ ἀφαίρεσις αὕτη εἶναι μέγεθος τῆς ἐργασίας, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ κάμωμεν, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ὑπόλοιπον, καὶ διὰ τοῦτο δὲν βλάπτει αὐτό.

ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως
διὰ 2 καὶ 3, 4 καὶ 23, 8 καὶ 123, 3 καὶ 9 καὶ 1
Χαρακτηριστικὰ τῆς διαιρετότητος δι' αὐτῶν.

Πολλάκις εἶναι ὠφέλιμον νὰ ἡξεύρωμεν, ἂν ἀριθμὸς τις διαιρετὸς δι' ἄλλον, χωρὶς νὰ κάμωμεν τὴν διαίρεσιν (μάλιστα δὲ τοὺς ἀνωτέρω μικροὺς ἀριθμούς), καὶ ἂν δὲν εἶναι διαιρετὸς, νὰ εὐρίσκωμεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως. Εἰς τοῦτο χρησιμεύουσι ἑξῆς θεωρήματα.

ΘΕΩΡΗΜΑ (διὰ τὸ 2 καὶ 5).

81. Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως οἷονδήποτε ἀριθμοῦ διὰ 2 ἢ 5 εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ τελευταίου ψηφίου του.

Ἔστω, ὡς παράδειγμα, ὁ τυχὼν ἀριθμὸς, ὁ 9438· λέγω ὅτι, ἂν διαιρεθῇ διὰ 2 ἢ διὰ 5, θὰ ἀφήσῃ τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον, τὸ ὅποιον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ τελευταίου ψηφίου.

τὸ τελευταῖον αὐτοῦ ψηφίον 8· ἐπομένως, ἂν διὰ 5 διαιρεθῇ, θὰ ᾖ ὑπόλοιπον 3, ἂν δὲ διὰ 2, θὰ ἀφήσῃ 0.

Ἀπόδειξις. Ἐκάστη δεκάς εἶναι πολλαπλάσιον καὶ τοῦ 2 καὶ τοῦ 5 (ὅτι εἶναι $10 = 2 \times 5$)· ὥστε, ἂν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ πά-
τας δεκάδας του, ἀνὰ μίαν, τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως διὰ 2 ἢ
5 δὲν βλάπτεται (ἐδ. 80). Ἄλλ' ὁ ἀριθμὸς οὗτος περιέχει 943
δας καὶ 8 μονάδας· ἂν λοιπὸν παραλείψωμεν τὰς δεκάδας του,
μίαν, θὰ ἔχωμεν μόνον τὰς 8 μονάδας· ἄρα τὸ ὑπόλοιπον αὐτοῦ
τὸ ὑπόλοιπον τῶν 8 μονάδων του εἶναι ἓν καὶ τὸ αὐτό.

Πόρισμα.

Οἱ ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ τελευταῖον ψηφίον εἶναι

0 ἢ 2 ἢ 4 ἢ 6 ἢ 8,

διαιρετοὶ ἀκριβῶς διὰ τοῦ 2· λέγονται δὲ οἱ διὰ τοῦ 2 διαιρετοὶ
ἀριθμοὶ ἄρτιοι.

Οἱ δὲ ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ τελευταῖον ψηφίον εἶναι

1 ἢ 3 ἢ 5 ἢ 7 ἢ 9,

εἶναι διαιρετοὶ διὰ τοῦ 2, (ἀλλ' ἀφίνουσιν ὑπόλοιπον 1)· λέγονται
οἱ τοιοῦτοι ἀριθμοὶ περιτοί.

2) Ἀριθμὸς τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 5, ἐὰν τὸ τελευταῖον ψηφίον του
ᾖ 0 ἢ 5.

ΘΕΩΡΗΜΑ (διὰ τὸ 4 καὶ 25).

82. Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως οἰουδήποτε ἀριθμοῦ διὰ 4 ἢ διὰ
25 εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ, τὸν
οἷον ἀποτελοῦσι τὰ δύο τελευταῖα ψηφία αὐτοῦ.

Ἐστω τυχὼν ἀριθμὸς ὁ 459 386· λέγω, ὅτι εἴτε τὸν ἀριθμὸν τοῦτον
διαιρέσωμεν διὰ τοῦ 4 εἴτε μόνον τὸν 86 (ὃν ἀποτελοῦσι τὰ δύο τε-
λευταῖα ψηφία του κατὰ τὴν τάξιν αὐτῶν), ἓν καὶ τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον
ἔσχωμεν. Ὁμοίον δὲ θὰ συμβαίνει, ἂν διαιρέσωμεν διὰ 25.

Ἀπόδειξις. Ἐκάστη ἑκατοντάς εἶναι πολλαπλάσιον καὶ τοῦ 4
καὶ τοῦ 25 (διότι $100 = 4 \times 25$)· ὥστε, ἂν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ
πάσας τὰς ἑκατοντάδας του, ἀνὰ μίαν, τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως
διὰ 4 ἢ διὰ 25 δὲν βλάπτεται (ἐδ. 80). Ἄλλ' ὁ ἀριθμὸς οὗτος ἔχει

4593 ἑκατοντάδας καὶ 86 μονάδας· ἂν λοιπὸν παραλείψωμεν ἑκατοντάδας του, ἀπὸ μίαν μίαν, θὰ ἔχωμεν μόνον τὰς 86 μονάδας· ἄρα τὸ ὑπόλοιπον τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῶν μονάδων του εἶναι ἓν καὶ τὸ αὐτό.

Πόρισμα.

83. Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 4 (ἢ διὰ 25), ἐὰν τὰ δεξιά ψηφία αὐτοῦ ἀποτελῶσιν ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 4 (ἢ διὰ 25). Ἐπομένως διὰ 25 διαιροῦνται ὅσοι ἀριθμοὶ λήγουσιν εἰς 00 ἢ 50 ἢ 75.

ΘΕΩΡΗΜΑ (διὰ τὸ 8 καὶ 125).

84. Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως οἴονδήποτε ἀριθμοῦ διὰ 8 ἢ διὰ τοῦ 125 εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ 125 εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ 8.

Ἐστω τυχὼν ἀριθμός, ὁ 75 429 804· λέγω, ὅτι εἴτε διαιρέσωμεν αὐτὸν διὰ 8 εἴτε μόνον τὸν 804 (τὸν ὅποιον ἀποτελεῖ τὰ τρία τελευταῖα ψηφία του κατὰ τὴν τάξιν των), ἓν καὶ τὸ ὑπόλοιπον θὰ εὑρωμεν. Τὸ αὐτὸ δὲ λέγω καὶ περὶ τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ τοῦ 125.

Ἀπόδειξις. Ἐκάστη χιλιάς εἶναι πολλαπλάσιον καὶ τοῦ 8 καὶ τοῦ 125 (διότι $100 = 8 \times 125$)· ὥστε, ἂν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ πάσας τὰς χιλιάδας του, ἀπὸ μίαν μίαν, τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως διὰ τοῦ 8 ἢ διὰ τοῦ 125 δὲν βλάπτεται. Ὁ δοθεὶς ἀριθμός οὗτος ἔχει 75 429 χιλιάδας καὶ 804 μονάδας· ἂν λοιπὸν παραλείψωμεν τὰς χιλιάδας του, ἀπὸ μίαν μίαν, θὰ ἔχωμεν μόνον τὰς 804 μονάδας· ἄρα τὸ ὑπόλοιπον τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ καὶ τὸ ὑπόλοιπον τοῦ 804 εἶναι ἓν καὶ τὸ αὐτό.

Πόρισμα.

85. Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 8 (ἢ διὰ 125), ἐὰν τὰ δεξιά ψηφία αὐτοῦ ἀποτελῶσιν ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 8 (ἢ διὰ 125).

ΘΕΩΡΗΜΑ (διὰ τὸ 9 καὶ 3).

86. Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως οἴονδήποτε ἀριθμοῦ διὰ 9 ἢ διὰ 3 εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ 9 ἢ διὰ 3.

3 εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ὑπόλοιπον, ὅπερ εὐρίσκομεν διαιροῦντες τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων αὐτοῦ διὰ τοῦ αὐτοῦ διαιρέτου.

Ἐστω τυχὸν ἀριθμός, ὁ 4758· λέγω, ὅτι εἴτε τοῦτον διαιρέσωμεν διὰ 9 εἴτε τὸ ἄθροισμα $4+7+5+8$ (ἦτοι 24), ἔν καὶ τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον θὰ εὑρωμεν. Τὸ αὐτὸ δὲ λέγω καὶ περὶ τῆς διαιρέσεως τοῦ 3.

Ἀπόδειξις. Ὁ ἀριθμὸς οὗτος σύγκειται ἐκ 475 δεκάδων καὶ ἐξ 8 ἀπλῶν μονάδων· ἂν ἐκ μιᾶς δεκάδος (ἦτοι ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ 10) ἀφαιρέσωμεν τὸ 9, μένει ὑπόλοιπον μία μονάς, ἦτοι ἡ δεκάς γίνεται μονὰς ἀπλῇ· ἂν λοιπὸν ἐκ τῶν 475 δεκάδων τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ ἀφαιρέσωμεν ἐξ ἑκάστης τὸ 9, θὰ μείνωσιν εἰς τὸν ἀριθμὸν 475 μονάδες καὶ 8 μονάδες, ἦτοι θὰ μείνῃ ὁ ἀριθμὸς $475+8$. Ἐὰν δὲ πάλιν ἐξ ἑκάστης τῶν 47 δεκάδων τοῦ 475 ἀφαιρέσωμεν τὸ 9, θὰ μείνῃ ὁ ἀριθμὸς $47+5+8$. Ἐὰν δὲ τέλος ἐξ ἑκάστης τῶν 4 δεκάδων τοῦ 47 ἀφαιρέσωμεν τὸ 9, θὰ μείνῃ ὁ ἀριθμὸς $4+7+5+8$, ἦτοι ὁ 24.

Τὸν ἀριθμὸν τοῦτον εὑρομεν ἀφαιρέσαντες ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ πολλάκις τὸ 9· ἄρα τὸ ὑπόλοιπον τοῦ δοθέντος καὶ τὸ ὑπόλοιπον τούτου εἶναι ἓν καὶ τὸ αὐτὸ (ὅταν διαιρεθῶσι δι' 9).

Τὸ αὐτὸ δὲ ἀληθεύει, καὶ ὅταν διαιρέσωμεν διὰ 3· διότι ὁ ἀφαιρεθεὶς ἀριθμὸς, ὡς συγκείμενος ἐκ πολλῶν 9, εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 3.

Πόρισμα.

87. Ἀριθμὸς τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 9, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων αὐτοῦ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ 9, τὸ αὐτὸ δὲ ἀληθεύει καὶ περὶ τοῦ 3.

Παραδείγματος χάριν, ὁ ἀριθμὸς 849408 διαιρεῖται διὰ 3· διότι τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του εἶναι 33 καὶ εἶναι διαιρετὸν διὰ 3· διὰ τοῦ 9 δὲ διαιρούμενος θὰ ἀφήσῃ ὑπόλοιπον 6 (ὅσον ἀφίνει καὶ ὁ 33).

Ὁ δὲ ἀριθμὸς 8 941 608 διαιρεῖται διὰ τοῦ 9 (ἐπομένως καὶ διὰ τοῦ 3 κατὰ τὸ πόρισμα 77), διότι τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του εἶναι 36, δηλαδὴ διαιρετὸν διὰ 9.

Συμψύωσις. Καὶ εἰς τὸν ἀριθμὸν, ὅστις προκύπτει ἐκ τῆς ὁθροίσεως τῶν ψηφίων τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ, δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸ αὐτὸ θεώρημα, πρὸς εὑρεσιν τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ τοῦ 9 (ἢ διὰ τοῦ 3)· δυνάμεθα δὲ νὰ ἐξακολουθήσωμεν οὕτως ἐφαρμόζοντες τὸ

αὐτὸ θεώρημα, μέχρις οὗ φθάσωμεν εἰς ἀριθμόν, ἔχοντα ἐν ψηφίον, ὅτε τὸ ὑπόλοιπον εὐρίσκεται ἀμέσως. Παραδείγματος χάριν, τοῦ ἀριθμοῦ 598 432 803 τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων εἶναι 42· τούτου δὲ πάλιν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων εἶναι 6· ὥστε 6 εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ διὰ τοῦ 9· διὰ δὲ τοῦ 3 διαιρεῖται ἀκριβῶς.

Παρατηρητέον δέ, ὅτι ἀθροίζοντες τὰ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ δυναμένα νὰ παραλείπωμεν τὰ 9 ἢ καὶ τὰ πολλαπλάσια τοῦ 9· διότι ἡ παράλειψις αὐτῶν δὲν βλάπτει τὸ ὑπόλοιπον· ὥστε διὰ τὸν ἀνωτέρω δοθέντα ἀριθμόν ἐργαζόμεθα συντομώτερον ὥς ἑξῆς:

5 καὶ 8 κάμνουν 13 (ἔξω τὰ 9) 4· 4 καὶ 4... 8· 8 καὶ 3... 11 (ἔξω τὰ 9) 2· 2 καὶ 2... 4· 4 καὶ 8... 12 (ἔξω τὰ 9) 3· 3 καὶ 3... 6.

ΘΕΩΡΗΜΑ (διὰ τὸ 11).

88. Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως οἰουδήποτε ἀριθμοῦ διὰ τοῦ 11 εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ὑπόλοιπον τοῦ ἀριθμοῦ, τὸν ὅποιον εὐρίσκομεν ἀναλύοντες τὸν ἀριθμὸν τοῦτον εἰς διηγήφια τμήματα (ἀπὸ τῶν ἀπλῶν μονάδων) καὶ προσθέτοντες τὰ τμήματα ταῦτα.

Τὸ τελευταῖον πρὸς τὰ ἀριστερὰ τμήμα δύναται νὰ ἔχη καὶ ἐν μόνον ψηφίον.

Ἐστω ὁ τυχὼν ἀριθμός, ὁ 6574158· ἐὰν ἀναλύσωμεν τὸν ἀριθμὸν τοῦτον εἰς τὰ τμήματα 58, 41, 57 καὶ 6, λέγω, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τμημάτων τούτων, ἦτοι τὸ $6+57+41+58$, διαιρούμενον διὰ 11 δίδει τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον, τὸ ὅποιον θὰ δώσῃ καὶ ὅλος ὁ ἀριθμός.

Ἀπόδειξις. Ὁ ἀριθμὸς οὗτος σύγκειται ἐξ 65741 ἑκατοντάδων καὶ ἐκ 58 μονάδων· ἂν ἐκ μιᾶς ἑκατοντάδος (ἢ ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 100), ἀφαιρέσωμεν τὸν 11 ἐννέα φορές (ἦτοι ἂν ἀφαιρέσωμεν 11×9 , ἦτοι 99), μένει ὑπόλοιπον μία μονάς, ἦτοι ἡ ἑκατοντὰς γίνεται μονὰς ἀπλῆ. Ἄν λοιπὸν ἐξ ἐκάστης τῶν 65741 ἑκατοντάδων τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ ἀφαιρέσωμεν τὸν 11 ἐννέα φορές, θὰ μείνωσιν εἰς τὸν ἀριθμὸν 65741 μονάδες καὶ 58 μονάδες, τουτέστι θὰ μείνῃ ὁ ἀριθμὸς $65741+58$. Ἐὰν δὲ πάλιν ἐξ ἐκάστης τῶν 657 ἑκατοντάδων τοῦ ἀριθμοῦ 65741 ἀφαιρέσωμεν τὸν 11 ἐννέα φορές, θὰ μείνῃ ὁ ἀριθμὸς

$$657 + 41 + 58.$$

Ἐὰν δὲ τέλος ἐξ ἐκάστης τῶν 6 ἑκατοντάδων τοῦ 657 ἀφαιρέσωμεν τὸν 11 ἑννέα φορές, μένει ὁ ἀριθμὸς

$$6+57+41+58.$$

Τὸν ἀριθμὸν τοῦτον εὗρήκαμεν ἀφαιρέσαντες πολλάκις τὸ 11 ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ· ἄρα (ἐδ. 80) τὸ ὑπόλοιπον τοῦ δοθέντος καὶ τὸ ὑπόλοιπον τούτου εἶνα ἐν καὶ τὸ αὐτό, ὅταν διαιρεθῶσι διὰ τοῦ 11.

Συμπτώσις. Τὸ θεώρημα τοῦτο ἀληθεύει καὶ διὰ τοὺς διαιρετάς 33 καὶ 99. Διότι ὁ ἀφαιρούμενος ἀριθμὸς εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 99 καὶ κατ' ἀκολουθίαν πολλαπλάσιον καὶ τοῦ 33.

Ἐὰν εἰς τὸ ἄθροισμα $6+57+41+58$ παραλείψωμεν ἐξ ἐκάστου μέρους τὰ πολλαπλάσια τοῦ 11, τὸ ὑπόλοιπον δὲν βλάπτεται, εὐρίσκομεν δὲ ἄθροισμα τὸ $6+2+8+3$, ἥτοι 19· ἐπειδὴ δὲ τοῦτο, διαιρούμενον διὰ 11 δίδει ὑπόλοιπον 8, συμπεραίνομεν ὅτι καὶ ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς θὰ δώσῃ τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον 8.

Πόρισμα.

89. Ἀριθμὸς τις εἶναι διαιρετὸς δι' 11, ἂν τὸ ἄθροισμα τῶν διψηφίων τμημάτων, εἰς τὰ ὅποια ἀναλύεται (ἐκ δεξιῶν), εἶναι διαιρετὸν δι' 11.

Παραδείγματος χάριν, ὁ ἀριθμὸς 859584 ἀναλύεται εἰς τὰ τμήματα 84, 95 καὶ 85 καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι $85+95+84$, ἥτοι 264.

Ἐὰν δὲ ἐφαρμόσωμεν τὸ αὐτὸ θεώρημα καὶ εἰς τὸν ἀριθμὸν τοῦτον 264, εὐρίσκομεν τὰ τμήματα 64 καὶ 2, αἵτινα δίδουσιν ἄθροισμα 66· ἐπειδὴ δὲ τοῦτο εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ 11, συμπεραίνομεν ὅτι καὶ ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 11.

Ὁ δὲ ἀριθμὸς 358970412 ἀναλύεται εἰς τὰ τμήματα 12, 04, 97, 58 καὶ 3, ταῦτα δὲ ἔχουσιν ἄθροισμα

$$3+58+97+4+12$$

καὶ παραλειπομένων τῶν πολλαπλασίων τοῦ 11 τὸ ἄθροισμα τοῦτο γίνεται

$$3+3+9+4+1, \text{ ἥτοι } 20.$$

ἐπειδὴ δὲ τὸ 20 ἀφίνει ὑπόλοιπον 9, συμπεραίνομεν ὅτι καὶ ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς διαιρούμενος διὰ 11 θὰ ἀφήσῃ ὑπόλοιπον 9.

*** Βάσανος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως
διὰ τοῦ 9 καὶ διὰ τοῦ 11.**

Ἡ βάσανος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως δύναται
νὰ γίνη καὶ διὰ τῶν ὑπολοίπων, στηρίζεται δὲ ἐπὶ τῶν ἐπομένων
θεωρημάτων περὶ τῶν ὑπολοίπων.

ΘΕΩΡΗΜΑ

90. Τὸ ὑπόλοιπον ἄθροίσματος ὡς πρὸς οἰονδήποτε διαιρέτην
δὲν βλάπτεται, ἂν αντικαταστήσωμεν ἕκαστον προσθετέον διὰ τοῦ ὑπο-
λοίπου του (ὡς πρὸς τὸν αὐτὸν διαιρέτην).

Ἐστω τυχὸν ἄθροισμα, τὸ $12+25+32$ · λέγω ὅτι τὸ ὑπόλοιπον
αὐτοῦ ὡς πρὸς τὸν διαιρέτην 7 δὲν βλάπτεται, ἂν θέσωμεν ἀντὶ
τοῦ 12 τὸ ὑπόλοιπόν του (ἦτοι τὸ 5) καὶ ἀντὶ τοῦ 25 τὸ ὑπόλοι-
πόν του 4 καὶ ἀντὶ τοῦ 32 τὸ ὑπόλοιπόν του 4· λέγω δηλαδὴ
ὅτι εἴτε τὸ δοθὲν ἄθροισμα $12+25+32$ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ 7
εἴτε τὸ $5+4+4$, ἔν καὶ τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον θὰ εὔρωμεν.

Ἀπόδειξις. Διότι ἀφηρέσαμεν ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἄθροίσματος
πολλαπλάσιόν τι τοῦ διαιρετέου 7, τοῦτο δὲ δὲν βλάπτει τὸ ὑπό-
λοιπον (ἐδ. 80).

ΘΕΩΡΗΜΑ

91. Τὸ ὑπόλοιπον γινομένου ὡς πρὸς οἰονδήποτε διαιρέτην δὲν
βλάπτεται, ἂν αντικαταστήσωμεν ἕκαστον παράγοντα διὰ τοῦ ὑπολοί-
που του (ὡς πρὸς τὸν αὐτὸν διαιρέτην).

Ἐστω τυχὸν γινόμενον, τὸ 52×684 · λέγω ὅτι τὸ ὑπόλοιπον
αὐτοῦ ὡς πρὸς τὸν διαιρέτην 11 δὲν βλάπτεται, ἂν θέσωμεν ἀντὶ
τοῦ παράγοντος 52 τὸ ὑπόλοιπόν του 8 καὶ ἀντὶ τοῦ παράγοντος
684 τὸ ὑπόλοιπόν του 2.

Ἀπόδειξις. Τὸ γινόμενον 52×684 εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ἄθροι-
σμα $52+52+52 \dots +52$ (οὔτινος οἱ προσθετέοι εἶναι ἑξακόσιοι
ὀγδοήκοντα τέσσαρες)· ἐὰν δὲ εἰς τὸ ἄθροισμα τοῦτο ἀντὶ ἐκάστου
προσθετέου θέσωμεν τὸ ὑπόλοιπόν του (ἦτοι τὸ 8), δὲν βλάπτεται
τὸ ὑπόλοιπον τοῦ ἄθροίσματος καὶ θὰ ἔχωμεν τὸ ἄθροισμα

$$8+8+8+\dots+8, \text{ ἦτοι τὸ } 8 \times 684.$$

Καὶ πάλιν τὸ γινόμενον 8×684 εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα
 $684 + 684 + \dots + 684$ (ὅπερ ἔχει

προσθετέους)· καὶ ἂν ἐφαρμόσωμεν πάλιν τὸ προηγούμενον θεώ-
 α, εὐρίσκομεν τὸ ἄθροισμα $2 + 2 + \dots + 2$, ἥτοι τὸ 2×8 , χωρὶς
 βλάψωμεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως δι' 11.

Ἐκ τούτου γίνεται φανερὰ ἡ ὁρθότης τοῦ ἐπομένου κανόνος.

92. Διὰ τὰ κάμωμεν τὴν βάσανον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὡς πρὸς
 ἥποτε διαιρέτην, εὐρίσκομεν τὰ ὑπόλοιπα τῶν δύο παραγόντων ὡς
 τὸν διαιρέτην τοῦτον καὶ πολλαπλασιάζομεν αὐτά, τότε δὲ τὸ γι-
 νόμενον τῶν δύο ὑπολοίπων καὶ τὸ γινόμενον τῶν δύο ἀριθμῶν πρέπει
 ἔχωσιν ἴσα ὑπόλοιπα.

Ἄς λάβωμεν ὡς παράδειγμα τὸν ἐξῆς πολλαπλασιασμόν, τὸν ὁποῖον
 ἐκτελοῦμεν διὰ τοῦ 9.

5207	
331	
5207	5 7
15621	8 8
15621	
1723517	

Ἡ δοκιμὴ γίνεται ὡς ἐξῆς: ἀφοῦ γράψωμεν δύο εὐθείας, τεμνομέ-
 νας ἐν σχήματι σταυροῦ, σημειοῦμεν εἰς τὰς δύο ἄνω γωνίας τὰ ὑπό-
 λοιπα, 5 καὶ 7, τῶν δύο παραγόντων, ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν τὰ
 ὑπόλοιπα ταῦτα 5×7 καὶ γράφομεν τὸ ὑπόλοιπον τοῦ γινομένου 35,
 οἱ τὸ 8, εἰς μίαν τῶν ὑποκάτω γωνιῶν· τέλος εὐρίσκομεν καὶ
 τὸ ὑπόλοιπον τοῦ γινομένου 1723517, τὸ ὁποῖον πρέπει (ἂν δὲν
 γίνῃ λάθος) νὰ εἶναι καὶ αὐτὸ 8, καὶ γράφομεν αὐτὸ εἰς τὴν τελευ-
 τίαν γωνίαν.

Ὅμοιά δοκιμὴ γίνεται καὶ εἰς τὴν διαίρεσιν. Λαμβάνομεν τὰ ὑπό-
 λοιπα τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ πηλίκου, πολλαπλασιάζομεν τὰ ὑπόλοιπα
 αὐτὰ καὶ εἰς τὸ γινόμενον προσθέτομεν τὸ ὑπόλοιπον τοῦ ὑπολοίπου
 πρὸς διαιρέσεως· ὁ οὕτω προκύπτων ἀριθμὸς πρέπει (ἂν δὲν ἔγινε λά-
 θος τι) νὰ δίδῃ τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον, ὅπερ δίδει καὶ ὁ διαιρετέος.

Ὁ κανὼν οὗτος στηρίζεται ἐπὶ τῶν θεωρημάτων 90 καὶ 91, ἔτι δὲ
 καὶ ἐπὶ τοῦ θεωρήματος τοῦ ἑδαφ. 59. Τὴν ἀπόδειξιν αὐτοῦ παρα-
 εἴπομεν ὡς εὐκόλως εὐρίσκομένην.

Σημείωσις. Ἡ διὰ τῶν ὑπολοίπων δοκιμὴ μικρὰν ἔχει ἀξίαν, καὶ ὅταν ἐπιτυχάνῃ, δὲν δυνάμεθα μετὰ βεβαιότητος νὰ συμνῶμεν ὅτι ἡ πρῶξις ἔγινε χωρὶς λάθους· ἂν, λόγου χάριν, ἔγινε τι καὶ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 9, ἡ διὰ τοῦ 9 δοκιμὴ δὲν δύναται ἐξελέγξῃ αὐτὸ (ὥς, λόγου χάριν, ὅταν τὰ ψηφία τοῦ γινομένου μὲν τὰ αὐτά, ἀλλάξωσιν ὅμως θέσιν), διότι παραλείπει τὰ πλάσια τοῦ 9.

Αἱ ἄλλαι δοκιμαὶ (ἐδ. 43 καὶ 68) εἶναι ἀσφαλέστεραι, ἀλλὰ εἰς αὐτὰς ἐνδέχεται νὰ ὑποπέσῃ τις εἰς νέα λάθη. Διὰ τοῦτο νομὲν ὅτι ἡ ἀρίστη δοκιμὴ ἐκάστης ἀριθμητικῆς πράξεως εἶναι ἡ προσοχῆς ἐπανάληψις αὐτῆς.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ διαιρεθῶσι διὰ τῆς διαφορᾶς αὐτῶν, δίδου ὑπόλοιπα ἴσα.

Διότι διαφέρουσι κατὰ τὸν διαιρέτην (ἐδ. 80).

2) Ἀριθμὸς τις εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 4, ἔὰν τὸ ἄθροισμα ψηφίου τῶν μονάδων καὶ τοῦ διπλασίου τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων αὐτοῦ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ 4.

Ἡ ἀπόδειξις τούτου στηρίζεται εἰς τὸ ἑξῆς· ἂν ἀπὸ μιᾶς δεκάδος ἀφαιρέσωμεν τὸ 4 δὶς, ἡ δεκάς γίνεται 2.

3) Ἀριθμὸς τις εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 8, ἔὰν τὸ ἄθροισμα τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων καὶ τοῦ διπλασίου τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων καὶ τοῦ τετραπλασίου τοῦ ψηφίου τῶν ἑκατοντάδων εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ 8.

4) Ἀριθμὸς οἷοσδήποτε εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 6, ἔὰν τὸ ἄθροισμα τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων καὶ τοῦ τετραπλασίου ἐκάστου τῶν ἄλλων ψηφίων εἶναι διαιρετὸν διὰ 6.

Ἡ ἀπόδειξις στηρίζεται εἰς τοῦτο, ὅτι πάντες οἱ ἀριθμοὶ 10, 100, 1000, . . . διαιρούμενοι διὰ 6 δίδουσιν ὑπόλοιπον 4.

5) Ἀριθμὸς οἷοσδήποτε εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 11, ἔὰν ἡ ὑπερβολὴ τοῦ ἄθροισματος τῶν ψηφίων τάξεως περιττῆς (ἀπὸ τῶν ἀπλῶν μονάδων) ὑπὲρ τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τάξεως ἀρτίας εἶναι 0 ἢ πολλαπλάσιον τοῦ 11.

Εἰς τὴν πρότασιν ταύτην φθάνομεν, ἔὰν, ἀφοῦ ἀναλύσωμεν τὸν ἀριθμὸν εἰς τμήματα διψήφια (ἀπὸ τῶν ἀπλῶν μονάδων), προσθέσωμεν

ἕκαστον τμήμα τόσας μονάδας, ὅσας ἔχει αὐτὸ δεκάδας, συνάμα δὲ ἀφαιρέσωμεν τὰς προστεθείσας μονάδας (ἂν, λόγου χάριν, τὸ τμήμα εἶναι 98, θὰ γράψωμεν $66 + 8 - 9$).

6) Ἀριθμὸς οἰοσδήποτε εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 7, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων καὶ τοῦ τριπλασίου τοῦ ὅλου ἀριθμοῦ τῶν δεκάδων του εἶναι διαιρετὸν διὰ 7.

Ἡ ἀπόδειξις στηρίζεται εἰς τοῦτο, ὅτι ἐκάστη δεκάς γίνεται 3, ὅταν ἀφαιρεθῇ ἀπ' αὐτῆς ὁ 7.

7) Ἀριθμὸς οἰοσδήποτε εἶναι διαιρετὸς διὰ 37, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν τριψηφίων τμημάτων, εἰς ᾧ ἀναλύεται (ἀπὸ τῶν ἀπλῶν μονάδων), εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ 37 (τὸ τελευταῖον πρὸς τὰ ἀριστερὰ τμήμα δύναται νὰ ἔχῃ δύο μόνον ψηφία ἢ καὶ ἓν μόνον).

Ἡ ἀπόδειξις στηρίζεται εἰς τοῦτο, ὅτι ἐκάστη χιλιάς (ἦτοι ὁ 1000) γίνεται ἀπλῇ μονάς, ὅταν ἀφαιρεθῇ ἀπ' αὐτῆς πολλαπλάσιόν τι τοῦ 37 ($999 = 37 \times 27$).

8) Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων δύο ἀριθμῶν δὲν δύναται νὰ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ 7, ἐὰν ἑκάτερος τῶν ἀριθμῶν τούτων δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 7.

Ἡ ἀπόδειξις τῆς προτάσεως ταύτης στηρίζεται ἐπὶ τῶν θεωρημάτων 90 καὶ 91 καὶ ἐπὶ τούτου, ὅτι δὲν ὑπάρχουσι δύο ἀριθμοὶ μικρότεροι τοῦ 7, τῶν ὁποίων τὰ τετράγωνα προστιθέμενα νὰ ἀποτελῶσιν ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ τοῦ 7.

9) Τὸ γινόμενον τριῶν ἐφεξῆς ἀριθμῶν εἶναι πάντοτε διαιρετὸν διὰ τοῦ 6.

10) Τὸ γινόμενον δύο ἐφεξῆς ἀριθμῶν καὶ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν εἶναι πάντοτε διαιρετὸν διὰ τοῦ 6.

11) Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῇ δύο ἄλλους, θὰ διαιρῇ καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως αὐτῶν.

12) Νὰ δειχθῇ ὅτι, ὅπωςδήποτε καὶ ἂν ἀνταλλαχθῶσι τὰ ψηφία ἀριθμοῦ τινος, ἡ μεταβολὴ αὐτοῦ (αὔξεις ἢ ἐλάττωσις) θὰ εἶναι πάντοτε πολλαπλάσιον τοῦ 9.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΜΕΓΙΣΤΟΥ ΚΟΙΝΟΥ ΔΙΑΙΡΕΤΟΥ

Ὅρισμοί.

93. Κοινὸς διαιρέτης δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν λέγεται ἀριθμός τις, εἰὰν διαιρῇ αὐτοὺς πάντας ἀκριβῶς.

Παραδείγματος χάριν, τῶν ἐξῆς ἀριθμῶν,

16, 24, 36, 20,

κοινὸς διαιρέτης εἶναι ὁ 2, διότι διαιρεῖ αὐτοὺς πάντας τῶν αὐτῶν δὲ ἀριθμῶν κοινὸς διαιρέτης εἶναι καὶ ὁ 4.

94. Μέγιστος κοινὸς διαιρέτης δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν λέγεται (ὥς δεικνύει καὶ τὸ ὄνομά του) ὁ μέγιστος ἐκ τῶν κοινῶν διαιρετῶν, τοὺς ὁποίους ἔχουσιν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι.

Παραδείγματος χάριν, οἱ ἀριθμοὶ 16, 24, 40, ἔχουσι τοὺς ἐξῆς κοινούς διαιρέτας: 1, 2, 4, 8 καὶ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν εἶναι ὁ 8.

Ἐὰν ἀριθμοὶ τινες δὲν ἔχωσιν ἄλλον κοινὸν διαιρέτην πλὴν τῆς μονάδος, οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι λέγονται *πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους*.

Τοιοῦτοι εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 3, 5 καὶ 9.

Θεωρήματα περὶ τῶν κοινῶν διαιρετῶν.

ΘΕΩΡΗΜΑ

95. Οἱ κοινοὶ διαιρέται ὅσωνδῆποτε ἀριθμῶν δὲν βλάπτονται, ἂν ἐξ ἑνὸς τῶν ἀριθμῶν τούτων ἀφαιρεθῇ ἄλλος.

Ἄς λάβωμεν, ὥς παράδειγμα, τοὺς τυχόντας ἀριθμοὺς

40, 128, 320, 72.

λέγω, ὅτι οἱ κοινοὶ αὐτῶν διαιρέται δὲν βλάπτονται, ἂν, λόγου χάριν, ἀπὸ τοῦ 320 ἀφαιρέσω τὸν 72· λέγω δηλαδὴ ὅτι

οἱ κοινοὶ διαιρέται τῶν ἀριθμῶν 40, 128, 320, 72
καὶ οἱ κοινοὶ διαιρέται τῶν » 40, 128, 248, 72

εἶναι οἱ αὐτοὶ ἀριθμοί.

Ἀπόδειξις. Διότι πᾶς κοινὸς διαιρέτης τῆς πρώτης σειρᾶς τῶν

αριθμῶν ὡς διαιρῶν τοὺς ἀριθμοὺς 320 καὶ 72 θὰ διαιρῇ καὶ τὴν ποσὴν αὐτῶν 248 (ἐδ. 78)· ἐπομένως θὰ εἶναι κοινὸς διαιρέτης καὶ δευτέρας σειρᾶς. Καὶ πάλιν, πᾶς κοινὸς διαιρέτης τῆς δευτέρας ρᾶς ὡς διαιρῶν τοὺς ἀριθμοὺς 248 καὶ 72 θὰ διαιρῇ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν 320 (ἐδ. 76)· ἐπομένως θὰ εἶναι κοινὸς διαιρέτης καὶ τῆς πρώτης σειρᾶς.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι καὶ αἱ δύο σειραὶ τῶν ἀριθμῶν ἔχουσι τοὺς κοινοὺς διαιρέτας.

Πόρισμα.

96. Οἱ κοινοὶ διαιρέται ὅσωνδήποτε ἀριθμῶν δὲν βλέπονται, ἂν καταστήσωμεν ἓνα τῶν ἀριθμῶν τούτων διὰ τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεώς του δι' ἄλλον μικρότερον.

Διότι, ἂν ἀφαιρέσωμεν τὸν μικρότερον ἀπὸ τοῦ μεγαλύτερου, ὅσας φορές εἶναι δυνατόν, θὰ ἔλθῃ εἰς τὴν θέσιν τοῦ μεγαλύτερου τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεώς του διὰ τοῦ μικρότερου· δὲν θὰ βλαφθῶσι δὲ οἱ κοινοὶ διαιρέται· διότι εἰς ἐκάστην τῶν ἀφαιρέσεων τούτων δὲν βλέπονται.

Παραδείγματος χάριν, χωρὶς νὰ βλάψω τοὺς κοινοὺς διαιρέτας, δύναμαι ἀντὶ τῶν ἀριθμῶν

40,	128,	320,	72	νὰ λάβω
τοὺς ἐξῆς :	40,	128,	248,	72· καὶ ἀντὶ τούτων
τοὺς ἐξῆς :	40,	128,	176,	72· καὶ ἀντὶ τούτων
τοὺς ἐξῆς :	40,	128,	104,	72· καὶ τέλος ἀντὶ τούτων
τοὺς ἐξῆς :	40,	128,	32,	72·

εἶναι δὲ ὁ 32 τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ 320 διὰ 72.

Σημείωσις. Ἐὰν τὸ ὑπόλοιπον εἶναι 0, παραλείπεται.

Παραδείγματος χάριν, οἱ ἀριθμοὶ	120,	40,	32
καὶ οἱ	80,	40,	32
καὶ οἱ	40,	40,	32,
ἦτοι οἱ		40,	32

ἔχουσι προδήλως τοὺς αὐτοὺς κοινοὺς διαιρέτας.

ΘΕΩΡΗΜΑ

97. Ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης ὅσωνδήποτε ἀριθμῶν εἶναι ὁ ἐλάχιστος ἐξ αὐτῶν, ἐὰν διαιρῇ πάντας τοὺς ἄλλους.

Ἄς λάβωμεν ὡς παράδειγμα τοὺς ἀριθμοὺς 40, 80, 120, ὧν ὁ μικρότερος (ὁ 8) διαιρεῖ πάντας τοὺς ἄλλους· λέγω, ὅτι ὁ στος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν εἶναι ὁ 8.

Ἀπόδειξις. Ὁ 8 εἶναι κοινὸς διαιρέτης, διότι διαιρεῖ (καὶ δίδει πηλίκον 1), διαιρεῖ δὲ καὶ τοὺς ἄλλους πάντας· ἄλλοι ἀριθμοὶ μεγαλύτεροι τοῦ 8 δὲν δύναται νὰ εἶναι κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 40, 80, 120, 8, διότι δὲν θὰ διαιρῇ τὸν 8 ὡς μὲν ὁ 40, ὁ 80, ὁ 120, ὁ 8 εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 40, 80, 120, 8.

Εὗρεαις τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου δύο ἀριθμῶν.

98. Στηριζόμενοι ἐπὶ τῶν προηγουμένων προτάσεων δυνάμεθα εὗρωμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην δύο οἰωνδήποτε ἀριθμῶν. τοῦτο διαιροῦμεν τὸν μεγαλύτερον διὰ τοῦ μικροτέρου καί, ἐὰν δὲν μείνῃ ὑπόλοιπον, ὁ μικρότερος εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης (κατὰ τὸ θεώρημα 97). Ἐὰν δὲ μείνῃ ὑπόλοιπον, λαμβάνομεν ἀντὶ τοῦ μεγαλυτέρου καὶ οὕτως ἔχομεν δύο ἄλλους ἀριθμούς, τέστι τὸ ρηθὲν ὑπόλοιπον καὶ τὸν μικρότερον ἐκ τῶν δύο δοθέντων ἀριθμῶν. Οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς κοινοὺς διαιρέτας ὡς καὶ οἱ δύο δοθέντες (πρόγραμμα 96), ἐπομένως ἔχουσι καὶ αὐτὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην.

Καὶ ἐπὶ τούτων ποιοῦμεν τὰ αὐτὰ καὶ ἐξακολουθοῦμεν τοῦτον τρόπον ἀλλάσσοντες τοὺς ἀριθμούς, μέχρις οὗ φθάσωμεν εἰς δύο ἀριθμούς, ἐξ ὧν ὁ μεγαλύτερος νὰ διαιρῇται διὰ τοῦ μικροτέρου ὡς βῶς· τότε ὁ μικρότερος οὗτος θὰ εἶναι ὁ ζητούμενος μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Ἐστωσαν ὡς παράδειγμα οἱ ἐξῆς δύο ἀριθμοί: 72 καὶ 414. Διαιροῦντες τὸν 414 διὰ 72 εὐρίσκομεν ὑπόλοιπον 54· ὥστε αὐτῶν δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τοὺς ἐξῆς δύο: 72 καὶ 54.

Διαιροῦντες τὸν 72 διὰ τοῦ 54 εὐρίσκομεν ὑπόλοιπον 18· ἀντὶ τούτων δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τοὺς ἐξῆς δύο: 54 καὶ 18.

Διαιροῦντες τὸν 54 διὰ 18 εὐρίσκομεν ὑπόλοιπον 0· ὥστε εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δοθέντων ἀριθμῶν 414 καὶ 72.

πραξις διατάσσεται συντομίας χάριν ὥς ἑξῆς·

	5	1	3
414	72	54	18
54	18	0.	

διαιρέσεις εἶναι διατεταγμέναι κατὰ τὸν συνήθη τρόπον μὲν τὴν διαφοράν, ὅτι τὸ πηλίκον ἐκάστης γράφεται ὑπεράνω τοῦ αὐτῆς, ἡ δὲ ὑποκάτω τοῦ διαιρέτου θέσις φυλάσσεται διὰ λοιπὸν τῆς ἐπομένης διαιρέσεως.

ἂν εὗρεθῇ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης ἡ μονάς, τοῦτο σημαίνει ὅτι οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Παράδειγμα.

	19	1	1	7	2
625	32	17	15	2	1
32	15	2	1	0	
305					
288					
17					

Κανὼν.

Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγεται ὁ ἑξῆς κανὼν.

9. Διὰ τὰ εὗρωμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην. δύο ἀριθμῶν, ὅπου ὁ μὲν εἶναι ὁ μεγαλύτερον διὰ τοῦ μικροτέρου· ἔπειτα, ἂν μείνη ὑπόλοιπον, διαιροῦμεν τὸν μικρότερον διὰ τοῦ ὑπολοίπου τούτου καὶ ἐξακολουθοῦμεν τοιοῦτοτρόπως διαιροῦντες ἕκαστον διαιρέτην διὰ τοῦ ἀπολοίπου πρὸς αὐτὸν ὑπολοίπου, μέχρις οὗ εὗρωμεν ὑπόλοιπον 0· ὁ διαιρέτης τῆς τελευταίας ταύτης διαιρέσεως εἶναι ὁ ζητούμενος μέγιστος κοινὸς διαιρέτης.

Παρατήρησις. Ἐφαρμόζοντες τὸν κανόνα τοῦτον εἰς δύο ἴσους ἀριθμοὺς θὰ εὗρωμεν ἑξάπαντος μετὰ τινος διαιρέσεως ὑπόλοιπον 0, διότι τὰ ὑπόλοιπα τῶν ἀλλεπαλλήλων διαιρέσεων, τὰς ὁποίας κάμνομεν, προβαίνουσιν ἐλαττούμενα· ὅταν δὲ ἀριθμὸς τις ἐλαττωθῇ τὰ ἐλαττώται, ἐπὶ τέλους καταντῇ μηδέν· καὶ κατὰ μίαν ἀπὸ τῶν ἐλαττώσεων.

Εὗρεσις τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου ὁτωνδῆποτε ἀριθμῶν.

100. Στηριζόμενοι ἐπὶ τῶν αὐτῶν προτάσεων (ἐδ. 95—97) δευτέρως νὰ εὕρωμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην ὁσωνδῆποτε ἀριθμῶν. Πρὸς τοῦτο διαιροῦμεν πάντας τοὺς ἄλλους διὰ τοῦ ἐλαχίστου ἐξ αὐτῶν· καὶ ἂν μὲν πάντα τὰ ὑπόλοιπα εἶναι 0, ὁ ἀριθμὸς, δι' ὃν διηρέσαμεν, εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης (κατὰ τὸ θεώρ. 97). Δὲ μὴ, ἀντικαθιστῶμεν τοὺς ἀριθμοὺς, ὧν τὰ ὑπόλοιπα δὲν εἶναι ἕκαστον διὰ τοῦ ὑπολοίπου του· οὕτως ἔχομεν νέαν σειρὰν ἀριθμῶν οἵτινες (κατὰ τὸ πόρισμα 96) ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς κοινούς διαιρέτας οὓς ἔχουσι καὶ οἱ δοθέντες, ἐπομένως ἔχουσι καὶ τὸν αὐτὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην. Ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν τούτων ἐργαζόμεθα, ὡς καὶ ἐπὶ τῶν πρώτων, καὶ ἐξακολουθοῦμεν κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον, μέχρις ὅτου φθάσωμεν εἰς ἀριθμὸν τινα, ὅστις νὰ διαιρῇ πάντας τοὺς ἄλλους ἀκριβῶς· ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι ὁ ζητούμενος μέγιστος κοινὸς διαιρέτης.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται, ὡς φαίνεται ἐκ τοῦ ἑξῆς παραδείγματος.
(Αἱ διαιρέσεις ἐκτελοῦνται χωριστά).

Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ	432,	504,	324,	60.
διὰ 60	12,	24,	24,	60.
διὰ 12	12,	0,	0,	0.

ὥστε ὁ 12 εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Ἔστωσαν πρὸς τούτοις οἱ ἑξῆς ἀριθμοί :

	36,	40,	40,	56,	24.
διὰ 24	12,	16,	0,	8,	24.
διὰ 8	4,	0,	0,	0,	0.
διὰ 4	4,	0,	0,	0,	0.

ὥστε ὁ 4 εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης.

***101.** Ἡ εὗρεσις τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου ἀριθμῶν περιστεύεται τῶν δύο ἐπιδέχεται μεγάλην ἐλευθερίαν περὶ τὴν τάξιν τῶν πρὸς ἐργασίαν· διότι εἰς ἑκάστην ἀντικατάστασιν δυνάμεθα, οἷονδῆποτε θέλωμεν, ἐκ τῶν ἀριθμῶν, νὰ ἀντικαταστήσωμεν διὰ τοῦ ὑπολοίπου, τὸ ὅποιον ἀφίνει διαιρούμενος δι' ἄλλου (τοὺς δὲ λοιποὺς νὰ ἀφήσωμεν, ὡς εἶναι). Οὕτω προκύπτουσι πολλοὶ τρόποι τῆς εὕρεσεως τοῦ μεγίστου κοινού.

διαίρετον, ὧν τινες δυνατὸν νὰ εἶναι εὐκολώτεροι τῶν ἄλλων, ἂν καὶ πάντες φέρουσι προφανῶς εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον.

* Ἀξίος ἰδιαιτέρας προσοχῆς εἶναι ὁ ἐξῆς τρόπος·

Ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τὸ πόρισμα 96 εἰς δύο μόνον ἀριθμούς, διατηρῶμεν δὲ τοὺς ἄλλους ἀμεταβλήτους, φθάνομεν ἐπὶ τέλους εἰς τὸν μέγιστον κοινὸν διαίρετην τῶν δύο τούτων ἀριθμῶν, ὅστις ἐπομένως δύναται νὰ ἀντικαταστήσῃ αὐτούς, χωρὶς νὰ βλαφθῶσιν οἱ κοινοὶ διαίρεται τῶν δοθέντων ἀριθμῶν, ἄρα οὐδὲ ὁ μέγιστος κοινὸς διαίρετης αὐτῶν.

* Ἀς λάβωμεν ὡς παράδειγμα τοὺς αὐτούς, ὡς καὶ προηγουμένως, ἀριθμούς :

432, 504, 324, 60· ἀντὶ τούτων

λαμβάνω τοὺς ἐξῆς: 432, 72, 324, 60· καὶ ἀντὶ τούτων

τοὺς ἐξῆς: 0, 72, 324, 60·

εἶναι δὲ ὁ 72 μέγιστος κοινὸς διαίρετης τῶν δύο ἀριθμῶν 432 καὶ 504.

Ἐντεῦθεν συνάγομεν τὴν ἐξῆς πρότασιν.

102. Ὁ μέγιστος κοινὸς διαίρετης ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν δὲν βλάπτεται, ἂν ἀντικαταστήσωμεν δύο οἰουσδήποτε ἐξ αὐτῶν διὰ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαίρετου αὐτῶν.

Οὐ μόνον δὲ ὁ μέγιστος κοινὸς διαίρετης, ἀλλὰ καὶ πάντες οἱ κοινοὶ διαίρεται διατηροῦνται ἀμετάβλητοι εἰς τὴν ἀντικατάστασιν ταύτην.

103. Δυνάμεθα κατ' ἀκολουθίαν νὰ εὕρωμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαίρετην πολλῶν ἀριθμῶν εὐρίσκοντες πρῶτον τὸν μέγιστον κοινὸν διαίρετην δύο ἐξ αὐτῶν, ἔπειτα τὸν μέγιστον κοινὸν διαίρετην τούτου καὶ ἑνὸς ἄλλου καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ λάβωμεν πάντας τοὺς δοθέντας ἀριθμούς (ὡς καὶ εἰς τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων)· ὁ τελευταῖος εὐρίσκόμενος μέγιστος κοινὸς διαίρετης εἶναι ὁ ζητούμενος.

Ἄλλ' ὁ τρόπος οὗτος ἀπαιτεῖ συνήθως περισσοτέρας πράξεις ἢ ὁ ἀνωτέρω ἐκτεθεῖς.

Σημείωσις. Δι' ὁμοίου τρόπου ἀποδεικνύεται καὶ ἡ ἐξῆς πρότασις.

Ὁ μέγιστος κοινὸς διαίρετης πολλῶν ἀριθμῶν δὲν βλάπτεται, ἂν ἀντικατασταθῶσιν ὅσοιδήποτε ἐξ αὐτῶν διὰ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαίρετου αὐτῶν.

Ἰδιότητες τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου.

ΘΕΩΡΗΜΑ

104. Κοινοὶ διαιρέται δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν εἶναι μόνον οἱ διαιρέται τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν.

Ἐστῶσαν τυχόντες ἀριθμοί, οἱ ἑξῆς: 336, 168, 144, 96, τῶν ὁποίων μέγιστος κοινὸς διαιρέτης εἶναι ὁ 24, ὥς ἑξῆς φαίνεται:

336,	168,	144,	96.
48,	72,	48,	96.
48,	24,	0,	0.
0,	24,	0,	0.

Λέγω, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι δὲν ἔχουσιν ἄλλους κοινούς διαιρέτας ἢ μόνον τοὺς διαιρέτας τοῦ 24.

Ἀπόδειξις. Διότι, ἵνα εὗρωμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην 24, ἀντικατεστήσαμεν τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς διὰ τῶν 48, 72, 96, τοῦτο δὲ δὲν ἔβλαψε τοὺς κοινούς διαιρέτας αὐτῶν (πόρισμα 96). ἔπειτα πάλιν ἀντικατεστήσαμεν καὶ τούτους διὰ τῶν 48, 24, ὅπερ καὶ τοῦτο δὲν ἔβλαψε τοὺς κοινούς διαιρέτας· ἐπομένως οἱ κοινοὶ διαιρέται τῶν δοθέντων ἀριθμῶν εἶναι διαιρέται τοῦ 24.

Καὶ πάντες δὲ οἱ διαιρέται τοῦ 24 εἶναι κοινοὶ διαιρέται τῶν δοθέντων ἀριθμῶν, διότι οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι εἶναι πολλαπλάσια τοῦ 24.

ΘΕΩΡΗΜΑ

105. Ἐὰν δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ πολλαπλασιασθῶσιν ἐφ' ἓνα ἀριθμόν, καὶ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Ἐστῶσαν δύο τυχόντες ἀριθμοί, οἱ 60 καὶ 204, τῶν ὁποίων μέγιστος κοινὸς διαιρέτης εἶναι ὁ 12, ὥς ἑξῆς φαίνεται:

204,	60.
24,	60.
24,	12.
0,	12.

λέγω ὅτι, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι ἐπὶ τὸν τυχόντα ἀριθμόν, ἔστω ἐπὶ τὸν 8, τὰ γινόμενα αὐτῶν 204×8 καὶ 60×8 θὰ

σι μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τὸν 12×8 , καὶ αἱ πρὸς εὗρεσιν αὐτοῦ
τούμεναι ἀντικαταστάσεις εἶναι αἱ ἑξῆς·

204×8	60×8
24×8	60×8
24×0	12×8
0	12×8

Ἀπόδειξις. Κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ ἐδ. 69, ὅταν δύο ἀριθμοὶ
πλαπλασιασθῶσιν ἐφ' ἓνα ἀριθμόν, τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως
τῶν πλαπλασιασθέντων ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν. Διὰ τοῦτο, ἂν διαι-
ρῶμεν τὸν 204×8 διὰ τοῦ 60×8 , θὰ εὗρωμεν ὑπόλοιπον τὸν
 24×8 (ὁ δὲ 24 εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ 204 διὰ τοῦ 60).
ἂν ἔπειτα διαιρῶμεν τὸ 60×8 διὰ τοῦ 24×8 , θὰ εὗρωμεν
ὑπόλοιπον τὸ 12×8 (12 εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ 60
διὰ τοῦ 24). καὶ τέλος, ἂν διαιρῶμεν τὸ 24×8 διὰ τοῦ 12×8 , θὰ εὗρω-
μεν ὑπόλοιπον 0· ὥστε ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δύο ἀριθμῶν
 204×8 καὶ 60×8 εἶναι 12×8 .

Ὅμοίως γίνεται ἡ ἀπόδειξις καὶ διὰ περισσοτέρων ἀριθμῶν.

ΘΕΩΡΗΜΑ

106. Ἐὰν δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ διαιρεθῶσι δι' ἑνὸς ἀριθμοῦ,
καὶ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν διαιρεῖται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

Ἀς λάβωμεν τοὺς τυχόντας ἀριθμούς, οἷον τοὺς

$$42 \qquad 70 \qquad 182.$$

ἵτινες ἔχουσι μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τὸν 14. Λέγω ὅτι, ἂν διαιρ-
ῶμεν τοὺς ἀριθμοὺς τούτους διὰ τοῦ κοινοῦ αὐτῶν διαιρέτου 7, τὰ
πηλίκια, τὰ ὅποια θὰ λάβωμεν, ἦτοι οἱ ἀριθμοὶ 6, 10, 26, θὰ ἔχουσι
μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τὸ πηλίκον τοῦ 14 διὰ 7, ἦτοι τὸν 2.

Ἀπόδειξις. Ἐστω τῶν ἀριθμῶν 6, 10, 26, μέγιστος κοινὸς διαι-
ρέτης ὁ μ · τότε τῶν ἀριθμῶν 6×7 , 10×7 , 26×7 μέγιστος κοινὸς
διαίρετης θὰ εἶναι ὁ $\mu \times 7$ (ἐδ. 105)· ἀλλ' οἱ ἀριθμοὶ 6×7 , 10×7 ,
 26×7 εἶναι αὐτοὶ οἱ ληφθέντες 42, 70, 182 (διότι 6, 10 καὶ 26
εἶναι τὰ πηλίκια αὐτῶν διαιρουμένων δι' 7) καὶ ἔχουσι μέγιστον κοινὸν
διαιρέτην τὸν 14· ὥστε θὰ εἶναι $\mu \times 7 = 14$.

Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης γίνεται φανερόν ὅτι ὁ μ εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 14 διὰ 7· τοῦτο δὲ ἐπρόκειτο νὰ ἀποδείξωμεν.

Σημειώσεις. Διὰ τοῦ θεωρήματος τούτου δύναται ἐνίοτε νὰ συνταμευθῇ ἡ εὕρεσις τοῦ μέγιστου κοινοῦ διαιρέτου. Διότι, ἂν ἡξεύρωμεν ὅτι οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ ἔχουσι κοινόν τινα διαιρέτην δ, διαιροῦμεν αὐτοὺς διὰ τούτου καὶ ζητοῦμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τῶν εὐρεθέντων πηλίκων· ἀφοῦ δὲ εὕρωμεν αὐτόν, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν δ καὶ ἔχομεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Ἐὰν π. χ. ἔχωμεν νὰ εὕρωμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τῶν ἐξῆς ἀριθμῶν, 1500, 1800, 7500 (οἷτινες διαιροῦνται πάντες δι' 100) εὐρίσκομεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τῶν

15, 18, 75, ὅστις εἶναι 3,

καὶ τοῦτον πολλαπλασιάζομεν ἔπειτα ἐπὶ 100· ὁ προκύπτων ἀριθμὸς 300 θὰ εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

ΘΕΩΡΗΜΑ

107. Ἐὰν διαιρεθῶσιν ἀριθμοὶ διὰ τοῦ μέγιστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν, τὰ πηλικά θὰ εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Ἄς παραστήσωμεν τρεῖς τυχόντας ἀριθμοὺς διὰ τῶν γραμμάτων Α, Β, Γ καὶ τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην αὐτῶν διὰ τοῦ Μ, τὰ δὲ πηλικά αὐτῶν (ὅταν διαιρεθῶσι διὰ τοῦ μέγιστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν Μ) διὰ α, β, γ· λέγω ὅτι οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ Α, Β, Γ διηρέθησαν διὰ Μ, καὶ ὁ μέγιστος αὐτῶν κοινὸς διαιρέτης Μ διηρέθη διὰ Μ καὶ ἐπομένως ἔγινεν 1. Ἄρα οἱ ἐκ τῆς διαιρέσεως προκύψαντες ἀριθμοὶ α, β, γ ἔχουσι τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τὴν μονάδα, ἥτοι εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Παρατήρησις.

Διὰ τῶν γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου παριστῶμεν τοὺς ἀριθμοὺς, ἐφ' ὧν σκεπτόμεθα, ὅταν οἱ συλλογισμοί, τοὺς ὁποίους κάμνομεν πρὸς ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος, μένωσιν οἱ αὐτοί, οἷοιδήποτε καὶ ἂν εἶναι οἱ ἀριθμοὶ. Ἡ παράστασις αὕτη τῶν ἀριθμῶν καθιστᾷ σαφεστέραν τὴν γενικότητα τῶν ἀποδείξεων, ἐν ᾧ, ὅταν λαμβάνωμεν ὠρισμένους ἀριθμούς, ἡ ἀπόδειξις φαίνεται, ὡς ἂν ἐγένετο μόνον διὰ τοὺς ἀριθμοὺς τούτους.

Ἐπίσης παριστῶμεν διὰ τῶν γραμμάτων τοὺς ἀριθμούς, ὅταν εἶναι
νωστοί.

ΘΕΩΡΗΜΑ

108. Ἐὰν ἀριθμοὶ διαιρούμενοι διὰ κοινοῦ τινος αὐτῶν διαιρέτου
ᾧ πηλίκῳ πρῶτα πρὸς ἄλληλα, ὁ διαιρέτης οὗτος εἶναι ὁ μέγιστος
ἐνὸς διαιρέτης αὐτῶν.

Ἐστώσαν A, B, Γ τυχόντες ἀριθμοί, δ κοινός τις αὐτῶν διαι-
ρέτης καὶ α, β, γ τὰ πηλίκῳ τῶν A, B, Γ διαιρεθέντων διὰ δ λέγω
ἂν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ὁ διαιρέτης
εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν A, B, Γ .

Ἀποδείξις. Οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ ἔχουσιν ἕξ ὑποθέσεως μέγι-
στον κοινὸν διαιρέτην τὴν μονάδα 1 . Ἄρα οἱ ἀριθμοὶ $\alpha \times \delta, \beta \times \delta,$
 $\gamma \times \delta$, τουτέστιν οἱ A, B, Γ , θὰ ἔχωσι μέγιστον κοινὸν διαιρέτην
 δ , ἥτοι δ (ἐδ. 105) τοῦτο δὲ ἐπρόκειτο νὰ ἀποδείξωμεν.

Συμπεράσματις. Εἰς ἕκαστον θεώρημα διακρίνομεν ὑπόθεσιν καὶ συμ-
πέρασμα. Τοῦ θεωρήματος τούτου ὑπόθεσις εἶναι, ὅτι τὰ πηλίκῳ $\alpha,$
 β, γ , ἅτινα ἔδωκαν οἱ ἀριθμοὶ A, B, Γ διαιρεθέντες διὰ δ , εἶναι πρῶτα
πρὸς ἄλληλα, συμπέρασμα δὲ εἶναι, ὅτι ὁ διαιρέτης δ , ὁ τοὺς ἀρι-
θμούς A, B, Γ διαιρέσας, εἶναι ὁ μέγιστος αὐτῶν κοινὸς διαιρέτης. Τὸ
προηγούμενον θεώρημα ἔχει ὑπόθεσιν μὲν, ὅτι ὁ διαιρέτης δ , ὁ τοὺς
ἀριθμούς A, B, Γ διαιρέσας, εἶναι ὁ μέγιστος αὐτῶν κοινὸς διαιρέτης,
συμπέρασμα δέ, ὅτι τὰ πηλίκῳ α, β, γ , ἅτινα ἔδωκαν οἱ ἀριθμοὶ A, B, Γ
διαιρεθέντες διὰ δ , εἶναι πρῶτα πρὸς ἄλληλα. Ὅταν δύο θεωρήματα
εἶναι τοιαῦτα, ὥστε ἡ ὑπόθεσις τοῦ ἑνὸς νὰ εἶναι συμπέρασμα τοῦ
ἄλλου καὶ τἀνάπαλιν, τὰ θεωρήματα ταῦτα λέγονται ἀντίστροφά πρὸς
ἄλληλα. Τοιαῦτα εἶναι τὰ δύο τελευταῖα θεωρήματα,

Θεμελιῶδες θεώρημα.

Περὶ τῶν διαιρετῶν τοῦ γινομένου.

ΘΕΩΡΗΜΑ

109. Ἐὰν ἀριθμὸς δ αἰρῶν τὸ γινόμενον δύο παραγόντων εἶναι
πρῶτος πρὸς τὸν ἓνα, διαιρεῖ τὸν ἄλλον.

Ἐστω τὸ τυχὸν γινόμενον $A \times B$ καὶ ἄς διαιρῇ αὐτὸ ὁ ἀριθμὸς Δ ,
εἶναι δὲ ὁ Δ πρῶτος πρὸς τὸν A . λέγω ὅτι ὁ Δ θὰ διαιρῇ τὸν B .

Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ το Ἰνστιτούτο Εκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

Ἀποδείξεις. Οἱ ἀριθμοὶ Δ καὶ A ἔχουσιν ἐξ ὑποθέσεως μέ-
 στον κοινὸν διαιρέτην τὴν μονάδα 1 . ἄρα οἱ ἀριθμοὶ $\Delta \times B$ καὶ $A \times$
 θὰ ἔχωσι μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τὸ $1 \times B$, ἥτοι τὸ B (ἐδ. 10).

Ἐπειδὴ δὲ ὁ Δ διαιρεῖ τοὺς ἀριθμοὺς $\Delta \times B$ καὶ $A \times B$ (τὸν
 πρῶτον ὡς πολλαπλάσιον αὐτοῦ, τὸν δὲ δεύτερον ἐξ ὑποθέσεως),
 διαιρῇ (ἐδ. 104) καὶ τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην αὐτῶν, τουτέ-
 στιν B . τοῦτο δὲ ἐπρόκειτο νὰ ἀποδείξωμεν.

Σημείωσις. Ἀριθμὸς τις δύναται νὰ διαιρῇ τὸ γινόμενον δ
 ἄλλων, χωρὶς τὰ διαιρῇ μήτε τὸν ἕνα μήτε τὸν ἄλλον· οἷον ὁ
 διαιρεῖ τὸ γινόμενον 6×4 , ἐνῶ δὲν διαιρεῖ οὔτε τὸν 6 οὔτε τὸν

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ οἱ διαι-
 ραὶ αὐτῶν θὰ εἶναι ἐπίσης πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

2) Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ A, B εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους,
 ἄθροισμα αὐτῶν $A + B$ καὶ ἡ διαφορὰ $A - B$ ἔχουσιν μέγιστον κοι-
 νὸν διαιρέτην ἢ 1 ἢ 2 .

3) Ἐὰν ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν A, B καὶ
 τῶν Γ, Δ πολλαπλασιασθῶσι, τὸ προκύπτον γινόμενον εἶναι ὁ μέ-
 στος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν $A \times \Gamma, A \times \Delta, B \times \Gamma, B \times \Delta$.

4) Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοὶ ἔχοντες μέγιστον κοινὸν διαιρέ-
 τὸν 15 , ἄθροισμα δὲ τὸν 120 . (Ἄπ. (15, 105) ἢ (45, 75))

5) Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοὶ ἔχοντες μέγιστον κοινὸν διαιρέ-
 τὸν 31 , γινόμενον δὲ 6615 .

6) Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοὶ ἔχοντες μέγιστον κοινὸν διαιρέ-
 τὸν 12 καὶ ἄθροισμα μικρότερον τοῦ 109 .

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙΙ

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΠΡΩΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ὅρισμοί.

110. Πρῶτος ἀριθμὸς λέγεται ὁ μὴ ἔχων ἄλλους διαιρέτας ἢ ἑαυτὸν καὶ τὴν μονάδα.

Παραδείγματος χάριν, οἱ ἀριθμοὶ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 εἶναι πρῶτοι ἀριθμοί.

Σύνθετος δὲ λέγεται ὁ μὴ πρῶτος.

Σημείωσις. Δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ δύνανται νὰ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, χωρὶς νὰ εἶναι πρῶτοι καθ' ἑαυτούς· οἷον οἱ ἀριθμοὶ 6, 5, 49 εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ἀλλ' οὐδεὶς ἐξ αὐτῶν εἶναι πρῶτος.

Θεμελιώδης ιδιότης τῶν πρώτων ἀριθμῶν.

ΘΕΩΡΗΜΑ

111. Πᾶς σύνθετος ἀριθμὸς εἶναι γινόμενον παραγόντων πρώτων. Ἐστω σύνθετος ἀριθμὸς ὁ M · λέγω ὅτι ὁ M εἶναι γινόμενον παραγόντων πρώτων.

Ἀπόδειξις. Διότι ὁ M ὡς σύνθετος θὰ διαιρῇται ὑπὸ ἀριθμοῦ μικροτέρου του (ἐκτὸς τῆς μονάδος)· ἄρα θὰ εἶναι γινόμενον δύο ἀριθμῶν μικροτέρων του (μεγαλυτέρων ὁμῶς τοῦ 1)· καὶ ἂν μὲν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι εἶναι πρῶτοι, τὸ θεώρημα ἀπεδείχθη· ἂν δέ τις ἐξ αὐτῶν εἶναι σύνθετος, ἀναλύεται καὶ αὐτὸς ἐπίσης εἰς γινόμενον δύο ἀριθμῶν μικροτέρων του (μεγαλυτέρων ὁμῶς τοῦ 1) καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἐπειδὴ δέ, ὅσον προχωροῦμεν εἰς τὴν ἀνάλυσιν ταύτην, οἱ παράγοντες, ἐξ ὧν γίνεται ὁ M , γίνονται μικρότεροι, ἀλλ' ὄχι μικρότεροι τοῦ 2 (διότι πάντοτε ὑπερβαίνουν τὴν μονάδα), ἔπεται ὅτι θὰ ῥθῶσιν ἐπὶ τέλους εἰς παράγοντας μὴ δυναμένους πλέον νὰ ἀναλυθῶσιν εἰς γινόμενα ἀριθμῶν μικροτέρων των καὶ οἵτινες διὰ τοῦτο θὰ εἶναι πρῶτοι.

Παραδείγματος χάριν, ὁ 6 ἀναλύεται εἰς τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν 2 καὶ 3, οἵτινες εἶναι πρῶτοι· ἤτοι $6=2 \times 3$.

Ὁ 24 ἀναλύεται εἰς τὸ γινόμενον 4×6 · καὶ ὁ μὲν 4 ἀναλύεται πάλιν εἰς τὸ γινόμενον 2×2 , ὁ δὲ 6 εἰς τὸ 2×3 · ὥστε εἶναι

$$24 = 4 \times 6 = 2 \times 2 \times 2 \times 3,$$

$$\text{ἢ καὶ } 24 = 2^3 \times 3.$$

Διὰ τὸν ἀριθμὸν 56 ἔχομεν

$$56 = 7 \times 8 = 7 \times 2 \times 4 = 7 \times 2 \times 2 \times 2,$$

$$\text{ἢ καὶ } 56 = 2^3 \times 7.$$

Σημείωσις. Ἐν τοῖς ἐπομένοις θὰ μάθωμεν γενικὴν τινα μέθον τῆς ἀναλύσεως ταύτης τῶν συνθέτων ἀριθμῶν εἰς πρώτους παράγοντας.

Ἐκ τοῦ θεωρήματος τούτου γίνεται φανερόν ὅτι οἱ πρώτοι ἀριθμοὶ εἶναι τὰ ἀπλούστατα στοιχεῖα, ἐξ ὧν γίνονται πάντες οἱ ἀριθμοὶ πολλαπλασιασμοῦ. Διὰ τοῦτο οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι καὶ αἱ ιδιότητες τῶν ἔχουσι τὴν μεγίστην ὁποῖαν εἰς τὴν θεωρίαν τῶν ἀριθμῶν. Πόσῳς προβῶμεν εἰς τὴν σπουδὴν αὐτῶν, πρέπει νὰ μάθωμεν, εὐρίσκονται.

Εὑρεσις τῶν πρώτων ἀριθμῶν.

Κόσκιον τοῦ Ἑρατοσθένους.

112. Ἡ ἐξῆς μέθοδος, διὰ τῆς ὁποίας δυνάμεθα νὰ ἀποχωρίσωμεν τοὺς πρώτους ἀριθμοὺς ἀπὸ τῶν ἄλλων, λέγεται *κόσκιον Ἑρατοσθένους*.

Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι θέλομεν νὰ ἀποχωρίσωμεν τοὺς πρώτους ἀριθμοὺς, οἵτινες περιλαμβάνονται μεταξὺ τοῦ 1 καὶ τοῦ 1000.

Γράφομεν πρώτον τοὺς ἀριθμοὺς κατὰ τὴν φυσικὴν αὐτῶν τάξιν, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 1000 καὶ ἔπειτα εὐρίσκομεν καὶ διαγράφομεν πάντας τοὺς μὴ πρώτους ἀριθμοὺς σκεπτόμενοι ὡς ἐξῆς.

Ὁ 2 εἶναι προφανῶς πρῶτος ἀριθμός. Ἀλλὰ τὰ πολλαπλάσια τοῦ 2 δὲν εἶναι πρῶτοι ἀριθμοί· ὅθεν διαγράφομεν αὐτὰ πρὸς τοῦτο ἀρμόζοντες ἀπὸ τοῦ ἐπομένου ἀριθμοῦ 3 ἀριθμοῦμεν ἀνὰ δύο καὶ διαγράφομεν πάντοτε τὸν δεύτερον ἀριθμὸν, ἥτοι τοὺς ἀριθμοὺς 4, 6, 8, 10

Ὁ μετὰ τὸν 2 ἐρχόμενος ἀριθμός, ὁ 3, εἶναι πρῶτος, ὡς μὴ πολλαπλάσιον τοῦ 2. Ἴνα δὲ διαγράψωμεν τὰ πολλαπλάσια τοῦ 3, ἀρχίζομεν ἀπὸ τοῦ τριπλασίου 3×3 , ἥτοι ἀπὸ τοῦ 9 (διότι το διπλάσιον τοῦ 3, ἥτοι 3×2 , εἶναι ἤδη διαγεγραμμένον ὡς πολλαπλάσιον τοῦ 2), καὶ διαγράφομεν ἀπὸ τοῦ 9 καὶ ἐφεξῆς πάντα τρίτον ἀριθμὸν· οὕτω διαγράφονται οἱ ἀριθμοὶ 12, 15, 18 κτλ., ἥτοι τὰ πολλαπλάσια τοῦ 3.

Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον θὰ διαγράφονται ἐκ δευτέρου καί τινες
 διαγεγραμμένοι ἀριθμοί· τοῦτο ὅμως δὲν βλέπτει.

Ὁ ἀριθμὸς 4 διεγράφη ἤδη ὡς πολλαπλάσιον τοῦ 2· διεγράφη
 δὲ καὶ τὰ πολλαπλάσια αὐτοῦ ὡς πολλαπλάσια τοῦ 2. Τὸ αὐτὸ
 ἀληθεύει καὶ περὶ τῶν πολλαπλασίων παντὸς συνθέτου ἀριθμοῦ·
 ὅτι ταῦτα εἶναι πολλαπλάσια τῶν πρώτων ἀριθμῶν, ἐξ ὧν γίνεται
 σύνθετος· ὥστε ἀρκεῖ νὰ διαγράφωμεν μόνον τὰ πολλαπλάσια τῶν
 ὁσίων ἀριθμῶν.

Ὁ μετὰ τὸν 3 ἀμέσως ἐρχόμενος μὴ διαγεγραμμένος ἀριθμὸς, ὁ 5,
 εἶναι πρῶτος ἀριθμὸς· διότι δὲν εἶναι πολλαπλάσιον οὐδενὸς τῶν μικρο-
 τέρων του. Ἵνα δὲ διαγράφωμεν τὰ πολλαπλάσια αὐτοῦ, ἀρχίζομεν ἀπὸ
 τοῦ 5×5 , ἥτοι ἀπὸ τοῦ 25 (διότι τὰ μικρότερα πολλαπλάσια τοῦ 5,
 ὡς 5×2 , 5×3 , 5×4 , εἶναι ἤδη διαγεγραμμένα ὡς πολλαπλάσια ἀρι-
 θμῶν μικροτέρων τοῦ 5), καὶ διαγράφομεν ἀπὸ τούτου καὶ ἐφεξῆς πάντα
 πολλαπλάσια ἀριθμῶν μικροτέρων τοῦ 5· οὕτω διαγράφονται οἱ ἀριθμοὶ 25, 30, 35, 40, ...
 καὶ πάντα τὰ πολλαπλάσια τοῦ 5 (ὧν τινὰ εἶναι ἤδη διαγεγραμμένα).

Ὁ μετὰ τὸν 5 ἀμέσως ἐρχόμενος μὴ διαγεγραμμένος ἀριθμὸς, ὁ 7,
 εἶναι πρῶτος ἀριθμὸς· διότι δὲν εἶναι πολλαπλάσιον οὐδενὸς τῶν
 μικροτέρων του. Ἵνα δὲ διαγράφωμεν τὰ πολλαπλάσια αὐτοῦ, ἀρχίζο-
 μεν ἀπὸ τοῦ 7×7 , ἥτοι ἀπὸ τοῦ 49 (διότι τὰ μικρότερα πολλαπλά-
 σια τοῦ 7, ἥτοι τὰ 7×2 , 7×3 , 7×4 , 7×5 , 7×6 εἶναι ἤδη διαγε-
 γραμμένα ὡς πολλαπλάσια ἀριθμῶν μικροτέρων τοῦ 7), καὶ διαγρά-
 φομεν ἀπὸ τούτου καὶ ἐφεξῆς πάντα ἑβδομον ἀριθμῶν.

Παρατηρητέον δὲ ἐν γένει ὅτι, ὅταν μέλλωμεν νὰ διαγράφωμεν
 πολλαπλάσια οἰουδήποτε πρώτου ἀριθμοῦ, τὸ πρῶτον πολλαπλά-
 σιον αὐτοῦ, τὸ ὁποῖον θὰ ἀπαντήσωμεν, εἶναι τὸ τετράγωνόν του,
 διότι τὰ μικρότερα θὰ εἶναι ἤδη διαγεγραμμένα ὡς πολλαπλάσια ἀρι-
 θμῶν μικροτέρων. Ὅταν π. χ. ἔλθωμεν εἰς τὸν 11 καὶ θέλωμεν νὰ
 διαγράφωμεν τὰ πολλαπλάσια αὐτοῦ, τὰ πολλαπλάσια 11×2 , 11×3 ,
 11×4 , 11×5 , 11×6 , 11×7 , 11×8 , 11×9 , 11×10 θὰ εἶναι ἤδη διαγεγραμμένα ὡς πολλαπλάσια ἀριθμῶν μι-
 κροτέρων τοῦ 11· ὥστε πρῶτον θὰ ἀπαντήσωμεν καὶ θὰ διαγράψω-
 μεν τὸ 11×11 , ἥτοι τὸ 121. Ὅμοίως, ὅταν ἔλθωμεν εἰς τὸν πρῶτον
 ἀριθμὸν 13, θὰ ἀρχίσωμεν νὰ διαγράφωμεν τὰ πολλαπλάσια αὐτοῦ
 ἀπὸ τοῦ 13×13 , ἥτοι ἀπὸ τοῦ 169, διότι τὰ μικρότερα πολλαπλάσια
 αὐτοῦ θὰ εἶναι ἤδη διαγεγραμμένα.

Ἐκ τῆς παρατηρήσεως ταύτης συνάγεται ὅτι, ἂν θέλωμεν νὰ εὐρίσκωμεν πάντας τοὺς πρώτους ἀριθμοὺς τοὺς ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ 10 περιλαμβανομένους, ἀρκεῖ κατὰ τὸν προειρημένον τρόπον νὰ διαγνώσωμεν τὰ πολλαπλάσια πάντων τῶν πρώτων ἀριθμῶν μέχρι τοῦ (τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον 1369 εἶναι μεγαλύτερον τοῦ 1000). Ἀπὸ τότε οἱ ἀπομείναντες ἀριθμοὶ δὲν θὰ διαγραφῶσιν, ὅσον καὶ ἂν πλεονάζωμεν καὶ ἐπομένως δὲν εἶναι πολλαπλάσια οὐδενὸς ἀριθμοῦ ἄρα εἶναι πρῶτοι.

Ἐργαζόμενοι κατὰ τὴν μέθοδον ταύτην εὐρίσκομεν ὅτι οἱ μεταξὺ 1 καὶ 1000 περιεχόμενοι πρῶτοι ἀριθμοὶ εἶναι οἱ γεγραμμένοι ἐν τῇ ἑξῆς πίνακι.

1	59	139	233	337	439	557	653	769	883
2	61	149	239	347	443	563	659	773	887
3	67	151	241	349	449	569	661	787	907
5	71	157	251	353	457	571	673	797	911
7	73	163	257	359	461	577	677	809	919
11	79	167	263	367	463	587	683	811	929
13	83	173	269	373	467	593	691	821	937
17	89	179	271	379	479	599	701	823	941
19	97	181	277	383	487	601	709	827	947
23	101	191	281	389	491	607	719	829	953
29	103	193	283	397	499	613	727	839	967
31	107	197	293	401	503	617	733	853	971
37	109	199	307	409	509	619	739	857	977
41	113	211	311	419	521	631	743	859	983
43	127	223	313	421	523	641	751	863	991
47	131	227	317	431	541	643	757	877	997
53	137	229	331	433	547	647	761	881	

Περὶ τοῦ πλήθους τῶν πρώτων ἀριθμῶν.

ΘΕΩΡΗΜΑ

113. Τὸ πλῆθος τῶν πρώτων ἀριθμῶν εἶναι ἄπειρον· λέγω δηλαδή, ὅτι, ὅσους καὶ ἂν εὕρῃ τις πρώτους ἀριθμούς, πάντοτε ὑπάρχοντες καὶ ἄλλοι.

Ἀπόδειξις. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι εὐρήκαμεν πρώτους ἀριθμούς

τούς ἑξῆς: $A, B, \Gamma, \Delta, \dots \Pi$.

ἔὰν σχηματίσωμεν τὸ γινόμενόν των $A \times B \times \Gamma \times \Delta \times \dots \times \Pi$ καὶ εἰς αὐτὸ προσθέσωμεν μίαν μονάδα, προκύπτει ἀριθμὸς τις

$$\delta (A \times B \times \Gamma \times \Delta \times \dots \times \Pi) + 1,$$

ὃν παριστῶ διὰ τοῦ Ω .

Ὁ ἀριθμὸς οὗτος Ω θὰ διαιρῇται διὰ τινος πρώτου ἀριθμοῦ (δι' ἑαυτοῦ, ἂν εἶναι πρῶτος, δι' ἄλλου δὲ μικρότερου, ἂν εἶναι σύνθετος): ἄλλ' οὐδεὶς ἐκ τῶν δοθέντων πρώτων ἀριθμῶν $A, B, \Gamma, \Delta, \dots \Pi$ δύναται νὰ διαιρῇ τὸν Ω . Διότι ἕκαστος ἐξ αὐτῶν διαιρεῖ τὸ γινόμενον $A \times B \times \Gamma \times \Delta \times \dots \times \Pi$ (ὥς πολλαπλάσιον αὐτοῦ): ἂν λοιπὸν διήρκει καὶ τὸν Ω , θὰ διήρκει καὶ τὴν διαφορὰν των, ἥτοι τὴν μονάδα, ὅπερ ἀδύνατον. Ἄρα ὑπάρχει καὶ ἄλλος τις πρῶτος ἀριθμὸς ἐκτὸς τῶν δοθέντων, δηλαδὴ ἐκεῖνος, ὅστις διαιρεῖ τὸν Ω .

Ἰδιότητες τῶν πρώτων ἀριθμῶν.

ΘΕΩΡΗΜΑ

114. Πᾶς πρῶτος ἀριθμὸς εἶναι πρῶτος πρὸς πάντα ἀριθμὸν μὴ διαιρούμενον δι' αὐτοῦ.

Ἄς λάβωμεν τὸν τυχόντα πρῶτον ἀριθμὸν, ἔστω τὸν 7, καὶ ἄλλον οἷονδῆποτε ἀριθμὸν A , μὴ διαιρετὸν δι' αὐτοῦ· λέγω, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ 7 καὶ A εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Ἀπόδειξις. Ὁ ἀριθμὸς 7 ὥς πρῶτος δὲν ἔχει ἄλλους διαιρέτας ἢ 1 καὶ 7· ἐπομένως οἱ κοινοὶ διαιρέται τῶν δύο ἀριθμῶν 7 καὶ A δὲν δύνανται νὰ εἶναι ἄλλοι ἢ 1 καὶ 7. Ἀλλ' ὁ 7 δὲν εἶναι κοινὸς διαιρέτης, διότι ἐξ ὑποθέσεως δὲν διαιρεῖ τὸν A · ἄρα ὁ μόνος κοινὸς διαιρέτης τῶν δύο ἀριθμῶν εἶναι ἡ μονάς, ἥτοι οἱ ἀριθμοὶ 7 καὶ A εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

ΘΕΩΡΗΜΑ

115. Ἐὰν ἀριθμὸς πρῶτος διαιρῇ γινόμενόν τι, θὰ διαιρῇ τοῦλάχιστον ἓνα παράγοντα τοῦ γινομένου.

Ἐστω τὸ γινόμενον $A \times B$ καὶ ἄς διαιρῇ αὐτὸ ὁ πρῶτος ἀριθμὸς Π . Λέγω, ὅτι ὁ Π θὰ διαιρῇ τοῦλάχιστον τὸν ἕτερον τῶν παραγόντων A, B .

Ἀπόδειξις. Διότι, ἂν μὲν ὁ Π διαιρῇ τὸν A , τὸ θεώρημα εἶναι ἀποδεδειγμένον· ἂν δὲ δὲν διαιρῇ τὸν A , θὰ εἶναι πρῶτος πρὸς αὐτὸν (ἐδ. 114) καὶ διὰ τοῦτο θὰ διαιρῇ τὸν B (ἐδ. 109).

Τὸ θεώρημα ἀπεδείχθη διὰ δύο παράγοντας· μένει δ' ἔτι νὰ ἀποδείχῃ καὶ διὰ περισσοτέρους.

Ἄς διαιρῇ ὁ πρῶτος ἀριθμὸς Π τὸ γινόμενον $A \times B \times \Gamma$ τῶν τριῶν παραγόντων A, B, Γ · λέγω, ὅτι ὁ Π θὰ διαιρῇ τοῦλάχιστον ἓνα ἐκ τῶν παραγόντων A, B, Γ .

Ἀπόδειξις. Τὸ γινόμενον $A \times B \times \Gamma$ θὰ τραπῇ εἰς γινόμενον δύο μόνον παραγόντων $(A \times B)$ καὶ Γ ,

ἂν ἀντικαταστήσωμεν τοὺς δύο παράγοντας A, B διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν (ἐδ. 49)· ἐπομένως ὁ Π θὰ διαιρῇ ἢ τὸν Γ ἢ τὸν ἀριθμὸν $A \times B$. Ἀλλ' ἐὰν διαιρῇ τὸ γινόμενον $A \times B$, θὰ διαιρῇ τοῦλάχιστον ἓνα ἐκ τῶν παραγόντων A, B .

Ἄρα ὁ Π διαιρεῖ τοῦλάχιστον ἓνα ἐκ τῶν παραγόντων A, B, Γ .

Ὅμοίως γίνεται ἡ ἀπόδειξις καὶ διὰ περισσοτέρους παράγοντας.

Πόρισμα 1ον.

116. Ἐὰν ἀριθμὸς πρῶτος διαιρῇ δύναμιν ἀριθμοῦ *τινος*, θὰ διαιρῇ καὶ αὐτὸν τὸν ἀριθμὸν.

Ἄς διαιρῇ ὁ πρῶτος ἀριθμὸς Π τὴν πέμπτην δύναμιν τοῦ A , ἥτοι τὸ A^5 · λέγω, ὅτι ὁ Π θὰ διαιρῇ καὶ τὸν A .

Διότι τὸ A^5 εἶναι $A \times A \times A \times A \times A$, ὁ δὲ Π ὡς διαιρῶν τὸ γινόμενον τοῦτο θὰ διαιρῇ καὶ ἓνα παράγοντα αὐτοῦ, ἥτοι τὸν A .

Πόρισμα 2ον.

117. Ἐὰν ἀριθμὸς πρῶτος διαιρῇ γινόμενον παραγόντων πρώτων, θὰ εἶναι ἴσος πρὸς ἓνα ἐκ τῶν παραγόντων.

Διότι ὡς διαιρῶν τὸ γινόμενον θὰ διαιρῇ ἓνα τοῦλάχιστον ἐκ τῶν παραγόντων· ἄρα θὰ εἶναι ἴσος μὲ ἐκεῖνον, τὸν ὁποῖον διαιρεῖ, διότι πρῶτος ἀριθμὸς μόνον δι' ἑαυτοῦ διαιρεῖται. (Ἡ μονὰς δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν).

ΘΕΩΡΗΜΑ

118. Ἐὰν δύο γινόμενα παραγόντων πρώτων εἶναι ἴσα, οἱ παρά-

γοντες ἀμφοτέρων εἶναι οἱ αὐτοὶ καὶ ἕκαστος πᾶν ἔχεται εἰς ἀμφοτέρα ἰσότης.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ ἐν ἐκ τῶν δύο ἴσων γινομένων ἔχει τὸν παράγοντα 7· λέγω, ὅτι καὶ τὸ ἄλλο θὰ ἔχη τὸν αὐτὸν παράγοντα καὶ ὅσους παράγοντας 7 ἔχει τὸ ἐν, τόσους θὰ ἔχη καὶ τὸ ἄλλο.

Ἀπόδειξις. Διότι ὁ 7 ὥς παράγων τοῦ πρώτου γινομένου θὰ διαιρῇ αὐτό· ἄρα θὰ διαιρῇ καὶ τὸ δεύτερον ὥς ἴσον τῷ πρώτῳ. Ἀλλ' ὅταν ἀριθμὸς πρώτος (ὥς ὁ 7) διαιρῇ τὸ γινόμενον παραγόντων πρώτων, εἶναι ἴσος τινὶ ἐξ αὐτῶν (ἐδ. 117)· ἄρα καὶ τὸ δεύτερον γινόμενον θὰ ἔχη τὸν παράγοντα 7.

Καὶ ὅσους παράγοντας ἴσους τῷ 7 ἔχει τὸ ἐν γινόμενον, τόσους θὰ ἔχη καὶ τὸ ἄλλο. Διότι, ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ ἐν ἔχει τρεῖς παράγοντας 7, τὸ δὲ ἄλλο δύο μόνον. Ἐὰν τότε διαιρέσωμεν τὰ ἴσα γινόμενα διὰ τοῦ 7 δις (ὅπερ γίνεται, ἂν ἀπ' ἀμφοτέρων ἐξαλείψωμεν δύο παράγοντας 7), πρέπει νὰ εὕρωμεν γινόμενα ἴσα (σελ. 59). Ἀλλ' ἡ ἰσότης τῶν νέων τούτων γινομένων εἶναι ἀδύνατος· διότι τὸ μὲν ἐν θὰ ἔχη τὸν παράγοντα 7 ἅπαξ, τὸ δὲ ἄλλο δὲν θὰ ἔχη αὐτόν. Ἄρα ὅσους παράγοντας 7 ἔχει τὸ ἐν γινόμενον, τοσους ἔχει καὶ τὸ ἄλλο.

Ἐδείχθη λοιπὸν ὅτι, ἐὰν δύο γινόμενα παραγόντων πρώτων εἶναι ἴσα, οἱ παράγοντες ἀμφοτέρων εἶναι οἱ αὐτοὶ καὶ μόνον κατὰ τὴν τάξιν δύνανται νὰ διαφέρωσι.

Πόρισμα.

119. Καθ' οἷονδήποτε τρόπον καὶ ἂν ἀναλύσωμεν ἀριθμὸν εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας, πάντοτε τοὺς αὐτοὺς παράγοντας θὰ εὕρωμεν.

Πῶς ἐκτελεῖται ἡ ἀνάλυσις τῶν συνθέτων ἀριθμῶν εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας.

120. Ἡ μέθοδος, δι' ἧς ἐκτελοῦμεν συνήθως τὴν ἀνάλυσιν τῶν συνθέτων ἀριθμῶν εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας, φαίνεται ἐκ τοῦ ἐπομένου παραδείγματος.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἐδόθη πρὸς ἀνάλυσιν ὁ ἀριθμὸς 504.

Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς οὗτος διαιρεῖται διὰ τοῦ 2, ἐκτελοῦντες δὲ τὴν διαίρεσιν εὕρισκομεν πηλίκον 252· ὅθεν εἶναι

$$504 = 2 \times 252$$

καὶ ὁ ἀριθμὸς 252 διαιρεῖται διὰ 2 καὶ δίδει πηλίκον 126·

ὥστε εἶναι $252 = 2 \times 126$

καὶ διὰ τοῦτο εἶναι $504 = 2 \times 2 \times 126$ (ἐδ. 49)·

ὁ ἀριθμὸς 126 διαιρεῖται πάλιν διὰ 2 καὶ δίδει πηλίκον 63, ὥστε εἶναι
 $126 = 2 \times 63$ ·

ἄρα $504 = 2 \times 2 \times 2 \times 63$ (ἐδ. 49)·

Ὁ ἀριθμὸς 63 δὲν διαιρεῖται διὰ τοῦ 2, διαιρεῖται ὅμως διὰ τοῦ 3 (ἐδ. 87) καὶ δίδει πηλίκον 21·

ὥστε εἶναι $63 = 3 \times 21$

καὶ διὰ τοῦτο εἶναι $504 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 21$ ·

ὁ 21 διαιρεῖται πάλιν διὰ 3 καὶ δίδει πηλίκον 7·

ὥστε εἶναι $504 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7$ ·

ἐπειδὴ δὲ ὁ 7 εἶναι πρῶτος ἀριθμὸς, ἡ ἀνάλυσις ἐτελείωσεν.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται συνήθως ὡς ἑξῆς·

504	2
252	2
126	2
63	3
21	3
7	7
1	

$$504 = 2^3 \times 3^2 \times 7.$$

Ἄς λάβωμεν ὡς δεύτερον παράδειγμα τὸν ἀριθμὸν 186 984 δι' αὐτὸν εὐρίσκομεν ἐργαζόμενοι ὁμοίως

186984	2
93492	2
46746	2
23373	3
7791	3
2597	7
371	7
53	53
1	

$$186984 = 2^3 \times 3^2 \times 7^2 \times 53.$$

* Παρατηρήσεις.

1) Ὡς διαιρέτας δοκιμάζομεν τοὺς πρώτους ἀριθμοὺς κατὰ τὴν φυσικὴν τάξιν των ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ 2, δοκιμάζομεν δὲ ἕκαστον ἐπανειλημμένως, μέχρις οὗ παύσῃ νὰ εἶναι διαιρέτης· ἔκτοτε πλέον δὲν δοκιμάζομεν αὐτὸν εἰς τὰ ἐπόμενα πηλίκα, διότι, ἂν διήρῃ ἐν ἑξ αὐτῶν (οἷον τὸ 2597), θὰ διήρῃ καὶ πάντα τὰ προηγούμενα πηλίκα ὥς πολλαπλάσια τούτου (τοῦ 2597).

2) Ἐὰν ὁ πρὸς ἀνάλυσιν δοθεὶς ἀριθμὸς εἶναι γινόμενον γνωστῶν παραγόντων ἢ φαίνεται ἐκ πρώτης ὄψεως ὡς τοιοῦτος, συντομεύομεν τὴν πράξιν ἀναλύοντες χωριστὰ ἕκαστον τῶν παραγόντων τοῦ ἀριθμοῦ εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας.

Ἐάν, παραδείγματος χάριν, πρόκειται νὰ ἀναλυθῇ ὁ ἀριθμὸς 100000, ἐπειδὴ εἶναι

$$100000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10,$$

ἀρκεῖ νὰ ἀναλύσωμεν ἕκαστον τῶν παραγόντων 10 εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας· καὶ ἐπειδὴ $10 = 2 \times 5$, ἔπεται

$$100000 = 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5$$

$$\text{ἢ} \quad 100000 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$$

$$\text{ἢ καὶ} \quad 100000 = 2^5 \times 5^5.$$

Ὅμοίως, ἂν δοθῇ πρὸς ἀνάλυσιν ὁ ἀριθμὸς 84000, παρατηροῦμεν ὅτι οὗτος ἀναλύεται εἰς τὸ 84×1000

$$\text{ἐπειδὴ δὲ εἶναι } 84 = 2^2 \times 3 \times 7$$

$$\text{καὶ } 1000 = 2^3 \times 5^3, \text{ ἔπεται}$$

$$84000 = 2^2 \times 3 \times 7 \times 2^3 \times 5^3 = 2^5 \times 3 \times 7 \times 5^3$$

$$\text{ἢ} \quad 84000 = 2^5 \times 3 \times 5^3 \times 7. \quad (\text{ἐδ. } 53)$$

3) Ὁ πίναξ τῆς σελίδος 88 χρησιμεύει εἰς τὸ νὰ διακρίνωμεν ἀμέσως, ἂν ἀριθμὸς τις μικρότερος τοῦ 1000 εἶναι πρῶτος ἢ μή· καὶ δι' αὐτοῦ ἀποφεύγομεν ματαίως δοκιμὰς.

Ὑπάρχουσι δὲ πίνακες τῶν πρώτων ἀριθμῶν πολὺ μεγαλύτεροι (ἐν τοῖς λογαριθμικοῖς πίναξι τοῦ Dupuis ἐν σελίδι 130—141 εὗρίσκονται οἱ ἀριθμοὶ ἀπὸ 1 μέχρι 10000).

Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Εκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

**Ἐφαρμογαὶ τῆς ἀναλύσεως τῶν ἀριθμῶν
εἰς πρῶτους παράγοντας.**

Ἡ ἀνάλυσις τῶν ἀριθμῶν εἰς πρῶτους παράγοντας δεικνύει σαφέστερον τὰς ιδιότητες αὐτῶν καὶ καθιστᾷ ἁπλουστάτην τὴν λύσιν πολλῶν ἀριθμητικῶν ζητημάτων, μάλιστα δὲ τῶν ζητημάτων τῆς διαιρετότητος.

Α') ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

121. Ὁ πολλαπλασιασμὸς δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν ἀναλελυμένων εἰς πρῶτους παράγοντας ἐκτελεῖται κατὰ τὰς γενικὰς ιδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (ἐδ. 49) καὶ τὸ γινόμενον προκύπτει καὶ αὐτὸ ἀναλελυμένον εἰς πρῶτους παράγοντας.

Παράδειγμα. Ἀναλύοντες τοὺς ἀριθμοὺς 360 καὶ 336 εὐρίσκομεν

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$$

$$336 = 2^4 \times 3 \times 7.$$

ὅθεν

$$360 \times 336 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 2^4 \times 3 \times 7,$$

καὶ ἐπειδὴ δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν τοὺς παράγοντας 2^3 , 2^4 διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν 2^7 (ἐδ. 53) καὶ τοὺς παράγοντας 3^2 , 3 διὰ τοῦ γινομένου των 3^3 , θὰ ἔχωμεν

$$360 \times 336 = 2^7 \times 3^3 \times 5 \times 7.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ

122. Ἀριθμὸς ἀναλελυμένος ὑποῦται εἰς τὴν δευτέραν δύναμιν (ἦτοι εἰς τὸ τετράγωνον), ἐὰν διπλασιασθῶσιν οἱ ἐκθέται πάντων τῶν παραγόντων του· εἰς τὴν τρίτην, ἂν τριπλασιασθῶσι, καὶ ἐν γένει εἰς τὴν μυοστήν, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ μ.

Σημείωσις. Ἐὰν παράγων τις δὲν ἔχη ἐκθέτην, ἵνα ἀληθεύῃ ἡ πρότασις αὕτη, πρέπει νὰ θεωρῇται ἐκθέτης αὐτοῦ ἡ μονάς.

Τὸ αὐτὸ δὲ ἰσχύει καὶ διὰ πάσας τὰς ἐπομένους προτάσεις, ἐν αἷς γίνεται λόγος περὶ ἐκθετῶν.

Ἀπόδειξις. Ἀς λάβωμεν ὡς παράδειγμα τὸν ἀριθμὸν 308.

Ἀναλύοντες αὐτὸν εἰς πρῶτους παράγοντας εὐρίσκομεν

$$308 = 2^2 \times 7 \times 11.$$

ὅθεν

$$308 \times 308 = 2^2 \times 7 \times 11 \times 2^2 \times 7 \times 11 = 2^2 \times 2^2 \times 7 \times 7 \times 11 \times 11$$

$$\text{ἢ } 308^2 = 2^4 \times 7^2 \times 11^2.$$

Ὅμοίως εἶναι

$$308 \times 308 \times 308 \times 2^2 \times 7 \times 11 \times 2^2 \times 7 \times 11 \times 2^2 \times 7 \times 11 = \\ = 2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 7 \times 7 \times 7 \times 11 \times 11 \times 11,$$

ἤτοι $380^3 = 2^6 \times 7^3 \times 11^3.$

Ὅμοίως γίνεται ἡ ἀπόδειξις διὰ πάντα ἐκθέτην.

ΘΕΩΡΗΜΑ

123. Ἀριθμὸς εἶναι τετράγωνον, ἐὰν οἱ ἐκθέται τῶν πρώτων παραγόντων αὐτοῦ διαιρῶνται πάντες διὰ τοῦ 2· καὶ τότε μόνον· κύβος δέ, ἐὰν οἱ ἐκθέται τῶν πρώτων παραγόντων τοῦ διαιρῶνται πάντες διὰ τοῦ 3· καὶ τότε μόνον.

Ἀπόδειξις. Ἐστω τυχὼν ἀριθμὸς ὁ $2^6 \times 3^2 \times 7^4 \times 13^2$, τοῦ ὁποίου πάντες οἱ πρώτοι παράγοντες ἔχουσιν ἐκθέτας ἀρτίους. Ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι τετράγωνον τοῦ ἑξῆς ἀριθμοῦ, $2^3 \times 3 \times 7^2 \times 13$, (ὃν εὐρίσκομεν διαιροῦντες τοὺς ἐκθέτας πάντας διὰ 2)· διότι τὸ τετράγωνον τούτου κατὰ τὰ προηγούμενα θὰ εὐρεθῇ, ἂν διπλασιασθῶσιν οἱ ἐκθέται τῶν παραγόντων τοῦ· τότε δὲ προκύπτει ὁ $2^6 \times 3^2 \times 7^4 \times 13^2$, ἤτοι ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς.

Ἐστω πάλιν τυχὼν ἀριθμὸς, ὁ $5^3 \times 7^2 \times 11^3$, τοῦ ὁποίου οἱ πρώτοι παράγοντες δὲν ἔχουσι πάντας τοὺς ἐκθέτας ἀρτίους (ὁ 5 ἔχει ἐκθέτην μὴ ἄρτιον).

Ὁ ἀριθμὸς οὗτος δὲν εἶναι τετράγωνον ἄλλου· διότι παντὸς τετραγώνου οἱ πρώτοι παράγοντες ἔχουσι τοὺς ἐκθέτας πάντας ἀρτίους ὥς προκύπτοντας ἐξ ἄλλων ἐκθετῶν διὰ τοῦ διπλασιασμοῦ.

Ὅμοίως δεικνύεται ὅτι ὁ ἀριθμὸς $3^6 \times 5^3 \times 7^9 \times 11^3$, οὕτινος οἱ παράγοντες ἔχουσι πάντας τοὺς ἐκθέτας διαιρετοὺς διὰ 3, εἶναι κύβος· εἶναι δὲ κύβος τοῦ ἀριθμοῦ $3^2 \times 5 \times 7^3 \times 11$, ὃν εὐρίσκομεν διαιροῦντες τοὺς ἐκθέτας αὐτοῦ πάντας διὰ τοῦ 3.

Ὁ δὲ ἀριθμὸς $2^5 \times 3^8 \times 7^6$ δὲν εἶναι κύβος οὐδενὸς ἀριθμοῦ, διότι οἱ ἐκθέται αὐτοῦ δὲν εἶναι πάντες διαιρετοὶ διὰ 3· ἀλλ' οἱ ἐκθέται παντὸς κύβου εἶναι πάντες διαιρετοὶ διὰ 3, διότι προκύπτουσιν ἐξ ἄλλων ἐκθετῶν διὰ τοῦ τριπλασιασμοῦ.

Συμπερίωσις. Τὸ θεώρημα τοῦτο ἀληθεύει καὶ διὰ πᾶσαν δύναμιν καὶ ἀποδεικνύεται ὁμοίως.

B') ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

Πότε ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς δι' ἄλλου.

Ἔχοντες δύο ἀριθμοὺς ἀναλελυμένους εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας, δυνάμεθα ἀμέσως νὰ διακρίνωμεν, ἂν ὁ εἷς εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ ἄλλου· τὸ δὲ γνῶρισμα τῆς διαιρετότητος μανθάνομεν ἐκ τοῦ ἑξῆς θεμελιώδους θεωρήματος.

ΘΕΩΡΗΜΑ

124. Διὰ νὰ εἶναι ἀριθμὸς τις διαιρετὸς δι' ἄλλον, πρέπει ὁ διαιρετέος νὰ περιέχῃ πάντας τοὺς πρώτους παράγοντας τοῦ διαιρέτου καὶ ἕκαστον ἐξ αὐτῶν τοσάκις τοῦλάχιστον, ὅσας περιέχει αὐτὸν ὁ διαιρέτης· τοῦτο δὲ καὶ ἀρκεῖ.

Ἀπόδειξις. Ὅταν ἡ διαίρεσις γίνηται ἀκριβῶς, ὁ διαιρετέος εἶναι γινόμενον τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ πηλίκου, ἤτοι (ἔδ. 49, ἰδιότ. 3) εἶναι τὸ γινόμενον πάντων τῶν παραγόντων τοῦ διαιρέτου καὶ πάντων τῶν παραγόντων τοῦ πηλίκου· ἄρα ὁ διαιρετέος θὰ περιέχῃ πάντας τοὺς πρώτους παράγοντας τοῦ διαιρέτου καὶ ἕκαστον τοῦλάχιστον τοσάκις, ὅσας περιέχει αὐτὸν ὁ διαιρέτης. (Δύναται δὲ καὶ ἄλλους παράγοντας νὰ περιέχῃ μὴ ὑπάρχοντας ἐν τῷ διαιρέτῃ ἢ νὰ περιέχῃ παράγοντά τινα περισσοτέρας φορὰς ἢ ὁ διαιρέτης. Οἱ τοιοῦτοι θὰ εἶναι παράγοντες τοῦ πηλίκου). Τοῦτο δ' ἀρκεῖ· λέγω δηλαδὴ ὅτι, ἐὰν ὁ διαιρετέος περιέχῃ πάντας τοὺς πρώτους παράγοντας τοῦ διαιρέτου καὶ ἕκαστον ὅχι ὀλιγώτερον ἢ ὁ διαιρέτης, ἡ διαίρεσις γίνεται ἀκριβῶς. Διότι, ἂν ἀπὸ τῶν παραγόντων τοῦ διαιρέτου ἐξαλείψωμεν πάντας ὅσους ἔχει καὶ ὁ διαιρέτης, καὶ ἰσάκις ἕκαστον, οἱ μένοντες παράγοντες τοῦ διαιρέτου θὰ ἀποτελῶσι τὸ πηλίκον.

Παραδείγματος χάριν ὁ ἀριθμὸς $2^4 \times 3^2 \times 5 \times 11^3 \times 17$
εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ ἀριθμοῦ $2^2 \times 3 \times 5 \times 11^3$.

(διότι ὁ πρῶτος περιέχει πάντας τοὺς παράγοντας τοῦ δευτέρου καὶ ἕκαστον οὐχὶ ὀλιγώτερον ἢ ὁ δεύτερος).

Τὸ δὲ πηλίκον ἀποτελεῖται ἐκ τῶν ἑξῆς παραγόντων· ἐκ τοῦ 2 δίς, ἐκ τοῦ 3 ἅπαξ καὶ ἐκ τοῦ 17· εἶναι λοιπὸν $3^2 \times 3 \times 17$.

Ὁμοίως ὁ ἀριθμὸς $3^5 \times 7^2 \times 11 \times 13^2$
 εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ ἀριθμοῦ $7^2 \times 11 \times 13$
 καὶ τὸ πηλίκον εἶναι $3^5 \times 13$.

Ὁ δὲ ἀριθμὸς $2^2 \times 3^4 \times 5 \times 7^2$ δὲν διαιρεῖται διὰ τοῦ $2^2 \times 3 \times 5^2$,
 διότι ἔχει τὸν πρῶτον παράγοντα 5 ἅπαξ μόνον, ἐνῶ ὁ διαιρέτης ἔχει
 αὐτὸν δῖς.

* **Εὗρεαις πάντων τῶν διαιρετῶν δοθέντος ἀριθμοῦ.**

125. Στηριζόμενοι εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα δυνάμεθα νὰ
 εὗρωμεν πάντας τοὺς διαιρέτας δοθέντος ἀριθμοῦ, ἀφοῦ ἀναλύσωμεν
 αὐτὸν εἰς τοὺς πρῶτους παράγοντας.

Ἄς λάβωμεν ὡς παράδειγμα τὸν ἀριθμὸν 1008· ἀναλύοντες αὐτὸν
 εὕρισκομεν $1008 = 2^4 \times 3^2 \times 7$.

Διὰ νὰ εὗρω πάντας τοὺς διαιρέτας τοῦ ἀριθμοῦ τούτου, σκέπτο-
 μαι ὡς ἑξῆς.

Ἐκαστος διαιρέτης τοῦ 1008 δὲν δύναται νὰ περιέχῃ ἄλλους πρῶ-
 τούς παράγοντας ἢ τοὺς 2, 3 καὶ 7 καὶ τὸν μὲν 2 δύναται νὰ περιέχῃ
 ἢ οὐδόλως ἢ ἅπαξ ἢ δῖς ἢ τρεῖς ἢ τετράκις· ὥστε ἕκαστος διαιρέτης
 τοῦ 1008 ἔξ ἅπαντος θὰ περιέχῃ ἓνα ἐκ τῶν ἑξῆς παραγόντων·

1, 2, 2^2 , 2^3 , 2^4 ,

διότι, ὅταν μηδόλως περιέχῃ τὸν 2, δύναμαι νὰ γράψω εἰς τὴν θέσιν
 αὐτοῦ τὴν μονάδα ὡς παράγοντα· τὸν δὲ 3 θὰ περιέχῃ ἢ οὐδόλως ἢ
 ἅπαξ ἢ δῖς· ὥστε ἔξ ἅπαντος θὰ περιέχῃ καὶ ἓνα ἐκ τῶν ἑξῆς παρα-
 γόντων

1, 3, 3^2 .

τὸν δὲ 7 θὰ περιέχῃ ἢ οὐδόλως ἢ ἅπαξ μόνον· ὥστε θὰ περιέχῃ καὶ
 ἓνα ἐκ τῶν ἑξῆς παραγόντων

1, 7.

Ἐκ τούτων γίνεται φανερόν ὅτι ἕκαστος διαιρέτης τοῦ 1008 θὰ
 εἶναι γινόμενον τριῶν παραγόντων, ἑξ ὧν

ὁ μὲν πρῶτος εἶναι εἰς ἐκ τῶν ἀριθμῶν 1, 2, 2^2 , 2^3 , 2^4 .

ὁ δὲ δεύτερος εἰς ἐκ τῶν 1, 3, 3^2 .

ὁ δὲ τρίτος εἰς ἐκ τῶν 1, 7.

Διὰ νὰ εὗρω λοιπὸν ἓνα διαιρέτην τοῦ 1008, ἀρκεῖ νὰ λάβω ἓνα
 οἰονδήποτε ἀριθμὸν τῆς πρώτης σειρᾶς καὶ ἓνα οἰονδήποτε ἐκ τῆς
 δευτέρας καὶ ἓνα οἰονδήποτε ἐκ τῆς τρίτης· ἔπειτα νὰ σχηματίσω τὸ

γινόμενον τῶν τριῶν ληφθέντων ἀριθμῶν· τὸ γινόμενον τοῦτο θὰ εἶναι διαιρέτης τοῦ 1008· διότι ὁ 1008 περιέχει πάντας τοὺς πρώτους παράγοντας αὐτοῦ καὶ ἕκαστον ἐξ ἴσου ἢ καὶ περισσότερον. Καθὰ διὰ τὰ εὗρω πάντας τοὺς διαιρέτας τοῦ 1008, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσω ἕκαστον ἀριθμὸν τῆς πρώτης σειρᾶς ἐφ' ἕκαστον τῆς δευτέρας, ἔπειτα πάλιν ἕκαστον τῶν προκυπτόντων γινομένων ἐφ' ἕκαστον ἀριθμὸν τῆς τρίτης σειρᾶς· τὰ τελευταῖα ταῦτα γινόμενα θὰ εἶναι πάντες οἱ διαιρέται τοῦ 1008.

Πολλαπλασιάζων ἕκαστον ἀριθμὸν τῆς πρώτης σειρᾶς ἐφ' ἕκαστον τῆς δευτέρας εὐρίσκω τὰ ἑξῆς γινόμενα·

1,	2,	2^2	2^3	2^4
3,	2×3	$2^2 \times 3$	$2^3 \times 3$	$2^4 \times 3$
3^2	2×3^2	$2^2 \times 3^2$	$2^3 \times 3^2$	$2^4 \times 3^2$

Πολλαπλασιάζων δὲ ἕκαστον τῶν γινομένων τούτων ἐφ' ἕκαστον ἀριθμὸν τῆς τρίτης σειρᾶς εὐρίσκω τὰ ἑξῆς γινόμενα·

1	2	2^2	2^3	2^4
3	2×3	$2^2 \times 3$	$2^3 \times 3$	$2^4 \times 3$
3^2	2×3^2	$2^2 \times 3^2$	$2^3 \times 3^2$	$2^4 \times 3^2$
7	2×7	$2^2 \times 7$	$2^3 \times 7$	$2^4 \times 7$
3×7	$2 \times 3 \times 7$	$2^2 \times 3 \times 7$	$2^3 \times 3 \times 7$	$2^4 \times 3 \times 7$
$3^2 \times 7$	$2 \times 3^2 \times 7$	$2^2 \times 3^2 \times 7$	$2^3 \times 3^2 \times 7$	$2^4 \times 3^2 \times 7$

ταῦτα δὲ εἶναι πάντες οἱ διαιρέται τοῦ 1008.

Ἐὰν ἐκτελέσωμεν τοὺς σεσημειωμένους πολλαπλασιασμούς, εὐρίσκωμεν

1	2	4	8	16
3	6	12	24	48
9	18	36	72	144
7	14	28	56	112
21	42	84	168	336
63	126	252	504	1008.

126. Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγεται ὁ ἑξῆς κανὼν.

Διὰ τὰ εὗρωμεν πάντας τοὺς διαιρέτας δοθέντος ἀριθμοῦ, ἀναλύομεν αὐτὸν εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας καὶ σχηματίζομεν πίνακα συγκεείμενον ἐκ τόσων ὀριζοντίων σειρῶν ὅσοι εἶναι οἱ διάφοροι πρῶτοι παράγοντες τοῦ ἀριθμοῦ. Ἐκάστη δὲ τῶν σειρῶν τούτων περιέχει πρώτην τὴν μονάδα, ἔπειτα ἓνα πρῶτον παράγοντα τοῦ

έντος ἀριθμοῦ καὶ τὰς δυνάμεις αὐτοῦ κατὰ σειρὰν μέχρι τῆς ἐν
δοθέντι ἀριθμῷ περιεχομένης.

Μετὰ ταῦτα πολλαπλασιάζομεν ἕκαστον ἀριθμὸν τῆς πρώτης σειρᾶς
ἕκαστον ἀριθμὸν τῆς δευτέρας· ἔπειτα ἕκαστον τῶν γινομένων τού-
των ἐφ' ἕκαστον ἀριθμὸν τῆς τρίτης καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς. Τὰ τελευταῖα
γόμενα, τὰ ὅποια εὐρίσκομεν πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ τοὺς ἀριθμοὺς τῆς
πρώτης σειρᾶς, εἶναι πάντες οἱ διαιρέται τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ.

Σημείωσις. Ὁ ἀριθμὸς τῶν διαιρετῶν τοῦ 1008 εἶναι $6 \times 3 \times 2$
καὶ τὸ γινόμενον τῶν τριῶν ἀριθμῶν, οἵτινες ἐκφράζουσι, πόσους ἀρι-
θμοὺς ἔχει ἑκάστη σειρά. Τοῦτο ἀληθεύει γενικῶς περὶ παντὸς ἀριθμοῦ.

Γ' ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΠΡΟΣ ΑΛΛΗΛΟΥΣ ΠΡΩΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ἐκ τοῦ θεμελιώδους θεωρήματος τῆς διαιρετότητος (ἐδ. 124)
ὁδεικνύονται εὐκολώτατα τὰ ἑξῆς θεωρήματα περὶ τῶν πρὸς ἀλλή-
λους πρώτων ἀριθμῶν.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1^{ον}

127. Οἱ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ οὐδένα ἔχουσι πρῶτον
παράγοντα κοινόν· καὶ ἀντιστρόφως· οἱ μηδένα ἔχοντες πρῶτον παρά-
γοντα κοινόν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Παραδείγματος χάριν, οἱ ἀριθμοὶ $2 \times 3 \times 5^2$, $2^2 \times 7$, $11^3 \times 7$ εἶναι
πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, διότι οὐδένα δύνανται νὰ ἔχωσι κοινὸν διαιρέτην.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2^{ον}

128. Ἀριθμῶν πρώτων πρὸς ἀλλήλους καὶ αἱ δυνάμεις εἶναι ἀρι-
θμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Διότι, ὅταν οἱ ἀριθμοὶ δὲν ἔχωσι κανένα πρῶτον παράγοντα
κοινόν, οὐδὲ αἱ δυνάμεις θὰ ἔχωσι τοιοῦτον.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3^{ον}

129. Ἐὰν ἀριθμὸς τις διαιρῇται δι' ἄλλων ἀριθμῶν πρώτων
πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο, θὰ διαιρῇται καὶ διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἀριθμὸς τις Α διαιρεῖται δι' ἐνὸς ἑκάστου τῶν
ἀριθμῶν $2^3 \times 7$, $3 \times 5^2 \times 11$, 13×17^2 , οἵτινες ὡς πρῶτοι πρὸς ἀλλή-
λους ἀνὰ δύο ἔχουσιν ὅλως διαφόρους παράγοντας (ὁ αὐτὸς δηλαδὴ

πρῶτος παράγων δὲν εὑρίσκεται εἰς δύο ἀριθμούς· λέγω ὅτι ὁ ἀριθμὸς Α θὰ διαιρῇται καὶ διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν.

Ἀποδείξεις. Διότι ὁ Α πρέπει νὰ περιέχῃ (ἐδ. 124) πάντας τοὺς παράγοντας $2^3, 3^2, 5, 7, 11, 13, 17$, τουτέστι πάντας τοὺς παράγοντας τοῦ γινομένου τῶν ἀριθμῶν, καὶ κατ' ἀκολουθίαν εἶναι ἀρκετὸς διὰ τοῦ γινομένου τούτου.

Σημειώσεις. Ὅταν ἀριθμὸς διαιρῇται διὰ δύο ἄλλων, μὴ πρῶτος πρὸς ἀλλήλους (ἢ διὰ πολλῶν ἄλλων μὴ πρῶτων πρὸς ἀλλήλους δύο), δυνατὸν νὰ μὴ διαιρῇται διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν.

Παραδείγματος χάριν, ὁ 72 διαιρεῖται διὰ τοῦ 24 καὶ διὰ τοῦ 12, ἀλλὰ δὲν διαιρεῖται διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν 288.

Παρατήρησις. Τὸ θεώρημα τοῦτο εὐκολύνει τὴν εὕρεσιν τῶν ἀριθμῶν γινόμενων τῆς διαιρετότητος, ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι σύνθετος ἀριθμὸς παραδείγματος χάριν, διὰ νὰ διαιρῇται ἀριθμὸς τις διὰ τοῦ 6, ἢ διὰ 2×3 , ἀνάγκη νὰ διαιρῇται καὶ διὰ τοῦ 2 καὶ διὰ τοῦ 3· τοῦτο δὲ καὶ ἀρκεῖ (διότι οἱ 2 καὶ 3 εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους).

Ἐπίσης διὰ τοῦ 12 διαιρεῖται πᾶς ἀριθμὸς, ἐὰν διαιρῇται διὰ τοῦ 3 καὶ διὰ τοῦ 4 καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Δ' ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΟΥ ΜΕΓΙΣΤΟΥ ΚΟΙΝΟΥ ΔΙΑΙΡΕΤΟΥ ΑΡΙΘΜΩΝ ΑΝΑΛΕΛΥΜΕΝΩΝ ΕΙΣ ΠΡΩΤΟΥΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ

Ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης ὅσωνδῆποτε ἀριθμῶν ἀναλελυμένων εἰς τοὺς πρῶτους αὐτῶν παράγοντας εὑρίσκεται κατὰ τὸ ἐπόμενον θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ

130. Ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης ὅσωνδῆποτε ἀριθμῶν εἰς τοὺς πρῶτους αὐτῶν παράγοντας ἀναλελυμένων εἶναι ὁ ἐλάχιστος ἀριθμὸς ὅστις περιέχον μόνον τοὺς κοινούς αὐτῶν πρῶτους παράγοντας ἑκαστον δὲ μὲ τὸν ἐλάχιστον ἐκθέτην του.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν: 360 900 672.

Ἀναλύοντες αὐτοὺς εἰς τοὺς πρῶτους αὐτῶν παράγοντας εὐρίσκομεν

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$$

$$900 = 2^2 \times 3^2 \times 5^2$$

$$672 = 2^5 \times 3 \times 7$$

Οἱ κοινοὶ πρῶτοι παράγοντες τῶν ἀριθμῶν εἶναι ὁ 2 (δὺς) καὶ 3 (ἄπαξ)· λέγω ὅτι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δοθέντων ἀριθμῶν εἶναι τὸ γινόμενον $2^2 \times 3$, ἥτοι ὁ 12.

Ἀπόδειξις. Ὅτι ὁ ἀριθμὸς $2^2 \times 3$ εἶναι κοινὸς διαιρέτης τῶν ἐντὼν ἀριθμῶν, εἶναι πρόδηλον· διότι πάντες οἱ πρῶτοι παράγον- αὐτοῦ περιέχονται εἰς ἕκαστον ἐκ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν καὶ ἡ ἰσά- ῃ περισσάκις. Ὅτι δὲ εἶναι καὶ ὁ μέγιστος, ἀποδεικνύεται ὥς ἑξῆς. Διὰ τὸ εἶναι ἀριθμὸς τις κοινὸς διαιρέτης τῶν δοθέντων ἀριθμῶν, πρέπει νὰ περιέχῃ ἄλλους πρώτους παράγοντας ἢ τοὺς εἰς πάντας κοινούς, τουτέστι τὸν 2 καὶ τὸν 3 (διότι, ἂν περιέχῃ οἷονδήποτε ἄλ- πρῶτον παράγοντα, δὲν θὰ διαιρῇ πάντα τοὺς δοθέντας ἀρι- θμούς· ἂν λόγου χάριν περιέχῃ τὸν 5, δὲν θὰ διαιρῇ τὸν 672, ἂν περιέχῃ τὸν 7, δὲν θὰ διαιρῇ τὸν 360 οὐδὲ τὸν 900, ἂν δὲ περιέχῃ 11, δὲν θὰ διαιρῇ κανένα)· καὶ τὸν μὲν 2 δὲν δύναται νὰ περιέχῃ ἡμιστότερον ἢ δὺς, τὸν δὲ 3 μόνον ἄπαξ (διότι, ἂν περιέχῃ τὸν 2 ἄρα, δὲν θὰ διαιρῇ τὸν 900, ἂν δὲ περιέχῃ τὸν 3 δὺς, δὲ θὰ διαιρῇ 672). Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι ὁ κοινὸς διαιρέτης $2^2 \times 3$ περιέ- χοντας τοὺς δυνατοὺς παράγοντας καὶ οὐδεμίαν πλέον αὕξησιν ἀδέχεται, χωρὶς νὰ παύσῃ νὰ εἶναι κοινὸς διαιρέτης· ἄρα εἶναι ὁ μέγιστος τῶν κοινῶν διαιρετῶν.

Σημείωσις. Ἐὰν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ δὲν ἔχωσι πρώτους παρά- γοντας κοινούς, λαμβάνεται ὡς κοινὸς παράγων αὐτῶν ἡ μονάς· οἱ ἀριθμοὶ τότε εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Ε' ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΕΛΑΧΙΣΤΟΥ ΚΟΙΝΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΟΥ ΕΥΡΕΣΙΣ ΑΥΤΟΥ ΔΙΑ ΤΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ ΕΙΣ ΠΡΩΤΟΥΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ

Ὁρισμοί.

131. Κοινὸν πολλαπλάσιον δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν λέγεται ὁ εἰς ἀριθμὸς, ὅστις διαιρεῖται ἀκριβῶς δι' ἑκάστου ἐξ αὐτῶν.

Παραδείγματος χάριν, ὁ 24 εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀρι- θμῶν 2, 4, 6· διότι διαιρεῖται δι' ἑκάστου τούτων ἀκριβῶς.

Κοινὰ πολλαπλάσια δοθέντων ἀριθμῶν, οἷον τῶν 3, 5, 8, ὑπάρ- χουσιν ἄπειρα, διότι τὸ γινόμενον αὐτῶν $3 \times 5 \times 8$ ἢ 120 εἶναι κοι- νὸν πολλαπλάσιον καὶ πᾶν πολλαπλάσιον τούτου εἶναι πολλαπλάσιον κοινὸν τῶν 3, 5, 8 (ἔδ. 77).

Ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν γέται (ὥς καὶ τὸ ὄνομα δεικνύει) τὸ μικρότερον ἐξ ὅλων τῶν κοινὰ πολλαπλασίων τῶν ἀριθμῶν τούτων.

Παραδείγματος χάριν, τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 4 ἔλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον εἶναι τὸ 12· διότι οὐδεὶς μικρότερος τοῦ 12 ἀριθμὸς ῥεῖται ἀκριβῶς διὰ πάντων τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 4.

Οἰοιδήποτε καὶ ἂν εἶναι οἱ δοθέντες ἀριθμοί, ἔχουσι πάντοτε ἕνα κοινόν τι κοινὸν πολλαπλάσιον· διότι οὐδὲν κοινὸν πολλαπλάσιον ἔχοντα νὰ εἶναι μικρότερον τοῦ μεγίστου ἐκ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Ἡ εὕρεσις τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου ἀριθμῶν ἀναγίνεται εἰς πρώτους παράγοντας γίνεται κατὰ τὸ ἐξῆς θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ

132. Τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον ὅσωνδῆποτε ἀριθμῶν γινόμενον περιέχον πάντας τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας (κοινὰ καὶ μὴ κοινούς) καὶ ἕκαστον μὲ τὸν μέγιστον ἐκθέτην του.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἐξῆς ἀριθμῶν·

$$720, \quad 240, \quad 462.$$

Ἀναλύοντες τοὺς ἀριθμοὺς τούτους εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας εὐρίσκομεν ὅτι εἶναι

$$720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$$

$$240 = 2^4 \times 3 \times 5$$

$$462 = 2 \times 3 \times 7 \times 11.$$

Οἱ πρώτοι παράγοντες τῶν ἀριθμῶν τούτων εἶναι οἱ ἐξῆς: 2, 3, 5, 7, 11. Καὶ μέγιστος ἐκθέτης τοῦ μὲν 2 εἶναι ὁ 4, τοῦ δὲ 3 εἶναι ὁ 2, τοῦ 5 δὲ 1, τοῦ 7 δὲ 1, τοῦ 11 δὲ 1 (ἐδ. 122, Σημ.)· λέγω δέ, ὅτι τὸ γινόμενον

$$2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11$$

εἶναι τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Ἀπόδειξις. Ὅτι ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν δοθέντων ἀριθμῶν, εἶναι προφανές· διότι περιέχει πάντας τὰς παράγοντας ἑκάστου καὶ ὅχι ὀλιγώτερον (ἐδ. 124)· ὅτι δὲ εἶναι τὸ ἐλάχιστον ἀποδεικνύεται ὡς ἐξῆς.

Πᾶν κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν δοθέντων ἀριθμῶν ἐξ ἀπαντος θά πρέπει νὰ περιέχῃ πάντας τοὺς πρώτους παράγοντας αὐτῶν (διότι, ἂν λόγου

ὅν δὲν περιέχῃ τὸν 11, δὲν θὰ διαιρῇται διὰ τοῦ 462· καὶ ἂν δὲν περιέχῃ τὸν 2, δὲν θὰ διαιρῇται δι' οὐδενός· καὶ θὰ περιέχῃ ἑκατον μὲ ἐκθέτην ὅχι μικρότερον ἢ οὗτοι (διότι, ἂν λόγου χάριν ἔχῃ ὅν 2 τρεῖς μόνον, ἦτοι ἂν ἔχῃ τὸν 2^3 , δὲν θὰ διαιρῇται διὰ τῶν 20 καὶ 240, ἂν δὲ ἔχῃ τὸν 3 ἅπαξ μόνον, δὲν θὰ διαιρῇται διὰ τοῦ 720)· ὥστε ἕκαστον κοινὸν πολλαπλάσιον ἐξ ἁπαντος θὰ περιέχῃ τοὺς ἐξῆς παράγοντας $2^4, 3^2, 5, 7, 11$.

Ἄρα τὸ κοινὸν πολλαπλάσιον $2^4 \times 2^2 \times 5 \times 7 \times 11$, ὅπερ ἔχει μόνους τούτους παράγοντας, τοὺς ἀναγκαίως ὑπάρχοντας εἰς πᾶν κοινὸν πολλαπλάσιον, εἶναι τὸ ἐλάχιστον.

Πόρισμα 1ον.

133. Κοινὰ πολλαπλάσια δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν εἶναι μόνον ἡ πολλαπλάσια τοῦ ἐλάχιστου κοινοῦ πολλαπλασίου αὐτῶν.

Διότι, κατὰ τὰ ἀνωτέρω εἰρημένα, πᾶν κοινὸν πολλαπλάσιον Π θὰ περιέχῃ τοὺς παράγοντας, ἐξ ὧν γίνεται τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον Ε, ἐπομένως τὸ Π θὰ διαιρῇται διὰ τοῦ Ε, ἦτοι θὰ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ Ε· ὅτι δὲ καὶ ἀντιστρόφως πᾶν πολλαπλάσιον τοῦ Ε εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον, εἶναι προφανές.

Πόρισμα 2ον.

134. Τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον ἀριθμῶν πρώτων πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο εἶναι τὸ γινόμενον αὐτῶν.

Διότι οὐδεὶς πρῶτος παράγων εἶναι κοινὸς εἰς δύο ἐκ τῶν ἀριθμῶν τούτων, ὥστε τὸ ἐλάχιστον αὐτῶν κοινὸν πολλαπλάσιον θὰ περιέχῃ πάντας τοὺς πρώτους παράγοντας ἑκάστου τῶν ἀριθμῶν. Ἐὰν λοιπὸν ἀντικαταστήσωμεν τοὺς παράγοντας ἑκάστου ἀριθμοῦ διὰ τοῦ ὑπερθέντος γινομένου αὐτῶν, τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον θὰ μετασχηματισθῇ εἰς τὸ γινόμενον τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Παραδείγματος χάριν, τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν

$$3 \times 5^2 \times 7, \quad 2^3 \times 11^2, \quad 13 \times 17^2$$

εἶναι κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα

$$3 \times 5^2 \times 7 \times 2^3 \times 11^2 \times 13 \times 17^2,$$

ἦτοι τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν.

Σημείωσις. Ὅταν οἱ ἀριθμοὶ δὲν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο, τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον αὐτῶν εἶναι μικρότερον τοῦ γινομένου αὐτῶν.

* ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν εὐρίσκεται καὶ ἄνευ τῆς ἀναλύσεως αὐτῶν εἰς πρώτους παράγοντας, στηρίζεται δὲ ἡ εὐρεσις αὐτοῦ ἐπὶ τῶν ἑξῆς θεωρημάτων.

ΘΕΩΡΗΜΑ

135. Τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον δύο ἀριθμῶν καὶ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν πολλαπλασιαζόμενοι δίδουν τὸ γινόμενον τῶν δύο ἀριθμῶν.

Ἐστωσαν Α καὶ Β δύο τυχόντες ἀριθμοί, Δ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν καὶ Ε τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον· λέγω ὅτι εἶναι

$$E \times \Delta = A \times B.$$

Ἀπόδειξις. Διότι, ἂν ἀναλύσωμεν τοὺς δύο ἀριθμοὺς Ε καὶ Β εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας καὶ σχηματίσωμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην Δ καὶ τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον αὐτῶν Ε κατὰ τὰ προηγούμενα θεωρήματα (ἔδ. 130 καὶ 132), εἰς μὲν τὸν Ε θὰ περιέχωνται οἱ μὴ κοινοὶ παράγοντες καὶ οἱ κοινοὶ μὲ τὸν μεγαλύτερον ἐκθέτην αὐτῶν, εἰς δὲ τὸν Δ θὰ περιέχωνται οἱ ἐπίλοιποι παράγοντες, τουτέστιν οἱ κοινοὶ μὲ τὸν μικρότερον ἐκθέτην τῶν· ὥστε ἐκ τῶν παραγόντων τῶν δύο ἀριθμῶν Α, Β τινὲς μὲν ἀπαρτίζουν τὸν Ε, οἱ δὲ λοιποὶ τὸν Δ, ἐπομένως εἶναι $\Delta \times E = A \times B$.

Πόρισμα.

136. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον δύο ἀριθμῶν, ἀρκεῖ γὰρ διαιρέσωμεν τὸ γινόμενον αὐτῶν διὰ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν.

Διότι τὸ γινόμενον τῶν δύο ἀριθμῶν εἶναι $A \times B$ ἢ καὶ $\Delta \times E$, ἔάν δὲ τοῦτο διαιρεθῇ διὰ Δ, θὰ δώσῃ πηλίκον τὸ Ε.

ΘΕΩΡΗΜΑ

137. Τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, ἂν ἀντικαταστήσωμεν δύο ἐξ αὐτῶν διὰ τοῦ ἐλάχιστου κοινοῦ πολλαπλασίου αὐτῶν.

Ἐστώσαν τυχόντες ἀριθμοὶ οἱ ἑξῆς·

A, B, Γ, Δ

καὶ Ε τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν Α καὶ Β· λέγω ὅτι

οἱ ἀριθμοὶ A, B, Γ, Δ

καὶ οἱ E, Γ, Δ

ἔχουσιν ἓν καὶ τὸ αὐτὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον.

Ἀπόδειξις. Διότι πᾶν κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν Α, Β, Γ, Δ ὥς κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν Α καὶ Β θὰ εἶναι πολλαπλάσιον καὶ τοῦ Ε (ἐδ. 133)· ἄρα θὰ εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν Ε, Γ, Δ. Καὶ ἀντιστρόφως· πᾶν κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν Ε, Γ, Δ ὥς πολλαπλάσιον τοῦ Ε θὰ εἶναι πολλαπλάσιον καὶ τῶν Α καὶ Β (ἐδ. 77)· ἄρα θὰ εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον καὶ τῶν ἀριθμῶν Α, Β, Γ, Δ.

Ἐδείχθη λοιπὸν ὅτι καὶ αἱ δύο σειραὶ τῶν ἀριθμῶν ἔχουσι τὰ αὐτὰ κοινὰ πολλαπλάσια· ἄρα ἔχουσι καὶ τὸ αὐτὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον.

Στηριζόμενοι εἰς τὸ θεώρημα τοῦτο δυνάμεθα νὰ ἀναγάγωμεν τὴν εὕρεσιν τοῦ ἐλάχιστου κοινοῦ πολλαπλασίου πολλῶν ἀριθμῶν εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ ἐλάχιστου κοινοῦ πολλαπλασίου δύο ἀριθμῶν (ὥς καὶ τὴν εὕρεσιν τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου πολλῶν ἀριθμῶν). Πρὸς τοῦτο, δοθέντων τῶν ἀριθμῶν Α, Β, Γ, Δ, εὐρίσκομεν τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον Ε τῶν Α, Β, ἔπειτα τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον Ζ τῶν Ε, Γ καὶ τέλος τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον Η τῶν Ζ, Δ. Τὸ Η θὰ εἶναι τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

- 1) Νὰ εὐρεθῶσιν οἱ μικρότεροι τοῦ 20 ἀριθμοὶ οἱ πρῶτοι πρὸς αὐτόν.
- 2) Νὰ εὐρεθῶσι πάντες οἱ κοινοὶ διαιρέται δύο ἀριθμῶν (ἢ καὶ περισσοτέρων).

Ἀρκεῖ νὰ εὐρεθῇ ὁ μέγιστος ἐξ αὐτῶν (ἐδ. 104).

- 3) Νὰ διακρίνωμεν, ἂν ἀριθμὸς τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 45 ἢ διὰ 18 (ἐδ. 129, Παρατήρησις).

- 4) Τὸ διπλάσιον τετράγωνον δὲν εἶναι τετράγωνον, οὐδὲ τὸ τριπλάσιον καὶ γενικῶς τὸ γινόμενον ἀριθμοῦ μὴ τετραγώνου ἐπὶ ἄλλον, ὅστις εἶναι τετράγωνον, δὲν δύναται νὰ εἶναι τετράγωνον (ἐδ. 123).

5) Νὰ ἀποδειχθῶσιν αἱ ιδιότητες τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου (ἐδ. 104, 105, 106, 107, 108) διὰ τῆς ἀναλύσεως τῶν ἀριθμῶν εἰς πρώτους παράγοντας.

6) Νὰ δειχθῇ ἡ ἐξῆς πρότασις: «Ἀριθμὸς πρῶτος πρὸς ἕκαστον τῶν παραγόντων γινομένου εἶναι πρῶτος καὶ πρὸς τὸ γινόμενον» καὶ ἀντιστρόφως «ἀριθμὸς πρῶτος πρὸς γινόμενον εἶναι πρῶτος καὶ πρὸς ἕκαστον παράγοντα τοῦ γινομένου» (ἐδ. 127).

7) Ἐκ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου δύο ἀριθμῶν καὶ ἐκ τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου αὐτῶν νὰ εὗρωμεν τοὺς ἀριθμοὺς

Τὸ δοθὲν κοινὸν πολλαπλάσιον Ε ὀφείλει νὰ περιέχῃ πάντας τοὺς πρώτους παράγοντας τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου Δ καὶ ἕκαστον μὲ ἐκθέτην ἴσον ἢ μεγαλύτερον (ἐδ. 132), τουτέστιν ὀφείλει νὰ εἶναι Ε διαιρετὸν διὰ Δ. Τὸ δὲ πρόβλημα ἐπιδέχεται ἐν γένει πολλὰς λύσεις· ἂν λόγου χάριν δοθῇ $\Delta = 2^2 \times 3$ καὶ $E = 2^5 \times 3 \times 7$, ἑκάτερον τῶν ζητουμένων ἀριθμῶν θὰ περιέχῃ ὡς παράγοντα τὸν Δ (ἥτοι τὸ 12), θὰ περιέχῃ δὲ καὶ τὸν ἕνα τῶν ἀριθμῶν ἐκάστης τῶν ἐξῆς σειρῶν

1,	2^3
1,	3
1,	6.

ὥστε αἱ λύσεις εἶναι αἱ ἐξῆς τέσσαρες·

$A = 12 = \Delta$	$A = 12 \times 3$	$A = 12 \times 8$	$A = 12 \times 24$
$B = 12 \times 168 = E$	$B = 12 \times 56$	$B = 12 \times 21$	$B = 12 \times 7.$

8) Ἐὰν πάντες οἱ διαιρέται ἀριθμοῦ γραφῶσιν εἰς μίαν σειράν κατὰ τάξιν μεγέθους, τὸ γινόμενον δύο διαιρετῶν ἐξ ἴσου ἀπεχόντων ἀπὸ τῶν ἄκρων θὰ εἶναι πάντοτε ἴσον τῷ ἀριθμῷ.

9) Ἐὰν ἀριθμός τις δὲν εἶναι διαιρετὸς δι' οὐδενὸς ἐκτῶν πρώτων ἀριθμῶν, ὧν τὰ τετράγωνα περιέχει, ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι πρῶτος (ἐδ. 112).

"Ἐστω τοιοῦτος ἀριθμὸς ὁ Α· ἐὰν δὲν εἶναι πρῶτος, θὰ ἀναλύηται εἰς γινόμενον δύο ἄλλων ἀριθμῶν· ἂς ὑποτεθῇ ὅτι εἶναι $A = \Pi \times \Pi'$, τότε

$$A^2 = \Pi^2 \times \Pi'^2.$$

Ἀλλ' ἡ ἰσότης αὕτη εἶναι ἀδύνατος· διότι ἑκάτερον τῶν τετραγώνων Π^2 , Π'^2 ὑπερβαίνει τὸν Α· ἄρα τὸ δεύτερον μέρος ὑπερβαίνει τὸ $A \times A$, ἥτοι τὸ A^2 .

10) Εὗρεῖν δύο ἀκεραίους ἀριθμοὺς ἔχοντας γινόμενον μὲν 24 ἄθροισμα δὲ 11.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

ΒΙΒΛΙΟΝ Γ'

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

Πρῶται ἔννοιαι.

138. Ἐὰν τὸ πρᾶγμα, ὅπερ παριστᾷ ἡ μονὰς 1, μοιρασθῇ εἰς ἴσα μέρη, ἕκαστον ἐκ τῶν μερῶν τούτων ἐν σχέσει πρὸς τὸ ὅλον θεωρούμενον πρέπει νὰ παρασταθῇ διὰ νέου ἀριθμοῦ. Καὶ ἂν μὲν τὸ πρᾶγμα μοιρασθῇ εἰς δύο ἴσα, ἑκάτερον ἐκ τούτων λέγεται ἡμισυ καὶ παρίσταται ὡς ἐξῆς, $\frac{1}{2}$, ἂν δὲ εἰς τρία ἴσα μοιρασθῇ, ἕκαστον λέγεται ἐν τρίτον καὶ γράφεται $\frac{1}{3}$, ἂν δὲ εἰς τέσσαρα, ἕκαστον λέγεται ἐν τέταρτον $\left(\frac{1}{4}\right)$ καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Τὰ δύο ἡμίση ἑκάστου πράγματος συναποτελοῦσιν (ὅτιαν ἐνωθῶσι) τὸ ὅλον πρᾶγμα· ὥστε εἶναι $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

Καὶ τὰ τρία τρίτα ἑκάστου πράγματος συναποτελοῦσι τὸ ὅλον πρᾶγμα· ὥστε εἶναι $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$.

Ὅμοίως εἶναι $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$ κτλ.

Ὡστε οἱ νέοι ἀριθμοὶ $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ εἶναι μέρη τέλεια τῆς μονάδος

1, ἥτοι προκύπτουσιν ἐξ αὐτῆς, ἂν διαιρεθῇ εἰς ἴσα μέρη.

Ἐκ τούτων ὀδηγούμενοι δίδομεν τοὺς ἐξῆς ὁρισμούς.

Ὅρισμοί.

139. Κλασματικὴ μονὰς λέγεται πᾶν μέρος τέλειον τῆς μονάδος 1, τουτέστι πᾶν μέρος αὐτῆς, ὅπερ πολλάκις ληφθὲν δίδει αὐτήν· αὐτὴ δὲ ἡ μονὰς 1 λέγεται ἀκεραία.

140. Ἀκέραιοι ἀριθμοὶ λέγονται οἱ ἐκ τῆς ἀκεραίας μονάδος 1

διὰ τῆς ἐπαναλήψεως γινόμενοι, ὥς $1+1$ ἢ 2 , $1+1+1$ ἢ 3 κτλ., ἔτι δὲ καὶ αὐτὴ ἡ μονάς 1 .

Κλασματικοὶ ἀριθμοὶ ἢ ἀπλῶς κλάσματα λέγονται οἱ γινόμενοι ἐκ μιᾶς κλασματικῆς μονάδος δι' ἐπαναλήψεως· οἷον $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ (δύο τρίτα)

$\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$ (τρία πέμπτα), ἔτι δὲ καὶ αὐταὶ αἱ κλασματικαὶ μονάδες.

Ὡστε πᾶς ἀριθμὸς εἶναι ἄθροισμα μονάδων ἢ καὶ μία μονάς.

Γραφὴ τῶν κλασμάτων.

141. Ἐκαστον κλάσμα γράφεται διὰ δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν· καὶ ὁ μὲν πρῶτος δεικνύει πόσας μονάδας (κλασματικὰς) ἔχει τὸ κλάσμα, ὁ δὲ δεύτερος δηλοῖ τὸ ὄνομα τῶν μονάδων τούτων, ἥτοι δεικνύει εἰς πόσα μέρη διηρέθη ἡ ἀκεραία μονάς καὶ ἔδωκε τὴν κλασματικὴν.

Καὶ ὁ μὲν πρῶτος λέγεται ἀριθμητής, ὁ δὲ δεύτερος (ὁ τὸ ὄνομα τῶν μονάδων δηλῶν) λέγεται παρονομαστής, οἱ δὲ δύο ὁμοῦ λέγονται ὅροι τοῦ κλάσματος. Γράφεται δὲ ὁ παρονομαστής ὑποκάτω τοῦ ἀριθμοῦ καὶ χωρίζεται ἀπ' αὐτοῦ διὰ γραμμῆς, οἷον·

τὸ ἐν πέμπτον γράφεται (ὥς καὶ ἀνωτέρω εἴπομεν) $\frac{1}{5}$

ὁ ἀριθμὸς δύο τρίτα, ἥτοι $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$, γράφεται $\frac{2}{3}$,

ὁ ἀριθμὸς τρία δεύτερα, ἥτοι $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$, γράφεται $\frac{3}{2}$

κτλ. κτλ.

Σημείωσις. Ὅταν ἀπαγγέλλωμεν κλάσμα, τὸν μὲν ἀριθμητὴν ἀπαγγέλλομεν ὥς ἀριθμητικὸν ἀπόλυτον ὄνομα, τὸν δὲ παρονομαστὴν ὥς τακτικόν· οἷον τρία ὄγδοα $\left(\frac{3}{8}\right)$, πέντε ἑβδομα $\left(\frac{5}{7}\right)$ κτλ.

Ἐξαπατήρησις.

142. Ὅταν ὁ ἀριθμητής καὶ ὁ παρονομαστής τοῦ κλάσματος εἶναι ἴσοι, ὥς $\frac{5}{5}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, ..., τὸ κλάσμα εἶναι ἴσον μετὰ τὴν ἀκεραίαν μονάδα, διότι $\frac{2}{2}$ εἶναι $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$, $\frac{3}{3}$ εἶναι $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$. ταῦτα δέ, ὥς ἐμάθομεν ἐξ ἀρχῆς, ἀποτελοῦσι τὴν μονάδα 1 .

Όταν δὲ ὁ ἀριθμητὴς εἶναι μικρότερος τοῦ παρονομαστοῦ, τὸ κλάσμα εἶναι μικρότερον τῆς ἀκεραίας μονάδος. Διότι π. χ. τὸ $\frac{3}{5}$ εἶναι $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$, χρειάζεται λοιπὸν ἀκόμη δύο πέμπτα, $\frac{1}{5} + \frac{1}{5}$, διὰ νὰ γίνῃ ἴσον μὲ τὴν μονάδα 1.

Όταν δὲ ὁ ἀριθμητὴς εἶναι μεγαλύτερος τοῦ παρονομαστοῦ, τὸ κλάσμα εἶναι μεγαλύτερον τῆς ἀκεραίας μονάδος.

Διότι π. χ. τὸ κλάσμα $\frac{7}{6}$ σύγκειται ἐξ 6 ἑκτων (ἅτινα ἀποτελοῦσιν 1) καὶ ἐξ ἑνὸς ἑκτου· ὥστε ὑπερβαίνει τὴν μονάδα 1.

Τροπὴ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν εἰς κλάσματα.

143. Ἡ ἀκεραία μονὰς 1 δύναται, ὡς ἀνωτέρω εἶδομεν, νὰ παρασταθῇ ὡς κλάσμα ἔχον ἴσους ὄρους· ὡς $\frac{5}{5}$, $\frac{6}{6}$ κτλ.

Καὶ πᾶς ἀκέραιος ἀριθμὸς δύναται νὰ παρασταθῇ ὡς κλάσμα, ἐὰν αἱ μονάδες αὐτοῦ τραπῶσιν εἰς κλάσματα.

Ἐάν, παραδείγματος χάριν, θέλωμεν νὰ τρέψωμεν τὸν ἀριθμὸν 8 εἰς πέμπτα (ἤτοι εἰς κλάσμα ἔχον παρονομαστὴν τὸν 5), ἀρκεῖ νὰ ἐνθυμηθῶμεν ὅτι ἐκάστη ἀκεραία μονὰς ἔχει 5 πέμπτα· ἄρα αἱ 8 μονάδες θὰ ἔχωσιν 8 φορὰς 5 πέμπτα, ἤτοι 5×8 πέμπτα, ὥστε εἶναι

$$8 = \frac{5 \times 8}{5} = \frac{40}{5}.$$

Ἐκ τούτων συνάγεται ὁ ἐξῆς κανὼν.

Διὰ νὰ τρέψωμεν ἀκέραιον εἰς κλάσμα ἔχον δοθέντα παρονομαστήν, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀκέραιον ἐπὶ τὸν δοθέντα παρονομαστήν καὶ ὑπὸ τὸ γινόμενον γράφομεν παρονομαστήν τὸν δοθέντα.

Περὶ τῶν μικτῶν ἀριθμῶν.

Τροπὴ αὐτῶν εἰς κλάσματα.

144. Μικτὸς ἀριθμὸς λέγεται ὁ συγκείμενος ἐξ ἀκεραίου καὶ κλάσματος· οἷον $2\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{6}$ κτλ.

Ὁ μικτὸς ἀριθμὸς τρέπεται εἰς κλασματικόν, διότι τὸ ἀκέραιον μέρος του τρέπεται εἰς κλάσμα.

Ἐστω, παραδείγματος χάριν, ὁ μικτὸς ἀριθμὸς $5\frac{3}{4}$ · διὰ τὴν νὰ τρέψω αὐτὸν εἰς κλάσμα, ἀρκεῖ νὰ τρέψω τὸ ἀκέραιον μέρος 5 εἰς κλάσμα ἔχον παρονομαστήν 4 (διότι καὶ τὸ κλάσμα τοῦ μικτοῦ ἔχει παρονομαστήν 4). Κατὰ τὰ ἀνωτέρω δηθέντα ὁ ἀκέραιος 5 τρεπόμενος εἰς τέταρτα γίνεται:

$$\frac{5 \times 4}{4} \text{ ἢ } \frac{20}{4}.$$

ὥστε ὁ μικτὸς $5\frac{3}{4}$ γίνεται $\frac{20}{4}$ καὶ $\frac{3}{4}$.

ἀλλὰ 20 τέταρτα καὶ 3 τέταρτα ἀποτελοῦσιν 23 τέταρτα (καθὼς 20 μῆνες καὶ 3 μῆνες ἀποτελοῦσι 23 μῆνας, 20 δραχμαὶ καὶ 3 δραχμαὶ ἀποτελοῦσιν 23 δραχμάς κτλ.)· ὥστε εἶναι

$$5\frac{3}{4} = \frac{23}{4}.$$

Ἐκ τούτων συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

Διὰ τὴν νὰ τρέψωμεν μικτὸν ἀριθμὸν εἰς κλασματικόν, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀκέραιόν του ἐπὶ τὸν παρονομαστήν τοῦ κλάσματος, εἰς τὸ γινόμενον προσθέτομεν τὸν ἀριθμητήν καὶ ὑπὸ τὸ ἄθροισμα γράφομεν τὸν αὐτὸν παρονομαστήν.

Ἐξαγωγή τῶν ἀκεραίων μονάδων τοῦ κλάσματος.

145. Ἐὰν κλάσμα τι περιέχῃ ἀκεραίας μονάδας (ὅτε ὁ ἀριθμητὴς εἶναι μεγαλύτερος τοῦ παρονομαστοῦ), δυνάμεθα νὰ ἀποχωρίσωμεν αὐτάς

Ἐστω, παραδείγματος χάριν, τὸ κλάσμα $\frac{12}{5}$, ὃπερ περιέχει ἀκεραίας μονάδας, διότι ὁ ἀριθμητὴς 12 ὑπερβαίνει τὸν παρονομαστήν 5.

Ἐπειδὴ 5 πέμπτα ἐνούμενα ἀποτελοῦσι μίαν ἀκεραίαν μονάδα, ἀντὶ τῶν 12 πέμπτων λάβωμεν τὰ 5, σχηματίζομεν ἕξ αὐτῶν μίαν ἀκεραίαν μονάδα, μένουσι δὲ ἀκόμη 12—5, ἥτοι 7 πέμπτα· ἐὰν δὲ καὶ ἐκ τῶν 7 τούτων πέμπτων λάβωμεν τὰ 5, σχηματίζομεν ἄλλην μίαν ἀκεραίαν μονάδα καὶ μένουσι ἀκόμη 2 πέμπτα (τὰ ὅποια δὲν ἀποτελοῦσιν ἀκεραίαν μονάδα)· ὥστε ὁ ἀριθμὸς $\frac{12}{5}$ ἀνελύθη εἰς 2

ἀκέραια καὶ $\frac{2}{5}$, ἥτοι εἶναι

$$\frac{12}{5} = 2 + \frac{2}{5} \text{ ἢ } 2\frac{2}{5}.$$

Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι τόσαι ἀκέραιαι μονάδες σχηματίζονται ἐκ τοῦ δοθέντος κλάσματος, ὅσας φορές χωρεῖ ὁ ἀριθμητὴς τοῦ τὸν παρονομαστήν του· ὥστε τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ δοθέντος κλάσματος ὁρίζεται, ἐὰν διαιρεθῇ ὁ ἀριθμητὴς διὰ τοῦ παρονομαστοῦ.

Ἐντεῦθεν συνάγεται ὁ ἑξῆς κανὼν.

Διὰ τὰ ἀποχωρίσωμεν τὸν εἰς κλάσμα περιεχόμενον ἀκέραιον, διαιρούμεν τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ· καὶ τὸ μὲν εὐρεθὲν πηκὼν εἶναι ὁ ἐν τῷ κλάσματι περιεχόμενος ἀκέραιος, τὸ δὲ ὑπόλοιπον (ἐν μείνῃ) εἶναι ὁ ἀριθμητὴς τοῦ μένοντος κλάσματος (ὅπερ θὰ ἔχη παρονομαστήν τὸν τοῦ δοθέντος κλάσματος).

Ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς διαιρεθῇ ἀκριβῶς διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, τὸ κλάσμα εἶναι ἴσον μὲ ἀκέραιον ἀριθμὸν (ἴδε ἐδ. 143).

Θεμελιώδης ἰδιότης τῶν κλασμάτων.

ΘΕΩΡΗΜΑ

146. Πᾶν κλάσμα πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν παρονομαστήν του θά γινόμενον τὸν ἀριθμητὴν του.

Ὁ ὁρισμὸς τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (ἐδ. 31) διατηρεῖται καὶ ἐνταῦθα, ὅπου πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ οἰονδήποτε εἴτε ἀκεραίου εἴτε κλασματικοῦ εἶναι ἡ ἐπανάληψις αὐτοῦ πολλάκις.

Καὶ τὰ ὀνόματα πολλαπλασιαστέος, πολλαπλασιαστής, γινόμενον διατηροῦσι τὴν σημασίαν αὐτῶν.

Ἐστω τυχὸν κλάσμα τὸ $\frac{3}{5}$, λέγω ὅτι, ἂν τὸ κλάσμα τοῦτο πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 5 (ἧτοι ἐπαναληφθῇ πέντε φορές), θὰ δώσῃ γινόμενον 3.

Ἀπόδειξις. Τὸ κλάσμα $\frac{3}{5}$ εἶναι $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$ καὶ ἐπαναληφθὲν 5 φορές δίδει

$$\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right).$$

Ἐκαστον μέρος τοῦ $\frac{3}{5}$ λαμβάνεται πεντάκις, ὥστε γίνεται 1 ἀκέραιον· ἄρα τὸ $\frac{3}{5}$ θὰ γίνῃ 3 ἀκέραια.

Ἐδείχθη λοιπὸν ὅτι εἶναι $\frac{3}{5} \times 5 = 3$.

Ἐδείχθη λοιπὸν ὅτι εἶναι $\frac{3}{5} \times 5 = 3$.

Πόρισμα.

147. Πᾶν κλάσμα εἶναι πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ του διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του.

Παραδείγματος χάριν, τὸ $\frac{5}{6}$ εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως 5 διὰ τοῦ 6.

Διότι τὸ $\frac{5}{6}$ ἑξάκις ληφθὲν γίνεται 5, ἥτοι

$$\frac{5}{6} + \frac{5}{6} + \frac{5}{6} + \frac{5}{6} + \frac{5}{6} + \frac{5}{6} = 5.$$

ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι ὁ 5 ἐμοιράσθη εἰς 6 ἴσα μέρη καὶ ἕκαστον ἐκ τούτων εἶναι $\frac{5}{6}$.

Συμψήφισις. Εἰς τὸ αὐτὸ συμπέρασμα φθάνομεν καὶ ὡς ἑξῆς.

Ἄν πρόκειται νὰ μοιράσωμεν τὸν 5 εἰς 6 ἴσα μέρη, φανερόν ἐστίν ὅτι δυνάμεθα νὰ μοιράσωμεν ἑκάστην μονάδα αὐτοῦ εἰς 6 ἴσα μέρη καὶ νὰ ἐνώσωμεν ἔπειτα τὰ 5 πηλικά, ἐπειδὴ δὲ ἕξ ἑκάστη μονάδος προκύπτει πηλίκον $\frac{1}{6}$, θὰ ἔχωμεν πηλίκον $\frac{5}{6}$.

Παρατήρησις.

148. Ἡ διαίρεσις τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν γίνεται νῦν τελεία τῶν κλασμάτων καὶ τὸ πηλίκον παρίσταται ὡς κλάσμα ἔχον ἀριθμὸν τὴν μὲν τὸν διαιρετέον, παρονομαστὴν δὲ τὸν διαιρέτην· ὥστε, ἂν μὴ ὁ διαιρετέος εἶναι μικρότερος τοῦ διαιρέτου, τὸ πηλίκον εἶναι κλάσμα μὴ περιέχον ἀκεραίας μονάδας, ἂν δὲ τοῦναντίον ὁ διαιρετέος εἶναι μεγαλύτερος τοῦ διαιρέτου, τὸ πηλίκον ἔχει ἀκεραίας μονάδας καὶ εἶναι ἀκέραιον μὲν, ἂν ἡ διαίρεσις (ἐκτελουμένη ὡς ἐν τῷ Α' Βιβλίῳ ἐμάθομεν) δὲν ἀφίγη ὑπόλοιπον, μικτὸν δέ, ἂν τοῦναντίον.

Παραδείγματος χάριν, τὸ πηλίκον τοῦ 8 διὰ 10 εἶναι $\frac{8}{10}$.

Τὸ πηλίκον τοῦ 24 διὰ 3 εἶναι $\frac{24}{3}$, ἥτοι 8 ἀκέραια.

τὸ δὲ πηλίκον τοῦ 25 διὰ 8 εἶναι $\frac{25}{8}$, ἥτοι 3 $\frac{1}{8}$.

Ἐκ τούτων βλέπομεν ὅτι, ὅταν ἡ διαίρεσις τῶν ἀκεραίων (ἦν ἐπεξηγήσαμεν ἐν τῷ Α' Βιβλίῳ) ἀφίγη ὑπόλοιπον, τὸ ἀκριβὲς πηλίκον σύγκαιται ἐκ τοῦ διὰ τῆς πράξεως εὗρισκομένου ἀκεραίου πηλίκου καὶ τοῦ κλάσματος, ὅπερ ἔχει ἀριθμητὴν μὲν τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως παρονομαστὴν δὲ τὸν διαιρέτην.

Περὶ τῆς ἰσότητος τῶν κλασμάτων.

Ὅρισμοί.

149. Ἰσα λέγονται δύο κλάσματα, ἐὰν ἰσάκεις λαμβανόμενα (τουτέστιν εἰ τὸν αὐτὸν ἀκέραιον πολλαπλασιαζόμενα) γίνωνται ἀκέραιοι ἴσοι.

Ἄνισα δὲ λέγονται, ἐὰν γίνωνται ἀκέραιοι ἄνισοι· καὶ μεγαλύτερον μὲν λέγεται τὸ παράγον τὸν μεγαλύτερον ἀκέραιον, μικρότερον δὲ τὸ παράγον τὸν μικρότερον.

Ἐστωσαν ὡς παράδειγμα τὰ κλάσματα $\frac{1}{2}$ καὶ $\frac{2}{4}$ ἢ $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$. Ἐὰν ἔδωμεν ἑκάτερον τούτων δις (ἤτοι ἂν διπλασιάσωμεν αὐτὰ), γίνονται

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4},$$

οἱ γίνονται ἀμφοτέρω 1.

Ἐὰν ἑκάτερον τῶν κλασμάτων $\frac{1}{2}$ καὶ $\frac{2}{4}$ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς μονάδος, διότι διπλασιασθὲν ἔδωκε τὴν μονάδα 1· ἀνάγκη λοιπὸν νὰ δεχθῶμεν αὐτὰ ὡς ἴσα (ἄλλως θὰ εἶχεν ἡ μονὰς 1 δύο διάφορα ἥμισυ).

Τὸ κλάσμα $\frac{2}{3}$ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ $\frac{1}{2}$, διότι λαμβανόμενα ἑξάκεις γίνονται ἀμφοτέρω ἀκέραια καὶ τὸ μὲν $\frac{2}{3}$ γίνεται 4, τὸ δὲ $\frac{1}{2}$ γίνεται 3.

Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον ἀνάγεται ἡ ἰσότης καὶ ἡ ἀνισότης τῶν κλασμάτων εἰς τὴν ἰσότητα καὶ ἀνισότητα τῶν ἀκέραιων ἀριθμῶν.

Σημείωσις. Ἐὰν τὰ κλάσματα ἔχωσι τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, ὡς $\frac{4}{5}$, ἡ ἰσότης ἢ ἡ ἀνισότης αὐτῶν γίνεται φανερά ἐκ τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν.

Ἰδιότητες τῶν κλασμάτων.

ΘΕΩΡΗΜΑ Α'

150. Ἐὰν ἀμφοτέρω οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος πολλαπλασιασθῶσιν ὑποὶ ἑνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, προκύπτει κλάσμα ἴσον· ἐπίσης καὶ εἰ διαιρεθῶσιν ἀμφοτέρω δι' ἐνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

Ἐστω τυχὸν κλάσμα τὸ $\frac{2}{5}$ καὶ ἂς πολλαπλασιασθῶσιν ἀμφοτέρω ὅροι τοῦ ἐπὶ οἷονδῆποτε ἀριθμῶν, οἷον τὸν 3· τότε ἐκ τοῦ $\frac{2}{5}$ προκύ-

πτει τὸ κλάσμα $\frac{6}{15}$ · λέγω δὲ ὅτι εἶναι $\frac{2}{5} = \frac{6}{15}$.

Ἀπόδειξις. Ἄν λάβωμεν τὸ κλάσμα $\frac{6}{15}$ 15 φορές (ἦτοι ἂν πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸ ἐπὶ 15), θὰ προκύψῃ ὁ ἀκέραιος 6·

ἀλλὰ καὶ τὸ κλάσμα $\frac{2}{5}$ ἰσάκεις ληφθὲν δίδει 6, διότι,

$$\begin{array}{ll} \text{ἂν ληφθῇ πέντε φορές, δίδει} & 2, \\ \text{ἂν δέκα φορές, δίδει} & 2 \times 2 \text{ ἢ } 4 \\ \text{ἂν δέκα πέντε φορές, δίδει} & 2 \times 3 \text{ ἢ } 6. \end{array}$$

Ἐκ τούτου ἔπεται ὅτι εἶναι $\frac{2}{5} = \frac{6}{15}$.

Ἐστω ἐπίσης τυχὸν κλάσμα, οὗτινος ἀμφοτέρω οἱ ὅροι ἔχουσιν κοινόν τινα διαιρέτην, οἷον τὸ $\frac{8}{10}$. λέγω ὅτι, ἂν διαιρεθῶσιν ἀμφοτέρω οἱ ὅροι αὐτοῦ διὰ τοῦ κοινοῦ αὐτῶν διαιρέτου 2, τὸ προκύπτον κλάσμα $\frac{4}{5}$ εἶναι ἴσον τῷ $\frac{8}{10}$.

Ἀπόδειξις. Διότι τὸ $\frac{8}{10}$ προκύπτει ἐκ τοῦ $\frac{4}{5}$, ἐὰν ἀμφοτέρω οἱ ὅροι τούτου πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ 2· ἄρα $\frac{4}{5} = \frac{8}{10}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ Β'

151. Ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ἀριθμόν, καὶ τὸ ὅλον κλάσμα πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, καὶ ἂν ὁ ἀριθμητὴς διαιρεθῇ, καὶ τὸ ὅλον κλάσμα διαιρεθῇ, ἦτοι μοιράζεται εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσα εἶναι αἱ μονάδες τοῦ ἀριθμοῦ.

Λέγω δηλαδή, ὅτι, ἐὰν διπλασιασθῇ ὁ ἀριθμητὴς, καὶ τὸ κλάσμα διπλασιασθῇ· ἂν τριπλασιασθῇ ὁ ἀριθμητὴς, καὶ τὸ κλάσμα τριπλασιασθῇ καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἀπόδειξις. Ἐστω τυχὸν κλάσμα τὸ $\frac{3}{8}$. Ἄν διπλασιασθῇ ὁ ἀριθμητὴς του γίνεται $\frac{6}{8}$, φανερόν δὲ εἶναι ὅτι τὰ 6 ὀγδοα εἶναι διπλάσια τῶν 3 ὀγδόων. Ὀμοίως τὸ $\frac{9}{8}$ εἶναι τριπλάσιον τοῦ $\frac{3}{8}$, διότι ἐτριπλασιασθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν μονάδων του (ἀπὸ 3 ἔγινεν 9).

Ἐστω καὶ τὸ κλάσμα $\frac{6}{7}$. Ἄν διαιρεθῇ ὁ ἀριθμητὴς του διὰ 3, γίνεται $\frac{2}{7}$. εἶναι δὲ τὸ $\frac{2}{7}$ τὸ τρίτον τοῦ $\frac{6}{7}$, διότι τὸ $\frac{6}{7}$ εἶναι τριπλάσιον τοῦ $\frac{2}{7}$.

Σημειώσεις. Ἐν γένει, ὅταν ὁ ἀριθμητὴς αὐξάνῃ, καὶ τὸ κλάσμα αὐξάνει.

ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'

152. Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ἀριθμὸν, τὸ ὅλον κλάσμα διαιρεῖται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ· καὶ ἂν ὁ παρονομαστὴς διαιρεθῇ, τὸ ὅλον κλάσμα πολλαπλασιάζεται.

Λέγω δηλαδή ὅτι, ἂν ὁ παρονομαστὴς διπλασιασθῇ, τὸ κλάσμα διαιρεῖται διὰ 2, ἥτοι γίνεται τὸ ἥμισυ τοῦ πρὶν· ἂν ὁ παρονομαστὴς τριπλασιασθῇ, τὸ κλάσμα διαιρεῖται διὰ 3, ἥτοι γίνεται τὸ τρίτον τοῦ πρὶν καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἐστω τυχὸν κλάσμα τὸ $\frac{2}{5}$ καὶ ἄς πολλαπλασιασθῇ ὁ παρονομαστὴς αὐτοῦ 5 ἐπὶ οἷονδήποτε ἀριθμὸν, οἷον τὸν 8· τότε προκύπτει τὸ κλάσμα $\frac{2}{5 \times 8}$ ἢ $\frac{2}{40}$. λέγω ὅτι τὸ $\frac{2}{5 \times 8}$ εἶναι τὸ ὄγδοον τοῦ $\frac{2}{5}$, ἥτοι, ἂν ληφθῇ 8 φορές, θὰ δώσῃ τὸ $\frac{2}{5}$.

Ἀπόδειξις. Τὸ κλάσμα $\frac{2}{5 \times 8}$ λαμβανόμενον 8 φορές, ἥτοι πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ 8, γίνεται (ἐδ. 151) $\frac{2 \times 8}{5 \times 8}$, τοῦτο δὲ (κατὰ τὸ Α' θεώρημα) εἶναι ἴσον τῷ $\frac{2}{5}$. ἄρα τὸ $\frac{2}{5 \times 8}$ εἶναι τὸ ὄγδοον τοῦ $\frac{2}{5}$.

Ἐστω πρὸς τούτοις τὸ κλάσμα $\frac{3}{8}$, τοῦ ὁποῖου ὁ παρονομαστὴς διαιρεῖται διὰ 4· λέγω ὅτι, ἂν διαιρεθῇ ὁ παρονομαστὴς 8 διὰ τοῦ 4, τὸ προκύπτον κλάσμα $\frac{3}{2}$ θὰ εἶναι τετραπλάσιον τοῦ δοθέντος $\frac{3}{8}$, ἥτοι $\frac{3}{8} \times 4 = \frac{3}{2}$.

Ἀπόδειξις. Διότι τὸ $\frac{3}{8}$ ἐπὶ 4 πολλαπλασιαζόμενον δίδει (ἐδάφ. 151) $\frac{3 \times 4}{8}$, ἥτοι $\frac{3 \times 4}{2 \times 4}$, ἥτοι $\frac{3}{2}$.

Σημειώσεις. Ἐν γένει, ὅταν ὁ παρονομαστὴς αὐξάνῃ, τὸ κλάσμα ἐλαττοῦται, διότι αἱ μονάδες του γίνονται μικρότεραι.

Ἀπλοποιήσεις τῶν κλασμάτων.

Ἀπλοποιήσεις τοῦ κλάσματος λέγεται ἡ πρᾶξις, δι' ἧς εὐρίσκομεν ἄλλο κλάσμα ἴσον πρὸς τὸ δοθὲν καὶ ἔχον ὅρους μικροτέρους.

Ἡ ἀπλοποίησις γίνεται, ὅταν οἱ ὅροι τοῦ δοθέντος κλάσματος ἔχωσι κοινόν τινα διαιρέτην· διότι διαιροῦντες δι' αὐτοῦ καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος εὐρίσκομεν ἄλλο κλάσμα ἔχον ὅρους μικροτέρους καὶ ἴσον πρὸς τὸ δοθέν.

Παραδείγματος χάριν τὸ κλάσμα $\frac{15}{20}$ ἀπλοποιεῖται, ἂν διαιρεθῶσιν ἀ

φότεροι οἱ ὅροι του διὰ τοῦ κοινοῦ αὐτῶν παράγοντος 5, γίνεται δὲ

Διὰ τῆς ἀπλοποιήσεως ἀποκτῶμεν σαφεστέραν ἰδέαν τῶν κλασμάτων διότι π. χ. σαφεστέραν ἰδέαν ἔχομεν τοῦ $\frac{3}{4}$ ἢ τοῦ ἴσου του $\frac{45}{60}$ ἢ τοῦ $\frac{3}{5}$.

Σημείωσις. Ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς διαιρῇται ἀκριβῶς διὰ τοῦ παρονομαστοῦ (ὥς $\frac{6}{3}$, $\frac{10}{2}$ κτλ.), ἀπλοποιοῦντες τὸ κλάσμα λαμβάνομεν παρονομαστήν τὴν μονάδα ($\frac{2}{1}$, $\frac{5}{1}$ κτλ.), ἀλλὰ τότε τὸ κλάσμα παριστᾷ ἀκέραιον ἀριθμὸν (ἔδ. 143). Ἐντεῦθεν βλέπομεν ὅτι δυνάμεθα νὰ παριστῶμεν τοὺς ἀκεραίους καὶ ὥς κλάσματα ἔχοντα παρονομαστήν τὴν μονάδα.

Ἐὰν διαιρέσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος διὰ τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην αὐτῶν, προκύπτει κλάσμα, οὗτινος οἱ ὅροι εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (ἔδ. 107)· τὸ τοιοῦτο δὲ κλάσμα λέγεται ὅτι εἶναι ἀνηγμένον εἰς τοὺς ἐλαχίστους ὅρους ἢ ὅτι εἶναι ἀνήγγωγον, διότι δὲν ὑπάρχει ἄλλο ἴσον αὐτῷ καὶ ἔχον μικροτέρους ὅρους ὥς φαίνεται ἐκ τοῦ ἑξῆς θεωρήματος.

ΘΕΩΡΗΜΑ

153. Ἐὰν οἱ ὅροι κλάσματός τινος εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, κλάσμα τοῦτο εἶναι ἀνήγγωγον, τουτέστι δὲν ὑπάρχει ἄλλο κλάσμα ἴσον πρὸς αὐτὸ καὶ ἔχον μικροτέρους ὅρους.

Ἀπόδειξις. Ἐστω τυχὸν κλάσμα ἔχον ὅρους πρώτους πρὸς ἀλλήλους, οἷον τὸ $\frac{5}{8}$, καὶ ἄλλο οἷονδήποτε κλάσμα ἴσον πρὸς αὐτό, τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$.

$$\text{ἔστω δηλαδή} \quad \frac{5}{8} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ πρώτου ἐπὶ β καὶ ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ δευτέρου ἐπὶ 8, τὰ προκύπτοντα κλάσματα θὰ εἶναι ἐπίσης ἴσα ὥς ἴσα πρὸς τὰ δοθέντα· ὅθεν ἔπεται

$$\frac{5 \times \beta}{8 \times \beta} = \frac{\alpha \times 8}{\beta \times 8}.$$

Ἐπειδὴ δὲ τὰ κλάσματα τοῦτα ἔχουσι τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, ἔν δύνανται νὰ εἶναι ἴσα, ἂν ἔχωσιν ἀριθμητὰς ἴσους·
 ἴσα εἶναι $5 \times \beta = \alpha \times 8$.

Ἐπειδὴ δὲ ὁ 8 διαιρεῖ τὸ γινόμενον $\alpha \times 8$, θὰ διαιρῇ καὶ τὸ πρὸς αὐτὸ ἴσον $5 \times \beta$, καὶ ἔπειδὴ εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν παράγοντα 5, θὰ διαιρῇ ὁ 5 ἄλλον παράγοντα β (ἔδ. 109)· ἔαν λοιπὸν παραστήσωμεν διὰ π τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ β διὰ 8, θὰ ἔχωμεν
 $\beta = 8 \times \pi$.

καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἰσότητα $5 \times \beta = \alpha \times 8$ τὸν β διὰ τοῦ γινομένου $8 \times \pi$ λαμβάνομεν τὴν ἰσότητα
 $5 \times 8 \times \pi = \alpha \times 8$

καὶ διαιροῦντες τοὺς ἴσους τούτους ἀριθμοὺς διὰ τοῦ 8 εὐρίσκομεν
 $\alpha = 5 \times \pi$.

Ἐκ τούτων βλέπομεν ὅτι οἱ ὅροι α, β παντὸς κλάσματος ἴσου πρὸς τὸ $\frac{5}{8}$ εἶναι ἰσάκεις πολλαπλάσια τῶν ὅρων τοῦ $\frac{5}{8}$.
 ἴσα δὲν δύνανται νὰ εἶναι μικρότεροι, ἐπομένως οὐδὲν ὑπάρχει κλάσμα ἴσον τῷ $\frac{5}{8}$ καὶ ἔχον ὅρους μικροτέρους.

Πόρισμα 1ον.

154. Ἐὰν δύο ἀνάγωγα κλάσματα εἶναι ἴσα, καὶ οἱ ἀριθμηταὶ αὐτῶν θὰ εἶναι ἴσοι καὶ οἱ παρονομασταὶ ὡσαύτως ἴσοι.

Διότι, ἂν τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{5}{8}$, θὰ εἶναι
 $\alpha = 5 \times \pi$ καὶ $\beta = 8 \times \pi$.

διὰ νὰ εἶναι δὲ καὶ τοῦτο ἀνάγωγον, ἀνάγκη ὁ π (ὅστις εἶναι κοινὸς διαιρέτης τῶν ὅρων τοῦ α καὶ β) νὰ εἶναι 1· ἀλλὰ τότε εἶναι $\alpha = 5$ καὶ $\beta = 8$.

Πόρισμα 2ον.

155. Πάντα τὰ ἴσα ἀλλήλοις κλάσματα προκύπτουσιν ἐξ ἑνὸς ἀναγώγου κλάσματος, ἔὰν ἀμφότεροι οἱ ὅροι αὐτοῦ πολλαπλασιασθῶσιν ἑφ' ἑκαστον τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 4, ...

Τροπή ἑτερώνυμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα.

156. Ὅμώνυμα λέγονται ὅσα κλάσματα ἔχουσι τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, τουτέστιν ὅσα γίνονται ἐκ τῆς αὐτῆς κλασματικῆς μοδος· οἷον $\frac{5}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6}$ κτλ.

Ἑτερώνυμα δὲ λέγονται, τὰ ἔχοντα διαφόρους παρονομαστές, τουτέστιν ὅσα γίνονται ἐκ διαφόρων κλασματικῶν μονάδων, οἷον $\frac{3}{5}, \frac{2}{9}$ κτλ.

157. Ἐχοντες ἑτερώνυμα κλάσματα δυνάμεθα νὰ εὗρωμεν ἄλλα ἴσα πρὸς τὰ δοθέντα (ἐν πρὸς ἐν) καὶ ὁμώνυμα· τοῦτο λέγεται τροπή τῶν ἑτερώνυμων εἰς ὁμώνυμα ἢ ἀναγωγή εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν.

Ἡ τροπή αὕτη στηρίζεται ἐπὶ τοῦ θεωρήματος τοῦ ἐδ. 150 καὶ γίνεται κατὰ τοὺς ἑξῆς κανόνας.

1^{ος}) Διὰ νὰ τρέψωμεν δύο ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα, πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ὁρους ἑκατέρου ἐξ αὐτῶν ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ ἄλλου.

Διότι τὰ οὕτω προκύπτοντα κλάσματα εἶναι ἴσα πρὸς τὰ δοθέντα ἕκαστον πρὸς τὸ ἐξ οὗ προέκυψεν (ἐδ. 150), ἔχουσι δὲ καὶ τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, τουτέστι τὸ γινόμενον τῶν δύο παρονομαστῶν τῶν δοθέντων κλασμάτων.

Ἐστωσαν ὥς παράδειγμα τὰ κλάσματα $\frac{2}{5}$ καὶ $\frac{3}{8}$.

Ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τὸν προηγούμενον κανόνα, εὐρίσκομεν

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \times 8}{5 \times 8} = \frac{16}{40},$$

$$\frac{3}{8} = \frac{3 \times 5}{8 \times 5} = \frac{15}{40}.$$

2^{ος}) Διὰ νὰ τρέψωμεν ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα, ὅσαδήποτε καὶ ᾗ εἶναι, πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ὁρους ἑκάστου ἐξ αὐτῶν ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν πάντων τῶν λοιπῶν.

Διότι διὰ τοῦ τρόπου τούτου ἐξ ἑκάστου κλάσματος προκύπτει ἄλλο ἴσον, ἔχουσι δὲ τὰ νέα κλάσματα πάντα τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, τουτέστι τὸ γινόμενον πάντων τῶν δοθέντων παρονομαστῶν.

Ἔστωσαν ὡς παράδειγμα τὰ κλάσματα $\frac{4}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{8}$.

Ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τὸν κανόνα, εὐρίσκομεν

$$\begin{array}{rcl} \frac{4}{5} & = & \frac{4 \times 7 \times 8}{5 \times 7 \times 8} = \frac{224}{280} \\ \frac{3}{7} & = & \frac{3 \times 5 \times 8}{7 \times 5 \times 8} = \frac{120}{280} \\ \frac{1}{8} & = & \frac{1 \times 5 \times 7}{8 \times 5 \times 7} = \frac{35}{280} \end{array}$$

3ος) Ἐὰν ἔχωμεν κοινόν τι πολλαπλάσιον τῶν δοθέντων παρονομασιῶν, δυνάμεθα νὰ καταστήσωμεν αὐτὸ κοινὸν παρονομαστήν. Πρὸς τοῦτο διαιροῦμεν αὐτὸ δι' ἐνὸς ἐκάστου τῶν παρονομασιῶν καὶ ἐπὶ τὸ εὐρεθὲν πηλίκον πολλαπλασιάζομεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος, ὅπερ ἔχει τὸν παρονομαστήν τοῦτον.

Ἔστωσαν ὡς παράδειγμα τὰ κλάσματα $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{9}, \frac{7}{12}$.

Ὁ ἀριθμὸς 36 εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν 2, 3, 9 καὶ 12· ἐφαρμόζοντες λοιπὸν τὸν κανόνα τοῦτον εὐρίσκομεν

$$\begin{array}{rcl} 36: 2=18 & \frac{1}{2} & = \frac{1 \times 18}{2 \times 18} = \frac{18}{36} \\ 36: 3=12 & \frac{2}{3} & = \frac{2 \times 12}{3 \times 12} = \frac{24}{36} \\ 36: 9=4 & \frac{5}{9} & = \frac{5 \times 4}{9 \times 4} = \frac{20}{36} \\ 36: 12=3 & \frac{7}{12} & = \frac{7 \times 3}{12 \times 3} = \frac{21}{36} \end{array}$$

Συμβαίνει δὲ νὰ ἔχωσι πάντα τὰ νέα κλάσματα τὸν αὐτὸν παρονομαστήν 36, διότι ἕκαστος ἐκ τῶν δοθέντων παρονομασιῶν ἐπολλαπλασιάσθη ἐπὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως, τῆς ὁποίας αὐτὸς εἶναι διαιρέτης, διαιρετέος δὲ ὁ 36 (ἔδ. 57).

Ὅταν εἷς ἐκ τῶν δοθέντων παρονομασιῶν εἶναι διαιρετὸς διὰ τῶν λοιπῶν, καθιστῶμεν αὐτὸν κοινὸν παρονομαστήν κατὰ τὸν ἄνωτέρω εἰρημένον τρόπον.

Ἔστωσαν ὡς παράδειγμα τὰ κλάσματα $\frac{3}{5}, \frac{2}{15}$.

Ἐπειδὴ ὁ παρονομαστής 15 εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν 5 καὶ 15, ἐφαρμόζομεν τὸν κανόνα καὶ εὐρίσκομεν

$$15: 5=3 \quad \frac{3}{5} = \frac{3 \times 3}{5 \times 3} = \frac{9}{15},$$

$$\frac{2}{15} = \frac{2}{15}.$$

Ὅμοίως εὐρίσκομεν ὅτι τὰ κλάσματα $\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{24}$

τρέπονται εἰς εἴκοστὰ τέταρτα

$$\frac{4}{24}, \frac{16}{24}, \frac{6}{24}, \frac{5}{24}.$$

Σημείωσις. Εἰς τὸν κανόνα τοῦτον περιλαμβάνονται καὶ οἱ δύο προηγούμενοι, διότι τὸ γινόμενον πάντων τῶν παρονομαστῶν εἶναι προφανῶς κοινὸν πολλαπλάσιον αὐτῶν· τοῦτο δὲ γίνεται κοινὸς παρονομαστής κατὰ τὸν πρῶτον καὶ κατὰ τὸν δεῦτερον κανόνα.

ΘΕΩΡΗΜΑ

158. Ἐὰν τὰ δοθέντα κλάσματα εἶναι ἀνάγωγα, ὁ ἐλάχιστος κοινὸς παρονομαστής, τὸν ὁποῖον δύνανται νὰ ἀποκλήσωσιν, εἶναι τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν αὐτῶν.

Ἔστωσαν τὰ κλάσματα $\frac{1}{5}, \frac{3}{8}, \frac{5}{12}, \frac{7}{18}$, ἅτινα εἶναι ἀνάγωγα καὶ τῶν ὁποίων οἱ παρονομασταὶ 5, 8, 12, 18 ἔχουσιν ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τὸν 360· λέγω ὅτι δὲν δύνανται νὰ γίνωσιν ὁμόνυμα μετὰ παρονομαστήν μικρότερον τοῦ 360.

Ἀπόδειξις. Διότι πᾶν κλάσμα ἴσον μετὰ τὸ ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{1}{5}$ θὰ ἔχη παρονομαστήν πολλαπλάσιόν τι τοῦ 5 (ἐδ. 155). Ὅμοίως πᾶν κλάσμα ἴσον τῷ ἀναγώγῳ $\frac{3}{8}$ θὰ ἔχη παρονομαστήν πολλαπλάσιον τοῦ 8 καὶ οὕτω καθεξῆς. Ὡστε ὁ κοινὸς παρονομαστής, τὸν ὁποῖον θὰ ἔχωσι τὰ ἴσα πρὸς τὰ δοθέντα κλάσματα, θὰ εἶναι ἐξ ἀνάγκης κοινόν τι πολλαπλάσιον τῶν δοθέντων παρονομαστῶν 5, 8, 12, 18· ἂν λοιπὸν θέλωμεν τὸν ἐλάχιστον κοινὸν παρονομαστήν, θὰ λάβωμεν τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον 360.

Παρατήρησις.

Η τροπή τῶν ἑτερονύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα χρησιμεύει 1) εἰς τὴν πρόσθεσιν καὶ εἰς τὴν ἀφαίρεσιν αὐτῶν, ὥς ἀμέσως θὰ ἴδωμεν, καὶ 2) εἰς τὸ νὰ διακρίνωμεν εὐκόλως τὴν ἰσότητα ἢ τὴν ἀνισότητα αὐτῶν, διότι ἐκ δύο κλασμάτων, ἔχοντων τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, μεγαλύτερον εἶναι τὸ ἔχον τὸν μεγαλύτερον ἀριθμητήν.

Π Ρ Α Ξ Ε Ι Σ

Ἐπὶ τῶν ἀκεραίων καὶ κλασματικῶν ἀριθμῶν.

Α΄) ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

159. Ἡ πρόθεσις εἶναι προᾶξις, δι' ἧς σχηματίζομεν ἓνα ἀριθμὸν ἐκ πασῶν τῶν μονάδων, τὰς ὁποίας ἔχουσι δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοί.

Αἱ μονάδες, τὰς ὁποίας ἔχουσιν οἱ ἀριθμοί, δύνανται νὰ εἶναι ἢ ἀκέραιαι ἢ κλασματικά.

Ἀθροισμα ἢ κεφάλαιον λέγεται καὶ πάλιν τὸ ἐξαγόμενον τῆς προσθέσεως, οἱ δὲ εἰς πρόσθεσιν δοθέντες ἀριθμοὶ λέγονται προσθετέοι.

Διὰ νὰ προστεθῶσι δύο ἢ περισσότερα κλάσματα, πρέπει νὰ εἶναι ὁμώνυμα, ἥτοι νὰ γίνωνται πάντα ἐκ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς κλασματικῆς μονάδος. Διὰ τοῦτο, ὅταν ἔχωμεν νὰ προσθέσωμεν κλάσματα, ἐὰν δὲν εἶναι ὁμώνυμα, τρέπομεν αὐτὰ πρῶτον εἰς ὁμώνυμα.

Ἡ πρόσθεσις τῶν κλασμάτων ἐκτελεῖται τότε κατὰ τὸν ἑξῆς κανόνα.

160. Διὰ νὰ προσθέσωμεν κλάσματα ὁμώνυμα, προσθέτομεν μόνον τοὺς ἀριθμητὰς των καὶ ὑπὸ τὸ ἄθροισμα γράφομεν τὸν κοινὸν παρονομαστήν.

Ἄς ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν τὰ κλάσματα

$$\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}.$$

Εἶναι φανερόν ὅτι 1 ὄγδοον καὶ 3 ὄγδοα καὶ 5 ὄγδοα κάμνουν $1+3+5$, ἥτοι 9 ὄγδοα (καθὼς 1 βιβλίον καὶ 3 βιβλία καὶ 5 βιβλία κάμνουν 9 βιβλία), ὥστε

$$\frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{5}{8} = \frac{9}{8} = 1 + \frac{1}{8} \quad (\text{ἐδ. 145}).$$

Παραδείγματα.

1) Νὰ προστεθῶσι τὰ δύο κλάσματα $\frac{1}{5}$ καὶ $\frac{1}{6}$.

$$\begin{array}{r} \text{τρέπω αὐτὰ πρῶτον εἰς ὁμώνυμα καὶ εὐρίσκω} \\ \frac{1}{5} = \frac{6}{30} \\ \frac{1}{6} = \frac{5}{30} \end{array}$$

καὶ προσθέτων εὐρίσκω

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{11}{30}$$

2) Νὰ προστεθῶσι τὰ κλάσματα $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$.

τρέπω αὐτὰ πρῶτον εἰς ὁμώνυμα καὶ εὐρίσκω

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

ὅθεν προσθέτων εὐρίσκω

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1.$$

Σημείωσις. Τὸ ἄθροισμα ἀκεραίου καὶ κλάσματος εἶναι μικτὸς ἀριθμὸς, οἷον $1 + \frac{1}{2}$ γράφεται ὡς ἐξῆς $1\frac{1}{2}$.

Πρόσθεσις τῶν μικτῶν.

161. Διὰ τὰ προσθέσωμεν μικτοὺς ἀριθμοὺς, προσθέτομεν χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα καὶ ἔπειτα ἐνώνομεν τὰ δύο ἀθροίσματα.

Ἄς ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν τοὺς μικτοὺς ἀριθμοὺς

$$3\frac{5}{8},$$

$$10\frac{2}{9}.$$

Οἱ ἀκέραιοι χωριστὰ προστιθέμενοι δίδουσι 13, τὰ δὲ κλάσματα γίνονται κατὰ πρῶτον ὁμώνυμα.

$$\frac{5}{8} = \frac{45}{72}, \quad \frac{2}{9} = \frac{16}{72}.$$

ἔπειτα προστιθέμενα δίδουσιν ἄθροισμα $\frac{61}{72}$.

ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν δεδομένων μικτῶν εἶναι $13 \frac{61}{72}$,

διότι τὸν ἀριθμὸν τοῦτον ἐσχημάτισαμεν ἐνώσαντες τὰς μονάδας των. Ὅμοίως, ἂν ἔχωμεν νὰ προσθέσωμεν τοὺς μικτοὺς

$$2 \frac{1}{2} \quad \text{καὶ} \quad 5 \frac{5}{6},$$

τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν ἀκεραίων εἶναι 7,

τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν κλασμάτων εἶναι $\frac{8}{6} = 1 \frac{2}{6} = 1 \frac{1}{3}$.

ἄρα τὸ ἄθροισμα τῶν δοθέντων μικτῶν εἶναι $7 + 1 + \frac{1}{3} = 8 \frac{1}{3}$.

Ὅμοίως εὐρίσκεται ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν μικτῶν

$$5 \frac{1}{2} \quad \text{καὶ} \quad 6 \frac{2}{3} \quad \text{καὶ} \quad 15 \frac{5}{6} \quad \text{εἶναι} = 28.$$

Σημειώσεις. Διὰ νὰ προσθέσωμεν ἀκέραιον καὶ μικτόν, προσθέτομεν τὸν ἀκέραιον εἰς τὸν ἀκέραιον τοῦ μικτοῦ,

$$\text{oἷον} \quad 5 \frac{1}{6} + 2 = 7 \frac{1}{6}.$$

Διὰ νὰ προσθέσωμεν κλάσμα καὶ μικτόν, προσθέτομεν τὸ κλάσμα εἰς τὸ κλάσμα τοῦ μικτοῦ·

$$\text{oἷον} \quad 5 \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 5 + 1 = 6, \quad 3 \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 3 \frac{1}{2}.$$

■ Παρατηρήσεις.

Ἡ πρόσθεσις ὅσωνδήποτε ἀριθμῶν εἴτε ἀκεραίων εἴτε κλασματικῶν ἀνάγεται πάντοτε εἰς πρόσθεσιν ἀκεραίων ἀριθμῶν. Διότι πάντες οἱ προσθετέοι δύνανται νὰ γίνωσι κλάσματα καὶ μάλιστα ὁμώνυμα, τότε δὲ ἡ πρόσθεσις αὐτῶν καταντᾷ πρόσθεσις τῶν ἀριθμητῶν των. Διὰ τοῦτο ἡ θεμελιώδης ιδιότης τῆς προσθέσεως τῶν ἀκεραίων (ἐδ. 23) μένει ἀληθής, οἷοιδήποτε ἀριθμοὶ καὶ ἂν εἶναι οἱ προσθετέοι, ἐπομένως μένουσιν ἀληθεῖς καὶ πᾶσαι αἱ ἐξ αὐτῆς πηγάζουσιν ιδιότητες καὶ ἀποδεικνύονται ἐξ αὐτῆς ἀπαραλλάκτως (ἐδ. 23, 1, 2, 3).

Β') ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

Ὅρισμοί.

162. Ἡ ἀφαίρεσις εἶναι προᾶξις, δι' ἧς ἐλαττοῦμεν δοθέντα ἀριθμὸν κατὰ μονάδας, ὅσας ἔχει ἄλλος δοθεὶς ἀριθμός.

Αἱ μονάδες δυνατόν νὰ εἶναι ἢ ἀκέραιαι ἢ κλασματικάι.

Ὁ πρῶτος τῶν δεδομένων ἀριθμῶν λέγεται καὶ πάλιν μειωτέος, ὁ δὲ δεύτερος ἀφαιρετέος, τὸ δὲ ἐξαγόμενον τῆς ἀφαιρέσεως λέγεται ὑπόλοιπον ἢ διαφορά.

Ἐὰν ἐνώσωμεν τὰς μονάδας τοῦ ἀφαιρετέου καὶ τοῦ υπολοίπου, θὰ ἀποτελέσωμεν προδήλως τὸν μειωτέον· ὅθεν ὁ μειωτέος εἶναι ἄθροισμα τοῦ ἀφαιρετέου καὶ τοῦ υπολοίπου.

Διὰ τοῦτο ἡ ἀφαίρεσις δύναται νὰ ὀρισθῇ ὡς ἐξῆς.

163. Ἡ ἀφαίρεσις εἶναι προᾶξις, δι' ἧς, δοθέντων δύο ἀριθμῶν, εὐρίσκεται τρίτος, ὅστις προστιθέμενος εἰς τὸν δεύτερον δίδει ὡς ἄθροισμα τὸν πρῶτον.

Ἀφαίρεσις κλασμάτων.

Διὰ νὰ ἀφαιρεθῇ κλάσμα ἀπὸ ἄλλον, πρέπει νὰ εἶναι ὁμώνυμον πρὸς αὐτό. Διὰ τοῦτο, ὅταν ἔχωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν κλάσμα ἀπὸ ἄλλον, ἐὰν δὲν εἶναι ὁμώνυμα, τρέπομεν πρῶτον αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα.

Ἡ ἀφαίρεσις γίνεται τότε κατὰ τὸν ἐξῆς κανόνα.

164. Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν κλάσμα ἀπὸ ἄλλον ὁμωνύμου, ἀφαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ ἀπὸ τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ μειωτέου καὶ ὑπὸ τὴν διαφορὰν γράφομεν τὸν κοινὸν παρονομαστήν.

Ἄς ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι ἔχομεν νὰ ἀφαιρέσωμεν $\frac{5}{12}$ ἀπὸ $\frac{7}{12}$. φανερόν εἶναι ὅτι, ἐὰν ἀπὸ 7 δωδέκατα ἀφαιρέσωμεν 5 δωδέκατα, θὰ μείνωσι 2 δωδέκατα (καθώς, ἐὰν ἀπὸ 7 μῆνας ἀφαιρέσωμεν 5 μῆνας, μένουσι 2 μῆνες).

$$\text{ἄρα} \quad \frac{7}{12} - \frac{5}{12} = \frac{2}{12} \text{ ἢ } = \frac{1}{6}.$$

Ἄς ὑποθέσωμεν δεύτερον ὅτι ἔχομεν νὰ ἀφαιρέσωμεν $\frac{1}{6}$ ἀπὸ τοῦ κλάσματος $\frac{1}{5}$.

Ἐπειδὴ τὰ κλάσματα ταῦτα εἶναι ἑτερόνυμα, τρέπομεν αὐτὰ πρῶτον εἰς ὁμώνυμα· καὶ ὁ μὲν ἀφαιρετέος $\frac{1}{6}$ γίνεται $\frac{5}{30}$, ὁ δὲ μειωτέος γίνεται $\frac{6}{30}$. ὥστε ἡ διαφορὰ εἶναι $\frac{1}{30}$,

$$\text{ἦτοι} \quad \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{6}{30} - \frac{5}{30} = \frac{1}{30}.$$

Ἀφαιρέσεις μικτῶν.

165. Διὰ τὴν ἀφαιρέσασθαι μικτὸν ἀπὸ μικτοῦ, ἀφαιροῦμεν χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα καὶ ἔπειτα ἐνοῦμεν τὰς δύο διαφοράς.

Παραδείγματος χάριν, ἂν ἔχωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν μικτὸν $2\frac{1}{3}$ ἀπὸ τοῦ μικτοῦ $7\frac{2}{5}$, ἀφαιροῦμεν τοὺς ἀκεραίους χωριστά, $7 - 2 = 5$. ἔπειτα τὰ κλάσματα $\frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{6}{15} - \frac{5}{15} = \frac{1}{15}$. ὥστε ἡ ζητουμένη διαφορὰ εἶναι $5\frac{1}{15}$.

166. Ἐὰν τὸ κλάσμα τοῦ ἀφαιρετέου εἶναι μεγαλύτερον τοῦ κλάσματος τοῦ μειωτέου, ἡ ἀφαίρεσις τῶν κλασμάτων δὲν γίνεται. Ἰνα ἄρῳμεν τὸ ἐμπόδιον τοῦτο, λαμβάνομεν μίαν ἀκεραίαν μονάδα τοῦ μειωτέου καὶ τὴν ἐνώνομεν μὲ τὸ κλάσμα αὐτοῦ, ἀφοῦ τρέψωμεν αὐτὴν εἰς κλάσμα ὁμώνυμόν.

Ἐάν, παραδείγματος χάριν, ἔχωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν $3\frac{1}{5}$ ἀπὸ $8\frac{2}{15}$ καὶ τρέψωμεν τὰ κλάσματα εἰς ὁμώνυμα, θὰ ἔχωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν $3\frac{3}{15}$ ἀπὸ $8\frac{2}{15}$, καὶ ἐπειδὴ τὸ κλάσμα $\frac{3}{15}$ (τοῦ ἀφαιρετέου) δὲν δύναται νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ $\frac{2}{15}$ (τοῦ μειωτέου), λαμβάνομεν μίαν ἀκεραίαν μονάδα τοῦ μειωτέου καὶ τρέπομεν αὐτὴν εἰς δέκατα πέμπτα· τότε θὰ ἔχωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν μικτὸν $3\frac{3}{15}$ ἀπὸ τοῦ $7 + \frac{15}{15} + \frac{2}{15}$, ἦτοι ἀπὸ τοῦ $7\frac{17}{15}$. Ἀφαιροῦντες τότε κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα εὐρίσκομεν ὑπόλοιπον $4\frac{14}{15}$.

Ὅμοίως εὐρίσκομεν

$$8\frac{1}{3} - 4\frac{4}{5} = 3\frac{8}{15},$$

$$12\frac{1}{2} - 8\frac{2}{3} = 3\frac{5}{6}.$$

Τὸ αὐτὸ κάμνομεν, καὶ ὅταν ἔχωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν μικτὸν ἀπὸ ἀκεραίου (ἢ καὶ κλάσμα ἀπὸ ἀκεραίου)· οἷον

$$5 - 2\frac{1}{3} = 4 + \frac{3}{3} - 2\frac{1}{3} = 2\frac{2}{3}. \quad 8 - \frac{2}{7} = 7 + \frac{7}{7} - \frac{2}{7} = 7\frac{5}{7}.$$

Σημειώδεις. Ἐὰν ἀπὸ μικτοῦ ἔχωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀκέραιον, ἀφαιρούμεν τοῦτον ἀπὸ τοῦ ἀκεραίου μέρους τοῦ μικτοῦ· οἷον

$$5\frac{1}{3} - 2 = 3\frac{1}{3}. \quad 8\frac{2}{5} - 8 = \frac{2}{5}.$$

Ἐὰν δὲ ἀπὸ μικτοῦ ἔχωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν κλάσμα, ἀφαιρούμεν αὐτὸ ἀπὸ τοῦ κλάσματος τοῦ μικτοῦ·

οἷον $2\frac{1}{5} - \frac{1}{8} = 2\frac{8}{40} - \frac{5}{40} = 2\frac{3}{40}.$

Ὅμοίως $4\frac{1}{6} - \frac{1}{3} = 3 + \frac{6}{6} + \frac{1}{6} - \frac{2}{6} = 3\frac{5}{6}.$

Παρατήρησις.

Καὶ ἡ ἀφαίρεσις οἷωνδήποτε ἀριθμῶν ἀνάγεται, ὡς εἶδομεν ἂνω-τέρω, εἰς τὴν ἀφαίρεσιν τῶν ἀκεραίων. Διὰ τοῦτο αἱ γενικαὶ ιδιότητες τῆς ἀφαιρέσεως τῶν ἀκεραίων (ἐδ. 29) ἀληθεύουσιν καὶ περὶ πάσης ἀφαιρέσεως.

Γενίκευσις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

167. Μέχρι τοῦδε ὁ μὲν πολλαπλασιασμός ἐσήμαινε τὴν ἐπανάληψιν ἑνὸς ἀριθμοῦ, ἡ δὲ διαίρεσις τὸν μερισμὸν ἑνὸς ἀριθμοῦ εἰς ἴσα μέρη· αὗται δὲ εἶναι αἱ πρῶται, αἱ φυσικαί, τῶν πράξεων τούτων ἔννοιαι.

Ἄλλ' ἐκ τῆς λύσεως τῶν προβλημάτων ὀδηγούμενοι οἱ ἄνθρωποι ἔφθασαν εἰς τὴν ἰδέαν νὰ γενικεύσωσι τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, δηλαδὴ νὰ δώσωσιν εἰς τὸ ὄνομα πολλαπλασιασμός ἄλλην σημασίαν γενικωτέραν ἐκείνης, τὴν ὁποίαν εἶχε πρὶν.

Εἰς τὴν γενίκευσιν ταύτην φθάνομεν ὡς ἑξῆς. Ἄν ἔχωμεν νὰ λύσωμεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα· «πόσον ἀξίζει 5 ὀκάδες ἑξ ἑνὸς πράγματος, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκά ἀξίζει 12 δραχμαίς;» φανερόν εἶναι ὅτι θὰ ἐπαναλάβωμεν τὸν 12 5 φορές· τουτέστι πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος θὰ κάμωμεν

πολλαπλασιασμόν, 12×5 . Ἄλλ' ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν ὀκάδων ἀπὸ 5 γίνῃ $5 \frac{1}{2}$ ἢ $\frac{5}{8}$, πάλιν θέλομεν ἢ πράξεις, δι' ἧς λύεται τὸ πρόβλημα, νὰ λέγηται *πολλαπλασιασμός*, διὰ νὰ ἔχωμεν τὸν ἐξῆς γενικὸν κανόνα.

Ὅταν ἡξεύρωμεν τὴν ἀξίαν μιᾶς μονάδος ἐνὸς πράγματος, διὰ νὰ εὗρωμεν τὴν ἀξίαν ὁσωνδήποτε μονάδων τοῦ αὐτοῦ πράγματος, πρέπει νὰ κάμωμεν *πολλαπλασιασμόν* (τουτέστι νὰ *πολλαπλασιάσωμεν* τὴν ἀξίαν τῆς μιᾶς μονάδος ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων).

Διὰ νὰ εὗρω πόσον ἀξίζουν τὰ $\frac{5}{8}$ τῆς ὀκάς, σκέπτομαι ὡς ἐξῆς.

Ἀφοῦ ἡ ὅλη ὀκά ἀξίζει

12 δραχμῆς,

τὸ $\frac{1}{8}$ αὐτῆς θὰ ἀξίξῃ τὸ ὄγδοον τῶν 12 δρ., ἥτοι $\frac{12}{8}$ τῆς δραχμῆς (κατὰ τὸ ἐδ. 148).

καὶ ἐπομένως τὰ 5 ὄγδοα αὐτῆς θὰ ἀξίζουν $\frac{12}{8} \times 5$ ἢ $\frac{12 \times 5}{8}$ δρ.

(κατὰ τὸ ἐδ. 151),

Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος ἔγιναν τώρα δύο πράξεις: πρῶτον μὲν ἐμερίσθη ὁ ἀριθμὸς 12 εἰς ὅκτὼ ἴσα μέρη, ἔπειτα δὲ ἐλήφθη τὸ ἓν μέρος 5 φορές, ἥτοι ἐπολλαπλασιάσθη ἐπὶ 5. Αἱ δύο αὗται πράξεις ὁμοῦ πρέπει νὰ ὀνομασθῶσι τώρα *πολλαπλασιασμός* τοῦ ἀριθμοῦ 12

ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{5}{8}$ (κατὰ τὴν νέαν, τὴν γενικὴν σημασίαν τῆς λέξεως),

διὰ νὰ ἀληθεύῃ ὁ ἀνωτέρω εἰρημένος κανὼν, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν ὀκάδων εἶναι *κλασματικός*.

168. Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι ὁ *πολλαπλασιασμός* οἰονδήποτε ἀριθμοῦ ἐπὶ κλάσμα πρέπει νὰ ὀρισθῇ ὡς ἐξῆς.

Πολλαπλασιασμός ἀριθμοῦ ἐπὶ κλάσμα εἶναι ἐπανάληψις μέρους τινὸς τοῦ ἀριθμοῦ.

Ποῖον μέρος τοῦ *πολλαπλασιαστέου* θὰ ἐπαναληφθῇ, δεικνύει ὁ *παρονομαστής* τοῦ κλάσματος, ποσάκις δὲ θὰ ἐπαναληφθῇ, δεικνύει ὁ *ἀριθμητής* αὐτοῦ.

Ὡστε γενικῶς ὁ *πολλαπλασιασμός* ἀριθμοῦ ἐπὶ ἄλλον οἰονδήποτε (ἀκέραιον ἢ κλασματικόν) πρέπει νὰ ὀρισθῇ ὡς ἐξῆς.

169. Ὁ *πολλαπλασιασμός* εἶναι *πράξις*, δι' ἧς ἐπαναλαμβάνομεν

ἓνα ἀριθμὸν ἢ μέρος τι αὐτοῦ καὶ σχηματίζομεν ἐξ αὐτοῦ ἄλλον ἀριθμὸν.

Ὁ ἀριθμὸς, τοῦ ὁποίου μέρος ἢ τὸ ὅλον θὰ ἐπαναλάβωμεν, λέγεται *πολλαπλασιαστέος*, ὁ δὲ ἀριθμὸς, ὅστις μᾶς δεικνύει ποῖα καὶ πόσα μέρη τοῦ *πολλαπλασιαστέου* θὰ λάβωμεν, διὰ τὰ σχηματίζωμεν τὸ ἐξαγόμενον, λέγεται *πολλαπλασιαστής*, τὸ δὲ ἐξαγόμενον τοῦ *πολλαπλασιασμοῦ* λέγεται *γινόμενον*.

Σχηματίζομεν δὲ τὸ γινόμενον, ὅταν δοθῶσιν οἱ ἀριθμοί, κατὰ τὸν ἐξῆς κανόνα.

170. Δι' ἐκάστην ἀκεραίαν μονάδα τοῦ *πολλαπλασιαστοῦ* λαμβάνομεν ὅλον τὸν *πολλαπλασιαστέον*, δι' ἐκάστην δὲ *κλασματικὴν* λαμβάνομεν τὸ ὁμώνυμον μέρος αὐτοῦ.

οἷον $\alpha \times 4$ σημαίνει $\alpha + \alpha + \alpha + \alpha$, διότι $4 = 1 + 1 + 1 + 1$.

$\alpha \times \frac{2}{3}$ σημαίνει $\frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha}{3}$, διότι $\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$.

ἐνθα α εἶναι οἷοσδήποτε ἀριθμὸς καὶ $\frac{\alpha}{3}$ τὸ τρίτον αὐτοῦ.

Ὁ *πολλαπλασιασμός* καταντᾷ *μερισμός*, ὅταν ὁ *πολλαπλασιαστής* εἶναι μία *κλασματικὴ μονάς*.

Διότι κατὰ τὸν ὁρισμὸν εἶναι

$$12 \times \frac{1}{4} = \frac{12}{4} = 3.$$

Συμειώσεις. Τὸ γινόμενον εἶναι πάντοτε ὁμοειδὲς μὲ τὸν *πολλαπλασιαστέον*, διότι σύγκειται ἐξ αὐτοῦ ἢ ἐκ τινος μέρους αὐτοῦ, ὁ δὲ *πολλαπλασιαστής* θεωρεῖται ὡς ἀφηρημένος ἀριθμὸς.

Παρατήρησις.

Κατὰ τὸν νέον τοῦτον *πολλαπλασιασμὸν* ὁ ἀριθμὸς, ὅστις *πολλαπλασιάζεται*, αὐξάνει μὲν, ἂν ὁ *πολλαπλασιαστής* εἶναι *μεγαλύτερος* τῆς μονάδος 1, ἐλαττοῦται δέ, ἂν ὁ *πολλαπλασιαστής* εἶναι *μικρότερος* αὐτῆς (μένει δὲ ὁ αὐτός, ἂν *πολλαπλασιασθῇ* ἐπὶ 1).

Καὶ τῷ ὄντι· διὰ τὰ *πολλαπλασιάσω* τὸν 8 ἐπὶ $\frac{5}{3}$, πρέπει νὰ λάβω τὸ τρίτον τοῦ 8 (ἦτοι τὸ $\frac{8}{3}$) πέντε φορές, ἀλλὰ τὸ τρίτον τοῦ 8, ὅταν ληφθῇ τρεῖς φορές, δίδει τὸν 8· ἄρα, ὅταν ληφθῇ 5 φορές, θὰ δώσῃ περισσότερον τοῦ 8. Διὰ τὰ *πολλαπλασιάσω* δὲ τὸν 8 ἐπὶ $\frac{3}{5}$, πρέπει

να λάβω τρεῖς φορές τὸ πέμπτον τοῦ 8· ἀλλὰ τὸ πέμπτον τοῦ 8 πρέπει νὰ ληφθῇ πέντε φορές διὰ νὰ δώσῃ τὸν 8· ἄρα, ὅταν ληφθῇ 3 φορές μόνον, θὰ δώσῃ ὀλιγώτερον τοῦ 8.

Πολλαπλασιασμός ἀκέραιου ἐπὶ κλάσμα.

171. Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀκέραιον ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος καὶ ὑπὸ τὸ γινόμενον γράφομεν παρονομασίην τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀκέραιον 20 ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{3}{8}$.

Κατὰ τὸν ὅρισμόν πρέπει νὰ εὗρωμεν τὸ ὄγδοον τοῦ 20 καὶ νὰ λάβωμεν αὐτὸ τρίς.

Ἀλλὰ τὸ ὄγδοον τοῦ 20 εἶναι $\frac{20}{8}$ (ἐδ. 148)

καὶ τὸ τριπλάσιον τοῦ $\frac{20}{8}$ εἶναι $\frac{20 \times 3}{8}$ (ἐδ. 151).

ὅθεν $20 \times \frac{3}{8} = \frac{20 \times 3}{8}$ ἢ $\frac{60}{8}$, ἥτοι $7\frac{4}{8}$ ἢ $7\frac{1}{2}$.

Σημείωσις. Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι τὰ $\frac{3}{8}$ τοῦ 20 καὶ τὸ $\frac{1}{8}$ τοῦ τριπλασίου τοῦ 20 εἶναι εἷς καὶ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς, τοῦτο δὲ ἀληθεύει γενικῶς περὶ παντὸς ἀριθμοῦ.

Πολλαπλασιασμός κλάσματος ἐπὶ κλάσμα.

172. Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν κλάσμα ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιάζομεν ἀριθμητὴν ἐπ' ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν ἐπὶ παρονομαστὴν, καὶ τὸ μὲν γινόμενον τῶν ἀριθμῶν θέτομεν ἀριθμητὴν, τὸ δὲ γινόμενον τῶν παρονομαστικῶν παρονομαστὴν.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ κλάσμα $\frac{4}{5}$ ἐπὶ $\frac{3}{7}$.

Κατὰ τὸν ὅρισμόν πρέπει νὰ εὗρωμεν τὸ ἑβδομον τοῦ $\frac{4}{5}$ καὶ νὰ λάβωμεν αὐτὸ τρίς.

Τὸ ἑβδομον τοῦ $\frac{4}{5}$ εἶναι $\frac{4}{5 \times 7}$ (ἐδ. 152),

τὸ δὲ τριπλάσιον τοῦ $\frac{4}{5 \times 7}$ εἶναι $\frac{4 \times 3}{5 \times 7}$ (ἐδ. 151).

ἄρα εἶναι $\frac{4}{5} \times \frac{3}{7} = \frac{4 \times 3}{5 \times 7}$, ἥτοι $\frac{12}{35}$.

Παρατήρησις.

Ἐκ τοῦ ἐξαγομένου τούτου γίνεται ἀμέσως φανερόν ὅτι εἶναι

$$\frac{4}{5} \times \frac{3}{7} = \frac{3}{7} \times \frac{4}{5}.$$

Ὡσαύτως εἶναι $20 \times \frac{3}{8} = \frac{3}{8} \times 20$.

ὥστε καὶ ὁ νέος πολλαπλασιασμός ἔχει τὴν ἀρχικὴν ιδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἀκεραίων.

Σημείωσις. Εἰς τὸν κανόνα τοῦτον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν κλασμάτων περιλαμβάνονται καὶ οἱ κανόνες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ κλάσματος ἐπὶ ἀκέραιον (ἐδ. 151) καὶ ἀκεραίου ἐπὶ κλάσμα (ἐδ. 171). Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ παριστῶνται οἱ ἀκέραιοι ὡς κλάσματα ἔχοντα παρονομαστὴν τὴν μονάδα 1.

Καὶ τῷ ὄντι εἶναι $5 \times \frac{7}{9} = \frac{5}{1} \times \frac{7}{9} = \frac{5 \times 7}{1 \times 9} = \frac{5 \times 7}{9}$.

$$\frac{8}{15} \times 3 = \frac{8}{15} \times \frac{3}{1} = \frac{8 \times 3}{15 \times 1} = \frac{8 \times 3}{15}.$$

Πολλαπλασιασμός μικτοῦ.

173. Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν μικτὸν ἐπὶ οἷονδήποτε ἀριθμόν, πολλαπλασιάζομεν χωριστὰ τὸ ἀκέραιον μέρος του καὶ χωριστὰ τὸ κλάσμα του καὶ ἔπειτα ἐνοῦμεν τὰ δύο γινόμενα.

Ἐπειδὴ ὁ πολλαπλασιαστὴς δύναται νὰ εἶναι ἢ ἀκέραιος ἢ κλασματικός, διακρίνομεν δύο περιπτώσεις.

1) Ἐὰν ὑποθέσωμεν κατὰ πρῶτον ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν μικτὸν $7\frac{5}{8}$ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον 4· τὸ γινόμενον θὰ εἶναι

$$\left(7\frac{5}{8}\right) + \left(7\frac{5}{8}\right) + \left(7\frac{5}{8}\right) + \left(7\frac{5}{8}\right)$$

ἢ $7 + 7 + 7 + 7 + \frac{5}{8} + \frac{5}{8} + \frac{5}{8} + \frac{5}{8},$

ἥτοι $7 \times 4 + \frac{5}{8} \times 4.$

2) Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν μικτὸν $7\frac{5}{8}$ ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{2}{3}$.

κατὰ τὸν γενικὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ πρέπει νὰ εὔ-
 το τρίτον τοῦ μικτοῦ $7\frac{5}{8}$ καὶ νὰ λάβωμεν τοῦτο δῖς.

ἀλλὰ τὸ τρίτον τοῦ μικτοῦ $7\frac{5}{8}$ εἶναι $\frac{7}{3} + \frac{5}{8 \times 3}$, διότι τοῦτο τρεῖς

λαμβάνομενον, ἦτοι ἐπὶ 3 πολλαπλασιαζόμενον, κατὰ τὰ ἀνω-
 ῖδει τὸν μικτὸν $7 + \frac{5}{8}$. Τὸ δὲ διπλάσιον τοῦ $\frac{7}{3} + \frac{5}{8 \times 3}$ εἶναι

$$\frac{7 \times 2}{3} + \frac{5 \times 2}{8 \times 3}.$$

δὲ εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ ἀκεραίου μέρους 7 καὶ τὸ γινόμενον
 λασματικοῦ μέρους $\frac{5}{8}$ ἐπὶ τὸ $\frac{2}{3}$. ἄρα ἔχομεν

$$\left(7\frac{5}{8}\right) \times \frac{2}{3} = 7 \times \frac{2}{3} + \frac{5}{8} \times \frac{2}{3}.$$

Παρατηρήσεις.

τὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύεται καὶ ἡ ἐξῆς γινικωτέρα πρότασις.

4. Ἐάν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ἀριθμὸν, ἔαν ἔκα-
 τῶν προσθετέων πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον καὶ
 εἰς τὰ προκύπτοντα γινόμενα (παράβαλε ἐδ. 45, 2).

Παραδείγματος χάριν εἶναι

$$\left(3 + \frac{1}{8} + \frac{2}{7} + \frac{3}{19}\right) \times 8 = 24 + 1 + \frac{16}{7} + \frac{24}{19} = 29 + \frac{24}{35}.$$

$$\left(5 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9}\right) \times \frac{7}{8} = \frac{5 \times 7}{8} + \frac{2}{3} \times \frac{7}{8} + \frac{4}{9} \times \frac{7}{8}.$$

Πολλαπλασιασμὸς μικτοῦ ἐπὶ μικτόν.

75. Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο μικτούς, πολλαπλασιάζομεν

α) τοὺς δύο ἀκεραίους,

β) τὰ δύο κλάσματα,

γ) τὸν ἀκέραιον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ δευτέρου,

δ) τὸν ἀκέραιον τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ πρώτου

πειτα ἐνοῦμεν τὰ τέσσαρα ταῦτα γινόμενα.

ἔς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο μικτούς.

$$\left(4\frac{2}{5}\right) \times \left(8\frac{7}{10}\right).$$

Ἐπειδὴ ὁ πολλαπλασιαστὴς δύναται νὰ γίνη κλάσμα, θὰ ἔσῃ πολλαπλασιασμὸν μικτοῦ ἐπὶ κλασματικόν, καὶ διὰ τοῦτο θὰ εἶναι

$$\left(4\frac{2}{5}\right) \times \left(8\frac{7}{10}\right) = 4 \times \left(8\frac{7}{10}\right) + \frac{2}{5} \times \left(8\frac{7}{10}\right)$$

καὶ ἐπειδὴ ἡ τάξις τῶν παραγόντων εἶναι ἀδιάφορος ὡς πρὸς τὸ γινόμενον (ἐδ. 172, Παρ.), θὰ εἶναι

$$\left(4\frac{2}{5}\right) \times \left(8\frac{7}{10}\right) = \left(8\frac{7}{10}\right) \times 4 + \left(8\frac{7}{10}\right) \times \frac{2}{5}$$

καὶ ἐπομένως

$$\left(4\frac{2}{5}\right) \times \left(8\frac{7}{10}\right) = 8 \times 4 + \frac{7}{10} \times 4 + 8 \times \frac{2}{5} + \frac{7}{10} \times \frac{2}{5}$$

Τὰ τέσσαρα μερικὰ γινόμενα εἶναι

$$32\frac{28}{10} \quad \eta \quad 2\frac{8}{10} \qquad \frac{16}{5} \quad \eta \quad 3\frac{1}{5} \qquad \frac{14}{50}$$

ἄρα τὸ γινόμενον τῶν μικτῶν εἶναι $37 + \frac{8}{10} + \frac{1}{5} + \frac{14}{50}$, ἥτοι

$$37 + \frac{40}{50} + \frac{10}{50} + \frac{14}{50} \quad \eta \quad 38\frac{14}{50} \quad \eta \quad 38\frac{7}{25}$$

Σημείωσις. Ἐπειδὴ οἱ μικτοὶ τρέπονται εἰς κλάσματα, δύναται νὰ ἀποφύγη τὰς πράξεις τῶν μικτῶν, ἐὰν τρέπη αὐτοὺς πρὶν εἰσεῖναι εἰς τὰς πράξεις· ἀλλὰ τοῦτο εἶναι δυσκολόν· ὁθεν προτιμότερον εἶναι νὰ ἐκτελῶνται αἱ πράξεις τῶν μικτῶν ἀνωτέρω διελάβομεν.

Παρατήρησις.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύεται καὶ ἡ γενικωτέρα πρός

176. Ἐάν ἄθροισμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἄλλο ἄθροισμα (χωρὶς εὐρεθῶσιν), ἐὰν ἕκαστον τῶν μερῶν τοῦ πρώτου πολλαπλασιασθῇ ἕκαστον τῶν μερῶν τοῦ δευτέρου καὶ προστεθῶσι τὰ προκύπτοντα μενα (παράβαλε ἐδ. 50).

Παραδείγματος χάριν εἶναι

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2}{5} + 6 + \frac{7}{10}\right) \times \left(10 + \frac{5}{7}\right) = \\ & = \frac{2}{5} \times 10 + 6 \times 10 + \frac{7}{10} \times 10 + \frac{2}{5} \times \frac{5}{7} \times 6 + \frac{5}{7} + \frac{7}{10} \times \frac{5}{7} = \\ & = 4 + 60 + 7 + \frac{2}{7} + \frac{30}{7} + \frac{1}{2} = 76\frac{1}{14} \end{aligned}$$

Γινόμενον πολλῶν παραγόντων.

7. Τὸ γινόμενον πολλῶν ἀριθμῶν, ἐξ ὧν τινες ἢ καὶ πάντες κλασματικοί, ὁρίζεται ὡς καὶ εἰς τοὺς ἀκεραίους (ἐδ. 44) καὶ ὅτι οὗτοι ὁμοίως.

ἡμεῖς ὑποθέσωμεν ὅτι πρόκειται νὰ εὗρωμεν τὸ γινόμενον τῶν ἑξῆς

$$\frac{2}{3}, \quad \frac{3}{10}, \quad \frac{7}{8}, \quad \frac{1}{7}.$$

τὸ γινόμενον τῶν δύο πρώτων εἶναι

$$\frac{2 \times 3}{3 \times 10}$$

τὸ γινόμενον τούτου καὶ τοῦ τρίτου εἶναι

$$\frac{2 \times 3 \times 7}{3 \times 10 \times 8}$$

τὸ γινόμενον τούτου ἐπὶ τὸν τέταρτον εἶναι

$$\frac{2 \times 3 \times 7 \times 1}{3 \times 10 \times 8 \times 7}$$

καὶ τούτου βλέπομεν ὅτι

τὸ γινόμενον πολλῶν κλασμάτων παρίσταται ὡς κλάσμα ἔχον ἀριθμὸν μὲν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν, παρονομαστήν δὲ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν.

Ὁμοίως ἀληθεύει, καὶ ὅταν τινὲς τῶν παραγόντων εἶναι ἀκεραῖοι ἀριθμοί, νὰ γράφονται ὡς κλάσματα ἔχοντα παρονομαστήν τὴν μονάδα 1.

ἡμεῖς οὖν. Εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν κλασμάτων συμβαίνει ἐνίοτε ἀπλοποιήσεις, τὰς ὁποίας πρέπει νὰ κάμνωμεν.

ἡμεῖς οὖν παραδείγματος χάριν, εἰς τὸ ἀνωτέρω εὗρεθὲν γινόμενον, ἦτοι

$$\frac{2 \times 3 \times 7 \times 1}{3 \times 10 \times 8 \times 7}$$

ἐπειδὴ νὰ διαιρέσωμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους διὰ 3, ἔπειτα διὰ 7 καὶ ἔστωμεν οὕτω τὸ ἀπλούστερον κλάσμα

$$\frac{2 \times 1}{10 \times 8}$$

καὶ τούτου τοὺς ὅρους διαιρέσωμεν διὰ 2, εὗρίσκομεν τὸ ἔτι ἀπλούστερον

$$\frac{1}{10 \times 4} \quad \text{ἢ} \quad \frac{1}{40}$$

ὅτι εἶναι τὸ γινόμενον τῶν δοθέντων κλασμάτων.

ἡμεῖς οὖν βλέπομεν ὅτι εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν κλασμάτων συνάμειθα νὰ διαιρέσωμεν ἕνα ἀριθμητὴν καὶ ἕνα παρονομαστὴν τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, χωρὶς νὰ βλάψωμεν τὸ γινόμενον· ἂν λοιπὸν ὅς τις εἶναι καὶ ἀριθμητὴς καὶ παρονομαστὴς, παραλείπεται.

Γενικαὶ ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Ὁ πολλαπλασιασμὸς οἷωνδήποτε ἀριθμῶν διατηρεῖ πάσας τὰς γενικὰς ἰδιότητας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, διότι ἔχει δύο θεμελιώδεις ἰδιότητες αὐτοῦ (ἐδ. 45). Ἐκ τούτων τὴν μὲν δευτέραν ἔχουμεν ἤδη (ἐδ. 174), ἡ δὲ πρώτη ἀποδεικνύεται ἐν τῷ ἑξῆς θεωρήματι.

ΘΕΩΡΗΜΑ

178. Τὸ γινόμενον ὅσωνδήποτε ἀριθμῶν δὲν ἀλλάσσει, καθ' ὅσοντες τάξιν καὶ ἂν πολλαπλασιασθῶσιν.

Ἄν πάντες οἱ παράγοντες εἶναι ἀκέραιοι, τὸ θεώρημα εἶναι διειρημένον (ἐδ. 48), εἰ δὲ μή, ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς.

Ἀπόδειξις. Τὸ γινόμενον ἔχει ἀριθμητὴν μὲν τὸ γινόμενον πάντων τῶν ἀριθμητῶν, παρονομαστὴν δὲ τὸ γινόμενον πάντων παρονομαστῶν (οἱ τυχόν ὑπάρχοντες ἀκέραιοι παράγοντες ὑποτίθενται ἔχοντες παρονομαστὴν τὸ 1), τὰ δὲ δύο ταῦτα γινόμενα ὡς γινόμενα ἀκεραίων ἀριθμῶν δὲν ἀλλάσσουν καθ' ὅσοντες τάξιν καὶ πολλαπλασιασθῶσιν οἱ ἀριθμοί. Ὡστε τὸ γινόμενον θὰ ἔχῃ πάλιν τὸν αὐτὸν ἀριθμητὴν καὶ τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν.

179. Ἐκ τῆς θεμελιώδους ταύτης ἰδιότητος ἔπονται αἱ ἑξῆς ἀποδείξεις.

1) *Δυνάμεθα εἰς τὸ γινόμενον νὰ ἀντικαταστήσωμεν παράγοντας διὰ τοῦ εὐρεθέντος γινομένου αὐτῶν ἢ καὶ τοῦναντίον· δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν οἷονδήποτε παράγοντας δι' ἄλλων ἀριθμῶν, τῶν αὐτῶν γινομένου· δυνάμεθα δηλονότι νὰ συμπτύξωμεν παράγοντας εἰς ἓνα μόνον ἢ καὶ τοῦναντίον νὰ ἀναλύσωμεν ἓνα παράγοντα εἰς πολλοὺς ἄλλους.*

Παραδείγματος χάριν, εἰς τὸ γινόμενον

$$\frac{2}{3} \times 5 \times \frac{3}{2} \times 8 \times \frac{5}{8}$$

δύναμαι νὰ ἀντικαταστήσω τοὺς δύο παράγοντας $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}$ διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν 1 καὶ τοὺς 8, $\frac{5}{8}$ διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν 5· οὕτως εὔκολον

$$5 \times 5, \text{ ἥτοι } 25.$$

2) Ὡς ἀποδοθέν, ἵνα πολλαπλασιάσωμεν γινόμενον ἐπὶ ἀριθμόν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπ' αὐτὸν ἓνα παράγοντα τοῦ γινομένου.

Π. χ. ἵνα πολλαπλασιάσω τὸ γινόμενον $\frac{1}{5} \times \frac{2}{7} \times \frac{4}{9}$ ἐπὶ 7, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσω τὸν παράγοντα $\frac{2}{7}$ ἐπὶ 7· οὕτως εὐρίσκω $\frac{1}{5} \times 2 \times \frac{4}{9}$.

3) Ὡς ἀποδοθέν, ἵνα πολλαπλασιάσωμεν δύο γινόμενα, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν πάντας τοὺς παράγοντας ἀμφοτέρων τῶν γινομένων.

Παραδείγματος χάριν, τὸ γινόμενον τῶν δύο γινομένων

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{5} \times \frac{7}{9} \quad \frac{8}{9} \times \frac{5}{7}$$

εἶναι $\frac{1}{2} \times \frac{3}{5} \times \frac{7}{9} \times \frac{8}{9} \times \frac{5}{7}$ ἢ $\frac{3 \times 8}{2 \times 9 \times 9}$ ἢ $\frac{4}{3 \times 9}$, ἥτοι $\frac{4}{27}$.

Πολλαπλασιασμὸς διαφορᾶς ἐπὶ ἀριθμόν.

180. Διαφορὰ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀριθμόν, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσι καὶ ὁ μειωτέος καὶ ὁ ἀφαιρετέος αὐτῆς ἐπὶ τὸν ἀριθμόν καὶ ἀπὸ τοῦ πρώτου γινομένου ἀφαιρεθῇ τὸ δεύτερον.

Ἄς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὴν διαφορὰν

$$\frac{7}{8} - \frac{4}{9} \quad \text{ἐπὶ} \quad \frac{2}{3}.$$

Ἡ διαφορὰ αὕτη, ἐὰν τὰ κλάσματα γίνωσιν ὁμώνυμα, γίνεται

$$\frac{7 \times 9}{8 \times 9} - \frac{4 \times 8}{9 \times 8} \quad \text{ἢ} \quad \frac{7 \times 9 - 4 \times 8}{8 \times 9}.$$

Τὸ κλάσμα τοῦτο πολλαπλασιάζεται ἐπὶ $\frac{2}{3}$ κατὰ τὸν γενικὸν κανό-

να τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν κλασμάτων· ἵνα δὲ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 2 ὁ ἀριθμητής, ὅστις εἶναι διαφορὰ δύο ἀκεραίων, ἐφαρμόζομεν τὴν πρότασιν τοῦ ἐδ. 51· οὕτως εὐρίσκομεν τὸ γινόμενον

$$\frac{7 \times 9 \times 2 - 8 \times 4 \times 2}{8 \times 9 \times 3}.$$

τοῦτο δὲ εἶναι ἡ διαφορὰ δύο κλασμάτων, ἡ ἐξῆς

$$\frac{7 \times 9 \times 2}{8 \times 9 \times 3} - \frac{8 \times 4 \times 2}{8 \times 9 \times 3}, \quad \text{ἥτοι τῶν} \quad \frac{7 \times 2}{8 \times 3} - \frac{4 \times 2}{9 \times 3}.$$

ὅθεν ἔχομεν

$$\left(\frac{7}{8} - \frac{4}{9} \right) \times \frac{2}{3} = \frac{7 \times 2}{8 \times 3} - \frac{4 \times 2}{9 \times 3} = \frac{7}{8} \times \frac{2}{3} - \frac{4}{9} \times \frac{2}{3}.$$

Δυνάμεις τῶν κλασμαμάτων.

Αἱ δυνάμεις τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν ὁρίζονται, ὥς καὶ αἱ τῶν ἀκεραίων (ἐδ. 52), καὶ σημειοῦνται ὁμοίως.

181. Ἵνα ὑψώσωμεν κλάσμα εἰς δύναμιν, ὑψοῦμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους του εἰς τὴν δύναμιν ταύτην.

Ἄς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι πρόκειται νὰ εὗρεθῇ τὸ τετράγωνον τοῦ κλάσματος $\frac{3}{5}$, ἥτοι τὸ γινόμενον $\frac{3}{5} \times \frac{3}{5}$.

Κατὰ τὸν κανόνα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἶναι

$$\frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{3 \times 3}{5 \times 5} = \frac{3^2}{5^2}$$

καὶ ἐπειδὴ τὸ τετράγωνον τοῦ κλάσματος $\frac{3}{5}$ σημειοῦται ὡς ἑξῆς $\left(\frac{3}{5}\right)^2$

ἔπεται ὅτι $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{5^2}$.

Παρατήρησις.

Ἡ θεμελιώδης ιδιότης τῶν δυνάμεων ἀληθεύει καὶ περὶ τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν καὶ ἀποδεικνύεται ἀπαραλλάκτως (ἐδ. 53).

Παραδείγματος χάριν εἶναι

$$\left(\frac{3}{8}\right)^2 \times \left(\frac{4}{8}\right)^4 = \left(\frac{3}{8}\right)^6$$

Ἰδιότητες τῆς ἰσότητος.

182. Ἴσοι ἀριθμοὶ ἐπὶ ἴσους πολλαπλασιαζόμενοι δίδουσι γινόμενα ἴσα.

Ἐστω $\alpha = \beta$ καὶ $\gamma = \delta$ · λέγω ὅτι θὰ εἶναι καὶ $\alpha \times \gamma = \beta \times \delta$.

Ἀπόδειξις. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι οἱ ἴσοι ἀριθμοὶ α καὶ β ἑπταπλασιαζόμενοι γίνονται ἀμφοτέρω 4 (ἴδ. ἐδ. 149), οἱ δὲ ἴσοι γ καὶ δ δεκαπλασιαζόμενοι γίνονται ἀμφοτέρω 12. Ἐὰν τότε πολλαπλασιάσωμεν τὰ δύο γινόμενα $\alpha \times \gamma$ καὶ $\beta \times \delta$ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον 7×10 , εὕρισκομεν (κατὰ τὰς γενικὰς τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ιδιότητας) ὅτι ἀμφοτέρω γίνονται 4×12 , τοῦτέστιν ἀκέραιοι ἴσοι· ἄρα τὰ γινόμενα ταῦτα εἶναι ἴσα.

Ὅμοιως δεικνύεται καὶ ὅτι ἄνισοι ἐπὶ ἴσους πολλαπλασιαζόμενοι μένουσιν ἄνισοι.

Γενίκευσις τῆς διαιρέσεως.

Τὴν διαίρεσιν ὀρίζομεν γενικῶς διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὡς ἑξῆς.

183. Ἡ διαίρεσις εἶναι προᾶξις, δι' ἧς, δοθέντων δύο ἀριθμῶν, εὐρίσκεται τρίτος, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν δεύτερον (ἢ πολλαπλασιάζων τὸν δεύτερον) δίδει τὸν πρῶτον.

Ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς λέγεται *πηλίκον*. Ἐκ δὲ τῶν δοθέντων ὁ μὲν πρῶτος λέγεται *διαιρετέος*, ὁ δὲ δεύτερος *διαιρέτης*.

Κατὰ τὸν ὅρισμόν τοῦτον τῆς διαιρέσεως ὁ διαιρετέος εἶναι γινόμενον τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ πηλίκου.

Παραδείγματα.

Ἡ διαίρεσις $12:3$ σημαίνει νὰ εὐρεθῇ ὁ ἀριθμὸς, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 3 νὰ δίδῃ γινόμενον 12, φανερόν δὲ εἶναι ὅτι ὁ ἀριθμὸς οὗτος εὐρίσκεται, ἂν μερισθῇ ὁ 12 εἰς τρία ἴσα μέρη.

Ἡ δὲ διαίρεσις $5:\frac{1}{3}$ σημαίνει νὰ εὐρεθῇ ἀριθμὸς, ὅστις πολλαπλα-

σιαζόμενος ἐπὶ $\frac{1}{3}$ νὰ δίδῃ γινόμενον τὸν 5· ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι ὁ

15, διότι $15 \times \frac{1}{3} = 5$.

Κανὼν γενικὸς τῆς διαιρέσεως.

184. Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ κλάσματος, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν ἐπὶ τὸ κλάσμα ἀντεστραμμένον.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν $\frac{4}{9}$ διὰ τοῦ $\frac{3}{5}$, τουτέστι νὰ εὐρωμεν ἀριθμὸν, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ $\frac{3}{5}$ νὰ

δίδῃ γινόμενον τὸν $\frac{4}{9}$.

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμὸν ἐπὶ $\frac{3}{5}$, πρέπει νὰ λάβωμεν τὸ πέμπτον αὐτοῦ τρεῖς φορές, ἥτοι τὰ τρία πέμπτα αὐτοῦ.

Ἄρα τὰ τρία πέμπτα τοῦ ζητουμένου πηλίκου θὰ εἶναι $\frac{4}{9}$,

ἐπομένως τὸ ἓν πέμπτον αὐτοῦ θὰ εἶναι $\frac{4}{9 \times 3}$ (ἥτοι τὸ τρίτον τοῦ $\frac{4}{9}$)

καὶ τὰ πέντε πέμπτα τοῦ πηλίκου, ἥτοι ὅλον τὸ πηλίκον, θὰ εἶναι πενταπλάσιον τοῦ $\frac{4}{9 \times 3}$, ἥτοι $\frac{4 \times 5}{9 \times 3}$.

τὸ πηλίκον λοιπὸν τοῦ $\frac{4}{9}$ διὰ $\frac{3}{5}$ εἶναι $\frac{4 \times 5}{9 \times 3}$ ἢ $\frac{4}{9} \times \frac{5}{3}$.

Ὅτι δὲ ἀληθῶς τοῦτο εἶναι τὸ πηλίκον, ἐξελέγχεται εὐκόλως, διότι τὸ γινόμενόν του ἐπὶ τὸν διαιρέτην $\frac{3}{5}$ εἶναι

$$\frac{4}{9} \times \frac{5}{3} \times \frac{5}{3}, \text{ ἥτοι } \frac{4}{5}, \text{ τουτέστιν ὁ διαιρετέος.}$$

Παραδείγματα.

$$\frac{1}{3} : \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

$$12 : \frac{2}{3} = 12 \times \frac{3}{2} = 18,$$

$$3 \frac{1}{4} : \frac{5}{6} = \left(3 + \frac{1}{4} \right) \times \frac{6}{5} = 3 \times \frac{6}{5} + \frac{1}{4} \times \frac{6}{5} = \\ = \frac{18}{5} + \frac{3}{10} = \frac{39}{10} = 3 \frac{9}{10}.$$

Ἐκ τούτων γίνεται φανερόν ὅτι διὰ τῆς γενικεύσεως τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἢ διαιρέσεως ἀνάγεται εἰς τὸν πολλαπλασιασμόν.

Σημείωσις. Ὁ ἀνωτέρω ἀποδειχθεὶς κανὼν ἐφαρμόζεται καὶ εἰς τὴν διαίρεσιν δι' ἀκεραίου, ἀρκεῖ ὁ ἀκέραιος διαιρέτης νὰ παρασταθῇ ὡς κλάσμα ἔχον παρονομαστὴν τὴν μονάδα 1.

Παραδείγματος χάριν $\frac{5}{7} : 8 = \frac{5}{7} : \frac{8}{1} = \frac{5}{7} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{7 \times 8}.$

Παρατήρησις.

185. Διὰ μικτοῦ διαιρέτου δὲν δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν ἄλλως ἢ τρέποντες αὐτὸν εἰς κλάσμα.

Παραδείγματος χάριν $2 : \left(3 + \frac{1}{8} \right) = 2 : \frac{25}{8} = 2 \times \frac{8}{25} = \frac{16}{25},$

$$3 \frac{1}{2} : 2 \frac{1}{2} = 3 \frac{1}{2} : \frac{5}{2} = \left(3 + \frac{1}{2} \right) \times \frac{2}{5} = \frac{6}{5} + \frac{1}{5} = \frac{7}{5} = 1 \frac{2}{5}.$$

Γενικαὶ ἰδιότητες τῆς διαιρέσεως.

Αἱ γενικαὶ ἰδιότητες τῆς τελείας διαιρέσεως τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν διατηροῦνται καὶ ἐπὶ οἰωνδήποτε ἀριθμῶν, ἀποδεικνύονται δὲ ἀπαράλλακτα ὡς καὶ ἐπὶ τῶν ἀκεραίων διὰ τοῦτο ἀναγράφομεν αὐτὰς ἐνταῦθα παραλείποντες τὰς ἀποδείξεις ὡς εὐκόλως εὕρισκομένας.

ΘΕΩΡΗΜΑ Α'

186. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὸν διαιρετέον καὶ τὸν διαιρέτην ἑφ' ἓνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, τὸ πηλίκον δὲν βλάπτεται.

Παραδείγματος χάριν, τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $\frac{2}{5} : \frac{3}{8}$ δὲν βλάπτεται, ἂν πολλαπλασιασθῶσιν ἀμφότεροι, διαιρετέος καὶ διαιρέτης, ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 5×8 . τότε ὁ διαιρετέος γίνεται 2×8 , ὁ δὲ διαιρέτης 3×5 . ἐπομένως τὸ πηλίκον εἶναι $\frac{2 \times 8}{3 \times 5}$.

Ὅμοίως, ἂν ἔχω νὰ διαιρέσω $3 : 2\frac{1}{2}$, πολλαπλασιάσω διαιρετέον καὶ διαιρέτην ἐπὶ 2 καὶ γίνονται $6 : 5$. ὥστε τὸ πηλίκον εἶναι $\frac{6}{5}$ ἢ $1\frac{1}{5}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ Β'

187. Ἵνα διαιρέσωμεν γινόμενον δι' ἀριθμοῦ, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν ἓνα τῶν παραγόντων αὐτοῦ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ.

Ἄν λόγου χάριν ἔχω νὰ διαιρέσω τὸ γινόμενον $8 \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{5}$ διὰ τοῦ 4, διαιρῶ τὸν παράγοντα 8 καὶ εὐρίσκω τὸ πηλίκον $2 \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{5}$.

Πόρισμα.

188. Ἵνα διαιρέσωμεν γινόμενον δι' ἑνὸς τῶν παραγόντων του, ἀρκεῖ νὰ ἐξαλείψωμεν τὸν παράγοντα τοῦτον.

Π. χ. τὸ πηλίκον τοῦ $\frac{3}{5} \times \frac{8}{9} \times \frac{1}{20}$ διὰ $\frac{8}{9}$ εἶναι $\frac{3}{5} \times \frac{1}{20}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'

189. Ἵνα διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ τοῦ γινομένου πολλῶν ἄλλων, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν αὐτὸν ἁπλοῦς διὰ πάντων τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου (τουτέστι πρῶτον διὰ τοῦ πρώτου παραγόντος, ἔπειτα τὸ εὗρεθὲν πηλίκον διὰ τοῦ δευτέρου, τὸ νέον πηλίκον διὰ τοῦ τρίτου καὶ οὕτω καθεξῆς).

ΘΕΩΡΗΜΑ Δ'

190. Ἐὰν ἀθροισμα διαιρεῖται δι' ἀριθμοῦ, ἔαν διαιρεθῇ ἕκαστος τῶν προσθετέων διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου καὶ προστεθῶσι τὰ προκύπτοντα πηλικά.

Σημείωσις. Ἐπειδὴ ἡ διαίρεσις ἀνάγεται εἰς τὸν πολλαπλασιασμόν, δύνανται τὰ θεωρήματα ταῦτα νὰ ἀποδειχθῶσι καὶ διὰ τῶν θεωρημάτων.

των τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Διὰ τοῦ αὐτοῦ δὲ τρόπου δύναται νὰ ἀποδειχθῇ καὶ ἡ ἐξῆς πρότασις.

191. Διαφορὰ διαιρεῖται δι' ἀριθμοῦ, ἐὰν διαιρεθῇ ὁ μειωτέος αὐτῆς καὶ ὁ ἀφαιρετέος χωριστὰ καὶ ἀπὸ τοῦ πρώτου πηλίκου ἀφαιρεθῇ τὸ δεύτερον.

***Περὶ κλασμάτων ἐχόντων ὅρους οἷους οἷός ποτε ἀριθμούς.**

192. Διὰ τὴν θεμελιώδη ἰδιότητα τῶν κλασμάτων τὸ πηλίκον δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν δύναται νὰ παρασταθῇ ὡς κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὸν διαιρετέον, παρονομαστὴν δὲ τὸν διαιρέτην· οἷον τὸ πηλίκον τοῦ 12 διὰ τοῦ 8 παρίσταται ὡς ἐξῆς· $\frac{12}{8}$.

Ἐὰν χάριν τῆς γενικότητος μεταχειρισθῶμεν τὴν παράστασιν ταύτην τοῦ πηλίκου δύο οἷων οἷός ποτε ἀριθμῶν, φθάνομεν εἰς παραστάσεις τοιαύτας·

$$\begin{array}{cccc} \frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{7}} & \frac{\frac{4}{5}}{\frac{2}{5}} & \frac{\frac{5}{6}}{8} & \frac{2\frac{1}{2}}{3} \\ \text{ἀντὶ } \frac{2}{5} : \frac{3}{7} & 4 : \frac{2}{5} & \frac{5}{6} : 8 & 2\frac{1}{2} : 3 \end{array}$$

Αἱ παραστάσεις αὗται λέγονται κλάσματα σύνθετα· ἐκλήθησαν δὲ κλάσματα, διότι ἔχουσι πάσας τὰς γενικὰς ἰδιότητας τῶν ἀπλῶν κλασμάτων, ὡς ἀμέσως δὰ δειχθῇ.

Πρέπει ὅμως νὰ ἐνθυμώμεθα ὅτι ταῦτα οὐδὲν ἄλλο σημαίνουν ἢ τὸ πηλίκον δύο ἀριθμῶν.

193. Κατὰ τὰ ἀνωτέρω εἰρημένα ἡ παράστασις $\frac{\alpha}{\beta}$, οἷοι οἷός ποτε καὶ

ἐὰν εἶναι οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β , λέγεται κλάσμα, σημαίνει δὲ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ α διὰ β .

194. Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου ἔπεται ἀμέσως ὅτι εἶναι $\frac{\alpha}{\beta} \times \beta = \alpha$,

τοῦτο δὲ εἶναι ἡ θεμελιώδης ἰδιότης τῶν κλασμάτων (ἐδ. 146).

195. Ἐκ τοῦ Α' θεωρήματος (ἐδ. 186) τῆς διαιρέσεως συνάγεται

ἀμέσως ὅτι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha \times \gamma}{\beta \times \gamma}$, οἷοι οἷός ποτε ὄντος τοῦ γ ,

ἐξ οὗ γίνεται φανερόν ὅτι ἡ ἐν τῷ ἐδ. 150 ἀποδειχθεῖσα γενικὴ ἰδιότης τῶν ἀπλῶν κλασμάτων ἀληθεύει περὶ πάντων.

Ἐκ τῆς ιδιότητος ταύτης ἔπεται ὅτι δυνάμεθα νὰ φέρωμεν καὶ τὰ σύνθετα κλάσματα εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, ὥς καὶ τὰ ἀπλᾶ (κατὰ τοὺς κανόνας 1^{ον} καὶ 2^{ον}).

Ἄν δηλαδὴ ἔχωμεν τὰ κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\gamma}{\delta}$, θὰ εἶναι

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha \times \delta}{\beta \times \delta}, \quad \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\gamma \times \beta}{\delta \times \beta}.$$

196. Ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαιρέσις τῶν κλασμάτων τούτων γίνεται, ὥς καὶ τῶν ἀπλῶν, ἀφοῦ ἀναγκῶσιν εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν.

Δηλαδὴ εἶναι $\frac{\alpha}{\delta} + \frac{\beta}{\delta} + \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\delta}$ (κατὰ τὸ θεώρ. τοῦ ἔδ. 190).

$$\frac{\alpha}{\delta} - \frac{\beta}{\delta} = \frac{\alpha - \beta}{\delta} \quad (\text{κατὰ τὸ ἔδ. 191}).$$

197. Καὶ ὁ πολλαπλασιασμός ἐκτελεῖται κατὰ τὸν γνωστὸν κανόνα τῶν ἀπλῶν κλασμάτων.

Διότι ἔστωσαν τὰ τυχόντα κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$. Ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν $\alpha : \beta$, θὰ εὔρωμεν πηλίκον π (ἀκέραιον ἢ κλασματικόν). Ἐπίσης, ἂν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν $\gamma : \delta$, θὰ εὔρωμεν ὥς πηλίκον ἀριθμὸν ρ . Διὸ ταῦτα θὰ εἶναι

$$\alpha = \beta \times \pi, \quad \gamma = \delta \times \rho.$$

ἄρα (ἔδ. 182) $\alpha \times \gamma = \beta \times \pi \times \delta \times \rho = (\beta \times \delta) \times (\pi \times \rho)$

$$\text{καὶ ἑπομένως } \frac{\alpha \times \gamma}{\beta \times \delta} = \pi \times \rho = \left(\frac{\alpha}{\beta} \right) \times \left(\frac{\gamma}{\delta} \right).$$

Ἀφ' οὗ ἀπεδείχθη ὁ κανὼν διὰ δύο κλάσματα, ἀποδεικνύεται δι' ὅσαδήποτε (κατὰ τὸν συνήθη τρόπον).

Σημείωσις. Ὑποθέτοντες $\delta = 1$ εὐρίσκομεν

$$\frac{\alpha}{\beta} \times \gamma = \frac{\alpha \times \gamma}{\beta} \quad (\text{παράβαλε ἔδ. 151}).$$

198. Καὶ ἡ διαίρεσις δύο οἰωνδήποτε κλασμάτων ἐκτελεῖται κατὰ τὸν κανόνα τῆς διαιρέσεως τῶν ἀπλῶν κλασμάτων (ἔδ. 148) λέγω δηλαδὴ ὅτι τὸ πηλίκον τοῦ κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$ διαιρεθέντος διὰ $\frac{\gamma}{\delta}$ θὰ

$$\text{εἶναι } \frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\delta}{\gamma}, \quad \text{διότι τοῦτο πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν διαιρέτην } \frac{\gamma}{\delta}$$

$$\text{δίδει } \frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\delta}{\gamma} \times \frac{\gamma}{\delta}, \quad \text{ἥτοι } \frac{\alpha \times \delta \times \gamma}{\beta \times \gamma \times \delta} \text{ ἢ } \frac{\alpha}{\beta}, \text{ τουτέστι τὸν διαιρετέον.}$$

Ὡστε ἐδείχθη ὅτι εἶναι $\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\alpha \times \delta}{\beta \times \gamma}$.

Σημείωσις. Ἐὰν ὑποθεθῇ $\delta=1$, προκύπτει

$$\frac{\alpha}{\beta} : \gamma = \frac{\alpha}{\beta \times \gamma} \quad (\text{παράβαλε ἐδ. 152}).$$

Θεώρημα περὶ τῶν ἴσων κλασμάτων.

199. Ἐὰν ἴσων κλασμάτων προστεθῶσιν οἱ ὁμώνυμοι ὄροι, προκύπτει κλάσμα ἴσον.

Ἐστωσαν ἴσα τὰ κλάσματα $\frac{\alpha}{A}$, $\frac{\beta}{B}$, $\frac{\gamma}{\Gamma}$, $\frac{\delta}{\Delta}$. Ἐὰν διαιρέσω τὸ α διὰ τοῦ A , θὰ εὔρω πηλίκον ἀριθμὸν τινα ἀκέραιον ἢ κλασματικόν, ὅντινα παριστῶ διὰ τοῦ ρ . τὸ αὐτὸ δὲ πηλίκον θὰ εὔρωμεν ἐξ ὑποθέσεως καὶ ἐκ τῶν διαιρέσεων β διὰ B , γ διὰ Γ , δ διὰ Δ . καὶ θὰ εἶναι

$$\alpha = A \times \rho, \quad \beta = B \times \rho, \quad \gamma = \Gamma \times \rho, \quad \delta = \Delta \times \rho,$$

$$\text{ὅθεν καὶ } \alpha + \beta + \gamma + \delta = A \times \rho + B \times \rho + \Gamma \times \rho + \Delta \times \rho$$

$$\text{ἢ } \alpha + \beta + \gamma + \delta = (A + B + \Gamma + \Delta) \times \rho \quad (\text{ἐδ. 174}).$$

$$\text{ἄρα } \frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{A + B + \Gamma + \Delta} = \rho, \quad \text{ἥτοι } = \frac{\alpha}{A}.$$

Προβλήματα λυόμενα δι' ἐνὸς πολλαπλασιασμοῦ.

Τὰ κυριώτερα τῶν τοιούτων προβλημάτων εἶναι τὰ ἑξῆς.

1) Νὰ ἐπαναλάβωμεν ἀριθμὸν πολλάκις.

2) Νὰ εὔρωμεν τὴν ἀξίαν ὁσωνδήποτε μονάδων ἐξ ἐνὸς πράγματος, ὅταν ἡξέυρωμεν τὴν ἀξίαν τῆς μονάδος αὐτοῦ.

Οἷον νὰ εὔρωμεν τὴν ἀξίαν $\frac{7}{8}$ τοῦ πήχεως, ὅταν εἷς πῆχυς ἀξίῃ

$12 \frac{1}{2}$ δραχμάς. Κατὰ τὸν νέον ὅρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ἵνα εὔρωμεν τὸ ζητούμενον, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὴν ἀξίαν τῆς μονάδος ἐπὶ τὸν δοθέντα ἀριθμὸν τῶν μονάδων.

Ὡστε ἡ ἀξία τῶν $\frac{7}{8}$ τοῦ πήχεως εἶναι $\left(12 \frac{1}{2}\right) \times \frac{7}{8}$, ἥτοι $10 \frac{15}{16}$ δρ.

3) Νὰ εὔρεθῇ μέρος μ ὠρισμένον δοθέντος ἀριθμοῦ.

οἷον νὰ εὔρεθῶσι τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ἀριθμοῦ 40.

Τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ 40 εἶναι $\frac{40}{3} + \frac{40}{3}$, ἥτοι $\frac{40 \times 2}{3}$ ἢ $40 \times \frac{2}{3}$,

ἥτοι τὰ δύο τρίτα τοῦ 40 εἶναι τὸ γινόμενόν του ἐπὶ $\frac{2}{3}$.

Σημειώσις. Ἐὰν ζητῇται μέρος τι τέλειον τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ, ὡς οὖν τὸ $\frac{1}{5}$, ἢ πρᾶξις, δι' ἧς εὐρίσκεται τοῦτο, εἶναι κυρίως διαίρεσις.

4) *Νὰ τρέψωμεν ἀριθμὸν τινὰ συγκεκριμένον εἰς ἄλλον κατωτέρας τάξεως καὶ ὁμοειδῆ.*

Οἷον νὰ τρέψωμεν $8\frac{2}{5}$ ὀκάδας εἰς δράμια.

Αἱ 8 ὀκάδες ἔχουσι δράμια 400×8 καὶ τὰ $\frac{2}{5}$ τῆς ὀκάς ἔχουσι δράμια

$400 \times \frac{2}{5}$ (διότι τὸ $\frac{1}{5}$ τῆς ὀκάς ἔχει δράμ. $400 \times \frac{1}{5}$). ἄρα αἱ $8\frac{2}{5}$ ὀκάδες

ἔχουσι δράμ. $400 \times 8 + 400 \times \frac{2}{5}$, ἥτοι $400 \times \left(8\frac{2}{5}\right)$ ἢ 3360 δράμια

Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι, ἵνα τρέψωμεν ἀριθμὸν συγκεκριμένον εἰς ἄλλον ὁμοειδῆ καὶ κατωτέρας τάξεως, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν, ὅστις δεικνύει πόσας μονάδας τῆς κατωτέρας τάξεως ἔχει μία μονὰς τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ.

Τὸ πρόβλημα τοῦτο περιλαμβάνεται εἰς τὸ ἐξῆς γενικώτερον.

Νὰ τραπῇ ἀριθμὸς εἰς κλάσμα ἔχον δοθέντα παρονομαστήν.

Οἷον νὰ τραπῇ ὁ $8\frac{2}{5}$ εἰς τετρακοσιοστά ἢ ὁ $\frac{5}{7}$ εἰς δωδέκατα.

Πρόδηλον εἶναι ὅτι

$$8\frac{2}{5} = \frac{8\frac{2}{5} \times 400}{400} = \frac{8 \times 400 + \frac{2}{5} \times 400}{500} = \frac{3360}{400}$$

ὥστε ὁ $8\frac{2}{5}$ εἶναι ἴσος μὲ 3360 τετρακοσιοστά.

$$\text{Ὡσαύτως εἶναι} \quad \frac{5}{7} = \frac{\frac{5}{7} \times 12}{12} = \frac{\frac{60}{7}}{12} = \frac{8\frac{4}{7}}{12}$$

ὥστε $\frac{5}{7}$ εἶναι ἴσον μὲ $8\frac{4}{7}$ δωδέκατα καὶ $\frac{4}{7}$ τοῦ δωδεκάτου ἢ κατὰ

προσέγγισιν ἴσον μὲ 8 δωδέκατα.

Ἐκ τούτων βλέπομεν ὅτι, ἵνα τρέψωμεν ἀριθμὸν εἰς κλάσμα, ἔχον δοθέντα παρονομαστήν (ἀκριβῶς ἢ κατὰ προσέγγισιν), πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ τὸν δοθέντα παρονομαστήν καὶ ἐξάγομεν τὰς ἀκεραίας μονάδας τοῦ γινομένου.

Σημειώσις. Σκοπὸς τῆς τοιαύτης τροπῆς εἶναι νὰ ἀποκτήσωμεν σαφέστεραν ἰδέαν τινῶν κλασμάτων ἐκφράζοντες αὐτὰ δι' ἄλλων γνω-

στοιτέρων π. χ. ἀντὶ $\frac{5}{7}$ τοῦ ἔτους σαφέστερον καὶ εὐκολώτερον εἶναι τὴν ἀντίληψιν ἡμῶν εἶναι 8 μῆνες $\left(=\frac{8}{12}\right)$ καὶ ἀντὶ $8\frac{2}{5}$ τῆς ὁκάς σαφέστερον εἶναι 8 ὁκάδες καὶ 160 δράμια.

Προβλήματα λυόμενα διὰ μιᾶς διαιρέσεως.

Τὸ κυριώτερον τῶν τοιούτων προβλημάτων εἶναι τὰ ἑξῆς.

1) *Νὰ μερίσωμεν ἀριθμὸν εἰς ἴσα μέρη.*

2) *Νὰ εὕρωμεν τὴν ἀξίαν μιᾶς μονάδος πράγματός τινος, ὅταν ἡξέυρωμεν τὴν ἀξίαν ὅσωνδήποτε μονάδων του·*

οἷον νὰ εὕρωμεν τὴν ἀξίαν τῆς ὁκάς, ὅταν $15\frac{1}{2}$ ὁκ. ἀξίζουσιν $72\frac{2}{5}$ δρ.

Ἡ ζητουμένη ἀξία τῆς ὁκάς πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ $15\frac{1}{2}$ πρέπει νὰ δίδῃ γινόμενον τὸν ἀριθμὸν $72\frac{2}{5}$, ἐπομένως εἶναι πηλίκον τοῦ $72\frac{2}{5}$ διὰ $15\frac{1}{2}$ πολλαπλασιάζοντες ἀμφοτέρους ἐπὶ 10 εὐρίσκομεν πηλίκον $\frac{724}{155}$.

3) *Νὰ εὕρεθῇ ἀριθμὸς ἐκ δοθέντος μέρους αὐτοῦ·*

οἷον νὰ εὕρεθῇ ὁ ἀριθμὸς, τοῦ ὁποίου τὰ $\frac{3}{5}$ εἶναι 60.

Τὸ ἐν πέμπτον αὐτοῦ θὰ εἶναι $\frac{60}{3}$ καὶ τὰ 5 πέμπτα, ἥτοι ὅλος ὁ ἀριθμὸς, θὰ εἶναι $\frac{60}{3} \times 5$, ἥτοι $60: \frac{3}{5}$.

4) *Νὰ τραπῇ ἀριθμὸς συγκεκριμένος εἰς ἄλλον ἀνωτέρας τάξεως·*

οἷον νὰ τραπῶσιν $615\frac{1}{2}$ μῆνες εἰς ἔτη.

Ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν ἐτῶν, ἐὰν πολλαπλασιάζῃ τὸν 12 (διότι 1 ἔτος ἔχει 12 μῆνας), θὰ δώσῃ τοὺς $615\frac{1}{2}$ μῆνας ὥστε εἶναι τὸ πηλίκον $615\frac{1}{2} : 12$ ἢ 51 ἔτη καὶ $\frac{3}{12}$ καὶ $\frac{1}{24}$ τοῦ ἔτους, ἥτοι 51 ἔτη $\frac{7}{24}$ τοῦ ἔτους.

Τὸ πρόβλημα τοῦτο περιλαμβάνεται εἰς τὸ ἑξῆς γενικώτερον.

5) *Δοθέντων δύο ἀριθμῶν, νὰ εὕρεθῇ, πῶς ἀποτελεῖται ὁ πρῶτος ἐκ τοῦ δευτέρου καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτοῦ·*

οἷον νὰ εὕρεθῇ, πῶς ἀποτελεῖται ὁ 35 ἐκ τοῦ $\frac{2}{5}$ καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτοῦ.

γουν ποσάκις πρέπει νὰ λάβωμεν τὸ $\frac{2}{5}$ καὶ πόσα μέρη αὐτοῦ, ἵνα ἀπο-
τελέσωμεν τὸν 35.

Διαιροῦντες τὸν 35 διὰ τοῦ $\frac{2}{5}$ εὐρίσκομεν ὅτι εἶναι $35 = \frac{2}{5} \times \left(87\frac{1}{2}\right)$.

Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι τὸ $\frac{2}{5}$, ἂν ληφθῇ 87 φορές, καὶ τὸ ἥμισυ
αὐτοῦ ἅπαξ ληφθὲν ἀποτελοῦσι τὸν 35· ὥστε ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς
εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 35 διὰ τοῦ $\frac{2}{5}$.

Ὁ τοιοῦτος ἀριθμὸς λέγεται λόγος τοῦ 35 πρὸς τὸ $\frac{2}{5}$ (παράβλ. ἐδ. 74)

Προβλήματα διάφορα.

1) 18 $\frac{1}{2}$ πήχεις ὑφάσματός τινος ἀξίζουν 70 δραχμάς· πόσον
ἀξίζουν 10 πήχεις καὶ $\frac{2}{5}$ ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος;

Λύσις. Ὁ εἰς πήχυς ἀξίζει $\frac{70}{18\frac{1}{2}}$ ἢ $\frac{140}{37}$ τῆς δραχμῆς καὶ ἐπομέ-
ως οἱ 10 $\frac{2}{5}$ ἀξίζουν $\frac{140}{37} \times \left(10\frac{2}{5}\right)$, ἥτοι $\frac{140 \times 52}{5 \times 37}$ ἢ $\frac{28 \times 52}{37}$.

2) Μὲ 12 $\frac{1}{2}$ δραχμάς ἀγοράζει τις 8 ὀκάδας ἐξ ἑνὸς πράγματος.

Πόσας ὀκάδας ἀγοράζει μὲ 40 $\frac{1}{5}$ δραχμάς

Λύσις. Μὲ μίαν δραχμὴν ἀγοράζει $\frac{8}{12\frac{1}{2}}$ τῆς ὀκάς καὶ μὲ 40 $\frac{1}{5}$ ἀγο-
ράζει $8 \times \frac{40\frac{1}{5}}{12\frac{1}{2}}$ ἢ $8 \times \frac{402}{125}$.

3) Τίνος ἀριθμοῦ τὸ τρίτον αὐξηθὲν κατὰ 8 γίνεται 14;

Λύσις. Τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ἀριθμοῦ εἶναι 6 καὶ ὁ ὅλος ἀριθμὸς εἶναι 18.

4) Πατὴρ τις διέταξεν ἐν τῇ διαθήκῃ του νὰ λάβῃ ὁ υἱὸς του τὰ $\frac{3}{8}$

τῆς περιουσίας του, ἡ δὲ θυγάτηρ του τὰ $\frac{2}{5}$ αὐτῆς καὶ ὅ,τι περισ-
σεύσῃ νὰ λάβῃ ἡ σύζυγός του. Ἡ σύζυγός του ἔλαβεν 9000 δραχμάς·
πόσας ἔλαβον τὰ τέκνα καὶ πόση ἦτο ἡ περιουσία;

Λύσις. Τὰ δύο τέκνα ἔλαβον ὁμοῦ τὰ $\frac{2}{5} + \frac{3}{8}$ τῆς περιουσίας, ἦτοι τὰ $\frac{31}{40}$ αὐτῆς· ἄρα ἡ σύζυγος ἔλαβε τὰ λείποντα $\frac{9}{40}$, ταῦτα δὲ ἦσαν 9000· ἄρα ἡ περιουσία ἦτο $\frac{9000 \times 40}{9}$, ἦτοι 40000 δραχμαί, καὶ ὁ μὲν υἱὸς ἔλαβε 15000, ἡ δὲ θυγάτηρ 16000.

5) Δεξαμενὴ τις πληροῦται ὑπὸ μιᾶς κρήνης εἰς 12 ὥρας καὶ ὑπὸ ἄλλης χωριστὰ εἰς 15 ὥρας· ἐὰν ῥέωσι καὶ αἱ δύο συγχρόνως, εἰς πόσας ὥρας θὰ πληρῶσωσι τὴν δεξαμενὴν;

Λύσις. Εἰς μίαν ὥραν πληροὶ ἡ πρώτη κρήνη τὸ $\frac{1}{12}$ τῆς δεξαμενῆς, ἡ δευτέρα τὸ $\frac{1}{15}$. Ἄρα ὁμοῦ πληροῦσιν εἰς μίαν ὥραν τὰ $\frac{1}{12} + \frac{1}{15}$ τῆς δεξαμενῆς, ἦτοι τὰ $\frac{9}{60}$ ἢ $\frac{3}{20}$ τῆς δεξαμενῆς. Ἐπειδὴ δὲ $\frac{3}{20}$ χρειάζονται μίαν ὥραν, ἵνα πληρωθῶσι, τὸ $\frac{1}{20}$ χρειάζεται $\frac{1}{3}$ τῆς ὥρας καὶ τὰ $\frac{20}{20}$, ἦτοι ὅλη ἡ δεξαμενὴ, χρειάζεται $\frac{20}{3}$ τῆς ὥρας, ἦτοι 6 ὥρας καὶ $\frac{2}{3}$ τῆς ὥρας ἢ 6 ὥρας καὶ 40 λεπτὰ πρῶτα.

6) Ἐργάτης τις ἐξετέλεσε τὰ $\frac{3}{5}$ ἔργου τινὸς εἰς 8 ἡμέρας· ἄλλος ἐργάτης ἐξετέλεσε τὰ $\frac{2}{9}$ αὐτοῦ εἰς 5 ἡμέρας. Εἰς πόσας ἡμέρας οἱ δύο οὗτοι ἐργάται ὁμοῦ θὰ ἐκτελέσωσι τὸ ἐπίλοιπον ἔργον;

Λύσις. Ὁ πρῶτος, ἐπειδὴ εἰς 8 ἡμέρας ἐκτελεῖ τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ ἔργου, θὰ ἐκτελέσῃ εἰς μίαν ἡμέραν τὰ $\frac{3}{40}$ αὐτοῦ. Ὁ δεύτερος, ἐπειδὴ ἐκτελεῖ εἰς 5 ἡμέρας τὰ $\frac{2}{9}$ τοῦ ἔργου, θὰ ἐκτελέσῃ εἰς μίαν ἡμέραν τὰ $\frac{2}{45}$ αὐτοῦ.

Ἄν λοιπὸν εἰργάζοντο ὁμοῦ, θὰ ἐξετέλουν εἰς μίαν ἡμέραν τὰ $\frac{2}{40} + \frac{2}{45}$, ἦτοι τὰ $\frac{36}{360}$ τοῦ ἔργου· καὶ ἐπομένως τὸ ὅλον ἔργον εἰς $\frac{360}{43}$ τῆς ἡμέρας (ἰδὲ προηγούμενον πρόβλημα).

Ἄλλ' ἐπειδὴ ἔχουσιν ἐκτελεσθῆναι τὰ $\frac{2}{9} + \frac{3}{5}$ τοῦ ἔργου, ἦτοι τὰ $\frac{37}{45}$

τοῦ, μένουσι πρὸς ἐκτέλεσιν τὸ $\frac{8}{45}$ τοῦ ἔργου, ἐπομένως οἱ δύο ἐργά-

χρηιάζονται πρὸς τοῦτο ἡμέρας

$$\frac{360}{43} \times \frac{8}{45} \text{ ἢ } \frac{64}{43} \text{ ἢ } 1 \frac{21}{43}.$$

7) Πεζὸς διανύων 17 στάδια εἰς 2 ὥρας διώκεται ὑπὸ ἱππέως, ὅστις ἐχώρησε 10 ὥρας μετ' αὐτὸν καὶ διανύει 28 στάδια εἰς 3 ὥρας. Μετὰ 3 ὥρας ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεώς του ὁ ἱππεὺς θὰ φθάσῃ τὸν πεζόν;

Λύσις. Τὴν στιγμὴν, καθ' ἣν ἐξεκίνησεν ὁ ἱππεύς, ἡ ἀπόστασις αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ πεζοῦ ἦτο 85 στάδια (διότι τόσα διατρέχει ὁ πεζὸς εἰς 10 ὥρας). Εἰδὴ δὲ καθ' ἑκάστην ὥραν ἡ ἀπόστασις αὕτη ἐλαττοῦται κατὰ $\frac{17}{2}$ (διότι ὁ μὲν ἱππεὺς διανύει $\frac{28}{3}$ στάδια τὴν ὥραν, ὁ δὲ πεζὸς $\frac{17}{2}$),

οἱ κατὰ $\frac{5}{6}$ τοῦ σταδίου, ἔπεται ὅτι τόσαι ὥραι θὰ περάσουν, ὅσας φορὰς

ρεῖ ὁ $\frac{5}{6}$ εἰς τὸν 85, ἥτοι $85 : \frac{5}{6}$ ἢ $85 \times \frac{6}{5}$, ἥτοι 17×6 ἢ 102 ὥραι.

8) Ἐλαστικὴ σφαῖρα ἀναπηδᾷ εἰς τὰ $\frac{2}{9}$ τοῦ ὕψους, ἐξ οὗ πίπτει περὶ ὅσον αὐτὴ ἀπὸ τινος ὕψους καὶ ἀναπηδήσασα τρεῖς ὑψώθη κατὰ τὴν τρίτην ἀναπήδησιν εἰς ὕψος $\frac{1}{8}$ τοῦ πύχους. Ἐκ πόσου ὕψους ἔπεσε τὸ πρῶτον;

Λύσις. Τὰ $\frac{2}{9}$ τοῦ ὕψους, εἰς ὃ ὑψώθη κατὰ τὴν δευτέραν ἀναπήδησιν,

καὶ $\frac{1}{8}$ τοῦ πύχους ἄρα τὸ ρηθὲν ὕψος εἶναι $\frac{1}{8} \times \frac{9}{2}$, τὸ δὲ ὕψος τοῦτο

καὶ τὰ $\frac{2}{9}$ τοῦ ὕψους, εἰς ὃ ὑψώθη κατὰ τὴν πρώτην ἀναπήδησιν ἄρα

ὕψος τῆς πρώτης ἀναπηδήσεως εἶναι $\frac{1}{8} \times \frac{9}{2} \times \frac{9}{2}$. τέλος τὸ ὕψος τοῦτο

καὶ τὰ $\frac{2}{9}$ τοῦ ὕψους, ἐξ οὗ ἔπεσε κατὰ πρῶτον ἡ σφαῖρα ἄρα τὸ ἀρχικὸν ὕψος εἶναι

$$\frac{1}{8} \times \frac{9}{2} \times \frac{9}{2} \times \frac{9}{2}, \text{ ἥτοι } 11 \frac{25}{64} \text{ πύχους.}$$

9) Νὰ εὕρεθῇ ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου τὰ $\frac{2}{5}$ καὶ τὸ $\frac{1}{8}$ αὐξανόμενα κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν δίδωσι τὸν ἀριθμὸν 30. (Ἀπ. 40).

10) Νὰ εὐρεθῇ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὰ $\frac{3}{8}$ καὶ τὸ $\frac{1}{6}$ αὐξανόμενα

1 δίδουσι τὸ ἡμισυ τοῦ ἀριθμοῦ.

(Ἀπ.

11) Δεξαμενὴ δύναται νὰ πληρωθῇ ὑπὸ τριῶν κρηνῶν· καὶ εἰς πρώτη μὲν πληροῖ αὐτὴν εἰς 40 ὥρας, ἡ δὲ δευτέρα μὲν εἰς 60 ὥρας καὶ ἡ τρίτη εἰς 20. Εἰς πόσας ὥρας καὶ αἱ τρεῖς συγχρόνως ἔρρουσαι θὰ πληρώσωσι τὴν δεξαμενὴν;

(Ἀπ. $9\frac{3}{13}$)

12) Ἐκ πίθου, περιέχοντος 100 ὀκάδας οἶνου, ἀφαιροῦνται 20 ὀκάδες καὶ ἀναπληροῦνται δι' ὕδατος· ἔκ τοῦ κράματος ἀφαιροῦνται πάλιν 20 ὀκάδες καὶ ἀναπληροῦνται δι' ὕδατος· τὸ αὐτὸ γίνεται καὶ τρίτην ὥραν. Πόσος οἶνος θὰ περιέχεται ἐν τῷ κράματι;

Λύσις. Εἰς ἐκάστην ἀφαίρεσιν ἀφαιροῦνται τὰ $\frac{20}{100}$ ἢ τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ ἐκείνου πίθου ὑπάρχοντος οἶνου (διότι ἐκ τῶν 100 ὀκάδων τοῦ ἐν τῷ πίθῳ ὑπάρχοντος ὕγρου ἀφαιροῦνται αἱ 20), ὥστε κατὰ μὲν τὴν πρώτην ἀφαίρεσιν ἦτο οὗτος 100 ὀκάδες καὶ ἀφηρέθη τὸ $\frac{1}{5}$ αὐτοῦ· ἄρα ἔμειναν τὰ

αὐτοῦ, ἥτοι ἔμειναν $100 \times \frac{4}{5}$. Εἰς τὴν δευτέραν ἀφαίρεσιν ἀφηρέθη τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ $100 \times \frac{4}{5}$, ὥστε ἔμειναν τὸ $\frac{4}{5}$ αὐτοῦ, ἥτοι $100 \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5}$ · ὁμοίως ἔμειναν μετὰ τὴν τρίτην ἀφαίρεσιν $100 \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5}$, τοιούτων δὲ 51 $\frac{1}{5}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΡὸς ἈΣΚΗΣΙΝ.

1) Ἐὰν δύο ἢ περισσοτέρων κλασμάτων προσθέσωμεν τοὺς ὁμοῖους ὁροὺς, προκύπτει κλάσμα, ὃπερ περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ μέγιστου καὶ ἐλαχίστου ἐξ αὐτῶν.

Ἔστωσαν τὰ τυχόντα κλάσματα

$$\frac{\alpha}{A}, \quad \frac{\beta}{B}, \quad \frac{\gamma}{\Gamma}, \quad \frac{\delta}{\Delta}$$

καὶ ἐξ αὐτῶν μέγιστον μὲν ἔστω τὸ $\frac{\alpha}{A}$, ἐλάχιστον δὲ τὸ $\frac{\delta}{\Delta}$.

Ἐὰν αὐξήσωμεν τοὺς ἀριθμητὰς τῶν ἄλλων, ὥστε νὰ γίνωσιν ἰσὺς πρὸς τὸ πρῶτον (ἂς γίνωσι δὲ τότε οἱ ἀριθμηταὶ β' , γ' , δ'), καὶ ἔπειτα ἐφαρμόσωμεν τὴν πρότασιν τοῦ ἐδ. 199, εὐρίσκομεν

$$\frac{\alpha}{A} = \frac{\alpha + \beta' + \gamma' + \delta'}{A + B + \Gamma + \Delta}$$

$$\frac{\alpha}{A} > \frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{A + B + \Gamma + \Delta}.$$

μοίως ἀποδεικνύεται καὶ τὸ δεύτερον μέρος τῆς προτάσεως.

2) Ἐὰν προστεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς εἰς ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος, τὸ κλάσμα αὐξάνει μὲν, ἐὰν εἶναι μικρότερον τῆς μονάδος, καττούται δέ, ἐὰν εἶναι μεγαλύτερον αὐτῆς.

Τοῦτο εἶναι ἄμεσον ἀκολουθήμα τοῦ προηγουμένου.

3) Τὸ ἄθροισμα δύο ἀναγώγων κλασμάτων $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$, ὧν οἱ παρονομασταὶ διαφέρουσι, δὲν δύναται νὰ εἶναι ἀκέραιος ἀριθμὸς.

Ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν κλασμάτων $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$ (ἅτινα ὑποτίθενται ἀνάλογα) εἶναι ἴσον τῷ ἀκεραίῳ M , θὰ εἶναι

$$\frac{\alpha}{\beta} = M - \frac{\gamma}{\delta} = \frac{M\delta - \gamma}{\delta}. \quad (1)$$

Τὸ δεύτερον δὲ τοῦτο κλάσμα ἀποδεικνύεται εὐκόλως ὅτι εἶναι ἀνάλογον, ἐξ οὗ συνάγεται τὸ ἀδύνατον τῆς ἰσότητος (1), διότι β καὶ δ εἶναι διάφορα (ἐδ. 154).

Καὶ ἡ διαφορὰ δύο ἀναγώγων κλασμάτων, ἐχόντων διαφόρους παρονομαστάς, δὲν δύναται νὰ εἶναι ἀκέραιος ἀριθμὸς.

4) Τὸ γινόμενον δύο ἀναγώγων κλασμάτων δὲν δύναται νὰ εἶναι ἀκέραιος ἀριθμὸς, πλὴν ἂν ὁ παρονομαστής ἑκατέρου ἐξ αὐτῶν διαιρῇ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ ἄλλου.

5) Ἐὰν ἔχωμεν νὰ μοιράσωμεν μίαν δραχμὴν εἰς 9 ἀνθρώπους καὶ παραδεχθῶμεν ἀκόμη ἕνα ἄνθρωπον (κατὰ τὴν μέθοδον τῆς σελίδος 52), ἕκαστος θὰ λάβῃ $\frac{1}{10}$ τῆς δραχμῆς καὶ θὰ περισσεύσῃ καὶ τὸ μερίδιον τοῦ

προσθέτου ἀνθρώπου, ἥτοι $\frac{1}{10}$. Ἐὰν δὲ καὶ εἰς τὸν νέον μερισμὸν τοῦ $\frac{1}{10}$

αὐτοῦ κάμωμεν τὸ αὐτό, εὐρίσκομεν ὅτι θὰ λάβῃ ἕκαστος $\frac{1}{10} + \frac{1}{100}$

καὶ θὰ περισσεύσῃ καὶ $\frac{1}{100}$ πρὸς νέαν διανομὴν. Ἐξακολουθοῦντες

οὕτως, ἐφ' ὅσον θέλομεν, εὐρίσκομεν ὅτι τὸ μερίδιον ἑκάστου θὰ εἶναι

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots + \frac{1}{10^n},$$

ἡ περισσεύσῃ δὲ πρὸς διανομὴν $\frac{1}{10^n}$.

Εντεῦθεν ἔπεται ἡ ἰσότης

$$\frac{1}{9} = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots + \frac{1}{10^n} + \frac{1}{10^n} \times \frac{1}{9}.$$

Νὰ δειχθῇ διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου ἡ ἰσότης

$$\frac{\alpha}{\beta - \gamma} = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha\gamma}{\beta^2} + \frac{\alpha\gamma^2}{\beta^3} + \dots + \frac{\alpha\gamma^{n-1}}{\beta^n} + \frac{\alpha\gamma^n}{\beta^n} \times \frac{1}{\beta - \gamma},$$

ἐν ἣ β καὶ γ εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοὶ καὶ $\beta > \gamma$.

6) Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τοῦ ἐδ. 72 ἀληθεύει, καὶ ὅταν διαιρέσεις δὲν γίνωνται ἀκριβῶς.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς α διαιρούμενος διὰ γινομένου τῶν ἀκεραίων $\beta \times \gamma \times \delta$ δίδει πηλίκον π καὶ ὑπόλοιπον τότε θὰ εἶναι

$$\alpha = (\beta \times \gamma \times \delta) \times \pi + \nu \quad \text{καὶ} \quad \nu < \beta \times \gamma \times \delta.$$

Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης βλέπομεν ὅτι, ἂν διαιρέσωμεν τὸν α τοῦ πρώτου παράγοντος β, τὸ πηλίκον θὰ εἶναι $\gamma \times \delta \times \pi + \frac{\nu}{\beta}$ ἑπομένως τὸ ἀκέραιον μέρος του θὰ εἶναι $\gamma \times \delta \times \pi + \epsilon$ (ὅπου ε σημαίνει τὸν ἐν τῷ κλάσματι $\frac{\nu}{\beta}$ περιεχόμενον μέγιστον ἀκέραιον, ὅς θὰ εἶναι μικρότερος τοῦ $\gamma \times \delta$, διότι $\nu < \beta \times \gamma \times \delta$).

Ἐὰν δὲ καὶ τὸ ἀκέραιον τοῦτο πηλίκον διαιρεθῇ διὰ τοῦ δευτέρου παράγοντος γ, τὸ πηλίκον θὰ εἶναι $\pi \times \delta + \frac{\epsilon}{\gamma}$ καὶ τὸ ἀκέραιον αὐτοῦ μέρος θὰ εἶναι $\pi \times \delta + \theta$ (ὅπου θ σημαίνει τὸν μέγιστον ἀκέραιον τὸν ἐν τῷ κλάσματι $\frac{\epsilon}{\gamma}$ περιεχόμενον, ὅστις θὰ εἶναι μικρότερος τοῦ δ, διότι $\epsilon < \gamma \times \delta$). Τέλος, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸ ἀκέραιον τοῦτο πηλίκον διὰ τοῦ τελευταίου παράγοντος δ, θὰ εὑρωμεν πηλίκον τὸ $\pi + \frac{\theta}{\delta}$, ὅπερ ἔστι ἀκέραιον μέρος τὸ π (διότι $\theta < \delta$).

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

ΒΙΒΛΙΟΝ Δ'

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ὅρισμοί.

200. Ἐκ τῶν κλασματικῶν μονάδων ὅσαι ἔχουσι παρονομαστὴν 10 ἢ 100 ἢ 1000 κτλ., ὅσαι δηλαδὴ προκύπτουσιν, ὅταν ἡ ἀκεραία μονάς 1 διαιρεθῇ εἰς 10 ἢ 100 ἢ 1000 κτλ. ἴσα μέρη, λέγονται δεκαδικαὶ μονάδες.

Αἱ κλασματικαὶ δεκαδικαὶ μονάδες εἶναι κατὰ σειρὰν αἱ ἑξῆς·

$$\frac{1}{10}, \quad \frac{1}{100}, \quad \frac{1}{1000}, \quad \frac{1}{10000}, \dots \text{ κλπ.}$$

εἶναι δὲ ἑκάστη ἐξ αὐτῶν δεκαπλάσια τῆς ἀκολουθοῦσης.

201. Δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ λέγονται οἱ ἐκ μιᾶς δεκαδικῆς μονάδος γινόμενοι διὰ τῆς ἐπαναλήψεως· οἷον 3 δέκατα $\left(\frac{3}{10}\right)$, 145 ἑκατοστά $\left(\frac{145}{100}\right)$ κτλ. εἶναι δεκαδικοὶ ἀριθμοί.

Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ ὑπάγονται εἰς τὰ κλάσματα καὶ ἐπομένως ὅσα ἐμάθομεν περὶ τῶν κλασμάτων ἀληθεύουσι καὶ περὶ τῶν δεκαδικῶν. Ἄλλ' ἐπειδὴ οἱ παρονομασταὶ τῶν κλασμάτων τούτων εἶναι ἢ 10 ἢ 100 ἢ 1000 κτλ. (ἦτοι ἡ μονάς 1 ἀκολουθουμένη ὑπὸ μηδενικῶν), αἱ πράξεις αὐτῶν γίνονται εὐκολώτερον ἢ αἱ πράξεις τῶν ἄλλων κλασμάτων (τὰ ὅποια πρὸς διάκρισιν λέγονται κοινά). Διὰ τοῦτο διαλαμβάνομεν περὶ αὐτῶν ἰδιαιτέρως.

Γραφὴ τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων.

202. Ἄν φαντασθῶμεν εἰς μίαν σειρὰν τὰς ἀκεραίας μονάδας τῶν διαφόρων τάξεων, τὰς ὁποίας ἐσχηματίσαμεν ἐν τῇ ἀριθμῇσει, καὶ τὰς δεκαδικὰς κλασματικὰς μονάδας ὡς ἑξῆς·

$$\dots, 1000, 100, 10, 1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \dots$$

ἑκάστη ἐκ τῶν μονάδων τούτων εἶναι δεκαπλάσια τῆς ἀμέσως ἐπομένης. Διὰ τοῦτο πᾶς ἀριθμὸς ἐκ μιᾶς τῶν μονάδων τούτων σχηματι-

ζόμενος δύναται νὰ σχηματισθῇ ἐκ τῶν μονάδων τούτων καὶ ἐξ ἐκάστης νὰ μὴ ἔχη· περισσοτέρας τῶν 9 (ἰδὲ ἐδ. 6 · π. χ. ὁ ἀριθμὸς $\frac{123}{1000}$)

ἀναλύεται εἰς $\frac{3}{1000}$, $\frac{2}{100}$ καὶ $\frac{1}{10}$. Ἐὰν δὲ παραδεχθῶμεν καὶ τὴν

ἀρχὴν, ὅτι πᾶν ψηφίον γραφόμενον κατόπιν ἄλλου σημαίνει μονάδας τῆς ἀμέσως ἐπομένης τάξεως, δυνάμεθα νὰ γράφωμεν τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς, ὡς καὶ τοὺς ἀκεραίους. Κατὰ τὴν ἀρχὴν ταύτην κατόπιν τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων γράφομεν τὸ ψηφίον τῶν δεκάτων (τὰ ὁποῖα δὲν θὰ εἶναι περισσότερα τῶν 9, ἄλλως θὰ ἐσχηματίζετο ἐξ αὐτῶν μία ἀκεραία μονάς), κατόπιν τούτου γράφομεν τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοστῶν (τὰ ὁποῖα ὁμοίως δὲν θὰ εἶναι περισσότερα τῶν 9), κατόπιν τὸ ψηφίον τῶν χιλιοστῶν καὶ οὕτω καθεξῆς.

Εἶναι ὅμως ἀνάγκη νὰ διακρίνωμεν τὸ ψηφίον τῶν ἀπλῶν μονάδων καὶ πρὸς τοῦτο γράφομεν ἀμέσως κατόπιν αὐτοῦ ὑποδιαστολὴν· ὥστε ἡ ὑποδιαστολὴ χωρίζει τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ ἀριθμοῦ ἀπὸ τοῦ δεκαδικοῦ μέρους.

Παραδείγματα.

Ὁ ἀριθμὸς, ὅστις ἔχει 4 δεκάδας, 7 μονάδας (ἢ 47 ἀκεραίας μονάδας) καὶ 3 δέκατα, γράφεται κατὰ τὰ προειρημένα ὡς ἐξῆς· 47,3 ἀντὶ $47\frac{3}{10}$.

Ὁ δὲ ἀριθμὸς, ὅστις ἔχει 2 μονάδας, 5 δέκατα καὶ 8 ἑκατοστά, γράφεται ὡς ἐξῆς· 2,58 ἀντὶ $2\frac{5}{10}\frac{8}{100}$ ἢ $2\frac{58}{100}$.

Ὁ δὲ ἀριθμὸς, ὅστις ἔχει 32 ἀκεραίας μονάδας καὶ 2 ἑκατοστά καὶ 5 χιλιοστά, γράφεται ὡς ἐξῆς· 32,025 ἀντὶ τοῦ $32\frac{2}{100}\frac{5}{1000}$ ἢ $32\frac{25}{1000}$.

Ἐγράψαμεν 0 εἰς τὴν θέσιν τῶν δεκάτων, διότι ὁ ἀριθμὸς δὲν ἔχει δέκατα, κάμνομεν δηλαδὴ ὅ,τι κάμνομεν καὶ εἰς τὴν γραφὴν τῶν ἀκεραίων μονάδων (οἷον 80, 704, 2003 κτλ.).

Ὅταν ὁ ἀριθμὸς δὲν ἔχη ἀκέραιον μέρος, γράφομεν 0 εἰς τὴν θέσιν τῶν ἀκεραίων μονάδων καὶ κατόπιν αὐτοῦ θέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν.

Οἷον ὁ ἀριθμὸς, ὅστις ἔχει 6 δέκατα, γράφεται ὡς ἐξῆς· 0,6 ἀντὶ $\frac{6}{10}$. ὁ δὲ ἀριθμὸς, ὅστις ἔχει 3 δέκατα καὶ 5 δεκάκις χιλιοστά (ἢ μυριοστά), γράφεται ὡς ἐξῆς· 0,3005 ἀντὶ $\frac{3}{10} + \frac{5}{10000}$ ἢ $\frac{3005}{10000}$.

Δεκαδικὰ ψηφία τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ λέγονται, ὅσα εἶναι κατόπιν τῆς ὑποδιαστολῆς.

Πῶς ἀπαγγέλλεται δεκαδικὸς ἀριθμὸς γεγραμμένος ὡς ἰκέραιος.

203. Δεκαδικὸν ἀριθμὸν δυνάμεθα νὰ ἀπαγγείλωμεν κατὰ τοὺς ἑξῆς τρόπους.

1) Ἀπαγγέλλομεν χωριστὰ ἕκαστον ψηφίον καὶ τὸ ὄνομα τῶν μονάδων αὐτοῦ· οἷον 5,82 ἀπαγγέλλεται ὡς ἑξῆς· 5 ἀκέραια, 8 δέκατα καὶ 2 ἑκατοστά.

2) Ἀπαγγέλλομεν τὰ ψηφία, ὡς ἐὰν ἐσχημάτιζον ἓνα ἀκέραιον ἀριθμὸν (ἦτοι χωρὶς νὰ προσέξωμεν εἰς τὴν ὑποδιαστολήν), προσαρτῶμεν ὅμως κατόπιν τὸ ὄνομα τῶν μονάδων τοῦ τελευταίου ψηφίου· οἷον 3,12 ἀπαγγέλλεται ὡς ἑξῆς· 312 ἑκατοστά.

Διότι ὁ ἀριθμὸς 3,12 σύγκειται ἐκ τῶν ἑξῆς·

$$3 + \frac{1}{10} + \frac{2}{100} \quad \text{ἢ} \quad \frac{300}{100} + \frac{10}{100} + \frac{2}{100},$$

ἐπομένως ἔχει 312 ἑκατοστά.

Ὅμοιως ὁ ἀριθμὸς 0,605 ἀπαγγέλλεται ὡς ἑξῆς· 605 χιλιοστά.

Διότι $\frac{6}{10} + \frac{5}{1000}$ γίνονται $\frac{600}{1000} + \frac{5}{1000}$, ἦτοι $\frac{605}{1000}$.

Σημείωσις. Οἱ δύο οὔτοι τρόποι εἶναι χρήσιμοι, μόνον ὅταν τὰ ψηφία εἶναι ὀλίγα, ὅταν δὲ εἶναι πολλά, ἀκολουθοῦμεν τὸν ἑξῆς γενικὸν κανόνα.

3) Ἀναλύομεν τὸν ἀριθμὸν εἰς ὅσα θέλομεν τμήματα καὶ ἀπαγγέλλομεν αὐτὰ κατὰ σειρὰν, ἕκαστον χωριστὰ, ὡς ἂν ἦτο ἀκέραιος ἀριθμὸς, προσαρτῶμεν ὅμως κατόπιν τὸ ὄνομα τῶν μονάδων τοῦ τελευταίου ψηφίου τοῦ τμήματος.

Οἷον 87,108349 ἀπαγγέλλεται ὡς ἑξῆς·

87 ἀκέραια 108 χιλιοστὰ καὶ 349 ἑκατομμυριοστά.

Διότι $\frac{1}{10} + \frac{8}{1000}$ κάμνουσι 108 χιλιοστὰ καὶ $\frac{3}{10000} + \frac{4}{100000} + \frac{9}{1000000}$ κάμνουσι 349 ἑκατομμυριοστά.

Ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς ἀπαγγέλλεται καὶ ὡς ἑξῆς·

87 ἀκέραια, 10 ἑκατοστά, 83 μυριοστά καὶ 49 ἑκατομμυριοστά ἢ καὶ ὡς ἑξῆς· 87 ἀκέραια καὶ 108349 ἑκατομμυριοστά.

Σημείωσις. Συνήθως χωρίζομεν τὸν ἀριθμὸν εἰς δύο τμήματα, τὸ ἀκέραιον καὶ τὸ δεκαδικόν, καὶ ἀπαγγέλλομεν ἕκαστον χωριστά· οἷον 78,759 ἀπαγγέλλεται 78 ἀκέραια καὶ 759 χιλιοστά.

**Ὡς γράφονται οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ
ὡς κοινὰ κλάσματα.**

204. Ἐπειδὴ οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι κλάσματα, δυνάμεθα νὰ γράφωμεν αὐτοὺς καὶ μὲ παρονομαστήν, ὥς καὶ τὰ ἄλλα κλάσματα πρὸς τοῦτο ἀκολουθοῦμεν τὸν ἐξῆς κανόνα.

Διὰ νὰ γράψωμεν δοθὲν δεκαδικὸν κλάσμα ὡς κοινόν, παραλείπομεν τὴν ὑποδιαστολὴν καὶ γράφομεν τὸν τότε προκύπτοντα ἀκέραιον ὡς ἀριθμητήν, ὑπ' αὐτὸν δὲ γράφομεν παρονομαστήν τὴν μονάδα 1 ἀκολουθουμένην ὑπὸ τῶσων μηδενικῶν, ὅσα εἶναι τὰ δεκαδικὰ ψηφία τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ.

Παραδείγματος χάριν, ἀντὶ 25,607 δύναμαι νὰ γράψω $\frac{25607}{1000}$

$$25 + \frac{6}{10} + \frac{7}{100} \text{ ἢ } \frac{25000}{1000} + \frac{600}{1000} + \frac{7}{1000}$$

καὶ ἐπομένως ἔχει 25607 χιλιοστά.

205. Καὶ ἀντιστρόφως· ἐὰν δοθῇ κοινὸν κλάσμα ἔχον παρονομαστήν τὴν μονάδα 1 ἀκολουθουμένην ὑπὸ μηδενικῶν, τὸ κλάσμα τοῦτο εἶναι δεκαδικὸς ἀριθμός· ἵνα δὲ γράψωμεν αὐτὸ ὡς δεκαδικόν, γράφομεν τὸν ἀριθμητὴν χωριστά καὶ ἔπειτα χωρίζομεν πρὸς τὸ τέλος αὐτοῦ διὰ τῆς ὑποδιαστολῆς τόσα ψηφία, ὅσα μηδενικά ἔχει ὁ δοθεὶς παρονομαστής.

Παραδείγματος χάριν, τὸ κλάσμα $\frac{17}{10}$ γράφεται 1,7· τὸ δὲ κλάσμα

$\frac{378}{100}$ γράφεται 3,78.

Ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς δὲν ἔχῃ ἀρκετὰ ψηφία, γράφομεν μηδενικά εἰς τὴν ἀρχὴν αὐτοῦ (ὅπερ δὲν βλάπτει αὐτόν)· οἷον τὸ κλάσμα $\frac{12}{1000}$ γρά-

φεται $\frac{0012}{1000}$, ἥτοι 0,012.

Ἰδιότητες τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

ΘΕΩΡΗΜΑ Α'

206. Ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς δὲν βλέπεται, ἐὰν γραφῶσιν ὅσαδήποτε μηδενικά εἰς τὸ τέλος αὐτοῦ.

Διότι ἡ ἀξία ἐκάστου ψηφίου ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς θέσεως, τὴν ὁποίαν ἔχει ὡς πρὸς τὴν ὑποδιαστολὴν (ἐδ. 202), ἡ δὲ θέσις αὕτη δὲν ἀλλάσσει διὰ τῆς γραφῆς τῶν μεδενικῶν ὥστε ἕκαστον ψηφίον διατηρεῖ τὴν ἀξίαν αὐτοῦ.

Παραδείγματος χάριν εἶναι $1,5 = 1,50 = 1,500 = 1,5000$ κτλ., διότι ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν τούτων ἔχει μίαν ἀκεραίαν μονάδα καὶ 5 δέκατα.

Ὅμοίως ἀντὶ τοῦ ἀκεραίου 7 δυνάμεθα νὰ γραφωμεν 7,0 ἢ 7,00 κτλ.

Σημείωσις. Ἡ ιδιότης αὕτη τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν συνάγεται καὶ ἐκ τῆς γενικῆς ιδιότητος τῶν κλασμάτων (ἐδ. 150), φαίνεται δὲ τοῦτο ἀμέσως, ἐὰν γραφῶσιν οἱ δεκαδικοὶ ὡς κλάσματα κοινά.

$$\text{Διότι} \quad \frac{15}{10} = \frac{150}{100} = \frac{1500}{1000} \text{ κτλ.}$$

$$\text{Ὅμοίως εἶναι} \quad 7 = \frac{70}{10} = \frac{700}{100} \text{ κτλ.}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ Β'

207. Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν ἐπὶ 10, 100, 1000 κτλ., ἀρκεῖ νὰ μεταθέσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν πρὸς τὰ ἐμπρὸς μίαν θέσιν (διὰ τὸ 10), δύο (διὰ τὸ 100), τρεῖς (διὰ τὸ 1000) κτλ.

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν δὲ δεκαδικὸν ἀριθμὸν διὰ 10, 100, 1000 κτλ., ἀρκεῖ νὰ μεταθέσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν πρὸς τὰ ὀπίσω μίαν θέσιν (διὰ τὸ 10), δύο (διὰ τὸ 100), τρεῖς (διὰ τὸ 1000) κτλ.

Λέγω, παραδείγματος χάριν, ὅτι εἶναι

$$2,75 \times 10 = 27,5,$$

$$65,92 \times 100 = 6592,$$

$$\text{καὶ} \quad 13,503 : 10 = 1,3503.$$

Ἀπόδειξις. Ὅταν εἰς τὸν ἀριθμὸν 2,75 μετατεθῇ ἡ ὑποδιαστολή μίαν θέσιν πρὸς τὰ ἐμπρὸς, προκύπτει ὁ ἀριθμὸς 27,5 καὶ αἱ μὲν δύο μονάδες γίνονται 2 δεκάδες (ἤτοι δεκαπλασιάζονται), τὰ δὲ 7 δέκατα γίνονται 7 ἀκέραια (ἤτοι δεκαπλασιάζονται, διότι 1 ἀκέραιον = 10

δέκατα), τὰ δὲ 5 ἑκατοστὰ γίνονται 5 δέκατα ὥστε πάντα τὰ μέρη τοῦ ἀριθμοῦ 2,75 ἑδεκαπλασιάσθησαν· ἄρα καὶ ὁ ὅλος ἀριθμὸς ἑδεκαπλασιάσθη.

Ὅμοιως εἰς τὸν ἀριθμὸν 65,92, ὅταν μετατεθῇ ἡ ὑποδιαστολὴ δύο θέσεις πρὸς τὰ ἔμπροσ, ἕκαστον ψηφίον τοῦ ἀριθμοῦ ἑκατονταπλασιάζεται· ἄρα καὶ ὁ ὅλος ἀριθμὸς ἑκατονταπλασιάζεται.

Ὅμοιως ἀποδεικνύεται καὶ διὰ τὴν διαίρεσιν.

Σημείωσις. Ὅταν ὁ ἀριθμὸς δὲν ἔχῃ ἀρκετὰ ψηφία πρὸς μετάθεσιν τῆς ὑποδιαστολῆς, γράφομεν μηδενικά εἰς τὸ τέλος αὐτοῦ ἢ εἰς τὴν ἀρχὴν του (ὅπου χρειάζονται), τοῦτο δὲ δὲν βλάπτει τὸν δεκαδικὸν ἀριθμόν.

Παραδείγματος χάριν, ἂν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν 2,5 ἐπὶ 1000, πρέπει νὰ μεταθέσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν τρεῖς θέσεις πρὸς τὰ ἔμπροσ· ἀλλὰ δὲν δυνάμεθα, διότι εἶναι ἔμπροσ ἐν μόνον ψηφίον (τὸ 5). Ἐὰν ὅμως γράψωμεν τὸν ἀριθμὸν 2,5 ὡς ἑξῆς: 2,500, μετατίθεται ἡ ὑποδιαστολὴ καὶ εὐρίσκομεν γινόμενον 2500.

Ὅμοιως ἂν ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν 0,32 : 100 γράφομεν τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν ὡς ἑξῆς: 000,32 (ὕπερ οὐδόλως βλάπτει αὐτόν). ἔπειτα μεταθέτομεν τὴν ὑποστολὴν δύο θέσεις πρὸς τὰ ὀπίσω καὶ εὐρίσκομεν πηλίκον 0,0032.

Πράξεις τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

208. Διὰ νὰ προσθέσωμεν δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς, κάμνομεν πρῶτον νὰ ἔχωσιν ἴσον ἀριθμὸν δεκαδικῶν ψηφίων (γίνεται δὲ τοῦτο, ἂν γράψωμεν εἰς τὸ τέλος τινῶν ἐξ αὐτῶν ἐν ἡ περισσότερα μηδενικά).

Ἐπειτα προσθέτομεν αὐτούς, ὡς καὶ τοὺς ἀκεραίους ἀριθμούς, εἰς δὲ τὸ ἄθροισμα θέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν ἀμέσως μετὰ τὸ ψηφίον, τὸ ὅποιον προκύπτει ἐκ τῆς προσθέσεως τῶν ἀπλῶν μονάδων τῶν ἀριθμῶν.

Παράδειγμα.

Νὰ προστεθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ

42,951

6,0032

0,3

42,7510

6,0032

0,3000

 ἄθροισμα 49,2542

Ἡ ὁρθότης τοῦ κανόνος τούτου δεικνύεται, ὥς καὶ εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν (ἔδ. 20), στηρίζεται δὲ ἐπὶ τούτου, ὅτι δέκα μονάδες ἐκάστης τάξεως ἀποτελοῦσι μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως προηγουμένης.

Σημείωσις. Ἡ γραφὴ τῶν μηδενικῶν εἰς τὸ τέλος τῶν προσθετέων ἀριθμῶν εἶναι περιττή, διότι ταῦτα εἰς τὴν πρόσθεσιν δὲν λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν. Ἀρκεῖ νὰ γράφωμεν τοὺς ἀριθμοὺς οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὐρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην· ἔπειτα προσθέτομεν, ὥς καὶ πρὶν.

Ἡ διάταξις τῆς πράξεως γίνεται ὥς ἑξῆς φαίνεται·

5,408

0,3

15,08

0,0001

 ἄθροισμα 20,7881

Α Φ Α Ι Ρ Ε Σ Ι Σ

209. Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν ἀπὸ ἄλλον, κάμνομεν πρῶτον νὰ ἔχωσιν ἴσον ἀριθμὸν δεκαδικῶν ψηφίων. Ἐπειτα ἀφαιροῦμεν, ὥς ἂν ἦσαν ἀκέραιοι, εἰς δὲ τὸ ὑπόλοιπον θέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν ἀμέσως μετὰ τὸ ψηφίον, τὸ ὁποῖον δίδει ἡ ἀφαίρεσις τῶν ἀπλῶν μονάδων.

Παραδείγματα.

1) Νὰ ἀφαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 8,1256 ἀπὸ τοῦ 20,75

20,7500

8,1256

 ὑπόλοιπον 12,6244

2) Νὰ ἀφαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 16,36 ἀπὸ τοῦ 27

27,00

16,36

 ὑπόλοιπον 10,64

3) Νὰ ἀφαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 7 ἀπὸ 8,598

8,598

7,

ὑπόλοιπον 1,598

Σημείωσις. Καὶ ἐνταῦθα δυνάμεθα νὰ μὴ γράφωμεν τὰ μηδενικά εἰς τὸ τέλος τῶν ἀριθμῶν, ἀλλὰ νὰ νοῶμεν μόνον αὐτά.

Ἡ ὁρθότης τοῦ κανόνος τούτου τῆς ἀφαιρέσεως τῶν δεκαδικῶν ἀποδεικνύεται, ὥς καὶ εἰς τὴν ἀφαίρεσιν τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, στηρίζεται δὲ ἐπὶ τῶν αὐτῶν ἀρχῶν.

Π Ο Λ Λ Α Π Λ Α Σ Ι Α Σ Μ Ο Σ

210. Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς, σχηματίζομεν τὸ γινόμενον αὐτῶν, ὥς ἂν μὴ ὑπῆρχον αἱ ὑποδιαστολαί, ἔπειτα χωρίζομεν δι' ὑποδιαστολῆς εἰς τὸ γινόμενον τόσα δεκαδικὰ ψηφία, ὅσα ἔχουσιν οἱ δύο παράγοντες ὁμοῦ.

Ἄς ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 8,5 καὶ 15,35 :

15,35

8,5

7675

12280

130,475

λέγω ὅτι τὸ γινόμενον αὐτῶν θὰ εἶναι 130,475.

Διὰ νὰ πεισθῶμεν περὶ τούτου, ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς ὥς κοινὰ κλάσματα· τότε ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν

$$\frac{1535}{100} \times \frac{85}{10} \cdot \text{ἄρα τὸ γινόμενον εἶναι } \frac{1535 \times 85}{1000}.$$

Πρὸς εὐρεσιν λοιπὸν αὐτοῦ πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο ἀκεραίους 1535 καὶ 85 (τοῦτο δὲ ἐγένετο, διότι ἐπολλαπλασιάσαμεν χωρὶς νὰ λαμβάνωμεν ὑπ' ὄψιν τὰς ὑποδιαστολάς) καὶ ἔπειτα νὰ διαιρέσωμεν τὸ γινόμενον διὰ 1000, τοῦτο δὲ γίνεται, ἐὰν χωρίσωμεν δι' ὑποδιαστολῆς τὰ τρία τελευταῖα ψηφία αὐτοῦ, ὅσα δηλαδὴ δεκαδικὰ ψηφία ἔχουσιν οἱ δύο παράγοντες ὁμοῦ.

Σημείωσις. Ἐὰν τὸ γινόμενον δὲν ἔχη ἀρκετὰ ψηφία, ὅσα δηλαδὴ

μέλλομεν νὰ χωρίσωμεν, γράφομεν εἰς τὴν ἀρχὴν αὐτοῦ ὅσα μηδενικά χρειάζονται· οἷον

$$\begin{array}{r} 0,28 \\ 0,03 \\ \hline 0,0084 \end{array}$$

■ Ακέρησεις.

Ὁ κανὼν ἐφαρμόζεται προφανῶς, καὶ ὅταν εἶ; ἐκ τῶν παραγόντων εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός.

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

1) Διαίρεσις δεκαδικοῦ δι' ἀκεραίου.

211. Ἐς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν 32,568 διὰ τοῦ ἀκεραίου 12.

Διὰ νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν ταύτην, στηριζόμεθα εἰς τὴν γενικὴν ἰδιότητα τῆς διαιρέσεως, καθ' ἣν ἔχοντες νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν τὰ μέρη του καὶ νὰ ἐνώσωμεν ἔπειτα τὰ πηλίκα (ἐδ. 190).

Διαιροῦμεν λοιπὸν πρῶτον τὸ ἀκέραιον μέρος 32 καὶ εὐρίσκομεν πηλίκον 2 καὶ ὑπόλοιπον 8.

$$\begin{array}{r|l} 32,568 & 12 \\ \hline 24 & 2,714 \\ \hline 85 & \\ 84 & \\ \hline 16 & \\ 12 & \\ \hline 48 & \\ 48 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Τὸ ἀκέραιον ὑπόλοιπον 8, ὅπερ πλέον δὲν διαιρεῖται διὰ τοῦ 12, τρέπομεν εἰς δέκατα (1 ἀκέραιον=10 δέκατα) καὶ γίνεται 80 δέκατα, ταῦτα δὲ ἐνούμενα μετὰ τῶν 5 δεκάτων τοῦ διαιρετέου ἀποτελοῦσιν 85 δέκατα (τὸν ἀριθμὸν τοῦτον τῶν 85 δεκάτων σχηματίζομεν ἀμέσως καταβιβάζοντες τὸ ψηφίον 5 δεξιά τοῦ ὑπολοίπου 8). Διαιροῦντες καὶ πὰ 85 δέκατα διὰ τοῦ 12 εὐρίσκομεν πηλίκον 7 δέκατα καὶ ὑπόλοιπον

1 δέκατον, τοῦτο δὲ (ὅπερ εἶναι = 10 ἑκατοστὰ) ἐνούμενον μὲ τὰ 6 ἑκατοστὰ τοῦ διαιρετέου ἀποτελεῖ 16 ἑκατοστὰ· διαιροῦντες καὶ ταῦτα διὰ τοῦ 12 εὐρίσκομεν πηλίκον 1 ἑκατοστὸν καὶ ὑπόλοιπον 4 ἑκατοστὰ (=40 χιλιοστὰ), ταῦτα δὲ ἐνούμενα τέλος μετὰ τῶν 8 χιλιοστῶν τοῦ διαιρετέου ἀποτελοῦσι 48 χιλιοστὰ, τὰ ὅποια διαιρούμενα διὰ 12 δίδουσι πηλίκον 4 χιλιοστὰ καὶ ὑπόλοιπον 0· ὥστε ἡ διαίρεσις ἐτελείωσε καὶ εὐρέθη πηλίκον 2,714.

212. Ἐκ τούτων συνάγεται ὁ ἐπόμενος κανὼν·

Διὰ τὰ διαιρέσωμεν δεκαδικὸν δι' ἀκεραίου, ἐκτελοῦμεν τὴν προᾶξιν ὥς ἂν μὴ ὑπῆρχεν ἡ ὑποδιαστολή, ἥτοι ὥς ἂν ᾗτο ὁ διαιρετέος ἀκέραιος· καὶ ὅσα μὲν ψηφία τοῦ πηλίκου προέρχονται ἐκ τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀκεραίου μέρους τοῦ διαιρετέου εἶναι ἀκέραια, τὰ δὲ λοιπὰ εἶναι δεκαδικὰ.

Σημειώσεις. Ἐὰν ἡ διαίρεσις ἀφήσῃ ὑπόλοιπον, δυνάμεθα νὰ ἐξακολουθήσωμεν τὴν διαίρεσιν τρέποντες αὐτὸ εἰς δεκαδικὰς μονάδας τῆς ἀμέσως ἐπομένης τάξεως (ὅπερ γίνεται γραφομένου ἐνὸς μηδενικοῦ εἰς τὸ τέλος αὐτοῦ). Ἐξακολουθοῦντες δὲ τοιοῦτοτρόπως ἡ θὰ εὐρωμεν τὸ πηλίκον ἀκριβῶς (ἂν μείνῃ ὑπόλοιπον 0) ἢ θὰ εὐρωμεν αὐτὸ μεθ' ὅσης θέλομεν προσεγγίσεως.

Ἔστω ὡς παράδειγμα ἡ διαίρεσις.

$$\begin{array}{r|l} 0,37 & 3 \\ 07 & 0,1233 \dots \\ 10 & \\ 10 & \\ \dots & \end{array}$$

Φανερόν εἶναι ὅτι, ὅσον καὶ ἂν προχωρήσωμεν διαιροῦντες, οὐδέποτε θὰ εὐρωμεν ὑπόλοιπον 0 (τοῦτο δὲ σημαίνει ὅτι τὸ πηλίκον δὲν εἶναι δυνατόν νὰ ἐκφρασθῇ ἀκριβῶς διὰ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ, τὴν δὲ αἰτίαν τούτου θὰ μάθωμεν παρακατιόντες). Δυνάμεθα ὁμως νὰ προσεγγίσωμεν διὰ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ εἰς τὸ ἀκριβὲς πηλίκον, ὅσον θέλομεν, διότι τὸ ἀκριβὲς πηλίκον εἶναι

	0,123	καὶ $\frac{1}{3}$	τοῦ χιλιοστοῦ
ἢ	0,1233	καὶ $\frac{1}{3}$	τοῦ μυριοστοῦ
ἢ	0,12333	καὶ $\frac{1}{3}$	τοῦ ἑκατοντάκις χιλιοστοῦ
ἢ	0,123333	καὶ $\frac{1}{3}$	τοῦ ἑκατομυριοστοῦ

καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἐὰν δηλαδὴ διακόψωμέν που τὴν διαίρεσιν, τὸ εὐρεθὲν δεκαδικὸν πηλίκον διαφέρει τοῦ ἀκριβοῦς κατὰ $\frac{1}{3}$ μιᾶς μονάδος τῆς

τελευταίας τάξεως τοῦ πηλίκου. Δυνάμεθα ἐπομένως νὰ εὗρωμεν δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς διαφέροντας ἀπὸ τοῦ ἀκριβοῦς πηλίκου ὀλιγώτερον παντὸς δοθέντος ἀριθμοῦ· ἂν λόγου χάριν προστάξῃ τις νὰ εὗρωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν διαφεροντα τοῦ ἀκριβοῦς πηλίκου ὀλιγώτερον ἐνὸς ἑκατομμυριοστοῦ, ἀρκεῖ νὰ ἐξακολουθήσω μεν τὴν διαίρεσιν μέχρι τῶν ἑκατομμυριοστῶν, ὅτε εὗρίσκομεν 0,123333.

Ὅμοίως, ἂν ζητῇται νὰ εὗρεθῇ τὸ πηλίκον $3,12:7$ μὲ προσέγγισιν ἐνὸς χιλιοστοῦ, διαιροῦμεν, μέχρις οὗ εὗρωμεν τὰ χιλιοστὰ τοῦ πηλίκου, καὶ εὗρίσκομεν 0,445. (Τὸ ἀκριβὲς πηλίκον εἶναι 0,445 καὶ $\frac{5}{7}$ τοῦ χιλιοστοῦ).

Ὅταν δὲ τὸ κλάσμα, δι' οὗ συμπληροῦνται τὸ δεκαδικὸν πηλίκον, ὑπερβαίῃ τὸ ἥμισυ (ὅτιαν δηλονότι τὸ ὑπόλοιπον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ διαιρέτου), ἐὰν κάμωμεν αὐτὸ ἓν, προσεγγίζομεν περισσότερον εἰς τὸ ἀκριβὲς πηλίκον.

Οὕτω π.χ. εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα τὸ ἀκριβὲς πηλίκον εἶναι 0,445 καὶ $\frac{5}{7}$ ἐνὸς χιλιοστοῦ· ἐπειδὴ δὲ τὰ $\frac{5}{7}$ τοῦ χιλιοστοῦ ὑπερβαίνουν τὸ $\frac{1}{2}$ αὐτοῦ, γράφομεν ἀντ' αὐτῶν ἓν χιλιοστὸν καὶ οὕτως εὗρίσκομεν 0,446, ὅπερ πλησιάζει πρὸς τὴν ἀλήθειαν περισσότερον ἢ τὸ 0,445· διότι τὸ 0,446 διαφέρει τοῦ ἀκριβοῦς πηλίκου κατὰ $\frac{2}{7}$ τοῦ χιλιοστοῦ, ἐνῶ τὸ 0,445 διαφέρει κατὰ $\frac{5}{7}$ χιλιοστοῦ, καὶ τὸ μὲν 0,446 εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀληθοῦς, τὸ δὲ 0,445 μικρότερον.

Παρατήρησις.

213. Καὶ ἀκέραιος δι' ἀκεραίου διαιρεῖται κατὰ τὸν προειρημένον τρόπον· διότι ὁ ἀκέραιος διαιρέτέος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς δεκαδικός, τοῦ ὁποίου τὰ δεκαδικὰ ψηφία εἶναι μηδενικά.

Παραδείγματα.

35	20	2	3
150	1,75	20	0,666 ...
100		20	
0		20	

Τὸ μὲν πηλίκον τοῦ 35 διὰ 20 ἐκφράζεται ἀκριβῶς διὰ δεκαδικοῦ καὶ εἶναι 1,75, τὸ δὲ πηλίκον τοῦ 2 διὰ 3 δὲν ἐκφράζεται ἀκριβῶς διὰ δεκαδικοῦ· κατὰ προσέγγισιν ἐνὸς χιλιοστοῦ εἶναι 0,666 ἢ μᾶλλον, 0,667.

2) Διαιρέσεις δεκαδικοῦ διὰ δεκαδικοῦ.

214. Διὰ νὰ διαιρέσωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν διὰ δεκαδικοῦ, μεταθέτομεν πρῶτον τὴν ὑποδιαστολὴν καὶ εἰς τοὺς δύο ἴσας θέσεις πρὸς τὰ ἔμπροσ, ὥστε νὰ γίνῃ ὁ διαιρέτης ἀκέραιος· ἔπειτα διαιροῦμεν κατὰ τὸν προηγούμενον κανόνα.

Ἐὰν ὁ διαιρετέος δὲν ἔχῃ ἀρκετὰ δεκαδικὰ ψηφία, διὰ νὰ μεταθεθῇ ἡ ὑποδιαστολή, γράφομεν μηδενικά εἰς τὸ τέλος αὐτοῦ.

Διὰ νὰ ἐννοήσωμεν τὸ ὄρθον τοῦ κανόνος τούτου, ἀρκεῖ νὰ ἐνθυμηθῶμεν ὅτι μεταθέτοντες τὴν ὑποδιαστολὴν πρὸς τὰ ἔμπροσ ἴσας θέσεις καὶ εἰς τοὺς δύο ἀριθμοὺς πολλαπλασιάζομεν ἀμφοτέρους ἐπὶ ἓνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν (ἐπὶ 10, ἂν κατὰ μίαν θέσιν μετεθέσαμεν· ἐπὶ 100, ἂν κατὰ δύο θέσεις· ἐπὶ 1000, ἂν κατὰ τρεῖς κτλ.). Κατὰ δὲ τὴν γενικὴν ιδιότητα τῆς διαιρέσεως (ἐδ. 186) τὸ πηλίκον τότε δὲν ἀλλάσσει.

Παράδειγματα.

- 1) Νὰ διαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 25,16 διὰ 3,2.

$$\begin{array}{r}
 251,6 \quad | \quad 32 \\
 \hline
 276 \quad 7,8625 \\
 200 \\
 80 \\
 160 \\
 0
 \end{array}$$

- 2) Νὰ διαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 0,3 διὰ 2,48.

$$\begin{array}{r}
 30 \quad | \quad 248 \\
 \hline
 300 \quad 0,120 \dots \\
 520 \\
 240
 \end{array}$$

- 3) Νὰ διαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 21,75 διὰ 3,21.

$$\begin{array}{r}
 2175 \quad | \quad 321 \\
 \hline
 2490 \quad 6,77 \dots \\
 2430
 \end{array}$$

215. Ἐπειδὴ αἱ πράξεις τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν γίνονται, ὡς καὶ αἱ τῶν ἀκεραίων, ἐνῶ τῶν κοινῶν κλασμάτων αἱ πράξεις εἶναι ὁλιγώτερον ἁπλοῦς, διὰ τοῦτο εἰς τὰς ἐφαρμογὰς τῆς ἀριθμητικῆς προτιμῶνται οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοί· τρέπονται δὲ καὶ τὰ κοινὰ κλάσματα εἰς δεκαδικὰ εἴτε ἀκριβῶς εἴτε κατὰ προσέγγισιν.

Ἡ τροπὴ τῶν κοινῶν κλασμάτων εἰς δεκαδικὰ ἀνάγεται εἰς τὴν διαίρεσιν τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν· διότι πᾶν κλάσμα εἶναι τὸ πηλίκον τοῦ ἀριθμητοῦ αὐτοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του (ἐδ. 147). Τὸ δὲ πηλίκον τοῦτο ἐκφράζεται, ὡς εἴλομεν, διὰ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ ἢ ἀκριβῶς ἢ μὲ ὅσην θέλομεν προσέγγισιν.

■ ΠΡΑΓΜΑΤΕΙΣ.

1) Νὰ τραπῇ τὸ κλάσμα $\frac{3}{8}$ εἰς δεκαδικόν.

$$\begin{array}{r} 3 \quad | \quad 8 \\ 30 \quad \underline{} \quad 8 \\ 60 \quad \underline{} \quad 0 \\ 40 \quad \underline{} \quad 0 \\ 0 \end{array}$$

$$\text{ἔθεν } \frac{3}{8} = 0,375.$$

2) Νὰ τραπῇ τὸ κλάσμα $\frac{2}{7}$ εἰς δεκαδικόν.

$$\begin{array}{r} 2 \quad | \quad 7 \\ 20 \quad \underline{} \quad 7 \\ 60 \quad \underline{} \quad 14 \\ 40 \quad \underline{} \quad 57 \\ 50 \quad \underline{} \quad 114 \\ 10 \quad \underline{} \quad 285 \\ 30 \quad \underline{} \quad 714 \\ 2 \end{array}$$

....

$$\text{ἔθεν } \frac{2}{7} = 0,285714 \text{ μὲ προσέγγισιν ἑνὸς ἑκατομμυριοστοῦ.}$$

Ἄλλα μὲν τῶν κοινῶν κλασμάτων τρέπονται εἰς δεκαδικὰ ἀκριβῶς, ἄλλα δὲ ὅχι· διακρίνονται δὲ τὰ πρῶτα ἀπὸ τῶν δευτέρων διὰ τοῦ ἐξῆς θεωρήματος.

ΘΕΩΡΗΜΑ

216. Διὰ νὰ τρέπηται κοινὸν ἀνάγωγον κλάσμα εἰς δεκαδικὸν ἀκριβῶς, πρέπει ὁ παρονομαστής αὐτοῦ νὰ μὴ περιέχῃ ἄλλον πρῶτον παράγοντα πλην τοῦ 2 καὶ τοῦ 5· τοῦτο δὲ καὶ ἀρκεῖ.

Ἐστω τυχὸν ἀνάγωγον κλάσμα τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ ἄς ὑποθετῇ ὅτι ὑπάρχει δεκαδικὸν τι κλάσμα ἴσον αὐτῷ, ἔστω τὸ $\frac{A}{100000}$ ἢ $\frac{A}{10^5}$, ἥτοι ἔστω $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{A}{10^5}$

Κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ ἐδ. 153 οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος $\frac{A}{10^5}$ θὰ εἶναι ἴσοι πολλαπλάσια τῶν ὄρων τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$ (ὅπερ εἶναι ἀνάγωγον). Ἄρα ὁ β θὰ διαιρῇ τὸν 10^5 , ἐπομένως δὲν θὰ περιέχῃ (ἐδ. 124) ἄλλους πρώτους παράγοντας πλὴν τῶν 2 καὶ 5 (τούτους μόνον περιέχει ὁ 10^5).

Τοῦτο δὲ ἀρκεῖ, διότι ἔστω π.χ. τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{2^4 \times 5}$, τοῦ ὁποῖου ὁ παρονομαστής δὲν περιέχει ἄλλον πρῶτον παράγοντα πλὴν τῶν 2 καὶ 5. Διὰ νὰ τραπῇ τοῦτο εἰς δεκαδικόν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιασθῶσιν οἱ δύο ὄροι αὐτοῦ ἐπὶ 5^3 (διὰ νὰ ἔχωσι ἀμφότεροι οἱ πρῶτοι παράγοντες 2 καὶ 5 ἴσους ἐκθέτας). διότι τότε γίνεται:

$$\frac{\alpha \times 5^3}{2^4 \times 5^4} = \frac{\alpha \times 5^3}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5} = \frac{\alpha \times 5^3}{10 \times 10 \times 10 \times 10} = \frac{\alpha \times 5^3}{10^4}, \text{ ἥτοι } \frac{\alpha \times 5^3}{10000}.$$

Ἐτραπῇ λοιπὸν τὸ δοθὲν κλάσμα εἰς δεκαδικόν· καὶ ἂν γραφῇ ὡς συνήθως, θὰ ἔχῃ 4 δεκαδικὰ ψηφία (ὅσος εἶναι ὁ μεγαλύτερος ἐκθέτης τῶν δύο παραγόντων τοῦ παρονομαστοῦ του), ἐὰν εἶναι ἀνάγωγον.

Παραδείγματα.

1) Τὸ κλάσμα $\frac{3}{8}$ τρέπεται εἰς δεκαδικὸν ἀκριβῶς· διότι ὁ παρονομαστής αὐτοῦ εἶναι 2^3 · διὰ νὰ τραπῇ δὲ εἰς δεκαδικόν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιασθῶσιν οἱ ὄροι του ἀμφότεροι ἐπὶ 5^3 · τότε γίνεται $\frac{3 \times 5^3}{1000} = 0,375$ · τὸ αὐτὸ δὲ εὐρίσκομεν καὶ διαιροῦντες τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ 8 κατὰ τὰ προειρημένα.

2) Τὸ κλάσμα $\frac{8}{15}$ δὲν δύναται νὰ τραπῇ εἰς δεκαδικὸν ἀκριβῶς· διότι ὁ παρονομαστής του εἶναι 3×5 · ὥστε ἔχει τὸν πρῶτον παράγοντα 3 (διάφορον τῶν 2 καὶ 5)· ἐπομένως, ἂν διαιρέσωμεν τὸ 8 διὰ 15, κατὰ τὸ ἐδάφιον 213 ἢ διαιρέσεις οὐδέποτε θὰ λάβῃ πέρας.

Παρατήρησεις.

217. Ὅταν τὸ κοινὸν κλάσμα δὲν δύναται νὰ τραπῇ ἀκριβῶς εἰς δεκαδικόν, ἡ δεκαδικὴ διαίρεσις τοῦ ἀριθμητοῦ του διὰ τοῦ παρονομαστοῦ δὲν ἔχει τέλος. Ἐξακολουθοῦντες ὁμως αὐτὴν πλησιάζομεν ἐπὶ μᾶλ-

ον καὶ μᾶλλον πρὸς τὸ κοινὸν κλάσμα· δυνάμεθα δηλαδή νὰ εὕρωμεν δεκαδικὸν κλάσμα διαφέρον τοῦ δοθέντος κοινοῦ ὀλιγώτερον πάσης δοθείσης δεκαδικῆς μονάδος. Ἄν λ. χ. προστάξῃ τις νὰ εὕρωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν διαφέροντα τοῦ $\frac{2}{3}$ ὀλιγώτερον ἑνὸς χιλιοστοῦ, ἀρκεῖ νὰ ἔξακολουθήσωμεν τὴν διαίρεσιν, μέχρις οὗ εὕρωμεν τὰ χιλιοστὰ τοῦ πληκίου· ὅτι τότε εὐρίσκομεν ὅτι εἶναι $\frac{2}{3} = 0,666 + \frac{2}{3}$ τοῦ χιλιοστοῦ· ὥστε τὸ δεκαδικὸν 0,666 διαφέρει τοῦ $\frac{2}{3}$ ὀλιγώτερον ἑνὸς χιλιοστοῦ.

Ὅμοίως τὸ 0,6666 διαφέρει τοῦ $\frac{2}{3}$ ὀλιγώτερον τοῦ $\frac{1}{10000}$
καὶ τὸ 0,66666 διαφέρει τοῦ $\frac{2}{3}$ ὀλιγώτερον τοῦ $\frac{1}{100000}$
καὶ τὸ 0,666666 διαφέρει τοῦ $\frac{2}{3}$ ὀλιγώτερον τοῦ $\frac{1}{1000000}$
καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἐκ τούτου φθάνομεν εἰς τὴν ἰδέαν, ὅτι τὸ κοινὸν κλάσμα $\frac{2}{3}$ θὰ ἀποτελεῖτο, ἂν ἦτο δυνατόν νὰ ἐνώσωμεν 6 μονάδας ἐξ ἑκάστης δεκαδικῆς ἀξίως (ἦτοι 6 δέκατα, 6 ἑκατοστὰ κτλ.), καὶ δύναται ἐτομένως νὰ θεωρηθῇ ὡς συγκείμενον ἐξ ἀπείρου πλήθους δεκαδικῶν μονάδων ἐντελῶς ὥρισμένων.

Τὸ αὐτὸ δὲ δύναται νὰ λεχθῇ καὶ περὶ παντὸς κλάσματος μὴ δυναμένου νὰ τραπῇ ἀκριβῶς εἰς δεκαδικόν· διότι τὰ δεκαδικὰ ψηφία, καὶ ὅποια εὐρίσκομεν ἐπιχειροῦντες νὰ τρέψωμεν αὐτὸ εἰς δεκαδικόν, εἶναι ἅπαντα ἐντελῶς ὥρισμένα.

Κατὰ ταῦτα δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι πᾶν κλάσμα ἀποτελεῖται ἐκ δεκαδικῶν μονάδων, ὧν τὸ πλῆθος εἶναι ἢ πεπερασμένον (ὅταν ὁ παρονομαστής τοῦ κλάσματος δὲν περιέχῃ ἄλλον πρῶτον παράγοντα πλὴν τῶν 2 καὶ 5) ἢ ἄπειρον (ὅταν ὁ παρονομαστής τοῦ κλάσματος, ἀναγώγου ὄντος, περιέχῃ ἄλλον τινὰ πρῶτον παράγοντα)· ἐπομένως τρέπεται εἰς δεκαδικὸν ἔχον ἢ πεπερασμένον ἀριθμὸν ψηφίων ἢ ἄπειρον.

ΘΕΩΡΗΜΑ

218. Ὅταν κοινὸν κλάσμα τρέπηται εἰς δεκαδικὸν ἔχον ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία, τὸ δεκαδικὸν τοῦτο ἀπὸ τινος ψηφίου καὶ ἐφεξῆς ἀποτελεῖται ἐκ τινων ψηφίων, τὰ ὅποια ἐπαναλαμβάνονται ἐπ' ἄπειρον καὶ αὐτὰ καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν.

Ἄς λάβωμεν ὡς παράδειγμα τὸ κλάσμα $\frac{4}{7}$.

$$\begin{array}{r|l} 4 & 7 \\ \hline 40 & 0,571428 \\ 50 & \\ 10 & \\ 30 & \\ 20 & \\ 60 & \\ 4 & \end{array}$$

τρέποντες αὐτὸ εἰς δεκαδικὸν παρατηροῦμεν ὅτι τὰ ὑπόλοιπα τῶν μ
ρικῶν διαιρέσεων θὰ εἶναι πάντα μικρότερα τοῦ 7· οὐδὲν δὲ ἐξ αὐτῶν θ
εἶναι 0 (διότι τὸ κλάσμα $\frac{4}{7}$ δὲν τρέπεται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικόν)· ἄρ
δὲν δύνανται νὰ μείνωσιν ἄλλα ὑπόλοιπα ἢ τὰ ἐξῆς ἐξ· 1, 2, 3, 4, 5,

Ἐκ τούτου συμπεραίνομεν ὅτι, ἀφοῦ κάμωμεν τὸ πολὺ ἐξ διαιρέ
σεις, θὰ εὗρωμεν ἐξ ἀνάγκης ἓν ὑπόλοιπον καὶ πρὶν εὗρεθῆν· τότε θ
ἐπαναρχίσωμεν τὰς ἤδη γενομένας διαιρέσεις καὶ ἐπομένως θὰ εὗρ
σκωμεν τὰ αὐτὰ ψηφία τοῦ πηλίκου καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν· τοῦ
δὲ θὰ γίνηται ἐπ' ἄπειρον.

Ὅρισμοί.

219. *Περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα* λέγεται τὸ ἔχον ἄπειρα δεκαδικ
ψηφία ἀποτελούμενα (ἀπὸ τινος καὶ ἐφεξῆς) ἔκ τινων ψηφίων, τὰ ὅπο
ἐπαναλαμβάνονται ἐπ' ἄπειρον τὰ αὐτὰ καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν.

Τὸ σύνολον τῶν οὕτως ἐπαναλαμβανομένων ψηφίων λέγεται *περίοδος*.

Τὸ περιοδικὸν λέγεται *ἀπλοῦν* μέν, ἐὰν ἡ περίοδος ἀρχίζῃ ἀμέ
σως μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν, *μικτόν* δὲ κατὰ τὴν ἐναντίαν περίπτωσιν
τότε δὲ τὰ προηγούμενα τῆς πρώτης περιόδου δεκαδικὰ ψηφία ἀποτε
λοῦσι τὸ μὴ περιοδικὸν μέρος.

Παραδείγματα.

Τὸ κλάσμα 0,727272... εἶναι περιοδικὸν ἀπλοῦν· ἡ δὲ περίοδος
αὐτοῦ εἶναι 72.

Τὸ δὲ κλάσμα 0,82535535535... εἶναι περιοδικὸν μικτόν· ἡ
περίοδος αὐτοῦ εἶναι 535, τὸ δὲ μὴ περιοδικὸν μέρος εἶναι 82.

Σημείωσις. Κατὰ τὰ προηγουμένως ἀποδειχθέντα (ἐδ. 218), ὅτι

κοινὸν κλάσμα τρέπεται εἰς δεκαδικὸν ἔχον ἄπειρα ψηφία, τὸ δεκαδικὸν τοῦτο εἶναι περιοδικόν· καὶ τὸ πλῆθος τῶν ψηφίων τῆς περιόδου καὶ τοῦ μὴ περιοδικοῦ μέρους (ἂν ὑπάρχῃ) εἶναι μικρότερον τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ κλάσματος.

Παραδείγματος χάριν, τὸ κλάσμα $\frac{4}{7}$ δίδει περιοδικὸν ἀπλοῦν ἔχον περίοδον ἑξαψήφιον· τὸ δὲ $\frac{2}{11}$ δίδει ὅμοιον ἔχον περίοδον διψήφιον.

Εὗρεσις τοῦ κοινοῦ κλάσματος, ἐξ οὗ παράγεται
δοθὲν περιοδικὸν κλάσμα.

Ἀπλᾶ περιοδικά.

220. Ἐστω κατὰ πρῶτον οἶονδήποτε ἀπλοῦν περιοδικὸν κλάσμα ἄνευ ἀκεραίου μέρους· οἶον τὸ 0,727272...

Ἄς λάβωμεν ἐξ αὐτοῦ περιόδους τινάς, ἔστω τρεῖς· τότε ἔχομεν τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν 0,727272·

τὸν ἀριθμὸν τοῦτον πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 100 (ὥστε ἡ ὑποδιαστολὴ νὰ προχωρήσῃ κατὰ μίαν περίοδον) καὶ εὐρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν 72,7272

Ἄν ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶχεν ἀκόμη μίαν περίοδον (ἥτοι ἂν εἶχεν ἀκόμη 72 ἑκατομμυριοστὰς), ἡ διαφορὰ αὐτοῦ καὶ τοῦ προηγουμένου θὰ ἦτο ἀκριβῶς 72 ἀκέραια. Ἄρα ἡ διαφορὰ τῶν θὰ εἶναι μικρότερα τοῦ ἀκεραίου 72 κατὰ 72 ἑκατομμυριοστὰς· τουτέστιν ἡ ρηθεῖσα διαφορὰ εἶναι

$$72 - \frac{72}{1000000} \text{ ἢ } 72 - \frac{72}{10^6}.$$

Ἄλλ' ἡ διαφορὰ αὕτη εἶναι 99 φορές ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 0,727272 (διότι ἐλάβομεν αὐτὸν 100 φορές καὶ ἔγινεν 72,7272 καὶ ἀπὸ τοῦτου ἀφηρέσαμεν αὐτὸν μίαν φοράν). Ὡστε, ἂν διαιρεθῇ διὰ τοῦ 99, θὰ δώσῃ τὸν δεκαδικὸν τοῦτον· ἥτοι εἶναι:

$$0,727272 = \frac{72}{99} - \frac{72}{10^6} \times \frac{1}{99}.$$

Ἄν ἐλαμβάνομεν 4 περιόδους τοῦ δοθέντος περιοδικοῦ, θὰ εὐρίσκομεν ὁμοίως

$$0,72727272 = \frac{72}{99} - \frac{72}{10^8} \times \frac{1}{99}.$$

Ἄν δὲ 5, θὰ εὐρίσκομεν

$$0,7272727272 = \frac{72}{99} - \frac{72}{10^{10}} \times \frac{1}{99} \text{ καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.}$$

Ἐκ τούτων βλέπομεν ὅτι ὅσαοδήποτε περιόδους καὶ ἂν λάβωμεν κατὰ σειρὰν ἀπ' ἀρχῆς τοῦ δοθέντος περιοδικοῦ, ὁ ἀποτελούμενος ὑπ' αὐτῶν ἀριθμὸς θὰ εἶναι μικρότερος τοῦ κοινοῦ κλάσματος $\frac{72}{99}$. Ἄλλ' ἢ διαφορὰ των δύναται νὰ γίνῃ μικροτέρα πάσης δεκαδικῆς μονάδος· διότι, ἂν λάβωμεν τέσσαρας περιόδους, ἡ διαφορὰ εἶναι $\frac{72}{99} \times \frac{1}{10^8}$, ἥτοι μικροτέρα τοῦ $\frac{1}{10^8}$. ἂν λάβωμεν πέντε, ἡ διαφορὰ γίνεται μικροτέρα τοῦ $\frac{1}{10^{10}}$. ἂν ἕξ, ἡ διαφορὰ γίνεται μικροτέρα τοῦ $\frac{1}{10^{12}}$ καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς· καὶ ἂν ἦτο δυνατόν νὰ λάβωμεν πάσας τὰς περιόδους τοῦ δοθέντος περιοδικοῦ, θὰ ἀπετελεῖτο ὁ ἀριθμὸς $\frac{72}{99}$.

Ἐκ τούτου συμπεραίνομεν ὅτι, ἂν τὸ δοθὲν περιοδικὸν παράγῃται ἐκ τῆς τροπῆς κοινοῦ τινος κλάσματος, τὸ κλάσμα τοῦτο θὰ εἶναι ἴσον τῷ $\frac{72}{99}$. διότι, ὅταν δεκαδικὸν ἔχον ἄπειρα ψηφία παράγῃται ἐκ τῆς τροπῆς κοινοῦ κλάσματος, καθ' ὅσον λαμβάνομεν περισσότερα ψηφία τοῦ δεκαδικοῦ τούτου, κατὰ τοσοῦτον προσεγγίζομεν πρὸς τὸ κοινὸν κλάσμα, ἐξ οὗ παρήχθη (ἔδ. 217).

Ὅτι δὲ ἀληθῶς τὸ δοθὲν περιοδικὸν 0,72727272... παράγεται ἐκ τοῦ κλάσματος $\frac{72}{99}$ δεικνύεται ὡς ἑξῆς.

Ὅταν τρέπω τὸ κλάσμα $\frac{72}{99}$ εἰς δεκαδικόν, διὰ νὰ εὕρω τὰ δύο πρῶτα δεκαδικὰ ψηφία, πρέπει νὰ διαιρέσω τὸν 7200 διὰ 99. Ἄλλ' ἀντὶ νὰ διαιρέσω τὸν ἀριθμὸν 7200 εἰς 99 ἴσα μέρη, δύναμαι νὰ διαιρέσω αὐτὸν εἰς 100 ἴσα μέρη καὶ ἔπειτα τὸ περισσεῦον ἕν μερίδιον νὰ διαιρέσω πάλιν εἰς 99 ἴσα μέρη (ἰδὲ σελ. 52). Διαιρῶ τοιοῦτοτρόπως τὸν 7200 καὶ εὕρισκω πηλίκον 72 καὶ ὑπόλοιπον 72. Ἄρα ἑξακολουθῶν τὴν πρᾶξιν θὰ εὕρισκω πάντοτε τὰ αὐτὰ ψηφία, 7,2· τουτέστι θὰ εὕρω τὸ περιοδικὸν 0,727272... .

221. Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγεται τὸ ἑξῆς θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Τὸ κοινὸν κλάσμα, ἐξ οὗ παράγεται ἀπλοῦν περιοδικὸν ἄνευ ἀκεραίου μέρους, ἔχει ἀριθμητὴν μὲν μίαν περίοδον, παρονομαστὴν δὲ τὸν ἀριθμὸν, ὅστις προκύπτει ἐξ αὐτῆς, ὅταν πάντα τὰ ψηφία αὐτῆς γίνωσιν 9.

Σημείωσις. Ὁ ἀριθμός, ὅστις εὐρίσκεται κατὰ τὸ θεώρημα τοῦτο, εἶναι πάντοτε κλασματικός (ἐπομένως παράγει τὸ δεκαδικὸν περιοδικόν), πλὴν ὅταν πάντα τὰ ψηφία τῆς περιόδου εἶναι 9· ὅταν δηλαδὴ τὸ δοθὲν περιοδικὸν εἶναι $0,999999\dots$

διότι τότε ὁ ἀριθμός, πρὸς ὃν προσεγγίζομεν λαμβάνοντες ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον περισσότερα ψηφία (ὁ κατὰ τὸ θεώρημα εὐρισκόμενος), εἶναι $\frac{9}{9}$ ἢ $\frac{99}{99}$ ἢ $\frac{999}{999}$ κτλ., τουτέστιν 1 ἀκέραιον. Ἄρα τὸ περιοδικὸν τοῦτο ἐξ οὐδενὸς κοινοῦ κλάσματος παράγεται. Ὅτι δὲ προσεγγίζομεν εἰς τὴν μονάδα 1, ὅταν λαμβάνωμεν ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον περισσότερα ψηφία αὐτοῦ, ἀποδεικνύεται ἀπλούστατα καὶ ἐκ τούτου, ὅτι τὸ 0,9 διαφέρει τῆς μονάδος 1 κατὰ $\frac{1}{10}$. τὸ 0,99 διαφέρει ἀπ' αὐτῆς κατὰ

$\frac{1}{100}$ · τὸ 0,999 κατὰ $\frac{1}{1000}$ καὶ οὕτω καθεξῆς· ὥστε δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι ἅπασαι αἱ δεκαδικαὶ μονάδες τοῦ ἀριθμοῦ 0,999... ἀποτελοῦσι τὴν ἀκέραιον μονάδα 1.

222. Εἰς τὰ προηγούμενα ἀνάγεται εὐκόλως καὶ ἡ εὑρεσις τοῦ κοινοῦ κλάσματος, ἐξ οὗ παράγεται δοθὲν ἀπλοῦν περιοδικὸν ἔχον ἀκέραιον μέρος.

Ἐστω ὡς παράδειγμα τὸ ἀπλοῦν περιοδικὸν 45,722722722...

Ἐπειδὴ τοῦτο εἶναι ἄθροισμα τοῦ ἀκεραίου 45 καὶ τοῦ ἀπλοῦ περιοδικοῦ 0,722722722..., φανερόν ἐστίν ὅτι παράγεται ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ

$$45\frac{722}{999}, \text{ ἢτοι } \frac{45 \times 999 + 722}{999}.$$

Ἐάν τὰ περιοδικὰ ψηφία εἶναι πάντα 9, τὸ περιοδικὸν ἐξ οὐδενὸς κοινοῦ κλάσματος παράγεται· οἷον τὸ κλάσμα 14,999999...

Αἱ δὲ μονάδες αὐτοῦ συναποτελοῦσιν, ἂν ληφθῶσιν ἅπασαι, τὸν ἀκέραιον 15.

Ἀποκτῆσις.

223. Τὸ κατὰ τὰ προηγούμενα εὐρισκόμενον κοινὸν κλάσμα (ἐξ οὗ παράγεται δοθὲν ἀπλοῦν περιοδικόν) ὡς ἐπὶ τὸ πολὺ δὲν εἶναι ἀνάγωγον. Ἀλλ' ὁ παρονομαστής αὐτοῦ, ὡς λήγων εἰς 9, δὲν ἔχει οὔτε τὸν παράγοντα 2 οὔτε τὸν παράγοντα 5. Οὐδὲ δύναται νὰ ἀποκτήσῃ τοὺς παράγοντας τούτους ἐν τῇ ἀπλοποιήσει τοῦ κλάσματος· διότι τότε διαιρεῖται διὰ τινος τῶν παραγόντων του.

Ἐνταῦθα συνάγεται τὸ ἑξῆς θεώρημα.

224. Ὁ παρονομαστής τοῦ ἀναγώγον κλάσματος, ὅπερ παράγει ἀπλοῦν περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα, δὲν ἔχει οὔτε τὸν παράγοντα 2 οὔτε τὸν παράγοντα 5.

Μικτὰ περιοδικά.

225. Ταῦτα ἀνάγονται εὐκόλως εἰς ἀπλᾶ περιοδικά.

Διότι ἔστω, λ. χ., τὸ μικτὸν περιοδικὸν 18,75427427427....

Ἐὰν μεταθέσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν δύο θέσεις πρὸς τὰ ἔμπροσ (διὰ τὰ ἀρχίζῃ ἡ περίοδος ἀμέσως μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν), λαμβάνομεν τὸ ἀπλοῦν περιοδικὸν 1875,427427.

Τὸ περιοδικὸν τοῦτο παράγεται ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ $1875 + \frac{427}{999}$, ἥτοι ἐκ τοῦ κοινοῦ κλάσματος

$$\frac{1875 \times 999 + 427}{999} \text{ ἢ } \frac{1873552}{999}$$

ἐπειδὴ δὲ τὸ ἀπλοῦν περιοδικὸν 1875,427427.... προκύπτει ἐκ τῆς διαιρέσεως τοῦ 1873552 διὰ 999, τὸ μικτὸν περιοδικὸν 18,75427427..., ὅπερ ἔχει τὰ αὐτὰ καὶ τὸ ἀπλοῦν ψηφία, ἀλλ' ἐν τῷ ὁποίῳ ἡ ὑποδιαστολὴ εὐρίσκεται δύο θέσεις πρὶν, θὰ προκύπτῃ προφανῶς ἐκ τῆς διαιρέσεως τοῦ 18735,52 διὰ 999, ἥτοι ἐκ τοῦ κλάσματος $\frac{1873552}{99900}$.

226. Ἐκ τούτου συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

Διὰ τὰ εὖρωμεν τὸ κοινὸν κλάσμα, ἐξ οὗ παράγεται δοθὲν μικτὸν περιοδικόν, μεταθέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν πρὸς τὰ ἔμπροσ, ὥστε τὰ καταστήσωμεν αὐτὸ ἀπλοῦν, εὐρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν, ἐξ οὗ τὸ ἀπλοῦν τοῦτο παράγεται, καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν διὰ 10, ἂν μίαν θέσιν μετεθέσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν, διὰ 100, ἂν δύο· καὶ οὕτω καθεξῆς.

Σημείωσις. Ἐὰν πάντα τὰ περιοδικὰ ψηφία εἶναι 9, τὸ μικτὸν περιοδικὸν ἕξ οὐδενὸς παράγεται κοινοῦ κλάσματος· οἷον τὸ κλάσμα $7,8399999...$

Αἱ δὲ μονάδες αὐτοῦ (ἂν ἄπασαι ληφθῶσιν) ἀποτελοῦσι τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν 7,84· τοῦτο καὶ ἀμέσως δύναται νὰ ἀποδειχθῇ (ἐδ. 221, Σημ.), εὐρίσκεται δὲ καὶ διὰ τοῦ ἀνωτέρω κανόνος.

Παρατήρησις.

227. Ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κοινοῦ κλάσματος, ἐξ οὗ παράγεται μιν

κτὸν περιοδικόν, οὐδέποτε λήγει εἰς 0. Εἰς τὸ ἀνωτέρω δοθὲν παράδειγμα ὁ ἀριθμητὴς εἶναι $1875 \times 999 + 427$, γράφεται δὲ καὶ ὥς ἑξῆς:

$$1875 \times 1000 - 1875 + 427, \text{ ἥτοι } 1875427 - 1875.$$

Ἐξ οὗ φαίνεται ὅτι, ἵνα λήγῃ εἰς 0, ἔπρεπε τὸ τελευταῖον ψηφίον 5 τοῦ μὴ περιοδικοῦ μέρους νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ τελευταῖον ψηφίον τῆς περιόδου, ἥτοι μὲ τὸ 7· τότε ὅμως καὶ τὸ ψηφίον τοῦτο 5 θὰ περιλαμβάνετο εἰς τὴν περίοδον (ὅπερ ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως· διότι τότε τὸ περιοδικὸν θὰ ἦτο 18,7742742742... καὶ θὰ εἶχε περίοδον 742· θὰ ἤρχιζε δὲ ἡ περίοδος μίαν θέσιν πρὶν).

Ὁ δὲ παρονομαστὴς 99×100 ἔχει, ὥς ἀμέσως φαίνεται, ἀμφοτέρους τοὺς παράγοντας 2 καὶ 5, ἐκάτερον μὲ ἐκθέτην 2 (διότι $100 = 2^2 \times 5^2$), τουτέστι τοσάκις ἐκάτερον, ὅσα εἶναι τὰ μὴ περιοδικὰ ψηφία τοῦ δοθέντος μικτοῦ περιοδικοῦ.

Ἀπλοποιῦντες δὲ τὸ κλάσμα εἶναι δυνατόν νὰ ἐξαλείψωμεν ἢ τὸν παράγοντα 2 (ἅπαξ ἢ πολλακίς) ἢ τὸν παράγοντα 5· ἀλλ' οὐχὶ ἀμφοτέρους· διότι τότε θὰ διηροῖντο οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος διὰ 10, ὅπερ ἀδύνατον (διότι ὁ ἀριθμητὴς δὲν λήγει εἰς 0). Ὡστε ὁ παρονομαστὴς τοῦ προκύπτοντος ἀναγώγου κλάσματος θὰ διατηρήσῃ τὸν ἓνα τοῦλάχιστον ἐκ τῶν παραγόντων 2 ἢ 5 μὲ τὸν αὐτὸν καὶ πρὶν ἐκθέτην.

Ἐντεῦθεν συνάγεται τὸ θεώρημα:

228. Ὁ παρονομαστὴς τοῦ κοινοῦ ἀναγώγου κλάσματος, ἐξ οὗ παράγεται μικτὸν περιοδικόν, περιέχει τὸν ἓνα ἐκ τῶν παραγόντων 2 ἢ 5 μὲ ἐκθέτην τὸν ἀριθμὸν τῶν μὴ περιοδικῶν ψηφίων, δύναται δὲ νὰ ἔχῃ καὶ τὸν ἄλλον μὲ ἐκθέτην ἴσον ἢ μικρότερον.

229. Συνοψίζοντες ἅπαντα τὰ περὶ τῶν δεκαδικῶν εἰρημένα συμπεραίνομεν τὰ ἑξῆς.

1) Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς κοινοῦ κλάσματος περιέχῃ μόνον τοὺς παράγοντας 2 καὶ 5 (ἢ τὸν ἓνα μόνον ἐξ αὐτῶν ἢ ἀμφοτέρους), τὸ κλάσμα τοῦτο τρέπεται εἰς δεκαδικὸν ἀκριβῶς.

2) Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς κοινοῦ ἀναγώγου κλάσματος δὲν περιέχῃ μήτε τὸν παράγοντα 2 μήτε τὸν παράγοντα 5, τὸ κλάσμα τοῦτο παράγει ἄπλοῦν περιοδικὸν κλάσμα.

Τὸ κλάσμα τοῦτο δὲν τρέπεται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικόν (ἔδ. 216)· ἄρα παράγει περιοδικὸν δεκαδικόν· παράγει δὲ ἄπλοῦν· διότι, ἂν παρῇγε

μικτόν, ὃ παρονομαστής του θὰ περιεῖχεν ἓνα τοῦλάχιστον ἐκ τῶν παραγόντων 2 ἢ 5 (ἐδ. 228).

3) Ἐὰν ὁ παρονομαστής κοινοῦ ἀναγώγου κλάσματος περιέχῃ τὸν ἕτερον τῶν παραγόντων 2 ἢ 5 ἢ καὶ ἀμφοτέρους, περιέχῃ δὲ πλὴν αὐτῶν καὶ ἄλλους παράγοντας, τὸ κλάσμα τοῦτο παράγει μικτὸν περιοδικόν.

Τὸ κλάσμα τοῦτο, ὡς μὴ τρεπόμενον ἀκριβῶς εἰς δεκαδικόν (ἐδ. 216), θὰ παράγῃ περιοδικὸν δεκαδικόν· παράγει δὲ μικτόν· διότι, ἂν παρῇγεν ἅτι οὖν, δὲν θὰ περιεῖχεν ὁ παρονομαστής του οὔτε τὸν παράγοντα 2 οὔτε τὸν παράγοντα 5 (ἐδ. 224).

Πᾶν περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα παράγεται ἐκ τινος κοινοῦ κλάσματος, ὅπερ ἀποτελοῦσιν ἅπασαι αἱ μονάδες αὐτοῦ ὁμοῦ λαμβανόμεναι· ἐξαιροῦνται μόνον ἐκεῖνα, ὧν πάντα τὰ περιοδικὰ ψηφία εἶναι 9, διότι ταῦτα ἐξ οὐδενὸς κοινοῦ κλάσματος παράγονται· καὶ τούτων ὁμως αἱ μονάδες ἅπασαι ληφθεῖσαι συναποτελοῦσιν ἀριθμὸν ἀκέραιον μὲν τῶν ἀπλῶν, δεκαδικὸν δὲ τῶν μικτῶν.

Ἀζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Νὰ δειχθῇ ὅτι πᾶς ἀριθμὸς Α, μὴ ἔχων τὸν παράγοντα 2 μηδὲ τὸν 5, διαιρεῖ ἀριθμὸν τινα, οὗτινος πάντα τὰ ψηφία εἶναι 9, ἥτοι διαιρεῖ δυνάμιν τινα τοῦ 10, ἀφ' οὗ ἀφαιρεθῇ ἀπ' αὐτῆς μία μονάς.

Ἐὰν δὲ ἐκ πασῶν τῶν τοιούτων δυνάμεων τοῦ 10 λάβωμεν τὴν ἐλάχιστην, ὃ ἐκθέτης αὐτῆς δεικνύει τὸ πλῆθος τῶν ψηφίων τῆς περιόδου ἐν τῷ περιοδικῷ κλάσματι, τῷ παραγομένῳ ἐκ τοῦ κλάσματος

$\frac{1}{A}$ καὶ ἐκ παντὸς κλάσματος $\frac{B}{A}$ ἀναγώγου.

2) Εἰς περιοδικὸν τι κλάσμα, οἷον εἰς τὸ 0.58585858... δυνάμεθα ὡς περίοδον νὰ λῖβωμεν ἢ 58 ἢ 5858 ἢ 585858 κτλ... τότε κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ἑδαφίου 221 παράγεται τὸ περιοδικὸν ἐκ τῶν ἐξῆς κοινῶν κλασμάτων:

$$\frac{58}{99}, \quad \frac{5858}{9999}, \quad \frac{585858}{999999} \text{ κτλ.}$$

Νὰ δειχθῇ ἐκ τῶν προτέρων ἡ ἰσότης τῶν κλασμάτων τούτων.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ Σ

BIBΛION Ε'

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΣΥΜΜΙΓΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ὅρισμοί.

230. Ποσὸν λέγεται πᾶν τὸ ἐπιδεχόμενον αὐξήσιν καὶ ἐλάττωσιν· οἷον τὸ μῆκος, ἡ ἐπιφάνεια, ὁ ὄγκος, τὸ βάρος τῶν σωμάτων εἶναι ποσά, καὶ ὁ χρόνος ἐπίσης.

231 Μέτρησις τοῦ ποσοῦ λέγεται ἡ σύγκρισις αὐτοῦ πρὸς ἄλλο ὁμοειδὲς ὠρισμένον καὶ γνωσιόν, τὸ ὁποῖον λέγεται μονάς. Ἐκ τῆς συγκρίσεως ταύτης εὐρίσκομεν, πόσαι μονάδες καὶ πόσα καὶ ποῖα μέρη τῆς μονάδος ἀποτελοῦσι τὸ ποσόν· ἥτοι πῶς ἀποτελεῖται τὸ ποσὸν ἐκ τῆς μονάδος καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτῆς.

Ὁ ἀριθμὸς, ὅστις ἀποτελεῖται ἐκ τῆς μονάδος 1 καὶ ἐκ τῶν μερῶν τῆς, καθὼς ἀποτελεῖται τὸ ποσὸν ἐκ τῆς μονάδος του καὶ ἐκ τῶν μερῶν τῆς, ὁ ἀριθμὸς οὗτος λέγεται ὅτι παριστᾷ τὸ ποσόν. Ἐάν, παραδείγματος χάριν, εὕρωμεν ὅτι ποσόν τι ἀποτελεῖται ἐκ τῆς μονάδος του τετράκις ληφθείσης, ὁ παριστῶν αὐτὸ ἀριθμὸς εἶναι ὁ 4 Ἐάν δὲ ἀποτελεῖται ἐκ τῆς μονάδος καὶ ἐκ τοῦ ἡμίσεος αὐτῆς καὶ ἐκ τοῦ τετάρτου αὐτῆς, ὁ ἀριθμὸς ὁ παριστῶν αὐτὸ εἶναι $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, ἥτοι $\frac{7}{4}$.

Διὰ νὰ ἀποφύγωσιν ὅσον τὸ δυνατόν τὰ κλίσματα (τὰ ὁποῖα διὰ τοὺς πολλοὺς εἶναι δύσκολα), ἔλαβον εἰς τὴν μέτρησιν ὠρισμένα τινὰ μέρη τῆς ἀρχικῆς μονάδος καὶ ταῦτα ἐθεώρησαν ὡς νέας μονάδας καὶ ἔδωκαν εἰς αὐτὰ ἴδια ὀνόματα. Παραδείγματος χάριν, τὸ $\frac{1}{400}$ τῆς ὁκάς ὠνόμασαν δράμιον· καὶ ἐπομένως ἀντὶ νὰ λέγωσιν ὅτι βάρος τι εἶναι 5 ὁκάδες καὶ $\frac{160}{400}$ τῆς ὁκάς, λέγουσιν ὅτι εἶναι 5 ὁκάδες καὶ 160 δράμια.

Ὅμοίως τὸ $\frac{1}{60}$ τῆς ὥρας ὠνόμασαν λεπτόν πρῶτον, τὸ $\frac{1}{100}$ τῆς δραχμῆς λεπτόν κτλ.

Ἐπίσης διὰ νὰ ἀποφύγῃσι τοὺς λίαν μεγάλους ἀριθμούς, οἵτινες προκύπτουσιν, ὅταν τὸ ποσὸν εἶναι λίαν μέγα ὥς πρὸς τὴν ἀρχικὴν μονάδα, ἔλαβον ὠρισμένα τινὰ πολλαπλάσια αὐτῆς ὥς νέας μονάδας καὶ ἔδωκαν εἰς αὐτὰ ἴδια ὀνόματα. Ἐάν, παραδείγματος χάριν, πρόκειται νὰ μετρήσωμεν τὸ μήκος ἑνὸς τοίχου, ἀρκεῖ ὁ πήχυς. Ἄλλ' ἐὰν ἔχωμεν νὰ μετρήσωμεν τὴν ἀπόστασιν τῶν Ἀθηνῶν ἀπὸ τῆς Κωνσταντινουπόλεως, λαμβάνομεν 1000 πήχεις ὥς μίαν μονάδα, τὴν ὁποίαν ὀνομάζομεν *στάδιον*, καὶ δι' αὐτῆς ἐκφράζομεν τὴν ἀπόστασιν.

Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον δύναται ποσὸν τι νὰ παριστᾶται δι' ἀριθμοῦ συγκεκimenou ἐκ πολλῶν ἄλλων, ὁμοειδῶν μὲν, ἀλλ' ἐχόντων διάφορους μονάδας καὶ διάφορα ὀνόματα. Ὁ τοιοῦτος ἀριθμὸς λέγεται *συμμιγῆς ἀριθμὸς*.

232. Ἐκ τούτων ὀδηγούμεθα εἰς τὸν ἐξῆς ὀρισμόν.

Συμμιγῆς ἀριθμὸς εἶναι ἀριθμὸς σύνθετος ἐξ ἄλλων, τῶν ὁποίων αἱ μονάδες εἶναι πολλαπλάσια μιᾶς ἀρχικῆς μονάδος ἢ μέρη αὐτῆς, ἔχοντα ἴδιον ὄνομα ἕκαστον.

Οἷον 8 ὀκάδες καὶ 250 δράμια εἶναι συμμιγῆς ἀριθμὸς.

Σημείωσις. Οἱ συμμιγεῖς ἀριθμοὶ εἶναι πάντοτε συγκεκριμένοι.

Μονάδες διάφοροι καὶ ὀνόματα αὐτῶν.

Τὰ διάφορα ἔθνη δὲν λαμβάνουσι δι' ἕκαστον ποσὸν οὔτε τὴν αὐτὴν ἀρχικὴν μονάδα οὔτε τὰς αὐτὰς ὑποδιαίρέσεις αὐτῆς (μόνον διὰ τὴν μέτρησιν τοῦ χρόνου καὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ἐπεκράτησαν αἱ αὐταὶ μονάδες εἰς πάντα τὰ πεπολιτισμένα ἔθνη). Διὰ τοῦτο ἐκθέτομεν ἐν τοῖς ἐπομένοις τὰ κυριώτερα εἶδη τῶν συμμιγῶν, μάλιστα δὲ ὅσα ἡμεῖς μεταχειριζόμεθα.

Μονάδες μήκους.

1) Γαλλικὸν μέτρον ἢ βασιλικὸς πήχυς.

Ἡ κυριώτερα μονὰς τοῦ μήκους, τῆς ὁποίας ἡ χρῆσις ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον ἐξαπλοῦται, εἶναι τὸ γαλλικὸν μέτρον. Ἡ μονὰς αὕτη συνδέεται πρὸς τὸ μέγεθος τῆς γῆς· διότι ὠρίσθη οὕτως, ὥστε ἡ περιφέρεια τοῦ μεσημβρινοῦ τῆς γῆς νὰ ἔχη μήκος 40000000 μέτρα.

Παρ' ἡμῖν τὸ γαλλικὸν μέτρον ὠνομάσθη *βασιλικὸς πήχυς*.

Μέτρον ἢ βασιλικὸς πῆχυς, ἀρχικὴ μονάς.

παλάμη = $\frac{1}{10}$ τοῦ πῆχεως. Σιάδιον = 1000 μέτρα.

δάκτυλος = $\frac{1}{10}$ τῆς παλάμης.

γραμμὴ = $\frac{1}{10}$ τοῦ δακτύλου.

Κατὰ ταῦτα εἶναι:

1 πῆχ. = 10 παλ. = 100 δακτ. = 1000 γρ.

1 παλ. = 10 δακτ. = 100 γρ.

1 δακτ. = 10 γρ.

Τὸ ἀπέναντι σχῆμα παριστᾷ παλάμην διηρημένην εἰς δακτύλους.

Καθὼς βλέπομεν, αἱ ὑποδιαίρέσεις τοῦ μέτρου εἶναι δεκαδικαί, τοῦτο δὲ ἐγένετο διὰ τὴν εὐκολίαν τῶν πράξεων· διότι πᾶς ἀριθμὸς παριστῶν μῆκος, ἥτοι συγκείμενος ἐκ μέτρων, παλαμῶν, δακτύλων καὶ γραμμῶν, παρίσταται καὶ ὡς δεκαδικὸς ἀριθμὸς ἔχον ἀκέραιον μέρος τοὺς πῆχεις, δέκατα δὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν παλαμῶν, ἑκατοστὰ τὸν ἀριθμὸν τῶν δακτύλων καὶ χιλιοστὰ τὸν ἀριθμὸν τῶν γραμμῶν.

οἷον 15 πῆχ. 2 παλ. 3 δακτ. 5 γραμ. εἶναι = 15 πῆχ., 235.

Ἐπομένως αἱ πράξεις ἐπὶ τῶν συμμιγῶν τούτων ἀριθμῶν ἀνάγονται εἰς τὰς πράξεις τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

Ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 15 πῆχ. 235 ἀπαγγέλλεται κατὰ τὰ περὶ ἀπαγγελίας τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν εἰρημένα (ἐδ. 213) καὶ ὡς ἑξῆς· 152 παλάμαι καὶ 35 γραμμαὶ ἢ 15235 γραμμαὶ ἢ 1523 δάκτυλοι καὶ 5 γραμμαὶ κτλ.

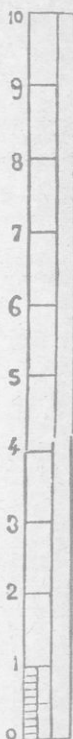
2) Τεκτονικὸς πῆχυς.

Ὁ τεκτονικὸς πῆχυς εἶναι τὰ 75 ἑκατοστὰ τοῦ μέτρου· μεταχειρίζονται δ' αὐτὸν εἰς τὰς οἰκοδομὰς καὶ εἰς τὰ οἰκόπεδα.

3) Πῆχεις τοῦ ἐμπορίου.

Εἰς τὸ ἐμπόριον διὰ τὴν μέτρησιν τῶν ὑφασμάτων μεταχειρίζονται τὸν μικρὸν πῆχυν τῆς Κωνσταντινουπόλεως, ὅστις λέγεται ἐνδεξὲ καὶ

Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Εκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς



εἶναι 0,πῆχ. 648 (ἤτοι 648 χιλιοστά τοῦ γαλλικοῦ μέτρου), καὶ τὸν μεγαλύτερον, ὅστις λέγεται ἀροῖν καὶ εἶναι 0μ, 669· διαιρεῖται δὲ ἕκαστος τούτων εἰς 8 δούπια.

4) Ὁ γυνιά.

Ἡ ὀργυνιά εἶναι παλαιότερα ἀρχικὴ μονὰς τοῦ μήκους, ἔχει δὲ τὴν ἑξῆς ὑποδιαίρεσεις :

Ὁργυνιά, ἀρχικὴ μονάς·

$$\text{ποὺς} = \frac{1}{6} \text{ τῆς ὀργυνιάς·}$$

$$\text{δάκτυλος} = \frac{1}{12} \text{ τοῦ ποδός·}$$

$$\text{γραμμὴ} = \frac{1}{12} \text{ τοῦ δακτύλου.}$$

Ἡ χρῆσις τῆς ὀργυνιάς καὶ τῶν ὑποδιαίρεσεων αὐτῆς ἤρχισεν ἤδη νὰ γίνηται σπανιωτέρα. Ἡ σχέσις αὐτῆς πρὸς τὸ μέτρον εἶναι ἡ ἑξῆς·

$$1 \text{ ὀργ.} = 1, \text{ μετ. } 94904 \text{ καὶ } 1 \text{ μετ.} = 0 \text{ ὀργ. } 3 \text{ πόδ. } 0 \text{ δακ. } 11 \text{ γραμ.} \quad \frac{296}{1000}$$

$$1 \text{ ποὺς} = 0, \text{ μετ. } 32484.$$

Μονάδες ἐπιφανείας.

Μονὰς τῶν ἐπιφανειῶν λαμβάνεται τὸ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν μονάδα τοῦ μήκους.

Εἶναι δὲ τὸ τετράγωνον ἐπιφάνεια ἐπίπεδος περικλειομένη ὑπὸ τεσσάρων ἴσων εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν ὀρθὰς γωνίας.

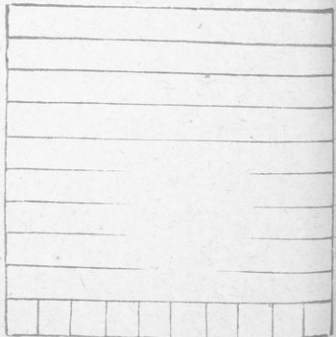
Τετραγωνικὸς πῆχυς λέγεται τὸ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι ἴση μὲ ἓνα πῆχυν.

Τετραγωνικὴ παλάμη λέγεται τὸ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι μία παλάμη ($= \frac{1}{10}$ τοῦ πῆχεως)· εἶναι δὲ

ἡ τετραγωνικὴ παλάμη τὸ $\frac{1}{100}$ τοῦ τετρα-

γωνικοῦ πῆχεως. Ἐὰν τῷ ὄντι θέσωμεν 10 τετραγωνικὰς παλάμας εἰς μίαν σειρὰν καὶ προσαρμόσωμεν αὐτάς, θὰ

ἀποτελεσθῇ ἓν ὀρθογώνιον ἔχον βάσιν ἓνα πῆχυν καὶ ὕψος $\frac{1}{10}$ τοῦ πῆχεως, ἤτοι μίαν παλάμην. Ἐὰν δὲ 10 τοιαῦτα ὀρθογώνια προσ-



αυτὸς ὡς (κατὰ τὰς μεγαλυτέρας πλευράς των), θ' ἀποτελεσθῇ ὁ τετραγωνικὸς πῆχυς ὥστε ὁ τετραγωνικὸς πῆχυς περιέχει 10×10 , ἥτοι 100, τετραγωνικὰς παλάμας.

Τετραγωνικὸς δάκτυλος λέγεται τὸ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι εἷς δάκτυλος ($= \frac{1}{10}$ τῆς παλάμης $= \frac{1}{100}$ τοῦ μέτρου). εἶναι δὲ ὁ τετραγωνικὸς δάκτυλος τὸ $\frac{1}{100}$ τῆς τετραγωνικῆς παλάμης καὶ τὸ $\frac{1}{10000}$ τοῦ τετραγωνικοῦ πήχεως.

Καὶ ἐνταῦθα αἱ ὑποδιαίρέσεις εἶναι δεκαδικαί, ὥστε πᾶς ἀριθμὸς παριστῶν ἐπιφάνειαν, ἥτοι συγκείμενος ἐκ τετρ. πήχεων, τετρ. παλάμων, τετρ. δακτύλων, γράφεται καὶ ὡς δεκαδικὸς ἀριθμὸς.

οἷον 3 τ. πῆχ. 15 τ. παλ. 2 τ. δάκτ. γράφεται 3 τ. πῆχ. 1502. ἀπαγγέλλεται δὲ (συμφώνως πρὸς τὰ ἐν τῷ ἐδ. 213 εἰρημένα) κατὰ πολλοὺς τρόπους π. χ. 3 τ. πήχεις, 15 τ. παλάμαι καὶ 2 τ. δάκτυλοι ἢ 315 τ. παλάμαι καὶ 2 τ. δάκτυλοι ἢ 31502 τ. δάκτυλοι.

Τεκτονικὸς τετραγωνικὸς πῆχυς εἶναι τὸ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι εἷς τεκτονικὸς πῆχυς· εἶναι δὲ ἐν χρήσει διὰ τὴν μέτρησιν τῶν οἰκοπέδων. Ἡ σχέσηις αὐτοῦ πρὸς τὸ τετραγωνικὸν μέτρον εἶναι ἡ ἑξῆς·

$$1 \text{ τετρ. τεκ. πῆχ.} = \frac{9}{16} \text{ τοῦ τετρ. μέτρου}$$

$$\text{καὶ ἐπομένως } 1 \text{ τετραγων. μέτρ.} = \frac{16}{9} \text{ τοῦ τεκτ. τετρ. πήχεως.}$$

Διὰ τὰς μεγάλας ἐπιφανείας μεταχειρίζοντα παρ' ἡμῶν τὸ βασιλικὸν στρέμμα = 1000 τετρ. μέτρα.

Ἐὰν νοηθῇ τὸ βασιλικὸν στρέμμα ὡς τετράγωνον, ἡ πλευρὰ του θὰ εἶναι ὡς ἔγγιστα 31 μέτρ. 662 $\left(\text{κατὰ προσέγγισιν } \frac{1}{1000} \right)$.

Τὸ παλαιὸν στρέμμα εἶναι τετράγωνον ἔχον πλευρὰν 55 μικροὺς πήχεις τῆς Κωνσταντινουπόλεως.

Εἶναι δὲ τὸ παλαιὸν στρέμμα ἴσον μὲ 1,27 βασιλικά στρέμματα. Ἐπομένως τὸ βασιλικὸν στρέμμα εἶναι ἴσον μὲ 0,787 τοῦ παλαιοῦ στρέμματος.

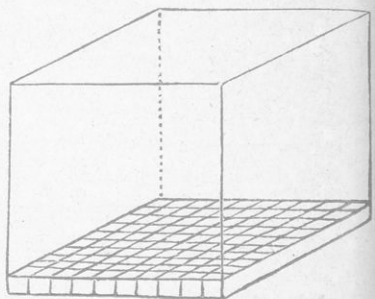
Μονάδες ὄγκου ἢ χωρητικότητος.

Μονὰς τῶν ὀγκων λαμβάνεται ὁ κύβος, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι

ἴση μὲ τὴν μονάδα τοῦ μήκους. Εἶναι δὲ ὁ κύβος στερεὸν περικλειόμενον ὑπὸ 6 τετραγώνων ἴσων. Καὶ ἂν μὲν ἡ μονὰς τοῦ μήκους εἶναι τὸ μέτρον, ἡ μονὰς τῶν ὄγκων λέγεται *κυβικὸν μέτρον*· ἂν δὲ ἡ μονὰς τοῦ μήκους εἶναι ἡ παλάμη, ἡ μονὰς τοῦ ὄγκου λέγεται *κυβικὴ παλάμη*, ἂν δὲ ὁ δάκτυλος, ἡ μονὰς τοῦ ὄγκου λέγεται *κυβικὸς δάκτυλος* κτλ.

Ἡ κυβικὴ παλάμη εἶναι τὸ $\frac{1}{1000}$ τοῦ κυβικοῦ μέτρου.

Ἐὰν τῷ ὄντι θέσωμεν εἰς μίαν σειραν 10 κυβικὰς παλάμας καὶ προσαρμόσωμεν αὐτάς, σχηματίζομεν στερεὸν ἔχον μῆκος 1 πῆχυν, πλάτος ὅμως καὶ ὕψος μίαν παλάμην· ἐὰν δὲ 10 τοιαῦτα στερεὰ θέσωμεν ἐπὶ τινος ἐπιπέδου καὶ προσαρμόσωμεν αὐτὰ κατὰ τὰς ἐπιμήκεις ἐπιφανείας τῶν, σχηματίζομεν στερεὸν ἔχον μῆκος καὶ πλάτος ἴσα μὲ 1 πῆχυν, ὕψος ὅμως μίαν παλάμην.



Ἐὰν τέλος 10 τοιαῦτα στερεὰ θέσωμεν ἐπ' ἀλλήλων καὶ προσαρμόσωμεν, σχηματίζομεν τὸ κυβικὸν μέτρον· ὥστε τὸ κυβικὸν μέτρον σύγκειται ἐκ χιλίων κυβικῶν παλαμῶν ἢ ἡ κυβικὴ παλάμη εἶναι τὸ χιλιοστὸν τοῦ κυβικοῦ πῆχews.

Ὅμοίως σύγκειται ἡ κυβικὴ παλάμη ἐκ 1000 κυβικῶν δακτύλων καὶ ὁ κυβικὸς δάκτυλος εἶναι τὸ $\frac{1}{1000}$ τῆς κυβικῆς παλάμης.

Λίτρα λέγεται ἡ χωρητικότης τῆς κυβικῆς παλάμης, ἥτοι ἡ χωρητικότης κύβου, τοῦ ὁποῖου ἡ πλευρὰ εἶναι μία παλάμη. Εἰς ἓν κυβικὸν μέτρον περιέχονται κατὰ τὰ ἀνωτέρω εἰρημένα 1000 λίτρα.

Ἡ λίτρα εἶναι ἐν χρήσει διὰ τὴν μέτρησιν τῶν ὑγρῶν.

Κοιλὸν λέγεται τὸ δέκατον τοῦ κυβικοῦ πῆχews, ἥτοι ὁ ὄγκος, ὅσον ἔχουσιν 100 κυβικαὶ παλάμαι· γίνεται δὲ τούτου χρῆσις ἰδίως εἰς τοὺς δημητριακοὺς καρπούς.

Παρατήρησις.

Αἱ μονάδες τῶν ἐπιφανειῶν καὶ τῶν ὄγκων λέγονται *θεωρητικαὶ μονάδες*, διότι δὲν μετροῦμεν ἀμέσως δι' αὐτῶν τὰς ἐπιφανείας καὶ τοὺς ὄγκους, ἀλλ' ἐμμέσως μετροῦμεν δηλ. διὰ τῆς μονάδος τοῦ μήκους

γραμμάς τινας τῆς ἐπιφανείας ἢ τοῦ ὄγκου καὶ ἐξ αὐτῶν εὐρίσκομεν διὰ τοῦ λογαριασμοῦ πόσας μονάδας ἔχει ἡ ἐπιφάνεια ἢ ὁ ὄγκος (τὰ περὶ τούτων διδάσκει λεπτομερῶς ἡ Γεωμετρία).

Μονάδες βάρους.

Οἱ Γάλλοι παραδεχθέντες τὸ μέτρον ὡς ἀρχικὴν μονάδα τοῦ μήκους ἐσχέτισαν πρὸς ταύτην καὶ τὰς λοιπὰς μονάδας ὅθεν καὶ τὰς μονάδας τοῦ βάρους. Διὰ τοῦτο παρεδέχθησαν τὰς ἐξῆς μονάδας βάρους.

Γραμμαρίον ἢ δραχμὴ (gramme).

Τοῦτο εἶναι τὸ βάρος ὕδατος, ὅσον χωρεῖ εἰς ἓνα κυβικὸν δάκτυλον (τὸ ὕδωρ πρέπει νὰ εἶναι καθαρὸν καὶ ἀπεσταγμένον καὶ εἰς θερμοκρασίαν 4,1 βαθμῶν τοῦ κοινοῦ θερμομέτρου).

Χιλιόγραμμον (kilogramme)=1000 γραμμάρια.

Τὸ χιλιόγραμμον εἶναι τὸ βάρος τοῦ ὕδατος, ὅσον χωρεῖ μία κυβικὴ παλάμη, ἥτοι τὸ βάρος μιᾶς λίτρας ὕδατος.

Τόννος λέγεται τὸ βάρος χιλίων χιλιογράμμων, ἥτοι τὸ βάρος τοῦ ὕδατος, ὅσον χωρεῖ εἰς ἓν κυβικὸν μέτρον.

Τὰς μονάδας ταύτας τοῦ βάρους παρεδέχθησαν καὶ οἱ Βέλγαι καὶ οἱ Ὁλλανδοὶ καὶ οἱ Γερμανοί, πλὴν τοῦ ὅτι ἀντὶ τοῦ χιλιογράμμου μεταχειρίζονται οἱ Γερμανοὶ τὸ φούντιον (Pfund), ὅπερ ἔχει βάρος 500 γραμμαρίων.

Παρ' ἡμῖν καὶ παρὰ τοῖς Τούρκοις μονάδες βάρους ἐν χρήσει εἶναι αἱ ἐξῆς:

Ὅκᾱ ἀρχικὴ μονάς.

Στατήρ=44 ὀκάδες.

Δράμιον= $\frac{1}{400}$ τῆς ὀκᾶς.

Ἡ σχέσις τῆς ὀκᾶς πρὸς τὸ χιλιόγραμμον εἶναι ἡ ἐξῆς:

1 ὀκᾶ=1280 γραμμάρια.

1 δράμ. = $3\frac{1}{5}$ γραμμάρια.

Τὸ δὲ χιλιόγραμμον εἶναι $312\frac{1}{2}$ δράμια = 0,78... τῆς ὀκᾶς· μία

λίτρα ὕδατος εἶναι λοιπὸν $312\frac{1}{2}$ δράμια.

Μονάδες νομισμάτων.

(Ἑλληνικά).

Δραχμὴ ἀρχικὴ μονάς.

Πεντάδραχμον=5 δραχμαί.

Λεπτόν= $\frac{1}{100}$ τῆς δραχμῆς.

Εἰκοσάδραχμον=20 δραχμαί.

Σημείωσις. Περὶ τῶν ὀνομαστικῶν μονάδων τῶν διαφόρων ἔθνων ἰδὲ μικράν μου Ἀριθμητικὴν.

Μονάδες χρόνου

(ἐν χρήσει παρὰ πᾶσι τοῖς πεπολιτισμένοις ἔθνεσιν).

Ἡμέρα ἢ νυχθήμερον, ἀρχικὴ μονάς. Μῆν = 30 ἡμέραι.

Ὡρα = $\frac{1}{24}$ τῆς ἡμέρας. Ἔτος = 12 μῆνες = 365 ἡμέραι.

Λεπτὸν πρῶτον $\frac{1}{60}$ τῆς ὥρας.

Λεπτὸν δεύτερον = $\frac{1}{60}$ τοῦ πρώτου λεπτοῦ.

Παρατήρησις.

Οἱ μῆνες ἔχουσιν ἄλλοι μὲν 30, ἄλλοι δὲ 31 ἡμέρας· ὁ δὲ Φεβρουάριος ἔχει 28 διὰ τὰ κοινὰ ἔτη, 29 δὲ διὰ τὰ ἐμβόλιμα ἢ δίσεκτα, ἅτινα ἔχουσι 366 ἡμέρας, ἐν ᾧ τὰ κοινὰ ἔχουσι 365.

Σημείωσις. Τὰ πρῶτα λεπτὰ σημειοῦνται διὰ μιᾶς δξείας· οἶον 30', τὰ δὲ δεύτερα διὰ δύο· οἶον 15''.

Κατὰ τὰ προηγούμενα εἶναι

$$1 \text{ ἡμ.} = 24 \text{ ὥρ.} = 1440' = 86400''$$

$$1 \text{ ὥρ.} = 60' = 3600''$$

$$1' = 60''$$

Σημείωσις. Ἡ ἐργάσιμος ἡμέρα θεωρεῖται ἴση μὲ 12 ὥρας πλὴν ἂν εἰς τὸ πρόβλημα ὀρίζεται ἄλλως.

Διαιρέσεις τῆς περιφερείας

(παραδεδεγμένη ὑπὸ πάντων τῶν πεπολιτισμένων ἔθνων).

Πᾶσα περιφέρεια κύκλου διαιρεῖται εἰς 360 μέρη ἴσα, τὰ ὅποια λέγονται μοῖραι. Ἐκάστη μοῖρα διαιρεῖται εἰς 60 λεπτὰ πρῶτα καὶ ἕκαστον λεπτὸν πρῶτον εἰς 60 λεπτὰ δεύτερα.

Σημείωσις. Αἱ μοῖραι σημειοῦνται δι' ἐνὸς μηδενικοῦ, ὅπερ γράφεται ὀλίγον ὑπεράνω καὶ δεξιᾷ τοῦ ἀριθμοῦ, οἶον 72°· τὰ πρῶτα λεπτὰ δι' ἐνὸς τόνου καὶ τὰ δεύτερα διὰ δύο· οἶον 23° 48' 32''.

Γενικὴ παρατήρησις.

234. Ὅσα εἶδη συμμιγῶν ἔχουσι μονάδας μὲ δεκαδικὰς ὑποδιαρέσεις, γράφονται ὡς δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ μιᾶς οἰασθήποτε ἐκ τῶν μονάδων των καὶ ἐπομένως ἀνάγονται εἰς τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμούς, ὥστε αἱ ἐπ' αὐτῶν πράξεις ἀνάγονται εἰς πράξεις ἐπὶ δεκαδικῶν ἀριθμῶν. Αἱ γαλλικαὶ μονάδες τῶν μέτρων καὶ τῶν σταθμῶν ἔχουσι τὸ προτέρημα τοῦτο· πλὴν δὲ τούτου βασιζονται ἐπὶ τοῦ μέτρου, ὅπερ ἔνεκα τῆς σχέσεώς του πρὸς τὸ μέγεθος τῆς γῆς δύναται πάντοτε νὰ εὐρίσκηται. Διὰ τὰ δύο ταῦτα πλεονεκτήματα ἐπεκράτησε τὸ γαλλικὸν μετρικὸν σύστημα τῶν μονάδων οὐ μόνον καθ' ἅπασαν τὴν Γαλλίαν, ἀλλὰ καὶ εἰς ἄλλα κράτη (τὸ Βέλγιον, τὴν Ὀλλανδίαν, τὴν Ἑλβετίαν), εἰσῆχθη δὲ καὶ παρ' ἡμῖν διὰ βασιλικοῦ διατάγματος (τοῦ 1836), ἀλλ' ἡ ὁλοσχερὴς παραδοχὴ αὐτοῦ δὲν κατωρθώθη ἀκόμη παρ' ἡμῖν.

Ἐν τοῖς ἐπομένοις πραγματευόμενοι τὰς πράξεις τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν λαμβάνομεν τὰ παραδείγματα ἐκ τῶν συμμιγῶν τῶν μὴ ἐχόντων δεκαδικὰς ὑποδιαρέσεις· τοῦτο δέ, διότι τῶν ἄλλων αἱ πράξεις γίνονται εὐκολώτερον ὡς πράξεις δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

Τροπὴ συμμιγοῦς εἰς ἀπλοῦν, ἥτοι εἰς ἀριθμὸν μιᾶς μονάδος.

235. Ἐὰν ὁ συμμιγὴς τραπῇ εἰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεώς του, γίνεται ἀκέραιος ἀριθμὸς.

Ἐστω ὡς παράδειγμά ὁ συμμιγὴς ἀριθμὸς 18^{στατ.} 32^{δκ.} 250^{δρ.}, ὅστις πρόκειται νὰ τραπῇ εἰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεώς του, ἥτοι εἰς δράμια.

Κατὰ πρῶτον τρέπομεν τοὺς στατηῆρας εἰς ὀκάδας καὶ ἔπειτα τὰς ὀκάδας εἰς δράμια ὡς ἑξῆς.

Ἐπειδὴ 1 στατὴρ ἔχει 44 ὀκάδας, οἱ 18 ἔχουσι 44×18 , ἥτοι 792 ὀκάδας· ἔχει δὲ ὁ συμμιγὴς πρὸς τούτοις καὶ 32 ὀκάδας, ὥστε οἱ 18 στατηῆρες καὶ αἱ 32 ὀκάδες γίνονται 824 ὀκάδες.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ ὀκά ἔχει 400 δράμια, αἱ 824 ὀκάδες ἔχουσι δράμια 400×824 , ἥτοι 329600.

Ἐχει δὲ ὁ συμμιγὴς πρὸς τούτοις 250 δράμια· ὥστε τὸ ὅλον γίνονται 329850 δράμια·

ἐστὶν λοιπὸν ὁ δοθεὶς συμμιγὴς εἰς δράμια.

Διάταξις τῆς πράξεως.

Πρὸς εὐκολίαν διατάσσεται ἡ πράξις ὡς ἑξῆς:

18στ.	32δκ.	250δε.
18		
44		
72		
72		
792δκ.		
32		
824δκ.		
400		
329600δε.		
250		
329850δε. = 18στ.	32δκ.	250δε.

236. Ἐὰν ὁ συμμιγῆς τραπῇ εἰς μονάδας ἄλλης τάξεως (ἄνωτέρας τῆς τελευταίας), γίνεται κλασματικὸς ἀριθμὸς ἢ καὶ μικτός.

$$4\text{ήμ.} \quad 10\text{ῶρ.} \quad 48' \quad 32'',$$

ὅστις πρόκειται νὰ τραπῇ εἰς ἀριθμὸν ὥρων.

Αἱ μὲν ἡμέραι καὶ αἱ ὥραι γίνονται ἀκέραιος ἀριθμὸς ὥρων, ὡς ἄνωτέρω διελάβομεν, εἶναι δὲ $4\text{ήμ.} \cdot 10\text{ῶρ.} = (24 \times 4) + 10 = 106$ ὥραι· τὸ δὲ ἄλλο μέρος τοῦ συμμιγοῦς (ἦτοι τὰ $48' \cdot 32''$) τρέπομεν πρῶτον εἰς δευτέρα λεπτά, ὡς ἄνωτέρω διελάβομεν:

$$48' \cdot 32'' = (60' \times 48) + 32'' = 2880'' + 32'' = 2912''.$$

Μένει ἀκόμη νὰ τρέψωμεν τὰ $2912''$ εἰς ὥρας (ἢ εἰς μέρη τῆς ὥρας) πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ μάθωμεν, πόσον μέρος τῆς ὥρας εἶναι τὸ $1''$, δηλαδὴ πόσα δευτέρα λεπτὰ ἔχει μία ὥρα.

$$1\text{ῶρ.} = 60' = 60'' \times 60 = 3600''.$$

Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ $1''$ εἶναι τὸ $\frac{1}{3600}$ τῆς ὥρας, τὰ $2912''$ εἶναι $\frac{2912}{3600}$ τῆς ὥρας.

Ἄρα ὁ δοθεὶς συμμιγῆς ἐτραπῇ εἰς ἀριθμὸν ὥρων.

$$106 \frac{2912}{3600} \text{ ἢ } 106 \frac{728}{900} \text{ ἢ } 106 \frac{182}{225}.$$

237. Ἐκ τούτων συνάγεται ὁ ἑξῆς κανὼν.

Διὰ τὰ τρέψωμεν συμμιγῇ ἀριθμὸν εἰς ἀριθμὸν μιᾶς μονάδος του τρέπομεν τὰ μέρη, ὧν αἱ μονάδες εἶναι μεγαλύτεραι τῆς δοθείσης, εἰς ἓνα ἀκέραιον ἀριθμὸν τῆς μονάδος ταύτης· τὰ δὲ μέρη, ὧν αἱ μονάδες εἶναι μικρότεραι, τρέπομεν εἰς κλάσμα τῆς αὐτῆς μονάδος.

Πρὸς εὐρεσιν δὲ τοῦ κλάσματος τούτου τρέπομεν πρῶτον τὰ ῥηθέντα μέρη εἰς τὸ τελευταῖον ἐξ αὐτῶν καὶ ἔπειτα ὑπὸ τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν γράφομεν παρονομαστήν τὸν ἀριθμὸν, ὅστις δείκνυει, πόσαι μονάδες τῆς τελευταίας τάξεως ἀποτελοῦσι τὴν ὀρισθεῖσαν μονάδα.

■ ■ ■ ἀκεραία.

$$1) \quad 5\delta\kappa. \quad 220\delta\epsilon. = 5 \frac{220}{400} \text{ ἢ } 5 \frac{11}{20} \text{ τῆς ὀκτῆς.}$$

$$\text{Ὁ αὐτὸς συμμιγῆς εἶναι} = \frac{2220}{17600} \text{ τοῦ στατήρος ἢ } \frac{111}{880}.$$

$$2) \quad 2\delta\epsilon\gamma. \quad 3\pi. \quad 6\delta\alpha\kappa. \quad 4\gamma\epsilon. = 2 \frac{508}{864} \text{ ἢ } 2 \frac{127}{216} \text{ τῆς ὀργυιᾶς.}$$

$$\delta \text{ αὐτὸς συμμιγῆς εἶναι} = 15 \frac{76}{144} \text{ ἢ } 15 \frac{19}{36} \text{ τοῦ ποδός.}$$

$$\delta \text{ αὐτὸς συμμιγῆς εἶναι} = 186 \frac{4}{12} \text{ ἢ } 186 \frac{1}{3} \text{ τοῦ δακτύλου.}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐν τοῖς προηγουμένοις ὑποτίθεται ὅτι ὁ συμμιγῆς σύγκειται ἐξ ἀκεραίων ἀριθμῶν. Ἐνίοτε δυνατόν νὰ ἔχη καὶ κλάσμα τι τῆς κάτωτάτης ὑποδιαίρέσεως, ὡς π.χ. ὁ συμμιγῆς

$$2\sigma\tau. \quad 15\delta\kappa. \quad 265\delta\epsilon. \quad \frac{1}{3}.$$

Διὰ τὰ τρέψωμεν τούτον εἰς ἀριθμὸν ὀκτῶν, παρατηροῦμεν ὅτι

$$2\sigma\tau. \quad 15\delta\kappa. = 103\delta\kappa. \quad 265\delta\epsilon. = \frac{265}{400} \text{ τῆς ὀκτῆς.}$$

$$\frac{1}{3} \text{ τοῦ δραμίου} = \frac{1}{3} \text{ τοῦ } \frac{1}{400} \text{ ἢ } = \frac{1}{1200} \text{ τῆς ὀκτῆς.}$$

$$\text{Ὡστε ὁ δοθεὶς συμμιγῆς εἶναι } 103\delta\kappa. \quad \frac{265}{400} + \frac{1}{1200} \text{ τῆς ὀκτῆς}$$

$$\text{ἢ } 103 \frac{796}{1200}.$$

Τροπὴ κλασματικοῦ ἀριθμοῦ εἰς συμμιγῇ.

238. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι πρόκειται κλασματικὸς τις συγκεκριμένος ἀριθμὸς, οἷον ὁ $\frac{17}{5}$ τῆς ὀκτῆς, νὰ τραπῇ εἰς συμμιγῇ ἀριθμὸν.

Κατὰ πρῶτον ἐξάγομεν τὰς ἀκεραίας μονάδας τοῦ δοθέντος κλάσματος καὶ εὐρίσκομεν $\frac{17}{5} \delta\kappa. = 3\delta\kappa. \frac{2}{5}$ τῆς δκαῖς.

Μένει λοιπὸν νὰ τρέψωμεν τὰ $\frac{2}{5}$ τῆς δκαῖς εἰς δράμια. Πρὸς τοῦτο πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ $\frac{2}{5}$ ἐπὶ 400, διότι ἡ δκαῖ=400 δρ. μίαν ἄρα $\frac{1}{5} \delta\kappa. = \frac{400}{5} \delta\rho.$ καὶ $\frac{2}{5} \delta\kappa. = 400 \times \frac{2}{5} \delta\rho.$ Οὕτως εὐρίσκομεν ὅτι $\frac{2}{5} \delta\kappa. = 160 \delta\rho.$ Ἐστράπη λοιπὸν τὸ κλάσμα $\frac{17}{5}$ τῆς δκαῖς εἰς συμμιγῆ ἀριθμόν: $3\delta\kappa. 160\delta\rho.$

Διάταξις τῆς πράξεως.

$\frac{17}{5} \delta\kappa.$	17	5
	2	3δκ. 160δρ.
	400	
	800	
	30	
	0	

Σημειωτέον δὲ ὅτι ἡ πρᾶξις αὕτη κατ' οὐδὲν διαφέρει ἀπο τοῦ μείρισμοῦ τῶν 17 δκαδῶν εἰς 5 ἴσα μέρη· διότι, ἂν 5 ἄνθρωποι μοιρασθῶσι 17 δκάδας, θὰ λάβῃ ἕκαστος $\frac{17}{5}$ τῆς δκαῖς.

239. Ἐκ τούτων συνάγεται ὁ ἑξῆς κανὼν.

Διὰ νὰ τρέψωμεν κλασματικὸν ἀριθμὸν εἰς συμμιγῆ, ἐξάγομεν πρῶτον τὸν ἐν αὐτῷ περιεχόμενον ἀκέραιον (ἂν περιέχεται) καὶ πρὸς τοῦτο διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν τὸν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, τὸ πηλίκον θὰ εἶναι ὁμοειδὲς μὲ τὸν κλασματικόν, τὸ δὲ ὑπόλοιπον (ἂν μείνῃ) τρέπομεν εἰς μονάδα τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως καὶ τὸ ἐξαγόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τὸ πηλίκον τῆς νέας ταύτης διαιρέσεως παριστᾷ μονάδας τῆς τάξεως ταύτης, τὸ δὲ ὑπόλοιπον τρέπομεν εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως καὶ τὸ ἐξαγόμενον διαιροῦμεν πάλιν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, μέχρις οὗ φθάσωμεν εἰς τὰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεως.

Σημείωσις. Ἐὰν εἰς μίαν τῶν διαιρέσεων τούτων δὲν εὐρεθῇ πηλίκον (ἂν δηλαδὴ ὁ διαιρέτης ὑπερβαίνει τὸν διαιρετέον), λαμβάνομεν ὡς πηλίκον αὐτῆς τὸ 0 καὶ ὡς ὑπόλοιπον αὐτῆς τὸν διαιρετέον τῆς καὶ ἐξακολουθοῦμεν τὴν πρᾶξιν κατὰ τὸν κανόνα.

Παραδείγματα.

$$\begin{aligned} \frac{3}{5} \text{ στατ.} &= 26 \delta\kappa. & 160 \delta\rho. \\ \frac{4}{3} \text{ ὥρας} &= 1 \text{ ὥρ.} & 20' \\ \frac{6}{7} \text{ ἡμέρας} &= 23 \text{ ὥρ.} & 8' & 34'' \frac{2}{7} \end{aligned}$$

Πράξεις συμμιγῶν ἀριθμῶν.

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

240. Ἡ πρόσθεσις τῶν συμμιγῶν γίνεται ὡς καὶ ἡ πρόσθεσις τῶν ἀκεραίων, δηλαδή προσθέτομεν χωριστὰ τοὺς ἀριθμοὺς ἐκάστης τάξεως ἀρχίζοντες ἀπὸ τῶν μονάδων τῆς τελευταίας. Καὶ ὅταν μὲν τὸ ἄθροισμα τῶν μονάδων μιᾶς τάξεως δὲν ἀποτελῇ μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας, γράφομεν αὐτὸ ὁλόκληρον, ὅταν ὁμως ἀποτελῇ, τότε διαιροῦμεν αὐτὸ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις δεικνύει, πόσαι μονάδες τῆς τάξεως ταύτης ἀποτελοῦσι μίαν τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας, καὶ τὸ μὲν ὑπόλοιπον γράφομεν εἰς τὴν θέσιν τοῦ ἀθροίσματος, τὸ δὲ πηλίκον ἐνῶμεν μὲ τὰς μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως.

Σημείωσις. Πὸς εὐκολίαν γράφομεν τοὺς προσθετέους τὸν ἕνα ὑπὸ τὸν ἄλλον οὕτως, ὥστε οἱ ἀριθμοὶ τῆς αὐτῆς μονάδος νὰ εὐρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν κατακόρυφον στήλην.

Ὅτι δὲ πρέπει νὰ εἶναι ὁμοειδεῖς οἱ προσθετέοι, ἐννοεῖται ἀφ' ἑαυτοῦ.

Παραδείγματα

15 ὥρ.	20'	40''	18 στα.	40 δκ.	350 δρ.
6	0'	38''		27	75
	15'	48''		42	2
1	10'			61 στα	26 δκ.
22 ὥρ.	47'	6''			150 δρ.

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

241. Καὶ ἡ ἀφαίρεσις τῶν συμμιγῶν γίνεται ὡς καὶ ἡ τῶν ἀκεραίων, δηλαδή ἀφαιροῦμεν ἕκαστον ἀριθμὸν τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τοῦ ἀντιστοίχου ἀριθμοῦ τοῦ μειωτέου ἀρχόμενοι ἀπὸ τῶν ἀριθμῶν τῆς

τελευταίας τάξεως. Ἐὰν δὲ ἀριθμός τις τοῦ μειωτέου εἶναι μικρότερος τοῦ ἀντιστοίχου ἀριθμοῦ τοῦ ἀφαιρετέου, ἀξάνομεν αὐτὸν κατὰ τόσας μονάδας, ὅσαι ἀποτελοῦσι μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως φροντίζοντες ὅμως νὰ προσθέσωμεν ἔπειτα μίαν μονάδα εἰς τὸν ἀριθμὸν τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως ἐν τῷ ἀφαιρετέῳ (κατὰ τὴν γενικὴν ἰδιότητα τῆς ἀφαιρέσεως ἐδ. 29, 1).

Σημειώσεις. Πρὸς εὐκολίαν τῆς πράξεως γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον ὑποκάτω τοῦ μειωτέου οὕτως, ὥστε οἱ ἀριθμοὶ τῆς αὐτῆς μονάδος νὰ εὐρίσκωνται εἰς μίαν καὶ τὴν αὐτὴν στήλην.

Ὅτι δὲ πρέπει ὁ μειωτέος καὶ ὁ ἰφαιρετέος νὰ εἶναι ὁμοειδεῖς ἐννοεῖται ἀφ' ἑαυτοῦ.

Παραδείγματα.

65ὀρ.	4π.	2δ.	10γρ.	12στ.	12δκ.	250δρ.
6ὀρ.	5π.	8δ.	5γρ.		32δκ.	320δρ.
58ὀργ.	4π.	6δ	5γρ.	18στ.	23δκ.	330δρ.
	2ήμ.					
			10ὠρ.	30'	30''	
			1ήμ.	13ὠρ.	29'	30''

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

1) Πολλαπλασιασμός συμμιγούς ἐπὶ ἀκέραιον.

242. Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῇ ἐπὶ ἀκέραιον, πολλαπλαιάζομεν ἕκαστον τῶν μερῶν τοῦ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον.

Ἡ ὀρθότης τοῦ κανόνος τούτου συνάγεται ἀμέσως ἐκ τῆς θεμελιώδους ἰδιότητος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (ἐδ. 134)· διότι ὁ συμμιγῆς εἶναι ἄθροισμα τῶν μερῶν τοῦ.

Παρατηρήσεις.

Ἐὰν εἰς μερικὸν τι γινόμενον περιέχωνται μονάδες τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, ἐξάγομεν αὐτὰς καὶ τὰς προσθέτομεν εἰς τὸ μερικὸν γινόμενον τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως· τοῦτο δὲ λέγεται κατὰταξις τῶν μονάδων.

Παραδείγματα.

1) Ἔχομεν 12 σάκκους καφφέ, ἐξ ὧν ἕκαστος περιέχει 1στ. 15δκ. 250δρ. Πόσος καφῆς περιέχεται εἰς τοὺς 12 σάκκους;

Φανερόν εἶναι ὅτι πρέπει νὰ ἐπαναλάβωμεν τὸν συμμιγῇ 1στ. 15δκ. 250δρ. δώδεκα φορές, τοιούτεσι νὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν ἐπὶ 12.

Διάταξις τῆς πράξεως.

1στ.	15δρ.	250δρ.
		12
12στ.	188δρ.	3000δρ.
16στ.	11δρ.	200δρ.

Κατάταξις

$$3000\delta\rho = 7\delta\rho. \quad 200\delta\rho$$

$$187\delta\rho. = 4\sigma\tau. \quad 11\delta\rho.$$

ὥστε τὸ γινόμενον εἶναι 16στ. 11δρ. 200δρ.

2) Διὰ τὰ διατρέξῃ τις ἐν στάδιον, χρειάζεται 1^{ωρ}. 10' 15". Πόσας ὥρας χρειάζεται, ἵνα διατρέξῃ 25 στάδια;

1 ^{ωρ} .	10	15"
		25
25 ^{ωρ} .	256'	375'
29 ^{ωρ} .	16'	15"

Κατάταξις

$$375'' = 6' \quad 15''$$

$$256' = 4^{ωρ}. \quad 16'$$

2) Διαίρεσις συμμιγοῦς δι' ἀκεραίου.

243. Διὰ τὰ διαιρέσωμεν συμμιγῇ δι' ἀκεραίου (ἤτοι διὰ τὰ μερίσωμεν συμμιγῇ εἰς ἴσα μέρη), διαιροῦμεν χωριστὰ ἕκαστον τῶν μερῶν του διὰ τοῦ ἀκεραίου (κατὰ τὴν γενικὴν ιδιότητα τῆς διαιρέσεως, ἔδ. 190).

Ὅταν δὲ ἡ διαίρεσις ἀριθμοῦ τινος τοῦ συμμιγοῦς ἀφήσῃ ὑπόλοιπον, τρέπομεν τοῦτο εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως καὶ ἐνοῦμεν αὐτὰς μὲ τὰς ὁμοίας μονάδας τοῦ συμμιγοῦς, πρὶν διαιρέσωμεν αὐτάς. Διὰ τοῦτο ἀρχίζομεν τὴν διαίρεσιν ἀπὸ τῶν μονάδων τῆς ἀνωτάτης τάξεως καὶ προχωροῦμεν πρὸς τὰς μονάδας τῶν κατωτέρων.

Παράδειγμα.

* Ἀς ὑποθέσωμεν ὅτι πρόκειται νὰ μοιράσωμεν 250στ. 18δρ. 350δρ. ἑνὸς πράγματος εἰς 15 ἀνθρώπους· τουτέστι νὰ μερίσωμεν τὸν συμμιγῇ εἰς ἴσα μέρη.

Κατὰ πρῶτον μοιράζομεν τοὺς 250 στατήρας καὶ εὐρίσκομεν ὅτι λαμβάνει ἕκαστος 16 στατήρας καὶ περισσεύουν 10 στατήρες. Τοὺς 10 τούτους στατήρας τρέπομεν εἰς δκάδας καὶ εὐρίσκομεν 444 δκάδας,

ἔχει δὲ ὁ συμμιγῆς καὶ 18 ὀκάδας, ὥστε ἔχομεν νὰ μοιράσωμεν 458 ὀκάδας εἰς τοὺς 15 ἀνθρώπους. Ἐκ τούτων λαμβάνει ἕκαστος 30 ὀκάδας καὶ περισσεύουν καὶ 8 ὀκάδες. Τὰς 8 ταύτας ὀκάδας τρέπομεν εἰς δράμια καὶ εὐρίσκομεν 3200 δράμια, ἔχει δὲ ὁ συμμιγῆς καὶ 350 δράμια· λοιπὸν ἔχομεν νὰ μοιράσωμεν δράμια 3550. Ἐκ τούτων δὲ λαμβάνει ἕκαστος 236 δράμια καὶ $\frac{2}{3}$ τοῦ δραμίου.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

250στ.	18ὀκ.	350δρ.	15	
			16στ.	30ὀκ. 236δρ.
100				$\frac{10}{15}$
10				
44				
440				
18				
458ὀκ.				
08				
400				
3200				
350				
3550δρ.				
55				
100				
10				

Παρατηρήσεις.

244. Ἡ διαίρεσις συμμιγοῦς δι' ἀκεραίου, ἢ κατὰ τοῦτον τὸν τρόπον γινομένη, εἶναι μερισμὸς τοῦ συμμιγοῦς εἰς μέρη ἴσα· οὐχὶ δὲ μέτρησις τοῦ συμμιγοῦς δι' ἄλλου ἀριθμοῦ, ἣτις λέγεται μὲν καὶ αὐτὴ διαίρεσις, διαφέρει ὅμως τοῦ μερισμοῦ οὐσιωδῶς (ἰδὲ ἐδ. 74, παρατ.).

Εἰς τοιαύτην διαίρεσιν π. χ. ἄγει τὸ ἑξῆς πρόβλημα· 15 *στατήρες* ἐξ ἐνὸς *πράγματος* ἀξίζουσιν 1 *τάλληρον*, πόσον ἀξίζουσιν 250στ. 18ὀκ. 350δρ. (ἐκ τοῦ αὐτοῦ πράγματος); Φανερόν εἶναι ὅτι τόσα τάλληρα (καὶ μέρη αὐτοῦ) ἀξίζουσιν, ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ συμμιγῆς τοὺς 15 *στατήρας* (καὶ τὰ μέρη τοῦ *στατήρος*)· ὥστε ἡ πρᾶξις ἐνταῦθα εἶναι μέτρησις, πρέπει δηλονότι νὰ μετρηθῇ ὁ συμμιγῆς 250στ. 18ὀκ. 350δρ. διὰ τῶν 15 *στατήρων*. Περὶ τῆς τοιαύτης διαιρέσεως θὰ διαλάβωμεν ἐν τοῖς ἐπομένοις.

**Πολλαπλασιασμός συμμιγοῦς ἐπὶ ἀκέραιον
κατὰ τὴν μέθοδον τῶν ἀπλῶν μερῶν.**

245. Ὁ πολλαπλασιασμός συμμιγοῦς ἐπὶ ἀκέραιον δύναται νὰ γίνῃ καὶ κατὰ τὴν ἐξῆς μέθοδον, ἣτις λέγεται *μεθοδος τῶν ἀπλῶν μερῶν* (προτιμᾶται δὲ ἡ μέθοδος αὕτη, ὅταν ὁ ἀκέραιος πολλαπλασιαστικὸς εἶναι πολυψήφιος ἀριθμός).

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν συμμιγῆ 12ῶρ. 45' 50" ἐπὶ τὸν ἀκέραιον 280.

Διὰ νὰ κάμωμεν τοῦτο, θὰ πολλαπλασιάσωμεν παλιν ἕκαστον μέρος τοῦ συμμιγοῦς ἐπὶ τὸν 280.

Καὶ αἱ μὲν 12 ὥραι ἐπὶ 280 πολλαπλασιασθεῖσαι γίνονται 12×280 ὥραι, ἥτοι 3360 ὥραι.

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τώρα τὰ 45' ἐπὶ 280, παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν εἶχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν 60' (ἥτοι μίαν ὥραν) ἐπὶ 280, θὰ εὐρίσκομεν γινόμενον 280 ὥρας.

Τουτέστιν $60' \times 280 = 280ῶρ.$

ἄρα $30' \times 280 = 140ῶρ.$, διότι τὰ 30' εἶναι τὸ ἥμισυ τῶν 60',
καὶ $15' \times 280 = 70ῶρ.$, διότι τὰ 15' εἶναι τὸ ἥμισυ τῶν 30'.

ὥστε $45' \times 280 = 21ῶρ.$

Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι εὐρήκαμεν τὸ γινόμενον τῶν 45' ἐπὶ 280 ἀναλύσαντες τὰ 45' εἰς 30' (ἥμισυ τῆς ὥρας) καὶ εἰς 15' (ἥμισυ τῶν 30'). ἥτοι ἀνελύσαμεν τὰ 45' εἰς μέρη τῆς ὥρας ἀπλᾶ, τοιαῦτα δηλονότι, ὥστε νὰ πολλαπλασιάζωνται εὐκόλως, οἷον τὸ ἥμισυ, τὸ τρίτον, τὸ τέταρτον κτλ.).

Μένει ἀκόμη νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ 50" ἐπὶ τὸν 280.

Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι

$$1' \times 280 = 280' = 4ῶρ. 40'$$

ἄρα $30' \times 280 = 2ῶρ. 20'$ (διότι 30' εἶναι $\frac{1}{2}$ τοῦ 1')

καὶ $20'' \times 280 = 1ῶρ. 33' 20''$ (διότι $20'' = \frac{1}{3}$ τοῦ 1')

ἄρα $50'' \times 280 = 3 ὥρ. 53' 20''.$

Ἀφοῦ ἐπολλαπλασιάσαμεν πάντα τὰ μέρη τοῦ συμμιγοῦς, δὲν μένει ἄλλο ἢ νὰ προσθέσωμεν τὰ εὐρεθέντα μερικὰ γινόμενα.

$$12\text{ῶρ} \times 280 = 3360\text{ῶρ}.$$

$$45' \times 280 = 210 \text{ ῶρ}.$$

$$50'' \times 280 = 3\text{ῶρ}. \quad 53' \quad 20''$$

$$\text{ἄρα τὸ γινόμενον εἶναι:} \quad 3573\text{ῶρ}. \quad 53' \quad 20''$$

Διάταξις τῆς πράξεως.

Πρὸς συντομίαν διατάσσεται ἡ πράξις ὡς ἑξῆς:

		12ῶρ.	45'	50''
		280		
		3360ῶρ.		
45'	{	30' δίδουσιν	140	
		15' δίδουσιν	70	(1' δίδει 4ῶρ. 40')
50''	{	30'' δίδουσιν	2	20'
		20'' δίδουσιν	1	33' 20''
γινόμενον		3573ῶρ.	53'	20''

Παραδείγματα

1)		5στ	27ῶκ.	300 δρ
		320		
		1600		
22ῶκ = $\frac{1}{2}$ στατ.	{	160		
5 $\frac{1}{2}$ ῶκ. = $\frac{1}{4}$ τῶν 22 ῶκ.	{	40		
			(1ῶκ. δίδει 320ῶκ. = 7στ 12ῶκ.	
100 δρ. = $\frac{1}{4}$ τῆς ὁκῆς	{	1	36ῶκ.	
γινόμενον		1801στ.	36ῶκ.	

2)			5δρ.	60λεπ.
			412	
			2060	
50λ. = $\frac{1}{2}$ δρ.	{	206		
10λ. = $\frac{1}{5}$ τῶν 50	{	41	20	
		2307δρ.	20λ.	

ΣΗΜ. Περισσότερα παραδείγματα ἰδὲ ἐν τῇ πρακτικῇ Ἀριθμητικῇ.

3) Πολλαπλασιασμός συμμιγοῦς ἐπὶ κλάσματικόν καὶ ἐπὶ μικτόν.

246. Διὰ τὰ πολλαπλασιάζωμεν συμμιγῇ ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν τὸ γινόμενον διὰ τοῦ παρονομαστοῦ.

Παραδείγματος χάριν, διὰ τὰ πολλαπλασιάζω τὸν συμμιγῇ
 $3^{\circ}\omega. 10' 20''$ ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{5}{8}$, πολλαπλασιάζω αὐτὸν πρῶτον ἐπὶ
 5 καὶ εὐρίσκω $15^{\circ}\omega. 58' 100''$.
 ἔπειτα διαιρῶ τὸ γινόμενον τοῦτο διὰ τοῦ 8 καὶ εὐρίσκω
 $1^{\circ}\omega. 58' 57'' \frac{1}{2}$.

Τοῦτο δὲ εἶναι τὸ ζητούμενον γινόμενον τοῦ συμμιγοῦς ἐπὶ $\frac{5}{8}$.

Διότι κατὰ τὸν ὅρισμόν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (ἔδ. 169), διὰ τὰ πολλαπλασιάζω οἷονδῆποτε ἀριθμὸν ἐπὶ $\frac{5}{8}$, ἀρκεῖ νὰ λάβω τὸ $\frac{1}{8}$ αὐτοῦ πεντάκις ἢ τὸ $\frac{1}{8}$ τοῦ πενταπλασίου αὐτοῦ.

Σημειώσεις. Ἐνίοτε δύναται νὰ γίνῃ ὁ πολλαπλασιασμός οὗτος καὶ κατὰ τὴν μέθοδον τῶν ἀπλῶν μερῶν.

Ἐάν, παραδείγματος χάριν, ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάζωμεν ἐπὶ $\frac{7}{8}$, ἀναλύομεν αὐτὸ εἰς $\frac{4}{8}$, $\frac{2}{8}$ καὶ $\frac{1}{8}$ καὶ πολλαπλασιάζομεν ἑφ' ἕκαστον τοῦτον χωριστὰ (κατὰ τὸ ἔδ. 170).

Διὰ τὰ πολλαπλασιάζωμεν ἐπὶ $\frac{4}{8}$, λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ τοῦ πολλαπλασιαστέου· διὰ τὰ πολλαπλασιάζωμεν ἐπὶ $\frac{2}{8}$, λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ τοῦ πρώτου γινομένου· καὶ τέλος, διὰ τὰ πολλαπλασιάζωμεν ἐπὶ $\frac{1}{8}$, λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ τοῦ δευτέρου γινομένου.

247. Διὰ τὰ πολλαπλασιάζωμεν συμμιγῇ ἐπὶ μικτόν, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν πρῶτον ἐπὶ τὸν ἀκέραιον τοῦ μικτοῦ, ἔπειτα καὶ ἐπὶ τὸ κλάσμα αὐτοῦ καὶ προσθέτομεν τὰ δύο γινόμενα (κατὰ τὸ ἔδ. 170).

4) Διαίρεσις συμμιγοῦς διὰ κλάσματος.

248. Διὰ τὰ διαιρέσωμεν συμμιγῇ διὰ κλάσματος, ἀντιστρέφομεν

τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος καὶ ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν τὸν συμμιγῆ ἐπὶ τὸ ἀντεστραμμένον κλάσμα (ἰδὲ ἐδ. 182).

Συμειώσεις. Διὰ μικτοῦ δὲν δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν ἄλλως ἢ τρέποντες αὐτὸν εἰς κλάσμα (ἰδὲ ἐδ. 185).

Παρατήρησεις.

Καὶ ἡ διαίρεσις αὕτη τοῦ συμμιγοῦς διὰ κλάσματος εἶναι μερισμός πολλαπλασίου τινὸς τοῦ συμμιγοῦς, διὸ καὶ δίδει ἐξαγόμενον ὁμοειδὲς πρὸς τὸν συμμιγῆ διαιρετέον, διαφέρει δὲ τῆς μετρήσεως τοῦ συμμιγοῦς διὰ κλάσματος ὁμοειδοῦς, ἥτις καὶ αὕτη λέγεται διαίρεσις· περὶ τῆς διαιρέσεως ταύτης θὰ διαλάβωμεν ἐν τοῖς ἐπομένοις.

5) Πολλαπλασιασμός συμμιγοῦς ἐπὶ συμμιγῆ.

249. Πολλαπλασιασμός συμμιγοῦς εἶναι (κατὰ τὸν γενικὸν ὁρισμὸν τοῦ ἐδ. 169) ἡ ἐπανάληψις αὐτοῦ καὶ τῶν μερῶν αὐτοῦ πρὸς σχηματισμὸν ἄλλου συμμιγοῦς, ὅστις θὰ εἶναι τὸ ζητούμενον γινόμενον.

Ὁ πολλαπλασιαστέος λαμβάνεται τοσάκις, ὅσας μονάδας μιᾶς τάξεως ἔχει ὁ πολλαπλασιαστὴς (τὴν μονάδα ταύτην ὀρίζει τὸ πρόβλημα), δι' ἕκαστον δὲ μέρος τῆς μονάδος ταύτης, ὅπερ ἔχει ὁ πολλαπλασιαστὴς, λαμβάνεται τὸ ὁμώνυμον μέρος τοῦ πολλαπλασιαστέου· ὥστε καὶ ἐνταῦθα, ὡς εἰς πάντα πολλαπλασιασμόν, τὸ μὲν γινόμενον εἶναι ὁμοειδὲς μὲ τὸν πολλαπλασιαστέον, ἐξ οὗ ἀποτελεῖται, ὁ δὲ πολλαπλασιαστὴς καὶ τὰ μέρη αὐτοῦ θεωροῦνται ὡς ἀφηρημένοι ἀριθμοί. Παραδείγματος χάριν εἰς τὸ ἐξῆς πρόβλημα·

Μία βρύσις δίδει καθ' ὥραν 120^{ὁκ}. 150^{δε}. ὕδωρ. Πόσον θὰ δώσῃ εἰς 15^ῳ· καὶ 20'·

πολλαπλασιαστέος εἶναι ὁ συμμιγῆς 120^{ὁκ}. 150^{δε}. καὶ πρέπει νὰ ληφθῇ ὅλος 15 φορὰς (διότι κάθε ὥραν δίδει 120^{ὁκ}. 150^{δε}.) καὶ τὸ ἐξηκοστὸν αὐτοῦ εἴκοσι φορὰς (διότι εἰς τὸ 1' δίδει τὸ ἐξηκοστὸν τῶν 120^{ὁκ}. 150^{δε}.), ἐπομένως πολλαπλασιαστὴς εἶναι ὁ ἀφηρημένος ἀριθμὸς

$$15 \frac{20}{60} \text{ ἢ } 15 \frac{1}{3}.$$

Εἰς δὲ τὸ ἐξῆς πρόβλημα·

Βρύσις τις δίδει εἰς ἕκαστον πρῶτον λεπτὸν 120^{ὁκ}. 159^{δε}. ὕδωρ. Πόσον θὰ δώσῃ εἰς 15^ῳ· 20'·

ὁ πολλαπλασιαστέος εἶναι ὁ αὐτός· ἀλλ' ἐνταῦθα πρέπει νὰ ληφθῇ τό-

τας φορές, ὅσα πρῶτα λεπτὰ ἔχει ὁ συμμιγῆς 15^{ωρ} 20', ἥτοι 920 φορές· πολλαπλασιασθῆς ἄρα εἶναι ὁ ἀκέραιος 920.

Διὰ τὰ ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν συμμιγοῦς ἐπὶ ἄλλον, ἢ πρόπομεν τὸν πολλαπλασιαστὴν εἰς ἀριθμὸν μιᾶς μονάδος (ἐκείνης, ἣν ὀρίζεται τὸ πρόβλημα, δι' ἣν λαμβάνεται ὁλόκληρος ὁ πολλαπλασιαστέος) καὶ ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν τὸν συμμιγῆ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον ἢ μεταχειριζόμεθα τὴν μέθοδον τῶν ἀπλῶν μερῶν, ὡς ἑξῆς φαίνεται

Ἡ δὲ ἐνὸς πράγματος ἀξίζει 2τάλ. 3δρ. 50λεπ. πόσον ἀξίζουν 35δκ. 350δρ. τοῦ αὐτοῦ πράγματος;

Πολλαπλασιαστέος εἶναι ὁ συμμιγῆς 2τάλ. 3δρ. 50λεπ., πολλαπλασιασθῆς δὲ ὁ συμμιγῆς 35δκ. 350δρ. $\left(\begin{array}{l} \text{ἢ μᾶλλον ὁ ἀριθμὸς } 35 \frac{350}{400} \end{array} \right)$.

Ἐὰν παραστήσωμεν τὰ μέρη τοῦ συμμιγοῦς πολλαπλασιαστοῦ ὡς ἀριθμοὺς δεκάδων (διότι τῆς δεκάς ἡ ἀξία ἐδόθη), θὰ ἔχωμεν τὰ πολλαπλασιάζομεν τὸν συμμιγῆ 2τ. 35δρ. 50λ. ἐπὶ τὸν μικτὸν 35 $\frac{350}{400}$ ἢ 35 $\frac{7}{8}$.

Κατὰ τὴν μέθοδον τῶν ἀπλῶν μερῶν ἐκτελοῦμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦτον ὡς ἑξῆς·

	2τάλ.	3δρ.	50λ.
	35δκ.	350δρ.	
ἀξία τῶν 35δκάδ.	πρὸς 2τάλ.	70τάλ.	
	πρὸς 2 $\frac{1}{2}$ δρ. = $\frac{1}{2}$ τάλ.	17	2δρ. 50λ.
	πρὸς 1 δρ. = $\frac{1}{5}$ τάλ.	7	
ἀξία τῶν 350δραμ.	τῶν 200 = $\frac{1}{2}$ δκ.	1	1 75
	τῶν 100	0	3 37 $\frac{1}{2}$
	τῶν 50	0	1 68 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$
		96τάλ.	4 31λ. $\frac{1}{4}$

Κατὰ πρῶτον εὐρίσκομεν τὴν ἀξίαν τῶν 35 δκ. πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ 35 (κατὰ τὸ ἐδ. 245) ἔπειτα, ἵνα πολλαπλασιάζωμεν ἐπὶ 350 δρ. ἀναλύομεν αὐτὰ εἰς 200 ($=\frac{1}{2}$ τῆς δεκάς) καὶ 100 ($=\frac{1}{2}$ τῶν 200) καὶ 50 ($=\frac{1}{2}$ τῶν 100) καὶ πολλαπλασιάζομεν ἑφ' ἑκαστὸν τῶν μερῶν τούτων χωριστά, ἥτοι εὐρίσκομεν τὴν ἀξίαν αὐτῶν ἐκ τῆς ἀξίας τῆς μιᾶς δεκάς.

Ἔστω προσέτι τὸ ἑξῆς πρόβλημα.

Μὲ ἐν τάλληρον ἀγοράζει τις 350κ. 350δρ. ἐξ ἑνὸς πράγματος.
Πόσον ἀγοράζει μὲ 2τάλ. 3δρ. 50λεπ.

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο πολλαπλασιαστέος εἶναι ὁ συμμιγῆς 350κ. 350δράμ., πολλαπλασιαστῆς δὲ ὁ συμμιγῆς 2τάλ. 3δραχ. 50λεπ.

$$\left(\eta \ 2 + \frac{3}{5} + \frac{50}{500} \text{ τοῦ ταλ.} \right):$$

		350κ.	350δρ.	
		2τάλ.	3δρ.	50λ.
μὲ 2τάλ. ἀγοράζει τις	{	ἀπὸ 350κ.	70δκ.	
		ἀπὸ 200δρ.	1	
		ἀπὸ 100δρ.	0	200δρ.
		ἀπὸ 50δρ.	0	100δρ.
μὲ $2\frac{1}{2}\delta\rho.=\frac{1}{2}\text{τάλ.}$ ἀγοράζει τις	{		17	375
μὲ $1\delta\rho.=\frac{1}{5}\text{τάλ.}$ ἀγοράζει τις	{		7	70
Τὸ ὅλον			960κ.	345δρ.

Παρατήρησεις.

Εἰς ἀμφοτέρω τὰ προβλήματα ταῦτα οἱ παράγοντες εἶναι οἱ αὐτοί, ἐν τούτοις τὰ γινόμενα διαφέρουσι κατὰ τὰς μονάδας τῶν κατωτέρων τάξεων. Διὰ νὰ ἐννοήσωμεν, πῶς συμβαίνει τοῦτο, ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι, ἂν τραπῶσιν ἀμφοτέροι οἱ συμμιγεῖς εἰς ἀπλοῦς ἀριθμοὺς (ὁ μὲν εἰς εἰς ἀριθμὸν ὀκτάδων, ὁ δὲ ἄλλος εἰς ἀριθμὸν ταλλήρων), τὸ γινόμενον αὐτῶν θὰ εἶναι ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς, οἷοσδήποτε ἐξ αὐτῶν καὶ ἀνληφθῇ ὡς πολλαπλασιαστέος. Ἀλλὰ κατὰ μὲν τὴν πρώτην περίπτωσιν ὁ ἀριθμὸς οὗτος θὰ εἶναι ἀριθμὸς ταλλήρων, κατὰ δὲ τὴν δευτέραν ἀριθμὸς ὀκτάδων. Διὰ τοῦτο τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ γινομένου θὰ εἶναι τὸ αὐτὸ εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις· ἀλλὰ τὸ μένον κλάσμα ἐν μὲν τῇ πρώτῃ περιπτώσει θὰ τραπῇ εἰς δραχμὰς καὶ λεπτά, ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ εἰς δράμια· ἐπειδὴ δὲ αἱ ὑποδιαίρέσεις τοῦ ταλλήρου εἶναι διάφοροι τῶν τῆς ὀκτᾶς, θὰ προκύψωσι διάφορα ἐξαγόμενα.

250. Εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν συμμιγοῦς ἐπὶ συμμιγῇ ὑπάγεται ὡς μερικὴ περίπτωσις ὁ πολλαπλασιασμὸς ἀκεραίου συγκεκριμένου ἐπὶ

συμμιγῇ, διότι ὁ συγκεκριμένος ἀκέραιος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς συμμιγῆς ἔχων μίαν μόνην τάξιν μονάδων.

Τοιοῦτον εἶναι τὸ ἐξῆς πρόβλημα.

Ἐργάτης λαμβάνει δι' ἐκάστην ὥραν ἐργασίας 5 δραχμάς· πόσον θὰ λάβῃ, ἂν ἐργασθῇ 7 ὥρ. 40' ;

			5 δρ.	
			7 ὥρ.	40'
διὰ τὰς 7 ὥρ.		35 δρ.		
διὰ τὰ 40'	{	διὰ 30' = $\frac{1}{2}$ ὥρ.		2 δρ. 50 λ.
		διὰ 10 = $\frac{1}{3}$ τῶν 30'	0	83 $\frac{1}{3}$
		Τὸ ὅλον	38 δρ.	33 $\frac{1}{3}$

Σημειώσεις. Ὑπάρχουσι προβλήματα, ἐν οἷς ζητεῖται νὰ πολλαπλασιασθῇ συμμιγῆς τις (ἐν γένει συγκεκριμένος ἀριθμὸς) ἀλλεπαλλήλως ἐπὶ δύο ἢ περισσοτέρους ἄλλους· ἕκαστος τῶν μερικῶν τούτων πολλαπλασιασμῶν ἐκτελεῖται τότε κατὰ τὰ ἤδη εἰρημένα. Τοιοῦτον εἶναι λόγου χάριν τὸ ἐξῆς πρόβλημα.

Ἡ διὰ τοῦ σιδηροδρόμου μεταφορὰ ἐνὸς στατηῆρος εἰς ἀπόστασιν ἐνὸς σταδίου στοιχίζει 5 λεπτὰ (ἢ 1 λεπτὸν) τῆς δραχμῆς· πόσον θὰ στοιχίσῃ ἡ μεταφορὰ 20στ. 33δκ. εἰς ἀπόστασιν 12 σταδίων καὶ 500 μέτρων ;

Πρὸς εὔρεσιν τοῦ ζητουμένου εὐρίσκομεν πρῶτον, πόσον θὰ στοιχίσῃ ἡ μεταφορὰ τῶν 20στ. 33δκ. εἰς ἀπόστασιν ἐνὸς σταδίου καὶ ἔπειτα πόσον θὰ στοιχίσῃ ἡ μεταφορὰ αὐτῶν εἰς ἀπόστασιν 12στ. καὶ 500μ. καὶ τὸ μὲν πρῶτον θὰ εὔρεθῇ, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸν συγκεκριμένον ἀριθμὸν 5λ. (ἢ 1λ.) ἐπὶ τὸν συμμιγῇ 20στ. 33δκ., ὅτε εὐρίσκομεν γινόμενον $103\lambda \cdot \frac{3}{4}$ (ἢ $20\frac{3}{4}$), τὸ δὲ δεύτερον εὐρίσκομεν, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸ γινόμενον τοῦτο ἐπὶ τὸν συμμιγῇ 12στδ. 500μετ., ὅτε εὐρίσκομεν γινόμενον 12δρ. $96\lambda \frac{7}{8}$ (ἢ 2δρ. $59\frac{3}{8}$). Ἐχομεν λοιπὸν ἐνταῦθα γινόμενον τριῶν παραγόντων, ἐξ ὧν πολλαπλασιαστέος εἶναι ὁ συγκεκριμένος ἀριθμὸς 5λ. (ἢ 1λ.), οἱ δὲ δύο ἄλλοι εἶναι πολλαπλασιασταί. Τοιοῦτον εἶναι καὶ τὸ ἐξῆς.

Τὰ φύλακτρα τῶν ἐμπορευμάτων ἐν τινὶ ἀποθήκῃ εἶναι 4 λεπτὰ (ἢ 1

λεπτὸν) καθ' ἡμέραν δι' ἕκαστον τετραγωνικὸν μέτρον. Πόσον θὰ πλη-
ρώσῃ τις διὰ 65^{τ.μ.}, 40 καὶ διὰ 25 ἡμ. 12^{ωρ.};

6) Διαιρέσεις συμμιγοῦς διὰ συμμιγοῦς.

251. Ἐν ἑκάστῳ προβλήματι, λυομένῳ διὰ τῆς διαιρέσεως συμμιγοῦς δι' ἄλλον, ὁ εἷς ἐκ τῶν δοθέντων συμμιγῶν (ὁ διαιρετέος) θὰ εἶναι γι-
νόμενον τοῦ ἄλλου (τοῦ διαιρέτου) καὶ τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ (τοῦ
πηλίκου)· ἐπειδὴ δὲ ὁ ζητούμενος οὗτος ἀριθμὸς δύναται ἐν τῷ γινο-
μένῳ νὰ εἶναι ἢ πολλαπλασιαστέος ἢ πολλαπλασιαστικής, διακρίνομεν δύο
εἰδῶν προβλήματα διαιρέσεως.

Προβλήματα τοῦ πρώτου εἴδους (μερισμός).

252. Ἐν τοῖς προβλήμασι τοῦ πρώτου εἴδους ζητεῖται ἀριθμός, ὅστις
πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν ἕνα τῶν δοθέντων παράγῃ τὸν ἄλλον.

Ἐνταῦθα ὁ διαιρετέος γίνεται ἐκ τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ (καὶ τῶν
μερῶν αὐτοῦ) καὶ εἶναι διὰ τοῦτο ὁμοειδὴς πρὸς αὐτόν.

Παράδειγμα προβλήματος τοῦ πρώτου εἴδους ἔστω τὸ ἑξῆς.

3στ. 18δκ. 300δε. ἐξ ἑνὸς πράγματος ἐπωλήθησαν 58δε. 60λ.

Πρὸς πόσον ἐπωλήθη ὁ στατήρ;

Ὁ ζητούμενος ἀριθμός, τρυτέστιν ἡ τιμὴ ἑκάστου στατήρος, ἐὰν
πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν συμμιγῇ 3στ. 18δκ. 300δε, θὰ δώσῃ γινό-
μενον τὸν ἀριθμὸν 58δε. 60λ.

Πρὸς εὗρεσιν τοῦ ζητουμένου τρέπομεν τὸν διαιρέτην 3στ. 18δκ.
300δε. εἰς ἀριθμὸν στατήρων (διότι τοῦ στατήρος ἡ ἀξία ζητεῖται) καὶ
εὗρίσκομεν $3\frac{75}{176}$ τοῦ στατήρος ἢ $\frac{603}{176}$ τοῦ στατήρος. Τὸ πρόβλημα λοι-

πὸν καταντᾷ εἰς τὸ ἑξῆς: « $\frac{603}{176}$ τοῦ στατήρος ἐπωλήθησαν 58δε. 60λ.,

πόσον ἐπωλήθη ὁ εἷς στατήρ; » Ἡ ἀξία τοῦ $\frac{1}{176}$ τοῦ στατήρος θὰ εὗρε-
θῇ, ἐὰν μερίσωμεν τὰς 58δε. 60λ. εἰς 603 ἴσα μέρη, καὶ ἡ ἀξία ἑνὸς
στατήρος θὰ εὗρεθῇ, ἂν λάβωμεν 176 φορὰς τὸ μερίδιον τοῦτο, ἥτοι ἂν
διαίρῃσωμεν τὸν συμμιγῇ 58δε. 60λεπ. διὰ τοῦ κλάσματος $\frac{603}{176}$ (ἔδ. 248).

Ἐκ τούτων βλέπομεν ὅτι, εἰς τὰ προβλήματα τοῦ πρώτου εἴδους
πρὸς εὗρεσιν τοῦ ζητουμένου πρέπει νὰ τρέψωμεν τὸν διαιρέτην εἰς

ἀριθμὸν μιᾶς μονάδος (ἣν ὀρίζει τὸ πρόβλημα) καὶ διὰ τούτου νὰ διαιρέσωμεν τὸν διαιρετέον.

Σημείωσις. Ἡ προᾶξι γίνεται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, καὶ ὅταν ὁ διαιρετέος εἶναι ἀκέραιος ἀριθμὸς, ἥτοι ἔχει μόνον μίαν τάξιν μονάδων. Ὅταν δὲ ὁ διαιρετής εἶναι ἀκέραιος ἀριθμὸς, ἡ προᾶξι καταντᾷ μερισμὸς τοῦ συμμιγοῦς εἰς ἴσα μέρη (ἐδ. 243), διὰ τοῦτο τὰ προβλήματα τοῦ πρώτου εἴδους λέγω προβλήματα μερισμοῦ.

Προβλήματα τοῦ δευτέρου εἴδους (μέτρησις).

253. Ἐν τοῖς προβλήμασι τοῦ δευτέρου εἴδους ζητεῖται ὁ ἀριθμὸς, ὅστις πολλαπλασιάζων τὸν ἕνα ἐκ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν νὰ παράγῃ τὸν ἄλλον. Ἐνταῦθα ὁ διαιρετέος γίνεται ἐκ τοῦ διαιρέτου (καὶ τῶν μερῶν αὐτοῦ), ἐπομένως εἶναι ὁμοειδὴς πρὸς αὐτόν.

Παράδειγμα προβλήματος τοῦ δευτέρου εἴδους ἔστω τὸ ἑξῆς.

Ἐργάτης τις λαμβάνει καθ' ἡμέραν 4^{δρ.} 30^{λ.}. Εἰς πόσας ἡμέρας ἐργαζόμενος θὰ λάβῃ 389^{δρ.} 15^{λ.};

Ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς, ἐὰν πολλαπλασιάσῃ τὸν συμμιγῆ 4^{δρ.} 30^{λ.}, πρέπει νὰ δίδῃ γινόμενον τὸν 389^{δρ.} 15^{λ.}.

Ἐὰν τρέψωμεν ἀμφοτέρους τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς εἰς λεπτά, τὸ πρόβλημα καταντᾷ εἰς τὸ ἑξῆς.

Ἐργάτης λαμβάνει καθ' ἡμέραν 430^{λεπ.}, εἰς πόσας ἡμέρας θὰ λάβῃ 38915^{λ.};

Φανερόν εἶναι ὅτι τόσας ἡμέρας πρέπει νὰ ἐργασθῇ, ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ ἀριθμὸς 38915 τὸν 430· ἡ προᾶξι ἄρα εἶναι μέτρησις καὶ τὸ ἑξαγόμενον αὐτῆς εἶναι ὁ ἀφηρημένος ἀριθμὸς $\frac{38915}{430}$, ὅστις ἐνταῦθα,

καθ' ἃ ὀρίζει τὸ πρόβλημα, πρέπει νὰ παριστᾷ ἡμέρας· ἐὰν δὲ τρέψωμεν τὸ ἑξαγόμενον τοῦτο εἰς ἡμέρας καὶ μέρη αὐτῆς, εὐρίσκομεν ὅτι πρέπει νὰ ἐργασθῇ 90 ἡμ. καὶ 6^{ωρ.}.

Ἐκ τούτων βλέπομεν ὅτι εἰς τὰ προβλήματα τοῦ δευτέρου εἴδους πρὸς εὐρεσιν τοῦ ζητουμένου τρέπομεν τοὺς συμμιγεῖς εἰς ἀριθμοὺς τῆς ἐλαχίστης ἐκ τῶν μονάδων των (ὅτε γίνονται ἀκέραιοι ἀριθμοὶ) καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν τοὺς ἀκεραίους τούτους, τὸ δὲ εἶδος τοῦ πηλίκου προσδιορίζεται ἐκ τοῦ προβλήματος.

Σημείωσις. Μερικαὶ περιπτώσεις τῆς διαιρέσεως ταύτης εἶναι ἡ

διαίρεσις συμμιγοῦς δι' ἀκεραίου ὁμοειδοῦς καὶ ἡ διαίρεσις ἀκεραίου διὰ συμμιγοῦς ὁμοειδοῦς τῷ ἀκεραίῳ. Διότι δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι τοῦ ἐνὸς τῶν συμμιγῶν ἐμηδενίσθησαν τὰ μέρη πάντα πλὴν ἐνὸς καὶ μόνου. Τοῦτο συμβαίνει π. χ. εἰς τὰ ἐξῆς προβλήματα.

Μὲ μίαν δραχμὴν ἀγοράζει τις ἐξ ἐνὸς πράγματος 6 ὀκάδας. Πόσαι δραχμαὶ χρειάζονται, διὰ νὰ ἀγοράσῃ 175^{ὀκ.} 300 δρ.;

Κτίσις τις κτίζει εἰς μίαν ὥραν 4^{πόδ.} 8^{δακ.} τοῖχον. Εἰς πόσας ὥρας θὰ κτίσῃ 25 δρ.;

Ἡ λύσις τῶν προβλημάτων τούτων γίνεται κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα.

Ὅμοιως λύνονται τὰ προβλήματα, ἐν οἷς ζητεῖται νὰ διαιρεθῇ συμμιγῆς διὰ κλάσματος ὁμοειδοῦς ἢ νὰ διαιρεθῇ κλάσμα διὰ συμμιγοῦς ὁμοειδοῦς, οἷον·

Μὲ μίαν δραχμὴν ἀγοράζει τις ἐξ ἐνὸς πράγματος $\frac{3}{5}$ τοῦ στατήρος. Πόσαι δραχμαὶ χρειάζονται διὰ νὰ ἀγοράσῃ 28^{στ.} 15^{ὀκ.} 308^{δρ.} ἐκ τοῦ αὐτοῦ πράγματος;

Ἐνταῦθα ἀμφότεροι οἱ ἀριθμοὶ τρέπονται εἰς δράμια κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα (ἢ ὁ συμμιγῆς τρέπεται εἰς ἀριθμὸν στατήρων).

Ἰνα διανύσῃ ὁδοιπóρος τις ἐν στάδιον, χρειάζεται 2^{ῳ.} 5' 40". Πόσα στάδια θὰ διανύσῃ εἰς $\frac{22}{5}$ τῆς ὥρας;

Καὶ ἐνταῦθα δύνανται νὰ τραπῶσιν ἀμφότεροι οἱ ἀριθμοὶ εἰς δεῦτερα λεπτά (ἢ νὰ τραπῇ ὁ συμμιγῆς εἰς ἀριθμὸν ὥρων).

Σημείωσις. Ὑπάρχουσι προβλήματα, ὧν ἡ λύσις ἀπαιτεῖ διαίρεσιν ἐνὸς συγκεκριμένου ἀριθμοῦ ἁλλεπαλλήλως διὰ δύο ἢ περισσοτέρων ἄλλων· ἐκάστη τῶν μερικῶν τούτων διαιρέσεων δύναται νὰ εἶναι ἢ μερισμὸς ἢ μέτρησις· ἐκτελεῖται δὲ κατὰ τὰ προειρημένα. Τοιοῦτον εἶναι λόγου χάριν τὸ ἐξῆς πρόβλημα.

Ἐπλήρωσέ τις 130^{δρ.} 40^{λ.} διὰ τὴν μεταφορὰν 70^{στ.} 19^{ὀκ.} 200^{δρ.} ἐμπορευμάτων· ἐκ πόσης ἀποστάσεως μετέφερεν αὐτά, γνωστοῦ ὄντος, ὅτι δι' ἕκαστον στατήρα μεταφερόμενον εἰς ἀπόστασιν ἐνὸς σταδίου πληρώνει τις 5^{λ.} (ἢ 1^{λ.});

Εὐρίσκομεν πρῶτον, πόσον ἐπλήρωσε δι' ἕκαστον στατήρα (διαιροῦντες τὸν ἀριθμὸν 130^{δρ.} 40^{λ.} διὰ τοῦ 70^{στ.} 16^{ὀκ.} 200^{δρ.}) καὶ ἔπειτα εἰς ποίαν ἀπόστασιν μετεφέρθη ὁ στατήρ (διαιροῦντες τὸ ἐκ τῆς πρώτης διαιρέσεως εὔρεθὲν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 5^{λ.} (ἢ διὰ τοῦ 1^{λ.})).

Τοιαῦτα εἶναι τὰ ἐξῆς προβλήματα.

1) Ἐπλήρωσέ τις διὰ τὴν μεταφορὰν τῶν ἐμπορευμάτων τοῦ ἀπὸ Πατρῶν εἰς Ἀθήνας (221 στάδια) 552δρ. 50λ. Πόσους στατηῖρας ἐξύ-
ζον; (τὸ αὐτὸ τιμολόγιον).

Εὐρίσκομεν πρῶτον, πόσον ἐπλήρωσε δι' ἕκαστον στάδιον (μερισμός)
αἱ ἔπειτα, πόσοι ἦσαν αἱ στατηῖρες, οἵτινες μετεφέρθησαν.

2) Διὰ τὴν φύλαξιν τῶν ἐμπορευμάτων ἔν τινι ἀποθήκῃ ἐπὶ 14
μέρας ἐπλήρωσέ τις 65δρ. 40λ. Πόσα τετραγωνικά μέτρα κατεῖχον τὰ
ἐμπορεύματα αὐτοῦ, γνωστοῦ ὄντος ὅτι δι' ἕκαστον τετραγωνικὸν μέ-
τρον καὶ δι' ἑκάστην ἡμέραν πληρώνει φύλακτρα 3 λεπτά;

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Μὲ 1 τάλληρον ἀγοράζει τις 2στ. 15δκ. 300δρ. ἐξ ἑνὸς πράγματος. Πόσα
τάλληρα χρειάζονται, διὰ νὰ ἀγοράσῃ 72 στατηῖρας;

$$(\text{Ἀπ. } 30\text{ταλ. } \frac{222}{415}).$$

2) Ἐργάτης τις λαμβάνει καθ' ὥραν $\frac{7}{8}$ τῆς δραχμῆς. Πόσας ὥρας πρέπει νὰ
ἐργασθῇ, διὰ νὰ λάβῃ 15δρ. 30λ.;

$$(\text{Ἀπ. } 17\text{δρ. } 29' \frac{1}{7}).$$

3) Μία μοῖρα περιφερείας τινὸς ἔχει μῆκος 1δαικτ. 8γρ. Πόσον μῆκος ἔχουσι 32^ο6'
0'' τῆς αὐτῆς περιφερείας;

$$(\text{Ἀπ. } 4\text{πδ. } 5\text{δ. } 6\text{γρ. } \frac{1}{9}).$$

4) Πόσος χρόνος εἶναι ἀπὸ τῆς 1 Ἀπριλίου 1844 μέχρι τῆς 21 Μαΐου 1887;

$$(\text{Ἀπ. } 43\text{ἔτ. } 1\mu. 21\text{ῆμ.}).$$

5) Ἀτμόπλοيون τι διήνυσεν 120 μίλια εἰς 2ῆμ. 8δρ. 45'. Πόσα μίλια διήνυσεν καθ' ὥραν;

$$(\text{Ἀπ. } 2\mu\lambda. \frac{26}{724}).$$

6) Σιδηρόδρομός τις διανύει καθ' ὥραν στάδια 35,8. Πόσα στάδια διανύει εἰς 12δρ.
5' 40'';

$$(\text{Ἀπ. } \text{στάδια } 444,91\dots).$$

7) Σιδηροῦ τινος ἐλάσματος μία παλάμη ἔχει βάρος 5δκ. 250δρ. Πόσον βάρος
ἔχουσι 2μετρ., 18 ἐκ τοῦ αὐτοῦ ἐλάσματος;

$$(\text{Ἀπ. } 120\text{δκ. } 250\text{δρ.}).$$

8) Πόσον ἀξίζουσιν 12στ. 16δκ. 200δρ. ἀνθράκων πρὸς 6δρ. 20λ. τὸν στατηῖρα;

$$(\text{Ἀπ. } 75\text{δρ. } 72 \frac{1}{2} \text{ λεπτά}).$$

9) Ἐπλήρωσέ τις 80δρ. 40λεπτ. διὰ φύλακτρα τῶν ἐμπορευμάτων του, ἅτινα κα-
τεῖχον 4τμ., 60. Πόσας ἡμέρας ἔμειναν τὰ ἐμπορεύματα ἐν τῇ ἀποθήκῃ; Τὰ φύλα-
κτρα εἶναι 7 λεπτά δι' ἕκαστον τ. μ. καὶ δι' ἑκάστην ἡμέραν.

. Προβλήματα ἐπὶ τῶν μέτρων καὶ τῶν σταθμῶν.

1) Νά τραπῶσιν $23 \frac{3}{8}$ μικροὶ πήχεις τῆς Κωνσταντινουπόλεως εἰς μέτρα γαλλικὰ

Λύσις. Ἐπειδὴ εἰς μικρὸς πήχυς (ένδεξέ) εἶναι $0\mu. 648$, οἱ $23 \frac{3}{8}$ μικροὶ θὰ εἶναι μὲν $0,648 \times 23 \frac{3}{8}$. Πολλαπλασιάζοντες τὸν δεκαδικὸν ἐπὶ 23 καὶ ἔπειτα ἐπὶ $\frac{3}{8}$ εἰσκόμεν ὅτι $23\pi. \text{ένδεξέ καὶ } \frac{3}{8} \text{ αὐτῶν} = 15\mu. 147$.

2) Νά τραπῶσιν $67,8$ μέτρα εἰς μικροὺς πήχεις ένδεξέ.

Λύσις. Ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς, ἂν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ $0,648$, θὰ δώσῃ $67\mu.$ ἄρα εἶναι τὸ πηλίκον $\frac{67,8}{0,648}$.

3) Νά τραπῶσι $2\sigma\tau. 18\delta\kappa. 250\delta\rho.$ εἰς τόνους, χιλιόγραμμα καὶ γραμμάρια.

Λύσις. Οἱ $2\sigma\tau. 18\delta\kappa.$ γίνονται $106\delta\kappa.$ καὶ ἐπειδὴ ἡ ὁκά ἔχει $1280\gamma\rho.$, αἱ $106\delta\kappa.$ γίνονται 1280×106 , ἥτοι $135680\gamma\rho\mu.$ Τὸ δράμιον εἶναι $3\gamma\rho\mu.$ καὶ $\frac{1}{5}$ ἢ $3,2$ ἄρα τὰ $250\delta\rho.$ εἶναι $3,2 \times 250$, ἥτοι $800\gamma\rho.$ ἄρα ὁ δοθεὶς συμμιγῆς γίνεται τὸ ὅλον $136480\gamma\rho\mu.$, ἥτοι $136\chi\iota\lambda\iota\omicron\gamma\rho.$ καὶ $480\gamma\rho\mu.$

4) Νά τραπῶσι $2\tauόν., 152\chi\iota\lambda\iota\omicron\gamma\rho.$ καὶ $620\gamma\rho\mu.$ εἰς στατήρας, ὁκάδας καὶ δράμια

Λύσις. Ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶναι τὸ ὅλον γραμ. 2152620 , ἄρα εἶναι δράμια $\frac{2152620}{3,2}$ ἥτοι δράμια $672693 \frac{3}{4}$, ταῦτα δὲ γίνονται $38\sigma\tau. 9\delta\kappa. 293\delta\rho. \frac{3}{4}$.

5) Νά τραπῶσιν 25 ὀργυιαὶ καὶ 2 πόδες εἰς γαλλικὰ μέτρα.

Λύσις. Ἐπειδὴ ἡ ὀργυιά εἶναι $1\mu. 94904$, αἱ $25 \frac{1}{3}$ θὰ εἶναι μέτρα $1,94904 \times 25 \frac{1}{3}$ ἥτοι $49\mu., 37568$.

6) Νά τραπῶσι 582 παλαιὰ στρέμματα εἰς βασιλικά.

Λύσις. Ἐπειδὴ ἓν παλαιὸν στρέμμα εἶναι $1,27$ βασιλικά, τὰ 582 παλαιὰ εἶναι $1,27 \times 582$ βασιλικά, ἥτοι $739,14$.

7) Οἰκόπεδόν τι εἶναι 620 τεκτονικῶν τετρ. πήχεων. Πόσα τετραγων. μέτρα ἔχει

Λύσις. Εἰς τεκτον. τετραγ. πήχυς εἶναι $\frac{9}{16}$ τοῦ τετραγ. μέτρου, ἄρα 620 » » » εἶναι $\frac{9}{16} \times 920$, ἥτοι $348 \tau. \mu., 75$.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΝ Γ'

ΠΕΡΙ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΡΙΖΗΣ

Ὅρισμοί.

254. Τετράγωνον ἀριθμοῦ ἢ δευτέρα δύναμις αὐτοῦ λέγεται τὸ γινόμενον, τὸ ὁποῖον δίδει, ὅταν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν ἑαυτὸν του (ιδεῖ ἐδ. 51).

Παραδείγματος χάριν, τὸ τετράγωνον τοῦ 5 εἶναι 5×5 , ἥτοι 25, καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ 11 εἶναι 11×11 , ἥτοι 121, τὸ δὲ τετράγωνον τοῦ $\frac{1}{2}$ εἶναι $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, ἥτοι $\frac{1}{4}$.

Τὰ τετράγωνα τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν (ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ 12) εἶναι κατὰ σειρὰν τὰ ἑξῆς:

ἀριθμοὶ	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12,
τετράγωνα	1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144.

Πᾶς ἀκέραιος ἀριθμὸς, ὅστις δὲν εἶναι τετράγωνον ἄλλου ἀκεραίου (οἷον ὁ 10, ὁ 12 κτλ.), δὲν εἶναι τετράγωνον οὐδενὸς ἀριθμοῦ, ὥς ἀποδεικνύεται ἐν τῷ ἑξῆς θεωρήματι.

ΘΕΩΡΗΜΑ

255. Ἐὰν ἀκέραιος ἀριθμὸς δὲν εἶναι τετράγωνον ἀκεραίου τινός, δὲν εἶναι οὐδὲ κλάσματος τετράγωνον.

Ἐστω τυχὼν ἀκέραιος ἀριθμὸς, ὅστις δὲν εἶναι τετράγωνον ἀκεραίου, οἷον ὁ 10· λέγω ὅτι ὁ 10 δὲν εἶναι οὐδὲ κλάσματος τετράγωνον.

Διότι, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι κλάσμα τι $\frac{\alpha}{\beta}$ (ὅπερ δύναμαι νὰ ὑποθέσω ἀνάγωγον) ἔχει τετράγωνον τὸ 10, ἥτοι ὅτι εἶναι

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 = 10 \quad \text{ἢ} \quad \frac{\alpha^2}{\beta^2} = 10 \quad (\text{ἐδ. 181}).$$

Τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι ἀνάγωγον, ἤτοι οἱ δύο ἀριθμοὶ α καὶ β δὲν ἔχουσι κανένα κοινὸν διαιρέτην· ἄρα καὶ αἱ δυνάμεις αὐτῶν α^2 καὶ β^2 δὲν ἔχουσι κανένα κοινὸν διαιρέτην (ἐδ. 128)· ὅθεν καὶ τὸ κλάσμα $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$ θὰ εἶναι ἀνάγωγον καὶ ἐπομένως εἶναι ἀδύνατον νὰ διαιρῇ ἀκριβῶς ὁ παρονομαστής του τὸν ἀριθμητὴν του· ὥστε τὸ κλάσμα τοῦτο $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$ δὲν δύναται νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸν ἀκέραιον ἀριθμὸν 10· ἄρα ὁ 10 δὲν εἶναι τετράγωνον τοῦ κλάσματος.

Παρατηρήσεις.

256. Ἐὰν ἀναλύσωμεν δοθέντα ἀκέραιον ἀριθμὸν εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας, δυνάμεθα νὰ διακρίνωμεν, ἂν εἶναι τετράγωνον ἢ ὄχι (ἐδ. 123).

Ἄλλὰ καὶ δι' ἄλλων τινῶν γνωρισμάτων δυνάμεθα ἐνίοτε νὰ διακρίνωμεν ὅτι ἀριθμός τις δὲν εἶναι τετράγωνον· τοιαῦτα εἶναι τὰ ἑξῆς δύο-

1) Ἐὰν ἀκέραιος ἀριθμὸς λήγῃ εἰς ἓν ἐκ τῶν ψηφίων

2,

3,

7,

8,

δὲν εἶναι τετράγωνον.

Διότι ἐκ τοῦ τρόπου, μὲ τὸν ὁποῖον ἐκτελοῦμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν, συνάγομεν ἀμέσως ὅτι τὸ τετράγωνον παντὸς ἀκεραίου λήγει εἰς τὸ αὐτὸ ψηφίον, εἰς τὸ ὁποῖον λήγει καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ τελευταίου ψηφίου του· π. χ. τὸ τετράγωνον τοῦ 47 λήγει εἰς τὸ ψηφίον 9, ὥς καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ 7.

Ἐπειδὴ δὲ τὰ τετράγωνα τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν δὲν λήγουσιν εἰς οὐδὲν ἐκ τῶν ψηφίων 2, 3, 7, 8, συμπεραίνομεν ὅτι οὐδὲν τετράγωνον λήγει εἰς τι τῶν ψηφίων τούτων.

2) Ἐὰν ἀκέραιος ἀριθμὸς λήγῃ εἰς περιττὸν ἀριθμὸν μηδενικῶν (ὥς οἱ 50, 15000 κτλ.), δὲν εἶναι τετράγωνον.

Διότι, ἂν ὁ τοιοῦτος ἀριθμὸς εἶναι τετράγωνον ἄλλου, ὁ ἄλλος οὗτος θὰ λήγῃ εἰς 0· ἀλλ' ὅταν ἀριθμὸς λήγῃ εἰς 0, τὸ τετράγωνόν του θὰ λήγῃ εἰς διπλάσια μηδενικά, ἤτοι θὰ λήγῃ εἰς ἄρτιον ἀριθμὸν μηδενικῶν (κατὰ τὸ ἐδ. 38)· ὥστε ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς, ὅστις λήγει εἰς περιττὸν ἀριθμὸν μηδενικῶν, δὲν δύναται νὰ εἶναι τετράγωνον ἄλλου.

Διὰ τὰ διακρίνωμεν δέ, ἂν κλάσμα τι εἶναι τετράγωνον ἢ ὄχι, ἔχομεν τὸ ἑξῆς θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ

257. Κλάσμα ἀνάγωνον δὲν δύναται νὰ εἶναι τετράγωνον, ἐκτὸς ἂν ἑκάτερος τῶν ὁρῶν του εἶναι τετράγωνον.

Ἀπόδειξις. Ἐστω κλάσμα ἀνάγωνον τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$. ἂν τὸ κλάσμα τοῦτο εἶναι τετράγωνον, θὰ εἶναι τετράγωνον κλάσματος καὶ ὅχι ἀκεραίου, διότι τὸ τετράγωνον παντὸς ἀκεραίου εἶναι ἀκέραιος ἀριθμὸς. ἄς ὑποθέσωμεν λοιπὸν ὅτι τὸ δοθὲν κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι τετράγωνον κλάσματός τινος $\frac{\mu}{\nu}$, ὅπερ ὑποθέτω ἀνάγωνον, τότε θὰ εἶναι

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\mu}{\nu} \times \frac{\mu}{\nu} = \frac{\mu^2}{\nu^2}.$$

Ἐπειδὴ δὲ τὸ κλάσμα $\frac{\mu}{\nu}$ εἶναι ἀνάγωνον, καὶ τὸ $\frac{\mu^2}{\nu^2}$ θὰ εἶναι ἀνάγωνον (ἔδ. 128). ἀλλὰ καὶ τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι ἀνάγωνον· ὅταν δὲ δύο ἀνάγωγα κλάσματα εἶναι ἴσα, καὶ οἱ ἀριθμηταὶ αὐτῶν εἶναι χωριστὰ ἴσοι καὶ οἱ παρονομασταὶ ἴσοι (ἔδ. 154)· ἐντεῦθεν συνάγομεν ὅτι θὰ εἶναι $\alpha = \mu^2$ καὶ $\beta = \nu^2$. Τοῦτο δὲ ἐπρόκειτο νὰ δείξωμεν.

Σημείωσις. Κλάσμα μὴ ἀνάγωνον δύναται νὰ εἶναι τετράγωνον χωρὶς νὰ εἶναι οἱ ὅροι του. Π. χ., τὸ κλάσμα

$$\frac{2}{8} \left(= \frac{1}{4} \right) = \left(\frac{1}{2} \right)^2 \text{ καὶ τὸ } \frac{8}{50} \left(= \frac{4}{25} \right) = \left(\frac{2}{5} \right)^2.$$

Οἱ ἀριθμοί, οἵτινες εἶναι τετράγωνα ἄλλων, λέγονται *τέλεια τετράγωνα*· οἷον οἱ ἀριθμοὶ 49 ($=7^2$), $\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2} \right)^2$, $\frac{16}{25} = \left(\frac{4}{5} \right)^2$ εἶναι τέλεια τετράγωνα.

Ὅρισμοί.

258. Τετραγωνικὴ ρίζα ἀριθμοῦ λέγεται ὁ ἀριθμὸς, ὅστις ἔχει αὐτὸν τετράγωνον.

Παραδείγματος χάριν, ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 81 εἶναι ὁ 9, διότι τὸ τετράγωνον τοῦ 9 εἶναι 81· ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ $\frac{25}{36}$ εἶναι τὸ $\frac{5}{6}$, διότι τὸ τετράγωνον τοῦ $\frac{5}{6}$ εἶναι $\frac{25}{36}$ κτλ.

Τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν παριστῶμεν διὰ τοῦ σημείου $\sqrt{\quad}$, τὸ ὁποῖον λέγεται *ριζικόν*· οἷον $\sqrt{49}$ σημαίνει τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ 49, ἥτοι τὸ 7, καὶ $\sqrt{\frac{1}{4}}$ σημαίνει τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ $\frac{1}{4}$, ἥτοι τὸ $\frac{1}{2}$.

259. Τετραγωνικὴ ῥίζα ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν μονάδος λέγεται ὁ μέγιστος ἀκεραῖος, τοῦ ὁποῖου τὸ τετράγωνον χωρεῖ ὁ ἀριθμὸς οὗτος· οἷον τοῦ 58 τετρ. ῥίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι ὁ 7, διότι τὸ τετράγωνον τοῦ 7 εἶναι 49 (καὶ χωρεῖ εἰς τὸν 58, τοῦ δὲ 8 εἶναι 64, τουτέστι μεγαλύτερον τοῦ 58. Ὁμοίως τοῦ 17 τετρ. ῥίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι ὁ 4 καὶ τοῦ 17 $\frac{1}{2}$ -τετρ. ῥίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι ὁσαύτως ὁ 4, τοῦ δὲ 26 τετρ. ῥίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι ὁ 5.

260. Τετραγωνικὴ δὲ ῥίζα κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{n}$ λέγεται ἐκ τῶν κλασμάτων, ἅτινα ἔχουσι παρονομαστήν τὸ n , τὸ μέγιστον, τοῦ ὁποῖου τὸ τετράγωνον χωρεῖ ὁ ἀριθμὸς οὗτος.

Π. χ. ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 2 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$ εἶναι $\frac{14}{10}$. διότι τὸ τετράγωνον τοῦ $\frac{14}{10}$, ἥτοι τὸ $\frac{196}{100}$, χωρεῖ εἰς τὸν ἀριθμὸν 2· ἀλλὰ τὸ τετράγωνον τοῦ $\frac{15}{10}$ δὲν χωρεῖ εἰς τὸν 2, διότι εἶναι $\frac{225}{100}$ ἢ 2,25.

Ἐξαγωγή τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης.

261. Ἐξαγωγή τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης δοθέντος ἀριθμοῦ λέγεται ἡ προᾶξις, δι' ἧς εὐρίσκομεν τὴν τετρ. ῥίζαν αὐτοῦ ἢ τὴν ἀκριβῆ (ἂν εἶναι τέλειον τετράγωνον) ἢ τὴν κατὰ προσέγγισιν ὠρισμένην.

Κατὰ πρῶτον θὰ μάθωμεν, πῶς ἐξάγεται ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα δοθέντος ἀκεραίου ἀριθμοῦ ἢ ἀκριβῶς, ἂν εἶναι τέλειον τετράγωνον, ἢ κατὰ προσέγγισιν μονάδος, ἂν δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον. Διότι εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ὑπάγονται, ὥς θὰ ἴδωμεν, καὶ αἱ ἄλλαι.

Ἐξαγωγή τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.

262. Ἄν μὲν ὁ δοθεὶς ἀκεραῖος ἀριθμὸς εἶναι μικρότερος τοῦ 100, ἢ τετρ. ῥίζα αὐτοῦ (ἢ ἡ ἀκριβὴς ἢ ἡ κατὰ προσέγγισιν μονάδος) θὰ εἶναι μικρότερα τῆς τετρ. ῥίζης 100, ἥτοι μικρότερα τοῦ 100· ἄρα θὰ

εἶναι μονοψήφιος· εὐρίσκομεν δ' αὐτὴν ἀμέσως ἀπὸ μνήμης· διότι ἐκ τοῦ Πυθαγορείου πίνακος ἐνθυμούμεθα ἀμέσως τὰ τετράγωνα πάντων τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν.

Παραδείγματος χάριν, ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 49 εἶναι 7, διότι $7 \times 7 = 49$. Ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 35 (κατὰ προσέγγ. μονάδος) εἶναι ὁ 5, διότι τὸ τετράγωνον αὐτοῦ (ἥτοι τὸ 25) χωρεῖ εἰς τὸν δοθέντα ἀριθμὸν καὶ μένει καὶ ὑπόλοιπον 10· ἀλλὰ τὸ τετράγωνον τοῦ ἀμέσως μεγαλυτέρου ἀκεραίου (τοῦ 6) δὲν χωρεῖ.

Ἐὰν δὲ ὁ δοθεὶς ἀκέραιος εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 100, ἡ τετραγ. ρίζα αὐτοῦ (ἡ ἀκριβὴς ἢ ἡ προσεγγίζουσα) θὰ εἶναι μεγαλύτερα τοῦ 10, ἥτοι θὰ ἔχη δεκάδας. Διὰ τὴν εὐρωμεν τὴν ρίζαν ταύτην, ἔχομεν ἀνάγκην τοῦ ἑξῆς θεωρήματος.

ΘΕΩΡΗΜΑ

263. Τὸ τετράγωνον τοῦ ἄθροίσματος δύο ἀριθμῶν σύγκειται ἐκ τῶν τετραγώνων αὐτῶν καὶ ἐκ τοῦ διπλασίου γινομένου αὐτῶν.

Ἀπόδειξις. Ἐστῶσαν δύο τυχόντες ἀριθμοὶ α καὶ β· τὸ ἄθροισμα αὐτῶν θὰ εἶναι $\alpha + \beta$, τὸ δὲ τετράγωνον τούτου θὰ εἶναι τὸ γινόμενον $(\alpha + \beta) \times (\alpha + \beta)$ ἢ $(\alpha + \beta)^2$.

Τὸ γινόμενον τοῦτο, κατὰ τὸ θεωρήμα τοῦ ἑδαφίου 50, σύγκειται ἐκ τῶν ἑξῆς τεσσάρων μερικῶν γινομένων

$$\begin{array}{cccc} \alpha \times \alpha & \alpha \times \beta & \beta \times \alpha & \beta \times \beta \\ \text{ἢ} & \alpha^2 & \alpha \times \beta & \alpha \times \beta & \beta^2 \end{array}$$

καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι

$$\alpha^2 + 2 \times \alpha \times \beta + \beta^2.$$

Ἐδείχθη λοιπὸν ἡ ἰσότης

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2 \times \alpha \times \beta + \beta^2.$$

Παραδείγματα.

Τὸ 11 εἶναι ἄθροισμα τῶν δύο ἀριθμῶν 10 καὶ 1, τὸ δὲ τετράγωνον τοῦ 11 σύγκειται ἐκ τοῦ τετραγώνου τοῦ 10 (ὅπερ εἶναι 100) καὶ ἐκ τοῦ τετραγώνου τοῦ 1 (ἥτοι 1) καὶ ἐκ τοῦ διπλασίου γινομένου τῶν δύο μερῶν (ἢ $2 \times 10 \times 1$)· ὥστε $11^2 = 100 + 1 + 20 = 121$.

Ὅμοιως τὸ τετράγωνον τοῦ 12 (ἢ $10 + 2$) σύγκειται ἐκ τοῦ 100 καὶ ἐκ τοῦ 4 καὶ ἐκ τοῦ διπλασίου τοῦ 20, ἥτοι εἶναι 144.

Καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ 102 (ὅπερ 102 εἶναι ἄθροισμα τοῦ 100 καὶ τοῦ 2) εἶναι ἴσον τῷ $100^2 + 2^2 + 400 = 10000 + 404 = 10404$.

Πόρισμα.

264. Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ διαφέρωσι κατὰ μονάδα, τὰ τετράγωνα αὐτῶν διαφέρουσι κατὰ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν τούτων.

Διότι, ἂν ὁ μικρότερος ἐκ τῶν δύο ἀριθμῶν παρασταθῇ διὰ τοῦ α , ὁ μεγαλύτερος θὰ εἶναι $\alpha + 1$ καὶ τὰ τετράγωνα αὐτῶν θὰ εἶναι τοῦ μὲν μικροτέρου α^2 , τοῦ μεγαλυτέρου $(\alpha + 1)^2$, ἥτοι $\alpha^2 + 2\alpha + 1$.

διαφέρουσι δὲ ἀπ' ἀλλήλων τὰ δύο ταῦτα τετράγωνα κατὰ $2\alpha + 1$ τουτέστι κατὰ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀριθμῶν α καὶ $\alpha + 1$.

265. Δυνάμεθα τώρα νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν παντὸς ἀκεραίου ἀριθμοῦ (τὴν ἀκριβῆ, ἂν εἶναι τέλειον τετράγωνον, εἰ δὲ μή, τὴν κατὰ προσέγγισιν μονάδος).

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ ἀριθμοῦ 3854· πρὸς τοῦτο σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς οὗτος ὑπερβαίνει τὸν 100, ἡ τετραγ. ῥίζα αὐτοῦ θὰ ὑπερβαίῃ τὸ 10· ἄρα θὰ σύγκειται ἐκ δεκάδων δ καὶ ἐκ μονάδων μ · καὶ διὰ τοῦτο δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν αὐτὴν ὡς ἄθροισμα ἀριθμοῦ, τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦσιν αἱ δ δεκάδες (ἥτοι τοῦ ἀριθμοῦ $\delta \times 10$) καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μονάδων μ , τουτέστι

$$\delta \times 10 + \mu.$$

Τὸ δὲ τετράγωνον αὐτῆς (τὸ ὁποῖον θὰ χωρῇ ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς) θὰ σύγκειται (κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα)

1) Ἐκ τοῦ τετραγώνου τῶν δεκάδων (τουτέστιν ἐκ τοῦ $(\delta \times 10) \times (\delta \times 10)$, ἥτοι $(\delta^2 \times 100)$).

2) Ἐκ τοῦ διπλασίου γινομένου τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας (ἥτοι ἐκ τοῦ $2 \times \delta \times 10 \times \mu$).

3) Ἐκ τοῦ τετραγώνου τῶν μονάδων (ἥτοι μ^2).

Ἄρα ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς 3854 ὡς περιέχων τὸ τετράγωνον τῆς ῥίξης του θὰ σύγκειται ἐκ τῶν τριῶν τούτων μερῶν καὶ ἔκ τινος ὑπολοίπου (ἂν δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον), τουτέστιν εἶναι

$$3854 = \delta^2 \times 100 + 2 \times \delta \times 10 \times \mu + \mu^2 + \nu \quad (1)$$

Ἐκ τῶν μερῶν τούτων αἱ 2³ ἑκατοντάδες δὲν δύναται νὰ περιέχωνται ἢ εἰς τὰς 38 ἑκατοντάδας τοῦ ἀριθμοῦ, ἀλλὰ τὸ μέγιστον τετράγωνον, τὸ ὁποῖον χωρεῖ ὁ 38, εἶναι τὸ 36· ὥστε τὸ τετράγωνον τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων εἶναι 36· καὶ ἐπομένως $\delta=6$ (ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς 3854 περιέχεται μεταξὺ τοῦ τετραγώνου τῶν 6 δεκάδων, ἥτοι τοῦ 3600, καὶ τοῦ τετραγώνου τῶν 7 δεκάδων, ἥτοι τοῦ 4900· ὥστε ἡ ρίζα τοῦ δὲν δύναται νὰ ἔχη 7 δεκάδας). Ἐκ τούτων βλέπομεν ὅτι

Αἱ δεκάδες τῆς ρίζης παντὸς ἀριθμοῦ εὐρίσκονται, ἐὰν ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τῶν ἑκατοντάδων του.

Ἀφοῦ εὐρήκαμεν τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων ($\delta=6$), μένει ἀκόμη νὰ εὐρωμεν τὰς μονάδας μ πρὸς τοῦτο ἀφαιροῦμεν ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἰσότητος (1) τὰς 36 ἑκατοντάδας καὶ εὐρίσκομεν

$$254 = 2 \times 6 \times 10 \times \mu + \mu^2 \times \nu \quad (2).$$

Ἐκ τῶν ἀριθμῶν, οἵτινες ἀποτελοῦσι τὸν 254, ὁ πρῶτος εἶναι δεκάδες ($12 \times \mu$ δεκάδες). ἄρα δὲν δύναται νὰ περιέχεται ἢ μόνον εἰς τὰς 25 δεκάδας· ἀλλ' εἰς τὰς 25 ταύτας δεκάδας περιέχονται καὶ αἱ δεκάδες τοῦ ὑπολοίπου ν (ἂν ἔχη) καὶ αἱ δεκάδες τοῦ τετραγώνου μ^2 (ἂν ἔχη)· ὥστε θὰ εἶναι

$$25 \geq 12 \times \mu.$$

Ἐξ οὗ βλέπομεν ὅτι τὸ ψηφίον μ τῶν μονάδων δὲν δύναται νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ψηφίου, ὅπερ εὐρίσκομεν διαιροῦντες τὰς 25 δεκάδας τοῦ ὑπολοίπου 254 διὰ τοῦ διπλασίου τῶν δεκάδων τῆς ρίζης.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ μ δὲν δύναται νὰ ὑπερβῇ τὸ 2, δοκιμάζομεν τὸ ψηφίον 2. Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὸν 254 πρέπει νὰ περιέχεται τὸ διπλάσιον γινόμενον τῶν 6 δεκάδων ἐπὶ τὰς 2 μονάδας, ἥτοι τὸ γινόμενον 120×2 , καὶ τὸ τετράγωνον τῶν 2 μονάδων, ἥτοι τὸ 2×2 · ὥστε πρέπει νὰ περιέχεται τὸ γινόμενον 122×2 , τοῦ γινομένου δὲ τούτου ὁ μὲν εἰς παράγων εἶναι τὸ δοκιμαζόμενον ψηφίον 2, ὁ δὲ ἄλλος σχηματίζεται, ἂν διπλασιάσωμεν τὰς εὐρεθείσας 6 δεκάδας καὶ δεξιᾷ τοῦ διπλασίου αὐτῶν γράψωμεν τὸ δοκιμαζόμενον ψηφίον 2. Τὸ γινόμενον τοῦτο εἶναι 244 καὶ περιέχεται ἀληθῶς εἰς τὸν ἀριθμὸν 254· ἀφαιροῦντες δὲ αὐτὸ ἀπὸ τούτου εὐρίσκομεν τέλος καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως, τὸ 10.

Ὡστε εὐρέθη ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 3854 κατὰ προσέγγισιν μονάδος, εἶναι δὲ ὁ ἀριθμὸς 62.

Διάταξις τῆς πράξεως.

38'54	62
36	122
25'4	2
24 4	244
10	

Ὅμοίως ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν οἰουδήποτε ἀκεραίου.
Διότι ἔστω ὡς παράδειγμα ὁ ἀριθμὸς

58742.

Κατὰ τὰ προηγούμενα αἱ δεκάδες τῆς ῥίζης τοῦ θὰ εὐρεθῶσιν, ἂν
ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τῶν 587 ἑκατοντάδων τοῦ, ἡ δὲ ῥίζα τοῦ
587 εὐρίσκεται κατὰ τὰ ἀνωτέρω

5'87	24
4	44
18'7	4
17 6	176
11	

καὶ εἶναι 24· ὥστε αἱ δεκάδες τῆς ῥίζης τοῦ 58742 εἶναι 24· μένει ἀκόμη
πρὸς εὑρεσιν τὸ ψηφίον τῶν μονάδων, τοῦτο δὲ (κατὰ τὰ προαποδει-
χθέντα) δὲν δύναται νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ψηφίου, ὅπερ εὐρίσκομεν
διαιροῦντες διὰ τοῦ διπλασίου τῶν δεκάδων (ἴτοι διὰ τοῦ 48) τὰς δεκά-
δας τοῦ ὑπολοίπου, τὸ ὁποῖον προκύπτει ἐκ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ μετὰ
τὴν ἀφαίρεσιν τοῦ τετραγώνου τῶν 24 δεκάδων· τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο
εἶναι 11 ἑκατοντάδες (αἵτινες ἔμειναν ἐκ τῶν 587 ἑκατοντάδων, ἀφ' ὧν
ἀφηρέσαμεν τὸ τετράγωνον τῶν 24 δεκάδων) καὶ 42 μονάδες, ἴτοι εἶναι
1142. Διαιροῦντες τὰς 114 δεκάδας τοῦ ὑπολοίπου τούτου διὰ τοῦ
48 εὐρίσκομεν τὸ ψηφίον 2, ὅπερ γράφομεν δεξιᾷ τοῦ 48 καὶ ὑπο-
κάτω αὐτοῦ καὶ πολλαπλασιάζομεν· ἐπειδὴ δὲ τὸ προκύπτον γινόμενον
964 περιέχεται εἰς τὸ ὑπόλοιπον 1142, συμπεραίνομεν ὅτι τὸ ψηφίον
τῶν μονάδων εἶναι 2· ἀφαίροῦντες τέλος τὸ γινόμενον 964 ἀπὸ τοῦ
υπολοίπου 1142 εὐρίσκομεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως 178.

Διάταξις τῆς πράξεως.

5'87'42	242	
4	44	482
18'7	4	2
176	176	964
1142		
964		
178		

Ὡστε ἐξήχθη ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 58742 κατὰ προσέγγισιν μονάδος· εἶναι δὲ ὁ 242.

266. Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγεται ὁ ἐξῆς κανὼν τῆς ἔξαγωγῆς τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης.

Διὰ τὰ ἐξαγάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἀκεραίου ἀριθμοῦ (ἀκριβῶς, ἂν εἶναι τετράγωνον, εἰ δὲ μή, κατὰ προσέγγισιν μονάδος), χωρίζομεν αὐτὸν εἰς τμήματα διψήφια ἀρχόμενοι ἀπὸ τῶν ἀπλῶν μονάδων, ἐξαγομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ πρώτου τμήματος, ὅπερ εὐρίσκεται εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ ἀριθμοῦ καὶ δύναται νὰ εἶναι διψήφιον ἢ μονοψήφιον. Ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ τμήματος τούτου θὰ εἶναι τὸ πρῶτον ψηφίον τῆς ζητουμένης ῥίζης. Ἀφαιροῦμεν τὸ τετράγωνον τοῦ πρώτου ψηφίου τῆς ῥίζης ἀπὸ τοῦ τμήματος, ἐξ οὗ εὐρέθη, καὶ δεξιᾷ τοῦ μένοντος ὑπολοίπου καταβιβάζομεν τὸ ἐπόμενον τμήμα, ὅτε σχηματίζεται ἀριθμὸς τις τοῦ ἀριθμοῦ τούτου χωρίζομεν τὰς ἀπλᾶς μονάδας καὶ διαιροῦμεν τὰς δεκάδας του διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ εὐρεθέντος ψηφίου τῆς ῥίζης.

Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης γράφομεν πρὸς τὰ δεξιᾷ τοῦ διαιρέτου αὐτῆς καὶ τὸν οὕτω προκύπτοντα ἀριθμὸν πολλαπλασιάζομεν ἐπ' αὐτὸ τὸ πηλίκον· καὶ ἂν μὲν τὸ γινόμενον ἀφαιρῇται ἀπὸ τοῦ σχηματισθέντος ἀριθμοῦ (οὗ τὰς δεκάδας διηγρέσαμεν), τὸ εὐρεθὲν πηλίκον εἶναι τὸ δεύτερον ψηφίον τῆς ζητουμένης ῥίζης καὶ γράφομεν αὐτὸ δεξιᾷ τοῦ πρώτου· εἰ δὲ μή, δοκιμάζομεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον ψηφίον καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, μέχρις οὗ εὕρωμεν ψηφίον, οὗ τὸ γινόμενον νὰ ἀφαιρῇται τὸ ψηφίον τοῦτο θὰ εἶναι τὸ δεύτερον ψηφίον τῆς ῥίζης· καὶ ἂν ἐκτελέσωμεν τὴν ἀφαίρεσιν καὶ δεξιᾷ τοῦ ὑπολοίπου καταβιβάζωμεν τὸ ἀκόλουθον τμήμα, σχηματίζεται δευτέρως τις ἀριθμὸς.

Καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου διαιροῦμεν τὰς δεκάδας διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ ἀριθμοῦ, ὃν ἀποτελοῦσι τὰ δύο εὐρεθέντα ψηφία τῆς ῥίξης, καὶ γράφομεν τὸ πηλίκον δεξιᾷ τοῦ διαιρέτου καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν ἐπ' αὐτὸ τὸ πηλίκον· καὶ ἂν μὲν τὸ γινόμενον ἀφαιρῇται ἀπὸ τοῦ δευτέρου σχηματισθέντος ἀριθμοῦ, τὸ εὐρεθὲν ψηφίον εἶναι τὸ τρίτον ψηφίον τῆς ῥίξης, εἰ δὲ μή, δοκιμάζομεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον ψηφίον καὶ οὕτω καθεξῆς.

Τοιοιτοτρόπως ἐξακολουθοῦμεν, μέχρι οὗ καταβιβασθῶσι πάντα τὰ διψήφια τιμήματα. Τὸ εἰς τὸ τελευταῖον τμήμα ἀντιστοιχοῦν πηλίκον θὰ εἶναι τὸ τελευταῖον τῆς ῥίξης ψηφίον, τὸ δὲ εἰς αὐτὸ ἀντιστοιχοῦν ὑπόλοιπον θὰ εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως. Καὶ ἂν μὲν εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο 0, ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶναι τέλειον τετραγώνον καὶ εὐρέθη ἡ ῥίζα αὐτοῦ ἀκριβῶς, εἰ δὲ μή, εὐρέθη κατὰ προσέγγισιν μονάδος.

Παραδείγματα.

16'81'72	410		9'36'36	306
16	81	820	9	606
081	1		036 36	6
81	81		363 6	3636
0 72			0	
	8'48	29		
	4	49		
	44'8	9		
	44 1	441		
	7			

Παρατήρησεις.

1) Ὁ ἀριθμὸς τῶν ψηφίων τῆς τετρ. ῥίξης εἶναι ἴσος τῷ ἀριθμῷ τῶν τμημάτων, εἰς ᾧ χωρίζεται ὁ ἀριθμὸς. Διὰ τοῦτο ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα παντὸς ἀκεραίου ἀριθμοῦ ἔχει ἢ τὸ ἥμισυ τῶν ψηφίων αὐτοῦ (ἂν τὸ πλῆθος αὐτῶν εἶναι ἄρτιον) ἢ τὸ ἥμισυ τῶν ψηφίων αὐτοῦ ἔν ἑν προσλαβόντων (ἂν τὸ πλῆθος αὐτῶν εἶναι περιττόν).

2) Δυνατὸν νὰ συμβῇ, ὥστε μία τῶν διαιρέσεων, τὰς ὁποίας κάμνομεν, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ δεύτερον, τὸ τρίτον κτλ. ψηφίον τῆς ῥίξης, νὰ δίδῃ

πηλίκον μεγαλύτερον τοῦ 9. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει ἀρχίζομεν τὰς δοκιμὰς ἀπὸ τοῦ 9 (τοῦτο συνέβη εἰς τὸν ἀριθμὸν 848).

3) Δυνατὸν ἐπίσης νὰ συμβῇ, ὥστε μία τῶν προειρημένων διαιρέσεων νὰ δίδῃ πηλίκον 0 (ὡς εἰς τὸν ἀριθμὸν 93636 · τότε τὸ ἀντίστοιχον ψηφίον τῆς ῥίζης εἶναι 0, γράφομεν δὲ αὐτὸ δεξιᾷ τῶν ἄλλων καὶ καταβιβάζοντες καὶ τὸ ἐπόμενον τμήμα ἐξακολουθοῦμεν τὴν προᾶξιν κατὰ τὸν κανόνα.

4) Τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως δὲν δύναται νὰ ὑπερβῇ τὸ διπλάσιον τῆς ῥίζης. Ἄν λόγου χάριν εὑρεθῇ ῥίζα ὁ ἀριθμὸς 62, τὸ ὑπόλοιπον δὲν δύναται νὰ ὑπερβῇ τὸν 124, διότι, ἂν ἔμενεν ὑπόλοιπον 125 ἢ μεγαλύτερον τούτου, ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς θὰ περιεῖχε τὸ τετράγωνον τοῦ 62 καὶ τὸ ἄθροισμα $62 + 63$ · ἄρα θὰ περιεῖχε καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ 63 κατὰ μονάδα μεγαλύτερου ἀριθμοῦ (τοῦ 63), ὅπερ εἶναι $62^2 + 62 + 63$ (κατὰ τὸ πόρισμα 264), ἐπομένως δὲν θὰ ἦτο ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ὁ 62, ἀλλ' ὁ 63 ἢ καὶ ἄλλος μεγαλύτερος ἀριθμὸς.

Ἐξαγωγή τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης οἰουδήποτε ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν μ. ν. ἑξ.

267. Ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα οἰουδήποτε ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν τετραγ. ῥίζαν τοῦ ἀκεραίου μέρους αὐτοῦ.

Ἐστὼ ὡς παράδειγμα ὁ ἀριθμὸς $42 \frac{2}{5}$ · τὸ μέγιστον ἀκέραιον τετράγωνον, τὸ ὁποῖον χωρεῖ ὁ ἀριθμὸς οὗτος, θὰ περιέχεται προδήλως εἰς τὸ ἀκέραιον μέρος του, ἥτοι εἰς τὸ 42, τῷτο δὲ εἶναι τὸ 36· ἄρα 6 εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ἀμφοτέρων κατὰ προσέγγισιν μονάδος.

Ὅμοιως ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 142.75 κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι ἡ ῥίζα τοῦ 142, ἥτοι τὸ 11, καὶ ἡ τετραγ. ῥίζα τοῦ $\frac{1500}{8}$ κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι ἡ τετραγ. ῥίζα τοῦ 187 ἥτοι ὁ 13.

Ἐξαγωγή τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης οἰουδήποτε ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{v}$

268. Ἡ ἔκθεσις τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης οἰουδήποτε ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{v}$ ἀνάγεται εἰς τὴν ἑξαγωγήν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἀκεραίου κατὰ προσέγγισιν μονάδος, γίνεται δὲ τοῦτο ὡς ἑξῆς.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι πρόκειται νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν τετρ. ρίζαν τοῦ ἀριθμοῦ A κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{v}$, τουτέστι νὰ εὕρωμεν ἐκ τῶν κλασμάτων, ἅτινα ἔχουσι παρονομαστήν v , τὸ μέγιστον, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον χωρεῖ ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς A . ἔστω τοιοῦτο τὸ $\frac{\rho}{v}$, ἥτοι ἔστω

$$\left(\frac{\rho}{v}\right)^2 \leq A, \quad \text{ἀλλὰ} \quad \left(\frac{\rho+1}{v}\right)^2 > A.$$

$$\eta \quad \frac{\rho^2}{v^2} \leq A, \quad \text{ἀλλὰ} \quad \frac{(\rho+1)^2}{v^2} > A.$$

Ἐκ τούτου ἔπεται $\rho^2 \leq A \times v^2$, ἀλλὰ $(\rho+1)^2 > A \times v^2$.

Αἱ δὲ ἀνισότητες αὗται δεικνύουσιν ὅτι ὁ ἀκέραιος ρ εἶναι ὁ μέγιστος ἀκέραιος, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον χωρεῖ ὁ ἀριθμὸς $A \times v^2$, τουτέστιν ὁ ρ εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ $A \times v^2$ κατὰ προσέγγισιν μονάδος.

269. Ἐκ τούτων συνάγεται ὁ ἑξῆς κανὼν.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν οἰουδήποτε ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{v}$, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ v , ἥτοι ἐπὶ v^2 , καὶ ἐξάγομεν τὴν τετραγ. ρίζαν τοῦ γινομένου $(A \times v^2)$ κατὰ προσέγγισιν μονάδος, τὴν δὲ ρίζαν ταύτην διαιροῦμεν διὰ v .

Ἐάν, παραδείγματος χάριν, ἔχωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ 2 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{5}$, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ 5², ἥτοι ἐπὶ 25, καὶ εὐρίσκομεν γινόμενον 50. τούτου ἐξάγομεν τὴν τετρ. ρίζαν κατὰ προσέγγισιν μονάδος, καὶ εἶναι 7· τὴν ρίζαν ταύτην 7 διαιροῦμεν διὰ τοῦ 5 καὶ εὐρίσκομεν $\frac{7}{5}$. Αὕτη δὲ εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 2 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{5}$.

Ὅμοίως, ἂν ἔχωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ κλάσματος $\frac{2}{3}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{60}$, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸ ἐπὶ 60² καὶ εὐρίσκομεν γινόμενον $60^2 \times \frac{2}{3}$ ἢ $60 \times 20 \times 2$, τουτέστι 2400· τοῦ γινομένου τούτου ἐξάγομεν τὴν τετραγ. ρίζαν κατὰ προσέγγισιν μονάδος, ὅτε εὐρίσκομεν 48· διαιροῦμεν τέλος αὐτὴν διὰ τοῦ 60 καὶ ὁ οὕτω

εὐρισκόμενος ἀριθμὸς $\frac{48}{60}$ ἢ $\frac{4}{5}$ εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ $\frac{2}{3}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{60}$.

Ἄν τέλος ζητῆται ἡ τετρ. ρίζα τοῦ 5,1 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{12}$, πολλαπλασιάζομεν $5,1 \times 12^2$ καὶ εὐρίσκομεν $5 \times 144 + \frac{1}{10} \times 144 = 720 + 14,4$ ἢ 734,4. Τοῦ γινομένου τούτου λαμβάνομεν τὸ ἀκέραιον μέρος (ἔδ. 277), τὸ 734, καὶ τούτου ἐξάγομεν τὴν τετρ. ρίζαν κατὰ προσέγγισιν μονάδος, ὅτε εὐρίσκομεν 27· ὥστε ἡ ζητουμένη ρίζα τοῦ 5,1 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{12}$ εἶναι $\frac{27}{12}$ ἢ $2 \frac{1}{4}$.

Συνήθως τὸ κλάσμα τῆς προσεγγίσεως ἔχει παρονομαστὴν δυνάμιν τινα τοῦ 10, ζητεῖται δηλονότι νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ A κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10^s}$ · τότε ἡ ἐφαρμογὴ τοῦ προηγουμένου κανόνος γίνεται εὐκολωτέρα, διότι ὁ πολλαπλασιασμοὸς τοῦ ἀριθμοῦ A ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ παρονομαστοῦ 10^s , ἥτοι ἐπὶ τὸ $10^s \times 10^s$ ἢ 10^{2s} , γίνεται εὐκολώτατα.

Παραδείγματα.

1) Νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 2 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10000}$.

Λύσις. Πολλαπλασιάζω τὸν 2 ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ 10000, ἥτοι γράφω δεξιᾷ τοῦ 2 ὀκτὼ μηδενικά, καὶ τοῦ προκύπτοντος ἀριθμοῦ 200000000 ἐξάγω τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν κατὰ προσέγγισιν μονάδος, ὅτε εὐρίσκω 14142· τὴν ρίζαν ταύτην διαιρῶ διὰ 10000 καὶ ἔχω 1,412, ἥτις εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 2 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10000}$.

2) Νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ κλασματικοῦ ἀριθμοῦ $\frac{12}{7}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{1000}$.

Λύσις. Πολλαπλασιάζω τὸ $\frac{12}{7}$ ἐπὶ 1000^2 καὶ τοῦ γινομένου $\frac{12}{7} \times 1000^2$ λαμβάνω τὸ ἀκέραιον μέρος, ὅπερ εἶναι 1714285, καὶ ἐξάγω τὴν τετραγωνικὴν αὐτοῦ ρίζαν κατὰ προσέγγισιν μονάδος, ὅτε εὐρίσκω 1309· διαιρῶ ἔπειτα τὴν ρίζαν ταύτην διὰ 1000 καὶ ὁ προκύπτων ἀριθμὸς 1,309 εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ $\frac{12}{7}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{1000}$.

Σημείωσις. Διὰ νὰ εὕρω τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ γινομένου $\frac{12}{7} \times 1000^2$,

τρέπω τὸ κλάσμα $\frac{12}{7}$ εἰς δεκαδικὸν καὶ ἔπειτα μεταθέτω τὴν ὑποδιαστολὴν 6 θέσεις πρὸς τὰ ἔμπροσ, παραλείπω δὲ πάντα τὰ μετ' αὐτὴν ψηφία.

3) Νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετραγ. ῥίζα τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ 18,65924467 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{100}$.

Λύσις. Πολλαπλασιάζω τὸν δοθέντα ἀριθμὸν ἐπὶ 100^2 , ἥτοι ἐπὶ 10000, καὶ εὐρίσκω τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ γινομένου, ὅπερ εἶναι 186592· τοῦτου ἐξάγω τὴν τετρ. ῥίζαν κατὰ προσέγγισιν μονάδος καὶ εὐρίσκω 431· διαιρῶ τὴν ῥίζαν ταύτην δι' 100 καὶ ὁ προκύπτων ἀριθμὸς 4,31 εἶναι ἡ τετρ. ῥίζα τοῦ δοθέντος δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{100}$.

Ὅμοίως εὐρίσκω ὅτι ἡ τετρ. ῥίζα τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ 0,000068 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{1000}$ εἶναι 0,008.

Παρατήρησις.

270. Ἄν ὁ παρονομαστής τοῦ κλάσματος, οὗτινος ζητεῖται ἡ τετρ. ῥίζα, εἶναι τέλειον τετράγωνον (καὶ τοιοῦτος γίνεται πάντοτε, ἐὰν ἀμφοτέροι οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ τὸν παρονομαστήν του), παραλείπομεν αὐτόν, ἐξάγομεν τὴν τετρ. ῥίζαν τοῦ ἀριθμητοῦ ἢ ἀκριβῶς, ἂν εἶναι δυνατόν, ἢ κατὰ προσέγγισιν καὶ ταύτην διαιροῦμεν ἔπειτα διὰ τῆς τετρ. ῥίζης τοῦ παρονομαστοῦ.

Παραδείγματος χάριν, ἂν ζητῇται ἡ τετρ. ῥίζα τοῦ $\frac{2}{3}$, γράφομεν αὐτὸν ὡς $\frac{6}{9}$, ἐξάγομεν τὴν ῥίζαν τοῦ 6 κατὰ προσέγγισιν τινα, ἔστω $\frac{1}{100}$, καὶ εὐρίσκομεν 2,44, διαιροῦντες δ' αὐτὴν διὰ τῆς τετραγ. ῥίζης τοῦ 9, ἥτοι διὰ 3, εὐρίσκομεν 0,81.

Ἐὰν συμβῇ νὰ εἶναι ἀμφοτέροι οἱ ὅροι τετράγωνα τέλεια, ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ κλάσματος εὐρίσκεται ἀκριβῶς, ἀρκεῖ νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετρ. ῥίζα καὶ τῶν δύο ὁρῶν· π. χ. ἡ τετρ. ῥίζα τοῦ $\frac{4}{25}$ εἶναι $\frac{2}{5}$, τοῦ δὲ 0,0016 εἶναι 0,04.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ἀκέραιος ἀριθμὸς δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον, ἐάν, τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων ὄντος 5, τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων δὲν εἶναι 2· ἢ, ἐάν, τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων ὄντος 6, τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων εἶναι ἄρτιον· ἢ, ἐάν, τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων ὄντος 1 ἢ 4 ἢ 9, τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων εἶναι περιττόν.

2) Ἐάν κλάσμα τι εἶναι τέλειον τετράγωνον, καὶ τὸ γινόμενον τῶν ὅρων αὐτοῦ εἶναι ἐπίσης τέλειον τετράγωνον· καὶ ἀνάπαλιν ἀληθεύει.

Διότι, ἂν τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι τετράγωνον, ἂν μὲν εἶναι ἀνάγωγον θὰ εἶναι $\alpha = \mu^2$, $\beta = \nu^2$ (ἐδ. 257)· ἄρα καὶ $\alpha \times \beta^2 = \mu^2 \times \nu^2 = (\mu \times \nu)^2$ · ἂν δὲ ἔχωσιν οἱ ὅροι του κοινόν τινα διαιρέτην δ , μετὰ τὴν ἐξάλειψιν τούτου θὰ γίνωσιν ἀμφότεροι τέλεια τετράγωνα, ὥστε θὰ εἶναι

$$\alpha = \mu^2 \alpha = \mu^2 \times \delta \times \delta \text{ καὶ } \beta = \nu^2 \times \delta.$$

ἄρα καὶ $\alpha \times \beta = \mu^2 \times \nu^2 \times \delta^2 = (\mu \times \nu \times \delta)^2$.

Καὶ ἀντιστρόφως· ἂν τὸ γινόμενον τῶν δύο ὅρων $\alpha \times \beta$ εἶναι ἴσον τῷ τετραγώνῳ ϱ^2 , τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ θὰ εἶναι τέλειον τετράγωνον· διότι εἶναι

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha \times \beta}{\beta \times \beta} = \frac{\varrho^2}{\beta^2} = \left(\frac{\varrho}{\beta} \right)^2.$$

3) Παντὸς περιττοῦ ἀριθμοῦ τὸ τετράγωνον εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 8 ἠϋξημένον κατὰ μονάδα.

Διότι πᾶς περιττὸς ἀριθμὸς εἶναι τῆς μορφῆς $2\nu + 1$ (ἐνθα ὁ ν δηλοῖ ἀκέραιόν τινα ἀριθμόν), ἐπομένως τὸ τετράγωνόν του εἶναι $4 \times \nu^2 + 4 \times \nu + 1$ ἢ $4\nu \times (\nu + 1) + 1$. Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῶν δύο ἐφεξῆς ἀριθμῶν ν καὶ $\nu + 1$ ὁ ἕτερος εἶναι πάντοτε ἄρτιος, τὸ γινόμενον $4\nu \times (\nu + 1)$ διαιρεῖται διὰ τοῦ 8.

4) Πᾶς περιττὸς ἀριθμὸς, ὅστις εἶναι ἄθροισμα δύο τετραγώνων, εἶναι πολλαπλάσιόν τι τοῦ 4 ἠϋξημένον κατὰ μονάδα.

Ἡ πρότασις στηρίζεται εἰς τοῦτο, ὅτι, ὅταν τὰ τετράγωνα δύο ἀριθμῶν ἔχωσιν ἄθροισμα περιττὸν ἀριθμόν, ὁ εἷς ἐξ αὐτῶν εἶναι ἄρτιος, ὁ δὲ ἄλλος περιττός.

5) Ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων δύο ἀριθμῶν, ὧν οὐδέτερος εἶναι διαιρετὸς διὰ 3, εἶναι πάντοτε διαιρετὴ διὰ 3.

6) Πόσα τέλεια τετράγωνα περιέχονται εἰς τὸν ἀριθμὸν 18951;

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

BIBΛION Z'

ΜΕΘΟΔΟΙ

Περὶ ποσῶν ἀνυπόλογων.

271. Πολλάκις ποσόν τι ἐξαρτᾶται ἀπὸ ἄλλου ἢ ἀπὸ πολλῶν ἄλλων. Παραδείγματος χάριν, τὰ χρήματα, τὰ ὅποια θὰ δώσῃ τις, διὰ νὰ ἀγοράσῃ ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος, ἐξαρτῶνται ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πήχεων, τοὺς ὁποίους θὰ ἀγοράσῃ· διότι εἶναι φανερόν ὅτι διὰ περισσοτέρους πήχεις θὰ δώσῃ περισσότερα χρήματα. Ὅμοίως ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν, οἵτινες χρειάζονται, διὰ νὰ κτίσωσι τοῖχόν τινα, ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ὕψους τοῦ τοίχου καὶ ἐκ τοῦ μήκους αὐτοῦ καὶ ἐκ τοῦ πλάτους αὐτοῦ, ἔτι δὲ καὶ ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἡμερῶν, ἐν αἷς θὰ κτισθῇ ὁ τοίχος, καὶ ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὥρων τῆς ἡμερησίας ἐργασίας.

272. Δύο ποσὰ λέγονται *ἀνάλογα*, ἐὰν ὁ πολλαπλασιασμός τοῦ ἑνὸς ἐπὶ τὸν τυχόντα ἀριθμὸν προξενῇ πολλαπλασιασμόν τοῦ ἄλλου ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Παραδείγματα.

Ἄν δύο ὀκάδες ἐξ ἑνὸς πράγματος ἀξίζουσιν 5 δραχμὰς

2×3 ὀκάδες τοῦ αὐτοῦ πράγματος ἀξίζουσιν 5×3 δραχμὰς· καὶ

$2 \times \frac{1}{8}$ » » » » » $5 \times \frac{1}{8}$ »

καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς·

ὥστε ἡ ἀξία ἑνὸς πράγματος καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ὀκάδων του εἶναι ἀνάλογα.

Ἄν ἐργάτης τις λαμβάνῃ ἡμερομίσθιον	4	δραχμὰς,
διὰ 2 ἡμέρας θὰ λάβῃ	4×2	δραχμὰς,
διὰ 5 ἡμέρας θὰ λάβῃ	4×5	δραχμὰς,
διὰ $6\frac{1}{5}$ ἡμέρας θὰ λάβῃ	$4 \times 6\frac{1}{5}$	δραχμὰς.

ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι ὁ μισθὸς τοῦ ἐργάτου καὶ αἱ ἡμέραι τῆς ἐργασίας του εἶναι ἀνάλογα.

$$\begin{aligned} \text{Ἄν ὁδοιπόρος τις διανύη εἰς ὥραν} & \quad 7 \frac{1}{2} \quad \text{στάδια,} \\ \text{θὰ διανύσῃ εἰς 4 ὥρας} & \quad \left(7 \frac{1}{2} \right) \times 4 \text{ στάδια} \\ \text{καὶ εἰς } \frac{1}{8} \text{ ὥρας} & \quad \left(7 \frac{1}{2} \right) \times \frac{1}{8} \text{ στάδια} \end{aligned}$$

ἄρα αἱ ὥραι τῆς ὁδοιπορίας καὶ τὰ διανυόμενά στάδια εἶναι ἀνάλογα.

Ἄν εἰς 8 ἀνθρώπους

$$\begin{aligned} \text{διανεμηθῶσιν ἕξ ἴσου} & \quad 400 \quad \text{δρ., θὰ λάβῃ ἕκαστος 50.} \\ \text{ἂν διανεμηθῶσι} & \quad 400 \times 2 \text{ δρ.} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad 50 \times 2. \\ \text{ἂν διανεμηθῶσι} & \quad 400 \times \frac{5}{6} \text{ δρ.} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad 50 \times \frac{5}{6} \end{aligned}$$

καὶ οὕτω καθεξῆς (ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀνθρώπων μένει ὁ αὐτός).
ὥστε τὸ ποσόν, τὸ ὅποιον διανέμεται, καὶ τὸ μερίδιον ἑκάστου ἀνθρώπου εἶναι ἀνάλογα (ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀνθρώπων πρέπει νὰ μένῃ ἀμετάβλητος.)

Σημείωσις. Δὲν πρέπει νὰ νομίζωμεν ὅτι, ὅταν δύο ποσὰ συναυξάνωσιν, εἶναι καὶ ἀνάλογα· διότι, λόγου χάριν, τὸ ἀνάστημα τοῦ παιδίου καὶ τὰ ἔτη αὐτοῦ συναυξάνουσι καὶ ὁμῶς δὲν εἶναι ἀνάλογα.

Ποσὰ ἀντίστροφα.

273. Δύο ποσὰ λέγονται *ἀντίστροφα* ἢ *ἀντιστρόφως ἀνάλογα*, ὅταν ὁ πολλαπλασιασμὸς τοῦ ἐνὸς ἐπὶ τὸν τυχόντα ἀριθμὸν προξενῇ διαίρεσιν τοῦ ἄλλου διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

Παραδείγματα.

$$\begin{aligned} \text{Ἐὰν 1 ἐργάτης τελειώνῃ ἔργον τι εἰς 12 ἡμέρας,} \\ \text{2 ἐργάται θὰ τελειώσουν αὐτὸ εἰς } \frac{12}{2} \text{ ἡμέρας} \\ \text{καὶ 8 ἐργάται} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{εἰς } \frac{12}{8} \text{ ἡμέρας} \end{aligned}$$

καὶ οὕτω καθεξῆς· ὥστε ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν, ἐν αἷς ἐκτελοῦσιν οὗτοι ἔργον τι, εἶναι ποσὰ ἀντίστροφα.

$$\begin{aligned} \text{Ἐὰν 12 ἀνθρωποι μοιρασθῶσιν ἕξ ἴσου 600 δρ.,} \\ \text{θὰ λάβῃ ἕκαστος} \quad \quad \quad 50 \quad \text{δρ.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ἐὰν } 12 \times 8 \text{ ἀνθρωποι μοιρασθῶσιν ἕξ ἴσου τὸ αὐτὸ ποσόν,} \\ \text{θὰ λάβῃ ἕκαστος} \quad \quad \quad \frac{50}{8} \quad \text{δρ.} \end{aligned}$$

Ἐὰν δὲ $\frac{12}{4}$ ἄνθρωποι μοιρασθῶσιν ἐξ ἴσου τὸ αὐτὸ ποσόν,

θὰ λάβῃ ἕκαστος

50×4 δρ.

καὶ οὕτω καθεξῆς· ὥστε ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀνθρώπων, οἵτινες θὰ μοιρασθῶσιν ἐξ ἴσου ποσόν τι, καὶ τὸ μερίδιον ἑκάστου εἶναι ποσὰ ἀντίστροφα.

Σημείωσις. Δὲν πρέπει νὰ νομίζωμεν ὅτι, ὅταν δύο ποσὰ μεταβάλλωνται ἀνομοίως (τουτέστιν αὐξανομένου τοῦ ἑνὸς ἐλαττοῦται τὸ ἄλλο), εἶναι καὶ ἀντίστροφα· διότι π. χ., ἂν μία ἄμαξα συρομένη ὑπὸ δύο ἵππων διατρέχῃ τὸ ἀπ' Ἀθηνῶν εἰς Πειραιᾶ διάστημα εἰς 1 ὥραν, συρομένη ὑπὸ 4 δὲν θὰ διατρέξῃ αὐτὸ εἰς $\frac{1}{2}$ ὥραν· οὐδὲ συρομένη ὑπὸ 8

θὰ διατρέξῃ αὐτὸ εἰς $\frac{1}{4}$ τῆς ὥρας.

Παρατηρήσεις.

274. Ὅταν ἐξετάζωμεν, ἂν ποσόν τι εἶναι ἀνάλογον πρὸς ἄλλο, ἢ ἀντίστροφον πρὸς αὐτό, ἀφίνομεν ἀμετάβλητα πάντα τὰ ἄλλα ποσὰ, ἀπὸ τῶν ὁποίων ἐνδέχεται νὰ ἐξαρτᾶται τὸ ποσὸν τοῦτο.

Παραδείγματος χάριν, ὅταν ἄνθρωποι τινες θὰ μοιρασθῶσιν ἐξ ἴσου ποσόν τι χρημάτων, ἐὰν θέλω νὰ μάθω τὴν σχέσιν τοῦ μεριδίου πρὸς τὸ ποσόν, ὅπερ διανέμεται, πρέπει νὰ ἀφήσω τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀνθρώπων ἀμετάβλητον, τότε δὲ (ἐδ. 289, παράδειγμα 4ον) εὗρίσκω ὅτι τὸ μερίδιον καὶ τὸ ποσόν, ὅπερ διενέμεται, εἶναι ἀνάλογα. Ὁμοίως, ἂν θέλω νὰ μάθω τὴν σχέσιν τοῦ μεριδίου πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀνθρώπων, εἰς τοὺς ὑποίους γίνεται ἡ διανομή, πρέπει νὰ ἀφήσω τὸ διανεμόμενον ποσὸν ἀμετάβλητον, τότε δὲ εὗρίσκω (ἐδ. 290, παράδειγμα 2ον) ὅτι τὸ μερίδιον καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀνθρώπων εἶναι ποσὰ ἀντίστροφα.

Περὶ ἀριθμῶν ἀναλόγων.

275. Δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ λέγονται ἀνάλογοι πρὸς ἄλλους ἴσους τὰ πλῆθος, ἐὰν προκύπτωσιν ἐξ αὐτῶν πολλαπλασιαζομένων ἐπὶ ἓνα ἀριθμόν, οἷον οἱ ἀριθμοὶ 10, 15, 30, 100 εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς 2, 3, 6, 20, διότι προκύπτουσιν ἐκ τούτων πολλαπλασιαζομένων ἐπὶ 5.

Καὶ οἱ δεύτεροι δὲ ἀριθμοὶ εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς πρώτους, διότι προκύπτουσιν ἐξ αὐτῶν πολλαπλασιαζομένων ἐπὶ $\frac{1}{5}$.

Μέθοδοι.

276. Μέθοδος λέγεται τρόπος τις γενικός, διὰ τοῦ ὁποίου λύομεν εἰδός τι προβλημάτων.

Στοιχειώδη προβλήματα λέγω ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὅποια δίδονται δύο ἀριθμοὶ καὶ ζητεῖται τρίτος, ὅστις εὐρίσκεται ἐκ τῶν δοθέντων διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἢ διὰ διαιρέσεως· τοιαῦτα, λόγου χάριν, εἶναι τὰ ἐξῆς δύο γενικά προβλήματα.

1) Νὰ εὐρεθῇ ἡ ἀξία μονάδων τινῶν (ἐνὸς πράγματος), ὅταν εἶναι γνωστὴ ἡ ἀξία τῆς μιᾶς μονάδος.

2) Νὰ εὐρεθῇ ἡ ἀξία τῆς μιᾶς μονάδος (ἐξ ἐνὸς πράγματος), ὅταν εἶναι γνωστὴ ἡ ἀξία μονάδων τινῶν τοῦ αὐτοῦ πράγματος.

Διότι τὸ μὲν πρῶτον λύεται δι' ἐνὸς πολλαπλασιασμοῦ, τὸ δὲ δευτέρον διὰ μιᾶς διαιρέσεως.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ

277. Ἡ μέθοδος τῶν τριῶν λύει τὰ προβλήματα, εἰς τὰ ὅποια ζητεῖται νὰ εὐρεθῇ, τί γίνεται ἐν ποσόν, ὅταν μεταβληθῇ ἄλλο ποσὸν ἀνάλογον τούτου ἢ ἀντίστροφον.

Λέγεται δὲ μέθοδος τῶν τριῶν, διότι αἱ αὐτὴν δίδονται τρεῖς ἀριθμοὶ καὶ ἐξ αὐτῶν πρόκειται νὰ εὐρεθῇ ὁ ἄγνωστος.

Δύο ἐκ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν παριστῶσι τὰ ποσά, ὅποια ἦσαν πρὶν· ὁ δὲ ἄλλος παριστᾷ τὴν νέαν τιμὴν τοῦ ἐνὸς ποσοῦ· ζητεῖται δὲ ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ἄλλου ποσοῦ.

Τὰ τοιαῦτα προβλήματα ἀναλύονται εἰς δύο στοιχειώδη καὶ λύονται, ὡς φαίνεται ἐκ τῶν ἐξῆς παραδειγμάτων.

Πρόβλημα.

12 πῆχεις ὑφάσματός τινος ἀξίζουν 65 δραχμάς. Πόσον ἀξίζουν 35 πῆχεις ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος;

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο ἔχομεν δύο ποσὰ ἀνάλογα, τὸν ἀριθμὸν τῶν πῆχεων καὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν δραχμῶν· κατὰ πρῶτον ἦσαν οἱ πῆχεις 12 καὶ αἱ δραχμαὶ 65, τώρα ἔγιναν οἱ πῆχεις 35· πόσαι θὰ γίνουν αἱ δραχμαί;

Διὰ τὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

Ἀφοῦ οἱ 12 πήχεις ἀξίζουν 65 δραχ., ὁ εἷς πήχυς ἀξίζει $\frac{65}{12}$ δραχ.

καὶ ἀφοῦ ὁ εἷς πήχυς ἀξίζει $\frac{65}{12}$ δραχ., οἱ 35 πήχεις ἀξίζουν $\frac{65}{12} \times 35$ δραχ.

Ἐκ τούτων βλέπομεν ὅτι τὸ δοθὲν πρόβλημα ἀνελύθη εἰς τὰ ἑξῆς δύο στοιχειώδη.

1) Οἱ 12 πήχεις ἀξίζουν 65 δραχμάς· πόσον ἀξίζει ὁ εἷς πήχυς;

2) Ὁ εἷς πήχυς ἀξίζει $\frac{65}{12}$ δραχ· πόσον ἀξίζουν οἱ 35 πήχεις;

Προβλήματα.

Ἐργάται τινὲς ἐργαζόμενοι 7 ὥρας καθ' ἡμέραν ἐτελείωσαν ἔργον τι εἰς 10 ἡμέρας· ἂν ἐργάζοντο 9 ὥρας καθ' ἡμέραν, εἰς πόσας ἡμέρας ἤθελον τελειώσαι τὸ ἔργον;

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο ἔχομεν δύο ποσὰ ἀντίστροφα, τὰς ὥρας τῆς καθημερινῆς ἐργασίας καὶ τὰς ἡμέρας, εἰς τὰς ὁποίας οἱ ἐργάται τελειώνουσι τὸ ἔργον· κατὰ πρῶτον ἦσαν αἱ ὥραι 7· καὶ αἱ ἡμέραι 10, τώρα αἱ ὥραι ἔγιναν 9, πόσαι θὰ γίνωσιν αἱ ἡμέραι;

Πρῶτον θὰ εὗρωμεν, πόσαι θὰ γίνωσιν αἱ ἡμέραι, ὅταν αἱ ὥραι ἀπὸ 7 γίνωσιν 1 (ὅταν δηλαδὴ ὁ ἀριθμὸς τῶν ὥρων διαιρεθῇ διὰ 7), καὶ πρὸς τοῦτο σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

Ὅταν ἐργάζοντο 7 ὥρας καθ' ἡμέραν, ἐχρειάσθησαν 10 ἡμέρας διὰ τὰ τελειώσωσι τὸ ἔργον· ἂν λοιπὸν ἐργάζοντο μόνον 1 ὥραν καθ' ἡμέραν, θὰ ἐχρειάζοντο ἡμέρας 10×7 (ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν ἐπολλαπλασιάσθη ἐπὶ 7, διότι ὁ ἀριθμὸς τῶν ὥρων διηρέθη διὰ 7, εἶναι δὲ ταῦτα ἀντίστροφα ποσά). Ἀφ' οὗ δὲ χρειάζονται 10×7 ἡμέρας, ὅταν ἐργάζωνται μίαν ὥραν καθ' ἡμέραν, ἂν ἐργάζοντο 9 ὥρας καθ' ἡμέραν, θὰ ἐχρειάζοντο ἡμέρας $\frac{10 \times 7}{9}$ (ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν διηρέθη δι' 9,

διότι ὁ ἀριθμὸς τῶν ὥρων ἐπολλαπλασιάσθη ἐπὶ 9).

Ἐκτελοῦντες τὰς πράξεις εὐρίσκομεν ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν εἶναι $7\frac{7}{9}$, ἥτοι 7 ἡμ. καὶ $7\frac{7}{9}$.

Βάανων γενεαί.

278. Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

Γράφομεν εἰς ἓνα στίχον τὰς πρώτας τιμὰς τῶν δύο ποσῶν, ἔπειτα εἰς δεύτερον στίχον τὴν νέαν τιμὴν τοῦ ἐνὸς καὶ τὴν ζητούμενην νέαν τιμὴν τοῦ ἄλλου, τὴν ὁποίαν παριστῶμεν διὰ τοῦ γράμματος χ , φροντίζομεν δέ, ὥστε οἱ ὁμοειδεῖς ἀριθμοὶ νὰ εἶναι εἰς τὴν αὐτὴν στήλην καὶ χωρίζομεν αὐτοὺς διὰ γραμμῆς ὀριζοντίας. Τούτων γενομένων, ἵνα εὗρωμεν τὸν ἄγνωστον ἀριθμὸν χ , πολλαπλασιάζομεν τὸν ὑπεράνω αὐτοῦ ἀριθμὸν (τὸν ὁμοειδῆ αὐτοῦ) ἐπὶ τὸ κλάσμα, ὅπερ ἀποτελεῖται ἐκ τῶν δύο ἄλλων ὡς εἶναι γεγραμμένοι, ἐὰν τὸ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα, ἢ ἐπὶ τὸ αὐτὸ κλάσμα ἀντεστραμμένον, ἐὰν τὸ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα.

Παραδείγματος χάριν, διὰ νὰ λύσωμεν τὸ 1^{ον} πρόβλημα, γράφομεν τὰ δεδομένα καὶ τὸ ζητούμενον ὡς ἑξῆς:

$$\begin{array}{r} \text{πηχ.} \qquad \qquad \text{δραχ.} \\ 12 \qquad \qquad \qquad 65 \\ \hline 35 \qquad \qquad \qquad \chi \end{array}$$

καὶ ἐφαρμόζοντες τὸν κανόνα (πολλαπλασιάζοντες δηλαδὴ τὸν ὁμοειδῆ τοῦ χ , ἥτοι τὸν 65, ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{12}{35}$ ἀντεστραμμένον, διότι τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα) εὕρισκομεν

$$\chi = 65 \times \frac{35}{12} \text{ καὶ ἐκτελοῦντες τὰς πράξεις } \chi = 189 \frac{7}{12}.$$

Διὰ νὰ λύσωμεν δὲ τὸ 2^{ον} πρόβλημα, γράφομεν πάλιν τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς ὡς ἑξῆς:

$$\begin{array}{r} \text{ὥρ. ἐργ.} \qquad \qquad \text{ἡμέραι} \\ 7 \qquad \qquad \qquad 10 \\ \hline 9 \qquad \qquad \qquad \chi \end{array}$$

καὶ ἐφαρμόζοντες τὸν κανόνα εὕρισκομεν $\chi = 10 \times \frac{7}{9} = \frac{70}{9}$.

Ἐνταῦθα ἐπολλαπλασιάσαμεν τὸν ὁμοειδῆ τοῦ χ ἐπὶ τὸ κλάσμα, ὅπερ ἀποτελοῦσιν οἱ δύο ἄλλοι ἀριθμοὶ ὡς εἶναι γεγραμμένοι, διότι τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα.

Ὅμοιως, διὰ νὰ λύσωμεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα:

Ταχυδρόμος βαδίζων 5 $\frac{1}{2}$ ὥρας καθ' ἡμέραν διανύει ἀπόστασιν

τινα εἰς 18 ἡμέρας. Πόσας ὥρας πρέπει νὰ βαδίζῃ καθ' ἡμέραν, ἵνα διανύσῃ τὴν αὐτὴν ἀπόστασιν εἰς 12 ἡμέρας;

γράφομεν τοὺς ἀριθμοὺς ὡς ἑξῆς:

$$\begin{array}{r} \text{ὥραι ὁδοιπ.} \qquad \qquad \text{ἡμέραι} \\ 5 \frac{1}{2} \qquad \qquad \qquad 18 \\ \hline \chi \qquad \qquad \qquad 12 \end{array}$$

ᾧθεν, ἐπειδὴ τὰ δύο ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα,

$$\chi = 5 \frac{1}{2} \times \frac{18}{12} = \frac{99}{12}, \text{ ἥτοι } \chi = 8 \text{ ὥρ. } \frac{1}{4}.$$

Ὅμοίως, διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα

Με 35 δραχμὰς καὶ 60 λεπτὰ ἀγοράζει τις 6 $\frac{1}{2}$ ὀκάδας βουτύρου. Πόσον ἀγοράζει με 128 δραχμὰς καὶ 30 λεπτά; γράφομεν τοὺς ἀριθμοὺς ὡς ἔπεται·

$$\begin{array}{rcl} & \text{δραχ.} & \text{ὀκάδ.} \\ & 35,60 & 6\frac{1}{2} \\ \hline & 128,30 & \chi \\ \chi = 6 \frac{1}{2} = \frac{128,30}{35,60} = 6 \frac{1}{2} = \frac{1283}{356} = \frac{13 \times 1283}{2 \times 356} \end{array}$$

καὶ ἐκτελοῦντες τὰς πράξεις εὐρίσκομεν

$$\chi = 23 \text{ ὀκ. } \frac{303}{712} \text{ ἢ } 23 \text{ ὀκ. } 170 \text{ δρ. } \frac{20}{89}.$$

Πρὸς ἄσκησιν προτείνομεν εἰς λύσιν καὶ τὰ ἑξῆς προβλήματα.

1) Ἀτμόπλοϊόν τι διήνυσεν 70 μίλια εἰς 9 $\frac{1}{2}$ ὥρας. Εἰς πόσας ὥρας θὰ διανύσῃ 125 μίλια; $\left(\text{Ἀπ. εἰς } 16 \text{ ὥρ. } 57' \frac{6}{7} \right).$

2) Διὰ νὰ γίνῃ ἔνδυμά τι ἐχρειάσθησαν 3 $\frac{1}{2}$ πήχεις ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος, ἔχοντος πλάτος 1 πηχ. $\frac{3}{8}$. Πόσοι πήχεις χρειάζονται διὰ τὸ αὐτὸ ἔνδυμα

ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος, τοῦ ὁποίου τὸ πλάτος εἶναι $\frac{7}{8}$ τοῦ πήχεως;

$$\left(\text{Ἀπ. } 5 \frac{1}{2} \right).$$

3) Πόσοι πήχεις ὑφάσματος, ἔχοντος πλάτος 1 $\frac{2}{8}$ τοῦ πήχεως, χρειάζονται διὰ νὰ καλυφθῇ τὸ πάτωμα ἑνὸς δωματίου, ὅπερ ἔχει μῆκος μὲν 5 πήχεις, πλάτος δὲ 4; (Ἀπ. 16).

4) Εἷς τι φρούριον ὑπάρχουσι τροφαὶ διὰ 45 ἡμέρας. Ἐὰν γίνῃ ἀνάγκη νὰ ἐξαρκέσωσιν αἱ τροφαὶ 60 ἡμέρας, πόσον μέρος τοῦ ἀρχικοῦ σιτηρεσίου πρέπει νὰ λαμβάνῃ ἕκαστος ἄνθρωπος ἐν αὐτῷ; $\left(\text{Ἀπ. } \frac{3}{4} \right).$

5) Εἰς πολεμικόν τι πλοῖον, ὅπερ ἔχει πλήρωμα 750 ἄνδρας, ὑπάρχουσι τροφαὶ διὰ 50 ἡμέρας. Τὸ πλοῖον τοῦτο ἀπαντῆσαν διέσωσε 35

ναυαγούς. Πόσας ημέρας θὰ διαρκέσωσι τώρα αἱ τροφαί; ἢ, ἂν θέλωσι νὰ διαρκέσωσιν αἱ τροφαὶ πάλιν 50 ημέρας, πόσον μέρος τοῦ ἀρχικοῦ σιτηρεσίου πρέπει νὰ λαμβάνῃ ἕκαστος;

(Αἱ τροφαὶ θὰ διαρκέσωσι 47 ημέρας, θὰ περισεύσσουν δὲ καὶ 605 σιτηρέσια· ἢ θὰ λαμβάνῃ ἕκαστος τὰ $\frac{150}{157}$ τοῦ πρώτου σιτηρεσίου).

6) Ὁρολόγιόν τι, ὅπερ ὕστερεῖ 6 λεπτά εἰς 24 ὥρας, ἐτέθη εἰς συμφωνίαν μὲ ἀκριβὲς ὥρολόγιον, καθ' ἣν στιγμὴν τοῦτο ἐδείκνυε μεσημβρίαν. Τίς θὰ εἶναι ἡ ἀληθὴς ὥρα, ὅταν τὸ πρῶτον ὥρολόγιον θὰ δεικνύῃ 8 μετὰ μεσημβρίαν;

$$\left(\text{Ἀπ. } 8^{\text{ῳ}} 2' \frac{2}{239} \right).$$

7) Ἀτμάμαξά τις διανύουσα 30 στάδια καθ' ὥραν ἀνεχώρησε διευθυνομένη εἰς πόλιν, ἀπέχουσαν 350 στάδια· μετὰ τρεῖς ὥρας ἀνεχώρησε πρὸς τὴν αὐτὴν πόλιν δευτέρα ἀτμάμαξα διανύουσα 75 στάδια εἰς 2 ὥρας. Ποία ἐκ τῶν δύο θὰ φθάσῃ πρώτη εἰς τὴν πόλιν ταύτην;

(Ἀπ. Ἡ πρώτη θὰ φθάσῃ 40' πρὸ τῆς δευτέρας).

8) Εἷς τι φρούριον ἦσαν 810 στρατιῶται καὶ εἶχον τὴν 1 Μαρτίου τροφὰς δι' ὅλον τὸν μῆνα τοῦτον· τὴν νύκτα τῆς 7 Μαρτίου, γενομένης ἐξόδου, ἐφονεύθησαν 80 στρατιῶται. Μέχρι τίνος θὰ διαρκέσωσι τώρα αἱ τροφαί;

(Ἀπ. μέχρι τῆς 3 Ἀπριλίου τὴν ἐσπεραν).

ΣΥΝΘΕΤΟΣ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ

279. Ἡ μέθοδος αὕτη λύει τὰ προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται νὰ εὗρεθῇ τί γίνεται ἐν ποσόν, ὅταν μεταβληθῶσιν ἄλλα, πρὸς ἕκαστον τῶν ὁποίων εἶναι τὸ ποσὸν τοῦτο ἢ ἀνάλογον ἢ ἀντίστροφον.

Εἰς τὰ προβλήματα ταῦτα δίδονται αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ πολλῶν ποσῶν καὶ ἔπειτα αἱ νέαι τιμαὶ ὅλων τῶν ἄλλων πλὴν ἑνός· τούτου δὲ ἡ νέα τιμὴ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Τὰ τοιαῦτα προβλήματα ἀναλύονται εἰς δύο ἢ περισσότερα προβλήματα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν· δια τοῦτο δὲ ἡ μέθοδος, δι' ἧς λύομεν αὐτά, λέγεται *σύνθετος* μέθοδος τῶν τριῶν (ἡ δὲ μέθοδος τῶν τριῶν λέγεται πρὸς διακρίσιν *ἀπλῇ*).

Ὁ τρόπος τῆς λύσεως τῶν τοιούτων προβλημάτων γίνεται φανερὸς ἐκ τῶν ἐπομένων παραδειγμάτων.

Πρόβλημα.

18 ἐργάται ἐργαζόμενοι 7 ὥρας καθ' ἡμέραν ἐτελείωσαν ἔργον εἰς 25 ἡμέρας. Πόσας ὥρας καθ' ἡμέραν πρέπει νὰ ἐργάζωνται 52 ἐργάται, ἂν θέλωσι νὰ τελειώσωσι τὸ αὐτὸ ἔργον εἰς 15 ἡμέρας ;

Διὰ νὰ λύσω τὸ πρόβλημα τοῦτο, κατατάσσω τὰ δεδομένα ὡς καὶ προηγουμένως·

ἐργ.	ἡμ.	ὥρ.
18	7	25
52	χ	15

ἔπειτα σκέπτομαι ὡς ἑξῆς.

Ἄν μόνον οἱ ἐργάται μεταβληθῶσι καὶ ἀπὸ 18 γίνωσι 52 (ἀλλ' αἱ ἡμέραι, εἰς τὰς ὁποίας θὰ τελειώσωσι τὸ ἔργον νὰ μείνωσιν αἱ αὐταί), ἥτοι 25), αἱ ὥραι θὰ γίνωσι (κατὰ τὸν κανόνα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν

$$7 \times \frac{18}{52}$$

(διότι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ὥρῶν τῆς καθημερινῆς ἐργασίας εἶναι ποσὰ ἀντίστροφα).

Ἄν δὲ ἔπειτα μεταβληθῶσιν αἱ ἡμέραι καὶ ἀπὸ 25 γίνωσι 15, (ἀλλ' ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν νὰ μείνῃ ὡς εἶναι, ἥτοι 52), αἱ ὥραι θὰ γίνωσι (κατὰ τὸν κανόνα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν)

$$7 \times \frac{18}{52} \times \frac{25}{15} \quad \text{ἢ} \quad 7 \times \frac{9}{26} \times \frac{5}{3} \quad \text{ἢ} \quad 7 \times \frac{3}{26} \times 5$$

(διότι αἱ ὥραι τῆς καθημερινῆς ἐργασίας καὶ αἱ ἡμέραι, καθ' ἃς διαρκεῖ ἡ ἐργασία, εἶναι ποσὰ ἀντίστροφα).

Ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὰς πράξεις, εὐρίσκομεν ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν ὥρῶν εἶναι $\frac{105}{26}$, ἥτοι 4ὡρ. 2' $\frac{4}{13}$.

Συμψήφισις. Δυνάμεθα νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο καὶ ὡς ἑξῆς. Εὐρίσκομεν, πόσας ὥρας ἐργασίας ἀπαιτεῖ τὸ ἔργον δι' ἓνα ἄνθρωπον· ἐπειδὴ οἱ 18 ἐργάται ἐργάζονται 7 ὥρας καθ' ἑκάστην ἐπὶ 25 ἡμέρας, τὸ ἔργον χρειάζεται δι' ἓνα ἄνθρωπον ὥρας ἐργασίας $25 \times 7 \times 18$ καὶ ἐπειδὴ εἶναι 52 οἱ ἐργάται, πρέπει ἕκαστος νὰ ἐργασθῇ ὥρας $\frac{25 \times 7 \times 18}{52}$, καὶ ἐπειδὴ πρέπει νὰ τελειώσωσι τὸ ἔργον εἰς 15 ἡμέρας, πρέπει νὰ ἐργάζεται ἕκαστος καθ' ἡμέραν $\frac{25 \times 7 \times 18}{52 \times 15}$ ὥρας.

Πρόβλημα.

20 ἐργάται, ἐργαζόμενοι 8 ὥρας καθ' ἡμέραν, ἐχρειάσθησαν 25 ἡμέρας διὰ νὰ σκάψωσι τάφρον ἔχουσαν μῆκος 200 πήχεων, πλάτος 4 καὶ βάθος 2. Εἰς πόσας ἡμέρας 50 ἐργάται, ἐργαζόμενοι 9 ὥρας καθ' ἡμέραν, θὰ σκάψωσι τάφρον ἔχουσαν μῆκος 80 πήχεων, πλάτος 8 καὶ βάθος 3;

Κατατάσσομεν πρῶτον τὰ δεδομένα καὶ τὸ ζητούμενον, ὥς καὶ προηγουμένως·

ἐργ.	ὥρ.	ἡμέρ.	μῆκ.	πλάτ.	βάθ.
20	8	25	200	4	2
50	9	χ	80	8	3

ἔπειτα σκεπτόμεθα ὥς ἑξῆς.

Ἄν μόνον οἱ ἐργάται ἀπὸ 20 γίνωσι 50 (τὰ δὲ ἄλλα πάντα μείνωσιν ὡς εἶναι), ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν θὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ $\frac{20}{50}$ (κατὰ τὸν κανόνα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν) καὶ θὰ γίνῃ

$$25 \times \frac{20}{50}$$

(διότι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν καὶ αἱ ἡμέραι, καθ' ἃς διαρκεῖ τὸ ἔργον, εἶναι ποσὰ ἀντίστροφα).

τόσας λοιπὸν ἡμέρας χρειάζονται οἱ 50 ἐργάται ἐργαζόμενοι 8 ὥρας καθ' ἡμέραν διὰ νὰ σκάψωσι τάφρον ἔχουσαν μῆκος 200, πλάτος 4 καὶ βάθος 2.

Ἄν ἔπειτα μεταβληθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν ὥρῶν τῆς καθημερινῆς ἐργασίας (τὰ δὲ ἄλλα μείνωσιν ὡς εἶναι, ἥτοι οἱ ἐργάται 50 καὶ ἡ τάφρος ἡ αὐτή), ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν θὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ $\frac{8}{9}$ (κατὰ τὸν κανόνα τῆς ἀπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν, διότι αἱ ὥραι τῆς καθημερινῆς ἐργασίας καὶ αἱ ἡμέραι, καθ' ἃς διαρκεῖ ἡ ἐργασία, εἶναι ἀντίστροφα) καὶ θὰ γίνῃ

$$25 \times \frac{20}{50} \times \frac{8}{9}$$

τόσας λοιπὸν ἡμέρας χρειάζονται οἱ 50 ἄνθρωποι ἐργαζόμενοι 9 ὥρας καθ' ἑκάστην, ἵνα σκάψωσι τὴν πρώτην τάφρον.

Ἄν ἔπειτα μεταβληθῇ τὸ μῆκος τῆς τάφρου καὶ ἀπὸ 200 γίνῃ 80 (τὰ δ' ἄλλα πάντα μείνωσιν ὡς εἶναι, ἥτοι ἐργάται 50, ὥραι ἐργασίας 9, πλάτος 4 καὶ βάθος 2), ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν θὰ πολλαπλασιασθῇ

ἐπὶ $\frac{80}{200}$ (διότι τὸ μῆκος τῆς τάφρου καὶ αἱ ἡμέραι εἶναι ἀνάλογα)
καὶ θὰ γίνῃ

$$25 \times \frac{20}{50} \times \frac{8}{9} \times \frac{80}{200}.$$

Ἄν ἔπειτα μεταβληθῇ τὸ πλάτος τῆς τάφρου καὶ ἀπὸ 4 γίνῃ 8, ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν θὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ $\frac{8}{4}$ καὶ θὰ γίνῃ

$$25 \times \frac{20}{50} \times \frac{8}{9} \times \frac{80}{200} \times \frac{8}{4}.$$

Ἄν τέλος μεταβληθῇ τὸ βάθος καὶ γίνῃ 3 ἀπὸ 2 (τὰ δ' ἄλλα μείνωσιν ὡς εἶναι, ἥτοι ἐργάται 50, ὥραι ἐργασίας 9, μῆκος τάφρου 80, πλάτος 8), ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν θὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ $\frac{3}{2}$ καὶ θὰ γίνῃ

$$25 \times \frac{20}{50} \times \frac{8}{9} \times \frac{80}{200} \times \frac{8}{4} \times \frac{3}{2}.$$

τόσας λοιπὸν ἡμέρας χρειάζονται οἱ 50 ἄνθρωποι ἐργαζόμενοι 9 ὥρας καθ' ἑκάστην, διὰ νὰ σκάψωσι τάφρον ἔχουσιν μῆκος 80, πλάτος 8 καὶ βάθος 3.

Ἀπλοποιοῦντες τὸ γινόμενον τοῦτο εὐρίσκομεν $\frac{8}{3} \times 4$, ἥτοι $\frac{32}{3}$

ἢ $10\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{2}{3}$ τῆς ἡμέρας, ἥτοι 10 ἡμέρας καὶ 6 ὥρας (διότι ἡ καθημερινὴ ἐργασία εἶναι 9 ὥραι).

Σημείωσις. Αἱ ἡμέραι, κατὰ τὰς ὁποίας διαρκεῖ ἡ ἐργασία, δὲν εἶναι ἀκριβῶς ἀνάλογοι πρὸς τὸ βάθος τῆς τάφρου, διότι, ὅσον γίνεται βαθυτέρα ἡ τάφος, τόσον γίνεται δυσκολωτέρα ἡ ἐκφορὰ τῶν χωμάτων, ἀλλὰ τὴν διαφορὰν ταύτην παραβλέπομεν.

280. Ἐὰν τῶρα εἰς τὰ λυθέντα προβλήματα παραβάλωμεν τὴν τιμὴν τοῦ ἀγνώστου πρὸς τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος, ὡς εἶναι κατεταγμένα, συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ ἀγνώστου, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ὁμοειδῆ αὐτοῦ ἀριθμὸν (τὸν ὑπεράνω αὐτοῦ) ἀλλεπαλλήλως ἐφ' ἑκάστον τῶν κλασμάτων, ἅτινα ἀποτελοῦνται ἐκ τῶν δύο τιμῶν ἑκάστου ποσοῦ· ἀντιστρέφωμεν ὁμῶς προηγουμένως τὸ κλάσμα, ἐὰν τὸ ποσοὺν τοῦ εἶναι ἀναλογον πρὸς τὸ ποσοὺν τοῦ ἀγνώστου.

Πρὸς ἄσκησιν προτείνωμεν εἰς λύσιν καὶ τὰ ἑξῆς προβλήματα.

1) Διὰ τὴν τροφὴν 160 στρατιωτῶν ἐπὶ 25 ἡμέρας ἐχρειάσθησαν

1850 δραχμαί. Πόσας ἡμέρας θὰ φθάσωσιν 8510 δραχμαί διὰ τὴν τροφὴν 400 στρατιωτῶν; (Ἀπ. 46).

2) Ἀνθρῶπος τις ἐργαζόμενος 6 ὥρας καθ' ἡμέραν ἐξετέλεσε τὰ $\frac{2}{5}$

ἔργου τινὸς εἰς 25 ἡμέρας. Πόσας ὥρας πρέπει νὰ ἐργάζεται καθ' ἡμέραν διὰ νὰ ἐκτελέσῃ τὸ ὑπόλοιπον ἔργον εἰς 15 ἡμέρας; (Ἀπ. 15).

3) Βιβλίον τι ἔχει 250 σελίδας ἐκάστη σελὶς ἔχει 32 στίχους καὶ ἕκαστος στίχος 40 γράμματα. Εἰὰν τὸ βιβλίον τοῦτο τυπωθῇ οὕτως, ὥστε εἰς ἐκάστην σελίδα νὰ εἶναι 36 στίχοι καὶ εἰς ἕκαστον στίχον 45 γράμματα, ἐκ πόσων σελίδων θ' ἀποτελῇται;

(Ἀπ. 198· ἡ τελευταία δὲν θὰ εἶναι πλήρης).

4) Ἔργον τι πρέπει νὰ ἐκτελεσθῇ εἰς 12 ἡμέρας· πρὸς τοῦτο ἐμισθώθησαν 15 ἐργάται, οἵτινες ἐξετέλεσαν τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ ἔργου εἰς 10 ἡμέ-

ρας. Δύνανται οὗτοι μόνοι νὰ τελειώσωσι τὸ ἔργον ἐντὸς τῆς τεταγμένης προσθεσμίας; καί, ἂν δὲν δύνανται, πόσοι ἐργάται ἀκόμη πρέπει νὰ μισθωθῶσιν; (Ἀπ. ἀκόμη 10 ἐργάται).

5) Επωλήθησαν 40 βαρέλια μετὰ τοῦ ἐν αὐτοῖς περιεχομένου οἴνου ἀντὶ 6750 δραχμῶν, ἕκαστον δὲ βαρέλιον περιεῖχε 420 ὀκάδας οἴνου. Πόσον πρέπει νὰ πωληθῶσι 32 βαρέλια μετὰ τοῦ ἐν αὐτοῖς περιεχομένου οἴνου, εἰὰν ἕκαστον περιέχῃ 350 ὀκάδας οἴνου τῆς αὐτῆς ποιότητος; Ἡ τιμὴ ἑκάστου βαρελίου κενοῦ εἶναι τῶν μὲν πρώτων 25 δραχμαί, τῶν δὲ δευτέρων 22.

(Ἀπ. $4537\frac{1}{3}$ δραχμῶν)

6) Λεωφόρος τις μήκους 240 μέτρων καὶ πλάτους 30 καὶ ἔχουσα ἐκατέρωθεν ἑαυτῆς 60 δένδρα κανονικῶς φυτευμένα ἐκόστισε 12000 δραχμάς. Πόσον θὰ κοστίσῃ ἄλλη λεωφόρος (ἐπὶ ὁμοίῳ ἐδάφει) μήκους 300 μέτρων, πλάτους ἴσου τῇ πρώτῃ καὶ ἔχουσα ἐκατέρωθεν ἑαυτῆς 80 δένδρα κανονικῶς φυτευμένα;

Λύσις. Ἄν ἡ ἀπόστασις τῶν δένδρων ἀπ' ἀλλήλων ἦτο ἡ αὐτὴ εἰς ἀμφοτέρας τὰς λεωφόρους, ἔπρεπεν ἐπὶ μήκους 300 μέτρων νὰ ἔχῃ ἡ δευτέρα 75 δένδρα καὶ θὰ ἐκόστιζε τότε δρα. 15000· ἀλλ' ἔχει δένδρα 80, ἦτοι τὰ δένδρα αὐτῆς εἶναι πυκνότερον φυτευμένα· ἄρα θὰ κοστίσῃ περισσότερον τῶν 15000· ἀλλὰ κατὰ τὴν αὐτὴν ὑπόθεσιν, διὰ νὰ ἔχῃ ἡ δευτέρα λεωφόρος 80 δένδρα, ἔπρεπεν ἀναιλόγως νὰ ἔχῃ μῆκος 320 μέτρα (ἐνῶ ἔχει 300) καὶ θὰ ἐκόστιζε τότε δρα. 16000 καὶ ἐπειδὴ ἡ

δευτέρα ἔχει μῆκος μόνον 300 μέτρα, συνάγεται ὅτι θὰ κοστίσῃ ὀλιγώτερον τῶν 16000.

Ὡστε ἡ δευτέρα λεωφόρος θὰ στοιχίσῃ περισσοτέρας τῶν 1500 δρ., ἀλλ' ὀλιγωτέρας τῶν 16000.

7) Τὸ φορτίον ἑνὸς πλοίου ἀποτελεῖτο ἀπὸ 360 βαρέλια πλήρη οἶνου καὶ ἀπὸ 540 βαρέλια πλήρη ἐλαίου, ἡ δὲ ἀξία τοῦ φορτίου ἦτο 1260 δραχμαί. Τὸ πλοῖον τοῦτο καταληφθὲν ὑπὸ σφοδρᾶς τρικυμίας ὑπέστη ἀβαραίαν, καθ' ἣν ἐρρίφθησαν εἰς τὴν θάλασσαν 270 βαρέλια οἶνου καὶ 420 βαρέλια ἐλαίου. Ποία εἶναι τώρα ἡ ἀξία τοῦ μείναντος φορτίου; (τὰ βαρέλια ἐκάστου εἴδους εἶναι ὅλα ἴσα).

(Ἀπ. μεγαλυτέρα τῶν 2800 δραχ., ἀλλὰ μικροτέρα τῶν 3150).

8) 150 στρατιῶται ἐξώδευσαν εἰς ἓν ἔτος 48120 δραχμάς διὰ τὴν τροφήν των καὶ 9000 δρ. διὰ τὴν ἐνδυμασίαν των. Πόσοι στρατιῶται (τοῦ αὐτοῦ κράτους) θὰ δαπανήσουν εἰς ἓν ἔτος διὰ τὴν τροφήν των 28872 καὶ διὰ τὴν ἐνδυμασίαν των 5400; (Ἀπ. 90).

ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΣΥΝΕΖΕΥΓΜΕΝΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ

281. Ὡς σύνθετος μέθοδος τῶν τριῶν δύναται νὰ θεωρηθῇ καὶ οὕτω καλουμένη «συνεξευγμένη μέθοδος».

Παράδειγμα τῶν προβλημάτων τῆς μεθόδου ταύτης ἔστω τὸ ἑξῆς.

Νὰ εὗρωμεν, πόσα ρωσικὰ ρούβλια κάμνουσι 1800 τουρκικαὶ λίραι ἡξεύροντες ὅτι 12 τουρκικαὶ λίραι κάμνουσιν 11 ἀγγλικάς, 26 ἀγγλικαὶ λίραι κάμνουσιν 165 ρούβλια.

Τὸ πρόβλημα τοῦτο ἀνάγεται εἰς δύο προβλήματα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν, ὥς ἑξῆς φαίνεται·

α') 26 ἀγγλικαὶ λίραι κάμνουν 165 ρούβλια·

11 » » » πόσα ρούβλια ;

Ἐκ τούτου εὐρίσκομεν ὅτι 11 ἀγγλικαὶ λίραι, ἧτοι 12 τουρκικαὶ κάμνουν ρούβλια $165 \times \frac{11}{26}$.

β) 12 τουρκικαὶ λίραι κάμνουν ρούβλια $165 \times \frac{11}{26}$

1800 » » » πόσα ρούβλια ;

όντες δὲ τοῦτο εὐρίσκομεν ὅτι 1800 τουρκικαὶ λίραι κάμνουν ῥού-

$$\frac{165 \times 11 \times 1800}{26 \times 12} \text{ ἢ } 10471 \text{ ῥούβ. } \frac{2}{13}.$$

Ὡς δεύτερον παράδειγμα ἔστω καὶ τὸ ἐξῆς πρόβλημα.

Ἐμπορος ἔφερεν ἐκ Παρισίων εἰς Ἀθήνας 2500 πήχεις ἐνὸς ὑφά-
ματος, τὸ ὁποῖον ἡγόρασε πρὸς 1 φρ. 15 τὸ μέτρον, ἐξώδευσε δὲ διὰ
παῦλον καὶ δασμὸν 32 ἐπὶ τοῖς 100 (ἥτοι διὰ πρᾶγμα ἀξίας 100 δρα-
μῶν ἐξώδευσε 32δρ.). Πόσον τοῦ κοστίζει ὁ μικρὸς πῆχυς ἐν Ἀθή-
ναις, ὅταν ἡ τιμὴ τοῦ χρυσοῦ εἰκοσαφράγκον εἶναι 24 δραχμαί;

Γράφομεν τὰ δεδομένα καὶ τὸν ἄγνωστον ὥς ἐξῆς.

$$\chi \text{ δραχμαί} = 1 \text{ μικρὸς πῆχ.}$$

$$1 \text{ μικ. πῆχ.} = 0,648 \text{ μέτρα}$$

$$1 \text{ μέτρον} = 1,15 \text{ φράγ. χρυσᾶ}$$

$$20 \text{ φρ. χρ.} = 24 \text{ δρ.}$$

πρὸ τῶν ἐξόδων 100δραχ. = 132δραχ. μετὰ τὰ ἔξοδα.

Καὶ τὸ πρόβλημα τοῦτο ἀναλύεται εἰς τὰ ἐξῆς τῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

α') Ὅσον πρᾶγμα κοστίζει ἐν Παρισίοις 100 δρ., τόσον κοστίζει ἐν
Ἀθῆν. 132· ὅσον πρᾶγμα κοστίζει ἐν Παρ. 24 δρ., πόσον ἐν Ἀθήναις;

Λύοντες τὸ πρόβλημα τοῦτο εὐρίσκομεν ὅτι, ὅσον πρᾶγμα κοστίζει
ἐν Παρισίοις 24 δρ., ἥτοι 20 χρυσᾶ φράγκα, κοστίζει ἐν Ἀθήναις

$$132 \times \frac{24}{100} \text{ δρ.}$$

β') Ὅσον πρᾶγμα. κοστίζει ἐν Παρ. 20 φρ. χρυσᾶ, ἐν Ἀθήναις κο-

στίζει $132 \times \frac{24}{100}$ δρ., ὅσον πρᾶγμα κοστίζει ἐν Παρ. 1 φρ. 15 χρυσᾶ,

πόσον κοστίζει ἐν Ἀθήναις; Ἐκ τούτου εὐρίσκομεν ὅτι τὸ μέτρον κο-

στίζει ἐν Ἀθήναις $132 \times \frac{24}{100} \times \frac{1,15}{20}$ δρ.

γ') Ἡ ἀξία τοῦ μέτρου ἐν Ἀθήναις εἶναι $132 \times \frac{24}{100} \times \frac{1,15}{20}$ δραχμ.

ποία εἶναι ἡ ἀξία τῶν 0,648 τοῦ μέτρου (ἥτοι τοῦ μικροῦ πήχεως);

Λύοντες καὶ τοῦτο εὐρίσκομεν ὅτι ἡ ἀξία τοῦ μικροῦ πήχεως ἐν Ἀθή-

ναις εἶναι $132 \times \frac{24}{100} \times \frac{1,15}{20} \times \frac{648}{1000}$, ἥτοι 1 δρ., 18....

282. Ἐὰν συγκρίνωμεν τὴν λύσιν ταύτην πρὸς τὰ δεδομένα ὡς εἶναι κατατεταγμένα, συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

Γράφομεν κατὰ πρῶτον τὸ γράμμα, δι' οὗ παρίσταται ὁ ἄγνωστος, δεξιᾷ δ' αὐτοῦ τὸν ἰσοδύναμόν του ἀριθμόν. Ὑπ' αὐτοὺς γράφομεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον πάντα τὰ ζεύγη τῶν ἰσοδυνάμων ἀριθμῶν, ἕκαστον εἰς ἓνα στίχον καὶ οὕτως, ὥστε ἕκαστος στίχος νὰ ἀρχίζῃ μὲ τὸ εἶδος, εἰς τὸν ὁποῖον τελειώνει ὁ προηγούμενος αὐτοῦ, πρέπει δὲ τότε (ἂν τὰ δεδομένα εἶναι ἐπαρκῆ πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος) νὰ συμβαίνει, ὥστε ὁ τελευταῖος ἀριθμὸς τοῦ τελευταίου στίχου νὰ εἶναι ὁμοειδὴς πρὸς τὸν ἄγνωστον.

Τούτων γενομένων, πολλαπλασιάζομεν πάντας τοὺς πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ἀγνώστου εὐρισκομένους ἀριθμοὺς καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν ὑποκάτω τοῦ ἀγνώστου εὐρισκομένων ἀριθμῶν· τὸ πηλίκον εἶναι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΟΣΟΣΤΩΝ

Συνήθως ὁ μεσάζων μεταξὺ πωλητοῦ καὶ ἀγοραστοῦ καὶ εὐκολύων τὴν πώλησιν λαμβάνει ὡς ἀμοιβὴν ὠρισμένον τι μέρος τῆς ἀξίας τοῦ πράγματος (λόγου χάριν ἓν ἐπὶ τοῖς ἑκατόν, ἓν τέταρτον ἐπὶ τοῖς ἑκατόν, ἡμισυ ἐπὶ τοῖς ἑκατόν κλπ. κλπ.) Ἐπίσης ὁ εἰσπραττὼν χρήματα τοῦ Δημοσίου ἢ καὶ ἰδιωτῶν λαμβάνει ποσοστὸν τι· ἐπίσης οἱ ὑπάλληλοι τῶν καταστημάτων λαμβάνουσι ποσοστὸν τι τῶν ὑπ' αὐτῶν πωλουμένων κτλ. κτλ.

Τὰ προβλήματα τῶν ποσοστῶν οὐδόλως διαφέρουσι τῶν προβλημάτων τῆς μεθόδου τῶν τριῶν, ὡς φαίνεται ἐκ τῶν ἑξῆς παραδειγμάτων.

1) Μεσίτης τις ἐπώλησεν οἰκίαν ἀντὶ 42000 δρ., λαμβάνει δὲ διὰ τὴν μεσιτείαν του $\frac{1}{2}$ ἐπὶ τοῖς ἑκατόν (ὅπερ γράφεται $\frac{1}{2}\%$) ἐπὶ τῇ ἀξίᾳ τῆς οἰκίας. Πόσα θὰ λάβῃ;

ἐκ τῶν 100 λαμβάνει $\frac{1}{2}$ δρ.

ἐκ τῶν 42000 » χ

Ἐπειδὴ δὲ τὸ ποσόν, ὅπερ λαμβάνει, εἶναι ἀνάλογον τῆς ἀξίας τοῦ πωληθέντος πράγματος, ἔπεται

$$\chi = \frac{1}{2} \cdot \frac{42000}{100} = \frac{1}{2} \cdot 420 = 210 \text{ δρ.}$$

2) Εἰσπράκτωρ τις τοῦ Δημοσίου εἰσέπραξε φόρους 95450 δρ.

Εὰν λαμβάνῃ $\frac{1}{4}$ ἐπὶ τοῖς 100, πόσα δικαιοῦται νὰ λάβῃ ἐκ τῶν εἰσπραχθέντων χρημάτων;

ἐκ τῶν 100 λαμβάνει $\frac{1}{4}$

ἐκ τῶν 95450 » χ

$$\text{ὅθεν} \quad \chi = \frac{1}{4} \cdot \frac{95450}{100} = 238,62 \dots$$

Σημειωτέον δέ, ὅτι τὰ προβλήματα ταῦτα εἶναι προβλήματα ἁπλοῦ πολλαπλασιασμοῦ (ἰδὲ σελ. 142), διότι ὁ λαμβάνων λόγου χάριν ἐν ἐπὶ τοῖς ἑκατόν, λαμβάνει τὸ $\frac{1}{100}$ τοῦ ποσοῦ, ὁ λαμβάνων $\frac{1}{4}$ ἐπὶ τοῖς χιλίοις λαμβάνει τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ $\frac{1}{1000}$, ἥτοι τὸ $\frac{1}{4000}$ τοῦ ποσοῦ, καὶ οὕτω καθεξῆς.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΚΟΥ

283. Τόκος λέγεται τὸ κέρδος, τὸ ὁποῖον λαμβάνει, ὅστις δανεῖζει χρήματα.

Ὁ τόκος τῶν 100 δραχμῶν εἰς ἓν ἔτος λέγεται ἐπιτόκιον, ὀρίζεται δὲ τοῦτο διὰ συμφωνίας ἰδιαιτέρας μεταξὺ τοῦ δανειζοντος καὶ τοῦ δανειζομένου.

Τὸ ποσὸν τῶν δανειζομένων χρημάτων λέγεται κεφάλαιον.

Ὁ τόκος ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ κεφαλαίου καὶ ἐκ τοῦ ἐπιτοκίου, ἔτι δὲ καὶ ἐκ τοῦ χρόνου, καθ' ὃν διαρκεῖ τὸ δάνειον.

Ὁ τόκος εἶναι ἢ ἁπλοῦς ἢ σύνθετος· καὶ ἁπλοῦς μὲν λέγεται ὁ τόκος, ὅταν τὸ κεφάλαιον μένῃ τὸ αὐτὸ καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τοῦ δανείου, σύνθετος δέ, ὅταν ὁ τόκος ἐκάστου ἔτους δίδῃ καὶ αὐτὸς τόκον εἰς τὰ ἐπόμενα ἔτη· ὥστε εἰς τὸ τέλος ἐκάστου ἔτους ὁ τόκος προστίθεται εἰς τὸ κεφάλαιον καὶ τὸ ἐκ τῆς προσθέσεως προκύπτον ποσὸν λαμβάνεται ὡς κεφάλαιον διὰ τὸ ἐπόμενον ἔτος.

Ἐάν τις π. χ. δανεισθῇ 500 δρ. μὲ ἐπιτόκιον 10 % καὶ μὲ τόκον ἁπλοῦν, εἰς μὲν τὸ τέλος τοῦ πρώτου ἔτους θὰ χρεωσθῇ 550 δρ. (500

κεφάλαιον καὶ 50 τόκον), εἰς δὲ τὸ τέλος τοῦ δευτέρου ἔτους 600 (500 κεφάλαιον καὶ 100 τόκον), εἰς τὸ τέλος τοῦ τρίτου 650 καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἄλλ' ἐὰν ὁ τόκος εἶναι σύνθετος, εἰς μὲν τὸ τέλος τοῦ πρώτου ἔτους θὰ χρεωστῇ 550 δρ. (500 κεφάλαιον καὶ 50 τόκον), εἰς δὲ τὸ τέλος τοῦ δευτέρου 605 δρ. (550 κεφ. καὶ 55 τόκ.), εἰς τὸ τέλος τοῦ τρίτου 665,50 (605 κεφ. καὶ 60,50 τόκ.) καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ὁ σύνθετος τόκος λέγεται καὶ ἀνατοκισμός, τὸ δὲ ἐπὶ συνθέτῳ τόκῳ δανειζόμενον ποσὸν λέγεται ὅτι ἀνατοκίζεται.

Ἐνταῦθα διαλαμβάνομεν μόνον περὶ τοῦ ἀπλοῦ τόκου.

284. Εἰς ἕκαστον πρόβλημα τόκου παρουσιάζονται 4 ποσά:

- 1) τὸ κεφάλαιον,
- 2) ὁ τόκος,
- 3) τὸ ἐπιτόκιον,
- 4) ὁ χρόνος, ἥτοι ἡ διάρκεια τοῦ δανείου.

Τὰ ποσὰ ταῦτα εἶναι ἀνὰ δύο ἢ ἀνάλογα ἢ ἀντίστροφα.

Ὁ τόκος εἶναι ἀνάλογος πρὸς ἕκαστον τῶν τριῶν ἄλλων.

Διότι εἶναι φανερόν ὅτι διπλάσιον κεφάλαιον φέρει διπλάσιον τόκον, τριπλάσιον κεφάλαιον, τριπλάσιον τόκον (ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ καὶ μὲ τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον) καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ὡσαύτως εἰς διπλάσιον, τριπλάσιον κτλ. χρόνον ὁ τόκος γίνεται διπλάσιος, τριπλάσιος κτλ. (τῶν λοιπῶν μενόντων ἀμεταβλήτων).

Ἐπίσης διπλασιαζομένου τοῦ ἐπιτοκίου, διπλασιάζεται καὶ ὁ τόκος (τοῦ κεφαλαίου καὶ τοῦ χρόνου μενόντων ἀμεταβλήτων) κτλ.

Τὸ κεφάλαιον καὶ ὁ χρόνος εἶναι ἀντίστροφα· διότι, ἂν π. χ. κεφάλαιον 500 δρ. χρειάζεται δύο ἔτη διὰ νὰ φέρῃ τόκον 50 δραχ. (πρὸς 5 τοῖς ἑκατόν), διπλάσιον κεφάλαιον δανειζόμενον μὲ τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον 5, διὰ νὰ φέρῃ τὸν αὐτὸν τόκον, χρειάζεται μόνον ἓν ἔτος, κεφάλαιον δὲ 250 δραχ. δανειζόμενον μὲ τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον, ἵνα φέρῃ τὸν αὐτὸν τόκον, χρειάζεται 4 ἔτη.

Ἐκ τούτου συμπεραίνομεν ὅτι τὰ προβλήματα τοῦ τόκου θὰ λύωνται κατὰ τὴν μέθοδον τῶν τριῶν (ἀπλῆν ἢ σύνθετον).

285. Εἰς ἕκαστον πρόβλημα τόκου δίδονται τρία ἐκ τῶν ἀνωτέρω ποσῶν καὶ ζητεῖται τὸ τέταρτον. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ζητούμενον δύναται νὰ εἶναι ἢ ὁ τόκος ἢ τὸ κεφάλαιον ἢ τὸ ἐπιτόκιον ἢ ὁ χρόνος, συμπεραίνομεν ὅτι τὰ προβλήματα τοῦ τόκου εἶναι τεσσάρων εἰδῶν. Ἐν τοῖς ἐπομένοις λύομεν ἓν ἕξ ἑκάστου εἰδους.

Πρόβλημα 1ον (ἄγνωστον ὁ τόκος).

Πόσον τόκον φέρουσιν 7850 δραχμαὶ εἰς 3 ἔτη πρὸς 7 τοῖς ἑκατόν ;
(ἀντὶ 7 τοῖς ἑκατόν γράφεται συντομίας χάριν 7 %).

Διὰ τὸ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο κατὰ τὴν μέθοδον τῶν τριῶν,
γράφομεν τὰ δεδομένα καὶ τὸ ζητούμενον ὥς ἑξῆς·

κεφ.	ἔτη	τόκος
100	1	7
7850	3	χ

ἔπειτα παρατηροῦμεν ὅτι ὁ τόκος χ εἶναι ἀνάλογος καὶ πρὸς τὸ κεφάλαιον καὶ πρὸς τὸν χρόνον· ἐφαρμόζοντες λοιπὸν τὸν κανόνα τοῦ ἐδ.
272 εὐρίσκομεν

$$\chi = 7 \times \frac{7850}{100} \times \frac{3}{1} = \frac{7 \times 7850 \times 3}{100} \text{ ἢ } \chi = 1648,50 \text{ δρ.}$$

Ἐκ τῆς τιμῆς ταύτης τοῦ ἀγνώστου χ συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

286. Διὰ τὸ εὐρωμεν τὸν τόκον, πολλαπλασιάζομεν τὰ τρία δεδομένα (ἦτοι τὸ κεφάλαιον, τὸ ἐπιτόκιον καὶ τὸν χρόνον) καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν δι' 100.

Πρόβλημα 2ον (ἄγνωστον τὸ κεφάλαιον).

Ποῖον κεφάλαιον τοκισθὲν ἐπὶ 2 $\frac{1}{2}$ ἔτη πρὸς 9 % ἔφερε τόκον 820 δραχμάς;

Κατατάσσομεν τὰ δεδομένα καὶ τὸ ζητούμενον ὥς ἑξῆς·

κεφ.	ἔτη	τόκος
100	1	9
χ	2 $\frac{1}{2}$	280

ἔπειτα παρατηροῦμεν ὅτι τὸ κεφάλαιον πρὸς μὲν τὸν τόκον εἶναι ἀνάλογον, πρὸς δὲ τὸν χρόνον ἀντίστροφον· ὅθεν ἐφαρμόζοντες τὸν κανόνα τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν εὐρίσκομεν

$$\chi = 100 \times \frac{1}{2 \frac{1}{2}} \times \frac{820}{9} = \frac{820 \times 100}{9 \times 2 \frac{1}{2}}.$$

Ἐκ τῆς τιμῆς ταύτης τοῦ ἀγνώστου κεφαλαίου συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

287. Διὰ τὸ εὐρωμεν τὸ κεφάλαιον, πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων (ἐπιτοκίου καὶ χρόνου).

Εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα, ἔαν διπλασιάσωμεν καὶ τοὺς δύο ὄρους τοῦ κλάσματος, ὅπερ εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ ἀγνώστου χ , εὐρίσκομεν

$$\chi = \frac{1640 \times 100}{9 \times 5} = \frac{1640 \times 20}{9} = 3644 \text{ δρ.}, 44 \frac{4}{9}.$$

Πρόβλημα 3ον (ἄγνωστον ὁ χρόνος).

Εἰς πόσον χρόνον κεφάλαιον 25800 δραχμῶν τοκίζόμενον πρὸς $8 \frac{1}{2} \%$ θὰ φέρῃ τόκον 2590δρ. 60;

Κατατάσσομεν τὰ δεδομένα καὶ τὸν ἄγνωστον ὥς ἑξῆς·

κεφ.	ἔτη	τόκος
100	1	8,50
25800	χ	2590,60

Ἐπειτα παρατηροῦμεν ὅτι ὁ χρόνος εἶναι ἀνάλογος μὲν τοῦ τόκου, ἀντίστροφος δὲ τοῦ κεφαλαίου· ὅθεν ἐφαρμόζοντες τὸν κανόνα (ἔδ. 278) εὐρίσκομεν

$$\chi = 1 \times \frac{100}{25800} \times \frac{2590,60}{8,50} = \frac{100 \times 2590,60}{8,50 \times 25800}.$$

Ἐκ τῆς λύσεως ταύτης συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

288. Διὰ τὰ εὗρωμεν τὸν χρόνον (εἰς ἔτη), πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων (κεφαλαίου καὶ ἐπιτοκίου).

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο, ἔαν ἐκτελέσωμεν τὰς πράξεις, εὐρίσκομεν

$$\chi = \frac{100 \times 259060}{850 \times 25800} = \frac{25906}{85 \times 258}$$

$$\text{ἦτοι } \chi = 1 \text{ ἔτ.}, 2 \mu\eta\nu., 5 \text{ ἡμέρ.} \frac{591}{2193}.$$

Πρόβλημα 4ον. (ἄγνωστον τὸ ἐπιτόκιον).

Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐτοκίσθη κεφάλαιον 3058 δραχμῶν καὶ ἔφε-
ρεν εἰς 5 ἔτη καὶ 4 μῆνας τόκον 820 δρ.;

Κατατάσσομεν τὰ δεδομένα καὶ τὸν ἄγνωστον ὥς ἑξῆς·

κεφ.	ἔτη	τόκος
3058	$5 \frac{1}{3}$	820
100	1	χ

Ἐπειτα παρατηροῦμεν ὅτι ὁ τόκος χ (τῶν 100 δρ. εἰς 1 ἔτος) εἶναι ἀνά-

λογος καὶ πρὸς τὸ κεφάλαιον καὶ πρὸς τὸν χρόνον· ὅθεν ἐφαρμόζοντες τὸν κανόνα εὐρίσκομεν

$$\chi = 820 \times \frac{100}{3058} \times \frac{1}{5\frac{1}{3}} = \frac{820 \times 100}{3058 \times (5\frac{1}{3})}$$

Ἐκ τῆς λύσεως ταύτης συνάγομεν τὸν ἐξῆς κανόνα.

289. Διὰ τὰ εὐρωμεν τὸ ἐπιτόκιον, πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων (κεφαλαίου καὶ χρόνου).

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 3 ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος, ὅπερ εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ χ , εὐρίσκομεν

$$\chi = \frac{820 \times 100 \times 3}{3058 \times 16} = \frac{410 \times 100 \times 3}{3058 \times 8} = \frac{123000}{24464}, \text{ ἥτοι } \chi = 5,02\% \text{ περίπου.}$$

■ Χαρατήρησις.

290. Οἱ τέσσαρες εὐρεθέντες κανόνες περὶ τῶν προβλημάτων τοῦ τόκου περιλαμβάνονται εἰς ἓνα, τὸν ἐξῆς·

Ἄν μὲν ζητῆται ὁ τόκος, πολλαπλασιάζομεν τὰ τρία δεδομένα καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ 100, ἂν δὲ ζητῆται ἄλλο τι, πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων δοθέντων.

Πρὸς ἄσκησιν προτείνομεν εἰς λύσιν καὶ τὰ ἐξῆς προβλήματα.

1) Πόσον τόκον φέρουσι 1527 δραχμαὶ καὶ 80 λεπτὰ εἰς 8 μῆνας πρὸς 7 $\frac{0}{10}$; (Ἀπ. 71,29...).

2) Δανείσας τις χρήματα πρὸς 7 $\frac{1}{2}$ $\frac{0}{10}$ ἔλαβε μετὰ 3 ἔτη τόκον 270 δραχμάς. Πόσα ἐδάνεισεν; (Ἀπ. 1200).

3) Εἰς πόσον χρόνον κεφάλαιόν τι τοκίζόμενον πρὸς 8 $\frac{0}{10}$ διπλασιάζεται; (γίνεται δηλαδή ὁ τόκος ἴσος μὲ τὸ κεφάλαιον). (Ἀπ. 12 $\frac{1}{2}$ έ. 6μ.).

4) Διὰ τὰ ἀσφάλισις τις τὸ φορτίον ἑνὸς πλοίου, πρέπει νὰ πληρώσῃ $\frac{1}{2}$ τοῖς ἑκατὸν ἐπὶ τῆς ἀξίας τοῦ φορτίου, ἣτις εἶναι 85000 δραχμαί. Πόσον θὰ πληρώσῃ δι' ἀσφάλιστρα; (Ἀπ. 425 $\delta\epsilon$.).

5) Ἠγόρασέ τις οἰκίαν ἀντὶ 25000 δραχμῶν· τὴν οἰκίαν ταύτην ἐνοικιάζει 180 δραχμάς κατὰ μῆνα, ἐξοδεύει ὅμως κατ' ἔτος δι' ἐπισκευάς, ὕδωρ, φόρον κτλ. δραχμάς 300. Πόσον τοῖς ἑκατὸν κερδίζει ἐκ τῶν χρημάτων του κατ' ἔτος; (Ἀπ. 7,44 $\frac{0}{10}$).

6) Ἐμπορὸς τις ἠγόρασεν 7500 δοκάδας ἐλαίου πρὸς 90 λεπτὰ τὴν

δικᾶν· ἐπώλησε δ' αὐτὸ μετὰ 3 μῆνας πρὸς 1,10. Πόσον τοῖς ἑκατὸν κατ' ἔτος ἐκέρδησεν ;

('Απ. $88\frac{8}{9}\%$).

7) Σιτέμπορός τις ἡγόρασε σῖτον πρὸς 36 λεπτὰ τὴν δικᾶν· μετὰ 7 μῆνας θέλει νὰ πωλήσῃ αὐτὸν καὶ νὰ κερδήσῃ ἐπὶ τῶν χρημάτων του 10 % . Πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὴν δικᾶν ;

('Απ. 38 λεπτὰ $\frac{1}{10}$ τοῦ λεπτοῦ).

8) Ὑγόρασέ τις οἰκίαν ἀντὶ 72000 δραχμῶν καὶ κτῆμα ἀντὶ 36800 δραχμῶν· καὶ ἐκ μὲν τῆς οἰκίας ἀπολαμβάνει ἐτησίως 4500 δραχμᾶς, ἐκ δὲ τοῦ κτήματος 1200. Πόσον τοῖς ἑκατὸν ἀπολαμβάνει ἐκ τῶν δύο τούτων ὁμοῦ ;

('Απ. 5,24. . .).

9) Νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ τόκος τοῦ κεφαλαίου κ εἰς η ἡμέρας εἶναι

$\frac{\kappa. \eta.}{6000}$, εἰὰν τοκίζεται πρὸς 6 % ,

$\frac{\kappa. \eta.}{8000}$, » » » $4\frac{1}{2}\%$

$\frac{\kappa. \eta.}{7200}$, » » » 5 % .

ΠΕΡΙ ΥΦΑΙΡΕΣΕΩΣ

291. Ὑφαίρεσις λέγεται τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον ἐκπίπτει ἐξ ἐνὸς χρεώους, ὅταν τὸ χρέος τοῦτο πληρῶνται πρὸ τῆς διορίας του.

Ὑπάρχουσι δὲ δύο εἰδῶν ὑφαίρεσεις, ἡ ἐξωτερικὴ καὶ ἡ ἐσωτερικὴ.

α' Ὑφαίρεσις ἐξωτερικὴ.

292. Ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις εἶναι ὁ τόκος ὅλου τοῦ ποσοῦ, τὸ ὁποῖον περιέχεται εἰς τὸ χρεωστικὸν γραμματίον, διὰ τὸν χρόνον, ὅστις θὰ περάσῃ ἀπὸ τῆς ἡμέρας τῆς προεξοφλήσεως μέχρι τῆς λήξεως αὐτοῦ. Ἐπομένως τὰ προβλήματα τῆς ἐξωτερικῆς ὑφαίρεσεως δὲν διαφέρουσι ποσῶς ἀπὸ τῶν προβλημάτων τοῦ τόκου.

Ως παράδειγμα ἔστω τὸ ἑξῆς.

Πρόβλημα.

Γραμμάτιον 2500 δραχμῶν προεξοφλεῖται 8 μῆνας πρὸ τῆς λήξεως αὐτοῦ πρὸς $7\frac{1}{2}\%$. Πόση εἶναι ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις αὐτοῦ ;

Τὸ ζητούμενον εἶναι ὁ τόκος τῶν 2500 δραχμῶν εἰς 8 μῆνας πρὸς $7\frac{1}{2}\%$. ὁ τόκος οὗτος εἶναι

$$\frac{2500 \times (7\frac{1}{2}) \times \frac{8}{12}}{100} \text{ ἢ } 25 \times \frac{2}{3} \times \left(7\frac{1}{2}\right) \text{ ἢ } 25 \times \frac{1}{3} \times 15,$$

ἥτοι 25×5 ἢ 125 δραχ.

ὥστε τὸ ποσὸν τοῦ γραμματίου (ἥτοι αἱ 2500) δραχ.) θὰ ἐλαττωθῇ κατὰ 125 δραχ., ἐπομένως θὰ πληρωθῇ μὲ μόνον 2375 δραχμάς.

Παρατήρησις.

Ἐκ τῶν 2500 δραχμῶν πληρώνονται μόνον αἱ 2375, καὶ ὅμως κρατεῖται ὁ τόκος τῶν 2500. Ἐκ τούτου γίνεται φανερόν ὅτι ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις δὲν εἶναι δικαία. Ἀλλ' οἱ ἔμποροι μεταχειρίζονται αὐτὴν διὰ τὴν εὐκολίαν, δικαιολογεῖται δὲ διὰ τῆς ἀμοιβαιότητος.

Σημειώσεις. Εἰς τὰ προβλήματα τῆς ἐξωτερικῆς ὑφαίρεσεως παρεμβαίνουν τὰ ἑξῆς 4 ποσά· τὸ ποσὸν τοῦ γραμματίου, ὁ χρόνος, τὸ ἐπιτόκιον καὶ ἡ ὑφαίρεσις, τὰ δὲ 4 προβλήματα, ἐν οἷς ζητεῖται ἓν ἐκ τούτων, ὅταν δοθῶσι τὰ ἄλλα τρία, οὐδόλως διαφέρουσιν ἀπὸ τῶν 4 προβλημάτων τοῦ τόκου.

β' Ὑφαίρεσις ἐσωτερικὴ.

293. Ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις εἶναι ὁ τόκος τῆς ποσότητος, τὴν ὁποίαν πληρώνει, ὅστις προεξοφλεῖ τὸ γραμματίον, διὰ τὸν χρόνον, ὅστις παρέρχεται ἀπὸ τῆς ἡμέρας τῆς προεξοφλήσεως μέχρι τῆς ἡμέρας, καθ' ἣν λήγει τὸ γραμματίον.

Διὰ νὰ μάθωμεν, πῶς εὐρίσκεται ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις, ἄς λάβωμεν τὸ ἑξῆς παράδειγμα.

Γραμμάτιον 1200 δραχμῶν προεξοφλεῖται 3 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 8 % . Πόση εἶναι ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις ;

Ἡ ζητούμενη ὑφαίρεσις δὲν εἶναι τώρα ὁ τόκος τῶν 1200 δραχμῶν (εἰς τρεῖς μῆνας), ἀλλ' ὀλιγωτέρων, δηλαδὴ ἐκείνων, τὰς ὁποίας θὰ πληρώσῃ ὁ ἐξαργυρῶν τὸ γραμματίον· ὥστε αἱ 1200 δραχ. θὰ ἀποτελῶνται ἐκ τοῦ ποσοῦ, τὸ ὁποῖον πληρώνει ὁ ἐξαργυρῶν τὸ γραμματίον, καὶ ἐκ τοῦ τόκου τοῦ ποσοῦ τούτου διὰ 3 μῆνας πρὸς 8 % .

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο, εὐρίσκομεν πρῶτον τὸν τόκον τῶν 100 δραχ. εἰς 3 μῆνας πρὸς 8 % : ὁ τόκος οὗτος εἶναι

$$\frac{100 \times \frac{8}{12} \times 3}{100} \text{ ἢ } 2 \text{ δραχμαί.}$$

ἔπειτα σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς·

100 δραχμαὶ τοκισζόμεναι σήμερον γίνονται μετὰ 3 μῆνας 102· ἂν λοιπὸν ἔχη τις νὰ λάβῃ μετὰ 3 μῆνας 102 δραχμὰς καὶ πωλήσῃ σήμερον τὸ γραμματίον του, θὰ λάβῃ μόνον 100 καὶ θὰ χάσῃ τὰς 2 (ὅστις εἶναι ὁ τόκος τῶν 100).

(ὥστε εἰς 102 δραχμὰς γίνεται ὑφαίρεσις 2 δρ.

εἰς μίαν δραχμὴν

»

»

$$\frac{2}{102}$$

καὶ εἰς 1200 δραχμὰς θὰ γίνῃ ὑφαίρεσις $\frac{2}{102} \times 1200$ ἢ $\frac{1200}{51}$,

$$\text{ἦτοι } 23\delta\rho. 52\lambda. \frac{16}{17}.$$

Ἐπειδὴ ἡ ὑφαίρεσις καὶ τὸ ποσὸν τοῦ γραμματίου εἶναι ἀνάλογα (διότι εἰς διπλάσιον ποσὸν γίνεται προδήλως διπλασία ὑφαίρεσις, εἰς τριπλάσιον τριπλασία κτλ.), δυνάμεθα, ἀφοῦ εὗρωμεν ὅτι εἰς 102 δραχμὰς γίνεται ὑφαίρεσις 2, νὰ εὗρωμεν τὴν ὑφαίρεσιν τῶν 1200 δραχμῶν καὶ διὰ τῆς ἀπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν

ποσὸν	ὑφαίρ.
102	2
1200	χ
χ = 2 × $\frac{1200}{102}$	= $\frac{1200}{51}$

ὅθεν

294. Ἐκ τούτων συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαίρεσεως.

Διὰ νὰ εὗρωμεν τὴν ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν, πολλαπλασιάζομεν τὸ εἰς τὸ γραμματίον περιεχόμενον ποσὸν ἐπὶ τὸν τόκον τῶν ἑκατὸν δραχμῶν διὰ τὸν χρόνον, ὅστις παρέρχεται ἀπὸ τῆς προεξοφλήσεως μέχρι τῆς λήξεως τοῦ γραμματίου, καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀθροίσματος τοῦ τόκου τούτου καὶ τοῦ 100.

295. Τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον πληρώνεται σήμερον διὰ τὸ γραμματίον, λέγεται παροῦσα ἀξία αὐτοῦ. Εὐρίσκεται δὲ ἡ παροῦσα ἀξία τοῦ γραμματίου, ἐὰν ἀπὸ τοῦ ὅλου ποσοῦ, τοῦ ἐν τῷ γραμματίῳ περιεχομένου, ἀφαιρεθῇ ἡ ὑφαίρεσις.

Εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα ἡ παροῦσα ἀξία τοῦ γραμματίου τῶν 1200 δραχμῶν εἶναι $1200 - 23\delta\rho. 52\lambda. \frac{16}{17}$, τουτέστι $1176\delta\rho. 47\lambda. \frac{1}{17}$.

Δύναται δὲ νὰ εὗρεθῇ καὶ ἀμέσως ἡ παροῦσα ἀξία ὡς ἑξῆς·

102 δραχμαὶ (πληρωτέαι μετὰ 3 μῆνας πρὸς 8 %) ἔχουσι παροῦσαν ἀξίαν 100. Πόση εἶναι ἡ παροῦσα ἀξία 1200 δραχμῶν; (πληρωτέων ἐπίσης μετὰ 3 μῆνας πρὸς 8 %).

Ἡ παροῦσα ἀξία καὶ τὸ ποσὸν τοῦ γραμματίου εἶναι προφανῶς ἀνάλογα· ὅθεν

$$\frac{\text{παροῦσα ἀξία}}{100} = \frac{\text{ποσὸν}}{1200} \quad \text{καὶ} \quad \chi = 100 \times \frac{1200}{102} = \frac{1200 \times 100}{102}$$

εἶναι δὲ εὐκόλον νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ παροῦσα ἀξία, τὴν ὁποίαν οὕτως εὐρίσκομεν, καὶ ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις συναποτελοῦσι τὸ ὅλον ποσὸν τοῦ γραμματίου, ἦτοι τὰς 1200 δραχμάς.

Σημειώσις. Ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις εἶναι μὲν ἀνάλογος τοῦ ἐν τῷ γραμματίῳ περιεχομένου ποσοῦ, ἀλλὰ δὲν εἶναι ἀνάλογος οὔτε τοῦ χρόνου οὔτε τοῦ ἐπιτοκίου, διότι, διπλασιαζομένου τοῦ χρόνου, ἡ ὑφαίρεσις δὲν γίνεται διπλασία, ἀλλὰ κατὰ τι μικρότερα ἢ διπλασία· ὁμοίως, διπλασιαζομένου τοῦ ἐπιτοκίου, ἡ ὑφαίρεσις γίνεται μεγαλυτέρα, ἀλλ' ὅχι καὶ διπλασία. Τῷ ὄντι εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα διὰ τοὺς 3 μῆνας ἡ ὑφαίρεσις εἶναι $\frac{1200 \times 2}{102}$, διὰ δὲ 6 μῆνας θὰ εἶναι $\frac{1200 \times 4}{102}$. τοῦτο δ' εἶναι ὀλιγώτερον τοῦ διπλασίου τοῦ πρώτου, διότι τὸ διπλάσιον τοῦ πρώτου εἶναι $\frac{1200 \times 4}{102}$.

296. Τὰ προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα εἶναι γνωστὴ ἡ ὑφαίρεσις καὶ ζητεῖται ὁ χρόνος ἢ τὸ ἐπιτόκιον ἢ τὸ ποσὸν τοῦ γραμματίου, ἀνέγονται εὐκόλως εἰς προβλήματα τόκου, διότι ἡ ὑφαίρεσις εἶναι ὁ τόκος τῆς παρούσης ἀξίας διὰ τὸν χρόνον, ὅστις μεσολαβεῖ ἀπὸ τῆς προεξοφλήσεως μέχρι τῆς λήξεως τοῦ γραμματίου.

Ἐὰν π. χ. δοθῇ τὸ ἐξῆς πρόβλημα.

Γραμματίον τι ἐξωφλήθη 9 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 8 % καὶ ἔπαθεν ὑφαίρεσιν 70 δραχμῶν. Πόσον ἦτο τὸ ποσὸν τοῦ γραμματίου;

Εὐρίσκομεν κατὰ πρῶτον, ποῖον κεφάλαιον εἰς 9 μῆνας πρὸς 8 % φέρει τόκον 70 δραχμάς. Τὸ κεφάλαιον τοῦτο θὰ εἶναι τὸ ποσόν, μὲ τὸ ὁποῖον ἐπληρώθη τὸ γραμματίον, ἦτοι ἡ παροῦσα ἀξία αὐτοῦ, ἐὰν δὲ εἰς αὐτὴν προστεθῇ ἡ ὑφαίρεσις, θὰ προκύψῃ τὸ ὅλον ποσὸν τοῦ γραμματίου.

Ἐὰν δὲ δοθῇ τὸ ἐξῆς·

Εἰς γραμματίον 1500 δραχμῶν, ἐξοφληθὲν 13 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του, ἔγινεν ὑφαίρεσις 120 δραχμῶν. Πρὸς πόσον τοῖς ἑκατὸν ἔγινεν ἡ ὑφαίρεσις;

σκεπτόμεθα ὡς ἐξῆς.

Αἱ 120 δραχμαὶ εἶναι ὁ τόκος τῶν 1500—120, ἦτοι τῶν 1380 δραχμῶν (δι' ὧν ἐξοφλήθη τὸ γραμματίον), εἰς 16 μῆνας, ζητεῖται δὲ τὸ ἐπιτόκιον.

Πρὸς ἄσκησιν προτείνομεν εἰς λύσιν καὶ τὰ ἐξῆς προβλήματα.

1) Νὰ εὗρεθῇ ἡ ὑφαίρεσις γραμματίου 1872,25 δρ. προεξοφλουμένου 3 μῆνας πρὸ τῆς λήξεως αὐτοῦ πρὸς 8%.

(Ἀπ. 48,63 ...).

2) Γραμματίον 5500 δραχμῶν προεξοφλήθη 14 μῆνας πρὸς τῆς λήξεως αὐτοῦ ἀντὶ δραχμῶν 2150. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐγένετο ἡ προεξόφλησις;

(Ἀπ. 12%).

3) Πωλίσας τις οἰκίαν ἀντὶ 32700 δραχμῶν ἐκέρδησεν 9% ἐπὶ τοῦ ποσοῦ, δι' οὗ εἶχεν ἀγοράσει αὐτήν. Πόσον τὴν εἶχεν ἀγοράσει; (Ἀπ. 30000).

4) Μετὰ πόσον χρόνον λήγει γραμματίον 1743 δραχμῶν, ὅπερ προεξοφλεῖται πρὸς 7% διὰ 1400 δραχμῶν;

(Ἀπ. 3 ἔτ. $\frac{1}{2}$).

5) Πόσων δραχμῶν εἶναι τὸ γραμματίον, τὸ ὁποῖον προεξοφληθὲν πρὸς 8% διὰ 3890 δραχμῶν $4 \frac{1}{2}$ μῆνας πρὸ τῆς λήξεως αὐτοῦ;

(Ἀπ. 4006,70).

6) Ἐχει τις δύο γραμματια τὸ μὲν ἐν 7500 δραχμῶν πληρωτέον μετὰ 8 μῆνας, τὸ δὲ ἄλλο 4800 πληρωτέον μετὰ 15 μῆνας· ἐὰν θέλῃ νὰ ἀνταλλάξῃ αὐτὸ ἀντὶ ἑνὸς μόνου γραμματίου πληρωτέου μετὰ ἐν ἔτος, πόσας δραχμὰς πρέπει τὸ φέρῃ τὸ γραμματίον τοῦτο, τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος 8%;

(Ἀπ. $12405 \frac{15}{17}$).

7) Ἐμπορος ἠγόρασε παρ' ἄλλου πράγματα ἀξίας 3816δρ., μὴ δυνάμενος δὲ νὰ πληρώσῃ ἀμέσως θέλει νὰ ἐκδώσῃ γραμματίον πληρωτέον μετὰ 5 μῆνας μὲ ἐπιτόκιον 8%. Πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ φέρῃ τὸ γραμματίον τοῦτο;

(Ἀπ. 3943,20).

Μερισμὸς εἰς μέρη ἀνάλογα.

297. Νὰ μερισθῇ ἀριθμὸς, οἷον ὁ 180, εἰς μέρη ἀνάλογα δοθέντων ἀριθμῶν, οἷον τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 5, σημαίνει νὰ γίνῃ τόσα μέρη, ὅσοι εἶναι οἱ δοθέντες ἀριθμοί, καὶ ἀνάλογα πρὸς αὐτούς, ἥτοι τὰ μέρη ταῦτα νὰ γίνωνται ἴσα πρὸς τοὺς δοθέντας ἀριθμούς, ὅταν πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ τινὰ ἀριθμὸν.

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο, παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν ὁ ἀριθμὸς, ὅστις πρόκειται νὰ μερισθῇ εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 5, ἦτο ἴσος πρὸς τὸ ἄθροισμα αὐτῶν $2+3+5$, ἥτοι 10, τὰ μέρη θὰ ἦσαν προφανῶς 2, 3, 5· ἂν ὁ μεριστέος ἀριθμὸς ἦτο διπλάσιος, ἥτοι 20, τὰ μέρη θὰ ἦσαν διπλάσια, 4, 6, 10· ἂν ἦτο τριπλάσιος, ἥτοι 30, τὰ μέρη θὰ ἦσαν τριπλάσια, 6, 9, 15 καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι ἕκαστον μέρος εἶναι ἀνάλογον τοῦ μεριστέου ἀριθμοῦ· ἐπομένως δυνάμεθα νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο κατὰ τὴν μέθοδον τῶν τριῶν προτείνοντες αὐτὸ ὥς ἑξῆς.

Ὅταν ὁ μεριστέος ἀριθμὸς εἶναι 10, τὸ πρῶτον μέρος εἶναι 2, ὅταν ὁ μεριστέος ἀριθμὸς εἶναι 180, ποῖον θὰ εἶναι τὸ πρῶτον μέρος;

$$\begin{array}{cc} \text{μεριστέος ἀριθμὸς} & \text{μέρος α'} \\ \frac{10}{180} & \frac{2}{\chi} \end{array} \quad \text{ἄρα } \chi = 2 \times \frac{180}{10}, \text{ ἥτοι } \chi = 36.$$

Ὅμοίως εὐρίσκομεν καὶ τὰ ἄλλα μέρη· καὶ τὰ τρία μέρη εἶναι

$$\frac{180}{10} \times 2, \quad \frac{180}{10} \times 3, \quad \frac{180}{10} \times 5.$$

298. Ἐκ τούτων συνάγομεν τὸν κανόνα.

Διὰ νὰ μερίσωμεν ἀριθμὸν εἰς μέρη ἀνάλογα δοθέντων ἀριθμῶν, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐφ' ἕκαστον τῶν δοθέντων ἀριθμῶν καὶ τὰ γινόμενα διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν.

Σημείωσις. Οἱ ἀριθμοί, ἀναλόγως τῶν ὁποίων μερίζομεν, δύνανται νὰ πολλαπλασιασθῶσι πάντες ἐπὶ τὸν τυχόντα ἀριθμὸν, χωρὶς νὰ βλαφθῶσι τὰ μέρη, ἢ καὶ νὰ διαιρεθῶσι πάντες διὰ τοῦ τυχόντος ἀριθμοῦ. Διότι, ἂν π.χ. πρόκειται νὰ μερίσωμεν ἀριθμὸν τινὰ Κ ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 5, τὰ μέρη θὰ εἶναι

$$K \times \frac{2}{10}, \quad K \times \frac{3}{10}, \quad K \times \frac{5}{10}, \quad 10 = 2 + 3 + 5$$

Ἄν δὲ ἀντὶ τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 5 λάβωμεν τοὺς 2×8 , 3×8 , 5×8 , τὰ μέρη θὰ εἶναι

$$K \times \frac{2 \times 8}{10 \times 8}, \quad K \times \frac{3 \times 8}{10 \times 8}, \quad K \times \frac{5 \times 8}{10 \times 8},$$

διότι τὸ ἄθροισμα $2 \times 8 + 3 \times 8 + 5 \times 8$ εἶναι 10×8 .

ὥστε τὰ μέρη ἔμειναν τὰ αὐτά.

Ὅμοίως καὶ ἡ διαίρεσις τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 5 διὰ τοῦ τυχόντος ἀριθμοῦ δὲν βλάπτει τὰ μέρη.

Διὰ ταῦτα, ἐὰν ἔχωμεν νὰ μερίσωμεν ἀριθμὸν τινα ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν $2\frac{1}{2}$, $5\frac{2}{3}$, $\frac{4}{9}$, πολλαπλασιάζομεν τούτους ἐπὶ 18 (διὰ νὰ γίνωσιν ἀκέραιοι) καὶ γίνονται 45, 102, 8· ἔπειτα μερίζομεν ἀναλόγως τῶν 45, 102, 8, ὅπερ εἶναι εὐκολώτερον. Ἐὰν δὲ πρόκειται νὰ μερίσωμεν ἀριθμὸν ἀναλόγως τῶν 100, 200, 500, μερίζομεν ἀναλόγως τῶν 1, 2, 5, ὅπερ εἶναι εὐκολώτερον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

299. Προβλήματα εταιρείας λέγονται ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται νὰ μοιρασθῇ τὸ κέρδος ἢ ἡ ζημία ἐπιχειρήσεώς τινος εἰς ἐκείνους, οἵτινες τὴν ἀνέλαβον.

Τὰ τοιαῦτα προβλήματα ἀνάγονται εἰς τὸν μερισμὸν εἰς μέρη ἀνάλογα, γίνεται δὲ τοῦτο φανερόν ἐκ τῶν ἐξῆς παραδειγμάτων.

Πρόβλημα α'.

Τρεῖς ἔμποροι ἔκαμαν εταιρείαν διὰ τινα ἐπιχειρήσιν καὶ κατέβαλον τὰ ἐξῆς ποσά. Ὁ πρῶτος 7500 δραχμάς, ὁ δεύτερος 12000 δρ. καὶ ὁ τρίτος 22500. Ἐκ τῆς ἐπιχειρήσεως ἐκέρδησαν 2800 δραχμάς· πόσας θὰ λάβῃ ἕκαστος;

Λύσις. Ἄν παραστήσωμεν διὰ τοῦ δ τὸ κέρδος τῆς μιᾶς δραχμῆς (δηλαδὴ τὸ κέρδος, τὸ ὁποῖον θὰ ἐλάμβανέ τις, ἂν κατέβαλλε 1 δραχμὴν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν), ὁ πρῶτος ἐπειδὴ κατέβαλλεν 7500 δραχμάς, θὰ λάβῃ $7500 \times \delta$, ὁ δεύτερος θὰ λάβῃ $12000 \times \delta$ καὶ τρίτος $22500 \times \delta$ · τὰ τρία δὲ ταῦτα.

$$7500 \times \delta, \quad 12000 \times \delta, \quad 22500 \times \delta$$

θὰ συναποτελῶσι τὸ ὅλον κέρδος, ἥτοι τὰς 2800 δραχμάς.

Ἐκ τούτων βλέπομεν ὅτι, διὰ νὰ λύσωμεν τὸ προκείμενον πρόβλημα, πρέπει νὰ μερίσωμεν τὸ κέρδος 2800 δρ. εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν καταβολῶν 7500, 12000, 22500· ἐκτελοῦντες τὸν μερισμὸν τοῦτον, κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ἔδ. 298, εὐρίσκομεν τὰ μέρη

$$\frac{2800 \times 7500}{42000}, \quad \frac{2800 \times 12000}{42000}, \quad \frac{2800 \times 22500}{42000}$$

$$\eta \quad \frac{2 \times 750}{3}, \quad \frac{2 \times 1200}{3}, \quad \frac{2 \times 2250}{3}, \text{ ἥτοι } 500, 800, 1500.$$

Πρόβλημα β'.

Ἐμπορὸς τις ἤρχισεν ἐπιχείρησιν τινα μὲ 8000 δραχμάς, μετὰ πέντε δὲ μῆνας προσέλαβε συνέταιρον, ὅστις καὶ οὗτος κατέβαλεν 8000 δραχμάς· δέκα δὲ μῆνας μετὰ ταῦτα προσέλαβε καὶ τρίτον συνέταιρον, ὅστις κατέβαλε καὶ αὐτὸς τὸ αὐτὸ ποσὸν 8000 δρ. Τρία ἔτη ἀπὸ τῆς ἐνάρξεως τῆς ἐπιχειρήσεως εὐρέθη ὅτι ἐκέρδησαν 3800 δραχμάς. Πόσας πρέπει νὰ λάβῃ ἕκαστος;

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο αἱ μὲν καταβολαὶ εἶναι αἱ αὐταί, διότι ἕκαστος τῶν συνεταίρων κατέβαλεν 8000 δραχμάς, ἀλλ' οἱ χρόνοι, καθ' οὓς αἱ καταβολαὶ ἔμειναν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν, εἶναι διάφοροι· διότι τοῦ μὲν πρώτου τὰ χρήματα ἔμειναν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν 36 μῆνας, τοῦ δὲ δευτέρου 31, τοῦ δὲ τρίτου 21. Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν διὰ τοῦ δ τὸ κέρδος τῶν 800 εἰς ἓνα μῆνα, ὃ μὲν πρῶτος θὰ λάβῃ $36 \times \delta$, ὃ δὲ δεύτερος $31 \times \delta$, ὃ δὲ τρίτος $21 \times \delta$, τὰ τρία δὲ ταῦτα μερίδια

θὰ συναποτελῶσι τὸ ὅλον κέρδος, ἥτοι τὰς 3800 δραχμάς.

Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι, διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο, πρέπει νὰ μερίσωμεν τὸ κέρδος 3800 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν χρόνων 36, 31, 21, καθ' οὓς αἱ καταβολαὶ ἔμειναν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν, ἐπομένως τὰ μερίδια εἶναι

$$3800 \times \frac{36}{88}, \quad 3800 \times \frac{31}{88}, \quad 3800 \times \frac{21}{88},$$

$$\eta \text{τοι} \quad 1554 \frac{6}{11}, \quad 1338 \frac{7}{11}, \quad 906 \frac{9}{11}.$$

Πρόβλημα γ'.

Ἄνθρωπός τις ἤρχισεν ἐπιχείρησιν τινα μὲ 2000 δραχμάς· μετὰ ἓν ἔτος προσέλαβε συνέταιρον, ὅστις κατέβαλεν 7000 δρ., ὁκτὼ δὲ μῆνας μετὰ τοῦτον προσέλαβε καὶ τρίτον συνέταιρον, ὅστις κατέβαλεν 6000

δραχμάς· τρία δὲ ἔτη μετὰ τὴν πρόσληψιν τούτου εὐρέθη δι' ἐκέροθησαν 18000 δραχμάς. Πόσας θὰ λάβῃ ἕκαστος;

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο καὶ τὰ κεφάλαια τῶν συνεταίρων διαφέρουσι καὶ οἱ χρόνοι, καθ' οὓς ταῦτα ἔμειναν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν.

Ὁ πρῶτος κατέβαλε 2000 δρ. διὰ 56 μῆνας.

Ὁ δεύτερος κατέβαλεν 7000 δρ. διὰ 44 μῆνας.

Ὁ τρίτος κατέβαλεν 6000 δρ. διὰ 36 μῆνας.

Λύσις. Ἄν παραστήσωμεν διὰ τοῦ δ τὸ κέρδος τῆς μιᾶς δρ. εἰς ἕνα μῆνα, τὸ κέρδος τῆς μιᾶς δρ. εἰς 56 μῆνας θὰ εἶναι $56 \times \delta$, καὶ τὸ κέρδος τῶν 2000 δρ. εἰς 56 μῆνας θὰ εἶναι $56 \times 2000 \times \delta$.

Ὅμοίως εὐρίσκομεν ὅτι τὸ κέρδος τῶν 7000 δρ. εἰς 44 μῆνας εἶναι $44 \times 7000 \times \delta$, καὶ τὸ κέρδος τῶν 6000 δρ. εἰς 36 μῆνας εἶναι $36 \times 6000 \times \delta$. Ἐπομένως τὰ μερίδια τῶν συνεταίρων εἶναι κατὰ σειρὰν

$$\text{τοῦ } \alpha' \quad 56 \times 2000 \times \delta,$$

$$\text{τοῦ } \beta' \quad 44 \times 7000 \times \delta,$$

$$\text{τοῦ } \gamma' \quad 36 \times 6000 \times \delta,$$

καὶ τὰ τρία ταῦτα μερίδια θὰ συναποτελέσωσι τὸ ὅλον κέρδος, ἥτοι τὰς 18000 δραχμάς.

Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο, ἀρκεῖ νὰ μερίσωμεν τὸ κέρδος 18000 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 56×2000 , 44×7000 , 36×6000 , ἥτοι τῶν γινομένων, αἵτινα εὐρίσκομεν πολλαπλασιάζοντες τὸ κεφάλαιον ἐκάστου ἐπὶ τὸν χρόνον, καθ' ὃν ἔμεινεν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν.

Διαιροῦντες τοὺς ἀριθμοὺς τούτους διὰ 1000 ἔχομεν νὰ μερίσωμεν τὸν 18000 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν 56×2 , 44×7 , 36×6 καὶ ἔκτε-
λοῦντες τὸν μερισμὸν εὐρίσκομεν τὰ ἑξῆς μερίδια·

$$\alpha' \quad 3169 \frac{43}{53}, \quad \beta' \quad 8716 \frac{52}{53}, \quad \gamma' \quad 6113 \frac{11}{53}.$$

Πρὸς ἄσκησιν προτείνομεν εἰς λύσιν καὶ τὰ ἑξῆς προβλήματα.

1) Εἰς τὴν κατασκευὴν τῆς πυρίτιδος λαμβάνονται συνήθως 16 μέρη νίτρου, 3 μέρη ἄνθρακος καὶ 2 μέρη θείου. Πόσαι ὀκάδες ἑξ' ἐκάστης τῶν ὑλῶν τούτων χρειάζονται διὰ νὰ κατασκευασθῶσι 480 ὀκ. πυρίτιδος; Ἄπ. 640 ὀκ. νίτρου, 120 ὀκ. ἄνθρακος καὶ 80 ὀκ. θείου.

2) Ἐμπορος ἐχρεωκόπησεν ἔχων μὲν 12000 δρ., ὀφείλων δὲ εἰς μὲν τὸν Α 5800 δρ., εἰς τὸν Β 7600, εἰς δὲ τὸν Γ 9400 Πόσας ἐκ τῶν 12000 πρέπει νὰ λάβῃ ἕκαστος ἀναλόγως τῶν ὀφειλομένων εἰς αὐτόν ;

$$\left(\text{'Απ. ὁ Α } 3052 \frac{36}{57}, \text{ ὁ Β } 4000, \text{ ὁ Γ } 4947 \frac{21}{57} \right).$$

3) Ἐμπορὸς τις ἤρχισεν ἐπιχείρησίν τινα μὲ κεφάλαιον 10000 δρ. Μετὰ 8 μῆνας προσέλαβε καὶ συνέταιρον, ὅστις κατέβαλεν 6000 δρ., δύο δὲ ἔτη μετὰ ταῦτα εὗρον ὅτι ἐκέρδησαν 2900 δρ. Πόσας πρέπει νὰ λάβῃ ἕκαστος ἐξ αὐτῶν ; ('Απ. ὁ α' 2000, ὁ δὲ β' 900).

4) Πατὴρ τις διέταξεν ἐν τῇ διαθήκῃ του νὰ μοιρασθῇ ἡ περιουσία του εἰς τὰ τρία τέκνα του ὡς ἐξῆς· ὁ δεύτερος υἱὸς νὰ λάβῃ τὰ $\frac{5}{6}$ τῆς μερίδος τοῦ πρώτου, ἡ δὲ κόρη νὰ λάβῃ τὴν μερίδα τοῦ πρώτου καὶ τὸ ἡμισυ τῆς μερίδος τοῦ δευτέρου· ἡ περιουσία σύγκειται ἐξ 78000 δραχμῶν. Πόσας θὰ λάβῃ ἕκαστον τέκνον ;

$$(\text{'Απ. ὁ α' υἱὸς } 24000, \text{ ὁ β' } 20000, \text{ ἡ δὲ κόρη } 34000).$$

5) Θεὸς τις ἀφίνει εἰς τοὺς τρεῖς ἀνεψιούς του τὴν περιουσίαν του συνισταμένην ἐκ δραχ. 9372, διατάσσει δὲ νὰ λάβῃ ἕκαστος τόσα, ὥστε τὰ μερίδια αὐτῶν κατατιθέμενα εἰς τὴν τράπεζαν ἐπὶ τόκῳ ἀπλῶ 5 % νὰ γίνωνται ἴσα, ὅταν θὰ συμπληρώσωσι τὸ 21^{ον} ἔτος τῆς ἡλικίας των. Ὁ πρῶτος εἶναι 12 ἐτῶν, ὁ δεύτερος 9 καὶ ὁ τρίτος 5. Πόσας θὰ λάβῃ ἕκαστος ; ('Απ. ὁ α' 3456, ὁ β' 3132, ὁ γ' 2784).

6) Ἔργον τι ἐξετελέσθη ὑπὸ 2 ἐργατῶν, ἐξ ὧν ὁ μὲν πρῶτος εἰργάσθη 7 ἡμέρας ἐπὶ 6 ὥρας καθ' ἡμέραν, ὁ δὲ δεύτερος 12 ἡμέρας ἐπὶ 4 ὥρας καθ' ἡμέραν. Ἐλαβον δὲ ὡς πληρωμὴν δραχμὰς 45. Πόσας θὰ λάβῃ ἕκαστος ; ('Απ. ὁ α' 21, ὁ δὲ δεύτερος 24).

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΝΑΜΙΞΕΩΣ

300. Τὰ κυριώτερα προβλήματα τῆς ἀναμίξεως εἶναι δύο εἰδῶν.

α') Ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται ἡ τιμὴ τῆς μονάδος τοῦ μίγματος πραγμάτων, τῶν ὁποίων δίδονται αἱ ποσότητες καὶ ἡ τιμὴ τῆς μονάδος ἑκάστου.

β') Ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα δίδονται αἱ τιμαὶ τῆς μονάδος δύο πραγμάτων καὶ ζητεῖται, πόσον θὰ λάβωμεν ἐξ ἑκατέρου, διὰ νὰ σχηματίσωμεν μίγμα ὠρισμένον καὶ τοῦ ὁποίου ἡ μονὰς νὰ ἔχῃ δεδομένην τιμὴν.

Προβλήματα τοῦ πρώτου εἶδους.

Πρόβλημα.

Ἀνέμξέ τις τριῶν εἰδῶν οἶνους. Ἐκ τοῦ πρώτου εἶδους, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 50 λεπτά, ἔλαβεν 100 ὀκάδας, ἐκ τοῦ δευτέρου, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 35 λεπτά, ἔλαβε 250 καὶ ἐκ τοῦ τρίτου, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 80 λεπτά, ἔλαβε 50 ὀκάδας. Πόση θὰ εἶναι ἡ τιμὴ τῆς ὀκᾶς τοῦ μίγματος;

Φανερόν εἶναι ὅτι, διὰ νὰ λύσω τὸ πρόβλημα τοῦτο, ἀρκεῖ νὰ εὕρω τὴν ἀξίαν ἐκάστου τῶν ἀναμιχθέντων οἶνων, ἔπειτα ἔξ αὐτῶν τὴν ἀξίαν τοῦ μίγματος, μετὰ δὲ ταῦτα νὰ μερίσω τὴν ἀξίαν τοῦ μίγματος εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσαι εἶναι καὶ αἱ ὀκάδες αὐτοῦ· τὸ πηλίκον θὰ εἶναι ἡ ζητουμένη τιμὴ τῆς μιᾶς ὀκᾶς τοῦ μίγματος.

Ἀξία τοῦ πρώτου οἶνου $50 \times 100 = 5000$ λεπτά

» » δευτέρου » $35 \times 250 = 8750$ »

» » τρίτου » $80 \times 50 = 4000$ »

ἐπομένως ἀξία τοῦ μίγματος 17750 λεπτά.

Τὸ μίγμα σύγκειται ἔξ ὀκάδων $100 + 250 + 50$, ἥτοι 400.

Ἐπειδὴ δὲ αἱ 400 ὀκάδες τοῦ μίγματος ἀξίζουν 17750 λεπτά, ἡ μία ὀκᾶ αὐτοῦ θὰ ἀξίῃ $\frac{17750}{400}$ ἢ $44\frac{3}{8}$.

Πρόβλημα.

Συνεχωνεύθησαν 20 γραμμάρια ἀργύρου ἔχοντος βαθμὸν καθαρότητος 0,900 μετὰ 50 γραμμάριον ἀργύρου ἔχοντος βαθμὸν καθαρότητος 0,835. Ποῖος θὰ εἶναι ὁ βαθμὸς τῆς καθαρότητος τοῦ κράματος;

Σημείωσις. Λέγοντες ὅτι ὁ βαθμὸς τῆς καθαρότητος τοῦ ἀργύρου εἶναι 0,900 ἐννοοῦμεν ὅτι μόνον τὰ $\frac{900}{1000}$ αὐτοῦ εἶναι καθαρὸς ἀργύ-

ρος, τὰ δὲ ἄλλα $\frac{100}{1000}$ εἶναι ἄλλα μέταλλα εὐτελῆ.

Καὶ τὸ πρόβλημα τοῦτο, ὥς καὶ τὰ πρὸς αὐτὸ ὅμοια, λύεται κατὰ τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα τῆς ἀναμίξεως. Διότι εἶναι προφανές ὅτι ἀρκεῖ πρὸς λύσιν αὐτοῦ νὰ εὕρωμεν τὸ ποσὸν τοῦ καθαροῦ ἀργύρου, ὅστις ὑπάρχει εἰς ἕκαστον ἐκ τῶν ἀναμιχθέντων μετάλλων, ἔπειτα ἐκ τούτων τὸ ποσὸν τοῦ καθαροῦ ἀργύρου, ὅστις ὑπάρχει εἰς τὸ κράμα, καὶ

τέλος νὰ μερίσωμεν τὸ ποσὸν τοῦτο εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσαι εἶναι αἱ μονάδες τοῦ μίγματος. Τὸ πηλίκον θὰ εἶναι τὸ ποσὸν τοῦ καθαροῦ ἀργύρου, ὅστις ὑπάρχει εἰς ἐκάστην μονάδα τοῦ κράματος, τουτέστιν ὁ βαθμὸς τῆς καθαρότητος τοῦ κράματος.

καθαρ. ἀργ. τοῦ πρώτου $0,900 \times 20 = 18$, γραμμάρια

» » » δευτέρου $0,835 \times 50 = 41$, 75 »

ἐπομένως καθαρὸς ἀργυρος τοῦ κράματος $= 59$, γρ. 75.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ κράμα σύγκειται ἐκ $50 + 20$, ἥτοι 70 γραμμαρίων, συνάγεται ὅτι ἕκαστον γραμμάριον τοῦ κράματος ἔχει ἀργυρον κα-

θαρὸν $\frac{59,75}{70}$ ἢ 0,553...

Προβλήματα τοῦ δευτέρου εἶδους.

Πρόβλημα.

Οἶνοπώλης τις ἔχει δύο εἰδῶν οἶγους· τοῦ πρώτου εἶδους ἡ ὁκᾶ ἀξίζει 45 λεπτά, τοῦ δὲ δευτέρου 80, θέλει δὲ νὰ κάμῃ ἐξ αὐτῶν μῖγμα 800 ὁκάδων, τοῦ ὁποίου ἡ ὁκᾶ νὰ ἀξίξῃ 60 λεπτά. Πόσον θὰ βάλλῃ ἐξ ἑκάστου εἶδους;

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο, παρατηροῦμεν ὅτι μία ὁκᾶ τοῦ πρώτου εἶδους ἐπωλεῖτο χωριστὰ 45 λεπτά, τώρα δὲ εἰς τὸ μῖγμα εὐρισκομένη θὰ πωλῇται 60, ὥστε δι' ἐκάστην ὁκᾶν τοῦ πρώτου εἶδους θὰ κερδίξῃ ὁ οἶνοπώλης 15 λεπτά· ἀλλὰ πάλιν θὰ ζημιώνηται δι' ἐκάστην ὁκᾶν τοῦ δευτέρου 20 λεπτά (διότι χωριστὰ ἐπωλεῖτο 80 λεπτά καὶ τώρα εἰς τὸ μῖγμα εὐρισκομένη θὰ πωλῇται 60).

Λοιπὸν 1 ὁκᾶ τοῦ α' εἶδους κερδίζει 15 λεπτά,

1 ὁκᾶ τοῦ β' εἶδους χάνει 20 λεπτά·

ἄρα, ἂν βάλλῃ ἐκ τοῦ πρώτου εἶδους 20 ὁκάδας, θὰ κερδίσῃ 15×20 λεπτά, ἂν δὲ ἐκ τοῦ δευτέρου εἶδους βάλλῃ 15 ὁκάδας, θὰ χάσῃ 20×15 · καὶ ἐπειδὴ 15×20 εἶναι ἴσον μὲ τὸ 20×15 , συμπεραίνομεν ὅτι οὔτε κέρδος θὰ ἔχῃ οὔτε ζημίαν, ἂν ἀναμίξῃ

20 ὁκάδας ἐκ τοῦ α'·

καὶ 15 ὁκάδας ἐκ τοῦ β'·

ὥστε, ἂν ἤθελε νὰ κάμῃ μῖγμα 35 ὁκάδων, ἔπρεπε νὰ βάλλῃ

20 ὁκάδας ἐκ τοῦ α'·

καὶ 15 » ἐκ τοῦ β',

ἂν ἤθελε νὰ κάμῃ μῖγμα μιᾶς ὀκάς, ἔπρεπε νὰ βάλῃ

$$\text{ἐκ τοῦ α' εἵδους } \frac{20}{35},$$

$$\text{ἐκ τοῦ β' εἵδους } \frac{15}{35}.$$

Λοιπὸν διὰ νὰ κάμῃ μῖγμα 800 ὀκάδων, πρέπει νὰ βάλῃ

$$\text{ἐκ τοῦ α' εἵδους } \frac{20}{35} \times 800, \text{ ἥτοι } 457\frac{1}{7},$$

$$\text{ἐκ τοῦ β' εἵδους } \frac{15}{35} \times 800, \text{ ἥτοι } 342\frac{6}{7}.$$

Πρόβλημα.

Ἔχει τις δύο ὄγκους ἀργύρου· καὶ τοῦ μὲν πρώτου ὁ βαθμὸς τῆς καθαρότητος εἶναι 0,935, τοῦ δὲ δευτέρου 0,880. Πόσον πρέπει νὰ λάβῃ ἐξ ἑκατέρου, διὰ νὰ σχηματίσῃ 5 ὀκάδας ἀργύρου ἔχοντος βαθμὸν καθαρότητος 0,900;

Ἐκάστη ὀκά τοῦ πρώτου εἵδους εἰσάγει εἰς τὸ κρᾶμα 0,035 ἀργύρου περισσότερον τοῦ ἀπαιτουμένου (διότι τὸ κρᾶμα πρέπει νὰ ἔχῃ βαθμὸν καθαρότητος 0,900), ἐκάστη δὲ ὀκά τοῦ δευτέρου εἰσάγει εἰς τὸ κρᾶμα 0,020 ἀργύρου ὀλιγώτερον τοῦ ἀπαιτουμένου. Ὡστε ἐξ ἐκάστης ὀκάς τοῦ α' εἵδους περισσεύει ἄργυρος 0,035 τῆς ὀκάς, ἐξ ἐκάστης δὲ ὀκάς τοῦ β' λείπει ἄργυρος 0,020 τῆς ὀκάς.

Ἐὰν λοιπὸν βάλῃ 20 ὀκάδας ἐκ τοῦ α', θὰ περισσεύῃ ἄργυρος

$$0,035 \times 20 \text{ ὀκάδες,}$$

ἐὰν δὲ βάλῃ 20 ὀκάδας ἐκ τοῦ δευτέρου, θὰ λείπῃ ἄργυρος

$$0,020 \times 35 \text{ ὀκάδες.}$$

Ὡστε, ἐὰν βάλῃ 35 ὀκάδας ἐκ τοῦ α' καὶ 35 ὀκάδας ἐκ τοῦ δευτέρου, ὅσος ἄργυρος λείπει ἐκ τοῦ ἑνὸς εἵδους, τόσος περισσεύει ἐκ τοῦ ἄλλου καὶ ἐπομένως τὸ κρᾶμα οὔτε περισσότερον τοῦ ἀπαιτουμένου θὰ περιέχῃ ἄργυρον οὔτε ὀλιγώτερον.

Ἄν λοιπὸν ἤθελε νὰ κάμῃ κρᾶμα 55 ὀκάδων, ἔπρεπε νὰ βάλῃ

$$20 \text{ ὀκ. ἐκ τοῦ α'}$$

$$\text{καὶ } 35 \text{ ὀκ. ἐκ τοῦ β'},$$

ἂν ἤθελε νὰ κάμῃ κρᾶμα 1 ὀκ., ἔπρεπε νὰ βάλῃ

$$\frac{20}{55} \text{ ἐκ τοῦ α'}$$

$$\text{καὶ } \frac{35}{55} \text{ ἐκ τοῦ β'.$$

Λοιπὸν διὰ τὰ κάμη κρᾶμα 5 ὁκάδων, πρέπει νὰ βάλῃ

$$\frac{20}{55} \times 5 \text{ ἐκ τοῦ } \alpha', \text{ ἤτοι } 1 \cdot \delta\kappa. \ 327 \ \delta\rho. \ \frac{3}{11}$$

$$\text{καὶ } \frac{35}{55} \times 5 \text{ ἐκ τοῦ } \beta', \text{ ἤτοι } 2 \cdot \delta\kappa. \ 72 \ \delta\rho. \ \frac{8}{11}$$

Πρὸς ἄσκησιν προτείνομεν εἰς λύσιν καὶ τὰ ἑξῆς προβλήματα.

1) Σιτέμπορος ἀνέμιξε τρία εἶδη σίτου· καὶ ἐκ μὲν τοῦ πρώτου εἵδους ἔλαβεν 800 ὁκάδας, ἐκ δὲ τοῦ δευτέρου 1500 καὶ ἐκ τοῦ τρίτου 2000· πρὶν τὰ ἀναμίξῃ, ἐπώλει τὸ πρῶτον εἶδος πρὸς 40 λεπτά τὴν ὁκάην, τὸ δεύτερον πρὸς 30 καὶ τὸ τρίτον πρὸς 25. Πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὴν ὁκάην τοῦ μίγματος, διὰ τὰ κερδήσῃ 10% ἐπὶ τῆς ἀξίας αὐτοῦ ;

Σημείωσις. Θὰ εὗρωμεν πρῶτον, πόσον ἀξίζει τὸ μῖγμα, ἔπειτα θὰ προσθέσωμεν εἰς τὴν ἀξίαν τοῦ μίγματος τὸν τόκον αὐτῆς πρὸς 10% (δι' ἐν ἔτος) καὶ τὸ ἄθροισμα εἶναι τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ λάβῃ ἐκ τῆς πωλήσεως τοῦ μίγματος· διαιροῦντες τὸ ἄθροισμα τοῦτο εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσαι εἶναι αἱ ὁκάδες τοῦ μίγματος, θὰ εὗρωμεν τὸ ζητούμενον. Οὕτως εὗρισκομεν ὅτι πρέπει νὰ πωλῇ τὴν ὁκάην

πρὸς 32 λεπτά καὶ $\frac{21}{43}$ τοῦ λεπτοῦ.

2) Οἶνοπώλης ἔχει δύο εἰδῶν οἶνον· καὶ τοῦ μὲν πρώτου εἵδους πωλεῖ τὴν ὁκάην 80 λεπτά, τοῦ δὲ δευτέρου 45, θέλει δὲ νὰ κάμη ἐξ αὐτῶν μῖγμα 2800 ὁκάδων, τοῦ ὁποίου τὴν ὁκάην νὰ πωλῇ 54 λεπτά καὶ νὰ κερδήσῃ 8% ἐπὶ τῆς ἀξίας τοῦ μίγματος. Πόσας ὁκάδας πρέπει νὰ λάβῃ ἐξ ἑκατέρου τῶν οἴνων ;

Σημείωσις. Διὰ τὰ κερδήσῃ 8% ἐπὶ τῆς ἀξίας τοῦ μίγματος, ἀρκεῖ νὰ κερδήσῃ 8% ἐπὶ τῆς ἀξίας ἑκάστης ὁκάδος· πρέπει λοιπὸν νὰ προσθέσωμεν εἰς τὴν τιμὴν τῆς ὁκάδος ἑκάστου εἵδους 8%, ὥστε πρέπει νὰ λάβωμεν ὡς τιμὴν τοῦ α' εἵδους 86λ. 4, ὡς τιμὴν δὲ τοῦ δευτέρου 48λ. 6 καὶ ἔπειτα νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα ὡς τὰ προβλήματα τοῦ δευτέρου εἵδους τῆς ἀναμίξεως. Οὕτως εὗρισκομεν ὅτι πρέπει νὰ λάβῃ ἐκ μὲν τοῦ α' εἵδους 400 ὁκάδας, ἐκ δὲ τοῦ β' 2400.

3) Ἐχει τις 85 δράμια ἀργύρου, τοῦ ὁποίου ὁ βαθμὸς καθαρότητος εἶναι 0,900 καὶ θέλει νὰ ἀναβιβάσῃ τὸν βαθμὸν τῆς καθαρότητος αὐτοῦ εἰς 0,975. Πόσον καθαρὸν ἄργυρον πρέπει νὰ ἀναμίξῃ μετ' αὐτοῦ ;

(Ἄπ. 255 δράμια).

4) Ἐμπορός τις ἠγόρασεν 850 ὀκάδας ἐλαίου πρὸς 95 λεπτά τὴν ὀκᾶν, ἔπειτα 2800 ὀκάδας πρὸς 1,05 καὶ τέλος 1890 ὀκάδας πρὸς 90 λεπτά. Ἐὰν τώρα θέλῃ νὰ πωλήσῃ ὅλον τὸ ἔλαιον τοῦτο διὰ μιᾶς, πρὸς πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ τὴν ὀκᾶν, διὰ νὰ μὴ ζημιωθῇ; καὶ πρὸς πόσον, ἂν θέλῃ νὰ κερδήσῃ 30 % ἐπὶ τῆς ἀξίας του;

(Ἐπ. 98λ. $\frac{193}{554}$. Ἄν δὲ θέλῃ νὰ κερδήσῃ 30 %, θὰ πωλήσῃ πρὸς 1 δρ. 27 $\frac{236}{277}$).

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΜΕΣΩΝ

301. Ἀριθμητικὸν μέσον ἢ μέσος ὅρος διαφόρων ποσῶν ὁμοειδῶν λέγεται τὸ ἄθροισμα αὐτῶν διηρημένον διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις ἐκφράζει τὸ πλῆθος αὐτῶν.

Παραδείγματος χάριν, ὁ μέσος ὅρος τῶν ἀριθμῶν 12, 18 καὶ 30 εἶναι $\frac{12 + 18 + 30}{3}$, ἥτοι 20, ὁ δὲ μέσος ὅρος τῶν ἀριθμῶν 20, 35, 40

61 εἶναι $\frac{156}{4}$ ἢ 39.

Τοὺς μέσους ὅρους μεταχειρίζομεθα εἰς πολλὰς περιστάσεις.

Ὑποθέσωμεν λόγου χάριν, ὅτι ἔμετρήσαμεν τὸ μήκος μιᾶς γραμμῆς τρεῖς φορές· καὶ τὴν μὲν πρώτην φορὰν εὗρήκαμεν ὅτι εἶναι 5, 8 μέτρα, τὴν δὲ δευτέραν 5, 76, τὴν δὲ τρίτην 5, 758 (εὗρήκαμεν δὲ διαφόρους ἀριθμοὺς εἰς τὰς τρεῖς καταμετρήσεις διὰ τὰ λάθη, εἰς ᾧ ὑποπίπτομεν ἕνεκα τῆς ἀτελείας τῶν ὀργάνων ἡμῶν)· τότε ὥς πιθανωτέραν τιμὴν τοῦ μήκους τῆς γραμμῆς λαμβάνομεν τὸν μέσον ὅρον τῶν τριῶν εὐρεθέντων ἀριθμῶν, ἥτοι

$\frac{1}{3} (5,8 + 5,76 + 5,758)$ ἢ 5,772 ...

Ὡς παράδειγμα τῶν μέσων ὄρων ἔστω καὶ τὸ ἑξῆς.

Τὰ εἰσοδήματα τῶν τελωνείων κράτους τινὸς ἦσαν

τῷ 1880	δραχμαὶ	7 489 851
τῷ 1881	»	8 500 314
τῷ 1882	»	8 358 705
τῷ 1883	»	9 005 015
τῷ 1884	»	10 267 519
τῷ 1885	»	12 665 758.

Ζητεῖται ὁ μέσος ὅρος τῶν εἰσοδημάτων τῶν τελωνείων κατὰ τὰ ἑξ ἑαυτὰ ἔτη.

Προσθέτοντες τὰ εἰσοδήματα τῶν ἑξ ἐτῶν εὗρισκομεν 56287162 καὶ λαμβάνοντες τὸ ἕκτον τούτου εὗρισκομεν ὥς μέσον ὅρον 9 381 193,66...

*ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΤΟΥ Ζ' ΒΙΒΛΙΟΥ

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

302. Ἐξίσωσις λέγεται ισότης, συνδέουσα πρὸς ἄλληλα γνωστὰ καὶ ἄγνωστα.

Παραδείγματος χάριν, ἡ ισότης $3x=12$ συνδέει τὸν ἄγνωστον ἀριθμὸν x μετὰ τῶν γνωστῶν 3 καὶ 12 · εἶναι λοιπὸν ἐξίσωσις.

Ὅμοίως ἡ ισότης $\frac{x}{2}+5=3x-5$ εἶναι ἐξίσωσις.

Καὶ ἡ ισότης $3x-\psi=1$, ἣτις συνδέει πρὸς ἀλλήλους δύο ἀγνώστους ἀριθμοὺς x , ψ καὶ γνωστοὺς ἀριθμούς, εἶναι ἐξίσωσις.

Λύσις τῆς ἐξισώσεως (ὅταν περιέχῃ ἕνα ἄγνωστον) λέγεται ἡ εὕρεσις τοῦ ἀγνώστου αὐτῆς, ἥτοι ἡ εὕρεσις τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις τιθέμενος ἀντὶ τοῦ ἀγνώστου x καθιστᾷ τὴν ἐξίσωσιν ἀληθῆ, ἥτοι ἐπαληθεύει αὐτήν.

303. Τὴν λύσιν τῶν ἐξισώσεων θὰ μάθωμεν ἀλλαχοῦ λεπτομερῶς. Ἐνταῦθα παρατηροῦμεν μόνον τοῦτο, ὅτι ἡ λύσις τῶν ἐξισώσεων στηρίζεται ἐπὶ τῶν ιδιοτήτων τῆς ισότητος καὶ ἐπὶ τῶν γενικῶν ιδιοτήτων τῶν τεσσάρων πράξεων.

Αἱ ιδιότητες τῆς ισότητος, ἐπὶ τῶν ὁποίων στηρίζεται ἡ λύσις τῶν ἐξισώσεων, εἶναι αἱ ἑξῆς.

- 1) Ἐὰν εἰς ἴσα προσθέσωμεν ἴσα, προκύπτουσιν ἴσα.
- 2) Ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἀφαιρέσωμεν ἴσα, προκύπτουσιν ἴσα.
- 3) Ἐὰν ἴσα πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ ἴσα, προκύπτουσιν ἴσα.
- 4) Ἐὰν ἴσα διαιρέσωμεν δι' ἴσων, προκύπτουσιν ἴσα.

Λύσις μιᾶς ἐξισώσεως μὲ ἕνα ἄγνωστον.

Διὰ νὰ ἐννοήσωμεν, πῶς γίνεται ἡ λύσις τῶν ἐξισώσεων, θὰ λάβωμεν ἀπλᾶ τινὰ παραδείγματα.

Ἐστω ἡ ἐξίσωσις

$$5x=85.$$

Διὰ νὰ λύσωμεν αὐτήν, διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ ἴσα διὰ τοῦ 5 καὶ εὐρίσκομεν $x=17$, ὥστε ὁ ἄγνωστος εἶναι 17 · οὗτος δηλαδὴ ὁ ἀριθμὸς (καὶ οὗτος μόνος) τιθέμενος ἀντὶ τοῦ x εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν καθιστᾷ αὐτὴν ἀληθῆ· καὶ ὅντως εἶναι

$$5 \times 17 = 85.$$

Ἐστω προσέτι ἡ ἐξίσωσις

$$2x-3=17.$$

Διὰ νὰ λύσωμεν αὐτήν, προσθέτομεν εἰς ἀμφοτέρω τὰ ἴσα τὸν ἀριθμὸν 3, ὅτε προκύπτει $2x - 3 + 3 = 17 + 3$ ἢ $2x = 20$.
 διαιροῦμεν τώρα ἀμφοτέρω τὰ ἴσα διὰ 2 καὶ εὐρίσκομεν $x = 10$. ὥστε ὁ μόνος ἀριθμὸς ὁ τὴν ἐξίσωσιν ἐπαληθεύων εἶναι ὁ 10.
 καὶ τῷ ὄντι εἶναι $2 \times 10 - 3 = 17$ ἢ $17 = 17$.

Ἐστω καὶ ἡ ἐξίσωσις $2x + 8 = 7x - 12$.

Διὰ νὰ λύσωμεν αὐτήν, προσθέτομεν εἰς ἀμφοτέρω τὰ ἴσα τὸν ἀριθμὸν 12, ὅτε εὐρίσκομεν $2x + 8 + 12 = 7x - 12 + 12$.
 ἤτοι $2x + 20 = 7x$ ἔπειτα ἀφαιροῦμεν ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν ἴσων τούτων $2x$, ὅτε εὐρίσκομεν

$$2x - 2x + 20 = 7x - 2x \quad \text{ἢ} \quad 20 = (7 - 2)x,$$

$$\text{τουτέστιν } 20 = 5x$$

τέλος διαιροῦμεν ἀμφοτέρω τὰ ἴσα διὰ τοῦ 5 καὶ εὐρίσκομεν $4 = x$.

Ἐκ τούτων βλέπομεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς 4, ἂν τεθῇ ἀντὶ τοῦ x (καὶ μόνος οὗτος), ἐπαληθεύει τὴν ἐξίσωσιν· καὶ τῷ ὄντι θέτοντες 4 εἰς τὴν ἐξίσωσιν ἀντὶ x εὐρίσκομεν $2 \times 4 + 8 = 7 \times 4 - 12$ ἢ $16 = 16$, ὅπερ ἀληθές· ἂν ὁμως τεθῇ ἄλλος οἰοσδήποτε ἀριθμὸς ἀντὶ τοῦ x , ἡ ἰσότης δὲν ἀληθεύει.

$$\text{Ἐστω προσέτι ἡ ἐξίσωσις } \frac{x}{2} - 1 = \frac{x+1}{3}.$$

Πρὸς λύσιν αὐτῆς πολλαπλασιάζομεν πρῶτον ἀμφοτέρω τὰ ἴσα ἐπὶ 2·3 (ἤτοι ἐπὶ κοινόν τι πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστικῶν 2 καὶ 3) καὶ εὐρίσκομεν

$$2 \cdot 3 \cdot \frac{x}{2} - 1 \cdot 2 \cdot 3 = 2 \cdot 3 \cdot \frac{x+1}{3},$$

$$\text{ἤτοι} \quad 3x - 6 = 2(x+1)$$

$$\text{ἢ} \quad 3x - 6 = 2x + 2$$

προσθέτομεν ἔπειτα εἰς ἀμφοτέρω τὰ ἴσα τὸν ἀριθμὸν 6, ὅτε εὐρίσκομεν

$$3x = 2x + 8$$

ἀφαιροῦμεν ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν ἴσων τὸν ἀριθμὸν $2x$, ὅτε εὐρίσκομεν

$$3x - 2x = 2x + 8 - 2x,$$

$$\text{ἤτοι} \quad x = 8.$$

Ὡστε ὁ μόνος ἀριθμὸς, ὅστις λύει τὴν ἐξίσωσιν, εἶναι ὁ 8· καὶ τῷ ὄντι ἔχομεν $\frac{8}{2} - 1 = \frac{8+1}{3}$ ἢ $4 - 1 = 3$, ὅπερ ἀληθές.

Σημείωσις. Μία ἐξίσωσις μόνον ἓνα ἄγνωστον δύναται νὰ προσδιο-

ρίση· ἂν δὲ ἐξίσωσίς τις περιέχῃ ἀγνώστους περισσοτέρους τοῦ ἑνός, δυνάμεθα νὰ δώσωμεν οἷασδὴποτε τιμὰς θέλομεν εἰς πάντας τοὺς ἄλλους πλὴν ἑνός. Τότε οὗτος ἀπομένει μόνος ἀγνώστος ἐν τῇ ἐξίσώσει καὶ προσδιορίζεται ἐξ αὐτῆς.

Ἐστω π. χ. ἡ ἐξίσωσις $2\chi - 3\psi = 1$. Ἐὰν δώσωμεν εἰς τὸν ψ τὴν τιμὴν 1, ἡ ἐξίσωσις γίνεται $2\chi - 3 = 1$, ἐξ ἧς εὐρίσκομεν $\chi = 2$. Ἐὰν δὲ δώσωμεν εἰς τὸν ψ τὴν τιμὴν 2, ἡ ἐξίσωσις γίνεται $2\chi - 6 = 1$, ἐξ ἧς εὐρίσκομεν $\chi = 3\frac{1}{2}$ καὶ οὕτω καθεξῆς.

Λύσεις δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους.

Ἐστῶσαν αἱ ἐξισώσεις $\chi + \psi = 30$

$$\chi - \psi = 18.$$

Ἐνταῦθα πρέπει νὰ εὕρωμεν δύο ἀριθμούς, οἱ ὅποιοι νὰ ἐπαληθεύωσι καὶ τὰς δύο ταύτας ἐξισώσεις (ἥτοι νὰ ἔχωσιν ἄθροισμα μὲν 30, διαφορὰν δὲ 18).

Ἐὰν προσθέσωμεν ἴσα εἰς ἴσα, εὐρίσκομεν

$$\chi + \psi + \chi - \psi = 48$$

ἢ $\chi + \chi + \psi - \psi = 48$ ἢ $2\chi = 48$.
ὅθεν καὶ $\chi = 24$.

Ἀφοῦ εὐρήκαμεν τὸν χ , θέτομεν τὴν τιμὴν αὐτοῦ εἰς μίαν ἐκ τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων, ἔστω εἰς τὴν $\chi + \psi = 30$, καὶ εὐρίσκομεν

$$24 + \psi = 30 \cdot \text{ὅθεν } \psi = 6.$$

Ὡστε οἱ μόνοι ἀριθμοί, οἱ τὰς δοθείσας ἐξισώσεις ἐπαληθεύοντες, εἶναι ὁ 24 καὶ ὁ 6· καὶ ὁντως εἶναι

$$24 + 6 = 30 \text{ καὶ } 24 - 6 = 18.$$

Ἐστῶσαν προσέτι αἱ δύο ἐξισώσεις

$$3\chi - \psi = 2$$

$$7\chi + 2\psi = 48.$$

Ἐὰν τώρα προσθέσωμεν τὰς ἐξισώσεις ταύτας, δὲν θὰ φύγῃ ὁ ἀγνώστος ψ (ὥς εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα συνέβη), διότι εἰς τὴν μίαν προστίθεται 2ψ , εἰς δὲ τὴν ἄλλην ἀφαιρεῖται ψ , ἀλλ' εἶναι εὐκόλον νὰ γίνῃ καὶ εἰς τὴν πρώτην 2ψ ἀντὶ ψ , ἀρκεῖ νὰ διπλασιάσωμεν ἀμφοτέρω τὰ ἴσα αὐτῆς· τότε ἡ πρώτη ἐξίσωσις γίνεται

$$6\chi - 2\psi = 4.$$

ἡ δὲ δευτέρα εἶναι

$$7\chi + 2\psi = 48.$$

ὅθεν προσθέτοντες ἴσα εἰς ἴσα λαμβάνομεν

$$13\chi = 52 \cdot \text{ὅθεν } \chi = 4.$$

Ἐὰν δὲ τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ χ θέσωμεν εἰς τὴν δευτέραν τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων, λαμβάνομεν $28 + 2\psi = 48$,

$$\text{ἐξ ἧς } 2\psi = 20 \text{ καὶ } \psi = 10.$$

ὥστε οἱ μόνοι ἀριθμοί, οἱ τὰς δοθείσας ἐξισώσεις ἐπαληθεύοντες, εἶναι $\chi = 4$ καὶ $\psi = 10$.

Συμψύωσις. Ἐν γένει, ὅταν θέλωμεν διὰ τῆς προσθέσεως τῶν ἐξισώσεων ἢ διὰ τῆς ἀφαιρέσεως αὐτῶν νὰ φύγῃ ὁ εἰς ἄγνωστος (καὶ τοιούτοτρόπως νὰ εὐκολυνθῇ ἡ λύσις), πρέπει νὰ κάμωμεν, ὥστε ὁ ἄγνωστος οὗτος νὰ ἔχῃ τὸν αὐτὸν πολλαπλασιαστικὴν εἰς ἀμφοτέρας τὰς ἐξισώσεις, γίνεται δὲ τοῦτο πάντοτε, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἑκατέραν τῶν ἐξισώσεων μὲ τὸν ἀριθμὸν, ὅστις πολλαπλασιάζει τὸν ἄγνωστον ἐν τῇ ἄλλῃ.

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

304. Πᾶσαι αἱ προηγούμενοι μέθοδοι τῆς λύσεως τῶν προβλημάτων ὑπάγονται εἰς τὴν μέθοδον τῶν ἐξισώσεων, συνίσταται δὲ αὕτη εἰς τοῦτο· εὐρίσκομεν ἐξίσωσιν τινα, ἣτις συνδέει τὰ γνωστὰ τοῦ προβλήματος πρὸς τὸν ἄγνωστον αὐτοῦ (ἦτοι τὰ δεδομένα πρὸς τὸ ζητούμενον)· ἔπειτα λύομεν τὴν ἐξίσωσιν ταύτην καὶ οὕτως ἔχομεν τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν.

Διὰ νὰ ἐννοήσωμεν τὴν μέθοδον ταύτην, ἃς ἐφαρμόσωμεν αὐτὴν εἰς τὰ ἤδη λυθέντα (διὰ τῶν ἄλλων μεθόδων) προβλήματα.

1) 15 ὀκάδες ἐξ ἑνὸς πράγματος ἀξίζουσιν 128 δραχμάς. Πόσον ἀξίζουν 40 ὀκ. ἐκ τοῦ αὐτοῦ πράγματος;

Ἄν παραστήσωμεν διὰ τοῦ χ τὴν ἀξίαν τῶν 40 ὀκάδων, ἡ ἀξία τῆς μιᾶς ὀκάς θὰ εἶναι $\frac{\chi}{40}$.

Ἄλλ' ἐπειδὴ 15 ὀκάδες ἀξίζουσιν 128 δραχμάς, ἡ ἀξία τῆς ὀκάς θὰ εἶναι $\frac{128}{15}$, ἄρα θὰ εἶναι $\frac{\chi}{40} = \frac{128}{15}$.

ἐὰν δὲ πολλαπλασιάσωμεν τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ἐπὶ 40 (δηλαδὴ ἀμφοτέρα τὰ ἴσα αὐτῆς), εὐρίσκομεν

$$\chi = \frac{40 \times 128}{15},$$

τὸ ἐξαγόμενον δὲ τοῦτο δίδει καὶ ὁ κανὼν τοῦ ἑδαφίου 278.

2) Ἐργάται τινὲς ἐργαζόμενοι 8 ὥρας καθ' ἡμέραν ἐτελείωσαν ἔργον τι εἰς 15 ἡμέρας. Πόσας ὥρας ἔπρεπε νὰ ἐργάζωνται καθ' ἡμέραν, ἂν ᾔθελον νὰ τελειώσωσιν αὐτὸ εἰς 12 ἡμέρας;

Ἐστω χ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν ὥρῶν. Ὅταν ἡ ἐργασία διαρκέσῃ 12 ἡμέρας, ὁ ὅλος ἀριθμὸς τῶν ὥρῶν, καθ' ἃς ἐκτελεῖται, θὰ εἶναι 12χ , ὅταν δὲ διαρκέσῃ 15 ἡμέρας, ὁ ὅλος ἀριθμὸς τῶν ὥρῶν, καθ' ἃς ἐκτελεῖται, εἶναι 15×8 . ἐντεῦθεν συνάγομεν ὅτι θὰ εἶναι $12\chi = 15 \times 8$ καὶ διαιροῦντες ἀμφοτέρωθεν διὰ 12 εὐρίσκομεν $\chi = \frac{16 \times 8}{12}$, ἥτοι $\chi = 10$.

Προβλήματα τόκου.

Ἐστω κ τὸ κεφάλαιον, τ ὁ τόκος, ϵ τὸ ἐπιτόκιον καὶ χ ὁ χρόνος (εἰς ἔτη).

Διὰ νὰ εὗρωμεν τὸν τόκον ἐκ τριῶν ἄλλων, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

Ἐπειδὴ 100 δραχμαὶ φέρουσιν εἰς ἓν ἔτος τόκον ϵ δραχμᾶς, ἡ μία δραχμὴ φέρει εἰς ἓν ἔτος τόκον $\frac{\epsilon}{100}$ καὶ αἱ κ δραχμαὶ εἰς ἓν ἔτος φέρουσι τόκον $\frac{\epsilon \cdot \kappa}{100}$, ἄρα αἱ κ δραχμαὶ εἰς χ ἔτη θὰ φέρωσι τόκον $\frac{\kappa \cdot \epsilon \cdot \chi}{100}$.

εἶναι λοιπὸν $\tau = \frac{\kappa \cdot \epsilon \cdot \chi}{100}$.

(Παράβαλε ἐδ. 286).

Σημείωσις. Ἀντὶ $\kappa \times \epsilon \times \chi$ ἐγράψαμεν διὰ συντομίαν $\kappa \cdot \epsilon \cdot \chi$ ἡ γραφὴ αὕτη τοῦ γινομένου εἶναι συνήθης, ὅταν οἱ ἀριθμοὶ παριστῶνται διὰ γραμμάτων.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης, ἣτις συνδέει τὰ τέσσαρα ποσὰ (κεφάλαιον, ἐπιτόκιον, τόκον καὶ χρόνον), δυνάμεθα νὰ εὗρωμεν ἀμέσως τὸ ἓν, ὅταν ἔχωμεν τὰ τρία ἄλλα.

Ἐὰν λόγου χάριν θέλωμεν νὰ εὗρωμεν τὸ κεφάλαιον κ ἐκ τῶν τριῶν ἄλλων, πολλαπλασιάζομεν ἀμφοτέρωθεν τὰ ἴσα ἐπὶ 100 καὶ εὐρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $100 \cdot \tau = \kappa \cdot \epsilon \cdot \chi$.

(α)

ἔπειτα διαιροῦμεν ἀμφοτέρωθεν τὰ ἴσα διὰ τοῦ γινομένου $\epsilon \cdot \chi$ τότε εὐρίσκομεν $\frac{100 \cdot \tau}{\epsilon \cdot \chi} = \kappa$.

(Παράβαλε ἐδ. 287).

Ἐὰν δὲ θέλωμεν νὰ εὗρωμεν τὸν χρόνον ἐκ τῶν τριῶν ἄλλων, διαιροῦμεν ἀμφοτέρωθεν τὰ ἴσα (α) διὰ τοῦ γινομένου $\kappa \cdot \epsilon$ τότε εὐρίσκομεν

$$\frac{100\tau}{\kappa \cdot \varepsilon} = \chi.$$

(Παράβαλε ἐδ. 288).

Ἐὰν τέλος θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἐπιτόκιον ε , διαιροῦμεν τὰ ἴσα
(α) διὰ τοῦ γινομένου $\kappa \cdot \chi$ καὶ εὕρισκομεν

$$\frac{100 \cdot \tau}{\kappa \cdot \chi} = \chi.$$

(Παράβαλε ἐδ. 289).

Ὡστε πάντα τὰ προβλήματα τοῦ τόκου λύνονται ἐκ μιᾶς μόνης
ἐξισώσεως

$$\tau = \frac{\kappa \cdot \varepsilon \cdot \chi}{100}.$$

Σημείωσις. Ὅμοίως λύνονται τὰ προβλήματα τῆς ὑφαίρεσεως ἐκ
τῆς ἐξισώσεως

$$v = \frac{\kappa \cdot \chi \cdot \varepsilon}{100 + \chi \cdot \varepsilon},$$

τὴν ὁποίαν εὕρισκομεν κατὰ τὰ ἐν τῷ ἑδαφίῳ 294 ἐκτεθέντα καὶ ἐν
τῇ ὁποίᾳ v σημαίνει τὴν ὑφαίρεσιν (ἐσωτερικὴν).

Μερισμὸς εἰς μέρη ἀνάλογα.

Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς K εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν α, β, γ .

Τὰ ζητούμενα μέρη τοῦ K ὡς ἀνάλογα τῶν α, β, γ θὰ εἶναι

$$\alpha\chi, \quad \beta\chi, \quad \gamma\chi.$$

τοῦ χ ὄντος ἀγνώστου ἀριθμοῦ.

Ἐπειδὴ δὲ τὰ μέρη τοῦ K προστιθέμενα δίδουσι τὸν K , ἔπεται

$$\alpha\chi + \beta\chi + \gamma\chi = K,$$

ἥτοι

$$(\alpha + \beta + \gamma) \cdot \chi = K$$

(ἐδ. 174),

καὶ ἂν διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ ἴσα διὰ τοῦ $\alpha + \beta + \gamma$, εὕρισκομεν

$$\chi = \frac{K}{\alpha + \beta + \gamma}.$$

ὥστε τὰ μέρη τοῦ K θὰ εἶναι

$$\frac{\alpha K}{\alpha + \beta + \gamma}, \quad \frac{\beta K}{\alpha + \beta + \gamma}, \quad \frac{\gamma K}{\alpha + \beta + \gamma}.$$

Προβλήματα ἀναμίξεως.

1) Ἔχει τις σῖτον τριῶν εἰδῶν. Τοῦ πρώτου ἡ ὁκά ἀξίζει 30 λεπτά, τοῦ δευτέρου 25, τοῦ δὲ τρίτου 22. Ζητεῖται, ἂν ἀναμίξῃ 800 ὁκάδας ἐκ τοῦ πρώτου εἶδους καὶ 1000 ἐκ τοῦ δευτέρου καὶ 1800 ἐκ τοῦ τρίτου, πόση θὰ εἶναι ἡ ἀξία τῆς ὁκάς τοῦ μίγματος.

Ἐστω χ ἡ ζητουμένη ἀξία τῆς ὁκάς τοῦ μίγματος. Ἐπειδὴ τὸ μί-
γματοποίηθη ἀπὸ το Ἰνστιτούτο Εκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

γμα συνίσταται ἐξ $800 + 1000 + 1800$ ὀκάδων, ἡ ἀξία αὐτοῦ θὰ εἶναι $(800 + 1000 + 1800) \cdot \chi$.

Ἄλλ' ἡ ἀξία τοῦ μίγματος εὐρίσκεται καὶ ἐκ τῶν ἀξιῶν τῶν μερῶν του· καὶ τὸ μὲν πρῶτον μέρος, ἦτοι αἱ 800 ὀκάδες τοῦ πρώτου εἵδους, ἀξίζει 30×800 λεπτά, τὸ δὲ δευτέρον 25×1000 καὶ τὸ τρίτον 22×1800 ὥστε ἡ ἀξία τοῦ μίγματος εἶναι λεπτά.

$$30 \times 800 + 25 \times 1000 + 22 \times 1800.$$

Ἄρα ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν.

$$(800 + 1000 + 1800) \cdot \chi = 30 \times 800 + 25 \times 1000 + 22 \times 1800$$

$$\text{καὶ } \chi = \frac{30 \times 800 + 25 \times 1000 + 22 \times 1800}{800 + 1000 + 1800} = \frac{886}{36} = 24 \frac{11}{18}.$$

2) Ἐχει τις δύο εἰδῶν οἶνους· τοῦ πρῶτου εἶδους ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 55 λεπτά, τοῦ δευτέρου 90, θέλει δὲ νὰ κάμῃ ἐξ αὐτῶν μῖγμα 1200 ὀκάδων, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ νὰ ἀξίῃ 60 λεπτά. Πόσας ὀκάδας πρέπει νὰ λάβῃ ἐξ ἑκατέρου εἶδους;

Ἐστῶσαν χ αἱ ὀκάδες, τὰς ὁποίας πρέπει νὰ λάβῃ ἐκ τοῦ πρώτου εἶδους, καὶ ψ αἱ ὀκάδες τοῦ δευτέρου.

Ἐπειδὴ τὸ μῖγμα θὰ ἔχῃ 1200 ὀκάδας, θὰ εἶναι προφανῶς

$$\chi + \psi = 1200.$$

Ἡ ἀξία τοῦ μίγματος θὰ εἶναι λεπτά 60×1200 ,

ἀλλ' αἱ χ ὀκάδες τοῦ πρώτου εἶδους ἀξίζουν λεπτά 55χ , αἱ δὲ ψ ὀκάδες τοῦ δευτέρου ἀξίζουν 90ψ · ἄρα ἡ ἀξία τοῦ μίγματος θὰ εἶναι $55\chi + 90\psi$.

Ἐντεῦθεν συνάγεται ἡ ἐξίσωσις $55\chi + 90\psi = 60 \times 1200$:

Ἐχομεν λοιπὸν πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος τὰς δύο ἐξισώσεις

$$\chi + \psi = 1200$$

$$55\chi + 90\psi = 60 \cdot 1200.$$

Πρὸς λύσιν τῶν ἐξισώσεων τούτων πολλαπλασιάζομεν τὴν πρώτην ἐπὶ 90 καὶ ἔπειτὰ ἀφαιροῦμεν ἀπ' αὐτῆς τὴν δευτέραν· τότε ἐξαφανίζεται ὁ ἄγνωστος ψ καὶ εὐρίσκομεν

$$90\chi - 55\chi = 1200 \cdot 90 - 1200 \cdot 60$$

$$\eta \quad (90 - 55) \chi = 1200 (90 - 60) \quad (\text{ἐδ. 51})$$

$$\delta\theta\epsilon\upsilon\eta \text{ καὶ } \chi = 1200 \cdot \frac{90 - 60}{90 - 55} \quad \eta \quad 1200 \cdot \frac{30}{35} \quad \eta \quad 1200 \cdot \frac{6}{7}.$$

$$\text{Ὅμοίως εὐρίσκομεν καὶ } \psi = 1200 \cdot \frac{60 - 55}{90 - 55} \quad \eta \quad 1200 \cdot \frac{1}{7}.$$

Σημείωσις. Ἐὰν τὰ ποσά, τὰ ὁποῖα θὰ ἀναμιχθῶσιν, εἶναι τριῶν ἢ καὶ περισσοτέρων εἰδῶν, θὰ ἔχωμεν κατὰ τὰ ἀνωτέρω εἰρημένα δύο ἐξισώσεις μὲν τρεῖς ἢ περισσοτέρους ἀγνώστους. Θὰ εἶναι λοιπὸν δυνατόν νὰ λάβωμεν τὰ ἄλλα ποσὰ ὡς θέλομεν ἐκτὸς δύο, αἵτινα θὰ προσδιορίσωσιν αἱ δύο ἐξισώσεις διὰ τοῦτο τὸ πρόβλημα ἐπιδέχεται τότε ἀπείρους λύσεις.

Συνεζευγμένη μέθοδος.

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρῶτον πρόβλημα τοῦ ἐδ. 281, ὑποθέτομεν, ὅτι πάντα τὰ ἐν αὐτῷ περιεχόμενα νομίσματα τρέπονται εἰς ἓν μόνον εἶδος, ἔστω εἰς δραχμάς. Ἐὰν α εἶναι ἡ ἀξία τῆς τουρκικῆς λίρας εἰς δραχμάς, β ἡ ἀξία τῆς ἀγγλικῆς καὶ γ ἡ ἀξία τοῦ ρουβλίου, θὰ ἔχωμεν τὰς ἐξισώσεις (κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος)

$γχ = 1800$. α, διότι χ ρούβλια κάμνουν 1800 λίρας τουρκικὰς,

$12α = 11$. β, διότι 12 λίρ. τουρκ. κάμνουν 11 ἀγγλικὰς,

$26β = 165$. γ, διότι 26 ἀγγλ. λίραι κάμνουν 165 ρούβλια.

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων τούτων, ἔαν πολλαπλασιάσωμεν ἴσα ἐπὶ ἴσα, εὐρίσκομεν $χ \cdot 12 \cdot 26 = α \cdot β \cdot γ = 1800 \cdot 11 \cdot 165$. α. β. γ.

καὶ διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ ἴσα διὰ τοῦ α. β. γ

$$χ \cdot 12 \cdot 26 = 1800 \cdot 11 \cdot 165$$

ὅθεν

$$χ = \frac{1800 \cdot 11 \cdot 165}{12 \cdot 26}$$

Πρὸς ἄσκησιν περὶ τὴν μέθοδον τῶν ἐξισώσεων λύομεν καὶ τὰ ἐξῆς προβλήματα.

1) Νὰ διαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 200 εἰς δύο μέρη, ὧν ἡ διαφορὰ νὰ εἶναι 18.

Ἐὰν παραστήσωμεν τὰ δύο μέρη διὰ τῶν γραμμάτων χ καὶ ψ θὰ ἔχωμεν τὰς ἐξισώσεις

$$χ + ψ = 200$$

καὶ

$$χ - ψ = 18.$$

Πρὸς λύσιν τῶν ἐξισώσεων τούτων προσθέτομεν αὐτὰς καὶ εὐρίσκομεν $2χ = 218$ ἄρα $χ = 109$.

καὶ ἐπειδὴ $χ + ψ = 200$, θὰ εἶναι $109 + ψ = 200$, ἄρα $ψ = 91$.

2) Νὰ εὐρεθῇ ἀριθμὸς, τοῦ ὁποῖου τὸ ἥμισυ καὶ τὸ τρίτον προστιθέμενα νὰ διδῶσι τὸν κατὰ μονάδα μικρότερον ἀριθμόν.

Ἐὰν παραστήσωμεν τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν διὰ τοῦ χ , τὸ ἥμισυ αὐτοῦ θὰ εἶναι $\frac{\chi}{2}$ καὶ τὸ τρίτον αὐτοῦ $\frac{\chi}{3}$, θὰ εἶναι δὲ κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος

$$\frac{\chi}{2} + \frac{\chi}{3} = \chi - 1.$$

Πρὸς λύσιν τῆς ἐξισώσεως ταύτης πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα τὰ ἴσα ἐπὶ 6 καὶ εὐρίσκομεν

$$3\chi + 2\chi = 6\chi - 6$$

$$\text{ἢ } 5\chi = 6\chi - 6$$

καὶ προσθέτοντες 6 εἰς ἀμφότερα τὰ ἴσα

$$5\chi + 6 = 6\chi$$

καὶ ἀφαιροῦντες 5χ ἀπ' ἀμφοτέρων εὐρίσκομεν

$$6 = \chi.$$

3) *Νὰ εὐρεθῇ ἀριθμὸς, τοῦ ὁποίου τὸ τέταρτον διαφέρει ἀπὸ τοῦ τρίτου κατὰ μονάδα*

Ἐὰν διὰ τοῦ χ παραστήσωμεν τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν, θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{\chi}{3} - \frac{\chi}{4} = 1.$$

Διὰ νὰ λύσωμεν δὲ αὐτήν, πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα τὰ ἴσα ἐπὶ 3.4, ἥτοι 12, ὅτε εὐρίσκομεν $4\chi - 3\chi = 12$, ἥτοι $\chi = 12$.

4) *Ἦχει τις δύο εἰδῶν οἶνον· τοῦ α' εἶδους ἡ δοκὰ ἀξίζει 70 λεπτά, τοῦ δευτέρου 50, θέλει δὲ νὰ κάμῃ μίγμα, τοῦ ὁποίου ἡ δοκὰ νὰ ἀξίζῃ 65 λεπτά, νὰ βάλῃ ὅμως ἐκ τοῦ α' εἶδους 100 δοκάδας περισσότερον ἢ ἐκ τοῦ β'. Πόσας δοκάδας πρέπει νὰ βάλῃ ἐξ ἐκάστου εἶδους*

Ἐστω χ ὁ ἀριθμὸς τῶν δοκάδων τοῦ α' εἶδους καὶ ψ ὁ ἀριθμὸς τῶν δοκάδων τοῦ β'. Ἐν πρώτοις θὰ εἶναι

$$\chi - \psi = 100.$$

Ἡ ἀξία τοῦ μίγματος εἶναι 65. ($\chi + \psi$) λεπτά· ἡ δὲ ἀξία τῶν μερῶν του εἶναι 70χ τοῦ α καὶ 50ψ τοῦ β', ὥστε εἶναι

$$65(\chi + \psi) = 70\chi + 50\psi \quad \text{ἢ} \quad 15\psi = 5\chi \quad \text{ἢ} \quad \chi = 3\psi.$$

Λύοντες τὰς δύο ἐξισώσεις $\chi - \psi = 100$ καὶ $\chi = 3\psi$ εὐρίσκομεν $\chi = 150$, $\psi = 50$.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

ΠΕΡΙ ΛΟΓΟΥ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ

305. Λόγος τοῦ ἀριθμοῦ α πρὸς τὸν β λέγεται ὁ ἀριθμός, ὅστις δεικνύει, πῶς ἀποτελεῖται ὁ α ἐκ τοῦ β καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτοῦ.

Ὁ λόγος σύγκειται ἐκ τῆς μονάδος 1 καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτῆς, καθ' ὃν τρόπον σύγκειται ὁ α ἐκ τοῦ β καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτοῦ (πρβλ. σελ. 144 πρόβλημα 5ον).

Ἐὰν π. χ. εἶναι $\alpha = \beta + \beta + \frac{\beta}{2}$, ὁ λόγος τοῦ α πρὸς τὸν β εἶναι $1 + 1 + \frac{1}{2}$, ἥτοι $\frac{5}{2}$.

Σημείωσις. Ὁμοίως ἐρίζεται καὶ ὁ λόγος δύο οἰωνδήποτε ὁμοειδῶν ποσῶν.

306. Ὁ λόγος τοῦ α πρὸς τὸν β εἶναι τὸ πηλίκον $\frac{\alpha}{\beta}$.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ λόγος τοῦ α πρὸς τὸν β εἶναι $2 \frac{3}{5}$. Τοῦτο σημαίνει ὅτι εἶναι $\alpha = \beta + \beta + \frac{\beta}{5} + \frac{\beta}{5} + \frac{\beta}{5}$

ἢ $\alpha = \left(1 + 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \right) \beta$ (ἐδ. 174).

Ἐντεῦθεν συνάγεται, ἂν διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ ἴσα διὰ τοῦ β,

$$\frac{\alpha}{\beta} = 1 + 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = 2 \frac{3}{5},$$

ὥστε ὁ λόγος τοῦ α πρὸς τὸν β εἶναι τὸ πηλίκον τοῦ α διὰ β.

Διὰ τοῦτο ὁ λόγος τοῦ α πρὸς τὸν β παρίσταται διὰ τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$ ἢ καὶ διὰ τοῦ α: β.

307. Ἀναλογία εἶναι ἡ ἰσότης δύο λόγων·

οἷον $\frac{12}{8} = \frac{6}{4}$ ἢ $12:8=6:4$ εἶναι ἀναλογία.

Σημείωσις. Ὅταν ἡ ἀναλογία γράφηται διὰ τεσσάρων ἀριθμῶν, ὡς ἐξῆς $12:8=6:4$, οἱ εἰς τὰ ἄκρα εὗρισκόμενοι ἀριθμοὶ (οἱ 12 καὶ 4) λέγονται ἄκροι τῆς ἀναλογίας, οἱ δὲ ἄλλοι δύο λέγονται μέσοι

καὶ οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ λέγονται ὄροι τῆς ἀναλογίας. Πρὸς τούτοις οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ τῶν δύο λόγων (ὁ 12 καὶ 6) λέγονται *ἡγούμενοι*, οἱ δὲ δεύτεροι λέγονται *ἐπόμενοι*.

308. Ἐπειδὴ αἱ ἀναλογίαι ὑπάγονται εἰς τὰς ἰσότητας, αἱ ιδιότητες αὐτῶν εὐρίσκονται ἐκ τῶν γενικῶν ιδιοτήτων τῆς ἰσότητος, ὥστε εἶναι περιττὸν νὰ γίνηται ἰδιαίτερος λόγος περὶ αὐτῶν· διὰ τοῦτο ἀρκούμεθα εἰς τὰς ἐξῆς δύο ιδιότητες.

1) *Εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν μέσων.*

Ἐστω ἡ ἀναλογία $\alpha : \beta = \gamma : \delta$

$$\text{ἢ } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}.$$

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ ἴσα ἐπὶ $\beta \times \delta$, εὐρίσκομεν

$$\frac{\alpha}{\beta} \times \beta \times \delta = \frac{\gamma}{\delta} \times \delta \times \beta$$

ἢ $\alpha \times \delta = \beta \times \gamma$ ὅπερ ἐπρόκειτο νὰ δείξωμεν.

Καὶ ἀντιστρόφως· ἐκ τῆς ἰσότητος $\alpha \times \delta = \beta \times \gamma$, ἐὰν διαιρέσωμεν τὰ ἴσα διὰ τοῦ $\beta \times \delta$, προκύπτει

$$\frac{\alpha \times \delta}{\beta \times \delta} = \frac{\beta \times \gamma}{\beta \times \delta} \quad \text{ἢ } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \quad \text{ἢ } \alpha : \beta = \gamma : \delta.$$

ὥστε, ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ α , β , γ , δ εἶναι τοιοῦτοι, ὥστε τὸ γινόμενον δύο ἐξ αὐτῶν νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν δύο ἄλλων, οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι συνιστῶσιν ἀναλογίαν, ἐν τῇ ὁποίᾳ ἄκροι εἶναι οἱ παράγοντες τοῦ ἑνὸς γινομένου, μέσοι δὲ οἱ παράγοντες τοῦ ἄλλου.

2) *Ἐὰν προστεθῶσιν οἱ ὁμοταγεῖς ὄροι ὁσωνδήποτε λόγων ἴσων, προκύπτει λόγος ἴσος.*

Ἐστωσαν ἴσοι οἱ λόγοι

$$\frac{\alpha}{A}, \frac{\beta}{B}, \frac{\gamma}{\Gamma}, \frac{\delta}{\Delta}.$$

Ἐπειδὴ τὰ κλάσματα $\frac{\alpha}{A}, \frac{\beta}{B}, \frac{\gamma}{\Gamma}, \frac{\delta}{\Delta}$ εἶναι ἴσα, ἐὰν προσθέσωμεν τοὺς ὁμωνύμους αὐτῶν ὄρους, προκύπτει κλάσμα ἴσον (ἐδ. 199)· ἄρα καὶ τὸ κλάσμα $\frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{A + B + \Gamma + \Delta}$ θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὰ προηγούμενα, τουτέστιν ὁ λόγος τοῦ $\alpha + \beta + \gamma + \delta$ πρὸς τὸ $A + B + \Gamma + \Delta$ εἶναι ἴσος πρὸς τοὺς δοθέντας ἴσους λόγους.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ἐὰν ὁσωνδήποτε λόγων προστεθῶσιν οἱ ὁμοταγεῖς ὄροι, προκύπτει λόγος, ὅστις περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ ἐλαχίστου ἐκ τῶν δοθέντων λόγων.

2) Νὰ δειχθῇ ὅτι, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν οἱ ὁμοταγεῖς ὄροι ὁσωνδήποτε ἀναλογιῶν, προκύπτει ἀναλογία.

3) Ἐὰν οἱ ὁμοταγεῖς ὄροι δύο ἀναλογιῶν προστεθῶσι, πότε προκύπτει ἀναλογία ἀληθής;

Ζητήματα διάφορα.

1) Τὸ χαρακτηριστικὸν τῆς διαιρετότητος διὰ τοῦ 1001 εἶναι ἀνάλογον πρὸς τὸ διὰ τὸ 11, μόνον ὅτι ὁ ἀριθμὸς θὰ διαιρεθῇ εἰς τριψήφια τμήματα. Νὰ εὑρεθοῦν ἐπὶ τῇ βάσει τούτου τὰ χαρακτηριστικὰ διαιρετότητος διὰ τῶν 7 καὶ 13 (διαιρετῶν τοῦ 1001).

2) Πᾶς ἀριθμὸς πρῶτος μεγαλύτερος τοῦ 3 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 6 ἢ ἡλπιζόμενον κατὰ 1.

3) Τὸ γινόμενον πέντε ἐφεξῆς ἀριθμῶν εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ 120.

4) Τίς εἶναι ἡ μεγίστη δύναμις τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ 7, ἥτις διαιρεῖ τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ 1000;

5) Δεῖξαι ὅτι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης δύο ἀριθμῶν A καὶ B εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν πολλαπλασίων τοῦ B , τῶν περιεχομένων εἰς τὴν σειρὰν τῶν ἀριθμῶν

$$A, A \times 2, A \times 3, \dots, A \times B.$$

6) Δεῖξαι ὅτι, ἐὰν τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον ἀριθμῶν διαιρεθῇ διὰ τῶν ἀριθμῶν τούτων, τὰ πηλίκα θὰ εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

7) Τὸ τετράγωνον παντὸς πρώτου ἀριθμοῦ πλὴν τῶν 2 καὶ 3 ἰσοῦται πρὸς πολλαπλάσιον τοῦ 24 ἢ ἡλπιζόμενον κατὰ 1.

8) Δύο ἀριθμῶν πρώτων πρὸς ἀλλήλους τὸ ἄθροισμα (ἢ ἡ διαφορὰ) καὶ τὸ γινόμενον εἶναι ἀριθμοὶ ἐπίσης πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

9) Ἄν α καὶ β εἶναι ἀριθμοὶ μὴ διαιρετοὶ διὰ τοῦ 3, ἡ διαφορὰ $\alpha^6 - \beta^6$ εἶναι διαιρετὴ διὰ τοῦ 9.

10) Ἄν α καὶ β εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, οἱ δύο ἀρι-

Θμοὶ $\alpha + \beta$ καὶ $\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta$ δὲν δύνανται νὰ ἔχουν ἄλλον κοινὸν διαιρέτην εἰ μὴ τὸν 3.

11) Εὐρεῖν τὸν μικρότερον ἐκ τῶν ἀριθμῶν τῶν ἐχόντων 180 διαιρέτας.

12) Δεῖξαι ὅτι, ἂν n εἶναι τὸ πλῆθος τῶν πρώτων διαφορῶν ἀλλήλων παραγόντων ἀριθμοῦ τινος N , ὁ N δύναται ν' ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον δύο παραγόντων πρώτων πρὸς ἀλλήλους κατὰ $2^n - 1$ τρόπους.

13) Δεῖξαι ὅτι, ἂν ὁ ἀριθμὸς κ εἶναι πρῶτος πρὸς ἕκαστον ἐκ τῶν τεσσάρων ἀριθμῶν $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$, καὶ ἂν αἱ διαφοραὶ $\alpha\beta - \alpha'\beta'$ καὶ $\alpha - \alpha'$ εἶναι διαιρεταὶ διὰ τοῦ κ , τότε καὶ ἡ διαφορὰ $\beta - \beta'$ θὰ εἶναι διαιρετὴ διὰ τοῦ κ .

14) Ἐστωσαν A, B, Γ τρεῖς ἀριθμοί, Δ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν A, B , Δ' ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν A, Γ , Δ'' ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν B, Γ καὶ τέλος Δ''' ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης καὶ τῶν τριῶν ἀριθμῶν A, B, Γ . Νὰ δευχθῇ ὅτι τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν A, B, Γ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ πηλίκον $AB\Gamma\Delta''':\Delta\Delta'\Delta''$.

15) Πότε τὸ ἄθροισμα τριῶν ἀναγῶγων κλασμάτων εἶναι ἀκέραιος ἀριθμὸς;

16) Δοθέντων κλασμάτων τινῶν, εὐρεῖν ἄλλα κλάσματα ἴσα ἔν πρὸς ἔν πρὸς τὰ δοθέντα καὶ τοιαῦτα, ὥστε ὁ παρονομαστής ἑκάστου νὰ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ἀριθμητὴν τοῦ ἐπομένου.

17) Δοθέντων κλασμάτων τινῶν ἀναγῶγων, εὐρεῖν τὸ ἐλάχιστον ἀναγῶγον κλάσμα, ὅπερ διαιρούμενον δι' ἑκάστου τῶν δοθέντων δίδει πηλίκον ἀκέραιον.

18) Δεῖξαι ὅτι τὸ γινόμενον δύο ἀπλῶν περιοδικῶν δεκαδικῶν κλασμάτων μικροτέρων τῆς μονάδος εἶναι ἐπίσης περιοδικὸν κλάσμα ἀπλοῦν.

19) Νὰ τραπῇ ἕκαστον τῶν κλασμάτων $\frac{17}{40}, \frac{17}{81}$ εἰς ἄθροισμα κλασμάτων ἐχόντων παρονομαστὰς τὰς διαδοχικὰς δυνάμεις τοῦ 12. Τὰ δύο ζητούμενα ἄθροισματα θὰ σύγκεινται ἐκ πεπερασμένου ἢ ἐξ ἀπείρου πλῆθους κλασμάτων;

20) Ἀριθμὸς ἄρτιος, ὅστις εἶναι ἄθροισμα δύο τετραγώνων, εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 8 ἢ ὑψημμένον κατὰ 2 ἢ 4.

21) Δεῖξαι ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν n πρώτων περιττῶν ἀριθμῶν ἰσοῦται πρὸς n^2 .

22) Ἄν ἀριθμοὶ τινες εἶναι, ἕκαστος, ἄθροισμα δύο τετραγώνων καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν θὰ εἶναι ἄθροισμα 2 τετραγώνων.

23) Ἐάν ἀριθμὸς ἄρτιος εἶναι ἄθροισμα δύο τετραγώνων καὶ τὸ ἥμισυ αὐτοῦ θὰ εἶναι ἐπίσης ἄθροισμα δύο τετραγώνων.

24) Ἐάν ἀριθμὸς ἀκέραιος διαιρετὸς διὰ τοῦ 5 εἶναι ἄθροισμα δύο τετραγώνων καὶ τὸ πέμπτον τοῦ ἀριθμοῦ τούτου θὰ εἶναι ἄθροισμα δύο τετραγώνων.

25) Ὅταν τετράγωνον ἀκέραιον εἶναι ἄθροισμα δύο ἄλλων τετραγώνων, τὸ ἐν τῶν τριῶν τετραγώνων εἶναι διαιρετὸν διὰ 5.

26) Ἐστῶσαν α ἡ τετραγωνικὴ ρίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος ἀκεραίου τινὸς ἀριθμοῦ N καὶ v τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως (δηλ. τῆς ἐξαγωγῆς τῆς τετραγωνικῆς ταύτης ρίζης). Νὰ δεიχθῇ

α) ὅτι τὸ ἄθροισμα $\alpha + \frac{v}{\alpha \times 2}$ εἶναι μεγαλύτερον τῆς $\sqrt{N}$.

β) ὅτι τὸ τετράγωνον τοῦ $\alpha + \frac{v}{\alpha \times 2}$ εἶναι κατὰ μονάδα τὸ πολὺν μεγαλύτερον τοῦ N .

27) Ἐάν οἱ τέσσαρες ὅροι ἀναλογίας γραφῶσι κατὰ τάξιν μεγέθους, τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων ὄρων εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν μέσων.

28) Ἐάν οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ α, β, γ , γεγραμμένοι κατὰ τάξιν μεγέθους, εἶναι τοιοῦτοι, ὥστε νὰ εἶναι $\frac{\alpha - \beta}{\beta - \gamma} = \frac{\alpha}{\gamma}$ (« ἁρμονικὴ » ἀναλογία),

θὰ εἶναι καὶ $\frac{1}{\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma} \right)$.

29) Νὰ δειχθῇ ὅτι, ἂν γράψωμεν τὴν σειρὰν τῶν ἀριθμῶν

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots,$$

τρεῖς ἐφεξῆς ἐξ αὐτῶν οἰοιδήποτε ἀποτελοῦσιν ἁρμονικὴν ἀναλογίαν.

ΤΕΛΟΣ

