Κ. ΙΟΡΔΑΝΙΔΗΣ - Δ. Λ. ΚΑΡΑΓΕΩΡΓΟΣ - Κ. ΚΩΣΤΑΚΗΣ
Α. ΜΑΚΡΙΔΗΣ - Β. ΝΑΣΟΠΟΥΛΟΣ

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

## Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

### ΥΛΗ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

ΤΕΥΧΟΣ Α'

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑ 1978

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

## Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

### ΥΛΗ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

Κ. ΙΟΡΔΑΝΙΔΗΣ - Δ. Λ. ΚΑΡΑΓΕΩΡΓΟΣ - Κ. ΚΩΣΤΑΚΗΣ
Α. ΜΑΚΡΙΔΗΣ - Β. ΝΑΣΟΠΟΥΛΟΣ

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

## Β′ ΛΥΚΕΙΟΥ

### ΥΛΗ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

ΤΕΥΧΟΣ Α′

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑ 1978

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

# ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

# 1. ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ C ΤΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

## 1.1. Εἰσαγωγή

Στήν προηγούμενη τάξη μάθαμε ὅτι οἱ ρίζες τῆς δευτεροβάθμιας ἐξισώσεως

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0, \quad \alpha\neq 0, \quad \alpha,\beta,\gamma \in \mathbf{R} \tag{1}$$

δίνονται ἀπό τόν τύπο

$$x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha} \tag{2}$$

Ἄν εἶναι $\beta^2-4\alpha\gamma\geq 0$, τότε οἱ ρίζες αὐτές εἶναι πραγματικές. Ἄν ὅμως εἶναι $\beta^2-4\alpha\gamma<0$, τότε ἡ (1) δέν ἔχει ρίζες στό **R**. Στήν τελευταία αὐτή περίπτωση οἱ ρίζες τῆς (1) ἔχουν τή μορφή $\kappa\pm\lambda i$ καί προκύπτουν ἀπό τόν τύπο (2), ἄν αὐτός γραφτεῖ(1)

$$x=-\frac{\beta}{2\alpha}\pm\frac{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}}{2\alpha}\,i \tag{3}$$

Οἱ ἀριθμοί $\kappa\pm\lambda i$ ἀνήκουν σ' ἕνα σύνολο εὐρύτερο ἀπό τό **R**, στό σύνολο τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν.

Εἰδικότερα ἡ ἐξίσωση $x^2=-1 \Leftrightarrow x^2+1=0$ ἔχει ρίζες τίς $\pm i$, δηλαδή εἶναι $i^2=-1$ καί $(-i)^2=-1$.

Μετά τίς παραπάνω παραδοχές καί τή διαπίστωση ὅτι $i^2=-1$ καταλήξαμε στό συμπέρασμα ὅτι **οἱ μιγαδικοί ἀριθμοί «συμπεριφέρονται» ὅπως καί τά διώνυμα $\alpha+\beta x$ μέ $x=i$.**

Ἄς θυμηθοῦμε μέ παραδείγματα πῶς ἐκτελοῦμε τίς βασικές πράξεις πρόσθεση καί πολλαπλασιασμό στό σύνολο τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν. Γιά τούς μιγαδικούς ἀριθμούς $3+2i$ καί $4+5i$ ἔχουμε:

1. $(3+2i)+(4+5i)=3+2i+4+5i=(3+4)+(2+5)i=7+7i$, καί γενικά

$$(\alpha_1+\beta_1 i)+(\alpha_2+\beta_2 i)=(\alpha_1+\alpha_2)+(\beta_1+\beta_2)i \tag{4}$$

1. Ἡ μορφή αὐτή ὀφείλεται στόν Ἑλβετό μαθηματικό τοῦ 18ου αἰώνα Euler (1707-1783) ὁ ὁποῖος συμβόλισε τήν $\sqrt{-1}$ μέ τό i πού εἶναι τό ἀρχικό γράμμα τῆς λέξεως imaginare (φανταστικός). Προηγουμένως οἱ μαθηματικοί τοῦ 16ου αἰ. εἶχαν γράψει «τυπικά» $\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}=\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}\cdot\sqrt{-1}$, ὅταν $\beta^2-4\alpha\gamma<0$.

Τόν 19ο αἰ. ὁ Γερμανός μαθηματικός Gauss (1777-1855) παρέστησε γεωμετρικά τούς μιγαδικούς ἀριθμούς μέ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου καί ἀπέδειξε ἔτσι ὅτι οἱ μιγαδικοί ἀριθμοί εἶναι ἐξίσου συγκεκριμένοι (καί ὄχι φανταστικοί) ὅπως καί οἱ πραγματικοί ἀριθμοί.

2. $(3+2i)\cdot(4+5i) = (3\cdot 4) + (3\cdot 5)i + (2\cdot 4)i + (2\cdot 5)i^2$
$= (3\cdot 4) + (3\cdot 5)i + (2\cdot 4)i + (2\cdot 5)(-1)$
$= (3\cdot 4-2\cdot 5) + (3\cdot 5+2\cdot 4)i = 2+23i$, καί γενικά

$$(\alpha_1+\beta_1 i).(\alpha_2+\beta_2 i) = (\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2) + (\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)i \quad (5)$$

'Ακόμα εἶναι φανερό ὅτι στό μιγαδικό ἀριθμό $\alpha+\beta i$ μποροῦμε νά ἀντιστοιχίσουμε τό διατεταγμένο ζεῦγος $(\alpha,\beta)$ καί ἀντίστροφα. Στήν ἑπόμενη παράγραφο θά ὁρίσουμε τίς βασικές πράξεις πρόσθεση καί πολλαπλασιασμό στό σύνολο τῶν διατεταγμένων ζευγῶν τοῦ $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ ἔτσι, ὥστε νά τό ταυτίσουμε μέ τό σύνολο τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν.

## 1.2. Τό σύνολο C σάν σύνολο διατεταγμένων ζευγῶν τοῦ R×R.

Θεωροῦμε τό σύνολο

$$\mathbf{C} = \{z | z = (\alpha,\beta),\quad \alpha\in\mathbf{R},\quad \beta\in\mathbf{R}\}$$

καί τή γνωστή ἰσότητα τῶν στοιχείων του

$$(\alpha_1,\beta_1) = (\alpha_2,\beta_2) \Leftrightarrow \alpha_1=\alpha_2 \quad \text{καί} \quad \beta_1=\beta_2. \quad (1)$$

Στό σύνολο **C** ὁρίζουμε δύο βασικές πράξεις, τήν πρόσθεση καί τόν πολλαπλασιασμό, μέ τά συνήθη σύμβολα "+" καί "·". Τό ἄθροισμα καί τό γινόμενο δύο στοιχείων $(\alpha_1,\beta_1)$ καί $(\alpha_2,\beta_2)$ τοῦ **C** ὁρίζονται μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο:

**Τό ἄθροισμα:** $\quad(\alpha_1,\beta_1) + (\alpha_2,\beta_2) = (\alpha_1+\alpha_2, \beta_1+\beta_2) \quad (2)$

**Τό γινόμενο:** $\quad(\alpha_1,\beta_1)\,.\,(\alpha_2,\beta_2) = (\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2,\ \alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1) \quad (3)$

(Δεῖτε τή σκοπιμότητα αὐτῶν τῶν ὁρισμῶν παραβάλλοντάς τους μέ τούς τύπους (4) καί (5) τῆς παραγράφου 1.1.).

Ἄς πάρουμε τώρα τό ὑποσύνολο **R'** τοῦ **C**, πού ἔχει γιά στοιχεῖα του ὅλα τά στοιχεῖα τῆς μορφῆς $(\alpha,0)$, καί ἄς κάνουμε μεταξύ αὐτοῦ καί τοῦ **R** τήν ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία

$$\mathbf{R}' \ni (\alpha,0) \leftrightarrow \alpha\in\mathbf{R}$$

Γιά δύο στοιχεῖα $(\alpha_1,0)$ καί $(\alpha_2,0)$ τοῦ **R'** εἶναι

$$(\alpha_1,0) + (\alpha_2,0) = (\alpha_1+\alpha_2,0) \leftrightarrow (\alpha_1+\alpha_2)\in\mathbf{R} \quad \text{καί}$$
$$(\alpha_1,0)\cdot(\alpha_2,0) = (\alpha_1\alpha_2,0) \leftrightarrow (\alpha_1\cdot\alpha_2)\in\mathbf{R}$$

Δηλαδή: α) Τό ἄθροισμα δύο στοιχείων τοῦ **R'** ἀντιστοιχίζεται ἀμφιμονοσήμαντα στό ἄθροισμα τῶν ἀντίστοιχων στοιχείων τοῦ **R**, καί

β) Τό γινόμενο δύο στοιχείων τοῦ **R'** ἀντιστοιχίζεται ἀμφιμονοσήμαντα στό γινόμενο τῶν ἀντίστοιχων στοιχείων τοῦ **R**.

Ἡ διαπίστωσή μας αὐτή μᾶς ἐπιτρέπει νά «ταυτίσουμε» τό **R'** μέ τό **R** καί νά θεωροῦμε ἔτσι ὅτι εἶναι $\mathbf{R}\subset\mathbf{C}$. Μετά ἀπό αὐτό μποροῦμε νά γράφουμε:

$$(\alpha, 0) = \alpha \tag{4}$$

Ἂν ὁρίσουμε $(\alpha,\beta)^2 = (\alpha,\beta)\cdot(\alpha,\beta)$ καί συμβολίσουμε μέ i τό στοιχεῖο (0,1), τότε θά εἶναι:

$$i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0)$$

καί σύμφωνα μέ τήν (4)

$$i^2 = -1 \tag{5}$$

Ἐπειδή ὅμως εἶναι $(\beta,0)i = (\beta,0)\cdot(0,1) = (0,\beta)$, θά ἔχουμε:

$$(\alpha,\beta) = (\alpha,0) + (0,\beta) = \alpha + (\beta,0)i = \alpha + \beta i \tag{6}$$

Ἄρα: **τό τυχόν στοιχεῖο (α,β) τοῦ C «ταυτίζεται» μέ τό γνωστό μας μιγαδικό ἀριθμό α+βi.** Ἔτσι τό σύνολο **C** ἐφοδιασμένο μέ τίς πράξεις τῆς προσθέσεως καί τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, πού τά ἐξαγόμενά τους δίνουν οἱ ἰσότητες (2) καί (3), εἶναι τό σύνολο τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν καί τά διατεταγμένα ζεύγη-στοιχεῖα τοῦ **C**—ὀνομάζονται μιγαδικοί ἀριθμοί.

Στό λογισμό συνήθως οἱ μιγαδικοί ἀριθμοί χρησιμοποιοῦνται μέ τή μορφή α+βi ἀντί (α,β). Ἡ χρησιμότητα τῆς μορφῆς (α,β) θά φανεῖ στή γεωμετρική τους παράσταση.

Ἡ παραπάνω «ταύτιση» (α,0) = α μᾶς ἐπιτρέπει νά γράψουμε

$$\kappa\cdot(\alpha,\beta) = (\kappa\alpha, \kappa\beta), \quad \kappa \in \mathbf{R}. \tag{7}$$

## 1.3. Ἰδιότητες τῆς προσθέσεως καί τοῦ πολλαπλασιασμοῦ στό C.

### I. Ἰδιότητες τῆς προσθέσεως

Εἶναι φανερό ὅτι ἡ πρόσθεση, ὅπως ὁρίστηκε, ἔχει τίς ἰδιότητες

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \qquad \text{(ἀντιμεταθετική)}$$

$$(z_1+z_2)+z_3 = z_1+(z_2+z_3) \qquad \text{(προσεταιριστική)}$$

γιά ὅλα τά $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$.

Ἀκόμα ἰσχύουν οἱ ἀκόλουθες προτάσεις:

**Πρόταση 1. Ὑπάρχει ἕνας καί μόνο μιγαδικός ἀριθμός z* τέτοιος, ὥστε γιά ὅλους τούς μιγαδικούς ἀριθμούς z νά ἰσχύει:**

$$z + z^* = z \tag{1}$$

**Ἀπόδειξη.** Ἂν εἶναι $z = \alpha + \beta i$ καί $z^* = x + yi$, τότε ἡ (1) γράφεται ἰσοδύναμα

$$(\alpha+\beta i) + (x+yi) = \alpha+\beta i \Leftrightarrow (\alpha+x) + (\beta+y)i = \alpha+\beta i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha + x = \alpha \quad \text{καί} \quad \beta + y = \beta \Leftrightarrow x=0 \quad \text{καί} \quad y=0$$

Ἄρα τό στοιχεῖο $z^* = 0 + 0i$ εἶναι τό μοναδικό πού ἱκανοποιεῖ τήν (1) γιά κάθε $z \in C$. **Τό στοιχεῖο $0+0i$ ὀνομάζεται οὐδέτερο στοιχεῖο γιά τήν πρόσθεση στό C** καί γιά εὐκολία τό λέμε **μηδέν** καί τό συμβολίζουμε μέ 0.

**Πρόταση 2. Γιά κάθε μιγαδικό ἀριθμό z ὑπάρχει ἕνας καί μόνο μιγαδικός ἀριθμός z* τέτοιος, ὥστε νά ἰσχύει:**

$$z + z^* = 0 \tag{2}$$

**Ἀπόδειξη.** Ἄν εἶναι $z=\alpha+\beta i$ καί $z^* = x+yi$, τότε ἡ (2) γράφεται ἰσοδύναμα

$$(\alpha+\beta i)+(x+yi)=0 \Leftrightarrow (\alpha+x)+(\beta+y)i = 0+0i \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha+x=0 \text{ καί } \beta+y=0 \Leftrightarrow x=-\alpha \text{ καί } y=-\beta$$

Ἄρα ὁ μιγαδικός ἀριθμός $z^* = (-\alpha)+(-\beta)i$ εἶναι ὁ μοναδικός γιά τό μιγαδικό ἀριθμό $z=\alpha+\beta i$, πού ἱκανοποιεῖ τή σχέση (2).

**Ὁ μιγαδικός ἀριθμός $(-\alpha)+(-\beta)i$**, πού γιά εὐκολία τόν γράφουμε $-\alpha-\beta i$ καί τόν συμβολίζουμε μέ $-z$, **ὀνομάζεται ἀντίθετος τοῦ $z=\alpha+\beta i$ ἤ τό συμμετρικό στοιχεῖο τοῦ $z=\alpha+\beta i$ γιά τήν πρόσθεση στό C.**

**Πρόταση 3. Στό σύνολο C ἰσχύει ἡ ἰσοδυναμία**

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow z_1+z = z_2+z \tag{3}$$

**Ἀπόδειξη.** α) Ἡ συνεπαγωγή $z_1=z_2 \Rightarrow z_1+z=z_2+z$ γιά ὅλα τά $z \in C$ εἶναι φανερή ἀπό τόν ὁρισμό τῆς προσθέσεως.

β) Θά δείξουμε τήν συνεπαγωγή $z_1+z=z_2+z \Rightarrow z_1=z_2$, πού ἀποτελεῖ **τό νόμο τῆς διαγραφῆς στήν πρόσθεση στό C.**

Πράγματι:

$$\begin{aligned} z_1+z=z_2+z &\Rightarrow (z_1+z)+(-z)=(z_2+z)+(-z)\\ &\Leftrightarrow z_1+[z+(-z)] = z_2+[z+(-z)]\\ &\Leftrightarrow z_1+0=z_2+0\\ &\Leftrightarrow z_1=z_2 \end{aligned}$$

**Πρόταση 4. Ἡ ἐξίσωση $z_1+z=z_2$, $z_1,z_2 \in C$ (4) ἔχει μοναδική λύση στό C τήν $z=z_2+(-z_1)$.**

**Ἀπόδειξη.** Ἔχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned} z_1+z=z_2 &\Leftrightarrow (z_1+z)+(-z_1)=z_2+(-z_1)\\ &\Leftrightarrow (z+z_1)+(-z_1)=z_2+(-z_1)\\ &\Leftrightarrow z+[z_1+(-z_1)]=z_2+(-z_1)\\ &\Leftrightarrow z+0=z_2+(-z_1)\\ &\Leftrightarrow z=z_2+(-z_1). \end{aligned}$$

*Ἡ μοναδική λύση τῆς ἐξισώσεως (4) ὀνομάζεται* **διαφορά τοῦ $z_1$ ἀπό τό $z_2$** *καί συμβολίζεται μέ $z_2-z_1$. Δηλαδή εἶναι*

$$z_2-z_1 = z_2+(-z_1) \tag{5}$$

*Ἡ πράξη, μέ τήν ὁποία βρίσκουμε τή διαφορά δυό μιγαδικῶν ἀριθμῶν, ὀνομάζεται* **ἀφαίρεση.**

## II. Ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ

Εἶναι φανερό ὅτι καί ὁ πολλαπλασιασμός ἔχει τίς ἰδιότητες

$$z_1 . z_2 = z_2 . z_1 \qquad \text{(ἀντιμεταθετική)}$$
$$(z_1 . z_2) . z_3 = z_1 . (z_2 . z_3) \qquad \text{(προσεταιριστική)}$$

καί ἀκόμη εἶναι πράξη ἐπιμεριστική ὡς πρός τήν πρόσθεση, δηλαδή

$$z_1 . (z_2 + z_3) = z_1 . z_2 + z_1 . z_3$$

γιά ὅλα τά $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$.

Θά δείξουμε ὅτι καί στόν πολλαπλασιασμό ἰσχύουν ἀντίστοιχες προτάσεις μέ ἐκεῖνες πού δείξαμε στήν πρόσθεση.

**Πρόταση 1΄. Ὑπάρχει ἕνας καί μόνο $z^* \in \mathbf{C}$ τέτοιος, ὥστε γιά ὅλα τά $z \in \mathbf{C}$ νά ἰσχύει:**

$$z \cdot z^* = z \tag{1΄}$$

**Ἀπόδειξη.** Ἄν εἶναι $z = \alpha + \beta i$ καί $z^* = x + yi$, τότε ἡ (1΄) γράφεται ἰσοδύναμα

$$(\alpha + \beta i)(x + yi) = \alpha + \beta i \Leftrightarrow (\alpha x - \beta y) + (\alpha y + \beta x)i = \alpha + \beta i \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \alpha x - \beta y = \alpha$ καί $\alpha y + \beta x = \beta$. Ἄν ἐπιπλέον εἶναι $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, τότε ἔχουμε τή μοναδική λύση $x = 1$ καί $y = 0$, ἐνῶ, ἄν εἶναι $\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$, τότε τό σύστημα εἶναι ταυτοτικό καί συνεπῶς ἔχει καί τή λύση $x = 1$, $y = 0$.

Ἄρα ὁ μιγαδικός ἀριθμός $z^* = 1 + 0i$ εἶναι ὁ μοναδικός πού ἱκανοποιεῖ τήν (1΄) γιά κάθε $z \in \mathbf{C}$. **Ὁ μιγαδικός ἀριθμός $1 + 0i$ ὀνομάζεται οὐδέτερο στοιχεῖο γιά τόν πολλαπλασιασμό στό C** καί γιά εὐκολία τόν λέμε **μονάδα** καί τόν συμβολίζουμε μέ 1.

**Πρόταση 2΄. Γιά κάθε $z \in \mathbf{C}$ μέ $z \neq 0$ ὑπάρχει ἕνα καί μόνο $z^* \in \mathbf{C}$, ὥστε νά ἰσχύει:**

$$z \cdot z^* = 1 \tag{2΄}$$

**Ἀπόδειξη.** Ἄν εἶναι $z = \alpha + \beta i \neq 0$ καί $z^* = x + yi$, ἡ (2΄) γράφεται ἰσοδύναμα

$$(\alpha x - \beta y) + (\alpha y + \beta x)i = 1 + 0i \Leftrightarrow \alpha x - \beta y = 1 \quad \text{καί} \quad \beta x + \alpha y = 0$$

καί, ἀφοῦ εἶναι $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, τό σύστημα θά ἔχει τή μοναδική λύση $x = \dfrac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}$ καί $y = \dfrac{-\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$. Ἄρα ὁ μιγαδικός ἀριθμός $z^* = \dfrac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} + \dfrac{-\beta}{\alpha^2 + \beta^2} i$ εἶναι ὁ μοναδικός γιά τό μιγαδικό ἀριθμό $z = \alpha + \beta i \neq 0$ πού ἱκανοποιεῖ τή (2΄).

**Ὁ μιγαδικός ἀριθμός $\dfrac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} + \dfrac{-\beta}{\alpha^2 + \beta^2} i$, πού συμβολίζεται $z^{-1}$ ἤ $\dfrac{1}{z}$, ὀνομάζεται ἀντίστροφος τοῦ z ἤ καί τό συμμετρικό στοιχεῖο τοῦ $z = \alpha + \beta i \neq 0$ γιά τόν πολλαπλασιασμό στό C.** Εἶναι λοιπόν

$$z^{-1} = (\alpha+\beta i)^{-1} = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} + \frac{-\beta}{\alpha^2+\beta^2} i, \quad z \neq 0$$

**Πρόταση 3΄. Στό C ἰσχύει ἡ συνεπαγωγή: $z_1.z = z_2.z$ καί $z \neq 0 \Rightarrow z_1 = z_2$** (3΄)
(Ἡ πρόταση αὐτή εἶναι **ὁ νόμος τῆς διαγραφῆς στόν πολλαπλασιασμό στό C** καί ἡ ἀπόδειξη ἀφήνεται γιά ἄσκηση).

**Πρόταση 4΄. Ἡ ἐξίσωση $z_1.z = z_2$, $z_1, z_2 \in$ C, $z_1 \neq 0$ (4΄) ἔχει μοναδική λύση στό C τήν $z = z_2.z_1^{-1}$**
(Ἡ ἀπόδειξη ἀφήνεται γιά ἄσκηση).

*Ἡ μοναδική λύση τῆς ἐξισώσεως (4΄) ὀνομάζεται πηλίκο τοῦ $z_2$ διά $z_1$ καί συμβολίζεται $z_2 : z_1$ ἤ $\frac{z_2}{z_1}$. Δηλαδή εἶναι*

$$\frac{z_2}{z_1} = z_2.z_1^{-1} \quad , \quad z_1 \neq 0 \tag{5'}$$

*Ἡ πράξη μέ τήν ὁποία βρίσκουμε τό πηλίκο δύο μιγαδικῶν ἀριθμῶν, ὀνομάζεται* **διαίρεση**.

— **Σ' ἕνα μιγαδικό ἀριθμό $z = \alpha+\beta i$ τό α ὀνομάζεται πραγματικό μέρος καί τό β ὀνομάζεται φανταστικό μέρος**(1).

— Οἱ δυνάμεις $(\alpha+\beta i)^{\kappa}$, $\kappa \in$ **Z** ὁρίζονται ὅπως καί στό **R** μέ $z^1 = z$ γιά κάθε $z \in$ **C**, $z^0 = 1$ ὅταν $z \neq 0$, καί $z \neq 0$ ὅταν $\kappa < 0$. Οἱ δυνάμεις ὑπολογίζονται ὅπως καί οἱ δυνάμεις $(\alpha+\beta x)^{\nu}$ μέ $x = i$ καί $i^2 = -1$.

## 1.4. Ἀσκήσεις

1. Δεῖξτε ὅτι: $i^0+i^1+i^2+i^3+i^4+i^5+i^6+i^7 = 0$.
2. Προσδιορίστε τά $\alpha, \beta \in$ **R**, ὥστε οἱ μιγαδικοί ἀριθμοί
$(3\alpha+14\beta) + (2\alpha-\beta)i$ καί $7-i$ νά εἶναι ἴσοι.
3. Ἄν $\alpha, \beta, \gamma \in$ **R** καί $(\alpha+\beta)-\gamma i = 5\gamma+(\alpha-\beta)i$ δεῖξτε ὅτι θά εἶναι $2\alpha-\beta = \gamma$.
4. Ἄν $\alpha, \beta, \gamma \in$ **R** $-\{0\}$ καί $\frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{3} = \frac{1}{\gamma}$, δεῖξτε ὅτι:
$2(\alpha+\beta)+(\beta-\alpha)\gamma i = 5\alpha+i$.
5. Νά φέρετε στή μορφή $\alpha+\beta i$ τίς παραστάσεις

α) $3i+2i^3+i^{202}-5i^{-147}-2i^7+i^{12}$ β) $\frac{5-2i}{1-2i}$

γ) $\frac{3}{2-i\sqrt{3}} - (5+i\sqrt{2})^{-2}$ δ) $\frac{(4-i)^2-2(1+2i)}{(3+i)^2\,(2-3i)}$.

6. Δεῖξτε ὅτι ἡ ἐξίσωση $x^4+81 = 0$ ἱκανοποιεῖται ἀπό τούς μιγαδικούς ἀριθμούς:

1. Τό πραγματικό μέρος ἑνός μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ $z = \alpha+\beta i$ συμβολίζεται $\mathrm{Re}z$ καί τό φανταστικό $\mathrm{Im}z$. Δηλαδή εἶναι $\mathrm{Re}z = \alpha$ καί $\mathrm{Im}z = \beta$. Ὁ μιγαδικός ἀριθμός $\alpha+\beta i$ μέ $\alpha\beta \neq 0$ ὀνομάζεται καθαρός ἤ γνήσιος μιγαδικός ἀριθμός.

$$x_1=\frac{3\sqrt{2}}{2}(1+i),\quad x_2=\frac{3\sqrt{2}}{2}(-1+i),\quad x_3=\frac{3\sqrt{2}}{2}(-1-i) \quad \text{καί} \quad x_4=\frac{3\sqrt{2}}{2}(1-i).$$

7. Δεῖξτε ὅτι στό σύνολο **C** α) ἡ πρόσθεση εἶναι πράξη ἀντιμεταθετική καί προσεταιριστική καί β) ὁ πολλαπλασιασμός εἶναι πράξη ἀντιμεταθετική, προσεταιριστική καί ἀκόμη ἐπιμεριστική ὡς πρός τήν πρόσθεση.

## 1.5. Συζυγεῖς μιγαδικοί ἀριθμοί

### I. Ὁρισμός

**Ὁ μιγαδικός ἀριθμός α—βi ὀνομάζεται συζυγής τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ z= =α+βi** καί συμβολίζεται μέ $\bar{z}$, δηλαδή $\bar{z}=\alpha-\beta i$.

Ἐπειδή εἶναι $\overline{(\bar{z})}=\alpha+\beta i=z$, **οἱ μιγαδικοί ἀριθμοί z καί $\bar{z}$ ὀνομάζονται συζυγεῖς μιγαδικοί ἀριθμοί.**

Εὔκολα βλέπουμε ὅτι $z+\bar{z}=2\alpha$, καί $z\bar{z}=\alpha^2+\beta^2$, δηλαδή τό ἄθροισμα καί τό γινόμενο δύο συζυγῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί.

### II. Ἰδιότητες τῶν συζυγῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν

Γιά τούς συζυγεῖς μιγαδικούς ἀριθμούς ἀναφέρουμε μερικές χρήσιμες ἰδιότητες.

α) $\overline{(-z)}=-\bar{z}$ β) $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$ γ) $\overline{z_1-z_2}=\bar{z}_1-\bar{z}_2$

δ) $\overline{z_1+z_2+\ldots+z_\nu}=\bar{z}_1+\bar{z}_2+\ldots+\bar{z}_\nu,\ \nu\in\mathbf{N}$ ε) $\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$

στ') $\overline{z_1\cdot z_2\ldots z_\nu}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2\ldots\bar{z}_\nu,\ \nu\in\mathbf{N}$ ζ) $\overline{(z^\nu)}=(\bar{z})^\nu,\ \nu\in\mathbf{N}$

η) $\overline{(z^{-1})}=(\bar{z})^{-1},\ z\neq0$ θ) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2},\ z_2\neq0$ καί i) $\overline{\alpha z}=\alpha\bar{z},\ \alpha\in\mathbf{R}$.

**Ἀποδείξεις.**

β) Ἄν εἶναι $z_1=\alpha_1+\beta_1 i$ καί $z_2=\alpha_2+\beta_2 i$, τότε θά εἶναι $z_1+z_2=(\alpha_1+\alpha_2)+(\beta_1+\beta_2)i$ καί συνεπῶς $\overline{z_1+z_2}=(\alpha_1+\alpha_2)-(\beta_1+\beta_2)i=(\alpha_1-\beta_1 i)+(\alpha_2-\beta_2 i)=\bar{z}_1+\bar{z}_2$.

δ) Ἀπό τή β) καί μέ τήν ὑπόθεση ὅτι γιά ν= κ ἰσχύει $\overline{z_1+z_2+\ldots+z_\kappa}=\bar{z}_1+\bar{z}_2+\ldots+\bar{z}_\kappa$ παίρνουμε: $\overline{z_1+z_2+\ldots+z_\kappa+z_{\kappa+1}}=\overline{(z_1+z_2+\ldots+z_\kappa)+z_{\kappa+1}}=\overline{z_1+z_2+\ldots+z_\kappa}+\bar{z}_{\kappa+1}=\bar{z}_1+\bar{z}_2+\ldots+\bar{z}_\kappa+\bar{z}_{\kappa+1}$, πού ἀποδεικνύει ὅτι ἡ ἰδιότητα ἰσχύει γιά κάθε $\nu\in\mathbf{N}$.

ε) Ἄν εἶναι $z_1=\alpha_1+\beta_1 i$ καί $z_2=\alpha_2+\beta_2 i$, τότε θά εἶναι

$$z_1\cdot z_2=(\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2)+(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)i$$

καί συνεπῶς

$$\overline{z_1\cdot z_2}=(\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2)-(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)i \tag{1}$$

Ἐξάλλου $\bar{z}_1\,\bar{z}_2 = (\alpha_1-\beta_1 i)\cdot(\alpha_2-\beta_2 i) = (\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2)-(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)i$ (2)
Οἱ (1) καί (2) ἀποδεικνύουν τή ζητούμενη.

Οἱ ἀποδείξεις τῶν ὑπόλοιπων ἰδιοτήτων ἀφήνονται γιά ἄσκηση.

## 1.6. Ἐφαρμογές

1. **Οἱ μόνοι μή πραγματικοί μιγαδικοί ἀριθμοί, πού τό ἄθροισμα καί τό γινόμενό τους εἶναι πραγματικός ἀριθμός, εἶναι οἱ συζυγεῖς.**

**Ἀπόδειξη:** Ἄς εἶναι $z_1, z_2 \in \mathbf{C}-\mathbf{R}$ μέ τήν ἰδιότητα $(z_1+z_2)\in\mathbf{R}$ καί $(z_1 . z_2)\in\mathbf{R}$. Ἄν εἶναι $z_1 = x_1+y_1 i$ καί $z_2 = x_2+y_2 i$, τότε ἡ ἰδιότητα πού ἔχουν δίνει τό σύστημα

$$\left.\begin{array}{l} y_1+y_2=0 \\ x_1y_2+x_2y_1=0 \\ y_1\cdot y_2\neq 0\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y_2=-y_1 \\ x_2=x_1 \\ y_1\cdot y_2\neq 0\end{array}\right\},$$

ὁπότε ὁ $z_2 = x_2+y_2 i$ γράφεται $z_2 = x_1-y_1 i$ καί συνεπῶς $z_2 = \bar{z}_1$.

2. **Ἄν ἕνας μιγαδικός ἀριθμός εἶναι ρίζα μιᾶς πολυωνυμικῆς ἐξισώσεως μέ πραγματικούς συντελεστές, τότε καί ὁ συζυγής του εἶναι ἐπίσης ρίζα αὐτῆς τῆς ἐξισώσεως.**

**Ἀπόδειξη:** Ἔστω ὅτι ἔχουμε τήν πολυωνυμική ἐξίσωση

$$f(x) = \alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0 = 0,\quad \alpha_\nu\neq 0$$

μέ πραγματικούς συντελεστές, ἡ ὁποία ἔχει γιά ρίζα της τό μιγαδικό ἀριθμό z, δηλαδή $f(z)=0$. Θά δείξουμε ὅτι ἡ ἐξίσωση αὐτή ἔχει γιά ρίζα της καί τόν $\bar{z}$, δηλαδή $f(\bar{z})=0$. Ἐπειδή ὁ συζυγής τοῦ 0+0i εἶναι ὁ ἑαυτός του, ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι $\overline{f(z)} = f(\bar{z})$.

Πράγματι $\overline{f(z)} = \overline{\alpha_\nu z^\nu+\alpha_{\nu-1}z^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 z+\alpha_0}$

$= \overline{\alpha_\nu z^\nu}+\overline{\alpha_{\nu-1}z^{\nu-1}}+\ldots+\overline{\alpha_1 z}+\overline{\alpha_0}$ (Ἰδιότ. δ) τῆς 1.5.)

$= \alpha_\nu\overline{z^\nu}+\alpha_{\nu-1}\overline{z^{\nu-1}}+\ldots+\alpha_1\bar{z}+\alpha_0$ (Ἰδιότ. i) τῆς 1.5.)

$= \alpha_\nu(\bar{z})^\nu+\alpha_{\nu-1}(\bar{z})^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1\bar{z}+\alpha_0$ (Ἰδιότ. ζ) τῆς 1.5.)

$= f(\bar{z})$.

Στή θεωρία τῶν πολυωνύμων ἡ πρόταση αὐτή ἀποδεικνύεται καί μέ ἄλλο τρόπο.

3. **Νά ἐπιλυθεῖ στό C ἡ ἐξίσωση $2-3z+\overline{(-z)} = 0$ (1)**

**Ἐπίλυση:** Ἡ (1) γράφεται ἰσοδύναμα $2-3z-\bar{z}=0$, καί ἄν εἶναι $z = x+yi$, τότε ἡ τελευταία γίνεται:

$$2-3(x+yi) - (x-yi) = 0 \Leftrightarrow (-4x+2)+(-2y)i = 0 \Leftrightarrow$$

$$-4x+2=0 \text{ καί } -2y=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \text{ καί } y=0.$$

Ἄρα ἡ ἐξίσωση (1) ἔχει τή λύση $z=\frac{1}{2}+0i=\frac{1}{2}$.

Δίνουμε ἀκόμη μία ἐφαρμογή πού, ἄν καί δέν ἀποτελεῖ ἐφαρμογή τῶν ἰδιοτήτων τῶν συζυγῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν, παρουσιάζει ἐνδιαφέρον.

4. Σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό «**Τετραγωνική ρίζα ἑνός μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ $\xi=\alpha+\beta i$ ὀνομάζουμε κάθε μιγαδικό ἀριθμό $z = x+yi$ πού ἱκανοποιεῖ τήν ἐξίσωση $z^2=\xi$**», νά βρεῖτε τήν τετραγωνική ρίζα τοῦ $\xi = 5-12i$.

**Λύση:** Ἄν ὁ μιγαδικός ἀριθμός $z=x+yi$ εἶναι ἡ τετραγωνική ρίζα τοῦ $\xi=5-12i$, τότε ἔχουμε:

$$(x+yi)^2=5-12i \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-y^2+2xyi=5-12i \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-y^2=5 \text{ καί } 2xy=-12 \qquad (1)$$

Ἄρα θά εἶναι καί $(x^2-y^2)^2=25$ καί $4x^2y^2=144$.

Προσθέτοντας κατά μέλη τίς δυό τελευταῖες ἐξισώσεις ἔχουμε:

$$(x^2+y^2)^2=169 \Leftrightarrow x^2+y^2=13.$$

Ἐπιλύοντας τό σύστημα $\left.\begin{array}{l} x^2-y^2=5 \\ x^2+y^2=13 \end{array}\right\}$

παίρνουμε $\left.\begin{array}{l} x=\pm 3 \\ y=\pm 2 \end{array}\right\}$

Ἀφοῦ ὅμως εἶναι καί $2xy=-12$, τό σύστημα (1) θά ἔχει τίς λύσεις

$$x_1=3 \quad , \quad y_1=-2 \quad \text{καί} \quad x_2=-3, \quad y_2=2.$$

Ἄρα ὑπάρχουν δύο τετραγωνικές ρίζες

$$z_1=3-2i \quad \text{καί} \quad z_2=-3+2i \quad \text{τοῦ} \quad \xi=5-12i.$$

**Γενικά** δεῖξτε ὅτι **κάθε μιγαδικός ἀριθμός** $\alpha+\beta i\neq 0+0i$ **ἔχει δύο διακεκριμένες τετραγωνικές ρίζες.**

## 1.7. Ἀσκήσεις

1. Ὑπολογίστε τούς $x,y\in \mathbf{R}$ ὥστε οἱ μιγαδικοί ἀριθμοί $z_1=-3+i(2x-y)$ καί $z_2=x-5y-3i$ νά εἶναι συζυγεῖς.
2. Ἐπιλύστε τίς παρακάτω ἐξισώσεις μέ ἄγνωστο τό μιγαδικό z
   α) $\bar{z}=-z$, β) $\bar{z}=-4z$ καί γ) $z^2+\bar{z}=0$.
3. Ἄν $z_1,z_2\in \mathbf{C}$, τότε: $z_1.z_2=0 \Leftrightarrow (z_1=0 \vee z_2=0)$.
4. Ἄν $z_1,z_2, z\in \mathbf{C}$ μέ $z_2.z\neq 0$, δεῖξτε ὅτι $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{z_1.z}{z_2.z}$.
5. Ἄν $z^2=\bar{z}^2$, τότε θά εἶναι μόνο $z\in \mathbf{R}$ ἤ $z\in \mathbf{I}$(1)
6. Ὑπολογίστε τούς $x,y\in\mathbf{R}$ ὥστε νά ἰσχύει:
   $(i-x)^2-(i+x)^2+y+1=\dfrac{1}{i}$.
7. Ὑπολογίστε τόν $x\in\mathbf{R}$ ὥστε νά ἰσχύει $1+2i\sqrt{3}=3.\dfrac{1+xi}{1-xi}$.
8. Βρεῖτε τίς τετραγωνικές ρίζες τοῦ μιγαδικοῦ $2+2i$.
9. Ὑπολογίστε τούς $x,y\in\mathbf{R}$, ὥστε νά ἰσχύει $\dfrac{x}{1+2i}+\dfrac{y}{3+2i}=\dfrac{5+6i}{8i-1}$.
10. Βρεῖτε τό ἄθροισμα τῶν ν-ὅρων:
    $i+(2+3i)+(4+5i)+(6+7i)+\ldots+[2\nu-2+(2\nu-1)i]$, $\nu\in\mathbf{N}$
11. Ἐπιλύστε τήν ἐξίσωση $z^2-(3+i)z+4+3i=0$, $z\in\mathbf{C}$.

---

1. Τό σύνολο **I** εἶναι τό ὑποσύνολο τοῦ **C** μέ στοιχεῖα τῆς μορφῆς $(0,\beta)$, $\beta\neq 0$ καί ὀνομάζεται σύνολο τῶν φανταστικῶν ἀριθμῶν.

## 1.8. Μέτρο τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν

### I. Ὁρισμός

**Γιά τό μιγαδικό ἀριθμό $z=\alpha+\beta i$ ὁ μή ἀρνητικός ἀριθμός $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ ὀνομάζεται ἀπόλυτη τιμή ἤ μέτρο του** καί συμβολίζεται μέ $|z|$, δηλαδή

$$|z|=|\alpha+\beta i|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

Ἐπειδή εἶναι $z\bar{z}=\alpha^2+\beta^2$, θά εἶναι

$$|z|=\sqrt{z\bar{z}}$$

Εἶναι φανερό ὅτι εἶναι $|z|\geq 0$ γιά κάθε $z\in\mathbf{C}$.

Ὅταν εἶναι $z=\alpha+0i$, ἔχουμε $|z|=\sqrt{\alpha^2}=|\alpha|$. Ὅταν εἶναι $z=\alpha+\beta i$ καί $\beta\neq 0$, τότε ἰσχύει $|z|^2\neq z^2$, γιατί ὁ $|z|^2$ εἶναι θετικός, ἐνῶ ὁ $z^2$ εἶναι ἀρνητικός ἤ εἶναι γνήσιος μιγαδικός ἀριθμός. Αὐτή εἶναι μία σπουδαία διαφορά μεταξύ τῶν στοιχείων τοῦ $\mathbf{R}$ καί τοῦ $\mathbf{C}-\mathbf{R}$.

### II. Ἰδιότητες τοῦ μέτρου τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν.

Ἀναφέρουμε μερικές βασικές ἰδιότητες τοῦ μέτρου τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν. Ἄν $z, z_1, z_2, \ldots, z_\nu$ εἶναι μιγαδικοί ἀριθμοί, τότε θά εἶναι:

α) $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$ (τριγωνική ἀνισότητα)

β) $|z_1+z_2+\ldots+z_\nu|\leq|z_1|+|z_2|+\ldots+|z_\nu|$, $\nu\in\mathbf{N}$

γ) $||z_1|-|z_2||\leq|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$

δ) $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$ ε) $|z_1\cdot z_2\ldots z_\nu|=|z_1|\cdot|z_2|\ldots|z_\nu|$, $\nu\in\mathbf{N}$

στ) $|z^\nu|=|z|^\nu$, $\nu\in\mathbf{N}$ ζ) $|z^{-1}|=|z|^{-1}$, $z\neq 0$

η) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_2\neq 0$.

**Ἀποδείξεις:**

α) Ἄν $z_1=\alpha_1+\beta_1 i$ καί $z_2=\alpha_2+\beta_2 i$, ἡ ζητούμενη γίνεται

$|(\alpha_1+\alpha_2)+(\beta_1+\beta_2)i|\leq|\alpha_1+\beta_1 i|+|\alpha_2+\beta_2 i| \Leftrightarrow$

$\sqrt{(\alpha_1+\alpha_2)^2+(\beta_1+\beta_2)^2}\leq\sqrt{\alpha_1{}^2+\beta_1{}^2}+\sqrt{\alpha^2{}_2+\beta^2{}_2}$ καί, ἀφοῦ τά μέλη εἶναι μή ἀρνητικοί πραγματικοί, παίρνουμε ἰσοδύναμα

$(\alpha_1+\alpha_2)^2+(\beta_1+\beta_2)^2\leq\alpha_1{}^2+\beta_1{}^2+\alpha_2{}^2+\beta_2{}^2+2\sqrt{(\alpha_1{}^2+\beta_1{}^2)(\alpha^2{}_2+\beta_2{}^2)} \Leftrightarrow$

$\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2\leq\sqrt{\alpha_1{}^2\alpha_2{}^2+\alpha_1{}^2\beta_2{}^2+\alpha_2{}^2\beta_1{}^2+\beta_1{}^2\beta_2{}^2}$ (1), ὁπότε

i) Ἄν $\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2<0$, ἡ (1) ἀληθεύει σάν γνήσια ἀνισότητα.

ii) Ἄν $0\leq\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2$, τότε ἡ (1) γίνεται ἰσοδύναμα:

$$\alpha_1^2\alpha_2^2+\beta_1^2\beta_2^2+2\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2 \leq \alpha_1^2\alpha_2^2+\alpha_1^2\beta_2^2+\alpha_2^2\beta_1^2+\beta_1^2\beta_2^2 \Leftrightarrow$$
$$0 \leq (\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)^2,$$ ἡ ὁποία ἀληθεύει πάντα.

Ἡ ζητούμενη θά ἰσχύει σάν ἰσότητα, ὅταν εἶναι

$$0\leq\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2 \text{ καί } \alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1=0 \qquad (2)$$

Ἀφοῦ $z_1\cdot\bar{z}_2=(\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2)+(\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2)i$, οἱ σχέσεις (2) ἰσοδυναμοῦν μέ τήν: $(z_1\cdot\bar{z}_2)\geq 0$. Ἄρα ἰσχύει $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$, $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ καί γίνεται ἰσότητα, ὅταν $(z_1\bar{z}_2)\geq 0$ ἤ ἰσοδύναμα ὅταν $(\bar{z}_1z_2)\geq 0$.

Ἄς θυμηθοῦμε ὅτι ἡ ἴδια σχέση στούς πραγματικούς ἀριθμούς εἶναι $|\alpha+\beta|\leq$ $\leq|\alpha|+|\beta|$ καί ἡ ἰσότητα ἰσχύει, ὅταν $\alpha\cdot\beta\geq 0$.

δ) Ἔχουμε $|z_1\cdot z_2|^2=(z_1\cdot z_2)\cdot(\overline{z_1z_2})=(z_1z_2)\cdot(\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2)=$
$$=(z_1\cdot\bar{z}_1)\cdot(z_2\cdot\bar{z}_2)=|z_1|^2\cdot|z_2|^2=(|z_1|\cdot|z_2|)^2$$
$$\Leftrightarrow |z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|.$$

## 1.9. Ἀσκήσεις

1. Δεῖξτε τίς ὑπόλοιπες ἰδιότητες τῆς παραγράφου 1.8.
2. Δεῖξτε ὅτι γιά κάθε $z_1,z_2\in\mathbf{C}$ ἰσχύει: $||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1-z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$.
3. Βρεῖτε τά μέτρα τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν

   α) $\dfrac{4-5i}{2+i}$ β) $\dfrac{(\sqrt{2}+i)^3}{i(1-i\sqrt{3})^2}$ γ) $\left(\dfrac{3i(\sqrt{3}+i\sqrt{5}).(1-i\sqrt{3})}{4-i\sqrt{3}}\right)^4$

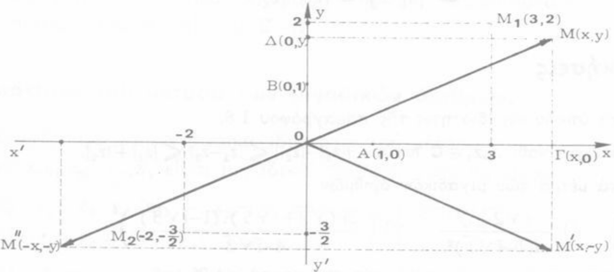
   i) φέρνοντας πρῶτα τούς μιγαδικούς στή μορφή $\alpha+\beta i$ καί
   ii) χρησιμοποιώντας τίς ἰδιότητες τοῦ μέτρου τῶν μιγαδικῶν.
4. Βρεῖτε τό μέτρο τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^\nu$, $\nu\in\mathbf{N}$.
5. Βρεῖτε τό μιγαδικό z, γιά τόν ὁποῖο $|z-1|=|z-2|=|z-i|$.
6. Ἄν $z=x+yi$, βρεῖτε τή σχέση μεταξύ τῶν x καί y, πού ὁρίζεται ἀπό τήν ἰσότητα $|z-i|=$ $=|z+2|$.
7. Ἐπιλύστε στό σύνολο $\mathbf{C}$ τήν ἐξίσωση $z^2+|z|=0$.
8. Βρεῖτε τούς μιγαδικούς z, γιά τούς ὁποίους ἰσχύει:
   $$|z|^2-2iz+2\alpha(1+i)=0, \quad \alpha\geqslant 0$$
   περιορίζοντας κατάλληλα τόν α.
9. Ἄν $z_1,z_2,z_3,z_4$ εἶναι μιγαδικοί ἀριθμοί μέ $z_3.z_4\neq 0$ καί
   $|z_3|^2+|z_4|^2\leqslant 1$, δεῖξτε ὅτι $\left|\dfrac{z_1}{z_3}\right|^2+\left|\dfrac{z_2}{z_4}\right|^2\geqslant|z_1+z_2|^2$.
10. Ἄν οἱ μιγαδικοί $z_1$, $z_2$ ἱκανοποιοῦν τίς σχέσεις
    $|z_1+z_2|=|z_1|=|z_2|$, $|z_1|\neq 0$, δεῖξτε ὅτι
    $|z_1-z_2|=\sqrt{3}|z_1|$.

# 2. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

## 2.1. Ἡ ἀπεικόνιση τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν στά σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου.

Ἡ ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοίχιση σέ κάθε μιγαδικό ἀριθμό $z = x + yi$ τοῦ ζεύγους $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ ὁδηγεῖ, ὅπως εἴπαμε προηγουμένως(1), στή **γεωμετρική του παράσταση** μέ ἕνα σημεῖο ἑνός ἐπιπέδου. Ἄς πάρουμε ἕνα ἐπίπεδο (Π) καί ἕνα ὀρθοκανονικό σύστημα ἀξόνων $x0y$ σ' αὐτό (Σχ. 1). Εἶναι φανερό ὅτι στό μιγαδικό ἀριθμό $z$ ἀντιστοιχεῖ σάν **εἰκόνα του** τό σημεῖο $M(x,y)$ τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ καί ἀντίστροφα στό σημεῖο $M(x,y)$ ἀντιστοιχεῖ ὁ μιγαδικός ἀριθμός $z = (x,y)$.

Ἡ ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοίχιση μιγαδικῶν ἀριθμῶν καί σημείων τοῦ (Π)




Σχ. 1

μᾶς ἐπιτρέπει νά χρησιμοποιοῦμε συχνά γλώσσα γεωμετρική καί ἀντί γιά τό μιγαδικό ἀριθμό $z$ νά μιλᾶμε γιά τό σημεῖο M. Γι' αὐτό καί οἱ $x,y$ ὀνομάζονται **καρτεσιανές συντεταγμένες** τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ $x+yi$. Τό ἐπίπεδο (Π), πού χρησιμοποιεῖται γιά τήν παράσταση αὐτή, λέγεται **μιγαδικό ἐπίπεδο** ἤ **ἐπίπεδο τοῦ Gauss.**

Σύμφωνα μέ τήν παραπάνω παράσταση οἱ πραγματικοί ἀριθμοί $x$, πού τούς «ταυτίσαμε» μέ τά ζεύγη $(x,0)$, παριστάνονται μέ τά σημεῖα τοῦ ἄξονα τῶν τετμημένων $x'0x$, ὁ ὁποῖος γι' αὐτό ὀνομάζεται **πραγματικός ἄξονας** τοῦ συστήματος. Οἱ καθαρά φανταστικοί ἀριθμοί $(0,y)$ ἀντιστοιχοῦν στά σημεῖα τοῦ ἄξονα $y'0y$ τῶν τεταγμένων, ὁ ὁποῖος γι' αὐτό ὀνομάζεται **φανταστικός ἄξονας** τοῦ συστήματος.

Στό σχ. 1 παρατηροῦμε ὅτι στόν ἀντίθετο $-z$ τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ $z$ ἀντιστοιχεῖ τό συμμετρικό $M''$ τοῦ σημείου M ὡς πρός τήν ἀρχή 0 τοῦ συστήματος καί στό συζυγή $\bar{z}$ τοῦ $z$ τό συμμετρικό $M'$ τοῦ σημείου M ὡς πρός τόν πραγματικό ἄξονα $x'0x$.

---

(1) Ὑποσημείωση τῆς παραγράφου 1.1.

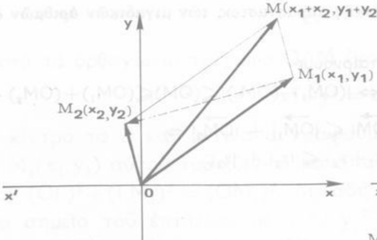
## 2.2. Γεωμετρική εἰκόνα τοῦ ἀθροίσματος καί τῆς διαφορᾶς δύο μιγαδικῶν ἀριθμῶν.

Ἡ ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοίχιση μιγαδικῶν ἀριθμῶν καί σημείων τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου μᾶς ἐπιτρέπει τήν ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοίχιση τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν καί τῶν διανυσματικῶν ἀκτίνων τῶν σημείων τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου. Ἔτσι π.χ. στό μιγαδικό ἀριθμό $z=(x,y)$ ἀντιστοιχεῖ τό σημεῖο $M(x,y)$ καί στό σημεῖο $M(x,y)$ ἀντιστοιχεῖ ἡ διανυσματική ἀκτίνα $\overrightarrow{OM}$ (Σχ. 1) καί ἄρα στό $z=(x,y)$ ἀντιστοιχεῖ ἡ $\overrightarrow{OM}$.Τήν $\overrightarrow{OM}$ τήν ὀνομάζουμε **διανυσματική ἀκτίνα τοῦ μιγαδικοῦ z**.

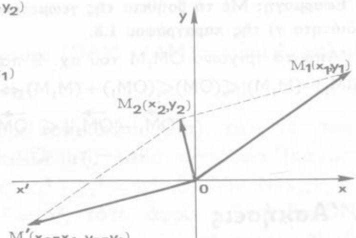
Εἶναι εὔκολο νά δοῦμε ὅτι $|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{x^2+y^2}=|z|$, δηλαδή ὅτι τό μέτρο τῆς $\overrightarrow{OM}$ ἰσοῦται μέ τό μέτρο τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ $z$.

Μέ τή βοήθεια τῶν διανυσματικῶν ἀκτίνων τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν μποροῦμε νά βροῦμε τίς διανυσματικές ἀκτίνες τοῦ ἀθροίσματος καί τῆς διαφορᾶς δύο μιγαδικῶν ἀριθμῶν καί νά ἑρμηνεύσουμε ἔτσι γεωμετρικά τήν πρόσθεση καί τήν ἀφαίρεση στό $\mathbf{C}$.

Ἄς πάρουμε τούς μιγαδικούς ἀριθμούς $z_1=x_1+y_1i$ καί $z_2=x_2+y_2i$ καί τίς ἀντίστοιχες εἰκόνες τους $M_1(x_1,y_1)$ καί $M_2(x_2,y_2)$ στό μιγαδικό ἐπίπεδο (Σχ.2). Οἱ διανυσματικές ἀκτίνες τῶν $z_1$ καί $z_2$ εἶναι οἱ $\overrightarrow{OM_1}$ καί $\overrightarrow{OM_2}$ ἀντίστοιχα καί τό ἄθροισμα $z_1+z_2$ ἔχει γιά διανυσματική του ἀκτίνα τή διαγώνιο $\overrightarrow{OM}$ τοῦ παραλληλογράμμου πού ὁρίζουν οἱ $\overrightarrow{OM_1}$ καί $\overrightarrow{OM_2}$.

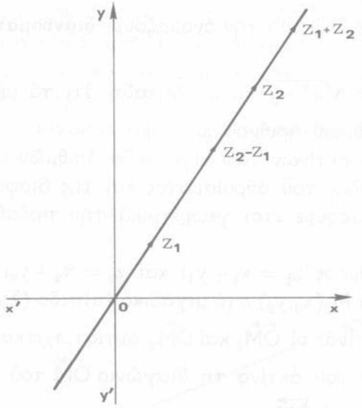


Σχ. 2

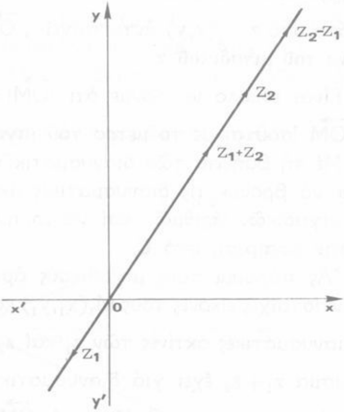


Σχ. 3

Τό διάνυσμα $\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}$, πού ὁρίζεται ἀπό τήν ἄλλη διαγώνιο τοῦ παραλληλογράμμου αὐτοῦ, εἶναι ἴσο μέ τή διανυσματική ἀκτίνα τῆς διαφορᾶς $z_2-z_1$ τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν. Ἡ διαφορά παριστάνεται μέ τή διανυσματική ἀκτίνα $\overrightarrow{OM'}$ (Σχ. 3), πού εἶναι ἡ ἄλλη πλευρά τοῦ παραλληλογράμμου πού κατασκευάζεται μέ πλευρά τήν $\overrightarrow{OM_1}$ καί διαγώνιο τήν $\overrightarrow{OM_2}$. Στά σχήματα 2 καί 3 ὑποθέτουμε ὅτι τό παραλληλόγραμμο τῶν διανυσματικῶν ἀκτίνων $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$ εἶναι κατασκευάσιμο, δηλαδή τά σημεῖα $O, M_1, M_2$ δέ βρίσκονται πάνω σέ εὐθεία γραμμή. Ὅταν τά σημεῖα $O, M_1, M_2$ βρίσκονται πάνω στήν ἴδια εὐθεία, τότε ἔχουμε εὔκολα τό ἄθροισμα καί τή διαφορά τῶν $z_1$ καί $z_2$. Αὐτό φαίνεται στά σχήματα 4 καί 5.




Σχ. 4




Σχ. 5

**Ἐφαρμογή: Μέ τή βοήθεια τῆς γεωμετρικῆς παραστάσεως τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν δεῖξτε τήν ἰδιότητα γ) τῆς παραγράφου 1.8.**

Ἀπό τό τρίγωνο $OM_1M$ τοῦ σχ. 2 παίρνουμε

$$|(OM_1)-(M_1M)| \leqslant (OM) \leqslant (OM_1)+(M_1M) \Leftrightarrow |(OM_1)-(OM_2)| \leqslant (OM) \leqslant (OM_1)+(OM_2) \Leftrightarrow$$

$$||\overrightarrow{OM_1}|-|\overrightarrow{OM_2}|| \leqslant |\overrightarrow{OM}| \leqslant |\overrightarrow{OM_1}| + |\overrightarrow{OM_2}| \Leftrightarrow$$

$$||z_1|-|z_2|| \leqslant |z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|.$$

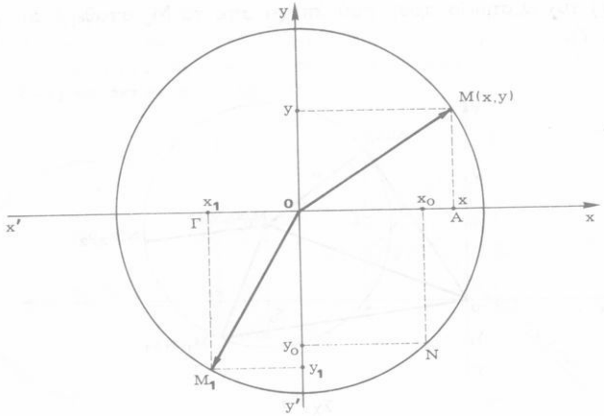
## 2.3. Ἀσκήσεις

1. Νά παρασταθοῦν στό μιγαδικό ἐπίπεδο οἱ μιγαδικοί ἀριθμοί $2+3i$, $2-3i$, $-2+3i$, $-2-3i$.
2. Νά παρασταθοῦν στό ἐπίπεδο Gauss τρεῖς μιγαδικοί $z_1, z_2, z_3$ καί ἔπειτα οἱ μιγαδικοί
$$z_1+z_2+z_3 \quad \text{καί} \quad z_1+z_2-z_3.$$
3. Δεῖξτε μέ τή βοήθεια τῆς γεωμετρικῆς παραστάσεως τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν ὅτι ἰσχύει
$$||z_1|-|z_2|| \leqslant |z_1-z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|.$$

# 3. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΜΕΤΡΟΥ ΤΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

## 3.1. Ἡ ἐξίσωση τοῦ κύκλου

Ἄς εἶναι Ο ἡ ἀρχή τοῦ ὀρθοκανονικοῦ συστήματος στό ἐπίπεδο Gauss καί M(x,y) ἕνα σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου, πού ἀπέχει ἀπό τό Ο ἀπόσταση ἴση μέ α (Σχ. 6.).




Σχ. 6

Ἀπό τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΟΑΜ ἔχουμε $(OA)^2+(AM)^2=(OM)^2$, δηλαδή

$$\mathbf{x^2+y^2=\alpha^2} \tag{1}$$

Ἄν μέ κέντρο τό Ο καί ἀκτίνα α γράψουμε τόν κύκλο (Ο,α), τότε τό τυχόν σημεῖο $M_1(x_1,y_1)$ αὐτοῦ τοῦ κύκλου ἱκανοποιεῖ τήν (1) καί ἀντίστροφα. Πράγματι α) εἶναι $(O\Gamma)^2+(\Gamma M_1)^2=(OM_1)^2$, δηλαδή $x_1{}^2+y_1{}^2=\alpha^2$. β) Ἄν $N(x_o,y_o)$ εἶναι ἕνα σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου μέ $x_o{}^2+y_o{}^2=\alpha^2$, τότε, ἀφοῦ $x_o{}^2+y_o{}^2=(ON)^2$, θά ἔχουμε $(ON)^2=\alpha^2$ καί ἄρα $(ON)=\alpha$, πού σημαίνει ὅτι τό σημεῖο N εἶναι σημεῖο τοῦ κύκλου (0,α).

Ἄρα ἡ ἐξίσωση (1) εἶναι ἡ ἐξίσωση τοῦ κύκλου (0,α). Ἐπειδή τό σημεῖο M(x,y) εἶναι ἡ εἰκόνα τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ $z=x+yi$, δηλαδή ἡ $\overrightarrow{OM}$ εἶναι ἡ διανυσματική του ἀκτίνα, ἡ (1) γράφεται ἰσοδύναμα

$$|z|^2=\alpha^2 \text{ ἤ καί } |z|=\alpha, \text{ ἀφοῦ } \alpha>0.$$

Ἔτσι ἔχουμε τό σπουδαῖο συμπέρασμα ὅτι:

— **Στό μιγαδικό ἐπίπεδο τό σύνολο τῶν εἰκόνων τῶν μιγαδικῶν z πού ἱκανο-**

**ποιοῦν τή σχέση $|z|=\alpha$, $\alpha>0$, εἶναι ὁ κύκλος μέ κέντρο τήν ἀρχή O καί ἀκτίνα ἴση μέ α.**

Εἶναι εὔκολο τώρα νά δοῦμε ὅτι γιά τό μιγαδικό ἀριθμό $z=x+yi$ ἡ σχέση

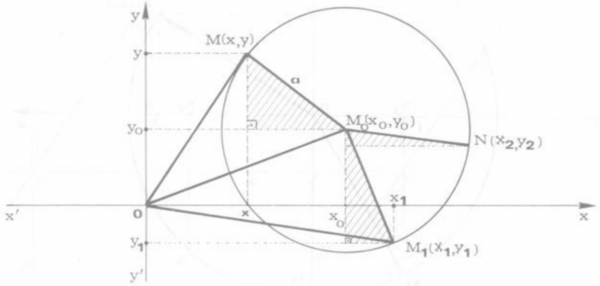
$$|z|<\alpha$$

ὁρίζει τό ἐσωτερικό τοῦ κύκλου (0,α), ἐνῶ ἡ σχέση

$$|z|>\alpha$$

ὁρίζει τό ἐξωτερικό του.

Ἄς εἶναι τώρα $M_o(x_o,y_o)$ ἕνα σταθερό σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου τοῦ Gauss καί $M(x,y)$ τυχόν σημεῖο του, πού ἀπέχει ἀπό τό $M_o$ σταθερή ἀπόσταση ἴση μέ α (Σχ. 7).




Σχ. 7

Γνωρίζουμε ὅτι ἡ ἀπόσταση $(M_0M)$ δίνεται ἀπό τή σχέση

$$(M_oM)^2=(x-x_o)^2+(y-y_o)^2, \text{ δηλαδή}$$

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\alpha^2 \qquad (2)$$

Ἄν μέ κέντρο τό $M_o$ καί ἀκτίνα α γράψουμε τόν κύκλο $(M_o,\alpha)$, τότε γιά τό τυχόν σημεῖο του $M_1(x_1,y_1)$ ἔχουμε: $(x_1-x_o)^2+(y_1-y_o{}^2)=\alpha^2$, δηλαδή οἱ συντεταγμένες κάθε σημείου τοῦ $(M_o,\alpha)$ ἱκανοποιοῦν τή (2).

**Ἀντίστροφα**: Ἄν $N(x_2,y_2)$ εἶναι ἕνα σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου, γιά τό ὁποῖο ἰσχύει $(x_2-x_o)^2+(y_2-y_o)^2=\alpha^2$, τότε, ἀφοῦ $(x_2-x_o)^2+(y_2-y_o)^2=(M_oN)^2$, θά ἔχουμε $(M_oN)^2=\alpha^2$, δηλαδή $(M_oN)=\alpha$, πού σημαίνει ὅτι τό N εἶναι σημεῖο τοῦ κύκλου $(M_o,\alpha)$.

Ἡ (2) λοιπόν εἶναι ἡ ἐξίσωση τοῦ κύκλου $(M_o,\alpha)$. Ἄν τά σημεῖα $M(x,y)$ καί $M_o(x_o,y_o)$ εἶναι οἱ εἰκόνες τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν $z=x+yi$ καί $z_o=x_o+y_oi$ ἀντίστοιχα, τότε ἡ ἐξίσωση (2) γράφεται:

$$|z-z_o|^2=\alpha^2 \text{ ἤ } |z-z_o|=\alpha, \text{ ἀφοῦ } \alpha>0.$$

Εὔκολα βλέπουμε ὅτι ἡ σχέση $|z-z_o|<\alpha$ ὁρίζει τό ἐσωτερικό τοῦ κύκλου $(M_o,\alpha)$, ἐνῶ ἡ $|z-z_o|>\alpha$ ὁρίζει τό ἐξωτερικό του.

## 3.2. Ἐφαρμογές

**1. Βρεῖτε τά σημεῖα τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου, γιά τά ὁποῖα εἶναι: $|z| = |3-4i|$ (1).**

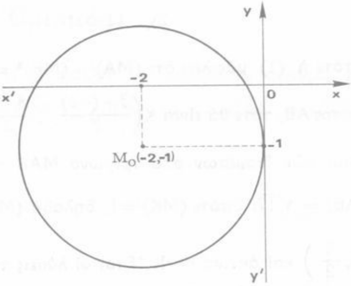
**Λύση:** Ἔχουμε $|z| = |3-4i| \Leftrightarrow |z| = \sqrt{3^2+4^2} \Leftrightarrow |z| = 5$ (2)

Ἡ (2) εἶναι ἡ ἐξίσωση τοῦ κύκλου (0,5) στό μιγαδικό ἐπίπεδο καί ἄρα οἱ μιγαδικοί ἀριθμοί, πού ἔχουν εἰκόνες τά σημεῖα αὐτοῦ τοῦ κύκλου, εἶναι λύσεις τῆς (1).

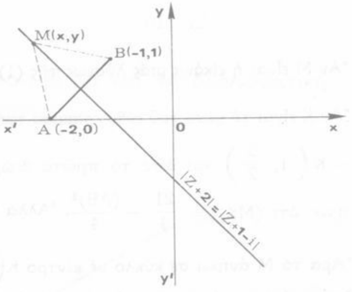
**2. Στό μιγαδικό ἐπίπεδο βρεῖτε τίς λύσεις τῆς ἐξισώσεως**

$$|z + 2+i| = 2.$$

**Ἐπίλυση:** Ἔχουμε $|z+2+i| = 2 \Leftrightarrow |z-(-2-i)|=2$ (1) καί σύμφωνα μέ τά προηγούμενα ἡ (1) ἐπαληθεύεται ἀπό τούς μιγαδικούς ἀριθμούς z, πού ἔχουν εἰκόνες στό μιγαδικό ἐπίπεδο τά σημεῖα τοῦ κύκλου μέ κέντρο τήν εἰκόνα τοῦ μιγαδικοῦ $-2-i$, δηλαδή τό σημεῖο $M_o(-2,-1)$ καί ἀκτίνα $\alpha = 2$. (Σχ. 8).




Σχ. 8




Σχ. 9

**3. Βρεῖτε τά σημεῖα τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου, γιά τά ὁποῖα εἶναι:**

$$|z+2| = |z-(-1+i)|.$$

**Λύση:** Ἔχουμε $|z+2| = |z-(-1+i)| \Leftrightarrow |z-(-2+0i)| = |z-(-1+i)|$ (1)

Ἄς εἶναι A(−2,0) ἡ εἰκόνα τοῦ μιγαδικοῦ $-2+0i$ καί B(−1,1) τοῦ μιγαδικοῦ $-1+i$ (Σχ. 9). Ἄν M εἶναι ἡ εἰκόνα ἑνός μιγαδικοῦ z, τότε τό $|z-(-2+0i)|$ παριστάνει τήν ἀπόσταση (AM) καί τό $|z-(-1+i)|$ τήν ἀπόσταση (BM). Ἐπειδή θέλουμε $|z-(-2+0i)| = |z-(-1+i)|$, θά πρέπει νά εἶναι (MA) = (MB). Αὐτό σημαίνει ὅτι οἱ εἰκόνες τῶν λύσεων τῆς (1) ἰσαπέχουν ἀπό τά σταθερά σημεῖα A καί B καί ἄρα ἀνήκουν στή μεσοκάθετο τοῦ AB.

**Ἀντίστροφα:** Κάθε σημεῖο M(x,y), εἰκόνα τοῦ μιγαδικοῦ $z = x+yi$, πού ἰσαπέχει ἀπό τά A καί B, θά ἱκανοποιεῖ τήν ἰσότητα $|z-(-2+0i)| = |z-(-1+i)|$, δηλ. τήν (1). Ἄρα τά ζητούμενα σημεῖα ἀποτελοῦν τή μεσοκάθετο τοῦ τμήματος AB, μέ A(−2,0) καί B(−1,1).

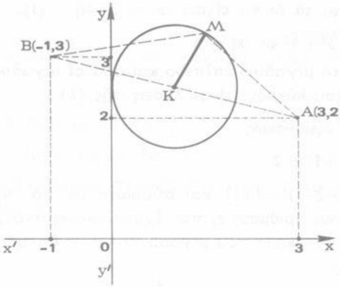
**4. Στό μιγαδικό ἐπίπεδο βρεῖτε ποῦ ἀνήκουν οἱ εἰκόνες τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν, πού εἶναι λύσεις τῆς ἐξισώσεως**

$$2|z-3-2i|^2 + 2|z+1-3i|^2 = 21$$

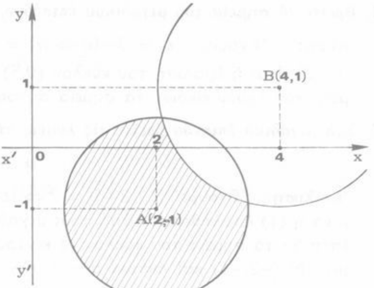
**Λύση:** Ἔχουμε $2|z-3-2i|^2 + 2|z+1-3i|^2 = 21 \Leftrightarrow$

$$|z-(3+2i)|^2 + |z-(-1+3i)|^2 = \frac{21}{2} \quad (1)$$

Στό μιγαδικό ἐπίπεδο παίρνουμε τά σημεῖα $A(3,2)$ καί $B(-1,3)$, πού εἶναι εἰκόνες τῶν μιγαδικῶν $3+2i$ καί $-1+3i$ ἀντίστοιχα (Σχ. 10).




Σχ. 10




Σχ. 11

Ἄν M εἶναι ἡ εἰκόνα μιᾶς λύσεως τῆς (1), τότε ἡ (1) μᾶς λέει ὅτι $(MA)^2+(MB)^2 = \frac{21}{2}$.

Ἄν K εἶναι τό μέσο τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος AB, τότε θά εἶναι $K\left(\frac{3+(-1)}{2}, \frac{3+2}{2}\right) =$ $= K\left(1, \frac{5}{2}\right)$ καί ἀπό τό πρῶτο θεώρημα τῶν διαμέσων στό τρίγωνο MAB προκύπτει ὅτι $(MK)^2 = \frac{21}{4} - \frac{(AB)^2}{4}$. Ἀλλά $(AB) = \sqrt{17}$, ὁπότε $(MK)^2=1$, δηλαδή $(MK)=1$.

Ἄρα τό M ἀνήκει σέ κύκλο μέ κέντρο $K\left(1, \frac{5}{2}\right)$ καί ἀκτίνα $\alpha=1$. Ἔτσι οἱ λύσεις τῆς (1 ἔχουν εἰκόνες τά σημεῖα αὐτοῦ τοῦ κύκλου, ὁ ὁποῖος ἔχει ἐξίσωση

$$\left|z-\left(1+\frac{5}{2}i\right)\right| = 1.$$

**5. Στό μιγαδικό ἐπίπεδο βρεῖτε τό σύνολο τῶν εἰκόνων τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν z, πού εἶναι λύσεις τοῦ συστήματος:**

$$|z-2+i| < \frac{3}{2}, \quad |z-4-i| > 2$$

**Λύση:** Στό σχῆμα 11 δίνουμε τή γεωμετρική εἰκόνα τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος. Ἀφήνουμε γιά ἄσκηση τή δικαιολόγηση τῶν ἀποτελεσμάτων.

## 3.3. Ἀσκήσεις

1. **Δεῖξτε ὅτι ἡ ἐξίσωση τοῦ κύκλου $|z-z_0| = \alpha$ παίρνει τή μορφή**

$$z\bar{z} = 2\mathrm{Re}(z\bar{z}_0)+\alpha^2-|z_0|^2$$

2. Στό μιγαδικό ἐπίπεδο ἐπιλύστε τήν ἐξίσωση $|z-2+3i| = 5$.
3. Βρεῖτε τά σημεῖα τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου, γιά τά ὁποῖα εἶναι $|z-i| = |z+2|$.
4. Βρεῖτε τά σημεῖα τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου, γιά τά ὁποῖα εἶναι $|z-2| < |z|$.
5. Στό μιγαδικό ἐπίπεδο βρεῖτε τό σύνολο τῶν εἰκόνων τῶν μιγαδικῶν, πού ἐπαληθεύουν τήν $|z-1| < |z+1|$.

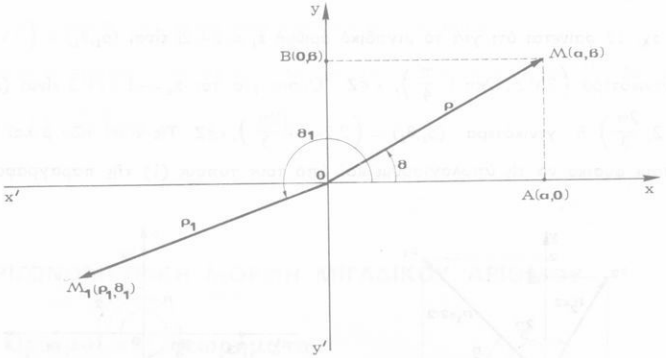
6. Ἄν εἶναι $|z-8| = 2|z-2|$, $z \in \mathbf{C}$, δεῖξτε ὅτι θά εἶναι $|z| = 4$.
7. Ἄν $|z| = 3$, βρεῖτε τά σημεῖα τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου, πού εἶναι εἰκόνες τῶν μιγαδικῶν (α) $-2z$, (β) $1-z$, (γ) $3z-1$.
8. Βρεῖτε ὅλους τούς μιγαδικούς ἀριθμούς, γιά τούς ὁποίους εἶναι: $3 \leqslant |z+i| \leqslant 4$.
9. Βρεῖτε ὅλους τούς μιγαδικούς ἀριθμούς, γιά τούς ὁποίους εἶναι: $|z-1|^2 + |z+1|^2 = 4$.
10. Βρεῖτε τούς μιγαδικούς z, οἱ ὁποῖοι ἐπαληθεύουν συγχρόνως τίς ἐξισώσεις

$$\left|\frac{z-12}{z-8i}\right| = \frac{5}{3} \quad \text{καί} \quad \left|\frac{z-4}{z-8}\right| = 1.$$

## 4. ΠΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

### 4.1. Ὁρισμός

Ἄς πάρουμε τό μιγαδικό ἀριθμό $z = \alpha + \beta i \neq 0$ καί τή διανυσματική του ἀκτίνα $\overrightarrow{OM}$ (Σχ. 12). Εἶναι $|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \rho$.




Σχ. 12

Ὅλοι οἱ μιγαδικοί, πού οἱ εἰκόνες τους εἶναι σημεῖα τοῦ κύκλου (0,ρ), ἔχουν τό ἴδιο μέτρο μέ τόν z. Γιά νά προσδιορίσουμε λοιπόν τή γεωμετρική εἰκόνα τοῦ z, δέν εἶναι ἀρκετό τό μέτρο του. Ἄν ὅμως ξέρουμε μαζί μέ τό μέτρο ρ καί τή γωνία $\theta \in [0,2\pi)$ πού σχηματίζει ὁ θετικός ἡμιάξονας 0x μέ τή διανυσματική ἀκτίνα $\overrightarrow{OM}$ τοῦ z, τότε ἡ εἰκόνα M(α,β) τοῦ z καθορίζεται πλήρως ἀπό τό ζεῦγος (ρ,θ).

Εἶναι φανερό (Σχ. 12) ὅτι τά στοιχεῖα τῶν ζευγῶν (α,β) καί (ρ,θ) συνδέονται μέ τίς σχέσεις:

$$\boxed{\begin{aligned} &\rho=\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \\ &\text{συνθ}=\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \text{ καί ημθ}=\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \quad 0\leq\theta<2\pi \end{aligned}} \tag{1}$$

'Από τίς σχέσεις (1) βεβαιωνόμαστε ὅτι, ὅταν δοθοῦν τά α καί β, προσδιορίζονται μονοσήμαντα τά ρ καί θ καί ἀντίστροφα.

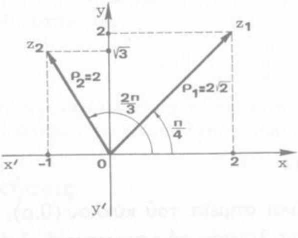
"Αρα **κάθε μιγαδικός ἀριθμός (α,β) $\neq$ (0,0) μπορεῖ νά ὁριστεῖ καί μέ τό ζεῦγος (ρ,θ).**

*Τά στοιχεῖα τοῦ ζεύγους (ρ,θ) ὀνομάζονται* **πολικές συντεταγμένες** *τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ z=α+βi. Εἰδικότερα τό ρ ὀνομάζεται* (ὅπως ξέρουμε) **μέτρο τοῦ z** *καί τό θ* **πρωτεῦον ὅρισμα** (Argument) **τοῦ z** *καί συμβολίζεται Argz=θ* [1].

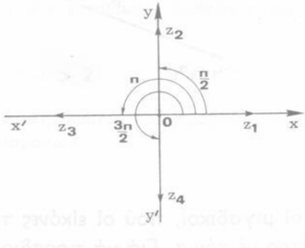
Τό μιγαδικό ἀριθμό $z=\alpha+\beta i$, ἐκτός ἀπό τό ζεῦγος (ρ,θ) πού βρίσκουμε ἀπό τίς (1), τόν προσδιορίζει καί κάθε ζεῦγος $(\rho, \theta+2\kappa\pi)$, $\kappa\in\mathbf{Z}$. Γι' αὐτό **κάθε γωνία ἀπό τίς θ+2κπ, κ ∈ Z ὀνομάζεται** ἁπλῶς **ὅρισμα τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ z** καί συμβολίζεται **argz**.

## 4.2. Παραδείγματα

1. Στό σχ. 13 φαίνεται ὅτι γιά τό μιγαδικό ἀριθμό $z_1=2+2i$ εἶναι $(\rho_1,\theta_1)=\left(2\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)$ ἤ γενικότερα $\left(2\sqrt{2},\ 2\kappa\pi+\frac{\pi}{4}\right)$, $\kappa\in\mathbf{Z}$. "Ομοια γιά τόν $z_2=-1+i\sqrt{3}$ εἶναι $(\rho_2,\theta_2)=\left(2,\frac{2\pi}{3}\right)$ ἤ γενικότερα $(\rho_2,\theta_2)=\left(2,2\kappa\pi+\frac{2\pi}{3}\right)$, $\kappa\in\mathbf{Z}$. Τίς τιμές τῶν ρ καί θ μπορούσαμε φυσικά νά τίς ὑπολογίσουμε καί ἀπό τούς τύπους (1) τῆς παραγράφου 4.1.




Σχ. 13




Σχ. 14

2. Οἱ μιγαδικοί ἀριθμοί $z_1=(1,0)$, $z_2=(0,1)$, $z_3=(-1,0)$ καί $z_4=(0,-1)$ ἔχουν κοινό μέτρο $\rho=1$ καί ἀντίστοιχα πρωτεύοντα ὁρίσματα $\text{Arg}z_1=\text{Arg}(1+0i)=0$, $\text{Arg}z_2=\text{Arg}\ (0+i)=\frac{\pi}{2}$, $\text{Arg}\ z_3=\pi$ καί $\text{Arg}z_4=\frac{3\pi}{2}$ (Σχ. 14).

1. Στή βιβλιογραφία μερικές φορές ὡς Argz θεωρεῖται ἡ γωνία θ μέ $\theta\in(-\pi,\pi]$.

3. Οἱ πολικές συντεταγμένες τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ $z = 1 - i\sqrt{3}$ εἶναι:

α) $\rho = \sqrt{1+3} = 2$ καί β) $\theta = \frac{5\pi}{3}$. Ἡ τιμή $\theta = \frac{5\pi}{3}$ βρίσκεται εὔκολα ἀπό τό σύστημα $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2}$, $\eta\mu\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\theta \in [0,2\pi)$.

4. Ἄν οἱ πολικές συντεταγμένες τοῦ ἀριθμοῦ $z = \alpha + \beta i$ εἶναι $\left(2, \frac{4\pi}{3}\right)$, τότε βάζοντας στούς τύπους (1) τῆς παραγράφου 4.1 $\sqrt{\alpha^2+\beta^2} = 2$ καί $\theta = \frac{4\pi}{3}$ βρίσκουμε ὅτι ὁ μιγαδικός αὐτός ἀριθμός εἶναι ὁ $z = -1 - i\sqrt{3}$.

## 4.3. Ἀσκήσεις

1. Βρεῖτε τίς πολικές συντεταγμένες $(\rho,\theta)$ τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν:

$z_1 = 3+0i$ , $z_2 = 3+3i$ , $z_3 = (0,3)$,
$z_4 = (-3,3)$ , $z_5 = (-3,0)$ , $z_6 = -3-3i$
$z_7 = (0,-3)$ , $z_8 = (3,-3)$.

2. Γράψτε στή μορφή $z = \alpha + \beta i$ τούς μιγαδικούς ἀριθμούς

$$z_1 = \left(3, \frac{\pi}{3}\right), \quad z_2 = (2,\pi), \quad z_3 = \left(\sqrt{3}, \frac{5\pi}{4}\right), \quad z_4 = \left(1, \frac{3\pi}{2}\right)$$

καί ἀπεικονίστε τους γεωμετρικά στό ἐπίπεδο τοῦ Gauss.

3. Βρεῖτε τίς πολικές συντεταγμένες τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν $z_1 . z_2$ καί $\frac{z_1}{z_2}$, ἄν εἶναι

$z_1 = \left(3, \frac{\pi}{3}\right)$ καί $z_2 = \left(2, \frac{\pi}{3}\right)$.

# 5. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

## 5.1. Ὁρισμοί καί θεωρήματα

Εἴδαμε προηγουμένως ὅτι, ἄν $(\rho,\theta)$ εἶναι οἱ πολικές συντεταγμένες τοῦ μιγαδικοῦ $z = \alpha + \beta i \neq 0$, τότε θά εἶναι:

$$\boxed{\begin{gathered}\rho = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}, \quad \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \frac{\alpha}{\rho} \quad \text{καί} \quad \eta\mu\theta = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \frac{\beta}{\rho} \\ \text{μέ } 0 \leq \theta < 2\pi\end{gathered}} \quad (1)$$

Ἀπό τίς σχέσεις αὐτές παίρνουμε:

$$\alpha = \rho\sigma\upsilon\nu\theta \quad \text{καί} \quad \beta = \rho\,\eta\mu\,\theta,$$

ὁπότε ὁ μιγαδικός $z=\alpha+\beta i$ παίρνει τή μορφή:

$$\boxed{z=\rho(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta),\quad \mu\acute{\varepsilon}\quad 0\leq\theta<2\pi,\ \rho=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \qquad (2)$$

**Ἡ μορφή αὐτή λέγεται τριγωνομετρική μορφή τοῦ μιγαδικοῦ $\alpha+\beta i$.**

Φυσικά ἀντί γιά τό πρωτεῦον ὅρισμα θ μποροῦμε νά πάρουμε ὁποιοδήποτε ἄλλο ὅρισμα τῆς μορφῆς $\theta+2\kappa\pi$, $\kappa\in\mathbf{Z}$.

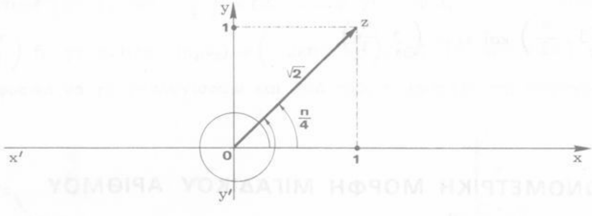
Δηλαδή:

$$\boxed{\begin{array}{l}\alpha+\beta i=\rho(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta)=\rho[\sigma\upsilon\nu(\theta+2\kappa\pi)+i\eta\mu\,(\theta+2\kappa\pi)],\ \kappa\in\mathbf{Z},\\ \text{ὅπου}\quad \rho=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\quad \text{καί}\quad \theta\in[0,2\pi)\ \mu\acute{\varepsilon}\\ \sigma\upsilon\nu\theta=\dfrac{\alpha}{\rho}\quad \text{καί}\quad \eta\mu\theta=\dfrac{\beta}{\rho}\end{array}} \qquad (3)$$

Ὅπως φαίνεται ἀπό τό σχ. 15, γιά τό μιγαδικό $z=1+i$ εἶναι

$$z=1+i=\sqrt{2}\left(\sigma\upsilon\nu\,\frac{\pi}{4}+i\,\eta\mu\,\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(\sigma\upsilon\nu\left(2\kappa\pi+\frac{\pi}{4}\right)+i\eta\mu\left(2\kappa\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right),\quad \kappa\in\mathbf{Z}.$$




Σχ. 15

Ἡ τριγωνομετρική μορφή τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν βοηθάει στό νά ἀντιμετωπίσουμε πολλά προβλήματα καί νά δώσουμε γεωμετρική ἑρμηνεία σέ πολλά θεωρητικά συμπεράσματα.

Θά δώσουμε ἀμέσως παρακάτω μερικά χρήσιμα θεωρήματα.

**Θεώρημα 1ο. Δυό μιγαδικοί ἀριθμοί $z_1=\rho_1\,(\sigma\upsilon\nu\theta_1+i\eta\mu\theta_1)$ καί $z_2=\rho_2\,(\sigma\upsilon\nu\theta_2+i\eta\mu\theta_2)$ εἶναι ἴσοι, ὅταν καί μόνο ὅταν**

$$\rho_1=\rho_2,\quad \theta_2-\theta_1=2\kappa\pi,\quad \kappa\in\mathbf{Z}$$

**Ἀπόδειξη.** Ἀφοῦ ἡ $z_1=z_2$ συνεπάγεται ὅτι $\rho_1\,\sigma\upsilon\nu\theta_1=\rho_2\sigma\upsilon\nu\theta_2$ καί $\rho_1\eta\mu\theta_1=\rho_2\eta\mu\theta_2$, τότε θά εἶναι $\rho^2{}_1(\sigma\upsilon\nu^2\theta_1+\eta\mu^2\theta_1)=\rho^2{}_2(\sigma\upsilon\nu^2\theta_2+\eta\mu^2\theta_2)$, ὁπότε $\rho_1=\rho_2$. Ἄρα $\sigma\upsilon\nu\theta_1=\sigma\upsilon\nu\theta_2$ καί $\eta\mu\theta_1=\eta\mu\theta_2$, ὁπότε $\theta_2=2\kappa\pi+\theta_1$ ἤ $\theta_2-\theta_1=2\kappa\pi$.

**Θεώρημα 2ο. Τό γινόμενο δύο μιγαδικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἕνας μιγαδικός ἀριθμός πού ἔχει μέτρο τό γινόμενο τῶν μέτρων τους καί ὄρισμα τό ἄθροισμα τῶν ορισμάτων τους.**

**Ἀπόδειξη.** Ἄν $z_1=\rho_1$ (συνθ$_1$+iημθ$_1$) καί $z_2=\rho_2$ (συνθ$_2$+iημθ$_2$), ἔχουμε: $z_1z_2=\rho_1\rho_2[(\text{συν}\theta_1\text{συν}\theta_2-\text{ημ}\theta_1\text{ημ}\theta_2)+i(\text{συν}\theta_1\text{ημ}\theta_2+\text{ημ}\theta_1\text{συν}\theta_2)]$.

Ἄρα:
$$\boxed{z_1\cdot z_2=\rho_1\rho_2\,(\text{συν}(\theta_1+\theta_2)+i\text{ημ}(\theta_1+\theta_2))} \qquad (4)$$

Ἐπαγωγικά δεῖξτε ὅτι: **Ἄν $z_\kappa=\rho_\kappa$ (συνθ$_\kappa$+iημθ$_\kappa$), $\kappa=1,2,\ldots,\nu$, τότε :**

$$\mathbf{z_1.z_2\ldots z_\nu=\rho_1.\rho_2\ldots\rho_\nu\,[\text{συν}(\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_\nu)+i\text{ημ}(\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_\nu)]} \qquad \mathbf{(5)}$$

Ἄν εἶναι $\rho_1=\rho_2=\ldots=\rho_\nu=\rho$ καί $\theta_1=\theta_2=\ldots=\theta_\nu=\theta$, τότε $z_1=z_2=\ldots=z_\nu=$ $=\rho$ (συνθ+iημθ) καί ἡ σχέση (5) γίνεται:

$$\boxed{z^\nu=[\rho(\text{συν}\theta+i\text{ημ}\theta)]^\nu=\rho^\nu\,(\text{συν}(\nu\theta)+i\text{ημ}(\nu\theta))} \qquad (6)$$

Ἡ (6) μᾶς εἶναι χρήσιμη παρακάτω καί **ἀναφέρεται σάν Θεώρημα De Moivre.** Ἄμεση συνέπεια τῆς σχέσεως (5) εἶναι καί ἡ γνωστή μας ἰδιότητα τοῦ μέτρου τοῦ γινομένου πολλῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν, δηλαδή

$$\boxed{|z_1\cdot z_2\ldots z_\nu|=|z_1|\cdot|z_2|\ldots|z_\nu|} \qquad (7)$$

Ἀπό τή σχέση (5) βλέπουμε ἀκόμη ὅτι:

$$\boxed{\begin{array}{l}2\kappa\pi+\text{Arg}(z_1\cdot z_2\ldots z_\nu)=\text{Arg}\,z_1+\text{Arg}z_2+\ldots+\text{Arg}\,z_\nu,\\ \text{ὅπου κ κατάλληλος ἀκέραιος ἀριθμός}\end{array}}^{(1)} \qquad (8)$$

**Θεώρημα 3ο. Ὁ ἀντίστροφος ἑνός μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ $z\neq0$ ἔχει μέτρο τό ἀντίστροφο τοῦ μέτρου του καί ὄρισμα τό ἀντίθετο τοῦ ὀρίσματός του.**

**Ἀπόδειξη.** Ἄν $z=\rho$ (συνθ + iημθ), $\rho\neq0$, εἶναι ἕνας μιγαδικός ἀριθμός, τότε θά

$$\text{εἶναι}\quad \frac{1}{z}=\frac{1}{\rho(\text{συν}\theta+i\text{ημ}\theta)}=\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\text{συν}\theta-i\text{ημ}\theta}{\text{συν}^2\theta+\text{ημ}^2\theta}=$$

$$=\frac{1}{\rho}(\text{συν}\theta-i\text{ημ}\theta)=\frac{1}{\rho}\,[\text{συν}(-\theta)+i\text{ημ}(-\theta)].$$

**Θεώρημα 4ο. Τό πηλίκο δύο μιγαδικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἕνας μιγαδικός ἀριθμός πού ἔχει μέτρο τό λόγο τῶν μέτρων τους καί ὄρισμα τή διαφορά τῶν ορισμάτων τους.** Δηλαδή:

$$\left.\begin{array}{l}z_1=\rho_1\,(\text{συν}\theta_1+i\text{ημ}\theta_1)\\ z_2=\rho_2\,(\text{συν}\theta_2+i\text{ημ}\theta_2)\neq0\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}\,[\text{συν}(\theta_1-\theta_2)+i\text{ημ}(\theta_1-\theta_2)]$$

1. Γράφουμε $2\kappa\pi+\text{Arg}\,(z_1.z_2\ldots z_\nu)$, γιατί εἶναι φανερό ὅτι τό ἄθροισμα στό β' μέλος τῆς (8) μπορεῖ νά μήν ἀνήκει στό $[0,2\pi)$.

I 5.2.

Πράγματι $\frac{z_1}{z_2}=z_1\cdot z_2^{-1}=[\rho_1(\text{συν}\theta_1+i\text{ημ}\theta_1)]\left[\frac{1}{\rho_2}(\text{συν}(-\theta_2)+i\text{ημ}(-\theta_2)\right]=$

$$=\frac{\rho_1}{\rho_2}\,[\text{συν}(\theta_1-\theta_2)+i\text{ημ}(\theta_1-\theta_2)].$$

**Πόρισμα:** Ἰσχύει $(\text{συν}\theta+i\text{ημ}\theta)^{-\nu}=\text{συν}(-\nu\theta)+i\text{ημ}(-\nu\theta),\quad \nu\in\mathbf{N}.$

## 5.2. Παραδείγματα—Ἐφαρμογές

**1. Γράψτε τό μιγαδικό ἀριθμό $z=\sqrt{3}+i$ σέ τριγωνομετρική μορφή.**

**Λύση:** Εἶναι $\alpha=\sqrt{3}$, $\beta=1$ καί ἄρα $\rho=\sqrt{3+1}=2$.

Ἐπίσης $\text{συν}\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ καί $\text{ημ}\theta=\frac{1}{2}$ μέ $0\leqslant\theta<2\pi$,

ἀπό τίς ὁποῖες παίρνουμε $\theta=\frac{\pi}{6}$.

Ἔτσι εἶναι $\sqrt{3}+i=2\left(\text{συν}\frac{\pi}{6}+i\,\text{ημ}\frac{\pi}{6}\right)$.

**2. Τό ἴδιο γιά τό $z=-2-2i$.**

**Λύση:** Εἶναι $\alpha=-2$ καί $\beta=-2$ καί ἄρα $\rho=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=2\sqrt{2}$,

$$\text{συν}\theta=-\frac{2}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\ \text{ καί }\ \text{ημ}\theta=-\frac{2}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \text{μέ } 0\leqslant\theta<2\pi.$$

Ἀπό τίς τελευταῖες παίρνουμε $\theta=\frac{5\pi}{4}$, ὁπότε

$$-2-2i=2\sqrt{2}\left(\text{συν}\frac{5\pi}{4}+i\,\text{ημ}\frac{5\pi}{4}\right).$$

**3. Γράψτε τό μιγαδικό ἀριθμό $z=4\left(\text{συν}\frac{11\pi}{6}+i\text{ημ}\frac{11\pi}{6}\right)$ στή μορφή $\alpha+\beta i$.**

**Λύση:** Εἶναι $\rho=4$ καί $\theta=\frac{11\pi}{6}$, ἄρα

$$\alpha=4\text{συν}\frac{11\pi}{6}=4.\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}\ \text{ καί }\ \beta=4\,\text{ημ}\frac{11\pi}{6}=4.\left(-\frac{1}{2}\right)=-2,\ \text{ ὁπότε}$$

$$z=2\sqrt{3}-2i.$$

**4. Βρεῖτε τά ἐξαγόμενα τῶν πράξεων:**

α) $6(\text{συν}20^\circ+i\text{ημ}20^\circ)\,.\,\frac{1}{3}\,(\text{συν }40^\circ+i\text{ημ }40^\circ)$ β) $\frac{6(\text{συν}20^\circ+i\text{ημ}20^\circ)}{1/3\ (\text{συν }40^\circ+i\text{ημ}40^\circ)}$.

**Λύση:**

α) $6(\text{συν}20^\circ+i\text{ημ}20^\circ).\frac{1}{3}\,(\text{συν}40^\circ+i\text{ημ}40^\circ)=2(\text{συν}(20^\circ+40^\circ)+i\text{ημ}(20^\circ+40^\circ))=$

$$=2(\text{συν}60^\circ+i\text{ημ}60^\circ)=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1+i\sqrt{3}.$$

β) $\frac{6(\text{συν}20^\circ+i\text{ημ}20^\circ)}{1/3\ (\text{συν}40^\circ+i\text{ημ}40^\circ)}=18(\text{συν}(20^\circ-40^\circ)+i\text{ημ}(20^\circ-40^\circ))=18(\text{συν}(-20^\circ)+i\text{ημ}(-20^\circ))$

$$=18\,(\text{συν}20^\circ-i\text{ημ}20^\circ).$$

**5. Νά ὑπολογιστεῖ ἡ παράσταση** $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^7$.

**Λύση:** Γράφουμε τό μιγαδικό ἀριθμό $z=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}$ σέ τριγωνομετρική μορφή.

Εἶναι $\rho=\sqrt{\frac{2}{4}+\frac{6}{4}}=\sqrt{2}$ καί, ἀφοῦ τό σημεῖο $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ ἀνήκει στό (I) τεταρτημόριο, ἡ $\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{1}{2}$ δίνει $\theta=\frac{\pi}{3}$ (πρωτεῦον ὅρισμα) Ἄρα:

$\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}=\sqrt{2}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}+i\eta\mu\frac{\pi}{3}\right)$. Ἀπό τό Θεώρημα De Moivre βρίσκουμε:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^7=\left[\sqrt{2}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}+i\eta\mu\frac{\pi}{3}\right)\right]^7=(\sqrt{2})^7.\left(\sigma\upsilon\nu 7.\frac{\pi}{3}+i\eta\mu\, 7.\frac{\pi}{3}\right)=$$

$$=8\sqrt{2}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}+i\eta\mu\frac{\pi}{3}\right)=$$

$$=8\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+i\,.\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=4\sqrt{2}+4i\sqrt{6}.$$

**6. Νά ἁπλοποιηθεῖ τό κλάσμα :** $\dfrac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^7}{(\sqrt{3}-i)^3}$

**Λύση:** Ἀπό τό προηγούμενο παράδειγμα ἔχουμε $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^7=8\sqrt{2}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}+i\eta\mu\frac{\pi}{3}\right)$.

Βρίσκουμε τώρα τήν τριγωνομετρική μορφή τοῦ $\sqrt{3}-i$. Κατά τά γνωστά ἔχουμε

$$\sqrt{3}-i=2\left(\sigma\upsilon\nu\frac{11\pi}{6}+i\eta\mu\frac{11\pi}{6}\right),\quad \text{ὁπότε}$$

$$(\sqrt{3}-i)^3=\left[2\left(\sigma\upsilon\nu\frac{11\pi}{6}+i\eta\mu\frac{11\pi}{6}\right)\right]^3=2^3.\left(\sigma\upsilon\nu 3.\frac{11\pi}{6}+i\eta\mu\, 3\,.\frac{11\pi}{6}\right)=$$

$$=2^3.\left(\sigma\upsilon\nu\frac{11\pi}{2}+i\eta\mu\frac{11\pi}{2}\right)=8\,(\sigma\upsilon\nu 270^\circ+i\eta\mu 270^\circ).\ \text{Ἄρα}$$

$$\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^7}{(\sqrt{3}-i)^3}=\frac{8\sqrt{2}(\sigma\upsilon\nu 60^\circ+i\eta\mu 60^\circ)}{8(\sigma\upsilon\nu 270^\circ+i\eta\mu 270^\circ)}=\sqrt{2}\,(\sigma\upsilon\nu(60^\circ-270^\circ)+i\eta\mu(60^\circ-270^\circ))$$

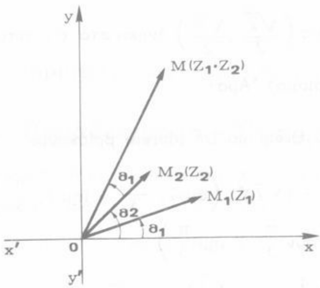
$$=\sqrt{2}\,(\sigma\upsilon\nu(-210^\circ)+i\eta\mu(-210^\circ))=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=-\frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

**7. Γεωμετρική παράσταση τοῦ γινομένου $z_1.z_2$ καί τοῦ πηλίκου $\frac{z_2}{z_1}$ τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν $z_1=\rho_1\,(\sigma\upsilon\nu\theta_1+i\eta\mu\theta_1)$ καί $z_2=\rho_2(\sigma\upsilon\nu\theta_2+i\eta\mu\theta_2)$ μέ $\rho_1\rho_2\neq 0$.**

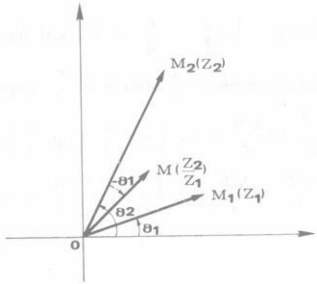
α) Εἶναι $z_1.z_2=\rho_1.\rho_2\,(\sigma\upsilon\nu(\theta_1+\theta_2)+i\eta\mu(\theta_1+\theta_2))$.

Στρέφουμε τή μιά ἀπό τίς διανυσματικές ἀκτίνες $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$ (Σχ. 16) τῶν $z_1$ καί $z_2$, ἔστω τήν $\overrightarrow{OM_2}$, κατά γωνία ἴση μέ τό Arg $z_1$ καί πάνω στό φορέα τῆς τελικῆς ἀκτίνας παίρνουμε σημεῖο Μ, ὥστε νά εἶναι $|\overrightarrow{OM}|=\rho_1\rho_2$. Τό σημεῖο αὐτό Μ εἶναι φανερό ὅτι ὁρίζει τή διανυσματική ἀκτίνα $\overrightarrow{OM}$ τοῦ μιγαδικοῦ $z_1.z_2$.

β) Στρέφουμε τή διανυσματική ἀκτίνα $\overrightarrow{OM_2}$ τοῦ διαιρετέου $z_2$ (Σχ. 17) κατά γωνία ἴση μέ τό $-\mathrm{Arg}z_1$ καί όπως προηγουμένως βρίσκουμε τό σημεῖο Μ μέ $|\overrightarrow{OM}| = \frac{\rho_2}{\rho_1}$. Ἐπειδή




Σχ. 16




Σχ. 17

εἶναι $\frac{z_2}{z_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$ (συν$(\theta_2-\theta_1)$+iημ$(\theta_2-\theta_1)$), γίνεται φανερό ὅτι τό σημεῖο Μ, ὅπως βρέθηκε, ὁρίζει τή διανυσματική ἀκτίνα $\overrightarrow{OM}$ τοῦ πηλίκου $\frac{z_2}{z_1}$.

**8. Νά ὑπολογιστοῦν οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τοῦ τόξου 3θ, ἄν γνωρίζουμε τούς τριγωνομετρικούς ἀριθμούς τοῦ τόξου θ.**

**Λύση:** Ἀπό τό θεώρημα De Moivre ἔχουμε συν(νθ)+iημ(νθ) = (συνθ+iημθ)$^\nu$, $\nu \in \mathbf{N}$ (1)
Γιά $\nu = 3$ ἡ (1) γίνεται συν3θ + iημ3θ = (συνθ+iημθ)$^3$, δηλαδή
συν3θ+iημ3θ = συν$^3$θ+3iσυν$^2$θημθ−3συνθημ$^2$θ−iημ$^3$θ καί συνεπῶς
συν3θ = συν$^3$θ−3συνθημ$^2$θ = συν$^3$θ−3συνθ(1−συν$^2$θ) = 4συν$^3$θ−3συνθ καί
ημ3θ = 3συν$^2$θημθ−ημ$^3$θ = 3(1−ημ$^2$θ)ημθ−ημ$^3$θ = 3ημθ−4ημ$^3$θ.

## 5.3. Ἀσκήσεις

1. Νά γραφοῦν σέ τριγωνομετρική μορφή οἱ μιγαδικοί ἀριθμοί:

$$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad 2+2\sqrt{3}\,i, \quad -\sqrt{3}+i, \quad \frac{\sqrt{3}-3i}{-3+4i}.$$

2. Δεῖξτε ὅτι τό θεώρημα De Moivre

(ρ (συνθ+iημθ))$^\nu$ = ρ$^\nu$(συν(νθ)+iημ(νθ)) ἰσχύει καί ὅταν $\nu \in \{\ldots, -3, -2, -1\}$

3. Νά ἀποδείξετε ὅτι :

α) $(\sqrt{3}+i)^{150} = -2^{150}$,

β) $(1+i)^\nu+(1-i)^\nu = 2^{\frac{\nu+2}{2}}$ συν $\frac{\nu\pi}{4}$, $\nu \in \mathbf{N}$, γ) $(1+i)^\nu-(1-i)^\nu = i2^{\frac{\nu+2}{2}}$ ημ$\frac{\nu\pi}{4}$, $\nu\in\mathbf{N}$

δ) (συνθ+iημθ)$^\nu$+(συνθ+iημθ)$^{-\nu}$=2συν(νθ), (συνθ+iημθ)$^\nu$−(συνθ+iημθ)$^{-\nu}$=2iημ(νθ).

4. Νά ἐκφράσετε τά συν5θ καί ημ5θ σάν πολυώνυμα τῶν συνθ καί ημθ ἀντίστοιχα.

5. Ἄν $z$ = συνθ+iημθ, δεῖξτε ὅτι 2συνθ = $z+\frac{1}{z}$ καί 2iημθ = $z-\frac{1}{z}$.

# 6. ΡΙΖΕΣ ΤΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

## 6.1. Ὁρισμός—Θεώρημα

**Ὁρισμός. Νιοστή ρίζα ἑνός μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ $\xi = \alpha + \beta i$ εἶναι κάθε μιγαδικός ἀριθμός $z = x + yi$ μέ τήν ἰδιότητα**

$$(x+yi)^{\nu} = \alpha + \beta i.$$

Θά δείξουμε, μέ τό θεώρημα πού ἀκολουθεῖ, ὅτι κάθε μή μηδενικός μιγαδικός ἀριθμός $\xi$ ἔχει $\nu$ ἀκριβῶς διαφορετικές μεταξύ τους νιοστές ρίζες.

**Θεώρημα: Ἄν $\xi = \rho\,(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)$ εἶναι ἕνας μιγαδικός ἀριθμός μέ $\rho \neq 0$, τότε οἱ μιγαδικοί ἀριθμοί**

$$z_{\kappa} = \sqrt[\nu]{\rho}\left[\sigma\upsilon\nu\frac{\theta+2\kappa\pi}{\nu} + i\eta\mu\,\frac{\theta+2\kappa\pi}{\nu}\right], \quad \kappa = 0,1,2,\ldots,\nu-1$$

**εἶναι διαφορετικοί μεταξύ τους καί εἶναι οἱ μόνοι πού ἐπαληθεύουν τήν ἐξίσωση $z^{\nu} = \xi$.**

**Ἀπόδειξη:** Θά ἐξετάσουμε ἀρχικά ἄν ὑπάρχει μιγαδικός ἀριθμός $z = r(\sigma\upsilon\nu\omega + i\eta\mu\omega)$, πού νά εἶναι νιοστή ρίζα τοῦ $\xi = \rho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)$.

Γιά νά συμβαίνει αὐτό, πρέπει νά ἰσχύει

$\rho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta) = [r(\sigma\upsilon\nu\omega + i\eta\mu\omega)]^{\nu} = r^{\nu}(\sigma\upsilon\nu(\nu\omega) + i\eta\mu(\nu\omega))$ (1), δηλαδή

$$\rho = r^{\nu} \text{ καί } \nu\omega = \theta + 2\kappa\pi,\ \kappa \in \mathbf{Z} \text{ ἤ } r = \sqrt[\nu]{\rho} \text{ καί } \omega = \frac{\theta+2\kappa\pi}{\nu},\ \kappa \in \mathbf{Z}$$

$$\text{Ἄρα } z = \sqrt[\nu]{\rho}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\theta+2\kappa\pi}{\nu} + i\eta\mu\,\frac{\theta+2\kappa\pi}{\nu}\right), \quad \kappa \in \mathbf{Z} \qquad (2).$$

Ἡ (2) φανερώνει τήν ὕπαρξη τοῦ $z$, δηλ. μιᾶς νιοστῆς ρίζας τοῦ $\xi$.

Θά δείξουμε τώρα ὅτι ἡ (2) γιά $\kappa = 0,1,2,\ldots,\nu-1$ δίνει $\nu$ διαφορετικές τιμές τῆς νιοστῆς ρίζας τοῦ $\xi$, μέ $\xi \neq 0 + 0i$, τίς ὁποῖες θά ὀνομάζουμε νιοστές ρίζες τοῦ $\xi$ καί θά τίς συμβολίζουμε:

$$z_{\kappa} = \sqrt[\nu]{\rho}\left(\sigma\upsilon\nu\,\frac{\theta+2\kappa\pi}{\nu} + i\eta\mu\frac{\theta+2\kappa\pi}{\nu}\right), \quad \kappa = 0,1,2,\ldots,\nu-1 \qquad (3)$$

Στή συνέχεια θά δείξουμε ὅτι γιά ὁποιαδήποτε ἄλλη τιμή τοῦ $\kappa \in \mathbf{Z}$ ὁ $z_{\kappa}$ θά συμπίπτει μέ μία ἀπό τίς τιμές $z_o, z_1, z_2, \ldots, z_{\nu-1}$ πού δίνει ὁ τύπος (3).

Πράγματι· i) Ἄν ἦταν $z_{\lambda} = z_{\mu}$, $\lambda, \mu \in \mathbf{Z}$, $\lambda \neq \mu$ καί $0 \leq \lambda$, $\mu < \nu$, τότε θά ἔπρεπε νά εἶναι $\dfrac{\theta+2\lambda\pi}{\nu} - \dfrac{\theta+2\mu\pi}{\nu} = 2\rho\pi$, $\rho \in \mathbf{Z}$, δηλαδή $\lambda - \mu = \rho\nu$, $\rho \in \mathbf{Z}$.

Εἶναι ὅμως $0 < |\lambda - \mu| < \nu$ καί ἑπομένως $0 < |\rho\nu| < \nu$, δηλ. $0 < |\rho| < 1$, τό ὁποῖο εἶναι ἄτοπο, γιατί δέν ὑπάρχει $\rho \in \mathbf{Z}$ μέ $0 < |\rho| < 1$.

Ἄρα $z_{\lambda} \neq z_{\mu}$ γιά ὅλα τά $\lambda, \mu \in \{0,1,2,\ldots,\nu-1\}$, δηλαδή οἱ $\nu$ τιμές τῆς (3) εἶναι διαφορετικές μεταξύ τους.

ii) Γιά $\kappa \in \mathbf{Z}$ μέ $\kappa \notin \{0,1,2,\ldots,\ \nu-1\}$, δηλαδή γιά $\kappa \geq \nu$ ἤ $\kappa < 0$ θά ἔχουμε: $\kappa = \lambda\nu + \upsilon$, $\lambda \in \mathbf{Z}$ καί $\upsilon \in \{0,1,2,\ldots,\ \nu-1\}$, ὁπότε

$$\begin{aligned} z_\kappa &= \sqrt[\nu]{\rho}\left[\text{συν}\frac{\theta+2\kappa\pi}{\nu} + i\,\text{ημ}\frac{\theta+2\kappa\pi}{\nu}\right] \\ &= \sqrt[\nu]{\rho}\left[\text{συν}\frac{\theta+2(\lambda\nu+\upsilon)\pi}{\nu} + i\,\text{ημ}\frac{\theta+2(\lambda\nu+\upsilon)\pi}{\nu}\right] \\ &= \sqrt[\nu]{\rho}\left[\text{συν}\left(2\lambda\pi+\frac{\theta+2\upsilon\pi}{\nu}\right) + i\,\text{ημ}\left(2\lambda\pi+\frac{\theta+2\upsilon\pi}{\nu}\right)\right] \\ &= \sqrt[\nu]{\rho}\left[\text{συν}\frac{\theta+2\upsilon\pi}{\nu} + i\,\text{ημ}\frac{\theta+2\upsilon\pi}{\nu}\right] \quad \text{μέ } \upsilon \in \{0,1,2,\ldots,\nu-1\}. \end{aligned}$$

Ἄρα ὁ $z_\kappa$ συμπίπτει μέ μιά ἀπό τίς τιμές πού δίνει ὁ τύπος (3).

Ἔτσι δείξαμε ὅτι ὑπάρχουν $\nu$ ἀκριβῶς διαφορετικοί μεταξύ τους μιγαδικοί $z_\kappa$, οἱ ὁποῖοι ἐπαληθεύουν τήν $z^\nu = \xi = \rho\ (\text{συν}\theta + i\,\text{ημ}\theta)$, ὅταν $\rho \neq 0$.

Τέλος, ἐπειδή ὅλοι οἱ $z_\kappa$, $\kappa = 0,1,2,\ldots,\nu-1$ εἶναι διαφορετικοί μεταξύ τους, θά ἔχουν καί διαφορετικές εἰκόνες, ὅταν ἀπεικονιστοῦν στό μιγαδικό ἐπίπεδο. Αὐτό θά φανεῖ στά παραδείγματα 1 καί 2 πού ἀκολουθοῦν.

## 6.2. Παραδείγματα—Ἐφαρμογές

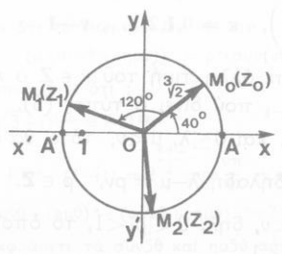
**1. Βρεῖτε τίς τρεῖς κυβικές ρίζες τοῦ $-1+\sqrt{3}\,i$.**

**Λύση:** Φέρνουμε ἀρχικά τόν $-1+\sqrt{3}\,i$ σέ τριγωνομετρική μορφή.

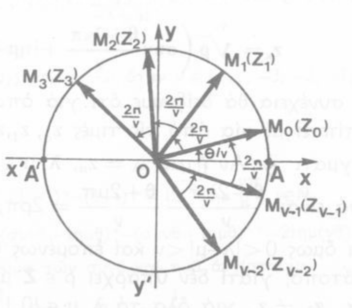
Εἶναι $-1+\sqrt{3}\,i = 2\ (\text{συν}120^\circ + i\,\text{ημ}120^\circ)$ καί τότε

$$z_\kappa = \sqrt[3]{2}\left[\text{συν}\left(\frac{120^\circ+360^\circ\kappa}{3}\right) + i\,\text{ημ}\left(\frac{120^\circ+360^\circ\kappa}{3}\right)\right], \quad \kappa = 0,1,2$$

$z_o = \sqrt[3]{2}\ (\text{συν}40^\circ + i\,\text{ημ}40^\circ)$, $\qquad z_1 = \sqrt[3]{2}\,(\text{συν}\ 160^\circ + i\,\text{ημ}\ 160^\circ)$,




Σχ. 18




Σχ. 19

$$z_2 = \sqrt[3]{2}\,(συν280° + iημ280°)$$

Γεωμετρικά οἱ κυβικές ρίζες πού βρήκαμε ἀπεικονίζονται στίς κορυφές ἰσόπλευρου τριγώνου ἐγγεγραμμένου σέ κύκλο ἀκτίνας $\sqrt[3]{2}$ μέ πρώτη κορυφή τό $M_0$ ὅπου $(\widehat{OA, OM_0})=40°$. (Σχ. 18).

**2. Νά παραστήσετε γεωμετρικά τίς νιοστές ρίζες τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ $z = ρ\,(συνθ+iημθ)$.**

**Λύση:** Οἱ νιοστές ρίζες τοῦ z δίνονται ἀπό τόν τύπο

$$z_κ = \sqrt[ν]{ρ}\left[συν\frac{θ+2κπ}{ν} + iημ\frac{θ+2κπ}{ν}\right],\ κ = 0,1,2,\ldots,(ν-1),\ \text{καί εἶναι}$$

$$z_0 = \sqrt[ν]{ρ}\left(συν\frac{θ}{ν} + iημ\frac{θ}{ν}\right),$$

$$z_1 = \sqrt[ν]{ρ}\left[\left(συν\frac{θ}{ν} + \frac{2π}{ν}\right) + iημ\left(\frac{θ}{ν} + \frac{2π}{ν}\right)\right],$$

$$z_2 = \sqrt[ν]{ρ}\left[\left(συν\frac{θ}{ν} + \frac{4π}{ν}\right) + iημ\left(\frac{θ}{ν} + \frac{4π}{ν}\right)\right],$$

$$\vdots$$

$$z_{ν-1} = \sqrt[ν]{ρ}\left[συν\left(\frac{θ}{ν} + \frac{2(ν-1)π}{ν}\right) + iημ\left(\frac{θ}{ν} + \frac{2(ν-1)π}{ν}\right)\right]$$

Παρατηροῦμε ὅτι ὅλες οἱ νιοστές ρίζες τοῦ z ἔχουν τό ἴδιο μέτρο, δηλαδή $|z_κ| = \sqrt[ν]{ρ}$ καί ὄρισμα τέτοιο, ὥστε ἀπό κάποια ἀρχική τιμή $\frac{θ}{ν}$ νά αὐξάνει διαδοχικά κατά $\frac{2π}{ν}$.

Ὅπως εἴπαμε καί προηγούμενα οἱ μιγάδικοί αὐτοί ἀριθμοί $z_κ$ ἀπεικονίζονται σέ σημεῖα τοῦ μιγαδικοῦ ἐπίπεδου, πού εἶναι σημεῖα τοῦ κύκλου $(O, \sqrt[ν]{ρ})$. (Σχ. 19).

**3. Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση $z^3 = -64i$**

**Ἐπίλυση:** Ἔχουμε $z^3 = -64i = 64(-i) = 64\left[συν\left(-\frac{π}{2}\right) + iημ\left(-\frac{π}{2}\right)\right]$,

ὁπότε παίρνουμε:

$$z_κ = \sqrt[3]{64}\left[συν\frac{-\frac{π}{2}+2κπ}{3} + iημ\frac{-\frac{π}{2}+2κπ}{3}\right],\quad κ = 0,1,2$$

Γιά $κ = 0$ εἶναι: $z_0 = 4\left(συν\frac{π}{6} - iημ\frac{π}{6}\right) = 4\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\cdot\frac{1}{2}\right),$

γιά $κ = 1$ εἶναι: $z_1 = 4\left(συν\frac{π}{2} + iημ\frac{π}{2}\right) = 4\,(0+i) = 4i,$

γιά $κ = 2$ εἶναι: $z_2 = 4\left(συν\frac{7π}{6} + iημ\frac{7π}{6}\right) = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\cdot\frac{1}{2}\right).$

**Παρατήρηση**: Κάθε ἐξίσωση τῆς μορφῆς $z^ν = α$, ὅπου $α \in \mathbf{C}$, $α \neq 0$ καί $ν \in \mathbf{N}$ ὀνομάζεται **διώνυμη ἐξίσωση** καί ἐπιλύεται μέ τή βοήθεια τοῦ θεωρήματος τῆς παραγράφου 6.1. γιά τόν ὑπολογισμό τῶν ν νιοστῶν ριζῶν τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν.

**4. Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση: $z^5 = -\sqrt{3}+i$.**

**Ἐπίλυση:** Πρῶτα γράφουμε τόν $-\sqrt{3}+i$ σέ τριγωνομετρική μορφή.

Ἔτσι ἔχουμε: $z^5=-\sqrt{3}+i=2$ (συν $150°+$iημ$150°$), ὁπότε οἱ ρίζες εἶναι

$$z_\kappa=\sqrt[5]{2}\left(\text{συν}\frac{150°+360°\kappa}{5}+i\text{ημ}\frac{150°+360°\kappa}{5}\right),\quad \kappa=0,1,2,3,4.$$

$$z_o=\sqrt[5]{2}\,(\text{συν}30°+i\text{ημ}30°)=\sqrt[5]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\cdot\frac{1}{2}\right)$$

$$z_1=\sqrt[5]{2}\left(\text{συν}\frac{150°+360°}{5}+i\text{ημ}\frac{150°+360°}{5}\right),\quad \text{κ.τ.λ.}$$

5. **Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση: $z^\nu=1$ (1) (Νιοστές ρίζες τῆς μονάδας).**

**Ἐπίλυση**: Ἔχουμε $z^\nu=1.(\text{συν}0°+i\text{ημ}0°)$, ὁπότε οἱ ν ρίζες εἶναι

$$z^\kappa=\sqrt[\nu]{1}\left(\text{συν}\frac{0+2\kappa\pi}{\nu}+i\text{ημ}\frac{0+2\kappa\pi}{\nu}\right)=\text{συν}\frac{2\kappa\pi}{\nu}+i\text{ημ}\frac{2\kappa\pi}{\nu},\quad \kappa=0,1,2,\ldots,\nu\text{-}1$$

Οἱ ν αὐτές ρίζες τῆς (1) λέγονται καί **νιοστές ρίζες τῆς μονάδας**.

Παρατηροῦμε ὅτι $z_\kappa=\text{συν}\,\frac{2\kappa\pi}{\nu}+i\text{ημ}\,\frac{2\kappa\pi}{\nu}=\left(\text{συν}\frac{2\pi}{\nu}+i\text{ημ}\,\frac{2\pi}{\nu}\right)^\kappa$, $\kappa=0,1,2,\ldots,\nu\text{-}1$

ὁπότε $z_o=1$, $z_1=\text{συν}\,\frac{2\pi}{\nu}+i\text{ημ}\frac{2\pi}{\nu}$, $\quad z_2=\left(\text{συν}\frac{2\pi}{\nu}+i\text{ημ}\,\frac{2\pi}{\nu}\right)^2=z^2{}_1$,

$z_3=z_1{}^3$, $\quad z_4=z_1{}^4,\ldots,z_{\nu-1}=z_1{}^{\nu-1}$.

**Ἄρα οἱ νιοστές ρίζες τῆς μονάδας εἶναι οἱ:**

$$\mathbf{1,\ z_1,\ z_1^2,\ z_1^3,\ldots,z_1^{\nu-1}\quad \text{μέ}\ z_1=\text{συν}\ \frac{2\pi}{\nu}+i\text{ημ}\ \frac{2\pi}{\nu}.}$$

Γιά $\nu=3$, ἔχουμε τίς κυβικές ρίζες τῆς μονάδας πού εἶναι:

$$z_o=1,\ z_1=\text{συν}\,\frac{2\pi}{3}+i\text{ημ}\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\ z_2=z^2{}_1=-\frac{1}{2}-i\,\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Οἱ κυβικές ρίζες τῆς μονάδας, ἄν ἀπεικονιστοῦν στόν κύκλο (Ο,1), εἶναι κορυφές ἰσόπλευρου τριγώνου.

## 6.3. Ἀσκήσεις

1. Νά ἐπιλυθοῦν στό **C** οἱ ἐξισώσεις.

   α) $z^3=8$, β) $z^3=2+2i$ γ) $z^6+64=0$, δ) $z^3=1+i\sqrt{3}$, ε) $z^5+64i=0$ καί στ) $3x^6+24x^3=0$

2. Δεῖξτε ὅτι τίς ρίζες τῆς ἐξισώσεως $(1+z)^{2\nu}+(1-z)^{2\nu}=0$ μᾶς τίς δίνει ὁ τύπος:

$$z=i\,\text{εφ}\,\frac{2\kappa+1}{4\nu}\,\pi,\ \text{ὅπου}\ \kappa=0,1,2,\ldots,(2\nu-1).$$

3. Νά ἀπεικονιστοῦν στό μιγαδικό ἐπίπεδο οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως $\quad z^5=-\sqrt{3}+i$

4. Ἄν $z_1,z_2$ εἶναι οἱ μιγαδικές κυβικές ρίζες τῆς μονάδας δεῖξτε ὅτι:

   α) $z_1{}^2=z_2$ καί $z^2{}_2=z_1$,

   β) $1+z_1+z_1{}^2=0$ καί $1+z_2+z_2{}^2=0$,

   γ) $(1+2z_1+3z_2)\,.\,(1+2z_2+3z_1)=3$,

   δ) $(1+z_1-z_2)^3=(1-z_1+z_2)^3$.

5. Δεῖξτε ὅτι ὁ $z=\text{συν}\theta+i\text{ημ}\theta$ γράφεται καί

$$z=\frac{1+\kappa i}{1-\kappa i},\quad \kappa\in\mathbf{R} \text{ κατάλληλος.}$$

6. Δεῖξτε ὅτι, ἄν $x,y,z\in\mathbf{R}$ καί $\omega=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, τότε θά εἶναι

α) $(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^5)=9$,

β) $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=(x+y\omega+z\omega^2)(x+y\omega^2+z\omega)$, καί

γ) $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x+\omega y+\omega^2 z)(x+\omega^2 y+\omega z)$.

7. Ἄν εἶναι $\omega=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ δεῖξτε ὅτι τότε θά εἶναι:

α) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha\omega+\beta\omega^2)(\alpha\omega^2+\beta\omega)$

β) $(\alpha+\beta+\gamma)^3+(\alpha+\beta\omega+\gamma\omega^2)^3+(\alpha+\beta\omega^2+\gamma\omega)^3=3(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+6\alpha\beta\gamma)$.

8. Δεῖξτε ὅτι κάθε μιά ἀπό τίς παραστάσεις

$z_1=\alpha+z\beta+z^2\gamma$, $z_2=\alpha+z^2\beta+z\gamma$, ὅπου $z=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$, δέ μεταβάλλεται, ἄν ἀντικαταστήσουμε τούς $\alpha,\beta,\gamma$ μέ τούς $\alpha+\lambda$, $\beta+\lambda$, $\gamma+\lambda$, $\lambda\in\mathbf{R}$ ἀντίστοιχα.

9. Δεῖξτε ὅτι:

$(1-z+z^2)\cdot(1-z^2+z^4)\cdot(1-z^4+z^8)\ldots(1-z^{2^{\kappa-1}}+z^{2^\kappa})=2^\kappa$,

ὅπου $\kappa$ ἄρτιος φυσικός καί $z$ τυχούσα μιγαδική ρίζα τῆς μονάδας.

10. Ἄν $\nu\in\mathbf{N}$ καί $z=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$, δεῖξτε ὅτι οἱ μοναδικές τιμές τῆς παραστάσεως $K=z^{2\nu}+z^\nu$ εἶναι $-1$ καί 2.

11. Ἄν $x+y+z=A$

$x+y\omega+z\omega^2=B$

$x+y\omega^2+z\omega=\Gamma$ καί $\omega^2+\omega+1=0$ (δηλ. $\omega$ εἶναι μιά μιγαδική ρίζα τῆς μονάδας)

τότε i) νά ἐκφραστοῦν τά $x,y,z$ συναρτήσει τῶν $A,B$ καί $\Gamma$

καί ii) δεῖξτε ὅτι: $|A|^2+|B|^2+|\Gamma|^2=3[|x|^2+|y|^2+|z|^2]$.

## 7. ΣΥΝΤΟΜΗ ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

1. Τό σύνολο $\mathbf{C} = \{z|z = (\alpha,\beta),\ \alpha \in \mathbf{R},\ \beta \in \mathbf{R}\}$ μὲ

$$\boxed{\begin{array}{l}(\alpha_1,\beta_1) = (\alpha_2,\beta_2) \Leftrightarrow \alpha_1=\alpha_2 \text{ καί } \beta_1=\beta_2\\ (\alpha_1,\beta_1) + (\alpha_2,\beta_2) = (\alpha_1+\alpha_2,\ \beta_1+\beta_2)\\ (\alpha_1,\beta_1)\cdot(\alpha_2,\beta_2) = (\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2,\ \alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)\end{array}}$$

εἶναι τό σύνολο τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν.

2. Οἱ μιγαδικοί ἀριθμοί μποροῦν νά ἀπεικονιστοῦν στά σημεῖα ἑνός ἐπιπέδου (μιγαδικό ἐπίπεδο).

3. Στό μιγαδικό ἐπίπεδο ὁ κύκλος κέντρου $(x_\circ,y_\circ)$ καί ἀκτίνας μέτρου α ἔχει ἐξίσωση

$$|z-z_\circ| = \alpha, \text{ ὅπου } z_\circ = (x_\circ,y_\circ) \text{ καί } z = (x,y).$$

4. Ἄλλες συντεταγμένες τοῦ μιγαδικοῦ $z=(\alpha,\beta)\neq(0,0)$ εἶναι οἱ πολικές $(\rho,\theta)$, ὅπου $\rho = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, $\theta\in[0,2\pi)$ μέ συνθ$=\dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ καί ημθ$=\dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$.

5. Μέ τή βοήθεια τῶν πολικῶν συντεταγμένων τους οἱ μιγαδικοί ἀριθμοί παίρνουν τήν τριγωνομετρική τους μορφή

$$\boxed{z = \rho(\text{συν}\theta + i\text{ημ}\theta)}\ .$$

Γιά τούς μιγαδικούς $z=\rho(\text{συν}\theta+i\text{ημ}\theta)$, $z_1 = \rho_1(\text{συν}\theta_1+i\text{ημ}\theta_1)$, $z_2 = \rho_2(\text{συν}\theta_2+i\text{ημ}\theta_2)$ ἰσχύουν:

$$\boxed{\begin{array}{l}z_1 = z_2 \Leftrightarrow \rho_1=\rho_2 \text{ καί } \theta_2-\theta_1 = 2\kappa\pi,\quad \kappa\in\mathbf{Z}\\ z_1\cdot z_2 = \rho_1\cdot\rho_2\,[\text{συν}(\theta_1+\theta_2)+i\text{ημ}(\theta_1+\theta_2)]\\ z_1 : z_2 = \dfrac{\rho_1}{\rho_2}[\text{συν}(\theta_1-\theta_2)+i\text{ημ}(\theta_1-\theta_2)],\quad \rho_2\neq0\\ \dfrac{1}{z_2} = \dfrac{1}{\rho_2}[\text{συν}(-\theta_2)+i\text{ημ}(-\theta_2)],\quad \rho_2\neq0\\ z^\nu = \rho^\nu[\text{συν}(\nu\theta)+i\text{ημ}(\nu\theta)],\quad \nu\in\mathbf{N}\end{array}}$$

6. Κάθε μή μηδενικός μιγαδικός ἀριθμός $\xi=\rho(\text{συν}\theta+i\text{ημ}\theta)$ ἔχει ν ἀκριβῶς διαφορετικές μεταξύ τους νιοστές ρίζες, τίς:

$$\boxed{z_\kappa = \sqrt[\nu]{\rho}\left(\text{συν}\frac{\theta+2\kappa\pi}{\nu}+i\text{ημ}\frac{\theta+2\kappa\pi}{\nu}\right),\quad \kappa=0,1,2,\ldots,\nu-1}$$

## 8. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

1. Ἄν $z \neq -1+0i$, δεῖξτε ὅτι:

   α) ὅταν $|z| = 1$, τότε ὁ ἀριθμός $\frac{z-1}{z+1}$ εἶναι καθαρός φανταστικός, καί

   β) ὅταν ὁ ἀριθμός $\frac{z-1}{z+1}$ εἶναι καθαρός φανταστικός, τότε $|z| = 1$.

2. Γιά κάθε $\alpha \in \mathbf{R}$ μέ $\alpha \geqslant 1$ βρεῖτε τούς μιγαδικούς z, πού ἐπαληθεύουν τήν ἐξίσωση $z+\alpha|z+1|+i = 0$.

3. Γιά κάθε $\alpha \geqslant 0$ βρεῖτε τούς μιγαδικούς πού ἐπαληθεύουν τήν $2|z|-4\alpha z+1+i\alpha = 0$

4. Ἐπιλύστε τό σύστημα $z^3+\omega^5 = 0$

   $z^2 \,.\, \overline{\omega}^4 = 1$, ἄν οἱ z,ω εἶναι μιγαδικοί.

5. Δεῖξτε ὅτι α) $|z_1+z_2| = |z_1|+|z_2|$, ἄν $\frac{z_1}{z_2} > 0$, $z_1,z_2 \in \mathbf{C}$, καί

   β) $|z_1+z_2| = ||z_1|-|z_2||$, ἄν $\frac{z_1}{z_2} < 0$ καί $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$

6. Δεῖξτε ὅτι α) $|z_1-z_2| = ||z_1|-|z_2||$, ἄν $\frac{z_1}{z_2} > 0$, $z_1,z_2 \in \mathbf{C}$, καί

   β) $|z_1-z_2| = |z_1|+|z_2|$, ἄν $\frac{z_1}{z_2} < 0$, $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$.

7. **Ἀπολλώνιος Κύκλος:** Ἄν $z_1$ καί $z_2$ εἶναι δεδομένοι μιγαδικοί ἀριθμοί, βρεῖτε τό σύνολο τῶν σημείων τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου, πού εἶναι εἰκόνες τῶν μιγαδικῶν z μέ: $|z-z_1| = \lambda|z-z_2|$ καί $\lambda \neq 1$.
   Δεῖξτε ἀκόμη ὅτι τό κέντρο αὐτοῦ τοῦ κύκλου εἶναι ἡ εἰκόνα τοῦ μιγαδικοῦ

   $$z_o = \frac{z_1-\lambda^2 z_2}{1-\lambda^2} \text{ καί ἡ ἀκτίνα του εἶναι } \alpha = \frac{\lambda|z_1-z_2|}{|1-\lambda^2|}.$$

8. Ἄν $|z-10| = 3|z-2|$ δεῖξτε ὅτι $|z-1| = 3$.

9. Ὑπολογίστε τούς $x,y \in \mathbf{R}$, πού ἱκανοποιοῦν τήν $(x+2yi)^2 = xi$

10. Ἄν $|z|^2 = |z^2-1|$, δεῖξτε ὅτι $\mathrm{Re}z^2 = \frac{1}{2}$.

11. Ἄν $z = x+yi$, $x,y \in \mathbf{R}$ καί $z^2+z+1 = 0$, τότε θά εἶναι

    $|z| = |z+1| = 1$.

12. Βρεῖτε τό μέτρο καί τό ὅρισμα τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ

    $$z = \text{συν}\alpha - i\text{ημ}\alpha + \text{συν}\theta + i\text{ημ}\theta, \quad 0<\alpha<\frac{\pi}{2}.$$

13. Ἄν $|z+16| = 4|z+1|$, δεῖξτε ὅτι $|z| = 4$.

14. Ἄν $z = x+yi$, $z^{-1} = (\alpha+\beta i)^{-1} + (\alpha+\gamma i)^{-1}$ μέ $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbf{R}$ καί $\alpha+\beta i$, $\alpha+\gamma i$ ὄχι μηδενικοί, ὑπολογίστε τίς τιμές τῶν παραστάσεων
    i) $x^2+y^2$, ii) $(x-\alpha)^2+y^2$ καί iii) $\mathrm{Re}z$ συναρτήσει τῶν α,β,γ.

15. Ἄν $z_1 = (z-\alpha) / (\overline{\alpha}z-1)$, $z \neq 1/\overline{\alpha}$, $0 < |\alpha| < 1$,
    δεῖξτε ὅτι $|z_1| \gtrless 1$, ὅταν, καί μόνο ὅταν, $|z| \gtrless 1$.

16. Ἄν $\zeta^2 = 1+z^2$, $\zeta = \xi+i\eta$, $z = x+yi$ καί $\xi, \eta, x, y \in \mathbf{R}$, δεῖξτε ὅτι:

i) $\frac{\xi+x}{\xi-x}=(\xi+x)^2+(\eta+y)^2=\frac{y+\eta}{y-\eta}$

ii) $2\xi^2=\sqrt{(1+x^2-y^2)^2+4x^2y^2}+1+x^2-y^2$

$2\eta^2=\sqrt{(1+x^2-y^2)^2+4x^2y^2}-1-x^2+y$

17. Δεῖξτε ὅτι $|z_1-z_2|^2+|z_1+z_2|^2=2|z_1|^2+2|z_2|^2$ καί ἔπειτα δεῖξτε ὅτι γιά τυχόντες μιγαδικούς $z_3$ καί $z_4$ θά ἰσχύει

$|z_3-\sqrt{z_3^2-z_4^2}|+|z_3+\sqrt{z_3^2-z_4^2}|=|z_3+z_4|+|z_3-z_4|$

18. Δεῖξτε ὅτι οἱ εἰκόνες τῶν διακεκριμένων μιγαδικῶν ἀριθμῶν $z_1,z_2,z_3$ στό μιγαδικό ἐπίπεδο βρίσκονται σέ εὐθεία γραμμή, ὅταν καί μόνο ὅταν $\frac{z_1-z_3}{z_3-z_2}=\lambda\in\mathbf{R}$.

19. Ἄν γιά τούς μιγαδικούς ἀριθμούς $z_1$ καί $z_2$ εἶναι $|z_1|<1$ καί $|z_2|<1$, δεῖξτε ὅτι $|z_1-z_2|<|1-\bar{z}_1z_2|$.

20. Ἄν $z_1,z_2$ εἶναι μιγαδικοί ἀριθμοί καί $\lambda>0$, δεῖξτε ὅτι

$$|z_1+z_2|^2\leqslant(1+\lambda)|z_1|^2+\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)|z_2|^2.$$

21. Ἄν οἱ ἀριθμοί $z_1, z_2,\ldots,z_\nu$ ἱκανοποιοῦν τήν ἀνισότητα

$$\left|\frac{z_1-i}{z_1+i}\right|+\left|\frac{z_2-i}{z_2+i}\right|+\ldots+\left|\frac{z_\nu-i}{z_\nu+i}\right|<1,$$

τότε θά ἱκανοποιοῦν καί τήν

$$\left|\frac{z_1+z_2+\ldots+z_\nu-i}{z_1+z_2+\ldots+z_\nu+i}\right|<1.$$

22. Βρεῖτε τά ἀκόλουθα ἀθροίσματα:

$$\Sigma=1+x\,\text{συν}\theta+x^2\text{συν}2\theta+\ldots+x^{\nu-1}\text{συν}(\nu-1)\theta \quad \text{καί}$$
$$\Sigma'=x\eta\mu\theta+x^2\eta\mu2\theta+\ldots+x^{\nu-1}\eta\mu(\nu-1)\theta,$$

ἄν $x\in\mathbf{R}$ καί $0<\theta<\pi$.

23. Ὑπολογίστε τά ἀκόλουθα ἀθροίσματα.

$$\Sigma=1+\nu\text{συν}\theta+\frac{\nu(\nu-1)}{1.2}\text{συν}2\theta+\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{1.2.3}\text{συν}\,3\theta+\ldots,\ \text{καί}$$

$$\Sigma'=\nu\,\eta\mu\theta+\frac{\nu(\nu-1)}{1.2}\eta\mu\,2\theta+\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{1.2.3}\eta\mu\,3\theta+\ldots$$

24. Ἄν $\omega=\text{συν}\frac{2\pi}{\nu}+i\eta\mu\frac{2\pi}{\nu}$, $\nu\in\mathbf{N}$ καί

$A_\kappa=x+y\omega^\kappa+z\omega^{2\kappa}+\ldots+\tau\omega^{(\nu-1)\kappa}$, $\kappa=0,1,2,\ldots,\nu-1$, μέ $x,y,z,\ldots,\tau$ τυχόντες μιγαδικούς ἀριθμούς, δεῖξτε ὅτι:

$|A_0|^2+|A_1|^2+\ldots+|A_{\nu-1}|^2=\nu[|x|^2+|y|^2+\ldots+|\tau|^2]$.

25. Δεῖξτε ὅτι ὁ μιγαδικός $z=x+yi$ μπορεῖ νά γραφτεῖ μέ τή μορφή

$$|z|\cdot\left[\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}+i\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\right],\ \text{ὅπου}\ \lambda\in\mathbf{R}.$$

26. Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση $(z^2-1)^4=16(\text{συν}\alpha+i\eta\mu\alpha).z^4$, $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ

# ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΔΟΜΕΣ

24. Ἄν $\omega = \text{συν}\frac{2\pi}{\nu} + i\,\text{ημ}\frac{2\pi}{\nu}$, $\nu \in N$ καί

$A_k = x + y\omega^k + z\omega^{2k} + \dots + w\omega^{(\nu-1)k}$, $k = 0, 1, 2, \dots, \nu-1$, μέ $x, y, z, \dots, w$ τυχόντες μιγαδικούς ἀριθμούς, δεῖξτε ὅτι

$|A_0|^2 + |A_1|^2 + \dots + |A_{\nu-1}|^2 = \nu(|x|^2 + |y|^2 + \dots + |w|^2)$.

25. Δεῖξτε ὅτι ὁ μιγαδικός $z = x + yi$ μπορεῖ νά γραφτεῖ μέ τή μορφή

$$z = |z|\left[\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} + i\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\right], \text{ ὅπου } \lambda \in R.$$

26. Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση $(z^2-1)^4 = 16(\text{συν}\alpha + i\,\text{ημ}\alpha)\,z^4$, $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

# ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΔΟΜΕΣ

Σέ προηγούμενες τάξεις γνωρίσαμε διάφορα σύνολα, ὅπως τό σύνολο **N** τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, τό σύνολο **R** τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, τό σύνολο V τῶν διανυσμάτων ἑνός ἐπιπέδου κ.ἄ. Στά σύνολα αὐτά εἴχαμε ὁρίσει διάφορες πράξεις, ὅπως πρόσθεση καί πολλαπλασιασμό ἀριθμῶν, πρόσθεση διανυσμάτων κτλ. Εἴδαμε ἀκόμα ὅτι οἱ διάφορες πράξεις στά σύνολα αὐτά εἶχαν κοινές ἰδιότητες, ὅπως π.χ. ἡ πρόσθεση στό **R** καί ἡ πρόσθεση στό **V** ἦταν ἀντιμεταθετικές, προσεταιριστικές κτλ.

Γεννιέται τώρα τό ἐρώτημα ἄν μποροῦμε νά ταξινομήσουμε τά διάφορα σύνολα μέ βάση τίς ἰδιότητες τῶν πράξεων, μέ τίς ὁποῖες εἶναι ἐφοδιασμένα, καί ἄν μιά τέτοια ταξινόμηση θά ἦταν χρήσιμη.

Γιά τήν ἀντιμετώπιση αὐτοῦ τοῦ θέματος ἡ γνωστή μας ἀξιωματική μέθοδος ἐφαρμόζεται μέ ἐπιτυχία καί μάλιστα μέ πολλά ὀφέλη (ἑνιαία γλώσσα, ἐπίλυση μαθηματικῶν προβλημάτων, ἐφαρμογές σέ ἄλλες ἐπιστῆμες κτλ.). Ἔτσι σέ ἕνα σύνολο θά ὁρίζουμε πράξεις, θά δεχόμαστε μερικά ἀξιώματα καί θά ἀποδεικνύουμε γενικές ἰδιότητες ἀνεξάρτητες ἀπό τή φύση τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου.

Στό κεφάλαιο αὐτό θά γνωρίσουμε μερικές τέτοιες βασικές ταξινομήσεις, προηγουμένως ὅμως θά μελετήσουμε τήν ἔννοια τῆς πράξεως πού, ὅπως ἀναφέραμε καί παραπάνω, ὁ ρόλος της εἶναι βασικός.

## 1. ΔΙΜΕΛΕΙΣ ΠΡΑΞΕΙΣ

### 1.1. Ἡ ἔννοια τῆς διμελοῦς πράξεως

Κοινό γνώρισμα τῶν διάφορων πράξεων πού ἔχουμε μάθει σέ προηγούμενες τάξεις, ὅπως π.χ. ἡ πρόσθεση καί ὁ πολλαπλασιασμός ἀριθμῶν, ἡ πρόσθεση διανυσμάτων, ὁ ἐσωτερικός πολλαπλασιασμός διανυσμάτων, ὁ πολλαπλασιασμός πραγματικοῦ ἀριθμοῦ μέ διάνυσμα, εἶναι ὅτι «συνθέτουμε» δύο στοιχεῖα, πού ἀνήκουν σέ δύο σύνολα, καί παίρνουμε ὡς ἀποτέλεσμα αὐτῆς τῆς συνθέσεως ἀκριβῶς ἕνα στοιχεῖο ἑνός συνόλου, τό ὁποῖο εἶναι δυνατό νά εἶναι ἴσο μέ κάποιο ἀπό τά δύο προηγούμενα σύνολα.

Σέ πολλές πράξεις τό ἀποτέλεσμα ἐξαρτᾶται ἀπό τή διάταξη τῶν στοιχείων πού συνθέτουμε, ὅπως π.χ. στήν ἀφαίρεση πραγματικῶν ἀριθμῶν τά ἀποτελέσματα $x-y$ καί $y-x$ εἶναι γενικῶς διαφορετικά. Εἶναι ἀνάγκη λοιπόν νά θεωρήσουμε ὅτι τό ἀποτέλεσμα μιᾶς πράξεως προέρχεται ἀπό ἕνα διατεταγμένο ζεῦγος. Ἔτσι, γενικά, μιά πράξη εἶναι μιά ἀπεικόνιση[1] ἑνός συνόλου διατεταγμένων ζευγῶν σέ ἕνα ἄλλο σύνολο.

Δίνουμε τώρα τόν παρακάτω ὁρισμό.

**Ὁρισμός 1.** Ἄν A,B καί Γ εἶναι μή κενά σύνολα, τότε κάθε ἀπεικόνιση f ἑνός μή κενοῦ ὑποσυνόλου Δ τοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου $A \times B$ στό Γ ὀνομάζεται **(διμελής) πράξη** ἀπό τό $A \times B$ στό Γ.

Ἰδιαίτερο ἐνδιαφέρον παρουσιάζουν οἱ ἀκόλουθες εἰδικές περιπτώσεις πράξεων:

**(i)** $\mathbf{A = B = \Gamma}$ **καί** $\mathbf{\Delta = A \times B}$. Τότε ἡ πράξη εἶναι ἀπεικόνιση τῆς μορφῆς

$$f: A \times A \to A$$

καί ὀνομάζεται **ἐσωτερική πράξη στό A.**

Γιά τό συμβολισμό μιᾶς ἐσωτερικῆς πράξεως θά χρησιμοποιοῦμε, ἀντί γιά τό f, ἕνα ἀπό τά σύμβολα $*$, $\circ$, $+$, $\cdot$. Ἔτσι, χρησιμοποιώντας τό σύμβολο $*$, τήν εἰκόνα $f((\alpha,\beta))$ τοῦ $(\alpha,\beta) \in A \times A$ θά τή συμβολίζουμε μέ $\alpha * \beta$ καί θά τήν ὀνομάζουμε **ἀποτέλεσμα** τῆς ἐσωτερικῆς πράξεως μεταξύ τοῦ α καί β.

Μέ $\alpha_1 * \alpha_2 * \alpha_3$ θά συμβολίζουμε τό $(\alpha_1 * \alpha_2) * \alpha_3$ καί γενικά μέ $\alpha_1 * \alpha_2 * \ldots * \alpha_\nu$ τό $(\alpha_1 * \alpha_2 * \ldots * \alpha_{\nu-1}) * \alpha_\nu$.

**(ii)** $\mathbf{B = \Gamma}$ **καί** $\mathbf{\Delta = A \times B}$. Τότε ἡ πράξη εἶναι ἀπεικόνιση τῆς μορφῆς

$$f: A \times B \to B$$

καί ὀνομάζεται **ἐξωτερική πράξη στό B.**

Γιά τό συμβολισμό μιᾶς ἐξωτερικῆς πράξεως θά χρησιμοποιοῦμε, ἀντί γιά τό f, τό σύμβολο $\cdot$ (ἐπί). Ἔτσι ἡ εἰκόνα $f((\alpha, x))$ τοῦ $(\alpha,x) \in A \times B$ θά συμβολίζεται μέ $\alpha \cdot x$ καί θά ὀνομάζεται **ἀποτέλεσμα** τῆς ἐξωτερικῆς πράξεως μεταξύ τοῦ $\alpha \in A$ καί τοῦ $x \in B$. Τά στοιχεῖα τοῦ A ὀνομάζονται **τελεστές**. Γι' αὐτό ἡ ἀκριβέστερη ὀνομασία τῆς πράξεως αὐτῆς εἶναι «ἐξωτερική πράξη στό B μέ σύνολο τελεστῶν τό A».

**Παραδείγματα:**

1. Ἡ πρόσθεση, ἡ ἀφαίρεση καί ὁ πολλαπλασιασμός εἶναι ἐσωτερικές πράξεις στό **Z**, γιατί γιά κάθε διατεταγμένο ζεῦγος $(x,y) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ τά ἀποτελέσματα $x+y$, $x-y$, $x.y$ αὐτῶν τῶν πράξεων εἶναι ἀκέραιοι (μονοσήμαντα ὁρισμένοι).
2. Ἡ ἕνωση $\cup$ (ἀντ. ἡ τομή $\cap$) στό δυναμοσύνολο $\mathscr{P}(A)$ ἑνός συνόλου A εἶναι μιά ἐσωτερική πράξη στό $\mathscr{P}(A)$.
3. Ἡ πρόσθεση στό σύνολο

$$A = \{\nu \mid \nu \in \mathbf{N} \quad \text{καί } \nu \text{ ἄρτιος}\}$$

εἶναι μιά ἐσωτερική πράξη στό A.

---

1. Μέ τόν ὅρο αὐτό ἐννοοῦμε «μονοσήμαντη ἀπεικόνιση».

4. Ὁ πολλαπλασιασμός πραγματικοῦ ἀριθμοῦ μέ διάνυσμα εἶναι μιά ἐξωτερική πράξη στό σύνολο τῶν διανυσμάτων (τοῦ ἐπιπέδου) μέ σύνολο τελεστῶν τό **R**.
5. Ἔστω $A = \mathbf{R}$ καί $B = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Γιά κάθε $\lambda \in A$ καί $(x,y) \in B$ ἡ ἰσότητα $\lambda \, . \, (x,y) = (\lambda x, \lambda y)$ ὁρίζει μιά ἀπεικόνιση
$$\cdot : A \times B \rightarrow B,$$
πού εἶναι μιά ἐξωτερική πράξη στό $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ μέ σύνολο τελεστῶν τό **R**.
Ἐκτός ἀπό αὐτή τήν ἐξωτερική πράξη στό $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ μποροῦμε νά ὁρίσουμε καί μιά ἐσωτερική πράξη στό σύνολο αὐτό μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο:
Γιά κάθε $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in B (= \mathbf{R} \times \mathbf{R})$ ἡ ἰσότητα
$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, \quad y_1 + y_2)$$
ὁρίζει μία ἀπεικόνιση
$$+ : \quad B \times B \rightarrow B,$$
πού εἶναι μιά ἐσωτερική πράξη στό $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ (παραβ. μέ (2) τῆς 1.2, Κεφ. I).
6. Ὁ ἐσωτερικός πολλαπλασιασμός · στό σύνολο V τῶν διανυσμάτων τοῦ ἐπιπέδου εἶναι μία πράξη τῆς μορφῆς
$$\cdot : V \times V \rightarrow \mathbf{R},$$
γιατί τό ἐσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων εἶναι, ὡς γνωστό, ἕνας πραγματικός ἀριθμός.

Εἶναι γνωστό ὅτι τό ἄθροισμα δύο ἀρνητικῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι πάλι ἕνας ἀρνητικός πραγματικός ἀριθμός. Γι' αὐτό τό λόγο θά λέμε ὅτι τό σύνολο τῶν ἀρνητικῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι κλειστό ὡς πρός τήν πράξη τῆς προσθέσεως στό **R**.

Ἔτσι ἔχουμε τόν ἀκόλουθο ὁρισμό.

**Ὁρισμός 2.** Ἄν $*$ εἶναι μιά ἐσωτερική πράξη σέ ἕνα σύνολο Σ καί A ἕνα μή κενό ὑποσύνολο τοῦ Σ, τότε θά λέμε ὅτι τό A εἶναι **κλειστό ὡς πρός τήν πράξη** $*$, ὅταν καί μόνο ὅταν γιά κάθε $(\alpha, \beta) \in A \times A$ τό ἀποτέλεσμα $\alpha * \beta$ εἶναι στοιχεῖο τοῦ A.

Ἔτσι τό σύνολο τῶν ἀρνητικῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν δέν εἶναι κλειστό ὡς πρός τήν πράξη τῆς ἀφαιρέσεως στό **R**, ἀφοῦ ἡ διαφορά δύο ἀρνητικῶν ἀριθμῶν δέν εἶναι πάντοτε ἀρνητικός, ὅπως π.χ. $(-3) - (-8) = +5$

**Σημείωση.** Στά ἑπόμενα θά ἀσχοληθοῦμε μόνο μέ ἐσωτερικές καί ἐξωτερικές πράξεις. Ἐπειδή μόνο στήν τελευταία παράγραφο αὐτοῦ τοῦ κεφαλαίου θά χρησιμοποιήσουμε τήν ἔννοια τῆς ἐξωτερικῆς πράξεως, τίς ἐσωτερικές πράξεις θά τίς λέμε ἁπλῶς πράξεις, ὅταν δέν ὑπάρχει κίνδυνος συγχύσεως.

## 1.2. Ἐσωτερικές πράξεις σέ σύνολα μέ στοιχεῖα κλάσεις ἰσοδυναμίας

Ἀπό προηγούμενες τάξεις εἶναι γνωστό ὅτι κάθε σχέση μέσα σέ ἕνα σύνολο A ($\neq \emptyset$), πού εἶναι ἀνακλαστική, συμμετρική καί μεταβατική, ὀνομάζεται **σχέ-**

**ση ἰσοδυναμίας** στό A καί συμβολίζεται συνήθως μέ τό σύμβολο $\sim$ (ἤ $\equiv$), πού διαβάζεται «ἰσοδύναμο».

Δηλαδή γιά μιά σχέση ἰσοδυναμίας στό A ἰσχύουν:

(i) $\alpha \sim \alpha$, γιά ὅλα τά $\alpha \in A$ (ἀνακλαστική ἰδιότητα),

(ii) $\alpha \sim \beta \Rightarrow \beta \sim \alpha$ (συμμετρική ἰδιότητα),

(iii) $\alpha \sim \beta$ καί $\beta \sim \gamma \Rightarrow \alpha \sim \gamma$ (μεταβατική ἰδιότητα).

Ἐξάλλου εἶναι γνωστό ὅτι, ἄν $\alpha \in A$, τό σύνολο ὅλων τῶν στοιχείων x τοῦ A μέ τήν ἰδιότητα $x \sim \alpha$ ὀνομάζεται **κλάση ἰσοδυναμίας** τοῦ α καί θά συμβολίζεται μέ $\widehat{\alpha}$, δηλαδή

$$\widehat{\alpha} = \{x \mid x \in A \quad \text{μέ} \quad x \sim \alpha\}$$

Κάθε $x \in \widehat{\alpha}$ θά ὀνομάζεται ἀντιπρόσωπος τῆς κλάσεως ἰσοδυναμίας $\widehat{\alpha}$.

Εἶναι εὔκολο νά δειχτεῖ ὅτι γιά τίς κλάσεις ἰσοδυναμίας ἰσχύει

$$\boxed{\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \widehat{\alpha} = \widehat{\beta}}$$

καί ὅτι, ἄν δύο κλάσεις δέν εἶναι ἴσες, τότε εἶναι ξένα σύνολα.

Ἄς συμβολίσουμε τώρα μέ K τό σύνολο ὅλων τῶν κλασμάτων $\frac{\alpha}{\beta}$ μέ $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}$ καί $\beta \neq 0$, δηλαδή

$$K = \left\{\frac{\alpha}{\beta} \mid \alpha, \beta \in \mathbf{Z} \quad \text{καί} \quad \beta \neq 0\right\}$$

Τότε ἡ σχέση, πού ὁρίζεται μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο

$$\frac{\alpha}{\beta} \equiv \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\delta = \beta\gamma,$$

εἶναι μιά σχέση ἰσοδυναμίας στό K καί εἶναι γνωστό ὅτι ἡ κλάση ἰσοδυναμίας ἑνός στοιχείου τοῦ K ὀνομάζεται ρητός ἀριθμός. Ἔτσι τά στοιχεῖα τοῦ συνόλου **Q** τῶν ρητῶν ἀριθμῶν εἶναι κλάσεις ἰσοδυναμίας.

Δίνουμε τώρα ἀκόμα ἕνα παράδειγμα συνόλου μέ στοιχεῖα κλάσεις ἰσοδυναμίας, πού θά τό χρησιμοποιήσουμε συχνά σ' αὐτό τό κεφάλαιο.

**Παράδειγμα 1.** Ἄν $x, y \in \mathbf{Z}$ καί $\nu \in \mathbf{N}$, τότε μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο

$$x \equiv y \pmod{\nu} \Leftrightarrow x - y = \text{ἀκέραιο πολλαπλάσιο τοῦ } \nu,$$

ὁρίζεται μία σχέση «$\equiv \pmod{\nu}$» μέσα στό **Z**. Τό $x \equiv y \pmod{\nu}$ διαβάζεται «x ἰσοδύναμο (ἤ ἰσοϋπόλοιπο[1]) μέ τό β modulo ν». Ἔτσι $6 \equiv -2 \pmod 4$, ἀφοῦ $6-(-2) = 8 = 2 \cdot 4$ καί $3 \equiv 42 \pmod{13}$, ἀφοῦ $3 - 42 = -39 = (-3) \cdot 13$.

Ἡ σχέση «$\equiv \pmod{\nu}$» εἶναι σχέση ἰσοδυναμίας στό **Z**. Πράγματι, εἶναι

1. Γιατί, ἄν $x \equiv y \pmod{\nu}$, τότε οἱ διαιρέσεις τῶν x, y μέ τό ν δίνουν τό ἴδιο ὑπόλοιπο καί ἀντίστροφα (Κεφ. III 1.3, πρoτ. 3).

(i) ἀνακλαστική, γιατί γιά κάθε $x \in \mathbf{Z}$ εἶναι $x \equiv x (\text{mod } \nu)$, ἀφοῦ $x - x = 0 = 0 \cdot \nu$,

(ii) συμμετρική, γιατί, ἄν $x \equiv y\ (\text{mod } \nu)$, τότε ὑπάρχει $k \in \mathbf{Z}$ μέ $x - y = k \cdot \nu$, ὁπότε $y - x = (-k)\nu$, πού σημαίνει ὅτι $y \equiv x\ (\text{mod } \nu)$, ἀφοῦ $-k \in \mathbf{Z}$,

(iii) μεταβατική, γιατί, ἄν $x \equiv y\ (\text{mod } \nu)$ καί $y \equiv z\ (\text{mod } \nu)$, τότε ὑπάρχουν ἀκέραιοι $k_1$ καί $k_2$ μέ $x - y = k_1 \cdot \nu$ καί $y - z = k_2 \cdot \nu$, ὁπότε
$$x - z = (x - y) + (y - z) = k_1 \cdot \nu + k_2 \cdot \nu = (k_1 + k_2)\nu$$
καί ἑπομένως $x \equiv z\ (\text{mod } \nu)$, ἀφοῦ $(k_1 + k_2) \in \mathbf{Z}$.

Οἱ κλάσεις ἰσοδυναμίας τῶν στοιχείων τοῦ $\mathbf{Z}$ ὡς πρός τήν παραπάνω σχέση ὀνομάζονται **κλάσεις ὑπολοίπου modulo ν**. Ἔτσι ἡ κλάση ὑπολοίπου modulo $\nu$ τοῦ $\alpha \in \mathbf{Z}$ περιέχει ὅλους τούς ἀκέραιους $x$, γιά τούς ὁποίους ἡ διαφορά $x - \alpha$ εἶναι ἀκέραιο πολλαπλάσιο τοῦ $\nu$, δηλαδή
$$\widehat{\alpha} = \{\alpha + k \cdot \nu \mid k \in \mathbf{Z}\}.$$

Ἡ σχέση ἰσοδυναμίας «$\equiv (\text{mod } 3)$» ὁρίζει τίς ἀκόλουθες κλάσεις ὑπολοίπου modulo 3 στό $\mathbf{Z}$:
$$\widehat{0} = \{3k \mid k \in \mathbf{Z}\},$$
$$\widehat{1} = \{3k + 1 \mid k \in \mathbf{Z}\},$$
$$\widehat{2} = \{3k + 2 \mid k \in \mathbf{Z}\},$$
γιατί τά δυνατά ὑπόλοιπα τῆς διαιρέσεως ἑνός ἀκέραιου μέ τό 3 εἶναι 0,1,2.

Τό σύνολο τῶν κλάσεων ὑπολοίπου modulo $\nu$ θά τό συμβολίζουμε μέ $\mathbf{Z}_\nu$. Ἔτσι $Z_3 = \{\widehat{0}, \widehat{1}, \widehat{2}\}$.

Σέ προηγούμενες τάξεις γνωρίσαμε ἐσωτερικές πράξεις στό $\mathbf{Q}$, πού στήν πραγματικότητα ἦταν πράξεις μεταξύ κλάσεων ἰσοδυναμίας. Ἄς δοῦμε πῶς μάθαμε τήν πρόσθεση στό $\mathbf{Q}$. Τά κλάσματα $x = \frac{1}{2}$ καί $y = \frac{1}{3}$ δημιουργοῦν, ὅπως εἴπαμε προηγουμένως, τούς ρητούς $\widehat{x}$ καί $\widehat{y}$. Ἄν μέ τή γνωστή πρόσθεση στό σύνολο K τῶν κλασμάτων προσθέσουμε δύο ἀντιπροσώπους τῶν $\widehat{x}$ καί $\widehat{y}$, π.χ. τούς $\frac{1}{2}$ καί $\frac{1}{3}$, βρίσκουμε ἄθροισμα $z = \frac{5}{6}$. Δύο ἄλλοι ἀντιπρόσωποι τῶν ρητῶν $\widehat{x}$ καί $\widehat{y}$, π.χ. οἱ $\frac{2}{4}$ καί $\frac{3}{9}$, δίνουν ἄθροισμα $\frac{30}{36}$, τό ὁποῖο ἀνήκει στήν κλάση $\widehat{z}$, ἀφοῦ $\frac{5}{6} \equiv \frac{30}{36}$. Τό ἴδιο συμβαίνει καί μέ ὁποιουσδήποτε ἀντιπροσώπους τῶν ρητῶν $\widehat{x}$ καί $\widehat{y}$.

Ἄς ἀντιμετωπίσουμε τώρα τό θέμα αὐτό γενικά. Ἔστω A ἕνα σύνολο, στό ὁποῖο ἔχουν ὁριστεῖ μιά ἐσωτερική πράξη $*$ καί μιά σχέση ἰσοδυναμίας $\sim$. Ἄν $\widehat{A}$ εἶναι τό σύνολο τῶν κλάσεων ἰσοδυναμίας τῶν στοιχείων τοῦ A, τότε ὑπάρχουν διάφοροι τρόποι, γιά νά ὁριστοῦν ἐσωτερικές πράξεις στό $\widehat{A}$. Ἐπειδή κάθε στοιχεῖο τοῦ $\widehat{A}$ ἀποτελεῖται ἀπό στοιχεῖα τοῦ A, γεννιέται τό ἐρώτημα ἄν εἶναι δυνατό νά ὁριστεῖ ἐσωτερική πράξη στό $\widehat{A}$ μέ τή βοήθεια τῆς πράξεως $*$ στό A. Γιά τό σκοπό αὐτό κάνουμε τούς ἑξῆς συλλογισμούς. Ἄν $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta} \in \widehat{A}$ καί πάρουμε $x \in \widehat{\alpha}$ καί $y \in \widehat{\beta}$, τότε τό ἀποτέλεσμα $x * y$ ἀνήκει σέ μιά κλάση ἰσοδυναμίας, ἔστω τή $\widehat{\gamma}$. Τό θέμα τώρα εἶναι ἄν δύο ἄλλοι ἀντιπρόσωποι $x_1$, $y_1$ τῶν κλάσεων $\widehat{\alpha}$ καί $\widehat{\beta}$ ἀντιστοίχως δίνουν ἀποτέλεσμα $x_1 * y_1$, τό ὁποῖο νά ἀνήκει στήν κλάση $\widehat{\gamma}$. Εἶναι φανερό ὅτι γιά νά μπορεῖ νά ὁριστεῖ μιά πράξη στό $\widehat{A}$ μέ τή βοήθεια τῆς πράξεως $*$, πού νά εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τήν ἐκλογή τῶν ἀντιπροσώπων τῶν κλάσεων $\widehat{\alpha}$ καί $\widehat{\beta}$, πρέπει τά ἀποτελέσματα $x * y$ καί $x_1 * y_1$ νά ἀνήκουν πάντα στήν ἴδια κλάση ἰσοδυναμίας.

Ἔτσι δίνουμε τόν ἀκόλουθο ὁρισμό.

**Ὁρισμός.** Μιά σχέση ἰσοδυναμίας $\sim$ στό A ὀνομάζεται **συμβιβαστή** μέ τήν ἐσωτερική πράξη $*$ στό A, ἄν καί μόνο ἄν ἰσχύει ἡ συνεπαγωγή

$$x \sim x_1 \text{ καί } y \sim y_1 \Rightarrow (x * y) \sim (x_1 * y_1)$$

Στήν περίπτωση αὐτή μποροῦμε νά ὁρίσουμε μιά ἐσωτερική πράξη στό $\widehat{A}$, πού θά τή συμβολίζουμε ἐπίσης μέ $*$, μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο:

$$\widehat{\alpha} * \widehat{\beta} = \widehat{\alpha * \beta}$$

Τό ἑπόμενο θεώρημα εἶναι χρήσιμο, γιά νά ἐλέγχουμε ἄν μιά σχέση ἰσοδυναμίας εἶναι συμβιβαστή μέ μία πράξη.

**Θεώρημα.** Μιά σχέση ἰσοδυναμίας $\sim$ σέ ἕνα σύνολο A εἶναι συμβιβαστή μέ μιά ἐσωτερική πράξη $*$ στό A, ἄν γιά κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in A$ ἰσχύει

$$\alpha \sim \beta \Rightarrow (\alpha * \gamma) \sim (\beta * \gamma) \text{ καί } (\gamma * \alpha) \sim (\gamma * \beta) \tag{1}$$

**Ἀπόδειξη.** Ὑποθέτουμε ὅτι ἡ συνθήκη (1) ἰσχύει. Ἄν $\alpha \sim \alpha'$ καί $\beta \sim \beta'$, τότε λόγω τῆς (1) ἔχουμε $(\alpha * \beta) \sim (\alpha' * \beta)$ καί $(\alpha' * \beta) \sim (\alpha' * \beta')$ καί, ἀφοῦ ἡ $\sim$ εἶναι μεταβατική σχέση, ἔχουμε

$$(\alpha * \beta) \sim (\alpha' * \beta'),$$

δηλαδή ἡ $\sim$ εἶναι συμβιβαστή μέ τήν $*$.

**Παραδείγματα:**

2. Ἡ σχέση ἰσοδυναμίας «$\equiv$ (mod 3)» στό **Z** εἶναι συμβιβαστή μέ τήν πρόσθεση στό **Z**. Ἔτσι μποροῦμε νά ὁρίσουμε στό $\mathbf{Z}_3$ πρόσθεση μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο:

Ἄν $(\widehat{x}, \widehat{y}) \in \mathbf{Z}_3 \times \mathbf{Z}_3$, τότε σύμφωνα μέ ὅσα ἔχουμε ἀναφέρει προηγουμένως ἔχουμε

$$\widehat{x} + \widehat{y} = \widehat{x+y}.$$

Τά ἀποτελέσματα τῆς πράξεως $+$ στό $\mathbf{Z}_3$ δίνονται στόν πίνακα τοῦ σχήματος 1.

| $+$ | $\widehat{0}$ | $\widehat{1}$ | $\widehat{2}$ |
|---|---|---|---|
| $\widehat{0}$ | $\widehat{0}$ | $\widehat{1}$ | $\widehat{2}$ |
| $\widehat{1}$ | $\widehat{1}$ | $\widehat{2}$ | $\widehat{0}$ |
| $\widehat{2}$ | $\widehat{2}$ | $\widehat{0}$ | $\widehat{1}$ |

Σχ. 1

| $\cdot$ | $\widehat{0}$ | $\widehat{1}$ | $\widehat{2}$ |
|---|---|---|---|
| $\widehat{0}$ | $\widehat{0}$ | $\widehat{0}$ | $\widehat{0}$ |
| $\widehat{1}$ | $\widehat{0}$ | $\widehat{1}$ | $\widehat{2}$ |
| $\widehat{2}$ | $\widehat{0}$ | $\widehat{2}$ | $\widehat{1}$ |

Σχ. 2

Τό πρῶτο μέλος $\widehat{x}$ τοῦ διατεταγμένου ζεύγους $(\widehat{x}, \ \widehat{y})$ ἀναγράφεται στήν πρώτη στήλη τοῦ πίνακα, ἐνῶ τό δεύτερο $\widehat{y}$ στήν πρώτη σειρά τοῦ πίνακα καί τό ἀποτέλεσμα $\widehat{x+y}$ στή διασταύρωση τῆς γραμμῆς, πού περιέχει τό $\widehat{x}$, καί τῆς στήλης, πού περιέχει τό $\widehat{y}$.

Π.χ. $\widehat{2}+\widehat{1}=\widehat{0}$

3. Ἡ σχέση ἰσοδυναμίας «$\equiv$ (mod 3)» στό **Z** εἶναι συμβιβαστή μέ τόν πολλαπλασιασμό στό **Z**.

Μποροῦμε λοιπόν νά ὁρίσουμε στό $\mathbf{Z}_3$ πολλαπλασιασμό μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο :

Ἄν $(\widehat{x}, \ \widehat{y}) \in \mathbf{Z}_3 \times \mathbf{Z}_3$, τότε κατά τά γνωστά ἔχουμε

$$\widehat{x} \cdot \widehat{y} = \widehat{x \cdot y}$$

Τά ἀποτελέσματα τῆς πράξεως $\cdot$ στό $\mathbf{Z}_3$ δίνονται στόν πίνακα τοῦ σχήματος 2.

Ἔτσι π.χ. $\widehat{2} \cdot \widehat{2} = \widehat{1}$.

4. Ἡ σχέση «$\equiv$ (mod 7)» στό σύνολο **N** εἶναι μιά σχέση ἰσοδυναμίας. Ἄν ὁρίσουμε στό **N** τήν πράξη $*$ μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο

$$\alpha * \beta = \text{ΕΚΠ}\,(\alpha,\beta),$$

τότε ἡ σχέση «$\equiv$ (mod 7)» δέν εἶναι συμβιβαστή μέ τήν πράξη $*$, γιατί

$$2 \equiv 9 \ (\text{mod } 7), \qquad 4 \equiv 11 \ (\text{mod } 7),$$
$$2 * 4 = 4 \quad , \qquad 9 * 11 = 99,$$

ἐνῶ τό 4 δέν εἶναι ἰσοδύναμο μέ τό 99 modulo 7.

## 1.3. Ἰδιότητες τῶν ἐσωτερικῶν πράξεων

Εἶναι γνωστό ὅτι ἡ πράξη τῆς προσθέσεως στό **N** εἶναι ἀντιμεταθετική καί προσεταιριστική. Μέ τόν παρακάτω ὁρισμό γενικεύουμε τίς δύο αὐτές ἰδιότητες γιά μιά ὁποιαδήποτε πράξη.

**Ὁρισμός 1.** Μιά πράξη ο σέ ἕνα σύνολο Σ ὀνομάζεται

**(i) ἀντιμεταθετική,** ἄν καί μόνο ἄν γιά κάθε $\alpha,\beta \in \Sigma$ ἰσχύει

$$\boxed{\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha}$$

**(ii) προσεταιριστική,** ἄν καί μόνο ἄν γιά κάθε $\alpha,\beta,\gamma \in \Sigma$ ἰσχύει

$$\boxed{(\alpha \circ \beta) \circ \gamma = \alpha \circ (\beta \circ \gamma)}$$

**Παραδείγματα:**

1. Ἡ γνωστή πράξη τῆς προσθέσεως στό σύνολο **Q** τῶν ρητῶν ἀριθμῶν εἶναι ἀντιμεταθετική, γιατί γιά κάθε $x, y \in \mathbf{Q}$ ἰσχύει
$$x + y = y + x,$$
καί προσεταιριστική, γιατί γιά κάθε $x, y, z \in \mathbf{Q}$ ἰσχύει
$$(x+y) + z = x + (y+z).$$
2. Ἡ πράξη τῆς ἀφαιρέσεως στό σύνολο **R** δέν εἶναι ἀντιμεταθετική, γιατί ὑπάρχουν $x, y \in \mathbf{R}$ τέτοια, ὥστε
$$x-y \neq y-x \quad (\pi.\chi.\ \ 8-3 \neq 3-8),$$
οὔτε εἶναι προσεταιριστική, γιατί ὑπάρχουν $x, y, z \in \mathbf{R}$ τέτοια, ὥστε
$$(x-y)-z \neq x-(y-z) \quad [\pi.\chi\ (5-3)-1 \neq 5-(3-1)].$$
3. Ὁ πολλαπλασιασμός καί ἡ πρόσθεση στό **R** εἶναι πράξεις ἀντιμεταθετικές καί προσεταιριστικές, ἐνῶ ἡ πράξη $*$ στό **R**, πού ὁρίζεται μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο
$$\alpha * \beta = |\alpha-\beta| \qquad (\alpha, \beta \in \mathbf{R}),$$
εἶναι ἀντιμεταθετική ἀλλά ὄχι προσεταιριστική.

Ἡ γνωστή ἐπιμεριστική ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὡς πρός τήν πρόσθεση στό **R** γενικεύεται μέ τόν παρακάτω ὁρισμό.

**Ὁρισμός 2.** Ἄν $*$, $\circ$ εἶναι δύο πράξεις σέ ἕνα σύνολο Σ, τότε λέμε ὅτι ἡ **πράξη** $*$ **εἶναι**

**(i) ἀπό ἀριστερά ἐπιμεριστική ὡς πρός τήν** $\circ$, ἄν καί μόνο ἄν γιά κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \Sigma$ ἰσχύει
$$\boxed{\alpha * (\beta \circ \gamma) = (\alpha * \beta) \circ (\alpha * \gamma)}$$

**(ii) ἀπό δεξιά ἐπιμεριστική ὡς πρός τήν** $\circ$, ἄν καί μόνο ἄν γιά κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \Sigma$ ἰσχύει
$$\boxed{(\beta \circ \gamma) * \alpha = (\beta * \alpha) \circ (\gamma * \alpha)}$$

**(iii) ἐπιμεριστική ὡς πρός τήν** $\circ$, ἄν καί μόνο ἄν εἶναι συγχρόνως ἀπό ἀριστερά καί ἀπό δεξιά ἐπιμεριστική ὡς πρός τήν $\circ$, δηλαδή γιά κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \Sigma$ ἰσχύει
$$\boxed{\alpha * (\beta \circ \gamma) = (\alpha * \beta) \circ (\alpha * \gamma) \quad \text{καί} \quad (\beta \circ \gamma) * \alpha = (\beta * \alpha) \circ (\gamma * \alpha)}$$

Εἶναι φανερό ὅτι, ὅταν ἡ πρώτη πράξη $*$ στόν προηγούμενο ὁρισμό εἶναι ἀντιμεταθετική, οἱ τρεῖς ἔννοιες ἐπιμεριστικότητας τῆς $*$ ὡς πρός τήν $\circ$ εἶναι ἰσοδύναμες.

**Παραδείγματα:**

4. Ὁ πολλαπλασιασμός εἶναι πράξη ἐπιμεριστική ὡς πρός τήν πρόσθεση στό **N**, γιατί
(i) ὁ πολλαπλασιασμός εἶναι ἀντιμεταθετική πράξη στό **N** καί
(ii) γιά κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{N}$ ἰσχύει
$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$$

Ἡ πρόσθεση στό $\mathbf{N}$ ὅμως δέν εἶναι πράξη ἐπιμεριστική ὡς πρός τόν πολλαπλασιασμό, γιατί ὑπάρχουν $x,y,z \in \mathbf{N}$ τέτοια, ὥστε

$$x+(y\cdot z) \neq (x+y)\cdot(x+z) \qquad [\pi.\chi.\ 3+(2\cdot 1) \neq (3+2)\cdot(3+1)]$$

5. Ἡ τομή $\cap$ εἶναι πράξη ἐπιμεριστική ὡς πρός τήν ἕνωση $\cup$ στό δυναμοσύνολο $\mathscr{P}(X)$ ἑνός συνόλου $X$, γιατί
   (i) ἡ τομή εἶναι ἀντιμεταθετική πράξη στό $\mathscr{P}(X)$ καί
   (ii) γιά κάθε $A,B,\Gamma \in \mathscr{P}(X)$ ἰσχύει
   $$A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma).$$
   Ἐπίσης ἡ ἕνωση $\cup$ εἶναι πράξη ἐπιμεριστική ὡς πρός τήν τομή $\cap$ στό $\mathscr{P}(X)$.
6. Στό σύνολο $\mathbf{R}$ θεωροῦμε τή γνωστή πράξη τῆς προσθέσεως $+$ καί τήν πράξη $o$, πού ὁρίζεται ἀπό τήν ἰσότητα
   $$x \circ y = x^3 \cdot y \qquad (x,y \in \mathbf{R}).$$
   Τότε
   (i) γιά κάθε $x,y,z \in \mathbf{R}$ ἰσχύει
   $$x \circ (y+z) = x^3\cdot(y+z) = x^3\cdot y + x^3\cdot z = (x \circ y) + (x \circ z),$$
   δηλαδή ἡ $o$ εἶναι ἀπό ἀριστερά ἐπιμεριστική ὡς πρός τήν $+$,
   (ii) ὑπάρχουν $x,y,z \in \mathbf{R}$, γιά τά ὁποῖα ἰσχύει
   $$(y+z)\circ x = (y+z)^3\cdot x \neq y^3\cdot x + z^3\cdot x = (y \circ x) + (z \circ x),$$
   δηλαδή ἡ $o$ δέν εἶναι ἀπό δεξιά ἐπιμεριστική ὡς πρός τήν $+$.

## 1.4. Οὐδέτερο στοιχεῖο ὡς πρός ἐσωτερική πράξη

Γνωρίζουμε ὅτι στό σύνολο $\mathbf{R}$ ὁ ἀριθμός 0 ἔχει τήν ἰδιότητα:

$$\forall\ x \in \mathbf{R}: \quad x+0=0+x=x$$

καί γι' αὐτό ὀνομάζεται οὐδέτερο στοιχεῖο ὡς πρός τήν πράξη $+$.

Γενικεύοντας τήν ἰδιότητα αὐτή ἔχουμε τόν ἀκόλουθο ὁρισμό.

**Ὁρισμός.** Ἔστω $*$ μία πράξη σέ ἕνα σύνολο $\Sigma$. Τότε ἕνα στοιχεῖο $e$ τοῦ $\Sigma$ ὀνομάζεται **οὐδέτερο στοιχεῖο** ὡς πρός τήν πράξη $*$, ὅταν καί μόνο ὅταν γιά κάθε $\alpha \in \Sigma$ ἰσχύει

$$\boxed{\alpha * e = e * \alpha = \alpha}$$

**Παρατήρηση.** Ἄν στόν προηγούμενο ὁρισμό ἡ πράξη $*$ εἶναι ἀντιμεταθετική, εἶναι φανερό ὅτι ἕνα στοιχεῖο $e$ τοῦ $\Sigma$ εἶναι οὐδέτερο στοιχεῖο ὡς πρός τήν πράξη $*$, ὅταν καί μόνο ὅταν γιά κάθε $\alpha \in \Sigma$ ἰσχύει $\alpha * e = \alpha$.

**Θεώρημα.** Ἔστω $*$ μιά πράξη σέ ἕνα σύνολο $\Sigma$. Τότε, ἄν ὑπάρχει οὐδέτερο στοιχεῖο στό $\Sigma$ ὡς πρός τήν πράξη $*$, αὐτό εἶναι μοναδικό.

**Ἀπόδειξη.** Ἄν $e_1, e_2 \in \Sigma$ εἶναι οὐδέτερα στοιχεῖα ὡς πρός τήν πράξη $*$, τότε θεωρώντας τό $e_1$ οὐδέτερο στοιχεῖο, λόγω τοῦ ὁρισμοῦ, ἔχουμε

$$e_1 * e_2 = e_2,$$

ἐνῶ θεωρώντας τό $e_2$ οὐδέτερο στοιχεῖο, πάλι λόγῳ τοῦ ὁρισμοῦ, ἔχουμε

$$e_1 * e_2 = e_1,$$

ὁπότε, λόγῳ τῆς μεταβατικῆς ἰδιότητας τῆς ἰσότητας στό Σ, παίρνουμε $e_1 = e_2$.

Στήν περίπτωση πού ὑπάρχει οὐδέτερο στοιχεῖο ὡς πρός μιά πράξη, θά ἐπιτρέπεται, λόγῳ τοῦ προηγούμενου θεωρήματος, νά λέμε ὅτι αὐτό εἶναι **τό** οὐδέτερο στοιχεῖο ὡς πρός τήν πράξη αὐτή. Τό οὐδέτερο στοιχεῖο (ἄν ὑπάρχει) ὡς πρός μιά πράξη, πού ὀνομάζεται «πρόσθεση», θά συμβολίζεται συνήθως μέ 0, ἐνῶ ὡς πρός μιά πράξη, πού ὀνομάζεται «πολλαπλασιασμός», θά συμβολίζεται μέ 1 ἤ I.

**Παρατήρηση.** Ἡ μοναδικότητα τοῦ οὐδέτερου στοιχείου ὡς πρός τήν πρόσθεση (ἀντ. τόν πολλαπλασιασμό) στό **C**, πού εἴδαμε στό Κεφ. I (Προτ. 1 καί 1′ τῆς 1.3), εἶναι ἄμεση συνέπεια τοῦ προηγούμενου θεωρήματος.

**Παραδείγματα:**

1. Τό οὐδέτερο στοιχεῖο ὡς πρός τήν πρόσθεση στό **C** εἶναι τό $0 = 0 + 0i$, ἐνῶ τό οὐδέτερο στοιχεῖο ὡς πρός τόν πολλαπλασιασμό εἶναι τό $1 = 1 + 0i$ (Κεφ. I, Προτ. 1 καί 1′ τῆς 1.3.)
2. Τό $\phi$ εἶναι τό οὐδέτερο στοιχεῖο τοῦ $\mathscr{P}(A)$ ὡς πρός τήν (ἀντιμεταθετική) πράξη τῆς ἑνώσεως $\cup$, ἀφοῦ γιά κάθε $X \in \mathscr{P}(A)$ ἰσχύει $X \cup \phi = X$, καί τό A εἶναι τό οὐδέτερο στοιχεῖο ὡς πρός τήν (ἀντιμεταθετική) πράξη τῆς τομῆς $\cap$, γιατί γιά κάθε $X \in \mathscr{P}(A)$ ἰσχύει $X \cap A = X$.
3. Ἡ ἰσότητα

$$x \circ y = x \qquad (x, y \in \mathbf{R})$$

ὁρίζει μιά πράξη $\circ$ στό **R**, ὡς πρός τήν ὁποία δέν ὑπάρχει οὐδέτερο στοιχεῖο, γιατί, ἄν ὑπῆρχε οὐδέτερο στοιχεῖο $e \in \mathbf{R}$, τότε γιά $x, y \in \mathbf{R}$ μέ $x \neq y$ θά ἴσχυε $e \circ x = x$ καί $e \circ y = y$, ὁπότε λόγῳ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς πράξεως θά εἴχαμε $e = x$ καί $e = y$ καί ἐπομένως $x = y$, πού εἶναι ἄτοπο.

## 1.5. Συμμετρικὰ στοιχεῖα ὡς πρός ἐσωτερική πράξη

Γνωρίζουμε ὅτι γιά ὁποιοδήποτε πραγματικό ἀριθμό x ὑπάρχει ἕνας πραγματικός ἀριθμός, ὁ $-x$, τέτοιος, ὥστε

$$x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

Γενικεύοντας αὐτό γιά μιά ὁποιαδήποτε πράξη ἔχουμε τόν ἀκόλουθο ὁρισμό.

**Ὁρισμός.** Ἔστω $*$ μιά πράξη σέ ἕνα σύνολο Σ, ὡς πρός τήν ὁποία ὑπάρχει οὐδέτερο στοιχεῖο $e \in \Sigma$. Τότε δύο στοιχεῖα α καί α′ τοῦ Σ ὀνομάζονται **συμμετρικά** ὡς πρός τήν πράξη $*$, ὅταν καί μόνο ὅταν ἰσχύει

$$\boxed{\alpha * \alpha' = \alpha' * \alpha = e}$$

Στήν περίπτωση αὐτή λέμε ὅτι τό α εἶναι συμμετρικό τοῦ α′ ὡς πρός τήν πράξη $*$ καί ἀντίστροφα τό α′ συμμετρικό τοῦ α ὡς πρός τήν $*$.

**Παρατήρηση.** Εἶναι φανερό ὅτι, ἄν στόν προηγούμενο ὁρισμό ἡ πράξη $*$ εἶναι ἀντιμεταθετική, δύο στοιχεῖα $\alpha$ καί $\alpha'$ τοῦ $\Sigma$ εἶναι συμμετρικά ὡς πρός τήν πράξη $*$, ὅταν καί μόνο ὅταν ἰσχύει $\alpha * \alpha' = e$.

**Παραδείγματα:**

1. Κάθε πραγματικός ἀριθμός $x \neq 0$ ἔχει συμμετρικό στοιχεῖο ὡς πρός τήν (ἀντιμεταθετική) πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ στό **R** τόν ἀριθμό $x^{-1}$ (πού ὡς γνωστό ὀνομάζεται ἀντίστροφος τοῦ $x$), γιατί $x \cdot x^{-1} = 1$, ὅπου τό 1 εἶναι τό οὐδέτερο στοιχεῖο ὡς πρός τόν πολλαπλασιασμό στό **R**.
2. Οἱ ἀντίθετοι μιγαδικοί ἀριθμοί $\alpha+\beta i$ καί $-\alpha-\beta i$ εἶναι συμμετρικά στοιχεῖα ὡς πρός τήν (ἀντιμεταθετική) πράξη τῆς προσθέσεως στό **C**, γιατί $(\alpha+\beta i)+(-\alpha-\beta i) = 0$ (Κεφ. Ι, Προτ. 2 τῆς 1.3). Ἐξάλλου κάθε μιγαδικός $\alpha+\beta i \neq 0$ ἔχει συμμετρικό στοιχεῖο ὡς πρός τόν πολλαπλασιασμό στό **C** τόν ἀντίστροφό του:
$$\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} + \frac{-\beta}{\alpha^2+\beta^2}\, i,$$
ὅπως εἴδαμε στό Κεφ. Ι (Προτ. 2' τῆς 1.3).
3. Στό σύνολο $A = \{e, x, y\}$ ὁρίζουμε τήν πράξη o, τῆς ὁποίας ὁ πίνακας ἀποτελεσμάτων δίνεται στό σχῆμα 3. Εὔκολα διαπιστώνεται ὅτι τό $e$ εἶναι τό οὐδέτερο στοιχεῖο τῆς πράξεως o. Τό στοιχεῖο $x$ τοῦ $A$ ἔχει δύο συμμετρικά στοιχεῖα ὡς πρός τήν πράξη o, τόν ἑαυτό του καί τό $y$, γιατί
$$x \circ x = e \quad \text{καί} \quad x \circ y = y \circ x = e.$$

| o | e | x | y |
|---|---|---|---|
| e | e | x | y |
| x | x | e | e |
| y | y | e | x |

Σχ. 3

## 1.6. Ἁπλοποιήσιμο στοιχεῖο ὡς πρός ἐσωτερική πράξη

Ὅλοι γνωρίζουμε τούς δύο νόμους τῆς διαγραφῆς στό σύνολο **N**:
$$\alpha+\beta = \alpha+\gamma \Rightarrow \beta = \gamma,$$
$$\alpha\beta = \alpha\gamma \Rightarrow \beta = \gamma.$$
Οἱ ἰδιότητες αὐτές γενικεύονται μέ τόν ἀκόλουθο ὁρισμό.

**Ὁρισμός.** Ἔστω $*$ μιά πράξη σέ ἕνα σύνολο $\Sigma$. Τότε ἕνα στοιχεῖο $\alpha$ τοῦ $\Sigma$ ὀνομάζεται **ἁπλοποιήσιμο** ὡς πρός τήν πράξη $*$, ἄν καί μόνο ἄν γιά κάθε $\beta, \gamma \in \Sigma$ ἰσχύουν
$$\boxed{\alpha * \beta = \alpha * \gamma \Rightarrow \beta = \gamma \quad \text{καί} \quad \beta * \alpha = \gamma * \alpha \Rightarrow \beta = \gamma}$$

**Παραδείγματα:**

1. Κάθε πραγματικός ἀριθμός εἶναι ἁπλοποιήσιμο στοιχεῖο ὡς πρός τήν πράξη τῆς προσθέσεως στό **R**. Ἐπίσης κάθε μιγαδικός ἀριθμός εἶναι ἁπλοποιήσιμο στοιχεῖο ὡς πρός τήν πράξη τῆς προσθέσεως στό **C** (Κεφ. Ι, Προτ. 3 τῆς 1.3).
2. Κάθε πραγματικός ἀριθμός $\neq 0$ εἶναι ἁπλοποιήσιμο στοιχεῖο ὡς πρός τήν πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ στό **R**, γιατί, ἄν $x \neq 0$, τότε γιά κάθε $\alpha, \beta \in$ **R** ἰσχύουν
$$x \cdot \alpha = x \cdot \beta \Rightarrow \alpha = \beta \quad \text{καί} \quad \alpha \cdot x = \beta \cdot x \Rightarrow \alpha = \beta.$$
Ἐπίσης κάθε μιγαδικός ἀριθμός $\neq 0$ εἶναι ἁπλοποιήσιμο στοιχεῖο ὡς πρός τήν πράξη

τοῦ πολλαπλασιασμοῦ στό **C** (Κεφ. I, Προτ. 3′ τῆς 1.3). Τό 0 (ἀντ. τό $0 = 0+0i$) δέν εἶναι ἁπλοποιήσιμο στοιχεῖο ὡς πρός τήν πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ στό **R** (ἀντ. **C**), γιατί π.χ. ἰσχύουν $0 \cdot 3 = 0 \cdot 4$ καί $3 \neq 4$.

## 1.7. Ἡ ἔννοια τῆς ἀλγεβρικῆς δομῆς

Ὅπως εἴδαμε στά προηγούμενα, σέ ἕνα σύνολο Α μποροῦν νά ὁριστοῦν διάφορες πράξεις. Τότε τό σύνολο Α μαζί μέ τίς πράξεις αὐτές θά λέμε ὅτι ἔχει μιά **ἀλγεβρική δομή**, ἡ ὁποία χαρακτηρίζεται ἀπό τίς ἰδιότητες αὐτῶν τῶν πράξεων. Στήν περίπτωση πού σέ ἕνα σύνολο Α ἔχουν ὁριστεῖ μόνο ἐσωτερικές πράξεις, $\circ, *, \ldots, \oplus$, θά γράφουμε $(A, \circ, *, \ldots, \oplus)$, γιά νά ἐκφράσουμε τήν ἀλγεβρική δομή (ἤ ἁπλά δομή). Ἔτσι οἱ συμβολισμοί

$$(\mathbf{N}, +),\ (\mathbf{N}, \cdot),\ (\mathbf{Z}, +),\ (\mathbf{R}, +),\ (\mathbf{Z}, +, \cdot),\ (\mathbf{Q}, +, \cdot)$$

ἐκφράζουν δομές. Οἱ δομές $(\mathbf{N}, +)$, $(\mathbf{N}, \cdot)$, παρόλο πού ἀναφέρονται στό ἴδιο σύνολο **N**, εἶναι διαφορετικές, γιατί δέ χαρακτηρίζονται ἀπό τίς ἴδιες ἰδιότητες. Π.χ. στή δομή $(\mathbf{N}, +)$ δέν ὑπάρχει οὐδέτερο στοιχεῖο ὡς πρός τήν πράξη $+$, ἐνῶ στή δομή $(\mathbf{N}, \cdot)$ ὑπάρχει καί εἶναι τό 1.

Μερικά παραδείγματα ἀλγεβρικῶν δομῶν θά γνωρίσουμε στίς ἑπόμενες παραγράφους.

## 1.8. Ἀσκήσεις

1. Νά ἐξετάσετε ἄν τό σύνολο
   (i) $\{1, -1\}$ εἶναι κλειστό ὡς πρός τήν πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ στό **Z**,
   (ii) τῶν θετικῶν ἀκεραίων εἶναι κλειστό ὡς πρός τίς πράξεις τῆς προσθέσεως καί ἀφαιρέσεως στό **Z**,
   (iii) $\{k + ki \mid k \in \mathbf{R}\}$ εἶναι κλειστό ὡς πρός τήν πράξη τῆς προσθέσεως στό **C**,
   (iv) $\{1, -1, i, -i\}$ εἶναι κλειστό ὡς πρός τήν πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ στό **C**.
2. Ἄν $\Sigma = \{A, B, \Gamma, \Delta\}$, ὅπου
   $$A = \phi,\quad B = \{\alpha, \beta\},\quad \Gamma = \{\alpha, \gamma\}\quad \text{καί}\quad \Delta = \{\alpha, \beta, \gamma\},$$
   δεῖξτε ὅτι ἡ ἕνωση $\cup$ εἶναι ἐσωτερική πράξη στό Σ. Εἶναι ἡ τομή $\cap$ ἐσωτερική πράξη στό Σ;
3. Δεῖξτε ὅτι ἡ σχέση ἰσοδυναμίας «$\equiv (\text{mod } \nu)$» εἶναι συμβιβαστή μέ τήν πρόσθεση καί τόν πολλαπλασιασμό στό **Z**.
4. Κατασκευάστε τούς πίνακες ἀποτελεσμάτων γιά τήν πρόσθεση καί τόν πολλαπλασιασμό στό $\mathbf{Z}_4$. Οἱ πράξεις αὐτές εἶναι ἀντιμεταθετικές ἤ προσεταιριστικές; Εἶναι ὁ πολλαπλασιασμός πράξη ἐπιμεριστική ὡς πρός τήν πρόσθεση; Ὑπάρχουν οὐδέτερα στοιχεῖα ὡς πρός τίς πράξεις αὐτές; Ποιά στοιχεῖα τοῦ $\mathbf{Z}_4$ ἔχουν συμμετρικά στοιχεῖα ὡς πρός τίς πράξεις αὐτές;
5. Βρεῖτε γιά ποιές τιμές τῶν $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ εἶναι προσεταιριστική ἡ πράξη $*$ στό **R**, πού ὁρίζεται μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο
   $$x * y = \alpha x + \beta y.$$

6. Νά δείξετε ὅτι ἡ ἰσότητα

$$\alpha * \beta = \beta$$

ὁρίζει μιά πράξη $*$ στό **N**, ὡς πρός τήν ὁποία δέν ὑπάρχει οὐδέτερο στοιχεῖο στό **N**. Εἶναι προσεταιριστική αὐτή ἡ πράξη;

7. Ἡ ἰσότητα

$$\alpha * \beta = \alpha\beta + \alpha + \beta$$

ὁρίζει μιά πράξη $*$ στό **R**. Εἶναι ἡ πράξη αὐτή ἀντιμεταθετική ἤ προσεταιριστική; Ποιά στοιχεῖα τοῦ **R** ἔχουν συμμετρικό στοιχεῖο ὡς πρός τήν πράξη αὐτή;

8. Ἡ ἰσότητα

$$x \circ y = x + y + x^2y^2$$

ὁρίζει μιά πράξη $\circ$ στό **R**. Νά δείξετε ὅτι κάθε $x \in R-\{0\}$ μέ $x < \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ ἔχει δύο συμμετρικά στοιχεῖα ὡς πρός τήν πράξη αὐτή, ἐνῶ κάθε $x \in \mathbf{R}$ μέ $x > \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ δέν ἔχει συμμετρικό στοιχεῖο. Τά $0$, $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ ἔχουν συμμετρικά στοιχεῖα καί ποιά;

9. Στό σύνολο **C** ὁρίζουμε μιά πράξη $*$ μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο

$$z_1 * z_2 = z_1 + z_2 - z_1z_2.$$

(i) Νά δείξετε ὅτι ἡ πράξη αὐτή εἶναι ἀντιμεταθετική καί προσεταιριστική.

(ii) Ὑπάρχει οὐδέτερο στοιχεῖο ὡς πρός τήν πράξη αὐτή;

(iii) Ποιά στοιχεῖα τοῦ **C** ἔχουν συμμετρικό στοιχεῖο ὡς πρός τήν πράξη αὐτή;

10. Ἔστω $*$ μιά ἐσωτερική πράξη σέ ἕνα σύνολο E, ὡς πρός τήν ὁποία ὑπάρχει οὐδέτερο στοιχεῖο $e \in E$. Ἄν γιά κάθε $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in E$ ἰσχύει

$$(\alpha * \beta) * (\gamma * \delta) = (\alpha * \gamma) * (\beta * \delta),$$

νά δείξετε ὅτι ἡ πράξη αὐτή εἶναι ἀντιμεταθετική καί προσεταιριστική.

## 2. ΗΜΙΟΜΑΔΕΣ - ΟΜΑΔΕΣ

Στήν παράγραφο αὐτή θά μελετήσουμε ἀλγεβρικές δομές μέ μία μόνο ἐσωτερική πράξη. Μέ βάση τίς ἰδιότητες, πού μπορεῖ νά ἔχει ἡ πράξη αὐτή, οἱ δομές αὐτοῦ τοῦ εἴδους εἶναι δυνατό νά χωριστοῦν σέ δύο βασικές κατηγορίες, τίς *ἡμιομάδες* καί τίς *ὁμάδες*.

### 2.1. Ἡμιομάδες

Στήν κατηγορία αὐτή ὑπάγονται οἱ δομές ἐκεῖνες, στίς ὁποῖες ἡ πράξη εἶναι προσεταιριστική. Παράδειγμα τέτοιας δομῆς εἶναι τό (**N**, +), ὅπου ἡ πρόσθεση εἶναι, ὡς γνωστό, προσεταιριστική πράξη.

Ἔτσι ἔχουμε τόν ἀκόλουθο ὁρισμό.

**῾Ορισμός.** Μία δομή (G, o) ὀνομάζεται **ἡμιομάδα,** ἄν καί μόνο ἄν ἡ πράξη o εἶναι προσεταιριστική, δηλαδή γιά κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in G$ ἰσχύει

$$(\alpha \circ \beta) \circ \gamma = \alpha \circ (\beta \circ \gamma)$$

῎Αν ἐπιπλέον ἡ πράξη o εἶναι ἀντιμεταθετική, τότε ἡ δομή (G, o) ὀνομάζεται **ἀντιμεταθετική ἡμιομάδα.**

Σύμφωνα μέ τόν παραπάνω ὁρισμό οἱ δομές $(\mathbf{N}, +)$ καί $(\mathbf{N}, \cdot)$ εἶναι ἀντιμεταθετικές ἡμιομάδες.

Στά προηγούμενα εἴδαμε ὅτι ἕνα στοιχεῖο εἶναι δυνατό νά ἔχει περισσότερα ἀπό ἕνα συμμετρικά στοιχεῖα ὡς πρός μία πράξη (Παραδ. 3 τῆς 1.5). Στίς ἡμιομάδες ὅμως αὐτό εἶναι ἀδύνατο, ὅπως δηλώνει τό ἀκόλουθο θεώρημα.

**Θεώρημα.** ῎Εστω (G, o) μιά ἡμιομάδα. ῎Αν ὑπάρχει οὐδέτερο στοιχεῖο e ὡς πρός τήν πράξη o, τότε κάθε $x \in G$ ἔχει τό πολύ ἕνα συμμετρικό στοιχεῖο ὡς πρός τήν πράξη αὐτή.

**᾿Απόδειξη.** ῎Ας ὑποθέσουμε ὅτι τά στοιχεῖα $x'$ καί $x''$ τοῦ G εἶναι συμμετρικά τοῦ $x \in G$ ὡς πρός τήν πράξη o. Τότε λόγω τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ συμμετρικοῦ στοιχείου ἔχουμε

$$x \circ x' = e \quad \text{καί} \quad x'' \circ x = e,$$

ὁπότε ἀπό τήν προσεταιριστική ἰδιότητα τῆς πράξεως o παίρνουμε

$$x'' = x'' \circ e = x'' \circ (x \circ x') = (x'' \circ x) \circ x' = e \circ x' = x',$$

δηλαδή $x' = x''$.

## 2.2. ῾Ομάδες

῾Η δομή $(\mathbf{Z}, +)$ εἶναι μιά (ἀντιμεταθετική) ἡμιομάδα πού ἔχει καί ἄλλες ἰδιότητες, τίς ὁποῖες δέν ἔχει ἡ (ἀντιμεταθετική) ἡμιομάδα $(\mathbf{N}, +)$. Οἱ πρόσθετες αὐτές ἰδιότητες εἶναι οἱ ἀκόλουθες:

(i) ὑπάρχει οὐδέτερο στοιχεῖο ὡς πρός τήν πρόσθεση:

$$\forall \alpha \in \mathbf{Z}: \quad \alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$$

(ii) κάθε στοιχεῖο α τοῦ **Z** ἔχει ἀντίθετο στοιχεῖο τό $-\alpha$:

$$\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0.$$

Θεωρώντας αὐτή τήν ἀλγεβρική δομή τοῦ **Z** σέ ἕνα ὁποιοδήποτε σύνολο ἔχουμε τόν ἀκόλουθο ὁρισμό.

**῾Ορισμός.** Μία δομή (G, o) ὀνομάζεται **ὁμάδα,** ἄν καί μόνο ἄν ἰσχύουν οἱ ἀκόλουθες ἰδιότητες:

$(O_1)$ ῾Η δομή (G, o) εἶναι ἡμιομάδα.

$(O_2)$ ῾Υπάρχει $e \in G$ τέτοιο, ὥστε γιά κάθε $\alpha \in G$ νά ἰσχύει

$$\alpha \circ e = e \circ \alpha = \alpha \quad \text{(ὕπαρξη οὐδέτερου στοιχείου).}$$

$(O_3)$ Γιά κάθε $\alpha \in G$ ὑπάρχει $\alpha' \in G$ τέτοιο, ὥστε

$$\alpha \circ \alpha' = \alpha' \circ \alpha = e \quad \text{(ὕπαρξη συμμετρικοῦ στοιχείου).}$$

Ἡ ὁμάδα $(G, \circ)$ θά ὀνομάζεται **ἀβελιανή** ἤ **ἀντιμεταθετική**, ἄν καί μόνο ἄν ἡ πράξη $\circ$ εἶναι **ἀντιμεταθετική**.

**Σημείωση.** Ἄν σέ μιά ὁμάδα ἡ πράξη ὀνομάζεται «πρόσθεση», θά λέμε ὅτι εἶναι μιά **προσθετική ὁμάδα**, ἐνῶ, ἄν ἡ πράξη ὀνομάζεται «πολλαπλασιασμός», θά λέμε ὅτι εἶναι μιά **πολλαπλασιαστική ὁμάδα.**

**Παραδείγματα:**

1. Ἡ δομή $(\mathbf{Z}, \cdot)$, σέ ἀντίθεση πρός τή δομή $(\mathbf{Z}, +)$, δέν εἶναι ὁμάδα, γιατί π.χ. τό 3 δέν ἔχει συμμετρικό στοιχεῖο στό $\mathbf{Z}$ ὡς πρός τόν πολλαπλασιασμό, ἀφοῦ δέν ὑπάρχει ἀκέραιος $\alpha$ μέ $\alpha \cdot 3 = 1$.
2. Τό σύνολο $A = \{2^k \mid k \in \mathbf{Z}\}$ εἶναι κλειστό ὡς πρός τόν πολλαπλασιασμό στό $\mathbf{Q}$ καί ἡ δομή $(A, \cdot)$ εἶναι μιά πολλαπλασιαστική ἀβελιανή ὁμάδα, γιατί γιά κάθε $k,\lambda,\mu \in \mathbf{Z}$ ἰσχύουν

   (i) $2^k \cdot (2^\lambda \cdot 2^\mu) = (2^k \cdot 2^\lambda) \cdot 2^\mu$ (προσεταιριστική ἰδιότητα),

   (ii) $2^k \cdot 2^0 = 2^0 \cdot 2^k = 2^k$ (ὕπαρξη οὐδέτερου στοιχείου),

   (iii) $2^k \cdot 2^{-k} = 2^{-k} \cdot 2^k = 2^0$ (ὕπαρξη συμμετρικοῦ στοιχείου),

   (iv) $2^k \cdot 2^\lambda = 2^\lambda \cdot 2^k$ (ἀντιμεταθετική ἰδιότητα).
3. Ἡ συμμετρική διαφορά $\dot{+}$ εἶναι μιά πράξη στό δυναμοσύνολο $\mathscr{P}(X)$ ἑνός συνόλου $X$, πού ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:

$$A \dot{+} B = (A - B) \cup (B - A) \qquad (A, B \in \mathscr{P}(X))$$

   Ἡ δομή $(\mathscr{P}(X), \dot{+})$ εἶναι μιά ἀβελιανή ὁμάδα, γιατί γιά κάθε $A,B,\Gamma \in \mathscr{P}(X)$ ἰσχύουν

   (i) $(A \dot{+} B) \dot{+} \Gamma = A \dot{+} (B \dot{+} \Gamma)$ (προσεταιριστική ἰδιότητα),

   (ii) $A \dot{+} \emptyset = \emptyset \dot{+} A = A$ (ὕπαρξη οὐδέτερου στοιχείου),

   (iii) $A \dot{+} A = \emptyset$ (ὕπαρξη συμμετρικοῦ στοιχείου),

   (iv) $A \dot{+} B = B \dot{+} A$ (ἀντιμεταθετική ἰδιότητα).

## 2.3. Βασικές ἰδιότητες σέ μιά ὁμάδα

Σέ μιά ὁμάδα $(G, \circ)$ ἰσχύουν οἱ ἀκόλουθες ἰδιότητες.

**Ἰδιότητα 1.** Τό οὐδέτερο στοιχεῖο $e \in G$ εἶναι μοναδικό.

Αὐτό εἶναι συνέπεια τῆς ἰδιότητας $(O_2)$ καί τοῦ θεωρήματος τῆς 1.4.

**Ἰδιότητα 2.** Κάθε $\alpha \in G$ ἔχει μοναδικό συμμετρικό στοιχεῖο ὡς πρός τήν πράξη $\circ$.

Αὐτό εἶναι συνέπεια τῶν ἰδιοτήτων $(O_1)$, $(O_3)$ καί τοῦ θεωρήματος τῆς 2.1.

**Σημείωση.** Σέ μιά προσθετική ὁμάδα **τό** συμμετρικό τοῦ $\alpha$ θά συμβολίζεται μέ $-\alpha$ καί θά ὀνομάζεται **ἀντίθετο** τοῦ $\alpha$, ἐνῶ σέ μιά πολλαπλασιαστική ὁμάδα **αὐτό** θά συμβολίζεται μέ $\alpha^{-1}$ καί θά ὀνομάζεται **ἀντίστροφο** τοῦ $\alpha$.

**Ἰδιότητα 3.** Κάθε στοιχεῖο $\alpha$ τοῦ $G$ εἶναι ἁπλοποιήσιμο, δηλαδή γιά κάθε $\beta, \gamma \in G$ ἰσχύουν

$$\alpha \circ \beta = \alpha \circ \gamma \Rightarrow \beta = \gamma \quad \text{καί} \quad \beta \circ \alpha = \gamma \circ \alpha \Rightarrow \beta = \gamma.$$

**Ἀπόδειξη.** Ἔστω $\alpha \circ \beta = \alpha \circ \gamma$. Θά δείξουμε ὅτι $\beta = \gamma$. Ἀπό τίς ἰδιότητες τῆς ὁμάδας καί τήν ὑπόθεση παίρνουμε

$$\beta = e \circ \beta = (\alpha' \circ \alpha) \circ \beta = \alpha' \circ (\alpha \circ \beta) = \alpha' \circ (\alpha \circ \gamma) =$$
$$= (\alpha' \circ \alpha) \circ \gamma = e \circ \gamma = \gamma.$$

Ἔστω $\beta \circ \alpha = \gamma \circ \alpha$. Θά δείξουμε ὅτι $\beta = \gamma$. Ὅμοια παίρνουμε

$$\beta = \beta \circ e = \beta \circ (\alpha \circ \alpha') = (\beta \circ \alpha) \circ \alpha' = (\gamma \circ \alpha) \circ \alpha' =$$
$$= \gamma \circ (\alpha \circ \alpha') = \gamma \circ e = \gamma.$$

**Ἰδιότητα 4.** Ἄν $\alpha, \beta \in G$, τότε κάθε μιά ἀπό τίς ἐξισώσεις $\alpha \circ x = \beta$, $x \circ \alpha = \beta$ ἔχει μοναδική λύση στό $G$.

**Ἀπόδειξη.** Ἔστω $\alpha' \in G$ **τό** συμμετρικό τοῦ $\alpha$. Τότε

$$\alpha \circ x = \beta \Leftrightarrow \alpha' \circ (\alpha \circ x) = \alpha' \circ \beta \Leftrightarrow (\alpha' \circ \alpha) \circ x = \alpha' \circ \beta$$
$$\Leftrightarrow e \circ x = \alpha' \circ \beta \Leftrightarrow x = \alpha' \circ \beta.$$

Ἄρα ἡ μοναδική λύση τῆς ἐξισώσεως $\alpha \circ x = \beta$ εἶναι τό στοιχεῖο $\alpha' \circ \beta$. Ὅμοια βρίσκουμε ὅτι ἡ μοναδική λύση τῆς ἐξισώσεως $x \circ \alpha = \beta$ εἶναι τό στοιχεῖο $\beta \circ \alpha'$.

**Παρατήρηση.** Σέ ἀβελιανές ὁμάδες οἱ δύο ἐξισώσεις στήν ἰδιότητα 4 εἶναι ἰσοδύναμες. Εἰδικότερα σέ προσθετικές ἀβελιανές ὁμάδες ἡ μοναδική λύση τῶν παραπάνω ἐξισώσεων θά συμβολίζεται μέ $\beta - \alpha$, δηλαδή $\beta - \alpha = \beta + (-\alpha)$.

## 2.4. Ἀσκήσεις

1. Ποιές ἀπό τίς δομές $(A, \circ)$, $(A, *)$, $(A, \cdot)$ καί $(A, \oplus)$ μέ $A = \{\alpha, \beta\}$ καί μέ πράξεις, πού οἱ πίνακές τους δίνονται στό σχῆμα 4,

| $\circ$ | $\alpha$ | $\beta$ |
|---|---|---|
| $\alpha$ | $\alpha$ | $\beta$ |
| $\beta$ | $\beta$ | $\alpha$ |

| $*$ | $\alpha$ | $\beta$ |
|---|---|---|
| $\alpha$ | $\alpha$ | $\beta$ |
| $\beta$ | $\alpha$ | $\beta$ |

| $\cdot$ | $\alpha$ | $\beta$ |
|---|---|---|
| $\alpha$ | $\alpha$ | $\alpha$ |
| $\beta$ | $\alpha$ | $\alpha$ |

| $\oplus$ | $\alpha$ | $\beta$ |
|---|---|---|
| $\alpha$ | $\alpha$ | $\beta$ |
| $\beta$ | $\beta$ | $\beta$ |

Σχ. 4

εἶναι ἡμιομάδες καί ποιές ὁμάδες;

2. (i) Ἄν $(A, +)$ εἶναι μιά προσθετική ὁμάδα, νά δείξετε ὅτι

$$\alpha + \beta = 0 \Rightarrow \beta = -\alpha.$$

(ii) Ἄν $(B, \cdot)$ εἶναι μιά πολλαπλασιαστική ὁμάδα, νά δείξετε

$$\alpha \cdot \beta = 1 \Rightarrow \beta = \alpha^{-1}.$$

3. Δεῖξτε ὅτι ἡ δομή $(\mathbf{Z}_6, +)$ εἶναι ἀβελιανή ὁμάδα. Ἐπιλύστε στό $\mathbf{Z}_6$ τήν ἐξίσωση $\widehat{4} + x = \widehat{2}$.

4. Σέ μιά πολλαπλασιαστική ὁμάδα $(G, \cdot)$ δεῖξτε ὅτι γιά κάθε $\alpha, \beta \in G$ καί $\mu, \nu \in \mathbf{N}$ ἰσχύουν

(i) $(\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$ ,

(ii) $(\alpha \cdot \beta)^{-1} = \beta^{-1} \cdot \alpha^{-1}$ ,

(iii) $\alpha^{\mu} \cdot \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu}$,

(iv) $(\alpha^{\mu})^{\nu} = \alpha^{\mu\nu}$ ,

ὅπου οἱ δυνάμεις ὁρίζονται κατά τό γνωστό τρόπο: $\alpha^1 = \alpha$, $\alpha^2 = \alpha.\alpha$ καί γενικά $\alpha^{\nu+1} = \alpha^{\nu}\cdot\alpha$ $(\nu \in \mathbf{N})$.

5. Ἄν εἶναι

$$\Sigma = \{\lambda + \lambda i \mid \lambda \in \mathbf{R}\}$$

καί $+$ ἡ πρόσθεση στό $\mathbf{C}$, νά δείξετε ὅτι ἡ δομή $(\Sigma, +)$ εἶναι ὁμάδα.

6. Σέ μιά προσθετική ὁμάδα $(G, +)$ γιά κάθε $\alpha,\beta \in G$ ἰσχύουν

(i) $-(-\alpha) = \alpha$ (ii) $-(\alpha+\beta) = (-\beta) + (-\alpha)$.

7. Στό σύνολο

$$E = \{(\alpha,\beta) \mid \alpha \in \mathbf{R}-\{0\} \quad \text{καί} \quad \beta \in \mathbf{R}\}$$

ἡ σχέση

$$(\alpha,\beta) * (\gamma,\delta) = (\alpha\gamma,\ \beta\gamma + \delta)$$

ὁρίζει μία πράξη $*$. Νά δείξετε ὅτι ἡ δομή $(E, *)$ εἶναι ὁμάδα.

8. Ἄν $(G, *)$ εἶναι μιά ἀβελιανή ὁμάδα, νά ἐπιλυθεῖ στό $G$ τό σύστημα

$$\begin{cases} x * \alpha = y * y \\ x * \beta = y * \alpha' \end{cases}$$

ὅπου $\alpha'$ τό συμμετρικό τοῦ $\alpha$.

## 3. ΔΑΚΤΥΛΙΟΙ

### 3.1. Ἡ ἔννοια τοῦ δακτυλίου

Στήν προηγούμενη παράγραφο εἴδαμε ἀλγεβρικές δομές μέ μία μόνο ἐσωτερική πράξη. Ἐδῶ θά γνωρίσουμε ἀλγεβρικές δομές μέ δύο ἐσωτερικές πράξεις. Ἡ μιά πράξη θά συμβολίζεται μέ $+$ καί θά ὀνομάζεται πρόσθεση, ἐνῶ ἡ ἄλλη πράξη θά συμβολίζεται μέ $\cdot$ καί θά ὀνομάζεται πολλαπλασιασμός, χωρίς αὐτό νά σημαίνει ὅτι οἱ πράξεις αὐτές ταυτίζονται μέ τίς γνωστές μας πράξεις τῆς προσθέσεως καί τοῦ πολλαπλασιασμοῦ στό $\mathbf{R}$.

Προτοῦ δώσουμε τόν ὁρισμό τοῦ δακτυλίου, ἄς μελετήσουμε τή δομή $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$. Ἰσχύουν οἱ ἀκόλουθες ἰδιότητες:

1. Ἡ δομή $(\mathbf{Z}, +)$ εἶναι ἀντιμεταθετική ὁμάδα, γιατί γιά κάθε $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbf{Z}$ ἰσχύουν:

   (i) $(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$,

   (ii) $\alpha+\beta = \beta+\alpha$,

   (iii) $\alpha+0 = \alpha$,

   (iv) $\alpha + (-\alpha) = 0$.

2. Ἡ δομή $(\mathbf{Z}, \cdot)$ εἶναι ἡμιομάδα, γιατί γιά κάθε $\alpha,\beta,\gamma \in Z$ ἰσχύει:

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$$

3. Ὁ πολλαπλασιασμός $\cdot$ εἶναι πράξη ἐπιμεριστική ὡς πρός τήν πρόσθεση $+$, γιατί γιά κάθε $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbf{Z}$ ἰσχύουν:

$$\alpha \cdot (\beta+\gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma \quad \text{καί} \quad (\beta+\gamma) \cdot \alpha = \beta \cdot \alpha + \gamma \cdot \alpha.$$

Ἀπό τό προηγούμενο παράδειγμα ὁδηγούμαστε στόν ὁρισμό μιᾶς γενικῆς δομῆς, πού θά ὀνομάζεται *δακτύλιος*.

**Ὁρισμός.** Μία δομή $(A, +, \cdot)$ ὀνομάζεται **δακτύλιος**, ἄν καί μόνο ἄν ἰσχύουν οἱ ἀκόλουθες ἰδιότητες:

$(\Delta_1)$ Ἡ δομή $(A, +)$ εἶναι ἀντιμεταθετική ὁμάδα.

$(\Delta_2)$ Ἡ δομή $(A, \cdot)$ εἶναι ἡμιομάδα.

$(\Delta_3)$ Ἡ πράξη $\cdot$ εἶναι ἐπιμεριστική ὡς πρός τήν πράξη $+$.

Ἔτσι γιά ἕνα δακτύλιο $(A, +, \cdot)$ ἰσχύουν οἱ ἀκόλουθες ἰδιότητες:

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\forall \alpha,\beta,\gamma \in A$: $(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$ | $(\Delta_1)$ |
| 2. | Ὑπάρχει στό A οὐδέτερο στοιχεῖο (συμβ. 0) ὡς πρός τήν πρόσθεση | |
| 3. | Κάθε στοιχεῖο $\alpha$ τοῦ A ἔχει **ἀντίθετο** στοιχεῖο (συμβ. $-\alpha$) | |
| 4. | $\forall \alpha,\beta \in A$: $\alpha+\beta = \beta+\alpha$ | |
| 5. | $\forall \alpha,\beta,\gamma \in A$: $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ | $(\Delta_2)$ |
| 6. | $\forall \alpha,\beta,\gamma \in A$: $\alpha\cdot(\beta+\gamma) = \alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$ καί $(\beta+\gamma) \cdot \alpha = \beta\cdot\alpha + \gamma\cdot\alpha$ | $(\Delta_3)$ |

Ἰδιαίτερα, ἕνας δακτύλιος $(A, +, \cdot)$ θά ὀνομάζεται

(i) **ἀντιμεταθετικός**, ἄν καί μόνο ἄν ἡ ἡμιομάδα $(A, \cdot)$ εἶναι ἀντιμεταθετική, δηλαδή γιά κάθε $\alpha, \beta \in A$:

$$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha,$$

(ii) **δακτύλιος μέ μοναδιαῖο στοιχεῖο**, ἄν καί μόνο ἄν ὑπάρχει οὐδέτερο στοιχεῖο ὡς πρός τήν πράξη $\cdot$ (πού, ὅπως ἔχουμε ἀναφέρει, συμβολίζεται μέ 1), δηλαδή γιά κάθε $\alpha \in A$:

$$\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha.$$

**Παραδείγματα:**

1. Ἡ δομή $(A, +, \cdot)$, ὅπου $A = \{\alpha+\beta\sqrt{2} \mid \alpha,\beta \in \mathbf{Q}\}$ καί πράξεις $+$ καί $\cdot$ οἱ γνωστές μας πράξεις στό $\mathbf{R}$, εἶναι ἀντιμεταθετικός δακτύλιος μέ μοναδιαῖο στοιχεῖο.
Πράγματι, γιά κάθε $\alpha,\alpha', \alpha'', \beta, \beta', \beta'' \in \mathbf{Q}$ ἰσχύουν:

(i) $[(\alpha+\beta\sqrt{2}) + (\alpha'+\beta'\sqrt{2})] + (\alpha'' + \beta''\sqrt{2}) = (\alpha+\beta\sqrt{2}) + [(\alpha'+\beta'\sqrt{2})+ + (\alpha''+\beta''\sqrt{2})]$, γιατί κάθε ἕνα ἀπό τά μέλη της ἰσοῦται μέ $[(\alpha+\alpha'+\alpha'')+ + (\beta+\beta'+\beta'')\sqrt{2}]$,

(ii) $(\alpha+\beta\sqrt{2})+ (\alpha'+\beta'\sqrt{2})= (\alpha'+\beta'\sqrt{2})+ (\alpha+\beta\sqrt{2})$, γιατί κάθε μέλος της ἰσοῦται μέ $[(\alpha+\alpha') + (\beta+\beta')\sqrt{2}]$,

(iii) $(\alpha+\beta\sqrt{2})+(0+0\sqrt{2})=\alpha+\beta\sqrt{2}$,

(iv) $(\alpha+\beta\sqrt{2})+(-\alpha-\beta\sqrt{2})=0+0\sqrt{2}=0$,

(v) $[(\alpha+\beta\sqrt{2})\cdot(\alpha'+\beta'\sqrt{2})]\cdot(\alpha''+\beta''\sqrt{2})=(\alpha+\beta\sqrt{2})\cdot[(\alpha'+\beta'\sqrt{2})\,.\,(\alpha''+$
$+\beta''\sqrt{2})]$,

(vi) $(\alpha+\beta\sqrt{2})\cdot(\alpha'+\beta'\sqrt{2})=(\alpha'+\beta'\sqrt{2})\cdot(\alpha+\beta\sqrt{2})$,

(vii) $(\alpha+\beta\sqrt{2})\cdot[(\alpha'+\beta'\sqrt{2})+(\alpha''+\beta''\sqrt{2})]=$
$=(\alpha+\beta\sqrt{2})\cdot(\alpha'+\beta'\sqrt{2})+(\alpha+\beta\sqrt{2})\cdot(\alpha''+\beta''\sqrt{2})$ καί

(viii) $(\alpha+\beta\sqrt{2})\cdot(1+0\sqrt{2})=\alpha+\beta\sqrt{2}$

2. Ἡ δομή $(\mathbf{Z}_5, +, \cdot)$ εἶναι ἕνας ἀντιμεταθετικός δακτύλιος μέ μοναδιαῖο στοιχεῖο. Ἕνας εὔκολος τρόπος, γιά νά ἐξετάσουμε ἄν ἰσχύει ὁ ὁρισμός τοῦ δακτυλίου γιά τή δομή $(\mathbf{Z}_5, +, \cdot)$, εἶναι ἡ κατασκευή τῶν γνωστῶν πινάκων γιά τίς πράξεις $+$ καί $\cdot$ στό $\mathbf{Z}_5$ (Σχ. 5).

| Πράξεις στό $Z_5$ | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Πρόσθεση | | | | | | Πολλαπλασιασμός | | | | | |
| $+$ | $\widehat{0}$ | $\widehat{1}$ | $\widehat{2}$ | $\widehat{3}$ | $\widehat{4}$ | $\cdot$ | $\widehat{0}$ | $\widehat{1}$ | $\widehat{2}$ | $\widehat{3}$ | $\widehat{4}$ |
| $\widehat{0}$ | $\widehat{0}$ | $\widehat{1}$ | $\widehat{2}$ | $\widehat{3}$ | $\widehat{4}$ | $\widehat{0}$ | $\widehat{0}$ | $\widehat{0}$ | $\widehat{0}$ | $\widehat{0}$ | $\widehat{0}$ |
| $\widehat{1}$ | $\widehat{1}$ | $\widehat{2}$ | $\widehat{3}$ | $\widehat{4}$ | $\widehat{0}$ | $\widehat{1}$ | $\widehat{0}$ | $\widehat{1}$ | $\widehat{2}$ | $\widehat{3}$ | $\widehat{4}$ |
| $\widehat{2}$ | $\widehat{2}$ | $\widehat{3}$ | $\widehat{4}$ | $\widehat{0}$ | $\widehat{1}$ | $\widehat{2}$ | $\widehat{0}$ | $\widehat{2}$ | $\widehat{4}$ | $\widehat{1}$ | $\widehat{3}$ |
| $\widehat{3}$ | $\widehat{3}$ | $\widehat{4}$ | $\widehat{0}$ | $\widehat{1}$ | $\widehat{2}$ | $\widehat{3}$ | $\widehat{0}$ | $\widehat{3}$ | $\widehat{1}$ | $\widehat{4}$ | $\widehat{2}$ |
| $\widehat{4}$ | $\widehat{4}$ | $\widehat{0}$ | $\widehat{1}$ | $\widehat{2}$ | $\widehat{3}$ | $\widehat{4}$ | $\widehat{0}$ | $\widehat{4}$ | $\widehat{3}$ | $\widehat{2}$ | $\widehat{1}$ |

Σχ. 5

Ἄν $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$ καί $\widehat{\gamma}$ εἶναι κλάσεις ὑπολοίπων modulo 5, ἐπαληθεῦστε τίς ἰδιότητες

(i) $(\widehat{\alpha}+\widehat{\beta})+\widehat{\gamma}=\widehat{\alpha}+(\widehat{\beta}+\widehat{\gamma})$,

(ii) $\widehat{\alpha}+\widehat{\beta}=\widehat{\beta}+\widehat{\alpha}$ ,

(iii) $\widehat{\alpha}+\widehat{0}=\widehat{\alpha}$ ,

(iv) Γιά κάθε $\widehat{x}\in\mathbf{Z}_5$ ὑπάρχει $\widehat{y}\in\mathbf{Z}_5$ μέ τήν ἰδιότητα $\widehat{x}+\widehat{y}=\widehat{0}$
(π.χ. $\widehat{1}+\widehat{4}=\widehat{0}$),

(v) $(\widehat{\alpha}\cdot\widehat{\beta})\cdot\widehat{\gamma}=\widehat{\alpha}\cdot(\widehat{\beta}\cdot\widehat{\gamma})$,

(vi) $\widehat{\alpha}\cdot\widehat{\beta}=\widehat{\beta}\cdot\widehat{\alpha}$

(vii) $\widehat{\alpha}\cdot(\widehat{\beta}+\widehat{\gamma})=\widehat{\alpha}\cdot\widehat{\beta}+\widehat{\alpha}\cdot\widehat{\gamma}$,

(viii) $\widehat{\alpha}\cdot\widehat{1}=\widehat{\alpha}$.

3. Κάθε μονοσύνολο $A=\{\alpha\}$ μαζί μέ τίς ἀκόλουθες πράξεις $\alpha+\alpha=\alpha$ καί $\alpha\,.\,\alpha=\alpha$ εἶναι ἕνας ἀντιμεταθετικός δακτύλιος μέ μοναδιαῖο στοιχεῖο, πού ὀνομάζεται **μηδενικός δακτύλιος**.

Παρατηρῆστε ὅτι τά δύο οὐδέτερα στοιχεῖα ὡς πρός τίς πράξεις + καί ·, δηλ. τά 0 καί 1, ταυτίζονται μέ τό α. Ἔτσι μποροῦμε νά γράψουμε $A = \{0\}$, πού δικαιολογεῖ τήν παραπάνω ὀνομασία.

## 3.2. Βασικές ἰδιότητες σέ ἕνα δακτύλιο

Οἱ βασικές ἰδιότητες σέ ἕνα δακτύλιο εἶναι ἀνάλογες μέ τίς ἰδιότητες ἐκεῖνες στό **Z**, πού δέν ἀναφέρονται στό ἀντίστροφο ἑνός στοιχείου καί τήν ἀντιμεταθετική ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Ἐδῶ θά ἀναφέρουμε μόνο δύο ἰδιότητες τῶν δακτυλίων.

**Ἰδιότητα 1.** Ἄν $(A, +, \cdot)$ εἶναι ἕνας δακτύλιος, τότε γιά κάθε $\alpha \in A$ ἰσχύει

$$\boxed{\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0}$$

**Ἀπόδειξη.** Ἄν $\beta \in A$, τότε

$$\beta + 0 = \beta,$$

ὁπότε

$$\alpha \cdot (\beta + 0) = \alpha . \beta.$$

Ἄν ἐφαρμόσουμε τήν ἐπιμεριστική ἰδιότητα, ἔχουμε

$$\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot 0 = \alpha . \beta,$$

δηλαδή τό $\alpha \cdot 0$ εἶναι τό οὐδέτερο στοιχεῖο ὡς πρός τήν πρόσθεση καί ἑπομένως

$$\alpha \cdot 0 = 0.$$

Μέ ἀνάλογο τρόπο ἀποδεικνύεται ὅτι $0 \cdot \alpha = 0$.

**Πόρισμα.** Ἄν σέ ἕνα δακτύλιο μέ μοναδιαῖο στοιχεῖο τά δύο οὐδέτερα στοιχεῖα ταυτίζονται, δηλαδή $0 \equiv 1$, τότε ὁ δακτύλιος εἶναι ἕνας μηδενικός δακτύλιος.

**Ἰδιότητα 2.** Ἄν $(A, +, \cdot)$ εἶναι ἕνας δακτύλιος, τότε γιά κάθε $\alpha, \beta \in A$ ἰσχύει

$$\boxed{\alpha \cdot (-\beta) = -(\alpha \cdot \beta)}$$

**Ἀπόδειξη.** Γιά ὁποιοδήποτε $\beta \in A$ ἔχουμε τήν ἰσότητα

$$(-\beta) + \beta = 0.$$

Ἄν τώρα πολλαπλασιάσουμε ἀπό ἀριστερά καί τά δύο μέλη της μέ $\alpha \in A$ καί ἐφαρμόσουμε τήν ἐπιμεριστική ἰδιότητα, παίρνουμε

$$\alpha \cdot (-\beta) + \alpha \cdot \beta = \alpha \cdot 0.$$

Τό δεύτερο μέλος ὅμως εἶναι τό 0. Ἑπομένως

$$\alpha \cdot (-\beta) + \alpha \cdot \beta = 0,$$

πού σημαίνει ὅτι τό $\alpha \cdot (-\beta)$ εἶναι τό ἀντίθετο τοῦ $\alpha \cdot \beta$, δηλαδή

$$\alpha \cdot (-\beta) = -(\alpha \cdot \beta).$$

## 3.3. Ἡ ἔννοια τῆς ἀκέραιας περιοχῆς

Ἡ δομή $(\mathbf{Z}_4, +, \cdot)$ εἶναι ἕνας ἀντιμεταθετικός δακτύλιος μέ μοναδιαῖο στοιχεῖο. Γιά ν' ἀποδείξουμε αὐτό, κατασκευάζουμε τούς πίνακες τοῦ σχήματος 6. (Τά οὐδέτερα στοιχεῖα ὡς πρός τίς δύο πράξεις εἶναι τά $\widehat{0}$ καί $\widehat{1}$).

| Πράξεις στό $\mathbf{Z}_4$ | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Πρόσθεση | | | | | Πολλαπλασιασμός | | | | |
| $+$ | $\widehat{0}$ | $\widehat{1}$ | $\widehat{2}$ | $\widehat{3}$ | $\cdot$ | $\widehat{0}$ | $\widehat{1}$ | $\widehat{2}$ | $\widehat{3}$ |
| $\widehat{0}$ | $\widehat{0}$ | $\widehat{1}$ | $\widehat{2}$ | $\widehat{3}$ | $\widehat{0}$ | $\widehat{0}$ | $\widehat{0}$ | $\widehat{0}$ | $\widehat{0}$ |
| $\widehat{1}$ | $\widehat{1}$ | $\widehat{2}$ | $\widehat{3}$ | $\widehat{0}$ | $\widehat{1}$ | $\widehat{0}$ | $\widehat{1}$ | $\widehat{2}$ | $\widehat{3}$ |
| $\widehat{2}$ | $\widehat{2}$ | $\widehat{3}$ | $\widehat{0}$ | $\widehat{1}$ | $\widehat{2}$ | $\widehat{0}$ | $\widehat{2}$ | $\widehat{0}$ | $\widehat{2}$ |
| $\widehat{3}$ | $\widehat{3}$ | $\widehat{0}$ | $\widehat{1}$ | $\widehat{2}$ | $\widehat{3}$ | $\widehat{0}$ | $\widehat{3}$ | $\widehat{2}$ | $\widehat{1}$ |

Σχ. 6

Στό δακτύλιο αὐτό παρατηροῦμε ὅτι

$$\widehat{2} \cdot \widehat{2} = \widehat{0}.$$

Ἄρα, ἄν σέ ἕνα δακτύλιο $(A, +, \cdot)$ ἰσχύει

$$\alpha \cdot \beta = 0,$$

αὐτό δέ σημαίνει ὅτι θά εἶναι $\alpha = 0$ εἴτε $\beta = 0$.

Ἔτσι, μέ τήν παρατήρηση αὐτή ὁδηγούμαστε στή θεώρηση μιᾶς νέας ἀλγεβρικῆς δομῆς, πού τήν ὀνομάζουμε *ἀκέραια περιοχή*.

**Ὁρισμός.** Ἄν $(A, +, \cdot)$ εἶναι ἕνας μή μηδενικός ἀντιμεταθετικός δακτύλιος μέ μοναδιαῖο στοιχεῖο τέτοιος, ὥστε

$$\alpha \cdot \beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \text{ εἴτε } \beta = 0 \text{[1]} \qquad (\alpha, \beta \in A),$$

τότε ἡ δομή $(A, +, \cdot)$ ὀνομάζεται **ἀκέραια περιοχή**.

**Παραδείγματα:**

1. Ἡ δομή $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$ εἶναι μιά ἀκέραια περιοχή, γιατί ἕνας εἶναι μή μηδενικός ἀντιμεταθετικός δακτύλιος μέ μοναδιαῖο στοιχεῖο καί μάλιστα ἄν $\alpha \cdot \beta = 0$, τότε $\alpha = 0$ εἴτε $\beta = 0$.
2. Ἡ δομή $(\mathbf{Z}_5, +, \cdot)$ εἶναι μιά ἀκέραια περιοχή. Στό παράδειγμα 2 τῆς 3.1 εἴδαμε ὅτι ἡ δομή αὐτή εἶναι ἀντιμεταθετικός δακτύλιος μέ μοναδιαῖο στοιχεῖο. Ἀπό τόν πίνακα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ σχήματος 5 διαπιστῶστε ὅτι

$$\widehat{\alpha} \cdot \widehat{\beta} = \widehat{0} \Leftrightarrow \widehat{\alpha} = \widehat{0} \text{ εἴτε } \widehat{\beta} = \widehat{0}$$

1. Λόγω τῆς ἰδιότητας 1 τῆς 3.2, ἡ ἀντίστροφη συνεπαγωγή ἰσχύει πάντα σέ ἕνα δακτύλιο.

## 3.4. Ἀσκήσεις

1. Δεῖξτε ὅτι ἡ δομή $(A, +, \cdot)$, ὅπου $A = \{1,2\}$ καί $+, \cdot$ οἱ πράξεις πού ὁρίζονται στούς πίνακες τοῦ σχήματος 7,

| + | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 1 |

| . | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 2 |

Σχ. 7

εἶναι ἀντιμεταθετικός δακτύλιος. Ἔχει μοναδιαῖο στοιχεῖο;

2. Ποιές ἀπό τίς παρακάτω δομές

(i) $(A, +, \cdot)$, ὅπου $A = \{2\nu | \nu \in \mathbf{Z}\}$,

(ii) $(A, +, \cdot)$, ὅπου $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ καί πράξεις πού ὁρίζονται στούς πίνακες τοῦ σχήματος 8,

| + | α | β | γ | δ |
|---|---|---|---|---|
| α | α | β | γ | δ |
| β | β | α | δ | γ |
| γ | γ | δ | α | β |
| δ | δ | γ | β | α |

| . | α | β | γ | δ |
|---|---|---|---|---|
| α | α | α | α | α |
| β | α | β | α | β |
| γ | α | γ | α | δ |
| δ | α | δ | α | δ |

Σχ. 8

(iii) $(\mathscr{P}(A), \dot{+}, \cap)$,

(iv) $(\mathscr{P}(A), \dot{+}, \cup)$

εἶναι δακτύλιοι; Στή συνέχεια νά βρεῖτε τούς ἀντιμεταθετικούς δακτυλίους.

3. Δεῖξτε ὅτι ἡ δομή $(\mathbf{Z}, \oplus, \odot)$, ὅπου οἱ πράξεις $\oplus$ καί $\odot$ ὁρίζονται ὡς ἑξῆς:

$$\alpha \oplus \beta = \alpha + \beta + 1 \quad \text{καί} \quad \alpha \odot \beta = \alpha + \beta + \alpha\beta,$$

εἶναι ἀντιμεταθετικός δακτύλιος. Ἔχει μοναδιαῖο στοιχεῖο ὁ δακτύλιος αὐτός;

4. Ἡ δομή $(A, +, \cdot)$, ὅπου $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ καί πράξεις $+, \cdot$ πού ὁρίζονται στούς πίνακες τοῦ σχήματος 9,

| + | α | β | γ | δ |
|---|---|---|---|---|
| α | α | β | γ | δ |
| β | β | α | δ | γ |
| γ | γ | δ | α | β |
| δ | δ | γ | β | α |

| . | α | β | γ | δ |
|---|---|---|---|---|
| α | α | α | α | α |
| β | α | β | | |
| γ | α | | | α |
| δ | α | β | γ | |

Σχ. 9

εἶναι ἕνας δακτύλιος. Νά συμπληρώσετε τόν πίνακα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Εἶναι αὐτός ὁ δακτύλιος ἀντιμεταθετικός; Ἔχει μοναδιαῖο στοιχεῖο;

5. Ἄν (A, +, ·) εἶναι ἕνας δακτύλιος, δεῖξτε ὅτι γιά κάθε $\alpha, \beta \in A$ ἰσχύει

$$(-\alpha)\,(-\beta) = \alpha\beta.$$

6. Ποιές ἀπό τίς παρακάτω δομές

| | | | |
|---|---|---|---|
| (i) | (A, +, ·) | μέ | $A = \{2\nu+1 \mid \nu \in \mathbf{Z}\}$, |
| (ii) | (B, +, ·) | μέ | $B = \{2\nu \mid \nu \in \mathbf{Z}\}$, |
| (iii) | (Γ, +, ·) | μέ | $\Gamma = \{\nu\sqrt{5} \mid \nu \in \mathbf{Z}\}$, |
| (iv) | (Δ, +, ·) | μέ | $\Delta = \{\alpha\sqrt{5} \mid \alpha \in \mathbf{Q}\}$, |
| (v) | (E, +, ·) | μέ | $E = \{\mu+\nu\sqrt{5} \mid \mu, \nu \in \mathbf{Z}\}$, |
| (vi) | (H, +, ·) | μέ | $H = \{p+q\sqrt{5} \mid p, q \in \mathbf{Q}\}$. |

εἶναι ἀκέραιες περιοχές;

# 4. ΣΩΜΑΤΑ

## 4.1. Ἡ ἔννοια τοῦ σώματος

Ἄς ἐξετάσουμε τή δομή (**Q**, +, ·). Ἡ δομή αὐτή εἶναι ἕνας ἀντιμεταθετικός δακτύλιος μέ μοναδιαῖο στοιχεῖο, ἀφοῦ

α) οἱ πράξεις + καί · εἶναι ἀντιμεταθετικές καί προσεταιριστικές,

β) ἡ πράξη · εἶναι ἐπιμεριστική ὡς πρός τήν πράξη +,

γ) τά 0 καί 1 εἶναι οὐδέτερα στοιχεῖα ὡς πρός τίς πράξεις +, καί · ἀντιστοίχως καί

δ) κάθε στοιχεῖο τοῦ **Q** ἔχει ἀντίθετο στοιχεῖο.

Εἶναι γνωστό ὅμως ὅτι κάθε στοιχεῖο α τοῦ $\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q}-\{0\}$ ἔχει ἀντίστροφο στοιχεῖο τό $\alpha^{-1}$, δηλαδή

$$\alpha \cdot \alpha^{-1} = 1,$$

ἰδιότητα πού δέν ἀπαιτεῖται στόν ὁρισμό τοῦ δακτυλίου. Γιά τό λόγο αὐτό ἡ δομή (**Q**, +, ·) ὀνομάζεται *σῶμα*. Ἔτσι ἔχουμε τόν ἀκόλουθο ὁρισμό.

**Ὁρισμός.** Μιά δομή (A, +, ·) ὀνομάζεται **σῶμα,** ἄν καί μόνο ἄν ἰσχύουν οἱ ἀκόλουθες ἰδιότητες:

($\Sigma_1$) Ἡ δομή (A, +, ·) εἶναι ἕνας μή μηδενικός ἀντιμεταθετικός δακτύλιος.

($\Sigma_2$) Ἡ δομή ($A^*$, ·) εἶναι μία ὁμάδα, ὅπου $A^* = A-\{0\}$.

Ἔτσι σέ ἕνα σῶμα (A, +, ·) γιά κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in A$ ἰσχύουν οἱ ἀκόλουθες ἰδιότητες:

$$\left.\begin{array}{l}1.\ (\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)\\ 2.\ \alpha+0=0+\alpha=\alpha\\ 3.\ \alpha+(-\alpha)=(-\alpha)+\alpha=0\\ 4.\ \alpha+\beta=\beta+\alpha\\ 5.\ \alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha\\ 6.\ \alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma\end{array}\right\}(\Sigma_1)$$

$$\left.\begin{array}{l}7.\ (\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)\\ 8.\ \alpha\cdot 1=\alpha\\ 9.\ \alpha\cdot\alpha^{-1}=1,\quad \text{γιά}\quad \alpha\neq 0\end{array}\right\}(\Sigma_2)$$

**Σημείωση.** Τό ὅτι ἡ ἰδιότητα 8 ἰσχύει καί γιά $\alpha=0$, εἶναι συνέπεια τῆς ἰδιότητας 1 τῆς 3.2.

**Παραδείγματα:**

1. Ἡ δομή $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ εἶναι σῶμα, γιατί στό $\mathbf{R}$ ἰσχύουν, ὅπως γνωρίζουμε, οἱ παραπάνω ἰδιότητες 1.–9. Ὁμοίως ἡ δομή $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ εἶναι σῶμα.
2. Τό σύνολο $A=\{1,2\}$ μαζί μέ τίς πράξεις $+$ καί $\cdot$, πού ὁρίζονται στούς πίνακες τοῦ σχήματος 10, εἶναι ἐπίσης ἕνα παράδειγμα σώματος.

| + | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

| . | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |

Σχ. 10

## 4.2. Βασικές ἰδιότητες σέ ἕνα σῶμα

Εἶναι γνωστό ὅτι στό σῶμα $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ἰσχύει

$$\alpha\cdot\beta=0 \Rightarrow \alpha=0 \text{ εἴτε } \beta=0.$$

Αὐτή εἶναι μιά ἰδιότητα, πού τήν ἔχουν ὅλα τά σώματα.

**Ἰδιότητα 1.** Ἄν $(A, +, \cdot)$ εἶναι σῶμα, τότε γιά $\alpha,\beta\in A$ ἰσχύει ἡ συνεπαγωγή

$$\boxed{\alpha\cdot\beta=0 \Rightarrow \alpha=0 \text{ εἴτε } \beta=0}$$

**Ἀπόδειξη.** Ἄν $\alpha=0$, τότε λόγω τῆς ἰδιότητας 1 τῆς 3·2 ἡ συνεπαγωγή ἰσχύει.

Ἔστω $\alpha\cdot\beta=0$ καί $\alpha\neq 0$. Τότε ὑπάρχει τό ἀντίστροφο $\alpha^{-1}$ τοῦ $\alpha\neq 0$, ὁπότε πολλαπλασιάζοντας καί τά δύο μέλη τῆς ἰσότητας $\alpha\cdot\beta=0$ μέ $\alpha^{-1}$ παίρνουμε.

$$\alpha^{-1}\cdot(\alpha\cdot\beta)=\alpha^{-1}\cdot 0.$$

Λόγω τῆς ἰδιότητας 1 τῆς 3.2 τό δεύτερο μέλος εἶναι τό στοιχεῖο 0. Ἔτσι ἔχουμε

$$(\alpha^{-1} \cdot \alpha) \cdot \beta = 0$$

καί ἑπομένως

$$1 \cdot \beta = 0,$$

δηλαδή $\beta = 0$.

**Πόρισμα.** Κάθε σῶμα εἶναι ἀκέραια περιοχή.

Εἶναι γνωστό ἀκόμα ὅτι στό σῶμα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ἡ ἐξίσωση

$$\alpha x = \beta$$

μέ $\alpha \neq 0$ ἔχει μοναδική λύση στό $\mathbf{R}$.Αὐτό ἀποτελεῖ γενική ἰδιότητα τῶν σωμάτων.

**Ἰδιότητα 2.** Ἄν $(A, +, \cdot)$ εἶναι σῶμα καί $\alpha,\beta \in A$ μέ $\alpha \neq 0$, τότε ἡ ἐξίσωση

$$\alpha \cdot x = \beta$$

ἔχει μοναδική λύση στό A.

Ἡ ἀπόδειξη εἶναι ἴδια μέ ἐκείνη τῆς ἰδιότητας 4 τῆς 2·3. Ἡ μοναδική λύση τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εἶναι τό στοιχεῖο $\alpha^{-1} \cdot \beta \; (= \beta \cdot \alpha^{-1})$, πού τό συμβολίζουμε μέ $\frac{\beta}{\alpha}$, δηλαδή $\frac{\beta}{\alpha} = \beta \cdot \alpha^{-1}$.

## 4.3. Ἀσκήσεις

1. Βρεῖτε ποιές ἀπό τίς παρακάτω δομές εἶναι σώματα:
   (i) $(\mathbf{Z}_4, +, \cdot)$,
   (ii) $(\mathbf{Z}_5, +, \cdot)$,
   (iii) $(\mathbf{Z}_7, +, \cdot)$,
   (iv) $(A, +, \cdot)$, ὅπου $A = \{x+y\sqrt{5} \mid x, y \in \mathbf{Q}\}$ καί $+, \cdot$ οἱ γνωστές πράξεις στό $\mathbf{R}$.

2. Ἔστω $A = \{\alpha = (x,y) \mid x,y \in \mathbf{Q}\}$.
   (i) Ἄν $\alpha+\alpha'=(x+x', y+y')$ καί $\alpha \,.\, \alpha' = (xx' + 2yy', xy' + x'y)$, εἶναι σῶμα ἡ δομή $(A, +, \cdot)$;
   (ii) Ἄν $\alpha+\alpha' = (x+x', y+y')$ καί $\alpha\cdot\alpha' = (xx'-yy', xy' + x'y)$, εἶναι σῶμα ἡ δομή $(A, +, \cdot)$;

3. Ἔστω $(A, +, \cdot)$ ἕνα σῶμα. Δεῖξτε ὅτι
   (i) ἄν $\alpha,\beta \in A^*$, τότε $(\alpha\cdot\beta)^{-1} = \alpha^{-1}\cdot\beta^{-1}$,
   (ii) ἄν $\alpha,\gamma \in A$ καί $\beta,\delta \in A^*$, τότε
   $$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\cdot\delta + \beta\cdot\gamma}{\beta\cdot\delta}.$$

4. Νά ἐπιλυθεῖ τό σύστημα
   $$\widehat{2}\cdot x + \widehat{3}\cdot y = \widehat{2}$$
   $$\widehat{1}\cdot x + \widehat{2}\cdot y = \widehat{4}$$
   στό σῶμα $(\mathbf{Z}_5, +, \cdot)$.

## 5. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

### 5.1. Ἡ ἔννοια τοῦ διανυσματικοῦ χώρου

Ἄς συμβολίσουμε μέ Δ τό σύνολο τῶν διανυσμάτων ἑνός ἐπιπέδου. Εἶναι γνωστό ὅτι ἡ πρόσθεση στό Δ ἔχει τίς ἀκόλουθες ἰδιότητες:

1. Γιά τρία ὁποιαδήποτε διανύσματα $\vec{x}, \vec{y}$ καί $\vec{z}$ τοῦ Δ ἰσχύει

$$(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}=\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z}).$$

2. Γιά κάθε διάνυσμα $\vec{x}$ τοῦ Δ ἰσχύει

$$\vec{x}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{x}=\vec{x}.$$

3. Γιά κάθε διάνυσμα $\vec{x}$ τοῦ Δ ἰσχύει

$$\vec{x}+(-\vec{x})=(-\vec{x})+\vec{x}=\vec{0}.$$

4. Γιά δύο ὁποιαδήποτε διανύσματα $\vec{x}$ καί $\vec{y}$ τοῦ Δ ἰσχύει

$$\vec{x}+\vec{y}=\vec{y}+\vec{x}.$$

Λόγω τῶν παραπάνω ἰδιοτήτων ἡ δομή $(\Delta, +)$ εἶναι μιά ἀντιμεταθετική ὁμάδα.

Ἐξάλλου ὁ πολλαπλασιασμός πραγματικῶν ἀριθμῶν μέ διανύσματα τοῦ Δ ἔχει, ὡς γνωστό, τίς ἀκόλουθες ἰδιότητες:

α. Γιά δύο ὁποιαδήποτε διανύσματα $\vec{x}$ καί $\vec{y}$ τοῦ Δ καί γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό λ ἰσχύει

$$\lambda\,.\,(\vec{x}+\vec{y})=\lambda\cdot\vec{x}+\lambda\cdot\vec{y}$$

β. Γιά κάθε $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ καί γιά κάθε διάνυσμα $\vec{x}$ τοῦ Δ ἰσχύουν

$$(\lambda+\mu)\cdot\vec{x}=\lambda\cdot\vec{x}+\mu\cdot\vec{x},$$

$$\lambda\cdot(\mu\cdot\vec{x})=(\lambda\cdot\mu)\cdot\vec{x}$$

γ. Γιά κάθε διάνυσμα $\vec{x}$ τοῦ Δ ἰσχύει

$$1\cdot\vec{x}=\vec{x},$$

ὅπου 1 εἶναι τό μοναδιαῖο στοιχεῖο τοῦ σώματος τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Ἀπό τίς παραπάνω ἰδιότητες ὁδηγούμαστε στή θεώρηση μιᾶς νέας ἀλγεβρικῆς δομῆς, πού ὀνομάζεται *διανυσματικός* ἤ *γραμμικός χῶρος*. Ἔτσι ἔχουμε τόν παρακάτω ὁρισμό.

**Ὁρισμός.** Ἕνα μή κενό σύνολο V θά ὀνομάζεται **διανυσματικός ἤ γραμμικός χῶρος πάνω στό σῶμα K**[1], ἄν καί μόνο ἄν ἰσχύουν οἱ ἀκόλουθες ἰδιότητες:

($\Gamma_1$) Στό V εἶναι ὁρισμένη μιά ἐσωτερική πράξη $+$ τέτοια, ὥστε ἡ δομή $(V, +)$ νά εἶναι ἀντιμεταθετική ὁμάδα.

($\Gamma_2$) Στό V εἶναι ὁρισμένη μιά ἐξωτερική πράξη $\cdot$ μέ σύνολο τελεστῶν τό K τέτοια, ὥστε γιά κάθε $x, y \in V$ καί $\alpha, \beta \in K$ νά ἰσχύουν οἱ ἀκόλουθες ἰδιότητες:

(i) $\alpha \cdot (x+y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$ (πρώτη ἐπιμεριστική ἰδιότητα),

(ii) $(\alpha+\beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$ (δεύτερη ἐπιμεριστική ἰδιότητα),

(iii) $(\alpha \cdot \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$ (προσεταιριστική ἰδιότητα),

(iv) $1 \cdot x = x$,

ὅπου 1 εἶναι τό μοναδιαῖο στοιχεῖο τοῦ σώματος K.

Ἡ πρόσθεση στό V θά ὀνομάζεται **διανυσματική πρόσθεση** καί ἡ ἐξωτερική πράξη $\cdot$ στό V (μέ σύνολο τελεστῶν τό K) **βαθμωτός πολλαπλασιασμός** στό V.

Εἰδικότερα, ἕνας διανυσματικός χῶρος πάνω στό σῶμα **R** θά ὀνομάζεται **πραγματικός διανυσματικός** (ἤ **γραμμικός**) **χῶρος.**

**Παρατήρηση.** Στόν παραπάνω ὁρισμό βλέπουμε ὅτι τό ἴδιο σύμβολο $+$ χρησιμοποιεῖται τόσο γιά τήν πρόσθεση στό K, ὅπως π.χ. στό πρῶτο μέλος τῆς (ii), ὅσο καί γιά τή διανυσματική πρόσθεση, ὅπως π.χ. στό δεύτερο μέλος τῆς (ii). Γι' αὐτό δέν πρέπει νά γίνεται σύγχυση ἀνάμεσα στίς δύο αὐτές πράξεις. Ἀνάλογη παρατήρηση ἰσχύει γιά τό σύμβολο $\cdot$

**Σημείωση.** Τό οὐδέτερο στοιχεῖο ὡς πρός τή διανυσματική πρόσθεση θά συμβολίζεται μέ **0** (μηδενικό στοιχεῖο τοῦ διανυσματικοῦ χώρου), ἐνῶ τό οὐδέτερο στοιχεῖο ὡς πρός τήν πρόσθεση στό K μέ 0.

**Παραδείγματα:**

1. Στό παράδειγμα 5 τῆς 1.1 ἔχουν ὁριστεῖ οἱ ἀκόλουθες πράξεις στό σύνολο $V = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$:

(i) μιά ἐσωτερική πράξη $+$:

$$(x_1,y_1) + (x_2,y_2) = (x_1+x_2,\ y_1+y_2)$$

καί

(ii) μιά ἐξωτερική πράξη $\cdot$ μέ σύνολο τελεστῶν τό **R** ὡς ἑξῆς:

$$\lambda \cdot (x,y) = (\lambda \cdot x, \lambda \cdot y) \qquad (\lambda \in \mathbf{R})$$

Μέ τίς παραπάνω πράξεις τό σύνολο V εἶναι ἕνας πραγματικός διανυσματικός χῶρος. Πράγματι,

α) ἡ δομή $(V, +)$ εἶναι ἀντιμεταθετική ὁμάδα μέ οὐδέτερο στοιχεῖο ὡς πρός τήν πράξη $+$ τό $(0,0)$ καί ἀντίθετο στοιχεῖο τοῦ $(x,y)$ τό $(-x, -y)$,

β) γιά δύο ὁποιαδήποτε στοιχεῖα $(x_1,y_1)$, $(x_2,y_2)$ τοῦ V καί $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ ἰσχύουν

(i) $\alpha \cdot [(x_1,y_1)+(x_2,y_2)] = \alpha \cdot (x_1+x_2,\ y_1+y_2) = (\alpha \cdot x_1 + \alpha \cdot x_2,\ \alpha \cdot y_1 + \alpha \cdot y_2) =$
$= (\alpha \cdot x_1,\ \alpha \cdot y_1) + (\alpha \cdot x_2,\ \alpha \cdot y_2) = \alpha \cdot (x_1,y_1) + \alpha \cdot (x_2,y_2)$,

1. Γιά λόγους συντομίας θά γράφουμε «σῶμα K» ἀντί «σῶμα (K, +, .)»

(ii) $(\alpha+\beta)\cdot(x_1, y_1) = (\alpha\cdot x_1+\beta\cdot x_1,\ \alpha\cdot y_1 + \beta\cdot y_1) = (\alpha\cdot x_1,\ \alpha\cdot y_1) +$
$+ (\beta\cdot x_1, \beta\cdot y_1) = \alpha\cdot(x_1,y_1) + \beta\cdot(x_1,y_1)$,

(iii) $(\alpha\cdot\beta)\cdot(x_1,y_1) = (\alpha\cdot\beta\cdot x_1,\ \alpha\cdot\beta\cdot y_1) = \alpha\cdot(\beta\cdot x_1, \beta\cdot y_1) =$
$= \alpha\cdot[\beta\cdot(x_1, y_1)]$,

(iv) $1\cdot(x_1,y_1) = (1\cdot x_1,\ 1\cdot y_1) = (x_1,y_1)$.

Γενικά, τό σύνολο

$$\mathbf{R}^{\nu} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_\nu) \mid x_1, x_2, \ldots, x_\nu \in \mathbf{R}\}$$

μέ ἰσότητα

$$(x_1, x_2, \ldots, x_\nu) = (y_1, y_2, \ldots, y_\nu) \Leftrightarrow x_k = y_k \quad \text{γιά κάθε } \kappa \in \{1,2,\ldots,\nu\}$$

καί μέ

α) ἐσωτερική πράξη $+$:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_\nu) + (y_1, y_2, \ldots, y_\nu) = (x_1+y_1,\ x_2+y_2, \ldots, x_\nu+y_\nu),$$

β) ἐξωτερική πράξη (μέ σύνολο τελεστῶν τό $\mathbf{R}$):

$$\lambda\cdot(x_1, x_2, \ldots, x_\nu) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_\nu) \qquad (\lambda \in \mathbf{R})$$

εἶναι ἕνας πραγματικός διανυσματικός χῶρος μέ μηδενικό στοιχεῖο τό $(0,0,\ldots,0)$ καί ἀντίθετο τοῦ $(x_1,x_2,\ldots,x_\nu)$ τό $(-x_1,-x_2,\ldots,-x_\nu)$.

2. Τό σύνολο V ὅλων τῶν τριωνύμων

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma \qquad (\alpha,\beta,\gamma \in \mathbf{R})$$

μέ ἰσότητα

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma \equiv \alpha' x^2 + \beta' x + \gamma' \Leftrightarrow \alpha = \alpha' \quad \text{καί} \quad \beta = \beta' \quad \text{καί} \quad \gamma = \gamma'$$

καί μέ

α) ἐσωτερική πράξη $+$:

$$(\alpha x^2+\beta x+\gamma) + (\alpha' x^2+\beta' x^2+\gamma') \equiv (\alpha+\alpha')x^2 + (\beta+\beta')x + (\gamma+\gamma')$$

β) ἐξωτερική πράξη (μέ σύνολο τελεστῶν τό $\mathbf{R}$):

$$\lambda\cdot(\alpha x^2+\beta x+\gamma) \equiv (\lambda\alpha)x^2 + (\lambda\beta)x + (\lambda\gamma)$$

εἶναι ἕνας πραγματικός γραμμικός χῶρος μέ μηδενικό στοιχεῖο τό $0x^2+0x+0$ καί ἀντίθετο τοῦ $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ τό $(-\alpha)x^2+(-\beta)x+(-\gamma)$.

3. Τό σύνολο $\mathbf{C}$ τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν μέ τή γνωστή πρόσθεση καί τήν ἐξωτερική πράξη, πού ὁρίζεται ἀπό τήν ἰσότητα

$$\lambda\cdot(\alpha+\beta i) = (\lambda\alpha) + (\lambda\beta)i \qquad (\lambda \in \mathbf{R}),$$

εἶναι ἕνας πραγματικός γραμμικός χῶρος, γιατί ἡ δομή $(\mathbf{C}, +)$ εἶναι ἀντιμεταθετική ὁμάδα καί εὔκολα μπορεῖ νά ἀποδειχτεῖ ὅτι ἱκανοποιοῦνται οἱ ἰδιότητες (i) – (iv) τοῦ ὁρισμοῦ.

## 5.2. Βασικές ἰδιότητες σέ ἕνα διανυσματικό χῶρο

Ἔστω V ἕνας διανυσματικός χῶρος πάνω στό σῶμα K. Μέ τή βοήθεια τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ διανυσματικοῦ χώρου μποροῦμε νά ἀποδείξουμε τίς παρακάτω ἰδιότητες.

**Ἰδιότητα 1.** Γιά κάθε $\alpha \in K$ ἰσχύει

$$\boxed{\alpha\cdot\mathbf{0} = \mathbf{0}}$$

**'Απόδειξη.** Γιά ἕνα στοιχεῖο x τοῦ V ἰσχύει

$$x + \mathbf{0} = x,$$

ὁπότε

$$\alpha \cdot (x + \mathbf{0}) = \alpha \cdot x$$

ἤ λόγω τῆς πρώτης ἐπιμεριστικῆς ἰδιότητας

$$\alpha \cdot x + \alpha \cdot \mathbf{0} = \alpha \cdot x,$$

πού σημαίνει ὅτι τό $\alpha \cdot \mathbf{0}$ εἶναι τό μηδενικό στοιχεῖο $\mathbf{0}$ τοῦ διανυσματικοῦ χώρου, δηλαδή

$$\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

**'Ιδιότητα 2.** Γιά κάθε $x \in V$ ἰσχύει

$$\boxed{0 \cdot x = \mathbf{0}}\,.$$

**'Απόδειξη.** Γιά ἕνα στοιχεῖο α τοῦ K ἰσχύει

$$\alpha + 0 = \alpha,$$

ὁπότε

$$(\alpha + 0) \cdot x = \alpha \cdot x$$

ἤ λόγω τῆς δεύτερης ἐπιμεριστικῆς ἰδιότητας

$$\alpha \cdot x + 0 \cdot x = \alpha \cdot x,$$

πού σημαίνει ὅτι τό $0 \cdot x$ εἶναι τό μηδενικό στοιχεῖο $\mathbf{0}$ τοῦ διανυσματικοῦ χώρου, δηλαδή

$$0 \cdot x = \mathbf{0}.$$

**'Ιδιότητα 3.** Γιά $\alpha \in K$ καί $x \in V$ ἰσχύει ἡ συνεπαγωγή

$$\boxed{\alpha \cdot x = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha = 0 \text{ εἴτε } x = \mathbf{0}}$$

**'Απόδειξη.** Ἄν $\alpha = 0$, ἡ συνεπαγωγή προφανῶς ἰσχύει. Ἔστω $\alpha \cdot x = \mathbf{0}$ καί $\alpha \neq 0$. Τότε, ἐπειδή τό K εἶναι σῶμα, ὑπάρχει τό ἀντίστροφο $\alpha^{-1}$ τοῦ $\alpha \neq 0$. Ἔτσι ἔχουμε

$$x = 1 \cdot x = (\alpha^{-1} \cdot \alpha) \cdot x = \alpha^{-1} \cdot (\alpha \cdot x) = \alpha^{-1} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

**Πόρισμα.** Γιά $\alpha \in K$ καί $x \in V$ ἰσχύει ἡ συνεπαγωγή

$$\boxed{\alpha \neq 0 \ \text{ καί } \ x \neq \mathbf{0} \ \Rightarrow \ \alpha \cdot x \neq \mathbf{0}}$$

**'Ιδιότητα 4.** Γιά κάθε $\alpha \in K$ καί $x \in V$ ἰσχύει

$$\boxed{(-\alpha) \cdot x = -(\alpha \cdot x)}$$

**'Απόδειξη.** Γιά κάθε $\alpha \in K$ ἰσχύει

$$\alpha + (-\alpha) = 0,$$

ὁπότε πολλαπλασιάζοντας καί τά δύο μέλη μέ ἕνα στοιχεῖο $x$ τοῦ $V$ ἔχουμε

$$(\alpha+(-\alpha)) \cdot x = 0 \cdot x$$

ἤ

$$\alpha \cdot x + (-\alpha) \cdot x = \mathbf{0},$$

πού σημαίνει ὅτι τό $(-\alpha)\cdot x$ εἶναι τό ἀντίθετο τοῦ $\alpha \cdot x$ ὡς πρός τή διανυσματική πρόσθεση, δηλαδή

$$(-\alpha)\cdot x = -(\alpha \cdot x).$$

**Πόρισμα.** Γιά κάθε $x \in V$ ἰσχύει

$$\boxed{(-1)x = -x}\,.$$

Παρατηρῆστε ὅτι τίς παραπάνω ἰδιότητες τίς γνωρίσαμε καί στό διανυσματικό λογισμό.

## 5.3. Ἡ ἔννοια τοῦ διανυσματικοῦ (γραμμικοῦ) ὑπόχωρου

Στό παράδειγμα 1 τῆς 5.1 εἴδαμε ὅτι τό $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ μέ κατάλληλες πράξεις εἶναι ἕνας πραγματικός διανυσματικός χῶρος. Ἄς πάρουμε τώρα τό ἀκόλουθο ὑποσύνολο τοῦ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$:

$$A = \{(\alpha,0) \mid \alpha \in \mathbf{R}\}.$$

Παρατηροῦμε ὅτι

α) ἡ διανυσματική πρόσθεση δύο στοιχείων τοῦ A δίνει ἀποτέλεσμα ἕνα στοιχεῖο τοῦ A· πράγματι,

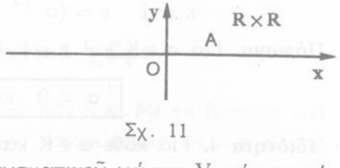
$$(\alpha,0) + (\beta, 0) = (\alpha+\beta,\, 0+0) = (\alpha+\beta,\, 0) \in A,$$

β) ὁ πολλαπλασιασμός ἑνός πραγματικοῦ ἀριθμοῦ μέ ἕνα στοιχεῖο τοῦ A δίνει ἀποτέλεσμα πάλι στοιχεῖο τοῦ A· πράγματι,

$$\lambda \cdot (\alpha,0) = (\lambda\cdot\alpha,\, \lambda\cdot 0) = (\lambda\cdot\alpha,\, 0) \in A.$$

Γι' αὐτές τίς δύο ἰδιότητες λέμε ὅτι τό A εἶναι ἕνας διανυσματικός ὑπόχωρος τοῦ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$.

Ἄν ταυτίσουμε τό $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ μέ ἕνα καρτεσιανό ἐπίπεδο, τότε τό παραπάνω σύνολο A ταυτίζεται μέ τόν ἄξονα τῶν τετμημένων τοῦ καρτεσιανοῦ ἐπιπέδου (Σχ. 11).



Σχ. 11

Δίνουμε τώρα τόν ἀκόλουθο ὁρισμό.

**Ὁρισμός.** Ἕνα μή κενό ὑποσύνολο A ἑνός διανυσματικοῦ χώρου V πάνω στό σῶμα K ὀνομάζεται **διανυσματικός** (ἤ **γραμμικός**) **ὑπόχωρος** τοῦ V, ἄν καί μόνο ἄν γιά κάθε $x, y \in A$ καί $\alpha \in K$ ἰσχύουν

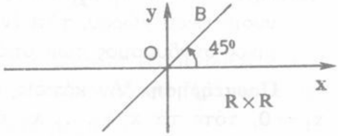
$$x+y \in A \quad \text{καί} \quad \alpha \cdot x \in A.$$

**Παρατήρηση.** Σύμφωνα μέ τόν παραπάνω ορισμό ένας διανυσματικός υπόχωρος A τοῦ V περιέχει πάντα τό μηδενικό στοιχεῖο **0** τοῦ V, γιατί τό A μαζί μέ ἕνα στοιχεῖο του x θά περιέχει καί τό $0 \cdot x = \mathbf{0}$.

**Σημείωση.** Μέ τή βοήθεια τοῦ προηγούμενου ὁρισμοῦ ἀποδεικνύεται εὔκολα ὅτι κάθε διανυσματικός ὑπόχωρος τοῦ V εἶναι γραμμικός χῶρος πάνω στό σῶμα K.

**Παραδείγματα:**

1. Τό σύνολο $B = \{(\alpha,\alpha) \mid \alpha \in \mathbf{R}\}$ εἶναι ἕνας γραμμικός ὑπόχωρος τοῦ διανυσματικοῦ χώρου $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ (Σχ. 12).
2. Ἄν V εἶναι ἕνας διανυσματικός χῶρος πάνω στό σῶμα K, τότε τό σύνολο
$$\Gamma = \{\mathbf{0}\}$$
εἶναι διανυσματικός ὑπόχωρος τοῦ V, ἀφοῦ $\mathbf{0}+\mathbf{0} = \mathbf{0} \in \Gamma$ καί $\alpha.\mathbf{0}=\mathbf{0} \in \Gamma$ γιά ὅλα τά στοιχεῖα α τοῦ K.



Σχ. 12

## 5.4. Γραμμική ἀνεξαρτησία - Γραμμική ἐξάρτηση

Ἄν V εἶναι ἕνας γραμμικός χῶρος πάνω στό σῶμα K, τότε κάθε παράσταση
$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_\nu x_\nu$$
μέ $\lambda_i \in K$ καί $x_i \in V$ ($i \in \{1,2,\ldots,\nu\}$) εἶναι ἕνα στοιχεῖο τοῦ V, πού ὀνομάζεται **γραμμικός συνδυασμός** τῶν $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ καί τά $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$ λέγονται **συντελεστές** του.

Ἄς πάρουμε τώρα τά στοιχεῖα (1,0) καί (0,1) τοῦ γνωστοῦ μας πραγματικοῦ διανυσματικοῦ χώρου $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Θά ἐξετάσουμε σέ ποιά περίπτωση ἕνας γραμμικός συνδυασμός αὐτῶν τῶν στοιχείων εἶναι ἴσος μέ τό μηδενικό στοιχεῖο (0,0) τοῦ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Ἄν $\lambda_1, \lambda_2 \in R$, ἔχουμε
$$\lambda_1(1,0)+\lambda_2(0,1) = (0,0) \Leftrightarrow (\lambda_1,0) + (0,\lambda_2)=(0,0) \Leftrightarrow (\lambda_1, \lambda_2) = (0,0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda_1 = 0 \quad \text{καί} \quad \lambda_2 = 0.$$

Ἄρα ἕνας γραμμικός συνδυασμός τῶν (1,0) καί (0,1) εἶναι ἴσος μέ τό (0, 0) μόνο στήν περίπτωση: $\lambda_1 = 0$ καί $\lambda_2 = 0$. Γιά τό λόγο αὐτό τά (1,0) καί (0,1) λέμε ὅτι εἶναι *γραμμικῶς ἀνεξάρτητα* στοιχεῖα τοῦ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Ἔτσι ἔχουμε τόν ἀκόλουθο ὁρισμό.

**Ὁρισμός.** Ἔστω V ἕνας διανυσματικός χῶρος πάνω στό σῶμα K. Τότε τά στοιχεῖα $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ τοῦ V ὀνομάζονται **γραμμικῶς ἀνεξάρτητα**, ἄν καί μόνο ἄν
$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_\nu x_\nu = \mathbf{0} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_\nu = 0$$
Ἄν τά $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ δέν εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα στοιχεῖα τοῦ V, τότε αὐτά ὀνομάζονται **γραμμικῶς ἐξαρτημένα**.

Ἔτσι, ἄν τά $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ εἶναι γραμμικῶς ἐξαρτημένα στοιχεῖα τοῦ V, τότε μπορεῖ ἕνας γραμμικός συνδυασμός τους $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_\nu x_\nu$ νά εἶναι ἴσος μέ **0** χωρίς ὅλοι οἱ συντελεστές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$ νά εἶναι ἴσοι μέ 0. Ἄς ὑποθέσουμε χάρη εὐκολίας ὅτι $\lambda_1 \neq 0$. Τότε ἀπό τήν ἰσότητα $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_\nu x_\nu = \mathbf{0}$ ἕπεται ὅτι

$$x_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} x_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} x_3 - \ldots - \frac{\lambda_\nu}{\lambda_1} x_\nu .$$

Ἑπομένως ἔχουμε ἀποδείξει τήν ἀκόλουθη ἰδιότητα.

**Ἰδιότητα.** Ἄν τά $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ εἶναι γραμμικῶς ἐξαρτημένα στοιχεῖα ἑνός διανυσματικοῦ χώρου, τότε ἕνα τουλάχιστον ἀπό αὐτά ἐκφράζεται σάν γραμμικός συνδυασμός τῶν ὑπόλοιπων στοιχείων.

**Παρατήρηση.** Ἄν κάποιο ἀπό τά στοιχεῖα $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ εἶναι τό **0**, π.χ. $x_1 = \mathbf{0}$, τότε τά $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ εἶναι γραμμικῶς ἐξαρτημένα, γιατί γιά $\lambda_1 \neq 0$ ἰσχύει

$$\lambda_1 \cdot \mathbf{0} + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_\nu = \mathbf{0}.$$

**Παραδείγματα:**

1. Τά στοιχεῖα (1,1) καί (–1,–1) τοῦ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ εἶναι γραμμικῶς ἐξαρτημένα, γιατί ὁ γραμμικός συνδυασμός τους

$$3 \cdot (1,1) + 3 \cdot (-1,-1)$$

εἶναι ἴσος μέ τό μηδενικό στοιχεῖο (0,0) τοῦ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ καί οἱ συντελεστές του εἶναι $\neq 0$.

2. Στόν πραγματικό γραμμικό χῶρο V ὅλων τῶν τριωνύμων

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma \qquad (\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R})$$

(πού εἴδαμε στό παράδειγμα 2 τῆς 5.1) τά $1x^2 + 0x + 0 \equiv x^2$, $0x^2 + 1x + 0 \equiv x$ καί $0x^2 + 0x + 1 \equiv 1$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα στοιχεῖα, γιατί

$$\lambda_1 (x^2) + \lambda_2 (x) + \lambda_3 (1) \equiv 0x^2 + 0x + 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda_1 x^2 + \lambda_2 x + \lambda_3 \equiv 0x^2 + 0x + 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0 \text{ καί } \lambda_2 = 0 \text{ καί } \lambda_3 = 0.$$

## 5.5. Βάση καί διάσταση ἑνός διανυσματικοῦ χώρου

Στήν 5.4. εἴδαμε ὅτι τά $e_1 = (1,0)$ καί $e_2 = (0,1)$ εἶναι δύο γραμμικῶς ἀνεξάρτητα στοιχεῖα τοῦ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Ἄς πάρουμε τώρα ἕνα στοιχεῖο $(\alpha, \beta)$ τοῦ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Τό στοιχεῖο αὐτό μπορεῖ νά γραφτεῖ σάν γραμμικός συνδυασμός τῶν $e_1$ καί $e_2$ μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο:

$$(\alpha, \beta) = (\alpha + 0,\ 0 + \beta) = (\alpha, 0) + (0, \beta) = \alpha \cdot (1,0) + \beta \cdot (0,1) =$$
$$= \alpha \cdot e_1 + \beta \cdot e_2.$$

Ἔτσι βλέπουμε ὅτι κάθε στοιχεῖο τοῦ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ μπορεῖ νά γραφτεῖ σάν γραμμικός συνδυασμός τῶν γραμμικῶς ἀνεξάρτητων στοιχείων $e_1$, $e_2$. Γιά τό λόγο αὐτό τά $e_1$, $e_2$ λέμε ὅτι ἀποτελοῦν μιά *βάση* τοῦ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Δίνουμε τώρα τόν ἀκόλουθο ὁρισμό.

**Ὁρισμός.** Ἄν $V$ εἶναι ἕνας διανυσματικός χῶρος πάνω στό σῶμα $K$, τότε ἡ νιάδα $(b_1, b_2, \ldots, b_\nu)$ ἀπό στοιχεῖα τοῦ $V$ ὀνομάζεται **βάση τοῦ V**, ἄν καί μόνο ἄν

(i) τά $b_1, b_2, \ldots, b_\nu$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα στοιχεῖα,

(ii) κάθε στοιχεῖο $x$ τοῦ $V$ γράφεται σάν γραμμικός συνδυασμός τῶν $b_1, b_2, \ldots, b_\nu$, δηλαδή

$$x = \lambda_1 \cdot b_1 + \lambda_2 \cdot b_2 + \ldots + \lambda_\nu \cdot b_\nu \tag{1}$$

**Παρατήρηση.** Σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό αὐτό, τά στοιχεῖα $b_1, b_2, \ldots, b_\nu$ εἶναι ἀρκετά γιά νά «κατασκευάσουν» ὅλα τά στοιχεῖα τοῦ $V$ καί γι' αὐτό ἡ ἔννοια τῆς βάσεως ἑνός διανυσματικοῦ χώρου εἶναι πολύ σημαντική.

Ἡ γραμμική ἀνεξαρτησία τῶν στοιχείων τῆς βάσεως ἐξασφαλίζει ὅτι ἡ γραφή ἑνός στοιχείου $x$ τοῦ $V$ μέ τή μορφή (1) εἶναι μοναδική. Πράγματι, ἄν

$$x = \lambda'_1 b_1 + \lambda'_2 b_2 + \ldots + \lambda'_\nu b_\nu,$$

τότε λόγω τῆς (1) ἔχουμε

$$\lambda'_1 \cdot b_1 + \lambda'_2 \cdot b_2 + \ldots + \lambda'_\nu \cdot b_\nu = \lambda_1 . b_1 + \lambda_2 \cdot b_2 + \ldots + \lambda_\nu \cdot b_\nu$$

ἤ

$$\lambda'_1 \cdot b_1 + (-\lambda_1) \cdot b_1 + \lambda'_2 \cdot b_2 + (-\lambda_2) \cdot b_2 + \ldots + \lambda'_\nu \cdot b_\nu + (-\lambda_\nu) \cdot b_\nu = \mathbf{0}$$

ἤ

$$[\lambda'_1 - \lambda_1] \cdot b_1 + [\lambda'_2 - \lambda_2] \cdot b_2 + \ldots + [\lambda'_\nu - \lambda_\nu] \cdot b_\nu = \mathbf{0}$$

ἤ

$$\lambda'_1 - \lambda_1 = \lambda'_2 - \lambda_2 = \ldots = \lambda'_\nu - \lambda_\nu = 0$$

ἤ

$$\lambda'_i = \lambda_i \quad , \text{ γιά κάθε } i \in \{1, 2, \ldots, \nu\}.$$

Οἱ συντελεστές στό δεύτερο μέλος τῆς (1) ὀνομάζονται συντεταγμένες τοῦ $x$ ὡς πρός τή βάση $(b_1, b_2, \ldots, b_\nu)$ καί γράφονται σάν νιάδα

$$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu).$$

**Παραδείγματα:**

1. Τά στοιχεῖα $b_1 = (1,2)$ καί $b_2 = (-1,1)$ σχηματίζουν μιά βάση $(b_1, b_2)$ τοῦ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Πράγματι

   α) τά $b_1, b_2$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα στοιχεῖα, γιατί
   $\lambda_1 \cdot b_1 + \lambda_2 \cdot b_2 = (0,0) \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot (1,2) + \lambda_2 \cdot (-1,1) = (0,0) \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow (\lambda_1, 2\lambda_1) + (-\lambda_2, \lambda_2) = (0,0) \Leftrightarrow (\lambda_1 - \lambda_2, 2\lambda_1 + \lambda_2) = (0,0) \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow \lambda_1 - \lambda_2 = 0$ καί $2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0$ καί $\lambda_2 = 0$,

   β) κάθε στοιχεῖο $(\alpha, \beta)$ τοῦ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ μπορεῖ νά γραφτεῖ σάν γραμμικός συνδυασμός τῶν $b_1, b_2$, γιατί
   $(\alpha, \beta) = \lambda_1 \cdot (1,2) + \lambda_2 \cdot (-1,1) \Leftrightarrow (\alpha, \beta) = (\lambda_1 - \lambda_2, 2\lambda_1 + \lambda_2) \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow \lambda_1 - \lambda_2 = \alpha$ καί $2\lambda_1 + \lambda_2 = \beta \Leftrightarrow \lambda_1 = \dfrac{\alpha + \beta}{3}$ καί $\lambda_2 = \dfrac{-2\alpha + \beta}{3}$.

   Ἔτσι οἱ συντεταγμένες τοῦ $(\alpha, \beta)$ ὡς πρός τή βάση αὐτή εἶναι

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{3}, \frac{-2\alpha+\beta}{3}\right).$$

2. Ὅπως εἴδαμε στήν ἀρχή, τά $e_1 = (1,0)$ καί $e_2 = (0,1)$ σχηματίζουν μιά βάση $(e_1,e_2)$ τοῦ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, ὡς πρός τήν ὁποία οἱ συντεταγμένες ἑνός στοιχείου $(\alpha,\beta)$ τοῦ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ εἶναι $(\alpha,\beta)$. Γιά τό λόγο αὐτό ἡ βάση αὐτή ὀνομάζεται **κανονική βάση** τοῦ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$.

3. Στό παράδειγμα 2 τῆς 5.4 εἴδαμε ὅτι τά $x^2,x,1$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα στοιχεῖα τοῦ πραγματικοῦ γραμμικοῦ χώρου

$$V = \{\alpha x^2 + \beta x + \gamma \mid \alpha,\beta,\gamma \in \mathbf{R}\}$$

Ἐξάλλου κάθε στοιχεῖο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ τοῦ $V$ γράφεται σάν γραμμικός συνδυασμός τῶν $x^2,x,1$ μέ συντελεστές $\alpha,\beta,\gamma$ καί ἑπομένως τά $x^2,x,1$ σχηματίζουν μιά βάση $(x^2,x,1)$ τοῦ $V$, ὡς πρός τήν ὁποία οἱ συντεταγμένες τοῦ $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ εἶναι $(\alpha,\beta,\gamma)$.

Ἀπό τά παραπάνω παραδείγματα 1 καί 2 διαπιστώνουμε ὅτι τά $(b_1,b_2)$ καί $(e_1, e_2)$ εἶναι δύο βάσεις τοῦ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Ἀποδεικνύεται ὅτι κάθε ἄλλη βάση τοῦ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ ἀποτελεῖται ἀπό δύο στοιχεῖα καί γι' αὐτό τό λόγο λέμε ὅτι ἡ *διάσταση* τοῦ γραμμικοῦ χώρου $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ εἶναι **δύο**. Γενικά ὁ γραμμικός χῶρος $\mathbf{R}^\nu$ ἔχει διάσταση $\nu$ καί ἡ κανονική βάση του ἀποτελεῖται ἀπό τά διανύσματα

$$e_1 = (1,0,0,\ldots,0), \quad e_2 = (0,1,0,\ldots,0), \ldots, \quad e_\nu = (0,0,0,\ldots,0,1).$$

Ἀποδεικνύεται γενικά ὅτι, ἄν ἕνας διανυσματικός χῶρος ἔχει μιά βάση ἀπό $\mu$ στοιχεῖα, τότε κάθε ἄλλη βάση του θά ἔχει $\mu$ ἀκριβῶς στοιχεῖα καί τόν ἀριθμό $\mu$ θά τόν ὀνομάζουμε **διάσταση**(1) αὐτοῦ τοῦ διανυσματικοῦ χώρου.

Ἄν $x_1,x_2,\ldots,x_\mu$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα στοιχεῖα ἑνός διανυσματικοῦ χώρου $V$ πάνω στό σῶμα $K$, τότε τό σύνολο

$$\{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_\mu x_\mu \mid \lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\mu \in K\}$$

ὅλων τῶν γραμμικῶν συνδυασμῶν τῶν $x_1,x_2,\ldots,x_\mu$ εἶναι προφανῶς ἕνας γραμμικός ὑπόχωρος $A$ τοῦ $V$. Ὁ $A$ ὀνομάζεται **ὑπόχωρος πού γεννιέται ἀπό τά $x_1$, $x_2$, ..., $x_\mu$**. Σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό τῆς βάσεως τά $x_1,x_2,\ldots,x_\mu$ ἀποτελοῦν μιά βάση τοῦ $A$ καί ἑπομένως ὁ $A$ εἶναι ἕνας διανυσματικός χῶρος μέ διάσταση $\mu$.

## 5.6. Ἀσκήσεις

1. Νά δείξετε ὅτι τό σύνολο

$$\mathbf{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}\}$$

(μέ ἰσότητα καί πράξεις ὅπως ὁρίστηκαν στό παράδειγμα 1 τῆς 5.1) εἶναι ἕνας πραγματικός διανυσματικός χῶρος.

2. Ἄν $V$ εἶναι ἕνας διανυσματικός χῶρος πάνω στό σῶμα $K$, νά δείξετε ὅτι γιά κάθε $\alpha \in K$ καί $x \in V$ ἰσχύει

$$\alpha\cdot(-x) = -(\alpha\cdot x)$$

1. Ὑπάρχουν διανυσματικοί χῶροι μέ μή πεπερασμένη διάσταση. Οἱ ἔννοιες πού ἔχουμε ἀναφέρει στίς 5.4 καί 5.5 γενικεύονται καί γιά τέτοιους χώρους. Ἡ παρουσίαση ὅμως αὐτῶν τῶν ἐννοιῶν ξεφεύγει ἀπό τό σκοπό αὐτοῦ τοῦ βιβλίου.

3. Νά δείξετε ὅτι τό σύνολο
$$A = \{(\lambda, 2\lambda) \mid \lambda \in \mathbf{R}\}$$
εἶναι ἕνας γραμμικός ὑπόχωρος τοῦ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Τί διάσταση ἔχει;

4. Νά δείξετε ὅτι τό σύνολο
$$A = \{(x,y) \mid (x,y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \text{ μέ } 2x+3y = 0\}$$
εἶναι ἕνας γραμμικός ὑπόχωρος τοῦ $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$. Τί διάσταση ἔχει;

5. Νά ἐξετάσετε ἄν τά $(2,1)$, $(1,2)$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα στοιχεῖα τοῦ $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$.

6. Νά ἐξετάσετε ἄν τά $b_1 = (1,0,1)$, $b_2 = (0,1,1)$, $b_3 = (1,1,1)$ ἀποτελοῦν μιά βάση τοῦ διανυσματικοῦ χώρου τῆς ἀσκήσεως 1.

7. Νά δείξετε ὅτι τά $z_1 = 1+0i$ καί $z_2 = 0+1i$ ἀποτελοῦν μιά βάση τοῦ διανυσματικοῦ χώρου τοῦ παραδείγματος 3 τῆς 5.1. Τί διάσταση ἔχει ὁ χῶρος αὐτός;

8. Ἔστω V ἕνας διανυσματικός χῶρος πάνω στό σῶμα K. Ἄν A,B εἶναι δύο διανυσματικοί ὑπόχωροι τοῦ V, νά δείξετε ὅτι ἡ τομή $A \cap B$ δέν εἶναι τό κενό σύνολο καί μάλιστα εἶναι διανυσματικός ὑπόχωρος τοῦ V.

## 6. ΣΥΝΤΟΜΗ ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

1. Ἡ δομή $(G,o)$ ὀνομάζεται ἡμιομάδα, ἄν καί μόνο ἄν ἡ πράξη o εἶναι προσεταιριστική.
2. Ἡ δομή $(G,o)$ ὀνομάζεται ὁμάδα, ἄν καί μόνο ἄν ἰσχύουν οἱ ἀκόλουθες ἰδιότητες:
   ($O_1$) Ἡ δομή $(G,o)$ εἶναι ἡμιομάδα.
   ($O_2$) Ὑπάρχει οὐδέτερο στοιχεῖο ὡς πρός τήν πράξη o.
   ($O_3$) Κάθε στοιχεῖο τοῦ G ἔχει συμμετρικό στοιχεῖο ὡς πρός τήν πράξη o.
3. Ἡ δομή $(A, +, \cdot)$ ὀνομάζεται δακτύλιος, ἄν καί μόνο ἄν ἰσχύουν οἱ ἀκόλουθες ἰδιότητες:
   ($\Delta_1$) Ἡ δομή $(A, +)$ εἶναι ἀντιμεταθετική ὁμάδα.
   ($\Delta_2$) Ἡ δομή $(A, \cdot)$ εἶναι ἡμιομάδα.
   ($\Delta_3$) Ἡ πράξη $\cdot$ εἶναι ἐπιμεριστική ὡς πρός τήν πράξη $+$.
4. Ἡ δομή $(A, +, \cdot)$ ὀνομάζεται σῶμα, ἄν καί μόνο ἄν ἰσχύουν οἱ ἀκόλουθες ἰδιότητες:
   ($\Sigma_1$) Ἡ δομή $(A, +, \cdot)$ εἶναι ἕνας μή μηδενικός ἀντιμεταθετικός δακτύλιος.
   ($\Sigma_2$) Ἡ δομή $(A^*, \cdot)$ εἶναι ὁμάδα, ὅπου $A^* = A - \{0\}$.
5. Ἕνα μή κενό σύνολο V ὀνομάζεται διανυσματικός ἤ γραμμικός χῶρος πάνω στό σῶμα K, ἄν καί μόνο ἄν ἰσχύουν οἱ ἀκόλουθες ἰδιότητες:
   ($\Gamma_1$) Στό V εἶναι ὁρισμένη μιά ἐσωτερική πράξη $+$ τέτοια, ὥστε ἡ δομή $(V, +)$ νά εἶναι ἀντιμεταθετική ὁμάδα.
   ($\Gamma_2$) Στό V εἶναι ὁρισμένη μιά ἐξωτερική πράξη $\cdot$ μέ σύνολο τελεστῶν τό K τέτοια, ὥστε γιά κάθε $x, y \in V$ καί $\alpha, \beta \in K$ νά ἰσχύουν:
   (i) $\alpha \cdot (x+y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$,
   (ii) $(\alpha+\beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$,
   (iii) $(\alpha \cdot \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$,
   (iv) $1 \cdot x = x$.

## 7. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

1. Ἄν $x = (\alpha,\alpha')$ καί $y = (\beta,\beta')$ εἶναι δύο στοιχεῖα τοῦ συνόλου $A = \mathbf{Z} \times \mathbf{Q}$, τότε ὁρίζουμε δύο ἐσωτερικές πράξεις $*$ καί $\circ$ στό A μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο
$$x * y = (\alpha+\beta,\ \alpha'\beta') \quad , \quad x \circ y = (\alpha\beta,\ \alpha'+\beta').$$
Δεῖξτε ὅτι
   (i) οἱ πράξεις αὐτές εἶναι ἀντιμεταθετικές, προσεταιριστικές καί ὑπάρχει γι' αὐτές οὐδέτερο στοιχεῖο στό A,
   (ii) τά στοιχεῖα τοῦ A τῆς μορφῆς $(1, \alpha')$ καί $(-1,\alpha')$ ἔχουν συμμετρικά στοιχεῖα ὡς πρός τήν πράξη $\circ$,
   (iii) τά στοιχεῖα τοῦ A τῆς μορφῆς $(\alpha,\alpha')$ μέ $\alpha' \neq 0$ ἔχουν συμμετρικά στοιχεῖα ὡς πρός τήν πράξη $*$.
2. Ἔστω $(E, *)$ μιά ἡμιομάδα, γιά τήν ὁποία ὑπάρχει οὐδέτερο στοιχεῖο $e \in E$. Ἄν γιά τά στοιχεῖα $\alpha,\alpha',\alpha''$ τοῦ E ἰσχύουν $\alpha' * \alpha = e$ καί $\alpha'' * \alpha' = e$, δεῖξτε ὅτι $\alpha = \alpha''$. Τί συμπεραίνετε γιά τά στοιχεῖα $\alpha$ καί $\alpha'$;
3. Ἔστω $(G, \cdot)$ μιά ὁμάδα. Ἄν γιά κάθε $\alpha,\beta \in G$ ἰσχύει
$$(\alpha \cdot \beta)^2 = \alpha^2 \cdot \beta^2,$$
δεῖξτε ὅτι ἡ ὁμάδα αὐτή εἶναι ἀβελιανή καί γιά κάθε $\nu \in \mathbf{N}$ ἰσχύει $(\alpha\cdot\beta)^\nu = \alpha^\nu \cdot \beta^\nu$.
4. Στό σύνολο $\mathbf{R}$ ὁρίζουμε τίς πράξεις $\circ$ καί $*$ μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο:
$$\alpha \circ \beta = \alpha+\beta-1 \quad , \quad \alpha * \beta = \alpha\beta - \alpha - \beta + 2.$$
Δεῖξτε ὅτι ἡ δομή $(\mathbf{R}, \circ, *)$ εἶναι σῶμα.
5. Στό $\mathbf{R}$ ἡ σχέση
$$x * y = \alpha x+\beta y+\gamma \qquad (\alpha,\beta \in \mathbf{R} - \{0\})$$
ὁρίζει μιά πράξη $*$. Νά προσδιορίσετε τά $\alpha,\beta$, ὥστε ἡ πράξη αὐτή νά εἶναι προσεταιριστική. Νά ὑπολογίσετε τό $\gamma$ συναρτήσει ἑνός πραγματικοῦ ἀριθμοῦ $e$, ὥστε ἡ δομή $(\mathbf{R}, *)$ νά εἶναι ὁμάδα μέ οὐδέτερο στοιχεῖο τό $e$ ὡς πρός τήν πράξη $*$.
6. Ἄν $\nu$ εἶναι σταθερός φυσικός ἀριθμός, νά δείξετε ὅτι τό σύνολο
$$A_\nu = \{z \in \mathbf{C} \mid z^\nu = 1\}$$
εἶναι κλειστό ὡς πρός τήν πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ στό $\mathbf{C}$ καί στή συνέχεια ὅτι ἡ δομή $(A_\nu,.)$ εἶναι ἀντιμεταθετική ὁμάδα.
7. Ἔστω $(A, \circ)$ μιά ἡμιομάδα μέ τίς ἀκόλουθες ἰδιότητες:
   (i) ὑπάρχει $e \in A$ μέ $e \circ \alpha = \alpha$ γιά κάθε $\alpha \in A$,
   (ii) γιά κάθε $\alpha \in A$ ὑπάρχει $\alpha' \in A$ μέ $\alpha' \circ \alpha = e$.
   Δεῖξτε ὅτι ἡ δομή $(A, \circ)$ εἶναι ὁμάδα.
8. Ἔστω $(G, \cdot)$ μιά πολλαπλασιαστική ἀβελιανή ὁμάδα. Ἄν $\kappa$ εἶναι ἕνα σταθερό στοιχεῖο τοῦ G, τότε ὁρίζουμε στό G τήν πράξη $*$ μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο:
$$\alpha * \beta = \alpha \cdot \beta \cdot \kappa.$$
Δεῖξτε ὅτι ἡ δομή $(G, *)$ εἶναι ἀβελιανή ὁμάδα.
9. Ἔστω $(A, \cdot)$ μιά πολλαπλασιαστική ἀβελιανή ὁμάδα, ὅπου
$$A = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu\}.$$
   (i) Ἄν $x$ εἶναι ἕνα στοιχεῖο τοῦ A, δεῖξτε ὅτι τό A περιέχει ἀκριβῶς τά στοιχεῖα
$$x\cdot\alpha_1,\ \ x\cdot\alpha_2,\ \ldots,\ x\cdot\alpha_\nu.$$

(ii) Γιά κάθε $x \in A$ ἰσχύει

$$x^\nu = 1.$$

10. Θεωροῦμε τό σύνολο

$$E = \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}.$$

Δεῖξτε ὅτι οἱ σχέσεις

$$\alpha_\kappa + \alpha_\lambda = \alpha_{\hat{\kappa}+\hat{\lambda}} \quad , \quad \alpha_\kappa \cdot \alpha_\lambda = \alpha_{\hat{\kappa}\cdot\hat{\lambda}}$$

ὅπου $\widehat{\kappa}, \widehat{\lambda}$ οἱ κλάσεις ὑπολοίπου τῶν κ καί λ modulo 5, ὁρίζουν δύο ἐσωτερικές πράξεις στό E καί ἡ δομή (E, +, .) εἶναι ἕνας ἀντιμεταθετικός δακτύλιος μέ μοναδιαῖο στοιχεῖο.

11. Δεῖξτε ὅτι τά $b_1 = (3, 1,5)$, $b_2 = (3,6,2)$, $b_3 = (-1,0,1)$ ἀποτελοῦν μιά βάση τοῦ $\mathbf{R}^3$. Ποιές εἶναι οἱ συντεταγμένες τῶν $x = (1,0,2)$ καί $y = (2,0,5)$ ὡς πρός τή βάση αὐτή;

12. Σέ ποιά περίπτωση τά $\alpha+\beta i$ καί $\gamma+\delta i$ ἀποτελοῦν μιά βάση τοῦ διανυσματικοῦ χώρου τοῦ παραδείγματος 3 τῆς 5.1 ;

13. Ἄν τά x,y,z εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα στοιχεῖα ἑνός διανυσματικοῦ χώρου V πάνω στό σῶμα K, δεῖξτε ὅτι καί τά $x+y$, $x-y$, $x-2y+z$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα στοιχεῖα τοῦ V.

14. Γράψτε τό στοιχεῖο (α, β, γ) τοῦ πραγματικοῦ διανυσματικοῦ χώρου $\mathbf{R}^3$ σάν γραμμικό συνδυασμό τῶν (1,1,1), (1,1,0) καί (1,0,0).

15. Δίνεται τό σύστημα

$$\left.\begin{array}{l} x+4y+2z=0 \\ 2x+y+5z=0 \end{array}\right\} \quad (\Sigma)$$

Νά δείξετε ὅτι τό σύνολο τῶν λύσεων τοῦ (Σ) εἶναι ἕνας γραμμικός ὑπόχωρος V τοῦ πραγματικοῦ διανυσματικοῦ χώρου $\mathbf{R}^3$. Βρεῖτε μιά βάση τοῦ V.

16. Ἔστω (A, +, ·) ἕνα σῶμα. Ἄν $\alpha, \gamma \in A$ καί $\beta, \delta \in A^*$, δεῖξτε τήν ἰσοδυναμία

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\delta = \beta\gamma.$$

17. Δεῖξτε ὅτι ἡ δομή (M, +, ·) μέ $M = \{(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{Q}\}$ καί

$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) + (\varepsilon, \zeta, \eta, \theta) = (\alpha+\varepsilon, \beta+\zeta, \gamma+\eta, \delta+\theta)$

$(\alpha, \beta, \gamma, \delta)\cdot(\varepsilon, \zeta, \eta, \theta) = (\alpha\varepsilon+\beta\eta, \alpha\zeta+\beta\theta, \gamma\varepsilon+\delta\eta, \gamma\zeta+\delta\theta)$

εἶναι δακτύλιος. Ποιά στοιχεῖα τοῦ M ἔχουν ἀντίστροφα στοιχεῖα;

18. Δεῖξτε ὅτι

(i) ἡ δομή $(\mathbf{Z}_{15}, +, \cdot)$ εἶναι δακτύλιος,

(ii) τά ὑποσύνολα $A = \{\widehat{0}, \widehat{5}, \widehat{10}\}$ καί $B = \{\widehat{0}, \widehat{3}, \widehat{6}, \widehat{9}, \widehat{12}\}$ εἶναι κλειστά ὡς πρός τίς πράξεις + καί · στό $\mathbf{Z}_{15}$.

Οἱ δομές (A, +, ·) καί (B, +, ·) εἶναι ἀκέραιες περιοχές;

19. Ἄν (G, +) εἶναι ὁμάδα καί A ἕνα μή κενό ὑποσύνολο τοῦ G μέ τήν ἰδιότητα

$$x, y \in A \Rightarrow x - y \in A,$$

δεῖξτε ὅτι ἡ δομή (A, +) εἶναι ὁμάδα.

# ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

## Ὑποδείξεις γιά τή λύση τῶν ἀσκήσεων-Ἀπαντήσεις

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

(Ὑπ.=Ὑπόδειξη Ἀπ.=Ἀπάντηση)

**1.4.** **1**. Ὑπ. $i^0=1, i^1=i, i^2=-1$ κ.τ.λ. **2**. Ὑπ. Ἀρκεῖ $3\alpha+14\beta=7$ καί $2\alpha-\beta=-1$. Ἀπ. $\alpha=-\frac{7}{31}$ $\beta=+\frac{17}{31}$. **3**. Ὑπ. Πρέπει $\alpha+\beta=5\gamma$ καί $-\gamma=\alpha-\beta$. **4**. Ὑπ. Ἀρκεῖ νά δειχθεῖ ὅτι $2(\alpha+\beta)=$ $=5\alpha$ καί $(\beta-\alpha)\gamma=1$. **5**. Ἀπ. α) $-2i$, β) $\frac{9}{5}+\frac{8}{5}i$, γ) $\frac{4213}{5103}+\frac{2187\sqrt{3}+70\sqrt{2}}{5103}i$ καί δ) $\frac{586}{1300}-\frac{252}{1300}i$ **6**. Ὑπ. $\left(3\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4=\frac{81}{4}$ καί $(1+i)^4=(-1+i)^4=\ldots=-4$. **7**. Ὑπ. Νά πάρετε $z_1=\alpha_1+\beta_1 i$, $z_2=\alpha_2+\beta_2 i$ καί $z_3=\alpha_3+\beta_3 i$.

**1.7.** **1**. Ὑπ. Πρέπει $z_1=\bar{z}_2$. Ἀπ. $x=2$, $y=1$. **2**. Ἀπ. α) $z=0+yi$, $y\in\mathbf{R}$, β) $z=0$ καί γ) $z\in\left\{0,-1,\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$. **3**. Ὑπ. Ἄν $z_1=x_1+y_1 i$ καί $z_2=x_2+y_2 i$, τότε δεῖξτε ὅτι $x_1=y_1=0 \vee x_2=y_2=0$. **4**. Ὑπ. Θέστε $\frac{z_1}{z_2}=z_3\in\mathbf{C}$, δηλ. $z_1=z_2 z_3$ κτλ. **5**. Ὑπ. Ἄν $z=x+yi$, τότε ἡ δοθεῖσα δίνει $xy=0$. **6**. Ἀπ. $x=\frac{1}{4}$ καί $y=-1$. **7**. Ἀπ. $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **8**. Ἀπ. $\pm[\sqrt{\sqrt{2}+1}+\sqrt{\sqrt{2}-1}.i]$. **9**. Ἀπ. $x=1$, $y=2$. **10**. Ὑπ. Ἡ δοθεῖσα γίνεται: $[2+4+6+\ldots+2(\nu-1)]+[1+3+5+\ldots+(2\nu-1)]i$. **11**. Ἀπ. $z_1=2-i$ καί $z_2=1+2i$.

**1.9.** **1**. Ὑπ. Χρησιμοποιῆστε ἕνα ἀπό τούς ὑποδειχθέντες τρόπους ἤ τή μαθηματική ἐπαγωγή. **2**. Ὑπ. Νά θέσετε στήν ἰδιότητα (γ) ὅπου $z_2$ τό $-z_2$. **3**. Ἀπ. α) $\sqrt{\frac{41}{5}}$ β) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$, γ) $\frac{3^4\cdot 2^{10}}{19^2}$. **4**. Ἀπ. 1. **5**. Ἀπ. $z=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i$. **6**. Ἀπ. $4x+2y+3=0$. **7**. Ὑπ. Νά πάρετε $z=x+yi$ καί νά ἐκτελέσετε πράξεις. Ἀπ. $z_1=0+0i$, $z_2=0+i$, $z_3=0-i$. **8**. Ὑπ. Νά θέσετε $z=x+yi$, $x\in\mathbf{R}$, $y\in\mathbf{R}$ καί νά ἐπιλύσετε σύστημα ὡς πρός x καί y. Ἀπ. $z_{1,2}=\alpha+(-1\pm$ $\pm\sqrt{1-\alpha^2-2\alpha})i$ μέ $0\leq\alpha\leq-1+\sqrt{2}$. **9**. Ὑπ. Νά λάβετε ὑπόψη ὅτι $|z_1+z_2|^2\leq(|z_1|+$ $+|z_2|)^2$ καί $|z_4|^2\leq 1-|z_3|^2$ κ.τ.λ. **10**. Ὑπ. Ἡ $|z_1+z_2|=|z_1|=|z_2|$ γίνεται $\left|1+\frac{z_2}{z_1}\right|=1=$ $=\left|\frac{z_2}{z_1}\right|$. Θέστε $\frac{z_2}{z_1}=x+yi$ καί ὑπολογίστε τά x,y.

**2.3.** **1**. Ὑπ. Ἀπεικονίστε τά ζεύγη (2,3), (2,−3) κ.τ.λ. **2**. Ὑπ. Βρεῖτε τίς εἰκόνες τῶν $(z_1+z_2)+$ $+z_3$ καί $(z_1+z_2)-z_3$. **3**. Ὑπ. Ἐργαστεῖτε ὅπως στήν ἐφαρμογή τῆς παραγράφου 2.2.

**3.3.** **1**. Ὑπ. $|z-z_0|^2=\alpha^2 \Leftrightarrow (z-z_0).\overline{(z-z_0)}=\alpha^2$ κ.τ.λ. **2**. Ἀπ. Εἶναι τά σημεῖα τοῦ κύκλου κέντρου (2,−3) καί ἀκτίνας 5. **3**. Ὑπ. Ἐργαστεῖτε ὅπως στήν ἐφαρμογή 3. **4**. Ὑπ. Βρεῖτε z, τέτοια ὥστε $|z-2|=|z|$ καί ἔπειτα τά z μέ $|z-2|<|z|$. **5**. Ὑπ. Βρεῖτε τά z μέ $|z-1|=|z+1|$ καί ἔπειτα τά z μέ $|z-1|<|z+1|$. **6**. Ὑπ. $|z-8|^2=4|z-2|^2\Leftrightarrow\overline{(z-8)}(z-8)=4(z-2).\overline{(z-2)}$ κ.τ.λ.

7. Ὑπ. Παρατηρῆστε ὅτι οἱ διανυσματικές ἀκτίνες τῶν z, γιά τά ὁποῖα $|z|=3$, πολλαπλασιάζονται ἐπί $-2$ κ.τ.λ. **8**. Ὑπ. Βρεῖτε τά z: $|z+i|=3$ καί $|z+i|=4$ κ.τ.λ. **9**. Ὑπ. Ἐργαστεῖτε ὅπως στήν ἐφαρμογή 4. **10**. Ὑπ. Ἐπιλύστε τό σύστημα $9\cdot|z-12|^2=25\cdot|z-8i|^2$, $|z-4|^2=|z-8|^2$ κ.τ.λ. Ἀπ. $z_1=6+17i$, $z_2=6+8i$.

**4.3.** **1**. Ἀπ. $(3,0)$, $\left(3\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$, $\left(3, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(3\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$, $(3,\pi)$, $\left(3\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}\right)$, $\left(3, \frac{3\pi}{2}\right)$, $\left(3\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4}\right)$. **2**. Ἀπ. $\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i$, $-2+0i$, $-\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}i$, $0-i$. **3**. Ἀπ. Ἄν $z_1=\alpha+\beta i$, τότε $\alpha=\rho$ συν$\theta$ καί $\beta=\rho$ημ$\theta$, ὁπότε $z_1=\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i$. Ὅμοια βρίσκουμε $z_2=1+\sqrt{3}i$. Ὑπολογίστε τά $z_1 . z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$ καί ἔπειτα βρεῖτε τά μέτρα καί τά ὀρίσματά τους. Ἀπ. $\left(6, \frac{2\pi}{3}\right)$, $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$.

**5.3.** **1**. Ἀπ. $\text{συν}\frac{5\pi}{3}+i\text{ημ}\frac{5\pi}{3}$, $4\left(\text{συν}\frac{\pi}{3}+i\text{ημ}\frac{\pi}{3}\right)$, $2\left(\text{συν}\frac{5\pi}{6}+i\text{ημ}\frac{5\pi}{6}\right)$, $\frac{2\sqrt{3}}{5}\cdot\left[\text{συν}\left(\frac{5\pi}{3}-\theta_1\right)+i\text{ημ}\left(\frac{5\pi}{3}-\theta_1\right)\right]$. **2**. Ὑπ. Παρατηρῆστε ὅτι $(\text{συν}\theta+i\text{ημ}\theta)^{-\kappa}=\frac{1}{(\text{συν}\theta+i\text{ημ}\theta)^{\kappa}}=(\text{συν}\theta-i\text{ημ}\theta)^{\kappa}=\text{συν}(-\kappa\theta)+i\text{ημ}(-\kappa\theta)$. **3**. Ὑπ. $\sqrt{3}+i=2\left(\text{συν}\frac{\pi}{6}+i\text{ημ}\frac{\pi}{6}\right)$, $1+i=\text{συν}\frac{\pi}{4}+i\text{ημ}\frac{\pi}{4}$, $1-i=\text{συν}\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\text{ημ}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ κ.τ.λ. **4**. Ὑπ. Χρησιμοποιῆστε τό Θ. De Moivre $\text{συν}(\nu\theta)+i\text{ημ}(\nu\theta)=(\text{συν}\theta+i\text{ημ}\theta)^{\nu}$ γιά $\nu=5$. **5**. Ὑπ. Σχηματίστε τό $\frac{1}{z}$ καί ἔπειτα τά $z+\frac{1}{z}$, $z-\frac{1}{z}$.

**6.3.** **1**. $(\alpha) z^3=8 \Leftrightarrow z^3=8\ (\text{συν}0+i\text{ημ}0) \Rightarrow z_\kappa=\sqrt[3]{2}\left(\text{συν}\frac{2\kappa\pi}{3}+i\text{ημ}\frac{2\kappa\pi}{3}\right)$, $\kappa=0,1,2$. Παρόμοια ἐπιλύονται καί οἱ ὑπόλοιπες. **2**. Ὑπ. $\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{2\nu}=-1$, δηλ. $\frac{1+z}{1-z}=\text{συν}\frac{2\kappa\pi+\pi}{2\nu}+i\text{ημ}\frac{2\kappa\pi+\pi}{2\nu}$, $\kappa=0,1,2,\ldots,2\nu-1$ **3**. Ὑπ. $z^5=-\sqrt{3}+i=2\left(\text{συν}\frac{5\pi}{6}+i\text{ημ}\frac{5\pi}{6}\right)$ κ.τ.λ. **4**. (β) Παρατηρῆστε ὅτι $z^3_1-1=0\Leftrightarrow(z_1-1)(z^2_1+z_1+1)=0$ κ.τ.λ., (δ) $z^2_1+z_1+1=0\Leftrightarrow 1+z_1=-z^2_1$ κ.τ.λ. **5**. Ὑπ. $\kappa=\text{εφ}\frac{\theta}{2}$, $\frac{\theta}{2}\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. **6**. Ὑπ. (α) Ἐκτελέστε πράξεις καί λάβετε ὑπόψη σας ὅτι $\omega^2+\omega+1=0$, $\omega^3=1$ κ.τ.λ. (β) Ἐργαστεῖτε παρόμοια. (γ) Χρησιμοποιῆστε τή (β). **7**. Ὑπ. Ἐκτελέστε πράξεις καί λάβετε ὑπόψη σας ὅτι $1+\omega+\omega^2=0$. **8**. Ὑπ. Τά z εἶναι οἱ μιγαδικές κυβικές ρίζες τῆς μονάδας, δηλ. $z^3=1$, $1+z+z^2=0$ κ.τ.λ. **9**. Ὑπ. Ἄν $\kappa=2\nu$, $\nu\in\mathbf{N}$, τότε δεῖξτε ὅτι $2^{2\nu}=$πολ.$3+1$, $\nu\in\mathbf{N}$, ὅτι $1-\theta^{2^{2\nu-2}}+\theta^{2^{2\nu-1}}=-2\theta$ καί $1-\theta^{2^{2\nu-1}}+\theta^{2^{2\nu}}=-2\theta^2$ κ.τ.λ. **10**. Ὑπ. Τά z εἶναι οἱ μιγαδικές κυβικές ρίζες τῆς μονάδας καί $\nu=3\lambda+\upsilon$, $\upsilon=0,1,2$. **11**. Ὑπ. Ἐπιλύστε τό σύστημα ὡς πρός x,y,z καί ἔπειτα σχηματίστε τά $|A|^2=A\bar{A}$, $|B|^2=B\bar{B}$ κ.τ.λ.

**8.** **1**. Ὑπ. Νά θέσετε $z=x+yi$ καί νά φέρετε τόν $\frac{z-1}{z+1}$ στή μορφή $\alpha+\beta i$. **2**. Ὑπ. Νά θέσετε $z=x+yi$ καί νά ἐπιλύσετε σύστημα ὡς πρός x καί y. Ἀπ. Γιά $\alpha=1$ εἶναι $z=-1-i$.

Γιά $\alpha=\sqrt{2}$ εἶναι $z=-2-i$. Γιά $1<\alpha<\sqrt{2}$ εἶναι $z=\dfrac{-\alpha^2-\alpha\sqrt{2-\alpha^2}}{\alpha^2-1}-i \vee z=\dfrac{-\alpha^2+\alpha\sqrt{2-\alpha^2}}{\alpha^2-1}-i$. Γιά $\alpha>\sqrt{2}$ δέν ἔχει λύσεις. **3**. Ὑπ. Ἐργασθεῖτε ὅπως στήν προηγούμενη ἄσκηση. **4**. Ὑπ. $z^3=-\omega^5$ καί $z^2=\dfrac{1}{\overline{\omega}^4}$. Παίρνουμε $\omega^{10}\cdot\overline{\omega}^{12}=1$, ἀπό ὅπου $|\omega|=1$ καί $\overline{\omega}^2=1$ κ.τ.λ. **5**. Ὑπ. Χρησιμοποιῆστε τίς ἰδιότητες τοῦ μέτρου. **6**. Ὑπ. Χρησιμοποιῆστε τίς ἰδιότητες τοῦ μέτρου. **7**. Ὑπ. Εἶναι $|z-z_1|^2=\lambda^2|z-z_2|^2 \Leftrightarrow (z-z_1)(\bar{z}-\bar{z}_1)=\lambda^2(\bar{z}-\bar{z}_2).(z-z_2)$. Στή συνέχεια συμβουλευθεῖτε τά παραδείγματα καί τήν ἄσκηση 1 τῆς 3.3. **8**. Ὑπ. Ἐργασθεῖτε ὅπως στήν ἄσκηση 6 τῆς 3.3. **9**. Ἀπ. $(0,0)$, $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$. **10**. Ὑπ. Θέστε $z=x+yi$ καί ἐκτελέστε πράξεις. **11**. Ὑπ. Ἄν $z^2+z+1=0$, τότε $(\alpha^2+\alpha-\beta^2+1)+\beta(1+2\alpha)i=0$ κ.τ.λ. **12**. Ὑπ. Εἶναι $z=2\,\sigma\upsilon\nu\,\dfrac{\theta+\alpha}{2}\left[\sigma\upsilon\nu\dfrac{\theta-\alpha}{2}+i\eta\mu\dfrac{\theta-\alpha}{2}\right]$ καί $|z|=\left|2\sigma\upsilon\nu\dfrac{\theta+\alpha}{2}\right|$. **13**. Ὑπ. Ἐργασθεῖτε ὅπως στήν ἄσκηση 6 τῆς 3.3. **14**. Ἀπ. $x^2+y^2=\dfrac{(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^2+\gamma^2)}{4\alpha^2+(\beta+\gamma)^2}$, $(x-\alpha)^2+y^2=\dfrac{(\alpha^2+\beta\gamma)^2}{4\alpha^2+(\beta+\gamma)^2}$, $\mathrm{Re}z=\dfrac{x(2\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}{4\alpha^2+(\beta+\gamma)^2}$. **15**. Ὑπ. Σχηματίστε $|\zeta|^2-1=\zeta\bar{\zeta}-1$ καί λάβετε ὑπόψη ὅτι $|\alpha|<1$ κ.τ.λ. **16**. Ὑπ. $\zeta^2=1+z^2$, τότε $\zeta^2-z^2=1$, δηλ. $(\zeta-z).(\zeta+z)=1$, ἔτσι $\zeta-z=\dfrac{1}{\zeta+z}$ κ.τ.λ. **17**. Ὑπ. $|z_1-z_2|^2=(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)$ κ.τ.λ. **18**. Ὑπ. Δεῖξτε ὅτι $\dfrac{y_1-y_3}{x_1-x_3}=\dfrac{y_3-y_2}{x_3-x_2}$, ὅπου $z_1=x_1+iy_1$, κ.τ.λ. **19**. Ὑπ. $|z_1-z_2|^2=(z_1-z_2).(\bar{z}_1-\bar{z}_2)$ καί $|1-\bar{z}_1z_2|^2=(1-\bar{z}_1z_2).(1-z_1.\bar{z}_2)$ κ.τ.λ. **20**. Ὑπ. Θέστε $z_1=x_1+y_1i$, $z_2=x_2=x_2+y_2i$ καί ἐκτελέστε πράξεις. **21**. Ὑπ. Ἄν $z_\nu=x_\nu+y_\nu i$, τότε $\left|\dfrac{z_\nu-i}{z_\nu+i}\right|<1 \Rightarrow \sqrt{x_\nu^2+(y_\nu-1)^2}<\sqrt{x_\nu^2+(y_\nu+1)^2}$ κ.τ.λ. **22**. Ὑπ. Θέστε $z=\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta$, σχηματίστε τό μιγαδικό $\Sigma+i\Sigma'$ κ.τ.λ. **23**. Ὑπ. Σχηματίστε τό μιγαδικό $\Sigma+i\Sigma'$. **24**. Ὑπ. Εἶναι $|A_0|^2+|A_1|^2+\ldots+|A_{\nu-1}|^2=A_0\overline{A}_0+A_1\overline{A}_1+\ldots+A_{\nu-1}\overline{A}_{\nu-1}$. **25**. Ὑπ. Θέστε $\lambda=\varepsilon\varphi\,\dfrac{\theta}{2}$ μέ $\theta=\mathrm{Arg}z$. **26**. Ὑπ. Ἡ δοθεῖσα γράφεται $\left(\dfrac{z^2-1}{2z}\right)^4=\sigma\upsilon\nu\alpha+i\eta\mu\alpha$ κ.τ.λ.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ

**1.8.** **1**. Ὑπ. Χρησιμοποιῆστε τόν ὁρισμό 2 τῆς 1.1. **2**. Ἁπλή. Ἀπ. Ὄχι. **3**. Ὑπ. Χρησιμοποιῆστε τό θεώρημα τῆς 1.2. **4**. Ὑπ. Χρησιμοποιῆστε τόν ὁρισμό: $\widehat{\alpha}*\widehat{\beta}=\widehat{\alpha*\beta}$. **5**. Ἀπ. $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$. **6**. Ὑπ. Χρησιμοποιῆστε τήν εἰς ἄτοπο ἀπαγωγή. **7**. Ὑπ. Ἐφαρμόστε τούς ἀντίστοιχους ὁρισμούς. **8**. Ὑπ. Θεωρῆστε τήν ἐξίσωση $x^2x'^2+x'+x=0$. **9**. Ὑπ. Χρησιμοποιῆστε τούς ἀντίστοιχους ὁρισμούς Ἀπ. (ii) Ναί τό 0 (iii) Κάθε $z\neq\neq 1$ ἔχει συμμετρικό στοιχεῖο. **10**. Ὑπ. Στή δοθεῖσα σχέση νά ἀντικαταστήσετε μερικά ἀπό τά α,β,γ,δ μέ κατάλληλα στοιχεῖα.

**2.4.** **1**. Ὑπ. Ἐφαρμόστε σέ κάθε περίπτωση τόν ἀντίστοιχο ὁρισμό. **2**. Ἁπλή. **3**. Ἁπλή. Ἀπ. $x=\widehat{4}$. **4**. Ὑπ. (i) Θεωρῆστε τήν ἰσότητα $\alpha^{-1}.(\alpha^{-1})^{-1}=e$ καί ἐφαρμόστε τήν ἰδιότητα 2 τῆς 2.3. (ii) Ἐφαρμόστε τόν ὁρισμό τῆς 1.5. (iii) καί (iv) Λάβετε ὑπόψη ὅτι ἡ πράξη εἶναι προσεταιριστική. **5**. Ὑπ. Ἐφαρμόστε τόν ὁρισμό τῆς 2.2. **6**. Ἁπλή. **7**. Ὑπ. Ἐφαρμόστε τόν ὁρισμό τῆς 2.2. **8**. Ἀπ. $x=\alpha'*\beta'*\beta'$, $y=\beta'$.

**3.4.** **1**. 'Υπ. 'Εφαρμόστε τόν όρισμό τῆς 3.1. 'Απ. Δέν ἔχει μοναδιαῖο στοιχεῖο. **2**. 'Απ. (i) Εἶναι ἀντιμεταθετικός δακτύλιος. (ii) Εἶναι δακτύλιος, ὄχι ἀντιμεταθετικός. (iii) καί (iv) Εἶναι ἀντιμεταθετικοί δακτύλιοι. **3**. 'Υπ. 'Εφαρμόστε τόν όρισμό τῆς 3.1. 'Απ. Ἔχει μοναδιαῖο στοιχεῖο. **4**. 'Υπ. Παρατηρῆστε ὅτι $\gamma\cdot\beta=(\beta+\delta)\cdot\beta$ κ.τ.λ. **5**. 'Υπ. Λάβετε τήν παράσταση $(-\alpha)[\beta+(-\beta)]$. **6**. 'Υπ. 'Εφαρμόστε σέ κάθε περίπτωση τόν όρισμό τῆς 3.3.

**4.3.** **1**. 'Απ. (i) Ὄχι, (ii) Ναί, (iii) Ναί, (iv) Ναί. **2**. 'Υπ. 'Εφαρμόστε τόν όρισμό τῆς 4.1. **3**. 'Απλή. **4**. 'Απ. $x=\widehat{2}$, $y=\widehat{1}$.

**5.6.** **1**. 'Υπ. 'Εφαρμόστε τόν όρισμό τῆς 5.1. **2**. 'Υπ. Πάρτε τήν παράσταση $\alpha\cdot[x+(-x)]$. **3**. 'Υπ. 'Εφαρμόστε τόν όρισμό τῆς 5.3. 'Απ. Ἔχει διάσταση 1. **4**. 'Υπ. 'Εφαρμόστε τόν όρισμό τῆς 5.3. 'Απ. Ἔχει διάσταση 1. **5**. 'Απ. Εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα. **6**. 'Απ. Ναί. **7**. 'Απ. Ἔχει διάσταση 2. **8**. 'Υπ. Πάρτε $x,y\in A\cap B$ καί δεῖξτε ὅτι $\alpha\cdot x+\beta\cdot y\in A\cap B$.

**7.** **1**. 'Υπ. 'Εφαρμόστε τούς ἀντίστοιχους όρισμούς 'Απ. (ii) Ἔχουν ἀντίστοιχα συμμετρικά στοιχεῖα τά $(1,-\alpha')$ καί $(-1,-\alpha')$. (iii) Τό συμμετρικό στοιχεῖο εἶναι $\left(-\alpha,\dfrac{1}{\alpha'}\right)$.
**2**. 'Υπ. Λάβετε ὑπόψη καί τήν ἰσότητα $\alpha''=\alpha''*e$. **3**. 'Υπ. α) Ἡ ἰσότητα $(\alpha\cdot\beta)^2=\alpha^2\cdot\beta^2$ γράφεται $(\alpha\cdot\beta)\cdot(\alpha\cdot\beta)=(\alpha\cdot\alpha)\cdot(\beta\cdot\beta)$. β) Χρησιμοποιῆστε τή μέθοδο τῆς μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς. **4**. 'Υπ. 'Εφαρμόστε τόν όρισμό τῆς 4.1. **5**. 'Απ. $\alpha=\beta=1$, $\gamma=-e$. **6**. 'Απ. Ἄν $x,y\in A_\nu$, τότε $x^\nu=1$, $y^\nu=1$, ὁπότε $(xy)^\nu=1$ καί $y^{-\nu}=1$ κτλ. **7**. 'Υπ. Δεῖξτε ἀρχικά ὅτι $\alpha \circ \alpha'=e$ καί ἔπειτα ὅτι τό $e$ εἶναι τό οὐδέτερο στοιχεῖο ὡς πρός τήν πράξη $\circ$. **8**. 'Υπ. 'Εφαρμόστε τόν όρισμό τῆς 2.2. **9**. 'Υπ. i) 'Υποθέστε ὅτι $x\cdot\alpha_\lambda=x\cdot\alpha_\mu$ μέ $\lambda\neq\mu$ καί καταλῆξτε σέ ἄτοπο. ii) Θεωρῆστε τήν $x\alpha_1.x\alpha_2...x\alpha_\nu=\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_\nu$. **10**. 'Υπ. 'Εφαρμόστε τόν όρισμό τῆς 3.1. **11**. 'Απ. $x=\dfrac{1}{43}(18,-3,2)$, $y=\dfrac{1}{43}(42,-7,19)$. **12**. 'Απ. $\alpha\delta-\beta\gamma\neq0$. **13**. 'Υπ. 'Εφαρμόστε τόν όρισμό τῆς 5.4. **14**. 'Απ. $\gamma(1,1,1)+(\beta-\gamma)(1,1,0)+(\alpha-\beta)(1,0,0)$. **15**. 'Υπ. Βρεῖτε τίς λύσεις τοῦ $(\Sigma)$ καί ἐφαρμόστε τόν όρισμό τῆς 5.3. 'Απ. Μιά βάση τοῦ V ἀποτελεῖται μόνο ἀπό ἕνα διάνυσμα, π.χ. τό $(18,-1,-7)$. **16**. 'Υπ. Λάβετε ὑπόψη ὅτι τά β καί δ ἔχουν ἀντίστροφα στοιχεῖα. **17**. 'Υπ. 'Εφαρμόστε τόν όρισμό τῆς 3.1. 'Απ. $\dfrac{1}{\alpha\delta-\beta\gamma}(\delta,-\beta,-\gamma,\alpha)$ μέ $\alpha\delta-\beta\gamma\neq0$. **18**. 'Υπ. (i) 'Εφαρμόστε τόν όρισμό τῆς 3.1. (ii) 'Εφαρμόστε τόν όρισμό 2 τῆς 1.1. 'Απ. Καί οἱ δύο δομές εἶναι ἀκέραιες περιοχές. **19**. 'Υπ. Παρατηρῆστε ὅτι $x-x\in A$ καί ἐφαρμόστε τόν όρισμό τῆς 2.2.

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ I Μιγαδικοί ἀριθμοί



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ II Ἀλγεβρικές δομές

ΕΚΔΟΣΗ Α' 1978(X) ΑΝΤΙΤΥΠΑ 73.000

ΕΚΤΥΠΩΣΗ ΒΙΒΛΙΟΔΕΣΙΑ: ΑΦΟΙ ΡΟΗ Ε.Π.Ε.

ΟΕ
ΔΒ