Χρηστου Γ. Παπανικολαου

λυσεις ασκησεων γεωμετριας

που περιεχονται στο εγκεκριμενο βιβλιο του Ο.Ε.Δ.Β

για την Α ταξη των Λυκειων

τευχος 2

περιεχει τις ασκησεις 149 - 305

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΟΠΟΥΛΟΥ

ΣΟΛΩΝΟΣ 99 - τηλ 3612·412 - ΑΘΗΝΑΙ

Χρηστου Γ. Παπανικολαου

λυσεις ασκησεων γεωμετριας

ου περιεχονται στο εγκεκριμενο βιβλιο του Ο.Ε.Δ.Β

για την Α ταξη των Λυκειων

τευχος 2

περιεχει τις ασκησεις 149 - 305

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΟΠΟΥΛΟΥ
ΣΟΛΩΝΟΣ 99 - τηλ 3612 412 - ΑΘΗΝΑΙ

Οἱ περιεχόμενες ἀσκήσεις μέ τή σειρά ἀναγραφῆς τους, ἀποτελοῦν μέρος τοῦ βιβλίου "ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ γιά τίς τάξεις Α΄ Β΄ καί Γ΄Λυκείου" ἐκδόσεως τοῦ ΟΕΔΒ καί κατά συνέπεια ἀποτελοῦν πνευματική ἰδιοκτησία τοῦ ἴδιου τοῦ συγγραφέα.

Κάθε γνήσιο ἀντίτυπο ἔχει τήν ἰδιόχειρη ὑπογραφή τοῦ συγγραφέα.

Χρῆστος Γ. Παπανικολάου

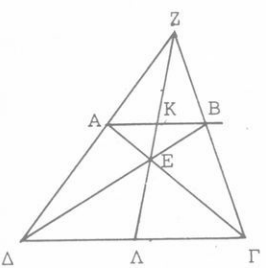
ΔΕΣΜΗ ΕΥΘΕΙΩΝ

149. Νά άποδειχθεῖ ὅτι ἡ εὐθεία πού ἐνώνει τά μέσα Κ καί Λ τῶν βάσεων ἐνός τραπεζίου, περνάει ἀπό τό κοινό σημεῖο Ε τῶν διαγωνίων καί ἀπό τό κοινό σημεῖο Ζ τῶν μή παραλλήλων πλευρῶν.

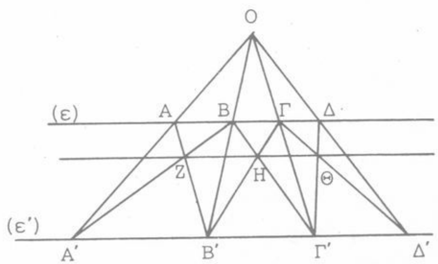
<u>Ἀπόδειξη</u>. Ἔστω ΑΒΓΔ ἕνα τραπέζιο καί Κ, Λ τά μέσα τῶν βάσεών του (σχ.149). Γιά νά ἀποδείξουμε ὅτι ἡ ΚΛ περνάει ἀπό τά Ε καί Ζ, πρέπει νά ἀποδείξουμε ὅτι:

$$\frac{ΚΑ}{ΚΒ}=\frac{ΛΓ}{ΛΔ} \quad \text{καί} \quad \frac{ΚΑ}{ΚΒ}=\frac{ΛΔ}{ΛΓ} \quad \text{ἀντιστοίχως.}$$

Τοῦτο ὅμως εἶναι φανερό, γιατί ὁ καθένας ἀπό τούς προηγούμενους λόγους εἶναι ἴσος μέ τή μονάδα (ΚΑ = ΚΒ καί ΛΓ = ΛΔ).



Σχ.149



Σχ.150

150. Ἄν οἱ ἀκτίνες μιᾶς δέσμης μέ κέντρο Ο, τέμνουν δύο παράλληλες εὐθεῖες (ε) καί (ε') στά Α καί Α', Β καί Β', Γ καί Γ', ... ἀντιστοίχως, νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ διαγώνιοι τῶν τραπεζίων ΑΑ΄Β΄Β, ΒΒ΄Γ΄Γ,ΓΓ΄Δ΄Δ, ... τέμνονται σέ σημεῖα πού βρίσκονται πάνω σέ μιά εὐθεία πού εἶναι παράλληλη πρός τίς (ε) καί (ε΄).

΄Απόδειξη. Οἱ διαγώνιοι τῶν τραπεζίων ΑΒΒ΄Α΄, ΒΓΓ΄Β΄, ΓΔΔ΄Γ΄ τέμνονται στά σημεῖα Ζ, Η καί Θ ἀντιστοίχως (σχ.150).

Τά τρίγωνα ΖΑΒ καί ΖΒ΄Α΄ εἶναι ὅμοια, γιατί εἶναι Α΄Β΄// ΑΒ. Τότε ἔχουμε:

$$\frac{ΖΒ}{ΖΑ'}=\frac{ΑΒ}{Β'Α'} \quad (1)$$

΄Επίσης καί τά τρίγωνα ΗΒΓ καί ΗΓ΄Β΄ εἶναι ὅμοια, ἐπομένως ἔχουμε:

$$\frac{ΗΒ}{ΗΓ'}=\frac{ΒΓ}{Γ'Β'} \quad (2)$$

΄Από τό θεώρημα τῆς δέσμης ξέρουμε ὅτι εἶναι:

$$\frac{ΑΒ}{Β'Α'}=\frac{ΒΓ}{Γ'Β'}$$

δηλαδή τά δεύτερα μέλη τῶν σχέσεων (1) καί (2) εἶναι ἴσα. ῎Αρα καί τά πρῶτα θά εἶναι ἴσα, δηλαδή:

$$\frac{ΖΒ}{ΖΑ'}=\frac{ΗΒ}{ΗΓ'},$$

ἀπ᾽ τήν ὁποία παίρνουμε ΖΗ//Α΄Β΄ ἤ ΖΗ//(ε΄).

Μέ ἴδιο τρόπο μποροῦμε νά ἀποδείξουμε ὅτι εἶναι καί ΗΘ//(ε΄). ῎Αρα τά σημεῖα Ζ, Η καί Θ βρίσκονται στήν ἴδια εὐθεία, πού εἶναι παράλληλη πρός τίς (ε) καί (ε΄).

151. Φέρνουμε δύο παράλληλες πρός τή διαγώνιο ΑΓ κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, πού τέμνουν τίς πλευρές του στά Ε, Θ καί Η, Ζ ἀντιστοίχως. Νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ εὐθεῖες ΕΖ καί ΗΘ τέμνονται πάνω στή ΒΔ.

<u>᾿Απόδειξη</u>. Εἶναι ἀρκετό νά ἀποδείξουμε ὅτι:

$$\frac{KE}{\Lambda Z}=\frac{K\Theta}{\Lambda H}.$$

᾿Από τά δύο ζευγάρια τῶν ὅμοιων τριγώνων ΒΚΕ ≈ ΒΟΑ καί ΔΛΖ ≈ ΔΟΑ ἔχουμε ἀντιστοίχως:

(1) $$\frac{KE}{OA}=\frac{BK}{BO}$$ καί

(2) $$\frac{\Lambda Z}{OA}=\frac{\Delta\Lambda}{\Delta O}.$$

Διαιροῦμε τίς σχέσεις (1) καί (2) κατά μέλη καί παίρνουμε:

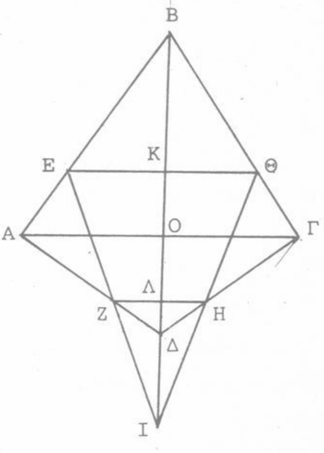
$$\frac{KE}{OA}:\frac{\Lambda Z}{OA}=\frac{BK}{BO}:\frac{\Delta\Lambda}{\Delta O}$$ ἤ

(3) $$\frac{KE}{\Lambda Z}=\frac{BK}{BO}\cdot\frac{\Delta O}{\Delta\Lambda}.$$

῾Ομοίως ἀπό τά ζευγάρια ὁμοίων τριγώνων ΒΚΘ ≈ ΒΟΓ καί ΔΛΗ ≈ ΔΟΓ παίρνουμε:

(4) $$\frac{K\Theta}{O\Gamma}=\frac{BK}{BO}$$ καί

(5) $$\frac{\Lambda H}{O\Gamma}=\frac{\Delta\Lambda}{\Delta O}.$$



Σχ.151

Διαιροῦμε κατά μέλη τίς σχέσεις (4) καί (5) καί παίρνουμε:

$$\frac{K\Theta}{O\Gamma}:\frac{\Lambda H}{O\Gamma}=\frac{BK}{BO}:\frac{\Delta\Lambda}{\Delta O}$$ ἤ

(6) $$\frac{K\Theta}{\Lambda H}=\frac{BK}{BO}\cdot\frac{\Delta O}{\Delta\Lambda}.$$

Τώρα ἀπό τίς σχέσεις (3) καί (6), ἕπεται ὅτι εἶναι:

$$\frac{KE}{\Lambda Z}=\frac{K\Theta}{\Lambda H}.$$

"Αρα ἡ ΒΔ περνάει ἀπό τό κοινό σημεῖο Ι τῶν ΕΖ καί ΗΘ.

152. 'Από ἕνα σημεῖο Δ τῆς βάσεως ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε παράλληλο πρός τή διάμεσο ΑΜ, πού τέμνει τίς ΑΒ καί ΑΓ στά Ε καί Ζ. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό ἄθροισμα ΔΕ+ΔΖ εἶναι σταθερό.

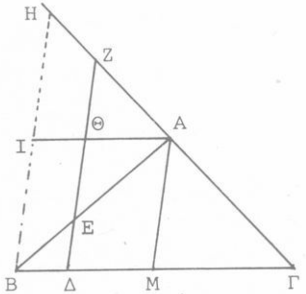
'<u>Απόδειξη</u>. 'Από τό Β φέρνουμε παράλληλο πρός τή διάμεσο ΑΜ (σχ.152), πού τέμνει τήν ΓΑ στό Η. Τότε τό Α εἶναι τό μέσο τῆς ΓΗ, γιατί εἶναι ΜΒ = ΜΓ καί ΜΑ//ΒΗ.

'Από τό Α φέρνουμε παράλληλο τῆς ΒΓ, πού τέμνει τίς ΔΖ καί ΒΗ στά σημεῖα Θ καί Ι. Τότε εἶναι ΑΓ = ΑΗ, ΑΙ//ΒΓ, ἀπό τίς ὁποῖες ἕπεται ὅτι τό Ι εἶναι τό μέσο τῆς ΒΗ. "Αρα καί τό Θ εἶναι τό μέσο τῆς ΕΖ. "Ετσι ἔχουμε:

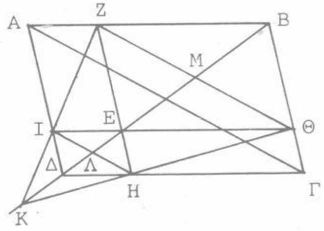
$$\Delta E+\Delta Z = \Delta E+\Delta E+EZ = 2\Delta E+2E\Theta = 2\Delta\Theta = 2AM,$$

γιατί τό ΑΘΔΜ εἶναι παραλληλόγραμμο. "Αρα εἶναι:

$$\Delta E+\Delta Z = 2AM, \text{ δηλαδή σταθερό.}$$



Σχ.152



Σχ.153

153. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ καί ἔστω Ε τυχαῖο σημεῖο τῆς διαγωνίου ΒΔ. 'Από τό Ε φέρνουμε ἀπό μιά παράλληλο πρός τίς πλευρές του, πού τέμνουν τίς ΑΒ καί ΓΔ στά Η καί Ζ ἀντιστοίχως καί τίς ΑΔ καί ΒΓ στά Ι καί Θ ἀντιστοίχως. Νά ἀποδείξετε ὅτι εἶναι α) ΖΘ//ΗΙ καί β) οἱ ΙΖ καί ΗΘ τέμνονται πάνω στή ΒΔ.

<u>'Απόδειξη</u>. α) Τά τρίγωνα ΑΒΔ καί ΖΒΕ εἶναι προφανῶς ὅμοια, ὅπως καί τά ΒΓΔ καί ΒΘΕ (σχ.153). Τότε καί τά παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ καί ΖΒΘΕ εἶναι ὅμοια, ἀφοῦ αὐτά ἀποτελοῦνται ἀπό ὅμοια τρίγωνα καί ἴδια τοποθετημένα. "Αρα ἔχουμε:

$\frac{AB}{ZB}=\frac{B\Gamma}{B\Theta}$ ἀπό τήν ὁποία ἕπεται:

(1) $\qquad A\Gamma // Z\Theta.$

"Ιδια μποροῦμε νά ἀποδείξουμε ὅτι εἶναι καί:

(2) $\qquad A\Gamma // HI.$

Τώρα ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) ἕπεται ὅτι ΖΘ//ΗΙ.

β) "Αν Λ καί Μ εἶναι τά κέντρα τῶν παραλληλογράμμων ΕΗΔΙ καί ΒΘΕΖ, ἔχουμε προφανῶς:

$\frac{\Lambda I}{\Lambda H}=1$ καί $\frac{MZ}{M\Theta}=1$, ἀπό τίς ὁποῖες ἕπεται $\frac{\Lambda I}{\Lambda H}=\frac{MZ}{M\Theta}$. "Αρα οἱ εὐθεῖες ΙΖ, ΛΜ, ΘΗ περνοῦν ἀπό τό ἴδιο σημεῖο Κ, ἤ οἱ ΙΖ καί ΗΘ τέμνονται πάνω στή ΒΔ.

154. Δίνεται ἕνα κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ καί ἔστω Ε ἕνα τυχαῖο σημεῖο τῆς ΑΒ. 'Από τό Ε φέρνουμε παράλληλο τῆς ΒΓ, πού τέμνει τήν ΑΓ στό Ζ καί ἀπό τό Ζ φέρνουμε παράλληλο τῆς ΓΔ, πού τέμνει τήν ΑΔ στό Η. Νά ἀποδείξετε ὅτι: α) ΑΕ·ΔΗ = ΒΕ·ΑΗ καί β) ΕΗ//ΒΔ.

<u>'Απόδειξη</u>. α) Μέ τίς παράλληλες ΕΖ//ΒΓ καί ΖΗ//ΓΔ, ὁ

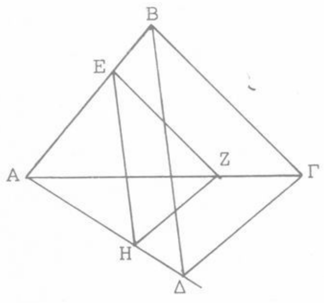
λόγος ΑΕ/ΒΕ μεταφέρεται διαδοχικά ὡς ἑξῆς:

$$\frac{ΑΕ}{ΒΕ} = \frac{ΑΖ}{ΓΖ} = \frac{ΑΗ}{ΔΗ} \quad ἤ$$

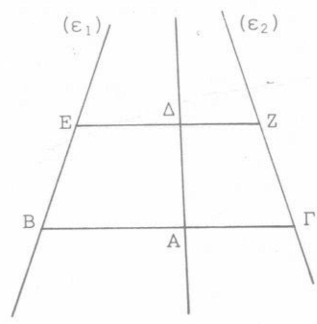
$$(1) \qquad \frac{ΑΕ}{ΒΕ} = \frac{ΑΗ}{ΔΗ}$$

ἀπό τήν ὁποία ἕπεται: $ΑΕ \cdot ΔΗ = ΒΕ \cdot ΑΗ$.

β) ᾿Από τήν ἀναλογία (1) παίρνουμε ἀμέσως ὅτι: ΕΗ//ΒΔ.



Σχ.154



Σχ.155

155. Δίνονται δύο εὐθεῖες ($ε_1$), ($ε_2$) καί ἕνα σημεῖο Α. Οἱ ($ε_1$) καί ($ε_2$) τέμνονται, ἀλλά τό σημεῖο τομῆς τους δέ βρίσκεται μέσα στό πεδίο σχεδιάσεως.
δηλαδή τέμνονται [illegible]
Νά φέρετε εὐθεία ἀπό τό Α πού νά περνάει καί ἀπό τό κοινό σημεῖο τῶν ($ε_1$) καί ($ε_2$).

<u>Λύση</u>. ᾿Από τό Α φέρνουμε μιά τυχαία εὐθεία πού νά τέμνει τίς ($ε_1$) καί ($ε_2$) στά σημεῖα Β καί Γ (σχ.155). Φέρνουμε καί μιά ἄλλη εὐθεία παράλληλη τῆς ΒΓ, πού τέμνει τίς ($ε_1$) καί ($ε_2$) στά Ε καί Ζ. Πάνω στό τμῆμα ΕΖ διαλέγουμε ἐκεῖνο τό σημεῖο Δ, γιά τό ὁποῖο εἶναι: ΔΕ/ΔΖ = ΑΒ/ΑΓ. Τότε ἡ ΑΔ εἶναι ἡ

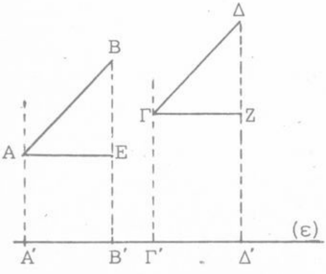
ζητούμενη εὐθεία, πού περνάει ἀπό τό κοινό σημεῖο τῶν (ε_1) καί (ε_2).

ΟΡΘΕΣ ΠΡΟΒΟΛΕΣ

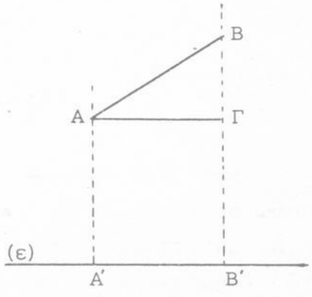
156. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι οἱ προβολές δύο ἴσων καί παραλλήλων τμημάτων πάνω στήν ἴδια εὐθεία εἶναι ἴσες.

'<u>Απόδειξη</u>. "Ας πάρουμε δύο ἴσα καί παράλληλα εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καί ΓΔ (σχ.156) καί μιά εὐθεία (ε). Φέρνουμε τίς ΑΑ'⊥(ε), ΒΒ'⊥(ε), ΓΓ'⊥(ε), ΔΔ'⊥(ε), καί τότε τά τμήματα Α'Β', Γ'Δ' εἶναι οἱ προβολές τῶν ΑΒ καί ΓΔ πάνω στήν εὐθεία (ε).

Φέρνουμε καί τίς ΑΕ⊥ΒΒ' καί ΓΖ⊥ΔΔ'. Τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΕ καί ΓΔΖ εἶναι ἴσα, γιατί ἔχουν ΑΒ = ΓΔ ἀπό τήν ὑπόθεση καί $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ γιατί ἔχουν τίς πλευρές τους παράλληλες καί εἶναι ὀξεῖες. "Αρα θά εἶναι καί ΑΕ = ΓΖ ἀπό τήν ὁποία ἕπεται ὅτι Α'Β' = Γ'Δ', ἀφοῦ τά ΑΕΒΑ' καί ΓΖΔ'Γ' εἶναι ὀρθογώνια.



Σχ.156



Σχ.157

157. "Αν $A'B'$ εἶναι ἡ προβολή τμήματος AB πάνω σέ εὐθεία (ε), νά ἀποδείξετε ὅτι εἶναι $AB \geqq A'B' \geqq 0$. Πότε ἰσχύει τό πρῶτο ἴσον καί πότε τό δεύτερο;

'<u>Απόδειξη</u>. Φέρνουμε τήν $A\Gamma /\!/ (\varepsilon)$ (σχ.157). Τότε τό τρίγωνο $AB\Gamma$ εἶναι ὀρθογώνιο μέ ὑποτείνουσα τήν AB καί ἑπομένως ἔχει:

$$AB \geqq A\Gamma \geqq 0 \quad \text{ἤ} \quad AB \geqq A'B' \geqq 0.$$

Τό πρῶτο = ἀληθεύει ὅταν εἶναι $AB /\!/ (\varepsilon)$, ἐνῶ τό δεύτερο = ὅταν εἶναι $AB \perp (\varepsilon)$.

158. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό μέσο ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος προβάλλεται στό μέσο τῆς προβολῆς του πάνω σέ εὐθεία.

'<u>Απόδειξη</u>. "Ας πάρουμε ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα AB καί μιά εὐθεία (ε) (σχ.158). Φέρνουμε τίς AA' καί BB' μέ τίς ὁποῖες προβάλλουμε τό τμῆμα AB πάνω στήν (ε) καί ἔστω M τό μέσο τοῦ AB, πού προβάλλεται πάνω στήν (ε) στό M'.

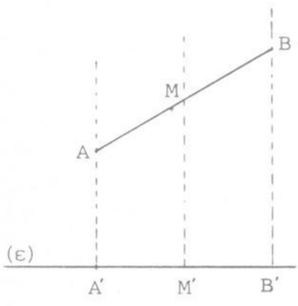
'Επειδή εἶναι $AA' /\!/ BB' /\!/ MM'$, ὡς κάθετες στήν (ε), ἕπεται ὅτι τό τετράπλευρο $ABB'A'$ εἶναι τραπέζιο καί ἐπειδή αὐτό ἔχει τό M γιά μέσο τῆς AB, ἕπεται ὅτι ἡ MM' εἶναι ἡ διάμεσός του, δηλαδή τό M' εἶναι τό μέσο τοῦ $A'B'$. "Αρα τό μέσο M τοῦ AB, προβάλλεται στό μέσο M' τῆς προβολῆς του $A'B'$.

159. "Αν ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα AB προβάλλεται πάνω σέ τρεῖς εὐθεῖες (ε_1), (ε_2), (ε_3) στά A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 ἀντιστοίχως, νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ μεσοκάθετοι τῶν τμημάτων A_1B_1, A_2B_2 καί A_3B_3 περνοῦν ἀπό τό ἴδιο σημεῖο.

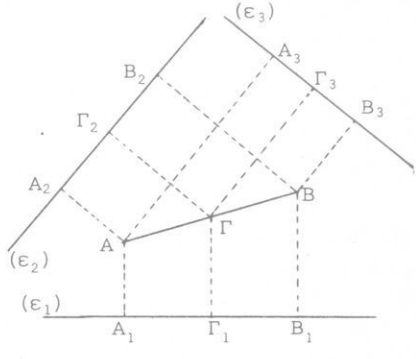
'<u>Απόδειξη</u>. Τό τετράπλευρο ABB_1A_1 εἶναι ὀρθογώνιο τραπέζιο, γιατί εἶναι $AA_1 \perp (\varepsilon_1)$ καί $BB_1 \perp (\varepsilon_1)$. Ἡ μεσοκάθετος τοῦ τμήματος A_1B_1 θά περάσει ἀπό τό μέσο τοῦ τμήματος ΑΒ, ἀφοῦ αὐτή εἶναι ἡ μεσοπαράλληλος τῶν AA_1 καί BB_1 (σχ.159).

Γιά ἴδιους λόγους καί οἱ μεσοκάθετοι τῶν τμημάτων A_2B_2 καί A_3B_3 θά περάσουν ἀπό τό μέσο τοῦ τμήματος ΑΒ.

Ἄρα οἱ μεσοκάθετοι τῶν τμημάτων A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 θά περάσουν ἀπό τό μέσο Γ τοῦ τμήματος ΑΒ.



Σχ.158



Σχ.159

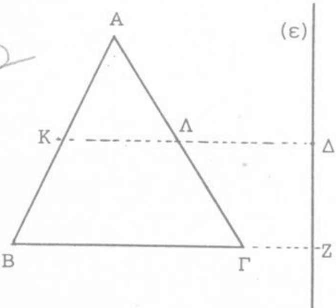
160. Ἄν τά μέσα Κ καί Λ τῶν πλευρῶν ΑΒ καί ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ, προβάλλονται πάνω σέ εὐθεία (ε) στό ἴδιο σημεῖο, νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ προβολή τῆς πλευρᾶς ΒΓ πάνω στήν (ε) εἶναι μηδενική.

Ἀπόδειξη. Τά Κ καί Λ προβάλλονται πάνω στήν εὐθεία (ε) στό ἴδιο σημεῖο Δ (σχ.160). Τότε θά εἶναι $K\Lambda \perp (\varepsilon)$. Ἐπειδή ὅμως τά Κ καί Λ εἶναι τά μέσα τῶν πλευρῶν ΑΒ καί ΑΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἔπεται ὅτι ἡ ΚΛ εἶναι παράλληλη τῆς ΒΓ, καί ἐπομένως θά εἶναι καί ἡ ΒΓ κάθετη στήν (ε). Ἄρα τά Β καί Γ προβάλλονται πάνω στήν εὐθεία (ε) στό ἴδιο σημεῖο Ζ.

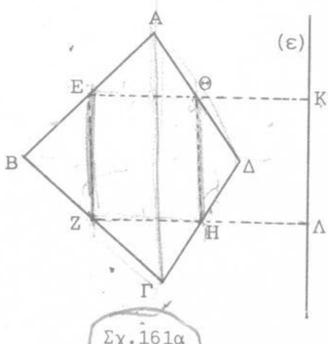
161. Ἄν τά μέσα δύο διαδοχικῶν πλευρῶν ἑνός τετραπλεύρου, προβάλλονται πάνω σέ δεδομένη εὐθεία στό ἴδιο σημεῖο, νά ἀποδείξετε ὅτι καί τά μέσα τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου προβάλλονται σέ ἕνα σημεῖο. Ἄν τά μέσα δύο ἀπέναντι πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου προβάλλονται στό ἴδιο σημεῖο, νά ἀποδείξετε ὅτι τά μέσα τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου προβάλλονται ἑκατέρωθεν τοῦ προηγούμενου σημείου σέ ἴσες ἀποστάσεις.

<u>Ἀπόδειξη</u>. Ἔστω ὅτι τά μέσα Ε καί Θ τῶν πλευρῶν ΑΒ καί ΑΔ τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ (σχ.161α), προβάλλονται πάνω στήν εὐθεία (ε) στό ἴδιο σημεῖο Κ. Τότε θά εἶναι ΕΘ $\perp$ (ε).

Ἄν Ζ καί Η εἶναι τά μέσα τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου, ξέρουμε ὅτι τό ΕΖΗΘ εἶναι παραλληλόγραμμο, ἄρα ΖΗ// ΕΘ. Τότε ὅμως καί ἡ ΖΗ, σάν παράλληλη τῆς ΕΘ, θά εἶναι κάθετη σήν εὐθεία (ε). Ἄρα τά Ζ καί Η θά προβάλλονται πάνω στήν εὐθεία (ε) στό ἴδιο σημεῖο Λ.

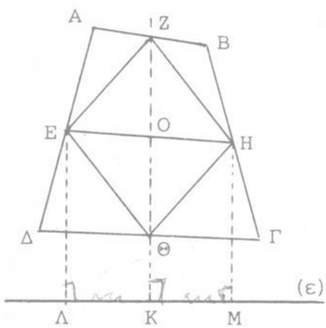


Σχ.160

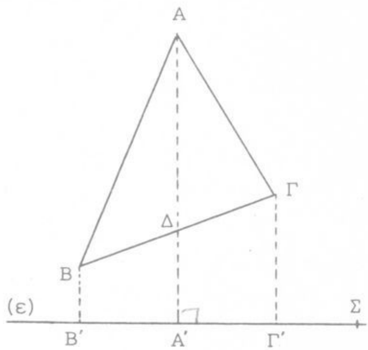


Σχ.161α

Ἄς ὑποθέσουμε τώρα ὅτι τά μέσα Ζ καί Θ τῶν πλευρῶν ΑΒ καί ΓΔ τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, προβάλλονται πάνω στήν εὐθεία (ε) στό ἴδιο σημεῖο Κ (σχ.161β). Ἄν Ε καί Η εἶναι τά μέσα τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου, τότε τό ΕΖΗΘ εἶναι παραλληλόγραμμο καί ἐπομένως τό κέντρο του Ο προβάλλεται στό σημεῖο Κ, ἀφοῦ αὐτό βρίσκεται πάνω στή ΖΘ. Τό Ο ὅμως εἶναι καί μέσο τῆς διαγωνίου ΕΗ τοῦ παραλληλογράμμου ΕΖΗΘ. Ἄρα τά Ε καί Η προβάλλονται ἑκατέρωθεν τοῦ Κ στά Λ καί Μ καί σέ ἴσες ἀποστάσεις ἀπό τό Κ (ἄσκ.158).



Σχ.161β



Σχ.162

162. Ἀπό δεδομένο σημεῖο Σ νά φέρετε εὐθεία (ε), πάνω στήν ὁποία οἱ προβολές τῶν κορυφῶν δεδομένου τριγώνου ΑΒΓ νά ὁρίζουν δύο ἴσα τμήματα.

Λύση. Φέρνουμε τή διάμεσο ΑΔ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καί ἀπό τό δοσμένο σημεῖο Σ κάθετο πρός τήν ΑΔ, πού τήν τέμνει στό Α′. Τότε, τόσο τό Α, ὅσο καί τό μέσο Δ τῆς ΒΓ, προβάλλονται πάνω στήν εὐθεία αὐτή στό ἴδιο σημεῖο Α′. Ἄρα τά Β καί Γ θά προβάλλονται στά Β′ καί Γ′ ἑκατέρωθεν τοῦ Α′ καί σέ ἴσες ἀποστάσεις ἀπ' αὐτό (ἄσκ.158). Ἐπομένως ἡ ζητούμενη εὐθεία εἶναι ἡ ΣΑ′ πού εἶναι κάθετη στή διάμεσο ΑΔ.

Τό πρόβλημα δέχεται δύο ἀκόμα λύσεις, τίς κάθετες ἀπό τό Σ πρός τίς δύο ἄλλες διαμέσους τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

163. Ἀπό δεδομένο σημεῖο Σ νά φέρετε εὐθεία πάνω στήν ὁποία οἱ προβολές τῶν κορυφῶν τριγώνου ΑΒΓ νά ὁρίζουν δύο διαδοχικά τμήματα ἀπό τά ὁποῖα τό ἕνα νά εἶναι διπλάσιο ἀπό τό ἄλλο.

<u>Λύση</u>. Διαιροῦμε τήν πλευρά ΒΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ σέ τρία ἴσα τμήματα μέ τά σημεῖα Δ καί Ε (σχ.163). Τότε θά εἶναι: $ΒΕ = 2 \cdot ΕΓ$.

Φέρνουμε τήν ΑΕ καί ἀπό τό Σ τή $ΣΑ' \perp ΑΕ$, πού εἶναι καί ἡ ζητούμενη εὐθεία.

Πραγματικά, προβάλλοντας τά Β, Δ καί Ε πάνω στή ΣΑ', παρατηροῦμε ὅτι εἶναι:

$Β'Δ' = Δ'Α' = Α'Γ'$ ἀπό τήν ὁποία ἕπεται ὅτι $Β'Α' = 2 \cdot Α'Γ'$, γιατί εἶναι $ΒΔ = ΔΕ = ΕΓ$ καί $ΒΒ' /\!/ ΔΔ' /\!/ ΕΑ' /\!/ ΓΓ'$.

Μιά ἄλλη λύση προκύπτει ἄν φέρουμε ἀπό τό Σ κάθετο πρός τήν ΑΔ.

Τελικά τό πρόβλημα δέχεται ἕξι λύσεις, γιατί τά ἴδια μποροῦμε νά ἐπαναλάβουμε τριχοτομόντας καί τίς ἄλλες πλευρές ΑΒ καί ΑΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΤΑ ΟΡΘΟΓΩΝΙΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

164. Σ' ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο οἱ δύο κάθετες πλευρές του εἶναι 15 m καί 20 m. Νά βρεθοῦν ἡ ὑποτείνουσα τοῦ τριγώνου, οἱ προβολές τῶν καθέτων πλευρῶν του πάνω στήν ὑποτείνουσα καί τό ὕψος του ἀπό τήν ὀρθή γωνία.

<u>Λύση</u>. Ἔστω ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^0$) τό δοσμένο ὀρθογώνιο τρίγωνο, μέ ΑΒ = 20m καί ΑΓ = 15m. Τότε θά εἶναι (σχ.164):

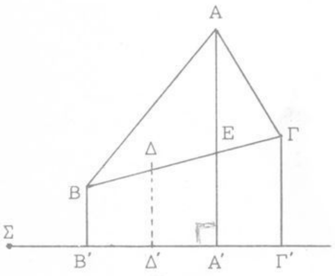
$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 = 20^2 + 15^2 = 625$, ἀπό τήν ὁποία ἕπεται: $B\Gamma = 25m$.

Φέρνουμε τό ὕψος του ΑΔ. Τότε ἔχουμε:

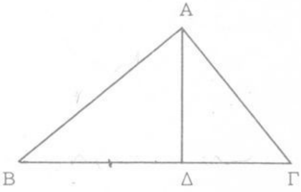
$$AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta \quad \text{ἤ} \quad B\Delta = \frac{AB^2}{B\Gamma} = \frac{20^2}{25} = \frac{400}{25} = 16 \quad \text{ἤ} \quad B\Delta = 16m.$$

Τότε θά εἶναι καί $\Delta\Gamma = B\Gamma - B\Delta = 25m - 16m = 9m$.

$$A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma = 16 \cdot 9 \quad \text{ἤ} \quad A\Delta = \sqrt{16 \cdot 9} = 4 \cdot 3 = 12 \quad \text{ἤ} \quad A\Delta = 12m.$$



Σχ.163



Σχ.164

165. Οἱ προβολές τῶν καθέτων πλευρῶν ἑνός ὀρθογωνίου τριγώνου πάνω στήν ὑποτείνουσα εἶναι 2 cm καί 8 cm. Νά βρεθοῦν τό ὕψος ἀπό τήν ὀρθή γωνία καί οἱ κάθετες πλευρές τοῦ τριγώνου.

<u>Λύση</u>. Ἔστω ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^0$) τό δοσμένο ὀρθογώνιο τρίγωνο (σχ.165). Φέρνουμε $A\Delta \perp B\Gamma$ καί τότε θά εἶναι $B\Delta = 2cm$ καί $\Delta\Gamma = 8$ cm. Τότε θά ἔχουμε:

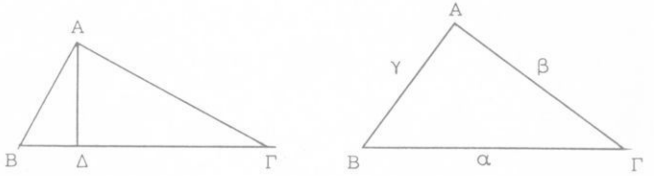
$$A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma = 2 \cdot 8 = 16 \quad \text{ἤ} \quad A\Delta = 4cm.$$

Ἀπό τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ παίρνουμε:

$AB^2 = A\Delta^2 + B\Delta^2 = 4^2 + 2^2 = 16 + 4 = 20$ ἤ $AB = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ cm.

'Από τό τρίγωνο ΑΔΓ ἔχουμε:

$A\Gamma^2 = A\Delta^2 + \Delta\Gamma^2 = 4^2 + 8^2 = 16 + 64 = 80$ ἤ $A\Gamma = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$ cm.



Σχ.165 Σχ.166

166. Νά βρεθοῦν οἱ πλευρές ἑνός ὀρθογωνίου τριγώνου πού ἔχει περίμετρο 84cm καί ὑποτείνουσα 37cm.

<u>Λύση</u>. Ἔστω ΑΒΓ ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ($\hat{A} = 90^0$) πού ἔχει $\alpha+\beta+\gamma = 84$cm καί $\alpha = 37$cm (σχ.166). Τότε θά εἶναι $\beta+\gamma = 84-37 = 47$cm ἤ

(1) $\beta+\gamma = 47$ cm καί

(2) $\beta^2+\gamma^2 = 37^2$ cm^2.

Λύνουμε τό σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καί (2) καί βρίσκουμε $\beta = 35$cm καί $\gamma = 12$cm.

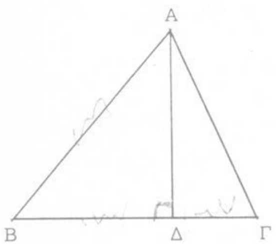
167. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ διαφορά τῶν τετραγώνων δύο πλευρῶν ἑνός τυχαίου τριγώνου εἶναι ἴση μέ τή διαφορά τῶν τετραγώνων τῶν προβολῶν τους πάνω στήν τρίτη πλευρά.

'<u>Απόδειξη</u>. Ἄς πάρουμε ἕνα τυχαῖο τρίγωνο ΑΒΓ (σχ.167). Φέρνουμε τήν $A\Delta \perp B\Gamma$ καί ἀπό τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ καί ΑΓΔ παίρνουμε:

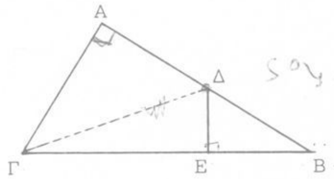
$AB^2 = A\Delta^2 + B\Delta^2$ καί $A\Gamma^2 = A\Delta^2 + \Gamma\Delta^2$.

Ἀφαιροῦμε αὐτές κατά μέλη καί ἔχουμε:

$AB^2 - A\Gamma^2 = B\Delta^2 - \Gamma\Delta^2$.



Σχ.167



Σχ.168

168. Σ' ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^0$) φέρνουμε ἀπό τό μέσο Δ τῆς ΑΒ κάθετο ΔΕ στήν ὑποτείνουσα. Νά ἀποδείξετε ὅτι εἶναι $E\Gamma^2 - EB^2 = A\Gamma^2$.

<u>Ἀπόδειξη</u>. Τά τρίγωνα ΔΕΓ, ΔΕΒ καί ΑΓΔ εἶναι ὀρθογώνια (σχ.168). Ἀπ' αὐτά ἔχουμε:

$E\Gamma^2 = \Delta\Gamma^2 - \Delta E^2$ καί $EB^2 = \Delta B^2 - \Delta E^2$. Τίς ἀφαιροῦμε κατά μέλη καί παίρνουμε: $E\Gamma^2 - EB^2 = \Delta\Gamma^2 - \Delta B^2 = (A\Gamma^2 + \Delta A^2) - \Delta B^2$. Ἐπειδή ὅμως τό Δ εἶναι τό μέσο τῆς ΑΒ, ἔχουμε:

$E\Gamma^2 - EB^2 = (A\Gamma^2 + \Delta B^2) - \Delta B^2 = A\Gamma^2$.

169. Ἕνα τετράπλευρο ΑΒΓΔ ἔχει κάθετες τίς διαγωνίους του ΑΓ καί ΒΔ. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι εἶναι:

$AB^2+\Gamma\Delta^2 = B\Gamma^2+A\Delta^2$.

<u>Ἀπόδειξη</u>. Ἄν O εἶναι τό σημεῖο τομῆς τῶν διαγωνίων ΑΓ καί ΒΔ (σχ.169), ἀπό τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΆΟΒ καί ΓΟΔ παίρνουμε:

$AB^2 = OA^2+OB^2$ καί $\Gamma\Delta^2 = O\Gamma^2+O\Delta^2$. Τίς προσθέτουμε κατά μέλη καί ἔχουμε:

(1) $$AB^2+\Gamma\Delta^2 = OA^2+OB^2+O\Gamma^2+O\Delta^2.$$

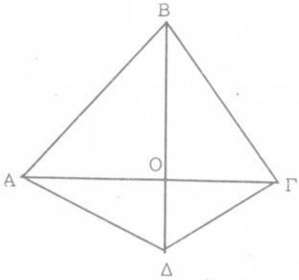
Ἀπό τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΒΟΓ καί ΔΟΑ παίρνουμε:

$B\Gamma^2 = OB^2+O\Gamma^2$ καί $A\Delta^2 = OA^2+O\Delta^2$. Τίς προσθέτουμε κατά μέλη καί ἔχουμε:

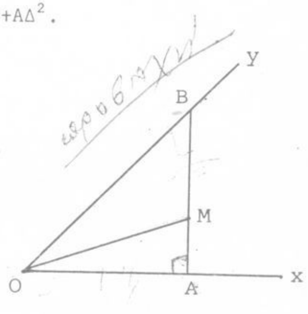
(2) $$B\Gamma^2+A\Delta^2 = OB^2+O\Gamma^2+OA^2+O\Delta^2.$$

Οἱ σχέσεις (1) καί (2) ἔχουν τά πρῶτα μέλη τους ἴσα. Ἄρα θά ἔχουν καί τά δεύτερα μέλη τους ἴσα, δηλαδή:

$$AB^2+\Gamma\Delta^2 = B\Gamma^2+A\Delta^2.$$



Σχ.169



Σχ.170

170. Δίνεται μιά γωνία $x\hat{O}y = 45^0$ καί ἕνα σημεῖο Μ στό ἐσωτερικό της. Ἀπό τό Μ φέρνουμε εὐθεία κάθετη στήν Ox, πού τήν τέμνει στό σημεῖο Α ἐνῶ τήν Oy τήν τέμνει στό Β. Ν' ἀποδείξετε ὅτι $AB^2+AM^2 = OM^2$.

ʹ<u>Απόδειξη</u>. ʹΑπό τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΜΑΟ παίρνουμε:

(1) $$OM^2 = AO^2+AM^2.$$

Τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΟΒ ἔχει τή γωνία του στό Ο ἴση μέ 45^0. ῎Αρα εἶναι ἰσοσκελές μέ $AO = AB$ (σχ.170). Τότε ἡ σχέση (1) γράφεται:

$$OM^2 = AB^2+AM^2.$$

171. Δίνεται ἕνα ὀρθογώνιο ΑΒΓΔ καί ἕνα σημεῖο Ε στό ἐσωτερικό του. ῎Αν συνδέσουμε τό Ε μέ τίς κορυφές τοῦ ὀρθογωνίου, νά ἀποδείξετε ὅτι εἶναι: $EA^2+E\Gamma^2 = EB^2+E\Delta^2$.

ʹ<u>Απόδειξη</u>. ʹΑπό τό σημεῖο Ε φέρνουμε παράλληλες πρός τίς πλευρές τοῦ ὀρθογωνίου (σχ.171), πάνω στίς ὁποῖες ὁρίζονται τά ἴσα τμήματα:

$AZ = E\Theta = BH = \alpha$,

$Z\Delta = EI = H\Gamma = \beta$,

$A\Theta = ZE = \Delta I = \gamma$,

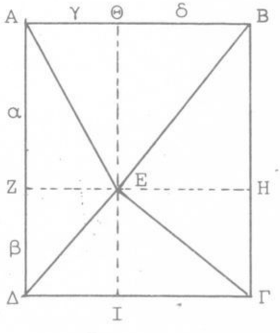
$B\Theta = HE = \Gamma I = \delta$.

Τότε, ἀπό τά ὀρθογώνια τρίγωνα πού σχηματίζονται, ἔχουμε:

$EA^2 = \alpha^2+\gamma^2$, $E\Gamma^2 = \beta^2+\delta^2$.

Τίς προσθέτουμε κατά μέλη καί παίρνουμε:

(1) $EA^2+E\Gamma^2 = \alpha^2+\gamma^2+\beta^2+\delta^2$.



Σχ.171

ʹΕπίσης εἶναι:

$EB^2 = \alpha^2+\delta^2$, $E\Delta^2 = \beta^2+\gamma^2$.

Τίς προσθέτουμε κατά μέλη καί παίρνουμε:

(2) $$ΕΒ^2+ΕΔ^2 = α^2+δ^2+β^2+γ^2.$$

Τώρα ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2), ἕπεται:

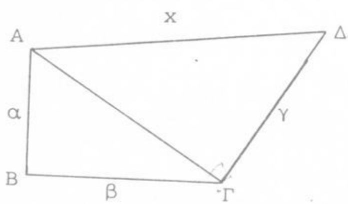
$ΕΑ^2+ΕΓ^2 = ΕΒ^2+ΕΔ^2$.

172. Νά κατασκευαστεῖ τμῆμα x πού νά ἱκανοποιεῖ τή σχέση $x^2 = α^2+β^2+γ^2$, ὅπου τά α, β, γ εἶναι δεδομένα τμήματα.

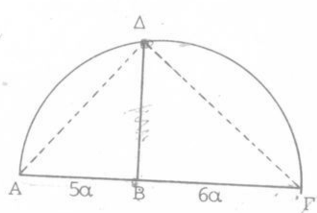
<u>Λύση</u>. Παίρνουμε δύο κάθετα τμήματα ΑΒ καί ΒΓ (σχ.172) ἴσα πρός τά α καί β ἀντιστοίχως. 'Από τό Γ φέρνουμε ΓΔ⊥ΑΓ καί νά εἶναι ΓΔ = γ. Τότε τό τμῆμα ΑΔ εἶναι τό ζητούμενο.

Πραγματικά, ἀπό τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΓΔ καί ΑΒΓ παίρνουμε:

$$x^2 = ΑΔ^2 = ΑΓ^2+ΓΔ^2 = (ΑΒ^2+ΒΓ^2)+ΓΔ^2 = α^2+β^2+γ^2.$$



Σχ.172



Σχ.173

173. Νά κατασκευαστεῖ τμῆμα $x = α\sqrt{30}$, ὅπου τό α εἶναι δεδομένο εὐθύγραμμο τμῆμα.

<u>Λύση</u>. 'Η δοσμένη σχέση γράφεται $x^2 = 30α^2$ ἤ $x^2 = 5α \cdot 6α$.

Πάνω σέ μιά εὐθεία παίρνουμε διαδοχικά τά σημεῖα Α, Β, Γ ἔτσι ὥστε νά εἶναι ΑΒ = 5α καί ΑΓ = 6α (σχ.173). Μέ διάμετρο τή ΓΑ γράφουμε ἡμικύκλιο καί ἀπό τό Β φέρνουμε κάθετο πρός τή ΓΑ πού τέμνει τό ἡμικύκλιο στό Δ. Τότε τό τμῆμα ΒΔ εἶναι τό ζητούμενο x.

'<u>Απόδειξη</u>. Φέρνουμε τίς ΑΔ καί ΔΓ. Τότε τό τρίγωνο ΑΔΓ εἶναι ὀρθογώνιο στό Δ καί ἔχει τό ΔΒ γιά ὕψος του. "Αρα θά εἶναι $ΔΒ^2 = ΒΑ \cdot ΒΓ$ ἤ $x^2 = (5α)(6α)$ ἤ $x^2 = 30α^2$ ἀπό τήν ὁποία ἔπεται ὅτι $x = α\sqrt{30}$.

174. Δίνεται ἕνα τεταρτοκύκλιο ΑΟΒ. 'Από τυχαῖο σημεῖο Γ τοῦ τόξου ΑΒ, φέρνουμε $ΓΕ \perp ΟΑ$ πού τέμνει τή διχοτόμο τῆς ὀρθῆς γωνίας $Α\hat{Ο}Β$ στό σημεῖο Δ. Ν' ἀποδείξετε ὅτι εἶναι $ΓΕ^2 + ΔΕ^2 = ΟΑ^2$.

'<u>Απόδειξη</u>. Τό τρίγωνο ΔΟΕ εἶναι ὀρθογώνιο καί ἔχει τή γωνία του στό Ο ἴση μέ 45^0. "Αρα εἶναι ἰσοσκελές μέ ΔΕ = ΕΟ.

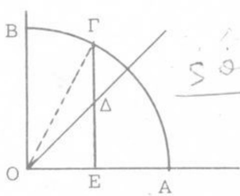
'Από τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΓΕΟ (σχ.174) παίρνουμε:

$ΓΕ^2 + ΕΟ^2 = ΟΓ^2$ ἤ

$ΓΕ^2 + ΔΕ^2 = ΟΑ^2$

γιατί εἶναι:

ΟΓ = ΟΑ.



Σχ.174

175. Νά κατασκευαστεῖ τμῆμα $x = α\sqrt{3} + β\sqrt{5}$, ὅπου τά α καί β εἶναι δεδομένα τμήματα.

<u>Λύση</u>. Κατασκευάζουμε στήν ἀρχή τά τμήματα $α\sqrt{3}$ καί $β\sqrt{5}$ μέ τή γνωστή μέθοδο (§56,VII) καί μετά προσθέτουμε καί βρίσκουμε τό ζητούμενο τμῆμα x.

176. Νά άποδείξετε ότι ή κοινή έξωτερική έφαπτομένη δύο κύκλων πού έφάπτονται έξωτερικά, είναι μέση άνάλογος μεταξύ τῶν διαμέτρων τῶν δύο κύκλων.

<u>'Απόδειξη</u>. "Εστω ΑΒ ή κοινή έξωτερική έφαπτομένη τῶν κύκλων (Κ,R) καί (Λ,ρ) (σχ.176). Πρέπει νά άποδείξουμε ότι:

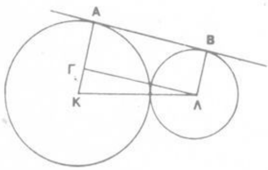
$AB^2 = (2R)(2\rho) = 4R\rho$.

Φέρνουμε τή $ΛΓ \perp KA$. Τότε τό τετράπλευρο ΑΒΛΓ είναι όρθογώνιο καί έπομένως έχει $AB = ΛΓ$.

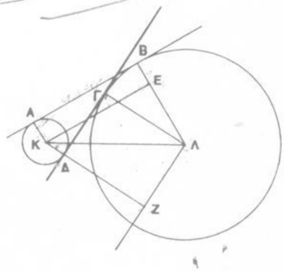
'Από τό όρθογώνιο τρίγωνο ΓΚΛ παίρνουμε:

$ΛΓ^2 = KΛ^2 - KΓ^2$ ή $AB^2 = (R+\rho)^2 - (R-\rho)^2$ ή

$AB^2 = R^2 + 2R\rho + \rho^2 - (R^2 - 2R\rho + \rho^2) = 4R\rho$ ή $AB^2 = 4R\rho$.



Σχ.176



Σχ.177

177. Νά ύπολογιστεῖ τό μῆκος τῆς κοινῆς έξωτερικῆς καί τῆς κοινῆς έσωτερικῆς έφαπτομένης δύο κύκλων πού έχουν άκτίνες α καί 4α, έάν ή διάκεντρος τῶν κύκλων είναι 6α.

<u>Λύση</u>. "Ας θεωρήσουμε τούς δύο κύκλους (Κ,α) καί (Λ,4α)

πού ἔχουν διάκεντρο $ΚΛ = 6α$ (σχ.177) καί ἔστω ΑΒ καί ΓΔ ἡ ἐξωτερική καί ἡ ἐσωτερική ἐφαπτομένη τους.

Φέρνουμε τήν $ΚΕ \perp ΛΒ$. Τότε τό τετράπλευρο ΑΚΕΒ εἶναι ὀρθογώνιο καί ἑπομένως ἔχει $ΑΒ = ΚΕ$. Ἀπό τό ὀρθογώνιο τρίγ. ΚΕΛ παίρνουμε:

$$ΚΕ^2 = ΚΛ^2 - ΛΕ^2 \quad \text{ἤ} \quad ΑΒ^2 = (6α)^2-(4α-α)^2 = (6α)^2-(3α)^2 = 27α^2.$$

"Αρα $ΑΒ = 3α\sqrt{3}$.

Γιά τόν ὑπολογισμό τῆς ἐσωτερικῆς ἐφαπτομένης, φέρνουμε τή $ΛΖ \perp ΚΔ$. Τότε τό τετράπλευρο ΓΔΖΛ εἶναι ὀρθογώνιο καί ἑπομένως ἔχει $ΓΔ = ΛΖ$. Ἀπό τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΚΛΖ παίρνουμε:

$$ΛΖ^2 = ΚΛ^2 - ΚΖ^2 \quad \text{ἤ} \quad ΓΔ^2 = ΚΛ^2-(ΚΔ+ΔΖ)^2 = ΚΛ^2-(ΚΔ+ΓΛ)^2 =$$
$$(6α)^2-(α+4α)^2 = 11α^2.$$ "Αρα $ΓΔ = α\sqrt{11}$.

178. Νά κατασκευαστεῖ τμῆμα $x = \sqrt{α^2-βγ}$, ὅπου τά α, β, γ εἶναι δεδομένα τμήματα.

Λύση. Ἡ δοσμένη σχέση μπορεῖ νά γραφτεῖ καί $x^2=α^2-βγ$. Στήν ἀρχή κατασκευάζουμε ἕνα τμῆμα k, τέτοιο ὥστε νά εἶναι: $k^2 = βγ$ (§54,V). Τότε ἡ δοσμένη σχέση γράφεται: $x^2 = α^2-k^2$. Μετά μποροῦμε νά κατασκευάσουμε τό ζητούμενο τμῆμα x, μέ βάση τή γνωστή κατασκευή (§56,II).

179. Νά κατασκευαστεῖ τμῆμα $x = \sqrt{α^2+β^2-γδ}$ ὅπου τά α, β, γ, δ εἶναι δεδομένα τμήματα.

Λύση. Ἡ δοσμένη σχέση μπορεῖ νά γραφτεῖ $x^2 = α^2+β^2-γδ$. Τό γινόμενο γδ μποροῦμε νά τό ἀντικαταστήσουμε μέ γνωστό τετράγωνο k^2 (§56,V). "Ετσι ἡ δοσμένη σχέση γράφεται $x^2=α^2+β^2-k^2$. Τώρα ἡ κατασκευή τοῦ x εἶναι γνωστή (55,IV).

180. Δίνεται ἕνα τετράγωνο ΑΒΓΔ μέ πλευρά α.

Μέ βάσεις τίς πλευρές του καί ἔξω ἀπό τό τετράγωνο κατασκευάζουμε τά ἰσόπλευρα τρίγωνα ΑΒΕ, ΒΓΖ, ΓΔΗ, ΔΑΘ. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τό τετράπλευρο ΕΖΗΘ εἶναι τετράγωνο καί νά ὑπολογιστεῖ ἡ πλευρά του.

Ἀπόδειξη. Εἶναι φανερό πώς τό τετράπλευρο ΕΖΗΘ ἔχει γιά ἄξονες συμμετρίας τούς ΕΗ καί ΖΘ (σχ.180), πού εἶναι κάθετοι μεταξύ τους καί ἴσοι. Ἄρα αὐτό εἶναι τετράγωνο.

Ἡ προέκταση τῆς ΕΑ τέμνει τή ΔΘ στό Ι. Τότε εἶναι:

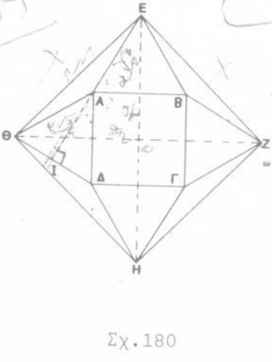
$E\hat{A}B = 60^0$, $B\hat{A}\Delta = 90^0$ ἄρα $\Delta\hat{A}I = 180^0 - 60^0 - 90^0 = 30^0$. Τότε ἡ ΑΙ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας $\Delta\hat{A}\Theta$ καί ἑπομένως θά εἶναι καί $AI \perp \Delta\Theta$, γιατί τό τρίγωνο ΑΔΘ εἶναι ἰσόπλευρο, ὅπως ἐπίσης $I\Delta = I\Theta = \alpha/2$ καί $AI = \alpha\sqrt{3}/2$ σάν ὕψος ἰσόπλευρου τριγώνου.

Ὁ ὑπολογισμός τῆς πλευρᾶς ΕΘ τοῦ τετραγώνου ΕΖΗΘ θά γίνει ἀπό τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΕΙΘ πού ἔχει γνωστές τίς πλευρές του $EI = EA + AI = \alpha + \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{\alpha(2+\sqrt{3})}{2}$ καί $I\Theta = \frac{\alpha}{2}$. Ἔτσι ἔχουμε:

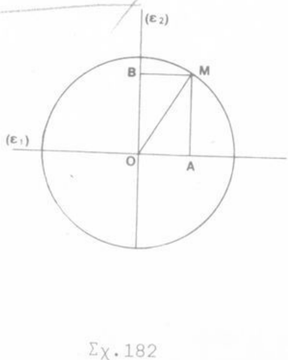
$$E\Theta^2 = EI^2 + I\Theta^2 = \left(\frac{\alpha(2+\sqrt{3})}{2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{4}(4+4\sqrt{3}+3+1) = \frac{\alpha^2}{4}(8+4\sqrt{3})$$

ἤ $E\Theta^2 = \alpha^2(2+\sqrt{3})$. Ἄρα $E\Theta = \alpha\sqrt{1+\sqrt{3}}$.

$\boxed{E\Theta = \alpha\sqrt{2+\sqrt{3}}}$



Σχ.180



Σχ.182

181. Νά κατασκευαστεῖ τμῆμα $x = \sqrt{\alpha\beta} - \sqrt{\gamma\delta}$, ὅπου τά $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ εἶναι δεδομένα εὐθύγραμμα τμήματα.

Λύση. Κατασκευάζουμε στήν ἀρχή τά τμήματα $\sqrt{\alpha\beta}$ καί $\sqrt{\gamma\delta}$ μέ τή γνωστή μέθοδο (§56,V) καί μετά ἀφαιροῦμε γιά νά βροῦμε τό ζητούμενο τμῆμα x.

182. Δίνονται δύο εὐθεῖες (ε_1) καί (ε_2) πού τέμνονται καθέτως. Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων Μ πού τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεών τους ἀπό τίς εὐθεῖες (ε_1) καί (ε_2) παραμένει σταθερό.

Λύση. Ἔστω Μ ἕνα σημεῖο τοῦ ζητούμενου γ. τόπου:

$$MA^2+MB^2 = k^2$$

ὅπου ΜΑ καί ΜΒ εἶναι οἱ ἀποστάσεις τοῦ Μ ἀπό τίς εὐθεῖες (ε_1) καί (ε_2) (σχ.182) καί k σταθερό μῆκος.

Ἀπό τό ὀρθογώνιο ΑΜΒΟ πού σχηματίζεται ἔχουμε $MB = AO$, $MA^2+MB^2 = MA^2+AO^2 = k^2$. Ἀλλά εἶναι $MA^2+AO^2 = MO^2$. Ἄρα θά εἶναι $MO^2 = k^2$, ἑπομένως τό σημῖο Μ τοῦ ζητούμενου γ. τόπου, βρίσκεται πάνω σέ κύκλο κέ κέντρο τό Ο καί ἀκτίνα τήν $OM = k$.

Ἀντίστροφο. Ἔστω Μ ἕνα τυχαῖο σημεῖο τοῦ κύκλου (O;k). Φέρνουμε τίς $MA \perp (\varepsilon_1)$ καί $MB \perp (\varepsilon_2)$. Τότε τό ΟΑΜΒ εἶναι ὀρθογώνιο καί ἑπομένως ἔχει $MB = AO$. Ἄρα:

$$MA^2+MB^2 = MA^2+OA^2 = OM^2 = k^2.$$

Τότε τό σημεῖο Μ ἔχει τήν ἰδιότητα τῶν σημείων τοῦ γ.τόπου, ἄρα ὁ ζητούμενος γ. τόπος εἶναι ὁ κύκλος μέ κέντρο τό Ο καί ἀκτίνα k.

183. Νά κατασκευαστεῖ τμῆμα $x = \sqrt{\alpha^2+2\beta^2+3\gamma^2}$, ὅπου α, β, γ εἶναι δεδομένα εὐθύγραμμα τμήματα.

<u>Λύση</u>. Τό $2\beta^2$ μποροῦμε νά τό ἀντικαταστήσουμε μέ γνωστό τετράγωνο k^2, ἔτσι ὥστε νά εἶναι: $k^2 = 2\beta^2$ ἤ $k = \beta\sqrt{2}$.

Τό $3\gamma^2$ μποροῦμε νά τό ἀντικαταστήσουμε μέ γνωστό τετράγωνο λ^2, ἔτσι ὥστε νά εἶναι: $\lambda^2 = 3\gamma^2$ ἤ $\lambda = \gamma\sqrt{3}$ (56,VII).

Τότε ἡ δοσμένη σχέση γράφεται:

$$x^2 = \alpha^2+k^2+\lambda^2$$

καί ἡ κατασκευή τοῦ x εἶναι γνωστή (56,III).

184. Δίνεται ἕνας κύκλος (O,R) καί δύο ὁποιεσδήποτε χορδές του πού τέμνονται καθέτως στό σημεῖο M. Ἄν Α, Β, Γ, Δ εἶναι τά τμήματα στά ὁποῖα διαιροῦνται οἱ χορδές ἀπό τό M, ν'ἀποδείξετε ὅτι τό ἄθροισμα $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$ εἶναι σταθερό.

<u>Ἀπόδειξη</u>. Ἄς πάρουμε δύο χορδές ΑΒ καί ΓΔ κάθετες μεταξύ τους, πού τέμνονται στό σημεῖο Μ (σχ.184). Τότε θά εἶναι $MA = \alpha$, $MB = \beta$, $M\Gamma = \gamma$, $M\Delta = \delta$. Φέρνουμε τίς ΑΓ καί ΒΔ. Ἀπό τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΜΓ καί ΒΜΔ παίρνουμε: $\alpha^2+\beta^2 = A\Gamma^2$, $\beta^2+\delta^2 = B\Delta^2$. Τίς προσθέτουμε κατά μέλη καί παίρνουμε:

$$(1) \qquad \underline{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2 = A\Gamma^2+B\Delta^2.}$$

Φέρνουμε τή διάμετρο ΒΟΕ. Τότε θά εἶναι $B\hat{\Delta}E = 90^0$ καί $B\hat{A}E = 90^0$. Ἐπειδή ἡ ΓΔ εἶναι κάθετη στήν ΑΒ, ἕπεται ὅτι ΑΕ//ΓΔ γιατί καί οἱ δύο εἶναι κάθετες στήν ΑΒ. Τότε τό τετράπλευρο ΑΓΔΕ εἶναι τραπέζιο καί σάν ἐγγεγραμμένο σέ κύκλο, εἶναι καί ἰσοσκελές μέ $A\Gamma = \Delta E$. Τότε ἡ σχέση (1) γράφεται:

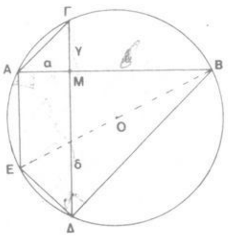
$$(2) \qquad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2 = \underline{\Delta E^2}+B\Delta^2.$$

Ἀπό τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΒΔΕ παίρνουμε: $\Delta E^2+B\Delta^2 = BE^2$ ἤ

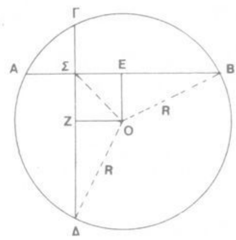
$$(3) \qquad \Delta E^2+B\Delta^2 = (2R)^2 = 4R^2.$$

Τώρα ἀπό τίς σχέσεις (2) καί (3) παίρνουμε:

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2 = 4R^2$, δηλαδή τά ἄθροισμα $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$ εἶναι σταθερό καί ἀνεξάρτητο ἀπό τήν ἐκλογή τῶν κάθετων χορδῶν ΑΒ καί ΓΔ.



Σχ.184



Σχ.185

185. Δίνεται ἕνας κύκλος (Ο,R) καί ἕνα σταθερό σημεῖο Σ στό ἐσωτερικό του. Δύο μεταβλητές χορδές ΑΣΒ καί ΓΣΔ περνοῦν ἀπό τό Σ καί τέμνονται καθέτως. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό ἄθροισμα $AB^2+\Gamma\Delta^2$ εἶναι σταθερό

<u>Ἀπόδειξη</u>. Φέρνουμε τίς ΟΕ καί ΟΖ κάθετες στίς χορδές ΑΒ καί ΓΔ ἀντιστοίχως. Τότε τά Ε καί Ζ θά εἶναι τά μέσα τῶν χορδῶν (σχ.185). Τό ὀρθογώνιο ΟΕΣΖ εἶναι μεταβλητό μέν, διατηρεῖ ὅμως σταθερή τή διαγώνιό του ΣΟ, γιατί τόσο τό Σ, ὅσο καί τό Ο εἶναι σταθερά καί γνωστά σημεῖα. Ἔτσι ἔχουμε:

$$AB^2+\Gamma\Delta^2 = (2\cdot EB)^2+(2\cdot Z\Delta)^2 = 4(EB^2+Z\Delta^2) = 4\big((OB^2-OE^2)+ (O\Delta^2-OZ^2)\big) = 4\big((R^2-OE^2)+(R^2-OZ^2)\big) = 8R^2-4(OE^2+OZ^2) =$$

$$8R^2-4(OE^2+E\Sigma^2) = 8R^2-4\cdot O\Sigma^2.$$ Ἄρα εἶναι $AB^2+\Gamma\Delta^2 = 8R^2-4\cdot O\Sigma^2$ δηλαδή σταθερό.

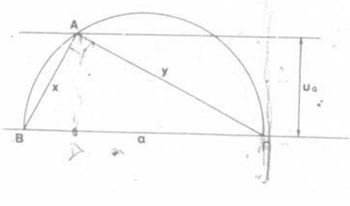
186. Νά κατασκευαστοῦν δύο εὐθύγραμμα τμήματα x καί y πού νά ἱκανοποιοῦν τίς σχέσεις $x^2+y^2=\alpha^2$ καί $xy=\beta^2$, ὅπου τά α καί β εἶναι δεδομένα τμήματα.

<u>Λύση</u>. Ἀπό τήν πρώτη σχέση $x^2+y^2=\alpha^2$ εἶναι φανερό ὅτι τά x καί y μποροῦν νά θεωρηθοῦν σάν οἱ κάθετες πλευρές σέ ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ μέ ὑποτείνουσα ΒΓ = α (σχ.186).

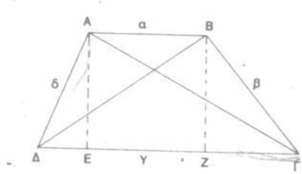
Γράφουμε ἑπομένως ἡμικύκλιο μέ διάμετρο ΒΓ = α καί πάνω σ'αὐτό θά ἀναζητήσουμε τήν κορυφή του Α.

Ἐπειδή πρέπει νά εἶναι ἀφ'ἑνός μέν $xy=\beta^2$, ἀφ'ἑτέρου δέ $xy=\alpha\upsilon_\alpha$, ἔπεται ὅτι $\alpha\upsilon_\alpha=\beta^2$, καί ἑπομένως τό υ_α εἶναι γνωστό καί κατασκευάσιμο (56,VI).

Κατασκευάζουμε τό τμῆμα υ_α καί φέρνουμε εὐθεία παράλληλη πρός τή ΒΓ καί σέ ἀπόσταση υ_α ἀπ'αὐτή, πού τέμνει τό ἡμικύκλιο στό σημεῖο Α. Τότε τά τμήματα ΑΒ καί ΑΓ εἶναι τά ζητούμενα x καί y. Ἡ ἀπόδειξη εἶναι ἄμαση.



Σχ.186



Σχ.187

ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΕ ΤΥΧΑΙΟ ΤΡΙΓΩΝΟ

187. Νά ἀποδείξετε ὅτι σέ κάθε τραπέζιο τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων του ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν μή παραλλήλων πλευρῶν του σύν τό διπλάσιο γινόμενο τῶν δύο βάσεων.

<u>Ἀπόδειξη</u>. Ἔστω ΑΒΓΔ ἕνα τραπέζιο μέ πλευρές α,β,γ,δ (α καί γ οἱ βάσεις του) (σχ.187).

Ἄς ὑποθέσουμε πώς οἱ γωνίες $\hat{\Gamma}$ καί $\hat{\Delta}$ τοῦ τραπεζίου εἶναι ὀξεῖες. Φέρνουμε τίς $AE \perp \Gamma\Delta$ καί $BZ \perp \Gamma\Delta$. Ἀπό τά τρίγωνα ΑΓΔ καί ΒΓΔ πού ἔχουν τίς πλευρές τους ΑΓ καί ΒΔ ἀπέναντι ἀπό ὀξεῖες γωνίες, παίρνουμε:

(1) $$A\Gamma^2 = \gamma^2+\delta^2-2\gamma\cdot\Delta E.$$

(2) $$B\Delta^2 = \beta^2+\gamma^2-2\gamma\cdot\Gamma Z.$$

Προσθέτουμε τίς σχέσεις (1) καί (2) κατά μέλη καί ἔχουμε:

$$A\Gamma^2+B\Delta^2 = \beta^2+2\gamma^2+\delta^2-2\gamma(\Delta E+\Gamma Z) = \beta^2+2\gamma^2+\delta^2-2\gamma(\Gamma\Delta-EZ) =$$

$$\beta^2+2\gamma^2+\delta^2-2\gamma(\Gamma\Delta-AB) = \beta^2+2\gamma^2+\delta^2-2\gamma(\gamma-\alpha) = \beta^2+2\gamma^2+\delta^2-2\gamma^2+2\alpha\gamma =$$

$\beta^2+\delta^2+2\alpha\gamma$ ἤ

$$A\Gamma^2+B\Delta^2 = \beta^2+\delta^2+2\alpha\gamma.$$

Μέ ἴδιο τρόπο μποροῦμε ν' ἀποδείξουμε τήν ἴδια σχέση ὅταν οἱ γωνίες $\hat{\Gamma}$ καί $\hat{\Delta}$ δέν εἶναι καί οἱ δυό ὀξεῖες. Τό ἐνδεχόμενο οἱ γωνίες $\hat{\Gamma}$ καί $\hat{\Delta}$ νά εἶναι καί οἱ δυό ἀμβλεῖες δέν τό ἐξετάζουμε, γιατί τότε οἱ γωνίες $\hat{A}$ καί $\hat{B}$ θά εἶναι ὀξεῖες, καί ἑπομένως αὐτό ἀνάγεται στό ἐνδεχόμενο πού ἐξετάσαμε.

188. Σέ ἕνα ἰσοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) φέρνουμε παράλληλο τῆς ΒΓ πού τέμνει τίς ΑΒ καί ΑΓ στά Δ καί Ε ἀντιστοίχως. Ν' ἀποδείξετε ὅτι $BE^2=E\Gamma^2+B\Gamma\cdot\Delta E$.

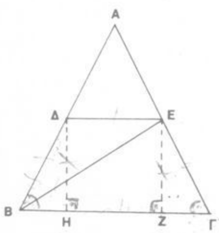
<u>Ἀπόδειξη</u>. Τό τρίγωνο ΒΕΓ εἶναι ὀξυγώνιο στή γωνία του Γ (σχ.188). Φέρνουμε τίς $EZ \perp B\Gamma$ καί $\Delta H \perp B\Gamma$. Τότε ἔχουμε:

$$BE^2 = E\Gamma^2 + B\Gamma^2 - 2\cdot B\Gamma\cdot \Gamma Z = E\Gamma^2 + B\Gamma(B\Gamma - 2\cdot\Gamma Z) \quad \text{ἤ}$$

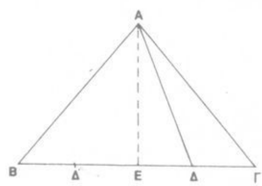
$$(1) \qquad BE^2 = E\Gamma^2 + B\Gamma(B\Gamma - 2\cdot\Gamma Z).$$

Τά ὀρθοτώνια τρίγωνα ΒΔΗ καί ΓΕΖ εἶναι ἴσα, γιατί ἔχουν $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ καί $\Delta H = EZ$. Ἄρα $\Gamma Z = BH$ καί ἑπομένως $2\cdot\Gamma Z = \Gamma Z + BH$ ἤ $B\Gamma - 2\cdot\Gamma Z = B\Gamma - (\Gamma Z + BH) = HZ = \Delta E$. Τότε ἡ σχέση (1) γράφεται:

$$BE^2 = E\Gamma^2 + B\Gamma\cdot\Delta E.$$



Σχ.188



Σχ.189

189. Σέ ἕνα ἰσοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) συνδέουμε τήν κορυφή Α μέ ἕνα σημεῖο Δ τῆς πλευρᾶς ΒΓ. Νά ἀποδείξετε ὅτι $AB^2 = A\Delta^2 + \Delta B\cdot\Delta\Gamma$.

<u>Ἀπόδειξη</u>. Φέρνουμε $AE \perp B\Gamma$ πού εἶναι ὕψος καί διάμεσος γιά τό ἰσοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (σχ.189). Ἕνα ἀπό τά τρίγωνα ΑΒΔ καί ΑΓΔ εἶναι ὀξυγώνιο στό Δ, ἔστω τό ΑΒΔ. Τότε ἔχουμε:

$$AB^2 = A\Delta^2 + B\Delta^2 - 2\cdot B\Delta\cdot\Delta E = A\Delta^2 + B\Delta(B\Delta - 2\cdot\Delta E) \quad \text{ἤ}$$

$$(1) \qquad AB^2 = A\Delta^2 + B\Delta(B\Delta - 2\cdot\Delta E).$$

Πάνω στή ΒΓ παίρνουμε τό συμμετρικό σημεῖο Δ΄ τοῦ Δ ὡς πρός τό Ε, ὥστε νά εἶναι $E\Delta' = E\Delta$. Τότε θά εἶναι καί $B\Delta' = \Delta\Gamma$. Ἄρα $B\Delta - 2\cdot\Delta E = B\Delta - \Delta\Delta' = B\Delta' = \Delta\Gamma$ καί τότε ἡ σχέση (1) γράφεται:

$$AB^2 = A\Delta^2 + B\Delta\cdot\Delta\Gamma.$$

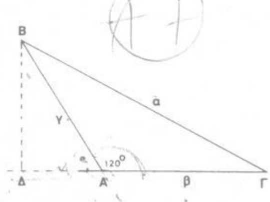
190. Ἕνα τρίγωνο ἔχει πλευρές α,β,γ καί γωνία $\hat{A} = 120^0$. Νά ἀποδείξετε ὅτι εἶναι $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma$.

<u>Ἀπόδειξη</u>. Φέρνουμε τή $B\Delta \perp A\Gamma$. Στό τρίγωνο ΑΒΓ ἡ πλευρά α βρίσκεται ἀπέναντι ἀπό ἀμβλεῖα γωνία (σχ.190). Ἄρα ἔχουμε:

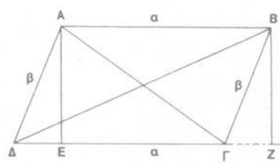
$$(1) \qquad \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2 \cdot \beta \cdot A\Delta.$$

Ἐπειδή εἶναι $\hat{A} = 120^0$, ἕπεται ὅτι $B\hat{A}\Delta = 60^0$ καί τότε τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ θά ἔχει $A\Delta = AB/2 = \gamma/2$. Ἔτσι ἡ σχέση (1) γράφεται:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2 \cdot \beta \cdot \frac{\gamma}{2} = \beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma.$$



Σχ.190



Σχ.191

191. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων πλευρῶν ἑνός παραλληλογράμμου ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων του.

<u>Ἀπόδειξη</u>. Ἔστω ΑΒΓΔ ἕνα παραλληλόγραμμο μέ πλευρές $AB = \Gamma\Delta = \alpha$ καί $A\Delta = B\Gamma = \beta$ (σχ.191). Φέρνουμε τίς κάθετες ΑΕ καί ΒΖ πρός τή ΓΔ. Τότε σχηματίζονται δύο ἴσα ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΔΕ καί ΒΓΖ. Ἄρα εἶναι $\Delta E = \Gamma Z$.

Ἀπό τά τρίγωνα ΑΓΔ καί ΒΓΔ παίρνουμε ἀντιστοίχως:

(1) $\quad A\Gamma^2 = \alpha^2+\beta^2-2\alpha\cdot\Delta E$ καί

(2) $\quad B\Delta^2 = \alpha^2+\beta^2+2\alpha\cdot\Gamma Z.$

Προσθέτουμε τίς σχέσεις (1) καί (2) κατά μέλη καί παίρνουμε:

$$A\Gamma^2+B\Delta^2 = 2\alpha^2+2\beta^2+2\alpha(\Gamma Z-\Delta E) = 2\alpha^2+2\beta^2$$ γιατί εἶναι $\Gamma Z=\Delta E$.

῎Αρα εἶναι $A\Gamma^2+B\Delta^2 = 2\alpha^2+2\beta^2$.

192. Τετραπλεύρου ΑΒΓΔ οἱ διαγώνιοι τέμνονται κάθετα. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι $|AB^2-A\Delta^2| = |\Gamma B^2-\Gamma\Delta^2|$.

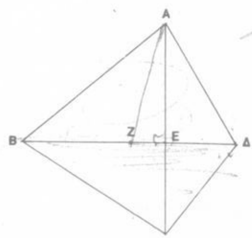
Ἀπόδειξη. ῎Εστω Ε τό σημεῖο τομῆς τῶν διαγωνίων ΑΓ καί ΒΔ τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ (σχ.192) καί Ζ τό μέσο τῆς ΒΔ. Ἐφαρμόζουμε τό δεύτερο θεώρημα τῆς διαμέσου γιά τά τρίγωνα ΑΒΔ καί ΓΒΔ καί ἔχουμε:

(1) $\quad AB^2-A\Delta^2 = 2\cdot B\Delta\cdot EZ$ καί

(2) $\quad \Gamma B^2-\Gamma\Delta^2 = 2\cdot B\Delta\cdot EZ.$

Οἱ σχέσεις (1) καί (2) ἔχουν τά δεύτερα μέλη τους ἴσα. ῎Αρα θά ἔχουν καί τά πρῶτα μέλη τους ἴσα, δηλαδή:

$$AB^2-A\Delta^2 = \Gamma B^2-\Gamma\Delta^2.$$



Σχ.192

193. Νά βρεθεῖ τό εἶδος τῶν γωνιῶν τριγώνου ΑΒΓ τό ὁποῖο ἔχει πλευρές:

i) $\alpha = 3\lambda$, $\beta = 4\lambda$, $\gamma = 6\lambda$. ii) $\alpha = \lambda$, $\beta = \frac{\lambda}{2}$, $\gamma = \frac{2\lambda}{3}$.

iii) $\alpha = 8\lambda$, $\beta = 15\lambda$, $\gamma = 17\lambda$. iv) $\alpha = 7\lambda$, $\beta = 6\lambda$, $\gamma = 8\lambda$.

Λύση. Σέ ὅλες τίς περιπτώσεις θά ἐλέγξουμε τό τετράγωνο τῆς μεγαλύτερης πλευρᾶς ὡς πρός τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν καί θά ἀπαντήσουμε μέ βάση τό γνωστό κριτήριο (§62). Ἔτσι ἔχουμε:

i) Ἡ μεγαλύτερη πλευρά εἶναι ἡ γ καί εἶναι $\gamma^2 = (6\lambda)^2 = 36\lambda^2$, ἐνῶ εἶναι $\alpha^2+\beta^2 = (3\lambda)^2+(4\lambda)^2 = 9\lambda^2+16\lambda^2 = 25\lambda^2$. Ἄρα: $\gamma^2 > \alpha^2+\beta^2$ καί ἑπομένως τό τρίγωνο εἶναι ἀμβλυγώνιο στή γωνία $\hat{\Gamma}$ ($\hat{\Gamma} > 90^0$).

ii) Ἡ μεγαλύτερη πλευρά εἶναι ἡ α καί εἶναι $\alpha^2 = \lambda^2$, ἐνῶ εἶναι $\beta^2+\gamma^2 = (\frac{\lambda}{2})^2+(\frac{2\lambda}{3})^2 = \frac{\lambda^2}{4}+\frac{4\lambda^2}{9} = \frac{25\lambda^2}{36}$. Ἄρα $\alpha^2 > \beta^2+\gamma^2$ καί ἑπομένως τό τρίγωνο εἶναι ἀμβλυγώνιο στό Γ.

iii) Ἡ μεγαλύτερη πλευρά εἶναι ἡ γ καί εἶναι $\gamma^2 = (17\lambda)^2 = 289\lambda^2$, ἐνῶ εἶναι $\alpha^2+\beta^2 = (8\lambda)^2+(15\lambda)^2 = 64\lambda^2+225\lambda^2 = 289\lambda^2$. Ἄρα εἶναι $\gamma^2 = \alpha^2+\beta^2$ καί ἑπομένως τό τρίγωνο εἶναι ὀρθογώνιο στό Γ.

iv) Ἡ μεγαλύτερη πλευρά εἶναι ἡ γ καί εἶναι $\gamma^2 = (8\lambda)^2 = 64\lambda^2$, ἐνῶ εἶναι $\alpha^2+\beta^2 = (7\lambda)^2+(6\lambda)^2 = 49\lambda^2+36\lambda^2 = 85\lambda^2$. Ἄρα: $\gamma^2 < \alpha^2+\beta^2$ καί ἑπομένως τό τρίγωνο εἶναι ὀξυγώνιο.

194. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαμέσων ἑνός τριγώνου ἰσοῦται μέ τά 3/4 τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν του.

Ἀπόδειξη. Ἀπό τό θεώρημα τῆς διαμέσου καί γιά κάθε διάμεσο ἔχουμε:

$$\beta^2+\gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2} \quad \text{ἤ} \quad 4\mu_\alpha^2 = 2\beta^2+2\gamma^2-\alpha^2.$$

'Ομοίως ἔχουμε: $4\mu_\beta^2 = 2\gamma^2+2\alpha^2-\beta^2$ καί $4\mu_\gamma^2 = 2\alpha^2+2\beta^2-\gamma^2$. Τίς προσθέτουμε κατά μέλη:

$$4(\mu_\alpha^2+\mu_\beta^2+\mu_\gamma^2) = 3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) \quad \text{ἤ} \quad \mu_\alpha^2+\mu_\beta^2+\mu_\gamma^2 = \frac{3}{4}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2).$$

195. "Αν Μ εἶναι τό κέντρο βάρους ἑνός τριγώνου ΑΒΓ νά ἀποδειχθεῖ ὅτι: $MA^2+MB^2+M\Gamma^2 = \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{3}$.

'Απόδειξη. "Εστω ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ καί ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ οἱ διάμεσοί του. 'Εφαρμόζουμε τό θεώρημα τῆς διαμέσου στά τρίγωνα ΜΒΓ, ΜΓΑ, ΜΑΒ καί ἔχουμε (σχ.195).

$$MB^2+M\Gamma^2 = 2M\Delta^2 + \frac{\alpha^2}{2}, \quad M\Gamma^2+MA^2 = 2ME^2 + \frac{\beta^2}{2}, \quad MA^2+MB^2 = 2MZ^2 + \frac{\gamma^2}{2}.$$

Τίς προσθέτουμε κατά μέλη:

$$(1) \qquad 2(MA^2+MB^2+M\Gamma^2) = 2(M\Delta^2+ME^2+MZ^2) + \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{2}.$$

'Επειδή ὅμως εἶναι $M\Delta = \frac{A\Delta}{3} = \frac{\mu_\alpha}{3}$, ἔπεται ὅτι $M\Delta^2 = \frac{\mu_\alpha^2}{9}$.

'Αλλά $\mu_\alpha^2 = \frac{2\beta^2+2\gamma^2-\alpha^2}{4}$ ἤ $M\Delta^2 = \frac{2\beta^2+2\gamma^2-\alpha^2}{36}$.

'Ομοίως εἶναι καί $ME^2 = \frac{2\alpha^2+2\gamma^2-\beta^2}{36}$ καί $MZ^2 = \frac{2\alpha^2+2\beta^2-\gamma^2}{36}$.

'Αντικαθιστοῦμε στή σχέση (1) καί μετά τίς πράξεις παίρνουμε:

$$MA^2+MB^2+M\Gamma^2 = \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{3}.$$

196. Μέ πλευρά ΑΒ = γ κατασκευάζουμε δύο ἰσόπλευρα τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΒΕ καί ἀπ' τίς δύο μεριές της. "Αν Γ εἶναι ὁποιοδήποτε σημεῖο νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

$\Gamma\Delta^2+\Gamma E^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$, ὅπου α,β,γ εἶναι οἱ πλευρές τοῦ τριγώνου.

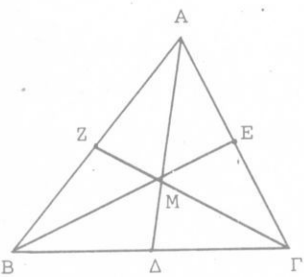
'Απόδειξη. Τό τετράπλευρο ΑΔΒΕ εἶναι ἀπό τήν κατασκευή του ρόμβος (σχ.196) μέ πλευρά γ. Τό ΔΟ εἶναι ὕψος ἰσόπλευρου τριγώνου μέ πλευρά γ. "Αρα εἶναι $\Delta O=\gamma\sqrt{3}/2$. Στό τρίγωνο ΓΔΕ ἐφαρμόζουμε τό θεώρημα τῆς διαμέσου καί ἔχουμε:

$$\Gamma\Delta^2+\Gamma E^2=2\cdot\Gamma O^2+2\cdot\Delta O^2=2\cdot\Gamma O^2+2\cdot\frac{3\gamma^2}{4}=2\cdot\Gamma O^2+\frac{3\gamma^2}{2}$$ ἤ

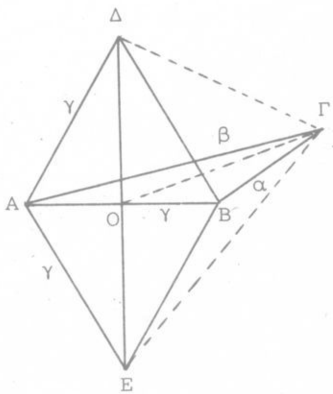
$$(1)\qquad \Gamma\Delta^2+\Gamma E^2=2\cdot\Gamma O^2+\frac{3\gamma^2}{2}.$$

'Από τό τρίγωνο ΑΒΓ ἔχουμε: $\alpha^2+\beta^2=2\cdot\Gamma O^2+\frac{\gamma^2}{2}$ ἤ $2\cdot\Gamma O^2=\alpha^2+\beta^2-\frac{\gamma^2}{2}$. 'Αντικαθιστοῦμε στή σχέση (1) καί ἔχουμε:

$$\Gamma\Delta^2+\Gamma E^2=\alpha^2+\beta^2-\frac{\gamma^2}{2}+\frac{3\gamma^2}{2}=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2.$$



Σχ.195



Σχ.196

197. Δίνεται κύκλος, μιά διάμετρός του ΑΒ καί μιά χορδή του ΓΔ παράλληλη πρός τήν ΑΒ. "Αν Μ εἶναι ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τῆς διαμέτρου ΑΒ, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι $M\Gamma^2+M\Delta^2 = MA^2+MB^2$.

'<u>Απόδειξη</u>. Τό τετράπλευρο ΑΓΔΒ εἶναι τραπέζιο καί σάν ἐγγεγραμμένο σέ κύκλο, εἶναι ἰσοσκελές μέ $A\Gamma = B\Delta$ (σχ.197).

Φέρνουμε τά ὕψη ΓΕ καί ΔΖ. Τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΓΕ καί ΒΔΖ εἶναι ἴσα καί ἐπομένως ἔχουν $AE = BZ$.

Τά τρίγωνα ΜΓΑ καί ΜΔΒ εἶναι ὀξυγώνια στίς γωνίες $\hat{A}$ καί $\hat{B}$ ἀντιστοίχως καί ἀπ' αὐτά παίρνουμε:

$$M\Gamma^2 = MA^2+A\Gamma^2-2\cdot MA\cdot AE \quad \text{καί} \quad M\Delta^2 = MB^2+B\Delta^2-2\cdot MB\cdot BZ.$$

Τίς προσθέτουμε κατά μέλη καί ἔχουμε:

$$M\Gamma^2+M\Delta^2 = MA^2+MB^2+A\Gamma^2+B\Delta^2-2\cdot MA\cdot AE-2\cdot MB\cdot BZ =$$

$$MA^2+MB^2+2\cdot A\Gamma^2-2\cdot MA\cdot AE-2\cdot MB\cdot AE = MA^2+MB^2+2\left[A\Gamma^2-AE(MA+MB)\right] =$$

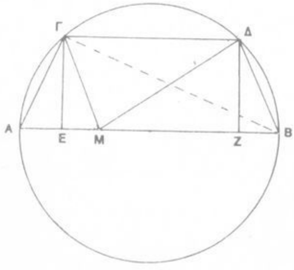
$$MA^2+MB^2+2(A\Gamma^2-AE\cdot AB) \quad \text{ἤ}$$

$$(1) \qquad M\Gamma^2+M\Delta^2 = MA^2+MB^2+2(A\Gamma^2-AE\cdot AB).$$

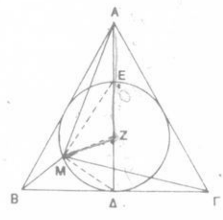
Τό τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιο στό Γ. 'Απ' αὐτό ἔχουμε:

$A\Gamma^2 = AE\cdot AB$ ἤ $A\Gamma^2-AE\cdot AB = 0$ καί τότε ἡ σχέση (1) γράφεται:

$$M\Gamma^2+M\Delta^2 = MA^2+MB^2.$$



Σχ.197



Σχ.198

198. Δίνεται ένα ισόπλευρο τρίγωνο μέ πλευρά α. "Αν Μ εἶναι ἕνα σημεῖο τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου, νά ἀποδείξετε ὅτι τό ἄθροισμα $MA^2+MB^2+M\Gamma^2$ εἶναι σταθερό.

'<u>Απόδειξη</u>. Τό κέντρο Ζ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου στό τρίγωνο ΑΒΓ, εἶναι καί κέντρο βάρους του (σχ.198). "Ετσι ἔχουμε: $AZ=2\cdot Z\Delta=2\rho$ ἤ $AE+EZ=2\rho$ ἤ $AE+\rho=2\rho$ ἤ $AE=\rho$.

"Αρα τό ὕψος ΑΔ διαιρεῖται ἀπό τά Ε καί Ζ σέ τρία ἴσα τμήματα, πού τό καθένα εἶναι ἴσο μέ τήν ἀκτίνα ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου τοῦ τριγώνου. 'Επειδή εἶναι:

$A\Delta=\dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2}$, ἔπεται ὅτι θά εἶναι καί $\rho=\dfrac{\alpha\sqrt{3}}{6}$.

'Από τό τρίγωνο ΜΒΓ πού ἔχει τή ΜΔ γιά διάμεσο παίρνουμε:

$$MB^2+M\Gamma^2 = 2\cdot M\Delta^2+\frac{\alpha^2}{2}. \quad (1)$$

Τό τρίγωνο ΜΑΖ ἔχει τή ΜΕ γιά διάμεσο. "Αρα θά εἶναι:

$MA^2+MZ^2 = 2\cdot ME^2+2\cdot ZE^2$ ἤ $MA^2+\rho^2 = 2\cdot ME^2+2\rho^2$ ἤ

$$MA^2 = 2ME^2+\rho^2. \quad (2)$$

Τώρα προσθέτουμε τίς σχέσεις (1) καί (2) καί παίρνουμε:

$$MA^2+MB^2+M\Gamma^2 = 2(M\Delta^2+ME^2)+\frac{\alpha^2}{2}+\rho^2. \quad (3)$$

Τό τρίγωνο ΜΔΕ εἶναι ὀρθογώνιο στό Μ (ἡ ΔΕ εἶναι διάμετρος) καί ἐπομένως εἶναι: $M\Delta^2+ME^2=\Delta E^2$ ἤ $M\Delta^2+ME^2=4\rho^2$. Τότε ἡ σχέση (3) γράφεται:

$$MA^2+MB^2+M\Gamma^2 = 8\rho^2+\frac{\alpha^2}{2}+\rho^2 = 9\rho^2+\frac{\alpha^2}{2}.$$

'Από τή σχέση αὐτή εἶναι φανερό πώς τό ἄθροισμα $MA^2+MB^2+M\Gamma^2$ εἶναι σταθερό, γιατί τόσο τό α ὅσο καί τό ρ εἶναι ἀμετάβλητα. Πάντως ἄν ἀντικαταστήσουμε τό ρ μέ $\dfrac{\alpha\sqrt{3}}{6}$ παίρνουμε:

$$MA^2+MB^2+M\Gamma^2 = \frac{5\alpha^2}{4}.$$

199. Διαιροῦμε τήν ὑποτείνουσα $B\Gamma = \alpha$ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ σέ τρία ἴσα τμήματα $B\Delta = \Delta E = E\Gamma$ καί φέρνουμε τίς ΑΔ καί ΑΕ. Νά ἀποδείξετε ὅτι εἶναι:
$A\Delta^2 + AE^2 + \Delta E^2 = \frac{2\alpha^2}{3}$.

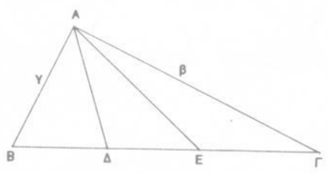
'Απόδειξη. 'Εφαρμόζουμε τό θεώρημα τῆς διαμέσου γιά τά τρίγωνα ΑΒΕ καί ΑΔΓ (σχ.199), ὅπου εἶναι $AB = \gamma$, $A\Gamma = \beta$, $B\Delta = \Delta E = E\Gamma = \alpha/3$. "Ετσι ἔχουμε:

$$\gamma^2 + AE^2 = 2\cdot A\Delta^2 + 2\cdot \Delta E^2 \quad \text{καί} \quad \beta^2 + A\Delta^2 = 2\cdot AE^2 + 2\cdot \Delta E^2.$$

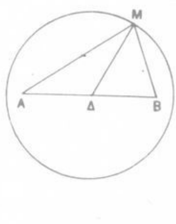
Τίς προσθέτουμε κατά μέλη καί παίρνουμε:

$\beta^2 + \gamma^2 + A\Delta^2 + AE^2 = 2\cdot A\Delta^2 + 2\cdot AE^2 + 4\cdot \Delta E^2$ ἤ $A\Delta^2 + AE^2 + \Delta E^2 =$
$\beta^2 + \gamma^2 - 3\cdot \Delta E^2 = \alpha^2 - 3\left(\frac{\alpha}{3}\right)^2 = \alpha^2 - \frac{\alpha^2}{3} = \frac{2\alpha^2}{3}$. "Αρα ἔχουμε:

$$A\Delta^2 + AE^2 + \Delta E^2 = \frac{2\alpha^2}{3}.$$



Σχ.199



Σχ.200

200. Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων Μ γιά τά ὁποῖα ἰσχύει ἡ σχέση $MA^2 + MB^2 = k^2$, ὅπου Α, Β εἶναι σταθερά σημεῖα καί k δεδομένο τμῆμα.

Λύση. Στό τρίγωνο ΑΜΓ τό θεώρημα τῆς διαμέσου δίνει:

(1) $$MA^2+MB^2 = 2\cdot M\Delta^2 + \frac{AB^2}{2}.$$

'Από τήν ύπόθεση έχουμε:

(2) $$MA^2+MB^2 = k^2.$$

Τώρα άπό τίς σχέσεις (1) καί (2) έπεται ότι είναι:

$2\cdot M\Delta^2 + \frac{AB^2}{2} = k^2$ ή

(3) $$M\Delta^2 = \frac{2k^2-AB^2}{4}$$

ή $M\Delta = \frac{\sqrt{2k^2-AB^2}}{2}$.

"Αρα τό τμήμα ΜΔ διατηρεί σταθερό τό μήκος του, καί έπομένως ό ζητούμενος γ. τόπος τού σημείου Μ είναι ό κύκλος μέ κέντρο τό μέσο Δ τού τμήματος ΑΒ καί άκτίνα τή ΔΜ.

Γιά νά κατασκευάσουμε τήν άκτίνα ΔΜ, γράφουμε τήν (3):

$$(2\cdot M\Delta)^2 = 2k^2-AB^2$$

άπό τήν όποία φαίνεται ότι τό 2·ΜΔ είναι ή μιά άπό τίς κάθετες πλευρές όρθογωνίου τριγώνου μέ ύποτείνουσα $\sqrt{2k^2} = k\sqrt{2}$ καί τήν άλλη κάθετο πλευρά τήν ΑΒ. 'Η κατασκευή είναι γνωστή.

201. Νά άποδειχθεί ότι σέ κάθε κυρτό τετράπλευρο τό άθροισμα τών τετραγώνων τών τεσσάρων πλευρών του ίσούται μέ τό άθροισμα τών τετραγώνων τών διαγωνίων του, αύξημένο κατά τό τετραπλάσιο τετράγωνο τού τμήματος μέ άκρα τά μέσα τών διαγωνίων.

<u>'Απόδειξη</u>. "Εστω ΑΒΓΔ ένα τετράπλευρο μέ πλευρές α,β,γ καί δ (σχ.201) καί άς είναι Ε καί Ζ τά μέσα τών διαγωνίων του. 'Από τά τρίγωνα ΑΒΔ καί ΓΒΔ παίρνουμε:

(1) $$\alpha^2+\delta^2 = 2\cdot AE^2 + \frac{B\Delta^2}{2}$$ καί

(2) $$\beta^2+\gamma^2 = 2\cdot E\Gamma^2 + \frac{B\Delta^2}{2}.$$

Προσθέτουμε τίς σχέσεις (1) καί (2) καί παίρνουμε:

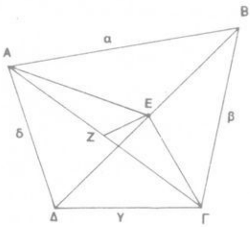
(3) $$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2 = 2(EA^2+E\Gamma^2)+B\Delta^2.$$

SOS 'Από τό τρίγωνο ΕΑΓ παίρνουμε:

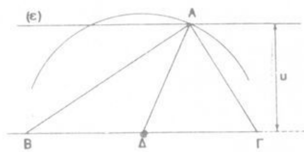
$$EA^2+E\Gamma^2 = 2\cdot EZ^2 + \frac{A\Gamma^2}{2}$$

καί τότε ή σχέση (3) γράφεται:

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2 = A\Gamma^2+B\Delta^2+4\cdot AZ^2.$$



Σχ.201



Σχ.202

202. Νά κατασκευαστεῖ τρίγωνο τοῦ ὁποίου δίνονται ἡ πλευρά α, τό ὕψος υ_α καί τό ἄθροισμα $\beta^2+\gamma^2=k^2$, ὅπου τό k εἶναι δεδομένο τμῆμα.

<u>Λύση</u>. Παίρνουμε ἀπ' τήν ἀρχή τήν πλευρά ΒΓ = α (σχ.202). 'Η κορυφή Α πρέπει ἀφ' ἑνός μέν νά βρίσκεται πάνω σέ εὐθεία (ε) παράλληλη τῆς ΒΓ καί σέ ἀπόσταση υ_α ἀπ' αὐτή, ἀφ' ἑτέρου δέ πάνω σέ κύκλο μέ κέντρο τό μέσο Δ τῆς ΒΓ καί ἀκτίνα $\Delta A=\frac{\sqrt{2k^2-B\Gamma^2}}{2}$ (ἄσκ.200).

'Η κορυφή Α τοῦ ζητούμενου τριγώνου, βρίσκεται στήν τομή τῆς εὐθείας καί τοῦ κύκλου πού ἀναφέραμε προηγουμένως. Τό πρόβλημα δέ δέχεται πάντα λύση.

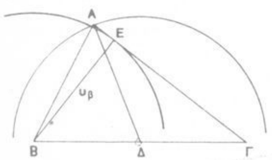
203. Νά κατασκευαστεῖ τρίγωνο ἀπό τά α, υ_β καί $\beta^2+\gamma^2=k^2$, ὅπου τό k εἶναι δοσμένο τμῆμα.

Λύση. Τοποθετοῦμε ἀπ' τήν ἀρχή τήν πλευρά $ΒΓ=\alpha$. Ἡ κορυφή Α πρέπει νά βρίσκεται πάνω σέ κύκλο μέ κέντρο τό μέσο Δ τῆς ΒΓ καί ἀκτίνα $ΔΑ=\frac{\sqrt{2k^2-ΒΓ^2}}{2}$ (ἄσκ.200).

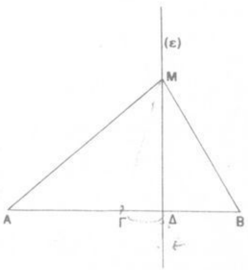
Τό σημεῖο Β πρέπει νά ἀπέχει ἀπό τήν ΑΓ γνωστή ἀπόσταση υ_β καί ἑπομένως ἡ ΓΑ πρέπει νά ἐφάπτεται σέ κύκλο μέ κέντρο τό Β καί ἀκτίνα υ_β (σχ.203).

Γράφουμε ἑπομένως τόν κύκλο $(Β,\upsilon_\beta)$ καί ἀπ' τό Γ φέρνουμε ἐφαπτομένη, πού τέμνει τόν κύκλο (Δ,ΔΑ) στό σημεῖο Α. Τότε τό τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι τό ζητούμενο.

Τό πρόβλημα δέχεται μιά μόνο λύση, ἀλλά ὄχι πάντα.



Σχ.203



Σχ.204

204. Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων Μ γιά τά ὁποῖα ἰσχύει $ΜΑ^2-ΜΒ^2=k^2$, ὅπου Α, Β εἶναι σταθερά σημεῖα καί k δεδομένο τμῆμα.

Λύση. Ἔστω Μ ἕνα τυχαῖο σημεῖο τοῦ τόπου, δηλαδή:

(1) $$ΜΑ^2-ΜΒ^2=k^2.$$

Ἀπό τό Μ φέρνουμε $ΜΔ\perp ΑΒ$ καί ἔστω Γ τό μέσο τοῦ τμήματος

ΑΒ. ᾿Εφαρμόζουμε τό δεύτερο θεώρημα τῆς διαμέσου γιά τό τρίγωνο ΜΑΒ καί ἔχουμε:

$$(2) \qquad MA^2 - MB^2 = 2 \cdot AB \cdot \Gamma\Delta.$$

Τώρα ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) ἔπεται ὅτι εἶναι:

$$2 \cdot AB \cdot \Gamma\Delta = k^2 \quad ἤ \quad \Gamma\Delta = \frac{k^2}{2 \cdot AB}.$$

῎Αρα τό ΓΔ εἶναι γνωστό μῆκος καί ἑπομένως τό Δ σταθερό σημεῖο πάνω στήν ΑΒ πρός τό μέρος τοῦ Β. Τοῦτο ἔπεται ἀπό τή δοσμένη σχέση (1) ($MA > MB$).

῎Αρα ὁ γ. τόπος τοῦ Μ εἶναι εὐθεία (ε) κάθετη στήν ΑΒ στό σημεῖο Δ. ῾Η κατασκευή τοῦ τμήματος ΓΔ εἶναι γνωστή (§56,VI).

205. Νά κατασκευαστεῖ τρίγωνο ἀπό τά α, υ_α καί $\beta^2 - \gamma^2 = k^2$, ὅπου τό k εἶναι δεδομένο τμῆμα.

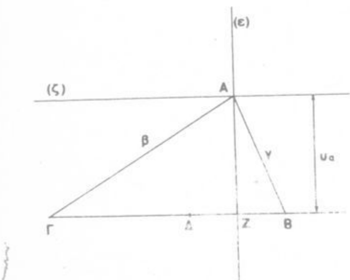
<u>Λύση</u>. Τοποθετοῦμε ἀπ᾿ τήν ἀρχή τήν πλευρά $B\Gamma = \alpha$. Τό σημεῖο Α πρέπει ἀφ᾿ ἑνός μέν νά βρίσκεται πάνω σέ εὐθεία $(\zeta) // B\Gamma$, καί σέ ἀπόσταση υ_α ἀπ᾿ αὐτή, ἀφ᾿ ἑτέρου δέ πάνω σέ γνωστή εὐθεία (ε) κάθετη στή ΒΓ σέ σημεῖο Ζ, τέτοιο ὥστε νά εἶναι: $\Delta Z = \frac{k^2}{2 \cdot B\Gamma}$ (ἄσκ.204), ὅπου τό Δ εἶναι τό μέσο τῆς ΒΓ.

Τό Α θά τό βροῦμε στήν τομή τῶν εὐθειῶν (ε) καί (ζ) καί τότε τό τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι τό ζητούμενο. Τό πρόβλημα δέχεται πάντα μιά μόνο λύση.

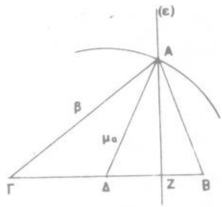
206. Νά κατασκευαστεῖ τρίγωνο ἀπό τά α, μ_α καί $\beta^2 - \gamma^2 = k^2$, ὅπου τό k εἶναι δεδομένο τμῆμα.

<u>Λύση</u>. Τοποθετοῦμε ἀπ᾿ τήν ἀρχή τήν πλευρά $B\Gamma = \alpha$. ῾Η κορυφή Α πρέπει ἀφ᾿ ἑνός μέν νά βρίσκεται πάνω σέ κύκλο μέ κέντρο τό μέσο Δ τῆς ΒΓ καί ἀκτίνα μ_α, ἀφ᾿ ἑτέρου δέ πάνω σέ εὐθεία

(ε) κάθετη στή ΒΓ στό σημεῖο Ζ (σχ.206), τέτοιο ὥστε νά εἶναι $ΔΖ = \frac{K^2}{2\,ΒΓ}$ (ἄσκ.204), ὅπου τό Ζ βρίσκεται πρός τό μέρος τοῦ Β. Ἄρα τό Α μπορεῖ εὔκολα νά προσδιοριστεῖ στήν τομή τῆς εὐθείας (ε) καί τοῦ τόξου (Δ,$μ_α$). Τό πρόβλημα δέχεται μιά λύση ἀλλά ὄχι πάντα.



Σχ.205



Σχ.206

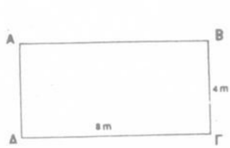
Ε Μ Β Α Δ Α

207. Νά βρεθεῖ τό ἐμβαδό ὀρθογωνίου πού ἡ μιά διάστασή του εἶναι 4m καί ὁ λόγος της πρός τήν ἄλλη εἶναι ο,5.

<u>Λύση</u>. Ἔστω ΑΒΓΔ ἕνα ὀρθογώνιο μέ ΑΔ = ΒΓ = 4m (σχ.207). Ἄν α εἶναι ἡ ἄλλη διάστασή του θά ἔχουμε $\frac{4}{α} = 0{,}5$ ἤ $α = 8m$.

Ἄρα τό ἐμβαδό του εἶναι:

$$E = 4m \cdot 8m = 32m^2.$$



Σχ.207

208. Ὀρθογώνιο ἔχει βάση 8m καί ἐμβαδό $36m^2$. Νά βρεθεῖ τό ὕψος του.

<u>Λύση</u>. Ἔστω υ τό ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου. Τότε θά εἶναι: $36m^2 = 8m \cdot υ$ ἤ $υ = 4,5\,m$.

209. Ποιό εἶναι τό ἐμβαδό τετραγώνου ὅταν ἡ περίμετρός του εἶναι 44 m;

<u>Λύση</u>. Ἔστω α ἡ πλευρά τοῦ τετραγώνου. Τότε θά εἶναι: $4α = 44m$ ἤ $α = 11m$. Ἄρα τό ἐμβαδό του εἶναι $E = α^2 = 121\,m^2$.

210. Ὀρθογώνιο καί τετράγωνο εἶναι ἰσεμβαδικά. Ἄν ἡ βάση τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι 45m, τό δέ ὕψος του εἶναι τά 4/9 τῆς βάσεώς του, νά βρεθεῖ ἡ πλευρά τοῦ τετραγώνου.

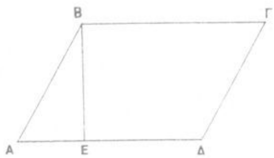
<u>Λύση</u>. Τό ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου θά εἶναι $45m \cdot \frac{4}{9} = 20m$. Ἄρα τό ἐμβαδό του εἶναι $E = 45m \cdot 20m = 900m^2$.

Ἄν α εἶναι ἡ πλευρά τοῦ τετραγώνου, τό ἐμβαδό του θά εἶναι $α^2 = 900m^2$ ἤ $α = 30m$.

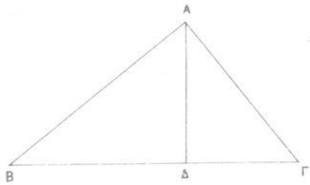
211. Ἑνός παραλληλογράμμου οἱ δύο προσκείμενες πλευρές ἔχουν μήκη 6m καί 8m καί σχηματίζουν γωνία 60^0. Νά βρεθεῖ τό ἐμβαδόν του.

<u>Λύση</u>. Ἔστω ΑΒΓΔ τό παραλληλόγραμμο μέ $AB = 6m$, $AΔ = 8\,m$ καί $\hat{A} = 60^0$ (σχ.211). Ἀπό τό Β φέρνουμε τή $BE \perp AΔ$ καί τότε τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΕ θά ἔχει τή γωνία του στό Β ἴση μέ 30^0. Ἄρα ἡ πλευρά ΑΕ τοῦ τριγώνου θά εἶναι ἴση μέ τό μισό τῆς ὑποτείνουσας ΑΒ, δηλαδή $AE = 3m$. Τότε, μποροῦμε νά ὑπολογίσουμε καί τή ΒΕ, πού εἶναι ὕψος γιά τό παραλληλόγραμμο. Τότε εἶναι:

$BE^2 = AB^2 - AE^2 = 6^2 - 3^2 = 27$ ἤ $BE = 3\sqrt{3}m$. "Αρα τό ἐμβαδόν τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι $(ΑΒΓΔ) = ΑΔ \cdot ΒΕ = 8 \cdot 3\sqrt{3} = 24\sqrt{3}m^2$.



Σχ.211



Σχ.213

212. Νά βρεθεῖ τό ὕψος τριγώνου πού ἀντιστοιχεῖ σέ πλευρά 5m, ἄν τό ἐμβαδόν τοῦ τριγώνου εἶναι $10\ m^2$.

<u>Λύση</u>. 'Από τόν τύπο τοῦ ἐμβαδοῦ $E = \frac{1}{2} \cdot βυ$ ἔχουμε:

$10m^2 = \frac{1}{2} \cdot 5m \cdot υ$ ἤ $υ = 4m$.

213. 'Ορθογώνιου τριγώνου οἱ δύο κάθετες πλευρές εἶναι 3m καί 4m. Νά βρεθεῖ τό ἐμβαδό του καί τό ὕψος πρός τήν ὑποτείνουσα.

<u>Λύση</u>. "Εστω ΑΒΓ τό δοσμένο ὀρθογώνιο τρίγωνο (σχ.213), μέ $ΑΓ = 3m$ καί $ΑΒ = 4m$. Τό ἐμβαδό του εἶναι $(ΑΒΓ) = \frac{1}{2} \cdot ΑΓ \cdot ΑΒ = \frac{1}{2} \cdot 3m \cdot 4m = 6m^2$.

Φέρνουμε τό ὕψος του ΑΔ. Τό ἐμβαδό τοῦ τριγώνου μπορεῖ νά ἐκφραστεῖ καί ὡς ἑξῆς:

$(ΑΒΓ) = ΒΓ \cdot ΑΔ/2$. "Ετσι, γιά νά ὑπολογίσουμε τό ὕψος ΑΔ πρέπει νά ξέρουμε τήν ὑποτείνουσα ΒΓ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου. Ἔτσι ἔχουμε: $ΒΓ^2 = ΑΒ^2+ΑΓ^2 = 4^2+3^2 = 16+9 = 25$, ἄρα $ΒΓ = 5m$. Τώρα ἔχουμε: $6m^2 = \frac{1}{2}\cdot 5m\cdot ΑΔ$ ἀπ' τήν ὁποία παίρνουμε: $ΑΔ = 2,4m$.

214. Τρίγωνο καί ὀρθογώνιο ἔχουν ἴσες βάσεις καί εἶναι ἰσεμβαδικά. Νά βρεθεῖ σχέση πού νά συνδέει τά ἀντίστοιχα ὕψη τους.

Λύση. Ἔστω ὅτι οἱ βάσεις τους εἶναι ἴσες μέ β καί $υ_1$ τό ὕψος τοῦ τριγώνου καί $υ_2$ τό ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου. Ἡ ἔκφραση τῶν ἐμβαδῶν τους εἶναι ἀντιστοίχως: $E = \frac{1}{2}βυ_1$ καί $E = βυ_2$. Τότε θά εἶναι $\frac{1}{2}βυ_1 = βυ_2$ ἤ $υ_1 = 2υ_2$.

215. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τά ἐμβαδά τῶν τριγώνων πού ἔχουν κορυφή τυχαῖο σημεῖο τῆς περιμέτρου παραλληλογράμμου καί βάσεις τίς διαγωνίους του ἔχουν σταθερό ἄθροισμα.

Ἀπόδειξη. Ἔστω ΑΒΓΔ ἕνα τυχαῖο παραλληλόγραμμο καί Μ ἕνα τυχαῖο σημεῖο τῆς περιμέτρου του (σχ.215). Θά ἀποδείξουμε ὅτι τό ἄθροισμα (ΑΜΓ)+(ΒΜΔ) εἶναι σταθερό.

$(ΑΜΓ) = \frac{1}{2}\cdot ΑΜ\cdot υ$ καί $(ΒΜΔ) = \frac{1}{2}\cdot ΒΜ\cdot υ$, ὅπου υ εἶναι τό ὕψος τοῦ παραλληλογράμμου πρός τήν πλευρά του ΑΒ. Προσθέτουμε τίς δύο αὐτές σχέσεις καί παίρνουμε:

$$(ΑΜΓ)+(ΒΜΔ) = \frac{1}{2}\cdot ΑΜ\cdot υ + \frac{1}{2}\cdot ΒΜ\cdot υ = \frac{1}{2}\cdot υ(ΑΜ+ΒΜ) = \frac{1}{2}\cdot υ\cdot ΑΒ =$$

$\frac{1}{2}(ΑΒΓΔ)$, δηλαδή $(ΑΜΒ)+(ΓΜΔ) = \frac{1}{2}(ΑΒΓΔ)$ πού εἶναι σταθερό.

216. Νά βρεθεῖ τό ἐμβαδόν τριγώνου τοῦ ὁποίου οἱ δύο πλευρές εἶναι 12m καί 8m καί πού σχηματίζουν γωνία 30^0 ἤ 150^0. Νά συγκρίνετε καί νά αἰτιονογίσετε τά ἀποτελέσματα στίς δύο περιπτώσεις.

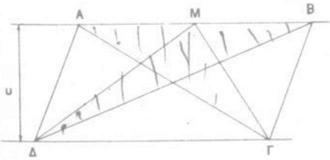
<u>Λύση</u>. Ἄν ΑΒΓ εἶναι τό τρίγωνο πού ἔχει ΑΒ = 8m καί ΒΓ= 12m, φέρνουμε τήν ΑΔ⊥ΒΓ καί τότε:

α) Ἄν ἡ γωνία $\hat{B}$ εἶναι 30^0, ἀπό τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ ἔπεται ὅτι τό ὕψος ΑΔ εἶναι ἴσο μέ τό μισό τῆς ΑΒ, δηλαδή εἶναι ΑΔ = 4m. Τότε ἔχουμε (σχ.216α):

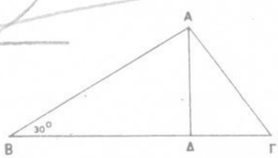
$$(ΑΒΓ) = \frac{1}{2}\cdot ΒΓ\cdot ΑΔ = \frac{1}{2}\cdot 12m\cdot 4m = 24m^2.$$

β) Ἄν ἡ γωνία $\hat{B}$ εἶναι 150^0 (σχ.216β), τότε ἡ γωνία $\hat{B}$ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΔ θά εἶναι 30^0 καί τότε πάλι τό ἴδιο ἀποτέλεσμα θά προκύψει, δηλαδή $(ΑΒΓ) = 24m^2$.

Αὐτό συμβαίνει γιατί οἱ γωνίες τῶν 30^0 καί 150^0 εἶναι παραπληρωματικές. Πάλι ἰσεμβαδικά τρίγωνα θά εἴχαμε ἄν οἱ γωνίες τους στό $\hat{B}$ ἦταν ω καί 180^0-ω, γιά ὁποιαδήποτε τιμή τοῦ ω.



Σχ.215



Σχ.216α

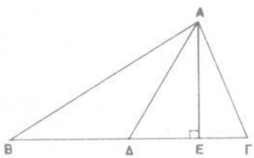
217. Νά ἀποδείξετε ὅτι σέ κάθε τρίγωνο μία διάμεσος τό διαιρεῖ σέ δύο ἰσοδύναμα τρίγωνα.

<u>Ἀπόδειξη</u>. Ἔστω ἕνα

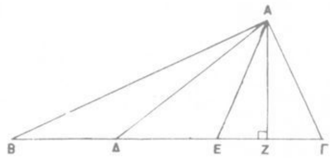
Σχ.216β

τρίγωνο ΑΒΓ καί ΑΔ ἡ διάμεσός του (σχ.217). Φέρνουμε τό ὕψος του ΑΕ καί θά ἀποδείξουμε ὅτι εἶναι (ΑΔΒ) = (ΑΔΓ).

$(ΑΔΒ) = \frac{1}{2}\cdot ΔΒ\cdot ΑΕ$ καί $(ΑΔΓ) = \frac{1}{2}\cdot ΔΓ\cdot ΑΕ$. 'Επειδή τό Δ εἶναι τό μέσο τῆς ΒΓ, ἔπεται ὅτι ΔΒ = ΔΓ. "Αρα θά εἶναι καί (ΑΔΒ) = (ΑΔΓ).



Σχ.217



Σχ.218

218. Νά διαιρεθεῖ τρίγωνο σέ τρία ἰσοδύναμα μέρη μέ εὐθεῖες ἀπό μιά κορυφή του.

Λύση. 'Υποθέτουμε ὅτι τό τρίγωνο ΑΒΓ (σχ.218) χωρίστηκε σέ τρία ἰσοδύναμα μέρη μέ τίς εὐθεῖες ΑΔ καί ΑΕ. Φέρνουμε τό ὕψος ΑΖ. 'Από τήν ὑπόθεση ἔχουμε ὅτι:

$$(ΑΒΔ) = (ΑΔΕ) = (ΑΕΓ) \quad ἤ \quad \frac{1}{2}\cdot ΒΔ\cdot ΑΖ = \frac{1}{2}\cdot ΔΕ\cdot ΑΖ = \frac{1}{2}\cdot ΕΓ\cdot ΑΖ$$

ἀπό τήν ὁποία ἔπεται ὅτι ΒΔ = ΔΕ = ΕΓ. 'Αρκεῖ ἐπομένως νά διαιρέσουμε τήν πλευρά ΒΓ σέ τρία ἴσα τμήματα μέ τά σημεῖα Δ καί Ε καί νά φέρουμε τίς ΑΔ καί ΑΕ.

219. Νά βρεθεῖ τό ἐμβαδόν τραπεζίου τοῦ ὁποίου οἱ βάσεις εἶναι 4m καί 6m καί ἡ ἀπόστασή τους εἶναι

Λύση. Εἶναι ἐφαρμογή τοῦ τύπου τοῦ ἐμβαδοῦ γιά τά τραπέζια. Ἔτσι ἔχουμε:

$$E = \frac{4m+6m}{2} \cdot 3m = 15m^2.$$

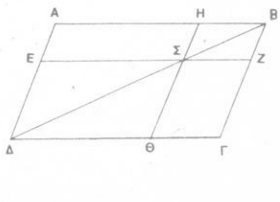
220. Τραπεζίου ἡ μιά βάση εἶναι τριπλάσια ἀπό τήν ἄλλη. Νά βρεθοῦν αὐτές ἄν τό ὕψος του εἶναι 3m, καί τό ἐμβαδόν του $12m^2$.

Λύση. Ἔστω β ἡ μιά βάση. Τότε ἡ ἄλλη θά εἶναι 3β καί, κατά τήν ὑπόθεση, θά ἔχουμε:

$12m^2 = \frac{\beta+3\beta}{2} \cdot 3m$ ἀπό τήν ὁποία παίρνουμε $\beta = 2m$. Ἄρα οἱ βάσεις τοῦ τραπεζίου εἶναι 2m καί 6m.

221. Ἀπό τυχαῖο σημεῖο τῆς μιᾶς διαγωνίου παραλληλογράμμου φέρνουμε παράλληλες πρός τίς πλευρές του. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἀπό τά τέσσερα παραλληλόγραμμα πού σχηματίζονται, τά δύο πού δέν περιέχουν τμήματα τῆς διαγωνίου αὐτῆς, εἶναι ἰσοδύναμα.

Ἀπόδειξη. Ἔστω ΑΒΓΔ ἕνα παραλληλόγραμμο (σχ.221) καί Σ ἕνα σημεῖο τῆς διαγωνίου του ΒΔ. Ἀπό τό Σ φέρνουμε παράλληλες πρός τίς πλευρές τοῦ παραλληλογράμμου καί θά ἀποδείξουμε ὅτι τά παραλληλόγραμμα ΑΗΣΕ καί ΓΖΣΘ εἶναι ἰσοδύναμα.



Σχ.221

Εἶναι γνωστό ὅτι κάθε παραλληλόγραμμο μέ μιά διαγώνιό του χωρίζεται σέ δύο ἴσα, ἄρα καί ἰσοδύναμα τρίγωνα. Ἔτσι τά παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ,ΕΣΘΔ,ΒΗΣΖ μέ τήν εὐθεία ΒΣΔ πού περιέχει διαγώνιό τους, χωρίζονται σέ δύο ἴσα μέρη, δηλαδή:

(1) $(AB\Delta) = (B\Gamma\Delta)$ καί

(2) $(E\Sigma\Delta) = (\Sigma\Theta\Delta)$, $(HB\Sigma) = (BZ\Sigma)$.

Ἀπό τή σχέση (1) ἀφαιροῦμε τίς σχέσεις (2) καί ἔχουμε:

$(AB\Delta)-(E\Sigma\Delta)-(HB\Sigma) = (B\Gamma\Delta)-(\Sigma\Theta\Delta)-(BZ\Sigma)$ ἤ $(AH\Sigma E) = (\Gamma Z\Sigma\Theta)$.

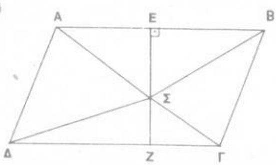
222. Ἄν συνδέσουμε μέ εὐθύγραμμα τμήματα ἕνα τυχαῖο σημεῖο Σ ἐσωτερικό ἑνός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ μέ τίς κορυφές του, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι: $(\Sigma AB)+(\Sigma\Gamma\Delta) = (\Sigma A\Delta)+(\Sigma B\Gamma)$.

Ἀπόδειξη. Φέρνουμε τήν $E\Sigma Z \perp AB$ (σχ.222). Τότε εἶναι:

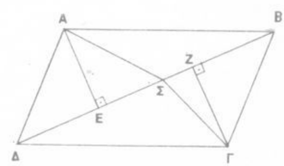
$(\Sigma AB) = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot \Sigma E$ καί $(\Sigma\Gamma\Delta) = \frac{1}{2}\cdot \Gamma\Delta\cdot \Sigma Z$. Τίς προσθέτουμε κατά μέλη καί ἔχουμε:

$$(\Sigma AB)+(\Sigma\Gamma\Delta) = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot \Sigma E+\frac{1}{2}\,\Gamma\Delta\cdot \Sigma Z = \frac{1}{2}\cdot AB(\Sigma E+\Sigma Z) = \frac{1}{2}(AB\Gamma\Delta).$$

Ἄρα εἶναι $(\Sigma AB)+(\Sigma\Gamma\Delta) = (\Sigma A\Delta)+(\Sigma B\Gamma) = \frac{1}{2}(AB\Gamma\Delta)$.



Σχ.222



Σχ.223

223. Ἄν συνδέσουμε ἕνα τυχαῖο σημεῖο Σ τῆς διαγωνίου ΒΔ ἑνός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ μέ τίς κορυφές

Α καί Γ, νά ἀποδείξετε ὅτι τό παραλληλόγραμμο διαιρεῖται σέ δύο ζεύγη ἰσοδυνάμων τριγώνων.

<u>Ἀπόδειξη</u>. Κάθε παραλληλόγραμμο μέ μιά διαγώνιό του διαιρεῖται σέ δύο ἴσα τρίγωνα. Ἔτσι ἔχουμε (σχ.223) ΑΒΔ = ΓΣΒ. Τότε καί τά ὕψη τους ΑΕ καί ΓΖ θά εἶναι ἴσα, δηλαδή ΑΕ = ΓΖ.

$$(\text{ΑΣΔ}) = \frac{1}{2}\cdot\text{ΣΔ}\cdot\text{ΑΕ} \quad \text{καί} \quad (\text{ΓΣΔ}) = \frac{1}{2}\cdot\text{ΣΔ}\cdot\text{ΓΖ} = \frac{1}{2}\cdot\text{ΣΔ}\cdot\text{ΑΕ}.$$ Ἄρα:

(ΑΣΔ) = ΓΣΔ).

Μέ ἴδιο τρόπο μποροῦμε νά ἀποδείξουμε ὅτι εἶναι καί: (ΑΣΒ) = (ΓΣΒ).

224. Ἀπό τίς κορυφές ἑνός τυχαίου τετραπλεύρου φέρνουμε παραλλήλους πρός τίς διαγωνίους του. Ν' ἀποδείξετε ὅτι τό περιγεγραμμένο περί τό τετράπλευρο παραλληλόγραμμο πού σχηματίζεται εχει ἐμβαδό διπλάσιο ἀπό τό ἐμβαδό τοῦ τετραπλεύρου.

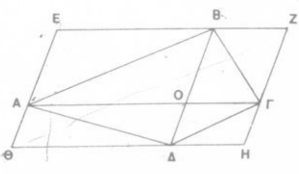
<u>Ἀπόδειξη</u>. Ἔστω ΑΒΓΔ ἕνα τυχαῖο τετράπλευρο (σχ.224), πού ἀπό τίς κορυφές του φέρνουμε παράλληλες πρός τίς διαγωνίους του καί σχηματίζεται τό παραλληλόγραμμο ΕΖΗΘ. Θά ἀποδείξουμε ὅτι εἶναι (ΕΖΗΘ) = 2(ΑΒΓΔ).

Τά τετράπλευρα ΑΕΒΟ,ΒΖΓΟ, ΓΗΔΟ,ΔΘΑΟ εἶναι παραλληλόγραμμα. Τότε ἔχουμε:

(ΑΕΒΟ) = 2(ΑΒΟ),
(ΒΖΓΟ) = 2(ΒΓΟ),
(ΓΗΔΟ) = 2(ΓΔΟ),
(ΔΘΑΟ) = 2(ΔΑΟ).

Τίς προσθέτουμε κατά μέλη καί παίρνουμε:

(ΕΖΗΘ) = 2(ΑΒΓΔ).



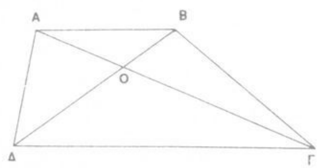
Σχ.224

225. Νά άποδείξετε ότι τά δύο τρίγωνα, πού έχουν κοινή κορυφή τό σημείο τομής τών διαγωνίων τραπεζίου καί βάσεις τίς μή παράλληλες πλευρές του είναι ίσοδύναμα.

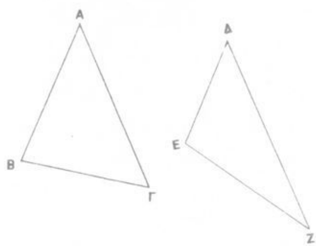
<u>'Απόδειξη</u>. "Ας θεωρήσουμε ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ καί έστω υ τό ύψος του (σχ.225). Τότε έχουμε:

$(\text{ΑΓΔ}) = \frac{1}{2}\cdot \text{ΓΔ}\cdot υ$ καί $(\text{ΒΓΔ}) = \frac{1}{2}\cdot \text{ΓΔ}\cdot υ$. 'Από αύτές έπεται ή σχέση: $(\text{ΑΓΔ}) = (\text{ΒΓΔ})$, πού διαφορετικά μπορεί νά γραφτεί:

$(\text{ΑΟΔ})+(\text{ΟΓΔ}) = (\text{ΒΟΓ})+(\text{ΟΓΔ})$, άπ' όπου παίρνουμε $(\text{ΑΟΔ}) = (\text{ΒΟΓ})$.



Σχ.225



Σχ.226

226. Δύο τρίγωνα ΑΒΓ καί ΔΕΖ έχουν $\hat{A} = \hat{\Delta}$ καί $\hat{B}+\hat{E} = 2^{L}$. Ν' άποδειχθεί ότι είναι $\frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΕΖ}} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΔΖ}}$.

<u>'Απόδειξη</u>. 'Επειδή τά τρίγωνα ΑΒΓ καί ΔΕΖ (σχ.226) έχουν τίς γωνίες τους $\hat{A}$ καί $\hat{\Delta}$ ίσες, έπεται ότι θά είναι:

$$(1) \qquad \frac{(\text{ΑΒΓ})}{(\text{ΔΕΖ})} = \frac{\text{ΑΒ}\cdot\text{ΑΓ}}{\text{ΔΕ}\cdot\text{ΔΖ}}.$$

'Επίσης τά ίδια τρίγωνα έχουν τίς γωνίες τους $\hat{B}$ καί $\hat{E}$ παραπληρωματικές. "Αρα θά είναι:

$$(2) \qquad \frac{(ΑΒΓ)}{(ΔΕΖ)} = \frac{ΑΒ \cdot ΒΓ}{ΔΕ \cdot ΕΖ}.$$

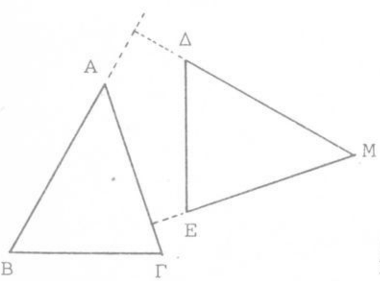
Τώρα ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) ἔπεται ὅτι:

$$\frac{ΑΒ \cdot ΑΓ}{ΔΕ \cdot ΔΖ} = \frac{ΑΒ \cdot ΒΓ}{ΔΕ \cdot ΕΖ} \quad ἤ \quad \frac{ΑΓ}{ΔΖ} = \frac{ΒΓ}{ΕΖ}.$$

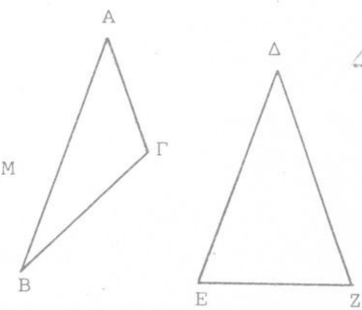
227. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Ἀπό τυχαῖο σημεῖο Μ φέρνουμε καθέτους πρός τίς ΑΒ καί ΑΓ καί πάνω σ' αὐτές παίρνουμε τμήματα ΜΔ = ΑΒ καί ΜΕ = ΑΓ. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι εἶναι (ΑΒΓ) = ΜΔΕ).

Ἀπόδειξη. Οἱ γωνίες $\hat{Α}$ καί $\hat{Μ}$ ἔχουν τίς πλευρές τους κάθετες. Ἄρα θά εἶναι ἴσες ἤ παραπληρωματικές (σχ.227). Καί στίς δύο περιπτώσεις θά ἔχουμε:

$$\frac{(ΑΒΓ)}{(ΜΔΔ)} = \frac{ΑΒ \cdot ΑΓ}{ΜΔ \cdot ΜΕ} = \frac{ΑΒ \cdot ΑΓ}{ΑΒ \cdot ΑΓ} = 1. \quad \text{Ἄρα θά εἶναι } (ΑΒΓ) = (ΜΔΕ).$$



Σχ.227



Σχ.228

228. Τρίγωνο ΑΒΓ ἔχει ΑΒ = 48m καί ΑΓ = 12m. Νά βρεθεῖ τό μῆκος καθεμιᾶς ἀπό τίς ἴσες πλευρές ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἰσοδύναμου πρός αὐτό, τοῦ ὁποίου ἡ γωνία τῶν ἴσων πλευρῶν ἰσοῦται μέ τή γωνία $\hat{A}$ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

<u>Λύση</u>. Ἔστω λ τό μῆκος καθεμιᾶς ἀπό τίς ἴσες πλευρές τοῦ ζητούμενου ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΔΕΖ (σχ.228). Ἐπειδή πρέπει νά εἶναι $\hat{A} = \hat{\Delta}$ καί τά τρίγωνα νά εἶναι ἰσοδύναμα, ἕπεται ὅτι :

$$\frac{AB \cdot A\Gamma}{\Delta E \cdot \Delta Z} = 1 \quad \text{ἤ} \quad \frac{AB \cdot A\Gamma}{\lambda^2} = 1 \quad \text{ἤ} \quad 48 \cdot 12 = \lambda^2$$

ἀπ' τήν ὁποία ἕπεται $\lambda = 24$ ἤ $\Delta E = \Delta Z = 24m$.

229. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Ἀπό σημεῖο Ο ἐσωτερικό τοῦ ΑΒΓ φέρνουμε καθέτους πρός τίς πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ καί πάνω σ' αὐτές παίρνουμε τμήματα $O\Delta = AB$, $OE = B\Gamma$, $OZ = \Gamma A$ ἀντιστοίχως. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι εἶναι: $(\Delta EZ) = 3(AB\Gamma)$.

Ἀ<u>πόδειξη</u>. Τά τρίγωνα ΑΒΓ καί ΟΔΖ ἔχουν τίς γωνίες $\hat{A}$ καί $\hat{O}$ παραπληρωματικές καί $AB = O\Delta$, $A\Gamma = OZ$. Ἄρα θά εἶναι:

$$\frac{(AB\Gamma)}{(O\Delta Z)} = \frac{AB \cdot A\Gamma}{O\Delta \cdot OZ} = 1 \quad \text{ἤ}$$

(1) $(O\Delta Z) = (AB\Gamma)$.

Γιά ἴδιους λόγους ἔχουμε:

(2) $(O\Delta E) = (AB\Gamma)$ καί

(3) $(OEZ) = (AB\Gamma)$.

Προσθέτουμε τίς σχέσεις (1), (2) καί (3) καί παίρνουμε:

$$(\Delta EZ) = 3(AB\Gamma).$$

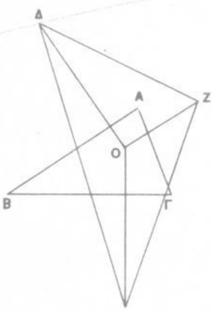
230. Νά διαιρεθεῖ τετράγωνο σέ τρία ἰσοδύναμα μέρη μέ εὐθεῖες ἀπό μιά κορυφή του.

<u>Ἀνάλυση</u>. Ἔστω ὅτι τό δοσμένο τετράγωνο ΑΒΓΔ μέ πλευρά α, χωρίστηκε σέ τρία ἰσοδύναμα μέρη μέ τίς ΑΕ καί ΑΖ. Τότε θά εἶναι (σχ.230):

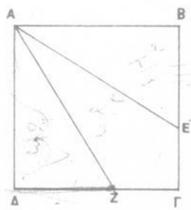
$$(Α\Delta Ζ) = \frac{\alpha^2}{3} \quad \text{ἤ} \quad \frac{1}{2}\cdot Α\Delta\cdot \underset{\Delta Ζ}{ΑΖ} = \frac{\alpha^2}{3} \quad \text{ἤ} \quad \boxed{\frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot\Delta Ζ = \frac{\alpha^2}{3}} \quad \text{ἤ} \quad \Delta Ζ = \frac{2}{3}\cdot\alpha.$$

Μέ ἴδιο τρόπο προκύπτει ὅτι θά εἶναι καί $ΕΒ = \frac{2}{3}\cdot\alpha$.

<u>Σύνθεση - κατασκευή</u>. Μετά ἀπό τήν προηγούμενη ἀνάλυση, ἡ κατασκευή εἶναι ἁπλή. Παίρνουμε πάνω στίς πλευρές ΔΓ καί ΒΓ τά σημεῖα Ζ καί Ε, ἔτσι ὥστε νά εἶναι $\Delta Ζ = 2\alpha/3$ καί $ΒΕ = 2\alpha/3$, ὅπου α εἶναι ἡ πλευρά τοῦ δοσμένου τετραγώνου. Μετά φέρνουμε τίς ΑΖ καί ΑΕ καί ἔστι χωρίζεται τό τετράγωνο σέ τρία ἰσοδύναμα μέρη.



Σχ.229



Σχ.230

231. Νά διαιρεθεῖ παραλληλόγραμμο σέ τρία ἰσοδύναμα μέρη μέ εὐθεῖες ἀπό μιά κορυφή του.

<u>Ἀνάλυση</u>. Ἔστω ὅτι τό παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ χωρίστηκε σέ τρία ἰσοδύναμα μέρη μέ τίς ΑΕ καί ΑΖ (σχ.231). Φέρνουμε ἀπό τήν κορυφή του α τό ὕψος του υ καί τότε θά εἶναι:

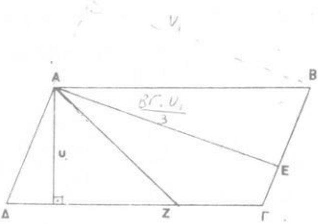
$$(Α\Delta Ζ) = \frac{1}{3}(ΑΒΓ\Delta) \quad \text{ἤ} \quad \frac{1}{2}\cdot\Delta Ζ\cdot\upsilon = \frac{1}{3}\cdot\Delta Γ\cdot\upsilon \quad \text{ἤ} \quad \Delta Ζ = \frac{2}{3}\cdot\Delta Γ.$$

Μέ ἴδιο τρόπο βρίσκουμε ὅτι πρέπει νά εἶναι καί $ΒΕ=\frac{2}{3}\cdot ΒΓ$.

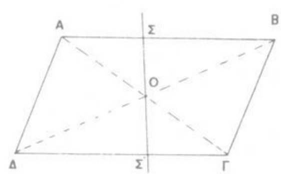
<u>Σύνθεση - κατασκευή</u>. Πάνω στίς πλευρές ΔΓ καί ΒΓ παίρνουμε σημεῖα Ζ καί Ε, ἔτσι ὥστε νά εἶναι:

$$ΔΖ=\frac{2}{3}\cdot ΔΓ \quad \text{καί} \quad ΒΕ=\frac{2}{3}\cdot ΒΓ.$$

Φέρνουμε τίς ΑΖ καί ΑΕ καί τότε τό παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ ἔχει χωριστεῖ σέ τρία ἰσοδύναμα μέρη.



Σχ.231



Σχ.232

232. Νά διαιρεθεῖ παραλληλόγραμμο σέ δύο ἰσοδύναμα μέρη μέ εὐθεῖες ἀπό ἕνα σημεῖο Σ τῆς περιμέτρου του.

<u>Λύση</u>. "Εστω τό παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ (σχ.232) καί Ο τό κέντρο του. 'Από τό Σ φέρνουμε τή ΣΟ πού τέμνει τήν ἀπέναντι πλευρά τοῦ παραλληλογράμμου στό σημεῖο Σ'. Τότε, λόγω τῆς κεντρικῆς συμμετρίας πού ὑπάρχει ὡς πρός τό Ο, ἕπεται ὅτι τά τετράπλευρα ΣΑΔΣ' καί ΣΒΓΣ' εἶναι ἴσα, ἄρα καί ἰσοδύναμα.

233. "Αν συνδέσουμε τό κέντρο βάρους τριγώνου μέ τίς κορυφές του, ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι τό τρίγωνο αὐτό διαιρεῖται σέ τρία ἰσοδύναμα τρίγωνα.

'<u>Απόδειξη</u>. "Εστω ένα τρίγωνο ΑΒΓ καί Ο τό κ.βάρους του (σχ.233). Φέρνουμε τίς ΟΒ, ΟΓ καί τήν ΑΟ πού τέμνει τή ΒΓ στό μέσο της Δ. Τότε θά είναι (άσκ.217): (ΑΔΒ) = (ΑΔΓ) καί (ΟΔΒ) =(ΟΔΓ). Τίς άφαιροῦμε κατά μέλη καί παίρνουμε:

(ΑΔΒ)-(ΟΔΒ) = (ΑΔΓ)-(ΟΔΓ) ἤ

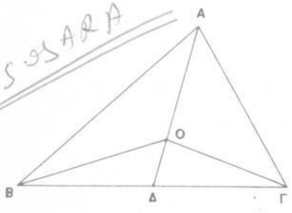
(1) (ΑΟΒ) = (ΑΟΓ).

Μέ ἴδιο τρόπο παίρνουμε καί:

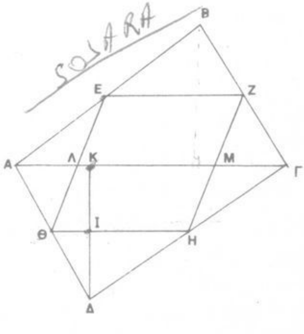
(2) (ΑΟΒ) = (ΓΟΒ).

Τώρα ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) παίρνουμε:

(ΑΟΒ) = (ΒΟΓ) = (ΓΟΑ).



Σχ.233



Σχ.234

234. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τό παραλληλόγραμμο μέ κορυφές τά μέσα τῶν πλευρῶν τυχαίου τετραπλεύρου ἔχει ἐμβαδό ἴσο πρός τό μισό τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τετραπλεύρου.

'<u>Απόδειξη</u>. Θεωροῦμε ἕνα τυχαῖο τετράπλευρο ΑΒΓΔ καί ἔστω Ε,Ζ,Η,Θ τά μέσα τῶν πλευρῶν του (σχ.234). Φέρνουμε τή διαγώνιο ΑΓ πού τέμνει τίς ΕΘ καί ΖΗ στά Λ καί Μ. Εἶναι γνωστό ὅτι τό ΕΖΗΘ εἶναι παραλληλόγραμμο, ἄρα ἔχει ΕΘ//ΖΗ. Ἐπειδή τά Η καί Θ εἶναι τά μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΓΔ, ἔπεται ὅτι ΗΘ//ΑΓ. Τότε τό τετράπλευρο ΗΘΛΜ εἶναι παραλληλόγραμμο καί μάλιστα ἡ πλευρά του ΗΘ εἶναι ἴση μέ τό μισό τῆς ΑΓ. Φέρνουμε καί τό κάθετο τμῆμα ΔΚ πρός τήν ΑΓ, πού τέμνεται ἀπό τήν ΗΘ στό μέσο του Ι. Τότε ἔχουμε:

$$(ΑΓΔ) = \frac{1}{2}\cdot ΑΓ\cdot ΔΚ = \frac{1}{2}\cdot 2ΗΘ\cdot 2ΚΙ = 2\cdot ΗΘ\cdot ΚΙ = 2(ΗΘΛΜ) \quad ἤ$$

$$(1) \qquad (ΑΓΔ) = 2(ΗΘΛΜ).$$

Μέ ἴδιο τρόπο παίρνουμε καί:

$$(2) \qquad (ΑΒΓ) = 2(ΕΖΜΛ).$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τίς σχέσεις (1) καί (2) καί παίρνουμε:

$$(ΑΓΔ)+(ΑΒΓ) = 2\big((ΗΘΛΜ)+(ΕΖΜΛ)\big) \quad ἤ \quad (ΑΒΓΔ) = 2(ΕΖΗΘ).$$

235. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό ἐμβαδό τραπεζίου ἰσοῦται μέ τό γινόμενο τῆς μιᾶς τῶν μή παραλλήλων πλευρῶν του ἐπί τήν ἀπόσταση τοῦ μέσου τῆς ἄλλης ἀπ' αὐτή.

<u>Ἀπόδειξη</u>. Ἔστω ΑΒΓΔ ἕνα τραπέζιο καί Μ τό μέσο τῆς ΒΓ (σχ.235). Φέρνουμε ΜΗ⊥ΑΔ καί ΕΜΖ//ΑΔ. Τότε τό ΑΕΖΔ εἶναι παραλληλόγραμμο, ἐνῶ τά τρίγωνα ΜΒΕ καί ΜΓΖ εἶναι ἴσα, γιατί ἔχουν ΜΒ = ΜΓ καί τίς γωνίες τους στό Μ ἴσες ὡς κατακορυφήν ὅπως καί τίς γωνίες τους $\hat{B}_1$ καί $\hat{Γ}_1$ ἴσες λόγω τῶν παραλλήλων ΑΒ καί ΓΔ πού τέμνονται ἀπό τή ΒΓ. Ἄρα: (ΜΒΕ) = (ΜΓΖ). Τότε ἔχουμε:

$$(ΑΒΓΔ) = (ΑΒΜΖΔ)+ΜΓΖ) = (ΑΒΜΖΔ)+(ΜΒΕ) = (ΑΕΖΔ) = ΑΔ\ ΜΗ.$$

236. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ καί σημεῖο Ο πού δέ βρίσκεται μέσα στή γωνία $\hat{A}$ οὔτε μέσα στήν

κατακορυφήν της. Νά άποδείξετε ότι είναι:
(ΟΑΓ) = (ΟΑΒ) + (ΟΑΔ).

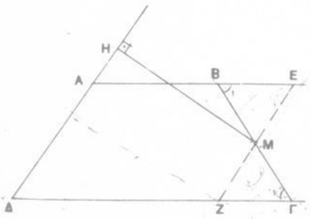
'<u>Απόδειξη</u>. 'Από τά Β,Γ,Δ καί άπό τό κέντρο Θ τοῦ παραλληλογράμου φέρνουμε κάθετες πρός τήν εὐθεία ΟΑ (σχ.236). Τότε εἶναι: $(AO\Gamma) = \frac{1}{2}\cdot AO\cdot \Gamma Z = \frac{1}{2}\cdot AO\cdot 2\Theta I = AO\cdot \Theta I$ ἤ

(1) $(AO\Gamma) = AO\cdot\Theta I$.

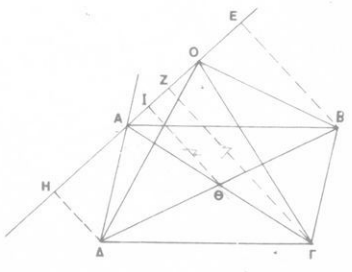
'Επίσης εἶναι: $(AOB)+(AO\Delta) = \frac{1}{2}\cdot AO\cdot BE + \frac{1}{2}\cdot AO\cdot \Delta H = \frac{1}{2}\cdot AO(BE+\Delta H) = \frac{1}{2}\cdot AO\cdot 2\Theta I = AO\cdot\Theta I$ ἤ

(2) $(AOB)+(AO\Delta) = AO\cdot\Theta I$.

Τώρα άπό τίς σχέσεις (1) καί (2) ἕπεται ὅτι εἶναι:
$(AO\Gamma) = (AOB)+(AO\Delta)$.



Σχ.235



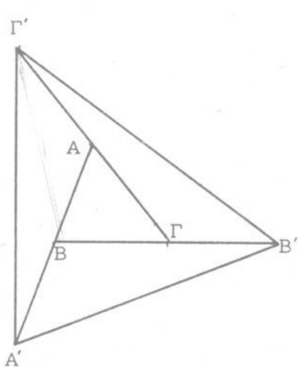
Σχ.236

237. Σέ τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τίς πλευρές του κατά κυκλική σειρά καί στήν κάθε προέκταση παίρνουμε τμήματα ΑΓ'=ΑΓ, ΒΑ'=ΒΑ, ΓΒ'=ΓΒ. Νά έκφραστεῖ τό ἐμβαδό τοῦ τριγώνου $Α'Β'Γ'$ ἀπό τό ἐμβαδό $Ε$ τοῦ $ΑΒΓ$.

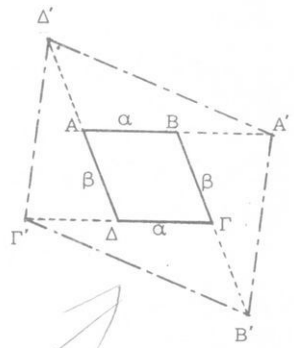
Λύση. Στό τρίγωνο $ΒΓΓ'$ ἡ $ΒΑ$ εἶναι διάμεσος (σχ. 237). Ἄρα θά εἶναι: $(ΑΒΓ') = (ΑΒΓ) = Ε$.

Ἐπίσης στό τρίγωνο $ΑΑ'Γ'$ ἡ $Γ'Β$ εἶναι διάμεσος, ἄρα: $(Α'ΒΓ') = (ΑΒΓ') = Ε$. Τότε θά εἶναι: $(ΑΑ'Γ') = 2Ε$.

Μέ ἴδιο τρόπο βρίσκουμε: $(ΒΒ'Α') = (ΓΓ'Β') = 2Ε$. Ἄρα ἔχουμε $(Α'Β'Γ') = 7(ΑΒΓ) = 7Ε$.



Σχ.237



Σχ.238

238. Ἑνός παραλληλογράμμου $ΑΒΓΔ$ προεκτείνουμε τίς πλευρές του κατά κυκλική σειρά καί στήν κάθε προέκταση παίρνουμε τμήματα $ΑΔ' = ΑΔ$, $ΒΑ' = ΒΑ$, $ΓΒ' = ΓΒ$, $ΔΓ' = ΔΓ$. α) Ν' ἀποδείξετε ὅτι τό $Α'Β'Γ'Δ'$ εἶναι παραλληλόγραμμο. β) Νά ἐκφραστεῖ τό ἐμβαδό τοῦ $Α'Β'Γ'Δ'$ ἀπό τό ἐμβαδό $Ε$ τοῦ $ΑΒΓΔ$.

Λύση. α) Ἄν $α$ καί $β$ εἶναι οἱ πλευρές τοῦ παραλληλογράμου $ΑΒΓΔ$ (σχ.238), τά τρίγωνα $ΑΑ'Δ'$ καί $ΓΓ'Β'$ εἶναι ἴσα γιατί ἔχουν $ΑΑ' = ΓΓ' = 2α$, $ΑΔ' = ΓΒ' = β$ καί $Α'\hat{Α}Δ' = Γ'\hat{Γ}Β'$ ὡς παραπληρωματικές τῶν ἴσων γωνιῶν $\hat{Α}$ καί $\hat{Γ}$. Ἄρα θά εἶναι: $Α'Δ' = Γ'Β'$.

Μέ ἴδιο τρόπο βρίσκουμε $Α'Β' = Γ'Δ'$. ῎Αρα τό τετράπλευρο $Α'Β'Γ'Δ'$ εἶναι παραλληλόγραμμο.

β) Τά σημεῖα Δ καί Δ' ἀπέχουν ἴσες ἀποστάσεις ἀπό τήν ΑΒ, γιατί τό Α εἶναι τό μέσο τοῦ τμήματος ΔΔ'. Αὐτό σημαίνει ὅτι τό τρίγωνο ΑΑ'Δ' καί τό παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ ἔχουν ἴσα ὕψη υ. Τότε θά εἶναι:

$E = (ΑΒΓΔ) = αυ$ καί $(ΑΑ'Δ') = \frac{1}{2}\cdot ΑΑ'\cdot υ = \frac{1}{2}\cdot 2α\cdot υ = αυ$. ῎Αρα εἶναι $(ΑΑ'Δ') = (ΑΒΓΔ) = Ε$.

Μέ ἴδιο τρόπο παίρνουμε: $(ΒΒ'Α') = (ΓΓ'Β') = (ΔΔ'Γ') = Ε$. ῎Αρα τελικά ἔχουμε: $(Α'Β'Γ'Δ') = 5(ΑΒΓΔ) = 5Ε$.

239. Τετράπλευρο ΑΒΓΔ εἶναι περιγεγραμμένο σέ κύκλο μέ κέντρο Ο. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι εἶναι: $(ΟΑΒ)+(ΟΓΔ) = (ΟΑΔ)+(ΟΒΓ)$.

<u>᾿Απόδειξη</u>. ῎Εστω ρ ἡ ἀκτίνα τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου στό τετράπλευρο ΑΒΓΔ (σχ.239). Εἶναι ἀρκετό νά ἀποδείξουμε ὅτι: $\frac{1}{2}\cdot ΑΒ\cdot ρ + \frac{1}{2}\cdot ΓΔ\cdot ρ = \frac{1}{2}\cdot ΑΔ\cdot ρ + \frac{1}{2}\cdot ΒΓ\cdot ρ$ ἤ $ΑΒ+ΓΔ = ΑΔ+ΒΓ$. ᾿Αλλά ἡ τελευταία σχέση ἀληθεύει, γιατί τό τετράπλευρο ΑΒΓΔ εἶναι περιγεγραμμένο στόν κύκλο (Ο,ρ). ῎Αρα εἶναι καί:

$(ΟΑΒ)+(ΟΓΔ) = (ΟΑΔ)+(ΟΒΓ)$.

240. ῞Ενα δεδομένο κυρτό πεντάγωνο νά μετασχηματιστεῖ σέ ἰσοδύναμο ὀρθογώνιο.

<u>Λύση</u>. ῎Εστω ΑΒΓΔΕ τό δοσμένο πεντάγωνο (σχ.240). Προεκτείνουμε τήν πλετρά ΑΒ καί ἀπό τό Ε φέρνουμε τήν ΕΖ//ΑΔ. Τότε θά εἶναι $(ΑΔΕ) = (ΑΔΖ)$, γιατί ἔχουν κοινή τή βάση ΑΔ καί ἴσα ὕψη ἀπό τίς κορυφές τους Ε καί Ζ. Τότε θά εἶναι καί: $(ΑΒΓΔΕ) = (ΖΒΓΔ)$, δηλαδή τό πεντάγωνο μετασχηματίστηκε σέ ἰσο-

δύναμο τετράπλευρο ΖΒΓΔ.

Φέρνουμε καί τή ΓΗ//ΔΒ καί μεταχηματίζουμε τό τετράπλευρο ΖΒΓΔ σέ ἰσοδύναμο τρίγωνο ΔΖΗ. Ἔτσι ἔχουμε:

(1) $(ΑΒΓΔΕ) = (ΔΖΗ).$

Φέρνουμε τή ΔΘ⊥ΖΗ καί ἔστω Ι τό μέσο τοῦ ὕψους ΔΘ. Φέρνουμε καί τίς ΚΛ//ΖΗ καί ΖΚ⊥ΖΗ, ΗΛ⊥ΖΗ. Τότε τό ΖΗΛΚ εἶναι ὀρθογώνιο καί ἔχει ἐμβαδό:

(2) $(ΖΗΛΚ) = ΖΗ \cdot ΘΙ.$

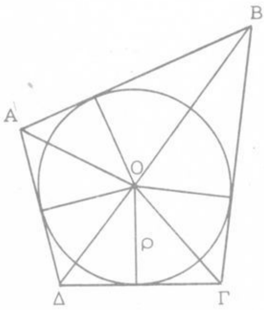
Τό τρίγωνο ΔΖΗ ἔχει ἐμβαδό: $(ΔΖΗ) = \frac{1}{2} \cdot ΖΗ \cdot ΔΘ = \frac{1}{2} \cdot ΖΗ \cdot 2ΘΙ = ΖΗ \cdot ΘΙ$ ἤ

(3) $(ΔΖΗ) = ΖΗ \cdot ΘΙ.$

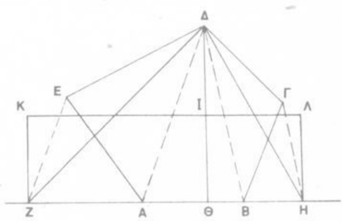
Ἀπό τίς σχέσεις (2) καί (3) ἕπεται:

(4) $(ΖΗΛΚ) = (ΔΖΗ).$

Τώρα ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (4) παίρνουμε: (ΑΒΓΔΕ) = (ΖΗΛΚ), δηλαδή τό δοσμένο πεντάγωνο μετασχηματίστηκε σέ ἰσοδύναμο ὀρθογώνιο.



Σχ.239



Σχ.240

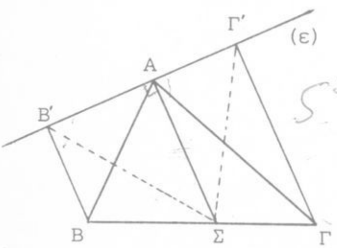
241. Δίνεται ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ καί ἕνα σημεῖο Σ τῆς πλευρᾶς ΒΓ. Ἀπό τήν κορυφή Α φέρνουμε εὐθεία (ε)⊥ΑΣ καί ἀπό τά Β καί Γ φέρνουμε τίς ΒΒ′ καί ΓΓ′ κάθετες στήν (ε). Ν'ἀποδείξετε ὅτι εἶναι:

$(ΑΒΓ) = \frac{1}{2}\cdot ΑΣ\cdot Β'Γ'$.

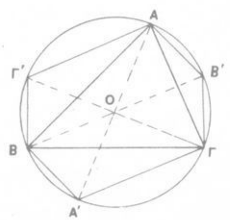
Ἀπόδειξη. Τό τρίγωνο ΑΣΒ εἶναι ἰσοδύναμο μέ τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒ′Σ, γιατί ἔχουν τήν ἴδια βάση ΑΣ καί τίς κορυφές τους Β καί Β′ πάνω σέ εὐθεία παράλληλη πρός τή βάση τους. Ἐπίσης εἶναι καί (ΑΣΓ) = (ΑΣΓ′). Ἄρα ἔχουμε (σχ.241)

$$(ΑΒΓ) = ((ΑΣΒ)+(ΑΣΓ) = (ΑΣΒ')+(ΑΣΓ') =$$

$$\frac{1}{2}\cdot ΑΣ\cdot ΑΒ'+\frac{1}{2}\cdot ΑΣ\cdot ΑΓ'=\frac{1}{2}\cdot ΑΣ(ΑΒ'+ΑΓ') =\frac{1}{2}\cdot ΑΣ\cdot Β'Γ'.$$



Σχ.241



Σχ.242

242. Δίνεται ὀξυγώνιο τρίγωνο καί ὁ περιγεγραμμένος του κύκλος. Ν'ἀποδείξετε ὅτι τό κυρτό ἑξάγωνο πού ἔχει κορυφές τίς κορυφές τοῦ τριγώνου καί τά ἀντιδιαμετρικά τους σημεῖα, ἔχει ἐμβαδό διπλάσιο ἀπό τό ἐμβαδό τοῦ τριγώνου.

Ἀπόδειξη. Ἔστω ΑΒΓ ἕνα ὀξυγώνιο τρίγωνο καί Ο τό κέντρο τοῦ περιγεγραμμένου του κύκλου (σχ.242). Ἄν Α′, Β′, Γ′ εἶναι τά ἀντιδιαμετρικά σημεῖα τῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ θά ἀποδείξουμε ὅτι εἶναι (ΑΒ'ΓΑ'ΒΓ') = 2(ΑΒΓ).

'Επειδή στό τρίγωνο ΑΒΒ' ἡ ΑΟ εἶναι διάμεσος, ἕπεται ὅτι: (ΑΟΒ') = (ΑΟΒ). 'Ομοίως ἔχουμε (Β'ΟΓ) = (ΒΟΓ), (ΓΟΑ') = (ΓΟΑ), (Α'ΟΒ) = (ΑΟΒ), (ΒΟΓ') = (ΒΟΓ) καί (Γ'ΟΑ) = (ΓΟΑ). Προσθέτουμε κατά μέλη αὐτές τίς ἕξι ἰσότητες καί παίρνουμε:

(ΑΒ'ΓΑ'ΒΓ') = 2(ΑΟΒ)+2(ΒΟΓ)+2(ΓΟΑ) ἤ

(ΑΒ'ΓΑ'ΒΓ') = 2(ΑΒΓ).

243. 'Από τά μέσα τῶν διαγωνίων ἑνός κυρτοῦ τετραπλεύρου φέρνουμε ἀπό μιά παράλληλο πρός τήν ἄλλη διαγώνιο καί ἔστω ὅτι αὐτές τέμνονται στό Ο. "Αν συνδέσουμε τό Ο μέ τά μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου, ν' ἀποδείξετε ὅτι τό τετράπλευρο διαιρεῖται σέ τέσσερα ἰσοδύναμα τετράπλευρα.

'Απόδειξη. "Εστω ΑΒΓΔ ἕνα τετράπλευρο, Ε,Ζ,Η,Θ τά μέσα τῶν πλευρῶν του καί Κ,Λ τά μέσα τῶν διαγωνίων του (σχ.243). Εἶναι ἀρκετό νά ἀποδείξουμε ὅτι ἕνα ἀπό τά σχηματιζόμενα τετράπλευρα, ἔστω τό ΟΗΔΘ, ἔχει ἐμβαδό ἴσο πρός τό 1/4 τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ΑΒΓΔ. "Ετσι ἔχουμε:

(1) $(ΟΗΔΘ) = (ΟΗΘ)+(ΔΗΘ)$.

ΗΓ = ΗΔ, ΘΑ = ΘΔ, ἄρα ΗΘ//ΑΓ καί ἐπειδή εἶναι ΟΛ//ΑΓ, ἕπεται ὅτι ΗΘ//ΟΛ καί τότε θά εἶναι καί

(2) $(ΟΗΘ) = (ΛΗΘ)$.

συνδέει τά μέσα τῶν πλευρ. τρίγ. ΒΓΔ

'Επίσης εἶναι ΛΒ = ΛΔ, ΗΓ = ΗΔ, ἄρα $ΛΗ \overset{//}{=} \frac{ΒΓ}{2}$. "Ιδια παίρνουμε καί $ΛΘ \overset{//}{=} \frac{ΑΒ}{2}$. Τότε εἶναι: $\frac{(ΛΗΘ)}{(ΒΑΓ)} = \frac{ΛΗ \cdot ΛΘ}{ΒΓ \cdot ΒΑ} = \frac{ΛΗ \cdot ΛΘ}{2ΛΗ \cdot 2ΛΘ} = \frac{1}{4}$ ἤ $(ΛΗΘ) = \frac{(ΒΑΓ)}{4}$, πού λόγω τῆς σχέσεως (2), αὐτή γράφεται:

(3) $(ΟΗΘ) = \frac{(ΒΑΓ)}{4}$.

'Επίσης εἶναι:

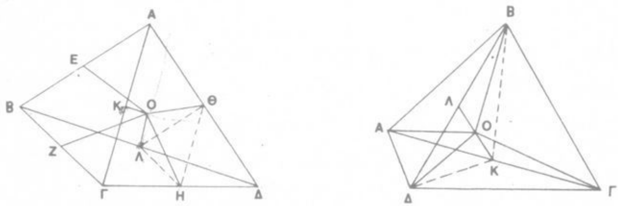
$\frac{ΛΗΘ}{ΒΑΓ} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow ΛΗΘ = \frac{ΒΑΓ}{4}$

$$\frac{(\Delta H\Theta)}{(\Delta\Gamma A)}=\frac{\Delta H\cdot\Delta\Theta}{\Delta\Gamma\cdot\Delta A}=\frac{\Delta H\cdot\Delta\Theta}{2\Delta H\cdot 2\Delta\Theta}=\frac{1}{4} \qquad \text{ἤ}$$

$$(4) \qquad (\Delta H\Theta)=\frac{(\Delta\Gamma A)}{4}.$$

Τότε ἡ σχέση (1), λόγω τῶν (3) καί (4), μπορεῖ νά γραφτεῖ:

$$(OH\Delta\Theta) = \frac{(BA\Gamma)}{4}+\frac{(\Delta A\Gamma)}{4} = \frac{(AB\Gamma\Delta)}{4}.$$



Σχ.243 Σχ.244

244. ῎Αν O εἶναι τό μέσο τοῦ τμήματος πού ἔχει ἄκρα τά μέσα τῶν διαγωνίων κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ καί συνδέσουμε αὐτό μέ τίς κορυφές τοῦ τετραπλεύρου ν᾽ ἀποδείξετε ὅτι εἶναι: (ΟΑΒ)+(ΟΓΔ) = (ΟΑΔ)+(ΟΒΓ).

<u>᾽Απόδειξη</u>. ᾽Επειδή ἡ ΚΛ εἶναι διάμεσος γιά τό τρίγωνο ΚΒΔ, ἔπεται ὅτι τά τρίγωνα ΚΛΒ καί ΚΛΔ εἶναι ἰσοδύναμα δηλαδή (ΚΛΒ) = (ΚΛΔ). Γιά ἴδιους λόγους εἶναι καί (ΟΛΒ) = (ΟΛΔ). ῎Αν τίς ἀφαιρέσουμε κατά μέλη ἔχουμε (ΚΛΒ)-(ΟΛΒ) = (ΚΛΔ)-(ΟΛΔ) ἤ

(1) (ΚΟΒ) = (ΚΟΔ).

᾽Επίσης εἶναι ΚΑ = ΚΓ, ἀπ᾽ τήν ὁποία ἔπεται ὅτι:

(2) (ΟΚΑ) = (ΟΚΓ).

Τότε ἔχουμε:

$$(ΟΑΒ)+(ΟΓΔ) = \{(ΚΑΒ)-(ΟΚΑ)-(ΚΟΒ)\}+\{(ΚΓΔ)+(ΚΟΔ)+(ΟΚΓ)\}$$

καί λόγω τῶν σχέσεων (1) καί (2), ἡ τελευταία γράφεται:

$(ΟΑΒ)+(ΟΓΔ) = (ΚΑΒ)+(ΚΑΔ)$ ἤ

$(ΟΑΒ)+(ΟΓΔ) = \frac{1}{2}\cdot(ΑΒΓ)+\frac{1}{2}\cdot(ΑΓΔ) = \frac{1}{2}\cdot(ΑΒΓΔ)$. Ἐπομένως θά εἶναι καί $(ΟΑΔ)+(ΟΒΓ) = \frac{1}{2}\cdot(ΑΒΓΔ)$. Ἄρα:

$$(ΟΑΒ)+(ΟΓΔ) = (ΟΑΔ)+(ΟΒΓ).$$

245. Πάνω στήν πλευρά ΒΓ ἑνός τριγώνου ΑΒΓ καί ἑκατέρωθεν τοῦ μέσου της Μ παίρνουμε τμήματα ΜΔ=ΜΕ. Ἀπό τό Δ φέρνουμε παράλληλο πρός τήν ΑΒ, πού τέμνει τήν ΑΓ στό Ζ. Ἄν ἡ ΒΖ τέμνει τήν ΑΕ στό Η, νά ἀποδείξετε ὅτι εἶναι: (ΑΒΗ) = (ΗΖΓΕ).

<u>Ἀπόδειξη</u>. Τά τρίγωνα ΑΒΔ καί ΑΓΕ (σχ.245) ἔχουν ἴσες βάσεις ΒΔ = ΓΕ καί κοινό τό ὕψος ἀπό τήν κορυφή τους Α. Ἄρα εἶναι ἰσοδύναμα, δηλαδή:

(1) $(ΑΒΔ) = (ΑΓΕ)$.

Ἐπειδή εἶναι ΔΖ//ΑΒ, ἕπεται ὅτι θά εἶναι καί:

(2) $(ΑΒΔ) = (ΑΒΖ)$.

Τώρα ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) παίρνουμε $(ΑΓΕ) = (ΑΒΖ)$ πού αὐτή μποροῦμε νά τή γράψουμε: $(ΑΗΖ)+(ΗΖΓΕ) = (ΑΗΖ)+(ΑΒΗ)$ ἤ $(ΗΖΓΕ) = (ΑΒΗ)$.

246. Ἀπό ἕνα σημεῖο Σ τῆς πλευρᾶς ΑΒ δεδομένου τετραπλεύρου ΑΒΓΔ νά φέρετε εὐθεία πού νά διαιρεῖ τό τετράπλευρο σέ δύο ἰσοδύναμα μέρη.

<u>Λύση</u>. Φέρνουμε τή ΣΔ καί τήν ΑΕ//ΣΔ (σχ.246). Ἐπίσης τή ΣΓ καί τή ΒΖ//ΣΓ. Τότε θά εἶναι:

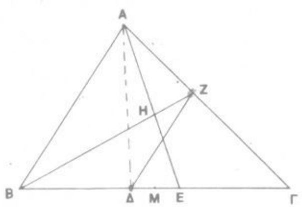
$(\Sigma A\Delta) = (\Sigma E\Delta)$ καί $(\Sigma B\Gamma) = (\Sigma Z\Gamma)$. Τότε θά εἶναι καί:

(1) $(AB\Gamma\Delta) = (\Sigma EZ)$.

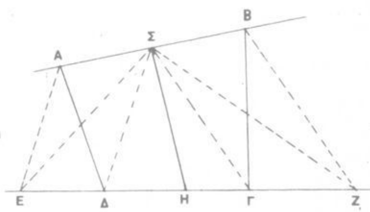
Ἄν Η εἶναι τό μέσο τῆς ΕΖ, τότε ἡ ΣΗ εἶναι ζητούμενη εὐθεία, γιατί ἔχουμε:

$(\Sigma EH) = \frac{1}{2}(\Sigma EZ)$, πού λόγω τῆς σχέσεως (1), αὐτή γράφεται:

$(\Sigma EH) = \frac{1}{2}(AB\Gamma\Delta)$ ἤ $(\Sigma A\Delta H) = \frac{1}{2}(AB\Gamma\Delta)$.



Σχ.245



Σχ.246

247. Σ᾽ ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ ὁ κύκλος μέ διάμετρο τή ΒΓ τέμνει τό ὕψος του ΑΔ στό Ε. Ἄν Η εἶναι τό ὀρθόκεντρο τοῦ τριγώνου ν᾽ ἀποδείξετε ὅτι:

α) $\Delta E^2 = \Delta A \cdot \Delta H$ καί β) $\dfrac{(EB\Gamma)}{(AB\Gamma)} = \dfrac{(HB\Gamma)}{(EB\Gamma)}$.

<u>Ἀπόδειξη</u>. α) Τό τρίγωνο ΒΕΓ εἶναι ὀρθογώνιο καί τό ΕΔ εἶναι τό ὕψος του ἀπό τήν ὀρθή γωνία. Ἄρα ἔχουμε (σχ.247)

(1) $\Delta E^2 = \Delta B \cdot \Delta \Gamma$.

Φέρνουμε τό ὕψος ΓΗΖ. Τό τετράπλευρο ΒΔΗΖ εἶναι ~~ἐγγε-~~ ἐγγράψιμο γραμμένο σέ κύκλο, ἄρα $\hat{H}_1 = A\hat{B}\Delta$. Τότε τά τρίγωνα ΑΒΔ καί ΓΗΔ

ἔχει δύο ἀπέναντι γωνίες παραπληρωματικές

ἐξωτερική γωνία ἀπό ἐγγράψιμο

ορθογ. και διότι μία οξεία γωνία του ενός είναι ίση με μία οξ. γωνία του άλλου

εἶναι ὅμοια, γιατί ἐπιπλέον εἶναι ὀρθογώνια. Ἄρα: $\frac{ΔΒ}{ΔΑ} = \frac{ΔΗ}{ΔΓ}$ ἤ

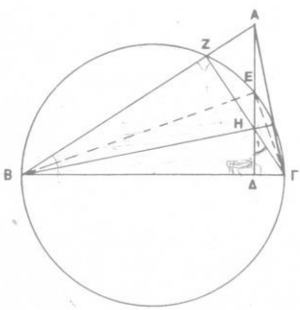
(2) $$ΔΒ \cdot ΔΓ = ΔΑ \cdot ΔΗ.$$

Τώρα ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) παίρνουμε: $ΔΕ^2 = ΔΑ \cdot ΔΗ$.

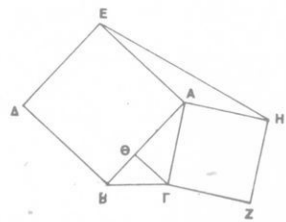
β) Θά μετασχηματίσουμε τή δοσμένη σχέση, μέχρι νά καταλήξουμε σέ προφανή σχέση. Ἔτσι ἔχουμε:

$$\frac{(ΕΒΓ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{(ΗΒΓ)}{(ΕΒΓ)} \quad ἤ \quad \frac{\frac{1}{2}\cdot ΒΓ \cdot ΔΕ}{\frac{1}{2}\cdot ΒΓ \cdot ΔΑ} = \frac{\frac{1}{2}\cdot ΒΓ \cdot ΔΗ}{\frac{1}{2}\cdot ΒΓ \cdot ΔΕ} \quad ἤ \quad \frac{ΔΕ}{ΔΑ} = \frac{ΔΗ}{ΔΕ} \quad ἤ$$

$ΔΕ^2 = ΔΑ \cdot ΔΗ$. Ἡ τελευταία σχέση ὅμως ἀληθεύει, γιατί ἀποδείχθηκε προηγουμένως. Ἄρα, μέ ἀντίστροφες πράξεις, μποροῦμε νά ἀποδείξουμε τή δοσμένη σχέση.



Σχ.247



Σχ.248

248. Ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ ἔχει $ΑΒ = γ$, $ΑΓ = β$ καί $\hat{Α} = 30^0$. Πάνω στίς πλευρές ΑΒ, ΑΓ καί ἔξω ἀπ' τό τρίγωνο κατασκευάζουμε τετράγωνα ΑΒΔΕ, ΑΓΖΗ καί φέρνουμε τήν ΑΗ. Νά ὑπολογιστεῖ τό ἐμβαδό (ΒΓΖΗΕΔΒ).

<u>Λύση</u>. Φέρνουμε τό ὕψος ΓΘ (σχ.248). Τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΘΓ ἔχει $\hat{Α} = 30^0$. Ἄρα θά εἶναι $ΓΘ = ΑΓ/2 = β/2$. Τότε:

$$(ΑΒΓ) = \frac{1}{2}\cdot ΑΒ\cdot ΓΘ = \frac{1}{2}\cdot γ\cdot\frac{β}{2} = \frac{βγ}{4}$$ ἤ

(1) $$(ΑΒΓ) = \frac{βγ}{4}.$$

Ἡ γωνία $\widehat{ΕΑΗ}$ εἶναι παραπληρωματική τῆς $Β\hat{Α}Γ$, γιατί:

$Β\hat{Α}Ε = Γ\hat{Α}Η = 90^0$ ἤ $\frac{(ΑΒΓ)}{(ΑΕΗ)} = \frac{ΑΒ\cdot ΑΓ}{ΑΕ\cdot ΑΗ} = 1$ ἤ

(2) $$(ΑΕΗ) = (ΑΒΓ) = \frac{βγ}{4}.$$ Ἀκόμα εἶναι:

(3) $$(ΑΒΓΔΕ) = γ^2$$ καί

(4) $$(ΑΓΖΗ) = β^2.$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τίς ἰσότητες (1), (2), (3) καί (4) καί παίρνουμε: $(ΒΓΖΗΕΔΒ) = \frac{βγ}{2} + β^2+γ^2$.

249. Ἕνα τρίγωνο ἔχει πλευρές 25cm, 52cm, 63cm. Νά ὑπολογιστεῖ τό ἐμβαδό του.

Λύση. Ἔστω ΑΒΓ τό δοσμένο τρίγωνο μέ $α = 25cm$, $β = 52cm$ καί $γ = 63cm$. Τότε ἔχουμε (σχ.249):

$τ = \frac{25+52+63}{2}\ cm = 70\ cm = 2\cdot 5\cdot 7\ cm$, $τ-α = 70-25 = 45 = 5\cdot 9cm$

$τ-β = 70-52 = 18cm = 2\cdot 9cm$, $τ-γ = 70-63 = 7cm$. Ἄρα τό ἐμβαδόν τοῦ τριγώνου θά εἶναι:

$$Ε = \sqrt{τ(τ-α)(τ-β)(τ-γ)} = \sqrt{(7\cdot 2\cdot 5)(5\cdot 9)(2\cdot 9)(7)} =$$
$$\sqrt{7^2\cdot 2^2\cdot 5^2\cdot 9^2} = 7\cdot 2\cdot 5\cdot 9 = 630cm^2.$$

250. Ἑνός παραλληλογράμμου οἱ δύο προσκείμενες πλευρές ἔχουν μήκη 9cm καί 10cm καί ἡ μιά διαγώνιος εἶναι 17cm. Νά βρεθεῖ τό ἐμβαδό του.

Λύση. Ἔστω ΑΒΓΔ τό δοσμένο παραλληλόγραμμο (σχ. 250), πού ἔχει ΒΓ = 9cm, ΑΒ = 10cm καί ΑΓ = 17cm. Τό ἐμβαδό του εἶναι:

(1) $(ΑΒΓΔ) = 2(ΑΒΓ)$.

Ἄν στό τρίγωνο ΑΒΓ συμβολίσουμε μέ $\alpha = ΒΓ = 9cm$, $\beta = ΑΓ = 17cm$ καί $\gamma = ΑΒ = 10cm$, τότε θά εἶναι:

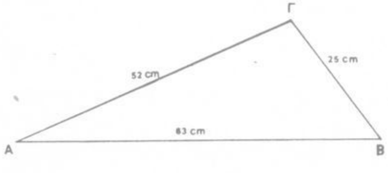
$$\tau = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = \frac{9+17+10}{2} cm = 18cm = 2\cdot 9cm.$$ Ἄρα $\tau-\alpha = 18-9 = 9cm$, $\tau-\beta = 18-17 = 1cm$, $\tau-\gamma = 18-10 = 8 = 2\cdot 2^2 cm$. Ἄρα τό ἐμβαδόν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι:

$$(ΑΒΓ) = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)} = \sqrt{(2\cdot 9)(9)(1)(2\cdot 2^2)} = \sqrt{2^2\cdot 2^2\cdot 9^2} = 2\cdot 2\cdot 9 = 36cm^2$$ ἤ

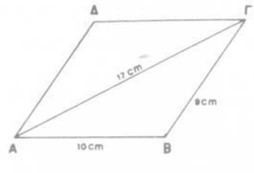
(2) $(ΑΒΓ) = 36\ cm^2$.

Τώρα ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) παίρνουμε:

$$(ΑΒΓΔ) = 2\cdot 36\ cm^2 = 72\ cm^2.$$



Σχ.249



Σχ.250

251. Τό ἐμβαδό ἑνός τριγώνου ἰσοῦται μέ $\tau(\tau-\alpha)$. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι τό τρίγωνο αὐτό εἶναι ὀρθογώνιο.

<u>Ἀπόδειξη</u>. Ἀπό τήν ὑπόθεση ἔχουμε ὅτι:

$$E = \tau(\tau-\alpha).$$

᾽Από τόν τύπο τοῦ ῞Ηρωνα ὅμως ἔχουμε:

$$E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}.$$

῎Αρα θά εἶναι: $\tau(\tau-\alpha) = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$ ἤ $\tau^2(\tau-\alpha)^2 = \tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)$ ἤ $\tau(\tau-\alpha) = (\tau-\beta)(\tau-\gamma)$. Κάνουμε τίς σημειωμένες πράξεις καί τελικά παίρνουμε:

$$\tau(\beta+\gamma-\alpha) = \beta\gamma.$$

῎Αν στήν τελευταία ἀντικαταστήσουμε τό τ μέ $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$ παίρνουμε:

$$\beta^2+\gamma^2 = \alpha^2,$$

πού σημαίνει ὅτι τό τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιο στό Α.

252. ῞Ενα τρίγωνο ΑΒΓ ἔχει ἐμβαδό 90cm^2. ᾽Από ἕνα σημεῖο Μ τοῦ ὕψους ΑΔ, πού τό διαιρεῖ σέ δύο τμήματα μέ λόγο 2/1, φέρνουμε παράλληλο τῆς ΒΓ, πού τέμνει τίς ΑΒ καί ΑΓ στά Ε καί Ζ. Νά βρεθεῖ τό ἐμβαδό τοῦ τριγώνου ΑΕΖ.

<u>Λύση</u>. α) ῎Αν εἶναι $\frac{MA}{M\Delta} = \frac{2}{1}$ (σχ.252α), θά εἶναι καί: $\frac{MA}{MA+M\Delta} = \frac{2}{2+1}$ ἤ $\frac{MA}{A\Delta} = \frac{2}{3}$. Τότε τά ὅμοια τρίγωνα ΑΕΖ καί ΑΒΓ ἔχουν λόγο ὁμοιότητας 2/3. ῎Αρα θά εἶναι:

$$\frac{(AEZ)}{(AB\Gamma)} = \left\{\frac{2}{3}\right\}^2 \quad ἤ \quad (AEZ) = \frac{4}{9}(AB\Gamma) = \frac{4}{9}\,90\text{cm}^2 = 40\text{cm}^2.$$

β) ῎Αν εἶναι $\frac{M\Delta}{MA} = \frac{2}{1}$ (σχ.252β), θά εἶναι καί: $\frac{MA+M\Delta}{MA} = \frac{1+2}{1}$ ἤ $\frac{A\Delta}{MA} = 3$ ἤ $\frac{MA}{A\Delta} = \frac{1}{3}$. Τότε τά ὅμοια τρίγωνα ΑΕΖ καί ΑΒΓ ἔχουν λόγο ὁμοιότητας 1/3. ῎Αρα θά εἶναι:

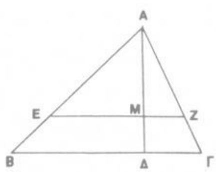
$$\frac{(AEZ)}{(AB\Gamma)} = \left\{\frac{1}{3}\right\}^2 \quad ἤ \quad (AEZ) = \frac{1}{9}(AB\Gamma) = \frac{1}{9}\,90\text{cm}^2 = 10\text{cm}^2.$$

253. Ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ ἔχει $\alpha = 17$cm, $\beta = 8$cm, $\gamma =$ 15cm. i) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι εἶναι ὀρθογώνιο. ii) Φέρνουμε τό ὕψος ΑΔ. Νά ὑπολογιστεῖ ὁ λόγος $\dfrac{(AB\Delta)}{(A\Gamma\Delta)}$.

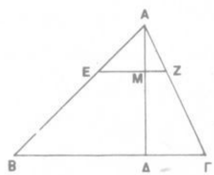
<u>Λύση</u>. i) $\alpha^2 = 17^2 = 289\text{cm}^2$, $\beta^2+\gamma^2 = 8^2+15^2 = 64+225 = 289$ cm^2. ῎Αρα εἶναι: $\alpha^2 = \beta^2+\gamma^2$ καί ἐπομένως τό τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιο στό Α.

ii) Τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ καί ΑΓΔ (σχ.253) εἶναι ὅμοια, γιατί ἔχουν $\hat{A}_1 = \hat{B}$ (μέ τίς πλευρές τους κάθετες). Ὁ λόγος τῆς ὁμοιότητάς τους εἶναι ἴσος μέ:

$$\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{\gamma}{\beta} = \frac{15}{8}. \quad \text{῎Αρα} \quad \frac{(AB\Delta)}{(A\Gamma\Delta)} = \left(\frac{15}{8}\right)^2 = \frac{225}{64}.$$



Σχ.252α



Σχ.252β

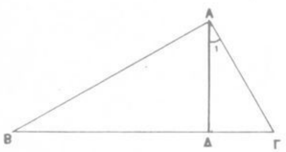
ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΤΑ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ

254. Σέ ἕναν κύκλο ἐγγράφουμε ἰσόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. ῎Αν Μ εἶναι ἕνα σημεῖο τοῦ μικρότερου τόξου ΒΓ, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι εἶναι ΜΑ = ΜΒ+ΜΓ.

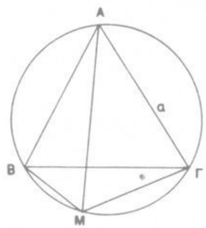
᾽Απόδειξη. ῎Εστω α ἡ πλευρά τοῦ ἰσόπλευρου τρίγωνου ΑΒΓ (σχ.254). Στό ἐγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΒΜΓ ἐφαρμόζουμε τό πρῶτο θεώρημα τοῦ Πτολεμαίου καί ἔχουμε:

$$ΑΓ \cdot ΜΒ + ΑΒ \cdot ΜΓ = ΒΓ \cdot ΜΑ \quad ἤ \quad α \cdot ΜΒ + α \cdot ΜΓ = α \cdot ΜΑ$$

ἀπ' τήν ὁποία ἔπεται: $ΜΑ = ΜΒ + ΜΓ$.



Σχ.253



Σχ.254

255. Δίνεται ἕνας κύκλος (Ο,R) καί τρία σημεῖα του Α, Β, Γ. ῎Αν εἶναι $ΑΒ = α$, $ΒΓ = β$ νά ὑπολογιστεῖ τό μῆκος τῆς χορδῆς ΑΓ ἀπό τά α, β καί R.

Λύση. Φέρνουμε τή διάμετρο $ΒΔ = 2R$ (σχ.255). ᾽Από τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ καί ΒΓΔ παίρνουμε ἀντιστοίχως:

$$ΑΔ = \sqrt{ΒΔ^2 - ΑΒ^2} = \sqrt{4R^2 - α^2} \quad καί \quad ΓΔ = \sqrt{ΒΔ^2 - ΒΓ^2} = \sqrt{4R^2 - β^2}.$$

᾽Εφαρμόζουμε τό πρῶτο θεώρημα τοῦ Πτολεμαίου γιά τό ἐγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΒΓΔ καί ἔχουμε:

$$ΑΓ \cdot ΒΔ = ΑΒ \cdot ΓΔ + ΒΓ \cdot ΑΔ \quad ἤ \quad ΑΓ \cdot 2R = α\sqrt{4R^2 - β^2} + β\sqrt{4R^2 - α^2}$$

ἀπό τήν ὁποία ἔπεται:

$$ΑΓ = \frac{α\sqrt{4R^2 - β^2} + β\sqrt{4R^2 - α^2}}{2R}.$$

256. Σ' ἕνα κυρτό ἐγγράψιμο τετράπλευρο ΑΒΓΔ δίνονται τά μήκη τῶν τεσσάρων πλευρῶν του $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Νά ὑπολογιστοῦν τά μήκη τῶν διαγωνίων του.

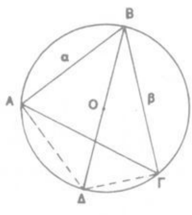
<u>Λύση</u>. Ἀπό τά δύο θεωρήματα τοῦ Πτολεμαίου ἔχουμε:

$$\text{ΑΓ}\cdot\text{ΒΔ} = \alpha\gamma+\beta\delta \quad \text{καί} \quad \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΒΔ}} = \frac{\alpha\delta+\beta\gamma}{\alpha\beta+\gamma\delta}.$$

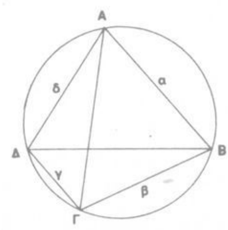
Πολλαπλασιάζουμε καί διαιροῦμε τίς προηγούμενες ἐξισώσεις κατά μέλη καί παίρνουμε ἀντιστοίχως (σχ.256):

$$\text{ΑΓ}^2 = \frac{(\alpha\gamma+\beta\delta)(\alpha\delta+\beta\gamma)}{\alpha\beta+\gamma\delta} \quad \text{ἄρα} \quad \text{ΑΓ} = \sqrt{\frac{(\alpha\gamma+\beta\delta)(\alpha\delta+\beta\gamma)}{\alpha\beta+\gamma\delta}}$$

$$\text{καί} \quad \text{ΒΔ}^2 = \frac{(\alpha\gamma+\beta\delta)(\alpha\beta+\gamma\delta)}{\alpha\delta+\beta\gamma} \quad \text{ἄρα} \quad \text{ΒΔ} = \sqrt{\frac{(\alpha\gamma+\beta\delta)(\alpha\beta+\gamma\delta)}{\alpha\delta+\beta\gamma}}$$



Σχ.255



Σχ.256

257. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Ἕνας κύκλος πού περνάει ἀπό τήν κορυφή Α τέμνει τίς πλευρές ΑΒ καί ΑΔ στά σημεῖα Ε καί Η ἀντιστοίχως καί τή διαγώνιο ΑΓ στό σημεῖο Ζ. Ν' ἀποδείξετε ὅτι:

$$\text{ΑΒ}\cdot\text{ΑΕ} + \text{ΑΔ}\cdot\text{ΑΗ} = \text{ΑΓ}\cdot\text{ΑΖ}.$$

<u>Ἀπόδειξη</u>. Ἐφαρμόζουμε τό πρῶτο θεώρημα τοῦ Πτολεμαίου

γιά τό ἐγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΕΖΗ (σχ.257), καί ἔχουμε:

(1) $$ΑΕ\cdot ΗΖ + ΑΗ\cdot ΕΖ = ΑΖ\cdot ΕΗ.$$

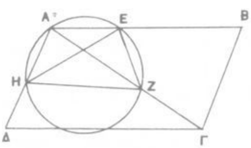
Τά τρίγωνα ΕΗΖ καί ΑΓΔ εἶναι ὅμοια, γιατί ἔχουν $Z\hat{E}H = Z\hat{A}H = \Gamma\hat{A}\Delta$ καί $E\hat{H}Z = E\hat{A}Z = A\hat{\Gamma}\Delta$. 'Απ' αὐτά παίρνουμε:

$$\frac{EZ}{A\Delta} = \frac{ZH}{\Delta\Gamma} = \frac{EH}{A\Gamma}$$ ἀπό τίς ὁποῖες ἕπεται: $EZ = A\Delta\cdot\frac{EH}{A\Gamma}$ καί

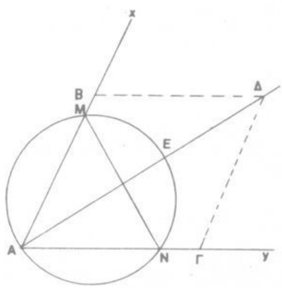
$ZH = \Delta\Gamma\cdot\frac{EH}{A\Gamma}$. 'Αντικαθιστοῦμε στή σχέση (1) τίς τιμές τῶν ΕΖ καί ΖΗ καί παίρνουμε:

$$AE\cdot\Delta\Gamma\cdot\frac{EH}{A\Gamma} + AH\cdot A\Delta\cdot\frac{EH}{A\Gamma} = AZ\cdot EH \quad \text{ἤ} \quad AE\cdot\Gamma\Delta + AH\cdot A\Delta = A\Gamma\cdot AZ \quad \text{ἤ}$$

$$AE\cdot AB + AH\cdot A\Delta = A\Gamma\cdot AZ.$$



Σχ.257



Σχ.258

258. Πάνω στίς πλευρές δεδομένης γωνίας $x\hat{A}y$, παίρνουμε δύο τμήματα ΑΜ καί ΑΝ πού συνδέονται μέ τή σχέση $\alpha\cdot AM + \beta\cdot AN = \lambda^2$, ὅπου α, β καί λ εἶναι δεδομένα τμήματα. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι ὁ κύκλος ὁ περιγεγραμμένος στό τρίγωνο ΑΜΝ περνάει ἀπό σταθερό σημεῖο.

Ἀπόδειξη. Πάνω στίς πλευρές τῆς γωνίας $x\hat{A}y$ παίρνουμε τμήματα $AB = \alpha$ καί $A\Gamma = \beta$ καί κατασκευάζουμε τό παραλληλόγραμμο ΒΑΓΔ (σχ.258). Ἡ διαγώνιος ΑΔ τοῦ παραλληλογράμμου τέμνει τόν κύκλο (AMN) στό Ε. Τότε θά εἶναι (ἄσκ.257):

$$AB \cdot AM + A\Gamma \cdot AN = A\Delta \cdot AE \quad \text{ἤ}$$

$$(1) \qquad \alpha \cdot AM + \beta \cdot AN = A\Delta \cdot AE.$$

Ἀπό τήν ὑπόθεση ὅμως ἔχουμε:

$$(2) \qquad \alpha \cdot AM + \beta \cdot AN = \lambda^2.$$

Τώρα ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) παίρνουμε: $A\Delta \cdot AE = \lambda^2$ ἤ $AE = \dfrac{\lambda^2}{A\Delta}$. Ἄρα τό Ε εἶναι σταθερό σημεῖο, γιατί τό παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ εἶναι ἀμετάβλητο. Ἑπομένως ὁ κύκλος (AMN) περνάει ἀπό σταθερό σημεῖο.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΩΝ ΔΙΧΟΤΟΜΩΝ ΓΩΝΙΑΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

259. Οἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τίς ὁποῖες σχηματίζει ἡ διάμεσος ΑΔ ἑνός τριγώνου ΑΒΓ μέ τήν πλευρά ΒΓ, τέμνουν τίς δύο ἄλλες πλευρές στά Ε καί Ζ. Ν'ἀποδείξετε ὅτι εἶναι ΕΖ//ΒΓ.

Ἀπόδειξη. Στό τρίγωνο ΑΔΒ ἡ ΔΕ εἶναι διχοτόμος. Ἄρα

$$(1) \qquad \frac{EA}{EB} = \frac{\Delta A}{\Delta B}.$$

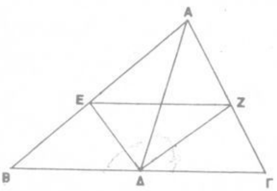
Ἐπίσης στό τρίγωνο ΑΔΓ ἡ ΔΖ εἶναι διχοτόμος (σχ.259). Ἄρα ἔχουμε:

$$(2) \qquad \frac{ZA}{Z\Gamma} = \frac{\Delta A}{\Delta\Gamma}.$$

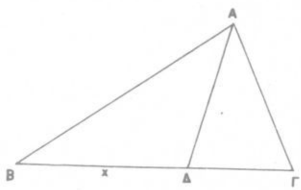
᾿Από τήν ὑπόθεση ὅμως ἔχουμε ὅτι εἶναι ΔΒ = ΔΓ. ῎Αρα τά δεύτερα μέλη τῶν σχέσεων (1) καί (2) εἶναι ἴσα, ὁπότε καί τά πρῶτα θά εἶναι ἴσα, δηλαδή:

(3) $$\frac{EA}{EB} = \frac{ZA}{Z\Gamma}.$$

Τώρα ἀπό τή σχέση (3) ἕπεται ὅτι ΕΖ//ΒΓ.



Σχ.259



Σχ.260

260. ῞Ενα τρίγωνο ΑΒΓ ἔχει ΑΒ = 7,5cm, ΒΓ = 8cm, ΑΓ = 4,5cm. Νά βρεθοῦν τά μήκη τῶν τμημάτων, στά ὁποῖα διαιρεῖται ἡ ΒΓ ἀπό τή διχοτόμο τῆς γωνίας $\hat{A}$.

<u>Λύση</u>. ῎Εστω ΑΔ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας $\hat{A}$ (σχ.260). ῎Ας ὀνομάσουμε τό τμῆμα ΒΔ = x. Τότε θά εἶναι ΓΔ = ΒΓ−x = 8−x. ᾿Από τό θεώρημα τῆς διχοτόμου παίρνουμε:

$\frac{\Delta B}{\Delta\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}$ ἤ $\frac{x}{8-x} = \frac{7,5}{4,5}$ ἤ $4,5x = 60-7,5x$ ἤ $12x = 60$ ἤ $x = 5$cm. ῎Αρα εἶναι ΔΒ = 5cm καί ΔΓ = 8−5 = 3cm.

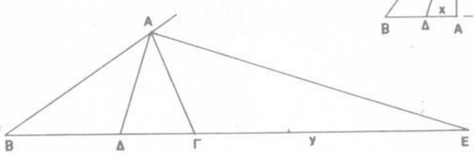
261. Στό τρίγωνο τῆς προηγούμενης ἀσκήσεως νά ὑπολογιστεῖ τό μῆκος τοῦ τμήματος μέ ἄκρα τά σημεῖα στά ὁποῖα οἱ δύο διχοτόμοι τῆς γωνίας Α (ἐσωτερική καί ἐξωτερική) τέμνουν τή ΒΓ.

<u>Λύση</u>. Στήν προηγούμενη ἄσκηση βρέθηκε ὅτι εἶναι ΓΔ = 3 cm. Ἄν ὀνομάσουμε τό τμῆμα ΓΕ = y, θά εἶναι ΒΕ = y+8.

Ἀπό τό δεύτερο θεώρημα τῆς διχοτόμου ἔχουμε:

$$\frac{ΕΓ}{ΕΒ}=\frac{ΑΓ}{ΑΒ} \quad ἤ \quad \frac{y}{y+8}=\frac{4,5}{7,5} \quad ἤ \quad 7,5y = 4,5y + 36 \quad ἤ \quad 3y = 36$$

ἤ y = 12cm. Ἄρα εἶναι: ΔΕ = ΔΓ+ΓΕ = 3+12 = 15 .



Σχ.261

Σχ.262

262. Ἕνα τρίγωνο ἔχει πλευρές 3α, 4α, 5α. Νά βρεθεῖ ἡ ἀπόσταση τῶν σημείων στά ὁποῖα τέμνουν τή μικρότερη πλευρά ἡ ἐσωτερική καί ἡ ἐξωτερική διχοτόμος τῆς ἀπέναντι γωνίας.

<u>Λύση</u>. Ἔστω ΑΒΓ τό δοσμένο τρίγωνο μέ ΑΒ = 3α, ΑΓ = 4α, ΒΓ = 5α (σχ.262). Οἱ διχοτόμοι τῆς γωνίας Γ τέμνουν τή μικρότερη πλευρά ΑΒ στά σημεῖα Δ καί Ε. Ἄς ὀνομάσουμε τά τμήματα ΑΔ =x καί ΑΕ = y. Τότε θά εἶναι:

$$\frac{ΔΑ}{ΔΒ}=\frac{ΓΑ}{ΓΒ} \quad ἤ \quad \frac{x}{3α-x}=\frac{4α}{5α} \quad ἤ \quad x=\frac{4α}{3}.$$ Ἐπίσης ἔχουμε:

$$\frac{ΕΑ}{ΕΒ}=\frac{ΓΑ}{ΓΒ} \quad ἤ \quad \frac{y}{3α+y}=\frac{4α}{5α} \quad ἤ \quad y = 12α.$$

Ἄρα εἶναι $ΔΕ = x+y = 12α + \frac{4α}{3} = \frac{40α}{3}$.

263. Τέσσερεις ἡμιευθεῖες μέ κοινή ἀρχή ἕνα σημεῖο Ο σχηματίζουν διαδοχικές γωνίες ἴσες μέ 45^0 ἡ καθεμιά. Τέμνουμε αὐτές μέ εὐθεία ΑΒΓΔ ἔτσι, ὥστε νά εἶναι $ΟΑ = ΟΔ$. Ν' ἀποδείξετε ὅτι εἶναι $ΑΒ^2 = ΑΔ \cdot ΒΓ$.

<u>Ἀπόδειξη</u>. Τό τρίγωνο ΟΑΓ ἔχει τήν ΟΒ γιά διχοτόμο. Ἡ ΟΔ, σάν κάθετη στήν ΟΒ ($B\hat{O}Δ = 45^0 + 45^0 = 90^0$), θά εἶναι ἡ ἐξωτερική διχοτόμος του (σχ.263). Τότε θά ἔχουμε:

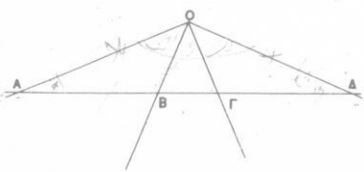
(1) $$\frac{ΑΒ}{ΒΓ} = \frac{ΟΑ}{ΟΓ} \quad καί$$

(2) $$\frac{ΑΔ}{ΔΓ} = \frac{ΟΑ}{ΟΓ}.$$

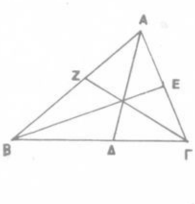
Οἱ σχέσεις (1) καί (2) ἔχουν τά δεύτερα μέλη τους ἴσα. Ἄρα θά εἶναι καί: $\frac{ΑΒ}{ΒΓ} = \frac{ΑΔ}{ΔΓ}$ ἤ

(3) $$ΑΒ \cdot ΔΓ = ΑΔ \cdot ΒΓ.$$

Ἐπειδή τό τρίγωνο ΟΑΔ εἶναι ἰσοσκελές, ἕπεται ὅτι $\hat{Α} = \hat{Δ}$. Τότε τά τρίγωνα ΟΑΒ καί ΟΔΓ εἶναι ἴσα, γιατί ἐπιπλέον ἔχουν καί $Α\hat{Ο}Β = Δ\hat{Ο}Γ = 45^0$ καί $ΟΑ = ΟΔ$. Ἄρα θά εἶναι $ΑΒ = ΔΓ$ καί τότε ἡ σχέση (3) γράφεται: $ΑΒ^2 = ΑΔ \cdot ΒΓ$.



Σχ.263



Σχ.264

264. "Αν εἶναι ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ οἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν ἑνός τριγώνου ΑΒΓ, ν'ἀποδείξετε ὅτι ἀληθεύει ἡ σχέση ΒΔ·ΓΕ·ΑΖ = ΓΔ·ΒΖ·ΑΕ.

'<u>Απόδειξη</u>. 'Από τό θεώρημα τῆς ἐσωτερικῆς διχοτόμου ἔχουμε (σχ.264):

$\frac{ΔΒ}{ΔΓ}=\frac{ΑΒ}{ΑΓ}$, $\frac{ΕΓ}{ΕΑ}=\frac{ΒΓ}{ΒΑ}$, $\frac{ΖΑ}{ΖΒ}=\frac{ΓΑ}{ΓΒ}$. Τίς πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη καί παίρνουμε:

$$\frac{ΔΒ\cdot ΕΓ\cdot ΖΑ}{ΔΓ\cdot ΕΑ\cdot ΖΒ}=\frac{ΑΒ\cdot ΒΓ\cdot ΓΑ}{ΑΓ\cdot ΒΑ\cdot ΓΒ}=1 \quad \text{ἄρα} \quad ΔΒ\cdot ΓΕ\cdot ΑΖ = ΓΔ\cdot ΒΖ\cdot ΑΕ.$$

265. "Αν σ'ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ, Η, Θ, Κ εἶναι τά σημεῖα στά ὁποῖα οἱ ἐξωτερικές διχοτόμοι τῶν γωνιῶν $\hat{Α}$, $\hat{Β}$, $\hat{Γ}$ τέμνουν ἀντιστοίχως τίς προεκτάσεις τῶν πλευρῶν, ν'ἀποδείξετε ὅτι εἶναι ΗΒ·ΘΓ·ΚΑ = ΗΓ·ΘΑ·ΚΒ.

'<u>Απόδειξη</u>. 'Από τό θεώρημα τῆς ἐξωτερικῆς διχοτόμου ἔχουμε:

$\frac{ΗΒ}{ΗΓ}=\frac{ΑΒ}{ΑΓ}$, $\frac{ΘΓ}{ΘΑ}=\frac{ΒΓ}{ΒΑ}$; $\frac{ΚΑ}{ΚΒ}=\frac{ΓΑ}{ΓΒ}$. Τίς πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη καί παίρνουμε:

$$\frac{ΗΒ\cdot ΘΓ\cdot ΚΑ}{ΗΓ\cdot ΘΑ\cdot ΚΒ}=\frac{ΑΒ\cdot ΒΓ\cdot ΓΑ}{ΑΓ\cdot ΒΑ\cdot ΓΒ}=1. \quad \text{"Αρα} \quad ΗΒ\cdot ΘΓ\cdot ΚΑ = ΗΓ\cdot ΘΑ\cdot ΚΒ.$$

266. "Ενα ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{Α}=90^0$) ἔχει $\hat{Β}=15^0$ καί ΑΒ = λ. Νά ὑπολογιστοῦν οἱ ἄλλες πλευρές του.

<u>Λύση</u>. Κατασκευάζουμε γωνία $Γ\hat{Β}Δ = Γ\hat{Β}Α = 15^0$ (σχ.266). Τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ ἔχει $Α\hat{Β}Δ = 30^0$. "Αρα θά εἶναι καί:

(1) $ΒΔ = 2\cdot ΑΔ.$

εἶναι [illegible] ὀρθογ.
διότι ἡ ΒΔ βρίσκεται ἀπέναντι
[illegible]

$A\Delta^2 = \frac{AB^2}{3} = \sqrt{\frac{AB^2}{3}} = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{AB\sqrt{3}}{3}$

"Ασκ. 267

$B\Delta = 2A\Delta \Rightarrow (B\Delta)^2 \overset{81}{=} 4A\Delta^2$

Τότε ἔχουμε: $B\Delta^2 = AB^2 + A\Delta^2$ ἤ $4A\Delta^2 = \lambda^2 + A\Delta^2$ ἤ

$A \quad A\Delta^2 = \frac{AB^2}{3}$

$3A\Delta^2 = \lambda^2$ ἤ $A\Delta = \frac{\lambda\sqrt{3}}{3}$ καί λόγω τῆς σχέσεως (1) αὐτή γράφεται: $B\Delta = \frac{2\lambda\sqrt{3}}{3}$.

"Εστω x ἡ πλευρά ΑΓ τοῦ δοσμένου τριγώνου ΑΒΓ. 'Εφαρμόζουμε τό θεώρημα τῆς διχοτόμου στό τρίγωνο ΑΒΔ:

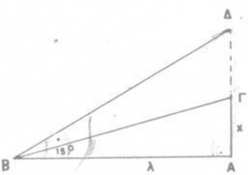
$$\frac{\Gamma A}{\Gamma\Delta} = \frac{BA}{B\Delta} \quad \text{ἤ} \quad \frac{x}{A\Delta - x} = \frac{BA}{B\Delta} \quad \text{ἤ} \quad \frac{x}{\frac{\lambda\sqrt{3}}{3} - x} = \frac{\lambda}{\frac{2\lambda\sqrt{3}}{3}}.$$

Λύνουμε τήν τελευταία ἐξίσωση ὡς πρός x καί βρίσκουμε:

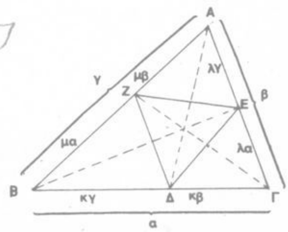
$x = \lambda(2-\sqrt{3})$ ἤ $A\Gamma = \lambda(2-\sqrt{3})$. Τότε θά εἶναι καί:

$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2$ ἤ $B\Gamma^2 = \lambda^2 + \lambda^2(2-\sqrt{3})^2 = 4\lambda^2(\lambda-\sqrt{3})$.

"Αρα: $B\Gamma = 2\lambda\sqrt{2-\sqrt{3}}$.



Σχ.266



Σχ.267

267. "Ενός τριγώνου ΑΒΓ εἶναι γνωστές οἱ πλευρές α, β, γ. Νά ὑπολογιστεῖ τό ἐμβαδό τοῦ τριγώνου τό ὁποῖο ἔχει κορυφές τά σημεῖα, στά ὁποῖα οἱ ἐσωτερικές διχοτόμοι τῶν γωνιῶν του τέμνουν τίς πλευρές του.

Λύση. "Εστω ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ οἱ τρεῖς διχοτόμοι τοῦ τριγώνου

ΑΒΓ (σχ.267). Τά τμήματα ΔΒ καί ΔΓ εἶναι ἀνάλογα πρός τίς πλευρές $AB = \gamma$ καί $A\Gamma = \beta$ (θεώρ.τῆς διχοτόμου). ῎Αρα μποροῦμε νά θέσουμε: $\Delta B = \varkappa\gamma$ καί $\Delta\Gamma = \varkappa\beta$.

Γιά ἴδιους λόγους μποροῦμε νά θέσουμε:

$EA = \lambda\gamma$, $E\Gamma = \lambda\alpha$ καί $ZA = \mu\beta$, $ZB = \mu\alpha$. Τότε θά εἶναι:

$$\frac{(AEZ)}{(AB\Gamma)} = \frac{\mu\beta\cdot\lambda\gamma}{\beta\gamma} = \lambda\mu, \quad \frac{(B\Delta Z)}{(AB\Gamma)} = \frac{\mu\alpha\cdot\varkappa\gamma}{\alpha\gamma} = \varkappa\mu, \quad \frac{(\Gamma\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \frac{\lambda\alpha\cdot\varkappa\beta}{\alpha\beta} = \varkappa\lambda.$$

Τίς προσθέτουμε κατά μέλη καί παίρνουμε:

$$\frac{(AEZ)+(B\Delta Z)+(\Gamma\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \lambda\mu+\varkappa\mu+\varkappa\lambda \quad \text{ἤ}$$

$$(1) \qquad \frac{(AB\Gamma)-(\Delta EZ)}{(AB\Gamma)} = \lambda\mu + \varkappa\mu + \varkappa\lambda.$$

Τά $\varkappa,\lambda$ καί μ ὅμως εἶναι γνωστά, γιατί εἶναι:

$\varkappa\gamma+\varkappa\beta = \alpha$ ἤ $\varkappa = \dfrac{\alpha}{\beta+\gamma}$. Μέ ἴδιο τρόπο βρίσκουμε καί: $\lambda = \dfrac{\beta}{\alpha+\gamma}$ καί $\mu = \dfrac{\gamma}{\alpha+\beta}$. ᾿Επιπλέον ξέρουμε ὅτι εἶναι:

$$(AB\Gamma) = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}.$$

Τότε ἡ ἐξίσωση (1), περιέχει σά μόνο ἄγνωστο ἐμβαδό, τό (ΔΕΖ). ῎Ετσι, μετά ἀπό τίς ἀντικαταστάσεις καί τίς σημειωμένες πράξεις, βρίσκουμε:

$$(\Delta EZ) = \frac{2\alpha\beta\gamma\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}}{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)}.$$

ΑΡΜΟΝΙΚΕΣ ΤΕΤΡΑΔΕΣ

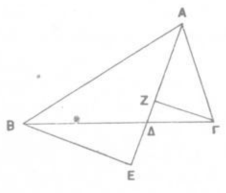
268. Σ᾿ ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τίς ΒΕ καί ΓΖ κάθετες στή διχοτόμο ΑΔ τῆς γωνίας $\hat{A}$. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τά Ε καί Ζ εἶναι ἁρμονικά συζυγή ὡς πρός τά Α καί Δ.

'Απόδειξη. 'Υπάρχουν δύο ζευγάρια ὀρθογωνίων ὅμοιων τριγώνων, τά ΑΒΕ ≈ ΑΓΖ καί ΒΔΕ ≈ ΓΔΖ (σχ.268). ἀπό αὐτά παίρνουμε:

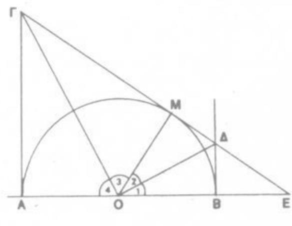
(1) $$\frac{ΑΕ}{ΑΖ} = \frac{ΑΒ}{ΑΓ} \quad \text{καί}$$

(2) $$\frac{ΔΕ}{ΔΖ} = \frac{ΔΒ}{ΔΓ}.$$

'Επειδή ἡ ΑΔ εἶναι διχοτόμος στό τρίγωνο ΑΒΓ, ἕπεται ὅτι $\frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{ΔΒ}{ΔΓ}$, δηλαδή τά δεύτερα μέλη στίς σχέσεις (1) καί (2) εἶναι ἴσα. "Αρα καί τά πρῶτα θά εἶναι ἴσα, δηλαδή: $\frac{ΑΕ}{ΑΖ} = \frac{ΔΕ}{ΔΖ}$. Τότε ὅμως, τά σημεῖα Ε καί Ζ εἶναι ἁρμονικά συζυγή ὡς πρός τά Α καί Δ.



Σχ.268



Σχ.269

269. Δίνεται ἡμικύκλιο μέ διάμετρο ΑΒ. Φέρνουμε τίς ἐφαπτόμενες στά ἄκρα Α καί Β τῆς διαμέτρου, καί ἀπό ἕνα σημεῖο Μ τοῦ ἡμικυκλίου φέρνουμε ἄλλη ἐφαπτομένη πού τέμνει αὐτές στά σημεῖα Γ καί Δ καί τήν προέκταση τῆς ΑΒ στό Ε. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τά σημεῖα Μ καί Ε εἶναι ἁρμονικά συζυγή ὡς πρός τά Γ καί Δ.

'Απόδειξη. "Εστω Ο τό κέντρο τοῦ ἡμικυκλίου (σχ. 269).

Ἀπό τό σημεῖο Δ ἔχουμε τά ἴσα ἐφαπτόμενα τμήματα ΔΒ καί ΔΜ. Ἄρα θά εἶναι: $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$.

Γιά ἴδιους λόγους εἶναι καί: $\hat{O}_3 = \hat{O}_4$.

Ἄρα, στό τρίγωνο ΟΕΜ, οἱ ΟΔ καί ΟΓ εἶναι διχοτόμοι τῆς γωνίας του $\hat{O}$ (ἐσωτερική καί ἐξωτερική). Ἐπομένως τά σημεῖα Μ καί Ε εἶναι ἁρμονικά συζυγή ὡς πρός τά Γ καί Δ.

270. Ἀπό ἕνα σημεῖο Ο φέρνουμε τίς ἐφαπτόμενες ΟΑ καί ΟΒ σέ ἕναν κύκλο καί τή διάμετρο ΓΔ, πού ὅταν προεκταθεῖ περνάει ἀπό τό Ο. Ἄν ἡ χορδή ΑΒ τέμνει τή ΓΔ στό σημεῖο Ε νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τά Ο καί Ε εἶναι ἁρμονικά συζυγή ὡς πρός τά Γ καί Δ.

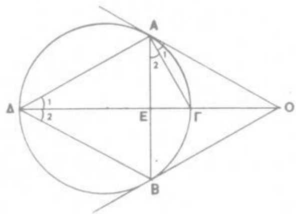
Ἀπόδειξη. Φέρνουμε τίς ΑΓ, ΑΔ καί ΔΒ (σχ.270). Τότε θά εἶναι $\hat{A}_1 = \hat{\Delta}_1$ (ἀπό χορδή καί ἐφαπτομένη) καί $\hat{A}_2 = \hat{\Delta}_2$. Ἄρα $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, γιατί εἶναι καί $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$ λόγω τῆς συμμετρίας ὡς πρός τή ΓΔ.

Ἐπειδή εἶναι $\Gamma\hat{A}\Delta = 90^0$, ὡς ἐγγεγραμμένη σέ ἡμικύκλιο, ἕπεται ὅτι στό τρίγωνο ΟΑΕ, πού ἔχει τήν ΑΓ γιά ἐσωτερική διχοτόμο, ἡ ΑΔ θά εἶναι ἡ ἐξωτερική του διχοτόμος. Ἄρα τά σημεῖα Ο καί Ε εἶναι ἁρμονικά συζυγή ὡς πρός τά Γ καί Δ.

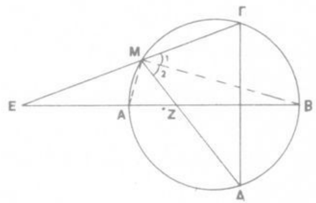
271. Σ' ἕναν κύκλο δίνεται μιά διάμετρος ΑΒ καί χορδή ΓΔ κάθετη στήν ΑΒ. Οἱ εὐθεῖες ΜΓ καί ΜΔ πού ἑνώνουν τό ὁποιοδήποτε σημεῖο Μ τοῦ κύκλου μέ τά Γ καί Δ τέμνουν τήν ΑΒ στά σημεῖα Ε καί Ζ. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τά Ε καί Ζ εἶναι ἁρμονικά συζυγή ὡς πρός τά Α καί Β.

Ἀπόδειξη. Ἐπειδή εἶναι $AB \perp \Gamma\Delta$, ἕπεται ὅτι τά τόξα ΒΓ καί ΒΔ θά εἶναι ἴσα, ἐπομένως καί οἱ γωνίες $\hat{M}_1$ καί $\hat{M}_2$ ἴσες δηλαδή ἡ ΜΒ εἶναι ἐξωτερική διχοτόμος τῆς γωνίας $\hat{M}$ τοῦ τριγώνου

ΜΕΖ. Τότε ἡ ΜΑ θά εἶναι ἡ ἐσωτερική διχοτόμος τῆς ἴδιας γωνίας, γιατί ἡ γωνία $B\hat{M}A$ εἶναι ὀρθή (ἡ ΑΒ εἶναι διάμετρος). Ἄρα (σχ.271), τά σημεῖα Ε καί Ζ εἶναι ἁρμονικά συζυγῆ ὡς πρός τά Α καί Β.



Σχ.270



Σχ.271

272. Δίνεται κύκλος μέ κέντρο Κ καί διάμετρος ΑΒ. Πάνω στήν προέκταση τῆς διαμέτρου ΑΒ παίρνουμε σημεῖο Ε καί ἀπό τό Ε φέρνουμε τίς ἐφαπτόμενες ΕΗ καί ΕΘ καί τή χορδή ΗΘ πού τέμνει τή διάμετρο ΑΒ στό Δ. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι: α) Τό ΕΚ εἶναι ὁ ἀριθμητικός μέσος τῶν ΕΑ καί ΕΒ, β) τό ΕΗ εἶναι ὁ γεωμετρικός μέσος (ἤ μέσος ἀνάλογος) τῶν ΕΑ καί ΕΒ καί γ) τό ΕΔ εἶναι ὁ ἁρμονικός μέσος τῶν ΕΑ καί ΕΒ.

Σημείωση. Ἄν Α, Γ, Η εἶναι κατά σειρά ὁ ἀριθμητικός μέσος, ὁ γεωμετρικός μέσος καί ὁ ἁρμονικός μέσος δύο τμημάτων λ καί μ, τότε εἶναι γνωστό ἀπό τήν ἄλγεβρα ὅτι εἶναι:

$$A = \frac{\lambda+\mu}{2}, \quad \Gamma^2 = \lambda\mu, \quad H = \frac{2\lambda\mu}{\lambda+\mu}.$$

Ἀπόδειξη. α) ΕΚ = ΕΑ-ΚΑ, ΕΚ = ΕΒ+ΚΒ. Προσθέτουμε κατά μέλη αὐτές τίς δύο ἐκφράσεις τοῦ ΕΚ καί παίρνουμε:

$$2ΕΚ = ΕΑ+ΕΒ-ΚΑ+ΚΒ \quad ἤ \quad 2ΕΚ = ΕΑ+ΕΒ,$$ γιατί εἶναι ΚΑ = ΚΒ.

῎Αρα: $ΕΚ = \frac{ΕΑ+ΕΒ}{2}$, δηλαδή τό ΕΚ εἶναι ὁ μέσος ἀριθμητικός τῶν ΕΑ καί ΕΒ.

β) ᾿Από τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΚΗΕ παίρνουμε:

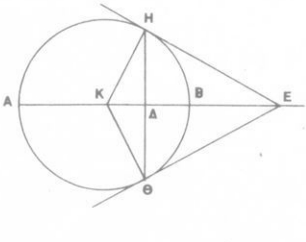
$ΕΗ^2 = ΕΚ^2-ΚΗ^2$ ἤ $ΕΗ^2 = ΕΚ^2-ΚΑ^2 = (ΕΚ+ΚΑ)(ΕΚ-ΚΑ) = (ΕΚ+ΚΑ)(ΕΚ-ΚΒ) = ΕΑ\cdot ΕΒ$ ἤ $ΕΗ^2 = ΕΑ\cdot ΕΒ$. ῎Αρα τό ΕΗ εἶναι ὁ γεωμετρικός μέσος τῶν ΕΑ καί ΕΒ.

γ) Εἶναι ἀρκετό νά ἀποδείξουμε ὅτι:

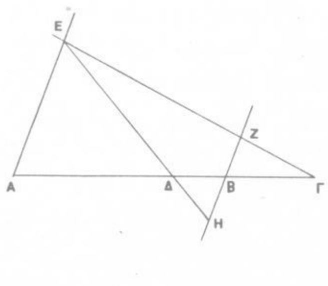
$$(1) \qquad ΕΔ = \frac{2\cdot ΕΑ\cdot ΕΒ}{ΕΑ+ΕΒ}.$$

Πριηγουμένως ἀποδείξαμε ὅτι εἶναι: $ΕΑ\cdot ΕΒ = ΕΗ^2$ ἤ $2\cdot ΕΑ\cdot ΕΒ = 2\cdot ΕΗ^2$ καί $ΕΑ+ΕΒ = 2\cdot ΕΚ$. ῎Αρα τό δεύτερο μέλος τῆς σχέσεως (1) γράφεται: $\frac{2\cdot ΕΑ\cdot ΕΒ}{ΕΑ+ΕΒ} = \frac{2\cdot ΕΗ^2}{2\cdot ΕΚ} = \frac{ΕΗ^2}{ΕΚ} = \frac{ΕΚ\cdot ΕΔ}{ΕΚ} = ΕΔ$.

Τότε ἀληθεύει ἡ σχέση (1) καί ἑπομένως τό ΕΔ εἶναι ὁ μέσος ἁρμονικός τῶν ΕΑ καί ΕΒ.



Σχ.272



Σχ.273α

273. Δίνεται εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ καί σημεῖο Γ τῆς εὐθείας ΑΒ. Νά βρεθεῖ τό ἁρμονικό συζυγές τοῦ Γ ὡς πρός τά Α καί Β, ὅταν τό Γ i) εἶναι ἔξω ἀπό τό τμῆμα ΑΒ καί ii) ἀνήκει στό ΑΒ.

Λύση. Καί στίς δύο περιπτώσεις φέρνουμε ἀπό τά Α καί Β δύο παράλληλες εὐθεῖες (σχ.273α καί 273β) καί ἀπό τό Γ μιά τυχαία εὐθεία πού τέμνει τίς παράλληλες στά σημεῖα Ε καί Ζ. Πάνω στή ΒΖ παίρνουμε τμῆμα ΒΗ = ΒΖ καί φέρνουμε τήν ΕΗ, πού τέμνει τήν ΑΒ στό σημεῖο Δ. Τότε τό Δ εἶναι τό ἁρμονικό συζυγές τοῦ Γ ὡς πρός τά Α καί Β.

᾿Απόδειξη. ᾿Από τίς παράλληλες εὐθεῖες ΑΕ//ΒΖ δημιουργοῦνται δύο ζευγάρια ὁμοίων τριγώνων, τά ΓΑΕ ≈ ΓΒΖ καί ΔΑΕ≈ΔΒΗ. ᾿Από αὐτά παίρνουμε:

(1) $\frac{ΓΑ}{ΓΒ} = \frac{ΑΕ}{ΒΖ}$ καί

(2) $\frac{ΔΑ}{ΔΒ} = \frac{ΑΕ}{ΒΗ}$.

᾿Από τήν κατασκευή ὅμως εἶναι ΒΖ = ΒΗ. Τότε οἱ σχέσεις (1) καί (2) γράφονται:

$$\frac{ΓΑ}{ΓΒ} = \frac{ΑΕ}{ΒΖ} \quad \text{καί} \quad \frac{ΔΑ}{ΔΒ} = \frac{ΑΕ}{ΒΖ} \quad \text{ἤ} \quad \frac{ΓΑ}{ΓΒ} = \frac{ΔΑ}{ΔΒ}.$$

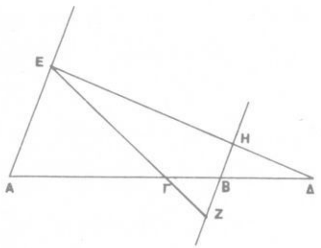
Τότε ὅμως τό σημεῖο Δ εἶναι τό ἁρμονικό συζυγές τοῦ Γ ὡς πρός τά Α καί Β.

ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ ΚΥΚΛΟΣ

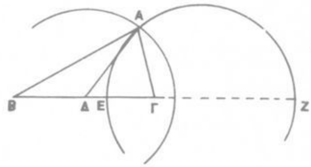
274. Νά κατασκευαστεῖ τρίγωνο ΑΒΓ ἀπό τά στοιχεῖα του α, $μ_α$ καί τό λόγο μ/ν τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του.

Λύση. Τοποθετοῦμε ἀπ' τήν ἀρχή τή βάση ΓΒ = α, καί τήν κορυφή Α θά τήν άναζητήσουμε πάνω σέ δύο γεωμετρικούς τόπους της (σχ.274). 'Ο πρῶτος εἶναι κύκλος μέ κέντρο τό μέσο Δ τῆς ΒΓ καί ἀκτίνα μ_α καί ὁ δεύτερος εἶναι ὁ 'Απολλώνιος κύκλος μέ διάμετρο τήν ΕΖ, ὅπου τά Ε καί Ζ διαιροῦν ἐσωτερικά καί ἐξωτερικά τό τμῆμα ΒΓ σέ λόγο μ/ν.

'Η κατασκευή εἶναι ἁπλή. Τό πρόβλημα δέν ἔχει πάντα λύση.



Σχ.273β



Σχ.274

275. Νά κατασκευαστεῖ τρίγωνο ΑΒΓ ἀπό τά στοιχεῖα του α, $\hat{A} = \omega$ καί τό λόγο μ/ν τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του.

<u>Λύση</u>. Τοποθετοῦμε ἀπ'τήν ἀρχή τή βάση ΒΓ = α καί τήν κορυφή Α θά τήν ἀναζητήσουμε πάνω σέ δύο γεωμετρικούς τόπους της. 'Ο πρῶτος εἶναι κυκλικό τόξο πού μέ ἄκρα τά Β καί Γ δέχεται γωνία $\hat{A} = \omega$ καί ὁ δεύτερος εἶναι 'Απολλώνιος κύκλος μέ διάμετρο ΕΖ, ὅπου τά Ε καί Ζ διαιροῦν ἐσωτερικά καί ἐξωτερικά τό τμῆμα ΒΓ σέ λόγο μ/ν.

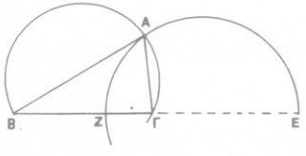
'Η κατασκευή εἶναι ἁπλή. Τό πρόβλημα δέχεται πάντα λύση ($\omega < 180^0$).

276. Νά κατασκευαστεῖ τρίγωνο ΑΒΓ ἀπό τά στοιχεῖα

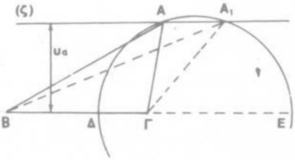
χεῖα του α, $υ_α$ καί τό λόγο μ/ν τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του.

<u>Λύση</u>. Τοποθετοῦμε ἀπ'τήν ἀρχή τή βάση ΒΓ = α, καί τήν κορυφή Α θά τήν ἀναζητήσουμε πάνω σέ δύο γεωμετρικούς τόπους της (σχ.276). 'Ο πρῶτος εἶναι εὐθεία (ζ)//ΒΓ καί σέ ἀπόσταση $υ_α$ ἀπ'αὐτή. 'Ο δεύτερος εἶναι 'Απολλώνιος κύκλος μέ διάμετρο ΔΕ, ὅπου τά Δ καί Ε διαιροῦν τό τμῆμα ΒΓ ἐσωτερικά καί ἐξωτερικά σέ λόγο μ/ν.

'Η κατασκευή εἶναι ἁπλή. Τό πρόβλημα δέχεται τό πολύ δύο λύσεις, τά τρίγωνα ΑΒΓ καί $Α_1$ΒΓ.



Σχ.275



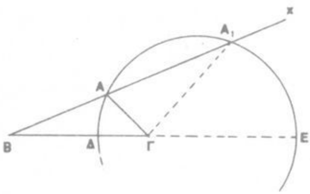
Σχ.276

277. Νά κατασκευαστεῖ τρίγωνο ΑΒΓ ἀπό τά στοιχεῖα του α, $\hat{B}$ καί τό λόγο μ/ν τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του.

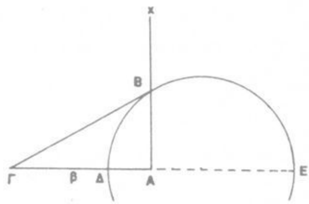
<u>Λύση</u>. Τοποθετοῦμε ἀπό τήν ἀρχή τή βάση ΒΓ = α, καί τήν κορυφή Α θά τήν ἀναζητήσουμε πάνω σέ δύο γεωμετρικούς τόπους της (σχ.277). 'Ο πρῶτος εἶναι μιά ἡμιευθεία Βχ πού σχηματίζει μέ τό τμῆμα ΒΓ τή δοσμένη γωνία $\hat{B}$. 'Ο δεύτερος εἶναι 'Απολλώνιος κύκλος μέ διάμετρο ΔΕ, ὅπου τά Δ καί Ε διαιροῦν τό τμῆμα

ΒΓ ἐσωτερικά καί ἐξωτερικά σέ λόγο μ/ν.

Ἡ κατασκευή εἶναι ἁπλή. Τό πρόβλημα δέχεται τό πολύ δύο λύσεις, τά τρίγωνα ΑΒΓ καί A_1ΒΓ.



Σχ.277



Σχ.278

278. Νά κατασκευαστεῖ ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\hat{A} = 1\ )$ ἀπό τά στοιχεῖα του β καί τό λόγο $\alpha/\gamma = \mu/\nu$.

Λύση. Τοποθετοῦμε ἀπό τήν ἀρχή την πλευρά ΑΓ = β (σχ. 278), καί τήν κορυφή Β θά τήν ἀναζητήσουμε πάνω σέ δύο γεωμετρικούς τόπους της. Ὁ πρῶτος εἶναι εὐθεία Αχ κάθετη στήν ΑΓ στό Α. Ὁ δεύτερος εἶναι ὁ Ἀπολλώνιος κύκλος μέ διάμετρο τή ΔΕ, ὅπου τά Δ καί Ε διαιροῦν ἐσωτερικά καί ἐξωτερικά τό τμῆμα ΑΓ σέ λόγο μ/ν.

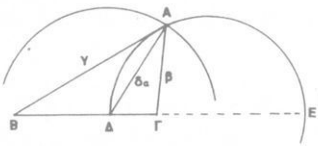
Ἡ κατασκευή εἶναι ἁπλή. Τό πρόβλημα ἔχει λύση μόνο ὅταν εἶναι $\mu/\nu > 1$.

279. Νά κατασκευαστεῖ τρίγωνο ΑΒΓ ἀπό τά στοιχεῖα του α, δ_α καί τό λόγο $\beta/\gamma = \mu/\nu$ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του.

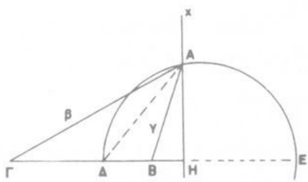
Λύση. Τοποθετοῦμε ἀπό τήν ἀρχή τήν πλευρά ΒΓ = α (σχ.

279), καί τήν κορυφή Β θά τήν άναζητήσουμε πάνω σέ δύο γεωμετρικούς τόπους της. 'Ο πρῶτος εἶναι ὁ 'Απολλώνιος κύκλος μέ διάμετρο τή ΔΕ, ὅπου τά Δ καί Ε διαιροῦν τό τμῆμα ΒΓ ἐσωτερικά καί ἐξωτερικά σέ λόγο μ/ν. Τότε, τό ἐσωτερικό σημεῖο διαιρέσεως Δ, εἶναι καί τό ἴχνος τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Α, γιατί εἶναι $\frac{ΔΓ}{ΔΒ}=\frac{μ}{ν}=\frac{β}{γ}$. ῎Αρα ὁ δεύτερος γ. τόπος τῆς κορυφῆς Α, εἶναι ὁ κύκλος μέ κέντρο τό Δ καί ἀκτίνα $δ_α$.

'Η κατασκευή εἶναι ἁπλή. Τό πρόβλημα ἔχει πάντα μιά λύση.



Σχ.279



Σχ.280

280. Νά κατασκευαστεῖ τρίγωνο ΑΒΓ άπό τά στοιχεῖα α, $β^2-γ^2=λ^2$, ὅπου τό λ εἶναι γνωστό τμῆμα καί τό σημεῖο Δ στό ὁποῖο ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας $\hat{A}$ τέμνει τή ΒΓ.

<u>Λύση</u>. Τοποθετοῦμε άπό τήν άρχή τήν πλευρά ΒΓ = α καί πάνω σ'αὐτή τό ἴχνος Δ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας $\hat{A}$ (σχ.280). Ξέρουμε ὅτι εἶναι:

$$(1) \qquad \frac{ΔΒ}{ΔΓ}=\frac{ΑΒ}{ΑΓ}.$$

'Αλλά ὁ λόγος ΔΒ/ΔΓ εἶναι γνωστός, ἀφοῦ τό Δ εἶναι δοσμένο σημεῖο πάνω στή ΒΓ. Τότε, ἀπό τή σχέση (1), ἕπεται ὅτι τό Α ἀνήκει σέ Ἀπολλώνιο κύκλο μέ διάμετρο ΔΕ, ὅπου εἶναι:

$$\frac{ΕΒ}{ΕΓ}=\frac{ΔΒ}{ΔΓ}.$$

Ἐπειδή πρέπει νά εἶναι καί $\beta^2-\gamma^2=\lambda^2$, ἕνας ἄλλος τόπος τῆς κορυφῆς Α εἶναι ἡ εὐθεία Ηχ κάθετη στή ΒΓ, ὅπου τό Η ἀπέχει ἀπό τό μέσο Ζ τῆς ΒΓ ἀπόσταση $\frac{\lambda^2}{2ΒΓ}=\frac{\lambda^2}{2\alpha}$ (ἄσκ.204).

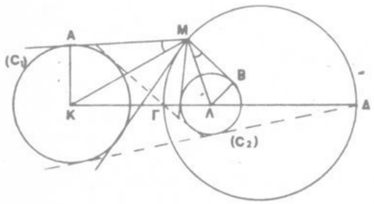
Ἡ κατασκευή εἶναι γνωστή. Τό πρόβλημα δέν ἔχει πάντα λύση.

281. Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων ἀπό τά ὁποῖα δύο γνωστοί κύκλοι (C_1) καί (C_2) φαίνονται ὑπό ἴσες γωνίες.

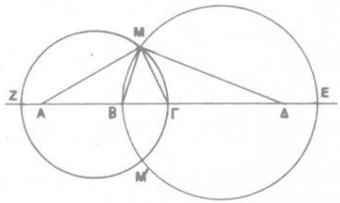
Λύση. Ἔστω Μ ἕνα σημεῖο τοῦ ζητούμενου γ.τόπου, δηλαδή πού ἀπ' αὐτό οἱ κύκλοι (C_1) καί (C_2) φαίνονται ὑπό ἴσες γωνίες. Φέρνουμε πρός τούς κύκλους τά ἐφαπτόμενα τμήματα ΜΑ καί ΜΒ καί ἑνώνουμε τό Μ μέ τά κέντρα Κ καί Λ τῶν δύο κύκλων (σχ. 281). Τότε οἱ γωνίες $\widehat{ΑΜΚ}$ καί $\widehat{ΒΜΛ}$ θά πρέπει νά εἶναι ἴσες, μιά καί αὐτές εἶναι τά μισά τῶν γωνιῶν ὑπό τίς ὁποῖες τό Μ βλέπει τούς δύο κύκλους. Τότε ὅμως τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΜΚ καί ΒΜΛ θά εἶναι ὅμοια, ἐπομένως ἔχουμε:

$\frac{ΜΚ}{ΜΛ}=\frac{ΚΑ}{ΛΒ}$, δηλαδή σταθερός λόγος. Ἄρα τό σημεῖο Μ ἀνήκει σέ Ἀπολλώνιο κύκλο μέ διάμετρο ΓΔ, ὅπου τά Γ καί Δ διαιροῦν τό τμῆμα ΚΛ ἐσωτερικά καί ἐξωτερικά σέ γνωστό λόγο, ἴσο πρός τό λόγο τῶν ἀκτίνων τῶν δύο δοσμένων κύκλων. Ἄς σημειωθεῖ μάλιστα ὅτι τά σημεῖα Γ καί Δ εἶναι τά δύο κέντρα ὁμοιότητας τῶν δύο κύκλων.

Ὁ ζητούμενος γ. τόπος εἶναι ὁ προηγούμενος Ἀπολλώνιος κύκλος, ἀπό τόν ὁποῖο ἐνδεχομένως θά ἔπρεπε νά ἐξαιρέσουμε ἔνα τμῆμα του, ἄν συνέβαινε αὐτό νά ἦταν ἐσωτερικό γιά τούς δύο κύκλους.



Σχ.281



Σχ.282

282. Δίνονται πάνω σέ μιά εὐθεία διαδοχικά τεσσερα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ. Νά βρεθεῖ σημεῖο Μ τέτοιο ὥστε νά εἶναι $A\hat{M}B = B\hat{M}\Gamma = \Gamma\hat{M}\Delta$.

'<u>Ανάλυση</u>. "Εστω Μ τό ζητούμενο σημεῖο, τέτοιο ὥστε νά εἶναι: $A\hat{M}B = B\hat{M}\Gamma = \Gamma\hat{M}\Delta$ (σχ.282).

Στό τρίγωνο ΑΜΓ, ἡ ΜΒ εἶναι διχοτόμος καί ἐπομένως εἶναι:

(1) $$\frac{MA}{M\Gamma} = \frac{BA}{B\Gamma}.$$

'Αλλά ὁ λόγος ΒΑ/ΒΓ εἶναι γνωστός. Τότε, ἀπό τή σχέση (1) ἕπεται ὅτι τό σημεῖο Μ ἀνήκει σέ 'Απολλώνιο κύκλο μέ διάμετρο ΒΕ, ὅπου τό Ε εἶναι τό ἁρμονικό συζυγές τοῦ Β ὡς πρός τά σημεῖα Α καί Γ.

Μέ ἴδιο τρόπο βρίσκουμε ὅτι τό Μ ἀνήκει καί σέ ἄλλο 'Απολλώνιο κύκλο μέ διάμετρο ΓΖ, ὅπου Ζ εἶναι τό ἁρμονικό συζυγές τοῦ Γ, ὡς πρός τά Β καί Δ.

.3m,

<u>Σύνθεση - κατασκευή</u>. Γράφουμε τούς δύο προηγούμενους Ἀπολλώνιους κύκλους καί στήν τομή τους βρίσκουμε τό ζητούμενο σημεῖο Μ. Τό συμμετρικό του Μ΄ ὡς πρός τήν ΑΔ, ἀποτελεῖ δεύτερη λύση γιά τό πρόβλημα.

ΔΥΝΑΜΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΠΡΟΣ ΚΥΚΛΟ

283. Ἕνα σημεῖο Δ ἀπέχει 10cm ἀπό τό κέντρο ἑνός κύκλου πού ἔχει ἀκτίνα 8cm. Ἀπό τό Δ φέρνουμε τήν τέμνουσα ΔΑΒ πού ὁρίζει τή χορδή ΑΒ = 6cm. Νά βρεθεῖ τό μῆκος ΔΒ.

<u>Λύση</u>. Ἄν Ο εἶναι τό κέντρο τοῦ κύκλου, φέρνουμε τή ΔΟ πού τέμνει τόν κύκλο στά σημεῖα Ε καί Ζ (σχ.283). Τότε εἶναι:

$ΔΕ = ΔΟ-ΟΕ = 10-8 = 2$ ἤ $ΔΕ = 2cm$ καί $ΔΖ = ΔΟ+ΟΖ = 10+8=18$ ἤ $ΔΖ = 18cm$.

Ἄν εἶναι $ΔΒ = x$ τό ζητούμενο τμῆμα, τότε θά εἶναι: $ΔΑ = ΔΒ-ΑΒ = x-6$. Ἄρα θά ἔχουμε:

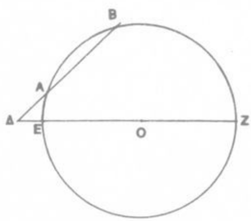
$ΔΑ\cdot ΔΒ = ΔΕ\cdot ΔΖ$ ἤ $(x-6)x = 2\cdot 18$ ἤ $x^2-6x-36 = 0$ ἤ $x = 3+\sqrt{9+36} = 3+\sqrt{45}$ ἤ $ΔΒ = 3+\sqrt{45}$ cm (μόνο τή θετική ρίζα τῆς ἐξισώσεως δεχόμαστε).

284. Δίνεται ἕνας κύκλος μέ ἀκτίνα 8cm καί σημεῖο Α, πού ἀπέχει ἀπό τό κέντρο 12cm. Φέρνουμε ἀπό τό Α εὐθεία πού τέμνει τόν κύκλο κατά χορδή ΒΓ=2cm. Νά βρεθεῖ τό μῆκος τῆς ΑΓ.

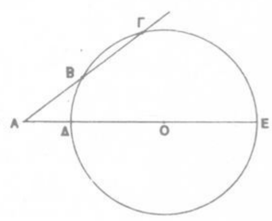
<u>Λύση</u>. Ἄν Ο εἶναι τό κέντρο τοῦ κύκλου, φέρνουμε τήν ΑΟ πού τέμνει τόν κύκλο στά σημεῖα Δ καί Ε (σχ.284). Τότε θά εἶναι $ΑΔ = ΑΟ-ΟΔ = 12-8 = 4$ ἤ $ΑΔ = 4cm$ καί $ΑΕ = ΑΟ+ΟΕ = 12+8 = 20$

ἤ ΑΕ = 20cm. ῎Αν ΑΓ = x εἶναι τό ζητούμενο τμῆμα, τότε ἔχουμε:

ΑΒ = ΑΓ-ΒΓ = x-2. ῎Αρα ΑΒ•ΑΓ = ΑΔ•ΑΕ ἤ $(x-2)x = 4\cdot20$ ἤ $x^2-2x-80 = 0$ ἤ $x = 1+\sqrt{1+80} = 1+\sqrt{81} = 1+9 = 10$ ἤ ΑΓ = 10cm (μόνο τή θετική ρίζα τῆς ἐξισώσεως δεχόμαστε).



Σχ.283



Σχ.284

285. Δίνεται ἕνας κύκλος μέ ἀκτίνα R=12cm καί ἕνα σημεῖο Ε, πού ἀπέχει ἀπό τό κέντρο 6cm. Φέρνουμε τή χορδή ΑΕΒ, πού ἔχει μῆκος 21cm. Νά βρεθοῦν τά μήκη τῶν τμημάτων ΑΕ καί ΕΒ.

<u>Λύση</u>. ᾽Από τό Ε φέρνουμε τή διάμετρο τοῦ κύκλου ΓΔ. Τότε θά εἶναι ΕΓ = ΟΓ-ΟΕ = 12-6 = 6cm καί ΕΔ = ΕΟ+ΟΔ = 6+12 = 18cm.

῎Αν ὀνομάσουμε τό ΕΑ = x, τότε θά εἶναι ΕΒ = ΑΒ-ΑΕ = 21-x. ῎Αρα θά ἔχουμε:

ΕΑ•ΕΒ = ΕΓ•ΕΔ ἤ $x(21-x) = 6\cdot18$ ἤ $x^2-21x+108 = 0$ ἤ

$$x = \frac{21\pm\sqrt{441-432}}{2} = \frac{21\pm\sqrt{9}}{2} = \frac{21\pm3}{2}$$ ἀπό τήν ὁποία ἕπεται:

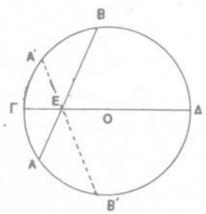
$x_1 = 12$cm καί $x_2 = 9$cm. ῎Αρα εἶναι: ΕΑ = 12cm καί ἑπομένως ΕΒ = 21-12 = 9cm, ἤ ΕΑ = 9cm καί ἑπομένως ΕΒ = 21-9 = 12cm.

286. Μέσα σ' ἕναν κύκλο πού ἔχει ἀκτίνα 13m, παίρνουμε ἕνα σημεῖο Δ, πού ἀπέχει ἀπό τό κέντρο 11 m καί φέρνουμε τήν ΑΔΒ. "Αν τό τμῆμα ΔΒ εἶναι τριπλάσιο ἀπό τό ΑΔ, νά βρεθεῖ τό μῆκος τῆς χορδῆς ΑΒ.

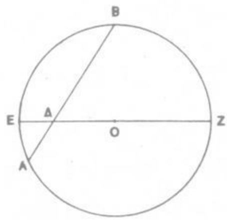
<u>Λύση</u>. 'Από τό Δ φέρνουμε τή διάμετρο τοῦ κύκλου ΕΖ (σχ. 286). Τότε εἶναι $ΔΕ = ΟΕ-ΟΔ = 13-11 = 2$ ἤ $ΔΕ = 2cm$ καί $ΔΖ = ΔΟ+ΟΖ = 11+13 = 24$ ἤ $ΔΖ = 24cm$.

"Αν ὀνομάσουμε τό $ΑΔ = x$, τότε πρέπει νά εἶναι $ΔΒ = 3x$ καί ἐπομένως $ΑΒ = 4x$. "Αρα ἔχουμε:

$ΔΑ\cdot ΔΒ = ΔΕ\cdot ΔΖ$ ἤ $x\cdot 3x = 2\cdot 24$ ἤ $x^2 = 16$ ἤ $x = 4cm$. Τότε ἔχουμε: $ΑΒ = 4x = 4\cdot 4 = 16cm$.



Σχ.285



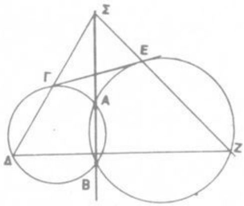
Σχ.286

287. Δύο κύκλοι τέμνονται στά Α καί Β. "Από ἕνα σημεῖο Σ τῆς εὐθείας ΑΒ φέρνουμε δύο εὐθεῖες ἀπό τίς ὁποῖες ἡ μία τέμνει τόν ἕνα κύκλο στά Γ καί Δ καί ἡ ἄλλη τό δεύτερο κύκλο στά Ε καί Ζ. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τό τετράπλευρο μέ κορυφές τά σημεῖα Γ, Δ, Ε, Ζ εἶναι ἐγγράψιμο.

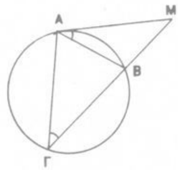
<u>'Απόδειξη</u>. Εἶναι ἀρκετό νά ἀποδείξουμε ὅτι (σχ.287):

$$ΣΓ\cdot ΣΔ = ΣΕ\cdot ΣΖ.$$

Ξέρουμε ὅτι $ΣΓ\cdot ΣΔ = ΣΑ\cdot ΣΒ$ καί $ΣΕ\cdot ΣΖ = ΣΑ\cdot ΣΒ$. "Αρα θά εἶναι καί ΣΓ•ΣΔ = ΣΕ•ΣΖ, καί έπομένως τό τετράπλευρο ΓΔΖΕ εἶναι έγγράψιμο σέ κύκλο.



Σχ.287



Σχ.288

288. Ἀπό ἕνα σημεῖο Μ πού βρίσκεται ἔξω ἀπό ἕναν κύκλο (C) φέρνουμε τό έφαπτόμενο τμῆμα ΜΑ καί μιά τέμνουσα ΜΒΓ. Ν'ἀποδείξετε ὅτι εἶναι $\frac{AB^2}{A\Gamma^2} = \frac{MB}{M\Gamma}$.

<u>Ἀπόδειξη</u>. Οἱ γωνίες $M\hat{A}B$ καί $A\hat{\Gamma}B$ (σχ.288) εἶναι ἴσες (ἀπό χορδή καί έφαπτομένη). Ἄρα τά τρίγωνα ΜΑΒ καί ΜΓΑ εἶναι ὅμοια, γιατί ἐπιπλέον ἔχουν καί τή γωνία $\hat{M}$ κοινή. Ἄρα:

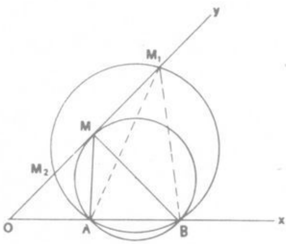
$\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{MB}{MA}$ ἤ $\frac{AB^2}{A\Gamma^2} = \frac{MB^2}{MA^2}$. Ἀλλά εἶναι καί $MA^2 = MB \cdot M\Gamma$, καί τότε ἡ τελευταία σχέση γράφεται:

$\frac{AB^2}{A\Gamma^2} = \frac{MB^2}{MB \cdot M\Gamma}$ ἤ $\frac{AB^2}{A\Gamma^2} = \frac{MB}{M\Gamma}$.

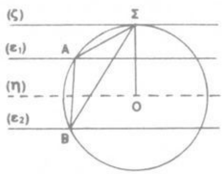
289. Δίνεται μιά γωνία $x\hat{O}y$ καί δύο σημεῖα Α, Β πάνω στήν Ox. Νά βρεθεῖ σημεῖο Μ τῆς Oy τέτοιο ὥστε ἡ γωνία $A\hat{M}B$ νά εἶναι ἡ μεγαλύτερη δυνατή.

<u>Λύση</u>. Ἄς θεωρήσουμε ἕνα τυχαῖο σημεῖο M_1 τῆς Oy καί ἄς ἐξετάσουμε τή γωνία $A\hat{M}_1B$.

Γράφουμε τόν κύκλο (M_1AB) πού τέμνει τήν Oy στό σημεῖο M_2 (σχ.289). Εἶναι φανερό πώς κάθε σημεῖο τῆς χορδῆς M_1M_2 μᾶς ἐξασφαλίζει γωνία $A\hat{M}B$ μεγαλύτερη ἀπό τήν $A\hat{M}_1B$. 'Απ'αὐτό ἕπεται ὅτι τό ἄγνωστο σημεῖο M, εἶναι ἐκεῖνο στό ὁποῖο ὁ κύκλος (MAB) ἐφάπτεται στήν Oy. 'Η κατασκευή εἶναι γνωστή (§98).



Σχ.289



Σχ.290

290. Δίνονται δύο παράλληλες εὐθεῖες (ε_1) καί (ε_2) καί ἕνα σημεῖο Σ ἔξω ἀπό τή ζώνη τους. Νά φέρετε κάθετη AB πρός τίς παράλληλες ἔτσι, ὥστε ἡ γωνία $A\hat{\Sigma}B$ νά εἶναι ἡ μεγαλύτερη δυνατή.

'<u>Ανάλυση</u>. "Εστω AB ἡ ζητούμενη κάθετος πρός τίς παράλληλες (ε_1) καί (ε_2), τέτοια ὥστε ἡ γωνία $A\hat{\Sigma}B$ νά εἶναι ἡ μεγαλύτερη δυνατή (σχ.290). 'Αφοῦ τό σημεῖο Σ διατηρεῖ σταθερή ἀπόσταση ἀπό τίς παράλληλες, μποροῦμε προσωρινά νά ἀλλάξουμε τά στοιχεῖα τοῦ προβλήματος, ὑποθέτοντας ὅτι τό Σ κινεῖται πάνω σέ εὐθεία (ζ) παράλληλη πρός τίς (ε_1) καί (ε_2), ἐνῶ ἡ τέμνουσα AB παραμένει σταθερή. Τότε, ὅπως εἶναι γνωστό (ἄσκ.289), τό Σ θά πρέπει νά ἔχει τέτοια θέση, ὥστε ὁ κύκλος (ABΣ) νά ἐφάπτεται στή (ζ). 'Ο κύκλος μάλιστα αὐτός θά ἔχει τό κέντρο του O πάνω στή μεσοπαράλληλο (η) τῶν παραλλήλων (ε_1) καί (ε_2) καί θά εἶναι $ΣΟ \perp (η)$.

Τό ἀποτέλεσμα τῆς ἀναλύσεως εἶναι ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι χορδή τοῦ κύκλου, τοῦ ὁποίου τό κέντρο Ο εἶναι ἡ προβολή τοῦ Σ πάνω στήν εὐθεία (η) καί ἡ ἀκτίνα του εἶναι ἡ ΟΣ.

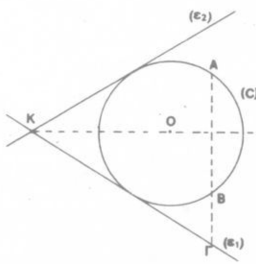
Σύνθεση - κατασκευή. Φέρνουμε τή μεσοπαράλληλο (η) τῶν (ε_1) καί (ε_2) καί τή $ΣΟ \perp (η)$. Μετά γράφουμε τόν κύκλο πού ἔχει κέντρο τό Ο καί ἀκτίνα τήν ΟΣ, πού τέμνει τίς δοσμένες παράλληλες (ε_1) καί (ε_2) στά σημεῖα Α καί Β. Τότε ἡ ΑΒ εἶναι ἡ ζητούμενη κάθετος πρός τίς (ε_1) καί (ε_2).

291. Δίνονται δύο εὐθεῖες (ε_1) καί (ε_2) καί ἕνα σημεῖο Α. Ζητεῖται νά γραφτεῖ κύκλος πού νά περνάει ἀπό τό Α καί νά ἐφάπτεται στίς (ε_1) καί (ε_2).

Ἀνάλυση. Ἔστω Ο τό κέντρο τοῦ ἄγνωστου κύκλου. Οἱ εὐθεῖες (ε_1) καί (ε_2), γενικά, τέμνονται στό σημεῖο Κ (σχ.291). Τότε τό Ο θά εἶναι σημεῖο τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας $\hat{K}$ καί ἐπί-πλέον ὁ κύκλος θά περνάει καί ἀπό τό συμμετρικό σημεῖο Β τοῦ Α ὡς πρός τή διχοτόμο τῆς γωνίας $\hat{K}$.

Σύνθεση - κατασκευή. Φέρνουμε τή διχοτόμο τῆς γωνίας $\hat{K}$ καί βρίσκουμε τό συμμετρικό Β τοῦ Α ὡς πρός αὐτή. Μετά γράφουμε τό ζητούμενο κύκλο (C) πού περνάει ἀπό τά σημεῖα Α, Β καί ἐφάπτεται στήν εὐθεία (ε_1) (§98).

Τό πρόβλημα δέχεται καί δεύτερη λύση πού προκύπτει ἀπό τή δεύτερη λύση τῆς § 98.



Σχ.291

292. Δίνεται ἕνας κύκλος (O,R) καί ἕνα σταθερό σημεῖο του A. Πάνω σέ μιά εὐθεία (ε) πού νά περνάει ἀπό τό A παίρνουμε ἕνα σημεῖο I τέτοιο ὥστε νά εἶναι $IA \cdot IB = k^2$, ὅπου B εἶναι τό δεύτερο σημεῖο τομῆς τῆς (ε) μέ τόν (O,R) καί k δεδομένο τμῆμα. Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τοῦ σημείου I.

Λύση. Ἔστω I ἕνα σημεῖο τοῦ ζητούμενου γ. τόπου (σχ. 292). Τότε θά εἶναι:

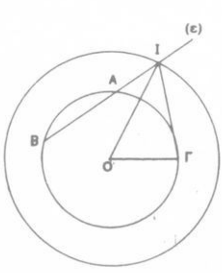
(1) $$IA \cdot IB = k^2.$$

Ξέρουμε ὅμως ὅτι εἶναι καί:

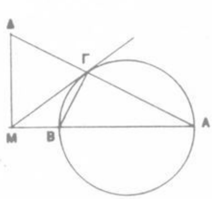
(2) $$IA \cdot IB = I\Gamma^2 = IO^2 - R^2$$

ὅπου IΓ εἶναι τό ἐφαπτόμενο τμῆμα πρός τόν κύκλο (O,R). Τώρα ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) ἕπεται ὅτι: $IO^2 - R^2 = k^2$ ἤ $IO^2 = k^2 + R^2$ ἤ $IO = \sqrt{k^2+R^2}$.

Ἄρα ἡ ἀπόσταση τοῦ I ἀπό τό κέντρο O τοῦ δοσμένου κύκλου παραμένει σταθερή καί ἑπομένως ὁ ζητούμενος γ.τόπος εἶναι κύκλος μέ κέντρο τό O καί ἀκτίνα $OI = \sqrt{k^2+R^2}$.



Σχ.292



Σχ.293

293. ᾿Από ἕνα σημεῖο Μ πού βρίσκεται ἔξω ἀπό ἕναν κύκλο (C) φέρνουμε τή διάμετρο ΜΑΒ καί τό ἐφαπτόμενο τμῆμα ΜΓ. ῾Η κάθετος στή ΜΑ ἀπό τό Μ, τέμνει τήν ΑΓ στό Δ. Ν᾿ ἀποδείξετε ὅτι εἶναι $ΑΓ\cdot ΑΔ = ΜΑ^2 - ΜΓ^2$.

<u>᾿Απόδειξη</u>. Φέρνουμε τή ΒΓ (σχ.293). Τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ καί ΑΜΔ εἶναι ὅμοια, γιατί ἔχουν τή γωνία τους $\hat{Γ}$ κοινή. ᾿Από αὐτά παίρνουμε: $\frac{ΑΓ}{ΜΑ} = \frac{ΑΒ}{ΑΔ}$ ἤ

(1) $$ΑΓ\cdot ΑΔ = ΜΑ\cdot ΑΒ.$$

᾿Αλλά εἶναι: $ΑΒ = ΜΑ - ΜΒ$. ῎Αρα:

(2) $$ΜΑ\cdot ΑΒ = ΜΑ^2 - ΜΑ\cdot ΜΒ.$$

᾿Επίσης εἶναι καί $ΜΑ\cdot ΜΒ = ΜΓ^2$ καί τότε ἡ σχέση (2) μπορεῖ νά γραφτεῖ:

(3) $$ΜΑ\cdot ΑΒ = ΜΑ^2 - ΜΓ^2.$$

Τώρα ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (3) προκύπτει ἡ ζητούμενη σχέση: $ΑΓ\cdot ΑΔ = ΜΑ^2 - ΜΓ^2$.

294. Νά κατασκευαστοῦν οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως $3x^2 - 2λx = 12μ^2$, ὅπου τά λ καί μ εἶναι δεδομένα τμήματα.

<u>Λύση</u>. ῾Η ἐξίσωση γράφεται $x^2 - \frac{2}{3}\cdot λx = 4μ^2$ ἤ $x(x - \frac{2}{3}\cdot λ) = 4μ^2$ καί ἔχει τή μορφή ΙΙ τῆς παραγράφου 99.

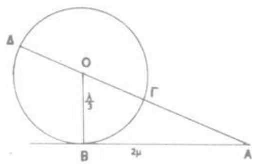
῾Η λύση της φαίνεται στό σχῆμα 294, ὅπου ἡ ἀκτίνα ΟΒ εἶναι ἴση μέ λ/3 καί τό ἐφαπτόμενο τμῆμα $ΑΒ = 2μ$. Τό ἄγνωστο τμῆμα x εἶναι τό ΑΔ.

Πραγματικά εἶναι:

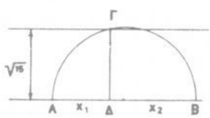
$$ΑΔ\cdot ΑΓ = ΑΒ^2 \quad ἤ \quad x(x - \frac{2λ}{3}) = 4μ^2.$$

295. Νά κατασκευαστοῦν οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως $x^2-8x+15=0$.

Λύση. Ἡ δοσμένη ἐξίσωση ἔχει τή μορφή III τῆς παραγράφου 99. Γιά τή λύση της παίρνουμε ἕνα τμῆμα $AB=8$ μονάδες καί μέ διάμετρο αὐτό γράφουμε ἡμικύκλιο (σχ.295). Μετά φέρνουμε εὐθεία παράλληλη τῆς AB καί σέ ἀπόσταση $\sqrt{15}$ μονάδων ἀπό αὐτή πού τέμνει τό ἡμικύκλιο στό Γ. Φέρνουμε καί τή $\Gamma\Delta \perp AB$. Τότε οἱ δύο ρίζες τῆς δοσμένης ἐξισώσεως εἶναι τά τμήματα $A\Delta = x$ καί $\Delta B = x$.



Σχ.294



Σχ.295

296. Δίνεται ἕνα ὀρθογώνιο καί ἰσοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ. Νά βρεθεῖ πάνω στήν ὑποτείνουσα ΒΓ ἕνα σημεῖο Δ, ἀπό τό ὁποῖο, ἄν φέρουμε τίς κάθετες στίς πλευρές ΑΒ καί ΑΓ, νά σχηματιστεῖ ὀρθογώνιο πού νά ἔχει γνωστό ἐμβαδό λ^2.

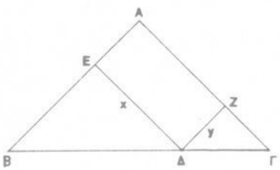
Λύση. Ἔστω Δ τό ζητούμενο σημεῖο (σχ.296), ἀπό τό ὁποῖο φέρνουμε τίς $\Delta E \perp AB$ καί $\Delta Z \perp A\Gamma$ καί ἔστω ὅτι εἶναι $\Delta E = x$ καί $\Delta Z = y$. Τότε θά εἶναι:

$$x+y = AB = \gamma \quad \text{καί} \quad xy = \lambda^2.$$

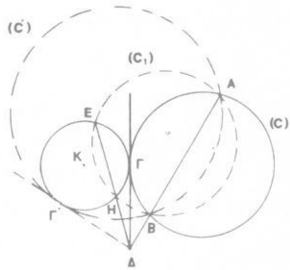
Ἄρα τά x καί y εἶναι οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως $x^2-\gamma x+\lambda^2=0$.

Αὐτή ἔχει τή μορφή III τῆς παραγράφου 99 καί ἡ λύση της εἶναι γνωστή, ἄν θέσουμε ὅπου $2\alpha = \gamma$ καί $\beta = \lambda$.

Μετά ἀπό τή λύση τῆς ἐξισώσεως παίρνουμε πάνω στήν πλευρά ΑΒ τμῆμα $ΑΕ = x$ καί ἀπό τό Ε φέρνουμε παράλληλο πρός τήν ΑΓ πού τέμνει τή ΒΓ στό ζητούμενο σημεῖο Δ.



Σχ.296



Σχ.297

297. Νά γραφτεῖ κύκλος πού νά περνάει ἀπό δύο γνωστά σημεῖα Α καί Β καί νά ἐφάπτεται σέ γνωστό κύκλο (K,R).

<u>Ἀνάλυση</u>. Ἔστω (C) ὁ ἄγνωστος κύκλος πού περνάει ἀπό τά Α καί Β καί ἐφάπτεται στό δοσμένο κύκλο (K,R) στό σημεῖο Γ (σχ.297). Ἡ κοινή ἐφαπτομένη τῶν δύο κύκλων στό σημεῖο Γ καί ἡ ΑΒ, τέμνονται στό σημεῖο Δ. Ἀπό τό Δ φέρνουμε μιά τυχαία τέμνουσα ΔΗΕ τοῦ δοσμένου κύκλου καί τότε ἔχουμε:

$ΔΑ \cdot ΔΒ = ΔΓ^2$, $ΔΕ \cdot ΔΗ = ΔΓ^2$ ἤ $ΔΑ \cdot ΔΒ = ΔΕ \cdot ΔΗ$. Ἄρα τά σημεῖα Α, Β, Η, Ε, εἶναι ὁμοκυκλικά. Τότε τό σημεῖο Δ μπορεῖ ἀπ' τήν ἀρχή νά ἐντοπιστεῖ.

<u>Σύνθεση - κατασκευή</u>. Γράφουμε ἕνα τυχαῖο κύκλο (C_1) πού νά παιρνάει ἀπό τά Α καί Β καί πού νά τέμνει τό δοσμένο

κύκλο (K,R) σέ δύο σημεῖα Ε καί Η. Ἡ ΑΒ μέ τήν ΕΗ τέμνονται σ' ἕνα σημεῖο Δ, ἀπ' τό ὁποῖο φέρνουμε τό ἐφαπτόμενο τμῆμα ΔΓ πρός τό δοσμένο κύκλο. Μετά γράφουμε τό ζητούμενο κύκλο (C) πού περνάει ἀπό τά σημεῖα Α, Β καί Γ.

. Τό πρόβλημα δέχεται καί δεύτερη λύση, τόν κύκλο (C΄) πού περνάει ἀπό τά σημεῖα Α, Β καί Γ΄, ὅπου τό ΔΓ΄ εἶναι τό ἄλλο ἐφαπτόμενο τμῆμα ἀπό τό Δ πρός τόν κύκλο (K,R).

298. Δίνεται μιά εὐθεία (ε), ἕνα σημεῖο της Α καί ἕνα σημεῖο Β ἔξω ἀπ' αὐτή. Μέ κέντρο τό Β νά γραφτεῖ κύκλος, πού νά τέμνει τήν (ε) στά Γ καί Δ ἔτσι, ὥστε νά εἶναι $ΑΓ\cdot ΑΔ = k^2$, ὅπου τό k εἶναι δεδομένο τμῆμα.

Ἀνάλυση. Ἔστω R ἡ ἀκτίνα τοῦ ζητούμενου κύκλου μέ κέντρο τό Β (σχ.298). Τότε θά εἶναι:

(1) $$ΑΓ\cdot ΑΔ = k^2.$$

Ξέρουμε ὅμως ὅτι:

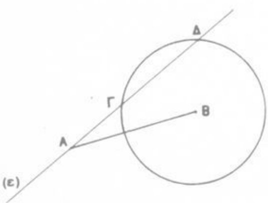
(2) $$ΑΓ\cdot ΑΔ = ΑΒ^2-R^2.$$

Τώρα ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) ἕπεται ὅτι: $k^2 = ΑΒ^2-R^2$ ἤ $R^2 = ΑΒ^2-k^2$ ἤ $R=\sqrt{ΑΒ^2-k^2}$. Ἡ κατασκευή εἶναι ἁπλή.

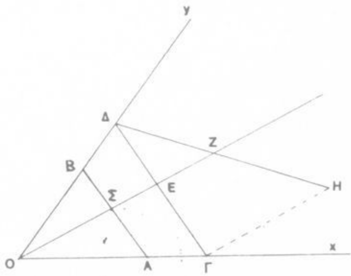
299. Ἀπό ἕνα σημεῖο Σ ἐσωτερικό μιᾶς γωνίας $x\hat{O}y$ νά φέρετε εὐθεία πού νά τέμνει τίς πλευρές τῆς γωνίας στά Α καί Β, ἔτσι ὥστε τό τμῆμα ΑΒ νά διαιρεῖται ἀπό τό Σ σέ μέσο καί ἄκρο λόγο.

Ἀνάλυση. Ἔστω ὅτι τό τμῆμα ΑΒ διαιρεῖται ἀπό τό σημεῖο Σ σέ μέσο καί ἄκρο λόγο (σχ.299). Προεκτείνουμε τήν ΟΣ καί ἀπό ἕνα τυχαῖο σημεῖο Γ τῆς Ox φέρνουμε ΓΕΔ//ΑΣΒ. Τότε καί τό τμῆμα ΓΔ διαιρεῖται προφανῶς σέ μέσο καί ἄκρο λόγο ἀπό τό σημεῖο Ε.

<u>Σύνθεση - κατασκευή</u>. ῞Ενα τυχαῖο τμῆμα ΔΗ τό διαιροῦμε σέ μέσο καί ἄκρο λόγο μέ τό σημεῖο Ζ (§ 100) καί τό τοποθετοῦμε ἔτσι, ὥστε τό Δ νά εἶναι πάνω στήν Oy καί τό Ζ πάνω στήν ΟΣ. Ἡ παράλληλος τῆς ΟΣ ἀπό τό Η, τέμνει τήν Ox στό Γ. Φέρνουμε τή ΓΔ πού τέμνει τήν ΟΣ στό σημεῖο Ε. Τότε εἶναι φανερό πώς τό τμῆμα ΓΣ ἔχει διαιρεθεῖ ἀπό τό Ε σέ μέσο καί ἄκρο λόγο γιατί ὁ λόγος $\frac{ΖΔ}{ΖΗ}$ ἔχει μεταφερθεῖ μέ τίς παράλληλες ΗΓ//ΟΣ στό λόγο $\frac{ΕΔ}{ΕΓ}$. Τότε, ἀπό τό Σ φέρνουμε τή ζητούμενη τέμνουσα ΑΣΒ//ΓΕΔ.



Σχ.298

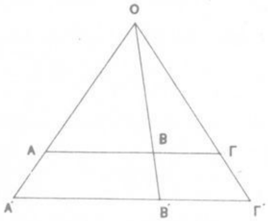


Σχ.299

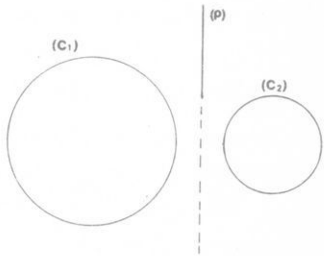
300. ῞Οταν δοθεῖ τό μεγαλύτερο (ἤ τό μικρότερο) μέρος ἑνός ἄγνωστου τμήματος, πού ἔχει διαιρεθεῖ σέ μέσο καί ἄκρο λόγο, νά κατασκευαστεῖ τό τμῆμα.

<u>Λύση</u>. ῎Εστω ὅτι δίνεται τό τμῆμα ΑΒ ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος ΑΒΓ πού ἔχει διαιρεθεῖ ἀπό τό Β σέ μέσο καί ἄκρο λόγο. Παίρνουμε ἕνα τυχαῖο τμῆμα Α΄Γ΄ καί τό διαιροῦμε σέ μέσο

καί ἄκρο λόγο μέ τό σημεῖο Β΄ (§ 100). Τοποθετοῦμε τό τμῆμα ΑΒ παράλληλο πρός τό Α΄Β΄Γ΄ (σχ.300) καί φέρνουμε τίς ΑΑ΄ καί ΒΒ΄ πού τέμνονται σ' ἕνα σημεῖο Ο. Μετά φέρνουμε τήν ΟΓ΄πού τέμνει τήν ΑΒ στό σημεῖο Γ. Τότε τό ΑΓ εἶναι τό ζητούμενο τμῆμα.



Σχ.300



Σχ.301

Ρ Ι Ζ Ι Κ Ο Σ   Α Ξ Ο Ν Α Σ

301. "Αν ὁ ριζικός ἄξονας δύο κύκλων δέν τέμνει τόν ἕναν ἀπ' αὐτούς, ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι δέν τέμνει καί τόν ἄλλο.

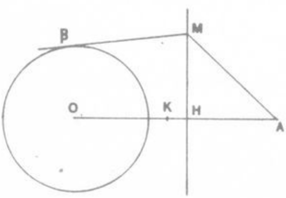
<u>'Απόδειξη</u>. "Ας θεωρήσουμε δύο κύκλους (C_1) καί (C_2) καί ἔστω (ρ) ὁ ριζικός τους ἄξονας, πού δέν τέμνει τόν (C_1). Θ' ἀποδείξουμε ὅτι δέν τέμνει οὔτε καί τόν (C_2) (σχ.301).

Τό γεγονός ὅτι ὁ ριζικός ἄξονας (ρ) δέν τέμνει τόν (C_1), σημαίνει ὅτι δέν ὑπάρχει σημεῖο τοῦ ριζικοῦ ἄξονα μέ μηδενική δύναμη ὡς πρός τόν (C_1). Τότε ὅμως δέν θά ὑπάρχει σημεῖο τοῦ ριζικοῦ ἄξονα μέ μηδενική δύναμη καί ὡς πρός τόν (C_2), γιατί, ἐξ ὁρισμοῦ, τά σημεῖα τοῦ ριζικοῦ ἄξονα δύο κύκλων, εἶναι σημεῖα μέ ἴσες δυνάμεις ὡς πρός τούς δύο κύκλους. "Αρα ὁ ριζικός ἄξονας (ρ) δέν τέμνει οὔτε καί τόν κύκλο (C_2).

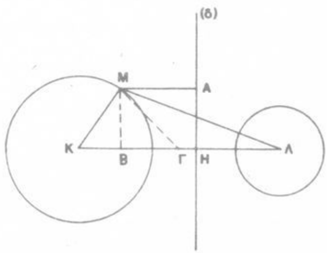
302. Δίνεται ἕνας κύκλος (O,R) καί σημεῖο A. Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων M, γιά τά ὁποῖα εἶναι MA = MB, ὅπου MB εἶναι τό ἐφαπτόμενο τμῆμα ἀπό τό M στόν κύκλο (O,R).

Λύση. Τό σημεῖο A μπορεῖ νά θεωρηθεῖ μηδενικός κύκλος καί τότε, ἡ ἰδιότητα πού ἔχουν τά σημεῖα M: MA = MB, (ἴσα ἐφαπτόμενα τμήματα), εἶναι ἰδιότητα τῶν σημείων τοῦ ριζικοῦ ἄξονα (σχ.302).

Ἐπομένως ὁ ζητούμενος γ.τόπος τοῦ σημείου M, εἶναι εὐθεία κάθετη στήν OA σέ σημεῖο H πού ἀπέχει ἀπό τό μέσο K τοῦ τμήματος OA ἀπόσταση ἴση μέ $\frac{R^2}{2 \cdot OA}$ καί πού τό H βρίσκεται ἀπ' τή μεριά τοῦ A.



Σχ.302



Σχ.303

303. Δίνονται δύο κύκλοι (K,R) καί (Λ, ρ) καί ἔστω (δ) ὁ ριζικός τους ἄξονας. Ἄν MA εἶναι ἡ ἀπόσταση ἑνός σημείου M τοῦ κύκλου (K,R) ἀπό τό ριζικό ἄξονα, ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι $\mathcal{D}$M/(Λ,ρ) = 2ΚΛ·ΜΑ.

'<u>Ἀπόδειξη</u>. Στό τρίγωνο ΜΚΛ φέρνουμε τή διάμεσο ΜΓ καί τή ΒΜ⊥ΚΛ (σχ.303). Ἔστω Η τό σημεῖο στό ὁποῖο ὁ ριζικός ἄξονας (δ) τέμνει τήν ΚΛ. Τότε ἀπό τό τρίγωνο ΜΚΛ ἔχουμε:

$$ΜΛ^2 - ΜΚ^2 = 2 \cdot ΚΛ \cdot ΒΓ \quad \text{ἤ}$$

$$(1) \qquad ΜΛ^2 - R^2 = 2 \cdot ΚΛ \cdot ΒΓ.$$

Ξέρουμε ὅμως ὅτι εἶναι: $ΓΗ = \dfrac{R^2-\rho^2}{2ΚΛ}$ · ἤ

$$(2) \qquad R^2 - \rho^2 = 2 \cdot ΚΛ \cdot ΓΗ.$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τίς σχέσεις (1) καί (2) καί παίρνουμε:

$$ΜΛ^2 - \rho^2 = 2 \cdot ΚΛ(ΒΓ+ΓΗ) \quad \text{ἤ} \quad ΜΛ^2 - \rho^2 = 2 \cdot ΚΛ \cdot ΒΗ \quad \text{ἤ}$$

$$ΜΛ^2 - \rho^2 = 2 \cdot ΚΛ \cdot ΜΑ \quad \text{ἤ} \quad \mathcal{D}Μ/(Λ,\rho) = 2 \cdot ΚΛ \cdot ΜΑ.$$

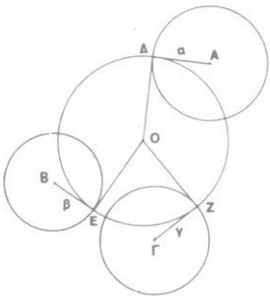
304. Δίνονται τρία σημεῖα Α, Β, Γ. Νά γραφτεῖ κύκλος πού τά ἐφαπτόμενά του τμήματα ἀπό τά Α, Β, Γ νά ἔχουν δεδομένα μήκη α, β, γ ἀντιστοίχως.

'<u>Ἀνάλυση</u>. Ἔστω ὅτι ὁ ζητούμενος κύκλος γράφτηκε καί Ο εἶναι τό κέντρο του (σχ.304). Ἄν γράψουμε τούς κύκλους (Α,α), (Β,β), (Γ,γ), ὁ κύκλος μέ κέντρο τό Ο θά τούς τέμνει ὀρθογώνια, γιατί τά τμήματα ΟΔ, ΟΕ, ΟΖ θά εἶναι ἐφαπτόμενα πρός τούς τρεῖς κύκλους.

'Επειδή ὅμως εἶναι ΟΔ = ΟΕ = ΟΖ, ἕπεται ὅτι τό Ο εἶναι σημεῖο μέ ἴσες δυνάμεις ὡς πρός τούς τρεῖς κύκλους καί ἑπομένως εἶναι τό ριζικό τους κέντρο.

<u>Σύνθεση - κατασκευή</u>. Γράφουμε τούς τρεῖς κύκλους (Α, α), (Β,β), (Γ,γ) καί βρίσκουμε τό ριζικό τους κέντρο Ο. Μετά ἀπό τό Ο φέρνουμε τό ἐφαπτόμενο τμῆμα ΟΔ πρός τόν κύκλο (Α,α)

καί γράφουμε τό ζητούμενο κύκλο μέ κέντρο τό Ο καί ἀκτίνα τήν ΟΔ.



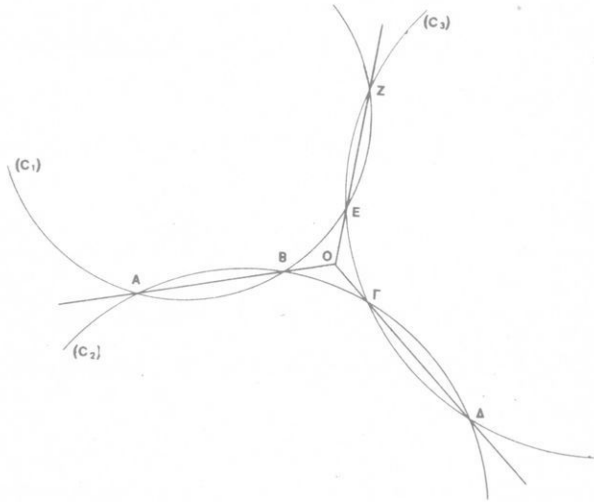
Σχ.304

305. Ἄν τρεῖς κύκλοι τέμνονται ἀνά δύο, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι οἱ κοινές χορδές περνοῦν ἀπό τό ἴδιο σημεῖο.

<u>Ἀπόδειξη</u>. Ἄς θεωρήσουμε τούς τρεῖς κύκλους (C_1),(C_2) καί (C_3).πού τέμνονται ἀνά δύο στά σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ.

Ἡ χορδή ΑΒ τῶν κύκλων (C_1) καί (C_2) (σχ.305), ἀποτελεῖ καί τό ριζικό τους ἄξονα. Ἐπίσης ἡ κοινή χορδή ΓΔ τῶν (C_2) καί (C_3), εἶναι ὁ ριζικός τους ἄξονας.

Ἄρα τό σημεῖο Ο στό ὁποῖο τέμνονται οἱ χορδές ΑΒ καί ΓΔ εἶναι τό ριζικό κέντρο τῶν τριῶν κύκλων (C_1), (C_2) καί (C_3)



Σχ.305

καί έπομένως ή χορδή EZ, πού εἶναι ὁ ριζικός ἄξονας τῶν κύκλων (C_1) καί (C_3), θά περάσει άναγκαστικά άπό τό ριζικό τους κέντρο O.

Στάθης