ΣΠ. Γ. ΚΑΝΕΛΛΟΥ

# ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΤΕΥΧΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΕΩΣ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑΙ 1976

# ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΔΩΡΕΑΝ

ΣΠ. Γ. ΚΑΝΕΛΛΟΥ

# ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΤΕΥΧΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΕΩΣ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ

ΑΘΗΝΑΙ 1976

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

## ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

## ΕΚ ΤΗΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

### ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι


§1. Κατασκευαί.
§2. Βασικαὶ κατασκευαί.
§3. Ἡμιεφαπτομένη τόξου.
§4. Κατασκευὴ τόξου ἐκ τῆς χορδῆς καὶ τῆς ἡμιεφαπτομένης του.
§5. Τόξον ἱκανὸν γωνίας φ.
§6. Εἰδικαὶ περιπτώσεις.
§7. Ἡ γενικὴ μέθοδος.
§§8 - 15. Παραδείγματα τῆς Ἀναλυτικῆς μεθόδου.
§16. Μεταφορὰ σχήματος κατὰ διάνυσμα $\vec{\delta}$.
§17. Γεωμετρικὸς τόπος.
§18. Στοιχειώδεις γεωμετρικοὶ τόποι.
§19. Εὕρεσις γεωμετρικῶν τόπων.
§20. Χρῆσις τῶν γ.τ. εἰς γεωμετρικὰς κατασκευάς.


### ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ


§21. Ἀπὸ τὴν θεωρίαν τῶν κυρτῶν πολυγώνων
§22. Ἐγγράψιμον τετράπλευρον.
§23. Χαρακτηριστικαὶ ἰδιότητες.
§24. Τέσσαρα ὁμοκυκλικὰ σημεῖα.
§25. Γωνία ὕψους καὶ διαμέτρου.
§§26,27,28. Ἰδιότητες τοῦ ὀρθοκέντρου.
§29. Εὐθεῖα Euler τριγώνου.
§30. Κύκλος τῶν ἐννέα σημείων τριγώνου.
§31. Εὐθεῖα Simson.
§32. Εὐθεῖα Steiner.
§33. Γωνία δύο ἡμιευθειῶν τεμνουσῶν περιφέρειαν.


### ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙΙ


§34. Πολλαπλασιασμὸς εὐθυγράμμου τμήματος ἐπὶ θετικὸν ἀριθμόν.
§34α. Ἀκολουθίαι.
§35. Ἡ ἔννοια τοῦ ὁρίου ἀκολουθίας.
§36. Ἀξίωμα τοῦ Dedekind.
§37. Ὅριον μονοτόνου ἀκολουθίας.
§38. Θεώρημα τοῦ ἐγκιβωτισμοῦ.
§39. Ἀξίωμα τοῦ Ἀρχιμήδους.
§40. Μέτρον ἑνὸς τμήματος.
§41. Θεωρήματα ἐπὶ τοῦ μέτρου τῶν τμημάτων.
§42. Ἐπίδρασις τῆς ἀλλαγῆς μονάδος μετρήσεως ἐπὶ τῶν μηκῶν.
§43. Λόγος δύο εὐθυγράμμων τμημάτων.
§44. Δεύτερος ὁρισμὸς τοῦ γινομένου τμήματος ἐπὶ θετικὸν ἀριθμόν.
§45. Μέτρον γωνίας.
§46. Θεώρημα τοῦ Θαλοῦ.
§47. Ἀλγεβρικὴ διατύπωσις τοῦ θεωρήματος τοῦ Θαλοῦ.
§48. Συνέπεια τοῦ (Θ) τοῦ Θαλοῦ.
§49. Διαίρεσις τμήματος εἰς μέρη ἀνάλογα δύο δοθέντων τμημάτων.
§50. Τέταρτον ἀνάλογον.
§§51 - 54. Ὅμοια τρίγωνα.
§55. Τὸ εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν σημεῖον μιᾶς εὐθείας.
§56. Ἐπίπεδος δέσμη εὐθειῶν.
§57. Μετρικαὶ σχέσεις μεταξὺ τμημάτων.
§§ 58, 59. Ἰδιότητες τῆς ἐσωτερικῆς καὶ ἐξωτερικῆς διχοτόμου γωνίας τριγώνου.
§60. Διαίρεσις διανύσματος εἰς ἀριθμητικὸν λόγον λ.

§61. Διαίρεσις διανύσματος εἰς ἀλγεβρικὸν λόγον λ.
§62. Ἁρμονικὴ τετρὰς σημείων.
§§63,64. Χαρακτηριστικαὶ ἰδιότητες τῆς ἁρμονικῆς τετράδος.
§65. Συμβατικὰ συζυγῆ ἁρμονικὰ σημεῖα.
§66. Ἀπολλώνιος κύκλος.
§67. Περιοχαὶ τοῦ ἐπιπέδου καθοριζόμεναι ὑπὸ μιᾶς ἀπολλωνίου περιφερείας.
§68. Παρατήρησις.
§69. Θεώρημα τοῦ Εὐκλείδου.
§70. Πυθαγόρειον θεώρημα.
§§71,72,73,74. Μετρικαὶ σχέσεις ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ.
§§75,76. Κατασκευαὶ ἀλγεβρικῶν παραστάσεων.
§77. Κατασκευὴ τοῦ x ἐκ τῆς $x^2/\alpha^2 = \mu/\nu$.
§78. Ἡ ἀλγεβρικὴ μέθοδος εἰς Γεωμετρικὰς κατασκευάς.
§79. Ἐπεκτεταμένον πυθαγόρειον θεώρημα.
§80. Κριτήριον τοῦ ἂν γωνία τριγώνου εἶναι ὀξεῖα, ὀρθὴ ἢ ἀμβλεῖα.
§81. Ἀλγεβρικὴ διατύπωσις τοῦ ἐπεκτεταμένου πυθαγορείου θεωρήματος.
§82. Πρῶτον θεώρημα τῆς διαμέσου.
§83. Δεύτερον θεώρημα τῆς διαμέσου.
§84. Θεώρημα περὶ τοῦ γινομένου δύο πλευρῶν τριγώνου.
§85. Σχέσις τοῦ Stewart.
§86. Γενικευμένη σχέσις τοῦ Stewart.
§§87,88. Μῆκος τῆς ἐσωτερικῆς καὶ ἐξωτερικῆς διχοτόμου γωνίας τριγώνου.
§89. Ἐφαρμογαὶ τοῦ πρώτου θεωρήματος τῆς διαμέσου.
§90. Τόπος : $MA^2 - MB^2 = c^2$.
§91. Ὑπολογισμὸς τῶν ὑψῶν τριγώνου συναρτήσει τῶν πλευρῶν.
§92. Ἐμβαδὸν τριγώνου.
§93. Ἰδιότητες τοῦ ἐμβαδοῦ τῶν τριγώνων.
§94. Ἡ προσθετικὴ ἰδιότης τοῦ ἐμβαδοῦ.
§95. Τύποι τοῦ ἐμβαδοῦ τριγώνου.
§96. Ὑπολογισμὸς τῶν ρ, $\rho_\alpha$, R συναρτήσει τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου.
§97. Σύγκρισις τῶν ἐμβαδῶν δύο τριγώνων. Ἐφαρμογή.
§98. Ἰσοδύναμα τρίγωνα.
§99. Ἐμβαδὸν κυρτοῦ πολυγώνου.
§100. Ἐμβαδὸν παραλληλογράμμου.
§101. Ἐμβαδὸν τραπεζίου.
§102. Ἐμβαδὸν τετραπλεύρου μὲ καθέτους διαγωνίους.
§103. Πολύγωνα ἰσοδύναμα.
§104. Κατασκευὴ τριγώνου ἰσοδυνάμου πρὸς δοθὲν πολύγωνον
§105. Ἐφαρμογὴ τῆς §104.
§106. Πᾶν κυρτὸν πολύγωνον τετραγωνίζεται.
§107. Ὅμοια πολύγωνα.
§§108,109. Κατασκευαὶ ὁμοίων πολυγώνων.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

§110. Θεώρημα τῶν τεμνομένων χορδῶν καὶ τὸ ἀντίστροφον αὐτοῦ.
§111. Θεώρημα τῶν τεμνουσῶν καὶ τὸ ἀντίστροφον αὐτοῦ.
§112. Θεώρημα τεμνούσης καὶ ἐφαπτομένης καὶ τὸ ἀντίστροφον αὐτοῦ.
§113. Ἀλγεβρικὴ διατύπωσις τῶν μετρικῶν σχέσεων ἐν κύκλῳ.
§114. Μεταφορὰ ἑνὸς γινομένου.
§115. Γεωμετρικὴ κατασκευὴ τῶν ριζῶν δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως
§116. Γεωμετρικὴ κατασκευὴ τῶν ριζῶν διτετραγώνου ἐξισώσεως.
§117. Διαίρεσις τμήματος εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον.
§118. Δύναμις σημείου ὡς πρὸς κύκλον.
§119. Θεώρημα Euler καὶ τὸ ἀντίστροφον αὐτοῦ.
§120. Ριζικὸς ἄξων δύο κύκλων.
§121. Εἰδικαὶ περιπτώσεις.
§122. Κατασκευὴ τοῦ ριζικοῦ ἄξονος δύο κύκλων.
§123. Τύπος τῆς διαφορᾶς τῶν δυνάμεων σημείου ὡς πρὸς δύο κύκλους.
§124. Ριζικὸν κέντρον τριῶν κύκλων.
§125. Ὀρθογωνιότης δύο κύκλων.
§126. Περιφέρεια τεμνομένη ψευδοορθογωνίως ὑπὸ ἑτέρας περιφερείας.
§127. Δέσμη περιφερειῶν.
§128. Ἰδιότητες τῶν περιφερειῶν μιᾶς δέσμης.
§129. Ὀρθογώνιοι δέσμαι περιφερειῶν.
§130. Πρόβλημα τοῦ Ἀπολλωνίου.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

§131. Θεώρημα τοῦ Μενελάου.
§132. Θεώρημα τοῦ Céva.
§133. 1ον Θεώρημα τοῦ Πτολεμαίου.
§134. 2ον Θεώρημα τοῦ Πτολεμαίου.

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

# ΕΚ ΤΗΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

## ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ ΚΑΙ ΤΟΠΟΙ

**1. Κατασκευαί.** α΄) Μολονότι τὰ γεωμετρικὰ σχήματα εἶναι ἀπολύτως ἰδεατά, ἐν τούτοις χαράσσονται (ἢ σχεδιάζονται) κατὰ λίαν ἱκανοποιητικὸν τρόπον ἐπὶ ἐπιπέδου σχεδίου. Διὰ τὴν χάραξιν τῶν γεωμετρικῶν σχημάτων χρησιμοποιοῦμεν τὸν **κανόνα,** διὰ τοῦ ὁποίου σχεδιάζομεν εὐθύγραμμα τμήματα, καὶ τὸν **διαβήτην,** διὰ τοῦ ὁποίου σχεδιάζομεν περιφερείας ἢ τόξα καθὼς καὶ ἴσα τμήματα. Εἰς τὴν τελευταίαν περίπτωσιν δύναται νὰ χρησιμοποιῆται «τυφλὸς» διαβήτης μὲ δύο ἀκίδας, χωρὶς γραφίδα. (Μεταφορεύς).

Κάθε γεωμετρικὸν θεώρημα ἀνταποκρίνεται εἰς ἓν **σχῆμα,** τὸ ὁποῖον ὁ σπουδαστὴς πρέπει νὰ κατασκευάζῃ μόνος του χρησιμοποιῶν τ᾿ ἀνωτέρω ὄργανα, καθὼς καί τινα βοηθητικὰ «διαφανῆ» ὀρθογώνια τρίγωνα, διὰ τῶν ὁποίων ἐπιταχύνεται ἡ κατασκευὴ καθέτων ἢ παραλλήλων. Ἡ ὑπὸ τοῦ ἰδίου τοῦ μελετητοῦ κατασκευὴ τῶν σχημάτων διαφωτίζει αὐτὸν ἀσυγκρίτως περισσότερον ἀπὸ τὴν παρατήρησιν ἑνὸς ἤδη σχεδιασμένου εἰς τὸ βιβλίον σχήματος.

β΄) Εἰς τὴν γεωμετρίαν τίθενται προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται νὰ συγκροτηθῇ ἓν σχῆμα, ὅταν δίδωνται **ὡρισμένα στοιχεῖα** αὐτοῦ. Ὁ θεωρητικὸς προσδιορισμὸς καὶ ἡ μετ᾿ ἀκριβείας χάραξις ἑνὸς σχήματος πληροῦντος ὡρισμένους ὅρους (ἐπιτάγματα) καλεῖται εἰς τὴν γεωμετρίαν «κατασκευή».

Ὅταν τὸ πρόβλημα τῆς κατασκευῆς ἑνὸς σχήματος **λύεται** διὰ τῆς χρήσεως **μόνον** τοῦ κανόνος καὶ διαβήτου, τότε λέγομεν (ἀκολουθοῦντες τὸν Πλάτωνα) ὅτι τὸ πρόβλημα τοῦτο ἐπιδέχεται **γεωμετρικὴν λύσιν** ἢ ***«λύεται γεωμετρικῶς»***· καὶ ἡ κατασκευὴ ἡ ἐπιτυγχανομένη μόνον διὰ τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου λέγεται **γεωμετρικὴ κατασκευή.**

γ') Ὑπάρχουν προβλήματα κατασκευῶν μὴ δυνάμενα νὰ λυθοῦν διὰ τῆς χρήσεως κανόνος καὶ διαβήτου μόνον. Ταῦτα λέγονται προβλήματα **μὴ λυόμενα γεωμετρικῶς.** Οὕτω π.χ. ἔχει ἀποδειχθῆ διὰ τὰ κάτωθι 10 προβλήματα ὅτι εἶναι ἀδύνατον νὰ λυθοῦν διὰ τοῦ κανόνος καὶ διαβήτου (δηλ. δὲν λύονται γεωμετρικῶς).

**Προβλήματα τινὰ μὴ ἐπιδεχόμενα γεωμετρικὴν λύσιν :**

*1. Νὰ διαιρεθῇ δοθεῖσα γωνία διάφορος τῆς ὀρθῆς εἰς τρία ἴσα μέρη.*

*2. Διὰ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα, τῆς ὁποίας τὸ μεταξὺ δύο ἄλλων τεμνομένων εὐθειῶν περιεχόμενον τμῆμα νὰ ἰσοῦται πρὸς δοθὲν τμῆμα. (Τὸ δοθὲν σημεῖον νὰ μὴ κεῖται ἐπὶ μιᾶς τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν, ἅς σχηματίζουν αἱ δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι).*

*3. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὰς τρεῖς διχοτόμους.*

*4. Δοθέντος εὐθυγράμμου τμήματος μέτρου α, νὰ κατασκευασθῇ δεύτερον, τοῦ ὁποίου τὸ μέτρον ἰσοῦται πρὸς* $α\sqrt[3]{2}$.

*5. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, οὗ δίδονται οἱ πόδες τῶν διχοτόμων.*

*6. Νὰ διαιρεθῇ δοθεῖσα περιφέρεια εἰς ἑπτὰ ἴσα μέρη.*

*7. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, οὗ δίδονται τὰ συμμετρικὰ τῶν κορυφῶν ὡς πρὸς τὰς ἀπέναντι πλευράς.*

*8. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, οὗ δίδεται μία διάμεσος, μία διχοτόμος καὶ ἓν ὕψος ἀγόμενα ἐκ τριῶν διαφόρων κορυφῶν.*

*9. Διὰ δοθέντος σημείου κειμένου ἐντὸς δοθείσης γωνίας νὰ ἀχθῇ τμῆμα περατούμενον ἐπὶ τῶν πλευρῶν καὶ ἔχον τὸ ἐλάχιστον δυνατὸν μῆκος.*

*10. Διὰ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα ἀποτέμνουσα ἀπὸ δύο δοθείσας περιφερείας χορδὰς ἐχούσας διαφορὰν δεδομένην.*

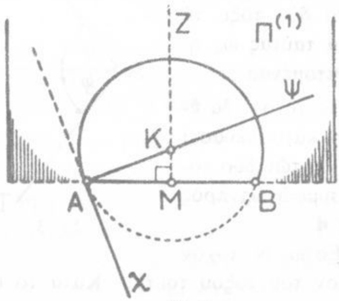
*Ἐν τοῖς ἑπομένοις θὰ πραγματευθῶμεν μόνον προβλήματα ἐπιδεχόμενα γεωμετρικὴν λύσιν.*

**2. Βασικαὶ κατασκευαί.** Αἱ ἁπλαῖ, βασικαὶ γεωμετρικαὶ κατασκευαὶ εἶναι ἤδη γνωσταὶ εἰς τὸν μαθητὴν ἀπὸ τὴν προηγουμένην τάξιν. (Ἐπ' αὐτῶν βλέπε ἀσκήσεις 1 ἕως 10). Θὰ προσθέσωμεν μερικὰς ἀκόμη καθὼς καὶ παραδείγματα συνθετωτέρων κατασκευῶν.

**3. Ἡμιεφαπτομένη τόξου.** Κάθε τόξον $\widehat{AB}$ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἑνὸς ἐκ τῶν δύο ἡμιεπιπέδων, τὰ ὁποῖα ὁρίζει ἡ ευθΑΒ. Καλεῖται **ἡμιεφαπτομένη** ἑνὸς τόξου $\widehat{AB}$ εἰς τὸ ἄκρον Α ἡ ἡμιευθεῖα Αx ἡ φερομένη ἐπὶ τῆς εἰς τὸ Α ἐφαπτομένης καὶ κειμένη ὡς πρὸς τὴν ευθ ΑΒ εἰς τὸ ἡμιεπίπεδον, τὸ **μὴ περιέχον** τὸ τόξον $\widehat{AB}$.

**4. Νὰ κατασκευασθῇ τόξον, ὅταν δίδεται ἡ χορδή του ΑΒ καὶ ἡ ἡμιεφαπτομένη του ΑΧ.**

**Ἀνάλυσις.** Τὸ κέντρον τοῦ ζητουμένου τόξου κεῖται ἀφ' ἑνὸς ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου τοῦ τμήματος ΑΒ (σχ. 1) καὶ ἀφ' ἑτέρου ἐπὶ τῆς εἰς τὸ Α καθέτου ἐπὶ τὴν ΑΧ.



Σχ. 1

**Σύνθεσις.** Φέροντες τὰς δύο ἀνωτέρω εὐθείας ΜΖ καὶ ΑΨ (σχ. 1) προσδιορίζομεν διὰ τῆς ἀλληλοτομῆς των, τὸ κέντρον Κ τοῦ ζητουμένου τόξου. Μὲ κέντρον Κ καὶ ἀκτῖνα ΚΑ γράφομεν τόξον $\widehat{AB}$ κείμενον ἐπὶ τοῦ ἡμιεπιπέδου $\Pi^{(1)}$ τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ τῆς ευθ ΑΒ καὶ μὴ περιέχοντος τὴν ἡμιευθεῖαν ΑΧ. (Τόξον μὴ περιεχόμενον ἐντὸς τῆς γωνίας $B\widehat{A}X$). Προφανῶς τὸ πρόβλημα ἔχει πάντοτε μίαν λύσιν (ἐφ' ὅσον βεβαίως αἱ εὐθεῖαι ΑΧ, ΑΒ δὲν ταὐτίζονται).

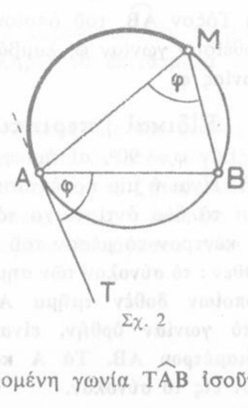
## ΤΟΞΟΝ ΙΚΑΝΟΝ ΓΩΝΙΑΣ φ

**5. α') Πρόβλημα. «Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν σημείων Μ, ἀπὸ τῶν ὁποίων δοθὲν τμῆμα ΑΒ φαίνεται ὑπὸ δοθεῖσαν κυρτὴν γωνίαν ($\neq 0$ καὶ $\neq 180^0$)».**

Ἔστω Μ ἓν σημεῖον τοῦ συνόλου, δηλαδὴ τοιοῦτον, ὥστε :

$A\widehat{M}B = \varphi$ (δοθεῖσα κυρτὴ γωνία) (σχ. 2).

Τὸ σημεῖον Μ δὲν κεῖται ἐπὶ τοῦ τμήματος ΑΒ (θὰ εἴχομεν τότε $\varphi = 180^0$) οὔτε ἐπὶ τῆς προεκτάσεώς του (θὰ εἴχομεν $\varphi = 0$)· συνεπῶς διὰ τῶν Α, Μ, Β διέρχεται περιφέρεια. Θεωροῦμεν τώρα τὸ **τόξον** $\widehat{AMB}$ τὸ περιέχον τὸ Μ καὶ τὴν ἡμιεφαπτομένην αὐτοῦ ΑΤ κατὰ τὸ ἄκρον Α (§ **3**). Τότε ἡ ὑπὸ τῆς χορδῆς

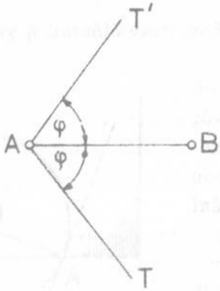


Σχ. 2

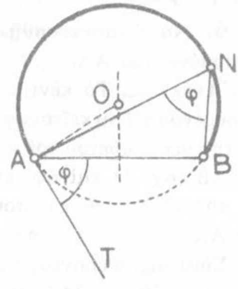
ΑΒ καὶ τῆς ἡμιεφαπτομένης ΑΤ σχηματιζομένη γωνία $T\widehat{A}B$ ἰσοῦται μὲ τὴν $A\widehat{M}B$, δηλ. $T\widehat{A}B = \varphi$. Ὥστε ἡ ἡμιευθεῖα AT εἶναι **σταθερὰ** (δηλ. ἡ αὐτὴ διὰ κάθε σημεῖον M τοῦ συνόλου).

Ἑπομένως καὶ τὸ τόξον $\overset{\frown}{AMB}$ εἶναι **σταθερὸν** καὶ κατασκευάσιμον (§ **4**).

**Ἀντίστροφον.** Ἄς χαράξωμεν τὰς δ ύ ο ἡμιευθείας AT καὶ AT′ τοιαύτας, ὥστε $T\widehat{A}B = T'\widehat{A}B = \varphi$ (σχ. **3**) καὶ ἂς κατασκευάσωμεν τὰ δύο τόξα τὰ ἔχοντα ταύτας ὡς ἡμιεφαπτομένας.




Σχ. 3




Σχ. 3α

Εἰς τὸ σχ. 3α ἔχομεν κατασκευάσει τὸ ἓν ἐκ τῶν δύο τόξων συμφώνως πρὸς τὴν § **4**.

Ἔστω N τυχὸν σημεῖον τοῦ τόξου τούτου. Κατὰ τὸ θεώρημα τῆς ὑπὸ χορδῆς καὶ ἐφαπτομένης σχηματιζομένης γωνίας αἱ δύο γωνίαι $T\widehat{A}B$ καὶ $A\widehat{N}B$ εἶναι ἴσαι (ἑκάστη ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ἀντιστοίχου ἐπικέντρου AOB) καὶ ἐπειδὴ $T\widehat{A}B = \varphi \Rightarrow A\widehat{N}B = \varphi$. Δηλ. τὸ N ἔχει τὴν ἰδιότητα τῶν σημείων τοῦ συνόλου. Ὁμοία ἀπόδειξις γίνεται καὶ διὰ τὸ δεύτερον τόξον, συμμετρικὸν τοῦ πρώτου ὡς πρὸς τὴν AB.

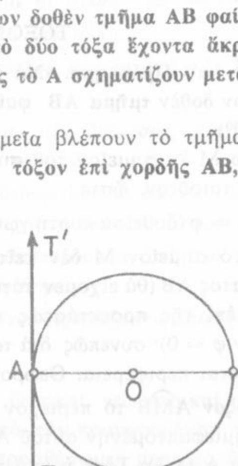
β′) Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται τὸ θεώρημα:

**«Τὸ σύνολον τῶν σημείων, ἀπὸ τῶν ὁποίων δοθὲν τμῆμα AB φαίνεται ὑπὸ δοθεῖσαν κυρτὴν γωνίαν φ, σύγκειται ἀπὸ δύο τόξα ἔχοντα ἄκρα τὰ A καὶ B καὶ τῶν ὁποίων αἱ ἡμιεφαπτόμεναι εἰς τὸ A σχηματίζουν μετὰ τῆς AB γωνίαν φ».**

γ′) Τόξον $\overset{\frown}{AB}$, τοῦ ὁποίου πάντα τὰ σημεῖα βλέπουν τὸ τμῆμα AB ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν φ, λαμβάνει τὸ ὄνομα: **τόξον ἐπὶ χορδῆς AB, ἱκανὸν γωνίας φ.**

## 6. Εἰδικαὶ περιπτώσεις.

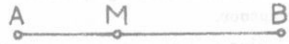
i) Ἐὰν $\varphi = 90^0$, αἱ ἡμιεφαπτόμεναι AT, AT′ εἶναι ἡ μία προέκτασις τῆς ἄλλης καὶ τὰ δύο ἀντίστοιχα τόξα ἔχουν κοινὸν κέντρον τὸ μέσον τοῦ AB.




Σχ. 4

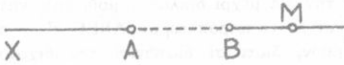
**Ὅθεν: τὸ σύνολον τῶν σημείων, ἀπὸ τῶν ὁποίων δοθὲν τμῆμα AB φαίνεται ὑπὸ γωνίαν ὀρθήν, εἶναι περιφέρεια διαμέτρου AB. Τὰ A καὶ B δὲν ἀνήκουν εἰς τὸ σύνολον.**

ii) Ἐὰν $\varphi = 180^0$, ἡ γωνία $\widehat{AMB}$ εἶναι πεπλατυσμένη, τὸ Μ εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ τμήματος ΑΒ καὶ τὸ σημειοσύνολον εἶναι τὸ τμῆμα ΑΒ (σχ. 5).




Σχ. 5

iii) Ἐὰν $\varphi = 0^0$, τὸ σημειοσύνολον ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ἡμιευθείας ΑΧ, ΒΨ, προεκτάσεις τοῦ τμήματος ΑΒ.




Σχ. 5α

## 7. Ἡ γενικὴ μέθοδος.

Ὁ γενικὸς τρόπος τοῦ σκέπτεσθαι διὰ τὴν λύσιν ἑνὸς προβλήματος κατασκευῆς εἶναι ὁ ἀκόλουθος.

i) **Ἀνάλυσις.** Τὸ πρῶτον καὶ κυριώτερον βῆμα πρὸς τὴν λύσιν εἶναι ἡ ἀ ν ά λ υ σ ι ς τοῦ προβλήματος, ἤτοι ἡ συσχέτισις τοῦ ἀγνώστου σχήματος μὲ ἄλλο σχῆμα, τοῦ ὁποίου ἤδη γνωρίζομεν τὴν κατασκευήν. Ἀνάλυσις λοιπὸν εἶναι *ἡ ἀναγωγὴ τοῦ ἀγνώστου εἰς γνωστόν*. Κατ' αὐτὴν ὑποθέτομεν προσωρινῶς τὸ πρόβλημα **δυνατὸν** καὶ τὸ ζητούμενον σχῆμα **κατεσκευασμένον.** Κατόπιν μελετῶντες τὰ δεδομένα, ἐπιδιώκομεν νὰ φέρωμεν κ α τ α λ λ ή λ ο υ ς γ ρ α μ μ ά ς, διὰ τῶν ὁποίων, χρησιμοποιοῦντες τὰ δεδομένα (δηλ. τὰ γνωστὰ στοιχεῖα), νὰ δημιουργήσωμεν δεύτερον σχῆμα, κ α τ α σ κ ε υ ά σ ι μ ο ν καὶ ἀ λ λ η λ έ ν δ ε τ ο ν μὲ τὸ ζητούμενον. Ὥστε κατασκευασθέντος τοῦ δευτέρου νὰ προκύπτῃ καὶ τὸ πρῶτον.

ii) **Σύνθεσις.** Βάσει τῶν συμπερασμάτων τῆς ἀναλύσεως προσπαθοῦμεν νὰ ἀνασυγκροτήσωμεν (κατασκευάσωμεν) τὸ ζητούμενον σχῆμα διὰ τοῦ κανόνος καὶ διαβήτου. Ἡ ἐργασία αὐτὴ εἶναι ἡ **ἀντίστροφος** τῆς ἀναλύσεως, διότι τώρα μεταβαίνομεν ἀπὸ γνωστοῦ σχήματος εἰς τὸ ζητούμενον.

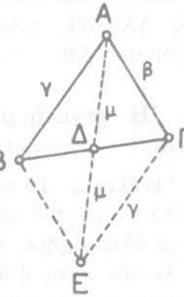
iii) **Ἀπόδειξις.** Ἀποδεικνύομεν ὅτι τὸ κατασκευασθὲν σχῆμα ἀνταποκρίνεται πλήρως πρὸς τὰ δεδομένα (πληροῖ τὰ ἐπιτάγματα τοῦ προβλήματος).

iv) **Διερεύνησις.** Ἀναζητοῦμεν τὰς συνθήκας, εἰς τὰς ὁποίας πρέπει νὰ ὑπόκεινται τὰ δεδομένα, ἵνα τὸ πρόβλημα εἶναι δυνατόν, δηλ. αἱ ἐνδεικνυόμεναι κατασκευαὶ εἶναι πραγματοποιήσιμοι καὶ τὸ ζητούμενον σχῆμα ὄντως ὑπάρχῃ. Τὸ πλῆθος τῶν δυνατῶν λύσεων, δηλ. ἡ ὕπαρξις διαφορετικῶν σχημάτων πληρούντων τὰ ἴδια δεδομένα ἐπιτάγματα εἶναι ἐπίσης ἀντικείμενον τῆς διερευνήσεως.

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΤΗΣ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ

**8. —Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ δύο πλευρῶν καὶ τῆς μεταξὺ αὐτῶν περιεχομένης διαμέσου.**

i) *Ἀνάλυσις.* Ἔστω ὅτι τὸ ζητούμενον τρίγωνον κατεσκευάσθη καὶ εἶναι τὸ ΑΒΓ (σχ. 6). Γνωρίζομεν τὴν ΑΒ = γ, τὴν ΑΓ = β καὶ τὴν διάμεσον ΑΔ = μ. Ἐὰν προεκτείνωμεν τὴν ΑΔ μέχρι διπλασιασμοῦ, δηλ. κατὰ τμῆμα ΔΕ = ΑΔ, ἑνώσωμεν δὲ τὸ Ε μὲ τὰ Β καὶ Γ, τὸ τετράπλευρον ΑΒΕΓ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι αἱ διαγώνιοί του διχοτομοῦνται. Ὥστε καὶ ΓΕ = ΑΒ = γ. Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι τὰ μήκη ΑΓ = β, ΓΕ = γ, ΑΕ = 2μ εἶναι δεδομένα, ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΕΓ εἶναι κατασκευάσιμον, διότι γνωρίζομεν τὰς τρεῖς πλευράς του. Ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΓΕ προκύπτει τὸ ζητούμενον τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν ἑνώσωμεν τὸ Γ μὲ τὸ μέσον Δ τῆς ΑΕ, προεκτείνωμεν τὴν ΓΔ κατὰ μῆκος ΔΒ = ΓΔ καὶ φέρωμεν τὴν ΑΒ.



Σχ. 6

ii) *Σύνθεσις.* Κατασκευάζομεν τρίγωνον ΑΕΓ, τοῦ ὁποίου αἱ τρεῖς πλευραὶ νὰ ἔχουν μήκη ΑΓ = β, ΓΕ = γ, ΕΑ = 2μ. Ἑνοῦμεν τὸ Γ μὲ τὸ μέσον Δ τῆς ΑΕ, προεκτείνομεν τὴν ΓΔ κατὰ ΔΒ = ΓΔ καὶ φέρομεν τὴν ΑΒ. Τὸ τρ.ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

iii) *Ἀπόδειξις.* Λόγῳ τοῦ παραλληλογράμμου, εἶναι ΑΒ = ΓΕ = γ, δηλ. τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει τὴν δοθεῖσαν πλευρὰν γ, ἔχει προφανῶς καὶ τὴν β καὶ ἔχει καὶ διάμεσον ΑΔ ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν μ, καθ' ὅσον $ΑΔ = \frac{ΑΕ}{2} = \frac{2μ}{2} = μ$.

iv) *Διερεύνησις.* Τὸ τρ.ΑΒΓ ὑπάρχει, ἂν ὑπάρχῃ τὸ τρ.ΑΕΓ. Ἡ κατασκευὴ τοῦ τελευταίου τούτου εἶναι δυνατὴ μόνον, ἂν

$$|β - γ| < 2μ < β + γ \quad \text{(Συνθῆκαι δυνατότητος).}$$

**Σημείωσις.** Αἱ κατάλληλοι γραμμαὶ κατὰ τὴν ἀνάλυσιν τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος εἶναι ἡ προέκτασις ΔΕ = ΑΔ καὶ αἱ ΕΓ, ΕΒ, διότι δι' αὐτῶν δημιουργεῖται τὸ κατασκευάσιμον τρίγωνον ΑΓΕ.

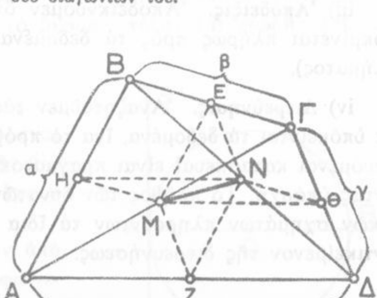
**9. Νὰ κατασκευασθῇ τετράπλευρον, τοῦ ὁποίου δίδονται τὰ μήκη τῶν τεσσάρων πλευρῶν καὶ ἡ ἀπόστασις τῶν μέσων τῶν δύο διαγωνίων του.**

i) *Ἀνάλυσις.* Ἔστω ὅτι τὸ ζητούμενον τετράπλευρον εἶναι τὸ ΑΒΓΔ (σχ. 7).

Ἂν Μ καὶ Ν τὰ μέσα τῶν διαγωνίων ΑΓ καὶ ΒΔ, ἡ ΜΝ εἶναι κατὰ μέγεθος γνωστή. Ὁμοίως καὶ αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ.

Ἐὰν τώρα τὸ μέσον Μ τῆς ΑΓ ἑνωθῇ μὲ τὸ μέσον Ε τῆς ΒΓ, ἡ ΜΕ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ΑΒ καὶ ἑπομένως γνωστή.

Ὁμοίως ἡ $ΝΕ = \frac{1}{2}$ ΓΔ, ἄρα ἡ ΝΕ γνωστή. Ὥστε τὸ τρίγωνον ΜΕΝ εἶναι



Σχ. 7

κατασκευάσιμον. Ὁμοίως, ἂν Ζ τὸ μέσον τῆς ΑΔ, τὸ τρίγωνον ΜΝΖ εἶναι κατασκευάσιμον, διότι πάλιν γνωρίζομεν τὰς τρεῖς πλευράς του:

$$\text{ΜΝ},\ \text{ΜΖ} = \frac{1}{2}\ \text{ΓΔ},\ \ \text{ΝΖ} = \frac{1}{2}\ \text{ΑΒ}.$$

Ἐπίσης, ἂν ἑνώσωμεν τὰ Μ καὶ Ν μὲ τὸ μέσον Η τῆς ΒΑ, πάλιν προκύπτει κατασκευάσιμον τρίγωνον ΜΗΝ, διότι $\text{ΜΗ} = \frac{1}{2}\ \text{ΒΓ},\ \text{ΝΗ} = \frac{1}{2}\ \text{ΑΔ}$.

Τέλος, ἂν Θ τὸ μέσον τῆς ΓΔ, τότε τὸ τρίγωνον ΜΘΝ ἔχει γνωστὰς πλευράς, ἄρα κατασκευάζεται.

Τῶν τεσσάρων τούτων τριγώνων κατασκευασθέντων, εὐκόλως προκύπτει τὸ ζητούμενον τετράπλευρον. Διότι ἡ εὐθ ΒΓ θὰ διέρχεται διὰ γνωστοῦ σημείου Ε καὶ θὰ εἶναι //ΜΗ (τὴν ἑνοῦσαν τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ).

Ὁμοίως ἡ ΑΒ//ΜΕ, ἡ ΑΔ//ΗΝ καὶ ΓΔ//ΝΕ.

ii) *Σύνθεσις*. Λαμβάνομεν εὐθύγραμμον τμῆμα ΜΝ ἴσον πρὸς τὸ συνδέον τὰ μέσα τῶν διαγωνίων καὶ ἐπ' αὐτοῦ ὡς βάσεως κατασκευάζομεν τρίγωνον ΜΕΝ ἔχον τὰς δύο ἄλλας πλευρὰς ΜΕ καὶ ΝΕ ἀντιστοίχως ἴσας πρὸς $\frac{\alpha}{2}$ καὶ $\frac{\gamma}{2}$ (ὅπου α, β, γ, δ τὰ δοθέντα μήκη τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ). Κατόπιν φέροντες τὴν ΝΖ// ΜΕ καὶ ΜΖ// ΕΝ κατασκευάζομεν τὸ τρ.ΜΝΖ ἔχον πλευρὰς $\text{ΜΖ} = \text{ΕΝ} = \frac{\gamma}{2},\ \text{ΝΖ} = \text{ΕΜ} = \frac{\alpha}{2}$.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον κατασκευάζομεν τὰ τρίγωνα ΜΝΗ, ΜΝΘ ἔχοντα τὴν ΜΗ $= \text{ΝΘ} = \frac{\beta}{2},\ \text{ΝΗ} = \text{ΜΘ} = \frac{\delta}{2}$.

Τέλος φέρομεν ἐκ τοῦ Ε παράλληλον τῇ ΝΘ, ἐκ τοῦ Η παράλληλον τῇ ΜΕ, ἐκ τοῦ Ζ παράλληλον τῇ ΗΝ καὶ ἐκ τοῦ Θ παράλληλον τῇ ΕΝ.

Αἱ τέσσαρες αὐται παράλληλοι σχηματίζουν τετράπλευρον ΑΒΓΔ, ὅπερ εἶναι τὸ ζητούμενον.

iii) *Ἀπόδειξις*. Ἐκ τοῦ παραλληλογράμμου ΗΒΕΜ ἔχομεν ὅτι:

$$\text{ΗΒ} = \text{ΜΕ} = \frac{\alpha}{2} \quad \text{καὶ ἐκ τοῦ ΑΗΝΖ, ὅτι ΑΗ} = \text{ΝΖ} = \frac{\alpha}{2}.$$

Ὥστε $\text{ΑΒ} = \text{ΗΒ} + \text{ΗΑ} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha$, δηλ. τὸ ΑΒΓΔ ἔχει τὴν δοθεῖσαν πλευρὰν α. Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν διὰ τῶν παραλληλογράμμων, ὅτι ΒΓ = β, ΓΔ = γ, ΑΔ = δ. Μένει ἀκόμη ν' ἀποδείξωμεν ὅτι τὰ Μ καὶ Ν εἶναι τὰ μέσα τῶν διαγωνίων.

Πράγματι τὸ μέσον τῆς ΑΓ δὲν δύναται νὰ εἶναι ἄλλο ἀπὸ τὸ Μ, καθ' ὅσον $\text{ΕΜ} // = \frac{1}{2}\ \text{ΒΑ}$. Ὁμοίως τὸ Ν εἶναι τὸ μέσον τῆς ΒΔ, διότι $\text{ΕΝ} // = \frac{1}{2}\ \text{ΓΔ}$.

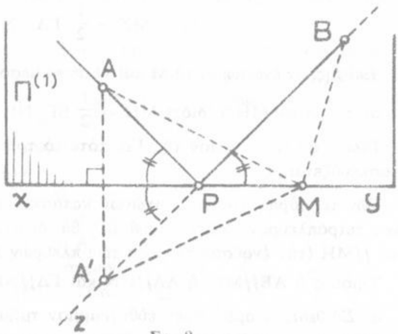
iv) Διερεύνησις. Διὰ νὰ εἶναι τὸ πρόβλημα δυνατόν, ἀρκεῖ νὰ κατασκευάζωνται τὰ τρίγωνα ΕΜΝ, ΗΜΝ. Αἱ συνθῆκαι δυνατότητος εἶναι:

$$\frac{|\alpha-\gamma|}{2} < \text{ΜΝ} < \frac{\alpha+\gamma}{2} \quad \text{καὶ} \quad \frac{|\beta-\delta|}{2} < \text{ΜΝ} < \frac{\beta+\delta}{2}.$$

**10. Δίδεται εὐθεῖα xy καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β ἐπὶ τοῦ ἑνὸς τῶν ἡμιεπιπέδων, τὰ ὁποῖα ὁρίζει ἡ xy. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Ρ τῆς xy τοιοῦτον, ὥστε :**

$\widehat{x\text{ΡΑ}} = \widehat{y\text{ΡΒ}}$.

i) *Ἀνάλυσις*. Ἔστω P τὸ ζητούμενον σημεῖον (σχ. 8). Ἐπειδὴ $y\widehat{P}B = x\widehat{P}A$, διὰ τοῦτο ἡ προέκτασις (P, Z) τῆς ἀκτῖνος (P, B) (δηλ. τῆς **ἡμιευθείας** PB ἀρχομένης ἐκ τοῦ P καὶ περιεχούσης τὸ B) εἶναι συμμετρικὴ τῆς ἀκτῖνος (P, A) ὡς πρὸς τὴν xy καὶ περιέχει καὶ τὸ συμμετρικὸν A′ τοῦ A. Ὥστε τὸ P κεῖται ἐπὶ τῆς γνωστῆς εὐθείας A′B.



Σχ. 8

ii) *Σύνθεσις*. Εὑρίσκομεν τὸ συμμετρικὸν A′ τοῦ A ὡς πρὸς τὴν xy καὶ τὸ συνδέομεν μὲ τὸ B. Ἡ τομὴ τοῦ τμήματος A′B μετὰ τῆς xy εἶναι τὸ ζητούμενον σημεῖον P.

iii) *Ἀπόδειξις*. Τὸ A′ καὶ τὸ A κεῖνται ἐπὶ δύο ἀντιθέτων ἡμιεπιπέδων ὡς πρὸς τὴν xy, ἄρα καὶ τὸ A′ μὲ τὸ B. Διὰ τοῦτο τὸ τμῆμα A′B τέμνει τὴν xy εἰς σημεῖον P, μεταξὺ A′ καὶ B. Ἔχομεν δέ: $y\widehat{P}B = x\widehat{P}Z$ (κατὰ κορυφὴν) καὶ $x\widehat{P}Z = x\widehat{P}A$ (συμμετρικαί), ἄρα $x\widehat{P}A = y\widehat{P}B$.

iv) *Διερεύνησις*. Ὡς προκύπτει ἐκ τῆς ἀποδείξεως, τὸ πρόβλημα ἔχει πάντοτε μίαν λύσιν.

**11. Δοθείσης εὐθείας xy καὶ δύο σημείων A καὶ B πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου ὡς πρὸς τὴν xy, ὁ συντομώτερος δρόμος ὁ ἄγων ἐκ τοῦ A εἰς τὸ B καὶ ἐγγίζων τὴν xy εἶναι μία τεθλασμένη APB τοιαύτη, ὥστε:**

$$x\widehat{P}A = y\widehat{P}B. \qquad (P \in xy)$$

*Ἀπόδειξις*. Ἀπὸ τὸ προηγούμενον πρόβλημα γνωρίζομεν ὅτι τὸ P κεῖται ἐπὶ τοῦ τμήματος A′B (σχ. 8) καὶ ὅτι

(1) $PA + PB = A'B$ (διότι $PA = PA'$).

Ἐὰν M εἶναι τυχὸν ἄλλο σημεῖον τῆς xy, τότε, ἐπειδὴ $MA = MA'$ (λόγῳ συμμετρίας), διὰ τοῦτο:

(2) $MA + MB = MA' + MB$.

Τέλος ἐκ τοῦ τριγώνου A′MB εἶναι

(3) $A'B < MA' + MB$.

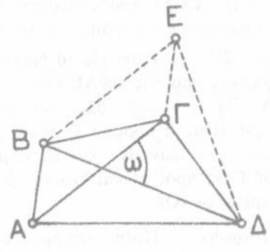
Βάσει τῶν (1) καὶ (2) ἡ (3) δίδει: $PA + PB < MA + MB$, ἤτοι ὁ δρόμος APB εἶναι συντομώτερος οἱουδήποτε ἄλλου δρόμου AMB τῆς αὐτῆς οἰκογενείας.

(Ἂν $M \in xy$, τότε $MA + MB = \text{minimum}$, ὅταν $x\widehat{M}A = y\widehat{M}B$).

**12. Μεταφορὰ τμήματος.** Λέγομεν ὅτι τὸ τμῆμα AB μεταφέρεται εἰς τὸ τμῆμα ΚΛ, ὅταν ΚΛ//= AB καὶ ΑΚΛΒ παρ/μον.

**— Νὰ κατασκευασθῇ τετράπλευρον ΑΒΓΔ, οὗτινος δίδονται αἱ διαγώνιοι, δύο ἀπέναντι πλευραὶ AB, ΓΔ καὶ ἡ γωνία ω τῶν διαγωνίων ἡ περιέχουσα τὴν ΓΔ.**

*Ἀνάλυσις.* Ἐὰν χαράξωμεν τὸ τμῆμα ΒΔ (σχ. 9), τότε μένει νὰ προσδιορισθοῦν τὰ Α καὶ Γ. Ἐπειδὴ δὲ τὸ τμῆμα ΑΓ εἶναι τότε, ὄχι μόνον κατὰ μέγεθος, ἀλλὰ καὶ κατὰ διεύθυνσιν, γνωστὸν (λόγῳ τῆς δοθείσης γωνίας $\widehat{\omega}$), διὰ τοῦτο τὸ μεταφέρομεν εἰς ΒΕ, δηλ. ΒΕ//= ΑΓ, ὁπότε προκύπτουν **κατασκευάσιμα** τρίγωνα. Τὸ τρ.ΔΒΕ κατασκευάζεται ἐκ τῶν πλευρῶν ΒΔ καὶ ΒΕ ( = ΑΓ) καὶ τῆς περιεχομένης γωνίας $\widehat{ΕΒΔ}=\omega$ καὶ τὸ $^{\triangle}$ΕΓΔ ἐκ τῶν τριῶν πλευρῶν: ΕΓ = ΒΑ, ΓΔ καὶ ΕΔ (γνωστὴ ἐκ τοῦ τρ.ΕΒΔ). Ἡ σύνθεσις καὶ ἀπόδειξις εἶναι εὔκολοι.

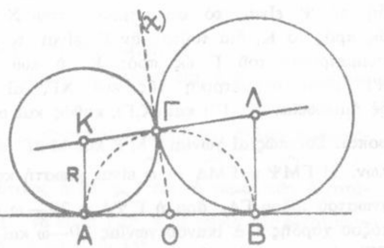


Σχ. 9

*Διερεύνησις.* Τὸ τρ.ΕΒΔ κατασκευάζεται πάντοτε. Τὸ σημεῖον Γ προσδιορίζεται, ἐφ' ὅσον $|ΓΔ - ΓΕ| < ΕΔ \leqq ΓΔ + ΓΕ$ (ὅπου ΓΕ = ΑΒ). Ἐπειδὴ ἐν γένει τὸ Γ δύναται νὰ τοποθετηθῇ εἰς δύο θέσεις, συμμετρικὰς ὡς πρὸς τὴν ΕΔ, διὰ τοῦτο τὸ πρόβλημα ἔχει δύο, τὸ πολύ, λύσεις.

**13. Δίδεται εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ καὶ περιφέρεια (Κ, R) ἐφαπτομένη τῆς ευθ ΑΒ εἰς Α. Νὰ κατασκευασθῇ περιφέρεια ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου (Κ, R) καὶ τῆς ευθ ΑΒ εἰς Β.**

Θὰ περιορισθῶμεν μόνον εἰς τὴν ἀνάλυσιν τοῦ προβλήματος. Ἔστω (Λ, ΛΒ) ἡ ζητουμένη περιφέρεια καὶ Γ τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τῶν δύο περιφερειῶν. Ἐφ' ὅσον αἱ δύο περιφέρειαι ἐφάπτονται εἰς Γ, θὰ ἔχουν καὶ μίαν κοινὴν ἐφαπτομένην (x) εἰς τὸ σημεῖον Γ. Ἔστω Ο τὸ σημεῖον τομῆς τῆς (x) μετὰ τοῦ ΑΒ. Τότε θὰ εἶναι: ΟΑ = ΟΓ καὶ ΟΓ = ΟΒ (ἐφαπτόμενα τμήματα ἐκ σημείου πρὸς περιφέρειαν). Ὥστε τὸ Ο εἶναι κέντρον περιφερείας διερχομένης διὰ τῶν Α, Γ, Β. Τὸ Γ λοιπὸν ὁρίζεται, ὡς τομὴ τῆς (Κ,R) καὶ τῆς μὲ διάμετρον ΑΒ γραφομένης. Τὸ Λ κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς ευθ ΚΓ καὶ ἐπὶ τῆς εἰς τὸ Β καθέτου ἐπὶ τὴν ΑΒ.



Σχ. 10

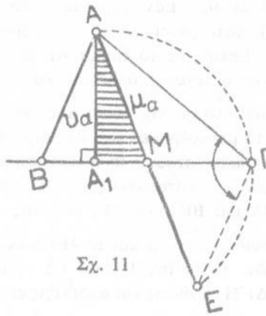
**14. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῆς γωνίας $\widehat{A}$, τοῦ ὕψους $ΑΑ_1 = \upsilon_\alpha$ καὶ τῆς διαμέσου $ΑΜ = \mu_\alpha$.**

*Ἀνάλυσις.* (σχ. 11). Τὸ τρ.$ΑΑ_1Μ$ κατασκευάζεται. Ἂς διπλασιάσωμεν τὴν διάμεσον: ΑΜ=ΜΕ. Ἐκ τοῦ σχηματιζομένου παρ|μου ΑΓΕΒ συνάγεται ὅτι $\widehat{ΑΓΕ} = 2^D - \widehat{A}$ (*). Τὸ Γ βλέπει τὸ γνωστὸν τμῆμα ΑΕ ὑπὸ γωνίαν γνωστήν, ἄρα κεῖται ἐπὶ τόξου χορδῆς ΑΕ καὶ ἱκανοῦ γωνίας $2^D - \widehat{A}$, ἐπίσης τὸ Γ κεῖται ἐπὶ τῆς γνωστῆς εὐθείας $Α_1Μ$, ἄρα προσδιορίζεται ὡς τομὴ τῶν δύο τούτων γραμμῶν.

---

(*) Διὰ τὸν συμβολισμὸν τῆς ὀρθῆς γωνίας μεταχειριζόμεθα συνήθως τὸ σύμβολον $1^D$, ἀλλ' ἐπίσης καὶ τὰ σύμβολα 1ορθ ἢ $90^0$

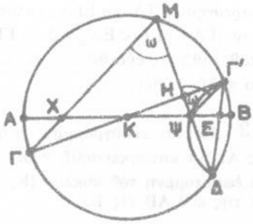
*Σύνθεσις*. Κατασκευάζομεν τὸ ὀρθογώνιον τρίγ. $AA_1M$, προεκτείνομεν: $ME = MA$ καὶ γράφομεν ἐπὶ χορδῆς ΑΕ τόξον ἱκανὸν γωνίας $2^D - \widehat{A}$, ἔστω εἰς τὸ ἡμιεπίπεδον τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῆς ευθΑΕ καὶ μὴ περιέχον τὸ $A_1$. Ἡ τομὴ τοῦ τόξου τούτου καὶ τῆς ευθ$A_1M$ εἶναι ἡ κορυφὴ Γ τοῦ ζητουμένου τριγώνου. Λαμβάνομεν καὶ τὸ συμμετρικὸν Β τοῦ Γ ὡς πρὸς Μ καὶ ἔχομεν τὸ ζητούμενον τρίγωνον ΑΒΓ.



Σχ. 11

*Διερεύνησις*. Πρέπει καὶ ἀρκεῖ $\upsilon_\alpha \leqq \mu_\alpha$.

**15. Δίδεται περιφέρεια (Κ), διάμετρος αὐτῆς ΑΒ καὶ δύο σημεῖα Γ καὶ Δ ἐπὶ τῆς μιᾶς τῶν ἡμιπεριφερειῶν, τὰς ὁποίας ὁρίζει ἡ ΑΒ. Ζητεῖται νὰ κατασκευασθῇ σημεῖον Μ ἐπὶ τῆς ἑτέρας ἡμιπεριφερείας τοιοῦτον, ὥστε αἱ εὐθεῖαι ΜΓ καὶ ΜΔ νὰ τέμνουν τὴν ΑΒ εἰς δύο σημεῖα Χ καὶ Ψ συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ κέντρον Κ. (σχ. 12).**

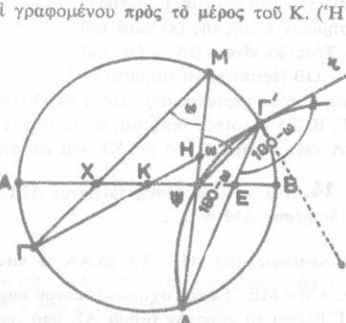


Σχ. 12

*Ἀνάλυσις*. Ἔστω $A\Gamma < A\Delta$. Ἐπειδὴ τὸ Ψ εἶναι τὸ συμμετρικὸν τοῦ Χ ὡς πρὸς τὸ Κ, διὰ τοῦτο, ἂν Γ' εἶναι τὸ συμμετρικὸν τοῦ Γ ὡς πρὸς Κ, ἡ ευθ ΨΓ' εἶναι συμμετρικὴ τῆς ευθ ΧΓ, αἱ δὲ ἡμιευθεῖαι (Ψ, Γ') καὶ (Χ,Γ), καθὼς καὶ αἱ (Ψ,Γ') καὶ (Μ, Γ) παράλληλοι καὶ ἀντίρροποι. Συνεπῶς αἱ γωνίαι $\widehat{\Gamma M \Psi}$ καὶ $\widehat{M\Psi\Gamma'}$ εἶναι ἴσαι ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων. Ἡ $\Gamma\widehat{M}\Psi \equiv \Gamma\widehat{M}\Delta = \widehat{\omega}$ εἶναι γνωστὴ κατὰ μέγεθος ὡς ἐγγεγραμμένη βαίνουσα ἐπὶ γνωστοῦ τόξου $\widehat{\Gamma\Delta}$, ἄρα ἡ $\Gamma'\widehat{\Psi}\Delta = 2^D - \omega$ ἐπίσης γνωστή. Ἑπομένως τὸ Ψ κεῖται ἐπὶ τόξου χορδῆς Γ'Δ ἱκανοῦ γωνίας $2^D - \omega$ καὶ γραφομένου **πρὸς τὸ μέρος τοῦ Κ**. (Ἡ ευθ ΓΓ', τέμνουσα τὴν πλευρὰν ΧΨ καὶ μὴ τέμνουσα τὴν ΜΧ τοῦ τριγΜΧΨ, τέμνει τὴν πλευρὰν ΜΨ εἰς σημεῖον Η (Pasch)(*)

Τὸ Η ἀνῆκον εἰς τὸ ΜΨ, κεῖται ἐντὸς τοῦ ἡμικυκλίου ΑΜΒ, ἑπομένως δὲν κεῖται ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος ΚΓ, ἀλλ' ἐπὶ τῆς ΚΓ'. Ἡ ευθ ΜΔ, τέμνουσα τὴν πλευρὰν ΚΓ' τοῦ τριγ. ΚΓ'Ε καὶ μὴ τέμνουσα τὴν πλευρὰν Γ'Ε, τέμνει τὴν πλευρὰν $\boxed{KE}$. ἄρα τὸ Ψ κεῖται μεταξὺ Κ καὶ Ε).

*Σύνθεσις*. (σχ. 13). Γράφομεν τόξον μὲ χορδὴν Γ'Δ καὶ ἡμιεφαπτομένην Γ't (προέκτασιν τοῦ ΓΓ'). Τοῦτο εἶναι ἱκα-



Σχ. 13

(*) **Ἀξίωμα τοῦ Pasch - «Ἐὰν εὐθεῖα κειμένη ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τριγώνου ΑΒΓ καὶ μὴ διερχομένη διά τινος κορυφῆς αὐτοῦ τέμνῃ μίαν πλευρὰν τοῦ τριγώνου, τότε τέμνει μίαν καὶ μόνον μίαν ἐκ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν».**

**Πόρισμα. Εὐθεῖα τέμνουσα μίαν πλευρὰν τριγώνου καὶ μὴ τέμνουσα μίαν δευτέραν πλευρὰν αὐτοῦ τέμνει τὴν τρίτην πλευράν.**

νὸν γωνίας $\widehat{\Delta\Gamma'\iota} = 180^\circ - \widehat{\Gamma\Gamma'\Delta} = 180^\circ - \omega$ καὶ τέμνει τὸ τμῆμα ΚΕ εἰς σημεῖον Ψ. Ἡ ευθ ΔΨ ὁρίζει τὸ Μ.

*Ἀπόδειξις*. Ἔστω Χ ἡ τομὴ τῆς ΜΓ καὶ ΑΒ.

Ἐπειδὴ $\widehat{\Gamma M \Psi} = \widehat{\omega}$ καὶ $\widehat{M\Psi\Gamma'} = \widehat{\omega}$, διὰ τοῦτο αἱ εὐθεῖαι ΜΓ καὶ ΨΓ′ εἶναι παράλληλοι καὶ μάλιστα συμμετρικαὶ ὡς πρὸς Κ, ἀφοῦ τὸ Γ′ εἶναι συμμετρικὸν τοῦ Γ ὡς πρὸς Κ. Ἄρα τὰ Χ καὶ Ψ εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ Κ. (Ἡ ευθ ΜΔ τέμνουσα τὴν πλευρὰν ΚΕ τοῦ τριγ ΚΓ′Ε καὶ μὴ τέμνουσα τὴν Γ′Ε, τέμνει τὴν ΚΓ′ εἰς Η. Ἀφοῦ τὸ τμῆμα ΓΓ′ τέμνει τὴν ευθ ΜΨ, τὰ Γ καὶ Γ′ κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς ΜΨ, αἱ γωνίαι $\widehat{\Psi M \Gamma}$ καὶ $\widehat{M\Psi\Gamma'}$ κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς ΜΨ, ἄρα εἶναι ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν ΜΓ καὶ ΨΓ′ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΜΨ).

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Νὰ διαιρεθῇ δοθὲν εὐθύγραμμον τμῆμα εἰς δύο μέρη, ὧν ἡ διαφορὰ νὰ ἰσοῦται πρὸς ἄλλο δοθὲν τμῆμα.

2. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε ΜΑ + ΑΓ = ΜΒ + ΒΓ.

3. Δοθεισῶν δύο γωνιῶν τριγώνου νὰ σχηματισθῇ ἡ τρίτη.

4. Νὰ κατασκευασθῇ παρ|μον, οὗ δίδονται δύο διαδοχικαὶ πλευραὶ καὶ ἡ ὑπ' αὐτῶν περιεχομένη γωνία.

5. Ὁμοίως παρ|μον, οὗ δίδονται αἱ δύο διαγώνιοι καὶ ἡ γωνία αὐτῶν

6. Ὁμοίως, ὅταν δίδεται μία πλευρά του καὶ αἱ δύο διαγώνιοι.

7. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, οὗτινος μία πλευρὰ εἶναι 5 cm, ἡ ἀπέναντι ταύτης γωνία $75^\circ$ καὶ μία ἄλλη γωνία του $22^\circ,5$.

8. Διὰ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα σχηματίζουσα μετὰ δύο ἄλλων τεμνομένων εὐθειῶν τρίγωνον ἰσοσκελές.

9. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ, οὗτινος ἡ ΒΓ = 7 cm, ἡ γωνία τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$ ἡ περιέχουσα τὴν ΒΓ νὰ εἶναι $120^\circ$, ἡ δὲ γωνία τῆς διχοτόμου καὶ τοῦ ὕψους τῶν ἀγομένων ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α νὰ εἶναι $15^\circ$.

10. Διὰ δύο δεδομένων σημείων Α, Β νὰ ἀχθοῦν δύο εὐθεῖαι τοιαῦται, ὥστε μετὰ τρίτης δοθείσης νὰ σχηματίζουν ἰσόπλευρον τρίγωνον.

11. Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον, οὗτινος δίδεται τὸ ἄθροισμα τῆς πλευρᾶς καὶ τῆς διαγωνίου.

12. Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον, οὗτινος δίδεται ἡ διαφορὰ τῆς πλευρᾶς καὶ τῆς διαγωνίου.

13. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, οὗτινος δίδεται μία πλευρὰ καὶ δύο ὕψη, ἐξ ὧν τὸ ἓν ἄγεται ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν πλευράν.

14. Δοθέντων τριῶν σημείων μὴ κειμένων ἐπ' εὐθείας νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν εὐθεῖα ἀπέχουσα ἰσάκις ἀπὸ τὰ δύο ἄλλα.

15. Εἰς δοθὲν τετράγωνον νὰ ἐγγραφῇ τετράγωνον ἔχον μίαν κορυφὴν εἰς τυχὸν δοθὲν σημεῖον τῆς περιμέτρου τοῦ πρώτου.

16. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, οὗτινος δίδεται ἡ βάσις, μία τῶν παρ' αὐτὴν γωνιῶν καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.

17. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, οὗτινος δίδεται ἡ περίμετρος καὶ αἱ γωνίαι.

18. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ δίδεται σημεῖον Δ. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΒΓ σημεῖον Ε τοιοῦτον, ὥστε ἡ ΔΕ νὰ διχοτομῆται ὑπὸ τῆς ΑΓ.

19. Νὰ κατασκευασθῇ παρ|μον, οὗτινος δίδεται μία πλευρὰ α καὶ τὰ δύο ὕψη $υ_1$ καὶ $υ_2$.

20. Νὰ κατασκευασθῇ τραπέζιον, οὗ δίδονται αἱ τέσσαρες πλευραί.

21. Νὰ κατασκευασθῇ τραπέζιον, οὗ δίδονται αἱ βάσεις καὶ αἱ διαγώνιοι.

22. Νὰ κατασκευασθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον, οὗτινος ἡ βάσις νὰ κεῖται ἐπὶ δοθείσης εὐθείας, αἱ ἴσαι πλευραί του ἢ αἱ προεκτάσεις των νὰ διέρχωνται διὰ δύο δοθέντων σημείων καὶ τὸ ἐπὶ τὴν βάσιν ὕψος νὰ ἰσοῦται πρὸς δοθὲν τμῆμα (βλ. **§ 10**).

23. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, οὗτινος δίδονται αἱ τρεῖς διάμεσοι (βλ. **§8**).

24. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, οὗτινος δίδεται ἡ πλευρὰ α, ἡ ἀπέναντι γωνία $\widehat{A}$ καὶ τὸ ὕψος τὸ ἀγόμενον ἐπὶ μίαν τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.

25. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῆς βάσεως, μιᾶς τῶν προσκειμένων αὐτῇ γωνιῶν καὶ τοῦ ὕψους τοῦ ἀγομένου ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς δοθείσης γωνίας.

26. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, οὗτινος δίδεται ἡ περίμετρος, μία γωνία καὶ τὸ ὕψος τὸ ἀγόμενον ἐπὶ μίαν τῶν πλευρῶν τῆς δοθείσης γωνίας.

27. Νὰ κατασκευασθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον, οὗτινος δίδονται τὰ ὕψη.

28. Νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα ἀποτέμνουσα ἀπὸ δύο κύκλους χορδὰς ἐχούσας δεδομένα μήκη.

29. Νὰ ἀχθοῦν ἐφαπτόμεναι κύκλου παράλληλοι πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν.

30. Νὰ κατασκευασθῇ παρ|μον ἔχον δύο διαδοχικὰς κορυφὰς δεδομένας καὶ τὰς δύο ἄλλας κειμένας ἐπὶ δοθείσης περιφερείας.

31. Νὰ κατασκευασθῇ παρ|μον ἔχον δύο ἀπέναντι κορυφὰς δεδομένας καὶ τὰς δύο ἄλλας κειμένας ἐπὶ δοθείσης περιφερείας.

32. Νὰ γραφῇ περιφέρεια διερχομένη διὰ δύο δεδομένων σημείων καὶ τέμνουσα δοθεῖσαν περιφέρειαν οὕτως, ὥστε ἡ κοινὴ χορδὴ νὰ εἶναι παράλληλος δοθείσῃ εὐθείᾳ.

33. Δοθέντων δύο ἴσων κύκλων (Κ, R), (Λ, R) ἐκτὸς ἀλλήλων, νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα // ΚΛ, τέμνουσα κατὰ σειρὰν τὰς περιφερείας εἰς Α, Β, Γ, Δ οὕτως, ὥστε ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ.

34. Δοθείσης περιφερείας (Κ, R) καὶ σημείου Λ ζητεῖται νὰ γραφῇ μὲ κέντρον τὸ Λ περιφέρεια τοιαύτη, ὥστε τὸ μῆκος τῆς κοινῆς ἐξωτερικῆς ἐφαπτομένης αὐτῆς καὶ τῆς (Κ, R) νὰ ἰσοῦται πρὸς δοθὲν μῆκος $l$.

35. Ἔστω ΑΒ χορδὴ περιφερείας (Κ, R). Ζητεῖται νὰ κατασκευασθῇ χορδὴ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ διαιρουμένη ὑπὸ τῆς ΑΒ εἰς δύο μέρη, ὧν τὸ ἓν εἶναι τριπλάσιον τοῦ ἄλλου.

36. Δίδεται ταινία καὶ δύο σημεῖα Ο καὶ Α μὴ κείμενα ἐπὶ τῶν παρ|λων τῶν ὁριζουσῶν τὴν ταινίαν. Ζητεῖται νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ Ο εὐθεῖα τέμνουσα τὰς παρ|λους εἰς Μ καὶ Ν οὕτως, ὥστε: ΑΜ = ΑΝ.

**Μεταφορά.**

37. Δοθέντος τριγώνου ΑΒΓ νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος τῇ βάσει ΒΓ καὶ τέμνουσα τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς Μ καὶ Ν οὕτως, ὥστε ΑΜ = ΓΝ.

(Ὑποδ. : Ἂν μεταφέρωμεν (**§ 12**) τὸ ΝΓ εἰς ΜΔ, τὸ Δ, (ἐπὶ τῆς ΒΓ), προσδιορίζεται).

38. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ζητεῖται νὰ ἀχθῇ τμῆμα ἴσον πρὸς δοθὲν καὶ περατούμενον ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν τοιαῦτα, ὥστε ΑΜ = ΓΝ.

(Ὑποδ.: Ἂν μεταφέρωμεν τὸ ΝΓ εἰς ΜΔ, τὸ Δ προσδιορίζεται).

39. Νὰ κατασκευασθῇ τετράπλευρον, οὗτινος δίδονται τὰ μήκη τῶν τεσσάρων πλευρῶν καὶ ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν δύο ἀπέναντι πλευραί του προεκτεινόμεναι.

40. Ζητεῖται νὰ κατασκευασθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, οὗτινος ἡ βάσις ΒΓ νὰ κεῖται ἐπὶ δοθείσης εὐθείας xy καὶ νὰ ἔχῃ δεδομένον μῆκος, ἐνῷ αἱ ἴσαι πλευραί του ΑΒ, ΑΓ νὰ διέρχωνται διὰ δύο δεδομένων σημείων Δ καὶ Ε ἀντιστοίχως, κειμένων πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς xy.

('Υποδ.: Ἂν μεταφέρωμεν τὸ ΒΓ εἰς ΔΟ, ἡ εὕρεσις τοῦ Γ ἀνάγεται εἰς §10).

**Συμμετρία.**

41. Δοθεισῶν τριῶν εὐθειῶν (α), (β), (γ) νὰ εὑρεθῇ ἓν σημεῖον Α ἐπὶ τῆς (α) καὶ ἓν σημεῖον Β ἐπὶ τῆς (β) οὕτως, ὥστε ἡ (γ) νὰ εἶναι μεσοκάθετος τοῦ ΑΒ.

42. Δίδονται δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι καὶ ἓν σημεῖον Μ, ἐπὶ οὐδεμιᾶς τούτων κείμενον. Νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ Μ εὐθεῖα, τῆς ὁποίας τὸ μεταξὺ τῶν δύο δοθεισῶν εὐθειῶν μέρος νὰ διχοτομῆται ὑπὸ τοῦ Μ.

43. Νὰ κατασκευασθῇ τμῆμα ἔχον δοθὲν μέσον, τὰ δὲ ἄκρα του ἐπὶ δοθείσης εὐθείας τὸ ἓν καὶ ἐπὶ δοθείσης περιφερείας τὸ ἄλλο.

44). i) Κατασκευάσατε τὸ συμμετρικὸν περιφερείας ὡς πρὸς δοθὲν κέντρον συμμετρίας. ii) Νὰ κατασκευασθῇ τμῆμα ἔχον δοθὲν μέσον, τὰ δὲ ἄκρα του ἐπὶ δύο δοθεισῶν περιφερειῶν.

45) Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, οὗτινος δίδεται ἡ εὐθεῖα, ἐφ' ἧς κεῖται ἡ βάσις του, ἡ εὐθεῖα, ἐφ' ἧς κεῖται ἡ διχοτόμος τῆς ἀπέναντι τῆς βάσεως γωνίας καὶ δύο σημεῖα, δι' ὧν διέρχονται ἑκάστη ἐκ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν (ἐν ἀνάγκῃ προεκτεινομένη).

46. i) Κατασκευάσατε τὸ συμμετρικὸν περιφερείας ὡς πρὸς δοθέντα ἄξονα συμμετρίας. ii) Δίδεται ἡ εὐθεῖα xy καὶ δύο περιφέρειαι κείμεναι εἰς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς xy σημεῖον Ρ τοιοῦτον, ὥστε ἂν ἀχθοῦν ἐκ τοῦ Ρ δύο εὐθεῖαι ΡΖ, ΡΤ ἐφαπτόμεναι ἀντιστοίχως τῶν δύο περιφερειῶν, νὰ εἶναι: $\widehat{xPZ} = \widehat{yPT}$.

47. Δίδεται εὐθεῖα (ε) καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β ἄνισον ἀπέχοντα ἀπὸ ταύτης. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς (ε) τὸ σημεῖον ἐκεῖνο Μ, διὰ τὸ ὁποῖον ἡ $|MA - MB|$ εἶναι ἡ μεγίστη δυνατή.

48. Ἐντὸς τριγώνου ΑΒΓ δίδεται σημεῖον Ε. Ζητεῖται ποῖον δρόμον πρέπει νὰ ἀκολουθήσῃ ὑλικὸν σημεῖον, τὸ ὁποῖον, ἀφοῦ ἐκσφενδονισθῇ ἐκ τοῦ Ε καὶ ἀνακλασθῇ ἐπὶ τῶν τριῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου (κατὰ τοὺς νόμους τῆς ἀνακλάσεως τοῦ φωτός), νὰ διέλθῃ πάλιν διὰ τοῦ Ε.

**Διάφορα ἄλλα προβλήματα κατασκευῶν.**

49. i) Γνωρίζοντες τὴν $\widehat{A}$ καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ὑψῶν $υ_β + υ_γ = c$ τριγώνου ΑΒΓ, κατασκευάσατε τὸ ἄθροισμα $β + γ$.

ii) Ἐκ τῆς $\widehat{A}$ καὶ τῆς διαφορᾶς $υ_γ - υ_β = c$ δείξατε ὅτι δύναται νὰ κατασκευασθῇ ἡ διαφορὰ $β - γ$.

iii) Ἐκ τῶν $β + γ$ καὶ $υ_β + υ_γ$ κατασκευάσατε τὴν $\widehat{A}$.

iv) Ἐκ τῶν $υ_γ - υ_β$ καὶ $β - γ$ δείξατε ὅτι ὁρίζεται ἡ $\widehat{A}$.

50). Δίδεται ὀξεῖα γωνία $\widehat{xOy}$, ἡ διχοτόμος αὐτῆς Οt, σημεῖον Α ἐντὸς τῆς $\widehat{xOt}$ καὶ σημεῖον Β ἐντὸς τῆς $\widehat{tOy}$. Ἔστωσαν Α' καὶ Β' τὰ συμμετρικὰ τῶν Α καὶ Β ὡς πρὸς τὰς εὐθείας Οx, Οy ἀντιστοίχως. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ τμῆμα Α'Β' τέμνει τὰς ἡμιευθείας Οx, Οy εἰς σημεῖα $Γ_0$ καὶ $Δ_0$ ἀντιστοίχως καὶ ὅτι ὁ δρόμος $ΑΓ_0Δ_0Β$ εἶναι συντομώτερος παντὸς ἄλλου ΑΓΔΒ, ὅπου ΓЄΟx καὶ ΔЄΟy.

51. Νὰ κατασκευασθῇ παρ/μον, τοῦ ὁποίου δίδονται τὰ μέσα τριῶν πλευρῶν.

52. Νὰ κατασκευασθῇ παρ/μον, οὗτινος δίδονται τὰ δύο ὕψη καὶ μία διαγώνιος.

53. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, ὅταν δίδονται αἱ μεσοκάθετοι δύο πλευρῶν του καὶ τὸ μέσον τῆς τρίτης πλευρᾶς.

54. Ἐντὸς δοθέντος ἰσοπλεύρου τριγώνου νὰ ἐγγραφῇ ἄλλο οὕτως, ὥστε τὰ δύο τρίγωνα νὰ ἔχουν τὰς πλευράς των καθέτους μίαν πρὸς μίαν.

55. Ἐπὶ τοῦ ὕψους ΑΗ ὀξυγωνίου τριγ ΑΒΓ νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Ρ τοιοῦτον, ὥστε $\widehat{APB} = \widehat{BP\Gamma}$.

56. Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, οὗτινος δίδονται τὰ μήκη τῶν ΒΓ (ὑποτεινούσης) καὶ ΒΔ, ὅπου Δ ἡ τομὴ τῆς ΑΒ μετὰ τῆς διχοτόμου τῆς ὀξείας γωνίας $\widehat{\Gamma}$.

57. Νὰ κατασκευασθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον, οὗτινος δίδονται οἱ πόδες Β′, Γ′ τῶν ἴσων ὑψῶν καὶ ἓν σημεῖον Σ τῆς βάσεως.

58. Νὰ κατασκευασθῇ τριγ ΑΒΓ, οὗτινος δίδεται τὸ ἔγκεντρον Ο καὶ οἱ πόδες Β′, Γ′ τῶν ἐσωτερικῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν $\widehat{B}$, $\widehat{\Gamma}$.

59. Νὰ κατασκευασθῇ τετράπλευρον ἔχον τρεῖς πλευρὰς ἴσας, ὅταν δίδωνται τὰ μέσα τῶν τριῶν ἴσων πλευρῶν.

60. Νὰ κατασκευασθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον, ὅταν δίδεται τὸ μέσον τῆς βάσεώς του, ἡ κορυφὴ καὶ τὸ ὀρθόκεντρον.

61. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν στοιχείων $\mu_\alpha$, $\upsilon_\beta$, $\upsilon_\gamma$.

62. Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον, οὗτινος γνωρίζομεν δύο σημεῖα Π καὶ Κ κείμενα ἐπὶ τῶν φορέων τῶν δύο διαγωνίων του καὶ δύο σημεῖα Ε καὶ Ζ κείμενα ἐπὶ τῶν φορέων δύο ἀπέναντι πλευρῶν του.

**16. Μεταφορὰ σχήματος κατὰ διάνυσμα $\vec{\delta}$.** α′) Ἐὰν δοθῇ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ἓν σχῆμα F καὶ ἓν ἐλεύθερον διάνυσμα $\vec{\delta}$ καὶ ἀπὸ **κάθε** σημεῖον Μ τοῦ F φέρωμεν διάνυσμα $\overrightarrow{MM'} = \vec{\delta}$, τότε τὰ πέρατα Μ′ τῶν διανυσμάτων τούτων ἀποτελοῦν ἓν νέον σχῆμα (σημειοσύνολον) F′, τὸ ὁποῖον λέγομεν ὅτι **προκύπτει ἐκ τοῦ σχήματος F διὰ μεταφορᾶς** κατὰ διάνυσμα $\vec{\delta}$. Τὸ σχῆμα F′ λέγεται καὶ «μετεσχηματισμένον τοῦ F διὰ μεταφορᾶς κατὰ διάνυσμα $\vec{\delta}$», τὰ δὲ σημεῖα Μ′ τοῦ F′ λέγονται καὶ «εἰκόνες» τῶν ἀντιστοίχων σημείων τοῦ σχήματος F.

β′) Ἀπὸ τὰ ἀξιώματα κινήσεως (ἢ μετατοπίσεως) τοῦ χώρου προκύπτει ὅτι ὑπάρχει μία κίνησις Η μεταφέρουσα ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου κατὰ διάνυσμα $\vec{\delta}$. Ἡ κίνησις αὐτὴ Η (καλουμένη «μεταφορά») φέρει κατὰ συνέπειαν τὸ σχῆμα F εἰς τὸ F′, ἄρα τὰ σχήματα F καὶ F′ προκύπτοντα τὸ ἓν ἐκ τοῦ ἄλλου διὰ κινήσεως εἶναι ἴσα. Ὥστε **διὰ τῆς μεταφορᾶς σχήματος κατὰ διάνυσμα $\vec{\delta}$ προκύπτει σχῆμα ἴσον.**

γ′) Εἶναι φανερὸν ὅτι **διὰ τῆς μεταφορᾶς εὐθείας κατὰ διάνυσμα $\vec{\delta}$ προκύπτει εὐθεῖα παράλληλος καὶ διὰ τῆς μεταφορᾶς ἡμιευθείας προκύπτει ἡμιευθεῖα ὁμόρροπος πρὸς τὴν ἀρχικήν.**

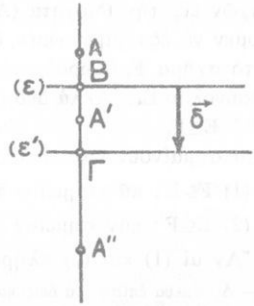
δ′) (Θ) — Ἂν ὁ ἄξων συμμετρίας (ε) μεταφερθῇ κατὰ διάνυσμα $\vec{\delta}$ κάθετον ἐπ' αὐτόν, τότε τὸ συμμετρικὸν ἑνὸς οἱουδήποτε σημείου ὑφίσταται μεταφορὰν κατὰ διάνυσμα $2\,\vec{\delta}$.

Ἔστωσαν Α′ καὶ Α″ τὰ συμμετρικὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Α ὡς πρὸς δύο παραλλήλους εὐθείας (ε) καὶ (ε′).

Ἀναφερόμενοι εἰς τὸ σχ. 14 καὶ θεωροῦντες τὰ σημεῖα Α, Β, Α′, Γ, Α″ ἐπὶ ἄξονος, βλέπομεν ὅτι (Θεώρημα Chasles)

$$\overline{A'A''} = \overline{A'A} + \overline{AA''} = \overline{2BA} + \overline{2A\Gamma} =$$
$$= 2(\overline{BA} + \overline{A\Gamma}) = \overline{2B\Gamma}$$

ἄρα καὶ $\vec{A'A''} = 2\vec{B\Gamma} = 2\,\vec{\delta}$.




Σχ. 14

*ε′) Ἑπομένως καὶ τὸ συμμετρικὸν ἡμιευθείας μεταφέρεται εἰς ἡμιευθεῖαν παρ/λον καὶ ὁμόρροπον, ὅταν ὁ ἄξων συμμετρίας μεταφερθῇ κατὰ* $\vec{\delta}$.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

63. Νὰ γραφῇ τμῆμα ἴσον καὶ παρ|λον πρὸς δοθὲν καὶ ἔχον τὰ ἄκρα του ἐπὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν.

64. Εὕρετε τὸ μετεσχηματισμένον περιφερείας (Κ, R) διὰ μεταφορᾶς κατὰ διάνυσμα $\vec{\delta}$.

65. Νὰ κατασκευασθῇ τμῆμα ἴσον καὶ παράλληλον πρὸς δοθὲν καὶ ἔχον τὰ ἄκρα του ἐπὶ δοθείσης εὐθείας καὶ δοθείσης περιφερείας.

66. Νὰ γραφῇ τμῆμα παρ|λον καὶ ἴσον πρὸς δοθὲν καὶ ἔχον τὰ ἄκρα του ἐπὶ δύο δοθεισῶν περιφερειῶν.

67. Νὰ κατασκευασθῇ τετράπλευρον, οὗτινος δίδονται τρεῖς πλευραὶ καὶ αἱ γωνίαι αἱ προσκείμεναι εἰς τὴν τετάρτην πλευράν.

68. Δοθεισῶν δύο περιφερειῶν καὶ εὐθείας (ε) ζητεῖται νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα ||(ε) καὶ ἀποκόπτουσα ἴσας χορδὰς ἀπὸ τὰς δύο περιφερείας.

## ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

**17. Γεωμετρικὸς τόπος.—α′) Καλεῖται «γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τῶν ἐχόντων μίαν δεδομένην ἰδιότητα (Α)»** *(ἢ πληρούντων μίαν συνθήκην (Α) )* **τὸ σχῆμα τὸ ἀποτελούμενον ἀπὸ τὸ $\boxed{\text{σύνολον}}$ τῶν σημείων τῶν ἐχόντων τὴν δεδομένην ἰδιότητα (Α).**

Κατὰ κανόνα ὑπάρχουν ἄπειρα τὸ πλῆθος σημεῖα κατέχοντα τὴν ἰδιότητα (Α) καὶ ταῦτα συνιστοῦν σχῆμά τι Ε, τὸ ὁποῖον εἶναι ὁ γεωμετρικός των τόπος. (Συντόμως γ.τ. ἢ «τόπος»).

**β΄) Συνθῆκαι, ἵνα ἓν δεδομένον σχῆμα F εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τῶν ἐχόντων δεδομένην τινὰ ἰδιότητα (Α).** Ἔστω **E** τὸ σύνολον τῶν σημείων τῶν ἐχόντων τὴν ἰδιότητα (Α) (δηλαδὴ ὁ γ.τ. ὁ ἀντιστοιχῶν εἰς τὴν ἰδιότητα (Α)) καὶ ἔστω **F** ἓν δοθὲν σχῆμα, τὸ ὁποῖον θέλομεν νὰ ἐξακριβώσωμεν, ἂν εἶναι ὁ γ.τ. **E**. Διὰ νὰ συμβαίνῃ τοῦτο, πρέπει τὸ σχῆμα **F**, θεωρούμενον ὡς σημειοσύνολον, νὰ ταυτίζεται μὲ τὸ σημειοσύνολον **E**. Ἀλλὰ δύο σύνολα **F** καὶ **E** ταυτίζονται, ὅταν συγχρόνως: $F \subseteq E \wedge E \subseteq F$.

Ταῦτα σημαίνουν κατὰ σειρὰν ὅτι:

(1) $F \subseteq E$: πᾶν σημεῖον τοῦ **F** ἔχει τὴν ἰδιότητα (Α).

(2) $E \subseteq F$: πᾶν σημεῖον ἔχον τὴν ἰδιότητα (Α) ἀνήκει εἰς τὸ **F**.

Ἂν αἱ (1) καὶ (2) πληροῦνται, τότε: $F \equiv E$.

— Δυνάμεθα ἐπίσης νὰ δείξωμεν ὅτι τὸ F εἶναι ὁ γ.τ. τῶν σημείων τῶν ἐχόντων τὴν ἰδιότητα (Α), ἂν δείξωμεν ὅτι:

1ον) πᾶν σημεῖον τοῦ F ἔχει τὴν ἰδιότητα Α καὶ

2ον) πᾶν σημεῖον μὴ ἀνῆκον εἰς τὸ F δὲν ἔχει τὴν ἰδιότητα (Α).

Διότι τὸ 1ον) ἐξασφαλίζει ὅτι $F \subseteq E$ καὶ τοῦτο συνεπάγεται:

(3) $$F' \supseteq E'$$

ὅπου $F'$, $E'$ τὰ συμπληρωματικὰ τῶν F, E ὡς πρὸς τὸ ὅλον ἐπίπεδον.

Τὸ 2ον) σημαίνει:

(4) $$F' \subseteq E'$$

Ἐκ τῶν (3) $\wedge$ (4) $\Rightarrow F' \equiv E' \Rightarrow F \equiv E$.

## ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΙΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

**18. i) Ὁ γ.τ. τῶν σημείων Μ τῶν ἰσάκις ἀπεχόντων ἀπὸ δύο σταθερὰ σημεῖα Α καὶ Β εἶναι ἡ μεσοκάθετος τοῦ τμήματος ΑΒ.**

Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι πᾶν σημεῖον Μ τῆς μεσοκαθέτου ἔχει τὴν ἰδιότητα: ΜΑ = ΜΒ καὶ ὅτι πᾶν σημεῖον Ρ ἔχον τὴν ἰδιότητα ΡΑ = = ΡΒ κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου. Ἀλλὰ ταῦτα ὡς γνωστὸν συμβαίνουν.

**ii) Ὁ γ.τ. τῶν σημείων Μ τοιούτων, ὥστε ΜΑ > ΜΒ, ὅπου Α,Β δύο δεδομένα σημεῖα, εἶναι τὸ ἡμιεπίπεδον τὸ ὑπὸ τῆς μεσοκαθέτου τοῦ ΑΒ ὁριζόμενον καὶ περιέχον τὸ Β.**

**iii) Ὁ γ.τ. τῶν σημείων τῶν κειμένων ἐντὸς δοθείσης γωνίας καὶ ἰσαπεχόντων ἀπὸ τὰς πλευρὰς εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας.**

**iv) Ὁ γ.τ. τῶν σημείων τῶν ἰσάκις ἀπεχόντων ἀπὸ δύο τεμνομένας εὐθείας εἶναι ζεῦγος εὐθειῶν διχοτομουσῶν τὰς γωνίας, ἃς σχηματίζουν αἱ τεμνόμεναι εὐθεῖαι.**

**v) Ὁ γ.τ. τῶν σημείων τῶν ἀπεχόντων δεδομένην ἀπόστασιν d ἀπὸ δοθείσης εὐθείας (ε) εἶναι τὸ ζεῦγος τῶν παραλλήλων πρὸς τὴν (ε), ὧν ἑκάστη ἀπέχει τῆς (ε) ἀπόστασιν d.**

**vi) Ὁ γ.τ. τῶν σημείων τῶν ἀπεχόντων δεδομένην ἀπόστασιν d ἀπὸ σταθεροῦ σημείου Κ εἶναι περιφέρεια (Κ, d).**

**vii) Ὁ γ.τ. τῶν σημείων, ἀπὸ τὰ ὁποῖα δοθὲν τμῆμα ΑΒ φαίνεται ὑπὸ γωνίαν ὀρθήν, εἶναι ἡ περιφέρεια διαμέτρου ΑΒ, ἀφ' ἧς ἐξαιροῦνται τὰ Α καὶ Β (§ 6).**

**19. Εὕρεσις γεωμετρικῶν τόπων.** Ἡ στοιχειώδης μέθοδος εὑρέσεως ἑνὸς γεωμετρικοῦ τόπου συνίσταται εἰς τὴν ἀναγωγὴν τοῦ ζητουμένου τόπου εἰς ἄλλον γνωστόν. Πρὸς τοῦτο θεωροῦμεν (ἢ κατασκευάζομεν) **τυχὸν** σημεῖον Μ τοῦ ζητουμένου γ.τ., δηλ. ἔχον τὴν ὡρισμένην ἰδιότητα (Α) καὶ ἀναζητοῦμεν μίαν συνέπειαν τῆς ἰδιότητος (Α), δηλ. μίαν **νέαν ἰδιότητα** τοῦ σημείου Μ, ἔστω τὴν (Β), ἡ ὁποία προέρχεται διὰ καταλλήλου χρησιμοποιήσεως τῆς ἰδιότητος (Α). Διὰ νὰ προχωρήσωμεν ἐκ τῆς (Α) εἰς τὴν (Β), συνδέομεν συνήθως τὸ σημεῖον Μ μὲ **κατάλληλον σταθερὸν σημεῖον ἢ σταθερὰ σημεῖα** ἢ φέρομεν ἄλλας καταλλήλους γραμμὰς οὕτως, ὥστε νὰ ἀξιοποιηθῇ ἡ ἰδιότης (Α), δηλ. νὰ δώσῃ μίαν συνέπειαν (Β). Πολλάκις ἡ ἰδιότης (Β) ἔχει γνωστὸν γεωμετρικὸν τόπον (γ). Ἐὰν τοῦτο συμβαίνῃ, τότε **κάθε** σημεῖον Μ τοῦ τόπου, ὡς ἔχον τὴν ἰδιότητα (Α), θὰ ἔχῃ καὶ τὴν συνέπειαν αὐτῆς (Β) καὶ ἑπομένως θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ τόπου τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς τὴν (Β), δηλ. ἐπὶ γνωστῆς γραμμῆς (ἢ σχήματος) (γ). Οὕτω εὑρίσκομεν σταθερὸν σχῆμα (γ), ἐφ' οὗ κεῖνται ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ τόπου, καὶ μένει νὰ ἐξετάσωμεν βάσει τῆς ἰδιότητος (Α), εἰς ποίαν περιοχὴν τοῦ (γ) εὑρίσκονται τὰ σημεῖα τοῦ ζητουμένου τόπου καὶ ἂν καὶ πᾶν σημεῖον τῆς περιοχῆς ταύτης ἔχῃ τὴν ἰδιότητα (Α).

Μία ἀπὸ τὰς δυσκολίας τῆς μεθόδου ἔγκειται εἰς τὴν ἀνεύρεσιν τῶν **σταθερῶν** σημείων, πρὸς τὰ ὁποῖα συσχετίζομεν τὸ τυχὸν (ἢ «τρέχον») σημεῖον Μ τοῦ τόπου (μὲ τὸν σκοπὸν τὴν ἀνακάλυψιν μιᾶς νέας ἰδιότητος (Β) ἀπορρεούσης ἐκ τῆς (Α)). Ὡς σταθερὰ σημεῖα ἐκλέγομεν πολλάκις δύο **ἀκραῖα** σημεῖα τοῦ ζητουμένου τόπου ἢ καὶ σταθερὸν σημεῖον μὴ ἀνῆκον εἰς τὸν τόπον, τὸ ὁποῖον ὅμως, ἂν συνδεθῇ μὲ τὸ τρέχον σημεῖον Μ, δίδει τὴν δυνατότητα νὰ χρησιμοποιηθῇ ἡ ἰδιότης (Α) τοῦ Μ, ὥστε νὰ προκύψῃ νέα ἰδιότης (Β) τοῦ Μ.

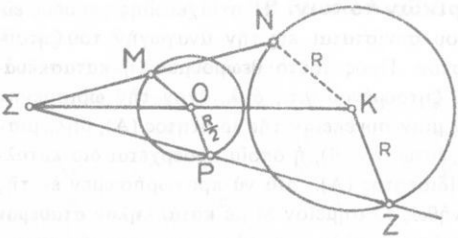
Εἰς τὴν ἀκριβεστέραν εὕρεσιν γεωμετρικῶν τόπων βοηθοῦν οὐσιωδῶς οἱ σημειακοὶ μετασχηματισμοὶ καὶ αἱ διευθυνόμεναι γωνίαι, περὶ ὧν γίνεται λόγος εἰς τὸ τρίτον μέρος τοῦ βιβλίου.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Ι. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τ. (ἢ σύνολον) τῶν μέσων ὅλων τῶν τμημάτων, τῶν ὁποίων τὸ ἓν ἄκρον εἶναι σταθερὸν σημεῖον Σ, τὸ δὲ ἄλλο εὑρίσκεται ἐπὶ δοθείσης περιφερείας (Κ. R).**

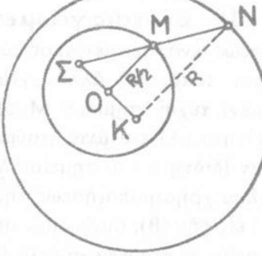
i) Ἔστω Μ σημεῖον τοῦ τόπου, δηλ. τὸ μέσον κάποιου τμήματος ΣΝ ἔχοντοςτὸ ἄκρον Ν ἐπὶ τῆς δοθείσης περιφερείας (Κ, R) (σχ. 15 ἢ 15(α)).

ii) Ἐπειδὴ τὸ Ν∈ (Κ, R), εἶναι ΚΝ = R καὶ ἐπειδὴ τὸ Μ εἶναι μέσον πλευρᾶς τριγώνου ΣΝΚ, ἂς τὸ ἑνώσωμεν μὲ τὸ μέσον Ο τῆς **σταθερᾶς** πλευρᾶς ΣΚ τοῦ τριγώνου.

Τότε θὰ εἶναι $MO = NK/2$, ἤτοι $MO = R/2$ = σταθερὰ ἀπόστασις καὶ ἑπομένως τὸ κάθε σημεῖον M τοῦ ζητουμένου τόπου κεῖται ἐπὶ τῆς σταθερᾶς περιφερείας $\left(O, \frac{R}{2}\right)$. (Τὰ ἐπὶ τῆς ευθΣΚ κείμενα δύο σημεῖα τοῦ τόπου ἀνήκουν ἐπίσης εἰς τὴν $(O,R/2)$).




Σχ. 15




Σχ. 15(α)

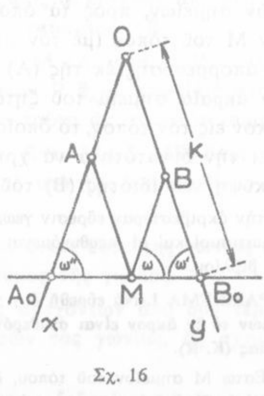
**Ἀντίστροφον.** Ἔστω P σημεῖον τῆς $\left(O, \frac{R}{2}\right)$. Τότε εἶναι $OP = R/2$. Ἂν τώρα φέρωμεν ἀκτῖνα KZ τῆς (K, R) παράλληλον καὶ ὁμόρροπον τῆς OP, θὰ εἶναι: $\vec{OP} = \frac{1}{2}\vec{KZ}$. Ἑπομένως τὸ P εἶναι κατ' ἀνάγκην τὸ μέσον τοῦ ΣZ, δηλ. μέσον τμήματος ἔχοντος ἄκρα τὸ Σ καὶ σημεῖον Z τῆς (K, R). Δηλ. τὸ P εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου.

**Συμπέρασμα. Ὁ ζητούμενος γ.τ. εἶναι περιφέρεια μὲ κέντρον τὸ μέσον O τοῦ ΣΚ καὶ ἀκτῖνα R/2.**

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ II. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν $Ox$, $Oy$ γωνίας $x\hat{O}y$ θεωροῦμεν ζεῦγος σημείων A καὶ B ($A \in Ox$ καὶ $B \in Oy$) τοιοῦτον, ὥστε $OA + OB = K$ = δοθὲν τμῆμα καὶ κατασκευάζομεν παρ/μον OAMB. Ζητεῖται ὁ γ.τ. (τὸ σύνολον) τῶν κορυφῶν M τῶν παρ/μων τούτων.**

i) Ἔστω M σημεῖον τὸ τόπου, δηλ. ἡ τετάρτη κορυφὴ παρ/μου AOBM ἀντιστοιχοῦντος εἰς τυχὸν ζεῦγος σημείων A, B μὲ $OA + OB = K$.

ii) **Ἀκρικὸν σημεῖον.** Ἐὰν τὸ A πέσῃ ἐπὶ τοῦ O, δηλ. τὸ OA μηδενισθῇ, τότε πρέπει τὸ B νὰ ἔλθῃ εἰς σημεῖον $B_0$ τῆς Oy τοιοῦτον, ὥστε $OB_0 = K$. Ἂς ἑνώσωμεν τὸ τυχὸν σημεῖον M τοῦ τόπου μὲ τὸ ἀκρικὸν σημεῖον $B_0$ καὶ ἂς προεκτείνωμεν τὸ $B_0M$, μέχρις ὅτου τμήσῃ τὴν Ox, ἔστω εἰς $A_0$.




Σχ. 16

Παρατηροῦμεν ὅτι $BB_0 = OA$ (διότι $OA + OB = K$ καὶ $BB_0 + OB = K$).

Ἐπειδὴ $BB_0 = OA$ καὶ $OA = BM \Rightarrow BM = BB_0 \Rightarrow \omega = \omega'$ (1).

Ἐπειδὴ $MB // A_0O \Rightarrow \omega = \omega''$ (2).

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2): $\Rightarrow \omega'' = \omega' \Rightarrow OA_0 = OB_0 = K$.

Βλέπομεν ὅτι πᾶν σημεῖον M τοῦ τόπου κεῖται ἐπὶ τῆς βάσεως σταθεροῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου $OA_0B_0$ μὲ ἴσας πλευρὰς $OA_0 = OB_0 = K$.

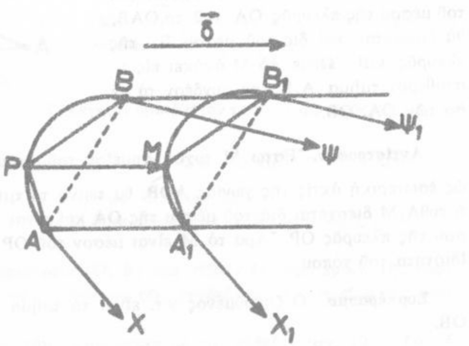
**Ἀντίστροφον.** Ἔστω M τυχὸν σημεῖον τῆς βάσεως $A_0B_0$ τοῦ σταθεροῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου $OA_0B_0$ μὲ $OA_0 = OB_0 = K$ (σχ. 16).

Φέροντες τὰς $MA // Oy$ καὶ $MB // Ox$ σχηματίζομεν τὸ παρ/μον OAMB. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων, $\omega = \omega''$ καὶ $\omega'' = \omega' \Rightarrow \omega = \omega'' \Rightarrow BM = BB_0$. Ἀλλὰ $BM = OA$ καὶ συνεπῶς $OA = BB_0$. Ἑπομένως $OA + OB = BB_0 + OB = K$, δηλ. τὸ M εἶναι ἡ τετάρτη κορυφὴ παρ|μου OAMB μὲ $OA + OB = K$, δηλ. τὸ M εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου.

**Συμπέρασμα. Ὁ ζητούμενος γ.τ. εἶναι ἡ βάσις $A_0B_0$ τοῦ ἰσοσκελοῦς $\triangle OA_0B_0$ μὲ $OA_0 = OB_0 = K$.**

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΙΙΙ. (Μεταφορὰ τόξου). Δίδεται κυκλικὸν τόξον $\overset{\frown}{AB}$ καὶ σταθερὸν διάνυσμα $\vec{\delta}$. Ἀπὸ κάθε σημεῖον P τοῦ τόξου $\overset{\frown}{AB}$ φέρομεν διάνυσμα $\overrightarrow{PM} = \vec{\delta}$. Ζητεῖται ὁ γ.τ. τῶν περάτων M τῶν διανυσμάτων τούτων $\overrightarrow{PM}$.**

i) Ἔστω M τυχὸν σημεῖον τοῦ τόπου (σχ. 17). Ἂν μεταφέρωμεν τὰ A καὶ B εἰς εἰς $A_1$ καὶ $B_1$ κατὰ διάνυσμα $\vec{\delta}$, δηλ. φέρωμεν: $\overrightarrow{AA_1} = \vec{\delta}$, $\overrightarrow{BB_1} = \delta$ καὶ ἑνώσωμεν τὸ M μὲ τὰ $A_1$, $B_1$, τότε, ἐπειδὴ καὶ $\overrightarrow{PM} = \vec{\delta}$, τὰ τετράπλευρα $PMB_1B$ καὶ $PMA_1A$ εἶναι παρ/μα καὶ συνεπῶς αἱ γωνίαι $A_1\widehat{M}B_1$ καὶ $A\widehat{P}B$ ἴσαι ὡς ἔχουσαι τὰς πλευρὰς των παρ/λους καὶ ὁμορρόπους.



Σχ. 17

Τὸ M βλέπει τὸ τμῆμα $A_1B_1$ ὑπὸ σταθερὰν γωνίαν ἴσην πρὸς $A\widehat{P}B$ καὶ συνεπῶς κεῖται ἐπὶ τόξου $\overset{\frown}{A_1B_1}$ ἱκανοῦ γωνίας $A\widehat{P}B$, δηλ. ἐπὶ τόξου $\overset{\frown}{A_1B_1} = \overset{\frown}{AB}$. Ὅταν τὸ P τείνῃ νὰ συμπέσῃ μὲ τὸ A, τότε καὶ τὸ M τείνει νὰ συμπέσῃ μὲ τὸ $A_1$. Ἀλλὰ τότε ἡ ἡμιευθεῖα (P,A) τείνει νὰ γίνῃ ἡμιεφαπτομένη AX τοῦ τόξου $\overset{\frown}{AB}$ (§ 3) καὶ ἡ $(M, A_1)$ τείνει νὰ γίνῃ ἡμιεφαπτομένη $A_1X_1$ τοῦ τόξου $\overset{\frown}{A_1B_1}$. Ἐπειδὴ δὲ πάντοτε αἱ ἡμιευθεῖαι (P, A) καὶ $(M, A_1)$ εἶναι παράλληλοι καὶ ὁμόρροποι, διὰ τοῦτο καὶ αἱ ὁριακαὶ των θέσεις AX, $A_1X_1$ εἶναι παρ|λοι καὶ ὁμόρροποι.

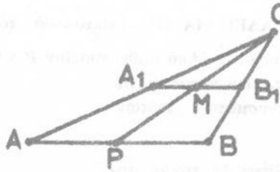
Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι ἡ ἡμιεφαπτομένη $A_1X_1$ τοῦ τόξου $\overset{\frown}{A_1MB_1}$ εἶναι γνωστή, ἄρα τὸ $\overset{\frown}{A_1MB_1}$ ὡρισμένον καὶ κατασκευάσιμον (βλ. § 4).

ii) **Ἀντίστροφον.** Ἔστω M τυχὸν σημεῖον τοῦ τόξου $\overset{\frown}{A_1B_1}$ προκύπτοντος ἐκ τοῦ τόξου $\overset{\frown}{AB}$ διὰ μεταφορᾶς κατὰ $\vec{\delta}$ (§ 16). Ἐπειδὴ ἡ μεταφορὰ εἶναι κίνησις, θὰ ὑπάρχῃ καὶ ἡ ἀντίστροφος κίνησις ἡ φέρουσα τὸ $\widehat{A_1B_1}$ εἰς τὸ $\widehat{AB}$. Δηλ. διὰ μεταφορᾶς κατὰ διάνυσμα $-\vec{\delta}$ τὸ τόξον $\widehat{A_1B_1}$ ἐφαρμόζει ἐπὶ τοῦ $\widehat{AB}$, ἄρα καὶ τὸ M ἔρχεται εἰς τι σημεῖον P τοῦ τόξου $\widehat{AB}$. Θὰ ὑπάρχῃ λοιπὸν σημεῖον P τοῦ τόξου $\widehat{AB}$ τοιοῦτον, ὥστε $\overrightarrow{MP} = -\vec{\delta}$ ἄρα καὶ $\overrightarrow{PM} = \vec{\delta}$. Δηλ. τὸ M ἔχει τὴν ἰδιότητα τοῦ τόπου.

**iii) Θεώρημα. Διὰ μεταφορᾶς τόξου $\widehat{AB}$ κατὰ διάνυσμα $\vec{\delta}$ προκύπτει τόξον $\widehat{A_1B_1}$ ἴσον πρὸς τὸ $\widehat{AB}$ καὶ ἔχον εἰς τὰ ἄκρα του ἡμιεφαπτομένας παρ/λους καὶ ὁμορρόπους πρὸς τὰς ἀντιστοίχους ἡμιεφαπτομένας τοῦ $\widehat{AB}$.**

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ IV. Δίδεται τμῆμα AB καὶ σημεῖον O ἐκτὸς τῆς ευθ AB. Ζητεῖται ὁ γ.τ. τῶν μέσων τῶν τμημάτων τῶν ἀρχομένων ἀπὸ τοῦ O καὶ περατουμένων εἰς τὰ σημεῖα τοῦ τμήματος AB.**

Ἔστω M σημεῖον τοῦ τόπου, δηλ. μέσον τοῦ τμήματος OP, ὅπου P∈AB (σχ.18). Ἂν ἑνώσωμεν τὸ M μὲ τὸ (σταθερὸν) μέσον $A_1$ τοῦ OA, τότε ευθ$A_1M$//AB. Ἀφοῦ ἡ ευθ$A_1M$ εἶναι //AB καὶ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τῆς πλευρᾶς OA τοῦ τρ.OAB, θὰ διέρχεται καὶ διὰ τοῦ μέσου $B_1$ τῆς πλευρᾶς OB. Ὥστε τὸ M ἀνήκει εἰς τὸ σταθερὸν τμῆμα $A_1B_1$ τὸ συνδέον τὰ μέσα τῶν OA, OB.



Σχ. 18

**Ἀντίστροφον.** Ἔστω M τυχὸν σημεῖον τοῦ τμήματος $A_1B_1$. Τότε ἡ ἀκτὶς (O,M), ὡς ἐσωτερικὴ ἀκτὶς τῆς γωνίας $\widehat{AOB}$, θὰ τέμνῃ τὸ τμῆμα AB εἰς τι σημεῖον P. Ἐπειδὴ ἡ ευθ$A_1M$ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τῆς OA καὶ εἶναι //AP, θὰ διέρχεται καὶ διὰ τοῦ μέσου τῆς πλευρᾶς OP. Ἄρα τὸ M εἶναι μέσον τοῦ OP ὅπου P∈τμ. AB, δηλ. πληροῖ τὴν ἰδιότητα τοῦ τόπου.

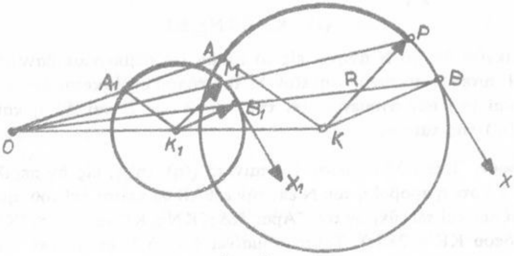
**Συμπέρασμα.** Ὁ ζητούμενος γ.τ. εἶναι τὸ τμῆμα τὸ συνδέον τὰ μέσα τῶν OA καὶ OB.

**Ὁρολογία.** Τὸ M λέγεται καὶ **ὁμοιόθετον** τοῦ P ἐν λόγῳ 1/2 ὡς πρὸς κέντρον O. Τὸ τμῆμα $A_1B_1$ λέγεται ἐπίσης **ὁμοιόθετον** τοῦ AB ἐν λόγῳ 1/2 καὶ ὡς πρὸς κέντρον O.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ V.— Δίδεται τόξον $\widehat{AB}$ κέντρου K, ἀκτῖνος R, καὶ σημεῖον O. Ζητεῖται ὁ γ.τ. τῶν μέσων τῶν τμημάτων τῶν ἀρχομένων ἀπὸ τοῦ O καὶ περατουμένων εἰς τὰ σημεῖα τοῦ τόξου $\widehat{AB}$.**

Ἔστω $\widehat{AKB}$ ἡ ἐπίκεντρος γωνία ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὸ τόξον $\widehat{AB}$, P τυχὸν σημεῖον τοῦ $\widehat{AB}$,M τὸ μέσον τοῦ OP,$A_1$ τὸ μέσον τοῦ OA, $B_1$ τὸ μέσον τοῦ OB, $K_1$ τὸ μέσον τοῦOK (σχ. 19). Ἐπειδὴ $\overrightarrow{K_1A_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{KA}$ καὶ $\overrightarrow{K_1B_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{KB}$, διὰ τοῦτο αἱ γωνίαι $\widehat{AKB}$ καὶ $A_1\widehat{K_1}B_1$ ἔχουν τὰς πλευρὰς των παρ/λους καὶ ὁμορρόπους. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἀκτὶς $\overrightarrow{KP}$ εὑρίσκεται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς $\widehat{AKB}$, διὰ τοῦτο ἡ ὁμόρροπος ἀκτὶς $\overrightarrow{K_1M}$ (ὅπου $K_1M = R/2$) θὰ εὑρίσκεται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς $A_1\widehat{K_1}B_1$, ἄρα τὸ σημεῖον τοῦ τόπου, τὸ M, ἀνήκει εἰς τὸ τόξον $\widehat{A_1B_1}$ τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν ἐπίκεντρον γωνίαν $A_1\widehat{K_1}B_1$.

**Ἀντίστροφον.** Ἔστω Μ τυχὸν σημεῖον τοῦ τόξου $\widehat{A_1B_1}$. Τότε ἡ ἀκτὶς $\overrightarrow{K_1M}$ εἶναι ἐσωτερικὴ τῆς γωνίας $A_1\widehat{K_1}B_1$, ἄρα ἡ παράλληλος καὶ ὁμόρροπος ἀκτὶς $\overrightarrow{KP}$ θὰ εὑρίσκε-




Σχ. 19

ται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς $A\widehat{K}B$, δηλ. τὸ $P \in \widehat{AB}$. Ἐπειδὴ $KP = R$, $K_1M = R/2$ δηλ. $\overrightarrow{K_1M} = \overrightarrow{KP}/2$, διὰ τοῦτο τὸ Μ εὑρίσκεται εἰς τὸ μέσον τοῦ OP, δηλ. ἔχει τὴν ἰδιότητα τοῦ τόπου.

**Συμπέρασμα. Ὁ ζητούμενος γ.τ. εἶναι τόξον $\widehat{A_1B_1}$ ἀκτῖνος $R/2$, ἔχον κέντρον τὸ μέσον τοῦ ΟΚ καὶ ἀντίστοιχον ἐπίκεντρον ἔχουσαν πλευρὰς παρ/λους καὶ ὁμορρόπους πρὸς τὰς τῆς ἐπικέντρου γωνίας $A\widehat{K}B$.**

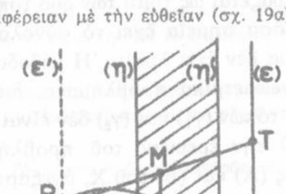
**Ὁρολογία.** Τὸ ἀνωτέρω τόξον $\widehat{A_1B_1}$ λέγεται **ὁμοιόθετον** τοῦ $\widehat{AB}$ ὡς πρὸς Ο καὶ ἐν λόγῳ 1/2.

**Παρατηρήσεις.** 1ον. Αἱ ἡμιεφαπτόμεναι ΒΧ, $B_1X_1$ τοῦ $\widehat{AB}$ καὶ τοῦ ὁμοιοθέτου του $\widehat{A_1B_1}$ εἶναι παρ/λοι καὶ ὁμόρροποι (βλ. παρ/γμα ΙΙΙ, θεώρημα).

2ον. Ὁ γ.τ. τοῦ παραδείγματος Ι εἶναι τὸ ὁμοιόθετον τῆς (Κ,R) ὡς πρὸς Σ καὶ ἐν λόγῳ 1/2.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ VI. Δίδεται περιφέρεια (Ο, R) καὶ εὐθεῖα (ε) ἐξωτερικὴ τῆς περιφερείας. Ζητεῖται ὁ γ.τ. τῶν μέσων τῶν τμημάτων τῶν συνδεόντων ἓν σημεῖον τῆς περιφερείας μὲ ἓν σημεῖον τῆς εὐθείας.**

Ἔστω ΡΤ τυχὸν τμῆμα συνδέον τὴν περιφέρειαν μὲ τὴν εὐθεῖαν (σχ. 19α). Τὸ μέσον Μ αὐτοῦ εἶναι ἓν τυχὸν σημεῖον τοῦ τόπου. Ἂς φέρωμεν διάμετρον ΑΒ κάθετον ἐπὶ τὴν (ε) εἰς τὸ Κ, ὅπου $OK > R$ καὶ $KA > KB$. Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ Ρ εἶναι συμμετρικὸν τοῦ Τ ὡς πρὸς κέντρον συμμετρίας τὸ Μ καὶ συνεπῶς, ἀφοῦ $T \in (\varepsilon)$, τὸ Ρ ἀνήκει εἰς τὴν συμμετρικὴν τῆς (ε) εὐθεῖαν ὡς πρὸς Μ, ἔστω τὴν (ε'). Ἡ (ε') πρέπει λοιπὸν νὰ ἔχῃ ἓν τουλάχιστον σημεῖον Ρ κοινὸν μετὰ τῆς περιφερείας (Ο,R) καὶ ἐπειδὴ (ε') εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν διάμετρον ΑΒ, διὰ τοῦτο πρέπει νὰ τέμνῃ τὴν ΑΒ εἰς σημεῖον Ε κείμενον ἐπὶ τοῦ τμήματος ΑΒ ἤ, τὸ πολύ, συμπῖπτον μὲ τὸ Α ἢ τὸ Β. Ἐντεῦθεν ἡ συνθήκη: $KB \leqq KE \leqq KA$ $\Longleftrightarrow \frac{KB}{2} \leqq \frac{KE}{2} \leqq \frac{KA}{2}$. Ἐπειδὴ τὸ Μ




Σχ. 19α

προβάλλεται εἰς τὸ μέσον N τοῦ KE, διὰ τοῦτο $KN = \frac{KE}{2}$ καὶ ἡ τελευταία συνθήκη γίνεται $\frac{KB}{2} \leq KN \leq \frac{KA}{2}$, ἤ, ἂν Δ καὶ Γ τὰ μέσα τῶν KB, KA, εἶναι τελικῶς:

$$(1) \quad K\Delta \leq KN \leq K\Gamma$$

Ἡ (1) δεικνύει ὅτι τὸ N ἀνήκει εἰς τὸ τμῆμα ΓΔ συμπεριλαμβανομένων καὶ τῶν ἄκρων του καὶ συνεπῶς τὸ τυχὸν σημεῖον M τοῦ τόπου εὑρίσκεται ἐντὸς τῆς ταινίας τῶν καθέτων (η) καὶ (η′) τῶν ἀγομένων ἐπὶ τὴν ευθAB εἰς Γ καὶ Δ, ἢ καὶ ἐπὶ τῶν συνόρων (η) καὶ (η′) τῆς ταινίας.

**Ἀντίστροφον.** Ἔστω M σημεῖον τῆς ταινίας {(η), (η′)}, εἰς ἣν περιλαμβάνομεν καὶ τὰς (η) καὶ (η′). Τότε ἡ προβολή του N ἐπὶ τὴν ευθAB θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ τμήματος ΓΔ συμπεριλαμβανομένων καὶ τῶν ἄκρων του. Ἄρα: $K\Delta \leq KN \leq K\Gamma \Rightarrow 2K\Delta \leq 2KN \leq 2K\Gamma \Rightarrow KB \leq KE \leq KA$ (ὅπου $KE = 2KN$). Τοῦτο σημαίνει ὅτι τὸ E κεῖται ἐπὶ τοῦ τμήματος AB συμπεριλαμβανομένων καὶ τῶν ἄκρων του· ἄρα ἡ εἰς E ἀγομένη $\perp AB$ ἔχει ἓν τουλάχιστον σημεῖον P κοινὸν μετὰ τῆς περιφερείας (O,R). Ἑνοῦμεν τὸ P μὲ τὸ M, ὁπότε ἡ ευθ PM, τέμνουσα τὴν EP, τέμνει καὶ τὴν παρ/λον της (ε), ἔστω εἰς T. Ἐπειδὴ τὸ N εἶναι μέσον τοῦ KE, διὰ τοῦτο καὶ τὸ M εἶναι μέσον τοῦ PT, ἤτοι τὸ M ἔχει τὴν ἰδιότητα τοῦ τόπου.

**Συμπέρασμα. Ὁ ζητούμενος γ.τ. εἶναι μία ταινία ὁριζομένη ὑπὸ τῶν μεσοκαθέτων τῶν τμημάτων KA καὶ KB, εἰς ἣν περιλαμβάνονται καὶ τὰ σύνορα αὐτῆς.**

**20. Χρῆσις τῶν γεωμετρικῶν τόπων εἰς γεωμετρικὰς κατασκευάς.**—Πολλάκις ἡ λύσις ἑνὸς γεωμετρικοῦ προβλήματος ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν κατασκευὴν (προσδιορισμὸν) ἑνὸς σημείου X· δηλ. συμβαίνει ἡ εὕρεσις τῆς θέσεως τοῦ X νὰ συνεπάγεται τὴν ἄμεσον λύσιν τοῦ προβλήματος. Ἐάν, τώρα, γνωρίζωμεν ὅτι τὸ ζητούμενον σημεῖον X πληροῖ δύο συνθήκας (A) καὶ (B), εἰς τὰς ὁποίας ἀντιστοιχοῦν **γνωστοὶ** γεωμετρικοὶ τόποι $(\gamma_1)$ καὶ $(\gamma_2)$, τότε τὸ X ὡς σημεῖον ἀνῆκον εἰς ἀμφοτέρους τοὺς τόπους $(\gamma_1)$ καὶ $(\gamma_2)$ (διότι ἔχει ἀμφοτέρας τὰς ἰδιότητας (A) καὶ (B)) κατασκευάζεται ὡς τομὴ τῶν δύο τόπων. Τὸ πρόβλημα λοιπὸν θὰ ἔχῃ τόσας λύσεις, ὅσα σημεῖα ἔχει τὸ σύνολον $(\gamma_1) \cap (\gamma_2)$. Ἐὰν $(\gamma_1) \cap (\gamma_2) = \varnothing$, τὸ πρόβλημα δὲν ἔχει λύσιν. Ἡ μέθοδος αὐτὴ δὲν εἶναι πάντοτε ἐφαρμόσιμος εἰς τὰ γεωμετρικὰ προβλήματα, διότι ἡ γεωμετρικὴ κατασκευὴ ἀμφοτέρων τῶν τόπων $(\gamma_1)$ καὶ $(\gamma_2)$ δὲν εἶναι πάντοτε δυνατή. Παρατηρητέον ἀκόμη ὅτι κατὰ τὴν ἔρευναν τοῦ προβλήματος δέον νὰ καταλήξωμεν εἰς δύο ἰδιότητας (A) καὶ (B) τοῦ X, ἀνεξαρτήτους ἀλλήλων, διὰ νὰ ὁδηγοῦν αὗται εἰς δύο διαφορετικοὺς τόπους.

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

69. Τόπος τῶν μέσων τῶν ἀπείρων τμημάτων τῶν ἐχόντων ἓν ἄκρον εἰς σταθερὸν σημεῖον A καὶ τὸ ἄλλο ἐπὶ σταθερᾶς εὐθείας (ε).

70. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ ΔΑΒΓ λαμβάνεται τυχὸν σημεῖον M καὶ ἐκ τοῦ M ἄγονται παρ/λοι πρὸς τὰς AB, AΓ. Τίς ὁ γ.τ. τοῦ κέντρου τοῦ σχηματιζομένου παρ/μου;

71. Τόπος τῶν συμμετρικῶν σταθεροῦ σημείου A πρὸς ὅλας τὰς εὐθείας (τοῦ ἐπιπέδου) τὰς διερχομένας δι' ἑτέρου σταθεροῦ σημείου B.

72. Ἐκ δεδομένου σημείου περιφερείας (K, R) ἄγομεν χορδὰς καὶ τὰς προεκτείνομεν μέχρι διπλασιασμοῦ. Τόπος τῶν ἄκρων τῶν προεκτάσεων.

73. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τῶν μέσων τῶν τμημάτων τῶν παρ/λων πρὸς τὴν διάμεσον ΑΔ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ($\widehat{A}$ ἡ ὀρθὴ γωνία) καὶ περατουμένων ἐπὶ τῶν εὐθειῶν, ἐφ' ὧν κεῖνται αἱ κάθετοι πλευραί.

74. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τῶν σημείων, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο τεμνομένων εὐθειῶν εἶναι σταθερόν, ἴσον πρὸς δοθὲν τμῆμα λ.

75. Τόπος τῶν σημείων τῶν κειμένων ἐντὸς δοθείσης γωνίας καὶ τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τὰς εὐθείας τὰς φερούσας τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας ἰσοῦται κατ' ἀπόλυτον τιμὴν πρὸς δοθὲν τμῆμα λ.

76. Τριγώνου ΑΒΓ αἱ κορυφαὶ Β, Γ παραμένουν σταθεραί, ἐνῷ ἡ κορυφὴ Α μετατοπίζεται οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι πάντοτε ΑΒ + ΑΓ = C (σταθερὸν τμῆμα>ΒΓ). Ζητεῖται ὁ γ.τ. τῆς προβολῆς τῆς κορυφῆς Γ ἐπὶ τὴν ἐξωτερικὴν διχοτόμον τῆς $\widehat{A}$.

77. Ποῖος ὁ γ.τ. τῆς κορυφῆς Α τριγώνου ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου αἱ κορυφαὶ Β καὶ Γ, καθὼς καὶ τὸ μῆκος τῆς ἐκ τῆς Β διαμέσου παραμένουν σταθερά;

78. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν Ox, Oy γωνίας $x\widehat{O}y$ θεωροῦμεν ζεῦγος σημείων Α καὶ Β, τὸ Α ἐπὶ τῆς Ox, τὸ Β ἐπὶ τῆς Oy τοιοῦτον, ὥστε ΟΑ — ΟΒ = C (δοθὲν τμῆμα). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τῶν μέσων τῶν τμημάτων ΑΒ.

79. Τόπος τῶν κέντρων βάρους τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων μὲ σταθερὰν ὑποτείνουσαν ΒΓ.

80. Δίδονται δύο σταθερὰ σημεῖα Β καὶ Δ. Ποῖος ὁ γ.τ. τῶν κορυφῶν Α τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων ΑΒΓ μὲ ΑΒ = ΑΓ, τῶν ἐχόντων πάντοτε διάμεσον τὴν ΒΔ;

81. Δίδεται τρ.ΑΒΓ. Τόπος τῶν Μ, διὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύει συγχρόνως:

$$MA = MB \wedge MA < M\Gamma.$$

82. Δίδεται τρ.ΑΒΓ. Τόπος τῶν Μ, διὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύει συγχρόνως:

$$MA < MB \wedge MA < M\Gamma.$$

83. Ποῖος ὁ γ.τ. τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν, αἵτινες ἐφάπτονται δύο δοθεισῶν τεμνομένων εὐθειῶν;

84. Σημεῖον Μ διατρέχει ἓν τμῆμα ΑΒ. Εἰς ἑκάστην θέσιν τοῦ Μ κατασκευάζομεν ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΜΓ ἐπὶ τοῦ ἑνὸς τῶν ἡμιεπιπέδων, ἅτινα ὁρίζει ἡ ευθΑΒ καὶ φέρομεν εἰς τὸ Γ κάθετον ἐπὶ τὴν ΓΜ, ἥτις τέμνει εἰς Δ τὴν εἰς τὸ Β κάθετον ἐπὶ τὸ ΑΒ. Ποῖος ὁ γ.τ. τοῦ περικέντρου τοῦ τρ.ΔΒΓ;

85. Δίδεται κύκλος διαμέτρου ΑΒ καὶ κέντρου Κ. Ἐὰν Μ τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας, ποῖος ὁ γ.τ. τῆς τομῆς τῆς εἰς Μ ἐφαπτομένης τοῦ κύκλου καὶ τῆς ἐκ τοῦ Κ ἀγομένης παραλλήλου πρὸς τὴν ΑΜ;

86. Δίδεται περιφέρεια (γ) καὶ τμῆμα ΑΒ. Τόπος τοῦ Ρ, ὅταν τὸ τετράπλευρον ΑΒΜΡ εἶναι παρ/μον, τοῦ Μ ἀνήκοντος εἰς τὴν (γ).

87. Εἰς τὸ ἐσωτερικὸν κύκλου (K, R) δίδεται σταθερὸν σημεῖον Α. Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς περιφερείας (K, R) τυχὸν σημεῖον Μ καὶ διὰ τῶν τριῶν σημείων Κ, Α, Μ γράφομεν περιφέρειαν, ἔστω τὴν (γ). Εἰς τὸ Μ φέρομεν ἐφαπτομένην τῆς (K, R), ἥτις ἐπανατέμνει τὴν (γ) εἰς τὸ Ρ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τοῦ Ρ.

88. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον ἀπέχον ἀπόστασιν δ ἀπὸ δοθείσης εὐθείας καὶ ταυτοχρόνως ἀπέχον ἰσάκις ἀπὸ δύο ἄλλας δοθείσας εὐθείας ἢ δύο δοθέντα σημεῖα.

89. Νὰ γραφῇ περιφέρεια μὲ δοθεῖσαν ἀκτῖνα R καὶ i) διερχομένη διὰ δύο σημείων Α καὶ Β, ii) διερχομένη διὰ δοθέντος σημείου Α καὶ ἐφαπτομένη δοθείσης εὐθείας (ε) ἢ περιφερείας (Ο, α).

90. Δίδονται δύο περιφέρειαι (Κ) καὶ (Λ) κέντρων Κ καὶ Λ, τεμνόμεναι εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Εὐθεῖα (ε) διερχομένη διὰ τοῦ Α ἐπανατέμνει τὰς περιφερείας (Κ) καὶ (Λ) εἰς $M_1$ καὶ $M_2$. Ζητεῖται τὸ σύνολον τῶν μέσων τῶν τμημάτων $M_1M_2$.

91. Δίδεται κύκλος (Κ, R) καὶ σημεῖον Ρ τοῦ ἐπιπέδου του.

i) Τόπος τῶν μέσων τῶν χορδῶν τοῦ κύκλου, τῶν ὁποίων οἱ φορεῖς διέρχονται διὰ τοῦ Ρ. Δείξατε ὅτι ὁ τόπος εἶναι περιφέρεια ἢ τόξον.

ii) Τόπος τοῦ Ρ, ὅταν ὁ ἀνωτέρω τόπος εἶναι ἡμιπεριφέρεια.

92. Περιφέρεια (γ) σταθερᾶς ἀκτῖνος, ἀλλὰ μεταβλητῆς θέσεως, διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου Α. Εἰς ἑκάστην θέσιν αὐτῆς ἄγονται ἐφαπτόμεναι παράλληλοι πρὸς σταθερὰν εὐθεῖαν. Τόπος τῶν σημείων ἐπαφῆς.

93. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τῶν σημείων ἐπαφῆς τῶν ἐφαπτομένων, αἵτινες ἄγονται παραλλήλως πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν πρὸς τὰς περιφερείας, αἵτινες ἐφάπτονται δεδομένης εὐθείας εἰς σταθερὸν σημεῖον αὐτῆς.

94. Ὀρθογωνίου παρ/μου ΑΒΓΔ ἡ κορυφὴ Α μένει σταθερά, αἱ δὲ Β καὶ Γ μένουν ἐπὶ δεδομένης περιφερείας. Ζητεῖται ὁ γ.τ. τῆς τετάρτης κορυφῆς Δ.

95. Σημεῖον Ρ διατρέχει τὴν προέκτασιν τῆς διαμέτρου ΑΒ κύκλου (Κ, R). Ἀπὸ ἑκάστην θέσιν τοῦ Ρ φέρομεν ἡμιευθεῖαν ΡΤ ἐφαπτομένην τοῦ (Κ, R). Ζητεῖται ὁ τόπος τῆς προβολῆς τοῦ κέντρου Κ ἐπὶ τὴν διχοτόμον τῆς $\widehat{KPT}$.

96. Τίς ὁ γ.τ. τῶν σημείων, καθ' ἃ τέμνονται αἱ εὐθεῖαι αἱ ἑνοῦσαι τὰ πέρατα τῆς διαμέτρου ἡμικυκλίου μετὰ τῶν περάτων τῶν καθέτων πρὸς ἀλλήλας ἀκτίνων τούτου;

97. Δοθέντος ὀρθογωνίου τρ.ΑΒΓ, ἄγομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ, τέμνουσαν εἰς Δ καὶ Ε τὰς εὐθείας ΑΒ, ΑΓ. Τίς ὁ γ.τ. τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν εὐθειῶν ΕΒ καὶ ΓΔ ;

98. Δοθέντος κύκλου (Ο) καὶ δύο διαμέτρων ΑΒ καὶ ΓΔ καθέτων ἐπ' ἀλλήλας, φέρομεν τυχοῦσαν ἀκτῖνα ΟΕ καὶ ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν τμῆμα ΟΜ ἴσον πρὸς τὴν ἀπόστασιν τοῦ Ε ἀπὸ τῆς ΑΒ. Ποῖον τὸ σύνολον τῶν Μ ;

99. Δίδεται κύκλος (Ο) καὶ διάμετρος αὐτοῦ ΓΔ. Φέρομεν τυχοῦσαν ἀκτῖνα ΟΑ καὶ τὴν ἀπόστασιν ΑΒ τοῦ Α ἀπὸ τῆς ΓΔ. Τόπος τοῦ κέντρου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ △ΟΑΒ κύκλου.

100. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τῶν σημείων, τῶν ὁποίων αἱ (ὀρθαὶ) προβολαὶ Ρ καὶ Σ ἐπὶ δύο σταθεράς, τεμνομένας εὐθείας ($\varepsilon_1$) καὶ ($\varepsilon_2$) ὁρίζουν εὐθεῖαν ΡΣ παράλληλον πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν (δ).

101. Εἰς δοθέντα κύκλον ἄγομεν τυχοῦσαν χορδὴν ΓΔ, παρ/λον πρὸς σταθερὰν διάμετρον ΑΒ καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας (Α, Δ) τμῆμα ΑΜ = ΑΓ. Ποῖον τὸ σύνολον τῶν Μ ;

102. Τετραπλεύρου ΑΒΓΜ κυρτοῦ καὶ ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον αἱ κορυφαὶ Α, Β, Γ μένουν σταθεραί, ἐνῷ ἡ Μ μεταβάλλεται. Τίς ὁ τόπος τῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν τῶν συνδεουσῶν τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

# ΟΜΟΚΥΚΛΙΚΑ ΣΗΜΕΙΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΑΥΤΩΝ

## 21. Ἀπὸ τὴν θεωρίαν τῶν κυρτῶν πολυγώνων.

**α΄) Πολύγωνα. Ἄς θεωρήσωμεν ἐπὶ ἐπιπέδου μίαν διαδοχὴν ἐκ ν σημείων: $A_1$ τὸ πρῶτον, $A_2$ τὸ δεύτερον,..., $A_\nu$ τὸ τελευταῖον, ὅπου $\nu \geqq 3$, καθὼς καὶ τὴν διαδοχὴν τῶν ν τμημάτων $A_1A_2$, $A_2A_3$, ... $A_{\nu-1}A_\nu$, $A_\nu A_1$. Ἐφ' ὅσον δύο οἱαδήποτε ἐκ τῶν τμημάτων $A_1A_2$, $A_2A_3$, ... $A_\nu A_1$ δὲν ἀλληλοτέμνονται, τότε: τὰ ν ἀνωτέρω σημεῖα $A_1$, $A_2$, $A_3$, ... $A_\nu$ μαζὶ μὲ τὰ τμήματα $A_1A_2$, $A_2A_3$, ... $A_\nu A_1$ λέγομεν ὅτι ἀποτελοῦν ἓν ἁπλοῦν πολύγωνον. Συντόμως: «πολύγωνον».**

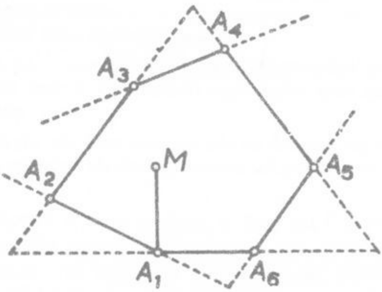
Ἐὰν τινα ἐκ τῶν τμημάτων $A_1A_2$, $A_2A_3$, ...$A_\nu A_1$ ἀλληλοτέμνωνται, τότε ὑπὸ τῶν σημείων $A_1$, ...$A_\nu$ καὶ τῶν τμημάτων $A_1A_2$,... $A_\nu A_1$ ὁρίζεται **διεσταυρωμένον πολύγωνον.**

Δυνατὸν τὰ σημεῖα $A_1$, $A_1$, ...$A_\nu$, ἐνῷ ὁρίζουν ἁπλοῦν πολύγωνον, κατ' ἄλλην τάξιν λαμβανόμενα νὰ μὴ ὁρίζουν ἁπλοῦν πολύγωνον, ἀλλὰ διεσταυρωμένον πολύγωνον. Πάντως αἱ ν διαδοχαὶ («κυκλικαὶ μεταθέσεις» λεγόμεναι): $\{A_1, A_2, ...A_\nu\}$, $\{A_2, A_3, ...A_\nu, A_1\}$, $\{A_3, A_4 ... A_\nu, A_1, A_2\}$ ... $\{A_\nu, A_1, ... A_{\nu-1}\}$ ὁρίζουν ἓν καὶ τὸ αὐτὸ πολύγωνον.

Τὰ σημεῖα $A_1$,$A_2$, ... $A_\nu$ καλοῦνται **κορυφαὶ** καὶ τὰ τμήματα $A_1A_2$, $A_2A_3$, ... $A_\nu A_1$ καλοῦνται **πλευραὶ** τοῦ πολυγώνου. Εὐκόλως βλέπομεν ὅτι αἱ κορυφαὶ εἶναι **ἰσάριθμοι** πρὸς τὰς πλευράς.

**β') Κυρτὰ πολύγωνα. Ἐὰν ἑκάστη εὐθεῖα περιέχουσα (φέρουσα) μίαν πλευρὰν ἔχῃ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος της ὅλας τὰς ἄλλας κορυφὰς τοῦ πολυγώνου, τότε τὸ πολύγωνον καλεῖται κυρτὸν πολύγωνον.**

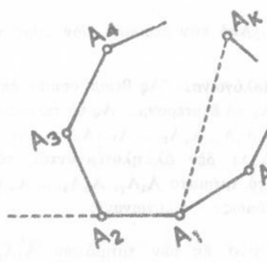
Ἐὰν π.χ. τὸ πολύγωνον $A_1 A_2 \ldots A_\nu$ εἶναι κυρτόν, τότε αἱ κορυφαὶ $A_3, A_4, \ldots A_\nu$ κεῖνται ἐπὶ ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἡμιεπιπέδου ἐκ τῶν δύο, τὰ ὁποῖα ὁρίζει ἡ ευθ$A_1A_2$κ.τ.λ.



Σχ. 21

Ἓν σημεῖον Μ λέγεται **ἐσωτερικὸν σημεῖον** τοῦ κυρτοῦ πολυγώνου, ἂν ὡς πρὸς τὸν φορέα ἑκάστης πλευρᾶς κεῖται εἰς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου, εἰς τὸ ὁποῖον κεῖνται καὶ αἱ λοιπαὶ κορυφαὶ τοῦ πολυγώνου (σχ. 21). Κατὰ συνέπειαν τὸ ἐσωτερικὸν σημεῖον δὲν κεῖται ἐπὶ πλευρᾶς τινος, διότι πᾶν σημεῖον ἀνῆκον εἰς ἓν ἡμιεπίπεδον δὲν ἀνήκει εἰς τὸ σύνορον (ἀρχικὴν εὐθεῖαν) τοῦ ἡμιεπιπέδου. **Ἐσωτερικὸν τοῦ κυρτοῦ πολυγώνου** καλεῖται τὸ σύνολον τῶν ἐσωτερικῶν σημείων αὐτοῦ. Τὸ ἐσωτερικὸν εἶναι, ὡς λέγομεν, **τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου τὸ περικλειόμενον** ὑπὸ τοῦ πολυγώνου.

**Διαγώνιος** κυρτοῦ πολυγώνου καλεῖται πᾶν εὐθύγραμμον τμῆμα ἔχον ἄκρα δύο κορυφὰς τοῦ πολυγώνου, *μὴ διαδοχικάς*. Δηλ. ἡ διαγώνιος συνδέει δύο κορυφάς, χωρὶς νὰ εἶναι πλευρά. *Κάθε διαγώνιος*, π.χ. ἡ $A_1 A_k$ (σχ. 22) *εὑρίσκεται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ κυρτοῦ πολυγώνου*.. Διότι ὡς πρὸς πᾶσαν εὐθεῖαν φέρουσαν μίαν πλευρὰν τὸ τμῆμα $A_1 A_k$ εὑρίσκεται ὁλόκληρον εἰς τὸ αὐτὸ μέρος μὲ τὰς ἄλλας κορυφάς. Π.χ. ὡς πρὸς τὴν ευθ$A_2A_3$ τὰ σημεῖα $A_1$, $A_k$ κεῖνται εἰς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου, εἰς ὃ κεῖνται καὶ αἱ λοιπαὶ κορυφαὶ $A_4, \ldots A_\nu, A_1$· ἄρα καὶ ὁλόκληρον τὸ τμῆμα $A_1 A_k$ εὑρίσκεται εἰς τὸ αὐτὸ ἡμιεπίπεδον μὲ τὰς ἄλλας κορυφάς, ὡς πρὸς τὴν ευθ$A_2A_3$. Ἐπειδὴ τὸ ἴδιον συμβαίνει καὶ μὲ ὅλας τὰς εὐθείας τὰς φερούσας μίαν πλευράν, διὰ τοῦτο κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ «ἐσωτερικοῦ» τὸ τμῆμα $A_1A_k$ ἀνήκει εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ πολυγώνου.

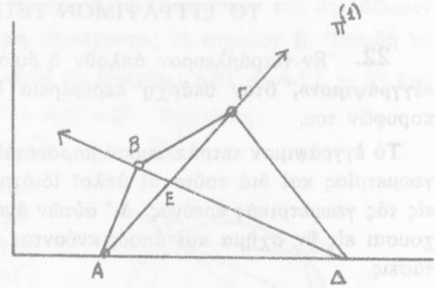


Σχ. 22

**γ') Κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ** (σχ. 23). Εἰς αὐτὸ διακρίνομεν δύο ζεύγη **ἀπέναντι** γωνιῶν: $(\widehat{A}, \widehat{\Gamma})$ καὶ $(\widehat{B}, \widehat{\Delta})$.

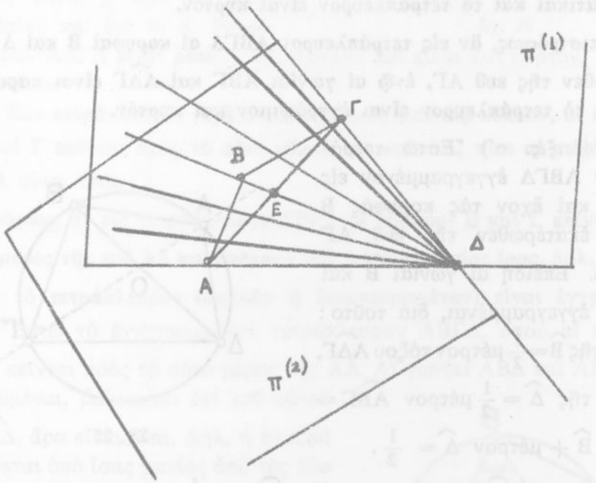
(Θ).— Ἐὰν αἱ διαγώνιοι (δηλ. τὰ τμήματα ΑΓ, ΒΔ) τετραπλεύρου ΑΒΓΔ (σχ. 23) τέμνωνται εἰς Ε, τότε τὸ ΑΒΓΔ εἶναι κυρτόν.

Πρὸς ἀπόδειξιν, ἂς θεωρήσωμεν τὸ ἡμιεπίπεδον $\Pi^{(1)}$ τὸ ὑπὸ τῆς ευθΑΔ καὶ τοῦ Ε ὁριζόμενον. Ἡ ἡμιευθεῖα (Α, Γ) ἀρχομένη ἀπὸ τοῦ συνόρου τοῦ ἡμιεπιπέδου $\Pi^{(1)}$ καὶ περιέχουσα ἓν σημεῖον Ε τοῦ $\Pi^{(1)}$ κεῖται ὁλόκληρος ἐντὸς τοῦ $\Pi^{(1)}$. Ἄρα τὸ $\Gamma\in\Pi^{(1)}$. Ὁμοίως τὸ $B\in\Pi^{(1)}$. Ἤτοι ἡ ευθΑΔ ἔχει πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος της τὰ Β καὶ Γ. Ὁμοίως ἑκάστη τῶν ἄλλων πλευρῶν τοῦ ΑΒΓΔ ἔχει πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος της τὰς δύο ἄλλας κορυφάς. Ἄρα τὸ ΑΒΓΔ εἶναι κυρτὸν (ἐδ. β΄).



Σχ. 23

Ἀντιστρόφως. Ἐὰν τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι κυρτόν, αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ ΑΓ καὶ ΒΔ τέμνονται εἰς σημεῖον Ε ἐσωτερικὸν τοῦ ΑΒΓΔ (σχ. 24). Διότι τὰ Β καὶ Γ κεῖνται



Σχ. 24

ἐπὶ ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἡμιεπιπέδου $\Pi^{(1)}$ τοῦ ἔχοντος σύνορον τὴν ευθΑΔ (δηλ. πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ευθΑΔ, ἀφοῦ τὸ ΑΒΓΔ εἶναι κυρτόν). Ἀναλόγως τὰ Α καὶ Β κεῖνται ἐπὶ ἑτέρου ἡμιεπιπέδου $\Pi^{(2)}$ ἔχοντος σύνορον τὴν ευθΔΓ. Ὥστε τὸ Β ἀνήκει εἰς ἀμφότερα τὰ ἡμιεπίπεδα $\Pi^{(1)}$ καὶ $\Pi^{(2)}$ δηλ. εἰς τὴν «τομὴν» αὐτῶν. Ἀλλ' ἡ τομὴ (τὸ κοινὸν μέρος) τῶν δύο ἡμιεπιπέδων $\Pi^{(1)}$ καὶ $\Pi^{(2)}$ εἶναι τὸ ἐσωτερικὸν τῆς κυρτῆς γωνίας $\widehat{A\Delta\Gamma}$. Ἀφοῦ τὸ Β εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τῆς $\widehat{A\Delta\Gamma}$, ἡ ἡμιευθεῖα (Δ,Β) τέμνει τὸ τμῆμα ΑΓ τὸ συνδέον τὰς δύο πλευρὰς τῆς γωνίας $\widehat{A\Delta\Gamma}$ εἴς τι σημεῖον Ε, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ τετραπλεύρου, ἀφοῦ τὸ ΑΓ κεῖται ἐντὸς τοῦ κυρτοῦ τετραπλεύρου (ἐδαφ. γ΄). Ὁμοίως δεικνύεται ὅτι ἡ ἡμιευθεῖα (Γ,Α) τέμνει τὸ τμῆμα ΔΒ. ὅ.ἔ.δ.

## ΤΟ ΕΓΓΡΑΨΙΜΟΝ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟΝ

**22.** Ἓν τετράπλευρον ἁπλοῦν ἢ διεσταυρωμένον (§ 21, α') καλεῖται **«ἐγγράψιμον»**, ὅταν ὑπάρχῃ περιφέρεια διερχομένη διὰ τῶν τεσσάρων κορυφῶν του.

Τὸ ἐγγράψιμον τετράπλευρον παρουσιάζεται εἰς πλεῖστα σχήματα τῆς γεωμετρίας καὶ διὰ τοῦτο αἱ ἁπλαῖ ἰδιότητές του εἶναι εὐρείας χρήσεως εἰς τὰς γεωμετρικὰς ἐρεύνας. Δι' αὐτῶν ἀνακαλύπτονται ἴσαι γωνίαι ὑπάρχουσαι εἰς ἓν σχῆμα καὶ ἀποδεικνύονται πολυάριθμοι γεωμετρικαὶ προτάσεις.

## 23. Χαρακτηριστικαὶ ἰδιότητες.

**I. Ἐὰν τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγράψιμον, αἱ δὲ κορυφαὶ Β καὶ Δ κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς ευθ ΑΓ, τότε αἱ γωνίαι $\widehat{ΑΒΓ}$ καὶ $\widehat{ΑΔΓ}$ εἶναι παραπληρωματικαὶ καὶ τὸ τετράπλευρον εἶναι κυρτόν.**

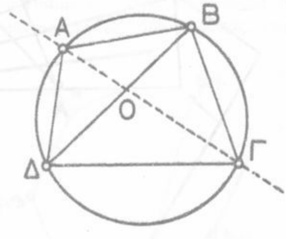
**Ἀντιστρόφως, ἂν εἰς τετράπλευρον ΑΒΓΔ αἱ κορυφαὶ Β καὶ Δ κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς ευθ ΑΓ, ἐνῷ αἱ γωνίαι $\widehat{ΑΒΓ}$ καὶ $\widehat{ΑΔΓ}$ εἶναι παραπληρωματικαί, τὸ τετράπλευρον εἶναι ἐγγράψιμον καὶ κυρτόν.**

*Ἀπόδειξις.* α') Ἔστω τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον καὶ ἔχον τὰς κορυφὰς Β καὶ Δ ἑκατέρωθεν τῆς ευθ ΑΓ (σχ. 25). Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι $\widehat{Β}$ καὶ $\widehat{Δ}$ εἶναι ἐγγεγραμμέναι, διὰ τοῦτο:

μέτρον τῆς $\widehat{Β} = \frac{1}{2}$ μέτρον τόξου $\widehat{ΑΔΓ}$,

μέτρον τῆς $\widehat{Δ} = \frac{1}{2}$ μέτρον $\widehat{ΑΒΓ} \Rightarrow$

μέτρον $\widehat{Β}$ + μέτρον $\widehat{Δ} = \frac{1}{2}$.



Σχ. 25

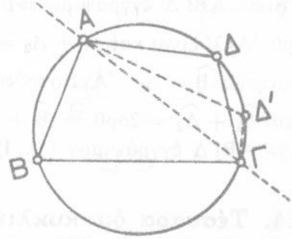
(μέτρον τόξου $\widehat{ΑΔΓ}$ + μέτρον τόξου $\widehat{ΑΒΓ}$) $= \frac{1}{2} \cdot 360^0 = 180^0$.

Ἐξ ἄλλου, ἐπειδὴ αἱ ἡμιευθεῖαι (Γ, Β), (Γ, Δ) κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς (Γ, Α), ἕπεται ὅτι ἡ ἡμιευθεῖα (Γ, Α) εἶναι ἐσωτερικὴ ἀκτὶς τῆς γωνίας $\widehat{ΔΓΒ}$, ἄρα θὰ τέμνῃ τὸ τμῆμα ΔΒ εἰς σημεῖον Ο. Τὸ Ο ἀνῆκον εἰς τὴν χορδὴν ΔΒ εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ κύκλου, ἄρα καὶ ἐσωτερικὸν σημεῖον τῆς χορδῆς ΑΓ. Ἀφοῦ αἱ διαγώνιοι τοῦ ΑΒΓΔ τέμνονται, τοῦτο εἶναι κυρτόν.

β') Ἔστω τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἔχον τὰς κορυφὰς Β καὶ Δ ἑκατέρωθεν τῆς ευθ ΑΓ καὶ τὰς γωνίας $\widehat{ΑΒΓ}$ καὶ $\widehat{ΑΔΓ}$ παραπληρωματικάς. Ἄς γράψωμεν τὴν διὰ τῶν Α, Β, Γ διερχομένην περιφέρειαν καὶ ἂς λάβωμεν σημεῖον Δ′ τοῦ τόξου $\widehat{ΑΓ}$ τοῦ **μὴ** περιέχοντος τὸ σημεῖον Β. Ἐπειδὴ τὸ ΑΒΓΔ′ εἶναι ἐγγεγραμμένον, θὰ εἶναι, ὡς ἐδείχθη : $\widehat{ΑΒΓ} + \widehat{ΑΔ'Γ} = 2^D$, ἐνῷ συγχρόνως, ἐξ ὑποθέσεως, $\widehat{ΑΒΓ} + \widehat{ΑΔΓ} = 2^D$. Ἑπομένως :

$$\widehat{ΑΔΓ} = \widehat{ΑΔ'Γ} = 2^D - \widehat{Β}.$$

Τὰ δύο σημεῖα Δ καὶ Δ′ βλέπουν τὸ τμῆμα ΑΓ ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν καὶ κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἰδίου ἡμιεπιπέδου ὡς πρὸς τὴν ευθ ΑΓ, τοῦ μὴ περιέχοντος τὸ Β. Ἄρα εὑρίσκονται ἐπὶ τοῦ ἰδίου τόξου, ἱκανοῦ γωνίας $180^0 - \widehat{Β}$. Ἐπειδὴ τὸ Δ′ κεῖται ἐκ κατασκευῆς ἐπὶ τῆς περιφερείας (Α,Β,Γ), ἄρα τὸ αὐτὸ θὰ συμβαίνῃ καὶ διὰ τὸ Δ. Τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι λοιπὸν ἐγγράψιμον καὶ εἶναι καὶ κυρτόν, ὡς ἐδείχθη ἀνωτέρω.




Σχ. 26

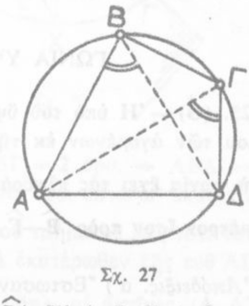
**ΙΙ. Ἐὰν τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, αἱ δὲ κορυφαὶ Β καὶ Γ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ευθ ΑΔ, τότε αἱ γωνίαι $\widehat{ΑΒΔ}$ καὶ $\widehat{ΑΓΔ}$ εἶναι ἴσαι.**

**Ἀντιστρόφως, ἂν εἰς τετράπλευρον ΑΒΓΔ αἱ κορυφαὶ Β καὶ Γ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ευθ ΑΔ καὶ βλέπουν τὴν ΑΔ ὑπὸ γωνίας ἴσας, δηλ. $\widehat{ΑΒΔ} = \widehat{ΑΓΔ}$, τὸ τετράπλευρον (ἁπλοῦν ἢ διεσταυρωμένον) εἶναι ἐγγράψιμον.**

α′) Ἔστω τὸ ἐγγεγραμμένον τετράπλευρον ΑΒΓΔ, ὅπου αἱ κορυφαὶ Β καὶ Γ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΑΔ. Αἱ γωνίαι $\widehat{ΑΒΔ}$ καὶ $\widehat{ΑΓΔ}$ εἶναι ἐγγεγραμμέναι, βαίνουσαι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου $\widehat{ΑΔ}$, ἄρα εἶναι ἴσαι. Δηλ. ἡ πλευρὰ ΑΔ φαίνεται ὑπὸ ἴσας γωνίας ἀπὸ τὰς δύο ἀπέναντί της κορυφὰς Β καὶ Γ.

β′) Ἔστω τετράπλευρον ΑΒΓΔ μὲ $\widehat{ΑΒΔ} = \widehat{ΑΓΔ}$, ὡς εἰς σχ. 27.

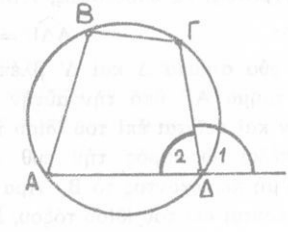
Τότε τὰ σημεῖα Β καὶ Γ, κείμενα πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ευθ ΑΔ, βλέπουν τὸ τμῆμα ΑΔ ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν. Ἄρα τὰ Β καὶ Γ κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἰδίου τόξου, χορδῆς ΑΔ καὶ ἱκανοῦ γωνίας $\widehat{ΑΒΔ}$. Τὰ Α, Β, Γ, Δ εἶναι ὁμοκυκλικά.




Σχ. 27

**III. Ἐὰν κυρτὸν τετράπλευρον εἶναι ἐγγράψιμον, τότε πᾶσα ἐξωτερικὴ γωνία αὐτοῦ ἰσοῦται μὲ τὴν ἀπέναντι ἐσωτερικήν· καὶ ἀντιστρόφως.**

Ἔστω $\widehat{\Delta}_1$ μία ἐξωτερικὴ γωνία, $\widehat{B}$ ἡ ἀπέναντί της ἐσωτερικὴ καὶ $\widehat{\Delta}_2$ ἡ ἐσωτερικὴ γωνία τοῦ ἐγγραψίμου ΑΒΓΔ, ἡ προσκειμένη τῆς $\widehat{\Delta}_1$.



Σχ. 28

Τότε: ΑΒΓΔ ἐγγράψιμον $\Rightarrow \widehat{B}+\widehat{\Delta}_2 = 2$ορθ. Ἀλλ' εἶναι καὶ $\widehat{\Delta}_1 + \widehat{\Delta}_2 = 2$ορθ καὶ συνεπῶς $\widehat{B} = \widehat{\Delta}_1$. Ἀντιστρόφως: $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Delta}_1 + \widehat{\Delta}_2 = 2$ορθ $\Rightarrow \widehat{B} + \widehat{\Delta}_2 =$ 2ορθ $\Rightarrow$ ΑΒΓΔ ἐγγράψιμον (βλ. Ι).

**24. Τέσσαρα ὁμοκυκλικὰ σημεῖα.** — Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἰδιοτήτων Ι καὶ ΙΙ (τῆς § 23) γίνεται φανερὸν τὸ ἑξῆς θεώρημα:

**Τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ εἶναι ὁμοκυκλικά, ὅταν**

**i) Τὰ Β καὶ Δ κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς ευθ ΑΓ, αἱ δὲ γωνίαι $\widehat{AB\Gamma}$ καὶ $\widehat{A\Delta\Gamma}$ εἶναι παραπληρωματικαὶ**

**ἢ ὅταν**

**ii) Τὰ Β καὶ Δ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ευθ ΑΓ, αἱ δὲ γωνίαι $\widehat{AB\Gamma}$ καὶ $\widehat{A\Delta\Gamma}$ εἶναι ἴσαι**

**ἤ, τέλος, ὅταν**

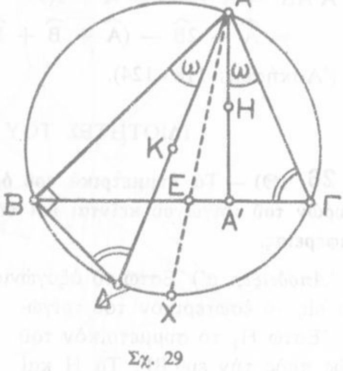
**iii) $\widehat{AB\Gamma} = 1$ ὀρθὴ καὶ $\widehat{A\Delta\Gamma} = 1$ ὀρθή, ἀδιακρίτως διατάξεως τῶν σημείων.** (Ἀσκήσεις : 103 - 117)

## ΓΩΝΙΑ ΥΨΟΥΣ ΚΑΙ ΔΙΑΜΕΤΡΟΥ

**25.** (Θ) — **Ἡ ὑπὸ τοῦ ὕψους καὶ τῆς διαμέτρου τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου τῶν ἀγομένων ἐκ τῆς κορυφῆς Α τριγώνου ΑΒΓ σχηματιζομένη κυρτὴ γωνία ἔχει τὰς πλευρὰς της συμμετρικὰς πρὸς τὴν διχοτόμον τῆς $\widehat{A}$ καὶ μέτρον ἴσον πρὸς $\widehat{B}-\widehat{\Gamma}$.**

*Ἀπόδειξις.* α΄) Ἔστωσαν αἱ $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$ ὀξεῖαι (σχ. 29). Τότε τὸ περίκεντρον Κ κεῖται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς $\widehat{BA\Gamma}$, ἄρα καὶ τὸ Δ. Συνεπῶς τὰ Δ καὶ Γ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ τὸ μέρος τῆς ευθΑΒ καὶ συνεπῶς:

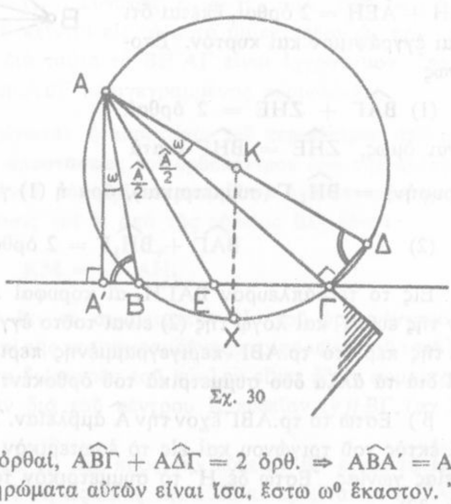
$A\widehat{\Delta}B = A\widehat{\Gamma}B = \widehat{\Gamma}$. Τὸ Α′ κεῖται μεταξὺ Β καὶ Γ, ἄρα καὶ τὸ ΑΑ′ κεῖται ἐντὸς τῆς γωνίας $B\widehat{A}\Gamma$. Τέλος, ἐπειδὴ αἱ ἡμιευθεῖαι (Α, Δ) καὶ (Α, Α′) εἶναι ἐσωτερικαὶ τῆς γωνίας $B\widehat{A}\Gamma$ καὶ σχηματίζουν ἴσας γωνίας μὲ τὰς πλευράς, δηλ.: $B\widehat{A}\Delta = 90^0 - \widehat{\Delta} = 90^0 - \widehat{\Gamma}$ καὶ $\Gamma\widehat{A}A' = 90^0 - \widehat{\Gamma}$, διὰ τοῦτο εἶναι συμμετρικαὶ ὡς πρὸς τὴν διχοτόμον ΑΧ τῆς $B\widehat{A}\Gamma$.



Σχ. 29

Εἶναι ἐπίσης $A'\widehat{A}\Delta = |A'\widehat{A}B - \Delta\widehat{A}B| = |90^0 - \widehat{B} - (90^0 - \widehat{\Gamma})| = |\widehat{B} - \widehat{\Gamma}|$.

β′) Ἔστω ἡ $\widehat{B}$ ἀμβλεῖα (σχ. 30). Τότε τὸ τόξον, ἐφ' οὗ βαίνει ἡ $\widehat{B}$, εἶναι μεῖζον τόξον καὶ ἡ διάμετρος ΑΔ περατοῦται εἴς τι σημεῖον Δ αὐτοῦ. Ἐπειδὴ δὲ τὸ μεῖζον τόξον $A\widehat{\Delta}\Gamma$ καὶ τὸ ἔλασσον $A\widehat{B}\Gamma$ κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς χορδῆς ΑΓ, διὰ τοῦτο αἱ γωνίαι $A\widehat{\Delta}\Gamma$ καὶ $A\widehat{B}\Gamma$ εἶναι παραπληρωματικαί (§ 23).



Σχ. 30

Ἐξ ἄλλου τὸ Α′ κεῖται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τοῦ ΓΒ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Β. Ἔχομεν λοιπὸν $A\widehat{B}A' + A\widehat{B}\Gamma = 2$ ὀρθαί, $A\widehat{B}\Gamma + A\widehat{\Delta}\Gamma = 2$ ὀρθ. $\Rightarrow A\widehat{B}A' = A\widehat{\Delta}\Gamma$ καὶ συνεπῶς καὶ τὰ συμπληρώματα αὐτῶν εἶναι ἴσα, ἔστω $\omega^0$ ἕκαστον. Ἂν Ε ἡ τομὴ τῆς διχοτόμου ΑΧ τῆς $B\widehat{A}\Gamma$ μετὰ τοῦ τμήματος ΒΓ, τότε τὰ Ε καὶ Α′ κεῖνται ἑκατέρωθεν τοῦ Β, τὰ δὲ Ε καὶ Δ ἑκατέρωθεν τῆς ευθ ΑΓ. Διὰ τοῦτο: $A'\widehat{A}X = \omega + \frac{A}{2}$ καὶ $X\widehat{A}\Delta = \frac{A}{2} + \omega$, δηλ. αἱ ἀκτῖνες (Α, Α′) καὶ (Α,Δ) εἶναι συμμετρικαὶ ὡς πρὸς τὴν διχοτόμον ΑΧ. Τέλος ἡ γωνία

$$A'\widehat{A\Delta} = \widehat{A} + 2\omega = \widehat{A} + 2(90^0 - (180^0 - \widehat{B})) = \widehat{A} + 2\widehat{B} - 180^0 =$$
$$= \widehat{A} + 2\widehat{B} - (\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma}) = \widehat{B} - \widehat{\Gamma} = |\widehat{B} - \widehat{\Gamma}|.$$

('Ασκήσεις: 118 - 124).

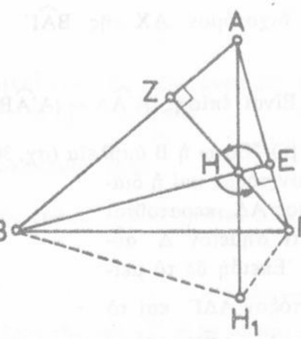
## ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΟΡΘΟΚΕΝΤΡΟΥ

**26.** (Θ) — **Τὰ συμμετρικὰ τοῦ ὀρθοκέντρου ὡς πρὸς τοὺς φορεῖς τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου κεῖνται ἐπὶ τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ τρίγωνον περιφερείας.**

*'Απόδειξις.* α') Ἔστω τὸ ὀξυγώνιον τρ.ΑΒΓ. Τὸ ὀρθόκεντρον Η κεῖται τότε εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ τριγώνου. Ἔστω $H_1$ τὸ συμμετρικὸν τοῦ Η ὡς πρὸς τὴν ευθ ΒΓ. Τὰ Η καὶ Α κεῖνται ὡς πρὸς τὴν ευθ ΒΓ εἰς τὸ αὐτὸ ἡμιεπίπεδον, τὸ μὴ περιέχον τὸ $H_1$. Ἐξ ἄλλου εἰς τὸ τετράπλευρον ΑΖΗΕ τὰ Ζ καὶ Ε κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς ευθ ΑΗ καὶ ἐπειδὴ

$\widehat{AZH} + \widehat{AEH} = 2$ ὀρθαί, ἕπεται ὅτι εἶναι ἐγγράψιμον καὶ κυρτόν. Ἐπομένως

(1) $\widehat{BA\Gamma} + \widehat{ZHE} = 2$ ὀρθαί.




Σχ. 31

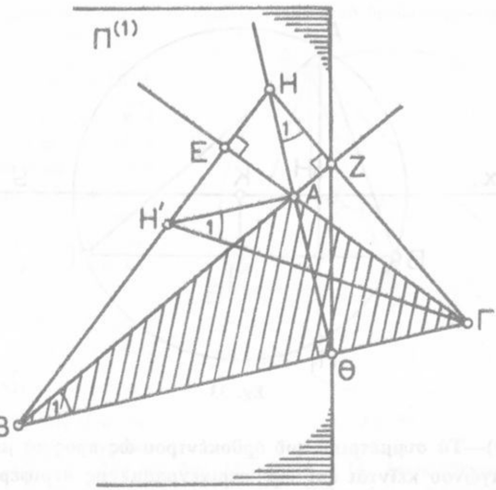
Εἶναι ὅμως, $\widehat{ZHE} = \widehat{BH\Gamma}$ (κατὰ κορυφὴν) $= \widehat{BH_1\Gamma}$ (συμμετρικαί), ἄρα ἡ (1) γίνεται:

(2) $$\widehat{BA\Gamma} + \widehat{BH_1\Gamma} = 2 \text{ ὀρθαί.}$$

Εἰς τὸ τετράπλευρον $BA\Gamma H_1$ αἱ κορυφαὶ Α καὶ $H_1$ κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς ευθΒΓ καὶ λόγῳ τῆς (2) εἶναι τοῦτο ἐγγράψιμον. Ἄρα τὸ $H_1$ κεῖται ἐπὶ τῆς περὶ τὸ τρ.ΑΒΓ περιγεγραμμένης περιφερείας. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὰ ἄλλα δύο συμμετρικὰ τοῦ ὀρθοκέντρου Η.

β') Ἔστω τὸ τρ.ΑΒΓ ἔχον τὴν $\widehat{A}$ ἀμβλεῖαν. Τότε τὸ ὀρθόκεντρον Η κεῖται ἐκτὸς τοῦ τριγώνου καὶ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς κατὰ κορυφὴν τῆς ἀμβλείας γωνίας. Ἔστω δὲ Η' τὸ συμμετρικὸν τοῦ Η ὡς πρὸς τὴν ευθ ΑΓ. (σχ. 32).

'Επειδὴ $\widehat{HZB} = \widehat{H\Theta B} = 1$ ὀρθὴ $\Rightarrow$ ΗΖΘΒ ἐγγράψιμον καὶ μάλιστα τὰ Η, Β κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ευθ ΖΘ, δηλ. εἰς τὸ ἡμιεπίπεδον $\Pi^{(1)}$ τὸ περιέχον τὸ Α (διότι, ἀφοῦ τὸ Α κεῖται μεταξὺ Ζ καὶ Β $\Rightarrow B \in \Pi^{(1)}$, ὁμοίως καὶ τὸ Η). Διὰ τοῦτο $\widehat{ZH\Theta} = \widehat{ZB\Theta}$, ἤτοι $\widehat{H}_1 = \widehat{B}_1$. 'Αλλὰ καὶ $\widehat{\Gamma HA} = \widehat{\Gamma H'A}$




Σχ. 32

ὡς συμμετρικαί, δηλ. $\widehat{H_1} = \widehat{H_1'}$. Συνεπῶς, $\widehat{B_1} = \widehat{H'}$, δηλ. $\widehat{\Gamma B A} = \widehat{\Gamma H' A}$. Ἐπειδή, ἀκόμη, τὰ Β καὶ Η′ κεῖνται εἰς τὸ αὐτὸ ἡμιεπίπεδον ὡς πρὸς τὴν ευθΑΓ (τὸ περιέχον τὸ Β), διὰ ταῦτα τὸ ΒΗ′ΑΓ εἶναι ἐγγράψιμον, ἄρα τὸ Η′ κεῖται ἐπὶ τῆς περὶ τὸ τρ.ΑΒΓ περιγεγραμμένης περιφερείας.

**27. (Θ) — Εἰς πᾶν τρίγωνον ἡ ἀπόστασις τοῦ περικέντρου ἀπὸ μιᾶς πλευρᾶς εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ἀποστάσεως τοῦ ὀρθοκέντρου ἀπὸ τῆς ἀπέναντι κορυφῆς. Ἀκριβέστερον : ἐὰν Κ τὸ περίκεντρον, Η τὸ ὀρθόκεντρον τριγώνου ΑΒΓ καὶ ΚΜ ἡ ἀπόστασις τοῦ Κ ἀπὸ τῆς εὐθείας ΒΓ, τότε :**

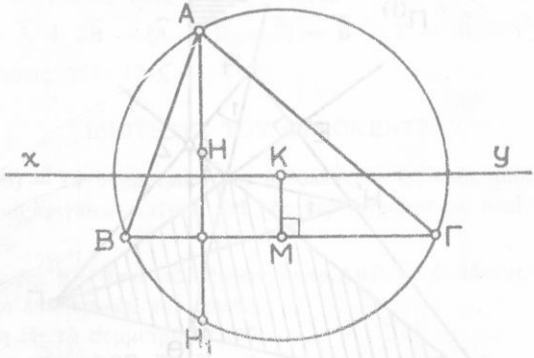
$$\overrightarrow{KM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AH}.$$

*Ἀπόδειξις*. Γνωρίζομεν ὅτι τὸ συμμετρικὸν $H_1$ τοῦ ὀρθοκέντρου Η ὡς πρὸς τὴν ευθΒΓ κεῖται ἐπὶ τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας τοῦ τρ.ΑΒΓ. Γνωρίζομεν ἐπίσης ὅτι πᾶσα διάμετρος τοῦ κύκλου εἶναι ἄξων συμμετρίας αὐτοῦ. Ἐὰν λοιπὸν φέρωμεν διὰ τοῦ κέντρου Κ εὐθεῖαν xy // ΒΓ (σχ 33), τότε:

1ον) Τὸ συμμετρικὸν τοῦ $H_1$ ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΒΓ εἶναι τὸ Η.

2ον) Τὸ συμμετρικὸν τοῦ $H_1$ ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν xy εἶναι τὸ Α. Ἀλλ' ὅταν ὁ ἄξων συμμετρίας ΒΓ μετατοπισθῇ κατὰ διάνυσμα $\delta = \overrightarrow{MK}$ κάθετον ἐπ' αὐτόν, τότε τὸ συμμετρικὸν ἑνὸς σημείου μετατοπίζεται κατὰ διάνυσμα $\overrightarrow{2\delta}$ (§ **16** δ′).

Ἑπομένως, $\overrightarrow{HA} = 2\overrightarrow{MK} \Rightarrow \overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{KM} \Rightarrow \overrightarrow{KM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AH}.$



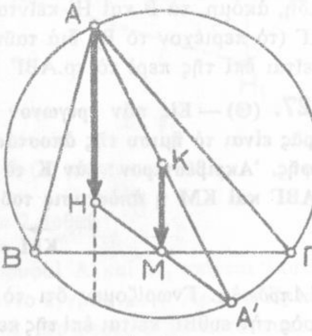

Σχ. 33

**28. (Θ)—Τὰ συμμετρικὰ τοῦ ὀρθοκέντρου ὡς πρὸς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου κεῖνται ἐπὶ τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας καὶ εἶναι καὶ ἀντιδιαμετρικὰ τῶν κορυφῶν.**

Διότι, ἂν φέρωμεν τὴν διάμετρον ΑΑ΄ (σχ. 34) καὶ θεωρήσωμεν τὸ τρ.ΑΗΑ΄, τότε, ἐπειδὴ τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{KM}$ ἀρχόμενον ἀπὸ τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΑΑ΄ τοῦ τρ.ΑΗΑ΄ ἔχει τὴν ἰδιότητα:

$$\overrightarrow{KM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AH},$$

διὰ τοῦτο περατοῦται εἰς τὸ μέσον τῆς τρίτης πλευρᾶς ΗΑ΄. Ἀφοῦ τὸ Μ εἶναι μέσον τοῦ ΗΑ΄, τὸ συμμετρικὸν τοῦ Η ὡς πρὸς τὸ μέσον Μ τῆς πλευρᾶς ΒΓ εἶναι τὸ Α΄, δηλ. κεῖται ἐπὶ τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας.




Σχ. 34

*Ἄλλη ἀπόδειξις*: Εἶναι $\widehat{A'\Gamma A} = 1^D$ συνεπῶς Α΄Γ ⊥ ΑΓ. Εἶναι καὶ ευθΒΗ ⊥ ΑΓ, ἑπομένως Α΄Γ||ΒΗ. Ὁμοίως Α΄Β||ΓΗ. Ὅθεν ΒΗΓΑ΄ εἶναι παρ|μον καὶ συνεπῶς αἱ ΗΑ΄ καὶ ΒΓ ἔχουν κοινὸν μέσον.

(Ἀσκήσεις: 125 - 131).

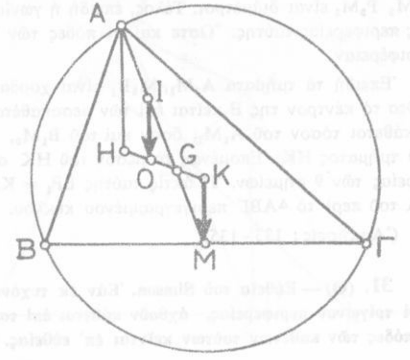
**29. (Θ) Εὐθεῖα τοῦ Euler — Εἰς πᾶν τρίγωνον τὸ περίκεντρον Κ, τὸ βαρύκεντρον G καὶ τὸ ὀρθόκεντρον Η κεῖνται ἐπ' εὐθείας καὶ μάλιστα:**

$$\overrightarrow{KG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GH}.$$

*Ἀπόδειξις*. Ἔστωσαν K καὶ H τὸ περίκεντρον καὶ τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τρ.ΑΒΓ καὶ M τὸ μέσον τοῦ ΒΓ (σχ. 35).

Γνωρίζομεν ὅτι $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{KM}$,

ἄρα τὰ διανύσματα $\overrightarrow{HA}$ καὶ $\overrightarrow{KM}$ εἶναι ἀντίρροπα καὶ συνεπῶς τὰ A καὶ M κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς ευθ HK, ἄρα τὸ τμῆμα AM τέμνει τὴν ευθHK εἴς τι σημεῖον G κείμενον μεταξὺ H καὶ K, διότι τὸ AM κεῖται ἐντὸς τῆς ταινίας τῶν παρ|λων AH, KM.




Σχ. 35

Ἂς ἑνώσωμεν τώρα τὸ μέσον O τοῦ HG μὲ τὸ μέσον I τοῦ AG.

Ἔχομεν $\overrightarrow{IO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{KM}$, ἄρα τὸ τετράπλευρον IOMK εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ συνεπῶς: $KG = GO$ καὶ $MG = GI$. Ἐκ τοῦ ὅτι: $MG = GI = IA$ ἕπεται ὅτι τὸ G εἶναι τὸ κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ ἐκ τοῦ ὅτι $KG = GO = OH$ ἕπεται.

$$\overrightarrow{KG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{KH}$$

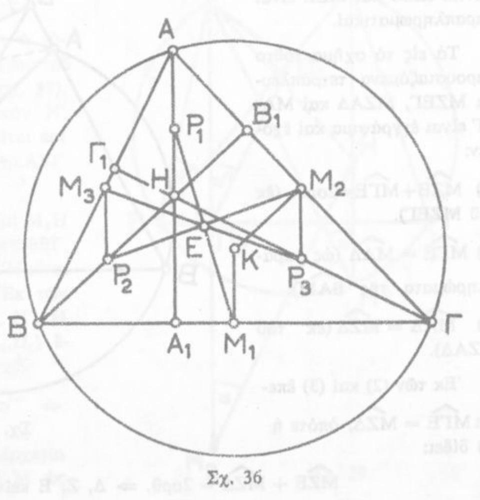
**30.** (Θ)—**Εἰς πᾶν τρίγωνον τὰ μέσα τῶν πλευρῶν, οἱ πόδες τῶν ὑψῶν καὶ τὰ μέσα τῶν ἀποστάσεων τοῦ ὀρθοκέντρου ἀπὸ τὰς κορυφὰς κεῖνται ἐπὶ μιᾶς περιφερείας. Τὸ κέντρον τῆς περιφερείας ταύτης εὑρίσκεται εἰς τὸ μέσον τῆς ἀποστάσεως τοῦ περικέντρου ἀπὸ τοῦ ὀρθοκέντρου, ἡ δὲ ἀκτίς της ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος τῆς περὶ τὸ τρίγωνον περιγεγραμμένης περιφερείας.** (Κύκλος τῶν ἐννέα σημείων ἢ τοῦ EULER).

*Ἀπόδειξις*. Ἔστωσαν $A_1$, $B_1$, $\Gamma_1$ οἱ πόδες τῶν ὑψῶν τοῦ τρ.ΑΒΓ (σχ. 36), $M_1$, $M_2$, $M_3$, τὰ μέσα τῶν πλευρῶν, $P_1$, $P_2$, $P_3$ τὰ μέσα τῶν τμημάτων HA, HB, HΓ, ὅπου H τὸ ὀρθόκεντρον καί, τέλος, K τὸ περίκεντρον τοῦ τρ.ΑΒΓ.

Παρατηροῦμεν ὅτι

$\overrightarrow{M_3P_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{M_2P_3}$

καὶ ὅτι $M_3P_2 \perp M_3M_2$ καὶ συνάγομεν ὅτι τὸ τετράπλευρον $P_2M_3M_2P_3$ εἶναι ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον. Ἑπομένως τὰ τμήματα $P_2M_2$ καὶ $M_3P_3$ εἶναι ἴσα καὶ ἔχουν καὶ κοινὸν μέσον, ἔστω τὸ E. Ἐντελῶς ὁμοίως τὸ $M_3P_1P_3M_1$ εἶναι ὀρθογώνιον παρ|μον καὶ τὰ τμήματα $M_3P_3$ καὶ $P_1M_1$ εἶναι ἴσα καὶ ἔχουν κοινὸν μέσον (τὸ E).




Σχ. 36

Ὥστε τὰ $P_2$, $M_3$, $P_1$, $M_2$,$P_3$ $M_1$ κεῖνται ἐπὶ περιφερείας, τῆς ὁποίας τὰ τμήματα $P_1 M_1$, $P_2M_2$ $P_3M_3$ εἶναι διάμετροι. Τέλος, ἐπειδὴ ἡ γωνία $P_1\widehat{A_1}M_1$ εἶναι ὀρθή, τὸ $A_1$ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας ταύτης. Ὥστε καὶ οἱ πόδες τῶν ὑψῶν περιλαμβάνονται εἰς τὴν ἰδίαν περιφέρειαν.

Ἐπειδὴ τὰ τμήματα $A_1M_1$, $M_2B_1$ εἶναι χορδαὶ τῆς περιφερείας τῶν 9 σημείων, διὰ τοῦτο τὸ κέντρον της Ε κεῖται ἐπὶ τῶν μεσοκαθέτων τῶν τμημάτων τούτων. Ἀλλ' αἱ μεσοκάθετοι τόσον τοῦ $A_1M_1$, ὅσον καὶ τοῦ $B_1M_2$, διέρχονται ἀμφότεραι διὰ τοῦ μέσου τοῦ τμήματος ΗΚ. Ἐπομένως τὸ μέσον τοῦ ΗΚ συμπίπτει μὲ τὸ κέντρον Ε τῆς περιφερείας τῶν 9 σημείων. Ἡ ἀκτὶς ταύτης $EP_1 = KA/2$, δηλ. πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος ΚΑ τοῦ περὶ τὸ △ΑΒΓ περιγεγραμμένου κύκλου.

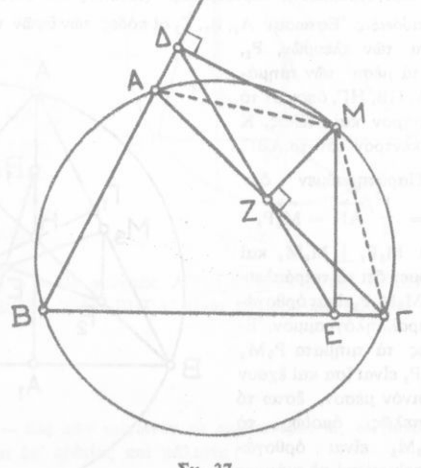
(Ἀσκήσεις: 133 - 135).

**31. (Θ) — Εὐθεῖα τοῦ Simson. Ἐὰν ἐκ τυχόντος σημείου Μ, τῆς περιγεγραμμένης περὶ τρίγωνον περιφερείας, ἀχθοῦν κάθετοι ἐπὶ τοὺς φορεῖς τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου, οἱ πόδες τῶν καθέτων τούτων κεῖνται ἐπ' εὐθείας.**

**Ἀντιστρόφως: ἂν αἱ προβολαὶ σημείου Μ ἐπὶ τρεῖς εὐθείας ὁριζούσας τρίγωνον κεῖνται ἐπ' εὐθείας, τότε τὸ Μ κεῖται ἐπὶ τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας τοῦ τριγώνου, τὸ ὁποῖον ὁρίζουν αἱ τρεῖς εὐθεῖαι.**

α') *Ἀπόδειξις βάσει ἑνὸς σχήματος.* Ἔστωσαν Μ σημεῖον τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ τρ.ΑΒΓ περιφερείας, ὡς εἰς τὸ σχ. 37.

Εἰς τὸ σχῆμα τοῦτο τὸ Μ προβάλλεται ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΒΓ καὶ ΑΓ εἰς ἐσωτερικὰ σημεῖα τούτων Ε καὶ Ζ καὶ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΑ προβάλλεται εἰς σημεῖον Δ κείμενον ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς πλευρᾶς ΒΑ, αἱ δὲ γωνίαι $\widehat{\Delta ZM}$ καὶ $\widehat{MZE}$ ἐμφανίζονται ὡς διαδοχικαί, δηλ. τὰ τμήματα ΖΔ καὶ ΖΕ ἑκατέρωθεν τοῦ ΜΖ. Ὅθεν, διὰ νὰ δείξωμεν ὅτι τὰ Δ, Ζ, Ε κεῖνται ἐπ' εὐθείας, ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι αἱ ἐφεξῆς γωνίαι $\widehat{\Delta ZM}$ καὶ $\widehat{MZE}$ εἶναι παραπληρωματικαί.



Σχ. 37

Τὰ εἰς τὸ σχῆμα τοῦτο παρουσιαζόμενα τετράπλευρα ΜΖΕΓ, ΜΖΑΔ καὶ ΜΑΒΓ εἶναι ἐγγράψιμα καὶ ἔχομεν:

(1) $\widehat{MZE}+\widehat{M\Gamma E}=2$ορθ. (ἐκ τοῦ ΜΖΕΓ).

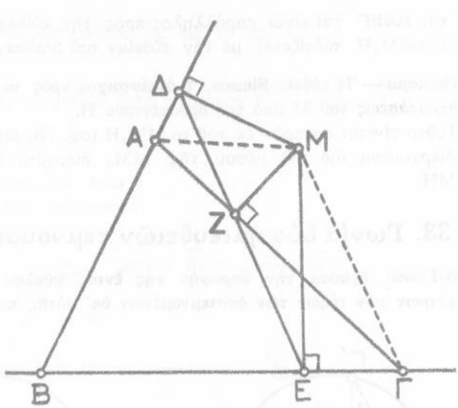
(2) $\widehat{M\Gamma E} = \widehat{MA\Delta}$ (ὡς παραπληρώματα τῆς $\widehat{BAM}$).

(3) $\widehat{MA\Delta} = \widehat{MZ\Delta}$ (ἐκ τοῦ ΜΖΑΔ).

Ἐκ τῶν (2) καὶ (3) ἔπεται $\widehat{M\Gamma E} = \widehat{MZ\Delta}$, ὁπότε ἡ (1) δίδει:

$$\widehat{MZE} + \widehat{MZ\Delta} = 2\text{ορθ.} \Rightarrow \Delta, Z, E \text{ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.}$$

β′) **Ἀντίστροφον.** Ἄς ὑποθέσωμεν, ὡς ἐν σχήματι 38, ὅτι αἱ προβολαὶ Δ, Ε, Ζ τοῦ σημείου Μ ἐπὶ τὰς εὐθείας ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ ἀντιστοίχως κεῖνται ἐπ' εὐθείας. Τότε ἔχομεν βάσει τοῦ σχ. 38, $\widehat{ΔΑΜ} = \widehat{ΔΖΜ}$ (ἐκ τοῦ ἐγγραψίμου ΜΖΑΔ) καὶ $\widehat{ΔΖΜ} = \widehat{ΜΓΕ} = \widehat{ΜΓΒ}$ (ἐκ τοῦ ἐγγραψίμου ΜΖΕΓ). Ἕπεται: $\widehat{ΔΑΜ} = \widehat{ΜΓΒ} \Rightarrow ΜΓΒΑ$ ἐγγράψιμον $\Rightarrow$ τὸ Μ κεῖται ἐπὶ τῆς διὰ τῶν ΑΒ Γ, διερχομένης περιφερείας.




Σχ. 38

**32. (Θ) Εὐθεῖα τοῦ Steiner. — Παντὸς σημείου Μ τῆς περὶ τρίγωνον ΑΒΓ περιγεγραμμένης περιφερείας τὰ συμμετρικὰ ὡς πρὸς τοὺς φορεῖς τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου κεῖνται ἐπ' εὐθείας διερχομένης διὰ τοῦ ὀρθοκέντρου τοῦ τριγώνου. Ἡ εὐθεῖα αὕτη καλεῖται εὐθεῖα Steiner ἀντίστοιχος πρὸς τὸ Μ καὶ εἶναι παρ/λος πρὸς τὴν εὐθεῖαν τοῦ Simson τὴν ἀντίστοιχον πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον Μ.**

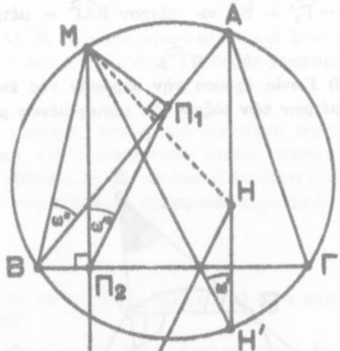
*Ἀπόδειξις.* α′) Ἐὰν $Π_1$, $Π_2$, $Π_3$ εἶναι αἱ προβολαὶ τοῦ Μ ἐπὶ τὰς εὐθείας ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ ἀντιστοίχως καὶ $Μ_1$, $Μ_2$ $Μ_3$ τὰ συμμετρικὰ τοῦ Μ ὡς πρὸς τὰς ἰδίας εὐθείας, τότε $Μ_1Μ_2 // Π_1\ Π_2$ καὶ $Μ_1Μ_3 // Π_1Π_3$ καὶ ἐπειδὴ τὰ $Π_1$, $Π_2$, $Π_3$ κεῖνται ἐπὶ τῆς εὐθείας Simson, ἕπεται ὅτι αἱ εὐθεῖαι $Μ_1Μ_2$ καὶ $Μ_1Μ_3$ εἶναι παρ/λοι πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν $Π_1Π_2Π_3$, ἄρα ταὐτίζονται καὶ τὰ $Μ_1$, $Μ_2$, $Μ_3$ κεῖνται ἐπὶ εὐθείας // πρὸς τὴν εὐθεῖαν Simson τοῦ σημείου Μ.

β′) Θὰ δείξωμεν τώρα ὅτι ἡ εὐθεῖα Steiner $Μ_1Μ_2Μ_3$ διέρχεται διὰ τοῦ ὀρθοκέντρου Η τοῦ $^{\triangle}ΑΒΓ$ (σχ. 39). Γνωρίζομεν ὅτι τὸ συμμετρικὸν Η′ τοῦ Η ὡς πρὸς τὴν ευθΒΓ κεῖται ἐπὶ τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ τρ.ΑΒΓ περιφερείας.

Ἐπειδὴ τὰ τμήματα ΜΗ′ καὶ $Μ_2Η$ εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν ευθΒΓ, διὰ τοῦτο τὸ τραπέζιον $ΜΜ_2Η'Η$ εἶναι ἰσοσκελές, ἄρα ἐγγράψιμον. Ἐκ τῶν ὁμοκυκλικῶν τετράδων ($Μ_2$, Η′, Η Μ), (Α,Η′,Β,Μ) καὶ (Μ,Β,$Π_2$,$Π_1$) ἔχομεν κατὰ σειρὰν τὰς ἰσότητας:

$\widehat{ω} = \widehat{ω}' = \widehat{ω}'' = \widehat{ω}''' \Rightarrow \widehat{ω} = \widehat{ω}''' \Rightarrow$ $Μ_2Η // Π_2Π_1$.

Ὥστε ἡ εὐθεῖα $Μ_2Η$ διέρχεται διὰ τοῦ συμμετρικοῦ $Μ_2$ τοῦ Μ ὡς




Σχ. 39

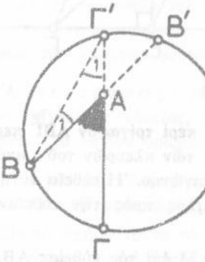
πρὸς τὴν ευθΒΓ καὶ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν Simson, δηλ. τὴν ευθ $\Pi_2\Pi_1$. Ἄρα ἡ ευθ$M_2H$ ταὐτίζεται μὲ τὴν εὐθεῖαν τοῦ Steiner.

**Πόρισμα — Ἡ εὐθεῖα Simson, ἡ ἀντίστοιχος πρὸς τὸ Μ, διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τῆς ἀποστάσεως τοῦ Μ ἀπὸ τοῦ ὀρθοκέντρου Η.**

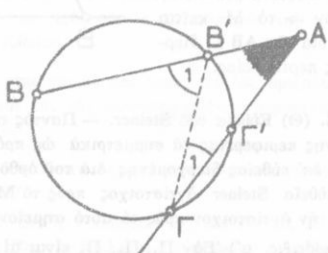
Τοῦτο γίνεται φανερὸν ἐκ τοῦ τρ.$MM_2H$ (σχ. 39), εἰς ὅ ἡ εὐθεῖα $\Pi_2\Pi_1$ εἶναι//$M_2H$ καὶ διερχομένη διὰ τοῦ μέσου τῆς $MM_2$ διέρχεται καὶ διὰ τοῦ μέσου τῆς πλευρᾶς ΜΗ.

## 33. Γωνία δύο ἡμιευθειῶν τεμνουσῶν περιφέριαν.

**i) Γωνία ἔχουσα τὴν κορυφήν της ἐντὸς κύκλου ἔχει μέτρον τὸ ἡμιάθροισμα τῶν μέτρων τῶν τόξων τῶν ἀποτεμνομένων ὑπ᾽ αὐτῆς καὶ τῆς κατὰ κορυφήν της.**




Σχ. 41

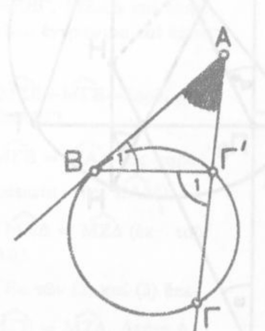



Σχ. 42

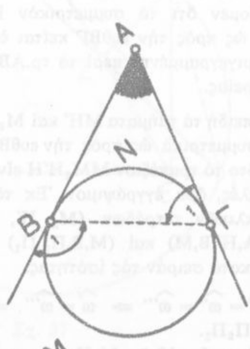
Ἔστω ἡ γωνία $\widehat{BA\Gamma}$, ὡς εἰς τὸ σχ. 41. Ἔχομεν κατὰ σειράν:

$\widehat{BA\Gamma} = \widehat{\Gamma_1'} + \widehat{B_1} \Rightarrow$ μέτρον $\widehat{BA\Gamma}$ = μέτρον $\widehat{\Gamma''_1}$ + μέτρον $\widehat{B_1} = \frac{1}{2}$ (μέτρον τόξου $\widehat{B\Gamma}$ + μέτρον τόξου $\widehat{B'\Gamma'}$).

**ii) Γωνία ἔχουσα τὴν κορυφήν της ἐκτὸς κύκλου ἔχει μέτρον τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν μέτρων τῶν τόξων τῶν περιεχομένων μεταξὺ τῶν πλευρῶν της.**




Σχ. 43




Σχ. 44

Ἔστω ἡ γωνία $\widehat{ΒΑΓ}$ μὲ Α ἔξω τοῦ κύκλου, ὡς εἰς τὸ σχ. 42.

Ἔχομεν ὅτι:

$\widehat{Β'}_1 = \widehat{Α} + \widehat{Γ}_1 \Rightarrow \widehat{ΒΑΓ} = \widehat{Β'}_1 - \widehat{Γ}_1 \Rightarrow$ μέτρον $\widehat{ΒΑΓ}$ = μέτρον $\widehat{Β'}_1$ — μέτρον $\widehat{Γ}_1 = \frac{1}{2}$ (μέτρον τόξου $\widehat{ΒΓ}$ — μέτρον τόξου $\widehat{Β'Γ'}$).

**iii) Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα ἰσχύει καὶ ὅταν ἡ μία ἢ καὶ αἱ δύο πλευραὶ τῆς γωνίας ἐφάπτωνται τοῦ κύκλου.**

Δηλ. εἰς σχ. 43 ἰσχύει : μέτρον $\widehat{ΒΑΓ} = \frac{\text{μέτρον } \widehat{ΒΓ} - \text{μέτρον } \widehat{ΒΓ'}}{2}$ καὶ διὰ τὸ σχ. 44 μέτρον $\widehat{ΒΑΓ} = \frac{\text{μέτρον } \widehat{ΒΜΓ} - \text{μέτρον } \widehat{ΒΝΓ}}{2}$.

Αἱ ἀποδείξεις εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς προηγουμένας.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

103. Ἐὰν εἰς τὰ ἄκρα δύο χορδῶν κύκλου καθέτως καὶ ἐντὸς τοῦ κύκλου τεμνομένων ἀχθοῦν ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου, τὸ ὑπὸ τούτων σχηματιζόμενον τετράπλευρον εἶναι ἐγγράψιμον.

104. Ἡ περιφέρεια ἡ διερχομένη διὰ δύο ἀπέναντι κορυφῶν ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον τραπεζίου καὶ διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου διέρχεται καὶ διὰ τοῦ σημείου τομῆς τῶν εὐθειῶν τῶν φερουσῶν τὰς μὴ παρ/λους πλευρὰς τοῦ τραπεζίου.

105. Ἐὰν ἔκ τινος σημείου Γ χορδῆς ΑΒ ἢ τῆς προεκτάσεως της ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν διὰ τοῦ σημείου τούτου διερχομένην ἀκτῖνα, τὸ μέρος τῆς καθέτου ταύτης τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῶν ἐφαπτομένων εἰς τὰ ἄκρα τῆς χορδῆς τέμνεται δίχα ὑπὸ τοῦ σημείου Γ.

106. Ἔστω ἰσοσκελὲς τρ.ΑΒΓ μὲ ΑΒ = ΑΓ, Κ τὸ περίκεντρον αὐτοῦ καὶ Σ τὸ συμμετρικὸν τοῦ Κ ὡς πρὸς τὴν ευθΑΒ. Φέρομεν διὰ τοῦ Σ εὐθεῖαν //ΑΓ τέμνουσαν εἰς Δ τὴν ΒΓ. Νὰ δειχθῇ ὅτι $\widehat{ΣΚΔ}$ = 1 ὀρθή.

107. Εἰς πᾶν κυρτὸν τετράπλευρον, αἱ τέσσαρες ἐσωτερικαὶ διχοτόμοι σχηματίζουν ἐγγράψιμον τετράπλευρον. Αἱ διαγώνιοι τοῦ τετραπλεύρου τούτου προεκτεινόμεναι διέρχονται διὰ τῶν σημείων τομῆς τῶν εὐθειῶν, ἐφ' ὧν κεῖνται αἱ ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ τετραπλεύρου. Τὰ ὅμοια ἰσχύουν καὶ διὰ τὰς τέσσαρας ἐξωτερικὰς διχοτόμους τοῦ τετραπλεύρου.

### Τὸ ὀρθικὸν τρίγωνον.

108. Καλεῖται *ὀρθικὸν* τρίγωνον τοῦ τρ.ΑΒΓ τὸ τρίγωνον $Η_1Η_2Η_3$, τὸ ἔχον κορυφὰς τοὺς πόδας $Η_1$, $Η_2$, $Η_3$ τῶν ὑψῶν τοῦ τρ.ΑΒΓ.

Ἰδιότητες: i) Οἱ φορεῖς τῶν ὑψῶν καὶ τῶν πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου εἶναι διχοτόμοι ἐσωτερικαὶ ἢ ἐξωτερικαὶ τοῦ ὀρθικοῦ του τριγώνου.

ii) Τὸ τρίγωνον μὲ κορυφὰς τὰ παράκεντρα τοῦ τρ.ΑΒΓ ἔχει ὡς ὀρθικὸν τὸ τρ.ΑΒΓ.

iii) Αἱ πλευραὶ τοῦ ὀρθικοῦ τριγώνου $Η_1Η_2Η_3$ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς ἐφαπτομένας τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας τοῦ ἀρχικοῦ τριγώνου ΑΒΓ τὰς ἀγομένας εἰς τὰς κορυφὰς Α, Β, Γ, αὐτοῦ (καὶ ἑπομένως κάθετοι ἐπὶ τὰς ἀκτῖνας ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ, ὅπου Κ τὸ περίκεντρον τοῦ τρ.ΑΒΓ).

**Σημεῖον τοῦ Miquel.**

109. i) Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ τριγώνου ΑΒΓ λαμβάνομεν ἀντιστοίχως τυχόντα σημεῖα Ε, Ζ, Η. Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ περὶ τὰ τρίγωνα ΑΕΗ, ΒΕΖ, ΓΖΗ περιγεγραμμέναι περιφέρειαι διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Μ. (Σημεῖον τοῦ Miquel ὡς πρὸς τὰ Ε, Ζ, Η).

ii) Ἰσχύει ἡ σχέσις: $\widehat{ΑΜΓ} = \widehat{Β} + \widehat{ΕΗΖ}$, ἂν τὸ Μ εὑρίσκεται ἐντὸς τοῦ τρ.ΑΒΓ.

110. Δοθέντος τρ.ΑΒΓ καὶ σημεῖου Μ ἐντὸς αὐτοῦ ὑπάρχουν ἐπὶ τῶν πλευρῶν τοῦ τρ.ΑΒΓ ἄπειροι τριάδες σημείων Ε, Ζ, Η ἔχουσαι σημεῖον Miquel τὸ Μ, ὅλα δὲ τὰ τρίγωνα ΕΖΗ ἔχουν τὰς γωνίας των ἴσας μίαν πρὸς μίαν.

111. i) Ἐπὶ τῶν πλευρῶν δοθείσης γωνίας $\widehat{xOy}$ κινοῦνται δύο σημεῖα Α καὶ Β οὕτως, ὥστε τὸ ἄθροισμα ΟΑ + ΟΒ νὰ ἰσοῦται πάντοτε μὲ δοθὲν (σταθερὸν) τμῆμα S. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ περὶ τὸ τρ.ΟΑΒ περιγεγραμμένη περιφέρεια διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου τῆς διχοτόμου τῆς $\widehat{xOy}$. ii) Ἐὰν ΟΑ — ΟΒ = S (σταθ.), τότε τὸ σταθερὸν σημεῖον κεῖται ἐπὶ τῆς ἐξωτερικῆς διχοτόμου τῆς $\widehat{xOy}$.

112. Αἱ μεσοκάθετοι τῶν πλευρῶν ΑΓ, ΑΒ τριγ. ΑΒΓ τέμνουν τοὺς φορεῖς τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ ἀντιστοίχως εἰς Π καὶ Ρ. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ σημεῖα Β, Γ, Π, Ρ κεῖνται ἐπὶ περιφερείας, ἥτις διέρχεται διὰ τοῦ περικέντρου τοῦ τριγ. ΑΒΓ.

113. Ἔστω ἰσοσκελὲς τραπέζιον ΑΒΓΔ μὲ ΑΒ//ΔΓ, τοῦ ὁποίου ἑκάστη διαγώνιος ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν βάσεων. Ἐὰν Ε τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαγωνίων του, νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ μέσα τῶν τμημάτων ΕΑ, ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ, ΑΔ, ΒΓ καὶ αἱ προβολαὶ τοῦ Ε ἐπὶ τὰς μὴ παρ|λους πλευρὰς κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας.

114. Ἐὰν εἰς δύο ἀπέναντι κορυφὰς ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον τραπεζίου ἀχθοῦν ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου, ἡ ὑπὸ τούτων σχηματιζομένη γωνία ἰσοῦται πρὸς τὴν γωνίαν τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν τοῦ τραπεζίου καὶ ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνοῦσα τὰς κορυφὰς τῶν δύο τούτων γωνιῶν εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις τοῦ τραπεζίου.

115. Ἡ μὲ διάμετρον τὴν βάσιν ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ γραφομένη περιφέρεια τέμνει τὰς ἐσωτερικὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν $\widehat{Β}$ καὶ $\widehat{Γ}$ εἰς σημεῖα κείμενα ἐπ' εὐθείας μὲ τὰς ἐπαφὰς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου καὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ.

116. Ἐὰν ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ' εἶναι τὰ ὕψη τρ.ΑΒΓ καὶ ΒΒ'', ΓΓ'' εἶναι ὕψη τῶν τριγώνων ΒΑ'Γ' καὶ ΓΑ'Β', νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ μεσοκάθετος τῆς Β''Γ'' διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τῆς πλευρᾶς ΒΓ.

117. Ἐὰν αἱ διαγώνιοι ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ τέμνωνται καθέτως εἰς τὸ Ε, τότε 1ον) ἡ κάθετος ἐκ τοῦ Ε ἐπὶ μίαν πλευρὰν διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς καὶ 2ον) αἱ προβολαὶ τοῦ Ε ἐπὶ τὰς πλευρὰς εἶναι κορυφαὶ ἐγγραψίμου καὶ περιγραψίμου συγχρόνως τετραπλεύρου, τοῦ ὁποίου ἡ περιγεγραμμένη περιφέρεια διέρχεται διὰ τῶν μέσων τῶν πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

**— Νὰ κατασκευασθῇ τρ.ΑΒΓ :**

118. Ἐκ τῶν R, $υ_α$, $δ_Α$.

119. Ἐκ τῶν $υ_α$, $μ_α$, $δ_Α$.

120. Ἐκ τῶν R, $υ_α$, $\widehat{Β} - \widehat{Γ} = ω$,

ὅπου R ἡ ἀκτὶς τοῦ περικύκλου, $υ_α$, $μ_α$, $δ_Α$, τὸ ὕψος ἡ διάμεσος καὶ ἡ διχοτόμος τὰ ἐκ τῆς κορυφῆς Α ἀγόμενα.

121. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ, οὗτινος δίδεται τὸ μέσον καὶ ἡ διεύθυνσις μιᾶς πλευρᾶς ΒΓ, ἡ διαφορὰ τῶν παρ' αὐτὴν γωνιῶν καὶ ἡ κορυφὴ Α.

122. Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογ. τρίγ., οὗτινος δίδονται τρία σημεῖα ἐπὶ τοῦ φορέως τῆς ὑποτεινούσης, τὰ ὁποῖα εἶναι κατὰ σειρὰν οἱ πόδες τῆς διαμέσου, τῆς διχοτόμου καὶ τοῦ ὕψους.

123. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δίδονται: ἡ διαφορὰ τῶν παρὰ τὴν βάσιν γωνιῶν καὶ οἱ πόδες τοῦ ὕψους, τῆς διαμέσου καὶ τῆς διχοτόμου τῶν ἀγομένων ἐκ τῆς ἀπέναντι κορυφῆς.

124. Ἐὰν τριγώνου μία γωνία εἶναι $60^0$, τότε τὸ ἔγκεντρον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὸ περίκεντρον καὶ ἀπὸ τὸ ὀρθόκεντρον.

125. i) Ἐὰν δύο τρίγωνα εἶναι ἐγγεγραμμένα εἰς τὸν ἴδιον κύκλον καὶ ἔχουν κοινὴν βάσιν, τότε τὸ τμῆμα τὸ συνδέον τὰ ὀρθόκεντρά των εἶναι ἴσον καὶ παράλληλον πρὸς τὸ συνδέον τὰς κορυφάς των (βλ. § 27).

ii) Ἐὰν Α, Β, Γ, Δ ὁμοκυκλικὰ καὶ $H_1$, $H_2$, $H_3$, $H_4$ τὰ ὀρθόκεντρα τῶν τριγώνων ΒΓΔ, ΓΔΑ, ΔΑΒ, ΑΒΓ, δείξατε ὅτι τὰ τέσσαρα τμήματα $AH_1$, $BH_2$, $\Gamma H_3$, $\Delta H_4$ ἔχουν κοινὸν μέσον.

126. Ἐὰν Η τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ $\triangle$ΑΒΓ, τότε αἱ περὶ τὰ τέσσαρα τρίγωνα ΑΒΓ, ΗΒΓ, ΗΓΑ, ΗΑΒ περιγεγραμμέναι περιφέρειαι εἶναι ἴσαι.

127. Εἰς δοθέντα κύκλον νὰ ἐγγραφῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δίδεται μία κορυφὴ καὶ τὸ ὀρθόκεντρον.

128. Νὰ κατασκευασθῇ τρ.ΑΒΓ, οὗτινος δίδεται τὸ μέσον Μ καὶ ὁ φορεὺς xy τῆς πλευρᾶς ΒΓ, τὸ ὀρθόκεντρον Η καὶ τοιοῦτον, ὥστε $B - \Gamma = 1$ ὀρθή.

129. Τριγώνου ΑΒΓ μεταβλητοῦ ἡ κορυφὴ Α μένει σταθερά, τὸ ὀρθόκεντρον Η ἐπίσης καὶ ἡ εὐθεῖα (ε) ἡ φέρουσα τὴν πλευρὰν ΑΒ ἐπίσης σταθερά. Ζητεῖται ὁ γ. τόπος τοῦ περικέντρου τοῦ τρ.ΑΒΓ.

130. Δίδονται δύο εὐθεῖαι $(\varepsilon_1)$ καὶ $(\varepsilon_2)$ τεμνόμεναι εἰς Ο. Ἐπὶ τῆς $(\varepsilon_1)$ λαμβάνομεν σημεῖον Α καὶ ἐπὶ τῆς $(\varepsilon_2)$ σημεῖον Β τοιαῦτα, ὥστε $AB = l$ (= δεδομένον τμῆμα). Ποῖον τὸ σύνολον τῶν περικέντρων τῶν τριγώνων ΟΑΒ;

131. Ποῖον τὸ σύνολον τῶν ὀρθοκέντρων τῶν τριγώνων τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως;

132. Ἐὰν Ο, $O_1$, $O_2$, $O_3$ τὸ ἔγκεντρον καὶ τὰ παράκεντρα τριγώνου ΑΒΓ, τότε τὰ μέσα τῶν 6 τμημάτων τῶν συνδεόντων τὰ ἀνωτέρω τέσσαρα σημεῖα ἀνὰ δύο κεῖνται ἐπὶ τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ τρ.ΑΒΓ περιφερείας.

133. Δείξατε ὅτι ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα ὁ κύκλος Euler ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ ἔχῃ τὸ κέντρον του ἐπὶ τῆς ΒΓ, εἶναι:

$$\left|\widehat{B} - \widehat{\Gamma}\right| = 90^0$$

134. Νὰ δειχθῇ ὅτι οἱ πόδες Β′, Γ′ τῶν ὑψῶν ΒΒ′, ΓΓ′ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι συμμετρικοὶ ὡς πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου τῶν 9 σημείων τοῦ τριγώνου, τὴν διερχομένην διὰ τοῦ μέσου Δ τῆς ΒΓ.

135. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, οὗτινος δίδονται δύο κορυφαὶ καὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τῶν 9 σημείων.

136. Ἔστω Ρ σημεῖον τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ τριγ. ΑΒΓ περιφερείας. Ἐὰν ἡ διὰ τοῦ Ρ διάμετρος τέμνῃ τὴν πλευρὰν ΒΓ εἰς Α′, δείξατε ὅτι ἡ προβολὴ τοῦ Α′ ἐπὶ τὴν ΡΑ ἀνήκει εἰς τὴν εὐθεῖαν Simson τοῦ Ρ ὡς πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.

137. Μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν Α δεδομένου ἰσοσκελοῦς τρ.ΑΒΓ, ὅπου ΑΒ = ΑΓ, γράφομεν περιφέρειαν ἀφήνουσαν τὰ Β, Γ ἐκτὸς αὐτῆς καὶ ἐκ τῶν Β καὶ Γ φέρομεν ἐφα-

πτομένας τῆς περιφερείας ταύτης μὴ συμμετρικὰς ὡς πρὸς τὴν διχοτόμον τῆς $\widehat{A}$. Ἐὰν Ε καὶ Ζ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς καὶ Ο τὸ μέσον τῆς ΒΓ, i) νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ Ο, Ε,Ζ κεῖνται ἐπ' εὐθείας, ii) νὰ εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τοῦ μέσου τοῦ ΕΖ, ὅταν ἡ ἀκτὶς τῆς γραφείσης περιφερείας μεταβάλλεται.

138. Μεταβλητὴ περιφέρεια ἔχουσα τὸ κέντρον της ἐπὶ τοῦ φορέως τῆς βάσεως ΒΓ δεδομένου ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ καὶ διερχομένη διὰ τῆς κορυφῆς Α τέμνει τὰς εὐθείας ΑΒ, ΑΓ εἰς Δ καὶ Ε. Τόπος τοῦ μέσου τῆς ΔΕ.

139. Νὰ κατασκευασθῇ τρ.ΑΒΓ ἐκ τῆς κορυφῆς Α τοῦ ὀρθοκέντρου Η καὶ τῆς εὐθείας Simson (s) τῆς ἀντιστοιχούσης εἰς τὸ μέσον τοῦ τόξου $\widehat{ΒΓ}$, ἐφ' οὗ βαίνει ἡ $\widehat{A}$.

140. i) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ περιφέρεια τῶν 9 σημείων τοῦ τρ.ΑΒΓ εἶναι ὁ γ.τ. τῶν μέσων τῶν τμημάτων τῶν συνδεόντων τὸ ὀρθόκεντρον Η μὲ τὰ σημεῖα τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ τρ.ΑΒΓ περιφερείας.

ii) Νὰ δειχθῇ ὅτι ὅλαι αἱ εὐθεῖαι Simson αἱ ἀναφερόμεναι εἰς τὸ τρ.ΑΒΓ συναντοῦν τὴν περιφέρειαν τῶν 9 σημείων τοῦ τρ.ΑΒΓ.

141. Ἔστω εὐθεῖα (ε) διερχομένη διὰ τοῦ ὀρθοκέντρου Η τριγώνου ΑΒΓ. i) Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον ἐπὶ τῆς περιφ. (ΑΒΓ) ἔχον τὴν εὐθεῖαν (ε) ὡς εὐθεῖαν Steiner (ἀναφορικῶς πρὸς τὸ τρ.ΑΒΓ). ii) Νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ συμμετρικὰ τῆς (ε) ὡς πρὸς τοὺς φορεῖς τῶν πλευρῶν τοῦ τρ.ΑΒΓ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου τῆς περιφερείας (ΑΒΓ).

142. Ἐὰν Κ τὸ περίκεντρον τρ.ΑΒΓ καὶ $M_1$, $M_2$ δύο σημεῖα τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας τοιαῦτα, ὥστε $\widehat{M_1KM_2}=\theta$, ὑπολογίσατε τὴν γωνίαν τῶν δύο εὐθειῶν Simson τῶν ἀντιστοιχουσῶν εἰς τὰ σημεῖα $M_1$ καὶ $M_2$.

Εὕρετε τὴν ἱκανὴν καὶ ἀναγκαίαν συνθήκην, ἵνα δύο εὐθεῖαι Simson εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας.

(**Ὑπόδειξις.** Ἀρκεῖ νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία, ἣν σχηματίζουν αἱ δύο εὐθεῖαι Steiner αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τὰ $M_1$ καὶ $M_2$ (§ 32). Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία τῶν συμμετρικῶν τῶν δύο εὐθειῶν Steiner ὡς πρὸς τὴν ευθΒΓ).

**Σημεῖον Miquel τετραπλεύρου.**

143. Ἔστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι, ἀνὰ δύο τεμνόμεναι καὶ ἀνὰ τρεῖς μὴ διερχόμεναι διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Νὰ δειχθῇ ὅτι:

i) Αἱ περιφέρειαι αἱ περιγεγραμμέναι περὶ τὰ τέσσαρα τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ὁρίζουν αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι λαμβανόμεναι ἀνὰ τρεῖς, ἔχουν ἓν σημεῖον κοινόν. (Σημεῖον Miquel τοῦ τετραπλεύρου.).

ii) Τὰ ὀρθόκεντρα τῶν τεσσάρων, ἀνωτέρω, τριγώνων κεῖνται ἀπ' εὐθείας.

(**Ὑπόδειξις.** i) Ἔστω Μ τὸ δεύτερον κοινὸν σημεῖον τῶν δύο περιγεγραμμένων περιφερειῶν. Τότε (§ 31) αἱ προβολαὶ τοῦ Μ ἐπὶ τὰς τέσσαρας ἀνωτέρω εὐθείας κεῖνται ἐπ' εὐθείας. Συνεπῶς τὸ Μ ἀνήκει καὶ εἰς τὰς δύο ἄλλας περιγεγραμμένας περιφερείας. ii) Τὸ Μ ἔχει ὡς πρὸς τὰ τέσσαρα τρίγωνα τὴν ἰδίαν εὐθεῖαν Steiner (§ 32).

144. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὰ σημεῖα τομῆς τῶν προεκτάσεων τῶν διχοτόμων του μετὰ τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας.

145. Ἔστωσαν Ο καὶ $O_1$ τὸ ἔγκεντρον καὶ τὸ παράκεντρον τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν γωνίαν $\widehat{A}$ τριγώνου ΑΒΓ ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον.

Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ μέσον τοῦ τόξου $\widehat{ΒΓ}$ (ἐφ' οὗ βαίνει ἡ $\widehat{A}$) εἶναι κέντρον περιφερείας διερχομένης διὰ τῶν Β, Ο, Γ, $O_1$.

146. Εἰς πᾶν τρ.ΑΒΓ τὸ παράκεντρον $O_1$ (τὸ ἐντὸς τῆς $\widehat{A}$) βλέπει τὴν μὲν πλευρὰν ΑΓ ὑπὸ γωνίαν $\widehat{B}/2$, τὴν δὲ ΑΒ ὑπὸ γωνίαν $\widehat{\Gamma}/2$.

147. Ἔστω ΑΒΓΔ τετράπλευρον κυρτὸν ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον καὶ $O_1$, $O_2$ τὰ ἔγκεντρα τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΔΒΓ. Ἐὰν Η καὶ Θ εἶναι τὰ μέσα τῶν ἐλασσόνων τόξων $\overset{\frown}{AB}$ καὶ $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$, νὰ δειχθῇ ὅτι $O_1O_2 // H\Theta$ (βλ. ἀσκ. 145). Νὰ δειχθῇ ἐπίσης ὅτι τὰ ἔγκεντρα τῶν τεσσάρων τριγώνων, τὰ ὁποῖα ὁρίζουν αἱ κορυφαὶ λαμβανόμεναι ἀνὰ τρεῖς, εἶναι κορυφαὶ ὀρθογωνίου παρ|μου.

**Βέλος τόξου.**

Καλεῖται βέλος τόξου $\overset{\frown}{AB}$ ἡ ἀπόστασις τοῦ μέσου Μ τοῦ τόξου ἀπὸ τῆς χορδῆς ΑΒ αὐτοῦ.

148. Νὰ δειχθῇ ὅτι εἰς πᾶν τρ.ΑΒΓ τὸ βέλος τοῦ τόξου $\overset{\frown}{B\Gamma}$ τοῦ περιέχοντος τὸ Α ἰσοῦται μὲ $(\rho_\beta + \rho_\gamma)/2$, ἐνῶ τὸ βέλος τοῦ μὴ περιέχοντος τὸ Α τόξου $\overset{\frown}{B\Gamma}$ τοῦ περικύκλου ἰσοῦται μὲ $(\rho_\alpha - \rho)/2$. Ὡς ἐφαρμογή, νὰ δειχθῇ ἡ σχέσις $\rho_\alpha + \rho_\beta + \rho_\gamma = 4R + \rho$. (R ἀκτὶς περιγεγγραμμένου, ρ, $\rho_\alpha$, $\rho_\beta$, $\rho_\gamma$ αἱ ἀκτῖνες ἐγγεγραμμένου καὶ παρεγγεγραμμένων κύκλων)

149. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν R, ρ, $\rho_\alpha$ (Ὑπόδ. Νὰ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ὅτι $(\rho_\alpha - \rho)/2$ ἰσοῦται μὲ τὸ βέλος τοῦ τόξου, ἐφ' οὗ βαίνει ἡ $\widehat{A}$. Βλέπε καὶ ἀσκ. 145).

**Ὀρθοκεντρικὴ τετράς.**

Τέσσαρα σημεῖα λέγομεν ὅτι ἀποτελοῦν ὀρθοκεντρικὴν τετράδα, ὅταν ἕκαστον εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ τῶν τριῶν ἄλλων. Οὕτως αἱ κορυφαὶ Α, Β, Γ τριγώνου καὶ τὸ ὀρθόκεντρον Η αὐτοῦ ἀποτελοῦν ὀρθοκεντρικὴν τετράδα. Ἐπίσης τὸ ἔγκεντρον Ο καὶ τὰ παράκεντρα $O_1$, $O_2$, $O_3$ τυχόντος τριγώνου.

150. Διὰ τοῦ ἑνὸς κοινοῦ σημείου Κ δύο ὀρθογωνίως τεμνομένων περιφερειῶν (Ο) καὶ (Ο') (δηλαδὴ $KO \perp KO'$) φέρομεν δύο καθέτους ἐπ' ἀλλήλας εὐθείας, ἐξ ὧν ἡ πρώτη ἐπανατέμνει τὰς περιφερείας (Ο) καὶ (Ο') εἰς Α καὶ Α', ἡ δὲ δευτέρα εἰς Β καὶ Β' ἀντιστοίχως. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ Α, Α', Β, Β' ἀποτελοῦν ὀρθοκεντρικὴν τετράδα.

151. Τὰ τέσσαρα τρίγωνα μιᾶς ὀρθοκεντρικῆς τετράδος ἔχουν τὸ αὐτὸ ὀρθικὸν τρίγωνον καὶ τὸ αὐτὸ κέντρον κύκλου τῶν 9 σημείων. Τὰ περίκεντρα δὲ τῶν τεσσάρων τούτων τριγώνων ἀποτελοῦν ὀρθοκεντρικὴν τετράδα.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΦ' ΟΛΗΣ ΤΗΣ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΗΣ ΥΛΗΣ

**Ὁμὰς Α (Σχετικῶς ἁπλαῖ ἀσκήσεις)**

152. Τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου τοῦ σχηματιζομένου ὑπὸ δύο ἐφαπτομένων κύκλου καὶ τῆς χορδῆς τῶν ἐπαφῶν ἀπέχει ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς χορδῆς ἀπόστασιν ἴσην τῇ ἀκτῖνι τοῦ κύκλου.

153. Πᾶν εἰς κύκλον ἐγγεγραμμένον παρ|μον εἶναι ὀρθογώνιον.

154. Ἐὰν διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς δύο ἐφαπτομένων περιφερειῶν ἀχθῇ τυχοῦσα εὐθεῖα, αἱ εἰς τὰ σημεῖα τομῆς αὐτῆς καὶ τῶν περιφερειῶν ἀγόμεναι ἐφαπτόμεναι εἶναι παράλληλοι.

155. Αἱ κορυφαὶ πενταγώνου ἐγγεγραμμένου χωρίζουν τὴν περιφέρειαν εἰς διαδοχικὰ τόξα ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν: 5 : 7 : 8 : 6 : 4. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ γωνίαι τοῦ πενταγώνου.

156. Ἐὰν σημεῖον προβάλλεται εἰς Α, Β, Γ ἐπὶ τὰς πλευρὰς καὶ τὴν διχοτόμον μιᾶς γωνίας, τότε ἡ ΓΑ = ΓΒ.

157. Ἐὰν Ο τὸ κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τρίγωνον ΑΒΓ κύκλου, τότε τὰ κέντρα τῶν περὶ τὰ τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΒΓ, ΟΓΑ περιγεγραμμένων κύκλων κεῖνται ἐπὶ τῆς περὶ τὸ ΑΒΓ περιγεγραμμένης περιφερείας.

158. Ἐντὸς τετραγώνου ΑΒΓΔ κατασκευάζομεν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΔΕ καὶ ΒΖΓ ἔχοντα τὰς ΑΔ καὶ ΒΓ ὡς ὑποτεινούσας καὶ ΑΕ//ΓΖ. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ εὐθ. ΕΖ εἶναι ἐξωτερικὴ διχοτόμος εἰς ἀμφότερα τὰ τρίγωνα.

159. Δοθέντος τετραγώνου ΑΒΓΔ φέρομεν διὰ τοῦ Α δύο εὐθείας Αx,Αy καθέτους ἐπ' ἀλλήλας, ἐξ ὧν ἡ Αx τέμνει τὴν ευθΓΔ εἰς Ε καὶ ἡ Αy τὴν ευθΒΓ εἰς Ζ. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ μέσον Μ τῆς ΕΖ κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΔ.

160. Εἰς τὸ ἐξωτερικὸν τετραγώνου ΑΒΓΔ κατασκευάζομεν ἰσόπλευρον τρίγωνον ΒΖΓ καὶ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ τετραγώνου ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΕ. Δείξατε ὅτι τὰ σημεῖα Δ, Ε, Ζ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

161. Εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον εἶναι ἐγγεγραμμένον τετράγωνον ἔχον μίαν πλευράν του ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἑνοῦσα τὴν κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας μὲ τὸ κέντρον τοῦ τετραγώνου εἶναι διχοτόμος τῆς ὀρθῆς γωνίας.

162. Ἔστω Ο τὸ κέντρον ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ. Φέρομεν τὴν ΒΕ$\perp$ΑΓ. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ διχοτόμος τῆς $\widehat{OBE}$ τέμνει τὴν ΔΓ εἰς Ζ οὕτως, ὥστε ΓΖ = ΓΒ.

163. Σημεῖον Α κείμενον εἰς τὸ ἐξωτερικὸν γωνίας $x\widehat{O}y$ προβάλλεται ἐπὶ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας εἰς Β καὶ Γ. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἑνοῦσα τὰ μέσα τῶν τμημάτων ΒΓ καὶ ΟΑ εἶναι $\perp$ΒΓ.

164. Περὶ δοθὲν ὀξυγώνιον τρίγωνον νὰ περιγραφῇ τετράγωνον οὕτως, ὥστε τὰ δύο σχήματα νὰ ἔχουν μίαν κορυφὴν κοινήν.

165. Διὰ δοθέντος σημείου περιφερείας νὰ ἀχθῇ χορδὴ διπλασία τοῦ ἀποστήματός της.

166. Δίδεται τρ.ΑΒΓ καὶ εὐθεῖα (ε). Ἐπὶ τῆς (ε) λαμβάνεται τυχὸν σημεῖον Δ καὶ ἔστω Δ' τὸ συμμετρικὸν τοῦ Δ ὡς πρὸς τὸ μέσον Ο τοῦ ΒΓ. Τόπος τοῦ μέσου τῆς ἀποστάσεως ΑΔ', ὅταν τὸ Δ διατρέχῃ τὴν (ε).

167. Τόπος τῶν ἐντὸς δοθέντος ἰσοσκελοῦς τριγώνου σημείων, τῶν ὁποίων ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τῆς βάσεως ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τὰς ἴσας πλευράς.

168. Δίδεται εὐθεῖα (ε) καὶ ἐπ' αὐτῆς σημεῖον Α. Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς (ε) σημεῖον Β καὶ κατασκευάζομεν ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΜΒ μὲ ΜΑ = ΜΒ ἔχον ἀκτῖνα περιγεγραμμένου κύκλου ἴσην πρὸς δοθὲν τμῆμα R. Ζητεῖται i) ὁ γ.τ τοῦ Μ καὶ ii) ὁ γ.τ. τοῦ ὀρθοκέντρου τοῦ $^{\triangle}$ΑΜΒ, ὅταν τὸ Β μεταβάλλεται.

169. Ἡ βάσις ΒΓ καὶ ὁ περίκυκλος τρ.ΑΒΓ εἶναι σταθερά. Τίς ὁ γτ. τοῦ ὀρθοκέντρου τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος κορυφὰς τὰς τομὰς τῶν ἐσωτερικῶν διχοτόμων τοῦ τρ.ΑΒΓμετὰ τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας;

170. Δύο κύκλοι κέντρων Κ καὶ Λ ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς τὸ Α. Ἔστω ΤΤ' μία κοινὴ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη αὐτῶν, ὅπου Τ,Τ' τὰ σημεῖα ἐπαφῆς. Νὰ δειχθῇ ὅτι:

i) Ἡ εἰς τὸ Α κοινὴ ἐφαπτομένη τῶν δύο κύκλων διέρχεται διὰ τοῦ μέσου Ι τοῦ ΤΤ'.

ii) Τὰ τρίγωνα ΤΑΤ' καὶ ΚΙΛ εἶναι ὀρθογώνια.

iii) Ὁ κύκλος διαμέτρου ΤΤ' ἐφάπτεται τῆς ΚΛ.

iv) Ὁ κύκλος διαμέτρου ΚΛ ἐφάπτεται τῆς ΤΤ'.

171. Ἡ περιφέρεια μὲ διάμετρον τὴν διάκεντρον δύο περιφερειῶν διέρχεται διὰ τῶν σημείων, καθ' ἃ αἱ κοιναὶ ἐξωτερικαὶ ἐφαπτόμεναι τέμνουν τὰς ἐσωτερικὰς τοιαύτας.

172. Ἐὰν διὰ δύο κύκλους (Κ, R), (Λ, ρ) ὑφίσταται ἡ σχέσις $(ΚΛ)^2 = R^2 - 2Rρ$, τότε ὁ εἷς κεῖται ἐντὸς τοῦ ἄλλου.

173. Δίδονται δύο περιφέρειαι (Κ) καὶ (Λ), κέντρων Κ καὶ Λ, τεμνόμεναι εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Εὐθεῖα (ε) διερχομένη διὰ τοῦ Α ἐπανατέμνει τὰς περιφερείας (Κ) καὶ (Λ)

εἰς τὰ σημεῖα $M_1$ καὶ $M_2$ ἀντιστοίχως. Εὑρίσκομεν τώρα τὰ ἀντιδιαμετρικὰ σημεῖα τοῦ Α εἰς τοὺς κύκλους (Κ) καὶ (Λ), ἔστω τὰ $A_1$ καὶ $A_2$.

i) Τῇ βοηθείᾳ τοῦ ὀρθογωνίου τραπεζίου $A_1M_1M_2A_2$ νὰ δειχθῇ ὅτι $M_1M_2 \leqq A_1A_2$ καὶ ὅτι τὸ μέγιστον τοῦ $M_1M_2$ λαμβάνει χώραν, ὅταν ἡ τέμνουσα (ε) εἶναι παρ|λος πρὸς τὴν διάκεντρον ΚΛ.

ii) Νὰ προσδιορισθῇ ἡ θέσις τῆς (ε), διὰ τὴν ὁποίαν τὸ τμῆμα $M_1M_2$ ἔχει δεδομένον μῆκος.

iii) Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ μέσον τοῦ $A_1A_2$ εἶναι τὸ κοινὸν κέντρον δύο κύκλων, ἕκαστος τῶν ὁποίων ἐφάπτεται ἀμφοτέρων τῶν κύκλων (Κ) καὶ (Λ).

174. Περὶ δοθὲν τρίγωνον νὰ περιγραφῇ τὸ μέγιστον δυνατὸν ἰσόπλευρον τρίγωνον.

175. Δίδονται δύο σημεῖα Α καὶ Β καὶ εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ Β. Νὰ εὑρεθοῦν ἐπὶ ταύτης δύο σημεῖα Γ, Δ συμμετρικὰ πρὸς τὸ Β καὶ τοιαῦτα, ὥστε $\widehat{ΓΑΔ}$ = δοθείσῃ.

176. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἴσον πρὸς δοθὲν καὶ τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ τῆς γωνίας $\widehat{A}$ νὰ διέρχωνται διὰ δύο δεδομένων σημείων, ἐνῶ ἡ διχοτόμος τῆς $\widehat{A}$ νὰ ἐφάπτεται δοθείσης περιφερείας.

177. Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ=α καὶ τῆς ἀκτῖνος R τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τρ.AGB κύκλου, ὅπου G τὸ κέντρον βάρους τοῦ τρ.ΑΒΓ.

178. Νὰ κατασκευασθῇ τετράπλευρον ἔχον δεδομένας πλευρὰς καὶ μία διαγώνιος τοῦ ὁποίου νὰ διχοτομῇ μίαν γωνίαν του.

179. Ἔστω Ρ τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τρ.ΑΒΓ καὶ Α',Β',Γ' τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως. Ἔστωσαν Α'', Β'', Γ'' τὰ συμμετρικὰ τοῦ Ρ ὡς πρὸς τὰ Α', Β', Γ' ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι: i) τρ.ΑΒΓ = τρ.Α''Β''Γ''. ii) Τὰ τμήματα ΑΑ'', ΒΒ'', ΓΓ'' διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, ὅπερ εἶναι καὶ κοινὸν μέσον αὐτῶν.

180. Εἰς τὰ μέσα Ε καὶ Ζ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ ὑψοῦμεν κάθετα τμήματα ἐπὶ τὰς πλευρὰς ταύτας καὶ πρὸς τὰ ἔξω τοῦ τριγώνου, τὰ ΕΘ=ΑΒ/2καὶ ΖΙ=ΑΓ/2. Ἐὰν Δ τὸ μέσον τῆς ΒΓ, δείξατε ὅτι τὸ τριγ. ΘΔΙ εἶναι ὀρθογώνιον ἰσοσκελές.

181. Ἔστω τραπέζιον ΑΒΓΔ καὶ Ε, Ζ τὰ μέσα τῶν διαγωνίων του ΑΓ καὶ ΒΔ. Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΓΔ αἱ ἀγόμεναι ἀντιστοίχως ἀπὸ τὰ μέσα Ε καὶ Ζ καὶ ἡ μεσοκάθετος τῆς βάσεως ΑΔ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

182. Ἐὰν διὰ σημείου Α κειμένου ἐπὶ τῆς προεκτάσεως μιᾶς διαμέτρου ἀχθῇ τέμνουσα ΑΒΓ, ἧς τὸ ἐκτὸς τοῦ κύκλου μέρος ΑΒ ἰσοῦται πρὸς τὴν ἀκτῖνα, τότε ἐκ τῶν τόξων τῶν περιεχομένων μεταξὺ τεμνούσης καὶ διαμέτρου τὸ ἓν εἶναι τριπλάσιον τοῦ ἄλλου.

183. Δείξατε ὅτι, ἂν εὐθεῖα διέρχεται διὰ σημείου κειμένου ἐντὸς κύκλου, τότε τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς δύο σημεῖα.

184. Εἰς τρ.ΑΒΓ ὁ ἐντὸς τῆς γωνίας $\widehat{B}$ παρεγγεγραμμένος κύκλος ἐφάπτεται τῆς ευθ ΒΓ εἰς Ζ, ὁ δὲ ἐντὸς τῆς $\widehat{Γ}$ παρεγγεγραμμένος ἐφάπτεται τῆς ευθ ΒΓ εἰς Ζ'. Δείξατε ὅτι τὰ Ζ καὶ Ζ' εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΒΓ.

185. Νὰ γραφοῦν τρεῖς περιφέρειαι ἔχουσαι κέντρα τὰς κορυφὰς δεδομένου τριγώνου καὶ ἐφαπτόμεναι ἀλλήλων ἀνὰ δύο ἐξωτερικῶς.

186. Νὰ δειχθῇ ὅτι, ἂν οἱ δύο κύκλοι οἱ ἐγγεγραμμένοι εἰς τὰ δύο τρίγωνα, εἰς ἃ χωρίζεται κυρτὸν τετράπλευρον ὑπὸ μιᾶς διαγωνίου του, ἐφάπτωνται τῆς διαγωνίου ταύτης εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, τὸ τετράπλευρον εἶναι περιγράψιμον. Νὰ διατυπωθῇ καὶ ἀποδειχθῇ ἡ ἀντίστροφος πρότασις. (*Χαρακτηριστικὴ ἰδιότης τοῦ περιγραψίμου τετραπλεύρου*).

187. Δύο περιφέρειαι κέντρων Κ καὶ Λ τέμνονται εἰς Α καὶ Β. Διὰ τοῦ Α ἄγονται δύο τυχοῦσαι εὐθεῖαι $(\varepsilon_1)$ καὶ $(\varepsilon_2)$, ἐξ ὧν ἡ $(\varepsilon_1)$ τέμνει τὰς περιφερείας (Κ) καὶ (Λ) εἰς Γ καὶ Δ ἀντιστοίχως, ἡ δὲ $(\varepsilon_2)$ τέμνει ταύτας εἰς $Γ_1$ καὶ $Δ_1$. Ἐὰν Μ τὸ δεύτερον κοινὸν σημεῖον τῶν περιφερειῶν τῶν περιγεγραμμένων περὶ τὰ τρίγωνα $ΑΓΔ_1$, $ΑΓ_1Δ$, δείξατε ὅτι τὸ Μ κεῖται ἐπὶ σταθερᾶς περιφερείας, ἐχούσης κέντρον τὸ μέσον Ο τοῦ ΚΛ καὶ ἀκτῖνα ΟΑ.

188. Ἔστω Α σημεῖον κείμενον ἐντὸς κύκλου (Ο, R), Μ τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας καὶ ΝΝ′ χορδὴ αὐτῆς μεσοκάθετος τοῦ ΑΜ. Νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ περὶ τὸ τρ.ΑΝΝ′ περιγεγραμμένος κύκλος ἐφάπτεται τοῦ κύκλου (Α, 2R).

189. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, οὗτινος δίδονται τὰ κέντρα $Ο_1$, $Ο_2$, $Ο_3$ τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων.

190. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, οὗτινος δίδονται οἱ πόδες $Η_1$, $Η_2$, $Η_3$ τῶν ὑψῶν.

191. Τετραπλεύρου δίδονται αἱ τρεῖς κορυφαί. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ θέσις τῆς τετάρτης, ἵνα τὸ τετράπλευρον εἶναι ἐγγράψιμον καὶ περιγράψιμον περὶ κύκλον.

192. Νὰ κατασκευασθῇ τρ.ΑΒΓ, οὗτινος δίδονται αἱ κορυφαὶ Β καὶ Γ, τὸ σημεῖον Δ, καθ᾽ ὃ ἡ ἐκ τῆς Α διάμετρος τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου τέμνει (ἐν ἀνάγκῃ προεκτεινομένη) τὴν ευθΒΓ καὶ ἡ γωνία $\widehat{Β}$.

193. Νὰ κατασκευασθῇ τρ.ΑΒΓ, οὗτινος δίδεται ἡ κορυφὴ Α, τὸ ὀρθόκεντρον Η καὶ τὸ μέσον Μ τῆς πλευρᾶς ΒΓ. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ πρόβλημα εἶναι δυνατόν, μόνον ὅταν ἡ γωνία $\widehat{ΑΜΗ}$ εἶναι ὀξεῖα.

194. Δοθέντων δύο ὁμοκέντρων κύκλων, νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα ἀποτέμνουσα ἀπὸ τὸν μεγαλύτερον χορδὴν διπλασίαν ἐκείνης, ἣν ἀποτέμνει ἀπὸ τὸν μικρότερον. —Διερεύνησις.

195. Ἐὰν Κ τὸ περίκεντρον ὀξυγωνίου τριγώνου ΑΒΓ καὶ $Κ_1$, $Κ_2$, $Κ_3$ τὰ περίκεντρα τῶν τριγώνων ΚΒΓ, ΚΓΑ, ΚΑΒ, ὑπολογίσατε συναρτήσει τῶν $\widehat{Α}$, $\widehat{Β}$, $\widehat{Γ}$ τὰς γωνίας τοῦ ἑξαγώνου $ΒΚ_1ΓΚ_2ΑΚ_3Β$ ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι αἱ $\widehat{2Α}$, $\widehat{2Β}$, $\widehat{2Γ}$ εἶναι ἀμβλεῖαι.

196. Προεκτείνομεν τὴν βάσιν ΒΓ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ κατὰ ΓΔ = ΑΒ καὶ τὴν ΑΒ κατὰ ΒΕ = ΒΓ/2. Ἡ ευθ ΕΗ, ὅπου Η τὸ μέσον τῆς ΒΓ, τέμνει τὴν ευθ ΑΔ εἰς Ζ. Ἐὰν $\widehat{ΒΑΓ} = 58^\circ$, ὑπολογίσατε εἰς μοίρας τὴν $\widehat{ΑΖΗ}$.

197. Ἐντὸς ὀρθῆς γωνίας $x\widehat{O}y$ εἶναι ἐγγεγραμμένος κύκλος (Κ) ἐφαπτόμενος τῆς Οx εἰς Γ. Ἀφοῦ πρῶτον κατασκευασθῇ τέμνουσα ΟΑΒ τοιαύτη, ὥστε τὸ τόξον $\widehat{ΑΓ}$ νὰ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ $\widehat{ΓΒ}$, νὰ ὑπολογισθοῦν κατόπιν αἱ γωνίαι τοῦ τετραπλεύρου ΚΑΓΒ.

198. Ὀρθὴ γωνία $\widehat{ΑΓΒ}$ στρέφεται περὶ τὴν σταθερὰν κορυφήν της, αἱ δὲ πλευραί της τέμνουν δύο δεδομένας καθέτους μεταξύ των εὐθείας εἰς Β καὶ Γ. Τόπος τοῦ βαρυκέντρου τοῦ τρ.ΑΒΓ.

199. Μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν Α δεδομένου ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) καὶ τυχοῦσαν ἀκτῖνα γράφομεν περιφέρειαν. Ἐκ τῶν Β καὶ Γ φέρομεν ἐφαπτομένας τῆς περιφερείας ταύτης, μὴ συμμετρικὰς πρὸς τὸ ἐκ τοῦ Α ὕψος. Ποῖος ὁ γ.τ. τοῦ σημείου τομῆς Μ τῶν ἐφαπτομένων τούτων;

200. Διὰ τῆς κορυφῆς Α ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν ΑΧ (ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ τριγώνου) καὶ ἐξ ὅλων τῶν σημείων τῆς ΑΧ ἐκλέγομεν ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἔχει τὸ ἐλάχιστον ἄθροισμα ἀποστάσεων ἀπὸ τὰ Β καὶ Γ. Ἂν Μ εἶναι τοῦτο, ποῖον τὸ σύνολον τῶν σημείων Μ;

201. Ἐν κύκλῳ δίδονται αἱ κάθετοι ἐπ᾽ ἀλλήλας διάμετροι ΑΑ′ καὶ ΒΒ′. Διὰ τοῦ Α ἄγεται τυχοῦσα εὐθεῖα, τέμνουσα εἰς Γ τὴν περιφέρειαν καὶ εἰς Δ τὴν ευθΒΒ′, ὅπου Γ

καὶ Δ διάφορα ἀλλήλων. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τοῦ σημείου τομῆς τῆς εἰς τὸ Γ ἐφαπτομένης καὶ τῆς εἰς τὸ Δ καθέτου ἐπὶ τὴν ευθΒΒ'.

202. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν α, $\widehat{A}$, $\mu_\alpha$.

203. Νὰ κατασκευασθῇ τρ.ΑΒΓ, οὗτινος δίδεται ἡ R, ἡ $\delta_A$ καὶ τὸ μῆκος λ=ΑΤ ἐπὶ τῆς εἰς Α ἐφαπτομένης τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου, ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α μέχρι τοῦ σημείου Τ, καθ' ὃ αὕτη τέμνει τὴν ευθΒΓ.

204. Ἐπὶ περιφερείας (Ο) διαμέτρου ΑΒ λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Μ καὶ φέρομεν τὴν ευθΜΑ τέμνουσαν τὴν μεσοκάθετον τῆς ΑΒ εἰς Γ. Ζητεῖται: i) Ὁ γ.τ. τοῦ ὀρθοκέντρου καὶ ii) τοῦ περικέντρου τοῦ τρ.ΟΜΓ.

205. Δύο περιφέρειαι τέμνονται εἰς Α καὶ Β. Διὰ τοῦ Α ἄγεται τυχοῦσα εὐθεῖα ἐπανατέμνουσα τὰς περιφερείας εἰς Γ καὶ Δ καὶ εἰς τὰ Γ καὶ Δ ἄγονται αἱ ἀντίστοιχοι ἐφαπτόμεναι τῶν περιφερειῶν, τεμνόμεναι ἔστω εἰς τὸ Ε. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ τετράπλευρον ΒΓΕΔ εἶναι ἐγγράψιμον.

206. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δίδονται τὰ σημεῖα τομῆς τῶν ὑψῶν του (προεκτεινομένων ἐν ἀνάγκῃ) μετὰ τῆς περιγεγραμμένης περὶ αὐτὸ περιφερείας.

207. Εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ τυχοῦσα περιφέρεια διερχομένη διὰ τῶν Β καὶ Γ ἐπανατέμνει τὰς εὐθείας ΑΒ, ΑΓ εἰς Β' καὶ Γ'. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἐκ τοῦ Α διάμεσος τοῦ τρ.ΑΒΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν Β'Γ'.

208. Ἔστωσαν τὰ Α, Β, Γ, Δ ὁμοκυκλικά, Β', Δ' αἱ προβολαὶ τῶν Β, Δ ἐπὶ τὴν ευθ ΑΓ καὶ Α', Γ' αἱ προβολαὶ τῶν Α, Γ ἐπὶ τὴν ευθ ΒΔ. Δείξατε ὅτι τὰ Α', Β', Γ', Δ' εἶναι ὁμοκυκλικά.

209. Ἐπὶ τῶν καθέτων πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ ὀρθογωνίου τριγώνου κατασκευάζομεν τετράγωνα ΑΒΔΕ καὶ ΑΓΖΘ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου. Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΔΕ καὶ ΖΘ τέμνονται ἐπὶ τοῦ φορέως τοῦ ὕψους ΑΗ τοῦ τρ.ΑΒΓ.

**Ὁμὰς Β (Συνθετώτεραι ἀσκήσεις).**

210. Εἰς ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Ρ ἐπὶ τῆς διαγωνίου ΑΓ, προεκτείνομεν τὸ ΒΡ κατὰ ΡΜ = ΒΡ καὶ προβάλλομεν τὸ Μ ἐπὶ τὰς εὐθείας ΑΔ καὶ ΔΓ εἰς Ε καὶ Ζ. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ σημεῖα Ζ, Ε, Ρ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

211. Ἔστω ΑΗ τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψος ὀρθογωνίου τριγ. ΑΒΓ καὶ Ε καὶ Δ αἱ προβολαὶ τοῦ Η ἐπὶ τὰς ΑΒ, ΑΓ. Νὰ δειχθῇ ὅτι:

i) ΔΕ$\perp$ΑΜ, ὅπου Μ τὸ μέσον τῆς ΒΓ.

ii) Ἐὰν Η' εἶναι τὸ μέσον τῆς ΑΒ καὶ ΒΧ εὐθεῖα //ΕΔ, τότε αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ΜΗ', ΒΧ, ΑΗ συντρέχουν εἰς ἓν σημεῖον.

iii) Αἱ εὐθεῖαι ΑΜ, ΗΔ καὶ ΒΧ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

212. Ἐπὶ τῶν καθέτων πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζομεν τετράγωνα ΑΒΔΕ καὶ ΑΓΖΗ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ περὶ τὸ τρ.ΑΒΓ περιγεγραμμένη περιφέρεια διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τῆς ἀποστάσεως ΔΖ.

213. Ἐὰν μὲ διαμέτρους τὰ τμήματα ΑΓ, ΓΒ διαμέτρου ΑΒ περιφερείας γραφοῦν δύο περιφέρειαι καὶ ἀχθῇ διὰ τοῦ Γ τυχοῦσα εὐθεῖα, τὰ τμήματα αὐτῆς τὰ μεταξὺ τῆς ἀρχικῆς περιφερείας καὶ τῶν δύο ἄλλων εἶναι ἴσα.

214. Ἔστω ὅτι αἱ ἀπέναντι πλευραὶ ΑΒ καὶ ΓΔ κυρτοῦ ἐγγραψίμου τετραπλεύρου τέμνονται προεκτεινόμεναι εἰς Ε καὶ ὁμοίως αἱ δύο ἄλλαι ἀπέναντι πλευραὶ ΒΓ καὶ ΔΑ εἰς Ζ. Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν $\widehat{AE\Delta}$ καὶ $\widehat{BZA}$ τέμνουν τὰς πλευρὰς τοῦ τετραπλεύρου κατὰ τὰς κορυφὰς ἑνὸς ῥόμβου. Νὰ διατυπωθῇ μία ἀντίστροφος πρότασις καὶ νὰ ἐξετασθῇ, ἂν ἀληθεύῃ.

215. Ἔστω ΑΒΓ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ΑΔ τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ ὕψος καὶ Ε τυχὸν σημεῖον τοῦ ΑΔ. Διὰ τοῦ Ε φέρομεν ἀφ' ἑνὸς μὲν παρ|λον πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ, ἥτις τέμνει τὴν ΑΓ εἰς τὸ Η καὶ ἀφ' ἑτέρου κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΕ, ἥτις τέμνει τὴν ευθΑΓ εἰς Ζ. Νὰ δειχθῇ ὅτι ΑΖ = ΓΗ.

216. Ἔστω ΑΒΓ ὀρθογώνιον τρίγωνον μὲ $\widehat{A} = 90^0$, ἔστω ΑΔ τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψος του καὶ $K_1$, $K_2$, Κ τὰ ἔγκεντρα τῶν τριγώνων ΑΒΔ, ΑΓΔ καὶ ΑΒΓ ἀντιστοίχως Νὰ δειχθῇ.

i) Τὸ Κ εἶναι ὀρθόκεντρον τοῦ τρ.$AK_1K_2$.

ii) Τὸ ΑΔ διέρχεται διὰ τοῦ περικέντρου τοῦ τρ.$AK_1K_2$.

iii) Τὸ τετράπλευρον $BK_1K_2\Gamma$ εἶναι ἐγγράψιμον.

217. Διὰ τυχόντος σημείου Μ τῆς βάσεως ΒΓ ἰσοσκελοῦς τριγ. ΑΒΓ φέρομεν παρ|λους πρὸς τὰς ἴσας πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ μεσοκάθετος τῆς διαγωνίου ΔΕ τοῦ σχηματιζομένου παρ/μου διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου, ὅταν τὸ Μ διατρέχῃ τὴν βάσιν ΒΓ. Νὰ δειχθῇ ἐπίσης ὅτι ἡ ἐκ τοῦ Μ κάθετος ἐπὶ τὴν ευθ ΔΕ διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου.

218. Ἐπὶ σταθεροῦ τμήματος ΑΒ λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Μ καὶ γράφομεν δύο ἡμιπεριφερείας μὲ διαμέτρους ΜΑ καὶ ΜΒ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ΑΒ. Ἔστωσαν Δ καὶ Ε τὰ μέσα τῶν δύο ἡμιπεριφερειῶν. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἐκ τοῦ Μ κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΕ διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου, ὅταν τὸ Μ διατρέχῃ τὸ ΑΒ.

219. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν Οx,Οy ὀρθῆς γωνίας κινοῦνται τὰ σημεῖα Α καὶ Β οὕτως, ὥστε ΟΑ + ΟΒ = Κ (σταθ.). Κατασκευάζομεν ὀρθογώνιον ΟΑΔΒ. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἐκ τοῦ Δ⊥ἐπὶ τὴν ΑΒ διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου.

220. Ἐπ' εὐθείας δίδονται κατὰ σειρὰν τὰ σταθερὰ σημεῖα Α, Β, Γ. Διὰ τοῦ Γ φέρομεν εὐθεῖαν (ε) ⊥ ΑΓ. Διὰ τῶν Α καὶ Β διέρχονται δύο κάθετοι μεταξύ των εὐθεῖαι τέμνουσαι τὴν (ε) εἰς Δ καὶ Ε. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ περιφέρεια (ΑΔΕ) διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου διαφόρου τοῦ Α.

221. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ ὀξυγωνίου τριγώνου ΑΒΓ δίδεται ἓν σημεῖον Δ. Ζητεῖται νὰ εὑρεθοῦν ἐπὶ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ σημεῖα Ε καὶ Ζ τοιαῦτα, ὥστε ἡ περίμετρος τοῦ τρ.ΔΕΖ νὰ εἶναι ἡ ἐλαχίστη δυνατή. Ἀκολούθως νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ὀρθικὸν τρίγωνον τοῦ ΑΒΓ ἔχει τὴν ἐλαχίστην περίμετρον ἐξ ὅλων τῶν εἰς τὸ τρ.ΑΒΓ ἐγγεγραμμένων τριγώνων.

(Ὑπόδ. Νὰ ληφθοῦν τὰ συμμετρικὰ τοῦ Δ ὡς πρὸς τὰς ευθ ΑΒ, ΑΓ).

222. Ἐὰν ἐπίπεδον σχῆμα ἔχῃ δύο ἄξονας συμμετρίας καθέτους ἐπ' ἀλλήλους, τότε ἔχει καὶ κέντρον συμμετρίας τὴν τομὴν τῶν ἀξόνων τούτων.

223. Διὰ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα τὰς πλευρὰς δοθείσης γωνίας οὕτως, ὥστε ἡ περίμετρος τοῦ σχηματιζομένου τριγώνου νὰ ἰσοῦται πρὸς δοθὲν τμῆμα.

224. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ, οὗτινος δίδεται ἡ ἀκτὶς $\boxed{\rho}$ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου, ἡ ἀκτὶς $\boxed{\rho_\alpha}$ τοῦ ἐντὸς τῆς $\widehat{A}$ παρεγγεγραμμένου καὶ τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς α.

225. Ὁμοίως, ὅταν δίδωνται: ρ, $\rho_\alpha$, καὶ $|\beta - \gamma| = \lambda$.

226. Ὁμοίως, ἐκ τῶν στοιχείων α, $\widehat{A}$ καὶ $\rho_\alpha$.

227. Ὁμοίως, ἐκ τῶν στοιχείων α, ρ καὶ $|\beta - \gamma| = \lambda$.

228. Νὰ κατασκευασθῇ τρ.ΑΒΓ, οὗτινος δίδεται ἡ ρ, ἡ α καὶ ἡ ἀπόστασις $OO_1 = \lambda$ τοῦ κέντρου Ο τοῦ ἐγγεγραμμένου ἀπὸ τὸ κέντρον $O_1$ τοῦ ἐντὸς τῆς $\widehat{A}$ παρεγγεγραμμένου κύκλου.

Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ :

229. Ἐκ τῶν $\widehat{A}$, $\mu_\beta$, $\mu_\gamma$.

230. Ἐκ τῶν $\widehat{A}$, ρ, $\upsilon_\alpha$.

231. Ἐκ τῶν α, β - γ = d, ρ.

232. Ἐκ τῶν β, γ, $\widehat{B} - \widehat{\Gamma} = \omega$.

233. Ἐκ τῶν α, β + γ = k, $\widehat{B} - \widehat{\Gamma} = \omega$.

234. Ἐκ τῶν α, β - γ = d, $\widehat{B} - \widehat{\Gamma} = \omega$.

235. Ἐκ τῶν R, α, $\upsilon_\beta$.

236. i) Ἑκατέρωθεν εὐθείας (ε) δίδονται δύο σημεῖα Α καὶ Β. Τὸ ΑΒ τέμνει τὴν (ε) εἰς Ο. Τὸ Ο χωρίζει τὴν (ε) εἰς δύο ἡμιευθείας ΟΧ, ΟΨ, ἐξ ὧν ἡ ΟΧ σχηματίζει ὀξεῖαν γωνίαν μὲ τὸ ΟΑ. Νὰ δειχθῇ ὅτι διὰ κάθε σημεῖον Μ τῆς ΟΧ ἰσχύει $A\widehat{M}X > B\widehat{M}\Psi$ καὶ νὰ ὁρισθῇ τὸ Μ οὕτως, ὥστε $A\widehat{M}X - B\widehat{M}X = \widehat{\theta}$ (δοθεῖσα). ii) Ἐὰν τὰ Α καὶ Β κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας ΧΨ, νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τῆς ΧΨ τοιοῦτον, ὥστε $A\widehat{M}X - B\widehat{M}\Psi = \widehat{\theta}$.

237. Δοθεισῶν δύο περιφερειῶν (Κ) καὶ (Λ) νὰ εὑρεθῇ σημεῖον τοιοῦτον, ὥστε δύο ἐξ αὐτοῦ ἀγόμενα ἐφαπτόμενα τμήματα τῶν περιφερειῶν (ἓν πρὸς ἑκάστην) νὰ σχηματίζουν δοθεῖσαν γωνίαν καὶ νὰ εἶναι ἴσα.

238. Ἐπὶ τῆς μιᾶς τῶν πλευρῶν ὀρθῆς γωνίας $X\widehat{O}\Psi$ δίδονται δύο σημεῖα Α καὶ Β (ΟΑ < ΟΒ). Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς ἄλλης πλευρᾶς σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε $A\widehat{M}B = 2A\widehat{B}M$. Ἐὰν (ΟΑ) = α, (ΟΒ) = β, ποία ἡ σχέσις μεταξὺ τῶν α καὶ β, διὰ νὰ εἶναι τὸ πρόβλημα δυνατόν;

239. Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν ἀκτίνων $R_1$, $R_2$ τῶν περιγεγραμμένων κύκλων τῶν τριγώνων ΑΒΔ καὶ ΑΔΓ, ὅπου Δ τὸ μέσον τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ.

240. Δοθεισῶν δύο παραλλήλων καὶ σημείου Α ἐκτὸς τῆς ταινίας αὐτῶν νὰ κατασκευασθῇ τμῆμα ΒΓ κάθετον ἐπὶ τὰς παραλλήλους καὶ περατούμενον εἰς αὐτάς, τὸ ὁποῖον

i) νὰ φαίνεται ἀπὸ τοῦ Α ὑπὸ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν θ,

ii) νὰ φαίνεται ἐκ τοῦ Α ὑπὸ τὴν μεγίστην δυνατὴν γωνίαν.

241. Δίδεται γωνία $\widehat{A}$ καὶ σημεῖον Σ κείμενον ἐντὸς τῆς προσκειμένης πρὸς τὴν $\widehat{A}$ γωνίας. Νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ Σ εὐθεῖα τέμνουσα τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας $\widehat{A}$ εἰς σημεῖα Β καὶ Γ οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι ΑΒ + ΑΓ = S (δοθὲν τμῆμα).

(Ὑπόδ: βλ. ἄσκ. 111).

242. Ἔστω $A_1A_2A_3A_4A_5$ ἓν πεντάγωνον καὶ $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$, $M_5$ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν $A_1A_2$, $A_2A_3$, $A_3A_4$, $A_4A_5$, $A_5A_1$ ἀντιστοίχως καὶ τέλος Ρ τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου. Ἂς εἶναι $P_1$ τὸ συμμετρικὸν τοῦ Ρ ὡς πρὸς $M_1$, $P_2$ τὸ συμμετρικὸν τοῦ $P_1$ ὡς πρὸς $M_2$ ... καί, τέλος, $P_5$ τὸ συμμετρικὸν τοῦ $P_4$ ὡς πρὸς $M_5$. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ κορυφὴ $A_1$ εἶναι τὸ μέσον τοῦ τμήματος $PP_5$.

Γενίκευσις διὰ τυχὸν πολύγωνον π ε ρ ι τ τ ο ῦ ἀριθμοῦ πλευρῶν.

*Ἐφαρμογή.* Νὰ κατασκευασθῇ πεντάγωνον, οὗτινος δίδονται τὰ μέσα τῶν πλευρῶν.

243. Δίδονται δύο παράλληλοι καὶ ἐπὶ τῆς μιᾶς σημεῖον Α. Ἐκ τοῦ Α φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν, τέμνουσαν εἰς Β τὴν ἄλλην παράλληλον. Εἰς τὸ Β ὑψοῦμεν κάθετον ἐπὶ

τὴν ΑΒ, τέμνουσαν εἰς Γ τὴν πρώτην παράλληλον. Ἐκ τοῦ Γ φέρομεν ἡμιευθεῖαν ΓΧ οὕτως, ὥστε ἡ ΓΧ καὶ τὸ Β νὰ κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς ευθΑΓ καὶ νὰ εἶναι $\widehat{ΑΓΧ} = 2\widehat{ΓΑΒ}$. Τόπος τῆς προβολῆς τοῦ Α ἐπὶ τὸν φορέα τῆς ΓΧ.

244. Δίδεται περιφέρεια (Ο) καὶ δύο σταθεραὶ διευθύνσεις $(\delta_1)$, $(\delta_2)$. Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Α τῆς (Ο) φέρομεν παρ|λους πρὸς τὰς $(\delta_1)$ καὶ $(\delta_2)$ τεμνούσας εἰς Β καὶ Γ τὴν (Ο). Ζητεῖται τὸ σύνολον τῶν ἐγκέντρων τῶν τριγώνων ΑΒΓ.

245. Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον παρ|μον, οὗτινος δίδονται αἱ ἀποστάσεις μιᾶς κορυφῆς ἀπὸ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τῶν συντρεχουσῶν εἰς τὴν ἀπέναντι κορυφήν.

Διερεύνησις.

246. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΟΧ, ΟΨ γωνίας $\widehat{ΧΟΨ}$ κινοῦνται ἀντιστοίχως τὰ σημεῖα Α καὶ Β οὕτως, ὥστε ΟΑ + ΟΒ = $l$ (σταθ. τμῆμα). Ποῖον τὸ σύνολον τῶν περικέντρων τῶν τριγώνων ΟΑΒ;

247. Δοθείσης γωνίας $\widehat{ΧΟΨ}$ νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα παρ|λος πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν (ε) καὶ τέμνουσα εἰς Α καὶ Β τὰς ΟΧ, ΟΨ οὕτως, ὥστε ΟΑ + ΟΒ = $l$ (δοθέν). (Ὑποτίθεται ὅτι ἡ (ε) τέμνει τὰς πλευρὰς ΟΧ, ΟΨ).

**Σημεῖα συζυγῆ—ἰσογώνια ὡς πρὸς ἓν τρίγωνον.**

248. i) Ἔστω Μ σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τρ.ΑΒΓ μὴ κείμενον ἐπὶ τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ τρ.ΑΒΓ περιφερείας. Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ ἰσογώνιοι τῶν εὐθειῶν ΑΜ, ΒΜ, ΓΜ ὡς πρὸς τὰς γωνίας $\widehat{Α}$, $\widehat{Β}$, $\widehat{Γ}$ ἀντιστοίχως συντρέχουν ἐπίσης εἰς ἓν σημεῖον Μ′. (**Ὑποδ.** Ἔστωσαν Δ, Ε, Ζ αἱ προβολαὶ τοῦ Μ ἐπὶ τὰς εὐθείας ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ. Ἡ Περιφ. (ΔΕΖ) ἐπανατέμνει τὰς ὡς ἄνω εὐθείας εἰς Δ′, Ε′, Ζ′. Αἱ εἰς Δ′, Ε′,Ζ′ ἀγόμεναι κάθετοι ἐπὶ τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ συντρέχουν εἰς ἓν σημεῖον Μ′ συμμετρικὸν τοῦ Μ ὡς πρὸς τὸ κέντρον Κ τῆς περιφ. (ΔΕΖ). Ἀποδεικνύομεν ἀκολούθως ὅτι ἡ ΑΜ′ εἶναι ἡ ἰσογώνιος τῆς ΑΜ ὡς πρὸς τὴν γωνίαν $\widehat{Α}$. Πρὸς τοῦτο θεωροῦμεν τὴν περιφ. (ΑΔΖ) καὶ τὸ κέντρον αὐτῆς Ο. Εἶναι $ΑΜ'//ΟΚ \wedge ΟΚ \perp ΔΖ \Rightarrow ΑΜ' \perp ΔΖ$. Ἤτοι ἡ ΑΜ′ ἔχει τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἐκ τοῦ Α ὕψους καὶ ἡ ΑΜ τὴν τῆς διαμέτρου τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου τοῦ τρ.ΑΔΖ, ἄρα ΑΜ′ καὶ ΑΜ εἶναι ἰσογώνιοι ὡς πρὸς τὴν $\widehat{Α}$ (**§25**). Ὁμοίως διὰ τὰ δύο ἄλλα ζεύγη (ΒΜ′, ΒΜ), (ΓΜ′, ΓΜ)).

ii) **Ὁρισμός.** Τὰ δύο ἀνωτέρω σημεῖα Μ καὶ Μ′ καλοῦνται συζυγῆ — ἰσογώνια ὡς πρὸς τὸ τρ.ΑΒΓ.

iii) Αἱ ἓξ προβολαὶ ἐπὶ τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ δύο συζυγῶν ἰσογωνίων σημείων Μ,Μ′ ὡς πρὸς τὸ τρ.ΑΒΓ κεῖνται ἐπὶ μιᾶς περιφερείας. (Τοῦτο προκύπτει ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω κατασκευὴν τοῦ σημείου Μ′ συζυγοῦς — ἰσογωνίου τοῦ Μ).

iv) **Παρατήρησις.** Εἰς τὸ i) ἐδείχθη ὅτι:

«*Ἡ ἰσογώνιος τῆς ΑΜ ὡς πρὸς τὴν* $\widehat{ΒΑΓ}$ *εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἑνοῦσαν τὰς προβολὰς τοῦ σημείου Μ ἐπὶ τὰς ΑΒ, ΑΓ*».

249. Ἔστω Ρ σημεῖον τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ τρίγ. ΑΒΓ περιφερείας. Ἐὰν αἱ ἐκ τοῦ Ρ ἀγόμεναι κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἐπανατέμνουν τὴν περιφέρειαν εἰς Α′, Β′, Γ′, νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α′Β′Γ′ εἶναι ἴσα.

250. Δίδονται τρεῖς κύκλοι (Α), (Β), (Γ) ἔχοντες κέντρα τὰς κορυφὰς τριγώνου ΑΒΓ καὶ κείμενοι ἐκτὸς ἀλλήλων ἀνὰ δύο. Θεωροῦμεν ἰσόπλευρα τρίγωνα, τῶν ὁποίων μία πλευρὰ ἐφάπτεται τοῦ (Α), μία τοῦ (Β) καὶ ἡ τρίτη τοῦ (Γ) καὶ τὰ ὁποῖα περιέχουν τοὺς κύκλους (Α), (Β), (Γ) ἐντὸς αὐτῶν. Νὰ κατασκευασθῇ τὸ μέγιστον ἐκ τῶν ἰσοπλεύρων τριγώνων τούτων.

251. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων $\alpha$, $\upsilon_\alpha$, $\widehat{B} - \widehat{\Gamma} = \widehat{\omega}$

(Ὑποδ. Ἂν λάβωμεν τὸ συμμετρικὸν τοῦ Α ὡς πρὸς τὴν μεσοκάθετον τῆς ΒΓ, ἀνάγεται εἰς τὴν ἄσκησιν 175).

252. Νὰ κατασκευασθῇ τρ.ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων $2\tau$, $\upsilon_\alpha$, $\delta_A$.

(Ὑποδ. Ἀνάγεται εἰς τὴν προηγουμένην).

253. Νὰ κατασκευασθῇ τρ.ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων $\widehat{B}$, $\delta_A$ καὶ τῆς ἀποστάσεως τῆς κορυφῆς Γ ἀπὸ τῆς ἐσωτερικῆς διχοτόμου τῆς $\widehat{BA\Gamma}$.

254. Δοθέντος τρ.ΑΒΓ νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον Α'Β'Γ' ἔχον τὰς κορυφάς του Α', Β', Γ' ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τοῦ δοθέντος καὶ ἴσον πρὸς ἄλλο δοθὲν τρίγωνον Α''Β''Γ''.

255. Ἡ διάκεντρος ΚΛ δύο ἴσων κύκλων ἀκτῖνος R ἔχει μῆκος $K\Lambda = 2\alpha > 2R$. Εὐθύγραμμον τμῆμα ΜΜ' σταθεροῦ μήκους λ κινεῖται, ὥστε τὰ ἄκρα του νὰ μένουν ἐπὶ τῶν περιφερειῶν (Κ) καὶ (Λ).

i) Ποίας συνθήκας πρέπει νὰ πληροῖ τὸ λ, διὰ νὰ ὑπάρχουν σημεῖα Μ καὶ Μ';

ii) Δοθέντος τοῦ λ νὰ κατασκευασθοῦν τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα διανύουν τὰ Μ καὶ Μ'.

iii) Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ αἱ περιφέρειαι διαγράφονται ὁλόκληροι ἀπὸ τὰ Μ καὶ Μ';

256. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων.

$$\delta_A,\ \gamma,\ \left|\widehat{B} - \widehat{\Gamma}\right| = \omega$$

257. Νὰ κατασκευασθῇ ἐγγράψιμον κυρτὸν τετράπλευρον ἐκ τῶν τριῶν πλευρῶν του καὶ τῆς γωνίας τῶν διαγωνίων του τῆς περιεχούσης τὴν τετάρτην πλευράν.

258. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ οὗτινος δίδονται κατὰ θέσιν, τὸ περίκεντρον Κ καὶ οἱ πόδες Η καὶ Δ τοῦ ἐπὶ τὴν ΒΓ ὕψους ΑΗ καὶ τῆς ἐσωτερικῆς διχοτόμου ΑΔ τῆς γωνίας $\widehat{A}$.

259. Εἰς δοθέντα κύκλον χαράσσεται χορδὴ ΑΓ. Ζητεῖται νὰ ἐγγραφῇ εἰς τὸν κύκλον τοῦτον τετράπλευρον ΑΒΓΔ, ἔχον τὴν ΑΓ ὡς διαγώνιον, ἔχον τὴν ἑτέραν διαγώνιον ΒΔ παράλληλον πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν καὶ τὸ ὁποῖον νὰ εἶναι συγχρόνως καὶ περιγράψιμον περὶ κύκλον.

260. Περὶ δοθὲν κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ νὰ περιγραφῇ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου δύο ἀπέναντι πλευραὶ νὰ διέρχωνται διὰ τῶν Α καὶ Γ καὶ αἱ δύο ἄλλαι διὰ τῶν Β καὶ Δ.

261. Νὰ κατασκευασθῇ τρ.ΑΒΓ, οὗτινος δίδονται αἱ κορυφαὶ Β, Γ, ὁ ποὺς Δ τοῦ ἐπὶ τὴν ΒΓ ὕψους καὶ ἡ διαφορὰ τῶν παρὰ τὴν βάσιν ΒΓ γωνιῶν.

262. Ἐντὸς δοθείσης γωνίας δίδεται σημεῖον Ο, μὴ κείμενον ἐπὶ τῆς διχοτόμου. Ζητεῖται νὰ γραφῇ περιφέρεια, κέντρου Ο, ἀποτέμνουσα ἀπὸ τὰς εὐθείας, ἐφ' ὧν κεῖνται αἱ πλευραὶ τῆς γωνίας, χορδὰς ἐχούσας δοθὲν ἄθροισμα.

263. Νὰ κατασκευασθῇ △ΑΒΓ μὲ ΑΒ = ΑΓ καὶ ἐκ τῶν στοιχείων $\mu_\beta$, $\upsilon_\beta$.

264. Ἔστω Β τὸ ἓν σημεῖον τομῆς δύο δοθεισῶν τεμνομένων περιφερειῶν (Κ) καὶ (Λ) καὶ Α σταθερὸν δοθὲν σημεῖον. Ζητεῖται νὰ γραφῇ περιφέρεια (γ) μὲ κέντρον τὸ Α καὶ τέμνουσα τὰς δοθείσας οὕτως, ὥστε τὸ Β, τὸ ἓν σημεῖον τομῆς τῆς (Κ) καὶ (γ) καὶ ἓν σημεῖον τομῆς τῆς (Λ) καὶ (γ) νὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

265. Διὰ τοῦ ἑνὸς κοινοῦ σημείου δύο τεμνομένων περιφερειῶν νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα ἀποτέμνουσα ἀπὸ τοὺς κύκλους χορδὰς ἀντιστοιχούσας εἰς ἴσας ἐπικέντρους γωνίας.

266. Νὰ γραφῇ περιφέρεια διερχομένη διὰ δοθέντος σημείου καὶ ἐφαπτομένη δύο δοθεισῶν ὁμοκέντρων περιφερειῶν.

267. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ, οὗτινος δίδεται κατὰ θέσιν ὁ ἐγγεγραμμένος κύκλος, τὸ μέσον τῆς ΒΓ καὶ ἓν σημεῖον τῆς ἐξωτερικῆς διχοτόμου τῆς $\widehat{\Gamma}$.

268. Νὰ κατασκευασθῇ τρ.ΑΒΓ ἐκ τῶν $\alpha$, $\upsilon_\alpha$, $\delta_A$.

269. Νὰ κατασκευασθῇ τρ.ΑΒΓ ἐκ τῶν $R$, $\mu_\alpha$, $B - \Gamma$.

270. Νὰ κατασκευασθῇ τρ.ΑΒΓ, οὗτινος δίδεται ἡ ΒΓ, ἡ $\widehat{B}$ καὶ τοιοῦτον, ὥστε αἱ δύο διχοτόμοι τῆς $\widehat{B}$ νὰ εἶναι ἴσαι ($\delta_B = \delta'_B$).

271. Νὰ κατασκευασθῇ τρ.ΑΒΓ ἐκ τοῦ ἐγκέντρου Ο καὶ τῶν παρακέντρων $O_2$, $O_3$.

272. Νὰ κατασκευασθῇ τρ.ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου δίδεται ἡ ἀπόστασις $2l$ τοῦ ἐγκέντρου Ο ἀπὸ τὸ παράκεντρον $O_1$, τὸ ἄθροισμα $\rho + \rho_\alpha$ καὶ ἡ ἀκτὶς R τοῦ περικύκλου.

273. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δίδονται τὰ ἐπὶ τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας ἴχνη τοῦ ὕψους, διαμέσου καὶ διχοτόμου τῶν ἀγομένων ἐκ μιᾶς κορυφῆς.

274. Νὰ κατασκευασθῇ τρ.ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων $\alpha$, $\widehat{A}$ καὶ τῆς ἀπ' ἀλλήλων ἀποστάσεως $l$ τῶν προβολῶν τοῦ ποδὸς Δ τοῦ ὕψους ΑΔ ἐπὶ τὰς πλευρὰς τῆς $\widehat{A}$.

275. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ διχοτόμος γωνίας, τῆς ὁποίας ἡ κορυφὴ εἶναι ἀπρόσιτος (ἐκτὸς τοῦ χάρτου σχεδιάσεως).

276. Εἰς δοθέντα κύκλον νὰ ἐγγραφῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχον δοθεῖσαν ἀκτῖνα ἐγγεγραμένου κύκλου καὶ μία κάθετος πλευρὰ τοῦ ὁποίου νὰ διέρχεται διὰ δοθέντος σημείου.

277. Ἐπὶ τῶν προεκτάσεων τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ τριγ.ΑΒΓ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Β καὶ τοῦ Γ κινοῦνται δύο σημεῖα Μ καὶ Ν οὕτως, ὥστε ΒΜ = ΓΝ. Τόπος τοῦ μέσου Ρ τοῦ τμήματος ΜΝ.

278. Μεταβλητοῦ τριγώνου ΑΒΓ αἱ κορυφαὶ Β, Γ καὶ τὸ μέγεθος τῆς $\widehat{A}$ μένουν σταθερά. Τόπος τῆς προβολῆς τοῦ μέσου τῆς ΒΓ ἐπὶ τὴν ἐσωτερικὴν διχοτόμον τῆς $\widehat{A}$.

279. Δίδεται κύκλος κέντρου Ο, ἀκτὶς αὐτοῦ ΟΑ, κύκλος διαμέτρου ΟΑ καὶ κέντρου Ο′ καὶ σταθερὰ εὐθεῖα ΑΓΔ τέμνουσα εἰς Γ τὴν (Ο′) καὶ εἰς Δ τὴν (Ο). Θεωροῦμεν μεταβλητὴν εὐθεῖαν διερχομένην διὰ τοῦ Ο, τέμνουσαν τὴν (Ο′) εἰς Μ καὶ τὴν (Ο) εἰς Ν καὶ Ν′. Τόπος τῶν σημείων Ρ καὶ Ρ′, καθ' ἃ ἡ ευθ ΓΜ τέμνει τὰς ευθ ΔΝ καὶ ΔΝ′.

280. Δίδεται περιφέρεια (Κ) καὶ ἐκτὸς αὐτῆς σημεῖον Σ. Διὰ τοῦ Σ ἄγεται ἐφαπτομένη ΣΑ τῆς περιφερείας καὶ μεταβλητὴ τέμνουσα ΣΒΓ. Ποῖος ὁ γ.τ. τοῦ ποδὸς Δ τῆς ἐσωτερικῆς διχοτόμου ΑΔ τοῦ τρ.ΑΒΓ;

281. Ποῖον τὸ σύνολον τῶν σημείων Μ, τῶν ὁποίων ἡ ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστασις τῶν προβολῶν ἐπὶ δύο δεδομένας εὐθείας τεμνομένας εἰς Ο εἶναι σταθερά;

282. Δίδεται περιφέρεια (Κ), ἐπ' αὐτῆς σημεῖον Α καὶ ἐκτὸς αὐτῆς σημεῖον Σ. Διὰ τοῦ Σ φέρομεν μεταβλητὴν τέμνουσαν ΣΒΓ τῆς περιφερείας μὴ διερχομένην διὰ τοῦ Α. Ποῖος ὁ τόπος τοῦ ὀρθοκέντρου Η τοῦ τρ.ΑΒΓ;

283. Μὲ κέντρον σταθερὸν σημεῖον Γ τῆς διχοτόμου δεδομένης γωνίας γράφομεν περιφέρειαν τέμνουσαν τὰς εὐθείας, ἐφ' ὧν κεῖνται αἱ πλευραὶ τῆς γωνίας, εἰς Α καὶ Β τὴν μίαν καὶ εἰς Α′ καὶ Β′ τὴν ἄλλην. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν προβολῶν τοῦ Γ ἐπὶ τὰς χορδὰς ΑΒ′ καὶ Α′Β ὄχι καθέτους ἐπὶ τὴν διχοτόμον.

284. Τριγώνου ΑΒΓ αἱ κορυφαὶ Β,Γ μένουν σταθεραὶ καὶ ἡ διαφορὰ $|AB - A\Gamma| = k$ σταθερά. Τόπος τῆς προβολῆς τοῦ Γ ἐπὶ τὴν ἐσωτερικὴν διχοτόμον τῆς $\widehat{A}$.

285. Δίδονται δύο σταθερὰ σημεῖα Α καὶ Β καὶ ἐπὶ τοῦ τμήματος ΑΒ σημεῖον Δ. Ἐπὶ τῆς εἰς τὸ Δ καθέτου ἐπὶ τὴν ΑΒ λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Γ καὶ φέρομεν τὴν περιφέρειαν (ΑΒΓ). Ζητεῖται ὁ γ.τ. τοῦ συμμετρικοῦ τοῦ Β ὡς πρὸς τὴν διὰ τοῦ Γ διερχομένην διάμετρον τῆς περιφερείας (ΑΒΓ).

286. Σημεῖον Ρ κινεῖται ἐπὶ τοῦ φορέως τῆς βάσεως ΒΓ δεδομένου τριγώνου ΑΒΓ.

Ἔστωσαν Δ καὶ Ε αἱ προβολαὶ τοῦ Ρ ἐπὶ τὰς εὐθείας ΑΒ, ΑΓ. Τόπος τῆς προβολῆς τοῦ ποδὸς Η τοῦ ὕψους ΑΗ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΔΕ.

287. Εἰς τυχὸν σημεῖον Μ περιφερείας διαμέτρου ΑΑ' ἄγομεν ἐφαπτομένην, ἥτις τέμνει τὴν ευθ ΑΑ' εἰς τὸ σημεῖον Τ. Ἂν Κ τὸ κέντρον τῆς περιφερείας, ζητεῖται i) ὁ τόπος τοῦ ἐγκέντρου τοῦ τρ.ΚΜΤ, ii) οἱ γ.τ. τῶν παρακέντρων τοῦ τρ.ΚΜΤ, ὅταν τὸ Μ διατρέχῃ τὴν περιφέρειαν.

288. Δοθέντος ὀρθογωνίου παρ|μου ΑΒΓΔ νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου του, τῶν ὁποίων αἱ προβολαὶ ἐπὶ τοὺς φορεῖς τῶν πλευρῶν τοῦ ΑΒΓΔ ἀποτελοῦν ὀρθοκεντρικὴν τετράδα.

289. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζομεν ἐκτὸς τοῦ τριγώνου τὰ ἰσόπλευρα τρίγωνα ΑΒΓ' καὶ ΑΓΒ' καὶ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ τρίτον ἰσόπλευρον τρίγωνον ΒΓΟ πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς Α.

i) Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ τετράπλευρον Γ'ΟΒ'Α εἶναι παρ|μον.

ii) Τὰ μέσα τῶν ΑΒ, ΑΓ, Β'Γ' εἶναι κορυφαὶ ἰσοπλεύρου τριγώνου.

iii) Ἐὰν ἡ κορυφὴ Α μεταβάλλεται οὕτως, ὥστε τὸ μῆκος τῆς ἐκ τοῦ Β διαμέσου τοῦ τρ.ΑΒΓ νὰ μένῃ σταθερόν, ἴσον μὲ $l$, νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ μέσου τοῦ Β'Γ'.

iv) Ἐὰν κατασκευάσωμεν ἐπὶ τῆς ΒΓ ἕτερον ἰσόπλευρον τρίγωνον ΒΓΑ' πρὸς τὰ ἔξω τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, τότε τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' ἔχουν τὸ αὐτὸ κέντρον βάρους.

290. Εἰς πᾶν τρ.ΑΒΓ αἱ προβολαὶ τοῦ ὀρθοκέντρου ἐπὶ τὴν ἐσωτερικὴν καὶ ἐξωτερικὴν διχοτόμον τῆς $\widehat{A}$ κεῖνται ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς ἑνούσης τὸ μέσον τῆς ΒΓ μὲ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τῶν 9 σημείων.

291. Πᾶν ἐγγράψιμον τετράπλευρον ΑΒΓΔ καὶ τὸ τετράπλευρον μὲ κορυφὰς τὰ ὀρθόκεντρα τῶν τεσσάρων τριγώνων τῶν ὁριζομένων ἀπὸ τὰς κορυφὰς Α, Β, Γ, Δ λαμβανομένας ἀνὰ τρεῖς εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς κέντρον.

292. Νὰ δειχθῇ ὅτι εἰς πᾶν ὀξυγώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ἡ περίμετρος τοῦ ὀρθικοῦ τριγώνου εἶναι μικροτέρα τοῦ διπλασίου οἱουδήποτε ὕψους τοῦ τρ.ΑΒΓ.

293. Μὲ κέντρα δύο δοθέντα σημεῖα νὰ γραφοῦν δύο ἴσοι κύκλοι, ὧν μία κοινὴ ἐφαπτομένη νὰ ἐφάπτεται δεδομένου κύκλου.

294. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν δεδομένων

$$\alpha,\ \beta-\gamma,\ \upsilon_\gamma$$

295. Ἔστω Ρ τυχὸν σημεῖον ἡμιπεριφερείας διαμέτρου ΑΒ καὶ $\widehat{B\Gamma}$, $\widehat{\Gamma\Delta}$ δύο ἴσα τόξα αὐτῆς. Ἐὰν αἱ ΓΑ καὶ ΡΒ τέμνωνται εἰς Ε καὶ αἱ ΑΔ, ΡΓ εἰς Ζ, νὰ δειχθῇ ὅτι $EZ \perp A\Delta$.

296. Εἰς τὰ ἄκρα Α, Β διαμέτρου κύκλου φέρομεν ὁμορρόπους ἡμιεφαπτομένας ΑΧ, ΒΨ. Λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Μ τῆς ἡμιπεριφερείας τῆς μεταξὺ τῶν ΑΧ, ΒΨ καὶ φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΜ, ΒΜ τεμνούσας ἀντιστοίχως τὰς ΒΨ, ΑΧ εἰς Γ καὶ Δ. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ εἰς Μ ἐφαπτομένη τῆς ἡμιπεριφερείας διέρχεται διὰ τῶν μέσων τῶν ΑΔ καὶ ΒΓ.

**Ἐφαρμογαὶ τῆς ἀσκήσεως 49.** Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων:

297. $\upsilon_\beta + \upsilon_\gamma,\ \widehat{B},\ \widehat{\Gamma}$.

298. $\upsilon_\beta + \upsilon_\gamma,\ \beta.\ \gamma$.

299. $\upsilon_\beta + \upsilon_\gamma,\ \beta,\ \widehat{A}$.

300. $\upsilon_\beta + \upsilon_\gamma,\ \beta+\gamma,\ \widehat{B}-\widehat{\Gamma}$.

301. $\upsilon_\beta + \upsilon_\gamma,\ \beta-\gamma,\ \widehat{A}$.

302. $\upsilon_\gamma - \upsilon_\beta,\ \widehat{B},\ \widehat{\Gamma}$.

303. $\upsilon_\gamma - \upsilon_\beta,\ \beta,\ \gamma$.

304. $\upsilon_\gamma - \upsilon_\beta,\ \beta-\gamma,\ \widehat{B}-\widehat{\Gamma}$.

305. $\upsilon_\gamma - \upsilon_\beta,\ \widehat{A},\ \beta+\gamma$.

306. $R,\ \beta-\gamma,\ \upsilon_\gamma - \upsilon_\beta$.

307. **Ἐφαρμογὴ τῆς ἀσκήσεως 148.** Νὰ κατασκευασθῇ τρ.ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων: i) $\alpha,\ R,\ \rho_\beta$. ii) $\upsilon_\alpha,\ \mu_\alpha,\ \rho_\alpha - \rho$. iii) $R,\ \alpha,\ \rho + \rho_\alpha$.

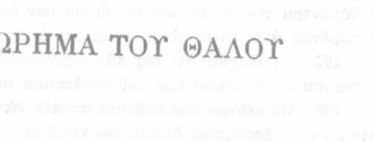
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

# ΜΕΤΡΟΝ ΤΜΗΜΑΤΟΣ - ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΘΑΛΟΥ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

## 34. Πολλαπλασιασμὸς εὐθυγράμμου τμήματος ἐπὶ θετικὸν ἀριθμόν.

**α') Πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ φυσικὸν ἀριθμόν.** Καλοῦμεν γινόμενον εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ ἐπὶ φυσικὸν ἀριθμὸν ν τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΓΔ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ἄθροισμα ν εὐθυγράμμων τμημάτων ἴσων πρὸς ΑΒ. Γράφομεν : ΓΔ = ν . ΑΒ.

**β') Διαίρεσις εὐθυγράμμου τμήματος διὰ φυσικοῦ ἀριθμοῦ.** Εἶναι γνωστὸν ὅτι δοθὲν εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ δύναται νὰ χωρισθῇ εἰς ν ἴσα μέρη (ν φυσικός) (σχ. 45). Ἕκαστον ἐκ τῶν ν τούτων ἴσων τμημάτων παρίσταται μὲ $\frac{AB}{\nu}$ ἢ $\frac{1}{\nu} \cdot AB$.



Σχ. 45

**γ') Πολλαπλασιασμὸς εὐθυγράμμου τμήματος ἐπὶ θετικὸν ῥητὸν ἀριθμὸν μ/ν.** Καλοῦμεν γινόμενον εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ ἐπὶ τὸν θετικὸν ῥητὸν ἀριθμὸν μ/ν τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΓΔ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ἄθροισμα μ εὐθυγράμμων τμημάτων ἴσων πρὸς $\frac{AB}{\nu}$. Γράφομεν:

$$\Gamma\Delta = \frac{\mu}{\nu} \cdot AB$$

δ΄) Ἐξ ὁρισμοῦ τὸ γινόμενον εὐθυγράμμου τμήματος ἐπὶ μηδὲν εἶναι τὸ μηδενικὸν εὐθύγραμμον τμῆμα. (Ὡς γνωστὸν εἰς τὸ σύνολον τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων περιλαμβάνομεν καὶ τὸ μηδενικὸν τμῆμα, τὸ ὁποῖον δὲν περιέχει ἐσωτερικὰ σημεῖα καὶ τοῦ ὁποίου τὰ δύο ἄκρα συμπίπτουν).

ε΄) Τὸ γινόμενον εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ ἐπὶ τυχόντα θετικὸν ἀριθμὸν $\lambda = \psi_0, \psi_1\psi_2\psi_3 \dots\dots$ ἀποδεικνύεται ὅτι ὑπάρχει καὶ εἶναι ἓν εὐθύγραμμον τμῆμα ΓΔ, τὸ ὁποῖον δημιουργεῖται ἀπὸ τὸ ΑΒ, καθ' ὃν τρόπον ὁ ἀριθμὸς λ ἐκ τῆς ἀκολουθίας $\psi_0$, $\psi_0,\psi_1$, $\psi_0,\psi_1\psi_2$, $\psi_0, \psi_1\psi_2\psi_3 \dots$ $\psi_0,\psi_1\psi_2\dots\psi_\nu,\dots$

**στ΄) Λόγος δύο εὐθυγράμμων τμημάτων.** Καλοῦμεν λόγον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ πρὸς τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΓΔ τὸν θετικὸν ἀριθμὸν λ, ἐπὶ τὸν ὁποῖον πολλαπλασιαζόμενον τὸ ΓΔ δίδει τὸ ΑΒ. Γράφομεν:

$$\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \lambda \iff AB = \lambda \,.\, \Gamma\Delta$$

Ἀποδεικνύεται ὅτι δοθέντων τῶν ΑΒ καὶ ΓΔ ὑπάρχει πάντοτε ὁ λόγος αὐτῶν λ, ἤτοι θετικὸς ἀριθμὸς λ τοιοῦτος, ὥστε $\lambda \,.\, \Gamma\Delta = AB$

**ζ΄) Μέτρον εὐθυγράμμου τμήματος.** Δοθέντος εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ καὶ ἑτέρου τμήματος $\Gamma\Delta = d_0$, καλοῦμεν **μέτρον τοῦ ΑΒ μετρηθέντος μὲ μονάδα τὸ $d_0$** τὸν λόγον τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ $d_0$. Τὸ μέτρον τοῦ ΑΒ, δηλ. ὁ λόγος $AB/d_0$, συμβολίζεται μὲ μ(ΑΒ) ἢ (ΑΒ) ἤ, ἐπὶ τὸ ἁπλούστερον (βλ. § **57**), ΑΒ.

η΄) Τοὺς ἀνωτέρω ἁπλοῦς ὁρισμούς, καθὼς καὶ τὸ πρῶτον μέρος τῆς § 46, παραθέτομεν χάριν διδακτικῆς σκοπιμότητος. Πληρεστέραν θεωρίαν τοῦ μέτρου ἑνὸς τμήματος, τοῦ λόγου δύο τμημάτων καὶ τοῦ γινομένου τμήματος ἐπὶ θετικὸν ἀριθμὸν δίδομεν κατωτέρω εἰς τὰς §§ 40 - 44.

**θ΄) Σύμμετρα εὐθύγραμμα τμήματα.** Ἔστωσαν τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ. Ἐὰν ὑπάρχῃ τρίτον εὐθύγραμμον τμῆμα $d_0$ τοιοῦτον, ὥστε $\frac{AB}{d_0} = \mu$ καὶ $\frac{\Gamma\Delta}{d_0} = \nu$, ὅπου μ καὶ ν **φυσικοὶ ἀριθμοί,** τότε τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ λέγονται σύμμετρα πρὸς ἄλληλα καὶ τὸ $d_0$ **κοινὸν μέτρον** αὐτῶν.

Προφανῶς εἶναι τότε $AB = \mu \,.\, d_0$ καὶ $d_0 = \frac{1}{\nu}\Gamma\Delta$. Ἑπομένως, $AB = \mu . \frac{1}{\nu}\Gamma\Delta = \frac{\mu}{\nu}\Gamma\Delta \Rightarrow \frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{\mu}{\nu}$. Ὁ λόγος λοιπὸν δύο συμμέτρων εὐθυγράμμων τμημάτων εἶναι σύμμετρος ἀριθμός.

**ι΄) Ἀσύμμετρα πρὸς ἄλληλα** λέγονται δύο εὐθύγραμμα τμήματα, ὅταν οὐδὲν κοινὸν μέτρον αὐτῶν ὑπάρχῃ. (Δηλ. **δὲν** ὑπάρχει εὐθύγραμμον τμῆμα, τὸ ὁποῖον ἐπαναλαμβανόμενον ἀκέραιον ἀριθμὸν φορῶν νὰ δίδῃ τὸ ἓν τμῆμα καὶ συγχρόνως ἐπαναλαμβανόμενον ἀκέραιον ἀριθμὸν φορῶν νὰ δίδῃ τὸ ἄλλο. Τὴν ὕπαρξιν ἀσυμμέτρων πρὸς ἄλληλα τμημάτων ἀνεκάλυψεν πρῶτος ὁ Πυθαγόρας ἀποδείξας ὅτι ἡ πλευρὰ καὶ ἡ διαγώνιος τετραγώνου εἶναι τμήματα ἀσύμμετρα πρὸς ἄλληλα).

## ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΕΠΙ ΤΩΝ ΟΡΙΩΝ

**34α. Ἀκολουθίαι.** — α΄) Ἔστω F ἓν σύνολον ἐκ στοιχείων οἱασδήποτε φύσεως. Καλεῖται ἀκολουθία ἐκ στοιχείων τοῦ F μία μονοσήμαντος ἀπεικόνισις τοῦ συνόλου $\Phi$ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν εἰς τὸ F.

Τὸ στοιχεῖον τοῦ F τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸν ἀριθμὸν 1 ἂς παρασταθῇ διὰ τοῦ $\alpha_1$. Τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸν 2 ἂς παρασταθῇ μὲ $\alpha_2$ καὶ γενικῶς τὸ στοιχεῖον τοῦ F τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸν φυσικὸν ἀριθμὸν ν ἂς παρασταθῇ μὲ $\alpha_\nu$. Ἔχομεν τότε τὴν ἀντιστοιχίαν (ἀπεικόνισιν):

$$(1)\qquad \left|\begin{array}{cccc} 1, & 2, & 3, \ldots & \nu \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \ldots & \alpha_\nu \ldots \end{array}\right|$$

Τὰ στοιχεῖα $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_\nu \ldots$ τοῦ F (δηλ. αἱ εἰκόνες τῶν 1, 2, 3, ... ν ...) λέγονται **ὅροι** τῆς ἀκολουθίας καὶ δὲν εἶναι ἀναγκαίως ὅλα διαφορετικὰ μεταξύ των.

Τὸ στοιχεῖον $\alpha_\nu$ λέγεται **νυοστὸς ὅρος** τῆς ἀκολουθίας ἢ **ὅρος μὲ δείκτην ν.**

Ἡ ἀκολουθία (1) παρίσταται συντόμως μέ:

$$(2)\qquad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_\nu \text{ ἢ μὲ } (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_\nu \ldots) \text{ ἢ ἁπλῶς } \{\alpha_\nu\}.$$

Ἡ ἀκολουθία $\{\alpha_\nu\}$ λέγεται καὶ *ἀπέραντος* ἀκολουθία, ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ὅτι *παντὸς ὅρου* ἕπονται πάντοτε καὶ ἄλλοι ὅροι, τὸ δὲ πλῆθος τῶν στοιχείων της εἶναι ἄπειρον.

**β΄) Ἀκολουθίαι ἀριθμῶν.** Ἐὰν τὸ F εἶναι ἓν ἀριθμοσύνολον, τότε κάθε ἀκολουθία ἐκ στοιχείων τοῦ F εἶναι μία ἀκολουθία ἀριθμῶν ἢ ἀριθμοακολουθία.

γ΄) Εἰς τὰ ἑπόμενα μὲ τὴν λέξιν «*ἀκολουθία*» θὰ ἐννοοῦμεν *ἀκολουθίαν πραγματικῶν ἀριθμῶν*, διότι μόνον τοιαύτας ἀκολουθίας θὰ χρησιμοποιήσωμεν.

δ΄) Ἡ ἀνωτέρω ἀντιστοιχία (1) δημιουργεῖ μίαν συνάρτησιν f(ν), τῆς ὁποίας ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ ν διατρέχει τὰς ἀκεραίας τιμὰς 1, 2, 3, ... ν, ... (δηλ. τὸ πεδίον ὁρισμοῦ εἶναι τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν), ἐνῷ αἱ τιμαὶ τῆς συναρτήσεως αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τὰς τιμὰς 1, 2, 3, ... ν, εἶναι οἱ ὅροι $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_\nu, \ldots$ τῆς ἀκολουθίας. Ἀντὶ δὲ νὰ γράφωμεν τοὺς ὅρους τῆς ἀκολουθίας (2) ὡς τιμὰς μιᾶς συναρτήσεως f(1), f(2), f(3), ..., f(ν), ... μεταχειριζόμεθα δείκτας $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu \ldots$

Οὕτω π.χ. ἡ ἀκολουθία:

(3) $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \frac{1}{\nu}, \dots$ ἢ συντόμως $\left\{\frac{1}{\nu}\right\}$

δημιουργεῖται, ὅταν εἰς τὴν θέσιν ἑκάστου φυσικοῦ ἀριθμοῦ γραφῇ ὁ ἀντίστροφός του. Οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας (3) εἶναι αἱ τιμαὶ τῆς συναρτήσεως $f(\nu) = \frac{1}{\nu}$ διὰ $\nu = 1, 2, 3, \dots \nu, \dots$ ἐπ' ἄπειρον.

Δὲν εἶναι ὅμως πάντοτε εὔκολον νὰ γνωρίζωμεν τὴν ἔκφρασιν τῆς συναρτήσεως $f(\nu)$, τῆς ὁποίας τιμαὶ εἶναι οἱ ὅροι ἀκολουθίας, οὔτε πάντοτε δυνατόν. Οὕτω π.χ., ἂν ὡς πρῶτος ὅρος μιᾶς ἀκολουθίας ληφθῇ ὁ 1, ὡς δεύτερος ὁ 1, ἕκαστος δὲ ἄλλος ληφθῇ ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο προηγουμένων του, ἡ ἀκολουθία εἶναι ἐντελῶς ὡρισμένη:

(5) $\alpha_1=1,\ \alpha_2=1,\ \alpha_3=2,\ \alpha_4=3,\ \alpha_5=5,\ \alpha_6=8,\ \alpha_7=13,\ \alpha_8=21 \dots,$

διότι κατὰ τὸν τρόπον αὐτὸν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν, ὅσους ὅρους θέλομεν, ἀλλ' ἡ ἔκφρασις τοῦ *νυοστοῦ ὅρου* δὲν εἶναι φανερά. (Δύναται ὅμως νὰ εὑρεθῇ ἡ μορφὴ τοῦ $\alpha_\nu$ διὰ καταλλήλου ἐρεύνης).

Ἡ (5) ὁρίζεται ἐκ τοῦ *νόμου*: $\boxed{\alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} + \alpha_{\nu-2}}$ (ἀναδρομικὴ σχέσις) καὶ τῶν *ἀρχικῶν συνθηκῶν*: $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1$.

Γενικῶς, ἂν δοθῇ εἷς νόμος, διὰ τοῦ ὁποίου ἕκαστος ὅρος τῆς ἀκολουθίας δημιουργεῖται ἐκ τῶν προηγουμένων του, δοθοῦν δὲ καὶ ὡρισμένοι πρῶτοι ὅροι αὐτῆς, τότε πάντες οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας εἶναι τελείως καθωρισμένοι ἀριθμοί, χωρὶς ἡ ἔκφρασις τοῦ νυοστοῦ ὅρου νὰ εἶναι ἐν γένει γνωστή.

ε΄) Ἐνίοτε ὁ δείκτης ν τοῦ $\alpha_\nu$ λαμβάνεται οὕτως, ὥστε νὰ διατρέχῃ τὰς τιμὰς 0, 1, 2, 3, ..., ὁπότε ἡ ἀκολουθία γράφεται $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_\nu, \dots$, ὁ δὲ $\alpha_{\nu-1}$ εἶναι τότε ὁ νυοστὸς ὅρος.

στ΄) **Φράγματα.** Ἐὰν ὑπάρχῃ σταθερὸς ἀριθμὸς k **μικρότερος ὅλων τῶν ὅρων** τῆς ἀκολουθίας, δηλ. ἂν ἡ ἀνισότης $k < \alpha_\nu$ πληροῦται δι' ὅλα τὰ ν ($\nu = 1, 2, 3, \dots$) τοῦ k μένοντος σταθεροῦ, τότε ὁ k λέγεται **κάτω φράγμα** τῆς ἀκολουθίας.

Ὁμοίως, ἂν ὑπάρχῃ σταθερὸς ἀριθμὸς **μεγαλύτερος ὅλων τῶν ὅρων** τῆς ἀκολουθίας, οὗτος λέγεται **ἄνω φράγμα** τῆς ἀκολουθίας.

Ἂν ὑπάρχῃ καὶ κάτω καὶ ἄνω φράγμα, ἡ ἀκολουθία λέγεται **φραγμένη.**

ζ΄) **Μονότονοι ἀκολουθίαι.**

i) Ἐὰν οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots, \alpha_\nu, \dots$ βαίνουν αὐξανόμενοι, δηλ. ἂν εἶναι $\alpha_\nu < \alpha_{\nu+1}$ δι' ὅλα τὰ ν ($\nu = 1, 2, \dots$), τότε ἡ ἀκολουθία λέγεται **αὔξουσα.**

ii) Ἐὰν οἱ ὅροι βαίνουν μὴ σταθερῶς αὐξανόμενοι, δηλ. ἂν εἶναι $\alpha_\nu \leqq \alpha_{\nu+1}$, ὅπου τὸ = δὲν ἰσχύει δι' ὅλα τὰ ν ἀπό τινος καὶ ἐφεξῆς, ἡ ἀκολουθία λέγεται **αὔξουσα ὑπὸ τὴν εὐρεῖαν ἔννοιαν** ἢ **μὴ φθίνουσα.** Εἰς τὴν μὴ φθίνουσαν ἀκολουθίαν ἕκαστος ὅρος εἶναι μικρότερος, ἂν ὄχι τοῦ ἀμέσως ἑπομένου του, πάντως **κάποιου ἐκ τῶν ἑπομένων του ὅρων.**

iii) Ἐὰν ἡ ἰσότης $\alpha_\nu = \alpha_{\nu+1}$ ἰσχύῃ ἀπό τινος τιμῆς τοῦ ν καὶ πέραν, ἡ ἀκολουθία ἂς λέγεται **τελικῶς σταθερά.**

iv) Ἐὰν οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας βαίνουν ἐλαττούμενοι, δηλ. ἂν εἶναι $\alpha_\nu > \alpha_{\nu+1}$ δι' ὅλα τὰ ν, ἡ ἀκολουθία λέγεται **φθίνουσα.**

v) Ἐὰν οἱ ὅροι βαίνουν μὴ σταθερῶς ἐλαττούμενοι, δηλ. εἶναι $\alpha_\nu \geqq \alpha_{\nu+1}$, ὅπου τὸ $=$ δὲν ἰσχύει δι' ὅλα τὰ ν ἀπό τινος καὶ ἐφεξῆς, ἡ ἀκολουθία λέγεται **φθίνουσα ὑπὸ τὴν εὐρεῖαν ἔννοιαν ἢ μὴ αὔξουσα.**

Πᾶσαι αἱ ἀνωτέρω ἀκολουθίαι λέγονται **μονότονοι.**

**35. Ἡ ἔννοια τοῦ ὁρίου ἀκολουθίας.—α') Ὅριον τὸ μηδέν.** Ἔστω ἡ ἀπέραντος ἀκολουθία:

$$\alpha_1 = \frac{1}{1},\ \alpha_2 = \frac{1}{2},\ \alpha_3 = \frac{1}{3}, \dots\ \alpha_\nu = \frac{1}{\nu}, \dots$$

Ταύτης οὐδεὶς ὅρος εἶναι μηδέν. Ὅσον ὅμως αὐξάνει τὸ ν, οἱ ὅροι της καθίστανται ὁλονὲν μικρότεροι, πλησιάζοντες ὁλονὲν καὶ περισσότερον πρὸς τὸ μηδέν. Συγκεκριμένως, ἂν δοθῇ ὁποιοσδήποτε θετικὸς ἀριθμὸς ε, ὁσονδήποτε μικρὸς καὶ ἂν εἶναι οὗτος, οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας εἶναι, ἀπὸ μιᾶς τάξεως (δείκτου) καὶ πέραν, μικρότεροι τοῦ ε. Πράγματι ἡ ἀνισότης $\alpha_\nu < \varepsilon$, ἤτοι $\frac{1}{\nu} < \varepsilon$, ἀληθεύει, ὅταν $\nu > \frac{1}{\varepsilon}$. Ἐπειδὴ δὲ ὁ ν δύναται νὰ ληφθῇ ἀρκετὰ μέγας, ὥστε νὰ ὑπερβαίνῃ τὸν δεδομένον ἀριθμὸν $1/\varepsilon$, διὰ τοῦτο ὑπάρχει ὅρος τῆς ἀκολουθίας μικρότερος τοῦ αὐθαιρέτως μικροῦ θετικοῦ ε **καὶ πάντες οἱ μετ' αὐτὸν ὅροι εἶναι ἐπίσης μικρότεροι τοῦ ε.** Τὴν ἀνωτέρω ἀκολουθίαν χαρακτηρίζομεν ὡς τείνουσαν πρὸς τὸ μηδὲν ἢ ἔχουσαν ὅριον μηδέν.

Ἔστω ἐπίσης ἡ ἀκολουθία:

$$\alpha_1 = \frac{-1}{1},\ \alpha_2 = \frac{1}{2},\ \alpha_3 = \frac{-1}{3}, \dots\ \alpha_\nu = \frac{(-1)^\nu}{\nu}, \dots$$

Δι' αὐτὴν ἰσχύει ὅ,τι καὶ μὲ τὴν προηγουμένην, δηλ. ὅσον αὐξάνει ὁ ν, οἱ ὅροι της πλησιάζουν ὁλονὲν καὶ στενώτερον πρὸς τὸ μηδέν, μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι ταλαντεύονται ἑκατέρωθεν τοῦ μηδενός. Συνεπῶς θὰ εἴπωμεν δι' αὐτὴν ὅτι ἔχει ὅριον τὸ μηδέν.

Γενικῶς **μία ἀκολουθία $\{\alpha_\nu\}$ λέγομεν ὅτι ἔχει ὅριον τὸ μηδὲν (ἢ τείνει πρὸς τὸ μηδέν), ὅταν δοθέντος οἱουδήποτε θετικοῦ ἀριθμοῦ ε** (*ὁσονδήποτε μικροῦ καὶ ἂν θέλῃ τις*) **οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας εἶναι κατ' ἀπόλυτον τιμὴν μικρότεροι τοῦ ε, ἀπὸ τινος ὅρου καὶ πέραν.** Δηλαδή: Ἐάν, δοθέντος τοῦ αὐθαιρέτως μικροῦ θετικοῦ ε, εὑρίσκεται πάντοτε εἷς δείκτης N τοιοῦτος, ὥστε δι' ὅλους τοὺς δείκτας $\nu \geqq N$ νὰ εἶναι $|\alpha_\nu| < \varepsilon$, τότε ἡ $\{\alpha_\nu\}$ ἔχει ὅριον τὸ μηδέν.

Γράφομεν τότε :

$$\boxed{\lim_{\nu\to\infty} \alpha_\nu = 0} \quad (\text{limes} = \text{ὅριον})$$

$$\text{ἢ} \quad \alpha_\nu \underset{\nu\infty}{\to} 0 \quad \text{ἢ} \quad \lim_{\nu=\infty} \alpha_\nu = 0$$

(Μὲ χρῆσιν τῶν παραδεδεγμένων συμβόλων δυνάμεθα νὰ γράψωμεν :

$$\lim_{\nu=\infty} \alpha_\nu = 0, \quad \text{ὅταν:}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N, \quad \forall \nu > N \Rightarrow |\alpha_\nu| < \varepsilon)$$

**Μηδενικὴ ἀκολουθία** λέγεται κάθε ἀκολουθία, ἡ ὁποία ἔχει ὅριον τὸ μηδέν.

β') *Θεώρημα.* Ἡ ἀκολουθία $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots \frac{1}{2^\nu}, \dots$ (συντόμως ἡ $\left\{\frac{1}{2^\nu}\right\}$) ἔχει ὅριον τὸ μηδέν. (Μηδενικὴ ἀκολουθία).

*Ἀπόδειξις.* Θὰ δείξωμεν πρῶτον ὅτι δοθέντος φυσικοῦ ἀριθμοῦ $\nu > 2$ ὑπάρχει δύναμις τοῦ 2, ἥτις τὸν ὑπερβαίνει. Τοῦτο φαίνεται ἐκ τῆς γνωστῆς ταυτότητος $(\chi^{\nu-1} - 1)/(\chi - 1) = \chi^{\nu-2} + \chi^{\nu-3} + \dots + \chi + 1$, ἥτις διὰ $\chi = 2$ δίδει:

$$\frac{2^{\nu-1} - 1}{2 - 1} = 2^{\nu-2} + 2^{\nu-3} + \dots + 2 + 1 > 1 + 1 \underbrace{+ 1 + \dots}_{\nu - 1 \text{ φορὰς}} + 1 + 1 \Rightarrow 2^{\nu-1} - 1 > \nu - 1 \Rightarrow 2^{\nu-1} > \nu.$$

Ἔστω τώρα ε τυχὼν θετικὸς (ὁσονδήποτε μικρός). Ἡ ἀνισότης $\frac{1}{2^\nu} < \varepsilon \Longleftrightarrow 2^\nu > \frac{1}{\varepsilon}$. Ἐπειδή, δοθέντος θετικοῦ, ὑπάρχει φυσικὸς ἀριθμός, ὅστις τὸν ὑπερβαίνει, διὰ τοῦτο ὑπάρχει φυσικὸς ἀριθμὸς N τοιοῦτος, ὥστε $N > 1/\varepsilon$. Ἀρκεῖ λοιπὸν ὁ ν νὰ ἐκλεγῇ ἔτσι, ὥστε $2^\nu > N$, ὁπότε θὰ εἶναι καὶ $2^\nu > 1/\varepsilon$. Ἀλλ' ἡ σχέσις $2^\nu > N$ ἰσχύει, ὡς ἐδείχθη ἀνωτέρω, ὅταν ὁ $\nu = N - 1$. Ἑπομένως καὶ ἡ ἀνισότης $2^\nu > \frac{1}{\varepsilon}$ ἰσχύει ἀπό τινος ἐκθέτου $N - 1$ καὶ ἐφεξῆς, ἄρα καὶ ἡ $\frac{1}{2^\nu} < \varepsilon$. Ἄρα ἡ $\left\{\frac{1}{2^\nu}\right\}$ εἶναι μηδενικὴ ἀκολουθία (βλ. ἐδάφ. α').

γ') **Ὅριον πεπερασμένον. — Δοθείσης τῆς ἀκολουθίας $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_\nu, \dots$ ἐὰν ὑπάρχῃ σταθερὸς ἀριθμὸς $l$ τοιοῦτος, ὥστε ἡ ἀκολουθία $\alpha_1 - l, \alpha_2 - l, \alpha_3 - l, \dots \alpha_\nu - l, \dots$ νὰ τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν, τότε λέγομεν ὅτι ἡ δοθεῖσα ἀκολουθία $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots \alpha_\nu, \dots$ ἔχει ὅριον τὸν σταθερὸν ἀριθμὸν $l$ (ἢ τείνει πρὸς τὸν $l$). Γράφομεν δὲ τότε :**

$$\lim_{\nu\to\infty} \alpha_\nu = l \quad \text{ἢ} \quad \alpha_\nu \underset{\nu\infty}{\to} l \quad \text{ἢ} \quad \lim_{\nu=\infty} \alpha_\nu = l$$

Μὲ ἄλλας λέξεις, ὅταν ἡ διαφορὰ $\alpha_\nu - l$ τείνῃ πρὸς τὸ μηδὲν διὰ $\nu = \infty$, τότε ἡ μεταβλητὴ $\alpha_\nu$ τείνει πρὸς τὴν σταθερὰν $l$ (ἔχει ὅριον τὴν $l$).

Οὕτω π.χ. ἡ ἀκολουθία $\left\{\frac{\nu+1}{\nu}\right\}$ τείνει πρὸς τὴν μονάδα, ὅταν $\nu \to \infty$, διότι ἡ διαφορὰ $\frac{\nu+1}{\nu} - 1 = \frac{1}{\nu}$ τείνει πρὸς τὸ μηδέν.

Δυνάμεθα νὰ γράψωμεν:

$$\lim_{\nu=\infty} \alpha_\nu = l \quad \text{ὅταν:}$$

$$\forall \varepsilon > o,\ \exists N,\ \forall \nu > N \Rightarrow |\alpha_\nu - l| < \varepsilon$$

**δ΄) Ἡ μοναδικότης τοῦ ὁρίου (Θ).—Ἐὰν ὑπάρχῃ τὸ $\lim\limits_{\nu\to\infty} \alpha_\nu$, τότε τοῦτο εἶναι μοναδικόν.**

Θὰ δείξωμεν δηλ ὅτι, ἂν (1) $\lim\limits_{\nu\to\infty} \alpha_\nu = l_1$ καὶ (2) $\lim\limits_{\nu\to\infty} \alpha_\nu = l_2$, τότε $l_1 = l_2$.

Πράγματι, λόγῳ τῆς (1), δοθέντος θετικοῦ $\varepsilon/2$ ὑπάρχει δείκτης $N_1$ τοιοῦτος, ὥστε:

(3) $$|\alpha_\nu - l_1| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ διὰ κάθε } \nu > N_1 \text{ (βλ. ἐδάφ. γ΄).}$$

Ἐπίσης, λόγῳ τῆς (2), ὑπάρχει δείκτης $N_2$ τοιοῦτος, ὥστε:

(4) $$|\alpha_\nu - l_2| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ διὰ κάθε } \nu > N_2$$

Ἐὰν N ὁ μεγαλύτερος (ἢ μὴ μικρότερος) τῶν $N_1$, $N_2$ (ἄλλως: $N = \max(N_1, N_2)$), τότε διὰ κάθε $\nu > N$ συναληθεύουν αἱ (3) καὶ (4) δηλ.

(5) $$|\alpha_\nu - l_1| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ καὶ } |\alpha_\nu - l_2| < \frac{\varepsilon}{2},\ \forall \nu > N.$$

Ἐκ τῶν (5) συνάγεται:

$$|l_1 - l_2| = |l_1 - \alpha_\nu + \alpha_\nu - l_2| = |\alpha_\nu - l_2 - (\alpha_\nu - l_1)|$$
$$\leqq |\alpha_\nu - l_2| + |\alpha_\nu - l_1| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{ δηλ. } |l_1 - l_2| < \varepsilon \text{ διὰ κάθε } \varepsilon > o.$$

Ἐπειδὴ μόνον τὸ μηδὲν εἶναι κατ᾽ ἀπόλυτον τιμὴν μικρότερον παντὸς θετικοῦ, θὰ εἶναι $|l_1 - l_2| = 0$ καὶ $l_1 = l_2$. (Ἐνταῦθα ἔγινε χρῆσις τοῦ θεωρήματος τῆς Ἀλγέβρας $|\chi - y| \leqq |\chi| + |y|$).

**ε΄) (Θ). Ἐὰν k πραγματικὸς $\neq 0$, τότε, ἂν $\lim\limits_{\nu\infty} \alpha_\nu = l$, θὰ εἶναι καὶ $\lim\limits_{\nu\infty}\{k\alpha_\nu\} = kl$.**

Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι ἡ ἀκολουθία $k\alpha_1 - kl, k\alpha_2 - kl, \ldots k\alpha_\nu - kl, \ldots$ εἶναι μηδενική. Ἤτοι δοθέντος $\varepsilon > o$, ἰσχύει ἀπὸ τινος $\nu$ καὶ πέραν, $|k\alpha_\nu - kl| < \varepsilon$. Τοῦτο ἰσοδυναμεῖ: $|k(\alpha_\nu - l)| < \varepsilon \Longleftrightarrow |k| \cdot |\alpha_\nu - l| < \varepsilon \Longleftrightarrow \alpha_\nu - l < \varepsilon/|k|$. Τὸ τελευταῖον τοῦτο συμβαίνει, ἀφοῦ ἡ ἀκολουθία $\{\alpha_\nu - l\}$ εἶναι μηδενικὴ (ἐδάφ. α΄)

## 36. Ἀξίωμα τοῦ Dedekind διὰ τοὺς πραγματικοὺς ἀριθμοὺς (ἀξίωμα τῆς συνεχείας).

**Ἐὰν πάντες οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ χωρισθοῦν εἰς δύο μὴ κενὰς κλάσεις οὕτως, ὥστε**

**1) Ἕκαστος ἀριθμὸς νὰ ἀνήκῃ εἰς μίαν καὶ μόνον μίαν ἐκ τῶν δύο κλάσεων.**

**2) Πᾶς ἀριθμὸς τῆς πρώτης κλάσεως νὰ εἶναι μικρότερος παντὸς ἀριθμοῦ τῆς δευτέρας**

**τότε ἢ ὑπάρχει εἰς τὴν πρώτην κλάσιν εἷς ἀριθμὸς μεγαλύτερος ὅλων τῶν ἄλλων ἀριθμῶν τῆς πρώτης κλάσεως ἢ ὑπάρχει εἰς τὴν δευτέραν κλάσιν εἷς ἀριθμὸς μικρότερος ὅλων τῶν ὑπολοίπων ἀριθμῶν τῆς δευτέρας κλάσεως.**

**Ὁ ἀριθμὸς οὗτος καλεῖται τομὴ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν κατὰ Dedekind.**

## 37. Ὅριον μονοτόνου ἀκολουθίας

**α΄) Θεώρημα. «Ἐὰν μία ἀκολουθία εἶναι αὔξουσα καὶ ἔχῃ ἄνω φράγμα τὸ c (§ 34, στ΄), τότε ἡ ἀκολουθία αὐτὴ τείνει πρὸς ἓν ὅριον, τὸ ὁποῖον εἶναι μικρότερον ἢ ἴσον τοῦ c. Ἐὰν μία ἀκολουθία εἶναι φθίνουσα καὶ ἔχῃ κάτω φράγμα k, τότε ἡ ἀκολουθία αὕτη τείνει πρὸς ἓν ὅριον μεγαλύτερον ἢ ἴσον τοῦ k».**

*Ἀπόδειξις.* Ἔστω αὔξουσα καὶ φραγμένη ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν.

$$\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3<\dots\alpha_{\nu-1}<\alpha_\nu<\alpha_{\nu+1}<\dots=\{\alpha_\nu\}.$$

Δι' αὐτῆς πάντες οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ χωρίζονται εἰς δύο κλάσεις A καὶ B ὡς ἑξῆς:

Εἰς τὴν κλάσιν A ἀνήκει κάθε ἀριθμός, ὅστις εἶναι μικρότερος ἑνὸς οἱουδήποτε ὅρου τῆς $\{\alpha_\nu\}$. Εἰς τὴν B ἀνήκει κάθε ἀριθμός, ὅστις εἶναι μεγαλύτερος ὅλων τῶν ὅρων τῆς $\{\alpha_\nu\}$. Οὐδεμία τῶν δύο κλάσεων εἶναι κενή, διότι ἡ A περιέχει π.χ. ὅλους τοὺς ὅρους τῆς αὐξούσης ἀκολουθίας $\{\alpha_\nu\}$, ἡ δὲ B περιέχει τὸ ἄνω φράγμα καὶ πάντας τοὺς μεγαλυτέρους αὐτοῦ. Κάθε δὲ πραγματικὸς ἀριθμὸς x ἀνήκει ἢ εἰς τὴν A ἢ εἰς τὴν B κλάσιν. Διότι ἡ ἀνισότης $x<\alpha_\nu$ ἢ ἀληθεύει διά τινα τιμὴν τοῦ ν, ὁπότε $x\in A$ ἢ δι' **οὐδεμίαν** τιμὴν τοῦ ν ἀληθεύει. Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν ὁ x δὲν εἶναι μικρότερος κανενὸς ὅρου τῆς ἀκολουθίας, ἀλλὰ οὔτε καὶ ἴσος, διότι τότε θὰ ἦτο μικρότερος τοῦ ἑπομένου ὅρου. Ἄρα ὁ x εἶναι μεγαλύτερος ὅλων τῶν ὅρων τῆς ἀκολουθίας καὶ ἀνήκει εἰς τὴν κλάσιν B.

Τέλος κάθε ἀριθμὸς α τῆς κλάσεως A εἶναι μικρότερος παντὸς ἀριθμοῦ α΄ τῆς κλάσεως B. Διότι διὰ τὸν α ἰσχύει: $\alpha<\alpha_\nu$, ἐνῷ διὰ τὸν α΄ ἰσχύει $\alpha'>\alpha_\nu$.

Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι δὲν ὑπάρχει εἰς τὴν πρώτην κλάσιν A ἀριθμὸς μεγαλύτερος ὅλων τῶν ἀριθμῶν τῆς A. Διότι, ἂν $x\in A$, τότε ὑπάρχει ὅρος $\alpha_\nu$ τῆς ἀκολουθίας τοιοῦτος, ὥστε $x<\alpha_\nu$. Ἐπειδὴ ὅμως $\alpha_\nu<\alpha_{\nu+1}\Rightarrow\alpha_\nu\in A$. Δηλ., ἂν $x\in A$, ὑπάρχει πάντοτε εἷς μεγαλύτερος του ($\delta\ \alpha_\nu$) ἀνήκων πάλιν εἰς τὴν A.

Ἑπομένως κατὰ τὸ ἀξίωμα τοῦ Dedekind (§ 36) ὑπάρχει εἷς ἀριθμὸς τῆς κλάσεως B μικρότερος ὅλων τῶν ἄλλων ἀριθμῶν τῆς κλάσεως B. Ἔστω οὗτος ὁ $l$. Ὁ $l$, ὡς εἴπομεν, εἶναι μεγαλύτερος ὅλων τῶν ὅρων τῆς $\{\alpha_\nu\}$. Δοθέντος τώρα θετικοῦ ἀριθμοῦ ε ὁσονδήποτε μικροῦ, ὁ ἀριθμὸς $l-\varepsilon$ ἀνήκει εἰς τὴν κλάσιν Α, ἄρα ὑπάρχει δείκτης ν, δι' ὃν $l-\varepsilon<\alpha_\nu<l$ (1). Ἡ (1) ἰσχύει καὶ ὅταν ἀντὶ ν τεθῇ $\nu+1$, $\nu+2$,... Ἡ (1) συνεπάγεται $0<l-\alpha_\nu<\varepsilon$. Ἡ τελευταία διπλῆ ἀνισότης ἰσχύει διὰ ν, $\nu+1$, $\nu+2$...ἐπ' ἄπειρον καὶ δεικνύει ὅτι $\underset{\nu\to\infty}{\text{ορ}}\ \alpha_\nu=l$. (§ 35, β΄).

Ἐντελῶς ὁμοίως δεικνύεται ὅτι καὶ πᾶσα φθίνουσα ἀκολουθία ἔχουσα κάτω φράγμα τείνει πρὸς ὅριον μεγαλύτερον ἢ ἴσον τοῦ κάτω φράγματος.

**β΄) (Θ). Ἐὰν μία ἀκολουθία $\{\alpha_\nu\}$ εἶναι αὔξουσα ὑπὸ τὴν εὐρεῖαν ἔννοιαν (μὴ φθίνουσα, § 34, ζ΄) καὶ ἔχῃ ἄνω φράγμα τὸ c, τότε ἡ $\{\alpha_\nu\}$ τείνει πρὸς ἓν ὅριον, τὸ ὁποῖον εἶναι μικρότερον ἢ ἴσον τοῦ c. Ἐὰν μία ἀκολουθία $\{\alpha_\nu\}$ εἶναι φθίνουσα ὑπὸ τὴν εὐρεῖαν ἔννοιαν (μὴ αὔξουσα) καὶ ἔχῃ κάτω φράγμα k, τότε ἡ $\{\alpha_\nu\}$ τείνει πρὸς ὅριον μεγαλύτερον ἢ ἴσον τοῦ k.**

Διότι ἡ ἀπόδειξις τοῦ προηγουμένου θεωρήματος ἐφαρμόζεται καὶ πάλιν.

γ΄) Ἐὰν μία ἀκολουθία εἶναι τελικῶς σταθερὰ (§34, ζ΄), ἔστω ἡ $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, ...c, c, c... (ἐπ' ἄπειρον), τότε ἔχει προφανῶς ὅριον τὸ c.

**38. Θεώρημα τοῦ ἐγκιβωτισμοῦ.** α΄) Οἱ ὑπολογισμοὶ μηκῶν, ἐμβαδῶν καὶ ὄγκων εἰς τὴν στοιχειώδη γεωμετρίαν, καθὼς καὶ ἀποδείξεις θεμελιωδῶν θεωρημάτων βασίζονται ἐπὶ ἑνὸς Ἀλγεβρικοῦ θεωρήματος, τὸ ὁποῖον καλεῖται «*Θεώρημα τοῦ ἐγκιβωτισμοῦ*». Τὸ περιεχόμενον τοῦ θεωρήματος τούτου ἔχει ὡς ἑξῆς:

**Ὁρισμός. Μία αὔξουσα ἀκολουθία $\{x_\nu\}$ θετικῶν ἀριθμῶν καὶ μία φθίνουσα ἀκολουθία $\{y_\nu\}$ λέγομεν ὅτι ἀποτελοῦν ἕνα ἐγκιβωτισμόν, ὅταν πληροῦνται αἱ κάτωθι δύο συνθῆκαι:**

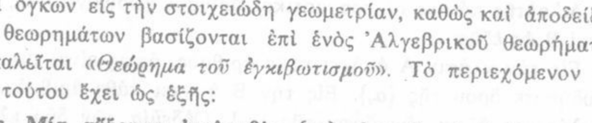
**1ον) Διὰ κάθε $\nu\in\Phi$, ἰσχύει $x_\nu<y_\nu$.**

**2ον) Δοθέντος οἱουδήποτε θετικοῦ ἀριθμοῦ ε (ὁσονδήποτε μικροῦ) ἡ διαφορὰ $y_\nu-x_\nu$ εἶναι $<\varepsilon$ ἀπό τινος τιμῆς τοῦ ν καὶ πέραν.**

**Ὁ ἐγκιβωτισμὸς παρίσταται μὲ $(x_\nu\,|\,y_\nu)$.**

**Θεώρημα.— Κάθε ἐγκιβωτισμὸς $(x_\nu\,|\,y_\nu)$ ὁρίζει μονοσημάντως ἕνα πραγματικὸν ἀριθμὸν α, ὅστις εἶναι τὸ κοινὸν ὅριον, πρὸς τὸ ὁποῖον τείνουν ἀμφότεραι αἱ ἀκολουθίαι $\{x_\nu\}$ καὶ $\{y_\nu\}$.**

Σχηματικῶς:




Δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι κάθε ὅρος τῆς $\{x_\nu\}$ εἶναι μία *κατ' ἔλλειψιν προσέγγισις* τοῦ ἀριθμοῦ τούτου α καὶ κάθε ὅρος τῆς $\{y_\nu\}$ εἶναι μία *καθ'* *ὑπεροχὴν προσέγγισις τοῦ α.* Γενικῶς ὁ α εἶναι ὁ μόνος ἀριθμός, ὅστις εἶναι μεγαλύτερος ὅλων τῶν $x_\nu$ καὶ μικρότερος ὅλων τῶν $y_\nu$.

*Ἀπόδειξις.* i) Ἂν θεωρήσωμεν τὴν ἀκολουθίαν μὲ θετικοὺς ὅρους: $y_1 - x_1, y_2 - x_2, \ldots y_\nu - x_\nu, \ldots$, βλέπομεν, λόγῳ τῆς 2ας ὑποθέσεως, ὅτι ἡ ἀκολουθία αὐτὴ ἔχει ὅριον τὸ μηδὲν (§ 35,α΄), ὥστε:

(1) $$\lim_{\nu\infty} (y_\nu - x_\nu) = 0.$$

ii) Ἡ αὔξουσα ἀκολουθία $\{x_\nu\}$ ἔχει ἄνω φράγμα τὸν τυχόντα ὅρον τῆς $\{y_\nu\}$ λόγῳ τῆς 1ης ὑποθέσεως, ἐπομένως τείνει πρὸς κάποιο ὅριον, ἔστω τὸ α΄, μεγαλύτερον ὅλων τῶν ὅρων της (§ 37, α΄). Ὥστε δοθέντος τυχόντος θετικοῦ ε ὁσονδήποτε μικροῦ ἰσχύει ἀπὸ τινος δείκτου $\nu_1$ καὶ πέραν:

(2) $$0 < \alpha' - x_{\nu_1} < \varepsilon/2.$$

iii) Ἡ φθίνουσα ἀκολουθία $\{y_\nu\}$ ἔχουσα ὡς κάτω φράγμα οἱονδήποτε ὅρον τῆς $\{x_\nu\}$ (προϋπόθεσις 1η) τείνει πρὸς ἓν ὅριον α΄΄ (§, 37α΄) προφανῶς μικρότερον ὅλων τῶν ὅρων της. Ἐπομένως ἀπὸ τινος δείκτου $\nu_2$ καὶ πέραν:

(3) $$0 < y_{\nu_2} - \alpha'' < \varepsilon/2.$$

Ἐὰν ν ὁ μεγαλύτερος ἐκ τῶν $\nu_1$ καὶ $\nu_2$ (ἢ μὴ μικρότερος τούτων), τότε αἱ (2) καὶ (3) δίδουν ἀπὸ τοῦ ν καὶ πέραν

(4) $$0 < \alpha' - x_\nu < \varepsilon/2$$

(5) $$0 < y_\nu - \alpha'' < \varepsilon/2.$$

Διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη τῶν (4) καὶ (5) λαμβάνομεν $0 < y_\nu - x_\nu - (\alpha'' - \alpha') < \varepsilon$, τὸ ὁποῖον σημαίνει:

(6) $$\lim_{\nu\infty} (y_\nu - x_\nu) = \alpha'' - \alpha' \quad (§\ 35, \beta').$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (6) $\Rightarrow \alpha'' - \alpha' = 0 \Longleftrightarrow \alpha' = \alpha''$. (§ 35,δ΄). Ἄρα ἡ $\{x_\nu\}$ καὶ $\{y_\nu\}$ τείνουν πρὸς κοινὸν ὅριον.

**β΄) Ὁ ἐγκιβωτισμὸς $(x_\nu|y_\nu)$ ὑπάρχει καὶ ὁρίζεται ὁμοίως καὶ εἰς τὴν γενικωτέραν περίπτωσιν, καθ' ἣν ἡ ἀκολουθία $\{x_\nu\}$ εἶναι μὴ φθίνουσα (ἀντὶ αὔξουσα), δηλ. $x_\nu \leqq x_{\nu+1}$ ἢ ἡ ἀκολουθία $\{y_\nu\}$ εἶναι μὴ αὔξουσα (ἀντὶ φθίνουσα), δηλ. $y_\nu \geqq y_{\nu+1}$ ἢ ὅταν συμβαίνουν ἀμφότερα.**

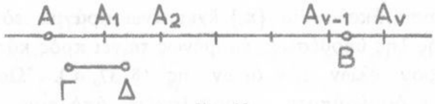
Ἡ προηγουμένη ἀπόδειξις ἰσχύει καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην.

## ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ

**39.** α΄) Ἡ δυνατότης τῆς μετρήσεως τῶν τμημάτων βασίζεται ἐπὶ τοῦ κατωτέρω διδομένου ἀξιώματος, τὸ ὁποῖον διετυπώθη ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους καὶ ὡς ἐκ τούτου καλεῖται *ἀξίωμα τοῦ Ἀρχιμήδους.*

Τὸ ἀξίωμα τοῦτο ἐπιτρέπει, ὅπως δοθέντος ἑνὸς τμήματος - μονάδος νὰ ἀντιστοιχίζωμεν μονοτρόπως, εἰς ἕκαστον τμῆμα, ἕνα θετικὸν ἀριθμόν, ὅστις καὶ **μέτρον** τοῦ τμήματος καλεῖται.

**Ἀξίωμα τοῦ Ἀρχιμήδους. — «Ὑπάρχει πάντοτε φυσικὸς ἀριθμὸς ν τοιοῦτος, ὥστε ἓν δεδομένον τμῆμα ΓΔ ἐπαναλαμβανόμενον ν φορὰς ὑπερβαίνει ὁποιονδήποτε δεδομένον τμῆμα ΑΒ».**




Σχ. 45α

Ἡ ἔννοια τοῦ ἀξιώματος καταφαίνεται εἰς τὸ σχ. 45α.

**β') Λῆμμα. Ἔστωσαν ΓΔ καὶ ΑΒ δύο οἱαδήποτε τμήματα. Τότε δυνάμεθα πάντοτε νὰ ἐκλέξωμεν ἕνα ἀρκετὰ μεγάλον φυσικὸν ἀριθμὸν ν οὕτως, ὥστε, ἐὰν χωρίσωμεν τὸ ΓΔ εἰς $2^\nu$ ἴσα τμήματα, ἕκαστον τούτων νὰ εἶναι μικρότερον τοῦ ΑΒ.**

*Ἀπόδειξις.* Ἕκαστον τμῆμα δύναται νὰ διχοτομηθῇ καὶ συνεπῶς ἐπαναλαμβανομένης τῆς διχοτομήσεως νὰ χωρισθῇ εἰς $2, 2^2, 2^3,...2^\nu,...$ἴσα μέρη. Ἂς παραστήσωμεν διὰ τοῦ $ΓΔ/2^\nu$ ἓν ἐκ τῶν προκυπτόντων τμημάτων, ὅταν τὸ ΓΔ διαιρεθῇ εἰς $2^\nu$ ἴσα μέρη.

Ἐὰν **διὰ κάθε ν** τὸ τμῆμα $ΓΔ/2^\nu$ ἦτο μεγαλύτερον ἢ ἴσον τοῦ ΑΒ, τότε τὸ ΑΒ θὰ ἦτο μικρότερον ἢ ἴσον τοῦ $ΓΔ/2^\nu$ (διὰ κάθε ν). Ἐκ τούτου συνάγεται (διὰ προσθέσεως $2^\nu$ ἀνισοτήτων $ΑΒ \leq ΓΔ/2^\nu$, $ΑΒ \leq ΓΔ/2^\nu$...κατὰ μέλη) ὅτι τὸ ΑΒ ἐπαναλαμβανόμενον $2^\nu$ φορὰς δὲν ὑπερβαίνει τὸ ΓΔ. Δηλαδὴ τὸ ΑΒ ἐπαναλαμβανόμενον ἀπεριόριστον ἀριθμὸν φορῶν οὐδέποτε ὑπερβαίνει τὸ ΓΔ. Τοῦτο ὅμως ἀντίκειται εἰς τὸ Ἀρχιμήδειον ἀξίωμα.

**Παρατήρησις.** Ἀνωτέρω ἐδείχθη ὅτι: **δὲν ὑπάρχει τμῆμα μικρότερον πάντων τῶν τμημάτων $ΓΔ/2^\nu$, ὅπου τὸ ν αὐξάνεται ἀπεριορίστως.**

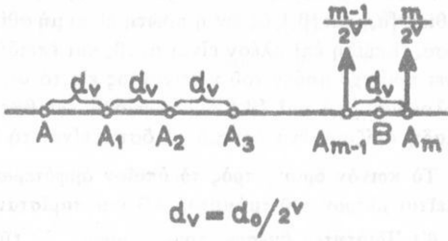
**40. Μέτρον ἑνὸς τμήματος.** α') Δίδεται ἓν τμῆμα $d_0$, τὸ ὁποῖον θὰ καλοῦμεν *μονάδα μετρήσεως τῶν μηκῶν* ἢ *μοναδιαῖον τμῆμα.* Τότε εἰς κάθε τμῆμα τ ἀντιστοιχεῖ εἰς ἀριθμὸς προκύπτων κατὰ ἕνα ὡρισμένον τρόπον καὶ ὅστις καλεῖται μέτρον τοῦ τμήματος τ (ἢ ἐξαγόμενον τῆς μετρήσεως τοῦ τμήματος τ, μετρηθέντος μὲ μονάδα τὸ $d_0$). Τὸ μέτρον τοῦ τμήματος τ θὰ παρίσταται μὲ $\boxed{\mu(\tau)}$ (τοῦ δὲ τμήματος ΑΒ μὲ μ(ΑΒ)).

Ὁ πρὸς τὸ τ ἀντιστοιχῶν ἀριθμός, μ(τ) ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:

Ὑποδιαιροῦντες τὸ μοναδιαῖον τμῆμα $d_0$ εἰς $2^\nu$ ἴσα μέρη (ν, ἐπαρκῶς μέγας) κατασκευάζομεν ἓν τμῆμα $\boxed{d_\nu = d_0/2^\nu}$ μικρότερον τοῦ μετρητέου τμήματος τ = ΑΒ (βλ. 39 β').

Ἀκολούθως κατὰ τὴν κατεύθυνσιν ἐκ τοῦ A πρὸς τὸ B κατασκευάζομεν μίαν ἀκολουθίαν σημείων $A, A_1, A_2 \ldots$ κατὰ τὴν διάταξιν: $A, A_1, A_2, A_3 \ldots$, τοιούτων, ὥστε $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots = A_{k-1}A_k = \ldots = d_\nu$ (σχ. 46).

Ἔστω $A_m$ τὸ πρῶτον σημεῖον τῆς ἀκολουθίας ταύτης, τὸ ὁποῖον δὲν ἀνήκει εἰς τὸ τμῆμα (πρῶτον ἐξωτερικὸν σημεῖον ἀντίστοιχον πρὸς τὸ $d_\nu$). Ἡ ὕπαρξις τοῦ σημείου τούτου ἐξασφαλίζεται ἀπὸ τὸ ἀξίωμα τοῦ Ἀρχιμήδους. Τότε προφανῶς τὸ σημεῖον $A_{m-1}$ θὰ ἀνήκῃ εἰς τὸ τμῆμα AB (τελευταῖον, ἐσωτερικὸν σημεῖον τῆς ὑποδιαιρέσεως εἰς τμήματα $d_\nu$). Τὸ τμῆμα $AA_m$ περιέχει m τμήματα $d_\nu$ καὶ εἶναι AB $\leqq$ (τὸ $A_m$ δυνατὸν νὰ συμπίπτῃ καὶ μὲ τὸ B, τὸ ὁποῖον θεωροῦμεν ὡς μὴ ἀνῆκον εἰς τὸ τμῆμα AB), ἐνῷ τὸ τμῆμα $AA_{m-1}$ περιέχει m-1 τμήματα $d_\nu$ καὶ εἶναι μικρότερον τοῦ AB (τὸ πλῆθος m ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ν). Δυνάμεθα συμβατικῶς νὰ γράψωμεν $AA_m = m \cdot d_\nu$, $AA_{m-1} = (m-1) \cdot d_\nu$, ὁπότε αἱ σχέσεις $AA_{m-1} < AB \leqq AA_m$ γράφονται $(m-1) \cdot d_\nu < AB \leqq m \cdot d_\nu$ ἢ καὶ




Σχ. 46

$$(1) \qquad (m-1) \cdot \frac{d_0}{2^\nu} < AB \leqq m \cdot \frac{d_0}{2^\nu} \quad (d_0 \text{ ἡ μονάς}).$$

Θεωροῦμεν τώρα τοὺς ἀριθμοὺς

$$(2) \qquad \alpha_\nu = \frac{m-1}{2^\nu} \text{ καὶ } \beta_\nu = \frac{m}{2^\nu},$$

οἱ ὁποῖοι, δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν, μετροῦν τὸ τμῆμα AB κατὰ προσέγγισιν $1/2^\nu$ καὶ δὴ ὁ πρῶτος κατ' ἔλλειψιν καὶ ὁ δεύτερος καθ' ὑπεροχήν.

Ἐκ τοῦ τρόπου, καθ' ὃν κατασκευάζονται, δι' ἕκαστον ν, τὰ σημεῖα $A_{m-1}$ καὶ $A_m$ γίνεται φανερὸν ὅτι αὐξάνοντος τοῦ ν ὁ (ἀντίστοιχος πρὸς τὸ $A_{m-1}$) ἀριθμὸς $\alpha_\nu$ δὲν ἐλαττοῦται, ἐνῷ ὁ $\beta_\nu$ δὲν αὐξάνει. Διότι, ὅταν ἀπὸ τὸ ν μεταβῶμεν εἰς τὸ $\nu + 1$, ἤτοι ἀντὶ τῶν τμημάτων $d_\nu = d_0/2^\nu$ χρησιμοποιήσωμεν τὰ $d_{\nu+1} = d_0/2^{\nu+1}$, τὰ τμήματα $AA_1, A_1A_2, \ldots A_{m-1}A_m$ διχοτομοῦνται. Ἐὰν τὸ μέσον M τοῦ $A_{m-1}A_m$ ἀνήκῃ εἰς τὸ τμῆμα AB, τότε τὸ τελευταῖον ἐσωτερικὸν σημεῖον $A_{m-1}$ μεταβαίνει εἰς τὸ M καὶ ὁ ἀντίστοιχος ἀριθμὸς $\alpha_{\nu+1}$ εἶναι, τώρα, ηὐξημένος κατὰ $1/2^{\nu+1}$, ἐνῷ τὸ πρῶτον ἐξωτερικὸν σημεῖον $A_m$ παραμένει, ἄρα $\beta_{\nu+1} = \beta_\nu$. Ἐὰν πάλιν τὸ M δὲν ἀνήκῃ εἰς τὸ τμῆμα AB, τότε τὸ $A_m$ μεταβαίνει εἰς τὸ M, ὁπότε ὁ ἀντίστοιχος ἀριθμὸς

$\beta_{\nu+1}$ εἶναι, τώρα, ἠλαττωμένος κατὰ $1/2^{\nu+1}$, ἐνῷ $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu$, διότι τὸ τελευταῖον ἐσωτερικὸν σημεῖον παραμένει.

Νοοῦντες, τώρα, τὸ ν αὐξάνον ἀπεριορίστως δημιουργοῦμεν δύο ἀκολουθίας $\{\alpha_\nu\}$ καὶ $\{\beta_\nu\}$, ἐξ ὧν ἡ πρώτη εἶναι μὴ φθίνουσα καὶ ἡ δευτέρα μὴ αὔξουσα. Ἐπειδὴ ἐπὶ πλέον εἶναι $\alpha_\nu < \beta_\nu$ καὶ ἐπειδὴ ἡ διαφορὰ $\beta_\nu - \alpha_\nu = 1/2^\nu$ τείνει πρὸς τὸ μηδὲν τοῦ ν τείνοντος εἰς τὸ ∞, (§ 35 β΄), ἕπεται ὅτι αἱ δύο ἀκολουθίαι $\{\alpha_\nu\}$ καὶ $\{\beta_\nu\}$ δημιουργοῦν ἐγκιβωτισμὸν $(\alpha_\nu | \beta_\nu)$ (βλ. §38, β΄), δηλαδὴ ὁρίζουν ἕνα ἀριθμὸν $l$, ὅστις εἶναι τὸ κοινὸν ὅριον αὐτῶν.

**Τὸ κοινὸν ὅριον, πρὸς τὸ ὁποῖον ἀμφότεραι αἱ ἀκολουθίαι (2) τείνουν, καλεῖται *μέτρον* τοῦ τμήματος ΑΒ καὶ παρίσταται μὲ μ(ΑΒ) ἢ μ(τ).**

**β΄) Ἰδιότητες ἀμέσως προκύπτουσαι** ἐκ τῆς ἀνωτέρω κατασκευῆς τοῦ μέτρου ἑνὸς τμήματος τ εἶναι αἱ κάτωθι:

i) Ἐὰν $\tau = \tau'$, τότε $\mu(\tau) = \mu(\tau')$.

ii) Ἐὰν $\tau = m d_\nu$, τότε $\mu(\tau) = m/2^\nu$ $(m \in \Phi)$.

iii) Εἶναι: $\mu(d_0) = 1$.

Ἡ ἰδιότης i) εἶναι ἀμέσως φανερά, καθ᾽ ὅσον αἱ ἀνωτέρω ἀριθμοακολουθίαι $\{\alpha_\nu\}$ καὶ $\{\beta_\nu\}$ αἱ καθορίζουσαι τὸ μέτρον προφανῶς συμπίπτουν διὰ τὰ ἴσα τμήματα.

Πρὸς ἀπόδειξιν τῆς ii) παρατηροῦμεν ὅτι διὰ τμῆμα $AB = \tau = m.d_\nu$ ἀποτελούμενον ἀπὸ m ἴσα πρὸς $d_\nu$ τμήματα τὸ σημεῖον $A_m$ (σχ. 46) συμπίπτει μὲ τὸ Β καὶ συνεπῶς, τοῦ ν αὐξάνοντος ἐπ᾽ ἄπειρον, θὰ ἔχωμεν πάντοτε τὸ ἴδιον $A_m \equiv B$ καὶ οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας $\{\beta_\nu\}$ θὰ διατηροῦν τὴν ἰδίαν τιμὴν $m/2^\nu$ ἀπὸ τῆς τιμῆς ν καὶ ἐφεξῆς. Ἑπομένως τὸ ὅριον τῆς ἀκολουθίας $\{\beta_\nu\}$ (δηλ. τὸ μέτρον) θὰ εἶναι ὁ ἀριθμὸς $m/2^\nu$ (§ 37, γ΄).

Τέλος ἡ ἰδιότης iii) εἶναι συνέπεια τῆς ii), διότι $d_0 = 2^\nu . d_\nu$, ἄρα κατὰ τὴν ii) $\mu(d_0) = 2^\nu \frac{1}{2^\nu} = 1$.

## 41. Θεωρήματα ἐπὶ τοῦ μέτρου τῶν τμημάτων

**I. Τὸ μικρότερον τμῆμα ἔχει καὶ μικρότερον μέτρον, ἤτοι $\tau < \tau' \Rightarrow \mu(\tau) < \mu(\tau')$.**

**II. Ἐὰν τ καὶ τ΄ παριστοῦν δύο τμήματα, τότε**

$$\mu(\tau + \tau') = \mu(\tau) + \mu(\tau')$$

(Τὸ μέτρον τοῦ ἀθροίσματος ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μέτρων τῶν προσθετέων. Τὸ θεώρημα ἰσχύει δι᾽ ὁσουσδήποτε προσθετέους, λόγῳ τῆς προσεταιριστικότητος τοῦ ἀθροίσματος).

**III. Δοθείσης τῆς μονάδος $d_0$ μετρήσεως τῶν μηκῶν, τότε δοθέντος ἑνὸς θετικοῦ ἀριθμοῦ α ὑπάρχει ἓν τμῆμα τ ἔχον μέτρον ἴσον πρὸς α.**

Τὰ ἀνωτέρω θεωρήματα εἶναι διαισθητικῶς λίαν εὐνόητα. Ἐν τούτοις αἱ ἀποδείξεις αὐτῶν εἶναι μακραὶ καὶ δυσχερεῖς. Διὰ τοῦτο κρίνομεν ὡς ἀσύμφορον τὴν πραγμάτευσιν τῶν ἀποδείξεων τῶν θεωρημάτων τούτων, ἡ ὁποία θὰ κατηνάλωνε πολὺν χρόνον εἰς τὸν διδάσκοντα καὶ τοὺς μαθητάς.

**Πορίσματα τοῦ Θεωρήματος I.**

**Πόρισμα 1ον. Τὸ μέτρον παντὸς τμήματος εἶναι θετικὸς ἀριθμός.**

Διότι δοθέντος τοῦ τμήματος τ καὶ τῆς μονάδος $d_0$ δυνάμεθα, ὑποδιαιροῦντες τὴν $d_0$ εἰς $2^\nu$ ἴσα μέρη, νὰ κατασκευάσωμεν τμῆμά τι $d_\nu = \frac{d}{2^\nu}$ μικρότερον τοῦ τ, ὅταν ὁ ν ἐκλεγῇ ἀρκετὰ μέγας (βλ. §39,β')

Τότε θὰ εἶναι $\tau > d_\nu$, $\mu(\tau)>\mu(d_\nu)$ ἢ $\mu(\tau)> \frac{1}{2^\nu}$, δηλ. $\mu(\tau)>0$.

**Πόρισμα 2ον. Δύο τμήματα ἔχοντα ἴσα μέτρα εἶναι ἴσα.**

Ἔστω $\mu(\tau)=\mu(\tau')$. Τότε ἀποκλείεται νὰ εἶναι $\tau<\tau'$, διότι θὰ εἴχομεν $\mu(\tau)<\mu(\tau')$. Ὁμοίως ἀποκλείεται νὰ εἶναι $\tau'<\tau$. Μένει συνεπῶς, $\tau=\tau'$.

**Πόρισμα 3ον. Ἐκ δύο τμημάτων μικρότερον εἶναι τὸ ἔχον μικρότερον μέτρον.**

## 42. Ἐπίδρασις τῆς ἀλλαγῆς τῆς μονάδος μετρήσεως τῶν μηκῶν.

Εἴδομεν εἰς τὴν § **40** ὅτι, διὰ νὰ μετρήσωμεν ἓν τμῆμα AB μὲ μονάδα τὸ τμῆμα $d_0$, τὸ περικλείομεν (βλ. σχ. 46) μεταξὺ δύο τμημάτων $AA_{m-1}$ καὶ $AA_m$, οὕτως, ὥστε

(1) $$AA_{m-1}<AB\leqq AA_m\,,$$

ὅπου $AA_{m-1} = (m-1)\,.\,d_\nu$, $AA_m = m\,.\,d_\nu$ μὲ $d_\nu = d_0/2^\nu$. Ὅταν δὲ τὸ $\nu\to\infty$, εἶναι $\mu(AB)$ = κοινὸν ὅριον τῶν ἀκολουθιῶν $\left\{\frac{m-1}{2^\nu}\right\}$ καὶ $\left\{\frac{m}{2^\nu}\right\}$.

Ἂς λάβωμεν τώρα μίαν νέαν μονάδα μετρήσεως, τὸ τμῆμα $d_0'$ καὶ ἂς παριστάνωμεν μὲ μ' τὰ μέτρα τῶν τμημάτων, ἀναφορικῶς πρὸς τὴν νέαν μονάδα $d_0'$. Τὸ τμῆμα $d_0$ μετρηθὲν μὲ μονάδα τὸ $d_0'$ ἂς ἔχῃ μέτρον k, ἤτοι: $\boxed{\mu'(d_0)=k}$. Τότε θὰ εἶναι: $\mu'\left(\frac{d_0}{2^\nu}\right) = \frac{k}{2^\nu}$. Διότι, ἐὰν καλέσωμεν x τὸ μέτρον τοῦ $d_0/2^\nu$ ὡς πρὸς τὴν νέαν μονάδα, ἡ ἰσότης:

$$\underbrace{\frac{d_0}{2^\nu}+\frac{d_0}{2^\nu}+\ldots+\frac{d_0}{2^\nu}}_{2^\nu \text{ φορὰς}} = d_0 \quad \text{δίδει (§ \textbf{41}, II).}$$

$$\underbrace{x+x+\ldots+x}_{2^\nu \text{ φορὰς}} = \mu'(d_0) = k \Rightarrow x = \frac{k}{2^\nu}.$$

Ἐν συνεχείᾳ, ἐπειδὴ τὸ τμῆμα $AA_{m-1}$ ἀποτελεῖται ἀπὸ m — 1 τμήματα ἴσα πρὸς $d_0/2^\nu$, θὰ ἔχῃ μέτρον: $\mu'(AA_{m-1}) = (m-1)\frac{k}{2^\nu}$ καὶ ὁμοίως διὰ τὸ τμῆμα $AA_m$ : $\mu'(AA_m) = m\frac{k}{2^\nu}$. Λαμβάνοντες τὰ μέτρα τῶν τριῶν μελῶν τῆς σχέσεως (1) ὡς πρὸς τὴν νέαν μονάδα (§ **41**, I) , ἔχομεν ὅτι

(2) $$k\frac{m-1}{2^\nu} < \mu'(AB) \leqq k\frac{m}{2^\nu}.$$

Ἡ (2), ἰσχύουσα δι' ὅλα τὰ ν ἀπό τινος καὶ ἔπειτα, δεικνύει ὅτι τὸ $\mu'(AB)$ εἶναι τὸ κοινὸν ὅριον τῶν ἀκολουθιῶν $k\left\{\frac{m-1}{2^\nu}\right\}$ καὶ $\left\{k\frac{m}{2^\nu}\right\}$, δηλ. τὸ $k.\mu(AB)$ (§ 35 ε'). Ὥστε $\mu'(AB) = k.\mu(AB)$. Ἐδείχθη λοιπὸν τὸ

**(Θ) — Ὅταν ληφθῇ νέα μονὰς μετρήσεως, τὸ μέτρον παντὸς τμήματος πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸ μέτρον τῆς παλαιᾶς μονάδος ὡς πρὸς τὴν νέαν.**

**43. Λόγος δύο εὐθυγράμμων τμημάτων.** α') **Ὁρισμός. Δοθέντων δύο τμημάτων ΑΒ καὶ ΓΔ καλεῖται λόγος τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ καὶ παρίσταται μὲ $\frac{AB}{\Gamma\Delta}$ τὸ μέτρον τοῦ ΑΒ μετρηθέντος μὲ μονάδα τὸ ΓΔ.** Φυσικὰ ὁ λόγος εἶναι εἷς θετικὸς ἀριθμὸς καθοριζόμενος πλήρως ἀπὸ τὰ δύο τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ.

β') **(Θ) — Ὁ λόγος δύο τμημάτων ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν μέτρων των** (ὅταν μετρηθοῦν διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος).

*Ἀπόδειξις.* Ἔστω λ ὁ λόγος $\frac{AB}{\Gamma\Delta}$ καὶ $d_0$ μία οἱαδήποτε μονὰς μετρήσεως τῶν μηκῶν. Ἔστω k τὸ μέτρον τοῦ ΓΔ μὲ μονάδα $d_0$: $\boxed{\mu(\Gamma\Delta) = k}$. Τὸ ΑΒ μετρούμενον μὲ μονάδα τὸ ΓΔ ἔχει μέτρον λ, ἄρα μετρούμενον μὲ μονάδα $d_0$ θὰ ἔχῃ μέτρον τὸ λ, πολλαπλασιασμένον ἐπὶ τὸ μέτρον τῆς παλαιᾶς μονάδος ΓΔ ὡς πρὸς τὴν νέαν (βλ. (Θ), § **42**), δηλ. $\boxed{\mu(AB)=k.\lambda.}$.
Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει:

$\frac{\mu(AB)}{\mu(\Gamma\Delta)} = \frac{k.\lambda}{k} = \lambda = \frac{AB}{\Gamma\Delta}$. Ἐπομένως:

$$\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{\mu(AB)}{\mu(\Gamma\Delta)} \text{ ὅ.ἔ.δ.}$$

**44. Δεύτερος ὁρισμὸς τοῦ γινομένου τμήματος ἐπὶ θετικὸν ἀριθμόν.** Ἔστω τμῆμα ΑΒ καὶ ὁ θετικὸς ἀριθμὸς α. **Καλεῖται γινόμενον τοῦ τμήματος ΑΒ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν α ἓν τμῆμα Α'Β', τὸ ὁποῖον ἔχει λόγον πρὸς τὸ ΑΒ ἴσον πρὸς τὸν ἀριθμὸν α.**

Δηλ. $$AB\times\alpha = A'B' \Longleftrightarrow \frac{A'B'}{AB} = \alpha.$$

Ἐπειδὴ ὁ λόγος τοῦ Α'Β' πρὸς τὸ ΑΒ εἶναι α, ἕπεται ὅτι τὸ τμῆμα Α'Β' μετρούμενον μὲ μονάδα τὸ ΑΒ ἔχει μέτρον α. Κατὰ τὸ θεώρημα III τῆς § **41** ὑπάρχει ἓν καὶ μόνον τοιοῦτον τμῆμα. Δηλ. **τὸ γινόμενον ΑΒ×α ὑπάρχει καὶ εἶναι ἓν καὶ μόνον.**

## ΜΕΤΡΟΝ ΓΩΝΙΑΣ

**45.** α') Ἐντελῶς ἀναλόγως πρὸς τὸ μῆκος τμήματος ὁρίζεται καὶ τὸ μέτρον μιᾶς γωνίας καὶ ὅλα τὰ θεωρήματα τὰ σχετικὰ μὲ τὸ μέτρον τμήματος ἔχουν τὰ ὅμοιά των εἰς τὴν μέτρησιν τῶν γωνιῶν. Οὕτω διὰ τὰς γωνίας ἰσχύει τὸ κάτωθι βασικὸν θεώρημα τῆς μετρήσεως.

**(Θ)—Δίδεται μία γωνία $(h_0, k_0)$, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν μονάδα μετρήσεως τῶν γωνιῶν. Τότε εἰς κάθε γωνίαν $(h, k)$(*) (κυρτὴν ἢ μὴ) ἀντιστοιχεῖ εἷς ὡρισμένος ἀριθμός, ἔστω $\theta(h, k)$, οὕτως, ὥστε νὰ πληροῦνται τὰ κάτωθι τέσσαρα ἐπιτάγματα:**

**1) Διὰ κάθε γωνίαν $(h, k)$ εἶναι $\theta(h, k) > 0$.**
**2) Ἐὰν αἱ γωνίαι $(h, k)$ καὶ $(h', k')$ εἶναι ἴσαι, τότε $\theta(h, k) = \theta(h', k')$.**
**3) Ἐὰν ἡ ἀκτὶς $l$ ἀνήκῃ εἰς τὴν γωνίαν $(h, k)$, τότε: $\theta(h, l) + \theta(l, k) = \theta(h, k)$.**
**4) $\theta(h_0, k_0) = 1$.**

Ὁ ὡς ἄνω πρὸς τὴν γωνίαν $(h, k)$ ἀντιστοιχῶν ἀριθμὸς $\theta(h,k)$ καλεῖται **μέτρον τῆς γωνίας** $(h, k)$.

Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα ἀποδεικνύεται, ὅπως καὶ τὸ ἀντίστοιχον θεώρημα περὶ τοῦ μέτρου τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων, ἀκολουθουμένης τῆς ἰδίας ἀκριβῶς σειρᾶς. (Ἡ μονὰς τῶν γωνιῶν δύναται νὰ διαιρεθῇ εἰς 2, 4, 8, ..., $2^\nu$ ἴσας γωνίας, ἡ δὲ μετρητέα γωνία προσεγγίζεται κατ' ἔλλειψιν καὶ καθ' ὑπεροχὴν ἀπὸ δύο γωνίας, ὧν ἡ μία περιέχει $m-1$ γωνίας ἴσας πρὸς τὸ $1/2^\nu$ τῆς μονάδος, ἡ δὲ ἄλλη περιέχει $m$ γωνίας ἴσας πρὸς τὸ $1/2^\nu$ τῆς μονάδος καὶ τὸ μέτρον ὁρίζεται, ὡς τὸ κοινὸν ὅριον δύο ἀκολουθιῶν, ὅπως εἰς τὴν § 40).

β') **Ὁ λόγος δύο γωνιῶν** ὁρίζεται, ὅπως εἰς τὴν § 43 ὡρίσθη ὁ λόγος δύο εὐθυγράμμων τμημάτων.

γ') **Ἡ ὕπαρξις γωνίας ἐχούσης δεδομένον μέτρον** $\theta$ (ὡς πρὸς δοθεῖσαν μονάδα γωνιῶν) ἀποδεικνύεται, καθ' ὃν τρόπον δεικνύεται ἡ ὕπαρξις τμήματος ἔχοντος δοθὲν μέτρον.

Ἐκ τούτου ἕπεται τέλος ἡ πρότασις:

**«Εἰς τὸ ἐσωτερικὸν ἑκάστης γωνίας ὑπάρχουν ἀκτῖνες ἀρχόμεναι ἐκ τῆς κορυφῆς, αἱ ὁποῖαι χωρίζουν τὴν δοθεῖσαν γωνίαν εἰς ν ἴσα μέρη».**

Πράγματι, ἐὰν ἡ δοθεῖσα γωνία $\widehat{(h, k)}$ ἔχῃ μέτρον ἀριθμόν τινα $\theta$, τότε θεωροῦμεν τὸν ἀριθμὸν $\theta/\nu$. Ἐπειδὴ ὑπάρχει γωνία ἔχουσα δεδομένον μέτρον, θὰ ὑπάρχῃ καὶ γωνία ἔχουσα μέτρον $\theta/\nu$. Ἄρα ὑπάρχουν ἀκτῖνες $l_1, l_2, \ldots, l_{\nu+1}$ ἀνήκουσαι εἰς τὴν γωνίαν τοιαῦται, ὥστε αἱ γωνίαι $(h, l_1)$, $(l_1, l_2)$ ... $(l_{\nu-1}, k)$ νὰ ἔχουν μέτρον $\theta/\nu$. Ἀλλὰ γωνίαι ἔχουσαι ἴσα μέτρα εἶναι ἴσαι.

**46. Θεώρημα τοῦ Θαλοῦ.** **(Κύριον θεώρημα τῶν μετρικῶν σχέσεων). — Ἔστωσαν (ε) καὶ (ε′) δύο εὐθεῖαι τοῦ ἐπιπέδου καὶ τρίτη εὐθεῖα (δ) τέμνουσα τὰς δύο πρώτας. Ἐὰν εἰς κάθε σημεῖον Μ τῆς (ε) ἀντιστοιχίζωμεν ἓν σημεῖον Μ′ τῆς (ε′) τοιοῦτον, ὥστε τὰ Μ καὶ Μ′ νὰ κεῖνται ἐπὶ παραλ-**

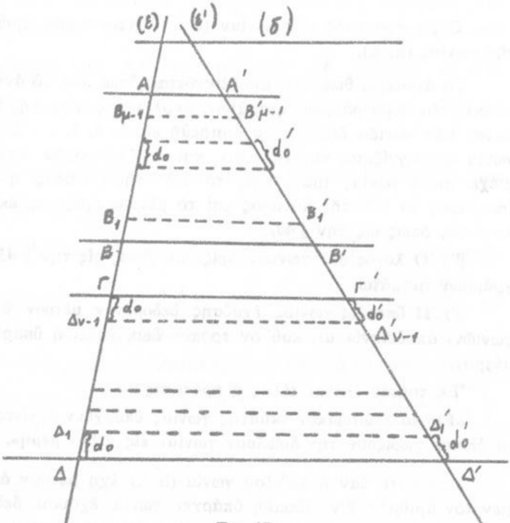
(*) Τὰ $h$ καὶ $k$ συμβολίζουν δύο ἡμιευθείας μὲ κοινὴν ἀρχήν. Αὗται ὁρίζουν ἐν γένει ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τὴν κυρτὴν γωνίαν $\widehat{(h,k)}$ μὲ πλευρὰς τὰς $h$, $k$ καὶ τὴν μὴ κυρτὴν $\underset{\smile}{(h,k)}$ ἐπίσης μὲ πλευρὰς $h$, $k$. Ἀνωτέρω, ὡς γωνία $(h,k)$ νοεῖται εἴτε ἡ πρώτη εἴτε ἡ δευτέρα.

**λήλου πρὸς τὴν (δ), τότε, κατὰ τὴν ἀντιστοιχίαν ταύτην, ὁ λόγος δύο οἱωνδήποτε τμημάτων κειμένων ἐπὶ τῆς (ε) ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀντιστοίχων των τμημάτων ἐπὶ τῆς (ε′).**

Ἔστωσαν ΑΒ καὶ ΓΔ ἐπὶ τῆς (ε) καὶ Α′Β′, Γ′Δ′ τὰ ἀντίστοιχά των ἐπὶ τῆς (ε′). Θὰ δείξωμεν ὅτι:

$$\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{A'B'}{\Gamma'\Delta'}$$

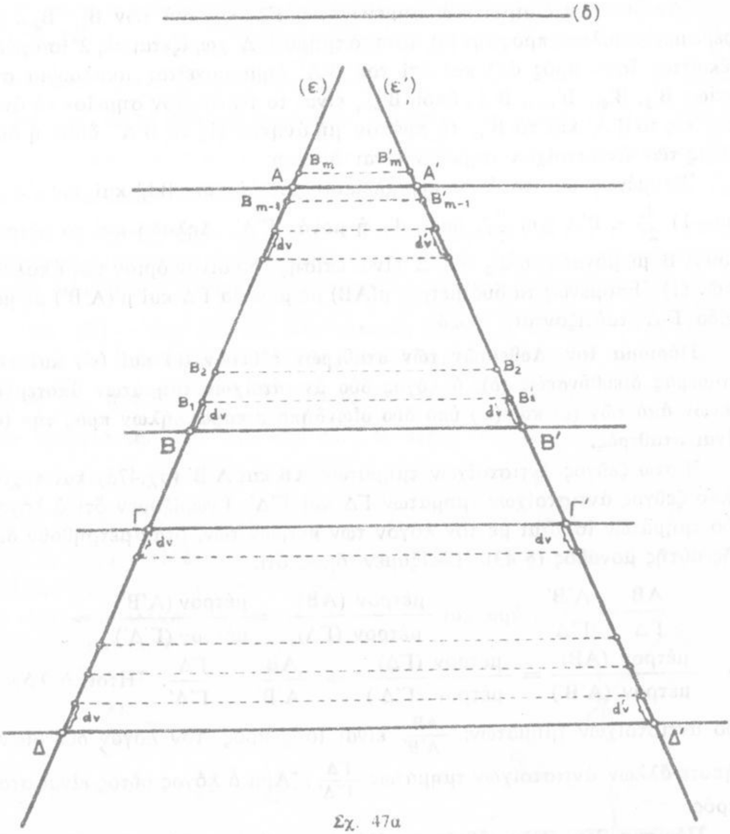
**Ι. Τὰ ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι σύμμετρα πρὸς ἄλληλα.** (σχ 47). Ἔστω $d_0$ τὸ κοινὸν μέτρον τῶν ΑΒ καὶ ΓΔ, τὸ ὁποῖον χωρεῖ μ φορὰς εἰς τὸ ΑΒ καὶ ν φορὰς εἰς τὸ ΓΔ, ὅπου μ,ν φυσικοὶ ἀριθμοὶ (§34,θ′). Τότε ὁ λόγος $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{\mu}{\nu}$ κατὰ τὴν § 34,θ′. Ἂς χωρίσωμεν τώρα τὸ ΑΒ εἰς μ ἴσα μέρη διὰ τῶν διαιρετικῶν σημείων $B_1$, $B_2$, ...$B_{\mu-1}$ καὶ τὸ ΔΓ εἰς ν ἴσα μέρη διὰ τῶν $\Delta_1$,... $\Delta_{\nu-1}$, καὶ ἂς φέρωμεν διὰ τῶν διαιρετικῶν σημείων $\Delta_1$,...$\Delta_{\nu-1}$, $B_1$...$B_{\mu-1}$ παραλλήλους πρὸς τὴν (δ). Τότε ὡς γνωστὸν καὶ τὸ Α′Β′ καὶ τὸ Γ′Δ′ χωρίζονται ὑπὸ τῶν ἀχθεισῶν παραλλήλων πάλιν εἰς ἴσα μέρη, $A'B'_{\mu-1} = \ldots = B'_1B' = \Gamma'\Delta'_{\nu-1} = \cdots = \Delta'_1\Delta'$ ἴσα ἔστω πρὸς $d'_0$ ἕκαστον. Οὕτω τὸ Α′Β′ σύγκειται ἀπὸ μ τμήματα ἴσα πρὸς $d'_0$ καὶ τὸ Γ′Δ′ ἀπὸ ν ἴσα πρὸς $d_0'$ τμήματα. Ἑπομένως τὸ $d_0'$ εἶναι κοινὸν μέτρον τῶν Α′Β′ καὶ Γ′Δ′ καὶ χωρεῖ μ φορὰς εἰς τὸ Α′Β′ καὶ ν φορὰς εἰς τὸ Γ′Δ′. Κατὰ τὰ λεχθέντα εἰς τὴν § 34,θ′ ὁ λόγος $\frac{A'B'}{\Gamma'\Delta'}$ εἶναι πάλιν ἴσος πρὸς $\frac{\mu}{\nu}$, ὥστε $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{A'B'}{\Gamma'\Delta'}$.




Σχ. 47

**ΙΙ. Τὰ ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι δύο τυχόντα τμήματα ἐπὶ τῆς (ε) (Γενικὴ ἀπόδειξις).** Τότε, διὰ νὰ δείξωμεν ὅτι $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{A'B'}{\Gamma'\Delta'}$ (βλ. § 43), ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι τὸ μέτρον τοῦ ΑΒ μετρηθέντος μὲ μονάδα ΓΔ (ἔστω τὸ μ(ΑΒ)) ἰσοῦται μὲ τὸ μέτρον τοῦ A'B' μετρηθέντος μὲ μονάδα τὸ Γ'Δ' (ἔστω τὸ μ'(A'B')).

Γνωρίζομεν ὅτι (βλ. § **40**) πρὸς εὕρεσιν τοῦ μέτρου τοῦ AB χωρίζομεν τὴν μονάδα $\Gamma\Delta = d_0$ εἰς $2^\nu$ ἴσα μέρη (ν ἐπαρκῶς μέγας) καὶ κατασκευάζο-




Σχ. 47α

μεν ἓν τμῆμα $\boxed{d_\nu = d_0/2^\nu}$ μικρότερον τοῦ μετρητέου AB. Κατασκευάζομεν κατὰ τὴν κατεύθυνσιν ἐκ τοῦ B πρὸς τὸ A μίαν ἀκολουθίαν σημείων $B_1, B_2, \dots B_\rho, \dots$ τοιούτων, ὥστε $BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = \dots B_\rho B_{\rho+1} = \dots = d_\nu$ καὶ ἔστω $B_m$ τὸ πρῶτον σημεῖον τῆς ἀκολουθίας ταύτης, τὸ ὁποῖον **δὲν** ἀνήκει εἰς τὸ τμῆμα AB (βλ. §40). Τότε τὸ $B_{m-1}$ ἀνήκει εἰς τὸ τμῆμα AB καὶ ἔχομεν τότε: (βλ. § **40**) $BB_{m-1} < BA \leq BB_m$ ἢ $(m-1)d_\nu < BA \leq md_\nu$ ἢ $(m-1)\frac{d_0}{2^\nu} < BA \leq$

$m \frac{d_0}{2^\nu}$ (ὅπου $d_0$ ἡ μονάς). Διὰ ν τεῖνον εἰς ἄπειρον μέτρον τοῦ ΑΒ εἶναι τὸ κοινὸν ὅριον τῶν ἀκολουθιῶν:

$$(1) \qquad \left\{\frac{m-1}{2^\nu}\right\} \quad \text{καὶ} \quad \left\{\frac{m}{2^\nu}\right\}$$

Ἂν διὰ τῶν διαιρετικῶν σημείων τοῦ ΓΔ καὶ διὰ τῶν $B_1$, $B_2$,...$B_m$ φέρωμεν παρ/λους πρὸς τὴν (δ), τότε τὸ τμῆμα Γ′Δ′ χωρίζεται εἰς $2^\nu$ ἴσα μέρη (ἕκαστον ἴσον πρὸς $d_\nu'$) καὶ ἐπὶ τοῦ Β′Α′ δημιουργεῖται ἀκολουθία σημείων $B'_1$, $B'_2$,...$B'_{m-1}$, $B'_m$, ὅπου $B'_{m-1}$ εἶναι τὸ τελευταῖον σημεῖον τὸ ἀνῆκον εἰς τὸ Β′Α′ καὶ τὸ $B'_m$ τὸ πρῶτον μὴ ἀνῆκον εἰς τὸ Β′Α′, διότι ἡ διάταξις τῶν ἀντιστοίχων σημείων εἶναι ἡ αὐτή.

Ἑπομένως καὶ τὸ Β′Α′ περικλείεται μεταξὺ $(m-1)d_\nu'$ καὶ $md'_\nu$, δηλ. $(m-1)\frac{d_0'}{2^\nu} < B'A' \leqq m\frac{d'_0}{2^\nu}$, ὅπου $d'_0$ ἡ μονὰς Γ′Δ′. Δηλαδὴ καὶ τὸ μέτρον τοῦ Α′Β′ μὲ μονάδα τὸ $d'_0$ = Γ′Δ′ εἶναι ἐπίσης τὸ κοινὸν ὅριον τῶν ἀκολουθιῶν (1). Ἑπομένως τὰ δύο μέτρα: μ(ΑΒ) μὲ μονάδα ΓΔ καὶ μ′(Α′Β′) μὲ μονάδα Γ′Δ′ ταυτίζονται. ὅ.ἔ.δ.

**Πόρισμα 1ον. Δοθεισῶν τῶν σταθερῶν εὐθειῶν (ε) καὶ (ε′) καὶ τῆς σταθερᾶς διευθύνσεως (δ), ὁ λόγος δύο ἀντιστοίχων τμημάτων ἀποτεμνομένων ἀπὸ τῶν (ε) καὶ (ε′) ὑπὸ δύο οἱωνδήποτε παραλλήλων πρὸς τὴν (δ) εἶναι σταθερός.**

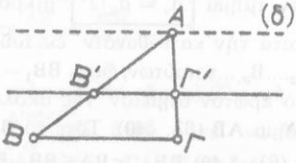
Ἔστω ζεῦγος ἀντιστοίχων τμημάτων ΑΒ καὶ Α′Β′ (σχ.47α) καὶ τυχὸν ἄλλο ζεῦγος ἀντιστοίχων τμημάτων ΓΔ καὶ Γ′Δ′. Γνωρίζομεν ὅτι ὁ λόγος δύο τμημάτων ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν μέτρων των, ὅταν μετρηθοῦν διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος (§ **43**). Ἐδείξαμεν ὅμως ὅτι:

$$\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{A'B'}{\Gamma'\Delta'}, \text{ ἄρα καὶ } \frac{\text{μέτρον (AB)}}{\text{μέτρον }(\Gamma\Delta)} = \frac{\text{μέτρον }(A'B')}{\text{μέτρον }(\Gamma'\Delta')} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\text{μέτρον (AB)}}{\text{μέτρον }(A'B')} = \frac{\text{μέτρον }(\Gamma\Delta)}{\text{μέτρον }(\Gamma'\Delta')} \Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'}.$$ Ἤτοι ὁ λόγος δύο ἀντιστοίχων τμημάτων: $\frac{AB}{A'B'}$ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον δύο οἱωνδήποτε ἄλλων ἀντιστοίχων τμημάτων $\frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'}$. Ἄρα ὁ λόγος οὗτος εἶναι σταθερός.

**Πόρισμα 2ον. Ἐὰν εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ τριγώνου τέμνῃ τὰς δύο ἄλλας πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ εἰς Β′ καὶ Γ′, τότε** $\frac{AB'}{AB} = \frac{A\Gamma'}{A\Gamma}$. (Ἐπίσης, $\frac{AB'}{B'B} = \frac{A\Gamma'}{\Gamma'\Gamma}$)

Διότι ἀρκεῖ νὰ νοήσωμεν διὰ τῆς κορυφῆς Α εὐθεῖαν (δ)//ΒΓ//Β′Γ′ (σχ. 48) καὶ νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸ θεώρημα τοῦ Θαλοῦ.



Σχ. 48

**47. Ἀλγεβρικὴ διατύπωσις τοῦ θεωρήματος τοῦ Θαλοῦ.**

**(Θ) — Ἐὰν ἐπὶ μιᾶς εὐθείας (ε) κεῖνται τρία σημεῖα Α, Β, Γ καὶ ἐπὶ ἄλλης εὐθείας (ε′) κεῖνται ἐπίσης τρία σημεῖα Α′, Β′, Γ′ οὕτως, ὥστε ΑΑ′//ΒΒ′//ΓΓ′, τότε ἰσχύει:**

$$(1)\qquad \frac{\overline{AB}}{\overline{B\Gamma}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'\Gamma'}}$$

Πράγματι, ἂν νοήσωμεν ἄξονας ἐπάνω εἰς τὰς εὐθείας (ε) καὶ (ε′), τότε τὰ διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{B'\Gamma'}$ ἀποκτοῦν ἀλγεβρικὰς τιμὰς $\overline{AB}$, $\overline{B\Gamma}$, $\overline{A'B'}$, $\overline{B'\Gamma'}$.

Οἱ λόγοι (1) εἶναι κατ' ἀπόλυτον τιμὴν ἴσοι: $\dfrac{AB}{B\Gamma} = \dfrac{A'B'}{B'\Gamma'}$ κατὰ τὸ (Θ) τοῦ Θαλοῦ. Ἔχουν ὅμως καὶ τὸ αὐτὸ πρόσημον· διότι ἡ διάταξις τῶν σημείων Α, Β, Γ εἶναι ἡ ἰδία μὲ τὴν τῶν Α′, Β′, Γ′ καὶ ἑπομένως, ἂν τὰ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$ εἶναι ὁμόρροπα, τότε καὶ τὰ $\overrightarrow{A'B'}$ καὶ $\overrightarrow{B'\Gamma'}$ εἶναι μεταξύ των ὁμόρροπα, ἂν δὲ τὰ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$ εἶναι ἀντίρροπα, τότε καὶ τὰ $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{B'\Gamma'}$ εἶναι ἀντίρροπα. Ἑπομένως οἱ λόγοι (1) εἶναι ἢ ἀμφότεροι θετικοὶ (εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν) ἢ ἀμφότεροι ἀρνητικοὶ (εἰς τὴν δευτέραν). Ὅθεν οἱ ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοὶ $\overline{AB}/\overline{B\Gamma}$ καὶ $\overline{A'B'}/\overline{B'\Gamma'}$ ἔχοντες τὸ αὐτὸ πρόσημον καὶ ἴσας ἀπολύτους τιμὰς εἶναι ἴσοι.

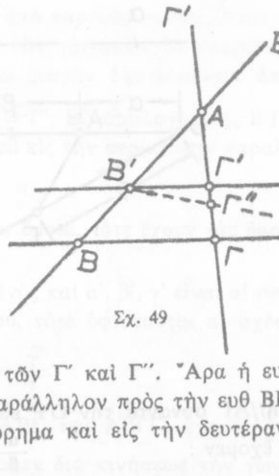
**48. (Θ) — Ἐὰν ἐπὶ τῆς μιᾶς πλευρᾶς γωνίας $\widehat{A}$ ὑπάρχουν δύο σημεῖα Β′ καὶ Β καὶ ἐπὶ τῆς ἄλλης πλευρᾶς δύο ἄλλα σημεῖα Γ′ καὶ Γ τοιαῦτα, ὥστε $\dfrac{AB'}{AB} = \dfrac{A\Gamma'}{A\Gamma}$, τότε Β′Γ′//ΒΓ. Τὸ αὐτὸ ἰσχύει καὶ ὅταν τὰ Β′ καὶ Γ′ κεῖνται ἐπὶ τῶν προεκτάσεων τῶν ΑΒ, ΑΓ, πρὸς τὸ μέρος τοῦ Α.**

*Ἀπόδειξις.* Ἔστω τὸ Β′ μεταξὺ Α καὶ Β. Τότε $\dfrac{AB'}{AB} < 1$ (σχ.49). Ἐπειδὴ δὲ $\dfrac{AB'}{AB} = \dfrac{A\Gamma'}{A\Gamma}$, θὰ εἶναι καὶ $\dfrac{A\Gamma'}{A\Gamma} < 1$, ἤτοι καὶ τὸ Γ′ θὰ κεῖται μεταξὺ Α καὶ Γ. Ἡ ἐκ τοῦ Β′ ἀγομένη //ΒΓ, ὡς τέμνουσα τὴν πλευρὰν ΑΒ (εἰς Β′) καὶ μὴ τέμνουσα τὴν ΒΓ, θὰ τέμνῃ τὴν πλευρὰν ΑΓ εἴς τι σημεῖον Γ″ καὶ κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Θαλοῦ θὰ εἶναι:

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{A\Gamma''}{A\Gamma},$$

ἐνῷ ἐξ ὑποθέσεως: $\dfrac{AB'}{AB} = \dfrac{A\Gamma'}{A\Gamma}$.

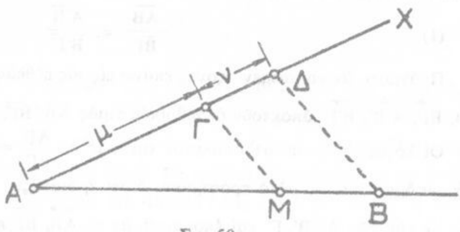
Συνάγομεν λοιπὸν ὅτι $\dfrac{A\Gamma'}{A\Gamma} = \dfrac{A\Gamma''}{A\Gamma}$ $\Rightarrow A\Gamma' = A\Gamma''$. Ἐπειδὴ καὶ τὸ Γ′ καὶ τὸ Γ″ εἶναι ἐσωτερικὰ σημεῖα τοῦ τμήματος ΑΓ, ἡ ἰσότης ΑΓ′ = ΑΓ″ συνεπάγεται τὴν σύμπτωσιν τῶν Γ′ καὶ Γ″. Ἄρα ἡ ευθ Β′Γ′ συμπίπτει μὲ τὴν ἐκ τοῦ Β′ ἀγομένην παράλληλον πρὸς τὴν ευθ ΒΓ, δηλ. Β′Γ′//ΒΓ. Ἀναλόγως δεικνύεται τὸ θεώρημα καὶ εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν.



Σχ. 49

**49. Διαίρεσις τμήματος εἰς μέρη ἀνάλογα δύο δοθέντων τμημάτων.** «Ἐπὶ δοθέντος τμήματος ΑΒ νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε

$\frac{MA}{MB} = \frac{\mu}{\nu}$, ὅπου μ, ν δύο ἄλλα δοθέντα τμήματα».



Σχ. 50

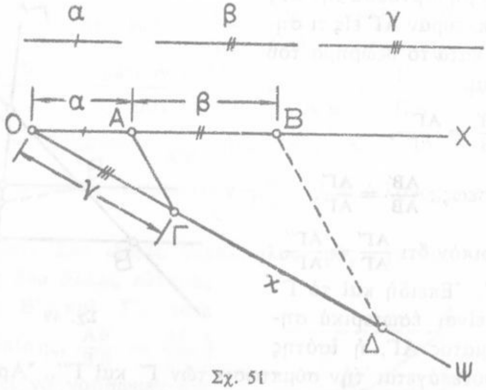
— Ἐπὶ τυχούσης ἡμιευθείας ΑΧ λαμβάνομεν δύο διαδοχικὰ τμήματα ΑΓ, ΓΔ ἴσα ἀντιστοίχως πρὸς τὰ δοθέντα μ καὶ ν, φέρομεν τὴν ΔΒ καὶ τὴν ἐκ τοῦ Γ παρ/λον πρὸς τὴν ΔΒ, ἥτις τέμνει τὸ τμῆμα ΑΒ εἰς τὸ ζητούμενον σημεῖον Μ. Διότι κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Θαλοῦ θὰ ἔχωμεν:

$$AM/MB = A\Gamma/\Gamma\Delta \quad (\S 46 \text{ πόρισμα } 2\text{ον}).$$

**50. Κατασκευὴ τοῦ τετάρτου ἀναλόγου.** Δίδονται τρία τμήματα α, β, γ καὶ ζητεῖται νὰ κατασκευάσωμεν ἓν τέταρτον τμῆμα x τοιοῦτον, ὥστε:

$$(1) \qquad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{x}.$$

Ἐπὶ ἡμιευθείας ΟΧ κατασκευάζομεν τὰ διαδοχικὰ τμήματα ΟΑ = α, ΑΒ = β καὶ ἐπὶ ἄλλης ἡμιευθείας ΟΨ, τὸ ΟΓ = γ (σχ. 51). Ἡ ἐκ τοῦ Β



Σχ. 51

ἀγομένη//ΑΓ συναντᾷ τὴν ΟΨ εἰς σημεῖον Δ καὶ κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Θαλοῦ ἔχομεν : $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\Gamma\Delta}$.

Τὸ τμῆμα ΓΔ εἶναι τὸ ζητούμενον x, καλούμενον *τέταρτον ἀνάλογον* τῶν α, β, γ. (Ἀσκήσεις: 308, 309, 310, 311, 312, 322).

## ΟΜΟΙΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

**51.** α)΄ Δύο τρίγωνα λέγονται **ὅμοια**, ὅταν ἔχουν τὰς γωνίας των μίαν πρὸς μίαν ἴσας. Μία πλευρὰ τοῦ ἑνὸς καὶ μία τοῦ ἄλλου κείμεναι ἀπέναντι ἴσων γωνιῶν λέγονται **ὁμόλογοι** πλευραί. Τὰ ὅμοια τρίγωνα ἔχουν **τρία ζεύγη** ὁμολόγων πλευρῶν.

Ἐὰν π.χ. τὰ τρ.ΑΒΓ καὶ τρ.Α΄Β΄Γ΄ ἔχουν $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$, $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'}$, τότε εἶναι ὅμοια μὲ ὁμολόγους πλευράς: $B\Gamma \to B'\Gamma'$, $\Gamma A \to \Gamma' A'$, $AB \to A'B'$. Διὰ νὰ συμβολίσωμεν ὅτι τὰ τρ.ΑΒΓ καὶ τρ.Α΄Β΄Γ΄ εἶναι ὅμοια γράφομεν:

$$\text{τρ.}AB\Gamma \approx \text{τρ.}A'B'\Gamma'.$$

β΄) Προφανῶς ἀρκεῖ διὰ τὴν ὁμοιότητα δύο τριγώνων δύο γωνίαι τοῦ ἑνὸς νὰ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς δύο γωνίας τοῦ ἄλλου.

**γ΄) (Θ) — Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν τὰς πλευράς των ἀντιστοίχως παραλλήλους ἢ καθέτους, τὰ τρίγωνα εἶναι ὅμοια καὶ ὁμόλογοι πλευραὶ εἶναι αἱ παράλληλοι ἢ αἱ κάθετοι πρὸς ἀλλήλας πλευραί.**

Ἔστω ὅτι εἰς τὰ $^{\Delta}AB\Gamma$ καὶ $^{\Delta}A'B'\Gamma'$ εἶναι $AB \perp A'B'$, $B\Gamma \perp B'\Gamma'$, $\Gamma A \perp \Gamma'A'$. Τότε αἱ γωνίαι $\widehat{A}$ καὶ $\widehat{A'}$ ἔχουν τὰς πλευράς των μίαν πρὸς μίαν καθέτους, ἄρα εἶναι ἢ ἴσαι ἢ παραπληρωματικαί. Τὸ ἴδιον συμβαίνει καὶ μὲ τὰς $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{B'}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$ καὶ $\widehat{\Gamma'}$. Ἀποκλείεται ὅμως καὶ τὰ **τρία** ἢ τὰ **δύο** ζεύγη ἐκ τῶν $(\widehat{A}, \widehat{A'})$, $(\widehat{B}, \widehat{B'})$, $(\widehat{\Gamma}, \widehat{\Gamma'})$ νὰ ἀποτελοῦνται ἀπὸ παρ/κὰς γωνίας, διότι τότε τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν γωνιῶν ἀμφοτέρων τῶν τριγώνων θὰ ὑπερέβαινε τὰς 4ορθάς. Ἑπομένως δύο ἐκ τῶν ἀνωτέρω ζευγῶν ἀποτελοῦνται ἀπὸ ἴσας γωνίας, δηλ. θὰ εἶναι $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$, $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'}$, ΒΓ ὁμόλογος τῆς Β΄Γ΄ κ.τ.λ. Οἱ ἴδιοι συλλογισμοὶ ἀκριβῶς ἰσχύουν καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν παραλλήλων πλευρῶν.

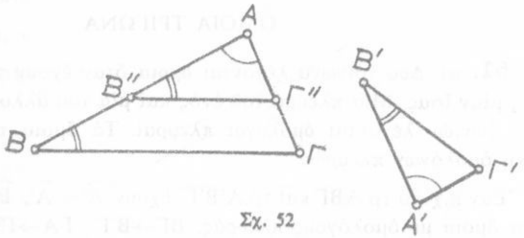
**52.** **α΄) (Θ)—Ἐὰν δύο τρίγωνα εἶναι ὅμοια, τότε ἔχουν τὰς ὁμολόγους πλευράς των ἀναλόγους.**

Δηλ. ἂν α, β, γ εἶναι αἱ πλευραὶ τοῦ ἑνὸς καὶ α΄, β΄, γ΄ εἶναι αἱ ἀντίστοιχοι **ὁμόλογοι** πλευραὶ (§**51**, α΄) τοῦ ἄλλου, τότε ὑφίστανται αἱ σχέσεις:

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} = \frac{\gamma}{\gamma'}.$$

*Ἀπόδειξις*. Ἔστωσαν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ ἔχοντα $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$ καὶ (κατ᾽ ἀνάγκην) $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'}$. Φέρομεν διὰ κινήσεως τὴν γωνίαν $\widehat{A'}$

ἐπὶ τῆς ἴσης της $\widehat{A}$ οὕτως, ὥστε ἡ πλευρὰ Α'Β' νὰ ἔλθῃ ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας (Α, Β) καὶ ἡ πλευρὰ Α'Γ' ἐπὶ τῆς (Α, Γ). Τότε τὸ τρ.Α'Β'Γ' θὰ ἔλθῃ εἰς τὴν θέσιν ΑΒ''Γ'' (σχ. 52) μὲ ΑΒ'' = Α'Β' καὶ ΑΓ'' = Α'Γ'. Ἡ γωνία $\widehat{B'}$ ἔρχεται εἰς τὴν γωνίαν $\widehat{AB''\Gamma''}$, ὁπότε, ἐκ τῶν ἰσοτήτων $\widehat{B'}$




Σχ. 52

$= \widehat{B}$ καὶ $\widehat{B'} = \widehat{AB''\Gamma''} \Rightarrow \widehat{AB''\Gamma''} = \widehat{B} = \widehat{AB\Gamma}$ καὶ ἐκ τούτου$\Rightarrow B''\Gamma'' \parallel B\Gamma$.
Ἑπομένως κατὰ τὸ θεώρ. τοῦ Θαλοῦ:

$\frac{AB}{AB''} = \frac{A\Gamma}{A\Gamma''}$ καὶ ἐπειδὴ ΑΒ'' = Α'Β', ΑΓ'' = Α'Γ', λαμβάνομεν:

$$(1) \qquad \frac{AB}{A'B'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}$$

Καθ' ὅμοιον τρόπον τοποθετοῦντες τὴν $\widehat{B'}$ ἐπὶ τῆς $\widehat{B}$ λαμβάνομεν

$$(2) \qquad \frac{BA}{B'A'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}.$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν:

$$(3) \qquad \frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'} \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

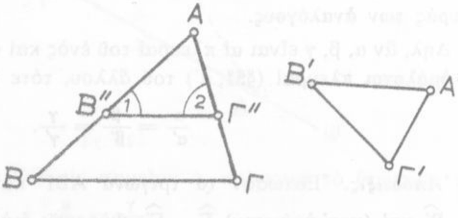
**β') Λόγος ὁμοιότητος.** Ἕκαστος ἐκ τῶν ἴσων λόγων (3) λέγεται **λόγος ὁμοιότητος** τοῦ τρ.ΑΒΓ πρὸς τὸ τρ.Α'Β'Γ'.

**53. (Θ) — Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν τὰς πλευράς των ἀναλόγους, τότε εἶναι ὅμοια.**

Ἔστωσαν δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' τοιαῦτα, ὥστε :

$$(1) \qquad \frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{\Gamma A}{\Gamma' A'}.$$

Ἂς λάβωμεν ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας (Α, Β) τμῆμα ΑΒ'' = Α'Β' καὶ ἂς φέρωμεν $B''\Gamma'' \parallel B\Gamma$ (σχ. 53). Τότε τὰ τρίγωνα ΑΒ''Γ'' καὶ ΑΒΓ εἶναι προφανῶς ὅμοια καὶ κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα θὰ ἔχωμεν $\frac{AB}{AB''} = \frac{B\Gamma}{B''\Gamma''} = \frac{A\Gamma}{A\Gamma''}$ ἢ ἐπειδὴ ΑΒ'' = Α'Β', ἔχομεν:




Σχ. 53

$$(2) \qquad \frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B''\Gamma''} = \frac{\Gamma A}{A\Gamma''}.$$

Παραβάλλοντες τὰς (1) καὶ (2) βλέπομεν ἀμέσως ὅτι:

$$B'\Gamma' = B''\Gamma'' \text{ καὶ } \Gamma'A' = A\Gamma''.$$

Ὥστε τὰ $^{\Delta}AB''\Gamma''$ καὶ $^{\Delta}A'B'\Gamma'$ ἔχουν τὰς πλευράς των ἴσας μίαν πρὸς μίαν, ἑπομένως εἶναι ἴσα.

Ἑπομένως: $\widehat{A} = \widehat{A}'$, $\widehat{B}_1'' = \widehat{B}'$, $\widehat{\Gamma}_2'' = \widehat{\Gamma}'$.

Ἐπειδὴ δὲ $\widehat{B}_1'' = \widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}_2'' = \widehat{\Gamma}$ (λόγῳ τῆς παραλληλίας τῶν $B''\Gamma''$, $B\Gamma$), ἔπεται: $\widehat{A} = \widehat{A}'$, $\widehat{B} = \widehat{B}'$, $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma}'$, δηλ. τρ.$AB\Gamma \approx$ τρ.$A'B'\Gamma'$.

**Παρατήρησις**. Ἐκ τῶν προηγουμένων θεωρημάτων προκύπτει ἡ ἰσοδυναμία:

$$\widehat{A} = \widehat{A}' \wedge \widehat{B} = \widehat{B}' \wedge \widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma}' \Longleftrightarrow \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{\Gamma A}{\Gamma'A'} = \frac{AB}{A'B'}.$$

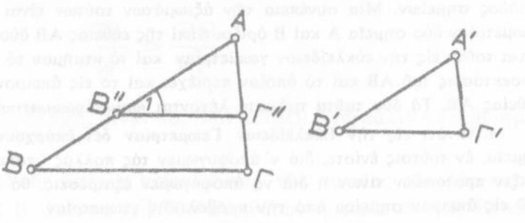
Ἑπομένως ὡς ὅμοια τρίγωνα δύνανται νὰ ὁρισθοῦν ἢ τὰ ἔχοντα τὰς γωνίας των ἀντιστοίχως ἴσας ἢ τὰ ἔχοντα τὰς πλευράς των ἀναλόγους (διότι ἑκάτερον συνεπάγεται τὸ ἕτερον).

**54. (Θ) — Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο πλευρὰς ἀναλόγους καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην, τότε εἶναι ὅμοια.**

Ἔστωσαν δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $A'B'\Gamma'$ τοιαῦτα, ὥστε:

$$(1) \qquad \widehat{A} = \widehat{A}' \text{ καὶ } \frac{AB}{A'B'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}.$$

Ἂς λάβωμεν ἐπὶ τῆς πλευρᾶς (A, B) τῆς γωνίας $\widehat{A}$ (τῆς ἴσης πρὸς τὴν $\widehat{A}'$) σημεῖον $B''$ τοιοῦτον, ὥστε $AB'' = A'B'$ καὶ ἐπὶ τῆς ἑτέρας πλευρᾶς (A, Γ) τῆς γωνίας $\widehat{A}$ σημεῖον $\Gamma''$ τοιοῦτον, ὥστε $A\Gamma'' = A'\Gamma'$. Τότε θὰ εἶναι $^{\Delta}AB''\Gamma''$ = $^{\Delta}A'B'\Gamma'$ καὶ συνεπῶς $\widehat{B}_1'' = \widehat{B}'$.




Σχ. 54

Ἡ ἐξ ὑποθέσεως ἰσχύουσα σχέσις $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{A\Gamma}{A'\Gamma'}$ δίδει $\dfrac{AB}{AB''} = \dfrac{A\Gamma}{A\Gamma''}$ καὶ τοῦτο συνεπάγεται $B''\Gamma'' \parallel B\Gamma$ (§ 48). Ἄρα $\widehat{B} = \widehat{B}_1''$, ἀλλὰ $\widehat{B}_1'' = \widehat{B}'$, συνεπῶς $\widehat{B} = \widehat{B}'$. Ἐπειδὴ καὶ $\widehat{A} = \widehat{A}'$, τὰ τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $A'B'\Gamma'$ εἶναι ὅμοια.

(Ἀσκήσεις: 313 ἕως 324).

## ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΗΣ ΔΕΣΜΗΣ ΕΥΘΕΙΩΝ

**55. Τὸ εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν σημεῖον μιᾶς εὐθείας.** Περὶ τὰ μέσα τοῦ 19ου αἰῶνος ἱδρύθη μία νέα γεωμετρία λεγομένη «προβολική», ἡ ὁποία δὲν περιέχει μετρικὰς σχέσεις, ἀλλ᾽ ἐξετάζει μόνον τὰς ἰδιότητας τῆς πρὸς ἄλληλα θέσεως τῶν γεωμετρικῶν σχημάτων.

Ἡ προβολικὴ γεωμετρία ἐπιτυγχάνει ἀξιοθαύμαστα ἀποτελέσματα ἐπὶ ὡρισμένου κύκλου γεωμετρικῶν θεμάτων ἀναπτύσσουσα ἰδίας μεθόδους, βασίζεται δὲ ἐπὶ τριῶν ὁμάδων ἀξιωμάτων: *συνδέσεως*, *διατάξεως* καὶ *συνεχείας*.

Τὰ ἀξιώματα συνδέσεως διαφέρουν τῶν τῆς εὐκλειδίου μόνον εἰς δύο σημεῖα: τὸ ἀξίωμα: **ἐπὶ ἑκάστης εὐθείας ὑπάρχουν τουλάχιστον δύο σημεῖα,** τροποποιεῖται ὡς ἑξῆς: *ἐπὶ ἑκάστης εὐθείας ὑπάρχουν τρία τοὐλάχιστον σημεῖα*, προστίθεται δὲ καὶ ἔνατον ἀξίωμα, καθ᾽ ὅ: *ἕκαστον ζεῦγος εὐθειῶν κειμένων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ἔχει ἓν κοινὸν σημεῖον*. Κατὰ τὸ ἀξίωμα τοῦτο δύο εὐθεῖαι παράλληλοι ὑπὸ τὴν εὐκλείδειον ἔννοιαν ἔχουν εἰς τὴν προβολικὴν γεωμετρίαν ἓν κοινὸν σημεῖον, τὸ ὁποῖον λέγεται: **εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν σημεῖον** ἐπὶ ἑκάστης τούτων. Ἐπομένως ἑκάστη διεύθυνσις ὁρίζει ἓν εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν σημεῖον $M_\infty$, διὰ τοῦ ὁποίου διέρχονται ὅλαι αἱ παράλληλοι αἱ ἀνήκουσαι εἰς τὴν διεύθυνσιν ταύτην. Ὅλα τὰ εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου ἀποτελοῦν τὴν **εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν εὐθεῖαν $\varepsilon_\infty$ τοῦ ἐπιπέδου.** Δηλ. ἐπὶ ἑκάστου ἐπιπέδου ὑπάρχει μία καὶ μόνον εὐθεῖα $\varepsilon\infty$, ἐφ᾽ ἧς κεῖνται ὅλα τὰ εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου. (Διότι, ὡς δεικνύεται ἐκ τῶν ἀξιωμάτων συνδέσεως τῆς προβολικῆς γεωμετρίας, δύο ἐπίπεδα μὴ ταυτιζόμενα ἔχουν πάντοτε μίαν εὐθεῖαν κοινήν, ἐὰν δὲ τὰ ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα ὑπὸ τὴν εὐκλείδειον ἔννοιαν, ἡ κοινὴ εὐθεῖα τούτων εἶναι εἰς τὴν προβολικὴν γεωμετρίαν ἡ εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν εὐθεῖα ἐπὶ ἑκάστου τούτων.).

Ἐνίοτε ἡ εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν εὐθεῖα λέγεται *κατ᾽ ἐκδοχὴν* εὐθεῖα καὶ τὰ σημεῖα αὐτῆς *κατ᾽ ἐκδοχὴν σημεῖα*, ἐνῷ τὸ κοινὸν σημεῖον δύο μὴ παραλλήλων εὐθειῶν λέγεται *καθ᾽ ὑπόστασιν* σημεῖον.

Τὰ ἀξιώματα διατάξεως τῆς προβολικῆς γεωμετρίας διαφέρουν τῶν τῆς εὐκλειδείου, διότι ἑκάστη τῶν δύο κατευθύνσεων ἐπὶ τῆς εὐθείας ὁρίζεται ὑπὸ μιᾶς διατεταγμένης τριάδος σημείων. Μία συνέπεια τῶν ἀξιωμάτων τούτων εἶναι ὅτι εἰς τὴν προβολικὴν γεωμετρίαν δύο σημεῖα Α καὶ Β ὁρίζουν ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ δύο τμήματα: τὸ ΑΒ, ὡς ὁρίζεται τοῦτο εἰς τὴν εὐκλείδειον γεωμετρίαν καὶ τὸ «τμῆμα» τὸ συγκείμενον ἀπὸ τὰς δύο προεκτάσεις τοῦ ΑΒ καὶ τὸ ὁποῖον περιέχει καὶ τὸ εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν σημεῖον τῆς εὐθείας ΑΒ. Τὰ δύο ταῦτα τμήματα λέγονται «*συμπληρωματικὰ*» ἀλλήλων.

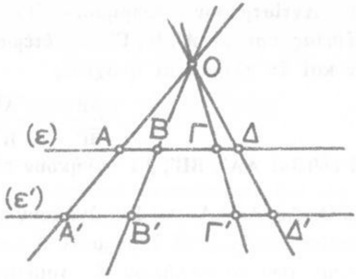
Μολονότι εἰς τὴν **Εὐκλείδειον Γεωμετρίαν δὲν ὑπάρχουν εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν σημεῖα,** ἐν τούτοις ἐνίοτε, διὰ ν᾽ ἀποφύγωμεν τὰς πολλὰς ὑποπεριπτώσεις κατὰ τὴν ἀπόδειξιν προτάσεών τινων ἢ διὰ νὰ ἀποφύγωμεν ἐξαιρέσεις, θὰ δανειζώμεθα τὴν ἔννοιαν τοῦ εἰς ἄπειρον σημείου ἀπὸ τὴν προβολικὴν γεωμετρίαν.

**56.** α΄) **Ὁρισμός. Καλεῖται ἐπίπεδος δέσμη εὐθειῶν τὸ σύνολον τῶν εὐθειῶν τοῦ ἐπιπέδου τῶν διερχομένων δι᾽ ἑνὸς σταθεροῦ σημείου Ο, τὸ ὁποῖον καλεῖται «κέντρον τῆς δέσμης».**

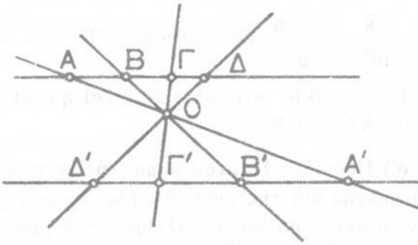
(Δὲν ἀποκλείεται τὸ Ο νὰ εἶναι σημεῖον εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν).

**β΄) (Θ) — Τρεῖς τυχοῦσαι εὐθεῖαι μιᾶς δέσμης ἀποτέμνουν ἀπὸ δύο παραλλήλων εὐθειῶν διανύσματα ἀνάλογα.**

*Ἀπόδειξις.* Ἔστω τὸ κέντρον Ο τῆς δέσμης καθ' ὑπόστασιν σημεῖον ἐκτὸς τῆς ταινίας τῶν παραλλήλων (ε) καὶ (ε΄) καὶ ἔστωσαν ΟΑΑ΄, ΟΒΒ΄, ΟΓΓ΄ τρεῖς εὐθεῖαι τῆς δέσμης (σχ. 55). Τὰ σημεῖα Β καὶ Β΄ κεῖνται τότε ἐπὶ τῆς ἰδίας ἡμιευθείας (Ο,Β), ἑπομένως πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας ΟΑΑ΄, ἄρα τὰ διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{A'B'}$ εἶναι ὁμόρροπα. Ὁμοίως τὰ $\overrightarrow{B\Gamma}$ καὶ $\overrightarrow{B'\Gamma'}$. Ἄρα οἱ ἀλγεβρικοὶ λόγοι: $\frac{\overline{AB}}{\overline{B\Gamma}}$ καὶ $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'\Gamma'}}$ ἔχουν τὸ ἴδιον πρόσημον. Ἔχουν ὅμως καὶ τὴν ἰδίαν ἀπόλυτον τιμήν, διότι:



Σχ. 55



Σχ. 56

$\frac{AB}{A'B'} = \frac{OB}{OB'}$ (ἐκ τῶν ὁμοίων $^{\Delta}$ΟΑΒ, ΟΑ΄Β΄) $= \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}$ (ἐκ τῶν ὁμοίων $^{\Delta}$ΟΒΓ, ΟΒ΄Γ΄). Ἤτοι: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} \Rightarrow \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{A'B'}{B'\Gamma'}$. Ὥστε:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{B\Gamma}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'\Gamma'}}.$$

Ἐὰν αἱ ἀκτῖνες τῆς δέσμης εἶναι παρ/λοι μεταξύ των, πάλιν τὸ θεώρημα προφανῶς ἰσχύει.

Ἐὰν τὸ κέντρον Ο τῆς δέσμης κεῖται ἐντὸς τῆς ταινίας τῶν δύο παρ/λων, τὰ σημεῖα Β καὶ Β΄ κεῖνται ἐπὶ δύο ἀντιθέτων ἡμιευθειῶν (Ο, Β) καὶ (Ο, Β΄), ἑπομένως κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς εὐθείας ΑΑ΄ καὶ ὡς ἐκ τούτου τὰ διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{A'B'}$ εἶναι ἀντίρροπα. Ὁμοίως καὶ τὰ $\overrightarrow{B\Gamma}$ καὶ $\overrightarrow{B'\Gamma'}$ εἶναι ἀντίρροπα (σχ. 56).

Ἄρα οἱ λόγοι: $\frac{\overline{AB}}{\overline{B\Gamma}}$ καὶ $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'\Gamma'}}$ ἔχουν πάλιν τὸ ἴδιον πρόσημον. Ἔχουν καὶ τὴν ἰδίαν ἀπόλυτον τιμὴν (ὡς ἐδείχθη ἀνωτέρω), ἄρα εἶναι πάλιν ἴσοι.

**γ') Ἀντίστροφον θεώρημα. — Ἐὰν τὰ σημεῖα Α, Β, Γ κεῖνται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας καὶ τὰ Α', Β', Γ' ἐπὶ ἑτέρας εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὴν πρώτην καὶ ἂν πληροῦται ἡ σχέσις**

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{B\Gamma}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'\Gamma'}},$$

**τότε αἱ εὐθεῖαι ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ' ἀνήκουν εἰς τὴν αὐτὴν δέσμην.**

*Ἀπόδειξις.* Αἱ ΑΑ' καὶ ΒΒ' ἀνήκουν εἰς μίαν δέσμην Ο, ὅπου Ο τὸ κοινὸν σημεῖον αὐτῶν (καθ' ὑπόστασιν ἢ κατ' ἐκδοχήν). Ἡ εὐθεῖα ΟΓ τέμνει τὴν ἑτέραν τῶν παραλλήλων εἰς σημεῖον Γ'' συμπῖπτον μὲ τὸ Γ', διότι:

$\frac{\overline{AB}}{\overline{B\Gamma}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'\Gamma''}}$ κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα καὶ

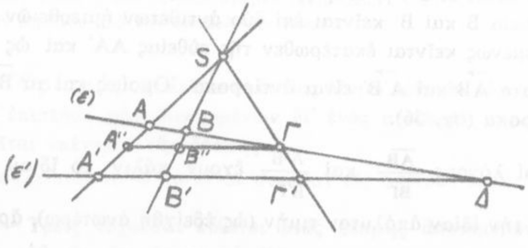
$\frac{\overline{AB}}{\overline{B\Gamma}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'\Gamma'}}$ ἐξ ὑποθέσεως. Ἐκ τῶν δύο τούτων $\Rightarrow$

$\overline{B'\Gamma''} = \overline{B'\Gamma'} \Rightarrow \Gamma' \equiv \Gamma''$. Ἄρα καὶ ἡ εὐθΓΓ' ἀνήκει εἰς τὴν ἰδίαν δέσμην μὲ τὰς ΑΑ' καὶ ΒΒ'.

**δ') Πόρισμα. Τὰ μέσα παραλλήλων χορδῶν γωνίας κεῖνται ἐπ' εὐθείας διερχομένης διὰ τῆς κορυφῆς,** (ὡς *«χορδὴ γωνίας»* θὰ νοῆται πᾶν τμῆμα ἔχον τὰ ἄκρα του ἐπὶ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας).

**ε') Θεώρημα. Τρεῖς εὐθεῖαι διερχόμεναι διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου S (ὄχι εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν) τέμνονται ὑπὸ εὐθείας (ε) εἰς Α, Β, Γ καὶ ὑπὸ ἑτέρας εὐθείας (ε') εἰς Α',Β',Γ' ἀντιστοίχως. Ἐὰν εἶναι $\frac{\overline{\Gamma A}}{\overline{\Gamma B}} = \frac{\overline{\Gamma' A'}}{\overline{\Gamma' B'}}$, τότε αἱ (ε) καὶ (ε') εἶναι παράλληλοι.**

Διότι, ἂν αἱ (ε) καὶ (ε') ἐτέμνοντο εἰς πεπερασμένην ἀπόστασιν Δ, θὰ ὑπῆρχε διὰ τοῦ Γ παρ/λος τῇ (ε'), ἡ ὁποία τέμνουσα τὰς SB', SA' εἰς Β'' καὶ Α'' (σχ. 57) θὰ ἐσχημάτιζε τρίγωνον ΓΑΑ'', εἰς τὸ ὁποῖον θὰ εἴχομεν : $\frac{\overline{\Gamma A}}{\overline{\Gamma B}} = \frac{\overline{\Gamma A''}}{\overline{\Gamma B''}}$, διότι $\frac{\overline{\Gamma A}}{\overline{\Gamma B}} = \frac{\overline{\Gamma' A'}}{\overline{\Gamma' B'}}$ ἐξ ὑποθέσεως καὶ $\frac{\overline{\Gamma A''}}{\overline{\Gamma B''}} = \frac{\overline{\Gamma' A'}}{\overline{\Gamma' B'}}$ κατὰ τὸ (Θ) τῆς δέσμης. Συνεπῶς θὰ ἦτο (§ 48) ΑΑ''//ΒΒ'', ὅπερ ἐνάντιον τῇ ὑποθέσει.




Σχ. 57

Τὸ θεώρημα τοῦτο λέγεται δεύτερον ἀντίστροφον τοῦ θεωρήματος τῆς δέσμης, κακῶς ὅμως, διότι δὲν ἰσχύει διὰ δέσμην τριῶν παραλλήλων εὐθειῶν.

## ΜΕΤΡΙΚΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΜΗΜΑΤΩΝ

**57.** α΄) Καλεῖται γινόμενον ὁσωνδήποτε εὐθυγράμμων τμημάτων α,β, γ,...τ, τὸ γινόμενον τῶν μέτρων τῶν τμημάτων μετρηθέντων διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος, ἤτοι ὁ ἀριθμὸς μ(α). μ(β). μ(γ)...μ(τ), ὅπου μ(x) σημαίνει τὸ μέτρον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος x. Διὰ τὴν ἁπλότητα θὰ παριστῶμεν τὸ γινόμενον τοῦτο μὲ α.β.γ...τ.

Γενικώτερον εἰς πᾶσαν Ἀλγεβρικὴν παράστασιν f(α,β,γ,...), ὅπου α, β, γ,...εἶναι **τμήματα,** νοοῦμεν εἰς τὴν θέσιν τῶν α,β,γ,..., τὰ μέτρα αὐτῶν (θετικοὺς ἀριθμούς), μετρηθέντων μὲ μίαν καὶ τὴν αὐτὴν μονάδα.

Οὕτω π.χ., ἂν α,β,γ,δ εἶναι τμήματα, γράφοντες $3\alpha^2 + \gamma\delta$ ἐννοοῦμεν τὸν ἀριθμὸν $3(\text{μετρ. } \alpha)^2 + (\text{μετρ.}\gamma)(\text{μετρ.}\delta.)$ ἢ γράφοντες $\frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\beta}$ ἐννοοῦμεν $\frac{1}{\text{μετρ.}\alpha} + \frac{2}{\text{μετρ.}\beta}$ ἢ γράφοντες $\sqrt{\alpha\beta}$ ἐννοοῦμεν τὸν ἀριθμὸν $\sqrt{\text{μετρ.}\alpha.\text{μετρ.}\beta}$.

β΄) **Γεωμετρικαὶ σχέσεις. Μία σχέσις συνδέουσα τὰ μέτρα διαφόρων τμημάτων (ἢ ἀποστάσεων), δηλ. μία «μετρικὴ σχέσις», λέγεται «γεωμετρικὴ σχέσις», ὅταν ἀληθεύῃ δι᾽ οἱανδήποτε μονάδα μετρήσεως.** Διὰ νὰ συμβαίνῃ δὲ τοῦτο, ἀρκεῖ νὰ ἀνάγεται εἰς σχέσιν λόγων, διότι ὁ λόγος δύο τμημάτων εἶναι παντελῶς ἀνεξάρτητος τῆς μονάδος μετρήσεως τῶν μηκῶν.

Π.χ ἡ σχέσις $\alpha\beta\gamma + \delta^3 = \sqrt{2}\cdot\alpha^2\cdot\varepsilon$ εἶναι γεωμετρικὴ σχέσις μεταξὺ τῶν τμημάτων α,β,γ,δ,ε, διότι ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὴν $\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha^2\varepsilon} + \frac{\delta^3}{\alpha^2\varepsilon} = \sqrt{2}$ ἢ $\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\gamma}{\varepsilon} + \frac{\delta}{\alpha}\cdot\frac{\delta}{\alpha}\cdot\frac{\delta}{\varepsilon} = \sqrt{2}$ καὶ συνεπῶς, ἂν ἀληθεύῃ διὰ μίαν μονάδα μετρήσεως τῶν τμημάτων, ἀληθεύει καὶ διὰ πᾶσαν ἄλλην μονάδα μετρήσεως (ἀφοῦ οἱ λόγοι δὲν μεταβάλλονται μὲ τὴν ἀλλαγὴν τῆς μονάδος).

Μία μετρικὴ σχέσις f(α,β,γ,...)= 0 μεταξὺ τμημάτων α,β,γ,...,διὰ νὰ εἶναι γεωμετρική, πρέπει, ἂν τὸ f εἶναι πολυώνυμον, νὰ εἶναι **ὁμογενὲς** πολυώνυμον ὡς πρὸς τὰς μεταβλητὰς α,β,γ... ἢ γενικώτερον ἡ f νὰ εἶναι ὁμογενὴς συνάρτησις.

γ΄) Εἰς τὰς μετρικὰς σχέσεις τῆς γεωμετρίας, **ἡ μονὰς εἶναι ἐπουσιώδης,** διότι πᾶσαι αἱ γεωμετρικαί, μετρικαὶ σχέσεις μεταξὺ τμημάτων εἶναι ὁμογενεῖς (ἀνάγονται εἰς σχέσεις λόγων) καὶ συνεπῶς εἶναι ἀνεξάρτητοι τῆς μονάδος. Ἀπὸ οὐδὲν γεωμετρικὸν θεώρημα προκύπτει μὴ ὁμογενὴς σχέσις τμημάτων.

δ΄) **Μία μὴ ὁμογενὴς σχέσις** μεταξὺ τῶν μέτρων τμημάτων, π.χ. $\alpha^2 + \beta$

$= \gamma\sqrt{2}$ **δὲν εἶναι γεωμετρικὴ σχέσις** μεταξὺ τῶν τμημάτων, διότι δυνατὸν νὰ ἰσχύῃ διὰ μίαν ὡρισμένην μονάδα μετρήσεως, ἀλλὰ δὲν θὰ ἰσχύῃ, ὅταν τὰ α,β,γ μετρηθοῦν μὲ ἄλλην μονάδα.

ε΄) Παράδειγμα. Ἔστωσαν δύο οἱαδήποτε τμήματα α καὶ β.

Δυνάμεθα τότε νὰ κατασκευάσωμεν μίαν μονάδα μετρήσεως d, διὰ τὴν ὁποίαν νὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις $\alpha = \beta^2$.

Πράγματι ἀρκεῖ νὰ κατασκευάσωμεν τὸ τέταρτον ἀνάλογον τμῆμα d τῆς ἀναλογίας $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{d}$ (§50), ὁπότε μὲ μονάδα τὸ d ἡ ἀναλογία γράφεται $\frac{\mu\epsilon\tau\rho(\alpha)}{\mu\epsilon\tau\rho(\beta)} = \mu\epsilon\tau\rho(\beta)$ ἢ $\mu\epsilon\tau\rho\,(\alpha) = (\mu\epsilon\tau\rho.\ \beta)^2$ ἢ μὲ τὴν ἁπλοποιημένην γραφήν, $\alpha = \beta^2$. Ὥστε διὰ δύο τυχόντα τμήματα πάντοτε ἰσχύει $\alpha = \beta^2$ μὲ κατάλληλον μονάδα μετρήσεως τῶν μηκῶν. Ἂν ἀλλάξῃ ἡ μονάς, ἡ σχέσις $\alpha = \beta^2$ παύει νὰ ἰσχύῃ, διότι $\alpha = \beta^2 \Longleftrightarrow \frac{\mu\epsilon\tau\rho.\alpha}{\mu\epsilon\tau\rho.\beta} = \mu\epsilon\tau\rho.\ \beta$ (μὲ μονάδα d) καὶ ὅταν ἀλλάξῃ ἡ μονάς, ὁ μὲν λόγος $\frac{\mu\epsilon\tau\rho.\alpha}{\mu\epsilon\tau\rho.\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$ (§ 42) δὲν μεταβάλλεται, ἐνῷ τὸ μετρ. β ἀλλάζει (§ 42)). Ἡ σχέσις $\alpha = \beta^2$ **δὲν εἶναι** μετρική—γεωμετρικὴ σχέσις μεταξὺ τῶν τμημάτων α καὶ β.

ς΄) **Σταθερὸν γινόμενον.** Λέγομεν ὅτι δύο μεταβλητὰ τμήματα x καὶ y ἔχουν σταθερὸν γινόμενον, ὅταν ὑπάρχουν δύο σταθερὰ τμήματα α καὶ β τοιαῦτα, ὥστε διὰ πᾶν ζεῦγος (x, y) τῶν μεταβλητῶν τμημάτων νὰ ἰσχύῃ ἡ μετρικὴ σχέσις: $xy = \alpha\beta$.

ζ΄) **Τετράγωνον τμήματος α** καλοῦμεν τὸ τετράγωνον τοῦ μέτρου τοῦ τμήματος α καὶ τὸ παριστῶμεν ἁπλῶς μὲ $\alpha^2$. Ὡς εἴδομεν, εἰς τὰς γεωμετρικὰς σχέσεις ἡ ἐκλογὴ τῆς μονάδος δὲν ἔχει σημασίαν, διὰ τοῦτο καὶ ἡ μονὰς μετρήσεως τῶν μηκῶν δὲν ἀναφέρεται.

η΄) Τμῆμα λ λέγεται **μέσον ἀνάλογον** δύο ἄλλων τμημάτων μ καὶ ν, ὅταν τὸ τετράγωνόν του ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν δύο ἄλλων:

$$\boxed{\lambda^2 = \mu\nu.}$$

(Ἐπειδὴ $\lambda^2 = \mu\nu \Longleftrightarrow \frac{\mu}{\lambda} = \frac{\lambda}{\nu}$, δηλ. τὸ λ ἵσταται εἰς τὸ μέσον τῆς ἀναλογίας, ἡ ὀνομασία του ὡς μέσου ἀναλόγου δικαιολογεῖται).

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

308. Τὰ κέντρα βάρους τῶν τεσσάρων τριγώνων, εἰς τὰ ὁποῖα κυρτὸν τετράπλευρον διαιρεῖται ὑπὸ τῶν διαγωνίων του, εἶναι κορυφαὶ παραλληλογράμμου.

309. Ἂν δύο εὐθεῖαι τέμνωνται ὑπὸ παρ/λων ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ οὕτως, ὥστε αἱ διαγώνιοι ΒΓ, ΔΕ, ΖΗ νὰ εἶναι παρ/λοι, τότε θὰ εἶναι:

$$\text{ΔΖ}^2 = \text{ΒΔ}.\text{ΖΘ}.$$

310. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν ἐκ τυχόντος σημείου Δ τῆς ΑΒ τὸ τμῆμα ΔΕ//ΑΓ (Ε ἐπὶ τῆς ΒΓ), κατόπιν ὁμοίως τὸ ΕΖ//ΑΒ, τὸ ΖΗ//ΒΓ, τὸ ΗΘ//ΑΓ, τὸ ΘΙ//ΑΒ. Νὰ δειχθῇ ὅτι ΔΙ//ΒΓ.

311. Ἐν τῷ τραπεζίῳ ΑΒΓΔ, ἐὰν ἑνώσωμεν τὰ ἄκρα Α καὶ Δ μιᾶς τῶν μὴ παρ|λων πλευρῶν μὲ τὸ τυχὸν σημεῖον Ε τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς ΒΓ δι' εὐθειῶν ΑΕ καὶ ΔΕ, αἱ πρὸς τὰς εὐθείας ταύτας ἀγόμεναι παρ|λοι ἐκ τῶν κορυφῶν Γ καὶ Β ἀντιστοίχως συναντῶνται ἐπὶ τῆς ΑΔ.

312. Ἐὰν εὐθεῖα παρ|λος τῇ διαμέσῳ ΑΔ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ τέμνῃ τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς τὰ Ε καὶ Ζ, θὰ εἶναι : $\frac{ΑΕ}{ΑΒ} = \frac{ΑΖ}{ΑΓ}$.

313. Ἂν διὰ τοῦ κοινοῦ σημείου Ε τῶν διαγωνίων τραπεζίου ἀχθῇ παρ|λος πρὸς τὰς βάσεις, τὸ ἐν τῷ τραπεζίῳ τμῆμα τῆς παρ/λου διχοτομεῖται ὑπὸ τοῦ Ε.

(**Ὑποδ.** Τὰ δύο μέρη, εἰς ἃ τὸ Ε χωρίζει τὸ ἐν λόγῳ τμῆμα, νὰ συγκριθοῦν πρὸς τὴν μίαν τῶν βάσεων τοῦ τραπεζίου τῇ βοηθείᾳ ὁμοίων τριγώνων).

314. Ἐὰν εἰς κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἀχθῇ διὰ τοῦ Γ παράλληλος τῇ ΑΒ συναντῶσα τὴν ΒΔ εἰς τὸ Ο καὶ ἐκ τοῦ Ο παράλληλος τῇ ΑΔ συναντῶσα εἰς τὸ Ε τὴν ἐκ τοῦ Β ἀγομένην παράλληλον τῇ ΓΔ, δείξατε ὅτι τὸ Ε κεῖται ἐπὶ τῆς διαγωνίου ΑΓ.

(**Ὑποδ.** Ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ἡ ἰσοδύναμος πρότασις: ἂν ἐκ τοῦ Ο ἀχθῇ ||ΑΔ, τέμνουσα τὴν ΑΓ εἰς Ε, τότε ΒΕ||ΓΔ. Διὰ νὰ δειχθῇ τοῦτο, ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι ΚΒ/ΚΔ=ΚΕ/ΚΓ, ὅπου Κ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαγωνίων).

315. Δοθέντος ἡμικυκλίου φέρομεν ἐφαπτομένας εἰς τὰ ἄκρα τῆς διαμέτρου καὶ τρίτην ἐφαπτομένην εἰς τυχὸν σημεῖον Μ τῆς ἡμιπεριφερείας. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ κοινὸν σημεῖον Ε τῶν διαγωνίων τοῦ σχηματιζομένου τραπεζίου τέμνει δίχα τὴν ἐκ τοῦ Μ κάθετον ἐπὶ τὴν διάμετρον.

(**Ὑποδ.** Ἐὰν ΑΒΓΔ τὸ σχηματιζόμενον τραπέζιον ($ΒΓ \perp ΑΒ$, $ΑΔ \perp ΑΒ$), δέον νὰ δειχθῇ πρῶτον ὅτι $ΜΕ \perp ΑΒ$. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ: ΕΑ : ΕΓ = ΜΔ : ΜΓ. Χρησιμοποιοῦμεν τὴν ὁμοιότητα: τρ.ΕΔΑ $\approx$ τρ.ΕΓΒ).

316. Τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων τυχόντος σημείου Μ περιφερείας ἀπὸ δύο ἐφαπτομένας αὐτῆς ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἀποστάσεως τοῦ σημείου ἀπὸ τὴν χορδὴν τῶν ἐπαφῶν.

(**Ὑποδ.** Ἂν ΜΓ, ΜΔ, ΜΕ αἱ τρεῖς ἀποστάσεις, ἡ ἀποδεικτέα σχέσις $ΜΕ^2 = ΜΓ \cdot ΜΔ \Longleftrightarrow \frac{ΜΕ}{ΜΓ} = \frac{ΜΔ}{ΜΕ}$. Ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι τρ.ΜΕΓ $\approx$ τρ.ΜΕΔ).

317. Τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων σημείου περιφερείας ἀπὸ τὰς πλευρὰς πολυγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς ταύτην ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων τοῦ αὐτοῦ σημείου ἀπὸ τὰς ἐφαπτομένας τῆς περιφερείας τὰς ἀγομένας εἰς τὰς κορυφὰς τοῦ πολυγώνου τούτου.

(**Ὑποδ.** Νὰ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ἡ προηγουμένη ἄσκησις).

318. Τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων σημείου περιφερείας ἀπὸ τοὺς φορεῖς δύο ἀπέναντι πλευρῶν ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὴν τετραπλεύρου ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων τοῦ αὐτοῦ σημείου ἀπὸ τοὺς φορεῖς τῶν δύο ἄλλων ἀπέναντι πλευρῶν.

(**Ὑποδ.** Ἂν ΜΕ.ΜΖ = ΜΗ.ΜΘ ἡ ἀποδεικτέα σχέσις, ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι $\frac{ΜΕ}{ΜΗ} = \frac{ΜΘ}{ΜΖ}$ καὶ πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι ΔΜΕΘ $\approx$ ΔΜΗΖ).

319. Ἂν γραφῇ ἡμιπεριφέρεια ἔχουσα κέντρον τὸ μέσον Κ τῆς βάσεως ΒΓ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ ἐφαπτομένη τῶν ἴσων πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ εἰς Δ καὶ Ε, εἰς δὲ σημεῖον Μ τοῦ τόξου $\widehat{ΔΕ}$ τῆς ἡμιπεριφερείας ἀχθῇ ἐφαπτομένη τέμνουσα τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ εἰς Ζ καὶ Η, τότε θὰ εἶναι: $ΒΖ.ΓΗ = ΒΚ^2$.

('Υποδ. 'Αρκεῖ νὰ δειχθῇ : $\frac{BZ}{BK} = \frac{K\Gamma}{\Gamma H}$ καὶ πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι τρ.ΒΖΚ ≈ τρ.ΚΗΓ).

320. Ἐπὶ περιφερείας δίδονται τρία σημεῖα Α, Β, Γ καὶ αἱ προβολαὶ αὐτῶνΗ,Μ,Ν, τοῦ μὲν πρώτου ἐπὶ τὴν ευθΒΓ, τῶν δὲ δύο ἄλλων ἐπὶ τὴν διάμετρον ΑΑ'. Νὰ δειχθῇ ὅτι: $AH^2 = AM.AN$.

('Υποδ. 'Αρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι τρ.ΑΗΜ ≈ τρ.ΑΗΝ).

321. Νὰ κατασκευασθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον, οὗτινος δίδεται τὸ ἄθροισμα τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους καὶ ἡ γωνία τῆς κορυφῆς ἢ ἡ ἀκτὶς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου ἢ μία τῶν ἴσων πλευρῶν.

322. Ἐπὶ τῶν καθέτων πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ ὀρθογ. τριγώνου γράφομεν ἡμιπεριφερείας ἐκτὸς αὐτοῦ. Διὰ τοῦ Α ἄγεται εὐθεῖα τέμνουσα εἰς Δ καὶ Ε τὰς ἡμιπεριφερείας. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τοῦ σημείου Μ διαιροῦντος τὸ τμῆμα ΔΕ εἰς σταθερὸν λόγον μ : ν, δηλ. τοιούτου, ὥστε $\frac{\Delta M}{ME} = \frac{\mu}{\nu}$, ὅπου μ,ν δοθέντα τμήματα.

323. Ἐν ἐπιπέδῳ δίδονται δύο παράλληλοι (ε) καὶ (ε') καὶ σημεῖον Σ ἐκτὸς τῆς ταινίας αὐτῶν. Διὰ τοῦ Σ ἄγομεν εὐθεῖαν τέμνουσαν τὰς (ε) καὶ (ε') ἀντιστοίχως εἰς Α καὶ Α' καὶ ἐπὶ τῆς εἰς τὸ Α' καθέτου ἐπὶ τὴν ΣΑ' λαμβάνομεν σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε Α'Μ = ΣΑ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τῶν Μ.

324. Νὰ δειχθῇ ὅτι δύο τρίγωνα μὲ ἀναλόγους διαμέσους εἶναι ὅμοια.

325. Ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνοῦσα τὰ μέσα Μ καὶ Ν τῶν βάσεων τραπεζίου διέρχεται διὰ τοῦ κοινοῦ σημείου Ε τῶν διαγωνίων καὶ διὰ κοινοῦ σημείου Ζ τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν προεκτεινομένων.

326. Δοθεισῶν δύο εὐθειῶν τεμνομένων ἐκτὸς τοῦ χάρτου σχεδιάσεως ν' ἀχθῇ εὐθεῖα διερχομένη διὰ δοθέντος σημείου καὶ διὰ τοῦ σημείου τομῆς τῶν δύο πρώτων εὐθειῶν.

327. Δοθέντος ὀξυγωνίου τριγώνου ΑΒΓ θεωροῦμεν τὰ ὀρθογώνια, ὧν δύο κορυφαὶ κεῖνται ἐπὶ τῆς βάσεως ΒΓ, αἱ δὲ ἄλλαι δύο ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ. Ποῖον τὸ σύνολον τῶν κέντρων τῶν ὀρθογωνίων τούτων;

328. Δοθέντος κυρτοῦ τετραπλεύρου ὑπάρχουν ἄπειρα παραλληλόγραμμα ἔχοντα τὰς κορυφάς των ἐπὶ τῶν πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου καὶ τὰς πλευράς των παρ|λους πρὸς τὰς διαγωνίους τοῦ τετραπλεύρου. Ποῖον τὸ σύνολον τῶν κέντρων τῶν παραλληλογράμμων τούτων;

329. Δίδεται περιφέρεια (Κ) καὶ δύο εὐθεῖαι (ε) καὶ (δ), ἐξ ὧν ἡ (ε) εἶναι ἐξωτερικὴ τῆς (Κ). Ζητεῖται νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα ||(δ), τέμνουσα τὴν (Κ) εἰς Α καὶ Β καὶ τὴν (ε) εἰς Γ (κατὰ σειρὰν) οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{\mu}{\nu}$, ὅπου μ καὶ ν δοθέντα τμήματα.

330. Κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ αἱ γωνίαι $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Delta}$ εἶναι ὀρθαί. Ἡ ἐκ τοῦ Β ἀγομένη κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ τέμνει τὴν πλευρὰν ΑΔ εἰς Ε καὶ ἡ ἐκ τοῦ Δ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ τέμνει τὴν πλευρὰν ΒΓ εἰς Ζ. Ἐὰν Τ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαγωνίων τοῦ τετραπλεύρου, νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ Ε, Τ, Ζ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

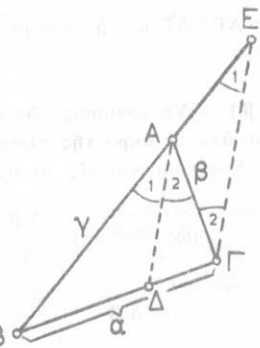
## ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΕΣΩΤΕΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΕΞΩΤΕΡΙΚΗΣ ΔΙΧΟΤΟΜΟΥ ΓΩΝΙΑΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

**58. α') Θεώρημα.— Ἡ ἐσωτερικὴ διχοτόμος ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ συναντᾷ τὴν ἀπέναντι πλευρὰν ΒΓ εἰς σημεῖον Δ τοιοῦτον, ὥστε**

$$\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma}=\frac{AB}{A\Gamma}$$

**(χωρίζει τὴν ΒΓ εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν εἰς αὐτὰ προσκειμένων πλευρῶν).**

*Ἀπόδειξις*. Ὁ λόγος ΔΒ/ΔΓ μεταφέρεται διὰ τῆς ΓΕ, παρ/λου τῇ ΔΑ, ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΑ (σχ. 58), εἰς ΒΑ/ΑΕ (θεώρ. τοῦ Θαλοῦ), ἤτοι, $\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma}=\frac{AB}{AE}$. Ἐπειδὴ ὅμως $\widehat{E}_1=\widehat{A}_1$ (ἐντὸς - ἐκτὸς τῶν παρ/λων) $=\widehat{A}_2$ (διότι ΑΔ διχοτόμος) $=\widehat{\Gamma}_2$ (ἐντὸς ἐναλλὰξ) $\Rightarrow \widehat{E}_1=\widehat{\Gamma}_2$ $\Rightarrow AE=A\Gamma$ καὶ ἡ ἀνωτέρω ἀναλογία $\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma}=\frac{AB}{AE}$ καθίσταται $\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma}=\frac{AB}{A\Gamma}$.




Σχ. 58

**β') Συναρτήσει τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου, νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ τμήματα, εἰς ἃ χωρίζονται αἱ πλευραὶ ὑπὸ τῶν ἐσωτερικῶν διχοτόμων.**— Ἀναφερόμενοι εἰς τὸ σχ. 58 ἔχομεν :

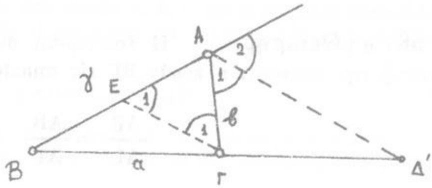
$$\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma}=\frac{AB}{A\Gamma}\ (\text{ὡς ἐδείχθη}) \Rightarrow \frac{\Delta B}{AB}=\frac{\Delta \Gamma}{A\Gamma}\ \text{ἤ}:$$

$$\frac{\Delta B}{\gamma}=\frac{\Delta \Gamma}{\beta}=\frac{\Delta B+\Delta \Gamma}{\beta+\gamma}=\frac{\alpha}{\beta+\gamma}\Rightarrow B\Delta=\frac{\alpha\gamma}{\beta+\gamma},\quad \Delta\Gamma=\frac{\alpha\beta}{\beta+\gamma}.$$

**59. α') Θεώρημα.— Ἡ ἐξωτερικὴ διχοτόμος ΑΔ΄ τριγώνου ΑΒΓ, συναντᾷ τὴν προέκτασιν τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς ΒΓ εἰς σημεῖον Δ΄ τοιοῦτον, ὥστε**

$$\frac{\Delta' B}{\Delta' \Gamma}=\frac{AB}{A\Gamma}$$

*'Απόδειξις.* Ὁ λόγος $\dfrac{Δ'Β}{Δ'Γ}$ μεταφέρεται διὰ τῆς ΓΕ παραλλήλου πρὸς τὴν ΑΔ' ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΑ εἰς τὸν ἴσον λόγον $\dfrac{ΑΒ}{ΑΕ}$ (Θεώρ. Θαλοῦ), ἤτοι $\dfrac{Δ'Β}{Δ'Γ}=\dfrac{ΑΒ}{ΑΕ}$.



Σχ. 59

Ἐκ τῆς σειρᾶς ἰσοτήτων: $\widehat{Γ}_1=\widehat{Α}_1=\widehat{Α}_2=\widehat{Ε}_1 \Rightarrow \widehat{Γ}_1=\widehat{Ε}_1 \Rightarrow ΑΕ=ΑΓ$ καὶ ἡ ἀνωτέρω ἀναλογία καθίσταται $\dfrac{Δ'Β}{Δ'Γ}=\dfrac{ΑΒ}{ΑΓ}$

**β') — Ὑπολογισμὸς τῶν ἀποστάσεων τοῦ ποδὸς τῆς ἐξωτερικῆς διχοτόμου ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς πλευρᾶς, συναρτήσει τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου.**

Ἀναφερόμενοι εἰς τὸ σχ. 59 ἔχομεν:

$$\frac{Δ'Β}{Δ'Γ}=\frac{γ}{β}\ (\text{ὡς ἐδείχθη})\ ἢ\ \frac{Δ'Β}{γ}=\frac{Δ'Γ}{β}=\frac{Δ'Β-Δ'Γ}{γ-β}=\frac{α}{γ-β}\quad (γ>β)$$

$$\Rightarrow Δ'Β=\frac{αγ}{|γ-β|},\quad Δ'Γ=\frac{αβ}{|γ-β|}\quad (γ\neq β).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

331. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, οὗτινος δίδεται ἡ πλευρὰ α θέσει καὶ μεγέθει, τὸ σημεῖον τομῆς τῆς πλευρᾶς ταύτης μετὰ τῆς ἀπέναντι διχοτόμου καὶ τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς β.

332. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ δύο πλευρῶν β, γ καὶ τῆς ἐσωτερικῆς διχοτόμου $δ_Α$.

333. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ δύο πλευρῶν β, γ καὶ τῆς ἐξωτερικῆς διχοτόμου $δ'_Α$.

334. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ, οὗτινος ΑΒ=8 ἑκ., ἡ ἐκ τῆς Α διχοτόμος =5 ἑκ., ἡ δὲ ἐκ τοῦ μέσου τῆς ΒΓ κάθετος τῇ διχοτόμῳ τέμνει τὴν ΑΒ εἰς σημεῖον Π ἀπέχον τοῦ Β ἀπόστασιν ΠΒ=2 ἑκ.

335. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ, οὗτινος ἡ ΑΒ=10 ἑκ., ἡ ἐξωτερικὴ διχοτόμος ΑΔ=7 ἑκ., ἡ δὲ ἐκ τοῦ μέσου τῆς ΒΓ κάθετος ἐπὶ τὴν διχοτόμον ταύτην νὰ τέμνῃ τὴν ΑΒ εἰς σημεῖον Π τοιοῦτον, ὥστε ΠΒ=8 ἑκ.

## 60. Διαίρεσις διανύσματος ἐσωτερικῶς καὶ ἐξωτερικῶς εἰς ἀριθμητικὸν λόγον λ.

**α') Ὁρισμοί.** (Ι). **Σημεῖον Γ κεί-**

**μενον ἐπὶ τοῦ φορέως ἑνὸς διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ καὶ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ τμήματος** *AB* **λέγομεν ὅτι διαιρεῖ ἐσωτερικῶς τὸ $\overrightarrow{AB}$ εἰς ἀριθμητικὸν λόγον λ, ὅταν**

$$\frac{\Gamma A}{\Gamma B} = \lambda \qquad (\lambda > 0).$$

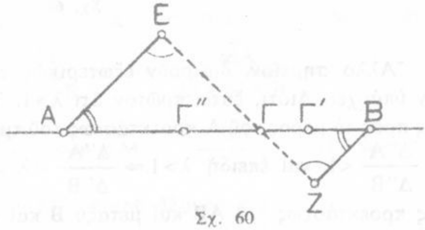
(Ἐὰν $\frac{\Gamma B}{\Gamma A} = \lambda$, τότε τὸ Γ διαιρεῖ ἐσωτερικῶς εἰς λόγον λ, ὄχι τὸ $\overrightarrow{AB}$ ἀλλὰ τὸ $\overrightarrow{BA}$).

(ΙΙ). **Σημεῖον Δ κείμενον ἐπὶ τοῦ φορέως ἑνὸς διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ καὶ εἰς τὴν προέκτασιν τοῦ τμήματος ΑΒ λέγομεν ὅτι διαιρεῖ τὸ $\overrightarrow{AB}$ ἐξωτερικῶς εἰς ἀριθμητικὸν λόγον λ, ὅταν**

$$\frac{\Delta A}{\Delta B} = \lambda \qquad (\lambda > 0 \text{ καὶ } \neq 1).$$

β′) (Θ) — **Δοθέντος διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ καὶ ἑνὸς ἀριθμητικοῦ λόγου λ ὑπάρχει ἓν μόνον σημεῖον διαιροῦν ἐσωτερικῶς τὸ $\overrightarrow{AB}$ εἰς λόγον λ καὶ ἓν μόνον σημεῖον διαιροῦν ἐξωτερικῶς τὸ $\overrightarrow{AB}$ εἰς λόγον λ, τοῦ δευτέρου σημείου ὑπάρχοντος ἐφ' ὅσον λ≠1.**

*Ἀπόδειξις.* i) Δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ δοθεὶς ἀριθμητικὸς λόγος λ ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον δύο δεδομένων τμημάτων, ἤτοι $\lambda = \frac{\mu}{\nu}$, ὅπου μ, ν δεδομένα τμήματα. (Τοῦ ν ἐκλεγομένου αὐθαιρέτως, ὑπάρχει τμῆμα $\mu = \lambda \cdot \nu \Rightarrow \mu/\nu = \lambda$ (βλ. § 44)).



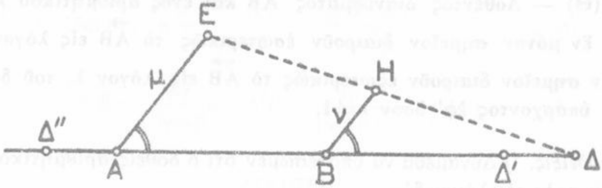
Σχ. 60

Ἐὰν φέρωμεν ἐκ τῶν Α καὶ Β δύο παράλληλα καὶ ἀντίρροπα τμήματα, τὰ ΑΕ=μ καὶ ΒΖ=ν (σχ. 60), τότε τὸ τμῆμα ΕΖ τέμνει τὸ τμῆμα ΑΒ εἴς τι σημεῖον Γ (ἐσωτερικὸν) καὶ τὰ τρίγωνα ΓΑΕ, ΓΒΖ εἶναι ὅμοια μὲ ὁμολόγους πλευρὰς ΑΓ μὲ ΓΒ καὶ ΑΕ μὲ ΒΖ. Ὅθεν:

$\frac{\Gamma A}{\Gamma B} = \frac{AE}{BZ}$ ἢ $\frac{\Gamma A}{\Gamma B} = \frac{\mu}{\nu} = \lambda$. Ὥστε τὸ Γ διαιρεῖ τὸ $\overrightarrow{AB}$ ἐσωτερικῶς εἰς λόγον λ.

Ἄλλο σημεῖον διαιροῦν ἐσωτερικῶς τὸ $\overrightarrow{AB}$ εἰς λόγον λ δὲν ὑπάρχει. Διότι, ἂν θεωρήσωμεν σημεῖον Γ′ μεταξὺ Γ καὶ Β, τότε $\dfrac{\Gamma'A}{\Gamma'B} > \dfrac{\Gamma A}{\Gamma B}$, διότι καὶ $\Gamma'A > \Gamma A$ καὶ $\Gamma'B < \Gamma B$, δηλ. τὸ Γ′ διαιρεῖ τὸ $\overrightarrow{AB}$ εἰς μεγαλύτερον τοῦ λ λόγον. Ἂν δὲ θεωρήσωμεν σημεῖον Γ″ μεταξὺ Α καὶ Γ, τότε $\dfrac{\Gamma''A}{\Gamma''B} < \dfrac{\Gamma A}{\Gamma B}$. Ἄρα τὸ Γ εἶναι μοναδικόν.

ii) Ἐὰν φέρωμεν ἐκ τῶν Α καὶ Β δύο παράλληλα καὶ **ὁμόρροπα** τμήματα (διανύσματα), τὰ $AE = \mu$ καὶ $BH = \nu$ ὅπου $\mu \neq \nu$ (διότι $\lambda \neq 1$), τότε ἡ εὐθεῖα ΕΗ τέμνει τὴν **προέκτασιν** τοῦ τμήματος ΑΒ εἴς τι σημεῖον Δ καὶ ἐκ τῶν προκυπτόντων ὁμοίων τριγώνων ΔΑΕ, ΔΒΗ ἔχομεν ὅτι : $\dfrac{\Delta A}{\Delta B} = \dfrac{AE}{BH}$ ἢ $\dfrac{\Delta A}{\Delta B} = \dfrac{\mu}{\nu}$. Ἤτοι τὸ Δ διαιρεῖ **ἐξωτερικῶς** τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ εἰς ἀριθμητικὸν λόγον λ.

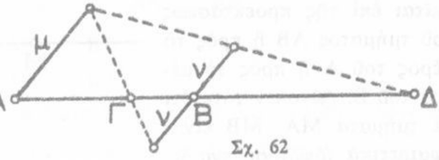



Σχ. 61

Ἄλλο σημεῖον, διαιροῦν ἐξωτερικῶς τὸ $\overrightarrow{AB}$ εἰς τὸν ἴδιον λόγον λ, δὲν ὑπάρχει. Διότι, ἔστω πρῶτον ὅτι $\lambda > 1$. Τότε διὰ κάθε σημεῖον Δ″ ἐπὶ τῆς πρὸς τὸ μέρος τοῦ Α προεκτάσεως τοῦ τμήματος ΑΒ θὰ εἶναι $\Delta''A < \Delta''B \Rightarrow \dfrac{\Delta''A}{\Delta''B} < 1$ καὶ ἐπειδὴ $\lambda > 1 \Rightarrow \dfrac{\Delta''A}{\Delta''B} < \lambda$. Ἔστω τώρα σημεῖον Δ′ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τοῦ ΑΒ καὶ μεταξὺ Β καὶ Δ κείμενον. Τότε, ἂν ὑποτεθῇ ὅτι $\dfrac{\Delta'A}{\Delta'B} = \lambda$, καταλήγομεν εἰς ἄτοπον. Διότι θὰ ἦτο : $\dfrac{\Delta A}{\Delta B} = \dfrac{\Delta'A}{\Delta'B} = \dfrac{\Delta A - \Delta'A}{\Delta B - \Delta'B} = \dfrac{\Delta\Delta'}{\Delta\Delta'} = 1$, δηλ. $\dfrac{\Delta A}{\Delta B} = 1$ ἢ $\Delta A = \Delta B$, ὅπερ ἄτοπον. Ὁμοίως δεικνύομεν ὅτι οὔτε πέραν τοῦ Δ ὑπάρχει σημεῖον διαιροῦν τὸ $\overrightarrow{AB}$ εἰς λόγον λ.

Ἐὰν πάλιν $\lambda < 1$, τότε τὸ Δ ἔρχεται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Α καὶ ἡ ἀπόδειξις τῆς μοναδικότητος τοῦ Δ εἶναι ὁμοία.

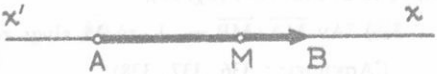
γ΄) Τὸ σχ. 62 δεικνύει τὴν διαίρεσιν τοῦ $\overrightarrow{AB}$ ἐσωτερικῶς καὶ ἐξωτερικῶς εἰς λόγον μ/ν.



Σχ. 62

## 61. Διαίρεσις διανύσματος εἰς ἀλγεβρικὸν λόγον λ.

α΄) Ἔστω $\overrightarrow{AB}$ διάνυσμα κείμενον ἐπὶ ἄξονος xx΄ καὶ M τυχὸν σημεῖον τοῦ ἄξονος. Λέγομεν ὅτι τὸ M διαιρεῖ τὸ $\overrightarrow{AB}$ εἰς ἀλγεβρικὸν λόγον λ, ὅταν



Σχ. 63

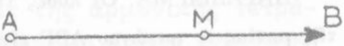
$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \lambda \quad (\lambda \text{ σχετικὸς ἀριθμός}),$$

δηλ. ὅταν ὁ λόγος τῶν ἀλγεβρικῶν τιμῶν τῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ ἰσοῦται μὲ τὸν σχετικὸν ἀριθμὸν λ.

**β΄) (Θ) — Ὑπάρχει ἓν μόνον σημεῖον τῆς εὐθείας AB, τὸ ὁποῖον διαιρεῖ τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ εἰς $\boxed{\text{ἀλγεβρικὸν}}$ λόγον λ δοθέντα καὶ $\neq 1$.**

*Ἀπόδειξις.* Ἄς ζητήσωμεν ἐπὶ τοῦ x΄x (σχ. 63) σημεῖον M τοιοῦτον, ὥστε $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \lambda\ (\neq 1)$. Ἔχομεν $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \lambda \iff \frac{\overline{MA}}{\overline{MA} + \overline{AB}} = \lambda$ (Θ. Chasles) $\iff \overline{MA} = \frac{-\overline{AB}\cdot\lambda}{\lambda - 1} \iff \overline{AM} = \frac{\overline{AB}\cdot\lambda}{\lambda - 1}$. Ἡ τελευταία σχέσις ὁρίζει ἓν μόνον σημεῖον M ἐπὶ τοῦ ἄξονος x΄x.

**γ΄) Παρατηρήσεις :** 1ον) Ἐὰν $\lambda < 0$, τὰ διανύσματα $\overrightarrow{MA}$ καὶ $\overrightarrow{MB}$ εἶναι ἀντίρροπα καὶ τὸ M κεῖται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ τμήματος AB (σχ. 64).

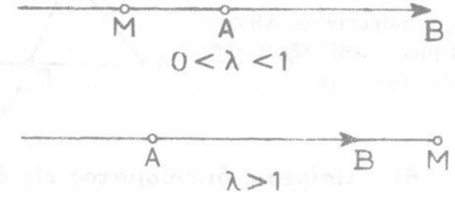


Τὰ $\overrightarrow{MA}$ καὶ $\overrightarrow{MB}$ ἔχουν ἀντιθέτους φορὰς ($\lambda < 0$)

Σχ. 64

Τὰ τμήματα MA καὶ MB λέγονται τότε **προσθετικὰ** (ἀθροιζόμενα δίδουν τὸ AB).

2ον) Ἐὰν $\lambda > 0$, τὰ διανύσματα $\overrightarrow{MA}$ καὶ $\overrightarrow{MB}$ εἶναι ὁμόρροπα. Τὸ Μ κεῖται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τοῦ τμήματος ΑΒ ἢ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Α ἢ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Β. Λέγομεν τότε ὅτι τὰ τμήματα ΜΑ, ΜΒ εἶναι **ἀφαιρετικὰ** (ἀφαιρούμενα δίδουν τὸ ΑΒ). Τὸ Μ κεῖται πλησιέστερον πρὸς τὸ Α, ὅταν $\lambda < 1$ καὶ πλησιέστερον πρὸς τὸ Β, ὅταν $\lambda > 1$ (σχ. 65).




Σχ. 65

3ον) Ἂν $\overline{MA}/\overline{MB} = -1$, τὸ Μ εἶναι τὸ μέσον τοῦ ΑΒ.

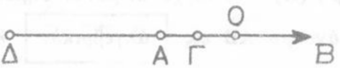
(Ἀσκήσεις : 336, 337, 338).

## ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΕΤΡΑΣ ΣΗΜΕΙΩΝ

**62. α′) Ὁρισμός. Δύο σημεῖα Γ καὶ Δ, τὰ ὁποῖα διαιροῦν τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ εἰς τὸν ἴδιον ἀριθμητικὸν λόγον, λέγομεν ὅτι εἶναι συζυγῆ ἁρμονικὰ τῶν Α καὶ Β.**

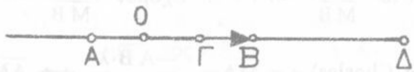
Τὸ ἓν ἐκ τῶν δύο, ἔστω Γ, εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ τμήματος ΑΒ, τὸ δὲ ἄλλο, τὸ Δ, εἶναι ἐξωτερικὸν (§ 60). Ἔχομεν δὲ

$$\frac{\Gamma A}{\Gamma B} = \frac{\Delta A}{\Delta B} = \lambda.$$




Σχ. 66

Ἐὰν $\lambda < 1$, τὰ Γ καὶ Δ κεῖνται πλησιέστερον πρὸς τὸ Α παρὰ πρὸς τὸ Β (σχ. 66). Ἐὰν $\lambda > 1$, τὰ Γ καὶ Δ κεῖνται πλησιέστερον πρὸς τὸ Β παρὰ πρὸς τὸ Α (σχ. 67, $\lambda = 2$).




Σχ. 67

**Εἰς πᾶσαν περίπτωσιν τὰ Γ καὶ Δ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ μέσου Ο τοῦ ΑΒ, ἄρα καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς μεσοκαθέτου τοῦ ΑΒ.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. **Οἱ πόδες τῆς ἐσωτερικῆς καὶ ἐξωτερικῆς διχοτόμου τῆς γωνίας $\widehat{A}$ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι συζυγῆ ἁρμονικὰ τῶν Β καὶ Γ.**

β′) **Ἰδιότης.** Θεωρήσωμεν δύο σημεῖα Γ καὶ Δ συζυγῆ ἁρμονικὰ τῶν Α καὶ Β (σχ. 67). Τότε θὰ ἔχωμεν :

$$(1) \qquad \frac{\Gamma A}{\Gamma B} = \frac{\Delta A}{\Delta B}$$

καὶ ἐναλλάσσοντες τοὺς μέσους: $\frac{\Gamma A}{\Delta A} = \frac{\Gamma B}{\Delta B}$ ἤ

$$(2) \qquad \frac{A\Gamma}{A\Delta} = \frac{B\Gamma}{B\Delta}.$$

Ἡ (2) δεικνύει ὅτι τὰ Α καὶ Β διαιροῦν εἰς ἴσους ἀριθμητικοὺς λόγους τὸ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, ἤτοι ὅτι εἶναι συζυγῆ ἁρμονικὰ τῶν Γ, Δ. Ἑπομένως:

**«Ἐὰν δύο σημεῖα Γ καὶ Δ εἶναι συζυγῆ ἁρμονικὰ τῶν σημείων Α καὶ Β, τότε καὶ τὰ Α καὶ Β εἶναι συζυγῆ ἁρμονικὰ τῶν Γ καὶ Δ».**

γ΄) **Ἁρμονικὴ τετράς.** Ἀντὶ τῆς (1) δυνάμεθα νὰ γράψωμεν:

$$(3) \qquad \frac{\overline{\Gamma A}}{\overline{\Gamma B}} = -\frac{\overline{\Delta A}}{\overline{\Delta B}}$$

δηλ. τὰ Γ καὶ Δ διαιροῦν τὸ $\overrightarrow{AB}$ εἰς ἀλγεβρικοὺς λόγους ἀντιθέτους.
Ἡ (3) γράφεται

$$(4) \qquad \frac{\overline{\Gamma A}}{\overline{\Gamma B}} : \frac{\overline{\Delta A}}{\overline{\Delta B}} = -1.$$

Λέγομεν ὅτι τὰ τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ τὰ πληροῦντα τὴν (4) ἀποτελοῦν **ἁρμονικὴν τετράδα** καὶ γράφομεν συμβολικῶς

$$(5) \qquad \boxed{(A, B, \Gamma, \Delta) = -1}$$

**Παρατηρήσεις.** Ἂν πληροῦται ἡ (5), τότε πληροῦται καὶ ἡ

$$(6) \qquad (\Gamma, \Delta, A, B) = -1$$

ἀφοῦ καὶ τὰ Α, Β εἶναι συζυγῆ ἁρμονικὰ τῶν Γ, Δ (ἐδαφ. β΄), δηλ. καὶ ἡ τετρὰς Γ,Δ, Α, Β εἶναι ἁρμονική. Ἐπίσης πληροῦται καὶ ἡ

$$(7) \qquad (B, A, \Gamma, \Delta) = -1$$

(Ἀρκεῖ νὰ ἀντιστρέψωμεν τὰ μέλη τῆς (1) τοῦ ἐδαφ. β΄).

δ΄) **Ἁρμονικὴ διαίρεσις.** Λέγομεν ὅτι τὰ Γ καὶ Δ **διαιροῦν ἁρμονικῶς τὸ τμῆμα ΑΒ**, ὅταν (Α, Β, Γ, Δ) = —1.

## 63. Χαρακτηριστικαὶ ἰδιότητες τῆς ἁρμονικῆς τετράδος.

α΄) (Θ) — **Ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα τέσσαρα συνευθειακὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν τετράδα εἶναι:**

$$(1) \qquad \overline{O\Gamma} \cdot \overline{O\Delta} = OA^2 = OB^2$$

**ὅπου Ο τὸ μέσον τοῦ ΑΒ.**

**Ἀπόδειξις.** Ἐὰν τεθῇ : $\overline{OA}=\alpha$, $\overline{OB}=-\alpha$, $\overline{O\Gamma}=\gamma$, $\overline{O\Delta}=\delta$, ἔχομεν τὰς ἀντιστρεπτὰς συνεπαγωγὰς (ἢ ἰσοδυναμίας).

$$\frac{\overline{\Gamma A}}{\overline{\Gamma B}}=-\frac{\overline{\Delta A}}{\overline{\Delta B}} \Longleftrightarrow \frac{\overline{\Gamma O}+\overline{OA}}{\overline{\Gamma O}+\overline{OB}}=-\frac{\overline{\Delta O}+\overline{OA}}{\overline{\Delta O}+\overline{OB}} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{-\gamma+\alpha}{-\gamma-\alpha}=-\frac{-\delta+\alpha}{-\delta-\alpha} \Longleftrightarrow \frac{\gamma-\alpha}{\gamma+\alpha}=\frac{\alpha-\delta}{\alpha+\delta} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\gamma-\alpha}{\alpha-\delta}=\frac{\gamma+\alpha}{\alpha+\delta} \Longleftrightarrow \frac{2\gamma}{2\alpha}=\frac{2\alpha}{2\delta} \Longleftrightarrow \gamma\delta=\alpha^2 \text{ ἤτοι } \overline{O\Gamma}\cdot\overline{O\Delta}=\overline{OA}^2 \text{ ὅ.ἔ.δ.}$$

β΄) (Θ) — **Ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα τέσσαρα ἐπ' εὐθείας σημεῖα Α, Β, Γ, Δ ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν τετράδα, εἶναι :**

$$(2) \qquad \frac{2}{\overline{AB}}=\frac{1}{\overline{A\Gamma}}+\frac{1}{\overline{A\Delta}}.$$

**Ἀπόδειξις.** Ἂν τεθῇ : $\overline{AB}=\beta$, $\overline{A\Gamma}=\gamma$, $\overline{A\Delta}=\delta$ τότε :

$$\frac{\overline{\Gamma A}}{\overline{\Gamma B}}=-\frac{\overline{\Delta A}}{\overline{\Delta B}} \Longleftrightarrow \frac{\overline{\Gamma A}}{\overline{\Gamma A}+\overline{AB}}=-\frac{\overline{\Delta A}}{\overline{\Delta A}+\overline{AB}} \Longleftrightarrow \frac{-\gamma}{-\gamma+\beta}=\frac{\delta}{-\delta+\beta}$$

$$\Longleftrightarrow \gamma\delta-\gamma\beta=-\gamma\delta+\beta\delta \Longleftrightarrow 2\gamma\delta=\beta(\gamma+\delta) \Longleftrightarrow$$

$\Longleftrightarrow \dfrac{2}{\beta}=\dfrac{\gamma+\delta}{\gamma\delta} \Longleftrightarrow \dfrac{2}{\beta}=\dfrac{1}{\gamma}+\dfrac{1}{\delta}$ (δηλ. ὁ ἀριθμὸς β εἶναι μέσος ἁρμονικὸς τῶν γ καὶ δ) ὅ.ἔ.δ.

γ΄) Ἑτέρα χαρακτηριστικὴ ἰδιότης τῆς ἁρμονικῆς τετράδος σημείων (εὐκόλως ἀποδεικνυομένη) δίδεται εἰς τὴν ἄσκ. 340.

**64. Ἕτεραι σχέσεις.** (Θ) — **Ἐὰν τὰ Γ καὶ Δ διαιροῦν τὸ $\overrightarrow{AB}$ εἰς ἀριθμητικὸν λόγον λ, τότε τὸ μέσον Η τοῦ ΓΔ διαιρεῖ τὸ $\overrightarrow{AB}$ εἰς ἀλγεβρικὸν λόγον $\lambda^2$.**

Ἀπόδειξις. Ἐπειδή, ἐξ ὑποθέσεως, τὰ Α, Β, Γ, Δ ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν τετράδα, θὰ ἔχωμεν κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα $\dfrac{2}{\overline{AB}}=\dfrac{1}{\overline{A\Gamma}}+\dfrac{1}{\overline{A\Delta}}$ ἢ $\dfrac{2}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{A\Gamma}+\overline{A\Delta}}{\overline{A\Gamma}\,.\,\overline{A\Delta}}$. Ἀλλὰ $\overline{A\Gamma}+\overline{A\Delta}=2\overline{AH}$ συνεπῶς $\dfrac{2}{\overline{AB}}=\dfrac{2\overline{AH}}{\overline{A\Gamma}\,.\,\overline{A\Delta}}$ ἤτοι :

$$(1) \qquad \overline{A\Gamma}\cdot\overline{A\Delta}=\overline{AH}\cdot\overline{AB}.$$

Ἐπειδὴ καὶ τὰ Β, Α, Γ, Δ ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν τετράδα, διὰ τοῦτο δυνάμεθα νὰ ἐναλλάξωμεν τὰ Α καὶ Β εἰς τὴν σχέσιν (1), ὁπότε

$$(2) \qquad \overline{\text{ΒΓ}} \,.\, \overline{\text{ΒΔ}} = \overline{\text{ΒΗ}} \,.\, \overline{\text{ΒΑ}}.$$

Διαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς (1) καὶ (2) λαμβάνομεν :

$$(3) \qquad \frac{\overline{\text{ΑΓ}}}{\overline{\text{ΒΓ}}} \cdot \frac{\overline{\text{ΑΔ}}}{\overline{\text{ΒΔ}}} = -\frac{\overline{\text{ΑΗ}}}{\overline{\text{ΒΗ}}} \text{ ἢ } \frac{\overline{\text{ΓΑ}}}{\overline{\text{ΓΒ}}} \cdot \frac{\overline{\text{ΔΑ}}}{\overline{\text{ΔΒ}}} = -\frac{\overline{\text{ΗΑ}}}{\overline{\text{ΗΒ}}}.$$

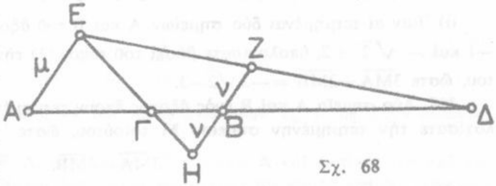
Ἐὰν π.χ. τὸ Γ εἶναι ἐσωτερικὸν καὶ τὸ Δ ἐξωτερικὸν τοῦ τμήματος ΑΒ, τότε $\frac{\overline{\text{ΓΑ}}}{\overline{\text{ΓΒ}}} = -\lambda$, $\frac{\overline{\text{ΔΑ}}}{\overline{\text{ΔΒ}}} = \lambda$ καὶ ἡ (3) γίνεται $(-\lambda)\cdot(\lambda) = -\frac{\overline{\text{ΗΑ}}}{\overline{\text{ΗΒ}}}$ ἤτοι $\frac{\overline{\text{ΗΑ}}}{\overline{\text{ΗΒ}}} = \lambda^2$.

**Παρατήρησις.** Ἡ ἰσότης (1) εἶναι ἐπίσης χαρακτηριστικὴ τῆς ἁρμονικῆς διαιρέσεως.

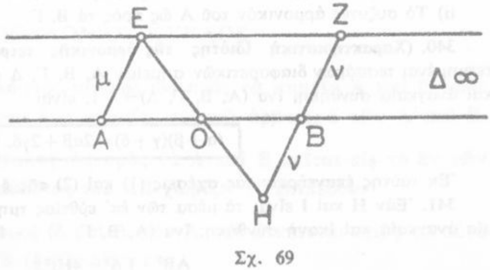
## 65. Συμβατικὰ συζυγῆ ἁρμονικὰ σημεῖα.

**α΄) (Θ) — Τὸ συζυγὲς ἁρμονικὸν ὡς πρὸς τὰ Α καὶ Β τοῦ μέσου τοῦ ΑΒ εἶναι τὸ εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν σημεῖον τῆς ευθ ΑΒ.**

*Ἀπόδειξις.* Τὸ ΑΒ διαιρεῖται ἁρμονικῶς ὑπὸ τῶν Γ καὶ Δ διὰ τῆς κατασκευῆς ἐν σχήματι 68, ὅπου μ>ν. (ΓΑ:ΓΒ = ΔΑ : : ΔΒ = μ : ν). Ὅταν ὅμως εἶναι μ = ν (σχ. 69), τότε τὸ Γ μεταβαίνει εἰς τὸ μέσον Ο τοῦ ΑΒ, ἐνῷ ἡ εὐθεῖα ΕΖ γίνεται παράλληλος πρὸς τὴν εὐθ. ΑΒ. Τὸ συζυγὲς ἁρμονικὸν τοῦ Ο, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν εὐθειῶν ΕΖ καὶ ΑΒ, ἐνῷ κατὰ τὴν Εὐκλείδειον Γεωμετρίαν δὲν ὑπάρχει, εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν (μ = ν) δύναται νὰ νοηθῇ κατὰ τὴν προβολικὴν γεω-




Σχ. 68




Σχ. 69

μετρίαν ὡς τὸ εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν σημεῖον $Δ_\infty$ τῆς εὐθείας ΑΒ (ἢ τῆς ΕΖ). (§ 55).

Θέτομεν : $\boxed{\dfrac{\overline{Δ_\infty Α}}{\overline{Δ_\infty Β}}} = -\dfrac{\overline{ΟΑ}}{\overline{ΟΒ}} = +1.$

Ἤτοι τὸ εἰς ἄπειρον σημεῖον τῆς εὐθ. ΑΒ εἶναι, κατὰ σύμβασιν, τὸ μόνον σημεῖον, τὸ ὁποῖον διαιρεῖ τὸ $\overrightarrow{ΑΒ}$ εἰς ἀλγεβρικὸν λόγον $λ = +1$.

β′) **Σύμβασις.** Διὰ νὰ ἔχουν ὅλα τὰ σημεῖα τῆς ευθ ΑΒ ἓν συζυγὲς ἁρμονικὸν ὡς πρὸς τὰ Α καὶ Β, ὁρίζομεν **ὡς συζυγὲς ἁρμονικὸν τοῦ Α αὐτὸ τοῦτο τὸ Α καὶ ὡς συζυγὲς ἁρμονικὸν τοῦ Β αὐτὸ τοῦτο τὸ Β,** διότι οὕτω πληροῦται ἡ χαρακτηριστικὴ ἰδιότης τῆς ἁρμονικῆς τετράδος τῆς § 63, α′. Ἤτοι ἡ $\overline{ΟΓ}\,.\,\overline{ΟΔ} = ΟΑ^2 = ΟΒ^2$ ἰσχύει, ὅταν $Γ \equiv Α \wedge Δ \equiv Α$ ἢ ὅταν $Γ \equiv Β \wedge Δ \equiv Β$.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

336. Ἐπ' εὐθείας δίδονται σημεῖα Ο, Α, Β. Κατασκευάσατε σημεῖον Μ μεταξὺ Α καὶ Β τοιοῦτον, ὥστε $4ΜΑ = 3ΜΒ$. Ὑπολογίσατε τὸν λόγον $\overline{ΜΑ} : \overline{ΜΒ}$. Δείξατε ὅτι $7\overline{ΟΜ} = 4\overline{ΟΑ} + 3\overline{ΟΒ}$.

337. Ἔστω ἄξων $(x'Ox, \overrightarrow{i})$ καὶ $M_1(x_1)$, $M_2(x_2)$ δύο σημεῖα αὐτοῦ ἔχοντα τετμημένας $x_1$, $x_2$ ἀντιστοίχως. i) Δείξατε ὅτι

(1) $$\overline{M_1M_2} = x_2 - x_1.$$

ii) Ἐὰν αἱ τετμημέναι δύο σημείων Α καὶ Β τοῦ ἄξονος εἶναι ἀντιστοίχως, $-\sqrt{2}-1$ καὶ $-\sqrt{2}+2$, ὑπολογίσατε βάσει τοῦ τύπου (1) τὴν τετμημένην σημείου Μ τοιούτου, ὥστε $3\overline{ΜΑ} + 2\overline{ΜΒ} = -2\sqrt{2} - 3$.

338. Δύο σημεῖα Α καὶ Β ἑνὸς ἄξονος ἔχουν τετμημένας α καὶ β ἀντιστοίχως. Ὑπολογίσατε τὴν τετμημένην σημείου Μ τοιούτου, ὥστε

$$3\overline{ΜΑ} = 5\overline{ΜΒ}.$$

339. Δίδονται τρία σημεῖα Α, Β, Γ ἐπὶ ἄξονος ἔχοντα τετμημένας 3, (—2), (—1). Προσδιορίσατε διὰ τῆς τετμημένης του :

i) Τὸ συζυγὲς ἁρμονικὸν τοῦ Γ ὡς πρὸς τὰ Α, Β.

ii) Τὸ συζυγὲς ἁρμονικὸν τοῦ Α ὡς πρὸς τὰ Β, Γ.

340. **(Χαρακτηριστικὴ ἰδιότης τῆς ἁρμονικῆς τετράδος).** Ἐὰν α, β, γ, δ εἶναι αἱ τετμημέναι τεσσάρων διαφορετικῶν σημείων Α, Β, Γ, Δ ἑνὸς ἄξονος, δείξατε ὅτι ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα $(Α, Β, Γ, Δ) = -1$, εἶναι :

$$\boxed{(α+β)(γ+δ) = 2αβ + 2γδ.}$$

Ἐκ ταύτης ἐπανεύρετε τὰς σχέσεις (1) καὶ (2) τῆς § 63.

341. Ἐὰν Η καὶ Ι εἶναι τὰ μέσα τῶν ἐπ' εὐθείας τμημάτων ΑΒ καὶ ΓΔ, δείξατε ὅτι μία ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα $(Α, Β, Γ, Δ) = -1$, εἶναι :

$$ΑΒ^2 + ΓΔ^2 = 4ΗΙ^2.$$

342. Κύκλος ἐφάπτεται τῶν ἴσων πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἰς Β καὶ Γ. Δείξατε ὅτι ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου, ἡ διερχομένη διὰ τοῦ Α, διαιρεῖται ἁρμονικῶς ὑπὸ τοῦ Α καὶ τῆς ΒΓ.

343. Ἔστω τραπέζιον ΑΒΓΔ, Μ καὶ Ν τὰ μέσα τῶν βάσεων ΑΒ καὶ ΓΔ, Ε τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαγωνίων, Ζ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν εὐθειῶν ΑΔ, ΒΓ. Δείξατε ὅτι ἡ τετρὰς τῶν σημείων Μ, Ν, Ε, Ζ εἶναι ἁρμονική.

344. Δύο μεταβλητὰ σημεῖα Μ καὶ Μ΄ κινοῦνται ἐπὶ ἄξονος οὕτως, ὥστε αἱ τετμημέναι των $x$ καὶ $x'$ νὰ συνδέωνται πάντοτε διὰ τῆς σχέσεως $xx'-3(x+x')=0$. i) Ὁρίσατε τὰς τετμημένας τῶν σημείων τοῦ ἄξονος, εἰς τὰ ὁποῖα τὰ Μ καὶ Μ΄ συμπίπτουν. Ἔστωσαν δὲ Α καὶ Β τὰ σημεῖα ταῦτα. ii) Δείξατε ὅτι $(A, B, M, M')=-1$.

345. Χορδὴ ΓΔ κύκλου (Ο) εἶναι κάθετος ἐπὶ διάμετρον ΑΒ. Ἐὰν Μ τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας, αἱ δὲ εὐθεῖαι ΜΓ, ΜΔ τέμνουν τὴν ευθ ΑΒ εἰς Ε καὶ Ζ, δείξατε ὅτι τὸ γινόμενον $OE \cdot OZ$ ἔχει σταθερὰν τιμήν.

346. Δείξατε ὅτι μία ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα $(A, B, \Gamma, \Delta)=-1$, εἶναι, τοῦ Η ὄντος μέσου τοῦ ΓΔ, νὰ πληροῦται ἡ σχέσις :

$$\overline{H\Gamma} \cdot \overline{H\Delta}+\overline{HA} \cdot \overline{HB}=0.$$

347. Ἔστωσαν Α΄, Β΄, Γ΄ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τοῦ εἰς τρ. ΑΒΓ ἐγγεγραμμένου κύκλου μετὰ τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ.

Ἡ εὐθεῖα Β΄Γ΄ τέμνει τὴν ευθ ΒΓ ἔστω εἰς $A_1$ καὶ τὴν ἐκ τοῦ Γ παράλληλον τῇ ΑΒ εἰς Δ. Παρατηροῦντες ὅτι τὸ τρ. ΓΒ΄Δ εἶναι ἰσοσκελὲς δείξατε ὅτι ἡ τετρὰς $A_1$, Α΄, Β, Γ εἶναι ἁρμονική.

348. Ἐὰν Ο τὸ κέντρον καὶ ρ ἡ ἀκτὶς τοῦ εἰς τρ. ΑΒΓ ἐγγεγραμμένου κύκλου, $O_1$ καὶ $\rho_\alpha$ τὸ κέντρον καὶ ἡ ἀκτὶς τοῦ ἐντὸς τῆς $\widehat{A}$ παρεγγεγραμμένου κύκλου καὶ Δ ὁ ποὺς τῆς ἐσωτερικῆς διχοτόμου τῆς $\widehat{A}$

i) δείξατε ὅτι ἡ τετρὰς $(A, \Delta, O, O_1)$ εἶναι ἁρμονική.

ii) χρησιμοποιοῦντες μίαν ὀρθὴν προβολὴν ἐπὶ τοῦ φορέως τοῦ ὕψους $AA'=\upsilon_\alpha$ δείξατε ὅτι

$$\frac{2}{\upsilon_\alpha}=\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_\alpha}.$$

iii) Συναγάγετε κατασκευὴν ἑνὸς ἐκ τῶν τριῶν στοιχείων $\upsilon_\alpha$, ρ, $\rho_\alpha$, ὅταν δίδωνται τὰ δύο ἄλλα.

349. Ἔστω τετράγωνον ΑΒΓΔ, περιφέρεια (c) κέντρου Δ καὶ ἀκτῖνος ΔΑ καὶ περιφέρεια (c΄) διαμέτρου ΔΑ. Εὐθεῖα διὰ τοῦ Δ τέμνει τὴν (c) εἰς Μ καὶ Μ΄, τὴν (c΄) εἰς Ρ καὶ τὴν ΑΒ εἰς Ρ΄. Δείξατε ὅτι $(M,M'P,P')=-1$.

## ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ ΚΥΚΛΟΣ

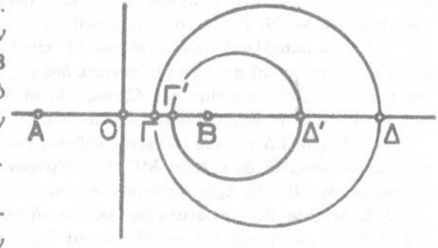
**66. α΄) Καλεῖται ἀπολλώνιος κύκλος ὡς πρὸς τὰ σημεῖα Α καὶ Β κάθε κύκλος ἔχων ἄκρα διαμέτρου δύο σημεῖα, συζυγῆ ἁρμονικὰ τῶν Α καὶ Β.**

**β΄) Πᾶς ἀπολλώνιος κύκλος ὡς πρὸς τὰ Α καὶ Β κεῖται εἰς τὸ ἓν τῶν ἡμιεπιπέδων, εἰς ἃ ἡ μεσοκάθετος τοῦ ΑΒ χωρίζει τὸ ἐπίπεδον.**

Διότι τὰ συζυγῆ ἁρμονικὰ Γ καὶ Δ τῶν Α καὶ Β κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ μέσου Ο τοῦ ΑΒ (§ 62, α΄).

**γ') Δύο ἀπολλώνιοι κύκλοι ὡς πρὸς τὰ A καὶ B, κείμενοι εἰς τὸ ἴδιον ἡμιεπίπεδον ὡς πρὸς τὴν μεσοκάθετον τοῦ AB, κεῖνται ὁ εἰς ἐντὸς τοῦ ἄλλου.**

Ἔστω O τὸ μέσον τοῦ AB. Ἕνα ζεῦγος (Γ, Δ) συζυγῶν ἁρμονικῶν ὡς πρὸς τὰ A, B κεῖται μετὰ τοῦ B πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ μέσου O, ὅταν $\frac{\Gamma A}{\Gamma B}=\frac{\Delta A}{\Delta B}>1$ (σχ. 70). Ἂς θεωρήσωμεν τώρα καὶ δεύτερον ζεῦγος (Γ', Δ') συζυγῶν ἁρμονικῶν ὡς πρὸς τὰ A καὶ B καὶ ἔστω ὅτι τὸ Γ' κεῖται μεταξὺ Γ καὶ Δ, δηλ.



Σχ. 70

(1) $$O\Gamma<O\Gamma'<O\Delta.$$

Ἐπειδὴ $O\Gamma\cdot O\Delta=O\Gamma'\cdot O\Delta'$ (§ 63, α'), ἡ (1) γράφεται :

$$O\Gamma<\frac{O\Gamma\cdot O\Delta}{O\Delta'}<O\Delta\Rightarrow 1<\frac{O\Delta}{O\Delta'}\text{ καὶ }\frac{O\Gamma}{O\Delta'}<1\Rightarrow$$

$O\Delta'<O\Delta$ καὶ $O\Delta'>O\Gamma$, δηλ. $O\Gamma<O\Delta'<O\Delta$ δηλ. καὶ τὸ Δ' κεῖται ἐπίσης μεταξὺ Γ καὶ Δ· ἄρα ὁλόκληρον τὸ τμῆμα Γ'Δ' κεῖται ἐντὸς τοῦ ΓΔ καὶ συνεπῶς ὁ κύκλος διαμέτρου Γ'Δ' κεῖται ὁλόκληρος ἐντὸς τοῦ κύκλου μὲ διάμετρον ΓΔ.

**Πόρισμα.— Δύο ἀπολλώνιοι περιφέρειαι ὡς πρὸς τὸ ἴδιον ζεῦγος σημείων A καὶ B οὐδέποτε ἔχουν κοινόν τι σημεῖον.**

**δ') Τόπος τῶν ἀναλόγων ἀποστάσεων. (Θ) — Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων M τοῦ ἐπιπέδου, τῶν ὁποίων ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο σταθερὰ σημεῖα A καὶ B εἶναι σταθερός, ἤτοι :**

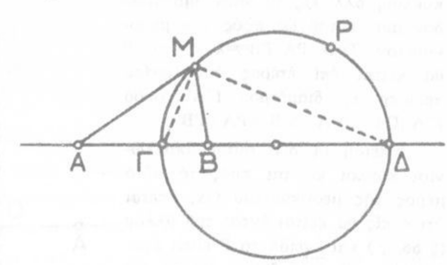
$$\frac{MA}{MB}=\lambda \quad (\text{σταθερὸν} \neq 1),$$

**εἶναι περιφέρεια μὲ ἄκρα διαμέτρου τὰ σημεῖα τὰ διαιροῦντα τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ ἐσωτερικῶς καὶ ἐξωτερικῶς εἰς ἀριθμητικὸν λόγον λ (§60).**

*Ἀπόδειξις.* Ἔστω $\lambda>1$ καὶ M σημεῖον τοῦ τόπου μὴ κείμενον ἐπὶ τῆς ευθ AB. Διὰ τῆς ἐσωτερικῆς διχοτόμου MΓ τοῦ τρ. AMB, ὁ λόγος MA/MB μεταφέρεται εἰς ΓA/ΓB. Δηλ. :

$$\frac{MA}{MB}=\frac{\Gamma A}{\Gamma B}\text{ καὶ ἐπειδὴ }\frac{MA}{MB}=\lambda\Rightarrow\frac{\Gamma A}{\Gamma B}=\lambda.$$

Ὥστε τὸ Γ εἶναι σταθερὸν σημεῖον, διότι διαιρεῖ τὸ $\overrightarrow{AB}$ ἐσωτερικῶς εἰς λόγον λ. Ὁμοίως διὰ τῆς ἐξωτερικῆς διχοτόμου ΜΔ τοῦ τρ. ΑΜΒ ὁ λόγος λ =ΜΑ/ΜΒ μεταφέρεται εἰς ΔΑ/ΔΒ =λ. Ἄρα καὶ τὸ Δ εἶναι σταθερὸν σημεῖον, διαιροῦν τὸ $\overrightarrow{AB}$ ἐξωτερικῶς εἰς ἀριθμητικὸν λόγον λ.



Σχ. 71

Ἐπειδὴ $\overrightarrow{\Gamma M\Delta}$ =1 ὀρθή, ἕπεται ὅτι τὸ Μ ἀνήκει εἰς τὴν περιφέρειαν διαμέτρου ΓΔ, ἥτις κεῖται ἐξ ὁλοκλήρου ὡς πρὸς τὴν μεσοκάθετον τοῦ ΑΒ εἰς τὸ ἡμιεπίπεδον τὸ περιέχον τὸ Β. Τὰ Γ καὶ Δ εἶναι προφανῶς σημεῖα τοῦ τόπου.

Ἐὰν λ<1, τὰ Γ καὶ Δ κεῖνται ὡς πρὸς τὸ μέσον Ο τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Α.

Ὥστε ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ τόπου κεῖνται ἐπὶ **ἀπολλωνίου περιφερείας** ὡς πρὸς τὰ σημεῖα Α καὶ Β ἀντιστοιχούσης εἰς λόγον ΓΑ: ΓΒ =ΔΑ:ΔΒ =λ.

**Ἀντιστρόφως.** Ἔστω Ρ σημεῖον τῆς ἀπολλωνίου περιφερείας διαμέτρου ΓΔ (σχ. 71).

Ἐὰν ἦτο $\dfrac{PA}{PB} = \lambda'$, ὅπου $\lambda' \neq \lambda$, τότε τὸ Ρ θὰ ἔκειτο καὶ ἐπὶ ἑτέρας ἀπολλωνίου περιφερείας μὲ ἄκρα διαμέτρου Γ΄ καὶ Δ΄ τοιαῦτα, ὥστε Γ΄Α : Γ΄Β =Δ΄Α : Δ΄Β =λ΄. Ἀλλὰ τότε αἱ δύο διαφορετικαὶ ἀπολλώνιοι περιφέρειαι θὰ εἶχον κοινὸν σημεῖον τὸ Ρ, ὅπερ ἀδύνατον (ἐδ. γ΄, πόρισμα).

Ἄρα $\dfrac{PA}{PB} = \lambda$. Συνάγομεν ἀκόμη ὅτι ἡ ΡΓ καὶ ΡΔ εἶναι διχοτόμοι τῆς $\widehat{APB}$ (σχ. 71).

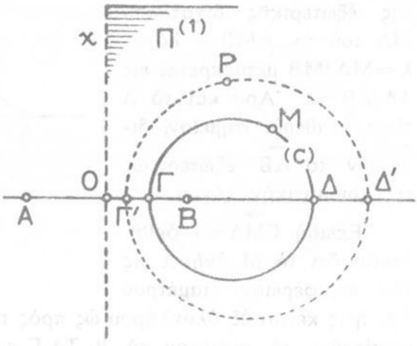
**Παρατήρησις.** Ἐὰν λ =1, ὁ ἀντίστοιχος τόπος εἶναι προφανῶς ἡ μεσοκάθετος τοῦ ΑΒ.

**67. Περιοχαὶ τοῦ ἐπιπέδου καθοριζόμεναι ὑπὸ τοῦ τόπου τῶν σημείων Μ τῶν ἐχόντων τὴν ἰδιότητα : ΜΑ : ΜΒ = λ ≠ 1.**

Ἄς ὑποθέσωμεν π.χ. ὅτι λ>1, ὁπότε ὁ τόπος τῶν Μ : $\dfrac{MA}{MB} = \lambda$ εἶναι ἀπολλώνιος κύκλος (c) διαμέτρου ΓΔ (σχ. 72), κείμενος ὡς πρὸς τὴν μεσοκάθετον τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Β (διότι $MA > MB$). Ἔστω Ρ σημεῖον κείμενον ἔξω τοῦ ἀπολλωνίου τούτου κύκλου, ἀλλ' εἰς τὸ ἴδιον ἡμιεπίπεδον μετ' αὐτοῦ ὡς πρὸς τὴν μεσοκάθετον. Τότε $PA/PB \neq \lambda$ καὶ τὸ Ρ θὰ κεῖται ἐπὶ ἑτέρας ἀπολλωνίου περιφερείας, διαμέτρου $\Gamma'\Delta'$, ὅπου $\Gamma'A : \Gamma'B = \Delta'A : \Delta'B = PA : PB$.

Ἐπειδὴ οἱ δύο οὗτοι ἀπολλώνιοι κύκλοι κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς μεσοκαθέτου Οx, ἔπεται ὅτι ὁ εἷς θὰ κεῖται ἐντὸς τοῦ ἄλλου (§ 66, γ΄) καὶ ἐπειδὴ τὸ Ρ εἶναι ἐξωτερικὸν τοῦ (c), ἔπεται ὅτι ὁ (c) κεῖται ἐντὸς τοῦ δευτέρου, δηλ. τοῦ μὲ διάμετρον $\Gamma'\Delta'$. Ἄρα $\Gamma'A < \Gamma A$ καὶ $\Gamma'B > \Gamma B$, ἐξ ὧν ἔπεται $\dfrac{\Gamma'A}{\Gamma'B} < \dfrac{\Gamma A}{\Gamma B}$

δηλ. $\dfrac{PA}{PB} < \lambda$.



Σχ. 72

Ἐὰν τὸ Ρ κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου, τότε $PA : PB = 1$, δηλ. πάλιν $PA : PB < \lambda$.

Ἐὰν τὸ Ρ κεῖται εἰς τὸ ἀντίθετον ἡμιεπίπεδον ἐκείνου, εἰς τὸ ὁποῖον κεῖται ὁ (c), τότε $PA < PB$ καὶ $PA : PB < 1 < \lambda$. Ἑπομένως :

**Δι' ὅλα τὰ σημεῖα Ρ τὰ ἔξω τοῦ ἀπολλωνίου κύκλου (c) ἰσχύει :**

$$\frac{PA}{PB} < \lambda.$$

Ἐντελῶς ἀναλόγως εὑρίσκομεν ὅτι, ἂν τὸ Ρ κεῖται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ κύκλου (c), τότε : $\dfrac{PA}{PB} > \lambda$. Ἑπομένως :

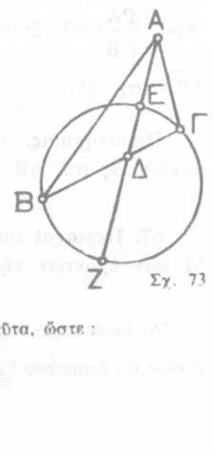
**Δοθείσης ἀπολλωνίου περιφερείας (c), ἧς τὰ σημεῖα Μ πληροῦν τὴν σχέσιν $MA : MB = \lambda$, ὅπου $\lambda > 1$, πᾶν σημεῖον Ρ τοῦ ἐπιπέδου κείμενον ἐκτὸς τοῦ κύκλου (c) ἔχει τὴν ἰδιότητα: $PA : PB < \lambda$ καὶ πᾶν σημεῖον Ρ΄ ἐντὸς τοῦ (c) ἔχει τὴν ἰδιότητα : $P'A : P'B > \lambda$.**

Τὰ ἀντίστροφα συμβαίνουν, ὅταν $\lambda < 1$.

**68. Παρατήρησις.** Ἔστω ΑΔ ἡ ἐσωτερικὴ διχοτόμος τρ.ΑΒΓ καὶ α, β, γ τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου. Θὰ ἔχωμεν (§ 58) :

$$\frac{B\Delta}{BA} = \frac{\Delta\Gamma}{\Gamma A} = \frac{B\Delta + \Delta\Gamma}{BA + \Gamma A} = \frac{\alpha}{\beta + \gamma} \quad \text{ἤτοι :}$$

(1) $$\frac{B\Delta}{BA} = \frac{\alpha}{\beta + \gamma}, \quad \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma A} = \frac{\alpha}{\beta + \gamma}.$$



Σχ. 73

Ἐκ τῶν (1) ἔπεται ὅτι τὰ Β καὶ Γ κεῖνται ἐπὶ τῆς ἰδίας ἀπολλωνίου περιφερείας ὡς πρὸς τὰ σημεῖα Δ καὶ Α, τῆς ἐχούσης ἄκρα διαμέτρου τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ (σχ. 73) τοιαῦτα, ὥστε :

$$\frac{E\Delta}{EA} = \frac{Z\Delta}{ZA} = \frac{\alpha}{\beta + \gamma}.$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

350. Τίς ὁ γ.τ. τῶν σημείων, ἀπὸ τῶν ὁποίων δύο δεδομένοι κύκλοι φαίνονται ὑπὸ ἴσας γωνίας;

351. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, οὗτινος δίδεται ἡ βάσις α, ὁ λόγος τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν καί :

i) Τὸ ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν βάσιν ὕψος ἢ

ii) τὸ ἄθροισμα τῶν παρὰ τὴν βάσιν γωνιῶν ἢ

iii) ἡ διαφορὰ τῶν παρὰ τὴν βάσιν γωνιῶν ἢ

iv) ἡ διχοτόμος τῆς ἀπέναντι τῆς α γωνίας.

352. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ, οὗτινος δίδεται ἡ βάσις $ΒΓ = α$, ὁ λόγος $\frac{ΑΒ}{ΑΓ} = λ > 1$ καὶ τοιοῦτον, ὥστε τὸ ἐκ τῆς κορυφῆς Α ὕψος νὰ εἶναι τὸ μέγιστον δυνατόν. Νὰ ὑπολογισθοῦν ἀκολούθως τὸ ὕψος τοῦτο καὶ αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΑΓ συναρτήσει τῶν α καὶ λ.

353. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, οὗτινος δίδεται τὸ ὕψος $υ_α$, ἡ διχοτόμος $δ_Α$ καὶ εἰς τὸ ὁποῖον νὰ πληροῦται ἡ σχέσις :

$$ΑΒ + ΑΓ = 2ΒΓ.$$

(**Ὑπόδ.** βλ. § 68).

354. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῆς $ΒΓ = α$, τῆς διχοτόμου $ΑΔ = δ$ καὶ τοῦ ἀθροίσματος $ΑΒ + ΑΓ = k$.

(**Ὑπόδ.** βλ. § 68).

355. Διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς δύο κύκλων ἄγομεν χορδὰς εὑρισκομένας εἰς δοθέντα λόγον $μ : ν$. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τῆς τομῆς τῶν καθέτων, αἵτινες ἄγονται ἐκ τῶν κέντρων τῶν κύκλων ἐπὶ τὰς ἀντιστοίχους χορδάς.

356. Νὰ κατασκευασθῇ κυρτὸν τετράπλευρον ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, ἂν δίδωνται αἱ τέσσαρες πλευραὶ τοῦ τετραπλεύρου.

(**Ὑπόδ.** Ἂν ΑΒΓΔ τὸ ζητούμενον καὶ ληφθῇ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΑΔ σημεῖον Ε τοιοῦτον, ὥστε $\widehat{ΔΓΕ} = \widehat{ΒΓΑ}$, τότε τρ. ΓΔΕ $\approx$ τρ. ΑΒΓ. Τὸ τμῆμα ΔΕ ὁρίζεται, τὸ δὲ Γ κεῖται ἐπὶ ἀπολλωνίου περιφερείας γνωστῆς : $ΓΑ : ΓΕ = ΓΒ : ΓΔ$).

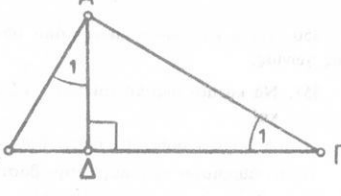
357. Ἔστωσαν Δ καὶ Δ΄ οἱ πόδες τῶν διχοτόμων (ἐσωτερικῆς καὶ ἐξωτερικῆς) τῆς γωνίας $\widehat{Α}$ τριγώνου ΑΒΓ, Ε καὶ Ε΄ οἱ πόδες τῶν διχοτόμων τῆς $\widehat{Β}$ καὶ Ζ καὶ Ζ΄ οἱ πόδες τῶν διχοτόμων τῆς $\widehat{Γ}$. Νὰ δειχθῇ ὅτι οἱ κύκλοι μὲ διαμέτρους ΔΔ΄, ΕΕ΄, ΖΖ΄ ἔχουν κοινὴν χορδήν.

358. Ἐπὶ τῆς μιᾶς πλευρᾶς Οy γωνίας xOy δίδονται δύο σημεῖα Δ καὶ Α, ὅπου $ΟΔ < ΟΑ$. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς ἑτέρας πλευρᾶς Οx, σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε ἡ ἐσωτερικὴ διχοτόμος τῆς $\widehat{ΟΜΑ}$ νὰ διέρχεται διὰ τοῦ Δ.

## ΜΕΤΡΙΚΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ ΕΙΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΝ

**69.** α΄) **Θεώρημα τοῦ Εὐκλείδου — Εἰς πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἑκάστη κάθετος πλευρὰ εἶναι μέση ἀνάλογος τῆς ὑποτεινούσης καὶ**

**τῆς προβολῆς της ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν.**



Σχ. 74

Ἔστω ΑΔ τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ ὕψος τοῦ ὀρθογ. τριγώνου ΒΑΓ. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΒΓ εἶναι ὅμοια ὡς ἔχοντα : $\widehat{ΒΔΑ} = \widehat{ΒΑΓ}$ (ὀρθαὶ) καὶ $\widehat{ΑΒΔ} = \widehat{ΓΒΑ}$ (κοινὴ) μὲ ὁμολόγους πλευράς :

ΑΒ (τοῦ τρ. ΑΒΔ) ὁμόλογος τῆς ΒΓ (τοῦ τρ. ΑΒΓ)
ΒΔ (τοῦ τρ. ΑΒΔ) » » ΑΒ (τοῦ τρ. ΑΒΓ).

Ἑπομένως : $\frac{ΑΒ}{ΒΓ} = \frac{ΒΔ}{ΑΒ}$. Δηλ. $ΑΒ^2 = ΒΓ \cdot ΒΔ$, ὅπου ΒΔ ἡ προβολὴ τῆς πλευρᾶς ΑΒ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν.

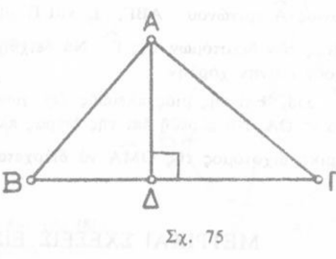
β΄) **Πόρισμα 1ον. Τὸ τετράγωνον χορδῆς κύκλου ἰσοῦται μὲ τὴν διάμετρον τὴν διερχομένην διὰ τοῦ ἑνὸς ἄκρου τῆς χορδῆς ἐπὶ τὴν προβολὴν τῆς χορδῆς ἐπὶ τὴν διάμετρον ταύτην.**

γ΄) **Πόρισμα 2ον. Τὰ τετράγωνα τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου ἔχουν λόγον, ὃν λόγον ἔχουν αἱ προβολαὶ τῶν πλευρῶν τούτων ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν.**

Διότι, εἰς τὸ σχ. 74 ἰσχύουν : $ΑΒ^2 = ΒΓ \times ΒΔ$ καὶ $ΑΓ^2 = ΒΓ \times ΓΔ$.

Διὰ διαιρέσεως κατὰ μέλη : $ΑΒ^2/ΑΓ^2 = ΒΔ/ΓΔ$.

## 70. Πυθαγόρειον θεώρημα — **Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν καθέτων πλευρῶν παντὸς ὀρθογωνίου τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης.**



Σχ. 75

Διότι κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Εὐκλείδου ἔχομεν (σχ. 75) :
$ΑΒ^2 = ΒΓ \times ΒΔ$ καὶ $ΑΓ^2 = ΒΓ \times ΔΓ$ καὶ ἐκ τούτων : $ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = ΒΓ \cdot (ΒΔ + ΔΓ) = ΒΓ \cdot ΒΓ = ΒΓ^2$.

Ἤτοι : $\boxed{ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = ΒΓ^2}$ .

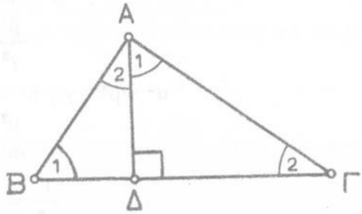
Προφανῶς εἶναι : $ΑΒ^2 = ΒΓ^2 - ΑΓ^2$ καὶ $ΑΓ^2 = ΒΓ^2 - ΑΒ^2$.

Τὸ **ἀντίστροφον** τοῦ πυθαγορείου θεωρήματος ἰσχύει :

**«Ἂν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$, τότε $\widehat{A}=90^\circ$».** Διότι, ἂν κατασκευάσωμεν τρ. Α΄Β΄Γ΄ ὀρθογώνιον εἰς Α΄ μὲ Α΄Β΄ $=\gamma$, Α΄Γ΄ $=\beta$, βλέπομεν ὅτι καὶ $\alpha^2=$ Β΄Γ΄$^2\Rightarrow$ τρ. ΑΒΓ=τρ. Α΄Β΄Γ΄$\Rightarrow\widehat{A}=90^\circ$. (Βλ. καὶ § **80**).

*Σημείωσις.* Εἰς τὰς διδασκαλίας τοῦ Πυθαγόρα (580 - 501 πρὸ Χριστοῦ), αἱ ὁποῖαι εἰσήγαγον εἰς τὰ μαθηματικὰ ἅπαξ διὰ παντὸς τὸ λογικὸν στοιχεῖον, τὴν ἀπαίτησιν τῆς ἀποδείξεως καὶ βασικὰς ἀρχάς, περιλαμβάνεται καὶ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα, τὸ ὁποῖον χρησιμοποιεῖται ἀπὸ τὸν ἄνθρωπον εἰς τὰς μαθηματικὰς καὶ τεχνικὰς ἐρεύνας του διηνεκῶς καὶ αἰωνίως. Τὸ ἴδιον ἰσχύει καὶ διὰ τὸ Θεώρημα τοῦ Θαλοῦ (Θαλῆς ὁ Μιλήσιος 640 - 548 πρὸ Χριστοῦ).

**71. (Θ) — Εἰς πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψος εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν δύο τμημάτων, εἰς ἃ διαιρεῖ τὴν ὑποτείνουσαν.**



Σχ. 76

*Ἀπόδειξις.* Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (σχ. 76) $\widehat{B}_1=\widehat{A}_1$ καὶ $\widehat{A}_2=\widehat{\Gamma}_2$ ἕπεται ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΔΓ εἶναι ὅμοια μὲ ὁμολόγους πλευράς :

ΑΔ (τοῦ τρ. ΑΒΔ) ὁμόλογος τῆς ΔΓ (τοῦ τρ. ΑΔΓ)
ΒΔ (τοῦ τρ. ΑΒΔ) » » ΑΔ (τοῦ τρ. ΑΔΓ)

καὶ συνεπῶς : $\dfrac{A\Delta}{\Delta\Gamma}=\dfrac{B\Delta}{A\Delta}\Rightarrow A\Delta^2=B\Delta\times\Delta\Gamma$. ὅ.ἔ.δ.

**72. (Θ) — Ἂν ΑΔ τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ ὕψος ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ τότε ἰσχύει : ΒΓ·ΑΔ = ΑΒ·ΑΓ.**

Τοῦτο προκύπτει ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΒΔ καὶ ΑΒΓ (σχ. 74), ἐξ ὧν : $\dfrac{AB}{B\Gamma}=\dfrac{A\Delta}{A\Gamma}\Rightarrow AB\times A\Gamma=B\Gamma\times A\Delta$.

**73. (Θ) — Εἰς πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ἀντίστροφον τοῦ τετραγώνου τοῦ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψους ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστρόφων τῶν τετραγώνων τῶν καθέτων πλευρῶν.**

Ἔστωσαν β, γ αἱ κάθετοι πλευραί, α ἡ ὑποτείνουσα καὶ υ τὸ ἐπ' αὐτὴν ὕψος. Ἔχομεν, $\alpha\upsilon=\beta\gamma$ (§ **72**)$\Rightarrow$

$$\alpha^2\upsilon^2=\beta^2\gamma^2\Rightarrow(\beta^2+\gamma^2)\upsilon^2=\beta^2\gamma^2 \text{ (Πυθαγόρειον θεώρημα)}\Rightarrow$$

$$\frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta^2\gamma^2}=\frac{1}{\upsilon^2}\Rightarrow\frac{1}{\upsilon^2}=\frac{\beta^2}{\beta^2\gamma^2}+\frac{\gamma^2}{\beta^2\gamma^2}\Rightarrow\frac{1}{\upsilon^2}=\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}.$$

## 74. Σύνοψις τῶν ἀνωτέρω μετρικῶν σχέσεων.

Ἔστωσαν β, γ αἱ κάθετοι πλευραὶ ὀρθογωνίου τριγώνου, α ἡ ὑποτείνουσα αὐτοῦ, β΄, γ΄ αἱ προβολαὶ τῶν β καὶ γ ἐπὶ τὴν α καὶ υ τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψος. Μεταξὺ τῶν ἓξ τμημάτων

(1) $$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \beta',\ \gamma',\ \upsilon$$

ὑφίστανται αἱ ἀνωτέρω δειχθεῖσαι μετρικαὶ σχέσεις, αἱ ὁποῖαι *ἐπιτρέπουν τὸν ὑπολογισμὸν τῶν τεσσάρων ἐκ τῶν τμημάτων (1), ὅταν δοθοῦν δύο ἐξ αὐτῶν*. Αἱ σχέσεις αὐταὶ συνοψίζονται ὡς κάτωθι:

$$\beta^2=\alpha\beta',\ \gamma^2=\alpha\gamma'$$

$$\frac{\beta^2}{\gamma^2}=\frac{\beta'}{\gamma'}$$

$$\alpha^2=\beta^2+\gamma^2,\ \beta^2=\alpha^2-\gamma^2,\ \gamma^2=\alpha^2-\beta^2$$

$$\upsilon^2=\beta'\gamma'$$

$$\alpha\upsilon=\beta\gamma$$

$$\frac{1}{\upsilon^2}=\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}.$$

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Εἰς τὰς ἑπομένας τέσσαρας ἀσκήσεις δίδονται δύο ἐκ τῶν 6 στοιχείων α, β, γ, β΄, γ΄, υ ὀρθογωνίου τριγώνου (βλ. § 74) καὶ ζητεῖται νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ὑπόλοιπα τέσσαρα.

359. $\beta=520,\quad \gamma=1248$.

360. $\beta=5,\quad \upsilon=3$.

361. $\alpha=9,\quad \gamma'=4$.

362. $\alpha=5,\quad \upsilon=2{,}4$.

363. Εἰς ἡμικύκλιον διαμέτρου AB=2R καὶ κέντρου O, αἱ εἰς A καὶ B ἐφαπτόμεναι συναντῶνται ὑπὸ τυχούσης τρίτης ἐφαπτομένης εἰς M καὶ M΄.

i) Δείξατε ὅτι $\widehat{MOM'}=1$ ὀρθή. ii) Ὑπολογίσατε τὸ γινόμενον AM·BM΄.

364. Ὑπολογίσατε τὸ ὕψος ὀρθογωνίου τριγώνου γνωρίζοντες τὰς καθέτους πλευράς, $\beta=5$, $\gamma=6$.

365. Δίδεται ὀρθὴ γωνία $x\widehat{O}y$ καὶ κύκλος (O, R). Εὐθεῖα τέμνει τὰς OX, OΨ εἰς A καὶ B οὕτως, ὥστε OA=α, OB=β. Εὕρετε εἰς ποίαν συνθήκην δέον νὰ ὑπόκεινται τὰ α, β, R, ἵνα ἡ εὐθεῖα τέμνῃ τὸν κύκλον.

366. Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν προβολῶν δύο καθέτων ἀκτίνων κύκλου ἐπὶ τυχοῦσαν διάμετρον ἢ καὶ ἐπὶ τυχοῦσαν εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου εἶναι σταθερόν.

367. Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων σημείου περιφερείας ἀπὸ τὰ ἄκρα χορδῆς παραλλήλου πρὸς τὴν διὰ τοῦ σημείου διερχομένην ἀκτῖνα εἶναι σταθερόν.

368. Ἐὰν δύο χορδαὶ κύκλου τέμνωνται καθέτως εἴς τι σημεῖον O ἐντὸς τοῦ κύκλου κείμενον, τότε τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων τμημάτων, εἰς ἃ διαιροῦνται αἱ χορδαὶ ὑπὸ τοῦ σημείου τομῆς των O ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου.

369. Ἐὰν διὰ σημείου O ἐκτὸς κύκλου κειμένου ἀχθοῦν δύο κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας

εὐθεῖαι τέμνουσαι τὴν περιφέρειαν ἡ μία εἰς τὰ Α καὶ Β, ἡ δὲ ἄλλη εἰς τὰ Γ καὶ Δ, νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα :

$$ΟΑ^2 + ΟΒ^2 + ΟΓ^2 + ΟΔ^2 \text{ εἶναι σταθερόν.}$$

370. Ἂν ἰσοσκελὲς τραπέζιον εἶναι περιγεγραμμένον περὶ κύκλον, ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν βάσεων.

371. Δοθείσης εὐθείας xy καὶ σημείου Α αὐτῆς, τίς ὁ γ.τ. σημείου Μ τοιούτου, ὥστε ἂν ἀχθῇ ἡ $ΜΠ \perp xy$, νὰ εἶναι $(ΜΑ)^2 = (ΑΠ)k$, ἔνθα k δοθὲν εὐθύγραμμον τμῆμα;

372. Δοθείσης εὐθείας xy καὶ σημείου Α αὐτῆς, τίς ὁ γ.τ. σημείου Μ τοιούτου, ὥστε ἡ ἀπόστασις αὐτοῦ ΜΠ ἀπὸ τῆς xy καὶ ἡ ΜΑ νὰ συνδέωνται διὰ τῆς σχέσεως : $(ΜΑ)^2 = (ΜΠ) \cdot k$, ὅπου k δοθὲν εὐθύγραμμον τμῆμα;

373. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Οx ὀρθῆς γωνίας $x\widehat{O}y$ δίδεται σταθερὸν σημεῖον Α. Μεταβλητὴ περιφέρεια ἐφάπτεται τῆς Οx εἰς Α καὶ τέμνει τὴν Οy εἰς Β καὶ Γ.

i) Τόπος τοῦ κέντρου τῆς περιφερείας.

ii) Ἂν Β΄ τὸ συμμετρικὸν τοῦ Β ὡς πρὸς τὴν ευθΟΧ, ποῖον τὸ εἶδος τοῦ τριγώνου Β΄ΑΓ;

iii) Δείξατε ὅτι, μεταβαλλομένης τῆς περιφερείας, τὸ ἄθροισμα $\dfrac{1}{ΑΒ^2} + \dfrac{1}{ΑΓ^2}$ μένει σταθερόν.

374. Ἔστω ΑΒΓ ἰσοσκελὲς τρίγωνον μὲ $ΑΒ = ΑΓ$, Δ τὸ μέσον τῆς ΒΓ καὶ Η τὸ ὀρθόκεντρον αὐτοῦ.

i) Δείξατε ὅτι $ΒΔ^2 = ΑΔ \times ΗΔ$.

ii) Θεωροῦμεν καὶ τὸ ὀρθογώνιον ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΒΟΓ μὲ $ΒΟ \perp ΟΓ$ καὶ $ΒΟ = ΟΓ$ κείμενον πρὸς τὸ ἀντίθετον μέρος τοῦ ΑΒΓ, ὡς πρὸς τὴν ΒΓ. Ὑποτιθεμένου ὅτι τὰ Β καὶ Γ μένουν σταθερὰ καὶ ὅτι τὸ Α κινεῖται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τοῦ ΟΔ, δείξατε ὅτι τὸ $\dfrac{1}{ΟΑ} + \dfrac{1}{ΟΗ}$ μένει σταθερὸν καὶ ἴσον πρὸς $\dfrac{1}{ΟΔ}$.

375. Δίδονται δύο παράλληλοι (ε) καὶ (η), ἐπὶ τῆς (η) σημεῖον Ο καὶ τρίτη εὐθεῖα ($l$) διερχομένη διὰ τοῦ Ο. i) Δείξατε ὅτι ὑπάρχουν δύο κύκλοι ἔχοντες τὰ κέντρα των ἐπὶ τῆς (ε) καὶ ἐφαπτόμενοι, ἕκαστος, τῶν ($l$) καὶ (η). ii) Ἂν d ἡ ἀπόστασις τῶν δύο παραλλήλων καὶ $Ρ_1$, $Ρ_2$ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν δύο τούτων κύκλων μετὰ τῆς ($l$), δείξατε ὅτι : $ΟΡ_1 \times ΟΡ_2 = d^2$.

376. Ἔστω Ρ τυχὸν σημεῖον εἰς τὸ ἐσωτερικὸν ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Νὰ δειχθῇ ὅτι

$$ΡΑ^2 + ΡΓ^2 = ΡΒ^2 + ΡΔ^2$$

377. Δύο κύκλοι ἀκτίνων $ρ_1$ καὶ $ρ_2$ ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς τὸ Α. Ἐὰν ἀχθῇ ἡ κοινὴ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη αὐτῶν ΒΓ (Β, Γ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς), ζητεῖται νὰ ὑπολογισθοῦν συναρτήσει τῶν $ρ_1$, $ρ_2$ :

i) Ἡ ἀπόστασις τοῦ Α ἀπὸ τὴν ΒΓ.

ii) Τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

## ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

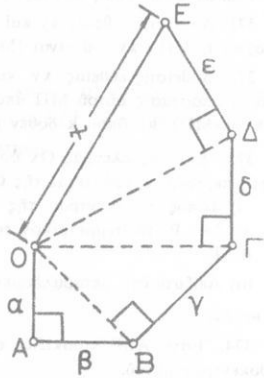
**75.** α΄) **Ἀντικατάστασις ἀθροίσματος τετραγώνων ὑπὸ ἑνὸς τετραγώνου — i) Δοθέντων δύο τμημάτων α καὶ β νὰ κατασκευασθῇ τρίτον τμῆμα x τοιοῦτον, ὥστε** $\boxed{x = \sqrt{α^2 + β^2}}$.

Ἐπειδὴ τὰ τμήματα x, α, β πληροῦν τὴν μετρικὴν σχέσιν $x^2=\alpha^2+\beta^2$, ἕπεται ὅτι τὸ x εἶναι ἴσον πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν ὀρθογωνίου τριγώνου μὲ καθέτους πλευρὰς α καὶ β.

**ii) Δοθέντων ὁσωνδήποτε τμημάτων, π.χ. α, β, γ, δ, ε, νὰ κατασκευασθῇ τμῆμα x τοιοῦτον, ὥστε**

$$\boxed{x=\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\varepsilon^2}}\,.$$

*Λύσις*. Ἡ κατασκευὴ τοῦ x δεικνύεται εἰς τὸ σχ. 77, ἐκ τοῦ ὁποίου : $x^2=\varepsilon^2+O\Delta^2=\varepsilon^2+\delta^2+O\Gamma^2=\varepsilon^2+\delta^2+\gamma^2+OB^2=\varepsilon^2+\delta^2+\gamma^2+\beta^2+\alpha^2$.



Σχ. 77

**β΄) Ἀντικατάστασις ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος τετραγώνων ὑπὸ ἑνὸς τετραγώνου. iii) Νὰ κατασκευασθῇ τμῆμα x τοιοῦτον, ὥστε** $\boxed{x=\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}$, **ὅπου α, β δεδομένα τμήματα καὶ $\alpha>\beta$.**

Ἐπειδὴ τὰ x, α, β πληροῦν τὴν μετρικὴν σχέσιν $x^2=\alpha^2-\beta^2$, ἕπεται ὅτι τὸ x ἰσοῦται πρὸς τὴν κάθετον πλευρὰν ὀρθογωνίου τριγώνου ἔχοντος ὑποτείνουσαν α καὶ μίαν κάθετον πλευρὰν τὴν β.

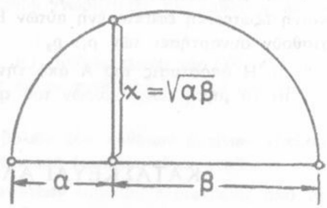
**iv) Νὰ κατασκευασθῇ τμῆμα x τοιοῦτον, ὥστε**

$$\boxed{x=\sqrt{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2+\delta^2-\varepsilon^2}}\,.$$

*Λύσις*. Εὑρίσκομεν τμῆμα Κ τοιοῦτον, ὥστε $K^2=\alpha^2+\beta^2+\delta^2$ (βλ. σχ. 77) καὶ τμῆμα Λ τοιοῦτον, ὥστε $\Lambda^2=\gamma^2+\varepsilon^2$, ὁπότε $x=\sqrt{K^2-\Lambda^2}$ καὶ ἐφ᾽ ὅσον $K>\Lambda$, ἡ κατασκευὴ ἀνάγεται εἰς τὴν προηγουμένην.

**γ΄) Ἀντικατάστασις τοῦ γινομένου δύο τμημάτων ὑπὸ ἑνὸς τετραγώνου. v) Νὰ κατασκευασθῇ τὸ μέσον ἀνάλογον δύο δεδομένων τμημάτων α καὶ β (§ 57, η΄). Ἤτοι νὰ εὑρεθῇ τμῆμα x τοιοῦτον, ὥστε** $\boxed{x=\sqrt{\alpha\beta}}$ .

*Λύσις*. Ἐπειδὴ $x=\sqrt{\alpha\beta}\Longleftrightarrow x^2=\alpha\cdot\beta$, διὰ τοῦτο, βάσει τοῦ θεωρήματος τῆς § 71, ὡς x δύναται νὰ χρησιμεύσῃ τὸ ὕψος ὀρθογωνίου τριγώνου, εἰς τὸ ὁποῖον α καὶ β εἶναι τὰ δύο τμήματα, εἰς ἃ διαιρεῖται ἡ ὑποτείνουσα ὑπὸ τοῦ ἐπ᾽ αὐτὴν ὕψους. Ἐξ οὗ ἡ κατασκευὴ τοῦ σχ. 78.

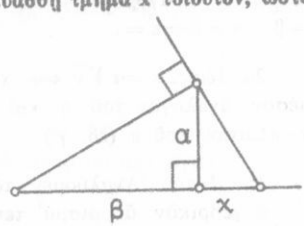


Σχ. 78

**δ΄) Κατασκευὴ τοῦ $\alpha^2/\beta$. vi) Νὰ κατασκευασθῇ τμῆμα x τοιοῦτον, ὥστε**

$\boxed{x = \dfrac{\alpha^2}{\beta}}$, **ὅπου α, β, δεδομένα τμήματα.**

*Λύσις.* $x = \dfrac{\alpha^2}{\beta} \Longleftrightarrow \alpha^2 = \beta \cdot x$. Ἑπομένως, ἂν τὸ α εἶναι τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψος ὀρθογωνίου τριγώνου καὶ β τὸ ἓν ἐκ τῶν τμημάτων, εἰς ἃ τὸ ὕψος διαιρεῖ τὴν ὑποτείνουσαν, τότε τὸ x θὰ εἶναι τὸ ἕτερον ἐκ τῶν δύο τμημάτων τῆς ὑποτεινούσης (σχ. 79).

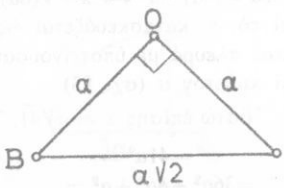


Σχ. 79

**ε΄) Κατασκευὴ τοῦ $\alpha\sqrt{\nu}$, ὅπου $\nu \in \Phi$. vii) Δοθέντος τμήματος α νὰ κατασκευασθῇ τμῆμα x τοιοῦτον, ὥστε**

$\boxed{x = \alpha\sqrt{2}}$.

*Λύσις.* $x = \alpha\sqrt{2} \Longleftrightarrow x^2 = \alpha^2 + \alpha^2$. Ὅθεν ὡς x δύναται νὰ χρησιμεύσῃ ἡ ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου ἰσοσκελοῦς τριγώνου μὲ καθέτους πλευρὰς α, α (σχ. 80).



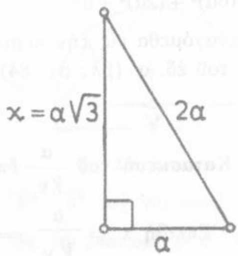
Σχ. 80

**viii) Δοθέντος τοῦ τμήματος α, νὰ κατασκευασθῇ τμῆμα x τοιοῦτον, ὥστε**

$\boxed{x = \alpha\sqrt{3}}$

*Λύσις.* $x = \alpha\sqrt{3} \Longleftrightarrow x^2 = 4\alpha^2 - \alpha^2 \Longleftrightarrow$
$x^2 = (2\alpha)^2 - \alpha^2$,

ὅθεν ἀναγόμεθα εἰς τὴν κατασκευὴν iii τοῦ ἐδαφίου β΄ (βλ. σχ. 81).

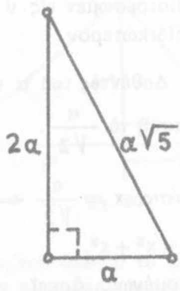


Σχ. 81

**ix) Δοθέντος τοῦ τμήματος α νὰ κατασκευασθῇ τμῆμα x τοιοῦτον, ὥστε** $\boxed{x = \alpha\sqrt{5}}$.

*Λύσις.* $x = \alpha\sqrt{5} \Longleftrightarrow x^2 = 4\alpha^2 + \alpha^2 \Longleftrightarrow$
$x = \sqrt{(2\alpha)^2 + \alpha^2}$.

Ἡ κατασκευὴ δεικνύεται εἰς τὸ (σχ.82).



Σχ. 82

**x) Δοθέντος τοῦ τμήματος α νὰ κατασκευασθῇ τμῆμα $x = \alpha\sqrt{\nu}$, ὅπου ν φυσικὸς ἀριθμός.**

*1η Λύσις.* $x = \alpha\sqrt{\nu} \Longleftrightarrow x = \sqrt{\nu\alpha^2} \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow x = \sqrt{\underbrace{\alpha^2 + \alpha^2 + \alpha^2 + \dots + \alpha^2}_{\nu \text{ φορὰς}}}.$$

Ἑπομένως ἀναγόμεθα εἰς τὴν κατασκευὴν (ii) τοῦ ἐδ. α΄ (σχ. 77) μὲ $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \varepsilon = \ldots$

2α *Λύσις.* $x = \alpha\sqrt{\nu} \iff x^2 = \nu\alpha^2 \iff x^2 = (\nu\alpha)\cdot\alpha$. Ἤτοι τὸ x εἶναι μέσον ἀνάλογον τοῦ α καὶ τοῦ ν-πλασίου τοῦ α (ἐδ. γ΄).

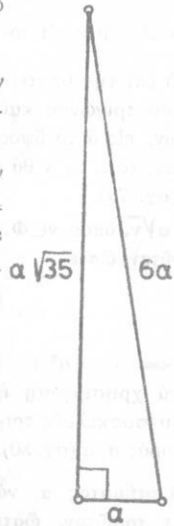
3η *Λύσις.* Ἀναλύομεν τὸ ν εἰς ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τετραγώνων.

Ἔστω π.χ. πρὸς κατασκευὴν τὸ τμῆμα $x = \alpha\sqrt{35}$. Τότε $x^2 = 35\alpha^2 = (6\alpha)^2 - \alpha^2 \iff x = \sqrt{(6\alpha)^2 - \alpha^2}$ καὶ τὸ x κατασκευάζεται ὡς κάθετος πλευρὰ μὲ ὑποτείνουσαν 6α καὶ κάθετον α (σχ. 83).

Ἔστω ἐπίσης $x = \alpha\sqrt{41}$. Τότε

$$x^2 = 41\alpha^2 = 36\alpha^2 + 4\alpha^2 + \alpha^2 = (6\alpha)^2 + (2\alpha)^2 + \alpha^2$$

ὁπότε ἀναγόμεθα εἰς τὴν περίπτωσιν (ii) τοῦ ἐδ. α΄ (βλ. σχ. 84).




Σχ. 83

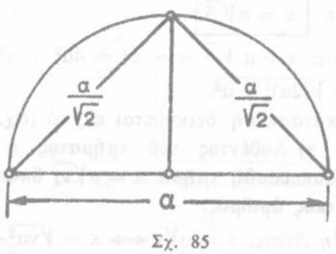

Σχ. 84

**ϛ΄) Κατασκευὴ τοῦ $\frac{\alpha}{\sqrt{\nu}}$ ὅπου $\nu \in \Phi$.**

Ἐπειδὴ $x = \frac{\alpha}{\sqrt{\nu}} \iff x = \frac{\alpha\sqrt{\nu}}{\nu}$, ἀρκεῖ νὰ κατασκευάσωμεν τὸ $\alpha\sqrt{\nu}$ μὲ μίαν ἐκ τῶν προηγουμένων μεθόδων (κατασκευὴ x) καὶ κατόπιν νὰ τὸ διαιρέσωμεν εἰς ν ἴσα μέρη. Εἰδικώτερον :

**ix) Δοθέντος τοῦ α νὰ κατασκευασθῇ τὸ $\frac{\alpha}{\sqrt{2}}$.**

*Λύσις.* $x = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \iff x^2 = \frac{\alpha^2}{2} \iff \alpha^2 = x^2 + x^2$.




Σχ. 85

Ἑπομένως, ἀρκεῖ νὰ κατασκευάσωμεν ὀρθογώνιον ἰσοσκελὲς τρίγωνον μὲ ὑποτείνουσαν α (σχ. 85).

**ζ') Δοθέντων τῶν τμημάτων α, β, γ νὰ κατασκευασθῇ τμῆμα x τοιοῦτον, ὥστε**

$$\boxed{x = \frac{\alpha\beta}{\gamma}}$$

*Λύσις*. Φέρομεν τὸ x εἰς τὴν θέσιν τοῦ τετάρτου ἀναλόγου :

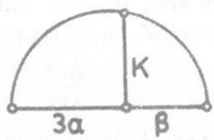
$$x = \frac{\alpha\beta}{\gamma} \Longleftrightarrow \frac{x}{\alpha} = \frac{\beta}{\gamma} \Longleftrightarrow \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\beta}{\boxed{x}}.$$

Τώρα τὸ x κατασκευάζεται ὡς τέταρτον ἀνάλογον (§ 50).

**76.** ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. — **Νὰ κατασκευασθῇ τμῆμα x τοιοῦτον ὥστε**

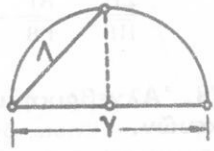
$$x = \frac{\alpha^2 + 3\beta^2}{\sqrt{3\alpha\beta + \dfrac{\gamma^2}{2}}}$$

**ὅπου α, β, γ δεδομένα τμήματα.**



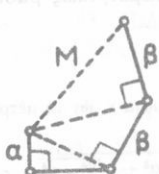
Σχ. 86

*Λύσις :* Ἀντικαθιστῶμεν τὸ 3αβ ὑπὸ ἑνὸς τετραγώνου : $K^2 = 3\alpha\beta = (3\alpha)\cdot\beta$ (σχ. 86) καὶ τὸ $\frac{\gamma^2}{2}$ ὑπὸ ἑνὸς τετραγώνου : $\Lambda^2 = \frac{\gamma^2}{2} \Longleftrightarrow \Lambda = \frac{\gamma}{\sqrt{2}}$ (σχ. 87).



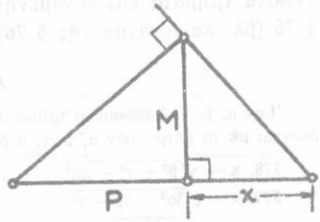
Σχ. 87

Ἐπίσης τὸ $\alpha^2 + 3\beta^2$ ὑπὸ ἑνὸς τετραγώνου : $M^2 = \alpha^2 + 3\beta^2$ (σχ. 88), ὁπότε, $x = \frac{M^2}{\sqrt{K^2 + \Lambda^2}}$. Τέλος κατασκευάζομεν τμῆμα $P = \sqrt{K^2 + \Lambda^2}$ (σχ. 90), ὁπότε $x = \frac{M^2}{P}$ καὶ ἀναγόμεθα εἰς γνωστὴν κατασκευήν : $M^2 = P.x$ (σχ. 90) βασιζομένην εἰς τὸ ἐδ. δ'.



Σχ. 88

Σχ. 89



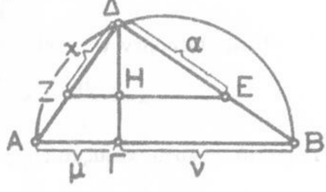
Σχ. 90

**77. Πρόβλημα. Νὰ κατασκευασθῇ τμῆμα, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον νὰ ἔχῃ λόγον πρὸς δοθὲν τετράγωνον, ὃν λόγον ἔχουν δύο δοθέντα τμήματα.**

Ἤτοι ζητεῖται τμῆμα x τοιοῦτον, ὥστε :

$$\boxed{\frac{x^2}{\alpha^2}=\frac{\mu}{\nu}}$$ (α, μ, ν, δοθέντα τμήματα)

*Λύσις.* Ἐπ' εὐθείας λαμβάνομεν δύο διαδοχικὰ τμήματα ΑΓ $=\mu$, ΓΒ $=\nu$ καὶ μὲ διάμετρον τὸ ἄθροισμα αὐτῶν $\mu+$ $+\nu=$ΑΒ γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν (σχ. 91). Εἰς τὸ Γ ὑψοῦμεν $\perp$ΑΒ τέμνουσαν εἰς Δ τὴν ἡμιπεριφέρειαν καὶ φέρομεν τὰς ΔΒ καὶ ΔΑ.




Σχ. 91

Ἐπὶ τῆς ΔΒ λαμβάνομεν τμῆμα ΔΕ$=\alpha$ καὶ ἐκ τοῦ Ε φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΒΑ, τέμνουσαν εἰς Ζ τὴν ΑΔ. Τὸ ζητούμενον τμῆμα x εἶναι τὸ ΔΖ. Διότι ἐκ τοῦ ὀρθογ. τριγώνου ΖΔΕ ἔχομεν :

$$\frac{\Delta Z^2}{\Delta E^2}=\frac{ZH}{HE} \text{ ἤ } \frac{x^2}{\alpha^2}=\frac{ZH}{HE} \qquad (\S\ 69,\ \gamma')$$

Ἀπὸ τὸ θεώρημα τῆς δέσμης ἔχομεν :

$$\frac{\overline{ZH}}{\overline{HE}}=\frac{\overline{A\Gamma}}{\overline{\Gamma B}} \Rightarrow \frac{ZH}{HE}=\frac{\mu}{\nu}. \text{ Ἐπομένως : } \frac{x^2}{\alpha^2}=\frac{\mu}{\nu}.$$

**78. Ἀλγεβρικὴ μέθοδος ἐκτελέσεως Γεωμετρικῶν κατασκευῶν.** Ἐνίοτε, ὅταν ἡ λύσις ἑνὸς προβλήματος ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν εὕρεσιν ἑνὸς τμήματος, λαμβάνομεν ὡς ἄγνωστον τοῦ προβλήματος τὸ μέτρον x τοῦ ἀγνώστου τμήματος καὶ ὑπολογίζμεν τὸ x βάσει μετρικῶν σχέσεων ἀπορρεουσῶν ἀπὸ τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος. Δυνατὸν νὰ εὕρωμεν ὡς τιμὴν τοῦ x μίαν ἀλγεβρικὴν παράστασιν ἐξαρτωμένην ἀπὸ γνωστὰ τμήματα καὶ δυναμένην νὰ κατασκευασθῇ γεωμετρικῶς βάσει τῆς § **75** (βλ. παράδειγμα τῆς § **76**).

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ἐὰν α, β, γ, δ δεδομένα τμήματα, νὰ κατασκευασθοῦν τμήματα x, ὧν τὰ μέτρα συνδέονται μὲ τὰ μέτρα τῶν α, β, γ, δ διὰ τῶν σχέσεων :

378. $x=\sqrt{\beta^2+\gamma^2-2\alpha^2}$.
379. $x=\sqrt{3\alpha^2+3\beta^2-\gamma^2}$.
380. $x=\sqrt{\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha+\beta}}$.
381. $\dfrac{1}{x}=\sqrt{\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}+\dfrac{1}{\gamma^2}}$.
382. $x=\alpha+\sqrt{\alpha\beta-\gamma\delta}$.
383. $x=\sqrt{\alpha^2+\sqrt{\beta^4-\gamma^4}}$.
384. $x=\sqrt{\alpha^2+\sqrt{\beta^4+\gamma^4}}$.
385. $x=\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2+\beta^2}$.
386. $x=\alpha\sqrt{2+\sqrt{5}}$.
387. $x=\dfrac{\alpha}{\sqrt{1+\sqrt{5}}}$.

388. Δίδεται κύκλος (K, R) καὶ ἡ ἐφαπτομένη του εἰς τὸ Α. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Δ ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης τοιοῦτον, ὥστε ἂν ἀχθῇ τὸ τμῆμα ΚΔ τέμνον εἰς Ε τὴν περιφέρειαν, νὰ εἶναι $ΔΕ = \frac{ΑΔ}{2}$.

(**Ὑπόδ.** Ἂς ληφθῇ ὡς ἄγνωστος x, τὸ μέτρον τοῦ τμήματος ΑΔ).

389. Ἐπὶ ἡμιπεριφερείας διαμέτρου ΑΒ νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε $ΜΑ \times ΜΒ = c^2$, ὅπου c δοθὲν τμῆμα.

390. Ἔστω τρίγωνον ΟΑΒ, ὀρθογώνιον εἰς τὸ Ο, ἔχον $\widehat{B} = 30^0$ καὶ $ΟΑ = α$. Νὰ κατασκευασθῇ σημεῖον Μ ἐπὶ τοῦ τμήματος ΟΒ τοιοῦτον, ὥστε:

$$ΜΒ + 2ΜΑ = α(2 + \sqrt{3}).$$

(**Ὑπόδ.** Νὰ ληφθῇ ὡς ἄγνωστος τὸ (ΟΜ) = x).

# ΜΕΤΡΙΚΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ ΕΙΣ ΤΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

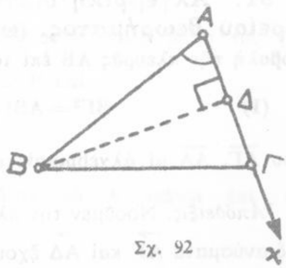
**79. Ἐπεκτεταμένον Πυθαγόρειον θεώρημα.— Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ΑΔ ἡ προβολὴ τῆς πλευρᾶς ΑΒ ἐπὶ τὸν φορέα τῆς ΑΓ. Τότε:**

**i) Ἐὰν** $A < 90^0 \Rightarrow ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 - 2ΑΓ \times ΑΔ$ (σχ. 92).

**ii) Ἐὰν** $A > 90^0 \Rightarrow ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 + 2ΑΓ \times ΑΔ$ (σχ. 93).

*Ἀπόδειξις.* i) Ἐὰν $A < 90^0$, τότε τὰ Δ καὶ Γ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ Α (δηλ. ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας ΑΧ) καὶ συνεπῶς εἶναι πάντοτε:

$$ΓΔ = |ΑΓ - ΑΔ|.$$



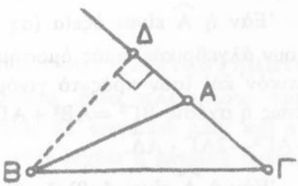
Σχ. 92

Τετραγωνίζοντες καὶ προσθέτοντες εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τὸ $ΔΒ^2$ λαμβάνομεν:

$$ΓΔ^2 + ΒΔ^2 =$$
$$= ΑΓ^2 + ΑΔ^2 - 2ΑΓ \cdot ΑΔ + ΒΔ^2$$

καὶ ἐπειδὴ $ΓΔ^2 + ΒΔ^2 = ΒΓ^2$ καὶ $ΑΔ^2 + ΒΔ^2 = ΑΒ^2$ (Πυθαγ. θεώρ.), λαμβάνομεν:

$$ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 - 2ΑΓ \cdot ΑΔ.$$



Σχ. 93

ii) Ἂν $A > 90^0$, τὰ Δ καὶ Γ κεῖνται ἑκατέρωθεν τοῦ Α καὶ

$$ΓΔ = ΑΓ + ΑΔ, \text{ ὁπότε } ΓΔ^2 = ΑΓ^2 + ΑΔ^2 + 2ΑΓ \cdot ΑΔ \Rightarrow ΓΔ^2 + ΒΔ^2 =$$
$$= ΑΓ^2 + ΑΔ^2 + ΒΔ^2 + 2ΑΓ \cdot ΑΔ, \text{ δηλ.: } ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 + 2ΑΓ \cdot ΑΔ.$$

**Πόρισμα. Εἰς τρ. ΑΒΓ:**

$$A < 90^0 \Rightarrow ΒΓ^2 < ΑΒ^2 + ΑΓ^2$$
$$A > 90^0 \Rightarrow ΒΓ^2 > ΑΒ^2 + ΑΓ^2.$$

## 80. Κριτήριον περὶ τοῦ ἂν γωνία τις τριγώνου εἶναι ὀξεῖα, ὀρθὴ ἢ ἀμβλεῖα.

**(Θ) — Εἰς τὰ τρίγωνα ἰσχύουν αἱ λογικαὶ ἰσοδυναμίαι:**

$$\mathrm{A} < 90^0 \Longleftrightarrow \mathrm{B\Gamma}^2 < \mathrm{AB}^2 + \mathrm{A\Gamma}^2$$
$$\mathrm{A} = 90^0 \Longleftrightarrow \mathrm{B\Gamma}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{A\Gamma}^2$$
$$\mathrm{A} > 90^0 \Longleftrightarrow \mathrm{B\Gamma}^2 > \mathrm{AB}^2 + \mathrm{A\Gamma}^2.$$

*Ἀπόδειξις.* Ἐκ τοῦ προηγουμένου πορίσματος καὶ ἐκ τοῦ πυθαγορείου θεωρήματος ἰσχύουν προφανῶς αἱ συνεπαγωγαί:

$$\mathrm{A} < 90^0 \Rightarrow \mathrm{B\Gamma}^2 < \mathrm{AB}^2 + \mathrm{A\Gamma}^2,\ \mathrm{A} = 90^0 \Rightarrow \mathrm{B\Gamma}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{A\Gamma}^2,$$
$$\mathrm{A} > 90^0 \Rightarrow \mathrm{B\Gamma}^2 > \mathrm{AB}^2 + \mathrm{A\Gamma}^2.$$

Ἐπειδὴ αἱ περιπτώσεις εἶναι ἐξαντλητικαί, ἰσχύουν καὶ τὰ ἀντίστροφα. (Ἀσκήσεις: 391, 392, 373, 397, 427, 428).

## 81. Ἀλγεβρικὴ διατύπωσις τοῦ ἐπεκτεταμένου Πυθαγορείου θεωρήματος.

**(Θ) — Ἔστω τυχὸν τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ΑΔ ἡ προβολὴ τῆς πλευρᾶς ΑΒ ἐπὶ τὸν φορέα τῆς ΑΓ. Τότε ἰσχύει πάντοτε:**

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{B\Gamma}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{A\Gamma}^2 - 2\overline{\mathrm{A\Gamma}}\cdot\overline{\mathrm{A\Delta}}$$

**ὅπου $\overline{\mathrm{A\Gamma}}$, $\overline{\mathrm{A\Delta}}$ αἱ ἀλγεβρικαὶ τιμαὶ τῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$, $\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}$.**

*Ἀπόδειξις.* Νοοῦμεν τὴν πλευρὰν ΑΓ κειμένην ἐπί τινος ἄξονος, ὁπότε τὰ διανύσματα $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ καὶ $\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}$ ἔχουν ἀλγεβρικὰς τιμὰς ἔστω τὰς $\overline{\mathrm{A\Gamma}}$, $\overline{\mathrm{A\Delta}}$.

Ἐὰν ἡ $\widehat{\mathrm{A}}$ εἶναι ὀξεῖα (σχ. 92), τότε τὰ $\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}$, $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ εἶναι ὁμόρροπα καὶ ἔχουν ἀλγεβρικὰς τιμὰς ὁμοσήμους, ἑπομένως τὸ γινόμενον $\overline{\mathrm{A\Gamma}}\cdot\overline{\mathrm{A\Delta}}$ εἶναι θετικὸν καὶ ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν, $\mathrm{A\Gamma}\cdot\mathrm{A\Delta}$. Ἑπομένως ἡ σχέσις $\mathrm{B\Gamma}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{A\Gamma}^2 - 2\mathrm{A\Gamma}\cdot\mathrm{A\Delta}$ (§ 79) καθίσταται $\mathrm{B\Gamma}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{A\Gamma}^2 - 2\overline{\mathrm{A\Gamma}}\cdot\overline{\mathrm{A\Delta}}$.

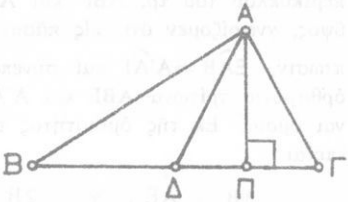
Ἐὰν ἡ $\widehat{\mathrm{A}}$ εἶναι ἀμβλεῖα (σχ. 93), τότε τὰ $\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}$ καὶ $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ εἶναι ἀντίρροπα καὶ ἔχουν ἀλγεβρικὰς τιμὰς ἑτεροσήμους. Ἑπομένως τὸ γινόμενον $\overline{\mathrm{A\Gamma}}\cdot\overline{\mathrm{A\Delta}}$ εἶναι ἀρνητικὸν καὶ ἴσον πρὸς $-\mathrm{A\Gamma}\cdot\mathrm{A\Delta}$, δηλαδὴ $\mathrm{A\Gamma}\cdot\mathrm{A\Delta} = -\overline{\mathrm{A\Gamma}}\cdot\overline{\mathrm{A\Delta}}$. Ἡ σχέσις λοιπὸν $\mathrm{B\Gamma}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{A\Gamma}^2 + 2\mathrm{A\Gamma}\cdot\mathrm{A\Delta}$ καθίσταται, $\mathrm{B\Gamma}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{A\Gamma}^2 - 2\overline{\mathrm{A\Gamma}}\cdot\overline{\mathrm{A\Delta}}$.

Ἐὰν $\widehat{A} = 90^o$, τότε $\overline{A\Delta} = 0$ καὶ συνεπῶς πάλιν ἡ (1) ἰσχύει. Ὥστε ἡ μετρικὴ σχέσις (1) ἰσχύει εἰς πᾶσαν περίπτωσιν.

## 82. Πρῶτον θεώρημα τῆς διαμέσου. (Μετασχηματισμὸς τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων δύο πλευρῶν τριγώνου).

**(Θ) — Ἐὰν ΑΔ μία διάμεσος τοῦ τρ. ΑΒΓ, τότε ἰσχύει ἡ μετρικὴ σχέσις :**

$$AB^2 + A\Gamma^2 = 2A\Delta^2 + \frac{B\Gamma^2}{2}.$$



Σχ. 94

*Ἀπόδειξις:* Ἔστω ΔΠ ἡ προβολὴ τῆς διαμέσου ΑΔ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΒΓ. Τότε τὸ ἐπεκτεταμένον πυθαγόρειον θεώρημα (§ **81**) ἐφαρμοζόμενον εἰς τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΔΓ δίδει :

$$(1) \qquad \begin{cases} AB^2 = \Delta A^2 + \Delta B^2 - 2\overline{\Delta B}\,.\,\overline{\Delta\Pi} \\ A\Gamma^2 = \Delta A^2 + \Delta\Gamma^2 - 2\overline{\Delta\Gamma}\,.\,\overline{\Delta\Pi} \end{cases}$$

Ἐπειδὴ $\overline{\Delta B} = -\overline{\Delta\Gamma}$, λαμβάνομεν προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς (1) :

$$(2) \qquad AB^2 + A\Gamma^2 = 2A\Delta^2 + 2B\Delta^2 \text{ ἢ καὶ}$$

$$(3) \qquad AB^2 + A\Gamma^2 = 2A\Delta^2 + \frac{B\Gamma^2}{2}.$$

Αἱ σχέσεις (2) καὶ (3) ἰσχύουν **καὶ ὅταν τὸ Α κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθ. ΒΓ.**

(Ἀσκήσεις: 394, 395, 403, 404).

## 83. Δεύτερον θεώρημα τῆς διαμέσου. (Μετασχηματισμὸς τῆς διαφορᾶς τῶν τετραγώνων δύο πλευρῶν τριγώνου).

**(Θ) — Ἐὰν Δ τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ καὶ ΔΠ ἡ προβολὴ τῆς διαμέσου ΑΔ ἐπὶ τὴν ευθ ΒΓ, τότε ἰσχύει ἡ μετρικὴ σχέσις :**

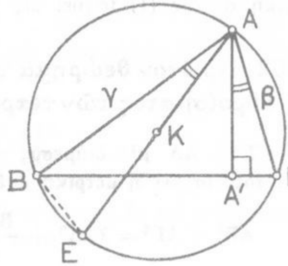
$$(1) \qquad AB^2 - A\Gamma^2 = 2\overline{B\Gamma}\cdot\overline{\Delta\Pi}.$$

*Ἀπόδειξις.* Ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας (1) τῆς προηγουμένης § **82** (ὅπου, $-2\overline{\Delta B} = -\overline{\Gamma B}$ καὶ $2\overline{\Delta\Gamma} = \overline{B\Gamma}$).

Εὐκόλως δεικνύεται ὅτι ἡ σχέσις (1) ἰσχύει καὶ ὅταν τὸ Α κεῖται ἐπὶ τῆς ευθ ΑΒ (συμπίπτει μὲ τὸ Π).

(Ἀσκήσεις : 402, 416).

**84. Μετασχηματισμὸς τοῦ γινομένου δύο πλευρῶν τριγώνου.** **(Θ) — Τὸ γινόμενον δύο πλευρῶν τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῆς διαμέτρου τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου ἐπὶ τὸ ὕψος τὸ ἀγόμενον εἰς τὴν τρίτην πλευράν.**



Σχ. 95

*Ἀπόδειξις.* Ἐὰν ΑΕ διάμετρος τοῦ περικύκλου τοῦ τρ. ΑΒΓ καὶ ΑΑ′ τὸ ὕψος, γνωρίζομεν ὅτι, εἰς πᾶσαν περίπτωσιν, $E\widehat{A}B = A'\widehat{A}\Gamma$ καὶ συνεπῶς τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΕ καὶ Α′ΑΓ εἶναι ὅμοια. Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τούτων ἕπεται :

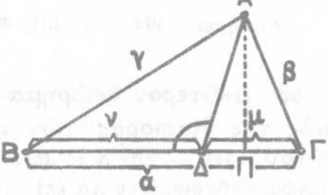
$$\frac{AB}{AA'} = \frac{AE}{A\Gamma} \text{ ἢ } \frac{\gamma}{\upsilon_\alpha} = \frac{2R}{\beta} \quad \text{καὶ τελικῶς,} \quad \boxed{\beta\gamma = 2R\upsilon_\alpha}$$

(Ἀσκήσεις : 409, 410, 411, 412, 413, 426).

**85. Σχέσις τοῦ Stewart — (Ἁπλῆ μορφὴ) α′) (Θ) — Δοθέντος τρ. ΑΒΓ καὶ σημείου Δ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ (δηλ. Δ μεταξὺ Β καὶ Γ), ἰσχύει ἡ μετρικὴ σχέσις :**

$$(1) \qquad AB^2 \cdot \Delta\Gamma + A\Gamma^2 \cdot B\Delta = B\Gamma(A\Delta^2 + \Delta\Gamma \cdot B\Delta).$$

*Ἀπόδειξις.* Τὸ ΑΔ χωρίζει τὸ τρ. ΑΒΓ εἰς δύο τρίγωνα, τρ. ΑΔΒ καὶ τρ. ΑΔΓ, ἐξ ὧν τὸ ἓν εἶναι (ἐν γένει) ἀμβλυγώνιον εἰς Δ, τὸ δὲ ἄλλο ὀξυγώνιον. Ἂν ΔΠ ἡ προβολὴ τοῦ ΑΔ ἐπὶ τὴν ευθ ΒΓ (σχ. 96), τὸ ἐπεκτεταμένον πυθαγόρειον θεώρημα ἐφαρμοζόμενον εἰς τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΔΓ (§ 79) δίδει :



Σχ. 96

$$\begin{array}{l|l} AB^2 = A\Delta^2 + B\Delta^2 + 2B\Delta \,.\, \Delta\Pi & \Delta\Gamma \\ A\Gamma^2 = A\Delta^2 + \Delta\Gamma^2 - 2\Delta\Gamma \,.\, \Delta\Pi & B\Delta \end{array}$$

Πολ/ντες τὰ μέλη τῆς πρώτης ἐπὶ ΔΓ καὶ τῆς δευτέρας ἐπὶ ΒΔ καὶ προσθέτοντες κατὰ μέλη, ἐξαλείφομεν τὸ ΔΠ :

$$AB^2 \cdot \Delta\Gamma + A\Gamma^2 \cdot B\Delta = A\Delta^2(\Delta\Gamma + B\Delta) + B\Delta^2 \cdot \Delta\Gamma + \Delta\Gamma^2 \cdot B\Delta =$$
$$= A\Delta^2 \cdot B\Gamma + B\Delta \cdot \Delta\Gamma \cdot (B\Delta + \Delta\Gamma) = A\Delta^2 \cdot B\Gamma + B\Delta \cdot \Delta\Gamma \cdot B\Gamma =$$
$$= B\Gamma(A\Delta^2 + B\Delta \,.\, \Delta\Gamma)$$ καὶ λαμβάνομεν οὕτω τὴν ἀποδεικτέαν σχέσιν (1).

**β΄) Μετασχηματισμὸς τοῦ $\mu \cdot AB^2 + \nu A\Gamma^2$, ὅπου μ, ν, δοθέντα τμήματα ἢ δοθέντες φυσικοὶ ἀριθμοί.** Διὰ τῆς σχέσεως Stewart δυνάμεθα νὰ δίδωμεν ἄλλην μορφὴν εἰς τὸ ἄθροισμα $\mu \cdot AB^2 + \nu \cdot A\Gamma^2$, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον ἐξυπηρετεῖ εἰς διάφορα ζητήματα, εἰς τὰ ὁποῖα ἐμφανίζεται ἄθροισμα τοιαύτης μορφῆς. Πρὸς μετατροπὴν τοῦ $\mu \cdot AB^2 + \nu A\Gamma^2$, ὁρίζομεν ἐπὶ τοῦ τμήματος ΒΓ, σημεῖον Δ τοιοῦτον, ὥστε :

$$\frac{\Delta\Gamma}{\Delta B} = \frac{\mu}{\nu} \quad (\sigma\chi.\ 96)$$

ὁπότε $\dfrac{\Gamma\Delta}{\mu} = \dfrac{\Delta B}{\nu} = \dfrac{\Delta\Gamma + \Delta B}{\mu + \nu} = \dfrac{B\Gamma}{\mu + \nu} \Rightarrow$

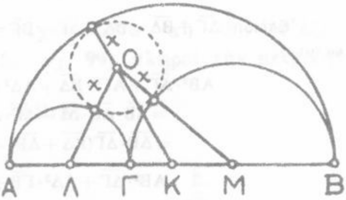
$\Delta\Gamma = \mu \cdot \dfrac{B\Gamma}{\mu + \nu}$, $\Delta B = \nu \cdot \dfrac{B\Gamma}{\mu + \nu}$ καὶ ἡ σχέσις (1) γίνεται :

$$AB^2 \cdot \mu \cdot \frac{B\Gamma}{\mu + \nu} + A\Gamma^2 \cdot \nu \frac{B\Gamma}{\mu + \nu} = B\Gamma \left\{ A\Delta^2 + \mu\nu \cdot \frac{B\Gamma^2}{(\mu + \nu)^2} \right\} \quad \text{ἢ}$$

(2) $\boxed{\mu . AB^2 + \nu \cdot A\Gamma^2 = (\mu + \nu) A\Delta^2 + \dfrac{\mu\nu}{\mu + \nu} \cdot B\Gamma^2}$, ὅπου $\dfrac{\Delta\Gamma}{\Delta B} = \dfrac{\mu}{\nu}$.

γ΄) Ἡ σχέσις τοῦ Stewart ὑπὸ τὴν μορφὴν (1) συνδέει τὰ 6 τμήματα β, γ, α, μ, ν, ΑΔ (σχ. 96) ($\gamma^2\mu + \beta^2\nu = \alpha(A\Delta^2 + \mu\nu)$) καὶ χρησιμοποιεῖται πρὸς ὑπολογισμὸν ἑνὸς τῶν ΑΔ ἢ β ἢ γ, ὅταν δίδωνται τὰ ἄλλα ἢ καὶ δι᾽ ἄλλους σχετικοὺς ὑπολογισμούς.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. **Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς x τοῦ κύκλου Ο τοῦ ἐφαπτομένου τῶν τριῶν ἡμικυκλίων μὲ διαμέτρους ΑΒ, ΑΓ, ΓΒ (σχ. 97), ὅπου Α, Γ, Β ἐπ᾽ εὐθείας, ΑΓ=α, ΓΒ=2α, ΑΒ=3α.**



Σχ. 97

*Λύσις.* Αἱ ἀκτῖνες τῶν τριῶν ἡμικυκλίων εἶναι ΑΛ=α/2, ΜΒ=α, ΚΒ=3α/2. Εἰς τὸ τρίγωνον ΟΛΜ ἔχομεν :

$O\Lambda = \dfrac{\alpha}{2} + x$ (οἱ κύκλοι (Ο) καὶ (Λ) ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς).

$OM = \alpha + x$ (οἱ κύκλοι (Ο) καὶ (Μ) ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς).

$OK = \dfrac{3\alpha}{2} - x$ (οἱ κύκλοι (Ο) καὶ (Κ) ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς).

$$\Lambda K = KA - \Lambda A = \frac{3\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = \alpha$$

$$KM = KB - MB = \frac{3\alpha}{2} - \alpha = \frac{\alpha}{2} \text{ καὶ } \Lambda M = \frac{3\alpha}{2}.$$

Ἡ σχέσις τοῦ Stewart εἰς τὸ τρ. ΟΛΜ :

$$ΟΛ^2 \cdot ΚΜ + ΟΜ^2 \cdot ΛΚ = ΛΜ(ΟΚ^2 + ΛΚ \cdot ΚΜ)$$

καθίσταται :

$$\left(\frac{α}{2}+x\right)^2 \cdot \frac{α}{2} + (α+x)^2 α = \frac{3α}{2}\left(\left(\frac{3α}{2}-x\right)^2 + α \cdot \frac{α}{2}\right) \Longleftrightarrow 7x = 3α$$

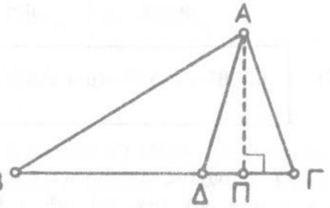
$$\text{καὶ } x = \frac{3α}{7} = \frac{AB}{7}.$$

(Ἀσκήσεις : 405, 406, 407, 408, 421, 430).

**86. Γενικευμένη σχέσις τοῦ Stewart.** **(Θ) — Ἐὰν ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΓ τῆς φερούσης τὴν πλευρὰν ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ ληφθῇ τυχὸν σημεῖον Δ, τότε ἰσχύει ἡ μετρικὴ σχέσις :**

$$(1) \qquad AB^2 \cdot \overline{ΔΓ} + AΔ^2 \cdot \overline{ΓB} + AΓ^2 \cdot \overline{BΔ} + \overline{ΔΓ} \cdot \overline{ΓB} \cdot \overline{BΔ} = 0.$$

*Ἀπόδειξις.* Ἐὰν ΔΠ ἡ προβολὴ τοῦ ΑΔ ἐπὶ τὴν ευθ ΒΓ (σχ. 98), τὸ ἐπεκτεταμένον πυθαγόρειον θεώρημα, ἐφαρμοζόμενον εἰς τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΔΓ δίδει :




Σχ. 98

$$\begin{aligned} AB^2 &= AΔ^2 + ΔB^2 - 2\overline{ΔB}\cdot\overline{ΔΠ} \\ AΓ^2 &= AΔ^2 + ΔΓ^2 - 2\overline{ΔΓ}\cdot\overline{ΔΠ} \end{aligned} \left\| \begin{aligned} &\overline{ΔΓ} \\ &\overline{BΔ} \end{aligned}\right.$$

Πολλαπλασιάζοντες τὰ μέλη τῆς πρώτης ἐπὶ $\overline{ΔΓ}$, τῆς δευτέρας ἐπὶ $\overline{BΔ}$ καὶ προσθέτοντες κατὰ μέλη, ἐξαλείφομεν τὸ $\overline{ΔΠ}$ :

$$AB^2 \cdot \overline{ΔΓ} + AΓ^2 \cdot \overline{BΔ} = AΔ^2(\overline{ΔΓ} + \overline{BΔ}) + ΔB^2 \cdot \overline{ΔΓ} + ΔΓ^2 \cdot \overline{BΔ}.$$

Ἐπειδὴ $\overline{ΔΓ} + \overline{BΔ} = \overline{BΔ} + \overline{ΔΓ} = \overline{BΓ} = -\overline{ΓB}$ (θεώρ. Chasles), ἡ ἀνωτέρω σχέσις γράφεται :

$$\begin{aligned} AB^2 \cdot \overline{ΔΓ} + AΓ^2 \cdot \overline{BΔ} + AΔ^2 \cdot \overline{ΓB} &= \overline{ΔB}\cdot\overline{ΔB}\cdot\overline{ΔΓ} + \overline{ΔΓ}\cdot\overline{ΔΓ}\cdot\overline{BΔ} = \\ &= \overline{ΔB}\cdot\overline{ΔB}\cdot\overline{ΔΓ} - \overline{ΔΓ}\cdot\overline{ΔΓ}\cdot\overline{ΔB} = \overline{ΔB}\cdot\overline{ΔΓ}(\overline{ΔB} - \overline{ΔΓ}) = \\ &= \overline{ΔB}\cdot\overline{ΔΓ}(\overline{ΓΔ} + \overline{ΔB}) = \overline{ΔB}\cdot\overline{ΔΓ}\cdot\overline{ΓB} = -\overline{BΔ}\cdot\overline{ΔΓ}\cdot\overline{ΓB} \end{aligned}$$

ὁπότε :

$$AB^2 \cdot \overline{ΔΓ} + AΔ^2 \cdot \overline{ΓB} + AΓ^2 \cdot \overline{BΔ} + \overline{ΔΓ}\cdot\overline{ΓB}\cdot\overline{BΔ} = 0.$$

**Παρατηρήσεις. 1η.** Ἡ σχέσις τοῦ Stewart γράφεται :

$$(2) \qquad AB^2 \cdot \overline{ΔΓ} + AΓ^2 \cdot \overline{BΔ} = \overline{BΓ}\,(AΔ^2 + \overline{ΔΓ}\cdot\overline{BΔ})$$

Κατὰ τὰς θέσεις δὲ τοῦ Δ δύναται νὰ ἀπαλλαγῇ τῶν ἀλγεβρικῶν τιμῶν. Ἂν π.χ. τὸ Δ κεῖται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τοῦ ΓΒ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Β, ὁρισθῇ δὲ θετικὴ φορὰ ἡ ἐκ τοῦ Β πρὸς τὸ Γ, ἡ (2) καθίσταται :

$$AB^2 \cdot ΔΓ - AΓ^2 \cdot BΔ = BΓ(AΔ^2 - ΔΓ \cdot BΔ)$$

**2α.** Ἡ σχέσις (1) ἰσχύει καὶ διὰ τέσσαρα τυχόντα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, κείμενα ἐπ' εὐθείας.

**3η. Συμμετρική γραφή τῆς σχέσεως** : Ἐὰν Α,Β,Γ τρία τυχόντα σημεῖα ἐπ' εὐθείας καὶ Ρ τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου, τότε ἰσχύει :

$$ΡΑ^2\cdot\overline{ΒΓ}+ΡΒ^2\cdot\overline{ΓΑ}+ΡΓ^2\cdot\overline{ΑΒ}+\overline{ΒΓ}\cdot\overline{ΓΑ}\cdot\overline{ΑΒ}=0$$

## 87. Μῆκος τῆς ἐσωτερικῆς διχοτόμου.

α΄) (Θ) **Ἡ ἐσωτερικὴ διχοτόμος ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ** (Βλ. σχ. 58) **πληροῖ τὴν μετρικὴν σχέσιν :**

$$ΑΔ^2=ΑΒ\cdot ΑΓ-ΔΒ\cdot ΔΓ$$

*Ἀπόδειξις*. Ἡ σχέσις Stewart δίδει εἰς τὸ τρ. ΑΒΓ :

$$(1)\qquad ΑΒ^2\cdot ΔΓ+ΑΓ^2\cdot ΒΔ=ΒΓ(ΑΔ^2+ΒΔ\cdot ΔΓ).$$

Ἐπειδὴ ὅμως : $\dfrac{ΑΒ}{ΑΓ}=\dfrac{ΔΒ}{ΔΓ}$ (ὡς ἐδείχθη) $\Rightarrow ΑΒ\cdot ΔΓ=ΑΓ\cdot ΔΒ$ καὶ ἡ (1) δύναται τώρα νὰ γραφῇ :

$$ΑΒ\cdot ΑΓ\cdot ΔΒ+ΑΓ\cdot ΑΒ\cdot ΔΓ=ΒΓ\cdot(ΑΔ^2+ΒΔ\cdot ΔΓ)$$

ἢ

$$ΑΒ\cdot ΑΓ(ΔΒ+ΔΓ)=ΒΓ(ΑΔ^2+ΒΔ\cdot ΔΓ)$$

ἢ ἐπειδὴ $ΔΒ+ΔΓ=ΒΓ\Rightarrow ΑΒ\cdot ΑΓ=ΑΔ^2+ΒΔ\cdot ΔΓ\Rightarrow ΑΔ^2=ΑΒ\cdot ΑΓ-ΒΔ\cdot ΔΓ.$

(Ἄλλην ἀπόδειξιν βλέπε εἰς τὰς μετρικὰς σχέσεις ἐν κύκλῳ).

**β΄) Μῆκος τῆς ἐσωτερικῆς διχοτόμου συναρτήσει τῶν πλευρῶν.** Ἂν $ΑΔ=\delta_Α$, ἡ δειχθεῖσα σχέσις : $ΔΑ^2=\beta\gamma-ΔΒ\cdot ΔΓ$ γράφεται, ἀντικαθιστωμένων τῶν ΔΒ, ΔΓ ὑπὸ τῶν εἰς τὴν § 58 β΄ εὑρεθεισῶν τιμῶν των :

$$\delta_Α^2=\beta\gamma-\frac{\alpha^2\beta\gamma}{(\beta+\gamma)^2}\quad ἢ$$

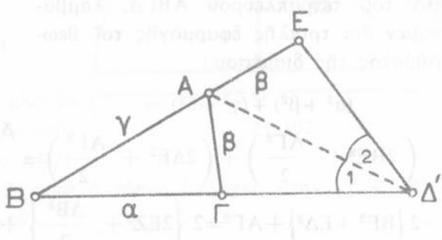
$$\delta_Α^2=\beta\gamma\left\{1-\frac{\alpha^2}{(\beta+\gamma)^2}\right\}.\ \text{Ὁμοίως,}\ \delta_Β^2=\gamma\alpha\left\{1-\frac{\beta^2}{(\gamma+\alpha)^2}\right\},\ \delta_Γ^2=\alpha\beta\left\{1-\frac{\gamma^2}{(\alpha+\beta)^2}\right\}.$$

## 88. Μῆκος τῆς ἐξωτερικῆς διχοτόμου.

α΄) (Θ). **Ἡ ἐξωτερικὴ διχοτόμος ΑΔ΄ τριγώνου ΑΒΓ** (βλ. σχ. 99) **πληροῖ τὴν μετρικὴν σχέσιν :**

$$ΑΔ'^2=Δ'Β\cdot Δ'Γ-ΑΒ\cdot ΑΓ.$$

*Ἀπόδειξις*. Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς πλευρᾶς ΑΒ (σχ. 99) ἄς λάβωμεν τμῆμα ΑΕ = ΑΓ. Τότε τρ. ΑΕΔ΄= τρ. ΑΓΔ΄, συνεπῶς $\widehat{Δ'}_1=\widehat{Δ'}_2$ καὶ ἡ Δ΄Α καθίσταται **ἐσωτερικὴ** διχοτόμος τοῦ τρ. ΒΔ΄Ε. Κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα περὶ ἐσωτερικῆς διχοτόμου θὰ ἔχωμεν :




Σχ. 99

$$\Delta'A^2 = \Delta'B\cdot\Delta'E - AB\cdot AE \quad (\S\ 87) \quad \text{ἤτοι} \quad A\Delta'^2 = \Delta'B\cdot\Delta'\Gamma - AB\cdot A\Gamma.$$

**β΄) Μῆκος τῆς ἐξωτερικῆς διχοτόμου συναρτήσει τῶν πλευρῶν.** Ἂν τεθῇ $A\Delta' = \delta'_A$, ἡ δειχθεῖσα σχέσις $\Delta'A^2 = \Delta'B\cdot\Delta'\Gamma - AB\cdot A\Gamma$ γράφεται βάσει τῶν τύπων τῆς § **59, β΄**:

$$\delta'^2_A = \frac{\alpha^2\beta\gamma}{(\beta-\gamma)^2} - \beta\gamma \Rightarrow$$

$$\delta'^2_A = \beta\gamma\left\{\frac{\alpha^2}{(\beta-\gamma)^2} - 1\right\},$$ ὅπου $\beta \neq \gamma$. Κυκλικῶς εὑρίσκομεν τὰ $\delta'^2_B$, $\delta'^2_\Gamma$.

(Ἀσκήσεις: 422, 423, 424, 425).

## ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΔΙΑΜΕΣΟΥ

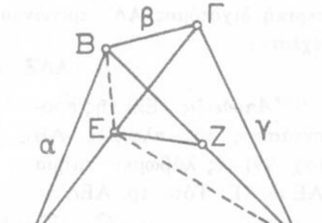
**89. α΄) Ὑπολογισμὸς τῶν διαμέσων συναρτήσει τῶν πλευρῶν.**— Ἔστωσαν α, β, γ τὰ μέτρα τῶν πλευρῶν τριγώνου καὶ $\mu_\alpha$, $\mu_\beta$, $\mu_\gamma$ τὰ μέτρα τῶν ἀντιστοίχων διαμέσων. Τὸ θεώρημα τῆς § **82** δίδει : $\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2}$ καὶ ἐξ αὐτοῦ

$$\mu_\alpha^2 = \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4}.$$

Κυκλικῶς λαμβάνομεν :

$$\mu_\beta^2 = \frac{2\gamma^2 + 2\alpha^2 - \beta^2}{4} \text{ καὶ } \mu_\gamma^2 = \frac{2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2}{4}.$$

**β΄) (Θ) — Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων πλευρῶν τετραπλεύρου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο διαγωνίων του σὺν τῷ τετραπλασίῳ τετραγώνῳ τῆς ἀποστάσεως τῶν μέσων τῶν διαγωνίων του.**



Σχ. 100

Πράγματι ἀπὸ τὸ σχ. 100, ἂν Ε καὶ Ζ τὰ μέσα τῶν διαγωνίων ΑΓ καὶ ΒΔ τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, λαμβάνομεν διὰ τριπλῆς ἐφαρμογῆς τοῦ θεωρήματος τῆς διαμέσου :

$$(\alpha^2 + \beta^2) + (\gamma^2 + \delta^2) =$$

$$= \left(2BE^2 + \frac{A\Gamma^2}{2}\right) + \left(2\Delta E^2 + \frac{A\Gamma^2}{2}\right) =$$

$$= 2\left\{BE^2 + E\Delta^2\right\} + A\Gamma^2 = 2\left\{2EZ^2 + \frac{\Delta B^2}{2}\right\} + A\Gamma^2 \text{ ἤτοι :}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = A\Gamma^2 + B\Delta^2 + 4EZ^2.$$

**γ') (Θ) — Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων παντὸς παραλληλογράμμου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων πλευρῶν του.**

**δ') Τόπος τῶν σημείων Μ, τὰ ὁποῖα πληροῦν τὴν μετρικὴν σχέσιν**

$$\boxed{MA^2 + MB^2 = c^2}$$

**ὅπου Α, Β σταθερὰ σημεῖα καὶ c δεδομένον τμῆμα.**

Ἐὰν Ο τὸ μέσον τοῦ ΑΒ καὶ Μ τὸ τυχὸν σημεῖον τοῦ τόπου, τότε

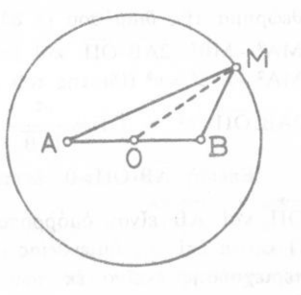
(1) $MA^2 + MB^2 = c^2$ (ἰδιότης τοῦ Μ)

(2) $MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + \frac{AB^2}{2}$

(θεώρ. διαμέσου) καὶ ἑπομένως :

$2\ MO^2 + \frac{AB^2}{2} = c^2$, ἐξ οὗ :

$MO = \sqrt{\frac{c^2}{2} - \frac{AB^2}{4}} =$ σταθερ. μῆκος



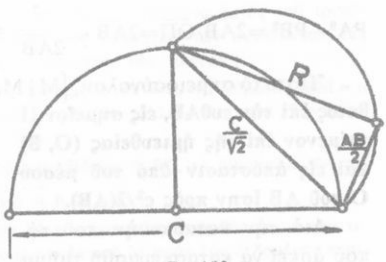
Σχ. 101

Ἑπομένως τὸ Μ ἀνήκει εἰς τὴν σταθερὰν περιφέρειαν $\left(O, \sqrt{\frac{c^2}{2} - \frac{AB^2}{4}}\right)$.

Ἀντιστρόφως κάθε σημεῖον Ρ τῆς περιφερείας ταύτης ἔχει τὴν ἰδιότητα : $PA^2 + PB^2 = c^2$, ὅπως εὐκόλως ἀποδεικνύεται.

**Κατασκευὴ τῆς ἀκτῖνος τοῦ τόπου.**—Ἡ ἀκτὶς R τοῦ τόπου δίδεται ὑπὸ τῆς σχέσεως

$$R = \sqrt{\left(\frac{c}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} \text{ καὶ}$$



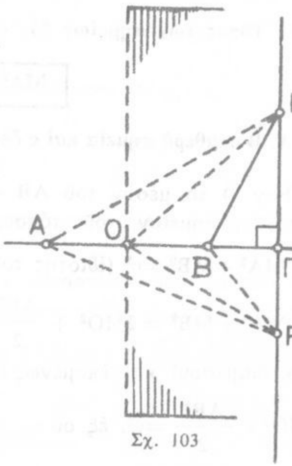
Σχ. 102

κατασκευάζεται ὡς κάθετος πλευρὰ ὀρθογ. τριγώνου μὲ ὑποτείνουσαν $c/\sqrt{2}$ καὶ ἑτέραν κάθετον τὴν $AB/2$, ὡς φαίνεται εἰς τὸ σχ. 102. Φυσικὰ ὁ τόπος ὑπάρχει, ὅταν $c^2 \geq AB^2/2$, ἄλλως, εἶναι τὸ κενὸν σύνολον.

(Ἀσκήσεις : 399, 400, 401).

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΔΙΑΜΕΣΟΥ

**90. α΄) Τόπος τῶν σημείων Μ τῶν πληρούντων τὴν μετρικὴν σχέσιν $MA^2—MB^2=c^2$, ὅπου Α, Β σταθερὰ σημεῖα καὶ c σταθερὸν τμῆμα.**



Σχ. 103

Ἔστω Μ τυχὸν σημεῖον τοῦ τόπου, Π ἡ προβολὴ τοῦ Μ ἐπὶ τὴν ευθ ΑΒ καὶ Ο τὸ μέσον τοῦ ΑΒ. Τὸ δεύτερον θεώρημα τῆς διαμέσου (§ 83) δίδει: $MA^2—MB^2=2\overline{AB}\cdot\overline{O\Pi}$ καὶ ἐπειδὴ $MA^2—MB^2=c^2$ (ἰδιότης τοῦ Μ) $\Rightarrow$

$$2\overline{AB}.\overline{O\Pi}=c^2 \Rightarrow \overline{O\Pi}=\frac{c^2}{2\overline{AB}}.$$

Ἐπειδὴ $\overline{AB}\cdot\overline{O\Pi}>0$, ἕπεται ὅτι τὸ $\overrightarrow{O\Pi}$ καὶ $\overrightarrow{AB}$ εἶναι ὁμόρροπα, ἄρα τὸ Π κεῖται ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας (Ο, Β) τῆς περιεχούσης ἐκεῖνο ἐκ τῶν δύο σταθερῶν σημείων Α καὶ Β, τὸ ὁποῖον ἀπέχει, μονίμως, ὀλιγώτερον ἀπὸ τὸ Μ. Τὸ σημεῖον Π εἶναι πλήρως ὡρισμένον, διότι κεῖται ἐπὶ γνωστῆς ἡμιευθείας (Ο, Β) καὶ ἀπέχει ἀπὸ τὴν ἀρχὴν Ο αὐτῆς, ἀπόστασιν γνωστήν: $\frac{c^2}{2AB}$. Ἐπομένως τὰ σημεῖα Μ εὑρίσκονται ἐπὶ εὐθείας καθέτου ἐπὶ τὴν ΑΒ εἰς τὸ σταθερὸν σημεῖον Π.

Ἀντιστρόφως διὰ πᾶν σημεῖον Ρ τῆς εὐθείας ταύτης ἰσχύει (σχ. 103)

$$PA^2—PB^2=2\overline{AB}\cdot\overline{O\Pi}=2\overline{AB}\cdot\frac{c^2}{2\overline{AB}}=c^2.$$

Ὥστε τὸ σημειοσύνολον $\{M \mid MA^2—MB^2=c^2\}$ **εἶναι μία εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὴν ευθΑΒ, εἰς σημεῖον Π κείμενον ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας (Ο, Β) καὶ εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ μέσου Ο τοῦ ΑΒ ἴσην πρὸς $c^2/2(AB)$.**

**Διὰ τὴν κατασκευὴν** τοῦ τόπου ἀρκεῖ νὰ κατασκευασθῇ τμῆμα ΟΠ ἴσον πρὸς τὸ $\frac{c^2}{2(AB)}$. Τοῦτο γίνεται βάσει τῆς § 75, δ΄, ὅπως φαίνεται εἰς τὸ σχ. 104.

Σχ. 104

**β΄) Ἀλγεβρικὴ διατύπωσις.** —

**Τὸ σύνολον τῶν σημείων Μ, διὰ τὰ ὁποῖα: $MA^2 - MB^2 = K$, ὅπου $K = c^2$ ἢ $K = -c^2$, εἶναι εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθ ΑΒ εἰς σημεῖον Π ὁριζόμενον ὑπὸ τῆς σχέσεως**

$$2\overline{AB}\cdot\overline{O\Pi}=K$$

**ἔνθα Ο τὸ μέσον τοῦ σταθεροῦ τμήματος ΑΒ.**

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

391. Ποῖον τὸ εἶδος τῆς γωνίας τῆς κειμένης ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας πλευρᾶς εἰς τὰ τρίγωνα τὰ ἔχοντα μήκη πλευρῶν:

i) 5, 12, 13.
ii) 4, 5, 6.
iii) 4, 5, 7.
iv) $\alpha$, $\beta$, $\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta}$.

Εἰς τὴν τελευταίαν περίπτωσιν νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐν λόγῳ γωνία.

392. Εἰς πᾶν ὀξυγώνιον τρίγωνον τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τριῶν πλευρῶν ὑπερβαίνει τὸ διπλάσιον τετράγωνον τῆς διαμέτρου τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

393. Δοθέντος ἡμικυκλίου λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς διαμέτρου αὐτοῦ ΑΒ τυχὸν σημεῖον Γ καὶ ἐπὶ τῶν τμημάτων ΑΓ καὶ ΒΓ, ὡς ἐπὶ διαμέτρων, γράφομεν ἡμικύκλια ἐντὸς τοῦ δοθέντος, φέρομεν δὲ ἐκ τοῦ Γ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ. Νὰ δειχθῇ ὅτι οἱ κύκλοι οἱ ἐγγεγραμμένοι εἰς τὰ δύο μέρη, εἰς ἃ χωρίζεται ὑπὸ τῆς καθέτου ἡ μεταξὺ τῶν τριῶν ἡμιπεριφερειῶν ἐπιφάνεια, εἶναι ἴσοι.

394. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου, τοῦ ὁποίου αἱ διάμεσοι ἔχουν μήκη $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$.

395. Ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων δύο διαμέσων ἑνὸς τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ πενταπλάσιον τετράγωνον τῆς τρίτης διαμέσου, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον.

396. Ποία σχέσις ὑπάρχει μεταξὺ τῶν διαμέσων $\mu_\alpha$, $\mu_\beta$, $\mu_\gamma$, τριγώνου, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ πληροῦν τὴν σχέσιν: $\beta^2+\gamma^2=2\alpha^2$;

397. Ἐὰν ἐπὶ τῶν πλευρῶν τριγώνου κατασκευασθοῦν τετράγωνα ἐκτὸς τοῦ τριγώνου, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τμημάτων τῶν συνδεόντων τὰς γειτονικὰς κορυφὰς τῶν τετραγώνων τούτων, συναρτήσει τῶν πλευρῶν.

398. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, οὗτινος δίδεται ἡ $B\Gamma=\alpha$, ἡ διάμεσος $BM=\mu$ καὶ τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ $k^2$ τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν. Συνθῆκαι δυνατότητος.

399. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ, οὗτινος δίδεται ἡ ΒΓ, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ καὶ ἡ γωνία $\widehat{A}$ ἢ ἓν ὕψος.

400. Νὰ κατασκευασθῇ ὁ γ.τ. τοῦ σημείου Μ τοιούτου, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἐφαπτομένων τμημάτων τῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ Μ πρὸς δύο δεδομένας περιφερείας νὰ ἰσοῦται πρὸς δοθὲν τετράγωνον.

401. Ὀρθὴ γωνία $\widehat{BA\Gamma}$ στρέφεται περὶ τὴν σταθερὰν κορυφήν της Α κειμένην ἐντὸς δοθέντος κύκλου. Ἐὰν αἱ πλευραί της τέμνουν εἰς Β καὶ Γ τὴν περιφέρειαν, νὰ εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τοῦ μέσου τῆς ΒΓ.

402. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῆς $\mu_\alpha$, τῆς $\beta^2-\gamma^2=k^2$ καὶ τῆς γωνίας τῆς διαμέσου $\mu_\alpha$ καὶ τῆς πλευρᾶς α.

403. Συναρτήσει τῶν τεσσάρων πλευρῶν τραπεζίου νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τοῦ τμήματος τοῦ συνδέοντος τὰ μέσα τῶν βάσεών του.

404. Τὸ ὡς ἄνω τμῆμα νὰ ἐκφρασθῇ συναρτήσει τῶν βάσεων καὶ τῶν διαγωνίων.

405. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαγώνιοι τραπεζίου συναρτήσει τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.

406. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τῶν σημείων, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τὰς κορυφὰς δεδομένου τριγώνου εἶναι ἴσον πρὸς δοθὲν τετράγωνον.

407. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ βάσεις τραπεζίου, τοῦ ὁποίου δίδονται αἱ διαγώνιοι καὶ αἱ μὴ παράλληλοι πλευραί.

408. Νὰ ὑπολογισθοῦν συναρτήσει τῶν πλευρῶν τριγώνου ΑΒΓ τὰ τμήματα, ἅτινα ἀγόμενα ἐκ τῆς κορυφῆς Α χωρίζουν τὴν ἀπέναντι πλευρὰν εἰς ν ἴσα μέρη.

409. Ἐπὶ δοθέντος τόξου νὰ εὑρεθῇ σημεῖον, τοῦ ὁποίου τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τὰ ἄκρα τοῦ τόξου νὰ ἰσοῦται πρὸς δοθὲν τετράγωνον.

410. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τοῦ κέντρου τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου τριγώνου ΑΒΓ, οὗτινος ἡ κορυφὴ Α εἶναι σταθερά, αἱ δὲ Β καὶ Γ κινοῦνται ἐπὶ δοθείσης ἀπεράντου εὐθείας οὕτως, ὥστε $ΑΒ\cdot ΑΓ=κ^2$ (κ=δοθὲν τμῆμα).

411. Ἐὰν Μ τυχὸν σημεῖον τοῦ τόξου ΑΓ τοῦ περὶ τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ περιγεγραμμένου κύκλου καὶ ΜΔ ἡ ἀπόστασις τοῦ Μ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς ΑΓ, νὰ δειχθῇ πρῶτον ὅτι $ΜΒ=ΜΑ+ΜΓ$ καὶ κατόπιν ἡ σχέσις: $ΜΒ^2=ΜΑ^2+ΜΓ^2+4R\cdot ΜΔ$, ἔνθα R ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου.

412. Τριγώνου ΑΒΓ μένει σταθερὰ ἡ βάσις ΒΓ καὶ ἀκόμη, $\frac{υ_β\cdot υ_γ}{υ_α}=k$ (k=δοθὲν τμῆμα). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τῆς κορυφῆς Α.

413. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, οὗτινος γνωρίζομεν τὴν γωνίαν $\widehat{Α}$, τὴν ἀκτῖνα ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου καὶ τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου τούτου ἀπὸ τὰς κορυφὰς Β καὶ Γ.

414. Εἰς δοθέντα κύκλον νὰ ἐγγραφῇ τετράπλευρον, τοῦ ὁποίου δίδονται δύο διαδοχικαὶ πλευραὶ καὶ i) τὸ ἄθροισμα ἢ ii) τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων ἢ iii) ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων ἢ iv) τὸ γινόμενον τῶν δύο ἄλλων διαδοχικῶν πλευρῶν.

415. Εἰς δοθέντα κύκλον νὰ ἐγγραφῇ κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ, οὗτινος δίδονται δύο ἀπέναντι πλευραὶ ΑΒ=α καὶ ΓΔ=β καὶ τὸ ἄθροισμα ἢ τὸ γινόμενον τῶν δύο ἄλλων ἀπέναντι πλευρῶν ΒΓ καὶ ΑΔ.

(**Ὑπόδ.** Ἐὰν ἡ ἐκ τοῦ Β παρ/λος πρὸς τὴν διαγώνιον ΑΓ τέμνῃ τὴν περιγεγραμμένην περιφέρειαν εἰς τὸ Β′, τότε τὸ τετράπλευρον ΑΒ′ΓΔ ἔχει δύο διαδοχικὰς πλευρὰς ἴσας πρὸς α καὶ β καὶ τὰς δύο ἄλλας διαδοχικὰς ἴσας πρὸς ΒΓ καὶ ΑΔ. Ὅθεν ἡ κατασκευὴ του ἀνάγεται εἰς τὴν προηγουμένην).

416. Ἐὰν α, β, γ, δ εἶναι τὰ μέτρα τῶν διαδοχικῶν πλευρῶν ἁπλοῦ τετραπλεύρου δείξατε ὅτι:

i) Ἡ $|α^2+γ^2-(β^2+δ^2)|$ ἰσοῦται πρὸς τὸ διπλάσιον μιᾶς διαγωνίου ἐπὶ τὴν προβολὴν τῆς ἄλλης διαγωνίου ἐπὶ ταύτην.

ii) Ἡ σχέσις $α^2+γ^2=β^2+δ^2$ εἶναι χαρακτηριστικὴ ἰδιότης τῶν τετραπλεύρων τῶν ἐχόντων καθέτους διαγωνίους.

iii) Ἔστω ἀρθρωτὸν τετράπλευρον, δηλ. μεταβαλλόμενον τετράπλευρον, ἀλλὰ διατηροῦν σταθερὰ τὰ μήκη τῶν πλευρῶν του. Ἐὰν κατά τινα στιγμὴν τοῦτο ἔχῃ καθέτους διαγωνίους, τότε καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τῆς μεταβολῆς του αἱ διαγώνιοί του παραμένουν κάθετοι.

417. Ἔστω ΑΔ ὕψος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Δείξατε ὅτι, ἂν

$$ΑΔ^2=-\overline{ΔΓ}\cdot\overline{ΔΒ},$$

τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον εἰς Α.

418. **Ψευδοορθογώνιον** τρίγωνον ΑΒΓ καλεῖται ἐκεῖνο, τοῦ ὁποίου $\widehat{B}-\widehat{\Gamma}=90^\circ$. Ἂν ΑΔ τὸ ὕψος του, δείξατε ὅτι ἡ ἰδιότης

$$A\Delta^2=\overline{\Delta\Gamma}\cdot\overline{\Delta B}$$

εἶναι χαρακτηριστικὴ διὰ τὰ ψευδοορθογώνια τρίγωνα.

Δείξατε ἐπίσης ὅτι εἰς τὸ ἀνωτέρω τρίγωνον ἰσχύει ἡ σχέσις: $AB^2+A\Gamma^2=4R^2$, ὅπου R ἡ ἀκτὶς τοῦ περὶ τὸ τρ. ΑΒΓ περιγεγραμμένου κύκλου καὶ ὅτι ἡ σχέσις αὕτη δὲν εἶναι χαρακτηριστικὴ διὰ τὸ ψευδοορθογώνιον τρίγωνον.

419. Δίδεται ἄξων x'Ox, ἐπ' αὐτοῦ δύο σημεῖα Α καὶ Α' τοιαῦτα, ὥστε $\overline{OA}=-\overline{OA'}=\alpha>0$ καὶ ὀρθογώνιον παρ/μον Α'ΑΒΒ' μὲ ΒΑ=Β'Α'=β. Δύο μεταβλητὰ σημεῖα Μ καὶ Μ' κινοῦνται ἐπὶ τοῦ ἄξονος οὕτως, ὥστε $\overline{AM}\cdot\overline{A'M'}=-\beta^2$. Ποῖος ὁ γ.τ. τοῦ σημείου τομῆς τῶν εὐθειῶν Μ'Β' καὶ ΜΒ; Ποία ἡ θέσις τῆς περιφερείας διαμέτρου ΜΜ' ὡς πρὸς τὸν τόπον; Πῶς δύναται νὰ κατασκευασθῇ ἓν ζεῦγος Μ, Μ' τῶν ἀνωτέρω σημείων, ὅταν δίδεται τὸ μέσον τοῦ ΜΜ';

420. Ἐὰν εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ μὲ $\widehat{A}=90^\circ$ ἡ διχοτόμος ΑΔ=ΑΒ, νὰ δειχθῇ ἡ σχέσις $B\Gamma^2=2\Gamma\Delta^2$.

421. Δοθέντος τριγώνου ΑΒΓ νὰ δειχθῇ ὅτι ὑπάρχει σταθερὸν σημεῖον Σ ἀπέχον ἐξ ἴσου ἀπὸ ὅλα τὰ σημεῖα Μ τοῦ ἐπιπέδου τὰ πληροῦντα τὴν μετρικὴν σχέσιν $MA^2+2MB^2+3M\Gamma^2=c^2$, ὅπου c δεδομένον τμῆμα. (Γενίκευσις). (**Ὑπόδ.** βλ. § 85, β').

422. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἐξωτερικαὶ καὶ ἐσωτερικαὶ διχοτόμοι τοῦ τριγώνου, τοῦ ὁποίου αἱ τρεῖς πλευραὶ εἶναι 7, 12, 9 μέτρων.

423. Τριγώνου ΑΒΓ δίδονται αἱ πλευραὶ β, γ καὶ ὅτι ἡ διάμεσος ΑΜ ἰσοῦται πρὸς τὴν ἐξωτερικὴν διχοτόμον τῆς $\widehat{A}$. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ α καὶ ἡ διάμεσος ΑΜ συναρτήσει τῶν β καὶ γ. Νὰ γίνῃ ἐπίσης γεωμ. κατασκευὴ τοῦ τριγώνου.

424. Νὰ ὑπολογισθῇ συναρτήσει τοῦ k, τὸ μῆκος τῆς διχοτόμου ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ, ὅταν δίδεται ὅτι $\beta\gamma=k^2$ καὶ ὅτι $\beta+\gamma=2\alpha$.

425. Νὰ δειχθῇ ὅτι εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ: $\delta^2_A+\delta^2_B+\delta^2_\Gamma\leq\tau^2$.

426. Ἐὰν πολύγωνον μὲ ἄρτιον πλῆθος πλευρῶν εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον, τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων τυχόντος σημείου τῆς περιφερείας ἀπὸ τὰς πλευρὰς περιττῆς τάξεως ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων τοῦ αὐτοῦ σημείου ἀπὸ τὰς πλευρὰς τάξεως ἀρτίας.

427. Ἐὰν Ο τὸ κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ τρ. ΑΒΓ κύκλου καὶ Κ τὸ τοῦ περιγεγραμμένου, νὰ δειχθῇ ὅτι $KO^2=R^2-2R\rho$.

(**Ὑπόδ.** Νὰ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ἡ ἄσκ. 145 καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ $KO^2$ ἐκ τοῦ τρ. ΚΟΜ (Μ, μέσον τόξου $\widehat{B\Gamma}$) διὰ τοῦ ἐπεκτεταμένου Πυθαγορείου θεωρ.).

428. Ἐὰν Κ τὸ κέντρον τοῦ περὶ τρίγωνον περιγεγραμμένου κύκλου καὶ $O_1$ τὸ τοῦ παρὰ τὴν πλευρὰν α παρεγγεγραμμένου, νὰ δειχθῇ ἡ σχέσις:

$$KO^2_1=R^2+2R\rho_\alpha.$$

(**Ὑπόδ.** βλ. ἄσκ. 145. Ἡ $KO^2_1$ δύναται νὰ ὑπολογισθῇ ἐκ τοῦ τρ. $KO_1M$ (ἀμβλυγωνίου), ὅπου Μ τὸ μέσον τοῦ τόξου $\widehat{B\Gamma}$).

429. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας ὀρθογωνίου τριγώνου ἀπὸ τὰ δύο σημεῖα τὰ τριχοτομοῦντα τὴν ὑποτείνουσαν ἰσοῦται πρὸς τὰ 5/9 τοῦ τετραγώνου τῆς ὑποτεινούσης.

430. Ἐὰν G τὸ βαρύκεντρον τριγώνου ΑΒΓ καὶ Μ τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τριγώνου, νὰ δειχθῇ ὁ τύπος τοῦ Leibniz:

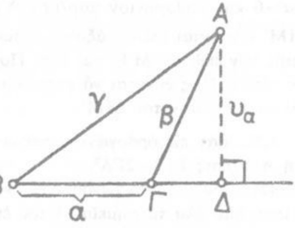
$$MA^2+MB^2+M\Gamma^2=3MG^2+GA^2+GB^2+G\Gamma^2$$

# ΘΕΩΡΙΑ ΤΟΥ ΕΜΒΑΔΟΥ ΤΩΝ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ

## Α΄ ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

## (Συνέχεια τῶν μετρικῶν σχέσεων ἐν τριγώνῳ)

**91. Ὑπολογισμὸς τῶν ὑψῶν τριγώνου συναρτήσει τῶν πλευρῶν.**— Ἔστωσαν α, β, γ τὰ μέτρα τῶν πλευρῶν τρ. ΑΒΓ καὶ $\upsilon_\alpha$ $\upsilon_\beta$, $\upsilon_\gamma$ τὰ μέτρα τῶν ἀντιστοίχων ὑψῶν. Πρὸς ὑπολογισμὸν τοῦ ὕψους $\text{ΑΔ}=\upsilon_\alpha$ (σχ. 105) ἀρκεῖ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ προβολὴ ΓΔ τῆς πλευρᾶς ΑΓ ἐπὶ τὸν φορέα τῆς ΒΓ. Τὸ ἐπεκτεταμένον πυθαγόρειον θεώρημα δίδει :




Σχ. 105

$$\gamma^2=\alpha^2+\beta^2-2\overline{\Gamma B}\cdot\overline{\Gamma\Delta}\Rightarrow$$

$$\overline{\Gamma\Delta}=\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\overline{\Gamma B}}\Rightarrow \Gamma\Delta^2=\frac{(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)^2}{4\alpha^2}.$$

Τὸ πυθαγόρειον θεώρημα εἰς τὸ τρίγωνον ΑΓΔ δίδει :

$$\upsilon_\alpha^2=\beta^2-\Gamma\Delta^2=\beta^2-\frac{(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)^2}{4\alpha^2}=\frac{4\alpha^2\beta^2-(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)^2}{4\alpha^2}=$$

$$=\frac{(2\alpha\beta+\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)(2\alpha\beta-\alpha^2-\beta^2+\gamma^2)}{4\alpha^2}=\frac{\{(\alpha+\beta)^2-\gamma^2\}\{\gamma^2-(\alpha-\beta)^2\}}{4\alpha^2}=$$

$$=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)(\gamma-\alpha+\beta)(\gamma+\alpha-\beta)}{4\alpha^2}\quad\text{καὶ}$$

$$(1)\qquad \upsilon_\alpha=\frac{1}{2\alpha}\sqrt{(\alpha+\beta+\gamma)(-\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)}\,.$$

Συνήθως θέτομεν : $\tau=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$ (ἡμιπερίμετρος), ὁπότε $\tau-\alpha=$ $=\dfrac{-\alpha+\beta+\gamma}{2}$, $\tau-\beta=\dfrac{\alpha-\beta+\gamma}{2}$, $\tau-\gamma=\dfrac{\alpha+\beta-\gamma}{2}$ καὶ ὁ ἀνωτέρω τύπος μετασχηματίζεται ὡς ἑξῆς :

$$\upsilon_\alpha=\frac{1}{2\alpha}\sqrt{2\tau\cdot2(\tau-\alpha)\cdot2(\tau-\beta)\cdot2(\tau-\gamma)}=\frac{2}{\alpha}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}\,.$$

Τελικῶς :

$$\upsilon_\alpha=\frac{2}{\alpha}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$$

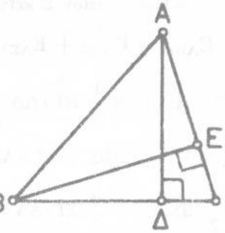
$$(2)\qquad \upsilon_\beta=\frac{2}{\beta}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$$

$$\upsilon_\gamma=\frac{2}{\gamma}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}\,.$$

**92. Ἐμβαδὸν τριγώνου.** α′) (Θ) — **Εἰς πᾶν τρίγωνον τὰ ὕψη εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα τῶν πλευρῶν, ἐπὶ τῶν ὁποίων ἵστανται κάθετα.**

Ἤτοι, ἂν α, β, γ αἱ πλευραὶ καὶ $\upsilon_\alpha$, $\upsilon_\beta$, $\upsilon_\gamma$ τὰ ἀντίστοιχα ὕψη, τότε :

(1) $$\boxed{\alpha\upsilon_\alpha = \beta\upsilon_\beta = \gamma\upsilon_\gamma}$$



Σχ. 106

Ἔστωσαν ΑΔ καὶ ΒΕ δύο ὕψη τοῦ τρ. ΑΒΓ (σχ. 106) καὶ ἡ $\widehat{\Gamma}$ ὀξεῖα. Τότε προφανῶς τρ. ΑΔΓ≈τρ. ΒΕΓ

καὶ $$\frac{ΑΔ}{ΒΕ} = \frac{ΑΓ}{ΒΓ} \quad ἢ \quad \boxed{\frac{\upsilon_\alpha}{\upsilon_\beta} = \frac{\beta}{\alpha}} \Rightarrow \alpha\upsilon_\alpha = \beta\upsilon_\beta.$$

Ἡ σχέσις αὐτὴ δεικνύεται ὁμοίως καὶ ὅταν $\Gamma > 90^\circ$. Ὁμοίως, $\beta\upsilon_\beta = \gamma\cdot\upsilon_\gamma$. (Ἐξ ἄλλου οἱ τύποι (2) τῆς § **91** δεικνύουν τὸ θεώρημα).

**β′) Ἐμβαδὸν τριγώνου.** Οἱ τύποι (1) δεικνύουν ὅτι δι' ἓν δεδομένον τρίγωνον τὸ γινόμενον μιᾶς πλευρᾶς ἐπὶ τὸ ἀντίστοιχον ὕψος εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς ἐκλογῆς τῆς πλευρᾶς, δηλ. εἶναι μία σταθερὰ ποσότης διὰ τὸ θεωρούμενον τρίγωνον.

**Τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου μιᾶς οἱασδήποτε πλευρᾶς τοῦ τριγώνου ἐπὶ τὸ ἀντίστοιχον ὕψος καλοῦμεν «ἐμβαδὸν» τοῦ τριγώνου** (βλ. καὶ § **98** β′).

Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τρ. ΑΒΓ παριστῶμεν συνήθως μὲ Ε ἢ $E_{ΑΒΓ}$ δηλ.

(2) $$E_{ΑΒΓ} \underset{\text{ἐξ ὁρισμοῦ}}{=\!=\!=} \frac{1}{2}\alpha\upsilon_\alpha = \frac{1}{2}\beta\upsilon_\beta = \frac{1}{2}\gamma\upsilon_\gamma = E_{ΒΓΑ} = E_{ΒΑΓ} \text{ κτλ.}$$

Οὕτω ἐπὶ τοῦ συνόλου τῶν τριγώνων ὁρίζομεν μίαν συνάρτησιν f, ἡ ὁποία διὰ κάθε τρίγωνον Τ ἔχει μίαν ὡρισμένην θετικὴν τιμὴν f(T)=E, ἥτις ἐκφράζει τὸ (ἀνωτέρω ὁρισθὲν) ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου Τ. Τὸ πεδίον ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως ταύτης f(T) εἶναι δηλαδὴ τὸ σύνολον τῶν τριγώνων καὶ τὸ σύνολον τῶν τιμῶν της εἶναι τὸ σύνολον τῶν θετικῶν ἀριθμῶν.

Ὅπως θὰ δείξωμεν ἀμέσως κατωτέρω, ἡ συνάρτησις αὐτὴ f(T) $\left(=\frac{1}{2} \text{ βάσεως} \times \text{ὕψος}\right)$ εἶναι *προσθετική*, δηλ. ἂν ἓν τρίγωνον Τ διαμερισθῇ εἰς οἱονδήποτε πλῆθος τριγώνων $T_1, T_2 \ldots T_\nu$, τότε

$$f(T) = f(T_1) + f(T_2) + \ldots + f(T_\nu)$$

δηλ. τὸ ἐμβαδὸν τοῦ Τ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων, εἰς τὰ ὁποῖα τὸ Τ ἀναλύεται.

## 93. Ἰδιότητες τοῦ ἐμβαδοῦ τῶν τριγώνων.

**(i)—Ἐὰν σημεῖον Σ κεῖται ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ, τότε :**

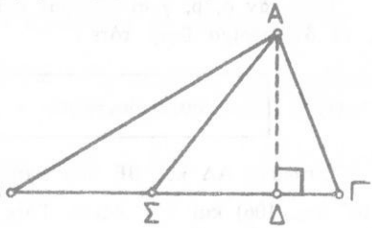
$E_{AB\Gamma} = E_{AB\Sigma} + E_{A\Sigma\Gamma}$·

Διότι : $E_{AB\Gamma} = \frac{1}{2} B\Gamma \cdot A\Delta$

(σχ. 107) $= \frac{1}{2}(B\Sigma + \Sigma\Gamma) \cdot A\Delta =$

$= \frac{1}{2} B\Sigma . A\Delta + \frac{1}{2} \Sigma\Gamma \cdot A\Delta =$

$= E_{AB\Sigma} + E_{A\Sigma\Gamma}$·




Σχ. 107

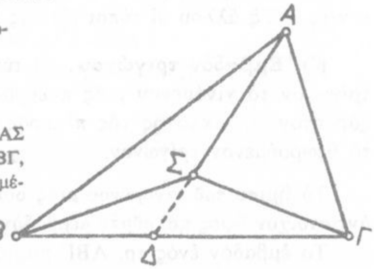
**Πόρισμα. Ἐὰν ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ κεῖνται κατὰ σειρὰν τὰ σημεῖα Β, $A_1$, $A_2$, ... $A_\nu$, Γ, τότε**

$\text{Εμβ}AB\Gamma = \text{Εμβ}ABA_1 + \text{Εμβ}AA_1A_2 + \ldots + \text{Εμβ}AA_\nu\Gamma.$

**(ii)—Ἐὰν σημεῖον Σ κεῖται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τριγώνου ΑΒΓ, τότε :**

$E_{AB\Gamma} = E_{\Sigma AB} + E_{\Sigma B\Gamma} + E_{\Sigma\Gamma A}$·

Διότι ἡ προέκτασις τοῦ τμήματος ΑΣ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Σ τέμνει τὴν πλευρὰν ΒΓ, ἔστω εἰς Δ, καὶ ἐφαρμόζοντες ἐπανειλημμένως τὸ προηγούμενον ἔχομεν




$E_{AB\Gamma} = E_{BA\Delta} + E_{\Gamma\Delta A} =$

$= \{E_{BA\Sigma} + E_{B\Sigma\Delta}\} + \{E_{\Gamma A\Sigma} + E_{\Gamma\Sigma\Delta}\}$

Σχ. 108

$= E_{BA\Sigma} + E_{\Gamma A\Sigma} + \{E_{B\Sigma\Delta} + E_{\Gamma\Sigma\Delta}\} = E_{\Sigma AB} + E_{\Sigma\Gamma A} + E_{\Sigma B\Gamma}.$

**(iii)—Ἐὰν σημεῖον Σ κεῖται ἐκτὸς τοῦ τρ. ΑΒΓ, ἀλλ' ἐντὸς τῆς γωνίας $\widehat{A}$, τότε :**

$E_{AB\Gamma} = E_{\Sigma AB} + E_{\Sigma A\Gamma} - E_{\Sigma B\Gamma}$·

Διότι τὸ τμῆμα ΑΣ τέμνει τὴν πλευρὰν ΒΓ, ἔστω εἰς Δ καὶ ἐφαρμόζοντες τὸ (i) ἔχομεν :

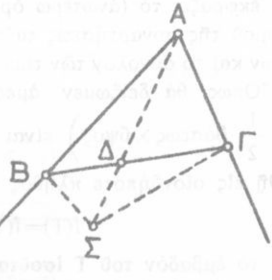
$E_{\Sigma AB} + E_{\Sigma A\Gamma}$

$= (E_{AB\Delta} + E_{B\Delta\Sigma}) + (E_{A\Delta\Gamma} + E_{\Gamma\Delta\Sigma}) =$

$= \{E_{AB\Delta} + E_{A\Delta\Gamma}\} + \{E_{B\Delta\Sigma} + E_{\Gamma\Delta\Sigma}\} =$

$= E_{AB\Gamma} + E_{\Sigma B\Gamma} \Rightarrow$

$\Rightarrow E_{\Sigma AB} + E_{\Sigma A\Gamma} - E_{\Sigma B\Gamma} = E_{AB\Gamma}.$




Σχ. 109

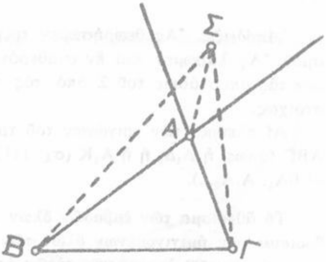
(iv) —**Ἐὰν σημεῖον Σ κεῖται ἐντὸς τῆς γωνίας, ἡ ὁποία εἶναι κατὰ κορυφὴν τῆς γωνίας $\widehat{A}$ τριγώνου ΑΒΓ, τότε:**

$$E_{AB\Gamma}=E_{\Sigma B\Gamma}-E_{\Sigma AB}-E_{\Sigma A\Gamma}.$$

Διότι τότε τὸ Α εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ τρ. ΣΒΓ (σχ. 110) καὶ συνεπῶς κατὰ τὸ (ii) ἰσχύει:

$$E_{\Sigma B\Gamma}=E_{AB\Gamma}+E_{\Sigma AB}+E_{\Sigma A\Gamma}.$$

ἐκ τούτου δὲ ἔπεται τὸ ἀποδεικτέον.



Σχ. 110

(v) — **Δοθέντος τριγώνου ΑΒΓ καὶ σημείου Σ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτοῦ, καλοῦμεν ἀλγεβρικὴν ἀπόστασιν τοῦ Σ ἀπό τινος πλευρᾶς τοῦ τριγώνου τὴν ἀπόστασιν τοῦ Σ ἀπὸ τὸν φορέα τῆς πλευρᾶς, ἐφοδιασμένην μὲ τὸ πρόσημον + ἢ —, καθ' ὅσον τὸ Σ κεῖται ὡς πρὸς τὴν πλευρὰν εἰς τὸ ἴδιον ἡμιεπίπεδον μὲ τὴν ἀπέναντι κορυφὴν ἢ εἰς τὸ ἀντίθετον. Τούτου τεθέντος, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τῶν γινομένων τῶν πλευρῶν του πολλαπλασιασμένων ἐπὶ τὰς ἀλγεβρικὰς ἀποστάσεις αὐτῶν ἀπὸ τοῦ Σ.**

*Ἀπόδειξις.* Ἔστωσαν x, y, z αἱ ἀλγεβρικαὶ ἀποστάσεις τοῦ Σ ἀπὸ τὰς πλευρὰς ΒΓ = α, ΓΑ = β, ΑΒ = γ ἀντιστοίχως.

Ἐὰν τὸ Σ κεῖται ἐντὸς τοῦ τριγώνου, τότε τὰ x, y, z εἶναι ὅλα θετικὰ καὶ ἴσα πρὸς τὰ ὕψη τῶν τριγώνων ΣΒΓ, ΣΓΑ, ΣΑΒ καὶ τὸ ἀνωτέρω θεώρ. (ii) δίδει:

$$(1) \qquad E_{AB\Gamma}=\frac{1}{2}\alpha x+\frac{1}{2}\beta y+\frac{1}{2}\gamma z.$$

Ἐὰν τὸ Σ κεῖται ἐκτὸς τοῦ τρ. ΑΒΓ, ἀλλ' ἐντὸς τῆς $\widehat{A}$ (σχ. 109), τότε ἡ x εἶναι $<0$, ἐνῷ y καὶ z θετικαί. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τρ. ΣΒΓ εἶναι τότε $-\frac{1}{2}\alpha x$, ἐνῷ τὰ ἐμβαδὰ τῶν τρ. ΣΑΒ, τρ. ΣΑΓ εἶναι $\frac{1}{2}\gamma z$, $\frac{1}{2}\beta y$ ἀντιστοίχως καὶ ἡ σχέσις τοῦ θεωρ. (iii) γίνεται $E_{AB\Gamma}=\frac{1}{2}\gamma z+\frac{1}{2}\beta y+\frac{1}{2}\alpha x$, ἤτοι ἡ (1) πάλιν ἰσχύει.

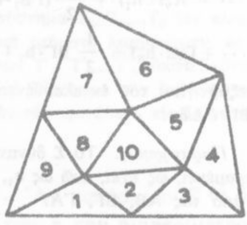
Ἂν τὸ Σ κεῖται ἐντὸς τῆς κατὰ κορυφὴν τῆς $\widehat{BA\Gamma}$ (σχ. 110), τότε τὰ y καὶ z εἶναι ἀρνητικά, τὸ x θετικὸν καὶ ἡ σχέσις τοῦ θεωρ. (iv) ὁδηγεῖ πάλιν εἰς τὴν ἰσότητα (1).

Τέλος, ἐὰν τὸ Σ κεῖται ἐπὶ τοῦ φορέως μιᾶς πλευρᾶς τοῦ τρ. ΑΒΓ, τότε μία ἐκ τῶν ἀποστάσεων x, y, z εἶναι μηδὲν καὶ ὁ τύπος (1) ἰσχύει.

## 94. Ἡ προσθετικότης τοῦ ἐμβαδοῦ.

**α') Τριγωνισμός. — Ἔστω εἷς διαμερισμὸς ἑνὸς ἁπλοῦ πολυγώνου εἰς τρίγωνα οὕτως, ὥστε νὰ πληροῦνται αἱ ἑπόμεναι συνθῆκαι: τὰ τρίγωνα, εἰς ἃ διεχωρίσθη τὸ πολύγωνον λαμβανόμενα ἀνὰ δύο ἢ οὐδὲν κοινὸν σημεῖον μεταξύ των ἔχουν ἢ ἔχουν μίαν κορυφὴν κοινὴν ὡς μόνον κοινὸν σημεῖον ἢ ἔχουν μίαν πλευρὰν κοινὴν καὶ οὐδὲν ἕτερον σημεῖον κοινόν. Εἷς τεμαχισμὸς τοῦ πολυγώνου εἰς τρίγωνα πληροῦντα τὰς ἀνωτέρω συνθήκας λέγεται «τριγωνισμὸς» τοῦ πολυγώνου σχ. 110α.**

**β') (Θ) — Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων, εἰς τὰ ὁποῖα τὸ δοθὲν τρίγωνον διαμερίζεται δι' ἑνὸς οἱουδήποτε τριγωνισμοῦ.**

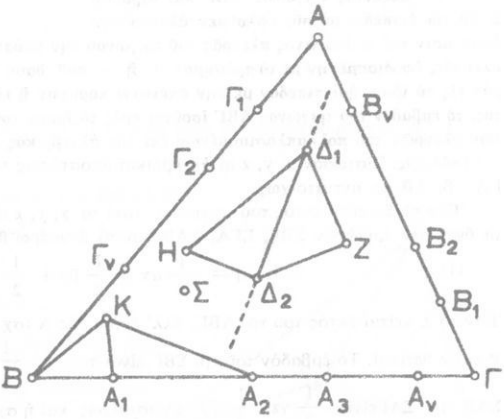


Σχ. 110α

*Ἀπόδειξις.* Ἄς θεωρήσωμεν τρίγωνον ΑΒΓ διῃρημένον εἰς τρίγωνα διὰ τριγωνισμοῦ. Ἄς λάβωμεν καὶ ἓν σταθερὸν σημεῖον Σ ἐντὸς τοῦ τρ. ΑΒΓ καὶ ἄς καλέσωμεν τὰς ἀποστάσεις τοῦ Σ ἀπὸ τὰς πλευρὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ διὰ τῶν $h_1$, $h_2$, $h_3$ ἀντιστοίχως.

Αἱ πλευραὶ τῶν τριγώνων τοῦ τριγωνισμοῦ κεῖνται ἐξ ὁλοκλήρου ἐντὸς τοῦ τρ. ΑΒΓ (ὅπως ἡ $\Delta_1\Delta_2$ ἢ ἡ $A_1K$ (σχ. 111)) ἢ κεῖνται ἐπὶ τῆς περιμέτρου τοῦ τρ. ΑΒΓ (ὅπως αἱ $BA_1$, $A_1A_2$...).

**Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν ὅλων τῶν τριγώνων τοῦ τριγωνισμοῦ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἡμιγινομένων ὅλων τῶν πλευρῶν τῶν τριγώνων τούτων ἐπὶ τὰς ἀντιστοίχους ἀλγεβρικὰς ἀποστάσεις αὐτῶν ἀπὸ τοῦ Σ (§ 93, (ν), (1)).**




Σχ. 111

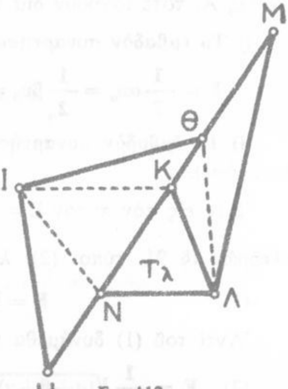
Θεωρήσωμεν εὐθύγραμμον τμῆμα τοῦ τριγωνισμοῦ, ἔστω $\Delta_1\Delta_2$, κείμενον ἐντὸς τοῦ τρ. ΑΒΓ. Τὸ τμῆμα τοῦτο ἀνήκει εἰς δύο τρίγωνα τοῦ τριγωνισμοῦ, τὰ $\Delta_1H\Delta_2$ καὶ $\Delta_1Z\Delta_2$, κείμενα ἑκατέρωθεν τῆς $\Delta_1\Delta_2$. Ἐπειδὴ δὲ αἱ Η καὶ Ζ κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς $\Delta_1\Delta_2$, αἱ ἀλγεβρικαὶ ἀποστάσεις τοῦ Σ ἀπὸ τὴν $\Delta_1\Delta_2$ ἀναφορικῶς πρὸς τὰ τρίγωνα $H\Delta_1\Delta_2$ καὶ $Z\Delta_1\Delta_2$ εἶναι προφανῶς ἀντίθετοι: $h$ ὡς πρὸς τὸ τρ. $\Delta_1H\Delta_2$ καὶ $-h$ ὡς πρὸς τὸ τρ. $Z\Delta_1\Delta_2$ (ἂν δὲν εἶναι μηδενικαί). Ἑπομένως κατὰ τὴν ἄθροισιν ὅλων τῶν ἡμιγινομένων τὰ $\frac{1}{2}\Delta_1\Delta_2\cdot h$ καὶ $-\frac{1}{2}\Delta_1\Delta_2\cdot h$ θὰ ἐξαλειφθοῦν. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὰ τμήματα, ὅπως τὸ $A_1K$. Οὕτω ὅλα τὰ ἡμιγινόμενα τὰ ἀφορῶντα τὰ ἐσωτερικὰ τμήματα τοῦ τριγωνισμοῦ κατὰ τὴν ἄθροισιν ἐξαλείφονται καὶ μένουν μόνον τὰ ἡμιγινόμενα τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὰ τμήματα τὰ κείμενα ἐπὶ τῆς περιμέτρου. Ἑπομένως τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν ὅλων τῶν τριγώνων τοῦ τριγωνισμοῦ ἰσοῦται πρὸς $\frac{1}{2}(BA_1\cdot h_1 + A_1A_2h_1$
$+\cdots + A_\nu\Gamma.h_1) + \frac{1}{2}(\Gamma B_1\cdot h_2 + B_1B_2\cdot h_2 + \cdots + B_\nu A\cdot h_2) + \frac{1}{2}(A\Gamma_1\cdot h_3 + \Gamma_1\Gamma_2\cdot h_3 +$
$+\cdots + \Gamma_\nu B\cdot h_3) = \frac{1}{2}B\Gamma\cdot h_1 + \frac{1}{2}\Gamma A\cdot h_2 + \frac{1}{2}AB\cdot h_3$. Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ ἐκτελεσθέντος τριγωνισμοῦ καὶ ἴσον πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ὅ.ἔ.δ.

*Παρατήρησις.* Τὸ Σ δύναται νὰ ληφθῇ καὶ ἐκτὸς τοῦ τρ. ΑΒΓ, ὁπότε ἡ ἀπόδειξις παραμένει, ὡς ἔχει, ἐνῷ ὡς $h_1$, $h_2$, $h_3$ θὰ θεωροῦνται αἱ προσημασμέναι ἀποστάσεις τοῦ Σ ἀπὸ τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ.

**γ') (Θ) — Ἐὰν τρίγωνον ΑΒΓ ἀναλυθῇ καθ' οἱονδήποτε τρόπον εἰς ἕτερα τρίγωνα,**

**τότε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τρ. ΑΒΓ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων, εἰς τὰ ὁποῖα τὸ τρίγωνον τοῦτο διεμερίσθη.**

*Ἀπόδειξις.* Ἔστω ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἀνελύθη εἰς σύστημα τριγώνων $Τ_1, Τ_2, \ldots Τλ, \ldots Τ_ν$, τὰ ὁποῖα εἶναι μεταξύ των συνεχόμενα καὶ ἔχουν ὡς συνένωμα τὸ τρ. ΑΒΓ. Ἐὰν αἱ συνθῆκαι τοῦ τριγωνισμοῦ δὲν πληροῦνται, τοῦτο σημαίνει ὅτι ὡρισμέναι κορυφαὶ τριγώνων Τλ εὑρίσκονται εἰς ἐσωτερικὰ σημεῖα ὡρισμένων πλευρῶν ἄλλων τριγώνων. Ἂν ὅμως ἑνώσωμεν κατὰ σειρὰν τὰς ἐπὶ τῶν πλευρῶν γειτονικῶν τριγώνων κειμένας κορυφὰς τῶν Τλ μὲ τὰς ἀπέναντι κορυφὰς τοῦ γειτονικοῦ τριγώνου (σχ. 112) (ἐστιγμέναι γραμμαί), λαμβάνομεν ἓν νέον σύστημα τριγώνων, $Τ'_1, Τ'_2, \ldots Τ'_μ$ (ΙΗΝ, ΙΝΚ, ΙΚΘ, ΝΛΚ, ΚΘΛ, ΘΜΛ... καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς). Ὁ διαμερισμὸς τοῦ τρ. ΑΒΓ εἰς τὰ τρίγωνα $Τ'_1, Τ'_2 \ldots Τ'_μ$ εἶναι, τώρα, εἷς **τριγωνισμός.**



Σχ. 112

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων $Τ'_1, Τ'_2, \ldots Τ'_μ$ εἶναι ἴσον **πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν $Τ_1, Τ_2, \ldots Τ_ν$, διότι κατὰ τὸν διαμερισμὸν ἑνὸς τριγώνου $Τ_ρ$ (ὅπως τοῦ ΗΙΘ** ἢ τοῦ ΚΛΜ) εἰς δύο ἢ τρία τρίγωνα τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν **προκυπτόντων** τριγώνων ἰσοῦται πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ $Τ_ρ$ (§ **93**). Ἀλλὰ κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν $Τ'_1, Τ'_2, \ldots Τ'_μ$ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ΑΒΓ. Ἄρα καὶ τὸ ἴσον ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν $Τ_1, Τ_2, \ldots Τ_ν$ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ΑΒΓ δ.ἔ.δ.

**δ') Ἐπέκτασις εἰς τὰ κυρτὰ πολύγωνα. (Θ)— Καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν ἀναλυθῇ κυρτὸν πολύγωνον εἰς τρίγωνα, τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἐπὶ μέρους τριγώνων εἶναι πάντοτε τὸ αὐτὸ** (δηλ. εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ τρόπου τῆς διαιρέσεως τοῦ πολυγώνου εἰς τρίγωνα).

*Ἀπόδειξις.* Ἂς θεωρήσωμεν κατ' ἀρχὰς κυρτὸν πολύγωνον διῃρημένον εἰς τρίγωνα διὰ τριγωνισμοῦ τινος (ἐδ. α'), ἂς λάβωμεν τυχὸν σημεῖον Σ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ πολυγώνου καὶ ἂς καλέσωμεν $h_1, h_2, h_3, \ldots h_ν$ τὰς ἀποστάσεις τοῦ Σ ἀπὸ τοὺς φορεῖς τῶν πλευρῶν $Α_1Α_2, Α_2Α_3, \ldots Α_νΑ_1$ τοῦ κυρτοῦ πολυγώνου $Α_1Α_2Α_3 \ldots Α_ν$. Σκεπτόμενοι ἀκριβῶς, ὅπως εἰς τὸ ἐδάφ. β', εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν ὅλων τῶν τριγώνων τοῦ τριγωνισμοῦ εἶναι ἴσον πρὸς $\frac{1}{2}\, Α_1Α_2 \cdot h_1 + \frac{1}{2}\, Α_2Α_3 \cdot h_2 + \cdots + \frac{1}{2}\, Α_ν Α_1 \cdot h_ν$, δηλ. παντελῶς ἀνεξάρτητον τοῦ ἐκτελεσθέντος τριγωνισμοῦ.

Ἔστω τώρα ὅτι τὸ πολύγωνον ἀνελύθη εἰς σύστημα τριγώνων $Τ_1, Τ_2 \ldots Τλ, \ldots Τ_ρ$, ὧν τὰ ἐσωτερικὰ εἶναι ἀνὰ δύο ξένα μεταξύ των, ἀλλὰ τὸ σύστημα $Τ_1, Τ_2, \ldots Τ_ρ$ δὲν πληροῖ τὰς συνθήκας τοῦ τριγωνισμοῦ. Τότε φέροντες βοηθητικὰ τμήματα λαμβάνομεν, ὡς ἐδείχθη εἰς τὸ ἀνωτέρω ἐδάφ. γ', ἓν νέον σύστημα τριγώνων $Τ'_1, Τ'_2, \ldots Τ'_μ$ ἀποτελούντων τριγωνισμὸν καὶ ἐχόντων ἄθροισμα ἐμβαδῶν ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν $Τ_1, Τ_2, \ldots Τ_ρ$. Ἑπομένως καὶ πάλιν τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων, εἰς ἃ ἀνελύθη τὸ πολύγωνον, εἶναι τὸ ἴδιον.

**95.—Τύποι τοῦ ἐμβαδοῦ τριγώνου.** Ἂν καλέσωμεν Ε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τρ.ΑΒΓ, α, β, γ τὰ μέτρα τῶν πλευρῶν του, τ τὴν ἡμιπερίμετρον, ρ τὴν ἀκτῖνα τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ R τὴν τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου του καὶ τέλος $\rho_\alpha$ τὴν ἀκτῖνα τοῦ παρεγγεγραμμένου κύκλου τοῦ ἐντὸς τῆς γωνίας $\widehat{A}$, τότε ἰσχύουν διὰ τὸ ἐμβαδὸν E οἱ κάτωθι τύποι :

**i) Τὸ ἐμβαδὸν συναρτήσει βάσεως καὶ ὕψους**

$$E = \frac{1}{2}\alpha\upsilon_\alpha = \frac{1}{2}\beta\upsilon_\beta = \frac{1}{2}\gamma\upsilon_\gamma \text{ (βλ. § 92)}$$

**ii) Τὸ ἐμβαδὸν συναρτήσει τῶν πλευρῶν.** (Τύπος **Ἥρωνος** τοῦ Ἀλεξανδρέως).

Ἐὰν εἰς τὸν τύπον $E = \frac{1}{2}\alpha\upsilon_\alpha$ ἀντικατασταθῇ τὸ $\upsilon_\alpha$ συναρτήσει τῶν πλευρῶν (§ 91, τύποι (2)) λαμβάνομεν

$$(1) \qquad E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}.$$

Ἀντὶ τοῦ (1) δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιοῦμεν τὸν

$$(2) \qquad E = \frac{1}{4}\sqrt{(\alpha+\beta+\gamma)(-\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)}.$$

**iii) Τὸ ἐμβαδὸν συναρτήσει τῶν ρ καὶ τ.**

Τὸ ἔγκεντρον O χωρίζει τὸ τρ. ΑΒΓ εἰς τρία τρίγωνα ΟΒΓ, ΟΓΑ, ΟΑΒ ἔχοντα βάσεις τὰς α, β, γ καὶ ὕψη ἴσα πρὸς ρ. Ἑπομένως ἡ σχέσις $E_{AB\Gamma} = E_{OB\Gamma} + E_{O\Gamma A} + E_{OAB}$ (βλ. § 93, (ii)) δίδει :

$$E = \frac{1}{2}\alpha\rho + \frac{1}{2}\beta\rho + \frac{1}{2}\gamma\rho = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\rho \text{ δηλ.}$$

$$E = \tau\rho.$$

**iv) Τὸ ἐμβαδὸν συναρτήσει τῶν $\rho_\alpha$ καὶ τ—α.**

Ἐὰν $O_1$ τὸ παράκεντρον τὸ ἐντὸς τῆς γωνίας $\widehat{A}$, τότε (§93, iii) $E_{AB\Gamma} = E_{O_1AB} + E_{O_1A\Gamma} - E_{O_1B\Gamma}$ καὶ ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα $O_1AB$, $O_1A\Gamma$ καὶ $O_1B\Gamma$ ἔχουν ὕψη ἐκ τοῦ $O_1$ ἴσα πρὸς $\rho_\alpha$ καὶ βάσεις γ, β, α ἀντιστοίχως, ἔχομεν :

$$E = \frac{1}{2}\gamma\rho_\alpha + \frac{1}{2}\beta\rho_\alpha - \frac{1}{2}\alpha\rho_\alpha = \frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\rho_\alpha \text{ δηλ.}$$

$$E = (\tau-\alpha)\rho_\alpha.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν : $E = (\tau-\beta)\rho_\beta = (\tau-\gamma)\rho_\gamma$.

**v) Τὸ ἐμβαδὸν συναρτήσει τῶν α, β, γ, R.**

Ἡ μετρικὴ σχέσις $\beta\gamma = 2R\upsilon_\alpha$ (§ 84) δίδει διὰ πολλ/σμοῦ ἐπὶ α : $\alpha\beta\gamma = 2R\alpha\upsilon_\alpha$. Ἀλλὰ $\alpha\upsilon_\alpha = 2E$, συνεπῶς

$\alpha\beta\gamma = 2R\cdot 2E$ ἢ $\boxed{\alpha\beta\gamma = 4RE}$. Ὥστε :

$$E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}.$$

## 96. Ὑπολογισμὸς τῶν ρ, $ρ_α$, R συναρτήσει τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου.

Ἐκ τοῦ τύπου Ε = τρ συνάγεται ὅτι

$$(1) \qquad ρ = \frac{E}{τ}.$$

Διὰ τοῦ (1) δύναται νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου συναρτήσει τῶν πλευρῶν, ἀντικαθιστωμένου τοῦ Ε διὰ τοῦ τύπου τοῦ Ἥρωνος.

—Ἐκ τοῦ τύπου $E = (τ - α)ρ_α$ συνάγεται:

$$(2) \qquad ρ_α = \frac{E}{τ-α}.$$

Ἐκ τοῦ (2) ὑπολογίζεται ἡ $ρ_α$ συναρτήσει τῶν πλευρῶν.

—Ἐκ τοῦ τύπου αβγ = 4RE (§ 95, ν) συνάγεται:

$$(3) \qquad R = \frac{αβγ}{4E}.$$

Διὰ τοῦ (3) ὑπολογίζεται ἡ R συναρτήσει τῶν πλευρῶν.

## 97. Σύγκρισις τῶν ἐμβαδῶν δύο τριγώνων.

α΄) (Θ) — **Ἐὰν ἡ κορυφὴ τριγώνου μετακινηθῇ ἐπὶ εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὴν ἀπέναντι πλευράν, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου δὲν βλάπτεται.**

Ἤτοι, ἂν ΑΑ΄//ΒΓ ⇒ ΕμβΑΒΓ = ΕμβΑ΄ΒΓ.

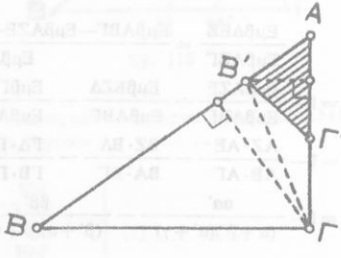
β΄) (Θ) — **Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν ἴσας βάσεις, τὰ ἐμβαδὰ των εἶναι ἀνάλογα τῶν ὑψῶν των** (τῶν ἀντιστοιχούντων εἰς τὰς ἴσας βάσεις). **Ἐὰν ἔχουν ἴσα ὕψη, τὰ ἐμβαδά των εἶναι ἀνάλογα τῶν βάσεων.**

(Ἄμεσος συνέπεια τοῦ τύπου $E = \frac{1}{2}αυ_α$).

γ΄) (Θ) — **Ἐὰν μία γωνία ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἴση πρὸς μίαν γωνίαν ἑνὸς ἄλλου, τότε τὰ ἐμβαδά των εἶναι ὡς τὰ γινόμενα τῶν πλευρῶν τῶν περιεχουσῶν τὰς ἴσας γωνίας.**

*Ἀπόδειξις*. Δυνάμεθα διὰ κινήσεως νὰ φέρωμεν τὸ ἓν τρίγωνον ἐπὶ τοῦ ἄλλου, ὥστε αἱ ἴσαι γωνίαι νὰ ἐφαρμόσουν. Τότε τὰ τρίγωνα λαμβάνουν τὴν θέσιν τοῦ σχ. 113, δηλ. τὸ ἓν εἶναι τὸ τρ. ΑΒ΄Γ΄ καὶ τὸ ἄλλο τὸ τρ. ΑΒΓ.

Διὰ νὰ συγκρίνωμεν τὰ ἐμβαδὰ τῶν ΑΒ΄Γ΄ καὶ ΑΒΓ μεταξύ των, ἀρκεῖ νὰ τὰ συγκρίνωμεν πρὸς ἓν τρίτον. Φέρομεν τὴν Β΄Γ, ὁπότε τὰ ἐμβαδὰ τοῦ ΑΒ΄Γ΄ καὶ τοῦ βοηθητικοῦ τριγώνου



Σχ. 113

ΑΒ΄Γ συγκρίνονται, διότι τὰ τρίγωνα ταῦτα ἔχουν ἐκ τῆς κορυφῆς Β΄ τὸ ἴδιο ὕψος (ἐδ. β΄). Ἐπίσης τὸ ἐμβαδὸν τοῦ βοηθητικοῦ ΑΒ΄Γ καὶ τοῦ ΑΒΓ συγκρίνονται, διότι τὰ τρίγωνα ἔχουν ἐκ τῆς κορυφῆς Γ τὸ ἴδιον ὕψος. Ἑπομένως :

$$(1) \qquad \frac{\text{ΕμβΑΒ΄Γ΄}}{\text{ΕμβΑΒ΄Γ}} = \frac{\text{ΑΓ΄}}{\text{ΑΓ}} \quad \text{καὶ}$$

$$(2) \qquad \frac{\text{ΕμβΑΒ΄Γ}}{\text{ΕμβΑΒΓ}} = \frac{\text{ΑΒ΄}}{\text{ΑΒ}}$$

Διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν :

$$\frac{\text{ΕμβΑΒ΄Γ΄}}{\text{ΕμβΑΒΓ}} = \frac{\text{ΑΒ΄}\cdot\text{ΑΓ΄}}{\text{ΑΒ}\cdot\text{ΑΓ}} \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

**δ΄) (Θ) — Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο γωνίας παραπληρωματικάς, τὰ ἐμβαδὰ αὐτῶν ἔχουν λόγον, ὃν λόγον ἔχουν τὰ γινόμενα τῶν πλευρῶν τῶν περιεχουσῶν τὰς παραπληρωματικὰς γωνίας**

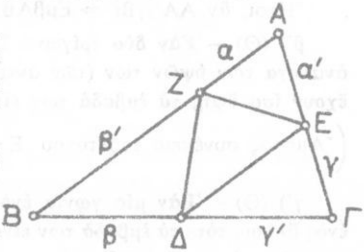
Ἀποδεικνύεται, ὅπως τὸ προηγούμενον.

**ε΄) Αἱ κορυφαὶ τοῦ ἑνὸς κεῖνται ἐπὶ τῶν πλευρῶν τοῦ ἄλλου.**

Πρὸς σύγκρισιν τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων ΔΕΖ καὶ ΑΒΓ τοῦ σχ. 114, ἀρκεῖ νὰ γνωρίζωμεν τὰς ἀποστάσεις ΑΖ=α, ΑΕ=α΄, ΒΖ=β΄, ΒΔ=β, ΓΔ=γ΄, ΓΕ=γ ἢ τοὺς λόγους, ΑΖ : ΖΒ, ΒΔ : ΔΓ, ΓΕ : ΕΑ.

Ἀπὸ τὰ θεωρήματα τῆς § 93 ἢ τῆς § 94 συνάγεται εὔκολα ὅτι ΕμβΑΒΓ=ΕμβΖΔΕ+ +ΕμβΑΖΕ+ΕμβΒΖΔ+ΕμβΓΔΕ.

Ἡ διάταξις τῶν πράξεων εἶναι ἡ ἀκόλουθος :



Σχ. 114

$$\frac{\text{ΕμβΔΕΖ}}{\text{ΕμβΑΒΓ}} = \frac{\text{ΕμβΑΒΓ}-\text{ΕμβΑΖΕ}-\text{ΕμβΒΖΔ}-\text{ΕμβΓΔΕ}}{\text{ΕμβΑΒΓ}} =$$

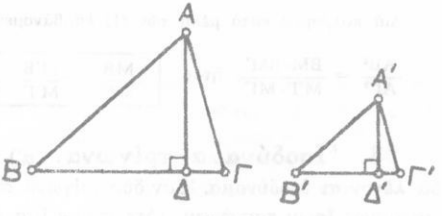
$$= 1 - \frac{\text{ΕμβΑΖΕ}}{\text{ΕμβΑΒΓ}} - \frac{\text{ΕμβΒΖΔ}}{\text{ΕμβΑΒΓ}} - \frac{\text{ΕμβΓΔΕ}}{\text{ΕμβΑΒΓ}} = (\text{ἐδάφ. γ΄})$$

$$= 1 - \frac{\text{ΑΖ}\cdot\text{ΑΕ}}{\text{ΑΒ}\cdot\text{ΑΓ}} - \frac{\text{ΒΖ}\cdot\text{ΒΔ}}{\text{ΒΑ}\cdot\text{ΒΓ}} - \frac{\text{ΓΔ}\cdot\text{ΓΕ}}{\text{ΓΒ}\cdot\text{ΓΑ}} =$$

$$= 1 - \frac{\alpha\alpha'}{(\alpha+\beta')(\alpha'+\gamma)} - \frac{\beta\beta'}{(\beta'+\alpha)(\beta+\gamma')} - \frac{\gamma\gamma'}{(\gamma'+\beta)(\gamma+\alpha')}.$$

**ϛ΄) Λόγος ἐμβαδῶν δύο ὁμοίων τριγώνων.** Ἔστω τρ. ΑΒΓ≈τρ.Α΄Β΄Γ΄

μὲ $\widehat{B} = \widehat{B}'$ καὶ $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{B\Gamma}{B'\Gamma'}$ $= \dfrac{\Gamma A}{\Gamma' A'} = \lambda$ καὶ ἔστωσαν ΑΔ καὶ Α΄Δ΄ δύο ὁμόλογα ὕψη αὐτῶν. Ὑποτιθεμένης τῆς $\widehat{B}$ ὀξείας ἔχομεν ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΒΔ, Α΄Β΄Δ΄:



Σχ. 115

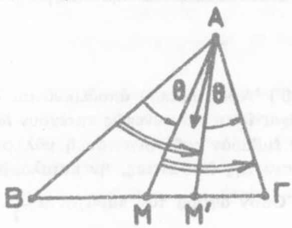
$$\frac{A\Delta}{A'\Delta'} = \frac{AB}{A'B'} \text{ ἀλλὰ } \frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} \text{ συνεπῶς } \boxed{\frac{A\Delta}{A'\Delta'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}}.$$

$$\text{Ἐπομένως } \frac{E_{AB\Gamma}}{E_{A'B'\Gamma'}} = \frac{\frac{1}{2} B\Gamma \cdot A\Delta}{\frac{1}{2} B'\Gamma' . A'\Delta'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} . \frac{A\Delta}{A'\Delta'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} . \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}.$$

$$\text{Ὥστε : } \frac{E_{AB\Gamma}}{E_{A'B'\Gamma'}} = \frac{B\Gamma^2}{B'\Gamma'^2} = \frac{AB^2}{A'B'^2} = \frac{A\Gamma^2}{A'\Gamma'^2} = \lambda^2.$$

**Τῶν ὁμοίων τριγώνων τὰ ἐμβαδὰ εἶναι ὡς τὰ τετράγωνα δύο ὁμολόγων πλευρῶν.** Ἢ *«ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο ὁμοίων τριγώνων ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ λόγου ὁμοιότητος αὐτῶν».*

**ζ΄) Ἐφαρμογὴ εἰς τὰς ἰσογωνίους εὐθείας. (Θ)—Ἐὰν ἡ πλευρὰ ΒΓ τριγώνου τέμνεται εἰς Μ καὶ Μ΄ ὑπὸ δύο εὐθειῶν ΑΜ καὶ ΑΜ΄ συμμετρικῶν ὡς πρὸς τὴν διχοτόμον τῆς $\widehat{A}$, τότε τὸ γινόμενον τῶν λόγων : $\dfrac{MB}{M\Gamma}$ καὶ $\dfrac{M'B}{M'\Gamma}$ εἶναι σταθερὸν καὶ ἴσον πρὸς $\dfrac{AB^2}{A\Gamma^2}$** (Αἱ ἀνωτέρω εὐθεῖαι ΑΜ καὶ ΑΜ΄ λέγονται *ἰσογώνιοι ὡς πρὸς τὴν γωνίαν $\widehat{A}$*).



Σχ. 116

*Ἀπόδειξις.* Παρατηροῦμεν ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΜ καὶ ΑΜ΄Γ ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην : $B\widehat{A}M = M'\widehat{A}\Gamma$ καὶ εἶναι καὶ ἰσοϋψῆ ἐκ τοῦ Α. Ὁμοίως καὶ τὰ τρίγωνα ΑΒΜ΄ καὶ ΑΜΓ (σχ. 116). Συμφώνως πρὸς τὰ ἐδάφ. β΄ καὶ γ΄ θὰ ἰσχύουν :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\text{εμβ}\cdot ABM}{\text{εμβ}\cdot AM'\Gamma} &= \frac{AB\cdot AM}{AM'.A\Gamma} = \frac{BM}{M'\Gamma} \\ \frac{\text{εμβ}\cdot ABM'}{\text{εμβ}\cdot AM\Gamma} &= \frac{AB\cdot AM'}{AM\cdot A\Gamma} = \frac{BM'}{M\Gamma} \end{aligned}\right\} (1)$$

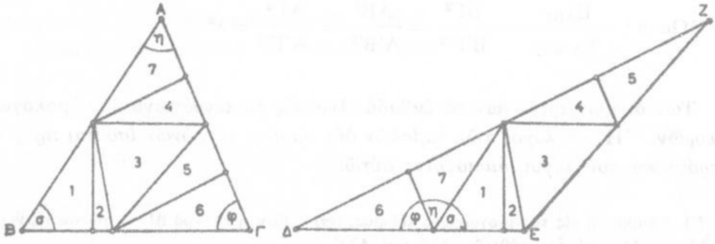
Διὰ πολ/σμοῦ κατὰ μέλη τῶν (1) λαμβάνομεν:

$$\frac{AB^2}{A\Gamma^2}=\frac{BM\cdot BM'}{M'\Gamma\cdot M\Gamma} \quad \text{ἤτοι} \quad \boxed{\frac{MB}{M\Gamma}\cdot\frac{M'B}{M'\Gamma}=\frac{AB^2}{A\Gamma^2}} \quad \text{ὃ ἔ. δ.}$$

**98. Ἰσοδύναμα τρίγωνα.** **α΄) Δύο τρίγωνα ἔχοντα ἴσα ἐμβαδὰ λέγονται ἰσοδύναμα.** Ἐὰν δύο τρίγωνα σύγκεινται ἀπὸ ἴσον πλῆθος ἀντιστοίχως ἴσων τριγώνων, τότε ἔχουν ἴσα ἐμβαδὰ (§ **94**, γ΄) καὶ ἑπομένως εἶναι ἰσοδύναμα. Ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ τὸ ἀντίστροφον ἀληθεύει, ἤτοι ἂν δύο τρίγωνα ἔχουν ἴσα ἐμβαδά, τότε ἀναλύονται εἰς ἴσον πλῆθος τριγώνων ἀντιστοίχως ἴσων.

Ἂν δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ εἶναι ἰσοδύναμα, δυνάμεθα νὰ γράφωμεν: $E_{AB\Gamma}=E_{\Delta EZ}$ ἢ ΕμβΑΒΓ = ΕμβΔΕΖ.

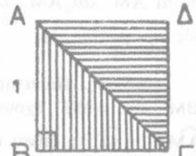
Τὸ σχ. 117 δεικνύει δύο ἰσοδύναμα τρίγωνα (δηλ. βάσις × ὕψος τοῦ ἑνὸς = βάσις × ὕψος τοῦ ἄλλου), τὰ ὁποῖα ἔχουν ἀναλυθῆ εἰς ἴσα τρίγωνα (τὰ φέροντα τοὺς ἰδίους ἀριθμούς).




Σχ. 117

β΄) Ἀφοῦ λοιπὸν ἀποδεικνύεται ὅτι δύο τρίγωνα ἔχοντα ἴσα ἐμβαδὰ εἶναι *«κατὰ τεμάχια ἴσα»* καὶ συνεπῶς κατέχουν *ἴσην ἔκτασιν*, ἕπεται ὅτι τὸ εἰς τὰ προηγούμενα ορισθὲν ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ἢ μᾶλλον τὸ γινόμενον «βάσις × ὕψος» χαρακτηρίζει τὴν ἔκτασιν τῆς ἐπιφανείας, ἣν καταλαμβάνει τὸ τρίγωνον.

Ὅσον ἀφορᾷ τὸν παράγοντα $\frac{1}{2}$, τὸν ὁποῖον συνάπτομεν εἰς τὸ γινόμενον «βάσις × ὕψος», οὗτος δὲν εἶναι οὐσιώδης, ἀλλὰ τίθεται, διότι ἐν τῇ πράξει εἶναι ἐπιθυμητὸν νὰ ἔχωμεν μονάδα ἐπιφανειῶν τὸ μοναδιαῖον τετράγωνον, δηλ. τὸ ἔχον πλευρὰν τὴν μονάδα τῶν μηκῶν. Ἐπειδὴ τὸ ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 118) μὲ καθέτους πλευρὰς ἴσας πρὸς τὴν μονάδα μετρήσεως τῶν μηκῶν εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς (αὐθαιρέτως) ἐκλεγείσης μονάδος ἐπιφανειῶν ΑΒΓΔ, διὰ τοῦτο θέλομεν νὰ ἔχῃ ἐμβαδὸν 1/2, δηλ. $\frac{1}{2}$ ΒΓ × ΑΒ.




Σχ. 118

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

431. Ἑκάστη διάμεσος τριγώνου χωρίζει τὸ τρίγωνον εἰς δύο ἰσοδύναμα τρίγωνα.

432. Ἐὰν τὸ μέσον Ε τῆς διαμέσου ΑΔ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἑνωθῇ δι' εὐθείας μὲ τὴν κορυφὴν Γ καὶ τὸ μέσον Ζ τῆς ΕΓ μὲ τὴν κορυφὴν Β καὶ τὸ μέσον Η τῆς ΖΒ μὲ τὸ Ε, τὸ τρίγωνον ΕΖΗ ἔχει ὡς ἐμβαδὸν τὸ 1/8 τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

433. Τὰ τρίγωνα τὰ ἔχοντα βάσεις τὰς μὴ παραλλήλους πλευρὰς τραπεζίου καὶ κοινὴν κορυφὴν τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαγωνίων εἶναι ἰσοδύναμα.

434. Πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχει ἐμβαδὸν ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν δύο τμημάτων, εἰς ἃ διαιρεῖται ἡ ὑποτείνουσα αὐτοῦ ὑπὸ τοῦ σημείου ἐπαφῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

435. Ἐὰν αἱ πλευραὶ τριγώνου ΑΒΓ προεκταθοῦν πᾶσαι κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν περιστροφῆς καὶ ληφθοῦν ἐπὶ τῶν προεκτάσεων τῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως σημεῖα Α΄, Β΄, Γ΄ τοιαῦτα, ὥστε ΒΑ΄ $=\lambda\cdot$ΒΓ, ΓΒ΄ $=\mu.$ΓΑ, ΑΓ΄ $=\nu.$ΑΒ, νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων Α΄Β΄Γ΄ καὶ ΑΒΓ.

436. Ἐὰν προεκτείνωμεν πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς ἑκάστην διάμεσον τριγώνου μέχρι διπλασιασμοῦ, τίς ὁ λόγος τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος κορυφὰς τὰ ἄκρα τῶν προεκτάσεων πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἀρχικοῦ;

437. Συναρτήσει τοῦ μήκους α τῆς πλευρᾶς ἰσοπλεύρου τριγώνου νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου.

438. Ἐὰν α, β δύο πλευραὶ τριγώνου, τότε, ἂν $\alpha > \beta$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha + \upsilon_\alpha \geq \beta + \upsilon_\beta$.

439. Τὸ τρίγωνον τὸ ἔχον πλευρὰς ἴσας πρὸς τὰς διαμέσους ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὰ 3/4 τοῦ τρ. ΑΒΓ.

440. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου συναρτήσει τῶν τριῶν ὑψῶν του.

441. Νὰ ἐκφρασθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου συναρτήσει τῶν τριῶν διαμέσων του.

442. Συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος R τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου τριγώνου νὰ ὑπολογισθῇ τὸ γινόμενον τῶν ἀκτίνων ὅλων τῶν περιφερειῶν, ἑκάστη τῶν ὁποίων ἔχει τὴν ἰδιότητα νὰ διέρχεται διὰ δύο κορυφῶν τοῦ τριγώνου καὶ νὰ ἐφάπτεται μιᾶς πλευρᾶς.

443. Ἐὰν αἱ πλευραὶ α, β, γ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ἐν ἀριθμητικῇ προόδῳ, νὰ δειχθῇ ὅτι $6R\rho = \alpha\gamma$.

444. Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ $R$, $\rho$, $\rho_1$, $\rho_2$, $\rho_3$ τὰς ἀκτῖνας τῶν περιγεγραμμένων κύκλων ἀντιστοίχως δοθέντος τριγώνου, τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος πλευρὰς τὰς διαμέσους τοῦ δοθέντος καὶ τῶν τριγώνων τῶν ἐχόντων βάσεις τὰς πλευρὰς τοῦ δοθέντος καὶ κοινὴν κορυφὴν τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαμέσων αὐτοῦ, νὰ δειχθῇ ὅτι : $4R\rho^2 = 3\rho_1\rho_2\rho_3$.

445. Νὰ μετασχηματισθῇ τρίγωνον ΑΒΓ εἰς ἰσοδύναμον ἰσοσκελὲς ἔχον γωνίαν κορυφῆς ἴσην μὲ τὴν $\widehat{A}$.

446. Τριγώνου ΑΒΓ ἡ βάσις ΒΓ μένει σταθερά, τὸ δὲ τρίγωνον παραμένει ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἐπὶ τῆς μεταβλητῆς πλευρᾶς ΑΒ κατασκευαζόμενον ἰσόπλευρον τρίγωνον. Τίς ὁ τόπος τῆς κορυφῆς Α;

(**Ὑπόδ.** βλ. ἄσκ. 372).

447. Τριγώνου ΑΒΓ δίδονται τὰ μήκη α, β, γ τῶν πλευρῶν του. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος κορυφὰς τοὺς πόδας τῶν ἐσωτερικῶν διχοτόμων τοῦ τρ. ΑΒΓ πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τρ. ΑΒΓ. Νὰ δειχθῇ ἀκόμη ὅτι ὁ λόγος οὗτος οὐδέποτε ὑπερβαίνει τὸ 1/4, ἰσοῦται δὲ μὲ 1/4 μόνον, ὅταν τὸ τρ. ΑΒΓ εἶναι ἰσόπλευρον.

448. Εἰς τὰς κορυφὰς Β, Γ τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν ἐφαπτομένας τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας τεμνομένας εἰς τὸ Α΄, ἐκ δὲ τοῦ Α΄ φέρομεν καθέτους Α΄Β΄ καὶ Α΄Γ΄ ἐπὶ

τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ διάμεσος ΑΜ τοῦ τρ. ΑΒΓ εἶναι κάθετος τῇ Β'Γ' καὶ νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν (Α'Β'Γ') : (ΑΒΓ) συναρτήσει τῆς ΒΓ=α καὶ τῆς ἀκτῖνος R.

449. Διὰ τῆς κορυφῆς Α τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν δύο εὐθείας ἰσογωνίους ὡς πρὸς τὴν γωνίαν $\widehat{A}$ καὶ τεμνούσας εἰς Δ καὶ Ε τὴν πλευρὰν ΒΓ. Νὰ δειχθῇ ὅτι : αἱ προβολαὶ τῶν Δ καὶ Ε ἐπὶ τὰς εὐθείας ΑΒ, ΑΓ εἶναι ὁμοκυκλικαί.

450. Εἰς τὸ ἀνωτέρω, νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων τῶν Δ καὶ Ε ἀπὸ τῆς ευθ ΑΒ ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεών των ἀπὸ τῆς ευθ ΑΓ.

451. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἀκτῖνες τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου κύκλου τριγώνου, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ ἔχουν μήκη 20, 51, 65.

452. Νὰ δειχθῇ ὅτι εἰς πᾶν τρίγωνον ἀληθεύουν αἱ σχέσεις:

$$\frac{1}{\upsilon_\alpha}+\frac{1}{\upsilon_\beta}+\frac{1}{\upsilon_\gamma}=\frac{1}{\rho}$$

$$E=\sqrt{\rho\rho_\alpha\rho_\beta\rho_\gamma}$$

$$\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_\alpha}=\frac{2}{\upsilon_\alpha}.$$

453. Ἔστω τρ. ΑΒΓ. i) Νὰ δειχθῇ ὑπολογιστικῶς ἡ σχέσις :

$$\rho_\alpha+\rho_\beta+\rho_\gamma-\rho=4R$$

ii) Χρησιμοποιοῦντες τὴν i) κατὰ τὴν ἄσκ. 148 δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν βελῶν τῶν τριῶν τόξων $\widehat{ΒΓ}$, $\widehat{ΓΑ}$, $\widehat{ΑΒ}$ τοῦ περικύκλου (ἀντιστοίχων πρὸς τὰς ἐγγεγραμμένας $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{Γ}$) ἰσοῦται μὲ 2R−ρ.

454. Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο γωνίας ἴσας καὶ δύο παραπληρωματικάς, τότε αἱ πλευραὶ αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν εἶναι ὡς αἱ πλευραὶ αἱ ἀπέναντι τῶν παραπληρωματικῶν (βλ. θεωρ. § 97, γ' καὶ δ').

ii) Βάσει τοῦ προηγουμένου νὰ δειχθῇ τὸ θεώρημα τοῦ Newton : «Εἰς πᾶν κυρτὸν περιγράψιμον τετράπλευρον αἱ χορδαὶ τῶν ἐπαφῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου μετὰ τῶν ἀπέναντι πλευρῶν διέρχονται διὰ τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν διαγωνίων τοῦ τετραπλεύρου». (Ὑπόδ. : Ἔστωσαν Ε, Θ, Ζ, Η τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ. Τότε ἡ ΕΖ διαιρεῖ τὴν διαγώνιον ΒΔ ἐσωτερικῶς εἰς λόγον ΕΒ/ΖΔ καὶ ἡ ΗΘ διαιρεῖ τὴν αὐτὴν διαγώνιον εἰς τὸν ἴσον λόγον ΒΘ/ΔΗ· ὅθεν αἱ ΕΖ καὶ ΗΘ τέμνονται ἐπὶ τῆς ΒΔ).

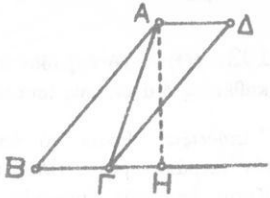
## Β' ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΥΡΤΟΥ ΠΟΛΥΓΩΝΟΥ — — ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

**99. Ἐμβαδὸν κυρτοῦ πολυγώνου.** Ὅπως ἐδείχθη εἰς τὴν **§ 94, δ', ἐὰν κυρτὸν πολύγωνον ἀναλυθῇ καθ' οἱονδήποτε τρόπον εἰς τρίγωνα, τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἐπὶ μέρους τούτων τριγώνων εἶναι πάντοτε τὸ αὐτό, δηλαδὴ εἶναι παντελῶς ἀνεξάρτητον τοῦ τρόπου, καθ' ὃν γίνεται ὁ διαμερισμὸς τοῦ πολυγώνου. Τὸ σταθερὸν τοῦτο ἄθροισμα καλεῖται ἐμβαδὸν τοῦ κυρτοῦ πολυγώνου.**

**100. Ἐμβαδὸν παραλληλογράμμου.** Ἔστω ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον, ΒΓ μία πλευρά του (βάσις) καὶ ΑΗ τὸ ἐπὶ ταύτην ὕψος (σχ. 119).

Κατὰ τὸν γενικὸν ὁρισμόν, εἶναι :

$$\text{Εμβ } ΑΒΓΔ = \text{Εμβ} ΑΒΓ + \text{Εμβ } ΑΓΔ =$$
$$= 2\text{Εμβ } ΑΒΓ = 2 \cdot \frac{1}{2} ΒΓ \cdot ΑΗ = ΒΓ \cdot ΑΗ.$$

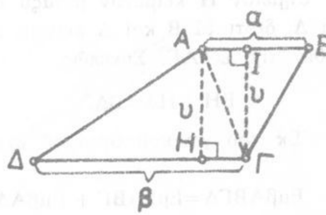



Σχ. 119

**Ὥστε τὸ ἐμβαδὸν παντὸς παραλληλογράμμου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῆς βάσεως αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἀντίστοιχον ὕψος.**

**Πόρισμα. Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς ὀρθογωνίου παρ/μου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν δύο διαστάσεών του.**

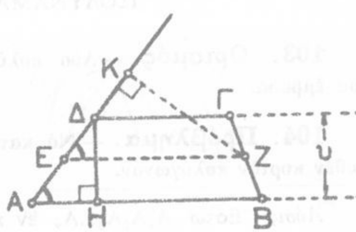
**101. Ἐμβαδὸν τραπεζίου.** Ἔστω ΑΒΓΔ τραπέζιον (σχ. 120) ἔχον βάσεις $ΑΒ = α$, $ΓΔ = β$ καὶ ὕψος $υ = ΑΗ = ΓΙ$. Κατὰ τὸν γενικὸν ὁρισμὸν εἶναι :




Σχ. 120

$$\text{Εμβ } ΑΒΓΔ = \text{Εμβ } ΑΔΓ +$$
$$+ \text{Εμβ } ΑΓΒ = \frac{1}{2} β \cdot υ + \frac{1}{2} α \cdot υ = \boxed{\frac{α+β}{2} \cdot υ}$$

. Ἐὰν τώρα καλέσωμεν διάμεσον τοῦ τραπεζίου τὸ τμῆμα ΕΖ τὸ συνδέον τὰ μέσα τῶν δύο μὴ παραλλήλων πλευρῶν (σχ. 121), ὁ ἀνωτέρω τύπος γίνεται : Εμβ ΑΒΓΔ= $\boxed{ΕΖ \times υ}$. Τέλος, ἂν ΖΚ εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ μέσου Ζ τῆς ΓΒ ἀπὸ τῆς εὐθ ΑΔ, ἔχομεν ἐκ τῶν δομοίων τριγώνων ΔΑΗ καὶ ΕΖΚ : $\frac{ΕΖ}{ΑΔ} = \frac{ΖΚ}{ΔΗ} \Rightarrow$




Σχ. 121

$ΕΖ \times υ = ΑΔ \times ΖΚ$ καὶ ἑπομένως Εμβ ΑΒΓΔ = $\boxed{ΑΔ \times ΖΚ}$. Συνάγομεν λοιπὸν τρεῖς ἐκφράσεις τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τραπεζίου :

**Ι. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου ἰσοῦται μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν βάσεων ἐπὶ τὸ ὕψος.**

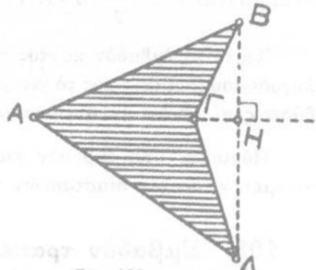
**ΙΙ. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου ἰσοῦται μὲ τὴν διάμεσον ἐπὶ τὸ ὕψος.**

**ΙΙΙ. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς μιᾶς τῶν μὴ**

**παραλλήλων πλευρῶν ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν τοῦ μέσου τῆς ἄλλης ἀπὸ τὸν φορέα τῆς πρώτης.**

**102.** **(Θ) — Τὸ ἐμβαδὸν ἁπλοῦ τετραπλεύρου κυρτοῦ ἢ μὴ κυρτοῦ ἔχοντος καθέτους διαγωνίους ἰσοῦται πρὸς τὸ ἡμιγινόμενον τῶν διαγωνίων του.**

*Ἀπόδειξις.* Ἔστω τὸ ἁπλοῦν, μὴ κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΔΓ, τὸ ὁποῖον χωρίζεται ὑπὸ τῆς διαγωνίου του ΑΓ εἰς δύο τρίγωνα κείμενα ἑκατέρωθεν αὐτῆς. Ἡ εὐθεῖα ΑΓ, κάθετος ἐξ ὑποθέσεως ἐπὶ τὸ τμῆμα ΒΔ, τέμνει τοῦτο εἰς σημεῖον Η κείμενον μεταξὺ τῶν Β καὶ Δ, διότι τὰ Β καὶ Δ κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς ευθΑΓ. Συνεπῶς,



Σχ. 122

$$ΒΗ + ΗΔ = ΒΔ.$$

Ἐκ τοῦ γενικοῦ ὁρισμοῦ ἔχομεν :

$$\text{ΕμβΑΒΓΔ} = \text{ΕμβΑΒΓ} + \text{ΕμβΑΔΓ} = \frac{1}{2}\, ΑΓ \times ΒΗ + \frac{1}{2}\, ΑΓ \times ΔΗ =$$

$$= \frac{1}{2}\, ΑΓ \cdot \{ ΒΗ + ΔΗ \} = \frac{1}{2}\, ΑΓ \cdot ΒΔ \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

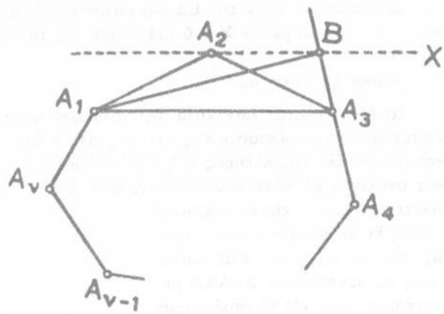
## ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

**103. Ὁρισμός. — Δύο πολύγωνα λέγονται ἰσοδύναμα, ὅταν ἔχουν ἴσα ἐμβαδά.**

**104. Πρόβλημα. — Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἰσοδύναμον πρὸς δοθὲν κυρτὸν πολύγωνον.**

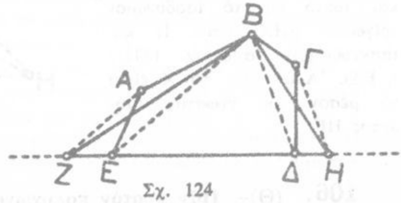
*Λύσις.* Ἔστω $A_1A_2A_3 ... A_\nu$ ἓν πολύγωνον. Θὰ ζητήσωμεν κατ' ἀρχὰς πολύγωνον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθέν, ἀλλ' ἔχον μίαν πλευρὰν ὀλιγωτέραν.

Ἐὰν ἀχθῇ ἡ διαγώνιος $A_1A_3$, χωρίζουσα τὸ δοθὲν πολύγωνον εἰς ἓν τρίγωνον $A_1A_2A_3$ καὶ εἰς ἓν πολύγωνον $A_1A_3A_4 ... A_\nu$, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ κορυφὴ $A_2$ δύναται νὰ μετακινηθῇ ἐπὶ τῆς $A_2X$ παρ/λου τῇ $A_1A_3$ χωρὶς νὰ ἀλλάξῃ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγ. $A_1A_2A_3$ (**§ 97, α΄**), ἄρα οὔτε καὶ τοῦ ὅλου πολυγώνου (ἀφοῦ τὸ $A_1A_3A_4 ... A_\nu$ μένει ἀμετάβλητον). Ἐὰν λοιπὸν μεταφέρωμεν τὴν κορυφὴν $A_2$ εἰς τὸ σημεῖον Β, καθ' ὃ ἡ παράλληλος $A_2X$ τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς $A_4A_3$, τὸ τρίγωνον $A_1A_2A_3$ ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὸ τρ. $A_1BA_3$ καὶ τὸ πολύγωνον $A_1A_2A_3A_4...A_\nu$ ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὸ πολύγωνον $A_1BA_4...A_\nu$ (διότι, ἁπλῶς, τὸ τρίγωνον $A_1A_2A_3$ ἀντικατεστάθη ὑπὸ τοῦ ἰσοδυνάμου του $A_1BA_3$). Οὕτω φθάνομεν εἰς πολύγωνον $A_1BA_4...A_\nu$ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $A_1A_2A_3A_4...A_\nu$, ἀλλ' ἔχον μίαν πλευρὰν ὀλιγωτέραν.



Σχ. 123

Καθ' ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν ἰσοδύναμον πολύγωνον πρὸς τὸ $A_1BA_4...A_\nu$ καὶ ἔχον μίαν ἀκόμη πλευρὰν ὀλιγωτέραν. Ἑπομένως, ὁσασδήποτε πλευρὰς καὶ ἂν τὸ ἀρχικὸν πολύγωνον ἔχῃ, ἐλαττοῦντες διαδοχικῶς τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν του διὰ τῆς ὡς ἄνω κατασκευῆς φθάνομεν εἰς ἰσοδύναμον τρίγωνον. Τὸ σχ. 124 δεικνύει τὴν κατασκευὴν τριγώνου ΒΖΗ ἰσοδυνάμου πρὸς δοθὲν πεντάγωνον ΑΒΓΔΕ.

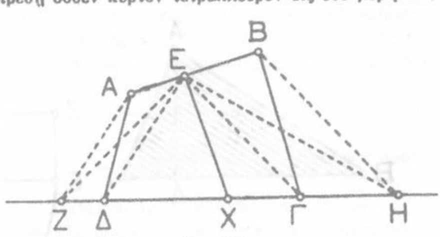


Σχ. 124

**105. Ἐφαρμογή. — Νὰ διαιρεθῇ δοθὲν κυρτὸν τετράπλευρον εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα δι' εὐθείας διερχομένης διὰ δεδομένου σημείου τῆς περιμέτρου του.**

*Λύσις.* Ἔστω ΑΒΓΔ τὸ δοθὲν τετράπλευρον καὶ Ε τὸ δοθὲν σημεῖον ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ.

Ἃς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα ΕΧ, τέμνει τὴν ἀπέναντι πλευρὰν ΔΓ εἰς Χ, ὁπότε πρέπει τὰ τετράπλευρα ΕΑΔΧ καὶ ΕΒΓΧ νὰ εἶναι ἰσοδύναμα. Ἃς μετασχηματίσωμεν ταῦτα εἰς ἰσοδύναμα τρίγωνα. Φέρομεν πρὸς τοῦτο τὴν ΑΖ//ΕΔ καὶ ΒΗ//ΕΓ (σχ. 125), ὁπότε ( $\widehat{=}$ δηλοῖ : ἰσοδύναμον),



Σχ. 125

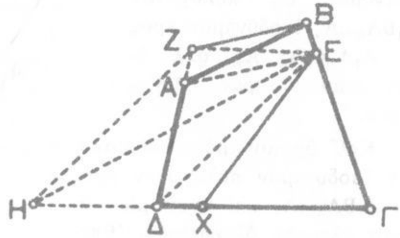
$$ΕΑΔΧ \widehat{=} ΕΖΧ \text{ καὶ } ΕΒΓΧ \widehat{=} ΕΗΧ.$$

Ἐπειδὴ $ΕΑΔΧ \widehat{=} ΕΒΓΧ \Rightarrow ΕΖΧ \widehat{=} ΕΗΧ$. Ἐπειδὴ δὲ τὰ ἰσοδύναμα τρίγωνα ΕΖΧ καὶ ΕΗΧ ἔχουν τὸ αὐτὸ ἐκ τοῦ Ε ὕψος, διὰ τοῦτο θὰ ἔχουν καὶ ἴσας βάσεις, δηλ. ΖΧ = ΧΗ. Ἐπειδὴ δὲ τὰ σημεῖα Ζ καὶ Η εἶναι γνωστά, τὸ ζητούμενον σημεῖον Χ εἶναι τὸ μέσον τοῦ γνωστοῦ τμήματος ΖΗ.

**Σύνθεσις.** Φέρομεν τὴν ΕΔ καὶ κατόπιν ΑΖ//ΕΔ (σχ. 125). Ὁμοίως, τὴν ΕΓ καὶ τὴν ΒΗ//ΕΓ. Ἐὰν τὸ μέσον Χ τοῦ ΖΗ ἀνήκῃ εἰς τὴν πλευρὰν ΔΓ, τότε ἡ ευθΕΧ εἶναι ἡ ζητουμένη.

Ἀπόδειξις εὔκολος.

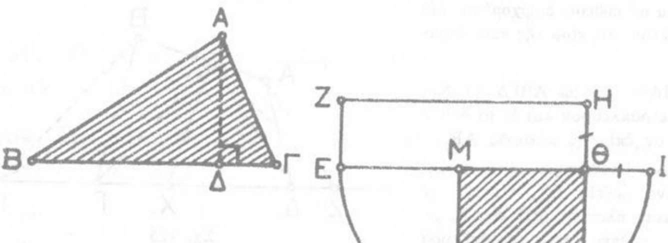
**2α Περίπτωσις.** Ἐὰν κατὰ τὴν ἀνωτέρω κατασκευὴν συμβῇ τὸ μέσον τῆς ΖΗ νὰ κεῖται εἰς τὴν προέκτασιν τῆς πλευρᾶς ΔΓ, τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα δὲν περατοῦται ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΔΓ, ἀλλ' ἐπὶ μιᾶς τῶν δύο ἄλλων. Συνεπῶς πρέπει νὰ γίνῃ νέα ἀνάλυσις μὲ νέαν προϋπόθεσιν, καθ' ἣν ἡ ΕΧ δὲν διαιρεῖ τὸ ΑΒΓΔ εἰς δύο τετράπλευρα, ἀλλ' εἰς ἓν τρίγωνον καὶ εἰς ἓν πεντάγωνον, ἰσοδύναμα, ὡς εἰς τὸ σχ. 126. Καὶ πάλιν ὅμως τὸ πεντάγωνον ΒΑΔΧΕ μετασχηματίζεται εἰς τὸ ἰσοδύναμον τετράπλευρον ΕΖΔΧ (ΒΖ//ΕΑ) καὶ τοῦτο εἰς τὸ ἰσοδύναμον τρίγωνον ΕΗΧ, ὅπου Η κατασκευάσιμον σημεῖον (ΖΗ// // ΕΔ). Ἄρα πάλιν τὸ Χ εἶναι τὸ μέσον τοῦ γνωστοῦ τμήματος ΗΓ.



Σχ. 126

**106.** (Θ)— **Πᾶν κυρτὸν πολύγωνον τετραγωνίζεται.** Δηλ. διὰ πεπερασμένου πλήθους γεωμετρικῶν κατασκευῶν φθάνομεν εἰς τετράγωνον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθὲν πολύγωνον.

*Ἀπόδειξις.* Τὸ δοθὲν πολύγωνον δύναται νὰ μετασχηματισθῇ εἰς ἰσοδύναμον τρίγωνον ΑΒΓ διὰ τῆς μεθόδου τῆς § **104.** Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ μετα-



Σχ. 127

σχηματίζεται εἰς ἰσοδύναμον ὀρθογώνιον παρ/μον ΕΖΗΘ (σχ. 127) ἔχον βάσιν ΕΘ=ΒΓ καὶ ὕψος ΕΖ, τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψους ΑΔ τοῦ τρ. ΑΒΓ. Τὸ ὀρθογώνιον ΕΖΗΘ μετασχηματίζεται εἰς ἰσοδύναμον τετράγωνον ΘΚΛΜ ἔχον πλευρὰν ΘΚ μέσην ἀνάλογον τῶν διαστάσεων ΕΘ καὶ ΘΗ (=ΘΙ) τοῦ ὀρθογωνίου (§ 75, γ΄). Ἐπειδὴ $ΘΚ^2 = ΕΘ \cdot ΘΙ = ΕΘ \cdot ΘΗ$, ἔχομεν κατὰ σειράν: ΕμβΘΚΛΜ $= ΚΘ^2 = ΕΘ \cdot ΘΗ = ΒΓ \cdot ΑΔ/2 =$ Εμβ ΑΒΓ = Εμβ. τοῦ δοθέντος πολυγώνου.

**Πόρισμα. Εἰς κάθε πολύγωνον ἀντιστοιχεῖ μονοσημάντως ἓν εὐθύγραμμον τμῆμα Κ (ἀνεξάρτητον τῆς μονάδος μετρήσεως) τοιοῦτον, ὥστε Ε $= K^2$, ὅπου Ε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου. Τὸ Κ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοδυνάμου πρὸς τὸ πολύγωνον τετραγώνου.**

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

455. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἐμβαδὸν παντὸς περὶ κύκλον περιγεγραμμένου πολυγώνου ἰσοῦται μὲ τὴν ἡμιπερίμετρον τοῦ πολυγώνου ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

456. Τὸ τετράπλευρον τὸ ἔχον κορυφὰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν κυρτοῦ τετραπλεύρου ἔχει ἐμβαδὸν τὸ ἥμισυ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ἀρχικοῦ.

457. Πᾶν κυρτὸν τετράπλευρον ἰσοδυναμεῖ πρὸς τρίγωνον ἔχον δύο πλευρὰς ἀντιστοίχως ἴσας πρὸς τὰς δύο διαγωνίους τοῦ τετραπλεύρου καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν γωνίαν τῶν διαγωνίων τοῦ τετραπλεύρου.

458. Ἐὰν ἐκ τυχόντος σημείου Ε τῆς διαγωνίου ΑΓ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ ἀχθοῦν παράλληλοι πρὸς τὰς πλευράς, ἐκ τῶν σχηματιζομένων παρ/μων τὰ κείμενα πρὸς τὰς κορυφὰς Β καὶ Δ εἶναι ἰσοδύναμα.

459. Ἐὰν ἐκ τῶν κορυφῶν ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ὀξυγωνίου τριγώνου ἀχθοῦν αἱ διάμετροι ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄, τὸ ἑξάγωνον ΑΓ΄ΒΑ΄ΓΒ΄Α ἔχει ἐμβαδὸν διπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου.

460. Ἐὰν ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΒΓ καὶ ΓΔ τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ ληφθοῦν ἀντιστοίχως τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ, νὰ δειχθῇ ἡ ἰσότης:

$$\text{ἐμβ.}(ΑΒΓΔ) = 2\text{ἐμβ.}(ΑΕΖ) + ΒΕ \cdot ΔΖ.$$

461. Ἐὰν ληφθοῦν ἑκατέρωθεν τοῦ μέσου Μ τῆς πλευρᾶς ΑΓ τοῦ τρ.ΑΒΓ τμήματα ΜΔ = ΜΕ, ἀχθῇ δὲ ἡ ΔΖ πα/λος τῇ ΑΒ (τὸ Ζ ἐπὶ τῆς ΒΓ), ἡ ευθΑΖ θὰ τέμνῃ τὴν ΒΕ εἰς σημεῖον Η τοιοῦτον, ὥστε τὸ τρίγωνον ΑΒΗ νὰ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ τετράπλευρον ΗΖΓΕ.

462. Νὰ διαιρεθῇ παρ/μον εἰς τρία μέρη ἰσοδύναμα δι' εὐθειῶν ἀγομένων ἐκ μιᾶς κορυφῆς του.

463. Νὰ διαιρεθῇ παρ/μον εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα δι' εὐθείας παρ/λου πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν.

464. Ἐὰν δύο κυρτῶν τετραπλεύρων τὰ μέσα τῶν τριῶν πλευρῶν συμπίπτουν, τὰ τετράπλευρα εἶναι ἰσοδύναμα. Ἐὰν δύο κυρτῶν ἑξαγώνων τὰ μέσα τῶν πλευρῶν συμπίπτουν, τὰ πολύγωνα ταῦτα εἶναι ἰσοδύναμα.

465. Δοθέντος τριγώνου μὴ ἰσοπλεύρου νὰ κατασκευασθῇ ἄλλο ἰσοδύναμον πρὸς αὐτό, ἀλλὰ μὲ μικροτέραν περίμετρον. Ὁμοίως διὰ πολύγωνον.

466. Ἐὰν διὰ τοῦ μέσου ἑκάστης τῶν διαγωνίων κυρτοῦ τετραπλεύρου ἀχθῇ παρ/λος πρὸς τὴν ἄλλην καὶ τὸ σημεῖον τομῆς τῶν παρ/λων τούτων ἑνωθῇ μὲ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν, τότε τὸ τετράπλευρον διαιρεῖται εἰς τέσσαρα ἰσοδύναμα μέρη.

467. Νὰ δειχθῇ ὅτι διὰ τυχὸν σημεῖον Ε τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος τοῦ συνδέοντος τὰ μέσα τῶν διαγωνίων κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ ὑφίσταται ἡ σχέσις:

$$\text{Εμβ}\,ΕΑΒ + \text{Εμβ}ΕΓΔ = \text{Εμβ}\,ΕΒΓ + \text{Εμβ}\,ΕΑΔ.$$

468. Εἰς δοθέντα κύκλον (Κ, R) ἐγγράφομεν τυχὸν ὀρθογώνιον παρ/μον καὶ εἰς τὰς

κορυφάς του φέρομεν ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ γινόμενον τῶν ἐμβαδῶν τοῦ ὀρθογωνίου καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων ὁριζομένου ρόμβου εἶναι σταθερόν.

469. Εἰς δοθέντα κύκλον νὰ ἐγγραφῇ ὀρθογώνιον παρ/μον, ἰσοδύναμον πρὸς δοθὲν τετράγωνον.

470. Εἰς δοθέντα κύκλον νὰ ἐγγραφῇ τραπέζιον, οὗτινος δίδεται τὸ ἐμβαδὸν $c^2$ καὶ ἡ μία τῶν μὴ παρ/λων πλευρῶν.

471. Νὰ διαιρεθῇ τραπέζιον εἰς δύο μέρη, ὧν τὰ ἐμβαδὰ ἔχουν λόγον $\mu : \nu$ ($\mu$, $\nu$ δοθέντα τμήματα), δι' εὐθείας παρ/λου πρὸς τὰς βάσεις του.

472. Νὰ διαιρεθῇ δοθὲν κυρτὸν τετράπλευρον εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα δι' εὐθείας παρ/λου πρὸς μίαν διαγώνιον.

473. Δοθέντος τρ. ΑΒΓ καὶ σημείου Ι ἐντὸς αὐτοῦ, νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ σημεῖον Δ τοιοῦτον, ὥστε ἡ τεθλασμένη γραμμὴ ΑΙΔ νὰ διαιρῇ τὸ τρίγωνον εἰς δύο μέρη, ὧν τὰ ἐμβαδὰ νὰ ἔχουν λόγον $\mu : \nu$ ($\mu$, $\nu$ δοθέντα τμήματα).

474. Δοθέντος παρ/μου ἑνοῦμεν τὸ μέσον ἑκάστης πλευρᾶς μὲ τὰς δύο ἀπέναντι κορυφάς. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν εὐθειῶν τούτων σχηματιζόμενον ὀκτάγωνον ἔχει ἐμβαδὸν ἴσον πρὸς τὸ ἓν ἕκτον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ παραλληλογράμμου.

475. Εἰς κύκλον διαμέτρου d εἶναι ἐγγεγραμμένον κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἔχον ΑΒ=ΑΔ καὶ ΓΒ=ΓΔ. Ἡ διαγώνιος ΑΓ χωρίζεται ὑπὸ τῆς ΒΔ εἰς λόγον 1 : 2. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ΑΒΓΔ εἶναι περιγράψιμον καὶ νὰ ὑπολογισθῇ, συναρτήσει τοῦ d, ἡ ἀκτὶς τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὸ κύκλου.

476. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τρ. ΑΒΓ, οὗτινος $ΑΒ=\gamma$, $ΑΓ=\beta$ καὶ $\widehat{A}=30^0$ ἢ $45^0$ ἢ $60^0$ ἢ $120^0$.

477. Δίδεται τρ. ΑΒΓ, οὗτινος $\widehat{A}=90^0$, $\widehat{B}=60^0$, ΒΓ=5 m. Κατασκευάζομεν ἐκτὸς τοῦ τριγώνου ἐπὶ μὲν τῆς ὑποτεινούσης του τετράγωνον ΒΓΔΕ, ἐπὶ δὲ τῶν ἄλλων πλευρῶν ἰσόπλευρα τρίγωνα ΑΓΗ καὶ ΑΒΖ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου ΕΔΗΖ.

478. Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς μικροτέρας βάσεως ΔΓ τραπεζίου ΑΒΓΔ προσδιορίσατε σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε ἡ εὐθεῖα ΑΜ νὰ διαιρῇ τὸ τραπέζιον εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα.

479. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ λαμβάνομεν σημεῖα Μ, Ν, Ρ, Κ τοιαῦτα, ὥστε : $ΑΜ/ΜΒ= ΒΝ/ΝΓ= ΓΡ/ΡΔ= ΔΚ/ΚΑ= \mu/\nu$. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λόγος τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ΜΝΡΚ πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ΑΒΓΔ.

480. Ἐὰν εἰς τρ. ΑΒΓ εἶναι $ΒΓ=(ΑΒ+ΑΓ)/2$, τότε παντὸς σημείου Μ τῆς διχοτόμου ΑΔ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τὰς τρεῖς πλευρὰς τοῦ τριγώνου εἶναι σταθερόν. (Τὸ Μ ἐσωτερικὸν τοῦ τρ. ΑΒΓ).

481. Νὰ δειχθῇ ὅτι, ἂν δοθῇ τὸ παρ/μον μὲ κορυφὰς τὰ περίκεντρα τῶν τεσσάρων τριγώνων, εἰς ἃ χωρίζεται κυρτὸν τετράπλευρον ὑπὸ τῶν διαγωνίων του, τότε καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου εἶναι ὡρισμένον.

482. i) *Τύπος τοῦ τραπεζίου.* Ἔστωσαν ΑΒ καὶ ΓΔ αἱ βάσεις τραπεζίου ΑΒΓΔ καὶ ΕΖ τὸ ἐντὸς τοῦ τραπεζίου μέρος εὐθείας παρ/λου πρὸς τὰς βάσεις καὶ διαιρούσης τὰς μὴ παρ/λους πλευρὰς ΑΔ καὶ ΒΓ εἰς λόγον $ΑΕ : ΕΔ=\mu : \nu$. Νὰ δειχθῇ ὅτι τότε ἰσχύει :

$$ΕΖ = \frac{ΑΒ\cdot\nu + ΓΔ\cdot\mu}{\mu+\nu}$$

ii) Διὰ τοῦ ἐγκέντρου τριγώνου ΑΒΓ ἄγεται εὐθεῖα (ε) ἀφήνουσα τὰς κορυφὰς Β καὶ Γ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος της. Ἐὰν x, y, z αἱ ἀποστάσεις τῶν κορυφῶν Α, Β, Γ ἀπὸ τῆς (ε) καὶ α, β, γ τὰ μήκη τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τοῦ τριγώνου, νὰ δειχθῇ ὅτι $\beta y+\gamma z=\alpha x$.

iii) Εἰς τὸ ἀνωτέρω τρίγωνον φέρομεν ἐφαπτομένην τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου παρ/λον πρὸς τὴν (ε) καὶ ἀφήνουσαν πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος της τὰ Β καὶ Γ. Ἐὰν $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ εἶναι αἱ ἀποστάσεις τῶν Α, Β, Γ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης ,νὰ δειχθῇ ὅτι $2Εμβ(ΑΒΓ)=\beta\beta' + \gamma\gamma' - \alpha\alpha'$.

483. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ τετραγώνου ΑΒΓΔ πλευρᾶς α λαμβάνομεν σημεῖον Ζ τοιοῦτον, ὥστε $AZ=2\alpha/3$ καὶ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ σημεῖον Ε τοιοῦτον, ὥστε $BE=$ $=2\alpha/3$. Ἀφοῦ δειχθῇ ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΔΖ καὶ ΑΕ τέμνονται καθέτως εἰς Μ, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβ(ΔΜΕΓ) συναρτήσει τοῦ α.

484. Κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ αἱ γωνίαι $\widehat{B}$, $\widehat{\Delta}$ εἶναι ὀρθαί, αἱ δὲ ΑΒ, ΒΓ ἴσαι. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ΑΒΓΔ ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τετραγώνου μὲ πλευρὰν ἴσην πρὸς ΒΔ.

485. Δοθέντος εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ ἔχοντος μέσον τὸ Ε, φέρομεν διὰ τῶν Α καὶ Β σταθερὰς ἡμιευθείας παρ/λους καὶ ὁμορρόπους καὶ ἐπ' αὐτῶν λαμβάνομεν σημεῖα Α', Β' τοιαῦτα, ὥστε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου ΑΑ'Β'Β νὰ εἶναι σταθερὸν καὶ ἴσον πρὸς $c^2$. Ποῖος ὁ γ.τ. τῆς προβολῆς τοῦ Ε ἐπὶ τὴν ευθ Α'Β';

486. Συναρτήσει τῶν ἀκτίνων R, ρ δύο κύκλων νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου τοῦ σχηματιζομένου ἀπὸ τὰς δύο κοινὰς ἐσωτερικὰς ἐφαπτομένας καὶ μιᾶς ἐξωτερικῆς, ὑποτιθεμένου ὅτι αἱ δύο ἐσωτερικαὶ ἐφαπτόμεναι εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας.

487. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἐμβαδὸν παντὸς ὀξυγωνίου τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὴν ἀκτῖνα R τοῦ περιγεγραμμένου του κύκλου ἐπὶ τὴν ἡμιπερίμετρον, τ', τοῦ ὀρθικοῦ του τριγώνου.

488. Νὰ δειχθῇ ὅτι δι' ὅλα τὰ ἰσοπερίμετρα τρίγωνα ΑΒΓ τὰ ἐγγεγραμμένα εἰς δοθέντα κύκλον, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου $O_1O_2O_3$ τοῦ ἔχοντος κορυφὰς τὰ παράκεντρα ἑκάστου ἐκ τῶν τρ. ΑΒΓ εἶναι σταθερόν.

(Ὑπόδ. Βλ. προηγουμένην ἄσκησιν).

489. Δοθέντος τριγώνου ΑΒΓ καὶ τριῶν σημείων Μ, Ν, Ρ ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ τοιούτων, ὥστε $AM/AB=BN/B\Gamma=\Gamma P/\Gamma A=\lambda$ i) Εὕρετε τὸ Ἐμβ(ΜΝΡ) συναρτήσει τοῦ λ καὶ τοῦ ἐμβαδοῦ Ε τοῦ τριγΑΒΓ. ii) Τὴν τιμὴν τοῦ λ, δι' ἣν τὸ ΕμβΜΝΡ καθίσταται ἐλάχιστον. iii) Ἂν ἀχθοῦν ἐκ τῶν Μ καὶ Ν ἀντιστοίχως παράλληλοι πρὸς τὰς ΑΓ καὶ ΑΒ, εὕρετε τὸν τόπον τῆς τομῆς των, ὅταν τὸ λ μεταβάλλεται ἀπὸ 0 ἕως 1.

## ΟΜΟΙΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

**107.** α') **Ὁρισμός.— Δύο κυρτὰ πολύγωνα, $A_1A_2A_3...A_\nu$ καὶ $B_1B_2B_3...B_\nu$ λέγονται ὅμοια, ὅταν ὑπάρχῃ μία ἀντιστοιχία μεταξὺ τῶν ὁμοταξίων κορυφῶν των: $A_1 \to B_1$, $A_2 \to B_2$... $A_\nu \to B_\nu$, κατὰ τὴν ὁποίαν αἱ μὲν πλευραὶ τοῦ πρώτου εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς ἀντιστοίχους πλευρὰς τοῦ δευτέρου, αἱ δὲ γωνίαι τοῦ πρώτου εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς ἀντιστοίχους γωνίας τοῦ δευτέρου.**

(Ἤτοι, ὅταν $A_1A_2/B_1B_2 = A_2A_3/B_2B_3 = ... = A_\nu A_1/B_\nu B_1 = \lambda$ καὶ $\widehat{A_1} = \widehat{B_1}, \widehat{A_2} = \widehat{B_2} ... \widehat{A_\nu} = \widehat{B_\nu}$. Συντόμως : ἔχουν τὰς πλευράς των ἀναλόγους καὶ τὰς γωνίας των ἴσας).

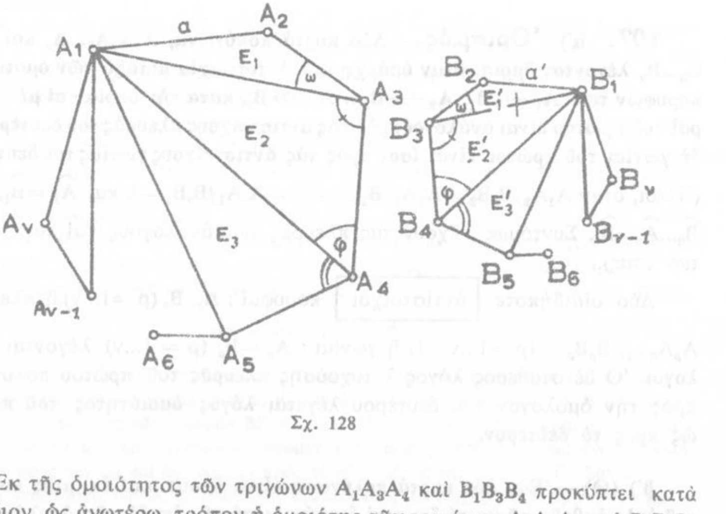
Δύο οἱαιδήποτε $\boxed{\text{ἀντίστοιχοι}}$ κορυφαί : $A_\rho$, $B_\rho$ ($\rho = 1...\nu$) ἢ πλευραί : $A_\rho A_{\rho+1}$, $B_\rho B_{\rho+1}$ ($\rho = 1...\nu-1$) ἢ γωνίαι : $\widehat{A_\rho} = \widehat{B_\rho}$ ($\rho = 1...\nu$) λέγονται **ὁμόλογοι.** Ὁ δὲ σταθερὸς λόγος λ τυχούσης πλευρᾶς τοῦ πρώτου πολυγώνου πρὸς τὴν ὁμόλογον τοῦ δευτέρου λέγεται **λόγος ὁμοιότητος τοῦ πρώτου ὡς πρὸς τὸ δεύτερον.**

**β') (Θ) — Ἐὰν δύο κυρτὰ πολύγωνα εἶναι ὅμοια καὶ ἐκ μιᾶς κορυφῆς τοῦ ἑνὸς ἀχθοῦν πᾶσαι αἱ δυναταὶ διαγώνιοι αὐτοῦ, ἐκ δὲ τῆς ὁμολόγου κο-**

**ρυφῆς τοῦ ἄλλου ἀχθοῦν ἐπίσης πᾶσαι αἱ δυναταὶ διαγώνιοι, τότε τὰ δύο πολύγωνα χωρίζονται εἰς ἴσον πλῆθος τριγώνων, ἀντιστοίχως ὁμοίων.**

*Ἀπόδειξις*. Ἔστωσαν τὰ ὅμοια κυρτὰ πολύγωνα $A_1A_2...A_\nu$ καὶ $B_1B_2...B_\nu$ ἔχοντα : $\dfrac{A_1A_2}{B_1B_2}=\dfrac{A_2A_3}{B_2B_3}=\dfrac{A_3A_4}{B_3B_4}=\ldots=\dfrac{A_\nu A_1}{B_\nu B_1}$ καὶ $A_\nu\widehat{A_1}A_2 = B_\nu\widehat{B_1}B_2$, $A_1\widehat{A_2}A_3 = B_1\widehat{B_2}B_3, \cdots A_{\nu-1}\widehat{A_\nu}A_1 = B_{\nu-1}\widehat{B_\nu}B_1$. Διὰ τῶν ἐκ τοῦ $A_1$ ἀγομένων διαγωνίων, χωρίζεται τὸ πρῶτον εἰς τὰ ν—2 τρίγωνα $A_1A_2A_3$, $A_1A_3A_4 \cdots A_1A_{\nu-1}A_\nu$ καὶ διὰ τῶν ἐκ τοῦ $B_1$ διαγωνίων, χωρίζεται τὸ δεύτερον εἰς ν—2 ἐπίσης τρίγωνα $B_1B_2B_3$, $B_1B_3B_4 \cdots B_1B_{\nu-1}B_\nu$. Βλέπομεν ὅτι τὰ δύο πρῶτα τρίγωνα $A_1A_2A_3$ καὶ $B_1B_2B_3$ εἶναι ὅμοια ὡς ἔχοντα δύο πλευρὰς ἀναλόγους καὶ τὰς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένας γωνίας ἴσας. Ἑπομένως $A_2\widehat{A_3}A_1 = B_2\widehat{B_3}B_1$ καὶ ἐπειδὴ $A_2\widehat{A_3}A_4 = B_2\widehat{B_3}B_4 \Rightarrow A_1\widehat{A_3}A_4 = B_1\widehat{B_3}B_4$ (σχ. 128).

Τὰ δεύτερα τρίγωνα : $A_1A_3A_4$ καὶ $B_1B_3B_4$ ἔχουν λοιπὸν μίαν γωνίαν ἴσην, ἀλλ' ἔχουν καὶ τὰς περιεχούσας αὐτὴν πλευρὰς ἀναλόγους, διότι : $\dfrac{A_3A_4}{B_3B_4}=\dfrac{A_2A_3}{B_2B_3}$ (ἐξ ὑποθέσεως) καὶ $\dfrac{A_2A_3}{B_2B_3}=\dfrac{A_3A_1}{B_3B_1}$ (ἐκ τῶν προηγουμένων ὁμοίων τριγώνων), δηλ. $\dfrac{A_3A_4}{B_3B_4}=\dfrac{A_3A_1}{B_3B_1}$. Ἑπομένως τρ.$A_1A_3A_4 \approx$ τρ.$B_1B_3B_4$.




Σχ. 128

Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων $A_1A_3A_4$ καὶ $B_1B_3B_4$ προκύπτει κατὰ τὸν ἴδιον, ὡς ἀνωτέρω, τρόπον ἡ ὁμοιότης τῶν τριγώνων $A_1A_4A_5$ καὶ $B_1B_4B_5$

καὶ ἐκ τῆς ὁμοιότητος τούτων προκύπτει ἡ ὁμοιότης τῶν ἑπομένων των κ.ο.κ. μέχρι τῶν τελευταίων :

$$A_1A_{\nu-1}A_\nu \text{ καὶ } B_1B_{\nu-1}B_\nu.$$

**γ΄) (Θ) — Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο ὁμοίων πολυγώνων ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν τετραγώνων δύο ὁμολόγων πλευρῶν των (ἢ ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ λόγου ὁμοιότητος τῶν δύο πολυγώνων).**

Δηλαδή, ἂν Ε εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς πολυγώνου καὶ α μία πλευρὰ αὐτοῦ, Ε΄ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ὁμοίου του καὶ α΄ ἡ πρὸς τὴν α ὁμόλογος πλευρὰ τοῦ ὁμοίου του, τότε :

$\dfrac{E}{E'} = \dfrac{\alpha^2}{\alpha'^2} = \lambda^2$, ὅπου $\lambda = \dfrac{\alpha}{\alpha'} =$ λόγος ὁμοιότητος τοῦ πρώτου πρὸς τὸ δεύτερον.

*Ἀπόδειξις*. Τὰ δύο ὅμοια πολύγωνα χωρίζονται, ὡς εἴδομεν εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα, εἰς ἰσάριθμα τρίγωνα ἀντιστοίχως ὅμοια (σχ. 128). Ἐὰν καλέσωμεν $E_1, E_2, E_3 \cdots E_{\nu-2}$ κατὰ σειράν, τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων, εἰς τὰ ὁποῖα ἀναλύεται τὸ πρῶτον καὶ $E'_1, E'_2, \cdots E'_{\nu-2}$ τὰ ἐμβαδὰ τῶν ἀντιστοίχως ὁμοίων τριγώνων, εἰς τὰ ὁποῖα ἀναλύεται τὸ δεύτερον (σχ. 128), τότε θὰ ἔχωμεν (§ 97) :

$$\frac{E_1}{E'_1} = \left(\frac{A_1A_2}{B_1B_2}\right)^2 = \lambda^2,\ \frac{E_2}{E'_2} = \left(\frac{A_3A_4}{B_3B_4}\right)^2 = \lambda^2, \cdots \frac{E_{\nu-2}}{E'_{\nu-2}} = \left(\frac{A_\nu A_1}{B_\nu B_1}\right)^2 = \lambda^2,$$

ἐξ ὧν ἕπεται (κατὰ γνωστὴν ἰδιότητα τῶν ἴσων κλασμάτων) :

$$\lambda^2 = \frac{E_1}{E'_1} = \frac{E_2}{E_2'} = \cdots = \frac{E_{\nu-2}}{E'_{\nu-2}} = \frac{E_1 + E_2 + \cdots + E_{\nu-2}}{E'_1 + E'_2 + \cdots + E'_{\nu-2}} = \frac{E}{E'}$$

(διότι $E_1 + E_2 + \cdots + E_{\nu-2} = E$ καὶ $E'_1 + E'_2 + \cdots + E'_{\nu-2} = E'$). Ἀλλὰ $\lambda = \dfrac{\alpha}{\alpha'}$, συνεπῶς $\dfrac{E}{E'} = \dfrac{\alpha^2}{\alpha'^2} = \lambda^2$. ὅ.ἔ.δ.

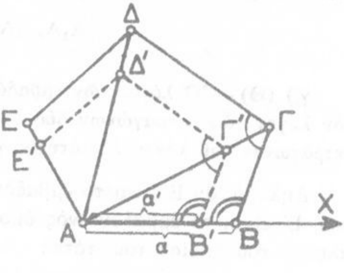
**δ΄) Γενικὴ θεωρία** τῆς ὁμοιότητος τῶν σχημάτων δίδεται εἰς τοὺς Σημειακοὺς μετασχηματισμούς.

## ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ

**108**. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.— **Νὰ κατασκευασθῇ πολύγωνον ὅμοιον πρὸς δοθὲν καὶ ἔχον δοθέντα λόγον ὁμοιότητος πρὸς τὸ δοθὲν ἢ ἔχον μίαν πλευρὰν δοθεῖσαν ὁμόλογον πρὸς μίαν ὡρισμένην πλευρὰν τοῦ δοθέντος.**

*Λύσις*. Ἔστω ΑΒΓΔΕ τὸ δοθὲν πολύγωνον καὶ $\lambda = \dfrac{\mu}{\nu}$ (μ, ν δοθέντα τμήματα) ὁ δοθεὶς λόγος ὁμοιότητος. Ἄς φέρωμεν ἐκ τοῦ Α πάσας τὰς δυνατὰς διαγωνίους τοῦ δοθέντος καὶ ἂς λάβωμεν ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος (Α, Β) (σχ. 129) σημεῖον Β′ τοιοῦτον, ὥστε :

$$AB'/AB = \mu/\nu.$$



Σχ. 129

Φέρομεν τώρα ἐκ τοῦ Β′ εὐθεῖαν //ΒΓ, τέμνουσαν τὴν ευθ ΑΓ εἰς Γ′, ἐκ τοῦ Γ′ παράλληλον τῇ ΓΔ τέμνουσαν τὴν ευθ ΑΔ εἰς Δ′ καὶ ἐκ τοῦ Δ′ εὐθεῖαν //ΔΕ τέμνουσαν τὴν ευθ ΑΕ εἰς Ε′. Τὸ πολύγωνον ΑΒ′Γ′Δ′Ε′ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΒΓΔΕ, διότι ἔχει κατὰ σειρὰν τὰς πλευράς του ἀναλόγους πρὸς τὰς τοῦ

$$AB\Gamma\Delta E : \frac{AB'}{AB} = \frac{B'\Gamma'}{B\Gamma} = \frac{A\Gamma'}{A\Gamma} = \frac{\Gamma'\Delta'}{\Gamma\Delta} = \frac{A\Delta'}{A\Delta} = \frac{\Delta'E'}{\Delta E}\ \frac{AE'}{AE} = \frac{\mu}{\nu}$$

καὶ τὰς γωνίας του ἴσας πρὸς τὰς ἀντιστοίχους τοῦ ΑΒΓΔΕ (ὡς ἐχούσας τὰς πλευράς των παρ/λους καὶ ὁμορρόπους).

Καὶ πᾶν πολύγωνον ἴσον πρὸς τὸ ΑΒ′Γ′Δ′Ε′ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ δοθὲν μὲ λόγον ὁμοιότητος $\lambda = \mu/\nu$.

—Ἂν δίδεται μία πλευρὰ α′ τοῦ ζητουμένου ,ὁμόλογος πρὸς τὴν $AB = \alpha$ τοῦ δοθέντος, λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος (Α, Β) τμῆμα $AB' = \alpha'$ καὶ ἐκτελοῦμεν τὴν ἰδίαν κατασκευήν.

**109**. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. **Νὰ κατασκευασθῇ πολύγωνον ὅμοιον πρὸς δοθὲν καὶ ἔχον δοθὲν ἐμβαδὸν ἴσον πρὸς $c^2$.**

*Λύσις*. Τὸ δοθὲν πολύγωνον ἔχει γνωστὸν ἐμβαδόν, $k^2$, ὅπου k ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοδυνάμου του τετραγώνου, δυναμένη νὰ κατασκευασθῇ (§ **106**, πόρισμα). Ἔστω α μία πλευρὰ τοῦ δοθέντος πολυγώνου καὶ ἔστω x ἡ πρὸς τὴν α ὁμόλογος πλευρὰ τοῦ ζητουμένου ὁμοίου πολυγώνου. Ἐπειδὴ τὰ ἐμβαδὰ τῶν δύο τούτων πολυγώνων εἶναι ἀντιστοίχως $k^2$ καὶ $c^2$ (γνωστά), θὰ ἔχωμεν (§ **107**, γ) :

$$\frac{k^2}{c^2} = \frac{\alpha^2}{x^2} \Rightarrow \frac{k}{c} = \frac{\alpha}{x}.$$

Ἑπομένως ἡ πλευρὰ x κατασκευάζεται ὡς τετάρτη ἀνάλογος τῶν k, c, α. Γνωρίζοντες τώρα μίαν πλευρὰν x τοῦ ζητουμένου, ὁμόλογον πρὸς μίαν ὡρισμένην πλευρὰν α τοῦ δοθέντος, δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τὸ ζητούμενον συμφώνως πρὸς τὴν προηγουμένην κατασκευὴν τῆς § **108**.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

490. Αἱ περίμετροι δύο ὁμοίων πολυγώνων ἔχουν λόγον, ὃν λόγον ἔχουν δύο ὁμόλογοι πλευραὶ τῶν πολυγώνων.

491. Δοθέντων δύο ὁμοίων πολυγώνων νὰ κατασκευασθῇ τρίτον, ὅμοιον πρὸς τὰ δοθέντα καὶ ἔχον ἐμβαδὸν ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο δοθέντων.

492. Νὰ κατασκευασθῇ πολύγωνον ὅμοιον πρὸς δοθὲν καὶ ἔχον ἐμβαδὸν τὰ μ/ν τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ δοθέντος, ὅπου μ, ν δοθέντα εὐθύγραμμα τμήματα.

493. Ἐὰν κυρτοῦ τετραπλεύρου αἱ διαγώνιοι εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας, νὰ δειχθῇ ὅτι πάντα τὰ ὀρθογώνια παρ/μα τὰ περιγεγραμμένα περὶ τὸ τετράπλευρον εἶναι ὅμοια μεταξύ των.

494. Νὰ διαιρεθῇ τραπέζιον εἰς δύο ὅμοια τραπέζια δι' εὐθείας παρ/λου πρὸς τὰς βάσεις του.

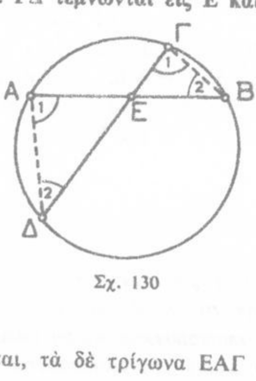
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

# ΜΕΤΡΙΚΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ ΕΝ ΚΥΚΛΩ — ΔΥΝΑΜΙΣ ΣΗΜΕΙΟΥ ΩΣ ΠΡΟΣ ΚΥΚΛΟΝ — ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

## ΜΕΤΡΙΚΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ ΕΙΣ ΤΟΝ ΚΥΚΛΟΝ

**110.** α΄) **Θεώρημα τῶν τεμνομένων χορδῶν καὶ τὸ ἀντίστροφον αὐτοῦ. (Θ)—Ἐὰν δύο χορδαὶ κύκλου ΑΒ καὶ ΓΔ τέμνωνται εἰς τὸ Ε, τότε ἰσχύει ἡ σχέσις: ΕΑ × ΕΒ = ΕΓ × ΕΔ (ἤτοι τὸ γινόμενον τῶν δύο τμημάτων τῆς μιᾶς ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν δύο τμημάτων τῆς ἄλλης).**

**Ἀντιστρόφως: Ἂν δύο τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ τέμνωνται εἰς Ε καὶ ἂν ἰσχύῃ ἡ ἰσότης ΕΑ × ΕΒ = ΕΓ × ΕΔ, τότε τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ εἶναι ὁμοκυκλικά.**



Σχ. 130

*Ἀπόδειξις.* i) Ἀπὸ τὸ κυρτόν, ἐγγράψιμον, τετράπλευρον ΑΓΒΔ (σχ. 130) ἔχομεν ὅτι

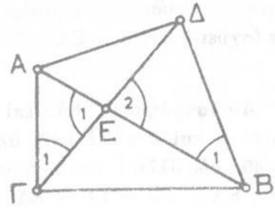
$$\widehat{A_1} = \widehat{\Gamma_1} \text{ καὶ } \widehat{\Delta_2} = \widehat{B_2} \Rightarrow \text{τρ. } EA\Delta \approx \text{τρ.} EB\Gamma$$

$$\Rightarrow \frac{EA}{E\Gamma} = \frac{E\Delta}{EB} \Rightarrow EA \times EB = E\Gamma \times E\Delta.$$

ii) Τὸ τετράπλευρον ΑΓΒΔ (σχ. 131) εἶναι κυρτόν, διότι αἱ διαγώνιοί του τέμνονται, τὰ δὲ τρίγωνα ΕΑΓ καὶ

ΕΔΒ είναι όμοια ώς έχοντα μίαν γωνίαν ἴσην ($\widehat{E}_1 = \widehat{E}_2$) καὶ τὰς περιεχούσας αὐτὴν πλευρὰς ἀναλόγους, δηλ.

$\frac{EA}{E\Gamma} = \frac{E\Delta}{EB}$ (λόγῳ τῆς ὑποθέσεως: $EA \times EB = E\Gamma \times E\Delta$). Ἐπειδή: $\frac{EA}{E\Delta} = \frac{E\Gamma}{EB}$, ἕπεται ὅτι αἱ ΕΑ καὶ ΕΔ εἶναι ὁμόλογοι πλευραὶ καὶ συνεπῶς αἱ ἀπέναντι αὐτῶν γωνίαι $\widehat{\Gamma}_1$ καὶ $\widehat{B}_1$ ἴσαι. Ἄρα τὸ κυρτὸν τετράπλευρον ΑΔΒΓ εἶναι ἐγγράψιμον.



Σχ. 131

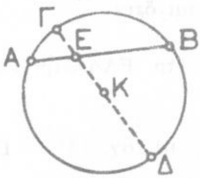
**β) Πόρισμα. — Ἐὰν διὰ σημείου Ε κειμένου ἐντὸς κύκλου (Κ, R) ἀχθῇ τυχοῦσα χορδὴ ΑΒ, ἰσχύει ἡ σχέσις:**

$$\boxed{EA \times EB = R^2 - EK^2}$$

(δηλ. τὸ γινόμενον τῶν δύο τμημάτων χορδῆς διὰ τοῦ Ε διερχομένης εἶναι σταθερὸν καὶ ἴσον πρὸς $R^2 - EK^2$).

Διότι, ἂν ἀχθῇ καὶ δευτέρα χορδὴ ΓΕΔΚ (σχ. 132), τὸ ἀνωτέρω θεώρημα δίδει:

$$= EA \times EB = E\Gamma \times E\Delta =$$
$$= (K\Gamma - KE)(K\Delta + KE) =$$
$$= (R - KE)(R + KE) = R^2 - KE^2 = \text{σταθερόν}.$$



Σχ. 132

**γ) Ὑπολογισμὸς τῆς διχοτόμου ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 133)**

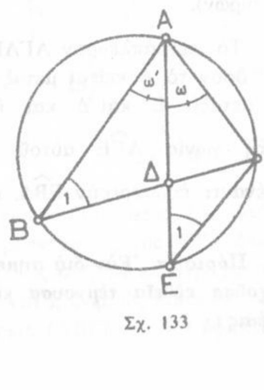
Ἂν ἡ ἐσωτερικὴ διχοτόμος ΑΔ προεκτεινομένη τέμνῃ τὴν περιγεγραμμένην περιφέρειαν εἰς Ε, τότε τρ. ΑΕΓ $\approx$ τρ. ΑΒΔ, διότι $\omega = \omega'$ καὶ $\widehat{E}_1 = \widehat{B}_1$. Ἐκ τῆς ὁμοιότητος ταύτης ἔχομεν:

$$\frac{AE}{AB} = \frac{A\Gamma}{A\Delta} \;\; ἢ \;\; \frac{A\Delta + \Delta E}{AB} = \frac{A\Gamma}{A\Delta} \Rightarrow$$

$A\Delta^2 + A\Delta \cdot \Delta E = AB \cdot A\Gamma$. Ἀπὸ τὸ (Θ) τῶν τεμνομένων χορδῶν: $A\Delta \cdot \Delta E = B\Delta \cdot \Delta\Gamma$ καὶ ἡ ἀνωτέρω σχέσις γίνεται:

$A\Delta^2 + B\Delta \cdot \Delta\Gamma = AB \cdot A\Gamma$ ἢ

$A\Delta^2 = AB \cdot A\Gamma - B\Delta \cdot \Delta\Gamma$ (βλ. § 87)

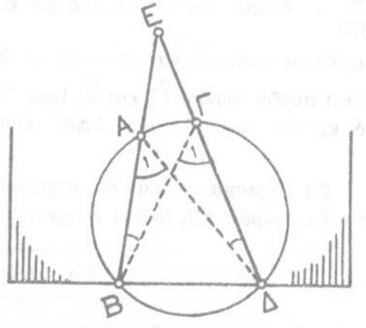


Σχ. 133

## 111. Θεώρημα τῶν τεμνουσῶν καὶ τὸ ἀντίστροφον αὐτοῦ.

**(Θ) —Ἐὰν ἐκ σημείου Ε κειμένου ἐκτὸς κύκλου ἀχθοῦν δύο ἡμιευθεῖαι, τέμνουσαι τὴν περιφέρειαν εἰς Α καὶ Β ἡ μία καὶ εἰς Γ καὶ Δ ἡ ἄλλη, τότε ἰσχύει ἡ σχέσις : ΕΑ × ΕΒ = ΕΓ × ΕΔ.**

**Ἀντιστρόφως : Ἐὰν ἐπὶ τῆς μιᾶς πλευρᾶς γωνίας $X\widehat{E}\Psi$ ὑπάρχουν δύο σημεῖα Α καὶ Β καὶ ἐπὶ τῆς ἄλλης πλευρᾶς δύο ἄλλα Γ καὶ Δ τοιαῦτα, ὥστε : ΕΑ × ΕΒ = ΕΓ × ΕΔ, τότε τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ εἶναι ὁμοκυκλικά.**



Σχ. 134

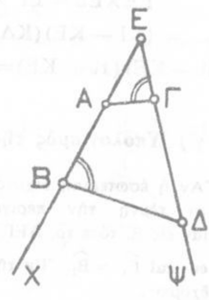
*Ἀπόδειξις.* i) Ἐὰν τὸ Α κεῖται μεταξὺ Ε καὶ Β καὶ τὸ Γ μεταξὺ Ε καὶ Δ, τότε τὰ Α καὶ Γ κεῖνται ὡς πρὸς τὴν χορδὴν ΒΔ εἰς τὸ αὐτὸ ἡμιεπίπεδον μὲ τὸ Ε καὶ ἑπομένως βλέπουν τὴν ΒΔ ὑπὸ ἴσας γωνίας $\widehat{A}_1$, $\widehat{\Gamma}_1$. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι :

$$\text{τρ. } E A \Delta \approx \text{τρ. } E \Gamma B \Rightarrow \frac{EA}{E\Gamma} = \frac{E\Delta}{EB} \Rightarrow EA \times EB = E\Gamma \times E\Delta.$$

ii) (σχ. 135) : $EA \times EB = E\Gamma \times E\Delta \Rightarrow$

$\dfrac{EA}{E\Delta} = \dfrac{E\Gamma}{EB}$ καὶ ἑπομένως τρ. ΕΑΓ ≈ τρ.ΕΒΔ

$\Rightarrow A\widehat{\Gamma}E = E\widehat{B}\Delta$ (κείμεναι ἀπέναντι ὁμολόγων πλευρῶν).



Σχ. 135

Τὸ τετράπλευρον ΑΓΔΒ εἶναι κυρτόν, ἐφ' ὅσον τὸ Α κεῖται μεταξὺ Ε καὶ Β καὶ τὸ Γ μεταξὺ Ε καὶ Δ καὶ ἐπειδὴ ἡ ἐξωτερικὴ γωνία $A\widehat{\Gamma}E$ αὐτοῦ ἰσοῦται μὲ τὴν ἀπέναντι ἐσωτερικὴν $E\widehat{B}\Delta$, εἶναι ἐγγράψιμον.

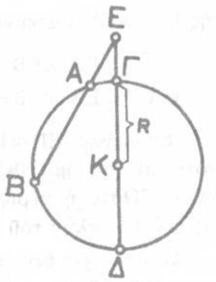
**Πόρισμα. Ἐὰν διὰ σημείου Ε κειμένου ἐκτὸς κύκλου (K, R) ἀχθῇ τυχοῦσα εὐθεῖα τέμνουσα εἰς Α καὶ Β τὴν περιφέρειαν, τότε ἰσχύει ἡ σχέσις :**

$$\boxed{EA \times EB = EK^2 - R^2}$$

(δηλ. τὸ γινόμενον τῶν δύο τμημάτων ΕΑ, ΕΒ εἶναι **σταθερὸν καὶ ἴσον πρὸς** $EK^2 - R^2$).

Διότι, ἂν ἀχθῇ καὶ ἑτέρα τέμνουσα ΕΓΚΔ (σχ. 136), θὰ ἔχωμεν :

$$EA \times EB = E\Gamma \times E\Delta =$$
$$= (KE - R)(KE + R) = KE^2 - R^2.$$



Σχ. 136

## 112. Θεώρημα τεμνούσης καὶ ἐφαπτομένης καὶ τὸ ἀντίστροφον αὐτοῦ.

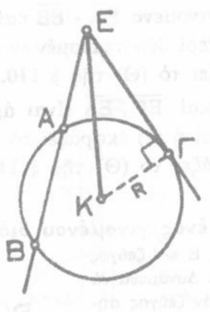
**(Θ) — Ἐὰν διὰ σημείου Ε κειμένου ἐκτὸς κύκλου ἀχθοῦν δύο ἡμιευθεῖαι, ἐξ ὧν ἡ μία ἐφάπτεται τῆς περιφερείας εἰς Γ, ἡ δὲ ἄλλη τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς Α καὶ Β, τότε ἰσχύει ἡ σχέσις :**

$$E\Gamma^2 = EA \cdot EB$$

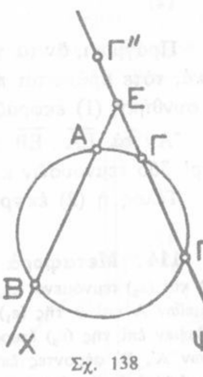
**Ἀντιστρόφως : Ἐὰν ἐπὶ τῆς μιᾶς πλευρᾶς γωνίας $\widehat{X E \Psi}$ ὑπάρχουν δύο σημεῖα Α καὶ Β καὶ ἐπὶ τῆς ἄλλης πλευρᾶς ἓν σημεῖον Γ τοιοῦτον, ὥστε $E\Gamma^2 = EA \times EB$, τότε ἡ περιφέρεια (ΑΒΓ) ἐφάπτεται τῆς εὐθείας ΕΓ εἰς τὸ Γ.**

*Ἀπόδειξις*. i) Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τρ. ΕΚΓ (σχ. 137) ἔχομεν $E\Gamma^2 = EK^2 - R^2$. Ἀπὸ τὸ πόρισμα τῆς § **111** ἔχομεν $EA \times EB = EK^2 - R^2$. Ἑπομένως $E\Gamma^2 = EA \times EB$.

ii) Ἄς ὑποθέσωμεν : $EA \times EB = E\Gamma^2$ (σχ. 138) καὶ ἂς θεωρήσωμεν τὴν περιφέρειαν (ΑΒΓ). Τότε τὸ Ε εἶναι **ἐξωτερικὸν** σημεῖον τοῦ κύκλου (ΑΒΓ), διότι κεῖται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς χορδῆς ΒΑ αὐτοῦ. Ἐὰν λοιπὸν ἡ περιφέρεια (ΑΒΓ) δὲν ἐφήπτετο τῆς ΕΨ, θὰ ἐπανέτεμνε τὴν εὐθ ΕΨ εἰς σημεῖον Γ′ κείμενον ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας ΕΨ. Διότι, ἂν ἔτεμνε τὴν ευθ ΕΨ εἰς σημεῖον Γ″ τῆς προεκτάσεως τῆς ΕΨ, τότε ἡ ΓΓ″ θὰ ἦτο χορδὴ τοῦ κύκλου (ΑΒΓ) καὶ τὸ Ε ὡς ἀνῆκον εἰς τὴν χορδὴν ΓΓ′ θὰ ἦτο ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ κύκλου (ΑΒΓ), ἐνῷ, ὡς εἴπομεν, τὸ Ε εἶναι ἐξωτερικὸν τοῦ (ΑΒΓ). Ὥστε ἡ περιφέρεια (ΑΒΓ), ἂν δὲν ἐφήπτετο



Σχ. 137



Σχ. 138

τῆς ΕΨ, θὰ ἐπανέτεμνε τὴν **ἡμιευθεῖαν** ΕΨ εἰς σημεῖον Γ′ καὶ θὰ εἴχομεν :

$$ΕΑ \times ΕΒ = ΕΓ \times ΕΓ' \quad \text{(θεώρημα τῶν τεμνουσῶν)}$$

καὶ $$ΕΑ \times ΕΒ = ΕΓ^2 \quad \text{(ἐξ ὑποθέσεως).}$$

Ἑπομένως $ΕΓ \times ΕΓ' = ΕΓ^2 \Rightarrow ΕΓ = ΕΓ'$. Τοῦτο ὅμως εἶναι ἄτοπον, διότι ἐπὶ τῆς **ἡμιευθείας** ΕΨ θὰ ὑπῆρχον δύο σημεῖα Γ, Γ′ ἰσαπέχοντα τοῦ Ε. Ὥστε ἡ περιφέρεια (ΑΒΓ) δὲν ἔχει ἕτερον κοινὸν σημεῖον μετὰ τῆς ευθ ΕΨ πλὴν τοῦ Γ, ἄρα ἡ ΕΨ ἐφάπτεται τῆς περιφερείας (ΑΒΓ).

**Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα βοηθεῖ εἰς πολλὰς περιπτώσεις εἰς τὸ νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι εὐθεῖά τις ΕΓ εἶναι ἐφαπτομένη ἑνὸς κύκλου (ΑΒΓ)** (βλ. σχ. 137).

**113. Ἀλγεβρικὴ διατύπωσις τῶν μετρικῶν σχέσεων ἐν κύκλῳ.** Τὰ τρία προηγούμενα θεωρήματα δύνανται νὰ διατυπωθοῦν συντόμως εἰς τὸ κάτωθι θεώρημα :

**(Θ)—i) Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι $(ε_1)$ καὶ $(ε_2)$ τεμνόμεναι εἰς τὸ Ε, δύο σημεῖα Α καὶ Β ἐπὶ τῆς $(ε_1)$ καὶ δύο σημεῖα Γ καὶ Δ ἐπὶ τῆς $(ε_2)$. Τότε μία ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ εἶναι ὁμοκυκλικά, εἶναι :**

$$\overline{ΕΑ} \cdot \overline{ΕΒ} = \overline{ΕΓ} \cdot \overline{ΕΔ}. \tag{1}$$

**ii) Ἐὰν τὸ Δ συμπίπτῃ μὲ τὸ Γ, τότε μία ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα ἡ περιφέρεια (ΑΒΓ) ἐφάπτεται τῆς $(ε_2)$, εἶναι :**

$$\overline{ΕΑ} \cdot \overline{ΕΒ} = \overline{ΕΓ}^2. \tag{2}$$

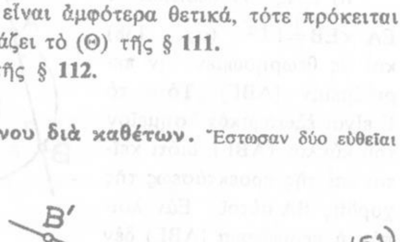
Πράγματι, ἂν τὰ γινόμενα $\overline{ΕΑ} \cdot \overline{ΕΒ}$ καὶ $\overline{ΕΓ} \cdot \overline{ΕΔ}$ εἶναι ἀμφότερα ἀρνητικά, τότε πρόκειται περὶ δύο τεμνομένων εἰς Ε τμημάτων ΑΒ καὶ ΓΔ καὶ ἡ συνθήκη (1) ἐκφράζει τὸ (Θ) τῆς **§ 110.**

Ἂν τὰ $\overline{ΕΑ} . \overline{ΕΒ}$ καὶ $\overline{ΕΓ} . \overline{ΕΔ}$ εἶναι ἀμφότερα θετικά, τότε πρόκειται περὶ δύο τεμνουσῶν καὶ ἡ (1) ἐκφράζει τὸ (Θ) τῆς **§ 111.**

Τέλος ἡ (2) ἐκφράζει τὸ (Θ) τῆς **§ 112.**

**114. Μεταφορὰ ἑνὸς γινομένου διὰ καθέτων.** Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι $(ε_1)$ καὶ $(ε_2)$ τεμνόμεναι εἰς Ε καὶ ζεῦγος σημείων Α καὶ Β τῆς $(ε_1)$. Δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ἐπὶ τῆς $(ε_2)$ ἕτερον ζεῦγος σημείων Α′, Β′ φέροντες ἐκ τοῦ Α κάθετον ΑΑ′ ἐπὶ τὴν $(ε_2)$ καὶ εἰς τὸ Β κάθετον ΒΒ′ ἐπὶ τὴν $(ε_1)$ (σχ. 139) ἢ ἀντιθέτως (σχ. 140).

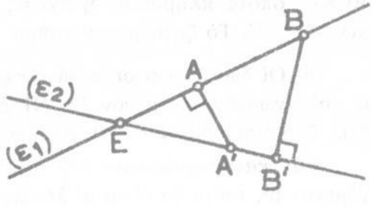
Τὸ ζεῦγος τῶν σημείων Α′, Β′, τὸ ὁποῖον οὕτω λαμβάνεται, ἔχει τὴν ἰδιότητα $\overline{ΕΑ'} \cdot \overline{ΕΒ'} = \overline{ΕΑ} \cdot \overline{ΕΒ}$, διότι τὰ Α, Α′, Β, Β′ εἶναι ὁμοκυκλικά.



Σχ. 139

Διὰ τῆς μεταφορᾶς ταύτης τοῦ γινομένου $\overline{ΕΑ}\cdot\overline{ΕΒ}$ εἰς ἴσον γινόμενον $\overline{ΕΑ'}\cdot\overline{ΕΒ'}$ ἐπὶ ἄλλης εὐθείας διευκολύνεται ἡ λύσις πολλῶν ζητημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα εἰσέρχεται ἓν σταθερὸν γινόμενον $\overline{ΕΑ}\cdot\overline{ΕΒ}$.

**Γενικώτερον.** Ἐὰν γράψωμεν περιφέρειαν διερχομένην διὰ τῶν Α καὶ Β, τέμνουσαν τὴν $(ε_2)$ εἰς Α' καὶ Β', μεταφέρομεν καὶ πάλιν τὸ γινόμενον $\overline{ΕΑ}\cdot\overline{ΕΒ}$ εἰς τὸ ἴσον γινόμενον $\overline{ΕΑ'}\cdot\overline{ΕΒ'}$.




Σχ. 140

## ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΕΙΣ ΤΗΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΝ

**115.** α') **Κατασκευαί.—Δίδονται δύο τμήματα α καὶ β καὶ ζητεῖται νὰ κατασκευασθῇ τρίτον τμῆμα x, τὸ ὁποῖον νὰ ἱκανοποιῇ τὴν ἐξίσωσιν**

$$\text{i)}\quad x(x+α)=β^2$$

$$\text{ἢ}\quad \text{ii)}\quad x(x-α)=β^2$$

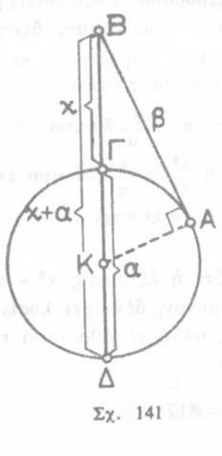
$$\text{ἢ}\quad \text{iii)}\quad x(α-x)=β^2$$

Ἐννοεῖται ὅτι εἰς τὰς ἀνωτέρω ἐξισώσεις τὰ γράμματα x, α, β παριστοῦν τὰ μέτρα τῶν τμημάτων x, α, β.

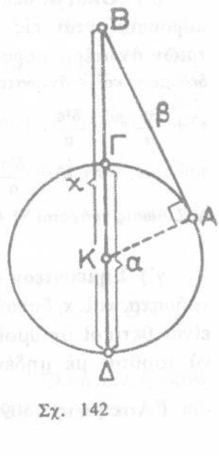
*Λύσις.* i) Μὲ διάμετρον τὴν γνωστὴν διαφορὰν α τῶν δύο ἀγνώστων παραγόντων x καὶ x + α γράφομεν κύκλον (Κ) καὶ εἰς τυχὸν σημεῖον Α τῆς περιφερείας φέρομεν ἐφαπτόμενον τμῆμα ΑΒ=β. Διὰ τοῦ Β φέρομεν τέμνουσαν ΒΓΚΔ διερχομένην διὰ τοῦ κέντρου (σχ. 141), ὁπότε $ΒΓ\cdot ΒΔ=ΒΑ^2$ (§ 111). Τὸ ἐκτὸς τοῦ κύκλου μέρος ΒΓ τῆς τεμνούσης εἶναι τὸ ζητούμενον τμῆμα. Διότι, ἂν τεθῇ ΒΓ=x, τότε ΒΔ=x + α καὶ συνεπῶς πληροῦται ὑπὸ τοῦ x=ΒΓ ἡ ἐξίσωσις

$$x(x+α)=β^2.$$

ii) Μὲ διάμετρον τὴν γνωστὴν διαφορὰν α τῶν δύο ἀγνώστων παραγόντων x καὶ x—α γράφομεν περιφέρειαν καὶ εἰς τυχὸν σημεῖον Α αὐτῆς φέρομεν ἐφαπτόμενον τμῆμα ΑΒ=β (σχ. 142).




Σχ. 141

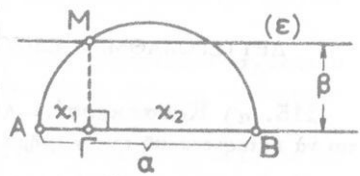



Σχ. 142

Διὰ τοῦ Β φέρομεν τέμνουσαν διερχομένην διὰ τοῦ κέντρου, τὴν ΒΓΚΔ, ὁπότε πληροῦται ἡ σχέσις $ΒΔ \cdot ΒΓ = ΒΑ^2$, ἥτις διὰ $ΒΔ = x$ γίνεται $x(x-α) = β^2$. Τὸ ζητούμενον τμῆμα x εἶναι τὸ ΒΔ.

iii) Οἱ δύο ἄγνωστοι παράγοντες x καὶ $α-x$ ἔχουν γνωστὸν ἄθροισμα α καὶ γνωστὸν γινόμενον $β^2$. Ἡ ἐξίσωσις γράφεται $x^2 - αx + β^2 = 0$ καὶ ἔχει ἄθροισμα ριζῶν α καὶ γινόμενον ριζῶν $β^2$.

Ἐὰν κατασκευάσωμεν δύο τμήματα $x_1$, $x_2$ ἔχοντα ἄθροισμα α καὶ γινόμενον $β^2$, ταῦτα θὰ εἶναι αἱ λύσεις τῆς ἐξισώσεως. Πρὸς τοῦτο γράφομεν ἡμικύκλιον διαμέτρου $ΑΒ = α$ (σχ. 143) καὶ φέρομεν εὐθεῖαν (ε)//ΑΒ καὶ εἰς ἀπόστασιν β ἀπὸ τῆς ΑΒ. Ἐὰν ἡ (ε) τέμνῃ τὴν ἡμιπεριφέρειαν εἰς Μ, φέρομεν ἐκ τοῦ Μ κάθετον ΜΓ ἐπὶ τὴν ΑΒ, ὁπότε τὰ δύο τμήματα $ΑΓ = x_1$ καὶ $ΓΒ = x_2$ εἶναι αἱ ζητούμεναι λύσεις, διότι $x_1 + x_2 = α$ καὶ $x_1 x_2 = β^2$ (ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΜΒ).




Σχ. 143

Ἐὰν $β < \frac{α}{2}$, ἡ ἐξίσωσις $x(α-x) = β^2$ ἔχει δύο λύσεις.

Ἐὰν $β = \frac{α}{2}$, ἡ ἐξίσωσις ἔχει μίαν (διπλῆν) λύσιν.

Ἐὰν $β > \frac{α}{2}$, ἡ ἐξίσωσις δὲν ἔχει λύσιν.

**β´) Ὅλαι αἱ δευτεροβάθμιοι ἐξισώσεις μὲ ἓν ἄγνωστον τμῆμα, αἱ ὁποῖαι παρουσιάζονται εἰς τὴν γεωμετρίαν, ἀνάγονται τελικῶς εἰς μίαν ἐκ τῶν τριῶν ἀνωτέρω μορφῶν.** Π.χ. ἡ ἐξίσωσις $αx^2 + βγx - δ^2ε = 0$, ὅπου α, β, γ, δ, ε δεδομένα καὶ x ἄγνωστον τμῆμα, γράφεται:

$x^2 + \frac{βγ}{α}x = \frac{δ^2ε}{α}$. Τμῆμα $k = \frac{βγ}{α}$ δύναται νὰ κατασκευασθῇ (§ **75** ζ´) καὶ τμῆμα λ τοιοῦτον, ὥστε $λ^2 = \frac{δ^2ε}{α}$ ἢ $\frac{λ^2}{δ^2} = \frac{ε}{α}$, δύναται ἐπίσης νὰ κατασκευασθῇ (§ **77**), ὁπότε ἡ ἐξίσωσις γράφεται $x^2 + kx = λ^2$ ἢ $x(x+k) = λ^2$ καὶ εἶναι τῆς ἀνωτέρω μορφῆς (i).

γ´) **Σημειωτέον** ὅτι ἡ ἐξίσωσις $x^2 + αx + β = 0$, ὅπου α, β δεδομένα τμήματα καὶ x ζητούμενον, **δὲν ἔχει λύσιν,** διότι τὰ μέτρα τῶν τμημάτων εἶναι θετικοὶ ἀριθμοί, ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τριῶν θετικῶν δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἰσοῦται μὲ μηδέν.

(Ἀσκήσεις : 509 – 512)

## ΔΙΤΕΤΡΑΓΩΝΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

**116. α') Κατασκευαί. Δοθέντων τῶν τμημάτων α καὶ β νὰ κατασκευασθῇ τμῆμα x πληροῦν τὴν διτετράγωνον ἐξίσωσιν**

$$\text{i)}\quad x^4 + \alpha^2 x^2 - \beta^4 = 0$$
$$\text{ἢ}\quad \text{ii)}\quad x^4 - \alpha^2 x^2 - \beta^4 = 0$$
$$\text{ἢ}\quad \text{iii)}\quad x^4 - \alpha^2 x^2 + \beta^4 = 0$$

*Λύσις.* Φανταζόμεθα ἓν τμῆμα y τοιοῦτον, ὥστε

$$(1)\qquad x^2 = \alpha y.$$

Προφανῶς, ἐὰν κατασκευασθῇ τὸ y, τότε καὶ τὸ x κατασκευάζεται ὡς μέσον ἀνάλογον τῶν α καὶ y. Διὰ τῆς εἰσαγωγῆς τοῦ νέου ἀγνώστου y, ἡ $x^4 + \alpha^2 x^2 - \beta^4 = 0$ καθίσταται $\alpha^2 y^2 + \alpha^2 \cdot \alpha y = \beta^4$ ἢ $y^2 + \alpha y = \left(\frac{\beta^2}{\alpha}\right)^2$. Κατασκευάζομεν τμῆμα $\gamma = \frac{\beta^2}{\alpha}$ (§ 75, δ'), ὁπότε : $y^2 + \alpha y = \gamma^2$ ἢ $y(y+\alpha) = \gamma^2$ καὶ τὸ y κατασκευάζεται (§ **115**, i).

Ἡ $x^4 - \alpha^2 x^2 - \beta^4 = 0$ ἀνάγεται διὰ τῆς ἰδίας ἀντικαταστάσεως : $x^2 = \alpha y$ εἰς τὴν $y^2 - \alpha y = \gamma^2$ ἢ $y(y-\alpha) = \gamma^2$ καὶ ἡ $x^4 - \alpha^2 x^2 + \beta^4 = 0$ ἀνάγεται εἰς τὴν $y(\alpha - y) = \gamma^2$.

β') Ὅλαι αἱ διτετράγωνοι ἐξισώσεις, αἱ ὁποῖαι παρουσιάζονται εἰς τὴν Γεωμετρίαν, ἀνάγονται εἰς μίαν τῶν τριῶν ἀνωτέρω μορφῶν.

Ἔστω π.χ. ἡ $\alpha x^4 + \beta\gamma^2 x^2 - \delta\varepsilon\eta\zeta^2 = 0$. Αὐτὴ γράφεται $x^4 + \frac{\beta\gamma^2}{\alpha}x - \frac{\delta\varepsilon\eta\zeta^2}{\alpha} = 0$. Δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τμῆμα λ τοιοῦτον, ὥστε $\lambda^2 = \frac{\beta\gamma^2}{\alpha}$ ἢ $\frac{\lambda^2}{\gamma^2} = \frac{\beta}{\alpha}$ (§ 77), ὁπότε : $x^4 + \lambda^2 x^2 = \frac{\delta\varepsilon\eta\zeta^2}{\alpha}$. Κατασκευάζομεν τμῆμα $\nu = \frac{\delta\varepsilon}{\alpha}$ (§75, ζ'), ὁπότε $\frac{\delta\varepsilon\eta}{\alpha} = \nu\eta$. Κατασκευάζομεν τμῆμα ρ τοιοῦτον, ὥστε $\rho^2 = \nu\eta$ (μέσον ἀνάλογον τῶν ν, η), ὁπότε $\frac{\delta\varepsilon\eta}{\alpha} = \rho^2$. Ἔχομεν τώρα $\frac{\delta\varepsilon\eta\zeta^2}{\alpha} = \rho^2\zeta^2 = (\rho\zeta)^2$. Κατασκευάζομεν τμῆμα μ τοιοῦτον, ὥστε $\mu^2 = \rho\zeta$, ὁπότε $\frac{\delta\varepsilon\eta\zeta^2}{\alpha} = \mu^4$ καὶ ἡ ἐξίσωσις καθίσταται $x^4 + \lambda^2 x^2 - \mu^4 = 0$, ἤτοι τῆς μορφῆς (i).

## ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΕΙΣ ΜΕΣΟΝ ΚΑΙ ΑΚΡΟΝ ΛΟΓΟΝ

**117.** α') Σύμφωνα μὲ τὴν αἰσθητικὴν τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων, ἡ «κομψοτέρα» διαίρεσις ἑνὸς τμήματος ΑΒ εἰς δύο διακεκριμένα μέρη ΑΓ καὶ

ΓΒ (σχ. 144) εἶναι ἐκείνη καθ' ἥν, ὅν λόγον ἔχει τὸ ὅλον τμῆμα ΑΒ πρὸς τὸ μεγαλύτερον τεμάχιον αὐτοῦ, ΑΓ, νὰ ἔχῃ καὶ τὸ μεγαλύτερον τεμάχιον ΑΓ πρὸς τὸ μικρότερον, ΓΒ. Ὅταν τοῦτο συμβαίνῃ, λέγομεν ὅτι τὸ Γ **διαιρεῖ τὸ ΑΒ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον.** Ἡ τοιαύτη τομὴ ἑνὸς μήκους εἰς δύο μέρη ὠνομάσθη ὑπὸ τῶν μεταγενεστέρων *«χρυσῆ τομή»* καὶ χρησιμοποιεῖται καὶ σήμερον εἰς τὴν ἀρχιτεκτονικήν.

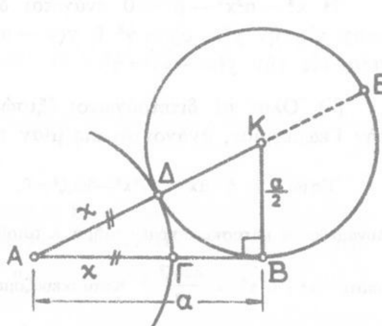
Σχ. 144

Ἐπειδὴ $\frac{AB}{A\Gamma}=\frac{A\Gamma}{\Gamma B} \Longleftrightarrow A\Gamma^2=AB\times\Gamma B$, διὰ τοῦτο πρακτικῶς λέγομεν ὅτι τὸ Γ διαιρεῖ τὸ ΑΒ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον, ὅταν τὸ χωρίζῃ εἰς δύο τμήματα τοιαῦτα, ὥστε τὸ τετράγωνον τοῦ μεγαλυτέρου νὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ὅλου τμήματος ἐπὶ τὸ μικρότερον.

Ἐάν, λοιπόν, καλέσωμεν α τὸ τμῆμα ΑΒ καὶ x τὸ μεγαλύτερον μέρος αὐτοῦ διαιρεθέντος εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον, τότε θὰ πληροῦται ἡ ἐξίσωσις :

$$x^2=\alpha(\alpha-x) \Longleftrightarrow x^2+\alpha x=\alpha^2 \Longleftrightarrow x(x+\alpha)=\alpha^2$$

Ὥστε τὸ x κατασκευάζεται γεωμετρικῶς συμφώνως πρὸς τὴν § **115**, α΄. Γράφομεν δηλ. κύκλον ἀκτῖνος $\frac{\alpha}{2}$, ἐφαπτόμενον τοῦ ΑΒ εἰς Β, φέρομεν ἐκ τοῦ Α τέμνουσαν διὰ τοῦ κέντρου διερχομένην (σχ. 145) καὶ τὸ ἐκτὸς τοῦ κύκλου μέρος ΑΔ τῆς τεμνούσης εἶναι ἴσον πρὸς x. Μεταφέρομεν τοῦτο ἐπὶ τοῦ ΑΒ εἰς τὴν θέσιν ΑΓ καὶ τὸ Γ διαιρεῖ τὸ ΑΒ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον.



Σχ. 145

β΄) Ἂν λύσωμεν Ἀλγεβρικῶς τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν $x^2+\alpha x=\alpha^2$, εὑρίσκομεν (ἀπορρίπτοντες τὴν ἀρνητικὴν ρίζαν) :

$$x=A\Gamma=\frac{\alpha(\sqrt{5}-1)}{2} \Rightarrow \alpha-x=\Gamma B=\frac{\alpha(3-\sqrt{5})}{2}.$$

Συνάγομεν ὅτι τὸ Γ, τὸ διαιροῦν τὸ ΑΒ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον, διαιρεῖ ἐσωτερικῶς τὸ $\overrightarrow{AB}$ εἰς ἀριθμητικὸν λόγον :

$$\frac{\Gamma A}{\Gamma B}=\frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}}$$

Κατὰ συνέπειαν, *ἂν ἓν τμῆμα $AB$ εἶναι διῃρημένον ὑπὸ τοῦ $\Gamma$ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον, ἓν ἄλλο τμῆμα $A'B'$ διῃρημένον ὑπὸ τοῦ $\Gamma'$ εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν $A\Gamma$, $\Gamma B$ εἶναι καὶ αὐτὸ διῃρημένον εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον.*

γ') **Ἐπέκτασις.** Ἐὰν γεωμετρικόν τι μέγεθος (Α) δυνάμενον νὰ μετρηθῇ (ἐπιφάνεια ἢ στερεὸν κ.τ.λ.) καὶ ἔχον μέτρον Α χωρισθῇ εἰς δύο μέρη ἔχοντα μέτρα x καὶ Α—x, πληροῦται δὲ ἡ σχέσις $x^2 = A(A-x)$, λέγομεν ὅτι τὸ μέγεθος (Α) διῃρέθη εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον μὲ μεγαλύτερον μέρος τὸ x.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

495. Ἐὰν ἡ διάμεσος ΑΔ τριγ. ΑΒΓ προεκτεινομένη τέμνῃ εἰς Ε τὴν περιγεγραμμένην περιφέρειαν, νὰ δειχθῇ ὅτι :

$$2A E \cdot A\Delta = AB^2 + A\Gamma^2.$$

496. Ἐὰν ἀπὸ τυχόντος σημείου Μ περιφερείας ἀχθοῦν αἱ χορδαὶ ΜΡΑ καὶ ΜΣΒ διερχόμεναι διὰ δύο σταθερῶν σημείων Ρ καὶ Σ συμμετρικῶν ὡς πρὸς τὸ κέντρον τῆς περιφερείας, νὰ δειχθῇ ὅτι $\frac{MP}{PA} + \frac{M\Sigma}{\Sigma B}$ εἶναι σταθερόν.

497. Δίδονται δύο ὁμόκεντροι περιφέρειαι καὶ ἐκ σταθεροῦ σημείου Σ τῆς μικροτέρας φέρομεν χορδὴν ΣΑ τῆς μικροτέρας καὶ χορδὴν ΒΣΓ τῆς μεγαλυτέρας, καθέτους ἐπ' ἀλλήλας. Νὰ δειχθῇ ὅτι, τῆς ΣΑ στρεφομένης περὶ τὸ Σ, ἕκαστον τῶν ἀθροισμάτων : α') $\Sigma A^2 + \Sigma B^2 + \Sigma\Gamma^2$ καὶ β') $B\Gamma^2 + \Gamma A^2 + AB^2$ παραμένει σταθερόν.

498. Ἐπ' εὐθείας δίδονται τρία σημεῖα Α, Β, Γ. Διὰ τῶν Α καὶ Β γράφομεν περιφέρειαν καὶ ἑνοῦμεν τὸ Γ μὲ τὸ ἓν σημεῖον Ε, καθ' ὃ ἡ εἰς τὸ μέσον τοῦ ΑΒ κάθετος τέμνει τὴν περιφέρειαν ταύτην. Τίς ὁ γ.τ. τοῦ σημείου τομῆς τῆς ΓΕ μετὰ τῆς διὰ τῶν Α καὶ Β διερχομένης μεταβλητῆς περιφερείας;

499. Δίδονται τρία σημεῖα Α, Β, Γ ἐπ' εὐθείας. Διὰ τῶν Α καὶ Β γράφομεν περιφέρειαν καὶ ἐκ τοῦ Γ ἄγομεν ἐφαπτομένας ΓΜ καὶ ΓΝ πρὸς ταύτην. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τοῦ μέσου τῆς χορδῆς τῶν ἐπαφῶν ΜΝ, ὅταν ἡ ἀκτὶς τῆς διὰ τῶν Α καὶ Β διερχομένης περιφερείας μεταβάλλεται.

500. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγ. ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων $\widehat{\alpha}$, Α καὶ τοῦ γινομένου $\beta(\gamma+\beta) = k^2$ (k = δοθὲν τμῆμα).

501. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγ. ΑΒΓ, οὗτινος δίδεται ἡ βάσις α, ἡ γωνία $\widehat{A}$ καὶ τὸ γινόμενον $\gamma(\beta-\gamma) = k^2$ $(\beta > \gamma)$.

502. Ἐὰν διὰ σταθεροῦ σημείου Ο ἀχθῇ χορδὴ ΑΒ κύκλου δεδομένου καὶ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ ἄκρα αὐτῆς, τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστρόφων τῶν ἀποστάσεων τοῦ Ο ἀπὸ τὰς ἐφαπτομένας ταύτας εἶναι σταθερόν, ὅταν ἡ ΒΑ στρέφεται περὶ τὸ Ο, ὅπου τὸ Ο ὑποτίθεται ἐντὸς τοῦ κύκλου.

503. Ἐὰν ἐκ δοθέντος σημείου Ο, κειμένου ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΑΒ κύκλου, ἀχθῇ χορδὴ ΓΔ, αἱ δὲ εὐθεῖαι ΒΓ, ΒΔ τέμνουν τὴν κατὰ τὸ Α ἐφαπτομένην εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ, τὸ γινόμενον $AE \cdot AZ$ μένει σταθερόν, ὅταν ἡ ΓΔ στρέφεται περὶ τὸ Ο. Ἡ περιφέρεια δὲ (ΒΕΖ) διέρχεται καὶ δι' ἑτέρου σταθεροῦ σημείου, ὅταν ἡ ΓΔ στρέφεται περὶ τὸ Ο.

504. Νὰ γραφῇ περιφέρεια διερχομένη διὰ δύο δοθέντων σημείων καὶ ἐφαπτομένη δοθείσης εὐθείας.

505. Νὰ γραφῇ περιφέρεια διερχομένη διὰ δύο δοθέντων σημείων καὶ ἀποτέμνουσα ἀπὸ δοθείσης εὐθείας τμῆμα δοθέντος μήκους.

506. Ἐπὶ δοθείσης εὐθείας νὰ εὑρεθῇ σημεῖον ἀπέχον ἰσάκις ἀπὸ δεδομένου σημείου καὶ ἄλλης δεδομένης εὐθείας.

507. Δίδονται δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι $(\varepsilon_1)$ καὶ $(\varepsilon_2)$ καὶ σημεῖον Α ἐκτὸς αὐτῶν. Νὰ γραφῇ περιφέρεια διερχομένη διὰ τοῦ Α ἔχουσα τὸ κέντρον της ἐπὶ τῆς $(\varepsilon_1)$ καὶ ἀποτέμνουσα ἀπὸ τῆς $(\varepsilon_2)$ τμῆμα δεδομένου μήκους β.

508. Διὰ τοῦ κοινοῦ σημείου Α δύο περιφερειῶν ν' ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα τὰς περιφερείας εἰς Β καὶ Γ οὕτως, ὥστε $\overline{AB}\cdot\overline{A\Gamma}=-K^2$ ($K=$ δοθὲν τμῆμα).

509. Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, οὗτινος ἡ μία κάθετος πλευρὰ νὰ ἰσοῦται πρὸς δοθὲν τμῆμα δ, ἡ δὲ ἄλλη νὰ εἶναι μέση ἀνάλογος τῆς ὑποτεινούσης καὶ τῆς δ.

510. Νὰ κατασκευασθοῦν γεωμετρικῶς τμήματα, τῶν ὁποίων τὰ μήκη εἰς cm νὰ εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2-11x+16=0$, χωρὶς νὰ λυθῇ ἀλγεβρικῶς αὕτη.

511. Δίδονται τρεῖς εὐθεῖαι (α), (β), (γ), διερχόμεναι διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Κ καὶ τρία τμήματα λ, μ, ν. Νὰ γραφῇ περιφέρεια ἐφαπτομένη τῆς (α) καὶ τέμνουσα τὴν (β) εἰς Α καὶ Β οὕτως, ὥστε $\overline{KA}\cdot\overline{KB}=\lambda\mu$ καὶ ἀποτέμνουσα ἀπὸ τῆς (γ) χορδὴν μήκους ν.

512. Ἐὰν ἡ ἐσωτερικὴ διχοτόμος ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ προεκτεινομένη τέμνῃ τὴν περιγεγραμμένην περιφέρειαν εἰς Μ, νὰ δειχθῇ ὅτι :

$$MB^2=M\Gamma^2=M\Delta\cdot MA.$$

Ἀντιστρόφως, ἂν εὐθεῖα ΑΔ τέμνῃ τὴν πλευρὰν ΒΓ τοῦ τρ. ΑΒΓ εἰς Δ καὶ τὴν περιγεγραμμένην περιφέρειαν εἰς τὸ Μ καὶ εἶναι $MB^2=M\Delta\cdot MA$, τότε ἡ ΑΔ εἶναι διχοτόμος τῆς $\widehat{A}$.

513. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν στοιχείων α, Α, $\delta_A$ ($\delta_A$ ἐσωτερικὴ διχοτόμος). (**Ὑπόδ.** Νὰ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ἡ προηγουμένη ἄσκησις).

514. Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ἐκ τῆς διχοτόμου $B\Delta=\delta$ καὶ τοῦ τμήματος $\Gamma\Delta=\lambda$, τὸ ὁποῖον ὁρίζει ἡ διχοτόμος ΒΔ τῆς ὀξείας γωνίας $\widehat{B}$ ἐπὶ τῆς ἀπέναντι καθέτου πλευρᾶς.

515. Δοθέντος τοῦ μεγαλυτέρου μέρους ἑνὸς τμήματος διαιρεθέντος εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον νὰ κατασκευασθῇ τὸ τμῆμα.

516. Ἐὰν τὸ σημεῖον Γ διαιρῇ τὸ τμῆμα ΑΒ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον, ληφθῇ δὲ ἐπὶ τοῦ μεγαλυτέρου τμήματος ΑΓ τμῆμα $\Gamma\Delta=\Gamma B$, δείξατε ὅτι τὸ Δ διαιρεῖ τὸ ΑΓ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον.

517. Διὰ δοθέντος σημείου Α νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα δύο ἄλλας δεδομένας εἰς σημεῖα Β καὶ Γ οὕτως, ὥστε τὸ Β νὰ διαιρῇ τὸ τμῆμα ΑΓ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον.

518. Διὰ δοθέντος σημείου Α κειμένου ἐκτὸς δοθείσης περιφερείας νὰ ἀχθῇ τέμνουσα ΑΒΓ τῆς περιφερείας τοιαύτη, ὥστε τὸ Β νὰ διαιρῇ τὸ τμῆμα ΑΓ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον (δύο περιπτώσεις).

519. Νὰ δειχθῇ ὅτι μία ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα τὰ μέτρα τῶν πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον, εἶναι τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψος νὰ διαιρῇ αὐτὴν εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον. Ὡς ἐφαρμογὴ νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχον δοθεῖσαν περίμετρον καὶ τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νὰ εὑρίσκωνται ἐν γεωμετρικῇ προόδῳ.

520. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ λαμβάνομεν δύο σημεῖα Δ καὶ Δ' συμμετρικὰ πρὸς σταθερὸν σημεῖον Σ τῆς ΒΓ. Ἂν αἱ εὐθεῖαι ΑΔ καὶ ΑΔ' τέμνουν τὴν περιγεγραμμένην περιφέρειαν εἰς Ε καὶ Ε', νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα $A\Delta\cdot AE+A\Delta'\cdot AE'$ εἶναι σταθερόν.

521. Νὰ κατασκευασθῇ τρ. ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων α, $\widehat{A}$ καὶ τοῦ γινομένου $\overline{\Gamma\Delta} \times \overline{\Gamma A}$, ὅπου ΒΔ τὸ ἐπὶ τὴν ΑΓ ὕψος.

522. Ἐπὶ τῆς διχοτόμου γωνίας $\widehat{X O \Psi}$ δίδεται σημεῖον Α. Ζητεῖται νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὴν διχοτόμον τῆς $\widehat{X O \Psi}$ καὶ τέμνουσα τὰς ἡμιευθείας ΟΧ, ΟΨ εἰς Β καὶ Γ οὕτως, ὥστε ἡ περίμετρος τοῦ τρ. ΑΒΓ νὰ ἰσοῦται πρὸς δοθὲν τμῆμα 2τ.

523. Δίδονται τρεῖς ἡμιευθεῖαι ΑΧ, ΑΨ, ΑΖ ἀρχόμεναι ἀπὸ τοῦ Α, ἐξ ὧν ἡ ΑΨ κεῖται μεταξὺ τῶν ΑΧ, ΑΖ. Ζητεῖται νὰ ἀχθῇ διὰ δεδομένου σημείου Γ τῆς ΑΨ εὐθεῖα τέμνουσα τὰς ΑΧ, ΑΖ εἰς Β καὶ Δ οὕτως, ὥστε :

$$\frac{A\Gamma^2}{B\Gamma \cdot \Gamma\Delta} = \frac{\mu}{\nu},$$

ἔνθα μ καὶ ν δεδομένα τμήματα. Ἀκολούθως, ἂν δοθῇ τυχὸν σημεῖον Κ τοῦ ἐπιπέδου, ζητεῖται νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ Κ εὐθεῖα τέμνουσα τὰς τρεῖς δεδομένας ἡμιευθείας εἰς Β΄, Γ΄, Δ΄, ὥστε νὰ πληροῦται ἡ ἰδία σχέσις :

$$A\Gamma'^2/B'\Gamma' \cdot \Gamma'\Delta' = \mu/\nu.$$

524. Ἔστω Η τὸ ὀρθόκεντρον τρ.ΑΒΓ καὶ ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄ τὰ ὕψη αὐτοῦ. Δείξατε ὅτι

$$\overline{A'B} \cdot \overline{A'\Gamma} = -\overline{A'H} \cdot \overline{A'A} \quad \text{καὶ}$$

$$\overline{HA} \cdot \overline{HA'} = \overline{HB} \cdot \overline{HB'} = \overline{H\Gamma} \cdot \overline{H\Gamma'}.$$

525. Νὰ διαιρεθῇ τρίγωνον εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον δι' εὐθείας παρ/λου πρὸς μίαν πλευρὰν αὐτοῦ (δύο περιπτώσεις).

526. Διὰ δοθέντος σημείου Σ κειμένου ἐντὸς δοθείσης γωνίας $\widehat{xOy}$ νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα τὰς πλευρὰς τῆς $\widehat{xOy}$ εἰς Α καὶ Β οὕτως, ὥστε τὸ τρ.ΟΑΒ νὰ ἰσοδυναμῇ μὲ δοθὲν τετράγωνον.

527. Δίδεται κύκλος καὶ σταθερὰ διάμετρος ΑΒ αὐτοῦ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τῶν σημείων Μ τοιούτων, ὥστε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγ ΜΑΒ νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ ἐφαπτομένου τμήματος τοῦ ἀγομένου ἐκ τοῦ Μ πρὸς τὸν κύκλον.

528. Διὰ τοῦ μέσου Ο τῆς πλευρᾶς ΒΓ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα τὴν πλευρὰν ΑΒ εἰς Μ καὶ τὴν πρὸς τὸ μέρος τοῦ Γ προέκτασιν τῆς ΑΓ εἰς Ν οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι :

$$\text{Εμβ } OMB + \text{Εμβ } ON\Gamma = \text{Εμβ } AB\Gamma.$$

## ΔΥΝΑΜΙΣ ΣΗΜΕΙΟΥ ΩΣ ΠΡΟΣ ΚΥΚΛΟΝ — ΡΙΖΙΚΟΙ ΑΞΟΝΕΣ

**118.** α΄) (Θ) — **Ἐὰν διὰ σταθεροῦ σημείου Σ ἀχθῇ τυχοῦσα εὐθεῖα τέμνουσα τὴν περιφέρειαν σταθεροῦ κύκλου εἰς Α καὶ Β, τὸ γινόμενον $\overline{\Sigma A} \times \overline{\Sigma B}$ εἶναι εἰς πραγματικὸς ἀριθμὸς σταθερὸς καλούμενος δύναμις τοῦ Σ ὡς πρὸς τὸν κύκλον. Τὸ πρόσημον τοῦ ἀριθμοῦ τούτου χαρακτηρίζει τὴν θέσιν τοῦ Σ ὡς πρὸς τὸν κύκλον.**

*Ἀπόδειξις.* Ἐὰν τὸ Σ εἶναι σημεῖον ἐξωτερικὸν τοῦ κύκλου (Κ, R), τότε γνωρίζομεν ὅτι (§ **111**, πόρισμα) $\Sigma A \times \Sigma B = \Sigma K^2 - R^2$ (ἀκόμη καὶ ἂν τὰ Α καὶ Β συμπίπτουν). Ἐπειδὴ ὅμως τοῦ Σ κειμένου ἐκτὸς τοῦ κύκλου τὰ $\overrightarrow{\Sigma A}$ καὶ $\overrightarrow{\Sigma B}$ εἶναι ὁμόρροπα, ἔχομεν εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην $\Sigma A \times \Sigma B = \overline{\Sigma A} \times \overline{\Sigma B}$, ἑπομένως :

(1) $$\overline{\Sigma A}\times\overline{\Sigma B}=\Sigma K^2-R^2.$$

Ἐὰν τὸ Σ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας, τότε ἓν ἐκ τῶν ΣΑ, ΣΒ εἶναι μηδὲν καὶ ἑπομένως $\overline{\Sigma A}\times\overline{\Sigma B}=0=R^2-R^2=\Sigma K^2-R^2$ καὶ ἡ (1) πάλιν ἰσχύει.

Ἐὰν τὸ Σ κεῖται ἐντὸς τοῦ κύκλου, τότε γνωρίζομεν ὅτι (§ **110**, πόρισμα) $\Sigma A\times\Sigma B=R^2-\Sigma K^2$. Ἐπειδὴ ὅμως, τώρα, τὰ $\overrightarrow{\Sigma A}$ καὶ $\overrightarrow{\Sigma B}$ εἶναι ἀντίρροπα, διὰ τοῦτο $\overline{\Sigma A}\times\overline{\Sigma B}=-\Sigma A\times\Sigma B=-(R^2-\Sigma K^2)=\Sigma K^2-R^2$ καὶ ἡ (1) πάλιν ἰσχύει. Ἑπομένως εἰς πᾶσαν περίπτωσιν ἰσχύει ἡ σχέσις

$$\boxed{\overline{\Sigma A}\times\overline{\Sigma B}=\Sigma K^2-R^2}=\text{δύναμις τοῦ Σ πρὸς τὸν (K, R).}$$

Τὸ σημεῖον τῆς «δυνάμεως τοῦ Σ», δηλ. τοῦ $\Sigma K^2-R^2=\overline{\Sigma A}\cdot\overline{\Sigma B}$ χαρακτηρίζει προφανῶς τὴν θέσιν τοῦ Σ ὡς πρὸς τὸν κύκλον:

Ἐὰν $\Sigma K^2-R^2>0$, τότε τὸ Σ εἶναι ἐξωτερικὸν τοῦ κύκλου ($\Sigma K>R$).

Ἐὰν $\Sigma K^2-R^2=0$, τότε τὸ Σ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας ($\Sigma K=R$).

Ἐὰν $\Sigma K^2-R^2<0$, τότε τὸ Σ κεῖται ἐντὸς τοῦ κύκλου ($\Sigma K<R$).

**β΄) Συμβολισμός.** Ἡ δύναμις τοῦ Σ ὡς πρὸς τὸν κύκλον (K, R) ἢ πρὸς τὴν περιφέρειαν (K, R) παρίσταται μὲ Δυν$\Sigma/(K,R)$ ἢ Δυν$\Sigma/(K)$.

**γ΄) Πόρισμα. Ἐὰν σημεῖον κεῖται ἐκτὸς κύκλου, ἡ δύναμις αὐτοῦ ὡς πρὸς τὸν κύκλον ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ ἐφαπτομένου τμήματος τοῦ ἀγομένου ἐκ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον.**

**119. Θεώρημα τοῦ Euler καὶ τὸ ἀντίστροφον αὐτοῦ.** α΄) (Θ)— **Ἐὰν εἶναι γνωσταὶ αἱ ἀκτῖνες R καὶ ρ τοῦ περιγεγραμμένου καὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου τυχόντος τριγώνου, τότε καὶ ἡ ἀπόστασις δ μεταξὺ τῶν κέντρων τῶν δύο τούτων κύκλων εἶναι ὡρισμένη καὶ δίδεται ὑπὸ τῆς σχέσεως:**

$$\delta^2=R^2-2R\rho$$

*Ἀπόδειξις.* Ἔστω Ο τὸ ἔγκεντρον καὶ Κ τὸ περίκεντρον τοῦ τρ. ΑΒΓ καὶ Ι τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου μετὰ τῆς ΑΒ. Ἡ ευθ ΑΟ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου Ε τοῦ τόξου $\widehat{B\Gamma}$ (σχ. 146), εἶναι δέ:

(1) $EO=E\Gamma$ καὶ

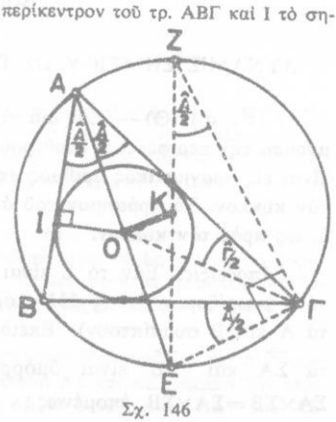
Ο ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ τριγώνου.

Διότι $E\widehat{O}\Gamma=\dfrac{\widehat{A}}{2}+\dfrac{\widehat{\Gamma}}{2}$ καὶ $O\widehat{\Gamma}E=$

$=O\widehat{\Gamma}B+B\widehat{\Gamma}E=\dfrac{\widehat{\Gamma}}{2}+\dfrac{\widehat{A}}{2}.$

Ὅθεν τὸ τρ. ΕΟΓ εἶναι ἰσοσκελές, μὲ $EO=E\Gamma$.

Ἡ (1) εἶναι μία *χαρακτηριστικὴ ἰδιότης τοῦ ἐγκέντρου* Ο.



Σχ. 146

Ἐάν, τώρα, φέρωμεν τὴν διάμετρον ΕΖ τοῦ περικύκλου, τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΙΟ καὶ ΖΕΓ εἶναι ὅμοια καὶ ἑπομένως :

$$\frac{ΟΑ}{ΕΖ} = \frac{ΟΙ}{ΕΓ} \text{ ἢ λόγῳ τῆς (1), } \frac{ΟΑ}{2R} = \frac{ρ}{ΟΕ} \Rightarrow ΟΑ\cdot ΟΕ = 2Rρ \Rightarrow$$

$$|Δυν\ Ο/(Κ)| = 2Rρ \Rightarrow |ΟΚ^2 - R^2| = 2Rρ \Rightarrow R^2 - ΟΚ^2 = 2Rρ \Rightarrow$$

$ΟΚ^2 = R^2 - 2Rρ$, ἥτις εἶναι ἡ ἀποδεικτέα σχέσις.

**β') (Θ) — Ἐὰν ἡ διάκεντρος ΟΚ δύο κύκλων (Ο, ρ) καὶ (Κ, R) μὲ $R > ρ$ πληροῖ τὴν σχέσιν : $ΟΚ^2 = R^2 - 2Rρ$, τότε ὑπάρχουν ἄπειρα τρίγωνα ἐγγεγραμμένα εἰς τὸν (Κ, R) καὶ συγχρόνως περιγεγραμμένα περὶ τὸν (Ο, ρ).**

Ἐν πρώτοις, $ΟΚ^2 = R^2 - 2Rρ \Rightarrow ΟΚ^2 < (R-ρ)^2 \Rightarrow ΟΚ < R - ρ$, ἤτοι ὁ (Ο, ρ) κεῖται ἐντὸς τοῦ (Κ, R). Ἀπὸ τυχόντος σημείου Α τοῦ (Κ, R) ἂς φέρωμεν τὰς ἐφαπτομένας ΑΒ, ΑΓ τοῦ (Ο, ρ) (σχ. 146). Ἡ ευθ ΑΟ διχοτομεῖ τότε τὴν $\widehat{ΒΑΓ}$, ἀπὸ δὲ τὴν δοθεῖσαν σχέσιν $\Rightarrow ΟΚ^2 - R^2 = -2Rρ \Rightarrow |Δυν.\ Ο/(Κ)| = 2Rρ \Rightarrow ΟΑ\cdot ΕΟ = 2Rρ$. Ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΙΟ καὶ ΕΖΓ ἔπεται : $ΟΑ\cdot ΕΓ = ΕΖ\cdot ΟΙ$, δηλ. $ΟΑ\cdot ΕΓ = 2Rρ$. Ἑπομένως $ΕΟ = ΕΓ$, ἥτις εἶναι, ὡς εἴδομεν προηγουμένως, χαρακτηριστικὴ ἰδιότης τοῦ ἐγκέντρου Ο τοῦ τρ. ΑΒΓ. Δηλ. τὸ Ο εἶναι ἔγκεντρον τοῦ τρ. ΑΒΓ.

(Ἀσκήσεις : 589, 590, 591, 592).

## ΡΙΖΙΚΟΣ ΑΞΩΝ ΔΥΟ ΚΥΚΛΩΝ

**120. Ὁρισμός.—Καλεῖται «ριζικὸς ἄξων» δύο κύκλων τὸ σύνολον τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἴσας δυνάμεις ὡς πρὸς τοὺς δύο κύκλους.**

**(Θ) — Ὁ ριζικὸς ἄξων δύο κύκλων εἶναι εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὴν διάκεντρον αὐτῶν.**

*Ἀπόδειξις.* Ἔστωσαν (Κ, R) καὶ (Κ', R') οἱ δύο κύκλοι καὶ Μ σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου αὐτῶν τοιοῦτον, ὥστε

$$(1) \qquad ΔυνΜ/(Κ) = ΔυνΜ/(Κ').$$

Ἐπειδὴ $ΔυνΜ/(Κ) = ΜΚ^2 - R^2$ καὶ $ΔυνΜ/(Κ') = ΜΚ'^2 - R'^2$, ἔπεται ὅτι **ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη**, ἵνα ἰσχύῃ ἡ (1), εἶναι

$$ΜΚ^2 - R^2 = ΜΚ'^2 - R'^2 \quad \text{ἢ}$$

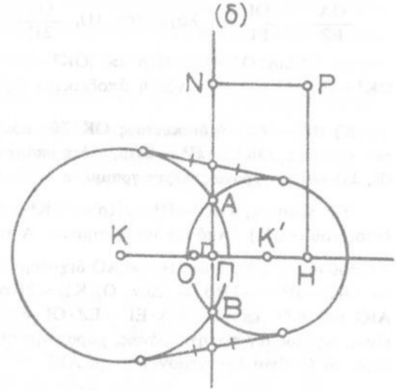
$$(2) \qquad \boxed{ΜΚ^2 - ΜΚ'^2 = R^2 - R'^2}$$

Ἀλλὰ τὸ σύνολον τῶν σημείων τῶν πληρούντων τὴν (2) εἶναι, ὡς γνωστὸν (§ **90**, β'), εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν τῶν κέντρων εἰς σημεῖον Π αὐτῆς τοιοῦτον, ὥστε

$$(3) \qquad \boxed{2\overline{ΚΚ'}\cdot\overline{ΟΠ} = R^2 - R'^2}$$

ἔνθα Ο τὸ μέσον τῆς διακέντρου.

Ἡ (3) ὁρίζει τὴν θέσιν τοῦ «*ποδὸς*» Π τοῦ ριζικοῦ ἄξονος ἐπὶ τῆς διακέντρου. Ὁ ποῦς Π τοῦ ριζικοῦ ἄξονος καὶ τὸ κέντρον τοῦ μικροτέρου κύκλου κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ μέσου Ο τῆς διακέντρου ΚΚ΄. Διότι, ἂν $R > R'$, τότε ἐκ τῆς (3) ἕπεται $\overline{KK'} \cdot \overline{O\Pi} > 0$, ἄρα $\overrightarrow{KK'}$ καὶ $\overrightarrow{O\Pi}$ ὁμόρροπα.



Σχ. 147

**121. Εἰδικαὶ περιπτώσεις.** 1ον) Ἐὰν αἱ δύο περιφέρειαι (Κ) καὶ (Κ΄) **τέμνωνται** ἔστω εἰς Α καὶ Β, τότε ἕκαστον τῶν σημείων τούτων ἔχει μηδενικάς, ἄρα ἴσας δυνάμεις ὡς πρὸς τοὺς δύο κύκλους καὶ συνεπῶς ἀνήκει εἰς τὸν ριζικὸν ἄξονα, ἑπομένως, ριζικὸς ἄξων εἶναι ἡ εὐθεῖα ΑΒ (σχ. 147).

2ον) Ἐὰν οἱ δύο κύκλοι (Κ) καὶ (Κ΄) **ἐφάπτωνται** ἀλλήλων, τότε τὸ σημεῖον Α ἐπαφῆς ἀνήκει εἰς τὸν ριζικὸν ἄξονα, ὅστις, ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν διάκεντρον, συμπίπτει ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ μὲ τὴν κοινὴν εἰς Α ἐφαπτομένην τῶν δύο κύκλων.

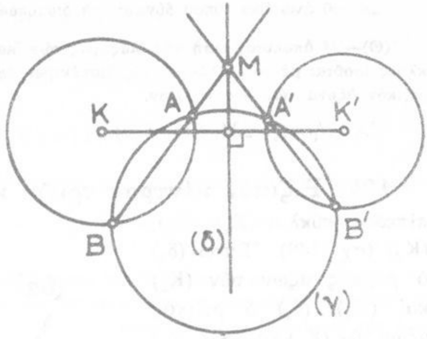
3ον) Ἐὰν οἱ δύο κύκλοι εἶναι **ὁμόκεντροι,** δὲν ὑπάρχει ριζικὸς ἄξων. Διότι, ἂν εἰς τὸν τύπον $2\overline{KK'} \cdot \overline{O\Pi} = R^2 - R'^2$ (§ **120**) νοήσωμεν τὸ Κ΄ τεῖνον νὰ συμπέσῃ μὲ τὸ Κ, ἡ ἀπόστασις $O\Pi = \dfrac{|R^2 - R'^2|}{2KK'}$ τείνει εἰς ἄπειρον (ἐπειδὴ $KK' \to 0$) καὶ ὁ ριζικὸς ἄξων ἀπομακρύνεται εἰς ἄπειρον. Κατὰ σύμβασιν λέγομεν ὅτι ὁ ριζικὸς ἄξων δύο ὁμοκέντρων περιφερειῶν εἶναι ἡ εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου (§ **55**).

4ον) Ἀπὸ κάθε σημεῖον Ρ τοῦ ριζικοῦ ἄξονος κείμενον **ἐκτὸς** τῶν δύο κύκλων ἄγονται **ἴσα ἐφαπτόμενα τμήματα** πρὸς τοὺς κύκλους. Διότι ἡ δύναμις τοῦ Ρ ὡς πρὸς ἕκαστον κύκλον ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἐφαπτομένου τμήματος τοῦ ἀγομένου ἐκ τοῦ Ρ πρὸς τὸν κύκλον. Ἀντιστρόφως, ἂν ἐκ τοῦ Ρ ἄγωνται ἴσα ἐφαπτόμενα τμήματα πρὸς τοὺς κύκλους, τὸ Ρ ἀνήκει εἰς τὸν ριζικὸν ἄξονα αὐτῶν.

Κατὰ συνέπειαν, **ἐὰν οἱ δύο κύκλοι ἔχουν κοινὰς ἐφαπτομένας,** ὁ ριζικὸς ἄξων αὐτῶν διέρχεται διὰ τοῦ μέσου ἑκάστης τῶν κοινῶν ἐφαπτομένων (σχ. 147).

**122. Κατασκευὴ τοῦ ριζικοῦ ἄξονος δύο κύκλων.** α΄) Ἐὰν διὰ σημείου Μ τοῦ ριζικοῦ ἄξονος (δ) δύο περιφερειῶν (Κ) καὶ

(K′) φέρωμεν μίαν τέμνουσαν MAB τῆς (K) καὶ ἑτέραν τέμνουσαν MA′B′ τῆς (K′) (σχ. 148), τότε $M \in (\delta) \Rightarrow$ Δυν $M/(K)$ $=$ Δυν $M/(K') \Rightarrow \overline{MA}\cdot\overline{MB} = \overline{MA'}\cdot\overline{MB'} \Rightarrow$ A, B, B′, A′ ὁμοκυκλικὰ (§ **113**), ἤτοι διὰ τῶν A, B, B′, A′ διέρχεται περιφέρεια (γ).



Σχ. 148

β′) **Ἀντιστρόφως**: Ἔστω περιφέρεια (γ) τέμνουσα τὴν (K) εἰς A καὶ B καὶ τὴν (K′) εἰς A′ καὶ B′ (σχ. 148). Αἱ εὐθεῖαι AB καὶ A′B′ τέμνονται ἐν γένει εἰς τὸ M. Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν $\overline{MA}\cdot\overline{MB} = \overline{MA'}\cdot\overline{MB'}$ (λόγῳ τῆς περιφερείας (γ)). Ἐπειδὴ ὅμως $\overline{MA}\cdot\overline{MB} =$ ΔυνM$/(K)$ καὶ $\overline{MA'}\cdot\overline{MB'} =$ ΔυνM$/(K')$, ἕπεται ὅτι τὸ M ἔχει ἴσας δυνάμεις ὡς πρὸς τὰς (K) καὶ (K′), ἄρα τὸ M ἀνήκει εἰς τὸν ριζικὸν ἄξονα (δ). Ἑπομένως ριζικὸς ἄξων εἶναι ἡ διὰ τοῦ M ἀγομένη $\perp$ KK′.

γ′) **Γενικὴ κατασκευὴ τοῦ ριζικοῦ ἄξονος.** — Γράφομεν περιφέρειαν (γ) τέμνουσαν τὴν (K) εἰς A καὶ B καὶ τὴν (K′) εἰς A′ καὶ B′ (σχ. 148). Ἀπὸ τὸ σημεῖον τομῆς M τῶν εὐθειῶν AB καὶ A′B′ φέρομεν τὴν κάθετον (δ) ἐπὶ τὴν διάκεντρον. Ἡ (δ) εἶναι ὁ ριζικὸς ἄξων τῶν (K) καὶ (K′).

δ′) Εἰς τὰς εἰδικὰς περιπτώσεις τῆς § **121** ἡ κατασκευὴ τοῦ ριζικοῦ ἄξονος δύναται νὰ γίνῃ ἀκόμη εὐκολώτερον.

## 123. Τύπος τῆς διαφορᾶς τῶν δυνάμεων σημείου ὡς πρὸς δύο κύκλους.

Ἔστω P σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου δύο κύκλων (K, R), (K′, R′) προβαλλόμενον εἰς N ἐπὶ τοῦ ριζικοῦ ἄξονος τῶν δύο κύκλων καὶ εἰς H ἐπὶ τῆς εὐθείας τῶν κέντρων KK′ (σχ. 147). Ἔστω δὲ O τὸ μέσον τοῦ KK′. Ἔχομεν:

Δυν $P/(K) = PK^2 - R^2$, Δυν$P/(K') = PK'^2 - R'^2$ καὶ ἐξ αὐτῶν:
Δυν $P/(K)$ — Δυν$P/(K') = PK^2 - R^2 - (PK'^2 - R'^2) = PK^2 - PK'^2 - (R^2 - R'^2)$.

Εἶναι ὅμως: $PK^2 - PK'^2 = 2\overline{KK'}\cdot\overline{OH}$ (2ον θεώρ. τῆς διαμέσου § **83**) καὶ $R^2 - R'^2 = 2\overline{KK'}\cdot\overline{O\Pi}$ (ἐκ τοῦ τύπου τοῦ ὁρίζοντος τὸν πόδα Π τοῦ ριζικοῦ ἄξονος § **120**). Ἑπομένως

Δυν$P/(K)$ — Δυν$P/(K') = 2\overline{KK'}\cdot\overline{OH} - 2\overline{KK'}\cdot\overline{O\Pi} = 2\overline{KK'}(\overline{OH} - \overline{O\Pi}) = 2\overline{KK'}(\overline{\Pi O} + \overline{OH})$ $=$ (σχέσις τοῦ Chasles) $2\overline{KK'}\cdot\overline{\Pi H} = 2\overline{KK'}\cdot\overline{NP}$. Ἐξ οὗ ὁ **«τύπος τῆς διαφορᾶς τῶν δυνάμεων»**

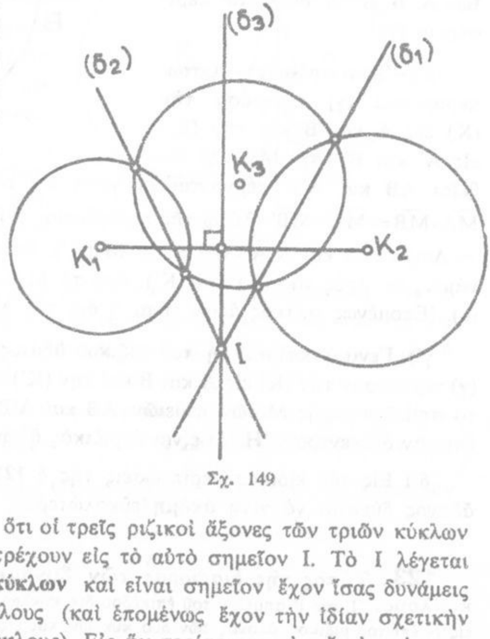
$$\boxed{\text{Δυν } P/(K) - \text{Δυν } P/(K') = 2\overline{KK'}\cdot\overline{NP}}$$

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω τύπου δύναται νὰ διατυπωθῇ τὸ κάτωθι θεώρημα.

**(Θ)—Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τῆς διαφορᾶς τῶν δυνάμεων ἑνὸς σημείου ὡς πρὸς δύο κύκλους ἰσοῦται μὲ τὸ διπλάσιον τῆς διακέντρου ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν τοῦ σημείου ἀπὸ τὸν ριζικὸν ἄξονα τῶν δύο κύκλων.**

(Ἀσκήσεις: 534, 536, 539).

**124. Ριζικὸν κέντρον τριῶν κύκλων.** Ἔστωσαν τρεῖς ὁμοεπίπεδοι κύκλοι $(K_1)$, $(K_2)$, $(K_3)$ (σχ. 149). Ἔστω $(\delta_3)$ ὁ ριζικὸς ἄξων τῶν $(K_1)$ καὶ $(K_2)$, $(\delta_1)$ ὁ ριζικὸς ἄξων τῶν $(K_2)$ καὶ $(K_3)$, $(\delta_2)$ ὁ ριζικὸς ἄξων τῶν $(K_3)$ καὶ $(K_1)$.



Σχ. 149

Ἐὰν οἱ $(\delta_3)$ καὶ $(\delta_1)$ τέμνωνται εἴς τι σημεῖον I, τότε:

$I \in (\delta_3) \Rightarrow \Delta\upsilon\nu I/(K_1) =$
$= \Delta\upsilon\nu I/(K_2)$ καὶ
$I \in (\delta_1) \Rightarrow \Delta\upsilon\nu I/(K_2) =$
$= \Delta\upsilon\nu I/(K_3)$ ὁπότε:
$\Delta\upsilon\nu I/(K_1) = \Delta\upsilon\nu I/(K_3)$, δηλ. τὸ I ἀνήκει εἰς τὸν ριζικὸν ἄξονα τῶν $(K_1)$ καὶ $(K_3)$, δηλ. εἰς τὸν $(\delta_2)$. Βλέπομεν ὅτι οἱ τρεῖς ριζικοὶ ἄξονες τῶν τριῶν κύκλων λαμβανομένων ἀνὰ δύο συντρέχουν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον I. Τὸ I λέγεται **ριζικὸν κέντρον τῶν τριῶν κύκλων** καὶ εἶναι σημεῖον ἔχον ἴσας δυνάμεις καὶ ὡς πρὸς τοὺς τρεῖς κύκλους (καὶ ἑπομένως ἔχον τὴν ἰδίαν σχετικὴν θέσιν ὡς πρὸς τοὺς τρεῖς κύκλους). Εἰς ἣν περίπτωσιν τὸ ριζικὸν κέντρον εἶναι *ἐξωτερικὸν* καὶ τῶν τριῶν κύκλων, τότε εἶναι ἐκεῖνο τὸ σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου, ἀπὸ τὸ ὁποῖον *ἄγονται ἴσα ἐφαπτόμενα τμήματα καὶ πρὸς τοὺς τρεῖς κύκλους.*

**Διερεύνησις.** Ἵνα οἱ $(\delta_3)$ καὶ $(\delta_1)$ τέμνωνται, πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὰ τρία κέντρα $K_1$, $K_2$, $K_3$ **νὰ μὴ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.** Τότε θὰ ὑπάρχῃ ἓν ὡρισμένον ριζικὸν κέντρον.

Ἐὰν τὰ τρία κέντρα $K_1$, $K_2$, $K_3$ κεῖνται ἐπ' εὐθείας, τότε δύο τινὰ δύνανται νὰ συμβαίνουν: **1ον)** Οἱ $(\delta_1)$ καὶ $(\delta_3)$ δὲν ταυτίζονται, ὁπότε εἶναι παράλληλοι καὶ δὲν ὑπάρχει ριζικὸν κέντρον. Δυνάμεθα τότε, συμβατικῶς, νὰ εἴπωμεν ὅτι τὸ ριζικὸν κέντρον εἶναι τὸ εἰς ἄπειρον σημεῖον τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν διεύθυνσιν τοῦ $(\delta_1)$.

2ον) Οἱ $(\delta_1)$ καὶ $(\delta_3)$ ταυτίζονται εἰς μίαν εὐθεῖαν (δ), ὁπότε πᾶν σημεῖον τῆς (δ) ἔχει ἴσας δυνάμεις καὶ ὡς πρὸς τοὺς τρεῖς κύκλους. Τὸ ριζικὸν κέντρον εἶναι, τότε, ἀπροσδιόριστον ἐπὶ τῆς (δ).

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

529. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ δύναμις τοῦ κέντρου βάρους τριγώνου ὡς πρὸς τὴν περιγεγραμμένην περιφέρειαν ἰσοῦται πρὸς τὸ $-\frac{1}{9}$ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου.

530. Ἐὰν κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι καὶ ἐγγράψιμον καὶ περιγράψιμον εἰς κύκλον, ἡ δύναμις τοῦ σημείου τομῆς δύο ἀπέναντι πλευρῶν του προεκτεινομένων ὡς πρὸς τὴν περιγεγραμμένην περὶ αὐτὸ περιφέρειαν ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ἀποστάσεως τοῦ σημείου τούτου ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς αὐτὸ περιφερείας.

531. Ἔστωσαν Α′, Β′, Γ′ τὰ συμμετρικὰ τῶν κορυφῶν Α, Β, Γ ὀξυγωνίου τριγώνου ΑΒΓ ὡς πρὸς τὰς ἀπέναντι πλευράς. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν δυνάμεων τῶν Α′, Β′, Γ′ ὡς πρὸς τὴν περιγεγραμμένην περὶ τὸ τρίγωνον περιφέρειαν, συναρτήσει τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου.

532. Δύο περιφέρειαι (Κ, R), (Κ′, R′) τέμνονται εἰς Α καὶ Β. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν σημείων Μ, διὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύει :

$$\Delta\upsilon\nu M/(K, R)+\Delta\upsilon\nu M/(K', R')=0$$

533. Εὐθεῖα παρ/λος τῇ βάσει ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς Δ καὶ Ε. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ὕψος ΑΗ τοῦ τρ. ΑΒΓ κεῖται ἐπὶ τοῦ ριζικοῦ ἄξονος τῶν περιφερειῶν μὲ διαμέτρους ΒΕ καὶ ΓΔ.

534. Τρεῖς περιφέρειαι ἔχουν κοινὴν χορδήν. Νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ λόγος τῶν ἐφαπτομένων τμημάτων τῶν ἀγομένων ἀπὸ τυχὸν σημεῖον τῆς μιᾶς πρὸς τὰς δύο ἄλλας (ἓν πρὸς ἑκάστην) εἶναι σταθερός.

535. Δίδεται περιφέρεια (Ο, R) καὶ σημεῖον Α τοῦ ἐπιπέδου αὐτῆς. Διὰ τοῦ Α διέρχεται μεταβλητὴ περιφέρεια (γ) τέμνουσα τὴν (Ο, R) εἰς Μ καὶ Ν. Τόπος τῆς τομῆς τῆς ευθΜΝ καὶ τῆς εἰς τὸ Α ἐφαπτομένης τῆς (γ).

536. Δίδεται περιφέρεια (Ο, R) καὶ σταθερὸν σημεῖον Α τοῦ ἐπιπέδου της. Μεταβλητὴ περιφέρεια (γ) ἔχει τὸ κέντρον της ἐπὶ τῆς (Ο, R) καὶ διέρχεται διὰ τοῦ Α. Νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ ριζικὸς ἄξων τῶν δύο περιφερειῶν (Ο, R) καὶ (γ) ἐφάπτεται μιᾶς σταθερᾶς περιφερείας.

537. Ποῖον τὸ ριζικὸν κέντρον τῶν περιφερειῶν τῶν γραφομένων μὲ διαμέτρους τὰς τρεῖς πλευρὰς ἑνὸς τριγώνου;

538. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ριζικὸν κέντρον τῶν τριῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων τριγώνου ΑΒΓ εἶναι τὸ ἔγκεντρον τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος κορυφὰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τρ.ΑΒΓ. («μεσοτριγώνου»).

539. Ἐὰν (Ο, ρ) καὶ (Κ, R) εἶναι ὁ ἐγγεγραμμένος καὶ ὁ περιγεγραμμένος εἰς τρ.ΑΒΓ κύκλος, νὰ δειχθῇ ὅτι $\Delta\upsilon\nu O/(K, R)=-2R\rho$.

(Πρὸς τοῦτο ἂς χρησιμοποιηθῇ ὁ τύπος τῆς διαφορᾶς τῶν δυνάμεων (§ 123) ὡς ἑξῆς. Ἔστω ὅτι ἡ διχοτόμος ΑΟ τοῦ τρ.ΑΒΓ τέμνει τὴν (Κ, R) εἰς $A_1$. Ἡ περιφέρεια (ΒΟΓ) ἔχει κέντρον τὸ $A_1$. Ἂς ληφθῇ ἡ διαφορὰ δυνάμεων τοῦ Ο ὡς πρὸς τοὺς κύκλους (Κ, R) καὶ (ΒΟΓ)).

540. Συναρτήσει τῶν πλευρῶν α, β, γ τριγώνου ΑΒΓ, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν δυνάμεων τῶν κορυφῶν τοῦ τρ. ΑΒΓ ὡς πρὸς τὸν κύκλον τῶν 9 σημείων τοῦ τριγώνου.

541. Ἀπὸ τὸν πόδα τοῦ ὕψους ΑΑ′ τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς

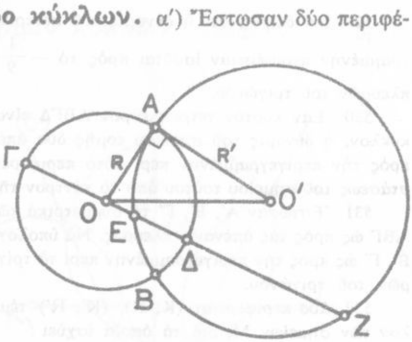
**πλευράς ΑΒ, ΑΓ, αἵτινες τέμνουν εἰς $B_1$ τὴν εὐθ ΑΒ καὶ εἰς $Γ_1$ τὴν ΑΓ, καθὼς καὶ καθέτους ἐπὶ τὰς ἰδίας πλευρὰς τεμνούσας εἰς $B_2$ τὴν ΑΒ καὶ $Γ_2$ τὴν ΑΓ. Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ΒΓ, $B_1Γ_1$, $B_2Γ_2$ συντρέχουν εἰς ἓν σημεῖον.**

## ΚΥΚΛΟΙ ΤΕΜΝΟΜΕΝΟΙ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΣ — ΨΕΥΔΟΟΡΘΟΓΩΝΙΟΤΗΣ

**125. Ὀρθογωνιότης δύο κύκλων.** α΄) Ἔστωσαν δύο περιφέρειαι (O, R) καὶ (O΄, R΄) τεμνόμεναι ὀρθογωνίως εἰς Α καὶ Β. Τότε αἱ ἀκτῖνές των ΟΑ καὶ Ο΄Α΄ εἶναι κάθετοι ἐπ᾽ ἀλλήλας καὶ τὸ τρίγωνον ΟΑΟ΄ εἶναι ὀρθογώνιον. Ἐπομένως, κατὰ τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα, θὰ εἶναι :

(1) $(OO')^2 = R^2 + R'^2$.

Ἀντιστρόφως, ἂν ἰσχύῃ ἡ (1), τότε ὑπάρχει ὀρθογώνιον τρίγωνον ΟΑΟ΄ μὲ καθέτους πλευρὰς ΟΑ=R, Ο΄Α=R΄ καὶ οἱ κύκλοι (O, R) καὶ (O΄, R΄) τέμνονται ὀρθογωνίως. Ἐξ αὐτῶν ἕπεται τό :




Σχ. 150

**ΘΕΩΡΗΜΑ I : Μία ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα δύο περιφέρειαι τέμνωνται ὀρθογωνίως, εἶναι τὸ τετράγωνον τῆς διακέντρου των νὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀκτίνων των.**

β΄) Ἐφ᾽ ὅσον οἱ κύκλοι (O, R) καὶ (O΄, R΄) τοῦ σχ. 150 τέμνωνται ὀρθογωνίως, ἡ ἀκτὶς ΟΑ=R τοῦ ἑνὸς ἐφάπτεται εἰς Α τοῦ ἄλλου καὶ συνεπῶς ἔχομεν (§ **118**, γ΄) ὅτι :

(2) $ΔυνO/O' = R^2$.

Ἀντιστρόφως ἡ (2) συνεπάγεται ὅτι τὸ ἐκ τοῦ Ο ἀγόμενον ἐφαπτόμενον τμῆμα πρὸς τὸν (O΄, R΄) ἰσοῦται πρὸς R, ὁπότε οἱ κύκλοι τέμνονται ὀρθογωνίως. Ἐπομένως ἰσχύει τὸ

**ΘΕΩΡΗΜΑ II : Μία ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα δύο περιφέρειαι τέμνωνται ὀρθογωνίως, εἶναι ἡ δύναμις τοῦ κέντρου τῆς μιᾶς ὡς πρὸς τὴν ἄλλην νὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἰδίας αὐτῆς ἀκτῖνος.**

γ΄) Ἐὰν φέρωμεν διάμετρον ΓΔ τῆς (O, R), ἡ δὲ εὐθ ΓΔ τέμνῃ τὴν (O΄, R΄) εἰς Ε καὶ Ζ (σχ. 150), τότε ἡ σχέσις (2) ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὴν $\overline{OE}\cdot\overline{OZ} = R^2$ ἢ τὴν $\overline{OE}\cdot\overline{OZ} = OΓ^2 = OΔ^2$, ἥτις πάλιν ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ ὅτι τὰ Ε καὶ Ζ διαιροῦν ἁρμονικῶς τὸ ΓΔ (§ **63**, α΄), δηλ. (Ε, Ζ, Γ, Δ) = —1. Ἐπομένως ἰσχύει τὸ

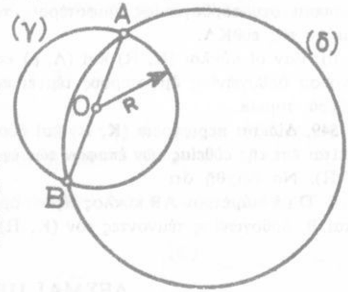
**ΘΕΩΡΗΜΑ III: Μία ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα δύο περιφέρειαι τέμνωνται ὀρθογωνίως, εἶναι μία διάμετρος τῆς μιᾶς περιφερείας νὰ χωρίζεται ἁρμονικῶς ὑπὸ τῆς ἄλλης περιφερείας.**

**Πόρισμα. Πᾶσα περιφέρεια διερχομένη διὰ δύο σημείων Α καὶ Β τέμνει ὀρθογωνίως πᾶσαν ἀπολλώνιον περιφέρειαν ἀναφερομένην εἰς τὰ Α καὶ Β.**

## 126. Περιφέρεια τεμνομένη ψευδοορθογωνίως ὑπὸ ἑτέρας περιφερείας. Ὁρισμός.—

**Λέγομεν ὅτι ἡ περιφέρεια (γ) τέμνεται ψευδοορθογωνίως ὑπὸ τῆς περιφερείας (δ) (σχ. 151), ὅταν ἡ (δ) τέμνῃ τὴν (γ) εἰς δύο ἐκ διαμέτρου ἀντίθετα σημεῖα.**

Διὰ νὰ συμβαίνῃ τοῦτο, **πρέπει καὶ ἀρκεῖ** ὁ ριζικὸς ἄξων τῶν (γ) καὶ (δ) νὰ εἶναι διάμετρος τῆς (γ), ἤτοι τὸ κέντρον Ο τῆς (γ) νὰ ἔχῃ ἴσας δυνάμεις ὡς πρὸς τὰς δύο περιφερείας. Ἀλλὰ




$\text{ΔυνO}/(\gamma) = \overline{OA} \cdot \overline{OB} = -R^2$

Σχ. 151

συνεπῶς καὶ $\boxed{\text{ΔυνO}/(\delta) = -R^2}$ : Ἰσχύει λοιπὸν ἡ πρότασις :

**(Θ)— Μία ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα περιφέρεια (γ) τέμνεται ψευδοορθογωνίως ὑπὸ τῆς περιφερείας (δ), εἶναι ἡ δύναμις τοῦ κέντρου τῆς (γ) ὡς πρὸς τὴν (δ) νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ ἀντίθετον τοῦ τετραγώνου τῆς ἰδίας αὐτῆς ἀκτῖνος.**

**Πόρισμα. Ἵνα ἡ (O′, R′) τέμνῃ ψευδοορθογωνίως (διχοτομῇ) τὴν (O, R), πρέπει καὶ ἀρκεῖ :** $\boxed{(O'O)^2 = R'^2 - R^2}$.

**Παρατήρησις.** Ἡ σχέσις τῆς ὀρθογωνιότητος εἶναι συμμετρικὴ σχέσις μέσα εἰς τὸ σύνολον τῶν κύκλων τοῦ ἐπιπέδου, δηλ. ἂν ἡ περιφέρεια (γ) τέμνεται ὀρθογωνίως ὑπὸ τῆς (γ′), τότε καὶ ἡ (γ′) τέμνεται ὀρθογωνίως ὑπὸ τῆς (γ).

Ἡ σχέσις τῆς ψευδοορθογωνιότητος δὲν εἶναι συμμετρική, διότι ἡ διάμετρος ΑΒ τῆς (γ) (σχ. 151) εἶναι ἁπλῶς χορδὴ τῆς (δ) καὶ ὄχι διάμετρος. Ὡς ἐκ τούτου ἡ ἔκφρασις : ἡ (γ) τέμνεται ψευδοορθογωνίως ὑπὸ τῆς (δ).

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

542. Νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ τόπος τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν τῶν τεμνουσῶν ψευδοορθογωνίως δύο δεδομένας περιφερείας εἶναι τὸ συμμετρικὸν τοῦ ριζικοῦ ἄξονος τῶν δοθεισῶν ὡς πρὸς τὸ μέσον τῆς διακέντρου αὐτῶν.

543. Τίς ὁ γ.τ. τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν τῶν τεμνουσῶν ὀρθογωνίως δοθεῖσαν περιφέρειαν καὶ ψευδοορθογωνίως ἑτέραν δοθεῖσαν περιφέρειαν;

544. Νὰ κατασκευασθῇ περιφέρεια i) τέμνουσα ὀρθογωνίως τρεῖς δοθείσας περιφερείας ἢ ii) τέμνουσα ψευδοορθογωνίως ταύτας.

545. Νὰ γραφῇ περιφέρεια τοιαύτη, ὥστε τὰ ἐφαπτόμενα τμήματα τὰ ἀγόμενα πρὸς αὐτὴν ἀπὸ τρία δεδομένα σημεῖα νὰ ἔχουν μήκη δοθέντα.

546. Νὰ γραφῇ περιφέρεια i) διερχομένη διὰ δύο δοθέντων σημείων καὶ ὀρθογωνίως τέμνουσα δοθεῖσαν περιφέρειαν ἢ ii) διερχομένη διὰ δοθέντος σημείου καὶ ὀρθογωνίως τέμνουσα δύο δεδομένας περιφερείας.

547. Δοθεισῶν δύο ὁμοκέντρων περιφερειῶν (O, R), (O, R′) καὶ τρίτης περιφερείας (c) νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν τῶν τεμνουσῶν ὀρθογωνίως τὴν (O, R′) καὶ τῶν ὁποίων ὁ ριζικὸς ἄξων μετὰ τῆς (c) νὰ ἐφάπτεται τῆς ὁμοκέντρου (O, R). (βλ. § 123).

548. i) Δοθέντων δύο κύκλων (K, R), (Λ, ρ) νὰ δειχθῇ ὅτι ὅλαι αἱ περιφέρειαι αἱ τέμνουσαι ψευδοορθογωνίως ἀμφοτέρους τοὺς δοθέντας διέρχονται διὰ δύο σταθερῶν σημείων τῆς ευθΚΛ.

ii) Ἐὰν οἱ κύκλοι (K, R) καὶ (Λ, ρ) κεῖνται ἐκτὸς ἀλλήλων, τότε πᾶσα περιφέρεια τέμνουσα ὀρθογωνίως ἀμφοτέρους τέμνει καὶ τὴν διάκεντρον ΚΛ· καὶ μάλιστα εἰς δύο σταθερὰ σημεῖα.

549. Δίδεται περιφέρεια (K, R) καὶ δύο σημεῖα A καὶ B ἐξωτερικὰ αὐτῆς, ἐξ ὧν τὸ B κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας τῶν ἐπαφῶν τῶν ἐφαπτομένων τῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ A πρὸς τὴν (K, R). Νὰ δειχθῇ ὅτι

i) Ὁ μὲ διάμετρον AB κύκλος τέμνει ὀρθογωνίως τὸν (K, R). ii) Οἱ κύκλοι μὲ κέντρα A καὶ B, ὀρθογωνίως τέμνοντες τὸν (K, R), τέμνονται καὶ μεταξύ των ὀρθογωνίως.

## ΔΕΣΜΑΙ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΩΝ

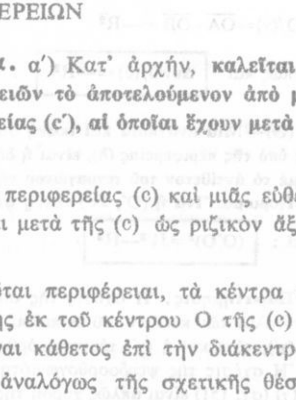
**127. Ὁρισμοὶ καὶ θεωρήματα.** α′) Κατ' ἀρχήν, **καλεῖται δέσμη περιφερειῶν τὸ σύνολον τῶν περιφερειῶν τὸ ἀποτελούμενον ἀπὸ μίαν περιφέρειαν (c) καὶ ἀπὸ ὅλας τὰς περιφερείας (c′), αἱ ὁποῖαι ἔχουν μετὰ τῆς (c) ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ριζικὸν ἄξονα (ε).**

Θὰ δείξωμεν τώρα ὅτι, δοθείσης μιᾶς περιφερείας (c) καὶ μιᾶς εὐθείας (ε), ὑπάρχουν πάντοτε περιφέρειαι ἔχουσαι μετὰ τῆς (c) ὡς ριζικὸν ἄξονα τὴν εὐθεῖαν (ε).

**Παρατήρησις.** Ἐὰν ὑπάρχουν τοιαῦται περιφέρειαι, τὰ κέντρα των εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς καθέτου τῆς ἀγομένης ἐκ τοῦ κέντρου O τῆς (c) ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν (ε) (ἀφοῦ ὁ ριζικὸς ἄξων εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν διάκεντρον).

β′) Διακρίνομεν **τρεῖς περιπτώσεις,** ἀναλόγως τῆς σχετικῆς θέσεως τῆς εὐθείας (ε) μετὰ τῆς περιφερείας (c) καὶ θὰ διαπιστώσωμεν ὅτι ὑπάρχουν τρία διαφορετικὰ εἴδη δεσμῶν περιφερειῶν.

**I. Αἱ (c) καὶ (ε) τέμνονται εἰς A καὶ B.** Τότε, ἂν περιφέρεια (c′) ἔχῃ μετὰ τῆς (c) ὡς ριζικὸν ἄξονα τὴν (ε), θὰ εἶναι κατ' ἀνάγκην Δυν $A/(c) = ΔυνA/(c') = 0$ καὶ ΔυνB/(c) $= ΔυνB/(c') = 0$. Ἀφοῦ δὲ τὰ ση-



Σχ. 152

μεῖα Α καὶ Β ἔχουν μηδενικὰς δυνάμεις ὡς πρὸς τὴν (c′), διὰ τοῦτο ἡ (c′) *διέρχεται διὰ τῶν Α καὶ Β.*

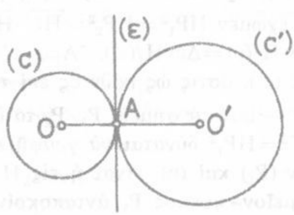
**Ἀντιστρόφως,** ἂν περιφέρεια (c′) διέρχεται διὰ τῶν Α καὶ Β, τότε ἔχει μετὰ τῆς (c), ὡς ριζικὸν ἄξονα, τὴν ευθ ΑΒ, δηλ. τὴν (ε). Ἐξ αὐτῶν ἕπεται τὸ

**Θεώρημα.—Ἔστω περιφέρεια (c) καὶ εὐθεῖα (ε) τεμνόμεναι εἰς Α καὶ Β. Τότε ἡ περιφέρεια (c) καὶ αἱ περιφέρειαι (c′), αἱ ὁποῖαι ἔχουν μετὰ τῆς (c) ὡς ριζικὸν ἄξονα τὴν εὐθεῖαν (ε), ἀποτελοῦν τὸ σύνολον τῶν περιφερειῶν τῶν διερχομένων διὰ τῶν Α καὶ Β.**

**Ὁρισμός.** Λέγομεν ὅτι αἱ περιφέρειαι τοῦ ἀνωτέρω συνόλου ἀποτελοῦν **δέσμην μὲ βασικὰ σημεῖα Α καὶ Β.**

Τὸ *σύνολον τῶν κέντρων* τῶν περιφερειῶν τῆς ἀνωτέρω δέσμης, δηλ. τῶν διερχομένων διὰ τῶν Α καὶ Β, εἶναι ἡ *μεσοκάθετος τοῦ ΑΒ.*

ΙΙ. **Αἱ (c) καὶ (ε) ἐφάπτονται εἰς τὸ σημεῖον Α.** Τότε, ἂν περιφέρεια (c′) ἔχῃ μετὰ τῆς (c) ὡς ριζικὸν ἄξονα τὴν (ε), θὰ εἶναι κατ' ἀνάγκην ΔυνΑ/(c)= = ΔυνΑ/(c′) = 0, ἑπομένως ἡ (c′) διέρχεται διὰ τοῦ Α. Ἔχει καὶ τὸ κέντρον της ἐπὶ τῆς ευθ ΟΑ (ἐδ. α′, παρατήρ.), ἄρα ἡ (c′) ἐφάπτεται τῆς (ε) εἰς Α.



Σχ. 153

**Ἀντιστρόφως,** ἂν περιφέρεια (c′) ἐφάπτεται τῆς (ε) εἰς Α, ὁ ριζικὸς ἄξων αὐτῆς καὶ τῆς (c) εἶναι ἡ εἰς Α κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΑ, δηλ. ἡ (ε). Ἐκ τούτων ἕπεται τό :

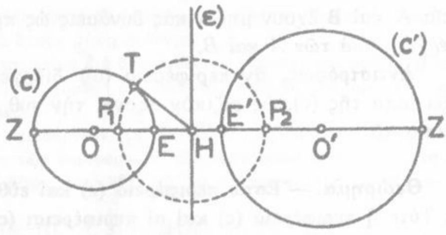
**Θεώρημα.—Ἔστω περιφέρεια (c) καὶ εὐθεῖα (ε) ἐφαπτόμεναι εἰς τὸ σημεῖον Α. Τότε ἡ περιφέρεια (c) καὶ αἱ περιφέρειαι (c′), αἱ ὁποῖαι ἔχουν μετὰ τῆς (c) ὡς ριζικὸν ἄξονα τὴν εὐθεῖαν (ε), ἀποτελοῦν τὸ σύνολον τῶν περιφερειῶν τῶν ἐφαπτομένων τῆς (ε) εἰς τὸ Α.**

Λέγομεν ὅτι αἱ περιφέρειαι τοῦ συνόλου τούτου ἀποτελοῦν **δέσμην ἐφαπτομένων περιφερειῶν.**

Τὸ σύνολον τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν τῆς ἀνωτέρω δέσμης εἶναι ὁλόκληρος ἡ εὐθεῖα ΟΑ, ἂν δεχθῶμεν ὅτι τὸ σημεῖον Α εἶναι περιφέρεια μηδενικῆς ἀκτῖνος (σημεῖον - κύκλος) περιλαμβανομένη εἰς τὴν δέσμην.

ΙΙΙ. **Αἱ (c) καὶ (ε) οὐδὲν κοινὸν σημεῖον ἔχουν.** Τότε ἡ προβολὴ Η τοῦ κέντρου Ο τῆς (c) ἐπὶ τὴν (ε) εἶναι ἐξωτερικὸν σημεῖον τῆς (c) καὶ ἑπομένως ἄγεται ἐκ τοῦ Η ἐφαπτόμενον τμῆμα ΗΤ πρὸς τὴν περιφέρειαν (c) (σχ. 154). Ἂς λάβωμεν ἐπὶ τῆς εὐθείας ΟΗ τὰ σημεῖα $P_1$, $P_2$ τοιαῦτα,ὥστε : $HP_1 = HP_2 = HT \Rightarrow$

(1) $HP_1^2 = HP_2^2 = HT^2$
καὶ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ὑπάρχει περιφέρεια (c′) ἔχουσα μετὰ τῆς (c) ριζικὸν ἄξονα τὴν (ε). Τὸ κέντρον O′ τῆς (c′) θὰ κεῖται τότε ἐπὶ τῆς ευθ OH καὶ μία διάμετρος E′Z′ τῆς (c′) θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς ευθ OH. Ἐπειδὴ τὸ H δέον νὰ ἔχῃ ἴσας δυνάμεις ὡς πρὸς τὰς (c) καὶ (c′), θὰ εἶναι : $HT^2 = \overline{HE'} \cdot \overline{HZ'}$ ἢ λόγῳ τῆς (1)



Σχ. 154

(2) $$HP_1^2 = HP_2^2 = \overline{HE'} \cdot \overline{HZ'}.$$

Ἡ (2) δεικνύει ὅτι ἡ τετρὰς $P_1$, $P_2$, E′, Z′ εἶναι ἁρμονικὴ (§ 63).

**Ἀντιστρόφως.** Ἔστωσαν δύο σημεῖα E′, Z′ συζυγῆ ἁρμονικὰ ὡς πρὸς τὰ $P_1$, $P_2$ καὶ ἔστω (c′) περιφέρεια διαμέτρου E′Z′ καὶ κέντρου O′. Τότε θὰ ἔχωμεν $HP_1^2 = HP_2^2 = \overline{HE'} \cdot \overline{HZ'}$ ἢ λόγῳ τῶν (1) : $HT^2 = \overline{HE'} \cdot \overline{HZ'}$, δηλ. Δυν H/(c)=ΔυνH/(c′). Ἄρα τὸ H ἀνήκει εἰς τὸν ριζικὸν ἄξονα τῶν (c) καὶ (c′), ὅστις ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν OO′ ταυτίζεται μὲ τὴν εὐθεῖαν (ε).

—Ἐὰν τὰ σημεῖα $P_1$, $P_2$ τὰ θεωρήσωμεν ὡς σημεῖα - κύκλους, ἡ σχέσις $HT^2 = HP_1^2$ δύναται νὰ γραφῇ ΔυνH/(c)=ΔυνH/($P_1$), ἄρα ὁ ριζικὸς ἄξων τῶν ($P_1$) καὶ (c) εἶναι ἡ εἰς H κάθετος ἐπὶ τὴν ευθ $OP_1$, δηλ. ἡ (ε). Τὸ σημεῖον - κύκλος $P_1$ ἀνταποκρίνεται εἰς τὴν ἀπαίτησιν τοῦ προβλήματος. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ μὲ τὸ $P_2$.

Ἐκ τούτων ἕπεται τό :

**Θεώρημα.—Ἔστω περιφέρεια (c) καὶ εὐθεῖα (ε) ἐξωτερικὴ τῆς (c) καὶ ἔστω H ἡ προβολὴ τοῦ κέντρου O τῆς (c) ἐπὶ τὴν (ε). Τότε ἡ περιφέρεια (c) καὶ πᾶσαι αἱ περιφέρειαι (c′), αἱ ὁποῖαι ἔχουν μετὰ τῆς (c) ὡς ριζικὸν ἄξονα τὴν εὐθεῖαν (ε), ἀποτελοῦν τὸ σύνολον τῶν περιφερειῶν μὲ διαμέτρους E′Z′ τοιαύτας, ὥστε τὰ E′ καὶ Z′ νὰ εἶναι συζυγῆ ἁρμονικὰ τῶν σταθερῶν σημείων $P_1$, $P_2$ τῶν κειμένων ἐπὶ τῆς εὐθείας OH καὶ ὁριζομένων ὑπὸ τῆς σχέσεως : $HP_1^2 = HP_2^2 = $ Δυν H/(c).**

**Ὁρισμός.** Λέγομεν ὅτι αἱ περιφέρειαι τοῦ ἀνωτέρω συνόλου ἀποτελοῦν **δέσμην μὲ ὁριακὰ σημεῖα** $P_1$, $P_2$ (ἢ μὲ σημεῖα Poncelet, τὰ $P_1$, $P_2$).

γ′) **Σύνολον τῶν κέντρων μιᾶς δέσμης μὲ ὁριακὰ σημεῖα.** Ἐπειδὴ ἡ τετρὰς $P_1$, $P_2$, E′, Z′ εἶναι ἁρμονικὴ (σχ. 154), ἔχομεν $\overline{O'P_1} \cdot \overline{O'P_2} = O'E'^2 = O'Z'^2$. Ἄρα τὸ $\overline{O'P_1} . \overline{O'P_2}$ εἶναι θετικὸν καὶ τὰ διανύσματα $\overrightarrow{O'P_1}, \overrightarrow{O'P_2}$ ὁμόρροπα. Ἑπομένως τὸ κέντρον O′ τυχούσης περιφερείας τῆς δέσμης εὑρίσκεται εἰς τὴν προέκτασιν τοῦ τμήματος $P_1P_2$. Συνάγομεν λοιπὸν ὅτι

*Τὸ σύνολον τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν μιᾶς δέσμης μὲ ὁριακὰ σημεῖα $P_1$, $P_2$ εἶναι τὸ ἐκτὸς τοῦ τμήματος $P_1P_2$ μέρος τῆς εὐθείας.*

**Συμπέρασμα.** Μία περιφέρεια καὶ μία εὐθεῖα ὁρίζουν, πάντοτε, μίαν δέσμην περιφερειῶν. Ἔχομεν δὲ τρία εἴδη δεσμῶν περιφερειῶν.

**128. Ἰδιότητες τῶν περιφερειῶν μιᾶς δέσμης.** α′) (Θ) — **Ὁ ριζικὸς ἄξων δύο οἱωνδήποτε περιφερειῶν μιᾶς δέσμης ὁριζομένης ὑπὸ μιᾶς περιφερείας (c) καὶ μιᾶς εὐθείας (ε) εἶναι ἡ εὐθεῖα (ε).**

Ἔστω δέσμη περιφερειῶν ὁριζομένη ὑπὸ μιᾶς περιφερείας (c) καὶ μιᾶς εὐθείας (ε) καὶ ἔστωσαν (c′) καὶ (c″) δύο τυχοῦσαι περιφέρειαι τῆς δέσμης ταύτης. Πᾶν σημεῖον Μ τῆς (ε) ἔχει ἴσας δυνάμεις ὡς πρὸς τὰς (c) καὶ (c′) καὶ ἴσας δυνάμεις ὡς πρὸς τὰς (c) καὶ (c″). Ἄρα ἔχει ἴσας δυνάμεις ὡς πρὸς τὰς (c′) καὶ (c″).

β′) (Θ) — **Δύο μὴ ὁμόκεντροι περιφέρειαι ὁρίζουν μίαν δέσμην.**

Ἔστωσαν (c) καὶ (c′) δύο μὴ ὁμόκεντροι περιφέρειαι. Αὗται ἔχουν ἕνα ριζικὸν ἄξονα (ε). Ἡ περιφέρεια (c) καὶ ἡ (ε) ὁρίζουν μίαν δέσμην περιφερειῶν, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει καὶ ἡ (c′).

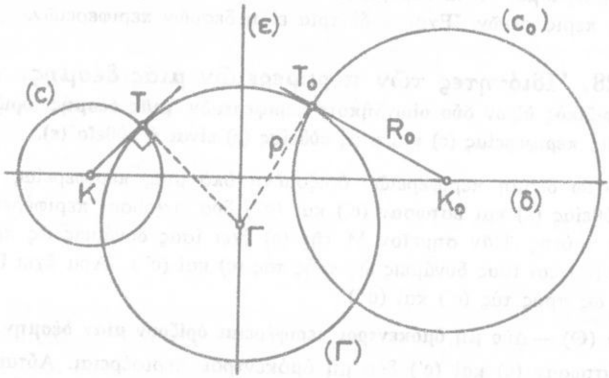
γ′) (Θ) — **Ἵνα σύνολον περιφερειῶν ἀποτελῇ δέσμην, πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὰ κέντρα των νὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας τινὸς (δ) καὶ νὰ ὑπάρχῃ σημεῖον Μ ἔχον ἴσας δυνάμεις πρὸς ὅλας τὰς περιφερείας ταύτας.**

Διότι δύο ἐκ τῶν περιφερειῶν τούτων ἔχουν ριζικὸν ἄξονα τὴν ἐκ τοῦ Μ κάθετον ἐπὶ τὴν (δ). Ἑπομένως ὁρίζουν μίαν δέσμην. Εἰς τὴν δέσμην αὐτὴν προφανῶς ἀνήκουν καὶ πᾶσαι αἱ ἄλλαι περιφέρειαι τῆς ἀνωτέρω οἰκογενείας.

**129. Ὀρθογώνιοι δέσμαι περιφερειῶν.** α′) Ἂς θεωρήσωμεν δέσμην περιφερειῶν F, μὲ εὐθεῖαν κέντρων τὴν (δ) καὶ ριζικὸν ἄξονα τὴν (ε), καθὼς καὶ δύο περιφερείας (c) καὶ ($c_0$) τῆς δέσμης ταύτης F, κέντρων Κ καὶ $K_0$ (σχ. 155). Ἔστω Γ σημεῖον τοῦ ριζικοῦ ἄξονος κείμενον **ἐκτὸς** τῶν περιφερειῶν (c) καὶ ($c_0$). Ἐκ τοῦ Γ ἄγονται ἴσα ἐφαπτόμενα τμήματα ΓΤ καὶ $ΓT_0$ πρὸς τὰς (c) καὶ ($c_0$).

Ἐὰν λοιπὸν ἡ ($c_0$) μένῃ σταθερὰ καὶ ἡ (c) μεταβάλλεται, διατρέχουσα ὅλας τὰς περιφερείας τῆς δέσμης F, τὸ ἐφαπτόμενον τμῆμα ΓΤ διατηρεῖ σταθερὸν μῆκος ($=ΓT_0$) καὶ ἑπομένως τὸ Τ κεῖται πάντοτε ἐπὶ σταθερᾶς περιφερείας (Γ, $ΓT_0$) τεμνούσης ὀρθογωνίως ὅλας τὰς περιφερείας τῆς δέσμης.

Ἀντιστρόφως ἔστω (Γ, ρ) περιφέρεια τέμνουσα ὀρθογωνίως δύο περιφερείας (c) καὶ ($c_0$) τῆς δέσμης. Τότε $ΔυνΓ/(c)=ΔυνΓ/(c_0)=ρ^2$, ἤτοι τὸ Γ ἀνήκει εἰς τὸν ριζικὸν ἄξονα (ε) τῆς δέσμης καὶ εἶναι καὶ ἐξωτερικὸν ὅλων τῶν περιφερειῶν τῆς δέσμης (διότι ἔχει ὡς πρὸς ὅλας τὴν ἰδίαν, θετικήν, δύναμιν $\rho^2$). Βλέπομεν ὅτι **«ὑπάρχουν ἄπειροι περιφέρειαι (Γ) ὀρθογώνιοι πρὸς ὅλας τὰς περιφερείας τῆς δέσμης F, τὸ δὲ σύνολον τῶν κέντρων**




Σχ. 155

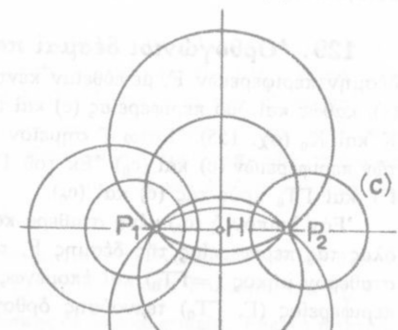
**τῶν (Γ) εἶναι τὸ μέρος τοῦ ριζικοῦ ἄξονος τῆς F, τὸ κείμενον ἐκτὸς τῶν περιφερειῶν τῆς F».**

Ἂς καλέσωμεν Φ τὸ σύνολον τῶν περιφερειῶν τούτων (Γ), τῶν ὁποίων τὰ κέντρα κεῖνται ἐπ' εὐθείας. Μία σταθερὰ περιφέρεια ($c_0$) τῆς δέσμης F, κέντρου $K_0$ καὶ ἀκτῖνος $R_0$ (σχ. 155), τέμνει ὀρθογωνίως ὅλας τὰς περιφερείας (Γ), ἄρα $\Delta\upsilon\nu K_0/(\Gamma) = R_0^2$. Δηλ. ὑπάρχει σημεῖον $K_0$ ἔχον τὴν αὐτὴν δύναμιν ὡς πρὸς ὅλας τὰς περιφερείας (Γ) τοῦ συνόλου Φ. Καὶ ἐπειδὴ τὰ κέντρα τῶν (Γ) κεῖνται ἐπὶ τῆς εὐθείας (ε), διὰ τοῦτο αἱ (Γ) ἀποτελοῦν δέσμην μὲ ριζικὸν ἄξονα τὴν ἐκ τοῦ $K_0$ κάθετον ἐπὶ τὴν (ε) (§ **128, γ'**). Ἡ δέσμη αὐτὴ Φ λέγεται **ὀρθογώνιος** (ἢ *συζυγής*) πρὸς τὴν F καὶ **ἔχει εὐθεῖαν κέντρων τὸν ριζικὸν ἄξονα (ε) τῆς F καὶ ριζικὸν ἄξονα τὴν εὐθεῖαν κέντρων $KK_0$ τῆς F.**

Κάθε περιφέρεια τῆς μιᾶς δέσμης τέμνει ὀρθογωνίως πάσας τὰς περιφερείας τῆς ἄλλης δέσμης.

β') **Τὰ εἴδη τῶν δύο ὀρθογωνίων δεσμῶν.** Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ δέσμη F εἶναι μὲ ὁριακὰ σημεῖα $P_1$, $P_2$.

Ἂν νοήσωμεν περιφέρειαν (γ) διαμέτρου $P_1P_2$, αὕτη τέμνει

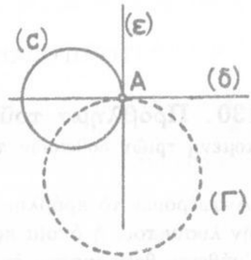



Σχ. 156

ὀρθογωνίως ὅλους τοὺς κύκλους (c) τῆς δέσμης F (ὡς ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῶν $P_1$, $P_2$), ἄρα ἡ (γ) ἀνήκει εἰς τὴν ὀρθογώνιον δέσμην Φ. Τὸ $P_1$ κείμενον ἐπὶ τοῦ ριζικοῦ ἄξονος τῆς δέσμης Φ ἔχει ἴσας δυνάμεις ὡς πρὸς ὅλας τὰς περιφερείας (Γ) τῆς Φ, ἄρα $ΔυνP_1/(Γ)=ΔυνP_1/(γ)=0$. Ἤτοι τὸ $P_1$ (καὶ ὁμοίως καὶ τὸ $P_2$) ἀνήκει εἰς τὴν (Γ). Ἡ δέσμη Φ δέχεται τὰ σημεῖα $P_1$, $P_2$ ὡς βασικὰ σημεῖα.

Ἀντιστρόφως, ἂν θεωρήσωμεν ὡς ἀρχικὴν δέσμην τὴν Φ μὲ βασικὰ σημεῖα $P_1$, $P_2$, ἡ ὀρθογώνιός της, δηλ. ἡ F, ἔχει τὰ $P_1$, $P_2$ ὡς σημεῖα Poncelet.

—Ἐὰν ἡ F εἶναι δέσμη περιφερειῶν ἐφαπτομένων τῆς (ε) εἰς Α μὲ εὐθεῖαν κέντρων τὴν (δ), κάθετον ἐπὶ τὴν (ε) εἰς τὸ Α, τότε ἡ ὀρθογώνιος δέσμη Φ θὰ ἔχῃ εὐθεῖαν κέντρων τὴν (ε) (τὸν ριζικὸν ἄξονα τῆς F). Ἐπειδὴ δὲ πᾶσα περιφέρεια (Γ) τῆς Φ τέμνει ὀρθογωνίως πᾶσαν περιφέρειαν (c) τῆς F, διὰ τοῦτο κατ' ἀνάγκην ἡ (Γ) ἐφάπτεται τῆς (δ) (σχ. 157). Ὥστε ἡ Φ εἶναι ἐπίσης δέσμη ἐφαπτομένων περιφερειῶν.



Σχ. 157

γ' Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται τὸ θεώρημα:

**«Ἐκ δύο ὀρθογωνίων δεσμῶν περιφερειῶν, ἂν ἡ μία ἔχῃ βασικὰ σημεῖα Α, Β, ἡ ἄλλη ἔχει ὁριακὰ σημεῖα τὰ Α καὶ Β καὶ τανάπαλιν. Ἂν ἡ μία εἶναι δέσμη ἐφαπτομένων περιφερειῶν, ἡ ὀρθογώνιός της εἶναι πάλιν δέσμη ἐφαπτομένων περιφερειῶν».**

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

550. Ἐὰν ὑπάρχουν δύο σημεῖα Α, Β ἔχοντα ἕκαστον ἴσας δυνάμεις ὡς πρὸς ὅλας τὰς περιφερείας $(c_1)$, $(c_2)$,... $(c_ν)$..., τότε αἱ περιφέρειαι αὗται ἀνήκουν εἰς τὴν αὐτὴν δέσμην

551. Νὰ κατασκευασθῇ περιφέρεια ἀνήκουσα εἰς δοθεῖσαν δέσμην καὶ διερχομένη διὰ δοθέντος σημείου Μ.

552. Νὰ κατασκευασθῇ περιφέρεια ἀνήκουσα εἰς δοθεῖσαν δέσμην καὶ ἐφαπτομένη δοθείσης εὐθείας (δ).

553. Νὰ γραφῇ περιφέρεια ἀνήκουσα εἰς δοθεῖσαν δέσμην καὶ ἐφαπτομένη δοθείσης περιφερείας (γ).

554. Τρεῖς περιφέρειαι $(O_1, R_1)$, $(O_2, R_2)$, $(O_3, R_3)$ ἔχουν τὰ κέντρα των ἐπ' εὐθείας. Νὰ εὑρεθῇ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη μεταξὺ τῶν ἀκτίνων καὶ τῶν ἀποστάσεων τῶν κέντρων, ἵνα αἱ τρεῖς περιφέρειαι ἀνήκουν εἰς τὴν αὐτὴν δέσμην.

555. Τὸ σύνολον τῶν περιφερειῶν τῶν τεμνουσῶν ψευδοορθογωνίως δύο δοθείσας περιφερείας ἀποτελεῖ δέσμην. Σχεδιάσατε μετ' ἀκριβείας τὴν δέσμην ταύτην.

556. Τὸ σύνολον τῶν περιφερειῶν ἑκάστη, τῶν ὁποίων τέμνει ὀρθογωνίως μίαν δοθεῖσαν περιφέρειαν καὶ ψευδοορθογωνίως μίαν ἄλλην, ἀποτελεῖ δέσμην. Σχεδιάσατε μετ' ἀκριβείας τὴν δέσμην ταύτην.

557. Τὸ σύνολον τῶν ἀπολλωνίων περιφερειῶν τῶν ἀναφερομένων εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β ἀποτελεῖ δέσμην μὲ ὁριακὰ σημεῖα Α καὶ Β. Ποία ἡ ὀρθογώνιος δέσμη;

558. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων : $ΒΓ=α$, $υ_α=h$, $δ_Α=δ$ $(δ>h)$.

559. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ σύνολον τῶν σημείων, τῶν ὁποίων ὁ λόγος τῶν δυνάμεων ὡς πρὸς δύο δεδομένας περιφερείας εἶναι σταθερός, εἶναι περιφέρεια ἀνήκουσα εἰς τὴν δέσμην, τὴν ὁποίαν αἱ δύο περιφέρειαι ὁρίζουν.

560. Νὰ κατασκευασθῇ περιφέρεια ἀνήκουσα εἰς δοθεῖσαν δέσμην καὶ τέμνουσα ὀρθογωνίως δοθεῖσαν περιφέρειαν.

## ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΟΥ ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ

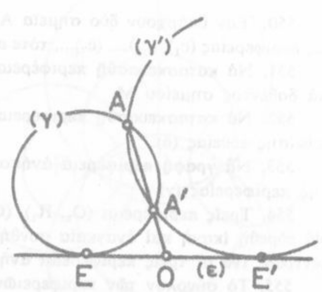
**130. Πρόβλημα τοῦ Ἀπολλωνίου: «Νὰ γραφῇ περιφέρεια ἐφαπτομένη τριῶν δοθεισῶν περιφερειῶν».**

Ἀναφέρομεν τὸ πρόβλημα τοῦτο πληροφοριακῶς χωρὶς νὰ προβῶμεν εἰς τὴν λύσιν του, ἡ ὁποία πράγματι ἐπιτυγχάνεται γεωμετρικῶς, ἀλλὰ μὲ τὴν βοήθειαν θεωρημάτων ἐκ τῆς ὁμοιοθεσίας καὶ τῆς ἀντιστροφῆς.

Τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα δίδει γένεσιν εἰς ἐννέα ἄλλα προβλήματα, ὅταν μία ἢ περισσότεραι ἐκ τῶν περιφερειῶν ἀντικατασταθοῦν μὲ σημεῖα (ἀκτὶς μηδενικὴ) ἢ μὲ εὐθείας (ἀκτὶς ἄπειρος). Θὰ ἀσχοληθῶμεν μὲ ἐνδιαφερούσας τινὰς **εἰδικὰς περιπτώσεις** τοῦ γενικοῦ προβλήματος τοῦ Ἀπολλωνίου.

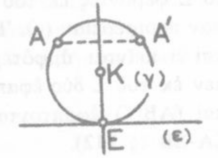
**ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ι.—Νὰ γραφῇ περιφέρεια (γ) διερχομένη διὰ δύο δεδομένων σημείων Α καὶ Α′ καὶ ἐφαπτομένη δοθείσης εὐθείας (ε)**

1ον) Τὰ Α καὶ Α′ κεῖνται ἐπὶ ἡμιευθείας ἀρχομένης ἀπὸ σημείου Ο τῆς (ε) (σχ. 158). Τότε τὸ σημεῖον ἐπαφῆς Ε τῆς ζητουμένης περιφερείας (γ) μετὰ τῆς (ε) ὁρίζεται ἐκ τῆς σχέσεως $\overline{ΟΕ}^2=\overline{ΟΑ}\cdot\overline{ΟΑ'}$. Τὴν σχέσιν ταύτην πληροῦν δύο σημεῖα Ε, Ε′ τῆς (ε) ἀπέχοντα τοῦ Ο ἀπόστασιν, μέσην ἀνάλογον τῶν ΟΑ, ΟΑ′ καὶ ἑπομένως κατασκευάσιμα. Ἑκάστη τῶν περιφερειῶν (Α, Α′, Ε) καὶ (Α, Α′, Ε′) ἐφάπτεται τῆς εὐθείας (ε) (§ 112). Τὸ πρόβλημα ἔχει **δύο λύσεις.**



Σχ. 158

2ον) Ἐὰν ἓν ἐκ τῶν Α καὶ Α′ κεῖται ἐπὶ τῆς (ε), π.χ. τὸ Α′, τότε τὸ κέντρον τῆς (γ) κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου τοῦ Α'Α καὶ ἐπὶ τῆς εἰς Α' καθέτου ἐπὶ τὴν (ε) καὶ τὸ πρόβλημα ἔχει **μίαν λύσιν.**



Σχ. 159

3ον) ΑΑ'//(ε). Τότε ἡ (γ) εἶναι συμμετρικὴ ὡς πρὸς τὴν μεσοκάθετον τῆς χορδῆς ΑΑ', τὸ σημεῖον ἐπαφῆς Ε κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου καὶ ὁρίζεται μονοσημάντως. Τὸ πρόβλημα ἔχει **μίαν λύσιν.**

4ον) Τὰ Α καὶ Α' ἑκατέρωθεν τῆς (ε).

Τότε πᾶσα περιφέρεια διερχομένη διὰ τῶν Α καὶ Α' τέμνει τὴν (ε), πάντοτε εἰς δύο διακεκριμένα σημεῖα. Τὸ πρόβλημα **δὲν ἔχει λύσιν.**

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΙ. Νὰ γραφῇ περιφέρεια (γ) διερχομένη διὰ σημείου Α καὶ ἐφαπτομένη δύο εὐθειῶν $(\varepsilon_1)$ καὶ $(\varepsilon_2)$.**

Τοῦτο ἀνάγεται εἰς τὸ προηγούμενον, διότι ἡ ζητουμένη (γ) θὰ διέρχεται καὶ διὰ τοῦ συμμετρικοῦ τοῦ Α ὡς πρὸς μίαν τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν, ἃς σχηματίζουν αἱ $(\varepsilon_1)$ καὶ $(\varepsilon_2)$. Ἑπομένως εἶναι γνωστὰ δύο σημεῖα, δι' ὧν διέρχεται ἡ (γ).

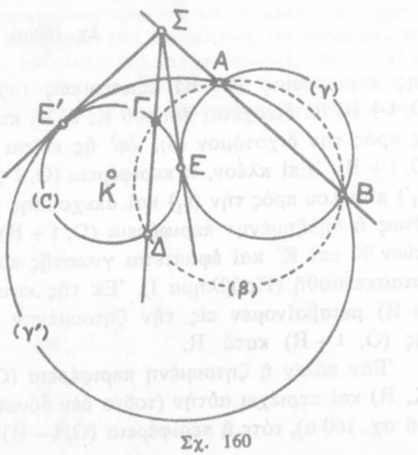
**ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΙΙ. Νὰ κατασκευασθῇ περιφέρεια διερχομένη διὰ δύο δοθέντων σημείων Α καὶ Β καὶ ἐφαπτομένη δοθείσης περιφερείας (c).**

1ον) Ἂν τὸ Α κεῖται ἐπὶ τῆς (c), τότε ἡ ζητουμένη ἐφάπτεται τῆς (c) εἰς Α καὶ διέρχεται διὰ τοῦ Β. Τὸ κέντρον της ὁρίζεται μονοσημάντως (τομὴ τῆς μεσοκαθέτου τοῦ ΑΒ καὶ τοῦ φορέως τῆς ἀκτῖνος ΚΑ τῆς (c)) καὶ τὸ πρόβλημα ἔχει **μίαν λύσιν**

2ον) Τὸ ἓν ἐκ τῶν σημείων Α καὶ Β κεῖται ἐντὸς τοῦ κύκλου (c) καὶ τὸ ἄλλο ἐκτός. Τότε προφανῶς τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον, δηλ. **0 λύσεις.**

3ον) Τὰ Α καὶ Β κεῖνται ἀμφότερα ἐκτὸς ἢ ἀμφότερα ἐντὸς τοῦ κύκλου (c). Τότε, ἔστω (γ) ἡ ζητουμένη περιφέρεια.

Φέρομεν βοηθητικὴν περιφέρειαν (β) διερχομένην διὰ τῶν Α καὶ Β καὶ τέμνουσαν τὴν (c) εἰς Γ καὶ Δ (σχ. 160). Ἔστω Σ ἡ τομὴ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ. Ἂν ἡ ζητουμένη (γ) ἐφάπτεται τῆς (c) εἰς Ε, τότε ἡ εἰς Ε κοινὴ ἐφαπτομένη τῶν (γ) καὶ (c) ὡς ριζικὸς ἄξων τῶν (γ) καὶ (c) θὰ διέρχεται διὰ τῆς τομῆς Σ τῶν δύο ἄλλων ριζικῶν ἀξόνων. Ὥστε εὑρίσκομεν



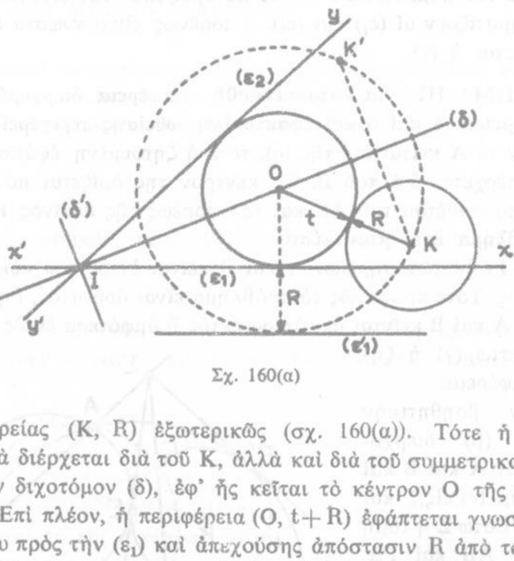
Σχ. 160

τὸ Ε φέροντες ἐκ τοῦ γνωστοῦ σημείου Σ ἐφαπτομένην πρὸς τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν (c). Ἐπειδὴ τὸ Σ κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου (c), ὅταν τὰ Α καὶ Β κεῖνται ἀμφότερα ἐκτὸς ἢ ἀμφότερα ἐντὸς τοῦ (c), διὰ τοῦτο ἔχομεν ἐκ τοῦ Σ δύο ἐφαπτομένας ΣΕ, ΣΕ΄. Ἀμφότεραι αἱ περιφέρειαι (ΑΒΕ) καὶ (ΑΒΕ΄) ἐφάπτονται τῆς (c), διότι $ΣΕ^2 = ΣΓ \cdot ΣΔ = ΣΑ \cdot ΣΒ$ καὶ $ΣΕ'^2 = ΣΑ \cdot ΣΒ$ (§ **112**).

Ἂν ΓΔ//ΑΒ, τὸ Σ εἶναι τὸ εἰς ἄπειρον σημεῖον τῆς ευθ ΑΒ καὶ τότε φέρομεν ἐφαπτομένας τῆς (c) παρ/λους πρὸς τὴν ΑΒ καὶ προσδιορίζομεν τὰ σημεῖα ἐπαφῆς Ε καὶ Ε΄.

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ IV. Νὰ γραφῇ περιφέρεια ἐφαπτομένη δύο δοθεισῶν εὐθειῶν καὶ δοθείσης περιφερείας.**

**Ἡ κεντρικὴ ἰδέα τῆς λύσεως.** Ἔστω (O, t) μία τῶν ζητουμένων περιφερειῶν ἐφαπτομένη τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν $(ε_1)$ καὶ $(ε_2)$ καὶ τῆς δοθεί-




Σχ. 160(α)

σης περιφερείας (K, R) ἐξωτερικῶς (σχ. 160(α)). Τότε ἡ περιφέρεια (O, t+R) θὰ διέρχεται διὰ τοῦ Κ, ἀλλὰ καὶ διὰ τοῦ συμμετρικοῦ Κ΄ τοῦ Κ ὡς πρὸς τὴν διχοτόμον (δ), ἐφ' ἧς κεῖται τὸ κέντρον O τῆς περιφερείας (O, t+R). Ἐπὶ πλέον, ἡ περιφέρεια (O, t+R) ἐφάπτεται γνωστῆς εὐθείας $(ε_1')$ παρ/λου πρὸς τὴν $(ε_1)$ καὶ ἀπεχούσης ἀπόστασιν R ἀπὸ ταύτης. Ἐπομένως ἡ «ηὐξημένη» περιφέρεια (O, t + R) διέρχεται διὰ δύο γνωστῶν σημείων Κ καὶ Κ΄ καὶ ἐφάπτεται γνωστῆς εὐθείας $(ε_1')$ καὶ οὕτω δύναται νὰ κατασκευασθῇ (Πρόβλημα Ι). Ἐκ τῆς κατασκευασθείσης περιφερείας (O, t + R) μεταβαίνομεν εἰς τὴν ζητουμένην (O, t) ἐλαττοῦντες τὴν ἀκτῖνα τῆς (O, t + R) κατὰ R.

Ἐὰν πάλιν ἡ ζητουμένη περιφέρεια (O, t) ἐφάπτεται ἐσωτερικῶς τῆς (K, R) καὶ περιέχει αὐτὴν (τοῦτο δὲν δύναται νὰ συμβῇ εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ σχ. 160 α), τότε ἡ περιφέρεια (O, t—R) διέρχεται διὰ δύο γνωστῶν σημείων (K καὶ τοῦ συμμετρικοῦ του ὡς πρὸς τὴν (δ)) καὶ ἐφάπτεται γνωστῆς εὐθείας $//(\varepsilon_1)$ καὶ ἀπεχούσης R ἀπὸ ταύτης. Κατασκευασθείσης τῆς «ἠλαττωμένης» (O, t—R) κατασκευάζεται καὶ ἡ (O, t) δι' αὐξήσεως τῆς ἀκτῖνος τῆς (O, t—R) κατὰ R.

Τέλος, ἂν ἡ ζητουμένη περιφέρεια (O, t) περιέχεται ἐντὸς τῆς (K, R) καὶ ἐφάπτεται ἐσωτερικῶς αὐτῆς, τότε ἡ περιφέρεια (O, R—t) διέρχεται διὰ τοῦ K καὶ δύναται νὰ κατασκευασθῇ, ὡς ἐλέχθη προηγουμένως.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

561. Δίδονται τρεῖς περιφέρειαι (K), (Λ), (O) ἐκτὸς ἀλλήλων ἀνὰ δύο καὶ ἐκ τῶν ὁποίων αἱ (K) καὶ (Λ) εἶναι ἴσαι.

Ζητεῖται νὰ κατασκευασθῇ περιφέρεια ἐφαπτομένη :

i) Ἐσωτερικῶς καὶ τῶν τριῶν δοθεισῶν.

ii) Ἐσωτερικῶς τῶν δύο ἴσων καὶ ἐξωτερικῶς τῆς τρίτης.

(**Ὑπόδ.** i). Ἐὰν R ἡ ἀκτὶς ἑκάστης τῶν (K), (Λ), τότε, ἂν ἡ ἀκτὶς τῆς ζητουμένης ἐλαττωθῇ κατὰ R, θὰ προκύψῃ περιφέρεια διερχομένη διὰ δύο γνωστῶν σημείων K, Λ καὶ ἐφαπτομένη τρίτης, γνωστῆς περιφερείας).

562. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου δίδονται αἱ κορυφαὶ Β καὶ Γ, μία εὐθεῖα (ε), ἐφ' ἧς κεῖται ἡ τρίτη κορυφὴ Α καὶ

i) Τὸ ἄθροισμα k τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν, ΑΒ, ΑΓ.

ii) Ἡ διαφορὰ δ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.

(**Ὑπόδ.** i) Ἂν ἡ ΑΒ προεκταθῇ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Α κατὰ ΑΔ=ΑΓ, τότε ΒΔ=k καὶ τὸ Α εἶναι κέντρον περιφερείας διερχομένης διὰ τοῦ Γ, διὰ τοῦ συμμετρικοῦ τοῦ Γ ὡς πρὸς τὴν (ε) καὶ ἐφαπτομένης τῆς περιφερείας (B, k)).

563. Νὰ κατασκευασθῇ τρ. ΑΒΓ, οὕτινος δίδονται : αἱ κορυφαὶ Β καὶ Γ, τὸ ἄθροισμα τῶν διαμέσων $\mu_\beta+\mu_\gamma=l$ καὶ ἓν ὕψος.

564. Δίδεται κύκλος (K) καὶ ἐξωτερικὴ αὐτοῦ εὐθεῖα xy. Προβάλλομεν τὸ κέντρον K ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν xy, ἔστω εἰς Α, καὶ ἐπὶ τοῦ ΑΚ λαμβάνομεν τμῆμα ΑΕ ἴσον πρὸς τὸ ἐκ τοῦ Α ἀγόμενον ἐφαπτόμενον τμῆμα τῆς περιφερείας.

i) Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ μῆκος τοῦ ἐφαπτομένου τμήματος τοῦ ἀγομένου ἀπὸ τυχόντος σημείου Μ τῆς εὐθείας xy πρὸς τὴν περιφέρειαν (K) ἰσοῦται πρὸς τὴν ἀπόστασιν ΜΕ.

ii) Ἔστω ὅτι δίδεται εὐθεῖα xy καὶ δύο κύκλοι (K), (Λ) μὴ τέμνοντες τὴν xy. Νὰ εὑρεθῇ, βάσει τοῦ ἀνωτέρω, σημεῖον Μ τῆς xy τοιοῦτον, ὥστε τὰ ἐφαπτόμενα τμήματα τὰ ἀγόμενα ἐκ τοῦ Μ πρὸς τοὺς δύο κύκλους νὰ ἔχουν ἄθροισμα τὸ ἐλάχιστον δυνατὸν ἢ ἴσον πρὸς δοθὲν τμῆμα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

# ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΜΕΝΕΛΑΟΥ — CÉVA — ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΥ

## ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΜΕΝΕΛΑΟΥ

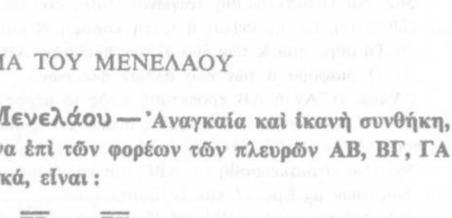
**131. Θεώρημα τοῦ Μενελάου — Ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα τρία σημεῖα Δ, Ε, Ζ κείμενα ἐπὶ τῶν φορέων τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι συνευθειακά, εἶναι:**

$$\frac{\overline{\Delta A}}{\overline{\Delta B}} \cdot \frac{\overline{EB}}{\overline{E\Gamma}} \cdot \frac{\overline{Z\Gamma}}{\overline{ZA}} = +1.$$

(Δηλαδὴ νὰ χωρίζουν τὰ διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{\Gamma A}$ εἰς ἀλγεβρικοὺς λόγους ἔχοντας γινόμενον $+1$).

Ἡ εὐθεῖα δὲ ΔΕΖ, δι' οὐδεμιᾶς κορυφῆς τοῦ τρ. ΑΒΓ διερχομένη, λέγεται διατέμνουσα αὐτοῦ.

*Ἀπόδειξις.* Ἄς ὑπολογίσωμεν πρῶτον τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμητικῶν λόγων, εἰς τοὺς ὁποίους ἡ διατέμνουσα ΔΖΕ (σχ. 161 καὶ 162) τέμνει τὰ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{\Gamma A}$. Πρὸς τοῦτο θεωροῦμεν τὰς ἀποστάσεις ΑΑ′, ΒΒ′, ΓΓ′ τῶν κορυφῶν ἀπὸ τῆς δια-



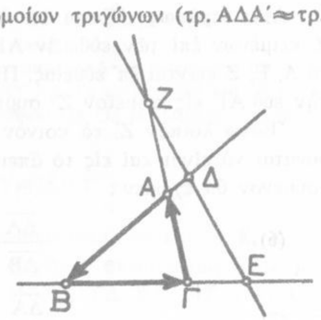

Σχ. 161

τεμνούσης καὶ ἐκ τῶν σχηματιζομένων ὁμοίων τριγώνων (τρ. ΑΔΑ′≈τρ. ΒΔΒ′ κ.τ.λ.) λαμβάνομεν :

$$(1)\ \frac{\Delta A}{\Delta B}=\frac{AA'}{BB'},\ \frac{EB}{E\Gamma}=\frac{BB'}{\Gamma\Gamma'},\ \frac{Z\Gamma}{ZA}=\frac{\Gamma\Gamma'}{AA'}$$

Διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῶν (1) κατὰ μέλη λαμβάνομεν :

$$(2)\quad \frac{\Delta A}{\Delta B}\cdot\frac{EB}{E\Gamma}\cdot\frac{Z\Gamma}{ZA}=1.$$



Σχ. 162

Ἐξ ἄλλου γνωρίζομεν ὅτι ἡ διατέμνουσα :

*ἢ τέμνει δύο πλευρὰς καὶ τὴν προέκτασιν τῆς τρίτης*
*ἢ τέμνει τὰς προεκτάσεις καὶ τῶν τριῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου.*

Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν, ἂν Δ, Ζ εἶναι ἐσωτερικὰ σημεῖα τῶν πλευρῶν καὶ Ε ἐξωτερικόν, θὰ εἶναι :

$$(3)\qquad \frac{\overline{\Delta A}}{\overline{\Delta B}}=-\frac{\Delta A}{\Delta B},\ \frac{\overline{EB}}{\overline{E\Gamma}}=\frac{EB}{E\Gamma},\ \frac{\overline{Z\Gamma}}{\overline{ZA}}=-\frac{Z\Gamma}{ZA}.$$

Πολ/ντες τὰς (3) κατὰ μέλη καὶ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὴν (2) εὑρίσκομεν : $\dfrac{\overline{\Delta A}}{\overline{\Delta B}}\cdot\dfrac{\overline{EB}}{\overline{E\Gamma}}\cdot\dfrac{\overline{B\Gamma}}{\overline{ZA}}=+1.$

Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν θὰ ἔχωμεν (σχ. 162) :

$$(4)\quad \frac{\overline{\Delta A}}{\overline{\Delta B}}=\frac{\Delta A}{\Delta B},\ \frac{\overline{EB}}{\overline{E\Gamma}}=\frac{EB}{E\Gamma},\ \frac{\overline{Z\Gamma}}{\overline{ZA}}=\frac{Z\Gamma}{ZA},$$

ὁπότε πάλιν διὰ πολ/σμοῦ κατὰ μέλη λαμβάνομεν, βάσει τῆς (2) :

$$(5)\qquad \frac{\overline{\Delta A}}{\overline{\Delta B}}\cdot\frac{\overline{EB}}{\overline{E\Gamma}}\cdot\frac{\overline{Z\Gamma}}{\overline{ZA}}=+1.$$

**Εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν**, καθ' ἣν ἡ εὐθ ΔΖ εἶναι παρ/λος πρὸς τὴν ΒΓ, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὸ Ε ὡς τὸ εἰς ἄπειρον σημεῖον τῆς εὐθ ΒΓ (§ 65), ὁπότε ὁ λόγος $\dfrac{\overline{EB}}{\overline{E\Gamma}}=1$, οἱ δὲ λόγοι $\dfrac{\overline{\Delta A}}{\overline{\Delta B}}$ καὶ $\dfrac{\overline{Z\Gamma}}{\overline{ZA}}$ εἶναι ἀντίστροφοι (θεωρ. Θαλοῦ) καὶ ἡ σχέσις (5) **πάλιν ἰσχύει** $\left(\text{ὅπου τὸ κατ' ἐκδοχὴν σημεῖον Ε πληροῖ συμβατικῶς : } \dfrac{\overline{EB}}{\overline{E\Gamma}}=1\right).$

**Ἀντιστρόφως :** Ἔστω ὅτι ἡ (5) πληροῦται ὑπὸ τριῶν σημείων Δ, Ε, Ζ κειμένων ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ ἀντιστοίχως. Θὰ δείξωμεν ὅτι τὰ Δ, Ε, Ζ κεῖνται ἐπ' εὐθείας. Πρὸς τοῦτο θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ ευθ ΔΕ τέμνει τὴν ευθ ΑΓ εἰς σημεῖον Ζ′ συμπίπτον μὲ τὸ Ζ.

Ἔστω λοιπὸν Ζ′ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν εὐθειῶν ΔΕ καὶ ΑΓ (τὸ Ζ′ δύναται νὰ εἶναι καὶ εἰς τὸ ἄπειρον σημεῖον τῆς εὐθ ΑΓ). Κατὰ τὸ προηγούμενον θὰ ἔχωμεν :

$$(6) \qquad \frac{\overline{\Delta A}}{\overline{\Delta B}} \cdot \frac{\overline{EB}}{\overline{E\Gamma}} \cdot \frac{\overline{Z'\Gamma}}{\overline{Z'A}} = +1 \text{ ἐνῷ ἐξ ὑποθέσεως}$$

$$(7) \qquad \frac{\overline{\Delta A}}{\overline{\Delta B}} \cdot \frac{\overline{EB}}{\overline{E\Gamma}} \cdot \frac{\overline{Z\Gamma}}{\overline{ZA}} = +1.$$

Ἐκ τῶν (6) καὶ (7) συνάγεται : $\dfrac{\overline{Z'\Gamma}}{\overline{Z'A}} = \dfrac{\overline{Z\Gamma}}{\overline{ZA}} \Rightarrow Z' \equiv Z$, διότι τὰ Ζ καὶ Ζ′ διαιροῦν τὸ $\overrightarrow{\Gamma A}$ εἰς τὸν ἴδιον *ἀλγεβρικὸν λόγον* (§ **61**).

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

565. Ἐὰν τρία σημεῖα Δ, Ε, Ζ ἐπὶ τῶν φορέων τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ τριγώνου κεῖνται ἐπ' εὐθείας, τότε καὶ τὰ συμμετρικά των, Δ′, Ε′, Ζ′ ὡς πρὸς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ κεῖνται, πάλιν, ἐπ' εὐθείας.

566. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ μέσα τῶν τριῶν τμημάτων, ἕκαστον τῶν ὁποίων ὁρίζεται ἀπὸ τοὺς πόδας τῆς ἐσωτερικῆς καὶ ἐξωτερικῆς διχοτόμου τῶν ἀγομένων ἀπὸ μιᾶς κορυφῆς τριγώνου, κεῖνται ἐπ' εὐθείας. (**Ὑποδ.** βλ. § **64**).

567. Εἰς πᾶν τρίγωνον οἱ πόδες τῶν τριῶν ἐξωτερικῶν διχοτόμων κεῖνται ἐπ' εὐθείας. Ἐπίσης οἱ πόδες δύο ἐσωτερικῶν διχοτόμων καὶ τῆς τρίτης ἐξωτερικῆς κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

568. Διὰ τοῦ ἑνὸς κοινοῦ σημείου Ρ δύο τεμνομένων περιφερειῶν (Ο) καὶ (Ο′) ἄγονται δύο τέμνουσαι τῶν περιφερειῶν κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας, ἐξ ὧν ἡ μία τέμνει τὰς (Ο), (Ο′) καὶ τὴν διάκεντρον εἰς Γ, Α, Δ, ἡ δὲ ἄλλη τὰς ἰδίας γραμμὰς εἰς Γ′, Α′, Δ′. Νὰ δειχθῇ ὅτι $\dfrac{\overline{\Delta A}}{\overline{\Delta\Gamma}} = \dfrac{\overline{\Delta' A'}}{\overline{\Delta'\Gamma'}}$.

569. **Θεώρημα τοῦ Pascal.** i) Ἄς θεωρήσωμεν τυχὸν ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον καὶ ἂς ἀριθμήσωμεν τοὺς φορεῖς τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ μὲ 1, 2, 3, 4, 5, 6. Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ τομαὶ Κ, Λ, Μ τῶν (1, 4), (2, 5), (3, 6) κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

(**Ὑποδ.** Αἱ εὐθεῖαι 1, 3, 5 σχηματίζουν τρίγωνον $O_1O_2O_3$ ἐπὶ δὲ τῶν εὐθειῶν $O_1O_2$, $O_2O_3$, $O_3O_1$ κεῖνται τὰ Κ, Λ, Μ. Ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ἡ σχέσις : $\dfrac{\overline{KO_1}}{\overline{KO_2}} \cdot \dfrac{\overline{\Lambda O_2}}{\overline{\Lambda O_3}} \cdot \dfrac{\overline{MO_3}}{\overline{MO_1}} = +1$. Πρὸς τοῦτο ἐφαρμόζομεν τὸ (Θ) τοῦ Μενελάου εἰς τὸ τρ.$O_1O_2O_3$ μὲ διατεμνούσας ΚΕΔ, ΛΒΓ, ΜΖΑ, πολ/μεν κατὰ μέλη καὶ χρησιμοποιοῦμεν τὸ θεώρημα τῶν τεμνουσῶν (§ **113**).

ii) Ὑποθέτοντες ὅτι αἱ κορυφαὶ Α καὶ Β τείνουν νὰ συμπέσουν, συναγάγετε ἓν θεώρημα διὰ πεντάγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον.

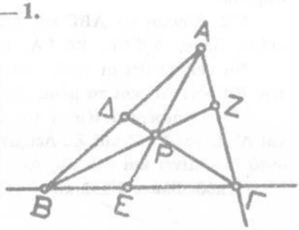
iii) Συναγάγετε ἐπίσης ἰδιότητα διὰ τετράπλευρον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον καὶ τέλος ἰδιότητα διὰ τρίγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον.

570. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ τριγ.ΑΒΓ λαμβάνομεν σημεῖον Δ τοιοῦτον, ὥστε $ΔΒ/ΔΓ = \lambda$ καὶ ἐπὶ τῆς ΑΓ σημεῖον Ε τοιοῦτον, ὥστε $ΕΑ/ΕΓ = \mu$. Τὰ τμήματα ΑΔ καὶ ΒΕ ἀλληλοτέμνονται εἰς τι σημεῖον Ο. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ λόγοι ΟΑ/ΟΔ καὶ ΟΒ/ΟΕ συναρτήσει τῶν λ, μ.

## ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ CEVA

**132. Θεώρημα τοῦ Céva.— Ἔστωσαν τρία σημεῖα Δ, Ε, Ζ ἐπὶ τῶν φορέων τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ ἑνὸς τριγώνου ἀντιστοίχως. Τότε μία ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ΓΔ, ΒΖ, ΑΕ** (σχ. 163) **διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, εἶναι :**

$$\frac{\overline{ΔΑ}}{\overline{ΔΒ}} \cdot \frac{\overline{ΕΒ}}{\overline{ΕΓ}} \cdot \frac{\overline{ΖΓ}}{\overline{ΖΑ}} = -1.$$

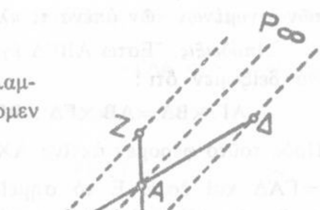


Σχ. 163

*Ἀπόδειξις.* Ἔστω πρῶτον ὅτι αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ΑΕ, ΒΖ, ΓΔ συντρέχουν εἰς τὸ Ρ. Τὸ θεώρημα τοῦ Μενελάου ἐφαρμοζόμενον εἰς τὸ τρ. ΑΒΕ μὲ διατέμνουσαν ΔΡΓ καὶ εἰς τὸ τρ. ΑΕΓ μὲ διατέμνουσαν ΒΡΖ δίδει ἀντιστοίχως :

$$(1) \quad \frac{\overline{ΔΑ}}{\overline{ΔΒ}} \cdot \frac{\overline{ΓΒ}}{\overline{ΓΕ}} \cdot \frac{\overline{ΡΕ}}{\overline{ΡΑ}} = +1 \text{ καὶ}$$

$$(2) \quad \frac{\overline{ΖΓ}}{\overline{ΖΑ}} \cdot \frac{\overline{ΡΑ}}{\overline{ΡΕ}} \cdot \frac{\overline{ΒΕ}}{\overline{ΒΓ}} = +1.$$



Σχ. 164

Πολλαπλασιάζοντες κατὰ μέλη καὶ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι $\overline{ΓΒ} = -\overline{ΒΓ}$ εὑρίσκομεν

$$\frac{\overline{ΔΑ}}{\overline{ΔΒ}} \cdot \frac{\overline{ΖΓ}}{\overline{ΖΑ}} \cdot \frac{\overline{ΒΕ}}{\overline{ΓΕ}} = -1 \text{ καὶ ἐπειδὴ}$$

$$\frac{\overline{ΒΕ}}{\overline{ΓΕ}} = \frac{\overline{ΕΒ}}{\overline{ΕΓ}}, \text{ ἔχομεν τελικῶς}$$

$$(3) \quad \frac{\overline{ΔΑ}}{\overline{ΔΒ}} \cdot \frac{\overline{ΕΒ}}{\overline{ΕΓ}} \cdot \frac{\overline{ΖΓ}}{\overline{ΖΑ}} = -1.$$

**Εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν,** καθ' ἣν τὸ Ρ εἶναι κατ' ἐκδοχὴν (εἰς ἄπειρον) σημεῖον, δηλ. αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ΑΕ, ΒΖ, ΓΔ εἶναι παράλληλοι, αἱ σχέσεις (1) καὶ (2) ἰσχύουν, ὡς εἴδομεν εἰς τὸ θεώρημα τοῦ Μενελάου $\left(\text{μὲ } \frac{\overline{ΡΕ}}{\overline{ΡΑ}} = +1, \frac{\overline{ΡΑ}}{\overline{ΡΕ}} = +1\right)$, ἄρα καὶ ἡ (3) **ἰσχύει.**

**Ἀντιστρόφως,** ἂν πληροῦται ἡ (3), αἱ δὲ ΓΔ καὶ ΒΖ τέμνωνται, ἔστω εἰς Ρ, ἀποδεικνύομεν (ὅπως εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα) ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΡ τέμνει τὴν εὐθ ΒΓ εἰς σημεῖον Ε΄, ταυτιζόμενον μὲ τὸ Ε. Ἐκ τούτου συνάγεται ὅτι αἱ ευθ ΑΕ, ΓΔ, ΒΖ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου (κειμένου εἰς πεπερασμένην ἢ ἄπειρον ἀπόστασιν).

**Παρατήρησις.** Ἐὰν τρία σημεῖα Δ, Ε, Ζ κείμενα ἐπὶ τῶν φορέων τῶν πλευρῶν τρ. ΑΒΓ πληροῦν τὴν συνθήκην Céva, τότε τὰ συζυγῆ ἁρμονικά των ὡς πρὸς τὰς ἀντιστοίχους πλευρὰς πληροῦν τὴν συνθήκην Μενελάου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

571. Αἱ τρεῖς εὐθεῖαι, ὧν ἑκάστη ἑνώνει μίαν κορυφὴν τριγώνου μὲ τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου μετὰ τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

572. Δίδεται τρ. ΑΒΓ καὶ τρία τμήματα ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄ συντρέχοντα εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, ὅπου, Α΄∈ΒΓ, Β∈΄ΓΑ, Γ΄∈ΑΒ.

Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ τρεῖς εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι : τὰ μέσα τῶν ΑΑ΄ καὶ ΒΓ, τὰ μέσα τῶν ΒΒ΄ καὶ ΑΓ καὶ τὰ μέσα τῶν ΓΓ΄ καὶ ΑΒ συντρέχουν ἐπίσης εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

573. Περιφέρεια τέμνει τὰς πλευρὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἑνὸς τρ.ΑΒΓ ἀντιστοίχως εἰς Δ καὶ Δ΄, Ε καὶ Ε΄, Ζ καὶ Ζ΄. Δείξατε ὅτι, ἂν αἱ ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ συντρέχουν εἰς ἓν σημεῖον, τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὰς ΑΔ΄ ,ΒΕ΄, ΓΖ΄.

(**Ὑπόδ.** Βλέπε **§ 132** καὶ **§ 113**).

## ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΥ

**133. α΄) 1ον θεώρημα τοῦ Πτολεμαίου.— Εἰς πᾶν (κυρτὸν) ἐγγράψιμον τετράπλευρον, τὸ γινόμενον τῶν διαγωνίων ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν ἀπέναντι πλευρῶν.**

*Ἀπόδειξις.* Ἔστω ΑΒΓΔ ἐγγράψιμον, κυρτὸν τετράπλευρον (σχ. 165). Θὰ δείξωμεν ὅτι :

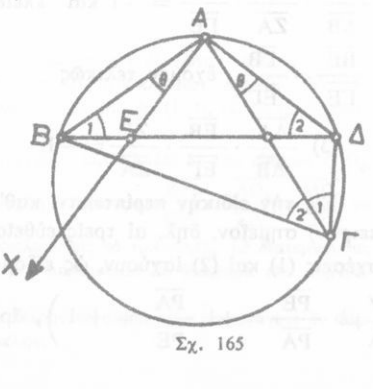
$$ΑΓ \times ΒΔ = ΑΒ \times ΓΔ \times ΒΓ \times ΑΔ \quad \text{(1ον θεώρ. Πτολεμαίου).}$$

Πρὸς τοῦτο φέρομεν ἀκτῖνα ΑΧ τῆς γωνίας $\widehat{ΒΑΔ}$ τοιαύτην, ὥστε $\widehat{ΒΑΧ} = \widehat{ΓΑΔ}$ καὶ ἔστω Ε τὸ σημεῖον τομῆς τῆς ΑΧ μετὰ τῆς διαγωνίου ΒΔ. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων :

$\widehat{ΒΑΕ} = \widehat{ΓΑΔ}$ καὶ $\widehat{Β_1} = \widehat{Γ_1} \Rightarrow$

τρ.ΑΒΕ≈τρ.ΑΓΔ $\Rightarrow \dfrac{ΒΕ}{ΓΔ} = \dfrac{ΑΒ}{ΑΓ} \Rightarrow$

(1) $ΒΕ = \dfrac{ΑΒ \times ΓΔ}{ΑΓ}$.




Σχ. 165

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων :

$\widehat{ΒΑΓ} = \widehat{ΕΑΔ}$ καὶ $\widehat{Γ_2} = \widehat{Δ_2} \Rightarrow$

$$\text{τρ.}ΑΒΓ \approx \text{τρ.}ΕΑΔ \Rightarrow \frac{ΕΔ}{ΒΓ} = \frac{ΑΔ}{ΑΓ} \Rightarrow$$

$$(2) \qquad ΕΔ = \frac{ΒΓ \times ΑΔ}{ΑΓ}.$$

Διὰ προσθέσεως τῶν (1) καὶ (2) κατὰ μέλη λαμβάνομεν:

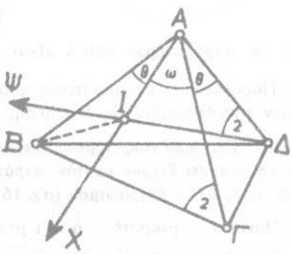
$ΒΕ+ΕΔ = \dfrac{ΑΒ\times ΓΔ + ΒΓ \times ΑΔ}{ΑΓ}$ καὶ ἐπειδὴ $ΒΕ+ΕΔ=ΒΔ$, λαμβάνομεν

τελικῶς: $$ΑΓ\times ΒΔ = ΑΒ\times ΓΔ + ΒΓ\times ΑΔ.$$

**β') Τὸ ἀντίστροφον τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος ἰσχύει: Ἐὰν εἰς κυρτὸν τετράπλευρον τὸ γινόμενον τῶν διαγωνίων ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν ἀπέναντι πλευρῶν, τότε τὸ τετράπλευρον εἶναι ἐγγράψιμον.**

Ἐκ τῶν τεσσάρων γωνιῶν τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ ἔστω μεγαλυτέρα (ἢ μὴ μικροτέρα) τῶν ἄλλων, ἡ $\widehat{ΑΔΓ}$. Ἂς φέρωμεν ἀκτῖνα ΔΨ αὐτῆς τοιαύτην, ὥστε $\widehat{ΑΔΨ} = \widehat{Γ}_2$ $(=\widehat{ΑΓΒ})$. Ἐπίσης, ἂς φέρωμεν ἀκτῖνα ΑΧ τῆς $\widehat{ΒΑΔ}$ τοιαύτην, ὥστε $\widehat{ΒΑΧ} = \widehat{ΓΑΔ}$.

Αἱ ἀκτῖνες ΑΧ καὶ ΔΨ τέμνονται, διότι $\widehat{ΧΑΔ} + \widehat{ΨΔΑ} = \widehat{ΒΑΓ} + \widehat{ΒΓΑ} < 2$ ὀρθ. Ἔστω Ι τὸ σημεῖον τομῆς τῶν ἀκτίνων ΑΧ καὶ ΔΨ.




Σχ. 166

Ἐπειδὴ τρ.ΙΑΔ≈τρ.ΒΑΓ $\Rightarrow \dfrac{ΙΔ}{ΒΓ} = \dfrac{ΑΔ}{ΑΓ} \Rightarrow$ (1) $ΙΔ\times ΑΓ = ΒΓ\times ΑΔ$. Ἐκ τῶν ἰδίων τριγώνων ἕπεται: $\dfrac{ΑΙ}{ΑΒ} = \dfrac{ΑΔ}{ΑΓ}$, τὸ ὁποῖον μαζὶ μὲ τὴν $\widehat{ΒΑΙ} = \widehat{ΓΑΔ}$ συνεπάγεται ὅτι τρ.ΒΑΙ≈τρ.ΓΑΔ (δύο πλευρὰς ἀναλόγους καὶ τὰς περιεχομένας γωνίας ἴσας). Ἐπομένως:

$$\frac{ΒΙ}{ΓΔ} = \frac{ΑΒ}{ΑΓ} \Rightarrow \quad (2) \quad ΒΙ\times ΑΓ = ΑΒ\times ΓΔ.$$

Διὰ προσθέσεως τῶν (1) καὶ (2) κατὰ μέλη λαμβάνομεν:
$ΑΓ.(ΙΔ+ΙΒ) = ΒΓ\times ΑΔ + ΑΒ\times ΓΔ$, τὸ ὁποῖον, λόγῳ τῆς ὑποθέσεως, δίδει $ΙΔ+ΙΒ = ΒΔ$. Ἄρα τὸ Ι κεῖται ἐπὶ τῆς διαγωνίου ΒΔ καὶ ἐπειδὴ $\widehat{ΑΔΙ} = \widehat{ΑΓΒ}$, θὰ εἶναι $\widehat{ΑΔΒ} = \widehat{ΑΓΒ}$ $\Rightarrow$ Α, Β, Γ, Δ ὁμοκυκλικά.

**134. 2ον Θεώρημα τοῦ Πτολεμαίου α') Αἱ διαγώνιοι κυρτοῦ ἐγγραψίμου τετραπλεύρου εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς τὰ ἀθροίσματα τῶν γινομένων τῶν πλευρῶν τῶν συντρεχουσῶν εἰς τὰ ἄκρα των, δηλαδή, ἂν ΑΒΓΔ ἐγγράψιμον μὲ ΑΒ=α, ΒΓ=β, ΓΔ=γ, ΔΑ=δ, τότε ἰσχύει**

$$\frac{ΑΓ}{ΒΔ} = \frac{αδ+βγ}{αβ+γδ}$$

*'Απόδειξις*. Τὰ τέσσαρα τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΒΔ, ΔΓΒ ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα R περιγεγραμμένου κύκλου. 'Εὰν εἰς τὴν προφανῆ ἰσότητα τῶν ἐμβαδῶν (ΑΒΓ)+(ΑΓΔ)=(ΑΒΔ)+(ΔΓΒ) χρησιμοποιήσωμεν τὸν τύπον : ἐμβαδὸν τριγώνου=γινόμενον τῶν τριῶν πλευρῶν διὰ 4R (§ **95**, V), λαμβάνομεν :

$$\frac{\alpha\beta\cdot \mathrm{A\Gamma}}{4\mathrm{R}}+\frac{\gamma\delta\cdot \mathrm{A\Gamma}}{4\mathrm{R}}=\frac{\alpha\delta\cdot \mathrm{B\Delta}}{4\mathrm{R}}+\frac{\beta\gamma . \mathrm{B\Delta}}{\mathrm{RR}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\alpha\beta+\gamma\delta)\cdot \mathrm{A\Gamma}=(\alpha\delta+\beta\gamma)\cdot \mathrm{B\Delta} \Rightarrow \frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{B\Delta}}=\frac{\alpha\delta+\beta\gamma}{\alpha\beta+\gamma\delta}.$$

**β΄) Τὸ ἀντίστροφον τοῦ δευτέρου θεωρήματος τοῦ Πτολεμαίου ἰσχύει : Ἐὰν εἰς κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ μὲ ΑΒ=α, ΒΓ=β, ΓΔ=γ, ΔΑ=δ ἰσχύῃ ἡ ἰσότης :**

$$\frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{B\Delta}}=\frac{\alpha\delta+\beta\gamma}{\alpha\beta+\gamma\delta},$$

**τότε τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγράψιμον.**

Παραθέτομεν ἐνημερωτικῶς μίαν ἀπόδειξιν τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος. Θὰ χωρίσωμεν τὴν ἀπόδειξιν εἰς δύο μέρη.

**α΄) (Θ). Δοθέντος κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ μὲ πλευρὰς ΑΒ=α, ΒΓ=β, ΓΔ=γ, ΔΑ=δ ὑπάρχει ἕτερον κυρτὸν τετράπλευρον Α΄Β΄Γ΄Δ΄ μὲ τὰς ἰδίας κατὰ σειρὰν πλευρὰς α, β, γ, δ, ἀλλὰ ἐγγράψιμον** (σχ. 167).

Ἔστω δ ἡ μικροτέρα ἢ ὄχι μεγαλυτέρα τῶν τριῶν ἄλλων πλευρῶν δηλ. :

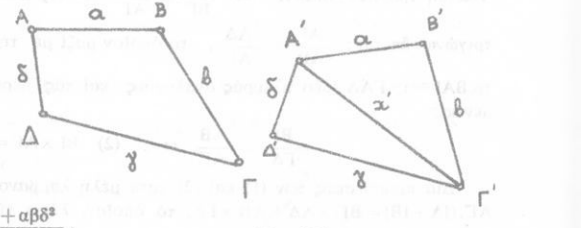
(1) $\delta \leqq \alpha, \quad \delta \leqq \beta, \quad \delta \leqq \gamma$

Ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ Α΄Β΄Γ΄Δ΄ ὑπάρχει καὶ εἶναι κατεσκευασμένον καὶ ἂς καλέσωμεν x΄ τὴν διαγώνιον Α΄Γ΄ αὐτοῦ. Τότε

$x'\cdot \mathrm{B'\Delta'}=\alpha\gamma+\beta\delta$

$$\frac{x'}{\mathrm{B'\Delta'}}=\frac{\beta\gamma+\alpha\delta}{\alpha\beta+\gamma\delta},$$

ὁπότε διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη λαμβάνομεν



Σχ. 167

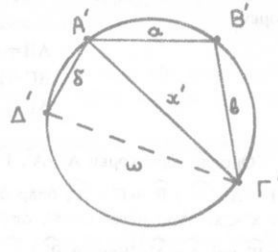
(2) $$x'^2=\frac{\alpha\beta\gamma^2+\beta^2\gamma\delta+\alpha^2\gamma\delta+\alpha\beta\delta^2}{\alpha\beta+\gamma\delta},$$

ἐξ ἧς κατασκευάζεται τὸ x΄.

Θὰ δείξωμεν ὅτι μὲ πλευρὰς x΄, α, β κατασκευάζεται τὸ τρ.Α΄Β΄Γ΄. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ : $x'<\alpha+\beta$ καὶ $x'>|\alpha-\beta|$. Ἔχομεν τὰς ἰσοδυναμίας $x'<\alpha+\beta \iff x'^2<(\alpha+\beta)^2$ $\iff \frac{\alpha\beta\gamma^2+\beta^2\gamma\delta+\alpha^2\gamma\delta+\alpha\beta\delta^2}{\alpha\beta+\gamma\delta}<\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta \iff \alpha\beta\gamma^2+\delta^2\alpha\beta<\alpha^3\beta+\alpha\beta^3+2\alpha^2\beta^2+$ $+2\alpha\beta\gamma\delta \iff$ (διὰ διαιρέσεως μὲ αβγδ) $\frac{\gamma}{\delta}+\frac{\delta}{\gamma}<\frac{\alpha^2}{\gamma\delta}+\frac{\beta^2}{\gamma\delta}+\frac{2\alpha\beta}{\gamma\delta}+2 \iff$ $\frac{(\gamma-\delta)^2}{\gamma\delta}<\frac{(\alpha+\beta)^2}{\gamma\delta} \iff |\gamma-\delta|<\alpha+\beta$. Τοῦτο ὅμως εἶναι ἀληθές, διότι ἀπὸ τὸ ΑΒΓΔ ἔχομεν $|\gamma-\delta|<\mathrm{A\Gamma}<\alpha+\beta$.

Ὁμοίως δεικνύεται ὅτι $x' > |\alpha - \beta|$, δηλ. $x'^2 > (\alpha-\beta)^2$. Ὥστε τὸ τρ.$A'B'\Gamma'$ ὑπάρχει καὶ κατασκευάζεται. Περιγράφομεν κατόπιν κύκλον $(A'B'\Gamma')$ καὶ ἐπὶ τοῦ τόξου $\widehat{A'\Gamma'}$ τοῦ μὴ περιέχοντος τὸ $B'$ λαμβάνομεν χορδὴν $A'\Delta' = \delta$. Τοῦτο εἶναι δυνατόν, διότι ἰσχύει ἡ ἀνισότης $\delta < x'$. Πράγματι, αὕτη ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴν $\delta^2(\alpha\beta+\gamma\delta) < \alpha\beta\gamma^2 + \beta^2\gamma\delta + \alpha^2\gamma\delta +$ $+\alpha\beta\delta^2$ (λόγῳ τῆς (2)), ἥτις γράφεται $\delta^2 < \alpha^2 + \beta^2 + \dfrac{\alpha\beta\gamma}{\delta}$ καὶ ἀληθεύει λόγῳ τῶν (1).

*Σύνθεσις*. Κατασκευάζομεν τρίγωνον $A'B'\Gamma'$ μὲ πλευρὰς $\alpha$, $\beta$ καὶ $x'$ ὁρισθεῖσαν ἐκ τῆς (2). Τοῦτο εἶναι, ὡς εἴδομεν, δυνατόν. Περιγράφομεν κύκλον περὶ τὸ τρ.$A'B'\Gamma'$ καὶ ἐπὶ τοῦ τόξου $\widehat{A'\Gamma'}$ τοῦ μὴ περιέχοντος τὸ $B'$ λαμβάνομεν χορδὴν $A'\Delta' = \delta$. Τοῦτο, ὅπως εἴδομεν, εἶναι δυνατόν. Τὸ ἐγγράψιμον τετράπλευρον $A'B'\Gamma'\Delta'$ (σχ. 168) εἶναι τὸ ζητούμενον.



Σχ. 168

*Ἀπόδειξις*. Ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ τετάρτη πλευρὰ $\omega$ ἰσοῦται μὲ $\gamma$. Ἔχομεν τὰς σχέσεις $\{x' \cdot B'\Delta' = \alpha\omega + \delta\beta$ καὶ $x'/B'\Delta' = (\alpha\delta+\beta\omega)/(\alpha\beta+\omega\delta)\}$, ἐξ ὧν

$$x'^2 = \frac{\alpha\beta\omega^2 + \beta^2\omega\delta + \alpha^2\omega\delta + \alpha\beta\delta^2}{\alpha\beta + \delta\omega} \tag{3}$$

Ἐκ τῶν (2) καὶ (3) λαμβάνομεν τὴν δευτεροβάθμιον ὡς πρὸς $\omega$ ἐξίσωσιν:

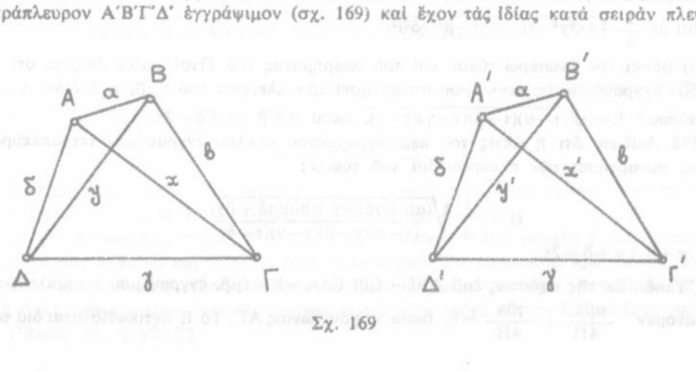
$$\frac{\alpha\beta\omega^2 + \beta^2\omega\delta + \alpha^2\omega\delta + \alpha\beta\delta^2}{\alpha\beta + \delta\omega} = \frac{\alpha\beta\gamma^2 + \beta^2\gamma\delta + \alpha^2\gamma\delta + \alpha\beta\delta^2}{\alpha\beta + \delta\gamma},$$

ἡ ὁποία ἔχει μίαν προφανῆ λύσιν: $\boxed{\omega = \gamma}$ Ἡ ἑτέρα λύσις της εἶναι ἀρνητικὴ καὶ ἀπορρίπτεται, διότι ἡ ἐξίσωσις γράφεται τελικῶς $\alpha\beta(\alpha\beta+\gamma\delta)\omega^2 + \delta(\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - \alpha\beta\gamma^2 -$ $\alpha\beta\delta^2)\omega + \alpha\beta\gamma\delta\left(\delta^2 - \alpha^2 - \beta^2 - \dfrac{\alpha\beta\gamma}{\delta}\right) = 0$ καὶ ἔχει σταθερὸν ὅρον ἀρνητικόν, λόγῳ τῆς (1), ἄρα ῥίζας ἑτεροσήμους.

β') Ἔστω κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ (σχ. 169) πλευρῶν $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ καὶ διαγωνίων $x$, $\psi$, εἰς τὸ ὁποῖον ἰσχύει ἡ σχέσις

$$\frac{x}{\psi} = \frac{\alpha\delta + \beta\gamma}{\alpha\beta + \gamma\delta} \tag{4}$$

Θὰ δείξωμεν ὅτι τὸ ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγράψιμον. Πρὸς τοῦτο κατασκευάζομεν ἕτερον τετράπλευρον $A'B'\Gamma'\Delta'$ ἐγγράψιμον (σχ. 169) καὶ ἔχον τὰς ἰδίας κατὰ σειρὰν πλευράς



Σχ. 169

α, β, γ, δ. Τοῦτο εἶναι δυνατόν, ὡς ἐδείχθη προηγουμένως. Ἐὰν x΄, ψ΄ αἱ ἀντίστοιχοι διαγώνιοι τοῦ δευτέρου, τότε $\dfrac{x'}{\psi'}=\dfrac{\alpha\delta+\beta\gamma}{\alpha\beta+\gamma\delta}$, ὁπότε, λόγῳ τῆς (4):

$$\frac{x'}{\psi'}=\frac{x}{\psi} \tag{5}$$

Ἔστω ὅτι $x'>x$. Τότε ἐκ τῆς (5) θὰ εἶναι καὶ $\psi'>\psi$. Εἰς τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ ἔχομεν:

$$\left.\begin{aligned} AB&=A'B'\\ B\Gamma&=B'\Gamma'\\ A\Gamma&>A'\Gamma'\end{aligned}\right\}\Rightarrow \widehat{B}>\widehat{B'}$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν $\widehat{A}>\widehat{A'}$, $\widehat{\Gamma}>\widehat{\Gamma'}$, $\widehat{\Delta}>\widehat{\Delta'}$ καὶ διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη: $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{\Gamma}+\widehat{\Delta}>\widehat{A'}+\widehat{B'}+\widehat{\Gamma'}+\widehat{\Delta'}$, ὅπερ ἄτοπον. Ἄρα δὲν εἶναι $x'>x$. Ὁμοίως ἀποκλείομεν καὶ τὴν $x'<x$. Ἄρα μένει $x=x'$, ὁπότε τρ.ΑΒΓ = τρ.Α΄Β΄Γ΄ καὶ τρ.ΑΔΓ = τρ.Α΄Δ΄Γ΄, ἐξ ὧν $\widehat{B}=\widehat{B'}$ καὶ $\widehat{\Delta}=\widehat{\Delta'}$. Ἐπειδὴ $\widehat{B'}+\widehat{\Delta'}=2\text{ορθ}\Rightarrow\widehat{B}+\widehat{\Delta}=2\text{ορθ}\Rightarrow$ ΑΒΓΔ ἐγγράψιμον.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

574. **Θεώρημα τῶν τριῶν χορδῶν.** Ἐκ τῶν χορδῶν ΑΒ = α καὶ ΒΓ = β δύο διαδοχικῶν ἐλασσόνων τόξων καὶ τῆς ἀκτῖνος R τοῦ κύκλου, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ χορδὴ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τόξων.

(**Ὑπόδ.** Νὰ ἀχθῇ ἡ διάμετρος ΒΒ΄ ἡ διερχομένη διὰ τοῦ κοινοῦ ἄκρου τῶν γνωστῶν χορδῶν καὶ νὰ ἐφαρμοσθῇ τὸ 1ον θεώρημα τοῦ Πτολεμαίου εἰς τὸ ΑΒΓΒ΄).

575. **Θεώρημα τῶν τριῶν χορδῶν.** Ἐκ τῶν χορδῶν δύο ἐλασσόνων τόξων καὶ τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου νὰ ὑπολογισθῇ ἡ χορδὴ τῆς διαφορᾶς τῶν τόξων. (**Ὑπόδ.** Ἔστωσαν $\widehat{A\Gamma}<\widehat{AB}$ τὰ τόξα καὶ ΑΓ = α, ΑΒ = β αἱ γνωσταὶ χορδαί. Ἄγομεν τὴν διάμετρον ΑΑ΄ = 2R τὴν διερχομένην διὰ τοῦ κοινοῦ ἄκρου τῶν γνωστῶν χορδῶν καὶ ἐργαζόμεθα, ὡς προηγουμένως).

576. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ μήκη τῶν διαγωνίων ἐγγραψίμου τετραπλεύρου συναρτήσει τῶν πλευρῶν αὐτοῦ (βλ. 1ον καὶ 2ον θεώρ. Πτολεμαίου).

577. **Ἐμβαδὸν ἐγγραψίμου τετραπλεύρου.** i) Ἔστωσαν α, β, γ, δ αἱ πλευραὶ καὶ x, y αἱ διαγώνιοι κυρτοῦ τετραπλεύρου. Ἐὰν p ἡ προβολὴ τῆς y ἐπὶ τὴν x, τότε βάσει τῆς σχέσεως $|(\alpha^2+\gamma^2)-(\beta^2+\delta^2)|=2xp$ (ἄσκ. 416) δείξατε ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου ἰσοῦται μὲ $\frac{1}{4}\sqrt{4x^2y^2-(\alpha^2+\gamma^2-\beta^2-\delta^2)^2}$.

ii) Βάσει τοῦ ἀνωτέρω τύπου καὶ τοῦ θεωρήματος τοῦ Πτολεμαίου δείξατε ὅτι τὸ ἐμβαδὸν ἐγγραψίμου τετραπλεύρου συναρτήσει τῶν πλευρῶν του α, β, γ, δ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου: $E=\sqrt{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)(\tau-\delta)}$, ὅπου $\alpha+\beta+\gamma+\delta=2\tau$.

578. Δείξατε ὅτι ἡ ἀκτὶς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου ἐγγραψίμου τετραπλεύρου δίδεται συναρτήσει τῶν πλευρῶν διὰ τοῦ τύπου:

$$R=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{(\alpha\beta+\gamma\delta)(\alpha\gamma+\beta\delta)(\alpha\delta+\beta\gamma)}{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)(\tau-\delta)}}$$

ὅπου $\alpha+\beta+\gamma+\delta=2\tau$.

(**Ὑποδ.** Ἐκ τῆς σχέσεως ἐμβ ΑΒΓ + ἐμβ ΓΔΑ = Ε = ἐμβ. ἐγγραψίμου τετραπλεύρου, λαμβάνομεν $\dfrac{\alpha\beta x}{4R}+\dfrac{\gamma\delta x}{4R}=E$, ὅπου x ἡ διαγώνιος ΑΓ. Τὸ Ε ἀντικαθίσταται διὰ τοῦ τύπου τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως καὶ τὸ x ὑπολογίζεται συναρτήσει τῶν πλευρῶν συμφώνως πρὸς τὴν ἄσκ. 576).

579. Εἰς πᾶν μὴ ἐγγράψιμον κυρτὸν τετράπλευρον, τὸ γινόμενον τῶν διαγωνίων εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν γινομένων τῶν ἀπέναντι πλευρῶν.
(Ὑποδ. Βλ. § 133, β').

580. Συναρτήσει τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ τετραγώνου τοῦ κατασκευαζομένου ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης i) ἐξωτερικῶς τοῦ τριγώνου ἢ ii) πρὸς τὸ μέρος τῆς ἀπέναντι κορυφῆς.

581. i) Νὰ δειχθῇ διὰ τοῦ (Θ) τοῦ Πτολεμαίου ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τοῦ περικέντρου ὀξυγωνίου τριγώνου ἀπὸ τὰς τρεῖς πλευρὰς ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου κύκλου.

ii) Ἐὰν τὸ τρίγωνον εἶναι ἀμβλυγώνιον, τὸ ἀνωτέρω ἰσχύει, ἂν ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τῆς μεγαλυτέρας πλευρᾶς ληφθῇ ἀρνητική.

iii) Ἐκ τῶν δύο προηγουμένων προκύπτει ὅτι : εἰς πᾶν ἐγγράψιμον κυρτὸν τετράπλευρον τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων τῶν ἐγγεγραμμένων κύκλων τῶν δύο τριγώνων, εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζεται τὸ τετράπλευρον ὑπὸ μιᾶς διαγωνίου, εἶναι τὸ αὐτὸ καὶ διὰ τὰς δύο διαγωνίους.

582. Ἐὰν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ εἶναι τρεῖς διαδοχικαὶ χορδαὶ κύκλου, μήκους λ ἑκάστη, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις τῶν μέσων τῶν ΑΒ καὶ ΓΔ συναρτήσει τοῦ λ καὶ τῆς ἀκτῖνος R τοῦ κύκλου.

583. Ἐὰν Α τὸ ἄκρον ἀκτῖνος καθέτου ἐπὶ τὴν διάμετρον ΒΓ καὶ Μ τυχὸν σημεῖον τοῦ τεταρτημορίου $\widehat{ΑΓ}$, δείξατε ὅτι :

$$\frac{1}{ΕμβΜΑΓ}-\frac{1}{ΕμβΜΑΒ}=\frac{2}{ΕμβΜΒΓ}.$$

584. Αἱ γωνίαι κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ εἶναι μεταβληταί, ἐνῶ τὰ μήκη τῶν δύο ἀπέναντι πλευρῶν του ΑΒ καὶ ΓΔ μένουν σταθερῶς ἴσα πρὸς α καὶ τὰ μήκη τῶν διαγωνίων του ΑΓ καὶ ΒΔ σταθερῶς ἴσα πρὸς β, (ἀρθρωτὸν τετράπλευρον). i) Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ΑΒΓΔ εἶναι τραπέζιον. ii) Ἐὰν Η, Ε, Ζ τὰ μέσα τῶν ΑΒ, ΑΓ, ΒΔ, νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ γινόμενον ΗΕ × ΗΖ μένει σταθερόν.

585. Περὶ δοθὲν τετράγωνον ΑΒΓΔ πλευρᾶς α περιγράφομεν κύκλον καὶ ἀκολούθως φέρομεν χορδὴν ΓΕ, μήκους $3α/\sqrt{5}$, περατουμένην ἐπὶ τοῦ τόξου $\widehat{ΑΒ}$. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τοῦ τριγώνου ΕΑΒ καὶ τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ.

## ΓΕΝΙΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΚΕΦΑΛΑΙΩΝ III, IV, V

586. Ἐπ' εὐθείας δίδονται κατὰ σειρὰν τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ. i) Κατασκευάσατε σημεῖον Σ τῆς εὐθείας τοιοῦτον, ὥστε :

$$\overline{ΣΑ}\cdot\overline{ΣΒ}=\overline{ΣΓ}\cdot\overline{ΣΔ}$$

ii) Κατασκευάσατε ζεῦγος σημείων Ε, Ζ διαιροῦν ἁρμονικῶς ἀμφότερα τὰ τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ καὶ δείξατε ὅτι τὸ ζεῦγος (Ε, Ζ) εἶναι μοναδικόν.

587. Δοθέντων δύο σημείων Α καὶ Β κατασκευάσατε δύο σημεῖα Γ καὶ Δ συζυγῆ ἁρμονικὰ τῶν Α καὶ Β καὶ τοιαῦτα, ὥστε ἡ ἀπόστασις ΓΔ νὰ ἰσοῦται πρὸς δοθὲν τμῆμα.

588. Ἐπὶ δοθείσης εὐθείας λαμβάνομεν δύο τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ σταθερά. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τῶν σημείων, ἀπὸ τῶν ὁποίων τὰ τμήματα ταῦτα φαίνονται ὑπὸ ἴσας γωνίας.
(Ὑπόδ. βλ. § 97, ζ').

589. Νὰ δειχθῇ ὅτι, εἰς πᾶν μὴ ἰσοσκελὲς τραπέζιον, ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν δύο διαγωνίων ἔχει λόγον πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν μὴ παρ/λων πλευρῶν, ὃν λόγον ἔχει τὸ ἄθροισμα τῶν βάσεων πρὸς τὴν διαφοράν των.

590. Ἐὰν ἐκ τῶν κορυφῶν κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ ἀχθοῦν παράλληλοι πρὸς δοθεῖσαν διεύθυνσιν, τέμνουσαι τὰς διαγωνίους τοῦ τετραπλεύρου (ἢ τὰς προεκτάσεις αὐτῶν) εἰς σημεῖα Κ, Λ, Μ, Ν ἀντιστοίχως, νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ τετράπλευρον ΚΛΜΝ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΑΒΓΔ.

591. Δοθείσης περιφερείας καὶ διαμέτρου αὐτῆς ΑΒ, γράφομεν μὲ κέντρον τὸ Α, περιφέρειαν τέμνουσαν εἰς Γ καὶ Δ τὴν δοθεῖσαν καὶ λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Μ τῆς δευτέρας. Ἂν αἱ εὐθεῖαι ΒΜ, ΓΜ, ΔΜ ἐπανατέμνουν εἰς Ν, Ρ, Κ ἀντιστοίχως τὴν ἀρχικὴν περιφέρειαν, νὰ δειχθῇ ὅτι :

i) Τὸ ΜΡΒΚ εἶναι παρ/μον.

ii) Ἡ ΝΜ εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν ΝΓ, ΝΔ.

592. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων δύο πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ ἰσοῦται μὲ $4R \cdot A\Pi$, ὅπου ΑΠ ἡ προβολὴ τῆς διαμέσου ΑΜ ἐπὶ τὴν διάμετρον ΑΑ′ $(=2R)$ τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τρίγωνον κύκλου.

593. Ἂν εἰς τρίγωνον ἡ διὰ τῆς κορυφῆς Α καὶ τῶν μέσων τῶν ΑΒ, ΑΓ διερχομένη περιφέρεια ἐφάπτεται τῆς ΒΓ, ἔστω εἰς τὸ Δ, τότε ἡ ΑΔ εἶναι διχοτόμος τῆς $\widehat{A}$ καὶ μέση ἀνάλογος τῶν ΒΔ, ΔΓ.

594. Δίδεται κύκλος (Ο) καὶ δύο κάθετοι εὐθεῖαι ΟΧ, ΟΨ διερχόμεναι διὰ τοῦ κέντρου. Τυχοῦσα ἐφαπτομένη τοῦ (Ο) τέμνει τὰς ΟΧ, ΟΨ εἰς Α καὶ Β. Μὲ διάμετρον ΑΒ γράφομεν δευτέραν περιφέρειαν τέμνουσαν τὴν πρώτην εἰς Γ καὶ Δ. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ μεταξὺ τῶν ΟΧ, ΟΨ τμῆμα τῆς ευθ ΓΔ ἔχει σταθερὸν μῆκος.

595. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τριγώνου ὑπερβαίνει τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων τοῦ ὀρθοκέντρου ἀπὸ τὰς κορυφὰς κατὰ $6(R^2-3GK^2)$, ὅπου Κ τὸ περίκεντρον, G τὸ βαρύκεντρον καὶ R ἡ ἀκτὶς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

596. Ἂν ΑΒ διάμετρος ἡμικυκλίου καὶ ΑΓ, ΒΔ χορδαὶ αὐτοῦ τεμνόμεναι εἰς σημεῖον Ρ ἐντὸς τοῦ ἡμικυκλίου, νὰ δειχθῇ ἡ σχέσις : $AB^2 = A\Gamma \cdot AP + B\Delta \cdot BP$.

597. Ἐκ τῆς κορυφῆς Α τριγώνου φέρομεν τὸ ὕψος, τὴν διχοτόμον (ἐσωτερικὴν) καὶ εὐθεῖαν //ΒΓ. Ἐὰν ἐκ τοῦ μέσου Μ τῆς ΒΓ ἀχθῇ $\perp$ ἐπὶ τὴν διχοτόμον τέμνουσα αὐτὴν εἰς Η, τὸ ὕψος εἰς Ε καὶ τὴν ἀχθεῖσαν παράλληλον εἰς τὸ Ζ, δείξατε ὅτι $BM^2 = MH \cdot ZE$.

598. Ἐπὶ μιᾶς διαμέτρου κύκλου (Ο) λαμβάνονται δύο σημεῖα Α καὶ Β συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ Ο. Ἐὰν ἀπὸ τυχόντος σημείου Μ τῆς περιφερείας ἀχθοῦν αἱ εὐθεῖαι ΜΑ, ΜΟ, ΜΒ ἐπανατέμνουσαι τὴν περιφέρειαν εἰς Δ, Ε, Ζ, ἡ δὲ ευθ ΔΖ τέμνῃ τὴν ευθ ΑΒ εἰς σημεῖον Η, νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ΗΕ εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ (Ο).

599. Διὰ τοῦ μέσου Ε τῆς πλευρᾶς ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν // πρὸς τὴν διχοτόμον ΒΔ, τέμνουσαν εἰς Ζ καὶ Η τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΒΓ. Νὰ δειχθῇ ὅτι $AZ = \Gamma H$.

600. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων τῶν ἄκρων τῆς βάσεως τριγώνου ἀπὸ τὴν ἐσωτερικὴν διχοτόμον τῆς ἀπέναντι γωνίας ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν δύο τμημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα ἡ βάσις χωρίζεται ἀπὸ τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

601. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ριζικὸν κέντρον τῶν τριῶν περιφερειῶν μὲ διαμέτρους τὰς διαμέσους τρ.ΑΒΓ εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τρ.ΑΒΓ.

602. Ἔστω Α′Β′Γ′ τὸ ὀρθικὸν τρίγωνον τοῦ ὀξυγωνίου τριγώνου ΑΒΓ καὶ Α″, Β″, Γ″ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν πλευρῶν Β′Γ′, Γ′Α′, Α′Β′ τοῦ τριγώνου Α′Β′Γ′ μετὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὸ κύκλου. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθικοῦ εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ Α″Β″Γ″.

603. Δίδεται περιφέρεια (Ο), διάμετρος ΑΒ αὐτῆς καὶ σημεῖον Μ τῆς (Ο). Μὲ κέντρον

Μ γράφεται περιφέρεια (γ) ἐφαπτομένη τῆς ΑΒ, ἔστω εἰς τὸ Ρ. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ κοινὴ χορδὴ τῶν (γ) καὶ (Ο) διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τοῦ ΜΡ.

604. Ἡ περιφέρεια μὲ διάμετρον τὸ ὕψος ΑΗ ὀρθογωνίου τριγ.ΑΒΓ τέμνει τὰς καθέτους πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ εἰς Β΄ καὶ Γ΄. Φέρομεν ἐφαπτομένας τῆς περιφερείας ταύτης εἰς Β΄ καὶ Γ΄, τεμνούσας εἰς Μ καὶ Ν τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ τραπέζιον ΜΒ΄Γ΄Ν ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

605. Συνδέομεν ἑκάστην κορυφὴν τριγώνου μὲ τὰ σημεῖα τὰ τριχοτομοῦντα τὴν ἀπέναντι πλευράν. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν 6 τούτων εὐθειῶν σχηματιζόμενον κυρτὸν ἑξάγωνον ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὸ 1/10 τοῦ τριγώνου.

606. Εἰς πᾶν τραπέζιον περιγεγραμμένον περὶ κύκλον i) αἱ βάσεις χωρίζονται ὑπὸ τῶν σημείων ἐπαφῆς εἰς μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα καὶ ii) αἱ διαγώνιοι τέμνονται ἐπὶ τῆς διαμέτρου τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου, τῆς καθέτου ἐπὶ τὰς βάσεις.

607. Νὰ δειχθῇ ὅτι, ἂν Κ τὸ περίκεντρον ἐγγραψίμου κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ καὶ Μ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαγωνίων του, τότε ἡ εἰς τὸ Μ κάθετος ἐπὶ τὴν ΚΜ τέμνει τοὺς φορεῖς δύο ἀπέναντι πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου εἰς σημεῖα, ἰσαπέχοντα τοῦ Μ.

608. Ἐπὶ τῶν φορέων τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ τριγ.ΑΒΓ λαμβάνονται ἀντιστοίχως σημεῖα Μ, Ν, Ρ. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα αἱ κάθετοι ἐπὶ τὰς εὐθείας ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ εἰς Μ, Ν, Ρ ἀντιστοίχως διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, εἶναι :

$$AM^2+BN^2+\Gamma P^2=MB^2+N\Gamma^2+PA^2$$

609. Ἐὰν ΑΑ΄, ΒΒ΄ ΓΓ΄, ΔΔ΄ εἶναι αἱ ἀποστάσεις τῶν διαδοχικῶν κορυφῶν Α, Β, Γ, Δ τετραγώνου ἀπὸ τυχούσης ἐφαπτομένης τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου, νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων ΑΑ΄·ΓΓ΄ + ΒΒ΄·ΔΔ΄ εἶναι σταθερόν.

610. Διὰ τοῦ ἐγκέντρου Ο τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΟ καὶ ἔστωσαν Δ καὶ Ε τὰ σημεῖα τομῆς τῆς ἀχθείσης καθέτου μετὰ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ περιφέρεια, ἥτις ἐφάπτεται τῶν ΑΒ, ΑΓ εἰς Δ καὶ Ε, ἐφάπτεται ἐπίσης καὶ τῆς περὶ τὸ τρ.ΑΒΓ περιγεγραμμένης περιφερείας.

611. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ λαμβάνομεν σημεῖα Ε καὶ Ζ τοιαῦτα, ὥστε ΑΕ = ΑΖ. Ἡ διάμεσος ΑΔ τοῦ τρ.ΑΒΓ τέμνει τὸ τμῆμα ΕΖ εἰς Η. Νὰ δειχθῇ ὅτι : $\frac{EH}{HZ}=\frac{A\Gamma}{AB}$.

612. Ἔστω κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον (Ο). Ἔστω ὅτι αἱ ἀπέναντι πλευραί του ΑΒ καὶ ΓΔ, προεκτεινόμεναι, τέμνονται εἰς Ε, αἱ δὲ ΒΓ καὶ ΑΔ, ἐπίσης προεκτεινόμεναι, τέμνονται εἰς Ζ. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἐπὶ τοῦ τμήματος ΕΖ ὑπάρχει σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε : ΕΜ·ΕΖ = ΕΒ·ΕΑ καὶ συγχρόνως ΖΜ·ΖΕ = ΖΑ·ΖΔ καὶ ἐν συνεχείᾳ νὰ δειχθῇ ὅτι

$$EZ^2=\Delta\upsilon\nu E/(O)+\Delta\upsilon\nu Z/(O).$$

613. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ὀξυγωνίου τριγώνου ὡς ὑποτεινουσῶν κατασκευάζομεν ὀρθογώνια τρίγωνα μὲ κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τοῦ ἀντιστοίχου ὕψους. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριῶν τούτων τριγώνων ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ἀρχικοῦ τριγώνου.

614. Ἐπὶ τῆς βάσεως ΒΓ ἰσοσκελοῦς τριγ. ΑΒΓ λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Μ καὶ γράφομεν δύο περιφερείας (Κ) καὶ (Λ), ἐξ ὧν ἡ (Κ) διέρχεται διὰ τῶν Μ καὶ Β καὶ ἐφάπτεται τῆς ΑΒ, ἡ δὲ (Λ) διέρχεται διὰ τῶν Μ καὶ Γ καὶ ἐφάπτεται τῆς ΑΓ. Νὰ δειχθῇ ὅτι :

i) Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων τῶν (Κ) καὶ (Λ) εἶναι σταθερόν.

ii) Ἡ μεσοκάθετος τῆς διακέντρου ΚΛ διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου.

615. Ἐὰν Ο τὸ ἔγκεντρον τριγώνου ΑΒΓ καὶ $H_1$, $H_2$ τὰ ὀρθόκεντρα τῶν τριγώνων ΟΑΓ καὶ ΟΑΒ, νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ευθ $H_1H_2$ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς τῆς πλευρᾶς ΒΓ μετὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ ΑΒΓ κύκλου.

616. Νὰ δειχθῇ ὅτι εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ ἡ εὐθεῖα ἡ διερχομένη διὰ τοῦ μέσου Μ τῆς ΒΓ καὶ τοῦ ἐγκέντρου Ο τέμνει τὸ ἐκ τοῦ Α ὕψος εἰς σημεῖον Σ ἀπέχον τοῦ Α ἀπόστασιν ἴσην πρὸς τὴν ἀκτῖνα ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ τρίγωνον κύκλου. Ἡ αὐτὴ εὐθεῖα διέρχεται καὶ διὰ τοῦ μέσου τοῦ τμήματος τοῦ συνδέοντος τὸ Α μὲ τὸ σημεῖον ἐπαφῆς Ε τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου μετὰ τῆς πλευρᾶς ΒΓ.

617. Τμῆμα ΑΒ=3α διαιρεῖται διὰ σημείου Μ εἰς τὰ τμήματα ΑΜ=2α, ΜΒ=α. Κατασκευάζομεν πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ΑΒ ἰσόπλευρα τρίγωνα ΑΓΜ καὶ ΜΔΒ. i) Ἂν ΓΗ ὕψος τοῦ τρ.ΓΑΜ νὰ δειχθῇ : ΓΗ=ΓΔ. ii) Ἐμβαδὸν τοῦ ΑΓΔΒ συναρτήσει τοῦ α.

618. Δύο περιφέρειαι ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς τὸ Ε. Ὀρθὴ γωνία $x\widehat{E}y$ στρέφεται περὶ τὸ Ε. Αἱ πλευραί της Εx, Εy τέμνουν τὰς περιφερείας εἰς Α καὶ Β. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ευθ ΑΒ διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου.

619. Μεταβλητὴ εὐθεῖα τέμνει τὰς πλευρὰς Οx, Οy δοθείσης γωνίας εἰς Α καὶ Β οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι πάντοτε $\frac{1}{OA}+\frac{1}{OB}=\frac{1}{c}$ (c=σταθ. τμῆμα). Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ευθ ΑΒ διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου.

620. Ἔστω Ο τὸ ἔγκεντρον τοῦ τρ.ΑΒΓ καὶ Κ τὸ περίκεντρον αὐτοῦ. Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ κάθετοι εἰς Ο ἐπὶ τὰς ΑΟ, ΒΟ, ΓΟ τέμνουν τοὺς φορεῖς τῶν ἀπέναντι πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ εἰς τρία σημεῖα κείμενα ἐπὶ εὐθείας καθέτου πρὸς τὴν ἑνοῦσαν τὸ περίκεντρον Κ μὲ τὸ ἔγκεντρον Ο.

621. Νὰ γραφῇ περιφέρεια ἔχουσα τὸ κέντρον της ἐπὶ δοθείσης εὐθείας (ε) καὶ ἡ ὁποία νὰ φαίνεται ἀπὸ δύο δεδομένα σημεῖα ὑπὸ γωνίας $90^0$ καὶ $60^0$ ἀντιστοίχως.

622. Δίδεται διάμετρος ΑΒ καὶ χορδὴ ΑΓ περιφερείας. Νὰ προσδιορισθῇ ἐπὶ τῆς χορδῆς ΑΓ σημεῖον Κ τοιοῦτον, ὥστε ἡ περιφέρεια $\left(K, \frac{KB}{2}\right)$ νὰ τέμνεται ψευδοορθογωνίως (διχοτομῆται) ὑπὸ τῆς δοθείσης.

623. Νὰ κατασκευασθῇ τρ. ΑΒΓ ἐκ τῆς ἐσωτερικῆς διχοτόμου ΑΔ=δ καὶ τῶν τμημάτων ΒΔ=μ, ΔΓ=ν.

624. Νὰ κατασκευασθῇ τρ.ΑΒΓ ἐκ τῆς ἐσωτερικῆς διχοτόμου ΑΔ=δ καὶ τῶν διαφορῶν : ΑΒ−ΒΔ=$l$, ΑΓ−ΓΔ=m.

625. Δοθέντος κυκλικοῦ τόξου $\widehat{AB}$, νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη αὐτοῦ τοιαύτη ,ὥστε τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων τῶν Α καὶ Β ἀπὸ ταύτης νὰ ἰσοῦται πρὸς δοθὲν τετράγωνον.

626. Δίδονται δύο παρ/λοι, σημεῖον Α ἐπὶ τῆς μιᾶς, σημεῖον Β ἐπὶ τῆς ἄλλης καὶ ἐκτὸς τῶν παρ/λων σημεῖον Σ. Νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ Σ εὐθεῖα τέμνουσα τὰς παρ/λους εἰς Α΄ καὶ Β΄ οὕτως, ὥστε ΑΑ΄/ΒΒ΄=μ/ν, ὅπου μ, ν δοθέντα τμήματα.

627. Ἐπ᾽ εὐθείας δίδονται κατὰ σειρὰν τὰ σημεῖα Ο,Α, Β. Νὰ κατασκευασθῇ ἐπὶ τοῦ τμήματος ΑΒ σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε ὁ λόγος $MA.MB/MO^2$ νὰ ἔχῃ τὴν μεγίστην δυνατὴν τιμήν.

628. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ δεδομένου τριγώνου ΑΒΓ σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε ὁ λόγος $MA\cdot MB/M\Gamma^2$ νὰ ἔχῃ τὴν μεγίστην δυνατὴν τιμήν.

629. Εἰς πᾶν τρίγωνον δείξατε τὰς σχέσεις :

$$KO^2+KO_1^2+KO_2^2+KO_3^2=12R^2$$
$$OO_1^2+OO_2^2+OO_3^2=8R(2R-\rho)$$
$$O_2O_3^2+O_3O_1^2+O_1O_2^2=8R(4R+\rho)$$

(Κ περίκεντρον, Ο ἔγκεντρον, $O_1$, $O_2$, $O_3$ παράκεντρα).

630. Εἰς πᾶν τρίγωνον ἰσχύει ἡ ἀνισοτικὴ σχέσις

$$R \geqq 2\rho$$

τὸ δὲ = ἰσχύει μόνον εἰς τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον

631. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν ρ, R, $\widehat{B}-\widehat{\Gamma}$.

632. Νὰ κατασκευασθῇ τρ.ΑΒΓ, οὗτινος δίδεται τὸ παράκεντρον $O_1$, ὁ φορεὺς τῆς πλευρᾶς ΒΓ καὶ αἱ ἀκτῖνες ρ, R.

633. Περιφέρεια (c) εὑρίσκεται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν γωνίας $x\widehat{O}y$. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς (c) σημεῖον, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τὰς εὐθείας Οx, Οy νὰ εἶναι τὸ ἐλάχιστον ἢ τὸ μέγιστον δυνατόν.

634. Θεωροῦμεν τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ σταθερᾶς ὑποτεινούσης ΒΓ=α καὶ φέρομεν ἑκάστοτε τὰς καθέτους ΒΒ', ΓΓ' ἐπὶ τὴν διάμεσον ΑΔ. Ζητοῦνται αἱ γωνίαι ἐκείνου ἐκ τῶν τριγώνων ΑΒΓ ,διὰ τὸ ὁποῖον τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παρ/μου ΒΒ'ΓΓ' καθίσταται μέγιστον. Ποῖα τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ;

635. Διὰ τοῦ μέσου Ο τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ ὀρθογ. τριγ. ΑΒΓ φέρομεν ζεῦγος εὐθειῶν καθέτων ἐπ' ἀλλήλας, ἐξ ὧν ἡ μία τέμνει τὴν ευθ ΑΒ εἰς Μ καὶ ἡ ἄλλη τὴν ευθ ΑΓ εἰς Ν. Ζητεῖται νὰ ὁρισθῇ τὸ ζεῦγος ἐκεῖνο, διὰ τὸ ὁποῖον τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγ. ΟΜΝ εἶναι τὸ ἐλάχιστον δυνατόν.

636. Δύο περιφέρειαι (Κ) καὶ (Λ) τέμνονται εἰς Α καὶ Β, τὰ δὲ κέντρα αὐτῶν Κ καὶ Λ κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς ευθ ΑΒ. Φέρομεν διὰ τοῦ Α εὐθεῖαν ἐπανατέμνουσαν τὰς περιφερείας εἰς σημεῖα Γ καὶ Δ κείμενα ἑκατέρωθεν τοῦ Α. Ἔστω Ο τὸ ἔγκεντρον καὶ $O_1$ $O_2$ τὰ παράκεντρα τοῦ τριγώνου ΒΓΔ τὰ ἀντιστοιχοῦντα πρὸς τὰς γωνίας $\widehat{\Delta}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$. Ζητεῖται νὰ ὁρισθῇ ἡ θέσις τῆς τεμνούσης ΓΑΔ, καθ' ἣν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγ. $OO_1O_2$ εἶναι τὸ μέγιστον δυνατόν.

637. Τραπεζίου ἡ μικροτέρα βάσις εἶναι τὸ 1/8 τῆς μεγαλυτέρας. Ζητεῖται νὰ διαιρεθῇ τὸ τραπέζιον εἰς τρία ὅμοια τραπέζια διὰ δύο παραλλήλων πρὸς τὰς βάσεις.

638. Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ΑΒΓΔ, ἂν γνωρίζωμεν ἓν σημεῖον Μ τῆς πλευρᾶς ΑΒ, ἓν σημεῖον Ν τῆς πλευρᾶς ΓΔ καὶ μεταξὺ τῶν Μ καὶ Ν δύο σημεῖα Π καὶ Κ, καθ' ἃ ἡ ΜΝ τέμνει τὴν ἐγγεγραμμένην εἰς τὸ τετράγωνον περιφέρειαν.

639. Δίδεται κύκλος (Ο, R) καὶ εὐθεῖα (δ) ἀπέχουσα τοῦ κέντρου Ο κατὰ ΟΗ=2R.

i) Νὰ γραφῇ περιφέρεια μὲ δοθεῖσαν ἀκτῖνα ρ, ἐφαπτομένη τῆς (δ) καὶ τέμνουσα ὀρθογωνίως τὴν (Ο, R). Συνθῆκαι δυνατότητος.

ii) Νὰ γραφῇ περιφέρεια ἐφαπτομένη τῆς (δ) εἰς δοθὲν σημεῖον καὶ ὀρθογωνίως τέμνουσα τὴν (Ο, R).

640. Δοθείσης τεμνούσης ΑΒΓ μιᾶς περιφερείας (c) νὰ κατασκευασθῇ δευτέρα τέμνουσα ΑΒ'Γ' τοιαύτη, ὥστε οἱ κύκλοι μὲ διαμέτρους ΒΓ καὶ Β'Γ',

i) νὰ ἐφάπτωνται,

ii) νὰ τέμνωνται ὀρθογωνίως.

641. Νὰ κατασκευασθῇ τριγ ΑΒΓ ἐκ τῶν τριῶν ὑψῶν $\upsilon_\alpha$, $\upsilon_\beta$, $\upsilon_\gamma$. Συνθῆκαι δυνατότητος.

642. Νὰ κατασκευασθῇ τρ.ΑΒΓ μὲ ΑΒ+ΑΓ=3ΒΓ καὶ ἐκ τῶν στοιχείων $\delta_A$ καὶ $\widehat{B}-\widehat{\Gamma}=\widehat{\omega}$.

643. Διὰ δύο σημείων Α, Β κειμένων ἐπὶ μιᾶς διαμέτρου ΓΔ δοθέντος κύκλου καὶ ἑκατέρωθεν τοῦ κέντρου νὰ ἀχθοῦν δύο ἴσαι χορδαὶ ἔχουσαι ἓν κοινὸν ἄκρον.

644. Νὰ κατασκευασθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἐκ τοῦ ὕψους καὶ τῆς διαμέσου τῶν ἀγομένων ἐπὶ μίαν τῶν ἴσων πλευρῶν.

645. Νὰ κατασκευασθῇ ἰσοσκελὲς τραπέζιον, τοῦ ὁποίου δίδεται τὸ μῆκος λ τῆς διαγωνίου, ὁ λόγος μ/ν τῶν δύο βάσεων καὶ ἡ ἀκτὶς R τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

646. Δύο κύκλοι (Ο, R) καὶ $\left(O', \frac{R}{2}\right)$ ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς. Νὰ κατασκευασθῇ χορδὴ ΑΒ τοῦ μεγαλυτέρου ἐφαπτομένη εἰς Γ τοῦ μικροτέρου οὕτως, ὥστε $A\Gamma\cdot\Gamma B = c^2$ (c δοθὲν τμῆμα).

647. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγ ΑΒΓ, οὗτινος δίδεται ἡ βάσις ΒΓ, τὸ ὕψος ΑΗ καὶ τοῦ ὁποίου ἡ ἐσωτερικὴ διχοτόμος τῆς $\widehat{A}$ νὰ εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν δύο τμημάτων, εἰς ἃ χωρίζει τὴν ΒΓ.

648. Περὶ δοθὲν παραλληλόγραμμον νὰ περιγραφῇ ὀρθογώνιον παρ/μον τοῦ μεγίστου δυνατοῦ ἐμβαδοῦ.

649. Νὰ κατασκευασθῇ τρ. ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων:

$$\alpha,\ \mu_\alpha,\ \widehat{B}-\widehat{\Gamma}=\widehat{\omega}.$$

650. **Θεώρημα καὶ ἐφαρμογαί.** Νὰ δειχθῇ ὅτι εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ τὰ παράκεντρα $O_2$, $O_3$ διαιροῦν ἁρμονικῶς τὴν ἐξωτερικὴν διχοτόμον ΑΔ΄. Αἱ προβολαὶ τῶν $O_2$ καὶ $O_3$ ἐπὶ τὸν φορέα τοῦ ὕψους $AA'=\upsilon_\alpha$ διαιροῦν ἁρμονικῶς τὸ ὕψος τοῦτο.

i) Συναγάγετε κατασκευὴν ἑνὸς ἐκ τῶν τριῶν στοιχείων $\upsilon_\alpha$, $\rho_\beta$, $\rho_\gamma$, ὅταν δίδωνται τὰ δύο ἄλλα.

ii) Δείξατε τὴν σχέσιν: $\dfrac{2}{\upsilon_\alpha}=\dfrac{1}{\rho_\beta}+\dfrac{1}{\rho_\gamma}$.

iii) Νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων $\beta+\gamma$, $\rho_\alpha$, $\rho_\beta$. (Ὑποδ. $2/\upsilon_\gamma=1/\rho_\beta+1/\rho_\alpha$. Τὸ μέσον Μ τῆς ΒΓ ἀπέχει τῆς ευθΑΒ, $\upsilon_\gamma/2$).

651. Αἱ τέσσαρες πλευραὶ κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ ἔχουν μήκη ΑΒ=30m, ΒΓ=ΓΔ=ΔΑ=24m ἡ δὲ διαγώνιος ΔΒ=36m. i) Δείξατε ὅτι τὸ τετράπλευρον εἶναι τραπέζιον. ii) Ὅτι αἱ δύο γωνίαι ἃς σχηματίζουν αἱ διαγώνιοι τοῦ ΑΒΓΔ ἰσοῦνται ἀντιστοίχως πρὸς τὰς γωνίας τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

652. Δοθέντων δύο τεμνομένων κύκλων νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν καὶ τέμνουσα τὰς δύο περιφερείας εἰς δύο ζεύγη σημείων, ὥστε τὸ ἓν ζεῦγος νὰ χωρίζῃ ἁρμονικῶς τὸ ἄλλο.

653. Δίδεται περιφέρεια (Ο) καὶ σημεῖον Σ ἐκτὸς αὐτῆς. Νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ Σ εὐθεῖα τέμνουσα τὴν περιφέρειαν εἰς δύο σημεῖα, τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τῆς διὰ τοῦ Σ διερχομένης διαμέτρου νὰ ἰσοῦται πρὸς δοθὲν τετράγωνον.

654. Μεταβλητοῦ, ἰσοσκελοῦς τρ.ΑΒΓ (ΓΑ=ΓΒ) τὸ ἓν ἄκρον Α τῆς βάσεως ΑΒ εἶναι σταθερὸν καὶ ὁ φορεὺς αὐτῆς ΑΧ σταθερός. Ποῖος ὁ τόπος τῆς κορυφῆς Γ αὐτοῦ, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους του μένει σταθερόν;

655. Ἐπὶ δοθείσης εὐθείας ΣΧ νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τὰς κορυφὰς δεδομένου τριγώνου ΑΒΓ νὰ εἶναι τὸ ἐλάχιστον δυνατόν. Ποῖος ὁ γ.τ. τοῦ Μ, ὅταν ἡ ΣΧ στρέφεται περὶ τὸ Σ;

656. Ἐπὶ περιφερείας, ἀκτῖνος ρ, λαμβάνομεν σταθερὸν σημεῖον Σ. Ἑνοῦμεν τὸ Σ μὲ τυχὸν σημεῖον Α τῆς περιφερείας καὶ προεκτείνομεν τὸ ΑΣ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Σ κατὰ ΣΜ οὕτως, ὥστε $Α\Sigma^2+\Sigma M^2=4\rho^2$. Ζητεῖται τὸ σύνολον τῶν σημείων Μ.

657. Δύο ἡμιπεριφέρειαι διαμέτρων ΑΒ καὶ ΑΒ΄ ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς εἰς Α. Εὐθεῖα $\perp$ ΑΒ΄ τέμνει τὰς ἡμιπεριφερείας ἀντιστοίχως εἰς Ρ καὶ Ρ΄. Τόπος τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν εὐθειῶν ΒΡ καὶ Β΄Ρ΄.

658. Δίδεται περιφέρεια (c) καὶ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν αὐτῆς σημεῖον Α. Μεταβλητὴ περιφέρεια (γ) διέρχεται διὰ τοῦ Α καὶ ἐφάπτεται τῆς (c) εἰς τὸ Μ. Τόπος τοῦ σημείου τομῆς τῶν ἐφαπτομένων τῆς (γ) εἰς Α καὶ Μ.

659. Ἔστω ΑΒΓ ἰσόπλευρον τρίγωνον, Ο τὸ ἔγκεντρον αὐτοῦ καὶ (c) περιφέρεια ἐφαπτομένη τῶν ΟΒ, ΟΓ εἰς Β καὶ Γ. Νὰ δειχθῇ ὅτι διὰ πᾶν σημεῖον Μ τῆς (c) ἰσχύει: $MA^2=MB^2+M\Gamma^2$.

660. Ὀρθογωνίου παρ/μου ΑΒΓΔ ἡ κορυφὴ Α μένει σταθερά, ἡ δὲ διαγώνιος ΒΔ παραμένει χορδὴ δεδομένης περιφερείας. Τόπος τῆς κορυφῆς Γ.

661. Ἔστω ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ μὲ ΑΒ=ΑΓ καὶ Ι τὸ μέσον τῆς ΒΓ. Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΑΒ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Β λαμβάνομεν σημεῖον Μ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτά-

σεως τῆς ΑΓ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Γ σημεῖον Ν τοιαῦτα, ὥστε $BM \cdot \Gamma N = IB^2 = I\Gamma^2$ (σταθερόν). Ζητοῦνται:

i) Ὁ τόπος τοῦ περικέντρου τοῦ τρ.ΙΜΝ.

ii) Ὁ τόπος τοῦ ποδὸς Η τοῦ ὕψους ΙΗ τοῦ τρ.ΙΜΝ.

iii) Ὁ τόπος τοῦ ποδὸς Δ τῆς ἐσωτερικῆς διχοτόμου ΙΔ τοῦ τρ.ΙΜΝ.

662. Ἐπ' εὐθείας δίδονται κατὰ σειρὰν τὰ σταθερὰ σημεῖα Α, Δ, Β. Ἐπὶ τῆς εἰς Δ καθέτου ἐπὶ τὴν ευθ ΑΒ λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Γ καὶ ἔστω Η τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τρ. ΑΒΓ. Ζητεῖται ὁ γ.τ. τῆς προβολῆς τοῦ Γ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν τὴν διερχομένην διὰ τοῦ Η καὶ διὰ τοῦ μέσου Ο τῆς πλευρᾶς ΑΒ.

663. Δίδεται περιφέρεια (Ο) καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β ἐπ' εὐθείας μετὰ τοῦ κέντρου Ο. Ἐὰν ἀχθῇ τυχοῦσα διάμετρος ΠΚ τῆς (Ο), ποῖος ὁ γ.τ. τοῦ δευτέρου σημείου τομῆς τῶν περιφερειῶν (ΑΟΠ) καὶ (ΒΟΚ), ὅταν ἡ ΠΚ στρέφεται περὶ τὸ Ο;

664. Ἐπ' εὐθείας δίδονται κατὰ σειρὰν τὰ σημεῖα Α, Β, Γ. Διὰ τῶν Β καὶ Γ φέρομεν καθέτους ΒΒ', ΓΓ' ἐπὶ μεταβλητὴν εὐθεῖαν Αx διερχομένην διὰ τοῦ Α. Τόπος τῆς τομῆς τῶν ΒΓ' καὶ Β'Γ.

665. Δύο μεταβλητοὶ κύκλοι, τῶν ὁποίων αἱ ἀκτῖνες ἔχουν σταθερὸν λόγον, ἐφάπτονται δοθείσης εὐθείας εἰς δύο σταθερὰ σημεῖα καὶ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς. Εὕρετε τὸν τόπον τῆς τομῆς τῆς ἑτέρας ἐξωτερικῆς κοινῆς ἐφαπτομένης των μετὰ τοῦ ριζικοῦ ἄξονος τῶν δύο κύκλων.

666. Θεωροῦμεν μεταβλητὴν εὐθεῖαν διερχομένην διὰ τῆς κορυφῆς Δ τετραγώνου ΑΒΓΔ καὶ τέμνουσαν τὴν περιφέρειαν (Δ, ΔΑ) κατὰ διάμετρον ΜΜ', τὸν φορέα τῆς διαγωνίου ΑΓ εἰς Ν καὶ τὴν ευθ ΑΒ εἰς Ρ.

i) Τόπος τοῦ συζυγοῦς ἁρμονικοῦ Ν' τοῦ Ν ὡς πρὸς τὰ Μ καὶ Μ'.

ii) Τόπος τοῦ συζυγοῦς ἁρμονικοῦ Ρ' τοῦ Ρ ὡς πρὸς τὰ Μ καὶ Μ'.

667. Σημεῖον Μ προβάλλεται ἐπὶ τῶν ὑψῶν δεδομένου τριγώνου ΑΒΓ εἰς Α',Β', Γ'. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ Μ, ὅταν τὸ τρίγωνον Α'Β'Γ' εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.

668. Διὰ τῆς κορυφῆς Α τετραγώνου ΑΒΓΔ ἄγεται εὐθεῖα τέμνουσα τὴν πλευρὰν ΒΓ εἰς Μ καὶ τὴν προέκτασιν τῆς ΔΓ εἰς Ι. Νὰ δειχθῇ ὅτι

$$\frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{AB^2}.$$

669. Δίδεται περιφέρεια (Ο, R) καὶ διάμετρος αὐτῆς ΑΒ. Προεκτείνομεν τὸ ΑΒ κατὰ $B\Gamma = R$. i) Νὰ κατασκευασθῇ τέμνουσα ΓΔΕ τῆς περιφερείας τοιαύτη, ὥστε $\Gamma\Delta = \Delta E$. ii) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τρ.ΟΓΕ.

670. Κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ εἶναι $A\Gamma \perp \Gamma B$, $B\Delta \perp A\Delta$, $AB = 65m$, $A\Delta = 39m$, $B\Gamma = 25m$. Δείξατε ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου εἶναι $1344m^2$.

671. Ἐὰν $R_1$, $R_2$ εἶναι αἱ ἀκτῖνες τῶν περιγεγραμμένων κύκλων περὶ τὰ δύο τρίγωνα, εἰς ἃ χωρίζεται ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ὑπὸ τῆς διαμέσου ΑΔ τῆς ἀγομένης πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν, νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τρ.ΑΒΓ ἰσοῦται πρός: $(2R_1R_2)^3/(R_1^2+R_2^2)^2$.

672. Τραπεζίου ΑΒΓΔ αἱ βάσεις ΑΒ καὶ ΓΔ ἔχουν μήκη α καὶ β. Ἂν Ε τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαγωνίων του, νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τοῦ τριγ. ΕΑΔ καὶ τοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ συναρτήσει τῶν α καὶ β.

673. Ἐὰν εἰς τρ.ΑΒΓ εἶναι $\widehat{A} + 2\widehat{B} = 3$ ὀρθ., δείξατε ὅτι τότε μεταξὺ τῶν στοιχείων του ὑφίσταται ἡ σχέσις $\beta^2 - R\alpha = 2R^2$.

674. Τὰ μήκη τῶν βάσεων ἰσοσκελοῦς τραπεζίου περιγραψίμου εἶναι α καὶ β. Ὑπολογίσατε τὴν ἀκτῖνα R τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τραπέζιον κύκλου.

675. Προεκτείνομεν τὴν ἀκτῖνα ΟΑ κύκλου (Ο) κατὰ $AB = \mu . OA$ καὶ ἄγομεν ἐκ τοῦ Β ἐφαπτόμενον τμῆμα ΒΓ πρὸς τὸν κύκλον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς τοῦ περὶ τὸ τρ. ΑΒΓ περιγεγραμμένου κύκλου, συναρτήσει τοῦ μήκους $A\Gamma = \lambda$ καὶ τοῦ ἀριθμοῦ μ.

676. Τρεῖς παρ/λοι εὐθεῖαι διερχόμεναι διὰ τῶν κορυφῶν Α, Β, Γ τριγώνου ΑΒΓ τέμνουν τοὺς φορεῖς τῶν ἀπέναντι πλευρῶν εἰς Α', Β', Γ'. Νὰ δειχθῇ ὅτι :

$$\text{Εμβ}(Α'Β'Γ') : \text{Εμβ}(ΑΒΓ) = 2 : 1.$$

677. Ἐὰν Ε, $Ε_1$, $Ε_2$, $Ε_3$ εἶναι τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ τῶν τριῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων τριγώνου ΑΒΓ μετὰ τῆς εὐθείας ΒΓ, δείξατε ὅτι :

$$ΑΕ^2 + ΑΕ_1{}^2 + ΑΕ_2{}^2 + ΑΕ_3{}^2 = 3(β^2+γ^2) - α^2.$$

678. Δείξατε ὅτι :

$$(ΑΒΓΔ) = -1 \Rightarrow \left(\frac{1}{ΑΓ} + \frac{1}{ΑΔ}\right) + \left(\frac{1}{ΒΓ} + \frac{1}{ΒΔ}\right) = 0.$$

679. Δίδεται τετράγωνον ΑΒΓΔ πλευρᾶς $l$ καὶ ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ ἀντιστοίχως, σημεῖα Ζ καὶ Ι τοιαῦτα, ὥστε ΑΖ = α, ΙΓ = β.

i) Ποία εἶναι ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη μεταξὺ τῶν α, β, $l$, ἵνα οἱ κύκλοι (Ι, β) καὶ (Ζ, α) τέμνωνται ὀρθογωνίως;

ii) Τῆς συνθήκης πληρουμένης, νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ μεσοκάθετος τοῦ ΙΖ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τοῦ τετραγώνου.

iii) Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ ἀνωτέρω ὀρθογώνιοι περιφέρειαι ἔχουν τὸ ἓν κοινὸν σημεῖον των ἐπὶ τῆς διαγωνίου ΑΓ καὶ τὸ ἕτερον ἐπὶ τῆς περὶ τὸ τετράγωνον περιγεγραμμένης περιφερείας.

680. Ἔστω κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ. Ἂς καλέσωμεν τὰ μήκη τῶν πλευρῶν του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ ἀντιστοίχως μέ : α, β, γ, δ. Ἂς φέρωμεν τὰ διανύσματα $\overrightarrow{ΑΑ'} = \overrightarrow{ΒΔ}$ καὶ $\overrightarrow{ΓΓ'} = \overrightarrow{ΒΔ}$ καὶ ἄς σχηματίσωμεν τὸ παρ/μον ΑΓΓ'Α', ἐντὸς τοῦ ὁποίου εὑρίσκεται ἡ κορυφὴ Δ. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ Δ βλέπει τὰς πλευρὰς τοῦ παρ/μου ΑΓΓ'Α' ὑπὸ γωνίας ἴσας πρὸς τὰς γωνίας τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ καὶ ἀπέχει ἀπὸ τὰς κορυφὰς τοῦ παραλληλογράμμου ἀποστάσεις ἴσας πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ τετραπλεύρου καὶ ὅτι, δοθέντος τοῦ παραλληλογράμμου ΑΓΓ'Α' καὶ τοῦ σημείου Δ ἐντὸς αὐτοῦ, τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ὡρισμένον. Βάσει τούτων νὰ κατασκευασθῇ κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ, οὗτινος δίδονται αἱ διαγώνιοι καὶ ἡ γωνία αὐτῶν ἡ περιέχουσα τὴν πλευρὰν ΑΒ καὶ ἀκόμη :

i) Δύο διαδοχικαὶ γωνίαι τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

ii) Δύο ἀπέναντι γωνίαι τοῦ ΑΒΓΔ.

iii) Μία γωνία καὶ μία σχέσις μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῶν περιεχουσῶν αὐτήν, ὅπως π.χ. ἡ $\widehat{Β}$ καὶ ἡ σχέσις $α+β=c$ ἢ $α-β=c$ ἢ $α^2+β^2=c^2$ ἢ $α^2-β^2=c^2$ ἢ $α/β=μ/ν$ ἢ $αβ=c^2$.

681. Νὰ κατασκευασθῇ περιφέρεια διερχομένη διὰ δύο δεδομένων σημείων καὶ ἡ ὁποία νὰ φαίνεται ἀπὸ τρίτου δοθέντος σημείου ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν.

682. Διὰ δύο δεδομένων σημείων δοθείσης περιφερείας νὰ ἀχθοῦν δύο ὁμόρροποι ἡμιευθεῖαι ἀποτέμνουσαι δύο χορδάς, αἱ ὁποῖαι νὰ πληροῦν ἓν ἐκ τῶν τεσσάρων ἑπομένων ἐπιταγμάτων :

i) Νὰ ἔχουν ἄθροισμα ἴσον πρὸς δοθὲν τμῆμα.

ii) Νὰ ἔχουν διαφορὰν ἴσην πρὸς δοθὲν τμῆμα.

iii) Νὰ ἔχουν γινόμενον δοθὲν ἴσον πρὸς $c^2$.

iv) Νὰ ἔχουν λόγον δοθέντα.

683. Ἐὰν Π καὶ Κ εἶναι αἱ προβολαὶ σημείου Μ τῆς ἐσωτερικῆς διχοτόμου τῆς γωνίας $\widehat{Α}$ τριγώνου ΑΒΓ, ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ, νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἐκ τοῦ Μ ἀγομένη κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ συναντᾷ τὴν ΠΚ εἰς σημεῖον Ε κείμενον ἐπὶ τῆς διαμέσου ΑΔ τοῦ τρ.ΑΒΓ.

684. Ἔστω παρ/μον ΑΒΓΔ, Ε σημεῖον τῆς πλευρᾶς ΒΓ καὶ Ζ ἕτερον σημεῖον τῆς

πλευρᾶς ΑΔ. Ἂν αἱ ΕΑ, ΖΒ τέμνωνται εἰς Η καὶ αἱ ΕΔ, ΖΓ εἰς Ι, δείξατε ὅτι ἡ ευθ ΗΙ διαιρεῖ τὸ παρ/μον εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη.

685. Αἱ εὐθεῖαι ΑΛ, ΒΛ, ΓΛ συνδέουσαι τὰς κορυφὰς τριγώνου ΑΒΓ μὲ σημεῖον Λ ἐσωτερικὸν τοῦ τριγώνου τέμνουν τὰς ἀπέναντι πλευρὰς εἰς Α′, Β′, Γ′. Αἱ διὰ τοῦ Α′ ἀγόμεναι παρ/λοι πρὸς τὰς ΒΒ′ καὶ ΓΓ′ τέμνουν τὰς πλευρὰς ΑΓ καὶ ΑΒ εἰς Π καὶ Κ καὶ αἱ ἐκ τοῦ Α′ ἀγόμεναι παρ/λοι πρὸς τὰς ΑΓ, ΑΒ τέμνουν τὰς ΒΒ′, ΓΓ′ εἰς Ρ καὶ Τ. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ τέσσαρα σημεῖα Π, Κ, Ρ, Τ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

686. Ἔστω ρόμβος ΑΒΓΔ καὶ Π, Ρ, Σ, Κ τὰ περίκεντρα τῶν τριγώνων ΒΓΔ, ΒΑΔ, ΑΒΓ, ΑΔΓ. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ Π, Σ, Ρ, Κ εἶναι κορυφαὶ ρόμβου ὁμοίου πρὸς τὸν δοθέντα.

687. Μεταβλητοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἡ βάσις ΒΓ εἶναι σταθερὰ καὶ τὸ ἄθροισμα ΑΒ+ +ΑΓ=s, σταθερόν. Ἡ ἐκ τοῦ μέσου τῆς ΒΓ παρ/λος πρὸς τὴν ΑΒ τέμνει τὴν ἐκ τοῦ Γ παρ/λον πρὸς τὴν ἐσωτερικὴν διχοτόμον ΑΔ εἰς Ρ. Ζητεῖται ὁ τόπος τοῦ Ρ.

688. Εἰς πᾶν τρ. ΑΒΓ ἰσχύει ἡ σχέσις :

$$\mathrm{AO}\cdot\mathrm{AO}_1=\mathrm{AB}\cdot\mathrm{A\Gamma},$$

ὅπου Ο τὸ ἔγκεντρον, $O_1$ τὸ παράκεντρον τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν $\widehat{A}$.

689. Δοθέντων τριῶν κύκλων νὰ κατασκευασθῇ τέταρτος τοιοῦτος, ὥστε οἱ ριζικοὶ ἄξονες αὐτοῦ καὶ τῶν τριῶν δοθέντων νὰ διέρχωνται ἀντιστοίχως ἀπὸ τρία δεδομένα σημεῖα.

690. Ἔστωσαν τρεῖς κύκλοι (Κ), (Λ), (Ο) ἐκτὸς ἀλλήλων. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ δύο οριακὰ σημεῖα τῆς δέσμης, ἣν ὁρίζουν οἱ (Κ) καὶ (Λ) καὶ τὰ τῆς δέσμης, ἣν ὁρίζουν οἱ (Κ) καὶ (Ο), εἶναι ὁμοκυκλικά.

691. Εὐθεῖα διερχομένη διὰ τῆς κορυφῆς Α ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τὴν πλευρὰν ΒΓ εἰς Δ καὶ τὴν περιγεγραμμένην περιφέρειαν εἰς Ε. Νὰ δειχθῇ ὅτι

$$\frac{1}{\mathrm{E\Delta}}=\frac{1}{\mathrm{EB}}+\frac{1}{\mathrm{E\Gamma}}.$$

692. Ἡ περιφέρεια ἡ διερχομένη διὰ τοῦ ποδὸς Δ τοῦ ὕψους ΑΔ τριγ.ΑΒΓ καὶ διὰ τῶν σημείων Ο καὶ $O_1$ (ἔγκεντρον, παράκεντρον) ἐπανατέμνει τὴν ευθΑΔ εἰς Σ. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ΑΣ ἰσοῦται μὲ τὴν διάμετρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου τοῦ τρ.ΑΒΓ.

693. Ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνοῦσα τὸ βαρύκεντρον τρ.ΑΒΓ μὲ τυχὸν σημεῖον Ρ τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας διχοτομεῖ τὸ τμῆμα τὸ ἔχον ἄκρα τὸ ἀντιδιαμετρικὸν τοῦ Ρ καὶ τὸ ὀρθόκεντρον.

694. Ἐὰν Μ, Ν, Ρ, Κ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ παρ/μου, τότε αἱ εὐθεῖαι ΑΝ, ΒΡ, ΓΚ, ΔΜ ὁρίζουν παρ/μον, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι τὸ ἓν πέμπτον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ΑΒΓΔ.

695. Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ εὐθεῖαι αἱ ἀγόμεναι ἐκ τῶν κορυφῶν Α, Β, Γ τριγώνου ἀντιστοίχως παράλληλοι πρὸς τὰς διαμέσους τοῦ τρ.ΑΒΓ τὰς ἀγομένας ἐκ τῶν Β, Γ, Α σχηματίζουν τρίγωνον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ τριπλάσιον τοῦ τρ.ΑΒΓ καὶ ἔχον τὸ ἴδιον κ.β. μὲ τὸ τρ.ΑΒΓ.

696. Ἐὰν ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ τριγ. ΑΒΓ ληφθοῦν ἀντιστοίχως σημεῖα $\Gamma_1$, $A_1$, $B_1$ τοιαῦτα, ὥστε : $A\Gamma_1/\Gamma_1 B=BA_1/A_1\Gamma=\Gamma B_1/B_1 A$, τότε τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ $A_1B_1\Gamma_1$ ἔχουν τὸ ἴδιον βαρύκεντρον.

ΕΚΔΟΣΙΣ Α΄, 1976 (V) — ΑΝΤΙΤ. 34.000 — ΣΥΜΒΑΣΙΣ : 2655/30-3-76

ΕΚΤΥΠΩΣΙΣ - ΒΙΒΛΙΟΔ.: «ΑΤΛΑΝΤΙΣ - Μ. ΠΕΧΛΙΒΑΝΙΔΗΣ & ΣΙΑ» Α.Ε.