μαθηματικά

ἄλγεβρα

α΄ λυκείου
α΄ τεῦχος

...ΓΑΝΙΣΜΟΣ
...ΔΟΣΕΩΣ
...ΑΚΤΙΚΩΝ
ΒΙΒΛΙΩΝ

ΑΘΗΝΑ 1979

Δεύτερο αύτοτυπο
40671

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΑΛΓΕΒΡΑ

Μέ ἀπόφαση τῆς Ἑλληνικῆς Κυβερνήσεως τά διδακτικά βιβλία τοῦ Δημοτικοῦ, Γυμνασίου καί Λυκείου τυπώνονται ἀπό τόν Ὀργανισμό Ἐκδόσεως Διδακτικῶν Βιβλίων καί μοιράζονται ΔΩΡΕΑΝ.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Α΄

ΛΥΚΕΙΟΥ

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΤΕΥΧΟΣ Α΄

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑ 1979

Γιά τή συγγραφή αὐτοῦ τοῦ βιβλίου συγκροτήθηκε μέ ὑπουργική ἀπόφαση ὁμάδα ἐργασίας, πού τήν ἀποτέλεσαν οἱ:

Ν. ΒΑΡΟΥΧΑΚΗΣ . . . . *Σύμβουλος Β' ΚΕΜΕ*

Λ. ΑΔΑΜΟΠΟΥΛΟΣ . . . . *Εἰσηγητής ΚΕΜΕ*

Ν. ΑΛΕΞΑΝΔΡΗΣ . . . . *Καθηγητής Μ.Ε.*

Δ. Α. ΠΑΠΑΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ . . . . *Καθηγητής Μ.Ε.*

Α. ΠΑΠΑΜΙΚΡΟΥΛΗΣ . . . . *Καθηγητής Μ.Ε.*

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Τό νέο ἀναλυτικό πρόγραμμα Μαθηματικῶν, πού ἤδη ἐφαρμόζεται σέ ὅλες τίς τάξεις τοῦ Γυμνασίου, ἐπεκτείνεται ἀπό τό σχολικό ἔτος 1979-80 στήν Α' Λυκείου. Ἕνα διδακτικό βιβλίο γιά τήν τάξη αὐτή πρέπει, συνεπῶς, νά εἶναι ἐναρμονισμένο μέ τά βιβλία τῆς νέας γυμνασιακῆς ὕλης, νά διαθέτει τήν αὐτοτέλεια πού ἀπαιτεῖ ἡ τάξη ἀφετηρίας ἑνός νέου κύκλου σπουδῶν, ὅπως εἶναι τό Λύκειο, καί νά διασφαλίζει τήν ἀπαραίτητη ὑποδομή γιά τήν ἀπρόσκοπτη ἐφαρμογή τοῦ προγράμματος τῶν ἑπόμενων τάξεων.

Γι' αὐτό, κατά τή συγγραφή αὐτοῦ τοῦ βιβλίου, ὁδηγό ἀποτέλεσαν δύο ἀπό τίς εἰδικότερες ἐπιδιώξεις τῆς διδασκαλίας Μαθηματικῶν στό Λύκειο, ὅπως διατυπώνονται στό νέο ἀναλυτικό πρόγραμμα: α) «νά ἐμπεδώσει καί νά διευρύνει σέ θεωρητικότερο ἐπίπεδο γνώσεις πού ἀπέκτησαν οἱ μαθητές στό Γυμνάσιο» καί β) «νά μυήσει καί νά ἐξοικειώσει τό μαθητή στή διαδικασία τῆς μαθηματικῆς ἀποδείξεως καί νά τοῦ ἀναπτύξει μαθηματική σκέψη».

Ἡ τελευταία αὐτή ἐπιδίωξη, μεταξύ ἄλλων, ὁριοθετεῖ καί τήν ὕλη τῆς Λογικῆς πού περιέχεται στό κεφ. 1. Πρόκειται γιά τό θεωρητικό ὑπόβαθρο πού χρειάζεται ὁ μαθητής γιά νά συνθέτει, νά ἀναλύει καί νά ἐλέγχει συλλογισμούς, δηλαδή νὰ συνειδητοποιεῖ κάθε φορά τό «πῶς συλλογίζεται». Στά ἑπόμενα κεφάλαια συνεχῶς δίνονται εὐκαιρίες γιά ἀναφορά σέ ἔννοιες καί μεθόδους πού περιέχονται στό κεφ. 1. Ἡ διδασκαλία, λοιπόν, αὐτοῦ τοῦ κεφαλαίου δέν ἀποτελεῖ αὐτοσκοπό, ἀλλά πρέπει νά ἀνταποκρίνεται στήν ἰδιομορφία του. Ἀρκεῖ στήν ἀρχή μιά γενική, σύντομη καί «πρακτική» ἐνημέρωση τῶν μαθητῶν γιά τό περιεχόμενό του, κυρίως μέ τά παραδείγματα καί τίς ἐφαρμογές του· ἡ πλήρης ἀφομοίωση ἐννοιῶν καί μεθόδων καί ἡ ἐξοικείωση μέ τό συμβολισμό θά γίνει βαθμιαῖα κατά τή διδασκαλία τῶν ἑπομένων.

Ἐξάλλου κάθε κεφάλαιο ἀρχίζει μέ σύντομο εἰσαγωγικό σημείωμα στό ὁποῖο ἐπισημαίνονται τά ἰδιαίτερα χαρακτηριστικά του καί πού ἀπευθύνεται κυρίως στό διδάσκοντα. Τό κεφάλαιο κλείνει μέ τίς **Ἀπαντήσεις καί Ὑποδείξεις γιά τή λύση τῶν Ἀσκήσεων** *πού περιέχει. Ἐλάχιστες ἀπό τίς ὑποδείξεις αὐτές εἶναι ἀπαραίτητες στό μαθητή πού, ἔχοντας τή φιλοδοξία νά λύνει μόνος του χωρίς βοήθεια τίς ἀσκήσεις, ἔχει μεθοδικά μελετήσει καί κατανοήσει τήν ἀντίστοιχη θεωρητική ὕλη.*

Τέλος, τό βιβλίο κλείνει μέ Παράρτημα πού περιέχει πλήρεις **Λύσεις τῶν Ἀσκήσεων.** *Εἶναι αὐτονόητη ἡ σύσταση νά μήν καταφεύγει ὁ μαθητής σ' αὐτό παρά μόνο γιά σύγκριση μέ τή λύση πού ὁ ἴδιος ἔκανε καί πάντως ἀφοῦ ἔχει ἐξαντλήσει κάθε περιθώριο προσπάθειας καί ἀφοῦ ἔλαβε ὑπόψη τήν ἀντίστοιχη ὑπόδειξη.*

ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΥΜΒΟΛΩΝ

ΣΥΜΒΟΛΟ	ΣΗΜΑΣΙΑ
$\mathbb{N}$	τό σύνολο $\{0,1,2,3,\ldots\}$ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν
$\mathbb{Z}$	τό σύνολο $\{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν
$\mathbb{Q}$	τό σύνολο τῶν ρητῶν ἀριθμῶν
$\mathbb{R}$	τό σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν
$\mathbb{N}^*, \mathbb{Z}^*, \mathbb{Q}^*, \mathbb{R}^*$	τά παραπάνω σύνολα χωρίς τό 0
$\mathbb{R}^*_+, \ \mathbb{R}^*_-$	τό σύνολο τῶν θετικῶν, τό σύνολο τῶν ἀρνητικῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν
$\mathbb{R}_+, \ \mathbb{R}_-$	τό σύνολο τῶν θετικῶν, τό σύνολο τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν καί τό 0 (θετικῶν, ἀρνητικῶν μέ εὐρεία σημασία)
$\in, \ \notin$	ἀνήκει, δέν ἀνήκει
$\Rightarrow$	συνεπάγεται
$\Leftrightarrow$	ἰσοδυναμεῖ
$\wedge$	καί (σύζευξη)
$\vee$	ἤ (διάζευξη)
$\underline{\vee}$	ἤ...ἤ (ἀποκλειστική διάζευξη)
$\forall$	καθολικός ποσοδείκτης (γιά κάθε)
$\exists$	ὑπαρξιακός ποσοδείκτης (ὑπάρχει)
$\overline{p}, \ \overline{p(x)}$	ἄρνηση τῶν p, p(x)
$<, \ >$	μικρότερο, μεγαλύτερο
$\leq, \ \geq$	μικρότερο ἤ ἴσο, μεγαλύτερο ἤ ἴσο
$\cap, \ \cup$	τομή, ἕνωση
$\subset, \ \subseteq$	γνήσιο ὑποσύνολο, ὑποσύνολο
$A \times B$	καρτεσιανό γινόμενο τῶν A,B
$x\sigma y$	τό (x,y) ἱκανοποιεῖ τή σχέση σ ἤ τό x σχετίζεται μέ τό y
$\sigma = (A,B,G)$	διμελής σχέση σ, A σύνολο ἀφετηρίας, B σύνολο ἀφίξεως, G γράφημα
σ^{-1}	ἡ ἀντίστροφη σχέση τῆς σ
G^{-1}	τό ἀντίστροφο γράφημα τοῦ G
$f(x)$	εἰκόνα τοῦ x ἤ τιμή τῆς f στό x
F_A	τό σύνολο ὅλων τῶν πραγματικῶν συναρτήσεων μέ κοινό πεδίο ὁρισμοῦ τό σύνολο A
$\frac{1}{f}$	ἡ συμμετρική ὡς πρός τόν πολλαπλασιασμό συνάρτηση τῆς f.

1 ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΠΟ ΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Ἡ Λογική ἐπί μακρούς αἰῶνες ἔμεινε στό σημεῖο σχεδόν πού τήν εἶχε ἀφήσει ὁ ἱδρυτής της, ὁ μεγάλος Ἀ ρ ι σ τ ο τ έ λ η ς (384-322 π.Χ.). Σημαντική πρόοδος στήν ἐπιστήμη αὐτή σημειώθηκε ἀπό τό 19ο αἰώνα, ὅταν τά μαθηματικά εἰσέβαλαν καί σ' αὐτό τόν τομέα τῆς γνώσεως.

Ἡ παρουσίαση ὁρισμένων βασικῶν ἐννοιῶν τῆς μαθηματικῆς Λογικῆς θά συμβάλει, ὥστε ὁ μαθητής τοῦ Λυκείου νά κατανοεῖ τή λογική δομή τῶν φράσεων πού χρησιμοποιεῖ καί ἔτσι νά ἀκριβολογεῖ κατά τή διατύπωση τῶν σκέψεών του, νά κάνει σωστή καί ἐπωφελή χρήση τοῦ συμβολισμοῦ καί νά συνειδητοποιεῖ τά στάδια μιᾶς ἀποδεικτικῆς πορείας γιά νά καταλήγει σέ λογικά συμπεράσματα συστηματοποιημένα καί ἀπρόσβλητα. Σ' αὐτό κυρίως ἀποβλέπει τό περιεχόμενο αὐτοῦ τοῦ κεφαλαίου.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Προτάσεις

1.1 Τό πρῶτο πράγμα πού χρειάζεται κανείς γιά μιά σωστή συνεννόηση εἶναι νά γνωρίζει τή σημασία τῶν λέξεων πού χρησιμοποιεῖ. Αὐτό εἶναι ἐντελῶς ἀπαραίτητο στά μαθηματικά, ὅπου ἐκτός ἀπό τό κοινό λεξιλόγιο χρησιμοποιοῦμε ἰδιαίτερη **ὁρολογία** καί **συμβολισμό** (π.χ. τούς *ὅρους* σύνολο, πολυώνυμο, ὁμοιοθεσία, τά *σύμβολα* $=$, $\in$, $>$ κτλ.). Παρανόηση τῆς σημασίας ἑνός ὅρου ἤ συμβόλου ὁδηγεῖ σέ σφάλματα. Π.χ. ἕνα τετράπλευρο μέ ἴσες πλευρές εἶναι **τετράγωνο**; $\varnothing = \{\varnothing\}$;

Κατά τήν ἀνάπτυξη ἑνός μαθηματικοῦ θέματος διατυπώνουμε «λογικές προτάσεις» χρησιμοποιώντας λέξεις καί σύμβολα. Μέ τόν ὅρο **λογική πρόταση** ἤ ἁπλά **πρόταση** θά ἐννοοῦμε κάθε φράση πού μέ βάση τό νοηματικό της περιεχόμενο μπορεῖ νά χαρακτηριστεῖ ἤ ὡς **ἀληθής (α)** ἤ ὡς **ψευδής (ψ)**. Ἕνας τέτοιος χαρακτηρισμός μιᾶς προτάσεως λέγεται **τιμή ἀλήθειας** ἤ ἁπλά **τιμή** τῆς προτάσεως. Προτάσεις π.χ. εἶναι οἱ ἑξῆς:

— Κάθε ρόμβος εἶναι παραλληλόγραμμο (ἀληθής)

— Ὁ ἀριθμός 18 εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 6 καί τοῦ 5 (ψευδής).

Ἀπό τίς προτάσεις πού χρησιμοποιοῦμε στά μαθηματικά βασικές εἶναι καί οἱ:

- προτάσεις πού ἐκφράζουν ἰσότητα, ὅπως π.χ. ἡ $\boldsymbol{\alpha = \beta}$, πού σημαίνει ὅτι τά μαθηματικά ἀντικείμενα α καί β **συμπίπτουν**, δηλαδή ὅτι α καί β εἶναι ὀνόματα τοῦ ἴδιου ἀντικειμένου
- προτάσεις ὅπως ἡ $\boldsymbol{\alpha \in A}$, πού εἶναι ἡ συμβολική γραφή τῆς «α εἶναι στοιχεῖο τοῦ συνόλου Α».

Ἀληθεῖς προτάσεις

1.2 Ἄν οἱ κάθετες πλευρές ἑνός ὀρθογώνιου τριγώνου ἔχουν μήκη 3 cm καί 4 cm, ἡ ὑποτείνουσα θά ἔχει μῆκος 5 cm, ἐπειδή $5^2 = 3^2 + 4^2$ (πυθαγόρειο θεώρημα). Ἐπίσης εἶναι $13^2 = 5^2 + 12^2$. Ἡ φράση λοιπόν:

«Ὑπάρχουν τρεῖς φυσικοί ἀριθμοί α,β,γ τέτοιοι, ὥστε $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$»

εἶναι πρόταση ἀληθής.

Ἄν ἀντί $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ γράψουμε $\alpha^3 = \beta^3 + \gamma^3$, ἡ ἀντίστοιχη φράση εἶναι φυσικά καί αὐτή πρόταση. Ἀληθής ἤ ψευδής; Ἀπό τότε πού τή διατύπωσε ὁ Γάλλος μαθηματικός Fermat (1601—1665), δέ δόθηκε ὡς σήμερα ἀπάντηση σ' αὐτό τό ἐρώτημα.

Ἡ προσπάθεια γιά νά διαπιστωθεῖ ἄν μιά πρόταση ἀληθεύει ἤ ὄχι εἶναι τό κύριο χαρακτηριστικό τῆς μαθηματικῆς ἐργασίας. Ἡ ἀλήθεια μιᾶς προτάσεως μπορεῖ νά προκύψει:

- ἄμεσα ἀπό ἕναν **ὁρισμό,** πού εἶναι πρόταση μέ τήν ὁποία καθορίζεται ἡ σημασία ἑνός νέου ὅρου. Π.χ. «*Ρόμβος* εἶναι κάθε τετράπλευρο μέ ἴσες πλευρές»
- ὡς *λογικὸ συμπέρασμα* ἀπό ἄλλες ἀληθεῖς προτάσεις, ὁπότε λέγεται **θεώρημα.**

Οἱ ἀληθεῖς προτάσεις ἀπό τίς ὁποῖες προκύπτει λογικά ἕνα θεώρημα μπορεῖ νά εἶναι καί αὐτές θεωρήματα τά ὁποῖα ἔχουν προκύψει ἀπό ἄλλες ἀληθεῖς προτάσεις καί αὐτές ἀπό ἄλλες κ.ο.κ. Ἔτσι θά πρέπει ὁρισμένες ἀρχικές προτάσεις νά τίς δεχτοῦμε ὡς ἀληθεῖς. Αὐτές οἱ προτάσεις στή μαθηματική γλώσσα λέγονται **ἀξιώματα.**

Ἁπλές καί σύνθετες προτάσεις

$\boxed{1.3}$ Ἡ πρόταση «ὁ ἀριθμός α εἶναι περιττός» εἶναι μιά **ἁπλή** πρόταση, μέ τήν ἔννοια ὅτι κανένα τμῆμα της δέν ἀρκεῖ γιά νά σχηματιστεῖ μιά ἄλλη πρόταση. Δέ συμβαίνει τό ἴδιο μέ τήν πρόταση

(1) «ὁ ἀριθμός α δέν εἶναι περιττός»,

γιατί παραλείποντας τή λέξη «δέν» ἔχουμε τήν προηγούμενη πρόταση μέ ἐντελῶς διαφορετικό νόημα.

Κάθε πρόταση πού δέν εἶναι ἁπλή θά τή λέμε **σύνθετη.** Ἐκτός ἀπό τήν (1) σύνθετες εἶναι καί οἱ προτάσεις:

(2) «τό τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιο καί (τό ΑΒΓ εἶναι) ἰσοσκελές»

(3) «ὁ ἀριθμός α εἶναι ἄρτιος ἤ (ὁ α εἶναι) περιττός»

(4) «ἄν Α εἶναι πατέρας τοῦ Β, τότε Β εἶναι παιδί τοῦ Α»,

σέ καθεμιά ἀπό τίς ὁποῖες διακρίνουμε δύο προτάσεις συνδεδεμένες μέ τίς λέξεις «καί» στή (2), «ἤ» στήν (3), «ἄν. . .τότε» στήν (4).

Γενικά, μετασχηματίζοντας μιά πρόταση μέ χρησιμοποίηση τοῦ «δέν» ἤ συνδέοντας δύο ὁποιεσδήποτε [1] προτάσεις μέ τίς λέξεις «καί», «ἤ», «ἄν. . . τότε», δημιουργοῦμε νέες προτάσεις. Αὐτές τίς διαδικασίες παραγωγῆς νέων προτάσεων τίς λέμε **λογικές πράξεις.**

Διαδοχικές ἐφαρμογές περισσότερων λογικῶν πράξεων ὁδηγοῦν σέ συνθετότερες προτάσεις, ὅπως ἡ ἀκόλουθη:

---

(1) Θεωρητικά δέν ὑπάρχει κανένας περιορισμός γιά τό ποιές προτάσεις συνθέτουμε. Ἔτσι σύνθετες προτάσεις εἶναι καί οἱ «5 = 3 καί ἡ Ρώμη εἶναι πρωτεύουσα τῆς Ἰταλίας», ἤ ἀκόμη ἡ «ἄν 0 = 1, τότε ὁ Ὄλυμπος εἶναι βουνό», πού σχηματίζονται ἀπό προτάσεις, οἱ ὁποῖες δέ σχετίζονται νοηματικά μεταξύ τους. Θά ἀποφύγουμε νά ἀναφερόμαστε σέ τέτοιες προτάσεις.

(5) «ἄν τό τετράπλευρο τ εἶναι παραλληλόγραμμο **καί** οἱ διαγώνιοί του διχοτομοῦν τίς γωνίες του ἤ τέμνονται καθέτως, τότε τό τ εἶναι ρόμβος».

1.4 Γιά νά διερευνήσουμε τή «δομή» μιᾶς σύνθετης προτάσεως, χρησιμοποιοῦμε γράμματα γιά τίς προτάσεις ἀπό τίς ὁποῖες σχηματίζεται ἀδιαφορώντας γιά τό νοηματικό περιεχόμενό τους. Ἔτσι:

- Ἡ (1), πού προέρχεται ἀπό μετασχηματισμό μιᾶς προτάσεως p (ὁ α εἶναι περιττός) μέ χρήση τοῦ «δέν», μπορεῖ νά γραφτεῖ «**ὄχι** p».
- Οἱ (2), (3), (4) γράφονται ἀντίστοιχα: «p **καί** q», «p **ἤ** q» καί «**ἄν** p **τότε** q».
- Ἡ (5) γράφεται ὅπως καί ἡ (4): Ἄν p, τότε q.

Ἀλλά ἐδῶ ἡ πρόταση

p: «τό τετράπλευρο τ εἶναι παραλληλόγραμμο **καί** οἱ διαγώνιοί του διχοτομοῦν τίς γωνίες του ἤ τέμνονται καθέτως» εἶναι σύνθετη καί ἔχει μορφή «p_1 καί p_2». Ἐξάλλου ἡ πρόταση:

p_2: «οἱ διαγώνιοι τοῦ τ διχοτομοῦν τίς γωνίες του **ἤ** τέμνονται καθέτως» εἶναι σύνθετη καί ἔχει τή μορφή «p'_2 ἤ p''_2».
Συνεπῶς ἡ (5) τελικά γράφεται:

Ἄν p_1 **καί** (p'_2 **ἤ** p''_2), **τότε** q

Ἀσκήσεις 1, 2, 3, 4.

Προτασιακοί τύποι (π.τ.)

1.5 Μέ τήν πρόταση «ὁ 7 εἶναι ἄρτιος» ἀποδίδουμε (λανθασμένα) μιά ἰδιότητα στόν 7. Αὐτή τήν ἰδιότητα μποροῦμε νά τήν ἀποδώσουμε καί σέ κάθε ἄλλο φυσικό ἀριθμό. Ὅλες οἱ προτάσεις πού θά προκύψουν ἔχουν κοινή μορφή καί καθεμιά μπορεῖ νά «ἀντιπροσωπευθεῖ» ἀπό τή φράση «ὁ x εἶναι ἄρτιος», ἀρκεῖ τό σύμβολο x νά σημαίνει κάθε φορά ἕνα συγκεκριμένο φυσικό ἀριθμό.

Γενικά, ἔστω Ω ἕνα σύνολο καί p (x) μιά φράση πού περιέχει τό σύμβολο x καί πού μετατρέπεται σέ πρόταση κάθε φορά πού τό x ἀντικαθίσταται μέ ἕνα συγκεκριμένο στοιχεῖο τοῦ Ω. Τότε ἡ p (x) λέγεται **προτασιακός τύπος** (π.τ.) μιᾶς **μεταβλητῆς** x (ὁρισμένος) **στό Ω** ἤ μέ **σύνολο ἀναφορᾶς τό Ω.**

Θά συμβολίζουμε p(α) τήν πρόταση πού προκύπτει ἀπό τόν p(x), ὅταν θέσουμε ὅπου x τό $\alpha \in \Omega$. Θά λέμε ὅτι οἱ προτάσεις p(α) **παράγονται** ἀπό τόν π.τ. p(x), ὅταν τό x **διατρέχει** τό Ω. Θά λέμε ἀκόμα ὅτι ἕνα $\alpha \in \Omega$ **ἐπαληθεύει** τόν p(x), ἄν ἡ p(α) εἶναι πρόταση ἀληθής.

Τό σύνολο τῶν $\alpha \in \Omega$ πού ἐπαληθεύουν ἕνα π.τ. p(x) ὀνομάζεται **σύνολο**

ἀλήθειας τοῦ $p(x)$ καὶ γράφεται $\{x \in \Omega : p(x)\}$ ἤ ἁπλὰ (1) $\{x : p(x)\}$. Π.χ. σύνολο ἀλήθειας τοῦ π.τ.:

- «ὁ x εἶναι ἄρτιος», $x \in N$ εἶναι τό $\{0,2,4,...\}$
- «$x \in A$» μέ $A \subseteq \Omega$ εἶναι τό A δηλ. $\{x : x \in A\} = A$
- «$x^2 = 4$», $x \in R$ εἶναι τό $\{2, -2\}$.

1.6 Μποροῦμε νά σχηματίσουμε π.τ. $p(x,y)$ μέ δύο μεταβλητές $x \in A$ καί $y \in B$, ὅπως π.χ. «ὁ x εἶναι μικρότερος τοῦ y» ($A = B = R$). Ἡ σύγχρονη ἀντικατάσταση τοῦ x μέ $\alpha \in A$ καί τοῦ y μέ $\beta \in B$ μετατρέπει τόν $p(x,y)$ σέ πρόταση $p(\alpha,\beta)$. Ἔτσι ὁ $p(x,y)$ μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὡς π.τ. μέ μεταβλητή τό ζεῦγος (x,y) καί σύνολο ἀναφορᾶς $A \times B$.

Ἄν ἕνα ζεῦγος (α,β) ἐπαληθεύει τόν $p(x,y)$, λέμε ὅτι τό $\alpha \in A$ **σχετίζεται** μέ τό $\beta \in B$. Ἐπειδή τά ζεύγη τῶν σχετιζόμενων στοιχείων εἶναι ὁρισμένα, συνηθίζουμε νά λέμε ὅτι ἕνας π.τ. δύο μεταβλητῶν $x \in A$ καί $y \in B$ *ὁρίζει μία διμελή σχέση ἀπό τό A στό B*. Οἱ πιό ἐνδιαφέροντες π.τ. ἔχουν τή μορφή $x \sigma y$, ὅπου σ εἶναι κάθε φορά ἕνα εἰδικό σύμβολο, πού **ἐκφράζει** τή διμελή σχέση. Π.χ. $x = y$, $x < y$, $x \parallel y$. Τό σύνολο ἀλήθειας τοῦ π.τ. $x \sigma y$ λέγεται καί **γράφημα** τῆς σ.

Ὁμοίως οἱ π.τ. μέ περισσότερες μεταβλητές μποροῦν νά θεωρηθοῦν ὅτι εἶναι π.τ. μέ μία μεταβλητή. Π.χ. ὁ π.τ. $x^2 + y^2 = z^2$ μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὅτι ἔχει ὡς μεταβλητή τή (διατεταγμένη) τριάδα (x, y, z).

Σημείωση

Εἰδικότερα οἱ π.τ. πού ἐκφράζουν ἰσότητα, παράγουν δηλ. προτάσεις τῆς μορφῆς $\alpha = \beta$, λέγονται **ἐξισώσεις,** ἐνῶ ἐκεῖνοι πού ἐκφράζουν ἀνισότητα ($>$, $<$) λέγονται **ἀνισώσεις.**

Συνήθως ὅλες οἱ μεταβλητές, πού λέγονται **ἄγνωστοι,** μιᾶς ἐξισώσεως (ἤ ἀνισώσεως) διατρέχουν τό ἴδιο σύνολο Ω, καί ὅταν βρίσκουμε τό σύνολο ἀλήθειας πού εἶναι **τό σύνολο λύσεων** τῆς ἐξισώσεως, θά λέμε ὅτι **λύνουμε τήν ἐξίσωση στό Ω.**

Εἶναι φανερό ὅτι μποροῦμε νά ἐφαρμόσουμε καί σέ π. τύπους τίς λογικές πράξεις πού περιγράψαμε στήν § 1.3 καί νά δημιουργήσουμε νέους σύνθετους π. τ., ὅπως π.χ. «**ὄχι** $p(x)$», «$p(x)$ **καί** $q(x)$» κτλ.

Στά ἑπόμενα θά καθορίσουμε τήν ἀκριβή σημασία τῶν λέξεων «δέν (ὄχι)», «καί», «ἤ», «ἄν... τότε» – καί μερικῶν ἄλλων – ὅταν χρησιμοποιοῦνται ὡς **σύμβολα λογικῶν πράξεων** γιά τό σχηματισμό νέων σύνθετων προτάσεων ἤ π. τύπων.

Ἀσκήσεις 5,6,7.

---

(1) Στά ἑπόμενα, θά ἐννοοῦμε ὅτι ἡ μεταβλητή διατρέχει τό Ω, κάθε φορά πού δέν ἀναφέρεται ρητά ἄλλο σύνολο ἀναφορᾶς.

ΛΟΓΙΚΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ

Ἄρνηση

1.7 Μέ τήν πρόταση «ὁ α *δέν* εἶναι περιττός» ἐκφράζουμε ὅτι ὁ α **δέν ἔχει** τήν ἰδιότητα πού θά τοῦ ἀποδίδαμε μέ τήν πρόταση «ὁ α εἶναι περιττός». Ἔτσι οἱ δύο αὐτές προτάσεις ἔχουν πάντοτε διαφορετικές τιμές ἀλήθειας, εἶναι, ὅπως λέμε, **ἑτερότιμες.**

Γενικά, ἄν p εἶναι μιά ὁποιαδήποτε πρόταση, ἡ πρόταση «ὄχι p», συμβολικά $\sim p$ ἤ καί $\overline{p}$, ὀνομάζεται **ἄρνηση** τῆς p καί εἶναι:

- ἀληθής, ἄν ἡ p εἶναι ψευδής,
- ψευδής, ἄν ἡ p εἶναι ἀληθής,

p	$\overline{p}$
α	ψ
ψ	α

ὅπως φαίνεται στόν ἀπέναντι πίνακα πού λέγεται **πίνακας ἀλήθειας τῆς** $\overline{p}$.

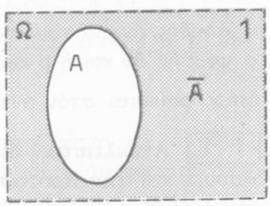
Σημείωση

Συνήθως, ὅταν μιά πρόταση ἐκφράζει μιά σχέση μέ τό σύμβολο σ, γιά τήν ἄρνησή της χρησιμοποιοῦμε τό $\not\sigma$.

Ἔτσι γράφουμε π.χ. $\alpha \neq \beta$, ἀντί γιά $\overline{\alpha = \beta}$ καί
$\alpha \notin A$, ἀντί γιά $\overline{\alpha \in A}$.

1.8 **Ἄρνηση π.τ.** Ἔστω p(x) ἕνας π.τ. (π.χ. ὁ x εἶναι περιττός). Ὁ π.τ. «ὄχι p(x)» (ὁ x δέν εἶναι περιττός), συμβολικά $\overline{p}(x)$, ὀνομάζεται **ἄρνηση** τοῦ p(x).

Ἔστω A τό σύνολο ἀλήθειας τοῦ p(x). Τά στοιχεῖα τοῦ Ω πού ἐπαληθεύουν τόν $\overline{p}(x)$ εἶναι ἐκεῖνα ἀκριβῶς πού δέν ἐπαληθεύουν τόν p(x), δηλαδή δέν ἀνήκουν στό A. Ἄρα σύνολο ἀλήθειας τοῦ $\overline{p}(x)$ εἶναι τό $\overline{A}$, συμπληρωματικό τοῦ A ὡς πρός Ω.



Σύζευξη

1.9 Ὅταν λέμε «τό τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιο *καί* ἰσοσκελές», ἐννοοῦμε ὅτι **καί οἱ δύο** προτάσεις ἀπό τίς ὁποῖες σχηματίζεται — «τό ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιο», «τό ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές»— εἶναι ἀληθεῖς.

Γενικά, ἄν p,q εἶναι δύο ὁποιεσδήποτε προτάσεις, ἡ πρόταση «p καί q», συμβολικά $p \wedge q$, ὀνομάζεται **σύζευξη** τῶν p,q καί χαρακτηρίζεται ὡς :

- ἀληθής, ἄν καί οἱ δύο προτάσεις p,q εἶναι ἀληθεῖς,
- ψευδής, σέ κάθε ἄλλη περίπτωση,

p	q	$p \wedge q$
α	α	α
α	ψ	ψ
ψ	α	ψ
ψ	ψ	ψ

ὅπως δείχνει ὁ ἀπέναντι *πίνακας ἀλήθειας* τῆς $p \wedge q$.

1.10 **Σύζευξη π.τ.** Ὁ π.τ. «p(x) καί q(x)», ὁ ὁποῖος συμβολίζεται **$p(x) \wedge q(x)$**, ὀνομάζεται **σύζευξη** τῶν p(x), q(x).

Τά στοιχεῖα τοῦ Ω πού ἐπαληθεύουν τόν $p(x) \wedge q(x)$ εἶναι ἐκεῖνα ἀκριβῶς πού ἐπαληθεύουν **καί τούς δύο** π.τ. p(x), q(x). Ἄν λοιπόν Α καί Β εἶναι τά σύνολα ἀλήθειας τῶν p(x) καί q(x) ἀντιστοίχως, τότε τό σύνολο ἀλήθειας τοῦ $p(x) \wedge q(x)$ ἀποτελεῖται ἀπό τά κοινά στοιχεῖα τῶν Α,Β, εἶναι δηλαδή ἡ τομή τους $A \cap B$.

Σημείωση

Ὅταν οἱ π.τ. εἶναι ἐξισώσεις ἤ ἀνισώσεις, χρησιμοποιοῦμε ἀντί τοῦ ὅρου «*σύζευξη*» τόν ὅρο «*σύστημα*».

Διάζευξη

1.11 Εἶναι γνωστό ὅτι κάθε ἀπόφοιτος Γυμνασίου δικαιοῦται νά δώσει ἐξετάσεις «στό Γενικό *ἤ* Τεχνικό Λύκειο» πού σημαίνει *ἤ μόνο* στό Γενικό *ἤ μόνο* στό Τεχνικό *ἤ καί στά δύο*. Μέ αὐτή τή σημασία χρησιμοποιεῖται στά μαθηματικά ἡ λέξη «ἤ» ὅταν συνδέει δύο προτάσεις. Ἔτσι π.χ., ὅταν λέμε ὅτι ἀληθεύει ἡ πρόταση «$\alpha = 0$ ἤ $\beta = 0$», ἐννοοῦμε ὅτι ἀληθεύει μιά τουλάχιστον ἀπό τίς προτάσεις «$\alpha = 0$», «$\beta = 0$».

Γενικά, ἄν p, q εἶναι δύο ὁποιεσδήποτε προτάσεις, ἡ πρόταση «p ἤ q», συμβολικά **$p \vee q$**, ὀνομάζεται **διάζευξη** τῶν p, q καί χαρακτηρίζεται ὡς:

- ἀληθής, ἄν μιά τουλάχιστον ἀπό τίς p,q εἶναι ἀληθής,
- ψευδής, ἄν καί ἡ p καί ἡ q εἶναι ψευδεῖς,

ὅπως φαίνεται στόν ἀντίστοιχο *πίνακα ἀλήθειας*.

p	q	$p \vee q$
α	α	α
α	ψ	α
ψ	α	α
ψ	ψ	ψ

1.12 **Ἀποκλειστική διάζευξη.** Μέ τίς προτάσεις p, q μποροῦμε νά σχηματίσουμε καί τήν πρόταση «ἤ μόνο p ἤ μόνο q», ἁπλούστερα «$\underline{ἤ}$ p $\underline{ἤ}$ q», πού ὀνομάζεται **ἀποκλειστική διάζευξη** τῶν p καί q καί συμβολίζεται **$p \veebar q$.** Ἡ πρόταση αὐτή χαρακτηρίζεται ὡς:

- ἀληθής, ὅταν οἱ προτάσεις p, q εἶναι ἑτερότιμες,
- ψευδής, ὅταν οἱ προτάσεις p, q εἶναι ὁμότιμες.

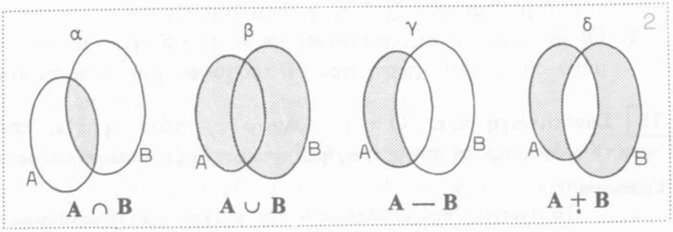
Ἄσκηση. Νά γίνει ὁ πίνακας ἀλήθειας τῆς ἀποκλειστικῆς διαζεύξεως «ἤ p ἤ q».

1.13 **Διάζευξη π.τ.** Ὁ π.τ. «p(x) ἤ q(x)», συμβολικά **$p(x) \vee q(x)$**, ὀνομάζεται **διάζευξη** τῶν p(x), q(x). Τά στοιχεῖα τοῦ Ω πού ἐπαληθεύουν τόν $p(x) \vee q(x)$ εἶναι ἐκεῖνα ἀκριβῶς πού ἐπαληθεύουν ἕναν τουλάχιστον ἀπό τούς π.τ. p(x), q(x), δηλαδή ἐκεῖνα πού ἀνήκουν σέ ἕνα τουλάχιστον ἀπό τά σύνολα ἀλήθειάς τους Α,Β. Ἄρα σύνολο ἀλήθειας τοῦ $p(x) \vee q(x)$ εἶναι ἡ ἕνωση $A \cup B$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Πράξεις συνόλων. Ἔστω A καί B ὑποσύνολα τοῦ Ω. Ἀξιοσημείωτοι π.τ. εἶναι οἱ ἑξῆς:

- «$x \in A$ καί $x \in B$» μέ σύνολο ἀλήθειας τήν **τομή** $A \cap B$ (σχ. 2α)
- «$x \in A$ ἤ $x \in B$» » » » τήν **ἕνωση** $A \cup B$ (σχ. 2β)
- «$x \in A$ καί $x \notin B$» » » » τή **διαφορά** $A - B$ (σχ. 2γ)
- «ἤ $x \in A$ ἤ $x \in B$» » » » τή **συμμετροδιαφορά** $A \dotplus B$ (σχ. 2δ).



Συνεπαγωγή

1.14 Ἔστω ν ἕνας φυσικός ἀριθμός. Ἀπό τήν ἀνισότητα $\nu > 10$ μποροῦμε, αὐξάνοντας τό α' μέλος κατά 1, νά καταλήξουμε «λογικά» στή $\nu+1>10$. Γιά νά ἐκφράσουμε ὅτι ἡ πρόταση $\nu > 10$ ἔχει ὡς λογική συνέπεια τή $\nu+1>10$, λέμε, *«ἄν $\nu > 10$, τότε $\nu+1>10$»*, ἤ «ἡ $\nu > 10$ *συνεπάγεται* τή $\nu+1>10$» καί γράφουμε:

$$\nu > 10 \Rightarrow \nu+1>10. \tag{1}$$

Προτάσεις ὅπως ἡ (1) στά μαθηματικά χαρακτηρίζονται ὡς ἀληθεῖς, **ἀνεξάρτητα ἀπό τό ν,** γιατί ὁ χαρακτηρισμός «ἀληθής» ἀναφέρεται στή μετάβαση (ὅτι ἔγινε δηλαδή σωστά) ἀπό τήν *«ὑπόθεση»* $\nu > 10$ στό *«συμπέρασμα»* $\nu+1>10$. Πάντως, ὅποιος καί ἄν εἶναι ὁ ν, ἀποκλείεται ἡ περίπτωση νά ἔχουμε συγχρόνως ὑπόθεση ἀληθή καί συμπέρασμα ψευδές, ἐνῶ ὅλες οἱ ἄλλες περιπτώσεις μποροῦν νά παρουσιαστοῦν. Πράγματι:

γιά $\nu=11$ ἔχουμε $11>10$ (α) $\Rightarrow$ $12>10$ (α)
» $\nu=10$ » $10>10$ (ψ) $\Rightarrow$ $11>10$ (α)
» $\nu=9$ » $9>10$ (ψ) $\Rightarrow$ $10>10$ (ψ).

Γενικά, ἄν p, q εἶναι δύο ὁποιεσδήποτε προτάσεις, ἡ πρόταση «ἄν p, τότε q» συμβολικά «**p ⇒ q**»(1), ὀνομάζεται **συνεπαγωγή** μέ *ὑπόθεση* p καί *συμπέρασμα* q καί χαρακτηρίζεται ὡς:

(1) Διαβάζεται: «p συνεπάγεται q».

● ψευδής, ἄν ἡ p εἶναι ἀληθής καί ἡ q ψευδής,
● ἀληθής, σέ κάθε ἄλλη περίπτωση,

ὅπως δείχνει καί ὁ ἀντίστοιχος πίνακας ἀλήθειας.

p	q	p ⇒ q
α	α	α
α	ψ	ψ
ψ	α	α
ψ	ψ	α

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Ἀπό τό διπλανό πίνακα ἀλήθειας συμπεραίνουμε ὅτι:

1. Ἡ p ⇒ q εἶναι ἀληθής στίς περιπτώσεις πού ἡ p εἶναι ψευδής ἤ ἡ q εἶναι ἀληθής.
2. Οἱ *ἀντίστροφες* συνεπαγωγές p ⇒ q καί q ⇒ p **συναληθεύουν** μόνο στήν περίπτωση πού οἱ προτάσεις p,q εἶναι *ὁμότιμες*.

1.15 **Συνεπαγωγή π. τ.** Ὁ π.τ. «Ἄν p(x) τότε q(x)», συμβολικά **p(x)⇒q(x)**(1), ὀνομάζεται **συνεπαγωγή** μέ *ὑπόθεση* p(x) καί *συμπέρασμα* q(x).

★ **Σημείωση** (2)

Τά στοιχεῖα πού ἐπαληθεύουν τόν p(x) ⇒ q(x) εἶναι, σύμφωνα μέ τήν παρατήρηση 1, ἐκεῖνα ἀκριβῶς πού δέν ἐπαληθεύουν τόν p(x) ἤ ἐπαληθεύουν τόν q(x), δηλαδή ἀνήκουν στό $\overline{A}$, συμπληρωματικό τοῦ συνόλου ἀλήθειας τοῦ p(x), ἤ στό B, σύνολο ἀλήθειας τοῦ q(x). Ἄρα σύνολο ἀλήθειας τῆς συνεπαγωγῆς p(x) ⇒ q(x) εἶναι τό σύνολο $\overline{A} \cup B$.

Ἰσοδυναμία

1.16 Ἔστω α ἕνας φυσικός ἀριθμός. Ὅταν ὁ α δέν εἶναι μονοψήφιος, οἱ προτάσεις «$\alpha > 9$» καί «$\alpha+1 > 10$» εἶναι καί οἱ δυό ἀληθεῖς. Ὅταν ὁ α εἶναι μονοψήφιος, οἱ παραπάνω προτάσεις εἶναι καί οἱ δύο ψευδεῖς. Δηλαδή οἱ προτάσεις αὐτές εἶναι πάντοτε *ὁμότιμες*. Ἄρα σύμφωνα μέ τήν παρατ. 2 τῆς § 1.14 οἱ ἀντίστροφες συνεπαγωγές

$$\alpha > 9 \Rightarrow \alpha+1 > 10$$
$$\alpha+1 > 10 \Rightarrow \alpha > 9$$

ἀληθεύουν ἀνεξάρτητα ἀπό τόν α. Ἑπομένως ἀληθεύει καί ἡ σύζευξή τους «$\alpha > 9 \Rightarrow \alpha+1 > 10$ καί $\alpha+1 > 10 \Rightarrow \alpha > 9$», πού γράφεται ἁπλούστερα $\alpha > 9 \Leftrightarrow \alpha+1 > 10$.

Μέ αὐτή τή σημασία χρησιμοποιεῖται στά μαθηματικά τό σύμβολο ⇔ ὅταν συνδέει δύο προτάσεις· δηλαδή ὡς σύζευξη δύο ἀντίστροφων συνεπαγωγῶν. Συγκεκριμένα:

Ἄν p,q εἶναι δύο ὁποιεσδήποτε προτάσεις, ἡ πρόταση «p ⇒ q καί q ⇒ p» συμβολίζεται **p ⇔ q** καί διαβάζεται «p **ἄν καί μόνο ἄν** q» ἤ «p **ἰσοδυναμεῖ** μέ q» ἤ «ἡ p συνεπάγεται τήν q καί **ἀντιστρόφως**».

(1) Ἡ συνεπαγωγή αὐτή ἐκφράζεται καί ὡς ἑξῆς: **«ἀρκεῖ** p(x) γιά νά εἶναι q(x)» ἤ «p(x) εἶναι **ἱκανή** συνθήκη γιά τήν q(x)» καθώς καί «γιά νά εἶναι p(x), **πρέπει** q(x)» ἤ «q(x) εἶναι **ἀναγκαία** συνθήκη γιά τήν p(x)».

(2) Οἱ ἑνότητες μέ ἀστερίσκο μποροῦν νά μή διδάσκονται.

Ἡ **p ⇔ q** ὀνομάζεται **ἰσοδυναμία** τῶν p, q καί, ὅπως προκύπτει ἀπό τόν

p	q	p ⇒ q	q ⇒ p	p ⇔ q
α	α	α	α	α
α	ψ	ψ	α	ψ
ψ	α	α	ψ	ψ
ψ	ψ	α	α	α

πίνακα ἀλήθειάς της, χαρακτηρίζεται ὡς:

- ἀληθής, ἄν οἱ προτάσεις p,q εἶναι ὁμότιμες,
- ψευδής, ἄν οἱ προτάσεις p,q εἶναι ἑτερότιμες.

1.17 **Ἰσοδυναμία π.τ.** Ἔστω p(x) καί q(x) δύο π.τ. στό Ω. Ὁ π.τ. «p(x) ⇒ q(x) καί q(x) ⇒ p(x)» συμβολίζεται **p(x) ⇔ q(x)** (1) καί ὀνομάζεται **ἰσοδυναμία** τῶν p(x), q(x).

Σημείωση

Ἄν A,B εἶναι τά σύνολα ἀλήθειας τῶν p(x), q(x), τότε (§1.15 Σημ.) σύνολο ἀλήθειας τοῦ p(x) ⇒ q(x) εἶναι τό $\overline{A} \cup B$, σύνολο ἀλήθειας τοῦ q(x)⇒p(x) εἶναι τό $\overline{B} \cup A$. Ἄρα σύνολο ἀλήθειας τοῦ p(x) ⇔ q(x) εἶναι (§ 1.10) τό $(\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$.

Γενίκευση συζεύξεως καί διαζεύξεως

1.18 Μέ ν προτάσεις $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$ σχηματίζεται ἡ πρόταση «p_1 καί p_2 καί... καί p_ν», συμβολικά $p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_\nu$, πού ὀνομάζεται σύζευξή τους καί χαρακτηρίζεται ὡς:

- ἀληθής, ἄν **ὅλες** οἱ $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$ εἶναι ἀληθεῖς,
- ψευδής, ἄν **μιά τουλάχιστον** ἀπό τίς $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$ εἶναι ψευδής.

Ὁμοίως μέ τίς παραπάνω προτάσεις σχηματίζεται καί ἡ διάζευξή τους «p_1 ἤ p_2 ἤ ... ἤ p_ν», συμβολικά $p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_\nu$, πού χαρακτηρίζεται ὡς:

- ἀληθής, ἄν **μία τουλάχιστον** ἀπό τίς $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$ εἶναι ἀληθής,
- ψευδής, ἄν **ὅλες** οἱ $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$ εἶναι ψευδεῖς.

Σημείωση

Ἀνάλογα ὁρίζεται ἡ ἀποκλειστική διάζευξη «ἤ p_1 ἤ p_2 ἤ... ἤ p_ν» καθώς καί ἡ σύζευξη καί ἡ διάζευξη ν π. τύπων.

Ἀσκήσεις 8,9,10.

(1) Ἐκφράζεται (βλ. ὑποσημ. 1 § 1.15) καί ὡς ἑξῆς: «γιά νά εἶναι p(x), πρέπει καί ἀρκεῖ q(x)» ἤ «p(x) εἶναι ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη γιά τήν q(x)».

1.19 Ἡ πρόταση «τό γινόμενο κάθε πραγματικοῦ ἀριθμοῦ ἐπί 0 ἰσοῦται μέ 0» εἶναι μιά ἀληθής πρόταση, ἁπλή κατά τήν ἔννοια τῆς § 1.3. Ὅμως ἔχει πλούσιο νοηματικό περιεχόμενο· σημαίνει ὅτι ἀληθεύουν οἱ προτάσεις π.χ. $1 \cdot 0 = 0$, $\sqrt{2} \cdot 0 = 0$, $-0{,}75 \cdot 0 = 0$ καί γενικά ὅλες ὅσες παράγονται ἀπό τόν π.τ. $x \cdot 0 = 0$ $(x \in \mathbb{R})$. Ἡ ἀρχική πρόταση λοιπόν μπορεῖ νά ἀναδιατυπωθεῖ ὡς ἑξῆς: «Γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$, εἶναι $x \cdot 0 = 0$», πού γράφεται συμβολικά

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad x \cdot 0 = 0.$$

Ὁ π.τ. $x \cdot 0 = 0$ λέγεται καθολικά ἀληθής.

Γενικά, θά λέμε ὅτι ἕνας π.τ. εἶναι **καθολικά ἀληθής**, ἤ ἁπλούστερα **ἀληθεύει** ἤ **ἰσχύει** (στό Ω), ὅταν τό σύνολο ἀλήθειάς του συμπίπτει μέ τό σύνολο ἀναφορᾶς του.

Τό σύμβολο ∀, πού ὀνομάζεται **καθολικός ποσοδείκτης,** χρησιμοποιεῖται στά μαθηματικά γιά νά δηλώνει ἄν ἕνας π.τ. εἶναι καθολικά ἀληθής ἤ ὄχι. Συγκεκριμένα:

Ἔστω $p(x)$ ἕνας π.τ. στό Ω μέ σύνολο ἀλήθειας Α. Ἡ πρόταση «γιά κάθε $x \in \Omega$, ἰσχύει (ἀληθεύει, εἶναι, ἔχουμε) $p(x)$», πού συμβολίζεται

$$\forall\, x \in \Omega, \quad p(x) \quad \text{ἤ} \quad \text{ἁπλούστερα} \quad \forall\, x,\ p(x)$$

χαρακτηρίζεται:

- ἀληθής ,ἄν ὁ $p(x)$ εἶναι καθολικά ἀληθής, πού σημαίνει $A = \Omega$, δηλαδή ὅλες οἱ προτάσεις πού παράγονται ἀπό τόν $p(x)$ εἶναι ἀληθεῖς,
- ψευδής, ἄν $A \neq \Omega$, δηλαδή ἄν ἔστω καί μία ἀπό τίς παραπάνω προτάσεις εἶναι ψευδής.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Ἡ πρόταση $\forall x,\ x = x$ εἶναι ἀληθής (Ω: ὁποιοδήποτε σύνολο)
2. » $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 - 1 = 0$ εἶναι ψευδής, ἀφοῦ π.χ. $2^2 - 1 = 0$ εἶναι ψευδής.
3. » $\forall\, x \in \{-1, 1\},\ x^2 - 1 = 0$ εἶναι ἀληθής
4. » $\forall x \in \mathbb{R},\ 2x \neq x + 1$ εἶναι ψευδής
5. » $\forall\, x$, x εἶναι ἰσόπλευρο εἶναι ψευδής (Ω: σύνολο τῶν τριγώνων).

Σημείωση

Εἶναι φανερό ὅτι, ἄν τό σύνολο ἀναφορᾶς Ω τοῦ π.τ. $p(x)$ ἀποτελεῖται ἀπό ν στοιχεῖα $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$, τότε ἡ πρόταση $\forall x,\ p(x)$ εἶναι ἰσοδύναμη μέ τή σύζευξη $p(\alpha_1) \wedge p(\alpha_2) \wedge \ldots \wedge p(\alpha_\nu)$. Συνεπῶς ὁ καθολικός ποσοδείκτης ∀ μπορεῖ νά θεωρεῖται ὡς ἕνα σύμβολο γενικευμένης συζεύξεως.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Ἐπειδή ἕνας π.τ. $p(x,y)$ δύο μεταβλητῶν $x \in A$ καί $y \in B$ μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὡς π.τ. **μιᾶς** μεταβλητῆς, τοῦ ζεύγους (x,y) μέ

σύνολο ἀναφορᾶς τό $A \times B$ (§ 1.6), μποροῦμε νά σχηματίζουμε προτάσεις τῆς μορφῆς $\forall (x,y) \in A \times B$, $p(x,y)$ ἤ ἁπλούστερα $\forall (x,y)$, $p(x,y)$, πού γράφεται καί $\forall x{\in}A$, $\forall y{\in}B$, $p(x,y)$. Ὅταν $A{=}B{=}\Omega$, γράφουμε ἁπλούστερα

$$\forall x,y{\in}\Omega,\ p(x,y) \text{ ἤ } \forall x,\ \forall y,\ p(x,y).$$

Π.χ. $\forall x,y{\in}\mathbb{R},\quad x+y = y+x$ (ἀληθής)

$\forall x,\ \forall y,\quad x+2y = 5$ (ψευδής)

2. Χαρακτηριστικό παράδειγμα π. τύπων πού εἶναι καθολικά ἀληθεῖς εἶναι οἱ γνωστές μας ταυτότητες στήν Ἄλγεβρα. Ὅταν λέμε π.χ. ὅτι οἱ $(x+1)^2 = x^2+2x+1$, $(x-y)(x+y) = x^2-y^2$ *εἶναι ταυτότητες στό* $\mathbb{R}$, ἐννοοῦμε ὅτι ἀληθεύουν οἱ προτάσεις : $\forall x, (x+1)^2 = x^2+2x+1$ καί $\forall x, \forall y, (x-y)(x+y) = x^2-y^2$.

3. Πολλές φορές ἡ φραστική διατύπωση μιᾶς προτάσεως κρύβει τήν παρουσία τοῦ ποσοδείκτη $\forall$. Τότε μιά ἀναδιατύπωση εἶναι ἀπαραίτητη γιά νά ἀποδώσει τό ἀκριβές περιεχόμενό της. Π.χ. στήν Ἐπιπεδομετρία ἡ πρόταση «δύο εὐθεῖες κάθετες στήν ἴδια εὐθεία ε εἶναι παράλληλες» ἀναδιατυπώνεται ὡς ἑξῆς:

$\forall (\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, ἄν ε_1 καί ε_2 εἶναι κάθετες στήν ε, τότε $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$.

Συνεπαγωγές καθολικά ἀληθεῖς. Ἰσοδύναμοι π.τ.

1.20 Ὅπως τό προηγούμενο παράδειγμα πολλά θεωρήματα στά μαθηματικά ἔχουν τή μορφή $\forall x,\ p(x) \Rightarrow q(x)$. Ἄν ἰσχύει (στό Ω) καί ἡ *ἀντίστροφη* συνεπαγωγή $q(x) \Rightarrow p(x)$, τότε ἰσχύει ἡ ἰσοδυναμία $p(x) \Leftrightarrow q(x)$, δηλ. ἀληθεύει ἡ πρόταση $\forall x,\ p(x) \Leftrightarrow q(x)$. Στήν περίπτωση αὐτή οἱ π.τ. $p(x)$ καί $q(x)$ λέγονται **ἰσοδύναμοι**. Π.χ.

- Ἰσχύει ἡ συνεπαγωγή: «ἄν x εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 9, τότε x εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 3», ἀλλά ὄχι καί ἡ ἀντίστροφή της ($x \in \mathbb{N}$).
- Οἱ π.τ. «x εἶναι ἰσοσκελές» καί «δύο γωνίες τοῦ x εἶναι ἴσες» εἶναι ἰσοδύναμοι.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Τά σύνολα ἀλήθειας δύο ἰσοδύναμων π.τ. εἶναι ἴσα.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Εἴδη διμελῶν σχέσεων. Ἕνας π.τ. $p(x,y)$ δύο μεταβλητῶν $x \in \Omega$ καί $y \in \Omega$ ὁρίζει μιά **διμελή σχέση** σ στό Ω καί γράφεται $x \sigma y$. Ἡ σχέση σ λέγεται:

- **ἀνακλαστική**, ὅταν $\forall x,\ x\sigma x$
- **συμμετρική**, ὅταν ἰσχύει ἡ συνεπαγωγή $x\sigma y \Rightarrow y\sigma x$
- **ἀντισυμμετρική**, » » $(x\sigma y \text{ καί } y\sigma x) \Rightarrow x = y$
- **μεταβατική**, » » » $(x\sigma y \text{ καί } y\sigma z) \Rightarrow x\sigma z$.

Ὅπως ἤδη γνωρίζουμε, μιά σχέση ἀνακλαστική, συμμετρική καί μεταβατική λέγεται **σχέση ἰσοδυναμίας** (π.χ. ἰσότητα, παραλληλία εὐθειῶν, ὁμοιότητα τριγώνων), ἐνῶ μιά σχέση ἀνακλαστική, ἀντισυμμετρική καί μεταβατική λέγεται **σχέση διατάξεως** (π.χ. σχέση $\leq$ στό $\mathbb{R}$, διαιρετότητα στό $\mathbb{N}$).

Ὑπαρξιακός ποσοδείκτης

$\boxed{1.21}$ Πολλές φορές, πρίν ἀρχίσουμε τίς προσπάθειες γιά τή λύση ἑνός προβλήματος, εἶναι σκόπιμο νά θέτουμε τό ἐρώτημα ἄν **ὑπάρχει** τέτοια λύση. Ἔτσι π.χ. εἶναι ἄσκοπο νά προσπαθήσουμε νά βροῦμε ρίζες τῆς ἐξισώσεως $3x^8+5x^2+1=0$ στό $\mathbb{R}$. Οἱ ἰσότητες πού προκύπτουν ἀπ' αὐτή γιά τίς διάφορες τιμές τοῦ $x \in \mathbb{R}$ ἔχουν α' μέλος θετικό ≥ 1 καί συνεπῶς εἶναι ὅλες ψευδεῖς. Ὁ π.τ. $3x^8+5x^2+1=0$ πού ἔχει σύνολο ἀλήθειας τό $\varnothing$ εἶναι **καθολικά ψευδής**. Ἀντίθετα ἡ ἐξίσωση $x+5=0$ **δέν εἶναι** καθολικά ψευδής. Αὐτό διατυπώνεται μέ τήν πρόταση «ὑπάρχει $x \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ὥστε $x+5=0$» πού γράφεται συμβολικά

$$\exists\, x \in \mathbb{R},\ x+5=0.$$

Τό σύμβολο $\exists$, πού ὀνομάζεται **ὑπαρξιακός ποσοδείκτης**, χρησιμοποιεῖται γιά νά ἐκφράσει ἄν ἕνας π.τ. εἶναι καθολικά ψευδής ἤ ὄχι. Συγκεκριμένα:

Ἔστω $p(x)$ ἕνας π.τ. στό Ω μέ σύνολο ἀλήθειας Α. Ἡ πρόταση «ὑπάρχει (ἕνα τουλάχιστο) $x \in \Omega$ τέτοιο, ὥστε (νά ἰσχύει, νά εἶναι) $p(x)$», πού συμβολίζεται:

$$\exists\, \mathbf{x} \in \Omega,\ p(x) \quad \text{ἤ ἁπλούστερα} \quad \exists\, x,\ p(x)$$

χαρακτηρίζεται:

- ψευδής, ἄν ὁ $p(x)$ εἶναι καθολικά ψευδής, πού σημαίνει $A=\varnothing$, δηλαδή ἄν ὅλες οἱ προτάσεις πού παράγονται ἀπό τόν $p(x)$ εἶναι ψευδεῖς,
- ἀληθής, ἄν $A \neq \varnothing$, δηλαδή ἄν ἔστω καί μία ἀπό τίς παραπάνω προτάσεις εἶναι ἀληθής.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Ἡ πρόταση	$\exists\, x \in \mathbb{Z},\ 2x=-5$	εἶναι ψευδής	
2. »	$\exists\, x \in \mathbb{Q},\ 2x=-5$	εἶναι ἀληθής	
3. »	$\exists\, x\ ,\ \ x \neq x$	εἶναι ψευδής (Ω: ὁποιοδήποτε σύνολο)	
4. »	$\exists\, x \in \mathbb{N},\ 2x > 3x-2$	εἶναι ἀληθής	
5. »	$\exists\, x$, x εἶναι τραπέζιο	εἶναι ἀληθής (Ω: σύνολο τῶν τετραπλεύρων.)	

Σημείωση

Εἶναι φανερό ὅτι, ἄν τό σύνολο ἀναφορᾶς Ω τοῦ π.τ. $p(x)$ ἀποτελεῖται ἀπό ν στοιχεῖα $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$, τότε ἡ πρόταση $\exists\, x,\ p(x)$ εἶναι ἰσοδύναμη μέ τή διάζευξη $p(\alpha_1) \vee p(\alpha_2) \vee \ldots \vee p(\alpha_\nu)$. Συνεπῶς ὁ ὑπαρξιακός ποσοδείκτης μπορεῖ νά θεωρεῖται ὡς ἕνα σύμβολο γενικευμένης διαζεύξεως.

Ἀρνήσεις

1.22 Τίς ἀρνήσεις τῶν προτάσεων $\forall x,\ p(x)$ καί $\exists x,\ p(x)$ θά τίς συμβολίζουμε $\overline{\forall}x,\ p(x)$ καί $\overline{\exists}x,\ p(x)$ ἀντιστοίχως. Ἀπό τά προηγούμενα προκύπτει ὅτι ἀληθεύουν οἱ ἰσοδυναμίες:

$$\overline{\forall}x,\ p(x) \Leftrightarrow \exists x,\ \overline{p}(x) \quad (1)$$

$$\overline{\exists}x,\ p(x) \Leftrightarrow \forall x,\ \overline{p}(x). \quad (2)$$

Πράγματι τά δύο μέλη τῆς (1) εἶναι προτάσεις ὁμότιμες, ἐπειδή:

- Ἄν ἡ $\overline{\forall}x,\ p(x)$ εἶναι ἀληθής, τότε ἡ $\forall x,\ p(x)$ εἶναι ψευδής. Ἄρα (§ 1.5) ὑπάρχει x τέτοιο, ὥστε $p(x)$ εἶναι ψευδής, δηλαδή ἐπαληθεύει τόν $\overline{p}(x)$. Ἑπομένως ἡ $\exists x,\ \overline{p}(x)$ ἀληθεύει.
- Ἄν ἡ $\overline{\forall}x,\ p(x)$ εἶναι ψευδής, τότε ἡ $\forall x,\ p(x)$ εἶναι ἀληθής. Ἄρα κανένα x δέν ἐπαληθεύει τόν $\overline{p}(x)$ καί συνεπῶς ἡ $\exists x,\ \overline{p}(x)$ εἶναι ψευδής.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται καί ἡ ἰσοδυναμία (2).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Ὅταν ἕνας π.τ. $p(x)$ δέν εἶναι καθολικά ἀληθής, δηλ. ὅταν ἀληθεύει ἡ $\overline{\forall}x,\ p(x)$, αὐτό δέ σημαίνει ὅτι εἶναι καθολικά ψευδής, δηλ. ὅτι $\forall x,\ \overline{p}(x)$, ἀλλά ἁπλῶς ὅτι $\exists x,\ \overline{p}(x)$.

Ἀσκήσεις 11,12,13,14.

ΛΟΓΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ

Ἔννοια τοῦ λογικοῦ τύπου (λ.τ.)

1.23 Στήν ἀλγεβρική παράσταση $\dfrac{x+yz}{z}$ εἶναι σημειωμένη μιά σειρά πράξεων ἀνάμεσα σέ ἀριθμούς πού παριστάνονται μέ γράμματα. Ἀνάλογη κατάσταση ἔχουμε στή Λογική.

Ὅταν, γιά νά συμβολίσουμε μιά πρόταση ἤ ἕναν π.τ., χρησιμοποιοῦμε γράμματα p, q, r,... πού παριστάνουν προτάσεις **ἤ καί π.τ.**, σημειώνοντας ἀνάμεσά τους μιά καθορισμένη σειρά λογικῶν πράξεων ($\overline{\ }$, $\wedge$, $\vee$, ...), τότε ἔχουμε μιά **λογική παράσταση** ἤ, ἀλλιῶς, ἕνα **λογικό τύπο** (λ.τ.).

Τά γράμματα λέγονται **μεταβλητές** τοῦ λ.τ.

Ἔτσι, λ.τ. εἶναι π.χ. τά γράμματα p, q, r,..., οἱ ἀρνήσεις $\overline{p}$, $\overline{(\overline{p})}$ ἤ $\overline{\overline{p}}$..., οἱ $p \vee q$, $p \wedge q$, $(p \Rightarrow \overline{q}) \wedge (\overline{q} \vee r)$, $[(p \Rightarrow r) \wedge (\overline{q} \vee r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ κτλ.

Οἱ παρενθέσεις χρησιμοποιοῦνται, ὅπως καί στήν Ἄλγεβρα, γιά νά καθορίσουν μέ σαφήνεια τή σειρά τῶν πράξεων.
Ὅταν οἱ μεταβλητές ἑνός λ.τ. ἀντικατασταθοῦν μέ προτάσεις, ὁ λ.τ. μετατρέπεται σέ πρόταση, τῆς ὁποίας ἡ τιμή ἀλήθειας ἐξαρτᾶται φυσικά ἀπό τίς τιμές τῶν μεταβλητῶν του.
Ἄν ἐπισημάνουμε ποιές λογικές πράξεις καί **μέ ποιά σειρά** εἶναι σημειωμένες σ' ἕνα λ.τ., μποροῦμε νά ἐμφανίσουμε μέ πίνακα ἀλήθειας τίς τιμές του (α ἤ ψ) γιά κάθε συνδυασμό τιμῶν τῶν μεταβλητῶν του, ὅπως κάνουμε στούς ἑπόμενους πίνακες.
Στόν πίνακα I ἐμφανίζονται οἱ τιμές διάφορων λ. τύπων μιᾶς μεταβλητῆς.

ΠΙΝΑΚΑΣ I

p 1	$p \Leftrightarrow p$ 2	$\overline{p}$ 3	$\overline{\overline{p}}$ 4	$p \veebar \overline{p}$ 5	$p \wedge \overline{p}$ 6	$p \Leftrightarrow \overline{\overline{p}}$ 7
α	α	ψ	α	α	ψ	α
ψ	α	α	ψ	α	ψ	α

Ἡ στήλη 2 συμπληρώθηκε κατά τήν § 1.16. Ἡ στήλη 3 παρεμβάλλεται, γιατί εἶναι ἀπαραίτητη γιά τή συμπλήρωση τῶν ἑπόμενων στηλῶν. Ἡ 4 συμπληρώθηκε ἀπό τήν 3, ἡ 5 καθώς καί ἡ 6 ἀπό τίς 1 καί 3 καί τέλος ἡ 7 ἀπό τίς 1 καί 4.
Στόν πίνακα II ἐμφανίζονται οἱ τιμές λ.τύπων μέ δύο μεταβλητές.

ΠΙΝΑΚΑΣ II

p 1	q 2	$p \vee q$ 3	$\overline{p \vee q}$ 4	$p \wedge q$ 5	$\overline{p \wedge q}$ 6	$p \Rightarrow q$ 7	$\overline{p \Rightarrow q}$ 8	$\overline{p}$ 9	$\overline{q}$ 10	$\overline{p} \wedge \overline{q}$ 11	$\overline{p} \vee \overline{q}$ 12	$\overline{p} \vee q$ 13	$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ 14
α	α	α	ψ	α	ψ	α	ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	α	α
α	ψ	α	ψ	ψ	α	ψ	α	ψ	α	ψ	α	ψ	ψ
ψ	α	α	ψ	ψ	α	α	ψ	α	ψ	ψ	α	α	α
ψ	ψ	ψ	α	ψ	α	α	ψ	α	α	α	α	α	α

Στίς στῆλες 1 καί 2 ἔχουμε τούς τέσσερις συνδυασμούς τιμῶν τῶν μεταβλητῶν p, q. Στόν πίνακα ἔχουν παρεμβληθεῖ οἱ στῆλες 3,5,7 γιά τή συμπλήρωση ἀντιστοίχως τῶν 4,6,8 καθώς καί οἱ στῆλες 9,10 γιά τή συμπλήρωση τῶν ὑπόλοιπων στηλῶν.
Τέλος ὁ πίνακας III εἶναι ἕνα παράδειγμα πίνακα ἀλήθειας τοῦ λ.τ. τριῶν μεταβλητῶν: $[(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \vee q) \Rightarrow r]$.

ΠΙΝΑΚΑΣ III

p	q	r	$p \Rightarrow r$	$q \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$	$p \vee q$	$(p \vee q) \Rightarrow r$	$[(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \vee q) \Rightarrow r]$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
α	α	α	α	α	α	α	α	α
α	α	ψ	ψ	ψ	ψ	α	ψ	α
α	ψ	α	α	α	α	α	α	α
α	ψ	ψ	ψ	α	ψ	α	ψ	α
ψ	α	α	α	α	α	α	α	α
ψ	α	ψ	α	ψ	ψ	α	ψ	α
ψ	ψ	α	α	α	α	ψ	α	α
ψ	ψ	ψ	α	α	α	ψ	α	α

Ταυτολογίες

1.24 Ἀπό τούς πίνακες τῆς προηγούμενης παραγράφου διαπιστώνουμε ὅτι ὁρισμένοι λ.τ. ἔχουν σταθερή τιμή ἀλήθειας ἀνεξάρτητα ἀπό τίς τιμές τῶν μεταβλητῶν τους. Ἕνας λ.τ. πού γιά κάθε συνδυασμό τιμῶν τῶν μεταβλητῶν του ἔχει

τιμή : **α** ὀνομάζεται **ταυτολογία**
 ψ » **ἀντίφαση.**

Ταυτολογίες εἶναι οἱ λ.τ. πού ἐμφανίζονται στίς στῆλες 2, 5, 7 τοῦ πίνακα I (π.χ. ὁ $p \veebar \bar{p}$) καί στή στήλη 9 τοῦ πίνακα III. Ἀντιφάσεις εἶναι οἱ ἀρνήσεις τῶν προηγούμενων λ.τ. καθώς καί ὁ τύπος $p \wedge \bar{p}$ (στήλη 6 τοῦ πίνακα I). Ἐπίσης εἶναι φανερό ὅτι ἡ ἄρνηση μιᾶς ἀντιφάσεως εἶναι ταυτολογία, ὅπως π.χ. ὁ $\overline{p \wedge \bar{p}}$.

1.25 **Ἰσοδύναμοι λ.τ.** Οἱ λ.τ. $p \Rightarrow q$ καί $\bar{p} \vee q$, ὅπως προκύπτει ἀπό τίς στῆλες 7 καί 13 τοῦ πίνακα II, γιά κάθε συνδυασμό τιμῶν τῶν μεταβλητῶν τους ἔχουν ἴδια τιμή ἀλήθειας. Δύο λ.τ. μέ αὐτή τήν ἰδιότητα λέγονται **ἰσοδύναμοι.** Ἰσοδύναμοι λ.τ. εἶναι καί οἱ:

- p καί $\bar{\bar{p}}$ Πίνακας I, στ. 1 καί 4
- $p \Rightarrow q$ καί $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ » II, » 7 » 14
- $\overline{p \vee q}$ καί $\bar{p} \wedge \bar{q}$ » II, » 4 » 11
- $\overline{p \wedge q}$ καί $\bar{p} \vee \bar{q}$ » II, » 6 » 12

Ἄν δύο λ.τ. T_1 καί T_2 εἶναι ἰσοδύναμοι, τότε ὁ λ.τ. $T_1 \Leftrightarrow T_2$ εἶναι ταυτολογία. Ἔτσι ἀπό τά προηγούμενα ζεύγη ἰσοδύναμων λ.τ. ἔχουμε ἀντίστοιχες ταυτολογίες, π.χ. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{p} \vee q)$ κτλ.

Νόμοι λογικῆς

1.26 Ἄν σέ μιά ταυτολογία T ἀντικαταστήσουμε τίς μεταβλητές της μέ (ὁποιεσδήποτε) προτάσεις, τότε ἡ T μετατρέπεται σέ πρόταση ἀληθή. Ἄν πάλι ἀντικαταστήσουμε τίς μεταβλητές μέ π. τύπους, ἡ T μετατρέπεται σέ π.τ. $T(x)$ πού εἶναι καθολικά ἀληθής (ἀφοῦ γιά κάθε $x \in \Omega$ γίνεται ἀληθής πρόταση). Συνεπῶς ἀληθεύει ἡ πρόταση $\forall x, T(x)$. Ἔτσι π.χ. ἀπό τήν ταυτολογία $p \underline{\vee} \bar{p}$, δηλαδή «ἤ p ἤ $\bar{p}$», παράγονται ἀληθεῖς προτάσεις, ὅπως ἡ «ὁ ἀριθμός 853 ἤ διαιρεῖται μέ τό 11 ἤ δέ διαιρεῖται μέ τό 11» ἀλλά καί γενικές προτάσεις ὅπως οἱ: «$\forall x$, ἤ x εἶναι ἰσοσκελές, ἤ x δέν εἶναι ἰσοσκελές», «$\forall x, \forall y$, ἤ $x = y$ ἤ $x \neq y$» κτλ.

Ἐπειδή οἱ ταυτολογίες ἐκφράζουν ἀληθεῖς προτάσεις ἀνεξάρτητα ἀπό τίς μεταβλητές τους, ἀποτελοῦν νόμους τῆς Λογικῆς, πού μερικοί εἶναι γνωστοί μέ ἰδιαίτερες ὀνομασίες. Π.χ.

1. **Νόμος τῆς ταυτότητας** $p \Leftrightarrow p$
2. » » **διπλῆς ἀρνήσεως** $p \Leftrightarrow \bar{\bar{p}}$
3. » » **ἀποκλείσεως τρίτου** $p \underline{\vee} \bar{p}$
4. » » **ἀντιφάσεως** $\overline{p \wedge \bar{p}}$
5. » » **ἀντιθετοαντιστροφῆς** $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$
6. **Νόμοι de Morgan**

$$\overline{p \vee q} \Leftrightarrow \bar{p} \wedge \bar{q} \quad \text{καί γενικά} \quad \overline{p \vee q \vee \ldots \vee r} \Leftrightarrow \bar{p} \wedge \bar{q} \wedge \ldots \wedge \bar{r}$$

$$\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \bar{p} \vee \bar{q} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \overline{p \wedge q \wedge \ldots \wedge r} \Leftrightarrow \bar{p} \vee \bar{q} \vee \ldots \vee \bar{r}$$

Δύο βασικοί κανόνες

1.27 Γιά τήν παραγωγή ἀληθῶν προτάσεων, ἐκτός ἀπό τίς ταυτολογίες, χρησιμοποιοῦμε συχνά τούς ἑπόμενους δύο ἁπλούς κανόνες:

α) Κανόνας ἀποσπάσεως (Κ. Ἀπ.). Ὅταν ἀληθεύουν μιά συνεπαγωγή $p \Rightarrow q$ καί ἡ πρόταση p, τότε ἀσφαλῶς ἀληθεύει καί ἡ q (§ 1.14). Εἰδικότερα, ἄν ἀληθεύουν οἱ προτάσεις $\forall x, p(x) \Rightarrow q(x)$ καί $p(\alpha)$, τότε, ἐπειδή ἀληθεύει ἡ $p(\alpha) \Rightarrow q(\alpha)$, θά ἀληθεύει καί ἡ $q(\alpha)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ἀπό τίς προτάσεις «Οἱ γωνίες τῆς βάσεως ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι ἴσες», δηλ. «$\forall x$, (x εἶναι ἰσοσκελές) $\Rightarrow$ (οἱ γωνίες τῆς βάσεως τοῦ x εἶναι ἴσες)» καί «Τό τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές μέ $ΑΒ = ΑΓ$» συμπεραίνουμε ὅτι $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$.

β) Κανόνας ἀντικαταστάσεως (Κ. Ἀντ.). Ἄν σέ ἕνα λ.τ. P ἀντικαταστήσουμε ἕνα τμῆμα του πού εἶναι λ.τ. μέ ἰσοδύναμο λ.τ., προκύπτει λ.τ.

ἰσοδύναμος τοῦ P. Εἶναι φανερό γιατί ἡ τιμή ἀλήθειας τοῦ P δέν ἐπηρεάζεται ἀπό τήν ἀντικατάσταση.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι οἱ λ.τ. $\overline{p \Rightarrow q}$ καί $p \wedge \overline{q}$ εἶναι ἰσοδύναμοι.

Πράγματι, ἐπειδή $p \Rightarrow q$ εἶναι ἰσοδύναμος τοῦ $\overline{p} \vee q$ (§1.25), ὁ $\overline{p \Rightarrow q}$ θά εἶναι ἰσοδύναμος τοῦ $\overline{\overline{p} \vee q}$,

ἑπομένως καί τοῦ $\overline{\overline{p}} \wedge \overline{q}$ (Νόμος de Morgan)

ἄρα καί τοῦ $p \wedge \overline{q}$ (Νόμος διπλῆς ἀρνήσεως).

Ἀσκήσεις 15,16,17,18,19.

ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΠΟΔΕΙΞΕΩΣ

Ἡ ἀπόδειξη γενικά

1.28 Ἡ διαπίστωση ὅτι μιά πρόταση εἶναι ἀληθής, δηλαδή ὅτι εἶναι θεώρημα, γίνεται μέ τή βοήθεια ὁρισμῶν, ἀξιωμάτων ἤ καί ἄλλων θεωρημάτων μέ βάση τούς νόμους τῆς Λογικῆς.

Ἤδη ἔχουμε συναντήσει μερικές χαρακτηριστικές περιπτώσεις, κατά τίς ὁποῖες, στηριζόμενοι σέ ἁπλούς ἀλλά ἀσφαλεῖς «λογικούς κανόνες», ἀπό ὁρισμένες ἀληθεῖς προτάσεις διατυπώσαμε νέες ἀληθεῖς προτάσεις. Τέτοιες περιπτώσεις εἶναι ἡ παραγωγή προτάσεων ἤ π.τ. πού ἀληθεύουν π.χ. ἀπό ταυτολογίες (§1.24) ἤ μέ ἐφαρμογή τοῦ κανόνα ἀποσπάσεως (Κ. Ἀπ.), τοῦ κανόνα ἀντικαταστάσεως (Κ. Ἀντ.), τῶν βασικῶν ἰδιοτήτων τῆς ἰσότητας κτλ. Γιά παράδειγμα ἄς ὑποθέσουμε γνωστό ὅτι ἀληθεύουν οἱ προτάσεις:

(1) Οἱ γωνίες τῆς βάσεως κάθε ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι ἴσες

(2) Τό τρίγωνο ΑΒΓ δέν ἔχει ἴσες γωνίες.

Μποροῦμε τώρα νά διατυπώσουμε μιά σειρά ἀληθῶν προτάσεων ὡς ἑξῆς:

(3) $\forall x$, (x εἶναι ἰσοσκελές) $\Rightarrow$ (οἱ γωνίες τῆς βάσεως τοῦ x εἶναι ἴσες) [ἀναδιατύπωση τῆς (1)]

(4) Τό ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές $\Rightarrow \widehat{A} = \widehat{B}$ ἤ $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$ ἤ $\widehat{\Gamma} = \widehat{A}$ [παράγεται ἀπό τήν (3)]

(5) $\widehat{A} \neq \widehat{B}$ καί $\widehat{B} \neq \widehat{\Gamma}$ καί $\widehat{\Gamma} \neq \widehat{A} \Rightarrow$ τό ΑΒΓ δέν εἶναι ἰσοσκελές [νόμος ἀντιθετοαντιστροφῆς καί de Morgan]

(6) Τό ΑΒΓ δέν εἶναι ἰσοσκελές $\Leftrightarrow$ τό ΑΒΓ εἶναι σκαληνό [ὁρισμός σκαληνοῦ τριγώνου]

(7) $\widehat{A} \neq \widehat{B}$ καί $\widehat{B} \neq \widehat{\Gamma}$ καί $\widehat{\Gamma} \neq \widehat{A}$ [ἀπό τήν (5) καί (6) μέ τόν
$\Rightarrow$ τό ΑΒΓ εἶναι σκαληνό Κ. 'Αντ.]

(8) $\widehat{A} \neq \widehat{B}$ καί $\widehat{B} \neq \widehat{\Gamma}$ καί $\widehat{\Gamma} \neq \widehat{A}$ [ἀναδιατύπωση τῆς (2)]

(9) Τό ΑΒΓ εἶναι σκαληνό [ἀπό τίς (7) καί (8) μέ τόν Κ. 'Απ.]

Ἡ σειρά τῶν 9 παραπάνω προτάσεων ἀποτελεῖ τήν *ἀπόδειξη* ὅτι ἀληθεύει ἡ (9). Γενικά ἡ **ἀπόδειξη** μιᾶς προτάσεως p συνίσταται στήν ἀναγραφή μιᾶς σειρᾶς ἀληθῶν προτάσεων πού καταλήγει στήν ἀποδεικτέα πρόταση p. Θά δοῦμε στά ἑπόμενα μερικές ἁπλές μεθόδους πού ἐφαρμόζουμε γιά τήν ἀπόδειξη τῶν μαθηματικῶν θεωρημάτων.

Εὐθεία ἀπόδειξη

1.29 Ἔστω ὅτι ἔχουμε νά ἀποδείξουμε μιά πρόταση τῆς μορφῆς $\forall x,\ p(x) \Rightarrow q(x)$, δηλαδή ὅτι *ἰσχύει* ἡ συνεπαγωγή $p(x) \Rightarrow q(x)$. 'Αρκεῖ νά ἀποδείξουμε ὅτι ὅσα x ἐπαληθεύουν τόν π.τ. $p(x)$ ἐπαληθεύουν καί τόν $q(x)$. 'Αρχίζουμε λοιπόν μέ τήν ὑπόθεση **ὅτι p(x) εἶναι μιά ἀληθής πρόταση** καί κατασκευάζουμε μιά ἀπόδειξη τῆς $q(x)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι: «Τό τετράγωνο κάθε περιττοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ, εἶναι περιττός», πού ἀναδιατυπώνεται ὡς ἑξῆς:
$\forall x \in \mathbb{N}$, (x περιττός) $\Rightarrow$ (x^2 περιττός).

'Απόδειξη

(1) x περιττός [ὑπόθεση]
(2) Ὑπάρχει $\nu \in \mathbb{N}$ τέτοιο, ὥστε $x = 2\nu+1$ [ὁρισμός περιττοῦ]
(3) $x^2 = (2\nu+1)^2 = 4\nu^2+4\nu+1 = 2(2\nu^2+2\nu)+1$ [γνωστά ἀπό τήν Ἄλγεβρα]
(4) x^2 περιττός [ὁρισμός περιττοῦ]

Σημείωση

Εἶναι σύνηθες, ἰδιαίτερα στή Γεωμετρία, γιά τήν ἀπόδειξη τῆς $q(x)$ νά βρίσκουμε π.τ. $r(x), s(x), \ldots, t(x)$ τέτοιους, ὥστε νά ἰσχύουν οἱ συνεπαγωγές $p(x) \Rightarrow r(x)$, $r(x) \Rightarrow s(x)$, $s(x) \Rightarrow \ldots t(x) \Rightarrow q(x)$, ὁπότε μέ διαδοχική ἐφαρμογή τοῦ Κ. 'Απ. ἀπό τήν ὑπόθεση $p(x)$ ἔχουμε τήν $r(x)$, στή συνέχεια τήν $s(x)$... τήν $t(x)$ καί τέλος τήν $q(x)$. Γράφουμε μιά τέτοια ἀπόδειξη ὡς ἑξῆς: $p(x) \Rightarrow r(x) \Rightarrow s(x) \ldots \Rightarrow t(x) \Rightarrow q(x)$ ἤ

$$\begin{aligned} p(x) &\Rightarrow r(x) \\ &\Rightarrow s(x) \\ &\ \ \ldots\ldots \\ &\Rightarrow t(x) \\ &\Rightarrow q(x). \end{aligned}$$

'Απαγωγή σέ ἄτοπο

1.30 Ἡ ἀπόδειξη μέ τή μέθοδο τῆς «ἀπαγωγῆς», ὅπως τήν ἔλεγαν οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες, σέ ἄτοπο, συνίσταται στά ἀκόλουθα:

Ἔστω ὅτι θέλουμε νά ἀποδείξουμε ὅτι ἀληθεύει ἡ p. Ἄν δέν ἀληθεύει ἡ p, θά ἀληθεύει ἡ ἄρνησή της $\overline{p}$. Ὑποθέτουμε λοιπόν ὅτι ἀληθεύει ἡ $\overline{p}$ καί συνδυάζουμε αὐτή τήν ὑπόθεση μέ ἄλλες ἀληθεῖς προτάσεις σέ μιά σωστή ἀποδεικτική διαδικασία, πού καταλήγει ὅμως σέ ἀντίφαση (ἄτοπο). Συμπεραίνουμε λοιπόν ὅτι ἡ ὑπόθεσή μας ($\overline{p}$ ἀληθεύει) δέν εὐσταθεῖ. Ἄρα ἀληθεύει ἡ p.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ὑποθέτουμε γνωστό ὅτι στό $\mathbb{R}$ ἰσχύουν τά ἑξῆς:

(1) $1 \neq 0$

(2) Ἄν $x \neq 0$, τότε ἤ x θετικός ἤ $-x$ θετικός ($-x$ εἶναι ἀντίθετος τοῦ x)

(3) $1 . x = x$

(4) $(-x) . (-y) = xy$

(5) Τό γινόμενο δύο θετικῶν εἶναι θετικό

Μέ τίς 5 αὐτές προτάσεις μποροῦμε νά ἀποδείξουμε ὅτι: **«ὁ 1 εἶναι θετικός».**

Συνεχίζουμε μέ τήν ἄρνηση τῆς ἀποδεικτέας.

(6)	«ὁ 1 δέν εἶναι θετικός»	[ὑπόθεση ὅτι $\overline{p}$ ἀληθής]
(7)	ἤ 1 θετικός ἤ -1 θετικός	[ἀπό τίς (1) καί (2) μέ Κ. Ἀπ.]
(8)	ὁ -1 θετικός	[ἀποκλειστ. διάζευξη (§ 1.12)]
(9)	$(-1) . (-1)$ θετικός	[ἀπό τήν (5) καί (8)]
(10)	$(-1) . (-1) = 1 . 1$	[ἀπό τήν (4)]
	$= 1$	[ἀπό τήν (3)]
(11)	1 εἶναι θετικός	[ἀπό τίς (9) καί (10)]
(12)	«1 εἶναι θετικός» καί «1 δέν εἶναι θετικός» πού εἶναι **ἀντίφαση.**	[σύζευξη τῶν (6) καί (11)]

$\boxed{1.31}$ **Ἀπόδειξη συνεπαγωγῆς.** Ἔστω ὅτι ἔχουμε νά ἀποδείξουμε ὅτι ἰσχύει μιά συνεπαγωγή $p(x) \Rightarrow q(x)$, δηλαδή ὅτι ἀληθεύει ἡ πρόταση

$$\forall x,\ p(x) \Rightarrow q(x). \qquad (\alpha)$$

Ὑποθέτουμε, σύμφωνα μέ τά προηγούμενα, ὅτι ἀληθεύει ἡ ἄρνησή της πού εἶναι (§ 1.22) $\exists x,\ \overline{p(x) \Rightarrow q(x)}$. Ἐπειδή ὅμως (§1.27 Ἐφ.) ὁ λ.τ. $\overline{p \Rightarrow q}$ εἶναι ἰσοδύναμος μέ $p \wedge \overline{q}$, ἡ ὑπόθεσή μας ἰσοδυναμεῖ μέ

$$\exists x,\ p(x) \wedge \overline{q}(x). \qquad (\beta)$$

Ἀρκεῖ λοιπόν, ὑποθέτοντας ὅτι ἀληθεύει ἡ (β), δηλαδή ὅτι ὑπάρχει x πού ἐπαληθεύει τόν p(x) καί συγχρόνως δέν ἐπαληθεύει τόν q(x), νά καταλήξουμε σέ ἀντίφαση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι «Δύο εὐθεῖες τοῦ ἐπιπέδου κάθετες στήν ἴδια εὐθεία ε εἶναι παράλληλες».

Ἀπόδειξη

Ἡ πρόταση ἔχει τή μορφή $\forall x,\ p(x) \Rightarrow q(x)$, ὅπου x εἶναι ζεῦγος εὐθειῶν.

(1) Ὑπάρχει ζεῦγος εὐθειῶν $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ πού εἶναι κάθετες στήν ἴδια εὐθεία ε **καί** δέν εἶναι παράλληλες [ἀληθεύει ἡ (β)]

(2) Οἱ $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ εἶναι κάθετες στήν ε
(3) Οἱ ε_1, ε_2 δέν εἶναι παράλληλες [ὁρισμός συζεύξεως]
(4) Οἱ ε_1, ε_2 τέμνονται σέ σημεῖο Ο [ἰσοδύναμη τῆς (3)]
(5) Ἀπό τό Ο ἄγονται δύο κάθετες στήν ε [ἀπό τή σύζευξη τῶν (2) καί (4)]
(6) Ἀπό τό Ο ἄγεται μία μόνο κάθετος στήν ε [γνωστό θεώρημα]
(7) Ἡ σύζευξη τῶν (5) καί (6) πού ἀποτελεῖ **ἀντίφαση.**

Ἀντιθετοαντιστροφή

1.32 Ἐπειδή οἱ λ.τ. $p \Rightarrow q$ καί $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ εἶναι ἰσοδύναμοι, ὅταν ἔχουμε νά ἀποδείξουμε ὅτι ἰσχύει μιά συνεπαγωγή, ἀποδεικνύουμε — ἄν αὐτό εἶναι εὐκολότερο — ὅτι ἰσχύει ἡ ἀντιθετοαντίστροφή της.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι: «Σέ κάθε τρίγωνο ἀπέναντι σέ ἄνισες γωνίες βρίσκονται ἄνισες πλευρές».

Ἀπόδειξη

Ἡ πρόταση αὐτή ἀναδιατυπώνεται ὡς ἑξῆς: Ἰσχύει ἡ συνεπαγωγή:
«Ἄν δύο γωνίες τοῦ τριγώνου x εἶναι ἄνισες, τότε οἱ δύο (ἀπέναντι) πλευρές τοῦ x εἶναι ἄνισες».
Ἡ ἀντιθετοαντίστροφη συνεπαγωγή εἶναι:
«Ἄν δύο πλευρές τοῦ x εἶναι ἴσες, τότε οἱ δύο ἀπέναντι γωνίες τοῦ x εἶναι ἴσες», ἡ ὁποία ἰσχύει, γιατί εἶναι μιά ἄλλη διατύπωση τοῦ γνωστοῦ θεωρήματος τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου.

Διάκριση περιπτώσεων

1.33 Γιά νά ἀποδείξουμε μία πρόταση r, **ὅταν εἶναι γνωστό** ἕνα θεώρημα τῆς μορφῆς «p ἤ q», ἀρκεῖ νά ἀποδείξουμε τίς δύο συνεπαγωγές $p \Rightarrow r$ καί $q \Rightarrow r$. Ἡ μέθοδος στηρίζεται στό ὅτι ὁ λ.τ.

$$(p \Rightarrow r \text{ καί } q \Rightarrow r) \Rightarrow ((p \text{ ἤ } q) \Rightarrow r)$$

εἶναι ταυτολογία (§ 1.23 καί 1.24).
Ἔτσι ἡ ἀπόδειξη τῆς r εἶναι ἡ ἀκόλουθη:

(1) ἡ παραπάνω ταυτολογία
(2) $p \Rightarrow r$ καί $q \Rightarrow r$ [τό ἀποδεικνύουμε]
(3) $(p$ ἤ $q) \Rightarrow r$ [ἀπό τίς (1) καί (2) μέ τόν Κ. Ἀπ.]
(4) p ἤ q [γνωστό θεώρημα]
(5) r [ἀπό τίς (3), (4) μέ τόν Κ. Ἀπ.]

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι στό R ἰσχύει ἡ συνεπαγωγή: $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$.

Ἀπόδειξη

Ἀρκεῖ νά ἀποδείξουμε ὅτι ἰσχύει: $x \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 0$ (ἀντιθετοαντιστροφή).
Σύμφωνα μέ ὅσα εἴπαμε γιά τήν εὐθεία ἀπόδειξη (§ 1.29) ὑποθέτουμε (1) $x \neq 0$ καί θά κατασκευάσουμε ἀπόδειξη τῆς $x^2 \neq 0$. Ἔχουμε:

(2) Ἄν $x \neq 0$, τότε (x θετικός ἤ $-x$ θετικός) [ὑποτίθεται γνωστό θεώρημα]
(3) x θετικός ἤ $-x$ θετικός [ἀπό τίς (1) καί (2) μέ τόν Κ. Ἀπ.]

Ἀρκεῖ τώρα νά ἀποδείξουμε τίς συνεπαγωγές:

(α) x θετικός $\Rightarrow x^2 \neq 0$ καί (β) $-x$ θετικός $\Rightarrow x^2 \neq 0$

Ἀπόδειξη τῆς (α)

x θετικός [ὑπόθεση]
(4) Τό γινόμενο δύο θετικῶν εἶναι θετικός [ὑποτίθεται γνωστό]
(5) $x^2 = x \,.\, x$ θετικός $\neq 0$

Ἀπόδειξη τῆς (β)

$-x$ θετικός [ὑπόθεση]
(4) Τό γινόμενο δύο θετικῶν εἶναι θετικός [ὑποτίθεται γνωστό]
(5) $x^2 = (-x)(-x)$ θετικός $\neq 0$ [ὑποτίθεται γνωστό ὅτι $(-x)(-y) = xy$]

Ἀσκήσεις 20, 21, 22, 23, 24.

Ἐπαγωγή

1.34 Ὑπάρχουν π.τ. μέ σύνολο ἀναφορᾶς τό $\mathbb{N}$ ἤ καί γενικότερα τό $\{\nu \in \mathbb{N} : \nu \geq \lambda\}$ πού εἶναι καθολικά ἀληθεῖς, ὅπως π.χ. «$\nu + 1 > \nu$», «τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνός πολυγώνου μέ ν πλευρές ($\nu \geq 3$) εἶναι $(2\nu - 4)$ ὀρθές» κ.ἄ.

Ἔστω ὅτι θέλουμε νά ἀποδείξουμε ὅτι ἕνας π.τ. $p(\nu)$, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι καθολικά ἀληθής, δηλαδή τήν πρόταση $\forall \nu,\ p(\nu)$.

Ἄν συμβολίσουμε ἁπλούστερα p_ν τόν π.τ. $p(\nu)$, ἔχουμε νά ἀποδείξουμε ὅλες τίς προτάσεις

$$p_0,\ p_1,\ p_2, \ldots,\ p_\kappa, \ldots$$

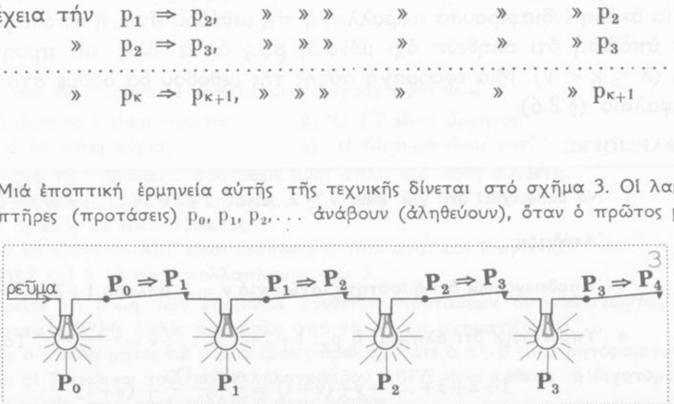
Ἀποδεικνύουμε **πρῶτα** τήν p_0. Τότε μποροῦμε νά ἀποδείξουμε τίς ἑπόμενες μέ ἐπανειλημμένη ἐφαρμογή τοῦ Κ.Ἀπ. ὡς ἑξῆς:

Ἀποδεικνύουμε τήν $p_0 \Rightarrow p_1$, ὁπότε μέ τόν Κ.Ἀπ. προκύπτει ἡ p_1
Στή συνέχεια τήν $p_1 \Rightarrow p_2$, » » » » » » p_2
» » » $p_2 \Rightarrow p_3$, » » » » » » p_3
. . . .
» » » $p_\kappa \Rightarrow p_{\kappa+1}$, » » » » » » $p_{\kappa+1}$

κ.ο.κ.

Σημείωση

Μιά ἐποπτική ἑρμηνεία αὐτῆς τῆς τεχνικῆς δίνεται στό σχῆμα 3. Οἱ λαμπτῆρες (προτάσεις) $p_0, p_1, p_2, \ldots$ ἀνάβουν (ἀληθεύουν), ὅταν ὁ πρῶτος p_0



ἀνάβει (ἀληθεύει) καί ὅλοι οἱ ἐνδιάμεσοι «διακόπτες» (συνεπαγωγές) $p_0 \Rightarrow p_1$, $p_1 \Rightarrow p_2, \ldots$ κλείνουν τό κύκλωμα (εἶναι ἀληθεῖς).

Ἀλλά οἱ παραπάνω συνεπαγωγές $p_0 \Rightarrow p_1$, $p_1 \Rightarrow p_2, \ldots, p_\kappa \Rightarrow p_{\kappa+1}, \ldots$ εἶναι ὅλες οἱ προτάσεις πού παράγει ὁ π.τ. $p_\nu \Rightarrow p_{\nu+1}$. Ἔχουμε λοιπόν νά ἀποδείξουμε τήν πρόταση $\forall \nu$, $p_\nu \Rightarrow p_{\nu+1}$. Ἡ πρόταση αὐτή, σύμφωνα μέ τήν § 1.29, ἀποδεικνύεται, ἄν, **ὑποθέτοντας ὅτι ἀληθεύει ἡ πρόταση p_ν,** κατασκευάσουμε μιά ἀπόδειξη τῆς $\mathbf{p_{\nu+1}}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι $2^\nu > \nu$.

Ἀπόδειξη

- Ἡ ἀποδεικτέα ἀνισότητα ἰσχύει γιά $\nu = 0$, γιατί $2^0 = 1 > 0$.
- Ὑποθέτοντας ὅτι ἀληθεύει ἡ $2^\nu > \nu$, θά ἀποδείξουμε τήν $2^{\nu+1} > \nu+1$. Πράγματι εἶναι $2^{\nu+1} = 2 \,.\, 2^\nu = 2^\nu + 2^\nu$ καί, ἐπειδή $2^\nu > \nu$ (ὑπόθεση) καί $2^\nu \geq 1$ (φανερό), θά ἔχουμε $2^{\nu+1} > \nu+1$, δηλαδή ἀληθεύει ἡ $p_{\nu+1}$.

Γενικότερα μποροῦμε μέ τόν ἴδιο τρόπο νά ἀποδείξουμε ὅτι ἰσχύει ἕνας π.τ. p_ν γιά κάθε $\nu \geq \lambda$. Ἀρκεῖ, ἀντί γιά τήν p_0, νά ἀποδείξουμε ἀρχικά ὅτι ἀληθεύει ἡ p_λ καί κατόπιν ἡ συνεπαγωγή $p_\nu \Rightarrow p_{\nu+1}$ $(\nu \geq \lambda)$.

Ἡ παραπάνω μέθοδος γιά τήν ἀπόδειξη ὅτι ἕνας π.τ. p_ν ἰσχύει στό $\mathbb{N}$, ἤ γενικότερα γιά κάθε φυσικό $\nu \geq \lambda$, ὀνομάζεται **ἐπαγωγή** καί συνοψίζεται ὡς ἑξῆς:

- Ἀποδεικνύουμε τήν πρόταση p_λ.
- Ὑποθέτοντας ὅτι ἀληθεύει ἡ p_ν, κατασκευάζουμε ἀπόδειξη τῆς $p_{\nu+1}$ $(\nu \geq \lambda)$.

★ **1.35** **Παραλλαγές τῆς μεθόδου.** Ἀντί τῆς συνεπαγωγῆς $p_\nu \Rightarrow p_{\nu+1}$ (γιά $\nu \geq \lambda$) θά μπορούσαμε νά θεωρήσουμε τήν $p_{\nu-1} \Rightarrow p_\nu$ (γιά $\nu > \lambda$). Αὐτό σημαίνει ὅτι, ὑποθέτοντας ὅτι ἰσχύει ἡ $p_{\nu-1}$, ἀποδεικνύουμε τήν p_ν. Μία ἀκόμη ἐνδιαφέρουσα παραλλαγή τῆς μεθόδου εἶναι ἡ ἀπόδειξη τῆς p_ν μέ ὑπόθεση ὅτι ἀληθεύει ὄχι μόνο ἡ $p_{\nu-1}$ ἀλλά ὅλες οἱ προηγούμενες p_κ $(\lambda \leq \kappa < \nu)$. Μιά ἐφαρμογή αὐτῆς τῆς μεθόδου θά δοῦμε στό ἑπόμενο κεφάλαιο (§ 2.6).

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι γιά κάθε $\nu \geq 2$, εἶναι $1+2+3+\ldots+\nu = \dfrac{\nu(\nu+1)}{2}$.**

Ἀπόδειξη

- Ἀποδεικνύουμε ὅτι ἡ ἰσότητα ἰσχύει γιά $\nu = 2$, δηλαδή $1+2 = \dfrac{2(2+1)}{2}$
- Ὑποθέτουμε ὅτι ἀληθεύει ἡ p_ν: $1+2+3+\ldots+\nu = \dfrac{\nu(\nu+1)}{2}$. Τότε

$$1+2+3+\ldots+\nu+(\nu+1) = \frac{\nu(\nu+1)}{2} + (\nu+1)$$

$$= \frac{\nu(\nu+1)+2(\nu+1)}{2}$$

$$= \frac{(\nu+1)\,(\nu+2)}{2}.$$ Ἄρα ἀποδείχτηκε ἡ $p_{\nu+1}$.

2. **Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι «ὁ ἀριθμός τῶν σημείων τομῆς ν (ν $\geq$ 2) εὐθειῶν ἑνός ἐπιπέδου, οἱ ὁποῖες ἀνά δύο δέν εἶναι παράλληλες καί ἀνά τρεῖς δέ διέρχονται ἀπό τό ἴδιο σημεῖο, εἶναι $\frac{\nu^2-\nu}{2}$».**

Ἀπόδειξη

- Ἀποδεικνύουμε τήν πρόταση γιά $\nu = 2$, δηλαδή ὅτι ὁ ἀριθμός τῶν σημείων τομῆς 2 μή παράλληλων εὐθειῶν ἑνός ἐπιπέδου εἶναι $\frac{2^2-2}{2} = \frac{4-2}{2} = 1$ (ἀληθής).
- Θεωροῦμε $\nu+1$ εὐθεῖες τοῦ ἐπιπέδου τέτοιες, ὥστε ἀνά δύο νά μήν εἶναι παράλληλες καί ἀνά τρεῖς νά μή διέρχονται ἀπό τό ἴδιο σημεῖο.

Ὑποθέτοντας ὅτι οἱ ν ἀπό αὐτές τέμνονται σέ $\frac{\nu^2-\nu}{2}$ σημεῖα, θά ἀποδείξουμε ὅτι ὅλες τέμνονται σέ $\frac{(\nu+1)^2-(\nu+1)}{2}$ σημεῖα. Δηλαδή σέ $\frac{\nu^2+2\nu+1-\nu-1}{2} = \frac{\nu^2+\nu}{2}$ σημεῖα.

Πράγματι, μιά εὐθεία ε ἀπό τίς $\nu+1$ τέμνει τίς ὑπόλοιπες ν εὐθεῖες σέ ν σημεῖα, πού εἶναι διαφορετικά ἀπό τά $\frac{\nu^2-\nu}{2}$ σημεῖα στά ὁποῖα τέμνονται οἱ ν ὑπόλοιπες εὐθεῖες. Ἔτσι ὁ ἀριθμός τῶν σημείων τομῆς τῶν $\nu+1$ εὐθειῶν εἶναι : $\nu+\frac{\nu^2-\nu}{2} = \frac{2\nu+\nu^2-\nu}{2} = \frac{\nu^2+\nu}{2}$.

Ἀσκήσεις 25,26,27,28,29,30,31,32.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ποιές ἀπό τίς παρακάτω φράσεις εἶναι λογικές προτάσεις.
   α) Ὁ ἀριθμός 6 εἶναι πρῶτος. β) Ὁ $\sqrt{2}$ εἶναι ἄρρητος.
   γ) Ποῦ θά πᾶτε αὔριο; δ) Ἡ Κέρκυρα εἶναι νησί.
2. Ποιές ἀπό τίς παρακάτω προτάσεις εἶναι ἁπλές καί ποιές σύνθετες.
   α) Ὁ ἀριθμός 10 δέν εἶναι πρῶτος.
   β) Ὁ ἀριθμός 24 εἶναι σύνθετος.
   γ) Ἄν τό τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι ἰσόπλευρο, τότε εἶναι καί ἰσογώνιο.
   δ) Ὁ 12 καί ὁ 18 εἶναι πολλαπλάσια τοῦ 3.
3. Νά βρεῖτε τή δομή τῶν ἑπόμενων σύνθετων προτάσεων ἀντικαθιστώντας μέ γράμματα ὅλες τίς ἁπλές προτάσεις ἀπό τίς ὁποῖες σχηματίζονται.
   α) Ἄν ὁ α εἶναι ρητός καί ὁ β ἀκέραιος ἀριθμός, τότε ὁ $\alpha+\beta$ εἶναι ρητός ἀριθμός.
   β) Ἄν οἱ διαγώνιοι τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ εἶναι κάθετες ἤ διχοτομοῦν τίς γωνίες του, τότε τό ΑΒΓΔ εἶναι ρόμβος.
   γ) Ἄν $\alpha\beta \neq 0$, τότε $\alpha \neq 0$ ἤ $\beta \neq 0$.

δ) Ἄν ὁ α εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 5 καί τό ἄθροισμα $\alpha+\beta$ εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 5, τότε καί ὁ β εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 5 (α,β φυσικοί ἀριθμοί).

ε) Ἄν τό παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ δέν εἶναι ρόμβος, τότε οἱ διαγώνιές του δέν εἶναι κάθετες ἤ δέ διχοτομοῦν τίς γωνίες του.

στ) Ἄν δύο δεδομένοι ἀριθμοί α καί β εἶναι ἄρτιοι ἤ περιττοί, τότε τό ἄθροισμά τους εἶναι ἄρτιος ἀριθμός.

4. Ποιές ἀπό τίς προτάσεις τῆς ἀσκ. 3 ἔχουν τήν ἴδια δομή.

5. Στόν π. τ. «ὁ x εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 3 καί τοῦ 4», μέ $x \in \{1,2,3,\ldots,24\}$, νά βρεῖτε τό σύνολο ἀλήθειάς του Α.

6. Νά βρεῖτε τό γράφημα τῆς σχέσεως πού ὁρίζεται ἀπό τόν π.τ. «ὁ x εἶναι μεγαλύτερος τοῦ y» μέ $x \in \{1,3,5,7\}$ καί $y \in \{2,4,6\}$.

7. Νά λυθοῦν οἱ ἀκόλουθες ἐξισώσεις:

α) $x+5=2$ στό $\mathbb{N}$, στό $\mathbb{Z}$

β) $2x=-5$ στό $\mathbb{Z}$, στό $\mathbb{Q}$

γ) $x^2=2$ στό $\mathbb{Q}$, στό $\mathbb{R}$

δ) $x^2=-4$ στό $\mathbb{R}$.

8. Δίνονται στό $\Omega=\{1,2,3,\ldots,20\}$ οἱ προτασιακοί τύποι:

$p(x)$: ὁ x εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 2

$q(x)$: ὁ x εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 5.

Νά βρεῖτε τό σύνολο ἀλήθειας τῶν π.τ.

$\overline{p}(x)$, $\overline{q}(x)$, $p(x) \wedge q(x)$, $p(x) \vee q(x)$.

9. Ἔστω k καί λ φυσικοί ἀριθμοί τέτοιοι, ὥστε $k=\lambda+1$. Μέ τίς προτάσεις $k=\lambda+1$ καί $k=\lambda$ νά σχηματίσετε ὅλες τίς δυνατές συνεπαγωγές καί ἰσοδυναμίες καί νά βρεῖτε τίς τιμές τους (α ἤ ψ).

10. Νά γίνει ὁ πίνακας ἀλήθειας τῶν $p \wedge q \wedge r$ καί $p \vee q \vee r$.

11. Ἀναδιατυπῶστε τίς ἀκόλουθες προτάσεις μέ χρησιμοποίηση κατάλληλων ποσοδεικτῶν:

α) Μερικοί ἀκέραιοι εἶναι πρῶτοι.

β) Κάθε τετράπλευρο εἶναι ρόμβος.

γ) Ἄν ἕνα τρίγωνο ἔχει δύο ἴσες διαμέσους, τότε εἶναι ἰσοσκελές.

δ) Ἕνας φυσικός ἀριθμός διαιρεῖται μέ τό 4, ἄν καί μόνο ἄν λήγει σέ 0.

12. Διατυπῶστε σέ κανονική γλωσσική μορφή τίς ἀκόλουθες προτάσεις:

α) $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad x^2>0$

β) $\exists x \in \mathbb{R}, \quad x^2<0$.

γ) $\forall x$, (οἱ διαγώνιες τοῦ x διχοτομοῦν τίς γωνίες του) $\Rightarrow$ (x εἶναι ρόμβος) [Ω: σύνολο τῶν παραλληλογράμμων].

δ) $\forall x$, (x εἶναι ἰσόπλευρο) $\Leftrightarrow$ (x εἶναι ἰσογώνιο) [Ω: σύνολο τῶν τριγώνων].

13. Διατυπῶστε προτάσεις ἰσοδύναμες μέ τίς ἀρνήσεις τῶν προτάσεων α,β τῶν ἀσκ. 12 καί 11.

14. Ἔστω $p(x)$ καί $q(x)$ δύο π.τ. στό Ω μέ σύνολα ἀλήθειας Α καί Β ἀντιστοίχως. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι, ἄν $\forall x, p(x) \Rightarrow q(x)$, τότε $A \subseteq B$ καί ἀντιστρόφως.

15. Νά ἀποδείξετε ὅτι εἶναι ταυτολογίες οἱ λ.τ.

α) $(p \wedge p) \Leftrightarrow p$

β) $(p \vee p) \Leftrightarrow p$

16. Ἐπίσης οἱ λ.τ.

α) $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$

β) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$

γ) $(p \wedge q) \Rightarrow p$

δ) $(p \wedge q) \Rightarrow q$

ε) $p \Rightarrow (p \vee q)$

στ) $[(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}] \Rightarrow \overline{p}$

ζ) $[p \wedge (p \wedge q)] \Leftrightarrow p$

η) $[p \vee (p \wedge q)] \Leftrightarrow p$.

17. Ἐπίσης οἱ λ.τ.

α) $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

β) $[p \vee (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \vee r]$

γ) $[p \wedge (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \wedge r]$

δ) $[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

ε) $[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$.

18. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι οἱ λ.τ. $\overline{p \Leftrightarrow q}$ καί $(p \wedge \overline{q}) \vee (q \wedge \overline{p})$ εἶναι ἰσοδύναμοι.

19. Διατυπῶστε προτάσεις ἰσοδύναμες μέ τίς ἀρνήσεις τῶν προτάσεων γ,δ τῶν ἀσκήσεων 12 καί 11.

20. Νά ἀποδείξετε ὅτι, ἄν ὁ φυσικός ἀριθμός x εἶναι ἄρτιος, τότε καί ὁ x^2 εἶναι ἄρτιος.

21. Νά ἀποδείξετε ὅτι, ἄν ὁ x^2 εἶναι ἄρτιος ($x \in \mathbb{N}$), τότε καί ὁ x εἶναι ἄρτιος.

22. Νά ἀποδείξετε ὅτι, ἄν ὁ x^2 εἶναι περιττός ($x \in \mathbb{N}$), τότε καί ὁ x εἶναι περιττός.

23. Νά ἀποδείξετε ὅτι, ἄν τό τετράπλευρο ΑΒΓΔ ἔχει ἄνισες διαγωνίους, τότε τό ΑΒΓΔ δέν εἶναι ὀρθογώνιο.

24. Νά ἀποδείξετε ὅτι, ἄν ὁ α εἶναι ἄρρητος καί ὁ ρ εἶναι ρητός, τότε οἱ ἀριθμοί: i) $\alpha+\rho$, ii) $\alpha-\rho$, iii) $\alpha\rho$, μέ $\rho \neq 0$ iv) $\alpha : \rho, (\rho \neq 0)$ v) $\rho - \alpha$ εἶναι ἄρρητοι.

25. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι γιά κάθε $\nu \geq 2$ εἶναι $1+3+5+\ldots+(2\nu-1) = \nu^2$.

26. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ ὁ ἀριθμός $\nu^3+2\nu$ εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 3.

27. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι γιά κάθε $\nu \geq 2$ εἶναι

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+\nu^2 = \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}.$$

28. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι γιά κάθε $\nu \geq 2$ εἶναι

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{\nu\cdot(\nu+1)} = \frac{\nu}{\nu+1}.$$

29. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι $3^\nu \geq 1+2\nu$.

30. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι γιά κάθε $\nu \geq 2$ καί $\alpha \neq 1$ εἶναι

$$1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^{\nu-1} = \frac{\alpha^\nu-1}{\alpha-1}.$$

31. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνός πολυγώνου μέ ν ($\nu \geq 3$) πλευρές εἶναι $(2\nu-4)$ ὀρθές.

32. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ὁ ἀριθμός τῶν διαγωνίων ἑνός πολυγώνου μέ ν ($\nu \geq 3$) πλευρές εἶναι $\frac{\nu(\nu-3)}{2}$.

1. Οἱ α,β,δ.
2. Ἁπλή ἡ β. Σύνθετες οἱ α,γ,δ.
3. **α**) Ἄν (p καί q), τότε r. **β**) Ἄν (p_1 ἤ p_2), τότε q.
   γ) Ἄν ὄχι p, τότε (ὄχι q ἤ ὄχι r). **δ**) Ἄν (p καί q), τότε r.
   ε) Ἄν ὄχι p, τότε (ὄχι q_1 ἤ ὄχι q_2). **στ**) Ἄν (p_1 καί p_2) ἤ (q_1 καί q_2), τότε r.
4. α καί δ, γ καί ε.
5. $A = \{12,24\}$.
6. $G = \{(3,2),(5,2),(5,4),(7,2),(7,4),(7,6)\}$.
7. Σύνολα λύσεων εἶναι ἀντιστοίχως:
   τῆς **α** στό $\mathbb{N}$ τό $\varnothing$, στό $\mathbb{Z}$ τό $\{-3\}$
   τῆς **β** στό $\mathbb{Z}$ τό $\varnothing$, στό $\mathbb{Q}$ τό $\left\{-\frac{5}{2}\right\}$
   τῆς **γ** στό $\mathbb{Q}$ τό $\varnothing$, στό $\mathbb{R}$ τό $\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ καί τῆς δ στό $\mathbb{R}$ τό $\varnothing$.
8. Νά βρεῖτε πρῶτα τά σύνολα ἀλήθειας τῶν p(x), q(x) καί νά ἐφαρμόσετε τίς § 1.8, 1.10, 1.13.
9. Νά παρατηρήσετε ὅτι ἡ $k = \lambda + 1$ εἶναι ἀληθής, ἐνῶ ἡ $k = \lambda$ εἶναι ψευδής.
10. Ἐπειδή ἀπό κάθε συνδυασμό τιμῶν τῶν p, q προκύπτουν δύο συνδυασμοί τιμῶν τῶν p,q,r, θά ἔχουμε τελικά 8 περιπτώσεις: (α,α,α), (α,α,ψ), (α,ψ,α), (α,ψ,ψ), (ψ,α,α), (ψ,α,ψ), (ψ,ψ,α), (ψ,ψ,ψ).
11. Στήν α χρησιμοποιῆστε τόν $\exists$ καί στίς ὑπόλοιπες τόν $\forall$.
12. Τό τετράγωνο ἑνός πραγματικοῦ μή μηδενικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι θετικός κτλ.
13. Ἐφαρμόστε τήν § 1.22.
14. **α**) Ἀποδεῖξτε ὅτι κάθε $x \in A$ ἐπαληθεύει τήν q(x).
    β) Νά διακρίνετε τίς περιπτώσεις $x \in A$ καί $x \notin A$.
15. **α**) Κατασκευάστε πίνακα ἀλήθειας πού νά περιέχει τίς στῆλες p,$p \wedge p$, $(p \wedge p) \Rightarrow p$.
    β) Ὁμοίως.
16. **α**) Κατασκευάστε πίνακα ἀλήθειας πού νά περιέχει τίς στῆλες $p \vee q$, $q \vee p$ $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$.
    Γιά τίς **β,γ,δ,ε,στ,ζ,η** κατασκευάστε πίνακες ἀλήθειας μέ τίς ἀνάλογες στῆλες.
17. Ὁμοίως.
18. Ἐπειδή $p \Leftrightarrow q$ εἶναι $(p \Rightarrow q)$ καί $(q \Rightarrow p)$, ἐφαρμόστε τό Νόμο τοῦ De Morgan καί τήν ἐφαρμογή τῆς § 1.27.
19. Γιά τίς γ τῶν ἀσκ. 12 καί 11 ἐφαρμόστε τήν § 1.22 καί τήν ἐφαρμογή τῆς § 1.27.
    Γιά τίς δ τῶν ἀσκ. 12 καί 11 ἐφαρμόστε τήν § 1.22 καί τήν ἄσκ. 18.
20. Κάθε ἄρτιος φυσικός εἶναι τῆς μορφῆς 2ν ($\nu \in \mathbb{N}$).
21. Χρησιμοποιῆστε τή μέθοδο τῆς ἀντιθετοαντιστροφῆς καί τό παράδ. § 1.29.
22. Χρησιμοποιῆστε τή μέθοδο τῆς ἀντιθετοαντιστροφῆς καί τήν ἄσκηση 20.
23. Χρησιμοποιῆστε τή μέθοδο τῆς ἀντιθετοαντιστροφῆς καί τὴν ἰδιότητα ὅτι οἱ διαγώνιοι ὀρθογωνίου εἶναι ἴσες.
24. Χρησιμοποιῆστε τή μέθοδο τῆς ἀπαγωγῆς σέ ἄτοπο.
25. Ἐργαστεῖτε ὅπως στήν ἐφαρμογή 1 τῆς § 1.35.
26. Λάβετε ὑπόψη ὅτι $(\nu+1)^3+2(\nu+1) = \nu^3+2\nu+3(\nu^2+\nu+1)$.
27. Ὅπως ἡ ἐφαρμογή 1 τῆς § 1.35.
28. Ὁμοίως.
29. Λάβετε ὑπόψη ὅτι $3 \cdot 3^\nu = 3^\nu + 2 \cdot 3^\nu$ καί ὅτι $3^\nu \geqq 1$.
30. Ὅπως ἡ ἐφαρμογή 1 § 1.35
31. Τό πολύγωνο μέ $\nu+1$ πλευρές χωρίστε το σέ ἕνα τρίγωνο καί ἕνα ν-γωνο.
32. Λάβετε ὑπόψη τὴν ὑπόδειξη τῆς ἀσκ. 31 καί ὅτι μία πλευρά τοῦ ν-γώνου γίνεται διαγώνιος τοῦ πολυγώνου μέ $\nu+1$ πλευρές.

2 ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΩΣ ΑΝΤΙΜΕΤΑΘΕΤΙΚΟ ΣΩΜΑ

Οἱ ἰδιότητες τῶν πράξεων μέ πραγματικούς ἀριθμούς δέν εἶναι ἄγνωστες στό μαθητή πού ἀποφοίτησε ἀπό τό Γυμνάσιο. Τίς περισσότερες τίς ἔχει ἤδη χρησιμοποιήσει, ἄλλες συνειδητά ἄλλες ὄχι, στό λογισμό μέ τόν ὁποῖο ἔχει ἀσχοληθεῖ.
Ἡ ἐπανάληψή τους ἐδῶ δέν ἔχει μόνο χαρακτήρα ὑπομνήσεως. Ἐπιδιώκεται κυρίως νά διαπιστώσει ὁ μαθητής ὅτι ὁρισμένες ἀπό τίς ἰδιότητες αὐτές πού δεχόμαστε ὡς ἀξιώματα ἀρκοῦν γιά νά ἀποδειχθοῦν ὅλες οἱ ἄλλες, νά ἐπισημάνει τήν ἀλληλεξάρτησή τους καί νά συνειδητοποιήσει τήν παρουσία τους σέ κάθε βῆμα μιᾶς λογιστικῆς πορείας.
Παράλληλα τοῦ δίνεται ἡ εὐκαιρία μαζί μέ τή διδασκαλία τῆς Θεωρητικῆς Γεωμετρίας νά ἀσκηθεῖ στή μαθηματική ἀπόδειξη καί νά ἐφαρμόσει ὅ,τι ἔμαθε στό προηγούμενο κεφάλαιο.
Ἡ ἐπιλογή τῶν ἀξιωμάτων ἔγινε ἔτσι, ὥστε νά ἔχουμε τό πρῶτο παράδειγμα συνόλου μέ δομή ἀντιμεταθετικοῦ σώματος. Γενικά ἡ παρουσίαση τῶν ἑνοτήτων ἀποτελεῖ ἀπαραίτητη ὑποδομή γιά μελλοντικές γενικεύσεις.

ΝΑΙ. ὁρισμοί

ΒΑΣΙΚΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΤΟ R

Γενικά

2.1 Εἴδαμε στό Γυμνάσιο πῶς, ξεκινώντας ἀπό τό σύνολο $\mathbb{N}$ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν μέ διαδοχικές *ἐπεκτάσεις*, καταλήγουμε στό σύνολο $\mathbb{R}$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Πιό συγκεκριμένα, ἀφοῦ πρῶτα διαπιστώσαμε ὅτι οἱ ἐξισώσεις $x+\alpha=\beta$ καί $\alpha x=\beta$ δέν ἔχουν πάντοτε λύση στό $\mathbb{N}$, διευρύναμε τό $\mathbb{N}$ δημιουργώντας τό σύνολο $\mathbb{Z}$ τῶν ἀκεραίων, στό ὁποῖο ἡ $x+\alpha=\beta$ ἔχει πάντοτε λύση, καί στή συνέχεια κατασκευάσαμε τό σύνολο $\mathbb{Q}$ τῶν ρητῶν ἀριθμῶν, ὅπου καί ἡ $\alpha x=\beta$ μέ $\alpha\neq 0$ ἔχει πάντοτε λύση. Τέλος ἡ μετάβαση ἀπό τό $\mathbb{Q}$ στό σύνολο $\mathbb{R}$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ὑπαγορεύτηκε ἀπό τήν ἀνάγκη νά ἔχει πάντοτε λύση ἡ ἐξίσωση $x^2=\theta$, μέ $\theta>0$. Ἔτσι εἶναι :

$$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$$

Στό κεφάλαιο αὐτό, ἀφοῦ δεχθοῦμε τήν ὕπαρξη τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, ὅπως κάνουμε καί στή Γεωμετρία γιά τίς ἔννοιες «σημεῖο», «εὐθεία» καί «ἐπίπεδο», θά ἀναφέρουμε τά ἀξιώματα καί τά θεωρήματα πού ἐκφράζουν τίς βασικές ἰδιότητες τῶν πράξεων στό σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Πρόσθεση

ὁρισμός πρόσθεσης.

2.2 Μέ δύο ὁποιουσδήποτε πραγματικούς ἀριθμούς x καί y μπορεῖ νά ὁριστεῖ **μονοσήμαντα** ἕνας νέος πραγματικός ἀριθμός, τό **ἄθροισμά τους** $\mathbf{x+y}$. Ἔτσι, ἄν σέ κάθε ζεῦγος (x, y) ἀντιστοιχίσουμε τό $x+y$, ὁρίζουμε μιά βασική πράξη στό σύνολο $\mathbb{R}$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, τήν **πρόσθεση.** Ἀφοῦ λοιπόν σέ κάθε ζεῦγος ἀντιστοιχίζεται ἕνα **μοναδικό** ἄθροισμα, σέ ἴσα ζεύγη θά ἀντιστοιχίζονται ἴσα ἀθροίσματα. Ἔτσι, ἄν εἶναι $y=z$, τά ζεύγη (x,y) καί (x,z) εἶναι ἴσα· ἄρα καί $x+y=x+z$. Δηλαδή στό $\mathbb{R}$ ἰσχύει (1) ἡ συνεπαγωγή:

$$\boxed{y=z \;\Rightarrow\; x+y=x+z} \qquad (1)$$

Ἐπίσης, ἄν εἶναι $x=\alpha$ καί $y=\beta$, τά ζεύγη (x,y) καί (α,β) εἶναι ἴσα· ἄρα $x+y=\alpha+\beta$. Ὥστε στό $\mathbb{R}$ ἰσχύει καί ἡ συνεπαγωγή :

---

(1) Θυμίζουμε ὅτι ἡ ἔκφραση αὐτή σημαίνει ὅτι ἀληθεύει ἡ πρόταση:
$\forall x, \forall y, \forall z,\quad y=z \Rightarrow x+y=x+z$

$$\boxed{x = \alpha \quad \text{καί} \quad y = \beta \;\Rightarrow\; x+y = \alpha+\beta} \qquad (2)$$

Οἱ προηγούμενες προτάσεις (1) καί (2) εἶναι οἱ γνωστοί μας «κανόνες»:

- **Ἄν στά μέλη μιᾶς ἰσότητας προσθέσουμε τόν ἴδιο ἀριθμό, προκύπτει ἰσότητα.**
- **Ἄν προσθέσουμε ἰσότητες κατά μέλη, προκύπτει ἰσότητα.**

Πολλαπλασιασμός

2.3 Ἡ δεύτερη βασική πράξη στό $\mathbb{R}$ εἶναι ὁ **πολλαπλασιασμός**. Μέ τήν πράξη αὐτή σέ κάθε ζεῦγος (x,y) πραγματικῶν ἀριθμῶν ἀντιστοιχίζεται ἕνας **μοναδικός** πραγματικός ἀριθμός, **τό γινόμενό τους xy**. Ὅπως καί στήν περίπτωση τῆς προσθέσεως, συμπεραίνουμε ὅτι στό $\mathbb{R}$ ἰσχύουν οἱ συνεπαγωγές:

$$\boxed{y = z \;\Rightarrow\; xy = xz} \qquad (3)$$

$$\boxed{x = \alpha \quad \text{καί} \quad y = \beta \;\Rightarrow\; xy = \alpha\beta} \qquad (4)$$

οἱ ὁποῖες ἀντιστοιχοῦν στούς γνωστούς μας «κανόνες»:

- **Ἄν πολλαπλασιάσουμε καί τά δύο μέλη μιᾶς ἰσότητας μέ τόν ἴδιο ἀριθμό, προκύπτει ἰσότητα.**
- **Ἄν πολλαπλασιάσουμε ἰσότητες κατά μέλη, προκύπτει ἰσότητα.**

ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΠΡΟΣΘΕΣΕΩΣ

Ἀντιμεταθετικότητα

2.4 Ἡ πρόσθεση στό $\mathbb{R}$ εἶναι **ἀντιμεταθετική**. Αὐτή τή γνωστή μας ἰδιότητα δηλώνει τό ἑπόμενο ἀξίωμα:

ΑΞΙΩΜΑ Ι

Γιά ὁποιουσδήποτε πραγματικούς ἀριθμούς x καί y εἶναι:

$$x+y = y+x$$

Προσεταιριστικότητα

2.5 Ἡ πρόσθεση στό $\mathbb{R}$ εἶναι **προσεταιριστική.** Δηλαδή δεχόμαστε ὅτι

ΑΞΙΩΜΑ ΙΙ	**Γιά ὁποιουσδήποτε πραγματικούς ἀριθμούς x, y, z εἶναι:** $$(x+y)+z = x+(y+z)$$

Γενίκευση ἀθροίσματος

2.6 Ὁρίζουμε ὡς ἄθροισμα $x_1+x_2+x_3$ τῶν ἀριθμῶν x_1, x_2, x_3 τό $(x_1+x_2)+x_3$. Ὁπότε σύμφωνα μέ τό ἀξίωμα ΙΙ θά εἶναι:

$$x_1+x_2+x_3=(x_1+x_2)+x_3=x_1+(x_2+x_3).$$

Γενικότερα, γιά κάθε $\nu \geq 3$ ὁρίζουμε ὡς ἄθροισμα $x_1+x_2+\ldots+x_\nu$ τῶν ἀριθμῶν $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ τό ἄθροισμα $(x_1+x_2+\ldots+x_{\nu-1})+x_\nu$. Δηλαδή εἶναι:

$$x_1+x_2+x_3+\ldots+x_\nu = [\ldots[[(x_1+x_2)+x_3]+x_4]+\ldots+x_{\nu-1}]+x_\nu$$

Ἀλλά μέ τούς ἴδιους προσθετέους καί χωρίς νά ἀλλάζουμε τή διάταξή τους θά μπορούσαμε νά σχηματίσουμε καί ἄλλα ἀθροίσματα, ὅπως π.χ. τό

$$x_1+[x_2+(x_3+x_4)]+x_5+\ldots+(x_{\nu-1}+x_\nu).$$

Ὅπως ἤδη γνωρίζουμε ἀπό τό Γυμνάσιο, ὅλα αὐτά τά ἀθροίσματα συμπίπτουν. Συγκεκριμένα ἀποδεικνύεται τό ἑξῆς:

ΘΕΩΡΗΜΑ 1	**Κάθε ἄθροισμα πού μπορεῖ νά σχηματιστεῖ μέ τούς προσθετέους $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ $(\nu \geq 3)$ πού λαμβάνονται μέ αὐτή τή διάταξη, ἰσοῦται μέ** $$x_1+x_2+x_3+\ldots+x_\nu$$

Ἀπόδειξη. Ἡ πρόταση ἀληθεύει γιά $\nu=3$ (Ἀξ. ΙΙ). Γιά νά ἀποδείξουμε ὅτι ἰσχύει γενικά ἀρκεῖ, ὑποθέτοντας ὅτι ἰσχύει γιά κάθε $k<\nu$, νά ἀποδείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά $k=\nu$ (§1.35). Πράγματι ἕνα ὁποιοδήποτε ἄθροισμα μέ τούς $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ καταλήγει τελικά σέ ἄθροισμα δύο προσθετέων $\alpha+\beta$, ὅπου ὁ α σχηματίζεται ἀπό ὁρισμένους προσθετέους $x_1, x_2, \ldots, x_\lambda$ καί ὁ β ἀπό τούς ὑπόλοιπους $x_{\lambda+1}, x_{\lambda+2}, \ldots, x_\nu$. Ἐπειδή τό πλῆθος τῶν προσθετέων τόσο τοῦ α ὅσο καί τοῦ β δέν ὑπερβαίνει τό $\nu-1$, θά ἔχουμε σύμφωνα μέ τήν ὑπόθεση πού κάναμε

$$\alpha = x_1+x_2+\ldots+x_\lambda \quad \text{καί}$$
$$\beta = x_{\lambda+1}+x_{\lambda+2}+\ldots+x_\nu = (x_{\lambda+1}+\ldots+x_{\nu-1})+x_\nu = \beta'+x_\nu \quad [1]$$

---

(1) Οἱ εἰδικές περιπτώσεις $\alpha=x_1$, καί $\beta=x_\nu$, ὁπότε $\beta'=0$, δέ βλάπτουν τήν γενικότητα τῆς ἀποδείξεως.

$$
\begin{aligned}
\text{Ἄρα } \alpha+\beta &= \alpha+[\beta'+x_\nu] = (\alpha+\beta')+x_\nu && [\text{προσεταιριστικότητα}]\\
&= (x_1+x_2+\ldots+x_{\nu-1})+x_\nu && [\text{σύμφωνα μέ τήν ὑπόθεσή μας}]\\
&= x_1+x_2+\ldots+x_{\nu-1}+x_\nu && [\text{ὁρισμός ἀθροίσματος}]
\end{aligned}
$$

Ἐπίσης ἰσχύει τό

ΘΕΩΡΗΜΑ 2

> **Τό ἄθροισμα $x_1+x_2+\ldots+x_\nu$ εἶναι ἀνεξάρτητο ἀπό τή διάταξη τῶν προσθετέων του**

✶ **Ἀπόδειξη.** Μποροῦμε νά ἀντιμεταθέσουμε δύο διαδοχικούς προσθετέους. Πράγματι σύμφωνα μέ τό προηγούμενο θεώρημα

$$
\begin{aligned}
x_1+x_2+\ldots+x_\lambda+x_{\lambda+1}+\ldots+x_\nu &= x_1+x_2+\ldots+(x_\lambda+x_{\lambda+1})+\ldots+x_\nu\\
&= x_1+x_2+\ldots+(x_{\lambda+1}+x_\lambda)+\ldots+x_\nu\\
&= x_1+x_2+\ldots+x_{\lambda+1}+x_\lambda+\ldots+x_\nu.
\end{aligned}
$$

Ἀποδεικνύεται ὅτι (1) ὁποιαδήποτε ἀναδιάταξη τῶν προσθετέων ἑνός ἀθροίσματος προκύπτει ἀπό ἀντιμεταθέσεις διαδοχικῶν προσθετέων.

Ἀπό τά προηγούμενα δύο θεωρήματα προκύπτει ὅτι

ΠΟΡΙΣΜΑ

> **Κάθε ἄθροισμα πού μπορεῖ νά σχηματιστεῖ μέ τούς ἀριθμούς $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$, μέ ὁποιαδήποτε διάταξη καί ἄν ληφθοῦν, μιά φορά ὁ καθένας, ἰσοῦται μέ $x_1+x_2+\ldots+x_\nu$**

Οὐδέτερο στοιχεῖο

2.7 Ὁ ἀριθμός 0 χαρακτηρίζεται ἀπό τήν ἀκόλουθη ἰδιότητα, πού τή δεχόμαστε ὡς ἀξίωμα

ΑΞΙΩΜΑ III

> **Γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό x εἶναι $x+0 = x$**

Ἀπό τήν ἀντιμεταθετικότητα τῆς προσθέσεως προκύπτει ὅτι

$$x+0 = 0+x = x$$

Ὁ ἀριθμός 0 λοιπόν, ἐπειδή, ὅταν προστίθεται μέ ὁποιοδήποτε πραγματικό ἀριθμό, δέν τόν μεταβάλλει, λέγεται **οὐδέτερο στοιχεῖο** ὡς πρός τήν πρόσθεση. Μποροῦμε νά ἀποδείξουμε ὅτι ἄλλος ἀριθμός δέν ἔχει αὐτή τήν ἰδιότητα. Γιατί, ἄν καί ὁ ἀριθμός θ ἦταν οὐδέτερο στοιχεῖο, τότε θά εἴχαμε:

(1) $\quad 0+\theta = \theta$ $\quad$ [ἐπειδή ὁ 0 εἶναι οὐδέτερο στοιχεῖο]

(2) $\quad 0+\theta = 0$ $\quad$ [ἐπειδή ὁ θ εἶναι οὐδέτερο στοιχεῖο]

---

(1) Ἡ ἀπόδειξη αὐτή ὑπερβαίνει τίς δυνατότητες τῆς τάξεως.

Τό ἄθροισμα ὅμως $0+\theta$ εἶναι μοναδικό. Συνεπῶς ἀπό τίς (1) καί (2) προκύπτει $\theta = 0$. Ἄρα

ΠΟΡΙΣΜΑ	**Ὁ ἀριθμός 0 εἶναι τό μοναδικό οὐδέτερο στοιχεῖο ὡς πρός τήν πρόσθεση**

Ὕπαρξη ἀντιθέτου

2.8 Οἱ πραγματικοί ἀριθμοί παρουσιάζουν μιά «συμμετρία» ὡς πρός τό μηδέν, ἡ ὁποία περιγράφεται ὡς ἑξῆς:

ΑΞΙΩΜΑ IV (1)	**Γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό x ὑπάρχει πραγματικός ἀριθμός x′ τέτοιος, ὥστε** $\mathbf{x+x'=0}$

Ἐπειδή ἡ πρόσθεση εἶναι ἀντιμεταθετική, θά εἶναι καί $\mathbf{x'+x=0}$.
Οἱ ἀριθμοί x καί x′ πού ἔχουν ἄθροισμα μηδέν λέγονται **ἀντίθετοι.**

ΘΕΩΡΗΜΑ 3	**Γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό ὑπάρχει ἕνας μόνο ἀντίθετός του**

Ἀπόδειξη. Ὑποθέτουμε ὅτι ἀντίθετος τοῦ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ x ἐκτός ἀπό τόν x′ εἶναι καί ὁ x″. Δηλαδή ἔχουμε $x+x'=0$ καί $x+x''=0$. Ἄρα:

$x' = x'+0$ [ὁ 0 οὐδέτερο στοιχεῖο]
$= x'+(x+x'')$ [ὁ x″ ἀντίθετος τοῦ x, $x+x''=0$]
$= (x'+x)+x''$ [προσεταιριστικότητα]
$= 0+x''$ [ὁ x′ ἀντίθετος τοῦ x, $x+x'=0$]
$= x''$

Δηλαδή ὁ x′ καί ὁ x″ συμπίπτουν.
Ὁ μοναδικός ἀντίθετος τοῦ x συμβολίζεται **−x.** Ἄρα

$$\mathbf{x+(-x)=0} \qquad (1)$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Ἡ ἐξίσωση $x+\alpha=0$ ἔχει στό $\mathbb{R}$ μοναδική ρίζα τόν ἀριθμό $-\alpha$.
2. Ἀπό τήν ἰσότητα $0+0=0$ προκύπτει ὅτι ἀντίθετος τοῦ 0 εἶναι ὁ 0.
3. Τό σύμβολο $-(-x)$ παριστάνει τόν ἀντίθετο τοῦ $-x$. Ἀλλά μοναδικός ἀντίθετος τοῦ $-x$, ὅπως δείχνει ἡ (1), εἶναι ὁ x. Δηλαδή $\mathbf{-(-x)=x}$. Ὥστε ἔχουμε:

---

(1) Συμβολικά διατυπώνεται $\forall x \in \mathbb{R}, \exists x' \in \mathbb{R}, x+x'=0$ ἤ ἁπλούστερα $\forall x, \exists x', x+x'=0$. Παρατηρῆστε ὅτι οἱ ποσοδεῖκτες $\forall$, $\exists$ δέν εἶναι ἀντιμεταθέσιμοι.

Ὁ ἀντίθετος τοῦ ἀντιθέτου ἑνός ἀριθμοῦ εἶναι ὁ ἴδιος ὁ ἀριθμός

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ὁ ἀντίθετος ἑνός ἀθροίσματος ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῶν ἀντιθέτων τῶν προσθετέων του. Δηλαδή**

$$-(x_1+x_2+\ldots+x_\nu)=(-x_1)+(-x_2)+\ldots+(-x_\nu).$$

Ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι

$(x_1+x_2+\ldots+x_\nu)+[(-x_1)+(-x_2)+\ldots+(-x_\nu)]=0.$ Εἶναι:

$$\begin{aligned}
&(x_1+x_2+\ldots+x_\nu)+[(-x_1)+(-x_2)+\ldots+(-x_\nu)]=\\
&=x_1+x_2+\ldots+x_\nu+(-x_1)+(-x_2)+\ldots+(-x_\nu) && [\text{Θεώρ. } 1]\\
&=[x_1+(-x_1)]+[x_2+(-x_2)]+\ldots+[x_\nu+(-x_\nu)] && [\S\, 2.6 \text{ Πόρ.}]\\
&=0+0+\ldots+0\\
&=0.
\end{aligned}$$

2. **Ἄν $x=\alpha+(-\beta)+(-\gamma)$ καί $y=\beta+\gamma+(-\alpha)$, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι οἱ x καί y εἶναι ἀντίθετοι ἀριθμοί.**

Πρέπει νά δείξουμε ὅτι $x+y=0$. Εἶναι:

$$\begin{aligned}
x+y&=[\alpha+(-\beta)+(-\gamma)]+[\beta+\gamma+(-\alpha)]\\
&=\alpha+(-\beta)+(-\gamma)+\beta+\gamma+(-\alpha)\\
&=[\alpha+(-\alpha)]+[\beta+(-\beta)]+[\gamma+(-\gamma)]\\
&=0+0+0\\
&=0.
\end{aligned}$$

Ἀσκήσεις 1,2,3,4.

Νόμος τῆς διαγραφῆς στήν πρόσθεση

2.9 Μποροῦμε τώρα νά ἀποδείξουμε ὅτι, ἄν διαγράψουμε ἀπό τά δύο μέλη μιᾶς ἰσότητας τόν ἴδιο προσθετέο, προκύπτει καί πάλι ἰσότητα. Αὐτή τήν ἰδιότητα τήν ἐκφράζουμε ὡς ἑξῆς:

ΘΕΩΡΗΜΑ 4

Γιά ὁποιουσδήποτε πραγματικούς ἀριθμούς α, x, y ἰσχύει ἡ συνεπαγωγή

$$\alpha+x=\alpha+y \;\Rightarrow\; x=y$$

Ἀπόδειξη. Ὑποθέτουμε ὅτι $\alpha+x=\alpha+y$. Ἔχουμε:

$$\begin{aligned}
\alpha+x&=\alpha+y && [\text{ὑπόθεση}]\\
(-\alpha)+(\alpha+x)&=(-\alpha)+(\alpha+y) && [\text{προσθέτουμε καί στά δύο μέλη τό } -\alpha]\\
[(-\alpha)+\alpha]+x&=[(-\alpha)+\alpha]+y && [\text{προσεταιριστικότητα}]\\
0+x&=0+y && [\text{ἄθροισμα ἀντιθέτων}]\\
x&=y && [\text{ὁ 0 οὐδέτερο στοιχεῖο}]
\end{aligned}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Ἐπειδή, ὅπως γνωρίζουμε (§ 2.2), ἰσχύει καί ἡ ἀντίστροφη συνεπαγωγή $x=y \Rightarrow \alpha+x=\alpha+y$, θά ἰσχύει στό $\mathbb{R}$ ἡ ἰσοδυναμία

$$\boxed{\alpha+x=\alpha+y \quad \Leftrightarrow \quad x=y}$$

Στήν παραπάνω ἰσοδυναμία στηρίζεται καί ὁ γνωστός «κανόνας»:

> **Ἄν ἀπό τά δύο μέλη μιᾶς ἐξισώσεως στό $\mathbb{R}$ διαγράψουμε τόν ἴδιο προσθετέο ἤ στά μέλη της προσθέσουμε τόν ἴδιο ἀριθμό, προκύπτει ἐξίσωση ἰσοδύναμη**

Ἡ ἀφαίρεση στό $\mathbb{R}$

2.10 Ὁ ὁρισμός τῆς ἀφαιρέσεως στό $\mathbb{R}$ στηρίζεται στό ἑπόμενο θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 5

> **Ἄν δοθοῦν δύο πραγματικοί ἀριθμοί α καί β, ὑπάρχει ἕνας μόνο πραγματικός ἀριθμός x τέτοιος, ὥστε νά εἶναι**
> $$\beta+x=\alpha$$

Ἀπόδειξη. Ἡ ἐξίσωση $\beta+x=\alpha$ εἶναι ἰσοδύναμη μέ τίς ἑπόμενες:

$(-\beta)+(\beta+x)=(-\beta)+\alpha$ [προσθέτουμε καί στά δύο μέλη τόν $-\beta$]

$[(-\beta)+\beta]+x=(-\beta)+\alpha$ [προσεταιριστικότητα]

$0+x=(-\beta)+\alpha$ [ἄθροισμα ἀντιθέτων]

$x=\alpha+(-\beta)$ [οὐδέτερο στοιχεῖο καί ἀντιμεταθετικότητα]

Μοναδική ρίζα τῆς τελευταίας ἐξισώσεως, ἄρα καί τῆς ἀρχικῆς $\beta+x=\alpha$, εἶναι ὁ ἀριθμός $\boldsymbol{\alpha+(-\beta)}$ πού γράφεται ἁπλούστερα $\boldsymbol{\alpha-\beta}$ καί ὀνομάζεται **διαφορά τοῦ β ἀπό τόν α.** Ἔχουμε λοιπόν τήν ἰσοδυναμία

$$\beta+x=\alpha \quad \Leftrightarrow \quad x=\alpha-\beta \qquad (1)$$

Ἑπομένως ἡ διαφορά $\alpha-\beta$ εἶναι ὁ μοναδικός ἀριθμός πού, ὅταν προστεθεῖ στό β, δίνει ἄθροισμα α, δηλαδή

$$\beta+(\alpha-\beta)=\alpha$$

Ἡ πράξη, μέ τήν ὁποία σέ κάθε ζεῦγος ἀριθμῶν (α,β) ἀντιστοιχίζεται ἡ διαφορά τους $\alpha-\beta$, λέγεται **ἀφαίρεση.**

Ἡ ἁπλούστερη γραφή $\alpha-\beta$ ἀντί τῆς $\alpha+(-\beta)$ υἱοθετεῖται καί γιά τό ἄθροισμα μέ περισσότερους προσθετέους. Ἔτσι π.χ. τό ἄθροισμα $\alpha+(-\beta)+$ $+(-\gamma)+\delta$ γράφεται $\alpha-\beta-\gamma+\delta$ καί σημαίνει $[(\alpha-\beta)-\gamma]+\delta$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Στήν ἰσοδυναμία (1) στηρίζεται ὁ γνωστός «κανόνας» τῆς μεταφορᾶς ἑνός ὅρου ἐξισώσεως ἀπό τό ἕνα μέλος της στό ἄλλο, ἀφοῦ προηγουμένως ἀλλαχθεῖ τό πρόσημό του.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

---

1. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι $\alpha - 0 = \alpha$, $0 - \alpha = -\alpha$, $\alpha - \alpha = 0$.

Ἀπό τήν ἰσοδυναμία (1) ἔχουμε:

$$\begin{aligned} 0+\alpha = \alpha &\Leftrightarrow \alpha = \alpha - 0 \\ &\Leftrightarrow 0 = \alpha - \alpha \\ &\Leftrightarrow 0 - \alpha = -\alpha \end{aligned}$$

2. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι $(\alpha+\gamma) - (\beta+\gamma) = \alpha - \beta$.

Ἄν $x = (\alpha+\gamma) - (\beta+\gamma)$, τότε ἔχουμε

$$\begin{aligned} x = (\alpha+\gamma)-(\beta+\gamma) &\Leftrightarrow x+(\beta+\gamma) = \alpha+\gamma \\ &\Leftrightarrow x+\beta+\gamma = \alpha+\gamma \\ &\Leftrightarrow x+\beta = \alpha \\ &\Leftrightarrow x = \alpha-\beta \end{aligned}$$

3. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι $-(x - y - z + \varphi) = -x + y + z - \varphi$.

Εἶναι: $$\begin{aligned} -(x-y-z+\varphi) &= -[x+(-y)+(-z)+\varphi] \\ &= -x+[-(-y)]+[-(-z)]+(-\varphi) \quad [\S\ 2.8.\text{Ἐφ. } 1] \\ &= -x+y+z-\varphi \end{aligned}$$

4. Νά βρεθεῖ τό ἄθροισμα $A = (\alpha - \beta + \gamma) - (\alpha - \beta - \kappa) + (-\kappa + \lambda)$.

Εἶναι $$\begin{aligned} A &= \alpha-\beta+\gamma-\alpha+\beta+k-k+\lambda \\ &= (\alpha-\alpha)+(-\beta+\beta)+(k-k)+\gamma+\lambda \\ &= 0+0+0+\gamma+\lambda \\ &= \gamma+\lambda \end{aligned}$$

Ἀσκήσεις 5,6.

ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ

Ἀντιμεταθετικότητα

2.11 Ὁ πολλαπλασιασμός στό $\mathbb{R}$ εἶναι **ἀντιμεταθετικός**. Αὐτή τή γνωστή μας ἰδιότητα δηλώνει τό ἑπόμενο ἀξίωμα:

ΑΞΙΩΜΑ V

> **Γιά ὁποιουσδήποτε πραγματικούς ἀριθμούς x καί y εἶναι:**
>
> $$xy = yx$$

Προσεταιριστικότητα

2.12 Ὁ πολλαπλασιασμός στό $\mathbb{R}$ εἶναι **προσεταιριστικός.** Δηλαδή δεχόμαστε ὅτι

ΑΞΙΩΜΑ VI	**Γιά ὁποιουσδήποτε πραγματικούς ἀριθμούς x, y, z εἶναι:** $$(xy)z = x(yz)$$

Γενίκευση γινομένου

ορισμοί

2.13 Ὁρίζουμε ὡς γινόμενο $x_1x_2x_3$ τῶν ἀριθμῶν x_1, x_2, x_3 τό $(x_1x_2)x_3$, ὁπότε, σύμφωνα μέ τό ἀξίωμα VI, θά εἶναι

$$x_1x_2x_3 = (x_1x_2)x_3 = x_1(x_2x_3).$$

Γενικότερα, γιά κάθε $\nu \geq 3$ ὁρίζουμε ὡς γινόμενο $x_1x_2x_3\ldots x_\nu$ τῶν ἀριθμῶν $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ τό γινόμενο $(x_1x_2\ldots x_{\nu-1})x_\nu$. Δηλαδή εἶναι :

$$x_1x_2x_3\ldots x_\nu = [\ldots[[(x_1x_2)x_3]x_4]x_5\ldots x_{\nu-1}]x_\nu$$

Ἄν ἀκολουθήσουμε τήν ἴδια διαδικασία, ὅπως καί στήν πρόσθεση (§ 2.6), ἀποδεικνύεται ὅτι

ΘΕΩΡΗΜΑ 6	**Κάθε γινόμενο πού μπορεῖ νά σχηματιστεῖ μέ τούς ἀριθμούς $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$, μέ ὁποιαδήποτε διάταξη καί ἄν ληφθοῦν, μιά φορά ὁ καθένας, ἰσοῦται μέ $x_1x_2x_3\ldots x_\nu$**

Δυνάμεις

2.14 Ἄν α εἶναι πραγματικός ἀριθμός καί ν εἶναι **φυσικός ἀριθμός διάφορος τοῦ μηδενός**, ὁρίζουμε ὅτι

$$\alpha^\nu = \begin{cases} \alpha, & \text{ἄν } \nu = 1 \\ \alpha^{\nu-1}\alpha = \underbrace{\alpha\,\alpha\,\alpha\ldots\alpha}_{\nu}, & \text{ἄν } \nu > 1 \end{cases}$$

Τό σύμβολο α^ν ὀνομάζεται **δύναμη** μέ **βάση** τό α καί **ἐκθέτη** τό ν.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Εἶναι φανερό (§ 2.3) ὅτι ἰσχύει ἡ συνεπαγωγή $\alpha = \beta \Rightarrow \alpha^2 = \beta^2$ καί γενικά γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ (ἀποδεικνύεται ἐπαγωγικά) ἡ

$$\alpha = \beta \Rightarrow \alpha^\nu = \beta^\nu$$

Γιά τίς δυνάμεις μέ ἐκθέτη φυσικό ἀριθμό διάφορο τοῦ μηδενός ἀποδεικνύεται ὅτι

ΘΕΩΡΗΜΑ 7

Ἄν α,β εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί καί κ, λ φυσικοί ἀριθμοί διαφορετικοί ἀπό τό μηδέν, ἰσχύουν:

$$\alpha^{\kappa}\,\alpha^{\lambda} = \alpha^{\kappa+\lambda}$$
$$(\alpha^{\kappa})^{\lambda} = \alpha^{\kappa\lambda}$$
$$(\alpha\,\beta)^{\kappa} = \alpha^{\kappa}\beta^{\kappa}$$

Τό θεώρημα αὐτό εἶναι ἄμεση συνέπεια τοῦ ὁρισμοῦ τῆς δυνάμεως καί τοῦ θεωρ. 6.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά βρεθεῖ τό γινόμενο** $A = (-3x^2yz^3)\left(-\frac{2}{5}xy^5\right)(15x^5y^7z)$.

Εἶναι $A = -3x^2yz^3 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) xy^5 \cdot 15x^5y^7z$

$$= \left[(-3)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot 15\right]\cdot(x^2xx^5)\,(yy^5y^7)\,(z^3z)$$
$$= 18x^8y^{13}z^4.$$

2. **Νά βρεθεῖ ἡ τιμή τῆς παραστάσεως** $B = (-2\alpha^2\beta\gamma^3)^3$ **γιά** $\alpha = -1$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$.

Εἶναι $B = (-2)^3(\alpha^2)^3\beta^3(\gamma^3)^3$

$= -8\alpha^6\beta^3\gamma^9$. Ὁπότε γιά $\alpha = -1$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$ θά ἔχουμε

$$B = -8(-1)^6 2^3 1^9$$
$$= -8\cdot 1\cdot 8\cdot 1$$
$$= -64.$$

Ἄσκηση 7.

Ἐπιμεριστικότητα

2.15 Τό ἑπόμενο ἀξίωμα συνδέει τόν πολλαπλασιασμό μέ τήν πρόσθεση:

ΑΞΙΩΜΑ VII

Γιά ὁποιουσδήποτε πραγματικούς ἀριθμούς x, y, z εἶναι

$$x\,(y+z) = xy + xz$$

Ἐπειδή ὁ πολλαπλασιασμός εἶναι ἀντιμεταθετική πράξη, θά εἶναι:

$$(y+z)x = x(y+z) = xy + xz = yx + zx.$$

Ἔχουμε λοιπόν $x(y+z) = xy + xz$ καί $(y+z)x = yx + zx$, πράγμα πού σημαίνει ὅτι ὁ πολλαπλασιασμός εἶναι **ἐπιμεριστικός** ὡς πρός τήν πρόσθεση.

ΘΕΩΡΗΜΑ 8

> **Τό γινόμενο ἑνός πραγματικοῦ ἀριθμοῦ ἐπί τό μηδέν εἶναι ἴσο μέ τό μηδέν. Δηλαδή**
> $$\forall x, \quad x \cdot 0 = 0$$

Ἀπόδειξη. Εἶναι:

$y+0 = y$ [ὁ 0 οὐδέτερο στοιχεῖο]

$x(y+0) = xy$ [πολλαπλασιάζουμε καί τά δύο μέλη ἐπί x]

$xy+x0 = xy$ [ἐπιμεριστικότητα]

$x0 = 0$ [νόμος τῆς διαγραφῆς στήν πρόσθεση]

Οὐδέτερο στοιχεῖο

Ορ.

2.16 Ὁ ἀριθμός 1 χαρακτηρίζεται ἀπό τήν ἀκόλουθη ἰδιότητα πού τή δεχόμαστε ὡς ἀξίωμα:

ΑΞΙΩΜΑ VIII

> **Γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό x εἶναι**
> $$1\,x = x$$

Ἀπό τήν ἀντιμεταθετικότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ προκύπτει ὅτι εἶναι

$$1\,x = x\,1 = x.$$

Ὁ ἀριθμός 1 λοιπόν, ἐπειδή, ὅταν πολλαπλασιαστεῖ μέ ὁποιοδήποτε πραγματικό ἀριθμό, δέν τόν μεταβάλλει, λέγεται **οὐδέτερο στοιχεῖο** ὡς πρός τόν πολλαπλασιασμό.
Μποροῦμε νά ἀποδείξουμε ὅτι ἄλλος ἀριθμός δέν ἔχει αὐτή τήν ἰδιότητα. Γιατί, ἄν καί ὁ ἀριθμός ε ἦταν οὐδέτερο στοιχεῖο, τότε θά εἴχαμε :

(1) $1\varepsilon = \varepsilon$ [ἐπειδή ὁ 1 εἶναι οὐδέτερο στοιχεῖο]

(2) $1\varepsilon = 1$ [ἐπειδή ὁ ε εἶναι οὐδέτερο στοιχεῖο]

Τό γινόμενο ὅμως 1ε εἶναι μοναδικό. Συνεπῶς ἀπό τίς (1) καί (2) προκύπτει $\varepsilon = 1$. Ἄρα

ΠΟΡΙΣΜΑ

> **Ὁ ἀριθμός 1 εἶναι τό μοναδικό οὐδέτερο στοιχεῖο ὡς πρός τόν πολλαπλασιασμό**

ΘΕΩΡΗΜΑ 9

> **Ἄν ἕνας πραγματικός ἀριθμός πολλαπλασιαστεῖ ἐπί —1, δίνει τόν ἀντίθετό του. Δηλαδή**
> $$\forall x, \quad (-1)\,x = -x$$

Ἀπόδειξη. Ἀρκεῖ νά ἀποδείξουμε ὅτι ὁ $(-1)x$ εἶναι ἀντίθετος τοῦ x. Δηλαδή $(-1)x+x=0$. Εἶναι:

$$\begin{aligned}(-1)x+x &= (-1)x+1\,x && [\text{γιατί } 1\,x = x \text{ Ἀξ. VIII}]\\ &= [(-1)+1]x && [\text{ἐπιμεριστικότητα}]\\ &= 0x && [\text{ἄθροισμα ἀντιθέτων}]\\ &= 0 && [\text{Θεώρ. 8}]\end{aligned}$$

ΠΟΡΙΣΜΑ

Γιά ὁποιουσδήποτε πραγματικούς ἀριθμούς x καί y εἶναι:

1. $(-x)\,y = -xy$

2. $(-x)\,(-y) = xy$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι $(\alpha-\beta)\,\gamma = \alpha\gamma-\beta\gamma$.

Εἶναι: $$\begin{aligned}(\alpha-\beta)\gamma &= [\alpha+(-\beta)]\gamma\\ &= \alpha\gamma+(-\beta)\gamma\\ &= \alpha\gamma+(-\beta\gamma)\\ &= \alpha\gamma-\beta\gamma.\end{aligned}$$

2. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι $(\alpha+\beta)\,(\gamma+\delta) = \alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta$.

Εἶναι: $$\begin{aligned}(\alpha+\beta)\,(\gamma+\delta) &= \alpha(\gamma+\delta)+\beta(\gamma+\delta)\\ &= \alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta.\end{aligned}$$

3. Νά βρεθεῖ τό γινόμενο $A = (2x^2+3xy)\,(5xy-3x^2)$.

Εἶναι: $$\begin{aligned}A &= 2x^2\,5xy+2x^2(-3x^2)+3xy\,5xy+3xy\,(-3x^2)\\ &= 2.5x^2xy+2(-3)\,x^2\,x^2+3.5\,xxyy+3(-3)xx^2y\\ &= 10x^3y-6x^4+15x^2y^2-9x^3y\\ &= (10-9)x^3y-6x^4+15x^2y^2\\ &= x^3y-6x^4+15x^2y^2.\end{aligned}$$

4. Νά ἀποδειχθοῦν οἱ ἰσότητες:

$(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$

$(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

$(\alpha+\beta)\,(\alpha-\beta) = \alpha^2-\beta^2$

$(\alpha+\beta+\gamma)^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha$.

Εἶναι: $$\begin{aligned}(\alpha+\beta)^2 &= (\alpha+\beta)\,(\alpha+\beta)\\ &= \alpha\alpha+\alpha\beta+\beta\alpha+\beta\beta\\ &= \alpha^2+\alpha\beta+\alpha\beta+\beta^2\\ &= \alpha^2+(1+1)\alpha\beta+\beta^2\\ &= \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\alpha-\beta)^2 &= [\alpha+(-\beta)]^2\\ &= \alpha^2+2\alpha(-\beta)+(-\beta)^2\\ &= \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)\,(\alpha-\beta) &= \alpha\alpha+\alpha(-\beta)+\beta\alpha+\beta(-\beta)\\ &= \alpha^2-\alpha\beta+\alpha\beta-\beta^2 = \alpha^2-\beta^2\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(\alpha+\beta+\gamma)^2 &= [(\alpha+\beta)+\gamma]^2\\
&= (\alpha+\beta)^2+2(\alpha+\beta)\gamma+\gamma^2\\
&= \alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta+(2\gamma)(\alpha+\beta)+\gamma^2\\
&= \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\gamma\alpha+2\gamma\beta\\
&= \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha.
\end{aligned}
$$

5. **Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι εἶναι:**

$$
\begin{aligned}
(\alpha+\beta)^3 &= \alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3\\
(\alpha-\beta)^3 &= \alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3\\
\alpha^3+\beta^3 &= (\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)\\
\alpha^3-\beta^3 &= (\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)
\end{aligned}
$$

Εἶναι:
$$
\begin{aligned}
(\alpha+\beta)^3 &= (\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta)\\
&= (\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)(\alpha+\beta)\\
&= \alpha^2\alpha+\alpha^2\beta+2\alpha\beta\alpha+2\alpha\beta\beta+\beta^2\alpha+\beta^2\beta\\
&= \alpha^3+\alpha^2\beta+2\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2+\alpha\beta^2+\beta^3\\
&= \alpha^3+(1+2)\alpha^2\beta+(2+1)\alpha\beta^2+\beta^3\\
&= \alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\alpha-\beta)^3 &= [\alpha+(-\beta)]^3\\
&= \alpha^3+3\alpha^2(-\beta)+3\alpha(-\beta)^2+(-\beta)^3\\
&= \alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2) &= \alpha\alpha^2-\alpha\alpha\beta+\alpha\beta^2+\beta\alpha^2-\beta\,\alpha\beta+\beta\,\beta^2\\
&= \alpha^3-\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta\alpha^2-\alpha\beta^2+\beta^3\\
&= \alpha^3+\beta^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2) &= [\alpha+(-\beta)]\,[\alpha^2-\alpha(-\beta)+(-\beta)^2]\\
&= \alpha^3+(-\beta)^3 = \alpha^3-\beta^3.
\end{aligned}
$$

Ἀσκήσεις 8,9,10,11.

Ὕπαρξη ἀντιστρόφου

2.17 Συμπληρώνουμε τίς βασικές (1) ἰδιότητες τοῦ $\mathbb{R}$ μέ τό ἑπόμενο

ΑΞΙΩΜΑ ΙΧ (2)

> **Γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό $x \neq 0$ ὑπάρχει πραγματικός ἀριθμός x' τέτοιος, ὥστε**
> $$xx' = 1$$

Ἐπειδή ὁ πολλαπλασιασμός εἶναι ἀντιμεταθετικός, θά εἶναι καί

$$xx' = x'x = 1$$

Οἱ ἀριθμοί x καί x' πού ἔχουν γινόμενο 1 λέγονται **ἀντίστροφοι.**

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Ὁ περιορισμός $x \neq 0$ εἶναι ἀπαραίτητος, γιατί ἀντίστροφος τοῦ 0 δέν ὑπάρχει, ἀφοῦ $\forall x,\ x \cdot 0 = 0 \neq 1$.

---

(1) Ἐννοοῦμε αὐτές πού διατυπώνονται μέ τά ἀξιώματα I–IX καί πού, ὅπως θά μάθουμε, ἐκφράζονται συνοπτικά μέ τήν πρόταση «τό $\mathbb{R}$ εἶναι ἀντιμεταθετικό σῶμα».

(2) Συμβολικά $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \exists x' \in \mathbb{R},\ xx' = 1\ (\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\})$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 10

> **Γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό διαφορετικό ἀπό τό μηδέν ὑπάρχει ἕνας μόνο ἀντίστροφός του**

Ἀπόδειξη. Ὑποθέτουμε ὅτι ἀντίστροφος τοῦ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ x $(x \neq 0)$ εἶναι ἐκτός ἀπό τό x' καί ὁ x''. Δηλαδή εἶναι $xx' = 1$ καί $xx'' = 1$. Ἄρα

$$\begin{aligned} x' &= x'\,1 && [\text{ὁ } 1 \text{ οὐδέτερο στοιχεῖο}] \\ &= x'(xx'') && [\text{γιατί } xx'' = 1] \\ &= (x'x)x'' && [\text{προσεταιριστικότητα}] \\ &= 1\,x'' && [\text{γιατί } x'x = 1] \\ &= x'' && [\text{ὁ } 1 \text{ οὐδέτερο στοιχεῖο}] \end{aligned}$$

Δηλαδή οἱ x' καί x'' συμπίπτουν.

Ὁ μοναδικός ἀντίστροφος τοῦ x $(x \neq 0)$ συμβολίζεται $\frac{1}{x}$. Ἔχουμε λοιπόν

$$x \frac{1}{x} = 1 \tag{1}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Ἡ ἐξίσωση $\alpha x = 1$, ὅταν $\alpha \neq 0$, ἔχει στό $\mathbb{R}$ μοναδική ρίζα τό $\frac{1}{\alpha}$.
2. Ἀπό τήν ἰσότητα $1 \cdot 1 = 1$ προκύπτει ὅτι ὁ ἀντίστροφος τοῦ 1 εἶναι ὁ 1.
3. Ἐπειδή $x \frac{1}{x} = 1 \neq 0$, εἶναι καί $\frac{1}{x} \neq 0$.
4. Τό σύμβολο $\frac{1}{\frac{1}{x}}$ παριστάνει τόν ἀντίστροφο τοῦ $\frac{1}{x}$. Ἀλλά μοναδικός ἀντίστροφος τοῦ $\frac{1}{x}$, ὅπως δείχνει ἡ (1), εἶναι ὁ x.

   Δηλαδή εἶναι $\frac{1}{\frac{1}{x}} = x$. Ὥστε:

> **Ὁ ἀντίστροφος τοῦ ἀντιστρόφου ἑνός ἀριθμοῦ εἶναι ὁ ἴδιος ὁ ἀριθμός**

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι: Ὁ ἀντίστροφος ἑνός γινομένου ἰσοῦται μέ τό γινόμενο τῶν ἀντιστρόφων τῶν παραγόντων του. Δηλαδή**

$$\frac{1}{x_1 x_2 \ldots x_\nu} = \frac{1}{x_1}\,\frac{1}{x_2}\,\ldots\,\frac{1}{x_\nu}.$$

Ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι

$$(x_1x_2\dots x_\nu)\left(\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_\nu}\right)=1. \text{ Εἶναι:}$$

$$(x_1x_2\dots x_\nu)\left(\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_\nu}\right)=x_1x_2\dots x_\nu\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_\nu}$$

$$=\left(x_1\frac{1}{x_1}\right)\left(x_2\frac{1}{x_2}\right)\cdots\left(x_\nu\frac{1}{x_\nu}\right)=1.1\dots1=1.$$

2. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι εἶναι $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=(x+y)\frac{1}{xy}$ $(xy\neq 0)$.

Εἶναι $(x+y)\frac{1}{xy}=x\frac{1}{xy}+y\frac{1}{xy}$ [ἐπιμεριστικότητα]

$=x\left(\frac{1}{x}\frac{1}{y}\right)+y\left(\frac{1}{x}\frac{1}{y}\right)$ [προηγούμενη ἐφαρμογή]

$=\left(x\frac{1}{x}\right)\frac{1}{y}+\left(y\frac{1}{y}\right)\frac{1}{x}$ [προσεταιριστικότητα]

$=1\frac{1}{y}+1\frac{1}{x}$ [γινόμενο ἀντιστρόφων]

$=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}.$

ΘΕΩΡΗΜΑ 11

Ἄν τό γινόμενο δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι μηδέν, τότε ἕνας τουλάχιστον ἀπό αὐτούς εἶναι μηδέν. Δηλαδή

$$\forall x, \forall y, \; xy=0 \;\Rightarrow\; x=0 \;\text{ ἤ }\; y=0$$

Ἀπόδειξη. Ὑποθέτουμε ὅτι $xy=0$. Ἐπειδή εἶναι ἤ $x=0$ ἤ $x\neq0$, ἀρκεῖ νά ἀποδείξουμε (§ 1.33) τήν «$x=0$ ἤ $y=0$» γιά $x\neq0$, ἀφοῦ γιά $x=0$ αὐτή ἀληθεύει. Πράγματι ἄν $x\neq0$, τότε ὁρίζεται ὁ $\frac{1}{x}$ καί θά εἶναι

$\frac{1}{x}(xy)=\frac{1}{x}\cdot 0$ [πολλαπλασιάζουμε καί τά δύο μέλη τῆς $xy=0$ ἐπί $\frac{1}{x}$]

$\left(\frac{1}{x}x\right)y=0$ [προσεταιριστικότητα]

$1\,y=0$ [γινόμενο ἀντιστρόφων]

$y=0$ [ὁ 1 οὐδέτερο στοιχεῖο]

Ὁπότε ἀληθεύει καί ἡ «$x=0$ ἤ $y=0$».

Τό ἀντίστροφο τοῦ θεωρήματος προκύπτει ἀπό τό θεώρ. 8. Ἄρα ἔχουμε

$$xy=0 \;\Leftrightarrow\; x=0 \;\text{ ἤ }\; y=0$$

Γενικότερα ἰσχύει: $\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_\nu=0 \Leftrightarrow \alpha_1=0$ ἤ $\alpha_2=0$ ἤ...ἤ $\alpha_\nu=0$

ΠΟΡΙΣΜΑ | $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_\nu\neq0 \Leftrightarrow \alpha_1\neq0$ καί $\alpha_2\neq0$ καί... καί $\alpha_\nu\neq0$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση $x^2-1=0$.

Εἶναι $x^2-1=0 \Leftrightarrow (x+1)(x-1)=0$
$\Leftrightarrow x+1=0$ ἤ $x-1=0$
$\Leftrightarrow x=-1$ ἤ $x=1$.

'Ασκήσεις 12,13,14,15,16.

Νόμος τῆς διαγραφῆς στόν πολλαπλασιασμό

2.18 Ἡ ἰδιότητα τῆς διαγραφῆς στόν πολλαπλασιασμό ἐκφράζεται ὡς ἑξῆς:

ΘΕΩΡΗΜΑ 12

> **Γιά ὁποιουσδήποτε πραγματικούς ἀριθμούς α, x, y μέ $\alpha \neq 0$ ἰσχύει**
> $$\alpha x = \alpha y \;\Rightarrow\; x = y$$

'Απόδειξη

Εἶναι: $\alpha x = \alpha y$ [ὑπόθεση]

$\frac{1}{\alpha}(\alpha x) = \frac{1}{\alpha}(\alpha y)$ [πολλαπλασιάζουμε καί τά δύο μέλη ἐπί $\frac{1}{\alpha}$]

$\left(\frac{1}{\alpha}\alpha\right)x = \left(\frac{1}{\alpha}\alpha\right)y$ [προσεταιριστικότητα]

$1\,x = 1\,y$ [γινόμενο ἀντιστρόφων]

$x = y$ [ὁ 1 οὐδέτερο στοιχεῖο]

'Επειδή ὅμως γνωρίζουμε ὅτι ἰσχύει καί ἡ ἀντίστροφη συνεπαγωγή γιά $\alpha \neq 0$, θά ἔχουμε τήν ἰσοδυναμία:

$$\boxed{\alpha x = \alpha y \;\Leftrightarrow\; x = y}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Μέ ἐφαρμογή τῶν νόμων διαγραφῆς νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση $3x+5=11$.

$3x+5=11 \Leftrightarrow 3x+5=6+5$
$\Leftrightarrow 3x=6$ [ν. διαγραφῆς στήν πρόσθεση]
$\Leftrightarrow 3x=3.2$
$\Leftrightarrow x=2$ [ν. διαγραφῆς στόν πολλαπλασιασμό]

Διαίρεση

2.19 Ὁ ὁρισμός τῆς διαιρέσεως στό $\mathbb{R}$ στηρίζεται στό ἑπόμενο θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 13

> **Ἄν δοθοῦν δύο πραγματικοί ἀριθμοί α καί β μέ β ≠ 0, ὑπάρχει ἕνας μόνο πραγματικός ἀριθμός x τέτοιος, ὥστε νά εἶναι:**
>
> $$\beta x = \alpha$$

Ἀπόδειξη. Ἔχουμε

$$\beta x = \alpha \Leftrightarrow \frac{1}{\beta}(\beta x) = \frac{1}{\beta}\alpha \quad \text{[πολλαπλασιάζουμε καί τά δύο μέλη ἐπί } \frac{1}{\beta}\text{]}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\beta}\beta\right)x = \frac{1}{\beta}\alpha \quad \text{[προσεταιριστικότητα]}$$

$$\Leftrightarrow 1x = \frac{1}{\beta}\alpha \quad \text{[γινόμενο ἀντιστρόφων]}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{\beta}\alpha \quad \text{[ὁ 1 οὐδέτερο στοιχεῖο]}$$

Μοναδική ρίζα τῆς τελευταίας ἐξισώσεως, ἄρα καί τῆς ἀρχικῆς $\beta x = \alpha$, εἶναι ὁ ἀριθμός $\frac{1}{\beta}\alpha$ πού γράφεται ἁπλούστερα $\frac{\alpha}{\beta}$ ἤ $\alpha : \beta$ καί ὀνομάζεται **πηλίκο** τοῦ α διά β. Ἔχουμε λοιπόν γιά $\beta \neq 0$ τήν ἰσοδυναμία

$$\beta x = \alpha \Leftrightarrow x = \frac{\alpha}{\beta} \tag{1}$$

Ἑπομένως τό πηλίκο $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι ὁ μοναδικός ἀριθμός πού, ὅταν πολλαπλασιαστεῖ μέ τό β, δίνει γινόμενο α. Δηλαδή εἶναι

$$\beta\frac{\alpha}{\beta} = \alpha$$

Ἡ πράξη μέ τήν ὁποία σέ κάθε ζεῦγος ἀριθμῶν (α,β) μέ $\beta \neq 0$ ἀντιστοιχίζεται τό πηλίκο $\frac{\alpha}{\beta}$ λέγεται **διαίρεση**.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι $\frac{\alpha}{1} = \alpha$, $\frac{\alpha}{\alpha} = 1$ $(\alpha \neq 0)$.**

Ἀπό τήν ἰσοδυναμία $\beta x = \alpha \Leftrightarrow x = \frac{\alpha}{\beta}$ $(\beta \neq 0)$ ἔχουμε

$$1\alpha = \alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{\alpha}{1} \quad \text{καί (ἄν } \alpha \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{\alpha}{\alpha}.$$

2. **Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι, ἄν $\beta \neq 0$ καί $\gamma \neq 0$, εἶναι**

$$(1)\ \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma} \quad \text{καί} \quad (2)\ \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha:\gamma}{\beta:\gamma}.$$

(1) Ἄν $x = \dfrac{\alpha\gamma}{\beta\gamma}$, θά ἔχουμε τίς ἰσοδυναμίες

$$x = \frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma} \Leftrightarrow (\beta\gamma)x = \alpha\gamma$$

$$\Leftrightarrow (\beta x)\gamma = \alpha\gamma$$

$$\Leftrightarrow \beta x = \alpha$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\alpha}{\beta}. \text{ Ἄρα } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma}.$$

(2) Σύμφωνα μέ τήν (1) εἶναι:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha\ \dfrac{1}{\gamma}}{\beta\ \dfrac{1}{\gamma}} = \frac{\alpha:\gamma}{\beta:\gamma}$$

3. **Ἄν $y \neq 0$, εἶναι** $-\dfrac{x}{y} = \dfrac{-x}{y} = \dfrac{x}{-y}$.

Εἶναι $-\dfrac{x}{y} = (-1)\ \dfrac{x}{y} = (-1)\ \left(x\ \dfrac{1}{y}\right) = [(-1)\ x]\ \dfrac{1}{y} = (-x)\ \dfrac{1}{y}$

$$= \frac{-x}{y} = \frac{(-1)\ (-x)}{(-1)y} = \frac{x}{-y}.$$

4. **Ὅταν προσθέτουμε ὁμώνυμα κλάσματα, σχηματίζουμε ἕνα κλάσμα πού ἔχει ἀριθμητή τό ἄθροισμα τῶν ἀριθμητῶν καί παρονομαστή τόν ἴδιο.**

Ἔστω ὅτι θέλουμε νά βροῦμε τό ἄθροισμα $\dfrac{x}{z} + \dfrac{y}{z}$ $(z \neq 0)$.

Εἶναι $\dfrac{x}{z} + \dfrac{y}{z} = \dfrac{1}{z}\ x + \dfrac{1}{z}\ y$

$$= \frac{1}{z}\ (x+y) = \frac{x+y}{z}.$$

5. **Ὅταν πολλαπλασιάζουμε δύο κλάσματα, σχηματίζουμε ἕνα κλάσμα πού ἔχει ἀριθμητή τό γινόμενο τῶν ἀριθμητῶν καί παρονομαστή τό γινόμενο τῶν παρονομαστῶν.**

Ἔστω ὅτι θέλουμε νά βροῦμε τό γινόμενο $\dfrac{x}{y}\ \dfrac{z}{\varphi}$ $(y\varphi \neq 0)$. Εἶναι

$$\frac{x}{y}\ \frac{z}{\varphi} = \left(\frac{1}{y}\ x\right)\left(\frac{1}{\varphi}\ z\right) = \frac{1}{y}\ x\ \frac{1}{\varphi}\ z \text{ (Θεωρ. 6)}$$

$$= \left(\frac{1}{y}\ \frac{1}{\varphi}\right)(xz) = \frac{1}{y\varphi}\ (xz) \text{ (§ 2.17 Ἐφαρ. 1)} = \frac{xz}{y\varphi}.$$

Παρατηρῆστε ὅτι οἱ ἀριθμοί $\dfrac{x}{y}$ καί $\dfrac{y}{x}$ εἶναι ἀντίστροφοι.

6. **Ἄν α, β εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί, ὅπου $\beta \neq 0$ καί ν εἶναι φυσικός ἀριθμός ≥ 1, θά εἶναι** $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu} = \dfrac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}}$.

Σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό τοῦ πηλίκου εἶναι $\alpha = \frac{\alpha}{\beta}\beta$. Ἔτσι ἔχουμε

$$\alpha^{\nu} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\beta\right)^{\nu} \qquad [\S\ 2\cdot 14 \text{ παρατ.}]$$

$$\alpha^{\nu} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu}\beta^{\nu} \qquad [\text{ὕψωση γινομένου σέ δύναμη}]$$

$$\frac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu}. \qquad [\text{ὁρισμός πηλίκου}]$$

7. **Ἄν $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί μέ $\delta \neq 0$, νά δειχθεῖ ὅτι**

$$(\alpha - \beta + \gamma):\delta = (\alpha:\delta) - (\beta:\delta) + (\gamma:\delta).$$

Εἶναι $\quad (\alpha-\beta+\gamma) : \delta = (\alpha-\beta+\gamma)\ \frac{1}{\delta}$

$$= \alpha\frac{1}{\delta} - \beta\frac{1}{\delta} + \gamma\frac{1}{\delta}$$

$$= (\alpha : \delta) - (\beta : \delta) + (\gamma : \delta)$$

Ἀσκήσεις 17,18,19,20,21.

ὁ. βιβλ.

Δύναμη μέ ἐκθέτη ἀκέραιο

2.20 Ἄς προσπαθήσουμε νά βροῦμε τό πηλίκο $\frac{\alpha^{\kappa}}{\alpha^{\lambda}} = x$, ὅπου $\alpha \neq 0$ καί κ,λ φυσικοί διάφοροι τοῦ μηδενός.

Ἐξετάζουμε πρῶτα τήν περίπτωση $\kappa > \lambda$. Ἀφοῦ $\kappa > \lambda$, θά ὑπάρχει φυσικός $\nu \neq 0$ τέτοιος, ὥστε $\kappa = \lambda + \nu$ ἤ $\kappa - \lambda = \nu$. Ὁπότε θά ἔχουμε:

$$x = \frac{\alpha^{\kappa}}{\alpha^{\lambda}} \Leftrightarrow x\,\alpha^{\lambda} = \alpha^{\kappa} \Leftrightarrow x\alpha^{\lambda} = \alpha^{\lambda+\nu} \Leftrightarrow x\alpha^{\lambda} = \alpha^{\lambda}\,\alpha^{\nu} \Leftrightarrow x = \alpha^{\nu} = \alpha^{\kappa-\lambda}.$$

Ἔχουμε λοιπόν γιά $\kappa > \lambda$, $\quad \boldsymbol{\frac{\alpha^{\kappa}}{\alpha^{\lambda}} = \alpha^{\kappa-\lambda}} \qquad$ **(1)**

Τί συμβαίνει τώρα, ὅταν $\kappa = \lambda$ ἤ $\kappa < \lambda$; Ἄς δοῦμε τίς δύο αὐτές περιπτώσεις χωριστά.

- Ἔστω $\kappa = \lambda$.

Σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό τοῦ πηλίκου εἶναι $\frac{\alpha^{\kappa}}{\alpha^{\kappa}} = 1. \qquad (2)$

Ἀλλά ἄν θέλουμε νά ἰσχύει καί στήν περίπτωση αὐτή ἡ (1), θά ἔχουμε

$$\frac{\alpha^{\kappa}}{\alpha^{\kappa}} = \alpha^{\kappa-\kappa} = \alpha^{0}. \qquad (3)$$

Ἀπό τίς (2) καί (3) προκύπτει ὅτι, γιά νά ἰσχύει ἡ (1) καί ὅταν $\kappa = \lambda$, θά πρέπει νά εἶναι $\quad \boldsymbol{\alpha^{0} = 1}$

- Ἔστω $\kappa < \lambda$

Τότε θά ὑπάρχει φυσικός ἀριθμός $\nu \neq 0$ τέτοιος, ὥστε $\lambda = \kappa + \nu$ ἤ $\lambda - \kappa = \nu$.

Ἄρα $x=\frac{\alpha^\kappa}{\alpha^\lambda} \Leftrightarrow x\alpha^\lambda=\alpha^\kappa \Leftrightarrow x\alpha^{\kappa+\nu}=\alpha^\kappa \Leftrightarrow x\alpha^\kappa\,\alpha^\nu=\alpha^\kappa \Leftrightarrow x=\frac{1}{\alpha^\nu}$

Δηλαδή $$\frac{\alpha^\kappa}{\alpha^\lambda}=\frac{1}{\alpha^\nu}. \qquad (4)$$

Ἄν ὅμως ὑποθέσουμε ὅτι ἡ (1) ἰσχύει καί στήν περίπτωση αὐτή, θά εἶναι

$$\frac{\alpha^\kappa}{\alpha^\lambda}=\alpha^{\kappa-\lambda}=\alpha^{-\nu} \qquad (5)$$

Ἀπό τίς (4) καί (5) προκύπτει ὅτι, γιά νά ἰσχύει ἡ (1) καί ὅταν $\kappa<\lambda$, πρέπει νά εἶναι $$\alpha^{-\nu}=\frac{1}{\alpha^\nu}$$

Μετά ἀπό τήν προηγούμενη ἀνάλυση ἐπεκτείνουμε τόν ὁρισμό δυνάμεως μέ βάση $\alpha \neq 0$ ὡς ἑξῆς:

ΟΡΙΣΜΟΣ:

Γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό $\alpha \neq 0$ εἶναι:

1. $\alpha^0=1$
2. $\forall \nu \in \mathbb{N},\ \alpha^{-\nu}=\frac{1}{\alpha^\nu}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Ἀπό τόν τρόπο μέ τόν ὁποῖο ὁρίσαμε τό σύμβολο $\alpha^{-\nu}$, ὅταν ν φυσικός, προκύπτει ὅτι γιά ὁποιουσδήποτε φυσικούς κ καί λ καί γιά $\alpha \neq 0$ ἰσχύει

$$\alpha^\kappa : \alpha^\lambda = \alpha^{\kappa-\lambda}$$

Στό ἑπόμενο θεώρημα συνοψίζονται οἱ ἰδιότητες τῶν δυνάμεων πραγματικοῦ ἀριθμοῦ μέ ἐκθέτη ἀκέραιο:

ΘΕΩΡΗΜΑ 14

Ἄν α, β εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί καί κ, λ εἶναι ἀκέραιοι, μέ τήν προϋπόθεση ὅτι ὅλα τά παρουσιαζόμενα σύμβολα ἔχουν νόημα, ἰσχύουν οἱ ἰσότητες

1. $\alpha^\kappa\,\alpha^\lambda=\alpha^{\kappa+\lambda}$
2. $\alpha^\kappa : \alpha^\lambda=\alpha^{\kappa-\lambda}$
3. $(\alpha^\kappa)^\lambda=\alpha^{\kappa\lambda}$
4. $(\alpha\,\beta)^\kappa=\alpha^\kappa\,\beta^\kappa$
5. $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\kappa=\frac{\alpha^\kappa}{\beta^\kappa}$

Ἀπόδειξη

1. Ἐξετάζουμε τίς ἑξῆς περιπτώσεις :

α) $\kappa > 0$ $\quad \lambda > 0$. Ἔχει ἀποδειχθεῖ

β) $\kappa > 0$ $\quad \lambda < 0$. Εἶναι $\alpha^{\kappa}\alpha^{\lambda} = \alpha^{\kappa}\dfrac{1}{\alpha^{-\lambda}} = \dfrac{\alpha^{\kappa}}{\alpha^{-\lambda}} = \alpha^{\kappa-(-\lambda)} = \alpha^{\kappa+\lambda}$

γ) $\kappa < 0$ καί $\lambda < 0$. Εἶναι $\alpha^{\kappa}\alpha^{\lambda} = \dfrac{1}{\alpha^{-\kappa}}\,\dfrac{1}{\alpha^{-\lambda}} = \dfrac{1}{\alpha^{-\kappa-\lambda}} = \dfrac{1}{\alpha^{-(\kappa+\lambda)}}$

$= \alpha^{\kappa+\lambda}$

δ) $\kappa = 0$ καί $\lambda \neq 0$. Εἶναι $\alpha^0\alpha^{\lambda} = 1\ \alpha^{\lambda} = \alpha^{\lambda} = \alpha^{\lambda+0}$

ε) $\kappa = \lambda = 0$. Εἶναι προφανής.

Ὁμοίως ἀποδεικνύονται καί οἱ ὑπόλοιπες.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Νά ἐκτελεστοῦν οἱ πράξεις

α) $\dfrac{-3x^2yz^{-2}}{4x^5yz}$, **β)** $(-3x^2y+6x^4y^3-9xy^7):8x^2y^4$

α) Εἶναι $\dfrac{-3x^2yz^{-2}}{4x^5yz} = (-3x^2yz^{-2})\dfrac{1}{4x^5yz}$

$= (-3x^2yz^{-2})\cdot\left(\dfrac{1}{4}\,\dfrac{1}{x^5}\,\dfrac{1}{y}\,\dfrac{1}{z}\right) = (-3)x^2yz^{-2}\,\dfrac{1}{4}\,\dfrac{1}{x^5}\,\dfrac{1}{y}\,\dfrac{1}{z}$

$= \left[(-3)\,\dfrac{1}{4}\right](x^2x^{-5})(yy^{-1})(z^{-2}z^{-1}) =$

$= \dfrac{-3}{4}\,x^{2-5}y^{1-1}z^{-2-1} = \dfrac{-3}{4}\,x^{-3}y^0z^{-3} = \dfrac{-3}{4}\,\dfrac{1}{x^3}\,1\,\dfrac{1}{z^3} = \dfrac{-3}{4x^3z^3}$.

β) Εἶναι $(-3x^2y+6x^4y^3-9xy^7):8x^2y^4=$

$= \dfrac{-3x^2y}{8x^2y^4} + \dfrac{6x^4y^3}{8x^2y^4} - \dfrac{9xy^7}{8x^2y^4} = \dfrac{-3}{8y^3} + \dfrac{3x^2}{4y} - \dfrac{9y^3}{8x}$.

Ἀσκήσεις 22,23.

ΝΑΙ

Λύση τῆς ἐξισώσεως $\alpha x+\beta = 0$

2.21 Ἡ ἐξίσωση αὐτή γράφεται $\alpha x = -\beta$ (1). Ἑπομένως, ἄν $\alpha \neq 0$, σύμφωνα μέ τό θεώρ. 13, ἡ ἐξίσωση (1) θά ἔχει μιά μοναδική ρίζα, τήν $x = -\dfrac{\beta}{\alpha}$. Ἄν ὅμως $\alpha = 0$, ἡ (1) γίνεται $0\cdot x = -\beta$. Τότε, ἄν $\beta \neq 0$, δέν ὑπάρχει πραγματικός ἀριθμός πού νά τήν ἐπαληθεύει, ἐνῶ ἄν $\beta = 0$, ἐπειδή θά εἶναι $0 \cdot x = 0$, ἐπαληθεύεται γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό.

Τά συμπεράσματα αὐτά συνοψίζονται στόν παρακάτω πίνακα.

Πίνακας λύσεων τῆς $\alpha x+\beta = 0$	
$\alpha = 0$	ἡ ἐξίσωση ἔχει μιά μοναδική ρίζα, τή $x = -\dfrac{\beta}{\alpha}$
$\alpha = 0$ καί $\beta \neq 0$	ἡ ἐξίσωση δέν ἔχει καμιά ρίζα (εἶναι ἀδύνατη στό $\mathbb{R}$)
$\alpha = 0$ καί $\beta = 0$	ἡ ἐξίσωση ἀληθεύει γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό (εἶναι ταυτότητα στὸ $\mathbb{R}$)

Ἄν οἱ συντελεστές α καί β τῆς $\alpha x+\beta = 0$ εἶναι συγκεκριμένοι ἀριθμοί, τότε ἀμέσως μποροῦμε νά βροῦμε ποιά ἀπό τίς τρεῖς περιπτώσεις τοῦ προηγούμενου πίνακα ἰσχύει. Ἄν ὅμως οἱ συντελεστές α,β τῆς $\alpha x+\beta = 0$ ἐκφράζονται μέ τή βοήθεια γραμμάτων, τότε, ἀνάλογα μέ τίς τιμές πού παίρνουν τά γράμματα αὐτά, μποροῦμε πάλι νά βροῦμε σέ ποιά ἀπό τίς τρεῖς περιπτώσεις τοῦ πίνακα ἀναγόμαστε.

Στή δεύτερη περίπτωση τά γράμματα, ἀπό τά ὁποῖα ἐξαρτῶνται οἱ συντελεστές α,β τῆς $\alpha x+\beta=0$, λέγονται **παράμετροι** καί ἡ ἐξίσωση **παραμετρική,** ὅπως π.χ. ἡ ἐξίσωση $(\lambda-1)x+\lambda^2-1=0$.

Ἔτσι στή λύση μιᾶς παραμετρικῆς ἐξισώσεως πρέπει νά προσδιορίσουμε τά σύνολα τῶν τιμῶν τῶν παραμέτρων, γιά τά ὁποῖα ἡ ἐξίσωση:

- ἔχει μιά ρίζα
- δέν ἔχει καμιά ρίζα (εἶναι ἀδύνατη)
- ἀληθεύει γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό (εἶναι ταυτότητα).

Στήν πρώτη ἀπό τίς περιπτώσεις αὐτές βρίσκουμε καί τή ρίζα τῆς ἐξισώσεως.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΝΑΙ

1. Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση $\dfrac{x}{3}-\dfrac{2x+1}{2}=\dfrac{2x-3}{6}-x$.

Ἔχουμε τίς ἰσοδυναμίες:

$$\frac{x}{3}-\frac{2x+1}{2}=\frac{2x-3}{6}-x \Leftrightarrow 6\left(\frac{x}{3}-\frac{2x+1}{2}\right)=6\left(\frac{2x-3}{6}-x\right)$$

$$\Leftrightarrow 2x-3(2x+1)=2x-3-6x$$

$$\Leftrightarrow 2x-6x-3=2x-3-6x$$

$$\Leftrightarrow 2x-6x-2x+6x=-3+3$$

$$\Leftrightarrow 0x=0$$

Ἡ τελευταία ἐξίσωση, ἄρα καί ἡ ἀρχική, ἀληθεύει γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό, ἀφοῦ $\alpha=\beta=0$.

2. Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση $\lambda(\lambda-x)-3x=5(\lambda-x)-6$.

Μετασχηματίζουμε τήν ἐξίσωση ὡς ἑξῆς:

$$\lambda(\lambda-x)-3x = 5(\lambda-x)-6 \Leftrightarrow \lambda^2-\lambda x-3x = 5\lambda-5x-6$$
$$\Leftrightarrow -\lambda x-3x+5x = 5\lambda-6-\lambda^2$$
$$\Leftrightarrow (2-\lambda)x = -\lambda^2+5\lambda-6$$
$$\Leftrightarrow (\lambda-2)x = (\lambda-2)(\lambda-3)$$

Διακρίνουμε τίς ἑξῆς περιπτώσεις:

α) $\lambda-2 \neq 0$, δηλ. $\lambda \neq 2$. Τότε ἡ τελευταία ἐξίσωση, ἐπομένως καί ἡ ἀρχική, ἔχει μιά μοναδική λύση, τή $x = \lambda-3$.

β) $\lambda-2 = 0$, δηλ. $\lambda = 2$. Τότε ἡ ἐξίσωση παίρνει τή μορφή $0x = 0$ καί ἀληθεύει γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό x.

Ἀσκήσεις 24, 25.

NAI

ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

---

1. **Νά λυθεῖ τό σύστημα τῶν ἐξισώσεων** $(2x+3)(3y-1)=0$ **καί** $2x-3y+1=0$.

Ἔχουμε τίς ἰσοδυναμίες:

$(2x+3)(3y-1) = 0$ **καί** $2x-3y+1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2x+3 = 0$ **ἤ** $3y-1 = 0)$ **καί** $2x-3y+1 = 0$

$\Leftrightarrow (2x+3 = 0$ **καί** $2x-3y+1 = 0)$ **ἤ** $(3y-1 = 0$ **καί** $2x-3y+1 = 0)$

$\Leftrightarrow \left(x = -\dfrac{3}{2}\right.$ **καί** $\left.y = \dfrac{-2}{3}\right)$ **ἤ** $\left(y = \dfrac{1}{3}\right.$ **καί** $\left.x = 0\right)$.

2. **Ἄν α,β,x,y εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι** $(\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2)-(\alpha x+\beta y)^2 = (\alpha y-\beta x)^2$.

Εἶναι: $(\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2)-(\alpha x+\beta y)^2=$

$= \alpha^2x^2+\alpha^2y^2+\beta^2x^2+\beta^2y^2-(\alpha^2x^2+\beta^2y^2+2\alpha\beta xy)$

$= \alpha^2x^2+\alpha^2y^2+\beta^2x^2+\beta^2y^2-\alpha^2x^2-\beta^2y^2-2\alpha\beta xy$

$= \alpha^2y^2+\beta^2x^2-2\alpha\beta xy$

$= (\alpha y-\beta x)^2$.

3. **Ἄν α,β,γ εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί καί** $\alpha+\beta+\gamma = 0$, **νά ἀποδειχθεῖ ὅτι**
$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = -2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$$

Ἔχουμε τίς ἰσοδυναμίες:

$\alpha+\beta+\gamma = 0 \Leftrightarrow (\alpha+\beta+\gamma)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha = 0$

$\Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = -2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

4. **Ἄν α,β,γ εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί μέ** $\alpha\beta\gamma \neq 0$ **καί** $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma} = 0$, **νά ἀποδειχθεῖ ὅτι** $(\alpha+\beta+\gamma)^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2$.

Ἔχουμε: $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma} = 0 \Leftrightarrow \alpha\beta\gamma\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}\right) = \alpha\beta\gamma \cdot 0$

$\Leftrightarrow \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = 0$. Ἄρα

$(\alpha+\beta+\gamma)^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$= \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\cdot 0$

$= \alpha^2+\beta^2+\gamma^2$

Ἀσκήσεις γιά ἐπανάληψη 26,27,28,29,30.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι
$[-(-x)]+[-(-y)]+[-(x+y)] = 0.$
2. Νά δειχθεῖ ὅτι $x+[-[-(-x)]] = 0.$
3. Ἄν $x+y+z$ εἶναι ὁ ἀντίθετος τοῦ $(-x)+(-y)+\omega$, νά δειχθεῖ ὅτι $z = -\omega$.
4. Ἄν $x = (\alpha+\beta)+[(-\gamma)+(-\delta)]$ καί $y = [(-\alpha)+\gamma]+[(-\beta)+\delta]$, νά δείξετε ὅτι οἱ x,y εἶναι ἀντίθετοι.
5. Νά ἀποδειχθοῦν οἱ παρακάτω ἰσότητες
α) $(x+y)-z = (x-z)+y$
β) $(x-y)-z = x-(y+z) = (x-z)-y.$
6. Νά ἀποδειχθοῦν οἱ παρακάτω συνεπαγωγές
α) $x \neq y \Rightarrow x-z \neq y-z$
β) $x \neq y \Rightarrow x-y \neq y-x$
γ) $x = y$ **καί** $z = \varphi \Rightarrow x-z = y-\varphi$.
7. Νά βρεθοῦν τά ἐξαγόμενα
$$A = \left(-\frac{6}{7}\alpha^2\beta\gamma^5\right)(2\alpha^4\beta^3\gamma^4)\left(-\frac{5}{6}\alpha\beta^2\gamma^5\right)$$
$B = (-3x^2yz^7)(4x^4y^3z)(-xy^5)$
$\Gamma = [(-2xy^2z^3)^3]^4.$
8. Νά ἀποδειχθοῦν οἱ ἰσότητες
α) $(x^2+3x)(x^2+6x+9) = x(x+3)^3$
β) $(x^2+y^2+xy)^2 = x^2y^2+(x+y)^2(x^2+y^2).$
9. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι
$(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma) = x^3+(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x+\alpha\beta\gamma.$
10. Νά γίνουν οἱ πράξεις
α) $(x-1)^2(x+1)^2$ β) $(-7x+1)^2-(7x-3)^2$
γ) $(x^2-2\alpha)^2+(\alpha-\beta)^2$ δ) $(2\alpha\beta+\gamma)^2-(\gamma-\delta)^2$
ε) $(\alpha x+\beta y)^2-(\alpha x-\beta y)^2.$
11. Νά ἀποδειχθοῦν οἱ ἰσότητες
α) $(3x-2)[4x-3+2(x-1)+x+1] = (3x-2)(7x-4)$
β) $x^6-8 = (x^2-2)(x^4+2x^2+4).$
12. Νά ἀποδειχθεῖ ἡ ἰσότητα
$$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)\frac{1}{xy} = 1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2y^2} \quad (xy \neq 0).$$
13. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι
α) $\frac{1}{x}(x+x^2)+\frac{1}{y}(y+y^2)+\frac{1}{z}(z+z^2)+(-x)+(-y)+(-z) = 3 \quad (xyz \neq 0)$
β) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = 0 \Leftrightarrow xy+yz+zx = 0 \quad (xyz \neq 0).$
14. Ἄν $(x+y)(x+z) = 0$, νά δειχθεῖ ὅτι ὁ x εἶναι ἀντίθετος τοῦ y ἤ τοῦ z.
15. Νά βρεθεῖ ἀριθμός ὁ ὁποῖος εἶναι ἴσος μέ τόν ἀντίστροφό του.
16. Νά λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις
α) $(x-1)(x-2)(x-3) = 0$ β) $x^3-4x = 0$ γ) $x^3-2x^2+x = 0$
δ) $x^4-16 = 0$ ε) $(x-1)^2-(3-2x)^2 = 0.$

17. Νά ἀποδειχθοῦν οἱ ἰσότητες

α) $(x+y) : z = (x : z)+(y : z) \qquad (z \neq 0)$

β) $(x-y) : z = (x : z) - (y : z) \qquad (z \neq 0)$

γ) $(x\ y) : z = (x : z)\ y = x\ (y : z) \qquad (z \neq 0)$

δ) $(x : y) : z = x : (y\ z) = (x : z) : y \qquad (yz \neq 0).$

18. Νά ἀποδειχθοῦν οἱ ἰσότητες

α) $(xy) : x = y \qquad (x \neq 0)$

β) $(x : y)\ y = x \qquad (y \neq 0)$

γ) $x : (y\ z) = (x : y) : z \qquad (yz \neq 0).$

19. Νά ἀποδειχθοῦν οἱ ἰσοδυναμίες

α) $x = y \Leftrightarrow x : z = y : z \quad (z \neq 0)$

β) $x \neq y \Leftrightarrow x : z \neq y : z \quad (z \neq 0).$

20. Νά ἀποδειχθοῦν οἱ ἰσότητες

α) $\dfrac{x}{y} - \dfrac{z}{\varphi} = \dfrac{x\varphi - yz}{y\varphi} \qquad (y\varphi \neq 0)$

β) $\dfrac{x}{y} : \dfrac{z}{\varphi} = \dfrac{x\varphi}{yz}. \qquad (y\varphi z \neq 0).$

21. Νά ἀποδειχθοῦν οἱ παρακάτω ἰσοδυναμίες

α) $\dfrac{x}{y} = \dfrac{z}{\varphi} \Leftrightarrow x\varphi = yz \qquad (x\varphi \neq 0)$

β) $\dfrac{x}{y} = \dfrac{z}{\varphi} \Leftrightarrow \dfrac{x}{z} = \dfrac{y}{\varphi} \qquad (y\varphi z \neq 0)$

γ) $\dfrac{x}{y} = \dfrac{z}{\varphi} \Leftrightarrow \dfrac{y}{x} = \dfrac{\varphi}{z} \qquad (xyz\,\varphi \neq 0)$

δ) $\dfrac{x}{y} = \dfrac{z}{\varphi} \Leftrightarrow \dfrac{x+y}{y} = \dfrac{z+\varphi}{\varphi} \qquad (y\varphi \neq 0)$

ε) $\dfrac{x}{y} = \dfrac{z}{\varphi} \Leftrightarrow \dfrac{x}{y} = \dfrac{x+z}{y+\varphi} \qquad (y\varphi(y+\varphi) \neq 0)$

στ) $\dfrac{x}{y} = \dfrac{z}{\varphi} = \dfrac{\omega}{\rho} \Rightarrow \dfrac{x}{y} = \dfrac{x+z+\omega}{y+\varphi+\rho} \qquad (y\varphi\rho(y+\varphi+\rho) \neq 0).$

22. Νά ἀπλοποιηθοῦν οἱ παραστάσεις

α) $5y^{-2}x^3z^0$ β) $\dfrac{2x^3y^{-2}}{3x^{-2}y^3}$ γ) $\dfrac{\alpha^{-1}+\beta^{-1}}{(\gamma\delta)^{-1}}$ δ) $\dfrac{x^{-2}+y^{-2}}{x^{-1}+y^{-1}}$ ε) $\dfrac{1+x^{-1}+x^{-2}}{1-x^{-3}}.$

23. Νά ἐκτελεστοῦν οἱ πράξεις

α) $\left(-\dfrac{3}{4}x^2y^{-5}z^5\right)^{-3}$ β) $\dfrac{-7xy^5z^3}{8x^4y^5z^2}$

γ) $\left(-\dfrac{2}{3}xy^3+4x^4y^2z-5x^3z^5\right) : \dfrac{5}{4}x^4y^3z^4.$

24. Νά λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις

α) $(3x+5)^2-(9x^2-25)+6x+10 = 0$

β) $3x(2x-1)+1-4x^2-(2x+3)\left(x-\dfrac{1}{2}\right) = 0$

γ) $\dfrac{x+2}{3} - \dfrac{2x+1}{2} = \dfrac{2x-3}{6} - x$

δ) $(x-7)^2-2x+1 = x^2-3$

ε) $x+4-\dfrac{x+3}{3} = \dfrac{2x+3}{3}.$

25. Νά λυθοῦν οἱ παραμετρικές ἐξισώσεις

α) $(\lambda^2-9)x = \lambda^2+3\lambda$

β) $3(\lambda+1)x+4 = 2x+5(\lambda+1)$

γ) $\cancel{(\lambda^2-1)x = \lambda(\lambda+1)(\lambda+2)}$

δ) $(\lambda+2)x+4(2\lambda+1) = \lambda^2+4(x-1)$.

26. Νά λυθοῦν οἱ παραμετρικές ἐξισώσεις

α) $\lambda(x-1) = x+2\mu-7$

β) $\lambda(3x+\lambda)+7-2\lambda = \lambda^2+3(1+\mu x)$

γ) $(\lambda-\mu)x = \lambda^2-(\lambda+\mu)x$.

27. Ἀφοῦ ἀποδειχθεῖ ἡ συνεπαγωγή $\alpha+\beta+\gamma = 0 \Rightarrow \alpha^3+\beta^3+\gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$, νά παραγοντοποιηθοῦν οἱ παραστάσεις

α) $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$ $= 3\cdot(x-y)(y-z)(z-x)$

β) $\alpha^3(\beta-\gamma)^3+\beta^3(\gamma-\alpha)^3+\gamma^3(\alpha-\beta)^3$.

28. Ἄν $A = 2x+3y$, $B = x-2y$ καί $\Gamma = 3x-5y$, νά βρεθεῖ τό $A^2+B^2-\Gamma^2$ καί τό $AB+B\Gamma+\Gamma A$.

29. Ἄν $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ πραγματικοί ἀριθμοί μέ $\beta\delta(\beta+\delta) \neq 0$, νά ἀποδειχθεῖ ἡ συνεπαγωγή

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Rightarrow \frac{\alpha\gamma}{\beta\delta} = \left(\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}\right)^2.$$

30. Νά λυθοῦν τά συστήματα

α) $x^2-3y = 6$
$y^2 = 1$ στό $\mathbb{Q}$

β) $x+y = -13$
$(y-3)(y-5) = 0$ στό $\mathbb{R}$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗ ΛΥΣΗ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Εἶναι γνωστό ὅτι $-(-x) = x$ καί $-(x+y) = (-x)+(-y)$.

2. Στήν ἐσωτερική ἀγγύλη ἔχουμε x.

3. Ἐπειδή εἶναι ἀντίθετοι, θά εἶναι $(x+y+z)+[(-x)+(-y)+\omega] = 0$ κτλ.

4. Ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι $x+y = 0$.

5. Ἀρχίζουμε ἀπό τό πρῶτο μέλος, γράφουμε ἀντί $(x+y)-z = (x+y)+(-z)$ κτλ.

6. Γιά τίς **α** καί **β** ὑποθέτουμε ὅτι γιά $x \neq y$ ἰσχύει $x-z = y-z$ (ἀπαγωγή σέ ἄτοπο). Γιά τήν **γ** παρατηροῦμε $-z = -\varphi$.

7. Εἶναι $A = \frac{10}{7}\alpha^7\beta^6\gamma^{14}$ $\quad B = 12x^7y^9z^8$ $\quad$ καί $\Gamma = 4096x^{12}y^{24}z^{36}$.

8. **α)** Κάνουμε τίς πράξεις στό πρῶτο μέλος καί καταλήγουμε στό δεύτερο.
β) Ξεκινοῦμε ἀπό τό δεύτερο μέλος καί φτάνουμε στό πρῶτο.

9. Γράφουμε $(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma) = (x+\alpha)\,[(x+\beta)(x+\gamma)]$, κάνουμε τίς πράξεις στήν ἀγγύλη κτλ.

10. **α)** x^4-2x^2+1 $\quad$ **β)** $4(7x-2)$ $\quad$ **γ)** $x^4-4\alpha x^2+5\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$
δ) $(2\alpha\beta+2\gamma-\delta)(2\alpha\beta+\delta)$ καί **ε)** $4\alpha\beta xy$.

11. **α)** ἁπλή, **β)** χρησιμοποιοῦμε τήν ταυτότητα $\alpha^3-\beta^3 = (\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$.

12. Ξεκινᾶμε ἀπό τό πρῶτο μέλος καί ἐφαρμόζουμε τήν ἐπιμεριστική ἰδιότητα.

13. **α)** ἐφαρμόζουμε τήν ἐπιμεριστική ἰδιότητα κτλ., **β)** πολλαπλασιάζουμε τήν πρώτη μέ xyz κτλ.

14. Ἀπό τήν $(x+y)(x+z) = 0$ προκύπτει $x+y = 0$ ἤ $x+z = 0$, ὁπότε ...

15. Ἄν x εἶναι ὁ ἀριθμός $(x \neq 0)$, θά εἶναι $x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x\, x = x\,\frac{1}{x}$ κτλ. Βρίσκουμε $x = \pm 1$.

16. Παραγοντοποιοῦμε τό πρῶτο μέλος καί ἐφαρμόζουμε τό θεώρ. 11. Εἶναι: **α)** $x = 1,2,3$ **β)** $x = 0, -2, 2$ **γ)** $x = 0,1$ **δ)** $x = -2,2$ καί **ε)** $x = 2, \frac{4}{3}$.

17. Μετασχηματίζουμε τά πηλίκα σέ γινόμενα.

18. Εἶναι **α)** $(x\,y) : x = (x\,y)\,\frac{1}{x} = xy\,\frac{1}{x} =$ κτλ. Ὁμοίως καί οἱ ἄλλες.

19. **α)** $x = y \Leftrightarrow x\,\frac{1}{z} = y\,\frac{1}{z} \Leftrightarrow \ldots$ **β)** Μέθοδος ἀντιθετοαντιστροφῆς.

20. **α)** $\frac{x}{y} - \frac{z}{\varphi} = \frac{x\varphi}{y\varphi} - \frac{zy}{y\varphi} =$ κτλ.

β) $\frac{x}{y} : \frac{z}{\varphi} = \frac{x}{y}\;\frac{1}{\frac{z}{\varphi}} =$ κτλ.

21. α) Πολλαπλασιάζουμε καί τά δύο μέλη μέ $y\varphi$, β) ἐφαρμόζουμε τήν α, γ) ἐφαρμόζουμε τήν α, δ) προσθέτουμε καί στά δύο μέλη τόν 1, ε) θέτουμε $\frac{x}{y} = \frac{z}{\varphi} = \lambda$ κτλ. στ) Ὅμοια μέ τήν ε.

22. α) $\frac{5x^3}{y^2}$ β) $\frac{2x^5}{3y^5}$ γ) $\frac{(\alpha+\beta)\gamma\delta}{\alpha\beta}$ δ) $\frac{x^2+y^2}{xy(x+y)}$ ε) $\frac{x}{x-1}$

23. α) $-\frac{64y^{15}}{27x^6z^{15}}$ β) $\frac{-7z}{8x^3}$ γ) $\frac{-8}{15x^3z^4} + \frac{16}{5yz^3} - \frac{4z}{xy^3}$

24. α) $x = -\frac{5}{3}$ β) $x = \frac{1}{2}$ γ) ἀδύνατη δ) $x = \frac{53}{16}$ ε) ἀδύνατη.

25. α) Γιά $\lambda \neq \pm 3$ ἔχει μιά ρίζα, γιά $\lambda = -3$ εἶναι ταυτότητα καί γιά $\lambda = 3$ εἶναι ἀδύνατη.
β) Γιά $\lambda \neq -\frac{1}{3}$ ἔχει μιά ρίζα, καί γιά $\lambda = -\frac{1}{3}$ εἶναι ἀδύνατη.
γ) Γιά $\lambda \neq \pm 1$. ἔχει μιά ρίζα, γιά $\lambda = -1$ εἶναι ταυτότητα καί γιά $\lambda = 1$ εἶναι ἀδύνατη.
δ) Γιά $\lambda \neq 2$ ἔχει μιά ρίζα, καί γιά $\lambda = 2$ εἶναι ἀδύνατη.

26. α) Γιά $\lambda \neq 1$ ἔχει μιά ρίζα, γιά $\lambda = 1$, $\mu = 3$ εἶναι ταυτότητα καί γιά $\lambda = 1$, $\mu \neq 3$ εἶναι ἀδύνατη.
β) Γιά $\lambda \neq \mu$ ἔχει μιά ρίζα, γιά $\lambda = \mu = 2$ εἶναι ταυτότητα καί γιά $\lambda = \mu \neq 2$ εἶναι ἀδύνατη.
γ) Γιά $\lambda \neq 0$ ἔχει μιά ρίζα, γιά $\lambda = 0$ εἶναι ταυτότητα.

27. Εἶναι $\alpha+\beta+\gamma = 0 \Rightarrow \alpha+\beta = -\gamma \Rightarrow (\alpha+\beta)^3 = -\gamma^3$ κτλ. α) $3(x-y)(y-z)(z-x)$ καί β) $3\alpha\beta\gamma(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$.

28. $A^2+B^2-\Gamma^2 = -4x^2-12y^2+38xy$ καί $AB+B\Gamma+\Gamma A = 11x^2-11y^2-13xy$.

29. Ἐφαρμόζουμε τήν ἄσκηση 21(ε).

30. α) Ἀντικαθιστοῦμε τό y ἀπό τή πρώτη στή δεύτερη. Βρίσκουμε ($x=3$ **καί** $y=1$) ἤ ($x = -3$ **καί** $y = 1$). β) Εἶναι ($x = -16$ **καί** $y = 3$) ἤ ($x = -18$ **καί** $y=5$).

3 ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΩΣ ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΟ ΣΩΜΑ

Τό κεφάλαιο αὐτό ἀποτελεῖ συνέχεια καί συμπλήρωση τοῦ προηγούμενου. Μέ τήν εἰσαγωγή τῆς διατάξεως, πού εἶναι ὁ βασικός του ἄξονας, συμπληρώνεται ἡ δομή τοῦ συνόλου $\mathbb{R}$ ὡς διατεταγμένου σώματος.
Ἡ ἐπιλογή καί ὁ τρόπος παρουσιάσεως τῆς ὕλης διέπονται ἀπό τίς ἴδιες ἀρχές καί ἀποβλέπουν βασικά στούς ἴδιους στόχους μέ ἐκείνους τοῦ κεφαλαίου 2.
Ἐπιδιώκεται δηλαδή καί ἐδῶ νά ἐξοικειωθεῖ ὁ μαθητής μέ τόν τρόπο πού ἀναπτύσσεται ἕνα μαθηματικό θέμα (ρόλος τῶν ἀξιωμάτων, τῶν νόμων τῆς λογικῆς κτλ.) καί νά ἀσκηθεῖ στή μαθηματική ἀπόδειξη.
Ἐξάλλου ἡ κανονική ἀφομοίωση τῆς ὕλης αὐτῆς θά συμβάλει στό νά συμπληρώσει ὁ μαθητής τίς γνώσεις του πάνω στίς βάσεις τοῦ ἀλγεβρικοῦ λογισμοῦ καί ἰδιαίτερα στά σημεῖα ἐκεῖνα πού ἡ παρουσία λαθῶν ἤ παρανοήσεων εἶναι συνήθης.

ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΔΙΑΤΑΞΕΩΣ

Γενικά

3.1 Δύο ὁποιοιδήποτε πραγματικοί ἀριθμοί x καί y μποροῦν νά συγκριθοῦν συνδεόμενοι μέ τό σύμβολο τῆς **διατάξεως** $\leq$ (μικρότερο ἤ ἴσο). Δηλαδή ἰσχύει πάντοτε $\mathbf{x \leq y}$ **ἤ** $\mathbf{y \leq x}$.
Αὐτή τή γνωστή μας σχέση διατάξεως μποροῦμε νά τήν ὁρίσουμε καί νά τή μελετήσουμε, ἄν ξεκινήσουμε ἀπό μερικές γνωστές μας ἰδιότητες πού θά δεχθοῦμε ὡς ἀξιώματα, ὅπως κάναμε καί στό προηγούμενο κεφάλαιο γιά τίς πράξεις.

Θετικοί καί ἀρνητικοί ἀριθμοί

3.2 Εἴδαμε ὅτι γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό x ὑπάρχει ἕνας μοναδικός ἀντίθετός του, ὁ $-x$. Εἶναι $x = -x$ μόνο ὅταν $x = 0$. Ἄρα, ἄν $\mathbb{R}^*$ εἶναι τό σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν **χωρίς τό 0**, τά στοιχεῖα τοῦ $\mathbb{R}^*$ μποροῦν νά σχηματίσουν δυάδες $\{x, -x\}$ ἀντίθετων μή μηδενικῶν ἀριθμῶν. Θά δεχθοῦμε ὅτι σέ κάθε δυάδα ἕνας μόνο ἀπό τούς ἀντίθετους $x, -x$ χαρακτηρίζεται ὡς **θετικός πραγματικός ἀριθμός.**
Τό σύνολο τῶν θετικῶν ἀριθμῶν θά τό συμβολίζουμε $\mathbb{R}^*_+$.
Πιό συγκεκριμένα θά δεχθοῦμε τά παρακάτω ἀξιώματα:

ΑΞΙΩΜΑ X	**Ὑπάρχει ἕνα ὑποσύνολο $\mathbb{R}^*_+$ τοῦ $\mathbb{R}$, τέτοιο, ὥστε γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$ νά ἰσχύει :** **ἤ $x = 0$ ἤ $x \in \mathbb{R}^*_+$ ἤ $-x \in \mathbb{R}^*_+$**

ΑΞΙΩΜΑ XI	**Τό $\mathbb{R}^*_+$ εἶναι «κλειστό» ὡς πρός τήν πρόσθεση καί τόν πολλαπλασιασμό. Δηλαδή ἰσχύουν οἱ συνεπαγωγές :** **1. $x \in \mathbb{R}^*_+$ καί $y \in \mathbb{R}^*_+ \Rightarrow x+y \in \mathbb{R}^*_+$** **2. $x \in \mathbb{R}^*_+$ καί $y \in \mathbb{R}^*_+ \Rightarrow x\,y \in \mathbb{R}^*_+$**

Ἀπό τό ἀξίωμα X προκύπτει ὅτι κάθε πραγματικός ἀριθμός $x \neq 0$ εἶναι:
- ἤ θετικός (ἄν $x \in \mathbb{R}^*_+$)
- ἤ ἀντίθετος θετικοῦ (ἄν $-x \in \mathbb{R}^*_+$), ὁπότε λέγεται **ἀρνητικός.**

Τό σύνολο τῶν ἀρνητικῶν θά τό συμβολίζουμε(1) $\mathbb{R}^*_-$.

Μποροῦμε νά παρατηρήσουμε ἀμέσως ὅτι καί τό $\mathbb{R}^*_-$ εἶναι «κλειστό» ὡς πρός τήν πρόσθεση, δηλαδή τό ἄθροισμα δύο ἀρνητικῶν εἶναι ἀρνητικός. Πράγματι, ἄν x καί y εἶναι ἀρνητικοί ἀριθμοί, τότε οἱ $-x$ καί $-y$ θά εἶναι θετικοί. Ὁπότε τό $(-x)+(-y)$ ἤ $-(x+y)$ εἶναι θετικός ἀριθμός. Ἄρα ὁ $x+y$ θά εἶναι ἀρνητικός.

Ἀνισότητες

3.3 Μποροῦμε τώρα νά ὁρίσουμε στό $\mathbb{R}$ τίς γνωστές μας διμελεῖς σχέσεις «>» ἤ «<», τίς ὁποῖες ὀνομάζουμε **ἀνισότητες.**

Ἄν x καί y εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί, θά λέμε ὅτι:

- **«Ὁ x εἶναι μεγαλύτερος τοῦ y»** καί θά γράφουμε $x > y$ ὅταν ἡ διαφορά $x-y$ εἶναι θετικός ἀριθμός, καί
- **«Ὁ x εἶναι μικρότερος τοῦ y»** καί θά γράφουμε $x < y$ ὅταν $y > x$.

Σύμφωνα μέ τόν παραπάνω ὁρισμό ἰσχύουν στό $\mathbb{R}$ οἱ ἰσοδυναμίες:

$$(1)\quad \begin{array}{l} x > y \Leftrightarrow x-y \quad \text{θετικός} \\ x < y \Leftrightarrow y > x \Leftrightarrow y-x \ \text{θετικός} \Leftrightarrow x-y \ \text{ἀρνητικός} \end{array}$$

Εἰδικότερα γιά $y=0$ ἔχουμε

$$\begin{array}{l} x > 0 \Leftrightarrow x-0 = x \quad \text{θετικός} \\ x < 0 \Leftrightarrow x-0 = x \quad \text{ἀρνητικός} \end{array}$$

Δηλαδή οἱ θετικοί χαρακτηρίζονται ἀπό τό ὅτι εἶναι μεγαλύτεροι τοῦ 0, ἐνῶ οἱ ἀρνητικοί ἀπό τό ὅτι εἶναι μικρότεροι τοῦ 0.

Ἑπομένως οἱ ἰσοδυναμίες (1) γράφονται:

$$\begin{array}{l} x > y \Leftrightarrow x-y > 0 \\ x < y \Leftrightarrow x-y < 0 \end{array}$$

Νόμος τῆς τριχοτομίας

3.4 Ἀποδεικνύουμε τό ἀκόλουθο θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 1

Γιά ὁποιουσδήποτε πραγματικούς ἀριθμούς x καί y ἰσχύει:
ἤ $x=y$ ἤ $x>y$ ἤ $x<y$

(1) Ἐπίσης θά συμβολίζουμε:

$\mathbb{R}_+$: Τό σύνολο τῶν θετικῶν καί τοῦ 0.

$\mathbb{R}_-$: Τό σύνολο τῶν ἀρνητικῶν καί τοῦ 0.

Ἀπόδειξη. Σύμφωνα μέ τό ἀξίωμα X γιά τόν ἀριθμό $x - y$ θά ἔχουμε:

ἤ $x - y = 0$ δηλαδή $x = y$

ἤ $x - y > 0$ δηλαδή $x > y$

ἤ $-(x-y) > 0$ ὁπότε $x-y < 0$ δηλαδή $x < y$.

Τό θεώρημα αὐτό εἶναι γνωστό καί ὡς **«νόμος τῆς τριχοτομίας»**.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό x ἰσχύει:
ἤ $x = 0$ ἤ $x > 0$ ἤ $x < 0$

Ἀποδεικνύεται, ἄν θέσουμε στό παραπάνω θεώρημα $y = 0$.

Κανόνας τῶν προσήμων

3.5 Γιά τό πρόσημο τοῦ γινομένου ἀποδεικνύεται τώρα ὁ γνωστός κανόνας:

ΘΕΩΡΗΜΑ 2

1. Τό γινόμενο δύο ὁμόσημων ἀριθμῶν εἶναι θετικός ἀριθμός
2. Τό γινόμενο δύο ἑτερόσημων ἀριθμῶν εἶναι ἀρνητικός ἀριθμός

Ἀπόδειξη

1. Ἄν $x > 0$ καί $y > 0$, συμπεραίνουμε (Ἀξ. XI) ὅτι $xy > 0$.
   Ἄν $x < 0$ καί $y < 0$, τότε $-x > 0$ καί $-y > 0$, ὁπότε $(-x)(-y) > 0$. Ἄρα (§ 2.16 Πόρ.) $xy > 0$.
2. Ἄν π.χ. $x > 0$ καί $y < 0$, τότε $x > 0$ καί $-y > 0$, ὁπότε $x(-y) > 0$, ἤ (§ 2.16 Πόρ.) $-xy > 0$. Ἄρα $xy < 0$.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

1. $xy > 0 \Rightarrow x, y$ **ὁμόσημοι**
   $xy < 0 \Rightarrow x, y$ **ἑτερόσημοι**
   (Ἀποδεικνύονται μέ τή μέθοδο τῆς ἀντιθετοαντιστροφῆς).
2. $\alpha \neq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 > 0$
   ($\alpha^2 = \alpha\,\alpha > 0$ ὡς γινόμενο ὁμοσήμων).
3. $1 > 0$
   (Προκύπτει ἀπό τό προηγούμενο πόρισμα γιά $\alpha = 1$).
4. $\alpha > 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\alpha} > 0$, $\alpha < 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\alpha} < 0$
   (Γιά $\alpha \neq 0$ εἶναι $\alpha\,\dfrac{1}{\alpha} = 1 > 0$. Ἄρα, (Πορ. 1), οἱ α, $\dfrac{1}{\alpha}$ εἶναι ὁμόσημοι).

5. $xy > 0 \Leftrightarrow \frac{x}{y} > 0, \quad xy < 0 \Leftrightarrow \frac{x}{y} < 0$

(Θεώρ. 2 καί Πόρ. 4)

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Ἄν α, β εἶναι δύο πραγματικοί ἀριθμοί, διαφορετικοί μεταξύ τους, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι $\alpha^2 + \beta^2 > 2\alpha\beta$.

Ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι ἡ διαφορά $(\alpha^2 + \beta^2) - 2\alpha\beta$ εἶναι θετικός ἀριθμός. Πράγματι $(\alpha^2+\beta^2) - 2\alpha\beta = (\alpha-\beta)^2 > 0$ σύμφωνα μέ τό Πόρ. 2.

2. Ἄν $x > 1$, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι $x^3 > x^2 - x + 1$.

Ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι $x^3-(x^2-x+1) > 0$. Εἶναι

$$\begin{aligned} x^3-(x^2-x+1) &= x^3-x^2+x-1 \\ &= x^2(x-1)+(x-1) \\ &= (x-1)(x^2+1) > 0 \end{aligned}$$

γιατί $x-1 > 0$ ($x > 1$ ὑπόθεση) καί $x^2+1 > 0$ (ἄθροισμα θετικῶν).

Ἀσκήσεις 1,2,3.

ΣΧΕΣΗ ΔΙΑΤΑΞΕΩΣ ΣΤΟ $\mathbb{R}$

Μεταβατικότητα

οχι

$\boxed{3.6}$ Οἱ ἀνισότητες εἶναι **σχέσεις μεταβατικές**. Συγκεκριμένα ἀποδεικνύουμε τήν ἰδιότητα αὐτή γιά τή σχέση «>».

ΘΕΩΡΗΜΑ 3

Γιά ὁποιουσδήποτε πραγματικούς ἀριθμούς x, y, z ἰσχύει ἡ συνεπαγωγή

$$x > y \text{ καί } y > z \Rightarrow x > z$$

Ἀπόδειξη. Εἶναι

$x > y$ καί $y > z \Rightarrow x-y > 0$ καί $y-z > 0$ [ὁρισμός]

$\overset{(1)}{\Rightarrow} (x-y)+(y-z) > 0$ [ἄθροισμα θετικῶν, Ἀξ. ΧΙ]

$\Rightarrow (x-y+y)-z > 0$ [προσεταιριστικότητα]

$\Rightarrow x-z > 0$ [ἄθροισμα ἀντιθέτων]

$\Rightarrow x > z$ [ὁρισμός]

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Ἡ μεταβατικότητα τῆς σχέσεως «<» ἀποδεικνύεται κατά τόν ἴδιο τρόπο.

(1) Οἱ λοιπές συνεπαγωγές ἰσχύουν καί ἀντιστρόφως.

ΠΟΡΙΣΜΑ | **Κάθε θετικός ἀριθμός εἶναι μεγαλύτερος ἀπό κάθε ἀρνητικό ἀριθμό**

(Ἐφαρμόζοντας τό θεώρ. 3 γιά $y=0$ ἔχουμε: $x>0$ καί $0>z \Rightarrow x>z$).

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Ἄν x,y εἶναι θετικοί καί α,β ἀρνητικοί ἀριθμοί, τότε εἶναι:
α) $x-\alpha+y-\beta>0$ **καί** **β)** $(x-\alpha)(y-\beta)>0$.

Ἐπειδή κάθε θετικός εἶναι μεγαλύτερος ἀπό κάθε ἀρνητικό, θά ἔχουμε $x>\alpha$ καί $y>\beta$ ἤ $x-\alpha>0$ καί $y-\beta>0$. Ἑπομένως καί τό ἄθροισμά τους καί τό γινόμενό τους εἶναι θετικοί ἀριθμοί (Ἀξ. XI).

Ἡ φυσική διάταξη στό ℝ

3.7 Ὅπως εἶναι γνωστό, σημειώνουμε $x \leq y$ ἀντί γιά τή διάζευξη ($x=y$ **ἤ** $x<y$). Ἐπίσης $x \geq y$ σημαίνει ($x=y$ **ἤ** $x>y$). Ἐπειδή ὅμως καί ἡ ἰσότητα εἶναι μεταβατική, συμπεραίνουμε ὅτι τό θεώρημα 3 ἰσχύει καί ἄν ἀντί γιά τή σχέση «>» πάρουμε τή σχέση «≥» ἤ τήν «≤». Δηλαδή καί ἡ σχέση « ≤» ἤ ἡ «≥» εἶναι **μεταβατική.** Ἀκόμη, ἐπειδή γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$ εἶναι $x=x$, θά ἀληθεύει ἡ διάζευξη «$x = x$ **ἤ** $x<x$», δηλαδή ἡ $x \leq x$. Ἄρα ἡ σχέση «≤» εἶναι καί **ἀνακλαστική.** Τέλος ἡ σχέση «≤» εἶναι καί **ἀντισυμμετρική**, δηλαδή γιά ὁποιουσδήποτε πραγματικούς ἀριθμούς x,y ἰσχύει ἡ συνεπαγωγή

$$x \leq y \quad \textbf{καί} \quad y \leq x \quad \Rightarrow \quad x=y.$$

Πράγματι, ἔστω (§ 1.31) ὅτι ($x \leq y$ **καὶ** $y \leq x$) **καί** $x \neq y$. Τότε

$$(x \leq y \ \textbf{καί}\ y \leq x)\ \textbf{καί}\ x \neq y \Leftrightarrow \begin{cases} (x \leq y \ \textbf{καί}\ x \neq y)\ \textbf{καί} \\ (y \leq x \ \textbf{καί}\ x \neq y) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad (x<y)\ \textbf{καί}\ (y<x)$$

πού εἶναι ἄτοπο (Θεώρ. 1).

Συμπεραίνουμε λοιπόν ὅτι, ἀφοῦ ἡ σχέση «≤» εἶναι **ἀνακλαστική, ἀντισυμμετρική** καί **μεταβατική,** θά εἶναι μιά **σχέση διατάξεως.** Ἐπειδή μάλιστα ἰσχύει καί ὁ νόμος τῆς τριχοτομίας, θά εἶναι μιά σχέση **ὁλικῆς διατάξεως.** Ἡ σχέση διατάξεως «≤» ὀνομάζεται **φυσική** διάταξη στό ℝ.

ΔΙΑΤΑΞΗ ΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ

Γενικά

3.8 Μέ τόν ὅρο «διάταξη» θά ἐννοοῦμε τή φυσική διάταξη στό ℝ, δηλαδή τήν «≤» ἤ τήν «≥». Τά θεωρήματα πού ἀκολουθοῦν περιέχουν ἀνισότητες, ἀλλά ἰσχύουν καί στή περίπτωση πού οἱ ἀνισότητες ἀντικατασταθοῦν μέ ἰσότητες.

Ἑπομένως, ἀποδεικνύοντας τά θεωρήματα μέ τίς ἀνισότητες, ($>$ ἤ $<$), ἀποδεικνύουμε ταυτόχρονα καί τά ἀντίστοιχα θεωρήματα τῶν διατάξεων ($\geq$ ἤ $\leq$) (ὅπως ἔγινε π.χ. μέ τήν ἀπόδειξη τῆς μεταβατικότητας τῆς διατάξεως § 3.7).

Διάταξη καί πρόσθεση

ΟΧΙ

3.9 Τούς γνωστούς κανόνες γιά τήν πρόσθεση ἑνός ἀριθμοῦ καί στά δύο μέλη μιᾶς ἀνισότητας καθώς καί γιά τήν πρόσθεση ὁμόστροφων ἀνισοτήτων κατά μέλη διατυπώνουμε καί ἀποδεικνύουμε ὡς ἑξῆς :

ΘΕΩΡΗΜΑ 4

> **Γιά ὁποιουσδήποτε πραγματικούς ἀριθμούς x,y,z,α,β ἰσχύουν:**
> **1.** $x > y \Leftrightarrow x+z > y+z$
> **2.** $x > y$ **καί** $\alpha > \beta \Rightarrow x+\alpha > y+\beta$

Ἀπόδειξη. Ἔχουμε:

1. $x+z > y+z \Leftrightarrow (x+z)-(y+z) > 0$ [ὁρισμός]
$\Leftrightarrow x+z-y-z > 0$ [ἀντίθετος ἀθροίσματος]
$\Leftrightarrow x-y > 0$ [ἄθροισμα ἀντιθέτων]
$\Leftrightarrow x > y$ [ὁρισμός]

2. $x > y$ καί $\alpha > \beta \Rightarrow x-y > 0$ καί $\alpha-\beta > 0$ [ὁρισμός]
$\Rightarrow x-y+\alpha-\beta > 0$ [ἄθροισμα θετικῶν, Ἀξ. XI]
$\Rightarrow (x+\alpha)-(y+\beta) > 0$ [ἀντίθετος ἀθροίσματος]
$\Rightarrow x+\alpha > y+\beta$ [ὁρισμός]

Ἡ συνεπαγωγή, $x > y$ καί $\alpha > \beta \Rightarrow x+\alpha > y+\beta$, γενικεύεται γιά ὁσεσδήποτε ὁμόστροφες ἀνισότητες. Δηλαδή ἀποδεικνύεται ἐπαγωγικά ὅτι ἰσχύει :

$\alpha_1 > \beta_1$ **καί** $\alpha_2 > \beta_2$ **καί** $\ldots$ $\alpha_\nu > \beta_\nu \Rightarrow \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu > \beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_\nu$

Διάταξη καί πολλαπλασιασμός

ΟΧΙ

3.10 Τούς γνωστούς κανόνες γιά τόν πολλαπλασιασμό τῶν μελῶν μιᾶς ἀνισότητας μέ τόν ἴδιο ἀριθμό διατυπώνουμε καί ἀποδεικνύουμε ὡς ἑξῆς:

ΘΕΩΡΗΜΑ 5

> **Γιά ὁποιουσδήποτε πραγματικούς ἀριθμούς α,x,y ἰσχύει:**
> **1.** $x > y$ **καί** $\alpha > 0 \Rightarrow \alpha x > \alpha y$
> **2.** $x > y$ **καί** $\alpha < 0 \Rightarrow \alpha x < \alpha y$

Ἀπόδειξη. Ἔχουμε

1. $x > y$ καί $\alpha > 0$ $\Rightarrow x - y > 0$ καί $\alpha > 0$ [ὁρισμός]
$\Rightarrow \alpha(x-y) > 0$ [γινόμενο θετικῶν, Ἀξ. XI]
$\Rightarrow \alpha x - \alpha y > 0$ [ἐπιμεριστικότητα]
$\Rightarrow \alpha x > \alpha y$ [ὁρισμός]

2. $x > y$ καί $\alpha < 0$ $\Rightarrow x - y > 0$ καί $\alpha < 0$ [ὁρισμός]
$\Rightarrow \alpha(x-y) < 0$ [γινόμενο ἑτεροσήμων]
$\Rightarrow \alpha x - \alpha y < 0$ [ἐπιμεριστικότητα]
$\Rightarrow \alpha x < \alpha y$ [ὁρισμός]

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

1. **Ἄν ἀλλάξουμε τά πρόσημα τῶν ὅρων μιᾶς ἀνισότητας, προκύπτει ἑτερόστροφη ἀνισότητα** (Θεώρ. 5 γιά $\alpha = -1$).

2. **Ἄν διαιρέσουμε καί τά δύο μέλη μιᾶς ἀνισότητας μέ τόν ἴδιο ἀριθμό α ($\alpha \neq 0$), προκύπτει ἀνισότητα ὁμόστροφη, ἄν ὁ α εἶναι θετικός, καί ἑτερόστροφη, ἄν ὁ α εἶναι ἀρνητικός**
$\left(\text{Θεώρ. 5, ἄν ἀντικαταστήσουμε τό } \alpha \text{ μέ } \frac{1}{\alpha}\right)$.

3. **Γιά $\alpha > 0$ ἰσχύει $x > y \Leftrightarrow \alpha x > \alpha y$**
Γιά $\alpha < 0$ ἰσχύει $x > y \Leftrightarrow \alpha x < \alpha y$

ΘΕΩΡΗΜΑ 6

Γιά ὁποιουσδήποτε θετικούς ἀριθμούς α, β, x, y ἰσχύει:

$$x > \alpha \text{ καί } y > \beta \Rightarrow xy > \alpha\beta$$

Ἀπόδειξη. Εἶναι $x > \alpha$ καί $y > 0 \Rightarrow xy > \alpha y$ [Θεώρ. 5] (1)
$y > \beta$ καί $\alpha > 0 \Rightarrow \alpha y > \alpha\beta$ (2)

Ἀπό τίς (1) καί (2) ἔχουμε $xy > \alpha\beta$ (μεταβατική ἰδιότητα).
Ἀποδεικνύεται μέ τή μέθοδο τῆς ἐπαγωγῆς ὅτι, ἄν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ καί $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu$ εἶναι θετικοί ἀριθμοί, ἰσχύει:

$$\alpha_1 > \beta_1 \text{ καί } \alpha_2 > \beta_2 \text{ καί } \ldots \text{ καί } \alpha_\nu > \beta_\nu \Rightarrow \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\nu > \beta_1\beta_2\ldots\beta_\nu$$

Διάταξη καί δυνάμεις

3.11 Τό ἑπόμενο θεώρημα ἀναφέρεται στή διάταξη δυνάμεων πραγματικῶν ἀριθμῶν μέ ἐκθέτες ἀκέραιους.

ΘΕΩΡΗΜΑ 7

Ἄν x καί y εἶναι θετικοί ἀριθμοί καί ν ἀκέραιος $\neq 0$, ἰσχύουν:
1. $x > y$ καί $\nu > 0 \Rightarrow x^{\nu} > y^{\nu}$
2. $x > y$ καί $\nu < 0 \Rightarrow x^{\nu} < y^{\nu}$

Ἀπόδειξη

1. Ἀπό τή γενίκευση τοῦ θεωρήματος 6 γιά $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{\nu} = x$ καί $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_{\nu} = y$ ἔχουμε:

$$x\,x \ldots x > y\,y \ldots y \quad \text{δηλαδή} \quad x^{\nu} > y^{\nu}.$$

2. Ἄν $\nu < 0$, θά εἶναι $-\nu > 0$, ὁπότε σύμφωνα μέ τό προηγούμενο: $x^{-\nu} > y^{-\nu}$ δηλ. $\frac{1}{x^{\nu}} > \frac{1}{y^{\nu}}$. Ἐπειδή ὅμως $x^{\nu}y^{\nu} > 0$, θά εἶναι:

$$x^{\nu}y^{\nu}\frac{1}{x^{\nu}} > x^{\nu}y^{\nu}\frac{1}{y^{\nu}} \quad \text{ἤ} \quad x^{\nu} < y^{\nu}.$$

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

1. Ἄν $\nu > 0$, τότε $x > 1 \Rightarrow x^{\nu} > 1$, $\quad 0 < x < 1 \Rightarrow x^{\nu} < 1$

2. Ἄν $\nu < 0$, τότε $x > 1 \Rightarrow x^{\nu} < 1$, $\quad 0 < x < 1 \Rightarrow x^{\nu} > 1$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΟΧΙ

1. **Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ἰσχύουν οἱ συνεπαγωγές:**

α) $xy > 0$ καί $x < y \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$

β) $xy < 0$ καί $x < y \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{y}$

α) Ἐπειδή $xy > 0$, ἡ $x < y$ γίνεται $\frac{x}{xy} < \frac{y}{xy}$ ἤ $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$

β) Ἐπειδή $xy < 0$, ἡ $x < y$ γίνεται $\frac{x}{xy} > \frac{y}{xy}$ ἤ $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$.

2. **Ἐπίσης οἱ συνεπαγωγές:**

α) $\alpha > \beta$ καί $\gamma < \delta \Rightarrow \alpha - \gamma > \beta - \delta$

β) α, β θετικοί καί $\alpha > \beta \Rightarrow \alpha^2 > \beta^2$

γ) α, β ἀρνητικοί καί $\alpha > \beta \Rightarrow \alpha^2 < \beta^2$

α) $\alpha > \beta$ καί $\gamma < \delta \Rightarrow \alpha > \beta$ καί $-\gamma > -\delta \Rightarrow \alpha - \gamma > \beta - \delta$

β) $\alpha > \beta$ καί $\alpha > \beta \Rightarrow \alpha\alpha > \beta\beta \Rightarrow \alpha^2 > \beta^2$

γ) $\alpha > \beta \Rightarrow -\alpha < -\beta \Rightarrow (-\alpha)^2 < (-\beta)^2 \Rightarrow \alpha^2 < \beta^2$.

3. **Ἄν α, β, x θετικοί καί $\alpha < \beta$, τότε εἶναι $\frac{\alpha+x}{\beta+x} > \frac{\alpha}{\beta}$.**

Ἐπειδή $\beta(\beta+x)$ εἶναι θετικός ἀριθμός, θά ἔχουμε

$$\frac{\alpha+x}{\beta+x} > \frac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow \beta(\beta+x)\frac{\alpha+x}{\beta+x} > \beta(\beta+x)\frac{\alpha}{\beta}$$
$$\Leftrightarrow \beta(\alpha+x) > (\beta+x)\alpha$$
$$\Leftrightarrow \alpha\beta+\beta x > \alpha\beta+\alpha x$$
$$\Leftrightarrow \beta x > \alpha x$$
$$\Leftrightarrow \beta > \alpha \quad \text{πού ἰσχύει.}$$

4. **Γιά κάθε $\alpha > 0$ νά ἀποδειχθεῖ ὅτι $\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2$.**

Εἶναι: $\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2 \Leftrightarrow \alpha\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right) \geq 2\alpha$
$$\Leftrightarrow \alpha^2+1 \geq 2\alpha$$
$$\Leftrightarrow \alpha^2-2\alpha+1 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (\alpha-1)^2 \geq 0 \quad \text{πού ἰσχύει.}$$

Ἡ ἰσότητα ἰσχύει, ὅταν $\alpha = 1$.

5. **Ἄν κ, λ εἶναι ἀκέραιοι θετικοί ἀριθμοί, τότε ἰσχύει:**
α) $x > 1$ καί $\kappa > \lambda \Rightarrow x^{\kappa} > x^{\lambda}$
β) $x < 1$ καί $\kappa > \lambda \Rightarrow x^{\kappa} < x^{\lambda}$

α) Ἐπειδή $k > \lambda$, ἄν θέσουμε $k = \lambda + \nu$, θά πρέπει νά δείξουμε ὅτι $x^{\lambda+\nu} > x^{\lambda}$ ἤ $x^{\lambda}x^{\nu} - x^{\lambda} > 0$ ἤ $x^{\lambda}(x^{\nu}-1) > 0$. Ἡ ἀνισότητα αὐτή ἰσχύει, ἐπειδή x^{λ} εἶναι θετικός ($x > 0$) καί $x^{\nu}-1$ θετικός (§ 3.11 Πόρ.).

β) Ἀποδεικνύεται ὅπως καί ἡ (α).

6. **Γιά τούς πραγματικούς ἀριθμούς α, β ἰσχύει**
$$\alpha^2+\beta^2 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta = 0.$$

Ἄν $\alpha \neq 0$ ἤ $\beta \neq 0$, τότε $\alpha^2+\beta^2 > 0$ [ἀντιθετοαντιστροφή]

Γενικότερα ἰσχύει:

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_\nu^2 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_\nu = 0.$$

7. **Γιά τούς πραγματικούς ἀριθμούς α, β, γ νά ἀποδειχθεῖ ὅτι**
$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \geq \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha.$$

Εἶναι:

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \geq \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha \Leftrightarrow 2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2 \geq 2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha$$
$$\Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 - 2\alpha\beta - 2\beta\gamma - 2\gamma\alpha \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2 \geq 0.$$

Ἡ τελευταία ἰσχύει, ἄρα ἰσχύει καί ἡ πρώτη.

8. **Γιά τούς θετικούς ἀριθμούς x καί y εἶναι:**
$$(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \geq 4$$

$$(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \geq 4 \Leftrightarrow (x+y)\frac{x+y}{xy} \geq 4$$
$$\Leftrightarrow (x+y)^2 \geq 4xy$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2+2xy-4xy \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0 \quad \text{πού εἶναι προφανής.}$$

Ἀσκήσεις 4,5,6,7,8.

Λύση τῶν ἀνισώσεων $\alpha x+\beta \gtrless 0$ ΝΑΙ.

3.12 Γιά νά λύσουμε τήν ἀνίσωση $\alpha x + \beta > 0$ **(1)**
προσπαθοῦμε νά τή μετασχηματίσουμε σέ ἄλλη ἰσοδύναμή της ἁπλούστερης μορφῆς, χρησιμοποιώντας τίς γνωστές ἰδιότητες τῶν ἀνισοτήτων. Ἔτσι, ἄν στά μέλη τῆς (1) προσθέσουμε τόν ἀντίθετο τοῦ β, θά ἔχουμε τίς ἰσοδυναμίες:

$$\alpha x+\beta > 0 \Leftrightarrow \alpha x+\beta-\beta > 0-\beta$$

$$\Leftrightarrow \alpha x > -\beta \qquad (2)$$

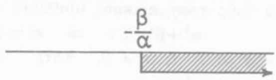
Ἡ τελευταία ἰσοδυναμία ἐκφράζει τό γνωστό μας κανόνα μεταφορᾶς ἑνός ὅρου ἀπό τό ἕνα μέλος μιᾶς ἀνισότητας στό ἄλλο.
Γιά νά λύσουμε λοιπόν τήν (1), ἀρκεῖ νά λύσουμε τή (2).
Διακρίνουμε τίς ἑξῆς περιπτώσεις:

- $\alpha > 0$, ὁπότε καί $\frac{1}{\alpha} > 0$. Ἑπομένως θά ἔχουμε (§ 3.10 Πορ. 3)

$$\alpha x > -\beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}(\alpha x) > \frac{1}{\alpha}(-\beta)$$

$$\Leftrightarrow \quad x > -\frac{\beta}{\alpha}.$$

Δηλαδή ἡ (2), ἄρα καί ἡ (1), ἀληθεύει γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό μεγαλύτερο τοῦ $-\frac{\beta}{\alpha}$.

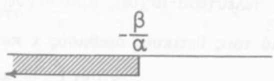


- $\alpha < 0$, ὁπότε καί $\frac{1}{\alpha} < 0$. Ἑπομένως θά ἔχουμε (§ 3.10 Πορ. 3)

$$\alpha x > -\beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}(\alpha x) < \frac{1}{\alpha}(-\beta)$$

$$\Leftrightarrow \quad x < -\frac{\beta}{\alpha}.$$

Δηλαδή ἡ (2), ἄρα καί ἡ (1), ἀληθεύει γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό μικρότερο τοῦ $-\frac{\beta}{\alpha}$.



- $\alpha = 0$. Τότε ἡ $\alpha x > -\beta$ γίνεται $0x > -\beta$. Ἑπομένως:
ἄν $-\beta < 0$, δηλαδή $\beta > 0$, ἡ (2) ἀληθεύει γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$, ἐνῶ
ἄν $-\beta > 0$, δηλαδή $\beta < 0$, ἡ (2) δέν ἔχει λύση (εἶναι ἀδύνατη).

Σημείωση

Ἡ ἀνίσωση $\alpha x+\beta < 0$ εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν $-\alpha x-\beta > 0$. Δηλαδή ἀνάγεται σέ ἀνίσωση τῆς μορφῆς (1).

ΝΑΙ

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Νά λυθεῖ ἡ ἀνίσωση $\frac{x-3}{3}-\frac{x-2}{4}>1+\frac{x-1}{2}$.

Εἶναι : $\frac{x-3}{3}-\frac{x-2}{4}>1+\frac{x-1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 12\left(\frac{x-3}{3}-\frac{x-2}{4}\right)>12\left(1+\frac{x-1}{2}\right)$ [πολ/σμός μέ τό Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν]

$\Leftrightarrow 4(x-3)-3(x-2)>12+6(x-1)$

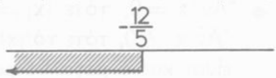
$\Leftrightarrow 4x-12-3x+6>12+6x-6$ [ἐπιμεριστικότητα]

$\Leftrightarrow 4x-3x-6x>12-6+12-6$ [μεταφορά ὅρων]

$\Leftrightarrow -5x>12$

$\Leftrightarrow x<-\frac{12}{5}$ [διαίρεση μέ ἀρνητικό ἀριθμό]

Στό διπλανό σχῆμα παριστάνεται τό σύνολο λύσεων τῆς ἀνισώσεως.



2. Νά βρεθοῦν οἱ τιμές τοῦ x, γιά τίς ὁποῖες συναληθεύουν οἱ ἀνισώσεις

$$x-2\geq 0 \quad \text{καί} \quad 5x-8\leq 3x.$$

Εἶναι:

$(x-2\geq 0$ καί $5x-8\leq 3x) \Leftrightarrow (x\geq 2$ καί $5x-3x\leq 8)$

$\Leftrightarrow (x\geq 2$ καί $2x\leq 8)$

$\Leftrightarrow (x\geq 2$ καί $x\leq 4)$.

Στό διπλανό σχῆμα παριστάνεται τό σύνολο στό ὁποῖο συναληθεύουν οἱ ἀνισώσεις.

Ἔννοια διαστήματος

ΝΑΙ

3.13 Στήν προηγούμενη ἐφαρμογή (2) εἴδαμε ὅτι οἱ δύο ἀνισώσεις $x-2\geq 0$ καί $5x-8\leq 3x$ συναληθεύουν στό σύνολο τῶν τιμῶν τοῦ x πού ἱκανοποιοῦν τή διπλή ἀνίσωση $2\leq x\leq 4$.
Τό σύνολο αὐτό ὀνομάζεται πιό σύντομα **κλειστό διάστημα** ἀπό τό 2 ὥς τό 4 καί συμβολίζεται **[2, 4]**. Εἶναι λοιπόν

$$x\in[\alpha,\beta] \Leftrightarrow \alpha\leq x\leq \beta$$

Ἄν τώρα ἀπό τό κλειστό διάστημα **[α,β]** παραλείψουμε τά ἄκρα του **α** καί **β**, προκύπτει τό ἀντίστοιχο **ἀνοικτό διάστημα** πού συμβολίζεται **(α,β)**. Δηλαδή εἶναι:

$$x\in(\alpha,\beta) \Leftrightarrow \alpha<x<\beta$$

Τέλος, ἄν ἀπό τό κλειστό διάστημα **[α,β]** παραλείψουμε μόνο τό **α** ἤ μόνο τό **β**, προκύπτουν ἀντιστοίχως **τό ἀνοικτό ἀριστερά** διάστημα **(α,β]** ἤ τό **ἀνοικτό δεξιά** διάστημα **[α,β)**. Δηλαδή εἶναι:

$$\chi\in(\alpha,\beta] \Leftrightarrow \alpha<x\leq\beta \quad \text{καὶ} \quad x\in[\alpha,\beta) \Leftrightarrow \alpha\leq x<\beta$$

Ἀσκήσεις 9, 10.

ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Ὁρισμός

ΝΑΙ

3.14 Ἄν $\mathbf{x}$ εἶναι ἕνας πραγματικός ἀριθμός, ἡ **ἀπόλυτη τιμή** του συμβολίζεται μέ $|\mathbf{x}|$ καί ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:

$$|\mathbf{x}| = \begin{cases} \mathbf{x} & \text{ἄν } \mathbf{x} \geq 0 \\ -\mathbf{x} & \text{ἄν } \mathbf{x} \leq 0 \end{cases}$$

Ἄμεσες συνέπειες

Ἀπό τόν ὁρισμό τῆς ἀπόλυτης τιμῆς συμπεραίνουμε ἀμέσως τά ἑξῆς:

- Ἄν $x = 0$, τότε $|x| = 0$.
  Ἄν $x \neq 0$, τότε τό $|x|$ εἶναι τό **θετικό** στοιχεῖο τῆς δυάδας $\{x, -x\}$ πού εἶναι καί **ὁ μεγαλύτερος ἀπό τούς x καί — x** (§ 3.6 Πόρ.).
  Ἄρα ἔχουμε:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{x} = 0 \;\; &\Leftrightarrow \;\; |\mathbf{x}| = 0 \\ |\mathbf{x}| \geq \mathbf{x} \;\; &\text{καί} \;\; |\mathbf{x}| \geq -\mathbf{x} \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} &(1) \\ &(2) \end{aligned}$$

- Ἀπό τή (2) ἔχουμε $x \leq |x|$ καί $-|x| \leq x$, δηλαδή

$$\boxed{-|\mathbf{x}| \leq \mathbf{x} \leq |\mathbf{x}|} \qquad (3)$$

- Τό $|x|$ ἤ τό $|-x|$ εἶναι τό ἴδιο θετικό στοιχεῖο τῆς δυάδας $\{x,-x\}$. ἤ τό 0. Ἑπομένως

$$\boxed{|-\mathbf{x}| = |\mathbf{x}| \geq 0} \qquad (4)$$

- Γιά τή δύναμη $|x|^2$ ἔχουμε:

$$|x|^2 = |x|\,|x| = \begin{cases} x\,x = x^2 & \text{ἄν } x \geq 0 \\ (-x)\,(-x) = x^2 & \text{ἄν } x \leq 0 \end{cases}$$

Ἑπομένως $$\boxed{|\mathbf{x}|^2 = \mathbf{x}^2} \qquad (5)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 8

> **Γιά ὁποιουσδήποτε πραγματικούς ἀριθμούς x καί α ἰσχύει ἡ ἰσοδυναμία:**
> $$|\mathbf{x}| \leq \alpha \;\Leftrightarrow\; -\alpha \leq \mathbf{x} \leq \alpha$$

᾿Απόδειξη

- ᾿Αποδεικνύουμε πρῶτα ὅτι $|x| \leq \alpha \Rightarrow -\alpha \leq x \leq \alpha$.
  ᾿Από τήν $|x| \leq \alpha$ ἔχουμε καί $-|x| \geq -\alpha$, ἀλλά σύμφωνα μέ τήν (3) εἶναι καί $-|x| \leq x \leq |x|$, ὁπότε $-\alpha \leq -|x| \leq x \leq |x| \leq \alpha$.
  ῎Αρα $-\alpha \leq x \leq \alpha$.
- ᾿Αντιστρόφως, $-\alpha \leq x \leq \alpha \Rightarrow |x| \leq \alpha$, γιατί ἄν ἦταν $|x| > \alpha$, τότε ἤ $x > \alpha$ (ἄτοπο) ἤ $-x > \alpha$, ὁπότε $x < -\alpha$ (ἄτοπο).

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΝΑΙ

---

1. **Νά λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις α) $|x| = \alpha$ καί β) $|x| = |\alpha|$.**

α) ῎Αν $\alpha > 0$, ἔχουμε

$|x| = \alpha \Leftrightarrow |x|^2 = \alpha^2 \Leftrightarrow x^2 - \alpha^2 = 0 \Leftrightarrow (x-\alpha)(x+\alpha) = 0$

$\Leftrightarrow (x-\alpha = 0$ ἤ $x+\alpha = 0) \Leftrightarrow x = \pm\alpha$.

῎Αν $\alpha < 0$, ἔχουμε $|x| = \alpha < 0$ πού εἶναι ἀδύνατο.

῎Αν $\alpha = 0$, τότε $|x| = 0$ καί $x = 0$.

β) $|x| = |\alpha| \Leftrightarrow |x|^2 = |\alpha|^2 \Leftrightarrow x^2 = \alpha^2 \Leftrightarrow x = \pm\alpha$.

2. **Νά λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις α) $|x-3| = 4$ καί β) $|3x+8| = 23$.**

α) Σύμφωνα μέ τά προηγούμενα εἶναι:

$|x-3| = 4 \Leftrightarrow (x-3) = \pm 4 \Leftrightarrow (x-3 = 4$ ἤ $x-3 = -4)$

$\Leftrightarrow (x = 7$ ἤ $x = -1)$

β) ῾Ομοίως βρίσκουμε $x = 5$ ἤ $x = -\dfrac{31}{3}$.

3. **Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι, ἄν $xyz \neq 0$, τότε $\dfrac{x}{|x|} + \dfrac{y}{|y|} + \dfrac{z}{|z|} \leq 3$.**

᾿Από τίς ἀνισότητες $x \leq |x|$, $y \leq |y|$, $z \leq |z|$ προκύπτουν ἀντίστοιχα οἱ ἀνισότητες:

$\dfrac{x}{|x|} \leq 1$, $\dfrac{y}{|y|} \leq 1$, $\dfrac{z}{|z|} \leq 1$. ῾Οπότε, ἄν τίς προσθέσουμε κατά μέλη, θά ἔχουμε:

$\dfrac{x}{|x|} + \dfrac{y}{|y|} + \dfrac{z}{|z|} \leq 1+1+1 = 3$.

4. **῎Αν $|x| \leq 2$, $|y| \leq 3$ καί $|z| \leq 5$ νά δείξετε ὅτι $-10 \leq x+y+z \leq 10$.**

Σύμφωνα μέ τό θεώρημα 8 εἶναι

$|x| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$

$|y| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq y \leq 3$

$|z| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq z \leq 5$

ὁπότε, προσθέτοντας κατά μέλη, ἔχουμε

$-2-3-5 \leq x+y+z \leq 2+3+5$, δηλ. $-10 \leq x+y+z \leq 10$.

᾿Ασκήσεις 11,12.

᾿Απόλυτη τιμή ἀθροίσματος ΝΑΙ

$\boxed{3.15}$ Γιά τήν ἀπόλυτη τιμή τοῦ ἀθροίσματος δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν ἀποδεικνύουμε τό παρακάτω θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 9	**Γιά όποιουσδήποτε πραγματικούς ἀριθμούς x καί y εἶναι** $$|x+y| \leq |x|+|y|$$

Ἀπόδειξη. Σύμφωνα μέ γνωστή ἰδιότητα (§ 3.14, (3)) ἔχουμε γιά τούς x,y:

4

$$-|x| \leq x \leq |x|$$
$$-|y| \leq y \leq |y|$$

καί μέ πρόσθεση κατά μέλη $-(|x|+|y|) \leq x+y \leq (|x|+|y|)$. Ἄρα (Θεώρ. 8) ἔχουμε καί $|x+y| \leq |x|+|y|$.

Γενικότερα ἀποδεικνύεται μέ τή μέθοδο τῆς ἐπαγωγῆς ὅτι:

$$|\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu| \leq |\alpha_1|+|\alpha_2|+\ldots+|\alpha_\nu|$$

Ἀπόλυτη τιμή γινομένου

ΝΑΙ

3.16 Γιά τήν ἀπόλυτη τιμή τοῦ γινομένου ἰσχύει τό ἑξῆς:

ΘΕΩΡΗΜΑ 10	**Ἡ ἀπόλυτη τιμή τοῦ γινομένου δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν ἰσοῦται μέ τό γινόμενο τῶν ἀπόλυτων τιμῶν τους. Δηλαδή** $\forall x, \forall y, \quad |xy| = |x|\,|y|$

Ἀπόδειξη. Ἄν ἕνας ἀπό τούς ἀριθμούς εἶναι μηδέν, ἡ ἰσότητα προφανῶς ἰσχύει. Διακρίνουμε τώρα τίς ἑξῆς περιπτώσεις:

$$\left.\begin{array}{l} x>0 \\ y>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} |x|=x \\ |y|=y \end{array}\right\} \Rightarrow |x||y| = xy = |xy|, \text{ ἐπειδή } xy>0$$

$$\left.\begin{array}{l} x<0 \\ y<0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} |x|=-x \\ |y|=-y \end{array}\right\} \Rightarrow |x||y| = (-x)(-y)=xy=|xy|, \text{ ἐπειδή } xy>0$$

$$\left.\begin{array}{l} x>0 \\ y<0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} |x|=x \\ |y|=-y \end{array}\right\} \Rightarrow |x||y| = x(-y) = -xy = |xy|, \text{ ἐπειδή } xy<0$$

$$\left.\begin{array}{l} x<0 \\ y>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} |x|=-x \\ |y|=y \end{array}\right\} \Rightarrow |x||y| = (-x)y = -xy = |xy|, \text{ ἐπειδή } xy<0.$$

Ἐπαγωγικά ἀποδεικνύεται ὅτι $|\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\nu| = |\alpha_1|\,|\alpha_2|\ldots|\alpha_\nu|$.

Συνέπεια τῆς προηγούμενης ἰδιότητας εἶναι:

ΠΟΡΙΣΜΑ	**Ἡ ἀπόλυτη τιμή τοῦ πηλίκου δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν x, y ($y \neq 0$) ἰσοῦται μέ τό πηλίκο τῶν ἀπόλυτων τιμῶν τους. Δηλαδή εἶναι:** $$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}^*, \quad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$$

$$\left(\text{Πράγματι εἶναι}: \left|\frac{x}{y}\right| |y| = \left|\frac{x}{y}\,y\right| = |x|\right)$$

 ΝΑΙ

1. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι $|x-y| \leq |x|+|y|$ καί νά ἐξεταστεῖ πότε ἰσχύει ἡ ἰσότητα.

+(3)

Εἶναι $|x-y| = |x+(-y)| \leq |x|+|-y| = |x|+|y|$.

Ἔστω τώρα ὅτι $|x-y| = |x|+|y|$, τότε θά εἶναι:

$$\begin{aligned} |x-y| = |x|+|y| &\Leftrightarrow |x-y|^2 = (|x|+|y|)^2 \\ &\Leftrightarrow (x-y)^2 = |x|^2+|y|^2+2|x||y| \\ &\Leftrightarrow x^2+y^2-2xy = x^2+y^2+2|xy| \\ &\Leftrightarrow -xy = |xy|. \end{aligned}$$

Γιά νά ἰσχύει ἡ τελευταία, ἐπειδή $|xy| \geq 0$, θά πρέπει νά εἶναι $xy \leq 0$, δηλαδή οἱ x,y νά εἶναι ἑτερόσημοι ἤ ὁ ἕνας τουλάχιστο νὰ εἶναι 0.

2. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι $x^2+|xy|+|-x|y+y|-y| = (|x|+|y|)(|x|+y)$.

Εἶναι:

$$\begin{aligned} x^2+|xy|+|-x|y+y|-y| &= |x|^2+|x||y|+|x|y+y|y| \\ &= |x|\,(|x|+|y|)+y(|x|+|y|) \\ &= (|x|+|y|)\,(|x|+y). \end{aligned}$$

Ἀσκήσεις 13,14,15.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΝΑΙ

1. Νά λυθεῖ ἡ ἀνίσωση $|x-2| \leq 6$.

$$\begin{aligned} \text{Εἶναι:}\quad |x-2| \leq 6 &\Leftrightarrow -6 \leq x-2 \leq 6 \\ &\Leftrightarrow -6+2 \leq x \leq 6+2 \\ &\Leftrightarrow -4 \leq x \leq 8 \\ &\Leftrightarrow x \in [-4,8]. \end{aligned}$$

Στό διπλανό σχῆμα ἔχουμε τή γραφική λύση τῆς ἀνισώσεως.

2. Νά λυθεῖ ἡ ἀνίσωση $|x| \geq \theta$, ὅπου θ θετικός.

$$\begin{aligned} \text{Εἶναι:}\quad |x| \geq \theta &\Leftrightarrow |x|^2 \geq \theta^2 \\ &\Leftrightarrow x^2-\theta^2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (x-\theta)\,(x+\theta) \geq 0. \end{aligned}$$

Γιά νά ἰσχύει ἡ τελευταία, θά πρέπει οἱ $x-\theta$ καί $x+\theta$ νά εἶναι ὁμόσημοι. Ἄρα θά εἶναι:

ἤ $x-\theta \geq 0$ **καί** $x+\theta \geq 0$ δηλαδή $x \geq \theta$

ἤ $x-\theta \leq 0$ **καί** $x+\theta \leq 0$ δηλαδή $x \leq -\theta$.

Ἑπομένως ἰσχύει ἡ ἰσοδυναμία:

$$|x| \geq \theta \Leftrightarrow (x \leq -\theta \quad \text{ἤ} \quad x \geq \theta)$$

Στό διπλανό σχῆμα ἔχουμε τή γραφική λύση τῆς ἀνισώσεως.

3. Νά λυθεῖ ἡ ἀνίσωση $|x-1| \geq 5$.

Σύμφωνα μέ τήν προηγούμενη ἐφαρμογή εἶναι:

$$\begin{aligned} |x-1| \geq 5 &\Leftrightarrow (x-1 \leq -5 \quad \text{ἤ} \quad x-1 \geq 5) \\ &\Leftrightarrow (x \leq -4 \quad \text{ἤ} \quad x \geq 6) \end{aligned}$$

Ἡ γραφική λύση τῆς ἀνισώσεως παριστάνεται στό διπλανό σχῆμα.

4. **Ἄν $\alpha > -1$, $\alpha \neq 0$ καί ν φυσικός μεγαλύτερος τοῦ 1, τότε εἶναι:**

$$(1+\alpha)^\nu > 1+\nu\alpha \qquad (1)$$

Θά ἀποδείξουμε τήν ἀνισότητα μέ τή μέθοδο τῆς ἐπαγωγῆς. Ἡ ἀνισότητα ἰσχύει γιά $\nu = 2$. Πράγματι

$$(1+\alpha)^2 = 1+2\alpha+\alpha^2 > 1+2\alpha.$$

Ὑποθέτοντας ὅτι ἀληθεύει ἡ (1) ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι: $(1+\alpha)^{\nu+1} > 1+(\nu+1)\alpha$.

Ἔχουμε: $(1+\alpha)^\nu > 1+\nu\alpha \Rightarrow (1+\alpha)^\nu(1+\alpha) > (1+\nu\alpha)(1+\alpha)$

$$\Rightarrow (1+\alpha)^{\nu+1} > 1+\alpha+\nu\alpha+\nu\alpha^2$$
$$\Rightarrow (1+\alpha)^{\nu+1} > 1+(\nu+1)\alpha+\nu\alpha^2$$
$$\Rightarrow (1+\alpha)^{\nu+1} > 1+(\nu+1)\alpha.$$

Ἐξετάστε τίς περιπτώσεις: $\alpha = -1$, $\alpha = 0$, $\nu = 0$, $\nu = 1$.

Ἀσκήσεις γιά ἐπανάληψη 16,17,18,19,20,21.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ἰσχύουν οἱ συνεπαγωγές:

   α) $\alpha > \beta > \gamma \Rightarrow (\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha) < 0$

   β) $x > 0$ καί $y > 0 \Rightarrow x^3+y^3 \geq x^2y+xy^2$

   γ) $x > 2 \Rightarrow x^3 > 2x^2-x+2$.

2. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ἰσχύουν:

   α) $(x+y)^2 \geq 4xy$

   β) $(\alpha+\beta+\gamma)^2 \geq \alpha(\beta+\gamma-\alpha)+\beta(\gamma+\alpha-\beta)+\gamma(\alpha+\beta-\gamma)$

   γ) $2\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \geq 2\alpha(\beta+\gamma)$.

3. Νά ἀποδειχθεῖ ἡ συνεπαγωγή

   $x < 1 < y \Rightarrow xy-x-y+1 < 0$.

4. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ἰσχύουν:

   α) $\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+1} \leq 1$

   β) $\dfrac{\alpha+\beta}{1+\alpha+\beta} < \dfrac{\alpha}{1+\alpha} + \dfrac{\beta}{1+\beta}$ ὅπου α,β εἶναι θετικοί.

5. Ἄν $x < z$ καί $0 < y < \omega$, τότε εἶναι $x - \dfrac{1}{y} < z - \dfrac{1}{\omega}$.

6. Ἄν α καί β εἶναι θετικοί ἀριθμοί καί $\alpha+\beta = 1$, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι εἶναι:

   α) $\alpha\beta \leq \dfrac{1}{4}$

   β) $\left(1+\dfrac{1}{\alpha}\right)\left(1+\dfrac{1}{\beta}\right) \geq 9$.

7. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ἰσχύουν:

   α) $\beta > 0 \Leftrightarrow \alpha+\beta > \alpha-\beta$

   β) $0 < \alpha < \beta$ καί $0 < \gamma < \delta \Rightarrow \dfrac{\alpha}{\delta} < \dfrac{\beta}{\gamma}$.

8. Ἄν εἶναι $x > y > 0$ καί $\alpha > \beta > 0$, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι $x^k\beta^\lambda > y^k\alpha^\lambda$, ὅταν k,λ εἶναι ἀκέραιοι καί $k > 0$, $\lambda < 0$.

9. Νά λυθοῦν οἱ ἀνισώσεις:

α) $\lambda x > x+2$ β) $\frac{x-\lambda}{2} + \frac{2x+3}{4} > \frac{\lambda x}{6}$

γ) $\frac{\lambda(x-2)}{2} - \frac{2x-\lambda}{5} < \frac{x}{10} - \frac{2}{5}$.

10. Νά βρεθοῦν οἱ τιμές τοῦ x, γιά τίς ὁποῖες συναληθεύουν οἱ ἀνισώσεις:

α) $2x+3 > x$
$x-5 < 4$

β) $x(x+2) - (x+1)x > 2$
$2x(x-1) < x(2x-3)+3$

11. Ἄν εἶναι $\alpha < \beta < \gamma$, νά ἁπλοποιηθεῖ ἡ παράσταση
$A = 3|\alpha-\beta| + 2|\beta-\gamma| - 4|\gamma-\alpha|$.

12. Νά λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:

α) $\frac{3|x|+1}{2} + \frac{2|x|-1}{3} = \frac{|x|+2}{4}$

β) $(2|x|-5) - (4|x|-3) = 7|x|-1$

γ) $|3x-1| = |x-3|$.

13. Ἄν εἶναι $|x-y| < \alpha$ καί $|y-\omega| < \alpha$, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι $|x-\omega| < 2\alpha$.

14. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:
$||x|-|y|| \leq |x+y| \leq |x|+|y|$ καί νά ἐξεταστεῖ πότε ἰσχύουν οἱ ἰσότητες

α) $||x|-|y|| = |x+y|$ β) $|x+y| = |x|+|y|$

15. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι, ἄν $xy \neq 0$, θά εἶναι

$$\left|\frac{x}{y}\right| + \left|\frac{y}{x}\right| \geq 2.$$

16. Ἄν α,β,γ εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί καί λ,μ,ν θετικοί, νά ἀποδείξετε τή συνεπαγωγή

$$\alpha < \beta < \gamma \Rightarrow \alpha < \frac{\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma}{\lambda+\mu+\nu} < \gamma.$$

17. Ἄν $x \geq y > 0$, νά συγκριθοῦν οἱ ἀριθμοί

$\frac{x-y}{x+y}$ καί $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

18. Ἄν $\alpha+\beta = 1$, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

α) $\alpha\beta \leq \frac{1}{4}$

β) $\alpha^2+\beta^2 \geq \frac{1}{2}$

γ) $\alpha^4+\beta^4 \geq \frac{1}{8}$.

19. Ἄν εἶναι $(2x-3y+1)^2+(3x-5y+2)^2 = 0$, νά προσδιοριστοῦν οἱ ἀριθμοί x καί y.

20. Νά λυθοῦν τά συστήματα:

α) $2x-1 \leq x \leq \frac{x+3}{2}$

β) $(3x-2)(x-2) = 0$
$2x-4 \leq -3x$.

21. Νά λυθοῦν οἱ ἀνισώσεις:

α) $\frac{2|x|-3}{4} < \frac{|x|+1}{3}$

β) $3(|x|-1)+2(|x|-2) > 2$.

1. **α)** Εἶναι $\alpha-\beta > 0$, $\beta-\gamma > 0$ καί $\gamma-\alpha < 0$.
β) Ἀποδεικνύουμε ὅτι: $(x^3+y^3)-(x^2y+xy^2) \geq 0$.
γ) Ἀποδεικνύουμε ὅτι: $x^3-(2x^2-x+2) > 0$.

2. **α)** Ἀποδεικνύουμε ὅτι: $(x+y)^2-4xy \geq 0$.
β) Ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι: $(\alpha+\beta+\gamma)^2-[\alpha(\beta+\gamma-\alpha)+\beta(\gamma+\alpha-\beta)+\gamma(\alpha+\beta-\gamma)] \geq 0$.
γ) Ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι: $2\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha(\beta+\gamma) \geq 0$ ἤ $(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\gamma)^2 \geq 0$.

3. Εἶναι $xy-x-y+1 < 0 \Leftrightarrow (x-1)(y-1) < 0 \ldots$

4. **α)** Πολλαπλασιάζουμε καί τά δύο μέλη της μέ τό θετικό α^2+1.
β) Πολλαπλασιάζουμε καί τά δύο μέλη της μέ τό $(1+\alpha+\beta)(1+\alpha)(1+\beta)$.

5. $0 < y < \omega \Rightarrow \frac{1}{y} > \frac{1}{\omega} \Rightarrow -\frac{1}{y} < -\frac{1}{\omega}$ κτλ.

6. **α)** Στήν $\alpha\beta \leq \frac{1}{4}$ θέτουμε ὅπου β τό $1-\alpha$ καί κάνουμε τίς πράξεις.
β) Κάνουμε τίς πράξεις καί ἐφαρμόζουμε τήν (α).

7. **α)** $\beta > 0 \Rightarrow \beta > -\beta$ κτλ. **β)** Πολλαπλασιάζουμε τίς ἀνισότητες $\alpha < \beta$ καί $\gamma < \delta$ κατά μέλη καί διαιροῦμε τά μέλη τῆς ἀνισότητας πού θά προκύψει μέ τό θετικό $\gamma\delta$.

8. Ἐφαρμόζουμε τά Θεωρ. 7, 6.

9. **α)** Φέρνουμε τήν ἀνίσωση στή μορφή $x(\lambda-1) > 2$ καί διακρίνουμε τίς περιπτώσεις $\lambda-1 > 0$, $\lambda-1 < 0$ καί $\lambda-1 = 0$.
β) Μετά τίς πράξεις ἔχουμε $2x(6-\lambda) > 6\lambda-9$. Διακρίνουμε τίς περιπτώσεις $6-\lambda > 0$, $6-\lambda < 0$ καί $6-\lambda = 0$.
γ) Φέρνουμε τήν ἀνίσωση στή μορφή $5x(\lambda-1) < 8\lambda-4$ κτλ.

10. **α)** $-3 < x < 9$, **β)** $2 < x < 3$.

11. Παρατηροῦμε ὅτι $\alpha-\beta < 0$, $\beta-\gamma < 0$, $\gamma-\alpha > 0$, ὁπότε $A = \alpha+\beta-2\gamma$.

12. **α)** Ἄν θεωρήσουμε ἄγνωστο τό $|x|$, βρίσκουμε $|x| = \frac{4}{23}$ ἤ $x = \pm\frac{4}{23}$.
β) Ὁμοίως βρίσκουμε $|x| = -\frac{1}{9}$ πού ἀπορρίπτεται.
γ) Ἔχουμε $3x-1 = \pm(x-3)$ (§ 3.14 Ἐφαρ. 1 (β)).

13. Προσθέτουμε τίς ἀνισότητες κατά μέλη καί ἐφαρμόζουμε τό θεώρημα 9.

14. $||x|-|y|| \leq |x+y| \Leftrightarrow ||x|-|y||^2 \leq |x+y|^2 \Leftrightarrow |x|^2+|y|^2-2|x||y| \leq x^2+y^2+2xy$ κτλ. Τό ἴσον ἰσχύει ὅταν $xy \leq 0$. Ἡ ἄλλη ἀνισότητα ἀποδεικνύεται ὁμοίως.

15. Πολλαπλασιάζουμε καί τά δύο μέλη της μέ τό θετικό $|x||y|$.

16. Πολλαπλασιάζουμε τά μέλη τῆς ἀνισότητας, πού θέλουμε νά ἀποδείξουμε, μέ τό θετικό $\lambda+\mu+\nu$ καί μετά ἀποδεικνύουμε ὅτι $\mu\alpha+\nu\alpha < \mu\beta+\nu\gamma$ κτλ.

17. Βρίσκουμε τό πρόσημο τῆς διαφορᾶς $\frac{x-y}{x+y}-\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

18. **α)** Εἶναι ἡ ἄσκ. 6(α). **β)** Εἶναι: $\alpha^2+\beta^2 \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta \geq \frac{1}{2}$ κτλ.
γ) Ὑψώνουμε τήν προηγούμενη στό τετράγωνο καί ὅπου $\alpha\beta$ θέτουμε τό $\frac{1}{4}$.

19. Θά εἶναι $2x-3y+1 = 0$ καί $3x-5y+2 = 0$ κτλ.

20. **α)** $x \leq 1$ **β)** Εἶναι $\left(x = \frac{2}{3}\ \text{ἤ}\ x = 2\right)$ **καί** $x \leq \frac{4}{5}$. Ἄρα $x = \frac{2}{3}$.

21. **α)** Εἶναι $|x| < \frac{13}{2}$ ἤ $-\frac{13}{2} < x < \frac{13}{2}$ (§ 3.15 Ἐφ. 1).
β) Εἶναι $|x| > \frac{9}{5}$, ἄρα $x < -\frac{9}{5}$ ἤ $x > \frac{9}{5}$ (§ 3.15 Ἐφ. 2).

4 ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ἡ ἔννοια τῆς σχέσεως καί εἰδικότερα τῆς συναρτήσεως, πού εἶναι ἀπό τίς βασικότερες μαθηματικές ἔννοιες, ἐμφανίζεται στό σχολικό πρόγραμμα ἀπό τή Β′ κιόλας τάξη τοῦ Γυμνασίου. Σ' αὐτή θεμελιώνεται καί ἕνα σημαντικό τμῆμα τοῦ προγράμματος τῆς Γ′ Γυμνασίου.

Στό κεφάλαιο αὐτό δέν ἐπιδιώκεται ἁπλῶς μιά ἐπανάληψη, ἀπαραίτητη φυσικά, τῶν ἐννοιῶν αὐτῶν. Ἡ ὑποδομή τοῦ γυμνασιακοῦ προγράμματος ἐπιτρέπει μιά αὐστηρότερη καί βαθύτερη προσέγγισή τους καθώς καί τή λεπτομερέστερη μελέτη τους.

Ἐξάλλου ὁ ὁρισμός τῶν πράξεων στό σύνολο τῶν πραγματικῶν συναρτήσεων ὁδηγεῖ ἀβίαστα τό μαθητή στό νά παραλληλίσει τή δομή αὐτοῦ τοῦ συνόλου μέ τή δομή τοῦ συνόλου τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν πού μελέτησε στό κεφάλαιο 2.

Τέλος ἡ παρουσίαση τῆς ὕλης δίνει τήν εὐκαιρία στό μαθητή νά ἐπαναλάβει, νά ἐμπεδώσει καί νά διευρύνει ἕνα ἐνδιαφέρον τμῆμα γνώσεων, κυρίως ἀλγεβρικοῦ λογισμοῦ, πού περιλάμβανε ἡ γυμνασιακή διδασκαλία.

ΔΙΜΕΛΕΙΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

Ἔννοια διμελοῦς σχέσεως

ΝΑ1

4.1 Ὅλες οἱ διμελεῖς σχέσεις πού συναντήσαμε ὥς τώρα ἔχουν εἰσαχθεῖ μέ τή βοήθεια προτασιακῶν τύπων μέ δύο μεταβλητές. Κάθε φορά δηλαδή πού εἴχαμε ἕναν τέτοιο προτασιακό τύπο λέγαμε ὅτι **«ὁρίζει μιά διμελή σχέση»**, χωρίς νά ἔχουμε δώσει ὁρισμό τῆς ἔννοιας τῆς διμελοῦς σχέσεως. Αὐτόν τόν ὁρισμό διατυπώνουμε παρακάτω.

Ὅταν δίνεται ἕνας προτασιακός τύπος $\mathbf{p(x,y)}$ μέ δύο μεταβλητές, τότε εἶναι ἐντελῶς καθορισμένα τρία σύνολα:

- Τό σύνολο $\mathbf{A}$ πού διατρέχει ἡ μεταβλητή x.
- Τό σύνολο $\mathbf{B}$ πού διατρέχει ἡ μεταβλητή y.
- Τό σύνολο ἀλήθειας $\mathbf{G}$, ὑποσύνολο τοῦ $\mathbf{A \times B}$ μέ στοιχεῖα ἐκεῖνα ἀκριβῶς τά ζεύγη $\mathbf{(x,y)}$ πού ἐπαληθεύουν τόν προτασιακό τύπο.

Ἔτσι $(x,y) \in G$ σημαίνει ὅ,τι καί $p\,(x,y)$. Δηλαδή ἰσχύουν

$$\begin{array}{lcl} (x,y) \in G & \Leftrightarrow & p\,(x,y) \\ (x,y) \notin G & \Leftrightarrow & \overline{p}\,(x,y) \end{array}$$

Ἀντιστρόφως, ἄν δοθοῦν τά σύνολα A,B καί ἕνα ὑποσύνολο G τοῦ $A \times B$, ὁρίζεται ὁ προτασιακός τύπος $\mathbf{(x,y) \in G}$ μέ $x \in A$, $y \in B$, τοῦ ὁποίου τό σύνολο ἀλήθειας εἶναι ἀκριβῶς τό G.

Ἀπό τά προηγούμενα συμπεραίνουμε ὅτι ἐκεῖνο πού ὁρίζει ἕνας προτασιακός τύπος εἶναι ἡ διατεταγμένη τριάδα $\mathbf{(A,B,G)}$ καί ἀντιστρόφως, ὅταν δοθεῖ ἡ (A,B,G), ὑπάρχει π.τ. — ὁ $(x,y) \in G$ — ἀπό τόν ὁποῖο αὐτή ἀκριβῶς ἡ τριάδα καθορίζεται.

Εἶναι λοιπόν εὔλογο νά ταυτίσουμε τή διμελή σχέση πού, ὅπως λέμε, ὁρίζει ἕνας προτασιακός τύπος μέ τήν τριάδα (A,B,G) δίνοντας τόν παρακάτω ὁρισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ἔστω τά σύνολα A καί B. Ὀνομάζουμε διμελή σχέση (ἀντιστοιχία) ἀπό τό A στό B κάθε τριάδα (A,B,G), ὅπου G εἶναι ὑποσύνολο τοῦ A × B

Τά Α καί Β ὀνομάζονται ἀντιστοίχως **σύνολο ἀφετηρίας** καί **σύνολο ἀφίξεως** καί τό G **γράφημα** τῆς σχέσεως.

Γιά τά ζεύγη (x,y) πού ἀνήκουν στό γράφημα G μιᾶς σχέσεως σ γράφουμε συνήθως x σ y καί λέμε ὅτι:

> *«τὸ (x,y) ἱκανοποιεῖ τή σχέση σ»* ἤ ὅτι μέ τή σ:
> *«τό x σχετίζεται μέ τό y»* ἤ
> *«στό x ἀντιστοιχίζεται τό y»* ἤ
> *«τό y εἶναι ἀντίστοιχο τοῦ x»*.

Ὅταν γιά τόν καθορισμό μιᾶς διμελοῦς σχέσεως **ἀπό** τό Α **στό** Β δίνεται ἕνας προτασιακός τύπος p (x,y) ἐννοεῖται πάντοτε $x \in A$ καί $y \in B$. Ἔτσι τά ζεύγη (x,y) τῶν σχετιζόμενων στοιχείων, ἄρα καί τό G, εἶναι ἐντελῶς καθορισμένα.

Ἄν στή διμελή σχέση (A,B,G) εἶναι $A = B$, τότε λέμε ὅτι ἔχουμε μιά διμελή σχέση (μέσα) **στό** σύνολο Α.

Ἰσότητα διμελῶν σχέσεων

ΝΑΙ ορ.

4.2 Ἀπό τόν ὁρισμό τῆς διμελοῦς σχέσεως προκύπτει ὅτι δύο διμελεῖς σχέσεις εἶναι ἴσες (ταυτίζονται), ἄν ἔχουν ἴδιο σύνολο ἀφετηρίας, ἴδιο σύνολο ἀφίξεως καί ἴδιο γράφημα.

Ἀντιστροφή διμελῶν σχέσεων

ΝΑΙ ορ

4.3 Ἔστω (A,B,G) μιά διμελής σχέση σ. Τό σύνολο τῶν ζευγῶν (y, x), γιά τά ὁποῖα $(x,y) \in G$, λέγεται **ἀντίστροφο γράφημα** τοῦ G καί συμβολίζεται G^{-1}. Εἶναι συνεπῶς:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{G} \Leftrightarrow (\mathbf{y}, \mathbf{x}) \in \mathbf{G}^{-1} \text{ καί } \mathbf{G}^{-1} \subseteq \mathbf{B} \times \mathbf{A}$$

Ἄρα ὁρίζεται μιά διμελής σχέση ἀπό τό Β στό Α, ἡ (B, A, G^{-1}), ἡ ὁποία ὀνομάζεται **ἀντίστροφη** τῆς σ καί συμβολίζεται $\boldsymbol{\sigma}^{-1}$.

Ὅταν μιά σχέση σ ὁρίζεται ἀπό ἕνα π.τ. p(x,y), ὁ **ἴδιος** π.τ. ὁρίζει καί τά ζεύγη (y,x) τοῦ G^{-1} πού ἱκανοποιοῦν τήν ἀντίστροφη σχέση $\sigma^{-1} = (B,A,G^{-1})$. Ἐπειδή ὅμως συνηθίζουμε νά παριστάνουμε μέ x τή μεταβλητή τοῦ συνόλου ἀφετηρίας καί μέ y τή μεταβλητή τοῦ συνόλου ἀφίξεως, τά ζεύγη τοῦ G^{-1} ὁρίζονται μέ τή μορφή (x,y), ἄν στόν p(x,y) πού ὁρίζει τή σ ἐναλλάξουμε τά γράμματα x καί y. Ἔτσι ὁ «ἀνάστροφος» τύπος πού προκύπτει, τόν ὁποῖο ἄς συμβολίσουμε p(y,x) μέ $x \in B$ καί $y \in A$, ὁρίζει τή σ^{-1}.

ΝΑΙ

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Δίνονται τά σύνολα $A = \{8, 18, 32\}$ καί $B = \{-4, 0, 4, 6\}$ καί ἡ σχέση σ ἀπό τό A στό B πού ὁρίζεται ἀπό τόν τύπο $y^2 = 2x$.

α) Νά βρεθεῖ τό γράφημα G τῆς σ.

β) Νά βρεθεῖ ἡ ἀντίστροφη σχέση σ^{-1}.

α) Πρέπει νά βροῦμε ἐκεῖνα τά ζεύγη (x,y) γιά τά ὁποῖα $y^2=2x$.

Ἄν $x = 8$, τότε $y^2 = 2 \cdot 8$ ἤ $y = \pm 4$.

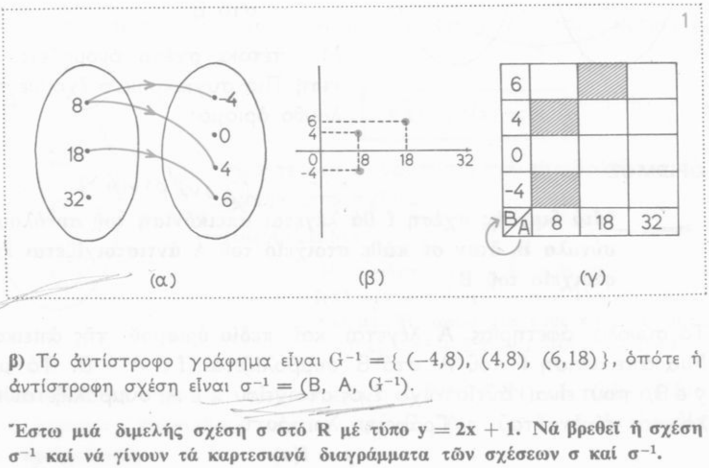
Ἄν $x = 18$, τότε $y^2 = 2 \cdot 18$ ἤ $y = \pm 6$.

Ἄν $x = 32$, τότε $y^2 = 2 \cdot 32$ ἤ $y = \pm 8$.

Ἐπειδή ὅμως $-6 \notin B$, καί $\pm 8 \notin B$, τό γράφημα τῆς σχέσεως σ θά εἶναι:

$$G = \{(8, -4), (8,4), (18,6)\}.$$

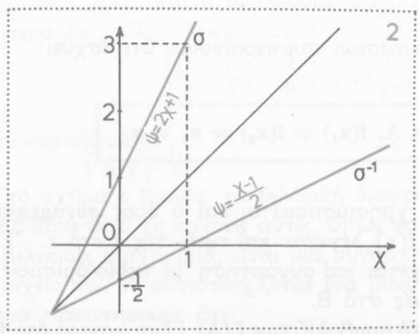
Στό σχῆμα 1 παριστάνεται ἡ σχέση σ μέ *βελοειδές διάγραμμα* (1α), μέ *καρτεσιανό διάγραμμα* (1β) καί μέ *πίνακα διπλῆς εἰσόδου* (1γ).



β) Τό ἀντίστροφο γράφημα εἶναι $G^{-1} = \{(-4,8), (4,8), (6,18)\}$, ὁπότε ἡ ἀντίστροφη σχέση εἶναι $\sigma^{-1} = (B, A, G^{-1})$.

2. Ἔστω μιά διμελής σχέση σ στό R μέ τύπο $y = 2x + 1$. Νά βρεθεῖ ἡ σχέση σ^{-1} καί νά γίνουν τά καρτεσιανά διαγράμματα τῶν σχέσεων σ καί σ^{-1}.

Ἡ σ^{-1} θά εἶναι μιά σχέση στό R μέ τύπο $x = 2y + 1$ ἤ $y=\dfrac{x-1}{2}$.



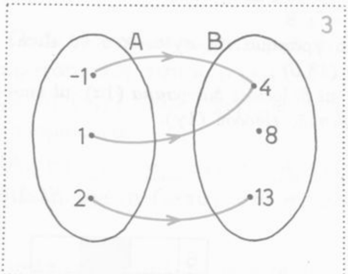
Στό σχῆμα 2 παριστάνονται τά καρτεσιανά διαγράμματα τῶν σχέσεων σ σ^{-1}, τά ὁποῖα εἶναι εὐθεῖες συμμετρικές ὡς πρός τή διχοτόμο τῆς γωνίας τῶν θετικῶν ἡμιαξόνων.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ἔννοια συναρτήσεως

ΝΑΙ

4.4 Στό σχῆμα 3 ἔχουμε τό βελοειδές διάγραμμα μιᾶς σχέσεως ἀπό τό σύνολο Α στό Β, ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπό τόν τύπο $y = 3x^2+1$.



Εἰδικότερα σ' αὐτή τή σχέση παρατηροῦμε ὅτι:

- **Ὅλα** τά στοιχεῖα τοῦ Α σχετίζονται μέ στοιχεῖα τοῦ Β καί
- Ὁποιοδήποτε στοιχεῖο τοῦ Α ἔχει **ἕνα μοναδικό** ἀντίστοιχο στό Β.

Μιά τέτοια σχέση ὀνομάζεται **ἀπεικόνιση.** Πιό συγκεκριμένα ἔχουμε τόν ἀκόλουθο ὁρισμό:

ΟΡΙΣΜΟΣ

συνάρτηση

Μιά διμελής σχέση f θά λέγεται ἀπεικόνιση τοῦ συνόλου Α στό σύνολο Β, ὅταν σέ κάθε στοιχεῖο τοῦ Α ἀντιστοιχίζεται ἕνα μόνο στοιχεῖο τοῦ Β

Τό σύνολο ἀφετηρίας Α λέγεται καί **πεδίο ὁρισμοῦ** τῆς ἀπεικονίσεως. Μιά ἀπεικόνιση f τοῦ Α στό Β συμβολίζεται $f : A \to B$. Τό μοναδικό $y \in B$, πού εἶναι ἀντίστοιχο ἑνός στοιχείου $x \in A$, συμβολίζεται $\mathbf{f(x)}$ καί λέγεται **εἰκόνα** τοῦ x. Γράφουμε λοιπόν

$$\mathbf{y = f(x)}$$

Ἄρα τό γράφημα τῆς f ἀποτελεῖται ἀπό ζεύγη τῆς μορφῆς $\mathbf{(x, f(x))}$ μέ $\mathbf{x \in A}$.

Ἀπό τόν ὁρισμό τῆς ἀπεικονίσεως συμπεραίνουμε ὅτι ἰσχύει:

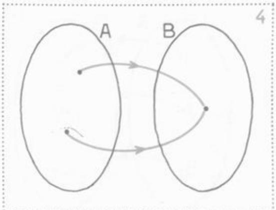
$$\boxed{\forall\, x_1, x_2 \in A,\ f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2} \qquad (1)$$

Ἀντί τοῦ ὅρου ἀπεικόνιση χρησιμοποιεῖται καί ὁ ὅρος **συνάρτηση.** Στήν περίπτωση αὐτή ἡ εἰκόνα f(x) λέγεται καί **τιμή** τῆς f **στό** x. Ἔτσι, μιά ἀπεικόνιση τοῦ Α στό Β λέγεται καί συνάρτηση μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό Α, ἤ *ὁρισμένη* στό Α, καί *μέ τιμές* στό Β.
Τό σύνολο τῶν τιμῶν τῆς f τό συμβολίζουμε **f (A)**. Εἶναι φανερό ὅτι $\mathbf{f(A) \subseteq B}$.

Εἰδικές συναρτήσεις

ΝΑΙ

4.5 **Σταθερή συνάρτηση.** Μιά συνάρτηση $f: A \to B$ λέγεται **σταθερή** μέ τιμή c, ὅταν



$$\boxed{\forall x \in A,\ f(x) = c}$$

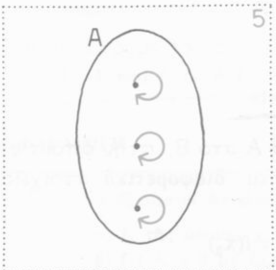
Τέτοια συνάρτηση ἔχουμε στό σχῆμα 4.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ἔστω ἡ συνάρτηση $f: \{-2,0,2\} \to \mathbb{R}$ μέ $f(x) = x^3 - 4x + 3$.

Ἔχουμε $f(-2) = 3$, $f(0) = 3$ καί $f(2) = 3$. Δηλαδή γιά κάθε $x \in \{-2,0,2\}$ εἶναι $f(x) = 3$. Ἄρα ἡ f εἶναι σταθερή συνάρτηση.

Ταυτοτική συνάρτηση. Μιά συνάρτηση $f: A \to A$ λέγεται **ταυτοτική** στό A, ὅταν



$$\boxed{\forall x \in A,\ f(x) = x}$$

Μιά τέτοια συνάρτηση, πού συμβολίζεται $\mathbf{I}_A$, ἔχουμε στό σχῆμα 5.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ἡ συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μέ $f(x) = (x+1)^2 - (x^2 + x + 1)$ εἶναι ταυτοτική στό $\mathbb{R}$, ἀφοῦ γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$ εἶναι
$$f(x) = x^2 + 2x + 1 - x^2 - x - 1 = x.$$

Ἀκολουθία. Κάθε συνάρτηση α, ὁρισμένη στό $\mathbb{N}^*$ (ἤ $\mathbb{N}$) μέ τιμές σέ ἕνα σύνολο E λέγεται **ἀκολουθία** στοιχείων τοῦ E. Ἄν $E \subseteq \mathbb{R}$, ἡ ἀκολουθία λέγεται **πραγματική.**

Συνήθως ἡ τιμή τῆς α πού ἀντιστοιχίζεται στό φυσικό ἀριθμό ν γράφεται α_ν, ἀντί $\alpha(\nu)$, καί ἡ ἀκολουθία συμβολίζεται $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \ldots$ ἤ συντομότερα (α_ν). Π.χ. ἡ ἀκολουθία

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^\nu}, \ldots$$

Εἴδη συναρτήσεων

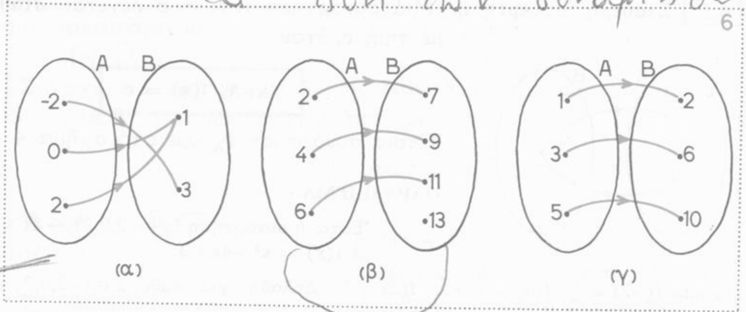
ΝΑΙ

4.6 Στό σχῆμα 6 ἔχουμε τά βελοειδή διαγράμματα τριῶν διμελῶν σχέσεων. Καθεμιά ἀπό τίς σχέσεις αὐτές, ὅπως φαίνεται ἀμέσως ἀπό τό ἀντίστοιχο βελοειδές διάγραμμα, εἶναι μιά συνάρτηση τοῦ A στό B, γιατί σέ κάθε στοιχεῖο τοῦ A ἀντιστοιχίζεται ἕνα μόνο στοιχεῖο τοῦ B.

Εἰδικότερα παρατηροῦμε ὅτι:

● Στό σχῆμα 6α ἔχουμε μιά συνάρτηση f, στήν ὁποία **κάθε** στοιχεῖο

τα' είδη των συναρτήσεων



τοῦ B εἶναι εἰκόνα ἑνός τουλάχιστο στοιχείου τοῦ A. Δηλαδή εἶναι:

$$\boxed{f(A) = B}$$

Ἡ συνάρτηση αὐτή λέγεται **«συνάρτηση ἐπί».**

● Στό σχῆμα 6β ἔχουμε μιά συνάρτηση f τοῦ A στό B, στήν ὁποία σέ διαφορετικά στοιχεῖα τοῦ A ἀντιστοιχίζονται **διαφορετικά** στοιχεῖα τοῦ B. Δηλαδή εἶναι:

$$\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

καί σύμφωνα μέ τήν (1) τῆς § 4.4 θά εἶναι:

$$\boxed{\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)}$$

Ἡ συνάρτηση αὐτή λέγεται **«συνάρτηση ἕνα πρός ἕνα (1—1)»**(1).

● Στό σχῆμα 6γ ἔχουμε μιά συνάρτηση f, στήν ὁποία **κάθε** στοιχεῖο τοῦ B εἶναι εἰκόνα **ἑνός** καί **μόνο** στοιχείου τοῦ A. Δηλαδή εἶναι:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{1. } f(A) = B \quad \text{καί} \\ \text{2. } \forall x_1, x_2 \in A, \quad x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \end{array}}$$

Ἡ συνάρτηση αὐτή λοιπόν εἶναι **«συνάρτηση 1—1 καί ἐπί».**

---

(1) Λέγεται καί ἀμφιμονοσήμαντη ἤ ἀμφιμονότιμη.

Ἀντίστροφη συνάρτηση

ΝΑΙ

4.7 Ἐπειδή μιά συνάρτηση f τοῦ Α στό Β εἶναι μιά διμελής σχέση, σύμφωνα μέ τήν § 4.3 ὁρίζεται καί ἡ ἀντίστροφη σχέση f^{-1} ἀπό τό Β στό Α. Εἶναι προφανές ὅτι ἄν ἡ f **δέν** εἶναι ἐπί ἤ **δέν** εἶναι 1—1 τότε ἡ f^{-1} **δέν εἶναι συνάρτηση.** Ἐξετάζουμε ἀκόμα τίς ἑξῆς περιπτώσεις:

- Ἡ f εἶναι «συνάρτηση ἐπί». Τότε εἶναι δυνατό, ὅπως φαίνεται καί στό σχῆμα 6α, μέ τή σχέση f^{-1} σέ ἕνα στοιχεῖο τοῦ Β νά ἀντιστοιχίζονται διαφορετικά στοιχεῖα τοῦ Α. Ἑπομένως ἡ f^{-1} μπορεῖ νά μήν εἶναι συνάρτηση.
- Ἡ f εἶναι «συνάρτηση 1—1». Τότε εἶναι δυνατό (Σχ. 6β) νά ὑπάρχει στοιχεῖο τοῦ Β πού νά μήν εἶναι ἀντίστοιχο κάποιου στοιχείου τοῦ Α. Ἑπομένως πάλι ἡ f^{-1} μπορεῖ νά μήν εἶναι συνάρτηση.
- Ἡ f εἶναι «συνάρτηση 1—1 καί ἐπί». Τότε (Σχ. 6γ) μέ τή σχέση f^{-1} σέ κάθε στοιχεῖο τοῦ Β ἀντιστοιχίζεται ἕνα μόνο στοιχεῖο τοῦ Α, πού σημαίνει ὅτι ἡ f^{-1} εἶναι συνάρτηση.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ὅτι **μόνο στήν περίπτωση πού ἡ f εἶναι «συνάρτηση 1—1 καί ἐπί» ἡ f^{-1} εἶναι ἐπίσης συνάρτηση καί μάλιστα 1—1 καί ἐπί.**

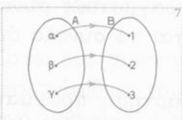
ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Νά ἐξεταστεῖ ἄν εἶναι συναρτήσεις οἱ ἀντίστροφες σχέσεις τῶν συναρτήσεων:

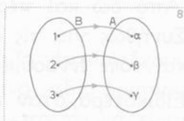
α) f_1 **τῆς ὁποίας τό βελοειδές διάγραμμα παριστάνεται στό σχ. 7.**

β) $f_2: A \to B$ **μέ** $f_2(x) = 2x + 1$, $A = \{0,2,3\}$, **καί** $B = \{1,5,7\}$.

γ) $f_3: A \to B$ **μέ** $f_3(x) = x^2 + 1$, $A = \{1, -1, 3\}$, **καί** $B = \{2,10\}$.



α) Ἡ f_1 εἶναι συνάρτηση 1—1 καί ἐπί. Ἄρα ἡ f_1^{-1} εἶναι συνάρτηση ὁρισμένη στό Β καί μέ τιμές στό Α ἐπίσης 1—1 καί ἐπί. Στό σχῆμα 8 παριστάνεται τό βελοειδές διάγραμμα τῆς f_1^{-1}.



β) Θά πρέπει νά ἐξετάσουμε ἄν $f_2(A) = B$ καί $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f_2(x_1) \neq f_2(x_2)$. Εἶναι $f_2(0) = 1$, $f_2(2) = 5$ καί $f_2(3) = 7$. Ἄρα $f(A) = \{1,5,7\} = B$ καί γιά $x_1 \neq x_2$, εἶναι $f_2(x_1) \neq f_2(x_2)$. Ἄρα ἡ f_2^{-1} εἶναι συνάρτηση.

γ) Ὁμοίως ἔχουμε $f_3(1) = 2$, $f_3(-1) = 2$, $f_3(3) = 10$. Ἄρα $f(A) = B$. Γιά τά διαφορετικά ὅμως στοιχεῖα 1 καί −1 ἔχουμε $f_3(1) = f_3(-1) = 2$. Ἑπομένως ἡ f_3 δέν εἶναι συνάρτηση.

Ἀσκήσεις 1, 2, 3, 4, 5.

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ἔννοια τῆς πραγματικῆς συναρτήσεως

NAI

4.8 Ἂν στή συνάρτηση $f : A \to B$ εἶναι

- $\mathbf{B \subseteq \mathbb{R}}$, ἡ f λέγεται **πραγματική συνάρτηση.**
- $\mathbf{A \subseteq \mathbb{R}}$, ἡ f λέγεται συνάρτηση **πραγματικῆς μεταβλητῆς.**

Ἂν $A \subseteq \mathbb{R}$ καί $B \subseteq \mathbb{R}$, ἡ f εἶναι πραγματική συνάρτηση πραγματικῆς μεταβλητῆς.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Ἔστω A τό σύνολο τῶν μαθητῶν μιᾶς τάξεως. Ἂν ἀντιστοιχίσουμε σέ κάθε μαθητή τό βάρος του, θά ἔχουμε μιά πραγματική συνάρτηση ὁρισμένη στό A.
2. Ἡ συνάρτηση f, ἡ ὁποία στό $x \in \mathbb{R}$ ἀντιστοιχίζει τόν πραγματικό ἀριθμό $f(x) = 4x^3-3x^2+5x+1$, εἶναι μιά πραγματική συνάρτηση πραγματικῆς μεταβλητῆς.
3. Ἡ πρόσθεση στό σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, ἡ ὁποία σέ κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ἀντιστοιχίζει τό ἄθροισμά τους $x+y$, εἶναι μιά πραγματική συνάρτηση ὁρισμένη στό $\mathbb{R}^2$.
4. Ὁ πολλαπλασιασμός στό σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἐπίσης μιά πραγματική συνάρτηση μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό $\mathbb{R}^2$, ἡ ὁποία σέ κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ἀντιστοιχίζει τό γινόμενο $xy \in \mathbb{R}$.
5. Ἡ συνάρτηση f, ἡ ὁποία στό $x \in [-4,3]$ ἀντιστοιχίζει τόν πραγματικό ἀριθμό

$$f(x) = \begin{cases} x+3, & \text{ἄν } -4 \leq x \leq -1 \\ 2, & \text{ἄν } -1 < x \leq 1 \\ -2x+1, & \text{ἄν } \ 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

εἶναι μιά πραγματική συνάρτηση ὁρισμένη στό $[-4, 3]$.

Ἀπό δῶ καί πέρα θά ἀσχοληθοῦμε μόνο μέ πραγματικές συναρτήσεις. Συνήθως γιά τίς συναρτήσεις αὐτές δέν ἀναφέρεται τό σύνολο ἀφίξεως B καί τότε ἐννοοῦμε ὅτι εἶναι τό $\mathbb{R}$.

Εἰδικότερα, ὅταν πρόκειται γιά πραγματική συνάρτηση πραγματικῆς μεταβλητῆς, συνήθως δίνεται ἡ τιμή της f(x) στό x ὑπό μορφή ἀλγεβρικῆς παραστάσεως καί δέν ἀναφέρεται οὔτε τό πεδίο ὁρισμοῦ της. Στήν περίπτωση αὐτή πεδίο ὁρισμοῦ τῆς f θά ἐννοοῦμε ὅτι εἶναι πάλι τό $\mathbb{R}$, **ἐκτός ἀπό τά στοιχεῖα του γιά τά ὁποῖα ἡ f(x) δέν ἔχει νόημα πραγματικοῦ ἀριθμοῦ.** Ἔτσι π.χ. ἡ συνάρτηση f μέ $f(x) = x^2+1$ εἶναι ὁρισμένη στό $\mathbb{R}$. Εἶναι δηλαδή $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ἐνῶ ἡ συνάρτηση g μέ $g(x) = \dfrac{3+5x}{x}$ εἶναι ὁρισμένη στό $\mathbb{R}^*$, ἀφοῦ τό πηλίκο $\dfrac{3+5x}{x}$ δέν ὁρίζεται γιά $x = 0$. Εἶναι λοιπόν $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$.

Πολλές φορές χρησιμοποιοῦμε καταχρηστικά τήν ἔκφραση *«ἡ συνάρτηση* $y = f(x)$» ἐννοώντας τή συνάρτηση f πού ὁρίζεται ἀπό τόν τύπο $y = f(x)$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

---

1. **Νά βρεθοῦν τά πεδία ὁρισμοῦ τῶν συναρτήσεων:**

f_1 **μέ** $f_1(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$, f_2 **μέ** $f_2(x) = \dfrac{x+1}{x^3-4x^2+3x}$ **καί**

f_3 **μέ** $f_3(x) = 4x^3+3x^2+5x+1$.

Τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς f_1 εἶναι τό «εὐρύτερο» ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{R}$ στό ὁποῖο ἡ $f_1(x)$ ἔχει νόημα πραγματικοῦ ἀριθμοῦ. Αὐτό συμβαίνει μόνο ὅταν $x^2-1 \neq 0$ ἤ $x \neq \pm 1$. Ἑπομένως τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς f_1 εἶναι τό $\mathbb{R}-\{-1,1\}$. Γιά τήν f_2 θά πρέπει $x^3-4x^2+3x \neq 0$ ἤ $x(x-1)(x-3) \neq 0$ ἤ $x \neq 0$, $x \neq 1$, $x \neq 3$. Ἄρα πεδίο ὁρισμοῦ τῆς f_2 εἶναι τό $\mathbb{R} - \{0,1,3\}$.
Ἐπειδή γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$ εἶναι $f_3(x)$ πραγματικός ἀριθμός, συμπεραίνουμε ὅτι τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς f_3 εἶναι ὁλόκληρο τό $\mathbb{R}$.

2. **Γιά τή συνάρτηση f μέ** $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-5x+6}$ **νά βρεθοῦν:**

α) Τό πεδίο ὁρισμοῦ της A
β) Τά ζεύγη $(0, f(0))$ $(1, f(1))$, $(-1, f(-1))$.

α) Θά πρέπει $x^2-5x+6 \neq 0$ ἤ $(x-2)(x-3) \neq 0$ ἤ $x \neq 2$, $x \neq 3$. Ἄρα $A = \mathbb{R} - \{2,3\}$.

β) Γιά $x = 0$ εἶναι $f(0) = -\dfrac{1}{6}$, ὁπότε $\Big(0, f(0)\Big) = \Big(0, -\dfrac{1}{6}\Big)$

» $x = 1$ » $f(1) = 0$ » $(1, f(1)) = (1,0)$

» $x = -1$ » $f(-1) = -\dfrac{1}{6}$ » $\Big(-1, f(-1)\Big) = \Big(-1, -\dfrac{1}{6}\Big)$.

Ἀπό αὐτά μόνο τά ζεύγη μποροῦμε νά συμπεράνουμε ὅτι ἡ f^{-1} δέν εἶναι συνάρτηση;

Ἴσες συναρτήσεις

ΝΑΙ

4.9 Ἔστω δύο συναρτήσεις f_1 καί f_2. Γιά νά εἶναι $f_1 = f_2$, ἐπειδή ἔχουν κοινό σύνολο ἀφίξεως τό $\mathbb{R}$, πρέπει καί ἀρκεῖ νά ἔχουν κοινό πεδίο ὁρισμοῦ A καί κοινό γράφημα. Αὐτό σημαίνει ὅτι γιά κάθε $x \in A$ πρέπει νά εἶναι $(x, f_1(x)) = (x, f_2(x))$. Ἄρα ἔχουμε:

$$\boxed{f_1 = f_2 \Leftrightarrow \forall x \in A, \quad f_1(x) = f_2(x)}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ἔστω οἱ συναρτήσεις f_1 μέ $f_1(x) = x^2 + 1$ καί f_2 μέ $f_2(x) = x^4 + 1$ μέ κοινό πεδίο ὁρισμοῦ τό $A = \{-1,0\}$. Παρατηροῦμε ὅτι $f_1(-1) = f_2(-1) = 2$ καί $f_1(0) = f_2(0) = 1$. Δηλαδή γιά κάθε $x \in A$, $f_1(x) = f_2(x)$. Ἄρα $f_1 = f_2$.
Ἄν ὅμως πάρουμε ὡς πεδίο ὁρισμοῦ τό $A' = \{1,0,2\}$, παρατηροῦμε ὅτι $f_1(2) \neq f_2(2)$. Ἄρα στή περίπτωση αὐτή οἱ συναρτήσεις δέν εἶναι ἴσες.

Περιορισμός καί ἐπέκταση συναρτήσεως

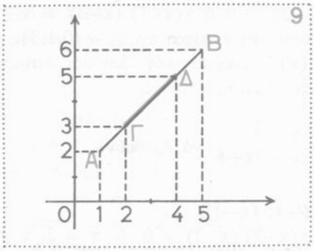
ΝΑΙ

4.10 Ἔστω οἱ συναρτήσεις f_1, f_2 ὁρισμένες στὰ A_1, A_2 ἀντιστοίχως μὲ $A_1 \subset A_2$. Ἂν γιά κάθε $x \in A_1$ εἶναι $f_1(x) = f_2(x)$, τότε:

ἡ $\mathbf{f_1}$ λέγεται **περιορισμός** τῆς $\mathbf{f_2}$ στὸ A_1 καί
ἡ f_2 λέγεται **ἐπέκταση** τῆς $\mathbf{f_1}$ στό A_2.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ἔστω οἱ συναρτήσεις f_1 μέ $f_1(x) = x+1$, $x \in [2,4]$ καί f_2 μέ $f_2(x) = x+1$, $x \in [1,5]$. Παρατηροῦμε ὅτι $[2,4] \subset [1,5]$ καί γιά κάθε $x \in [2,4]$ εἶναι $f_1(x) = f_2(x) = x+1$. Ἄρα ἡ f_1 εἶναι ἕνας περιορισμός τῆς f_2 στό $[2,4]$ καί ἡ f_2 μιά ἐπέκταση τῆς f_1 στό $[1,5]$.



Στό σχῆμα 9 ἡ γραφική παράσταση τῆς f_1 εἶναι τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΓΔ καί ἡ γραφική παράσταση τῆς f_2 εἶναι τό τμῆμα ΑΒ.

Ἀσκήσεις 6,7,8.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Γενικά

ΝΑΙ

4.11 Ἔστω Α τό σύνολο τῶν μαθητῶν τῆς Β΄ τάξεως ἑνός Λυκείου οἱ ὁποῖοι πῆραν μέρος στίς πανελλήνιες ἐξετάσεις τοῦ Ἰουνίου καί

f ἡ συνάρτηση ἡ ὁποία ἀντιστοιχίζει στό μαθητή $x \in A$ τόν ἀριθμό $f(x)$ τῶν μονάδων πού πῆρε στό μάθημα τῆς Φυσικῆς,

g ἡ συνάρτηση ἡ ὁποία ἀντιστοιχίζει στό μαθητή $x \in A$ τόν ἀριθμό $g(x)$ τῶν μονάδων πού πῆρε στό μάθημα τῆς Χημείας.

Τότε μποροῦμε νά σχηματίσουμε μιά νέα συνάρτηση h, ἡ ὁποία σέ κάθε μαθητή $x \in A$ ἀντιστοιχίζει τό ἄθροισμα $f(x)+g(x)$ τῶν μονάδων στά μαθήματα Φυσικῆς καί Χημείας. Θά εἶναι λοιπόν $h(x) = f(x)+g(x)$.
Ἡ συνάρτηση h λέγεται **ἄθροισμα** τῶν f καί g.

Ἔστω τώρα Α ἕνα σύνολο αὐτοκινήτων καί

f ἡ συνάρτηση ἡ ὁποία ἀντιστοιχίζει σέ κάθε αὐτοκίνητο $x \in A$ τόν ἀριθμό $f(x)$ τῶν χιλιομέτρων πού διανύει τό αὐτοκίνητο αὐτό κατά μέσο ὅρο τήν ἡμέρα,

g ἡ συνάρτηση ἡ ὁποία ἀντιστοιχίζει σέ κάθε αὐτοκίνητο $x \in A$ τόν ἀριθμό $g(x)$ τῶν ἡμερῶν πού κινήθηκε τό αὐτοκίνητο αὐτό κατά τό μήνα Μάιο.

Τότε μποροῦμε νά σχηματίσουμε μιά νέα συνάρτηση h, ἡ ὁποία σέ κάθε αὐτοκίνητο $x \in A$ ἀντιστοιχίζει τόν ἀριθμό $f(x)g(x)$ τῶν χιλιομέτρων πού ἔχει διανύσει τό μήνα Μάιο. Θά εἶναι λοιπόν $h(x) = f(x)\,g(x)$.

Ἡ συνάρτηση h λέγεται **γινόμενο** τῶν συναρτήσεων f καί g.

Στά ἑπόμενα **θεωροῦμε** τό σύνολο τῶν πραγματικῶν συναρτήσεων μέ κοινό πεδίο ὁρισμοῦ Α, πού τό συμβολίζουμε $\mathbf{F_A}$, καί στό ὁποῖο ὁρίζουμε τίς παρακάτω πράξεις.

Πρόσθεση συναρτήσεων

NAA

4.12 **Ὁρισμός.** Ἄν f_1 καί f_2 εἶναι δύο συναρτήσεις τοῦ $\mathbf{F_A}$, τότε ἡ συνάρτηση ἡ ὁποία σέ κάθε $x \in A$ ἀντιστοιχίζει τό $f_1(x)+f_2(x)$ λέγεται **ἄθροισμα** τῶν f_1 καί f_2 καί συμβολίζεται f_1+f_2. Δηλαδή εἶναι

$$\boxed{\forall x \in A, \quad (f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)} \qquad (1)$$

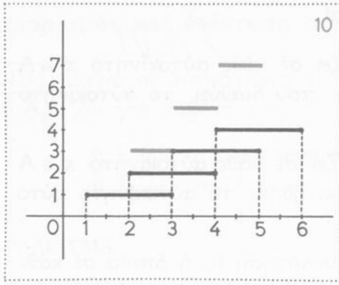
Γενικότερα, ἄν ἡ f_1 ὁρίζεται στό A_1 καί ἡ f_2 στό A_2, τότε ἡ f_1+f_2 ὁρίζεται μέ τήν (1) στό σύνολο $A=A_1 \cap A_2$.

Ὡς ἄθροισμα ν συναρτήσεων $f_1, f_2, \ldots, f_{\nu-1}, f_\nu$ γιά κάθε φυσικό $\nu > 2$ ὁρίζεται τό ἄθροισμα τῶν συναρτήσεων $(f_1+f_2+\ldots+f_{\nu-1})$ καί f_ν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Δίνονται οἱ συναρτήσεις f_1 μέ $f_1(x) = \frac{x}{2}$ καί f_2 μέ $f_2(x) = x$ μέ κοινό πεδίο ὁρισμοῦ τό $\mathbb{R}$. Τό ἄθροισμά τους εἶναι ἡ συνάρτηση f_1+f_2 ἡ ὁποία στό x ἀντιστοιχίζει τόν πραγματικό ἀριθμό
$$\begin{aligned}(f_1+f_2)(x) &= f_1(x)+f_2(x)\\ &= \frac{x}{2} + x\\ &= \frac{3x}{2}.\end{aligned}$$

2. Δίνονται οἱ συναρτήσεις f_1 καί f_2 ὁρισμένες ἀντιστοίχως στά [1,5] καί [2,6]
$$\text{μέ } f_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{ἄν } x \in [1,3] \\ 3, & \text{ἄν } x \in (3,5] \end{cases} \qquad \text{καί } f_2(x) = \begin{cases} 2, & \text{ἄν } x \in [2,4] \\ 4, & \text{ἄν } x \in (4,6] \end{cases}$$



Τό ἄθροισμά τους εἶναι ἡ συνάρτηση f_1+f_2, ὁρισμένη στό $[2,5]$, ἡ ὁποία στό x ἀντιστοιχίζει τόν πραγματικό ἀριθμό

$$(f_1+f_2)(x) = \begin{cases} 1+2=3, & \text{ἄν } x \in [2,3] \\ 3+2=5, & \text{ἄν } x \in (3,4] \\ 3+4=7, & \text{ἄν } x \in (4,5] \end{cases}$$

Οἱ γραφικές παραστάσεις τῶν συναρτήσεων f_1, f_2, f_1+f_2 δίνονται στό σχῆμα 10.

4.13 Ἰδιότητες. Ἔστω f_1, f_2 καί f_3 τρεῖς συναρτήσεις τοῦ F_A. Τότε, ἐπειδή γιά κάθε $x \in A$ οἱ $f_1(x)$, $f_2(x)$ καί $f_3(x)$ εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί, θά εἶναι:

$$\forall x \in A, \quad f_1(x)+f_2(x) = f_2(x)+f_1(x).$$

Τό $f_1(x)+f_2(x)$ ὅμως εἶναι ἡ τιμή τῆς συναρτήσεως f_1+f_2 στό x ἐνῶ τό $f_2(x)+f_1(x)$ εἶναι ἡ τιμή τῆς f_2+f_1 στό x. Εἶναι λοιπόν

$$\forall x \in A, \quad (f_1+f_2)(x) = (f_2+f_1)(x)$$

πού σημαίνει $$f_1+f_2 = f_2+f_1 \qquad (1)$$

Δηλαδή ἡ πρόσθεση τῶν πραγματικῶν συναρτήσεων εἶναι **ἀντιμεταθετική.**

Ὁμοίως ἔχουμε $\forall\ x \in A$, $[f_1(x)+f_2(x)]+f_3(x) = f_1(x)+[f_2(x)+f_3(x)]$

πού σημαίνει $$(f_1+f_2)+f_3 = f_1+(f_2+f_3) \qquad (2)$$

Δηλαδή ἡ πρόσθεση στό F_A εἶναι καί **προσεταιριστική.**

Ἔστω τώρα ω ἡ συνάρτηση τοῦ F_A, γιά τήν ὁποία ἔχουμε, γιά κάθε $x \in A$, $\omega(x) = 0$. Τότε, ἄν f εἶναι μιά ὁποιαδήποτε συνάρτηση τοῦ F_A, θά ἔχουμε:

$$\forall x \in A, \quad f(x)+\omega(x) = \omega(x)+f(x) = f(x)$$

δηλαδή $$f+\omega = \omega+f = f. \qquad (3)$$

Ἄρα ἡ συνάρτηση ω θά εἶναι τό **οὐδέτερο στοιχεῖο** ὡς πρός τήν πρόσθεση στό F_A.

Ἄς ἐξετάσουμε τώρα ἄν γιά κάθε συνάρτηση f τοῦ F_A ὑπάρχει μιά ἄλλη συνάρτηση f^* τοῦ F_A τέτοια, ὥστε νά εἶναι

$$f+f^* = \omega \qquad (4)$$

Ἀπό τήν (4) προκύπτει ὅτι:

$$\forall x \in A, \quad f(x)+f^*(x) = \omega(x) = 0 \quad \text{ἤ} \quad f^*(x) = -f(x).$$

Ἀπό τήν τελευταία ἰσότητα συμπεραίνουμε ὅτι ὑπάρχει ἡ f^* καί εἶναι μοναδική. Ἡ f^* πού ἔχει τήν ἰδιότητα (4) λέγεται **ἀντίθετη** τῆς f καί συμβολίζεται **$-f$**.

Τό ἄθροισμα $f+(-g)$ τό λέμε **διαφορά** τῆς g ἀπό τήν f, τό συμβολίζουμε $\mathbf{f-g}$ καί γιά κάθε $x \in A$ εἶναι $\mathbf{(f-g)(x) = f(x)-g(x)}$.

1. **Ἄν f, g εἶναι συναρτήσεις τοῦ F_A, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι $-(f+g) = -f-g$.**

Ἀρκεῖ νά ἀποδείξουμε ὅτι οἱ συναρτήσεις $-(f+g)$ καί $-f-g$ γιά κάθε $x \in A$ ἔχουν τήν ἴδια τιμή. Ἡ τιμή τῆς $-(f+g)$ στό x εἶναι $[-(f+g)](x) = -[(f+g)(x)] = -[f(x)+g(x)]$, ἐνῶ τῆς $-f-g$ εἶναι

$$\begin{aligned}(-f-g)(x) &= [(-f)+(-g)](x)\\ &= (-f)(x)+(-g)(x)\\ &= -f(x)-g(x)\\ &= -[f(x)+g(x)], \text{ δηλαδή ἴση μέ } [-(f+g)](x).\end{aligned}$$

2. **Ἄν f_1 μέ $f_1(x) = (x-1)^2-(x-1)(x+2)$**
f_2 μέ $f_2(x) = (x-1)^2-(x^2-4x+3)$
f_3 μέ $f_3(x) = 1-x$
εἶναι τρεῖς συναρτήσεις τοῦ F_A, νά δειχθεῖ ὅτι $f_1+f_2=f_3$.

Ἔχουμε
$$\begin{aligned}f_1(x)+f_2(x) &= [(x-1)^2-(x-1)(x+2)]+[(x-1)^2-(x^2-4x+3)]\\ &= x^2-2x+1-x^2-x+2+x^2-2x+1-x^2+4x-3\\ &= 1-x.\end{aligned}$$

Ἄρα ἔχουμε γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f_1(x)+f_2(x) = f_3(x)$. Δηλαδή $f_1+f_2=f_3$.

3. **Ἔστω οἱ συναρτήσεις f_1 μέ $f_1(x) = (x-1)^2$ καί πεδίο ὁρισμοῦ τό $[1,4]$**
f_2 μέ $f_2(x) = (x+1)^2$ καί πεδίο ὁρισμοῦ τό $[2,5]$
f_3 μέ $f_3(x) = x^2+x-5$ καί πεδίο ὁρισμοῦ τό $[6,9]$.
Ὁρίζονται οἱ συναρτήσεις f_1+f_2, f_2+f_3 καί f_1+f_3;

Ἡ συνάρτηση f_1+f_2 ὁρίζεται στήν τομή τῶν πεδίων ὁρισμοῦ τῶν f_1 καί f_2, δηλαδή στό διάστημα $[2,4]$ καί εἶναι

$$\forall x \in [2,4], \quad f_1(x)+f_2(x) = (x-1)^2+(x+1)^2 = 2x^2+2.$$

Οἱ συναρτήσεις f_2+f_3 καί f_1+f_3 δέν ὁρίζονται, γιατί ἡ τομή τῶν πεδίων ὁρισμοῦ τῶν f_2, f_3 καί τῶν f_1, f_3 εἶναι τό $\varnothing$.

Ἀσκήσεις 9,10,11.

Πολλαπλασιασμός πραγματικοῦ ἀριθμοῦ ἐπί συνάρτηση

ΝΑΙ

4.14 Ἔστω f μιά συνάρτηση τοῦ F_A. Τότε, γιά κάθε $x \in A$ εἶναι $f(x)+f(x) = 2f(x)$. Δηλαδή στό x μέ τή συνάρτηση $f+f$ ἀντιστοιχίζεται τό $2f(x)$. Τή συνάρτηση $f+f$ τή συμβολίζουμε μέ $2f$ καί τήν ὀνομάζουμε γινόμενο τοῦ ἀριθμοῦ 2 ἐπί τήν f.
Γενικότερα, ἄν $f \in F_A$ καί $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε ἡ συνάρτηση πού στό $x \in A$ ἀντιστοιχίζει τό $\lambda f(x)$ ὀνομάζεται **γινόμενο τοῦ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ λ ἐπί τή συνάρτηση f** καί συμβολίζεται μέ λf.
Εἶναι λοιπόν:

$$\boxed{\forall x \in A, \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x)}$$

NAI

4.15 **Ἰδιότητες.** Ἄν κ,λ εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί καί f,g συναρτήσεις τοῦ F_A, τότε ἰσχύουν:

$$\boxed{\begin{array}{ll} 1. & k(\lambda f) \quad = (k\lambda)\, f \\ 2. & (k+\lambda)\, f = kf + \lambda f \\ 3. & k(f+g) = kf + kg \\ 4. & \qquad 1\, f = f \end{array}}$$

Γιά νά ἀποδείξουμε π.χ. ὅτι $\kappa(\lambda f) = (\kappa\lambda)f$, ἀρκεῖ νά ἀποδείξουμε ὅτι οἱ συναρτήσεις αὐτές γιά κάθε $x \in A$ ἔχουν τήν ἴδια τιμή. Πράγματι:
Ἡ τιμή τῆς $\kappa(\lambda f)$ στό x εἶναι

$$[\kappa(\lambda f)]\,(x) = \kappa[(\lambda f)\,(x)] = \kappa\,[\lambda\, f(x)]$$

ἐνῶ τῆς $(\kappa\lambda)f$ εἶναι: $[(\kappa\lambda)f](x) = (\kappa\lambda)f(x)$.
Ἐπειδή ὅμως κ,λ καί $f(x)$ εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί, ἔχουμε:

$$\forall\, x \in A, \qquad \kappa[(\lambda f(x)] = (\kappa\lambda)\, f(x).$$

Μέ παρόμοιο τρόπο ἀποδεικνύονται καί οἱ ἄλλες ἰδιότητες.

Ἀσκήσεις 12, 13, 14.

Πολλαπλασιασμός συναρτήσεων

NAI

4.16 **Ὁρισμός.** Ἄν f_1 καί f_2 εἶναι δύο συναρτήσεις τοῦ F_A, τότε ἡ συνάρτηση ἡ ὁποία σέ κάθε $x \in A$ ἀντιστοιχίζει τό $f_1(x) \cdot f_2(x)$ λέγεται γινόμενο τῶν συναρτήσεων f_1 καί f_2 καί συμβολίζεται $f_1\, f_2$. Δηλαδή εἶναι:

$$\boxed{\forall x \in A, \quad (f_1 f_2)\,(x) = f_1(x) f_2(x)} \qquad (1)$$

Γενικότερα, ἄν ἡ f_1 ὁρίζεται στό A_1 καί ἡ f_2 στό A_2, τότε ἡ $f_1 f_2$ ὁρίζεται μέ τήν (1) στό σύνολο $A = A_1 \cap A_2$.

Ὡς γινόμενο ν συναρτήσεων $f_1, f_2, \ldots, f_{\nu-1}, f_\nu$ γιά κάθε φυσικό $\nu > 2$ ὁρίζεται τό γινόμενο τῶν συναρτήσεων $(f_1 f_2 \ldots f_{\nu-1})$ καί f_ν.
Τό γινόμενο ν ἴσων συναρτήσεων $f\,f\,f \ldots f$ τό συμβολίζουμε f^ν. Ἑπομένως θά εἶναι

$$\begin{aligned} \forall\, x \in A, \quad (f^\nu)\,(x) &= (ff \ldots f)\,(x) \\ &= f(x)\, f(x) \ldots f(x) \\ &= [f(x)]^\nu. \end{aligned}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Δίνονται οἱ συναρτήσεις f_1 μέ $f_1(x) = x^2-1$ καί f_2 μέ $f_2(x) = x^2+1$ μέ κοινό πεδίο ὁρισμοῦ τό $\mathbb{R}$. Τό γινόμενό τους εἶναι ἡ συνάρτηση f_1f_2 μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό $\mathbb{R}$, ἡ ὁποία σέ κάθε x ἀντιστοιχίζει τό $(f_1f_2)(x) = f_1(x)\, f_2(x) = (x^2-1)(x^2+1) = x^4-1$.

ΝΑΙ

4.17. **Ἰδιότητες.** Ἄν f_1, f_2, f_3 εἶναι τρεῖς συναρτήσεις τοῦ F_A, τότε ἔχουμε γιά κάθε $x \in A$,

$$f_1(x)\, f_2(x) = f_2(x)\, f_1(x)$$

$$f_1(x)\, [f_2(x)\, f_3(x)] = [f_1(x) f_2(x)] f_3(x) \qquad \text{καί}$$

$$[f_1(x)+f_2(x)]\, f_3(x) = f_1(x)\, f_3(x)+f_2(x)\, f_3(x)$$

πού σημαίνει ἀντιστοίχως:

$$\mathbf{f_1f_2=f_2f_1} \qquad (1)$$

$$\mathbf{f_1(f_2f_3)=(f_1f_2)f_3} \qquad (2)$$

$$\mathbf{(f_1+f_2)f_3=f_1f_3+f_2f_3.} \qquad (3)$$

Δηλαδή ὁ πολλαπλασιασμός στό F_A εἶναι πράξη **ἀντιμεταθετική**, **προσεταιριστική** καί **ἐπιμεριστική** ὡς πρός τήν πρόσθεση.

Ἔστω τώρα **u** ἡ συνάρτηση τοῦ F_A, γιά τήν ὁποία: $\forall x \in A, u(x) = 1$. Τότε, ἄν f εἶναι μιά ὁποιαδήποτε συνάρτηση τοῦ F_A, θά ἔχουμε

$$\forall x \in A, \quad f(x)u(x) = u(x)\, f(x) = f(x)$$

Δηλαδή

$$\mathbf{f\,u = u\,f = f.} \qquad (4)$$

Ἄρα ἡ συνάρτηση u θά εἶναι τό **οὐδέτερο στοιχεῖο** ὡς πρός τόν πολλαπλασιασμό στό F_A.

Ἄς ἐξετάσουμε τώρα ἄν γιά μιά συνάρτηση f τοῦ F_A ὑπάρχει συνάρτηση f^*, τέτοια, ὥστε νά εἶναι

$$\mathbf{ff^*= u} \qquad (5)$$

Γιά νά ἰσχύει ἡ (5), πρέπει καί ἀρκεῖ

$$\forall x \in A, \quad f(x)\, f^*(x) = u(x) = 1. \qquad (6)$$

Ἑπομένως ἡ f^* ὑπάρχει στὸ F_A **μόνο ὅταν** $\forall x \in A$, $f(x) \neq 0$, ὁπότε ἀπό τήν (6) θά ἔχουμε $f^*(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

Στήν περίπτωση αὐτή ἡ f^* λέγεται **συμμετρική** τῆς f ὡς πρός τόν πολλαπλασιασμό. Γενικότερα, περιορίζοντας τό πεδίο ὁρισμοῦ A τῆς f στὸ $A' = \{x \in A : f(x) \neq 0\}$, μποροῦμε νά ὁρίσουμε μιά συνάρτηση, πού τή συμβολίζουμε [1] $\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{f}}$, μέ τιμή στό $x \in A'$ τό $\dfrac{1}{f(x)}$.

(1) Ἀποφεύγουμε τό συμβολισμό f^{-1} ἀντί τοῦ $\frac{1}{f}$, γιατί σέ αὐτό τό σύμβολο δίνουμε, ὅπως μάθαμε, ἄλλη σημασία.

Προσοχή: Όταν ὑπάρχει στό F_A ἡ συμμετρική f^* τῆς f, τότε εἶναι $A'=A$ καί $f^* = \dfrac{1}{f}$. Π.χ. γιά τή συνάρτηση f τοῦ $F_{\mathbb{R}}$ μὲ $f(x) = x-1$ δὲν ὑπάρχει ἡ συμμετρική της f^* στό $F_{\mathbb{R}}$, ἐπειδή $f(1)=0$, ἐνῶ ἡ συνάρτηση $\dfrac{1}{f}$ ὁρίζεται στό $\mathbb{R}' = \mathbb{R} - \{1\}$ καὶ εἶναι

$$\frac{1}{f}(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x-1}.$$

Ἔστω τώρα οἱ συναρτήσεις f, g μὲ πεδία ὁρισμοῦ A καὶ B ἀντιστοίχως. Ἐπειδὴ ἡ $\dfrac{1}{g}$ ὁρίζεται στό $B' = \{x \in B : g(x) \neq 0\}$, θά ὁρίζεται (§ 4.16) καί ἡ συνάρτηση $f\,\dfrac{1}{g}$ στό σύνολο $A \cap B'$. Ἡ συνάρτηση αὐτή συμβολίζεται $\dfrac{f}{g}$ καί λέγεται **πηλίκο** τῆς f διά g.

Εἶναι λοιπόν

$$\forall\, x \in A \cap B', \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = f(x)\,\frac{1}{g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Ἔτσι ὅπως ὁρίστηκαν οἱ πράξεις στό σύνολο F_A ἔχουν ὅλες «σχεδόν» τίς ἰδιότητες τῶν ἀντίστοιχων πράξεων στό $\mathbb{R}$. Συγκεκριμένα ἔχουν τίς ἰδιότητες ποὺ διατυπώνονται μὲ τά ἀξιώματα I – VIII (Κεφ. 2) καθώς καί μέ τά **θεωρήματα** πού προκύπτουν ἀπό αὐτά τά ἀξιώματα. Ἡ βασικὴ ἰδιότητα τοῦ ἀξ. IX καί τά σχετικά μέ αὐτό θεωρήματα πού ἰσχύουν στὸ $\mathbb{R}$ **δέν** ἰσχύουν στό F_A.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΝΑΙ

1. **Ἄν f, g εἶναι συναρτήσεις τοῦ F_A, νά δειχθεῖ ὅτι εἶναι $\dfrac{1}{fg} = \dfrac{1}{f}\,\dfrac{1}{g}$, ὅταν $\forall\, x \in A$, ($f(x) \neq 0$ καί $g(x) \neq 0$).**

Ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι γιά κάθε $x \in A$ εἶναι $\left(\dfrac{1}{fg}\right)(x) = \left(\dfrac{1}{f}\,\dfrac{1}{g}\right)(x)$.

Ἔχουμε: $$\left(\frac{1}{fg}\right)(x) = \frac{1}{(fg)(x)} = \frac{1}{f(x)g(x)} = \frac{1}{f(x)}\,\frac{1}{g(x)} \qquad (1)$$

$$\left(\frac{1}{f}\,\frac{1}{g}\right)(x) = \left[\left(\frac{1}{f}\right)(x)\right]\left[\left(\frac{1}{g}\right)(x)\right] = \frac{1}{f(x)}\,\frac{1}{g(x)} \qquad (2)$$

Ἀπό τήν (1) καί (2) προκύπτει ὅτι γιά κάθε $x \in A$:

$$\left(\frac{1}{fg}\right)(x) = \left(\frac{1}{f}\,\frac{1}{g}\right)(x). \qquad \text{Δηλαδή } \frac{1}{fg} = \frac{1}{f}\,\frac{1}{g}.$$

2. Ἔστω οἱ συναρτήσεις f μέ $f(x) = x^2-2$, $x \in [2,7]$ καί g μέ $g(x) = 5x^3-3x^2+2$, $x \in [3,9]$. Νά ὁριστεῖ τό γινόμενό τους.

Ἡ συνάρτηση fg ὁρίζεται στήν τομή τῶν πεδίων ὁρισμοῦ τῶν f καί g, δηλαδή στό διάστημα $[3,7]$ καί εἶναι γιά κάθε $x \in [3,7]$

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= (x^2-2)(5x^3-3x^2+2) \\ &= 5x^5-3x^4-10x^3+8x^2-4. \end{aligned}$$

3. Ἔστω οἱ συναρτήσεις f μέ $f(x) = x^2-5x+6$, καί g μέ $g(x) = x^2-2x$.

Νά ὁριστεῖ ἡ συνάρτηση $\frac{f}{g}$.

Ἐπειδή $x^2-2x=x(x-2)$, γιά κάθε $x \in \mathbb{R}-\{0,2\}$ εἶναι $g(x) \neq 0$. Ἄρα τό πηλίκο $\frac{f}{g}$ ὁρίζεται στό $\mathbb{R}-\{0,2\}$ καί εἶναι

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2-5x+6}{x^2-2x} = \frac{(x-2)(x-3)}{x(x-2)} = \frac{x-3}{x}.$$

Ἀσκήσεις 15,16,17,18,19,20,21.

ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΚΑΙ ΡΗΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ἔννοια πολυωνυμικῆς συναρτήσεως

NAI

4.18 **Ὁρισμός.** Ὀνομάζουμε **πολυωνυμική συνάρτηση** μιᾶς πραγματικῆς μεταβλητῆς x κάθε συνάρτηση f μέ

$$f(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

ὅπου $\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_\nu$ εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί καί ν φυσικός.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Οἱ συναρτήσεις: f_1 μέ $f_1(x) = 5x+1$

f_2 μέ $f_2(x) = \frac{1}{2}x^3-4x^2+\frac{3}{5}x-2$

f_3 μέ $f_3(x) = 2x^6-3x^4+\sqrt{2}x^3-6$

εἶναι πολυωνυμικές συναρτήσεις.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

---

1. Δίνονται οἱ πολυωνυμικές συναρτήσεις f_1 μέ $f_1(x) = x^2-3x+2$ καί f_2 μέ $f_2(x) = x^3-x$. Νά ὁριστοῦν οἱ f_1+f_2 καί $f_1 f_2$.

Ἔχουμε
$$\begin{aligned} (f_1+f_2)(x) &= f_1(x)+f_2(x) = (x^2-3x+2)+(x^3-x) \\ &= x^2-3x+2+x^3-x \\ &= x^3+x^2-4x+2 \\ (f_1f_2)(x) &= f_1(x)f_2(x) = (x^2-3x+2)(x^3-x) \\ &= x^5-3x^4+2x^3-x^3+3x^2-2x \\ &= x^5-3x^4+x^3+3x^2-2x. \end{aligned}$$

Παρατηροῦμε ὅτι τόσο τό ἄθροισμα f_1+f_2 ὅσο καί τό γινόμενο f_1f_2 τῶν δύο πολυωνυμικῶν συναρτήσεων f_1, f_2 εἶναι ἐπίσης πολυωνυμικές συναρτήσεις.

2. **Δίνονται οἱ πολυωνυμικές συναρτήσεις f_1 μέ $f_1(x) = 2x^2-3x$ καί f_2 μέ $f_2(x) = x+5$. Νά ὁριστοῦν οἱ συναρτήσεις $3f_1-2f_2$ καί $2f_1+5f_2$.**

Ἔχουμε
$$\begin{aligned}(3f_1-2f_2)(x) &= (3f_1)(x) - (2f_2)(x) = 3f_1(x) - 2f_2(x)\\ &= 3(2x^2-3x) - 2(x+5) = 6x^2-11x-10\\ (2f_1+5f_2)(x) &= (2f_1)(x)+(5f_2)(x) = 2f_1(x)+5f_2(x)\\ &= 2(2x^2-3x)+5(x+5)\\ &= 4x^2-x+25.\end{aligned}$$

Ἀνάπτυγμα καί παραγοντοποίηση

4.19 Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ἔχουμε μιά πολυωνυμική συνάρτηση h καί ὑπάρχουν δύο πολυωνυμικές συναρτήσεις f καί g τέτοιες, ὥστε νά εἶναι
$$h = f\,g.$$
Τότε θά λέμε ὅτι ἡ fg εἶναι μιά **παραγοντοποιημένη μορφή** τῆς h, ἐνῶ ἡ h εἶναι ἡ **ἀναπτυγμένη μορφή** ἤ τό **ἀνάπτυγμα** τῆς fg.

Ἄν π.χ. εἶναι
$$\begin{aligned} h &\text{ μέ } h(x) = x^2-1\\ f &\text{ μέ } f(x) = x+1\\ g &\text{ μέ } g(x) = x-1\end{aligned}$$
τότε, ἐπειδή $x^2-1 = (x+1)(x-1)$, ἡ h εἶναι τό ἀνάπτυγμα τῆς fg καί ἡ fg εἶναι μιά παραγοντοποιημένη μορφή τῆς h.

Στό Γυμνάσιο μελετήσαμε διάφορες περιπτώσεις παραγοντοποιήσεως ἑνός πολυωνύμου καί εἴδαμε ὅτι δέν ὑπάρχει μιά γενική μέθοδος, ἡ ὁποία νά ἐφαρμόζεται σέ κάθε περίπτωση. Ὁπωσδήποτε, ὅμως, ἡ παραγοντοποίηση ἑνός πολυωνύμου διευκολύνεται μέ τή χρησιμοποίηση τῶν γνωστῶν ταυτοτήτων
$$\begin{aligned}\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 &= (\alpha+\beta)^2\\ \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2 &= (\alpha-\beta)^2\\ \alpha^2-\beta^2 &= (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)\\ \alpha^3-\beta^3 &= (\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)\\ \alpha^3+\beta^3 &= (\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)\end{aligned}$$
οἱ ὁποῖες ἀληθεύουν, ὅταν τά α,β εἶναι ὁποιοιδήποτε πραγματικοί ἀριθμοί ἤ ὁποιεσδήποτε πραγματικές **συναρτήσεις**. (Βλ. § 4.17 Παρατ.).

Ὅπως γνωρίζουμε, ἡ παραγοντοποίηση εἶναι ἕνα βασικό «ἐργαλεῖο» στόν ἀλγεβρικό λογισμό. Εἴδαμε π.χ. στό λογισμό τῶν πραγματικῶν συναρτήσεων ὅτι ἡ παραγοντοποίηση εἶναι χρήσιμη στόν προσδιορισμό τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ μιᾶς συναρτήσεως καί στήν ἐκτέλεση τῶν πράξεων. Ἐπίσης, ὅπως θά δοῦμε στήν § 4.21, ἄν f εἶναι μιά πολυωνυμική συνάρτηση καί ὑπάρχουν πολυωνυμικές συναρτήσεις $f_1, f_2, \ldots, f_\nu$ τέτοιες, ὥστε
$$f = f_1\,f_2\ldots f_\nu$$

τότε ἡ λύση τῆς ἐξισώσεως $f(x)=0$ ἤ τῆς ἀνισώσεως $f(x)>0$ γίνεται ἁπλούστερη. Γιά τούς λόγους αὐτούς θά ὑπενθυμίσουμε τήν παραγοντοποίηση ἑνός πολυωνύμου δίνοντας μερικά παραδείγματα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Ἔστω $f(x)=(9x^2-1)(2x+3)-(4x^2-9)(3x+1)$.

   Ἐπειδή εἶναι $9x^2-1=(3x+1)(3x-1)$

   $4x^2-9=(2x+3)(2x-3)$

   θά εἶναι
$$\begin{aligned} f(x) &= (3x+1)(3x-1)(2x+3)-(2x+3)(2x-3)(3x+1) \\ &= (3x+1)(2x+3)\,[(3x-1)-(2x-3)] \\ &= (3x+1)(2x+3)(x+2). \end{aligned}$$

2. Ἔστω $f(x)=x^6-64$.

   Ἔχουμε
$$\begin{aligned} f(x) &= x^6-2^6=(x^3)^2-(2^3)^2 \\ &= (x^3+2^3)(x^3-2^3) \\ &= (x+2)(x^2-2x+4)(x-2)(x^2+2x+4). \end{aligned}$$

3. Ἄν εἶναι $f(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_0$ καί λ ἕνας πραγματικός ἀριθμός τέτοιος, ὥστε $f(\lambda)=0$, τότε εἶναι $f(x)=(x-\lambda)\,g(x)$, ὅπου $g(x)$ τό πηλίκο τοῦ $f(x)$ διά τοῦ $x-\lambda$. Ἄν π.χ $f(x)=x^3-5x^2+3x+1$, ἐπειδή $f(1)=1^3-5.1^2+3.1+1=0$, θά εἶναι $f(x)=(x-1)(x^2-4x-1)$, ὅπου $g(x)=x^2-4x-1$ εἶναι τό πηλίκο τοῦ $f(x)$ διά $x-1$.

Ἀσκήσεις 22, 23, 24.

Ἔννοια ρητῆς συναρτήσεως

ΝΑΙ

4.20 **Ὁρισμός.** Ἔστω f καί g δύο πολυωνυμικές συναρτήσεις καί A τό σύνολο λύσεων τῆς ἐξισώσεως $g(x)=0$. Ἡ συνάρτηση **h** μέ $\mathbf{h(x)}=\dfrac{\mathbf{f(x)}}{\mathbf{g(x)}}$ εἶναι ὁρισμένη στό σύνολο $\mathbb{R}-A$ καί λέγεται **ρητή συνάρτηση.** Δηλαδή **ρητή συνάρτηση εἶναι τό πηλίκο δύο πολυωνυμικῶν συναρτήσεων.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Ἡ συνάρτηση f μέ $f(x)=\dfrac{5x+1}{x-6}$ εἶναι ρητή συνάρτηση μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό $\mathbb{R}-\{6\}$.
2. Ἡ συνάρτηση f μέ $f(x)=\dfrac{3x-7}{x^2-4}$ εἶναι ρητή συνάρτηση μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό $\mathbb{R}-\{-2,2\}$.
3. Ἡ συνάρτηση f μέ $f(x)=\dfrac{5}{x^2+1}$ εἶναι ἐπίσης ρητή συνάρτηση μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό $\mathbb{R}$.

1. **Δίνονται οἱ συναρτήσεις**

$$f_1 \text{ μέ } f_1(x) = \frac{x-1}{x^2-4} \quad \text{καί} \quad f_2 \text{ μέ } f_2(x) = \frac{x+2}{x^2-3x+2}.$$

Νά ὁριστοῦν οἱ συναρτήσεις f_1+f_2 καί f_1f_2.

Ἡ f_1 εἶναι ὁρισμένη στό $\mathbb{R}-\{-2, 2\}$ καί ἡ f_2 στό $\mathbb{R}-\{1,2\}$.

Ἄρα οἱ f_1+f_2 καί f_1f_2 εἶναι ὁρισμένες στό σύνολο $\mathbb{R}-\{-2,1,2\}$.

Ἡ τιμή τῆς f_1+f_2 στό x εἶναι :

$$(f_1+f_2)(x) = f_1(x)+f_2(x) = \frac{x-1}{x^2-4} + \frac{x+2}{x^2-3x+2}$$

$$= \frac{x-1}{(x+2)(x-2)} + \frac{x+2}{(x-1)(x-2)} = \frac{(x-1)(x-1)+(x+2)(x+2)}{(x+2)(x-2)(x-1)}$$

$$= \frac{x^2-2x+1+x^2+4x+4}{(x+2)(x-2)(x-1)} = \frac{2x^2+2x+5}{(x+2)(x-2)(x-1)}$$

Ἐπίσης

$$(f_1f_2)(x) = f_1(x)\,f_2(x) = \frac{x-1}{x^2-4}\;\frac{x+2}{x^2-3x+2}$$

$$= \frac{(x-1)(x+2)}{(x+2)(x-2)(x-2)(x-1)} = \frac{1}{(x-2)^2}.$$

Προσοχή : Τό γινόμενο f_1f_2 ὁρίζεται στό $\mathbb{R}-\{-2,1,2\}$, πού εἶναι ἡ τομή τῶν πεδίων ὁρισμοῦ τῶν f_1 καί f_2, καί ὄχι στό $\mathbb{R}-\{2\}$, στό ὁποῖο ἔχει νόημα τό $\frac{1}{(x-2)^2}$.

2. **Νά ἁπλοποιηθοῦν οἱ τιμές τῶν παρακάτω συναρτήσεων:**

$$f_1 \text{ μέ } f_1(x) = \frac{x^2}{1-x} + \frac{2x}{x^2-1} - \frac{1}{1+x} \quad \text{καί}$$

$$f_2 \text{ μέ } f_2(x) = \frac{x+3}{x}\;\frac{2}{x^2-2x}\;\frac{x-2}{x^2-9}.$$

Τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς f_1 εἶναι $A = \mathbb{R}-\{-1, +1\}$. Ἄρα γιά κάθε $x \in A$ ἔχουμε

$$f_1(x) = \frac{x^2}{1-x} + \frac{2x}{(x+1)(x-1)} - \frac{1}{1+x}$$

$$= \frac{-x^2}{x-1} + \frac{2x}{(x+1)(x-1)} - \frac{1}{x+1} = \frac{-x^2(x+1)+2x-(x-1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{-x^2(x+1)+(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{-(x+1)(x^2-1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{-(x+1)(x-1)(x+1)}{(x+1)(x-1)} = -x-1.$$

Τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς f_2 εἶναι τό σύνολο $A = \mathbb{R}-\{-3,0,2,3\}$.

Ἄρα γιά κάθε $x \in A$ ἔχουμε

$$f_2(x) = \frac{x+3}{x}\;\frac{2}{x^2-2x}\;\frac{x-2}{x^2-9}$$

$$= \frac{x+3}{x}\;\frac{2}{x(x-2)}\;\frac{x-2}{(x-3)(x+3)} = \frac{2(x+3)(x-2)}{x\,x(x-2)\,(x-3)(x+3)}$$

$$= \frac{2}{x^2(x-3)}.$$

3. Ἔστω ἡ συνάρτηση f μέ $f(x)=\dfrac{x^3-x}{x^2-4}$. Νά βρεθεῖ α) τό πεδίο ὁρισμοῦ της A καί β) τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς $\dfrac{1}{f}$.

α) Γιά νά ὁρίζεται ἡ f, θά πρέπει $x^2-4 \neq 0$, δηλαδή $x \neq \pm 2$. Ἄρα τό πεδίο ὁρισμοῦ της εἶναι $A = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

β) Ἡ $\dfrac{1}{f}$ ὁρίζεται στό σύνολο $A' = \{x \in A\colon f(x) \neq 0\}$. Πρέπει λοιπόν $\dfrac{x^3-x}{x^2-4} \neq 0$. Αὐτό συμβαίνει μόνο, ὅταν $x^3-x \neq 0$, δηλαδή ὅταν $x \neq 0$ καί $x \neq \pm 1$. Ἄρα A' εἶναι τό $A-\{-1,0,1\}$, δηλαδή τό $\mathbb{R} - \{-2,-1,0,1,2\}$.

4. Δίνονται οἱ συναρτήσεις f μέ $f(x) = x^2-\dfrac{1}{x}$ καί g μέ $g(x) = x+\dfrac{1}{x}$. Νά ὁριστεῖ ἡ $h = \dfrac{f}{g}$.

Τό πεδίο ὁρισμοῦ τῶν f καί g εἶναι τό $\mathbb{R}^*$ καί ἐπιπλέον $g(x) = \dfrac{x^2+1}{x} \neq 0$ γιά κάθε $x \in \mathbb{R}^*$. Ἄρα ἡ $\dfrac{f}{g}$ ὁρίζεται στό $\mathbb{R}^*$ καί εἶναι

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2-\dfrac{1}{x}}{x+\dfrac{1}{x}} = \frac{\dfrac{x^3-1}{x}}{\dfrac{x^2+1}{x}} = \frac{x^3-1}{x^2+1}.$$

Ἀσκήσεις 25,26,27,28,29,30.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ

Ἐφαρμογές στή λύση ἐξισώσεων

4.21 Ἄς πάρουμε δύο πραγματικές συναρτήσεις f καὶ g. Τό ὑποσύνολο S τοῦ $\mathbb{R}$, γιά τά στοιχεῖα τοῦ ὁποίου ἰσχύει

$$f(x) = g(x) \tag{1}$$

εἶναι τό **σύνολο λύσεων** τῆς ἐξισώσεως (1).
Μέ ἄλλα λόγια ὁ $x_0 \in \mathbb{R}$, εἶναι **λύση** ἤ **ρίζα** τῆς (1), ἄν οἱ συναρτήσεις f καί g ἔχουν τήν ἴδια τιμή στό x_0, δηλαδή ἄν $f(x_0) = g(x_0)$.
Ἄς δοῦμε τώρα μερικὲς ἐφαρμογές ἐπιλύσεως ἐξισώσεων.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Δίνονται οἱ συναρτήσεις f_1 μέ $f_1(x) = 2x-6$, f_2 μέ $f_2(x) = x^2-4$ καί f_3 μέ $f_3(x)=x^2+1$. Νά βρεθεῖ τό σύνολο λύσεων τῆς $f_1(x)\, f_2(x)\, f_3(x) = 0$.**

Εἶναι $f_1(x)f_2(x)f_3(x) = 0 \Leftrightarrow (f_1(x) = 0$ ἤ $f_2(x) = 0$ ἤ $f_3(x) = 0)$
$\Leftrightarrow (2x-6 = 0$ ἤ $x^2-4 = 0$ ἤ $x^2+1 = 0)$.

'Από τήν $2x-6=0$ παίρνουμε $x=3$. Ἑπομένως τό σύνολο λύσεων τῆς $f_1(x)=0$ εἶναι τό $S_1=\{3\}$.
'Από τήν $x^2-4=0$ παίρνουμε $x=\pm 2$. Ἑπομένως τό σύνολο λύσεων τῆς $f_2(x)=0$ εἶναι τό $S_2=\{-2,+2\}$.
Γιά τήν $x^2+1=0$ παρατηροῦμε ὅτι δέν ὑπάρχει πραγματικός ἀριθμός x πού νά τήν ἐπαληθεύει, γιατί τό ἄθροισμα τῶν θετικῶν ἀριθμῶν x^2 καί 1 εἶναι θετικός ἀριθμός. Ἑπομένως τό σύνολο λύσεων τῆς $f_3(x)=0$ εἶναι $S_3=\varnothing$.
Ἄρα τό σύνολο λύσεων τῆς $f_1(x)f_2(x)f_3(x)=0$ εἶναι (§ 1.13)
$S=S_1\cup S_2\cup S_3=\{-2, 2, 3\}$.

2. **Δίνονται οἱ συναρτήσεις f μέ** $f(x)=\dfrac{x-5}{2(x-4)}+\dfrac{4}{x^2-16}$ **καί**
g μέ $g(x)=\dfrac{2x+11}{2(x+4)}$. **Νά βρεθεῖ τό σύνολο λύσεων τῆς** $f(x)=g(x)$.

Τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς f εἶναι τό $A_1=\mathbb{R}-\{-4,4\}$ καί τῆς g εἶναι τό $A_2=\mathbb{R}-\{-4\}$. Ἄρα τομή τῶν πεδίων ὁρισμοῦ τους εἶναι τό $A=A_1\cap A_2=\mathbb{R}-\{-4,4\}$, ὁπότε γιά κάθε $x\in A$ ἔχουμε τίς ἰσοδυναμίες:

$$
\begin{aligned}
f(x)=g(x) &\Leftrightarrow \frac{x-5}{2(x-4)}+\frac{4}{(x^2-16)}=\frac{2x+11}{2(x+4)}\\
&\Leftrightarrow (x+4)(x-5)+8=(x-4)(2x+11)\\
&\Leftrightarrow x^2+4x-32=0\\
&\Leftrightarrow (x+8)(x-4)=0.\\
&\Leftrightarrow (x+8=0 \ \text{ἤ} \ x-4=0)\\
&\Leftrightarrow (x=-8 \ \text{ἤ} \ x=4).
\end{aligned}
$$

Ἡ τιμή ὅμως $x=4$ ἀπορρίπτεται, γιατί δέν ἀνήκει στό σύνολο A.
Ἄρα τό σύνολο λύσεων τῆς $f(x)=g(x)$ εἶναι $S=\{-8\}$.

3. **Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση** $\dfrac{2x}{x-1}-\dfrac{x+1}{2-x}=\dfrac{3}{x^2-3x+2}+4$.

Εἶναι $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$. Ἑπομένως ἡ ἐξίσωση ὁρίζεται στό σύνολο $A=\mathbb{R}-\{1,2\}$.

$$
\begin{aligned}
\text{Εἶναι } \frac{2x}{x-1}-\frac{x+1}{2-x}=\frac{3}{x^2-3x+2}+4 &\Leftrightarrow \frac{2x}{x-1}+\frac{x+1}{x-2}=\frac{3}{(x-1)(x-2)}+4\\
&\Leftrightarrow 2x(x-2)+(x+1)(x-1)=3+4(x-1)(x-2)\\
&\Leftrightarrow x^2-8x+12=0\\
&\Leftrightarrow (x-2)(x-6)=0\\
&\Leftrightarrow (x-2=0 \ \text{ἤ} \ x-6=0)\\
&\Leftrightarrow (x=2 \ \text{ἤ} \ x=6).
\end{aligned}
$$

'Επειδή $2\notin A$, ἡ τιμή $x=2$ ἀπορρίπτεται. Ἄρα τό σύνολο λύσεων τῆς ἐξισώσεως εἶναι τό $S=\{6\}$.

'Ασκήσεις 31,32,33.

Ἐφαρμογές στή λύση ἀνισώσεων

NA1

4.22 Ἔστω οἱ πολυωνυμικές συναρτήσεις f, g καί E τό σύνολο λύσεων τῆς $g(x)=0$. Τότε στό σύνολο $\mathbb{R}-E$ ὁρίζεται ἡ ἀνίσωση

$$\frac{f(x)}{g(x)}>0 \quad (1) \qquad \text{καθώς καί ἡ} \quad \frac{f(x)}{g(x)}<0 \qquad (2)$$

Γιά τήν (1) ἔχουμε:

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \Leftrightarrow f(x)\,g(x) > 0$$

$$\Leftrightarrow [f(x) > 0 \textbf{ καί } g(x) > 0] \textbf{ ἤ } [f(x) < 0 \textbf{ καί } g(x) < 0]$$

ὁπότε, ἄν $S_1 = \{x : f(x) > 0$ **καί** $g(x) > 0\}$, $S_2 = \{x : f(x) < 0$ **καί** $g(x) < 0\}$, τότε τό σύνολο λύσεων τῆς (1) εἶναι (§ 1.13) τό $S = S_1 \cup S_2$.

Γιά τήν (2) παρατηροῦμε ὅτι $\dfrac{f(x)}{g(x)} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{-f(x)}{g(x)} > 0$. Ἑπομένως ἡ λύση τῆς (2) ἀνάγεται στή λύση τῆς (1).

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά λυθεῖ ἡ ἀνίσωση** $\dfrac{x-2}{x-1} > 0$.

Ἡ ἀνίσωση ὁρίζεται στό σύνολο $\mathbb{R}-\{1\}$ καί σύμφωνα μέ τά προηγούμενα ἔχουμε $\dfrac{x-2}{x-1} > 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-1) > 0$

$$\Leftrightarrow [x-2 > 0 \textbf{ καί } x-1 > 0] \textbf{ ἤ } [x-2 < 0 \textbf{ καί } x-1 < 0]$$

ὁπότε $S_1 = \{x : x > 2$ **καί** $x > 1\}$ καί $S_2 = \{x : x < 2$ **καί** $x < 1\}$ ἤ $S_1 = \{x : x > 2\}$ καί $S_2 = \{x : x < 1\}$. Ἄρα τό σύνολο λύσεων τῆς ἀνισώσεως εἶναι $S = S_1 \cup S_2 = \{x : x > 2$ **ἤ** $x < 1\}$.

2. **Νά λυθεῖ ἡ ἀνίσωση** $\dfrac{2x}{x+1} > 3$.

Ἡ ἀνίσωση ὁρίζεται στό σύνολο $\mathbb{R}-\{-1\}$ καί εἶναι

$$\frac{2x}{x+1} > 3 \Leftrightarrow \frac{2x}{x+1} - 3 > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x - 3(x+1)}{x+1} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-(x+3)}{x+1} > 0$$

$$\Leftrightarrow -(x+3)(x+1) > 0$$

$$\Leftrightarrow (x+3)(x+1) < 0$$

$$\Leftrightarrow [(x+3 < 0 \textbf{ καί } x+1 > 0)] \textbf{ ἤ } [(x+3 > 0 \textbf{ καί } x+1 < 0).]$$

Ὁπότε $S_1 = \{x : x+3 < 0$ **καί** $x+1 > 0\} = \{x : x < -3$ **καί** $x > -1\} = \varnothing$ καί $S_2 = \{x : x+3 > 0$ **καί** $x+1 < 0\} = \{x : x > -3$ **καί** $x < -1\} = (-3, -1)$.

Ἄρα σύνολο λύσεων εἶναι τό $S = S_1 \cup S_2 = \varnothing \cup (-3, -1) = (-3, -1)$.

Ἀσκήσεις 34,35.

Ἀσκήσεις γιά ἐπανάληψη 36,37,38,39,40,41,42,43.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ἔστω ἡ συνάρτηση f μέ $f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{ἄν } x \leq 0 \\ 5x-4, & \text{ἄν } x > 0. \end{cases}$

Νά βρεθοῦν οἱ f(3), f(–2), f(0).

2. Ἔστω ἡ συνάρτηση f μέ $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & \text{ἄν } x < 0 \\ \alpha x+3, & \text{ἄν } 0 \leq x < 1 \\ \beta x^2+2, & \text{ἄν } x \geq 1 \end{cases}$

Νά βρεθοῦν τά α καί β ἄν εἶναι $f(-1) = f(1)$ καί $f\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)$ καί νά ὑπολογιστεῖ τό ἄθροισμα $f(2) - 2f\left(\frac{1}{4}\right) + f(-2)$.

3. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ συνάρτηση f μέ $f(x) = x^3 - x + 5$, $x \in \{-1, 0, 1\}$ εἶναι σταθερή συνάρτηση.

4. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ συνάρτηση f μέ $f(x) = x^3 - 8x$, $x \in \{-3, 0, 3\}$ εἶναι ταυτοτική συνάρτηση.

5. Δίνονται οἱ συναρτήσεις f_1 μέ $f_1(x) = 2x^2 + 1$, $x \in \{1,2,3\}$ καί f_2 μέ $f_2(x) = x^2 + 2$, $x \in \{-1, 1, 2, 3\}$. Νά βρεθοῦν οἱ f_1^{-1} καί f_2^{-1} καί νά ἐξεταστεῖ ἄν εἶναι συναρτήσεις.

6. Νά βρεθοῦν τά πεδία ὁρισμοῦ τῶν παρακάτω συναρτήσεων καί νά ἁπλοποιηθοῦν οἱ τιμές τους:

α) f_1 μέ $f_1(x) = \dfrac{x+4}{(2x+5)^2 - (x+1)^2}$

β) f_2 μέ $f_2(x) = \dfrac{(6x+8x^2)(x+3)}{2(4x^3+16x^2+12x)}$

γ) f_3 μέ $f_3(x) = \dfrac{(x+2)(2x+1)^2 - 16(x+2)}{(2x+5)(7-x)+4x^2-25}$

δ) f_4 μέ $f_4(x) = \dfrac{x^2-2x-15}{x^2-9} + \dfrac{12-4x}{x^2-6x+9}$.

7. Δίνονται οἱ συναρτήσεις f μέ $f(x) = x+2$ καί g μέ $g(x) = x^2+2$ μέ κοινό πεδίο ὁρισμοῦ $E = \{0,1\}$. Νά δειχθεῖ:
α) $f = g$ β) $f \neq g$, ἄν ὡς πεδίο ὁρισμοῦ τους πάρουμε τό $\mathbb{R}$.

8. Γιά τή συνάρτηση f μέ $f(x) = \dfrac{x(x-1)(x-2)}{x^2-3x+2}$ νά βρεθεῖ τό πεδίο ὁρισμοῦ της καί νά δειχθεῖ ὅτι εἶναι ταυτοτική.

9. Γιά τίς συναρτήσεις f, g, h τοῦ F_A νά ἀποδειχθεῖ ὅτι $f = g \Leftrightarrow f+h = g+h$.

10. Δίνονται οἱ σταθερές συναρτήσεις f μέ $f(x) = 3$ καί g μέ $g(x) = 7$. Νά ὁριστοῦν οἱ συναρτήσεις $f+g$, $f-g$, $-3f+5g$.

11. Δίνονται οἱ συναρτήσεις:

$$f_1 \text{ μέ } f_1(x) = \begin{cases} x^2+2x+3 & x \in [1,5] \\ 2x-1 & x \notin [1,5] \end{cases} \quad \text{καί } f_2 \text{ μέ } f_2(x) = \begin{cases} x-1 & x \in [3,7] \\ -x^2-2x+5 & x \notin [3,7]. \end{cases}$$

Νά ὁριστεῖ ἡ f_1+f_2 καί νά βρεθοῦν τά διαστήματα στά ὁποῖα εἶναι σταθερή.

12. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι $k(f+g) = kf+kg$, ὅταν $k \in \mathbb{R}$ καί f, g συναρτήσεις τοῦ F_A. Ἐφαρμογή γιά $k = -1$.

13. Δίνονται οἱ συναρτήσεις f μέ $f(x) = 2x+5$ καί g μέ $g(x) = x+4$. Νά ὁριστοῦν οἱ συναρτήσεις $f+g$, $3f \pm 2g$.

14. Δίνονται οἱ σταθερές συναρτήσεις f μέ $f(x) = 5$ καί g μέ $g(x) = 7$. Νά ὁριστοῦν οἱ συναρτήσεις $5f \pm 7g$.

15. Ἄν f, g εἶναι συναρτήσεις τοῦ F_A, νά δειχθεῖ ὅτι $(-f)g = -fg$.

16. Ἄν f, g, h εἶναι συναρτήσεις τοῦ F_A, νά δειχθεῖ ὅτι
$$f = g \Rightarrow fh = gh.$$

17. Ἄν f μέ $f(x) = \dfrac{x-3}{x+1}$, νά βρεθεῖ:

α) τό πεδίο ὁρισμοῦ της A

β) Τό σύνολο A' στό ὁποῖο ὁρίζεται ἡ $\dfrac{1}{f}$.

18. Δίνονται οἱ συναρτήσεις f_1 μέ $f_1(x) = x+1$ καί f_2 μέ $f_2(x) = x^2-1$. Νά ὁριστοῦν οἱ συνάρτησεις $\dfrac{1}{f_1} + \dfrac{1}{f_2}$ καί $\dfrac{f_1}{f_2}$.

19. Δίνονται οἱ συναρτήσεις f μέ $f(x) = x^3-x^2-2x$ καί g μέ $g(x) = x^2-2x$. Νά ὁριστεῖ ἡ συνάρτηση $\dfrac{f}{g}$.

20. Ἄν f_1, f_2, f_3, f_4 εἶναι συναρτήσεις μέ $f_1(x)=(2x+3)^3-1$, $f_2(x) = x+1$, $f_3(x) = x+2$ καί $f_4(x) = 2x+3$, νά δειχθεῖ ὅτι $f_1 = 2f_2(4f_3^2-f_4)$.

21. Νά ἁπλοποιηθεῖ ἡ τιμή τῆς συναρτήσεως f στό x
$$f(x) = (x-1)^3-2(x+1)^2+(x^2-x+1)^2-(x^2+1).$$

22. Ἄν α,β,γ εἶναι ὁποιεσδήποτε πραγματικές συναρτήσεις, νά δειχθεῖ ὅτι

α) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma = \dfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2]$

β) $(\alpha+\beta+\gamma)^3 = \alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$.

23. Νά παραγοντοποιηθεῖ τό πολυώνυμο $f(x) = x^3-2x^2-9x+18$.

24. Νά παραγοντοποιηθοῦν τά πολυώνυμα α) $f_1(x) = (x-1)^3+(x-2)^3+(3-2x)^3$ καί β) $f_2(x) = (x^2-4)^2-4(x^2-5x+6)^2$.

25. Δίνονται οἱ συναρτήσεις
f_1 μέ $f_1(x) = \dfrac{3x+1}{x-2}$ καί f_2 μέ $f_2(x) = \dfrac{5x-4}{(x-1)(x+3)}$.
Νά ὁριστεῖ ἡ συνάρτηση f_1+f_2.

26. Ἄν f_1 μέ $f_1(x) = \dfrac{3x+2}{x(x-1)}$ καί f_2 μέ $f_2(x) = \dfrac{4}{x(x-2)}$, νά ὁριστεῖ ἡ συνάρτηση f_1+f_2.

27. Ἔστω οἱ συναρτήσεις f_1 μέ $f_1(x) = \dfrac{3x+1}{x-2}$ καί f_2 μέ $f_2(x) = \dfrac{5x-4}{x^2-4x+3}$.
Νά ὁριστεῖ τό ἄθροισμα f_1+f_2 καί τό γινόμενο f_1f_2.

28. Νά ἁπλοποιηθεῖ ἡ τιμή τῆς συναρτήσεως f στό x, $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-1} - \dfrac{6}{x^2+2x-3}$.

29. Νά ἁπλοποιηθοῦν οἱ τιμές τῶν συναρτήσεων f_1 καί f_2 στό x:
$$f_1(x) = \frac{\dfrac{1}{2} - \dfrac{4}{x^3}}{\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2x}} \quad \text{καί} \quad f_2(x) = \frac{9x^2-4\alpha^2}{\dfrac{x-\alpha}{\alpha-2x} - 1}.$$

30. Δίνεται ἡ συνάρτηση f μέ $f(x) = \dfrac{x^2+1}{(x-3)(x+2)}$. Νά ὁριστεῖ ἡ συμμετρική της.

31. Νά λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:

α) $(x+2)^2+(x^2+5x+6)^2=0$

β) $(x-1)^2(x^2-4)(x^2+2)=0$

γ) $(x-3)^2-(x^2-4x+3)=0$

32. Νά λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:

α) $x^3+3x^2+3x+1=0$

β) $(x-1)^2+(x^2-1)=0$

γ) $2x^3-2x=x^2-1$

33. Νά λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:

α) $\dfrac{x-2}{x}+\dfrac{4}{x-2}-\dfrac{8}{x^2-2x}=0$

β) $\dfrac{1}{x^2+3x+2}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{x+1}{2(x+2)}$.

34. Νά λυθοῦν οἱ ἀνισώσεις:

α) $\dfrac{(x+1)^3}{(x-2)}\geq 0$

β) $\dfrac{(x-1)^2(x+1)}{x+3}\leq 0$.

35. Νά βρεθεῖ γιά ποιές τιμές τοῦ x συναληθεύουν οἱ ἀνισώσεις:

$$1<\frac{1+x}{1-x}<2.$$

36. Νά ἁπλοποιηθοῦν οἱ τιμές τῶν συναρτήσεων f_1 καί f_2 στό x,

$$f_1(x)=\frac{\dfrac{x}{\alpha}+\dfrac{\alpha^2}{x^2}}{\dfrac{\alpha}{x^2}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\alpha}} \quad \text{καί} \quad f_2(x)=\frac{x}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x-1}}}.$$

37. Νά λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:

α) $\dfrac{2x}{x^2-4}-\dfrac{x-1}{2-x}=\dfrac{1}{x+2}$

β) $\dfrac{x^2}{x+1}+1=\dfrac{1}{x+1}+2x$.

38. Νά λυθοῦν οἱ ἀνισώσεις:

α) $\dfrac{(x-2)^2(x+1)}{x-3}\geq 0$ β) $\dfrac{x+2}{2x-3}\leq 0$ γ) $\dfrac{3x-1}{x+3}>0$.

39. Ἄν $f_1(x)=(x-2)^2(2x+1)-(2-x)^2(2x-5)$

$f_2(x)=\dfrac{2x^2-10x+12}{x^2-2x-3}$

$f_3(x)=(x^2-4)(x+1)+(2-x)(x^2-1)$

νά ἀποδειχθεῖ ὅτι $f_1=f_2f_3$ γιά $x\neq -1,3$.

40. Νά βρεθοῦν οἱ τιμές τοῦ x γιά τίς ὁποῖες συναληθεύουν οἱ ἀνισώσεις

$$5 > \frac{2x-1}{x+3} > 3.$$

41. Θεωροῦμε τή συνάρτηση f πού ἀπεικονίζει κάθε φυσικό ἀριθμό στό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεώς του διά 3.

α) Νά βρεθεῖ τό σύνολο τιμῶν τῆς f.

β) Νά βρεθοῦν οἱ τιμές $f(8)$, $f(18)$, $f(19)$ καί $f(22)$.

γ) Νά ἐπαληθεύσετε μέ παραδείγματα ὅτι, ἄν γιά δύο φυσικούς α, β μέ $\alpha > \beta$ συμβαίνει $f(\alpha) = f(\beta)$, τότε $f(\alpha - \beta) = 0$.

δ) Ὁμοίως νά ἐπαληθεύσετε ὅτι, ἄν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$ καί $f(\alpha) = f(\beta) = 0$, τότε $f(\alpha+\beta) = 0$, $f(\alpha\gamma) = 0$, $f(\alpha+\gamma) = f(\gamma)$.

42. Νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ δύο συναρτήσεις $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ καί $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ πού ὁρίζονται ἀντίστοιχα ἀπό τούς τύπους:

$$f(\nu) = (-1)^{\nu}.2 + (-1)^{\nu+1}.3 \quad \text{καί} \quad g(\nu) = \begin{cases} -1, & \text{ἄν } \nu \text{ ἄρτιος} \\ 1, & \text{ἄν } \nu \text{ περιττός} \end{cases}$$

εἶναι ἴσες. Στή συνέχεια νά ἀποδείξετε ὅτι γιά κάθε $k \in \mathbb{N}$ ἰσχύει $g(k) + g(k+1) = 0$.

43. Ἄν f_1 μέ $f_1(x) = x^2 + 2x + 1$ καί f_2 μέ $f_2(x) = x^2 - 1$ εἶναι δύο πραγματικές συναρτήσεις, νά δειχθεῖ ὅτι $(f_1{}^4 - f_2{}^4)(x) = 8x\,(x^2+1)\, f_1{}^2(x)$.

1. Εἶναι $f(3) = 5\,.3-4 = 11$, $f(-2) = -(-2)^2 = -4$, $f(0) = -(0)^2 = 0$.

2. Εἶναι $f(-1) = (-1-1)^2 = 4$, $f(1) = \beta.1^2+2 = \beta+2$, $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}-1\right)^2$ $= \frac{9}{4}$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \alpha\frac{1}{2}+3$. Ἄρα $4 = \beta+2$, καί $\frac{9}{4} = \frac{\alpha}{2}+3$ κτλ.

3. Βρίσκουμε $f(-1) = f(0) = f(1)$.

4. Βρίσκουμε $f(-3) = -3$, $f(0) = 0$, $f(3) = 3$.

5. Τό γράφημα G_1 τῆς f_1 εἶναι $G_1 = \{(1,3), (2,9), (3,19)\}$, ἄρα ἡ f_1 εἶναι «1 — 1 καί ἐπί» τοῦ $\{1,2,3\}$ στό $\{3,9,19\}$ καί ἡ f_1^{-1} εἶναι συνάρτηση μέ γράφημα τό $G_1^{-1} = \{(3,1), (9,2), (19,3)\}$. Ἡ f_2^{-1} δέν εἶναι συνάρτηση.

6. Παραγοντοποιοῦμε τούς παρονομαστές καί ἐξαιροῦμε ἀπό τό $\mathbb{R}$ τίς τιμές πού τούς μηδενίζουν. Ἔτσι ἡ f_1 ἔχει πεδίο ὁρισμοῦ τό $\mathbb{R}-\{-4,-2\}$ κτλ.

7. **α)** Εἶναι $f(0) = g(0) = 2$ καί $f(1) = g(1) = 3$.
β) Ἐπειδή δέν εἶναι $f(x) = g(x)$ γιά κάθε πραγματικό x.

8. Εἶναι $x^2-3x+2 = (x-1)(x-2) \neq 0$, ὅταν $x \in \mathbb{R}-\{1,2\}$, καί

$$f(x) = \frac{x(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)} = x \text{ γιά } x \in \mathbb{R}-\{1,2\}.$$

9. Εἶναι: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x)+h(x) = g(x)+h(x)$.

10. $(f+g)(x) = f(x)+g(x) = 3+7 = 10$ κτλ.

11. Εἶναι γιά $x<1$ $(f_1+f_2)(x) = f_1(x)+f_2(x) = (2x-1)+(-x^2-2x+5) = -x^2+4$ κτλ.

12. Εἶναι $(k(f+g))(x) = (kf+kg)(x) = (kf)(x)+(kg)(x) = kf(x)+kg(x)$ κτλ.

13. $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ κτλ.

14. $(5f \pm 7g)(x) = (5f)(x) \pm (7g)(x) = 5f(x) \pm 7g(x)$ κτλ.

15. Ἀποδεικνύουμε ὅτι $((-f)g)(x) = (-fg)(x)$.

16. Ἀποδεικνύουμε ὅτι $f(x) = g(x) \Rightarrow (fh)(x) = (gh)(x)$.

17. **α)** $x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$. Ἄρα $A = \mathbb{R}-\{-1\}$.
β) Θά πρέπει ἀκόμη $f(x) \neq 0$, δηλαδή $x-3 \neq 0$ ἤ $x \neq 3$. Ἄρα $A' = \mathbb{R}-\{-1,3\}$.

18. Θά πρέπει $f_1(x) \neq 0$ καί $f_2(x) \neq 0$ δηλ. $x \neq -1,1$. Ὁπότε γιά κάθε $x \in \mathbb{R}-\{-1,1\}$ εἶναι $\left(\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}\right)(x) = \left(\frac{1}{f_1}\right)(x) + \left(\frac{1}{f_2}\right)(x)$ $= \frac{1}{f_1(x)} + \frac{1}{f_2(x)}$ κτλ.

19. Θά πρέπει $g(x) \neq 0$, ὁπότε $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

20. Ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι: $f_1(x) = 2f_2(x)\,(4f_3^2(x) - f_4(x))$.

21. Μετά τίς πράξεις ἔχουμε $f(x) = x^4-x^3-3x^2-3x-3$.

22. α) Κάνουμε τίς πράξεις στό β' μέλος καί καταλήγουμε στό πρῶτο.
β) $(\alpha+\beta+\gamma)^3=[(\alpha+\beta)+\gamma]^3=\dots$

23. Ἐπειδή $f(2)=0$, τό $f(x)$ θά διαιρεῖται μέ τό $x-2$ κτλ.

24. α) Παρατηροῦμε ὅτι $(x-1)+(x-2)+(3-2x)=0$ καί ἐφαρμόζουμε τήν 22(α).
β) Τό $f_2(x)$ εἶναι διαφορά τετραγώνων.

25. Τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς f_1 εἶναι $\mathbb{R}-\{2\}$, καί τῆς f_2 τό $\mathbb{R}-\{-3,1\}$. Ὁπότε γιά κάθε $x\in\mathbb{R}-\{-3,1,2\}$ εἶναι $(f_1+f_2)(x)=f_1(x)+f_2(x)=\dots$

26. Ὅμοια μέ τήν (25).

27. Ὅμοια μέ τήν (25).

28. Μετά τίς πράξεις ἔχουμε $f(x)=\dfrac{x}{(x+1)(x+3)}$.

29. Μετά τίς πράξεις στά σύνθετα κλάσματα ἔχουμε $f_1(x)=\dfrac{2(x-2)}{x}$ καί $f_2(x)=(3x+2\alpha)(\alpha-2x)$.

30. Ἄν g ἡ συμμετρική της θά εἶναι $g=\dfrac{1}{f}$ μέ $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ κτλ.

31. α) Πρέπει νά εἶναι ($x+2=0$ **καί** $x^2+5x+6=0$) κτλ.
β) $x=1$ ἤ $x=\pm 2$ ἀφοῦ $x^2+2\neq 0$.
γ) $(x-3)^2-(x^2-4x+3)=0\Leftrightarrow(x-3)^2-(x-1)(x-3)=0$ κτλ.

32. α) $x^3+3x^2+3x+1=0\Leftrightarrow(x^3+1)+3x(x+1)=0\Leftrightarrow(x+1)(x^2-x+1)+3x$ $+3x(x+1)=0$ κτλ.
β) $(x-1)^2+(x^2-1)=0\Leftrightarrow(x-1)^2+(x-1)(x+1)=0$ κτλ.
γ) $2x^3-2x=x^2-1\Leftrightarrow 2x(x^2-1)-(x^2-1)=0$ κτλ.

33. α) $\dfrac{x-2}{x}+\dfrac{4}{x-2}-\dfrac{8}{x(x-2)}=0$. Πρέπει $x(x-2)\neq 0$. Βρίσκουμε $x=\pm 2$. Ἡ $x=2$ ἀπορρίπτεται.
β) Εἶναι $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$. Βρίσκουμε $x=-1$ πού ἀπορρίπτεται καί $x=-3$.

34. α) $\dfrac{(x+1)^3}{x-2}\geq 0\Leftrightarrow[(x+1)^3(x-2)\geq 0$ **καί** $x\neq 2)]\Leftrightarrow[(x+1)^2(x+1)(x-2)\geq 0$ καί $x\neq 2]$ $\Leftrightarrow[(x+1)(x-2)\geq 0$ **καί** $x\neq 2]\Leftrightarrow(x\leq -1$ **ἤ** $x>2)$.
β) $\dfrac{(x-1)^2(x+1)}{x+3}\leq 0\Leftrightarrow[(x-1)^2(x+1)(x+3)\leq 0$ **καί** $x\neq -3]$ $\Leftrightarrow x-1=0$ **ἤ** $[(x+1)(x+3)\leq 0$ **καί** $x\neq -3]$ κτλ.

35. $1<\dfrac{1+x}{1-x}<3\Leftrightarrow\left(1<\dfrac{1+x}{1-x}\right.$ **καί** $\left.\dfrac{1+x}{1-x}<3\right)$ κτλ.

36. Κάνουμε τίς πράξεις στά σύνθετα κλάσματα καί ἔχουμε
$f_1(x)=x+\alpha$ $\quad f_2(x)=x^2$.

37. α) Εἶναι $\dfrac{2x}{(x+2)(x-2)}+\dfrac{x-1}{x-2}=\dfrac{1}{x+2}$ μέ $x\neq\pm 2$ κτλ. Βρίσκουμε $x=0$ ἤ $x=-2$ πού ἀπορρίπτεται. β) Ὅμοια βρίσκουμε $x=0$.

38. α) Ὅμοια μέ τήν (34 β) β) $\frac{x+2}{2x-3} \leq 0 \Leftrightarrow \left\{(x+2)(2x-3) \leq 0\right.$ καί $\left.x \neq \frac{3}{2}\right\} \ldots$ γ) $\frac{3x-1}{x+3} > 0 \Leftrightarrow (3x-1)(x+3) > 0 \ldots$

39. Θά ἀποδείξουμε ὅτι $f_1(x) = f_2(x)f_3(x)$ γιά $x \neq -1{,}3$.

40. Ὅμοια μέ τήν (35).

41. α) Τά διαφορετικά ὑπόλοιπα εἶναι οἱ 0,1,2. Ἄρα τό σύνολο τιμῶν τῆς f εἶναι τό $\{0,1,2\}$.

β) Θά βροῦμε τά ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων 8 : 3, 18 : 3 κτλ.

γ) Παίρνουμε τά ζευγάρια $\alpha = 28$, $\beta = 25$, ἤ $\alpha = 38$ $\beta = 32$ κτλ.

δ) Παίρνουμε $\alpha = 12$, $\beta = 18$ καί $\gamma = 5$...

42. Ἐξετάζουμε τίς 2 περιπτώσεις $\nu =$ ἄρτιος καί $\nu =$ περιττός. Ἄν $k =$ ἄρτιος, τότε $k+1 =$ περιττός κτλ.

43. Εἶναι $(f_1^4 - f_2^4)(x) = f_1^4(x) - f_2^4(x) = [f_1^2(x) + f_2^2(x)]\,[f_1^2(x) - f_2^2(x)] = \ldots$ Θέτουμε $f_1(x) = (x+1)^2$ καί $f_2(x) = (x-1)(x+1)$.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Εἶναι οἱ: α (ψευδής), β (ἀληθής), δ (ἀληθής). Ἡ γ δέν εἶναι λογική πρόταση.

2. Ἁπλή ἡ β. Σύνθετες εἶναι οἱ α (ὄχι p), γ(ἄν p_1 τότε q) καί δ (p καί q).

3. **α)** Ἔχουμε:
p: ὁ α εἶναι ρητός ἀριθμός.
q: ὁ β εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός.
r: τό ἄθροισμα $\alpha+\beta$ εἶναι ρητός ἀριθμός.
Ἄρα: Ἄν (p καί q), τότε r.

β) Ἡ πρόταση p: «Οἱ διαγώνιοι τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ εἶναι κάθετες ἤ διχοτομοῦν τίς γωνίες του» εἶναι σύνθετη καί ἔχει μορφή p_1 ἤ p_2, ὅπου:
p_1: οἱ διαγώνιοι τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ εἶναι κάθετες.
p_2: οἱ διαγώνιοι τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ διχοτομοῦν τίς γωνίες του.
q: τό παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ εἶναι ρόμβος.
Ἄρα: Ἄν (p_1 ἤ p_2) τότε q.

γ) Ἔχουμε: p: $\alpha\beta=0$ q: $\alpha=0$ r: $\beta=0$
Ἄρα: Ἄν ὄχι p, τότε (ὄχι q ἤ ὄχι r).

δ) Ἔχουμε:
p: ὁ α εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 5.
q: τό ἄθροισμα $\alpha+\beta$ εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 5.
r: ὁ β εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 5.
Ἄρα: Ἄν (p καί q), τότε r.

ε) p: τό παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ εἶναι ρόμβος.
q_1: οἱ διαγώνιές του εἶναι κάθετες.
q_2: οἱ διαγώνιές του διχοτομοῦν τίς γωνίες του.
Ἄρα: Ἄν ὄχι p, τότε (ὄχι q_1 ἤ ὄχι q_2).

στ) Ἔχουμε:
p_1: ὁ α εἶναι ἄρτιος ἀριθμός
p_2: ὁ β εἶναι ἄρτιος ἀριθμός
q_1: ὁ α εἶναι περιττός ἀριθμός
q_2: ὁ β εἶναι περιττός ἀριθμός
r: τό ἄθροισμα $\alpha+\beta$ εἶναι ἄρτιος ἀριθμός.
Ἄρα: Ἄν (p_1 καί p_2) ἤ (q_1 καί q_2), τότε r.

4. α καί δ, γ καί ε.

5. $A=\{12,24\}$.

6. $G=\{(3,2),(5,2),(5,4),(7,2),(7,4),(7,6)\}$.

7. Βλέπε ὑποδείξεις.

8. Τό σύνολο ἀλήθειας τοῦ p(x) εἶναι τό $\{2,4,6,\ldots,20\}$ καί τοῦ q(x) τό $\{5,10,15,20\}$. Ἄρα τά σύνολα ἀλήθειας τῶν $\overline{p}(x)$, $\overline{q}(x)$, $p(x)\wedge q(x)$ καί $p(x)\vee q(x)$ εἶναι ἀντιστοίχως τά:
$\{1,3,5,7,9,11,13,15,17,19\}$
$\{1,2,3,4,6,7,8,9,11,12,13,14,16,17,18,19\}$
$\{10,20\}$
$\{2,4,5,6,8,10,12,14,15,16,18,20\}$.

9. Έστω p: $k = \lambda + 1$ καί q : $k = \lambda$. Ἐπειδή ἡ p εἶναι ἀληθής καί ἡ q εἶναι ψευδής, οἱ συνεπαγωγές $p \Rightarrow p$, $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow p$, $q \Rightarrow q$ εἶναι ἀντιστοίχως (α), (ψ), (α), (α). Ἐπίσης οἱ ἰσοδυναμίες $p \Leftrightarrow p$, $p \Leftrightarrow q$, $q \Leftrightarrow p$, $q \Leftrightarrow q$ εἶναι (α), (ψ), (ψ), (α).

10. Σύμφωνα μέ τήν § 1.18 θά ἔχουμε τόν ἀκόλουθο πίνακα ἀλήθειας

p	q	r	$p \wedge q \wedge r$	$p \vee q \vee r$
α	α	α	α	α
α	α	ψ	ψ	α
α	ψ	α	ψ	α
α	ψ	ψ	ψ	α
ψ	α	α	ψ	α
ψ	α	ψ	ψ	α
ψ	ψ	α	ψ	α
ψ	ψ	ψ	ψ	ψ

11. **α)** $\exists\ x \in \mathbb{Z}$, x εἶναι πρῶτος (ἀληθής).

β) $\forall x$, x εἶναι ρόμβος [Ω: τό σύνολο τῶν τετραπλεύρων] (ψευδής).

γ) $\forall x$, (δύο διάμεσοι τοῦ x εἶναι ἴσες) $\Rightarrow$ (τό x εἶναι ἰσοσκελές) [Ω: τό σύνολο τῶν τριγώνων] (ἀληθής).

δ) $\forall\ x \in \mathbb{N}$, (x διαιρεῖται μέ τό 4) $\Rightarrow$ (x λήγει σέ 0) (ψευδής).

12. **α)** Τό τετράγωνο ἑνός πραγματικοῦ ἀριθμοῦ μή μηδενικοῦ εἶναι θετικός ἀριθμός (ἀληθής).

β) Ὑπάρχει πραγματικός ἀριθμός τοῦ ὁποίου τό τετράγωνο εἶναι ἀρνητικός ἀριθμός (ψευδής).

γ) Ἄν οἱ διαγώνιες παραλληλογράμμου διχοτομοῦν τίς γωνίες του, τότε αὐτό εἶναι ρόμβος (ἀληθής).

δ) Ἄν οἱ γωνίες ἑνός τριγώνου εἶναι ἴσες, τότε τό τρίγωνο εἶναι ἰσόπλευρο καί ἀντιστρόφως.

13. Γιά τίς προτάσεις α καί β τῆς ἀσκ. 12 ἔχουμε (§ 1.22):

α) $\exists\ x \in \mathbb{R}^*$, $x^2 \not> 0$, δηλ. $\exists\ x \in \mathbb{R}^*$, $x^2 \leq 0$ (ψευδής).

β) $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $x^2 \not< 0$, δηλ. $\exists\ x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$ (ἀληθής).

Ὁμοίως γιά τίς προτάσεις α καί β τῆς ἀσκ. 11 ἔχουμε: (Βλ. Ἀσκ. 11).

α) $\forall\ x \in \mathbb{Z}$, x δέν εἶναι πρῶτος, δηλ. κάθε ἀκέραιος δέν εἶναι πρῶτος (ψευδής).

β) $\exists$ x, x δέν εἶναι ρόμβος, δηλ. ὑπάρχει τετράπλευρο πού δέν εἶναι ρόμβος (ἀληθής).

14. **α)** Γιά κάθε $x \in A$ ἡ p(x) εἶναι ἀληθής. Καί ἀφοῦ ἰσχύει ἡ συνεπαγωγή $p(x) \Rightarrow q(x)$, θά εἶναι καί ἡ q(x) ἀληθής, ἄρα θά εἶναι καί $x \in B$, δηλ. $A \subseteq B$.

β) Ἀντιστρόφως ἄν:

i) $x \in A$, τότε $x \in B$ καί οἱ p(x) καί q(x) εἶναι ἀληθεῖς.
Ἄρα καί ἡ $p(x) \Rightarrow q(x)$ εἶναι ἀληθής.

ii) $x \notin A$, τότε p(x) ψευδής. Ἄρα ἡ $p(x) \Rightarrow q(x)$ ἀληθής.
Συνεπῶς $\forall x$, $p(x) \Rightarrow q(x)$.

15. α)

p	$p \wedge p$	$p \wedge p \Rightarrow p$
α	α	α
ψ	ψ	α

β)

p	$p \vee p$	$p \vee p \Rightarrow p$.
α	α	α
ψ	ψ	α

16. α)

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$	$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
α	α	α	α	α
α	ψ	α	α	α
ψ	α	α	α	α
ψ	ψ	ψ	ψ	α

β)

$p \wedge q$	$q \wedge p$	$(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$
α	α	α
ψ	ψ	α
ψ	ψ	α
ψ	ψ	α

γ)

p	q	$p \wedge q$	$p \wedge q \Rightarrow p$
α	α	α	α
α	ψ	ψ	α
ψ	α	ψ	α
ψ	ψ	ψ	α

δ)

p	q	$p \wedge q$	$p \wedge q \Rightarrow q$
α	α	α	α
α	ψ	ψ	α
ψ	α	ψ	α
ψ	ψ	ψ	α

ε)

p	q	$p \vee q$	$p \Rightarrow p \vee q$
α	α	α	α
α	ψ	α	α
ψ	α	α	α
ψ	ψ	ψ	α

στ)

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$	$[(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}] \Rightarrow \overline{p}$
α	α	ψ	ψ	α	ψ	α
α	ψ	ψ	α	ψ	ψ	α
ψ	α	α	ψ	α	ψ	α
ψ	ψ	α	α	α	α	α

ζ)

p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$	$p \wedge (p \vee q) \Rightarrow p$
α	α	α	α	α
α	ψ	α	α	α
ψ	α	α	ψ	α
ψ	ψ	ψ	ψ	α

η)

$p \wedge q$	$p \vee (p \wedge q)$	$p \vee (p \wedge q) \Rightarrow p$
α	α	α
ψ	α	α
ψ	ψ	α
ψ	ψ	α

17. α)

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$p \Rightarrow r$	$q \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$	$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
α	α	α	α	α	α	α	α
α	α	ψ	α	ψ	ψ	ψ	α
α	ψ	α	ψ	α	α	ψ	α
α	ψ	ψ	ψ	ψ	α	ψ	α
ψ	α	α	α	α	α	α	α
ψ	α	ψ	α	α	ψ	ψ	α
ψ	ψ	α	α	α	α	α	α
ψ	ψ	ψ	α	α	α	α	α

β)

p	q	r	$p \vee q$	$q \vee r$	$p \vee (q \vee r)$	$(p \vee q) \vee r$	$[p \vee (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \vee r]$
α	α	α	α	α	α	α	α
α	α	ψ	α	α	α	α	α
α	ψ	α	α	α	α	α	α
α	ψ	ψ	α	ψ	α	α	α
ψ	α	α	α	α	α	α	α
ψ	α	ψ	α	α	α	α	α
ψ	ψ	α	ψ	α	α	α	α
ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	α

γ)

$p \wedge q$	$q \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$	$(p \wedge q) \wedge r$	$[p \wedge (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \wedge r]$
α	α	α	α	α
α	ψ	ψ	ψ	α
ψ	ψ	ψ	ψ	α
ψ	ψ	ψ	ψ	α
ψ	α	ψ	ψ	α
ψ	ψ	ψ	ψ	α
ψ	ψ	ψ	ψ	α
ψ	ψ	ψ	ψ	α

δ)

p	q	r	$p \vee q$	$p \vee r$	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)]$
α	α	α	α	α	α	α	α	α
α	α	ψ	α	α	ψ	α	α	α
α	ψ	α	α	α	ψ	α	α	α
α	ψ	ψ	α	α	ψ	α	α	α
ψ	α	α	α	α	α	α	α	α
ψ	α	ψ	α	ψ	ψ	ψ	ψ	α
ψ	ψ	α	ψ	α	ψ	ψ	ψ	α
ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	α

ε)

$q \vee r$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$p \wedge (q \vee r)$	$[(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$	$[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$
α	α	α	α	α	α
α	α	ψ	α	α	α
α	ψ	α	α	α	α
ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	α
α	ψ	ψ	ψ	ψ	α
α	ψ	ψ	ψ	ψ	α
α	ψ	ψ	ψ	ψ	α
ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	α

18 Ἐπειδή $p \Leftrightarrow q$ εἶναι $(p \Rightarrow q)$ καί $(q \Rightarrow p)$, ὁ λ.τ. $\overline{p \Leftrightarrow q}$ εἶναι ἰσοδύναμος (Νόμος De Morgan) μέ $\overline{p \Rightarrow q}$ ἤ $\overline{q \Rightarrow p}$ καί σύμφωνα μέ τήν ἐφαρμογή τῆς § 1.27 εἶναι ἰσοδύναμος μέ τόν λ.τ. $(p \wedge \overline{q})$ ἤ $(q \wedge \overline{p})$.

19. Γιά τήν πρόταση γ τῆς ἀσκ. 12 παρατηροῦμε ὅτι ἡ ἄρνηση τῆς συνεπαγωγῆς πού περιέχει εἶναι ἰσοδύναμη (§ 1.27 Ἐφ.) μέ: «Οἱ διαγώνιες τοῦ x διχοτομοῦν τίς γωνίες του καί τό x δέν εἶναι ρόμβος». Ἄρα ἡ ἄρνηση τῆς γ ἰσοδυναμεῖ (§ 1.22) μέ: $\exists$ x, οἱ διαγώνιες τοῦ x διχοτομοῦν τίς γωνίες του καί τό x δέν εἶναι ρόμβος (ψευδής).

Ὁμοίως βρίσκουμε ὅτι ἡ ἄρνηση τῆς γ τῆς ἀσκ. 11 ἰσοδυναμεῖ μέ:
«Ὑπάρχει τρίγωνο μέ δύο ἴσες διαμέσους τό ὁποῖο δέν εἶναι ἰσοσκελές (ψευδής)».
Ἐφαρμόζοντας ὁμοίως τήν ἄσκηση 18, ἡ ἄρνηση τῆς δ τῆς ἀσκ. 12 ἰσοδυναμεῖ μέ:
$\exists$ x, (x εἶναι ἰσόπλευρο καί δέν εἶναι ἰσογώνιο) ἤ (x εἶναι ἰσογώνιο καί δέν εἶναι ἰσόπλευρο) (ψευδής).
Ὁμοίως βρίσκουμε ὅτι ἡ ἄρνηση τῆς δ τῆς ἀσκ. 11 εἶναι ἰσοδύναμη μέ:
«Ὑπάρχει φυσικός ἀριθμός πού διαιρεῖται μέ τό 4 καί δέ λήγει σέ 0 ἤ λήγει σέ μηδέν καί δέ διαιρεῖται μέ τό 4» (ἀληθής).

20. Ὑποθέτουμε ὅτι ὁ x εἶναι ἄρτιος. Τότε $x=2\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$ καί $x^2= xx=(2\nu)\,(2\nu)=2(2\nu^2)$. Ἄρα ὁ x^2 ἄρτιος.

21. Ἡ ἀντιθετοαντίστροφη συνεπαγωγή εἶναι:
x περιττός $\Rightarrow$ x^2 περιττός, ἡ ὁποία ἰσχύει (§ 1.29 Παράδ.).

22. Ἡ ἀντιθετοαντίστροφη συνεπαγωγή εἶναι:
x ἄρτιος $\Rightarrow$ x^2 ἄρτιος, ἡ ὁποία ἰσχύει (Ἄσκ. 20).

23. Ἡ ἀντιθετοαντίστροφη συνεπαγωγή εἶναι:
ΑΒΓΔ ὀρθογώνιο $\Rightarrow$ ΑΒΓΔ ἔχει ἴσες διαγωνίους, ἡ ὁποία ἰσχύει.

24. i) Ὑποθέτουμε ὅτι $\alpha+\rho = \omega$, ρητός. Τότε ἔχουμε
$\alpha = \omega-\rho$, ἄρα α ρητός, ὡς διαφορά δύο ρητῶν (ἄτοπο).
Ἄρα $\alpha+\rho$ ἄρρητος.

ii) Ὅμοια.

iii) Ὑποθέτουμε $\alpha\rho = \omega$ ρητός. Τότε ἐπειδή $\rho\neq 0$ ἔχουμε

$\alpha = \dfrac{\omega}{\rho}$, ἄρα α ρητός, ὡς πηλίκο δύο ρητῶν (ἄτοπο).
Ἄρα $\alpha\rho$ ἄρρητος.

iv) Ὅπως ἡ iii.

v) Ὅπως ἡ i.

25. Ἡ ἰσότητα ἰσχύει γιά $\nu = 2$, ἐπειδή $1+3 = 2^2$.
Ὑποθέτουμε ὅτι ἀληθεύει ἡ p_ν : $1+3+\ldots+(2\nu-1) = \nu^2$.

$$\begin{aligned}\text{Τότε } 1+3+\ldots+(2\nu-1)+[2(\nu+1)-1] &= \nu^2+[2(\nu+1)-1]\\ &= \nu^2+2\nu+2-1\\ &= \nu^2+2\nu+1\\ &= (\nu+1)^2.\end{aligned}$$

Ἄρα ἀποδείχτηκε ἡ $p_{\nu+1}$.

26. Ἰσχύει γιά $\nu = 2$, ἐπειδή $3^3+2.3 = 27+6 = 33 =$ πολ 3.
Ὑποθέτουμε ὅτι ἀληθεύει ἡ p_ν: $\nu^3+2\nu =$ πολ 3.

$$\begin{aligned}\text{Τότε } (\nu+1)^3+2(\nu+1) &= \nu^3+3\nu^2+3\nu+1+2\nu+2\\ &= \nu^3+2\nu+3(\nu^2+\nu+1)\\ &= \text{πολ } 3+\text{πολ } 3 = \text{πολ } 3.\end{aligned}$$

Ἄρα ἀποδείχτηκε ἡ $p_{\nu+1}$.

27. Ἡ ἰσότητα ἰσχύει γιά $\nu=2$, ἐπειδή

$$1^2+2^2=\frac{2(2+1)\,(2.2+1)}{6}.$$

Ὑποθέτουμε ὅτι ἀληθεύει ἡ p_ν: $1^2+2^2+\ldots+\nu^2=\dfrac{\nu(\nu+1)\,(2\nu+1)}{6}$.

Τότε
$$\begin{aligned}1^2+2^2+\ldots+\nu^2+(\nu+1)^2 &= \frac{\nu(\nu+1)\,(2\nu+1)}{6}+(\nu+1)^2\\ &= \frac{\nu(\nu+1)\,(2\nu+1)+6(\nu+1)^2}{6}\\ &= \frac{(\nu+1)\,[\nu(2\nu+1)+6(\nu+1)]}{6}\\ &= \frac{(\nu+1)\,(2\nu^2+\nu+6\nu+6)}{6}\\ &= \frac{(\nu+1)\,(2\nu^2+7\nu+6)}{6}\\ &= \frac{(\nu+1)\,(\nu+2)\,(2\nu+3)}{6}\\ &= \frac{(\nu+1)\,(\nu+2)\,[2(\nu+1)+1]}{6}.\end{aligned}$$

Ἄρα ἀποδείχτηκε ἡ $p_{\nu+1}$.

28. Ἡ ἰσότητα ἰσχύει γιά $\nu=2$, ἐπειδή

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}=\frac{2}{3} \qquad \text{(ἀληθής)}.$$

Ὑποθέτουμε ὅτι ἀληθεύει ἡ p_ν: $\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+\dfrac{1}{3.4}+\ldots+\dfrac{1}{\nu(\nu+1)}=\dfrac{\nu}{\nu+1}$.

Τότε

$$\begin{aligned}\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{\nu(\nu+1)}+\frac{1}{(\nu+1)\,(\nu+2)} &= \frac{\nu}{\nu+1}+\frac{1}{(\nu+1)\,(\nu+2)}\\ &= \frac{\nu^2+2\nu+1}{(\nu+1)\,(\nu+2)}\\ &= \frac{\nu+1}{\nu+2}.\end{aligned}$$

Ἄρα ἀποδείχτηκε ἡ $p_{\nu+1}$.

29. Ἰσχύει γιά $\nu=0$, γιατί $3^0\geq 1+2.0$.
Ὑποθέτοντας ὅτι ἀληθεύει ἡ $3^\nu\geq 1+2\nu$, θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει ἡ $3^{\nu+1}\geq 1+2(\nu+1)$.
Πράγματι εἶναι:
$3^{\nu+1}=3.3^\nu=3^\nu+2.3^\nu\geq 1+2\nu+2.1=1+2(\nu+1)$.

30. Ἡ ἀποδεικτέα ἰσχύει γιά $\nu=2$, γιατί

$$1+\alpha=\frac{\alpha^2-1}{\alpha-1}=\frac{(\alpha+1)\,(\alpha-1)}{\alpha-1}=\alpha+1 \quad (\alpha\neq 1\Rightarrow \alpha-1\neq 0).$$

Ὑποθέτοντας ὅτι ἀληθεύει ἡ $1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^{\nu-1}=\dfrac{\alpha^\nu-1}{\alpha-1}$, (1)

θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει ἡ

$$1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^{\nu-1}+\alpha^\nu=\frac{\alpha^{\nu+1}-1}{\alpha-1}.$$

Πράγματι, προσθέτοντας τό α^ν καί στά δύο μέλη τῆς (1), ἔχουμε:

$$1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^{\nu-1}+\alpha^\nu = \frac{\alpha^\nu-1}{\alpha-1}+\alpha^\nu$$
$$= \frac{\alpha^\nu-1+\alpha^\nu(\alpha-1)}{\alpha-1}$$
$$= \frac{\alpha^\nu-1+\alpha^{\nu+1}-\alpha^\nu}{\alpha-1} = \frac{\alpha^{\nu+1}-1}{\alpha-1}.$$

Δηλαδή ἀληθεύει ἡ $p_{\nu+1}$.

31. Ἀποδεικνύουμε τήν πρόταση γιά $\nu=3$, δηλ. ὅτι τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνός πολυγώνου μέ τρεῖς πλευρές (τριγώνου) εἶναι $2.3-4=2$ ὀρθές (ἀληθής). Ὑποθέτοντας τώρα ὅτι τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνός πολυγώνου μέ ν πλευρές εἶναι $2\nu-4$ ὀρθές, θά δείξουμε ὅτι τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνός πολυγώνου μέ $\nu+1$ πλευρές εἶναι $2(\nu+1)-4$ ὀρθές. Ἄν χωρίσουμε τό πολύγωνο μέ τίς $\nu+1$ πλευρές σ' ἕνα ν-γωνο καί ἕνα τρίγωνο, τότε τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ $(\nu+1)$–γώνου θά εἶναι $2\nu-4+2=2(\nu+1)-4$ ὀρθές. Δηλ. ἀληθεύει ἡ $p_{\nu+1}$.

32. Γιά $\nu=3$ εἶναι $\frac{3(3-3)}{2}=0$ (ἀληθής).

Ὑποθέτοντας ὅτι τό πλῆθος τῶν διαγωνίων ἑνός πολυγώνου μέ ν πλευρές εἶναι $\frac{\nu(\nu-3)}{2}$, θά ἀποδείξουμε ὅτι τό πλῆθος τῶν διαγωνίων ἑνός πολυγώνου μέ $\nu+1$ πλευρές εἶναι:

$$\frac{(\nu+1)\,(\nu+1-3)}{2}=\frac{(\nu+1)\,(\nu-2)}{2}.$$

Ἄν χωρίσουμε τό $(\nu+1)$–γωνο σ' ἕνα ν–γωνο καί ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ μέ κοινή πλευρά τή ΒΓ, τότε τό πλῆθος τῶν διαγωνίων του εἶναι:

$\frac{\nu\,(\nu-3)}{2}$ τοῦ ν–γώνου

1 ἡ κοινή πλευρά ΒΓ τοῦ ν–γώνου καί τριγώνου.

$\nu-2$ οἱ διαγώνιες πού ἄγονται ἀπό τήν κορυφή Α.

Ἄρα τό ἄθροισμα τῶν διαγωνίων εἶναι:

$$\frac{\nu\,(\nu-3)}{2}+1+\nu-2=\frac{\nu\,(\nu-3)}{2}+\nu-1=\frac{\nu\,(\nu-3)\,+2(\nu-1)}{2}=\frac{\nu^2-3\nu+2\nu-2}{2}$$
$$=\frac{\nu^2-\nu-2}{2}=\frac{\nu^2-2\nu+\nu-2}{2}=\frac{\nu(\nu-2)+(\nu-2)}{2}=\frac{(\nu+1)\,(\nu-2)}{2}.$$ Ἀληθεύει δηλ. ἡ $p_{\nu+1}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

1. Εἶναι $[-(-x)]+[-(-y)]+[-(x+y)]=x+y+(-x)+(-y)=[x+(-x)]+$ $+[y+(-y)]=0$.

2. Ἐπειδή $-(-x)=x$, εἶναι $x+[-[-(-x)]]=x+(-x)=0$.

3. Ἐπειδή εἶναι ἀντίθετοι, θά ἔχουμε $x+y+z+(-x)+(-y)+\omega=0$ ἤ $[x+(-x)]+$ $[y+(-y)]+z+\omega=0$ ἤ $0+0+z+\omega=0$ ἤ $z+\omega=0$. Ἡ τελευταία μᾶς λέει ὅτι z καί ω εἶναι ἀντίθετοι ἀριθμοί, δηλαδή $z=-\omega$.

4. Ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι $x+y=0$. Εἶναι $x+y=(\alpha+\beta)+[(-\gamma)+(-\delta)]+[(-\alpha)+$ $+\gamma]+[(-\beta)+\delta]=\alpha+\beta+(-\gamma)+(-\delta)+(-\alpha)+\gamma+(-\beta)+\delta = [\alpha+(-\alpha)]+$ $+[\beta+(-\beta)]+[\gamma+(-\gamma)]+[\delta+(-\delta)]=0+0+0+0=0$.

5. α) $(x+y)-z=(x+y)+(-z)=[x+(-z)]+y=(x-z)+y$

β) $(x-y)-z=[x+(-y)]+(-z)=x+[(-y)+(-z)]=x-(y+z)$

$(x-y)-z=[x+(-y)]+(-z)=[x+(-z)]+(-y)=(x-z)-y.$

6. α) Ἔστω ὅτι ἰσχύει: $x\neq y$ καί $x-z=y-z$. Τότε θά εἶναι:

$x-z=y-z \Rightarrow [x+(-z)]+z=[y+(-z)]+z \Rightarrow x+[(-z)+z]=y+[(-z)+z]$

$\Rightarrow x+0=y+0 \Rightarrow x=y$ πού εἶναι ἄτοπο.

β) Ἔστω ὅτι: $x\neq y$ καί $x-y=y-x$. Τότε θά ἔχουμε:

$x-y=y-x \Rightarrow [x+(-y)]+(x+y)=[y+(-x)]+(x+y)$

$\Rightarrow (x+x)+[(-y)+y]=(y+y)+[(-x)+x] \Rightarrow 2x=2y \Rightarrow x=y$, πού εἶναι ἄτοπο.

γ) $x=y$ καί $z=\varphi \Rightarrow x=y$ καί $-z=-\varphi \Rightarrow x+(-z)=y+(-\varphi) \Rightarrow x-z=y-\varphi.$

7. $A=-\frac{6}{7}\,\alpha^2\beta\gamma^5 2\alpha^4\beta^3\gamma^4\left(-\frac{5}{6}\right)\alpha\beta^2\gamma^5=\left\{\left(-\frac{6}{7}\right).2\left(-\frac{5}{6}\right)\right\}$

$(\alpha^2\alpha^4\alpha)\ (\beta\beta^3\beta^2)\ (\gamma^5\gamma^4\gamma^5)=\left\{2.\left(-\frac{6}{7}\right)\left(-\frac{5}{6}\right)\right\}\alpha^7\beta^6\gamma^{14}=\frac{10}{7}\,\alpha^7\beta^6\gamma^{14}.$

$B=(-3)x^2yz^7 4x^4y^3z(-1)xy^5=[(-3).4(-1)](x^2x^4x)\ (yy^3y^5)\ (z^7z)$

$=[4(-3)\ (-1)]\,x^7\,y^9\,z^8=12x^7y^9z^8.$

$\Gamma=[[(-2)xy^2z^3)]^3]^4=[(-2)xy^2z^3]^{12}=(-2)^{12}x^{12}(y^2)^{12}(z^3)^{12}=4096\,x^{12}\,y^{24}\,z^{36}.$

8. α) Εἶναι: $(x^2+3x)\ (x^2+6x+9)=x^2x^2+x^26x+x^29+3xx^2+3x6x+3x9$

$=x^4+6x^3+9x^2+3x^3+18x^2+27x=x^4+9x^3+27x^2+27x=$

$=x(x^3+9x^2+27x+27)=x(x+3)^3.$

β) Εἶναι: $x^2y^2+(x+y)^2(x^2+y^2)=x^2y^2+(x^2+y^2+2xy)\ (x^2+y^2)=$

$x^2y^2+x^4+x^2y^2+x^2y^2+y^4+2x^3y+2xy^3=x^4+y^4+x^2y^2+2x^2y^2+2x^3y+2xy^3$

$=(x^2)^2+(y^2)^2+(xy)^2+2x^2y^2+2y^2(xy)+2(xy)x^2=(x^2+y^2+xy)^2.$

9. $(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma)=(x+\alpha)[(x+\beta)(x+\gamma)]=(x+\alpha)\ (x^2+\gamma x+\beta x+\beta\gamma)=$

$=x^3+\gamma x^2+\beta x^2+\beta\gamma x+\alpha x^2+\alpha\gamma x+\alpha\beta x+\alpha\beta\gamma=x^3+(\alpha x^2+\beta x^2+\gamma x^2)+(\alpha\beta x$

$+\beta\gamma x+\gamma\alpha x)+\alpha\beta\gamma=x^3+(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x+\alpha\beta\gamma.$

10. α) $(x-1)^2(x+1)^2=[(x-1)(x+1)]^2=(x^2-1)^2=x^4-2x^2+1$

β) $(-7x+1)^2-(7x-3)^2=[(-7x+1)+(7x-3)][(-7x+1)-(7x-3)]$

$=(-7x+1+7x-3)(-7x+1-7x+3)=-2(-14x+4)=4(7x-2)$

γ) $(x^2-2\alpha)^2+(\alpha-\beta)^2=x^4-4\alpha x^2+4\alpha^2+\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=x^4-4\alpha x^2+5\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

δ) $(2\alpha\beta+\gamma)^2-(\gamma-\delta)^2=[(2\alpha\beta+\gamma)+(\gamma-\delta)]\,[(2\alpha\beta+\gamma)-(\gamma-\delta)]=$

$=(2\alpha\beta+\gamma+\gamma-\delta)\ (2\alpha\beta+\gamma-\gamma+\delta)=(2\alpha\beta+2\gamma-\delta)\ (2\alpha\beta+\delta)$

ε) $(\alpha x+\beta y)^2-(\alpha x-\beta y)^2=[(\alpha x+\beta y)+(\alpha x-\beta y)]\,[(\alpha x+\beta y)-(\alpha x-\beta y)]=$

$=(\alpha x+\beta y+\alpha x-\beta y)\ (\alpha x+\beta y-\alpha x+\beta y)=2\alpha x.2\beta y=4\alpha\beta xy.$

11. α) $(3x-2)\,[4x-3+2(x-1)+x+1]=(3x-2)\ (4x-3+2x-2+x+1)=$

$=(3x-2)\ (7x-4)$

β) $x^6-8=(x^2)^3-2^3=(x^2-2)\,[(x^2)^2+x^2.2+2^2]=(x^2-2)\ (x^4+2x^2+4).$

12. Ἀπό τό πρῶτο μέλος ἔχουμε $\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)\frac{1}{xy}=\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)y+\right.$

$\left.\left(x+\frac{1}{x}\right)\frac{1}{y}\right\}\frac{1}{x}\,\frac{1}{y}=\left(xy+\frac{1}{x}\,y+x\,\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\,\frac{1}{y}\right)\frac{1}{x}\,\frac{1}{y}$

$=xy\,\frac{1}{x}\,\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\,y\,\frac{1}{x}\,\frac{1}{y}+x\,\frac{1}{y}\,\frac{1}{x}\,\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\,\frac{1}{y}\,\frac{1}{x}\,\frac{1}{y}$

$$=\left(x\frac{1}{x}\right)\left(y\frac{1}{y}\right)+\left(\frac{1}{x}\frac{1}{x}\right)\left(y\frac{1}{y}\right)+\left(x\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{y}\frac{1}{y}\right)+$$
$$\left(\frac{1}{x}\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{y}\frac{1}{y}\right)=1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2y^2}.$$

13. α) Εἶναι:

$$\frac{1}{x}(x+x^2)+\frac{1}{y}(y+y^2)+\frac{1}{z}(z+z^2)+(-x)+(-y)+(-z)=$$
$$\frac{1}{x}x+\frac{1}{x}xx+\frac{1}{y}y+\frac{1}{y}yy+\frac{1}{z}z+\frac{1}{z}zz-x-y-z=$$
$$1+x+1+y+1+z-x-y-z=3.$$

β) Εἶναι: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0 \Leftrightarrow xyz\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=(xyz).0$

$$\Leftrightarrow xyz\frac{1}{x}+xyz\frac{1}{y}+xyz\frac{1}{z}=0$$
$$\Leftrightarrow xy+yz+zx=0.$$

14. Ἀπό τό θεώρημα 11 ἔχουμε: $(x+y)(x+z)=0 \Rightarrow x+y=0$ ἤ $x+z=0$. Ἀπό τήν ἰσότητα $x+y=0$ προκύπτει ὅτι ὁ x εἶναι ἀντίθετος τοῦ y καί ἀπό τήν $x+z=0$ ὅτι ὁ x εἶναι ἀντίθετος τοῦ z.

15. Ἄν x ($x \neq 0$) εἶναι ὁ ζητούμενος ἀριθμός, θά ἔχουμε: $x=\frac{1}{x} \Leftrightarrow xx=x\frac{1}{x}$ $\Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x^2-1=0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)=0 \Leftrightarrow x-1=0$ ἤ $x+1=0 \Leftrightarrow x=1$ ἤ $x=-1$.

16. α) $(x-1)(x-2)(x-3)=0 \Leftrightarrow x-1=0$ ἤ $x-2=0$ ἤ $x-3=0 \Leftrightarrow x=1$ ἤ $x=2$ ἤ $x=3$.

β) $x^3-4x=0 \Leftrightarrow x(x^2-4)=0 \Leftrightarrow x(x-2)(x+2)=0 \Leftrightarrow x=0$ ἤ $x-2=0$ ἤ $x+2=0 \Leftrightarrow x=0$ ἤ $x=2$ ἤ $x=-2$.

γ) $x^3-2x^2+x=0 \Leftrightarrow x(x^2-2x+1)=0 \Leftrightarrow x(x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=0$ ἤ $x-1=0$ $\Leftrightarrow x=0$ ἤ $x=1$.

δ) $x^4-16=0 \Leftrightarrow (x^2-4)(x^2+4)=0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2)(x^2+4)=0 \Leftrightarrow x-2=0$ ἤ $x+2=0$ ἤ $x^2+4=0 \Leftrightarrow x-2=0$ ἤ $x+2=0 \Leftrightarrow x=2$ ἤ $x=-2$. (Εἶναι πάντοτε $x^2+4 \neq 0$).

ε) $(x-1)^2-(3-2x)^2=0 \Leftrightarrow [(x-1)+(3-2x)][(x-1)-(3-2x)]=0 \Leftrightarrow$ $(2-x)(3x-4)=0 \Leftrightarrow 2-x=0$ ἤ $3x-4=0 \Leftrightarrow x=2$ ἤ $x=\frac{4}{3}$.

17. α) $(x+y):z=(x+y)\frac{1}{z}=x\frac{1}{z}+y\frac{1}{z}=(x:z)+(y:z)$

β) $(x-y):z=[x+(-y)]\frac{1}{z}=x\frac{1}{z}+(-y)\frac{1}{z}=x\frac{1}{z}-y\frac{1}{z}=(x:z)-(y:z)$

γ) $(xy):z=(xy)\frac{1}{z}=xy\frac{1}{z}=\left(x\frac{1}{z}\right)y=(x:z)y.$

$(xy):z=xy\frac{1}{z}=x\left(y\frac{1}{z}\right)=x(y:z).$

δ) $(x:y):z=\left(x\frac{1}{y}\right)\frac{1}{z}=x\left(\frac{1}{y}\frac{1}{z}\right)=x\frac{1}{yz}=x:(yz).$

$(x:y):z=\left(x\frac{1}{y}\right)\frac{1}{z}=x\frac{1}{y}\frac{1}{z}=\left(x\frac{1}{z}\right)\frac{1}{y}=(x:z):y$

18. α) $(xy) : x = (xy)\dfrac{1}{x} = xy\dfrac{1}{x} = \left(x\dfrac{1}{x}\right)y = 1y = y$

β) $(x : y)y = \left(x\dfrac{1}{y}\right)y = xy\dfrac{1}{y} = x\left(y\dfrac{1}{y}\right) = x1 = x$

γ) $x : (yz) = x\dfrac{1}{yz} = x\left(\dfrac{1}{y}\dfrac{1}{z}\right) = \left(x\dfrac{1}{y}\right)\dfrac{1}{z} = (x : y) : z.$

19. α) $x = y \Leftrightarrow x\dfrac{1}{z} = y\dfrac{1}{z} \Leftrightarrow x : z = y : z$ (Θεώρ. 12).

β) Ἐφαρμόζοντας τή μέθοδο τῆς ἀντιθετοαντιστροφῆς ἀρκεῖ νά ἀποδείξουμε $\overline{x : z \neq y : z} \Leftrightarrow \overline{x \neq y}$, δηλαδή $x : z = y : z \Leftrightarrow x = y$ πού ἰσχύει (Ἄσκ. 19α).

γ) $x = y$ καί $z = \varphi \Rightarrow x = y$ καί $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{\varphi} \Rightarrow x\dfrac{1}{z} = y\dfrac{1}{\varphi} \Rightarrow x : z = y : \varphi$

20. α) Εἶναι $\dfrac{x}{y} - \dfrac{z}{\varphi} = \dfrac{x\varphi}{y\varphi} + \left(\dfrac{-zy}{\varphi y}\right) = \dfrac{1}{y\varphi}x\varphi + \dfrac{1}{y\varphi}(-zy) = \dfrac{1}{y\varphi}[x\varphi + (-zy)]$

$= \dfrac{1}{y\varphi}(x\varphi - yz) = \dfrac{x\varphi - yz}{y\varphi}.$

β) $\dfrac{x}{y} : \dfrac{z}{\varphi} = \dfrac{x}{y}\,\dfrac{1}{\dfrac{z}{\varphi}} = \dfrac{x}{y}\,\dfrac{\varphi}{z} = \dfrac{x\varphi}{yz}.$

21. α) $\dfrac{x}{y} = \dfrac{z}{\varphi} \Leftrightarrow y\varphi\dfrac{x}{y} = y\varphi\dfrac{z}{\varphi} \Leftrightarrow \varphi\left(y\dfrac{x}{y}\right) = y\left(\varphi\dfrac{z}{\varphi}\right) \Leftrightarrow \varphi x = yz$

β) $\dfrac{x}{y} = \dfrac{z}{\varphi} \Leftrightarrow x\varphi = yz \Leftrightarrow x\varphi\dfrac{1}{z\varphi} = yz\dfrac{1}{z\varphi} \Leftrightarrow \dfrac{x}{z} = \dfrac{y}{\varphi}$

γ) $\dfrac{x}{y} = \dfrac{z}{\varphi} \Leftrightarrow x\varphi = yz \Leftrightarrow x\varphi\dfrac{1}{xz} = yz\dfrac{1}{xz} \Leftrightarrow \dfrac{\varphi}{z} = \dfrac{y}{x}$

δ) $\dfrac{x}{y} = \dfrac{z}{\varphi} \Leftrightarrow \dfrac{x}{y} + 1 = \dfrac{z}{\varphi} + 1 \Leftrightarrow \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{y} = \dfrac{z}{\varphi} + \dfrac{\varphi}{\varphi}$

$\Leftrightarrow \dfrac{x+y}{y} = \dfrac{z+\varphi}{\varphi}$

ε) Ἔστω $\dfrac{x}{y} = \dfrac{z}{\varphi} = \lambda$. Τότε $\dfrac{x}{y} = \lambda \Leftrightarrow x = y\lambda$ (1) καί $\dfrac{z}{\varphi} = \lambda \Leftrightarrow$ $z = \varphi\lambda$ (2). Ἀπό τίς (1) καί (2) ἔχουμε $x + z = y\lambda + \varphi\lambda = (y + \varphi)\lambda$ ἤ $\dfrac{x+z}{y+\varphi} = \lambda = \dfrac{x}{y} = \dfrac{z}{\varphi}$

στ) Ὅπως καί ἡ ε.

22. α) $5y^{-2}x^3z^0 = 5\dfrac{1}{y^2}x^3 1 = 5x^3\dfrac{1}{y^2} = \dfrac{5x^3}{y^2}$

β) $\dfrac{2x^3\,y^{-2}}{3x^{-2}y^3} = \dfrac{2}{3}\,\dfrac{x^3}{x^{-2}}\,\dfrac{y^{-2}}{y^3} = \dfrac{2}{3}\,x^{3-(-2)}y^{-2-3} = \dfrac{2}{3}\,x^5y^{-5} = \dfrac{2x^5}{3y^5}$

γ) $= \dfrac{\alpha^{-1} + \beta^{-1}}{(\gamma\delta)^{-1}} = \dfrac{\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta}}{\dfrac{1}{\gamma\delta}} = \dfrac{\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}}{\dfrac{1}{\gamma\delta}} = \dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} : \dfrac{1}{\gamma\delta} = \dfrac{(\alpha+\beta)\gamma\delta}{\alpha\beta}$

δ) $\dfrac{x^{-2}+y^{-2}}{x^{-1}+y^{-1}}=\dfrac{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}}=\dfrac{\dfrac{x^2+y^2}{x^2y^2}}{\dfrac{x+y}{xy}}=\dfrac{xy(x^2+y^2)}{x^2y^2(x+y)}=\dfrac{x^2+y^2}{xy(x+y)}$

ε) Θέτουμε $x^{-1}=y$ ὁπότε $x^{-2}=y^2$ καί $x^{-3}=y^3$. Ἔχουμε:

$$\frac{1+x^{-1}+x^{-2}}{1-x^{-3}}=\frac{1+y+y^2}{1-y^3}=\frac{1+y+y^2}{(1-y)\,(1+y+y^2)}=\frac{1}{1-y}=\frac{1}{1-x^{-1}}$$

$$=\frac{1}{1-\dfrac{1}{x}}=\frac{x}{x-1}.$$

23. α) $\left(-\dfrac{3}{4}x^2y^{-5}z^5\right)^{-3}=\left(-\dfrac{3}{4}\right)^{-3}x^{-6}y^{15}z^{-15}=\dfrac{1}{\left(-\dfrac{3}{4}\right)^3}\dfrac{1}{x^6}y^{15}\dfrac{1}{z^{15}}$

$=-\dfrac{64y^{15}}{27x^6z^{15}}$

β) $\dfrac{-7xy^5z^3}{8x^4y^5z^2}=\dfrac{-7}{8}x^{-3}y^0z^1=-\dfrac{7}{8}\dfrac{1}{x^3}\,1\,z=-\dfrac{7z}{8x^3}$

γ) $=-\dfrac{\dfrac{2}{3}xy^3}{\dfrac{5}{4}x^4y^3z^4}+\dfrac{4x^4y^2z}{\dfrac{5}{4}x^4y^3z^4}-\dfrac{5x^3z^5}{\dfrac{5}{4}x^4y^3z^4}=-\dfrac{8}{15x^3z^4}+\dfrac{16}{5yz^3}-\dfrac{4z}{xy^3}.$

24. α) $(3x+5)^2-(9x^2-25)+6x+10=0 \Leftrightarrow 9x^2+30x+25-9x^2+25+6x+10=0$

$\Leftrightarrow 36x+60=0 \Leftrightarrow 36x=-60 \Leftrightarrow x=-\dfrac{5}{3}$

β) $3x(2x-1)+1-4x^2-(2x+3)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)=0 \Leftrightarrow 6x^2-3x+1-4x^2-2x^2+x$

$-3x+\dfrac{3}{2}=0 \Leftrightarrow -10x+5=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$

γ) $\dfrac{x+2}{3}-\dfrac{2x+1}{2}=\dfrac{2x-3}{6}-x \Leftrightarrow 6\left(\dfrac{x+2}{3}-\dfrac{2x+1}{2}\right)=6\left(\dfrac{2x-3}{6}-x\right)$

$\Leftrightarrow 2(x+2)-3(2x+1)=2x-3-6x \Leftrightarrow 0x=-4$ (ἀδύνατη).

δ) Βρίσκουμε $x=\dfrac{53}{16}$. ε) Γίνεται $0x=-6$ (ἀδύνατη).

25. α) Ἄν $\lambda^2-9\neq 0$ ἤ $\lambda\neq\pm 3$, ἔχει μιά ρίζα, τήν $x=\dfrac{\lambda^2+3\lambda}{\lambda^2-9}=\dfrac{\lambda(\lambda+3)}{(\lambda+3)\,(\lambda-3)}$

$=\dfrac{\lambda}{\lambda-3}$. Ἄν $\lambda=-3$, ἡ ἐξίσωση γίνεται $0x=0$, δηλαδή εἶναι ταυτότητα. Ἄν $\lambda=3$, ἡ ἐξίσωση γίνεται $0.x=18$, δηλαδή εἶναι ἀδύνατη.

β) Ἡ ἐξίσωση γίνεται $3\lambda x+3x-2x=5\lambda+5-4$ ἤ $(3\lambda+1)x=5\lambda+1$. Ἄν $3\lambda+1\neq 0$ ἤ $\lambda\neq-\dfrac{1}{3}$ ἔχει μιά ρίζα τήν $x=\dfrac{5\lambda+1}{3\lambda+1}$. Ἄν $3\lambda+1=0$ ἤ $\lambda=-\dfrac{1}{3}$, ἡ ἐξίσωση γίνεται $0x=-\dfrac{2}{3}$, δηλαδή εἶναι ἀδύνατη.

γ) Ἄν $\lambda^2-1\neq 0$ ἤ $\lambda\neq\pm 1$, ἔχουμε ρίζα τήν $x=\dfrac{\lambda(\lambda+2)}{\lambda-1}$. Ἄν $\lambda=-1$, ἡ ἐξίσωση γίνεται $0x=0$, δηλαδή εἶναι ταυτότητα. Ἄν $\lambda=1$ ἔχουμε $0x=6$, δηλαδή εἶναι ἀδύνατη.

δ) Ἡ ἐξίσωση γίνεται $(\lambda-2)x=\lambda^2-8\lambda-8$. Ἂν $\lambda-2\neq0$ ἢ $\lambda\neq2$ ἔχει μιά ρίζα τήν $x = \frac{\lambda^2-8\lambda-8}{\lambda-2}$. Ἂν $\lambda-2=0$ ἢ $\lambda=2$ τότε γίνεται $0x=-20$ (ἀδύνατη).

26. α) Ἡ ἐξίσωση γίνεται $(\lambda-1)x=\lambda+2\mu-7$. Ἂν $\lambda-1\neq0$ ἢ $\lambda\neq1$ ἔχει μιά ρίζα τήν $x=\frac{\lambda+2\mu-7}{\lambda-1}$. Ἂν $\lambda=1$, τότε τό δεύτερο μέλος γίνεται $2\mu-6$ τό ὁποῖο μηδενίζεται ὅταν $\mu=3$. Ἔτσι ὅταν $\lambda=1$ καί $\mu=3$, ἡ ἐξίσωση γίνεται $0x=0$, δηλαδή εἶναι ταυτότητα. Ἐνῶ ὅταν $\lambda=1$, $\mu\neq3$ ἡ ἐξίσωση γίνεται $0x=2\mu-6\neq0$ δηλαδή εἶναι ἀδύνατη.

β) Ἡ ἐξίσωση γίνεται $3(\lambda-\mu)x=2\lambda-4$. Ἂν $\lambda-\mu\neq0$ ἢ $\lambda\neq\mu$, ἔχει μιά ρίζα τήν $x=\frac{2(\lambda-2)}{3(\lambda-\mu)}$. Ἂν $\lambda=\mu=2$, ἡ ἐξίσωση γίνεται $0x=0$, δηλαδή εἶναι ταυτότητα καί ἄν $\lambda=\mu\neq2$, εἶναι ἀδύνατη.

γ) Ἡ ἐξίσωση γίνεται $2\lambda x=\lambda^2$. Ἂν $\lambda\neq0$ ἡ ἐξίσωση ἔχει μία ρίζα τήν $x=\frac{\lambda}{2}$. Ἂν $\lambda=0$, ἡ ἐξίσωση γίνεται $0x=0$ καί εἶναι ταυτότητα.

27. Εἶναι:
$$\begin{aligned}\alpha+\beta+\gamma=0 &\Rightarrow \alpha+\beta=-\gamma\\ &\Rightarrow(\alpha+\beta)^3=(-\gamma)^3\\ &\Rightarrow \alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3=-\gamma^3\\ &\Rightarrow\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=-3\alpha\beta(\alpha+\beta)\\ &\Rightarrow\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=-3\alpha\beta(-\gamma)\\ &\Rightarrow\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma\end{aligned}$$

α) Ἐπειδή $(x-y)+(y-z)+(z-x)=0$ θά εἶναι σύμφωνα μέ τά παραπάνω: $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=3(x-y)(y-z)(z-x)$.

β) Εἶναι $\alpha(\beta-\gamma)+\beta(\gamma-\alpha)+\gamma(\alpha-\beta)=\alpha\beta-\alpha\gamma+\beta\gamma-\alpha\beta+\gamma\alpha-\beta\gamma=0$. Ἄρα ἔχουμε $\alpha^3(\beta-\gamma)^3+\beta^3(\gamma-\alpha)^3+\gamma^3(\alpha-\beta)^3=3\alpha\beta\gamma(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$.

28. Ἀφοῦ πάρουμε τά ἀναπτύγματα σύμφωνα μέ τίς γνωστές ταυτότητες βρίσκουμε: $A^2+B^2-\Gamma^2=-4x^2-12y^2+38xy$ καί $AB+B\Gamma+\Gamma A=11x^2-11y^2-13xy$.

29. Ἀπό τήν ἄσκηση 21(ε) ἔχουμε $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Rightarrow\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$. Ὁπότε εἶναι $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$ καί $\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$. Ἂν τίς πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη, παίρνουμε $\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}=\left(\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}\right)^2$. Δηλαδή $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Rightarrow\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}=\left(\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}\right)^2$.

30. α) Ἀπό τήν $y^2=1$ ἔχουμε $y=\pm1$. Ὁπότε γιά $y=1$ ἡ πρώτη ἐξίσωση τοῦ συστήματος γίνεται $x^2-3=6$ ἢ $x^2=9$ δηλαδή $x=\pm3$. Ἐνῶ γιά $y=-1$ θά ἔχουμε $x^2+3=6$ ἢ $x^2=3$ πού εἶναι ἀδύνατη στό $\mathbb{Q}$. Ἄρα οἱ λύσεις τοῦ συστήματος εἶναι ($x=3$ **καί** $y=1$) **ἢ** ($x=-3$ **καί** $y=1$).

β) Ἔχουμε $(y-3)(y-5)=0\Leftrightarrow y-3=0$ **ἢ** $y-5=0\Leftrightarrow y=3$ **ἢ** $y=5$. Γιά $y=3$ ἡ πρώτη δίνει $x=-16$ καί γιά $y=5$ δίνει $x=-18$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

1. α) $\alpha>\beta>\gamma\Rightarrow\alpha-\beta>0$ καί $\beta-\gamma>0$ καί $\gamma-\alpha<0\Rightarrow(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)<0$

β) Ἀρκεῖ $(x^3+y^3)-(x^2y+xy^2)\geq0$ (1). Ἀλλά (1) $\Leftrightarrow(x+y)(x^2-xy+y^2)-xy(x+y)\geq0\Leftrightarrow(x+y)(x^2-xy+y^2-xy)\geq0\Leftrightarrow(x+y)(x^2-2xy+y^2)\geq0\Leftrightarrow(x+y)(x-y)^2\geq0$ πού ἰσχύει ἀφοῦ $x+y>0$ καί $(x-y)^2\geq0$.

γ) Ἀρκεῖ $x^3-(2x^2-x+2) > 0$ (1). Ἀλλά (1) $\Leftrightarrow x^3-2x^2+x-2 > 0 \Leftrightarrow x^2(x-2) +(x-2) > 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2+1) > 0$ πού ἰσχύει ἀφοῦ $x-2 > 0$ καί $x^2+1 > 0$.

2. α) $(x+y)^2 \geq 4xy \Leftrightarrow x^2+y^2+2xy-4xy \geq 0 \Leftrightarrow x^2+y^2-2xy \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$ πού ἰσχύει.

β) Ἀρκεῖ $(\alpha+\beta+\gamma)^2-\alpha(\beta+\gamma-\alpha)-\beta(\gamma+\alpha-\beta)-\gamma(\alpha+\beta-\gamma) \geq 0$ (1).
Ἀλλά (1) $\Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma-\alpha\beta-\alpha\gamma+\alpha^2-\beta\gamma-\alpha\beta+\beta^2-\alpha\gamma -\beta\gamma+\gamma^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2 \geq 0$ πού ἰσχύει.

γ) Ἀρκεῖ $2\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha(\beta+\gamma) \geq 0$(1). Ἀλλά (1) $\Leftrightarrow 2\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha\beta-2\alpha\gamma \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2+(\alpha-\gamma)^2 \geq 0$, πού ἰσχύει.

3. $x < 1 < y \Leftrightarrow (x-1 < 0$ **καί** $y-1 > 0)$. Ἀλλά $xy-x-y+1 < 0 \Leftrightarrow x(y-1) - (y-1) < 0 \Leftrightarrow (x-1)(y-1) < 0$, πού ἀληθεύει, ἀφοῦ $x-1$ καί $y-1$ εἶναι ἑτερόσημοι.

4. α) Ἐπειδή $\alpha^2+1 > 0$, εἶναι: $\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+1} \leq 1 \Leftrightarrow (\alpha^2+1)\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+1} \leq \alpha^2+1$
$\Leftrightarrow 2\alpha \leq \alpha^2+1 \Leftrightarrow 0 \leq \alpha^2+1-2\alpha \Leftrightarrow 0 \leq (\alpha-1)^2$, πού ἀληθεύει.

β) Ἀφοῦ α,β θετικοί, θά εἶναι καί $1+\alpha$, $1+\beta$, $1+\alpha+\beta$ θετικοί. Ἄρα:
$\dfrac{\alpha+\beta}{1+\alpha+\beta} < \dfrac{\alpha}{1+\alpha} + \dfrac{\beta}{1+\beta} \Leftrightarrow (1+\alpha)(1+\beta)(1+\alpha+\beta)\dfrac{\alpha+\beta}{1+\alpha+\beta} < \left(\dfrac{\alpha}{1+\alpha} + \dfrac{\beta}{1+\beta}\right)(1+\alpha)(1+\beta)(1+\alpha+\beta) \Leftrightarrow (1+\alpha)(1+\beta)(\alpha+\beta) < \alpha(1+\beta)(1+\alpha+\beta)+\beta(1+\alpha)(1+\alpha+\beta) \Leftrightarrow \alpha+\beta+\alpha\beta+\beta^2+\alpha^2+\alpha\beta+\alpha^2\beta+ \alpha\beta^2 < \alpha+\alpha^2+\alpha\beta+\alpha\beta+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta+\alpha\beta+\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$
$\Leftrightarrow 0 < 2\alpha\beta+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$ πού ἰσχύει, ἀφοῦ α,β εἶναι θετικοί.

5. $0 < y < \omega \Rightarrow \dfrac{1}{y} > \dfrac{1}{\omega} \Rightarrow -\dfrac{1}{y} < -\dfrac{1}{\omega}$. Τήν τελευταία ἀνισότητα προσθέτουμε κατά μέλη μέ τήν $x < z$ καί ἔχουμε: $x-\dfrac{1}{y} < z-\dfrac{1}{\omega}$.

6. α) Εἶναι $\beta = 1-\alpha$, ὁπότε: $\alpha\beta \leq \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \alpha(1-\alpha) \leq \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \alpha-\alpha^2 \leq \dfrac{1}{4}$
$\Leftrightarrow 4\alpha-4\alpha^2 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 1+4\alpha^2-4\alpha \Leftrightarrow 0 \leq (1-2\alpha)^2$, πού εἶναι ἀληθής.

β) Εἶναι: $\left(1+\dfrac{1}{\alpha}\right)\left(1+\dfrac{1}{\beta}\right) \geq 9 \Leftrightarrow 1+\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\alpha\beta} \geq 9$
$\Leftrightarrow 1+\dfrac{\alpha+\beta+1}{\alpha\beta} \geq 9 \Leftrightarrow \dfrac{1+1}{\alpha\beta} \geq 9-1 \Leftrightarrow \dfrac{2}{\alpha\beta} \geq 8 \Leftrightarrow \dfrac{2}{8} \geq \alpha\beta$
$\Leftrightarrow \dfrac{1}{4} \geq \alpha\beta$, πού ἀποδείχτηκε (Ἄσκ. 6α).

7. α) $\beta > 0 \Rightarrow \beta > -\beta \Rightarrow \alpha+\beta > \alpha-\beta$.

β) Ἐπειδή α,β,γ,δ εἶναι θετικοί, θά ἔχουμε: $\alpha < \beta$ καί $\gamma < \delta \Rightarrow \alpha\gamma < \beta\delta$
$\Rightarrow \dfrac{\alpha\gamma}{\gamma\delta} < \dfrac{\beta\delta}{\gamma\delta} \Rightarrow \dfrac{\alpha}{\delta} < \dfrac{\beta}{\gamma}$.

8. Ἐπειδή x,y θετικοί μέ $x > y$ καί $k > 0$, εἶναι $x^k > y^k > 0$. (1)
Ἐπίσης ἐπειδή $\alpha > \beta > 0$ καί $\lambda < 0$, εἶναι $\beta^\lambda > \alpha^\lambda > 0$. (2)
Πολλαπλασιάζουμε τίς (1) καί (2) κατά μέλη καί ἔχουμε: $x^k\beta^\lambda > y^k\alpha^\lambda$.

9. α) Είναι: $\lambda x > x+2 \Leftrightarrow \lambda x - x > 2 \Leftrightarrow (\lambda-1)x > 2$.

i) Γιά $\lambda-1 > 0$ ή $\lambda > 1$ έχουμε $x > \frac{2}{\lambda-1}$.

ii) Γιά $\lambda-1 = 0$ ή $\lambda = 1$ έχουμε τήν $0x > 2$ πού δέν έχει λύση.

iii) Γιά $\lambda-1 < 0$ ή $\lambda < 1$ έχουμε $x < \frac{2}{\lambda-1}$ έπειδή διαιροῦμε μέ άρνητικό.

β) Ἐπειδή Ε.Κ.Π (2,4,6) = 12, ἔχουμε: $12\left(\frac{x-\lambda}{2} + \frac{2x+3}{4}\right) > \frac{\lambda x}{6} \cdot 12$

$\Leftrightarrow 6(x-\lambda)+3(2x+3) > 2\lambda x \Leftrightarrow 6x-6\lambda+6x+9 > 2\lambda x \Leftrightarrow 12x-2\lambda x > 6\lambda-9$

$\Leftrightarrow 2(6-\lambda)x > 6\lambda-9$.

i) Γιά $6-\lambda > 0$ ή $\lambda < 6$ έχουμε $x > \frac{6\lambda-9}{2(6-\lambda)}$.

ii) Γιά $6-\lambda = 0$ ή $\lambda = 6$ έχουμε τήν $2x.0 > 36-9$, πού δέν έχει λύση.

iii) Γιά $6-\lambda < 0$ ή $\lambda > 6$ έχουμε $x < \frac{6\lambda-9}{2(6-\lambda)}$.

γ) Ἐπειδή Ε.Κ.Π (2,5,10) =10, ἔχουμε: $10\left(\frac{\lambda(x-2)}{2} - \frac{2x-\lambda}{5}\right) < 10\left(\frac{x}{10} - \frac{2}{5}\right)$

$\Leftrightarrow 5\lambda(x-2)-2(2x-\lambda) < x-4 \Leftrightarrow 5\lambda x-10\lambda-4x+2\lambda < x-4$

$\Leftrightarrow 5\lambda x-4x-x < 10\lambda-2\lambda-4 \Leftrightarrow 5\lambda x-5x < 8\lambda-4 \Leftrightarrow 5(\lambda-1)x < 4(2\lambda-1)$.

i) Γιά $\lambda-1 > 0$ ή $\lambda > 1$ έχουμε $x < \frac{4(2\lambda-1)}{5(\lambda-1)}$.

ii) Γιά $\lambda-1 = 0$ ή $\lambda = 1$ έχουμε τήν $5x \,.\, 0 < 4$, πού άληθεύει.

iii) Γιά $\lambda-1 < 0$ ή $\lambda < 1$ έχουμε $x > \frac{4(2\lambda-1)}{5(\lambda-1)}$.

10. α) $(2x+3 > x$ **καί** $x-5 < 4) \Leftrightarrow (2x-x > -3$ **καί** $x < 5+4)$

$\Leftrightarrow (x > -3$ **καί** $x < 9) \Leftrightarrow -3 < x < 9$.

β) $(x(x+2) - (x+1)x > 2$ **καί** $2x(x-1) < x(2x-3)+3)$

$\Leftrightarrow (x^2+2x-x^2-x > 2$ **καί** $2x^2-2x < 2x^2-3x+3)$

$\Leftrightarrow (x > 2$ **καί** $2x^2-2x-2x^2+3x < 3) \Leftrightarrow (x > 2$ **καί** $x < 3)$

$\Leftrightarrow 2 < x < 3$.

11. $\alpha < \beta < \gamma \Leftrightarrow (\alpha-\beta < 0$ **καί** $\beta-\gamma < 0$ **καί** $\gamma-\alpha > 0)$. Ἄρα:

$|\alpha-\beta| = -(\alpha-\beta) = \beta-\alpha$, $|\beta-\gamma| = -(\beta-\gamma) = \gamma-\beta$ καί $|\gamma-\alpha| = \gamma-\alpha$.

Ὁπότε: $A = 3(\beta-\alpha)+2(\gamma-\beta)-4(\gamma-\alpha) = 3\beta-3\alpha+2\gamma-2\beta-4\gamma+4\alpha = \alpha+\beta-2\gamma$.

12. α) Ἐπειδή Ε.Κ.Π (2,3,4) = 12, εἶναι:

$12\left(\frac{3|x|+1}{2} + \frac{2|x|-1}{3}\right) = \frac{|x|+2}{4} \cdot 12 \Leftrightarrow 6(3|x|+1)+4(2|x|-1) = 3(|x|+2)$

$\Leftrightarrow 18|x|+6+8|x|-4 = 3|x|+6 \Leftrightarrow 18|x|+8|x|-3|x| = -6+4+6$

$\Leftrightarrow 23|x| = 4 \Leftrightarrow |x| = \frac{4}{23} \Leftrightarrow x = \pm\frac{4}{23}$

β) $(2|x|-5) - (4|x|-3) = 7|x|-1 \Leftrightarrow 2|x|-5-4|x|+3 = 7|x|-1$

$\Leftrightarrow 2|x|-4|x|-7|x| = 5-3-1 \Leftrightarrow -9|x| = 1 \Leftrightarrow |x| = -\frac{1}{9}$ άδύνατον άφοῦ $|x| \geq 0$.

Ἄρα ή έξίσωση δέν έχει λύση.

γ) Γνωρίζουμε ὅτι ἄν $|x| = |\alpha|$, τότε $x = \pm\alpha$. Ἄρα θά εἶναι:

$|3x-1| = |x-3| \Leftrightarrow 3x-1 = \pm(x-3)$. Διακρίνουμε τίς περιπτώσεις:

i) $3x-1 = x-3 \Leftrightarrow 3x-x = 1-3 \Leftrightarrow 2x = -2 \Leftrightarrow x = -1$.

ii) $3x-1 = -(x-3) \Leftrightarrow 3x-1 = -x+3 \Leftrightarrow 3x+x = 1+3 \Leftrightarrow 4x = 4 \Leftrightarrow x = 1$.

13. Προσθέτουμε κατά μέλη τίς ἀνισότητες $|x-y| < \alpha$ καί $|y-\omega| < \alpha$ καί ἔχουμε: $|x-y|+|y-\omega| < 2\alpha$ (1). Ἐπειδή ὅμως $|\alpha+\beta| \leq |\alpha|+|\beta|$ γιά $\alpha = x-y$ καί $\beta = y-\omega$, θά εἶναι: $|(x-y)+(y-\omega)| \leq |x-y|+|y-\omega|$ $\Rightarrow |x-\omega| \leq |x-y|+|y-\omega|$. (2)
Ἀπό τίς (1) καί (2) ἔχουμε: $|x-\omega| < 2\alpha$.

14. Θά ἀποδείξουμε πρῶτα τήν ἀνισότητα $||x|-|y|| \leq |x+y|$ (1). Ἐπειδή καί τά δύο μέλη της εἶναι θετικοί ἀριθμοί, θά εἶναι: (1) $\Leftrightarrow ||x|-|y||^2 \leq |x+y|^2$ $\Leftrightarrow |x|^2+|y|^2-2|x||y| \leq x^2+y^2+2xy \Leftrightarrow$
$x^2+y^2-2|xy| \leq x^2+y^2+2xy \Leftrightarrow -2|xy| \leq 2xy \Leftrightarrow |xy| \geq -xy$ πού ἰσχύει.
Ἀπό τίς προηγούμενες ἰσοδυναμίες προκύπτει ὅτι γιά νά ἰσχύει ἡ ἰσότητα $||x|-|y|| = |x+y|$ πρέπει $|xy| = -xy$, πού ἰσχύει ὅταν $xy \leq 0$. Μέ τόν ἴδιο ἀκριβῶς τρόπο ἀποδεικνύεται καί ἡ ἀνισότητα $|x+y| \leq |x|+|y|$. Τό ἴσον ἰσχύει, ὅταν $xy \geq 0$.

15. Ἐπειδή $|x|\,|y| > 0$, εἶναι: $\left|\frac{x}{y}\right| + \left|\frac{y}{x}\right| \geq 2 \Leftrightarrow |x|\,|y| \left(\frac{|x|}{|y|} + \frac{|y|}{|x|}\right)$ $\geq 2|x|\,|y| \Leftrightarrow |x|^2+|y|^2 \geq 2|x|\,|y| \Leftrightarrow |x|^2+|y|^2-2|x|\,|y| \geq 0 \Leftrightarrow (|x|-|y|)^2 \geq 0$, πού εἶναι ἀληθής.

16. Ἐπειδή οἱ λ,μ,ν εἶναι θετικοί θά εἶναι καί ὁ $\lambda+\mu+\nu$ θετικός. Ἄρα ἡ ἀνισότητα πού θέλουμε νά ἀποδείξουμε εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν ἀνισότητα: $(\lambda+\mu+\nu)\alpha < \lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma < (\lambda+\mu+\nu)\gamma$ (1). Ἀλλά (1)$\Leftrightarrow \lambda\alpha+\mu\alpha+\nu\alpha < \lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma <$ $< \lambda\gamma+\mu\gamma+\nu\gamma \Leftrightarrow (\lambda\alpha+\mu\alpha+\nu\alpha < \lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma$ **καί** $\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma < \lambda\gamma+\mu\gamma+\nu\gamma)$ $\Leftrightarrow (\mu\alpha+\nu\alpha < \mu\beta+\nu\gamma$ (2) **καί** $\lambda\alpha+\mu\beta < \lambda\gamma+\mu\gamma$ (3)).
Ἡ (2) ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς:
$\alpha < \beta < \gamma \Rightarrow (\alpha < \beta$ **καί** $\alpha < \gamma) \Rightarrow (\mu\alpha < \mu\beta$ **καί** $\nu\alpha < \nu\gamma) \Rightarrow \mu\alpha+\nu\alpha < \mu\beta+\nu\gamma$.
Ὁμοίως γιά τήν (3) ἔχουμε $(\alpha < \beta < \gamma) \Rightarrow (\alpha < \gamma$ **καί** $\beta < \gamma)$ $\Rightarrow (\lambda\alpha < \lambda\gamma$ **καί** $\mu\beta < \mu\gamma) \Rightarrow \lambda\alpha+\mu\beta < \lambda\gamma+\mu\gamma$.

17. Εἶναι $\frac{x-y}{x+y} - \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{(x-y)\,(x^2+y^2) - (x+y)\,(x^2-y^2)}{(x+y)\,(x^2+y^2)}$

$$= \frac{(x-y)(x^2+y^2)+(x+y)(x-y)(x+y)}{(x+y)\,(x^2+y^2)} = \frac{(x-y)\,[(x^2+y^2)-(x+y)^2]}{(x+y)\,(x^2+y^2)}$$

$$= \frac{(x-y)\,(x^2+y^2-x^2-y^2-2xy)}{(x+y)\,(x^2+y^2)} = \frac{(x-y)\,(-2xy)}{(x+y)\,(x^2+y^2)} = \frac{(y-x)2xy}{(x+y)\,(x^2+y^2)} \leq 0$$

ἀφοῦ $x \geq y > 0$. Ἄρα $\frac{x-y}{x+y} \leq \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. Ἄν $x=y$ ἰσχύει τό ἴσον.

18. **α)** Εἶναι τό πρῶτο ἐρώτημα τῆς 6.

β) $\alpha^2+\beta^2 \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1-2\alpha\beta \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1-\frac{1}{2} \geq 2\alpha\beta$ $\Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq 2\alpha\beta \Leftrightarrow \frac{1}{4} \geq \alpha\beta$ πού εἶναι ἡ (α).

γ) Ἀποδείξαμε ὅτι $\alpha^2+\beta^2 \geq \frac{1}{2}$ (1). Ἀλλά: (1)$\Leftrightarrow (\alpha^2+\beta^2)^2 \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \alpha^4+\beta^4+$ $2\alpha^2\beta^2 \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \alpha^4+\beta^4+2(\alpha\beta)^2 \geq \frac{1}{4}$ (2). Ἄν στή (2) ἀντί τοῦ $\alpha\beta$ θέσουμε τό $\frac{1}{4}$, ἡ ἀνισότητα ἐνισχύεται καί ἔχουμε: $\alpha^4+\beta^4+2\left(\frac{1}{4}\right)^2 \geq \frac{1}{4}$ $\Rightarrow \alpha^4+\beta^4 \geq \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \Rightarrow \alpha^4+\beta^4 \geq \frac{1}{8}$.

19. Σύμφωνα μέ τήν § 3.11, Ἐφ. 6 πρέπει νά εἶναι $(2x-3y+1=0$ **καί** $3x-5y+2=0)$ (1).

Ἀλλά: (1) $\Leftrightarrow (2x-3y=-1$ **καί** $3x-5y=-2) \Leftrightarrow (x=\frac{3y-1}{2}$ **καί** $3\frac{3y-1}{2}$ $-5y=-2) \Leftrightarrow (x=\frac{3y-1}{2}$ **καί** $3(3y-1)-10y=-4) \Leftrightarrow (x=\frac{3y-1}{2}$ **καί** $9y-3-10y=$ $-4) \Leftrightarrow (x=\frac{3y-1}{2}$ **καί** $y=1) \Leftrightarrow (x=1$ **καί** $y=1)$.

20. α) $\left(2x-1 \leq x \leq \frac{x+3}{2}\right) \Leftrightarrow \left(2x-1 \leq x \text{ καί } x \leq \frac{x+3}{2}\right) \Leftrightarrow (2x-x \leq 1$ **καί** $2x-x \leq 3) \Leftrightarrow (x \leq 1$ **καί** $x \leq 3) \Leftrightarrow x \leq 1$.

β) $[(3x-2)(x-2)=0$ **καί** $2x-4 \leq -3x)] \Leftrightarrow [(3x-2=0$ **ἤ** $x-2=0)$ **καί** $2x+3x \leq 4] \Leftrightarrow [(x=\frac{2}{3}$ **ἤ** $x=2)$ **καί** $x \leq \frac{4}{5})]$. Ἄρα $x=\frac{2}{3}$.

21. α) $\frac{2|x|-3}{4} < \frac{|x|+1}{3} \Leftrightarrow 12\frac{2|x|-3}{4} < 12\frac{|x|+1}{3} \Leftrightarrow 3(2|x|-3) < 4(|x|+1)$

$\Leftrightarrow 6|x|-9 < 4|x|+4 \Leftrightarrow 6|x|-4|x| < 9+4 \Leftrightarrow 2|x| < 13 \Leftrightarrow |x| < \frac{13}{2}$

$\Leftrightarrow -\frac{13}{2} < x < \frac{13}{2}$.

β) $3(|x|-1)+2(|x|-2) > 2 \Leftrightarrow 3|x|-3+2|x|-4 > 2 \Leftrightarrow 5|x| > 3+4+2 \Leftrightarrow 5|x| > 9$

$\Leftrightarrow |x| > \frac{9}{5} \Leftrightarrow \left(x < -\frac{9}{5} \text{ ἤ } x > \frac{9}{5}\right)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

1. Ἐπειδή $3>0$ εἶναι $f(3)=5.3-4=15-4=11$. Γιά $x=-2$ καί $x=0$ ἔχουμε: $f(-2)=-(-2)^2=-4$ καί $f(0)=-0^2=0$.

2. Εἶναι $f(-1)=(-1-1)^2=4$, $f(1)=\beta.1^2+2=\beta+2$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}-1\right)^2$ $=\frac{9}{4}$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=\alpha\frac{1}{2}+3=\frac{\alpha}{2}+3$, $f(2)=\beta.2^2+2=4\beta+2$,

$f\left(\frac{1}{4}\right)=\alpha\frac{1}{4}+3=\frac{\alpha}{4}+3$ καί $f(-2)=(-2-1)^2=9$.

Ἄρα ἐπειδή $f(-1)=f(1)$, ἔχουμε $4=\beta+2$ ἤ $\beta=2$. Ὁμοίως ἐπειδή $f\left(-\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)$, ἔχουμε $\frac{9}{4}=\frac{\alpha}{2}+3$ ἤ $9=2\alpha+12$ ἤ $\alpha=-\frac{3}{2}$.

Ὁπότε $f(2)-2f\left(\frac{1}{4}\right)+f(-2)=4\beta+2-2\left(\frac{\alpha}{4}+3\right)+9=4\beta+2-\frac{\alpha}{2}-6+9$

$=4\beta-\frac{\alpha}{2}+5=4.2-\frac{-\frac{3}{2}}{2}+5=8+\frac{3}{4}+5=13\frac{3}{4}$.

3. Εἶναι $f(-1)=(-1)^3-(-1)+5=-1+1+5=5$, $f(0)=0^3-0+5=5$ καί $f(1)=$ $=1^3-1+5=5$.

4. Εἶναι $f(-3)=(-3)^3-8(-3)=-27+24=-3$, $f(0)=0$ καί $f(3)=3^3-8.3=$ $=27-24=3$.

5. Βρίσκουμε τά γραφήματα G_1, G_2 τῶν f_1 καί f_2. Εἶναι:
$f_1(1) = 3$, $f_1(2) = 9$ καί $f_1(3) = 19$. Ἄρα $G_1 = \{(1,3), (2,9), (3,19)\}$ καί ἐπειδή $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f_1(x_1) \neq f_1(x_2)$ ἡ f_1^{-1} εἶναι συνάρτηση μέ γράφημα $G_1^{-1} = \{(3,1), (9,2), (19,3)\}$.
Ὁμοίως $f_2(-1) = 3$, $f_2(1) = 3$, $f_2(2) = 6$ καί $f_2(3) = 11$. Ἄρα $G_2 = \{(-1,3), (1,3), (2,6), (3,11)\}$ καί ἐπειδή τά -1 καί 1 ἔχουν τήν ἴδια εἰκόνα τό 3, ἡ f_2^{-1} δέν εἶναι συνάρτηση καί ἔχει γράφημα $G_2^{-1} = \{(3,-1), (3,1), (6,2), (11,3)\}$.

6. α) Πρέπει $(2x+5)^2-(x+1)^2 \neq 0$. (1). Ἀλλά (1) $\Leftrightarrow [(2x+5)-(x+1)][(2x+5)+(x+1)] \neq 0 \Leftrightarrow (2x+5-x-1)(2x+5+x+1) \neq 0 \Leftrightarrow (x+4)(3x+6) \neq 0 \Leftrightarrow 3(x+4)(x+2) \neq 0 \Leftrightarrow (x+4 \neq 0$ **καί** $x+2 \neq 0) \Leftrightarrow (x \neq -4$ **καί** $x \neq -2)$. Ἄρα πεδίο ὁρισμοῦ τῆς f_1 εἶναι τό $\mathbb{R}-\{-4,-2\}$ καί $f_1(x) = \dfrac{x+4}{3(x+4)(x+2)} = \dfrac{1}{3(x+2)}$.

β) Πρέπει $4x^3+16x^2+12x \neq 0$ (1). Ἀλλά (1) $\Leftrightarrow 4x(x^2+4x+3) \neq 0 \Leftrightarrow 4x(x+1)(x+3) \neq 0 \Leftrightarrow (x \neq 0$ **καί** $x+1 \neq 0$ **καί** $x+3 \neq 0) \Leftrightarrow (x \neq 0$ **καί** $x \neq -1$ **καί** $x \neq -3)$. Ἄρα πεδίο ὁρισμοῦ τῆς f_2 εἶναι τό $\mathbb{R}-\{-3,-1,0\}$ καί
$f_2(x) = \dfrac{(6x+8x^2)(x+3)}{2.4x(x+1)(x+3)}$ ἤ $f_2(x) = \dfrac{2x(3+4x)(x+3)}{4.2x(x+1)(x+3)}$ ἤ $f_2(x) = \dfrac{4x+3}{4(x+1)}$.

γ) Πρέπει $(2x+5)(7-x)+4x^2-25 \neq 0$ (1). Ἀλλά (1) $\Leftrightarrow (2x+5)(7-x)+(2x-5)(2x+5) \neq 0 \Leftrightarrow (2x+5)(7-x+2x-5) \neq 0 \Leftrightarrow$
$(2x+5)(x+2) \neq 0 \Leftrightarrow (2x+5 \neq 0$ **καί** $x+2 \neq 0) \Leftrightarrow \left(x \neq -\dfrac{5}{2}\right.$ **καί**
$x \neq -2)$. Ἄρα πεδίο ὁρισμοῦ τῆς f_3 εἶναι τό $\mathbb{R}-\left\{-2, -\dfrac{5}{2}\right\}$ καί
$f_3(x) = \dfrac{(x+2)[(2x+1)^2-16]}{(2x+5)(x+2)}$ ἤ $f_3(x) = \dfrac{(x+2)[(2x+1)+4][(2x+1)-4]}{(2x+5)(x+2)}$
ἤ $f_3(x) = \dfrac{(x+2)(2x+5)(2x-3)}{(2x+5)(x+2)} = 2x-3$.

δ) Πρέπει $(x^2-9 \neq 0$ **καί** $x^2-6x+9 \neq 0)$ (1). Ἀλλά (1) $\Leftrightarrow [(x+3)(x-3) \neq 0$ **καί** $(x-3)^2 \neq 0] \Leftrightarrow (x-3 \neq 0$ **καί** $x+3 \neq 0) \Leftrightarrow (x \neq 3$ **καί** $x \neq -3)$. Ἄρα πεδίο ὁρισμοῦ τῆς f_4 εἶναι τό $\mathbb{R}-\{-3,+3\}$ καί
$$f_4(x) = \frac{(x-5)(x+3)}{(x-3)(x+3)} + \frac{-4(x-3)}{(x-3)^2} = \frac{x-5}{x-3} - \frac{4}{x-3} = \frac{x-9}{x-3}.$$

7. α) Εἶναι $f(0) = 0+2 = 2$, $f(1) = 1+2 = 3$, $g(0) = 0^2+2 = 2$, $g(1) = 1^2+2 = 3$. Ἄρα $\forall x \in E$, $f(x) = g(x)$, ὁπότε $f = g$.
β) Ἐπειδή $x+2 \neq x^2+2$ γιά κάθε $x \in \mathbb{R}-\{0,1\}$, συμπεραίνουμε ὅτι δέν εἶναι $f(x) = g(x)$ γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ἄρα $f \neq g$.

8. Πρέπει $x^2-3x+2 \neq 0$ (1). Ἀλλά (1) $\Leftrightarrow (x-1)(x-2) \neq 0 \Leftrightarrow (x-1 \neq 0$ **καί** $x-2 \neq 0) \Leftrightarrow (x \neq 1$ **καί** $x \neq 2)$. Ἄρα πεδίο ὁρισμοῦ τῆς f εἶναι τό $\mathbb{R}-\{1,2\}$ καί
$f(x) = \dfrac{x(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)} = x$, δηλαδή ἡ f εἶναι ταυτοτική συνάρτηση.

9. Γιά τούς πραγματικούς ἀριθμούς $f(x)$, $g(x)$ καί $h(x)$ ἰσχύει:
$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x)+h(x) = g(x)+h(x)$ ἤ
$f(x) = g(x) \Leftrightarrow (f+h)(x) = (g+h)(x)$. Ἄρα: $f = g \Leftrightarrow f+h = g+h$.

10. Ἔχουμε $(f+g)(x) = f(x)+g(x) = 3+7 = 10$, $(f-g)(x) = f(x)-g(x) = -4$ καί $(-3f+5g)(x) = -3f(x)+5g(x) = -3.3+5.7 = -9+35 = 26$.

11. Ἐπειδή $(f_1+f_2)(x) = f_1(x)+f_2(x)$ ἔχουμε:
γιά $x < 1$ $(f_1+f_2)(x) = (2x-1)+(-x^2-2x+5) = -x^2+4$
γιά $1 \leq x < 3$ $(f_1+f_2)(x) = (x^2+2x+3)+(-x^2-2x+5) = 8$
γιά $3 \leq x \leq 5$ $(f_1+f_2)(x) = (x^2+2x+3)+(x-1) = x^2+3x+2$
γιά $5 < x \leq 7$ $(f_1+f_2)(x) = (2x-1)+(x-1) = 3x-2$
γιά $7 < x$ $(f_1+f_2)(x) = (2x-1)+(-x^2-2x+5) = -x^2+4$.

Ἄρα:
$$(f_1+f_2)(x) = \begin{cases} -x^2+4 & x < 1 \text{ ἤ } x > 7 \\ 8 & x \in [1,3) \\ x^2+3x+2 & x \in [3,5] \\ 3x-2 & x \in (5,7] \end{cases}$$
καί εἶναι σταθερή στό διάστημα $[1,3)$.

12. Γιά τούς πραγματικούς ἀριθμούς k, $f(x)$, $g(x)$ ἰσχύει:
$kf(x)+kg(x) = k[f(x)+g(x)]$ καί ἐπειδή $f(x)+g(x) = (f+g)(x)$ θά εἶναι:
$kf(x)+kg(x) = k(f+g)(x)$. Ἄρα $kf+kg = k(f+g)$.
Γιά $k = -1$ ἔχουμε: $-(f+g) = -f-g$.

13. Εἶναι $(f+g)(x) = f(x)+g(x) = (2x+5)+(x+4) = 3x+9$
$(3f+2g)(x) = (3f)(x)+(2g)(x) = 3f(x)+2g(x) = 3(2x+5)+2(x+4)$
$= 6x+15+2x+8 = 8x+23$ καί
$(3f-2g)(x) = (3f)(x)-(2g)(x) = 3f(x)-2g(x) = 3(2x+5)-2(x+4)$
$= 6x+15-2x-8 = 4x+7$.

14. Εἶναι $(5f+7g)(x) = (5f)(x)+(7g)(x) = 5f(x)+7g(x) = 5.5+7.7 = 74$
καί $(5f-7g)(x) = 5f(x)-7g(x) = 25-49 = -24$.

15. Εἶναι $((-f)g)(x) = (-f)(x)\,g(x) = -f(x)\,g(x)$ καί
$(-fg)(x) = -f(x)\,g(x)$. Ἄρα $(-f)g = -fg$.

16. Γιά τούς πραγματικούς ἀριθμούς $f(x)$, $g(x)$ καί $h(x)$ ἰσχύει:
$f(x) = g(x) \Rightarrow f(x)\,h(x) = g(x)\,h(x)$. Ἄρα καί $f = g \Rightarrow fh = gh$.

17. **α)** Πρέπει $x+1 \neq 0$ ἤ $x \neq -1$. Ἄρα $A = \mathbb{R}-\{-1\}$
β) Πρέπει ἀκόμη καί $f(x) \neq 0$ ἤ $x-3 \neq 0$ ἤ $x \neq 3$. Ἄρα $A' = \mathbb{R}-\{-1,3\}$

18. Πρέπει $(f_1(x) \neq 0$ **καί** $f_2(x) \neq 0)$ (1). Ἀλλά (1) $\Leftrightarrow (x+1 \neq 0$ **καί** $x^2-1 \neq 0)$
$\Leftrightarrow [x+1 \neq 0$ **καί** $(x+1)(x-1) \neq 0] \Leftrightarrow (x+1 \neq 0$ **καί** $x-1 \neq 0) \Leftrightarrow$
$(x \neq -1$ **καί** $x \neq 1)$. Ἄρα τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς $\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$ εἶναι τό $\mathbb{R}-\{-1,1\}$
καί $\left(\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}\right)(x) = \frac{1}{f_1(x)} + \frac{1}{f_2(x)} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)(x-1)}$
$$= \frac{x-1+1}{(x+1)(x-1)} = \frac{x}{(x+1)(x-1)}.$$
Ὅμοια γιά τήν $\frac{f_1}{f_2}$ πρέπει $f_2(x) \neq 0$ (1). Ὅμως (1) $\Leftrightarrow x^2-1 \neq 0 \Leftrightarrow$
$(x+1)(x-1) \neq 0 \Leftrightarrow (x \neq -1$ **καί** $x \neq 1)$. Ἄρα τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς $\frac{f_1}{f_2}$ εἶναι τό
$\mathbb{R}-\{-1,1\}$ καί $\left(\frac{f_1}{f_2}\right)(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{x+1}{x^2-1} = \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x-1}$.

19. Πρέπει $g(x) \neq 0$ (1). Ἀλλά (1)$\Leftrightarrow x^2-2x \neq 0 \Leftrightarrow x(x-2) \neq 0 \Leftrightarrow (x \neq 0$ **καί** $x-2 \neq 0) \Leftrightarrow (x \neq 0$ **καί** $x \neq 2)$. Ἄρα τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς $\frac{f}{g}$ εἶναι τό $\mathbb{R}-\{0,2\}$ καί $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^3-x^2-2x}{x^2-2x} = \frac{x(x^2-x-2)}{x(x-2)}$

$$= \frac{x(x-2)(x+1)}{x(x-2)} = x+1.$$

20. Ἀρκεῖ νά δείξουμε τήν ἀντίστοιχη ἰσότητα γιά τούς πραγματικούς ἀριθμούς $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ καί $f_4(x)$. Δηλ. τήν ἰσότητα $(2x+3)^3-1 = 2(x+1)[4(x+2)^2-(2x+3)]$ ἤ τήν $[(2x+3)-1][(2x+3)^2+(2x+3)+1] = 2(x+1)[4(x^2+4x+4)-2x-3]$ ἤ τήν $(2x+2)(4x^2+12x+9+2x+3+1) = 2(x+1)(4x^2+16x+16-2x-3)$ ἤ τήν $2(x+1)(4x^2+14x+13) = 2(x+1)(4x^2+14x+13)$ πού εἶναι προφανής.

21. Ἐκτελοῦμε τίς πράξεις καί ἔχουμε:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3-3x^2+3x-1-2(x^2+2x+1)+(x^4+x^2+1-2x^3+2x^2-2x)-x^2-1 \\ &= x^3-3x^2+3x-1-2x^2-4x-2+x^4+x^2+1-2x^3+2x^2-2x-x^2-1 \\ &= x^4-x^3-3x^2-3x-3. \end{aligned}$$

22. α) Θά κάνουμε πράξεις στό β' μέλος καί θά καταλήξουμε στό α'.

Ἔτσι ἔχουμε: $\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2]$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)[\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta+\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma+\gamma^2+\alpha^2-2\alpha\gamma] \\ &= \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)(2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2-2\alpha\beta-2\alpha\gamma-2\beta\gamma) \\ &= (\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma) \\ &= \alpha^3+\alpha\beta^2+\alpha\gamma^2-\alpha^2\beta-\alpha^2\gamma-\alpha\beta\gamma+\alpha^2\beta+\beta^3+\beta\gamma^2-\alpha\beta^2-\alpha\beta\gamma-\beta^2\gamma+\alpha^2\gamma+\beta^2\gamma \\ &\quad +\gamma^3-\alpha\beta\gamma-\alpha\gamma^2-\beta\gamma^2 = \alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma. \end{aligned}$$

β) Ἔχουμε

$$\begin{aligned} (\alpha+\beta+\gamma)^3 = [(\alpha+\beta)+\gamma]^3 &= (\alpha+\beta)^3+3(\alpha+\beta)^2\gamma+3(\alpha+\beta)\gamma^2+\gamma^3 \\ &= \alpha^3+\beta^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta)+3(\alpha+\beta)^2\gamma+3(\alpha+\beta)\gamma^2+\gamma^3 \\ &= \alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3(\alpha+\beta)[\alpha\beta+(\alpha+\beta)\gamma+\gamma^2] \\ &= \alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3(\alpha+\beta)(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma+\gamma^2) \\ &= \alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3(\alpha+\beta)[\alpha(\beta+\gamma)+\gamma(\beta+\gamma)] \\ &= \alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha). \end{aligned}$$

23. Ἐπειδή $f(2)=0$, τό $f(x)$ διαιρεῖται μέ τό $x-2$ καί ἄν κάνουμε τή διαίρεση βρίσκουμε πηλίκο x^2-9. Ἄρα $f(x) = (x-2)(x^2-9) = (x-2)(x-3)(x+3)$.
Τό $f(x)$ παραγοντοποιεῖται καί πιό ἁπλά ὡς ἑξῆς:
$f(x) = x^2(x-2)-9(x-2) = (x-2)(x^2-9) = (x-2)(x-3)(x+3)$.

24. α) Ἀπό τήν ἄσκ. 22α παρατηροῦμε ὅτι ἄν $\alpha+\beta+\gamma=0$ τότε καί $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma = 0$ ἤ $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$.
Ἔχουμε τώρα $(x-1)+(x-2)+(3-2x) = x-1+x-2+3-2x = 0$. Ἄρα $f(x) = (x-1)^3+(x-2)^3+(3-2x)^3 = 3(x-1)(x-2)(3-2x)$.

β) Εἶναι

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-4)^2-4(x^2-5x+6)^2 \\ &= [(x-2)(x+2)]^2-4[(x-2)(x-3)]^2 \\ &= (x-2)^2(x+2)^2-4(x-2)^2(x-3)^2 \\ &= (x-2)^2[(x+2)^2-4(x-3)^2] \\ &= (x-2)^2[(x+2)-2(x-3)][(x+2)+2(x-3)] \\ &= (x-2)^2(8-x)(3x-4). \end{aligned}$$

25. Τά πεδία ορισμοῦ τῶν f_1 καί f_2 εἶναι ἀντιστοίχως $\mathbb{R}-\{2\}$ καί $\mathbb{R}-\{-3,1\}$.
Ἄρα τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς f_1+f_2 εἶναι τό $\mathbb{R}-\{-3,1,2\}$ καί $(f_1+f_2)(x)$

$$=f_1(x)+f_2(x)=\frac{3x+1}{x-2}+\frac{5x-4}{(x-1)(x+3)}=\frac{(3x+1)(x-1)(x+3)+(5x-4)(x-2)}{(x-2)(x-1)(x+3)}$$

$$=\ldots=\frac{3x^3+12x^2-21x+5}{(x-2)(x-1)(x+3)}.$$

26. Τά πεδία ὁρισμοῦ τῶν f_1 καί f_2 εἶναι ἀντιστοίχως $\mathbb{R}-\{0,1\}$ καί $\mathbb{R}-\{0,2\}$.
Ἄρα τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς f_1+f_2 εἶναι τό $\mathbb{R}-\{0,1,2\}$ καί $(f_1+f_2)(x)$

$$=f_1(x)+f_2(x)=\frac{3x+2}{x(x-1)}+\frac{4}{x(x-2)}=\frac{(3x+2)(x-2)+4(x-1)}{x(x-1)(x-2)}$$

$$=\ldots=\frac{3x^2-8}{x(x-1)(x-2)}.$$

27. Τά πεδία ὁρισμοῦ τῶν f_1 καί f_2 εἶναι ἀντιστοίχως $\mathbb{R}-\{2\}$ καί $\mathbb{R}-\{1,3\}$.
Ἄρα τό πεδίο ὁρισμοῦ τῶν f_1+f_2 καί f_1f_2 εἶναι τό $\mathbb{R}-\{1,2,3\}$ καί

$$(f_1+f_2)(x)=f_1(x)+f_2(x)=\frac{3x+1}{x-2}+\frac{5x-4}{(x-1)(x-3)}$$

$$=\frac{(3x+1)(x-1)(x-3)+(5x-4)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\ldots=\frac{3x^3-6x^2-9x+11}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

$$(f_1f_2)(x)=f_1(x)f_2(x)=\frac{3x+1}{x-2}\,\frac{5x-4}{(x-1)(x-3)}=\frac{(3x+1)(5x-4)}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

28. Τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς f εἶναι τό $\mathbb{R}-\{-3,-1,1\}$ στό ὁποῖο εἶναι $x^2-1\neq 0$ καί $x^2+2x-3\neq 0$. Ἄρα γιά $x\in\mathbb{R}-\{-3,-1,1\}$

εἶναι $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-1}-\dfrac{6}{x^2+2x-3}=\dfrac{x+2}{(x-1)(x+1)}-\dfrac{6}{(x+3)(x-1)}$

$$=\frac{(x+2)(x+3)-6(x+1)}{(x-1)(x+1)(x+3)}=\ldots=\frac{x}{(x+1)(x+3)}.$$

29. Εἶναι $f_1(x)=\dfrac{\dfrac{1}{2}-\dfrac{4}{x^3}}{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2x}}=\dfrac{\dfrac{x^3-8}{2x^3}}{\dfrac{4+x^2+2x}{4x^2}}=\dfrac{4x^2(x-2)(x^2+2x+4)}{2x^3(x^2+2x+4)}$

$$=\frac{2(x-2)}{x}$$

$$f_2(x)=\frac{9x^2-4\alpha^2}{\dfrac{x-\alpha}{\alpha-2x}-1}=\frac{(3x-2\alpha)(3x+2\alpha)}{\dfrac{x-\alpha-\alpha+2x}{\alpha-2x}}=\frac{(3x-2\alpha)(3x+2\alpha)(\alpha-2x)}{3x-2\alpha}$$

$$=(3x+2\alpha)(\alpha-2x).$$

30. Πρέπει $(x-3)(x+2)\neq 0$ (1). Ἀλλά (1) $\Leftrightarrow$ ($x-3\neq 0$ **καί** $x+2\neq 0$) $\Leftrightarrow$ ($x\neq 3$ **καί** $x\neq -2$).
Ἄρα τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς f εἶναι τό $\mathbb{R}-\{-2,3\}$.
Ἐπειδή ὅμως $\forall\, x\in\mathbb{R}$, $x^2+1\neq 0$ τό $\mathbb{R}-\{-2,3\}$ θά εἶναι καί πεδίο ὁρισμοῦ τῆς $g=\dfrac{1}{f}$ μέ $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{(x-3)(x+2)}{x^2+1}$.

31. α) Σύμφωνα μέ τήν § 3.11 'Εφ. 6, ή έξίσωση $(x+2)^2+(x^2+5x+6)^2=0$ ισοδυναμεί μέ $(x+2=0$ **καί** $x^2+5x+6=0)$ (1). 'Αλλά (1) $\Leftrightarrow (x+2=0$ **καί** $(x+2)(x+3)=0) \Leftrightarrow x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$.

β) $(x-1)^2(x^2-4)(x^2+2)=0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x-2)(x+2)(x^2+2)=0$ (1). 'Αλλά έπειδή $\forall\, x \in \mathbb{R},\ x^2+2 \neq 0$ θά είναι: (1) $\Leftrightarrow (x-1=0$ **ἤ** $x-2=0$ **ἤ** $x+2=0)$ $\Leftrightarrow (x=1$ **ἤ** $x=2$ **ἤ** $x=-2)$.

γ) $(x-3)^2-(x^2-4x+3)=0 \Leftrightarrow (x-3)^2-(x-1)(x-3)=0 \Leftrightarrow$ $(x-3)[(x-3)-(x-1)]=0 \Leftrightarrow (x-3)(-2)=0 \Leftrightarrow x-3=0 \Leftrightarrow x=3$.

32. α) $x^3+3x^2+3x+1=0 \Leftrightarrow (x^3+1)+3x(x+1)=0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-x+1)+3x(x+1)=0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-x+1+3x)=0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2+2x+1)=0$ $\Leftrightarrow (x+1)^3=0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$.

β) $(x-1)^2+(x^2-1)=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(x-1)(x+1)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x-1+x+1)=0$ $\Leftrightarrow (x-1)\,2x=0 \Leftrightarrow (x-1=0$ **ἤ** $x=0) \Leftrightarrow (x=1$ **ἤ** $x=0)$.

γ) $2x^3-2x=x^2-1 \Leftrightarrow 2x^3-2x-(x^2-1)=0 \Leftrightarrow 2x(x^2-1)-(x^2-1)=0$ $\Leftrightarrow (x^2-1)(2x-1)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)(2x-1)=0 \Leftrightarrow (x-1=0$ **ἤ** $x+1=0$ **ἤ** $2x-1=0) \Leftrightarrow \left(x=1 \text{ ἤ } x=-1 \text{ ἤ } x=\frac{1}{2}\right)$.

33. α) $\dfrac{x-2}{x}+\dfrac{4}{x-2}-\dfrac{8}{x^2-2x}=0 \Leftrightarrow \dfrac{x-2}{x}+\dfrac{4}{x-2}-\dfrac{8}{x(x-2)}=0$ (1). Πρέπει: $x(x-2)\neq 0$ ή $(x \neq 0$ **καί** $x \neq 2)$. 'Η (1) $\Leftrightarrow (x-2)^2+4x-8=0 \Leftrightarrow$ $(x-2)^2+4(x-2)=0 \Leftrightarrow (x-2)(x-2+4)=0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2)=0$ καί έπειδή $x-2\neq 0$ θά είναι $x+2=0$, δηλαδή $x=-2$.

β) $\dfrac{1}{x^2+3x+2}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{x+1}{2(x+2)} \Leftrightarrow \dfrac{1}{(x+1)(x+2)}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{x+1}{2(x+2)}$. (1)
Πρέπει $(x+1)(x+2)\neq 0$ (2). 'Αλλά (2)$\Leftrightarrow(x+1\neq 0$ **καί** $x+2\neq 0)$ $\Leftrightarrow(x\neq -1$ **καί** $x\neq -2)$.

'Οπότε: (1) $\Leftrightarrow 2-2(x+2)=(x+1)^2 \Leftrightarrow 2-2x-4=x^2+2x+1$ $\Leftrightarrow x^2+4x+3=0 \Leftrightarrow (x+1)(x+3)=0$ καί έπειδή $x+1\neq 0$ θά είναι $x+3=0$, δηλαδή $x=-3$.

34. α) $\dfrac{(x+1)^3}{x-2} \geq 0 \Leftrightarrow [(x+1)^3(x-2)\geq 0$ **καί** $x-2\neq 0]$ $\Leftrightarrow [(x+1)^2(x+1)(x-2)\geq 0$ **καί** $x-2\neq 0]$ (1). 'Αλλά $(x+1)^2\geq 0$ όπότε: (1) $\Leftrightarrow [(x+1)(x-2)\geq 0$ **καί** $x-2\neq 0] \Leftrightarrow [(x+1\geq 0$ **καί** $x-2>0)$ **ἤ** $(x+1\leq 0$ **καί** $x-2<0)]$ $\Leftrightarrow [(x\geq -1$ **καί** $x>2)$ **ἤ** $(x\leq -1$ **καί** $x<2)] \Leftrightarrow (x>2$ **ἤ** $x\leq -1)$.

β) $\dfrac{(x-1)^2(x+1)}{x+3}\leq 0 \Leftrightarrow [(x-1)^2(x+1)(x+3)\leq 0$ **καί** $x+3\neq 0]$ (1).

'Επειδή ὅμως είναι $(x-1)^2\geq 0$ ή (1) ισοδυναμεί μέ $(x=1)$ **ἤ** $[(x+1)(x+3)\leq 0$ **καί** $x+3\neq 0]$.
'Αλλά $[(x+1)(x+3)\leq 0$ **καί** $x+3\neq 0]$ $\Leftrightarrow (x+1\leq 0$ **καί** $x+3>0)$ (2) **ἤ** $(x+1\geq 0$ **καί** $x+3<0)$ (3).
Τό σύστημα (3) είναι άδύνατο άφοῦ πάντα $x+3>x+1$, ένῶ τό (2) $\Leftrightarrow (x\leq -1$ καί $x>-3) \Leftrightarrow -3<x\leq -1$. Ἄρα ή λύση τῆς άνισώσεως είναι: $-3<x\leq -1$ **ἤ** $x=1$.

35. $1 < \frac{1+x}{1-x} < 2 \Leftrightarrow \left(1 < \frac{1+x}{1-x} \text{ καί } \frac{1+x}{1-x} < 2\right) \Leftrightarrow \left(0 < \frac{1+x}{1-x} - 1 \text{ καί } \frac{1+x}{1-x} - 2 < 0\right)$

$$\Leftrightarrow \left(0 < \frac{1+x-(1-x)}{1-x} \text{ καί } \frac{1+x-2(1-x)}{1-x} < 0\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(0 < \frac{2x}{1-x} \text{ καί } \frac{3x-1}{1-x} < 0\right)$$

$$\Leftrightarrow [x(1-x) > 0 \text{ καί } (3x-1)(1-x) < 0] \qquad (1)$$

Είναι: $x(1-x) > 0 \Leftrightarrow [(x > 0 \text{ καί } 1-x > 0) \text{ ή } (x < 0 \text{ καί } 1-x < 0)]$

$$\Leftrightarrow [(x > 0 \text{ καί } x < 1) \text{ ή } (x < 0 \text{ καί } x > 1)]$$

$$\Leftrightarrow 0 < x < 1 \qquad (2)$$

Είναι: $(3x-1)(1-x) < 0 \Leftrightarrow [(3x-1 < 0 \text{ καί } 1-x > 0) \text{ ή } (3x-1 > 0 \text{ καί } 1-x < 0)]$

$$\Leftrightarrow \left\{\left(x < \frac{1}{3} \text{ καί } x < 1\right) \text{ ή } \left(x > \frac{1}{3} \text{ καί } x > 1\right)\right\}$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{1}{3} \text{ ή } x > 1 \qquad (3)$$

Οἱ (2) καί (3) συναληθεύουν γιά $0 < x < \frac{1}{3}$.

36. Είναι: $f_1(x) = \dfrac{\dfrac{x}{\alpha} + \dfrac{\alpha^2}{x^2}}{\dfrac{\alpha}{x^2} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\alpha}} = \dfrac{\dfrac{x^3+\alpha^3}{\alpha x^2}}{\dfrac{\alpha^2-\alpha x+x^2}{\alpha x^2}} = \dfrac{x^3+\alpha^3}{\alpha^2-\alpha x+x^2}$

$$= \frac{(x+\alpha)(x^2-\alpha x+\alpha^2)}{\alpha^2-\alpha x+x^2} = x+\alpha.$$

$$f_2(x) = \frac{x}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x-1}}} = \frac{x}{1-\dfrac{1}{\dfrac{x-1+1}{x-1}}} = \frac{x}{1-\dfrac{x-1}{x}}$$

$$= \frac{x}{\dfrac{x-x+1}{x}} = \frac{x^2}{1} = x^2.$$

37. α) $\frac{2x}{x^2-4} - \frac{x-1}{2-x} = \frac{1}{x+2} \Leftrightarrow \frac{2x}{(x+2)(x-2)} + \frac{x-1}{x-2} = \frac{1}{x+2} \quad (1)$

Πρέπει νά εἶναι $(x-2)(x+2) \neq 0$ δηλαδή $(x-2 \neq 0$ **καί** $x+2 \neq 0)$ ή $(x \neq 2$ **καί** $x \neq -2)$.

Ὁπότε ἔχουμε: $(1) \Leftrightarrow 2x+(x-1)(x+2) = x-2 \Leftrightarrow 2x+(x-1)(x+2)-x+2=0$

$$\Leftrightarrow x+2+(x-1)(x+2) = 0 \Leftrightarrow (x+2)(1+x-1) = 0.$$

$\Leftrightarrow (x+2)x = 0$ καί ἐπειδή $x+2 \neq 0$ θά εἶναι $x = 0$.

β) $\frac{x^2}{x+1} + 1 = \frac{1}{x+1} + 2x$ (1). Πρέπει $x+1 \neq 0$, δηλαδή $x \neq -1$, ὁπότε ἔχουμε: $(1) \Leftrightarrow x^2+x+1 = 1+2x(x+1) \Leftrightarrow x^2+x-2x(x+1) = 0$

$$\Leftrightarrow x(x+1)-2x(x+1) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2x) = 0.$$

$\Leftrightarrow (x+1)(-x) = 0$ καί ἐπειδή $x+1 \neq 0$ θά εἶναι $x = 0$.

38. α) $\dfrac{(x-2)^2(x+1)}{x-3} \geq 0 \Leftrightarrow [(x-2)^2(x+1)(x-3) \geq 0$ **καί** $x-3 \neq 0]$ (1).

Ἐπειδή ὅμως εἶναι $(x-2)^2 \geq 0$ ἡ (1) ἰσοδυναμεῖ μέ $(x=2)$ ἤ $[(x+1)(x-3) \geq 0$ **καί** $x-3 \neq 0]$.

Ἀλλά: $[(x+1)(x-3) \geq 0$ **καί** $x-3 \neq 0]$

$\Leftrightarrow [x+1 \geq 0$ **καί** $x-3 > 0)$ ἤ $(x+1 \leq 0$ **καί** $x-3 < 0)]$

$\Leftrightarrow [(x \geq -1$ **καί** $x > 3)$ ἤ $(x \leq -1$ **καί** $x < 3)]$

$\Leftrightarrow (x > 3$ ἤ $x \leq -1)$

β) $\dfrac{x+2}{2x-3} \leq 0 \Leftrightarrow [(x+2)(2x-3) \leq 0$ **καί** $2x-3 \neq 0]$

$\Leftrightarrow [x+2 \leq 0$ **καί** $2x-3 > 0)$ ἤ $(x+2 \geq 0$ **καί** $2x-3 < 0)]$

$\Leftrightarrow [(x \leq -2$ **καί** $x > \frac{3}{2})$ ἤ $(x \geq -2$ **καί** $x < \frac{3}{2})]$

$\Leftrightarrow -2 \leq x < \frac{3}{2}$.

γ) $\dfrac{3x-1}{x+3} > 0 \Leftrightarrow (3x-1)(x+3) > 0 \Leftrightarrow [(3x-1 > 0$ **καί** $x+3 > 0)$ ἤ $(3x-1 < 0$ **καί** $x+3 < 0)$

$\Leftrightarrow [(x > \frac{1}{3}$ **καί** $x > -3)$ ἤ $(x < \frac{1}{3}$ **καί** $x < -3)]$

$\Leftrightarrow (x > \frac{1}{3}$ ἤ $x < -3)$.

39. Ἀρκεῖ νά ἀποδείξουμε ὅτι $f_1(x) = f_2(x)f_3(x)$ γιά $x \neq -1, 3$.

Εἶναι $f_1(x) = (x-2)^2(2x+1) - (x-2)^2(2x-5)$

$= (x-2)^2[(2x+1) - (2x-5)] = 6(x-2)^2$.

$$f_2(x) = \frac{2(x^2-5x+6)}{(x-3)(x+1)} = \frac{2(x-2)(x-3)}{(x-3)(x+1)} = \frac{2(x-2)}{x+1}$$

$$f_3(x) = (x+2)(x-2)(x+1) - (x-2)(x-1)(x+1)$$

$$= (x-2)(x+1)[(x+2)-(x-1)] = 3(x-2)(x+1).$$

Ἄρα $f_2(x)f_3(x) = \dfrac{2(x-2)}{x+1}3(x-2)(x+1) = 6(x-2)^2 = f_1(x)$.

40. $5 > \dfrac{2x-1}{x+3} > 3 \Leftrightarrow \left(5 > \dfrac{2x-1}{x+3}\right.$ **καί** $\left.\dfrac{2x-1}{x+3} > 3\right)$

$\Leftrightarrow \left(0 > \dfrac{2x-1}{x+3} - 5\right.$ **καί** $\left.\dfrac{2x-1}{x+3} - 3 > 0\right)$

$\Leftrightarrow \left(0 > \dfrac{2x-1-5(x+3)}{x+3}\right.$ **καί** $\left.\dfrac{2x-1-3(x+3)}{x+3} > 0\right)$

$\Leftrightarrow \left(0 > \dfrac{-3x-16}{x+3}\right.$ **καί** $\left.\dfrac{-x-10}{x+3} > 0\right)$

$\Leftrightarrow \left(0 < \dfrac{3x+16}{x+3}\right.$ **καί** $\left.\dfrac{x+10}{x+3} < 0\right)$

$\Leftrightarrow [0 < (3x+16)(x+3)$ **καί** $(x+10)(x+3) < 0]$ (1)

Εἶναι: $(3x+16)(x+3) > 0 \Leftrightarrow [(3x+16 > 0$ **καί** $x+3 > 0)$ ἤ $(3x+16 < 0$ **καί** $x+3 < 0)] \Leftrightarrow \left\{\left(x > -\frac{16}{3}\right.\right.$ **καί** $\left.x > -3\right)$ ἤ $\left(x < -\frac{16}{3}\right.$ **καί** $\left.\left.x < -3\right)\right\}$

$\Leftrightarrow \left(x > -3\right.$ ἤ $\left.x < -\frac{16}{3}\right)$. (1)

Είναι: $(x+10)(x+3) < 0 \Leftrightarrow (x+10 > 0$ **καί** $x+3 < 0)$ (ἐπειδή εἶναι $x+10 > x+3)$

$\Leftrightarrow (x > -10$ **καί** $x < -3)$

$\Leftrightarrow -10 < x < -3$ (2)

Οἱ (1) καί (2) συναληθεύουν γιά $-10 < x < -\frac{16}{3}$.

41. **α)** Ἐπειδή ὅλα τά διαφορετικά ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων εἶναι οἱ ἀριθμοί 0,1,2, συμπεραίνουμε ὅτι τό σύνολο τιμῶν τῆς f εἶναι τό $\{0,1,2\}$.

β) Τά ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων $2:3$, $18:3$, $19:3$ καί $22:3$ εἶναι ἀντίστοιχα οἱ ἀριθμοί 2,0,1,1. Ἄρα θά ἔχουμε:
$f(2) = 2$, $f(18) = 0$, $f(19) = 1$ καί $f(22) = 1$.

γ) Ἄν πάρουμε $\alpha = 28$ καί $\beta = 25$, θά ἔχουμε $f(\alpha) = 1$, $f(\beta) = 1$ καί $f(\alpha-\beta) = f(28-25) = f(3) = 0$.

δ) Ἄν πάρουμε $\alpha = 12$, $\beta = 18$ καί $\gamma = 5$, θά ἔχουμε:
$f(\alpha) = f(12) = 0$ καί $f(\beta) = f(18) = 0$ καί $f(\alpha+\beta) = f(12+18) = f(30) = 0$.
Ἐπίσης $f(\alpha\gamma) = f(12.5) = f(60) = 0$ καί $f(\alpha+\gamma) = f(12+5) = f(17) = 2 = f(5) = f(\gamma)$.

42. Ἄν $\nu = 2\rho$ μέ $\rho \in \mathbb{N}$ ἰσχύει: $f(2\rho) = (-1)^{2\rho}.2+(-1)^{2\rho+1}.3 = 2-3 = -1$ καί $g(2\rho) = -1$. Δηλαδή $f(\nu) = g(\nu)$ γιά κάθε ν ἄρτιο (1).
Ἔστω τώρα $\nu = 2\rho+1$ μέ $\rho \in \mathbb{N}$, τότε $f(2\rho+1) = (-1)^{2\rho+1}.2+(-1)^{2\rho+2}.3 = -2+3 = 1$ καί $g(2\rho+1) = 1$. Ἄρα $f(\nu) = g(\nu)$ γιά κάθε ν περιττό (2).
Ἀπό τίς (1) καί (2) ἔχουμε $\forall\, x \in \mathbb{N}, f(\nu) = g(\nu)$. Ἄρα $f = g$.
Ἄν $k = 2\rho$, τότε $g(k)+g(k+1) = g(2\rho)+g(2\rho+1) = -1+1 = 0$.
Ἄν $k = 2\rho+1$, τότε $g(k)+g(k+1) = g(2\rho+1) + g(2\rho+2) = 1-1 = 0$
Ἄρα $g(k)+g(k+1) = 0$ γιά κάθε $k \in \mathbb{N}$.

43. Είναι $f_1(x) = (x+1)^2$ καί $f_2(x) = (x-1)(x+1)$. Ἑπομένως ἔχουμε:

$$\begin{aligned}(f_1{}^4-f_2{}^4)(x) &= f_1{}^4(x)-f_2{}^4(x) = [f_1{}^2(x)-f_2{}^2(x)][f_1{}^2(x)+f_2{}^2(x)]\\
&= [f_1(x)-f_2(x)][f_1(x)+f_2(x)][f_1{}^2(x)+f_2{}^2(x)]\\
&= [(x+1)^2-(x-1)(x+1)][(x+1)^2+(x-1)(x+1)][(x+1)^4+\\
&\quad +(x-1)^2(x+1)^2]\\
&= (x+1)[(x+1)-(x-1)](x+1)[(x+1)+(x-1)](x+1)^2\\
&\quad [(x+1)^2+(x-1)^2]\\
&= (x+1)^4(x+1-x+1)(x+1+x-1)(x^2+2x+1+x^2-2x+1)\\
&= (x+1)^4\ 2(2x)(2x^2+2) = (x+1)^4\, 4x2(x^2+1)\\
&= 8x(x^2+1)f_1{}^2(x).\end{aligned}$$

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

σελ.

1. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΠΟ ΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ 7

ΕΙΣΑΓΩΓΗ 9

Προτάσεις. Ἀληθεῖς προτάσεις. Ἁπλές καί σύνθετες προτάσεις. Προτασιακοί τύποι.

ΛΟΓΙΚΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ 13

Ἄρνηση. Σύζευξη. Διάζευξη. Συνεπαγωγή. Ἰσοδυναμία. Γενίκευση συζεύξεως καί διαζεύξεως. Καθολικός ποσοδείκτης. Συνεπαγωγές καθολικά ἀληθεῖς. Ἰσοδύναμοι π.τ. Ὑπαρξιακός ποσοδείκτης. Ἀρνήσεις.

ΛΟΓΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ 21

Ἔννοια τοῦ λογικοῦ τύπου. Ταυτολογίες. Νόμοι λογικῆς. Δύο βασικοί κανόνες.

ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΠΟΔΕΙΞΕΩΣ 25

Ἡ ἀπόδειξη γενικά. Εὐθεία ἀπόδειξη. Ἀπαγωγή σέ ἄτοπο. Ἀντιθετοαντιστροφή. Διάκριση περιπτώσεων. Ἐπαγωγή.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 31

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗ ΛΥΣΗ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 34

2. ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΩΣ ΑΝΤΙΜΕΤΑΘΕΤΙΚΟ ΣΩΜΑ 35

ΒΑΣΙΚΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΤΟ $\mathbb{R}$ 37

Γενικά. Πρόσθεση. Πολλαπλασιασμός.

ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΠΡΟΣΘΕΣΕΩΣ 38

Ἀντιμεταθετικότητα. Προσεταιριστικότητα. Γενίκευση ἀθροίσματος. Οὐδέτερο στοιχεῖο. Ὕπαρξη ἀντιθέτου. Νόμος τῆς διαγραφῆς στήν πρόσθεση. Ἡ ἀφαίρεση στό $\mathbb{R}$.

ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ 44

Ἀντιμεταθετικότητα. Προσεταιριστικότητα. Γενίκευση γινομένου. Δυνάμεις. Ἐπιμεριστικότητα. Οὐδέτερο στοιχεῖο. Ὕπαρξη ἀντιστρόφου. Νόμος τῆς διαγραφῆς στόν πολλαπλασιασμό. Διαίρεση. Δύναμη μέ ἐκθέτη ἀκέραιο. Λύση τῆς ἐξισώσεως $\alpha x+\beta=0$. Γενικές ἐφαρμογές.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 60

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗ ΛΥΣΗ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 63

3. ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΩΣ ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΟ ΣΩΜΑ 65

ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΔΙΑΤΑΞΕΩΣ 67

Γενικά. Θετικοί καί ἀρνητικοί ἀριθμοί. Ἀνισότητες. Νόμος τριχοτομίας. Κανόνας τῶν προσήμων.

ΣΧΕΣΗ ΔΙΑΤΑΞΕΩΣ ΣΤΟ ℝ 70

Μεταβατικότητα. Ἡ φυσική διάταξη στό ℝ.

ΔΙΑΤΑΞΗ ΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ 71

Γενικά. Διάταξη καί πρόσθεση. Διάταξη καί πολλαπλασιασμός. Διάταξη καί δυνάμεις. Λύση τῶν ἀνισώσεων $\alpha x+\beta \gtrless 0$. Ἔννοια διαστήματος.

ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ 78

Ὁρισμός. Ἀπόλυτη τιμή ἀθροίσματος. Ἀπόλυτη τιμή γινομένου. Γενικές Ἐφαρμογές.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 82

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗ ΛΥΣΗ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 84

4. ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ 85

ΔΙΜΕΛΕΙΣ ΣΧΕΣΕΙΣ 87

Ἔννοια διμελοῦς σχέσεως. Ἰσότητα διμελῶν σχέσεων. Ἀντιστροφή διμελῶν σχέσεων.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ 90

Ἔννοια συναρτήσεως. Εἰδικές συναρτήσεις. Εἴδη συναρτήσεων. Ἀντίστροφη συνάρτηση.

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ 94

Ἔννοια τῆς πραγματικῆς συναρτήσεως. Ἴσες συναρτήσεις. Περιορισμός καί ἐπέκταση συναρτήσεως.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ 96

Γενικά. Πρόσθεση συναρτήσεων. Πολλαπλασιασμός πραγματικοῦ ἀριθμοῦ ἐπί συνάρτηση. Πολλαπλασιασμός συναρτήσεων.

ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΚΑΙ ΡΗΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ 103

Ἔννοια πολυωνυμικῆς συναρτήσεως. Ἀνάπτυγμα καί παραγοντοποίηση. Ἔννοια ρητῆς συναρτήσεως.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ ... 107

Ἐφαρμογές στή λύση ἐξισώσεων. Ἐφαρμογές στή λύση ἀνισώσεων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 109

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗ ΛΥΣΗ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 114

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 117

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 118

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 124

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 129

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 133

ΕΚΔΟΣΗ Α΄ 1979 (XI) ΑΝΤΙΤΥΠΑ 120.000 - ΣΥΜΒΑΣΗ 3278/19-9-79

ΕΚΤΥΠΩΣΗ-ΒΙΒΛΙΟΔΕΣΙΑ: Ι. ΔΙΚΑΙΟΣ Α.Ε.

ΟΕ
ΔΒ