42075

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ

ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ

ΥΠΟ

ΔΙΟΝΥΣΙΟΥ Ρ. ΡΗΓΟΠΟΥΛΟΥ

Διευθυντοῦ τῆς ἐν Ἀθήναις Δημοσίας Ἐμπορικῆς Σχολῆς

τοῦ μαθητοῦ

Ἰωάννου Κ. Λουβαριώτη

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ

ΕΚΔΟΤΗΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΤΖΑΚΑΣ

ΤΥΠΟΙΣ ΠΑΡΑΣΚΕΥΑ ΛΕΩΝΗ

1905

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ

ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ

ΥΠΟ

ΔΙΟΝΥΣΙΟΥ Ρ. ΡΗΓΟΠΟΥΛΟΥ

καθηγητοῦ τῶν μαθηματικῶν ἐν τῇ ἐν Ἀθήναις
Δημοσίᾳ Ἐμπορικῇ Σχολῇ.

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΕΚΔΟΤΗΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΤΖΑΚΑΣ
ΤΥΠΟΙΣ ΠΑΡΑΣΚΕΥΑ ΛΕΩΝΗ
1905

ΤΗι ΙΕΡΑι ΜΟΙ ΜΝΗΜΗι

ΤΟΥ

ΠΑΤΡΟΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΜΗΤΡΟΣ

ΡΗΓΑ ΚΑΙ ΚΑΛΛΙΟΠΗΣ ΡΗΓΟΠΟΥΛΟΥ

ΕΚ

ΓΑΛΑΞΕΙΔΙΟΥ ΟΡΜΩΜΕΝΩΝ

ΤΟ ΕΡΓΟΝ ΜΟΥ ΤΟΔΕ

ΑΝΑΤΙΘΗΜΙ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ἡ διδασκαλία τῶν μαθηματικῶν ἐν τοῖς γυμνασίοις ἔχει ὡς κύριον σκοπὸν τὴν μόρφωσιν τοῦ νοῦ, χωρὶς ν' ἀπαρνῆται καὶ τὴν παροχὴν γνώσεων ὠφελίμων εἰς τὸν πρακτικὸν βίον, ἣν ὡς κύριον σκοπὸν ἔχει ἡ διδασκαλία τῶν μαθηματικῶν ἐν τοῖς Ἑλληνικοῖς Σχολείοις.

Ὁ κύριος δὲ σκοπὸς τῆς διδασκαλίας τῶν μαθηματικῶν ἐν τοῖς γυμνασίοις, τοσούτῳ μᾶλλον ἐπιτυγχάνεται, καθ' ὅσον δίδομεν εἰς χεῖρας τῶν μαθητῶν διδακτικὰ βιβλία, ὡς οἷόν τε μᾶλλον ἀπηλλαγμένα πάσης ἀσαφείας καὶ ἀτελείας περὶ τὰς ἀποδείξεις τῶν διαφόρων θεωρημάτων, πολλῷ δὲ μᾶλλον ἀπηλλαγμένα παντὸς σφάλματος καὶ πάσης ἀταξίας περὶ τὴν διάταξιν τῆς ὕλης. Διότι ἄλλως, ἀντὶ νὰ μορφῶμεν τὸν νοῦν τοῦ μαθητοῦ, καθοδηγοῦντες αὐτὸν εἰς τὴν ἐξαγωγὴν γενικωτέρων ἀληθειῶν ἐκ τοῦ συνδυασμοῦ ἄλλων μερικωτέρων καὶ οὕτω ὀξύνωμεν αὐτόν, τανύοντες τὰς φυσικὰς αὐτοῦ πτέρυγας μέχρι τοῦ ἐξικτοῦ εἰς αὐτὰς σημείου, τοὐναντίον ἐθίζομεν αὐτὸν εἰς τὴν ἐπιπόλαιον ἐξέτασιν τῶν διαφόρων ζητημάτων καὶ οὕτω στρεβλοῦμεν αὐτόν, καταβιβάζοντες πολλάκις τοῦτον δι' ἀκαταλλήλου βιβλίου (λόγῳ τῆς προκαταλλήψεως, ἣν ἔχομεν πάντες, πολλῷ δὲ μᾶλλον οἱ μαθηταί, περὶ τῆς ἀληθείας τῶν ἐντύπως φερομένων) εἰς χαμηλοτέραν βαθμίδα καὶ ἐκείνης ἔτι εἰς ἣν ἡ νεαρά, ἡ ἀδιάπλαστος ἔτι διάνοια τοῦ μαθητοῦ φυσικῶς ἵσταται. Καὶ οὕτω, τότε τὰ μαθηματικά, ἀντὶ νὰ τονώσωσι τὸν νοῦν τοῦ μαθητοῦ, προάγοντες αὐτὸν μέχρι τοῦ φυσικῶς δυνατοῦ εἰς ἕκαστον ὁρίου καὶ ἐκπληρώσωσιν οὕτω τὸν κύριον αὐτῶν σκοπόν, τοὐναντίον γίνονται πρόξενα ἀπαμβλύνσεως καὶ βλάβης αὐτοῦ.

Ταῦτα πάντα ἔχοντες ὑπ' ὄψει, προέβημεν εἰς τὴν συγγραφὴν Θεωρητικῆς Ἀριθμητικῆς πρὸς τὸν σκοπὸν νὰ διαφωτίσωμεν τὰ σκοτεινά, νὰ συμπληρώσωμεν τὰ ἀτελῆ, νὰ ἐξοβελίσωμεν τὰ ἐσφαλμένα καὶ νὰ συστηματοποιήσωμεν πᾶν τὸ ἀτάκτως ἐρριμμένον. Ἂν δὲ ὑπῆρχον τοιαῦτα εἰς τὰ μέχρι τοῦδε συστήματα καὶ ἂν ἐπετύχομεν τοῦ σκοποῦ ἡμῶν νὰ παρουσιάσωμεν σύστημα ἀπηλλαγμένον πολλῶν τῶν ἀτελειῶν τῶν μέχρι τοῦδε συστημάτων, εἰς τοὺς κ. κ. Συναδέλφους μεθ' ὧν κατατριβόμεθα καθ' ἑκάστην ἐν τῇ διδασκαλίᾳ τοῦ κύκλου τούτου τῶν μαθηματικῶν ἀφίεται νὰ κρίνωσι.

Οὕτω γράφοντες, δὲν ἐννοοῦμεν βεβαίως, ὅτι διὰ τῶν διδακτικῶν ἡμῶν βιβλίων λέγομεν τὴν τελευταίαν λέξιν, ἀλλ' ἁπλῶς, ὅτι βελτιοῦμεν κατὰ πολὺ τὴν κατάστασιν τοῦ εἴδους τούτου τῶν βιβλίων, ἑπόμενοι ἐκείνων, οἵτινες διὰ τῶν διδακτικῶν αὐτῶν βιβλίων ἐβελτίωσαν τὴν κατάστασιν τῶν πρὸ αὐτῶν ὑπαρχόντων διδακτικῶν βιβλίων. Δὲν ἀρνούμεθα ὅμως, ὅτι ἄλλοι μεθ' ἡμᾶς θὰ πλησιάσωσιν ἔτι μᾶλλον εἰς τὸ ὅριον τῆς ἄκρας μεθοδικότητος, τελειότητος καὶ ἐπιστημονικῆς ἀκριβείας τῆς συγγραφῆς τῶν διδακτικῶν βιβλίων, διότι οὕτω, βαθμηδὸν καὶ κατ' ὀλίγον, συντελεῖται πᾶσα πρόοδος.

Ἔγραφον ἐν Ἀθήναις τῇ 15 Μαΐου 1905.

ΔΙΟΝΥΣΙΟΣ Ρ. ΡΗΓΟΠΟΥΛΟΣ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΟΡΙΣΜΟΙ

1. Ὅταν θέλωμεν νὰ μετρήσωμεν πολλὰ μῆλα, *τὸ ἓν ἐκ τῶν μήλων λέγεται μονάς, ὅταν δὲ πολλοὺς σωροὺς μήλων, ὁ εἷς ἐκ τῶν σωρῶν τούτων λέγεται μονάς.* Ἑπομένως, *μονὰς καλεῖται τὸ ἓν ἐκ πολλῶν πραγμάτων ἢ καὶ τὸ σύνολον πολλῶν πραγμάτων, ὡς ἓν ὅλον θεωρούμενον.*

2. *Ἀριθμὸς* λέγεται τὸ σύνολον πολλῶν μονάδων ἢ καὶ μία μονάς.

3. *Ἀριθμητικὴ* λέγεται ἡ ἐπιστήμη ἡ πραγματευομένη περὶ τῶν ἀριθμῶν καὶ τῶν ἐπ' αὐτῶν πράξεων.

4. *Ἀρίθμησις* λέγεται ὁ τρόπος καθ' ὃν γράφομεν καὶ ὀνομάζομεν τοὺς διαφόρους ἀριθμούς.

Περὶ γραφῆς καὶ ὀνομασίας τῶν Ἀριθμῶν τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος.

Περὶ τῶν ἀριθμῶν 0 ἕως 9.

5. Τὸ *ἓν* ἐκ πολλῶν πραγμάτων, ὅπερ, ὡς εἴπομεν, ὀνομάζεται μονάς, γράφεται διὰ τοῦ *συμβόλου* 1.

Ἐὰν εἰς τὸ **ἓν** προσθέσωμεν ἄλλο *ἓν* δημιουργεῖται νέος ἀριθμός, ὅστις ὀνομάζεται **δύο.** Γράφεται δὲ οὗτος διὰ τοῦ *συμβόλου* 2.

Ἐὰν εἰς τὸν ἀριθμὸν **δύο** προσθέσωμεν *ἕν*, γίνεται νέος ἀριθμός, ὅστις ὀνομάζεται **τρία.** Γράφεται δὲ οὗτος διὰ τοῦ *συμβόλου* 3.

Ἐὰν εἰς τὸν ἀριθμὸν **τρία** προσθέσωμεν *ἕν*, γίνεται νέος ἀριθμός, ὅστις ὀνομάζεται **τέσσαρα.** Γράφεται δὲ οὗτος διὰ τοῦ *συμβόλου* 4.

Κατὰ τὸν αὐτὸν ἀκριβῶς τρόπον προβαίνοντες, δημιουργοῦμεν νέον ὄνομα καὶ νέον σύμβολον δι' ἕκαστον ἑπόμενον ἀριθμὸν μέχρι τοῦ ἀριθμοῦ τὸν ὁποῖον ὀνομάζομεν **ἐννέα**, καὶ τὸν ὁποῖον, ὡς γνωστόν, γράφομεν διὰ τοῦ *συμβόλου* 9.

Ἐκ τούτων παρατηροῦμεν ὅτι, μέχρι τοῦ ἀριθμοῦ *ἐννέα* ἠναγκάσθημεν νὰ δημιουργήσωμεν *ἐννέα* διάφορα ὀνόματα καὶ *ἐννέα* διάφορα σύμβολα. Ἐὰν δὲ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἠθέλομεν προβαίνη δηλ. ἐὰν ἠθέλομεν δημιουργῇ δι' ἕκαστον ἑπόμενον ἀριθμὸν (προκύπτοντα ἐκ τοῦ προηγουμένου διὰ τῆς προσθέσεως εἰς αὐτὸν μιᾶς μονάδος) *ἰδιαίτερον ὄνομα* καὶ *ἰδιαίτερον σύμβολον*, τὸ τοιοῦτον θὰ ἦτο ἀδύνατον νὰ γείνῃ ἅπαξ διὰ παντός, διότι οἱ ἀριθμοὶ δὲν ἔχουσι τέλος, ἤτοι εἶναι ἄπειροι. Καὶ οὐ μόνον τοῦτο, ἀλλ' οὐδὲ τὰ *ὀνόματα* καὶ τὰ *σύμβολα* τῶν ἀριθμῶν ἐκείνων καὶ μόνον, ὧν γίνεται συνήθης χρῆσις ἐν τῷ καθ' ἡμέραν βίῳ θὰ ἦτο δυνατὸν ν' ἀπομνημονεύσῃ τὸ ἀνθρώπινον πνεῦμα, λόγῳ τῆς πληθύος αὐτῶν. Διὰ τοῦτο ἔπρεπε νὰ ἐξευρεθῇ τρόπος τις δι' οὗ νὰ δύναται νὰ γράφηται πᾶς ἀριθμὸς ὁσονδήποτε μέγας διὰ τοῦ συνδυασμοῦ *ὀλιγίστων ἀριθμητικῶν συμβόλων* καὶ νὰ ὀνομάζηται διὰ τοῦ συνδυασμοῦ *ὀλιγίστων ὀνομάτων*. Εἷς δὲ τῶν τρόπων τούτων εἶναι καὶ ἡ διὰ *δέκα* ἀριθμητικῶν συμβόλων *γραφὴ* παντὸς ἀριθμοῦ *ὁσονδήποτε μεγάλου* καὶ τῶν ὁποίων τὰ ἐννέα, ἅτινα καλοῦνται σημαντικὰ ψηφία, εἶναι τὰ ἀπὸ τῆς μονάδος μέχρι τοῦ ἐννέα σύμβολα, τὸ δὲ δέκατον εἶναι τὸ σύμβολον τὸ δηλοῦν τὴν ἔλλειψιν πάσης μονάδος καὶ τὸ ὁποῖον ὀνομάζεται *μηδὲν* καὶ γράφεται διὰ τοῦ *συμβόλου* 0.

Περὶ τῶν μονάδων διαφόρων τάξεων τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος

6. Διὰ νὰ γράψωμεν πάντα ἀριθμὸν ὁσονδήποτε μέγαν διὰ τῶν δέκα ἀριθμητικῶν συμβόλων

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 καὶ 0

ἀνάγκη πρῶτον νὰ χωρίσωμεν τὸν ἀριθμὸν τοῦτον εἰς μονάδας διαφόρων τάξεων, τὰς ὁποίας δημιουργοῦμεν ὡς ἑξῆς.

7. Τὴν *μίαν*	ἁπλῆν μονάδα	καλοῦμεν	1αν	μονάδα	α´	τάξεως
τὰς *δέκα*	ἁπλᾶς μονάδας	»	1αν	»	β´	»
» *ἑκατὸν*	» »	»	1αν	»	γ´	»
» *χιλίας*	» »	»	1αν	»	δ´	»

τὰς δέκα χιλιάδας ἁπλᾶς μονάδας καλοῦμεν 1αν μονάδα ε΄ τάξεως
» ἑκατὸν » » » » 1αν » ς΄ »
καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, δεκαπλασιάζοντες τὸν ἀριθμὸν τῶν ἁπλῶν μονάδων, ἃς περιέχει ἑκάστη μονὰς τάξεώς τινος, μορφοῦμεν μίαν μονάδα ἑπομένης τάξεως. Οὕτω δὲ δυνάμεθα νὰ μορφώσωμεν ἀπείρους μονάδας διαφόρων τάξεων, ὧν ἑκάστη περιέχει δεκαπλάσιον ἀριθμὸν ἁπλῶν μονάδων ἐκείνων, ἃς περιέχει ἑκάστη μονὰς τῆς ἀμέσως προηγουμένης τάξεως, ἢ ὅπερ ταὐτό, ἑκάστη μονὰς τάξεώς τινος περιέχει δέκα μονάδας τῆς ἀμέσως προηγουμένης τάξεως.

8. Τὰς οὕτω μορφωθείσας μονάδας διαφόρων τάξεων, καλοῦμεν μονάδας διαφόρων τάξεων τοῦ *δεκαδικοῦ συστήματος*. Διότι στηριζόμενοι εἰς τὰς μονάδας ταύτας θὰ δυνηθῶμεν νὰ γράψωμεν πάντα ἀριθμόν, ὁσονδήποτε μέγαν διὰ τῶν *δέκα* καὶ μόνον ἀριθμητικῶν συμβόλων 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 καὶ 0. Ἐπιτυγχάνομεν δὲ τοῦτο ὡς ἑξῆς,

Γραφὴ παντὸς ἀριθμοῦ εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα.

9, *Πάντα ἀριθμὸν ὁσονδήποτε μέγαν δυνάμεθα νὰ γράψωμεν διὰ τῶν δέκα ἀριθμητικῶν συμβόλων*

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 καὶ 0

χωρίζοντες αὐτὸν εἰς τὰς μονάδας τῶν διαφόρων τάξεων τοῦ δεκαδικοῦ συστήμασος.

Διότι, ἔστω π. χ. ὁ ἀριθμὸς τῶν κόκκων τοῦ σίτου ὁ περιεχόμενος εἰς ἕνα σάκκον. Ἵνα δυνηθῶμεν νὰ γράψωμεν τὸν ἀριθμὸν τοῦτον διὰ τῶν ἀνωτέρω δέκα ἀριθμητικῶν σομβόλων, χωρίζομεν αὐτὸν εἰς τὰς μονάδας τῶν διαφόρων τάξεων τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος. Κατορθοῦμεν δὲ τοῦτο ὡς ἑξῆς.

Ἐκ τοῦ σάκκου λαμβάνομεν ἀνὰ δέκα κόκκους σίτου καὶ τοὺς θέτομεν χωριστά, οὕτω δὲ μορφοῦμεν μονάδας δευτέρας τάξεως τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος· θὰ ἐπέλθῃ ὅμως στιγμή, καθ' ἣν θὰ ἐξαντληθῶσιν οἱ κόκκοι τοῦ σίτου, οἱ περιεχόμενοι ἐν τῷ σάκκῳ καὶ θὰ μείνωσιν ἐν αὐτῷ ὀλιγώτεροι τῶν δέκα κόκκων δηλ. θὰ μείνωσιν ἢ 9, ἢ 8, ἢ 7, ἢ 6, ἢ 5, ἢ 4, ἢ 3, ἢ 2, ἢ 1, ἢ καὶ *οὐδεὶς* κόκκος δηλ. 0. Ἔστω δὲ ὅτι ἔμειναν ἐν τῷ σάκκῳ 4 κόκκοι σίτου δηλ. 4 *μονάδες πρώτης τάξεως*.

Ἤδη δὲ καθ' ὃν τρόπον ἐκ τῶν ἁπλῶν μονάδων ἐμορφώσαμεν μονάδας δευτέρας τάξεως, κατὰ τὸν αὐτὸν ἀκριβῶς τρόπον ἐκ τῶν μονάδων δευτέρας τάξεως, λαμβάνοντες αὐτὰς ἀνὰ δέκα καὶ θέτοντες αὐτὰς χωριστά, μορφοῦμεν μονάδας *τρίτης τάξεως τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος*. Θὰ ἐπέλθῃ ὅμως στιγμή, καθ' ἣν θὰ ἐξαντληθῶσιν αἱ *μονάδες δευτέρας τάξεως* καὶ θὰ μείνωσιν ὀλιγώτεραι τῶν δέκα τοιούτων μονάδων καὶ ἔστω ὅτι ἔμειναν 5 *μονάδες δευτέρας τάξεως*.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἤδη ἐκ τῶν μονάδων *τρίτης τάξεως*, λαμβάνοντες αὐτὰς ἀνὰ δέκα, μορφοῦμεν μονάδας *τετάρτης τάξεως τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος*. Θὰ ἐπέλθῃ ὅμως στιγμή, καθ' ἣν θὰ ἐξαντληθῶσιν αἱ μονάδες τρίτης τάξεως καὶ θὰ μείνωσιν ὀλιγώτεραι τῶν δέκα τοιούτων μονάδων καὶ ἔστω ὅτι ἔμειναν 9 *μονάδες τρίτης τάξεως*.

Κατὰ τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον θὰ ἐξακολουθῶμεν μέχρις οὗ ἐκ τῶν μονάδων τάξεώς τινος δὲν δυνηθῶμεν νὰ μορφώσωμεν μονάδας ἑπομένης τάξεως. Ἵνα δὲ ὁρίσωμεν τὰς ἰδέας μας, ἔστω ὅτι ἐκ τῶν μορφωθεισῶν ἤδη μονάδων τετάρτης τάξεως ἐμορφώσαμεν 3 μονάδας *πέμπτης τάξεως* καὶ ἐπερίσσευσαν 2 μονάδες *τετάρτης τάξεως* δηλαδὴ ἔχομεν ἀκόμη 2 *μονάδας τετάρτης τάξεως* καὶ 3 *μονάδας πέμπτης τάξεως*.

Ὥστε τὸν ἀριθμὸν τῶν κόκκων τοῦ σίτου τὸν περιεχόμενον εἰς τὸν σάκκον, *χωρίσαντες εἰς μονάδας διαφόρων τάξεων τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος*, ἠδυνήθημεν νὰ τὸν γράψωμεν, ποιοῦντες χρῆσιν *μόνον τῶν ἀνωτέρω δέκα ἀριθμητικῶν συμβόλων*. Περιέχει δὲ ὁ ἀριθμὸς οὗτος 4 μονάδας *πρώτης τάξεως*, 5 *δευτέρας*, 9 *τρίτης*, 2 *τετάρτης* καὶ 3 *πέμπτης τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος*. Διὰ ν' ἀποφύγωμεν δὲ τὴν ἀνάγκην τῆς γραφῆς παρ' ἑκάστῳ ψηφίῳ τοῦ ὀνόματος τῆς τάξεως εἰς ἣν ἀνήκει τοῦτο, ποιοῦμεν τὴν ἑξῆς συμφωνίαν διὰ τὸ δεκαδικὸν σύστημα.

10. *Πᾶν σημαντικὸν ψηφίον γραφόμενον πρὸς τ' ἀριστερὰ ἑτέρου σημαντικοῦ ψηφίου γίνεται ἐκ μονάδος δεκαπλασίας τῆς τοῦ προηγουμένου. Ἐν ἐλλείψει δὲ μονάδων τάξεώς τινος, γράφομεν μηδὲν*

εἰς τὴν τάξιν ταύτην, ἵνα τηρήσωμεν τὴν σημασίαν τῶν ἑπομένων σημαντικῶν ψηφίων.

Κατὰ ταῦτα, τὸν ἀνωτέρω ἀριθμὸν τῶν κόκκων τοῦ σίτου, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν 32954, καὶ συμφώνως πρὸς τὴν ἀνωτέρω συμφωνίαν (§ 10) *ὀνομάζομεν* τοῦτον 4 μονάδας *πρώτης τάξεως*, 5 *δευτέρας*, 9 *τρίτης* 2 *τετάρτης καὶ* 3 *πέμπτης τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος.*

Σημ. Ἂν συμφώνως πρὸς τὴν ἀνωτέρω συμφωνίαν (§ 10) δὲν ἔχομεν μονάδας τάξεώς τινος, τότε εἰς τὴν τάξιν ταύτην γράφομεν 0 (δηλ. *μηδέν*), ὅπως τηρηθῇ ἡ σημασία τῶν πρὸς τ' ἀριστερὰ τούτου γραφομένων σημαντικῶν ψηφίων.

Π. χ. Ὁ ἀριθμὸς 3 μονάδες *πρώτης τάξεως*, 2 *τρίτης καὶ* 5 *τετάρτης γράφεται* 5203.

Ὀνομασία παντὸς ἀριθμοῦ τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος.

11. Ἐκτὸς τοῦ ἀνωτέρω τρόπου τῆς ὀνομασίας παντὸς ἀριθμοῦ διὰ τῆς ἐκφωνήσεως τοῦ ἀριθμοῦ τῶν *μονάδων ἑκάστης τάξεως*, ἃς περιέχει ἕκαστον σημαντικὸν ψηφίον, δυνάμεθα νὰ ὀνομάσωμεν αὐτὸν καὶ διὰ τῆς ἐκφωνήσεως τῶν ἁπλῶν μονάδων, ἃς περιέχει ἕκαστον σημαντικὸν ψηφίον τοῦ ἀριθμοῦ καὶ τὰς ὁποίας γνωρίζομεν ἤδη ἐκ τῆς Πρακτικῆς Ἀριθμητικῆς.

Κατὰ ταῦτα, πάντα ἀριθμὸν *γεγραμμένον*, δυνάμεθα νὰ ὀνομάσωμεν ἤδη κατὰ τοὺς ἑξῆς δύο θεμελιώδεις τρόπους.

Α'.) *Ἐκφωνοῦμεν τὰς μονάδας ἑκάστου σημαντικοῦ ψηφίου μετὰ τοῦ ὀνόματος τῆς τάξεως αὐτῶν.*

Β'.) *Ἐκφωνοῦμεν τὰς ἁπλᾶς μονάδας, ἃς περιέχει ἕκαστον σημαντικὸν ψηφίον τοῦ ἀριθμοῦ.*

Π. χ. Κατὰ ταῦτα ὁ ἀνωτέρω γραφεὶς ἀριθμὸς 32954 τῶν κόκκων τοῦ σίτου δύναται νὰ ὀνομασθῇ κατὰ τοὺς ἑξῆς δύο θεμελιώδεις τρόπους.

α') 3 μονάδες *πέμπτης τάξεως*, 2 *τετάρτης*, 9 *τρίτης*, 5 *δευτέρας* καὶ 4 *πρώτης* τάξεως τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος.

β') *Τριάκοντα δύο χιλιάδες* μονάδες *καὶ ἐνεακόσιαι πεντήκοντα* τέσσαρες μονάδες ἢ ἁπλῶς τριάκοντα δύο χιλιάδες ἐνεακόσιαι πεντήκοντα τέσσαρες μονάδες.

Ἐκτὸς ὅμως τῶν δύο ἀνωτέρω θεμελειωδῶν τρόπων τῆς ὀνομασίας παντὸς δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ δυνάμεθα νὰ ὀνομάσωμεν πάντα ἀριθμὸν κατὰ πολλοὺς τρόπους, λαμβάνοντες ὑπ' ὄψει, ὅτι ἕκαστον ψηφίον ἔχει δεκαπλασίας μὲν μονάδας τῆς ἀμέσως προηγουμένης λέξεως, ἑκατονταπλασίας δὲ τῆς πρὸ τῆς προηγουμένης, χιλιοπλασίας δὲ τῆς πρὸ ταύτης καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς. Ἐντεῦθεν ἐξάγομεν τὸν ἑξῆς γενικὸν κανόνα τῆς ἀπαγγελίας ὁποιουδήποτε ἀριθμοῦ.

12. *Ἵνα ἀπαγγείλωμεν ὁποιονδήποτε ἀριθμὸν γεγραμμένον ἢ ἀπαγγέλλομεν αὐτὸν ὁλόκληρον εἰς ἁπλᾶς μονάδας ἢ χωρίζομεν τὸν ἀριθμὸν εἰς ὁσαδήποτε τμήματα ἰσοψήφια ἢ ἀνισοψήφια καὶ ἀπαγγέλλομεν χωριστὰ τὸν ἀριθμὸν ἑκάστου τμήματος μετὰ τοῦ ὀνόματος τῆς θέσεως τὴν ὁποίαν κατέχει τὸ τελευταῖον ψηφίον τοῦ τμήματος.*

Π. χ. Τὸν ἀνωτέρω ἀριθμὸν 32954 τῶν κόκκων τοῦ σίτου δυνάμεθα ν' ἀπαγγείλωμεν κατὰ τοὺς ἑξῆς τρόπους·

α΄) 32954 *ἁπλαῖ μονάδες ἢ μονάδες πρώτης τάξεως.*

β΄) 3295 *δεκάδες καὶ* 4 *ἁπλαῖ μονάδες.*

γ΄) 329 *ἑκατοντάδες καὶ* 54 *ἁπλαῖ μονάδες.*

δ΄) 32 *χιλιάδες καὶ* 954 *ἁπλαῖ μονάδες.*

ε΄) 3 *δεκάδες χιλιάδων καὶ* 2954 *ἁπλαῖ μονάδες.*

ς΄) 3 *δεκάδες χιλιάδων* 29 *ἑκατοντάδες καὶ* 54 *ἁπλαῖ μονάδες.*

ζ΄) 32 *χιλιάδες* 9 *ἑκατοντάδες* 5 *δεκάδες καὶ* 4 *ἁπλαῖ μονάδες.*
Καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Διὰ τῶν διαφόρων δὲ τούτων τρόπων τῆς ἀπαγγελίας δεκαδικοῦ τινος ἀριθμοῦ μετατρέπομεν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν εἰς ἀριθμόν γινόμενον ἐκ μονάδος οἱασδήποτε δεκαδικῆς τάξεως, ἄνευ λύσεως ἰδιαιτέρου προβλήματος.

Π. χ. Ὁ ἀριθμὸς 32954·

α΄) *πόσας ἁπλὰς μονάδας περιέχει;*—(32954 ἁπλᾶς μονάδας).

β΄) *πόσας δεκάδας καὶ μονάδας;*—(3295 δεκ. καὶ 4 μον.).

γ΄) *πόσας ἑκατοντάδας καὶ μονάδας;*—(329 ἑκατοντάδας καὶ 54 μονάδας).

δ΄) *πόσας χιλιάδας, δεκάδας καὶ μονάδας;* — (32 χιλιάδας, 95 δεκάδας καὶ 4 μονάδας)
καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Περὶ διαφόρων συστημάτων ἀριθμήσεως καὶ τῶν μονάδων τῶν διαφόρων αὐτῶν τάξεων.

13. Καθ' ὃν τρόπον ἠδυνήθημεν νὰ γράψωμεν πάντα ἀριθμόν, ποιοῦντες χρῆσιν *δέκα ἀριθμητικῶν συμβόλων*, κατ' ἀνάλογον τρόπον δυνάμεθα νὰ γράψωμεν πάντα ἀριθμὸν δι' *ὁσωνδήποτε ἀριθμητικῶν συμβόλων ἠθέλομεν* ὁρίσῃ. ἀρχόμενοι ἀπὸ *δύο* ἀριθμητικῶν συμβόλων καὶ ἐφ' ἑξῆς. Οὕτω, ποιοῦντες χρῆσιν *δύο*, *τριῶν*, *τεσσάρων*, *πέντε*, *ἕξ*, *ἑπτὰ* και οὕτω καθ' ἑξῆς ἀριθμητικῶν συμβόλων, δυνάμεθα νὰ μορφώσωμεν σύστημα ἀριθμήσεως *δυαδικόν*, *τριαδικόν*, *τετραδικόν*, *πενταδικόν*, *ἑξαδικόν*, *ἑπταδικὸν* καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς. Ἐὰν δὲ θέλωμεν νὰ μορφώσωμεν σύστημα ἀριθμήσεως ἀνώτερον τοῦ *δεκαδικοῦ*, ἀνάγκη νὰ μορφώσωμεν καὶ νέα σύμβολα ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ *ἐννέα* καὶ ἐφ' ἑξῆς. Οὕτω διὰ τὸ *ἑνδεκαδικὸν* σύστημα ἀνάγκη νὰ μορφώσωμεν σύμβολον δηλοῦν τὸν ἀριθμὸν *δέκα*, διὰ τὸ *δωδεκαδικὸν* ἀνάγκη νὰ μορφώσωμεν σύμβολα δηλοῦντα τὸν ἀριθμὸν *δέκα* καὶ *ἕνδεκα* καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

14. Ἡ γραφὴ ὅμως παντὸς ἀριθμοῦ εἰς οἱονδήποτε σύστημα ἀριθμήσεως γίνεται διὰ τοῦ χωρισμοῦ πρῶτον τοῦ ἀριθμοῦ εἰς τὰς μονάδας τῶν διαφόρων τάξεων τοῦ συστήματος τούτου καὶ αἵτινες μορφοῦνται ὡς ἑξῆς.

Παράδειγμα. Νὰ μορφωθῶσιν αἱ μονάδες τῶν διαφόρων τάξεων τοῦ δυαδικοῦ, τριαδικοῦ, τετραδικοῦ κτλ. συστήματος.

Καθ' ὃν τρόπον, ἀρχόμενοι ἐκ τῆς ἁπλῆς μονάδος καὶ *δεκαπλασιάζοντες* τὸ ποσὸν τῶν ἁπλῶν μονάδων ἃς περιέχει μία μονὰς ἑκάστης τάξεως τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος, ἐμορφώσαμεν μίαν μονάδα ἑπομένης τάξεως (§ 7) καὶ οὕτω ἐμορφώσαμεν τὰς μονάδας τῶν διαφόρων τάξεων τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος, κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ἀρχόμενοι ἐκ τῆς ἁπλῆς μονάδος διὰ *διπλασιασμοῦ* μορφοῦμεν τὰς μονάδας τῶν διαφόρων τάξεων τοῦ *δυαδικοῦ* συστήματος, διὰ *τριπλασιασμοῦ* μορφοῦμεν τὰς μονάδαν τῶν διαφόρων τάξων τοῦ *τριαδικοῦ* συστήματος, διὰ *τετραπλασιασμοῦ* μορφοῦμεν τὰς μονάδας τῶν διαφόρων τάξεων τοῦ *τετραδικοῦ* συστήματος καὶ γενικῶς, ἀρχόμενοι ἐκ τῆς ἁπλῆς μονάδος καὶ πολλαπλασιάζοντες τὸν ἀριθμὸν τῶν ἁπλῶν μονάδων ἃς περιέχει μία μονὰς ἑκάστης τάξεως, ἐπὶ ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν μορφοῦμεν μίαν μονάδα ἑπομένης τάξεως τοῦ συστήματος τοῦ δηλουμένου ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ ἐφ' οὗ πολλαπλασιάζομεν. Οὕτω δὲ μορφοῦμεν τὰς μονάδας τῶν διαφόρων τάξεων οἱουδήποτε συστήματος.

Κατὰ ταῦτα αἱ μονάδες τῶν διαφόρων τάξεων τοῦ δυαδικοῦ συστήματος μορφοῦνται ὡς ἑξῆς.

Τὴν	1αν	ἁπλῆν μονάδα	καλοῦμεν	1αν	μονάδα	α'	τάξεως
τὰς	2	ἁπλᾶς μονάδας	»	1αν	»	β'	»
»	4	» »	»	1αν	»	γ'	»
»	8	» »	»	1αν	»	δ'	»

καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Ὁμοίως αἱ μονάδες τῶν διαφόρων τάξεων τοῦ *ἑξαδικοῦ* συστήματος, ἐπὶ παραδείγματι, μορφοῦνται ὡς ἑξῆς.

Τὴν	1αν	ἁπλῆν μονάδα	καλοῦμεν	1αν	μονάδα	α'	τάξεως
τὰς	6	ἁπλᾶς μονάδας	»	1αν	»	β'	»
»	36	» »	»	1αν	»	γ'	»
»	216	» »	»	1αν	»	δ'	»

καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Ὁμοίως αἱ μονάδες τῶν διαφόρων τάξεων τοῦ *ὀκταδικοῦ* συστήματος, ἐπὶ παραδείγματι, μορφοῦνται ὡς ἑξῆς.

Τὴν	1αν	ἁπλῆν μονάδα	καλοῦμεν	1αν	μονάδα	α'	τάξεως
τὰς	8	ἁπλᾶς μονάδας	»	1αν	»	β'	»
»	64	» »	»	1αν	»	γ'	»
»	512	» »	»	1αν	»	δ'	»

καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Ὁμοίως αἱ μονάδες τῶν διαφόρων τάξεων τοῦ *δεκαπενταδικοῦ* συστήματος, ἐπὶ παραδείγματι, μορφοῦνται ὡς ἑξῆς.

Τὴν	1αν	ἁπλῆν μονάδα	καλοῦμεν	1αν	μονάδα	α'	τάξεως
τὰς	15	ἁπλᾶς μονάδας	»	1αν	»	β'	»
»	225	» »	»	1αν	»	γ'	»
»	3375	» »	»	1αν	»	δ'	»

καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Ἐντεῦθεν παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ μονάδες τῶν διαφόρων τάξεων ἑκάστου συστήματος ἀριθμήσεως εἶναι ἄπειροι καὶ ὅτι, δυνάμεθα νὰ μορφώσωμεν τὰς μονάδας τῶν διαφόρων τάξεων ἀπείρων συστημάτων.

Γραφὴ παντὸς ἀριθμοῦ εἰς οἱονδήποτε σύστημα ἀριθμήσεως.

15. Καθ' ὃν τρόπον ἠδυνήθημεν νὰ γράψωμεν εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα πάντα ἀριθμὸν διὰ *δέκα* ἀριθμητικῶν συμβόλων *χωρίζοντες τὸν ἀριθμὸν εἰς τὰς μονάδας τῶν διαφόρων τάξεων τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος* (§ 9), κατ' ἀνάλογον τρόπον δυνάμεθα πάντα ἀριθμὸν νὰ γράψωμεν *δι' ὁσωνδήποτε* ἀριθμητικῶν συμβόλων ἠθέλομεν ὁρίσῃ, *χωρίζοντες αὐτὸν εἰς τὰς μονάδας τῶν διαφόρων τάξεων τοῦ συστήματος τούτου* (§ 13).

Π ρ ό β λ η μ α 1ον *Νὰ γραφῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν κόκκων τοῦ σίτου ὁ περιεχόμενος εἰς ἕνα σάκκον εἰς τὸ πενταδικὸν σύστημα.*

Διὰ νὰ γράψωμεν τὸν εἰρημένον ἀριθμὸν εἰς τὸ *πενταδικόν σύστημα* χωρίζομεν αὐτὸν εἰς τὰς μονάδας τῶν διαφόρων τάξεων τοῦ πενταδικοῦ συστήματος. Κατορθοῦμεν δὲ τοῦτο ὡς ἑξῆς.

Λαμβάνομεν ἐκ τοῦ σάκκου ἀνὰ *πέντε κόκκους* καὶ οὕτω μορφοῦμεν *μονάδας δευτέρας τάξεως τοῦ πενταδικοῦ συστήματος*· θὰ ἐπέλθῃ ὅμως στιγμή, καθ' ἣν θὰ ἐξαντληθῶσιν οἱ κόκκοι τοῦ σίτου οἱ περιεχόμενοι ἐν τῷ σάκκῳ καὶ θὰ μείνωσιν ἐν αὐτῷ ὀλιγώτεροι τῶν *πέντε* κόκκων δηλ. θὰ μείνωσιν ἢ 4 ἢ 3 ἢ 2 ἢ 1 ἢ καὶ *οὐδεὶς* δηλ. 0, ἔστω δὲ ὅτι ἔμειναν ἐν τῷ σάκκῳ 3 κόκκοι σίτου δηλ. 3 *μονάδες πρώτης τάξεως*.

Καὶ ἤδη, καθ' ὃν τρόπον ἐκ τῶν *ἁπλῶν μονάδων* ἐμορφώσαμεν μονάδας *δευτέρας τάξεως*, κατὰ τὸν αὐτόν ἀκριβῶς τρόπον ἐκ τῶν μονάδων *δευτέρας τάξεως*, λαμβάνοντες αὐτὰς ἀνὰ *πέντε*, μορφοῦμεν μονάδας *τρίτης τάξεως τοῦ πενταδικοῦ συστήματος*, θὰ ἐπέλθῃ ὅμως στιγμή, καθ' ἣν θὰ ἐξαντληθῶσιν αἱ μονάδες δευτέρας τάξεως καὶ θὰ μείνωσιν ὀλιγώτεραι τῶν πέντε τοιούτων μονάδων καὶ ἔστω ὅτι ἔμειναν 2 *μονάδες δευτέρας τάξεως*.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἤδη ἐκ τῶν μονάδων *τρίτης τάξεως*, λαμβάνοντες αὐτὰς ἀνὰ *πέντε*, μορφοῦμεν μονάδας *τετάρτης τάξεως τοῦ πενταδικοῦ συστήματος*, θὰ ἐπέλθῃ ὅμως στιγμή, καθ' ἣν θὰ ἐξαντληθῶσιν αἱ μονάδες τρίτης τάξεως καὶ θὰ μείνωσιν ὀλιγώτεραι τῶν πέντε τοιούτων μονάδων καὶ ἔστω, ὅτι ἔμειναν 4 *μονάδες τρίτης τάξεως*.

Κατὰ τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον θὰ ἐξακολουθῶμεν, μέχρις οὗ ἐκ τῶν μονάδων τάξεώς τινος δὲν δυνηθῶμεν νὰ μορφώσωμεν μονάδας ἑπομένης τάξεως. Ἵνα δὲ ὁρίσωμεν τὰς ἰδέας μας, ἔστω ὅτι ἐκ τῶν μορφωθεισῶν ἤδη μονάδων τετάρτης τάξεως ἐμορφώσαμεν 3 μονάδας *πέμπτης τάξεως* καὶ ὅτι ἐπερίσσευσαν 2 μονάδες *τετάρτης τάξεως*.

Καὶ οὕτω τὸν ἀριθμὸν τῶν κόκκων τοῦ σίτου τὸν περιεχόμενον εἰς τὸν σάκκον, *χωρίσαντες εἰς μονάδας διαφόρων τάξεων τοῦ πενταδικοῦ συστήματος* ἠδυνήθημεν νὰ τὸν γράψωμεν, ποιοῦντες χρῆσιν μόνον τῶν *πέντε* ἀριθμητικῶν συμβόλων 1, 2, 3, 4 καὶ 0. Περιέχει δὲ ὁ εἰρημένος ἀριθμός, 3 μονάδας *πρώτης τάξεως*, *2 δευτέρας*, *4 τρίτης*, *2 τετάρτης* καὶ *3 πέμπτης τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος*.

Διὰ ν' ἀποφύγωμεν δὲ τὴν ἀνάγκην τῆς γραφῆς παρ' ἑκάστῳ ψηφίῳ τῆς τάξεως εἰς ἣν ἀνήκει ἕκαστον ψηφίον, ποιοῦμεν τὴν ἑξῆς συμφωνίαν δια τὸ *πενταδικὸν* σύστημα.

16. *Πᾶν σημαντικὸν ψηφίον γραφόμενον πρὸς τ' ἀριστερὰ ἑτέρου σημαντικοῦ ψηφίου γίνεται ἐκ μονάδος πενταπλασίας τῆς τοῦ προηγουμένου. Ἐν ἐλλείψει δὲ μονάδων τάξεώς τινος, γράφομεν μηδέν, εἰς τὴν τάξιν ταύτην, ἵνα τηρήσωμεν τὴν σημασίαν τῶν ἑπομένων σημαντικῶν ψηφίων.*

Κατὰ ταῦτα, τὸν ἀνωτέρω ἀριθμὸν τῶν κόκκων τοῦ σίτου *γράφομεν* 32423. Καὶ συμφώνως πρὸς τὴν ἀνωτέρω συμφωνίαν (§ 16) *ὀνομάζομεν* αὐτὸν 3 μονάδας *πρώτης τάξεως*, *2 δευτέρας*, *4 τρίτης*, *2 τετάρτης* καὶ *3 πέμπτης* τοῦ *πενταδικοῦ συστήματος*.

17. Κατ' ἀνάλογον τρόπον δυνάμεθα νὰ γράψωμεν οἱονδήποτε ἀριθμὸν ὁσονδήποτε μέγαν εἰς οἱονδήποτε σύστημα, ἀρκεῖ διὰ τὰ συστήματα τὰ ἀνώτερα τοῦ δεκαδικοῦ δηλ. τὸ *ἑνδεκαδικόν*, *δωδεκαδικὸν* καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς νὰ δημιουργήσωμεν, ὡς εἴπομεν καὶ ἀλλαχοῦ, καὶ ἄλλα σύμβολα.

Τροπὴ ἀριθμοῦ οἱουδήποτε συστήματος εἰς τὸ δεκαδικόν

18. *Πᾶς ἀριθμὸς γεγραμμένος δύναται ν' ἀνήκῃ εἰς οἱονδήποτε σύστημα ἀριθμήσεως ἀνώτερον τοῦ ὑποδηλουμένου ὑπὸ τοῦ μεγαλητέρου ἀριθμητικοῦ ψηφίου τοῦ περιεχομένου εἰς τὸν γεγραμμένον ἀριθμόν.*

Π. χ. Ὁ ἀριθμὸς 3257 δύναται ν' ἀνήκῃ εἰς τὸ ὀκταδικὸν σύστημα ἢ εἰς πᾶν ἄλλο σύστημα ἀνώτερον τοῦ ὀκταδικοῦ συστήματος, οὐχὶ δὲ καὶ εἰς κατώτερον τούτου, ὡς περιέχον τὸ ψηφίον 7, διότι πᾶν σύστημα κατώτερον τοῦ ὀκταδικοῦ γράφεται δι' ἀριθμητικῶν ψηφίων μὴ περιεχόντων τὸ ψηφίον 7.

Ὁμοίως. Ὁ ἀριθμὸς 102 δύναται ν' ἀνήκῃ εἰς τὸ τριαδικὸν σύστημα ἢ εἰς πᾶν ἄλλο σύστημα *ἀνώτερον τοῦ τριαδικοῦ*, οὐχὶ ὅμως καὶ εἰς *κατώτερον τοῦ τριαδικοῦ*.

Πρόβλημα 1ον *Νὰ τραπῇ ὁ ἀριθμὸς 7 μονάδες πρώτης τάξεως, 5 δευτέρας, 2 τρίτης, 3 τετάρτης τοῦ ὀκταδικοῦ συστήματος* (δηλ. ὁ ἀριθμὸς 3257) *εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα, ἐν ἄλλαις λέξεσι, νὰ εὕρωμεν τὸ σύνολον τῶν ἁπλῶν μονάδων ἃς ὁ ἀριθμὸς οὗτος περιέχει.*

Λύσις. Μορφοῦμεν πρῶτον τὸν πίνακα τῶν μονάδων τῶν διαφόρων τάξεων τοῦ ὀκταδικοῦ συστήματος καὶ ὅστις, κατὰ τὰ γνωστά, εἶναι ὁ ἑξῆς·

1 μονὰς	α'	τάξεως	περιέχει	1	ἁπλῆν	μονάδα
1 »	β'	»	»	8	ἁπλᾶς	μονάδας
1 »	γ'	»	»	64	»	»
1 »	δ'	»	»	512	»	»

καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Καὶ ἤδη σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς, ὅπως εὕρωμεν ὁ ἀριθμὸς 3257 τοῦ ὀκταδικοῦ συστήματος πόσας ἁπλᾶς μονάδας περιέχει.

Ἐπειδὴ ἡ 1 μονὰς δ' τάξεως περιέχει 512 ἁπλᾶς μονάδας, αἱ 3 μονάδες δ' τάξεως περιέχουσι 512×3 ἤτοι 1536 ἁπλᾶς μόνας.

Ἡ 1 μονὰς γ' τάξεως περιέχει 64 ἁπλᾶς μονάδας, αἱ 2 μονάδες γ' τάξεως περιέχουσι 64×2 ἤτοι 128 ἁπλᾶς μονάδας.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι, αἱ 5 μονάδες β' τάξεως περιέχουσι 8×5 ἤτοι 40 ἁπλᾶς μονάδας. Περιέχει δὲ ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ἀκόμη 7 ἁπλᾶς μονάδας.

Ὥστε ὅλαι αἱ ἁπλαῖ μονάδες τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ 3257 τοῦ ὀκταδικοῦ συστήματος εἶναι

$$\begin{array}{r} 1536 \\ 128 \\ 40 \\ 7 \\ \hline 1711 \end{array}$$

ἤτοι ὁ ἀριθμὸς 3257 τοῦ ὀκταδικοῦ συστήματος, ἤτοι ὁ ἀριθμὸς 3 μονάδες τετάρτης τάξεως, 2 τρίτης, 5 δευτέρας καὶ 7 πρώτης τοῦ ὀκταδικοῦ συστήματος, τρεπόμενος εἰς τὸ δεκαδικὸν γίνεται 1711, ἤτοι περιέχει χιλίας ἑπτακοσίας ἕνδεκα ἁπλᾶς μονάδας.

Ἐντεῦθεν πορίζόμεθα τὸν ἑξῆς κανόνα.

19. *Ἵνα τρέψωμεν ἀριθμόν τινα οἱουδήποτε συστήματος εἰς τὸ δεκαδικόν, μορφοῦμεν πρῶτον τὸν πίνακα τῶν μονάδων τῶν διαφόρων τάξεων τοῦ συστήματος εἰς τὸ ὁποῖον ἀνήκει ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς καὶ δι' αὐτοῦ εὑρίσκομεν τὰς ἁπλᾶς μονάδας ἃς περιέχει ἕκαστον ἀριθμητικὸν ψηφίον τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ, ἃς προσθέτοντες, εὑρίσκομεν τὸ σύνολον τῶν ἁπλῶν μονάδων τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ ἤ, ὅπερ ταὐτό, εὑρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος εἰς ὃν τρέπεται ὁ δοθεὶς ἀριθμός.*

Π. χ. Νὰ τραπῇ ὁ ἀριθμὸς 302 *τοῦ δωδεκαδικοῦ* συστήματος εἰς τὸ δεκαδικόν,

Ἐπειδὴ ἡ 1 μονὰς *τρίτης* τάξεως τοῦ *δωδεκαδικοῦ* συστήματος περιέχει 12×12 ἤτοι 144 ἁπλᾶς μονάδας, διὰ τοῦτο ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς 302 τοῦ δωδεκαδικοῦ συστήματος περιέχει $2+144\times3$, ἤτοι $2+432$ ἤτοι 434 *ἁπλᾶς μονάδας.*

Τροπὴ ἀριθμοῦ τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος εἰς ἄλλο σύστημα οἱονδήποτε.

Πρόβλημα 1ον *Νά τραπῇ ὁ ἀριθμὸς 1711 τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος εἰς τὸ ὀκταδικόν.*

Ἵνα τρέψωμεν τὸν ἀριθμὸν 1711 *τοῦ δεκαδικοῦ* συστήματος εἰς τὸ ὀκταδικόν, *χωρίζομεν τοῦτον εἰς τὰς μονάδας τῶν διαφόρων τάξεων τοῦ ὀκταδικοῦ* συστήματος. Κατορθοῦμεν δὲ τοῦτο ὡς ἑξῆς.

Διαιροῦμεν τὸν ἀριθμὸν 1711 διὰ τοῦ 8 *καὶ* οὕτω τὸ μὲν *ὑπόλοιπον* 7 δηλοῖ ἁπλᾶς μονάδας ἢ μονάδας πρώτης τάξεως, διότι αὗται εἶναι αἱ μείνασαι ἁπλαὶ μονάδες ἐκ τῶν 1711 τοιούτων, τὸ δὲ *πηλίκον* 213 δηλοῖ μονάδας *δευτέρας* τάξεως τοῦ ὀκταδικοῦ συστήματος, διότι ἑκάστη τούτων περιέχει 8 ἁπλᾶς μονάδας.

Κατὰ τὸν αὐτὸν ἤδη τρόπον διαιροῦμεν τὸν ἀριθμὸν 213 μονάδας *δευτέρας τάξεως* διὰ 8 καὶ οὕτω τὸ μὲν ὑπόλοιπον τούτων 5, δηλοῖ μονάδας *δευτέρας τάξεως τοῦ ὀκταδικοῦ* συστήματος, διότι εἶναι αἱ μείνασαι μονάδες δευτέρας τάξεως ἐκ τῶν 213 τοιούτων, τὸ δὲ πηλίκον 26 δηλοῖ *μονάδας τρίτης τάξεως τοῦ ὀκταδικοῦ συστήματος*, διότι ἑκάστη τούτων περιέχει 8 μονάδας δευτέρας τάξεως τοῦ συστήματος τούτου.

Κατὰ τὸν αὐτὸν ἤδη τρόπον διαιροῦμεν τὸν ἀριθμὸν 26 μονάδας *τρίτης τάξεως* διὰ 8 καὶ οὕτω, τὸ μὲν ὑπόλοιπον τούτων 2 δηλοῖ μονάδας *τρίτης τάξεως τοῦ ὀκταδικοῦ* συστήματος, διότι εἶναι αἱ μείνασαι μονάδες τρίτης τάξεως ἐκ τῶν 26 τοιούτων, τὸ δὲ πηλίκον 3 δηλοῖ μονάδας *τετάρτης τάξεως τοῦ ὀκταδικοῦ συστήματος*, διότι ἑκάστη τούτων περιέχει ὀκτὼ μονάδας τρίτης τάξεως τοῦ συστήματος τούτου.

Καὶ οὕτω χωρίσαντες τὸν ἀριθμὸν 1711 τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος εἰς μονάδας διαφόρων τάξεων τοῦ *ὀκταδικοῦ* συστήματος ἐτρέψαμεν αὐτὸν εἰς τὸ σύστημα τοῦτο καὶ οὕτως εὕρομεν τὸν ἀριθμὸν 3257 ἤτοι 7 μονάδας *πρώτης τάξεως*, 5 *δευτέρας*, 2 *τρίτης* καὶ 3 *τετάρτης τοῦ ὀκταδικοῦ συστήματος*.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς

$$\begin{array}{llll}
1711 & \multicolumn{1}{|l}{8} & & \\ \cline{2-3}
11 & 213 & \multicolumn{1}{|l}{8} & \\ \cline{3-4}
31 & 53 & 26 & \multicolumn{1}{|l}{8} \\ \cline{4-4}
7 & 5 & 2 & 3
\end{array}$$

καὶ οὕτω ἔχομεν 7 μον. α΄. τάξεως, 5 μον. β΄. τάξεως, 2 μον. γ΄. τάξεως καὶ 3 μον. δ΄. τάξεως *τοῦ ὀκταδικοῦ συστήματος*.

Ἐντεῦθεν πορίζόμεθα τὸν ἑξῆς κανόνα.

20. *Ἵνα τρέψωμεν ἀριθμόν τινα τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος εἰς ἄλλο σύστημα οἱονδήποτε, διαιροῦμεν τὸν δοθέντα ἀριθμόν, ὡς καὶ τὸ ἑκάστοτε πηλίκον, διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ὑποδηλοῦντος τὸ σύστημα εἰς ὃ πρόκειται νὰ τραπῇ ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος, μέχρις οὗ εὕρωμεν πηλίκον μικρότερον τοῦ εἰρημένου διαιρέτου, ὅτε τὰ διαδοχικὰ ὑπόλοιπα δηλοῦσι τὰ ἀριθμητικὰ ψηφία τῶν μονάδων τῶν διαφόρων τάξεων, ἐξ ὧν θ' ἀποτελῆται ὁ ἀριθμὸς εἰς ὃν ἐτράπη ὁ δοθεὶς τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος.*

Π. χ. Νὰ τραπῇ ὁ ἀριθμὸς 3563 τοῦ *δεκαδικοῦ* συστήματος εἰς τὸ *δωδεκαδικόν*.

Κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα (§ 20) ἔχομεν

$$\begin{array}{rrrr}
3563 & |\,12 & & \\
116 & 296 & |\,12 & \\
83 & 56 & 24 & |\,12 \\
11 & 8 & 0 & 2
\end{array}$$

καὶ οὕτω χωρίσαντες τὸν ἀριθμὸν 3563 τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος εἰς μονάδας διαφόρων τάξεων τοῦ δωδεκαδικοῦ συστήματος ἐτρέψαμεν αὐτὸν εἰς τὸ σύστημα τοῦτο καὶ οὕτως εὕρομεν 11 μονάδας *πρώτης τάξεως*, 8 *δευτέρας*, 0 *τρίτης* καὶ 2 *τετάρτης* τοῦ *δωδεκαδικοῦ συστήματος*. Ἐπειδὴ ὅμως διὰ τὸν ἀριθμὸν 11 τοῦ δωδεκαδικοῦ συστήματος θὰ ἔχῃ δημιουργηθῇ ἰδιαίτερον σύμβολον (§ 13), ἂν τοῦτο εἶναι π. χ. τὸ B, τότε ὁ εἰρημένος ἀριθμὸς τοῦ δωδεκαδικοῦ συστήματος *γράφεται* 208B *καὶ ὀνομάζεται* B (δηλ. τὸ ὄνομα τῶν ἁπλῶν τούτων μονάδων) μονάδες *πρώτης τάξεως*, 8 *δευτέρας καὶ* 2 *τετάρτης* τοῦ *δωδεκαδικοῦ* συστήματος.

Τροπὴ ἀριθμοῦ οἱουδήποτε συστήματος εἰς ἄλλο σύστημα οἱονδήποτε.

Παράδειγμα. Νὰ τραπῇ ὁ ἀριθμὸς 3140 τοῦ *ἑξαδικοῦ συστήματος* εἰς τὸ *ἐννεαδικὸν σύστημα*.

Λύσις. Τρέπομεν πρῶτον τὸν ἀριθμόν 3140 τοῦ ἑξαδικοῦ συστήματος εἰς τὸ *δεκαδικὸν* (§ 19), ὅτε εὑρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν 708, *ἤτοι ἑπτακόσια ὀκτώ*, τοῦτον δὲ ἔπειτα τρέπομεν εἰς τὸ *ἐννεαδικὸν* σύστημα (§ 20), ὅτε εὑρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν 866 δηλ 6 μονάδας *πρώτης τάξεως*, 6 *δευτέρας καὶ* 8 *τρίτης* τοῦ *ἐννεαδικοῦ συστήματος*.

Ἐντεῦθεν ἐξάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

21. *Ἵνα τρέψωμεν ἀριθμὸν οἱουδήποτε συστήματος εἰς ἕτερον σύστημα οἱονδήποτε, τρέπομεν πρῶτον αὐτὸν εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα καὶ τοῦτον τρέπομεν εἶτα εἰς τὸ ἕτερον οἱονδήποτε σύστημα.*

Ὁρισμοὶ διάφοροι.

22. Πᾶς ἀριθμὸς εἶναι *συγκεκριμένος* ἢ *ἀφῃρημένος*.

23. *Συγκεκριμένος λέγεται ὁ ἀριθμὸς ὁ ὁποῖος ἀναφέρεται εἴς πρᾶγμά τι.*

Π. χ. Οἱ ἀριθμοὶ 5 μῆλα, 10 ἄνθρωποι λέγονται *συγκεκριμένοι* ἀριθμοί.

24. Τοὺς συγκεκριμένους ἀριθμοὺς διακρίνομεν·

α΄) *Εἰς ὁμοειδεῖς* καὶ β΄) *εἰς ἑτεροειδεῖς.*

25. *Ὁμοειδεῖς* λέγονται οἱ ἀριθμοὶ τῶν ὁποίων ἡ μονὰς ἀναφέρεται εἰς τὸ αὐτὸ πρᾶγμα.

Π. χ. Οἱ ἀριθμοὶ 4 *μῆλα* καὶ 8 *μῆλα* εἶναι *ὁμοειδεῖς.*

Ὁμοίως, οἱ ἀριθμοὶ 7 *ἄνθρωποι μέλανες* καὶ 15 *ἄνθρωποι μέλανες* εἶναι ἀριθμοὶ *ὁμοειδεῖς.*

26. *Ἑτεροειδεῖς* λέγονται οἱ ἀριθμοὶ τῶν ὁποίων ἡ μονὰς ἀναφέρεται εἰς διάφορα πράγματα.

Π. χ. Οἱ ἀριθμοὶ 5 μῆλα, 10 ἄνθρωποι, 4 κάστανα εἶναι *ἑτεροειδεῖς.*

27. *Ἀφῃρημένος λέγεται ὁ ἀριθμὸς ὁ ὁποῖος εἰς οὐδὲν ὡρισμένον πρᾶγμα ἀναφέρεται.*

Π. χ. Οἱ ἀριθμοὶ 5, 7, 28 λέγονται *ἀφῃρημένοι* ἀριθμοί. Ὁμοίως οἱ ἀριθμοὶ 4 ὀκάδες, 3 ὀκάδες εἶναι *ἀφῃρημένοι*, διότι δὲν ἀναφέρονται εἰς *ὡρισμένον* πρᾶγμα.

Τοὺς ἀριθμοὺς διακρίνομεν προσέτι·

α΄) *Εἰς ὁμωνύμους* καὶ β΄) *εἰς ἑτερωνύμους.*

28. *Ὁμώνυμοι* λέγονται οἱ ἀριθμοί, οἵτινες γίνονται ἐκ τῆς αὐτῆς μονάδος.

Π. χ. Οἱ ἀριθμοὶ 5 μονάδες *πρώτης τάξεως* καὶ δώδεκα μονάδες *πρώτης τάξεως* εἶναι ὁμώνυμοι ἀριθμοί.

Ὁμοίως. Οἱ ἀριθμοὶ 3 μονάδες *τρίτης τάξεως* δηλ. ἑκατοντάδες καὶ 8 μονάδες τρίτης τάξεως δηλ. ἑκατοντάδες εἶναι *ὁμώνυμοι* ἀριθμοί.

29. *Ἑτερώνυμοι* λέγονται οἱ ἀριθμοί, οἵτινες γίνονται ἐκ διαφόρων μονάδων.

Π. χ. Οἱ ἀριθμοὶ 5 μονάδες *πρώτης τάξεως* καί 9 μονάδες *δευτέρας τάξεως* (δηλ. δεκάδες), εἶναι *ἑτερώνυμοι* ἀριθμοί.

30. *Ἀξίωμα λέγεται πρότασις, τῆς ὁποίας ἡ ἀλήθεια εἶναι ἀφ' ἑαυτῆς φανερά.*

Π. χ. Ἐὰν ἀλλάξωμεν τὰς θέσεις ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν, τὸ πλῆθος τῶν μονάδων ἑκάστου τούτων μένει ἀμετάβλητον.

Ἡ πρότασις αὕτη εἶναι ἀξίωμα, διότι πειθόμεθα ἀμέσως περὶ τῆς ἀληθείας τῆς προτάσεως ταύτης, χωρὶς νὰ εἴμεθα ἠναγκασμένοι νὰ κάμωμεν ἄλλας σκέψεις ἁπλουστέρας, δι' ὧν νὰ πεισθῶμεν, ὅτι ἡ εἰρημένη πρότασις εἶναι ἀληθής.

31. *Θεώρημα λέγεται πρότασις τῆς ὁποίας ἡ ἀλήθεια δὲν εἶναι ἀφ' ἑαυτῆς φανερά, ἀλλ' εἶναι ἀνάγκη νὰ καταφύγωμεν εἰς ἄλλας σκέψεις, ἵνα πεισθῶμεν ὅτι ἡ δοθεῖσα πρότασις εἶναι ἀληθής.*

Π. χ. Ἡ πρότασις τοῦ ἐδαφίου (§ 9) εἶναι *θεώρημα*.

Ἀπόδειξις λέγεται ὁ συλλογισμὸς ἢ σειρὰ συλλογισμῶν, τοὺς ὁποίους κάμνομεν, ἵνα πεισθῶμεν περὶ τῆς ἀληθείας δοθείσης προτάσεως.

32. *Πρόβλημα ἀριθμητικὸν λέγεται ἡ πρότασις διὰ τῆς ὁποίας ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τι.*

Λύσις δὲ τοῦ προβλήματος λέγεται ἡ εὕρεσις τοῦ ζητουμένου.

Εἰς ἕκαστον *θεώρημα* ἢ *πρόβλημα* διακρίνομεν τὴν *ὑπόθεσιν* καὶ τὸ *συμπέρασμα*. Καὶ ὑπόθεσις μὲν εἶναι ἡ πρότασις ἐν ᾗ περιέχονται *τὰ δεδομένα* τοῦ θεωρήματος ἢ προβλήματος, *συμπέρασμα* δὲ ἡ πρότασις ἐν ᾗ περιέχονται *τὰ ἀποδεικτέα* τοῦ θεωρήματος ἢ τὰ ζητούμενα τοῦ προβλήματος.

33. *Θεώρημά* τι ἢ *πρόβλημα* λέγεται ἀντίστροφον ἄλλου θεωρήματος ἢ προβλήματος, ὅταν ἡ ὑπόθεσις τοῦ ἑνὸς εἶναι συμπέρασμα εἰς τὸ ἕτερον καὶ τὸ συμπέρασμα εἶναι ὑπόθεσις.

34. *Πόρισμα* λέγεται ἡ πρότασις τῆς ὁποίας ἡ ἀλήθεια ἐξάγεται ἀμέσως ἐκ τοῦ προαποδειχθέντος θεωρήματος.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ἀπαντήσατε ἐπὶ τοῦ ἀριθμοῦ 63257 εἰς τὰς ἑξῆς ἐρωτήσεις.

α'.) Πόσας δεκάδας καὶ μονάδας περιέχει·

(6325 δεκάδας καὶ 7 μονάδας).

β'.) Πόσας ἑκατοντάδας καὶ μονάδας περιέχει;

(632 ἑκατοντάδας καὶ 57 μονάδας)

γ'.) Πόσας χιλιάδας καὶ μονάδας περιέχει;

(63 χιλιάδας καὶ 257 μονάδας).

δ'.) Πόσας δεκάδας χιλιάδων, πόσας ἑκατοντάδας, πόσας δεκάδας καὶ πόσας μονάδας περιέχει;

(6 δεκάδ χιλ., 32 ἑκατοντάδ., 5 δεκάδ. καὶ 7 μονάδας).

2) Νὰ τραπῇ ὁ ἀριθμὸς 3002 τοῦ τετραδικοῦ συστήματος (δηλ. ὁ 2 μονάδες πρώτης τάξεως καὶ 3 τετάρτης τοῦ τετραδικοῦ συστήματος) εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα. (194)

3) Νὰ τραπῇ ὁ ἀριθμὸς 194 τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος εἰς τὸ τετραδικὸν σύστημα,

(3002 ἤτοι 3 μονάδες τετάρτης τάξεως καὶ 2 πρώτης τοῦ τετραδικοῦ συστήματος).

4) Νά τραπῇ ὁ ἀριθμὸς 3002 τοῦ ἑπταδικοῦ συστήματος εἰς τὸ δυαδικὸν σύστημα.

Λύσις. Τρέπομεν τὸν ἀριθμὸν 3002 πρῶτον εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα καὶ τοῦτον εἶτα εἰς τὸ δυαδικὸν καὶ οὕτω εὑρίσκομεν·

(Ὁ 3002 γίνεται πρῶτον 1031 ἁπλαῖ μονάδες καὶ οὗτος γίνεται εἰς τὸ δυαδικὸν 10000000111, δηλ. 1 μονὰς ἑνδεκάτης τάξεως, 1 μονὰς τρίτης, 1 δευτέρας καὶ 1 πρώτης τοῦ δυαδικοῦ συστήματος.

Περὶ προσθέσεως.

34. *Πρόσθεσις* εἶναι ἡ πρᾶξις διὰ τῆς ὁποίας σχηματίζομεν ἕνα ἀριθμὸν ἐκ πασῶν τῶν μονάδων τὰς ὁποίας ἔχουσι δύο ἢ περισσότεροι δοθέντες ἀριθμοί.

35. Οἱ ἀριθμοὶ οἱ ὁποῖοι πρόκειται νὰ προστεθῶσι λέγονται *προσθετέοι*.

36. Ὁ ἀριθμὸς τὸν ὁποῖον σχηματίζομεν ἐκ πασῶν τῶν μονάδων τῶν προσθετέων λέγεται *ἄθροισμα* ἢ *κεφάλαιον*.

Σημ. Οἱ προσθετέοι πρέπει νὰ εἶναι ἀριθμοὶ ὁμοειδεῖς ἢ ἀφῃρημένοι καὶ νὰ γίνωνται ἐκ τῆς αὐτῆς μονάδος κατὰ μέγεθος, ἄλλως καθιστῶμεν αὐτοὺς τοιούτους καὶ εἶτα τοὺς προσθέτομεν.

Π.χ. Οἱ ἀριθμοὶ 2 *μῆλα* καὶ 3 *βιβλία* δὲν προστίθενται, ὡς ἑτεροειδεῖς

Ὁμοίως. Οἱ ἀριθμοὶ 2 *ἁπλαῖ μονάδες* καὶ 3 *δεκάδες* δὲν προστίθενται, ἂν μὴ καὶ αἱ δεκάδες τραπῶσιν εἰς ἁπλᾶς μονάδας.

37. Τὸ σημεῖον τῆς προσθέσεως εἶναι τὸ +, τὸ ὁποῖον γράφεται μεταξὺ τῶν προσθετέων, ὅταν οὗτοι γράφωνται κατὰ σειρὰν καὶ ὀνομάζεται *σὺν* ἢ *πλέον*.

Π. χ. Τὸ 3+5 σημαίνει ὅτι εἰς τὸ 3 πρέπει νὰ προστεθῇ τὸ 5 καὶ ἀναγινώσκεται 3 σὺν 5 ἢ 3 πλέον 5.

38. Εἰς τὴν πρόσθεσιν διακρίνομεν 2 περιπτώσεις.

Α'.) Ὅταν οἱ προσθετέοι εἶναι *μονοψήφιοι*.

Β'.) Ὅταν οἱ προσθετέοι εἶναι *πολυψήφιοι*.

α' περίπτωσις.—**Πρόσθεσις μονοψηφίων.**

39. *Τὸ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε προσθετέων εὑρίσκομεν προσθέτοντες τοὺς δύο πρώτους προσθεταίους, εἰς δὲ τὸ ἄθροισμα τούτων, τὸν τρίτον καὶ εἰς τὸ ἄθροισμα τούτων, τὸν τέταρτον καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς μέχρι τοῦ τελευταίου ἐκ τῶν δοθέντων προσθετέων.*

Πρόβλημα 1ον.—*Εὑρεῖν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν 4,2 καὶ 7.*

Λύσις. Ἵνα σχηματίσωμεν ἐκ τῶν ἀριθμῶν 4,2 καὶ 7 ἕνα ἀριθμὸν περιέχοντα τὰς μονάδας τούτων (§ 34), προσθέτομεν εἰς τὸν 4 διαδοχικῶς τὰς μονάδας τοῦ 2 λέγοντες 4 καὶ 1 κάμνουσι 5 καὶ 1 κάμνουσιν 6 μονάδας. Εἰς τὸ ἄθροισμα δὲ τοῦτο προσθέτομεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον καὶ τὰς μονάδας τοῦ 7 (ἰδὲ § 39) καὶ οὕτω σχηματίζομεν ἕνα ἀριθμόν, τὸν 13, περιέχοντα τὰς μονάδας τῶν προσθετέων.

40. Ἐπειδὴ ἡ πρόσθεσις μονοψηφίων ἀριθμῶν εὐκόλως ἐπιτυγχάνεται ἀπὸ μνήμης, διὰ τοῦτο, ἐν τῇ *ἐφαρμογῇ*, τὸ ἄθροισμα τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν εὑρίσκομεν, προσθέτοντες ἀπὸ μνήμης *ἀμέσως* εἰς τὸν ἕνα τῶν προσθετέων τὸν ἕτερον καὶ εἰς τὸ ἄθροισμα τούτων τὸν τρίτον καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς μέχρις οὗ ληφθῇ καὶ ὁ τελευταῖος προσθετέος.

Π. χ. Ἵνα προσθέσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 8, 2, 3 καὶ 4 λέγομεν 8 καὶ 2 κάμνουσι 10 καὶ 3 κάμνουσι 13 καὶ 4 κάμνουσι 17 καὶ οὕτω τὸ ἄθροισμα τῶν 8+2+3+4 εἶναι 17.

β' περίπτωσις.—**Πρόσθεσις οἱωνδήποτε ἀριθμῶν.**

41. Ἐπειδὴ πᾶς ἀριθμὸς εἶναι ἐντελῶς ὡρισμένος, εἴτε ἐὰν γνωρίζωμεν *τὸ σύνολον τῶν ἁπλῶν μονάδων* ἃς περιέχει, εἴτε ἐὰν γνωρίζωμεν *τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων ἑκάστης αὐτοῦ τάξεως* (§ 11), διὰ

τοῦτο τὸ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν πολυψηφίων δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν κατὰ τοὺς ἑξῆς δύο *θεμελιώδεις τρόπους.*

Α΄.) *Ὁρίζοντες τὸ σύνολον τῶν ἁπλῶν μονάδων τοῦ ἀγνώστου ἀθροίσματος.*

Β΄.) *Ὁρίζοντες τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδον ἑκάστης τάξεως τοῦ ἀγνώστου ἀθροίσματος.*

Πρόβλημα 1ον.—*Εὑρεῖν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν 55746, 2425, 70854 καὶ 48.*

42. *α΄. τρόπος.* Ἵνα εὕρωμεν τὸ ἄγνωστον ἄθροισμα κατὰ τὸν *πρῶτον* τρόπον (§ 41 Α΄.), δέον εἰς τὸν ἀριθμὸν 55746 νὰ προσθέσωμεν ἑκάστην μονάδα τοῦ 2425 καὶ εἰς τὸ ἄθροισμα τούτων ἑκάστην μονάδα τοῦ 70854 καὶ εἰς τὸ ἄθροισμα τούτων ἑκάστην μονάδα τοῦ 48 καὶ οὕτω ὁρίζομεν *τὸ σύνολον τῶν ἁπλῶν μονάδων τοῦ ἀγνώστου ἀθροίσματος.* Ἀλλ' ὁ τρόπος οὗτος ἀπαιτεῖ μεγίστην χρονοτριβήν, διὰ τοῦτο ἐγκαταλείπομεν αὐτόν.

43. *β΄ τρόπος.*—Ἵνα δὲ εὕρωμεν τὸ ἄγνωστον ἄθροισμα κατὰ τὸν *δεύτερον τρόπον* (§ 41 Β΄.) διατάσσομεν πρῶτον τοὺς προσθετέους ὡς ἑξῆς,

$$\begin{array}{r} 55746 \\ 2425 \\ 70854 \\ 48 \\ \hline 129073 \end{array}$$

δηλαδὴ γράφομεν τοὺς προσθετέους οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὑρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ στήλῃ καὶ ὑπ' αὐτοὺς γράφομεν γραμμὴν ὁριζοντίαν Ἔπειτα, προσθέτοντες πρῶτον τὰς μονάδας πρώτης τάξεως, εὑρίσκομεν ἄθροισμα 23 μονάδας πρώτης τάξεως, αἱ ὁποῖαι κάμνουσιν 3 μονάδας πρώτης τάξεως καὶ 2 δευτέρας ἢ δεκάδας. Διὰ τοῦτο γράφομεν τὸ 3 ὑποκάτω τῆς γραμμῆς εἰς τὴν στήλην *τῶν μονάδων πρώτης τάξεως,* τὸν δὲ 2 προσθέτομεν εἰς τὴν στήλην τῶν μονάδων δευτέρας τάξεως ἢ δεκάδων, οὕτω δ' εὑρίσκομεν ἄθροισμα 17 μονάδων δευτέρας τάξεως, αἱ ὁποῖαι κάμνουσι 7 μονάδας δευτέρας τάξεως καὶ 1 τρίτης ἢ ἑκατοντάδα. Διὰ τοῦτο γράφομεν τὸν 7 ὑποκάτω τῆς γραμμῆς εἰς τὴν στήλην *τῶν μονάδων δευτέρας τάξεως*, τὸ δὲ 1 προσθέτομεν εἰς τὴν στήλην τῶν μονάδων τρίτης τάξεως καὶ οὕτως εὑρίσκομεν ἄθροισμα 20 μονάδας τρίτης τάξεως, αἱ ὁποῖαι κάμνουσι 0 μονάδας τρίτης τάξεως καὶ 2 τετάρτης τάξεως ἢ χιλιάδας. Διὰ τοῦτο γράφομεν 0 ὑποκάτω τῆς γραμμῆς εἰς τὴν στήλην *τῶν μονάδων τρίτης τάξεως*, τὸ δὲ 2 προσθέτομεν εἰς τὴν στήλην τῶν μονάδων τετάρτης τάξεως, οὕτω δ' εὑρίσκομεν ἄθροισμα 9 *μονάδας τετάρτης τάξεως*, τὰς ὁποίας γράφομεν ὑποκάτω τῆς γραμμῆς εἰς τὴν στήλην τῶν μονάδων τῆς τετάρτης τάξεως ἢ τῶν χιλιάδων. Τέλος προσθέτοντες τὰς μονάδας πέμπτης τάξεως ἢ δεκάδας χιλιάδων, εὑρίσκομεν ἄθροισμα 12 μονάδας πέμπτης τάξεως ἢ δεκάδας χιλιάδων, αἱ ὁποῖαι κάμνουσι 2 μονάδας πέμπτης τάξεως ἢ δεκάδας χιλιάδων καὶ 1 μονάδα ἕκτης τάξεως ἢ ἑκατοντάδα χιλιάδων. Διὰ τοῦτο γράφομεν τὸ 2 ὑποκάτω τῆς γραμμῆς εἰς τὴν στήλην *τῶν μονάδων τῆς πέμπτης τάξεως*, τὸ δὲ 1 γράφομεν πρὸ τοῦ 2 δηλ. εἰς τὴν θέσιν τῶν *μονάδων ἕκτης τάξεως* καὶ οὕτως εὕρομεν, ὅτι τὸ ἄγνωστον ἄθροισμα περιέχει 3 μονάδας *πρώτης* τάξεως, 7 *δευτέρας*, 0 *τρίτης*, 9 *τετάρτης*, 2 *πέμπτης* καὶ 1 *ἕκτης* τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος καὶ οὕτως ὡρίσαμεν τοῦ ἀγνώστου ἀθροίσματος *τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων* ἑκάστης τάξεως καὶ ἑπομένως ὡρίσαμεν ἐντελῶς τὸ ἄθροισμα καὶ εἶναι τοῦτο ὁ ἀριθμὸς 129073.

Ἐκ τούτου μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

44. *Ἵνα προσθέσωμεν οἱουσδήποτε ἀριθμοὺς γράφομεν αὐτοὺς οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὑρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ στήλῃ. Ἔπειτα ἄγομεν ὑπ' αὐτοὺς γραμμὴν ὁριζοντίαν καὶ προσθέτομεν, ἀρχόμενοι ἐκ τῶν μονάδων πρώτης τάξεως καὶ ἂν μὲν τὸ ἄθροισμα τούτων δὲν ὑπερβαίνῃ τὸ 9, γράφομεν αὐτὸ ὑπὸ τὴν στήλην τῶν μονάδων πρώτης τάξεως, ἄλλως ἐξάγομεν ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τούτου τὰς μονάδας δευτέρας τάξεως καὶ τὰς προσθέτομεν εἰς τὴν στήλην τῶν μονάδων δευτέρας τάξεως, τὰς δὲ ὑπολοίπους μονάδας πρώτης τάξεως γράφομεν ὑπὸ τὴν στήλην τῶν μονάδων πρώτης τάξεως ἢ ἐν ἐλλείψει τοιούτων γράφομεν 0 καὶ ἐξακολουθοῦμεν οὕτω τὴν πρόσθεσιν μέχρι τῆς τελευταίας στήλης.*

Ὁρισμοὶ καὶ ἀξιώματα ἰσότητος καὶ ἀνισότητος.

45. *Δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ λέγονται ἴσοι, ἐὰν ἕκαστος τούτων*

ἀποτελῆται (ἢ δύναται ν' ἀποτελεσθῇ) *ἐκ τοῦ αὐτοῦ πλήθους μονάδων τῆς αὐτῆς τάξεως.*

Π. χ. Οἱ ἀριθμοὶ 8, 5+3, 2+4+1+1 καὶ 1+4+3 εἶναι ἴσοι, διότι ἕκαστος τούτων ἀποτελεῖται ἐξ ὀκτὼ μονάδων πρώτης τάξεως.

46. Τὸ σημεῖον τῆς ἰσότητος εἶναι =, ὅπερ ὀνομάζεται ἴσον καὶ γράφεται μεταξὺ δύο ἴσων ἀριθμῶν.

Π. χ. Ἵνα σημειωθῇ, ὅτι ὁ 8 εἶναι ἴσος τῷ 6+2 γράφεται 8=6+2.

47. Ἐπειδὴ οἱοιδήποτε καὶ ἂν εἶναι οἱ ἀριθμοί, *οἱ συλλογισμοὶ* τοὺς ὁποίους κάμνομεν πρὸς *ἐκτέλεσιν* ἐπ' αὐτῶν οἱωνδήποτε πράξεων ἢ πρὸς *ἀπόδειξιν* ἢ *σημείωσιν* οἱωνδήποτε προτάσεων εἶναι οἱ αὐτοί, διὰ τοῦτο δυνάμεθα ἀντὶ ἀριθμῶν νὰ κάμνωμεν χρῆσιν τῶν γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου, ὅτε τὰ *συμπεράσματα* εἶναι γενικώτερα, ὡς ἀναφερόμενα εἰς οἱουσδήποτε ἀριθμούς,

Π. χ. Τὸ α=β δηλοῖ ὅτι, ὁ ἀριθμὸς α δέον νὰ εἶναι ἴσος τῷ ἀριθμῷ β.

48. *Αον Ἀξίωμα ἰσότητος —Ἐὰν εἰς ἴσους ἀριθμοὺς προσθέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἢ ἴσους ἀριθμούς, τὰ ἐξαγόμενα θὰ εἶναι ἴσα.*

Π.χ. Ἂν α=β τότε εἶναι καὶ α+γ=β+γ. Ἂν δὲ ἔχωμεν α=β καὶ γ=δ τότε εἶναι καὶ α+γ=β+δ.

49. *Βον Ἀξίωμα ἰσότητος. — Ἐάν ἀριθμός τις εἶναι ἴσος πρὸς ἕτερον, οὗτος δὲ πρὸς τρίτον ἀριθμόν, οὗτος δὲ πρὸς τέταρτον καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, τότε πάντες οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι εἶναι ἴσοι μεταξύ των.*

Π. Χ. Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς α εἶναι ἴσος τῷ β, οὗτος δὲ τῷ γ, οὗτος δὲ τῷ δ, τότε οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ καὶ δ θὰ εἶναι ἴσοι, ἤτοι θὰ ἔχωμεν α=β=γ=δ.

50. *Δύο ἀριθμοὶ λέγονται ἄνισοι μεταξύ των, ἐὰν ἕκαστος τούτων ἀποτελῆται* (ἢ δύναται ν' ἀποτελεσθῇ) *ἐκ διαφόρου πλήθους μονάδων τῆς αὐτῆς τάξεως.*

Π. χ. Οἱ ἀριθμοὶ 8 καὶ 5+2 εἶναι ἄνισοι, διότι ἕκαστος τούτων ἀποτελεῖται ἐκ διαφόρων τὸ πλῆθος μονάδων τῆς αὐτῆς τάξεως. Οὕτως ὁ μὲν πρῶτος ἀποτελεῖται ἐξ ὀκτὼ μονάδων ἁπλῶν, ἐν ᾧ ὁ δεύτερος ἀποτελεῖται ἐξ ἑπτὰ τοιούτων μονάδων.

51. Τὸ σημεῖον τῆς ἀνισότητος εἶναι *ἡ γωνία* δηλ. $>$ ἢ $<$, τίθεται δὲ εἰς μὲν τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας ὁ *μικρότερος* ἀριθμός, εἰς δὲ τὸ κοῖλον αὐτῆς μέρος ὁ *μεγαλήτερος*.

Π. χ. Ἵνα σημειωθῇ ὅτι, ὁ ἀριθμὸς 8 εἶναι μεγαλήτερος τοῦ 6 γράφεται $8>6$ ἢ καὶ $6<8$.

Ὁμοίως τὸ $α>β$ ἢ καὶ $β<α$ δηλοῖ ὅτι, ὁ α δέον νὰ εἶναι μεγαλήτερος τοῦ ἀριθμοῦ β.

52. *Αον Ἀξίωμα ἀνισότητος*. Ἐὰν εἰς ἀνίσους ἀριθμοὺς προσθέσωμεν *τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἢ ἴσους ἀριθμούς*, ἡ ἀνισότης μένει ἀμετάβλητος.

Π. χ. Ἂν $α>β$, τότε θὰ εἶναι καὶ $α+γ>β+γ$.

Βον Ἀξίωμα ἀνισότητος. Ἐὰν εἰς ἀνίσους ἀριθμοὺς προσθέσωμεν ἀνίσους, ἀλλ' οὕτως ὥστε τὸν μεγαλήτερον εἰς τὸν μεγαλήτερον καὶ τὸν μικρότερον εἰς τὸν μικρότερον, ἡ ἀνισότης δὲν μεταβάλλεται.

Π. χ. Ἂν $α>β$ καὶ $γ>δ$, τότε θὰ εἶναι καὶ $α+γ>β+δ$.

53. *Παράστασις* λέγεται ἡ σημείωσις ἀριθμητικῶν πράξεων ἐπὶ *ἀριθμῶν ἢ ἐπὶ γραμμάτων ἢ ἐπὶ γραμμάτων καὶ ἀριθμῶν*.

Π. χ. Αἱ $2+5+7$ ἢ $α\times β$ ἢ $2+α$ ἢ $2\times α$ ἢ $\frac{α}{2}$ κ.τ.λ. λέγονται *παραστάσεις*.

54. Πᾶσαν παράστασιν κλείομεν ἐντὸς παρενθέσεως, ὅταν θέλωμεν νὰ σημάνωμεν, *ὅτι αἱ πράξεις αἱ σημειούμεναι ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν ἢ τῶν γραμμάτων ἔχουσιν ἐκτελεσθῇ* (ἐν ἄλλαις λέξεσιν, ὅταν ἀναφερώμεθα εἰς τὸ ἐξαγόμενον τῆς παραστάσεως, ὅπερ εὑρίσκομεν μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν σεσημειωμένων πράξεων) ἢ *ὅταν πρόκηται νὰ σημειώσωμεν τὴν ἐκτέλεσιν καὶ ἄλλης πράξεως ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν ἢ τῶν γραμμάτων τῆς παραστάσεως*.

Π. χ. Ἡ παράστασις $(2+5)$ δηλοῖ τὸ ἄθροισμα τοῦ 2 καὶ 5 ἤτοι τὸν 7, ἡ δὲ παράστασις $(2+5)\times 3$ σημαίνει τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ ἀθροίσματος $2+5$ ἤτοι τοῦ 7 ἐπὶ 3.

55. *Δύο ἢ περισσότεραι παραστάσεις* λέγονται *ἰσοδύναμοι*, ὅταν δίδωσι τὰ αὐτὰ ἀριθμητικὰ ἐξαγόμενα, μετὰ τὴν ἀντικατάστασιν τῶν γραμμάτων δι' ἀριθμῶν καὶ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν σεσημειωμένων πράξεων.

Θεωρήματα προσθέσεως.

56. *Ἀξίωμα.* Ἐὰν ἀλλάξωμεν τὰς θέσεις ὁσωνδήποτε προσθετέων, τὸ πλῆθος τῶν μονάδων ἑκάστου τούτων μένει ἀμετάβλητον.

57. *Θεώρημα.—Τὸ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν προσθέσωμεν αὐτούς.*

Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 15, 28, 40 καὶ 8. Λέγω ὅτι, ἐὰν προσθέσωμεν αὐτοὺς κατὰ τὴν τάξιν $15+28+40+8$ ἢ κατ' ἄλλην τάξιν οἱανδήποτε $8+15+40+28$, θὰ εὕρωμεν τὸ αὐτὸ *ἄθροισμα.*

Διότι ἡ ἀλλαγὴ τῆς τάξεως τῶν προσθετέων δὲν ἐπιφέρει μεταβολὴν εἰς τὰς μονάδας αὐτῶν (§ 56), ἐπομένως καὶ τὸ σύνολον τῶν μονάδων τούτων, ὅπερ εἶναι τὸ ζητούμενον ἄθροισμα, δὲν θὰ μεταβληθῇ.

58. *Θεώρημα. Τὸ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν ὁσουσδήποτε τούτων διὰ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν.*

Λέγω π. χ. ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν $8+10+7+4+3+5$ εἶναι τὸ αὐτό, πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν $8+19+7+3$, εἰς οὓς ἀντεκατεστάθησαν οἱ ἀριθμοὶ 10, 4 καὶ 5 διὰ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν 19.

Διότι, διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως τῶν προσθετέων 10,4 καὶ 5 διὰ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν 19, δὲν μετεβλήθη τὸ ποσὸν τῶν μονάδων τῶν προσθετέων, ἐπομένως καὶ τὸ σύνολον τῶν μονάδων ὅλων τῶν προσθετέων, ὅπερ εἶναι τὸ ζητούμενον ἄθροισμα, δὲν θέλει μεταβληθῇ.

59. *Θεώρημα. Τὸ ἄθροισπα ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν ἀναλύσωμεν ὁσουσδήποτε τούτων εἰς ἄλλους, οἵτινες νὰ ἔχωσιν αὐτοὺς ἀθροίσματα.*

Λέγω π. χ. ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν $8+15+7+4$ εἶναι τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν $8+15+2+5+1+3$, ἔνθα *ἀντεκατεστάθη*, ὁ μὲν ἀριθμὸς 7 διὰ τῶν προσθετέων 2 καὶ 5, ὁ δὲ 4 διὰ τῶν 1 καὶ 3.

Διότι, διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως τοῦ προσθετέου 7 διὰ τῶν ἀριθμῶν $2+5$ καὶ τοῦ 4 διὰ τοῦ $1+3$, δὲν μετεβλήθη τὸ ποσὸν τῶν μονάδων τοῦ ἑπτὰ καὶ τοῦ τέσσαρα, ἐπομένως καὶ τὸ σύνολον τῶν μονάδων ὅλων τῶν προσθετέων, ὅπερ εἶναι τὸ ζητούμενον ἄθροισμα, δὲν θὰ μεταβληθῇ.

Τὸ θεώρημα τοῦτο εἶναι *ἀντίστροφον* τοῦ προηγουμένου θεωρήματος, διότι ὅ,τι *δίδεται* εἰς ἐκεῖνο τὸ θεώρημα, *ζητεῖται* εἰς τοῦτο καὶ ὅ,τι *ζητεῖται* εἰς ἐκεῖνο, *δίδεται* εἰς τοῦτο (§ 33).

60. *Θεώρημα*. *Ἵνα προσθέσωμεν ἀριθμὸν εἰς ἄθροισμα ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν αὐτὸν εἰς ἕνα τῶν προσθετέων τοῦ ἀθροίσματος*.

Ἔστω π. χ. τὸ ἄθροισμα (3+5+7+8). Ἵνα εἰς τοῦτο προσθέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 4, ἀρκεῖ τοῦτον νὰ προσθέσωμεν εἰς ἕνα τῶν προσθετέων 3, 5, 7 ἢ 8 τοῦ εἰρημένου ἀθροίσματος.

Διότι τὸ *τελικὸν ἄθροισμα* τῶν ἀριθμῶν

$$(3+5+7+8)+4$$

δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν ἀναλύσωμεν τὸν ἀριθμὸν (3+5+7+8) εἰς τοὺς προσθετέους του (§ 59), ὅτε εὑρίσκομεν τοὺς ἀριθμοὺς

$$3+5+7+8+4$$

Τὸ ἄθροισμα δὲ τούτων δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν δύο ἐξ αὐτῶν π.χ. τὸν 4 καὶ 5 διὰ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν 9 (ἰδὲ § 58), ὅτε εὑρίσκομεν τοὺς ἀριθμοὺς

$$3+9+7+8$$

καὶ οὕτω ἀπεδείχθη ὅτι, τὸ τελικὸν ἄθροισμα δὲν μεταβάλλεται ἐάν, ἀντὶ νὰ προσθέσωμεν ἕνα ἀριθμὸν εἰς ἄθροισμα, προσθέσωμεν τοῦτον εἰς ἕνα τῶν προσθετέων τοῦ ἀθροίσματος.

61. *Θεώρημα*. *Ἵνα προσθέσωμεν δύο ἢ περισσότερα ἀθροίσματα, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν τοὺς προσθετέους τῶν ἀθροισμάτων*.

Ἔστω π. χ. τὰ ἀθροίσματα (2+3+5), (6+7+4) καὶ (8+12+9). Ἵνα προσθέσωμεν ταῦτα, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν τοὺς προσθετέους αὐτῶν.

Διότι τὸ *τελικὸν ἄθροισμα* τῶν ἀριθμῶν

$$(2+3+5)+(6+7+4)+(8+12+9)$$

δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν ἀναλύσωμεν ἕκαστον τῶν εἰρημένων ἀθροισμάτων εἰς τοὺς προσθετέους αὐτῶν (§ 59), ὅτε ἔχομεν

$$2+3+5+6+7+4+8+12+9$$

καὶ οὕτω ἀπεδείχθη ὅτι, τὸ τελικὸν ἄθροισμα δὲν μεταβάλλεται, ἐάν, ἀντὶ νὰ προσθέσωμεν ὁσαδήποτε ἀθροίσματα, προσθέσωμεν τοὺς προσθετέους τῶν ἀθροισμάτων τούτων.

Βάσανος τῆς προσθέσεως.

Βάσανος ἢ δοκιμὴ λέγεται ἡ πρᾶξις δι' ἧς ἐξελέγχομεν ἄλλην πρᾶξιν, ἂν ἐγένετο ἄνευ λάθους.

Τὴν δοκιμὴν τῆς προσθέσεως κάμνομεν, προσθέτοντες τοὺς προσθετέους κατὰ διάφορον τάξιν ἐκείνης, καθ' ἣν ἐγένετο ἡ πρόσθεσις καὶ ἂν εὕρωμεν τὸ αὐτὸ ἄθροισμα (§ 57), ἐξάγομεν, ὅτι ἡ πρόσθεσις ἐξετελέσθη ἄνευ λάθους, ἂν ἐννοῆται δὲν περιεπέσαμεν εἰς λάθος κατά τὴν ἐκτέλεσιν τῆς πράξεως τῆς δοκιμῆς.

Ἀφαίρεσις.

62. *Ἀφαίρεσις εἶναι ἡ πρᾶξις δι' ἧς ἐλαττοῦμεν δοθέντα ἀριθμὸν κατὰ τόσας μονάδας, ὅσας ἔχει ἄλλος δοθεὶς ἀριθμός.*

63. Ἐκεῖνος ὁ ἀριθμὸς ὁ ὁποῖος πρόκειται νὰ ἐλαττωθῇ λέγεται *μειωτέος*, ὁ δὲ ἄλλος λέγεται *ἀφαιρετέος*.

64. Ὁ ἀριθμὸς κατὰ τὸν ὁποῖον ὑπερτερεῖ ὁ μειωτέος τὸν ἀφαιρετέον, λέγεται *διαφορὰ* ἢ *ὑπόλοιπον*.

65. Ὁ μειωτέος καὶ ὁ ἀφαιρετέος πρέπει νὰ εἶναι ἀριθμοὶ *ὁμοειδεῖς* ἢ *ἀφῃρημένοι* καὶ νὰ γίνωνται ἐκ τῆς αὐτῆς μονάδος κατὰ μέγεθος, ἄλλως καθιστῶμεν αὐτοὺς τοιούτους καὶ εἶτα τοὺς ἀφαιροῦμεν.

Π. χ. Οἱ ἀριθμοὶ 8 μῆλα καὶ 3 βιβλία δὲν ἀφαιροῦνται, ὡς *ἑτεροειδεῖς*.

Ὁμοίως. Οἱ ἀριθμοὶ 8 *δεκάδες* καὶ 3 *ἁπλαῖ μονάδες* δὲν ἀφαιροῦνται, ἂν μὴ αἱ δεκάδες τραπῶσιν εἰς *ἁπλᾶς μονάδας*.

66. Τὸ σημεῖον τῆς ἀφαιρέσεως εἶναι τὸ —, τὸ ὁποῖον γράφεται μεταξὺ μειωτέου καὶ ἀφαιρετέου, ὅταν οὗτοι γράφωνται κατὰ σειρὰν (γραφομένου πρώτου τοῦ μειωτέου) καὶ ὀνομάζεται *μεῖον* ἢ *πλήν*.

Π. χ. Τὸ 9—4 σημαίνει, ὅτι ἀπὸ τοῦ 9 δέον ν' ἀφαιρεθῇ ὁ 4 καὶ ἀναγινώσκεται 9 *μεῖον* 4 ἢ 9 *πλὴν* 4.

67. Εἰς τὴν ἀφαίρεσιν διακρίνομεν δύο περιπτώσεις.

Α'.) Τὴν ἀφαίρεσιν μονοψηφίου ἀπὸ *οἱουδήποτε* ἀριθμοῦ.

Β'.) Τὴν ἀφαίρεσιν διψηφίου ἢ πολυψηφίου ἀπὸ *οἱουδήποτε* ἀριθμοῦ.

α΄ περίπτωσις.—**Ἀφαίρεσις μονοψηφίου ἀπὸ οἱουδήποτε ἀριθμοῦ.**

68. *Πρόβλημα* 1ον. *Ν᾽ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 7 ὁ ἀριθμὸς 2.*

Ἵνα ἐλαττώσωμεν τὸν 7 κατὰ 2 μονάδας λέγομεν 7 πλὴν 1 μένουν 6, πλὴν 1 μένουν 5. Ὥστε ἡ ζητουμένη διαφορὰ εἶναι 5.

69. Ἐπειδὴ ἡ ἀφαίρεσις μονοψηφίου ἀπὸ οἱουδήποτε ἀριθμοῦ εὐκόλως ἐπιτυγχάνεται ἀπὸ μνήμης, διὰ τοῦτο, ἐν τῇ ἐφαρμογῇ, τὴν διαφορὰν τῶν εἰρημένων ἀριθμῶν εὑρίσκομεν, ἀφαιροῦντες ἀμέσως ἀπὸ μνήμης τὸν ἀφαιρετέον ἀπὸ τοῦ μειωτέου.

β΄ περίπτωσις.—**Ἀφαίρεσις διψηφίου ἢ πολυψηφίου ἀπὸ οἱουδήποτε ἀριθμοῦ.**

70. *Αον Ἀξίωμα. Ἐὰν εἰς τὸν μειωτέον προσθέσωμεν ἀριθμόν τινα, ἡ διαφορὰ αὐξάνει κατὰ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον.*

Π. χ. Ἡ διαφορὰ 8—3 εἶναι 5, ἡ δὲ διαφορὰ (8+4)—3 ἤτοι 12—3 εἶναι 9.

71. *Βον Ἀξίωμα.—Ἐὰν εἰς τὸν ἀφαιρετέον προσθέσωμεν ἀριθμόν τινα ἡ διαφορὰ ἐλαττοῦται κατὰ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον.*

Π. χ. Ἡ διαφορὰ 8—3 εἶναι 5, ἡ δὲ διαφορὰ 8—(3+4) ἤτοι 8—7 εἶναι 1.

72. *Θεώρημα. Ἐὰν εἰς τὸν μειωτέον καὶ τὸν ἀφαιρετέον προσθέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἡ διαφορὰ δὲν μεταβάλλεται.*

Διότι, διὰ τῆς προσθέσεως ἀριθμοῦ τινος εἰς τὸν μειωτέον ἐπέρχεται αὔξησις τῆς διαφορᾶς κατὰ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον (§ 70). Διὰ δὲ τῆς προσθέσεως τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον ἐπέρχεται ἐλάττωσις τῆς διαφορᾶς κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν (§ 71) καὶ ἑπομένως οὐδεμία μεταβολὴ ἐπέρχεται εἰς τὴν τελικὴν διαφοράν.

73. *Ἀξίωμα ἰσότητος, Ἐὰν ἀπὸ ἴσους ἀριθμοὺς ἀφαιρέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἢ ἴσους ἀριθμοὺς τὰ ἐξαγόμενα θὰ εἶναι ἴσα.*

Π.χ. Ἂν $α=β$ θὰ εἶναι καὶ $α-γ=β-γ$. Καὶ ἂν ἔχωμεν $α=β$ καὶ $γ=δ$ θὰ εἶναι καὶ $α-γ=β-δ$.

Αον Ἀξίωμα ἀνισότητος. Ἐὰν ἀπὸ ἀνίσους ἀριθμοὺς ἀφαιρέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἢ ἴσους ἀριθμούς, ἡ ἀνισότης μένει ἀμετάβλητος.

Π. χ. Ἂν $α > β$ θὰ εἶναι καὶ $α - γ > β - γ$.

Βον Ἀξίωμα ἀνισότητος. Ἐὰν ἀπὸ ἀνίσους ἀριθμοὺς ἀφαιρέσωμεν ἀνίσους, ἀλλ' οὕτως ὥστε, ἀπὸ τὸν μεγαλήτερον ν' ἀφαιρέσωμεν τὸν μεγαλήτερον καὶ ἀπὸ τὸν μικρότερον ν' ἀφαιρέσωμεν τὸν μικρότερον, ἡ ἀνισότης μένει ἀμετάβλητος.

Π. χ. Ἂν $α > β$ καὶ $γ > δ$ θὰ εἶναι καὶ $α - γ > β - δ$.

74. Ἐπειδὴ πᾶς ἀριθμὸς εἶναι ἐντελῶς ὡρισμένος, εἴτε ἐὰν γνωρίζομεν τὸ σύνολον τῶν ἁπλῶν μονάδων ἃς περιέχει, εἴτε ἐὰν γνωρίζομεν τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων ἑκάστης αὐτοῦ τάξεως (§ 11), διὰ τοῦτο ἡ διαφορὰ δύο πολυψηφίων ἀριθμῶν δύναται νὰ εὑρεθῇ κατὰ τοὺς ἑξῆς δύο *θεμελιώδεις* τρόπους.

Α'.) *Ὁρίζοντες τὸ σύνολον τῶν ἁπλῶν μονάδων τῆς ἀγνώστου διαφορᾶς.*

Β'.) *Ὁρίζοντες τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων ἑκάστης τάξεως τῆς ἀγνώστου διαφορᾶς.*

Πρόβλημα 1ον. *Ν' ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 458 ὁ ἀριθμὸς 231.*

75. *α' τρόπος.*—Ἵνα εὕρωμεν τὴν ἄγνωστον διαφορὰν κατὰ τὸν *πρῶτον τρόπον* (§ 74 Α'.), δέον ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 458 ν' ἀφαιρέσωμεν ἑκάστην μονάδα τοῦ 231 καὶ οὕτως ὁρίζομεν τὸ *σύνολον τῶν ἁπλῶν μονάδων τῆς ἀγνώστου διαφορᾶς*. Ἀλλ' ὁ τρόπος οὗτος ἀπαιτεῖ μεγίστην χρονοτριβὴν καὶ διὰ τοῦτο τὸν ἐγκαταλείπομεν.

76. *β' τρόπος.*—Ἵνα δὲ εὕρωμεν τὴν ἄγνωστον διαφορὰν κατὰ τὸν *δεύτερον τρόπον* (§ 74 Β'.) διατάσσομεν πρῶτον τὸν μειωτέον καὶ τὸν ἀφαιρετέον ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{r} 458 \\ 231 \\ \hline 227 \end{array}$$

δηλαδὴ γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον ὑπὸ τὸν μειωτέον οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὑρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ στήλῃ καὶ ὑπ' αὐτοὺς ἄγομεν γραμμὴν ὁριζοντίαν. Μετὰ ταῦτα, ἀφαιροῦντες πρῶτον τὰς ἁπλᾶς μονάδας εὑρίσκομεν διαφορὰν 7 μονάδας *πρώτης* τάξεως, ἃς γράφομεν ὑπὸ τὴν στήλην τῶν μονάδων τῆς πρώτης τάξεως. Ἔπειτα ἀφαιροῦντες τὰς μονάδας δευτέρας τάξεως εὑρίσκομεν διαφορὰν 2 *μονάδας δευτέρας τάξεως*, ἃς γράφομεν ὑπὸ τὴν στήλην τῶν μονάδων τῆς δευτέρας τάξεως καὶ τέλος ἀφαιροῦντες τὰς μονάδας τρίτης τάξεως, εὑρίσκομεν διαφορὰν 2 μονάδας *τρίτης τάξεως*, ἃς γράφομεν ὑπὸ τὴν στήλην τῶν μονάδων τρίτης τάξεως καὶ οὕτως ὡρίσαμεν τῆς ἀγνώστου διαφορᾶς τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων ἑκάστης τάξεως καὶ ἑπομένως ὡρίσαμεν οὕτω ἐντελῶς τὴν διαφορὰν καὶ εἶναι αὕτη ὁ ἀριθμὸς 227.

77. *Ἂν τοῦ ἀφαιρετέου ὄντος μικροτέρου τοῦ μειωτέου, ψηφίον τι τοῦ ἀφαιρετέου εἶναι μεγαλήτερον τοῦ ἀντιστοίχου ψηφίου τοῦ μειωτέου, τότε τὴν διαφορὰν δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν εὑρίσκομεν στηριζόμενοι εἰς τὸ θεώρημα τῆς* (§ 72).

Π. χ. *Ν' ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ 40349 ὁ ἀριθμὸς 5267.*

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς.

$$\begin{array}{r} 40349 \\ 5267 \\ \hline 35082 \end{array}$$

Ἀφαιροῦμεν πρῶτον τὰς 7 μονάδας πρώτης τάξεως ἀπὸ τῶν 9, ὅτε εὑρίσκομεν διαφορὰν 2 μονάδας *πρώτης τάξεως*, Ἔπειτα ἀφαιροῦμεν τὰς 6 μονάδας δευτέρας τάξεως ἀπὸ τὰς 4 τοιαύτας καὶ ἐπειδὴ δὲν ἀφαιροῦνται προσθέτομεν 10 μονάδας δευτέρας τάξεως εἰς τὰς 4 καὶ οὕτω γίνονται αὗται 14 ἀπὸ τῶν ὁποίων ἀφαιροῦμεν τὰς 6 μονάδας δευτέρας τάξεως καὶ οὕτως εὑρίσκομεν διαφορὰν 8 μονάδας *δευτέρας τάξεως*. Ἔπειτα προσθέτομεν καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον *10* μονάδας δευτέρας τάξεως (ἵνα μὴ μεταβληθῇ ἡ διαφορὰ § 72), ἢ ἀντ' αὐτῶν, 1 μονάδα τρίτης τάξεως, ἥτις μετὰ τῶν 2 μονάδων τρίτης τάξεως τοῦ ἀφαιρετέου ἀποτελοῦσι 3 μονάδας τρίτης τάξεως, ἃς ἀφαιροῦντες ἀπὸ τῶν 3 μονάδων τρίτης τάξεως τοῦ μειωτέου εὑρίσκομεν διαφορὰν 0 μονάδας *τρίτης τάξεως*. Ἔπειτα ἀφαιροῦμεν τὰς 5 μονάδας τετάρτης τάξεως ἀπὸ 0 καί, ἐπειδὴ δὲν ἀφαιροῦνται, προσθέτομεν 10 μονάδας τετάρτης τάξεως εἰς τὸν μειωτέον, ἀφ' ὧν ἀφαιροῦντες τὰς 5 μονάδας τετάρτης τάξεως τοῦ ἀφαιρετέου, ἔχομεν διαφορὰν 5 μονάδας *τετάρτης τάξεως* καὶ ἔπειτα προσθέτομεν καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον 10 μονάδας τετάρτης τάξεως (§ 72) ἢ ἀντ' αὐτῶν, 1 μονάδα πέμπτης τάξεως, ἣν ἀφαιροῦντες ἀπὸ τῶν 4 μονάδων πέμπτης τάξεως τοῦ μειωτέου ἔχομεν διαφορὰν 3 μονάδας *πέμπτης τάξεως* καὶ οὕτως ὡρίσαμεν τῆς ἀγνώστου διαφορᾶς τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων ἑκάστης τάξεως καὶ ἐπομένως ὡρίσαμεν ἐντελῶς τὴν διαφορὰν καὶ εἶναι αὕτη ὁ ἀριθμὸς 35082.

Ἐκ τούτων μορφοῦμεν τὸ ἑξῆς κανόνα.

78. *Ἵνα ἀφαιρέσωμεν δύο οἱουσδήποαε ἀριθμοὺς γράφομεν αὐτοὺς οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὑρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ στήλῃ. Εἶτα ἄγομεν ὑπ' αὐτοὺς γραμμὴν ὁριζοντίαν καὶ ἀφαιροῦμεν (ἀρχόμενοι ἐκ τῶν μονάδων πρώτης τάξεως) χωριστὰ τοὺς ἀριθμοὺς τῶν μονάδων τῆς αὐτῆς τάξεως. Ἐὰν ὅμως ψηφίον τι τοῦ ἀφαιρετέου εἶναι μεγαλήτερον τοῦ ἀντιστοίχου ψηφίου τοῦ μειωτέου, προσθέτομεν εἰς τὸ τοιοῦτον ψηφίον τοῦ μειωτέου 10 καὶ αὐξάνομεν κατὰ μονάδα τὸ ἀμέσως ἀκόλουθον ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου* (§ 72) *καὶ εἶτα ἐκτελοῦμεν τὴν ἀφαίρεσιν.*

79. **Δοκιμὴ τῆς ἀφαιρέσεως.** Ἐπειδὴ ἡ διαφορὰ δηλοῖ τὴν ὑπεροχὴν τοῦ μειωτέου, ὡς πρὸς τὸν ἀφαιρετέον, διὰ τοῦτο, ἂν αὕτη προστεθῇ εἰς τὸν ἀφχιρέον θὰ δώσῃ προφανῶς τὸν μειωτέον. Τούτου ἕνεκα τὴν δοκιμὴν τῆς ἀφχιρέσεως ἐκτελοῦμεν, *προσθέτοντες εἰς τὴν διαφορὰν τὸν ἀφαιρετέον, ὅτε πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸν μειωτέον, ἂν ἡ πρᾶξις ἐξετελέσθη ἄνευ λάθους* καὶ δὲν περιεπέσαμεν εἰς λάθος κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς πράξεως τῆς δοκιμῆς.

Θεωρήματα ἀφαιρέσεως,

80. Θεώρημα. — *Ἵνα ἀπὸ ἀθροίσματος ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν ἀφαιρέσωμεν ἄλλον ἀριθμόν, ἀρκεῖ ν' ἀφαιρέσωμεν αὐτὸν ἀφ' ἑνὸς τῶν προσθετέων τοῦ ἀθροίσματος.*

Λέγω π.χ. ὅτι, εἴτε ἐκ τοῦ ἀθροίσματος $(3+8+9)$ ἀφαιρέσωμεν τὸν 5, εἴτε ἀφαιρέσωμεν τοῦτον ἐξ ἑνὸς τῶν προσθετέων τοῦ ἀθροίσματος $(3+8+9)$ τὴν αὐτὴν διαφορὰν θὰ εὕρωμεν. Διότι, κατ' ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις ὁ μειωτέος $(3+8+9)$ ἐλαττοῦται κατὰ τὸ αὐτὸ ποσὸν μονάδων (§ 62).

81. Θεώρημα.—*Ἵνα ἀπό τινος ἀριθμοῦ ἀφαιρέσωμεν τὸ ἄθροισμα δύο ἢ περισσοτέρων προσθετέων, δυνάμεθα ν' ἀφαιρέσωμεν ἀπ' ἐκείνου χωριστὰ ἕκαστον τῶν προσθετέων.*

Λέγω π. χ. ὅτι, εἴτε ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ 15 ἀφαιρέσωμεν τὸ ἄθροισμα $(2+3+4)$, εἴτε ἀφαιρέσωμεν ἐκ τοῦ 15 χωριστὰ ἕκαστον τῶν προσθετέων τοῦ ἀθροίσματος $(2+3+4)$ τὴν αὐτὴν διαφορὰν θὰ εὕρωμεν. Διότι κατ' ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις ὁ μειωτέος 15 θὰ ἐλαττωθῇ κατὰ τὸ αὐτὸ ποσὸν μονάδων (§ 62).

82. Ἐκ τοῦ *θεωρήματος* τούτου πορίζόμεθα ὅτι ἡ παράστασις $40-(5+7+3)$ μετασχηματίζεται εἰς τὴν $40-5-7-3$.

Καὶ *γενικῶς*, ὅτι ἡ παράστασις $\alpha-(\beta+\gamma+\delta)$ μετασχηματίζεται εἰς τὴν παράστασιν $\alpha-\beta-\gamma-\delta$.

83. Θεώρημα. — *Ἵνα ἀπό τινος ἀριθμοῦ ἀφαιρέσωμεν δύο ἢ περισσοτέρους ἄλλους προσθετέους χωριστὰ ἕκαστον, δυνάμεθα ν'ἀφαιρέσωμεν ἀπ' ἐκείνου τὸ ἄθροισμα τῶν προσθετέων.*

Λέγω π. χ. ὅτι, εἴτε ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ 15 ἀφαιρέσωμεν ἕκαστον τῶν ἀριθμῶν 2, 4, 6, εἴτε ἀφαιρέσωμεν τὸ ἄθροισμα τούτων $(2+4+6)$ τὴν αὐτὴν διαφορὰν θὰ εὕρωμεν Διότι κατ' ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις ὁ μειωτέος 15 θὰ ἐλαττωθῇ κατὰ τὸ αὐτὸ ποσὸν μονάδων.

84. Ἐκ τοῦ *θεωρήματος* τούτου πορίζόμεθα ὅτι, ἡ παράστασις $15-8-2-3$ μετασχηματίζεται εἰς τὴν $15-(8+2+3)$.

Καὶ *γενικῶς* ὅτι ἡ παράστασις $\alpha-\beta-\gamma-\delta$ μετασχηματίζεται εἰς τὴν παράστασιν $\alpha-(\beta+\gamma+\delta)$.

85 Θεώρημα.—*Ἵνα ἀφαιρέσωμεν ἀπ' ἀριθμοῦ τὴν διαφορὰν δύο ἄλλων ἀριθμῶν (χωρὶς προηγουμένως νὰ εὕρωμεν αὐτήν), ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν μειωτέον τὸν ἀφαιρετέον τῆς δοθείσης διαφορᾶς καὶ ἀπὸ τοῦ ἐξαγομένου ν' ἀφαιρέσωμεν τὸν μειωτέον αὐτῆς.*

Λέγω π. χ. ὅτι, εἴτε ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ 15 ἀφαιρέσωμεν τὴν διαφορὰν 8 3 ἤτοι τὸν 5, εἴτε εἰς τὸν μειωτέον 15 προσθέσωμεν τὸν ἀφαιρετέον τῆς διαφορᾶς $8-3$ ἤτοι τὸν 3 καὶ ἐκ τοῦ ἀθροίσματος $15+3$ ἀφαιρέσωμεν τὸν μειωτέον 8 τῆς διαφορᾶς $8-3$, τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον θὰ εὕρωμεν.

Διότι, ἐὰν εἰς τὸν μειωτέον 15 καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον $(8-3)$ προσθέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἔστω τὸν 3, ἡ τελικὴ διαφορὰ δὲν μεταβάλλεται (§ 72), ὅτε ἔχομεν

$$15+3-(8-3+3) \text{ ἢ } 15+3-8 \text{ ὁ, ἑ, δ.}$$

86. Ἐκ τοῦ θεωρήματος τούτου πορίζόμεθα ὅτι, ἡ παράστασις $26-(7-2)$ μετασχηματίζεται εἰς τὴν παράστασιν $26+2-7$.

Καὶ *γενικῶς* ὅτι ἡ παράστασις $\alpha-(\beta-\gamma)$ μετασχηματίζεται εἰς τὴν $\alpha+\gamma-\beta$.

Ἄσκησις. — Μετασχηματίσατε τὴν παράστασιν $\alpha+(\beta+\gamma)-(\varepsilon+\delta)-(\eta-\theta)$ εἰς ἄλλην ἰσοδύναμον ἄνευ παρενθέσεων.

Λύσις. Ἡ παράστασις $\alpha+(\beta+\gamma)-(\varepsilon+\delta)-(\eta-\theta)$ μετασχηματίζεται (§59) εἰς τὴν παράστασιν $\alpha+\beta+\gamma-(\varepsilon+\delta)-(\eta-\theta)$, αὕτη δὲ (§ 81) εἰς τὴν $\alpha+\beta+\gamma-\varepsilon-\delta-(\eta-\theta)$ καὶ αὕτη (§ 85) εἰς τὴν $\alpha+\beta+\gamma-\varepsilon-\delta-\eta+\theta$.

Συντομίαι εἰς τὴν ἀπὸ μνήμης πρόσθεσιν καὶ ἀφαίρεσιν.

87. *Ὅταν ἀριθμός τις λήγῃ εἰς 9, εὐκολυνόμεθα εἰς τὴν ἀπὸ μνήμης πρόσθεσιν αὐξάνοντες τοῦτον κατὰ μίαν μονάδα, ἂν δὲ λήγῃ εἰς 8, αὐξάνοντες κατὰ 2 μονάδας, τὰς ὁποίας ἀφαιροῦμεν ἔπειτα ἐκ τοῦ ἀθροίσματος.*

Π. χ. Ἔστω ὅτι ἔχομεν $17+19$, τότε λέγομεν $17+20$ κάμνουν 37 μεῖον ἓν μένουσι 36.

Ὁμοίως $37+38=37+40-2=77-2=75$.

88. *Ἵνα ἐκτελέσωμεν συντόμως τὴν ἀφαίρεσιν δύο ἀριθμῶν, χωρίζομεν τὸν ἀφαιρετέον εἰς δύο τμήματα οὕτως, ὥστε τὸ ἓν νὰ λήγῃ εἰς τὸ αὐτὸ ψηφίον πρὸς τὸν μειωτέον καὶ εἶτα ἀφαιροῦμεν χωριστὰ τὰ τμήματα ταῦτα.*

Π. χ. ὁ $57-19=(57-17)-2=40-2=38$.

Ὁμοίως ὁ $458-35=(458-28)-7=430-7=423$.

Πολλαπλασιασμός.

89. Ἵνα δώσωμεν τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, ἐξετάζομεν τὸν τρόπον τῆς λύσεως τῶν διαφόρων εἰδῶν τῶν προβλημάτων τῶν λυομένων διὰ τῆς πράξεως ἣν θὰ ὀνομάσωμεν πολλαπλασιασμόν.

90. *Πρόβλημα* 1ον.—*Ἡ ὀκὰ τῆς μετάξης τιμᾶται 128 δρχ. Πόσον τιμῶνται αἱ 4 ὀκάδες μετάξης;*

Λύσις. Ἐπειδὴ ἡ μία ὀκὰ τιμᾶται 128 δρχ. αἱ 4 ὀκ. θὰ τιμῶνται προφανῶς 4 φορὰς τὰς 128 δραχμὰς ἤτοι

128 δρχ.
128 δρχ.
128 δρχ.
128 δρχ.

προσθέτοντες δὲ τοὺς ἴσους τούτους 4 ἀριθμοὺς εὑρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν 512, ὅστις εἶναι ἡ τιμὴ τῶν 4 ὀκ. τῆς μετάξης.

91. *Πρόβλημα* 2ον.—*Πατὴρ τις ἔδωκεν εἰς τὸν ἕνα τῶν υἱῶν του 1960 δρχ. πρὸς ἔναρξιν ἐπιχειρήσεώς τινος, εἰς ἕτερον δὲ ἔδωκε τὸ ἑξαπλάσιον τούτων. Πόσας ἔδωκεν εἰς τοῦτον τὸν υἱόν;*

Λύσις. Τὸ ἑξαπλάσιον τῶν 1960 δρχ. εὑρίσκομεν προφανῶς, προσθέτοντες τὰς 1960 δραχμὰς 6 φορὰς ἤτοι

1960 δρχ.
1960 δρχ.
1960 δρχ.
1960 δρχ.
1960 δρχ.
1960 δρχ.

προσθέτοντες δὲ τοὺς ἴσους τούτους 6 ἀριθμοὺς εὑρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν 11760 δρχ. Οὗτος δὲ ὁ ἀριθμὸς εἶναι τὸ ζητούμενον ἑξαπλάσιον τῶν 1960 δρχ.

Ἐκ τῆς λύσεως τῶν δύο τούτων εἰδῶν τῶν προβλημάτων ἐξάγομεν τὸν ἑξῆς ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

92. *Πολλαπλασιασμὸς εἶναι ἡ πρᾶξις δι' ἧς δοθέντων δύο ἀριθμῶν εὑρίσκεται τρίτος, ὅστις εἶναι ἄθροισμα τόσων προσθετέων ἴσων μὲ τὸν πρῶτον, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ δεύτερος.*

93. Ἐκ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν ὁ *πρῶτος* λέγεται *πολλαπλασιαστέος*, ὁ δὲ *δεύτερος πολλαπλασιαστής*.

94. Ὁ ἀριθμὸς ὅστις προκύπτει ἐκ τῆς προσθέσεως τοῦ πολλαπλασιαστέου τόσας φοράς, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἀκέραιος πολλαπλασιαστὴς λέγεται *γινόμενον*. Διὰ τοῦτο, τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ὄντος ἀκεραίου, τὸ *γινόμενον* εἶναι τόσας φορὰς μεγαλήτερον τοῦ πολλαπλασιαστέου, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἀκέραιος πολλαπλασιαστής.

95. Τὸ σημεῖον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἶναι $\times$ ἢ καὶ *μία στιγμή*, τὸ ὁποῖον *ὀνομάζεται ἐπὶ* καὶ *γράφεται* μεταξὺ πολλαπλασιαστέου καὶ πολλαπλασιαστοῦ.

Π. χ. Τὸ 5×4 ἢ $5\cdot4$ δηλοῖ, ὅτι πρέπει τὸ 5 νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 4.

Σημ. Μεταξὺ γραμμάτων ἢ μεταξὺ γραμμάτων καὶ ἀριθμῶν δὲν τίθεται οὐδὲν σημεῖον συνήθως καὶ δηλοῦται οὕτω πρᾶξις πολλαπλασιασμοῦ.

Π.χ. Τὸ 2α ἢ γβ δηλοῖ, ὅτι δέον τὸ 2 νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ α καὶ τὸ γ ἐπὶ β.

96. Τὸ ἄθροισμα πολλῶν ἴσων προσθετέων, ὅπερ, ὡς γνωστόν, εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ ἑνὸς τούτων ἐπὶ τὸν ἀριθμόν, ὅστις δηλοῖ τὸ πλῆθος τῶν προσθετέων (§ 94), γράφεται συμβολικῶς τιθεμένου μεταξὺ τῶν δύο εἰρημένων ἀριθμῶν τοῦ σημείου τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Π. χ. Τὸ $3+3+3+3$ γράφεται συμβολικῶς 3×4 ἢ $3\cdot4$.

Ὁμοίως τὸ $\beta+\beta+\beta$ γράφεται συμβολικῶς $\beta\cdot3$.

Γενικὸς θεωρητικὸς τρόπος πρὸς εὕρεσιν τοῦ γινομένου δύο ἀφῃρημένων ἀριθμῶν ἢ ὡς ἀφῃρημένων θεωρουμένων.

97. *Θεώρημα. Τὸ γινόμενον δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν (ὡς ἀφῃρημένων θεωρουμένων) εὑρίσκομεν προσθέτοντες τὸν ἕνα ἐξ αὐτῶν τόσας φοράς, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἕτερος.*

Ἔστω π. χ. ὅτι πρόκειται νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον τοῦ 4 ἐπὶ 3 ἔνθα 4 εἶναι ὁ πολλαπλασιαστέος καὶ 3 ὁ πολλαπλασιαστής. Ὡς γνωστόν, ἵνα εὕρωμεν τὸ γινόμενον τούτων ἀνάγκη τὸν 4 νὰ ἐπαναλάβωμεν 3 φορὰς (§ 92), ὅτε εὑρίσκομεν

$$4+4+4 \text{ ἤτοι } 12$$

Ἀλλὰ τὸν πολλαπλασιαστέον 4 δυνάμεθα νὰ ἐπαναλάβωμεν 3 φορὰς καὶ ἐὰν ἑκάστην μονάδα τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπαναλάβωμεν 3 φοράς, ὅτε ἐξ ἑκάστης αὐτοῦ μονάδος προκύπτει ὁ ἀριθμὸς 3, ἄρα ἐκ τῶν τεσσάρων αὐτοῦ μονάδων, θὰ προκύψῃ 4 φορὰς ὁ 3 ἤτοι

$$3+3+3+3 \text{ ἤτοι } 12$$

Ἐντεῦθεν παρατηροῦμεν ὅτι, τὸ ζητούμενον γινόμενον τοῦ 4 ἐπὶ 3 δύναται νὰ προκύψῃ διὰ τῆς ἐπαναλήψεως τοῦ 4 **τρεῖς φορᾶς** ἢ καὶ διὰ τῆς ἐπαναλήψεως τοῦ 3 **τέσσαρας φοράς**. ὅ, ἐ. δ.

98. Ἐκ τοῦ θεωρήματος τούτου πορίζόμεθα ὅτι τὸ γινόμενον π. χ. 5×2 ἀναλύεται εἰς $5+5$ ἢ καὶ εἰς $2+2+2+2+2$. Καὶ *γενικῶς*, ὅτι τὸ $2\times\alpha$ ἀναλύεται εἰς $\alpha+\alpha$ ἢ καὶ εἰς $2+2+2....+2$

ἄλφα τὸν ἀριθμὸν φορὰς καὶ τὸ γβ ἀναλύεται εἰς γ+γ+...+γ ἤτοι β φορὰς τὸ γ ἢ καὶ β+β+β+...+β ἤτοι γ φορὰς τὸ β.

99. *Πόρισμα. Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν, (ὡς ἀφηρημένων θεωρουμένων), δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν ἀνταλλάξωμεν τὰς θέσεις τοῦ πολλαπλασιαστέου καὶ πολλαπλασιαστοῦ.*

Π. χ. Τὸ γινόμσνον τοῦ 4×3 εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τοῦ 3×4. Διότι εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις τὸ γινόμενον θὰ εὕρωμεν, προσθέτοντες τὸν ἕνα τόσας φοράς, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἕτερος (§ 97). Ἐπειδὴ δὲ οἱ ἀριθμοὶ μετὰ τὴν ἀνταλλαγὴν τῶν θέσεών των δὲν μετεβλήθησαν διὰ τοῦτο καὶ τὸ γινόμενόν των δὲν θὰ μεταβληθῇ.

100. Πρὸς εὐκολωτέραν εὕρεσιν τοῦ γινομένου δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις.

Α΄.) *Τὸν πολλαπλασιασμὸν δύο μονοψηφίων ἀριθμῶν.*

Β΄.) *Τὸν πολλαπλασιασμὸν πολυψηφίου ἐπὶ μονοψήφιον καὶ*

Γ΄) *Τὸν πολλαπλασιασμὸν πολυψηφίου ἐπὶ πολυψήφιον.*

Αη περίπτωσις.

101. Τὸ γινόμενον δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν, *ὡς ἀφηρημένων θεωρουμένων*, εὑρίσκομεν, ὡς εἴδομεν (§ 97), προσθέτοντες τὸν ἕνα ἐξ αὐτῶν τόσας φοράς, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἕτερος. Διὰ ν' ἀποφύγωμεν δὲ τὴν πρόσθεσιν ταύτην, ὅταν πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον δύο *μονοψηφίων ἀριθμῶν*, καταρτίζομεν τὸν λεγόμενον *Πυθαγόρειον Πίνακα*, εἰς τὸν ὁποῖον θὰ εὑρίσκωμεν τὰ γινόμενα μεταξὺ τῶν ἐννέα ἀριθμῶν 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ἀνὰ δύο, ἕως ὅτου ἀποστηθίσωμεν αὐτά.

102. Ὁ Πυθαγόρειος πίναξ καταρτίζεται ὡς ἑξῆς.

Γράφομεν εἰς μίαν σειρὰν τοὺς ἐννέα ἀριθμοὺς ἀπὸ 1 ἕως 9.

Εἰς *δευτέραν* σειρὰν γράφομεν τοὺς ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι προκύπτουσι διὰ τῆς ἐπαναλήψεως *δύο* φορὰς ἑκάστου ἀριθμοῦ τῆς πρώτης σειρᾶς.

Εἰς *τρίτην* σειρὰν γράφομεν τοὺς ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι προκύπτουσι διὰ τῆς ἐπαναλήψεως *τρεῖς* φορὰς ἑκάστου ἀριθμοῦ τῆς πρώτης σειρᾶς.

Εἰς *τετάρτην* σειρὰν γράφομεν τοὺς ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι προκύπτουσι διὰ τῆς ἐπαναλήψεως *τέσσαρας* φορὰς ἑκάστου ἀριθμοῦ τῆς πρώτης σειρᾶς.

Κατὰ τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον ἐξακολουθοῦμεν μέχρις οὗ ἐπαναλάβωμεν *ἐννέα* φορὰς ἕκαστον ἀριθμὸν τῆς πρώτης σειρᾶς καὶ οὕτω μορφοῦμεν τὸν Πυθαγόρειον πίνακα, ὅστις εἶναι ὁ ἑξῆς.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

103. Ἵνα εὕρωμεν τὸ γινόμενον δύο μονοψηφίων ἀριθμῶν διὰ τοῦ Πυθαγορείου πίνακος, εὑρίσκομεν εἰς τὴν *πρώτην* ὁριζόντιον τὸν ἕνα ἐξ αὐτῶν καὶ εἰς τὴν *πρώτην* κατακόρυφον τὸν ἕτερον, ὅτε τὸ γινόμενόν των εὑρίσκεται ἐκεῖ, ἔνθα συναντῶνται αἱ δύο σειραί, αἱ ὁποῖαι ἄρχονται ἐκ τῶν ἀριθμῶν τούτων.

Π. χ. Τὸ γινόμενον τοῦ 6 ἐπὶ 7 ἤτοι τὸ 42 εὑρίσκεται ἐκεῖ ἔνθα συναντῶνται ἡ *ἕκτη* ὁριζοντία σειρὰ μὲ τὴν *ἑβδόμην* κατακόρυφον ἢ ἡ *ἑβδόμη* ὁριζοντία μὲ τὴν *ἕκτην* κατακόρυφον.

Σημ. Ἐὰν ἀριθμόν τινα πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὴν μονάδα, εὑρίσκομεν γινόμενον αὐτὸν τὸν πολλαπλασιαζόμενον ἀριθμόν, ἂν δὲ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν ἐπὶ *μηδέν*, εὑρίσκομεν γινόμενον *μηδέν*. Διότι $5\times1=1+1+1+1+1=5$ καὶ $5\times0=0+0+0+0+0=0$.

Βα περίπτωσις.

104. *Πρόβλημα* 1ον. Νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ ἀριθμὸς 653 ἐπὶ 2. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον τοῦ 653 ἐπὶ 2, ἀρκεῖ τὸν 653 νὰ προσθέσωμεν 2 φορὰς (§ 97) ἤτοι

$$\begin{array}{r} 653 \\ 653 \\ \hline \end{array}$$

ἔνθα βλέπομεν ὅτι, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον τοῦ 653 ἐπὶ 2, πρέπει νὰ προσθέσωμεν τὰς *μονάδας*, τὰς *δεκάδας*, τὰς *ἑκατοντάδας* τοῦ 653 ἀπὸ 2 φοράς, τοῦτο δὲ κάμνομεν συντόμως πολλαπλασιάζοντες ἕκαστον ψηφίον τοῦ 653 ἐπὶ 2, ἀρχόμενοι ἐκ δεξιῶν πρὸς τ' ἀριστερά. Καὶ οὕτω *ὁ πολλαπλασιασμὸς πολυψηφίου ἐπὶ μονοψήφιον ἀνάγεται εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν μονοψηφίου ἐπὶ μονοψήφιον.*

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς.

$$\begin{array}{r} 653 \\ 2 \\ \hline 1306 \end{array}$$

Γράφομεν τὸν πολλαπλασιαστὴν ὑπὸ τὸν πολλαπλασιαστέον καὶ ὑπ' αὐτοὺς ἄγομεν γραμμὴν ὁριζοντίαν. Μετὰ ταῦτα, πολλαπλασιάζοντες τὸν ἀριθμὸν 3 τῶν *ἁπλῶν μονάδων* ἐπὶ τὸν 2, εὑρίσκομεν γινόμενον 6 *ἁπλᾶς μονάδας*, ἃς γράφομεν ὑπὸ τὴν γραμμὴν εἰς τὴν στήλην τῶν *ἁπλῶν μονάδων*. Ἔπειτα, πολλαπλασιάζοντες τὸν ἀριθμὸν 5 τῶν μονάδων δευτέρας τάξεως ἐπὶ τὸν 2, εὑρίσκομεν γινόμενον 10 μονάδας δευτέρας τάξεως, αἱ ὁποῖαι κάμνουσι 0 μονάδας δευτέρας τάξεως καὶ 1 μονάδα τρίτης τάξεως, διὰ τοῦτο γράφομεν ὑπὸ τὴν γραμμὴν 0 πρὸ τοῦ 6 (δηλ. εἰς τὴν θέσιν τῶν μονάδων *δευτέρας τάξεως*) καὶ κρατοῦμεν τὴν 1 μονάδα τρίτης τάξεως, τὴν ὁποίαν προσθέτομεν εἰς τὸ ἀκόλουθον γινόμενον τῶν 6 μονάδων τρίτης τάξεως ἐπὶ τὸν 2 ἤτοι εἰς τὰς 12 μονάδας τρίτης τάξεως, ὅτε γίνονται 13 μονάδες *τρίτης τάξεως*. Ἀλλ' αἱ μονάδες αὗται τῆς τρίτης τάξεως κάμνουσι 3 μονάδας τρίτης τάξεως καὶ 1 τετάρτης τάξεως, διὰ τοῦτο ὑπὸ τὴν γραμμὴν γράφομεν τὸ 3 πρὸ τοῦ 0 (δηλ. εἰς τὴν θέσιν τῶν μονάδων *τρίτης τάξεως*), τὸ δὲ 1 γράφομεν πρὸ τοῦ 3 (δηλ. εἰς τὴν θέσιν τῶν μονάδων τῆς τετάρτης τάξεως). Ὥστε τὸ ζητούμενον γινόμενον εἶναι ὁ ἀριθμὸς 1306.

Ἐκ τούτου μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

105. *Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν πολυψήφιον ἀριθμὸν ἐπὶ μονοψήφιον, γράφομεν τὸν μονοψήφιον ὑπὸ τὸν πολυψήφιον καὶ ὑπ' αὐτοὺς ἄγομεν γραμμὴν ὁριζοντίαν. Ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν ἕκαστον ψηφίον τοῦ πολυψηφίου ἐπὶ τὸν μονοψήφιον, ἀρχόμενοι ἐκ τῶν ἁπλῶν μονάδων, καὶ ἂν μὲν τὸ γινόμενον αὐτῶν δὲν ὑπερβαίνῃ τὸν 9, γράφομεν αὐτὸ ὑπὸ τὴν στήλην τῶν μονάδων, ἂν δὲ ὑπερβαίνῃ τὸν 9, ἐξάγομεν τὰς μονάδας δευτέρας τάξεως καὶ τὰς προσθέτομεν εἰς τὸ ἀκόλουθον γινόμενον, τὰς δὲ ὑπολοίπους μονάδας γράφομεν ὑπὸ τὴν στήλην τῶν μονάδων ἢ ἐν ἐλλείψει τοιούτων γράφομεν 0, καὶ ἐξακολουθοῦμεν οὕτω τὸν πολλαπλασιασμὸν μέχρι τοῦ τελευταίου ψηφίου.*

Γη περίπτωσις.

106. Θεώρημα. *Τὸ γινόμενον ἀριθμοῦ τινος ἐπὶ 10, 100, 1000 κ.τ.λ. εὑρίσκομεν, γράφοντες πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ τὰ μηδενικὰ ἐκ τῶν ὁποίων ἀκολουθεῖται ἡ μονάς.*

Π. χ. ὁ 357 ἐπὶ	10	δίδει γινόμενον	3570
ὁ 357 ἐπὶ	100	» »	35700
ὁ 357 ἐπὶ	1000	» »	357000

Ὁ λόγος δὲ τούτου εἶναι ὁ ἑξῆς. Διότι διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον τοῦ 357 ἐπὶ 10, ἀρκεῖ τὸν 357 νὰ ἐπαναλάβωμεν 10 φοράς. Γίνεται δὲ τοῦτο καὶ ἐὰν ἑκάστην μονάδα τοῦ 357 ἐπαναλάβωμεν 10 φοράς, ὅτε ἑκάστη μονὰς γίνεται *δεκάς*. Ἄρα αἱ 357 μονάδες γίνονται 357 *δεκάδες*. Οὗτος δὲ ὁ ἀριθμὸς γράφεται 3570.

Ὁμοίως διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον τοῦ 357 ἐπὶ 100, ἀρκεῖ ἑκάστην μονάδα τοῦ 357 νὰ ἐπαναλάβωμεν ἑκατὸν φοράς, ὅτε ἑκάστη μονὰς γίνεται *ἑκατοντὰς* καὶ ἐπομένως αἱ 357 μονάδες γίνονται 357 *ἑκατοντάδες*. Οὗτος δὲ ὁ ἀριθμὸς γράφεται 35700. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ὁ 357 ἐπὶ 1000 δίδει γινόμενον 357000 καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

107. Θεώρημα. *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμόν τινα ἐπὶ ἄλλον ἀκολουθούμενον ἀπὸ μηδενικά, πολλαπλασιάζομεν τοὺς ἀριθμοὺς οἱ ὁποῖοι ἀπομένουσι μετὰ τὴν ἀποκοπὴν τῶν μηδενικῶν καὶ*

πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ γινομένου γράφομεν τὰ παραλειφθέντα μηδενικά.

Π. χ. Διὰ νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον τοῦ 2507 ἐπὶ 500 πολλαπλασιάζομεν τὸν 2507 ἐπὶ 5 καὶ εὑρίσκομεν γινόμενον 12535. Πρὸς δὲ τὰ δεξιὰ τούτου γράφομεν τὰ παραλειφθέντα δύο μηδενικὰ καὶ οὕτως εὑρίσκομεν γινόμενον 1253500.

Ὁ λόγος διὰ τὸν ὁποῖον εὑρίσκεται οὕτω τὸ γινόμενον εἶναι ὁ ἑξῆς. Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν π. χ. τὸν 2507 ἐπὶ 500, ἀρκεῖ τὸν 2507 νὰ προσθέσωμεν 500 φοράς, ἢ ὅπερ ταὐτό, 5 φορὰς ἀπὸ 100, ὅτε ἔχομεν

$$\begin{array}{r} 250700 \\ 250700 \\ 250700 \\ 250700 \\ 250700 \\ \hline \end{array}$$

Ἀλλ' ἐνταῦθα, ἀντὶ νὰ προσθέσωμεν τὸν 2507 πέντε φορὰς καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ἀθροίσματος νὰ γράψωμεν δύο μηδενικά, εἶναι τὸ ἴδιον νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν 2507 ἐπὶ 5 καὶ δεξιὰ τοῦ γινομένου νὰ γράψωμεν τὰ παραλειφθέντα *δύο* μηδενικά.

108. Στηριζόμενοι ἐπὶ τῶν ἀνωτέρω δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον δύο πολυψηφίων ἀριθμῶν ὡς ἑξῆς.

Πρόβλημα. Νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ ἀριθμὸς 2379 ἐπὶ 456.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον τοῦ 2379 ἐπὶ 456, ἀρκεῖ τὸν 2379 νὰ προσθέσωμεν 456 φορὰς (§ 97) ἤ, ὅπερ τὸ ἴδιον, νὰ προσθέσωμεν αὐτὸν πρῶτον μὲν 6 φοράς, ἔπειτα 50 φορὰς καὶ ἔπειτα 400 φοράς· τοῦτο δὲ κατορθοῦται, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν 2379 πρῶτον ἐπὶ 6, ἔπειτα ἐπὶ 50 καὶ ἔπειτα ἐπὶ 400 καὶ προσθέσωμεν τὰ προκύπτοντα γινόμενα ἤτοι

$$\begin{array}{r} 2379 \\ 6 \\ \hline 14274 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2379 \\ 50 \\ \hline 118950 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2379 \\ 400 \\ \hline 951600 \end{array}$$

Προσθέτοντες δὲ τὰ οὕτω εὑρεθέντα γινόμενα ἔχομεν

$$\begin{array}{r} 14274 \\ 118950 \\ 951600 \\ \hline 1084824 \end{array}$$

Ὥστε τὸ ζητούμενον γινόμενον εἶναι 1084824.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{r} 2379 \\ 456 \\ \hline 14274 \\ 118950 \\ 951600 \\ \hline 1084824 \end{array}$$

καὶ ἐπειδὴ τὰ μηδενικὰ τῶν γινομένων 118950 καὶ 951600 δὲν λαμβάνουσι μέρος εἰς τὴν πρόσθεσιν, δύνανται νὰ παραλείπωνται, ὅτε ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{r} 2379 \\ 456 \\ \hline 14274 \\ 11895 \\ 9516 \\ \hline 1084824 \end{array}$$

ὅθεν παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ πολλαπλασιασμὸς τοῦ 2379 ἐπὶ 456 ἀνάγεται εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ 2379 ἐπὶ ἕκαστον ψηφίον τοῦ 456· δηλ. *ὁ πολλαπλασιασμὸς πολυψηφίου ἐπὶ πολυψήφιον ἀνάγεται εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν πολυψηφίου ἐπὶ μονοψήφιον.*

Ἐκ τούτου μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

109. *Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν πολυψήφιον ἀριθμὸν ἐπὶ πολυψήφιον γράφομεν τὸν πολλαπλασιαστὴν ὑπὸ τὸν πολλαπλασιαστέον καὶ ὑπ' αὐτοὺς ἄγομεν γραμμὴν ὁριζοντίαν καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸν πολλαπλασιαστέον ἐπὶ ἕκαστον σημαντικὸν ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ἀρχόμενοι ἐκ δεξιῶν, τὰ δὲ προκύπτοντα γινόμενα γράφομεν οὕτως, ὥστε τὸ τελευταῖον ψηφίον ἑκάστου νὰ εὑρίσκηται ἐν τῇ αὐτῇ στήλῃ μὲ τὸ ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ἐπὶ τὸ ὁποῖον ἐπολλαπλασιάσαμεν τὸν πολλαπλασιαστέον, ἔπειτα δέ, ἄγοντες ὑπ' αὐτὰ γραμμὴν ὁριζοντίαν, προβαίνομεν εἰς τὴν πρόσθεσιν, τὸ δὲ προκῦπτον ἄθροισμα εἶναι τὸ ζητούμενον γινόμενον,*

Δοκιμὴ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Τὴν δοκιμὴν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ κάμνομεν, ἀνταλλάσσοντες τὰς θέσεις τοῦ πολλαπλασιαστέου καὶ πολλαπλασιαστοῦ (§ 99) καὶ ἂν εὕρωμεν πάλιν τὸ αὐτὸ γινόμενον, συμπεραίνομεν, ὅτι ἡ πρᾶξις ἐγένετο ἄνευ λάθους, ἂν κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς πράξεως τῆς δοκιμῆς δὲν περιεπέσαμεν εἰς λάθος.

Περὶ παραγόντων, δυνάμεων καὶ πολλαπλασίων.

110. *Παράγοντες ἀριθμοῦ τινος λέγονται οἱ ἀριθμοί, οἵτινες πολλαπλασιαζόμενοι δίδουσι τὸν δοθέντα ἀριθμόν.*

Π. χ. Οἱ ἀριθμοὶ 2 καὶ 3 λέγονται *παράγοντες* τοῦ 6, διότι 2×3 δίδουσιν 6. Ὁμοίως οἱ 3 καὶ 4 λέγονται *παράγοντες* τοῦ 12, διότι $3 \times 4 = 12$.

111. ***Τὸ γινόμενον πολλῶν ἴσων ἀριθμῶν λέγεται δύναμις τοῦ ἑνὸς τῶν ἀριθμῶν τούτων.***

Π. χ. Τὸ γινόμενον $3 \times 3 \times 3 \times 3$ λέγεται δύναμις τοῦ 3.

112. Τὸ γινόμενον δύο ἴσων ἀριθμῶν, λέγεται *δευτέρα δύναμις* τοῦ ἑνὸς τῶν ἀριθμῶν τούτων *ἢ τετράγωνον*, τὸ γινόμενον τριῶν, λέγεται *τρίτη δύναμις ἢ κῦβος*, τὸ γινόμενον *τεσσάρων, πέντε, ἓξ* κτλ. ἴσων ἀριθμῶν, λέγεται *τετάρτη, πέμπτη, ἕκτη* δύναμις κ.τ.λ. τοῦ ἑνὸς τούτων.

113. Τὴν δύναμιν ἀριθμοῦ τινος σημειοῦμεν συμβολικῶς γράφοντες πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ καὶ ὀλίγον ὑψηλότερον ἀριθμόν, ὅστις δεικνύει πόσοι εἶναι οἱ ἴσοι πολλαπλασιαζόμενοι ἀριθμοί.

Π. χ. Τὴν δύναμιν $5 \times 5 \times 5$ σημειοῦμεν συμβολικῶς 5^3. Ὁμοίως τὸ *τετράγωνον* τοῦ 3 σημειοῦμεν 3^2.

114. Ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος δηλοῖ πόσοι εἶναι οἱ ἴσοι παράγοντες, λέγεται *ἐκθέτης*, ὁ δὲ ἀριθμός, ὅστις φέρει τὸν ἐκθέτην, λέγεται *βάσις* τῆς δυνάμεως.

Π. χ. Τὸ 7^4 λέγεται *τετάρτη* δύναμις τοῦ 7, ἔνθα 4 εἶναι ὁ *ἐκθέτης* καὶ 7 εἶναι ἡ *βάσις* τῆς δυνάμεως 7^4.

115. *Πολλαπλάσιον ἀριθμοῦ τινος λέγεται τὸ γινόμενον τούτου ἐπὶ οἱονδήποτε ἀκέραιον ἀριθμόν.*

Π. χ. Τοῦ 2 πολλαπλάσιον εἶναι ὁ 4, ὁ 6, ὁ 8 κ.τ.λ. Ὁμοίως, ὁ 40 λέγεται πολλαπλάσιον τοῦ 2, τοῦ 4, τοῦ 5, τοῦ 8, τοῦ 10 κτλ.

116. Τὰ *πολλαπλάσια* ἀριθμοῦ τινος εἶναι ἄπειρα, εὑρίσκομεν δὲ ταῦτα πολλαπλασιάζοντες αὐτὸν ἐπὶ 2, 3, 4, 5, 6, 7 καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

117. Π χ. Τὰ πολλαπλάσια τοῦ 3 εἶναι 3×2, 3×3, 3×4, 3×5 κ.τ.λ. ἤτοι οἱ ἀριθμοὶ 6, 9, 12, 15 κ.τ.λ. Τὸ *σύνολον* δὲ τῶν πολλαπλασίων παντὸς ἀριθμοῦ καὶ ἔστω τοῦ 3 δύνανται νὰ γραφῶσι συμβολικῶς ὑπὸ τὴν μορφὴν 3×Π, ἔνθα ὁ Π θεωρεῖται, ὡς λαμβάνων πᾶσαν τιμὴν ἀκεραίου ἀριθμοῦ ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ ἐφ' ἑξῆς. Ὁμοίως τὸ *σύνολον* τῶν πολλαπλασίων τοῦ 5 γράφονται συμβολικῶς 5×Π. Τὸ *σύνολον* τῶν πολλαπλασίων τοῦ 10 γράφονται συμβολικῶς 10×Π. Καὶ *γενικῶς*, πάντα τὰ πολλαπλάσια τοῦ Α ἔνθα Α εἶναι οἱοσδήποτε ἀριθμός, γράφονται συμβολικῶς Α×Π.

118. *Ἄρτιοι* ἀριθμοί λέγονται ὁ 2 καὶ τὰ πολλαπλάσια τούτου. Διὰ τοῦτο ἡ παράστασις 2×Π, ἥτις παριστᾷ συντόμως πάντα τὰ πολλαπλάσια τοῦ 2 εἶναι καὶ συμβολικὴ παράστασις *πάντων τῶν ἀρτίων ἀριθμῶν*.

119. *Περιττοὶ* ἀριθμοὶ λέγονται πάντες οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι δὲν εἶναι ἄρτιοι. Διὰ τοῦτο ἡ μορφὴ 2×Π+1 εἶναι συμβολικὴ παράστασις *πάντων τῶν περιττῶν ἀριθμῶν*. Διότι πᾶς ἄρτιος ἀριθμός, ὡς ὁ 2×Π, αὐξανόμενος κατὰ μονάδα γίνεται *περιττὸς ἀριθμός*.

120. *Κοινὸν πολλαπλάσιον* δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν λέγεται ὁ ἀριθμός, ὅστις εἶναι πολλαπλάσιον ἑκάστου τῶν ἀριθμῶν τούτων.

Π. χ. Κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 4 εἶναι ὁ 12, ὁ 24 κ.τ.λ.

121. *Ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον* δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν λέγεται τὸ μικρότερον ἐκ τῶν κοινῶν πολλαπλασίων αὐτῶν.

Π. χ. Οἱ ἀριθμοὶ 12, 24, 36 εἶναι κοινὰ πολλαπλάσια τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 4, 6. Ἐκ τούτων δὲ τὸ μικρότερον 12 λέγεται ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν δοθέντων ἀριθμῶν 2, 3, 4, 6.

122. *Μέγιστον πολλαπλάσιον δοθέντος ἀριθμοῦ περιεχόμενον εἰς ἄλλον ἀριθμόν, λέγεται τὸ μεγαλήτερον τῶν πολλαπλασίων αὐτοῦ ἐξ ὅσων περιέχονται εἰς τὸν ἄλλον ἀριθμόν.*

Πρόβλημα. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον πολλαπλάσιον τοῦ 6 τὸ περιεχόμενον εἰς τὸν 28.

Τὰ πολλαπλάσια τοῦ 6 εἶναι κατὰ σειρὰν οἱ ἀριθμοὶ

12, 18, 24, 30, 36,....

Ἐκ τούτων δὲ τά περιεχόμενα εἰς τὸν 28 εἶναι τὰ 12, 18, 24, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ μεγαλήτερον εἶναι τὸ 24. Ἑπομένως τὸ 24 εἶναι τὸ *μέγιστον πολλαπλάσιον* τοῦ 6 ἐξ ὅσων περιέχονται εἰς τὸν 28.

Ὁμοίως, τὸ μέγιστον πολλαπλάσιον τοῦ 7, ἐξ ὅσων περιέχονται εἰς τὸν 42 εἶναι ὁ ἀριθμὸς 42, διότι ἐκ τῶν πολλαπλασίων τοῦ 7 ἤτοι τῶν 14, 21, 28, 35, 42, 49.... τὰ περιεχόμενα εἰς τὸν 42 εἶναι τὰ 14, 21, 28, 35, 42, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ μέγιστον εἶναι τὸ 42.

Διάφορα θεωρήματα πολλαπλασιασμοῦ.

123. *Θεώρημα. Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν ἄθροισμα ὁσωνδήποτε προσθετέων ἐπὶ ἀριθμὸν ἢ ἀριθμὸν ἐπὶ ἄθροισμα* (χωρὶς προηγουμένως νὰ εὕρωμεν αὐτὸ) *πολλαπλασιάζομεν ἕκαστον τῶν προσθετέων τοῦ ἀθροίσματος ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον καὶ προσθέτομεν τὰ προκύπτοντα μερικὰ γινόμενα.*

Ἔστω π. χ. ὅτι πρόκειται νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἄθροισμα

$(5+6+4)$ ἐπὶ 3 ἢ τὸν 3 ἐπὶ τὸ ἄθροισμα $(5+6+4)$

Κατὰ τὸ θεώρημα (§ 97) πρὸς εὕρεσιν τοῦ γινομένου τούτων δυνάμεθα τὸ ἄθροισμα $(5+6+4)$ νὰ προσθέσωμεν 3 φοράς, ὅτε εὑρίσκομεν·

$$(5+6+4)+(5+6+4)+(5+6+4)$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες ἕκαστον ἄθροισμα διὰ τῶν προσθετέων του (§ 58) εὑρίσκομεν

$$5+6+4+5+6+4+5+6+4$$

καὶ ἀλλάσσοντες τὴν τάξιν τῶν προσθετέων (§ 56) γράφομεν αὐτοὺς ὡς ἑξῆς

$$5+5+5+6+6+6+4+4+4$$

καὶ γράφοντες τούτους συμβολικῶς (§ 96), ἔχομεν

$$5\times3+6\times3+4\times3$$

Σημειωτέον προσέτι, ὅτι εἰς τὸ ἐξαγόμενον $5\times3+6\times3+4\times3$

δυνάμεθα νὰ ἐπιφέρωμεν καὶ πᾶσαν μεταβολὴν ἐπιτρεπομένην ἐκ τῆς ἀνταλλαγῆς τῆς τάξεως τῶν παραγόντων ἑκάστου γινομένου (§ 99). Καὶ ἐπομένως δυνάμεθα γενικῶς νὰ εἴπωμεν ὅτι $(5+6+4)\times 3$ ἢ $3\times(5+6+4)$ ἰσοῦται πρὸς $5\times 3+6\times 3+4\times 3$ ἢ $3\times 5+3\times 6+3\times 4$ ἢ $3\times 5+6\times 3+4\times 3$ κ.τ.λ.

124. Ἐκ τοῦ θεωρήματος τούτου συνάγομεν, ὅτι τὴν *παράστασιν* $(2+3)\times 4$ δυνάμεθα νὰ μετασχηματίσωμεν εἰς τὴν $2\times 4+3\times 4$. Καὶ *τἀνάπαλιν*, ὅτι τὴν παράστασιν $4\times 5+7\times 4+2\times 4+4\times 3$ δυνάμεθα νὰ μετασχηματίσωμεν εἰς τὴν $(5+7+2+3)\times 4$.

Καὶ *γενικῶς* ὅτι, τὴν παράστασιν $(\alpha+\beta+\gamma)\times\delta$ δυνάμεθα νὰ μετασχηματίσωμεν εἰς τὴν $\alpha\delta+\beta\delta+\gamma\delta$. Καὶ *τἀνάπαλιν* τὴν παράστασιν $\alpha\varepsilon+\varepsilon\beta+\gamma\varepsilon+\delta\varepsilon$ δυνάμεθα νὰ μετασχηματίσωμεν εἰς τήν παράστασιν $(\alpha+\beta+\gamma+\delta).\ \varepsilon$.

125. *Θεώρημα. Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν ἄθροισμα ὁσωνδήποτε προσθετέων ἐπὶ ἄλλο ἄθροισμα* (χωρὶς προηγουμένως νὰ εὕρωμεν αὐτὸ) *πολλαπλασιάζομεν ἕκαστον προσθετέον τοῦ ἑνὸς ἀθροίσματος ἐπὶ ἕκαστον προσθετέον τοῦ ἑτέρου ἀθροίσματος καὶ προσθέτομεν τὰ προκύπτοντα μερικὰ γινόμενα.*

Ἔστω π. χ. ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἄθροισμα $(5+6+4)$ ἐπὶ τὸ ἄθροισμα $(2+3)$. Κατὰ τὸ θεώρημα τῆς (§ 97) πρὸς εὕρεσιν τοῦ γινομένου τῶν *δύο ἀριθμῶν* $(5+6+4)$ καὶ $(2+3)$, ἀρκεῖ τὸν ἕνα τούτων καὶ ἔστω τὸν $(5+6+4)$ νὰ προσθέσωμεν τόσας φοράς, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἄλλος, ἤτοι πρῶτον 2 φορὰς καὶ ἔπειτα ἄλλας 3 φοράς. Τοῦτο δὲ γίνεται συντόμως, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν $(5+6+4)$ πρῶτον ἐπὶ 2 καὶ εἶτα ἐπὶ 3, ὅτε εὑρίσκομεν

$$(5+6+4)\times 2+(5+6+4)\times 3$$

Τούτων δὲ τὸ γινόμενον κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα εἶναι

$$5\times 2+6\times 2+4\times 2+5\times 3+6\times 3+4\times 3 \text{ ὅ, ἔ, δ.}$$

Σημ. Σημειωτέον ὅτι, τὴν ἀπόδειξιν τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος ἠδυνάμεθα νὰ κάμωμεν στηριζόμενοι εἰς τὸ αὐτὸ θεώρημα (§ 97) καὶ ὡς ἑξῆς

$$(5+6+4)\times(2+3)=5\times(2+3)+6\times(2+3)+4\times(2+3)=$$
$$5\times 2+5\times 3+6\times 2+6\times 3+4\times 2+4\times 3.$$

126. Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος συνάγομεν ὅτι, τὴν παράστα-

σιν $(3+4)\times(5+6)$ δυνάμεθα νὰ μετασχηματίσωμεν εἰς τὴν παράστασιν $3\times5+3\times6+4\times5+4\times6$. Καὶ γενικῶς, ὅτι τὴν παράστασιν $(\alpha+\beta+\gamma)\times(\delta+\varepsilon+\theta)$ δυνάμεθα νὰ μετασχηματίσωμεν εἰς τὴν $\alpha\delta+\alpha\varepsilon+\alpha\theta+\beta\delta+\beta\varepsilon+\beta\theta+\gamma\delta+\gamma\varepsilon+\gamma\theta$.

127. **Ἄσκησις.** — Νὰ συμπτυχθῇ ἡ παράστασις $\alpha\delta+\alpha\varepsilon+\alpha\theta+\beta\delta+\beta\varepsilon+\beta\theta+\gamma\delta+\gamma\varepsilon+\gamma\theta$ εἰς ἄλλην ἰσοδύναμον.

Τὴν ἀνωτέρω παράστασιν δυνάμεθα πρῶτον νὰ μετασχηματίσωμεν (§ 124) εἰς τὴν ἑξῆς

$$(\delta+\varepsilon+\theta).\ \alpha+(\delta+\varepsilon+\theta).\ \beta+(\delta+\varepsilon+\theta).\ \gamma$$

ταύτην δὲ δυνάμεθα νὰ μετασχηματίσωμεν (§ 124) εἰς τὴν

$$(\delta+\varepsilon+\theta)\cdot(\alpha+\beta+\gamma)$$

128. Θεώρημα. *Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν διαφορὰν ἐπὶ ἀριθμὸν ἢ ἀριθμὸν ἐπὶ διαφορὰν* (χωρὶς προηγουμένως νὰ εὕρωμεν αὐτὴν) *πολλαπλασιάζομεν τὸν μειωτέον καὶ ἀφαιρετέον τῆς διαφορᾶς ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον καὶ ἀπὸ τοῦ πρώτου γινομένου ἀφαιροῦμεν τὸ δεύτερον.*

Λέγω π. χ. ὅτι

$$(8-3)\times4 \text{ ἢ } 4\times(8-3)=8\times4-3\times4$$

Ὁ λόγος τούτου εἶναι ὁ ἑξῆς. Διότι τὸ γινόμενον τῶν

$$(8-3)\times4 \text{ ἢ } 4\times(8-3)$$

δύναται νὰ εὑρεθῇ, ἐὰν τὸν ἀριθμὸν (8—3) προσθέσωμεν 4 φορὰς (§ 97) ὅτε εὑρίσκομεν

$$(8-3)+(8-3)+(8-3)+(8-3)$$

Ἐὰν δὲ εἰς ἑκάστην παρένθεσιν προσθέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 3, τότε εὑρίσκομεν

$$(8-3+3)+(8-3+3)+(8-3+3)+(8-3+3) \text{ ἤτοι}$$
$$8+8+8+8 \text{ ὅπερ γράφεται συμβολικῶς } 8\times4.$$

Καὶ ἐπειδὴ τὸ 8×4 εὑρέθη ἀφ' οὗ προσεθέσαμεν αὐθαιρέτως 4 φορὰς τὸν 3, ὅπερ γράφεται συμβολικῶς 3×4, ἀνάγκη ν' ἀφαιρέσωμεν ἐκ τοῦ ἐξαγομένου 8×4 τὸν 3×4, ὃν προσεθέσαμεν, ὅτε εὑρίσκομεν $8\times4-3\times4$. ὅ. ἔ. δ.

129. Ἐκ τοῦ θεωρήματος τούτου συνάγομεν ὅτι, τὴν παράστασιν $(15-4)\times2$ ἢ τὴν $2\times(15-4)$ δυνάμεθα νὰ μετασχηματίσωμεν εἰς τὴν $15\times2-4\times2$ ἢ $2\times15-2\times4$. Καὶ *τἀνάπαλιν*, ὅτι τὴν

παράστασιν $8\times6-2\times6$ ἢ τὴν $6\times8-2\times6$ δυνάμεθα νὰ μετασχηματίσωμεν εἰς τὴν παράστασιν $(8-2)\times6$ ἢ $6\times(8-2)$.

Καὶ *γενικῶς*, ὅτι τὴν παράστασιν (α—β). γ ἢ τὴν γ. (α—β) δυνάμεθα νὰ μετασχηματίσωμεν εἰς τὴν παράστασιν αγ—βγ ἢ τὴν γα—γβ κ.τ.λ. Καὶ *τἀνάπαλιν*, ὅτι τὴν παράστασιν δε—εθ δυνάμεθα νὰ μετασχηματίσωμεν εἰς τὴν (δ—θ). ε.

130. Θ ε ώ ρ η μ α. *Ἐὰν ἴσους ἀριθμοὺς πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν (ἢ ἐπὶ ἄλλους ἴσους ἀριθμοὺς) εὑρίσκομεν γινόμενα ἴσα.*

Διότι ὁ πολλαπλασιασμὸς ἴσων ἀριθμῶν ἐπὶ ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν (ἢ ἐπὶ ἴσους ἀριθμοὺς) εἶναι ἡ *πρόσθεσις* ἑκατέρου τῶν ἴσων ἀριθμῶν πολλάκις, τουθ' ὅπερ δίδει ἐξαγόμενα ἴσα (§ 48).

131. Θ ε ώ ρ η μ α. *Τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε παραγόντων εὑρίσκομεν πολλαπλασιάζοντες τοὺς δύο πρώτους παράγοντος, τὸ δὲ γινόμενον τούτων ἐπὶ τὸν τρίτον παράγοντα, τὸ δὲ γινόμενον τούτων ἐπὶ τὸν τέταρτον παράγοντα καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς μέχρι τοῦ τελευταίου ἐκ τῶν δοθέντων παραγόντων.*

Ἔστωσαν π. χ. οἱ ἀριθμοὶ 2, 5, 4, 3 καὶ 8. Ἵνα εὕρωμεν τὸ γινόμενον τούτων ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς.

Εὑρίσκομεν πρῶτον τὸ γινόμενον τῶν δύο πρώτων ἀριθμῶν 2 καὶ 5, ὅπερ εἶναι 10 καὶ οὕτως ἔχομεν τὴν ἰσότητα

$$2\times5=10$$

Ἐὰν ἤδη τοὺς ἴσους ἀριθμοὺς 2×5 καὶ 10 πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν *τρίτον* ἀριθμὸν 4, εὑρίσκομεν γινόμενα ἴσα (§ 130) ἤτοι $2\times5\times4=10\times4$ καὶ ἐπειδὴ 10×4 κάμνουν 40 ἄρα $2\times5\times4=40$

Ἐὰν ἤδη τοὺς ἴσους ἀριθμοὺς $2\times5\times4$ καὶ 40 πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν *τέταρτον* ἀριθμὸν 3, εὑρίσκομεν γινόμενα ἴσα (§ 130) ἤτοι

$2\times5\times4\times3=40\times3$ ἐξ ἧς εὑρίσκομεν $2\times5\times4\times3=120$

Ἐὰν ἤδη τοὺς ἴσους ἀριθμοὺς $2\times5\times4\times3$ καὶ 120 πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν *πέμπτον* ἀριθμὸν 8, εὑρίσκομεν γινόμενα ἴσα (§ 130) ἤτοι

$2\times5\times4\times3\times8=120\times8$ ἐξ ἧς εὑρίσκομεν $2\times5\times4\times3\times8=960$

καὶ οὕτω ἀπεδείχθη τὸ θεώρημα, τὸ δὲ ζητούμενον γινόμενον τῶν δοθέντων ἀριθμῶν εἶναι 960.

132. *Θεώρημα. Τὸ γινόμενον τριῶν ἐφεξῆς παραγόντων δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν ἀνταλλάξωμεν τὰς θέσεις τῶν δύο τελευταίων παραγόντων.*

Λέγω π. χ. ὅτι $2\times3\times4=2\times4\times3$.

Διότι κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα (§ 131) ἵνα εὕρωμεν τὸ γινόμενον τοῦ $2\times3\times4$ εὑρίσκομεν πρῶτον τὸ γινόμενον τοῦ 2×3, ὅτε εὑρίσκομεν $2+2+2$. Τοῦτο δὲ ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 4, ὅτε εὑρίσκομεν

$$\begin{array}{c}2+2+2\\2+2+2\\2+2+2\\2+2+2\end{array}$$

Ταῦτα δὲ προστιθέμενα καθέτως παρέχουσι τὸ ἐξαγόμενον $2\times4+2\times4+2\times4$, ὅπερ γράφεται συμβολικῶς $2\times4\times3$ ἄρα ἔχομεν

$$2\times3\times4=2\times4\times3. \text{ ὅ, ἔ δ.}$$

133. *Θεώρημα. Τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε παραγόντων δὲν μεταβάλλεται, ἂν ἀνταλλάξωμεν τὰς θέσεις δύο ἐφεξῆς παραγόντων.*

Λέγω π. χ. ὅτι $2\times3\times4\times5\times6\times7\times8=2\times3\times4\times6\times5\times7\times8$.

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ἀρκεῖ ν' ἀποδείξωμεν ὅτι, τὰ γινόμενα τῶν παραγόντων $2\times3\times4\times5\times6$ καὶ $2\times3\times4\times6\times5$ εἶναι ἴσα, διότι μετὰ τούτους ἔρχονται οἱ αὐτοὶ παράγοντες 7 καὶ 8 καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν.

Ὅτι δὲ τὸ γινόμενον τῶν παραγόντων $2\times3\times4\times5\times6$ ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῶν παραγόντων $2\times3\times4\times6\times5$ ἀποδεικνύομεν λαμβάνοντες τοὺς παράγοντας $2\times3\times4\times5\times6$ καὶ ἐκτελοῦντες τὸ γινόμενον μέχρι τοῦ 5, ὅτε ἔχομεν

$$2\times3\times4\times5\times6=24\times5\times6$$

Ἐπὶ δὲ τῶν τριῶν παραγόντων $24\times5\times6$ ἀνταλλάσσοντες τὴν τάξιν τῶν δύο τελευταίων παραγόντων, τουθ' ὅπερ δὲν μεταβάλλει τὸ τελικὸν γινόμενον (§ 132) τούτων, ἔχομεν

$$2\times3\times4\times5\times6=24\times6\times5$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες τὸ 24 διὰ τῶν παραγόντων του $2\times3\times4$, ἐξ ὧν προέκυψεν ἔχομεν

$$2\times3\times4\times5\times6=2\times3\times4\times6\times5$$

Ἐὰν δὲ τοὺς ἴσους τούτους ἀριθμοὺς πολλαπλασιάσωμεν πρῶτον ἐπὶ 7 καὶ ἔπειτα ἐπὶ 8 τὰ προκύπτοντα γινόμενα θὰ εἶναι ἴσα (§ 130), ἤτοι θὰ ἔχωμεν

$$2\times3\times4\times5\times6\times7\times8=2\times3\times4\times6\times5\times7\times8 \text{ ὅ, ἔ, δ.}$$

134. *Θεώρημα. Τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε παραγόντων δὲν μεταβάλλεται καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν πολλαπλασιάσωμεν αὐτούς.*

Λέγω π. χ. ὅτι $2\times6\times4\times5\times3=4\times2\times3\times5\times6$.

Διότι τὸ γινόμενον τῶν παραγόντων

$$2\times6\times4\times5\times3$$

ἰσοῦται (§ 133) τῷ γινομένῳ τῶν παραγόντων

$$2\times4\times6\times5\times3$$

τοῦτο δὲ ἰσοῦται (§ 133) τῷ γινομένῳ τῶν παραγόντων

$$4\times2\times6\times5\times3$$

τοῦτο δὲ ἰσοῦται (§ 133) τῷ γινομένῳ τῶν παραγόντων

$$4\times2\times6\times3\times5$$

τοῦτο δὲ ἰσοῦται (§ 133) τῷ γινομένῳ τῶν παραγόντων

$$4\times2\times3\times6\times5$$

καὶ τοῦτο ἰσοῦται (§ 133) τῷ γινομένῳ τῶν παραγόντων

$$4\times2\times3\times5\times6$$

ἐξ οὗ συνάγομεν ὅτι, τὸ γινόμενον τῶν παραγόντων $2\times6\times4\times5\times3$ ἰσοῦται τῷ γινομένῳ (§ 49) τῶν παραγόντων $4\times2\times3\times5\times6$.

135. *Θεώρημα. Τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε παραγόντων δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν δύο ἢ περισσοτέρους παράγοντας διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν.*

Λέγω π. χ. ὅτι $7\times2\times3\times5\times6\times4=7\times3\times40\times6$ (ἔνθα οἱ παράγοντες 2, 5 καὶ 4 ἀντικατεστάθησαν ὑπὸ τοῦ γινομένου αὐτῶν 40).

Διότι τὸ γινόμενον τῶν παραγόντων

$$7\times2\times3\times5\times6\times4$$

ἰσοῦται (§ 134) τῷ γινομένῳ τῶν

$$2\times5\times4\times7\times3\times6$$

(ἔνθα τοὺς παράγοντας 2, 5 καὶ 4 ἐθέσαμεν πρώτους).

Εἰς τούτους δὲ τοὺς παράγοντας, ἂν ἀντικαταστήσωμεν τοὺς παράγοντας 2, 5 καὶ 4 διὰ τοῦ γινομένου των 40, δὲν μεταβάλλεται τὸ τελικὸν γινόμενον ὅλων τῶν παραγόντων, διότι ἁπλῶς ἐκτελοῦμεν μέρος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (§ 131), τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ ἐκτελέσωμεν πρὸς εὕρεσιν τοῦ τελικοῦ γινομένου. Οὕτω δὲ τὸ γινόμενον τῶν παραγόντων $7\times2\times3\times5\times6\times4$ ἰσοῦται τῷ γινομένῳ (§ 49) τῶν παραγόντων $40\times7\times3\times6$ ἤτοι

$7\times2\times3\times5\times6\times4=40\times7\times3\times6$ ἢ καὶ (§ 134) ὅτι

$$7\times2\times3\times5\times6\times4=7\times3\times40\times6.$$

136. Στηριζόμενοι εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα διευκολύνομεν πολλάκις τὴν εὕρεσιν τοῦ γινομένου πολλῶν παραγόντων, ἀντικαθιστῶντες τινὰς τούτων διὰ τοῦ γινομένου των.

Π. χ. Τὸ γινόμενον τῶν παραγόντων

$$4\times3\times25\times125\times5\times8=(4\times25)\times(8\times125)\times3\times5=$$
$$100\times1000\times3\times5=100000\times15=1500000$$

137. *Θεώρημα. Τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε παραγόντων δὲν μεταβάλλεται, ἂν ἀναλύσωμέν τινας εἰς ἄλλους παράγοντας.*

Λέγω π. χ. ὅτι $3\times20\times7\times8=3\times4\times5\times7\times8$.

Διότι τὸ γινόμενον τῶν παραγόντων

$$3\times4\times5\times7\times8$$

ἰσοῦται, κατὰ τὸ θεώρημα (§ 135), τῷ γινομένῳ τῶν παραγόντων

$$3\times20\times7\times8$$

Στηριζόμενοι εἰς τὰ δύο προηγούμενα θεωρήματα δυνάμεθα νὰ συντομεύσωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν πολλῶν παραγόντων ἐχόντων εἰς τὸ τέλος μηδενικά, πολλαπλασιάζοντες αὐτοὺς χωρὶς τὰ μηδενικὰ καὶ εἰς τὸ τέλος τοῦ γινομένου τούτων, γράφοντες τὰ παραλειφθέντα μηδενικά.

Διότι τὸ γινόμενον τῶν $3600\times30\times62000=36\times100\times3\times10\times62\times1000=36\times3\times62\times(100\times10\times1000)=6696\times1000000=6696000000$.

138. *Θεώρημα.* — *Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν γινόμενον ὁσωνδήποτε παραγόντων ἐπὶ ἀριθμὸν* (χωρὶς προηγουμένως νὰ εὕρωμεν

αὐτό), *ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕνα παράγοντα τοῦ γινομένου ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον.*

Λέγω π. χ. ὅτι $(3\times4\times5\times6)\times2=3\times8\times5\times6$.

Διότι τὸ γινόμενον τοῦ ἀριθμοῦ $(3\times4\times5\times6)$ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 2 ἰσοῦται (§ 137) τῷ γινομένῳ τῶν παραγόντων $3\times4\times5\times6$ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 2 ἤτοι

$$(3\times4\times5\times6)\times2=3\times4\times5\times6\times2$$

τὸ δὲ γινόμενον τῶν παραγόντων $3\times4\times5\times6\times2$ ἰσοῦται (§ 135) τῷ γινομένῳ τῶν $3\times8\times5\times6$, ἑπομένως ἔχομεν

$$(3\times4\times5\times6)\times2=3\times8\times5\times6$$

139. *Θεώρημα. Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν ὁσαδήποτε γινόμενα, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς παράγοντας τῶν γινομένων.*

Λέγω π. χ. ὅτι $(2\times3\times4)\times(5\times6)=2\times3\times4\times5\times6$.

Διότι δυνάμεθα τοὺς ἀριθμοὺς $(2\times3\times4)$ καὶ (5×6) ν' ἀναλύσωμεν εἰς τοὺς παράγοντάς των ἄνευ βλάβης τοῦ τελικοῦ γινομενου. (§ 137).

Παρατήρησις Ἅπασαι αἱ ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, δηλ. οἱ διάφοροι τρόποι, καθ' οὓς δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν διαφόρων ἀριθμῶν καὶ οὓς τρόπους ἐσπουδάσαμεν διὰ τῶν ἀνωτέρω θεωρημάτων, πηγάζουσιν ἐκ δύο ἰδιοτήτων, ἃς διὰ τοῦτο καλοῦμεν θεμελιώδεις ἰδιότητας, εἶναι δὲ αὗται αἱ ἑξῆς.

Α'.) *Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν ἄθροισμα ἐπὶ ἀριθμὸν ἢ ἀριθμὸν ἐπὶ ἄθροισμα, πολλαπλασιάζομεν ἕκαστον τῶν προσθετέων τοῦ ἀθροίσματος ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον καὶ προσθέτομεν τὰ προκύπτοντα γινόμενα,*

Β'.) *Τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε παραγόντων δὲν μεταβάλλεται καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν πολλαπλασιάσωμεν αὐτούς.*

Θεωρήματα ἐπὶ τῶν δυνάμεων.

140. *Θεώρημα. Τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι δύναμις τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ ἐκθέτην ἔχουσα τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν.*

Λέγω π. χ. ὅτι $4^3\times4^2\times4^4=4^{3+2+4}$ ἤτοι 4^9.

Διότι ἀναλύοντες ἑκάστην τῶν δυνάμεων 4^3, 4^2 καὶ 4^4 εἰς τοὺς παράγοντάς της εὑρίσκομεν

$4^3 \times 4^2 \times 4^4 = 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$ ἤτοι 4^9.

141. *Θεώρημα. Ἵνα ὑψώσωμεν δύναμιν ἀριθμοῦ τινος εἰς ἄλλην δύναμιν πολλαπλασιάζομεν τὸν ἐκθέτην τῆς δυνάμεως.*

Λέγω π. χ. ὅτι $(4^5)^3 = 4^{15}$.

Διότι τὸ $(4^5)^3$, κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν δυνάμεων, δύναται νὰ γραφῇ $4^5 \times 4^5 \times 4^5$, τοῦτο δὲ ἰσοῦται (§ 140) πρὸς 4^{5+5+5} ἤτοι 4^{15}. Ἐπομένως $(4^5)^3 = 4^{15}$.

142. *Θεώρημα. Γινόμενον πολλῶν παραγόντων ὑψοῦται εἰς δύναμιν, ἐὰν ὑψωθῇ ἕκαστος τῶν παραγόντων εἰς τὴν αὐτὴν δύναμιν.*

Λέγω π. χ. ὅτι $(5 \times 7 \times 8)^4 = 5^4 \times 7^4 \times 8^4$.

Διότι ἡ παράστασις $(5 \times 7 \times 8)^4$, κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν δυνάμεων, δύναται νὰ γραφῇ

$$(5 \times 7 \times 8) \times (5 \times 7 \times 8) \times (5 \times 7 \times 8) \times (5 \times 7 \times 8)$$

αὕτη δὲ ἡ παράστασις δύναται νὰ μετασχηματισθῇ (§ 139) εἰς τὴν

$$5 \times 7 \times 8 \times 5 \times 7 \times 8 \times 5 \times 7 \times 8 \times 5 \times 7 \times 8.$$

αὕτη δὲ δύναται νὰ μετασχηματισθῇ (§ 134) εἰς τὴν

$$5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8$$

αὕτη δὲ κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν δυνάμεων δύναται νὰ γραφῇ

$$5^4 \times 7^4 \times 8^4$$

καὶ οὕτω ἀπεδείχθη ὅτι $(5 \times 7 \times 8)^4 = 5^4 \times 7^4 \times 8^4$.

143. *Ἐφαρμογή. Γινόμενον πολλῶν δυνάμεων ὑψοῦται εἴς τινα δύναμιν, ἔστω μ, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἐκθέτην ἑκάστης δυνάμεως ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν μ* (τοῦ μ ὄντος οἱουδήποτε ἀκεραίου ἀριθμοῦ).

Διότι $(2^\nu . 3^\rho . 5^\varkappa)^\mu =$ (ἰδὲ § 142) $= (2^\nu)^\mu . (3^\rho)^\mu . (5^\varkappa)^\mu =$ (ἰδὲ § 141) $= 2^{\nu\mu} . 3^{\rho\mu} . 5^{\varkappa\mu}$.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Νὰ ὑψωθῇ εἰς τὴν τετάρτην δύναμιν ἡ παράστασις $2^5 \times 3^4 \times 6^3$.

$2^{20} \times 3^{16} \times 6^{12}$

2) Νὰ μετασχηματισθῇ ἡ παράστασις $[(\alpha^\mu)^\nu]^\rho$ εἰς τὴν ἁπλουστάτην αὐτῆς μορφήν.

$\alpha^{\mu . \nu . \rho}$

3) Νὰ ἀναπτυχθῇ ἡ παράστασις $(\alpha+\beta)^2$. — $(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)$

4) Ποῖον εἶναι τὸ γινόμενον $2^3\times3^2\times5$ ἐπὶ $2^4\times3\times7\times5$;

$2^7\times3^3\times5^2\times7$

5) *Τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε ἰσοβαθμίων δυνάμεων ἰσοῦται τῇ ἰσοβαθμίῳ δυνάμει τοῦ γινομένου τῶν βάσεων τῶν δυνάμεων.*

Λέγω π. χ. ὅτι $\alpha^3\ \beta^3=(\alpha.\beta)^3$.

Διότι $\alpha^3.\beta^3=\alpha.\alpha.\alpha.\ \beta.\beta.\beta=(\alpha.\beta).(\alpha.\beta)\ (\alpha.\beta)=(\alpha\ \beta)^3$.

6) Νὰ συμπτυχθῇ ἡ παράστασις $2^{20}\times3^{20}\times6^{12}$ εἰς τὴν ἁπλουστάτην αὐτῆς παράστασιν

$$2^{20}\times3^{20}\times6^{12}=(2\times3)^{20}\times6^{12}=6^{20}\times6^{12}=6^{32}$$

Διαιρέσεις.

144. Ἵνα δώσωμεν τὸν ὁρισμὸν τῆς διαιρέσεως ἐξετάζομεν τὸν τρόπον τῆς λύσεως τῶν διαφόρων εἰδῶν τῶν προβλημάτων τῶν λυομένων διὰ τῆς πράξεως, ἣν θὰ ὀνομάσωμεν διαίρεσιν.

145. *Πρόβλημα* 1ον. *Δι' ἐργασίαν τινα ἔλαβον 5 ἄνθρωποι 30 δραχμάς. Πόσα θὰ λάβῃ ὁ εἷς τούτων;*

Λύσις. Προφανῶς, ἵνα εὕρωμεν πόσα θὰ λάβῃ ὁ εἷς ἐκ τῶν 5 ἀνθρώπων, ἀρκεῖ τὰς 30 δραχ. νὰ μοιράσωμεν εἰς 5 ἴσα μέρη καὶ νὰ λάβωμεν τὸ ἕν Κατορθοῦμεν δὲ τοῦτο, δίδοντες εἰς τοὺς 5 ἀνθρώπους πρῶτον ἀπὸ 1 δραχ. ἔπειτα ἀπὸ ἄλλην 1 δραχ. καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, μέχρις οὗ ἐξαντληθῶσιν αἱ 30 δραχ. Παρατηροῦμεν δὲ τότε, ὅτι ἕκαστος τούτων ἔλαβεν 6 δραχμὰς καὶ οὕτω εὑρέθη τὸ ζητούμενον.

Ἀλλὰ τὸ ἐξαγόμενον 6 εὑρίσκομεν καὶ ἂν ζητήσωμεν τὸν ἀριθμόν, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν 5 δίδει τὸν ἀριθμὸν 30 καὶ ὀνομάσωμεν τοῦτον δραχμάς, συμφώνως πρὸς τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος.

146. *Πρόβλημα* 2ον. *Μὲ μίαν δραχμὴν ἀγοράζει τις 4 πήχ. ὑφάσματός τινος, αἱ 20 πήχεις πόσας δραχμὰς τιμῶνται;*

Λύσις. Ἐπειδὴ διὰ 4 πήχεις δίδομεν μίαν δραχμήν, διὰ νὰ εὕρωμεν πόσον τιμῶνται αἱ 20 πήχεις, ἀρκεῖ προφανῶς νὰ εὕρωμεν πόσας φορὰς ὁ 20 περιέχει τὸν 4, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν ἀφαιροῦντες διαδοχικῶς ἀπὸ τοῦ 20 τὸν 4. Καὶ ἐπειδὴ εὑρίσκομεν οὕτως, ὅτι ὁ 20 περιέχει 5 φορὰς ἀκριβῶς τὸν 4, ἄρα αἱ 20 πήχεις τιμῶνται 5 δραχμὰς καὶ οὕτως εὑρέθη τὸ ζητούμενον.

Ἀλλὰ τὸ ἐξαγόμενον 5, εὑρίσκομεν καὶ ἂν ζητήσωμεν τὸν ἀριθμόν, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν 4 δίδει τὸν ἀριθμὸν 20 καὶ ὀνομάσωμεν τοῦτον πήχεις, συμφώνως πρὸς τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος.

Ἐκ τῆς λύσεως τῶν δύο τούτων προβλημάτων τῶν ὑπαγομένων εἰς τὴν πρᾶξιν, ἣν θὰ ὀνομάσωμεν διαίρεσιν, ἐξάγομεν τὸν ἑξῆς ὁρισμὸν τῆς διαιρέσεως.

147. *Διαίρεσις λέγεται ἡ πρᾶξις, δι' ἧς δοθέντων δύο ἀριθμῶν, εὑρίσκεται τρίτος, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν δεύτερον δίδει γινόμενον τὸν πρωτον.*

148. Ἐκ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν ὁ πρῶτος λέγεται *διαιρετέος*, ὁ δὲ δεύτερος *διαιρέτης*.

149. Ὁ ἀριθμός, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν διαιρέτην δίδει γινόμενον τὸν διαιρετέον λέγεται *πηλίκον*.

Διὰ τοῦτο, τὸ πηλίκον εἶναι τόσας φορὰς μικρότερον τοῦ διαιρετέου, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἀκέραιος διαιρέτης.

150. Τὸ σημεῖον τῆς διαιρέσεως εἶναι δύο στιγμαὶ ἤτοι : καὶ ἀναγινώσκεται *διά*, γράφεται δὲ μεταξὺ *διαιρετέου καὶ διαιρέτου*.

Π. χ. Τὸ 15:3 σημαίνει, ὅτι πρέπει ὁ 15 νὰ διαιρεθῇ διὰ 3 καὶ ἀναγινώσκεται 15 διὰ 3. Ἔνθα ὁ μὲν 15 εἶναι ὁ *διαιρετέος*, ὁ δὲ 3 εἶναι ὁ *διαιρέτης*, ὁ δὲ ἀριθμὸς 5, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν διαιρέτην 3 δίδει γινόμενον τὸν διαιρετέον 15 λέγεται *πηλίκον*.

151. Σημειωτέον ὅτι, δοθέντων *δύο ἀριθμῶν* δὲν εὑρίσκεται πάντοτε *τρίτος τις ἀκέραιος ἀριθμός*, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν δεύτερον δίδει γινόμενον τὸν *πρῶτον*. Ἐν ἄλλαις λέξεσι δὲν εὑρίσκεται πάντοτε τὸ *πηλίκον* δύο ἀριθμῶν, ὡς π. χ. τοῦτο συμβαίνει εἰς τὸ ἑξῆς παράδειγμα,

Παράδειγμα. Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον τοῦ 17 διὰ 5.

Λύσις. Τὸ πηλίκον τοῦ 17 διὰ 5 εἶναι ὁ ἀριθμός, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 5 δίδει τὸν 17 (§ 149). Ὡς γνωστὸν ὅμως οὐδεὶς ἐκ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 5 δίδει τὸν 17, διότι $5\times2=10$, $5\times3=15$, $5\times4=20$. Ἐπομένως ὁ μὲν 3 εἶναι ἀριθμὸς *μικρότερος* τοῦ πηλίκου τῆς διαιρέσεως τοῦ 17 διὰ 5, ὁ δὲ 4 εἶναι *μεγαλήτερος* τούτου. Ἐντεῦθεν ἐξάγομεν, ὅτι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 17 διὰ 5 δὲν εὑρέθη ἀκριβῶς, λαμβάνομεν δὲ ὡς τοιοῦτον τὸν ἀριθμὸν 3, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν διαιρέτην 5, δίδει τὸν ἀριθμὸν 15, ὅστις εἶναι τὸ *μέγιστον πολλαπλάσιον τοῦ διαιρέτου 5 ἐξ ὅσων περιέχονται εἰς τὸν διαιρετέον 17* (ἰδὲ § 122). Τὸ δὲ 3, δὲν εἶναι τὸ ἀκριβὲς πηλίκον, ἀλλὰ τὸ κατὰ *προσέγγισιν μονάδος*, διότι ἂν τὸ 3 αὐξήσωμεν κατὰ μονάδα, ὅτε γίνεται 4, τοῦτο εἶναι, ὡς εἴδομεν, *μεγαλήτερον* τοῦ πηλίκου. Ἄρα λαμβάνοντες τὸ 3 ὡς πηλίκον, ποιοῦμεν λάθος ὀλιγώτερον μιᾶς ἀκεραίας μονάδος, ἤτοι τὸ 3 εἶναι τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ πηλίκου τῆς διαιρέσεως τοῦ 17 διὰ 5.

Ἐκ τοῦ παραδείγματος τούτου μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

152. *Ὡς πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο ἀριθμῶν λαμβάνομεν τὸν ἀριθμόν, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν διαιρέτην δίδει γινόμενον τὸ μέγιστον πολλαπλάσιον τούτου ἐξ ὅσων περιέχονται εἰς τὸν διαιρετέον. Τὸ πηλίκον δὲ τοῦτο εἶναι ἀκριβὲς ἢ κατὰ προσέγγισιν μονάδος, καθ' ὅσον τὸ εἰρημένον μέγιστον πολλαπλάσιον ἰσοῦται τῷ διαιρέτῃ ἢ εἶναι μικρότερον τούτου.*

Σημ. Προφανῶς τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο ἀριθμῶν (ὡς ἀφηρημένων θεωρουμένων) δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ ἄλλως, ἐξετάζοντες *πόσας φορὰς εἰσέρχεται* ὁ διαιρέτης εἰς τὸν διαιρετέον (§ 146) ἢ *καὶ ἄλλως*, μοιράζοντες τὸν διαιρετέον εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσα δηλοῖ ὁ διαιρέτης (§ 145).

Παράδειγμα 1). Εὑρεῖν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 16 διὰ 8.

Λύσις. Τὸ μέγιστον πολλαπλάσιον τοῦ 8 ἐξ ὅσων περιέχονται εἰς τὸν διαιρετέον 16 εἶναι τὸ 8×2 ἤτοι τὸ 16, ἄρα τὸ πηλίκον εἶναι ὁ ἀριθμὸς 2.

2) Εὑρεῖν τὸ πηλίκον 65 διὰ 7.

Λύσις. Τὸ μέγιστον πολλαπλάσιον τοῦ 7 ἐξ ὅσων περιέχονται εἰς τὸν 65 εἶναι τὸ 7×9 ἤτοι 63, ἄρα τὸ 9 εἶναι τὸ *κατὰ προσέγγισιν μονάδος* πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 65 διὰ 7.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παρατηροῦμεν ὅτι, ἡ διαίρεσις τῶν *ἀκεραίων ἀριθμῶν* εἶναι *τελεία* ἢ *ἀτελής*.

153. *Τελεία* λέγεται ἡ διαίρεσις, ὅταν εὑρίσκηται τὸ *ἀκριβὲς* πηλίκον δηλ. ὅταν δὲν μένῃ ὑπόλοιπόν τι ἐκ τοῦ διαιρετέου.

Σημ. Κατὰ τὴν τελείαν διαίρεσιν ὁ διαιρετέος ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον.

Π. χ. Ὁ 16 διαιρούμενος διὰ 8 δίδει πηλίκον 2, ὅθεν ἔχομεν $16=8\times2$.

154. *Ἀτελὴς* λέγεται ἡ διαίρεσις, ὅταν δὲν εὑρίσκηται τὸ ἀκριβὲς πηλίκον, διότι μένει μέρος τι ἐκ τοῦ διαιρετέου. Τὸ ἐπίλοιπον δὲ μέρος τοῦ πηλίκου θὰ εὑρεθῇ κατωτέρω διὰ τῆς εἰσαγωγῆς καὶ ἄλλων μονάδων μικροτέρων τῆς ἀκεραίας (κλασματικῶν λεγομένων), διὰ τῶν ὁποίων θὰ καταστῇ δυνατὸν νὰ διαιρῆται μικρότερος ἀριθμὸς διὰ μεγαλητέρου καὶ ἑπομένως ἡ διαίρεσις θὰ εἶναι πάντοτε δυνατή.

155. *Ὑπόλοιπον* λέγεται ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος μένει ἐκ τοῦ διαιρετέου κατὰ τὴν ἀτελῆ διαίρεσιν.

Σημ Κατὰ τὴν ἀτελῆ διαίρεσιν ὁ διαιρετέος ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον (τὸ ἀτελὲς) σὺν τῷ ὑπολοίπῳ.

Π. χ. Ὁ 17 διαιρεθεὶς διὰ 5 ἔδωκε τὸ ἀτελὲς πηλίκον 3 καὶ ὑπόλοιπον 2, δι' ὃ εἶναι $17=5\times3+2$.

156. Πρὸς εὐκολωτέραν εὕρεσιν τοῦ πηλίκου, διακρίνομεν εἰς τὴν διαίρεσιν τρεῖς περιπτώσεις.

Α'.) *Τὴν διαίρεσιν μονοψηφίου ἢ διψηφίου διὰ μονοψηφίου, ὧν τὸ πηλίκον εἶναι μονοψήφιον.*

Β'.) *Τὴν διαίρεσιν οἱωνδήποτε ἀριθμῶν, ὧν τὸ πηλίκον εἶναι μονοψήφιον.*

Γ'.) *Τὴν διαίρεσιν οἱωνδήποτε ἀριθμῶν, ὧν τὸ πηλίκον εἶναι πολυψήφιον.*

Α η περίπτωσις. — **Διαίρεσις μονοψηφίου ἢ διψηφίου διὰ μονοψηφίου ὧν τὸ πηλίκον μονοψήφιον.**

157. *Θεώρημα. Ὅταν ὁ διαιρετέος εἶναι μικρότερος τοῦ δεκαπλασίου τοῦ διαιρέτου, τὸ πηλίκον εἶναι μονοψήφιον.*

Ὁ λόγος τούτου εἶναι ὁ ἑξῆς. Ἐπειδὴ ὁ διαιρετέος θὰ εἶναι ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ δεκαπλασίου τοῦ διαιρέτου, διὰ τοῦτο τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ 10 θὰ εἶναι ἀριθμὸς μεγαλήτερος τοῦ διαιρετέου, ἑπομένως τὸ πηλίκον δὲν δύναται νὰ εἶναι 10, ἀλλὰ ἀριθμὸς *μικρότερος* τούτου, ἤτοι ἀριθμὸς μονοψήφιος.

Πρόβλημα 1ον. *Εὑρεῖν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 24 διὰ 3.*

Λύσις. Ἐπειδὴ ἐκ τῶν πολλαπλασίων τοῦ 3 *τῶν περιεχομένων* εἰς τὸν διαιρετέον 24 τὸ 3×8 εἶναι τὸ *μέγιστον*, τοῦτο δὲ ἰσοῦται ἀκριβῶς μὲ τὸν διαιρετέον, διὰ τοῦτο τὸ *ἀκριβὲς πηλίκον* τῆς διαιρέσεως ταύτης εἶναι ὁ 8 καὶ τὸ *ὑπόλοιπον* εἶναι 0, ἤτοι ἡ διαίρεσις εἶναι *τελεία*.

Π ρ ό β λ η μ α 2ον. *Εὑρεῖν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 53 διὰ 6.*

Λ ύ σ ι ς. Ἐπειδὴ ὁ διαιρέτης 6 πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 9 δίδει ἀριθμὸν μεγαλήτερον τοῦ διαιρετέου 53, πολλαπλασιαζόμενος δὲ ἐπὶ 8 δίδει τὸν ἀριθμὸν 48, ὅστις εἶναι *μικρότερος* τοῦ διαιρετέου 53, διὰ τοῦτο ὁ 48 εἶναι τὸ *μέγιστον πολλαπλάσιον τοῦ διαιρέτου 6 ἐξ ὅσων περιέχονται εἰς τὸν διαιρετέον 53*. Διὰ τοῦτο ὁ 8 εἶναι τὸ κατὰ *προσέγγισιν μονάδος* πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 53 διὰ 6, τὸ δὲ ὑπόλοιπον εἶναι 53—48 ἤτοι 5. Ἑπομένως ἡ διαίρεσις αὕτη εἶναι *ἀτελής*.

Βα π ε ρ ί π τ ω σ ι ς.—**Διαίρεσις οἱωνδήποτε ἀριθμῶν. ὧν τὸ πηλίκον εἶναι μονοψήφιον.**

Π ρ ό β λ η μ α. *Εὑρεῖν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέρεως τοῦ 1248 διὰ 405.*

Λ ύ σ ι ς. Ἐπειδὴ τὸ δεκαπλάσιον τοῦ διαιρέτου 405 εἶναι 4050 ἤτοι ἀριθμὸς μεγαλείτερος τοῦ διαιρετέου 1248, διὰ τοῦτο τὸ πηλίκον εἶναι μονοψήφιον (§ 157). Εὑρίσκομεν δὲ τοῦτο ὡς ἑξῆς.

Παρατηροῦμεν ποσάκις τὸ ψηφίον 4 τῶν μονάδων τῆς ἀνωτάτης τάξεως τοῦ διαιρέτου εἰσέρχεται εἰς τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων τῆς αὐτῆς τάξεως τοῦ διαιρετέου, ἤτοι εἰς τὰς 12 μονάδας τῆς αὐτῆς τάξεως τοῦ διαιρετέου καὶ οὕτως εὑρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν 3, τὸν ὁποῖον πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ τὸν διαιρέτην 405 εὑρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν 1215, ὅστις εἶναι τὸ *μέγιστον* πολλαπλάσιον τοῦ διαιρέτου 405 ἐξ ὅσων περιέχονται εἰς τὸν διαιρετέον, διότι μεγαλήτερος τοῦ 3 ἀριθμὸς πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν διαιρέτην 405 θὰ ἔδιδε γινόμενον μεγαλήτερον τοῦ διαιρετέου, διὰ τοῦτο ὁ 3 εἶναι τὸ κατὰ *προσέγγισιν μονάδος πηλίκον* τῆς διαιρέσεως τοῦ 1248 διὰ 405. Τὸ δὲ *ὑπόλοιπον* εἶναι 1248—1215 ἤτοι 33.

158. Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος τούτου παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ διαίρεσις *πολυψηφίου διὰ πολυψηφίου, ὧν τὸ πηλίκον εἶναι μονοψήφιον* ἀνάγεται εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν τῆς διαιρέ-

σεως μονοψηφίου ἢ διψηφίου διὰ μονοψηφίου, ὧν τὸ πηλίκον εἶναι μονοψήφιον.

Γη περίπτωσις.—**Διαίρεσις οἱωνδήποτε ἀριθμῶν, ὧν τὸ πηλίκον πολυψήφιον.**

159. *Θεώρημα. Ὅταν ὁ διαιρετέος εἶναι μεγαλήτερος τοῦ δεκαπλασίου τοῦ διαιρέτου, τότε τὸ πηλίκον ἔχει ψηφία περισσότερα τοῦ ἑνός.*

Ὁ λόγος τούτου εἶναι ὁ ἑξῆς. Ἐπειδὴ τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ 10 θὰ εἶναι ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ διαιρετέου, διὰ τοῦτο τὸ πηλίκον δὲν δύναται νὰ εἶναι 10, ἀλλ' ἀριθμὸς μεγαλήτερος τούτου, ἤτοι θὰ ἔχῃ ψηφία περισσότερα τοῦ ἑνός.

160. Ὅταν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο ἀριθμῶν ἔχῃ ψηφία περισσότερα τοῦ ἑνός, εὑρίσκεται τοῦτο δι' ἀναλύσεως τῆς διαιρέσεως εἰς ἄλλας, ὧν ἑκάστη ἔχει πηλίκον μονοψήφιον.

Πρόβλημα. Εὑρεῖν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 2532576 διὰ 315.

Λύσις. Ἐπειδὴ τὸ δεκαπλάσιον τοῦ διαιρέτου 315 εἶναι 3150, ἤτοι ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ διαιρετέου 2532576, διὰ τοῦτο τὸ πηλίκον ἔχει ψηφία περισσότερα τοῦ ἑνός (§ 159). Εὑρίσκομεν δὲ ταῦτα ὡς ἑξῆς.

Χωρίζομεν ἐξ ἀριστερῶν τοῦ διαιρετέου 2532576 τόσα ψηφία, ὥστε τὸ εὑρισκόμενον πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ τούτου διὰ 315 νὰ εἶναι μονοψήφιον. Πρὸς τοῦτο δὲ ἀρκεῖ νὰ χωρίσωμεν ἐξ ἀριστερῶν τοῦ διαιρετέου 2532576 τόσα ψηφία, ὥστε ὁ ἀποτελούμενος ἀριθμός, ὡς ἁπλαῖ μονάδες θεωρούμενος, νὰ εἶναι ἴσος ἢ μεγαλήτερος μὲν τοῦ διαιρέτου 315, μικρότερος δὲ τοῦ δεκαπλασίου τούτου (§ 157). Διὰ τοῦτο ἐνταῦθα δέον νὰ λάβωμεν ἐκ τοῦ διαιρετέου 2532576 τὸν ἀριθμὸν 2532 καὶ τοῦτον νὰ διαιρέσωμεν διὰ 315 ἤτοι

$$\begin{array}{r|l} 2532 & 315 \\ \cline{2-2} 2520 & 8 \\ \cline{1-1} 12 & \end{array}$$

Καὶ ἂν μὲν ὁ μερικὸς διαιρετέος 2532 ἦσαν ἁπλαῖ μονάδες, τότε τὸ πηλίκον 8, ὡς καὶ τὸ ὑπόλοιπον 12 θὰ ἦσαν ἁπλαῖ μονάδες, ἤδη ὅμως ὅτε ὁ ἀριθμὸς 2532 σημαίνει χιλιάδας, προφανῶς τὸ πηλίκον 8 καὶ τὸ ὑπόλοιπον 12 σημαίνει χιλιάδας.

Ἔπειτα τὰς 12 *χιλιάδας* τοῦ ὑπολοίπου τρέπομεν εἰς *ἑκατοντάδας* καὶ γίνονται 120 *ἑκατοντάδες*, εἰς ταύτας δὲ προσθέτομεν καὶ τὰς 5 *ἑκατοντάδας* τοῦ διαιρετέου 2532576 καὶ οὕτως ἔχομεν τὸν ἀριθμὸν 125 *ἑκατοντάδες*. Ταύτας δὲ ζητοῦμεν νὰ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ διαιρέτου 315 καὶ ἐπειδὴ δὲν διαιροῦνται, τρέπομεν τὰς 125 *ἑκατοντάδας* εἰς δεκάδας καὶ οὕτως ἔχομεν 1250 *δεκάδας*, εἰς ταύτας δὲ προσθέτομεν καὶ 7 *δεκάδας* τοῦ διαιρετέου 2532576 καὶ οὕτως ἔχομεν τὸν ἀριθμὸν 1257 *δεκάδας*, τοῦτον δὲ τὸν ἀριθμὸν διαιροῦντες διὰ 315 ἔχομεν

$$\begin{array}{r|l} 1257 & 315 \\ \cline{2-2} 945 & 3 \\ \cline{1-1} 312 & \end{array}$$

καὶ ἂν μὲν ὁ μερικὸς διαιρετέος 1257 ἦσαν *ἁπλαῖ μονάδες*, τότε τὸ πηλίκον 3, ὡς καὶ τὸ ὑπόλοιπον 312 θὰ ἦσαν *ἁπλαῖ μονάδες*, ἤδη ὅμως ὅτε ὁ ἀριθμὸς 1257 δηλοῖ *δεκάδας*, τὸ πηλίκον 3 καὶ τὸ ὑπόλοιπον 312 σημαίνει προφανῶς *δεκάδας*.

Ἔπειτα τὰς 312 *δεκάδας* τοῦ ὑπολοίπου τρέπομεν εἰς *ἁπλᾶς μονάδας* καὶ γίνονται 3120 ἁπλαῖ μονάδες, εἰς ταύτας δὲ προσθέτομεν καὶ τὰς 6 μονάδας τοῦ διαιρετέου 2532576 καὶ οὕτως ἔχομεν τὸν ἀριθμὸν 3126. Ταύτας δὲ διαιροῦντες διὰ 315 ἔχομεν

$$\begin{array}{r|l} 3126 & 315 \\ \cline{2-2} 2835 & 9 \\ \cline{1-1} 291 & \end{array}$$

Καὶ οὕτω δι' ἀναλύσεως τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ 2532576 διὰ 315 εἰς ἄλλας ὧν ἑκάστη ἔδιδε πηλίκον μονοψήφιον ἐπετεύχθη ἡ διαίρεσις τοῦ ἀριθμοῦ 2532576 διὰ 315 καὶ εὑρέθη ***ὑπόλοιπον*** μὲν 291, ***πηλίκον*** δὲ 8 *χιλιάδες*, 3 *δεκάδες* καὶ 9 *μονάδες*, ἤτοι 8039. Ἔνθα ἐτέθη 0 μετὰ τὸ *ψηφίον* 8 τῶν χιλιάδων, ἵνα τηρηθῇ ἡ σημασία τοῦ ψηφίου 8 τῶν χιλιάδων.

Πρακτικὴ διάταξις τῆς πράξεως.

2532′5′7′6′	315	ἢ καὶ συντομώ-	2532′5′7′6′	315
2520	8039	τερον ὡς ἑξῆς	12 5 7	8039
12 5 7			3 1 2 6	
9 4 5			2 9 1	
3 1 2 6				
2 8 3 5				
2 9 1				

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος τούτου συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

161. *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο ἀριθμῶν, ὧν τὸ πηλίκον πολυψήφιον, χωρίζομεν ἐκ δεξιῶν τοῦ διαιρετέου τόσα ψηφία, ὥστε ὁ προκύπτων ἀριθμὸς διαιρούμενος διὰ τοῦ διαιρέτου νὰ δίδῃ πηλίκον μονοψήφιον. Εἶτα πολλαπλασιάζομεν τὸ εὑρεθὲν ψηφίον τοῦ πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην, τὸ δὲ γινόμενον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ χωρισθέντος μέρους τοῦ διαιρετέου καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ προκύπτοντος ὑπολοίπου καταβιβάζομεν τὸ ἑπόμενον ψηφίον τοῦ διαιρετέου καὶ διαιροῦμεν τὸν προκύπτοντα ἀριθμόν, ὡς ἀνωτέρω. Ἂν ὅμως οὗτος ὁ ἀριθμὸς εἶναι μικρότερος τοῦ διαιρέτου, τότε γράφομεν 0, ὡς δεύτερον ψηφίον τοῦ πηλίκου καὶ καταβιβάζοντες καὶ τὸ ἑπόμενον ψηφίον τοῦ διαιρετέου ἐξακολουθοῦμεν τὴν διαίρεσιν ὡς ἀνωτέρω.*

Σημ. Ἡ διαίρεσις ἀριθμοῦ τινος δι' ἑαυτοῦ δίδει πηλίκον τὴν μονάδα. Ἡ δὲ διὰ τῆς μονάδος διαίρεσις δίδει πηλίκον τὸν διαιρούμενον ἀριθμόν.

Π. χ. Ὁ 15 διαιρούμενος διὰ 15 δίδει πηλίκον 1. Διότι τὸ 1 πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην 15 δίδει γινόμενον τὸν διαιρετέον 15. Ὁμοίως, ὁ 15 διαιρούμενος διὰ 1 δίδει πηλίκον 15. Διότι ὁ 15 πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν διαιρέτην 1 δίδει γινόμενον τὸν διαιρετέον 15.

162. *Θεώρημα. Τὰ ψηφία τοῦ πηλίκου εἶναι τόσα, ὅσα μηδενικὰ πρέπει νὰ θέσωμεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρέτου, ἵνα καταστήσωμεν τοῦτον μεγαλήτερον τοῦ διαιρετέου.*

Ἔστω π. χ. ὅτι πρόκειται νὰ διαιρεθῇ ὁ 457846 διὰ 348.

Ἐπειδὴ ὁ διαιρέτης 348 πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 10 ἢ 100 ἢ 1000 ἐξακολουθεῖ νὰ μένῃ μικρότερος τοῦ διαιρετέου 457846, ἄρα τὸ πηλίκον εἶναι μεγαλήτερον τοῦ 1000. Ἐπειδὴ δὲ πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 10000 καθίσταται μεγαλήτερος τοῦ διαιρετέου, διὰ τοῦτο τὸ πηλίκον εἶναι μικρότερον τοῦ 10000. Ἑπομένως τὸ πηλίκον τοῦ 457846 διὰ 348 περιέχεται μεταξὺ 1000 καὶ 10000, ἀλλα πᾶς ἀριθμὸς περιεχόμενος μεταξὺ τοῦ 1000 καὶ 10000 εἶναι τριψήφιος, διὰ τοῦτο καὶ τὸ πηλίκον θὰ εἶναι τριψήφιον.

Βάσανος τῆς διαιρέσεως.

163. *Τὴν βάσανον τῆς διαιρέσεως κάμνομεν πολλαπλασιάζοντες τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ πηλίκον καὶ εἰς τὸ γινόμενον προσθέτοντες καὶ τὸ ὑπόλοιπον* (ἂν ὑπάρχῃ). *Ἂν δὲ εὕρωμεν τὸν διαιρετέον, ἡ πρᾶξις ἐγένετο ἄνευ λάθους, ἐὰν κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς πράξεως τῆς δοκιμῆς δὲν ἐγένετο λάθος.*

Θεωρήματα διάφορα.

164. *Θεώρημα. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν διαιρετέον καὶ τὸν διαιρέτην* (διαιρέσεως μὴ ἐκτελουμένης ἀκριβῶς), *ἐφ' ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τὸ μὲν κατὰ προσέγγισιν μονάδος εὑρισκόμενον πηλίκον δὲν μεταβάλλεται, τὸ δὲ ὑπόλοιπον πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.*

Ἔστω π. χ. ἡ διαίρεσις τοῦ 45:7, τῆς ὁποίας τὸ κατὰ προσέγγισιν μονάδος πηλίκον εἶναι 6, τὸ δὲ ὑπόλοιπον εἶναι 3. Ὡς γνωστὸν (§ 155 Σημ.), θὰ ἔχωμεν

$$45=7\times6+3$$

Ἐὰν ἤδη τοὺς ἴσους ἀριθμοὺς 45 καὶ $7\times6+3$ πολλαπλασιάσωμεν ἐφ' ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, καὶ ἔστω τὸν 8, τὰ γινόμενα θὰ εἶναι ἴσα (§ 130), ὅτε θὰ ἔχωμεν

$$45\times8=(7\times6+3)\times8 \text{ ἢ } 45\times8=7\times6\times8+3\times8 \text{ ἢ}$$
$$45\times8=7\times8\times6+3\times8$$

Προφανῶς δὲ ἡ ἰσότης αὕτη δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν ἀντὶ 45×8 γράψωμεν (45×8), δηλοῦντες διὰ τούτου τὸ γινόμενον τοῦ 45 ἐπὶ 8 καὶ ἐὰν ἀντὶ 7×8 γράψωμεν (7×8) καὶ ἀντὶ 3×8 γράψωμεν (3×8), ὅτε ἔχομεν

$$(45\times8)=(7\times8)\times6+(3\times8)$$

Ἐκ τῆς ἰσότητος δὲ ταύτης παρατηροῦμεν ὅτι, ὁ μὲν διαιρετέος 45 καὶ ὁ διαιρέτης 7 ἐπολλαπλασιάσθησαν ἐφ' ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τὸν 8, τὸ δὲ κατὰ προσέγγισιν μονάδος πηλίκον 6 ἔμεινεν ἀμετάβλητον, τὸ δὲ ὑπόλοιπον 3 ἐπολλαπλασιάσθη ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 8. Ὅτι δὲ τὸ (3×8) θὰ μείνῃ ὡς *ὑπόλοιπον* τῆς διαιρέσεως τοῦ (45×8) διὰ (7×8) εἶναι προφανές, διότι τοῦ *ὑπολοίπου* 3, ὄντος μικροτέρου τοῦ *διαιρετέου* 7, ἕπεται ὅτι καὶ τὸ 3×8 θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ νέου διαιρέτου 7×8.

Σημ. Ἂν ἡ διαίρεσις δύο ἀριθμῶν ἐκτελῆται ἀκριβῶς καὶ πολλαπλασιασθῶσιν οὗτοι ἐφ' ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τὸ *πηλίκον* καὶ τὸ *ὑπόλοιπον* μένουσιν ἀμετάβλητα.

Ἔστω π. χ. ἡ διαίρεσις 40 διὰ 8, τῆς ὁποίας τὸ ἀκριβὲς πηλίκον εἶναι 5 καὶ τὸ ὑπόλοιπον 0, τότε ἔχομεν

$$40=8\times5$$

Ἐὰν ἤδη τοὺς ἴσους ἀριθμοὺς 40 καὶ 8×5 πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, καὶ ἔστω τὸν 3, τότε ἔχομεν (§ 130)

$$40\times3=8\times5\times3 \text{ ἢ } 40\times3=8\times3\times5 \text{ ἢ } (40\times3)=(8\times3)\times5$$

Ἐκ δὲ τῆς ἰσότητος ταύτης παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ διαίρεσις τοῦ (40×3) διὰ (8×3) ἐκτελεῖται ἀκριβῶς, δηλ. δὲν παρέχει ὑπόλοιπον καὶ ἑπομένως πολλαπλασιασθέντος τοῦ διαιρετέου 40 καὶ τοῦ διαιρέτου 8 ἐπὶ ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τὸν 3, τὸ *πηλίκον* 5 ἔμεινεν ἀμετάβλητον, ὡς καὶ τὸ ὑπόλοιπον.

165. Θεώρημα. *Ἵνα διαιρέσωμεν τὸ ἄθροισμα δύο ἢ περισσοτέρων προσθετέων* (χωρὶς προηγουμένως νὰ εὕρωμεν αὐτὸ) *διά τινος ἀριθμοῦ, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν ἕκαστον τῶν προσθετέων τοῦ ἀθροίσματος* (ἂν διαιρῆται ἀκριβῶς) *διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ καὶ προσθέσωμεν τὰ προκύπτοντα πηλίκα.*

Λέγω π. χ. ὅτι $(40+12+60):4=10+3+15$.

Διότι, ἐὰν τὸ ἐξαγόμενον $10+3+15$ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν διαιρέτην 4, θὰ εὕρωμεν τὸν διαιρετέον $40+12+60$ ἤτοι

$$(10+3+15)\times4=10\times4+3\times4+15\times4 \text{ ἤτοι } 40+12+60$$

Ἄρα ἡ παράστασις $10+3+15$ εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον.

166. Θεώρημα. *Ἵνα διαιρέσωμεν τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων* (χωρὶς προηγουμένως νὰ εὕρωμεν αὐτὸ) *διά τινος ἀριθμοῦ, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν ἕνα καὶ μόνον παράγοντα διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου* (ἂν διαιρῆται ἀκριβῶς).

Λέγω π. χ. ὅτι $(40\times12\times60):4=40\times3\times60$.

Διότι, ἐὰν τὸ ἐξαγόμενον $40\times3\times60$ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν διαιρέτην 4, εὑρίσκομεν τὸν διαιρετέον $40\times12\times60$ ἤτοι

$$(40\times3\times60)\times4=40\times12\times60$$

167. *Πόρισμα. Ἵνα διαιρέσωμεν τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων* (χωρὶς προηγουμένως νὰ εὕρωμεν αὐτὸ) *διά τινος τῶν παραγόντων του, ἀρκεῖ νὰ ἐξαλείψωμεν τὸν παράγοντα τοῦτον.*

Λέγω π.χ. ὅτι$(3\times4\times5):4=3\times5$.

Διότι $(3\times4\times5):4=3\times1\times5=3\times5$.

168. *Θεώρημα. Ἐὰν ἴσους ἀριθμοὺς διαιρέσωμεν δι' ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀκεραίου ἀριθμοῦ, τὰ προκύπτοντα πηλίκα θὰ εἶναι ἴσα.*

Διότι τῶν ἀριθμῶν ὄντων ἴσων, εἶναι προφανές, ὅτι ὅσας φορὰς θὰ περιέχηται ὁ διαιρέτης εἰς τὸν ἕνα τῶν ἴσων ἀριθμῶν, τόσας φορὰς θὰ περιέχηται καὶ εἰς ἕνα ἕκαστον τῶν ἄλλων ἴσων ἀριθμῶν. Ἑπομένως τὰ προκύπτοντα πηλίκα θὰ εἶναι ἴσα.

169. *Θεώρημα. Ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν διαιρετέον καὶ τὸν διαιρέτην* (διαιρέσεως μὴ ἐκτελουμένης ἀκριβῶς) *διά τινος ἀριθμοῦ, τὸ μὲν κατὰ προσέγγισιν μονάδος εὑρισκόμενον πηλίκον δὲν μεταβάλλεται, τὸ δὲ ὑπόλοιπον διαιρεῖται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.*

Ἔστω π. χ. ἡ διαίρεσις τοῦ 92 διὰ 12, τῆς ὁποίας τὸ κατὰ προσέγγισιν μονάδος πηλίκον εἶναι 7, τὸ δὲ ὑπόλοιπον εἶναι 8. Ὡς γνωστὸν (155 Σημ.), θὰ ἔχωμεν

$$92=12\times7+8$$

Ἐὰν ἤδη τοὺς ἴσους ἀριθμοὺς 92 καὶ $12\times7+8$ διαιρέσωμεν δι' ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ π. χ. τοῦ 2, τὰ προκύπτοντα πηλίκα θὰ εἶναι ἴσα (§ 168), ἤτοι θὰ ἔχωμεν

$$(92:2)=(12\times7+8):2 \text{ ἢ } (92:2)=(12:2)\times7+(8:2) \text{ ἤτοι}$$

$$46=6\times7+4$$

Ἐκ τῆς ἰσότητος δὲ ταύτης παρατηροῦμεν ὅτι, ὁ μὲν διαιρετέος 92 καὶ ὁ διαιρέτης 12 διῃρέθησαν δι' ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ τοῦ 2, τὸ δὲ κατὰ προσέγγισιν μονάδος πηλίκον 7 ἔμεινεν ἀμετάβλητον, τὸ δὲ ὑπόλοιπον 8 διῃρέθη διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ 2.

Σημ. Ἂν ἡ διαίρεσις τῶν δοθέντων ἀριθμῶν ἐκτελῆται ἀκριβῶς καὶ διαιρεθῶσιν οὗτοι δι' ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, τότε τὸ πηλίκον καὶ τὸ ὑπόλοιπον τούτων μένουσιν ἀμετάβλητα.

Ἔστω π. χ. ἡ διαίρεσις τοῦ 40 διὰ 8. Ταύτης δὲ τῆς διαιρέσεως τὸ μὲν ἀκριβὲς πηλίκον εἶναι 5, τὸ δὲ ὑπόλοιπον 0, δι' ὃ ἔχομεν

$$40=8\times5$$

Ἐὰν ἤδη τοὺς ἴσους ἀριθμοὺς 40 καὶ 8×5 διαιρέσωμεν δι' ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ (§ 168), ἔστω τοῦ 2, τότε ἔχομεν

$$40:2=8\times5:2 \text{ ἢ } (40:2)=(8:2)\times5 \text{ ἢ } 20=4\times5$$

Ἐκ δὲ τῆς ἰσότητος ταύτης παρατηροῦμεν ὅτι, ὁ μὲν διαιρετέος 40 καὶ ὁ διαιρέτης 8 διαιρεθέντες διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ παρέσχον ὡς διαιρετέον τὸν 20 καὶ ὡς διαιρέτην τὸν 4, ὡς *πηλίκον* ὅμως ἔδοσαν οὗτοι *τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν* 5 καὶ ὡς ὑπόλοιπον *πάλιν* 0,

170. *Θεώρημα. Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν διαιρετέον ἀλλεπαλλήλως διὰ πάντων τῶν παραγόντων τοῦ διαιρέτου, ἤτοι πρῶτον διὰ τοῦ ἑνὸς παράγοντος αὐτοῦ, εἶτα τὸ εὑρεθὲν πηλίκον διὰ τοῦ ἑτέρου παράγοντος, ἔπειτα τὸ εὑρεθὲν πηλίκον διὰ τοῦ ἑτέρου παράγοντος καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, μέχρις οὗ ὅλοι οἱ παράγοντες ληφθῶσιν ὡς διαιρέται.*

Ἔστω π. χ. ὅτι ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 240 διὰ 30, ὅτε εὑρίσκομον πηλίκον 8, τότε ἔχομεν

$$240:30=8 \text{ ἤτοι } 240=30\times8$$

Ἀντικαθιστῶντες δὲ τὸν διαιρέτην 30 διὰ τῶν παραγόντων αὐτοῦ 5 καὶ 6 ἔχομεν

$$240=5\times6\times8$$

Ἐὰν ἤδη διαιρέσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ἴσους ἀριθμοὺς 240 καὶ $5\times6\times8$ δι' ἑνὸς τῶν παραγόντων τοῦ διαιρέτου 30 καὶ ἔστω διὰ τοῦ 5 θὰ ἔχωμεν (§ 168)

$$240:5=5\times6\times8:5 \text{ ἤτοι } 240:5=6\times8$$

Τούτους δὲ (δηλ. τοὺς 240:5 καὶ 6×8), διαιροῦντες διὰ τοῦ ἑτέρου παράγοντος 6 ἔχομεν

$$240:5:6=6\times8:6 \text{ ἤτοι } 240:5:6=8$$

καὶ οὕτως εὑρέθη *πάλιν* πηλίκον 8. Καὶ οὕτω ἀπεδείχθη τὸ θεώρημα.

171. *Θεώρημα. Τὸ πηλικον δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι δύναμις τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ ἐκθέτην ἔχουσα τὴν διαφορὰν τῶν ἐκθετῶν.*

Λέγω π. χ. ὅτι $8^5 : 8^2=8^3$

Διότι $8^5 : 8^2=8\times8\times8\times8\times8 : 8\times8$

κατὰ δὲ τὸ προηγούμενον θεώρημα δυνάμεθα τὴν διαίρεσιν ταύτην νὰ ἐκτελέσωμεν, διαιροῦντες τὸν διαιρετέον $8\times8\times8\times8\times8$ διὰ τοῦ ἑνὸς παράγοντος 8 τοῦ διαιρετέου, τὸ δὲ εὑρισκόμενον πηλίκον $8\times8\times8\times8$ διὰ τοῦ ἑτέρου παράγοντος 8 τοῦ διαιρέτου καὶ οὕτω εὑρίσκομεν τὸ πηλίκον $8\times8\times8$ ἤτοι 8^3.

Συντομίαι πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαιρέσεως.

172. *Τὸ γινόμενον ἀριθμοῦ τινος ἐπὶ 10, 100, 1000 κ.τ.λ. εὑρίσκεται συντόμως γράφοντες ἕν, δύο, τρία κ.τ λ. μηδενικὰ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ἀριθμοῦ* (§ 106).

Π. χ. Τὸ γινόμενον τοῦ 478 ἐπὶ 100 εἶναι 47800.

173. *Τὸ γινόμενον οἱωνδήποτε ἀριθμῶν ληγόντων εἰς μηδενικὰ εὑρίσκεται συντόμως, πολλαπλασιάζοντες αὐτοὺς χωρὶς τῶν εἰς τὸ τέλος μηδενικῶν καὶ δεξιὰ τοῦ γινομένου γράφοντες τὰ παραλειφθέντα μηδενικὰ* (§ 137).

Π. χ. Τὸ γινόμενον $2500\times90=(25\times9)\times100\times10=225000$.

174. *Ἵνα διαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα διὰ 10, 100, 1000, κ.τ.λ. χωρίζομεν ἐκ τοῦ τέλους τοῦ ἀριθμοῦ ἕν, δύο, τρία κ.τ.λ. ψηφία, ὅτε ὁ μὲν πρὸς τὸ τέλος ἀριθμὸς εἶναι τὸ ὑπόλοιπον, ὁ δὲ μένων (ὡς* μονάδες θεωρούμενος) *ἀποτελεῖ τὸ κατὰ προσέγγισιν μονάδος πηλίκον.*

Π. χ. Ὁ $457:10=45,7$ ἤτοι 45 εἶναι τὸ κατὰ προσέγγισιν μονάδος πηλίκον καὶ 7 τὸ ὑπόλοιπον.

Ὁμοίως ὁ $457:100=4,57$ ἤτοι 4 τὸ κατὰ προσσέγγισιν μονάδος πηλίκον καὶ 57 τὸ ὑπόλοιπον.

Ὁμοίως ὁ $49843:1000=49,843$ ἤτοι 49 τὸ κατὰ προσέγγισιν μονάδος πηλίκον καὶ 843 τὸ ὑπόλοιπον.

Ὁ λόγος τούτου εἶναι ὁ ἑξῆς. Διότι ὁ μὲν 10, ἤτοι ἡ μία δεκάς, δὲν δύναται νὰ περιέχηται εἰ μὴ εἰς τὰς δεκάδας τοῦ ἀριθμοῦ καὶ εἰσέρχεται τόσας φορὰς εἰς αὐτάς, ὅσας δεκάδας ἔχει ὁ ἀριθμός. Ἑπομένως τὸ μένον ψηφίον τῶν μονάδων θὰ εἶναι τὸ ὑπόλοιπον.

Ὁμοίως γίνεται ἡ ἀπόδειξις διὰ τὴν διαίρεσιν ἀριθμοῦ τινος διὰ 100, 1000 κ.τ.λ.

175. *Ἵνα διαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα δι᾽ ἄλλου οἱουδήποτε, λήγοντος εἰς μηδενικά, χωρίζομεν ἐκ τοῦ διαιρετέου τόσα ψηφία πρὸς τὸ τέλος, ὅσα μηδενικὰ ἔχει ὁ διαιρέτης τὸν δὲ μένοντα ἀριθμὸν ἐκ τοῦ*

διαιρετέου διαιροῦμεν διὰ τοῦ μένοντος ἀριθμοῦ ἐκ τοῦ διαιρέτου καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου καταβιβάζομεν τὰ χωρισθέντα ψηφία τοῦ διαιρετέου.

Π. χ. Νὰ διαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 35984 διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 400.

Λύσις. Χωρίζομεν ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ 35984 τὰ δύο τελευταῖα ψηφία, ἤτοι τὸν ἀριθμὸν 84, τὸν δὲ μένοντα ἀριθμὸν 359 διαιροῦμεν διὰ τοῦ 4, ὅτε ἔχομεν

$$\begin{array}{l|l} 35'9' & 4 \\ \hline 3\ 9 & 89 \\ 3 & \end{array} \qquad \text{ἑπομένως} \qquad \begin{array}{l|l} 35984 & 400 \\ \hline 384 & 89 \end{array}$$

δεξιὰ δὲ τοῦ ὑπολοίπου 3 καταβιβάζομεν τὸν χωρισθέντα ἀριθμὸν 84 καὶ οὕτω εὑρέθη ὅτι, τὸ μὲν κατὰ προσέγγισιν μονάδος πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 35984 διὰ 400 εἶναι 89, τὸ δὲ ὑπόλοιπον εἶναι 384.

Ὁ λόγος τούτου εἶναι ὁ ἑξῆς. Διότι αἱ 4 ἑκατοντάδες δὲν δύνανται νὰ περιέχωνται εἰ μὴ εἰς τὰς 359 ἑκατοντάδας τοῦ ἀριθμοῦ 35984, περιέχονται δὲ 89 φορὰς καὶ μένει ὑπόλοιπον 3 ἑκατοντάδες. Ταύτας δὲ τρέποντες εἰς μονάδας καὶ προσθέτοντες καὶ τὰς μενούσας 84 μονάδας, ἔχομεν τὸ τελικὸν ὑπόλοιπον 384.

176. *Ἡ διαίρεσις ἀριθμοῦ τινος διὰ 9 ἢ 99 ἢ 999 καὶ ἐν γένει δι' ἀριθμοῦ ἀποτελουμένου ἐξ 9, ἐκτελεῖται συντομώτερον ὡς ἑξῆς.*

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν νὰ μοιράσωμεν 385762 δραχ. εἰς 99 ἀνθρώπους. Πρὸς διευκόλυνσιν τῆς διαιρέσεως φανταζόμεθα καὶ ἕτερον ἄνθρωπον καὶ οὕτω μοιράζομεν τὰς 385762 δραχ. εἰς 100 ἀνθρώπους, ἤτοι διαιροῦμεν τὸν

385762:100, ὅτε τὸ πηλίκον εἶναι 3857 δρ., τὸ δὲ ὑπόλοιπον 62 δρ. Ἔπειτα λαμβάνοντες ὑπ' ὄψει, ὅτι ὁ εἷς ἐκ τῶν 100 ἀνθρώπων εἶναι φανταστικός, λαμβάνομεν τὸ μερίδιον τούτου, ὅπερ εἶναι 3857 δρχ. καὶ τὸ προσθέτομεν εἰς τὰς 62 δρχ. τοῦ ὑπολοίπου καὶ οὕτως ἔχομεν ὑπόλοιπον 3857+62 δρχ. ἤτοι 3919 δρχ. Ταύτας δὲ διαιροῦντες πάλιν δι' 100 ἔχομεν

3919:100, ὅτε τὸ πηλίκον εἶναι 39 δρχ. τὸ δὲ ὑπόλοιπον 19 δρχ. Ἔπειτα λαμβάνοντες ὑπ' ὄψει, ὅτι ὁ εἷς ἐκ τῶν 100 ἀνθρώπων, εἰς οὓς διῃρέθησαν αἱ 3919 δρχ. εἶναι φανταστικός, λαμβάνομεν τὸ μερίδιον τούτου, ὅπερ εἶναι 39 δρχ. καὶ τὸ προσθέτομεν εἰς τὰς 19 δρχ. τοῦ ὑπολοίπου καὶ οὕτως ἔχομεν ὑπόλοιπον 39+19 δρχ. ἤτοι 58 δρχ., ὅπερ εἶναι καὶ τὸ τελικὸν ὑπόλοιπον, ἐπειδὴ ὁ 58 εἶναι ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ διαιρέτου 99.

Καὶ οὕτως ἐξετελέσθη ἡ διαίρεσις τοῦ 385762 δρχ. διὰ 99, εὑρέθη δὲ πηλίκον μὲν 3857+39 δρχ. ἤτοι 3896 δρχ., ὑπόλοιπον δὲ 58 δρχ.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς.

$$
\begin{array}{r|l}
385762 & 99 \\
\hline
\end{array}
\qquad \text{ἢ} \qquad
\begin{array}{r|r}
385762 & 100 \\
\cline{2-2}
62 & 3857 \\
\cline{1-1}
3919 & 39 \\
\cline{2-2}
19 & 3896 \\
\cline{1-1}
58 &
\end{array}
$$

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Πόσας μονάδας πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν διαιρετέον, ἵνα τὸ πηλίκον αὐξήσῃ κατὰ μίαν μονάδα;

2) Εἰς ποίαν περίπτωσιν δύναται νὰ γείνῃ ἀνταλλαγὴ μεταξὺ διαιρετέου καὶ πηλίκου δηλ. τοῦ πηλίκου λαμβανομένου, ὡς διαιρέτου, ὁ διαιρέτης γίνεται πηλίκον;

3) Ὅταν ὁ διαιρετέος μόνον πολλαπλασιασθῇ ἐπί τινα ἀριθμόν, ποίαν μεταβολὴν πάσχουσι τὸ πηλίκον καὶ τὸ ὑπόλοιπον;

Περὶ διαιρετότητος.

176. *Ἀριθμός τις λέγεται διαιρετὸς δι' ἑτέρου, ὅταν ἡ διαίρεσις τούτων παρέχῃ πηλίκον ἀκέραιον καὶ ὑπόλοιπον μηδέν.*

Π. χ. Ὁ 40 λέγεται διαιρετὸς διὰ 2, διὰ 4, διὰ 5, διὰ 8, διὰ 10 κ.τ.λ.

177. *Θεώρημα. Πᾶς ἀριθμὸς διαιρεῖ τὰ πολλαπλάσια αὐτοῦ.*

Ἔστω π.χ. ὁ 8, λέγω ὅτι οὗτος διαιρεῖ πάντα τὰ πολλαπλάσιά του. Διότι, πάντα τὰ πολλαπλάσια τοῦ 8 περιέχονται, ὡς γνωστόν, εἰς τὴν παράστασιν 8×Π, αὕτη δὲ ὡς οὖσα γινόμενον τῶν παραγόντων 8 καὶ Π θὰ διαιρῆται διὰ τοῦ 8 (ἰδὲ § 167).

178. *Πόρισμα. Πᾶν κοινὸν πολλαπλάσιον δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν διαιρεῖται ὑφ' ἑκάστου τῶν ἀριθμῶν τούτων.*

Διότι, πᾶν κοινὸν πολλαπλάσιον δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν εἶναι πολλαπλάσιον ἑκάστου τῶν ἀριθμῶν τούτων, ἄρα θὰ εἶναι διαιρετὸν δι' ἑκάστου τούτων (§ 177).

179. *Θεώρημα. Πᾶς ἀριθμός, διαιρετὸς δι' ἄλλου ἀριθμοῦ εἶναι πολλαπλάσιον τούτου.*

Ἔστω π. χ. ὅτι ὁ Δ εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ δ καὶ ὅτι τὸ πηλίκον τούτων εἶναι ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς Π, τότε θὰ ἔχωμεν

$$Δ=δ\times Π$$

Ἀλλὰ τὸ $δ\times Π$ δηλοῖ ὅτι εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ δ (ἰδὲ § 117). Ἑπομένως καὶ τὸ Δ ὡς ἴσον τοῦ $δ\times Π$ θὰ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ δ.

180. *Θεώρημα. Πᾶς ἀριθμὸς διαιρῶν δύο ἢ περισσοτέρους ἀριθμοὺς διαιρεῖ καὶ τὸ ἄθροισμα τούτων.*

Ἔστω π. χ. ὁ 4, ὅστις διαιρεῖ τοὺς ἀριθμοὺς 8, 12, 20 καὶ 32, λέγω ὅτι ὁ 4 θὰ διαιρῇ καὶ τὸ ἄθροισμα τούτων $8+12+20+32$.

Διότι, ἕκαστος τῶν προσθετέων 8, 12, 20, 32, ὡς διαιρούμενος διὰ τοῦ 4 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 4 (§ 179) ἤτοι ἀποτελεῖται ἀπὸ 4. Ἑπομένως καὶ τὸ ἄθροισμα τούτων $8+12+20+32$ θὰ ἀποτελεῖται ἀπὸ 4 δηλ. θὰ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 4, δι' ὃ θὰ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ 4 (§ 177).

181. *Πόρισμα. Πᾶς ἀριθμὸς διαιρῶν ἀριθμόν τινα θὰ διαιρῇ καὶ τὰ πολλαπλάσια αὐτοῦ.*

Λέγω π. χ. ὅτι ὁ 4 διαιρῶν τὸν 24 θὰ διαιρῇ καὶ τὸν 24×3 Διότι 24×3 εἶναι $24+24+24$, ὧν ἕκαστον διαιρεῖται ὑπὸ τοῦ 4, δι' ὃ καὶ τὸ ἄθροισμα τούτων, ὅπερ εἶναι τὸ 24×3 θὰ διαιρῆται ὑπὸ τοῦ 4.

182. *Θεώρημα. Πᾶς ἀριθμὸς διαιρῶν δύο ἄλλους ἀριθμούς διαιρεῖ καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν.*

Ἔστω π. χ. ὁ 5, ὅστις διαιρεῖ τὸν 15 καὶ τὸν 35 λέγω ὅτι, ὁ 5 θὰ διαιρῇ καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν $35-15$.

Διότι ἑκάτερος τῶν ἀριθμῶν 35 καὶ 15, ὡς διαιρούμενος διὰ 5 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 5 (ἰδὲ § 179) ἤτοι ἀποτελεῖται ἀπὸ 5. Ἑπομένως καὶ ἡ διαφορὰ $35-15$ θ' ἀποτελῆται ἀπὸ 5, ἤτοι θὰ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 5, δι' ὃ θὰ εἶναι διαιρετὴ διὰ 5 (ἰδὲ § 177).

Σημ. Ἐπειδὴ ἐκ τῶν δύο ἀριθμῶν, 35 καὶ 15 ὁ *μειωτέος* 35 εἶναι ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν, ἤτοι τοῦ *ἀφαιρετέου* 15 καὶ τῆς *ἀγνώ-*

στου διαφορᾶς, διὰ τοῦτο, τὸ ἀποδειχθὲν θεώρημα δύναται νὰ ἐκφρασθῇ γενικώτερον καὶ ὡς ἑξῆς.

Πᾶς ἀριθμός, ὅστις διαιρεῖ τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν (δηλ. τὸν μειωτέον) *καὶ τὸν ἕνα τούτων* (δηλ. τὸν ἀφαιρετέον ἢ τὴν διαφορὰν) *θὰ διαιρῇ καὶ τὸν ἕτερον.*

183. Θεώρημα. *Πᾶς ἀριθμὸς διαιρῶν τὸν διαιρέτην καὶ τὸ ὑπόλοιπον, διαιρέσεως μὴ ἐκτελουμένης ἀκριβῶς, θὰ διαιρῇ καὶ τὸν διαιρετέον.*

Ἔστω Δ ὁ διαιρετέος, δ ὁ διαιρέτης καὶ υ τὸ ὑπόλοιπον, λέγω ὅτι, ἐὰν ἀριθμός τις ρ διαιρῇ τὸν διαιρέτην δ καὶ τὸ ὑπόλοιπον υ, θὰ διαιρῇ καὶ τὸν διαιρετέον Δ.

Διότι, καλοῦντες Π τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ Δ διὰ δ θὰ ἔχωμεν

$$\Delta = \delta \times \Pi + \upsilon$$

Ἐπειδὴ δὲ ὁ ρ διαιρεῖ ἐξ ὑποθέσεως τὸν δ, θὰ διαιρῇ καὶ τὸ πολλαπλάσιον αὐτοῦ $\delta \times \Pi$, ἐπειδὴ δὲ διαιρεῖ ἐξ ὑποθέσεως καὶ τὸ ὑπόλοιπον υ, διὰ τοῦτο θὰ διαιρῇ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν $\delta \times \Pi + \upsilon$ (§ 180), ἤτοι τὸν διαιρετέον Δ.

Π. χ. Ὁ 48 διὰ 20 δίδει ὑπόλοιπον 8. Ὁ δὲ 4, ὅστις διαιρεῖ τὸν διαιρέτην 20 καὶ τὸ ὑπόλοιπον 8 παρατηροῦμεν ὅτι, διαιρεῖ καὶ τὸν διαιρέτην 48.

184. Θεώρημα. *Πᾶς ἀριθμὸς διαιρῶν τὸν διαιρετέον καὶ τὸν διαιρέτην, διαιρέσεως μὴ ἐκτελουμένης ἀκριβῶς, διαιρεῖ καὶ τὸ ὑπόλοιπον αὐτῆς.*

Ἔστω Δ ὁ διαιρετέος, δ ὁ διαιρέτης καὶ υ τὸ ὑπόλοιπον, λέγω ὅτι, ἐὰν ἀριθμός τις ρ διαιρεῖ τὸν διαιρετέον Δ καὶ τὸν διαιρέτην δ, θὰ διαιρεῖ καὶ τὸ ὑπόλοιπον υ.

Διότι, καλοῦντες Π τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ Δ διὰ δ καὶ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψει ὅτι, *τὸ ὑπόλοιπον εἶναι ἡ διαφορὰ ἐκ τοῦ διαιρετέου τοῦ γινομένου τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον*, ἔχομεν τὴν ἰσότητα

$$\Delta - \delta \times \Pi = \upsilon$$

ἐπειδὴ δὲ ὁ ρ διαιρεῖ ἐξ ὑποθέσεως τὸν διαιρέτην δ, θὰ διαιρῇ καὶ τὸ $\delta \times \Pi$ ὡς πολλαπλάσιον τοῦ δ, ἐπειδὴ δὲ διαιρεῖ ἐξ ὑποθέσεως καὶ τὸν διαιρετέον Δ, διὰ τοῦτο θὰ διαιρῇ καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν $\Delta - \delta \times \Pi$ (§ 182), ἤτοι τὸ ὑπόλοιπον υ.

185. Π. χ. Ὁ 48 διὰ 20 δίδει ὑπόλοιπον 8. Ὁ δὲ 4, ὅστις διαιρεῖ

τὸν διαιρετέον 48 καὶ τὸν διαιρέτην 20 παρατηροῦμεν ὅτι, διαιρεῖ καὶ τὸ ὑπόλοιπον 8.

186. *Θεώρημα. Ἐὰν εἰς τὸν διαιρετέον προσθέσωμεν τὸν διαιρέτην ἢ πολλαπλάσιον τούτου, τὸ ὑπόλοιπον μένει ἀμετάβλητον.*

Ἔστω π. χ. ὁ ἀριθμὸς 29, ὅστις διαιρούμενος διὰ 6 δίδει ὑπόλοιπον 5, λέγω ὅτι, ἐὰν εἰς τὸν 29 προσθέσωμεν οἱονδήποτε πολλαπλάσιον τοῦ διαιρέτου 6, ἤτοι τὸ $6 \times \Pi$, ὁ προκύπτων ἀριθμὸς $29 + 6 \times \Pi$ διαιρούμενος διὰ 6 θὰ δίδῃ τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον 5.

Διότι ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ $29 + 5 \times \Pi$ ὁ προστεθεὶς ἀριθμὸς $6 \times \Pi$, ὡς πολλαπλάσιον τοῦ 6 διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 6, ἤτοι δίδει ὑπόλοιπον μηδέν. Ἑπομένως τὸ ὑπόλοιπον τοῦ $29 + 6 \times \Pi$ θὰ εἶναι αὐτὸ τοῦτο τὸ ὑπόλοιπον τοῦ μένοντος ἀριθμοῦ 29, διαιρουμένου διὰ 6.

187. *Πόρισμα. Ἐὰν ἐκ τοῦ διαιρετέου ἀφαιρέσωμεν τὸν διαιρέτην ἢ πολλαπλάσιον τούτου, τὸ ὑπόλοιπον μένει ἀμετάβλητον.*

Ἔστω π. χ. ὁ ἀριθμὸς 45, ὅστις διαιρούμενος διὰ 7 δίδει ὑπόλοιπον 3, λέγω ὅτι, ἐὰν ἐκ τοῦ 45 ἀφαιρέσωμεν πολλαπλάσιόν τι τοῦ διαιρέτου 7, ἤτοι τὸ $7 \times \Pi$, ὁ προκύπτων ἀριθμὸς $45 - 7 \times \Pi$ διαιρούμενος διὰ 7 θὰ δίδῃ τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον 3.

Διότι, ἐὰν εἰς τὸν διαιρετέον $45 - 7 \times \Pi$ προσθέσωμεν τὸ πολλαπλάσιον τοῦ διαιρέτου $7 \times \Pi$, ὅτε τὸ ὑπόλοιπον δὲν μεταβάλλεται (§ 186), εὑρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν 45. Καὶ ὄντως $45 - 7 \times \Pi + 7 \times \Pi = 45$. Ἄρα ὁ $45 - 7 \times \Pi$ καὶ ὁ 45, διαιρούμενοι διὰ 7 δίδουσιν ἴσα ὑπόλοιπα.

188. *Θεώρημα. Τὸ ἄθροισμα δύο ἢ περισσοτέρων προσθετέων διαιρεῖται διά τινος ἀριθμοῦ, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν ὑπολοίπων τῶν προσθετέων διαιρῆται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἄλλως θ' ἀφήνῃ ὑπόλοιπον, ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον θ' ἀφήνῃ τὸ ἄθροισμα τῶν ὑπολοίπων τῶν προσθετέων.*

Λέγω π.χ. ὅτι, ἵνα τὸ ἄθροισμα τῶν προσθετέων $45 + 75 + 3 + 62$ διαιρῆται διὰ 4, ἀνάγκη τὸ ἄθροισμα τῶν ὑπολοίπων 1, 3, 3 καὶ 2 τῶν προσθετέων, ἤτοι τὸ $1 + 3 + 3 + 2$ νὰ διαιρῆται διὰ 4, ἄλλως θ' ἀφήνῃ ὑπόλοιπον, τὸ ὑπόλοιπον τούτου.

Διότι, ἀντικαθιστῶντες τοὺς προσθετέους $45 + 75 + 3 + 62$ διὰ τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως ἑκάστου τούτων διὰ τοῦ διαιρέτου 4 ἤτοι διὰ τῶν $1 + 3 + 3 + 2$, οὐδὲν πλέον ποιοῦμεν ἢ παραλείπομεν ἐξ ἑκάστου τῶν δοθέντων προσθετέων πολλαπλάσιόν τι τοῦ διαιρέτου. Τὸ τοιοῦτον ὅμως οὐδόλως μεταβάλλει τὸ τελικὸν ὑπόλοιπον (§ 187) τῶν δοθέντων ἀριθμῶν, εἴτε τοῦτο εἶναι μηδέν, εἴτε διάφορον τοῦ μηδενός.

Περὶ τῶν διαιρετῶν 2 καὶ 5, 4 καὶ 25, 3 καὶ 9 καὶ 11.

189. *Θεώρημα. Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 2 ἢ 5, ἐὰν τὸ τελευταῖον αὐτοῦ ψηφίον εἶναι διαιρετὸν διὰ 2 ἢ 5, ἄλλως θ' ἀφήνῃ ὑπόλοιπον, ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον ἀφήνει τὸ τελευταῖον ψηφίον τοῦ ἀριθμοῦ διαιρούμενον διὰ 2 ἢ 5.*

Διότι πᾶς ἀριθμὸς δύναται νὰ θεωρηθῇ, ὡς ἄθροισμα τοῦ συνόλου τῶν δεκάδων του (§ 12 β'.) καὶ τῶν μονάδων του καὶ ἐπειδὴ ἑκάστη δεκὰς εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 2 καὶ 5 (διότι $10=2\times5$), διὰ τοῦτο καὶ τὸ σύνολον τῶν δεκάδων παντὸς ἀριθμοῦ θὰ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 2 καὶ 5 καὶ ἑπομένως διαιρετὸν διὰ 2 καὶ 5. Ὥστε μένει μόνον τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ, ἄρα, ἂν καὶ τοῦτο εἶναι διαιρετὸν διὰ 2 ἢ 5, τότε καὶ ὅλος ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς θὰ εἶναι διαιρετὸς διὰ 2 ἢ 5, ἄλλως τὸ ὑπόλοιπον, ὅπερ θὰ δώσῃ τὸ ψηφίον τοῦτο θὰ εἶναι προφανῶς αὐτὸ τοῦτο τὸ ὑπόλοιπον ὁλοκλήρου τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ (§ 188).

Π.χ. Ὁ ἀριθμὸς 3578 διὰ 2 δίδει ὑπόλοιπον τὸ τοῦ 8 διὰ 2, ἤτοι διαιρεῖται ἀκριβῶς, διὰ 5 ὅμως δίδει ὑπόλοιπον τὸ τοῦ 8:5 ἤτοι 3.

190. *Θεώρημα. Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 4 ἢ 25, ἐὰν τὰ δύο τελευταῖα ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ ἀποτελοῦσιν ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 4 ἢ 25, ἄλλως θ' ἀφήνῃ ὑπόλοιπον ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἀφήνει ὁ ἐκ τῶν δύο τελευταίων ψηφίων ἀποτελούμενος ἀριθμός, διαιρούμενος διὰ 4 ἢ 25.*

Διότι πᾶς ἀριθμὸς δύναται νὰ θεωρηθῇ, ὡς ἄθροισμα τοῦ συνόλου τῶν ἑκατοντάδων του (§ 12 γ'.) καὶ τοῦ ἀριθμοῦ, ὃν ἀποτελοῦσι τὰ δύο τελευταῖα ψηφία αὐτοῦ. Καὶ ἐπειδὴ ἑκάστη ἑκατοντὰς εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 4 καὶ 25 (διότι $100=4\times25$), διὰ τοῦτο καὶ τὸ σύνολον τῶν ἑκατοντάδων παντὸς ἀριθμοῦ θὰ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 4 καὶ 25 καὶ ἑπομένως διαιρετὸν διὰ 4 καὶ 25. Ὥστε μένει μόνον ὁ ἀριθμός, τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦσι τὰ δύο τελευταῖα ψηφία τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ, ἄρα, ἂν καὶ οὗτος εἶναι διαιρετὸς διὰ 4 ἢ 25, τότε καὶ ὅλος ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς θὰ εἶναι διαιρετὸς διὰ 4 ἢ 25, ἄλλως τὸ ὑπόλοιπον, ὅπερ θὰ δώσῃ οὗτος θὰ εἶναι προφανῶς αὐτὸ τοῦτο τὸ ὑπόλοιπον ὁλοκλήρου τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ (§ 188).

Π. χ. Ὁ ἀριθμὸς 3575 διὰ 4 δίδει ὑπόλοιπον τὸ τοῦ 75 διὰ 4 ἤτοι 3, διὰ 25 ὅμως δίδει ὑπόλοιπον τὸ τοῦ 75 διὰ 25 ἤτοι 0.

191. *Θεώρημα. Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 8 ἢ 125, ἐὰν τὰ τρία τελευταῖα ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ ἀποτελῶσιν ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 8 ἢ 125, ἄλλως θ' ἀφήνῃ ὑπόλοιπον, ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον ἀφήνει ὁ ἐκ τῶν τριῶν τελευταίων ψηφίων ἀποτελούμενος ἀριθμός, διαιρούμενος διὰ 8 ἢ 125.*

Διότι πᾶς ἀριθμὸς δύναται νὰ θεωρηθῇ, ὡς ἄθροισμα τοῦ συνόλου τῶν χιλιάδων του (§ 12 δ'.) καὶ τοῦ ἀριθμοῦ, ὃν ἀποτελοῦσι τὰ τρία τελευταῖα ψηφία αὐτοῦ. Καὶ ἐπειδὴ ἑκάστη χιλιὰς εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 8 καί 125 (διότι $1000=8\times125$), διὰ τοῦτο καὶ τὸ σύνολον τῶν χιλιάδων παντὸς ἀριθμοῦ θὰ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 8 καὶ 125 καὶ ἑπομένως διαιρετὸν διὰ 8 καὶ 125. Ὥστε ἐκ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ μένει μόνον ὁ ἀριθμός, τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦσι τὰ τρία τελευταῖα ψηφία αὐτοῦ, ἄρα, ἂν καὶ οὗτος εἶναι διαιρετός διὰ 8 ἢ 125, τότε καὶ ὅλος ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς θὰ εἶναι διαιρετὸς διὰ 8 ἢ 125, ἄλλως τὸ ὑπόλοιπον, ὅπερ θὰ δώσῃ οὗτος θὰ εἶναι προφανῶς αὐτὸ τοῦτο τὸ ὑπόλοιπον ὁλοκλήρου τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ (§ 188)

192. *Θεώρημα. Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 3 ἢ 9, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τοῦ ἀριθμοῦ* (ὡς μονάδων θεωρουμένων) *ἀποτελῶσιν ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 3 ἢ 9, ἄλλως θ' ἀφήνῃ ὑπόλοιπον, ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον ἀφήνει τὸ εἰρημένον ἄθροισμα, διαιρούμενον διὰ 3 ἢ 9.*

Λέγω π.χ. ὅτι, ἵνα ὁ ἀριθμὸς 4258 διαιρῆται διὰ 3 ἢ 9, ἀνάγκη τὸ ἄθροισμα $4+2+5+8$ τῶν ψηφίων τοῦ ἀριθμοῦ νὰ διαιρῆται διὰ 3 ἢ 9, ἄλλως θ' ἀφήνῃ ὑπόλοιπον ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς διαιρούμενος διὰ 3 ἢ 9, τὸ ὑπόλοιπον τοῦ εἰρημένου ἀθροίσματος διὰ 3 ἢ 9.

Διότι, ἂν ἀναλύσωμεν τὸν ἀριθμὸν 4258 εἰς τὰς *χιλιάδας* του, *ἑκατοντάδας* του, *δεκάδας* του καὶ τὰς *μονάδας* του θὰ ἔχωμεν

$$4258=4^{\chi}+2^{\varepsilon}+5^{\delta}+8^{\mu}.$$

καὶ ἐπειδὴ ἑκάστη χιλιὰς διαιρουμένη διὰ 3 ἢ 9 δίδει ὑπόλοιπον 1 μονάδα, ἄρα αἱ 4 χιλιάδες θὰ δώσωσιν ὑπόλοιπον 4 μονάδας.

Καὶ ἐπειδὴ ἑκάστη ἑκατοντὰς διαιρουμένη διὰ 3 ἢ 9 δίδει ὑπόλοιπον 1 μονάδα, αἱ δύο ἑκατοντάδες θὰ δώσωσιν ὑπόλοιπον 2 μονάδας. Καὶ ἐπειδὴ ἑκάστη δεκὰς διαιρουμένη διὰ 3 ἢ 9 δίδει ὑπόλοιπον 1 μονάδα, ἄρα αἱ 5 δεκάδες θὰ δώσωσιν ὑπόλοιπον 5 μονάδας, μένουσι δὲ ἀκόμη καὶ αἱ 8 μονάδες τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ.

Οὕτω δὲ θὰ μείνῃ νὰ διαιρέσωμεν ἀκόμη διὰ 3 ἢ 9 τὸ ἄθροισμα $4+2+5+8$ τῶν ψηφίων τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ. Ἄρα ἂν τὸ ἄθροισμα τοῦτο εἶναι διαιρετὸν διὰ 3 ἢ 9, τότε καὶ ὅλος ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς θὰ εἶναι διαιρετὸς διὰ 3 ἢ 9, ἄλλως τὸ ὑπόλοιπον, ὅπερ θὰ δώσῃ τὸ εἰρημένον ἄθροισμα, θὰ εἶναι προφανῶς αὐτὸ τοῦτο τὸ ὑπόλοιπον ὁλοκλήρου τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ (§ 188).

193. *Ἐφαρμογή. Εὑρεῖν τὸ ὑπόλοιπον τοῦ ἀριθμοῦ 458967 διὰ 9*

Τὸ ὑπόλοιπον τοῦ 458967 διὰ 9 εἶναι τὸ αὐτὸ τῷ ὑπολοίπῳ τοῦ $4+5+8+9+6+7$ ἤτοι τοῦ 39 διὰ 9 ἢ ὅπερ ταὐτὸ τοῦ $3+9$ ἤτοι τοῦ 12 διὰ 9 ἢ ὅπερ ταὐτὸ τοῦ $1+2$ ἤτοι τοῦ 3 διὰ 9. Ἄρα τὸ ὑπόλοιπον θὰ εἶναι 3.

194. *Θεώρημα. Ἐκ τῶν ἀριθμῶν 10, 100, 1000 καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, οἱ μὲν λήγοντες εἰς ἄρτιον ἀριθμὸν μηδενικῶν εἶναι πολλαπλάσιόν τι τοῦ 11 ηὐξημένον κατὰ μονάδα, οἱ δὲ λήγοντες εἰς περιττὸν ἀριθμὸν μηδενικῶν εἶναι πολλαπλάσιόν τι τοῦ 11 ἠλαττωμένον κατὰ μονάδα.*

Διότι $10=11-1$

$$100=99+1=11\times9+1$$
$$1000=1001-1=11\times91-1$$
$$10000=9999+1=11\times909+1$$

καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

195. *Θεώρημα. Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 11, ἐὰν ἡ ὑπεροχὴ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ψηφίων τῶν κατεχόντων τάξιν περιττὴν ἐκ δεξιῶν, ὡς πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τῶν κατεχόντων τάξιν ἀρτίαν, εἶναι διαιρετὴ διὰ τοῦ 11, ἄλλως θ' ἀφήνῃ ὑπόλοιπον, ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον ἀφήνει ἡ εἰρημένη διαφορὰ διαιρουμένη διὰ 11.*

Λέγω π. χ. ὅτι, ἵνα ὁ ἀριθμὸς 95782 διαιρῆται διὰ 11 ἀνάγκη ἡ ὑπεροχὴ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ψηφίων 2,7 καὶ 9 τῆς περιττῆς τάξεως ἐκ δεξιῶν, ὡς πρὸς τὰ ψηφία 8 καὶ 5 τῆς ἀρτίας τάξεως, νὰ διαιρῆται διὰ 11. Ἂν δὲ δὲν διαιρῆται ἡ εἰρημένη ὑπεροχή, τότε ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς 95782 διαιρούμενος διὰ 11 θ' ἀφήνῃ ὑπόλοιπον οἷον ἡ εἰρημένη ὑπεροχὴ διαιρουμένη διὰ 11.

Διότι ἔστω π. χ. ὁ ἀριθμὸς 95782.

Ἐπειδὴ τὸ	$10=11-1$	διὰ τοῦτο αἱ	8 δεκάδ.	$=11\times8-8$ (ἰδὲ § 128)
» »	$100=11\times9+1$	» »	» 7 ἑκατ.	$=11\times9\times7+7$ (ἰδὲ § 123)
» »	$1000=11\times91-1$	» »	» 5 χιλ.	$=11\times91\times5-5$ (ἰδὲ § 128)
» »	$10000=11\times909+1$	» »	» 9 δεκ.χ.	$=11\times909\times9+9$ (ἰδὲ § 123)

Ἄρα ὁ ἀριθμὸς 95782 ἀναλύεται εἰς τὸν

$11\times909\times9+11\times91\times5+11\times9\times7+11\times8+9-5+7-8+2.$

Ἐκ τούτων δὲ οἱ ἀριθμοὶ (11×8), $(11\times9\times7)$, $(11\times91\times5)$, καὶ $(11\times909\times9)$ εἶναι διαιρετοὶ διὰ 11, ἄρα ἵνα ὅλος ὁ ἀριθμὸς 95782 εἶναι διαιρετὸς διὰ 11, δέον νὰ εἶναι καὶ τὸ ἐπίλοιπον μέρος διαιρετὸν διὰ τοῦ 11. Εἶνε δὲ τὸ ἐπίλοιπον μέρος

$$9-5+7-8+2 \text{ ἢ } 9+7+2-5-8 \text{ ἢ (ἰδὲ § 84)}$$
$$\text{καὶ } (9+7+2)-(5+8)$$

ἤτοι ἡ ὑπεροχὴ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ψηφίων $9+7+2$ τῆς *περιττῆς* τάξεως ἐκ δεξιῶν πρὸς τ' ἀριστερά, ὡς πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων $5+8$ τῆς ἀρτίας τάξεως. Ἂν ὅμως ἡ ὑπεροχὴ αὕτη δὲν εἶναι διαιρετὴ διὰ 11, τότε οἷον ὑπόλοιπον θὰ δώσῃ αὕτη τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον θὰ δώσῃ προφανῶς καὶ ὅλος ὁ ἀριθμός.

Σημ. Ἐν ᾗ περιπτώσει τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τῆς περιττῆς τάξεως εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ψηφίων τῆς ἀρτίας τάξεως, τότε προσθέτομεν τὸν 11, *ἅπαξ, δὶς* κ.τ.λ., μέχρις οὗ καταστῇ δυνατὴ ἡ ἀφαίρεσις, ὅτε ἂν μὲν ἡ διαφορὰ εἶναι 0, τότε ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶναι διαιρετός, ἄλλως τὸ ὑπόλοιπον τῆς εἰρημένης διαφορᾶς διὰ 11 εἶναι καὶ ὑπόλοιπον τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ διὰ 11. Ὁ λόγος τούτου εἶναι ὁ ἑξῆς. Διότι, προσθέτοντες τὸ 11 ὅσας φορὰς εἶναι ἀνάγκη, δὲν μεταβάλλεται προφανῶς τὸ ὑπόλοιπον τῆς εἰρημένης διαφορᾶς διαιρουμένης διὰ τοῦ 11 (ἰδὲ § 186).

Π. χ. Ὁ ἀριθμὸς 43789 διὰ 11 δίδει ὑπόλοιπον οἷον τὸ $(9+7+4)-(8+3)$ ἤτοι $20-11$ ἤτοι 9 διὰ 11 ἤτοι ὑπόλοιπον 9.

Ὁμοίως. Ὁ ἀριθμὸς 5738172:11 δίδει ὑπόλοιπον οἷον τὸ $(2+1+3+5)-(7+8+7)$ ἤτοι $11-22$ ἢ καὶ $11+11-22$ ἤτοι $22-22$ ἤτοι 0:11 ἄρα διαιρετὸν διὰ 11.

Περὶ τῆς δοκιμῆς τοῦ πολλαπλασιασμοῦ διὰ τοῦ σταυροῦ.

196. *Θεώρημα. Τὸ γινόμενον δύο παραγόντων διαιρούμενον διά τινος ἀριθμοῦ δίδει τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον δίδει τὸ γινόμενον τῶν ὑπολοίπων τῶν παραγόντων διαιρούμενον διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.*

Λέγω π. χ. ὅτι, τὸ γινόμενον 462×26 ἤτοι τὸ 12012 διαιρούμενον διὰ τοῦ 9, δίδει τὸ ὑπόλοοπον, τὸ ὁποῖον θὰ δώσῃ τὸ γινόμενον τῶν ὑπολοίπων 3 καὶ 8 τῶν ἀριθμῶν τούτων, ἤτοι τὸ 3×8 ἤτοι τὸ 24, ἐὰν διαιρεθῇ διὰ 9.

Διότι, ἐὰν εἰς τὸ γινόμενον 462×26 ἀντικαταστήσωμεν τὸν ἕνα παράγοντα, ἔστω τὸν 462 διὰ τοῦ ἴσου του $51\times9+3$, ὅπερ εὑρίσκομεν διαιροῦντες τὸ 462 διὰ 9 ἔχομεν

$$462\times26=(51\times9+3)\times26=51\times9\times26+3\times26$$

Ἔπειτα, ἐὰν εἰς τὸ γινόμενον 3×26 ἀντικαταστήσωμεν τὸν μένοντα παράγοντα 26, διὰ τοῦ ἴσου του $2\times9+8$, ὅπερ εὑρίσκομεν διαιροῦντες τὸ 26 διὰ 9 ἔχομεν

$$3\times26=3\times(2\times9+8)=3\times2\times9+3\times8$$

Καὶ ἀντικαθιστῶντες ἤδη εἰς τὴν ἀνωτέρω ἰσότητα τὸ 3×26 διὰ τοῦ ἴσου του ἔχομεν

$$462\times26=51\times9\times26+3\times2\times9+3\times8$$

Ἤδη δέ, πρὸς εὕρεσιν τοῦ ὑπολοίπου ἀντὶ νὰ διαιρέσωμεν διὰ 9 τὸ γινόμενον 462×26, δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν διὰ 9 τὸ ἴσον τῷ εἰρημένῳ γινομένῳ

$$51\times9\times26+3\times2\times9+3\times8$$

Ἐκ τούτου δέ, ἐὰν παραλείψωμεν τὸ $51\times9\times26$ καὶ $3\times2\times9$, ὡς πολλαπλάσια τοῦ 9, τουθ' ὅπερ δὲν βλάπτει τὸ τελικὸν ὑπόλοιπον (§ 187), μένει νὰ διαιρέσωμεν τὸ γινόμενον 3×8 διὰ 9, ἐξ ὧν τὸ μὲν 3 εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ 462 διὰ 9, τὸ δὲ 8 εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τοῦ ἑτέρου παράγοντος 26 διὰ 9. Καὶ οὕτω ἀπεδείχθη τὸ ζητούμενον.

197. *Τὸ θεώρημα τοῦτο ἐφαρμόζεται εἰς τὴν δοκιμὴν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ διὰ τοῦ σταυροῦ. Γίνεται δὲ αὕτη ὡς ἑξῆς.*

Ἔστω π. χ. ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς

457 ἐπὶ 26, ὅτε εὑρίσκομεν γινόμενον 11882 ἤτοι

$$\begin{array}{r} 457 \\ 26 \\ \hline 2742 \\ 914 \\ \hline 11882 \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} 7 & 8 \\ \hline 2 & 2 \end{array}$$

Ἵνα κάμωμεν τὴν δοκιμὴν λαμβάνομεν τὸ ὑπόλοιπον τοῦ 457 διά τινος ἀριθμοῦ καὶ ἔστω διὰ 9, ὅπερ θὰ εἶναι 4+5+7 ἢ 16 ἤτοι 7 καὶ τὸ γράφομεν εἰς τὴν πρὸς τ' ἀριστερὰ ἄνω γωνίαν τοῦ *σταυροῦ*, εἶτα λαμβάνομεν τὸ ὑπόλοιπον τοῦ ἑτέρου παράγοντος 26 διὰ τοῦ 9 καὶ ὅπερ εἶναι 2+6 ἤτοι 8 καὶ ὅπερ γράφομεν εἰς τὴν πρὸς τὰ δεξιὰ ἄνω γωνίαν τοῦ σταυροῦ Εἶτα δὲ πολλαπλασιάζομεν τὰ δύο ταῦτα ὑπόλοιπα 7 καὶ 8, τοῦ δὲ γινομένου 56 εὑρίσκομεν τὸ ὑπόλοιπον διὰ 9 καὶ ὅπερ εἶναι 5+6 ἢ 11 ἤτοι 2, τὸ ὁποῖον γράφομεν εἰς τὴν πρὸς τ' ἀριστερὰ κάτω γωνίαν τοῦ σταυροῦ. Τέλος δὲ εὑρίσκομεν καὶ τὸ ὑπόλοιπον τοῦ γινομένου 11882 διὰ 9 καὶ ὅπερ εἶναι 1+1+8+8+2 ἢ 20 ἢ 2+0 ἤτοι 2. Ἐπειδὴ δὲ εὕρομεν πάλιν ὑπόλοιπον 2, καὶ τὸ ὁποῖον γράφομεν εἰς τὴν πρὸς τὰ δεξιὰ κάτω γωνίαν τοῦ σταυροῦ, συνάγομεν, ὅτι ὁ πολλαπλασιασμὸς ἐξετελέσθη ἄνευ λάθους (§ 196).

198. Παρατηρητέον ὅμως ὅτι, ἐκ τοῦ γινομένου θὰ προέκυπτε τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον 2 καὶ ἂν τοῦτο δὲν ἦτο τὸ ἀληθές, ἀλλὰ ἐσφαλμένον, ἤρκει μόνον τὸ γινόμενον νὰ ἦτο μικρότερον ἢ μεγαλήτερον τοῦ ἀληθοῦς γινομένου κατὰ πολλαπλάσιον τοῦ διαιρέτου 9 (§ 186, 187). Ἐντεῦθεν συνάγομεν ὅτι καὶ ἡ δοκιμὴ αὕτη δὲν παρέχει ἀσφαλὲς γνώρισμα, ὅτι ὁ πολλαπλασιασμὸς ἐξετελέσθη ἄνευ λάθους.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Μεταξὺ τῶν διαιρετῶν 3 καὶ 9 τίς εἶναι ὁ προτιμότερος, ἵνα γίνηται ἡ δοκιμὴ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ διὰ τοῦ σταυροῦ;

2) Πῶς δύναται νὰ γείνῃ ἡ δοκιμὴ τῆς προσθέσεως καὶ τῆς ἀφαιρέσεως διὰ τοῦ 9;

3) Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ διαφέρουσι κατὰ πολλαπλάσιον τρίτου τινος ἀριθμοῦ διαιρούμενοι διὰ τοῦ τρίτου τούτου ἀριθμοῦ δίδουσιν ἴσα ὑπόλοιπα ἢ ἄνισα;

4) Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 4, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων καὶ τοῦ διπλασίου τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων εἶναι διαιρετὸν διὰ 4.

5) Ἀριθμὸς τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 8, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων καὶ τοῦ διπλασίου τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων καὶ τοῦ τετραπλασίου τοῦ ψηφίου τῶν ἑκατοντάδων εἶναι διαιρετὸν διὰ 8.

6) Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων δύο ἀριθμῶν δὲν δύναται νὰ εἶναι διαιρετὸν διὰ 7, ἐὰν ἑκάτερος τῶν ἀριθμῶν τούτων δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 7.

Περὶ κοινῶν διαιρετῶν καὶ περὶ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου.

Ὁρισμοί.

199. *Κοινὸς διαιρέτης δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν λέγεται ὁ διαιρῶν τούτους ἀκριβῶς.*

Π. χ. Τῶν ἀριθμῶν 4, 8 καὶ 12 κοινοὶ διαιρέται εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 2 καὶ 4.

200. *Μέγιστος κοινὸς διαιρέτης δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν λέγεται ὁ μεγαλήτερος ἐκ τῶν κοινῶν διαιρετῶν.*

Π. χ. Τῶν ἀριθμῶν 4, 8 καὶ 12 κοινοὶ διαιρέται εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 2 καὶ 4, τούτων δὲ ὁ 4 εἶναι ὁ μέγιστος, δι' ὃ λέγεται *μέγιστος κοινὸς διαιρέτης.*

201. *Ἐὰν δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ οὐδένα ἔχουσι κοινὸν διαιρέτην ἢ ὅπερ ταὐτό, ἐὰν ἔχωσι μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τὴν μονάδα, λέγονται πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.*

Π. χ. Οἱ ἀριθμοὶ 8 καὶ 15 λέγονται *πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.* Ὁμοίως οἱ ἀριθμοὶ 3, 4 καὶ 7 λέγονται *πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.*

Εὕρεσις τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου.

202. Εἰς τὴν ἀναζήτησιν τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν διακρίνομεν δύο περιπτώσεις.

Α'. περίπτωσις. *Ὅταν ὁ μικρότερος τῶν δοθέντων ἀριθμῶν διαιρῇ πάντας τοὺς ἄλλους.*

Β'. περίπτωσις. *Ὅταν ὁ μικρότερος τῶν δοθέντων ἀριθμῶν δὲν διαιρῇ πάντας τοὺς ἄλλους.*

Α'. περίπτωσις.

203. *Θεώρημα. Ὅταν ἐκ δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν ὁ μικρότερος διαιρῇ πάντας τοὺς ἄλλους, αὐτὸς ὁ μικρότερος εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης πάντων τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.*

Λέγω π. χ. ὅτι, ἐκ τῶν ἀριθμῶν 60, 5, 30, 40, τῶν ὁποίων ὁ μικρότερος 5, διαιρεῖ πάντας τοὺς ἄλλους, οὗτος εἶναι καὶ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν 60, 5, 30 καὶ 40.

Διότι μεγαλήτερος μὲν τοῦ 5 δύναται νὰ διαιρῇ πάντας τοὺς ἄλλους ἀριθμοὺς 60, 30 καὶ 40, δὲν θὰ διαιρῇ ὅμως αὐτὸν τοῦτον τὸν 5 καὶ ἑπομένως κοινὸς διαιρέτης τοῦ 60,5,30 καὶ 40 μεγαλήτερος τοῦ 5 δὲν ὑπάρχει. Ἄρα ὁ 5 εἶναι ὁ *μέγιστος κοινὸς διαιρέτης* τῶν ἀριθμῶν 60, 5, 30 καὶ 40.

Β'. περίπτωσις.

204. *Θεώρημα. Ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν δὲν βλάπτεται, ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τοὺς μεγαλητέρους ἐκ τῶν ἀριθμῶν τούτων διὰ τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως αὐτῶν διὰ τοῦ μικροτέρου.*

Λέγω π. χ. ὅτι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν

820 458 60 18 300

εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τῶν ἀριθμῶν

10 8 6 18 12

ἔνθα ὁ 820, ὁ 458, ὁ 60 καὶ ὁ 300 ἀντικατεστάθησαν διὰ τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως ἑκάστου τούτων διὰ τοῦ μικροτέρου 18.

Διότι πᾶς ἀριθμὸς διαιρῶν τοὺς *διαιρετέους* 820, 458, 60 καὶ 300 καὶ τὸν *διαιρέτην* 18 θὰ διαιρῇ καὶ τὰ ὑπόλοιπα τῆς διαιρέσεως αὐτῶν 10, 8, 6 καὶ 12 (§ 184). Οὐδεὶς δὲ ἐπὶ πλέον ἀριθμὸς διαιρεῖ τοὺς 10, 8, 6, 12, διότι πᾶς ἀριθμὸς διαιρῶν τὰ *ὑπόλοιπα* 10, 8, 6, 12 καὶ τὸν *διαιρέτην* 18 θὰ διαιρῇ καὶ τοὺς *διαιρετέους* 820, 458, 60 καὶ 300 (§ 183). Ἑπομένως οἱ ἀριθμοὶ 820, 458, 60,18,300 καὶ οἱ 10,8,6,18 καὶ 12 ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς κοινοὺς διαιρέτας, ἄρα καὶ τὸν αὐτὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην.

Σημ. Καὶ ὅταν ἡ διαίρεσις ἀριθμοῦ τινος διὰ τοῦ μικροτέρου δίδῃ ὑπόλοιπον *μηδὲν καὶ τότε οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ καὶ οἱ προκύπτοντες δι' ἀντικαταστάσεως τῶν μεγαλητέρων διὰ τῶν ὑπολοίπων τῆς* *διαιρέσεως αὐτῶν διὰ τοῦ μικροτέρου ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς κοινοὺς διαιρέτας καὶ ἑπομένως τὸν αὐτὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην.*

Ἔστωσαν π. χ. οἱ ἀριθμοὶ

820 450 60 18 360

τῶν ὁποίων οἱ μεγαλήτεροι διαιρούμενοι διὰ τοῦ μικροτέρου 18 δίδουσι ὑπόλοιπα

10 0 6 18 0 ἤτοι 10, 6, 18,

λέγω ὅτι, οἱ κοινοὶ διαιρέται τῶν 820, 450, 60, 18 καὶ 360 εἶναι οἱ αὐτοὶ μὲ τοὺς κοινοὺς διαιρέτας τῶν 10, 6 καὶ 18.

Διότι πᾶς ἀριθμὸς διαιρῶν τοὺς διαιρετέους 820, 60 καὶ τὸν διαιρέτην 18 θὰ διαιρῇ καὶ τὰ *ὑπόλοιπα* τῆς διαιρέσεως αὐτῶν 10 καὶ 6. Πᾶς δὲ διαιρῶν τὰ *ὑπόλοιπα* 10 καὶ 6 καὶ τὸν *διαιρέτην* 18 θὰ διαιρῇ καὶ τοὺς διαιρετέους 820 καὶ 60, *θὰ διαιρεῖ δὲ προσέτι καὶ τούς 450 καὶ 360, διότι οὗτοι εἶναι πολλαπλάσια τοῦ διαιρετέου 18, ὡς παρασχόντες ὑπόλοιπα μηδέν.* Ἑπομένως οἱ ἀριθμοὶ 820, 450, 60, 18 καί 360, ὡς καὶ οἱ ἀριθμοὶ 10, 6 καὶ 18 θὰ ἔχωσι τοὺς αὐτοὺς κοινοὺς διαιρέτας, δι' ὃ καὶ τὸν αὐτὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην.

205. Στηριζόμενοι εἰς τὰ ἀνωτέρω (§ 204 καὶ Σημ.) δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν, ἀνάγοντες τὴν *β' περίπτωσιν*, καθ' ἣν ὁ μικρότερος τῶν δοθέντων ἀριθμῶν δὲν διαιρεῖ τοὺς μεγαλητέρους εἰς τὴν *α' περίπτωσιν*, καθ' ἣν ὁ μικρότερος διαιρεῖ τοὺς μεγαλητέρους.

Παράδειγμα 1ον. *Νὰ εὑρεθῇ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 820, 458, 60, 18, 300.*

Κατὰ τὸ προαποδειχθὲν θεώρημα ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν

820, 458, 60, 18, 300

δὲν βλάπτεται, ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τοὺς μεγαλητέρους τῶν ἀριθμῶν τούτων διὰ τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως αὐτῶν διὰ τοῦ μικροτέρου 18, ἤτοι διὰ τῶν

10, 8, 6, 18, 12

δυνάμει δὲ τοῦ αὐτοῦ θεωρήματος δυνάμεθα ἄνευ βλάβης τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου ν' ἀντικαταστήσωμεν τοὺς μεγαλητέρους τῶν ἀριθμῶν τούτων διά τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως αὐτῶν διὰ τοῦ μικροτέρου 6 καὶ οὕτως εὑρίσκομεν τοὺς ἀριθμοὺς

4, 2, 6, 0, 0 ἤτοι 4, 2 καὶ 6

Ἐκ τῶν ἀριθμῶν δὲ τούτων ὁ μικρότερος 2 διαιρεῖ πάντας τοὺς ἄλλους 4 καὶ 6. Ἑπομένως ὁ 2 εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν 4, 2, 6 ἑπομένως καὶ τῶν 10, 8, 6, 18 καὶ 12, ἄρα καὶ τῶν 820, 458, 60, 18 καὶ 300.

Παράδειγμα 2ον. *Νὰ εὑρεθῇ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 27, 25, 18.*

Διάταξις τῆς πράξεως.

27	25	18	
9	7	18	
2	7	4	
2	1	0	ἤτοι 2 καὶ 1

καὶ ἐπειδὴ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τοῦ 2 καὶ 1 εἶναι ἡ μονάς, ἄρα καί τῶν 27, 25 καί 18 ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης εἶναι ἡ μονὰς καὶ ἑπομένως οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι εἶναι *πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.*

Παράδειγμα 3ον. *Νὰ εὑρεθῇ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 437 καὶ 75.*

εἷς τρόπος διατάξεως τῆς πράξεως

437	75
62	75
62	13
10	13
10	3
1	3

ἕτερος τρόπος διατάξεως

	5	1	4	1	3	3
437	75	62	13	10	3	1
62	13	10	3	1	0	

ἄρα οἱ ἀριθμοὶ 437 καὶ 75, ὡς ἔχοντες μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τὴν μονάδα εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοί.

Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

206. *Ἵνα εὕρωμεν τον μέγιστον κοινὸν διαιρέτην δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν, γράφομεν αὐτοὺς εἰς μίαν σειράν. Ἔπειτα εἰς δευτέραν σειρὰν ἐπαναλαμβάνομεν τὸν μικρότερον, κάτωθεν δὲ τῶν μεγαλητέρων γράφομεν τὰ ὑπόλοιπα τῆς διαιρέσεως αὐτῶν διὰ τοῦ μικροτέρου. Ἔπειτα, εἰς τρίτην σειράν, ἐπαναλαμβάνομεν τὸν μικρότερον ἐκ τῶν ἀριθμῶν τῆς δευτέρας σειρᾶς, κάτωθεν δὲ τῶν μεγαλητέρων γράφομεν τὰ ὑπόλοιπα τῆς διαιρέσεως αὐτῶν διὰ τοῦ μικροτέρου καὶ ἐξακολουθοῦμεν οὕτω, μέχρις ὅτου εὕρωμεν ἀριθμόν, ὅστις νὰ διαιρῇ ὅλους τούς ἄλλους, ὅτε οὗτος θὰ εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.*

Πρόβλημα, Ἀξιωματικός τις ἔχει 450 πεζούς, 540 ναύτας καὶ 270 τηλεβόλα. Εἰς πόσας πόλεις δύναται νὰ στείλῃ ἀνὰ ἴσον ἀριθμὸν πεζῶν, ναυτῶν καὶ τηλεβόλων πρὸς ὀχύρωσιν αὐτῶν;

(Εἰς 45 πόλεις. — Θὰ στείλῃ δέ εἰς ἑκάστην πόλιν 10 πεζούς, 12 ναύτας καὶ 6 τηλεβόλα).

Θεωρήματα ἐπὶ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου.

207. *Θεώρημα. Ἐὰν δύο ἢ περισσοτέρους ἀριθμοὺς πολλαπλασιάσωμεν ἐπί τινα ἀριθμὸν καὶ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.*

Λέγω π. χ. ὅτι τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου τῶν ἀριθμῶν 336, 168 καὶ 96 ὄντος 24, ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τοῦ γινομένου τούτων ἐπὶ 4 ἤτοι τῶν ἀριθμῶν 336×4, 168×4, 96×4 θὰ εἶναι 24×4.

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου, εὑρίσκομεν πρῶτον τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τῶν ἀριθμῶν 336, 168, 96 καὶ οὕτω ἔχομεν τὰς ἑξῆς σειρὰς τῶν ἀριθμῶν

336,	168,	96
48	72	96
48	24	0

336 | 96
48 3

Γνωρίζομεν δὲ ὅτι, ἐὰν τοὺς διαιρετέους 336, 168 καὶ τὸν διαιρέτην 96 πολλαπλασιάσωμεν ἐπί τινα ἀριθμὸν καὶ ἔστω τὸν 4, ὅτε προκύπτουσιν οἱ ἀριθμοὶ 336×4, 168×4, 96×4, τότε καὶ τὰ ὑπόλοιπα αὐτῶν 48 καὶ 72 θὰ πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ 4 (§ 164), ἤτοι θὰ ἔχωμεν

336×4,	168×4,	96×4
48×4	72×4	96×4

Ἐπειδὴ δέ, ὁ μὲν ἀριθμὸς 96 διαιρεθεὶς διὰ 48 ἔδωκεν ὑπόλοιπον *μηδέν*, ὁ δὲ 72 ἔδωκεν ὑπόλοιπον 24, διὰ τοῦτο, ὁ μὲν 96×4 διὰ 48×4 θὰ δώσῃ ὑπόλοιπον *μηδὲν* (164 Σημ.), ὁ δὲ 72×4 διὰ 48×4 θὰ δώσῃ ὑπόλοιπον 24×4 (§ 164) καὶ οὕτω ἐκ τῶν ἀριθμῶν 48×4, 72×4, 96×4 θὰ προκύψωσιν οἱ ἀριθμοὶ

48×4   24×4

ἐπειδὴ δὲ ὁ 48 διαιρεῖται διὰ 24, διὰ τοῦτο καὶ ὁ 48×4 διαιρεῖται διὰ 24×4 καὶ οὕτω ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 336×4, 168×4, 96×4 θὰ εἶναι 24×4.

208. *Θεώρημα. Ἐὰν δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ διαιρεθῶσι διά τινος ἀριθμοῦ καὶ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν διαιρεῖται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.*

Λέγω π.χ. ὅτι, τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου τῶν ἀριθμῶν 336, 168 καὶ 96 ὄντος 24, ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν πηλίκων τῆς διαιρέσεως τούτων διὰ 4, ἤτοι τῶν ἀριθμῶν 84, 42 καὶ 24 θὰ εἶναι 24:4 ἤτοι 6.

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου, εὑρίσκομεν πρῶτον τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τῶν ἀριθμῶν 336, 168 καὶ 96, ἤτοι ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς

336	168	96
48	72	96
48	24	

Γνωρίζομεν δὲ ὅτι, ἂν τοὺς διαιρετέους 336, 168 καὶ τὸν διαιρέτην 96 διαιρέσωμεν διά τινος ἀριθμοῦ καὶ ἔστω τοῦ 4, ὅτε προκύπτουσιν οἱ ἀριθμοὶ 336:4, 168:4 καὶ 96:4, τότε καὶ τὰ ὑπόλοιπα αὐτῶν 48 καὶ 72 θὰ διαιρεθῶσι διὰ 4 (§ 169), ἤτοι θὰ ἔχωμεν

336:4	168:4	96:4
48:4	72:4	96:4

ἐπειδὴ δὲ ὁ μὲν ἀριθμὸς 96 διαιρεθεὶς διὰ 48 ἔδωκεν ὑπόλοιπον *μηδέν*, ὁ δὲ 72 ἔδωκεν ὑπόλοιπον 24, διὰ τοῦτο, ὁ μὲν 96:4 διὰ 48:4 θὰ δώσῃ ὑπόλοιπον 0 (§ 169 Σημ.), ὁ δὲ 72:4 διὰ 48:4 θὰ δώσῃ ὑπόλοιπον 24:4 (§ 169), ἤτοι 6.

Ὅθεν βλέπομεν, ὅτι καὶ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν 24 διῃρέθη διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ 4.

209. *Πόρισμα. Ἐὰν δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ διαιρεθῶσι διὰ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν, τὰ πηλίκα θὰ εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.*

Διότι θὰ ἔχωσι μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τὴν μονάδα.

210. *Παρατήρησις.* Στηριζόμενοι εἰς τὸ θεώρημα τοῦτο δυνάμεθα νὰ διευκολυνθῶμεν εἰς τὴν ἀναζήτησιν τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν διακρίνομεν κοινόν τινα διαιρέτην τῶν δοθέντων ἀριθμῶν. Διότι διαιροῦντες τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς διὰ τοῦ κοινοῦ τούτου διαιρέτου, εὑρίσκομεν ἀριθμοὺς μικροτέρους, ὧν ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης εὑρίσκεται εὐχερέστερον. Τοῦτον δὲ πολλαπλασιάζοντες ἔπειτα, ἐπὶ τὸν εἰρημένον κοινὸν διαιρέτην, εὑρίσκομεν τὸν ζητούμενον μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Ἐφαρμογή. Νὰ εὑρεθῇ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 360, 900, 240.

Διαιροῦμεν πρῶτον τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς διὰ 10 καὶ εἶτα εὑρίσκομεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τῶν προκυπτόντων πηλίκων 36, 90 καὶ 24. Τούτων δὲ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης εὑρίσκεται ὅτι εἶναι ὁ 6. Ἑπομένως τῶν δοθέντων ἀριθμῶν 360, 900 καὶ 240 ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης εἶναι ὁ ἀριθμὸς 6×10, ἤτοι ὁ 60.

211. *Θεώρημα. Οἱ κοινοὶ διαιρέται δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν εἶναι μόνον οἱ διαιρέται τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν.*

Διότι, πᾶς ἀριθμὸς διαιρῶν δύο ἢ περισσοτέρους ἀριθμοὺς διαιρεῖ καὶ τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην αὐτῶν (§ 208). Οὐδεὶς δὲ ἐπὶ πλέον ἀριθμὸς διαιρεῖ μόνον τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην, διότι πᾶς ἀριθμὸς διαιρῶν τοῦτον θὰ διαιρῇ καὶ ἐκείνους, ὡς πολλαπλάσια τούτου.

Θεωρήματα ἐπὶ τῶν κοινῶν πολλαπλασίων.

212. *Θεώρημα. Ἐὰν ἀριθμός τις διαιρῇ τὸ γινόμενον δύο ἄλλων ἀριθμῶν καὶ εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν ἕνα τούτων, θὰ διαιρῇ τὸν ἕτερον.*

Ἔστω π. χ. ὅτι τὸ γινόμενον $A\times B$ διαιρεῖται ὑπ' ἀριθμοῦ τινος

Π, ὅστις εἶναι *πρῶτος* πρὸς τὸν Α, λέγω ὅτι ὁ Π θὰ διαιρῇ τὸν Β.

Διότι, ἐπειδὴ ὁ Α καὶ Π εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἄρα θὰ ἔχωσι μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τὴν *μονάδα*.

Ἐὰν δὲ τὸν Α καὶ Π πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ Β, τότε καὶ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν 1 θὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν Β (§ 207), ἤτοι οἱ ἀριθμοὶ

$$A\times B \text{ καὶ } \Pi\times B \text{ θὰ ἔχωσι τὸν } B, \text{ μέγιστον κοινὸν διαιρέτην}$$

Ἐπειδὴ δὲ ὁ Π διαιρεῖ τὸ γινόμενον $A\times B$ *ἐξ ὑποθέσεως*, τὸ δὲ $\Pi\times B$ *ὡς πολλαπλάσιόν του*, διὰ τοῦτο θὰ διαιρῇ καὶ τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην αὐτῶν, ἤτοι τὸν Β (§ 211).

213. *Θεώρημα Τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον δύο ἀριθμῶν εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ ἑνὸς τούτων ἐπὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἑτέρου διὰ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν.*

Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ Α καὶ Β. Ὡς γνωστόν, πᾶν κοινὸν πολλαπλάσιον ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν, ἑπομένως καὶ τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τοῦ Α καὶ Β, δέον νὰ εἶναι διαιρετὸν δι' ἑκάστου τούτων (§ 178). Καὶ ἵνα μὲν εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ Α πρέπει νὰ εἶναι πολλαπλάσιον τούτου, ἤτοι νὰ εἶναι τῆς μορφῆς $A\times\Pi$ (§ 117). Ἐπειδὴ δὲ τοῦτο, δέον νὰ εἶναι πολλαπλάσιον καὶ τοῦ Β πρέπει τὸ Π νὰ προσδιορισθῇ καταλλήλως, ὥστε τὸ $A\times\Pi$ νὰ διαιρεῖται καὶ διὰ τοῦ Β, ἤτοι

$$A\times\Pi \text{ πρέπει νὰ διαιρῆται διὰ } B$$

Καλοῦντες δὲ Μ τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τοῦ Α καὶ Β καὶ καλοῦντες A' καὶ B' τὰ πηλίκα τῆς διαιρέσεως τῶν ἀριθμῶν τούτων διὰ Μ ἔχομεν $A=A'\times M$ καὶ $B=B'\times M$, ἅτινα ἀντικαθιστῶντες ἀνωτέρω ἀντὶ τοῦ Α καὶ Β εὑρίσκομεν ὅτι

$$A'\times M\times\Pi \text{ πρέπει νὰ διαιρῆται διὰ } B'\times M$$

καὶ διαιροῦντες διαιρετέον καὶ διαιρέτην διὰ Μ ἔχομεν (§ 169 Σημ.) ὅτι

$$A'\times\Pi \text{ πρέπει νὰ διαιρῆται διὰ } B'$$

Καὶ ἐπειδὴ A' καὶ B' εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (§ 209) καὶ ἐπειδὴ B' πρέπει νὰ διαιρῇ τὸ γινόμενον $A'\times\Pi$ καὶ εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν A', διὰ τοῦτο πρέπει νὰ διαιρῇ τὸν ἕτερον Π (§ 212). Δι' ὃ δέον ὁ Π νὰ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ B', ἤτοι $\Pi=B'\times P$. Ταύτην δὲ τὴν τιμὴν τοῦ Π ἀντικαθιστῶντες ἀνωτέρω εὑρίσκομεν ὅτι

$$A'\times B'\times P \text{ πρέπει νὰ διαιρῆται διὰ } B'$$

πολλαπλασιάζοντες δὲ ἐπὶ Μ διαιρετέον καὶ διαιρέτην (§ 164 Σημ.) εὑρίσκομεν ὅτι

$$Α' \times Β' \times Μ \times Ρ \text{ πρέπει νὰ διαιρῆται διὰ } Β' \times Μ$$

ἢ καὶ ἐπειδὴ $Α' \times Μ = Α$ καὶ $Β' \times Μ = Β$, διὰ τοῦτο δέον καὶ τὸ

$$Α' \times Β \times Ρ \text{ καὶ } Β' \times Α \times Ρ \text{ νὰ διαιρῆται διὰ } Β$$

Ἐπειδὴ δὲ τὸ $Α' \times Β \times Ρ$ καὶ $Β' \times Α \times Ρ$, ἅτινα διαιροῦνται ὑπὸ τοῦ Β, προέκυψαν ἐκ τοῦ $Α \times Π$, ὅπερ διαιρεῖται ὑπὸ τοῦ Α, μετὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ Π καταλλήλως, ὥστε τὸ $Α \times Π$ νὰ διαιρῆται καὶ διὰ τοῦ Β, διὰ τοῦτο ἑκάτερον τῶν $Α' \times Β \times Ρ$ καὶ $Β' \times Α \times Ρ$ διαιρεῖται ὑπὸ τοῦ Α καὶ Β, ἄρα εἶναι *κοινὸν πολλαπλάσιον* τοῦ Α καὶ Β (§ 179). Ἑπομένως, ἵνα ἐκ τούτων λάβωμεν τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον πρέπει εἰς τὸν Ρ νὰ δώσωμεν τὴν ἐλαχίστην τιμήν, ἥτις εἶναι ἡ *μονάς*, ὅτε ἐκ μὲν τοῦ $Α' \times Β \times Ρ$ προκύπτει τὸ $Α' \times Β$, ἐκ δὲ τοῦ $Β' \times Α \times Ρ$ προκύπτει τὸ $Β' \times Α$, ἄρα ἑκάτερον τῶν $Α' \times Β$ καὶ $Β' \times Α$ εἶναι τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν δοθέντων ἀριθμῶν Α καὶ Β.

214. *Πόρισμα. Κοινὰ πολλαπλάσια δύο ἀριθμῶν εἶναι μόνα τὰ πολλαπλάσια τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου αὐτῶν.*

Διότι οἱ τύποι $Α' \times Β \times Ρ$ καὶ $Β' \times Α \times Ρ$, οἵτινες σημαίνουσιν, ὡς εἴδομεν, τὰ κοινὰ πολλαπλάσια τοῦ Α καὶ Β παριστῶσι συγχρόνως, ὡς βλέπομεν, καὶ τὰ πολλαπλάσια τοῦ $Α' \times Β$ καὶ $Β' \times Α$ (§ 115), ὧν ἑκάτερον εἶναι τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τοῦ Α καὶ Β.

215. *Ἐφαρμογή. Εὑρεῖν τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν 18 καὶ 45.*

Εὑρίσκομεν πρῶτον τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τοῦ 18 καὶ 45 καὶ ὅστις εἶναι 9. Εἶτα διαιροῦμεν τὸν ἕνα ἐξ αὐτῶν, ἔστω τὸν 18, διὰ 9 καὶ μὲ τὸ πηλίκον 2 πολλαπλασιάζομεν τὸν ἕτερον ἀριθμὸν 45 καὶ οὕτως ἔχομεν τὸ γινόμενον 90, ὅπερ θὰ εἶναι τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τοῦ 18 καὶ 45.

216. *Θεώρημα. Τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν δύο ἐξ αὐτῶν διὰ τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου αὐτῶν.*

Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ

$$Α, Β, Γ, Δ$$

Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς Α καὶ Β διὰ τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου αὐτῶν, ἔστω Ε ἔχομεν

Ε, Γ, Δ

λέγω ἤδη ὅτι, οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι ἔχουσι τὰ αὐτὰ κοινὰ πολλαπλάσια πρὸς τοὺς προηγουμένους.

Διότι πᾶν κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν Α, Β, Γ, Δ εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον καὶ τῶν Ε, Γ, Δ, διότι ἐὰν π. χ. ὁ ἀριθμὸς Κ εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον τοῦ Α καὶ Β θὰ εἶναι καὶ *πολλαπλάσιον* τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου αὐτῶν Ε (§ 214), εἶναι δὲ ἐξ ὑποθέσεως καὶ πολλαπλάσιον τῶν Γ καὶ Δ, ἄρα θὰ εἶναι *κοινὸν πολλαπλάσιον* τῶν ἀριθμῶν Ε, Γ, Δ. Οὐδὲν δὲ *ἐπὶ πλέον* κοινὸν πολλαπλάσιον ἔχουσιν οἱ ἀριθμοὶ Ε, Γ, Δ, διότι, ἂν π. χ. ὁ Θ εἶναι *κοινὸν πολλαπλάσιον* τούτων, θὰ εἶναι οὗτος κοινὸν πολλαπλάσιον καὶ τῶν Α, Β, Γ, Δ. Διότι, ἐπειδὴ ὁ Α καὶ Β διαιρεῖ τὸν Ε (§ 178), θὰ διαιρῇ καὶ τὸ Θ, ὡς πολλαπλάσιον τούτου (§ 214), ἄρα τὸ Θ θὰ εἶναι καὶ πολλαπλάσιον τοῦ Α καὶ Β, ἐπειδὴ δὲ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι καὶ πολλαπλάσιον τῶν Γ καὶ Δ, διὰ τοῦτο θὰ εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν Α, Β, Γ, Δ. Ἑπομένως οἱ ἀριθμοὶ Α, Β, Γ, Δ καὶ Ε, Γ, Δ ἔχουσι τὰ αὐτὰ κοινὰ πολλαπλάσια, ἄρα καὶ τὸ αὐτὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον.

217. *Ἡ εὕρεσις τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν δύναται ν' ἀναχθῇ εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου δύο ἀριθμῶν.*

Ἔστωσαν π. χ. οἱ ἀριθμοὶ

Α, Β, Γ, Δ.

Δυνάμεθα, ὡς γνωστόν, ν' ἀντικαταστήσωμεν ἐνταῦθα δύο ἀριθμοὺς καὶ ἔστω τοὺς Α καὶ Β διὰ τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου αὐτῶν Ε, ὅτε ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν (§ 216)

Ε, Γ, Δ

Εἰς τούτους δὲ δυνάμεθα ἐπίσης ν' ἀντικαταστήσωμεν δύο ἀριθμοὺς καὶ ἔστω τοὺς Ε καὶ Γ διὰ τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου αὐτῶν Σ (§ 216) καὶ οὕτως ἔχομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν Σ καὶ Δ.

218. *Ἐφαρμογή. Εὑρεῖν τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν 18, 36 καὶ 45.*

Εὑρίσκομεν πρῶτον τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τῶν ἀριθμῶν 18 καὶ 36 καὶ ὅστις εἶναι ὁ 18.

Εἶτα δὲ ἀντικαθιστῶμεν τοὺς ἀριθμοὺς 18 καὶ 36 διὰ τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου αὐτῶν καὶ ὅπερ εἶναι $18 \times 36:18$ ἤτοι 1×36 ἤτοι 36 (§ 213).

Τέλος δὲ εὑρίσκομεν τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τοῦ 36 καὶ 45, ὧν μέγιστος κοινὸς διαιρέτης εἶναι ὁ 9 καὶ ὅπερ ἑπομένως εἶναι $36 \times 45:9$, ἤτοι 36×5, ἤτοι 180.

Σημ. Εὑρεθέντος τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου τῶν 18, 36 καὶ 45 δυνάμεθα ἐκ τούτου νὰ εὕρωμεν καὶ τὰ κοινὰ πολλαπλάσια τῶν εἰρημένων ἀριθμῶν, ἀρκεῖ τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τούτων, δηλ. τὸν ἀριθμὸν 180, νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 2, 3, 4, καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, ὅτε εὑρίσκομεν τὰ κοινὰ πολλαπλάσια 360, 540, 720 καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Περὶ πρώτων ἀριθμῶν.

Ὁρισμοί.

219. Τοὺς ἀριθμοὺς διακρίνομεν εἰς *πρώτους* καὶ *συνθέτους*.

220. *Πρῶτος* λέγεται πᾶς ἀριθμός, ὅστις διαιρεῖται μόνον ὑπὸ τοῦ ἑαυτοῦ του καὶ τῆς μονάδος.

Π.χ. Ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 5, 7, 11 κ.τ.λ. λέγεται *πρῶτος*.

221. *Σύνθετος* λέγεται πᾶς ἀριθμός, ὅστις διαιρεῖται καὶ ὑπὸ ἄλλου ἀριθμοῦ, πλὴν τοῦ ἑαυτοῦ του καὶ τῆς μονάδος.

Π. χ. Ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν 4, 6, 15 κ.τλ. λέγεται *σύνθετος*.

Θεωρήματα ἐπὶ τῆς ἀναλύσεως τῶν ἀριθμῶν εἰς τοὺς πρώτους παράγοντας.

222. *Θεώρημα.* *Πᾶς ἀριθμὸς διαιρεῖται ὑπὸ πρώτου τινος ἀριθμοῦ.*

Ἔστω π. χ. ὁ ἀριθμὸς Α. Ἐὰν οὗτος εἶναι *πρῶτος*, τότε διαιρεῖται ὑπὸ τοῦ ἑαυτοῦ του, ἐὰν δὲ εἶναι *σύνθετος* ἀριθμός, τότε, ἔστω Π, ὁ μικρότερος τῶν διαιρετῶν του, λέγω ὅτι ὁ Π εἶναι πρῶτος ἀριθμός.

Διότι, ἂν ὁ Π δὲν εἶναι πρῶτος ἀριθμός, θὰ διαιρῆται ὑπό τινος ἀριθμοῦ ρ μικροτέρου του, οὗτος δέ, ὡς διαιρῶν τὸν Π θὰ διαιρῇ καὶ τὸν Α, ὡς ὄντα πολλαπλάσιον τοῦ Π (§ 179). Ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἀδύνατον, διότι ὁ Π ὑπετέθη ὁ μικρότερος τῶν διαιρετῶν τοῦ Α. Ἑπομένως ὁ Π, ὡς μὴ διαιρούμενος ὑπ' ἄλλου ἀριθμοῦ, εἶναι *πρῶτος ἀριθμός*.

223. *Θεώρημα. Πᾶς σύνθετος ἀριθμὸς εἶναι γινόμενον παραγόντων πρώτων.*

Ἔστω π. χ. ὅτι ὁ ἀριθμὸς Α εἶναι σύνθετος. Ὡς γνωστὸν (§ 222), οὗτος θὰ διαιρῆται ὑπό τινος *πρώτου* ἀριθμοῦ, ἔστω Δ. Καλοῦντες δὲ Π τὸ πηλίκον θὰ ἔχωμεν

$$A = \Delta \times \Pi$$ ἐκ τῶν τῆς [illegible] διαιρέσεων

Καὶ ἂν μὲν ὁ Π εἶναι *πρῶτος ἀριθμός*, τότε τὸ θεώρημα ἀπεδείχθη, διότι οὕτω ἀνελύθη ὁ Α εἰς τοὺς πρώτους παράγοντας Δ καὶ Π. Ἂν δὲ ὁ Π εἶναι σύνθετος ἀριθμός, θὰ διαιρῆται ὑπό τινος πρώτου ἀριθμοῦ (§ 222), ὅστις ἔστω ὁ Δ′. Καλοῦντες δὲ Π′ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως Π:Δ′ καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἀνωτέρω ἰσότητα τὸ Π διὰ τοῦ ἴσου του $\Delta' \times \Pi'$ ἔχομεν

$$A = \Delta \times \Delta' \times \Pi'$$

Καὶ ἂν μὲν ὁ Π′ εἶναι πρῶτος, τὸ θεώρημα ἀπεδείχθη, ἂν δὲ εἶναι σύνθετος, θὰ διαιρῆται ὑπό τινος πρώτου ἀριθμοῦ, ὅστις ἔστω ὅτι εἶναι ὁ Δ″. Καλοῦντες δὲ Π″ τὸ πηλίκον τοῦ Π′:Δ″ καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἀνωτέρω ἰσότητα τὸ Π′ διὰ τοῦ ἴσου του $\Delta'' \times \Pi''$ ἔχομεν

$$A = \Delta \times \Delta' \times \Delta'' \times \Pi''$$

Καὶ ἂν μὲν ὁ Π″ εἶναι πρῶτος, τότε τὸ θεώρημα ἀπεδείχθη, ἄλλως θὰ ἐξακολουθήσωμεν πάλιν κατὰ τὸν ἀνωτέρω τρόπον. Λέγω δὲ ὅτι θὰ ἐπέλθῃ στιγμή, καθ' ἣν καὶ ὁ τελευταῖος τῶν παραγόντων θὰ εἶναι πρῶτος. Διότι ἂν δὲν συνέβαινε ποτὲ τοῦτο, τότε αἱ διαιρέσεις θὰ ἐξηκολούθουν ἐπ' ἄπειρον, ὅπερ ἀδύνατον, διότι τὰ πηλίκα Π, Π′, Π″ κ.τ.λ. εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοὶ βαίνοντες ἐλαττούμενοι, ἀλλὰ μὴ δυνάμενοι νὰ γίνωσι μικρότεροι τοῦ 2 (διότι τὸ μικρότερον πηλίκον παντὸς συνθέτου ἀριθμοῦ διαιρουμένου δι' οἱουδήποτε ἀριθμοῦ πλὴν τοῦ ἑαυτοῦ του εἶναι ὁ ἀριθμὸς 2). Καὶ ἑπομένως δὲν εἶναι δυνατὸν ἀκέραιοι ἀριθμοὶ *ἄπειροι τὸ πλῆθος* καὶ μὴ μικρότεροι τοῦ 2 νὰ δώσωσι γινόμενον τὸν ὡρισμένον ἀριθμὸν Α. Ἄρα θὰ ἐπέλθῃ στιγμή, καθ' ἣν καὶ ὁ τελευταῖος τῶν παραγόντων, εἰς οὓς ἀναλύεται ὁ Α δὲν θὰ διαιρῆται ὑπ' ἄλλου ἀριθμοῦ, ἤτοι θὰ εἶναι πρῶτος, ὅτε θὰ προκύπτῃ ὁ Α ἀναλελυμένος εἰς γινόμενον παραγόντων πρώτων.

Παρατήρησις. Ἐν τῇ ἀποδείξει τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος, οἱ ἀριθμοὶ Δ, Δ′, Δ″ κ.τ.λ. ὑπετέθησαν ἁπλῶς πρῶτοι ἀριθμοί, οὐχὶ ὅμως καὶ διάφοροι μεταξύ των, δι' ὃ ὁ αὐτὸς πρῶτος παράγων δύναται νὰ ἐπαναλαμβάνηται πολλάκις.

Π. χ. Ἀναλύοντες τὸν 60 εἰς τοὺς πρώτους παράγοντας κατὰ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα εὑρίσκομεν

$$60=2\times30=2\times2\times15=2\times2\times3\times5 \text{ ἤτοι } 2^2\times3\times5.$$

224. *Θεώρημα*. *Οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ εἶναι ἄπειροι τὸ πλῆθος.*

Ἔστω ὅτι οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ εἶναι ὡρισμένοι τὸ πλῆθος καὶ εἶναι *κατὰ σειρὰν μεγέθους* οἱ ἑξῆς

$$2,\ 3,\ 5,\ 7 \ldots\ldots N$$

τῶν ὁποίων N εἶναι ὁ μεγαλήτερος.

Λέγω ὅτι ἐκτὸς τούτων ὑπάρχει καὶ ἕτερος πρῶτος ἀριθμὸς μεγαλήτερος τοῦ N. Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου εὑρίσκω τὸ γινόμενον τῶν δοθέντων *πρώτων* ἀριθμῶν

$$2\times3\times5\times7\times\ldots\times N$$

εἰς τὸ γινόμενον δὲ τοῦτο προσθέτω μίαν μονάδα, τὸ δὲ ἐξαγόμενον παριστῶ διὰ τοῦ γράμματος Π ἤτοι

$$2\times3\times5\times7\times\ldots\times N+1=\Pi$$

Ἐὰν μὲν ὁ Π εἶναι *πρῶτος* ἀριθμός, τότε εὑρέθη οὕτω καὶ ἕτερος
πρῶτος ἀριθμὸς μεγαλήτερος ἑκάστου τῶν 2, 3, 5, 7,... N, διότι
ἀποτελεῖται ἐκ τοῦ γινομένου τούτων, ἀφ' οὗ προσετέθη καὶ μία
μονάς, ὥστε δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι ἴσος τινὶ ἐξ αὐτῶν. Ἂν δὲ
εἶναι σύνθετος, τότε θὰ διαιρῆται ὑπὸ πρώτου τινος ἀριθμοῦ (§ 222),
ὅστις λέγω, ὅτι θὰ εἶναι διάφορος τῶν ἤδη γνωστῶν πρώτων ἀριθ-
μῶν 2, 3, 5, 7... N. Διότι ἂν ἦτο ἴσος τινι τούτων, τότε θὰ διή-
ρει τὸ γινόμενον τούτων 2×3×5×7×....×N, ἐπειδὴ δὲ διαιρεῖ καὶ
τὸν Π ἐξ ὑποθέσεως, θὰ διήρει καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν 1, ὅπερ
ἀδύνατον. Ἄρα ὁ πρῶτος ἀριθμὸς ὁ διαιρῶν τὸν Π θὰ εἶναι διάφο-
ρος τῶν πρώτων ἀριθμῶν 2, 3, 5, 7,.....N καὶ ἐπομένως μεγαλή-
τερος τοῦ N, διότι ἐλήφθησαν πάντες οἱ μικρότεροι τοῦ N *πρῶτοι*
ἀριθμοί. Ἐπειδὴ δὲ ὁσουσδήποτε καὶ ἂν ὑποθέσωμεν τοὺς πρώτους
ἀριθμοὺς 2, 3, 5, 7....N ἀπεδείχθη, ὅτι ὑπάρχει καὶ ἄλλος μεγα-
λήτερος τοῦ μεγίστου ἐξ αὐτῶν N, ἄρα οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ εἶναι ἄπει-
ροι τὸ πλῆθος.

225. *Θεώρημα. Καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν ἀναλύσωμεν ἀριθμόν τινα εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας θὰ εὕρωμεν τοὺς αὐτοὺς πρώτους παράγοντας μὲ τοὺς αὐτοὺς ἐκθέτας*

Διότι, ἂν π. χ. ἀριθμός τις Κ ἀναλυθεὶς εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας *κατά τινα τρόπον* ἔδωκε μεταξὺ τῶν ἄλλων πρώτων παραγόντων καὶ τὸν πρῶτον παράγοντα 7, λέγω ὅτι τοῦτον θὰ δώσῃ ὁ Κ καὶ ἂν ἀναλυθῇ *κατ' ἄλλον οἱονδήποτε τρόπον* εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας.

Διότι, ἂν τοῦτο δὲν συνέβαινε, τότε τὸ μὲν γινόμενον τῶν πρώ των παραγόντων τὸ ἔχον τὸν παράγοντα 7 θὰ διῃρεῖτο ὑπὸ τοῦ 7, ὡς πολλαπλάσιον τούτου, τὸ δὲ ἕτερον, ὡς μὴ περιέχον τὸν παράγοντα 7, δὲν εἶναι πολλαπλάσιον τούτου, δι' ὃ δὲν θὰ διῃρεῖτο ὑπ' αὐτοῦ (§ 179), ὅπερ ἄτοπον, διότι ἀμφότερα ταῦτα τὰ γινόμενα ἰσοῦνται τῷ Κ. Ἄρα καὶ κατὰ ταύτην τὴν ἀνάλυσιν, δέον να εὑρεθῇ ὁ παράγων 7.

Προσέτι δὲ ὁσάκις εὑρεθῇ περιέχων ὁ Κ τὸν παράγοντα 7, ὅταν ἡ ἀνάλυσις ἐγένετο *κατά τινα τρόπον*, τοσάκις θὰ εὑρεθῇ περιέχων τὸν παράγοντα 7 καὶ ὅταν ἡ ἀνάλυσις γίνῃ *κατ' ἄλλον τινα τρόπον*.

Διότι, ἂν π. χ. ὁ Κ ἀναλυθεὶς εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας κατά τινα τρόπον ἔδωκε τὸν *πρῶτον* παράγοντα 7, *τρεῖς φοράς*. κατ' ἄλλον δέ τινα τρόπον ἀναλυθεὶς ἔδωκε τὸν πρῶτον παράγοντα 7, *τέσσαρας* φοράς, τὸ τοιοῦτον θὰ ἦτο ἄτοπον. Διότι, ἐὰν διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ ἴσα ταῦτα γινόμενα διαδοχικῶς διὰ τοῦ 7, τρεῖς φοράς, θὰ προκύψωσι, ὡς γνωστόν, ἐξαγόμενα ἴσα (§ 168). Ἐκ τῶν ἴσων ὅμως τούτων ἐξαγομένων τὸ μὲν πρῶτον, ὡς μὴ περιέχον τὸν παράγοντα 7, δὲν θὰ διαιρῆται πλέον, ὡς εἴπομεν, ὑπὸ τοῦ 7, τὸ δὲ δεύτερον θὰ διαιρῆται ἅπαξ ἔτι ὑπὸ τοῦ 7, ὡς περιέχον ἅπαξ ἔτι τὸν παράγοντα 7, ὅπερ ἄτοπον. Ἄρα καὶ κατὰ ταύτην τὴν πρώτην ἀνάλυσιν, δέον νὰ εὑρεθῇ ἅπαξ ἔτι ὁ παράγων 7.

Ἐντεῦθεν συνάγομεν ὅτι, καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν ἀναλυθῇ ἀριθμός τις Κ εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας θὰ δώσῃ τοὺς αὐτοὺς πρώτους παράγοντας καὶ μὲ τοὺς αὐτοὺς ἐκθέτας.

Σχηματισμὸς τοῦ πίνακος τῶν πρώτων ἀριθμῶν.

226. Ἐπειδὴ οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ εἶναι οἱ παράγοντες τῶν συνθέ-

των (§ 223), διὰ τοῦτο εἶναι χρήσιμον νὰ γνωρίζωμεν, ἂν ἀριθμός τις εἶναι πρῶτος. Πρὸς τοῦτο δὲ βεβαιούμεθα διὰ διαιρέσεως δηλ. ἐξετάζοντες, ἂν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς διαιρῆται καὶ ὑπὸ ἄλλου ἀριθμοῦ, πλὴν τοῦ ἑαυτοῦ του καὶ τῆς μονάδος. Ἀλλ' ἐπειδὴ αἱ ἀπαιτούμεναι δοκιμαί, ὅπως βεβαιωθῶμεν, ὅτι ἀριθμός τις δὲν διαιρεῖται ὑπ' ἄλλου ἀριθμοῦ εἶναι ἐκτεταμέναι, ὅταν ὁ ἀριθμὸς εἶναι ὁπωσδήποτε μέγας, διὰ τοῦτο κατεσκευάσθησαν πίνακες, εἰς οὓς ἀναγράφονται οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ ἀπὸ τῆς μονάδος μέχρι ὁρίου τινος. Ὁ τρόπος δὲ καθ' ὃν εὑρίσκομεν τοὺς πρώτους ἀριθμοὺς καὶ ὅστις λέγεται *κόσκινον τοῦ Ἐρατοσθένους* εἶναι ὁ ἑξῆς.

Γράφομεν τοὺς ἀριθμοὺς κατὰ σειρὰν ἀπὸ τῆς μονάδος μέχρις ὁρίου τινος καὶ ἔστω π. χ. μέχρι τοῦ ἀριθμοῦ 1360 ὡς ἑξῆς.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 16,......1360

Ἔπειτα διαγράφομεν πάντα τὰ πολλαπλάσια τοῦ 2, *διότι ταῦτα θὰ εἶναι σύνθετοι ἀριθμοί*. Πρὸς τοῦτο δὲ ἀρκεῖ νὰ διαγράψωμεν πάντα *δεύτερον ἀριθμόν*, ἀρχόμενοι τῆς μετρήσεως ἀπὸ τοῦ ἑπομένου ἀριθμοῦ 3. Καὶ οὕτω διαγράφονται οἱ ἀριθμοὶ 4, 6, 8, 10, κ.τ.λ.

Ἔπειτα διαγράφομεν πάντα τὰ πολλαπλάσια τοῦ 3, ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ τετραγώνου τοῦ 3 δηλ. 3×3 ἤτοι 9, διότι τὸ προηγούμενον πολλαπλάσιον τοῦ 3, ἤτοι τὸ 3×2, ἤτοι 6 ἔχει διαγραφεῖ, ὡς πολλαπλάσιον τοῦ 2. Ἀπὸ δὲ τοῦ 9 διαγράφομεν πάντα *τρίτον ἀριθμόν*, ἀρχόμενοι τῆς μετρήσεως ἀπὸ τοῦ ἑπομένου ἀριθμοῦ 10. Οὕτω δὲ διαγράφονται οἱ ἀριθμοὶ 12, 15, 18, 21 κ.τ.λ. ἐξ ὧν μερικοὶ διαγράφονται ἤδη ἐκ δευτέρου. Τοῦτο ὅμως οὐδεμίαν βλάβην ἐπιφέρει.

Μετὰ τὴν διαγραφὴν πάντων τῶν πολλαπλασίων τοῦ 3 παρατηροῦμεν ὅτι, ὁ ἀμέσως ἐρχόμενος *πρῶτος ἀριθμὸς* εἶναι ὁ 5. Διὰ τοῦτο διαγράφομεν πάντα τὰ πολλαπλάσια τοῦ 5, ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ τετραγώνου 5×5 ἤτοι 25, διότι τὰ προηγούμενα πολλαπλάσια τοῦ 5 ἤτοι τὰ 5×2, 5×3, 5×4 εἶναι ἤδη διαγεγραμμένα, ὡς πολλαπλάσια τῶν μικροτέρων τοῦ 5 πρώτων ἀριθμῶν (δηλ. τοῦ 2 καὶ 3). Ἀπὸ δὲ τοῦ 25 καὶ ἐφεξῆς διαγράφομεν πάντα *πέμπτον* ἀριθμόν, ἀρχόμενοι τῆς μετρήσεως ἀπὸ τοῦ ἑπομένου ἀριθμοῦ 26. Οὕτω δὲ διαγράφονται οἱ ἀριθμοὶ 30, 35, 40 κ.τ.λ. Ἂν δὲ οὕτω διαγράφονται ἐκ δευτέρου ἢ καὶ ἐκ τρίτου ἀριθμοὶ διαγραφέντες ἤδη, ὡς πολλαπλάσια μικροτέρων τοῦ 5 *πρώτων ἀριθμῶν*, τὸ τοιοῦτον οὐδεμίαν βλάβην ἐπιφέρει.

Μετὰ τὴν διαγραφὴν πάντων τῶν πολλαπλασίων τοῦ 5 παρατηροῦμεν ὅτι, ὁ ἀμέσως ἐρχόμενος πρῶτος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 7. Διὰ τοῦτο διαγράφομεν πάντα τὰ πολλαπλάσια τοῦ 7 ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ τετραγώνου 7×7 ἤτοι 49, διότι τὰ προηγούμενα πολλαπλάσια τοῦ 7 ἤτοι τὰ 7×2, 7×3, 7×4, 7×5, 7×6, ἔχουσι διαγραφεῖ, ὡς πολλαπλάσια τῶν μικροτέρων τοῦ 7 πρώτων ἀριθμῶν δηλ. τοῦ 2, 3 καὶ 5. Ἀπὸ δὲ τοῦ 49 καὶ ἐφεξῆς διαγράφομεν πάντα ἕβδομον ἀριθμόν, ἀρχόμενοι τῆς μετρήσεως ἀπὸ τοῦ ἑπομένου τοῦ 49 ἀριθμοῦ, ἤτοι ἀπὸ τοῦ 50.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἐξακολουθοῦντες διαγράφομεν τὰ πολλαπλάσια τοῦ ἑπομένου πρώτου ἀριθμοῦ 11, ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ τετραγώνου 11×11 καὶ διαγράφοντες μετὰ τοῦτον πάντα *ἐνδέκατον* ἀριθμόν. Ἑπομένως, ὅπως εὕρωμεν πάντας τοὺς πρώτους ἀριθμοὺς ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ 1360, ἀρκεῖ νὰ προχωρήσωμεν κατὰ τὸν ἀνωτέρω τρόπον μέχρι τοῦ *πρώτου ἀριθμοῦ*, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον ὑπερβαίνει τὸν ἀριθμὸν 1360, εἶναι δὲ οὗτος ὁ πρῶτος ἀριθμὸς 37, διότι τούτου τὸ τετράγωνον εἶναι 1369, (ἐν ᾧ τοῦ προηγουμένου του 31 εἶναι 31×31 ἤτοι 961). Πάντες δὲ οἱ πρὸ τοῦ ἀριθμοῦ 1360 μὴ διαγεγραμμένοι ἀριθμοὶ εἶναι οἱ πρῶτοι ἀριθμοί, οἱ περιεχόμενοι μεταξὺ τοῦ 1 καὶ 1360, διότι ἂν δὲν ἦσαν τοιοῦτοι θὰ διεγράφοντο, ὡς πολλαπλάσια μικροτέρων τοῦ 37 *πρώτων* ἀριθμῶν.

Κατὰ τὸν ἀνωτέρω λοιπὸν τρόπον βαίνοντες μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς πίνακα τῶν πρώτων ἀριθμῶν μέχρις οἱουδήποτε ἀριθμοῦ καὶ ἔστω μέχρι τοῦ ἀριθμοῦ 1010.

Πίναξ πρώτων ἀριθμῶν μέχρι τοῦ 1010.

1	59	139	233	337	439	557	653	769	883
2	61	149	239	347	443	563	659	773	887
3	67	151	241	349	449	569	661	787	907
5	71	157	251	353	457	571	673	797	911
7	73	163	257	359	461	577	677	809	919
11	79	167	263	367	463	587	683	811	929
13	83	173	269	373	467	593	691	821	937
17	89	179	271	379	479	599	701	823	941
19	97	181	277	383	487	601	709	827	947
23	101	191	281	389	491	607	719	829	953
29	103	193	283	397	499	613	727	839	967
31	107	197	293	401	503	617	733	853	971
37	109	199	307	409	509	619	739	857	977
41	113	211	311	419	521	631	743	859	983
43	127	223	313	421	523	641	751	863	991
47	131	227	317	431	541	643	757	877	997
53	137	229	331	433	547	647	761	881	1009

Ἀνάλυσις συνθέτου ἀριθμοῦ εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας.

227. Ἔστω π. χ. ὅτι πρόκειται ν' ἀναλυθῇ ὁ ἀριθμὸς 450900 εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας. Πρὸς τοῦτο ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς. Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς 450900 διαιρούμενος διὰ τοῦ *πρώτου ἀριθμοῦ* 2 δίδει πηλίκον 225450 ἔχομεν

$$450900=2\times225450$$

ὁ δὲ ἀριθμὸς 225450, ἐπειδὴ διαιρεῖται πάλιν διὰ τοῦ 2 καὶ δίδει πηλίκον 112725, διὰ τοῦτο, ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἀνωτέρω ἰσότητα τὸν 225450 διὰ τοῦ ἴσου του 2×112725 ἔχομεν

$$450900=2\times2\times112725$$

ὁ δὲ ἀριθμὸς 112725 δὲν διαιρεῖται πλέον διὰ τοῦ 2, ἀλλὰ διαιρεῖται διὰ τοῦ ἑπομένου πρώτου ἀριθμοῦ 3 καὶ δίδει πηλίκον 37575, ἑπομένως ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν προηγουμένην ἰσότητα τὸν 112725 διὰ τοῦ ἴσου του 3×37575 ἔχομεν

$$450900=2\times2\times3\times37575$$

ὁ δὲ ἀριθμὸς 37575, ἐπειδὴ διαιρεῖται πάλιν διὰ τοῦ 3 καὶ δίδει πηλίκον 12525, διὰ τοῦτο ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν προηγουμένην ἰσότητα τὸν 37575 διὰ τοῦ ἴσου του 3×12525 ἔχομεν

$$450900=2\times2\times3\times3\times12525$$

ὁ δὲ ἀριθμὸς 12525 διαιρεῖται πάλιν διὰ τοῦ 3 καὶ δίδει πηλίκον 4175, δι' ὃ θέτοντες εἰς τὴν προηγουμένην ἰσότητα ἀντὶ τοῦ 12525 τὸ ἴσον του 3×4175 ἔχομεν

$$450900=2\times2\times3\times3\times3\times4175$$

ὁ δὲ ἀριθμὸς 4175 δὲν διαιρεῖται πλέον διὰ τοῦ 3, ἀλλὰ διαιρεῖται διὰ τοῦ ἑπομένου πρώτου ἀριθμοῦ 5 καὶ δίδει πηλίκον 835, δι' ὃ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν προηγουμένην ἰσότητα τὸν 4175 διὰ τοῦ ἴσου του 5×835 ἔχομεν

$$450900=2\times2\times3\times3\times3\times5\times835$$

ὁ δὲ ἀριθμὸς 835 διαιρεῖται πάλιν διὰ τοῦ 5 καὶ δίδει πηλίκον 167, δι' ὃ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν προηγουμένην ἰσότητα τὸν ἀριθμὸν 835 διὰ τοῦ ἴσου του 5×167 ἔχομεν

$$450900=2\times2\times3\times3\times3\times5\times5\times167$$

ἐπειδὴ δὲ ὁ ἀριθμὸς 167 δὲν διαιρεῖται διὰ τοῦ ἑπομένου πρώτου ἀριθμοῦ 7, οὔτε διὰ τοῦ 11, οὔτε διὰ τοῦ 13 καὶ ἐπειδὴ τὸ τετράγωνον τοῦ 13 εἶναι ὁ ἀριθμὸς 169, ὅστις εἶναι ἀριθμὸς μεγαλήτερος τοῦ 167, διὰ τοῦτο ὁ ἀριθμὸς 167 εἶναι πρῶτος ἀριθμός.

Καὶ οὕτω ὁ ἀριθμὸς 450900 ἀναλυθεὶς εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας ἔδωκεν

$450900=2\times2\times3\times3\times3\times5\times5\times167$ ἤτοι $2^2\times3^3\times5^2\times167$

Διάταξις τῆς πράξεως.

450900	2
225450	2
112725	3
37575	3
12525	3
4175	5
835	5
167	167
1	

καὶ οὕτως εὕρωμεν ὅτι $450900=2^2\times3^3\times5^2\times167$.

Συντομίαι κατὰ τὴν ἀνάλυσιν τῶν συνθέτων ἀριθμῶν εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας.

228. *Ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν 10, 100, 1000 κ.τ.λ. ἀναλυόμενος εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας περιέχει τοσάκις τὸν 2 καὶ 5, ὅσα εἶναι τὰ μηδενικὰ ἐκ τῶν ὁποίων ἀκολουθεῖται ἡ μονάς,*

Διότι ὁ ἀριθμὸς 10 εἶναι ἴσος πρὸς 2×5. Ἕκαστος δὲ τῶν εἰρημένων ἀριθμῶν εἶναι γινόμενον τόσων 10, ὅσα εἶναι τὰ μηδενικά, ἐκ τῶν ὁποίων ἀκολουθεῖται ἡ μονάς.

Κατὰ ταῦτα ὁ $10000=2^4\times5^4$. Διότι $10000=10\times10\times10\times10$ $=2\times5\times2\times5\times2\times5\times2\times5=2^4\times5^4$.

229. *Πᾶς ἀριθμὸς λήγων εἰς μηδενικὰ ἀναλύεται συντομώτερον εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας, ἐὰν παραλείψωμεν τὰ πρὸς τὸ τέλος τοῦ ἀριθμοῦ μηδενικὰ καὶ ἀναλύσωμεν τὸν μένοντα ἀριθμόν· Ἀντὶ δὲ τῶν παραλειφθέντων μηδενικῶν, θέσωμεν τοσάκις τὸν παράγοντα 2 καὶ 5, ὅσα ἦσαν τὰ παραλειφθέντα μηδενικά.*

Διότι ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶναι γινόμενον τοῦ ἀπομένοντος ἀριθμοῦ μετὰ τὴν παράλειψιν τῶν πρὸς τὸ τέλος μηδενικῶν ἐπὶ τὴν μονάδα ἀκολουθουμένην ἐκ τῶν παραλειφθέντων μηδενικῶν.

Κατὰ ταῦτα ὁ ἀριθμὸς 45000 ἀναλύεται εἰς τὸν

$$45\times1000=5\times9\times2^3\times5^3=5\times3^2\times2^3\times5^3=2^3\times3^2\times5^4$$

Θεώρημα διαιρετότητος ἐπὶ ἀριθμῶν ἀναλελυμένων εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας.

230. Θεώρημα. *Ἐὰν ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς δι' ἄλλου, τότε εἰς τὸν διαιρετέον θὰ περιέχωνται πάντες οἱ πρῶτοι παράγοντες τοῦ διαιρέτου, εἰς οὓς οὗτος ἀναλύεται.*

231. Καὶ ἀντιστρόφως. *Ἂν εἰς τὸν διαιρετέον περιέχωνται πάντες οἱ πρῶτοι παράγοντες τοῦ διαιρέτου, ἡ διαίρεσις τούτων ἐκτελεῖται ἀκριβῶς.*

Διότι, καλοῦντες Δ τὸν διαιρετέον, δ τὸν διαιρέτην καὶ π τὸ πηλίκον τούτων, ἔχομεν

$$\Delta=\delta\times\Pi$$

Ἐντεῦθεν δὲ παρατηροῦμεν ὅτι ὁ Δ, ὡς ἴσος τῷ δ×Π, θ' ἀποτελῆται ἐκ τῶν πρώτων παραγόντων τοῦ δ καὶ τῶν πρώτων παραγόντων τοῦ Π. Ἑπομένως εἶναι προφανὲς ὅτι, εἰς τὸν Δ, ἤτοι εἰς τὸν διαιρετέον, θὰ περιέχωνται οἱ παράγοντες τοῦ δ, ἤτοι τοῦ διαιρέτου.

Καὶ ἀντιστρόφως. Ἂν δὲ ὁ διαιρετέος περιέχῃ πάντας τοὺς πρώτους παράγοντας τοῦ διαιρέτου, δύναται ὁ διαιρετέος ν' ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον δύο ἀριθμῶν, ἐξ ὧν ὁ εἷς ν' ἀποτελῆται ἐκ τῶν πρώτων παραγόντων τοῦ διαιρέτου, ὅτε ὁ ἕτερος θὰ δηλοῖ προφανῶς τὸ πηλίκον (§ 149).

Κατὰ ταῦτα ὁ ἀριθμὸς $2^3\times5^2\times7\times11^2$ εἶναι διαιρετὸς διὰ $2\times5^2\times11$.

Διότι $2^3\times5^2\times7\times11^2=(2\times5^2\times11)\times(2^2\times7\times11)$.

Καὶ ἐπειδὴ ὁ $(2\times5^2\times11)$ εἶναι ὁ διαιρέτης, ἄρα ὁ $(2^2\times7\times11)$ εἶναι τὸ πηλίκον (§ 149).

Εὕρεσις τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου διὰ τῆς ἀναλύσεως τῶν ἀριθμῶν εἰς τοὺς πρώτους παράγοντας.

232. Θεώρημα. *Ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν, ἀναλελυμένων εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας,*

εὑρίσκεται, ἐὰν λάβωμεν τοὺς κοινοὺς παράγοντας μὲ τὸν ἐλάχιστον ἐκθέτην.

Ἄς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τῶν ἀριθμῶν 360, 720, 630 καὶ 1260. Πρὸς τοῦτο ἀναλύομεν πρῶτον τοὺς ἀριθμοὺς τούτους εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας, ὅτε εὑρίσκομεν

$$360=2^3\times3^2\times5$$
$$720=2^4\times3^2\times5$$
$$630=2\times3^2\times5\times7$$
$$1260=2^2\times3^2\times5\times7$$

Ἐκ τῶν πρώτων δὲ τούτων παραγόντων τῶν ἀποτελούντων τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς 360, 720,630 καὶ 1260 λαμβάνοντες τοὺς κοινοὺς παράγοντας μὲ *τὸν ἐλάχιστον* ἐκθέτην καὶ οἵτινες εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 2, 3^2 καὶ 5 καὶ μορφοῦντες τὸ γινόμενον τούτων $2\times3^2\times5$, ἔχομεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Διότι ὁ ἀριθμὸς $2\times3^2\times5$ εἶναι *κοινὸς διαιρέτης* τῶν δοθέντων ἀριθμῶν, ἐπειδὴ οἱ παράγοντές του 2, 3^2 καὶ 5 περιέχονται εἰς τοὺς παράγοντας ἑκάστου τῶν δοθέτων ἀριθμῶν (§ 231). Εἶναι δὲ ὁ *μέγιστος κοινὸς διαιρέτης*, διότι ὁ ἀριθμὸς $2\times3^2\times5$ δὲν ἐπιδέχεται οὐδεμίαν *αὔξησιν*, χωρὶς νὰ παύσῃ ὢν κοινὸς διαιρέτης. Διότι, ἂν προσθέσωμεν εἰς τὸν *κοινὸν διαιρετην* $2\times3^2\times5$ οἱονδήποτε ἀριθμὸν καὶ τὸ προκῦπτον *ἄθροισμα* ἀναλύσωμεν εἰς τοὺς πρώτους παράγοντας, προφανῶς δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εὕρωμεν μόνον τοὺς παράγοντας 2, 3^2 καὶ 5, διότι ὁ ἀριθμὸς ηὔξησε. Τὴν ἐλαχίστην δὲ μεταβολήν, ἣν δύνανται νὰ ὑποστῶσιν οἱ παράγοντες 2, 3^2 καὶ 5 εἶναι ἢ νὰ αὐξήσῃ κατὰ μονάδα ὁ ἐκθέτης τινὸς τῶν παραγόντων τούτων ἢ ν' ἀντικατασταθῇ τις τῶν παραγόντων τούτων δι' ἄλλου μεγαλητέρου. Ἀλλ' ἂν τὸ *πρῶτον συμβῇ*, τότε ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου δὲν θὰ διαιρῶνται ἐκεῖνοι ἐκ τῶν ἀριθμῶν 360, 720, 630 καὶ 1260, οἵτινες θὰ ἔχωσιν εἰς μικροτέραν δύναμιν ἐκεῖνον τὸν παράγοντα, οὗ ηὔξησεν ὁ ἐκθέτης, ἂν δὲ τὸ *δεύτερον συμβῇ*, τότε ἐκ τῶν ἀριθμῶν 360, 720, 630 καὶ 1260 δὲν θὰ διαιρῶνται ἐκεῖνοι οἱ ἀριθμοί, οἵτινες δὲν περιέχουσι τὸν νέον παράγοντα, δεδομένου ὄντος, ὅτι οἱ μόνοι κοινοὶ παράγοντες εἶναι οἱ 2, 3^2 καὶ 5· καὶ ἐπομένως κατ' ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις ὁ προκύπτων ἀριθμὸς παύει νὰ εἶναι κοινός διαιρέτης τῶν δοθέντων ἀριθμῶν. Ἐπειδὴ δὲ ὁ ἀριθμὸς $2\times3^2\times5$ οὐδεμίαν αὔξησιν δύναται νὰ ὑποστῇ, χωρὶς νὰ παύσῃ νὰ εἶναι κοινὸς διαιρέτης πάντων τῶν δοθέντων ἀριθμῶν, ἄρα ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι ὁ *μέγιστος κοινὸς διαιρέτης* αὐτῶν.

Σημ. Ἂν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ δὲν ἔχωσιν οὐδένα κοινὸν παράγοντα, δύνανται οὗτοι νὰ θεωρηθῶσιν, ὡς ἔχοντες κοινὸν παράγοντα τὴν μονάδα. Ἑπομένως οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι ἔχουσι μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τὴν μονάδα, δι' ὃ εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Παράδειγμα. Εὑρεῖν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τῶν ἀριθμῶν 36, 90 καὶ 162. (2×3^2 ἤτοι 18)

233. *Θεώρημα. Τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον δύο ἢ πλεισσοτέρων ἀριθμῶν ἀναλελυμένων εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας εὑρίσκεται, ἐὰν λάβωμεν τοὺς κοινοὺς καὶ μὴ κοινοὺς παράγοντας μὲ τὸν μέγιστον ἐκθέτην.*

Ἂς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν 360, 720, 630 καὶ 1260.

Πρὸς τοῦτο ἀναλύομεν πρῶτον τοὺς ἀριθμοὺς τούτους εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας, ὅτε εὑρίσκομεν

$$360=2^3\times3^2\times5$$
$$720=2^4\times3^2\times5$$
$$630=2\times3^2\times5\times7$$
$$1260=2^2\times3^2\times5\times7$$

Ἐκ τῶν πρώτων δὲ τούτων παραγόντων τῶν ἀποτελούντων τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς 360, 720, 630 καὶ 1260, λαμβάνοντες τοὺς κοινοὺς καὶ μὴ κοινοὺς παράγοντας μὲ τὸν μέγιστον ἐκθέτην καὶ οἵτινες εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 2^4, 3^2, 5 καὶ 7 καὶ μορφοῦντες τὸ γινόμενον τούτων $2^4\times3^2\times5\times7$ ἔχομεν τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Διότι ὁ ἀριθμὸς $2^4\times3^2\times5\times7$ εἶναι *κοινὸν πολλαπλάσιον* τῶν δοθέντων ἀριθμῶν, ἐπειδὴ οἱ παράγοντες τῶν δοθέντων ἀριθμῶν περιέχονται εἰς τοὺς παράγοντας τούτου καὶ ἑπομένως διαιρεῖται οὗτος ὑπὸ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν (§ 231). Εἶναι δὲ τὸ *ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον*, διότι ὁ ἀριθμὸς $2^4\times3^2\times5\times7$ δὲν ἐπιδέχεται οὐδεμίαν *ἐλάττωσιν*, χωρὶς νὰ παύσῃ νὰ εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον.

Διότι, ἂν ἀφαιρέσωμεν ἐκ τοῦ *κοινοῦ πολλαπλασίου* $2^4\times3^2\times5\times7$

ἀριθμόν τινα καὶ τὴν προκύπτουσαν διαφορὰν ἀνκλύσωμεν εἰς τοὺς πρώτους αὐτῆς παράγοντας, προφανῶς δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εὕρωμεν αὐτοὺς τούτους τοὺς παράγοντας 2^4, 3^2, 5 καὶ 7, διότι ὁ ἀριθμὸς ἠλαττώθη.

Τὴν ἐλαχίστην δὲ μεταβολήν, ἣν δύνανται νὰ ὑποστῶσιν οἱ παράγοντες 2^4, 3^2, 5 καὶ 7 εἶναι ἢ νὰ ἐλαττωθῇ κατὰ μονάδα ὁ ἐκθέτης τινὸς τῶν παραγόντων τούτων ἢ ν' ἀντικατασταθῇ εἷς τῶν παραγόντων δι' ἄλλου μικροτέρου. Ἀλλ' ἂν τὸ *πρῶτον συμβῇ*, τότε ὁ προκύπτων ἀριθμὸς δὲν θὰ διαιρῆται ὑπ' ἐκείνου ἐκ τῶν ἀριθμῶν 360, 720, 630 καὶ 1260, ὅστις θὰ ἔχῃ εἰς μεγαλητέραν δύναμιν ἐκεῖνον τὸν παράγοντα, οὗ ἠλαττώθη ὁ ἐκθέτης ἂν δὲ τὸ *δεύτερον συμβῇ*, τότε ὁ προκύπτων ἀριθμὸς δὲν θὰ διαιρῆται ὑπ' ἐκείνου ἐκ τῶν ἀριθμῶν 360, 720, 630 καὶ 1260, ὅστις θὰ ἔχῃ τὸν παράγοντα, ὅστις ἀντεκατέστη ὑπὸ ἄλλου. Ἑπομένως ὁ νέος οὗτος ἀριθμὸς δὲν θὰ εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν δοθέντων ἀριθμῶν. Ἐπειδὴ δὲ ὁ ἀριθμὸς $2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7$ οὐδεμίαν *ἐλάττωσιν* δύναται νὰ ὑποστῇ, χωρὶς νὰ παύσῃ νὰ εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον πάντων τῶν δοθέντων ἀριθμῶν, ἄρα ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι τὸ *ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον* τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

234. *Πόρισμα. Τὸ ἐλάχισταν κοινὸν πολλαπλάσιον ἀριθμῶν πρώτων πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο εἶναι τὸ γινόμενον αὐτῶν.*

Διότι, ἐπειδὴ οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο, διὰ τοῦτο οἱ πρῶτοι παράγοντες ἑκάστου τούτων θὰ εἶναι διάφοροι τῶν πρώτων παραγόντων ἑκάστου τῶν λοιπῶν δοθέντων ἀριθμῶν. Διότι, ἂν δύο τούτων εἶχον κοινόν τινα παράγοντα, θὰ διῃροῦντο ὑπὸ τούτου καὶ ἑπομένως δὲν θὰ ἦσαν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Ὥστε τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον θὰ μορφωθῇ ἐκ πάντων τῶν πρώτων παραγόντων, εἰς οὓς ἀναλύονται οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ (§ 233), ἤτοι ἐκ τοῦ γινομένου τούτων

235. *Παράδειγμα. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν 22, 15 καὶ 17.* ($2 \times 11 \times 3 \times 5 \times 17$ ἤτοι 5610)

Θεωρήματα ἐπὶ τῶν πρώτων ἀριθμῶν καὶ τῶν πρώτων πρὸς ἀλλήλους τοιούτων.

236. *Θεώρημα. Πᾶς πρῶτος ἀριθμὸς εἶναι πρῶτος πρὸς πάντα ἀριθμὸν τὸν ὁποῖον δὲν διαιρεῖ.*

Λέγω π. χ. ὅτι ὁ ἀριθμὸς 7, ὅστις εἶναι πρῶτος καὶ ὅστις ἔστω ὅτι δὲν διαιρεῖ τὸν ἀριθμὸν Α θὰ εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν Α, ἤτοι οἱ ἀριθμοὶ Α καὶ 7 θὰ εἶναι *πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους*.

Διότι, ἂν ὁ Α καὶ 7 δὲν ἦσαν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ὡς μόνους κοινοὺς διαιρέτας ἠδύναντο νὰ ἔχωσι τὸν 7 καὶ τὸν 1, ἀλλὰ τὸν 7 δὲν δύνανται νὰ ἔχωσι κοινὸν διαιρέτην, διότι ἐξ ὑποθέσεως ὁ 7 δὲν διαιρεῖ τὸν Α, ἄρα θὰ ἔχωσι κοινὸν διαιρέτην μόνον τὴν μονάδα. Ἑπομένως ὁ Α καὶ 7 θὰ εἶναι *πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους*.

237. *Θεώρημα*. *Ἐὰν ἀριθμὸς πρῶτος διαιρῇ τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε παραγόντων θὰ διαιρῇ τοὐλάχιστον ἕνα παράγοντα τοῦ γινομένου.*

Τὴν ἀπόδειξιν θὰ κάμωμεν πρῶτον ἐπὶ *δύο* παραγόντων.

Λέγω π. χ. ὅτι, ἂν ὁ πρῶτος ἀριθμὸς Π διαιρῇ τὸ γινόμενον $A \times B$, θὰ διαιρῇ τοὐλάχιστον τὸν ἕνα τῶν παραγόντων Α ἢ Β.

Διότι, ἂν μὲν ὁ ἀριθμὸς Π διαιρῇ τὸ Α, τότε τὸ θεώρημα ἀπεδείχθη, ἂν δὲ δὲν διαιρῇ τὸν Α, τότε εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν Α (§ 236) καὶ ἑπομένως θὰ διαιρῇ τὸν Β (§ 212).

Ἤδη θὰ κάμωμεν τὴν ἀπόδειξιν ἐπὶ *τριῶν* παραγόντων.

Λέγω π. χ. ὅτι, ἂν ὁ *πρῶτος ἀριθμὸς* Π διαιρῇ τὸ γινόμενον $A \times B \times \Gamma$, θὰ διαιρῇ τοὐλάχιστον τὸν ἕνα τῶν παραγόντων Α, Β, Γ.

Διότι, χωρίζοντες τὸ γινόμενον $A \times B \times \Gamma$ εἰς γινόμενον δύο ἀριθμῶν, ἤτοι τῶν $(A \times B)$ καὶ Γ ἔχομεν $(A \times B) \times \Gamma$. Ὅτε, ἂν μὲν ὁ Π διαιρῇ τὸν Γ, τότε τὸ θεώρημα ἀπεδείχθη, ἂν δὲ δὲν διαιρῇ τὸν Γ θὰ εἶναι πρῶτος πρὸς αὐτὸν (§ 236) καὶ ἑπομένως θὰ διαιρῇ τὸν ἕτερον $(A \times B)$ (ἰδὲ § 212). Ἐπειδὴ δὲ ὁ ἀριθμὸς $(A \times B)$ ἀποτελεῖται ἐκ δύο παραγόντων Α καὶ Β, ἄρα θὰ διαιρῇ τὸν ἕτερον τούτων κατὰ τὴν προηγουμένην ἀπόδειξιν.

238. Ὁμοίως γίνεται ἡ ἀπόδειξις καὶ διὰ τέσσαρας παράγοντας $A \times B \times \Gamma \times \Delta$, χωρίζοντες τούτους εἰς $(A \times B \times \Gamma)$ καὶ Δ. Εἶτα δὲ διὰ *πέντε* παράγοντας καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

239. *Πόρισμα*. *Ἐὰν ἀριθμὸς πρῶτος διαιρῇ δύναμιν ἀριθμοῦ τινος, θὰ διαιρῇ καὶ αὐτὸν τὸν ἀριθμόν.*

Λέγω π. χ. ὅτι, ἂν ὁ πρῶτος ἀριθμὸς Π διαιρῇ τὴν δύναμιν A^3, τότε θὰ διαιρῇ καὶ τὸν Α.

Διότι ἡ δύναμις A^3 εἶναι $A\times A\times A$ καὶ ἐπειδὴ ὁ πρῶτος ἀριθμὸς Π διαιρεῖ τὸ γινόμενον $A\times A\times A$, διὰ τοῦτο θὰ διαιρῇ τὸν ἕνα τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου τούτου, ἤτοι τὸν Α.

240. *Θεώρημα. Ὅταν δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ αἱ δυνάμεις αὐτῶν εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.*

Διότι, ἐὰν δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἀναλυόμενοι οὗτοι εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας δὲν δύνανται νὰ ἔχωσιν οὐδένα κοινόν τινα παράγοντα, διότι θὰ διῃροῦντο ὑπ' αὐτοῦ (§ 167). Ἑπομένως καὶ αἱ δυνάμεις τῶν ἀριθμῶν τούτων δὲν δύνανται νὰ ἔχωσι κοινόν τινα παράγοντα, διότι αὗται ἀποτελοῦνται ἐκ τῶν πρώτων παραγόντων τῶν δοθέντων ἀριθμῶν πολλάκις ληφθέντων, ἄρα αὗται δὲν θὰ ἔχωσιν οὐδένα κοινὸν διαιρέτην (§ 230) καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

241. *Θεώρημα. Ἐὰν ἀριθμός τις διαιρῆται διὰ δύο ἢ περισσοτέρων ἄλλων ἀριθμῶν πρώτων πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο, θὰ διαιρῆται καὶ διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν.*

Λέγω π. χ. ὅτι, ἂν ὁ ἀριθμὸς Α διαιρῆται δι' ἑκάστου τῶν ἀριθμῶν α, β καὶ γ, οἵτινες εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο, τότε ὁ Α θὰ διαιρῆται καὶ ὑπὸ τοῦ γινομένου αὐτῶν $\alpha\times\beta\times\gamma$.

Διότι, τῶν ἀριθμῶν α, β, γ ὄντων πρώτων πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο, οἱ πρῶτοι παραγοντες, εἰς οὓς ἀναλύεται ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν α, β, γ εἶναι διάφοροι μεταξύ των, διότι ἂν δύο τούτων εἶχον κοινόν τινα πρῶτον παράγοντα, οὗτος θὰ διῄρει αὐτούς, ὅπερ ἄτοπον. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Α διαιρεῖται ὑφ' ἑκάστου τῶν ἀριθμων α, β, γ, πρέπει νὰ περιέχῃ τοὺς πρώτους παράγοντας ἑκάστου τούτων (§ 230) καὶ ἐπειδὴ ε ναι οὗτοι διάφοροι, ἄρα θὰ περιέχῃ πάντας τοὺς πρώτους παράγοντας τοῦ γινομένου $\alpha\times\beta\times\gamma$, δι' ὃ ὁ Α θὰ εἶναι διαιρετὸς διὰ τούτου.

Παρατήρησις. Στηριζόμενοι εἰς τὸ θεώρημα τοῦτο δυνάμεθα νὰ συνδυάσωμεν τοὺς διαιρέτας 2, 3, 4, 5, 8, 9 κ.τ.λ. εἰς τρόπον, ὥστε νὰ εὕρωμεν ἐκ τούτων καὶ ἄλλους. δι' ὧν νὰ διακρίνωμεν, ἄνευ διαιρέσεως, τὸ διαιρετὸν ἢ οὒ ἀριθμοῦ τινος δι' αὐτῶν.

Οὕτω, κατὰ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα, ἂν ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς

διὰ	2	καὶ	3	θὰ	εἶναι	διαιρετὸς	καὶ	διὰ	6
»	2	»	5	»	»	»	»	»	10
»	2	»	9	»	»	»	»	»	18
»	3	»	4	»	»	»	»	»	12
»	3	»	5	»	»	»	»	»	15
»	4	»	5	»	»	»	»	»	20
»	4	»	9	»	»	»	»	»	36
»	5	»	9	»	»	»	»	»	45
ἂν διὰ	2, 3	καὶ	5	»	»	»	»	»	30

καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Ἂν ὅμως ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς π. χ. διὰ 2 καὶ 4 δύναται μὲν νὰ διαιρῆται καὶ διὰ 8, δὲν εἶναι ὅμως ὑποχρεωμένος νὰ διαιρῆται, διότι οἱ ἀριθμοὶ 2 καὶ 4 δὲν εἶναι *πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους* (§ 241).

Π. χ. Ὁ ἀριθμὸς 12, ὅστις διαιρεῖται διὰ 2 καὶ 4 δὲν διαιρεῖται καὶ διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν 8, ὁ ἀριθμὸς 24 ὅμως, ὅστις διαιρεῖται ἐπίσης ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 2 καὶ 4 διαιρεῖται καὶ ὑπὸ τοῦ γινομένου αὐτῶν 8.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ἐὰν ἀριθμός τις διαιρῶν δύο ἢ περισσοτέρους ἀριθμοὺς δίδῃ πηλίκα ἀριθμοὺς πρώτους πρὸς ἀλλήλους, ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν.

2) Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, πᾶς διαιρέτης τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν ἕτερον.

3) Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ οἱ διαιρέται αὐτῶν θὰ εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

4) Ἐὰν ἀριθμὸς πρῶτος διαιρῇ γινόμενον παραγόντων πρώτων θὰ εἶναι ἴσος πρὸς ἕνα ἐξ αὐτῶν.

5) Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ A καὶ B εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους τὸ ἄθροισμα αὐτῶν A+B καὶ ἡ διαφορὰ αὐτῶν A—B ἔχουσι μέγιστον κοινὸν διαιρέτην 1 ἢ 2.

6) Τὸ γινόμενον τριῶν ἐφεξῆς ἀριθμῶν εἶναι πάντοτε διαιρετὸν διὰ τοῦ 6.

7) Τὸ γινόμενον δύο ἐφεξῆς ἀριθμῶν καὶ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν εἶναι πάντοτε διαιρετὸν διὰ τοῦ 6.

8) Πότε ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς δι' 24 ἢ διὰ τοῦ 33 ἢ διὰ τοῦ 44;

9) Ἐὰν πάντες οἱ διαιρέται δοθέντος ἀριθμοῦ γραφῶσιν εἰς μίαν σειρὰν κατὰ τάξιν μεγέθους, τὸ γινόμενον δύο διαιρετῶν ἐξ ἴσου ἀπεχόντων τῶν ἄκρων θὰ εἶναι πάντοτε ἴσον τῷ δοθέντι ἀριθμῷ.

ΒΙΒΛΙΟΝ Β΄.

Περὶ κλασμάτων.

242. Ἐὰν τὴν ἀκεραίαν μονάδα ὑποθέσωμεν κομμένην εἰς 2 ἢ 3 ἢ 4 ἢ 5 ἢ 6 ἢ 7..... ἢ 1000 κ.τ.λ. *ἴσα μέρη* καὶ λάβωμεν ἀνὰ ἓν ἐξ αὐτῶν, μορφοῦμεν διαφόρους κλασματικὰς μονάδας, τὰς ὁποίας ὀνομάζομεν κατὰ σειράν, *ἓν* δεύτερον, *ἓν* τρίτον, *ἓν* τέταρτον, *ἓν* πέμπτον, *ἓν* ἕκτον, *ἓν* ἕβδομον καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, γράφομεν δὲ αὐτὰς κατὰ σειρὰν ὡς ἑξῆς

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{7}\ \text{κ.τ.λ.}$$

243. Οἱ ἀριθμοὶ *ἓν* τρίτον, *δύο* τρίτα, *τρία* τέταρτα, *τρία* πέμπτα, *δέκα* ἕβδομα, *ἓν* ὄγδοον καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς λέγονται *κλασματικοὶ ἀριθμοὶ* ἢ ἁπλῶς *κλάσματα* καὶ γράφονται κατὰ σειρὰν ὡς ἑξῆς

$$\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{3}{5},\ \frac{10}{7},\ \frac{1}{8}\ \text{κ.τ.λ.}$$

ἔνθα ὁ ἄνωθεν τῆς γραμμῆς ἀριθμὸς λέγεται *ἀριθμητής*, ὁ δὲ κάτωθεν αὐτῆς λέγεται *παρονομαστής*.

244. *Ὁ ἀριθμητὴς παντὸς κλάσματος ἀπαγγέλλεται ὡς ἀπόλυτος ἀριθμός, ὁ δὲ παρονομαστὴς ὡς τακτικὸς καὶ ὁ μὲν ἀριθμητὴς σημαίνει τὸ πλῆθος τῶν κλασματικῶν μονάδων, τὰς ὁποίας περιέχει τὸ κλάσμα, ὁ δὲ παρονομαστὴς σημαίνει εἰς πόσας κλασματικὰς μονάδας ἐκόπη ἡ ἀκεραία μονὰς καὶ χρησιμεύει, ὅπως δίδῃ τὸ ὄνομα τῶν κλασματικῶν μονάδων τοῦ ἀριθμητοῦ.*

Π. χ. Τὰ κλάσματα $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$ ἀπαγγέλλονται δύο *τρίτα*, *πέντε ἕβδομα*. Ἐκ τούτων δὲ τὸ πρῶτον περιέχει 2 κλασματικὰς μονάδας, τὸ δὲ δεύτερον περιέχει 5 κλασματικὰς μονάδας, ἀλλὰ αἱ μὲν τοῦ πρώτου κλάσματος κλασματικαὶ μονάδες προέκυψαν, ἀφ' οὗ ἐκόπη ἡ ἀκεραία μονὰς εἰς τρία ἴσα μέρη καὶ ἐλάβομεν τὰ δύο, αἱ δὲ τοῦ δευτέρου κλάσματος προέκυψαν, ἀφ' οὗ ἐκόπη ἡ ἀκεραία μονὰς εἰς ἑπτὰ ἴσα μέρη καὶ ἐλάβομεν τὰ 5.

245. Ὁ *ἀριθμητὴς* καὶ ὁ *παρονομαστὴς* καλοῦνται ὁμοῦ *ὅροι* τοῦ κλάσματος.

Περὶ γενέσεως τῶν κλασμάτων.

246. Καθὼς ἐκ τῆς ἀκεραίας μονάδος δυνάμεθα νὰ μορφώσωμεν τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς διὰ τῆς ἐπαναλήψεως τῆς ἀκεραίας μονάδος πολλάκις, οὕτω καὶ ἐξ ἑκάστης κλασματικῆς μονάδος δυνάμεθα νὰ μορφώσωμεν ἀντίστοιχα κλάσματα, θέτοντες εἰς τὸν ἀριθμητὴν τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος ἐκφράζει τὸ πλῆθος τῶν κλασματικῶν μονάδων.

247. Π. χ. Ἐκ τῆς κλασματικῆς μονάδος $\frac{1}{2}$ δυνάμεθα, ἐπαναλαμβάνοντες αὐτὴν 2, 3, 4, 5, 6,.... 100.. .. 1000 κ.τ.λ. φορὰς νὰ μορφώσωμεν τὰ κλάσματα

$$\frac{2}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{2},\ \frac{5}{2},\ \frac{6}{2}\ldots.\ \frac{100}{2}\ldots.\ \frac{1000}{2}\ \text{κ.τ.λ.}$$

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἐκ τῆς κλασματικῆς μονάδος $\frac{1}{100}$ μορφοῦμεν τὰ κλάσματα

$$\frac{2}{100},\ \frac{3}{100},\ \frac{4}{100},\ \frac{5}{100},\ \frac{6}{100},\ldots.\ \frac{100}{100}\ldots.\ \frac{1000}{100}\ \text{κ.τ.λ.}$$

καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

248. Τὰ κλάσματα διακρίνομεν εἰς ὁμώνυμα καὶ ἑτερώνυμα.

249. *Ὁμώνυμα* λέγονται τὰ κλάσματα τὰ ὁποῖα γίνονται ἐκ τῆς αὐτῆς κλασματικῆς μονάδος, ἤτοι ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς παρονομαστάς.

Π. χ. Τὰ κλάσματα $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{8}{5}$ λέγονται ὁμώνυμα καὶ γίνονται ἐκ τῆς κλασματικῆς μονάδος $\frac{1}{5}$.

250. *Ἑτερώνυμα* λέγονται τὰ κλάσματα, τὰ ὁποῖα γίνονται ἐκ διαφόρων κλασματικῶν μονάδων, ἤτοι ἔχουσι διαφόρους παρονομαστάς.

251. Π. χ. Τὰ κλάσματα $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$ λέγονται ἑτερώνυμα, γίνεται δέ, τὸ μὲν πρῶτον ἐκ τῆς κλασματικῆς μονάδος $\frac{1}{3}$, τὸ δὲ δεύτερον ἐκ τῆς $\frac{1}{6}$.

252. *Μικτοὶ ἀριθμοὶ* λέγονται οἱ συγκείμενοι ἐξ ἀκεραίου καὶ κλάσματος.

Π. χ. Οἱ ἀριθμοὶ $2\frac{3}{4}$, $3\frac{4}{5}$ κ τ.λ. λέγονται μικτοὶ ἀριθμοί.

Σύγκρισις τῶν κλασματικῶν μονάδων μεταξύ των.

253. *Θεώρημα. Καθ' ὅσον ὁ παρονομαστὴς κλασματικῆς τινος μονάδος εἶναι μεγαλήτερος, ἐπὶ τοσοῦτον αὕτη εἶναι μικροτέρα, καθ' ὅσον δὲ εἶναι μικρότερος ἐπὶ τοσοῦτον εἶναι μεγαλητέρα.*

Διότι καθ' ὅσον ὁ παρονομαστὴς εἶναι μεγαλήτερος, ἐπὶ τοσοῦτον ἡ ἀκεραία μονὰς ἔχει κοπῆ εἰς περισσότερα ἴσα μέρη καὶ ἑπομένως ταῦτα εἶναι μικρότερα, καθ' ὅσον δὲ ὁ παρονομαστὴς εἶναι μικρότερος, ἐπὶ τοσοῦτον ἡ ἀκεραία μονὰς ἔχει κοπῆ εἰς ὀλιγώτερα ἴσα μέρη καὶ ἑπομένως ταῦτα εἶναι μεγαλήτερα.

Π. χ. Αἱ κλασματικαὶ μονάδες $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ ἔρχονται κατὰ σειρὰν μεγέθους ὡς ἑξῆς $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$.

254. *Θεώρημα. Ἐὰν τὸν παρονομαστὴν κλασματικῆς τινος μονάδος πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 2, 3 κ.τ.λ. ἡ κλασματικὴ μονὰς γίνεται δίς, τρὶς κ.τ.λ. μικροτέρα.*

Διότι διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ παρονομαστοῦ τῆς κλασματικῆς μονάδος ἐπὶ 2, 3 κ.τ.λ. τὰ ἴσα τεμάχια, εἰς ἃ ἐκόπη ἡ ἀκεραία μονὰς γίνονται δίς, τρὶς κ.τ.λ. περισσότερα, ἑπομένως ἕκαστον τούτων γίνεται δίς, τρὶς κ.τ.λ. μικρότερον, ἤτοι ἡ κλασματικὴ μονὰς γίνεται δίς, τρὶς κ.τ.λ. μικροτέρα.

255. *Πόρισμα. Ἐὰν τὸν παρονομαστὴν κλάσματός τινος πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 2, 3, κ.τ.λ. τὸ κλάσμα γίνεται δίς, τρὶς κ.τ.λ. μικρότερον δηλ. διαιρεῖται διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου.*

Διότι ἑκάστη τῶν κλασματικῶν μονάδων, ἐξ ὧν ἀποτελεῖται τὸ δοθὲν κλάσμα, διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ παρονομαστοῦ τούτου ἐπὶ 2, 3 κ.τ.λ. γίνεται δίς, τρὶς κ.τ.λ. μικροτέρα (§ 254), ἑπομένως καὶ ὅλον τὸ δοθὲν κλάσμα γίνεται δίς, τρὶς κ.τ.λ. μικρότερον.

256. *Θεώρημα. Ἐὰν τὸν παρονομαστὴν κλασματικῆς τινος μονάδος διαιρέσωμεν διὰ 2, 3, κ.τ.λ. ἡ κλασματικὴ μονὰς γίνεται δίς, τρίς, κ.τ.λ. μεγαλητέρα.*

Διότι διὰ τῆς διαιρέσεως τοῦ παρονομαστοῦ τῆς κλασματικῆς μονάδος διὰ 2, 3, κ.τ.λ. τὰ ἴσα τεμάχια, εἰς ἃ ἐκόπη ἡ ἀκεραία μονὰς γίνονται δίς, τρίς, κ.τ.λ. ὀλιγώτερα, ἑπομένως ἕκαστον τούτων γίνεται δίς, τρίς, κ.τ.λ. μεγαλήτερον, ἤτοι ἡ κλασματικὴ μονὰς γίνεται δίς, τρίς, κ.τ.λ. μεγαλητέρα.

257. Π ό ρ ι σ μ α. *Ἐὰν τὸν παρονομαστὴν κλάσματός τινος διαιρέσωμεν διὰ 2, 3, κ.τ.λ. τὸ κλάσμα γίνεται δίς, τρίς, κ.τ.λ. μεγαλήτερον.*

Διότι ἑκάστη τῶν κλασματικῶν μονάδων, ἐξ ὧν ἀποτελεῖται τὸ δοθὲν κλάσμα διὰ τῆς διαιρέσεως τοῦ παρονοματοῦ τούτου διὰ 2, 3, κ.τ.λ. γίνεται δίς, τρίς, κ τ.λ. μεγαλητέρα (§ 256). Ἑπομένως καὶ ὅλον τὸ δοθὲν κλάσμα γίνεται δίς, τρίς, κ.τ.λ. μεγαλήτερον.

Σύγκρισις τῶν κλασμάτων πρὸς τὴν ἀκεραίαν μονάδα.

258. *Ἰσοδύναμοι λέγονται οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι εἶναι ἴσοι κατὰ τὴν ἀξίαν, ἀλλὰ γίνονται ἀπὸ διαφόρους μονάδας.*

259. Θ ε ώ ρ η μ α. *Πᾶν κλάσμα εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὴν ἀκεραίαν μονάδα, ὅταν ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς εἶναι ἴσοι.*

Διότι ἕκαστον τῶν τοιούτων κλασμάτων περιέχει ὅλας τὰς κλασματικὰς μονάδας, εἰς τὰς ὁποίας ἐκόπη ἡ ἀκεραία μονάς.

Π. χ. Τὰ κλάσματα $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{20}{20}$, $\frac{82}{82}$, $\frac{100}{100}$ κ.τ.λ. εἶναι ἰσοδύναμα μὲ τὴν ἀκεραίαν μονάδα.

260 Θ ε ώ ρ η μ α. *Πᾶν κλάσμα εἶναι μικρότερον τῆς ἀκεραίας μονάδος, ὅταν ὁ ἀριθμητὴς εἶναι μικρότερος τοῦ παρονομαστοῦ.*

Διότι ἕκαστον τῶν τοιούτων κλασμάτων περιέχει ὀλιγωτέρας κλασματικὰς μονάδας ἐκείνων, εἰς τὰς ὁποίας ἐκόπη ἡ ἀκεραία μονάς.

Π. χ. Τὰ κλάσματα $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{6}{9}$ κ.τ.λ. εἶναι μικρότερα τῆς ἀκεραίας μονάδος.

261. Θ ε ώ ρ η μ α. *Πᾶν κλάσμα εἶναι μεγαλήτερον τῆς ἀκεραίας μονάδος, ὅταν ὁ ἀριθμητὴς εἶναι μεγαλήτερος τοῦ παρονομαστοῦ.*

Διότι ἕκαστον τῶν τοιούτων κλασμάτων περιέχει περισσοτέρας κλασματικὰς μονάδας ἐκείνων, εἰς τὰς ὁποίας ἐκόπη ἡ ἀκεραία μονάς.

Π. χ. Τὰ κλάσματα $\frac{7}{5}$, $\frac{18}{15}$, $\frac{20}{15}$, $\frac{7}{6}$ κ.τ.λ. εἶναι μεγαλήτερα τῆς ἀκεραίας μονάδος.

Τροπὴ ἀκεραίου εἰς ἰσοδύναμον κλάσμα.

Τροπὴ ἀκεραίου εἰς κλάσμα λέγεται ἡ εὕρεσις κλάσματος ἰσοδυνάμου πρὸς τὸν ἀκέραιον.

Πρόβλημα. Νὰ τραπῇ ὁ ἀριθμὸς 4 εἰς *ἕβδομα.*

Ἐπειδὴ ἡ ἀκεραία μονὰς ἔχει $\frac{7}{7}$ *ἤτοι* 7 *ἕβδομα, αἱ* 4 ἀκέραιαι μονάδες θὰ ἔχωσι 4 φορὰς 7 *ἕβδομα,* ἤτοι 4×7 δηλ. 28 *ἕβδομα,* ὅπερ γράφεται *συμβολικῶς* $\frac{28}{7}$.

Ἐντεῦθεν συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

262. *Ἀκέραιον ἀριθμὸν τρέπομεν εἰς ἰσοδύναμον κλάσμα, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀκέραιον ἐπὶ τὸ πλῆθος τῶν κλασματικῶν μονάδων, αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦσι μίαν ἀκεραίαν μονάδα.*

Π. χ. Ὁ 9 τρεπόμενος εἰς *πέμπτα* δίδει τὸ κλάσμα 45 *πέμπτα,* ἤτοι $\frac{45}{5}$.

Ἐξαγωγὴ τῶν ἀκεραίων μονάδων κλάσματός τινος.

263. *Μετὰ τὴν ἐπινόησιν τῶν κλασματικῶν μονάδων ἡ διαίρεσις ἀκεραίου τινὸς δι' ἄλλου ἀκεραίου ἐκτελεῖται πάντοτε ἀκριβῶς, οἱουδήποτε ὄντος τοῦ διαιρετέου καὶ διαιρέτου.*

Διότι, ἐὰν τὸν διαιρετέον τρέψωμεν εἰς κλασματικὰς μονάδας ἐχούσας παρονομαστὴν τὸν διαιρέτην, τὸ πλῆθος τῶν κλασματικῶν τούτων μονάδων θὰ εἶναι πολλαπλάσιόν τι τοῦ διαιρέτου καὶ ἑπομένως διαιρετὸν διὰ τούτου.

Παράδειγμα 1ον. *Νὰ διαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 2 διὰ 3.*

Πρὸς τοῦτο τρέπομεν τὸν διαιρετέον 2 εἰς *τρίτα,* ὅτε μᾶς δίδει 2×3, ἤτοι 6 *τρίτα* (§ 262), τὰ ὁποῖα, ὡς πολλαπλάσιον τοῦ 2, διαιροῦνται ἀκριβῶς δι' αὐτοῦ καὶ δίδουσι πηλίκον 6 τρίτα :3=2 *τρίτα,* ἤτοι $\frac{2}{3}$.

Διάταξις τῆς πράξεως.

```
 2        | 3
          |---------------------
 3 τρίτα    2 τρίτα, ἤτοι 2/3
--------
 6 τρίτα
 6 τρίτα
--------
 0
```

Παράδειγμα 2ον. *Νὰ διαιρεθῇ ὁ 15 διὰ 7.*

Πρὸς τοῦτο τρέπομεν τὸν ἀκέραιον ἀριθμὸν 15 εἰς ἕβδομα, ὅτε μᾶς δίδει 15×7, ἤτοι 105 ἕβδομα, τὰ ὁποῖα, ὡς πολλαπλάσιον τοῦ 7, διαιροῦνται ἀκριβῶς δι' αὐτοῦ καὶ δίδουσι πηλίκον 105 ἕβδομα: $7 = 15$ ἕβδομα, ἤτοι $\frac{15}{7}$.

Διάταξις τῆς πράξεως.

$$\begin{array}{r|l} 15 & 7 \\ \hline 7 \text{ ἕβδομα} & 15 \text{ ἕβδομα, ἤτοι } \frac{15}{7} \\ \hline 105 \text{ ἕβδομα} & \\ 35 \text{ ἕβδομα} & \\ 0 & \end{array}$$

Ἐκ τῶν παραδειγμάτων τούτων μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

264. *Τὸ ἀκριβὲς πηλίκον τῆς διαιρέσεως οἱουδήποτε ἀκεραίου δι' ἀκεραίου δύναται νὰ ληφθῇ ὡς κλάσμα, ἔχον ἀριθμητὴν τὸν διαιρετέον καὶ παρονομαστὴν τὸν διαιρέτην.*

Π. χ. Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 4 διὰ 5 εἶναι $\frac{4}{5}$, τοῦ δὲ 9 διὰ 2 εἶναι $\frac{9}{2}$.

Πρόβλημα. Νὰ ἐξαχθῶσιν αἱ ἀκέραιοι μονάδες τοῦ κλάσματος $\frac{17}{5}$

Τὸ $\frac{17}{5}$ εἶναι, ὡς γνωστόν, πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 17 διὰ τοῦ 5 (§ 261). Ἀλλὰ τὸ πηλίκον τοῦ 17 διὰ 5 εὑρίσκεται καὶ ἄλλως ὡς ἑξῆς.

Διαιροῦμεν τὸ 17 διὰ τοῦ 5, ὡς εἰς τοὺς ἀκεραίους, ὅτε εὑρίσκομεν τὸ *ἀκέραιον μέρος τοῦ πηλίκου* 3 καὶ ὑπόλοιπον 2 ἀκεραίας μονάδας. Ταύτας δὲ τρέποντες εἰς *πέμπτα*, ὅτε εὑρίσκομεν 10 *πέμπτα*· καὶ διαιροῦντες διὰ 2 εὑρίσκομεν πηλίκον 2 *πέμπτα*, ἤτοι $\frac{2}{5}$. Ἑπομένως τὸ ὁλικὸν πηλίκον τοῦ 17 διὰ 5 εἶναι $3\frac{2}{5}$.

Ὥστε τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 17 διὰ 5 ἔχει δύο μορφάς, ἐξ ὧν ἡ μία εἶνε τὸ κλάσμα $\frac{17}{5}$, ἡ δὲ ἄλλη ὁ μικτὸς $3\frac{2}{5}$, ἄρα $\frac{17}{5} = 3\frac{2}{5}$.

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος τούτου ἐξάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

265. *Ἵνα ἐξαγάγωμεν τὰς ἀκεραίας μονάδας κλάσματός τινος μεγαλητέρου τῆς ἀκεραίας μονάδος, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ καὶ λάβωμεν τὸ ὑπὸ μορφὴν μικτοῦ ἢ ἀκεραίου πηλίκον τῆς διαιρέσεως τούτων.*

Π. χ. Νὰ ἐξαχθῶσιν αἱ ἀκέραιαι μονάδες τοῦ κλάσματος $\frac{45}{7}$.

$$\begin{array}{r|l} 45 & 7 \\ \cline{2-2} 3 & 6 \text{ ἀκερ. } 3 \text{ ἕβδομα, ἤτοι } 6\frac{3}{7} \\ 7 & \text{ἕβδομα} \\ \hline 21 & \text{ἕβδομα} \\ 0 & \end{array}$$

Ὥστε τὸ $\frac{45}{7}$ περιέχει 6 ἀκεραίας μονάδας καὶ $\frac{3}{7}$ τῆς ἀκεραίας

Παρατήρησις. Ὅταν ὁ διαιρετέος εἶνε μεγαλήτερος τοῦ διαιρέτου, τὸ πηλίκον, δύναται νὰ ληφθῇ ὑπὸ δύο μορφάς, ἢ *ὑπὸ μορφὴν κλάσματος καὶ μικτοῦ ἢ ὑπὸ μορφὴν κλάσματος καὶ ἀκεραίου.* Τὸ τελευταῖον δὲ τοῦτο εὑρίσκεται, καθ' ἣν περίπτωσιν ὁ ἀκέραιος διαιρέτης εἰσέρχεται ἀκέραιον ἀριθμὸν φορῶν εἰς τὸν διαιρετέον.

Π. χ. Νὰ διαιρεθῇ ὁ 8 διὰ 4.

Κατὰ τὰ γνωστὰ ἐκ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ὁ $8 : 4 = 2$.

Κατὰ τὸν κανόνα ὅμως τῆς § 264 τὸ πηλίκον τοῦ 8 διὰ 4 εἶναι καὶ $\frac{8}{4}$.

Ὥστε ὁ ἀριθμὸς 2, ὡς καὶ ὁ ἀριθμὸς $\frac{8}{4}$ εἶναι ἐπίσης τέλεια πηλίκα τοῦ 8 διὰ 4, μὲ μόνην τὴν διαφοράν, ὅτι ὁ 2 προκύπτει διὰ τῆς *ἐλαττώσεως* τῶν μονάδων 8 τοῦ διαιρετέου 4 φοράς, ὁ δὲ $\frac{8}{4}$ διὰ τῆς *σμικρύνσεως* ἑκάστης τῶν 8 μονάδων τοῦ διαιρετέου 4 φοράς.

Σημ. Πᾶς ἀκέραιος ἀριθμὸς δύναται νὰ γραφῇ ὡς κλάσμα ἔχον παρονομαστὴν τὴν μονάδα.

Π. χ. Ὁ ἀριθμὸς 2 δύναται νὰ γραφῇ $\frac{2}{1}$.

Διότι ἐξάγοντες τὰς ἀκεραίας μονάδας τοῦ $\frac{2}{1}$, εὑρίσκομεν τὸν ἀκέραιον ἀριθμὸν 2.

Θεμελιώδης ἰδιότης τῶν κλασμάτων.

266. *Θεώρημα. Ἐὰν καὶ τοὺς δύο ὅρους κλάσματός τινος πολλαπλασιάσωμεν ἢ διαιρέσωμεν μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος δὲν μεταβάλλεται.*

Διότι διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ ἀριθμητοῦ κλάσματός τινος, ἐπί τινα ἀκέραιον ἀριθμόν, *αὐξάνομεν* προφανῶς τὸ πλῆθος τῶν μονάδων αὐτοῦ κατὰ τόσας φοράς, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἀκέραιος πολλαπλασιαστής, διὰ δὲ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ παρονομαστοῦ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀκέραιον ἀριθμόν, *σμικρύνομεν* ἑκάστην αὐτοῦ κλασματικὴν μονάδα κατ' ἰσαρίθμους φορὰς (§ 255), ἐπομένως ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος μένει ἀμετάβλητος.

Ὅταν δὲ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμητὴν κλάσματός τινος διά τινος ἀριθμοῦ, *ἐλαττοῦμεν* προφανῶς τὸ πλῆθος τῶν μονάδων αὐτοῦ κατὰ τόσας φοράς, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἀκέραιος διαιρέτης, ὅταν δὲ διαιρέσωμεν τὸν παρονομαστὴν διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀκεραίου ἀριθμοῦ, *μεγεθύνομεν* ἑκάστην αὐτοῦ κλασματικὴν μονάδα κατ' ἰσαρίθμους φορὰς (§ 257). Ἐπομένως ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος μένει ἀμετάβλητος.

Κατὰ ταῦτα τὸ $\frac{3}{4}$ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ κλάσμα $\frac{3\times6}{4\times6}$ ἤτοι $\frac{18}{24}$.

Τὸ δὲ κλάσμα $\frac{6}{8}$ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ κλάσμα $\frac{6:2}{8:2}$, ἤτοι $\frac{3}{4}$.

267. Στηριζόμενοι εἰς τὸ θεώρημα τοῦτο δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν α') *τὴν ἁπλοποίησιν* καὶ β') *τὴν τροπὴν τῶν ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα.*

Περὶ ἁπλοποιήσεως.

268. *Ἁπλοποίησις λέγεται ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας ἐκ δοθέντος κλάσματος εὑρίσκομεν ἄλλο ἰσοδύναμον, ἀλλὰ μὲ μικροτέρους ὅρους. Κατορθοῦμεν δὲ τοῦτο διαιροῦντες καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ* (ἂν διαιρῶνται, δηλ. ἂν δίδωσι πηλίκον ἀκέραιον).

Π.χ. Ἁπλοποιοῦντες τὸ κλάσμα $\frac{4}{6}$ εὑρίσκομεν τὸ $\frac{4:2}{6:2}$, ἤτοι $\frac{2}{3}$, ὅπερ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ $\frac{4}{6}$ (§ 266).

269. *Ἀνάγωγον λέγεται πᾶν κλάσμα, τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.*

Π. χ. Τὰ κλάσματα $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{8}{21}$ λέγονται ἀνάγωγα.

270. *Πᾶν μὴ ἀνάγωγον κλάσμα καθιστῶμεν ἀνάγωγον, χωρὶς νὰ μεταβληθῇ ἡ ἀξία αὐτοῦ, διαιροῦντες ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος διὰ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν.*

Π. χ. Τὸ κλάσμα $\frac{8}{12}$, τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι 8 καὶ 12 ἔχουσι μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τὸν 4, καθιστῶμεν ἀνάγωγον, διαιροῦντες καὶ τοὺς δύο αὐτοῦ ὅρους διὰ τοῦ 4 (§ 209), ὅτε εὑρίσκομεν $\frac{2}{3}$.

Τροπὴ ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα.

271. Τροπὴ ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα λέγεται ἡ πρᾶξις δι' ἧς τρέπομεν δύο ἢ περισσότερα κλάσματα εἰς τοὺς αὐτοὺς παρονομαστάς, χωρὶς νὰ μεταβληθῇ ἡ ἀξία αὐτῶν.

272. *Ἡ τροπὴ ὁσωνδήποτε ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα, δύναται νὰ ἐπιτευχθῇ* (χωρὶς νὰ μεταβληθῇ ἡ ἀξία αὐτῶν) *ἐὰν λάβωμεν κοινόν τι πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν καὶ πολλαπλασιάσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους ἑκάστου κλάσματος ἐπὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ληφθέντος κοινοῦ πολλαπλασίου, δι' ἑκάστου τῶν παρονομαστῶν τῶν δοθέντων κλασμάτων (§ 266), ὅτε τὸ ληφθὲν κοινὸν πολλαπλάσιον γίνεται κοινὸς παρονομαστὴς τῶν προκυπτόντων κλασμάτων.*

273. Κατὰ ταῦτα, δύο ἢ περισσότερα κλάσματα δύνανται νὰ τραπῶσιν εἰς τοὺς αὐτοὺς παρονομαστὰς (χωρὶς νὰ μεταβληθῇ ἡ ἀξία αὐτῶν), κατ' *ἀπείρους* τρόπους. Διότι ἄπειρα εἶναι τὰ κοινὰ πολλαπλάσια δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν (§ 218 Σημ.). Εὑρίσκομεν δὲ προφανῶς τὸν ἐλάχιστον κοινὸν παρονομαστήν, ἐὰν λάβωμεν, *ὡς τοιοῦτον, τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν*. Διότι ὁ τοιοῦτος ἀριθμὸς θὰ εἶναι ὁ ἐλάχιστος ἐκ τῶν ἀριθμῶν τῶν διαιρουμένων ἀκριβῶς δι' ἑκάστου τῶν παρονομαστων τῶν δοθέντων κλασμάτων.

Παράδειγμα 1ον. *Νὰ τραπῶσι τὰ κλάσματα* $\frac{3}{4}$ *καὶ* $\frac{5}{6}$ *εἰς τοὺς αὐτοὺς παρονομαστάς.*

α'. τρόπος. Ἐὰν λάβωμεν τὸ γινόμενον 4×6 τῶν παρονομαστῶν, τοῦτο εἶναι ἓν τῶν κοινῶν πολλαπλασίων αὐτῶν, ὅτε δέον τοὺς δύο ὅρους τοῦ πρώτου κλάσματος νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸ πηλίκον $4\times6:4$ ἤτοι 6, τοὺς δὲ δύο ὅρους τοῦ δευτέρου κλάσματος ἐπὶ τὸ πηλίκον $4\times6:6$ ἤτοι 4, ὅτε εὑρίσκομεν τὰ ἰσοδύναμα κλάσματα $\frac{18}{24}$ καὶ $\frac{20}{24}$.

β'. τρόπος. Εὑρίσκομεν πρῶτον τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν 4 καὶ 6, ὅπερ εἶναι 12. Εἶτα δὲ πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ πρώτου κλάσματος ἐπὶ τὸ πηλίκον 12:4, ἤτοι 3, τοὺς δὲ δύο ὅρους τοῦ δευτέρου κλάσματος ἐπὶ τὸ πηλίκον 12 : 6, ἤτοι 2 καὶ οὕτω εὑρίσκομεν τὰ ἰσοδύναμα κλάσματα $\frac{9}{12}$ καὶ $\frac{10}{12}$.

Ἐκτὸς δὲ τῶν κατὰ τοὺς δύο ἀνωτέρω τρόπους εὑρισκομένων κοινῶν πολλαπλασίων, τὰ ὁποῖα θέτομεν ὡς κοινοὺς παρονομαστάς, δυνάμεθα, ὡς τοιοῦτον, νὰ θέσωμεν καὶ πᾶν πολλαπλάσιον τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου αὐτῶν 12, ἤτοι 24, 36, 48 κτλ.

Παράδειγμα 2ον. Νὰ τραπῶσι τὰ κλάσματα $\frac{2}{3}$, $\frac{9}{12}$ *καὶ* $\frac{4}{15}$ *εἰς τοὺς αὐτοὺς παρονομαστάς.*

α'. τρόπος. Ἐὰν λάβωμεν τὸ γινόμενον $3\times12\times15$ τῶν παρονομαστῶν, τοῦτο εἶναι ἓν τῶν κοινῶν πολλαπλασίων αὐτῶν, ὅτε δέον τοὺς δύο ὅρους τοῦ πρώτου κλάσματος νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸ πηλίκον $3\times12\times15:3$ ἤτοι 12×15 ἤτοι 180, τοὺς δὲ δύο ὅρους τοῦ δευτέρου κλάσματος ἐπὶ τὸ πηλίκον $3\times12\times15:12$, ἤτοι 3×15, ἤτοι 45, τοὺς δὲ δύο ὅρους τοῦ τρίτου κλάσματος ἐπὶ τὸ πηλίκον $3\times12\times15:15$ ἤτοι 3×12, ἤτοι 36, ὅτε εὑρίσκομεν τὰ ἰσοδύναμα κλάσματα $\frac{2\times180}{3\times180}$, $\frac{9\times45}{12\times45}$, $\frac{4\times36}{15\times36}$ ἤτοι $\frac{360}{540}$, $\frac{405}{540}$ καὶ $\frac{144}{540}$.

β'. τρόπος. Εὑρίσκομεν πρῶτον τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν 3, 12, 15, ὅπερ εἶναι ὁ ἀριθμὸς 60 Εἶτα δὲ πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ πρώτου κλάσματος ἐπὶ τὸ πηλίκον 60 : 3, ἤτοι 20 καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ δευτέρου κλάσματος ἐπὶ τὸ πηλίκον 60 : 12, ἤτοι 5 καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ τρίτου κλάσματος ἐπὶ τὸ πηλίκον 60:15, ἤτοι 4 καὶ οὕτω εὑρίσκομεν τὰ ἰσοδύναμα κλάσματα $\frac{2\times20}{3\times20}$, $\frac{9\times5}{12\times5}$ καὶ $\frac{4\times4}{15\times4}$, ἤτοι $\frac{40}{60}$, $\frac{45}{60}$, $\frac{16}{60}$.

Ἐκτὸς δὲ τῶν κατὰ τοὺς δύο ἀνωτέρω τρόπους εὑρισκομένων κοινῶν πολλαπλασίων, τὰ ὁποῖα θέτομεν ὡς κοινοὺς παρονομαστάς, δυνάμεθα ὡς τοιοῦτον νὰ θέσωμεν καὶ πᾶν πολλαπλάσιον τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου αὐτῶν 60 ἤτοι 120, 180, 240 κτλ.

Σύγκρισις κλασμάτων μεταξύ των.

274. *Μεταξὺ κλασμάτων τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν μεγαλήτερον εἶναι, τὸ ἔχον ἀριθμητὴν μεγαλήτερον.*

Π. χ. Ἐκ τῶν κλασμάτων $\frac{3}{8}$ καὶ $\frac{6}{8}$ μεγαλήτερον εἶναι τὸ $\frac{6}{8}$, διότι ἔχει μεγαλήτερον ἀριθμητὴν καὶ ἑπομένως περισσοτέρας κλασματικὰς μονάδας.

275. *Μεταξὺ κλασμάτων τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὸν αὐτὸν ἀριθμητὴν μεγαλήτερον εἶναι τὸ ἔχον μικρότερον παρονομαστήν.*

Π. χ. Ἐκ τῶν κλασμάτων $\frac{3}{8}$ καὶ $\frac{3}{4}$ μεγαλήτερον εἶναι τὸ $\frac{3}{4}$, διότι ἔχει παρονομαστὴν μικρότερον καὶ ἑπομένως αἱ κλασματικαί του μονάδες εἶναι μεγαλήτεραι.

276. *Ὅπως συγκρίνωμεν μεταξύ των δύο ἢ περισσότερα κλάσματα ἔχοντα διαφόρους παρονομαστὰς τρέπομεν πρῶτον αὐτὰ εἰς τοὺς αὐτοὺς παρονομαστάς. Ὅτε τὸ μέγιστον μὲν κλάσμα εἶναι, τὸ παρέχον τὸν μεγαλήτερον ἀριθμητήν, τὸ ἐλάχιστον δὲ κλάσμα εἶναι, τὸ παρέχον τὸν μικρότερον ἀριθμητήν, τὰ δὲ κλάσματα τὰ παρέχοντα ἴσους ἀριθμητὰς εἶναι ἴσα.*

Π. χ. Τρέποντες τὰ κλάσματα

$$\frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{6},\ \frac{5}{8},\ \frac{5}{16}$$

εἰς τοὺς αὐτοὺς παρανομαστάς, εὑρίσκομεν τὰ κλάσματα

$$\frac{32}{48},\ \frac{36}{48},\ \frac{32}{48},\ \frac{30}{48},\ \frac{15}{48}$$

ἐξ ὧν παρατηροῦμεν, ὅτι τὰ μὲν κλάσματα $\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{4}{6}$ εἶναι ἰσοδύναμα, διότι ἑκάτερον τούτων παρέσχε τὸ κλάσμα $\frac{32}{48}$. Ἔρχονται δὲ τὰ δοθέντα κλάσματα κατὰ σειρὰν μεγέθους ὡς ἑξῆς. Μεγαλήτερον μὲν τὸ $\frac{3}{4}$, μετ' αὐτὸ δὲ ἔρχεται τὸ $\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{4}{6}$, εἶτα τὸ $\frac{5}{8}$ καὶ εἶτα τὸ $\frac{5}{16}$.

277. *Θεώρημα. Ἐὰν προσθέσωμεν εἰς ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους κλάσματός τινος τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τὸ κλάσμα αὐξάνει μέν, ἐὰν εἶναι*

μικρότερον τῆς ἀκεραίας μονάδος, ἐλαττοῦται δὲ, ἐὰν εἶναι μεγαλήτερον τῆς ἀκεραίας μονάδος.

Λέγω π. χ. ὅτι, ἂν εἰς τὸ κλάσμα $\frac{5}{7}$ προσθέσωμεν εἰς ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τὸν 2, *θ' αὐξήσῃ*, ἂν δὲ κάμω τοῦτο εἰς τὸ κλάσμα $\frac{7}{4}$, τοῦτο θὰ ἐλαττωθῇ.

Διότι τὸ κλάσμα $\frac{5}{7}$ εἶναι μικρότερον τῆς ἀκεραίας μονάδος κατὰ **2** *ἕβδομα*, ἐν ᾧ τὸ $\frac{5+2}{7+2}$, ἤτοι τὸ $\frac{7}{9}$ εἶναι μικρότερον τῆς ἀκεραίας μονάδος κατὰ **2** *ἔννατα*, ἄρα τὸ κλάσμα $\frac{7}{9}$ εἶναι πλησιέστερον πρὸς τὴν ἀκεραίαν μονάδα ἢ τὸ $\frac{5}{7}$. Ἑπομένως τὸ $\frac{7}{9}$ εἶναι μεγαλήτερον τοῦ $\frac{5}{7}$.

Τὸ δὲ κλάσμα $\frac{7}{4}$ εἶναι μεγαλήτερον τῆς ἀκεραίας μονάδος κατὰ **3** *τέταρτα*, ἐν ᾧ τὸ $\frac{7+2}{4+2}$, ἤτοι τὸ $\frac{9}{6}$ εἶναι μεγαλήτερον τῆς ἀκεραίας μονάδος κατὰ **3** *ἕκτα*, ἄρα τὸ κλάσμα $\frac{9}{6}$ (ὂν μεγαλήτερον τῆς ἀκεραίας μονάδος), εἶναι πλησιέστερον πρὸς τὴν ἀκεραίαν μονάδα ἢ τὸ κλάσμα $\frac{7}{4}$. Ἑπομένως τὸ $\frac{9}{6}$ εἶναι μικρότερον τοῦ $\frac{7}{4}$.

278. **Θεώρημα.** *Ἐὰν ἀφαιρέσωμεν ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ὅρων κλάσματός τινος τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τὸ κλάσμα ἐλαττοῦται μέν, ἐὰν εἶναι μικρότερον τῆς ἀκεραίας μονάδος, αὐξάνει δέ, ἐὰν εἶναι μεγαλήτερον τῆς ἀκεραίας μονάδος.*

Λέγω π. χ. ὅτι, ἂν εἰς τὸ κλάσμα $\frac{5}{7}$ ἀφαιρέσωμεν ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ὅρων τὸ 2, θὰ ἐλαττωθῇ, ἂν δὲ κάμω τοῦτο εἰς τὸ κλάσμα $\frac{7}{4}$ θ' *αὐξήσῃ* τοῦτο.

Διότι τὸ κλάσμα $\frac{5}{7}$ εἶναι μικρότερον τῆς ἀκεραίας μονάδος κατὰ **2** *ἕβδομα*, ἐν ᾧ τὸ $\frac{5-2}{7-2}$, ἤτοι τὸ $\frac{3}{5}$ εἶναι μικρότερον τῆς ἀκεραίας μονάδος κατὰ **2** *πέμπτα*, ἄρα τὸ κλάσμα $\frac{5}{7}$ εἶναι πλησιέστερον τῆς ἀκεραίας μονάδος ἢ τὸ $\frac{3}{5}$. Ἑπομένως τὸ $\frac{5}{7}$ εἶναι μεγαλήτερον τοῦ $\frac{3}{5}$.

Τὸ δὲ κλάσμα $\frac{7}{4}$ εἶναι μεγαλήτερον τῆς ἀκεραίας μονάδος κατὰ 3 τέταρτα, ἐν ᾧ τὸ κλάσμα $\frac{7-2}{4-2}$, ἤτοι τὸ $\frac{5}{2}$ εἶναι μεγαλήτερον τῆς ἀκεραίας μονάδος κατὰ 3 δεύτερα, ἄρα τὸ κλάσμα $\frac{7}{4}$ (ὂν μεγαλήτερον τῆς ἀκεραίας μονάδος) εἶναι πλησιέστερον πρὸς ταύτην τοῦ κλάσματος $\frac{5}{2}$. Ἑπομένως τὸ $\frac{7}{4}$ εἶναι μικρότερον τοῦ $\frac{5}{2}$.

Πρόσθεσις.

279. *Πρόσθεσις εἶναι ἡ πρᾶξις διὰ τῆς ὁποίας σχηματίζομεν ἕνα ἀριθμὸν ἐκ πασῶν τῶν μονάδων* (ἀκεραίων ἢ κλασματικῶν) *τὰς ὁποίας ἔχουσι δύο ἢ περισσότεροι δοθέντες ἀριθμοί.*

Ἄθροισμα ἢ κεφάλαιον λέγεται ὁ ἀριθμὸς τὸν ὁποῖον σχηματίζομεν ἐκ πασῶν τῶν μονάδων (ἀκεραίων ἢ κλασματικῶν) τῶν προσθετέων.

Εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν κλασμάτων διακρίνομεν δύο περιπτώσεις.

Α'.) Ὅταν οἱ προσθετέοι γίνωνται ἐκ τῆς αὐτῆς μονάδος καὶ

Β') Ὅταν οἱ προσθετέοι γίνωνται ἐκ διαφόρων μονάδων.

Α'. Περίπτωσις.

280. *Διὰ νὰ προσθέσωμεν κλάσματα γινόμενα ἀπὸ τὴν ἰδίαν κλασματικὴν μονάδα, προσθέτομεν μόνον τοὺς ἀριθμητὰς καὶ ὑπὸ τὸ ἄθροισμα θέτομεν παρονομαστήν, ὁποῖον ἔχουσι τὰ κλάσματα.*

Π. χ. Προσθέτοντες τὰ κλάσματα $\frac{3}{4}+\frac{5}{4}+\frac{6}{4}$ εὑρίσκομεν ἄθροισμα $\frac{3+5+6}{4}$, ἤτοι $\frac{14}{4}$.

Ὁ λόγος διὰ τὸν ὁποῖον προσθέτομεν μόνον τοὺς ἀριθμητὰς εἶναι, διότι μόνον εἰς αὐτοὺς ὑπάρχει τὸ πλῆθος τῶν μονάδων ἑκάστου κλάσματος, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα ζητεῖται (§ 279). Θέτομεν δὲ ὑπὸ τὸ ἄθροισμα παρονομαστὴν ὁποῖον ἔχουσιν οἱ προσθετέοι, διὰ νὰ σημάνωμεν ὅτι, ἡ μονὰς ἐκ τῆς ὁποίας γίνεται τὸ *ἄθροισμα* εἶναι ἡ *αὐτὴ* μὲ *τὴν μονάδα* ἐκ τῆς ὁποίας γίνονται οἱ *προσθετέοι.*

Β'. Περίπτωσις.

281. *Διὰ νὰ προσθέσωμεν δύο ἢ περισσοτέρους ἀριθμοὺς γινομένους ἐκ διαφόρων μονάδων, κάμνομεν πρῶτον αὐτοὺς νὰ γίνωνται ἐκ τῆς αὐτῆς μονάδος καὶ ἔπειτα τοὺς προσθέτομεν.*

Ὁ λόγος δὲ τούτου εἶναι, διότι ἀριθμοὶ γινόμενοι ἐκ διαφόρων μονάδων κατὰ μέγεθος δὲν δύνανται νὰ προστεθῶσι. Τοῦτο δὲ γνωρίζομεν καὶ ἐκ τῶν ἀκεραίων, διότι διὰ νὰ προσθέσωμεν π.χ. δεκάδας εἰς μονάδας ἔπρεπε πρῶτον νὰ τρέψωμεν τὰς δεκάδας εἰς μονάδας καὶ ἔπειτα νὰ προσθέσωμεν αὐτάς.

Π. χ. Διὰ νὰ προσθέσωμεν 2 *δεκάδας* εἰς 5 *μονάδας* τρέπομεν πρῶτον τὰς 2 δεκάδας εἰς μονάδας, ὁπότε γίνονται 20 μονάδες καὶ εἰς ταύτας προσθέτομεν ἔπειτα τὰς 5 μονάδας καὶ οὕτως εὑρίσκομεν ἐν ὅλῳ 25 μονάδας.

282. Στηριζόμενοι εἰς τὴν πρότασιν (§ 281) δυνάμεθα εὐκόλως νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν πρόσθεσιν ὁσωνδήποτε ἑτερωνύμων ἀριθμῶν.

Παράδειγμα 1ον. *Νὰ προστεθῶσι τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα*

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}$$

Λύσις. Τρέπομεν πρῶτον τὰ κλάσματα εἰς τοὺς αὐτοὺς παρονομαστὰς διὰ νὰ κάμωμεν αὐτὰ νὰ γίνωνται ἐκ τῆς αὐτῆς μονάδος (§ 281), ὅτε εὑρίσκομεν τὰ κλάσματα $\frac{8}{12}+\frac{9}{12}+\frac{10}{12}$. Ἔπειτα προ-προσθέτοντες τὰ κλάσματα ταῦτα, εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ζητούμενον ἄθροισμα εἶναι $\frac{27}{12}$, ἤτοι $2\frac{3}{12}$.

Ἐκ τοῦ παραδείγματος τούτου μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς πρακτικὸν κανόνα.

283. *Διὰ νὰ προσθέσωμεν δύο ἢ περισσότερα ἑτερώνυμα κλάσματα, τρέπομεν πρῶτον αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα καὶ ἔπειτα προσθέτομεν αὐτά.*

284. Τροπὴ μικτοῦ εἰς κλασματικὸν λέγεται ἡ εὕρεσις κλάσματος ἰσοδυνάμου πρὸς τὸν μικτόν. Γίνεται δὲ ἡ τροπὴ τοῦ μικτοῦ εἰς κλασματικόν, ἐὰν προσθέσωμεν τὸν ἀκέραιον εἰς τὸ κλάσμα.

Παράδειγμα 2ον. *Νὰ τραπῇ ὁ μικτὸς* $4\frac{3}{5}$ *εἰς ἰσοδύναμον κλασματικόν.*

Λύσις. Ἵνα τρέψωμεν τὸν μικτὸν $4\frac{3}{5}$ ἢ $4+\frac{3}{5}$ εἰς ἰσοδύναμον κλασματικόν, ἀρκεῖ τὸν ἀκέραιον ἀριθμὸν 4 νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸ κλάσμα $\frac{3}{5}$. Δι' ὃ κάμνομεν πρῶτον τὸν 4 νὰ γίνεται ἀπὸ τὸ $\frac{1}{5}$, ὅτε γίνεται $\frac{20}{5}$ καὶ οὕτως ἔχομεν

$$4+\frac{3}{5}=\frac{20}{5}+\frac{3}{5}, \text{ ἤτοι } \frac{23}{5}.$$

Ἀλλὰ τὸ ἐξαγόμενον $\frac{23}{5}$ εὑρίσκομεν ἐκ τοῦ μικτοῦ $4\frac{3}{5}$ καὶ ἐὰν τὸν ἀκέραιον 4 τοῦ μικτοῦ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν 5 τοῦ κλάσματός του καὶ τὸ γινόμενον 20 προσθέσωμεν εἰς τὸν ἀριθμητὴν 3.

Ἐκ τοῦ παραδείγματος τούτου μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς πρακτικὸν κανόνα.

285. *Διὰ νὰ τρέψωμεν μικτὸν εἰς ἰσοδύναμον κλασματικόν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀκέραιον ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος καὶ τὸ γινόμενον νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν ἀριθμητὴν αὐτοῦ.*

Π. χ. Κατὰ ταῦτα ὁ μικτὸς $7\frac{4}{5}$ ἰσοῦται πρὸς τὸ κλάσμα $\frac{35+4}{5}$ ἤτοι $\frac{39}{5}$.

Παράδειγμα 3ον. *Νὰ προστεθῶσιν οἱ μικτοὶ ἀριθμοὶ* $2\frac{3}{4}+3\frac{4}{5}+5\frac{2}{10}$.

Λύσις. Προσθέτοντες χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα, ἐκ μὲν τῶν ἀκεραίων $2+3+5$ ἔχομεν ἄθροισμα 10, ἐκ δὲ τῶν κλασμάτων ἔχομεν

$$\overset{5}{\frac{3}{4}}+\overset{4}{\frac{4}{5}}+\overset{2}{\frac{2}{10}}=\frac{15}{20}+\frac{16}{20}+\frac{4}{20}=\frac{35}{20}=1\frac{15}{20}=1\frac{3}{4}$$

Μετὰ δὲ ταῦτα προσθέτοντες τὸ ἄθροισμα $1\frac{3}{4}$ τῶν κλασμάτων εἰς τὸ ἄθροισμα 10 τῶν ἀκεραίων, ἔχομεν τὸ ὁλικὸν ἄθροισμα $11\frac{3}{4}$.

ἢ καὶ ἄλλως

Ἐπειδὴ $2\frac{3}{4}=\frac{11}{4}$, $3\frac{4}{5}=\frac{19}{5}$ καὶ $5\frac{2}{10}=\frac{52}{10}$, ἄρα ἔχομεν ἀντὶ τῶν μικτῶν τὰ κλάσματα

$$\overset{5}{\frac{11}{4}}+\overset{4}{\frac{19}{5}}+\overset{2}{\frac{52}{10}}=\frac{55}{20}+\frac{76}{20}+\frac{104}{20}=\frac{235}{20}=11\frac{15}{20}=11\frac{3}{4}$$

Ἐκ τοῦ παραδείγματος τούτου μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς πρακτικὸν κανόνα.

286. *Διὰ νὰ προσθέσωμεν ὁσουσδήποτε μικτοὺς ἢ προσθέτομεν χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα ἢ τρέπομεν τοὺς μικτοὺς εἰς κλάσματα καὶ ἔπειτα προσθέτομεν αὐτά.*

Παρατήρησις. Ἐπειδὴ ἡ πρόσθεσις ὁσωνδήποτε κλασμάτων γίνεται διὰ τῆς τροπῆς τούτων εἰς κλάσματα ὁμώνυμα καὶ τῆς προσθέσεως ἔπειτα μόνον *τῶν ἀριθμητῶν* τῶν τοιούτων κλασμάτων,(δηλαδὴ τῶν ἀριθμῶν,οἵτινες παριστῶσι τὸ ποσὸν τῶν μονάδων ἑκάστου κλάσματος), διὰ τοῦτο καὶ ἡ πρόσθεσις τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν ἀνάγεται εἰς τὴν *πρόσθεσιν τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν* καὶ ἑπομένως τὰ θεωρήματα τὰ ἀποδειχθέντα εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἰσχύουσιν καὶ ἐπὶ τῶν κλασματικῶν καὶ μικτῶν ἀριθμῶν.

Ἀφαίρεσις.

287. *Ἀφαίρεσις λέγεται ἡ πρᾶξις διὰ τῆς ὁποίας ἐλαττοῦμεν τὸν μειωτέον κατὰ τόσας μονάδας* (ἀκεραίας ἢ κλασματικάς), *ὅσας περιέχει ὁ ἀφαιρετέος.*

288. *Διαφορὰ ἢ ὑπόλοιπον* λέγεται ὁ ἀριθμὸς κατὰ τὸν ὁποῖον ὑπερτερεῖ ὁ μειωτέος τὸν ἀφαιρετέον.

289. Εἰς τὴν ἀφαίρεσιν τῶν κλασμάτων διακρίνομεν δύο περιπτώσεις.

Α΄.) *Ὅταν ὁ μειωτέος καὶ ὁ ἀφαιρετέος γίνονται ἐκ τῆς αὐτῆς μονάδος καὶ*

Β΄.) *Ὅταν ὁ μειωτέος καὶ ἀφαιρετέος γίνονται ἐκ διαφόρων μονάδων.*

Α΄. περίπτωσις

290. *Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν κλάσματα γινόμενα ἀπὸ τὴν ἰδίαν κλασματικὴν μονάδα ἀφαιροῦμεν μόνον τοὺς ἀριθμητὰς καὶ ὑπὸ τὴν διαφορὰν γράφομεν παρονομαστὴν ὁποῖον ἔχουσι τὰ κλάσματα.*

Π. χ. Ἀφαιροῦντες τὰ κλάσματα $\frac{5}{6}-\frac{3}{6}$ εὑρίσκομεν διαφορὰν $\frac{5-3}{6}$, ἤτοι $\frac{2}{6}$.

Ὁ λόγος διὰ τὸν ὁποῖον ἀφῃρέσαμεν μόνον τοὺς ἀριθμητὰς εἶναι, διότι μόνον εἰς αὐτοὺς ὑπάρχει τὸ πλῆθος τῶν εἰς ἕκαστον κλάσμα ὑπαρχουσῶν κλασματικῶν μονάδων, τῶν ὁποίων τὴν διαφορὰν ζητοῦμεν (§ 287). Θέτομεν δὲ ὑπὸ τὴν διαφορὰν παρονομαστὴν ὁποῖον ἔχουσι τὰ κλάσματα, διὰ νὰ σημάνωμεν, ὅτι *ἡ μονὰς ἐκ τῆς ὁποίας γίνεται ἡ διαφορὰ* εἶναι ἡ *αὐτὴ μὲ τὴν μονάδα, ἐκ τῆς ὁποίας γίνεται ὁ* μειωτέος καὶ ὁ ἀφαιρετέος.

Β'. περίπτωσις

291. *Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν δύο ἀριθμοὺς γινομένους ἀπὸ διαφόρους μονάδας κάμνομεν πρῶτον αὐτοὺς νὰ γίνωνται ἐκ τῆς αὐτῆς μονάδος καὶ ἔπειτα τοὺς ἀφαιροῦμεν.*

Ὁ λόγος δὲ τούτου εἶναι, διότι ἀριθμοὶ γινόμενοι ἐκ διαφόρων μονάδων δὲν δύνανται νὰ ἀφαιρεθῶσι. Τοῦτο δὲ γνωρίζομεν καὶ ἐκ τῶν ἀκεραίων, διότι διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν π. χ. μονάδας ἀπὸ δεκάδας, ἔπρεπε πρῶτον νὰ τρέψωμεν καὶ τὰς δεκάδας εἰς μονάδας καὶ ἔπειτα νὰ κάμωμεν τὴν ἀφαίρεσιν.

Π. χ. Διὰ ν' ἀφαιρέσωμεν 2 μονάδας ἀπὸ 2 δεκάδας, τρέπομεν πρῶτον τὰς δεκάδας εἰς μονάδας, ὅτε γίνονται 20 μονάδες καὶ ἔπειτα ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τούτων τὰς δύο μονάδας καὶ οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι, ἡ ζητουμένη διαφορὰ εἶνε 18 μονάδες.

292. Στηριζόμενοι εἰς τὴν πρότασιν (§ 291) δυνάμεθα εὐκόλως νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν ἀφαίρεσιν δύο ἑτερωνύμων ἀριθμῶν.

Παράδειγμα 1ον. *Ν' ἀφαιρεθῇ ἐκ τοῦ* $\frac{5}{6}$ *τὸ* $\frac{2}{3}$.

Λύσις. Τρέπομεν πρῶτον τὰ κλάσματα εἰς τοὺς αὐτοὺς παρονομαστάς, διὰ νὰ κάμωμεν αὐτὰ νὰ γίνωνται ἐκ τῆς αὐτῆς μονάδος (§ 291), ὅτε εὑρίσκομεν τὰ κλάσματα $\frac{5}{6}$ καὶ $\frac{4}{6}$. Ἔπειτα ἀφαιροῦντες ταῦτα εὑρίσκομεν $\frac{5-4}{6}$, ἤτοι $\frac{1}{6}$.

Ἐκ τοῦ παραδείγματος τούτου μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς πρακτικὸν κανόνα.

293. *Διὰ ν' ἀφαιρέσωμεν δύο ἑτερώνυμα κλάσματα, τρέπομεν πρῶτον αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα καὶ ἔπειτα τὰ ἀφαιροῦμεν,*

Π. χ. $\frac{3}{4}-\frac{2}{5}=\frac{15}{20}-\frac{8}{20}=\frac{7}{20}$.

Παράδειγμα 2ον. *Ν' ἀφαιρεθῇ ἐκ τοῦ μικτοῦ* $4\frac{2}{3}$ *ὁ μικτὸς* $1\frac{3}{7}$.

Λύσις. Τρέπομεν πρῶτον τὰ πρὸς ἀφαίρεσιν κλάσματα $\frac{2}{3}-\frac{3}{7}$ εἰς ὁμώνυμα, ὅτε ἔχομεν $\frac{14}{21}-\frac{9}{21}$, ἐξ ὧν εὑρίσκομεν διαφορὰν $\frac{5}{21}$. Εἶτα δὲ ἀφαιροῦντες τοὺς ἀκεραίους τῶν μικτῶν ἔχομεν διαφορὰν 3. Καὶ οὕτως ἔχομεν τελικὴν διαφορὰν $3\frac{5}{21}$.

ἢ καὶ ἄλλως ὡς ἑξῆς

Ἐπειδὴ $4\frac{2}{3}=\frac{14}{3}$ καὶ $1\frac{3}{7}=\frac{10}{7}$, ἄρα ἔχομεν

$$4\frac{2}{3}-1\frac{3}{7}=\frac{14}{3}-\frac{10}{7}=\frac{98}{21}-\frac{30}{21}=\frac{68}{21}=3\frac{5}{21}$$

Ἐκ τοῦ παραδείγματος τούτου μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς πρακτικὸν κανόνα.

294. *Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν μικτὸν ἀπὸ μικτοῦ ἢ ἀφαιροῦμεν χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα ἢ τρέπομεν τοὺς μικτοὺς εἰς κλάσματα καὶ ἔπειτα ἀφαιροῦμεν αὐτά.*

Παρατήρησις. Ἐπειδὴ ἡ ἀφαίρεσις δύο κλασματικῶν ἀριθμῶν γίνεται διὰ τῆς τροπῆς τούτων εἰς κλάσματα ὁμώνυμα καὶ τῆς ἀφαιρέσεως ἔπειτα *μόνον τῶν ἀριθμητῶν τῶν τοιούτων κλασμάτων*, (δηλαδὴ τῶν ἀριθμῶν, οἵτινες παριστῶσι τὸ ποσὸν τῶν μονάδων ἑκάστου κλάσματος), διὰ τοῦτο καὶ ἡ ἀφαίρεσις τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν ἀνάγεται εἰς τὴν *ἀφαίρεσιν τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν* καὶ ἑπομένως τὰ θεωρήματα τὰ ἀποδειχθένα εἰς τὴν ἀφαίρεσιν τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἰσχύουσι καὶ ἐπὶ τῶν κλασματικῶν καὶ μικτῶν ἀριθμῶν.

Μετὰ τὴν παρατήρησιν ταύτην, στηριζόμενοι εἰς τὸ θεώρημα (§ 72) δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν *συντόμως* τὴν ἀφαίρεσιν οἱουδήποτε κλάσματος *ἢ καὶ μικτοῦ, ἀπὸ ἀκεραίου*, ὡς καὶ *τὴν ἀφαίρεσιν μικτοῦ ἀπὸ μικτοῦ, καθ' ἣν περίπτωσιν τὸ κλάσμα τοῦ ἀφαιρετέου εἶναι μεγαλήτερον τοῦ κλάσματος τοῦ μειωτέου.*

Παράδειγμα 1ον. *Ν' ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ ἀκεραίου 6 τὸ κλάσμα* $\frac{15}{4}$.

Λύσις. Διὰ ν' ἀφαιρέσωμεν τὸ $\frac{15}{4}$ ἀπὸ τοῦ 6 *συντόμως, φανταζόμεθα* ὅτι εἰς τὸν μειωτέον 6 ὑπάρχει καὶ τὸ κλάσμα $\frac{16}{4}$, ὅπερ ἰσοῦται πρὸς *τέσσαρας* ἀκεραίας μονάδας καὶ εἶτα λέγομεν

$\frac{15}{4}$ ἀπὸ $\frac{16}{4}$ ἔχομεν διαφορὰν $\frac{1}{4}$.

Εἶτα δὲ λέγομεν, 4 τὰ *κρατούμενα* (§ 72) ἀπὸ 6 ἔχομεν διαφορὰν 2 καὶ οὕτως ἡ τελικὴ διαφορὰ εἶναι $2\frac{1}{4}$.

Παράδειγμα 2ον. *Ν' ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ ἀκεραίου 9 ὁ μικτὸς* $2\frac{3}{5}$.

Λύσις. Διὰ ν' ἀφαιρέσωμεν τὸν $2\frac{3}{5}$ ἀπὸ τοῦ 9 *συντόμως*, *φανταζόμεθα* ὅτι εἰς τὸν μειωτέον 9 ὑπάρχει καὶ τὸ κλάσμα $\frac{5}{5}$, ὅπερ ἰσοῦται πρὸς *μίαν ἀκεραίαν* μονάδα καὶ εἶτα λέγομεν

$\frac{3}{5}$ ἀπὸ $\frac{5}{5}$ ἔχομεν διαφορὰν $\frac{2}{5}$.

Εἶτα δὲ λέγομεν, 1 τὸ *κρατούμενον* (§ 72) ἀπὸ 9 ἔχομεν διαφορὰν 8 καὶ οὕτως ἡ τελικὴ διαφορὰ εἶναι $8\frac{2}{5}$.

Παράδειγμα 3ον. *Ν' ἀφαιρεθῇ ὁ μικτὸς* $2\frac{3}{4}$ *ἐκ τοῦ μικτοῦ* $5\frac{3}{7}$.

Λύσις. Τρέπομεν πρῶτον τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα καὶ οὕτω τὰ $\frac{3}{4}$ καὶ $\frac{3}{7}$ γίνονται $\frac{12}{28}$ καὶ $\frac{21}{28}$ καὶ ἤδη ἔχομεν ν' ἀφαιρέσωμεν τοὺς μικτοὺς $5\frac{12}{28} - 2\frac{21}{28}$. Ἐπειδὴ ὅμως τὸ κλάσμα τοῦ ἀφαιρετέου εἶναι μεγαλήτερον τοῦ κλάσματος τοῦ μειωτέου, *αὐξάνομεν* τὰς μονάδας τούτου κατὰ 28 κλασματικὰς μονάδας, αἵτινες ἰσοῦνται *πρὸς μίαν ἀκεραίαν μονάδα* καὶ οὕτω τὰ $\frac{12}{28}$ γίνονται $\frac{40}{28}$ καὶ εἶτα λέγομεν $\frac{21}{28}$ ἀπὸ $\frac{40}{28}$ ἔχομεν διαφορὰν $\frac{19}{28}$. Εἶτα δὲ λέγομεν, 1, τὸ *κρατούμενον* (§ 72) καὶ 2 κάμνουν 3 ἀπὸ 5 ἔχομεν διαφορὰν 2 καὶ οὕτω ἡ τελικὴ διαφορὰ εἶναι $2\frac{19}{28}$.

Πολλαπλασιασμός.

295. Εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν κλασμάτων διακρίνομεν δύο περιπτώσεις.

Α'.) *Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι ἀκέραιος τοῦ πολλαπλασιαστέου ὄντος οἱουδήποτε.*

Β'.) *Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι κλάσμα τοῦ πολλαπλασιαστέου ὄντος οἱουδήποτε.*

Α'. περίπτωσις. Πολλαπλασιαστὴς ἀκέραιος.

Καθ' ἣν περίπτωσιν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι ἀκέραιος τοῦ πολλαπλασιαστέου ὄντος οἱουδήποτε, ὁ ὁρισμὸς τοῦ πολλααλασιασμοῦ ἐξακολουθεῖ νὰ μένῃ ὁ αὐτὸς τοῦ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.

Διότι καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τὸ γινόμενον δύναται νὰ προκύψῃ διὰ τῆς ἐπαναλήψεως τοῦ πολλαπλασιαστέου τόσας φοράς, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἀκέραιος πολλαπλασιαστής. Διὰ τοῦτο καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην λέγομεν ὅτι

296. *Πολλαπλασιασμὸς εἶναι ἡ πρᾶξις, δι' ἧς δεδομένων δύο ἀριθμῶν εὑρίσκεται τρίτος, ὅστις εἶναι ἄθροισμα τόσων προσθετέων ἴσων μὲ τὸν πρῶτον, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ δεύτερος.*

297. Ἐκ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν ὁ πρῶτος λέγεται *πολλαπλπλασιαστέος*, ὁ δὲ δεύτερος *πολλαπλασιαστής*.

298. Ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος προκύπτει ἐκ τῆς προσθέσεως τοῦ πολλαπλασιαστέου τόσας φοράς, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ πολλαπλασιαστὴς λέγεται *γινόμενον*.

Πρακτικοὶ κανόνες πρὸς εὕρεσιν τοῦ γινομένου τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ὄντος ἀκεραίου.

299. Στηριζόμενοι εἰς τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασισμοῦ (§ 296) θὰ προσπαθήσωμεν νὰ ἐκτελέσωμεν τὸ γινόμενον κλάσματος καὶ μικτοῦ ἐπὶ ἀκέραιον καὶ νὰ ἐξαγάγωμεν τοὺς ἀντιστοίχους πρακτικοὺς κανόνας.

Παράδειγμα 1ον. *Νὰ πολλαπλασιασθῇ τὸ κλάσμα* $\frac{5}{12}$ *ἐπὶ τὸν ἀκέραιον ἀριθμὸν 4.*

Λύσις. Ἵνα εὕρωμεν τὸ γινόμενον τοῦ $\frac{5}{12}$ ἐπὶ 4 ἀρκεῖ τὸν $\frac{5}{12}$ *νὰ ἐπαναλάβωμεν 4 φορὰς* (§ 296), ὅτε εὑρίσκομεν

$$\frac{5}{12}+\frac{5}{12}+\frac{5}{12}+\frac{5}{12} \text{ ἤτοι } \frac{5+5+5+5}{12} \text{ ἤτοι } \frac{5\times 4}{12}$$

Ἀλλὰ τὸν πολλαπλασιαστέον $\frac{5}{12}$ δυνάμεθα νὰ ἐπαναλάβωμεν 4 φορὰς καὶ ἐὰν ἑκάστην μονάδα τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπαναλάβωμεν 4 φορὰς ἢ ὅπερ ταὐτό, ἐὰν ἑκάστην μονάδα τοῦ πολλαπλασιαστέου κάμωμεν 4 φορὰς *μεγαλητέραν*, ὅπερ, ὡς γνωστόν, κατορθοῦμεν διαιροῦντες τὸν παρονομαστὴν διὰ 4 (§ 257), ὅτε ἐξ ἑκάστης κλασματικῆς μονάδος $\frac{1}{12}$ θὰ προκύψῃ ἡ κλασματικὴ μονὰς $\frac{1}{3}$, ἄρα ἐκ τῶν 5 κλασματικῶν μονάδων τοῦ $\frac{5}{12}$ θὰ προκύψωσιν αἱ κλασματικαὶ μονάδες

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3} \text{ ἤτοι } \frac{5}{3}$$

Ἐκ τοῦ παραδείγματος τούτου μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς πρακτικὸν κανόνα.

300. *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν κλάσμα ἐπὶ ἀκέραιον πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος ἐπὶ τὸν ἀκέραιον ἢ διαιροῦμεν τὸν παρονομαστὴν διὰ τοῦ ἀκεραίου* (ἂν διαιρῆται),

Π. χ. Τὸ γινόμενον τοῦ $\frac{5}{6}$ ἐπὶ 3 εἶναι $\frac{5\times3}{6}$, ἤτοι $\frac{15}{6}$ ἢ καὶ $\frac{5}{6:3}$ δηλ. $\frac{5}{2}$.

Παρατήρησις. Πᾶν κλάσμα πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν παρονομαστήν του γίνεται ἀκέραιος ἀριθμὸς ἴσος πρὸς τὸν ἀριθμητήν του.

Διότι $\frac{3}{12}$ ἐπὶ 12 γίνεται $\frac{3}{12}\times12=\frac{3\times12}{12}=\frac{3}{1}=3.$

Παράδειγμα 2ον. Νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ μικτὸς $2\frac{5}{6}$ ἐπὶ 3.

Λύσις. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (§ 296) ἔχομεν

$$2\frac{5}{6}\times3=2\frac{5}{6}+2\frac{5}{6}+2\frac{5}{6} \text{ ἢ } 2+2+2+\frac{5+5+5}{6} \text{ ἤτοι } 2\times3+\frac{5\times3}{6}$$

ἢ καὶ ἄλλως ὡς ἑξῆς

Ἐπειδὴ $2\frac{5}{6}=\frac{17}{6}$, ἄρα ἔχομεν

$$2\frac{5}{6}\times3=\frac{17}{6}\times3=\frac{17\times3}{6} \text{ ἢ καὶ } \frac{17}{6:3}$$

Ἐκ τοῦ παραδείγματος τούτου μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς πρακτικὸν κανόνα.

301. *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν μικτὸν ἐπὶ ἀκέραιον πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀκέραιον καὶ τὸ κλάσμα τοῦ μικτοῦ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον πολλαπλασιαστὴν καὶ ἑνοῦμεν τὰ προκύπτοντα γινόμενα ἢ τρέπομεν τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα καὶ ἐκτελοῦμεν ἔπειτα τὸν πολλαπλασιασμόν.*

Β΄. Περίπτωσις. Πολλαπλασιαστὴς κλάσμα.

Ἵνα εὕρωμεν τὸ γινόμενον οἱουδήποτε ἀριθμοῦ ἐπὶ κλάσμα ἀνάγομεν τὴν περίπτωσιν ταύτην εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι ἀκέραιος, ὡς καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν ὁ διαιρέτης εἶναι ἀκέραιος. Δηλαδὴ εἰς περιπτώσεις, καθ' ἃς γνωρίζομεν νὰ ἐκτελῶμεν τὰς πράξεις. Πρὸς τοῦτο δὲ σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

Παράδειγμα. Νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον τοῦ $\frac{4}{7}$ ἐπὶ $\frac{3}{5}$.

Λύσις. Ἐὰν τὸ $\frac{4}{7}$ πολλαπλασιάσωμεν οὐχὶ ἐπὶ $\frac{3}{5}$, ἀλλὰ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον ἀριθμὸν 3, ὅστις εἶναι *πενταπλάσιος* τοῦ $\frac{3}{5}$ τὸ γινόμενον $\frac{4}{7}\times 3$, ἤτοι τὸ $\frac{4\times 3}{7}$ θὰ εἶναι πενταπλάσιον τοῦ ζητουμένου γινομένου, δι' ὃ ἵνα ἐκ τούτου εὕρωμεν τὸ ζητούμενον γινόμενον, δέον νὰ τὸ καταστήσωμεν 5 φορὰς μικρότερον, ἤτοι νὰ διαιρέσωμεν αὐτὸ διὰ 5, ὅπερ κατορθοῦμεν γενικῶς πολλαπλασιάζοντες τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος ἐπὶ 5 (ἰδὲ § 255), ὅτε εὑρίσκομεν $\frac{4\times 3}{7\times 5}$.

Εἰς τὸ αὐτὸ δὲ ἐξαγόμενον $\frac{4\times 3}{7\times 5}$ ἠθέλομεν προφανῶς καταλήξῃ καὶ ἐὰν τοῦ $\frac{4}{7}$ ἐλαμβάνομεν πρῶτον τὸ *πέμπτον* του, ὅπερ εἶναι $\frac{4}{7\times 5}$ καὶ τοῦτο ἐπολλαπλασιάζομεν ἔπειτα ἐπὶ 3, ὅτε θὰ εἴχομεν πάλιν $\frac{4\times 3}{7\times 5}$.

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ ζητήματος τούτου ἐξάγομεν τὸν ἑξῆς ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, καθ' ἣν περίπτωσιν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι κλάσμα τοῦ πολλαπλασιαστέου ὄντος οἱουδήποτε.

302. *Πολλαπλασιασμὸς εἶναι ἡ πρᾶξις δι' ἧς λαμβάνομεν τοσάκις τὸ μέρος τοῦ πολλαπλασιαστέου, τὸ ὁποῖον δηλοῦται ὑπὸ τῆς κλασματικῆς μονάδος τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ὅσας κλασματικὰς μονάδας ἔχει ὁ πολλαπλασιαστής.* Λαμβάνομεν δὲ τοῦτο, ὡς εἴδομεν, διαιροῦντες τὸν πολλαπλασιαστέον διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ καὶ τὸ προκύπτον πηλίκον πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ πολλαπλασιαστοῦ.

Πρακτικοὶ κανόνες πρὸς εὕρεσιν τοῦ γινομένου τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ὄντος κλάσματος.

Στηριζόμενοι εἰς τὸν ὁρισμὸν (§ 302) τοῦ πολλαπλασιασμοῦ θὰ προσπαθήσωμεν νὰ ἐκτελέσωμεν τὸ γινόμενον ἀριθμοῦ ἀκεραίου, κλασματικοῦ καὶ μικτοῦ ἐπὶ κλάσμα καὶ νὰ ἐξαγάγωμεν τοὺς ἀντιστοίχους πρακτικοὺς κανόνας.

Παράδειγμα 1ον. *Νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ 4 ἐπὶ* $\frac{5}{12}$.

Λύσις. Ἵνα εὕρωμεν τὸ γινόμενον τοῦ 4 ἐπὶ $\frac{5}{12}$ ἀνάγκη νὰ λάβωμεν πρῶτον τὸ *δωδέκατον* τοῦ 4 (§ 302), ὅπερ εἶναι $\frac{4}{12}$ (ἰδὲ § 264) τοῦτο δὲ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 5, ὅτε εὑρίσκομεν $\frac{4\times 5}{12}$.

Ἐντεῦθεν ἐξάγομεν τὸν ἑξῆς πρακτικὸν κανόνα.

303. *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀκέραιον ἐπὶ κλάσμα πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος ἐπὶ τὸν ἀκέραιον.*

Π. χ. Τὸ γινόμενον τοῦ 3 ἐπὶ $\frac{5}{7}$ εἶναι $\frac{3\times5}{7}$ ἤτοι $\frac{15}{7}$.

Παράδειγμα 2ον. *Νὰ πολλαπλασιασθῇ τὸ κλάσμα* $\frac{3}{4}$ *ἐπὶ* $\frac{5}{7}$.

Λύσις. Ἵνα εὕρωμεν τὸ γινόμενον τοῦ $\frac{3}{4}$ ἐπὶ $\frac{5}{7}$ ἀνάγκη νὰ λάβωμεν *πρῶτον τὸ ἕβδομον* τοῦ $\frac{3}{4}$ (ἰδὲ § 302), ὅπερ εἶναι $\frac{3}{4\times7}$ (ἰδὲ § 255), τοῦτο δὲ νὰ πολλαπλασιάσωλεν ἐπὶ 5, ὅτε εὑρίσκομεν $\frac{3\times5}{4\times7}$.

Ἐντεῦθεν ἐξάγομεν τὸν ἑξῆς πρακτικὸν κανόνα.

304. *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν κλάσμα ἐπὶ κλάσμα πολλαπλασιάζομεν ἀριθμητὴν ἐπ' ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν ἐπὶ παρονομαστὴν καὶ τὸ μὲν γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν θέτομεν ἀριθμητήν, τὸ δὲ τῶν παρονομαστῶν παρονομαστήν.*

Π. χ. Τὸ γινόμενον τοῦ $\frac{5}{3}$ ἐπὶ $\frac{2}{9}$ εἶναι $\frac{5\times2}{3\times9}$ ἤτοι $\frac{10}{27}$.

Θεωρήματα ἐπὶ τῆς ἰσότητος τῶν ἀριθμῶν.

305. *Θεώρημα. Ἐὰν ἴσους ἀριθμοὺς πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν εὑρίσκομεν γινόμενα ἴσα.*

Διότι τρέποντες τοὺς ἴσους ἀριθμούς, εἰς ἀριθμοὺς γινομένους ἐκ τῆς αὐτῆς μονάδος, θὰ προκύψῃ *εἷς καὶ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς* (§ 45) καὶ ἑπομένως τὸ γινόμενον πάντων τῶν δοθέντων ἴσων ἀριθμῶν ἐπὶ τὸν δοθέντα πολλαπλασιαστήν, θὰ ἰσῶται προφανῶς πρὸς τὸ γινόμενον *ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ* ἐπὶ τὸν δοθέντα πολλαπλασιαστήν, δι' ὃ πάντα τὰ γινόμενα θὰ εἶναι ἴσα.

306. *Πόρισμα. Ἐὰν ἴσους ἀριθμοὺς πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ ἴσους τὰ γινόμενα θὰ εἶναι ἴσα.*

Διότι τρέποντες, ἐπὶ παραδείγματι, τοὺς δευτέρους ἴσους ἀριθμούς, εἰς ἀριθμοὺς γινομένους ἐκ τῆς αὐτῆς μονάδος, θὰ προκύψῃ *εἷς καὶ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς* (§ 45), ὅτε θὰ ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς λοιποὺς ἴσους ἀριθμοὺς ἐπὶ ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν καὶ ἑπομένως θὰ εὕρωμεν γινόμενα ἴσα (§ 305).

307. *Θεώρημα.* *Ἵνα εὕρωμεν τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν πρῶτον παράγοντα ἐπὶ τὸν δεύτερον, τὸ γινόμενον τούτων ἐπὶ τὸν τρίτον καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς μέχρι τοῦ τελευταίου παράγοντος.*

Ἔστωσαν π. χ. οἱ ἀριθμοὶ $\frac{2}{3}$, 4, $\frac{4}{5}$, 7, $\frac{6}{7}$.

Ἵνα εὕρωμεν τὸ γινόμενον τούτων ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς

Ἐπειδὴ $\frac{2}{3}\times 4=\frac{8}{3}$

διὰ τοῦτο (§ 305) καὶ $\frac{2}{3}\times 4\times\frac{4}{5}=\frac{8}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{32}{15}$

ἐξ οὗ εὑρίσκομεν καὶ $\frac{2}{3}\times 4\times\frac{4}{5}\times 7=\frac{32}{15}\times 7=\frac{224}{15}$

ἐξ οὗ ἔχομεν καὶ $\frac{2}{3}\times 4\times\frac{4}{5}\times 7\times\frac{6}{7}=\frac{224}{15}\times\frac{6}{7}=\frac{1344}{105}$

καὶ οὕτω ἀπεδείχθη τό θεώρημα.

308. *Πόρισμα.* Τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε κλασμάτων καὶ ἀκεραίων ἀριθμῶν ἰσοῦται μὲ κλάσμα, ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν τῶν κλασμάτων καὶ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, παρονομαστὴν δὲ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν τῶν κλασμάτων.

Διότι $\frac{2}{3}\times 4\times\frac{3}{5}\times 6=\frac{2\times 4}{3}\times\frac{3}{5}\times 6=\frac{2\times 4\times 3}{3\times 5}\times 6=\frac{2\times 4\times 3\times 6}{3\times 5}$.

Θεμελιώδεις ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

309. *Θεώρημα.* *Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν ἄθροισμα ἐπὶ ἀριθμὸν ἢ ἀριθμὸν ἐπὶ ἄθροισμα* (χωρὶς προηγουμένως νὰ εὕρωμεν αὐτό), *πολλαπλασιάζομεν ἕκαστον τῶν προσθετέων τοῦ ἀθροίσματος ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον καὶ προσθέτομεν τὰ προκύπτοντα γινόμενα.*

Λέγω π. χ. ὅτι $\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{5}\right)\times\frac{6}{7}$ ἰσοῦται πρὸς $\frac{2}{3}\times\frac{6}{7}+\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}$.

Διότι $\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{5}\right)\times\frac{6}{7}=\left(\frac{2\times 5}{3\times 5}+\frac{4\times 3}{5\times 3}\right)\times\frac{6}{7}=\left(\frac{2\times 5+4\times 3}{3\times 5}\right)\times\frac{6}{7}=$

$\frac{(2\times 5+4\times 3)\times 6}{3\times 5\times 7}$ κατὰ δὲ (§ 125) ἔχομεν$=\frac{2\times 5\times 6+4\times 3\times 6}{3\times 5\times 7}=$

$\frac{2\times 5\times 6}{3\times 5\times 7}+\frac{4\times 3\times 6}{3\times 5\times 7}=\frac{2\times 6}{3\times 7}+\frac{4\times 6}{5\times 7}=\frac{2}{3}\times\frac{6}{7}+\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}$ ὅ, ἔ, δ.

Παράδειγμα. *Νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ μικτὸς* $2\frac{3}{4}$ *ἐπὶ* $\frac{5}{6}$.

$2\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}=\left(2+\frac{3}{4}\right)\times\frac{5}{6}=2\times\frac{5}{6}+\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}=\frac{2\times 5}{6}+\frac{3\times 5}{4\times 6}$

ἢ καὶ ἄλλως

$$2\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}=\frac{11}{4}\times\frac{5}{6}=\frac{11\times5}{4\times6}$$

Ἐντεῦθεν ἐξάγομεν τὸν ἑξῆς πρακτικὸν κανόνα.

310. *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν μικτὸν ἐπὶ κλάσμα ἢ πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀκέραιον καὶ τὸ κλάσμα τοῦ μικτοῦ ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ πολλαπλασιαστοῦ καὶ ἑνοῦμεν τὰ προκύπτοντα δύο γινόμενα ἢ τρέπομεν τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα καὶ ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν τὰ δύο κλάσματα.*

311. *Θεώρημα. Τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε παραγόντων δὲν μεταβάλλεται καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν πολλαπλασιάσωμεν αὐτούς.*

Λέγω π. χ. ὅτι τὸ γινόμενον τῶν παραγόντων $\frac{2}{3}\times5\times\frac{4}{7}\times\frac{6}{9}$ ἰσοῦται τῷ γινομένῳ $\frac{6}{9}\times5\times\frac{4}{7}\times\frac{2}{3}$.

Διότι ἐκ μὲν τῶν πρώτων παραγόντων προκύπτει τὸ γινόμενον $\frac{2\times5\times4\times6}{3\times7\times9}$ (ἰδὲ § 308), ἐκ δὲ τῶν δευτέρων προκύπτει τὸ γινόμενον $\frac{6\times5\times4\times2}{9\times7\times3}$. Ταῦτα δὲ τὰ γινόμενα εἶναι ἴσα, διότι οἱ ἀριθμηταί των καὶ οἱ παρονομασταί των εἶναι ἴσοι, διότι ἀποτελοῦνται ἐκ τῶν αὐτῶν *ἀκεραίων ἀριθμῶν* κατ' ἄλλην τάξιν τεταγμένων (§ 134).

312. Τὰς δύο ταύτας ἰδιότητας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καλοῦμεν *θεμελιώδεις*, διότι ἐκ τούτων πηγάζουσι πᾶσαι αἱ ἰδιότητες δηλ. οἱ οἱ τρόποι καθ' οὓς δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν οἱουσδήποτε ἀριθμοὺς καὶ ἀποδεικνύονται, καθ' ὃν τρόπον ἀπεδείχθησαν αἱ ἀντίστοιχοι ἰδιότητες ἐπὶ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν (§ 135—§ 140). Δι' ὃ παραλείπομεν τὰς ἀποδείξεις τούτων.

313. *Θεώρημα. Διαφορὰ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀριθμὸν ἢ ἀριθμὸς ἐπὶ διαφορὰν* (χωρὶς προηγουμένως νὰ εὕρωμεν αὐτήν), *ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν μειωτέον καὶ ἀφαιρετέον τῆς διαφορᾶς ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον καὶ ἀπὸ τοῦ πρώτου γινομένου ἀφαιρέσωμεν τὸ δεύτερον.*

Λέγω π. χ. ὅτι $\left(\frac{4}{5}-\frac{2}{3}\right)\times\frac{6}{7}$ ἰσοῦται πρὸς $\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}-\frac{2}{3}\times\frac{6}{7}$.

Διότι $\left(\frac{4}{5}-\frac{2}{3}\right)\times\frac{6}{7}=\left(\frac{4\times3}{5\times3}-\frac{2\times5}{3\times5}\right)\times\frac{6}{7}=\left(\frac{4\times3-2\times5}{3\times5}\right)\times\frac{6}{7}=$

$=\frac{(4\times3-2\times5)\times6}{3\times5\times7}$ κατὰ δὲ (§ 128) ἔχομεν $=\frac{4\times3\times6-2\times5\times6}{3\times5\times7}=$

$=\frac{4\times3\times6}{3\times5\times7}-\frac{2\times5\times6}{3\times5\times7}=\frac{4\times6}{5\times7}-\frac{2\times6}{3\times7}=\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}-\frac{2}{3}\times\frac{6}{7}$ ὅ, ἔ, δ.

Πρακτικοὶ κανόνες πρὸς εὕρεσιν τοῦ γινομένου τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ὄντος μικτοῦ.

Παράδειγμα 1ον. *Νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ 2 ἐπὶ* $3\frac{4}{5}$.

$$2\times 3\frac{4}{5}=2\times\frac{19}{5}=\frac{38}{5}=7\frac{3}{5}$$

ἢ καὶ ἄλλως ὡς ἑξῆς (§ 309)

$$2\times 3\frac{4}{5}=2\times\left(3+\frac{4}{5}\right)=2\times 3+2\times\frac{4}{5}=6+\frac{8}{5}=7\frac{3}{5}$$

Παράδειγμα 2ον. *Νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ* $\frac{2}{3}$ *ἐπὶ* $4\frac{5}{7}$.

$$\frac{2}{3}\times 4\frac{5}{7}=\frac{2}{3}\times\frac{33}{7}=\frac{66}{21}=3\frac{3}{21}=3\frac{1}{7}$$

ἢ καὶ ἄλλως ὡς ἑξῆς (§ 309)

$$\frac{2}{3}\times 4\frac{5}{7}=\frac{2}{3}\times\left(4+\frac{5}{7}\right)=\frac{2}{3}\times 4+\frac{2}{3}\times\frac{5}{7}=\frac{8}{3}+\frac{10}{21}=$$

$$=\frac{56}{21}+\frac{10}{21}=\frac{66}{21}=3\frac{3}{21}=3\frac{1}{7}$$

Παράδειγμα 3ον. *Νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ* $2\frac{3}{4}$ *ἐπὶ* $5\frac{6}{7}$.

$$2\frac{3}{4}\times 5\frac{6}{7}=\frac{11}{4}\times\frac{41}{7}$$

ἢ ἄλλως ὡς ἑξῆς

$$2\frac{3}{4}\times 5\frac{6}{7}=\left(2+\frac{3}{4}\right)\times\frac{41}{7}=2\times\frac{41}{7}+\frac{3}{4}\times\frac{41}{7}$$

ἢ καὶ ἄλλως ὡς ἑξῆς

$$2\frac{3}{4}\times 5\frac{6}{7}=\left(2+\frac{3}{4}\right)\times\left(5+\frac{6}{7}\right)=2\times 5+\frac{3}{4}\times 5+2\times\frac{6}{7}+\frac{3}{4}\times\frac{6}{7}$$

Ἐκ τῆς λύσεως τῶν τριῶν τούτων παραδειγμάτων ἐξάγομεν τὸν ἑξῆς πρακτικὸν κανόνα.

Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν οἱονδήποτε ἀριθμὸν ἐπὶ μικτὸν ἢ τρέπομεν τοὺς μικτοὺς εἰς κλάσματα καὶ ἐκτελοῦμεν τὸν πολλαπλασιασμόν, ὡς ἀνωτέρω, ἢ πολλαπλασιάζομεν τὸν πολλαπλασιαστέον ἐπὶ τὸν ἀκέραιον καὶ εἶτα ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ πολλαπλασιαστοῦ καὶ ἑνοῦμεν τὰ προκύπτοντα γινόμενα.

Θεωρήματα ἐπὶ τῶν δυνάμεων.

314. *Θεώρημα. Κλάσμα ὑψοῦται εἴς τινα δύναμιν, ἐὰν ὑψωθῶσιν ἀμφότεροι οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος εἰς τὴν δύναμιν ταύτην.*

Λέγω π. χ. ὅτι $\left(\frac{3}{4}\right)^5=\frac{3^5}{4^5}$

Διότι ἀναλύοντες τὴν δύναμιν $\left(\frac{3}{4}\right)^5$ εἰς τοὺς παράγοντάς της εὑρίσκομεν ὅτι

$$\left(\frac{3}{4}\right)^5=\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3\times3\times3\times3\times3}{4\times4\times4\times4\times4}=\frac{3^5}{4^5}$$

315. *Θεώρημα. Τὸ γινόμενον δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι δύναμις τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ ἐκθέτην ἔχουσα τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν.*

Τὸ θεμελιῶδες τοῦτο θεώρημα τῶν δυνάμεων τὸ ἀποδειχθὲν ἐπὶ ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς, ὅτι ἰσχύει καὶ ἐπὶ κλασματικῶν ἀριθμῶν.

Διότι $\left(\frac{3}{4}\right)^4\times\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\left(\frac{3}{4}\right)^6$

Διαίρεσις.

Διαίρεσις εἶναι ἡ πρᾶξις, δι' ἧς δοθέντων δύο ἀριθμῶν εὑρίσκεται τρίτος, ὅστις, πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν δεύτερον δίδει τὸν πρῶτον.

Ἐκ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν ὁ πρῶτος λέγεται *διαιρετέος*, ὁ δὲ δεύτερος διαιρέτης.

316. *Πηλίκον* λέγεται ὁ ἀριθμός, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν διαιρέτην δίδει τὸν διαιρετέον.

Εἰς τὴν διαίρεσιν τῶν κλασμάτων διακρίνομεν δύο περιπτώσεις.

Α'.) *Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι ἀκέραιος τοῦ διαιρετέου ὄντος οἱουδήποτε.*

Β'. *Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι κλάσμα τοῦ διαιρετέου ὄντος οἱουδήποτε.*

317. Ἐπειδὴ ἡ περίπτωσις, καθ' ἣν ὁ διαιρέτης εἶναι ἀκέραιος τοῦ διαιρετέου ὄντος ἀκεραίου ἢ κλάσματος ἐξητάσθη ἤδη (§ 255 καὶ 264), προβαίνομεν ἤδη εἰς τὴν ἐξέτασιν τῆς περιπτώσεως, καθ' ἣν ὁ διαιρέτης εἶναι κλάσμα εἰς ἣν ἄλλως τε δύναται νὰ ὑπαχθῇ καὶ ἡ περίπτωσις καθ' ἣν ὁ διαιρέτης εἶναι ἀκέραιος, θέτοντες εἰς τοῦτον παρονομαστὴν τὴν μονάδα.

Β'. Περίπτωσις. Διαιρέτης κλάσμα.

Γενικὸς κανὼν τῆς διαιρέσεως.

318. *Ἀριθμός τις διαιρεῖται διὰ κλάσματος, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν ἐπὶ τὸ κλάσμα ἀντεστραμμένον.*

Διότι, ἂν π. χ. πρόκειται νὰ διαιρέσωμεν τὸ $\frac{2}{3}$ διὰ τοῦ $\frac{4}{5}$, καλοῦντες τὸ ἄγνωστον πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ πρώτου διὰ τοῦ δευτέρου διὰ τοῦ γράμματος Π ἔχομεν κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πηλίκου (§ 316) τὴν ἰσότητα.

$$\frac{2}{3}=\frac{4}{5}\times \Pi$$

Ἐντεῦθεν δὲ παρατηροῦμεν ὅτι τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ Π (δηλ. τοῦ πηλίκου) ἰσοῦνται πρὸς τὸν ἀριθμὸν $\frac{2}{3}$, ἄρα ἵνα εὕρωμεν ὅλον τὸ πηλίκον, ἤτοι τὰ $\frac{5}{5}$ τοῦ Π, ἀρκεῖ νὰ σκεφθῶμεν ὡς ἑξῆς

Ἐπειδὴ τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ Π (δηλ. τοῦ πηλίκου) εἶναι $\frac{2}{3}$

ἄρα τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ Π θὰ εἶναι $\frac{2}{3\times 4}$

καὶ τὰ $\frac{5}{5}$ » » » $\frac{2\times 5}{3\times 4}$

Ἐντεῦθεν δὲ παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ὅλον πηλίκον δύναται νὰ εὑρεθῇ πολλαπλασιαζομένου τοῦ διαιρετέου $\frac{2}{3}$ ἐπὶ τὸ ἀντεστραμμένον κλάσμα $\frac{5}{4}$ τοῦ διαιρέτου.

Σημ. Προφανῶς τὸν ἀνωτέρω κανόνα δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν καὶ καθ' ἣν περίπτωσιν ὁ διαιρέτης εἶναι ἀκέραιος ἀρκεῖ εἰς τοῦτον νὰ γράψωμεν παρονομαστὴν τὴν μονάδα, ὅτε δὲν μεταβάλλεται ἡ ἀξία αὐτοῦ.

Κατὰ τ' ἀνωτέρω θὰ ἔχωμεν

$$2:\frac{3}{4}=2\times\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$$

$$\frac{5}{6}:\frac{3}{4}=\frac{5}{6}\times\frac{4}{3}=\frac{20}{18}$$

$$2:3=2:\frac{3}{1}=2\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{3}{4}:5=\frac{3}{4}:\frac{5}{1}=\frac{3}{4}\times\frac{1}{5}=\frac{3}{20}$$

Διαιρέτης μικτός.

319. Καθ' ἣν περίπτωσιν ὁ διαιρέτης εἶναι μικτός, ἀναγόμεθα εἰς

τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ὁ διαιρέτης εἶναι κλάσμα, τρέποντες τὸν μικτὸν εἰς κλασματικόν.

Κατὰ ταῦτα ἔχομεν

$$2 : \left(2+\frac{3}{4}\right)=2 : \frac{11}{4}=2\times\frac{4}{11}$$

$$\frac{3}{4} : \left(2+\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{4} : \frac{11}{4}=\frac{3}{4}\times\frac{4}{11}=\frac{12}{44}$$

$$\left(2+\frac{2}{3}\right) : \left(3+\frac{4}{5}\right)=\left(2+\frac{2}{3}\right) : \frac{19}{5}=\left(2+\frac{2}{3}\right)\times\frac{5}{19}$$

Διάφορα θεωρήματα τῆς διαιρέσεως.

320. *Θεώρημα. Ἵνα διαιρέσωμεν τὸ ἄθροισμα δύο ἢ περισσοτέρων προσθετέων* (χωρὶς προηγουμένως νὰ εὕρωμεν αὐτὸ) *διά τινος ἀριθμοῦ, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν ἕκαστον τῶν προσθετέων τοῦ ἀθροίσματος διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ προκύπτοντα πηλίκα.*

Λέγω π. χ. ὅτι $\left(\frac{2}{3}+4+\frac{2}{5}\right) : \frac{3}{4}=\left(\frac{2}{3} : \frac{3}{4}\right)+\left(4 : \frac{3}{4}\right)+\left(\frac{2}{5} : \frac{3}{4}\right)$

Διότι $\left(\frac{2}{3}+4+\frac{2}{5}\right) : \frac{3}{4}=\left(\frac{2}{3}+4+\frac{2}{5}\right)\times\frac{4}{3}=$ (§ 309) $=$

$=\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}+4\times\frac{4}{3}+\frac{2}{5}\times\frac{4}{3}=\left(\frac{2}{3} : \frac{3}{4}\right)+\left(4 : \frac{3}{4}\right)+\left(\frac{2}{5} : \frac{3}{4}\right)$ ὅ, ἔ, δ.

321. *Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ἡ ἀλήθεια καὶ τῆς ἑξῆς ἰσότητος.*

$$\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{5}\right) : \frac{6}{7}=\left(\frac{3}{4} : \frac{6}{7}\right)-\left(\frac{2}{5} : \frac{6}{7}\right)$$

322. *Θεώρημα. Ἵνα διαιρέσωμεν γινόμενον πολλῶν παραγόντων* (χωρὶς προηγουμένως νὰ εὕρωμεν αὐτὸ) *διά τινος ἀριθμοῦ, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν ἕνα καὶ μόνον παράγοντα διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου.*

Λέγω π. χ. ὅτι $\frac{2}{3}\times5\times\frac{6}{7} : \frac{4}{5}=\frac{2}{3}\times\left(5 : \frac{4}{5}\right)\times\frac{6}{7}$

Διότι $\frac{2}{3}\times5\times\frac{6}{7} : \frac{4}{5}=\frac{2}{3}\times5\times\frac{6}{7}\times\frac{5}{4}$ καὶ ἐπειδὴ τὸ θεώρημα (§ 138) ἰσχύει, ὡς εἴπομεν (§ 312), καὶ ἐπὶ τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν, διὰ τοῦτο ἔχομεν $=\frac{2}{3}\times\left(5\times\frac{5}{4}\right)\times\frac{6}{7}=\frac{2}{3}\times\left(5 : \frac{4}{5}\right)\times\frac{6}{7}$

Πόρισμα. Ἵνα διαιρέσωμεν τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων (χωρὶς προηγουμένως νὰ εὕρωμεν αὐτὸ) *διά τινος τῶν παραγόντων του, ἀρκεῖ νὰ ἐξαλείψωμεν τὸν παράγοντα τοῦτον.*

Διότι $\frac{2}{3}\times4\times\frac{6}{7}:4=\frac{2}{3}\times4\times\frac{6}{7}:\frac{4}{1}=\frac{2}{3}\times4\times\frac{6}{7}\times\frac{1}{4}=$

$$=\frac{2}{3}\times\left(4\times\frac{1}{4}\right)\times\frac{6}{7}=\frac{2}{3}\times1\times\frac{6}{7}=\frac{2}{3}\times\frac{6}{7}$$

323. *Θεώρημα*. *Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν διαιρετέον ἀλεπαλλήλως διὰ πάντων τῶν παραγόντων τοῦ διαιρέτου, ἤτοι πρῶτον διὰ τοῦ ἑνὸς παράγοντος αὐτοῦ, εἶτα τὸ εὑρεθὲν πηλίκον διὰ τοῦ ἑτέρου παράγοντος, εἶτα τὸ εὑρεθὲν πηλίκον διὰ τοῦ τρίτου παράγοντος καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς μέχρις οὗ ὅλοι οἱ παράγοντες ληφθῶσιν ὡς διαιρέται.*

Λέγω π. χ. ὅτι $\frac{2}{3}:\left(\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times\frac{8}{9}\right)=\frac{2}{3}:\frac{4}{5}:\frac{6}{7}:\frac{8}{9}$

Διότι $\frac{2}{3}:\left(\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times\frac{8}{9}\right)=\frac{2}{3}:\frac{4\times6\times8}{5\times7\times9}=\frac{2}{3}\times\frac{5\times7\times9}{4\times6\times8}=\frac{2\times5\times7\times9}{3\times4\times6\times8}=$

$$=\frac{2}{3}\times\frac{5}{4}\times\frac{7}{6}\times\frac{9}{8}=\frac{2}{3}:\frac{4}{5}:\frac{6}{7}:\frac{8}{9}$$ ὅ, ἔ, δ.

324. *Θεώρημα*. *Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν διαιρετέον καὶ τὸν διαιρέτην ἐφ' ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τὸ πηλίκον δὲν μεταβάλλεται.*

Λέγω π. χ. ὅτι $\frac{3}{4}:\frac{5}{6}=\frac{3}{4}\times\frac{7}{8}:\frac{5}{6}\times\frac{7}{8}$

Διότι, ἵνα τὸ $\frac{3}{4}\times\frac{7}{8}$ διαιρέσωμεν διὰ $\frac{5}{6}\times\frac{7}{8}$ δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν πρῶτον διὰ $\frac{7}{8}$ (ἰδὲ § 323), ὅτε μένει νὰ διαιρεθῇ ἔπειτα τὸ $\frac{3}{4}:\frac{5}{6}$. Ἐπομένως θὰ ἔχωμεν $\frac{3}{4}\times\frac{7}{8}:\frac{5}{6}\times\frac{7}{8}=\frac{3}{4}:\frac{5}{6}$ ὅ, ἐ. δ.

Πόρισμα. *Ἐὰν διαιρέσωμεν διαιρετέον καὶ διαιρέτην δι' ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ τὸ πηλίκον δὲν μεταβάλλεται.*

Διότι ἡ διαίρεσις διαιρετέου καὶ διαιρέτου δι' ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι πολλαπλασιασμὸς τούτων ἐπὶ τὸν ἀντίστροφον ἀριθμόν, ὅτε, ὡς γνωστὸν (§ 324), τὸ πηλίκον δὲν μεταβάλλεται.

Περὶ συνθέτων κλασμάτων.

Σύνθετα κλάσματα λέγομεν ἐκεῖνα τῶν ὁποίων ὁ ἀριθμητὴς ἢ ὁ παρονομαστὴς ἢ ἀμφότεροι οἱ ὅροι εἶναι κλάσματα.

Π. χ. Σύνθετα κλάσματα εἶναι τὰ

$$\frac{2}{\frac{3}{4}},\quad \frac{\frac{4}{5}}{6},\quad \frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}},\quad \frac{3\frac{4}{5}}{2},\quad \frac{3\frac{4}{5}}{\frac{2}{3}}$$ κ.τ.λ.

Ἐπειδὴ πᾶν κλάσμα εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, τούτου ἕνεκα ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν εἰς τὰ σύνθετα κλάσματα μετατρέπομεν αὐτὰ εἰς ἁπλᾶ καὶ οὕτω τὰς πράξεις τῆς *προσθέσεως*, *ἀφαιρέσεως*, *πολλαπλασιασμοῦ* καὶ *διαιρέσεως* ἐπὶ τῶν συνθέτων κλασμάτων δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν, ἐκτελοῦντες αὐτὰς ἐπὶ τῶν προκυπτόντων ἁπλῶν κλασμάτων.

Κατὰ ταῦτα, τὰ ἀνωτέρω σύνθετα κλάσματα μετατρέπονται κατὰ σειρὰν εἰς ἁπλᾶ κλάσματα ὡς ἑξῆς.

$$\frac{2}{\frac{3}{4}}=2:\frac{3}{4}=\frac{8}{3},\qquad \frac{\frac{4}{5}}{6}=\frac{4}{5}:6=\frac{4}{30}$$

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}}=\frac{2}{3}:\frac{3}{4}=\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}=\frac{8}{9},\qquad \frac{3\frac{4}{5}}{2}=3\frac{4}{5}:2=\frac{3}{2}+\frac{4}{10}\ \text{κ.τ.λ.}$$

325. **Θεώρημα.** *Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς κλάσματός τινος τείνῃ εἰς τὸ ἄπειρον, τὸ κλάσμα τείνει εἰς τὸ μηδέν, ἐὰν δὲ ὁ παρονομαστὴς τείνῃ εἰς τὸ μηδέν, τότε ἡ τιμὴ τοῦ κλάσματος τείνει εἰς τὸ ἄπειρον, ἤτοι τείνει νὰ ὑπερβῇ πάντα δεδομένον ἀριθμόν, ὅσον μέγας καὶ ἂν ὑποτεθῇ οὗτος.*

Διότι, ἂν π.χ. εἰς τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$, τὸ β τείνει εἰς τὸ ἄπειρον, ἐπειδὴ ἡ κλασματικὴ μονὰς $\frac{1}{\beta}$ τείνει εἰς τὸ *μηδὲν* (§ 253), διὰ τοῦτο καὶ τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$, ὡς ἰσούμενον πρὸς τὸ γινόμενον $\frac{1}{\beta}\times\alpha$ θὰ τείνῃ εἰς τὸ *μηδέν*.

Ἂν δὲ εἰς τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$, τὸ β τείνει εἰς τὸ *μηδέν*. Ἐπειδὴ τὸ β δύναται ν' ἀντικατασταθῇ διὰ τοῦ $\frac{1}{\rho}$ (ἔνθα τὸ ρ τείνει εἰς τὸ ἄπειρον) θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha}{\frac{1}{\rho}}\ \text{ἢ καὶ}\ \frac{\alpha}{\beta}=\alpha\times\rho$$

ἐξ οὗ παρατηροῦμεν, ὅτι τοῦ ρ τείνοντος εἰς τὸ ἄπειρον καὶ ὁ ἀριθμὸς $\alpha\times\rho$ καὶ ἑπομένως καὶ ὁ ἴσος τούτου $\frac{\alpha}{\beta}$ τείνει εἰς τὸ ἄπειρον, ἤτοι τείνει νὰ ὑπερβῇ πάντα δεδομένον ἀριθμόν, ὅσον μέγας καὶ ἂν ὑποτεθῇ οὗτος.

Θεώρημα ἐπὶ ἴσων κλασμάτων.

326. *Θεώρημα. Ἐὰν ἴσους ἀριθμοὺς διαιρέσωμεν δι' ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εὑρίσκομεν πηλίκα ἴσα.*

Διότι ἡ διαίρεσις ἴσων ἀριθμῶν δι' ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, εἶναι πολλαπλασιασμὸς τούτων ἐπὶ τὸν ἀντίστροφον ἀριθμόν, ὅτε, ὡς γνωστὸν (§ 305), προκύπτουσιν ἐξαγόμενα ἴσα.

327. *Θεώρημα. Ἐὰν ἴσων κλασμάτων προσθέσωμεν τοὺς ὁμωνύμους ὅρους προκύπτει κλάσμα ἴσον μὲ ἕκαστον ἐξ αὐτῶν.*

Ἔστωσαν π. χ. τὰ ἴσα κλάσματα

$$\frac{\alpha}{A}=\frac{\beta}{B}=\frac{\gamma}{\Gamma}=\frac{\delta}{\Delta}$$

Καλοῦντες δὲ ἕκαστον τούτων, ὅπερ εἶναι πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ αὐτοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του, διὰ τοῦ γράμματος ρ ἔχομεν

$$\alpha=A\times\rho$$
$$\beta=B\times\rho$$
$$\gamma=\Gamma\times\rho$$
$$\delta=\Delta\times\rho$$

Ἐὰν δὲ εἰς ἴσους προσθέσωμεν ἴσους τὰ ἐξαγόμενα θὰ εἶναι προφανῶς ἴσα, δι' ὃ θὰ ἔχωμεν καὶ

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=A\times\rho+B\times\rho+\Gamma\times\rho+\Delta\times\rho \text{ ἢ καὶ}$$
$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=(A+B+\Gamma+\Delta)\times\rho$$

ἐξ οὗ ἀνάγομεν ὅτι (§ 326)

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{A+B+\Gamma+\Delta}=\rho \text{ ἤτοι } \frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{A+B+\Gamma+\Delta}=\frac{\alpha}{A}=\frac{\beta}{B}=\frac{\gamma}{\Gamma}=\frac{\delta}{\Delta}$$

Ἀσκήσεις.

1) Διδομένου ὄντος ὅτι $\frac{\alpha}{A}=\frac{\beta}{B}=\frac{\gamma}{\Gamma}=\frac{\delta}{\Delta}$ ν' ἀποδειχθῇ ὅτι $\frac{\alpha\times\chi+\beta\times\varphi+\gamma\times\pi+\delta}{A\times\chi+B\times\varphi+\Gamma\times\pi+\Delta}=\frac{\delta}{\Delta}$, οἱανδήποτε τιμὴν καὶ ἂν δώσωμεν εἰς τοὺς ἀγνώστους χ, φ καὶ π.

2) Ἐὰν τῶν ἀνίσων κλασμάτων $\frac{\alpha}{A}<\frac{\beta}{B}<\frac{\gamma}{\Gamma}<\frac{\delta}{\Delta}$ προσθέσω-

μεν τοὺς ὁμωνύμους ὅρους δηλ. τοὺς ἀριθμητὰς καὶ τοὺς παρονομαστὰς καὶ τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν ἀριθμητῶν θέσωμεν, ὡς ἀριθμητήν, τὸ δὲ τῶν παρονομαστῶν, ὡς παρονομαστήν, προκύπτει κλάσμα περιεχόμενον μεταξὺ τοῦ μεγίστου $\frac{\alpha}{A}$ καὶ τοῦ ἐλαχίστου $\frac{\delta}{\Delta}$ ἐκ τῶν δοθέντων κλασμάτων.

Περὶ τῶν προβλημάτων τῶν λυομένων δι' ἑνὸς πολλαπλασιασμοῦ.

328. Ὡς γνωστὸν ἐκ τῆς Πρακτικῆς Ἀριθμητικῆς κάμνομεν πολλαπλασιασμὸν πρὸς λύσιν προβλήματός τινος κατὰ τὰς ἑξῆς δύο περιπτώσεις.

α΄) *Ὅταν ζητῆται νὰ προσδιορισθῇ τὸ διπλάσιον, τριπλάσιον κ τ.λ. ἢ ὁποιονδήποτε μέρος ἀριθμοῦ τινος.*

β΄.) *Ὅταν ζητῶμεν τὴν τιμὴν ὁσωνδήποτε μονάδων, γνωστῆς οὔσης τῆς τιμῆς τῆς μιᾶς μονάδος.*

Σημ. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἀνάγκη ὁ ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου τὴν τιμὴν ζητοῦμεν νὰ εἶναι τετραμμένος εἰς τὴν μονάδα, τῆς ὁποίας τὴν τιμὴν γνωρίζομεν.

Παρατήρησις. Ἐκ τῶν δύο περιπτώσεων τῶν προβλημάτων τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἰς τὰ προβλήματα τῆς πρώτης περιπτώσεως οὐδέποτε παρουσιάζεται ἀνάγκη τροποποιήσεως τῶν ἀριθμῶν πρὸ τῆς ἐκτελέσεως τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Προβλήματα πολλαπλασιασμοῦ *α΄ περιπτώσεως.*

1) Ποῖον εἶναι τὸ πενταπλάσιον τῶν 150 $\frac{2}{5}$ τῆς δραχμῆς;

$\left(150\frac{2}{5}\times 5\right.$ ἤτοι 752 δραχ.$\left.\right)$

2) Πόσα εἶναι τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ $\frac{5}{6}$; $\left(\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\right.$ ἤτοι $\left.\frac{5}{8}\right)$

3) Νὰ εὑρεθῇ τὸ διπλάσιον τοῦ τριπλασίου τῶν $\frac{2}{5}$ τῶν $\frac{3}{4}$ τῶν 80 δραχμῶν. $\left(80\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}\times 3\times 2\right.$ ἤτοι 144 δρχ.$\left.\right)$

Προβλήματα πολλαπλασιασμοῦ *β΄ περιπτώσεως.*

1) Ἡ ὀκᾶ τοῦ καφὲ τιμᾶται $4\frac{3}{4}$ δρχ. πόσον τιμῶνται αἱ 12 ὀκάδες; $\left(4\frac{3}{4}\times 12\right.$ ἤτοι 57 δρχ.$\left.\right)$

2) Τὸ δράμιον τοῦ χαβιαρίου τιμᾶται 12 λεπτά, πόσον τιμῶνται αἱ 2 ὀκάδες;

Σημ. Ὡς γνωστόν, ἡ 1 ὀκ. ἔχει 400 δράμια.

(12×800 ἤτοι 9600 λεπτὰ)

3) Τὸ ῥούπιον ὑφάσματος τιμᾶται 25 λεπτά, πόσον τιμῶνται 2 πήχεις;

Σημ. Ὁ εἷς πῆχυς ἔχει, ὡς γνωστόν, 8 ῥούπια.

(25×16 ἤτοι 400 λεπτὰ)

Περὶ τῶν προβλημάτων τῶν λυομένων διὰ μιᾶς διαιρέσεως.

329. Ὡς γνωστόν, ἐκ τῆς Πρακτικῆς Ἀριθμητικῆς, κάμνομεν διαίρεσιν πρὸς λύσιν προβλήματός τινος κατὰ τὰς ἑξῆς τέσσαρας περιπτώσεις.

α΄) *Ὅταν ζητῶμεν νὰ εὕρωμεν τὸν ἀριθμὸν τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὸ διπλάσιον, τριπλάσιον κ.τ.λ. ἢ ὁποιονδήποτε αὐτοῦ μέρος.*

Σημ. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ τίθεται διαιρέτης ὁ ἀριθμός, ὅστις δεικνύει ποῖον μέρος τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ γνωρίζομεν.

β΄.) *Ὅταν ζητῶμεν τὴν τιμὴν τῆς μιᾶς μονάδος, γνωστῆς οὔσης τῆς τιμῆς ὁσωνδήποτε μονάδων.*

Σημ. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἀνάγκη ὁ ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου τὴν τιμὴν τῆς μιᾶς μονάδος ζητοῦμεν, (ὅστις θὰ τεθῇ ὡς διαιρέτης κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς διαιρέσεως), νὰ εἶναι τετραμμένος εἰς τὴν μονάδα ταύτην.

γ΄.) *Ὅταν ζητῶμεν πόσας φορὰς εἰσέρχεται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος εἰς ἄλλην δοθεῖσαν τιμήν.*

Σημ. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἀνάγκη ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης, οἵτινες εἶναι ἀριθμοὶ ὁμοειδεῖς νὰ εἶναι τετραμμένοι εἰς τὴν αὐτὴν μονάδα. Τίθεται δὲ διαιρέτης ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος.

δ΄.) *Ὅταν ζητῶμεν νὰ συγκρίνωμεν ἀριθμόν τινα πρὸς ἕτερον.*

Σημ. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἀνάγκη ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης, οἵτινες εἶναι ἀριθμοὶ ὁμοειδεῖς νὰ εἶναι τετραμμένοι εἰς τὴν αὐτὴν μονάδα. Τίθεται δὲ διαιρέτης ὁ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ὁποῖον γίνεται ἡ σύγκρισις.

Παρατήρησις. Ἐκ τῶν τεσσάρων περιπτώσεων τῶν προβλημάτων τῆς διαιρέσεως μόνον κατὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν οὐδέποτε παρουσιάζεται ἀνάγκη τροποποιήσεως τῶν ἀριθμῶν πρὸ τῆς ἐκτελέσεως τῆς διαιρέσεως.

Προβλήματα διαιρέσεως *α΄ περιπτώσεως.*

1) Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου τὸ τετραπλάσιον εἶναι $240\frac{4}{5}$; $\left(240\frac{4}{5} : 4 \text{ ἤτοι } 60\frac{1}{5}\right)$

2) Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου τὸ τριπλάσιον τῶν $\frac{4}{5}$ εἶναι $\frac{5}{8}$. $\left(\frac{5}{8} : 3 \times \frac{4}{5} \text{ ἤτοι } \frac{5 \times 5}{8 \times 3 \times 4}\right)$

3) Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου τὸ $\frac{1}{3}$ εἶναι $\frac{1}{4}$; $\left(\frac{1}{4} : \frac{1}{3} \text{ ἤτοι } \frac{1}{4} \times \frac{3}{1} \text{ ἤτοι } \frac{3}{4}\right)$

Προβλήματα διαιρέσεως *β΄ περιπτώσεως.*

1) Οἱ 15 πήχεις ὑφάσματός τινος τιμῶνται 180 δρχ. πόσον τιμᾶται ὁ πῆχυς; (180 : 15 ἤτοι 12 δρχ.)

2) Οἱ 2 πήχεις ὑφάσματός τινος τιμῶνται $32\frac{8}{15}$ δρχ. πόσον τιμᾶται τὸ ῥούπιον; $\left(32\frac{8}{15} : 16 \text{ ἤτοι } 2\frac{1}{30} \text{ δρχ.}\right)$

3) Τὰ 5 ῥούπια ὑφάσματός τινος τιμῶνται 20 δρχ. πόσον τιμᾶται ὁ πῆχυς; $(20 : \frac{5}{8}$ ἤτοι 32 δρχ.)

Προβλήματα διαιρέσεως *γ΄ περιπτώσεως.*

1) Μὲ μίαν δραχμὴν ἀγοράζομεν 3 πήχεις ὑφάσματός τινος, μὲ 36 δρχ. πόσους πήχεις ἀγοράζομεν; (36 : 3 ἤτοι 12 πήχ.)

2) Ὁ εἷς πῆχυς τιμᾶται 25 λεπτὰ μὲ $3\frac{2}{5}$ δρχ. πόσους πήχεις ἀγοράζομεν; (340 : 25 ἤτοι $13\frac{3}{5}$ πηχ.)

3) Ὅταν ἡ μία ὀκᾶ τιμᾶται 5 δραχ. μὲ 60 λεπτὰ πόσας ὀκάδας ἀγοράζομεν; (60 : 500 ἤτοι $\frac{6}{50}$ ἤτοι 48 δράμια)

Προβλήματα διαιρέσεως *δ' περιπτώσεως.*

1) Πόσας φορὰς εἶναι μεγαλήτερος ὁ ἀριθμὸς 150 τοῦ ἀριθμοῦ 40;

($150 : 40$ ἤτοι $3\frac{3}{4}$ φοράς)

2) Ποῖον μέρος τοῦ $\frac{3}{4}$ εἶναι ὁ ἀριθμὸς $2\frac{5}{6}$;

($2\frac{5}{6} : \frac{3}{4}$ ἤτοι $\frac{17}{6} \times \frac{4}{3}$ ἤτοι $3\frac{7}{9}$ φοράς)

3) Ἔκ τινος ὑφάσματος 3 πήχεων ἀπέκοψέ τις 5 ῥούπια. Ποῖον μέρος τοῦ ὑφάσματος ἀπέκοψε; ($5 : 24$ ἤτοι τὰ $\frac{5}{24}$ τοῦ ὑφάσματος)

ΒΙΒΛΙΟΝ Γ΄.

Περὶ τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν.

Δεκαδικὴ κλασματικὴ μονὰς λέγεται πᾶσα κλασματικὴ μονὰς τῆς ὁποίας ὁ παρονομαστής εἶναι 10, 100, 1000 καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Π. χ. Ἐὰν ἐκ τῶν ἀπείρων κλασματικῶν μονάδων

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{10}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}, \frac{1}{200}, \frac{1}{1000} \text{ κ.τ.λ.}$$

λάβωμεν ἐκείνας τῶν ὁποίων παρονομαστὴς εἶναι 10, 100, 1000 καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, ἔχομεν τὰς κλασματικὰς μονάδας

$$\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000} \text{ καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς}$$

Αὗται δὲ εἶναι αἱ δεκαδικαὶ κλασματικαὶ μονάδες.

327. *Δεκαδικοὶ κλασματικοὶ ἀριθμοὶ ἢ ἁπλῶς δεκαδικὸν κλάσμα λέγεται τὸ σύνολον πολλῶν δεκαδικῶν κλασματικῶν μονάδων ἢ καὶ μία τοιαύτη μονάς.*

Π. χ. τὰ κλάσματα $\frac{5}{10}, \frac{45}{100}, \frac{17}{1000}, \frac{1}{10}, \frac{15}{10000}$ κ.τ.λ.

λέγονται δεκαδικοὶ κλασματικοὶ ἀριθμοί.

Γραφὴ δεκαδικῶν κλασμάτων ὑπὸ μορφὴν δεκαδικῶν.

328. *Ἡ γραφὴ τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων ὑπὸ μορφὴν ἀκεραίων λέγεται γραφὴ ὑπὸ δεκαδικὴν μορφήν.*

Ἡ συνθήκη ἐφ' ἧς στηρίζεται ἡ γραφὴ τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων ὑπὸ μορφὴν ἀκεραίων εἶναι ἡ ἑξῆς.

Γράφομεν πρῶτον τὸν ἀκέραιον ἢ ἂν δὲν ἔχωμεν τοιοῦτον, γράφομεν 0 καὶ τὸ χωρίζομεν δι' ὑποδιαστολῆς. Εἶτα δὲ γράφομεν τὸν ἀριθμὸν τῶν δεκάτων, δεξιὰ δὲ τούτων γράφομεν τὸν ἀριθμὸν τῶν ἑκατοστῶν καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς. Ἂν δὲ ἐν τῷ μεταξὺ δὲν ἔχομεν ἀμέσως ἑπομένας δεκαδικὰς μονάδας, γράφομεν εἰς τὴν θέσιν τούτων 0 καὶ κατόπιν γράφομεν τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀμέσως ἑπομένων μονάδων.

Π. χ. *Νὰ γραφῇ ὁ ἀριθμὸς* $\frac{4}{10}+\frac{5}{1000}+\frac{9}{1000000}$ *ὑπὸ δεκαδικὴν μορφήν*.

Ἐπειδὴ δὲν ἔχομεν ἀκέραιον, γράφομεν ἀντ' αὐτοῦ 0 καὶ τὸ χωρίζομεν δι' ὑποδιαστολῆς. Ἔπειτα γράφομεν τὰ 4 *δέκατα*, καὶ δεξιὰ τούτων γράφομεν 0 διὰ τὰ ἑκατοστὰ (ἐπειδὴ δὲν ἔχομεν τοιαῦτα), ἔπειτα γράφομεν τὰ 5 *χιλιοστὰ* καὶ ἀκολούθως γράφομεν 0 διὰ τὰ *δεκάκις χιλιοστὰ* καὶ 0 διὰ τὰ *ἑκατοντάκις χιλιοστὰ* καὶ τέλος γράφομεν τὰ 9 *ἑκατομμυριοστὰ* καὶ οὕτω ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς γράφεται ὡς ἑξῆς 0,405009.

329. Τὸ σύστημα τοῦτο τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν λέγεται, ὡς τὸ τῶν ἀκεραίων, δεκαδικόν, διότι γίνεται ἐκ τῶν μονάδων

$$\frac{1}{10},\ \frac{1}{100},\ \frac{1}{1000}\ \text{κ.τ.λ.}$$

τῶν ὁποίων ἑκάστη εἶναι δεκαπλασία τῆς ἑπομένης της, ὡς τοῦτο συμβαίνει καὶ εἰς τὸ σύστημα τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.

Παρατήρησις. Ἐπειδὴ τὰ δεκαδικὰ κλάσματα οὐδόλως διαφέρουσι τῶν λοιπῶν κλασμάτων, διὰ τοῦτο πᾶσαι αἱ ἰδιότητες τῶν κλασμάτων ἰσχύουσι καὶ ἐπὶ τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν. Ὁ σκοπὸς δὲ δι' ὃν χωρίζομεν τὰ δεκαδικὰ κλάσματα τῶν λοιπῶν καὶ τὰ ἐξετάζομεν ἰδιαιτέρως εἶναι, διότι δυνάμεθα νὰ γράψωμεν αὐτὰ ὑπὸ *μορφὴν ἀκεραίων*, ὡς εἴδομεν, ὅτε τὰς διαφόρους ἐπ' αὐτῶν πράξεις ἐκτελοῦμεν, ὡς ἐπὶ ἀκεραίων καὶ ἑπομένως εὐκολυνόμεθα σπουδαίως εἰς τὴν ἐκτέλεσιν τῶν διαφόρων πράξεων.

Ἀπαγγελία δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ.

Παράδειγμα. Ν' ἀπαγγελθῇ ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 17,5743 *κατὰ διαφόρους τρόπους.*

Ἐπειδὴ ὁ 17,5743 ἰσοῦται πρὸς τὸν

$$17+\frac{5}{10}+\frac{7}{100}+\frac{4}{1000}+\frac{3}{10000}.$$

Καὶ ἐπειδὴ τούτους, ἂν προσθέσωμεν ὅλους ὁμοῦ εὑρίσκομεν $\frac{170000}{10000}+\frac{5000}{10000}+\frac{700}{10000}+\frac{40}{10000}+\frac{3}{10000}$ ἤτοι $\frac{175743}{10000}$ δηλ. 175 743 δεκάκις χιλιοστά.

ἂν δὲ προσθέσωμεν τοὺς δύο πρώτους ὁμοῦ καὶ τοὺς τρεῖς ἑπομένους ὁμοῦ, τότε εὑρίσκομεν

$\frac{170}{10}+\frac{5}{10}$ καὶ $\frac{700}{10000}+\frac{40}{10000}+\frac{3}{10000}$ ἤτοι $\frac{175}{10}$ καὶ $\frac{743}{10000}$ δηλ. 175 δέκατα καὶ 743 δεκάκις χιλιοστὰ

ἂν δὲ προσθέσωμεν τοὺς τρεῖς πρώτους ὁμοῦ καὶ τοὺς δύο ἑπομένους ὁμοῦ, τότε εὑρίσκομεν

$\frac{1757}{100}$ καὶ $\frac{43}{10000}$ δηλ. 1757 ἑκατοστὰ καὶ 43 δεκ. χιλιοστὰ

καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Διὰ ταῦτα πορίζόμεθα ἐντεῦθεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

330. *Διὰ ν' ἀπαγγείλωμεν ὁποιονδήποτε δεκαδικὸν ἀριθμὸν ἢ ἀπαγγέλλομεν αὐτὸν ὁλόκληρον μετὰ τοῦ ὀνόματος τῆς θέσεως τὴν ὁποίαν κατέχει τὸ τελευταῖον ψηφίον τοῦ δεκαδικοῦ ἢ τὸν χωρίζομεν εἰς ὁσαδήποτε τμήματα ἰσοψήφια ἢ ἀνισοψήφια καὶ ἀπαγγέλλομεν χωριστὰ τὸν ἀριθμὸν ἑκάστου τμήματος μετὰ τοῦ ὀνόματος τῆς θέσεως τὴν ὁποίαν κατέχει τὸ τελευταῖον ψηφίον τοῦ τμήματος.*

Σημ. Ὁ σκοπὸς τῆς ἀπαγγελίας δεκαδικοῦ τινος ἀριθμοῦ κατὰ πολλοὺς τρόπους εἶναι, ἵνα δυνάμεθα εὐχερῶς νὰ ὁρίζωμεν διὰ τῆς καταλλήλου ἀπαγγελίας τὸ σύνολον τῶν διαφόρων δεκαδικῶν μονάδων ἐξ ὧν δύναται ν' ἀποτελεσθῇ ὁ δοθεὶς ἀριθμός.

Π. χ. ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 5,3056

α'.) Πόσα ἐν συνόλῳ περιέχει δέκατα καὶ πόσα δεκάκις χιλιοστά;

(53 δέκατα καὶ 56 δεκάκις χιλιοστά).

β'.) Πόσα ἑκατοστὰ καὶ πόσα δεκάκις χιλιοστά;

(530 ἑκατοστὰ καὶ 56 δεκάκις χιλιοστά).

γ'.) Πόσα χιλιοστὰ καὶ πόσα δεκάκις χιλιοστά;

(5305 χιλιοστὰ καὶ 6 δεκάκις χιλιοστά),

δ'.) Πόσα δεκάκις χιλιοστά;

(53056 δεκάκις χιλιοστά).

ε΄.) Πόσα δέκατα καὶ πόσα χιλιοστά ;

(53 δέκατα 5 χιλιοστὰ καὶ ἀκόμη 6 δεκάκις χιλιοστά).

καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Γραφὴ ἀπαγγελλομένου δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ.

Παράδειγμα. Νὰ γραφῇ ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 2 χιλιάδες 45 ἑκατοστά.

Γράφομεν πρῶτον τὸν ἀπαγγελθέντα ἀριθμόν, ὡς ἀκέραιον, ἤτοι ὡς ἑξῆς 2045. Ἔπειτα, ἐπειδὴ ὁ 5 πρέπει νὰ καταλάβῃ τὴν θέσιν τῶν ἑκατοστῶν, ὁ δὲ 4 τὴν θέσιν τῶν δεκάτων, θέτομεν πρὸ τούτου ὑποδιαστολήν. Κατὰ ταῦτα ὁ ἀπαγγελθεὶς δεκαδικὸς ἀριθμὸς γράφεται οὕτω 20,45.

Ἐκ τούτου μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

331. *Διὰ νὰ γράψωμεν δεκαδικόν τινα ἀριθμὸν ἀπαγγελλόμενον, γράφομεν αὐτὸν πρῶτον ὡς ἀκέραιον καὶ εἶτα ἀρχόμεθα ἐκ δεξιῶν καὶ ἐκφωνοῦμεν τὸ τελευταῖον ψηφίον τοῦ ἀριθμοῦ μὲ τὸ ὄνομα τῆς ἀπαγγελθείσης τάξεως, τὸ δὲ ἑπόμενον ψηφίον μὲ τὸ ὄνομα τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως καὶ ἐξακολουθοῦμεν οὕτω μέχρι τῶν δεκάτων, πρὸ τῶν ὁποίων θέτομεν ὑποδιαστολήν. Ἂν δὲ ἀπό τινος τάξεως ὁ ἀριθμὸς παύσῃ νὰ ἔχῃ ψηφία, συμπληροῦμεν τὰς λοιπὰς θέσεις μέχρι τῶν δεκάτων διὰ μηδενικῶν, πρὸ τῶν ὁποίων θέτομεν ὑποδιαστολὴν καὶ μηδὲν διὰ τὸ ἀκέραιον μέρος.*

332. Διὰ νὰ γράψωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν ὑπὸ μορφὴν κλασματικήν, ἀρκεῖ ν' ἀπαγγείλωμεν αὐτὸν μὲ τὸ σύνολον τῶν μονάδων τῆς τελευταίας αὐτοῦ τάξεως καὶ κατὰ ταύτην τὴν ἀπαγγελίαν νὰ τὸν γράψωμεν κλασματικῶς.

Π. χ. Ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 25,36, ἐπειδὴ ἀπαγγέλλεται ὅλος ὁμοῦ 2536 ἑκατοστά, διὰ τοῦτο γράφεται $\frac{2536}{100}$.

Σύγκρισις δεκαδικῶν.

333. *Ἡ ἀξία δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ δὲν μεταβάλλεται ὁσαδήποτε μηδενικὰ καὶ ἂν γράψωμεν πρὸς τὸ δεξιὰ τοῦ κλασματικοῦ μέρους τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ.*

Π. χ. Ἔστω ὁ δεκαδικὸς 5,43. Λέγω ὅτι οὗτος εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τοὺς 5,430 5,4300 καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Διότι ἡ ἀξία τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς θέσεως, τὴν ὁποίαν κατέχουσι τὰ ψηφία αὐτοῦ, ὡς πρὸς τὴν ὑποδιαστολήν, ἡ δὲ θέσις τῶν ψηφίων, ὡς πρὸς τὴν ὑποδιαστολήν, δὲν μεταβάλλεται καὶ μετὰ τὴν προσθήκην μηδενικῶν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ δεκαδικοῦ. Ἄρα ἡ ἀξία τοῦ δεκαδικοῦ μένει ἀμετάβλητος ὁσαδήποτε μηδενικὰ καὶ ἂν γράψωμεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ κλασματικοῦ μέρους τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ.

334. Ἐπειδὴ πᾶν ψηφίον κείμενον πρὸς τὰ δεξιὰ ἑνὸς ἄλλου γίνεται ἐκ μονάδος *δεκάκις* μικροτέρας, ἂν δὲ κεῖται μετὰ *δύο*, *τρεῖς* κ.τ.λ. θέσεις, γίνεται ἐκ μονάδος *ἑκατοντάκις*, *χιλιάκις* κ.τ.λ. μικροτέρας, διὰ τοῦτο πάντα δεκαδικὸν ἀριθμὸν δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν διὰ καταλλήλου ἀπαγγελίας εἰς ἀριθμὸν γινόμενον ἐξ οἱασδήποτε θέλομεν δεκαδικῆς μονάδος. Ἂν δὲ οὗτος δὲν ἔχῃ ψηφία μέχρι τῆς τάξεως τῆς μονάδος, εἰς ἣν θέλομεν νὰ τρέψωμεν τὸν δεκαδικὸν ἀριθμόν, τότε θέτομεν μηδενικὰ μέχρι τῆς τάξεως ἐκείνης, (τουθ' ὅπερ δὲν μεταβάλλει τὴν ἀξίαν αὐτοῦ) καὶ εἶτα ἀπαγγέλλομεν τὸ σύνολον τοῦ δεκαδικοῦ.

Π. χ. *Οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ 4,5 καὶ 2,00343 πόσα χιλιοστὰ ἐν συνόλῳ περιέχουσι;*

(ὁ μὲν 4,5 ἔχει 4500 χιλιοστά, ὁ δὲ 2,00343 περιέχει

2003 χιλιοστὰ καὶ $\frac{43}{100}$ τοῦ ἑνὸς χιλιοστοῦ)

335. Ἐπειδὴ αἱ δεκαδικαὶ μονάδες 0,1, 0,01, 0,001 κ.τ.λ. εἶναι ἄπειροι τὸ πλῆθος, διὰ τοῦτο δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν καὶ δεκαδικὸν κλασματικὸν ἀριθμὸν ἔχοντα ἄπειρα τὸ πλῆθος δεκαδικὰ ψηφία *εἰς τὸ κλασματικὸν αὐτοῦ μέρος*, ὡς, ἐπὶ παραδείγματι, εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 4,222... ἢ 0,999.... ἢ 2,343434....Ἵνα ὅμως καὶ οὗτοι κληθῶσιν ἀριθμοί, πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι παντὸς τοιούτου ἀριθμοῦ ἔχοντος ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία εἰς τὸ κλασματικόν του μέρος ὑπάρχει μεγαλήτερος. Πρὸς τοῦτο ὅμως ἀνάγκη νὰ γενικεύσωμεν ἤδη τὸν *ὁρισμὸν* τῆς ἰσότητος δύο ἀριθμῶν (§ 45), ἵνα οὗτος περιλάβῃ καὶ τοὺς ἀριθμούς, οἵτινες δύνανται νὰ ἔχωσιν ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία εἰς τὸ κλασματικόν των μέρος ἢ γενικῶς ἀπείρους κλασματικοὺς ἀριθμοὺς καὶ ὅμως νὰ ἰσῶνται πρὸς ὡρισμένον τινὰ ἀριθμόν. Πρὸς τοῦτο θέτομεν τὸν ἑξῆς ὁρισμὸν τῆς ἰσότητος δύο ἀριθμῶν.

336. *Δύο ἀριθμοὶ λέγονται ἴσοι, ὅταν ἡ διαφορὰ τούτων δύναται νὰ γείνῃ μικροτέρα πάσης δοθείσης ποσότηιος, ὅσον μικρὰ καὶ ἂν ὑποτεθῇ αὕτη.*

Π. χ. Ἐὰν πράγματός τινος λάβωμεν τὸ ἥμισυ, τοῦ δὲ μένοντος ἡμίσεως, λάβωμεν τὸ ἥμισυ, τοῦ δὲ τότε μένοντος, λάβωμεν τὸ ἥμισυ καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς κάμνομεν τοῦτο ἐπ' ἄπειρον, τότε τὸ ὅλον πρᾶγμα ἰσοῦται κατὰ τὸν ὁρισμὸν (§ 336) πρὸς τὸ σύνολον τῶν οὕτω λαμβανομένων ἀπείρων κλασματικῶν μερῶν τοῦ πράγματος, ὅπερ παριστῶντες διὰ τῆς μονάδος θὰ ἔχωμεν τὴν ἰσότητα

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$$

337. *Θεώρημα. Πᾶς δεκαδικὸς ἀριθμὸς ἔχων ἀπό τινος τάξεως καὶ ἐφ' ἑξῆς ἄπειρα 9, ἰσοῦται μὲ μίαν δεκαδικὴν μονάδα τῆς ἀμέσως προηγουμένης τάξεως τοῦ πρώτου 9.*

Λέγω π. χ. ὅτι ὁ δεκαδικὸς 0,999... (ἔνθα τὰ 9 εἶναι ἄπειρα τὸ πλῆθος) ἰσοῦται μὲ τὴν *ἀκεραίαν μονάδα*, ὁ δὲ 0,099... ἰσοῦται πρὸς τὸ 0,1, ὁ δὲ 0,00999... ἰσοῦται πρὸς τὸ 0,01 καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Ἵνα δέ, ἐπὶ παραδείγματι, ἀποδείξωμεν ὅτι 1=0,999... σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς

Ἐπειδὴ τὸ 0,9 διαφέρει τοῦ 1 κατὰ $\frac{1}{10}$

τὸ δὲ 0,99 » » » » $\frac{1}{100}$

» » 0,999 » » » » $\frac{1}{1000}$

καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς. Ἄρα καθ' ὅσον λαμβάνομεν ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον περισσότερα 9 ἐκ τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ 0,999.... ἡ διαφορὰ τούτου ἀπὸ τῆς ἀκεραίας μονάδος δύναται νὰ γείνῃ μικροτέρα πάσης δεδομένης ποσότητος, ὅσον μικρὰ καὶ ἂν ὑποτεθῇ αὕτη. Καὶ ἵνα, ἐπὶ παραδείγματι, γείνῃ ἡ διαφορὰ μικροτέρα τοῦ $\frac{1}{10\rho}$, (ἔνθα ὁ ρ εἶναι οἱοσδήποτε ἀκέραιος ἀριθμός), ἀρκεῖ ἐκ τοῦ εἰρημένου δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ νὰ λάβωμεν ρ+1 *ἐννέα* καὶ ἵνα τοῦτο ἐπιτυγχάνηται διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ ρ, δέον τὰ 9 νὰ εἶναι ἄπειρα τὸ πλῆθος, ὅτε συνεπῶς θὰ εἶναι καὶ 1=0,999.....

Κατὰ τὸν ἴδιον ἀκριβῶς τρόπον ἀποδεικνύονται καὶ αἱ λοιπαὶ ἰσότητες 0,1=0,0999 0,01=0,0099.. καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

338. *Πόρισμα. Παντὸς δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ ἔχοντος ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία εἷς τὸ κλασματικὸν μέρος ὑπάρχει μεγαλήτερος.*

Διότι, ἂν μὲν ὁ δοθεὶς δεκαδικὸς ἀπό τινος τάξεως καὶ ἐφ' ἑξῆς ἔχῃ πάντα τὰ ψηφία 9, τότε οὗτος εἶναι ἴσος πρὸς τὸν δεκαδικὸν ἀριθμόν, ὅστις προκύπτει, ἐὰν ἀπὸ τοῦ δοθέντος δεκαδικοῦ ἐξαλείψωμεν τὰ διαδοχικὰ ἄπειρα 9 καὶ ἀντ' αὐτῶν αὐξήσωμεν τὸ τελευταῖον ψηφίον τοῦ μένοντος ἀριθμοῦ κατὰ μονάδα. Τούτου δὲ προφανῶς, (ὅστις ἔσται ὡρισμένος δεκαδικὸς ἀριθμός), ὑπάρχει μεγαλήτερος. Ἂν δὲ πάντα τὰ ψηφία δὲν εἶναι 9, τότε ἐὰν παραλείψωμεν ἀπό τινος τάξεως καὶ ἐφεξῆς πάντα τὰ ψηφία καὶ ἀντ' αὐτῶν αὐξήσωμεν κατὰ μονάδα τὸ τελευταῖον ψηφίον τοῦ μένοντος ἀριθμοῦ, προκύπτει ἀριθμὸς μεγαλήτερος τοῦ δοθέντος. Διότι μόνον ἐν ᾗ περιπτώσει πάντα τὰ παραλειφθέντα ψηφία τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ ἦσαν 9, ὁ προκύψας ἀριθμὸς θὰ ἦτο ἴσος τῷ δοθέντι ἀριθμῷ.

339. Κατὰ ταῦτα δυνάμεθα νὰ λάβωμεν δεκαδικόν τινα ἀριθμὸν κατὰ προσέγγισιν δεκαδικῆς τινος μονάδος, παραλείποντες πάντα τὰ ἑπόμενα δεκαδικὰ ψηφία τῆς τάξεως τῆς προσεγγίσεως, ὑφ' ἣν θέλομεν νὰ λάβωμεν τὸν δεκαδικὸν ἀριθμόν. Χάριν δὲ μεγαλητέρας προσεγγίσεως πρὸς τὴν ἀληθῆ τιμὴν τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ, ἐν ᾗ μὲν περιπτώσει τὸ ἑπόμενον ψηφίον τῆς τάξεως τῆς προσεγγίσεως εἶναι 5, 6, 7, 8 ἢ 9 αὐξάνομεν τὸ τῆς τάξεως τῆς προσεγγίσεως ψηφίον κατὰ μονάδα, ἂν δὲ εἶναι 0, 1, 2, 3, 4, τότε παραλείπομεν τὰ ἑπόμενα ψηφία τῆς τάξεως τῆς προσεγγίσεως, χωρὶς νὰ ἐπιφέρωμεν οὐδεμίαν μεταβολὴν εἰς τὸ τελευταῖον διατηρούμενον ψηφίον τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ.

Π. χ. Οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ 0,1352, 0,1567, 0,1242, 1,1705 λαμβανόμενοι κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς ἑκατοστοῦ θὰ δώσωσι κατὰ σειρὰν τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς 0,14, 0,16, 0,12, 1,17.

Πρόσθεσις.

Παράδειγμα. Νὰ προστεθῶσιν οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ

15,43+0,7+4,358+232,0076

Λύσις. Γράφομεν αὐτοὺς οὕτως, *ὥστε τὰ ψηφία τῶν ἀριθμῶν, τὰ ὁποῖα γίνονται ἐκ τῆς αὐτῆς μονάδος κατὰ μέγεθος, νὰ εὑρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ στήλῃ*, κατορθοῦμεν δὲ τοῦτο εὐκόλως γράφοντες τοὺς ἀριθμοὺς οὕτως, ὥστε αἱ ὑποδιαστολαί των νὰ εὑρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ στήλῃ. Μετὰ δὲ ταῦτα προσθέτομεν αὐτοὺς ὡς ἀκεραίους καὶ πρὸ τοῦ ψηφίου, τὸ ὁποῖον προκύπτει ἐκ τῆς προσθέσεως τῶν δεκάτων θέτομεν ὑποδιαστολὴν καὶ οὕτως ἔχομεν τὸ ζητούμενον ἄθροισμα 252, 4956.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς

$$\begin{array}{r} 15,43 \\ 0,7 \\ 4,358 \\ 232,0076 \\ \hline \end{array}$$

Ἐκ τούτου μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

Διὰ νὰ προσθέσωμεν ὁσουσδήποτε δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς γράφομεν αὐτοὺς οὕτως, ὥστε αἱ ὑποδιαστολαί των νὰ εὑρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ στήλῃ. Μετὰ ταῦτα ἄγοντες ὑπ' αὐτοὺς εὐθεῖαν γραμμήν, ἀρχόμεθα ἐκ δεξιῶν πρὸς τ' ἀριστερὰ καὶ προσθέτομεν αὐτοὺς ὡς ἀκεραίους, πρὸ δὲ τοῦ ψηφίου, τὸ ὁποῖον προκύπτει ἐκ τῆς προσθέσεως τῶν δεκάτων, γράφομεν ὑποδιαστολήν.

Ἀφαίρεσις.

Παράδειγμα. Ν' ἀφαιρεθῇ ἐκ τοῦ δεκαδικοῦ 0,15 ὁ 0,09458.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς

$$\begin{array}{r} 0,15 \\ 0,09458 \\ \hline \end{array}$$

Κάμνομεν πρῶτον τὰ κλασματικά των μέρη ἰσοψήφια προσθέτοντες ἐν ἀνάγκῃ μηδενικὰ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν. Ἔπειτα γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον ὑπὸ τὸν μειωτέον καὶ οὕτως, ὥστε *τὰ ψηφία τῶν ἀριθμῶν, τὰ ὁποῖα γίνονται ἐκ τῆς αὐτῆς μονάδος κατὰ μέγεθος, νὰ εὑρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ στήλῃ*, κατορθοῦμεν δὲ τοῦτο εὐκόλως, γράφοντες τοὺς ἀριθμοὺς οὕτως, ὥστε αἱ ὑποδιαστολαί των νὰ εὑρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ στήλῃ, ὅτε ἔχομεν

$$\begin{array}{r} 0,15000 \\ 0,09458 \\ \hline \end{array}$$

Μετὰ δὲ ταῦτα ἀφαιροῦμεν αὐτοὺς ὡς ἀκεραίους καὶ θέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν πρὸ τοῦ ψηφίου, τὸ ὁποῖον προκύπτει ἐκ τῆς ἀφαιρέσεως τῶν δεκάτων, ὅτε ἔχομεν

$$\begin{array}{r} 0{,}^{1}5000 \\ 0{,}09458 \\ \hline 0{,}05542 \end{array}$$

Ὥστε ἡ ζητουμένη διαφορὰ εἶναι 0,05542.

Ἐκ τούτου μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

340. *Διὰ ν' ἀφαιρέσωμεν δεκαδικὸν ἀπὸ δεκαδικοῦ, γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον ὑπὸ τὸν μειωτέον οὕτως, ὥστε αἱ ὑποδιαστολαί των νὰ εὑρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ στήλῃ καὶ ἄγοντες ὑπ' αὐτοὺς εὐθεῖαν γραμμὴν, ἀρχόμεθα ἐκ δεξιῶν πρὸς τ' ἀριστερὰ καὶ ἀφαιροῦμεν αὐτοὺς ὡς ἀκεραίους· πρὸ δὲ τοῦ ψηφίου, τὸ ὁποῖον προκύπτει ἐκ τῆς ἀφαιρέσεως τῶν δεκάτων, θέτομεν ὑποδιαστολήν. Ἂν δὲ ὁ μειωτέος ἔχει ὀλιγώτερα ψηφία τοῦ ἀφαιρετέου εἰς τὸ κλασματικόν του μέρος ἢ εἶναι ἀκέραιος, συμπληροῦμεν τὰς ἐλλειπούσας θέσεις διὰ μηδενικῶν.*

Πολλαπλασιασμός.

Παράδειγμα. Νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ 2,5 ἐπὶ 0,008.

Ἐπειδὴ $2{,}5\times0{,}008=\frac{25}{10}\times\frac{8}{1000}=\frac{200}{10000}$ ἤτοι 0,0200, ἄρα ἔχομεν $2{,}5\times0{,}008=0{,}0200$.

Ὁμοίως ἔχομεν καὶ $4\times0{,}17=4\times\frac{17}{100}=\frac{68}{100}=0{,}68$.

Ἐντεῦθεν μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

341. *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δεκαδικὸν ἐπὶ δεκαδικὸν* (ἢ ἐπὶ ἀκέραιον) *πολλαπλασιάζομεν αὐτοὺς ὡς ἀκεραίους, μὴ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψει τὴν ὑποδιαστολήν, ἀπὸ δὲ τοῦ γινομένου, χωρίζομεν, ὡς κλασματικὸν μέρος, τόσα ψηφία, ὅσα ἔχουσι καὶ οἱ δύο παράγοντες εἰς τὸ κλασματικόν των μέρος.*

342. *Συντομία.* Δεκαδικὸς ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 10, 100, 1000 κ.τ.λ. ἐὰν μεταθέσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν μίαν, δύο, τρεῖς κ.τ.λ. θέσεις πρὸς τὰ δεξιά. Ἂν δὲ ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς δὲν ἔχῃ εἰς τὸ κλασματικόν του μέρος, ὅσα ψηφία χρειάζονται διὰ νὰ μετατεθῇ ἡ ὑποδιαστολή, τότε συμπληροῦμεν τὰς ἐπιλοίπους θέσεις διὰ μηδενικῶν.

Ὁ λόγος τούτου εἶναι ὁ ἑξῆς. Διότι διὰ τῆς μεταθέσεως τῆς ὑποδιαστολῆς μίαν, δύο, τρεῖς κ.τ.λ. θέσεις πρὸς τὰ δεξιὰ ἕκαστον ψηφίον τοῦ δοθέντος δεκαδικοῦ γίνεται ἐκ μονάδος δεκάκις, ἑκατοντάκις, χιλιάκις μεγαλητέρας, δι' ὃ ὅλος ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς δεκαπλασιάζεται, ἑκατονταπλασιάζεται, χιλιοπλασιάζεται.

Π. χ. Ὁ 5,457 ἐπὶ 10=54,57
Ὁ 5,4 ἐπὶ 1000=5400

Διαίρεσις.

343. Εἰς τὴν διαίρεσιν τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις.

Α'.) Ὅταν ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί.

Β.) Ὅταν ὁ διαιρετέος εἶναι δεκαδικός, ὁ δὲ διαιρέτης ἀκέραιος.

Γ'.) Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι δεκαδικὸς τοῦ διαιρετέου ὄντος οἱουδήποτε.

Α'. περίπτωσις. Διαιρετέος καὶ διαιρέτης ἀκέραιος.

Ἡ διαίρεσις ἀκεραίου τινος δι' ἄλλου ἀκεραίου, μετὰ τὴν ἐπινόησιν τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν ἐκτελεῖται πάντοτε ἀκριβῶς, τὸ δὲ πηλίκον εἶναι, ὡς εἴδομεν (§ 264), κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὸν διαιρετέον, παρονομαστὴν δὲ τὸν διαιρέτην. Ἐνταῦθα ὅμως θὰ ζητήσωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ τοιοῦτον πηλίκον ὑπὸ μορφὴν δεκαδικήν, ἢ ὅπερ ταὐτό, νὰ τρέψωμεν πᾶν κοινὸν κλάσμα ὑπὸ μορφὴν δεκαδικήν.

344. *Παράδειγμα. Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον τοῦ 5 διὰ 8 ὑπὸ δεκαδικὴν μορφήν.*

Λύσις. Ὁ 5 διὰ 8 δὲν δίδει πηλίκον ἀκέραιον, δι' ὃ γράφομεν 0, ὡς ἀκέραιον μέρος τοῦ πηλίκου καὶ χωρίζομεν αὐτὸ δι' ὑποδιαστολῆς. Ἔπειτα τρέπομεν τὸ 5 εἰς δέκατα καὶ οὕτως ἔχομεν 50 δέκατα. Ταῦτα δὲ διαιροῦντες διὰ 8 εὑρίσκομεν πηλίκον 6 δέκατα καὶ ὑπόλοιπον 2 δέκατα, τὰ ὁποῖα τρέποντες εἰς ἑκατοστὰ εὑρίσκομεν 20 ἑκατοστά. Ταῦτα δὲ διαιροῦντες διὰ τοῦ 8 εὑρίσκομεν πηλίκον 2 ἑκατοστὰ καὶ ὑπόλοιπον 4 ἑκατοστά, τὰ ὁποῖα τρέποντες εἰς χιλιοστὰ εὑρίσκομεν 40 χιλιοστά. Ταῦτα δὲ διαιροῦντες διὰ τοῦ 8 εὑρίσκομεν πηλίκον 5 χιλιοστὰ καὶ ὑπόλοιπον μηδέν. Ὥστε τὸ ζητούμενον πηλίκον τοῦ 5 διὰ 8, ὅπερ ὑπὸ κλασματικὴν μορφὴν εἶναι $\frac{5}{8}$ εὑρέθη ἤδη καὶ ὑπὸ δεκαδικὴν μορφὴν καὶ εἶναι 0,625.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς

$$\begin{array}{r|l} 5 & 8 \\ \hline 50^{\delta} & 0,625 \\ 20^{\varepsilon} & \\ 40^{\chi} & \\ 0 & \end{array}$$

345. *Θεώρημα. Πᾶν ἀνάγωγον κλάσμα ἰσοῦται μὲ κλάσμα τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν ὅρων τοῦ ἀναγώγου κλάσματος.*

Ἔστω π. χ. τὸ ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{3}{10}$, λέγω ὅτι τοῦτο θὰ ἰσῶται πρὸς τὸ $\frac{3\times\Pi}{10\times\Pi}$, ἔνθα Π εἶναι οἱοσδήποτε ἀκέραιος ἀριθμός.

Διότι ἔστω ὅτι

$$\frac{3}{10}=\frac{\alpha}{\beta}$$

Τρέποντες ταῦτα τὰ κλάσματα εἰς τοὺς αὐτοὺς παρονομαστὰς ἔχομεν καὶ

$$\frac{3\times\beta}{10\times\beta}=\frac{\alpha\times10}{\beta\times10}$$

Ἐκ ταύτης δὲ τῆς ἰσότητος πορίζόμεθα καὶ τὴν ἰσότητα

$$3\times\beta=\alpha\times10$$

ἐνταῦθα δὲ ὁ 3 διαιρεῖ τὸ $3\times\beta$, ὡς πολλαπλάσιόν του, τὸν δὲ $\alpha\times10$ θὰ διαιρῇ, ὡς ἴσον τῷ $3\times\beta$, ἐπειδὴ ὅμως ὁ 3 εἶναι πρῶτος πρὸς τὸ 10, διὰ τοῦτο θὰ διαιρῇ τὸν α (§ 212), δι' ὃ ὁ α θὰ εἶναι πολλαπλάσιόν τι τοῦ 3, ἤτοι θὰ εἶναι $\alpha=3\times\Pi$ (ἔνθα Π εἶναι οἱοσδήποτε ἀκέραιος ἀριθμός). Ἀντικαθιστῶντες δὲ τὴν τιμὴν ταύτην εἰς τὴν ἀνωτέρω ἰσότητα εὑρίσκομεν

$$3\times\beta=3\times\Pi\times10 \text{ ἐξ ἧς } \beta=10\times\Pi$$

Καὶ οὕτως ἀπεδείχθη ὅτι, $\alpha=3\times\Pi$ καὶ $\beta=10\times\Pi$ καὶ ἑπομένως τὸ κλάσμα $\frac{3}{10}$, ὅπερ ἐτέθη ἴσον τῷ $\frac{\alpha}{\beta}$, ἀπεδείχθη ὅτι ἰσοῦται πρὸς τὸ $\frac{3\times\Pi}{10\times\Pi}$, ἔνθα Π εἶναι οἱοσδήποτε ἀκέραιος ἀριθμός.

Πόρισμα. Πᾶν ἀνάγωγον κλάσμα δὲν δύναται νὰ ἰσῶται μὲ ἄλλο ἀνάγωγον κλάσμα.

Διότι $\frac{3}{10}=\frac{3\times\Pi}{10\times\Pi}$.

Ἵνα δὲ ἐκ τοῦ $\frac{3\times\Pi}{10\times\Pi}$ προκύψῃ ἀνάγωγον, πρέπει εἰς τὸν Π νὰ δώσωμεν τιμὴν 1, ὅτε εὑρίσκομεν $\frac{3\times1}{10\times1}$, ἤτοι πάλιν $\frac{3}{10}$.

346. *Θεώρημα. Πᾶς ὡρισμένος δεκαδικὸς ἀριθμὸς προκύπτει ἐκ κλάσματος, τὸ ὁποῖον ἀνάγωγον ὄν, περιέχει εἰς τὸν παρονομαστήν του μόνον τὸν παράγοντα 2 ἢ 5 ἢ 2 καὶ 5 ὁμοῦ εἰς οἱανδήποτε δύναμιν ἕκαστον.*

Διότι πᾶς ὡρισμένος δεκαδικὸς ἀριθμός, γραφόμενος ὑπὸ μορφὴν κλάσματος θὰ ἔχῃ εἰς τὸν παρονομαστήν του 10 ἢ 100 ἢ 1000 κ.τ.λ. Οὗτοι δὲ οἱ ἀριθμοὶ ἀναλυόμενοι εἰς τοὺς πρώτους παράγοντας, περιέχουσι μόνον τοὺς παράγοντας 2 καὶ 5. Διὰ δὲ τῆς ἁπλοποιήσεως τοῦ κλάσματος τούτου δύναται μὲν νὰ ἐξαληφθῇ τὸ 2 ἢ 5, ἀλλ᾽ οὐδέποτε προφανῶς δυναται νὰ προστεθῇ νέος παράγων. Ἑπομένως ὡρισμένος τις δεκαδικὸς ἀριθμὸς προκύπτει ἐκ κλάσματος, τὸ ὁποῖον καθιστώμενον ἀνάγωγον ἔχει εἰς τὸν παρονομαστήν του μόνον τὸν παράγοντα 2 ἢ 5 ἢ 2 καὶ 5 ὁμοῦ εἰς οἱανδήποτε δύναμιν.

Οὕτω π. χ. Τὸ $0{,}252=\frac{252}{1000}=\frac{252}{2^3\times5^3}=\frac{63}{2\times5^3}$

Ὁμοίως τὸ $0{,}456=\frac{456}{1000}=\frac{456}{2^3\times5^3}=\frac{57}{5^3}$

347. *Θεώρημα. Πᾶν ἀνάγωγον κλάσμα τρέπεται εἰς ἀκριβῆ δεκαδικὸν ἀριθμόν, ἐὰν εἰς τὸν παρονομαστήν του περιέχωνται μόνον οἱ παράγοντες 2 ἢ 5 ἢ 2 καὶ 5 ὁμοῦ εἰς οἱανδήποτε δύναμιν.*

Διότι, ἐὰν ἐπὶ παραδείγματι τοῦ ἀναγώγου κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$ ὁ παρονομαστὴς β περιέχει μόνον τοὺς παράγοντας 2 ἢ 5 ἢ 2 καὶ 5 ὁμοῦ εἰς οἱανδήποτε δύναμιν δυνάμεθα νὰ καταστήσωμεν τοῦτον ἰσοβάθμιόν τινα δύναμιν τῶν παραγόντων 2 καὶ 5 πολλαπλασιάζοντες ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$ ἐπὶ τὴν κατάλληλον δύναμιν τοῦ 2 ἢ 5, ὅτε τὸ γινόμενον θὰ ἰσῶται, ὡς γνωστόν, μὲ τὴν ἰσοβάθμιον δύναμιν τοῦ 10 (Σελ. 57. *Ἄσκησις* 5) καὶ οὕτω ἐτράπη τὸ δοθὲν κοινὸν ἀνάγωγον κλάσμα εἰς *δεκαδικὸν κλάσμα* ἢ ὅπερ ταὐτό, εἰς *δεκαδικὸν ἀριθμόν*. Οὐδὲν δὲ διάφορον τούτου ἀνάγωγον κλάσμα δύναται νὰ τραπῇ εἰς *δεκαδικὸν κλάσμα* δηλ. εἰς κλάσμα ἔχον παρονομαστὴν 10 ἢ 100 ἢ 1000 κ.τ.λ. Διότι οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι προκύπτουσι *μόνον* ἐκ τῶν παραγόντων 2 καὶ 5 ὄντων εἰς ἰσοβάθμιόν τινα δύναμιν, ἄρα πᾶν ἀνάγωγον κλάσμα, τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστὴς δὲν περιέχει *μόνον* τοὺς παράγοντας 2 ἢ 5 ἢ 2 καὶ 5 ὁμοῦ εἰς οἱανδήποτε δύναμιν δὲν δύναται προφανῶς νὰ τραπῇ διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἀμφοτέρων τῶν ὅρων του ἐπί τινα ἀριθμὸν εἰς ἰσοβάθμιόν τινα δύναμιν τοῦ 2 καὶ 5, ἄνευ ἑτέρου παράγοντος καὶ ἑπομένως δὲν δύναται νὰ τραπῇ εἰς 10 ἢ 100 ἢ 1000 κ.τ.λ., ἤτοι εἰς δεκαδικὸν κλάσμα ἢ ὅπερ ταὐτό, εἰς ἀκριβῆ δεκαδικὸν ἀριθμόν.

Π. χ. Τὸ ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{7}{2^2 \times 5^6}$ τρέπεται εἰς δεκαδικόν, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους ἐπὶ 2^4, ὅτε γίνεται

$$\frac{7 \times 2^4}{2^2 \times 2^4 \times 5^6} \text{ ἢ } \frac{7 \times 16}{2^6 \times 5^6} \text{ ἢ } \frac{112}{10^6} \text{ ἢ } \frac{112}{1000000} \text{ ἤτοι } 0,000112$$

Παρατήρησις. Ὁ μέγιστος ἐκθέτης τοῦ παράγοντος 2 ἢ 5, εἰς οὓς ἀναλύεται ὁ παρονομαστὴς τοῦ τοιούτου ἀναγώγου κλάσματος δεικνύει τὴν τάξιν, μέχρι τῆς ὁποίας τρέπεται εἰς δεκαδικὸν ἀριθμὸν τὸ ἀνάγωγον κλάσμα.

348. *Θεώρημα. Πᾶν κλάσμα ἀνάγωγον, τὸ ὁποῖον δὲν τρέπεται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικὸν ἀριθμόν, τρέπεται εἰς δεκαδικὸν ἔχοντα ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία, τὰ ὁποῖα ἀπό τινος τάξεως καὶ ἐφεξῆς ἐπαναλαμβάνονται τὰ αὐτὰ καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν.*

Διότι ἄν, ἐπὶ παραδείγματι, θέλωμεν νὰ τρέψωμεν τὸ κλάσμα $\frac{4}{7}$ εἰς δεκαδικὸν ἀριθμόν, διαιροῦντες τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, τοῦτο ὡς μὴ ἔχον εἰς τὸν παρονομαστήν του μόνον τὸν παράγοντα 2 ἢ 5 ἢ 2 καὶ 5 ὁμοῦ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ τραπῇ ἀκριβῶς εἰς δεκαδικὸν ἀριθμὸν (§ 347). Ἑπομένως ἡ διαίρεσις θὰ ἐξακολουθῇ ἐπ' ἄπειρον. Λέγω ὅμως ὅτι, τὰ ψηφία τοῦ προκύπτοντος δεκαδικοῦ πηλίκου, ἀπό τινος τάξεως καὶ ἐφ' ἑξῆς θὰ ἐπαναλαμβάνωνται τὰ αὐτὰ καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν, διότι τοῦ διαιρέτου ὄντος ἐνταῦθα 7 τὰ διάφορα ὑπόλοιπα, ἅτινα δύνανται νὰ προκύψωσιν εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 1, 2, 3, 4, 5, 6, ἑπομένως μετὰ ἓξ τὸ πολὺ διαιρέσεις θὰ ἐπανέλθῃ εἰς τὸ ὑπόλοιπον ἓν τῶν ψηφίων 1 ἢ 2 ἢ 3 ἢ 4 ἢ 5 ἢ 6, ὁπότε θὰ ἐπαναληφθῶσιν αἱ διαιρέσεις αἱ προηγουμένως ἐκτελεσθεῖσαι καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν καὶ ἑπομένως θὰ εὑρεθῶσιν εἰς τὸ πηλίκον τὰ προηγουμένως εὑρεθέντα ψηφία καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν.

Π. χ. *Νὰ διαιρεθῇ τὸ 4 διὰ 7 ἢ ὅπερ ταὐτό, νὰ τραπῇ τὸ κλάσμα* $\frac{4}{7}$ *ὑπὸ μορφὴν δεκαδικήν.*

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς

```
4       | 7
        -----------
40       0,57142857.....
 50
  10
   30
    20
     60
      40
       50
        1
```

Ἐν τῷ παραδείγματι τούτῳ ὡς ὑπόλοιπα εὑρέθησαν οἱ ἀριθμοὶ 4, 5, 1, 3, 2 καὶ 6, μετὰ τοῦτο δὲ εὑρέθη πάλιν τὸ 4 καὶ οὕτω θὰ ἐπαναληφθῶσιν αἱ αὐταὶ διαιρέσεις καὶ ἑπομένως τὰ αὐτὰ ψηφία εἰς τὸ πηλίκον.

Β΄. περίπτωσις. Διαιρετέος δεκαδικὸς καὶ διαιρέτης ἀκέραιος.

Παράδειγμα. Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον τοῦ 5,25 διὰ 7 ὑπὸ δεκαδικὴν μορφήν.

Λύσις. Ἐπειδὴ ὁ ἀκέραιος 5 διὰ 7 δὲν διαιρεῖται (δηλ. δὲν δίδει πηλίκον ἀκέραιον), διὰ τοῦτο γράφομεν 0, ὡς ἀκέραιον μέρος τοῦ πηλίκου καὶ χωρίζομεν αὐτὸ δι᾽ ὑποδιαστολῆς. Ἔπειτα τρέπομεν τὸ 5 εἰς δέκατα καὶ οὕτως ἔχομεν 50 *δέκατα*, εἰς ἃ προσθέτοντες καὶ τὰ 2 *δέκατα* τοῦ διαιρετέου εὑρίσκομεν 52 *δέκατα*. Ταῦτα δὲ διαιροῦντες διὰ τοῦ 7 εὑρίσκομεν πηλίκον 7 δέκατα καὶ ὑπόλοιπον 3 δέκατα, τὰ ὁποῖα τρέποντες εἰς ἑκατοστὰ εὑρίσκομεν 30 *ἑκατοστά*, εἰς ἃ προσθέτοντες καὶ τὰ 5 *ἑκατοστὰ* τοῦ διαιρετέου ἔχομεν 35 *ἑκατοστά*. Ταῦτα δὲ διαιροῦντες διὰ τοῦ 7 εὑρίσκομεν πηλίκον 5 *ἑκατοστὰ* καὶ ὑπόλοιπον 0.

Ὥστε τὸ ζητούμενον πηλίκον τοῦ 5,25 διὰ τοῦ 7 εἶναι 0,75.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς

5′,2′5	7
35	0,75
0	

Ἐκ τούτου μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν δεκαδικὸν δι' ἀκεραίου διαιροῦμεν τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ ἀκεραίου διαιρέτου καὶ τὸ προκῦπτον ἀκέραιον πηλίκον χωρίζομεν δι' ὑποδιαστολῆς ἢ ἂν δὲν προκύπτῃ τοιοῦτον, γράφομεν 0 καὶ τὸ χωρίζομεν δι' ὑποδιαστολῆς καὶ ἐξακολουθοῦμεν τὴν διαίρεσιν, ὡς εἰς τοὺς ἀκεραίους. Ἂν δὲ ἡ διαίρεσις ἀφήσῃ ὑπόλοιπον, δυνάμεθα νὰ ἐξακολουθήσωμεν τὴν διαίρεσιν τρέποντες τὸ ὑπόλοιπον εἰς δεκαδικὰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως.

349. *Συντομία.* Δεκαδικὸς ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ 10, 100, 1000 κ.τ.λ. ἐὰν μεταθέσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν *μίαν, δύο, τρεῖς* κ.τ.λ. θέσεις πρὸς τ' ἀριστερά. Ἂν δὲ τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ δεκαδικοῦ δὲν ἔχῃ ὅσα ψηφία χρειάζονται διὰ νὰ μετατεθῇ ἡ ὑποδιαστολή, τότε συμπληροῦμεν τὰς ἐπιλοίπους θέσεις διὰ μηδενικῶν.

Ὁ λόγος τούτου εἶναι ὁ ἑξῆς. Διότι διὰ τῆς μεταθέσεως τῆς ὑποδιαστολῆς *μίαν, δύο, τρεῖς* κ.τ.λ. θέσεις πρὸς τ' ἀριστερὰ ἕκαστον ψηφίον τοῦ δοθέντος δεκαδικοῦ γίνεται ἐκ μονάδος *δεκάκις, ἑκατοντάκις, χιλιάκις μικροτέρας*, δι' ὃ ὅλος ὁ δοθεὶς δεκαδικὸς ἀριθμὸς γίνεται *δεκάκις, ἑκατοντάκις, χιλιάκις μικρότερος.*

Π. χ. Ὁ 15,3 διὰ 10=1,53
Ὁ 5,4 διὰ 1000=0,0054

Γ'. περίπτωσις. Διαιρετέος καὶ διαιρέτης δεκαδικός.

350. *Διὰ νὰ διαιρέσωμεν οἱονδήποτε ἀριθμὸν διὰ δεκαδικοῦ, τρέπομεν πρῶτον τὸν διαιρέτην εἰς ἀκέραιον πολλαπλασιάζοντες διαιρετέον καὶ διαιρέτην ἐπὶ 10, 100, 1000 κ.τ.λ., καθ' ὅσον ὁ διαιρέτης ἔχει ἕν, δύο, τρία κ.τ.λ. δεκαδικὰ ψηφία εἰς τὸ κλασματικόν του μέρος καὶ εἶτα ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν,*

Παράδειγμα. Νὰ διαιρεθῇ ὁ 4 διὰ 0,05.

Λύσις. Ἐπειδὴ ὁ διαιρέτης γίνεται ἀκέραιος, πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 100, διὰ τοῦτο πολλαπλασιάζομεν καὶ τὸν διαιρετέον ἐπὶ

100, ἵνα μὴ μεταβληθῇ τὸ πηλίκον, ὅτε ἀντὶ τοῦ 4 : 0,05 ἔχομεν 400 : 5. Τούτους δὲ διαιροῦντες εὑρίσκομεν πηλίκον 80, ὅπερ εἶναι καὶ τὸ ζητούμενον πηλίκον τῶν 4 : 0,05 (ἰδὲ § 164 Σημ.)

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς

4	0,05	ἢ	400	5
			0	80

Συντομίαι πολλαπλασιασμοῦ ἀκεραίων καὶ δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

351. *Τὸ γινόμενον ἀριθμοῦ τινος ἐπὶ 5 εὑρίσκεται συντομώτερον, ἐὰν λάβωμεν τὸ ἥμισυ τοῦ δεκαπλασίου τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ.*

Τοῦτο δὲ εὑρίσκομεν συντομώτερον ὡς ἑξῆς.

Ἐὰν μὲν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς διαιρῆται ἀκριβῶς διὰ 2, θέτομεν δεξιὰ τοῦ τελείου πηλίκου τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ ἓν μηδενικόν, ἂν δὲ ἀφήνῃ ὑπόλοιπον 1, θέτομεν δεξιὰ τοῦ ἀτελοῦς πηλίκου τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ τὸν ἀριθμὸν 5.

Διότι ἐπειδὴ $5=\frac{10}{2}$, διὰ τοῦτο ἔχομεν

$$456\times5=456\times\frac{10}{2}=\frac{456}{2}\times10=228\times10=2280$$

Ὁμοίως $573=573\times\frac{10}{2}=\frac{573}{2}\times10=286,5\times10=2865$

Σημειωτέον ὅμως ὅτι, ἵνα ἐπιτυγχάνηται ἔτι μεγαλητέρα οἰκονομία χρόνου, δέον τὴν διαίρεσιν νὰ ἐκτελῶμεν ἀπὸ μνήμης.

Σημ. Ἂν ὁ εἷς τῶν παραγόντων ἢ καὶ ἀμφότεροι ἔχωσι δεκαδικὰ ψηφία, τότε πολλαπλασιάζομεν αὐτούς, ὡς ἀνωτέρω, ὡς νὰ ἦσαν ἀκέραιοι, ἐκ δὲ τοῦ γινομένου χωρίζομεν τόσα ψηφία, ὅσα ἔχουσι καὶ οἱ δύο παράγοντες. Ἂν δὲ ἔχωσιν εἰς τὸ τέλος μηδενικά, πολλαπλασιάζομεν αὐτοὺς χωρὶς τὰ μηδενικὰ συντόμως, εἰς δὲ τὸ τέλος τοῦ γινομένου γράφομεν τὰ παραλειφθέντα μηδενικά.

Παραδείγματα.

$36,5\times5=1825$ ἤτοι 182,5
$45,78\times0,05=22890$ ἤτοι 2,2890
$457\times500=2285$ ἤτοι 228500
$1560\times500=780$ ἤτοι 780000

352. *Τὸ γινόμενον ἀριθμοῦ τινος ἐπὶ 25 εὑρίσκεται συντομώτερον, ἐὰν λάβωμεν τὸ τέταρτον τοῦ ἑκατονταπλασίου τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ.*

Τοῦτο δὲ εὑρίσκομεν συντομώτερον ὡς ἑξῆς.

Ἐὰν μὲν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς διαιρῆται ἀκριβῶς διὰ 4, γράφομεν δεξιὰ τοῦ *τελείου πηλίκου δύο μηδενικά,* ἂν δὲ ἀφήνῃ ὑπόλοιπον 1 ἢ 2 ἢ 3, γράφομεν δεξιὰ τοῦ ἀτελοῦς πηλίκου τὸν ἀριθμὸν 25 ἢ 50 ἢ 75, δηλ. τοσάκις τὸν 25, ὅσας μονάδας ἀφήνει, ὡς ὑπόλοιπον ὁ δοθεὶς ἀριθμός.

Διότι, ἐπειδὴ $25=\frac{100}{4}$, ἕπεται ὅτι

$$4576\times25=4576\times\frac{100}{4}=\frac{4576}{4}\times100=1144\times100=114400$$

$$4577\times25=4577\times\frac{100}{4}=\frac{4577}{4}\times100=1144,25\times100=114425$$

$$4578\times25=4578\times\frac{100}{4}=\frac{4578}{4}\times100=1144,50\times100=114450$$

$$4579\times25=4579\times\frac{100}{4}=\frac{4579}{4}\times100=1144,75\times100=114475$$

Σημ. Ἂν ὁ εἷς τῶν παραγόντων ἢ καὶ ἀμφότεροι ἔχωσι δεκαδικὰ ψηφία, τότε πολλαπλασιάζομεν αὐτούς, ὡς ἀνωτέρω, ὡς νὰ ἦσαν ἀκέραιοι, ἐκ δὲ τοῦ γινομένου χωρίζομεν τόσα δεκαδικὰ ψηφία, ὅσα ἔχουσι καὶ οἱ δύο παράγοντες. Ἂν δὲ ἔχωσιν εἰς τὸ τέλος μηδενικά, πολλαπλασιάζομεν αὐτοὺς χωρὶς τὰ μηδενικά, εἰς δὲ τὸ τέλος τοῦ γινομένου γράφομεν τὰ παραλειφθέντα μηδενικά.

Παραδείγματα.

$4,578\times25=114450$ ἤτοι 114,450
$167,83\times2,5=419575$ ἤτοι 419,575
$2566\times2500=64150$ ἤτοι 6415000
$15670\times250=39175$ ἤτοι 3917500

353. *Τὸ γινόμενον ἀριθμοῦ τινος ἐπὶ 125 εὑρίσκεται συντομώτερον, ἐὰν λάβωμεν τὸ ὄγδοον τοῦ χιλιοπλασίου τοῦ ἀριθμοῦ.*

Τοῦτο δὲ εὑρίσκομεν συντομώτερον ὡς ἑξῆς.

Ἐὰν μὲν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ 8, γράφομεν δεξιὰ τοῦ *τελείου* πηλίκου *τρία μηδενικά,* ἂν δὲ ἀφήνῃ ὑπόλοιπον 1 ἢ 2 ἢ 3 ἢ 4 ἢ 5 ἢ 6 ἢ 7, γράφομεν δεξιὰ τοῦ ἀτελοῦς πηλίκου τὸν ἀριθμὸν 125, 250, 375, 500, 625, 750, 875 δηλ. τοσάκις τὸν ἀριθμὸν 125, ὅσας μονάδας ἀφήνει ὡς ὑπόλοιπον ὁ δοθεὶς ἀριθμός.

Διότι, ἐπειδὴ $125=\frac{1000}{8}$ ἕπεται ὅτι

$$45096\times125=45096\times\frac{1000}{8}=\frac{45096}{8}\times1000$$
$$=5637\times1000=5637000$$
$$45097\times125=45097\times\frac{1000}{8}=\frac{45097}{8}\times1000$$
$$=5637{,}125\times1000=5637125$$

Σημ. Ἂν ὁ εἷς τῶν παραγόντων ἢ καὶ ἀμφότεροι ἔχωσι δεκαδικὰ ψηφία, τότε πολλαπλασιάζομεν αὐτοὺς ὡς ἀνωτέρω, ὡς νὰ ἦσαν ἀκέραιοι, ἐκ δὲ τοῦ γινομένου χωρίζομεν τόσα δεκαδικὰ ψηφία, ὅσα ἔχουσι καὶ οἱ δύο παράγοντες. Ἂν δὲ ἔχωσιν εἰς τὸ τέλος μηδενικά, πολλαπλασιάζομεν αὐτοὺς χωρὶς τὰ μηδενικὰ συντόμως, εἰς δὲ τὸ τέλος τοῦ γινομένου γράφομεν τὰ παραλειφθέντα μηδενικά,

Παραδείγματα.

$45{,}73\times12{,}5=571625$ ἤτοι $571{,}625$

$4149{,}5\times0{,}125=5186875$ ἤτοι $518{,}6875$

$4560\times12500=57000$ ἤτοι 57000000

354. *Τὸ γινόμενον ἀριθμοῦ τινος ἐπὶ 15 εὑρίσκεται συντομώτερον, ἐὰν εἰς τὸ δεκαπλάσιον τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ προσθέσωμεν τὸ ἥμισυ τοῦ εὑρεθέντος δεκαπλασίου.*

Διότι, ἐπειδὴ $15=10+5$ ἕπεται ὅτι,

$$457\times15=457\times(10+5)=4570+2285=6855$$

Σημ. Ἂν ὁ εἷς τῶν παραγόντων ἢ καὶ ἀμφότεροι ἔχωσι δεκαδικὰ ψηφία, τότε πολλαπλασιάζομεν αὐτούς, ὡς ἀνωτέρω (§ 354), ὡς νὰ ἦσαν ἀκέραιοι, ἐκ δὲ τοῦ γινομένου χωρίζομεν τόσα δεκαδικὰ ψηφία, ὅσα ἔχουσι καὶ οἱ δύο παράγοντες. Ἂν δὲ ἔχωσιν εἰς τὸ τέλος μηδενικά, πολλαπλασιάζομεν αὐτοὺς χωρὶς τὰ μηδενικὰ συντόμως, εἰς δὲ τὸ τέλος τοῦ γινομένου γράφομεν τὰ παραλειφθέντα μηδενικά,

Παραδείγματα.

$2{,}57\times1{,}5$ ἤτοι $2570+1285$ ἤτοι 3855 ἤτοι $3{,}855$

$45{,}5\times1500$ ἤτοι $4550+2275$ ἤτοι 6825 ἤτοι 68250

Συντομίαι διαιρέσεως ἀκεραίων καὶ δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

355. *Τὸ πηλίκον ἀριθμοῦ τινος διὰ 5 εὑρίσκομεν συντομώτερον,*

ἐὰν τὸ διπλάσιον τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ διαιρέσωμεν διὰ 10.

Διότι, ἐπειδὴ $5=\frac{10}{2}$ ἕπεται ὅτι

$$3784:5=3784:\frac{10}{2}=3784\times\frac{2}{10}=\frac{3784\times2}{10}=756,8$$

$$457,43:5=\frac{457,43\times2}{10}=91,486.$$

356. *Τὸ πηλίκον ἀριθμοῦ τινος διὰ 25 εὑρίσκεται συντομώτερον, ἐὰν τὸ τετραπλάσιον τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ διαιρέσωμεν δι' 100.*

Διότι, ἐπειδὴ $25=\frac{100}{4}$ ἕπεται ὅτι

$$4578:25=4578:\frac{100}{4}=4578\times\frac{4}{100}=\frac{4578\times4}{100}=183,12$$

$$0,15743:25=\frac{0,15743\times4}{100}=0,0062972.$$

357. *Τὸ πηλίκον ἀριθμοῦ τινος διὰ 125 εὑρίσκεται συντομώτερον, ἐὰν τὸ ὀκταπλάσιον τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ διαιρέσωμεν διὰ 1000.*

Διότι, ἐπειδὴ $125=\frac{1000}{8}$ ἕπεται ὅτι,

$$2536:125=2536:\frac{1000}{8}=\frac{2536\times8}{1000}=20,288$$

$$45,8:125=\frac{45,8\times8}{1000}=0,3664.$$

358. *Τὸ πηλίκον ἀριθμοῦ τινος διὰ 625 εὑρίσκεται συντομώτερον, ἐὰν τὸ δεκαεξαπλάσιον τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ διαιρέσωμεν διὰ 10000.*

Διότι, ἐπειδὴ $625=\frac{10000}{16}$ ἕπεται ὅτι,

$$25743,65:625=\frac{25743,65\times16}{10000}=41,189840.$$

Παρατήρησις. Ἐὰν οἱ διαιρέται 4, 25, 125 καὶ 625 ἀκολουθοῦνται ὑπὸ ἑνός, δύο, τριῶν κ.τ.λ. μηδενικῶν, τότε διαιροῦμεν διαιρετέον καὶ διαιρέτην διὰ 10, 100, 1000 κ.τ.λ. Ὥστε νὰ ἐξαλειφθῶσι τὰ μηδενικὰ ἐκ τοῦ διαιρέτου καὶ εἶτα ἐφαρμόζομεν τὰς ἀνωτέρω συντομίας. Ἂν δὲ οἱ ἀριθμοὶ 5, 25, 125 καὶ 625 εἶναι ὑπὸ δεκαδικὴν μορφήν, τότε πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρετέον καὶ διαιρέτην ἐπὶ 10, 100, 1000 κ.τ.λ. ὥστε νὰ καταστῇ ὁ διαιρέτης ἀκέραιος καὶ εἶτα ἐφαρμόζομεν τὰς ἀνωτέρω συντομίας.

Παραδείγματα.

$$54487568 : 12500 = 544875{,}68 : 125 = \frac{544875{,}68 \times 8}{1000} = 4359{,}00544$$

$$42{,}45 : 0{,}05 = 4245 : 5 = \frac{4245 \times 2}{10} = 849.$$

Περὶ ἁπλῶν καὶ μικτῶν περιοδικῶν δεκαδικῶν.

359. Πᾶν κλάσμα, ὅπερ δὲν τρέπεται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικὸν ἀριθμόν, τρέπεται, ὡς γνωστόν, εἰς δεκαδικὸν ἔχοντα ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία, τὰ ὁποῖα ἀπό τινος τάξεως καὶ ἐφ' ἑξῆς ἐπαναλαμβάνονται τὰ αὐτὰ καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν (§ 348). Τὰ τοιαῦτα δεκαδικὰ λέγονται περιοδικά, *ἁπλᾶ μέν*, ἂν τὰ ψηφία ἐπαναλαμβάνονται ἀμέσως μετὰ τὴν ὑποδιαστολήν, *σύνθετα* δὲ ἢ *μικτά*, ἂν τὰ ψηφία ἐπαναλαμβάνωνται μετὰ ἓν ἢ περισσότερα ψηφία ἀπὸ τῆς ὑποδιαστολῆς.

Π. χ. Τὸ δεκαδικὸν 2,353535.... λέγεται ἁπλοῦν περιοδικόν, οὗ ἡ περίοδος εἶναι 35, τὸ δὲ 0,25626262.... λέγεται *μικτὸν* ἢ *σύνθετον* περιοδικόν, οὗ ἡ περίοδος εἶναι ὁ 62, τὸ δὲ μὴ περιοδικὸν αὐτοῦ μέρος εἶναι ὁ 25.

360. *Θεώρημα. Πᾶν ἁπλοῦν περιοδικὸν* (ἄνευ ἀκεραίου μέρους), *προκύπτει ἐκ κλάσματος, τοῦ ὁποίου ἀριθμητὴς μὲν εἶναι μία περίοδος, παρονομαστὴς δὲ τόσα ἐννέα, ὅσα εἶναι τὰ ψηφία τῆς περιόδου ἢ καὶ ἐκ παντὸς ἄλλου κλάσματος ἰσοδυνάμου τούτῳ.*

Λέγω π. χ. ὅτι τὸ ἁπλοῦν περιοδικὸν 0,42424242.... προκύπτει ἐκ τοῦ κλάσματος $\frac{42}{99}$.

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου λαμβάνομεν ὡρισμένας τὸ πλῆθος περιόδους ἐκ τοῦ δεκαδικοῦ 0,424242.... καὶ ἔστω τέσσαρας, ὅτε ἔχομεν τὸν ὡρισμένον δεκαδικὸν ἀριθμὸν

$$0{,}42424242$$

Τοῦτον δὲ πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ 100 εὑρίσκομεν τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν

$$42{,}424242$$

ἐκ τούτου δὲ ἀφαιροῦντες τὸν προηγούμενον ἀριθμὸν ἔχομεν τὴν διαφορὰν

$$42,424242-0,42424242=42-0,00000042=$$
$$=42-\frac{42}{100000000}=42-\frac{42}{10^8}$$

Ἐπειδὴ ὅμως ὁ δεκαδικὸς 42,424242 εἶναι 100 φορὰς μεγαλήτερος τοῦ 0,42424242, ἄρα ἡ διαφορὰ

$$42,424242-0,42424242$$

ἢ ὅπερ ταὐτὸ ἡ διαφορὰ $42-\frac{42}{10^8}$

εἶναι 99 φορὰς μεγαλητέρα τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ 0,42424242. Ἐπομένως, ἵνα ἡ εἰρημένη διαφορὰ γείνῃ ἴση πρὸς τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν 0,42424242, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν αὐτὴν διὰ 99, ὅτε θὰ ἔχωμεν $0,42424242=\frac{42}{99}-\frac{42}{10^8\times 99}$

Ἐντεῦθεν δὲ παρατηροῦμεν συγχρόνως, ὅτι ὁ ἐκθέτης 8 δηλοῖ τὸ πλῆθος τῶν ψηφίων τῶν ληφθεισῶν περιόδων. Ἐπομένως, ἐὰν ἀντὶ τεσσάρων περιόδων ἠθέλομεν λάβῃ 5, 6, 7, 8 καὶ γενικῶς ν περιόδους θὰ εἴχομεν 0,424242.... (μὲ ν περιόδους)$=\frac{42}{99}-\frac{42}{10^{2\cdot\nu}\times 99}$

Ἔνθα ὁ ἐκθέτης 2.ν δηλοῖ τὸν ἀριθμὸν τῶν ψηφίων τῶν ληφθεισῶν περιόδων ἐκ τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ 0,424242.....

Ὥστε ὁ δεκαδικὸς 0,424242.... (μὲ ν περιόδους) ἢ ὅπερ ταὐτό, ὁ ἴσος τούτῳ $\frac{42}{99}-\frac{42}{10^{2\nu}\times 99}$ θὰ διαφέρῃ τοῦ $\frac{42}{99}$ κατὰ $\frac{42}{99}-\left(\frac{42}{99}-\frac{42}{10^{2\nu}\times 99}\right)$ ἤτοι (§ 85) κατὰ $\frac{42}{10^{2\cdot\nu}\times 99}$, ἥτις διαφορὰ τείνει εἰς τὸ μηδέν, καθ' ὅσον τὸ ν (ἤτοι ὁ ἀριθμὸς τῶν περιόδων) τείνει εἰς τὸ ἄπειρον, διότι ὅλος ὁ παρονομαστὴς τείνει εἰς τὸ ἄπειρον (§ 325). Καὶ ἐπειδὴ ἡ διαφορὰ τοῦ $\frac{42}{99}$ ἀπὸ τοῦ 0,424242.... γίνεται μικροτέρα πάσης ποσότητος, ὅσον μικρὰ καὶ ἂν ὑποτεθῇ, οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι θὰ εἶναι ἴσοι (§ 336), ἤτοι $0,424242....=\frac{42}{99}$ ἢ καὶ τῷ $\frac{14}{33}$ ἢ τῷ $\frac{28}{66}$, ὡς ἰσοδυνάμων τῷ $\frac{42}{99}$.

Παρατηρητέον προσέτι, ὅτι εἰς τὸν παρονομαστὴν τοῦ *ἀναγώγου κλάσματος* ἐξ οὗ προέρχεται τὸ *ἁπλοῦν περιοδικὸν* δὲν δύναται νὰ περιέχηται ὁ παράγων 2 ἢ 5, διότι οὗτος δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ 2 ἢ 5.

361. *Πόρισμα. Πᾶν ἁπλοῦν περιοδικὸν ἔχον ἀκέραιον μέρος ἰσοῦται μὲ κλάσμα τοῦ ὁποίου ἀριθμητὴς μὲν εἶναι ὁ μέχρι καὶ τῆς*

πρώτης περιόδου ἀριθμός, ἐλαττωμένος κατὰ τὸ ἀκέραιον αὐτοῦ μέρος, παρονομαστὴς δὲ τόσα ἐννέα, ὅσα εἶναι τὰ ψηφία τῆς περιόδου.

Διότι $5,424242\ldots = 5 + 0,424242\ldots = 5 + \frac{42}{99} = \frac{5 \times 99 + 42}{99} =$

$$= \frac{5 \times 100 + 42 - 5}{99} = \frac{542 - 5}{99} \text{ ἤτοι } \frac{537}{99}.$$

362. *Παρατήρησις. Τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος οὐδὲν ἁπλοῦν περιοδικὸν ποιεῖ ἐξαίρεσιν*, οὐδὲ τὸ 0,999 ... Διότι, ὡς τὸ περιοδικὸν 0,4242.... προκύπτει ἐκ τῆς διαιρέσεως τοῦ 42 διὰ 99, ἀφ' οὗ τὸ πηλίκον ληφθῇ, οὐχὶ ὑπὸ μορφὴν κλασματικήν, ἥτις ἔσται ὁ ἀριθμὸς $\frac{42}{99}$, ἀλλὰ *ὑπὸ μορφὴν δεκαδικήν*, οὕτω καὶ τὸ περιοδικὸν 0,999.... προκύπτει ἐκ τῆς διαιρέσεως τοῦ 9 διὰ 9, ἀφοῦ τὸ πηλίκον ληφθῇ, οὐχὶ ὑπὸ μορφὴν κλασματικήν, ἥτις ἔσται ὁ ἀριθμὸς $\frac{9}{9}$, οὔτε ὑπὸ μορφὴν ἀκεραίου, ἥτις ἔσται 9 : 9=1, ἀλλὰ ὑπὸ ***μορφὴν δεκαδικήν***. Εὑρίσκομεν δὲ ταύτην τὴν μορφήν, διαιροῦντες τὸν 9 διὰ 9 κατὰ τὴν μέθοδον τῶν συντομιῶν (§ 176), ἤτοι ὡς ἑξῆς

$$9 \;\big|\; \underline{9} \qquad \text{ἢ} \qquad \begin{array}{l|l} 9 & \underline{10} \\ 0,9 & 0,9999 \\ 0,09 & \\ 0,009 & \\ 0,0009 & \end{array}$$

καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, δυνάμεθα νὰ ἐξακολουθήσωμεν τὴν διαίρεσιν ἐπ' ἄπειρον καὶ οὕτω τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 9 διὰ 9 ὑπὸ μορφὴν δεκαδικὴν εἶναι 0,9999....

363. *Θεώρημα. Πᾶν μικτὸν περιοδικὸν μετὰ ἢ ἄνευ ἀκεραίου μέρους προκύπτει ἐκ κλάσματος τοῦ ὁποίου ἀριθμητὴς μὲν εἶναι ὁ μέχρι καὶ τῆς πρώτης περιόδου ἀριθμός, ἠλαττωμένος κατὰ τὸν μέχρι τῆς πρώτου περιόδου ἀριθμόν, παρονομαστὴς δὲ τόσα ἐννέα, ὅσα εἶναι τὰ ψηφία τῆς περιόδου, ἀκολουθούμενα ἀπὸ τόσα μηδενικά, ὅσα εἶναι τὰ μὴ περιοδικὰ ψηφία ἢ καὶ ἐκ παντὸς ἄλλου κλάσματος ἰσοδυνάμου τούτῳ.*

Λέγω π. χ. ὅτι τὸ μικτὸν περιοδικὸν 2,46181818.... προκύπτει ἐκ τοῦ κλάσματος

$$\frac{24618 - 246}{9900} \text{ ἤτοι } \frac{24372}{9900}.$$

Διότι, ἂν εἰς τὸ μικτὸν περιοδικὸν 2,461818.... μεταθέσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν κατὰ δύο θέσεις πρὸς τὰ δεξιά, ὥστε νὰ γείνῃ ἁπλοῦν περιοδικόν, προκύπτει τὸ ἁπλοῦν περιοδικὸν

246,1818....

Τοῦτο δὲ κατὰ τὰ ἀνωτέρω (§ 361) προκύπτει ἐκ τοῦ κλάσματος

$$\frac{24618-246}{99} \text{ ἤτοι } \frac{24372}{99}.$$

Ἵνα δὲ προκύψῃ ἐκ τούτου τὸ δεκαδικὸν 2,4618....ἤτοι τὸ δεκαδικὸν τὸ ἔχον τὰ αὐτὰ δεκαδικὰ ψηφία πρὸς τὸ 246,1818....καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν, ἀλλὰ ἔχον τὴν ὑποδιαστολὴν πρὸ δύο θέσεων τούτου, ἀρκεῖ προφανῶς ἀντὶ νὰ διαιρέσωμεν τὸν 24372 διὰ 99, νὰ διαιρέσωμεν τὸν 243,72 διὰ 99 δηλ. ἀριθμὸν ἔχοντα τὴν ὑποδιαστολὴν πρὸ δύο θέσεων καὶ ὅστις εἶναι ὁ 243,72. Ἀλλ' ὡς γνωστόν, τὸ πηλίκον τοῦ 243,72 διὰ 99 ἰσοῦται τῷ πηλίκῳ τοῦ 24372 διὰ 9900 (ἰδὲ § 164 Σημ.). Ἄρα ἀρκεῖ τὸ κλάσμα $\frac{24372}{9900}$ νὰ λάβωμεν ὑπὸ μορφὴν δεκαδικήν, ἵνα προκύψῃ τὸ δοθὲν μικτὸν περιοδικόν.

Παρατηρητέον προσέτι, ὅτι ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος $\frac{24372}{9900}$ ἐξ οὗ προκύπτει τὸ μικτὸν περιοδικόν, ἀναλυόμενος εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας θὰ περιέχῃ ἐκτὸς ἄλλων παραγόντων καὶ τοὺς παράγοντας 2^2 καὶ 5^2. Ἐκ τῶν παραγόντων δὲ τούτων δύναται ὁ εἷς, μετὰ τὴν ἁπλοποίησιν τοῦ κλάσματος $\frac{24372}{9900}$ νὰ ἐκλείψῃ τέλεον, ἀλλὰ τοῦ ἑτέρου ἐκ τῶν παραγόντων τούτων οὐδόλως θὰ ἐλαττωθῇ ὁ ἐκθέτης, διότι τὸ εἰρημένον κλάσμα ἁπλοποιούμενον διὰ τοῦ ἑνὸς τῶν παραγόντων 2 ἢ 5 δὲν δύναται ν' ἁπλοποιῆται καὶ διὰ τοῦ ἑτέρου, διότι δὲν εἶναι δυνατὸν ν' ἁπλοποιῆται διὰ τοῦ 10. Διότι, ἵνα τοῦτο συνέβαινεν ἔδει ὁ ἀριθμητὴς τοῦ ἀνωτέρω κλάσματος νὰ ἔληγεν εἰς μηδέν, ὅπερ ἀδύνατον νὰ συμβῇ, διότι τὸ τελευταῖον ψηφίον τοῦ μὴ περιοδικοῦ μέρους 46, δὲν ἦτο δυνατὸν νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τελευταῖον ψηφίον τῆς περιόδου 18, ὅτε καὶ μόνον ἡ διαφορὰ 24618—246 θὰ ἔληγεν εἰς *μηδέν*, διότι ἵνα τοῦτο συμβαίνῃ δέον ἢ τὸ 6 νὰ εἶναι 8, ὅτε τὸ δοθὲν μικτὸν περιοδικὸν θὰ ἐγίνετο

2,481818....

ἢ τὸ 8 νὰ ἦτο 6, ὅτε τὸ μικτὸν περιοδικὸν θὰ ἐγίνετο

2,4616161....

Ἀλλ' εἰς ἑκατέραν τῶν περιπτώσεων τούτων παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ δοθὲν μικτὸν περιοδικὸν θὰ παύσῃ νὰ ἔχῃ δύο ψηφία εἰς τὸ μὴ περιοδικὸν αὐτοῦ μέρος, ὅπερ ἀδύνατον, διότι τότε ἰσοδύναμα κλάσματα θὰ ἔδιδον διάφορα μικτὰ περιοδικὰ δηλ. τὸ μὲν $\frac{24372}{9900}$ θὰ ἔδιδε μικτὸν περιοδικόν, οὗ τὸ μὴ περιοδικὸν αὐτοῦ μέρος θὰ ἔχῃ *δύο ψηφία*, τὸ δὲ ἐκ τῆς ἁπλοποιήσεως τούτου προκῦπτον κλάσμα θὰ ἔδιδε μικτὸν περιοδικόν, οὗ τὸ μὴ περιοδικὸν αὐτοῦ μέρος θὰ ἔχῃ *ἓν ψηφίον*. Ἑπομένως τὸ κλάσμα, ἐξ οὗ προκύπτει τὸ μικτὸν περιοδικόν, ἂν ἁπλοποιῆται ὑπὸ τοῦ ἑνὸς τῶν παραγόντων 2 ἢ 5 δὲν εἶναι δυνατὸν ν' ἁπλοποιῆται καὶ ὑπὸ τοῦ ἑτέρου καὶ ἑπομένως ὁ εἷς τούτων θὰ διατηρῇ τὸν ἀρχικὸν ἐκθέτην, ὅστις, ὡς δηλῶν τὸν ἀριθμὸν τῶν μηδενικῶν τοῦ παρονομαστοῦ, δεικνύει συγχρόνως τὸν ἀριθμὸν τῶν ψηφίων τοῦ μὴ περιοδικοῦ μέρους τοῦ δοθέντος μικτοῦ περιοδικοῦ.

364. *Θεώρημα. Πᾶν ἀνάγωγον κλάσμα, τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστὴς ἀναλυόμενος εἰς τοὺς πρώτους παράγοντας περιέχει πάντα ἄλλον παράγοντα πλὴν τοῦ 2 καὶ 5 τρέπεται εἰς ἁπλοῦν περιοδικόν.*

Διότι δὲν δύναται νὰ τραπῇ εἰς *ἀκριβῆ δεκαδικὸν ἀριθμόν*, διότ οὗτος προέρχεται ἐκ κλάσματος, τὸ ὁποῖον ἀνάγωγον ὄν, περιέχει εἰς τὸν παρονομαστήν του μόνον τὸν παράγοντα 2 ἢ 5 ἢ 2 καὶ 5 ὁμοῦ εἰς οἱανδήποτε δύναμιν. Δὲν δύναται νὰ τραπῇ εἰς *μικτὸν περιοδικὸν δεκαδικόν*, διότι τοῦτο προέρχεται ἐκ κλάσματος, τὸ ὁποῖον, ἀνάγωγον ὄν, περιέχει εἰς τὸν παρονομαστήν του, ἐκτὸς τοῦ 2 ἢ 5 ἢ 2 καὶ 5 ὁμοῦ εἰς οἱανδήποτε δύναμιν καὶ ἄλλους παράγοντας διαφόρους τούτων. Ἄρα τοῦτο θὰ τραπῇ εἰς *ἁπλοῦν περιοδικόν*.

265. *Θεώρημα. Πᾶν ἀνάγωγον κλάσμα, τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστὴς ἀναλυόμενος εἰς τοὺς πρώτους παράγοντας περιέχει τὸν παράγοντα 2 ἢ 5 ἢ 2 καὶ 5 ὁμοῦ μετ' ἄλλων παραγόντων τρέπεται εἰς μικτὸν περιοδικόν.*

Διότι δὲν δύναται νὰ τραπῇ εἰς *ἀκριβῆ δεκαδικὸν ἀριθμόν*, διότι οὗτος προέρχεται ἐκ κλάσματος, τὸ ὁποῖον, ἀνάγωγον ὄν, περιέχει εἰς τὸν παρονομαστήν του μόνον τὸν παράγοντα 2 ἢ 5 ἢ 2 καὶ 5 ὁμοῦ εἰς οἱανδήποτε δύναμιν. Δὲν δύναται νὰ τραπῇ εἰς *ἁπλοῦν περιοδικόν*, διότι τοῦτο προέρχεται ἐκ κλάσματος, τὸ ὁποῖον, ἀνάγωγον ὄν, περιέχει εἰς τὸν παρονομαστήν του πάντα ἄλλον, παράγοντα πλὴν τοῦ 2 ἢ 5 εἰς οἱανδήποτε δύναμιν. Ἄρα θὰ τραπῇ τοῦτο εἰς *μικτὸν περιοδικόν*.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Νὰ εὑρεθῇ εἰς τί δεκαδικὸν τρέπεται τὸ κλάσμα $\frac{5}{8}$.

(εἰς ἀκριβῆ δεκαδικόν).

2) Νὰ εὑρεθῇ εἰς τί δεκαδικὸν τρέπεται τὸ κλάσμα $\frac{14}{52}$.

(εἰς μικτὸν περιοδικὸν ἔχον ἓν μὴ περιοδικὸν ψηφίον).

3) Νὰ εὑρεθῇ εἰς τί δεκαδικὸν τρέπεται τὸ κλάσμα $\frac{12}{14}$.

(εἰς ἁπλοῦν περιοδικόν).

4) Ἐπειδὴ εἰς τὸ περιοδικὸν 0,36363636 δύναται νὰ ληφθῇ ὡς περίοδος ὁ 36 ἢ ὁ 3636 κ.τ.λ, ἄρα δύναται νὰ προκύψῃ τοῦτο ἐκ τοῦ $\frac{36}{99}$ ἢ $\frac{3636}{9999}$ κ.τ.λ. Νὰ δειχθῇ ἡ ἰσότης τούτων.

ΒΙΒΛΙΟΝ Δ΄.

Περὶ συμμιγῶν ἀριθμῶν.

Ὁρισμοί.

365. *Ποσὸν λέγεται πᾶν τὸ ὁποῖον ἐπιδέχεται αὔξησιν καὶ ἐλάττωσιν.*

366. *Μέτρησις ποσοῦ λέγεται ἡ σύγκρισις αὐτοῦ πρὸς ἄλλο ὁμοειδὲς ποσόν, τὸ ὁποῖον λαμβάνεται ὡς μονάς.*

367. Ἡ μονὰς μετρήσεως δι᾽ ἕκαστον ποσὸν ὄχι μόνον δὲν εἶναι ἡ αὐτὴ εἰς ὅλα τὰ ἔθνη, ἀλλ᾽ οὐδὲ ἡ ὑποδιαίρεσις τῆς ἀρχικῆς μονάδος γίνεται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον. Ἡ ἁπλουστέρα ὑποδιαίρεσις τῆς ἀρχικῆς μονάδος εἰς ἄλλας μονάδας εἶναι ἡ *δεκαδική*, διότι τότε τὰ ἐξαγόμενα τῆς μετρήσεως δύνανται νὰ γραφῶσιν ὑπὸ μορφὴν δεκαδικήν, ὅτε αἱ πράξεις ἐπ᾽ αὐτῶν γίνονται εὐκολώτερον.

368. *Δεκαδικὸν μετρικὸν σύστημα λέγεται τὸ σύστημα τῆς μετρήσεως τοῦ ὁποίου ἑκάστη ὑποδιαίρεσις τῆς ἀρχικῆς μονάδος γίνεται κατὰ δεκαδικὸν τρόπον, ἤτοι εἶναι τὸ δέκατον, τὸ ἑκατοστόν, τὸ χιλιοστὸν κ.τ.λ. τῆς ἀρχικῆς μονάδος.*

369. *Συμμιγὴς ἀριθμὸς λέγεται, ὁ ἀποτελούμενος ἐκ δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν τῶν ὁποίων ἕκαστος ἔχει ἴδιον ὄνομα καὶ γίνεται ἀπὸ ἰδίαν μονάδα, ἡ ὁποία εἶναι πολλαπλάσιον ἢ ὑποπολλαπλάσιον τῆς ἀρχικῆς μονάδος.*

Π. χ. 2 ὀκ. 250 δρμ. λέγεται συμμιγής.

370. Τοὺς συμμιγεῖς ἀριθμοὺς διακρίνομεν εἰς δύο κατηγορίας.

Α'.) *Εἰς συμμιγεῖς μὲ δεκαδικὰς ὑποδιαιρέσεις καὶ*

Β'.) *Εἰς συμμιγεῖς ἄνευ δεκαδικῶν ὑποδιαιρέσεων.*

Μονάδες συμμιγῶν μετὰ καὶ ἄνευ δεκαδικῶν ὑποδιαιρέσεων.

371. Εἰς τοὺς συμμιγεῖς μετὰ καὶ ἄνευ δεκαδικῶν ὑποδιαιρέσεων διακρίνομεν

α'.) μονάδας μήκους· β'.) μονάδας ἐπιφανείας· γ'.) μονάδας χωρητικότητος ἢ ὄγκου· δ'.) μονάδας βάρους· ε'.) μονάδας χρόνου καὶ ς'.) μονάδας νομισμάτων.

Περὶ μέτρων, σταθμῶν καὶ νομισμάτων διαφόρων ἐπικρατειῶν.

Α'. ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΗΚΟΥΣ

α'.—Μονάδες μὲ ὑποδιαιρέσεις δεκαδικάς.

372. Ἡ μόνη φυσικὴ μονὰς πρὸς μέτρησιν τοῦ μήκους εἶναι ἡ καθορισθεῖσα ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ 1792 Γαλλικῆς ἐπιστημονικῆς Ἐπιτροπείας καὶ ἥτις ὥρισεν, ὡς μονάδα μήκους τὸ $\frac{1}{40000000}$ τοῦ γηΐνου μεσημβρινοῦ ἢ ὅπερ ταὐτὸ τὸ $\frac{1}{10000000}$ τοῦ τετάρτου τοῦ γηΐνου μεσημβρινοῦ καὶ τὴν ὁποίαν μονάδα ὠνόμασε *μέτρον* (mètre), ἡμεῖς δὲ ὀνομάζομεν αὐτὴν *Βασιλικὸν πῆχυν* ἢ καὶ *μέτρον.*

Αἱ ὑποδιαιρέσεις τῆς ἀρχικῆς ταύτης μονάδος μετρήσεως εἶναι δεκαδικαὶ δι' ὃ τὸ σύστημα τοῦτο λέγεται *δεκαδικὸν μετρικὸν σύστημα.* Χρησιμεύει δὲ ἡ μονὰς αὐτη πρὸς μέτρησιν τοῦ *μήκους ὑφασμάτων καὶ μικρῶν ἀποστάσεων* ἔχει δὲ τὰς ἑξῆς ὑποδιαιρέσεις·

1) Τὸ *ὑποδεκάμετρον,* ὅπερ λέγεται καὶ *δεκατόμετρον* ἢ καὶ *πα-*

λάμη (decimètre). Εἶναι δὲ τοῦτο τὸ $\frac{1}{10}$ τοῦ μέτρου, δι' ὃ τὸ μέτρον ἔχει *δέκα* τοιαύτας μονάδας.

2) Τὸ *ὑφεκατόμετρον*, ὅπερ λέγεται καὶ *ἑκατοστόμετρον* ἢ καὶ *δάκτυλος* (centimètre). Εἶναι δὲ τοῦτο τὸ $\frac{1}{100}$ τοῦ μέτρου, δι' ὃ τὸ μέτρον ἔχει 100 τοιαύτας μονάδας.

3) Τὸ *ὑποχιλιόμετρον*, ὅπερ λέγεται καὶ *χιλιοστόμετρον* ἢ καὶ *γραμμὴ* (millimètre). Εἶναι δὲ τοῦτο τὸ $\frac{1}{1000}$ τοῦ μέτρου, δι' ὃ τὸ μέτρον ἔχει 1000 τοιαύτας μονάδας.

373. Διὰ *μεγαλειτέρας* ὅμως ἀποστάσεις, μεταχειρίζονται ὡς μονάδας μετρήσεως τὰ *δεκαδικὰ πολλαπλάσια* τῆς εἰρημένης ἀρχικῆς μονάδος (δηλ. τοῦ μέτρου). Εἶναι δὲ αὗται αἱ ἑξῆς·

1) Τὸ *δεκάμετρον* (decamètre)=10 μέτρα

2) Τὸ *ἑκατόμετρον* (hectomètre)=100 μέτρα.

3) Τὸ *χιλιόμετρον* ἢ *στάδιον* (kilomètre)=1000 μέτρα.

4) Τὸ *μυριάμετρον* ἢ *σχοινίδα* (myriamètre)=10000 μέτρα.

Σημ. Τὸ *χιλιόμετρον* ἢ *στάδιον* εἶναι ἐν χρήσει καὶ παρ' ἡμῖν διὰ τὴν καταμέτρησιν τοῦ μήκους *ὁδῶν*, *διωρύγων*, *σιδηροδρομικῶν γραμμῶν* κ.τ.λ. Διὰ μεγαλητέρας δὲ ἀποστάσεις ὡς εἶναι αἱ *γεωγραφικαί*, μεταχειριζόμεθα τὸ μυριάμετρον ἢ σχοινίδα.

374. Ἡ ἀρχικὴ μονὰς μετρήσεως δηλ. τὸ μέτρον, ὁρμηθεῖσα ἐκ τῆς Γαλλίας ἐγένετο ἤδη παραδεκτὴ ἐν *Αὐστροουγγαρίᾳ*, *Βελγίῳ*, *Βουλγαρίᾳ*, *Γερμανίᾳ*, *Ἑλβετίᾳ*, *Ἱσπανίᾳ*, *Ἰταλίᾳ*, *Ὀλλανδίᾳ*, *Πορτογαλλίᾳ*, *Ρουμανίᾳ*, *Σερβίᾳ*, *Σουηδίᾳ* καὶ *Νορβηγίᾳ* (χωρὶς ὅμως νὰ ἐκλείψωσι καὶ αἱ ἀρχαιότεραι μονάδες μήκους αὐτῶν) καὶ τείνει νὰ ἐπικρατήσῃ ὡς μονὰς μήκους καθ' ἅπαντα τὸν πεπολιτισμένον κόσμον, ὡς ἔχουσα δύο *κύρια* πλεονεκτήματα. *Πρῶτον*, ὡς μὴ οὖσα αὐθαίρετον μῆκος, ἀλλὰ μέρος ὡρισμένον τοῦ μεσημβρινοῦ τοῦ πλανήτου ἐφ' οὗ κατοικοῦμεν καὶ ἑπομένως ἡ παραδοχὴ αὐτῆς δὲν προσβάλλει τὸν ἐγωϊσμὸν οὐδενὸς Ἔθνους καὶ *δεύτερον*, ὡς ἔχουσα ὑποδιαιρέσεις δεκαδικὰς καὶ ἑπομένως ἡ διὰ τοιαύτης μονάδος ἢ τῶν δεκαδικῶν αὐτῆς *πολλαπλασίων* ἢ *ὑποπολλαπλασίων* γινομένη μέτρησις παρέχει ἀριθμούς, οἵτινες δύνανται νὰ γράφωνται ἀμέσως ὑπὸ μορφὴν δεκαδικῶν ἀριθμῶν, ἐφ' ὧν αἱ διάφοραι πράξεις ἐκτε-

λοῦνται εὐκολώτατα καὶ συντομώτατα, ὡς τοῦτο γίνεται δῆλον καὶ ἐκ τῶν ἀμέσως ἑπομένων δύο προβλημάτων κατὰ τὰ ὁποῖα τρέπομεν συμμιγῆ εἰς δεκαδικὸν καὶ εἶτα τοῦτον εἰς τὰς διαφόρους ὑποδιαιρέσεις τοῦ συμμιγοῦς.

Πρόβλημα 1ον. *Νὰ γραφῇ ὁ συμμιγὴς ἀριθμὸς 5 μυριαμ. 4 χιλιομ. 3 μετρ. 2 παλ. 6 δακ. 5 γραμ. ὑπὸ μορφὴν δεκαδικήν.*

Λύσις. Γράφοντες τὸν ἀριθμὸν τῶν *μέτρων* (ἢ *ὁποιασδήποτε ἄλλης ὑποδιαιρέσεως τῆς μονάδος ταύτης)* εἰς τὴν θέσιν τοῦ ἀκεραίου μέρους τοῦ δεκαδικοῦ, τοὺς δὲ λοιποὺς ἀριθμοὺς τοῦ συμμιγοῦς εἰς τὰς ἀντιστοίχους αὐτῶν θέσεις (δηλ. τὰ δέκατα, ἑκατοστὰ κ.τλ. τοῦ μέτρου, εἰς τὰ *δέκατα, ἑκατοστὰ* κ.τ λ. τοῦ δεκαδικοῦ) ἔχομεν τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν 54003, 265 μέτρα.

Πρόβλημα 2ον. *Ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 54003,265 μέτρα, νὰ τραπῇ εἰς ἀριθμὸν οἱασδήποτε δεκαδικῆς ὑποδιαιρέσεως ἢ δεκαδικοῦ πολλαπλασίου τῆς ἀρχικῆς μονάδος δηλ. τοῦ μέτρου.*

Λύσις. Κατὰ τὰ γνωστὰ περὶ ἀπαγγελίας δεκαδικῶν ἀριθμῶν εὑρίσκομεν ὅτι

$$54003,265 \text{ μέτρα} = 5\frac{4003265}{10000000} \text{ μυριαμ.} = 54\frac{3265}{1000000} \text{ χιλιομ.} =$$
$$= 540\frac{3265}{100000} \text{ ἑκατομ.} = 5400\frac{3265}{10000} \text{ δεκαμ.} =$$
$$= 54003\frac{265}{1000} \text{ μετρ. κ.λ.π.}$$

α'.—Μονάδες μήκους ἄνευ δεκαδικῶν ὑποδιαιρέσεων.

375. ΕΛΛΑΣ. — *Ἐν Ἑλλάδι* ἐκτὸς τοῦ μέτρου, ὡς μονὰς μετρήσεως πρὸς μέτρησιν *ὑφασμάτων* χρησιμοποιεῖται συνήθως ὁ *πῆχυς Ἀθηνῶν*, ὅστις ἰσοῦται πρὸς 0,64 τοῦ μέτρου.

376. ΤΟΥΡΚΙΑ. — *Ἐν Τουρκίᾳ*, ὡς μονὰς μήκους χρησιμοποιεῖται ὁ *μικρὸς πῆχυς Κωνσταντινουπόλεως* καλούμενος *ἐνδεζὲ* καὶ ὅστις ἰσοῦται πρὸς 0,648 τοῦ μέτρου καὶ ὁ *μέγας πῆχυς Κωνσταντινουπόλεως* καλούμενος *ἀρσὶν* καὶ ὅστις ἰσοῦται πρὸς 0,669 τοῦ μέτρου.

Σημ. Ὁ *πῆχυς Ἀθηνῶν*, ὁ *μικρὸς πῆχυς Κωνσταντινουπόλεως*, ὁ *μέγας πῆχυς Κωνσταντινουπόλεως* ὑποδιαιροῦνται εἰς 8 ἴσα μέρη, ἅτινα λέγονται *ῥούπια*.

377. ΓΑΛΛΙΑ. — *Ἐν Γαλλίᾳ* πρὸ τῆς παραδοχῆς τοῦ μέτρου, ὡς μονάδος μετρήσεως, ἡ μονὰς μετρήσεως ἦτο ἡ *ὀργυιὰ* (toise), τῆς ὁποίας ἡ χρῆσις καὶ μέχρι σήμερον δὲν ἐξέλιπεν ἐντελῶς. Ἰσοῦται δὲ ἡ ὀργυιὰ πρὸς 1,94904 τοῦ μέτρου καὶ ἔχει τὰς ἑξῆς ὑποδιαιρέσεις

1 *ὀργυιὰ*=6 *πόδας*

1 *ποὺς*=12 *δακτύλους*

1 *δάκτυλος*=12 *γραμμάς*.

378. ΑΓΓΛΙΑ. — *Ἐν Ἀγγλίᾳ καὶ ταῖς Ἡνωμέναις Πολιτείαις τῆς Β. Ἀμερικῆς*, ὡς μονάδα μετρήσεως πρὸς μέτρησιν ὑφασμάτων ἔχουσι τὴν *ὑάρδαν* (yard), ἥτις εἶναι τὰ 0,914 τοῦ μέτρου (ἢ ἀκριβέστερον 0,9143835 μετρ.). Ἔχει δὲ τὰς ἑξῆς ὑποδιαιρέσεις

1 *ὑάρδα* (yard)=3 *πόδας*

1 *ποὺς* (foot)=12 *δακτύλους* (inches).

379. Διὰ μεγαλειτέρας ὅμως ἀποστάσεις οἱ Ἄγγλοι μεταχειρίζονται τὰς ἑξῆς μονάδας

Τὴν *ὀργυιὰν* (fathom)=2 *ὑάρδας*

Τὸ *πὼλ* (pole)=5,5 *ὑάρδας*

Τὸ *φυρλὸγγ*=220 *ὑάρδας*

380. Δι' ἔτι δὲ μεγαλητέρας ἀποστάσεις, ὡς εἶναι τὰ *μήκη ὁδῶν, σιδηροδρομικῶν γραμμῶν* κ.τ.λ. οἱ *Ἄγγλοι* καὶ αἱ *Ἡνωμέναι Πολιτεῖαι τῆς Β. Ἀμερικῆς* μεταχειρίζονται ὡς μονάδας μετρήσεως τὰς ἑξῆς

Τὸ *Ἀγγλικὸν μίλλιον*=8 φυρλλὸγγ=1609 $^1/_3$ μέτρα.

Ἐκτὸς τοῦ Ἀγγλικοῦ μιλλίου, ἐν συνήθει χρήσει εἰς τὰς διαφόρους ἐπικρατείας εἶναι καὶ τὰ ἑξῆς μίλλια.

α'.) Τὸ *ναυτικὸν μίλλιον*, ὅπερ εἶναι ἐν χρήσει εἰς πάντα τὰ ἔθνη καὶ ὅπερ εἶναι τὸ μῆκος 1' τοῦ μεσημβρινοῦ τῆς γῆς, δι' ὃ ἔχει μῆκος 10000000 : 5400, ἤτοι 1852 μέτρα περίπου.

β'.) Τὸ *Γεωγραφικὸν* ἢ *Γερμανικὸν μίλλιον*, ὅπερ περιέχεται 5400 φορὰς εἰς τὸν ἰσημερινὸν τῆς γῆς, δι' ὃ ἔχει μῆκος

40075687 : 5400, ἤτοι 7422 μέτρ. περίπου

γ'.) Ἡ *λεῦγα*, ἥτις χρησιμοποιεῖται εἰς τὴν καταμέτρησιν τοῦ μήκους *ὁδῶν* κ.τ.λ. καὶ ἥτις εἶναι τὸ $\frac{1}{25}$ τοῦ μήκους τῆς *μιᾶς μοί-*

ρας τοῦ μεσημβρινοῦ τῆς γῆς, δι' ὃ ἔχει μῆκος

$$40000000 : 360 \times 25 = 4444 \text{ μέτρ. περίπου}$$

ἀλλ' ἥτις ἐν τῇ κοινῇ χρήσει λαμβάνεται μήκους 4000 μετρ. διὰ τὴν εὐκολίαν τῶν πράξεων.

δ'.) Ἡ *ναυτικὴ λεύγα*, ἥτις ἀπαντᾷ ἀκόμη ἐν χρήσει καὶ ἥτις εἶναι ἴση πρὸς τὸ $\frac{1}{20}$ τοῦ μήκους *τῆς μιᾶς μοίρας* τοῦ μεσημβρινοῦ τῆς γῆς, δι' ὃ ἔχει μῆκος

$$40000000 : 360 \times 20 = 5555 \text{ μετρ. περίπου.}$$

381. ΡΩΣΣΙΑ. — *Ἐν Ρωσσίᾳ*, ὡς μονάδα μήκους πρὸς μέτρησιν ὑφασμάτων ἔχουσι τὸ *ἀρσίν*, ὅπερ ἰσοῦται πρὸς 0,71119 μετρ.

382. Οἱ Ῥῶσσοι διὰ μεγάλας ἀποστάσεις, ὡς εἶναι τὰ *μήκη ὁδῶν, σιδηροδρομικῶν γραμμῶν* κ.τ.λ. ἔχουσιν ὡς μονάδα μετρήσεως τὸ *βέρστιον*, τὸ ὁποῖον ἔχει μῆκος 1500 ἀρσίν, ἤτοι

$$1500 \times 0,71119 \text{ δηλ. } 1066,79 \text{ μέτρων περίπου}$$

Β'. ΜΟΝΑΔΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ

383. Ὡς μονὰς ἐπιφανείας λαμβάνεται *τετράγωνον* τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν μονάδα τοῦ μήκους. Καθ' ὅσον λοιπόν, ὡς μονὰς τοῦ μήκους λαμβάνεται τὸ *μέτρον* ἢ αἱ *ὑποδιαιρέσεις τούτου* ἢ ὁ *πῆχυς* (οἱοσδήποτε) ἢ ἡ *ὑάρδα* ἢ τὸ *χιλιόμετρον κ.τ.λ.* ἡ μονὰς ἐπιφανείας εἶναι τὸ *τετραγωνικὸν μέτρον* ἢ *αἱ τετραγ. ὑποδιαιρέσεις τοῦ ἁπλοῦ μέτρου*, ἢ ὁ *τ.πῆχυς* ἢ ἡ *τ.ὑάρδα* ἢ τὸ *τ. χιλιόμετρον κλ.*

384. *Εἰς τὴν γεωμετρίαν ἀποδεικνύεται ὅτι, διὰ νὰ εὕρωμεν πόσας τετραγωνικὰς μονάδας περιέχει δοθὲν τετράγωνον, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐφ' ἑαυτὸν τὸν ἀριθμὸν τὸν δηλοῦντα τὸ μέγεθος τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου μετρηθείσης μὲ τὴν μονάδα τοῦ μήκους.*

α'.—Μονάδες ἐπιφανείας μὲ ὑποδιαιρέσεις δεκαδικάς.

385. Κατὰ ταῦτα εὑρίσκομεν εὐκόλως ἐκ τῶν ὑποδιαιρέσεων, ὡς καὶ τῶν δεκαδικῶν πολλαπλασίων τοῦ ἁπλοῦ μέτρου τὰς ἀντιστοίχους τετραγωνικὰς μονάδας τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου καὶ αἵτινες τῆς μὲν κατιούσης κλίμακος εἶναι αἱ ἑξῆς.

1) Τὸ *τετραγ. ὑποδεκάμετρον*, ὅπερ λέγεται καὶ *τ. δεκατόμετρον* ἢ *τ. παλάμη*. Εἶναι δὲ ἡ μονὰς αὕτη τὸ $\frac{1}{10} \times \frac{1}{10}$ ἤτοι $\frac{1}{100}$ τοῦ τ.

μέτρου. Ἑπομένως τὸ τ. μέτρον περιέχει 100 τοιαύτας μονάδας.

2) Τὸ *τετραγ. ὑφεκατόμετρον*, ὅπερ λέγεται καὶ *τ. ἑκατοστόμετρον* ἢ *τ. δάκτυλος*. Εἶναι δὲ ἡ μονὰς αὕτη τὸ $\frac{1}{100}\times\frac{1}{100}$ ἤτοι τὸ $\frac{1}{10000}$ τοῦ τ. μέτρου. Ἑπομένως τὸ τ. μέτρον περιέχει 10000 τοιαύτας μονάδας.

3) Τὸ *τετραγ. ὑποχιλιόμετρον*, ὅπερ λέγεται καὶ *τ. χιλιοστόμετρον* ἢ *τ. γραμμή*. Εἶναι δὲ ἡ μονὰς αὕτη τὸ $\frac{1}{1000}\times\frac{1}{1000}$ ἤτοι τὸ $\frac{1}{1000000}$ τοῦ τ. μέτρου Ἑπομένως τὸ τ. μέτρον περιέχει 1000000 τοιαύτας μονάδας.

386. *Διὰ μεγαλειτέρας ὅμως ἐπιφανείας*, ὡς τὰς τῶν *ἀγρῶν κ.τ.λ.* μεταχειρίζονται ὡς τετραγ. μονάδας τὰς ἀντιστοιχούσας εἰς τὰ δεκαδικὰ πολλαπλάσια τοῦ ἁπλοῦ μέτρου καὶ αἵτινες εἶναι αἱ ἑξῆς·

1) Τὸ *τετραγ. δεκάμετρον* (are). Ἔχει δὲ ἡ μονὰς αὕτη 10×10 ἤτοι 100 τετραγ. μέτρα.

2) Τὸ *τετρ. ἑκατόμετρον* (hectare). Ἔχει δὲ ἡ μονὰς αὕτη 100×100 ἤτοι 10000 τ. μέτρα. Ἑπομένως τὸ ἓν τ. ἑκατόμμετρον περιέχει 100 are.

3) Τὸ *τετραγ. χιλιόμετρον* (myriare). Ἔχει δὲ ἡ μονὰς αὕτη 1000×1000 ἤτοι 1000000 τετραγ μέτρα. Ἑπομένως τὸ ἓν τετραγ. χιλιόμετρον περιέχει 100 hectare ἢ 10000 are.

387. Τὸ *τετραγ. δεκάμετρον* (are), ὡς καὶ τὸ *τετρ. ἑκατόμμετρον* (hectare) εἶναι ἐν χρήσει διὰ μεγάλας ἐπιφανείας ἐν *Αὐστροουγγαρίᾳ, Βελγίῳ, Βουλγαρίᾳ, Γαλλίᾳ, Γερμανίᾳ, Ἐλβετίᾳ, Ἰσπανίᾳ, Ἰταλίᾳ, Ὀλλανδίᾳ, Πορτογαλλίᾳ, Ῥουμανίᾳ, Σερβίᾳ, Σουηδίᾳ* καὶ *Νορβηγίᾳ*.

388. Διὰ τὰς πολὺ μεγάλας ὅμως ἐπιφανείας, ὡς τὰς τῶν *ἐπικρατειῶν*, τῶν *ἠπείρων*, τῶν *θαλασσῶν*, λαμβάνεται ὡς μονὰς τὸ *τετραγωνικὸν χιλιόμετρον* (myriare) ἢ τὰ *τετραγωνικὰ μίλλια* τῶν διαφόρων εἰδῶν δηλ. τοῦ *Ἀγγλικοῦ μιλλίου*, τοῦ *ναυτικοῦ μιλλίου*, τοῦ *γεωγραφικοῦ* ἢ *Γερμανικοῦ μιλλίου κ.τ.λ.*

* *Πρόβλημα* 1ον. *Νὰ γραφῇ ὁ συμμιγὴς 5 τ. χιλιομ. 4 τ. ἑκατομ, 3 τ. μέτρ. 2 τ. παλ. 6 τ. δακτ. 5 τ. γρ. ὑπὸ μορφὴν δεκαδικήν.*

Λύσις. Γράφοντες τὸν ἀριθμὸν τῶν τ. μέτρων (ἢ οἱασδήποτε ἄλλης μονάδος) εἰς τὴν θέσιν τοῦ ἀκεραίου μέρους τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ, τοὺς δὲ λοιποὺς ἀριθμοὺς τοῦ συμμιγοῦς εἰς τὰς ἀντιστοίχους αὐτῶν θέσεις ἔχομεν τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν 5040003,020605 τ. μέτρα.

* *Πρόβλημα 2ον. Νὰ τραπῇ ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 5040003,020605 τ. μ. εἰς ἀριθμὸν οἱασδήποτε ὑποδιαιρέσεως ἢ δεκαδικοῦ πολλαπλασίου τῆς ἀρχικῆς μονάδος.*

Λύσις. Κατὰ τὰ γνωστὰ περὶ ἀπαγγελίας δεκαδικῶν ἀριθμῶν εὑρίσκομεν ὅτι

$$5040003,020605 \text{ τ.μ.} = 5\frac{5040003020605}{10000000000000} \text{ τ.χιλιομ.(myriare)} =$$

$$= 504\frac{3020605}{10000000000} \text{τ.ἑκτ.(hectare)} = 50400\frac{3020605}{100000000} \text{ τ. δεκ. (are)}$$

$$= 5040003\frac{20605}{1000000} \text{ τ. μέτρα.}$$

β΄. Μονάδες ἐπιφανείας ἄνευ δεκαδικῶν ὑποδιαιρέσεων.

389. ΕΛΛΑΣ ΚΑΙ ΤΟΥΡΚΙΑ.—*Ἐν Ἑλλάδι καὶ Τουρκίᾳ* ἐκτὸς τοῦ τ. μέτρου ὡς μονὰς μετρήσεως ἐπιφανείας, πρὸς *μέτρησιν οἰκοπέδων κυρίως χρησιμοποιεῖται* καὶ ὁ *τ. τεκτονικὸς πῆχυς*, ὅστις εἶναι τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἑκάστη πλευρὰ ἰσοῦται πρὸς 0,75, ἤτοι $\frac{3}{4}$ τοῦ μέτρου.

Διὰ δὲ τὰς μεγάλας ἐπιφανείας, ὡς τὰς τῶν *ἀγρῶν* κ.τ.λ. χρησιμοποιοῦσι ἐν *Ἑλλάδι* ὡς μονάδας τὰς ἑξῆς·

1) Τὸ *βασιλικὸν στρέμμα*, ὅπερ περιέχει 1000 τ. μέτρα.

2) Τὸ *παλαιὸν ἢ Πελοποννησιακὸν στρέμμα*, οὗ ἐγίνετο πρότερον χρῆσις. Εἶναι δὲ τοῦτο τετραγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ ἔχει μῆκος 55 πήχεων *ἐνδεζέ*. Ἑπομένως περιέχει $(0,648\times55)\times(0,648\times55)$ ἤτοι 1270,2 τετρ. μετρα.

390. ΑΓΓΛΙΑ. — *Ἐν Ἀγγλίᾳ καὶ τοῖς Ἡνωμέναις Πολιτείαις τῆς Βορείου Ἀμερικῆς*, διὰ τὰς μικρὰς μὲν ἐκτάσεις χρησιμοποιοῦσι την *τ. ὑάρδαν* ἢ τὸν *τ. πόδα* ἢ τον *τ. δάκτυλον*, διὰ μεγαλητέρας δὲ ἐκτασεις λαμβάνουσιν ὡς μοναδα τὸ *τ. φυρλόγγ*, ὅπερ καλεῖται *στρέμμα* καὶ ὅπερ περιέχει $(220\times0,914)\times(220\times0,914)$ ἤτοι 4046,78 τ. μέτρα.

Σύγκρισις μονάδων τινῶν τετραγωνικῶν μεταξύ των.

391. Αἱ σχέσεις μεταξὺ τ. τεκτον. πήχεως καὶ τετραγ. μέτρου καὶ τἀνάπαλιν, ὡς καὶ αἱ σχέσεις μεταξὺ παλαιοῦ ἢ Πελοποννησιακοῦ στρέμματος πρὸς τὸ Βασιλικόν στρέμμα καὶ τἀνάπαλιν εἶναι αἱ ἑξῆς·

1) Ὁ 1 *τ. τεκ. πῆχυς*$=\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{}{16}$ τ. μέτρου.

Ἑπομένως τὸ 1 *τ. μέτρον*$=\frac{16}{9}$ τοῦ τ. τεκτ. πήχεως.

2) Τὸ 1 *παλαιὸν στρέμμα*=1,27 τοῦ βασιλ. στρέμματος.

Ἑπομένως τὸ 1 *βασιλ. στρέμμα*=0,787 τοῦ παλ. στρέμματος.

Αἱ σχέσεις δὲ αὗται εὑρίσκονται ἐκ τῆς λύσεως τῶν ἑξῆς προβλημάτων.

Πρόβλημα 1ον. *Ὁ εἷς τ. τεκτ. πῆχυς, ποῖον μέρος εἶναι τοῦ τ. μέτρου;*

Λύσις. Ἐπειδὴ ὁ εἷς τ. τεκτ. πῆχυς εἶναι τετράγωνον οὗ ἑκάστη πλευρὰ εἶναι 0,75 ἤτοι $\frac{3}{4}$ τοῦ μέτρου, ἄρα οὗτος περιέχει $\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}$ ἤτοι $\frac{9}{16}$ τοῦ τετρ. μέτρου.

Πρόβλημα 2ον. *Ὁ 1 τ. τεκτ. πῆχυς περιέχει $\frac{9}{16}$ τ. μέτρου τὸ 1 τ. μετρ. πόσους τ. τεκτ. πήχεις περιέχει;*

(1 τ. μ.$:\frac{9}{16}=1\times\frac{16}{9}=\frac{16}{9}$ τ. τεκτ. πήχεις).

Πρόβλημα 3ον. *Τὸ 1 βασιλ. στρέμμα περιέχει 1000 τ. μ. τὸ 1 παλαιὸν στρέμμα ἤτοι τὰ 1270,2 τ. μ. πόσα βασιλικὰ περιέχει;*

(1270,2 : 1000=1,2702 ἤτοι 1,27 τοῦ βασ. στρεμ).

Πρόβλημα 4ον. *Τὸ 1 παλαιὸν στρέμμα περιέχει 1,27 βασιλ. στρεμ. Τὸ 1 βασιλικὸν στρέμμα πόσα παλαιὰ περιέχει;*

(1 β. στρεμ. : 1,27$=\frac{1}{1,27}=\frac{100}{127}=$0,787 παλ. στρεμ.).

Γ′. ΜΟΝΑΔΕΣ ΟΓΚΟΥ ΚΑΙ ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΟΣ

392. Ὡς μονὰς πρὸς μέτρησιν τοῦ *ὄγκου* ἢ τῆς *χωρητικότητος* εἰς *τὸ Γαλλικὸν μετρικὸν σύστημα* λαμβάνεται ὁ *κύβος*. Εἶναι δὲ οὗτος στερεόν, τὸ ὁποῖον περικλείεται ὑπ' ἓξ ἴσων τετραγώνων, τὰ ὁποῖα

εἶναι κάθετα μεταξύ των. Καθ' ὅσον λοιπόν, ὡς μονὰς τοῦ μήκους λαμβάνεται τὸ *μέτρον* ἢ αἱ *ὑποδιαιρέσεις τούτου* ἢ ὁ *πῆχυς* (οἱοσδήποτε) ἢ ἡ *ὑάρδα* ἢ τὸ *χιλιόμετρον* κ.τ.λ., ἡ μονὰς τοῦ ὄγκου ἢ τῆς χωρητικότητος εἶναι τὸ *κυβικὸν μέτρον* ἢ αἱ *κ. ὑποδιαιρέσεις τοῦ ἁπλοῦ μέτρου* ἢ ὁ *κ. πῆχυς* ἢ ἡ *κ. ὑάρδα* ἢ τὸ *κ. χιλιόμετρον κ.τ.λ.*

393. *Εἰς τὴν Γεωμετρίαν ἀποδεικνύεται ὅτι, διὰ νὰ εὕρωμεν πόσας κυβικὰς μονάδας περιέχει δοθεὶς κύβος, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τρὶς ἐφ' ἑαυτὸν τὸν ἀριθμόν, ὅστις δηλοῖ τὸ μέγεθος τοῦ μήκους ἢ τοῦ πλάτους ἢ τοῦ ὕψους τοῦ κύβου.*

α'.—Μονάδες ὄγκου ἢ χωρητικότητος μὲ ὑποδιαιρέσεις δεκαδικάς.

394. Κατὰ ταῦτα εὑρίσκομεν εὐκόλως ἐκ τῶν ὑποδιαιρέσεων τοῦ ἁπλοῦ μέτρου τὰς ἀντιστοίχους ὑποδιαιρέσεις τοῦ κ. μέτρου καὶ αἵτινες τῆς μὲν κατιούσης κλίμακος εἶναι αἱ ἑξῆς.

1) Τὸ *κ. ὑποδεκάμετρον*, ὅπερ λέγεται καὶ *κ. δεκατόμμετρον* ἢ *κ. παλάμη*. Εἶναι δὲ ἡ μονὰς αὕτη τὸ $\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}$ ἤτοι $\frac{1}{1000}$ τοῦ κ. μέτρου. Ἑπομένως τὸ *κ. μέτρον*, ὅπερ λέγεται καὶ *τον. χωρητικότητος* ἔχει 1000 τοιαύτας μονάδας.

Σημ. Ἡ μονὰς αὕτη λαμβάνει τὸ ὄνομα *λίτρα*, ὅταν χρησιμοποιεῖται εἰς τὴν καταμέτρησιν ὑγρῶν.

2) Τὸ *κ. ὑφεκατόμμετρον*, ὅπερ λέγεται καὶ *κ. ἑκατοστόμμετρον* ἢ *κ. δάκτυλος*. Εἶναι δὲ ἡ μονὰς αὕτη τὸ $\frac{1}{100}\times\frac{1}{100}\times\frac{1}{100}$ ἤτοι $\frac{1}{1000000}$ τοῦ κ. μέτρου. Ἑπομένως τὸ κ. μέτρον ἢ ὁ τον. χωρητικότητος ἔχει 1000000 τοιαύτας μονάδας.

Ἐκτὸς τῶν μονάδων τούτων ἐν τῇ κατιούσῃ κλίμακι ἔχομεν ὡς μονάδα χωρητικότητος καὶ τὸ $\frac{1}{10}$ τοῦ κ. μέτρου ἢ τον. χωρητικότητος, ὅπερ καλεῖται παρ' ἡμῖν *δεκαδικὸν κοιλόν*, χρησιμοποιεῖται δὲ τοῦτο εἰς τὴν καταμέτρησιν *δημητριακῶν καρπῶν*, οἷον *σίτου, κριθῆς, ἀραβοσίτου, κυάμων κ.τ.λ.* Εἰς διάφορα μέρη ὅμως τῆς *Ἑλλάδος καὶ Τουρκίας*, τὸ ὄνομα *κοιλὸν* δίδεται καὶ εἰς χωρητικότητα διάφορον *τοῦ δεκάτου τοῦ κ. μέτρου* καὶ μάλιστα αὕτη θεωρεῖται, ὡς μονὰς βάρους ἐν πολλοῖς, εἶναι δὲ τὸ βάρος τοῦ κοιλοῦ τούτου ἑκάστοτε διάφορον, ὡς ἐξαρτώμενον ἐκ τοῦ βάρους, τὸ ὁποῖον χωρεῖ τὸ κοιλὸν τοῦτο ἐκ τοῦ εἴδους, τὸ ὁποῖον πρόκειται νὰ καταμετρήσωμεν.

Τὸ *δεκαδικὸν κοιλὸν* καλεῖται καὶ *ἑκατόλλιτρον* (hectolitre), ὡς ὂν ἡ χωρητικότης 100 λιτρῶν. Τὸ δὲ $\frac{1}{100}$ τοῦ κ. μέτρου καλεῖται *δεκάλιτρον* (decalitre), ὡς ὂν ἡ χωρητικότης 10 λιτρῶν. Τὸ δὲ $\frac{1}{10}$ τῆς λίτρας καλεῖται *ὑποδεκάλιτρον* ἢ *Κοτύλη* (decilitre).

Τὸ δὲ $\frac{1}{100}$ τῆς λίτρας καλεῖται *ὑφεκατόλλιτρον* ἢ *μύστρον* (cendilitre). Τὸ δὲ $\frac{1}{1000}$ τῆς λίτρας καλεῖται *ὑποχιλιόλιτρον* ἢ *κύβος* ἢ *κ. δάκτυλος*.

395. Διὰ τὴν καταμέτρησιν *πλοίων* ἢ *μεγάλων ἀποθηκῶν κ.τ.λ.* ποιοῦσι χρῆσιν τοῦ *τόννου χωρητικότητος*. Διὰ μικροτέρας δὲ χωρητικότητας ἢ ὄγκους ποιοῦσι χρῆσιν τοῦ δεκαδικοῦ κοιλοῦ ἢ καὶ τῆς κ. παλάμης.

Σημ. Ἡ ἀνιοῦσα κλίμαξ τοῦ κ. μέτρου ἢ τον. χωρητικότητος δὲν εἶναι ἐν χρήσει εἰς τὸ ἐμπόριον.

Ἡ γραφὴ συμμιγοῦς ἀριθμοῦ ἔχοντος δεκαδικὰς ὑποδιαιρέσεις εἰς δεκαδικὸν ἀριθμὸν καὶ ἡ τροπὴ τοιούτου δεκαδικοῦ εἰς τὰς διαφόρους ὑποδιαιρέσεις τοῦ συμμιγοῦς γίνεται κατὰ τὰ ἑξῆς προβλήματα.

Πρόβλημα 1ον. *Νὰ γραφῇ ὁ συμμιγὴς 5 τον. χωρ. 4 κοιλ. 2 κ. ὑποδεκαμ. 3 κ. ὑφεκατομ. ὑπὸ μορφὴν δεκαδικήν.*

Λύσις. Γράφοντες τὸν ἀριθμὸν τῶν τόννων χωρητικότητος εἰς τὴν θέσιν τοῦ ἀκεραίου μέρους τοῦ δεκαδικοῦ, τοὺς δὲ λοιποὺς ἀριθμοὺς τοῦ συμμιγοῦς εἰς τὰς ἀντιστοίχους αὐτῶν θέσεις, εὑρίσκομεν τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν 5,402003 *τον. χωρητικότητος.*

Πρόβλημα 2ον. *Ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 5,402003 τον. χωρ. νὰ τραπῇ εἰς ἀριθμὸν οἱασδήποτε ὑποδιαιρέσεως τῆς ἀρχικῆς μονάδος.*

Λύσις. Κατὰ τὰ γνωστὰ περὶ ἀπαγγελίας δεκαδικῶν ἀριθμῶν εὑρίσκομεν ὅτι

$$5{,}402003 \text{ τον. χωρ.} = 54\frac{2003}{100000} \text{ δεκαδικὰ κοιλὰ ἢ ἑκατολ.} =$$

$$= 5402\frac{3}{1000} \text{ κ. παλ. ἢ λίτρ. κ.τλ.}$$

Πρόβλημα 3ον. *Δοχεῖόν τι χωρεῖ 3,275 λίτρας νὰ τραπῇ οὗτος εἰς τὰς ὑποδιαιρέσεις τῆς λίτρας.*

3,275 λιτρ.$=32\frac{75}{100}$ δεκατολ. ἢ κοτυλ. $=327\frac{5}{10}$ ἑκατοστολ. ἢ μύστρου$=3275$ χιλιοστολ. ἢ κ. δακτύλους.

396. *Πρὸς καταμέτρησιν καυσοξύλων* μεταχειρίζονται κυβικὸν μέτρον, τοῦ ὁποίου ὑφίστανται *τρεῖς ἕδραι*, ἤτοι ἡ βάσις τοῦ κ. μέτρου καὶ δύο ἀπέναντι ἕδραι τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ κ. μέτρου.

Τὸ μέτρον τοῦτο, ὅπερ ὀνομάζεται Γαλλιστὶ stere, καταλαμβάνει προφανῶς χῶρον ἑνὸς κυβικοῦ μέτρου. Προφανῶς ὅμως δὲν καταλαμβάνεται ὑπὸ τῶν καυσοξύλων ὁλόκληρος ὁ χῶρος τοῦ κ. μέτρου, λόγῳ τῶν μεταξὺ τῶν καυσοξύλων μενόντων κενῶν διαστημάτων, ὡς ἐκ τοῦ στρογγύλου αὐτῶν σχήματος. Ὑπελογίσθη δὲ ἡ ἐλάττωσις αὕτη 0,35 τοῦ κ. μέτρου κατὰ μέσον ὅρον.

β′.—Μονάδες ὄγκου ἢ χωρητικότητος ἄνευ δεκαδικῶν ὑποδιαιρέσεων.

397. ΑΓΓΛΙΑ. — *Ἐν Ἀγγλίᾳ*, ὡς μονάδας καταμετρήσεως τοῦ *ὄγκου* ἢ τῆς *χωρητικότητος* μεταχειρίζονται τὰς ἀντιστοίχους μονάδας *μήκους*, ὡς μονάδας δὲ καταμετρήσεως τῶν *δημητριακῶν καρπῶν*, *ὑγρῶν* κ.τ.λ. μεταχειρίζονται τὸ *κουόρτερ* (quarter), ὅπερ ἰσοῦται πρὸς 290,79 λίτρας Γαλλικὰς καὶ ὅπερ ἔχει τὰς ἑξῆς ὑποδιαιρέσεις.

1) Τὸ *Κουόρτερ* (quarter)$=8$ *βοῦσελ*
2) Τὸ *βοῦσελ* (bushel)$=8$ *γαλλόνια*
3) Τὸ *γαλλόνιον* (gallon)$=2$ *πότλας*
4) Ἡ *πότλα* (potle) ἢ ἡμιγάλλονον$=4$ *πίντας*
5) Ἡ *πίντα* (pint) ἢ ὀγδοογάλλονον$=4$ ζίλλα (gils)

Τὸ *Κουόρτερ* καὶ τὸ *βοῦσελ* χρησιμοποιεῖται διὰ τὴν καταμέτρησιν *δημητριακῶν καρπῶν*, οἷον *σιτηρῶν*, *κυάμων*, *ἐρεβίνθων* κ.τ.λ. Τὸ δὲ *γαλλόνιον*, τὴν *πότλαν*, τὴν *πίνταν* καὶ τὴν *ζίλλαν* χρησιμοποιοῦσι διὰ τὴν καταμέτρησιν ὑγρῶν.

Δ′. ΜΟΝΑΔΕΣ ΒΑΡΟΥΣ

α′.—Μονάδες σταθμῶν μὲ ὑποδιαιρέσεις δεκαδικάς.

398. Ὡς μονάδας βάρους εἰς τὸ Γαλλικὸν μετρικὸν σύστημα ἐλήφθησαν τὰ βάρη ὕδατος ἀπεσταγμένου καὶ θερμοκρασίας 4^0 τοῦ ἑκα-

τονταβάθμου θερμομέτρου, τὰ ὁποῖα χωρεῖ τὸ *κυβικὸν μέτρον* καὶ αἱ ὑποδιαιρέσεις τούτου. Ἐκλήθη δὲ *γραμμάριον*, τὸ βάρος τοιούτου ὕδατος, ὅπερ χωρεῖ εἷς κ. *δάκτυλος*. Ἐκλήθη δὲ *χιλιόγραμμον*, τὸ βάρος τοιούτου ὕδατος, ὅπερ χωρεῖ μία κ. *παλάμη*, διότι, ὡς γνωστόν, αὕτη περιέχει 1000 κ. δακτύλους καὶ ἑπομένως χωρεῖ 1000 γραμμάρια ὕδατος. Ἐκλήθη δὲ *δεκαδικὸς στατὴρ* (decimal guintal), τὸ βάρος τοιούτου ὕδατος, ὅπερ χωρεῖ ἓν *δεκαδικὸν κοιλὸν* (ἢ ἑκατόλλιτρον). Ἐκλήθη δὲ *τόννος βάρους*, τὸ βάρος τοιούτου ὕδατος, ὅπερ χωρεῖ ἓν *κυβικὸν μέτρον* (ἢ τον. χωρητικότητος). Προφανῶς δὲ αἱ εἰρημέναι μονάδες εἶναι δεκαδικαὶ ὑποδιαιρέσεις τοῦ *τόννου βάρους*, ὅστις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ κ. *μέτρον*, διότι αὗται ἀντιστοιχοῦσιν εἰς τὰς διαφόρους δεκαδικὰς ὑποδιαιρέσεις τοῦ κ. μέτρου (ἢ τον. χωρητικότητος).

Σημ. Αἱ ὑποδιαιρέσεις δὲ τοῦ *γραμμαρίου* εἰς *δέκατα*, *ἑκατοστὰ* καὶ *χιλιοστὰ* χρησιμοποιοῦνται εἰς τὴν στάθμισιν *πολυτίμων εἰδῶν* καὶ εἰς τὴν *φαρμακευτικήν*.

399. Αἱ εἰρημέναι μονάδες εἶναι ἐν χρήσει ἐν *Αὐστροουγγαρίᾳ*, *Βελγίῳ*, *Βουλγαρίᾳ*, *Γαλλίᾳ*, *Γερμανίᾳ*, *Ἑλβετίᾳ*, *Ἱσπανίᾳ*, *Ἰταλίᾳ*, *Ὀλλανδίᾳ*, *Πορτογαλλίᾳ*, *Ῥουμανίᾳ*, *Σερβίᾳ*, *Σουηδίᾳ* καὶ *Νορβηγίᾳ*. Ἐν *Γερμανίᾳ* δὲ πλὴν τοῦ *χιλιογράμμου* μεταχειρίζονται, ὡς μονάδα βάρους, τὸ *φούντιον*, ὅπερ ἔχει βάρος 500 γραμμαρίων, ἤτοι τὸ ἥμισυ τοῦ χιλιογράμμου.

Ἡ γραφὴ συμμιγοῦς ἀριθμοῦ τοῦ Γαλλικοῦ συστήματος τῶν σταθμῶν εἰς δεκαδικὸν ἀριθμὸν καὶ ἡ τροπὴ τοιούτου δεκαδικοῦ εἰς τὰς διαφόρους ὑποδιαιρέσεις τοῦ συμμιγοῦς γίνεται κατὰ τὰ ἑξῆς δύο προβλήματα.

Πρόβλημα 1ον. *Νὰ γραφῇ ὁ συμμιγὴς 5 τον. βάρους 4 δεκ. στατῆρες 2 χιλιογρ. 3 γραμ. ὑπὸ μορφὴν δεκαδικήν.*

Λύσις. Γράφοντες τὸν ἀριθμὸν τῶν τόννων βάρους εἰς τὴν θέσιν τοῦ ἀκεραίου μέρους τοῦ δεκαδικοῦ, τοὺς δὲ λοιποὺς ἀριθμοὺς τοῦ συμμιγοῦς εἰς τὰς ἀντιστοίχους αὐτῶν θέσεις εὑρίσκομεν τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν 5,402003 τον. βάρους.

Πρόβλημα 2ον. *Ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 5,402003 τον. βαρ. νὰ τραπῇ εἰς ἀριθμὸν οἱασδήποτε ὑποδιαιρέσεως τῆς ἀρχικῆς μονάδος.*

Λύσις. Κατὰ τὰ γνωστὰ περὶ ἀπαγγελίας δεκαδικῶν ἀριθμῶν εὑρίσκομεν ὅτι

$$5,402003 \text{ τον.βαρ.} = 54\frac{2003}{100000} \text{ δεκ. στατ.} =$$

$$= 5402\frac{3}{1000} \text{ χιλιογρ.} = 5402003 \text{ γραμ.}$$

Πρόβλημα 3ον. *Δοχεῖόν τι χωρεῖ 3,275 χιλιογρ. Νὰ τραπῇ ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἰς τὰς διαφόρους ὑποδιαιρέσεις τοῦ χιλιογράμμου.*

(3275 γραμ.)

6΄. Μονάδες σταθμῶν ἄνευ δεκαδικῶν ὑποδιαιρέσεων.

400. ΕΛΛΑΣ καὶ ΤΟΥΡΚΙΑ. — *Ἐν Ἑλλάδι καὶ τῷ Ὀθωμανικῷ* κράτει ἡ ἐν χρήσει μονὰς βάρους εἶναι ὁ *στατήρ*, ὅστις ἔχει τὰς ἑξῆς ὑποδιαιρέσεις

Ὁ *στατὴρ* = 44 ὀκάδας

ἡ *ὀκὰ* = 400 δράμια

401. Ἡ ὀκὰ λαμβάνεται καὶ ὡς *μονὰς χωρητικότητος*. Εἶναι δὲ ἡ ὀκὰ ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἡ χωρητικότης, ἥτις πληροῦται ὑπὸ ὑγροῦ τινος, ὅπερ ἔχει βάρος μιᾶς ὀκᾶς. Ἐπειδὴ δὲ τὰ διάφορα ὑγρὰ ὑπὸ τὸν αὐτὸν ὄγκον ἔχουσι διάφορα βάρη, διὰ τοῦτο ἡ χωρητικότης τῆς ὀκᾶς εἶναι διάφορος διὰ τὰ διάφορα ὑγρά.

Π. χ. Ἡ διὰ τὸ *ἔλαιον ὀκὰ* πρέπει νὰ ἔχῃ χωρητικότητα μεγαλητέραν τῆς διὰ τὸν *οἶνον*, διότι τὸ ἔλαιον εἶναι ἀραιότερον τοῦ οἴνου.

402. Οἱ ἡμέτεροι *ἰατροὶ καὶ φαρμακοποιοί*, πλὴν τῶν Γαλλικῶν σταθμῶν ποιοῦνται χρῆσιν συνηθέστερον τῆς *λίτρας*, ἥτις ἔχει βάρος 360 γραμμαρίων. Ἔχει δὲ ἡ λίτρα αὕτη τὰς ἑξῆς ὑποδιαιρέσεις.

Ἡ *λίτρα* = 12 οὐγγιὰς

ἡ *οὐγγιὰ* = 8 δραχμὰς

ἡ *δραχμὴ* = 3 σκρούπουλα

τὸ *σκρούπουλον* = 20 κόκκους

Οἱ *ἀδαμαντοπῶλαι* εἰς τὴν στάθμισιν *ἀδαμάντων, μαργαριτῶν καὶ ἄλλων πολυτίμων λίθων* μεταχειρίζονται ὡς μονάδα τὸ *καράτιον*. Εἶναι δὲ τὸ *γαλλικὸν καράτιον* 0,205894 τοῦ γραμμαρίου.

Σύγκρισις μονάδων τινων βάρους μεταξύ των.

403. Ἡ *ὀκὰ* = 1282 γραμμάρια

Ἐπομένως:
Τὸ δράμιον $=\frac{1282}{400}$ γραμ. ἤτοι 3,2....γραμμαρ.
Τὸ *γραμμάριον* $=\frac{400}{1282}$ δραμ. ἤτοι 0,312
Τὸ *χιλιόγραμμον* $=\frac{400\times1000}{1282}$ δραμ. $=312$ δραμ.

ἡ *ὀκὰ* $=1,282$ χιλιογραμ.
τὸ *χιλιογραμ.* $=0,780031$ ὀκ. $=0,78$ ὀκᾶς
ὁ *τόννος* $=780,031$ ὀκᾶς.

Ἡ *Ἑνετικὴ λίτρα*, ἥτις εἶναι ἐν χρήσει παρ' ἡμῖν εἰς τὴν στάθμισιν τῆς σταφίδος ἔχει βάρος 150 δραμ., διότι 1000 *Ἑνετικαὶ λίτραι* ἰσοῦνται πρὸς 375 ὀκάδας.

404. *Σχέσις Ἑνετικῆς λίτρας πρὸς τὴν ὀκὰν καὶ τἀνάπαλιν.* Αἱ σχέσεις τῆς Ἑνετικῆς λίτρας πρὸς τὴν ὀκᾶν καὶ τἀνάπαλιν εἶναι αἱ ἑξῆς

Ἡ *Ἑνετικὴ λίτρα* $=\frac{3}{8}$ τῆς ὀκᾶς

Ἡ *ὀκὰ* $=\frac{8}{3}$ τῆς Ἑνετικῆς λίτρας.

405. ΑΓΓΛΙΑ. — *Ἐν Ἀγγλίᾳ* καὶ ταῖς *Ἡν. Πολιτείαις τῆς Βορείου Ἀμερικῆς* μεταχειρίζονται ὡς μονάδα βάρους ἐν τῷ ἐμπορίῳ τὴν *λίβραν* (livre), ἥτις ἔχει βάρος 453,59 γραμμαρίων. Διὰ μεγάλα δὲ βάρη χρησιμοποιοῦσι τὸν *Ἀγγλικὸν τόννον*, ὅστις ἔχει τὰς ἑξῆς ὑποδιαιρέσεις

Ὁ *Ἀγγλικὸς τόννος βάρους* $=20$ στατῆρας

Ὁ *Ἀγγλικὸς στατὴρ* $=112$ λίβρας

Ἡ *Ἀγγλικὴ λίβρα τοῦ ἐμπορίου* $=16$ οὐγγίας

406. Ὑπάρχει ὅμως καὶ ἕτερον *Ἀγγλικὸν σύστημα διὰ τὴν στάθμισιν πολυτίμων μετάλλων καὶ τῶν φαρμακευτικῶν εἰδῶν.* Ἐν τῷ συστήματι δὲ τούτῳ ἡ *λίβρα* (troy) ἔχει βάρους 373,242 γραμ. καὶ ἔχει τὰς ἑξῆς ὑποδιαιρέσεις

ἡ Ἀγγλικὴ *λίβρα* (troy) $=12$ οὐγγίας

ἡ *οὐγγία* $=20$ δηνάρια

τὸ *δηνάριον* $=24$ κόκκους.

407. ΡΩΣΣΙΑ. — Εἰς τὸ *Ῥωσσικὸν* ἐμπόριον ὡς μονάδα βάρους ἔφουσι τὸ *φούντιον* (phund ἢ livre), ὅπερ ἰσοῦται πρὸς 409,51 γραμμάρια.

408. Διὰ μεγάλα ὅμως βάρη χρησιμοποιοῦσι τὸν *Ῥωσσικὸν τόννον*, ὅστις ἔχει τὰς ἑξῆς ὑποδιαιρέσεις

ὁ *Ῥωσσικὸς τόννος*=6 μπέρκοβιτς (ψάθας)

τὸ *μπέρκοβιτς* (ψάθα)=10 πούτια

τὸ *πούτιον*=40 φούντια

Ε'. ΜΟΝΑΔΕΣ ΧΡΟΝΟΥ

Ἡ ἀρχικὴ μονὰς πρὸς μέτρησιν τοῦ χρόνου εἶναι τὸ *ἔτος*. Ἔχει δὲ τὸ ἔτος 365 ἡμέρας, ὅταν ὅμως εἶναι δίσεκτον ἔχει 366 ἡμ. Ἐμπορικῶς δὲ λογίζεται πρὸς εὐκολίαν, ὅτι ἔχει 360 ἡμέρας.

Ἑτέρα μονὰς πρὸς μέτρησιν τοῦ χρόνου εἶναι ὁ *μήν*, ὅστις εἶναι τὸ $\frac{1}{12}$ τοῦ ἔτους, δι' ὃ τὸ ἔτος ἔχει 12 μῆνας.

Σημ. Ἕκαστος *μὴν* λογίζεται ἐμπορικῶς ὅτι ἔχει 30 ἡμ. πραγματικῶς ὅμως τινὲς ἔχουσι 30 ἡμ., τινὲς δὲ 31 ἡμ., ὁ δὲ Φεβρουάριος 28 ἡμ. μέν, ὅταν τὸ ἔτος δὲν εἶναι *δίσεκτον*, 29 ἡμ. δέ, ὅταν εἶναι δίσεκτον. Τοὺς μῆνας, οἵτινες ἔχουσι 30 ἢ 31 ἡμ. εὑρίσκομεν εὐχερῶς ὡς ἑξῆς.

Σφίγγομεν τὴν χεῖρα μας εἰς πυγμὴν καὶ ἀρχίζομεν νὰ ἐκφωνῶμεν τοὺς μῆνας ἀπὸ τοῦ Ἰανουαρίου καὶ ἐφεξῆς ἐπὶ τῶν ἐξοχῶν καὶ τῶν κοίλων μερῶν τῶν περιεχομένων μεταξὺ τῶν τελευταίων ἄκρων δύο διαδοχικῶν δακτύλων. Οὕτω δὲ οἱ πίπτοντες εἰς ἐξοχὴν ἔχουσι 31 ἡμέρας, οἱ δὲ πίπτοντες εἰς κοῖλον ἔχουσι 30 ἡμ. (ἐκτὸς τοῦ Φεβρουαρίου).

409. Ἑτέρα μονὰς χρόνου εἶναι ἡ *ἡμέρα* ἢ τὸ *ἡμερονύκτιον*, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς ἑξῆς ὑποδιαιρέσεις.

1) Τὴν *ὥραν*. Ἡ ὥρα εἶναι τὸ $\frac{1}{24}$ τοῦ *ἡμερονυκτίου*. Ἄρα τὸ ἡμερονύκτιον ἔχει 24 ὥρας.

2) Τὸ *πρῶτον λεπτόν*. Τὸ ἓν πρῶτον λεπτὸν εἶναι τὸ $\frac{1}{60}$ τῆς ὥρας. Ἄρα ἡ ὥρα ἔχει 60 πρῶτα λεπτά.

3) Τὸ *δεύτερον λεπτόν*. Τὸ ἓν δευτερόλεπτον εἶναι τὸ $\frac{1}{60}$ τοῦ πρώτου λεπτοῦ. Ἄρα τὸ πρῶτον λεπτὸν ἔχει 60 δεύτερα λεπτά.

Σημ. Τὰ πρῶτα λεπτὰ σημαίνονται διὰ *μιᾶς ὀξείας*, τὰ δὲ δεύτερα διὰ δύο ὀξειῶν. Ἡ δὲ ἐργάσιμος ἡμέρα, ἂν δὲν ὁρισθῇ ἐκ τοῦ προβλήματος πόσας ὥρας ἔχει, λαμβάνεται παρ' ἡμῖν, ὡς ἔχουσα 12 ὥρας.

ΣΤ. ΜΟΝΑΔΕΣ ΝΟΜΙΣΜΑΤΩΝ

Περὶ τῆς Λατινικῆς νομισματικῆς συμβάσεως.

410. Αἱ μονάδες νομισμάτων εἶναι διάφοροι εἰς τὰ διάφορα κράτη, πλὴν τῶν κρατῶν *Γαλλίας*, *Ἰταλίας*, *Ἐλβετίας*, *Βελγίου* καὶ *Ἑλλάδος*, ἅτινα διὰ συμβάσεως ἀνέλαβον νὰ κόψωσι νομίσματα ὅμοια καὶ ἴσης ἀξίας χάριν εὐκολίας τοῦ ἐμπορίου.

Κατὰ τὴν σύμβασιν ταύτην, ἥτις ἐκλήθη *Λατινικὴ νομισματικὴ σύμβασις*, ἀρχικὴ μονὰς νομισμάτων ἐλήφθη τὸ *φράγκον*, ὅπερ ὀνομάζεται οὕτω, ἐν *Γαλλίᾳ*, *Βελγίῳ* καὶ *Ἐλβετίᾳ*. Ἐν *Ἰταλίᾳ* δὲ ὀνομάζεται *λίρα* καὶ ἐν *Ἑλλάδι δραχμὴ* (νέα).

Τὰ νομίσματα τῆς ἑνώσεως ταύτης εἶναι *ἀργυρᾶ*, *χρυσᾶ* καὶ *χαλκᾶ*.

411. *Τὰ ἐξ ἀργύρου νομίσματα εἶναι τὰ ἑξῆς.*

1) Τὸ *φράγκον*, ἔχον βάρος 5 γραμμαρίων.

2) Τὸ *ἥμισυ τοῦ φράγκου*, ἔχον βάρος 5 : 2, ἤτοι $2\,^1/_2$ γραμμαρίων.

3) Τὸ *πέμπτον τοῦ φράγκου* ἢ *εἰκοσάλεπτον*, ἔχον βάρος 5 : 5, ἤτοι ἑνὸς γραμμαρίου.

412. *Μεγαλητέρας* τοῦ ἀργυροῦ φράγκου νομισματικὰς μονάδας ἀργυρὰς ἔχομεν τὰς ἑξῆς.

1) Τὸ *δίφραγκον*, ἔχον βάρος 5×2 ἤτοι 10 γραμμαρίων.

2) Τὸ *πεντόφραγκον*, ἔχον βάρος 5×5 ἤτοι 25 γραμμαρίων.

413. Ἐκ τῶν νομισμάτων δὲ τούτων τὸ *πεντόφραγκον* ἔχει βαθμὸν καθαρότητος 0,900, τὰ δὲ λοιπὰ ἀργυρᾶ νομίσματα 0,835, ἤτοι τὰ $\frac{835}{1000}$ εἶναι καθαρὸς ἄργυρος, τὰ δὲ λοιπὰ $\frac{165}{1000}$ εἶναι χαλκὸς ἢ ἄλλα εὐτελῆ μέταλλα.

Σημ. Ἡ σύντηξις χρυσοῦ ἢ ἀργύρου μετὰ χαλκοῦ γίνεται πρὸς τὸν σκοπὸν τῆς αὐξήσεως τῆς σκληρότητος τῶν νομισμάτων, ἵνα ἀνθίστανται ταῦτα εἰς τὴν φθοράν.

414. *Τὰ ἐκ χρυσοῦ νομίσματα εἶναι τὰ ἑξῆς.*

1) Τὸ *πεντόφραγκον*

2) Τὸ *δεκάφραγκον*

3) Τὸ *εἰκοσάφραγκον*

4) Τὸ *πεντηκοντάφραγκον*

5) Τὸ *ἑκατόφραγκον*

Τὸ *εἰκοσάφραγκον* ἔχει 4 τάλληρα, τὸ δὲ *τάλληρον* ἔχει 5 φράγκα καὶ τὸ *φράγκον* 100 λεπτά.

415. Ἐπειδὴ ὁ λόγος τῆς τιμῆς τοῦ καθαροῦ χρυσοῦ πρὸς τὸν καθαρὸν ἄργυρον ὑπὸ τὸ αὐτὸ βάρος, κατὰ τὴν σύναψιν τῆς Λατινικῆς Ἑνώσεως ἦτο 15,5· διὰ τοῦτο ἅπαξ ὁρισθέντος εἰς 25 γραμ. τοῦ βάρους τοῦ ἀργυροῦ πενταφράγκου, οὗ ὁ βαθμὸς καθαρότητος εἶναι 0,900 καὶ εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν τῶν χρυσῶν νομισμάτων, εὑρίσκομεν εὐκόλως τὸ βάρος τοῦ *χρυσοῦ πενταφράγκου*, λαμβάνοντες βάρος 15,5 φορὰς μικρότερον τοῦ βάρους τῶν 25 γραμμαρίων. Καὶ διὰ τοῦτο εἰς τὰ χρυσᾶ νομίσματα ἔδοσαν τὰ ἑξῆς βάρη.

1) Εἰς τὸ *χρυσοῦν πεντόφραγκον* ἔδοσαν βάρος $\frac{25}{15,5}$ ἤτοι $\frac{250}{155}$ ἢ $\frac{50}{31}$ γραμ. ἤτοι 1,6129 γραμμάρια.

2) Εἰς τὸ *χρυσοῦν 10φραγκον* ἔδοσαν βάρος $\frac{50}{31}\times 2$ ἤτοι 3,2258 γραμμάρια.

3) Εἰς τὸ *χρυσοῦν 20φραγκον* ἔδοσαν βάρος $\frac{50}{31}\times 4$ ἤτοι 6,45161 γραμμάρια.

4) Εἰς τὸ *50φραγκον* ἔδοσαν βάρος $\frac{50}{31}\times 10$ ἤτοι 16,12903 γραμ.

5) Εἰς τὸ *100φραγκον* ἔδοσαν βάρος $\frac{50}{31}\times 20$ ἤτοι 32,25806 γραμ.

Σημ. Ἐπειδὴ τὸ *χρυσοῦν πεντόφραγκον* ἔχει βάρος $\frac{50}{31}$ γραμ. ἄρα εἰς τὸ *ὑποθετικῶς* χρυσοῦν φράγκον ἀναλογεῖ βάρος $\frac{50}{31}:5$ ἤτοι $\frac{10}{31}$ γραμμαρίων καὶ ἑπομένως καθαρὸς χρυσὸς $\frac{10}{31}\times 0,9$ ἤτοι $\frac{9}{31}$ γραμ. Ἐντεῦθεν δὲ συνάγομεν προσέτι, ὅτι τὸ 1 *γραμμάριον* καθαροῦ χρυσοῦ ἔχει ἀξίαν $1:\frac{9}{31}$ ἤτοι $\frac{31}{9}$ φραγ.

Τὸ δὲ 1 φράγκον ἀργυροῦν ἐπειδὴ ἔχει βάρος 5 γραμ. ἤτοι

$5 \times 0,9$ δηλ. 4,5 γραμ. καθαροῦ ἀργύρου, ἄρα τὸ 1 γραμ. καθαροῦ ἀργύρου τιμᾶται $\frac{1}{4,5}$ ἢ $\frac{10}{45}$ ἤτοι $\frac{2}{9}$ τοῦ φράγκου.

416. *Τὰ δὲ ἐκ χαλκοῦ νομίσματα εἶναι τὰ ἑξῆς.*

1) Τὸ *μονόλεπτον* $= \frac{1}{100}$ τοῦ φράγκου, ἔχον βάρος ἑνὸς γραμμαρίου.

2) Τὸ *δίλεπτον*, ἔχον βάρος 2 γραμμαρίων.

3) Τὸ *πεντάλεπτον* ἢ *ὀβολὸς* (κοινῶς *πεντάρα*), ἔχον βάρος 5 γραμμαρίων.

4) Τὸ *δεκάλεπτον* ἢ *διώβολος* (κοινῶς *δεκάρα*), ἔχον βάρος 10 γραμμαρίων.

Μονάδες νομισμάτων ξένων Κρατῶν.

417. *Ἰσοτιμία χρυσῶν ἢ ἀργυρῶν νομισμάτων* κράτους τινος, λέγεται ἡ τιμὴ τῶν νομισμάτων κράτους τινος εἰς νομίσματα ἑτέρου κράτους, ἡ εὑρισκομένη ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ πολυτίμου μετάλλου τοῦ περιεχομένου εἰς ἑκάτερον τῶν δύο νομισμάτων.

418. Τὰς διαφόρους *χρυσᾶς* καὶ *ἀργυρᾶς* νομισματικὰς μονάδας *διαφόρων Κρατῶν* μὲ τὰς διαφόρους αὐτῶν ὑποδιαιρέσεις τετραμμένας εἰς φράγκα καὶ γρόσια χρυσᾶ Τουρκίας, ἀναγράφομεν εἰς τὸν ἀμέσως ἑπόμενον πίνακα κατ' *ἀλφαβητικὴν τάξιν τῶν διαφόρων Κρατῶν*, ὅπως χρησιμεύσῃ οὗτος εἰς γενικωτέρας ἀσκήσεις, ἐφ' ὅσον ὁ χρόνος ἐπιτρέπει τὸ τοιοῦτον.

* Πίναξ νομισμάτων διαφόρων Κρατῶν.

ΕΠΙΚΡΑΤΕΙΑΙ	Ἰσοτιμία εἰς γρόσια χρυσᾶ Τουρκίας ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ καθαροῦ χρυσοῦ καὶ ἀργύρου τῶν νομισμάτων.	Ἰσοτιμία εἰς φράγκα τῶν χρυσῶν καὶ τῶν ὑποθετικῶς χρυσῶν νομισμάτων ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ καθαροῦ χρυσοῦ των	Βάρος εἰς γραμμάρια	Τίτλος	Ἰσοτιμία εἰς φράγκα τῶν ἀργυρῶν νομισμ. ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ καθαροῦ ἀργύρου των.
ΑΓΓΛΙΑ					
1 λ.στρλ.=20 σελ. 1 σελ.=12 πέν. ἢ δηνάρια, 1 πέν.=4 φαρδήνια.					
Χρυσᾶ					
πεντόλιρον	553,5	126,10	39,940	$\frac{11}{12}$	
δίλιρον	221,4	50,44	15,976	»	
1 λίρα στερλίνα (souverain)	110,7	25,22	7,988	»	
ἡμίλιρον	55,35	12,61	3,994	»	
ἀργυρᾶ					
κορώνη=5 σελλίνια	25,450	6,30	28,276	0,925	5,81
$^1/_2$ κορώνη=2 $^1/_2$ σελλίνια	12,725	3,15	14.138	»	2,91
διπλοῦν φιορίνιον=4 σελλίνια	20,268	5,02	22,621	»	4,64
φιορίνιον=2 σελλίνια	10,184	2,52	11,310	»	2,32
1 σελλίν.=12 πέν. ἢ δηνάρια	5,092	1,26	5,655	»	1,16
ἑξάπεννον	2,546	0,63	2,828	»	0,58
τετράπεννον	1,696	0,42	1,885	»	0,39
τρίπεννον	1,273	0.315	1,414	»	0,29
δίπεννον	0,848	0,21	0,942	»	0,19
πέννα ἢ δηνάριον	0,424	0,105	0,471	»	0,095
ΑΙΓΥΠΤΟΣ					
1 λίρ. Αἰγυπτ.=100 γρ. Αἰγυπτ. 1 γρ. Αἰγ.=10 ochr-el-querche					
Χρυσᾶ					
1 λίρα Αἰγυπτιακή	112,467	25,62	8,5	0,875	
ἡμίλιρον	56,234	12,81	4,25	»	
20γροσον Αἰγυπτιακόν	22,48	5,12	1,7	»	
10γροσον »	11,24	2,56	0,85	»	
5γροσον »	5,61	1,28	0,425	»	
Ἀργυρᾶ					
20γροσον	22,340	5,12	28	0,8333	5,18
10γροσον	11,170	2,56	14	»	2,59
5γροσον	5,585	1,28	7	»	1,29
2γροσον	2,234	0,51	2,8	»	0.58
1γροσ.=10 ochr-el-querche	1,117	0,256	1,4	»	0,26

ΑΥΣΤΡΟΟΥΓΓΑΡΙΑ					
1 εἰκοσφ =8 φλορ. Τὸ 1 φλρ.=100 κρόϊτσερ					
1 κορῶνα=100 χέλερ.					
Χρυσᾶ: εἰκοσακόρωνον=20 κορῶνας	91,923	20,94	6,755	0,900	
δεκακόρωνον=10 κορῶνας	45,961	10,47	3,3875	»	
εἰκοσάφραγκον=8 φλορίνια	87,75	20	6,4516	»	
10φραγκον=4 φλορ.	43,88	10	3,2258	»	
δουκάτον (κρεμιτσα)	52,02	11,85	3,491	0,986	
τετραπλοῦν δουκάτον	208,08	47,40	13,964	»	
ἀργυρᾶ: φλορίνιον=100 κρόϊτσερ	10,843	2,50	12,3457	0,900	2,47
Κορῶνα=100 χέλερ	4,082	1,047	5	0,835	0,93
τάλληρον Μαρίας Θηρεσίας	22,809		28,0668	0,833	5,20
ΒΕΛΓΙΟΝ					
(ἰδὲ Λατινικὴ Ἕνωσις)					
ΒΟΥΛΓΑΡΙΑ					
(ἰδὲ Λατινικὴ Ἕνωσις).					
Τὸ φράγκον ὀνομάζεται λεβ.					
Τὸ δὲ λεπτὸν Στοτίγκι.					
ΓΑΛΛΙΑ					
(ἰδὲ Λατινικὴ Ἕνωσις).					
ΓΕΡΜΑΝΙΑ					
1 μάρκον=100 πφένιγκ (φοίνικας).					
χρυσᾶ: εἰκοσάμαρκον=20 μάρκα	108,385	24,69	7,965	0,900	
δεκάμαρκον=10 μάρκα	53,193	12,35	3,982	»	
πεντάμ ρκον=5 μάρκα	37,146	6,17	1,991	»	
ἀργυρᾶ: πεντάμαρκον=5 μάρκα	24,407	6,17	27,778	0,900	5,56
δίμαρκον=2 μάρκα	9,762	2.27	11,111	»	2,22
μάρκον=100 πφένιγκ (φοίνικ.)	4,880	1 234	5,556	»	1,11
ἡμίμαρκον=50 πφένιγκ	2,440	0,62	2,778	»	0,56
πεμπτόμαρκον=20 πφένιγκ	0,976	0,247	1,111	»	0,22
ΗΝΩΜΕΝΑΙ ΠΟΛΙΤΕΙΑΙ					
1 δολλ.=100 ἑκατοστὰ (cents)					
χρυσᾶ: διπλοῦς ἀετὸς=20 δολλάρια	455,004	103,65	33,436	0,900	
ἀετὸς=10 δολλάρια	227,502	51.83	16,718	»	
1/2 ἀετὸς=5 δολλάρια	113,751	25,91	8,359	»	
1/4 ἀετοῦ=2,5 δολλάρια	56,875	12,95	4,179	»	
δολλάριον	22,750	5,18	1,672	»	

ἀργυρᾶ	δολλάριον=100 ἑκατ. (cents)	23,441	5,18	26.729	0.900	5,34
	$^1/_2$ δολλάριον · · · · · · · · · · · ·	10,974	2,59	12,5	»	2.50
	$^1/_4$ δολλαρίου · · · · · · · · · · · ·	5,487	1,30	6,25	»	1,25
	ντέϊμ=10 ἑκατοστὰ · · · · · · · ·	2,195	0.52	2,5	»	0,50
	ΙΑΠΩΝΙΑ					
	1 γιεν=100 ἑκατοστὰ (sen)					
χρυσᾶ	20 γιέν (yen) · · · · · · · · · · · ·	453,538	103,33	33,333	0,900	
	10 γιέν (yen) · · · · · · · · · · · ·	226,769	51,66	16,6665	»	
	5 γιέν · · · · · · · · · · · · · · · ·	113,384	25,83	8,3333	»	
	1 γιέν · · · · · · · · · · · · · · · ·	22,677	5,16	1,667	»	
ἀργυρᾶ	1 γιέν νομισμ. τοῦ ἐμπρ. · · ·	21,070	5,39	26,956	0,900	5,39
	50 ἑκατοστᾶ τοῦ γιέν · · · · · ·	10,535	1,29	13,4783	0,800	2,40
	20 » » · · · · · · ·	4,214	0,52	5,3913	»	0,96
	10 » » · · · · · · ·	2,107	0,26	2,6957	»	0,48
	ΙΤΑΛΙΑ					
	(ἰδὲ Λατινικὴ Ἕνωσις).					
	Τὸ φράγκον λέγεται λίρα. Τὸ δὲ λεπτὸν τσεντέσιμον (centesimo).					
	ΛΑΤΙΝΙΚΗ ΕΝΩΣΙΣ					
	1 φράγκον=100 λεπτά.					
χρυσᾶ	ἑκατόφραγκον · · · · · · · · · · · ·	438,981	100	32,258	0,900	
	πεντηκοντάφραγκον · · · · · · · ·	219,492	50	16,129	»	
	εἰκοσάφραγκον · · · · · · · · · · ·	87,796	20	6,4516	»	
	δεκάφραγκον · · · · · · · · · · · ·	43 898	10	3,2258	»	
	πεντάφραγκον · · · · · · · · · · · ·	21,949	5	1,6129	»	
ἀργυρᾶ	πεντάφραγκον · · · · · · · · · · · ·	21.949	5	25	0,900	5
	δίφραγκον · · · · · · · · · · · · · ·	8,077	2	10	0,835	1,86
	φράγκον=100 λεπτά · · · · · · ·	4,038	1	5	»	0,93
	$^1/_2$ φράγκου=50 λεπτά · · · ·	2,019	0,50	2,5	»	0,46
	$^1/_5$ φοάγκου=20 λεπτά · · · ·	0,806	0,20	1	»	0,186
	ΡΟΥΜΑΝΙΑ					
	(ἰδὲ Λατιν. Ἕνωσις)					
	1 λέϋ.=1 φράγκον.					
	1 μπάνιο=1 λεπτόν.					

	ΡΩΣΣΙΑ					
χρυσᾶ	Πόλι αὐτοκρατορικόν·······	175.592	40	12,9036	0,900	
	1/2 πόλι=5 ρούβλια παλαιὰ ἢ 7 1/2 νέα ρούβλια········	87,796	20	6,4518	»	
ἀργυρᾶ	ρούβλιον παλαιόν··········	17,559	4	2,0	0,900	4
	ρούβλιον νέον=100 καπίκια·	11,70	2,666		»	
	50 καπίκια νέου ρουβλίου···	5,85	1,333	6,666	»	
	25 » » » ····	1,624	0,666	3.333	0,500	
	20 » » » ····	1,364	0,536	2,668	»	
	15 » » » ····	1,023	0,402	2,000	»	
	10 » » » ····	0,682	0.268	1,334	»	
	5 » » » ····	0,341	0,134	0,667	»	
	ΤΟΥΡΚΙΑ					
	Τὸ Μετζήτιον=20 γρόσια. Τὸ ἀργ. γροσ.=40 παράδες. μεταλλίκιον=10 παράδες.					
χρυσᾶ	πεντόλιρον··············	500	113,92	36,082	11/12	
	2 1/2 λιρῶν··············	250	56,96	18,041	»	
	λίρα···················	100	22,78	7,216	»	
	1/2 λίρα················	50	11,39	3,608	»	
	1/4 λίρας···············	25	5,70	1,804	»	
ἀργυρᾶ	μετζήτιον=20 γροσ. ἀργυρᾶ·	18,52	4,56	24,055	0,830	4,44
	1/2 μετζ.=10 » » ·	9,26	2,28	12,027	»	2,22
	1/4 μετζ.= 5 » » ·	4,63	1,14	6,013	»	1,11
	2 γρόσια=80 παράδες······		0,45	2,405	»	0,44
	2 1/2 γρόσ. (μπεσλίκιον)=100 παράδες··············		0,57			0,55
	50 παράδες··············		0,28			0,27
	Γρόσιον=40 παράδες·······		0,23	1,2025	»	0,22
	1/2 γρόσιον=20 παράδες····		0,11			
	μεταλλίκιον=10 παράδες.···		0.06			

Σημ. Ἐπειδὴ ἡ τουρκικὴ λίρα ἔχει 108 γρόσια ἀργυρᾶ, διὰ τοῦτο τὰ ἐν τῷ πίνακι ἀναγραφόμενα χρυσᾶ τουρκικὰ γρόσια τῶν διαφόρων νομισματικῶν μονάδων τρέπομεν εἰς ἀργυρᾶ, πολλαπλασιάζοντες αὐτὰ ἐπὶ 1,08.

Ἐν ταῖς διαφόροις ἐπαρχίαις τῆς Τουρκίας τὰ διάφορα νομίσματα λαμβάνονται εἰς τὸ ἐμπόριον μὲ διάφορον ὀνοματικὴν ἀξίαν εἰς γρόσια.

Οὕτω π.χ. ἐν Ἀδριανουπόλει ἡ Τουρκ. λίρα ἔχει			123	γροσ. τὸ δὲ εἰκοσ.			108	γροσ.
» Βαγδάτη	»	»	» $103\frac{1}{4}$	»	»	»	$90\frac{1}{2}$	»
» Ξάνθη	»	»	» 183	»	»	»	163	»

καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

419. Ἵνα μετατρέψωμεν μίαν νομισματικὴν μονάδα κράτους τινος εἰς ἰσότιμα νομίσματα ἑτέρου κράτους ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ ἀνωτέρω πίνακος τῶν νομισμάτων, ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψει μὲ πόσα φράγκα ἰσοδυναμεῖ μία νομισματικὴ μονὰς εἰς ἑκάτερον τῶν δύο κρατῶν καὶ εἶτα διὰ καταλλήλου διαιρέσεως εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον.

Π. χ. *Νὰ τραπῇ τὸ ἀργυροῦν* (ἢ χρυσοῦν) *δολλάριον εἰς ἀργυρᾶ* (ἢ χρυσᾶ) *σελλίνια.*

Λύσις. Ἐπειδὴ τὸ 1 *ἀργυροῦν σελλίνιον* ἔχει 1,16 φραγ., ἄρα τὰ 5,34 φραγ. (ἤτοι τὸ 1 ἀργυροῦν δολλάριον) θὰ ἔχῃ 5,34 : 1,16 ἤτοι 4,603 σελλίνια ἀργυρᾶ.

Ἂν δὲ πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὴν ἰσοτιμίαν τοῦ *χρυσοῦ* **δολλαρίου** εἰς ὑποθετικῶς χρυσᾶ σελλίνια (διότι χρυσοῦν δὲν ὑπάρχει) ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς.

«*Τὸ 1 ὑποθετικῶς χρυσοῦν σελίνιον ἔχει 1,26 φραγ.* (ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ἰσοτιμίας τῆς Ἀγγλικῆς λίρας) *ἄρα τὰ 5,18 φραγ.* (ἤτοι τὸ 1 χρυσοῦν δολλάριον) *θὰ ἔχῃ 5,18 : 1,26 ἤτοι 4,111 σελλίνια, ὑποθετικῶς χρυσᾶ.*

Τροπὴ συμμιγῶν ἄνευ δεκαδικῶν ὑποδιαιρέσεων εἰς ἀριθμὸν μιᾶς μονάδος.

Παράδειγμα. Νὰ τραπῇ ὁ συμμιγὴς 5 εἰκ. 3 ταλ. 2 δρχ. 45 λεπ. *εἰς εἰκοσόφραγκα ἢ τάλληρα ἢ δραχμὰς ἢ λεπτά.*

Λύσις. Ἂν θέλωμεν νὰ τρέψωμεν τὸν συμμιγῆ 5 εἰκ. 3 ταλ. 2 δρχ. 45 λεπ. εἰς *λεπτά*, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς.

Ἐπειδὴ 1 εἰκ. ἔχει 4 ταλ., τὰ 5 εἰκ. τοῦ συμμιγοῦς ἔχουσι 4×5 ἤτοι 20 ταλ., εἰς τὰ ὁποῖα προσθέτοντες καὶ 3 ταλ. τοῦ συμμιγοῦς εὑρίσκομεν 23 ταλ. Ὁμοίως ἐπειδὴ 1 ταλ. ἔχει 5 δραχ., ἄρα τὰ 23 ταλ. θὰ ἔχωσι 23×5 ἤτοι 115 δρχ. καὶ 2 δρχ, αἱ τοῦ συμμιγοῦς γίνονται 117 δρχ. Ὁμοίως ἐπειδὴ 1 δρχ. ἔχει 100 λεπ. αἱ 117 δρχ. θὰ ἔχωσιν 11700 λεπ. προστιθεμένων δὲ καὶ τῶν 45 λεπ. τοῦ συμμιγοῦς εὑρίσκομεν 11745 λεπ.

Ἂν θέλωμεν τὸν συμμιγῆ 5 εἰκ. 3 ταλ. 2 δρχ. 45 λεπ. νὰ τρέψωμεν εἰς *εἰκοσάφραγκα* ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς.

Ἐκ τοῦ 5 εἰκ. 3 ταλ. 2 δρχ. 45 λεπ. ἀφίνομεν τὰ 5 εἰκ. καὶ τρέπομεν τὸν 3 ταλ. 2 δρχ. 45 λεπ. εἰς λεπτά, ὅτε εὑρίσκομεν 1745 λεπ. Μετὰ ταῦτα τρέποντες καὶ 1 εἰκ. εἰς λεπτά, ἤτοι 2000 λεπ. σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

Ἀφοῦ τὸ 1 εἰκ. ἔχει 2000 λεπ., τὰ 1745 λεπ. πόσα εἰκοσάφραγκα κάμνουν;

$$1745 : 2000 \text{ ἤτοι } \frac{1745 \text{εἰκ.}}{2000}$$

Ἄρα ὁ 5 εἰκ. 3 ταλ. 2 δρχ. 45 λεπ. $= 5$ εἰκ. $\frac{1745}{2000}$.

Ἂν ἤδη τὸν 5 εἰκ. 3 ταλ. 2 δρχ. 45 λεπ. θέλωμεν νὰ τρέψωμεν εἰς *τάλληρα*, λαμβάνομεν ἐκ τοῦ συμμιγοῦς τὸν 5 εἰκ. 3 ταλ. καὶ τὸν τρέπομεν εἰς τάλληρα, ὅτε εὑρίσκομεν 23 ταλ., τὸν δὲ ἐπίλοιπον 2 δρχ. 45 λεπ., ὅστις γίνεται ἀπὸ μονάδας μικροτέρας τοῦ ταλλήρου, τρέπομεν εἰς λεπτά, ὅτε εὑρίσκομεν 245 λεπτά. Ἔπειτα δὲ τρέποντες 1 ταλ. εἰς λεπτά, ἤτοι 500 λεπ. σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

Τὸ 1 ταλ. ἔχει 500 λεπ., τὰ 245 λεπ. πόσα τάλληρα κάμνουν;

$$245 : 500 \text{ ἤτοι } \frac{245 \text{ταλ.}}{500}$$

Ἄρα ὁ 5 εἰκ. 3 ταλ. 2 δρχ. 45 λεπ. $= 23$ ταλ $\frac{245}{500}$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι ὁ συμμιγὴς

5 εἰκ. 3 ταλ. 2 δρχ. 45 λεπ. $= 117$ δρχ. $\frac{45}{100}$.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς

5 εἰκ. 3 ταλ. 2 δρχ. 45 λεπ.	
4τ.	
20τ.	
3τ.	ὁ 5 εἰκ. 3 ταλ. 2 δρχ. 45 λεπ. $=$ 11745 λεπ.
23τ.	
5δ.	» » » » » $= 5$ εἰκ. $\frac{1745}{2000}$
115δ.	
2δ.	» » » » » $= 23$ ταλ. $\frac{245}{500}$
117δ.	
100δ.	» » » » » $= 117$ δρ. $\frac{45}{100}$
1170 λ.	
45λ.	
11745λ.	

Ἐκ τούτων μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

420. *Διὰ νὰ τρέψωμεν συμμιγῆ εἰς ἀριθμὸν οἱασδήποτε μονάδος αὐτοῦ, ἀρχόμεθα ἐξ ἀριστερῶν καὶ τρέπομεν ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς τοῦ συμμιγοῦς μέχρι τῆς ὁρισθείσης μονάδος εἰς ἕνα ἀκέραιον ἀριθμὸν τῆς μονάδος ταύτης, τοὺς δὲ ἐπιλοίπους ἀριθμοὺς τοῦ συμμιγοῦς,* (ἐὰν ἔχῃ τοιούτους) *εἰς κλάσμα τῆς αὐτῆς μονάδος. Τὸ κλάσμα δὲ τοῦτο θὰ ἔχῃ ἀριθμητὴν μὲν τὸν ἀριθμόν, εἰς τὸν ὁποῖον τρέπονται οἱ ἀριθμοὶ τοῦ συμμιγοῦς, οἱ ὁποῖοι γίνονται ἐκ μονάδων μικροτέρων τῆς ὁρισθείσης, παρονομαστὴν δὲ τὸν ἀριθμὸν τοιούτων μονάδων, ὅστις ἀποτελεῖ μίαν μονάδα τῆς ὁρισθείσης τάξεως τοῦ συμμιγοῦς.*

Τροπὴ κλάσματος εἰς συμμιγῆ.

Παράδειγμα. *Νὰ τραπῇ τὸ κλάσμα $\frac{2}{7}$ τοῦ στατῆρος εἰς συμμιγῆ.*

Ἐπειδὴ οἱ 2στ. δὲν διαιροῦνται διὰ 7, τρέπομεν αὐτοὺς εἰς ὀκάδας, ὅτε εὑρίσκομεν 88 ὀκ. Ταύτας δὲ τὰς 88 ὀκ. διαιροῦμεν διὰ 7 καὶ εὑρίσκομεν, ὡς πηλίκον 12 ὀκ. καὶ ὑπόλοιπον 4 ὀκ. Μετὰ ταῦτα τρέποντες τὰς 4 ταύτας ὀκάδας εἰς δράμια, εὑρίσκομεν 1600 δρμ., τὰ ὁποῖα διαιροῦντες διὰ 7 εὑρίσκομεν ὡς πηλίκον 228 δρμ. καὶ ὑπόλοιπον 4 δρμ. Τούτων δὲ τῶν δραμίων τὸ πηλίκον διὰ 7 εἶναι $\frac{4}{7}$ τοῦ δραμίου καὶ ὑπόλοιπον μηδέν.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς

2στ.	7
44ὀκ.	12 ὀκ. 228 δρμ. $\frac{4}{7}$
88ὀκ.	
18ὀκ.	
4ὀκ.	
400δρμ.	
1600δρμ.	
20	
60	
4	
0	

Ἐκ τούτου μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

421. *Διὰ νὰ τρέψωμεν κλάσμα τι εἰς συμμιγῆ, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ. Ἔπειτα, τὸ προκῦπτον ὑπόλοιπον τρέπομεν εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως ἑπομένης ὑποδιαιρέσεως τοῦ συμμιγοῦς καὶ ἐξακολουθοῦμεν οὕτω τὴν διαίρεσιν μέχρι τῶν μονάδων τῆς κατωτάτης ὑποδιαιρέσεως* (ἂν δὲν εὕρωμεν ἐν τῷ μεταξὺ ὑπόλοιπον μηδέν).

Π. χ. Τὸ $\frac{3\text{εἰκ.}}{2}=1$ εἰκ. 2 ταλ. Τὰ $\frac{2\text{ἡμ}}{3}=16$ ὥρ.

Σημ. Ἂν ἡ μονὰς τοῦ συμμιγοῦς, εἰς τὴν ὁποίαν ἀναφέρεται τὸ δοθὲν κλάσμα, ἔχῃ ὑποδιαιρέσεις δεκαδικάς, προτιμότερον εἶνε νὰ τρέπωμεν τὸ κλάσμα εἰς δεκαδικὸν ἀριθμόν. Τὸν δεκαδικὸν δὲ τοῦτον τρέπομεν ἔπειτα εὐκόλως δι' ἀπαγγελίας εἰς συμμιγῆ ἢ εἰς ἀριθμὸν μιᾶς μονάδος τοῦ συμμιγοῦς.

Π. χ. Νὰ τραπῇ τὰ $\frac{2}{7}$ τοῦ τόννου εἰς συμμιγῆ.

Λύσις. Ἐπειδὴ αἱ ὑποδιαιρέσεις τοῦ τόννου εἶνε δεκαδικαί, διὰ τοῦτο τὰ $\frac{2\text{τόν}}{7}$ τρέπομεν εἰς δεκαδικὸν καὶ σταματῶμεν τὴν διαίρεσιν εἰς τὰ ἑκατομμυριοστὰ (ἔνθα εἶναι ἡ κατωτάτη ὑποδιαίρεσις τοῦ τόννου) ὅτε εὑρίσκομεν, ὅτι τὰ $\frac{2\text{τόν.}}{7}$ ἰσοῦνται μὲ 0,285714 τοῦ τόννου καὶ $\frac{2}{7}$ τοῦ ἑκατομμυριοστοῦ. Ἐντεῦθεν δὲ ἐξάγομεν, ὅτι $0,285714\,\frac{2}{7}$ περιέχει 285 χιλιόγρ. καὶ 714 γραμ. $\frac{2}{7}$, ἢ καὶ εἰς γραμμάρια $285714\frac{2}{7}$.

Ὁμοίως. Τὰ $\frac{3}{4}$ χιλιογράμμου$=0,75$ χιλγρ. ἤτοι 750 γραμ.

Πρόσθεσις.

Παράδειγμα. Νὰ προστεθῶσιν οἱ συμμιγεῖς 1 ὥρ. *25″ + 2* ἡμ. *3*ὥρ. *40′ 17″ + 15* ἡμ. *8* ὥρ. + 22 ὥρ. 45″.

Γράφομεν τοὺς προσθετέους συμμιγεῖς οὕτως, ὥστε οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι γίνονται ἐκ τῆς αὐτῆς μονάδος νὰ εὑρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ στήλῃ. Μετὰ ταῦτα προσθέτομεν τὰ δευτερόλεπτα, ὅτε εὑρίσκομεν 87″, τὰ ὁποῖα κάμνουν 1′ καὶ 27″. Ἐκ τούτων δὲ τὰ μὲν 27″ γράφομεν ὑποκάτω τῆς γραμμῆς εἰς τὴν στήλην τῶν δευτερολέπτων.

τὸ δὲ 1′ προσθέτομεν εἰς τὰ πρῶτα λεπτὰ καὶ ἔχομεν 41′. Ταῦτα δὲ τὰ 41′, ἐπειδὴ δὲν κάμνουν ὥραν, τὰ γράφομεν ὑπὸ τὴν στήλην τῶν πρώτων λεπτῶν. Ἔπειτα προσθέτομεν τὰς ὥρας καὶ εὑρίσκομεν 34 ὥρ., αἱ ὁποῖαι κάμνουν 1 ἡμ. καὶ 10 ὥρ. Καὶ τὰς μὲν 10 ὥρ. γράφομεν ὑπὸ τὰς ὥρας, τὴν δὲ 1 ἡμ. τὴν προσθέτομεν εἰς τὰς ἡμέρας, ὅτε εὑρίσκομεν 18 ἡμ. Ὥστε τὸ ζητούμενον ἄθροισμα τῶν συμμιγῶν εἶνε 18 ἡμ. 10 ὥρ. 41′ 27″.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς

	1ὥρ.		25″
2ἡμ.	3ὥρ.	40′	17″
15ἡμ.	8ὥρ.		
	22ὥρ.		45″
18ἡμ.	10ὥρ	41′	27″

Ἐκ τούτου μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

422. *Διὰ νὰ προσθέσωμεν ὁσουσδήποτε συμμιγεῖς ἀριθμούς, θέτομεν αὐτοὺς οὕτως, ὥστε οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι γίνονται ἐκ τῆς αὐτῆς μονάδος νὰ εὑρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ στήλῃ καὶ ἔπειτα ἀρχόμενοι ἐκ δεξιῶν πρὸς τ' ἀριστερὰ προσθέτομεν αὐτούς, ἐκ δὲ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀριθμῶν ἑκάστης στήλης ἐξάγομεν τὰς μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, τὰς ὁποίας προσθέτομεν εἰς τοὺς ἀριθμοὺς τῆς οἰκείας στήλης.*

Ἀφαίρεσις.

Παράδειγμα. *Ἐκ τοῦ συμμιγοῦς 3* εἰκ. *3* δρχ. *50* λεπ. *νὰ ἀφαιρεθῇ ὁ συμμιγὴς 2* ταλ. *4* δρχ. *20* λεπ.

Γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον ὑποκάτω τοῦ μειωτέου οὕτως, ὥστε οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι γίνονται ἐκ τῆς αὐτῆς μονάδος νὰ εὑρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ στήλῃ. Μετὰ ταῦτα ἀφαιροῦμεν τὰ 20 λεπ. ἀπὸ τὰ 50 λεπ., ὅτε εὑρίσκομεν διαφορὰν 30 λεπ. Ἔπειτα, ἐπειδὴ αἱ 4 δρχ. δὲν ἀφαιροῦνται ἀπὸ τὰς 3 δρχ., προσθέτομεν εἰς τὰς 3 δρχ. *ἓν τάλληρον*, ἀφοῦ τὸ τρέψωμεν *εἰς δραχμάς*, ὅτε γίνονται 8 δρχ. Ἐκ τούτων δὲ τῶν 8 δραχμῶν ἀφαιροῦντες τὰς 4 δρχ. τοῦ ἀφαιρετέου, εὑρίσκομεν διαφορὰν 4 δρχ. Ἔπειτα προσθέτομεν εἰς τὰ 2 ταλ. τοῦ ἀφαιρετέου *ἓν τάλληρον* (§ 72), ὁπότε γίνονται 3 ταλ., τὰ ὁποῖα, ἐπειδὴ δὲν ἔχουν ἀντίστοιχον ἀριθμὸν ταλλήρων εἰς τὸν μειωτέον, ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὰ 4 τάλληρα, τὰ ὁποῖα κάμνει ἓν *εἰκοσάφραγκον* καὶ ἔχομεν οὕτω διαφορὰν 1 ταλ. Μετὰ ταῦτα προσθέτομεν καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον ἓν *εἰκοσάφραγκον* (§ 72), τὸ ὁποῖον ἀφαιροῦντες ἀπὸ τὰ 3 εἰκ. τοῦ μειωτέου εὑρίσκομεν διαφορὰν 2 εἰκ. Ὥστε ἡ ζητουμένη διαφορὰ εἶναι 2 εἰκ. 1 ταλ. 4 δρχ. 30 λεπ.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς

3εἰκ.		3δρχ.	50λεπ.
	2ταλ.	4δρχ.	20λεπ.
2εἰκ.	1ταλ.	4δρχ.	30λεπ.

Ἐκ τούτου μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

423. *Διὰ ν' ἀφαιρέσωμεν δύο συμμιγεῖς, γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον ὑποκάτω τοῦ μειωτέου οὕτως, ὥστε οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι γίνονται ἐκ τῆς αὐτῆς μονάδος νὰ εὑρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ στήλῃ. Ἔπειτα ἀρχόμενοι ἐκ δεξιῶν, ἀφαιροῦμεν, ὡς εἰς τοὺς ἀκεραίους. Ἂν ὅμως ἀριθμός τις τοῦ ἀφαιρετέου δὲν ἔχῃ ἀντίστοιχον ἀριθμὸν εἰς τὸν μειωτέον ἢ ἔχῃ ἀριθμὸν μικρότερον τοῦ ἀντιστοίχου τοῦ ἀφαιρετέου, τότε αὐξάνομεν τὸν ἀριθμὸν τοῦτον τοῦ μειωτέου, κατὰ τόσας μονάδας, ὅσας κάμνει μία μονὰς τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως. Ταύτης δὲ τῆς τάξεως προσθέτομεν ἔπειτα μίαν μονάδα καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον* (§ 72) *καὶ ἐξακολουθοῦμεν τὴν ἀφαίρεσιν.*

Π. χ. Ν' ἀφαιρεθῇ ἀπὸ 5 ὥρ. ὁ 8″.

Ἐπειδὴ ὁ μειωτέος δὲν ἔχει τάξιν δευτέρων λεπτῶν, προσθέτομεν εἰς αὐτὸν 60″ καὶ λέγομεν 8″ ἀπὸ 60″ (τὰ ὁποῖα κάμνει τὸ 1′) ἔχομεν διαφορὰν 52″. Ἔπειτα λέγομεν 1′ τὸ κρατούμενον ἀπὸ 60′ (τὰ ὁποῖα κάμνει μία ὥρα), ἔχομεν διαφορὰν 59′ καὶ τέλος 1 ὥρ. τὸ κρατούμενον ἀπὸ 5 ὥρ., ἔχομεν διαφορὰν 4 ὥρ. Ὥστε ἡ ζητουμένη διαφορὰ εἶναι 4 ὥρ. 59′ 52″.

Σημ. Διὰ ν' ἀφαιρέσωμεν δύο χρονολογίας, τρέπομεν πρῶτον αὐτὰς εἰς συμμιγεῖς ἀριθμοὺς *τελείων ἐτῶν, μηνῶν, ἡμερῶν, ὡρῶν* καὶ ἔπειτα ἀφαιροῦμεν αὐτούς.

Π. χ. Ἀπὸ τοῦ 1874 τῆς 15 Σεπτεμβρίου 5 ὥρ. μ.μ. μέχρι τοῦ 1895 τῆς 10 Ὀκτωβρίου 3 ὥρ. μ.μ. πόσος χρόνος παρῆλθε;

Λύσις. Τρέποντες τὰς χρονολογίας 1874 τῇ 15 Σεπτεμβρίου 5 ὥρ. μ. μ. καὶ 1895 τῇ 10 Ὀκτωβρίου 3 ὥρ. μ. μ. εἰς συμμιγεῖς, εὑρίσκομεν τοὺς 1874 ἔτ. 8 μην. 14 ἡμ. 17 ὥρ. καὶ 1895 ἔτ. 9 μην.

9 ἡμ. 15 ὥρ., ἔπειτα δὲ ἀφαιροῦντες ἀπὸ τοῦ δευτέρου συμμιγοῦς τὸν πρῶτον, εὑρίσκομεν τὸν ζητούμενον χρόνον 21 ἔτ. 24 ἡμ. 22 ὥρ.

Πολλαπλασιασμός.

Εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν συμμιγῶν διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις.

Α') *Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι ἀκέραιος.*

Β') *Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι κλάσμα.*

Γ') *Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι συμμιγής.*

Σημ. Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι μικτός, δηλαδὴ ἀκέραιος καὶ κλάσμα, τότε ἢ ἐφαρμόζομεν τὰς δύο πρώτας περιπτώσεις ἢ τρέπομεν τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα καὶ ἐφαρμόζομεν μόνον τὴν δευτέραν περίπτωσιν.

Πολλαπλασιαστὴς ἀκέραιος.

Πρόβλημα. Ἓν βαρέλιον ζακχάρεως χωρεῖ 5 στ. 20 ὀκ. 250 δρμ. Πόσον χωροῦν 8 τοιαῦτα βαρέλια;

Τὸ πρόβλημα τοῦτο λύεται διὰ πολλαπλασιασμοῦ (Σελ. 138 § 6') καὶ δὴ

5στ.	20ὀκ	250δρμ.
		8
43στ.	33ὀκ.	0δρμ.

Πολλαπλασιάζομεν τὸν 250 δρμ. ἐπὶ 8, καὶ εὑρίσκομεν 2000δρμ. τὰ ὁποῖα κάμνουν 5 ὀκ. Τὰς ὀκάδας δὲ ταύτας προσθέτομεν εἰς τὸ ἑπόμενον γινόμενον 160 ὀκ. (δηλ. τῶν 20 ὀκ. ×8), ὅτε γίνονται 165 ὀκ., αἱ ὁποῖαι κάμνουν 3 στ. καὶ μένουν 33 ὀκ. Ἐκ τούτων, τὰς μὲν 33 ὀκ. γράφομεν ὑπὸ τὰς ὀκάδας, τοὺς δὲ 3 στ. προσθέτομεν εἰς τὸ ἑπόμενον γινόμενον 40 στ. (δηλ. τῶν 5 στ.×8) καὶ οὕτω γίνονται 43 στ. Ὥστε τὸ ζητούμενον γινόμενον εἶναι 43 στ. 33 ὀκ.

Ἐκ τούτου μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

424. *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῆ ἐπὶ ἀκέραιον, ἀρχόμεθα ἐκ δεξιῶν καὶ πολλαπλασιάζομεν ἕκαστον ἀριθμὸν τοῦ συμμιγοῦς ἐπὶ τὸν ἀκέραιον πολλαπλασιαστὴν καὶ ἐξ ἑκάστου γινομένου ἐξάγομεν τὰς μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως καὶ τὰς προσθέτομεν εἰς τὸ ἑπόμενον γινόμενον τῶν μονάδων τῆς αὐτῆς τάξεως.*

Διαίρεσις.

425. Εἰς τὴν διαίρεσιν τῶν συμμιγῶν διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις.

Α΄) *Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι ἀκέραιος.*

Β΄) *Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι κλάσμα.*

Γ΄) *Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι συμμιγής.*

Διαιρέτης ἀκέραιος.

Πρόβλημα. Οἱ 4 πήχ. ὑφάσματός τινος ἀξίζουν 3 εἰκ. 1 ταλ. 25 λεπ., πόσον ἀξίζει ὁ πῆχυς;

Τὸ πρόβλημα τοῦτο λύεται διὰ διαιρέσεως (Σελ. 139 § 6΄) καὶ δὴ

3εἰκ 1ταλ. 25λεπ. | 4
3ταλ. 1δρχ. 31λεπ. $\frac{1}{4}$

4τ.
12τ.
1τ.
13τ.
1τ.
5δ.
5δ.
1δ.
100λ.
100λ.
25λ.
125λ.
5λ.
1λ.
0

Ἐπειδὴ τὰ 3 εἰκ. δὲν διαιροῦνται διὰ 4 τὰ τρέπομεν εἰς τάλληρα, ὁπότε γίνονται 12 ταλ. Εἰς ταῦτα δὲ τὰ 12 ταλ. προσθέτομεν καὶ τὸ 1 ταλ. τοῦ συμμιγοῦς καὶ οὕτως ἔχομεν 13 ταλ. Ταῦτα δὲ τὰ 13 ταλ. διαιροῦμεν διὰ τοῦ 4 καὶ εὑρίσκομεν ὡς πηλίκον 3 ταλ. καὶ ὑπόλοιπον 1 ταλ. Τοῦτο δὲ τὸ τάλ. τρέπομεν εἰς δραχ. καὶ οὕτως ἔχομεν 5 δρχ. Ταύτας δὲ τὰς 5 δρχ. διαιροῦμεν διὰ τοῦ 4 καὶ οὕτως εὑρίσκομεν ὡς πηλίκον 1 δρχ. καὶ ὑπόλοιπον 1 δρχ. Τέλος δὲ τὴν δραχμὴν ταύτην τρέπομεν εἰς λεπτὰ καὶ οὕτως ἔχομεν 100 λεπ. Εἰς ταῦτα δὲ τὰ 100 λεπ. προσθέτομεν καὶ τὰ 25 λεπ. τοῦ συμμιγοῦς καὶ οὕτως ἔχομεν 125 λεπ., τὰ ὁποῖα διαιροῦντες διὰ τοῦ 4, εὑρίσκομεν πηλίκον $31\frac{1}{4}$ λεπτὰ καὶ ὑπόλοιπον 0.

Ἐκ τούτου μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

426. *Διὰ νὰ διαιρέσωμεν συμμιγῆ δι' ἀκεραίου, ἀρχόμεθα ἐξ ἀριστερῶν καὶ διαιροῦμεν τὸν πρῶτον ἀριθμὸν τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ ἀκεραίου διαιρέτου καὶ λαμβάνομεν οὕτω τὸν πρῶτον ἀριθμὸν τοῦ πηλίκου, τὸ δὲ προκῦπτον ὑπόλοιπον τρέπομεν εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας ὑποδιαιρέσεως καὶ προσθέτομεν εἰς ταύτας καὶ τὰς ἀντιστοίχους μονάδας τοῦ συμμιγοῦς* (ἂν ἔχῃ τοιαύτας) *καὶ ἐξακολουθοῦμεν οὕτω τὴν διαίρεσιν μέχρι τέλους.*

Π. χ. Ἐργασθείς τις 3 ἡμ. 5 ὥρ. ἔλαβε 5 δρχ. Πόσον πρέπει νὰ ἐργασθῇ διὰ νὰ λάβῃ 1 δραχμήν; (8 ὥρ. 12′).

Πολλαπλασιαστὴς κλάσμα.

427. *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῆ ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιάζομεν τὸν συμμιγῆ ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ.*

Πρόβλημα. Εἰς μίαν ἡμέραν ὑφαίνει τις 5 πήχ. 3 ρ. Πόσον ὑφαίνει εἰς τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ἡμέρας;

Τὸ πρόβλημα τοῦτο λύεται διὰ πολλαπλασιασμοῦ (Σελ. 138 § 6′). Ἐφαρμόζοντες δὲ τὸν κανόνα (§ 427) ἔχομεν.

5πήχ.	3ρούπ.		
	3		
16πήχ.	1ρ.	4	
0		4πήχ. $\frac{1}{4}$ ρούπ	
1ρ.			
0			

Ὥστε εἰς τὰ $\frac{3}{4}$ ἡμ. θὰ ὑφάνῃ 4 πήχ. $\frac{1}{4}$ ρούπ.

428. *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῆ ἐπὶ μικτόν, πολλαπλασιάζομεν τὸν συμμιγῆ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον καὶ τὸ κλάσμα τοῦ μικτοῦ καὶ ἑνοῦμεν τὰ δύο γινόμενα ἢ τρέπομεν τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα καὶ ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν.*

Πρόβλημα. Ὁ πῆχυς ὑφάσματός τινος ἀξίζει 2 δρχ. 35 λεπ. Πόσον ἀξίζουν $4\frac{3}{8}$ πήχ. $\left(10 \text{ δρχ. } 28 \text{ λεπ. } \frac{1}{8}\right)$

Σημ. Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῆ ἐπὶ δεκαδικόν, γράφομεν τὸν δεκαδικὸν ὑπὸ μορφὴν κλάσματος καὶ ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν ὡς ἀνωτέρω.

Διαιρέτης κλάσμα.

429. *Διὰ νὰ διαιρέσωμεν συμμιγῆ διὰ κλάσματος, ἀντιστρέφομεν τοὺς ὅρους τοῦ κλασματικοῦ διαιρέτου καὶ ἀντὶ διαιρέσεως κάμνομεν πολλαπλασιασμόν.*

Π. χ. τὰ $\frac{2}{3}$ πήχ. ἀξίζουν 4 δρχ. 75 λεπ. Πόσον ἀξίζει ὁ πῆχυς; (1 ταλ. 2 δρχ. 12 λεπ. $^1/_2$)

430. *Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶνε μικτός, τρέπομεν αὐτὸν εἰς κλάσμα καὶ ἔπειτα ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν.*

Π. χ. Μὲ $2\frac{3}{5}$ δραχ. ἀγοράζομεν 2 στ. 5 ὀκ. 150 δρμ. πράγματός τινος. Πόσον ἀγοράζομεν μὲ μίαν δραχμήν; $\left(35\right.$ ὀκ. 365 δρμ. $\left.\frac{5}{13}\right)$

Σημ. Διὰ νὰ διαιρέσωμεν συμμιγῆ διὰ δεκαδικοῦ γράφομεν τὸν δεκαδικὸν ὑπὸ μορφὴν κλάσματος καὶ ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν ὡς ἀνωτέρω.

Πολλαπλασιαστὴς συμμιγής.

Πρόβλημα 1ον. *Ὁ πῆχυς ὑφάσματός τινος ἀξίζει 2 δρχ. 25 λεπ. Πόσον ἀξίζουν οἱ 4 πήχ. 2 ρούπ.;*

Λύσις. Ἐπειδὴ τὸ πρόβλημα τοῦτο θὰ ἐλύετο εὐκόλως, ἂν οἱ 4 πήχ. 2 ρούπ. ἦσαν μόνον πήχεις, διότι τότε θὰ εἴχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν συμμιγῆ 2 δρχ. 25 λεπ. ἐπὶ ἀκέραιον ἢ κλάσμα (Σελ. 138 § 6΄), τοὺς ὁποίους πολλαπλασιασμοὺς εὐκόλως ἐκτελοῦμεν, διὰ τοῦτο τρέπομεν τὸν συμμιγῆ 4 πήχ. 2 ρούπ. εἰς πήχεις, ὅτε εὑρίσκομεν 4 πήχ. $\frac{1}{4}$ καὶ ἤδη ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν 2 δρχ. 25 λεπ· ἐπὶ $4\,^1/_4 = 9$ δρχ. 56 λεπ. $\frac{1}{4}$. Ὥστε οἱ 4 πήχ. 2 ρούπ. ἀξίζουν 9 δρχ. 56 λεπ. $\frac{1}{4}$.

Πρόβλημα 2ον. *Τὸ ῥούπιον ὑφάσματός τινος ἀξίζει* 2 δρχ. 25 λεπ. *Πόσον ἀξίζουν οἱ* 4 πήχ. 2 ρούπ.;

Λύσις. Ἂν οἱ 4 πήχ 2 ρούπ. ἦσαν μόνον ῥούπια, τὸ πρόβλημα θὰ ἐλύετο εὐκόλως (Σελ. 138 § 6΄). Διὰ τοῦτο τρέποντες τὸν 4 πήχ. 2 ῥούπ. εἰς ῥούπια, εὑρίσκομεν 34 ρούπ., ὅτε ἔχομεν 2 δρχ. 25 λεπ. ἐπὶ $34 = 76$ δρχ. 50 λεπ.

Πρόβλημα 3ον. *Τὸ δράμιον μαλλίου τιμᾶται* 6 λεπ. *Πόσον τιμῶνται τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς;*

Λύσις. Ἂν τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς ἦσαν δράμια τὸ πρόβλημα θὰ ἐλύετο εὐκόλως (Σελ. 138 § 6΄.). Διὰ τοῦτο τρέπομεν πρῶτον τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς εἰς δράμια, ὅτε εὑρίσκομεν $\frac{3}{4} \times 400$ ἤτοι 300 δράμια. Καὶ οὕτως ἔχομεν 6 λεπ. $\times 300$ ἤτοι 1800 λεπτά.

Ἐκ τούτων μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

431. *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο συμμιγεῖς (ἢ ὁποιουσδήποτε ἀριθμοὺς) κάμνομεν πρῶτον τὸν ἀριθμόν, τοῦ ὁποίου τὴν τιμὴν ζητοῦμεν νὰ γίνηται ἐκ τῆς μονάδος, τῆς ὁποίας τὴν τιμὴν γνωρίζομεν, καὶ ἔπειτα ἐκτελοῦμεν τὸν πολλαπλασιασμόν.*

Παρατήρησις. Ἐπειδὴ τὸ ῥούπιον εἶνε τὸ $\frac{1}{8}$ τοῦ πήχεως, διὰ τοῦτο εὐκόλως τρέπεται τοῦτο εἰς δεκαδικὸν ἀριθμόν, πολλαπλασιάζοντες ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ $\frac{1}{8}$ ἐπὶ 125, ὅτε εὑρίσκομεν 0,125 πήχ. Ἑπομένως διὰ τὰ 2 ρούπ. εὑρίσκομεν 0,250 πήχ. ἤτοι 0,25 πήχ. διὰ τὰ 3 ρούπ. εὑρίσκομεν 0,375 πήχ. διὰ τὰ 4 ρούπ. εὑρίσκομεν 0,500 πήχ. ἢ ὅπερ ταὐτὸ 0,5 πήχ. καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Ἐπειδὴ τὸ δράμιον εἶναι $\frac{1}{400}$ τῆς ὀκᾶς, διὰ τοῦτο δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν πάντα ἀριθμὸν δραμίων εἰς δεκαδικὸν ἀριθμόν, πολλαπλασιάζοντες αὐτὸν ἐπὶ 25 καὶ τὸ ἐξαγόμενον γράφοντες ὡς *δεκάκις χιλιοστὰ* τῆς ὀκᾶς.

Π. χ. 2 ὀκ. 65 δρμ. $=$ 2 ὀκ. $\frac{65}{400}$ $=$ 2 ὀκ. $\frac{65\times25}{400\times25}$ $=$ 2 ὀκ. $\frac{1625}{10000}$ $=$ 2,1625 ὀκ.

Ἐπειδὴ δὲ αἱ πράξεις ἐπὶ τῶν δεκαδικῶν γίνονται εὐκολώτερον ἢ ἐπὶ τῶν συμμιγῶν διὰ τοῦτο τὰ προβλήματα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν συμμιγῶν τῶν εὐκόλως τρεπομένων εἰς δεκαδικούς, προτιμῶσι εἰς τὸ ἐμπόριον καὶ ἐν γένει εἰς τὸν πρακτικὸν βίον νὰ λύωσι τρέποντες τοὺς συμμιγεῖς τούτους εἰς δεκαδικούς.

Κατὰ ταῦτα λύοντες τὸ ἀνωτέρω *πρόβλημα* 1ον ἔχομεν

2 δρχ. 25 λεπ. $\times$ 4 πήχ. 2 ῥούπ. $=2,25\times4,25=9,5625$ δρχ. ἢ 9,56 $\frac{25}{100}$ ἤτοι 9,56 $\frac{1}{4}$ δηλ. 9 δρχ. 56 λεπ. $\frac{1}{4}$.

Ὁμοίως. Ὁ εἷς πῆχυς τιμᾶται 16 δρ. Πόσον τιμῶνται τὰ 5 ῥούπ.;

16 δρχ. $\times$ 5 ῥούπ. $=16\times0,625=10,000$ δρχ. ἤτοι 10 δρχ.

Πολλαπλασιασμὸς συμμιγῶν κατὰ τὴν μέθοδον τῶν ἁπλῶν μερῶν.

432. Μέθοδος τῶν ἁπλῶν μερῶν λέγεται ὁ τρόπος, καθ' ὃν εὑρίσκομεν τὴν ζητουμένην τιμὴν δοθέντος συμμιγοῦς, ἀναλύοντες τοῦ-

τον εἰς μέρη ἁπλᾶ, ἑκάστου τῶν ὁποίων δυνάμεθα εὐκόλως νὰ εὕρωμεν τὴν τιμήν.

433. Ὅταν πρόκειται νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο συμμιγεῖς ἢ ἀκέραιον ἐπὶ συμμιγῆ, προτιμῶμεν, πρὸς εὐκολίαν τὴν *μέθοδον τῶν ἁπλῶν μερῶν*.

Π ρ ό β λ η μ α 1ον. *Ὁ πῆχυς ὑφάσματός τις τιμᾶται 35* δρχ. *Πόσον τιμῶνται οἱ 4* πήχ. 5 ρούπ.;

Ἐπειδὴ ὁ 1 πήχ. τιμᾶται 35 δραχ., ἄρα οἱ 4 πήχ. τιμῶνται 35 δρχ.$\times$4 ἤτοι 140 δρχ. Διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ καὶ τὴν ἀξίαν τῶν 5 ῥούπ. ἀναλύομεν αὐτὰ εἰς 4 ῥούπ. καὶ 1 ῥούπ. Καὶ τὰ μὲν 4 ῥούπ. εἶνε τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ πήχεως, διὰ τοῦτο θ' ἀξίζουν τὸ $\frac{1}{2}$ τῶν 35 δρχ. ἤτοι 17 δρχ. καὶ 50 λεπ., τὸ δὲ μένον 1 ῥούπ. εἶναι τὸ $\frac{1}{4}$ τῶν 4 ῥουπ. διὰ τοῦτο θ' ἀξίζῃ τὸ τέταρτον τῶν 17 δραχ. 50 λεπ. ἤτοι 4 δρχ. 37 λεπ. $\frac{1}{2}$. Ὥστε οἱ 4 πήχ. 5 ρούπ. τιμῶνται 161 δρχ. 87 λεπ. $\frac{1}{2}$.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς

		35 δρχ.
		4 πήχ. 5 ρούπ.
ἡ ἀξία τῶν 4 πήχεων εἶναι		140 δρχ.
ἡ ἀξία τῶν 5 ρ.	4 ρ. $=\frac{1}{2}$ πήχ. θ' ἀξίζῃ	17 δρχ. 50 λεπ.
	1 ρ. $=\frac{1}{4}$ τῶν 4 ρουπ. θ' ἀξίζῃ	4 δρχ. 37 λεπ. $\frac{1}{2}$
		161 δρχ. 87 λεπ. $\frac{1}{2}$

Π ρ ό β λ η μ α 2ον. *Ἡ ὀκᾶ τοῦ καφὲ ἀξίζει 5* δρχ. *25* λεπ. *Πόσον ἀξίζουν 35* ὀκ. *300* δρμ.;

Ἐπειδὴ ἡ 1 ὀκ. τιμᾶται 5 δρχ. 25 λεπ.. αἱ 35 ὀκ. τιμῶνται 5 δρχ. 25 λεπ.$\times$35 ἤτοι 175 δρχ. 875 λεπ. Διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ καὶ τὴν ἀξίαν τῶν 300 δρμ. ἀναλύομεν αὐτὰ εἰς 200 δρμ. καὶ 100 δρμ. καὶ ἐπειδὴ ἡ 1 ὀκ. ἀξίζει 5 δρχ. 25 λεπ. τὰ 200 δρμ., τὰ ὁποῖα εἶναι τὸ $\frac{1}{2}$ τῆς ὀκᾶς θ' ἀξίζουν τὸ ἥμισυ τῶν 5 δρχ. 25 λεπ. ἤτοι 2 δρχ. 62 λεπ. $\frac{1}{2}$ καὶ τὰ 100 δρμ.. τὰ ὁποῖα εἶναι τὸ ἥμισυ τῶν

200 δρμ. θ' ἀξίζουν τὸ ἥμισυ τῶν 2 δρχ. 62 λεπ. $\frac{1}{2}$ ἤτοι 1 δρχ. 31 λεπ. $\frac{1}{4}$.

῞Ωστε αἱ 35 ὀκ. 300 δρμ. θ' ἀξίζουν 178 δρχ. 968 λεπ. $\frac{3}{4}$ ἤτοι 187 δρχ. 68 λεπ. $\frac{3}{4}$.

῾Η πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς

		5 δρχ. 25 λεπ.
		35 ὀκ. 300 δρμ.
ἡ ἀξία τῶν 35 ὀκ. εἶναι		175 δρ. 875 λεπ.
ἡ ἀξία τῶν 300 δρμ.	τὰ 200 δρμ. $=\frac{1}{2}$ ὀκ.	ἀξίζουν 2δ. 62λ. $\frac{1}{2}$
	τὰ 100 δρμ. $=\frac{1}{2}$ τῶν 200 δρμ.	» 1δ 31λ. $\frac{1}{4}$
		178δ. 968λ. $\frac{3}{4}$
		ἤτοι 187δ. 68λ. $\frac{3}{4}$

᾿Εκ τῆς λύσεως τῶν προβλημάτων τούτων μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

434. *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῆ (ἢ ἀκέραιον) ἐπὶ συμμιγῆ κατὰ τὴν μέθοδον τῶν ἁπλῶν μερῶν, ἀρχόμεθα ἐξ ἀριστερῶν καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸν συμμιγῆ (ἢ τὸν ἀκέραιον) ἐπὶ τὸν πρῶτον ἀριθμὸν τοῦ συμμιγοῦς* (τοῦ ὁποίου τὴν τιμὴν ζητοῦμεν) *καὶ εὑρίσκομεν οὕτω τὸ πρῶτον γινόμενον. ῎Επειτα ἀναλύομεν τὸν δεύτερον ἀριθμὸν τοῦ συμμιγοῦς τούτου εἰς ἄλλους ἀριθμούς, ὧν ἕκαστος νὰ εἶναι μέρος προηγουμένου ἀριθμοῦ, τοῦ ὁποίου τὴν τιμὴν γνωρίζομεν, ὅπως διὰ συγκρίσεως πρὸς τοῦτον εὕρωμεν τὴν τιμήν του. Οὕτω δὲ ἐξακολουθοῦμεν μέχρι τοῦ τελευταίου ἀριθμοῦ τοῦ συμμιγοῦς* (τοῦ ὁποίου τὴν τιμὴν ζητοῦμεν). *῎Αν ὅμως ὁ πρῶτος ἀριθμὸς τοῦ συμμιγοῦς γίνηται ἐκ μονάδος μεγαλητέρας ἐκείνης, τῆς ὁποίας τὴν τιμὴν γνωρίζομεν, τότε κάμνομεν πρῶτον αὐτὸν νὰ γίνηται ἐκ τῆς μονάδος ταύτης καὶ ἔπειτα ἐξακολουθοῦμεν ὡς ἀνωτέρω. ῎Αν δὲ γίνεται ἐκ μονάδος μικροτέρας ἐκείνης τῆς ὁποίας τὴν τιμὴν γνωρίζομεν, τότε ἀναλύομεν αὐτὸν εἰς ἄλλους ἀριθμούς, ὡς ἀνωτέρω καὶ εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν ἑκάστου τούτων.*

Διαιρέτης συμμιγής.

435. Εἰς τὴν διαίρεσιν δύο συμμιγῶν διακρίνομεν δύο περιπτώσεις.

Α'. περίπτωσις. Ὅταν οἱ συμμιγεῖς εἶναι ὁμοειδεῖς καὶ ὁ εἷς εἶναι ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος.

Σημ. α'. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τῆς διαιρέσεως ὑπάγονται τὰ προβλήματα τῆς μετρήσεως (Σελ. 139. § γ'. καὶ δ'.).

Β'. περίπτωσις. Ὅταν οἱ συμμιγεῖς εἶναι ἑτεροειδεῖς ἢ ὁμοειδεῖς καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος.

Σημ. β'. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τῆς διαιρέσεως ὑπάγονται τὰ προβλήματα τοῦ μερισμοῦ (Σελ. 139. § β'.).

436. *Α'. περίπτωσις.*

Πρόβλημα. Ἐργάτης τις λαμβάνει διὰ μίαν ἡμέραν 4 δρχ. 25 λεπ. Πόσας ἡμέρας πρέπει νὰ ἐργασθῇ διὰ νὰ λάβῃ 150 δρχ. 75 λεπ.;

Λύσις. Προφανῶς ὁ ἐργάτης θὰ ἐργασθῇ τόσας ἡμέρας, ὅσας φορὰς περιέχει ὁ 150 δρχ. 25 λεπ. τὸν 4 δρχ. 25 λεπ. καὶ ἐπειδὴ τοῦτο θὰ εὑρίσκωμεν εὐκόλως, διὰ μιᾶς διαιρέσεως, ἐὰν ἀντὶ τῶν δοθέντων συμμιγῶν, εἴχομεν ἀκεραίους ἢ κλάσματα, τὰ ὁποῖα νὰ γίνωνται ἐκ τῆς αὐτῆς συγκεκριμένης μονάδος (Σελ. 139 § γ'.), διὰ τοῦτο τρέπομεν τοὺς συμμιγεῖς 150 δρχ. 75 λεπ. καὶ τὸν 4 δρχ. 25 λεπ. εἰς δραχμὰς ἢ λεπτά, καὶ ἔστω εἰς λεπτά, ὅτε ὁ μὲν εἷς γίνεται 15075 λεπ., ὁ δὲ ἕτερος γίνεται 425 λεπ. Ἔπειτα ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν θέτοντες τὸν ἀριθμὸν 425 λεπ. ὡς διαιρέτην (Σελ. 139 § γ'. Σημ.), ὅτε εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον ἤτοι $15075{:}425{=}35$ ἡμ. 5 ὥρ. $38'\ 49''\ \frac{7}{17}$.

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος τούτου μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

437. *Διὰ νὰ διαιρέσωμεν δύο συμμιγεῖς* (ἢ οἱουσδήποτε ἀριθμούς) *ὁμοειδεῖς, τῶν ὁποίων ὁ εἷς εἶνε ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος, τρέπομεν πρῶτον καὶ τοὺς δύο ἀριθμοὺς εἰς τὴν αὐτὴν μονάδα καὶ εἶτα ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν θέτοντες διαιρέτην τὴν τιμὴν τῆς μιᾶς μονάδος. Τὸ δὲ εἶδος τοῦ πηλίκου προσδιορίζεται ἐκ τῆς ἐκφωνήσεως τοῦ προβλήματος.*

Σημ. Πρὸς εὐκολίαν, ὅπου εἶναι δυνατόν, τρέπομεν καὶ τοὺς δύο συμμιγεῖς εἰς ἀκεραίους τῆς αὐτῆς συγκεκριμένης μονάδος.

438. *Β'. περίπτωσις.*

Πρόβλημα 1ον. *Οἱ 5 πήχ. 6 ρούπ. ὑφάσματός τινος τιμῶνται 3 τάλ. 2 δρχ. Πόσον τιμᾶται ὁ πῆχυς;*

Λύσις. Ἐπειδὴ τὸ πρόβλημα τοῦτο θὰ ἐλύετο εὐκόλως, ἂν ἀντὶ τοῦ συμμιγοῦς 5 πήχ. 6 ρούπ. εἴχομεν ἀκέραιον ἀριθμὸν ἢ κλάσμα πήχεων, διότι τότε θὰ εἴχομεν νὰ διαιρέσωμεν συμμιγῆ δι' ἀκεραίου ἢ κλάσματος (Σελ. 139 § γ'.), διὰ τοῦτο τὸν συμμιγῆ 5 πήχ. 6 ρούπ. τρέπομεν εἰς πήχεις, ὅτε εὑρίσκομεν 5 πήχ. $\frac{6}{8}$ ἢ 5 πήχ. $\frac{3}{4}$ καὶ ἔπειτα ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν, θέτοντες διαιρέτην τὸν $5\frac{3}{4}$ (Σελ. 139 § γ'. Σημ.). Οὕτω δὲ εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον, ἤτοι 2 δρχ. 95 λεπ. $\frac{15}{23}$.

Πρόβλημα. 2όν. *Ὡρολόγιόν τι εἰς 12 ὥρ. 5' μένει ὀπίσω 1 ὥρ. 4' 2''. Πόσον μένει ὀπίσω τὴν ὥραν;*

Λύσις. Ἐπειδὴ τὸ πρόβλημα τοῦτο θὰ ἐλύετο εὐκόλως, ἂν ἀντὶ τοῦ συμμιγοῦς 12 ὥρ. 5' εἴχομεν ἀκέραιον ἀριθμὸν ἢ κλάσμα ὡρῶν (Σελ. 139 § β'.), διότι τότε θὰ εἴχομεν νὰ διαιρέσωμεν σιμμιγῆ δι' ἀκεραίου ἢ κλάσματος, διὰ τοῦτο τρέπομεν τὸν 12 ὥρ. 5' εἰς ἀριθμὸν ὡρῶν, ὅτε εὑρίσκομεν 12 ὥρ. $\frac{5}{60}$ ἤτοι 12 ὥρ. $\frac{1}{12}$. Ἔπειτα ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν, θέτοντες διαιρέτην τὸν 12 ὥρ. $\frac{1}{12}$ (Σελ. 139 § β'. Σημ.). Τοιουτοτρόπως εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον, ἤτοι 5' 17'' $\frac{139}{145}$. Ὥστε εἰς 1 ὥρ. μένει ὀπίσω 5' 17'' $\frac{139}{145}$.

Ἐκ τῆς λύσεως τῶν προβλημάτων τούτων μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

439. *Διὰ νὰ διαιρέσωμεν δύο συμμιγεῖς* (ἢ οἱουσδήποτε ἀριθμούς), *ὁμοειδεῖς ἢ ἑτεροειδεῖς, ὅταν ζητῆται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος, τρέπομεν πρῶτον τὸν ἀριθμόν, τοῦ ὁποίου ἡ τιμὴ τῆς μονάδος ζητεῖται, εἰς ἀριθμὸν γινόμενον ἐκ τῆς μονάδος ταύτης καὶ ἔπειτα ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν, θέτοντες διαιρέτην τὸν ἀριθμόν, τοῦ ὁποίου ἡ τιμὴ τῆς μονάδος ζητεῖται. Τὸ δὲ εἶδος τοῦ πηλίκου προσδιορίζεται ἐκ τῆς ἐκφωνήσεως τοῦ προβλήματος καὶ εἶναι ὁμοειδὲς πρὸς τὸν διαιρετέον.*

Π. χ. Οἱ 5 πήχ. 6 ρ. ὑφάσματος τιμῶνται 3 τάλ. 2 δρχ. Πόσον τιμᾶται τὸ ρούπιον; (36 λεπ. $\frac{44}{46}$.)

Ὁμ. Αἱ 25 δραχμαὶ ἔχουσι 2500 λεπ. Πόσα λεπτὰ ἔχει τὸ τάλληρον; (500 λεπτά)

Γενίκευσις τοῦ τρόπου τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα.

440. *Πρόβλημα* 1ον. *Ὁ πῆχυς ὑφάσματός τινος τιμᾶται 2 δρχ. 25 λεπ. Πόσον τιμῶνται οἱ 4 πήχ. 2 ρούπ.;*

Λύσις. Κατατάσσομεν πρῶτον τὰ ποσὰ τοῦ προβλήματος κατὰ σειράν, γράφοντες ἐρωτηματικὸν εἰς τὸν ἀριθμὸν τοῦ ὁποίου τὴν τιμὴν ζητοῦμεν ἤτοι ὡς ἑξῆς·

1πῆχ. 2δρχ. 25λεπ. 4πήχ. 2ρούπ. ;

Ἔπειτα κάμνομεν τοὺς ὁμοειδεῖς 1 πήχ. καὶ 4 πήχ. 2ρ. νὰ γίνωνται ἐκ τῆς αὐτῆς μονάδος καὶ ἔστω ἐκ τοῦ ρουπίου, ὅτε εὑρίσκομεν

8ρούπ. 2δρχ. 25λεπ. 34ρούπ. ;

Καὶ ἤδη, ἀναχωροῦντες ἐκ τοῦ 8ρ., διότι οὗτος εἶναι ὁμοειδὴς πρὸς τὸν 34ρ., τοῦ ὁποίου τὴν τιμὴν ζητοῦμεν ἔχομεν

Ὅταν τὰ 8ρ. τιμῶνται 2δρχ. 25λεπ.

Τὸ 1ρ. θὰ τιμᾶται $\dfrac{\text{2δρχ. 25λεπ.}}{8}$

καὶ τὰ 34ρ. θὰ τιμῶνται $\dfrac{\text{2δρχ. 25λεπ.} \times 34}{8}$

Ἐκτέλεσις τῆς πράξεως

2δρχ.	25λεπ.		
	34		
76δρχ.	50λεπ.	8	
72δ.		9δχ. 56λ. $\frac{2}{8}$	
4δ.			
100λ.			
400λ.			
50λ.			
450λ.			
50λ.			
2λ.			
0			

Ὥστε τὰ 34ρ. ἤτοι οἱ 4 πήχ. 2 ρ. τιμῶνται 9 δρχ. 56 λ. $\frac{2}{8}$.

Πρόβλημα 2ον. Ἐργάτης τις λαμβάνει διὰ μίαν ἡμέραν 4 δρχ. 25 λεπ., πόσας ἡμέρας θὰ ἐργασθῇ διὰ νὰ λάβῃ 150 δρχ. 75 λεπ.;

Λύσις. Κατατάσσομεν πρῶτον τὰ ποσὰ τοῦ προβλήματος κατὰ σειράν, ὡς ἀνωτέρω, ἤτοι ὡς ἑξῆς:

1ἡμ. 4δρ. 25λ. 150δρ. 75λ. ;

Ἔπειτα κάμνομεν τοὺς ὁμοειδεῖς 4 δρ. 25 λεπ. καὶ 150 δρχ. 75λ. νὰ γίνωνται ἐκ τῆς αὐτῆς μονάδος, καὶ ἔστω ἐκ τοῦ λεπτοῦ, ὅτε ἔχομεν·

1ἡμ. 425λ. 15075λ. ;

Καὶ ἤδη ἀναχωροῦντες ἀπὸ τῶν 425 λ. ἔχομεν

ἀφοῦ διὰ 425 λεπ. ἐργάζεται 1ἡμ.

διὰ 1λεπ. θὰ ἐργασθῇ $\frac{1}{425}$

καὶ διὰ 15075λ. » » $\frac{1 \times 15075\text{ἡμ.}}{425} = 35$ἡμ. 5ὥρ. 38′ 49″ $\frac{7}{17}$

441. Ἐντεῦθεν συνάγομεν, ὅτι τὰ προβλήματα τοῦ *πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως* ἐπὶ ὁποιωνδήποτε ἀριθμῶν λύονται διὰ τοῦ τρόπου τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα, ἀφ' οὗ οὗτος γενικευθῇ ὡς ἑξῆς.

442. *Διὰ νὰ λύσωμεν πρόβλημά τι διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα, καταστρώνομεν πρῶτον τὰ ποσὰ τοῦ προβλήματος εἰς μίαν σειράν. Ἔπειτα κάμνομεν τὰς ὁμοειδεῖς ποσότητας νὰ γίνωνται ἐκ τῆς αὐτῆς μονάδος καὶ ἔπειτα ἀναχωροῦντες ἐκ τῆς ποσότητος, ἡ ὁποία εἶναι ὁμοειδὴς πρὸς ἐκείνην, τῆς ὁποίας τὴν τιμὴν ζητοῦμεν, προσδιορίζομεν ταύτης τὴν τιμὴν τῆς μονάδος της* (ἂν δὲν ἐδόθη), *ἐξ ἧς εὑρίσκομεν ἔπειτα τὴν τιμὴν τῶν ὅλων της μονάδων* (ἂν ἔχῃ καὶ ἄλλας).

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν ἐπὶ τῶν μέτρων, σταθμῶν καὶ νομισμάτων.

Ἀσκήσεις ἐπὶ γραμμικῶν μέτρων.

1) Νὰ τραπῶσι 0,28 μέτρα εἰς δακτύλους (28 δακτύλους)

2) Νὰ τραπῶσι 56,25 χιλιόμετρα εἰς μέτρα (56250 μέτρα)

3) Νὰ τραπῶσι 150,25 μετρ. εἰς πήχεις Ἀθηνῶν.

$\left(\frac{150,25}{0,64}\right.$πηχ. Ἀθ. ἤτοι 234 πηχ. $6\frac{1}{8}$ρουπ.$\left.\right)$

4) Νὰ τραπῶσι 150 πηχ. 3 ρούπ. Ἀθηνῶν εἰς μέτρα.

$$\left(150\frac{3}{8}\times 0{,}64 \text{ ἤτοι } 96{,}24 \text{ μέτρα}\right)$$

5) Νὰ τραπῶσι 150 ὑάρδ. 2 ποδ. Ἀγγλικοὶ εἰς πήχεις Ἀθηνῶν.

$$\left(150\frac{2}{3}\times\frac{0{,}914}{0{,}64} \text{ πηχ. Ἀθηνῶν}\right)$$

Ἀσκήσεις ἐπὶ μονάδων ἐπιφανείας

1) Νὰ τραπῶσι 450 τ. μ. εἰς τ. τεκτον. πήχεις.

$$\left(450\times\frac{16}{9} \text{ ἤτοι } 800 \text{ τ. τεκτον. πηχ.}\right)$$

2) Νὰ τραπῶσι 450,25 τ. τεκτ. πηχ. εἰς τετργ. μέτρα.

$$\left(450{,}25\times\frac{9}{16} \text{ τ. μετρ.}\right)$$

3) Νὰ τραπῶσι 25046,15 τ. μ. εἰς βασιλ. στρέμματα.

(25,04615 β. στρεμ.)

4) Νὰ τραπῶσι 25046,15 τ. μ. εἰς παλαιὰ στρέμματα.

$$\left(\frac{25046{,}15}{1270{,}2} \text{ ἤτοι } 19{,}718 \text{ στρ.}\right)$$

5) Νὰ τραπῶσι 450 τ. ὑάρδαι εἰς τ. μέτρα.

$$(450\times 0{,}914\times 0{,}914 \text{ τ. μέτρα})$$

6) Νὰ τραπῶσι 450 τ. ὑάρδαι εἰς τ. τεκτον. πήχεις.

$$\left(450\times 0{,}914\times 0{,}914\times\frac{16}{9}\right)$$

Ἀσκήσεις ἐπὶ μονάδων ὄγκου ἢ χωρητικότητος

1) Νὰ τραπῶσι 150,25 κ. ὑάρδαι εἰς κ. μέτρα.

$$(150{,}25\times 0{,}914\times 0{,}914\times 0{,}914)$$

2) Νὰ τραπῶσι 150,25 κ. μέτρα εἰς κ. ὀργυιὰς γαλλικάς.

$$\left(\frac{150{,}25}{1{,}949\times 1{,}949\times 1{,}949} \text{ κ. ὀργ. γαλλικαὶ}\right)$$

3) Νὰ τραπῶσιν 150 κουόρτερ 7 βοῦσελ εἰς κουόρτερ

$$150\frac{7}{8} \text{ κουόρτερ}\Big)$$

4) Νὰ τραπῶσι 45 κουόρτερ 7 βοῦσελ εἰς ἑκατόλλιτρα.

$$\left(45\frac{7}{8}\times\frac{290{,}79}{100} \text{ ἑκατολ.}\right)$$

5) Νὰ τραπῶσι 7 γαλον. 6 πιντ. 3 ζιλ. εἰς λίτρας γαλλικάς.

$$\left(\frac{251\times 290{,}79}{2048} \text{ λιτρ. γαλλικ.}\right)$$

Ἀσκήσεις ἐπὶ μονάδων βάρους

1) Νὰ τραπῇ εἷς τόννος βάρους εἰς ὀκάδας.

$$\left(\frac{1000000}{1282} \text{ ἤτοι } 780{,}031 \text{ ὀκ. δηλ. } 780 \text{ ὀκ. περίπου}\right)$$

2) Νὰ τραπῶσιν 1500,8 χιλιογραμ. εἰς ὀκάδας. (1500.8$\times$0,78 ὀκ.)
3) Νὰ τραπῶσι 2500 ὀκ εἰς χιλιόγραμμα. (2500$\times$1,282 χιλιογρ.)
4) Νὰ τραπῶσι 15680 ἑνετικαὶ λίτραι εἰς ὀκάδας.

$\left(15680\times\frac{3}{8}\text{ ὀκάδες}\right)$

5) Νὰ τραπῶσι 15680 ὀκάδες εἰς ἑνετικὰς λίτρας.

$\left(15680\times\frac{8}{3}\text{ ἑνετ. λίτρας}\right)$

6) Νὰ τραπῶσι 15 Ἀγγλ. στατῆρες εἰς ὀκάδας.

$\left(\frac{15\times112\times453,59}{1282}\text{ ὀκάδας}\right)$

7) Νὰ τραπῇ τὸ Ῥωσσικὸν μπέρκοβιτς (ψάθα) εἰς ὀκάδας.

$\left(\frac{10\times10\times409\ 51}{1282}\text{ ὀκάδας}\right)$

Ἀσκήσεις ἐπὶ μονάδων νομισμάτων

1) Ἡ λίρα στερλίνα ἔχει βάρος 7,988 γραμ. καὶ βαθμὸν καθαρότητος $\frac{11}{12}$ ποία εἶναι ἡ ἰσοτιμία αὐτῆς εἰς φράγκα;

Λύσις. Ἐπειδὴ τὸ 1 γραμ. καθαροῦ χρυσοῦ ἔχει $\frac{31}{9}$ φραγ. (§ 415 Σημ.), ἄρα ὁ καθαρὸς χρυσὸς $7,988\times\frac{11}{12}$ γραμ. ἔχει $7,988\times\frac{11}{12}\times\frac{31}{9}$ φραγ. ἤτοι 25,22 φράγκα.

2) Ἡ ἀγγλικὴ λίρα ἔχει 25,22 φραγ. ποία εἶναι ἡ ἰσοτιμία αὐτῆς εἰς χρυσᾶ γρόσια Τουρκίας καὶ ποία εἰς ἀργυρᾶ γρόσια Τουρκίας;

Λύσις. Ἐπειδὴ ἡ Τουρκικὴ λίρα ἤτοι τὰ 22,78 φραγ. ἔχουσι 100 γρόσια χρυσᾶ, ἄρα τὰ 25,22 φραγ.(δηλ., ἡ Ἀγγλικὴ λίρα) θὰ ἔχῃ $\frac{25\ 22}{22,78}$ ἤτοι 110,7 γρόσια χρυσᾶ καὶ ἑπομένως ἀργυρᾶ 110,7$\times$1,08 ἤτοι 119,556 γρόσια ἀργυρᾶ.

3) Μὲ πόσα ὑποθετικῶς χρυσᾶ μάρκα ἰσοδυναμεῖ τὸ χρυσοῦν γιὲν Ἰαπωνικόν;

Λύσις. Ἐπειδὴ τὸ 1 μάρκον ἰσοδυναμεῖ πρὸς 1,234 φραγ., ἄρα τὰ 5,16 φράγκα δηλ. τὸ 1 γιὲν ἰσοδυναμεῖ πρὸς 5,16 : 1,234 ἤτοι 4,18 μάρκα.

4) Τὸ ἀργυροῦν μεντζίτιον ἔχον βάρος 24,055 γραμ. καὶ βαθμὸν καθαρότητος 0,830 μὲ πόσα φράγκα ἰσοδυναμεῖ;

Λύσις. Ἐπειδὴ τὸ 1 γραμ. καθαροῦ ἀργύρου τιμᾶται $\frac{2}{9}$ φραγ. (§ 415 Σημ.), ἄρα τὰ 24,055$\times$0,830 γραμ. καθαροῦ ἀργύρου (δηλ. τὸ μετζίτιον) τιμᾶται $24,055\times0,830\times\frac{2}{9}$ ἤτοι 4,45 φράγκα.

5) Νὰ τραπῇ τὸ ἀργυροῦν σελλίνιον εἰς γρόσια χρυσᾶ Τουρκίας.

Λύσις. Ἐπειδὴ 22,78 φραγ. (δηλ. ἡ λίρα Τουρκίας) ἰσοδυναμεῖ πρὸς 100 γροσ., ἄρα τὸ 1,16 φράγ. (δηλ. τὸ ἀργυροῦν σελλίνιον) ἰσοδυναμεῖ πρὸς 1,16 : 22,78 ἤτοι 5,092 γρόσια χρυσᾶ Τουρκίας.

ΒΙΒΛΙΟΝ Ε΄.

Περὶ τετραγωνικῆς ῥίζης.

443. *Τετραγωνικὴ ῥίζα δοθέντος ἀριθμοῦ λέγεται ὁ ἀριθμός, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐφ' ἑαυτὸν δίδει τὸ μέγιστον τετράγωνον ἐξ ὅσων περιέχονται εἰς τὸν δοθέντα ἀριθμόν.* Καὶ ἂν μὲν τὸ τετράγωνον τοῦτο ἰσοῦται πρὸς τὸν δοθεντα ἀριθμὸν (δηλ. ἂν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶναι τέλειον τετράγωνον), τότε ἡ εὑρεθεῖσα τετραγωνικὴ ῥίζα εἶναι *ἀκριβής*, ἂν δὲ εἶναι μικρότερον τούτου, τότε ἡ εὑρεθεῖσα τετραγωνικὴ ῥίζα εἶναι *κατὰ προσέγγισιν μιᾶς μονάδος, ἐξ ἧς γίνεται ὁ εὑρεθεὶς ἀριθμός.*

Π. χ. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον *τὰ τέλεια τετράγωνα*, ἤτοι οἱ ἀριθμοὶ

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, κ.λ.π.

ἔχουσι *ἀκριβεῖς* τετραγωνικὰς ῥίζας. Εἶναι δὲ αὗται κατὰ σειρὰν οἱ ἑξῆς ἀριθμοὶ

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 κ.λ.π.

Τὰ δὲ *μὴ τέλεια τετράγωνα*, ἤτοι οἱ ἀριθμοὶ

5, 38, 40, 46, 72, 85

ἔχουσι τετραγωνικὰς ῥίζας *κατὰ προσέγγισιν μὲν ἀκεραίας μονάδος* (δηλ, μὲ λάθος ὀλιγώτερον μιᾶς ἀκεραίας μονάδος) κατὰ σειρὰν τὰς ἑξῆς

2, 6, 6, 6, 8, 9

Κατὰ προσέγγισιν δέ, ἐπὶ παραδείγματι, $\frac{1}{10}$ (δηλ. μὲ λάθος ὀλιγώτερον τοῦ $\frac{1}{10}$) ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τῶν εἰρημένων ἀριθμῶν εἶναι κατὰ σειρὰν αἱ ἑξῆς

2,2 6,1 6,3 6,7 8,4 9,2

διότι, ἂν ἕκαστος τούτων ὑψωθῇ εἰς τὸ τετράγωνον, παρέχει ἀριθμὸν μικρότερον τοῦ ἀντιστοίχου του ἀριθμοῦ, ἂν δὲ αὐξηθῇ κατὰ $\frac{1}{10}$ καὶ ὁ προκύπτων ἀριθμὸς ὑψωθῇ εἰς τὸ τετράγωνον παρέχει ἀριθμὸν μεγαλήτερον τοῦ ἀντιστοίχου του ἀριθμοῦ.

Τὸ σημεῖον τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης εἶναι $\sqrt{}$, ὑπὸ τὸ ὁποῖον τίθεται ὁ ἀριθμός, οὗ ζητεῖται ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα.

Π. χ. *Ἡ συμβολικὴ παράστασις* τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ 36 γράφεται $\sqrt{36}$. Εἶναι δὲ ἡ ῥίζα αὕτη ὁ ἀριθμὸς 6, ἤτοι $\sqrt{36}=6$.

444. Πρὸς εὕρεσιν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης παντὸς ἀριθμοῦ διακρίνομεν δύο περιπτώσεις.

Α′.) *Πῶς εὑρίσκεται ἡ ἀκριβὴς ἢ ἡ κατὰ προσέγγισιν μιᾶς ἀκεραίας μονάδος τετραγωνικὴ ῥίζα παντὸς ἀκεραίου ἀριθμοῦ.*

Β′.) *Πῶς εὑρίσκεται ἡ κατὰ προσέγγισιν οἱασδήποτε κλασματικῆς μονάδος τετραγωνικὴ ῥίζα παντὸς ἀκεραίου ἢ κλασματικοῦ ἀριθμοῦ, ὅταν οὗτοι δὲν ἔχωσιν ἀκριβῆ τετραγωνικὴν ῥίζαν.*

Α′. Περίπτωσις.

445. *Θεώρημα. Ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα παντὸς ἀριθμοῦ μικροτέρου τοῦ 100 εἶναι ἀριθμὸς μονοψήφιος.*

Διότι πᾶς ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ 100 περιέχεται μεταξὺ τοῦ 1 καὶ τοῦ 100. Ἐκ τούτων δὲ τῆς μὲν ἀκεραίας μονάδος ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα εἶναι πάλιν ἡ ἀκεραία μονάς, διότι $1\times1=1$, τοῦ δὲ 100 εἶναι ὁ 10, διότι $10\times10=100$. Ἄρα ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα παντὸς ἀριθμοῦ μικροτέρου τοῦ 100 θὰ εἶναι ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ 10 καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι ἀριθμὸς μονοψήφιος.

Π. χ. Ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τῶν ἀριθμῶν 10, 50 57, 99 εἶναι κατὰ σειρὰν οἱ ἀριθμοὶ 3, 7, 7, 9.

446. *Θεώρημα. Ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα παντὸς τριψηφίου ἢ τετραψηφίου ἀριθμοῦ εἶναι ἀριθμὸς διψήφιος.*

Διότι πᾶς τριψήφιος ἢ τετραψήφιος ἀριθμὸς περιέχεται μεταξὺ τοῦ 100 καὶ τοῦ 10000 μικρότερος ὢν τούτου. Ἐκ τούτων δὲ ὁ μὲν 100 ἔχει τετραγωνικὴν ῥίζαν τὸν ἀριθμὸν 10, διότι $10\times10=100$, ὁ δὲ 10000 ἔχει τετραγωνικὴν ῥίζαν τὸν ἀριθμὸν 100, διότι $100\times100=10000$. Ἄρα *πᾶς τριψήφιος ἢ τετραψήφιος ἀριθμὸς* θὰ ἔχῃ τετραγωνικὴν ῥίζαν περιεχομένην μεταξὺ τοῦ 10 καὶ 100 ἤτοι ἀριθμὸν *διψήφιον.*

447. *Θεώρημα. Τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀριθμῶν τούτων ηὐξημένον κατὰ τὸ διπλάσιον τοῦ γινομένου αὐτῶν.*

Διότι $(\alpha+\beta)^2=(\alpha+\beta)\times(\alpha+\beta)=(\alpha+\beta)\times\alpha+(\alpha+\beta)\times\beta=$
$=\alpha\times\alpha+\beta\times\alpha+\alpha\times\beta+\beta\times\beta=\alpha^2+\beta\times\alpha+\alpha\times\beta+\beta^2=$
$=\alpha^2+2\times\alpha\times\beta+\beta^2$

448. *Πόρισμα.* *Ὅταν ἀριθμός τις αὐξηθῇ κατὰ μονάδα τὸ τετράγωνον τούτου εἶναι μεγαλήτερον τοῦ τετραγώνου τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ κατὰ τὸ διπλάσιον τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ ηὐξημένον κατὰ μονάδα.*

Διότι $(\alpha+1)^2-\alpha^2=\alpha^2+2\times\alpha+1-\alpha^2=2\times\alpha+1$

449. Στηριζόμενοι εἰς τὰ ἀνωτέρω θεωρήματα δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν *τὴν ἀκριβῆ ἢ τὴν κατὰ προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος* τετραγωνικὴν ῥίζαν παντὸς ἀκεραίου ἀριθμοῦ· σκεπτόμενοι ὡς ἑξῆς.

Ἔστω π. χ. ὁ ἀριθμὸς 5637. Ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τούτου θὰ εἶναι, ὡς γνωστόν, ἀριθμὸς διψήφιος (§ 446) καὶ ἔστω δ τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων καὶ μ τὸ ψηφίον τῶν μονάδων, τότε ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 5637 θὰ ἔχῃ ἐν ὅλῳ μονάδας $\delta.10+\mu$. Τούτων δὲ τὸ τετράγωνον ηὐξημένον κατὰ τὸ ὑπόλοιπον θὰ δίδῃ τὸν ἀριθμὸν 5637, ἤτοι

$$5637=(\delta.10+\mu)^2+\upsilon$$

ἔνθα υ εἶναι 0, ἂν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς 5637 εἶναι τέλειον τετράγωνον.

Ἀναπτύσσοντες δὲ τὴν ἀνωτέρω ἰσότητα ἔχομεν

$$5637=\delta.^2 10^2+2.\delta.10.\mu+\mu^2+\upsilon \text{ ἢ}$$
$$5637=\delta.^2 100+2.\delta.\mu.10+\mu^2+\upsilon$$

Ἐντεῦθέν δὲ παρατηροῦμεν ὅτι, τὸ δ^2, ὡς πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ 100, δηλοῖ ἑκατοντάδας, δι' ὃ περιέχεται εἰς τὰς ἑκατοντάδας τοῦ ἀριθμοῦ 5637 καὶ ἐπειδὴ τὸ δ ὡρίσαμεν, ὡς ψηφίον τῶν δεκάδων τῆς ῥίζης, ἄρα τὸ δ^2 ἰσοῦται πρὸς τὸ μέγιστον τετράγωνον ἐκ τῶν περιεχομένων εἰς τὰς ἑκατοντάδας, ἤτοι ἐνταῦθα εἶναι

$$\delta^2=49 \text{ ἄρα } \delta=7$$

Ἀντικαθιστῶντες δὲ εἰς τὴν ἀνωτέρω ἰσότητα τὸν δ διὰ τοῦ 7 εὑρίσκομεν

$$5637=4900+2.7.\mu.10+\mu^2+\upsilon$$

καὶ ἀφαιροῦντες ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τὸν ἀριθμὸν 4900 ἔχομεν

$$737=2.7.\mu.10+\mu^2+\upsilon$$

καὶ ἤδη πρὸς εὕρεσιν τῆς τιμῆς τοῦ μ παρατηροῦμεν ὅτι, ὁ ἀριθμὸς $2.7.\mu$, ἤτοι $14.\mu$. ὡς πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 10, δηλοῖ δεκάδας, ἄρα θὰ περιέχηται εἰς τὰς 73 δεκάδας τοῦ ἀριθμοῦ 737. Ἐπειδὴ ὅμως δυνατὸν μὲν ὁ $\mu^2+\upsilon$ νὰ μὴ ἀποτελῇ οὐδεμίαν δεκάδα, διὰ τοῦτο δυνατὸν νὰ εἶναι $14.\mu=73$, ἂν ὅμως ὁ $\mu^2+\upsilon$ ἀποτελῇ ἀριθμόν τινα δεκάδων, τότε αὗται μετὰ τῶν δεκάδων $14.\mu$

θὰ περιέχωνται εἰς τὰς δεκάδας τοῦ ἀριθμοῦ 737, ὅτε θὰ ἔχωμεν $14.\mu<73$ καὶ ἑπομένως γενικῶς θὰ ἔχωμεν

$$14.\mu \leqslant 73 \text{ ἐξ ἧς } \mu \leqslant \frac{73}{14}$$

καὶ ἐπειδὴ ὁ μ δέον νὰ εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός, ***ὡς ψηφίον τῶν μονάδων*** τῆς ῥίζης, διὰ τοῦτο λαμβάνομεν τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ πηλίκου $\frac{73}{14}$, ἤτοι $\mu=5$. Δυνατὸν ὅμως $\left(\text{λόγῳ τῆς σχέσεως } \mu<\frac{73}{14}\right)$, νὰ εἶναι ὁ μ καὶ μικρότερος τοῦ 5. Περὶ τούτου δὲ βεβαιούμεθα δι' ἀμέσου ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν ἀνωτέρω ἰσότητα τοῦ μ διὰ τοῦ 5, ἐξ ἧς εὑρίσκομεν

$$737=14.5.10+5^2+\upsilon \text{ ἢ } 737=725+\upsilon \text{ ἄρα } \upsilon=12$$

Παρατηρητέον δὲ ὅτι, ἀφαιροῦντες ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ 737 τὸν ἀριθμὸν 725 ἤτοι τὸν $14.5.10+5^2$, ἀφῃρέσαμεν τὸ ***διπλάσιον γινόμενον τοῦ πρώτου, ἐπὶ τὸν δεύτερον σὺν τῷ τετραγώνῳ τοῦ δευτέρου,*** ἤτοι τὸ $2.\delta.\mu.10+\mu^2$. Ἐπειδὴ δὲ πρότερον εἴχομεν ἀφαιρέσῃ τὸ τετράγωνον τοῦ πρώτου ἤτοι τὸ $\delta.^2 100$ δηλ. τὸν 4900, ἄρα ἐν ὅλῳ ἔχομεν ἀφαιρέσῃ τὸν $(\delta.10+\mu)^2$, ἤτοι τὸ τετράγωνον τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ ἀριθμοῦ 5637 καὶ οὕτω εὕρομεν *ὑπόλοιπον* 12.

Καὶ οὕτως εὑρέθη ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ ἀριθμοῦ 5637 κατὰ προσέγγισιν μιᾶς ἀκεραίας μονάδος καὶ εἶναι αὕτη ὁ ἀριθμὸς 75.

450. Παρατηρητέον προσέτι, ὅτι τὴν ἀνωτέρω ἰσότητα, ἐξ ἧς εὑρίσκομεν τὸ ὑπόλοιπον, ἤτοι τὴν

$$737=14.5.10+5^2+\upsilon$$

δυνάμεθα νὰ μετασχηματίσωμεν εἰς τὴν ἑξῆς ἰσότητα

$$737=5.\ (14.10+5)+\upsilon=5.\ 145+\upsilon$$

ἐκ ταύτης δὲ παρατηροῦμεν ὅτι, πρὸς εὕρεσιν τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων τῆς ῥίζης, γράφομεν δεξιὰ τοῦ 14, δηλ. *τοῦ διπλασίου τοῦ εὑρεθέντος ψηφίου τῶν δεκάδων τῆς ῥίζης, τὸ ἀκέραιον μέρος* 5 *τοῦ πηλίκου τῆς διαιρέσεως τοῦ συνόλου τῶν δεκάδων τοῦ ὑπολοίπου διὰ τοῦ εἰρημένου διπλασίου*, τὸν δὲ προκύπτοντα ἀριθμὸν 145 πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸ αὐτὸ πηλίκον 5, ὅτε, ἂν μὲν τὸ γινόμενον 5.145 εἶναι ἴσον ἢ μικρότερον τοῦ εὑρεθέντος ὑπολοίπου 737, τότε τὸ εὑρεθὲν πηλίκον 5 εἶναι τὸ *ψηφίον τῶν μονάδων τῆς ῥίζης*, ἄλλως ἐλαττοῦμεν τοῦτο διαδοχικῶς κατὰ μονάδα, μέχρις οὗ τὸ εἰρημένον γινόμενον γείνῃ μικρότερον τοῦ εὑρεθέντος ὑπολοίπου, ὅτε τὸ ψηφίον τοῦτο ἔσται τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τῆς ῥίζης. Τὸ δὲ τελικὸν ὑπόλοιπον εἶναι ἡ διαφορὰ τοῦ εἰρημένου γινομένου ἀπὸ τοῦ προευρεθέντος ὑπολοίπου.

451. Ἂν ἠθέλομεν εὕρῃ, ὡς ἀκέραιον μέρος τοῦ πηλίκου τῆς ἀνωτέρω διαι-

ρέσεως, τὴν ὁποίαν κάμνομεν πρὸς εὕρεσιν τῆς τιμῆς, τοῦ μ ἀριθμὸν διψήφιον, τότε ἀρχίζομεν τὰς δοκιμὰς ἐκ τοῦ 9, διότι ὁ μ, ὡς ψηφίον τῶν μονάδων τῆς ῥίζης εἶναι ἀριθμὸς μονοψήφιος. Ἂν δὲ ἠθέλομεν εὕρῃ, ὡς ἀκέραιον μέρος τοῦ πηλίκου 0, τότε γράφομεν 0, ὡς δεύτερον ψηφίον τῆς ῥίζης.

Διάταξις τῆς πράξεως

56′37	75
49	145
73′7	5
725	725
12	

452. Μετὰ τὰ ἀνωτέρω λεχθέντα δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν παντὸς πολυψηφίου ἀριθμοῦ, σκεπτόμενοι ὡς ἑξῆς.

Ἂν μὲν ὁ ἀριθμὸς εἶναι *πενταψήφιος* ἢ *ἑξαψήφιος*, ἐξάγομεν, ὡς *ἀνωτέρω*, τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις ἀποτελεῖ τὰς *ἑκατοντάδας* τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ καὶ ὅστις θὰ εἶναι *τριψήφιος* ἢ *τετραψήφιος* ἀριθμός.

Ἡ τετραγωνικὴ δὲ ῥίζα τοῦ τοιούτου ἀριθμοῦ θὰ ἀποτελέσῃ, ὡς γνωστόν, τὸν ἀριθμὸν τῶν δεκάδων τῆς ῥίζης, διότι, ὡς εἴδομεν, ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τῶν *ἑκατοντάδων* ἀποτελεῖ τὸν ἀριθμὸν τῶν δεκάδων τῆς ῥίζης. Ἅπαξ δὲ εὑρεθέντος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν δεκάδων τῆς ῥίζης, εὑρίσκομεν, *ὡς ἀνωτέρω*, τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων τῆς ῥίζης καὶ οὕτως εὑρίσκομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ δοθέντος *πενταψηφίου* ἢ *ἑξαψηφίου ἀριθμοῦ*.

Π. χ. Νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ ἀριθμοῦ 45653.

Λύσις. Ἐξάγομεν πρῶτον κατὰ τ' ἀνωτέρω τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ ἀριθμοῦ 456, ὅστις ἀποτελεῖ τὰς ἑκατοντάδας τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ καὶ δὴ

4′5 6	21
4	41
=5′6	1
4 1	41
1 5	

Μετὰ ταῦτα λαμβάνομεν ὑπ' ὄψει ὅτι, ὁ 21, ὡς ὢν ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τῶν 456 ἑκατοντάδων, θ' ἀποτελέσῃ τὸν ἀριθμὸν τῶν δεκάδων τῆς ζητουμένης ῥίζης καὶ μετὰ ταῦτα ζητοῦμεν, ὡς ἀνωτέρω, τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τῆς ῥίζης, λαμβάνοντες ὑπ' ὄψει, ὅτι τὸ ὑπόλοιπον 15 δηλοῖ ἑκατοντάδας, ἐπειδὴ ἔχει περισσεύση ἐκ τῶν 456 ἑκατοντάδων καὶ ὅτι ἔχομεν ἀκόμη 53 μονάδας ἐκ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ καὶ ἑπομένως, ὅτι τὸ ὑπόλοιπον εἶναι 1553. Ἤδη δὲ πρὸς εὕρεσιν τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων τῆς ῥίζης, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμὸν 155 τῶν δεκάδων τοῦ ὑπολοίπου 1553 διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ εὑρεθέντος ἀριθμοῦ 21 τῶν δεκάδων τῆς ῥίζης, ἤτοι τοῦ 42, τὸ δὲ πηλίκον 3 γράφομεν δεξιὰ τοῦ 42 καὶ τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν 423 πολλαπλασιάζομεν, ἐπὶ 3, ὅτε εὑρίσκομεν 423×3 ἤτοι 1269 καὶ οὕτως εὑρίσκομεν ὡς τετραγωνικὴν μὲν ῥίζαν τοῦ 45653 τὸν ἀριθμὸν 213, ὡς ὑπόλοιπον δὲ τὸν ἀριθμὸν 1553—1269, ἤτοι 284.

Διάταξις τῆς πράξεως

4′5 6′5 3	213	
4	41	423
=5′6	1	3
4 1	41	1269
1 5 5′3		
1 2 6 9		
2 8 4		

Καὶ ἤδη γενικώτερον δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν παντὸς *ἑπταψηφίου* ἢ *ὀκταψηφίου* ἀριθμοῦ, εὑρίσκοντες πρῶτον κατὰ τ' ἀνωτέρω τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τῶν *ἑκατοντάδων* τούτου, ὅστις ἔσται *πενταψήφιος* ἢ *ἑξαψήφιος* ἀριθμὸς καὶ τοῦ ὁποίου ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα θ' ἀποτελέσῃ τὸν ἀριθμὸν τῶν δεκάδων τῆς ῥίζης. Εἶτα δὲ εὑρίσκομεν, ὡς ἀνωτέρω, τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων τῆς ῥίζης.

Οὕτω δὲ μαθόντες νὰ ἐξάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν παντὸς *ἑπταψηφίου* ἢ *ὀκταψηφίου* ἀριθμοῦ δυνάμεθα νὰ ἐξαγάγωμεν εἶτα τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν παντὸς *ἐννεαψηφίου* ἢ *δεκαψηφίου* ἀριθμοῦ καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς βαίνοντες, δυνάμεθα νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν παντὸς ἀκεραίου ἀριθμοῦ.

Ἐντεῦθεν πορίζόμεθα τὸν ἑξῆς κανόνα.

453. *Ἵνα ἐξαγάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν παντὸς ἀκεραίου ἀριθμοῦ* (ἀκριβῶς, ἂν εἶναι τέλειον τετράγωνον, ἢ ἄλλως κατὰ προ-

σέγγισιν μονάδος) χωρίζομεν τοῦτον εἰς διψήφια τμήματα ἐκ δεξιῶν πρὸς τ' ἀριστερᾶ, ὅτε τὸ τελευταῖον πρὸς τ' ἀριστερᾶ τμῆμα δύναται νὰ εἶναι διψήφιον ἢ μονοψήφιον.

Μετὰ δὲ ταῦτα ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ πρώτου πρὸς τ' ἀριστερᾶ διψηφίου ἢ μονοψηφίου τμήματος καὶ οὕτως εὑρίσκομεν τὸ πρῶτον ψηφίον τῆς ῥίζης, ὅπερ ὑψοῦντες εἰς τὸ τετράγωνον, τὸ ἀφαιροῦμεν ἐκ τοῦ τμήματος οὗτινος ἐξήχθη ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα, δεξιᾶ δὲ τοῦ προκύπτοντος ὑπολοίπου γράφομεν τὸ ἀμέσως ἑπόμενον διψήφιον τμῆμα.

Τούτου δὲ τοῦ ὑπολοίπου διαιροῦμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν δεκάδων διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ εὑρεθέντος ψηφίου τῆς ῥίζης, τὸ δὲ προκῦπτον ἀκέραιον μέρος τοῦ πηλίκου, γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ εἰρημένου διπλασίου καὶ τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸ εὑρεθὲν πηλίκον. Ὅτε, ἂν μὲν τὸ γινόμενον εἶναι ἴσον, ἢ μικρότερον τοῦ εὑρεθέντος ὑπολοίπου, τότε τὸ εὑρεθὲν ἀκέραιον μέρος τοῦ πηλίκου εἶναι τὸ δεύτερον ψηφίον τῆς ῥίζης, ἄλλως ἐλαττοῦμεν τοῦτο διαδοχικῶς κατὰ μονάδα, μέχρις οὗ τὸ γινόμενον καταστῇ ἴσον ἢ μικρότερον τοῦ εὑρεθέντος ὑπολοίπου, ὅτε τὸ ψηφίον τοῦτο ἔσται τὸ δεύτερον ψηφίον τῆς ῥίζης.

Κατὰ τοῦτον δὲ τὸν τρόπον ἐξακολουθοῦμεν πρὸς εὕρεσιν ἑκάστου τῶν λοιπῶν ψηφίων τῆς ῥίζης, μέχρις οὗ καταβιβάσωμεν καὶ τὸ τελευταῖον διψήφιον τμῆμα καὶ ἐκ τοῦ προκύπτοντος ὑπολοίπου εὕρομεν κατὰ τ' ἀνωτέρω τὸ τελευταῖον ψηφίον τῆς ῥίζης.

Παραδείγματα

```
 15'7 6'0 9 | 397                 16'6 9'2 0 | 408
  9         | 69   | 787          16         | 80  | 808
 ---------- |  9   |   7          ---------- |  0  |   8
  6 7'6     | ---  | ----         = 6'9      | --- | ----
  6 2 1     | 621  | 5509             0      |  0  | 6464
 ---------- |      |             ---------- |     |
 = 5 5 0'9  |      |               6 9 2'0  |     |
   5 5 0 9                         6 4 6 4
 ----------                      ----------
     0                               4 5 6
```

Παρατηρήσεις.

Παρατηρητέον, ὅτι τὸ τελικὸν ὑπόλοιπον δέον νὰ εἶναι πάντοτε ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ διπλασίου τῆς εὑρεθείσης ῥίζης ηὐξημένου κατὰ μονάδα, διότι ἂν τὸ διπλάσιον τῆς εὑρεθείσης ῥίζης ηὐξημένον κατὰ μονάδα προσθέσωμεν εἰς τὸ τετράγωνον τῆς εὑρεθείσης ῥίζης προκύπτει ἀριθμός, τοῦ ὁποίου ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα εἶναι κατὰ μονάδα μεγαλητέρα τῆς εὑρεθε σης (§ 448).

Προσέτι δὲ παρατηρητέον ὅτι, ἐπειδὴ ἐξ ἑκάστου τμήματος προκύπτει καὶ ἓν ψηφίον τῆς ῥίζης, ὁ ἀριθμὸς τῶν ψηφίων τῆς ῥίζης παντὸς ἀριθμοῦ εἶναι ἴσος μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν τμημάτων εἰς ἃ χωρίζεται ὁ πρὸς ἐξαγωγὴν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης δοθεὶς ἀριθμός.

19/11

454. Θεώρημα. *Ἡ κατὰ προσέγγισιν μιᾶς ἀκεραίας μονάδος τετραγωνικὴ ῥίζα παντὸς μικτοῦ ἢ δεκαδικοῦ ἔχοντος ἀκέραιον μέρος, εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ ἀκεραίου αὐτῶν μέρους.*

Διότι οἱ τοιοῦτοι ἀριθμοὶ περιέχονται μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν δηλ. τοῦ ἀκεραίου μέρους τοῦ μικτοῦ ἢ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ καὶ τοῦ ἀμέσως ἑπομένου ἀκεραίου ἀριθμοῦ. Τούτων δὲ ἡ κατὰ προσέγγισιν μιᾶς ἀκεραίας μονάδος τετραγωνικὴ ῥίζα ἢ εἶναι ἡ αὐτή· ἢ τοῦ *μεγαλητέρου* ὑπερέχει κατὰ μίαν ἀκεραίαν μονάδα καὶ ἑπομένως τοῦ μικτοῦ ἢ δεκαδικοῦ, ὡς ὄντος μικροτέρου, θὰ εἶναι μικροτέρα ταύτης καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν ῥίζαν τοῦ ἀκεραίου μέρους τοῦ μικτοῦ ἢ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ.

Π. χ. Ἡ κατὰ προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ $14\frac{3}{4}$ ἢ 14,7432 εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 14, ἤτοι ὁ ἀριθμὸς 3. Διότι ὁ $14\frac{3}{4}$ καὶ 14,7432 περιέχονται μεταξὺ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν 14 καὶ 15, ἑκάτερος τῶν ὁποίων ἔχει τετραγωνικὴν ῥίζαν τὸν 3. Τῶν δὲ $15\frac{3}{4}$ καὶ 15,7432 ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα εἶναι πάλιν ὁ 3, διότι περιέχονται μεταξὺ τοῦ 15 καὶ 16 μικρότεροι ὄντες τοῦ 16, δι' ὃ καὶ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα κατὰ προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος θὰ περιέχεται μεταξὺ 3 καὶ 4, μικροτέρα οὖσα τοῦ 4, ἄρα θὰ εἶναι ὁ 3, ἤτοι ἡ ῥίζα τοῦ ἀκεραίου μέρους.

455. Θεώρημα. *Ἐὰν ἀριθμός τις εἶναι τέλειον τετράγωνον, οἱ ἐκθέται τῶν πρώτων παραγόντων εἰς οὓς ἀναλύεται θὰ εἶναι πολλαπλάσια τοῦ 2.*

Λέγω π. χ. ὅτι, ἐὰν ἀριθμός τις Κ εἶναι τέλειον τετράγωνον, τότε οἱ ἐκθέται τῶν πρώτων αὐτοῦ παραγόντων, εἰς οὓς ἀναλύεται θὰ εἶναι πολλαπλάσια τοῦ 2.

Διότι ὁ ἀριθμὸς Κ, ὡς ὢν τέλειον τετράγωνον προκύπτει ἐκ τῆς τετραγωνικῆς αὐτοῦ ῥίζης, ἀφ' οὗ αὕτη ὑψωθῇ εἰς τὴν δευτέραν δύναμιν. Τοῦτο δὲ κατορθοῦμεν, ὡς γνωστόν, διπλασιάζοντες τοὺς ἐκθέτας τῶν πρώτων παραγόντων, εἰς οὓς ἀναλύεται ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα (§ 143) τοῦ K, ὅτε θὰ προκύψῃ ἀριθμός, οὗτινος οἱ ἐκθέται τῶν πρώτων παραγόντων, εἰς οὓς ἀναλύεται θὰ εἶναι πολλαπλάσια τοῦ 2.

456. *Θεώρημα*. *Ἂν ἀριθμός τις ἀναλελυμένος εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας ἔχει ἐκθέτας πολλαπλάσια τοῦ 2, ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι τέλειον τετράγωνον.*

Ἔστω π. χ. ὅτι ὁ ἀριθμὸς 8100, ὅστις ἀναλυόμενος εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας δίδει $2^2 \times 3^4 \times 5^2$, λέγω ὅτι θὰ εἶναι τέλειον τετράγωνον, ὡς ἔχων ἐκθέτας τῶν πρώτων παραγόντων πολλαπλάσια τοῦ 2.

Διότι ὁ ἀριθμὸς $2^2 \times 3^4 \times 5^2$ δύναται ν' ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον δύο ἴσων ἀριθμῶν, ὧν ἑκάτερον εὑρίσκομεν λαμβάνοντες ἕκαστον τῶν πρώτων παραγόντων τοῦ 8100 μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ἐκθέτου του καὶ δὴ

$$2^2 \times 3^4 \times 5^2 = 2 \times 2 \times 3^2 \times 3^2 \times 5 \times 5 = (2 \times 3^2 \times 5) \times (2 \times 3^2 \times 5)$$

καὶ ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς $(2 \times 3^2 \times 5)$ πολλαπλασιαζόμενος ἐφ' ἑαυτὸν δίδει τὸν $2^2 \times 3^4 \times 5^2$, ἤτοι τὸν 8100, διὰ τοῦτο, ὁ μὲν 8100 θὰ εἶναι *τέλειον* τετράγωνον, ὁ δὲ $(2 \times 3^2 \times 5)$, ἤτοι ὁ 90, θὰ εἶναι ἡ *ἀκριβὴς* τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ ἀριθμοῦ 8100.

Β'. Περίπτωσις

457. *Θεώρημα*. *Ἂν ἀνάγωγον κλάσμα εἶναι τέλειον τετράγωνον, ἑκάτερος τῶν ὅρων αὐτοῦ εἶναι τέλειον τετράγωνον.*

Ἔστω π. χ. ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι ἀνάγωγον καὶ ὅτι εἶναι τέλειον τετράγωνον, λέγω ὅτι ὁ α καὶ β θὰ εἶναι τέλεια τετράγωνα.

Διότι, ἂν εἶναι $\frac{\alpha}{\beta} = \left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2$, τότε τὸ $\frac{\mu}{\nu}$ δύναται νὰ ὑποτεθῇ ἀνάγωγον, διότι ἂν δὲν εἶναι ἀνάγωγον, τὸ καθιστῶμεν τοιοῦτον, διαιροῦντες ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους αὐτοῦ διὰ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν. Ἀλλὰ ἡ ἀνωτέρω ἰσότης δύναται νὰ μετασχηματισθῇ εἰς τὴν ἑξῆς

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\mu}{\nu} \times \frac{\mu}{\nu} = \frac{\mu^2}{\nu^2}$$

καὶ ἐπειδὴ τὸ $\frac{\mu}{\nu}$ εἶναι ἀνάγωγον, δηλ. ἔχει τοὺς ὅρους μ καὶ ν πρώτους πρὸς ἀλλήλους, διὰ τοῦτο καὶ οἱ ὅροι μ^2 καὶ ν^2 εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (§ 240) καὶ ἑπομένως τὸ κλάσμα $\frac{\mu^2}{\nu^2}$ εἶναι ἀνάγωγον. Ἐπειδὴ ὅμως καὶ τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ ὑπετέθη ἀνάγωγον, δέον νὰ εἶναι $\alpha=\mu^2$ καὶ $\beta=\nu^2$ (§ 345. Πόρισμα).

Π. χ. Τὸ ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{25}{49}$ εἶναι τέλειον τετράγωνον, διότι $\frac{25}{49}=\frac{5}{7}\times\frac{5}{7}$. Ἐντεῦθεν δὲ βλέπομεν ὅτι, εἶναι καὶ $25=5\times5=5^2$ καὶ $49=7\times7=7^2$.

Σημ. Πᾶν μὴ ἀνάγωγον κλάσμα δύναται νὰ εἶναι τέλειον τετράγωνον, χωρὶς οἱ ὅροι αὐτοῦ νὰ εἶναι τέλεια τετράγωνα.

Π. χ. Τὸ $\frac{3}{12}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$ διότι $\frac{3}{12}=\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$

458. Θεώρημα. *Ἂν ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ἀκεραίου τινος ἀριθμοῦ δὲν εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός, δὲν εἶναι οὐδὲ κλάσμα.*

Διότι ἔστω ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 2, ἧς ἡ τιμὴ περιέχεται μεταξὺ τοῦ 1 καὶ 2, ὅτι εἶναι τὸ κλάσμα $\frac{\mu}{\nu}$.

Τὸ κλάσμα τοῦτο δυνάμεθα νὰ τὸ ὑποθέσωμεν ἀνάγωγον, διότι ἂν δὲν εἶναι τοιοῦτον, τὸ καθιστῶμεν ἀνάγωγον, ἄνευ βλάβης τῆς ἀξίας αὐτοῦ, ὅτε θὰ ἔχωμεν

Ἐπειδὴ $\sqrt{2}=\frac{\mu}{\nu}$

ἄρα καὶ $2=\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2$ ἐξ ἧς $2=\frac{\mu^2}{\nu^2}$

ἀλλ' ἡ ἰσότης αὕτη εἶναι ψευδής, διότι τοῦ κλάσματος $\frac{\mu}{\nu}$ ὄντος ἀναγώγου καὶ τὸ κλάσμα $\frac{\mu^2}{\nu^2}$ θὰ εἶναι ἀνάγωγον καὶ ἑπομένως ἀδύνατον ὁ ἀριθματὴς μ^2 νὰ διαιρῆται διὰ τοῦ παρονομαστοῦ ν^2, διότι τότε ὁ μ^2 καὶ ν^2 θὰ εἶχον κοινὸν διαιρέτην τὸν ν^2, ὅπερ ἀδύνατον. Ἄρα ψευδὴς εἶναι καὶ ἡ ἰσότης ἐξ ἧς προέκυψεν, ἤτοι ἡ $\sqrt{2}=\frac{\mu}{\nu}$, ἄρα ἀδύνατον ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 2 νὰ εἶναι κλασματικὸς ἀριθμός.

Κατὰ τὸν αὐτὸν ἀκριβῶς τρόπον γίνεται ἡ ἀπόδειξις καὶ γενικῶς ἐπὶ παντὸς ἀριθμοῦ Α, οὗτινος ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα δὲν εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός.

459. Τῶν *ἀκεραίων καὶ κλασματικῶν ἀριθμῶν*, τῶν ὁποίων ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα δὲν ἐξάγεται ἀκριβῶς, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν κατὰ προσέγγισιν οἱασδήποτε κλασματικῆς μονάδος $\frac{1}{\nu}$, σκεπτόμενοι ὡς ἑξῆς.

Ἔστω π.χ. ὅτι τοῦ ἀριθμοῦ Α, μὴ ὄντος τελείου τετραγώνου, ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$, ὅτι εἶναι $\frac{\rho}{\nu}$, (ἔνθα ρ εἶναι ἄγνωστος καὶ ν γνωστός). Τότε κατὰ τὸν ὁρισμὸν (§ 443) θὰ ἔχωμεν

$$\left(\frac{\rho}{\nu}\right)^2 < A < \left(\frac{\rho+1}{\nu}\right)^2 \text{ ἢ}$$

$$\frac{\rho^2}{\nu^2} < A < \frac{(\rho+1)^2}{\nu^2}$$

καὶ πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ ν^2 θὰ ἔχωμεν

$$\rho^2 < A \times \nu^2 < (\rho+1)^2$$

καὶ ἐπειδὴ τὸ μὲν ρ^2 εἶναι μικρότερον τοῦ $A \times \nu^2$, τὸ δὲ $(\rho+1)^2$ εἶναι μεγαλήτερον τούτου, διὰ τοῦτο τὸ ρ εἶναι ἡ κατὰ προσέγγισιν μιᾶς ἀκεραίας μονάδος τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ $A \times \nu^2$ (§ 443). Οὕτω δὲ προσδιοριζομένου τοῦ ρ εὑρίσκεται κατόπιν τὸ $\frac{\rho}{\nu}$, γράφοντες παρονομαστὴν ν εἰς τὴν εὑρεθεῖσαν τιμὴν τοῦ ρ.

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ ζητήματος τούτου ἐξάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

460. *Ἵνα ἐξαγάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$, παντὸς μὴ τελείου τετραγώνου ἀριθμοῦ, πολλαπλασιάζομεν τοῦτον ἐπὶ ν^2, τοῦ δὲ γινομένου ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν κατὰ προσέγγισιν μιᾶς ἀκεραίας μονάδος, καὶ διαιροῦμεν αὐτὴν διὰ τοῦ ν.*

Παραδείγματα.

1) *Νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 3 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{100}$.*

Λύσις. Τὸ $A \times \nu^2 = 3 \times 100^2 = 30000$. Τούτου δὲ ἐξάγοντες τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἔχομεν

3'00'00	173	
1	27	343
20'0	7	3
189	189	1029
110'0		
1029		
=71		

Καὶ ἐπειδὴ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 30000 εἶναι 173, ἄρα ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 3 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{100}$ θὰ εἶναι 173 : 100 ἤτοι 1,73 (ἰδὲ § 460).

2) *Νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 2 κατὰ προσέγγισιν* $\frac{1}{15}$.

Λύσις. Τὸ $A \times \nu^2 = 2 \times 15^2 = 2 \times 225 = 450$. Τούτου δὲ ἡ κατὰ προσέγγισιν μονάδος τετραγωνικὴ ῥίζα, ἐπειδὴ εἶναι 21, ἄρα ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 2 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{15}$ θὰ εἶναι 21:15 ἤτοι $\frac{21}{15}$.

3) *Νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ* $\frac{2}{3}$ *κατὰ προσέγγισιν* $\frac{1}{3}$.

Λύσις. Τὸ $A \times \nu^2 = \frac{2}{3} \times 3^2 = \frac{2}{3} \times 9 = 6$. Τούτου δὲ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα κατὰ προσέγγισιν μιᾶς μονάδος ἐπειδὴ εἶναι 2, ἄρα ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ $\frac{2}{3}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{3}$ εἶναι 2:3 ἤτοι $\frac{2}{3}$.

4) *Νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ* $15\frac{2}{3}$ *κατὰ προσέγγισιν* $\frac{1}{10}$.

Λύσις. Τὸ $A \times \nu^2 = 15\frac{2}{3} \times 10^2 = 15\frac{2}{3} \times 100 = 1566\frac{2}{3}$. Ἡ δὲ τετραγωνική ῥίζα τοῦ 1566 (ἰδὲ § 454) κατὰ προσέγγισιν μιᾶς ἀκεραίας μονάδος, ἐπειδὴ εἶναι 39, ἄρα ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ $15\frac{2}{3}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$ θὰ εἶναι 39 : 10 ἤτοι 3,9.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ἀκέραιος ἀριθμὸς δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον, ἐὰν τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων ὄντος 5, τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων δὲν εἶναι 2 ἤ, ἐὰν τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων ὄντος 6 τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων εἶναι ἄρτιον ἤ, ἐὰν τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων ὄντος 1 ἢ 4 ἢ 9, τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων εἶναι περιττόν.

2) Τὸ τετράγωνον παντὸς περιττοῦ ἀριθμοῦ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 8 ηὐξημένον κατὰ μονάδα.

3) Πᾶς περιττὸς ἀριθμός, ὅστις εἶναι ἄθροισμα δύο τετραγώνων, εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 4 ηὐξημένον κατὰ μονάδα.

Σημ. Ἵνα τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων δύο ἀριθμῶν εἶναι περιττόν, δέον ὁ εἷς νὰ εἶναι ἄρτιος και ὁ ἕτερος περιττός.

4) Ἐὰν κλάσμα τι εἶναι τέλειον τετράγωνον καὶ τὸ γινόμενον

τῶν ὅρων αὐτοῦ εἶναι ἐπίσης τέλειον τετράγωνον. Καὶ ἡ ἀντίστροφος πρότασις ἀληθεύει.

5) Ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων δύο ἀριθμῶν, ὧν οὐδέτερος εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 3, εἶναι πάντοτε διαιρετὴ διὰ τοῦ 3.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΣΤ'.

Περὶ λόγου καὶ περὶ ποσῶν ἀναλόγων.

Λόγος ποσοῦ τινος πρὸς ἕτερον λέγεται ὁ ἀριθμός, ὅστις ἐκφράζει πῶς τὸ ἓν ποσὸν γίνεται ἐκ τοῦ ἑτέρου καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτοῦ ἤ, ὅπερ ταὐτό, *ὁ ἀριθμὸς ἐφ' ὃν πολλαπλασιαζόμενον τὸ ἓν ποσὸν παράγει τὸ ἕτερον.*

Π. χ. *Ὁ λόγος* ἑνὸς τεμαχίου ὑφάσματος Α πρὸς ἕτερον τεμάχιον Β τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος, δεδομένου ὄντος, ὅτι τὸ τεμάχιον Α γίνεται ἐκ τοῦ Β ἐὰν τὸ Β λάβωμεν 3 φορὰς καὶ τὸ *ἕβδομον* τοῦ Β, ἐὰν λάβωμεν 2 φοράς, ἤτοι ἐὰν εἶναι

$$A = B + B + B + \frac{B}{7} + \frac{B}{7}$$

θὰ εἶναι ὁ ἀριθμὸς $3\frac{2}{7}$. Διότι οὗτος ὁ ἀριθμὸς ἐκφράζει πῶς τὸ Α γίνεται ἐκ τοῦ Β καὶ ἐκ τῶν μερῶν τοῦ Β ἢ ὅπερ ταὐτό, διότι τὸ Β πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ $3\frac{2}{7}$ παράγει τὸ Α.

461. *Θεώρημα. Ὁ λόγος δύο ποσῶν ὁμοειδῶν ἰσοῦται μὲ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τῶν παριστώντων αὐτὰ ἀριθμῶν.*

Ἔστω π. χ. ὅτι ἔχομεν δύο τεμάχια ὑφάσματος Α καὶ Β καὶ ὅτι εἶναι

$$A = B + B + \frac{B}{5} + \frac{B}{5} + \frac{B}{5}$$

ὅτε ὁ λόγος τούτων εἶναι $2\frac{3}{5}$.

Ἐὰν ἤδη μετρήσωμεν ταῦτα καὶ τὸ μὲν ἐξαγόμενον τῆς μετρήσεως τοῦ Α δώσῃ τὸν ἀριθμὸν α, τὸ δὲ ἐξαγόμενον τῆς μετρήσεως τοῦ Β δώση τὸν ἀριθμὸν β, προφανῶς θὰ ἔχωμεν τὴν ἑξῆς ἰσότητα τῶν ἀριθμῶν α καὶ β

$$α=β+β+\frac{β}{5}+\frac{β}{5}+\frac{β}{5} \text{ ἢ}$$

$$α=\left(1+1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right).\ β=2\frac{3}{5}\times β$$

καὶ διαιροῦντες ἀμφοτέρους τοὺς ἴσους ἀριθμοὺς α καὶ $3\frac{2}{5}\times β$ διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ β, ἔχομεν $\frac{α}{β}=3\frac{2}{5}$. ὅ, ἐ, δεῖξαι

462. *Δύο ποσὰ λέγονται ἀνάλογα, ὅταν πολλαπλασιαζομένου τοῦ ἑνὸς ἐπὶ τὸν τυχόντα ἀριθμόν, πολλαπλασιάζεται καὶ τὸ ἄλλο ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.*

Π. χ. Ἐὰν ἐργάτης τις διὰ 2 ἡμ. λαμβάνει 5 δραχμάς, διὰ 2×3 ἤτοι 6 ἡμ. θα λάβῃ 5×3 ἤτοι 15 δρχ. καὶ διὰ $2\times4\,^1/_2$ ἤτοι 9 ἡμ. θὰ λάβῃ $5\times4\,^1/_2$ ἤτοι $22\,^1/_2$ δραχμάς, ἄρα ὁ ἀριθμὸς τῶν *ἡμερῶν* πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν *δραχμῶν* εἶναι ἐνταῦθα ποσὰ ἀνάλογα.

463. *Δύο ποσὰ λέγονται ἀντιστρόφως ἀνάλογα, ὅταν πολλαπλασιαζομένου τοῦ ἑνὸς ἐπὶ τὸν τυχόντα ἀριθμόν, τὸ ἕτερον διαιρεῖται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.*

Π. χ. Ἐὰν 50 ἄνδρες περνοῦν 14 ἡμέρας μὲ ποσόν τι τροφῶν, οἱ 50×2 ἤτοι 100 ἄνδρ. θὰ περάσουν $14:2$ ἤτοι 7 ἡμ. μὲ τὸ αὐτὸ ποσὸν τροφῶν καὶ οἱ $50\times3^1/_2$ ἤτοι 175 ἄνδρ. θὰ περάσουν $14:3^1/_2$ ἤτοι 4 ἡμ. μὲ τὸ αὐτὸ ποσὸν τροφῶν.

464. *Δύο ποσὰ λέγονται ἀντίστροφα μεταξύ των, ὅταν τὸ γινόμενόν των ἰσοῦται πρὸς τὴν ἀκεραίαν μονάδα.*

Π.χ. Ὁ ἀριθμὸς $\frac{2}{3}$ εἶναι ἀντίστροφος τοῦ $\frac{3}{2}$, διότι $\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}=1$.

Ὁ δὲ ἀριθμὸς 4 εἶναι ἀντίστροφος τοῦ $\frac{1}{4}$, διότι $4\times\frac{1}{4}=1$.

465. *Θεώρημα. Δύο ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, ὅταν διπλασιαζαμένου, τριπλασιαζομένου κ.τ.λ. τοῦ ἑνός, διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται κ.τ.λ. καὶ τὸ ἕτερον ποσόν.*

Ἔστω π.χ. ὅτι τὰ ποσὰ Α καὶ Β ἔχουσι τὴν ἰδιότητα ταύτην δηλ. ὅταν τὸ ἓν πολλαπλασιάζηται ἐπὶ τὸν τυχόντα *ἀκέραιον* ἀριθμόν. τότε καὶ τὸ ἄλλο νὰ πολλαπλασιάζηται ἐπὶ τὸν *αὐτὸν ἀκέραιον* ἀριθμόν, λέγω ὅτι τὰ ποσὰ ταῦτα θὰ εἶναι ἀνάλογα δηλ. ἄν, ἐπὶ παραδείγματι, τὸ Α ποσόν, πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν τυχόντα ἀριθμὸν $4\frac{3}{5}$ καὶ γείνῃ $A\times 4\frac{3}{5}$, τότε ἡ ἀντίστοιχος τούτου τιμὴ θὰ εἶναι $B\times 4\frac{3}{5}$.

Διότι ἐπειδὴ εἰς Α ἀντιστοιχεῖ τὸ ποσὸν Β

διὰ τοῦτο εἰς τὸ $A\times 4$ *θ' ἀντιστοιχῇ ἐξ ὑποθέσεως* τὸ ποσὸν $B\times 4$

εἰς δὲ τὸ $A\times \frac{1}{5}$ ἤτοι $\frac{A}{5}$ *ὀφείλει ν' ἀντιστοιχῇ* τὸ $\frac{B}{5}$.

Διότι ἔστω ὅτι ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ $\frac{A}{5}$ εἶναι Χ. Ἐπειδὴ δὲ εἰς τὸ *πενταπλάσιον* τοῦ $\frac{A}{5}$, ὅπερ εἶναι τὸ Α, δέον ν' ἀντιστοιχῇ τὸ Β καὶ ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως πενταπλασιαζομένου τοῦ ἑνὸς ποσοῦ πενταπλασιάζεται καὶ ἡ ἀντιστοιχοῦσα τούτου τιμὴ Χ, διὰ τοῦτο ἡ τιμὴ Χ πρέπει νὰ εἶναι τοιαύτη, ὥστε πενταπλασιαζομένη νὰ γείνῃ Β, ἤτοι $X\cdot 5=B$, ἐξ ἧς ἰσότητος (§ 326) εὑρίσκομεν $X=\frac{B}{5}$.

Καὶ ἐπειδὴ εἰς τὸ $\frac{A}{5}$ ἀντιστοιχεῖ, ὡς εὕρωμεν, τὸ $\frac{B}{5}$

ἄρα εἰς 3 φορὰς τὸ $\frac{A}{5}$ ἤτοι $\frac{A\times 3}{5}$ θ' ἀντιστοιχῇ, ἐξ ὑποθέσεως 3 φορὰς τὸ $\frac{B}{5}$ ἤτοι $\frac{B\times 3}{5}$.

Καὶ ἐπομένως ἀπεδείχθη, ὅτι εἰς τὸ $A\times 4\frac{3}{5}$ ἀντιστοιχεῖ τὸ $B\times 4\frac{3}{5}$, ἄρα τὰ ποσὰ Α καὶ Β εἶναι ἀνάλογα, διότι πολλαπλασιασθέντος τοῦ Α ἐπὶ τὸν τυχόντα ἀριθμὸν $4\frac{3}{5}$, ἐπολλαπλασιάσθη καὶ τὸ Β ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν (§ 462).

466. Στηριζόμενοι εἰς τὸ θεώρημα τοῦτο καὶ οὐχὶ εἰς τὸν ὁρισμὸν (§ 462), δυνάμεθα εὐχερέστερον νὰ σπουδάσωμεν δύο ποσά, ἂν εἶναι ἀνάλογα ἢ οὔ.

467. *Θεώρημα. Δύο ποσὰ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα, ὅταν διπλασιαζομένου, τριπλασιαζομένου κ.τ.λ. τοῦ ἑνὸς ποσοῦ, τὸ ἕτερον διαιρεῖται διὰ 2, 3 κ.τ.λ.*

Ἔστω π.χ. ὅτι πολλαπλασιαζομένου τοῦ ποσοῦ Α ἐπί τινα *ἀκέραιον* ἀριθμόν, διαιρεῖται τὸ Β διὰ τοῦ αὐτοῦ *ἀκεραίου* ἀριθμοῦ, λέγω ὅτι τὰ ποσὰ Α καὶ Β εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα δηλ. ἐὰν τὸ Α πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν *τυχόντα ἀριθμόν*, ἔστω $\frac{3}{4}$, τὸ Β *θὰ διαιρεθῇ* διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ $\frac{3}{4}$.

Διότι ἂν εἰς τὸ Α ἀντιστοιχεῖ τὸ Β

εἰς τὸ Α : 4, ἤτοι $\frac{A}{4}$ *ὀφείλει ν' ἀντιστοιχῇ* τὸ $B\times4$

Διότι ἔστω, ὅτι ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ποσοῦ $\frac{A}{4}$ εἶναι Χ. Ἐπειδὴ δὲ εἰς τὴν *τετραπλασίαν* τιμήν τοῦ $\frac{A}{4}$, ἥτις εἶναι Α ἀντιστοιχεῖ ἡ τιμὴ Β καὶ ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως τετραπλασιαζομένου τοῦ ἑνὸς ποσοῦ τὸ ἕτερον διαιρεῖται διὰ τοῦ 4, διὰ τοῦτο ἡ τιμὴ τοῦ Χ δέον νὰ εἶναι τοιαύτη, ὥστε *διαιρουμένη* διὰ 4 νὰ γείνῃ Β, ἤτοι $\frac{X}{4}=B$, ἐξ ἧς ἰσότητος (§ 305) εὑρίσκομεν $X=B\times4$.

Καὶ ἐπειδὴ εἰς $\frac{A}{4}$ ἀντιστοιχεῖ, ὡς εὕρομεν, $B\times4$

ἄρα εἰς τὸ $\frac{A}{4}\times3$ *ὀφείλει ν' ἀντιστοιχῇ* $\frac{B\times4}{3}$

Διότι, ἐπειδὴ εἰς $\frac{A}{4}$, ἀντιστοιχεῖ ἡ τιμὴ $B\times4$, διὰ τοῦτο εἰς *τριπλασίαν* τιμὴν τοῦ $\frac{A}{4}$ ἤτοι εἰς $\frac{A\times3}{4}$ ἀντιστοιχεῖ ἐξ ὑποθέσεως τιμὴ *τρεῖς φορὰς μικροτέρα* τοῦ $B\times4$, ἤτοι $B\times4:3$ δηλ. $\frac{B\times4}{3}$.

Ἄρα τὰ ποσὰ Α καὶ Β εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα, διότι ἀπεδείχθη, ὅτι πολλαπλασιασθέντος τοῦ Α ἐπὶ τὸν τυχόντα ἀριθμὸν $\frac{3}{4}$, τὸ Β διῃρέθη διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ $\frac{3}{4}$.

468. Στηριζόμενοι εἰς τὸ θεώρημα τοῦτο καὶ οὐχὶ εἰς τὸν ὁρισμὸν (§ 463) δυνάμεθα εὐχερέστερον νὰ σπουδάσωμεν δύο ποσά, ἂν εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα ἢ ὄχι.

Παρατήρησις. Τὰ μὲν ἀνάλογα ποσὰ ἐξαρτῶνται κατὰ τοιοῦτον τρόπον μεταξύ των, ὥστε, *ὅταν αὐξάνῃ τὸ ἓν νὰ αὐξάνῃ καὶ τὸ ἄλλο καὶ ὅταν ἐλαττῶται τὸ ἓν νὰ ἐλαττῶται καὶ τὸ ἄλλο*, τὰ δὲ ἀντιστρόφως ἀνάλογα, *ὅταν αὐξάνῃ τὸ ἕν, τὸ ἄλλο νὰ ἐλαττῶται*. Πάντα ὅμως τὰ ποσά, τὰ ὁποῖα *συναυξάνουσι καὶ συνελαττοῦνται* δὲν εἶναι καὶ ἀνάλογα, ὡς καὶ πάντα τὰ ποσά, εἰς τὰ ὁποῖα, ὅταν αὐ-

ξάνῃ τὸ ἕν, τὸ ἄλλο ἐλαττοῦται δὲν εἶναι καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογα.

Π. χ. Τὸ ἀνάστημα παιδός τινος πρὸς τὴν ἡλικίαν του δὲν εἶναι ποσὰ ἀνάλογα, καίτοι συναυξάνουσι μέχρις ὁρίου τινος, διότι *διπλασιαζομένης, τριπλασιαζομένης* κ.τ.λ. τῆς ἡλικίας τοῦ παιδός, τὸ ἀνάστημα τούτου δὲν γίνεται *ἀκριβῶς διπλάσιον, ἀκριβῶς τριπλάσιον* κ.τ.λ.

Ὁμοίως, ἂν δύο ἀχθοφόροι μεταφέρουσι δοκόν τινα ἐξ ἀποστάσεως 5 χιλιομέτρων εἰς 3 ὥρας, διπλάσιοι, τριπλάσιοι κ.τ.λ. ἀχθοφόροι θὰ μετέφερον ταύτην εἰς *ὀλιγώτερον* βεβαίως χρόνον, οὐχὶ ὅμως ἀκριβῶς εἰς τὸ *ἥμισυ*, τὸ *τρίτον* κ.τλ. τοῦ προηγουμένου χρόνου, διὰ τοῦτο ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀχθοφόρων καὶ τῶν ὡρῶν δὲν εἶναι ποσὰ ἀντιστρόφως ἀνάλογα.

469. *Ἓν ποσὸν λέγεται ἀνάλογον πρὸς δύο ἢ περισσότερα ἄλλα ποσά, ὅταν εἶναι ἀνάλογον πρὸς ἕκαστον τῶν ποσῶν τούτων τῶν λοιπῶν μενόντων ἀμεταβλήτων.*

Π. χ. Διὰ νὰ κτίσωμεν τοῖχόν τινα δαπανῶμεν 1000 δρχ., ὅταν οὗτος ἔχει *μῆκος* 20 μέτρων, *πλάτος* 10 μέτρων καὶ *ὕψος* 8 μέτρων. Ἂν ὅμως κτίσωμεν ἐξ ὑλικῶν τῆς αὐτῆς ποιότητος τοῖχον *διπλασίου, τριπλασίου* κ,τ.λ. *μήκους*, πλάτους δὲ καὶ ὕψους τοῦ αὐτοῦ ἢ ἂν κτίσωμεν τοῖχον *διπλασίου, τριπλασίου* κ.τ.λ. *πλάτους*, μήκους δὲ καὶ ὕψους τοῦ αὐτοῦ ἢ ἂν κτίσωμεν τοῖχον *διπλασίου, τριπλασίου* κ.τ.λ. *ὕψους*, μήκους δὲ καὶ πλάτους τοῦ αὐτοῦ, θὰ δαπανήσωμεν προφανῶς διπλασίας, τριπλασίας κ.τ.λ. δραχμάς. Ἄρα τὸ ποσὸν τῶν δραχμῶν εἶναι ἀνάλογον πρὸς τὸ μῆκος, τὸ πλάτος καὶ ὕψος τοῦ κτιζομένου τοίχου.

Περὶ ἀναλογιῶν.

470. *Ἀναλογία λέγεται ἡ ἰσότης δύο λόγων.*

Π. χ. Ἐπειδὴ ὁ λόγος τοῦ 2 πρὸς 3 εἶναι ἴσος τῷ λόγῳ τοῦ 4 πρὸς 6, διὰ τοῦτο ἔχομεν τὴν ἑξῆς ἀναλογίαν

$$\frac{2}{3}=\frac{4}{6}, \text{ ἥτις γράφεται καὶ } 2:3=4:6$$

Οἱ ἀριθμοὶ 2, 3, 4 καὶ 6 λέγονται *ὅροι* τῆς ἀναλογίας. Ἐκ τούτων δὲ οἱ ἀριθμοὶ 2 καὶ 6, οἵτινες κατέχουσι τὰ ἄκρα τῆς ἀναλογίας λέγονται *ἄκροι ὅροι* τῆς ἀναλογίας, οἱ δὲ 3 καὶ 4, οἵτινες κατέχουσι τὸ μέσον τῆς ἀναλογίας, λέγονται μέσοι ὅροι τῆς ἀναλογίας.

471. *Οἱ πρῶτοι ὅροι* ἑκάστου λόγου τῆς ἀναλογίας, λέγονται *ἡγούμενοι*, *οἱ δὲ δεύτεροι ὅροι* ἑκάστου λόγου τῆς ἀναλογίας λέγονται *ἑπόμενοι*.

Π. χ. Εἰς τὴν ἀνωτέρω ἀναλογίαν ὁ 2 καὶ 4 λέγονται *ἡγούμενοι*, οἱ δὲ 3 καὶ 6 λέγονται *ἑπόμενοι* ὅροι τῆς ἀναλογίας.

472. *Ὅταν οἱ μέσοι ὅροι ἀναλογίας τινος εἶναι οἱ αὐτοί, ἡ ἀναλογία λέγεται συνεχής, ὁ δὲ μέσος ὅρος λέγεται μέσος ἀνάλογος τῶν ἄκρων ὅρων τῆς ἀναλογίας.*

Π. χ. Ἐπειδὴ ὁ λόγος $4:8$ ἰσοῦται τῷ λόγῳ $8:16$ ἔχομεν τὴν ἑξῆς *συνεχῆ* ἀναλογίαν $4:8=8:16$. Ὁ δὲ ἀριθμὸς 8 λέγεται *μέσος ἀνάλογος* τοῦ 4 καὶ 16.

473. *Θεώρημα*. ***Εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν τὸ γινόμενον τῶν μέσων ὅρων ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῶν ἄκρων αὐτῆς ὅρων.***

Λέγω π. χ. ὅτι ἂν $\alpha:\beta=\gamma:\delta$, τότε θὰ εἶναι καὶ $\alpha\times\delta=\beta\times\gamma$.

Διότι ἡ ἀναλογία

$$\alpha:\beta=\gamma:\delta \text{ γράφεται καὶ } \frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$$

καὶ πολλαπλασιάζοντες τοὺς ἴσους ἀριθμοὺς $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν $\beta\times\delta$ (δηλ. τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν), ἔχομεν

$$\frac{\alpha}{\beta}\times\beta\times\delta=\frac{\gamma}{\delta}\times\beta\times\delta, \text{ ἐξ ἧς } \alpha\times\delta=\gamma\times\beta \text{ ὅ, ἔ, δ.}$$

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Δεδομένου ὄντος, ὅτι οἱ τρεῖς κατὰ σειρὰν ὅροι τῆς ἀναλογίας εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 3, 4 καὶ 5 νὰ εὑρεθῇ ὁ τέταρτος ὅρος αὐτῆς. $\left(\frac{20}{3}\right)$

2) Δεδομένου ὄντος, ὅτι οἱ ἄκροι ὅροι μιᾶς ἀναλογίας εἶναι 2 καὶ 8, νὰ εὑρεθῇ ὁ μέσος ἀνάλογος ὅρος τῆς ἀναλογίας. (4)

3) Δεδομένου ὄντος, ὅτι $3\times8=4\times6$ νὰ μορφώσητε ἐκ τῶν ἀριθμῶν τούτων ἀναλογίαν τινά.

4) Δεδομένου ὄντος, ὅτι εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν τὸ γινόμενον τῶν μέσων ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῶν ἄκρων, ποίας ἀντιμεταθέσεις δυνάμεθα νὰ κάμωμεν εἰς τοὺς ὅρους ἀναλογίας τινος, εἰς τρόπον ὥστε, νὰ προκύπτῃ ἐξ ἑκάστης ἀντιμεταθέσεως νέα ἀναλογία;

ΒΙΒΛΙΟΝ Ζ΄.

Περὶ τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

474. *Μέθοδος λέγεται τρόπος τις γενικός, κατὰ τὸν ὁποῖον λύονται προβλήματά τινα.*

475. *Ἁπλὴ μέθοδος τῶν τριῶν* λέγεται ἐκείνη, διὰ τῆς ὁποίας λύονται τὰ προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα δίδονται δύο ποσά, τὰ ὁποῖα εἶναι μεταξύ των *ἀνάλογα ἢ ἀντιστρόφως ἀνάλογα* καὶ ζητεῖται ἡ εἰς νέαν τιμὴν τοῦ ἑνὸς τῶν ποσῶν τούτων ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ τοῦ ἑτέρου ποσοῦ.

Σημ Ἡ μέθοδος αὕτη λέγεται τῶν τριῶν, διότι ἡ ἄγνωστος τιμὴ εὑρίσκεται ἐκ τριῶν ἄλλων δεδομένων ἀριθμῶν.

476. Τὰ προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν εἶναι δύο εἰδῶν

Α΄.) *Τὰ προβλήματα εἰς τὰ ὁποῖα τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα καὶ*

Β΄.) *Τὰ προβλήματα εἰς τὰ ὁποῖα τὰ ποσὰ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα.*

477. *Α΄. εἴδους πρόβλημα. Οἱ τρεῖς πήχεις ὑφάσματός τινος τιμῶνται 5,25 δρχ. Πόσον τιμῶνται οἱ 4 πηχ. 3 ρ. ἐκ τοῦ ἰδίου ὑφάσματος;*

Λύσις. Παριστῶμεν τὴν ἄγνωστον τιμὴν διὰ Χ καὶ θέτομεν τὰ δύο πρῶτα ποσὰ εἰς μίαν σειρὰν καὶ κάτωθεν τούτων τὰ ὁμοειδῆ των, ἤτοι ὡς ἑξῆς

$$\frac{3\text{πηχ.}}{4\text{πηχ. }3\text{ρ.}} \qquad \frac{5{,}25\text{δρχ.}}{X}$$

Ἔπειτα κάμνομεν τὰ ὁμοειδῆ ποσὰ νὰ γίνωνται ἐκ τῆς αὐτῆς μονάδος, ὅτε ἔχομεν

$$\frac{24\text{ρ.}}{35\text{ρ.}} \qquad \frac{5{,}25\text{δχρ.}}{X\text{ δρχ}} \qquad (1)$$

καὶ ἤδη λύοντες τὸ πρόβλημα διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα εὑρίσκομεν ὅτι

Ἐπειδὴ τὰ 24ρ. τιμῶνται 5,25 δρχ.

τὸ 1ρ. θὰ τιμᾶται $\frac{5{,}25\text{δχ}}{24}$

καὶ τὰ 35ρ. » τιμῶνται $\frac{5{,}25 \times 35}{24}$

Ὥστε ἡ ζητουμένη τιμὴ τοῦ ἀγνώστου θὰ εἶναι

$$X\ \delta\rho\chi. = \frac{5.25\delta\chi.\times 35}{24}$$

Ἤδη δὲ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψει

α'.) Τὴν κατάταξιν (1) τοῦ προβλήματος

β'.) Ὅτι τὸ ποσὸν τοῦ ὑφάσματος πρὸς τὴν τιμήν του εἶναι ποσὰ ἀνάλογα καὶ

γ'.) Τὴν εὑρεθεῖσαν τιμὴν $X\ \delta\rho\chi. = \frac{5.25\times 35}{24}$, μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς πρακτικὸν κανόνα

478. *Ἵνα εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ ἀγνώστου, ὅταν τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, πολλαπλασιάζομεν τὸν ὑπεράνω τοῦ ἀγνώστου ἀριθμὸν ἐπὶ τὸ κλάσμα ἀντεστραμμένον.*

479. *Β'. εἴδους πρόβλημα. Εἰς 6 ἡμ. 4 ὥρ. τελειώνουσιν ἔργον τι 8 ἐργάται. Πόσοι ἐργάται τελειώνουσι τὸ αὐτὸ ἔργον εἰς 12 ἡμ. 8 ὥρ.;*

Λύσις. Παριστῶμεν τὸν ἄγνωστον ἀριθμὸν τῶν ἐργατῶν διὰ Χ καὶ θέτομεν τὰ δύο πρῶτα ποσὰ εἰς μίαν σειρὰν καὶ κάτωθεν τούτων τὰ ὁμοειδῆ των, ἤτοι ὡς ἑξῆς.

$$\frac{6\text{ἡμ.}\ 4\text{ὥρ.}}{12\text{ἡμ.}\ 8\text{ὥρ.}} \qquad \frac{8\text{ἐργ.}}{X\ \text{ἐργ.}}$$

Ἔπειτα κάμνομεν τὰ ὁμοειδῆ ποσὰ νὰ γίνωνται ἐκ τῆς αὐτῆς μονάδος, ὅτε ἔχομεν

$$\frac{76\text{ὥρ.}}{152\text{ὥρ.}} \qquad \frac{8\text{ἐργ.}}{X\ \text{ἐργ.}} \qquad (1)$$

Καὶ ἤδη λύοντες τὸ πρόβλημα διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα εὑρίσκομεν ὅτι

Ἐπειδὴ εἰς 76 ὥρ. τελειώνουσιν ἔργον τι 8 ἐργάται
» 1 ὥρ. θὰ τὸ τελειώσωσι 8×76 ἐργ.
καὶ » 152 ὥρ. » » » $\frac{8\times 76}{152}$ ἐργ.

Ὥστε ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν εἶναι $X\ \text{ἐργ} = \frac{8\times 76}{152}$

Ἤδη δὲ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψει

α'.) Τὴν κατάταξιν (1) τοῦ προβλήματος

β'.) Ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν ὡρῶν πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν ἐργατῶν εἶναι ποσὰ ἀντιστρόφως ἀνάλογα καὶ

γ'.) Τὴν εὑρεθεῖσαν τιμὴν Χ ἐργάται$= \frac{8\times 76}{152}$ μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς πρακτικὸν κανόνα.

480. *Ἵνα εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ ἀγνώστου, ὅταν τὰ ποσὰ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα, πολλαπλασιάζομεν τὸν ὑπεράνω τοῦ ἀγνώστου ἀριθμὸν ἐπὶ τὸ κλάσμα καθὼς ἔχει.*

Παρατήρησις. Διὰ τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν λύονται πρακτικῶς πάντα τὰ προβλήματα, τὰ ὁποῖα ἄλλως θὰ ἐλύοντο δι' ἑνὸς πολλαπλασιασμοῦ ἢ διὰ μιᾶς διαιρέσεως ἢ διὰ διαιρέσεως ἅμα καὶ πολλαπλασιασμοῦ.

Ἀσκήσεις.

1) *Εἴς τι φρούριον ἦσαν 400 στρατιῶται καὶ εἶχον τροφὰς διὰ 40 ἡμ., ἦλθε δὲ εἰς αὐτοὺς ἐπικουρία ἐξ 100 στρατιωτῶν μὲ 5 ἡμερῶν τροφάς. Ποῖον μέρος τοῦ ἀρχικοῦ σιτηρεσίου πρέπει νὰ λαμβάνῃ ἕκαστος στρατιώτης διὰ νὰ ἐπαρκέσουν αἱ τροφαί των διὰ 40 πάλιν ἡμέρας;*

500 στρατ. 40 ἡμ. $\frac{1 \text{ σιτηρ.}}{X}$ $\frac{20000 \text{ σιτηρ.}}{16500}$

» »

ὅθεν εὑρίσκομεν $X = \frac{165}{200}$ τοῦ ἀρχικοῦ σιτηρεσίου.

2) *Εἴς τι φρούριον ἦσαν 200 στρατιῶται καὶ εἶχον τροφὰς διὰ 50 ἡμέρας. Ἐὰν οὗτοι αὐξηθῶσι κατὰ 250 στρατιώτας, ποῖον μέρος τοῦ ἀρχικοῦ σιτηρεσίου πρέπει νὰ λαμβάνῃ ἕκαστος στρατιώτης διὰ νὰ ἐπαρκέσωσιν αἱ τροφαὶ διὰ 50 πάλιν ἡμέρας;*

$\frac{200\text{στρ.}}{450}$ 50ἡμ. $\frac{1\text{σιτηρ.}}{X}$ ὅθεν $X = 1 \times \frac{200}{450} = \frac{4}{9}$ τοῦ ἀρχικοῦ σιτηρεσίου

»

3) *Εἴς τι φρούριον ἦσαν 200 στρατιῶται καὶ εἶχον τροφὰς διὰ 50 ἡμέρας. Ἐὰν οὗτοι αὐξηθῶσι κατὰ 250 στρατιώτας, πόσας ἡμέρας θὰ περάσωσι;*

$\left(22 \text{ ἡμ. } \frac{2}{9}\right.$, ἤτοι 22 ἡμ. καὶ ἐπερίσσευσαν 100 σιτηρέσια$\left.\right)$

Σημ. Εἰς τὰ προβλήματα τοῦ εἴδους τούτου, δέον τὸ κλάσμα τῆς ἡμέρας νὰ τρέπηται εἰς ἀριθμὸν σιτηρεσίων, διότι ὁ στρατιώτης δὲν τρώγει καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τῆς ἡμέρας συνεχῶς.

4) *Δωμάτιόν τι ἀποτελεῖται ἀπὸ 21 τετραγ. μέτρα. Πόσους πήχεις Ἀθηνῶν θὰ χρειασθῶμεν νὰ στρώσωμεν τὸ δωμάτιον τοῦτο, ἐὰν τὸ ὕφασμα ἔχῃ πλάτος 5 ῥουπίων;* $\left(82 \text{ πηχ. Ἀθ. } \frac{1}{4} \text{ ρουπ.}\right)$

Λύσις. Ἂν τὸ ὕφασμα εἶχε πλάτος 1 μέτρου θὰ ἐχρειαζόμεθα

21 μέτρα μῆκος, ἤδη δέ, ὅτε ἔχει πλάτος 5 ρ. ἤτοι 0,40 μέτρ. πόσα θὰ χρειασθῶμεν;

$$\frac{1\mu.\ \pi\lambda.}{0{,}4} \quad \frac{21\mu\varepsilon\tau.\ \mu\eta\kappa.}{X} \quad \text{ὅθεν } X=21\times\frac{1}{0{,}4}$$

ἤδη δὲ τρέποντες τὰ μέτρα ταῦτα εἰς πήχεις Ἀθηνῶν ἔχομεν $\frac{21}{0{,}64}\times\frac{1}{0{,}4}$, ἤτοι 82 πηχ. Ἀθ. καὶ $\frac{1}{4}$ τοῦ ῥουπίου.

5) *Μία μάνδρα εἶναι 56 τ. μέτρα. Ζητεῖται πόσας πλάκας χρειάζεται νὰ στρωθῇ, ὅταν ἑκάστη πλὰξ εἶναι 0,70 τοῦ τετργ. μέτρου;*

(80 πλάκας)

Σημ. Ἂν εἶχε πλάκας ἑνὸς τετραγ. μέτρου, θὰ ἐχρειάζετο 56 πλάκας, ἤδη ὅτε ἔχει πλάκας 0,70 τοῦ τετργ. μέτρου, πόσας χρειάζεται;

Σύνθετος μέθοδος τῶν τριῶν.

481. *Σύνθετος μέθοδος τῶν τριῶν λέγεται ἐκείνη, διὰ τῆς ὁποίας λύονται προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα μεταβάλλονται δύο ἢ περισσότερα δεδομένα ποσὰ καὶ ζητεῖται ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ ἑτέρου ποσοῦ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀνάλογον ἢ ἀντιστρόφως ἀνάλογον πρὸς ἕκαστον τῶν μεταβληθέντων ποσῶν.*

482. Ἡ μέθοδος αὕτη λέγεται σύνθετος μέθοδος τῶν τριῶν, διότι τὰ προβλήματα τὰ ὁποῖα λύονται διὰ ταύτης ἀναλύονται εἰς δύο ἢ περισσότερα προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν,

Πρόβλημα 1ον. — *10 ναῦται εἰς 20 ἡμέρας ἐδαπάνησαν 45 δρχ. 75 λεπ. εἰς πόσας ἡμέρας 17 ναῦται δαπανῶσι 51 δραχμάς;*

Λύσις. Κατατάσσομεν πρῶτον τὰ ποσὰ εἰς δύο σειρὰς ὡς ἑξῆς.

$$\frac{10\ \text{ναυτ.}}{17} \quad \frac{20\ \text{ἡμ.}}{X} \quad \frac{45\ \text{δρχ. }75\ \text{λεπ.}}{51}$$

Ἔπειτα κάμνομεν τὰ ὁμοειδῆ ποσὰ νὰ γίνωνται ἐκ τῆς αὐτῆς μοναδος, ὅτε ἔχομεν

$$\frac{10\ \text{ναυτ.}}{17} \quad \frac{20\ \text{ἡμ.}}{X} \quad \frac{45{,}75\ \text{δρχ.}}{51}$$

Καὶ τέλος διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα, ἀναλύομεν αὐτὸ εἰς προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν, σκεπτόμενοι ὡς ἑξῆς.

«Οἱ 10 ναῦται εἰς 20 ἡμ. ἐδαπάνησαν 45,75 δρχ. οἱ 17 ναῦται εἰς πόσας ἡμέρας θὰ δαπανήσωσι τὸ αὐτὸ ποσόν;» ἤτοι

$$\frac{10\ \text{ναυτ.}}{17} \quad \frac{20\ \text{ἡμ.}}{X} \quad 45{,}75\ \text{δρχ.}$$

Καὶ ἐπειδὴ *διπλάσιοι ναῦται* εἰς τὸ *ἥμισυ* τῶν 20 ἡμερῶν θὰ δαπανήσωσι τὸ ποσὸν τῶν 45,75 δρχ., ἄρα ὁ ἀριθμὸς *τῶν ναυτῶν* καὶ *τῶν ἡμερῶν* εἶναι ποσὰ *ἀντιστρόφως ἀνάλογα* δι' ὃ ἐφαρμόζοντες τὸν κανόνα (§ 480) εὑρίσκομεν $X=20\times\frac{10}{17}$ ἡμ. ἤτοι οἱ 17 ναῦται θὰ δαπανήσωσι τὰς 45,75 δρχ. εἰς $20\times\frac{10}{17}$ ἡμέρας.

Μετὰ δὲ ταῦτα μεταβάλλοντες καὶ τὸ ποσὸν τῶν δραχμῶν ἀπὸ 45,75 δρχ. εἰς 51 δρχ. εὑρίσκομεν τὴν ἀντίστοιχον τιμὴν τῶν ἡμερῶν, σκεπτόμενοι ὡς ἑξῆς.

οἱ 17 ναυτ. εἰς $\frac{20\times\frac{10}{17}\text{ἡμ.}}{X}$ δαπανῶσι $\frac{45,75 \text{ δρχ.}}{51 \text{ δρχ.}}$

» » » »

Καὶ ἐπειδὴ 17 ναῦται εἰς *διπλασίας* ἡμέρας θὰ δαπανήσωσι *διπλάσιον* ποσὸν δραχμῶν, ἄρα ὁ *ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν* καὶ ὁ *ἀριθμὸς τῶν δραχμῶν* εἶναι ποσὰ *ἀνάλογα*, δι' ὃ ἐφαρμόζοντες τὸν κανόνα (§ 478) εὑρίσκομεν

$$X=20\times\frac{10}{17}\times\frac{51}{45,75} \text{ ἡμέρας}$$

ἤτοι οἱ 17 ναῦται τὰς 51 δραχμὰς δαπανῶσιν εἰς $20\times\frac{10}{17}\times\frac{51}{45,75}$ ἡμέρας, ἤτοι 13 ἡμ. $\frac{7}{61}$.

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος τούτου μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

483. *Ἵνα εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ ἀγνώστου, εἰς τὰ προβλήματα τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν, πολλαπλασιάζομεν τὸν ὑπεράνω τοῦ ἀγνώστου ἀριθμὸν ἐπὶ τὸ κλάσμα ἀνεστραμμένον ἢ καθὼς ἔχει, καθ' ὅσον τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα ἢ ἀντιστρόφως ἀνάλογα.*

Πρόβλημα 2ον. — 15 ἐργάται ἐργαζόμενοι 8 ὥρ. τὴν ἡμέραν ἐχρειάσθησαν 25 ἡμ. διὰ νὰ σκάψωσι τάφρον 180 πηχ. μήκους 5 πηχ. πλάτους καὶ 2 πηχ. βάθους. Εἰς πόσας ἡμέρας 40 ἐργάται ἐργαζόμενοι 10 ὥρ. τὴν ἡμέραν θὰ σκάψωσι τάφρον 120 πηχ. μήκους 3 πηχ. πλάτους καὶ 4 πηχ. βάθους ;

Λύσις. Κατατάσσομεν τὰ ποσὰ εἰς δύο σειράς, ὡς ἀνωτέρω, ἤτοι

$\frac{15\text{ἐργ.}}{40}$ $\frac{8\text{ὥρ.}}{10}$ $\frac{25\text{ἡμ.}}{X}$ $\frac{180 \text{ π. μηκ}}{120}$ $\frac{5 \text{ πχ. πλ.}}{3}$ $\frac{2 \text{ πχ. β.}}{4}$

Κατὰ δὲ τὸν κανόνα (§ 483) ἔχομεν

$$X=25\times\frac{15}{40}\times\frac{8}{10}\times\frac{120}{180}\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{2}=\frac{1\times1\times1\times1\times3\times2}{1\times1\times1\times1}=6 \text{ ἡμ.}$$

Ὥστε οἱ 40 ἐργ. ἐργαζόμενοι 10 ὥρ. τὴν ἡμέραν σκάπτουσι τάφρον 120 πηχ. μήκους 3 πηχ. πλάτους 4 πηχ. βάθους εἰς 6 ἡμέρας.

Παρατήρησις. Τὸ βάθος τῆς τάφρου πρὸς τὰς ἡμέρας δὲν εἶναι ποσὰ ἀνάλογα, διότι διὰ διπλάσιον βάθος δὲν δαπανῶμεν *ἀκριβῶς* διπλάσιον χρόνον, ἀλλὰ περισσότερον τούτου. Τοῦτο δὲ προέρχεται οὐ μόνον, διότι εἶναι δυσκολωτέρα ἡ ἐργασία εἰς βαθύτερον μέρος, ἀλλὰ καὶ λόγῳ τῆς ἐξαγωγῆς τοῦ χώματος ἐκ μεγαλητέρου βάθους. Λόγῳ δὲ τῆς παρεμβολῆς τοῦ στοιχείου τούτου, τὸ πρόβλημα τοῦτο δὲν δύναται νὰ λυθῇ διὰ τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν, εἰμὴ κατὰ προσέγγισιν. Τὸ δὲ ἐξαγόμενον τῶν 6 ἡμ. δέον ν' αὐξήσωμεν ἀκόμη τοὐλάχιστον κατὰ τὸν δαπανώμενον ἐπὶ πλέον χρόνον, διὰ τὴν ἐξαγωγὴν τοῦ χώματος ἐκ μεγαλητέρου βάθους.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Τεμάχιον ὑφάσματος 200 πηχ. μήκους καὶ 5 ῥ. $\frac{1}{3}$ πλάτους τιμᾶται 2000 δρχ. Πόσον ὕφασμα τῆς αὐτῆς ποιότητος καὶ πλάτους 6 ῥουπ. πρέπει νὰ μᾶς δώσωσι μὲ 675 δρχ.; (60 πηχ.).

2) Ἔμπορός τις ἐπώλησεν ὕφασμα 200 πηχ. μήκους καὶ 5 ῥουπ $\frac{1}{3}$ πλάτους ἀντὶ 2000 δρχ. Πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ 60 πηχ. ὕφασμα τῆς αὐτῆς ποιότητος πλάτους ὅμως 6 ῥουπ.; (675 δρχ.).

3) Οἰκόπεδόν τι εἶναι 257,25 τ. μέτρα. Ζητεῖται πόσας πλάκας θέλει νὰ στρωθῇ, ὅταν ἑκάστη πλὰξ ἔχῃ μῆκος 0,75 μετρ. καὶ πλάτους 0,18 μετρ.

(1905 $\frac{5}{9}$ πλάκας, ἤτοι 1905 πλάκας καὶ $\frac{5}{9}$ πλακός).

Σημ. Ἂν τὸ μῆκος ἦτο 1 μετρ. καὶ τὸ πλάτος 1 μετρ. τότε θὰ ἐχρειάζοντο 257,25 πλάκες, ἤτοι 257 τ. πλάκες καὶ 0,25 τῆς τ. πλακός.

4) Βιβλίον τι ἔχει 250 σελίδας, ἑκάστη σελὶς ἔχει 32 στίχους καὶ ἕκαστος στίχος ἔχει 40 γράμματα. Ἐὰν τὸ βιβλίον τοῦτο τυπωθῇ οὕτως, ὥστε εἰς ἑκάστην σελίδα νὰ εἶναι 36 στίχοι καὶ εἰς ἕκαστον στίχον 45 γράμματα, ἐκ πόσων σελίδων θὰ σύγκειται τὸ βιβλίον; (197σελ. $\frac{43}{81}$ ἢ 197σελ. 19στιχ. $\frac{7}{81}$)

Περὶ τόκου.

484. Εἰς τὰ προβλήματα τοῦ τόκου διακρίνομεν τὰ ἑξῆς ποσά· α'.) *Τὸν τόκον*. β'.) *Τὸ ἐπιτόκιον*. γ'.) *Τὸ κεφάλαιον* καὶ δ'.) *Τὸν χρόνον*.

485. *Τόκος* λέγεται τὸ κέρδος, τὸ ὁποῖον λαμβάνει, ὅστις δανείζει χρήματα.

486. *Ἐπιτόκιον* λέγεται ὁ τόκος τῶν 100 δραχμῶν εἰς ἓν ἔτος ἢ εἰς οἱανδήποτε ἄλλην χρονικὴν μονάδα.

487. *Κεφάλαιον* λέγεται τὸ ποσὸν τὸ ὁποῖον δανείζομεν.

488. *Χρόνος* λέγεται ἡ διάρκεια τοῦ δανείου.

Ὁ τόκος εἶναι δύο εἰδῶν

Α'.) *Ἁπλοῦς τόκος* καὶ Β'.) *Σύνθετος τόκος*.

489. *Ἁπλοῦς* λέγεται ὁ τόκος, ὅταν τὸ κεφάλαιον μένῃ τὸ αὐτὸ καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τοῦ δανείου.

490. *Σύνθετος* λέγεται ὁ τόκος, ὅταν εἰς τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους (ἢ ἄλλης χρονικῆς μονάδος) ὁ τόκος προστίθηται εἰς τὸ κεφάλαιον καὶ ἐπιφέρῃ καὶ οὗτος τόκον διὰ τὸ ἑπόμενον ἔτος.

Σημ. Ἐνταῦθα θὰ πραγματευθῶμεν περὶ ἁπλοῦ τόκου.

Τὰ προβλήματα τοῦ ἁπλοῦ τόκου λύονται διὰ τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν, διότι ὁ *τόκος*, τὸ *ἐπιτόκιον*, τὸ *κεφάλαιον* καὶ ὁ *χρόνος* εἶναι μεταξύ των ἀνάλογα ἢ ἀντιστρόφως ἀνάλογα.

491. Ἐπειδὴ εἰς τὰ προβλήματα τοῦ τόκου θὰ εἶναι ἄγνωστος ἢ ὁ *τόκος* ἢ τὸ *κεφάλαιον* ἢ τὸ *ἐπιτόκιον* ἢ ὁ *χρόνος* καὶ γνωστὰ τὰ λοιπὰ τρία ἐκ τῶν ποσῶν τούτων, διὰ τοῦτο διακρίνομεν τέσσαρα εἴδη προβλημάτων τόκου.

Εὕρεσις τοῦ τόκου.

492. Διὰ τοῦ ἀμέσως κατωτέρω προβλήματος θὰ ζητήσωμεν νὰ μορφώσωμεν πρακτικόν τινα κανόνα δι' οὗ νὰ εὑρίσκωμεν τὸν τόκον, καθ' ἣν περίπτωσιν ὁ χρόνος παρέχεται εἰς ἀκέραιον ἢ κλασματικὸν ἀριθμὸν *ἐτῶν* καὶ ἑτέρους κανόνας, καθ' ἣν περίπτωσιν παρέχεται οὗτος εἰς *μῆνας* ἢ εἰς *ἡμέρας*.

Π ρ ό β λ η μ α 1ον. *Αἱ 500 δρχ. εἰς 2 ἔτ. 3 μην. πόσον τόκον φέρουσι πρὸς 9 %;*

Λύσις. Κατατάσσομεν τὰ ποσὰ εἰς δύο σειρὰς ὡς ἑξῆς

$$\frac{100 \text{ δρχ. κεφ.}}{500} \qquad \frac{1 \text{ ἔτ.}}{2 \text{ ἔτ. } 3 \text{ μην.}} \qquad \frac{9 \text{ τοκ.}}{X}$$

Ἔπειτα κάμνομεν τὰ ὁμοειδῆ ποσὰ νὰ γείνωνται ἐκ τῆς αὐτῆς μονάδος καὶ οὕτως ἔχομεν

$$\frac{100 \text{ δρχ. κεφ.}}{500} \qquad \frac{1 \text{ ἔτ.}}{\frac{27}{12} \text{ ἔτ.}} \qquad \frac{9 \text{ τοκ.}}{X}$$

Ἐντεῦθεν δὲ εὑρίσκομεν

$$\chi = 9 \times \frac{500}{100} \times \frac{\frac{27}{12}}{1} \text{ ἤτοι } \frac{500 \text{ κεφ.} \times 9\,\% \times \frac{27}{12} \text{ ετ.}}{100} \quad (1)$$

Ἐκ τῆς μορφῆς ταύτης τοῦ ἐξαγομένου διατυποῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

493. *Ἵνα εὕρωμεν τὸν τόκον πολλαπλασιάζομεν τὸ κεφάλαιον ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιον καὶ ἐπὶ τὸν χρόνον* (τετραμμένον εἰς ἔτη) *καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ 100*.

494. Ἐὰν θέλωμεν νὰ μορφώσωμεν ἰδιαίτερον πρακτικὸν κανόνα πρὸς εὕρεσιν τοῦ τόκου, καθ' ἣν περίπτωσιν ὁ χρόνος παρέχεται εἰς *μῆνας*, τότε πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 12 ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ ἀνωτέρω ἐξαγομένου (1), ὅτε τὰ $\frac{27}{12}$ ἔτους τρέπονται εἰς 27 μῆνας καὶ οὕτως εὑρίσκομεν τὴν παράστασιν

$$\frac{500 \text{ κεφ.} \times 9\,\% \times 27 \text{ μην.}}{1200}$$

Ἐκ δὲ τῆς μορφῆς ταύτης τοῦ ἐξαγομένου διατυποῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα, καθ' ἣν περίπτωσιν ὁ χρόνος παρέχεται εἰς μῆνας.

495. *Ἵνα εὕρωμεν τὸν τόκον πολλαπλασιάζομεν τὸ κεφάλαιον ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιον καὶ ἐπὶ τὸν χρόνον εἰς μῆνας καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ 1200*.

496. Ἐὰν θέλωμεν νὰ μορφώσωμεν ἰδιαίτερον πρακτικὸν κανόνα πρὸς εὕρεσιν τοῦ τόκου, καθ' ἣν περίπτωσιν ὁ χρόνος παρέχεται εἰς *ἡμέρας*, τότε ἂν μὲν τὸ ἔτος ληφθῇ πρὸς 360 ἡμ. ὅτε τὰ 2 ἔτ. 3 μην. τοῦ προβλήματος κάμνουσι 810 ἡμ. ἐκ τοῦ τύπου (1) εὑρίσκομεν

$$X = \frac{500 \text{κεφ.} \times 9\,\% \times \frac{810}{360} \text{ ετ.}}{100} \text{ ἐξ οὗ } \frac{500 \text{ κεφ.} \times 9\,\% \times 810 \text{ ἡμ.}}{36000}$$

"Αν δὲ τὸ ἔτος ληφθῇ πρὸς 365 ἡμ. τότε, δεδομένου ὄντος ὅτι 2 ετ. 3 μην.=821 ἡμ., ἐκ τοῦ τύπου (1) εὑρίσκομεν

$$X=\frac{500\text{ κεφ.}\times 9\,\%\times\frac{821}{365}}{100}\quad\text{ἐξ οὗ}\quad\frac{500\text{ κεφ.}\times 9\,\%\times 821\text{ ἡμ.}}{36500}$$

Ἐκ τῶν μορφῶν δὲ τούτων τοῦ ἐξαγομένου, καθ' ἣν περίπτωσιν ὁ χρόνος παρέχεται εἰς ἡμέρας ἐξάγομεν τὸν ἑξῆς πρακτικὸν κανόνα.

497. *Ἵνα εὕρωμεν τὸν τόκον πολλαπλασιάζομεν τὸ κεφάλαιον ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιον καὶ ἐπὶ τὸν χρόνον εἰς ἡμέρας καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ 36000 ἢ 36500, καθ' ὅσον τὸ ἔτος λαμβάνεται πρὸς 360 ἢ 365 ἡμέρας.*

Εὕρεσις τοῦ κεφαλαίου.

498. Διὰ τοῦ κατωτέρω προβλήματος θὰ ζητήσωμεν νὰ μορφώσωμεν πρακτικὸν κανόνα δι' οὗ νὰ εὑρίσκωμεν τὸ κεφάλαιον, καθ' ἣν περίπτωσιν ὁ χρόνος παρέχεται εἰς *ἀκέραιον* ἢ *κλασματικὸν* ἀριθμὸν ἐτῶν καὶ ἑτέρους κανόνας, καθ' ἣν περίπτωσιν παρέχεται οὗτος εἰς μῆνας ἢ ἡμέρας.

Πρόβλημα 2ον. Ποῖον κεφάλαιον εἰς 3 ἔτη 2 μῆν. φέρει τόκον 45 δρχ. πρὸς 12 %.

$$\frac{100\text{ κεφ.}}{X}\qquad\frac{1\text{ ἔτ.}}{3\text{ ἔτ. } 2\text{ μῆν.}}\qquad\frac{12\text{ τοκ.}}{45\text{ τοκ.}}$$

Κάμνοντες πρῶτον τὰ ὁμοειδῆ ποσὰ νὰ γίνωνται ἐκ τῆς αὐτῆς μονάδος ἔχομεν

$$\frac{100\text{ κεφ.}}{X}\qquad\frac{1\text{ ἔτ.}}{\frac{38}{12}\text{ ἔτ.}}\qquad\frac{12\text{ τοκ.}}{45}$$

Ἐντεῦθεν δὲ εὑρίσκομεν

$$X=100\times\frac{45}{12}\times\frac{1}{\frac{38}{12}}\quad\text{ἤτοι}\quad\frac{45\text{ τοκ.}\times 100}{12\,\%\times\frac{38}{12}\text{ ἔτ.}}\qquad\text{(B)}$$

Ἐκ τῆς μορφῆς ταύτης τοῦ ἐξαγομένου διατυποῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

499. *Ἵνα εὕρωμεν τὸ κεφάλαιον πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν λοιπῶν γνωστῶν* (δηλ. τοῦ ἐπιτοκίου ἐπὶ τὸν χρόνον τετραμμένον εἰς ἔτη).

500. "Αν θέλωμεν νὰ μορφώσωμεν ἰδιαίτερον πρακτικὸν κανόνα πρὸς εὕρεσιν τοῦ κεφαλαίου, καθ' ἣν περίπτωσιν ὁ χρόνος παρέχε-

ται εἰς μῆνας, τότε πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 12 ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ ἀνωτέρω ἐξαγομένου (Β), ὅτε τὰ $\frac{38}{12}$ τοῦ ἔτους τρέπομεν εἰς 38 μην. καὶ οὕτως ἔχομεν τὴν παράστασιν

$$\frac{45 \text{ τοκ.} \times 1200}{12\,\% \times 38 \text{ μῆν.}}$$

Ἐκ δὲ τῆς μορφῆς ταύτης τοῦ ἐξαγομένου μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα, καθ' ἣν περίπτωσιν ὁ χρόνος παρέχεται εἰς μῆνας.

501. *Ἵνα εὕρωμεν τὸ κεφάλαιον πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 1200 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τοῦ ἐπιτοκίου ἐπὶ τὸν χρόνον εἰς μῆνας.*

502. Ἂν θέλωμεν νὰ μορφώσωμεν ἰδιαίτερον πρακτικὸν κανόνα πρὸς εὕρεσιν τοῦ κεφαλαίου, καθ' ἣν περίπτωσιν ὁ χρόνος παρέχεται εἰς *ἡμέρας*, τότε ἂν μὲν τὸ ἔτος λάβωμεν πρὸς 360 ἡμ., ὅτε τὰ 3 ἔτ. 2 μῆν. τοῦ προβλήματος κάμνουσι 1140 ἡμ. ἐκ τοῦ (Β) τύπου εὑρίσκομεν

$$X = \frac{45 \text{ τοκ.} \times 100}{12\% \times \frac{1140}{360}} \quad \text{ἐξ οὗ} \quad \frac{45 \text{ τοκ.} \times 36000}{12\% \times 1140 \text{ἡμ.}}$$

Ἂν δὲ τὸ ἔτος ληφθῇ πρὸς 365 ἡμ. τότε, δεδομένου ὄντος, ὅτι τὰ 3 ἔτ. 2 μην. $=$ 1156 ἡμ. ἐκ τοῦ τύπου (Β) εὑρίσκομεν

$$X = \frac{45 \text{ τοκ.} \times 100}{12\% \times \frac{1156}{365} \text{ἔτ.}} \quad \text{ἐξ οὗ} \quad \frac{45 \text{ τοκ.} \times 36500}{12\% \times 1156 \text{ ἡμ.}}$$

Ἐκ τῶν δύο δὲ τούτων μορφῶν τοῦ ἐξαγομένου, καθ' ἣν περίπτωσιν ὁ χρόνος παρέχεται εἰς *ἡμέρας* ἐξάγομεν τὸν ἑξῆς πρακτικὸν κανόνα πρὸς εὕρεσιν τοῦ κεφαλαίου.

503. *Ἵνα εὕρωμεν τὸ κεφάλαιον πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 36000 ἢ 36500* (καθ' ὅσον τὸ ἔτος λαμβάνεται πρὸς 360 ἢ 365 ἡμέρας) *καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τοῦ ἐπιτοκίου ἐπὶ τὸν χρόνον εἰς ἡμέρας.*

Εὕρεσις τοῦ χρόνου.

504. Διὰ τοῦ ἀμέσως κατωτέρω προβλήματος θὰ ζητήσωμεν νὰ μορφώσωμεν πρακτικὸν κανόνα, δι' οὗ νὰ εὑρίσκωμεν τὸν χρόνον εἰς *ἔτη* καὶ ἑτέρους κανόνας, καθ' ἣν περίπτωσιν θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν χρόνον εἰς *μῆνας* ἢ *ἡμέρας*.

Πρόβλημα 3ον. Κεφάλαιον 1575 δρχ. εἰς πόσον χρόνον δίδει τόκον 472,50 δρχ. πρὸς 10 %.

$$\frac{100 \text{ κεφ.}}{1575} \qquad \frac{1 \text{ ἔτ.}}{X} \qquad \frac{10 \text{ τοκ.}}{472.50} \quad \text{ὅθεν εὑρίσκομεν}$$

$$X = 1 \times \frac{472.50}{10} \times \frac{100}{1575} \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{472{,}50 \text{ τοκ.} \times 100}{10\,\% \times 1575 \text{ κεφ}}$$

Ἐκ τῆς μορφῆς ταύτης τοῦ ἐξαγομένου διατυποῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

505. *Ἵνα εὕρωμεν τὸν χρόνον* (εἰς ἔτη) *πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν λοιπῶν γνωστῶν* (ἤτοι τοῦ ἐπιτοκίου ἐπὶ τὸ κεφάλαιον).

506. Ἂν θέλωμεν νὰ μορφώσωμεν ἰδιαίτερον πρακτικὸν κανόνα πρὸς εὕρεσιν τοῦ χρόνου εἰς *μῆνας*, τότε τὸ δοθὲν πρόβλημα κατατάσσομεν ὡς ἑξῆς.

$$\frac{100 \text{ κεφ.}}{1575} \qquad \frac{12 \text{ μην.}}{X} \qquad \frac{10 \text{ τοκ.}}{472.50} \quad \text{ὅθεν εὑρίσκομεν}$$

$$X = 12 \times \frac{472{,}50}{10} \times \frac{100}{1575} \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{472{,}50 \text{ τοκ.} \times 1200}{10\,\% \times 1575 \text{ κεφ}}$$

Ἐκ δὲ τῆς μορφῆς ταύτης τοῦ ἐξαγομένου διατυποῦμεν τὸν ἑξῆς πρακτικὸν κανόνα, καθ' ἣν περίπτωσιν ὁ ζητούμενος χρόνος παρέχεται εἰς μῆνας.

507. *Ἵνα εὕρωμεν τὸν χρόνον εἰς μῆνας πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 1200 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τοῦ κεφαλαίου ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιον.*

508. Ἂν θέλωμεν νὰ μορφώσωμεν ἰδιαίτερον πρακτικὸν κανόνα πρὸς εὕρεσιν τοῦ χρόνου εἰς *ἡμέρας*, τότε τὸ δοθὲν πρόβλημα κατατάσσομεν ὡς ἑξῆς.

Ἂν μὲν τὸ ἔτος ληφθῇ πρὸς 360 ἡμ. ἔχομεν

$$\frac{100 \text{ κεφ.}}{1575} \qquad \frac{360 \text{ ἡμ.}}{X} \qquad \frac{10}{472{,}50} \quad \text{ὅθεν}$$

$$X = 360 \times \frac{100}{1575} \times \frac{472.50}{10} \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{472{,}50 \text{ τοκ.} \times 36000}{10\,\% \times 1575 \text{ κεφ.}} \qquad \text{(E)}$$

Ἂν δὲ τὸ ἔτος ληφθῇ πρὸς 365 ἡμ., τότε ἔχομεν

$$\frac{100 \text{ κεφ.}}{1575} \qquad \frac{365 \text{ ἡμ.}}{X} \qquad \frac{10 \text{ τοκ.}}{472{,}50} \quad \text{ὅθεν}$$

$$X = 365 \times \frac{100}{1575} \times \frac{472{,}50}{10} \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{472{,}50 \text{ τοκ.} \times 36500}{10\,\% \times 1575 \text{ κεφ.}} \qquad \text{(Z)}$$

Ἐκ τῶν μορφῶν δὲ τούτων (E) καὶ (Z) τοῦ ἐξαγομένου διατυποῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα, καθ' ἣν περίπτωσιν ὁ ζητούμενος χρόνος παρέχεται εἰς ἡμέρας.

509. *Ἵνα εὕρωμεν τὸν χρόνον εἰς ἡμέρας πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 36000 ἢ 36500, καθ' ὅσον τὸ ἔτος λαμβάνεται πρὸς 360 ἢ 365 ἡμέρας καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τοῦ κεφαλαίου ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιον.*

Εὕρεσις τοῦ ἐπιτοκίου.

510. Διὰ τοῦ ἀμέσως κατωτέρου προβλήματος θὰ ζητήσωμεν νὰ μορφώσωμεν πρακτικὸν κανόνα δι' οὗ νὰ εὑρίσκωμεν τὸ ἐπιτόκιον, καθ' ἣν περίπτωσιν ὁ χρόνος παρέχεται εἰς ἔτη καὶ ἑτέρους κανόνας καθ' ἣν περίπτωσιν ὁ χρόνος παρέχεται εἰς *μῆνας* ἢ *ἡμέρας.*

Πρόβλημα 4ον. *Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον κεφάλαιον 800 δρχ. δίδει τόκον 128,50 δρχ. εἰς 2 ετ. 1 μην.*

$$\frac{800\text{κεφ.}}{100}\quad\frac{2\text{ετ.}1\text{μην.}}{1\text{ετ.}}\quad\frac{128{,}50\text{τοκ.}}{X}\qquad\text{ἢ}\qquad\frac{800\text{κεφ.}}{100}\quad\frac{\frac{25\text{ετ.}}{12}}{1}\quad\frac{128{,}50\text{τοκ.}}{X}$$

Ἐντεῦθεν δὲ εὑρίσκομεν

$$\chi = 128{,}50 \times \frac{100}{800} \times \frac{1}{\frac{25}{12}} \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{128{,}50\text{τοκ.} \times 100}{800\text{κεφ.} \times \frac{25\text{ετ.}}{12}} \quad (\text{H})$$

Ἐκ τῆς μορφῆς ταύτης τοῦ ἐξαγομένου διατυποῦμεν τὸν ἑξῆς πρακτικὸν κανόνα.

511. *Ἵνα εὕρωμεν τὸ ἐπιτόκιον πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τοῦ κεφαλαίου ἐπὶ τὸν χρόνον* (εἰς ἔτη).

512. Ἂν θέλωμεν νὰ μορφώσωμεν ἰδιαίτερον πρακτικὸν κανόνα πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐπιτοκίου, καθ' ἣν περίπτωσιν ὁ χρόνος παρέχεται εἰς μῆνας, τότε πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 12 ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ ἀνωτέρω ἐξαγομένου (Η), ὅτε τὰ $\frac{25}{12}$ τοῦ ἔτους τρέπονται εἰς 25 μην. καὶ ἀμέσως ἔχομεν τὴν παράστασιν

$$\frac{128{,}50\text{τοκ.} \times 1200}{800\text{κεφ.} \times 25\text{μην.}}$$

Ἐκ δὲ τῆς μορφῆς ταύτης τοῦ ἐξαγομένου διατυποῦμεν τὸν ἑξῆς πρακτικὸν κανόνα πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐπιτοκίου, ὅταν ὁ χρόνος παρέχηται εἰς μῆνας.

513. *Ἵνα εὕρωμεν τὸ ἐπιτόκιον πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 1200 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τοῦ κεφαλαίου ἐπὶ τὸν χρόνον εἰς μῆνας.*

514. Ἂν θέλωμεν νὰ μορφώσωμεν ἰδιαίτερον πρακτικὸν κανόνα πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐπιτοκίου, καθ' ἣν περίπτωσιν ὁ χρόνος παρέχεται εἰς ἡμέρας, τότε ἂν μὲν τὸ ἔτος λάβωμεν πρὸς 360 ἡμ. ὅτε τὰ 2 ἔτ. 1 μην. τοῦ προβλήματος κάμνουσι 750 ἡμ. ἐκ τοῦ (Η) τύπου εὑρίσκομεν

$$X = \frac{128,50 \text{ τοκ.} \times 100}{800 \text{ κεφ.} \times \frac{750 \text{ ἔτ.}}{360}} \text{ ἐξ οὗ } \frac{128,50 \text{ τοκ.} \times 36000}{800 \text{ κεφ.} \times 750 \text{ ἡμ.}} \quad (\text{K})$$

Ἂν δὲ τὸ ἔτος ληφθῇ πρὸς 365 ἡμ., τότε δεδομένου ὄντος ὅτι τὰ 2 ἔτ. 1 μην.=760 ἡμ. ἐκ τοῦ τύπου (Η) εὑρίσκομεν

$$X = \frac{128,50 \text{ τοκ.} \times 100}{800 \text{ κεφ.} \times \frac{760 \text{ ἔτ.}}{365}} \text{ ἐξ οὗ } \frac{128,50 \text{ τοκ.} \times 36500}{800 \text{ κεφ.} \times 760 \text{ ἡμ.}} \quad (\text{M})$$

Ἐκ τῶν μορφῶν δὲ τούτων (Κ) καὶ (Μ) τοῦ ἐξαγομένου, καθ' ἣν περίπτωσιν ὁ χρόνος παρέχεται εἰς ἡμέρας ἐξάγομεν τὸν ἑξῆς πρακτικὸν κανόνα.

515. *Ἵνα εὕρωμεν τὸ ἐπιτόκιον πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 36000 ἢ 36500, καθ' ὅσον τὸ ἔτος λαμβάνεται πρὸς 360 ἢ 365 ἡμέρας καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τοῦ κεφαλαίου ἐπὶ τὸν χρόνον εἰς ἡμέρας.*

Εὕρεσις τοῦ χρόνου ἢ τοῦ ἐπιτοκίου πρὸς ὃ κεφάλαιόν τι διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται κτλ.

516. *Πρόβλημα* 1ον. *Μετὰ πόσον χρόνον τοκιζόμενον κεφάλαιόν τι διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται κτλ. πρὸς ὡρισμένον ἐπιτόκιον.*

Λύσις. Καλοῦντες Κ τὸ *κεφάλαιον*, ὅτε ὁ *τόκος* θὰ εἶναι Κ ἢ 2×Κ κτλ. καὶ Χ τὸν *χρόνον* καὶ Ε τὸ *ἐπιτόκιον*, ἔχομεν κατὰ τὸν κανόνα (§ 505)

$$X = \frac{\text{K τοκ} \times 100}{\text{K κεφ.} \times \text{E}} \text{ ἤτοι } \frac{100}{\text{E}} \text{ διὰ νὰ διπλασιάζεται καὶ}$$

$$X = \frac{(2.\text{K})\text{τοκ.} \times 100}{\text{K κεφ.} \times \text{E}} = \frac{200}{\text{E}} \text{ διὰ νὰ τριπλασιάζεται.}$$

Ἐντεῦθεν ἐξάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

517. *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν χρόνον* (εἰς ἔτη) *καθ' ὃν κεφάλαιόν τι*

διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται κτλ. πρὸς ὡρισμένον ἐπιτόκιον, διαιροῦμεν τὸ 100, 200 κτλ. διὰ τοῦ ἐπιτοκίου.

Π. χ. Εἰς πόσον χρόνον κεφάλαιόν τι τοκιζόμενον πρὸς 8 % διπλασιάζεται; (100 : 8 = 12 $^1/_2$ ἔτη).

Πρόβλημα 2ον. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον τοκιζόμενον κεφάλαιόν τι διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται κτλ. εἰς ὡρισμένον χρόνον.

Λύσις. Καλοῦντες Κ τὸ *κεφάλαιον*, ὅτε ὁ *τόκος* θὰ εἶναι Κ ἢ 2×Κ κτλ. καὶ Χ τὸν *χρόνον* καὶ Ε τὸ ἐπιτόκιον, ἔχομεν κατὰ τὸν κανόνα (§ 511)

$$\text{Ε}=\frac{\text{Κ τοκ.}\times 100}{\text{Κ κεφ.}\times \text{Χ}} \text{ ἤτοι } \frac{100}{\text{Χ}} \text{ καὶ } \text{Ε}=\frac{(2\ \text{Κ})\text{τοκ.}\times 100}{\text{Κ κεφ.}\times \text{Χ}} \text{ ἢ } \frac{200}{\text{Χ}}.$$

Ἐντεῦθεν ἐξάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

518. *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐπιτόκιον πρὸς ὃ κεφάλαιόν τι διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται κτλ. εἰς ὡρισμένον χρόνον, διαιροῦμεν τὸ 100, 200 κτλ. διὰ τοῦ χρόνου τούτου εἰς ἔτη.*

Π. χ. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον τοκιζόμενον κεφάλαιόν τι διπλασιάζεται εἰς 4 ἔτη; (100 : 4 = 25 %).

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Πόσον τόκον φέρουσιν 8500 δρχ. πρὸς 5 % δι' ἓν ἔτος; (425 δρχ.)

2) Πρὸς πόσον τοῖς ἑκατὸν κεφάλαιον 5500 δρχ. δι' 1 ἔτ. 6 μην. δίδει τόκον 250 δρχ. (3,03... δρχ. %)

3) Πόσον τόκον φέρουσι 15650,75 δρχ. πρὸς 10 % εἰς 2 ἔτ. 27 ἡμ.; (3245,92... δρχ.)

Σημ. Τὸ ἔτος ἐλήφθη πρὸς 365 ἡμ.

4) Κεφάλαιον 6000 δρχ. πρὸς 10 % εἰς πόσον χρόνον δίδει τόκον 100 δρχ.; (2 μῆν.)

5) Πόσον τόκον φέρουσι 15650,75 δρχ. πρὸς 8 % εἰς 4 ἔτ. 3 μῆν.; (5321,25... δρχ.)

6) Ἠγόρασέ τις ἔλαιον πρὸς 1,12 δρχ. τὴν ὀκᾶν καὶ τὸ πωλεῖ μετὰ 5 μῆνας πρὸς 1,45 δρχ. τὴν ὀκᾶν. Πόσον τοῖς ἑκατὸν κερδίζει; (70,71... δρχ. %)

7) Ἠγόρασέ τις 500 πήχ. ὑφάσματος ἀντὶ 225 δρχ., μετὰ ἓν δὲ ἔτος τοὺς πωλεῖ 255,50 δρχ. Πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐκέρδησεν; (13,55... δρχ. %)

8) Εἰς πόσα ἔτη κεφάλαιον 750 δρχ. πρὸς 8 % διπλασιάζεται; (12 $^1/_2$ ἔτη)

9) Οἰνοπώλης ἠγόρασε 1000 ὀκ. οἴνου πρὸς 40 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν. Πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ τὴν ὀκᾶν μετὰ ἓν ἔτος διὰ νὰ κερδήσῃ 15 %; (46 λεπτὰ)

10) Ἔμπορός τις ἠγόρασεν 850 ὀκ. ζακχάρεως πρὸς 1,20 δρχ. τὴν ὀκάν, ἐπώλησε δὲ αὐτὴν μετὰ 8 μῆνας πρὸς 1,42 δρχ. τὴν ὀκάν. Πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐκέρδισεν; (27,50 $^0/_0$)

11) Ὁμολογία τις φέρει ἐτήσιον εἰσόδημα 25 φραγ. χρυσᾶ, ἠγοράσθη δὲ 350 δρχ. χαρτίνας. Πόσον τοῖς $^0/_0$ κερδίζει, ὅταν 20 φράγκα τιμῶνται 28,50 δρχ. χαρτίνας; (10,18 $^0/_0$)

12) Ἠγόρασέ τις οἰκόπεδον πρὸς 25 δρχ. τὸν τετραγωνικὸν τεκτονικὸν πῆχυν καὶ μετὰ 8 μῆνας θέλει νὰ τὸ πωλήσῃ μὲ τὸ τετραγ. μέτρον καὶ νὰ κερδήσῃ 10 $^0/_0$ ἐπὶ τῶν χρημάτων του. Ζητεῖται πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ τὸ τετραγ. μέτρον; (47,40... δρχ.)

Περὶ ὑφαιρέσεως.

519. Ὅταν δανείζηταί τις χρήματα πληρωτέα μετὰ ὡρισμένον χρόνον, ὑπολογίζεται διὰ τὸν χρόνον τοῦτον ὁ τόκος των, ὅστις προστίθεται εἰς τὰ δανεισθέντα χρήματα καὶ ἐκδίδεται διὰ τὸ προκῦπτον ποσὸν γραμμάτιον, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ πληρωθῇ κατὰ τὴν λῆξιν τοῦ ὁρισθέντος χρόνου.

520. *Ὀνοματικὴ ἀξία* γραμματίου τινὸς λέγεται τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον ἀναγράφεται ἐν τῷ γραμματίῳ.

Σημ. *Ἡ ὀνοματικὴ ἀξία* τοῦ γραμματίου γίνεται *πραγματικὴ* τὴν ἡμέραν, κατὰ τὴν ὁποίαν λήγει τὸ γραμμάτιον.

521. *Ὑφαίρεσις λέγεται τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον ἐκπίπτεται ἀπὸ γραμμάτιον τι, ὅταν τοῦτο πληρώνηται πρὸ τῆς λήξεως τῆς προθεσμίας του.*

Ὑφαιρέσεις ὑπάρχουσι δύο εἰδῶν.

α'.) Ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις καὶ β'.) ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις.

Περὶ ἐξωτερικῆς ὑφαιρέσεως.

522. *Ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις γραμματίου τινος λέγεται ὁ τόκος τῆς ὀνοματικῆς αὐτοῦ ἀξίας ἀπὸ τῆς ἡμέρας τῆς προεξοφλήσεως μέχρι τῆς ἡμέρας τῆς λήξεώς του.*

523. *Ἐξωτερικὴ ἀξία* γραμματίου τινος πρὸ τῆς λήξεώς του λέγεται τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τῆς ἐξωτερικῆς ὑφαιρέσεως ἀπὸ τῆς ὀνοματικῆς ἀξίας τοῦ γραμματίου.

Σημ. Ὅταν εἰς πρόβλημά τι τῆς ἐξωτερικῆς ὑφαιρέσεως εἶναι ἄγνωστος *ἡ ὀνοματικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου* (κεφάλαιον) ἢ *ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις* (τόκος) ἢ *ὁ χρόνος τῆς προεξοφλήσεως* ἢ τὸ *ἐπιτό-*

κιον καὶ γνωστὰ τὰ λοιπὰ τρία ἐκ τούτων, τότε τὸ τοιοῦτον πρόβλημα οὐδόλως διαφέρει τῶν προβλημάτων τοῦ τόκου.

Πρόβλημα 1ον. *Γραμμάτιόν τι 500 δρχ. ἐξοφλεῖται 3 μην. πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 12 %. Ζητεῖται ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις καὶ ἡ ἐξωτερικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου.*

Λύσις. Λαμβάνομεν τὸν τόκον τῶν 500 δρχ. διὰ 3 μην. πρὸς 12 %, ὅτε εὑρίσκομεν 15 δρχ. Ὥστε ἡ *ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις* τοῦ γραμματίου τῶν 500 δρχ. διὰ 3 μην. πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 12 % εἶναι 15 δρχ. Ἄρα ἡ *ἐξωτερικὴ ἀξία* τοῦ γραμματίου θὰ εἶναι 500 δρχ.—15 δρ. ἤτοι 485 δραχ.

Πρόβλημα 2ον. *Ποία εἶναι ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία γραμματίου τοῦ ὁποίου ἡ ἐξωτερικὴ ἀξία 5 μην. πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 12 % εἶναι 498,75 δρχ.*

Λύσις. Λαμβάνομεν αὐθαιρέτως ὡς *ὀνοματικὴν ἀξίαν γραμματίου* τινος ποσόν τι χρημάτων καὶ ἔστω 100 δρχ. καὶ τὸ τοκίζομεν διὰ 5 μην. πρὸς 12 %, ὅτε εὑρίσκομεν τόκον 5 δρχ. Τοῦτον δὲ τὸν τόκον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὰς 100 δρχ. καὶ οὕτως εὑρίσκομεν 95 δρχ. Αὗται δὲ αἱ 95 δρχ. εἶναι ἡ *ἐξωτερικὴ ἀξία* τοῦ γραμματίου τῶν 100 δρχ. ἐξοφληθέντος 5 μην. πρὸ τῆς λήξεως πρὸς 12 %. Μετὰ δὲ ταῦτα σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς·

«Αἱ 95 δρχ. ἔχουσιν ὀνοματικὴν ἀξίαν 100 δρχ. Αἱ 498,75 δρ. πόσην ἔχουσιν ὀνοματικὴν ἀξίαν;»

$$\frac{95 \text{ δρ}}{498{,}75} \qquad \frac{100 \text{ ὀνμ. ἀξ}}{X} \qquad \text{ὅθεν } X \text{ ὀνμ. ἀξ.} = 100 \times \frac{498{,}75}{95} = 525 \text{ δρχ.}$$

Περὶ ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως.

524. *Πραγματικὴ ἀξία γραμματίου τινος πρὸ τῆς λήξεώς του λέγεται τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ πληρώσωμεν πρὸς ἐξόφλησιν αὐτοῦ πρὸ τῆς λήξεως.*

Σημ. Ἡ πραγματικὴ ἀξία γραμματίου τινος πρὸ τῆς λήξεώς του, ἐὰν *αὐξηθῇ κατὰ τὸν τόκον αὐτῆς* διὰ τὸν χρόνον, ὅστις παρέρχεται ἀπὸ τῆς ἡμέρας τῆς προεξοφλήσεως τοῦ γραμματίου μέχρι τῆς ἡμέρας τῆς λήξεως αὐτοῦ, πρέπει νὰ δίδῃ τὴν ὀνοματικὴν ἀξίαν τοῦ γραμματίου.

525. *Ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις γραμματίου τινος λέγεται ὁ τόκος τῆς πραγματικῆς αὐτοῦ ἀξίας ἀπὸ τῆς ἡμέρας τῆς προεξοφλήσεως μέχρι τῆς ἡμέρας τῆς λήξεως αὐτοῦ.*

Σημ. Ὅταν εἰς πρόβλημά τι τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως εἶναι ἄγνωστος *ἡ πραγματικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου* (κεφάλαιον) ἢ *ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις* (τόκος) ἢ *ὁ χρόνος τῆς προεξοφλήσεως* ἢ *τὸ ἐπιτόκιον* καὶ γνωστὰ τὰ λοιπὰ τρία τούτων, τότε τὸ τοιοῦτον πρόβλημα οὐδόλως διαφέρει τῶν προβλημάτων τοῦ τόκου.

Πρόβλημα 4ον. Γραμμάτιόν τι 500 δρχ. ἐξοφλεῖται 3 μην. πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 12 %. Ζητεῖται ἡ πραγματική του ἀξία καὶ ἡ ἐσωτερική του ὑφαίρεσις.

Λύσις. Μορφοῦμεν πρῶτον βοηθητικόν τι γραμμάτιον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ κοινὸν μετὰ τοῦ δοθέντος γραμματίου, τὸν χρόνον τῆς προεξοφλήσεως (δηλ. νὰ λήγῃ τὸ βοηθητικὸν γραμμάτιον, ὡς τὸ δοθὲν μετὰ 3 μῆνας) καὶ τὸ ἐπιτόκιον καὶ νὰ γνωρίζωμεν τοῦ βοηθητικοῦ τούτου γραμματίου τὴν *πραγματικὴν ἀξίαν* καὶ τὴν *ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν* εἰς τὴν ἀρχὴν τῶν 3 μηνῶν πρὸς 12 %. Πρὸς τοῦτο δὲ ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς·

Λαμβάνομεν αὐθαιρέτως, ὡς πραγματικὴν ἀξίαν τοῦ βοηθητικοῦ γραμματίου ποσόν τι χρημάτων καὶ ἔστω 100 δραχμῶν. Τοῦτο δὲ τὸ ποσὸν τοκίζομεν διὰ 3 μην. πρὸς 12 %, τὸν δὲ εὑρισκόμενον τόκον τῶν 3 δραχμῶν προσθέτομεν εἰς τὰς 100 δρχ. καὶ οὕτως ἔχομεν τὸ εἰρημένον *βοηθητικὸν γραμμάτιον* ἐξ 103 δραχ. τὸ ὁποῖον λήγει, καθὼς τὸ δοθὲν εἰς τὸ πρόβλημα, μετὰ 3 μῆνας ἀπὸ σήμερον καὶ τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν, ὅτι *ἡ πραγματικὴ ἀξία* αὐτοῦ εἶναι σήμερον 100 δρχ. ἡ δὲ ἐσωτερική του ὑφαίρεσις, ὅτι εἶναι 3 δραχμῶν.

Καὶ ἤδη διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν *πραγματικὴν* ἀξίαν καὶ τὴν *ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν* τοῦ ἐν τῷ προβλήματι δοθέντος γραμματίου σκεπτώμεθα κατὰ τοὺς ἑξῆς τρόπους.

1) *Γραμμάτιον 103 δρχ. ἔχει ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν (3 μην. πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 12 %) 3 δρχ. Ποία εἶναι ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις γραμματίου 500 δραχμῶν διὰ τὸν αὐτὸν χρόνον καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον ;»*

$$\frac{103 \text{ δρχ,}}{500} \quad \frac{3 \text{ δρχ,ἐσ.ὑφ,}}{\mathrm{X}} \quad \text{ὅθεν X ἐσ. ὑφ.} = 3 \times \frac{500}{103} = 14 \text{ δρχ.} \frac{58}{103}$$

Ὥστε ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις τοῦ γραμματίου τῶν 500 δρχ. διὰ 3 μην. πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 12 % εἶναι 14 δρχ. $\frac{58}{103}$ ἤτοι

14,56 δρ. Ἄρα ἡ πραγματικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου θὰ εἶναι 500 —14,56 ἤτοι 485,44 δραχμαί.

2) «*Γραμμάτιόν τι 103 δρχ. ἔχει πραγματικὴν ἀξίαν σήμερον 100 δρχ. (3 μην. πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 12 %). Ποία εἶναι ἡ πραγματικὴ ἀξία γραμματίου 500 δραχμῶν διὰ τὸν αὐτὸν χρόνον καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον ;*»

$$\frac{103 \text{ δρχ.}}{500} \quad \frac{100 \text{ πρ.αξ.}}{X} \quad \text{ὅθεν } X \text{ πρ. ἀξ.} = 100 \times \frac{500}{103} = 485\frac{45}{103}$$

Ὥστε ἡ πραγματικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου τῶν 500 δρχ. διὰ 3 μην. πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 12 % εἶναι 485 δρχ. $\frac{45}{103}$ ἤτοι 485,44 δρχ. Ἄρα ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις τοῦ γραμματίου θὰ εἶναι 500—485,44 ἤτοι 14,56 δραχμαί.

526. Ἂν θέλωμεν νὰ μορφώσωμεν πρακτικόν τινα κανόνα πρὸς εὕρεσιν τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως καὶ τῆς πραγματικῆς ἀξίας, καθ' ἣν περίπτωσιν ὁ χρόνος παρέχεται εἰς ἔτη παρατηροῦμεν, ὅτι τὴν μὲν εὑρεθεῖσαν τιμὴν

$$X \text{ ἐσ. ὑφ.} = 3 \times \frac{500}{103}$$

δυνάμεθα νὰ μετασχηματίσωμεν εἰς

$$X \text{ ἐσ. ὑφ.} = \frac{500 \times 12\,\% \times \frac{3 \text{ ἔτ.}}{12}}{100 + 12\,\% \times \frac{3 \text{ ἔτ.}}{12}} \quad (A)$$

διότι ὁ ἀριθμὸς 3, ὡς ὢν ὁ *τόκος τῶν 100 δραχ, θὰ ἰσῶται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ἐπιτοκίου ἐπὶ τὸν χρόνον εἰς ἔτη* καὶ οὕτω μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς πρακτικὸν κανόνα.

527. *Ἵνα εὕρωμεν τὴν ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν γραμματίου τινος πολλαπλασιάζομεν τὴν ὀνοματικήν του ἀξίαν ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιον καὶ ἐπὶ τὸν χρόνον τῆς προεξοφλήσεως* (εἰς ἔτη) *καὶ τὸ ἐξαγόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀθροίσματος τοῦ 100 καὶ τοῦ γινομένου τοῦ ἐπιτοκίου ἐπὶ τὸν χρόνον* (εἰς ἔτη).

Ἐκ δὲ τῆς μορφῆς X πραγ. ἀξ. $= 100 \times \frac{500}{103}$ τὴν ὁποίαν δυνάμεθα νὰ μετασχηματίσωμεν εἰς

$$X \text{ πραγ. ἀξ.} = \frac{500 \times 100}{100 + 12\,\% \times \frac{3 \text{ ἔτ.}}{12}} \quad (B)$$

διότι ὁ ἀριθμὸς 3, ὡς ὢν ὁ τόκος τῶν 100 δρχ. θὰ ἰσῶται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ἐπιτοκίου ἐπὶ τὸν χρόνον εἰς ἔτη, ἐξάγομεν τὸν ἑξῆς πρακτικὸν κανόνα.

528. *Ἵνα εὕρωμεν τὴν πραγματικὴν ἀξίαν γραμματίου τινος, πολλαπλασιάζομεν τὴν ὀνοματικήν του ἀξίαν ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀθροίσματος τοῦ 100 καὶ τοῦ γινομένου τοῦ ἐπιτοκίου ἐπὶ τὸν χρόνον τῆς προεξοφλήσεως εἰς ἔτη.*

529. Ἂν θέλωμεν νὰ μορφώσωμεν ἰδιαίτερον πρακτικὸν κανόνα πρὸς εὕρεσιν τῆς *ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως* καὶ τῆς *πραγματικῆς ἀξίας*, καθ' ἣν περίπτωσιν ὁ *χρόνος* παρέχεται εἰς *μῆνας*, τότε πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 12 ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τῶν ἀνωτέρω τύπων (Α) καὶ (Β) καὶ οὕτως ἔχομεν τοὺς ἑξῆς δύο τύπους

$$\text{Χ ἐσ. ὑφ.} = \frac{500 \times 12\,\% \times 3 \text{ μην.}}{1200 + 12\,\% \times 3 \text{ μην.}} \quad (\Gamma)$$

$$\text{Χ πργ. ἀξ.} = \frac{500 \times 1200}{1200 + 12\,\% \times 3 \text{ μην.}} \quad (\Delta)$$

ἐξ ὧν πορίζόμεθα τοὺς ἑξῆς πρακτικοὺς κανόνας πρὸς εὕρεσιν τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως, ὡς καὶ τῆς *πραγματικῆς ἀξίας*, καθ' ἣν περίπτωσιν ὁ χρόνος παρέχεται εἰς μῆνας.

530. *Ἵνα εὕρωμεν τὴν ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν γραμματίου τινος, πολλαπλασιάζομεν τὴν ὀνοματικὴν αὐτοῦ ἀξίαν ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιον καὶ ἐπὶ τὸν χρόνον εἰς μῆνας καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀθροίσματος τοῦ 1200 καὶ τοῦ γινομένου τοῦ ἐπιτοκίου ἐπὶ τὸν χρόνον εἰς μῆνας.*

531. *Ἵνα εὕρωμεν τὴν πραγματικὴν ἀξίαν γραμματίου τινός, πολλαπλασιάζομεν τὴν ὀνοματικὴν ἀξίαν ἐπὶ 1200 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀθροίσματος τοῦ 1200 καὶ τοῦ γινομένου τοῦ ἐπιτοκίου ἐπὶ τὸν χρόνον εἰς μῆνας.*

532. Ἂν θέλωμεν νὰ μορφώσωμεν ἰδιαίτερον πρακτικὸν κανόνα πρὸς εὕρεσιν τῆς *ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως* καὶ τῆς *πραγματικῆς ἀξίας*, καθ' ἣν περίπτωσιν ὁ χρόνος παρέχεται εἰς ἡμέρας, τότε

***ἂν μὲν τὸ ἔτος ληφθῇ πρὸς 360 ἡμ·** ὅτε οἱ 3 μην. τοῦ προβλήματος κάμνουσιν 90 ἡμ., τότε ἐκ τῶν τύπων (Α) καὶ (Β) εὑρίσκομεν*

$$\text{X ἐσ. ὑφ.} = \frac{500 \times 12^0/_0 \times \frac{90^{\text{ἔτ.}}}{360}}{100 + 12^0/_0 \times \frac{90^{\text{ετ.}}}{360}} \text{ ἐξ οὗ ἔχομεν X ἐσ. ὑφ.} = \frac{500 \times 12^0/_0 \times 90^{\text{ἡμ.}}}{36000 + 12^0/_0 \times 90^{\text{ἡμ}}} \quad (\text{E})$$

$$\text{καὶ X πρ.ἀξ.} = \frac{500 \times 100}{100 + 12^0/_0 \times \frac{90^{\text{ἔτ.}}}{360}} \text{ ἐξ οὗ ἔχομεν X πρ. ἀξ.} = \frac{500 \times 36000}{36000 + 12^0/_0 \times 90^{\text{ἡμ}}} \quad (\text{Z})$$

ἂν δὲ ἕκαστος μὴν ληφθῇ μὲ τὰς ἡμέρας του καὶ ἔστω ὅτι οἱ 3 μῆν. τοῦ προβλήματος κάμνουσιν 92 ἡμ., τὸ δὲ ἔτος, ὅτι ἔχει 365 ἡμ., τότε ἐκ τῶν τύπων (A) καὶ (B) εὑρίσκομεν

$$\text{X ἐσ. ὑφ.} = \frac{500 \times 12^0/_0 \times \frac{92^{\text{ἔτ.}}}{365}}{100 + 12^0/_0 \times \frac{92^{\text{ἔτ.}}}{365}} \text{ ἐξ οὗ ἔχομεν X ἐσ. ὑφ.} = \frac{500 \times 12^0/_0 \times 92^{\text{ἡμ.}}}{36500 + 12^0/_0 \times 92^{\text{ἡμ.}}} \quad (\text{H})$$

$$\text{καὶ X πρ ἀξ} = \frac{500 \times 100}{100 + 12^0/_0 \times \frac{92^{\text{ἔτ.}}}{365}} \text{ ἐξ οὗ ἔχομεν X πρ ἀξ.} = \frac{500 \times 36500}{36500 + 12^0/_0 \times 92^{\text{ἡμ.}}} \quad (\Theta)$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω δὲ τύπων μορφοῦμεν τοὺς ἑξῆς πρακτικοὺς κανόνας πρὸς εὕρεσιν *τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως* καὶ τῆς *πραγματικῆς ἀξίας*, καθ' ἣν περίπτωσιν ὁ χρόνος παρέχεται εἰς ἡμέρας.

533. *Ἵνα εὕρωμεν τὴν ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν γραμματίου τινός, πολλαπλασιάζομεν τὴν ὀνοματικὴν ἀξίαν ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιον καὶ ἐπὶ τὸν χρόνον* (εἰς ἡμέρας) *καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀθροίσματος τοῦ 36000 ἢ 36500* (καθ' ὅσον τὸ ἔτος ἐλήφθη πρὸς 360 ἢ 365 ἡμέρας) *καὶ τοῦ γινομένου τοῦ ἐπιτοκίου ἐπὶ τὸν χρόνον εἰς ἡμέρας.*

534. *Ἵνα εὕρωμεν τὴν πραγματικὴν ἀξίαν γραμματίου τινὸς πολλαπλασιάζομεν τὴν ὀνοματικὴν ἀξίαν ἐπὶ 36000 ἢ 36500* (καθ' ὅσον τὸ ἔτος ἐλήφθη πρὸς 360 ἢ 365 ἡμέρας) *καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀθροίσματος τοῦ 36000 ἢ 36500 καὶ τοῦ γινομένου τοῦ ἐπιτοκίου ἐπὶ τὸν χρόνον εἰς ἡμέρας.*

Πρόβλημα 2ον. Ποία εἶναι ἡ ὀνοματικὴ ἀξία γραμματίου τοῦ ὁποίου ἡ πραγματικὴ ἀξία 5 μην. πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 12 $^0/_0$ εἶναι 500 δραχμαί.

Λύσις. Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου εὑρίσκομεν τὸν τόκον τῶν 500 δρχ. διὰ 5 μην. πρὸς 12 $^0/_0$, ὅστις εἶναι 25 δρχ. καὶ τὸν προσθέτομεν εἰς τὰς 500 δρχ. καὶ εὑρίσκομεν οὕτως, ὅτι ἡ ζητουμένη ὀνοματικὴ ἀξία εἶναι 525 δραχμαί.

ἢ καὶ ἄλλως.

Λαμβάνομεν αὐθαιρέτως ποσόν τι χρημάτων καὶ ἔστω 100 δρχ. καὶ τοκίζομεν τοῦτο διὰ 5 μην. πρὸς 12 %, ὅτε εὑρίσκομεν τόκον 5 δρχ. Τοῦτον δὲ τὸν τόκον προσθέτοντες εἰς τὰς 100 δρχ. εὑρίσκομεν 105 δρχ. καὶ ἤδη σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

«*Αἱ 100 δρχ. μετὰ 5 μην. πρὸς 12 % γίνονται 105 δρχ. αἱ 500 δρχ. πόσα γίνονται.*

Αἱ $\frac{100 \text{ δχ.}}{500}$ γίνονται $\frac{105 \text{ δχ.}}{X}$ ὅθεν X ὀν. ἀξ.$=\frac{105\times500}{100}=525$ δρχ.

Ὥστε ἡ ζητουμένη ὀνοματικὴ ἀξία εἶναι 525 δρχ.

Παρατήρησις. Κατὰ τὰ προβλήματα τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως λύονται καὶ τὰ προβλήματα εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ πόσον γίνεται κεφάλαιόν τι μετὰ ὡρισμένον χρόνον πρὸς ὡρισμένον ἐπιτόκιον ἢ καὶ ποῖον εἶναι τὸ ἀρχικὸν κεφάλαιον τὸ ὁποῖον μετὰ ὡρισμένον χρόνον πρὸς ὡρισμένον ἐπιτόκιον ἔγεινεν ὡρισμένον ποσόν.

Π. χ. Πόσον γίνεται κεφάλαιον 500 δρχ. μετὰ 5 μην. πρὸς 12 %.

$$\left(500+\frac{500.12.5}{1200}\right)=500+25=525 \text{ δρχ.}$$

2) Ποῖον εἶναι τὸ ἀρχικὸν κεφάλαιον τὸ ὁποῖον μετὰ 5 μην. πρὸς 12 % ἔγεινε 525 δραχ.

$$\left(\frac{525.1200}{1200+5.12}=\frac{525.1200}{1260}=500 \text{ δρχ.}\right)$$

3) Ἐδάνεισέ τις χρήματα πρὸς 9 % καὶ μετὰ 3 ἔτ. 4 μην. ἔλαβε κεφάλαιον καὶ τόκον ὁμοῦ 12800 δρχ. Ποῖον ἦτο τὸ κεφάλαιον καὶ πόσος ὁ τόκος;

$$\text{Ὁ τόκος}=\frac{12800.9.40}{1200+9.40}=\frac{12800.36}{156}=\frac{12800.9}{39}=2953\frac{11}{13}$$

$$\text{ἄρα τὸ κεφάλ.}=12800-2953\frac{11}{13}=9846\frac{2}{13}$$

ἢ καὶ ἄλλως

$$\text{Τὸ κεφάλ.}=\frac{12800.1200}{1200+9.40}=\frac{12800.120}{156}=\frac{12800.10}{13}=9846\frac{2}{13}$$

$$\text{ἄρα ὁ τόκος}=12800-9846\frac{2}{13}=2953\frac{11}{13}=2953{,}84 \text{ δρχ.}$$

Σύγκρισις ἐσωτερικῆς καὶ ἐξωτερικῆς ὑφαιρέσεως.

535. Ὡς γνωστὸν ἡ ὀνοματικὴ ἀξία Ο γραμματίου τινος ἰσοῦται

μὲ τὴν πραγματικὴν αὐτοῦ ἀξίαν Π, ηὐξημένην κατὰ τὴν ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν Υ, ἤτοι

$$Ο = Π + Υ$$

Ἐπειδὴ δέ, ἂν τοκίσωμεν τὸ Π διὰ τὸν χρόνον τῆς προεξοφλήσεως εὑρίσκομεν τὸ Υ, διὰ τοῦτο ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις εἶναι *δικαία*, διότι οὕτω κρατεῖται παρὰ τοῦ προεξοφλητοῦ ὁ τόκος τοῦ ποσοῦ Π, τὸ ὁποῖον δίδει εἰς τὸν προεξοφλοῦντα τὸ γραμμάτιον. Ἡ δὲ *ἐξωτερικὴ* ὑφαίρεσις εἶναι *ἄδικος*, διότι κρατεῖται παρὰ τοῦ προεξοφλητοῦ ὁ τόκος τοῦ Ο ἢ ὅπερ ταὐτό, ὁ τόκος τοῦ Π+Υ, ἑπομένως κρατεῖται πλέον τοῦ δικαίου ὁ τόκος τοῦ Υ, ἤτοι ὁ τόκος τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως.

536. Ἐντεῦθεν συνάγομεν, ὅτι ἡ *ἐξωτερικὴ* ὑφαίρεσις εἶναι μεγαλητέρα τῆς *ἐσωτερικῆς* ὑφαιρέσεως καὶ ἡ *πραγματικὴ ἀξία* τῆς *ἐξωτερικῆς ἀξίας* κατὰ τὸν τόκον τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως.

Παράδειγμα. Κατὰ πόσον διαφέρει ἡ ἐσωτερικὴ τῆς ἐξωτερικῆς ὑφαιρέσεως ἢ ἡ πραγματικὴ ἀξία τῆς ἐξωτερικῆς ἀξίας γραμματίου 525 δρχ. προεξοφλουμένου 5 μην. πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 12 % καὶ τίς εἶναι ἡ διαφορὰ αὕτη; (διαφέρουσι κατὰ 1,25 δρχ. καὶ εἶναι ὁ τόκος τῆς ἐσ. ὑφαιρ.).

Μέθοδος τοῦ μερισμοῦ.

Μέθοδος μερισμοῦ λέγεται τρόπος τις γενικὸς κατὰ τὸν ὁποῖον μοιράζομεν ἀριθμόν τινα ἀναλόγως δύο ἢ περισσοτέρων ἄλλων ἀριθμῶν.

537. Δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ λέγονται *ἀνάλογοι πρὸς ἄλλους ἀριθμοὺς ἴσους τὸ πλῆθος*, ὅταν πολλαπλασιαζομένων τῶν μὲν ἐπί τινα ἀριθμὸν προκύπτουσιν οἱ ἕτεροι ἀριθμοί. Ἑπομένως εἰς τὰ προβλήματα τοῦ μερισμοῦ, τὰ εὑρισκόμενα *μερίδια* πρέπει νὰ προκύπτωσιν ἐκ τῶν ἀριθμῶν ἀναλόγως τῶν ὁποίων ἐμοιράσθη τὸ *μεριστέον* ποσὸν διὰ πολλαπλασιασμοῦ αὐτῶν ἐπὶ ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Π. χ. Οἱ ἀριθμοὶ 2, 3 καὶ 5 εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀριθμῶν 24, 36 καὶ 60, διότι πολλαπλασιαζομένων τῶν *πρώτων* ἐπὶ 12 προκύπτουσιν οἱ *δεύτεροι* ἢ πολλαπλασιαζομένων τῶν *δευτέρων* ἐπὶ $\frac{1}{12}$ προκύπτουσιν οἱ πρῶτοι.

538. Δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ λέγονται *ἀντιστρόφως ἀνάλογοι πρὸς ἄλλους ἀριθμοὺς ἴσους τοῦ πλήθους*, ὅταν εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἀντιστρόφους των.

Π. χ. Οἱ ἀριθμοὶ 2, 3 καὶ 5 εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ἀριθμῶν $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$ καὶ $\frac{1}{10}$, διότι εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀντιστρόφων των 4, 6 καὶ 10.

539. Προβλήματα μερισμοῦ διακρίνομεν δύο εἰδῶν.

540. *Πρώτου εἴδους. Προβλήματα τοῦ πρώτου εἴδους τοῦ μερισμοῦ εἶναι ἐκεῖνα εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται νὰ μοιράσωμεν ἀριθμόν τινα ἀναλόγως δύο ἢ περισσοτέρων ἀκεραίων, κλασματικῶν, δεκαδικῶν ἢ συμμιγῶν ἀριθμῶν.*

541. *Δευτέρου εἴδους. — Προβλήματα δευτέρου εἴδους τοῦ μερισμοῦ εἶναι ἐκεῖνα εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται νὰ μοιράσωμεν ἀριθμόν τινα ἀναλόγως δύο ἢ περισσοτέρων συνθέτων ἀριθμῶν.*

542. ***Σύνθετον ἀριθμὸν*** καλοῦμεν ἐνταῦθα τὸν ἀποτελούμενον ἐκ δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν μεταξὺ τῶν ὁποίων ὑπάρχει τις τοῦ ὁποίου ἡ μονάς, οὔτε πολλαπλάσιον, οὔτε ὑποπολλαπλάσιον εἶναι οὐδεμιᾶς μονάδος τῶν ἄλλων ἀριθμῶν δηλ. ὁ σύνθετος ἀριθμὸς δὲν δύναται νὰ τραπῇ εἰς ἀριθμὸν γινόμενον ἐκ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς μονάδος.

Π. χ. Ὁ ἀριθμὸς 2 ἔτ. 50 δρχ. 25 λεπτ. λέγεται *σύνθετος*, διότι τὸ 1 ἔτ. δὲν δύναται νὰ γείνῃ, οὔτε ἐκ τοῦ 1 λεπτοῦ, οὔτε ἐκ τῆς 1 δραχμῆς. Ὁμοίως, ὁ ἀριθμὸς 100 ὀκ. 5 σταδ. ὁ 150 δρχ. 2 ἡμ. 3 ὥρ. εἶναι *σύνθετοι ἀριθμοί.*

Προβλήματα πρώτου εἴδους μερισμοῦ.

543. *Πρόβλημα 1ον. Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 120 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 2, 3 καὶ 5.*

Λύσις. Διὰ νὰ μοιράσωμεν τὸν ἀριθμὸν 120 ἀναλόγως τῶν 2, 3 καὶ 5 προσθέτομεν πρῶτον τοὺς $2+3+5$, ὅτε εὑρίσκομεν 10. Εἶτα δὲ σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

«*Ἐπειδὴ εἰς τὸν 10 δέον νὰ δοθῇ ὁ 120, εἰς τὸν ἀριθμὸν 2 πόσον ἀναλογεῖ;*

$\frac{10}{2}$ $\qquad$ $\frac{120}{X}$ ὅθεν $X=120\times\frac{2}{10}=24.$

Ὁμοίως σκεπτόμενοι εὑρίσκομεν, ὅτι εἰς τὸν 3 ἀναλογεῖ 36 καὶ εἰς τὸν 5 ἀναλογεῖ 60. Ὥστε ὁ 120 ἐμοιράσθη ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 2, 3 καὶ 5, τά δὲ ἀνάλογα τούτων μέρη εἶναι ὁ 24, 36 καὶ 60

ἢ καὶ ἄλλως σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς

«Ἐὰν εἴχομεν νὰ μοιράσωμεν τὸν ἀριθμὸν 10, εἰς τὸν πρῶτον θὰ ἐδίδομεν 2, ἤδη δέ, ὅτε ἔχομεν νὰ μοιράσωμεν τὸν 120, πόσα θὰ δώσωμεν εἰς τὸν πρῶτον.

$$\frac{10}{120} \qquad \frac{2}{X} \text{ ὅθεν } X=2\times\frac{120}{10}=24$$

Ὁμοίως σκεπτόμενοι εὑρίσκομεν, ὅτι εἰς τὸν 3 ἀναλογεῖ 36 καὶ εἰς τὸν 5 ἀναλογεῖ 60.

Ὥστε ὁ 120 ἐμοιράσθη ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 2, 3 καὶ 5, τὰ δὲ ἀνάλογα τούτων μέρη εἶναι 24, 36 καὶ 60.

Σημ. Ἐπειδὴ ἡ σχέσις μεταξὺ τῶν *μεριζόντων* ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται διὰ *πολλαπλασιασμοῦ ἢ διαιρέσεως* τούτων δι' ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, διὰ τοῦτο τοὺς μερίζοντας ἀριθμούς, ἂν εἶναι *κλασματικοὶ ἢ δεκαδικοί*, δυνάμεθα διὰ πολλαπλασιασμοῦ τούτων ἐπὶ κατάλληλον ἀριθμὸν νὰ μεταβάλωμεν εἰς ἀκεραίους, ἂν δὲ οἱ μερίζοντες ἔχωσι κοινόν τινα διαιρέτην καθιστῶμεν τούτους μικροτέρους, διαιροῦντες αὐτοὺς διὰ τοῦ κοινοῦ αὐτῶν διαιρέτου καὶ εἶτα μοιράζομεν τὸ μεριστέον ποσὸν ἀναλόγως τῶν προκυπτόντων ἀκεραίων ἀριθμῶν.

Πρόβλημα 2ον. *Νὰ μοιρασθῇ ὁ 15 ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν* $\frac{2}{3}$, *3 καὶ* $2\,{}^1/_2$.

Λύσις. Ἐπειδὴ ἡ σχέσις μεταξὺ τῶν μεριζόντων ἀριθμῶν $\frac{2}{3}$, 3 καὶ $2\,{}^1/_2$ δὲν μεταβάλλεται διὰ πολλαπλασιασμοῦ τούτων ἐπὶ 6, εὑρίσκομεν ὡς μερίζοντας τοὺς ἀριθμοὺς 4, 18 καὶ 15 καὶ ἤδη τὸν ἀριθμὸν 15 μοιράζομεν ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 4, 18 καὶ 15 ὡς ἀνωτέρω καὶ οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι

$$\text{Εἰς } \frac{37}{4} \text{ ἀναλογεῖ } \frac{15}{X} \text{ ὅθεν } X=15\times\frac{4}{37}=\frac{60}{37}=1\frac{23}{37}.$$

Ὁμοίως σκεπτόμενοι εὑρίσκομεν, ὅτι εἰς τὸν 18 ἀναλογεῖ $7\frac{11}{37}$ καὶ εἰς τὸν 15 ἀναλογεῖ $6\frac{3}{37}$.

Πρόβλημα 3ον. ***Συνεφωνήθησαν τρεῖς ἐργάται ἀντὶ 150 δρχ. πρὸς***

ἀποπεράτωσιν ἔργου τινος. Ἐκ τῶν ἐργατῶν τούτων, ὁ εἷς εἰργάσθη 4 ἡμ. 8 ὥρ. ὁ ἕτερος 3 ἡμ. 10 ὥρ. καὶ ὁ τρίτος 2 ἡμ. 5 ὥρ. Πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ ἕκαστος ἀναλόγως τῆς ἐργασίας του.

Λύσις. Κάμνομεν πρῶτον τοὺς συμμιγεῖς 4 ἡμ. 8 ὥρ. καὶ 3 ἡμ. 10 ὥρ. καὶ 2 ἡμ. 5 ὥρ. νὰ γίνωνται ἐκ τῆς αὐτῆς μονάδος, καὶ ἔστω *ὥρας*, ὅτε εὑρίσκομεν, ὅτι ὁ *πρῶτος* εἰργάσθη 56 ὥρ. ὁ *δεύτερος* 46 ὥρ. καὶ ὁ *τρίτος* 29 ὥρ. Μετὰ ταῦτα μοιράζομεν τὰς 150 δρχ. ἀναλόγως τῶν ὡρῶν τούτων τῆς ἐργασίας των, δι' ὃ κατὰ τὰ ἀνωτέρω προβλήματα εὑρίσκομεν πρῶτον τὸ ἄθροισμα 56 ὥρ. + 46 ὥρ. + 29 ὥρ. ἤτοι 131 ὥρ. καὶ ἔπειτα σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς

Διὰ $\frac{131}{56}$ ὥρ. θὰ δοθῶσιν $\frac{150 \text{ δρχ.}}{X}$ ὅθεν $X = 150 \times \frac{56}{131} = 64\frac{16}{131}$ δχ.
» » »

Ὁμοίως σκεπτόμενοι εὑρίσκομεν, ὅτι εἰς τὸν ἐργασθέντα 46 ὥρ. θὰ δοθῶσι $52\frac{88}{131}$ δρχ. καὶ εἰς τὸν ἐργασθέντα 29 ὥρ. θὰ δοθῶσι $33\frac{27}{131}$ δρχ.

Ἐκ τῆς λύσεως τῶν προβλημάτων τούτων μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς πρακτικὸν κανόνα.

544. ***Διὰ νὰ μοιράσωμεν ποσόν τι ἀναλόγως δύο ἢ περισσοτέρων ἄλλων ἀριθμῶν πολλαπλασιάζομεν τὸ μεριστέον ποσὸν ἐπὶ ἕκαστον τῶν μεριζόντων καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διά τοῦ ἀθροίσματος τῶν μεριζόντων.***

Σημ. Ἂν οἱ ἀριθμοί, ἀναλόγως τῶν ὁποίων μοιράζεται ποσόν τι εἶναι συμμιγεῖς ἢ γίνωνται ἐκ διαφόρων συγκεκριμένων μονάδων, τότε κάμνομεν πρῶτον αὐτοὺς νὰ γίνωνται ἐκ τῆς αὐτῆς συγκεκριμένης μονάδος καὶ ἔπειτα ἐφαρμόζομεν τὸν ἀνωτέρω κανόνα.

Π. χ. Νὰ μοιρασθῶσιν 100 δραχ. εἰς τέσσαρας ναύτας, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ εἷς ἔμεινεν ἐν τῷ πλοίῳ 4 ἡμ. ὁ ἕτερος 3 ἡμ. 8 ὥρ. ὁ τρίτος 2 ἡμ. 8 ὥρ. καὶ ὁ τέταρτος 18 ὥρ. Πόσας θὰ λάβῃ ἕκαστος;

Λύσις. Κάμνομεν πρῶτον τοὺς συμμιγεῖς 4 ἡμ. καὶ 3 ἡμ. 8 ὥρ. καὶ 2 ἡμ. 8 ὥρ. καὶ 18 ὥρ. νὰ γίνωνται ἐκ τῆς αὐτῆς συγκεκριμένης μονάδος καὶ ἔστω *ὥρας*, ὅτε εὑρίσκομεν 96 ὥρ., 80 ὥρ., 56 ὥρ. καὶ 18 ὥρ. Εἶτα δὲ ἐφαρμόζομεν τὸν ἀνωτέρω κανόνα καὶ οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι, ὁ *πρῶτος* θὰ λάβῃ 38,40 δρχ. ὁ *δεύτερος* 32 δρχ. ὁ *τρίτος* 22,40 δρχ. καὶ ὁ *τέταρτος* 7,20 δραχμάς.

545. Ὅταν ἀριθμόν τινα θέλωμεν νὰ μοιράσωμεν ἀντιστρόφως ἀναλόγως δύο ἢ περισσοτέρων ἄλλων ἀριθμῶν, ἀρκεῖ νὰ μοιράσωμεν ἀναλόγως τῶν ἀντιστρόφων των.

Π. χ. Νὰ μοιρασθῇ ὁ 76 ἀντιστρόφως ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 2, 4 καὶ 5.

Λύσις. Λαμβάνομεν πρῶτον τοὺς ἀντιστρόφους τῶν ἀριθμῶν 2, 4 καὶ 5, ἤτοι τῶν $\frac{2}{1}$, $\frac{4}{1}$ καὶ $\frac{5}{1}$ καὶ οἱ ὁποῖοι εἶναι $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ καὶ $\frac{1}{5}$. Ἤδη δὲ ἀρκεῖ τὸν 76 νὰ μοιράσωμεν ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ καὶ $\frac{1}{5}$ ἢ ὅπερ ταὐτό, τῶν $\frac{1}{2}\times 20$, $\frac{1}{4}\times 20$ καὶ $\frac{1}{5}\times 20$, ἤτοι τῶν 10, 5 καὶ 4 καὶ οὕτως εὑρίσκομεν

$$\frac{76\times 10}{19},\ \frac{76\times 5}{19},\ \frac{76\times 4}{19}\ \text{ἤτοι } 40,\ 20 \text{ καὶ } 16.$$

Ὥστε τὰ ἀντιστρόφως ἀνάλογα μέρη τῶν ἀριθμῶν 2, 4 καὶ 5 εἶναι 40, 20 καὶ 16.

Προβλήματα δευτέρου εἴδους μερισμοῦ

546. *Πρόβλημα* 1ον. *Πρὸς ἀποπεράτωσιν οἰκοδομῆς τινος εἰργάσθησαν 20 ἐργάται ἀνὰ 10 ὥρ. τὴν ἡμέραν, 25 ἐργάται ἀνὰ 12 ὥρ. τὴν ἡμέραν καὶ 40 ἐργάται ἀνὰ 8 ὥρ. τὴν ἡμέραν. Ἐπληρώθησαν δὲ ὅλοι ὁμοῦ 50000 δρχ. Πόσας θὰ λάβωσιν οἱ 20 ἐργάται, πόσας οἱ 25 ἐργ. καὶ πόσας οἱ 40 ἐργάται;*

Λύσις. Τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι τοῦ δευτέρου εἴδους, διότι αἱ 50000 δρχ. πρέπει νὰ μοιρασθῶσιν ἀναλόγως τῶν συνθέτων ἀριθμῶν, 20 ἐργ. ἐργαζομένων 10 ὥρ. τὴν ἡμέραν καὶ 25 ἐργ. πρὸς 12 ὥρ. τὴν ἡμέραν καὶ 40 ἐργ. πρὸς 8 ὥρ. τὴν ἡμέραν.

Καὶ ἤδη, διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο, ἀνάγομεν αὐτὸ εἰς πρόβλημα τοῦ πρώτου εἴδους, σκεπτόμενοι ὡς ἑξῆς.

«*Οἱ 20 ἐργ. ἐργαζόμενοι 10 ὥρ. τὴν ἡμέραν θὰ λάβωσιν ἐκ τῶν 50000 δρχ. μερίδιόν τι ἔστω Κ δρχ. Πόσοι ἐργάται ἐργαζόμενοι 1 ὥρ. τὴν ἡμέραν θὰ λάβωσι τὸ αὐτὸ μερίδιον Κ δρχ.;*»

$$\frac{20\text{ ἐργ.}}{X}\quad \frac{10\text{ ἐργ.}}{1}\quad \frac{\text{Κ δρχ.}}{»}\qquad \text{ὅθεν } X=20\times\frac{10}{1}=200 \text{ ἐργ.}$$

Ὁμοίως σκεπτόμενοι εὑρίσκομεν ὅτι, οἱ 25 ἐργ. ἐργαζόμενοι 12 ὥρ. τὴν ἡμέραν λαμβάνουσι τὸ αὐτὸ μερίδιον μὲ 25×12 ἤτοι 300 ἐργ. ἐργαζομένους 1 ὥρ. τὴν ἡμέραν.

Ὁμοίως σκεπτόμενοι εὑρίσκομεν, ὅτι οἱ 40 ἐργ. ἐργαζόμενοι 8 ὥρ. τὴν ἡμέραν λαμβάνουσι τὸ αὐτὸ μερίδιον μὲ 40×8 ἤτοι 320 ἐργ. ἐργαζομένους 1 ὥρ. τὴν ἡμέραν.

Κατ' ἀκολουθίαν τὸ πρόβλημα τοῦτο δύναται νὰ ἀναχθῇ εἰς τὰ προβλήματα τοῦ πρώτου εἴδους τοῦ μερισμοῦ, ἀρκεῖ τὰς 50000 δρχ. νὰ μοιράσωμεν ἀναλόγως τῶν 200 ἐργ. 300 ἐργ. καὶ 320 ἐργ., οἱ ὁποῖοι λαμβάνουσι τὸ αὐτὸ μερίδιον μὲ τοὺς 20 ἐργ., οἱ ὁποῖοι ἐργάζονται 10 ὥρ. τὴν ἡμέραν, τοὺς 25 ἐργ., οἱ ὁποῖοι ἐργάζονται 12 ὥρ. τὴν ἡμέραν καὶ τοὺς 40 ἐργ., οἱ ὁποῖοι ἐργάζονται 8 ὥρ. τὴν ἡμέραν.

Ὅθεν ἐφαρμόζοντες τὸν κανόνα (§ 544) εὑρίσκομεν ὅτι

Οἱ 20 ἐργ. θὰ λάβωσι $\frac{50000\times200}{820}=12195,12$ δρχ.

» 25 ἐργ. » » $\frac{50000\times300}{820}=18292,68$ δρχ.

» 40 ἐργ. » » $\frac{50000\times320}{820}=19512,20$ δρχ.

Ἂν τὰ πρῶτον ποσὸν διαιρέσωμεν διὰ 20, τὸ δεύτερον διὰ 25 καὶ τὸ τρίτον διὰ 40, εὑρίσκομεν καὶ πόσον θὰ λάβῃ ἕκαστος τῶν ἐργατῶν.

Πρόβλημα 2ον. Ἐὰν μοιράσωμεν 81 δρχ. εἰς 5 ἐργάτας, ἐκ τῶν ὁποίων οἱ 2 ἐργ. εἰργάσθησαν 4 ἡμ. 6 ὥρ. ἀνὰ 12 ὥρ. τὴν ἡμέραν, οἱ δὲ 3 ἐργ. εἰργάσθησαν 7 ἡμ. 3 ὥρ. ἀνὰ 6 ὥρ. τὴν ἡμέραν, πόσας θὰ λάβωσιν οἱ 2 ἐργάται καὶ πόσας οἱ 3 ἐργάται;

Λύσις. Ἐπειδὴ αἱ 81 δρχ. πρέπει νὰ μοιρασθῶσιν ἀναλόγως τῶν συνθέτων ἀριθμῶν 2 ἐργ. 4 ἡμ. 6 ὥρ. καὶ 3 ἐργ. 7 ἡμ. 3 ὥρ., διὰ τοῦτο τρέπομεν πρῶτον τοὺς συμμιγεῖς 4 ἡμ. 6 ὥρ. καὶ 7 ἡμ. 3 ὥρ. εἰς ἀριθμοὺς τῆς αὐτῆς μονάδος καὶ ἔστω εἰς ὥρας, ὅτε οἱ συμμιγεῖς οὗτοι γίνονται 54 ὥρ. καὶ 45 ὥρ. Οὕτω δὲ ἔχομεν ἤδη νὰ μοιράσωμεν τὰς 81 δρχ. ἀναλόγως τῶν συνθέτων ἀριθμῶν 2 ἐργ. 54 ὥρ. καὶ 3 ἐργ. 45 ὥρ., ὅτε ἐργαζόμενοι ὡς εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα εὑρίσκομεν, ὅτι οἱ 2 ἐργ. θὰ λάβωσι 36 δρχ. οἱ δὲ 3 ἐργ. θὰ λάβωσι 45 δραχμάς.

Σημ. Ἂν διαιρέσωμεν τὰς 36 δρχ. διὰ 2 καὶ τὰς 45 δρχ. διὰ 3 εὑρίσκομεν, ὅτι ἕκαστος τῶν πρώτων 2 ἐργατῶν θὰ λάβῃ 18 δρχ. καὶ ἕκαστος τῶν 3 ἐργατῶν θὰ λάβῃ 15 δρχ. Διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ καὶ πόσον λαμβάνει ἕκαστος τὴν ἡμέραν, ἀρκεῖ τὸ μερίδιον τοῦ ἑνὸς τῶν 2 ἐργατῶν νὰ διαιρέσωμεν διὰ $\frac{54}{12}$ ἡμ. καὶ τὸ μερίδιον τοῦ ἑνὸς τῶν 3 ἐργατῶν νὰ διαιρέσωμεν διὰ $\frac{45}{6}$ ἡμ. Οὕτω δὲ εὑρίσκομεν, ὅτι ἕκαστος τῶν 2 ἐργατῶν λαμβάνει 4 δρχ. τὴν ἡμέραν καὶ ἕκαστος τῶν 3 ἐργ. λαμβάνει 2 δρχ. τὴν ἡμέραν.

Ἐκ τῆς λύσεως τῶν ἀνωτέρω προβλημάτων μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς πρακτικὸν κανόνα.

547. *Διὰ νὰ μοιράσωμεν ποσόν τι ἀναλόγως δύο ἢ περισσοτέρων συνθέτων ἀριθμῶν, τρέπομεν πρῶτον εἰς τὴν αὐτὴν μονάδα τοὺς ἀριθμοὺς τῶν συνθέτων τοὺς δυναμένους νὰ γίνωσιν ἐκ τῆς αὐτῆς μονάδος καὶ ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν τοὺς ἀριθμοὺς ἑκάστου συνθέτου, τὰ δὲ προκύπτοντα γινόμενα πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸ μεριστέον ποσόν, τὸ δὲ ἐξαγόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν γινομένων, τὰ ὁποῖα προέκυψαν ἐκ τῶν συνθέτων.*

Σημ. Εἰς τὰ προβλήματα τοῦ μερισμοῦ πρέπει τὰ μερίδια ὅλα προστιθέμενα ν' ἀποτελῶσι προφανῶς τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον ἐμοιράσθη. Τὸ τοιοῦτον δὲ δύναται νὰ χρησιμεύσῃ καὶ ὡς δοκιμὴ τοῦ προβλήματος.

Μέθοδος τῆς ἑταιρείας.

Μέθοδος τῆς ἑταιρείας λέγεται τρόπος τις γενικός, κατὰ τὸν ὁποῖον δύο ἢ περισσότεροι συνέταιροι μοιράζονται μεταξύ των κέρδος ἢ ζημίαν ἀναλόγως τῶν κεφαλαίων αὐτῶν καὶ τοῦ χρόνου, καθ' ὃν ἔμειναν ταῦτα εἰς τὴν ἐμπορικὴν ἐπιχείρησιν.

548. Τὰ προβλήματα τῆς ἑταιρείας ὑπάγονται εἰς τὰ προβλήματα τοῦ μερισμοῦ. Καὶ ὅταν μὲν τὰ κεφάλαια τῶν συνεταίρων ἔμειναν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν *τὸν αὐτὸν χρόνον*, τότε ὑπάγονται εἰς τὰ προβλήματα *τοῦ πρώτου εἴδους τοῦ μερισμοῦ*, ὅταν δὲ ἔμειναν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν *ἀνίσους χρόνους*, τότε ὑπάγονται εἰς τὰ προβλήματα *τοῦ δευτέρου εἴδους τοῦ μερισμοῦ*.

Προβλήματα τοῦ πρώτου εἴδους.

Πρόβλημα. Τρεῖς ἔμποροι κατέθεσαν ὁ μὲν 5000 δρχ. ὁ δὲ

8000 δρχ. καὶ ὁ τρίτος 10000 δρχ. καὶ μετά τινα χρόνον ἐκέρδησαν 3500 δρχ. Πόσας θὰ λάβῃ ἕκαστος ἀναλόγως τῆς καταθέσεώς του;

Λύσις. Μοιράζομεν τὰς 3500 δρχ. ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 5000, 8000 καὶ 10000 καὶ οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι θὰ λάβῃ

ὁ α′ 760,87 δρχ., ὁ β′ 1217,39 δρχ. καὶ ὁ γ′ 1521,04 δρχ.

Προβλήματα τοῦ δευτέρου εἴδους.

Πρόβλημα. Ἄνθρωπός τις ἤρχισεν ἐπιχείρησιν μὲ 5000 δρχ. καὶ μετὰ 8 μην. προσέλαβε συνέταιρον, ὅστις κατέθεσεν 8000 δρχ. καὶ μετὰ 6 μην. προσέλαβε δεύτερον συνέταιρον, ὅστις κατέθεσε 10000 δρχ. Μετὰ 3 δὲ ἔτη ἀπὸ τῆς ἐνάρξεως τῆς ἐπιχειρήσεως εὗρον, ὅτι ἐκέρδησαν 8200 δρχ. Πόσα θὰ λάβῃ ἕκαστος ἀναλόγως τῶν κεφαλαίων του καὶ τοῦ χρόνου κατὰ τὸν ὁποῖον ἔμειναν ταῦτα εἰς τὴν ἐπιχείρησιν;

Λύσις. Προφανῶς αἱ 5000 δρχ. ἔμειναν 36 μην. εἰς τὴν ἐπιχείρησιν, αἱ δὲ 8000 δρχ. ἔμειναν 36 μην.—8 μην. ἤτοι 28 μην. καὶ αἱ 10000 δρχ. ἔμειναν 28 μην. - 6 μην. ἤτοι 22 μην. Ἄρα τὸ κέρδος τῶν 8200 δρχ. πρέπει νὰ μοιρασθῇ ἀναλόγως τῶν συνθέτων ἀριθμῶν 5000 δρχ. 36 μην. καὶ 8000 δρχ. 28 μην. καὶ 10000 δρχ. 22 μην. Ἑπομένως τὸ πρόβλημα εἶναι τοῦ δευτέρου εἴδους τοῦ μερισμοῦ. Ἐφαρμόζοντες δὲ τὸν ἀνωτέρω κανόνα εὑρίσκομεν ὅτι θὰ λάβῃ

Ὁ α′ 2365,38 δρχ., ὁ β′ 2943,59 δρχ. καὶ ὁ γ′ 2891,03.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Δύο καραγωγεῖς ἔλαβον 275 δρχ. διὰ τὴν μετακόμισιν ἐμπορευμάτων. Ἐκ τῶν καραγωγέων τούτων ὁ μὲν μετεκόμισε 1520 χιλιόγραμμα, ὁ δὲ 3560 χιλιόγραμμα. Ζητεῖται πόσα θὰ λάβῃ ἕκαστος. (ὁ α′ 82,28 δρχ., ὁ δὲ β′ 192,72 δρχ.).

2) Τρεῖς ἄνθρωποι ἐμοιράσθησαν 2650 δρχ. οὕτως ὥστε ὁ εἷς ἔλαβε 2 μερίδια, ὁ ἄλλος 3 καὶ ὁ τρίτος 5. Πόσα θὰ λάβῃ ἕκαστος; (ὁ α′ 530 δρχ., ὁ β′ 795 δρχ. καὶ ὁ γ′ 1325 δρχ.)

3) Τρεῖς ἔμποροι ἠγόρασαν φορτίον ἐλαίου. Καὶ ὁ μὲν πρῶτος κατέβαλε 3500 δρχ., ὁ δὲ δεύτερος 7300 δρχ., ὁ δὲ τρίτος 1200

δρχ. ἐκέρδησαν δὲ ἐκ τοῦ ἐλαίου 3500 δρχ. Πόσας θὰ λάβῃ ἕκαστος;

(ὁ α' 1020,83 δρχ., ὁ β' 2129,17 δρχ. καὶ ὁ γ' 350 δρχ.)

4) Τρεῖς ἔμποροι ἐζημιώθησαν ἔκ τινος ἐπιχειρήσεως 4500 δρχ. Εἰς τὴν ἐπιχείρησιν ταύτην ὁ εἷς εἶχε καταβάλῃ 5000 δρχ. διὰ 4 μῆν. ὁ ἄλλος 7500 δρχ. διὰ 8 μῆν. καὶ ὁ τρίτος 8500 δρχ. διὰ 2 μῆν. Ζητεῖται πόσον θὰ ζημιωθῇ ἕκαστος;

(ὁ α' 927,83 δρχ., ὁ β' 2783,51 δρχ. καὶ ὁ γ' 788,66 δρχ.)

5) Δύο καραγωγεῖς ἔλαβον 100 δρχ. διὰ τὴν μεταφορὰν ἐμπορευμάτων. Καὶ ὁ μὲν εἷς μετέφερε 1000 ὀκδ. ἐξ ἀποστάσεως 4 σταδίων, ὁ δὲ ἕτερος 500 ὀκδ. ἐξ ἀποστάσεως 2 σταδίων. Πόσας θὰ λάβῃ ἕκαστος; (ὁ α' 80 δρχ., ὁ β' 20 δρχ.)

6) Τρεῖς ἔμποροι εἶχον συνεταιρισμὸν ἐπὶ 2 ἔτη. Ἐκ τούτων ὁ μὲν πρῶτος κατέβαλε 250 δρχ. ὁ δὲ δεύτερος 200 δρχ. καὶ μετὰ 6 μῆν. ἄλλας προσέτι 350 δρχ. ὁ δὲ τρίτος κατέβαλε 500 δρχ. καὶ μετὰ 5 μῆν. ἄλλας προσέτι 450 δρχ. ἐκέρδησαν δὲ 3765 δρχ. Πόσας θὰ λάβῃ ἕκαστος;

(ὁ α' 600 δρχ., ὁ β' 1110 δρχ. καὶ ὁ γ' 2055 δρχ.)

7) Ἔργον τι ἐτελείωσαν 10 ἐργάται καὶ ἔλαβον 800 δρχ. ἐκ τῶν ἐργατῶν τούτων οἱ 2 εἰργάσθησαν 2 μῆν. 3 ἡμ. οἱ 5 εἰργάσθησαν 20 ἡμ. καὶ οἱ λοιποὶ εἰργάσθησαν 1 μῆν. Πόσα θὰ λάβῃ ἑκάστη ὁμὰς ἐργατῶν; (ὁ α' 318,98 δρχ., ὁ β' 253,17 δρχ. ὁ γ' 227,85).

* *Προσθήκη*. Νὰ εὑρεθῇ πόσα θὰ λάβῃ ἕκαστος ἐργάτης ἑκάστης ὁμάδος καὶ ποῖον ἦτο τὸ ἡμερομίσθιον.

Περὶ συνεζευγμένης ἢ κλιμακωτῆς μεθόδου.

549. Διὰ τῆς συνεζευγμένης μεθόδου, ἥτις δύναται νὰ θεωρηθῇ, ὡς σύνθετος μέθοδος τῶν τριῶν, λύονται διάφορα προβλήματα ἐμπορικῶν διαπραγματεύσεων, ὡς εἶναι τὰ ἑπόμενα.

550. *Πρόβλημα* 1ον. *Ἔμπορός τις ἠγόρασεν ἐν Πάτραις Κορινθιακὴν σταφίδα πρὸς 310 δρχ. χαρτίνας τὰς 1000 λίτρας, ἀπέστειλε δὲ αὐτὰς εἰς Τεργέστην, πληρώσας ἔξοδα, ἐν Ἑλλάδι μὲν διὰ τὸν δασμὸν τῆς ἐξαγωγῆς καὶ τὸν ναῦλον 25 $^0/_0$, ἐκεῖ δὲ εἰς τὸν παραγγελιοδόχον 3 $^0/_0$ ἐπὶ τῆς ἐκ τῶν ἐξόδων ηὐξημένης ἀξίας τοῦ ἐμπορεύματος. Ζητεῖται πόσα φλορίνια θ' ἀξίζῃ ὁ στατὴρ τῆς σταφί-*

δος ἐν Τεργέστῃ, γνωστοῦ ὄντος, ὅτι 1000 λίτραι ἰσοδυναμοῦσι μὲ 375 ὀκ., καὶ ὅ τι τὸ φλορίνιον ἔχει ἀξίαν 2,50 δραχ. χρυσῶν, τὸ δὲ εἰκοσάφραγκον, ὅτι ἔχει ἀξίαν 30,20 δραχ. χαρτίνων.

Λύσις. Κατατάσσομεν πρῶτον τὰ δοθέντα ποσὰ κατὰ ζεύγη εἰς σειρὰς καὶ οὕτως, ὥστε τὸ δεύτερον ποσὸν ἑκάστου ζεύγους νὰ εἶναι ὁμοειδὲς πρὸς τὸ πρῶτον ποσὸν τοῦ ἑπομένου ζεύγους, τότε δὲ θέλει συμβῇ (ἂν τὰ δοθέντα ποσὰ εἶναι ἐπαρκῆ πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος) τὸ πρῶτον ποσὸν τοῦ πρώτου ζεύγους, ὅπερ παριστᾷ τὸ *ζητούμενον* ἄγνωστον ποσόν, νὰ εἶναι ὁμοειδὲς πρὸς τὸ δεύτερον ποσὸν τοῦ τελευταίου ζεύγους ἢ κατ' ἄλλην διάταξιν, τὸ πρῶτον ποσὸν τοῦ πρώτου ζεύγους νὰ εἶναι ὁμοειδὲς πρὸς τὸ δεύτερον ποσὸν τοῦ τελευταίου ζεύγους καὶ ὅπερ παριστᾷ τὸ ζητούμενον ἄγνωστον.

Χ φλορ.	1 στατὴρ
1 στατὴρ	44 ὀκαδ.
375 ὀκαδ.	1000 λίτρας
1000 λίτραι	310 δραχ.
100 δραχ.	125 δραχ. μετὰ τὰ ἔξοδα 25 %
30.20 δρχ.	20 φραγ.
2,50 φραγ.	1 φλορ.
100 φλορ.	103 φλορ. μετὰ τὰ ἔξοδα 3 %

ἢ καὶ κατ' ἄλλην διάταξιν ὡς ἑξῆς

103 φλορ. μὲ τὰ ἔξοδα 3 %	100 φλορ. ἄνευ ἐξόδων
1 φλορ.	2,50 φρ.
20 φραγ.	30,20 δρχ.
125 δρχ. μὲ τὰ ἔξοδα 25 %	100 δρχ. ἄνευ ἐξόδων
310 δρ.	1000 λιτρ.
1000 λιτρ.	375 ὀκ.
44 ὀκ.	1 στατ.
1 στατ.	Χ φλοριν.

Ἤδη δὲ πρὸς λύσιν τοῦ προταθέντος προβλήματος ἔχομεν τὰ ἑξῆς προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

α'.) Τὰ 100 φλορ. τῆς ἀξίας τῆς σταφίδος μέχρι Τεργέστης θὰ γίνωσιν ἐν Τεργέστῃ 103 φλορ. (λόγῳ τῆς ἐπιβαρύνσεως τῆς σταφίδος μὲ 3 %) *τὸ 1 φλορ. πόσον θὰ γείνῃ μετὰ τὴν ἐπιβάρυνσιν τοῦ 3 %.*

$(103 \times \frac{1}{100}$ φλορ.)

β'.) Τὸ 1 φλορ. ἢ ὅπερ ταὐτό,τὰ 2,50 φραγ. μέχρι Τεργέστης θὰ γείνωσι ἐν Τεργέστῃ $103\times\frac{1}{100}$ *φλορ. Τὰ 20 φράγκ. πόσον θὰ γείνωσιν ἐν Τεργέστῃ ;* $\left(103\times\frac{1}{100}\times\frac{20}{2,50}\right.$ φλορ.)

γ'.) Τὰ 20 φράγκ. ἢ ὅπερ ταὐτό, αἱ 30,20 δρχ. μέχρι Τεργέστης θὰ γείνωσιν ἐν Τεργέστῃ $103\times\frac{1}{100}\times\frac{20}{2,50}$ *φλορ. αἱ 125 δρχ. πόσον θὰ γείνωσιν ἐν Τεργέστῃ ;* $\left(103\times\frac{1}{100}\times\frac{20}{2,50}\times\frac{125}{30,20}\right.$ φλορ.).

δ'.) Αἱ 125 δρχ. μετὰ τὰ ἔξοδα τῶν 25 %, ἢ ὅπερ ταὐτό, αἱ 100 δρχ. πρὸ τῆς ἐπιβαρύνσεως αὐτῶν, θὰ γείνωσιν ἐν Τεργέστῃ μετὰ τὴν ἐπιβάρυνσιν αὐτῶν $103\times\frac{1}{100}\times\frac{20}{2,50}\times\frac{125}{30,20}$, *αἱ 310 δραχ. πόσον θὰ γείνωσιν ἐν Τεργέστῃ ;* $\left(103\times\frac{1}{100}\times\frac{20}{2,50}\times\frac{125}{30,20}\times\frac{310}{100}\right)$

ε'.) Αἱ 310 δρχ. ἢ ὅπερ ταὐτό,αἱ 1000 λιτρ. ἢ ὅπερ ταὐτό,αἱ 375 ὀκ. θὰ κοστίσωσιν ἐν Τεργέστῃ $103\times\frac{1}{100}\times\frac{20}{2,50}\times\frac{125}{30,20}\times\frac{310}{100}$ *φλορν. αἱ 44 ὀκ. πόσον θὰ κοστίσωσιν ;*

$$\left(103\times\frac{1}{100}\times\frac{20}{2,50}\times\frac{125}{30,20}\times\frac{310}{100}\times\frac{44}{375}\right.\text{ φιορ.}).$$

καὶ οὕτω ἐλύθη τὸ πρόβλημα καὶ εὑρέθη ἡ τιμὴ τῶν 44 ὀκ. ἤτοι τοῦ 1 στατῆρος τῆς σταφίδος εἰς φλορίνια νέα μετὰ τὴν ἐπιβάρυνσιν διὰ τῶν διαφόρων ἐξόδων τὰ ὁποῖα ἔγειναν πρὸς μεταφορὰν αὐτῆς ἐν Τεργέστῃ.

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος τούτου παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον εὑρίσκομεν, ἐὰν κατατάξωμεν τὰ ποσὰ τοῦ προβλήματος ὡς ἔχομεν κατατάξει αὐτὰ ἀνωτέρω καὶ διαιρέσωμεν τὸ γινόμενον τῶν γνωστῶν ποσῶν τῆς μιᾶς στήλης διὰ τοῦ γινομένου τῶν γνωστῶν ποσῶν τῶν ἐχόντων τὸν ἄγνωστον X τῆς ἄλλης στήλης, ἤτοι ὡς ἑξῆς

$$X=\frac{1\times44\times1000\times310\times125\times201\times103}{1\times375\times1000\times100\times30,20\times2,50\times100}$$

ἢ καὶ $X=\frac{44\times310\times125\times20\times103}{375\times100\times30,20\times2,50\times100}$

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος τούτου ἐξάγομεν τὸν ἑξῆς πρακτικὸν κανόνα.

551. Ἵνα εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ ἀγνώστου εἰς τὰ προβλήματα τῆς συνεζευγμένης μεθόδου, κατατάσσομεν πρῶτον τὰ δοθέντα ποσὰ κατὰ ζεύγη εἰς σειρὰς καὶ οὕτως, ὥστε τὸ δεύτερον ποσὸν ἑκάστου ζεύγους νὰ εἶναι ὁμοειδὲς πρὸς τὸ πρῶτον ποσὸν τοῦ ἑπομένου ζεύγους, τότε δὲ θέλει συμβῇ (ἂν εἶναι δεδομέναι πᾶσαι αἱ σχέσεις αἱ ἀπαιτούμεναι πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος) τὸ πρῶτον ποσὸν τοῦ πρώτου ζεύγους, νὰ εἶναι ὁμοειδὲς πρὸς τὸ δεύτερον ποσὸν τοῦ τελευταίου ζεύγους. Μετὰ ταῦτα δὲ (ἀφ' οὗ κάμωμεν πρῶτον τὰ ὁμοειδῆ ποσὰ νὰ γίνωνται ἐκ τῆς αὐτῆς μονάδος), διαιροῦμεν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν τῆς στήλης, ἥτις δὲν περιέχει τὸν ἄγνωστον, διὰ τοῦ γινομένου τῶν ἀριθμῶν τῆς στήλης, ἥτις περιέχει τὸν ἄγνωστον καὶ οὕτως ἔχομεν τὴν ζητουμένην τιμὴν τοῦ ἀγνώστου.

Πρόβλημα 2ον. Πόσα φράγκα κάμνουσι 174 ῥούβλια ῥωσσικά, ὅταν 100 ῥούβλια κάμνωσι 34 δίστηλα, ὅταν 50 δίστηλα κάμνωσι 52 γερμανικὰ τάλληρα, ὅταν 24 γερμανικὰ τάλληρα, κάμνουσι 5 λίρας ἀγγλικάς, ὅταν 100 λίραι ἀγγλ. τιμῶνται 2500 φράγκα.

Λύσις: Κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα (§ 551) ἔχομεν

X φργ.	174 ρουβλ.
100 ρουβλ.	34 διστηλ.
50 διστηλ.	52 γερμ. ταλ.
24 γερμ. ταλ.	5 λιρ. ἀγγλ.
100 λιρ. ἀγγ.	2500 φραγ.

$$X=\frac{174\times34\times52\times5\times2500}{100\times50\times24\times100}$$

Πρόβλημα 3ον. Ἔμπορος ἠγόρασεν ἐν Πάτραις Κορινθιακὴν σταφίδα πρὸς 250 δρχ. χαρτίνας τὰς 1000 ἀγγλικὰς λίτρας. Ἐπλήρωσε δὲ 26 % διὰ δασμὸν καὶ ναῦλον πρὸς ἀποστολὴν αὐτῆς εἰς Τεργέστην. Ἐνταῦθα δὲ ἐγένοντο ἕτερα ἔξοδα 5 % ἐπὶ τῆς ἀξίας, ἥτις προκύπτει μετὰ τὴν ἐπιβάρυνσιν τῆς σταφίδος διὰ τῶν προηγουμένων ἐξόδων. Ζητεῖται πόση θὰ εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ στατῆρος ἐν Τεργέστῃ εἰς φλορίνια νέα, ὅταν 167 ἀγγλικαὶ λίβραι κάμνουσι 57 ὀκάδας, τὸ δὲ φλορίνιον ἔχει 2,50 φραγ. καὶ τὸ εἰκοσάφραγκον 28 δρχ.

Λύσις. Κατὰ τὸν ἀνωτέρω (§ 551) κανόνα ἔχομεν

X φλορ.	44 ὀκ.
57 ὀκ.	167 λιτρ. ἀγγλ.
1000 λιβρ. ἀγγλ.	250 δρχ. χαρτ.
100 δρχ.	126 δρχ. μετὰ τὰ ἔξοδα
28 δρχ.	20 φργ.
2,50 φργ.	1 φλορ.
100 φλορ.	105 μετὰ τὰ ἔξοδα

Ἐντεῦθεν δὲ πορίζόμεθα

$$X=\frac{44\times167\times250\times126\times20\times1\times105}{57\times1000\times100\times28\times2{,}50\times100}$$

Ἀσκήσεις. 1) Ἔμπορος ἠγόρασε 5 στατῆρας ἐμπορεύματός τινος ἀντὶ 3600 μάρκων. Πόσας δραχμὰς χαρτίνας πρέπει νὰ πωλήσῃ τὴν ὀκᾶν, ἵνα ὠφεληθῇ 12 % ἐπὶ τῇ ὑποθέσει, ὅτι τὸ εἰκοσάφραγκον τιμᾶται 34,40 δρχ. χαρτ.

Σημ. Ἡ τιμὴ τοῦ μάρκου ἐλήφθη 1,25 φργ. (39,40 δρχ.).

2) Ἔμπορος ἠγόρασεν ἐν Πάτραις Κορινθιακὴν σταφίδα πρὸς 240 δρχ. χαρτίνας τὰς 1000 ἀγγλικὰς λίβρας. Πληρώσας δὲ 20 % διὰ δασμὸν καὶ ναῦλον ἀπέστειλε αὐτὴν εἰς Τεργέστην ἔνθα ἐγένοντο νέα ἔξοδα 5 %. Ζητεῖται πόση θὰ εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ στατῆρος ἐν Τεργέστῃ εἰς φλορίνια, γνωστοῦ ὄντος, ὅτι 167 ἀγγλικαὶ λίβραι ἰσοδυναμοῦσι πρὸς 57 ὀκ. καὶ ὅτι τὸ φλορίνιον ἔχει 2,50 φρ. τὸ δὲ εἰκοσάφραγκον ἔχει ἀξίαν 34,10 δρχ. (9,14 φλορ.)

Προβλήματα τῆς μίξεως.

Ὁρισμοί.

552. Ἡ συγχώνευσις δύο ἢ περισσοτέρων ποσῶν εἰς ἕν, λέγεται *μῖγμα* τῶν εἰρημένων ποσῶν. Ἡ δὲ *σύντηξις* δύο ἢ περισσοτέρων μετάλλων εἰς ἕν, λέγεται *κρᾶμα*.

553. *Τιμὴ τῆς μονάδος τοῦ μίγματος* (ἢ κράματος) ὁσωνδήποτε ὡρισμένων ποσῶν, λέγεται ὁ ἀριθμός, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸ ποσὸν τοῦ μίγματος δίδει τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν μερικῶν γινομένων, ἅτινα προκύπτουσιν ἐκ τοῦ πολαπλασιασμοῦ ἑκάστου ἀναμιχθέντος ποσοῦ ἐπὶ τὴν τιμὴν τῆς μονάδος αὐτοῦ.

554. *Τίτλος* τοῦ κράματος πολυτίμου μετάλλου λέγεται τὸ ποσὸν τοῦ πολυτίμου μετάλλου, τὸ ὁποῖον περιέχεται εἰς τὴν μονάδα τοῦ κράματος.

Π. χ. Ὅταν λέγωμεν, ὅτι ὁ τίτλος τῶν χρυσῶν νομισμάτων εἶναι 0,900 ἐννοοῦμεν, ὅτι εἰς ἑκάστην μονάδα βάρους τῶν νομισμάτων τὰ 900 χιλιοστὰ εἶναι καθαρὸς χρυσός, τὰ δὲ λοιπὰ 100 χιλιοστὰ εἶναι ἄλλα μέταλλα.

555. *Βαθμὸς* οἰνοπνεύματός τινος λέγεται τὸ πόσον τοῖς ἑκατὸν καθαροῦ οἰνοπνεύματος περιέχεται ἐν αὐτῷ.

Π. χ. Οἰνόπνευμα 80 βαθμῶν σημαίνει, ὅτι 80 τοῖς ἑκατὸν εἶναι καθαρὸν οἰνόπνευμα.

556. Προβλήματα τῆς μίξεως *διακρίνομεν τεσσάρων εἰδῶν.*

Προβλήματα πρώτου εἴδους.

***Προβλήματα** τοῦ πρώτου εἴδους τῆς μίξεως εἶναι ἐκεῖνα, εἰς τὰ **ὁποῖα δίδ**ονται δύο ἢ περισσότερα ποσὰ καὶ ἡ τιμὴ τῆς μονάδος ἑκάστου **τούτων** καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ τῆς μονάδος τοῦ μίγματος αὐτῶν.*

Πρόβλημα 1ον. *Οἰνοπώλης ἀνέμιξε 200 ὀκ. οἴνου, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκὰ τιμᾶται 28 λεπτ. μὲ 120 ὀκ. οἴνου, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκὰ τιμᾶται 40 λεπτ. καὶ μὲ 300 ὀκ. οἴνου, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκὰ τιμᾶται 26 λεπτά. Ζητεῖται πόσον τιμᾶται ἡ ὀκὰ τοῦ μίγματος τούτου.*

Λύσις. Εὑρίσκομεν πρῶτον τὴν τιμὴν ἑκάστου τῶν ποσῶν, τὰ ὁποῖα θ' ἀναμίξωμεν καὶ ἔπειτα τὴν τιμὴν τοῦ ὅλου μίγματος ὡς ἑξῆς.

Αἱ	200 ὀκ.	πρὸς 28 λεπτ.	τιμῶνται	5600 λεπτ.
»	120 ὀκ.	» 40 λεπτ.	»	4800 λεπτ.
»	300 ὀκ.	» 26 λεπτ.	»	7800 λεπτ.
	620 ὀκ.			18200 λεπτ.

Μετὰ δὲ ταῦτα προσθέτομεν τὰ πρὸς μῖξιν ποσά, καθὼς καὶ τὰς τιμάς των καὶ παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ 620 ὀκ. (ἤτοι τὸ ὅλον μῖγμα) τιμῶνται 18200 λεπτ. Ἄρα ἡ 1 ὀκ. τοῦ μίγματος θὰ τιμᾶται

$$18200 : 620 = 29 \text{ λεπ.} \frac{11}{31}$$

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος τούτου μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς πρακτικὸν κανόνα.

557. *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τῆς μονάδος τοῦ μίγματος δύο ἢ περισσοτέρων ποσῶν, διαιροῦμεν τὸ ἄθροισμα τῶν τιμῶν των διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν πρὸς μῖξιν ποσῶν.*

Π. χ. Ἐὰν ἀναμίξωμεν 300 ὀκ. ἐλαίου, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 1,15 δρχ. μὲ 275 ὀκ. ἐλαίου, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 1,25 δρχ. πόσον θ' ἀξίζῃ ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος; $\left(1{,}19\,\frac{18}{23} \text{ δρχ.}\right)$

Πρόβλημα 2ον. *Ἐὰν ἀναμίξωμεν 150 δρμ. ἀργύρου, τοῦ ὁποίου ὁ τίτλος εἶναι 0,950 μετὰ 100 δρμ. ἀργύρου, τοῦ ὁποίου ὁ τίτλος εἶναι 0,750, ποῖος εἶναι ὁ τίτλος τοῦ κράματος;*

Τὰ 150 δρμ.	ἔχουν καθαρὸν ἄργυρον	$150\times0{,}950=142{,}5$	δρμ.
» 100 δρμ.	» »	$100\times0{,}750=\ \ 75$	»
250 δρμ.		217,500	»

Ἑπομένως τὸ μῖγμα τῶν 250 δρμ., ὡς περιέχον καθαρὸν ἄργυρον 217,5 δρμ., θὰ ἔχῃ τίτλον 217,5 : 250 ἤτοι 0,870.

Προβλήματα δευτέρου εἴδους τῆς μίξεως.

558. *Προβλήματα τοῦ δευτέρου εἴδους τῆς μίξεως εἶναι ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα δίδονται ὁσαδήποτε ὡρισμένα ποσὰ καὶ ἡ τιμὴ τῆς μονάδος ἑκά-*

στου τούτων καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ τῆς μονάδος ἑτέρου ποσοῦ, τὸ ὁποῖον μετὰ τῶν δοθέντων πρόκειται ν' ἀποτελέσῃ μῖγμα ὡρισμένου ποσοῦ καὶ τοῦ ὁποίου ἡ μονὰς ἔχει ὡρισμένην τιμήν.

Π ρ ό β λ η μ α 1ον. *Χρυσοχόος θέλων νὰ κατασκευάσῃ ἀργυροῦν στέφανον βάρους 4000 γραμ. καὶ τίτλου 0,850, διαθέτει α'.) 800 γραμ. ἀργύρου ἔχοντος τίτλον 0,850, β'.) 1150 γραμ. ἀργύρου ἔχοντος τίτλον 0,900 καὶ γ'.) 1500 γραμ. ἀργύρου ἔχοντος τίτλον 0,800. Ζητεῖται ποίου τίτλου ἄργυρον πρέπει νὰ προμηθευθῇ ὁ χρυσοχόος διὰ τὰ ἐπίλοιπα 550 γραμμάρια;*

Λ ύ σ ι ς. Ἐπειδὴ ὁ καθαρὸς ἄργυρος, ὁ ὁποῖος θὰ περιέχηται εἰς τὰ διάφορα ποσὰ τοῦ ἀργύρου, τὰ ὁποῖα θ' ἀναμίξωμεν, πρέπει νὰ ἰσῶται μὲ τὸν καθαρὸν ἄργυρον, ὁ ὁποῖος θὰ περιέχηται εἰς τὰ 4000 γραμ. ἀργύρου ἔχοντος τίτλον 0,850 διὰ τοῦτο θὰ ἔχωμεν

800 γρμ.	× 0,850 =	680	γραμ.	καθαρ.	ἀργύρου
1150 γρμ.	× 0,900 =	1035	»	»	»
1500 γρμ.	× 0,800 =	1200	»	»	»
550 γρμ.	× Κ =	....			
4000 γρμ.	× 0,850 =	3400	»	»	«

Ἑπομένως ὁ ἄργυρος τῶν 550 γρμ. θὰ εἶναι τὸ συμπλήρωμα τοῦ ἀθροίσματος 680+1035+1200 μέχρι τοῦ 3400, ἤτοι 485 γραμ. Διὰ τοῦτο ὁ τίτλος τῶν 550 γρμ. ἀργύρου, τὸν ὁποῖον θὰ προμηθευθῶμεν πρέπει νὰ εἶναι 485 : 550, ἤτοι 0,881.

Π ρ ό β λ η μ α 2ον. *Χρυσοχόος θέλων νὰ κατασκευάσῃ ἀργυροῦν δοχεῖον βάρους 10 ὀκάδων καὶ τίτλου 0,850, διαθέτει α'.) 1 ὀκ. ἀργύρου τίτλου 0,600, β'.) 2 ὀκ. ἀργύρου τίτλου 0,850, γ'.) 2 ὀκ. 350 δρμ. ἀργύρου τίτλου 0,900, δ'.) 2 ὀκ. 200 δρμ. ἀργύρου τίτλου 0.960 καὶ ε'.) 1 ὀκ. 100 δρμ. ἀργύρου τίτλου 0,970. Ζητεῖται ποίου τίτλου ἄργυρον πρέπει νὰ προμηθευθῇ ὁ χρυσοχόος διὰ τὰ ἐπίλοιπα 150 δράμια.*

Λ ύ σ ι ς. Κατὰ τὸ προηγούμενον πρόβλημα ἔχομεν

1 ὀκ.	× 0,600	=	400 δρμ. × 0,600 =	240 δρμ.
2 ὀκ.	× 0,850	=	800 δρμ. × 0,850 =	680 δρμ.
2 ὀκ. 350 δρμ.	× 0,900	=	1150 δρμ. × 0,900 =	1035 δρμ.
2 ὀκ. 200 δρμ.	× 0,960	=	1000 δρμ. × 0,960 =	960 δρμ.
1 ὀκ. 100 δρμ.	× 0,970	=	500 δρμ × 0,970 =	485 δρμ.
150 δρμ.	× Κ	=	150 δρμ. × Κ =	....
10 ὀκ.	× 0,850		4000 δρμ. × 0,850 =	3400 δρμ.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἄθροισμα 240+680+1035+960+485 τοῦ καθαροῦ ἀργύρου εἶναι 3400 δρμ., διὰ τοῦτο εἰς τὰ ἐπίλοιπα 150 δρμ. δὲν πρέπει νὰ περιέχηται ποσῶς ἄργυρος, ἤτοι ὁ τίτλος τούτων δέον νὰ εἶναι 0, δι' ὃ τὰ ἐπίλοιπα 150 δρμ. θὰ θέσωμεν ἐξ ἀγενοῦς τινος μετάλλου, οἷον χαλκοῦ κτλ.

Σημ. Ἂν ἀντὶ τῆς ἀναμίξεως πολυτίμων μετάλλων ἐγένετο ἀνάμιξις οἴνου καὶ γενικῶς οἱουδήποτε οἰνοπνεύματος καὶ εὑρίσκετο ὡς τιμὴ τῆς μονάδος τοῦ πρὸς συμπλήρωσιν ποσοῦ 0, τότε ἠθέλομεν θέσῃ τὸ ποσὸν τοῦτο εἰς ὕδωρ, ἂν δὲ ἀντὶ οἰνοπνευμάτων ἀνεμιγνύοντο δημητριακοὶ καρποὶ (οἷον σῖτος, κριθὴ κ.τ.λ.) καὶ εὑρίσκετο ὡς τιμὴ τῆς μονάδος τοῦ πρὸς συμπλήρωσιν ποσοῦ 0, τότε τὸ πρόβλημα τοῦτο δεν ἐπεδέχετο λύσιν ἐν τῷ πρακτικῷ βίῳ, διότι προφανῶς δὲν ἔπρεπε τὸ πρὸς συμπλήρωσιν ποσὸν νὰ θέσωμεν π. χ. ἐκ χώματος, ὅπερ δὲν ἔχει οὐδεμίαν ἀξίαν, διότι τότε ἠθέλομεν καταστρέψῃ ὅλον τὸ μῖγμα.

Προβλήματα τρίτου εἴδους τῆς μίξεως.

559. ***Προβλήματα τοῦ τρίτου εἴδους τῆς μίξεως εἶναι ἐκεῖνα εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται ἀπὸ πόσον πρέπει νὰ λάβωμεν ἐκ διαφόρων ποιοτήτων διὰ νά μορφώσωμεν μῖγμά τι ὡρισμένου ἢ ἀορίστου ποσοῦ τοῦ ὁποίου ἡ μονὰς νὰ ἔχῃ δεδομένην τιμήν.***

560. Εἰς τὰ προβλήματα τοῦ τρίτου εἴδους τῆς μίξεως διακρίνομεν δύο περιπτώσεις.

Α΄.) ***Ὅταν τὸ μῖγμα ἀποτελεῖται ἐκ δύο ποιοτήτων καὶ***

Β΄.) ***Ὅταν τὸ μῖγμα ἀποτελεῖται ἐκ περισσοτέρων τῶν δύο ποιοτήτων.***

Αη Περίπτωσις.

561. ***Πρόβλημα* 1ον. *Σιτέμπορός τις ἔχει δύο ποιότητας σίτου καὶ τῆς μὲν πρώτης ποιότητος ἡ ὀκᾶ τιμᾶται 45 λεπτά, τῆς δὲ δευτέρας 37 λεπτ. Ζητεῖται πόσας ὀκάδας πρέπει νὰ λάβῃ ἐξ ἑκάστης ποιότητος διὰ νὰ μορφώσῃ μῖγμα 750 ὀκ. τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ν' ἀξίζῃ 40 λεπ.***

Λύσις. Κατατάσσομεν πρῶτον, πρὸς εὐκολίαν, τὰς τιμὰς τῶν δύο ποιοτήτων εἰς μίαν στήλην, τὴν δὲ τιμὴν τῆς μονάδος τοῦ μίγματος γράφομεν παραπλεύρως τούτων μεταξὺ τῶν τιμῶν τῶν ὁποίων περιέχεται, ἤτοι ὡς ἑξῆς·

α'. 45 λεπτ.

40 λεπτ.

β'. 37 λεπτ.

Ἤδη δὲ παρατηροῦμεν ὅτι

διὰ 1 ὀκ. τῆς α'. ποιότ. ζημιοῦται ἐν τῷ μίγματι 5 λεπ.

διά 1 ὀκ. τῆς β'. » κερδίζει » » 3 λεπ.

Ἄρα, ἂν λάβῃ

ἐκ μὲν τῆς α'. ποιότ. 3 ὀκ. θὰ ζημιῶται 5 λεπτ. $\times 3 = 15$ λεπτ.

ἐκ δὲ τῆς β'. » 5 ὀκ. θὰ κερδίζῃ 3 λεπτ. $\times 5 = 15$ λεπτ.

Ὥστε συμπεραίνομεν ὅτι

ἂν ἀναμίξῃ { 3 ὀκ. τῆς α'. ποιότητος
5 ὀκ. τῆς β'. »

θὰ κάμῃ μῖγμα 8 ὀκ.

Πωλῶν δὲ τὸ μῖγμα τοῦτο τῶν 8 ὀκ. πρὸς 40 λεπτ. τὴν ὀκᾶν, οὔτε κέρδος, οὔτε ζημίαν θὰ ἔχῃ.

Τὸ οὕτω μορφωθὲν ἀρχικὸν μῖγμα τῶν 8 ὀκ. καλοῦμεν βάσιν τοῦ μίγματος.

Μετὰ δὲ τὴν μόρφωσιν τῆς *βάσεως τοῦ μίγματος*, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς·

Διὰ 8 ὀκ. μίγματος θέτομεν 3 ὀκ. α'. ποιότητος

» 750 » » » X » » »

ὅθεν $X = 3 \times \frac{750}{8} = 281\frac{1}{4}$ ὀκ. τῆς α'. ποιότητος.

Διὰ 8 ὀκ. μίγμ. θέτομεν 5 ὀκ. τῆς β'. ποιότητος

» 750 » » » X » » » »

ὅθεν $X = 5 \times \frac{750}{8} = 468\frac{3}{4}$ ὀκ τῆς β'. ποιότητος

Ὥστε τὸ μῖγμα τῶν 750 ὀκ. μορφοῦμεν λαμβάνοντες $281\frac{1}{4}$ ὀκ. τῆς α'. ποιότ. καὶ $468\frac{3}{4}$ ὀκ. τῆς β'. ποιότητος.

Σημειωτέον ὅτι, ἐπειδὴ οἷον λόγον ἔχουσιν οἱ προσθετέοι τῆς βάσεως τοῦ μίγματος, τὸν αὐτὸν λόγον δέον νὰ ἔχωσι καὶ οἱ προσθετέοι τοῦ ὅλου μίγματος τῶν 750 ὀκ., διὰ τοῦτο τὸ πρόβλημα ἠδύνατο νὰ λυθῇ καὶ διὰ τῆς *μεθόδου τοῦ μερισμοῦ*, μοιράζοντες τὸν ἀριθμὸν 750 ὀκ. ἀναλόγως τῶν προσθετέων τῆς βάσεως τοῦ μίγματος, ὅτε εὑρίσκομεν ἐπίσης κατὰ τὸν κανόνα τῶν προβλημάτων τοῦ μερισμοῦ τοῦ πρώτου εἴδους, ὅτι

Ἐκ τῆς α'. ποιότ. δέον νὰ λάβωμεν $\frac{750\times3}{8}=281\frac{1}{4}$ ὀκ.

» » β'. » » » $\frac{750\times5}{8}=468\frac{3}{4}$ ὀκ.

Δοκιμὴ τοῦ προβλήματος

Αἱ $281\frac{1}{4}$ ὀκ. πρὸς 45 λεπτ. $=12656\frac{1}{4}$ λεπτ.

» $468\frac{3}{4}$ ὀκ. πρὸς 37 λεπτ. $=17343\frac{3}{4}$ λεπτ.

750 ὀκ. 30000 λεπτ.

Ἐντεῦθεν παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τιμῶν τῶν προσθετέων τοῦ μίγματος εἶναι 30000 λεπτά. Ἀλλὰ καὶ τὸ μῖγμα τῶν 750 πρὸς 40 λεπτ. τιμᾶται 30000 λεπτ. ἄρα τὸ πρόβλημα ἐλύθη ἄνευ λάθους.

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος τούτου μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

562. *Ἵνα μορφώσωμεν ἐκ δύο ποιοτήτων, μῖγμα ὡρισμένου ποσοῦ καὶ τοῦ ὁποίου ἡ μονὰς νὰ ἔχῃ δεδομένην τιμήν, μορφοῦμεν πρῶτον τὴν βάσιν τοῦ μίγματος, λαμβάνοντες τόσον ἐκ τῆς μιᾶς ποιότητος* (εἰς ὀκάδας ἢ δράμια κτλ. ἀναλόγως τοῦ μίγματος) *ὅση εἶναι ἡ διαφορὰ τῆς ἑτέρας ποιότητος καὶ τῆς τιμῆς τῆς μονάδος τοῦ μίγματος. Ἔπειτα δὲ μοιράζομεν τὸ μορφωτέον μῖγμα ἀναλόγως τῶν προσθετέων τῆς εὑρεθείσης βάσεως τοῦ μίγματος καὶ οὕτως εὑρίσκομεν τὰ ποσὰ ἐκ τῶν ὁποίων θ' ἀποτελῆται τὸ μορφωτέον μῖγμα.*

Σημ. Ἐπὶ τῶν προσθετέων τῆς βάσεως τοῦ μίγματος δυνάμεθα νὰ κάμωμεν πάντα πολλαπλασιασμὸν ἢ διαίρεσιν δι' ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, διότι τὸ τοιοῦτον οὐδόλως μεταβάλλει τὴν μεταξὺ αὐτῶν σχέσιν, ἑπομένως οὐδὲ τὴν σχέσιν τῶν προσθετέων ἐξ ὧν θ' ἀποτελεσθῇ τὸ ὅλον μῖγμα.

563. *Δοκιμή*. Ἂν ἡ τιμὴ τοῦ ὅλου μίγματος εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τιμῶν τῶν προθετέων αὐτοῦ, τὸ πρόβλημα ἐλύθη ἄνευ λάθους.

Ἀσκήσεις. *Κατὰ ποίαν ἀναλογίαν πρέπει ν' ἀναμίξῃ τις οἶνον τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 85 λεπτὰ μετὰ ὕδατος, ἵνα καταβιβάσῃ τὴν τιμήν του εἰς 75 λεπ.*

Λύσις. Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου, ἀρκεῖ νὰ μορφωθῇ μόνον ἡ βάσις τοῦ μίγματος.

α'. 85		ἐκ τοῦ οἴνου 75	15
	75 ἄρα		ἤ
β'. 0		ἐξ ὕδατος 10	$\frac{2}{17}$

ἤτοι εἰς 15 μέρη οἴνου (δηλ. ὀκάδας ἢ δράμια ἢ χιλιόγραμμα κτλ.) δέον νὰ θέτωμεν 2 μέρη ὕδατος.

2) Πνευματοποιός τις θέλει νὰ κάμῃ μῖγμα 450 ὀκ. τῶν 65° ἐξ οἰνοπνεύματος τῶν 55° καὶ ἑτέρου τῶν 72°. Ζητεῖται πόσον πρέπει νὰ λάβῃ ἐξ ἑκάστου εἴδους.

ἐκ τοῦ α'. 264 ὀκ. $\frac{12}{17}$ ἤτοι 264 ὀκ. 282 δρμ.

ἐκ τοῦ β'. 185 ὀκ. $\frac{5}{17}$ ἤτοι 185 ὀκ. 118 δρμ.

Βα Περίπτωσις.

564. *Πρόβλημα 1ον. Ἐκόμισέ τις ἐξ Εὐρώπης οἰνοπνεύματα διαφόρων τιμῶν, ἤτοι 40, 32, 26 καὶ 21 φράγκων τὸ ἑκατόλλιτρον καὶ θέλει νὰ μάθῃ κατὰ ποίαν ἀναλογίαν πρέπει νὰ λάβῃ ἐκ τούτων, ἵνα ἀποτελέσῃ μῖγμα 36 ἑκατολλίτρων τῶν 28 φράγκων τὸ ἑκατόλλιτρον;*

Λύσις. Μορφοῦμεν *πρῶτον* τὴν βάσιν τοῦ μίγματος. Μορφοῦμεν δὲ ταύτην σκεπτόμενοι κατὰ διαφόρους τρόπους καὶ δὴ

α'. τρόπος. Καταστρώνομεν πρῶτον τὰς τιμὰς τῶν διαφόρων οἰνοπνευμάτων εἰς μίαν στήλην, τὴν δὲ τιμὴν τῆς μονάδος τοῦ μίγματος γράφομεν παραπλεύρως τούτων καὶ μεταξὺ τῶν τιμῶν τῶν ὁποίων περιέχεται, ἤτοι ὡς ἑξῆς

α'. 40	
β'. 32	28
γ'. 26	
δ'. 21	

Ἤδη δὲ σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς

διὰ	1	ἑκτλ.	τῆς α'.	ποιότ.	ζημιοῦται	ἐν τῷ	μίγματι	12	φραγ.
»	1	»	» β'.	»	»	»	»	4	»
»	1	»	» γ'.	»	κερδίζει	»	»	2	»
»	1	»	» δ'.	»	»	»	»	7	»

Ἄρα, ἂν λάβῃ

Ἐκ μὲν	τῆς α'. ποιότ.	7	ἑκτλ.	θὰ ζημιῶται	12	φραγ.	×7=84	φραγ.
» δὲ	» β'.	» 2	»	»	4	»	×2= 8	»
» »	» γ'.	» 4	»	θὰ κερδίζῃ	2	»	×4= 8	»
» »	» δ'.	» 12	»	»	7	»	×12=84	»

Ἐπειδὴ ὅμως ἡ ζημία τῶν 84 φραγ.+8 φραγ., ἡ προκύπτουσα ἐκ τῶν δύο πρώτων ποιοτήτων, θὰ ἐξουδετερῶται ἀπὸ τοῦ κέρδους 8 φρ.+84 φραγ. τὸ ὁποῖον προκύπτει ἐκ τῶν δύο τελευταίων ποιοτήτων, διὰ τοῦτο, οὔτε κέρδος, οὔτε ζημία προκύπτει, ἂν ἡ ἀνάμιξις γείνῃ κατὰ τὸν ἀνωτέρω τρόπον, ἤτοι

Ἂν ἀναμίξῃ	7 ἑκτλ.	τῆς	α'.	ποιότητος
	2 ἑκτλ	»	β'	»
	4 ἑκτλ.	»	γ'.	»
	12 ἑκτλ.	»	δ'.	»
θὰ κάμῃ μῖγμα	25 ἑκατολ.			

Πωλῶν δὲ τὸ μῖγμα τοῦτο τῶν 25 ἑκτλ. πρὸς 28 φράγκα τὸ ἑκατόλλιτρον, οὔτε κέρδος, οὔτε ζημίαν θὰ ἔχῃ δηλ. θὰ εἰσπράξῃ τὰ χρήματα, τὰ ὁποῖα θὰ εἰσέπρατε, ἐὰν ἐπώλει χωριστὰ τὰ 7 ἑκατλ. τῆς α'. ποιότ. τὰ 2 ἑκατλ. τῆς β'. ποιότ. τὰ 4 ἑκατλ. τῆς γ'. ποιότ. καὶ τὰ 12 ἑκατλ. τῆς δ'. ποιότ. καὶ ἕκαστον τούτων μὲ τὴν τιμήν του.

Τὸ οὕτω μορφωθὲν ἀρχικὸν μῖγμα καλοῦμεν *βάσιν τοῦ μίγματος*.

Μετὰ δὲ ταῦτα ἢ διὰ τῆς λύσεως προβλημάτων *τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν* ἢ διὰ τῆς *μεθόδου τοῦ μερισμοῦ*, ὡς ἐπράξαμεν ἐν *τῇ πρώτῃ περιπτώσει* εὑρίσκομεν, ὅτι πρὸς μόρφωσιν τῶν 36 ἑκατολλίτρων δέον νὰ λάβωμεν

ἐκ τῆς α'. ποιότ. $\frac{36\times 7}{25}=10,08$ ἑκατολ.

» » β'. » $\frac{36\times 2}{25}=2,88$ ἑκατολ.

» » γ'. » $\frac{36\times 4}{25}=5,76$ ἑκατολ.

» » δ'. » $\frac{36\times 12}{25}=17,28$ ἑκατολ.

Τὴν δὲ δοκιμὴν τοῦ προβλήματος κάμνομεν, ὡς ἐν *τῇ πρώτῃ περιπτώσει*.

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος τούτου ἐξάγομεν τὸν ἑξῆς πρακτικὸν κανόνα.

565. *Ἵνα μορφώσωμεν μῖγμα ὡρισμένου ποσοῦ καὶ τοῦ ὁποίου ἡ μονὰς νὰ ἔχῃ δεδομένην τιμήν, ὅταν ἡ τιμὴ τῆς μονάδος αὐτοῦ περιέχηται μεταξὺ ἰσαρίθμων ποσῶν ἀνωτέρας καὶ κατωτέρας ποιότητος, μορφοῦμεν πρῶτον τὴν βάσιν τοῦ μίγματος, λαμβάνοντες τόσον ἐξ ἑκάστης τῶν ποιοτήτων τῶν ἐχουσῶν τιμὴν ἀνωτέραν τοῦ μίγματος,*

ὅση εἶναι ἡ διαφορὰ τῆς τιμῆς τῆς ἀντιστοίχου κατωτέρας ποιότητος καὶ τῆς τιμῆς τῆς μονάδος τοῦ μίγματος, τόσον δὲ ἐξ ἑκάστης τῶν ποιοτήτων τῶν ἐχουσῶν τιμὴν κατωτέραν τοῦ μίγματος, ὅση εἶναι ἡ διαφορὰ τῆς τιμῆς τῆς ἀντιστοίχου ἀνωτέρας ποιότητος καὶ τῆς τιμῆς τῆς μονάδος τοῦ μίγματος. Ἔπειτα δὲ μοιράζομεν τὸ μορφωτέον μῖγμα ἀναλόγως τῶν προσθετέων τῆς εὑρεθείσης βάσεως τοῦ μίγματος καὶ οὕτως εὑρίσκομεν τὰ ποσά, ἐκ τῶν ὁποίων θ' ἀποτελεσθῇ τὸ μορφωτέον μῖγμα.

566. *Δεύτερος τρόπος μορφώσεως τῆς βάσεως.* Τὴν βάσιν τοῦ μίγματος ὁσωνδήποτε ποσῶν δυνάμεθα νὰ μορφώσωμεν καὶ κατὰ γενικώτερον τρόπον, ὅστις νὰ ἰσχύῃ εἰς πᾶσαν περίστασιν δηλ. ἐπὶ ὁσωνδήποτε ποσῶν καὶ ἐπὶ οἱασδήποτε τιμῆς τῆς μονάδος τοῦ μίγματος. Πρὸς τοῦτο δὲ σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς ἐπὶ τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος.

διὰ 1 ἑκτλ. τῆς α'. ποιοτ. ζημιοῦται ἐν τῷ μίγμ. 12 φργ. } =16 φργ. ζημία
» » » » β'. » » » » » 4 φργ. }

» » » » γ'. » κερδίζει » » » 2 φργ. } =9 φραγ. κέρδος
» » » » δ'. » » » » » 7 φργ. }

Ἄρα, ἂν λάβῃ

ἐκ μὲν τῆς α'. ποιοτ. 9 ἑκατολ. θὰ ζημ. 12×9 =108 φργ. } =144 φργ. ζημία
» δὲ » β'. » 9 » » » 4×9 = 36 φργ. }

» » » γ'. » 16 » » κερδ. 2×16= 32 φργ. } =144 φργ. κέρδ.
» » » δ'. » 16 » » » 7×16=112 φργ. }

Ἐπειδὴ ὅμως ἡ ζημία τῶν 144 φρ. ἡ προκύπτουσα ἐκ τῶν δύο πρώτων ποιοτήτων ἐξουδετεροῦται ὑπὸ τοῦ κέρδους τῶν 144 φρ., τὸ ὁποῖον προκύπτει ἐκ τῶν δύο τελευταίων ποιοτήτων, διὰ τοῦτο, οὔτε κέρδος, οὔτε ζημία, προκύπτει, ἂν ἡ ἀνάμιξις γείνῃ κατὰ τὸν ἀνωτέρω τρόπον, ἤτοι

Ἂν ἀναμίξῃ
9 ἑκατλ. τῆς α'. ποιοτ.
9 » » β'. »
16 » » γ'. »
16 » » δ'. »
50 ἑκατλ.

Πωλῶν δὲ τὸ μῖγμα τοῦτο τῶν 50 ἑκατλ. πρὸς 28 φραγ τὸ ἑκατόλλιτρον, οὔτε κέρδος, οὔτε ζημίαν θὰ ἔχῃ καὶ οὕτω ἐμορφώθη ἡ βάσις τοῦ μίγματος.

Μετὰ δὲ ταῦτα ἢ διὰ τῆς λύσεως προβλημάτων τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν ἢ διὰ τῆς μεθόδου τοῦ μερισμοῦ, ὡς ἐπράξαμεν καὶ ἐν τῇ *πρώτῃ περιπτώσει* εὑρίσκομεν, ὅτι πρὸς μόρφωσιν τοῦ μίγματος τῶν 36 ἑκατολλίτρων δέον νὰ λάβωμεν

ἐκ τῆς α΄. ποιοτ. $\frac{36 \times 9}{50} = 6,48$ ἑκατλ.

» » β΄. » $\frac{36 \times 9}{50} = 6,48$ ἑκατλ.

» » γ΄. » $\frac{36 \times 16}{50} = 11,52$ ἑκατλ.

» » δ΄. » $\frac{36 \times 16}{50} = 11,52$ ἑκατλ.

Τὴν δὲ δοκιμὴν τοῦ προβλήματος κάμνομεν, ὡς ἐν τῇ *πρώτῃ περιπτώσει.*

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος τούτου ἐξάγομεν τὸν ἑξῆς πρακτικὸν κανόνα.

567. *Ἵνα μορφώσωμεν ἐξ ὁσωνδήποτε ποσῶν, μῖγμα ὡρισμένου ποσοῦ καὶ τοῦ ὁποίου ἡ μονὰς νὰ ἔχῃ ὡρισμένην τιμήν, μορφοῦμεν πρῶτον τὴν βάσιν τοῦ μίγματος, λαμβάνοντες τόσον ἐξ ἑκάστης τῶν ποιοτήτων τῶν ἐχουσῶν τιμὴν ἀνωτέραν τοῦ μίγματος, ὅσον εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν διαφορῶν τῶν τιμῶν τῶν κατωτέρων ποιοτήτων ἀπὸ τῆς τιμῆς τῆς μονάδος τοῦ μίγματος, τόσον δὲ ἐξ ἑκάστης τῶν ποιοτήτων τῶν ἐχουσῶν τιμὴν κατωτέραν τοῦ μίγματος, ὅσον εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν διαφορῶν τῶν τιμῶν τῶν ἀνωτέρων ποιοτήτων καὶ τῆς τιμῆς τῆς μονάδος τοῦ μίγματος. Ἔπειτα δὲ μοιράζομεν τὸ μορφωτέον μῖγμα ἀναλόγως τῶν προσθετέων τῆς εὑρεθείσης βάσεως τοῦ μίγματος καὶ οὕτως εὑρίσκομεν τὰ ποσά, ἐκ τῶν ὁποίων θ' ἀποτελεσθῇ τὸ μορφωτέον ποσόν.*

Προβλήματα τοῦ τετάρτου εἴδους τῆς μίξεως.

568. *Προβλήματα τοῦ τετάρτου εἴδους τῆς μίξεως εἶναι ἐκεῖνα εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται κατὰ πόσον πρέπει ν' αὐξήσωμεν ποσὸν ὡρισμένων ἐκ ποσῶν διαφόρων ποιοτήτων, ἵνα ἡ τιμὴ τῆς μονάδος τοῦ μίγματος λάβῃ δεδομένην τιμήν.*

569. Εἰς τὰ προβλήματα τοῦ τετάρτου εἴδους τῆς μίξεως διακρίνομεν δύο περιπτώσεις.

Α΄.) *Ὅταν τὸ μῖγμα ἀποτελῆται ἐκ δύο ποιοτήτων καὶ*

Β΄.) *Ὅταν τὸ μῖγμα ἀποτελῆται ἐκ περισσοτέρων τῶν δύο ποιοτήτων.*

Αη Περίπτωσις

Πρόβλημα 1ον. *Οἰνοπώλης ἔχει 3500 ὀκ. οἴνου τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 80 λεπ. Πόσον πρέπει νὰ θέσῃ ἐξ οἴνου τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 50 λεπ. διὰ νὰ μορφώσῃ μῖγμα τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ν' ἀξίζῃ 70 λ.*

Λύσις. Κατατάσσομεν πρῶτον τὰς τιμάς, ὡς συνήθως, ἤτοι ὡς ἑξῆς

α΄. 80

70

β΄. 50

Μετὰ δὲ ταῦτα, μορφοῦντες τοὺς προσθετέους τῆς βάσεως τοῦ μίγματος, ὡς συνήθως, εὑρίσκομεν

ἐκ τῆς α΄ ποιότ.. 20 ὀκ.
» » β΄. » 10 »

Εἶτα δὲ σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς

Εἰς 20 ὀκ. τῆς α΄. ποιοτ. θέτομεν 10 ὀκ τῆς β΄. ποιοτ.
» 3500 » » β΄. » » X » » »

ὅθεν $X = 10 \times \frac{3500}{20} = 1750$ ὀκ. τῆς β΄. ποιοτ.

Οὕτω τὸ ζητούμενον μῖγμα θ' ἀποτελῆται ἐκ 3500 τῆς α΄. ποιότητος καὶ 1750 τῆς β΄. ποιότητος. Ἑπομένως θὰ εἶναι 3500 ὀκ. + 1750 ὀκ. ἤτοι 5250 ὀκ.

Δοκιμὴ

3500 ὀκ. × 80 = 280000 λεπ.
1750 ὀκ. × 50 = 87500 λεπ.
5250 ὀκ. × 70 = 367500 λεπ.

ἄρα τὸ πρόβλημα ἐλύθη ἄνευ λάθους.

Σημ. Εἰς τοὺς προσθετέους τῆς βάσεως τοῦ μίγματος δυνάμεθα νὰ κάμωμεν πάντα πολλαπλασιασμὸν ἢ διαίρεσιν δι' ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, διότι τὸ τοιοῦτον δὲν μεταβάλλει τὴν μεταξὺ αὐτῶν σχέσιν.

Πρόβλημα 2ον. *Οἰνοπώλης τις ἔχει 3500 ὀκ. οἴνου τὸν ὁποῖον πωλεῖ 80 λεπτὰ τὴν ὀκάν. Πόσας ὀκάδας ὕδατος πρέπει νὰ θέσῃ, ἵνα ἡ ὀκὰ τοῦ μίγματος τιμᾶται 70 λεπτά;*

οἶνος 80 λεπ.

μῖγμα 70 λεπ.

ὕδωρ 0 λεπ.

Οἱ δὲ προσθετέοι τῆς βάσεως τοῦ μίγματος εἶναι

ἐκ τοῦ οἴνου 70 — 0 ἤτοι 70 ὀκ. ἢ 7 ὀκ.
ἐκ τοῦ ὕδατος 80 — 70 ἤτοι 10 ὀκ, ἢ 1 ὀκ.

Καὶ ἤδη σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς

εἰς $\underline{7}$ ὀκ. οἴνου θέτομεν $\underline{1}$ ὀκ. ὕδατος

» 3500 » » » X »

$$\text{ὅθεν } X=1\times\frac{3500}{7}=500 \text{ ὀκ. ὕδατος.}$$

Ὥστε τὸ ζητούμενον μῖγμα εἶναι 3500+500 ὀκ. ἤτοι 4000 ὀκ. Κάμνοντες δὲ τὴν δοκιμὴν τοῦ προβλήματος, ὡς ἀνωτέρω, βεβαιούμεθα, ὅτι τοῦτο ἐλύθη ἄνευ λάθους.

Βα Περίπτωσις.

570. *Πρόβλημα* 1ον. *Πνευματοποιός τις ἔχει οἰνόπνευμα τῶν 80^0, ἕτερον τῶν 60^0 καὶ τρίτον τῶν 40^0. Ζητεῖται πόσον πρέπει νὰ θέσῃ εἰς 100 ὀκ. τῆς πρώτης ποιότητος ἐκ τῶν δύο ἄλλων ποιοτήτων εἶναι τὸ μῖγμα γείνῃ τῶν 55^0.*

Λύσις. Κατατάσσομεν πρῶτον τὰς τιμάς, ὡς συνήθως, ἤτοι ὡς ἑξῆς

α'. 80^0
β'. 60^0
        55^0
γ'. 40^0

Ἤδη εὑρίσκοντες τοὺς προσθετέους τῆς βάσεως τοῦ μίγματος κατὰ τὰ γνωστὰ ἔχομεν

ἐκ τῆς α'. ποιότ.	15 ὀκ.	ἢ καὶ διαιροῦντες	1 ὀκ.
» β'. »	15 »	τούτους διὰ 15 εὑ-	1 »
» γ'. »	25+5=30 »	ρίσκομεν	2 »

Καὶ ἤδη σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς

εἰς $\underline{1}$ ὀκ. τῆς α'. ποιότ. θέτομεν $\underline{1}$ ὀκ. τῆς β'. ποιότ.

» 100 » » » » » X » » » »

$$\text{Ὅθεν } X=1\times\frac{100}{1}=100 \text{ ὀκ. τῆς β'. ποιότητος}$$

Εἰς $\underline{1}$ ὀκ. τῆς α'. ποιότ. θέτομεν $\underline{2}$ ὀκ. τῆς γ'. ποιότ.

» 100 » » » » » X » » » »

$$\text{ὅθεν } X=2\times\frac{100}{1}=200 \text{ ὀκ. τῆς γ'. ποιότητος}$$

Οὕτω δὲ τὸ ζητούμενον μῖγμα ἀποτελεῖται ἐκ τῶν ἑξῆς ποσῶν

100 ὀκ. ἐκ τῆς α'. ποιότ.
100 » » » β'. »
200 » » » γ'. »
400 ὀκ. τὸ ἀποτελεσθὲν μῖγμα τῶν 55^0.

Δοκιμὴ τοῦ προβλήματος.

$$\begin{array}{r} 100 \text{ ὀκ.} \times 80^0 = 8000^0 \\ 100 \text{ ὀκ.} \times 60^0 = 6000^0 \\ \underline{200 \text{ ὀκ.} \times 40^0 = 8000^0} \\ 400 \text{ ὀκ.} \times 55^0 = 22000^0 \end{array}$$

ἄρα τὸ πρόβλημα ἐλύθη ἄνευ λάθους

Περὶ μέσου ὅρου.

571. Μέσος ὅρος καλεῖται ἡ τιμὴ τῆς μονάδος τοῦ ἀθροίσματος δύο ἢ περισσοτέρων ὡρισμένων ποσῶν ὁμοειδῶν ἢ ἡ μέση τιμὴ πράγματός τινος ἔχοντος διαφόρους τιμάς.

572. *Κατὰ τὰ προβλήματα τοῦ πρώτου εἴδους τῆς μίξεως λύονται καὶ τὰ προβλήματα τοῦ μέσου ὅρου.*

Προβλήματα μέσου ὅρου διακρίνομεν δύο εἰδῶν.

Α΄.) *Ὅταν ζητῆται ἡ τιμὴ τῆς μονάδος τοῦ ἀθροίσματος δύο ἢ περισσοτέρων ὡρισμένων ποσῶν ὁμοειδῶν μὴ ἐπιδεχομένων μῖξιν καὶ τῶν ὁποίων ἡ τιμὴ τῆς μονάδος ἐδόθη καὶ*

Β΄.) *Ὅταν ζητῆται ἡ μέση τιμὴ πράγματός τινος ἔχοντος διαφόρους τιμάς.*

Πρώτου εἴδους πρόβλημα. Δωμάτιόν τι ἐνοικιάσθη τοὺς πρώτους 3 μῆνας πρὸς 45 δρχ. κατὰ μῆνα, τοὺς ἑπομένους 5 μῆνας πρὸς 40 δρχ. τὸν μῆνα καὶ τοὺς ἑπομένους 4 μῆνας πρὸς 35 δρχ. Ζητεῖται πόσον ἐνῳκιάσθη κατὰ μέσον ὅρον τὸν μῆνα;

Λύσις. Λύοντες τὸ πρόβλημα τοῦτο κατὰ τὰ προβλήματα τοῦ πρώτου εἴδους τῆς μίξεως εὑρίσκομεν

Οἱ	3	μην.	πρὸς	45	δρχ.	δίδουν	135	δρχ.
»	5	»	»	40	»	»	200	»
»	4	»	»	35	»	»	140	»
	12	»					475	»

Ἐπειδὴ δὲ κατὰ τοὺς 12 μῆν. ἐδόθησαν 475 δρχ. Ἄρα εἰς τὸν ἕνα μῆνα ἀναλογοῦσι 475 : 12=39,58 δρχ.

Ὥστε *κατὰ μέσον ὅρον* τὸ δωμάτιον ἐνῳκιάσθη τὸν μῆνα 39,58 δρχ.

Δευτέρου εἴδους πρόβλημα. Ἐμετρήθη οἰκόπεδόν τι καὶ εὑρέθη ἔχον ἔκτασιν 225 τ. μέτρων, μετρηθὲν δὲ καὶ πάλιν εὑρέθη *ἔχον ἔκτασιν 227,75 τ. μέτρων, τέλος δὲ μετρηθὲν καὶ ἐκ τρίτου εὑρέθη ἔχον ἔκτασιν 221,85 τ. μέτρων. Πόσον εἶναι κατὰ μέσον ὅρον τὸ οἰκόπεδον;*

Λύσις. Ἐπειδὴ αἱ τρεῖς καταμετρήσεις τοῦ αὐτοῦ οἰκοπέδου ἔδοσαν 225+227,75+221,85 ἤτοι 674,60, τ. μέτρα, ἄρα εἰς τὴν μίαν καταμέτρησιν ἀναλογεῖ 674,6 : 3, ἤτοι 224,87 τ. μέτρα.

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος τούτου μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

Ὁ μέσος ὅρος δύο ἢ περισσοτέρων ποσῶν ὁμοειδῶν εὑρίσκεται, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ποσῶν διὰ τοῦ πλήθους αὐτῶν.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν

1) Οἰκία τις ἐνῳκιάσθη ἐπὶ 2 ἔτη πρὸς 120 δρχ. τὸν μῆνα, ἐπὶ ἕτερα 2 ἔτη πρὸς 160 δρχ. τὸν μῆνα καὶ ἐπὶ ἓν ἔτος πρὸς 100 δρχ. τὸν μῆνα. Ζητεῖται πόσον ἐνῳκιάσθη κατὰ μέσον ὅρον κατ' ἔτος καὶ πόσον κατὰ μῆνα.

(1584 δρχ. κατ' ἔτος.—132 δρχ. τὸν μῆνα)

2) Κτῆμα τι ἐνῳκιάσθη ἐφέτος μὲν 850 δρχ. πέρυσι δὲ 950 δρχ. κατὰ δὲ τὸ προπαρελθὸν ἔτος 750 δρχ. Πόσον, κατὰ μέσον ὅρον, ἐνῳκιάσθη τὸ ἔτος; (850 δρχ.)

3) Μαθητής τις ἔχει εἰς μὲν τὰ ἑλληνικὰ βαθμὸν 6, εἰς τὰ μαθηματικὰ 5. εἰς τὴν γεωγραφίαν 8, εἰς τὴν ἱστορίαν 9, εἰς τὰ γαλλικὰ 7, εἰς τὰ λατινικὰ 6, εἰς τὴν φυσικὴν 7 καὶ εἰς τὰ ἱερὰ 8. Ποῖος εἶναι, κατὰ μέσον ὅρον, ὁ βαθμὸς τῆς προόδου τοῦ μαθητοῦ; (ὁ 7)

Προσθήκη. Ἂν κατὰ νόμον ὁ βαθμὸς τῶν ἑλληνικῶν πρέπῃ νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 6, ὁ δὲ τῶν μαθηματικῶν ἐπὶ 5 καὶ ὁ τῆς γεωγραφίας, ἱστορίας, γαλλικῶν, λατινικῶν, φυσικῆς καὶ ἱερῶν ἐπὶ 4, ποῖος θὰ ἦτο ὁ βαθμὸς τῆς ἱκανότητος τοῦ μαθητοῦ κατὰ μέσον ὅρον; $\left(241 : 35 \text{ ἤτοι } 6\frac{31}{35}\right)$

ΤΕΛΟΣ

3854

δ

3854679 8 | 62
36
254
244
10670

| 62
124

5.23.46 | 22
128 | 42
84 | 2
3946 | 84
3584
362

794 | 44
8

228
448
8
3584

$$\frac{a}{b} = 0,35\,35\,35\,35 \quad \frac{35}{99}$$

$$100 \times \frac{a}{b} = 35,35\,35$$

$$\frac{a}{b} = 0,35\,35\,35$$

$$99\frac{a}{b} = 35 - \frac{35}{1000000}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{35}{99} - \frac{35}{1000000 \times 99}$$

ΕΡΓΑ ΤΟΥ ΑΥΤΟΥ ΣΥΓΓΡΑΦΕΩΣ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ

Θεωρητικὴ ἀριθμητική 3,50

Κοσμογραφία *μετὰ οὐρανογραφικοῦ χάρτου κινουμένου περιστροφικῶς πρὸς ἀνεύρεσιν τῶν κατὰ τὴν ὥραν τῆς παρατηρήσεως ὑπεράνω τοῦ ὁρίζοντος τῶν παρ' ἡμῖν τόπων εὑρισκομένων ἀστερισμῶν* 3,50

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ ΤΩΝ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΕΙΩΝ

ἐγκεκριμένα ἐπὶ πενταετίαν

Πρακτικὴ Ἀριθμητική 1,40

Πρακτικὴ Γεωμετρία 1,20

Συλλογὴ Προβλημάτων 0,60

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ ΤΩΝ ΔΗΜΟΤΙΚΩΝ ΣΧΟΛΕΙΩΝ

ἐγκεκριμένα ἐπὶ πενταετίαν

Ἀριθμητικαὶ Ἀσκήσεις *διὰ τὴν Β'. Γ'. καὶ Δ'. τάξιν*

Πρακτικὴ Γεωμετρία *διὰ τὴν Δ'. Ε'. καὶ Ϛ'. τάξιν*

Τιμᾶται δραχμὰς 3,50

3,50