μαθηματικά

ἄλγεβρα

α΄ λυκείου
β΄ τεῦχος

ΓΑΝΙΣΜΟΣ
ΔΟΣΕΩΣ
ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ
ΒΙΒΛΙΩΝ

ΑΘΗΝΑ 1980

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Α΄

ΛΥΚΕΙΟΥ

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΤΕΥΧΟΣ Β΄

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑ 1980

Γιά τή συγγραφή αὐτοῦ τοῦ βιβλίου συγκροτήθηκε μέ ὑπουργική ἀπόφαση ὁμάδα ἐργασίας, πού τήν ἀποτέλεσαν οἱ:

Ν. ΒΑΡΟΥΧΑΚΗΣ . . . . *Σύμβουλος Β' ΚΕΜΕ*

Λ. ΑΔΑΜΟΠΟΥΛΟΣ . . . . *Εἰσηγητής ΚΕΜΕ*

Ν. ΑΛΕΞΑΝΔΡΗΣ . . . . *Καθηγητής Μ.Ε.*

Δ. Α. ΠΑΠΑΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ . . . . *Καθηγητής Μ.Ε.*

Α. ΠΑΠΑΜΙΚΡΟΥΛΗΣ . . . . *Καθηγητής Μ.Ε.*

5 ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Μέ τό ἀξίωμα τοῦ κιβωτισμοῦ συμπληρώνεται τό ἀξιωματικό σύστημα τῆς θεωρίας τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, τό ὁποῖο ἀναπτύχθηκε στά κεφάλαια 2 καί 3, καί ὑπογραμμίζεται ἡ ἐξάρτηση ἀπό τό ἀξίωμα αὐτό μερικῶν θεμελιωδῶν προτάσεων πού ἦταν ὥς τώρα «αὐτονόητες», ὅπως π.χ. ἡ ὕπαρξη ρίζας ἤ δεκαδικῶν προσεγγίσεων ἑνός ἀριθμοῦ. Δίνεται ἔτσι ἡ εὐκαιρία νά ἐπισημανθεῖ ἡ διαφορά τοῦ $\mathbb{R}$ *ἀπό τό* $\mathbb{Q}$ *ὡς πρός τήν πληρότητα πού χαρακτηρίζει τό πρῶτο καί ὄχι τό δεύτερο.*
Ἐξάλλου ἡ ἔννοια τῆς ρίζας ἑνός ἀριθμοῦ καθώς καί ἡ χρησιμοποίηση τοῦ ριζικοῦ μόνο γιά τούς μή ἀρνητικούς εἰσάγονται κατά τρόπο πού συντελεῖ στήν ἁπλή παρουσίαση τῶν ἰδιοτήτων τῶν πράξεων μέ ριζικά καί τῆς ἐπιλύσεως τῆς διώνυμης ἐξισώσεως στό $\mathbb{R}$. *Μέ τόν τρόπο αὐτό ἀποφεύγεται ἡ περιπτωσιολογία πού ὁδηγεῖ συχνά σέ σύγχυση ἤ καί σέ λάθη, ἐνῶ ὑπάρχει ἐναρμόνιση μέ τήν ἔννοια ρίζας μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ πού θά διδαχθεῖ ἀργότερα. Τέλος εἰσάγεται ἡ ἔννοια τῆς δυνάμεως μέ ρητό ἐκθέτη ὡς ἕνα ἀκόμη παράδειγμα «τοῦ μηχανισμοῦ τῆς γενικεύσεως», πού τόσο εὔστοχα λειτουργεῖ στά μαθηματικά.*

ΤΟ ΑΞΙΩΜΑ ΤΟΥ ΚΙΒΩΤΙΣΜΟΥ

Ἀριθμοί μέ ἄπειρα δεκαδικά ψηφία

5.1 Σέ προηγούμενες τάξεις συναντήσαμε ἀριθμούς σέ δεκαδική μορφή μέ ἄπειρα δεκαδικά ψηφία. Ἡ γραφή ἀριθμῶν σέ μιά τέτοια μορφή στηρίζεται σέ ὁρισμένες «παραδοχές», πού εἶναι καιρός νά ἀναλύσουμε.

● Τί ἐννοοῦμε π.χ. γράφοντας $\alpha = 3{,}6666\ldots$;

Ἀσφαλῶς ἐννοοῦμε ἕναν ἀριθμό μεταξύ 3 καί 4, ἀκριβέστερα μεταξύ 3,6 καί 3,7 ἤ ἀκόμα 3,66 καί 3,67... ἤ 3,66...6 καί 3,66...7 κ.ο.κ. Αὐτές οἱ ὅλο καί ἀκριβέστερες δεκαδικές προσεγγίσεις τοῦ α μέ ἔλλειψη καί μέ ὑπεροχή σχηματίζουν μιά ἀκολουθία διαστημάτων

$$[3\,,4],[3{,}6\,,3{,}7],[3{,}66\,,3{,}67],\ldots,[3{,}\underbrace{66\ldots6}_{\text{k ψηφία}}\,,3{,}\underbrace{66\ldots7}_{\text{k ψηφία}}], \qquad (1)$$

τῶν ὁποίων τὸ πλάτος (δηλαδή ἡ διαφορά τῶν ἄκρων τους) εἶναι

$$1,\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{100},\ldots,\frac{1}{10^k},\ldots, \text{ καί διαρκῶς μικραίνει.}$$

Ἡ γραφή λοιπόν $\alpha = 3{,}666\ldots$ σημαίνει ὅτι δεχόμαστε τά ἑξῆς:

1. ὑπάρχει ἀριθμός α, κοινό στοιχεῖο τῶν διαστημάτων τῆς ἀκολουθίας (1)
2. ὁ ἀριθμός αὐτός εἶναι **μοναδικός** καί συμβολίζεται (μέ βάση τίς προσεγγίσεις του μέ ἔλλειψη) 3,666...

● Στίς ἴδιες παραδοχές στηρίζεται καί ἡ μετατροπή τοῦ 3,666... σέ ρητό, γνωστή ἀπό τό Γυμνάσιο. Πράγματι, ἀπό τίς ἀνισότητες:

$$\begin{aligned}
&3 < \alpha < 4\\
&3{,}6 < \alpha < 3{,}7\\
&3{,}66 < \alpha < 3{,}67\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&3{,}66\ldots6 < \alpha < 3{,}66\ldots7\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

μέ πρόσθεση στά μέλη τους τοῦ 33 (= 36–3) ἤ μέ πολλαπλασιασμό τῶν μελῶν τους ἐπί 10 (§ 3.9 καί § 3.10) προκύπτει ὅτι τόσο ὁ $33+\alpha$ ὅσο καί ὁ 10α ἀνήκουν στά διαστήματα

$$[36\,,37],[36{,}6\,,36{,}7],\ldots,[36{,}66\ldots6\,,36{,}66\ldots7],\ldots \qquad (2)$$

πού τό πλάτος τους εἶναι πάλι $1,\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{100},\ldots,\frac{1}{10^k},\ldots$ Δεχόμενοι λοιπόν ὅτι τά διαστήματα αὐτά ἔχουν ἕνα καί μοναδικό κοινό στοιχεῖο πού τό γράφουμε 36,666..., θά ἔχουμε

$$36{,}66\ldots = 33 + \alpha = 10\alpha, \quad \text{ἄρα} \quad \alpha = \frac{33}{9}.$$

- Μέ τήν ἴδια ἔννοια ὁ ἀριθμός 2,59999... εἶναι τό μοναδικό κοινό στοιχεῖο τῶν διαστημάτων

$$[2, 3], [2{,}5, 2{,}6], [2{,}59, 2{,}6], \ldots, [2{,}599\ldots9, 2{,}6] \qquad (3)$$

δηλαδή ὁ ἀριθμός 2,6.

- Τέλος, ἀναζητώντας τή θετική ρίζα τῆς ἐξισώσεως $x^2 = 2$ στό $\mathbb{R}$, τήν ὁποία συμβολίζουμε $\sqrt{2}$, βρίσκουμε τίς δεκαδικές προσεγγίσεις της:

μέ ἔλλειψη : 1, 1,4, 1,41, 1,414, 1,4142, 1,41421,...

μέ ὑπεροχή: 2, 1,5, 1,42, 1,415, 1,4143, 1,41422,...

Γράφουμε λοιπόν $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$

Γενικά μποροῦμε νά ποῦμε ὅτι ἕνας «ἀπειροψήφιος δεκαδικός» ρητός ἤ ἄρρητος εἶναι **τό μοναδικό κοινό στοιχεῖο** τῶν κλειστῶν διαστημάτων πού ὁρίζουν οἱ δεκαδικές προσεγγίσεις του.

Ἄσκηση 1.

Ἀξίωμα κιβωτισμοῦ

5.2 Τά διαστήματα πού σχηματίζονται ἀπό τίς δεκαδικές προσεγγίσεις ἑνός ἀριθμοῦ, ὅπως εἴδαμε στά παραδείγματα τῆς § 5.1, ἔχουν τά ἑξῆς χαρακτηριστικά:

- Καθένα περιέχεται σέ ὅλα τά προηγούμενα
- Τό πλάτος τους «μικραίνει ὅσο θέλουμε», δηλαδή μπορεῖ νά γίνει μικρότερο ἀπό κάθε δεδομένο ἀριθμό ὁσοδήποτε μικρό (π.χ. ἀπό τόν $\frac{1}{\mu}$, μέ ὁσοδήποτε μεγάλο $\mu \in \mathbb{N}^*$).

Διαστήματα μέ τίς παραπάνω ἰδιότητες ὀνομάζονται κιβωτισμένα. Πιό συγκεκριμένα: Τά **κλειστά** διαστήματα τῆς ἀκολουθίας

$$[\alpha_0, \beta_0], \quad [\alpha_1, \beta_1], \ldots \quad [\alpha_\nu, \beta_\nu] \ldots$$

ὀνομάζονται **κιβωτισμένα,** ὅταν ἔχουν τίς ἀκόλουθες δύο ἰδιότητες:

1. $\forall\, \nu \in \mathbb{N}^*, [\alpha_\nu, \beta_\nu] \subseteq [\alpha_{\nu-1}, \beta_{\nu-1}]$
2. Ἄν δοθεῖ ἕνας φυσικός ἀριθμός μ (ὁσοδήποτε μεγάλος), τότε ὑπάρχει διάστημα τῆς ἀκολουθίας μέ πλάτος μικρότερο τοῦ $\frac{1}{\mu}$. Δηλαδή

$$\forall\, \mu \in \mathbb{N}^*, \ \exists\, \nu \in \mathbb{N}, \ \beta_\nu - \alpha_\nu \leqslant \frac{1}{\mu}$$

Διατυπώνουμε τώρα γενικότερα τίς «παραδοχές» πού κάναμε γιά τά διαστήματα τῶν ἀκολουθιῶν τῆς § 5.1 μέ τό ἀκόλουθο *«ἀξίωμα τοῦ κιβωτισμοῦ»*.

ΑΞΙΩΜΑ XII

Γιά κάθε ἀκολουθία κιβωτισμένων διαστημάτων ὑπάρχει ἕνα μοναδικό κοινό στοιχεῖο τους

Ἔτσι, κάθε ἀκολουθία κιβωτισμένων διαστημάτων **ὁρίζει** ἕναν πραγματικό ἀριθμό (τό κοινό τους στοιχεῖο).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Τά διαστήματα τῆς ἀκολουθίας

$$[0, 1], \left[0, \frac{1}{2}\right], \left[0, \frac{1}{3}\right], \ldots, \left[0. \frac{1}{\nu}\right], \ldots$$

εἶναι κιβωτισμένα $\left(\alpha_\nu = 0,\ \beta_\nu = \frac{1}{\nu},\ \beta_\nu - \alpha_\nu = \frac{1}{\nu}\right)$ μέ κοινό στοιχεῖο τό 0.

Παρατηρῆστε ὅτι τά κιβωτισμένα διαστήματα εἶναι **κλειστά.** Π.χ. ἄν ἀπό τά προηγούμενα διαστήματα $\left[0, \frac{1}{\nu}\right]$ ἐξαιρέσουμε τό 0, προκύπτουν τά ἀνοικτά ἀριστερά διαστήματα $\left(0, \frac{1}{\nu}\right]$, τά ὁποῖα δέν μπορεῖ νά ἔχουν κοινό στοιχεῖο.

ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Ἀξίωμα τοῦ Ἀρχιμήδη

5.3 Ὁ μεγάλος Ἕλληνας μαθηματικός Ἀρχιμήδης χρησιμοποίησε σέ πολλές περιπτώσεις τήν πρόταση, γνωστή **ὡς ἀξίωμα τοῦ Ἀρχιμήδη:** *«Γιά ὁποιουσδήποτε ἀριθμούς $\alpha > 0$ καί $\beta > 0$ ὑπάρχει φυσικός ἀριθμός ν τέτοιος, ὥστε $\nu\beta > \alpha$».*

Ἐπειδή $\beta > 0$, εἶναι $\nu\beta > \alpha \Leftrightarrow \nu > \frac{\alpha}{\beta}$. Μποροῦμε τώρα νά ἀποδείξουμε τήν πρόταση τοῦ Ἀρχιμήδη μέ τήν ἑξῆς γενικότερη διατύπωση

ΘΕΩΡΗΜΑ 1

Γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό, ὑπάρχει φυσικός ἀριθμός μεγαλύτερός του, δηλαδή $\forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ \exists\, \nu \in \mathbb{N},\ \nu > \alpha$

Ἀπόδειξη. Ἡ πρόταση εἶναι προφανής γιά $\alpha \leq 0$. Ἔστω λοιπόν $\alpha > 0$. Ὑποθέτουμε (§ 1.30) ὅτι ἀληθεύει ἡ ἄρνηση τοῦ θεωρήματος πού εἶναι (§ 1.22) ἡ ἑξῆς: «Ὑπάρχει $\alpha > 0$ τέτοιος, ὥστε γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$, νά εἶναι $\nu \leq \alpha$».

Ἄρα (§ 3.11 Ἐφ. 1) $\forall\ \nu \in \mathbb{N}^*,\ 0 < \frac{1}{\alpha} \leq \frac{1}{\nu}$. Συνεπῶς $\frac{1}{\alpha} \in \left[0, \frac{1}{\nu}\right]$, δηλαδή ὁ $\frac{1}{\alpha}$ ἀνήκει σέ ὅλα τά διαστήματα:

$$\left[0, \frac{1}{1}\right], \left[0, \frac{1}{2}\right], \ldots, \left[0, \frac{1}{\nu}\right], \ldots$$

τά ὁποῖα, ὅπως εἴπαμε (§ 5.2 Παραδ.) εἶναι κιβωτισμένα μέ μοναδικό κοινό στοιχεῖο τό 0. Ἄρα θά πρέπει $\frac{1}{\alpha} = 0$, πού εἶναι **ἄτοπο** (§ 2.17 Παρ. 3).

Γιά κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, εἶναι $-\alpha \in \mathbb{R}$ καί ὑπάρχει $\nu > -\alpha$. Ἐπειδή $\nu > -\alpha \Leftrightarrow -\nu < \alpha$ ἔχουμε:

ΠΟΡΙΣΜΑ $\quad \forall\ \alpha \in \mathbb{R},\ \exists\ \nu \in \mathbb{N}^*,\ -\nu < \alpha$

Διαστήματα μέ ἄκρα $+\infty$, $-\infty$

5.4 Γιά κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, τό σύνολο $\{x : x > \alpha\}$, σύμφωνα μέ τό προηγούμενο θεώρημα περιέχει ὁπωσδήποτε ἕνα φυσικό ἀριθμό $\nu > \alpha$, ἄρα καί ἄλλο $\nu_1 > \nu$ καί ἄλλο μεγαλύτερο τοῦ ν_1 κ.ο.κ. Τό σύνολο αὐτό, τό ὁποῖο συνεπῶς δέν εἶναι κενό οὔτε μπορεῖ νά ἔχει μέγιστο στοιχεῖο, τό συμβολίζουμε ὡς διάστημα μέ συμβολικό δεξιό ἄκρο $+\infty$ (σύν ἄπειρο). Γράφουμε λοιπόν

$$\{x : x > \alpha\} = (\alpha, +\infty)$$

Ἐπίσης γράφουμε $\quad \{x : x \geqslant \alpha\} = [\alpha, +\infty)$

Ὁμοίως τό σύνολο $\{x : x < \alpha\}$, τό ὁποῖο ὅπως προκύπτει ἀπό τό πόρισμα τῆς § 5.3 δέν ἔχει ἐλάχιστο στοιχεῖο, τό συμβολίζουμε ὡς διάστημα μέ συμβολικό ἀριστερό ἄκρο $-\infty$:

$$\{x : x < \alpha\} = (-\infty, \alpha)$$

Ἐπίσης $\quad \{x : x \leqslant \alpha\} = (-\infty, \alpha]$

Τέλος τό $\mathbb{R}$, πού εἶναι ἕνωση τῶν διαστημάτων $[\alpha, +\infty)$ καί $(-\infty, \alpha]$, γράφεται καί ὡς διάστημα $(-\infty, +\infty)$.

Δεκαδικές προσεγγίσεις ἀριθμοῦ

5.5 Μποροῦμε τώρα νά **ἀποδείξουμε** ὅτι γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό α ὁρίζονται **μονοσήμαντα** οἱ δεκαδικές του προσεγγίσεις (μονάδας, δεκάτου,..., $\frac{1}{10^\nu}$, ...). Ἀρχίζοντας ἀπό τίς προσεγγίσεις ἀκέραιας μονάδας, ἄς ἀποδείξουμε πρῶτα ὅτι ὁ α περιέχεται μεταξύ δύο διαδοχικῶν ἀκεραίων, δηλαδή ὅτι ὑπάρχει ἕνας **μοναδικός** ἀκέραιος k_0 τέτοιος, ὥστε νά εἶναι

$$k_0 \leqslant \alpha < k_0 + 1 \qquad (1)$$

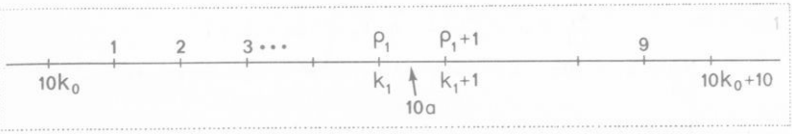
★ **'Απόδειξη** "Αν $\alpha \in \mathbb{Z}$, τότε $k_0 = \alpha$. Ύποθέτουμε λοιπόν $\alpha \notin \mathbb{Z}$, όπότε

- ἄν $\alpha > 0$, ἀρκεῖ νά λάβουμε ὡς $k_0 + 1$ τό μικρότερο φυσικό ἀριθμό ἀπό ἐκείνους πού ὑπερβαίνουν τόν α (§ 5.3 Θεώρ.).
- ἄν $\alpha < 0$, τότε ὁ k_0 εἶναι ὁ μεγαλύτερος ἀπό τούς ἀκέραιους πού εἶναι μικρότεροι τοῦ α (§ 5.3 Πόρ.).

'Από τήν (1) προκύπτει ὅτι

$$10\,k_0 \leqslant 10\alpha < 10k_0 + 10 \qquad (2)$$

'Αλλά, ὅπως εἴδαμε προηγουμένως, ὁ 10α περιέχεται καί μεταξύ δύο **διαδοχικῶν** ἀκεραίων k_1 καί $k_1 + 1$. "Αρα ὁ k_1 θά εἶναι (σχ. 1) ἕνας ἀπό



τούς ἀκέραιους $10k_0, 10k_0 + 1, \ldots, 10k_0 + 9$. Δηλαδή ὑπάρχει ἕνας μονοψήφιος ρ_1 τέτοιος, ὥστε

$$k_1 = 10\,k_0 + \rho_1 \leqslant 10\alpha < k_1 + 1 \quad \text{ἤ}$$

$$\frac{k_1}{10} = k_0 + \frac{\rho_1}{10} \leqslant \alpha < \frac{k_1 + 1}{10} \qquad (3)$$

Γενικότερα γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$, ὑπάρχει ἕνας μοναδικός ἀκέραιος τέτοιος, ὥστε $k_\nu \leqslant 10^\nu \alpha < k_\nu + 1$, δηλαδή $\dfrac{k_\nu}{10^\nu} \leqslant \alpha < \dfrac{k_\nu + 1}{10^\nu}$.

'Αποδεικνύουμε ὅπως προηγουμένως (ἄν ἀντί γιά τούς k_0, k_1 πάρουμε τούς $k_{\nu-1}, k_\nu$), ὅτι ὑπάρχει ἕνας μονοψήφιος ρ_ν τέτοιος, ὥστε

$$k_\nu = 10k_{\nu-1} + \rho_\nu, \text{ ὁπότε ἔχουμε}$$

$$\frac{k_\nu}{10^\nu} = \frac{k_{\nu-1}}{10^{\nu-1}} + \frac{\rho^\nu}{10^\nu} = k_0 + \frac{\rho_1}{10} + \frac{\rho_2}{10^2} + \cdots + \frac{\rho_\nu}{10^\nu} \qquad (4)$$

"Αν $\alpha = \dfrac{k_\nu}{10^\nu}$, τότε ὁ α εἶναι δεκαδικός μέ ν δεκαδικά ψηφία (εἰδικά γιά $\nu = 0$, ὁ α εἶναι ἀκέραιος). Διαφορετικά

- ὁ $\dfrac{k_\nu}{10^\nu}$ εἶναι ἡ προσέγγιση $\dfrac{1}{10^\nu}$ μέ ἔλλειψη τοῦ α.
- ὁ $\dfrac{k_\nu + 1}{10^\nu}$ εἶναι ἡ προσέγγιση $\dfrac{1}{10^\nu}$ μέ ὑπεροχή τοῦ α.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Οἱ δεκαδικές αὐτές προσεγγίσεις (μονάδας, δεκάτου, ..., $\dfrac{1}{10^\nu}$, ...) τοῦ α, ὅπως προκύπτει ἀπό τίς (3) καί (4), σχηματίζουν ἀκολουθία κιβωτισμένων διαστημάτων, ἡ ὁποία ὁρίζει ἀκριβῶς τόν α.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Μέ τή γνωστή διάταξη τῆς διαιρέσεως 17 : 6 βρίσκουμε τίς δεκαδικές προσεγγίσεις τοῦ $\alpha = -\dfrac{17}{6}$

μέ ὑπεροχή	τίς:	-2	$-2{,}8$	$-2{,}83$	$-2{,}833$
μέ ἔλλειψη	τίς:	-3	$-2{,}9$	$-2{,}84$	$-2{,}834$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Ἄν $\alpha^3 = 3$, νά βρεθοῦν οἱ προσεγγίσεις $\dfrac{1}{10}$ τοῦ ἀριθμοῦ α.

Πρέπει νά ὁρίσουμε τόν ἀκέραιο k_1 ὥστε :

$$\frac{k_1}{10} \leq \alpha < \frac{k_1+1}{10} \quad \text{ἤ} \quad k_1 \leq 10\alpha < k_1+1$$

Ἀλλά $k_1 \leq 10\alpha < k_1+1 \Leftrightarrow k_1^3 \leq 1000\alpha^3 < (k_1+1)^3$ καί ἀφοῦ $\alpha^3 = 3$

$$\Leftrightarrow k_1^3 \leqslant 3000 < (k_1+1)^3$$

Ἐπειδή ὁ $14^3 < 3000 < 15^3$ θά εἶναι $k_1 = 14$ καί οἱ ζητούμενες προσεγγίσεις εἶναι $\dfrac{k_1}{10} = 1{,}4$ (μέ ἔλλειψη) καί $\dfrac{k_1+1}{10} = 1{,}5$ (μέ ὑπεροχή).

Ἄσκηση 2.

Ἡ μέτρηση εὐθύγραμμων τμημάτων

5.6 Ἔστω τ ἕνα (εὐθύγραμμο) τμῆμα. Εἶναι γνωστό πῶς ὁρίζεται στή Γεωμετρία, γιά κάθε φυσικό ἀριθμό ν, τό τμῆμα ντ, τό τμῆμα $\dfrac{1}{\nu}$ τ πού γράφεται $\dfrac{\tau}{\nu}$, συνεπῶς καί τό τμῆμα $\mu \cdot \dfrac{\tau}{\nu}$ $(\mu \in \mathbb{N},\ \nu \in \mathbb{N}^*)$ πού γράφεται $\dfrac{\mu}{\nu}\tau$ καί λέγεται **γινόμενο** τοῦ τ ἐπί τόν ρητό $\dfrac{\mu}{\nu}$. Ὁ ὁρισμός τοῦ γινομένου λτ καί στήν περίπτωση πού ὁ λ εἶναι ἄρρητος στηρίζεται σέ προτάσεις ἀνάλογες πρός τά ἀξιώματα τοῦ Ἀρχιμήδη καί τοῦ κιβωτισμοῦ, πού ἰσχύουν καί στή Γεωμετρία. Συγκεκριμένα ἰσχύουν τά ἑξῆς :

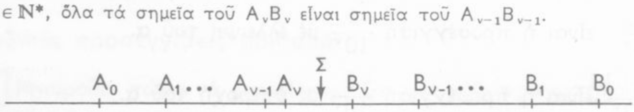
1. **Ἄν σ καί τ εἶναι δύο ὁποιαδήποτε εὐθύγραμμα τμήματα (τό τ μή μηδενικό), ὑπάρχει φυσικός ἀριθμός ν τέτοιος, ὥστε ντ > σ.**

Ἐξάλλου τά τμήματα :

$$A_0B_0,\ A_1B_1, \ldots,\ A_\nu B_\nu, \ldots \tag{1}$$

μιᾶς εὐθείας λέγονται **κιβωτισμένα** ὅταν

- $\forall\, \nu \in \mathbb{N}^*$, ὅλα τά σημεῖα τοῦ $A_\nu B_\nu$ εἶναι σημεῖα τοῦ $A_{\nu-1}B_{\nu-1}$.



- Ἄν δοθεῖ ἕνα τμῆμα ε ὁσοδήποτε μικρό, ὑπάρχει τμῆμα τῆς ἀκολουθίας (1) μικρότερο τοῦ ε.

Ἔχουμε λοιπόν τήν πρόταση:

2. **Γιά κάθε ἀκολουθία κιβωτισμένων τμημάτων ὑπάρχει ἕνα μοναδικό κοινό σημεῖο τους.**

5.7 **Γινόμενο τμήματος ἐπί πραγματικό ἀριθμό.** Θά ὁρίσουμε τώρα τό γινόμενο λτ, ὅταν λ εἶναι θετικός πραγματικός ἀριθμός καί μάλιστα ἄρρητος. Ἄς θεωρήσουμε τήν ἀκολουθία πού σχηματίζουν οἱ δεκαδικές προσεγγίσεις τοῦ λ (§ 5.5 Παρατ.)

$$[k_0, k_0+1], \left[\frac{k_1}{10}, \frac{k_1+1}{10}\right], \left[\frac{k_2}{100}, \frac{k_2+1}{100}\right], \ldots, \left[\frac{k_\nu}{10^\nu}, \frac{k_\nu+1}{10^\nu}\right], \ldots \qquad (\alpha)$$

Σέ μιά ἡμιευθεία Ox ὁρίζουμε τά σημεῖα $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_\nu, \ldots$ ἔτσι, ὥστε

$$\forall \nu \in \mathbb{N}, \quad OA_\nu = \frac{k_\nu}{10^\nu}\tau$$

καί τά σημεῖα $B_0, B_1, B_2, \ldots B_\nu$ ἔτσι, ὥστε

$$\forall \nu \in \mathbb{N}, \quad OB_\nu = \frac{k_\nu+1}{10^\nu}\tau$$

Ἐπειδή τά διαστήματα τῆς (α) εἶναι κιβωτισμένα, μποροῦμε νά ἀποδείξουμε[1] ὅτι καί τά τμήματα A_0B_0, A_1B_1, $A_2B_2, \ldots, A_\nu B_\nu$ εἶναι ἐπίσης κιβωτισμένα. Ἑπομένως ὑπάρχει ἕνα μοναδικό κοινό σημεῖο Σ ὅλων τῶν τμημάτων $A_\nu B_\nu$. Τό **τμῆμα** ΟΣ **ὁρίζεται ὡς τό γινόμενο λτ.**

Γιά τό γινόμενο λτ ἀποδεικνύονται[1] οἱ ἑξῆς βασικές ἰδιότητες ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$):

$$(\lambda+\mu)\tau = \lambda\tau+\mu\tau \qquad (1)$$

$$\lambda(\tau+\sigma) = \lambda\tau+\lambda\sigma \qquad (2)$$

$$\lambda(\mu\tau) = (\lambda\mu)\tau \qquad (3)$$

5.8 **Λόγος δύο τμημάτων.** Ἔστω τ καί σ δύο τμήματα (τ μή μηδενικό). Τότε μέ βάση τό ἀξίωμα τοῦ Ἀρχιμήδη ἀποδεικνύεται, ὅπως ἀκριβῶς στήν § 5.5, ὅτι ὑπάρχει ἕνας μοναδικός **φυσικός** k_0 τέτοιος, ὥστε

$$k_0\tau \leqslant \sigma < (k_0+1)\tau$$

καί γενικότερα ὅτι, γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$, ὑπάρχει ἕνας k_ν τέτοιος, ὥστε

$$\frac{k_\nu}{10^\nu}\tau \leqslant \sigma < \frac{k_\nu+1}{10^\nu}\tau$$

Τά διαστήματα

$$[k_0, k_0+1], \ldots, \left[\frac{k_\nu}{10^\nu}, \frac{k_\nu+1}{10^\nu}\right], \ldots$$

εἶναι κιβωτισμένα. Ἄρα (§ 5.2) ὁρίζουν ἕναν πραγματικό ἀριθμό λ. Τότε σύμφωνα μέ τήν § 5.7 εἶναι $\sigma = \lambda\tau$. Ὁ λ λέγεται **λόγος** τοῦ **σ** πρός τό **τ**, συμβολικά $\lambda = \dfrac{\sigma}{\tau}$.
Ἄν τό τ λαμβάνεται ὡς μονάδα μετρήσεως τῶν τμημάτων (μονάδα μήκους), ὁ λ λέγεται **μέτρο** (μῆκος) τοῦ σ.

Ἀποδεικνύονται οἱ ἑξῆς βασικές ἰδιότητες:

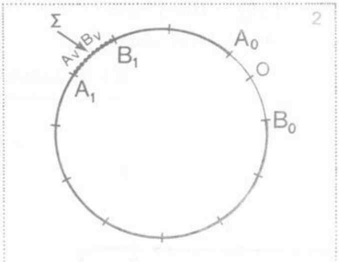
1. **Τό μέτρο τοῦ ἀθροίσματος δύο τμημάτων ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῶν μέτρων τους.**
2. **Ὁ λόγος δύο τμημάτων ἰσοῦται μέ τό λόγο τῶν μέτρων τους** (ὡς πρός κοινή μονάδα μετρήσεως).

---

(1) Ἡ ἀπόδειξη παραλείπεται.

Μέτρηση τόξων ή γωνιών

5.9 Ἐπειδή οἱ προτάσεις 1 καί 2 τῆς § 5.6 ἰσχύουν καί γιά τόξα (ἤ γωνίες) τό γινόμενο τόξου ἐπί πραγματικό ἀριθμό καί ὁ λόγος δύο τόξων ὁρίζονται ὅπως οἱ ἀντίστοιχες ἔννοιες γιά τά τμήματα. Γιά τόν ὁρισμό τοῦ $\lambda\tau$ π.χ. ὅταν τ εἶναι τόξο κύκλου καί λ ἄρρητος ὁρίζουμε στόν **κύκλο** τό σημεῖο O καί μέ τίς προσεγγίσεις τοῦ λ τά σημεῖα A_ν καί B_ν γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$. Τά κιβωτισμένα τόξα $\widehat{A_\nu B_\nu}$ ὁρίζουν τό μοναδικό σημεῖο Σ καί εἶναι $\lambda\tau = \widehat{O\Sigma}$.



Συμπεραίνεται ὅτι οἱ ἰδιότητες (1), (2), (3) τῆς § 5.7 καθώς καί οἱ βασικές ἰδιότητες 1 καί 2 τῆς § 5.8 ἰσχύουν καί γιά τόξα (γωνίες).

Τετραγωνική ρίζα

5.10 Ἔστω **α** πραγματικός ἀριθμός καί ἡ ἐξίσωση $x^2 = \alpha$ στό $\mathbb{R}$. Κάθε ρίζα τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς λέγεται **τετραγωνική ρίζα** τοῦ **α**. Εἶναι φανερό ὅτι:

- Ἄν $\alpha < 0$, ἡ ἐξίσωση δέν ἔχει καμιά ρίζα, ἀφοῦ $\forall\, x,\ x^2 \geqslant 0$.
- Ἄν $\alpha = 0$, μοναδική ρίζα τῆς ἐξισώσεως εἶναι ὁ 0, ἀφοῦ $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Ἄς ἐξετάσουμε ἄν ἡ ἐξίσωση $x^2 = \alpha$ ἔχει ρίζες στήν περίπτωση $\alpha > 0$. Παρατηροῦμε ὅτι, ἄν ρ εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως, τότε καί ὁ $-\rho$ εἶναι ἐπίσης ρίζα της, ἀφοῦ $x^2 = (-x)^2$. Ἀρκεῖ λοιπόν στήν περίπτωση αὐτή νά βρεθοῦν οἱ θετικές ρίζες, **ἄν ὑπάρχουν.**

Ἀποδεικνύεται σχετικά τό ἑξῆς:

ΘΕΩΡΗΜΑ 2

Γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό $\alpha \geqslant 0$ ὑπάρχει ἕνας μοναδικός $x \geqslant 0$ τέτοιος, ὥστε

$$x^2 = \alpha$$

Ὁ ἀριθμός αὐτός συμβολίζεται $\sqrt{\alpha}$.

Ἀπόδειξη

Ἀποδεικνύουμε πρῶτα ὅτι ὑπάρχει ἕνας μοναδικός φυσικός ἀριθμός ρ_0 τέτοιος, ὥστε

$$\rho_0^2 \leqslant \alpha < (\rho_0 + 1)^2$$

Εἰδικά, ἄν $\alpha = 0$, τότε $\rho_0 = 0$.

Σύμφωνα μέ τήν § 5.3, ὑπάρχει φυσικός $\mu > \alpha \geqslant 0$. Ἄρα $\mu \geqslant 1$ καί $\mu^2 \geqslant \mu > \alpha$. Δηλαδή ὑπάρχουν φυσικοί ἀριθμοί τῶν ὁποίων **τό τετράγωνο** ὑπερβαίνει τόν α. Τόν μικρότερο ἀπό αὐτούς παίρνουμε ὡς $\rho_0 + 1$.

Γενικότερα γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ ὑπάρχει ἕνας μοναδικός ἀκέραιος ρ_ν τέτοιος, ὥστε νά εἶναι

$$\left(\frac{\rho_\nu}{10^\nu}\right)^2 \leq \alpha < \left(\frac{\rho_\nu + 1}{10^\nu}\right)^2 \qquad (1)$$

Πράγματι, ἡ (1) εἶναι ἰσοδύναμη τῆς $\rho_\nu^2 \leqslant 10^{2\nu}\alpha < (\rho_\nu+1)^2$ ἤ ἄν θέσουμε $10^{2\nu}\alpha = \beta$ τῆς $\rho^2{}_\nu \leqslant \beta \leqslant (\rho_\nu+1)^2$ ἀπό τήν ὁποία σύμφωνα μέ τά προηγούμενα ὁρίζεται ὁ μοναδικός φυσικός ρ_ν.

Οἱ ἀριθμοί $\alpha_\nu = \frac{\rho_\nu}{10^\nu}$ καί $\beta_\nu = \frac{\rho_\nu+1}{10^\nu}$ σχηματίζουν γιά $\nu \in \mathbb{N}$, διαστήματα $[\alpha_\nu, \beta_\nu]$ κιβωτισμένα, τά ὁποῖα συνεπῶς ὁρίζουν ἕναν ἀριθμό x. Ἄρα εἶναι:

$$\forall \nu \in \mathbb{N}, \quad \alpha_\nu \leqslant x \leqslant \beta_\nu$$

συνεπῶς καί (§ 3.11)

$$\alpha_\nu^2 \leqslant x^2 < \beta_\nu^2 \tag{2}$$

Ἀλλά καί τά διαστήματα $[\alpha_\nu^2, \beta_\nu^2]$, ἀποδεικνύεται(1) ὅτι εἶναι κιβωτισμένα. Τό μοναδικό κοινό στοιχεῖο αὐτῶν τῶν διαστημάτων, λόγω τῆς (1), εἶναι ὁ α, καί, λόγω τῆς (2), ὁ x^2.
Ἄρα $\mathbf{x^2 = \alpha}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Ἡ ἐξίσωση λοιπόν $x^2 = \alpha$, μέ $\alpha > 0$, ἔχει ρίζες τούς ἀριθμούς $\sqrt{\alpha}$ (θετική τετραγωνική ρίζα) καί $-\sqrt{\alpha}$ (ἀρνητική τετραγωνική ρίζα).
2. Γιά νά εἶναι ἡ $\sqrt{\alpha}$ ρητός, πρέπει καί ἀρκεῖ ὁ α νά εἶναι τετράγωνο ρητοῦ.

Διάκριση $\mathbb{Q}$ καί $\mathbb{R}$

5.11 Τά ἀξιώματα I - IX τοῦ κεφαλαίου 2 καί X, XI τοῦ κεφαλαίου 3 ἰσχύουν εἰδικότερα καί στό σύνολο $\mathbb{Q}$ τῶν ρητῶν ἀριθμῶν. Ἀλλά τό ἀξίωμα τοῦ κιβωτισμοῦ πού δεχόμαστε γιά πραγματικούς ἀριθμούς δέν ἰσχύει στό σύνολο $\mathbb{Q}$. Δηλαδή ὑπάρχει ἀκολουθία κιβωτισμένων διαστημάτων ρητῶν ἀριθμῶν ἀλλά δέν ὑπάρχει **ρητός** πού νά εἶναι κοινό στοιχεῖο τῶν διαστημάτων. Πράγματι, ἄν ἴσχυε τό ἀξίωμα τοῦ κιβωτισμοῦ στό $\mathbb{Q}$ θά μπορούσαμε ἐπαναλαμβάνοντας ὅσα εἴπαμε στήν § 5.10 νά ἀποδείξουμε ὅτι γιά **κάθε** ρητό α ὑπάρχει ρητός x τέτοιος, ὥστε $x^2 = \alpha$. Ἀλλά αὐτό δέν ἰσχύει ἀφοῦ π.χ. ἡ ἐξίσωση $x^2 = 2$ δέν ἔχει λύση στό $\mathbb{Q}$, ὅπως ἤδη ξέρουμε ἀπό τό Γυμνάσιο.
Ἡ διάκριση λοιπόν $\mathbb{Q}$ καί $\mathbb{R}$ ἀφορᾶ τίς ἰδιότητες πού προκύπτουν ὡς συνέπειες τοῦ ἀξιώματος τοῦ κιβωτισμοῦ καί πού συνεπῶς ἰσχύουν στό $\mathbb{R}$ ἀλλά ὄχι στό $\mathbb{Q}$.

ΡΙΖΕΣ ΤΑΞΕΩΣ ν

Ὁρισμός

5.12 Γενικεύοντας ὅσα εἴπαμε στήν § 5.10 θά ὀνομάσουμε **ρίζα τάξεως ν** (νιοστή ρίζα) τοῦ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ α ($\nu \in \mathbb{N}^*$) κάθε ρίζα τῆς ἐξισώσεως $x^\nu = \alpha$.

(1) Ἡ ἀπόδειξη παραλείπεται.

Μέ τή μέθοδο πού ἀκολουθήσαμε στήν § 5.10 μποροῦμε νά ἀποδείξουμε ὅτι, γιά κάθε φυσικό ἀριθμό $\nu \neq 0$, ἰσχύει τό ἑξῆς

ΘΕΩΡΗΜΑ 3

> **Γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό $\alpha \geqslant 0$ ὑπάρχει ἕνας μοναδικός $x \geqslant 0$ τέτοιος, ὥστε**
> $$x^\nu = \alpha$$

Ὁ **μή ἀρνητικός** αὐτός ἀριθμός συμβολίζεται $\sqrt[\nu]{\alpha}$.

Ἔτσι, ἡ $\sqrt{\alpha}$ (§ 5.10) εἶναι ἡ $\sqrt[2]{\alpha}$, ἐνῶ τό σύμβολο $\sqrt[1]{\ }$ δέ χρησιμοποιεῖται ἀφοῦ $\alpha^1 = \alpha$ καί συνεπῶς $\sqrt[1]{\alpha} = \alpha$.

Τονίζουμε ὅτι τό σύμβολο $\sqrt[\nu]{\alpha}$ ἔχει νόημα **μόνο ὅταν** $\alpha \geqslant 0$ καί μέ αὐτή τή σημασία θά χρησιμοποιεῖται στά ἑπόμενα.

Εἰδικότερα ἐπειδή $0^\nu = 0$ εἶναι $\sqrt[\nu]{0} = 0$ καί συνεπῶς γιά $\alpha > 0$ ἡ $\sqrt[\nu]{\alpha}$ εἶναι ἀριθμός **θετικός** (θετική νιοστή ρίζα τοῦ α).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Ἐπειδή π.χ. $5^3 = 125$ καί $\frac{25}{9} = \left(\frac{5}{3}\right)^2$ θά εἶναι :
$$\sqrt[3]{125} \overset{(1)}{=} 5 \quad \text{καί} \quad \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}.$$

2. Ἐπειδή $\alpha^2 = (-\alpha)^2 = |\alpha|^2$ καί $|\alpha| \geqslant 0$, θά εἶναι $\sqrt{\alpha^2} = \sqrt{(-\alpha)^2} = |\alpha|$.

3. Εἶναι $\alpha^6 = (\alpha^2)^3$, $\alpha^6 \geqslant 0$ καί $\alpha^2 \geqslant 0$. Ἄρα $\sqrt[3]{\alpha^6} = \alpha^2$.
Ἐπίσης $\alpha^6 = (\alpha^3)^2 = (-\alpha^3)^2$. Ἄρα : $\sqrt{\alpha^6} = |\alpha^3| = |\alpha|^3$.

4. Ὁμοίως $\sqrt[4]{81\alpha^4\beta^8} = \sqrt[4]{(3\alpha\beta^2)^4} = |3\alpha\beta^2| = 3|\alpha|\beta^2$,
$$\sqrt[3]{\frac{1}{8x^3}} = \frac{1}{2x}, \quad \sqrt{\frac{x^4}{2y^2}} = \frac{x^2}{\sqrt{2}\,|y|}.$$

Ἄμεσες συνέπειες τοῦ ὁρισμοῦ

5.13 Ἀπό τό προηγούμενο θεώρημα συνάγεται ἀμέσως ὅτι ἡ ἐξίσωση $x^\nu = \alpha$, μέ $\alpha \geqslant 0$, ἔχει στό $\mathbb{R}_+$, μιά μοναδική ρίζα, τήν $\sqrt[\nu]{\alpha}$.
Ἄρα

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{R}_+, \quad \sqrt[\nu]{\alpha} \geqslant 0 \qquad (1)$$
$$\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\nu = \alpha \qquad (2)$$

(1) Οἱ ρίζες τρίτης τάξεως ὀνομάζονται κυβικές.

καί ἀκόμη

$$\boxed{\forall\, x, \alpha \in \mathbb{R}_+,\ \ x^\nu = \alpha \Leftrightarrow x = \sqrt[\nu]{\alpha}} \tag{3}$$

Ἐξάλλου ἀπό τό θεώρημα 7 τῆς § 3.11 προκύπτει ὅτι:

$$\boxed{\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+,\ \ \alpha > \beta \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{\alpha} > \sqrt[\nu]{\beta}} \tag{4}$$

Εἰδικότερα ἐπειδή $\sqrt[\nu]{1} = 1$

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{R}_+,\ \ 0 < \alpha < 1 \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{\alpha} < 1 \tag{5}$$

$$\textbf{καί}\ \ \alpha > 1 \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{\alpha} > 1 \tag{6}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι :** $\sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{3}-1$.

Εἶναι $\sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{1+3-2\sqrt{3}} = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2-2\cdot 1\sqrt{3}} = \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} =$
$= |1-\sqrt{3}| = \sqrt{3}-1.$

2. **Νά ἁπλοποιηθεῖ ἡ παράσταση :** $A = \sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(1+x)^2}$.

Εἶναι $A = \sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(1+x)^2} = |x-1| + |1+x|$. Ἀλλά

- ἄν $x \leqslant -1$, τότε καί $x < 1$. Ὁπότε (§ 3.4) θά ἔχουμε :

$x < -1 \Leftrightarrow x+1 < 0 \Leftrightarrow |x+1| = -x-1$

$x < 1 \Leftrightarrow x-1 < 0 \Leftrightarrow |x-1| = -x+1$

Ἄρα $A = -x-1-x+1 = -2x$. Ὁμοίως βρίσκουμε ὅτι:

- ἄν $-1 < x \leqslant 1$ τότε $A = 2$
- ἄν $x > 1$ τότε $A = 2x$.

3. **Νά δειχθεῖ ὅτι** $\sqrt{2+\sqrt{2}} < 2$.

Εἶναι $\sqrt{2+\sqrt{2}} < 2 \Leftrightarrow 2+\sqrt{2} < 2^2 \Leftrightarrow \sqrt{2} < 2 \Leftrightarrow 2 < 4$,
πού εἶναι ἀληθής.

4. **Νά λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:**

α) $\sqrt{x-3} = \sqrt{2x}$ **β)** $\sqrt[4]{4-x} = \sqrt[4]{1+2x}$.

α) Πρέπει νά εἶναι $x-3 \geqslant 0$ **καί** $2x \geqslant 0$, δηλαδή $x \geqslant 3$.
Γιά $x \geqslant 3$ ὅμως ἔχουμε:

$\sqrt{x-3} = \sqrt{2x} \Leftrightarrow (\sqrt{x-3})^2 = (\sqrt{2x})^2 \Leftrightarrow x-3 = 2x \Leftrightarrow x = -3$
πού ἀπορρίπτεται ἀφοῦ $-3 < 3$.

β) Πρέπει νά εἶναι $4-x \geqslant 0$ **καί** $2x+1 \geqslant 0$ ἤ $x \leqslant 4$ **καί** $x \geqslant -\frac{1}{2}$.

Ὅταν ὅμως $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 4$, ἔχουμε

$\sqrt[4]{4-x} = \sqrt[4]{1+2x} \Leftrightarrow (\sqrt[4]{4-x})^4 = (\sqrt[4]{1+2x})^4 \Leftrightarrow 4-x = 1+2x \Leftrightarrow x = 1$
πού εἶναι λύση παραδεκτή.

Ἀσκήσεις 3, 4, 5, 6.

Ρίζα ἄλλης ρίζας

5.14 Ἔστω $\alpha \geqslant 0$ καί μ,ν δύο θετικοί φυσικοί ἀριθμοί. Ἐπειδή $\sqrt[\nu]{\alpha} \geqslant 0$, θά ὁρίζεται ἡ μ τάξεως ρίζα του, δηλαδή ὁ ἀριθμός $x = \sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}}$. Ἀλλά τότε σύμφωνα μέ τήν (3) τῆς § 5.13 εἶναι

$$x = \sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}} \Leftrightarrow x^{\mu} = \sqrt[\nu]{\alpha}$$
$$\Leftrightarrow (x^{\mu})^{\nu} = \alpha$$
$$\Leftrightarrow x^{\mu\nu} = \alpha$$
$$\Leftrightarrow x = \sqrt[\mu\nu]{\alpha}$$

Δηλαδή

$$\boxed{\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \sqrt[\mu\nu]{\alpha}} \qquad (1)$$

Ἐπίσης ἔχουμε γιά $\mu, \nu, k \in \mathbb{N}^*$, ἄν $\alpha^k \geqslant 0$

$$\sqrt[\mu\nu]{\alpha^{k\nu}} = \sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{(\alpha^k)^{\nu}}} = \sqrt[\mu]{\alpha^k} \qquad (2)$$

Π.χ. $\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3]{8} = 2 = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{8^2}$

Γινόμενο ριζῶν

5.15 Ἔστω ὅτι α,β εἶναι μή ἀρνητικοί ἀριθμοί καί $\nu \in \mathbb{N}^*$. Τότε ὁρίζονται οἱ ρίζες $\sqrt[\nu]{\alpha}$, καί $\sqrt[\nu]{\beta}$ καί εἶναι:

$$\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\,\sqrt[\nu]{\beta}\right)^{\nu} = \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\nu}\left(\sqrt[\nu]{\beta}\right)^{\nu} \quad \text{[δύναμη γινομένου]}$$
$$= \alpha\beta \quad \text{[βάσει τῆς (2)· τῆς § 5.13]}$$

● Ἄρα ἀπό τήν (3) τῆς § 5.13 ἔχουμε:

$$\boxed{\sqrt[\nu]{\alpha}\,\sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha\beta}} \qquad (1)$$

● Ἀπό τήν (1) ἐπειδή εἶναι $\alpha = \sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}}$, ἔχουμε:

$$\boxed{\alpha\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}\beta}} \qquad (2)$$

Γενικότερα ἄν $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_k \geqslant 0$, τότε ἀποδεικνύεται ἐπαγωγικά ὅτι:

$$\sqrt[\nu]{\alpha_1}\,\sqrt[\nu]{\alpha_2}\cdots\sqrt[\nu]{\alpha_\nu}=\sqrt[\nu]{\alpha_1\,\alpha_2\cdots\alpha_\nu} \qquad (3)$$

Ἡ (3) ὅταν $\alpha_1=\alpha_2=\cdots\alpha_\nu$ δίνει:

$$\boxed{\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^k=\sqrt[\nu]{\alpha^k}} \qquad (4)$$

Ἐξάλλου ἐπειδή

$$\sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta}}\,\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta}\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha}$$

θά εἶναι

$$\boxed{\sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta}}=\frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}} \qquad (5)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. $\sqrt{6}\cdot\sqrt{15}=\sqrt{6\cdot 15}=\sqrt{2\cdot 3^2\cdot 5}=3\sqrt{10}$.
2. $\sqrt{57600}=\sqrt{576\cdot 100}=10\sqrt{2^6\cdot 3^2}=10\cdot 2^3\cdot 3=240$.
3. $\sqrt{\alpha^7\cdot\beta\cdot\gamma^5}=\sqrt{(\alpha^3\gamma^2)^2\cdot\alpha\beta\gamma}=\alpha^3\gamma^2\sqrt{\alpha\beta\gamma}\quad(\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}_+)$.
4. $\sqrt[3]{5+\sqrt{17}}\cdot\sqrt[3]{5-\sqrt{17}}=\sqrt[3]{5^2-(\sqrt{17})^2}=\sqrt[3]{25-17}=\sqrt[3]{8}=2$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά βρεθοῦν τά ἐξαγόμενα :**

α) $A=\sqrt{48}-\sqrt{8}+\sqrt{72}-\sqrt{243}$.

β) $B=(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{6})(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}+1)$

γ) $\Gamma=\sqrt[6]{\alpha}\,\sqrt[12]{\alpha^7}\,\sqrt[15]{\alpha^2}$.

α) Εἶναι :

$$A=\sqrt{4^2\cdot 3}-\sqrt{2^2\cdot 2}+\sqrt{6^2\cdot 2}-\sqrt{9^2\cdot 3}=4\sqrt{3}-2\sqrt{2}+6\sqrt{2}-9\sqrt{3}$$

$$=(4-9)\sqrt{3}+(6-2)\sqrt{2}=-5\sqrt{3}+4\sqrt{2}.$$

β) Εἶναι $B = (\sqrt{2}\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2}\sqrt{3})(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}+1)$

$= \sqrt{2}(\sqrt{3}-1)\sqrt{3}(1+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}+1)$

$= \sqrt{2}\sqrt{3}((\sqrt{3})^2-1)((\sqrt{2})^2-1) = \sqrt{6}\,2\cdot 1 = 2\sqrt{6}$

γ) Μετασχηματίζουμε πρῶτα τά ριζικά σέ ἄλλα ἰσοδύναμα ἴδιας τάξεως. Ἔτσι σύμφωνα μέ τήν 2 τῆς § 5.14 θά ἔχουμε:

$$\sqrt[6]{\alpha} = \sqrt[6\cdot 10]{\alpha^{1\cdot 10}} = \sqrt[60]{\alpha^{10}} \qquad \sqrt[12]{\alpha^7} = \sqrt[12\cdot 5]{\alpha^{7\cdot 5}} = \sqrt[60]{\alpha^{35}} \qquad \sqrt[15]{\alpha^2} = \sqrt[15\cdot 4]{\alpha^{4\cdot 2}} = \sqrt[60]{\alpha^8}.$$

Ἑπομένως (§ 5.15) ἔχουμε:

$$\sqrt[6]{\alpha}\cdot\sqrt[12]{\alpha^7}\cdot\sqrt[15]{\alpha^2} = \sqrt[60]{\alpha^{10}}\cdot\sqrt[60]{\alpha^{35}}\cdot\sqrt[60]{\alpha^8} = \sqrt[60]{\alpha^{53}}.$$

2. **Νά μετασχηματιστοῦν τά κλάσματα σέ ἰσοδύναμα χωρίς ριζικά στόν παρονομαστή:** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\dfrac{\alpha}{\sqrt[3]{\beta}}$, $\dfrac{\alpha}{\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma}}$

Εἶναι $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$\frac{\alpha}{\sqrt[3]{\beta}} = \frac{\alpha\sqrt[3]{\beta^2}}{\sqrt[3]{\beta}\sqrt[3]{\beta^2}} = \frac{\alpha\sqrt[3]{\beta^2}}{\sqrt[3]{\beta^3}} = \frac{\alpha\sqrt[3]{\beta^2}}{\beta}$$

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma}} = \frac{\alpha(\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma})}{(\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma})(\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma})} = \frac{\alpha(\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma})}{\beta-\gamma}$$

3. **Νά ἁπλοποιηθεῖ τό ἄθροισμα:** $\sqrt{4+\sqrt{15}} + \sqrt{4-\sqrt{15}}$

Ἔστω x τό ἄθροισμα αὐτό. Τότε:

$x^2 = (4+\sqrt{15}) + (4-\sqrt{15}) + 2\sqrt{(4+\sqrt{15})(4-\sqrt{15})}$

$= 8 + 2\sqrt{16-15} = 8+2 = 10.$ Ἄρα $x = \sqrt{10}$

Ἀσκήσεις ***7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17.***

Ἡ ἐξίσωση $x^\nu = \alpha$ στό $\mathbb{R}$

5.16 Διακρίνουμε τίς περιπτώσεις

- $\alpha = 0$. Τότε μοναδική ρίζα τῆς ἐξισώσεως εἶναι ὁ 0 ($x^\nu = 0 \Leftrightarrow x = 0$).
- $\alpha > 0$. Τότε (§ 5.12) μοναδική θετική ρίζα τῆς ἐξισώσεως εἶναι ὁ ἀριθμός $\sqrt[\nu]{\alpha}$ (θετική νιοστή ρίζα τοῦ α).

  Ἄν ὁ ν εἶναι ἄρτιος, ρίζα τῆς ἐξισώσεως εἶναι καί ὁ ἀρνητικός $-\sqrt[\nu]{\alpha}$, ἐπειδή $(-x)^\nu = x^\nu$

  Ἄν ὁ ν εἶναι περιττός, ἐπειδή $x < 0 \Rightarrow x^\nu < 0$, ἡ ἐξίσωση δέν ἔχει ἀρνητική ρίζα.

● $\alpha < 0$. Τότε ἡ ἐξίσωση δέν ἔχει θετική ρίζα, ἀφοῦ $x > 0 \Rightarrow x^\nu > 0$.

Ἄν ὁ ν εἶναι ἄρτιος, δέν ἔχει οὔτε ἀρνητική ρίζα ἀφοῦ $x^\nu = (-x)^\nu$

Ἄν ὁ ν εἶναι περιττός, ἡ ἐξίσωση γράφεται ἰσοδύναμα

$$-x^\nu = -\alpha \Leftrightarrow (-x)^\nu = -\alpha \Leftrightarrow -x = \sqrt[\nu]{-\alpha} \Leftrightarrow x = -\sqrt[\nu]{-\alpha}\ ^{(1)}$$

Συνοψίζουμε τά συμπεράσματα στόν πίνακα:

α	ν	Ρίζες τῆς $x^\nu = \alpha$
$\alpha = 0$		0
$\alpha > 0$	ἄρτιος	$\sqrt[\nu]{\alpha}$ καί $-\sqrt[\nu]{\alpha}$
	περιττός	$\sqrt[\nu]{\alpha}$
$\alpha < 0$	ἄρτιος	—
	περιττός	$-\sqrt[\nu]{-\alpha}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Ἡ ἐξίσωση $x^2 = 64$ ($\alpha > 0$ καί ν ἄρτιος) ἔχει ρίζες τούς ἀριθμούς
$$\sqrt{64} = 8 \quad \text{καί} \quad -\sqrt{64} = -8.$$
2. Ἡ ἐξίσωση $x^4 = -16$ ($\alpha < 0$ καί ν ἄρτιος) δέν ἔχει λύση στό $\mathbb{R}$.
3. Ἡ ἐξίσωση $x^3 = = -343$ ($\alpha < 0$ καί ν περιττός) ἔχει ρίζα τόν $-\sqrt[3]{343} = -7$.
4. Ἡ ἐξίσωση $8x^3 - 125$, πού γράφεται $x^3 = \frac{125}{8}$ ($\alpha > 0$ καί ν περιττός),

   ἔχει ρίζα τόν $\sqrt[3]{\frac{125}{8}} = \frac{5}{2}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Νά λυθεῖ ἡ διώνυμη ἐξίσωση $\alpha x^k + \beta x^\lambda = 0$ μέ $k, \lambda \in \mathbb{N}^*$, $k > \lambda$ καί $\alpha \neq 0$.

Εἶναι $\alpha x^k + \beta x^\lambda = 0 \Leftrightarrow x^\lambda\left(x^{k-\lambda} + \frac{\beta}{\alpha}\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ἤ $x^{k-\lambda} + \frac{\beta}{\alpha} = 0$.

Ἡ τελευταία εἶναι τῆς μορφῆς $x^\nu = \alpha$.

Π.χ. $2x^5 - 16x^3 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^3 - 8) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ἤ $x^3 = 8 \Leftrightarrow x = 0$ ἤ $x = 2$.

(1) Στή βιβλιογραφία τό σύμβολο $\sqrt[\nu]{\alpha}$ χρησιμοποιεῖται καί γιά τήν περίπτωση περιττῆς τάξεως ρίζας ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ, δηλαδή χρησιμοποιεῖται π.χ. ἡ γραφή $\sqrt[3]{-8}$ ἀντί τῆς $-\sqrt[3]{8}$.

5.17 Στή § 2.20 ἐπεκτείναμε τόν ὁρισμό τῆς δυνάμεως καί στήν περίπτωση πού ὁ ἐκθέτης εἶναι ἀκέραιος. Τώρα μποροῦμε νά δώσουμε νόημα καί σέ σύμβολα $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$, ἄν $\alpha > 0$ καί μ,ν ἀκέραιοι $\neq 0$, τά ὁποῖα θά ὀνομάσουμε *«δυνάμεις μέ ρητό ἐκθέτη»*.

Ἄν ἕνα τέτοιο σύμβολο $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ ἔχει νόημα δυνάμεως τοῦ α θά πρέπει νά εἶναι θετικός ἀριθμός (ἀφοῦ $\alpha > 0$) καί ἐπιπλέον νά ἰσχύει

$$\left(\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}\right)^{\nu} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}\nu} = \alpha^{\mu}$$

Συνεπῶς $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ θά εἶναι ἡ θετική ρίζα τῆς ἐξισώσεως $x^{\nu} = \alpha^{\mu}$. Ἀλλά ἡ θετική ρίζα τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εἶναι $\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$.

Ἐπεκτείνουμε λοιπόν τόν ὁρισμό τῆς δυνάμεως μέ θετική βάση θέτοντας:

$$\boxed{\textbf{γιά } \alpha > 0 \textbf{ καί } \mu, \nu \in \mathbb{Z}^*, \quad \alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}}$$

Ἀπό τήν (2) τῆς § 5.14 προκύπτει ὅτι $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}} = \sqrt[k\nu]{\alpha^{k\mu}} = \alpha^{\frac{k\mu}{k\nu}}$, ἰδιότητα πού δικαιολογεῖ τόν ὅρο *«ρητός ἐκθέτης»*.

Ἀποδεικνύεται ὅτι ὅλες οἱ ἰδιότητες τῶν δυνάμεων τοῦ θεωρήματος 14 τῆς § 2.20, ἰσχύουν καί στήν περίπτωση πού οἱ ἐκθέτες εἶναι ρητοί.

Π.χ. $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} \cdot \alpha^{\frac{\mu'}{\nu'}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}} \cdot \sqrt[\nu']{\alpha^{\mu'}} = \sqrt[\nu\nu']{\alpha^{\mu\nu'}} \cdot \sqrt[\nu\nu']{\alpha^{\mu'\nu}} = \sqrt[\nu\nu']{\alpha^{\mu\nu'}\,\alpha^{\mu'\nu}} =$

$$= \sqrt[\nu\nu']{\alpha^{\mu\nu'+\mu'\nu}} = \alpha^{\frac{\mu\nu'+\mu\nu}{\nu\nu'}} = \alpha^{\frac{\mu\nu'}{\nu\nu'}+\frac{\mu'\nu}{\nu\nu'}} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}+\frac{\mu'}{\nu'}}$$

Ἀσκήσεις 18, 19, 20, 21.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ποιούς ρητούς παριστάνουν οἱ ἀριθμοί:

   α) 0,3232...32... **β)** 2,34545...45... **γ)** −32,52699...9...

2. Νά βρεθοῦν οἱ προσεγγίσεις $\frac{1}{10}$ τοῦ ἀριθμοῦ x ἄν

   α) $x^2 = 7$ **β)** $x^3 = 5$

3. Νά βρεθοῦν οἱ ρίζες:

   α) $\sqrt[3]{216}$, **β)** $\sqrt[4]{625}$, **γ)** $\sqrt[3]{\frac{125}{512}}$, **δ)** $\sqrt{0{,}0009}$, **ε)** $\sqrt[3]{\frac{64x^6y^9}{125}}$

4. Νά βρεθοῦν γιά $x \in \mathbb{R}$ οἱ τιμές τῶν:

α) $A = \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$ β) $B = \sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(3-x)^2}$

5. Νά ἁπλοποιηθοῦν τά ριζικά:

α) $\sqrt{36x^4+12x^2+1}$, β) $\sqrt{\dfrac{1}{4}x^4+\dfrac{3}{5}x^2+\dfrac{9}{25}}$, γ) $\sqrt{\dfrac{x^4}{25y^2}+1+\dfrac{25y^2}{4x^4}}$

6. Νά λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:

α) $\sqrt{x+3} = \sqrt{2x-1}$ γ) $\sqrt{x-2} = \sqrt{2x+3}$

β) $4 - \sqrt{x-2} = 0$ δ) $\sqrt{-3x+5} = \sqrt{x-7}$

7. Νά ἁπλοποιηθοῦν τά ριζικά:

α) $\sqrt{\sqrt[4]{16}}$ β) $\sqrt[9]{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^3}$ γ) $\sqrt[8]{(\sqrt{5}-2)^4}$

8. Νά βρεθοῦν τά ἐξαγόμενα:

α) $\sqrt{19600}$ β) $\sqrt[3]{27 \cdot 64 \cdot 343}$ γ) $\sqrt[5]{32 \cdot 243 \cdot 3125}$

9. Νά ἁπλοποιηθοῦν τά ριζικά:

α) $\sqrt[4]{16\alpha^4\beta^8}$ β) $\sqrt{108x^5y^6}$ γ) $\sqrt{3\sqrt[4]{3\sqrt[5]{3\sqrt{3}}}}$ δ) $\sqrt[3]{\sqrt{\alpha\sqrt[4]{\beta^2}}}$

10. Νά βρεθοῦν τά γινόμενα:

α) $\sqrt[5]{\alpha^2} \cdot \sqrt[15]{\alpha^4}$ β) $\sqrt[12]{\alpha^7} \cdot \sqrt[20]{\alpha^3} \cdot \sqrt[15]{\alpha^2}$ γ) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[5]{\dfrac{1}{6}}$

11. Νά βρεθοῦν τά πηλίκα:

α) $\sqrt[12]{\alpha^5} : \sqrt[4]{\alpha}$ β) $\sqrt[9]{\alpha^8} : \sqrt[6]{\alpha^5}$ γ) $\sqrt[15]{3^{10}} : \sqrt[10]{3^3}$

12. Νά βρεθοῦν τά ἀθροίσματα:

α) $\sqrt{8} + \sqrt{32} - \sqrt{18}$ γ) $-\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{375} - \sqrt[3]{54}$

β) $3\sqrt{32} - 2\sqrt{50}$ δ) $8\sqrt{20} + 3\sqrt{80} - 2\sqrt{500}$

13. Νά ἁπλοποιηθοῦν τά ριζικά:

α) $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$ β) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$ γ) $\sqrt{54+14\sqrt{5}}$

14. Νά μετασχηματιστοῦν τά παρακάτω κλάσματα σέ ἄλλα ἰσοδύναμα μέ ρητό παρονομαστή

α) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}$ β) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ γ) $\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}$ δ) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

15. Νά ἁπλοποιηθοῦν τά ἀθροίσματα:

α) $\dfrac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{3}}$ β) $(2-\sqrt{3})^{-3} + (2+\sqrt{3})^{-3}$

16. Νά βρεθεῖ ἡ διαφορά $\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}$

17. Ἔστω α, α', β, β' ρητοί ἀριθμοί. Ἄν οἱ β, β' εἶναι θετικοί, ἀλλά ὄχι τετράγωνα ρητῶν, νά δειχθεῖ ὅτι

$$\alpha+\sqrt{\beta}=\alpha'+\sqrt{\beta'} \Rightarrow \alpha=\alpha' \text{ καί } \beta=\beta'$$

18 Νά βρεθοῦν τά ἐξαγόμενα:

α) $27^{-\frac{5}{6}}\cdot 3^{2,5}$ β) $(6,25)^{-\frac{3}{4}}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$

19. Νά ὑπολογιστεῖ ἡ τιμή τοῦ

$$A=\left[\alpha^{-\frac{3}{2}}\beta\,(\alpha\beta^{-2})^{-\frac{1}{2}}(\alpha^{-1})^{-\frac{2}{3}}\right]^3 \quad \text{γιά } \alpha=\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ καί } \beta=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

20. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

α) $\left(\alpha^{\frac{1}{3}}+\beta^{\frac{1}{3}}\right)\left(\alpha^{\frac{2}{3}}-\alpha^{\frac{1}{3}}\beta^{\frac{1}{3}}+\beta^{\frac{2}{3}}\right)=\alpha+\beta$

β) $\left(\alpha^{\frac{1}{3}}-\beta^{\frac{1}{3}}\right)\left(\alpha^{\frac{2}{3}}+\alpha^{\frac{1}{3}}\beta^{\frac{1}{3}}+\beta^{\frac{2}{3}}\right)=\alpha-\beta$

21. Νά βρεθοῦν τά ἐξαγόμενα:

α) $\left(7^{\frac{1}{2}}-6^{\frac{1}{2}}\right)\left(7^{\frac{1}{2}}+6^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+1\right)\left(x^{\frac{1}{2}}-1\right)$

β) $-2(\alpha\beta)^{\frac{1}{2}}\left(\alpha^{\frac{1}{2}}-\beta^{\frac{1}{2}}\right)$

γ) $2\sqrt{6}\left(3^{\frac{1}{2}}-2\sqrt{6}+12^{\frac{1}{2}}\right)$

δ) $\left(5\cdot6^{\frac{1}{2}}+5^{\frac{1}{2}}\right)^2-\left(5\cdot6^{\frac{1}{2}}-5^{\frac{1}{2}}\right)^2$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗ ΛΥΣΗ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. **α)** Ὁ ζητούμενος ρητός προκύπτει ἀπό τήν ἐξίσωση $32+x=100x$, δηλαδή εἶναι ὁ $x=\dfrac{32}{99}$.

β) Ὁμοίως ἀπό τήν ἐξίσωση (Βλ. Μαθηματικά Β' Γυμνασίου)

$$1000x-10x=2345-23 \text{ καί εἶναι ὁ } \frac{129}{55}.$$

$(\alpha^{\mu})^{\nu} = \alpha^{\mu\cdot\nu}$

γ) $-32{,}527$.

2. Ἐργαζόμαστε ὅπως στήν Ἐφαρμογή τῆς § 5.5 καί βρίσκουμε ὡς προσεγγίσεις.

α) 2,6 (μέ ἔλλειψη) καί 2,7 (μέ ὑπεροχή).

β) Ὁμοίως 1,7 καί 1,8.

3. **α)** 6 **β)** 5 **γ)** $\dfrac{5}{8}$ **δ)** 0,03 **ε)** $\dfrac{4x^2y^3}{5}$

4. **α)** Εἶναι : $A=\begin{cases} 1, & \text{ἄν } x>0 \\ -1, & \text{ἄν } x<0 \end{cases}$

β) Ἄν $x \leqslant 1$, εἶναι $B=-2x+4$

Ἄν $1<x\leqslant 3$, εἶναι $B=2$

Ἄν $x>3$, εἶναι $B=2x-4$.

5. **α)** $6x^2+1$ **β)** $\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{3}{5}$ **γ)** $\left|\dfrac{x^2}{5y}+\dfrac{5y}{2x^2}\right|$

6. **α)** $x=4$ **β)** $x=18$ **γ)** Ἡ ἐξίσωση δέν ἔχει λύση. **δ)** Ἡ ἐξίσωση δέν ἔχει λύση.

7. **α)** $\sqrt{2}$ **β)** $\sqrt[3]{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ **γ)** $\sqrt{\sqrt{5}-2}$

8. **α)** 140 **β)** 84 **γ)** 30

9. **α)** $2|\alpha|\beta^2$ **β)** $6x^2|y|^3\sqrt{3x}$ **γ)** $\sqrt[20]{3^{13}}$ **δ)** $\sqrt[12]{\alpha^2|\beta|}$

10. **α)** $\sqrt[3]{\alpha^2}$ **β)** $\sqrt[15]{\alpha^{13}}$ **γ)** $\sqrt[30]{2^9\cdot 3^4}$

11. **α)** $\sqrt[6]{\alpha}$ **β)** $\sqrt[18]{\alpha}$ **γ)** $\sqrt[30]{3^{11}}$

12. **α)** $3\sqrt{2}$ **β)** $2\sqrt{2}$ **γ)** $-5\sqrt[3]{2}+5\sqrt[3]{3}$ **δ)** $8\sqrt{5}$

13. **α)** $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ **β)** $\sqrt{5}-2$ **γ)** $7+\sqrt{5}$

14. **α)** $\dfrac{\sqrt[3]{5^2}}{5}$ **β)** $2-\sqrt{3}$ **γ)** $-2x^2+2x\sqrt{x^2+1}-1$ **δ)** $\dfrac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})\sqrt{6}}{12}$

15. α) $\frac{4\sqrt{2}}{5}$ β) 52

16. Ἂν x εἶναι ἡ ζητούμενη διαφορά, βρίσκουμε ὅτι $x^2 = 4$ (Βλ. § 5.15 Ἐφ. 3).

17. Νά ὑψώσετε στό τετράγωνο τά μέλη τῆς $\alpha = \alpha' + \sqrt{\beta'} - \sqrt{\beta}$ καί νά λάβετε ὑπόψη τήν παρατήρηση 2 τῆς § 5.10.

18. α) 1 β) $10\sqrt{10}$.

19. Μετά τίς πράξεις βρίσκουμε $A = \alpha^{-4}\beta^{6}$, ὁπότε γιά $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ καί $\beta = \frac{1}{\sqrt[8]{2}}$ εἶναι $A = 1$.

20. α) Θέτουμε $\alpha^{\frac{1}{3}} = k$, $\beta^{\frac{1}{3}} = \lambda$ κτλ.
β) Ὁμοίως.

21. α) $x-1$ β) $-2\alpha\sqrt{\beta} + 2\beta\sqrt{\alpha}$ γ) $18\sqrt{2} - 14$ δ) $20\sqrt{30}$.

6

ΚΥΚΛΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Στό κεφάλαιο αὐτό εἰσάγονται οἱ βασικές ἔννοιες τῆς Τριγωνομετρίας.

Μέ βάση ὅσα ἀναφέρονται στό προηγούμενο κεφάλαιο γιά τή μέτρηση εὐθύγραμμων τμημάτων καί τόξων ἤ γωνιῶν, τά ὁποῖα ἐδῶ ἐπιτρέπουν θεωρητικά τόν ὁρισμό τῶν συστημάτων ἀναφορᾶς, τῆς ἀλγεβρικῆς τιμῆς τόξου καί τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου, εἰσάγεται ἡ ἔννοια τῆς κυκλικῆς συναρτήσεως.

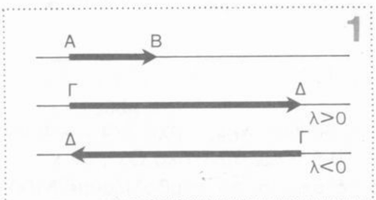
Ὁ ὁρισμός τῶν κυκλικῶν συναρτήσεων στηρίζεται στήν «κανονική» ἀπεικόνιση τοῦ $\mathbb{R}$ *στόν τριγωνομετρικό κύκλο, τῆς ὁποίας χαρακτηριστικό εἶναι ὅτι διατηρεῖ τό μῆκος. Ἔτσι ὑπογραμμίζεται τό γεγονός ὅτι οἱ κυκλικές συναρτήσεις εἶναι συναρτήσεις πραγματικῆς μεταβλητῆς, ἐνῶ οἱ βασικές σχέσεις ἀνάμεσά τους καθώς καί τά πρῶτα συμπεράσματα ἀπό τή μελέτη τους (πρόσημο, τιμές σέ ὁρισμένα* x *κτλ.) παρουσιάζονται ὡς ἄμεσες συνέπειες τοῦ ὁρισμοῦ.*

Ἡ γενικότητα τῆς ἔννοιας τῆς κυκλικῆς συναρτήσεως, σέ σύγκριση μέ τή γνωστή ἀπό τό Γυμνάσιο ἔννοια τοῦ τριγωνομετρικοῦ ἀριθμοῦ ὀξείας γωνίας, ὑπογραμμίζεται τόσο μέ τή θεωρητική συσχέτισή τους ὅσο καί μέ τίς ἐφαρμογές. Αὐτή ἄλλωστε ἡ γενικότητα διέπει καί τά θέματα πού ἀκολουθοῦν: τήν εὕρεση τῶν βασικῶν σχέσεων τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν δύο τόξων, τῶν ὁποίων τό ἄθροισμα εἶναι πολλαπλάσιο τεταρτοκυκλίου, καθώς καί τή μελέτη τῶν βασικῶν τριγωνομετρικῶν ἐξισώσεων.

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ

Ἀλγεβρική τιμή διανύσματος

6.1 Ὅπως εἶναι γνωστό, δύο **παράλληλα** διανύσματα εἶναι ἤ **ὁμόρροπα** (ἔχουν τήν ἴδια φορά), ἤ **ἀντίρροπα** (ἔχουν ἀντίθετη φορά). Ὅταν ἡ φορά ἑνός διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ χαρακτηριστεῖ (αὐθαίρετα) ὡς **θετική**, ὁπότε ἡ φορά τοῦ $\overrightarrow{BA}$ εἶναι ἡ **ἀρνητική**, τότε καί ἡ φορά κάθε ἄλλου διανύσματος πού ἔχει τή διεύθυνση τῆς εὐθείας AB εἶναι καθορισμένη. Λέμε ὅτι ἡ εὐθεία AB (ὅπως καί κάθε παράλληλός της) εἶναι **προσανατολισμένη**. Συνήθως, τά σημεῖα A καί B ἐκλέγονται ἔτσι, ὥστε τό τμῆμα AB νά λαμβάνεται ὡς μονάδα μετρήσεως. Τότε τό διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$, μέ θετική φορά, λέγεται **μοναδιαῖο**.



Ὅταν δοθοῦν ἕνα διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ καί ἕνας πραγματικός ἀριθμός λ, ὁρίζουμε ὡς **γινόμενο** $\lambda\overrightarrow{AB}$, τό διάνυσμα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, τό ὁποῖο εἶναι (σχ. 1):

- ὁμόρροπο τοῦ $\overrightarrow{AB}$, ἄν $\lambda > 0$
- ἀντίρροπο τοῦ $\overrightarrow{AB}$, ἄν $\lambda < 0$ καί τέτοιο, ὥστε (§ 5.7) $\Gamma\Delta = |\lambda| AB$.

Ἀντιστρόφως, ὅταν δοθοῦν δύο παράλληλα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, τότε ὁρίζεται ἕνας μοναδικός πραγματικός ἀριθμός λ τέτοιος, ὥστε $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = \lambda\,\overrightarrow{AB}$. Πράγματι, ἔστω k ὁ λόγος τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος ΓΔ πρός τό AB (§ 5.8). Τότε $\Gamma\Delta = k\,AB$ καί σύμφωνα μέ τά προηγούμενα

- ἄν $\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ εἶναι ὁμόρροπα, τότε $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = k\,\overrightarrow{AB}$ καί $\lambda = k$
- ἄν $\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ εἶναι ἀντίρροπα, τότε $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = -k\,\overrightarrow{AB}$ καί $\lambda = -k$.

Ὁ ἀριθμός λ λέγεται λόγος τοῦ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ πρός τό $\overrightarrow{AB}$.

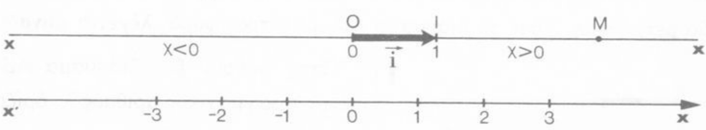
Ὅταν τό $\overrightarrow{AB}$ εἶναι **μοναδιαῖο**, τότε ὁ λόγος λ λέγεται **ἀλγεβρική τιμή** τοῦ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ καί σημειώνεται $\overline{\Gamma\Delta}$.

Ἀποδεικνύεται ὅτι οἱ ἰδιότητες (1), (2) καί (3) τῆς § 5.7 ἰσχύουν καί γιά τό γινόμενο διανύσματος ἐπί πραγματικό ἀριθμό. Ἀποδεικνύονται ἐπίσης οἱ ἀκόλουθες βασικές ἰδιότητες:

1. Ἡ ἀλγεβρική τιμή τοῦ ἀθροίσματος δύο παράλληλων διανυσμάτων ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῶν ἀλγεβρικῶν τους τιμῶν.
2. Ὁ λόγος δύο παράλληλων διανυσμάτων ἰσοῦται μέ τό λόγο τῶν ἀλγεβρικῶν τους τιμῶν (ὡς πρός κοινό μοναδιαῖο διάνυσμα).

Ἄξονας

6.2 Ἕνας **ἄξονας** μέ **ἀρχή** Ο εἶναι μιά εὐθεία $x'x$ στήν ὁποία ἔχει ὁριστεῖ ἐκτός ἀπό τό σημεῖο Ο καί ἕνα ἄλλο σημεῖο Ι, ὥστε τό διάνυσμα $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ νά λαμβάνεται ὡς **μοναδιαῖο.** Ἔτσι σέ κάθε σημεῖο Μ τοῦ ἄξονα ἀντιστοιχίζεται ἡ ἀλγεβρική τιμή $x = \overline{OM}$ τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{OM}$, πού ὀνομάζεται **τετμημένη** τοῦ Μ. Ἡ τετμημένη τοῦ Ο εἶναι μηδέν καί τοῦ Ι εἶναι 1. Στά σημεῖα τοῦ ἡμιάξονα Ox, ὁ ὁποῖος περιέχει τό Ι, ἀντιστοιχοῦν θετικές τετμημένες (*θετικός ἡμιάξονας*), ἐνῶ στά σημεῖα τοῦ Ox' ἀρνητικές (*ἀρνητικός ἡμιάξονας*).



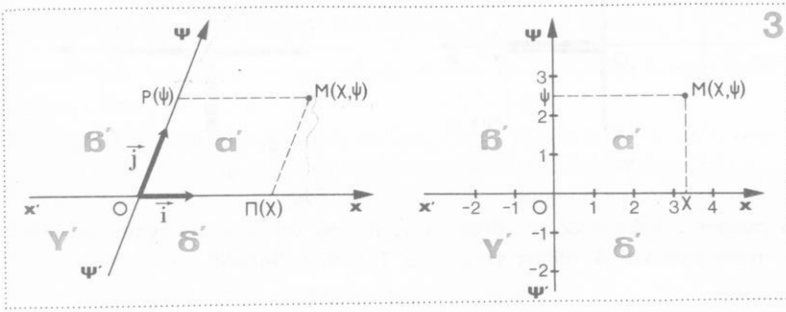
2

Ἀντιστρόφως, ἄν δοθεῖ ἕνας πραγματικός ἀριθμός x, ὑπάρχει ἕνα μοναδικό σημεῖο Μ στό θετικό ἡμιάξονα Ox, ἄν $x > 0$ ἤ στόν ἀρνητικό Ox', ἄν $x < 0$, τοῦ ὁποίου ἡ τετμημένη εἶναι x. Αὐτό τό σημεῖο τό συμβολίζουμε **M(x).** Ἔτσι ἔχουμε μιά «1—1 καί ἐπί» ἀπεικόνιση τοῦ ἄξονα $x'x$, ὡς σημειοσυνόλου, στό $\mathbb{R}$. Ὅταν δίνεται τό σημεῖο Ο καί τό μοναδιαῖο διάνυσμα $\vec{i}$, τότε ὁρίζεται πλήρως ὁ ἄξονας $x'x$ μέ ἀρχή Ο, καθώς καί ἡ ἀπεικόνισή του στό $\mathbb{R}$, πού περιγράψαμε προηγουμένως. Θά λέμε τότε ὅτι ἔχουμε ὁρίσει ἕνα **σύστημα ἀναφορᾶς** στήν εὐθεία $x'x$, πού τό γράφουμε $(O, \vec{i})$ ἤ ἁπλά μέ τό σύμβολο Ox, τοῦ **θετικοῦ** ἡμιάξονα. (Τότε τό $\vec{i}$ ὑπονοεῖται ὅπως π.χ. ὅταν ἔχει προκαθοριστεῖ ἡ μονάδα μήκους).

Καρτεσιανό σύστημα ἀναφορᾶς στό ἐπίπεδο

6.3 Ἔστω $x'x$, $y'y$ δύο τεμνόμενοι ἄξονες μέ κοινή ἀρχή Ο καί μοναδιαῖα διανύσματα $\vec{i}$, $\vec{j}$ ἀντιστοίχως καί Μ ἕνα σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου τους (σχ. 3α). Ἀπό τό Μ φέρνουμε παράλληλες πρός τούς ἄξονες $y'y$, $x'x$, οἱ ὁποῖες τέμνουν τούς ἄξονες $x'x$, $y'y$ ἀντιστοίχως στά σημεῖα Π καί Ρ.
Ἄν x εἶναι ἡ τετμημένη τοῦ Π στόν $x'x$ καί y ἡ τετμημένη τοῦ Ρ στόν $y'y$, τότε στό σημεῖο Μ ἀντιστοιχίζεται ἕνα συγκεκριμένο ζεῦγος πραγματικῶν ἀριθμῶν, τό (x, y).

Οἱ x, y λέγονται **συντεταγμένες** καί εἰδικότερα ὁ x **τετμημένη** καί ὁ y **τεταγμένη** τοῦ σημείου Μ.
Ἀντιστρόφως σέ κάθε ζεῦγος ἀριθμῶν (x, y) ἀντιστοιχίζεται ἕνα μοναδικό σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου μέ συντεταγμένες x, y, τό σημεῖο τομῆς δύο εὐθειῶν : Ἐκείνης πού ἄγεται ἀπό τό σημεῖο $\Pi(x)$ τοῦ ἄξονα $x'x$ παραλλήλως πρός τόν ἄξονα $y'y$ καί ἐκείνης πού ἄγεται ἀπό τό σημεῖο $P(y)$ τοῦ $y'y$, παραλλήλως πρός τόν $x'x$. Αὐτό τό σημεῖο συμβολίζεται **M(x, y).**



Ἔτσι ἔχουμε μιά «1—1 καί ἐπί» ἀπεικόνιση τοῦ ἐπιπέδου, ὡς σημειοσυνόλου, στό σύνολο $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.
Τό ζεῦγος τῶν δύο ἀξόνων $x'x$ (*ἄξονας τετμημένων*) καί $y'y$ (*ἄξονας τεταγμένων*) καθώς καί ἡ ἀπεικόνιση τοῦ ἐπιπέδου στό $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ πού περιγράψαμε ὁρίζονται πλήρως, ἄν δοθοῦν ἡ κοινή τους ἀρχή Ο καί τά μοναδιαῖα διανύσματα $\vec{i}$, $\vec{j}$, μέ $\vec{i} \nparallel \vec{j}$. Θά λέμε τότε ὅτι ἔχουμε ὁρίσει ἕνα **καρτεσιανό σύστημα ἀναφορᾶς** στό ἐπίπεδο, πού τό γράφουμε $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ἤ Oxy (ὅταν π.χ. ἔχει προκαθοριστεῖ ἡ μονάδα μήκους).
Ἔστω Oxy ἕνα καρτεσιανό σύστημα ἀναφορᾶς. Τό σύνολο τῶν σημείων $M(x, y)$ γιά τά ὁποῖα εἶναι:

- $x = 0$, εἶναι ἡ εὐθεία $y'y$
- $y = 0$, εἶναι ἡ εὐθεία $x'x$.

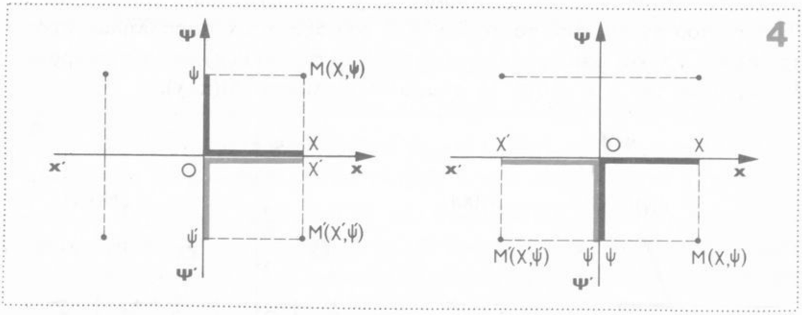
Ἐξάλλου τά σύνολα τῶν σημείων $M(x, y)$ γιά τά ὁποῖα ($x > 0$ **καί** $y > 0$), ($x < 0$ **καί** $y > 0$), ($x < 0$ **καί** $y < 0$), ($x > 0$ **καί** $y < 0$), ὀνομάζονται ἀντιστοίχως **α′, β′, γ′, δ′ τεταρτημόρια.**

Ὀρθοκανονικό σύστημα ἀναφορᾶς

6.4 Ἕνα καρτεσιανό σύστημα ἀναφορᾶς τοῦ ὁποίου οἱ ἄξονες τέμνονται καθέτως καί τά μοναδιαῖα διανύσματά τους ὁρίζονται ἀπό ἴσα εὐθύγραμμα τμήματα λέγεται **ὀρθοκανονικό** (σχ. 3β).
Ἔστω Oxy ἕνα ὀρθοκανονικό σύστημα ἀναφορᾶς καί $M(x, y)$, $M'(x', y')$ δύο σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου. Γιά νά εἶναι τά σημεῖα αὐτά:

- συμμετρικά ὡς πρός τόν ἄξονα x΄x, πρέπει καί ἀρκεῖ νά ἔχουν τήν ἴδια τετμημένη καί ἀντίθετες τεταγμένες (σχ. 4α), δηλαδή

$$x = x' \quad \textbf{καί} \quad y = -y'$$



4

- συμμετρικά ὡς πρός τόν ἄξονα y΄y, πρέπει καί ἀρκεῖ νά ἔχουν τήν ἴδια τεταγμένη καί ἀντίθετες τετμημένες (σχ. 4β), δηλαδή

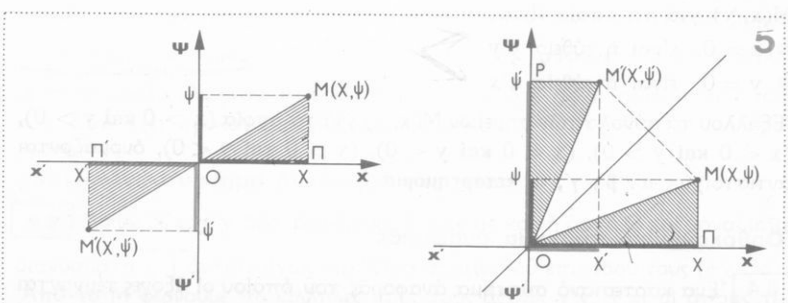
$$x = -x' \quad \textbf{καί} \quad y = y'$$

- συμμετρικά ὡς πρός τήν ἀρχή O τῶν ἀξόνων, πρέπει καί ἀρκεῖ νά ἔχουν ἀντίθετες τετμημένες καί ἀντίθετες τεταγμένες (σχ. 5α), δηλαδή

$$x = -x' \quad \textbf{καί} \quad y = -y$$

- συμμετρικά ὡς πρός τή διχοτόμο τῶν θετικῶν ἡμιαξόνων Ox, Oy, ὅπως προκύπτει ἀπό τήν ἰσότητα τῶν ὀρθογώνιων τριγώνων ΟΠΜ καί ΟΡ΄Μ΄ (σχ. 5β), πρέπει καί ἀρκεῖ ἡ τετμημένη τοῦ καθενός νά εἶναι ἴση μέ τήν τεταγμένη τοῦ ἄλλου, δηλαδή

$$x = y' \quad \textbf{καί} \quad y = x'$$



5

Σημείωση

Στά ἑπόμενα, ὅπου ἀναφερόμαστε σέ σύστημα ἀναφορᾶς χωρίς ἄλλη διευκρίνιση, θά ἐννοοῦμε ὅτι εἶναι ὀρθοκανονικό.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ

Μονάδες μετρήσεων τόξων (γωνιῶν)

6.5 Ὡς μονάδες γιά τή μέτρηση τῶν τόξων ἐκτός ἀπό τή **μοίρα** (1^0), πού εἶναι τό $\frac{1}{360}$ τοῦ κύκλου, χρησιμοποιοῦνται καί ὁ **βαθμός** (grade, 1^g), ἴσος πρός τό $\frac{1}{400}$ τοῦ κύκλου καί κυρίως τό **ἀκτίνιο** (radian, 1^{rad}). Τό ἀκτίνιο εἶναι τόξο, τοῦ ὁποίου τό **μῆκος** εἶναι ἴσο πρός τήν ἀκτίνα ρ τοῦ κύκλου. Ἔτσι, ἕνα τόξο **α ἀκτινίων** ἔχει μῆκος **αρ.**

Ἐπειδή, ὅπως εἶναι γνωστό ἀπό τή Γεωμετρία, τό μῆκος τοῦ κύκλου εἶναι 2πρ, τό μέτρο (τοῦ τόξου) ἑνός πλήρους κύκλου σέ ἀκτίνια εἶναι 2π.

Ἔστω μ,β καί α τά μέτρα ἑνός τόξου σέ μοῖρες, βαθμούς καί ἀκτίνια ἀντιστοίχως. Ἐπειδή τά ἀντίστοιχα μέτρα τοῦ ἡμικυκλίου εἶναι 180, 200 καί π, θά ἔχουμε ὡς λόγο τοῦ τόξου πρός τό ἡμικύκλιο, σύμφωνα μέ τήν § 5.9, τό λόγο τῶν μέτρων τους:

$$\boxed{\frac{\mu}{180}=\frac{\beta}{200}=\frac{\alpha}{\pi}} \qquad (1)$$

Οἱ τύποι (1) χρησιμοποιοῦνται γιά τήν ἀλλαγή τῆς μονάδας μετρήσεως.

Ἔτσι π.χ. ἕνα τόξο 18^0 εἶναι $\frac{18\pi}{180}=\frac{\pi}{10}$ ^{rad} ἤ $\frac{18\cdot 200}{180}=20^g$.

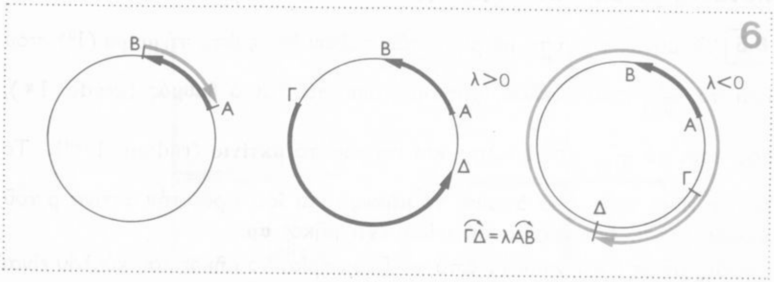
Ὡς μέτρο μιᾶς γωνίας ὁρίζεται, ὅπως εἶναι γνωστό, τό μέτρο τοῦ τόξου στό ὁποῖο βαίνει ἡ γωνία, ὅταν αὐτή καταστεῖ ἐπίκεντρη.

Ἀλγεβρική τιμή (προσανατολισμένου) τόξου

6.6 Ἄν Α καί Β εἶναι σημεῖα κύκλου, ὑπάρχουν ἄπειρα τόξα μέ ἄκρα Α καί Β. Ἀπό ἕνα συγκεκριμένο τόξο $\overset{\frown}{AB}$, π.χ. ἐκεῖνο πού ἀντιστοιχεῖ σέ κυρτή ἐπίκεντρη γωνία καί πού εἶναι μοναδικό (ὅταν τά Α καί Β δέν εἶναι ἀντιδιαμετρικά) ὁρίζονται δύο τόξα ἀντίθετης φορᾶς. Τό $\overset{\frown}{\mathbf{AB}}$ πού ἔχει ἀρχή τό Α καί πέρας τό Β καί τό $\overset{\frown}{\mathbf{BA}}$ πού ἔχει ἀρχή τό Β καί πέρας τό Α. Τά τόξα αὐτά, ὅπως καί κάθε τόξο πού ἔχει ἀρχή καί πέρας, λέγονται **προσανατολισμένα**.

Ὅταν ἡ φορά τοῦ $\overset{\frown}{AB}$ χαρακτηριστεῖ (αὐθαίρετα) ὡς **θετική,** ὁπότε ἡ φορά τοῦ $\overset{\frown}{BA}$ εἶναι **ἀρνητική,** τότε ἡ φορά κάθε ἄλλου τόξου προσανατολισμένου εἶναι καθορισμένη. Λέμε τότε ὅτι ὁ κύκλος εἶναι **προσανατολισμένος.**

Ἄν τά Α καί Β ἔχουν ἐκλεγεῖ ἔτσι, ὥστε τό $\overset{\frown}{AB}$ νά εἶναι ἡ μονάδα μετρήσεως τῶν τόξων, τότε τό ἀντίστοιχο προσανατολισμένο τόξο θετικῆς φορᾶς λέγεται **μοναδιαῖο.**



- Ὡς **γινόμενο** ἑνός τόξου $\overset{\frown}{AB}$ ἐπί πραγματικό ἀριθμό λ ὁρίζεται τόξο *ὁμόρροπο*, (ἄν $\lambda > 0$) ἤ *ἀντίρροπο* (ἄν $\lambda < 0$), τοῦ $\overset{\frown}{AB}$ μέ μέτρο $|\lambda|\widehat{AB}$.
- Ἐξάλλου, ἄν δοθοῦν δύο τόξα $\overset{\frown}{AB}$ καί $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ τοῦ κύκλου, ἀποδεικνύεται, ὅπως καί στήν § 6.1, ὅτι ὑπάρχει ἕνας μοναδικός ἀριθμός λ τέτοιος, ὥστε $\overset{\frown}{\Gamma\Delta} = \lambda\, \overset{\frown}{AB}$. Ὁ ἀριθμός λ λέγεται **λόγος** τοῦ $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ πρός τό $\overset{\frown}{AB}$. Ἄν $\overset{\frown}{AB}$ εἶναι μοναδιαῖο τόξο, τότε ὁ λ λέγεται **ἀλγεβρική τιμή** τοῦ $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$.

Ἀποδεικνύεται ὅτι οἱ ἰδιότητες (1), (2), (3) τῆς § 5.7 ἰσχύουν καί γιά τό γινόμενο προσανατολισμένου τόξου ἐπί πραγματικό ἀριθμό.
Ἀποδεικνύονται ἀκόμη οἱ ἰδιότητες:

1. Ἡ ἀλγεβρική τιμή τοῦ ἀθροίσματος δύο προσανατολισμένων τόξων ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῶν ἀλγεβρικῶν τους τιμῶν.
2. Ὁ λόγος δύο προσανατολισμένων τόξων ἰσοῦται μέ τό λόγο τῶν ἀλγεβρικῶν τους τιμῶν (ὡς πρός κοινό μοναδιαῖο τόξο).

Τριγωνομετρικός κύκλος

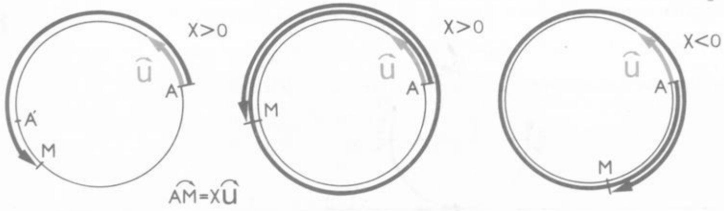
6.7 Στά ἑπόμενα ὑποθέτουμε ὅτι ἔχει καθοριστεῖ ἡ μονάδα γιά τή μέτρηση τοῦ μήκους εὐθύγραμμων τμημάτων ἤ καί τόξων.
Ἔστω **C** ἕνας προσανατολισμένος κύκλος μέ ἀκτίνα ἴση μέ τή μονάδα μήκους (μοναδιαῖος), στόν ὁποῖο ἐκλέγουμε (αὐθαιρέτως) ἕνα σημεῖο A.

Ὁ **C** λέγεται **τριγωνομετρικός** κύκλος μέ **ἀρχή** τό A. Ἄν $\overset{\frown}{\mathbf{u}}$ εἶναι τό μοναδιαῖο τόξο στόν **C**, τότε γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό x, ὁρίζεται τό τόξο $\overset{\frown}{AM} = x \cdot \overset{\frown}{\mathbf{u}}$, δηλαδή τό προσανατολισμένο τόξο μέ ἀρχή A, τοῦ ὁποίου ἡ ἀλγεβρική τιμή εἶναι x (σχ. 7).
Ἔτσι ὁρίζεται μιά ἀπεικόνιση $f : \mathbb{R} \to \mathbf{C}$, μέ τήν ὁποία σέ κάθε $x \in \mathbb{R}$,

ἀντιστοιχίζεται τό πέρας τοῦ παραπάνω τόξου $\overset{\frown}{AM}$. Ἡ ἀπεικόνιση ἐξαρτᾶται φυσικά ἀπό τήν ἐκλογή τῆς μονάδας μετρήσεως τῶν τόξων. Ἔτσι, τό σημεῖο Α', ἀντιδιαμετρικό τοῦ Α (σχ. 7), εἶναι εἰκόνα τοῦ ἀριθμοῦ:

- 180, ἄν ὡς μονάδα λαμβάνεται ἡ μοίρα
- 200, ἄν ὡς μονάδα λαμβάνεται ὁ βαθμός
- π, ἄν ὡς μονάδα λαμβάνεται τό ἀκτίνιο.

7



Ἐπειδή ὑπάρχουν περισσότερα τοῦ ἑνός τόξα πού ἔχουν ἀρχή τό Α καί πέρας τό Μ, θά ὑπάρχουν καί περισσότεροι τοῦ ἑνός πραγματικοί ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι μέ τήν f, ἀπεικονίζονται στό σημεῖο Μ. Ἄρα ἡ f εἶναι ἀπεικόνιση «ἐπί» ἀλλά ὄχι «1—1».

Κανονική ἀπεικόνιση τοῦ ℝ στόν C

6.8 Τήν ἀπεικόνιση τοῦ ℝ στόν τριγωνομετρικό κύκλο **C**, πού περιγράψαμε στήν § 6.7, θά τή λέμε **κανονική**, ὅταν ὡς μονάδα μετρήσεως τῶν τόξων λαμβάνεται τό ἀκτίνιο. Τό χαρακτηριστικό τῆς κανονικῆς ἀπεικονίσεως, πού θά συμβολίζουμε μέ φ, εἶναι ὅτι κάθε πραγματικός ἀριθμός x ἀπεικονίζεται στό πέρας τόξου x ἀκτινίων, τοῦ ὁποίου δηλαδή τό μῆκος εἶναι $|x|$. Ἔτσι οἱ ἀριθμοί $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$, δηλαδή οἱ ἀριθμοί $k.2\pi$ μέ $k \in \mathbb{Z}$, ἀπεικονίζονται ὅλοι στό σημεῖο Α.

Γενικότερα, ἄν ὁ x ἀπεικονίζεται[1] στό Μ, τότε ὁ ἀριθμός $x' = x + k \cdot 2\pi$ ἀπεικονίζεται στό πέρας τόξου πού εἶναι ἄθροισμα (§ 6.6, Ἰδιοτ. 1) τοῦ $\overset{\frown}{AM}$ καί k κύκλων, δηλαδή στό ἴδιο σημεῖο Μ.

Ἀντιστρόφως, ἔστω x καί x' δύο πραγματικοί ἀριθμοί μέ κοινή εἰκόνα τό σημεῖο Μ. Τότε τά δύο τόξα $\overset{\frown}{AM}$ μέ ἀλγεβρικές τιμές x καί x' θά διαφέρουν κατά ἀκέραιο ἀριθμό κύκλων. Ἄρα οἱ ἀριθμοί x καί x' διαφέρουν κατά $k.2\pi$ ἤ $2k\pi$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ὅτι γιά νά ἀπεικονίζονται μέ τήν φ

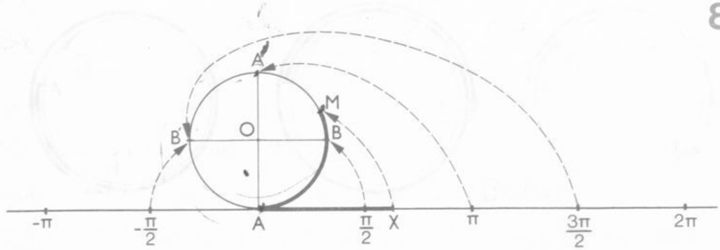
[1] Στά ἑπόμενα ὅπου ἀναφερόμαστε σέ ἀπεικόνιση, χωρίς ἄλλη διευκρίνιση, θά ἐννοοῦμε τήν **κανονική** ἀπεικόνιση φ.

δύο ἀριθμοί x, x′ στό ἴδιο σημεῖο $M \in \mathbf{C}$, πρέπει καί ἀρκεῖ νά διαφέρουν κατά ἀκέραιο πολλαπλάσιο τοῦ 2π. Δηλαδή

$$\mathbf{M} = \varphi(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x'}) \Leftrightarrow \exists\ \mathbf{k} \in \mathbb{Z},\quad \mathbf{x'} = \mathbf{x} + 2\mathbf{k}\pi$$

Μιά ἐποπτική παράσταση τῆς κανονικῆς ἀπεικονίσεως φ δίνεται μέ τό σχῆμα 8. Στόν ἄξονα μέ ἀρχή Α, πού ἐφάπτεται στόν τριγωνομετρικό κύκλο **C** ἔχει ἀπεικονιστεῖ τό $\mathbb{R}$, ἔτσι ὥστε ἡ φ «ὑλοποιεῖται», ἄν κάθε ἡμιάξονας «περιτυλιχτεῖ» γύρω ἀπό τόν **C**.

8



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Ὁ ἀριθμός π ἀπεικονίζεται στό A′, ἀντιδιαμετρικό τοῦ Α. Ἄρα ὅλοι οἱ ἀριθμοί τῆς μορφῆς $\pi + 2k\pi = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, δηλαδή ὅλα τά περιττά πολλαπλάσια τοῦ π καί μόνο αὐτά ἀπεικονίζονται στό A′.

   Ἐπίσης, ὅπως εἴδαμε, οἱ ἀριθμοί $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, δηλαδή τά ἄρτια πολλαπλάσια τοῦ π ἀπεικονίζονται στό Α.

2. Ὁ ἀριθμός $\frac{\pi}{2}$ ἀπεικονίζεται στό σημεῖο Β, πού εἶναι τό μέσο τοῦ θετικοῦ ἡμικυκλίου $\overset{\frown}{AA'}$. Ἄρα ἀπεικονίζονται στό Β ὅλοι οἱ ἀριθμοί τῆς μορφῆς $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. Ὁ ἀριθμός $\frac{3\pi}{2}$ $\left(\text{ἤ ὁ } -\frac{\pi}{2}\right)$ ἀπεικονίζεται στό B′, ἀντιδιαμετρικό τοῦ Β. Ἄρα στό B′ ἀπεικονίζονται ὅλοι οἱ ἀριθμοί τῆς μορφῆς $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Σημείωση

Ἄν ὡς μονάδα μετρήσεως τόξων ληφθεῖ ἡ μοίρα (βαθμός), τότε ὅλα τά παραπάνω συμπεράσματα ἰσχύουν, ἀρκεῖ νά ἀντικατασταθεῖ ὁ π μέ 180 (ἤ 200).

Π.χ. οἱ ἀριθμοί $k.360+90$ (ἤ $k.400+100$) ἀπεικονίζονται στό σημεῖο Β.

1. Νά βρεθεῖ ἡ ἀπόσταση τῶν σημείων τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου στά ὁποῖα ἀπεικονίζονται οἱ ἀριθμοί : α) $2k\pi+\theta$ καί $(2k+1)\pi+\theta$.

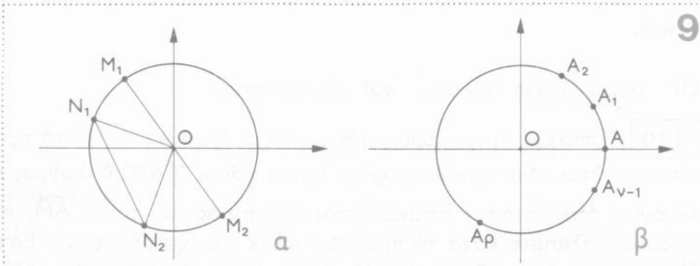
β) $2k\pi+\theta$ καί $\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi+\theta$.

α) Ἐπειδή οἱ ἀριθμοί $2k\pi+\theta$ καί $(2k+1)\pi+\theta$ διαφέρουν κατά π, τά σημεῖα M_1, M_2 στά ὁποῖα αὐτοί ἀπεικονίζονται (σχ. 9α) θά εἶναι ἄκρα ἑνός τόξου μέ μῆκος π, δηλαδή θά εἶναι ἀντιδιαμετρικά. Ἑπομένως ἡ ἀπόστασή τους θά εἶναι ἴση μέ 2.

β) Ὁμοίως οἱ ἀριθμοί $2k\pi+\theta$ καί $\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi+\theta$ διαφέρουν κατά $\frac{\pi}{2}$ καί τά σημεῖα N_1, N_2 (σχ. 9α) στά ὁποῖα ἀπεικονίζονται εἶναι ἄκρα τόξου μέ μῆκος $\frac{\pi}{2}$, δηλαδή ἑνός τεταρτοκυκλίου. Ἑπομένως τό τρίγωνο ON_1N_2 εἶναι ὀρθογώνιο στό O καί ἔχουμε :

$$\begin{aligned}(N_1N_2)^2 &= (ON_1)^2 + (ON_2)^2\\ &= 1^2+1^2=2\end{aligned}$$

Ἄρα ἡ ἀπόστασή τους εἶναι $\sqrt{2}$.



2. Ποιῶν ἀριθμῶν οἱ εἰκόνες πάνω στόν τριγωνομετρικό κύκλο εἶναι κορυφές κανονικοῦ πολυγώνου τοῦ ὁποίου μιά κορυφή εἶναι ἡ ἀρχή A τοῦ κύκλου.

Ἔστω ὅτι τό κανονικό πολύγωνο ἔχει ν πλευρές. Τότε οἱ κορυφές του χωρίζουν τό μοναδιαῖο κύκλο σέ ν ἴσα τόξα μέ μῆκος $\frac{2\pi}{\nu}$. Ἄρα (σχ. 9β)

στό	$A=A_0$	ἀπεικονίζεται	ὁ	ἀριθμός	0
στό	A_1	»	»	»	$\frac{2\pi}{\nu}$
»	A_2	»	»	»	$2\cdot\frac{2\pi}{\nu}$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
»	A_ρ	»	»	»	$\rho\cdot\frac{2\pi}{\nu}$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
»	$A_{\nu-1}$	»	»	»	$(\nu-1)\frac{2\pi}{\nu}$

Ἄρα οἱ ζητούμενοι ἀριθμοί εἶναι τῆς μορφῆς $2k\pi+\rho\frac{2\pi}{\nu}$, μέ $k\in\mathbb{Z}$ καί $\rho=0, 1, 2,\dots, \nu-1$.

Ἀσκήσεις 1, 2, 3.

Σύστημα ἀναφορᾶς προσαρτημένο στόν C

6.9 Μέ τόν τριγωνομετρικό κύκλο **C**, πού ἔχει ἀρχή τό σημεῖο Α, συνδέεται ἕνα ὀρθοκανονικό σύστημα ἀναφορᾶς Oxy (σχ. 10), πού ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:

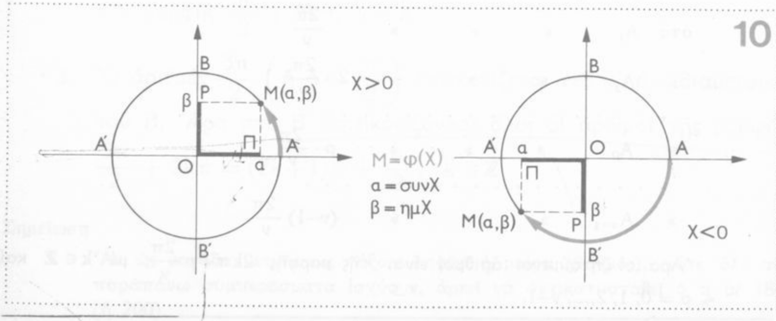
- Ἡ ἀρχή Ο εἶναι τό κέντρο τοῦ κύκλου.
- Τό μοναδιαῖο διάνυσμα στόν ἄξονα x′x εἶναι τό $\overrightarrow{OA}$.
- Τό μοναδιαῖο διάνυσμα στόν ἄξονα y′y εἶναι τό $\overrightarrow{OB}$, ὅπου Β εἶναι ἡ εἰκόνα τοῦ $\frac{\pi}{2}$ (κατά τήν κανονική πάντοτε ἀπεικόνιση φ).

Θά λέμε ὅτι τό Oxy εἶναι τό *προσαρτημένο* στόν τριγωνομετρικό κύκλο σύστημα ἀναφορᾶς.
Ὁ ἄξονας x′x λέγεται ἄξονας τῶν **συνημιτόνων** καί ὁ y′y ἄξονας τῶν **ἡμιτόνων.**

Οἱ συναρτήσεις ἡμίτονο καί συνημίτονο

6.10 Ἔστω **C** ὁ τριγωνομετρικός κύκλος μέ ἀρχή Α καί Oxy τό προσαρτημένο σέ αὐτόν σύστημα ἀναφορᾶς. Ὅπως εἴδαμε (§ 6.8) ὁ ἀριθμός x μέ τήν κανονική ἀπεικόνιση φ ἀπεικονίζεται στό πέρας τοῦ τόξου $\overset{\frown}{AM}$, πού εἶναι προσανατολισμένο κατά τό πρόσημο τοῦ x καί ἔχει μῆκος $|x|$. Ἔστω (α,β) οἱ συντεταγμένες τοῦ σημείου Μ, ὡς πρός τό Oxy. Ἄν ἀντιστοιχίσουμε σέ κάθε $x \in \mathbb{R}$ τήν τετμημένη α τοῦ σημείου $M = \varphi(x)$, τότε ὁρίζεται μιά **πραγματική** συνάρτηση πραγματικῆς μεταβλητῆς, πού ὀνομάζεται **συνημίτονο** καί συμβολίζεται **συν** (1). Εἶναι δηλαδή (σχ. 10)

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \textbf{συν}x^{(1)} = \textbf{τετμημένη α τοῦ } \varphi(x)$$



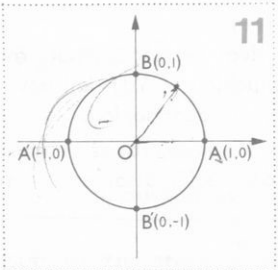
(1) ἤ **cos** (cosinus). Γράφουμε συνx ἀντί συν(x).

Ὁμοίως ὁρίζουμε τή συνάρτηση **ἡμίτονο,** συμβολικά **ημ** (1), μέ τήν ὁποία σέ κάθε $x \in \mathbb{R}$, ἀντιστοιχίζεται ἡ τεταγμένη β τοῦ σημείου $M = \varphi(x)$. Εἶναι δηλαδή

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \text{ημ}x = \text{τεταγμένη } \beta \text{ τοῦ } \varphi(x)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Οἱ ἀριθμοί $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, -\frac{\pi}{2}, -\pi, -\frac{3\pi}{2}$ ἀπεικονίζονται μέ τήν ἀπεικόνιση φ (σχ. 11) στά σημεῖα. A(1, 0), B(0, 1), A′(−1, 0), B′(0, −1), A, B′, A′, B ἀντιστοίχως. Ἑπομένως ἔχουμε:



$\text{συν}0 = 1$	$\text{ημ}0 = 0$
$\text{συν}\frac{\pi}{2} = 0$	$\text{ημ}\frac{\pi}{2} = 1$
$\text{συν}\,\pi = -1$	$\text{ημ}\pi = 0$
$\text{συν}\frac{3\pi}{2} = 0$	$\text{ημ}\frac{3\pi}{2} = -1$
$\text{συν}\,2\pi = 1$	$\text{ημ}\,2\pi = 0$
$\text{συν}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$	$\text{ημ}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$
$\text{συν}\,(-\pi) = -1$	$\text{ημ}(-\pi) = 0$
$\text{συν}\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 0$	$\text{ημ}\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 1$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Ἡ τετμημένη α καί ἡ τεταγμένη β ὅλων τῶν σημείων τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί τοῦ διαστήματος [−1, 1]. Ἄρα οἱ συναρτήσεις συνημίτονο καί ἡμίτονο παίρνουν τιμές στό [−1, 1].
Εἶναι δηλαδή

$$\boxed{\forall\, x, \quad \begin{array}{l} -1 \leqslant \text{συν}x \leqslant 1 \\ -1 \leqslant \text{ημ}x \leqslant 1 \end{array}}$$

2. Στήν § 6.8 εἴδαμε ὅτι ὅλοι οἱ ἀριθμοί x καί $2k\pi + x$ ἀπεικονίζονται στό ἴδιο σημεῖο τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου.
Ἄρα ἡ τιμή τῆς συναρτήσεως συνημίτονο στό x εἶναι ἴδια μέ τήν τιμή της στό $2k\pi + x$. Τό ἴδιο ἰσχύει καί γιά τή συνάρτηση ἡμίτονο. Δηλαδή ἔχουμε:

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R}, \ \forall\, k \in \mathbb{Z}, \quad \begin{array}{l} \text{συν}x = \text{συν}(2k\pi + x) \\ \text{ημ}x = \text{ημ}(2k\pi + x) \end{array}}$$

(1) ἡ **sin** (sinus). Γράφουμε ημx ἀντί ημ(x).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

$$\eta\mu 17\pi = \eta\mu(8.2\pi+\pi) = \eta\mu\pi = 0$$

$$\sigma\upsilon\nu(-27\pi) = \sigma\upsilon\nu[2(-13)\pi-\pi] = \sigma\upsilon\nu(-\pi) = -1$$

$$\eta\mu\left(\frac{25\pi}{2}\right) = \eta\mu\left(12\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \eta\mu\left(6\cdot 2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \eta\mu\frac{\pi}{2} = 1$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{19\pi}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(9\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(4.2\pi + \pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{2} = 0$$

Πρόσημο ημx καί συνx

6.11 Ἀφοῦ τό συνx εἶναι τετμημένη, θά εἶναι θετικός ἀριθμός, ἄν ὁ x ἀπεικονίζεται σέ σημεῖο τοῦ α' ἤ δ' τεταρτημορίου (§ 6.3) καί ἀρνητικός, ἄν ὁ x ἀπεικονίζεται σέ σημεῖο τοῦ β' ἤ γ' τεταρτημορίου.

Ὁμοίως τό ημx εἶναι θετικός ἀριθμός, ἄν ὁ x ἀπεικονίζεται σέ σημεῖο τοῦ α' ἤ β' τεταρτημορίου καί ἀρνητικός ἄν ὁ x ἀπεικονίζεται σέ σημεῖο τοῦ γ' ἤ δ'. Ἔτσι θά ἔχουμε (σχ. 12):

Πρόσημο ημX
Πρόσημο συνX

- Ἄν $0<x<\frac{\pi}{2}$, τότε ημx>0, συνx>0
- Ἄν $\frac{\pi}{2}<x<\pi$, τότε ημx>0, συνx<0
- Ἄν $\pi<x<\frac{3\pi}{2}$, τότε ημx<0, συνx<0
- Ἄν $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$, τότε ημx<0, συνx>0

Τό βασικό Θεώρημα

6.12 Οἱ τιμές τῶν συναρτήσεων ἡμίτονο καί συνημίτονο στό x δέν εἶναι ἀνεξάρτητες. Θά ἀποδείξουμε ὅτι:

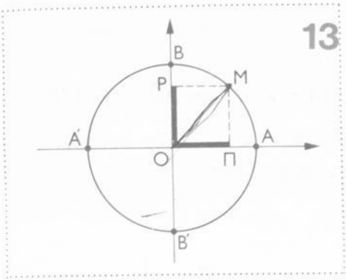
ΘΕΩΡΗΜΑ 1

Γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό x ἰσχύει:

$$\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \text{ }^{(1)}$$

(1) Γράφουμε ημ²x ἀντί τοῦ (ημx)² καί συν²x ἀντί (συνx)².

Ἀπόδειξη. Ἔστω Μ ἡ εἰκόνα τοῦ x στόν τριγωνομετρικό κύκλο καί Π, Ρ οἱ ὀρθές προβολές τοῦ Μ στούς ἄξονες συνημιτόνων καί ἡμιτόνων ἀντιστοίχως. Τότε ἔχουμε:



$$\sigma\upsilon\nu x = \overline{\mathrm{O\Pi}} \quad \text{καί} \quad \eta\mu x = \overline{\mathrm{OP}}$$

Ἐξάλλου $(\mathrm{O\Pi})^2 + (\mathrm{OP})^2 = (\mathrm{OM})^2$

ἤ $\quad (\overline{\mathrm{O\Pi}})^2 + (\overline{\mathrm{OP}})^2 = 1$

Ἄρα $\quad \sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x = 1.$

ΠΟΡΙΣΜΑ

Γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό x εἶναι

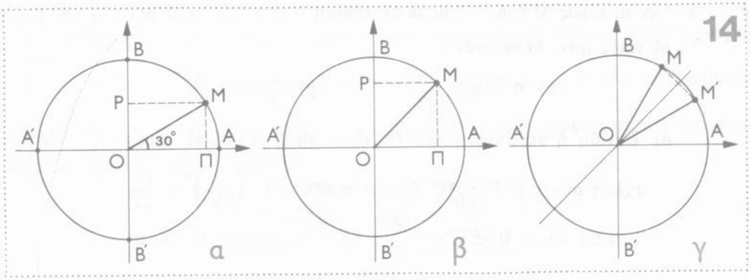
1. $\eta\mu^2 x = 1 - \sigma\upsilon\nu^2 x$

2. $\sigma\upsilon\nu^2 x = 1 - \eta\mu^2 x$

Ἡμίτονο καί συνημίτονο τῶν ἀριθμῶν $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$

6.13 Οἱ ἀριθμοί αὐτοί ἀπεικονίζονται στό α΄ τεταρτημόριο καί συνεπῶς τό ἡμίτονο καί συνημίτονό τους εἶναι θετικοί ἀριθμοί. Συγκεκριμένα:

1. Ὁ ἀριθμός $\frac{\pi}{6}$ ἀπεικονίζεται στό πέρας Μ τόξου 30^0 (σχ. 14α) καί ἄν Π εἶναι ἡ προβολή τοῦ Μ στόν ἄξονα τῶν συνημιτόνων, στό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΠΟΜ ἡ γωνία $\widehat{O}$ εἶναι 30^0.



Ἄρα $(\Pi\mathrm{M}) = \frac{1}{2}(\mathrm{OM}) = \frac{1}{2}$. Ἔτσι ἔχουμε:

$$\eta\mu\frac{\pi}{6} = (\Pi\mathrm{M}) = \frac{1}{2}$$

καί (§ 6.12 Πορ.) $συν^2 \frac{π}{6} = 1 - ημ^2 \frac{π}{6} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Ἄρα

$$συν \frac{π}{6} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

2. Ὁ ἀριθμός $\frac{π}{4}$ ἀπεικονίζεται στό μέσο Μ τοῦ τόξου $\overset{\frown}{AB}$ (σχ. 14β). Ἄρα τό Μ εἶναι σημεῖο τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας τῶν θετικῶν ἡμιαξόνων καί οἱ συντεταγμένες του εἶναι ἴσες. Ὥστε

$$συν \frac{π}{4} = ημ \frac{π}{4}$$

καί (§ 6.12 Θεώρ.) $συν^2 \frac{π}{4} + συν^2 \frac{π}{4} = 1$ ἤ $συν^2 \frac{π}{4} = \frac{1}{2}$. Ἄρα

$$ημ \frac{π}{4} = συν \frac{π}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3. Γιά τόν ἀριθμό $\frac{π}{3}$ μποροῦμε νά ἐργαστοῦμε ὅπως καί στήν περίπτωση τοῦ $\frac{π}{6}$. Ἀλλά μποροῦμε νά παρατηρήσουμε ὅτι οἱ ἀριθμοί $\frac{π}{3}$ καί $\frac{π}{6}$ ἀπεικονίζονται στά σημεῖα Μ καί Μ', συμμετρικά ὡς πρός τή διχοτόμο τῆς γωνίας τῶν θετικῶν ἡμιαξόνων (σχ. 14γ). Ἄρα (§ 6.4) ἔχουμε:

$$συν \frac{π}{3} = ημ \frac{π}{6} = \frac{1}{2}$$

$$ημ \frac{π}{3} = συν \frac{π}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Ἄν τό πέρας Μ ἑνός τόξου μέ ἀλγεβρική τιμή x ἔχει τεταγμένη $\frac{3}{5}$, νά βρεθοῦν οἱ τιμές ημx, συνx ὅταν :

α) $0 < x < \frac{π}{2}$ β) $\frac{π}{2} < x < π$.

α) Ἐπειδή ἡ τεταγμένη τοῦ Μ εἶναι ημx, θά εἶναι $ημx = \frac{3}{5}$. Ἀπό τή σχέση $συν^2x = 1 - ημ^2x$ ἔχουμε $συν^2x = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$.

Ἐπειδή ὅμως $0 < x < \frac{π}{2}$, θά εἶναι $συνx > 0$. Ἄρα

$$συν\, x = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}.$$

β) Ὁμοίως, ἐπειδή $\frac{π}{2} < x < π$, θά εἶναι $συνx < 0$. Ἄρα

$$συν\, x = -\frac{4}{5}.$$

2. **Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι**

$$ημ^4x+συν^4x = 1-2\,ημ^2xσυν^2x$$

Εἶναι γνωστή ἡ ταυτότητα στό $\mathbb{R}$ $α^2+β^2=(α+β)^2-2αβ$. Ἑπομένως γιά

$$α = ημ^2x \quad καί \quad β = συν^2x \text{ ἔχουμε:}$$

$$\begin{aligned} ημ^4x+συν^4x &= (ημ^2x+συν^2x)^2-2ημ^2xσυν^2x \\ &= 1-2ημ^2x\,συν^2x \end{aligned}$$

3. **Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι, ἄν $ημx\,συνx \neq 0$, τότε**

$$\frac{ημx}{συν\,x}+\frac{συν\,x}{ημ\,x}=\frac{1}{ημ\,x\,συν\,x}.$$

Εἶναι $\dfrac{ημx}{συνx}+\dfrac{συνx}{ημx}=\dfrac{ημ^2x+συν^2x}{ημx\,συνx}=\dfrac{1}{ημx\,συνx}$. √

4. **Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ συνάρτηση f μέ**

$$f(x) = 2\,(ημ^6x + συν^6x)-3(ημ^4x + συν^4x)$$

εἶναι σταθερή.

$$\begin{aligned} \text{Εἶναι } f(x) &= 2[(ημ^2x+συν^2x)^3-3ημ^2xσυν^2x(ημ^2x+συν^2x)] \\ &\quad -3[(ημ^2x+συν^2x)^2-2ημ^2x\,συν^2x] \\ &= 2(1-3ημ^2xσυν^2x)-3\,(1-2ημ^2xσυν^2x) \\ &= 2-6\,ημ^2x\,συν^2x-3+6ημ^2xσυν^2x \\ &= -1 \end{aligned}$$

Ἀσκήσεις 4, 5, 6, 7, 8.

Οἱ συναρτήσεις ἐφαπτομένη καί συνεφαπτομένη

6.14 Ἐπειδή οἱ συναρτήσεις ἡμίτονο καί συνημίτονο ἔχουν πεδίο ὁρισμοῦ τό $\mathbb{R}$, τό πηλίκο $\dfrac{ημ}{συν}$ εἶναι συνάρτηση πού ὁρίζεται (§ 4.17) στό σύνολο $\mathbb{R}_1=\{x : συνx \neq 0\}$. Ἡ συνάρτηση αὐτή λέγεται **ἐφαπτομένη** καί συμβολίζεται **εφ** (1). Εἶναι λοιπόν

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R}_1, \quad εφx = \frac{ημx}{συνx}} \qquad (1)$$

Ὁμοίως ὁρίζεται καί ἡ συνάρτηση $\dfrac{συν}{ημ}$, πού ὀνομάζεται **συνεφαπτομένη,** συμβολικά **σφ** (2).

---

(1) ἡ **tg (tangente)**. Γράφουμε εφx ἀντί εφ(x)
(2) ἡ **ctg (cotangente)**. Γράφουμε σφx ἀντί σφ(x).

Πεδίο ὁρισμοῦ της εἶναι τό $\mathbb{R}_2 = \{x : \eta\mu x \neq 0\}$. Ἑπομένως

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R}_2, \quad \sigma\varphi x = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}} \qquad (2)$$

Οἱ συναρτήσεις ἡμίτονο, συνημίτονο, ἐφαπτομένη καί συνεφαπτομένη λέγονται **κυκλικές** ἤ **τριγωνομετρικές** συναρτήσεις.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Ἀπό τό παράδειγμα τῆς σελ. 39 προκύπτει ὅτι:

$$\varepsilon\varphi 0 = \varepsilon\varphi(\pm\pi) = \varepsilon\varphi 2\pi = \sigma\varphi\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = \sigma\varphi\left(\pm\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{0}{\pm 1} = 0.$$

Στούς ἀριθμούς $\pm\frac{\pi}{2}$, $\pm\frac{3\pi}{2}$ δέν ὁρίζεται ἡ ἐφαπτομένη καί στούς 0, $\pm\pi$, 2π ἡ συνεφαπτομένη.

2. Σύμφωνα μέ τήν § 6.13 ἔχουμε:

$$\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} = \sigma\varphi\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

$$\varepsilon\varphi\frac{\pi}{6} = \sigma\varphi\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\varepsilon\varphi\frac{\pi}{3} = \sigma\varphi\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} = \sqrt{3}.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Οἱ τιμές τῶν τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων στό 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, συνοψίζονται στόν πίνακα:

x	ημx	συνx	εφx	σφx
0	0	1	0	—
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	—	0

Μνημονικός κανόνας. Ἡ στήλη τοῦ ημx προκύπτει ἀπό τόν τύπο $\frac{\sqrt{k}}{2}$ γιά $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

6.15 Τό **γινόμενο** τῶν συναρτήσεων **εφ** καί **σφ** ὁρίζεται (§ 4.16) στό σύνολο $\mathbb{R}_3 = \mathbb{R}_1 \cap \mathbb{R}_2 = \{x : \eta\mu x\, \sigma\upsilon\nu x \neq 0\}$ καί εἶναι:

$$\varepsilon\varphi x\, \sigma\varphi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} = 1. \quad \text{῞Ωστε}$$

$$\boxed{\forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}_3, \quad \boldsymbol{\varepsilon\varphi x\, \sigma\varphi x = 1}}$$

Θεωρία

Σημείωση

Παρατηροῦμε ὅτι ἡ ἐξίσωση $\sigma\upsilon\nu x = 0$ ἐπαληθεύεται ἀπό ὅσα x ἀπεικονίζονται στά σημεῖα Β ἤ Β′ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου, δηλαδή ἀπό τούς ἀριθμούς (§ 6.8, Παρατ. 2, 3) $2k\pi + \frac{\pi}{2}$ καί $(2k+1)\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, πού εἶναι τά ἄρτια ἤ περιττά πολλαπλάσια τοῦ π αὐξημένα κατά $\frac{\pi}{2}$.

Συνεπῶς τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως εφ εἶναι ἀκριβέστερα:

$$\mathbb{R}_1 = \left\{x : x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$$

Ἐπίσης ἡ ἐξίσωση $\eta\mu x = 0$ ἐπαληθεύεται ἀπό ὅσα x ἀπεικονίζονται στά σημεῖα Α ἤ Α′ τοῦ **C**, δηλαδή ἀπό τούς ἀριθμούς (§ 6.8, Παρατ. 1) τῆς μορφῆς $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ἄρα $\qquad \mathbb{R}_2 = \{x : x \neq k\pi\}$.

Τέλος, ἀποδεικνύεται ὅτι $\mathbb{R}_3 = \left\{x : \ x \neq k\frac{\pi}{2}\right\}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Ἀπό τήν § 6.10 προκύπτει γιά τήν ἐφαπτομένη ὅτι γιά κάθε $x \in \mathbb{R}_1$, (δηλ. $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$) εἶναι:

$$\varepsilon\varphi(2k\pi + x) = \frac{\eta\mu(2k\pi + x)}{\sigma\upsilon\nu(2k\pi + x)} = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \varepsilon\varphi x.$$

Ἀνάλογα, ἔχουμε γιά τή συνεφαπτομένη ὅτι γιά κάθε $x \in \mathbb{R}_2$ (δηλ. $x \neq k\pi$):

$$\sigma\varphi(2k\pi + x) = \sigma\varphi x.$$

2. Εἶναι προφανές ὅτι οἱ ἀριθμοί εφx καί σφx εἶναι ὁμόσημοι. Εἰδικότερα, γιά νά εἶναι:

- $\varepsilon\varphi x > 0$ καί $\sigma\varphi x > 0$

πρέπει καί ἀρκεῖ τά ημx καί συνx νά εἶναι ὁμόσημα, δηλαδή ὁ x νά ἀπεικονίζεται στό α′ ἤ γ′ τεταρτημόριο.

- $\varepsilon\varphi x < 0$ καί $\sigma\varphi x < 0$

πρέπει καί ἀρκεῖ τά ημx καί συνx νά εἶναι ἑτερόσημα, δηλαδή ὁ x νά ἀπεικονίζεται στό β′ ἤ δ′ τεταρτημόριο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

$$\varepsilon\varphi\,\frac{19\pi}{3} = \varepsilon\varphi\left(6\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \varepsilon\varphi\,\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$\sigma\varphi\left(-\frac{22\pi}{5}\right) = \sigma\varphi\left(-2\cdot 2\pi - \frac{2\pi}{5}\right) = \sigma\varphi\left(-\frac{2\pi}{5}\right) < 0$$

Ἄξονες ἐφαπτομένων καί συνεφαπτομένων

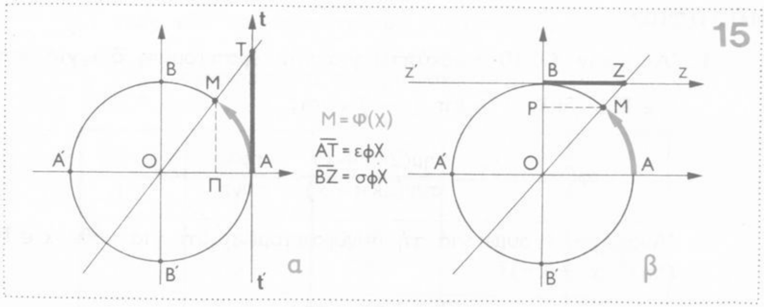
6.16 Ἔστω tt' ὁ ἄξονας πού ἔχει ἀρχή τήν ἀρχή Α τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου **C** καί εἶναι παράλληλος(1) πρός τόν ἄξονα y'y τῶν ἡμιτόνων. Ἄν Μ εἶναι ἡ εἰκόνα τοῦ ἀριθμοῦ x στόν **C** μέ τήν κανονική ἀπεικόνιση καί Τ ἡ τομή τῆς εὐθείας ΟΜ μέ τόν ἄξονα tt', τότε ἀπό τά ὅμοια τρίγωνα ΟΠΜ καί ΟΑΤ προκύπτει ὅτι εἶναι (σχ. 15α):

$$\frac{AT}{OA} = \frac{\Pi M}{O\Pi} \quad \text{ἤ} \quad (AT) = \frac{(\Pi M)}{(O\Pi)} = \frac{|\eta\mu x|}{|\sigma\upsilon\nu x|} = |\varepsilon\varphi x| \quad \text{ἤ} \quad |\overline{AT}| = |\varepsilon\varphi x|$$

Ἀλλά οἱ ἀριθμοί εφx καί $\overline{AT}$ εἶναι ὁμόσημοι, θετικοί ὅταν τό Μ εἶναι στό α' ἤ γ' τεταρτημόριο καί ἀρνητικοί, ὅταν τό Μ εἶναι στό β' ἤ δ' τεταρτημόριο.

Ἄρα εφx $= \overline{AT}$, δηλαδή ἡ ἐφαπτομένη τοῦ ἀριθμοῦ x εἶναι ἴση μέ τήν τετμημένη τοῦ Τ στόν ἄξονα tt'.

Γι' αὐτό ὁ ἄξονας tt' λέγεται **ἄξονας τῶν ἐφαπτομένων.**



Ἔστω z'z ὁ ἄξονας μέ ἀρχή τό Β παράλληλος πρός τόν ἄξονα τῶν συνημιτόνων. Τότε ὅπως καί προηγουμένως ἀποδεικνύεται ὅτι, ἄν Ζ εἶναι τό σημεῖο τομῆς τοῦ ἄξονα z'z καί τῆς εὐθείας ΟΜ (σχ. 15β), θά εἶναι

$$\sigma\varphi x = \overline{BZ}$$

Δηλαδή ἡ συνεφαπτομένη τοῦ ἀριθμοῦ x εἶναι ἴση μέ τήν τετμημένη τοῦ Ζ στόν ἄξονα z'z, πού λέγεται **ἄξονας τῶν συνεφαπτομένων.**

---

(1) Θά θεωροῦμε πάντοτε ὅτι τά μοναδιαῖα διανύσματα σέ παράλληλους ἄξονες εἶναι τά ἴδια.

Σχέση συν, εφ καί ημ, εφ

6.17 'Από τήν $ημ^2x+συν^2x=1$ ἔχουμε γιά κάθε $x \in \mathbb{R}_1$ $(συν\,x \neq 0)$

$$\frac{ημ^2x}{συν^2x}+1=\frac{1}{συν^2x} \quad ἤ \quad \boxed{1+εφ^2x=\frac{1}{συν^2x}} \qquad (1)$$

'Ομοίως γιά κάθε $x \in \mathbb{R}_2$ $(ημx \neq 0)$ ἔχουμε:

$$1+\frac{συν^2x}{ημ^2x}=\frac{1}{ημ^2x} \quad ἤ \quad \boxed{1+σφ^2x=\frac{1}{ημ^2x}} \qquad (2)$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι**

α) $συν^2x=\dfrac{1}{1+εφ^2x}$, **β)** $ημ^2x=\dfrac{εφ^2x}{1+εφ^2x}$.

α) 'Από τήν $1+εφ^2x=\dfrac{1}{συν^2x}$ ἔχουμε : $συν^2x=\dfrac{1}{1+εφ^2x}$.

β) 'Από τήν $ημ^2x+συν^2x=1$, ἄν θέσουμε $συν^2x=\dfrac{1}{1+εφ^2x}$, παίρνουμε :

$$ημ^2x+\frac{1}{1+εφ^2x}=1 \quad ἤ \quad ημ^2x(1+εφ^2x)+1=1+εφ^2x \quad ἤ$$

$$ημ^2x=\frac{εφ^2x}{1+εφ^2x}.$$

2. **Ἄν εἶναι $εφx=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ καί $\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$, νά βρεθοῦν οἱ τιμές τῶν ἄλλων τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων στό x.**

Εἶναι $συν^2x=\dfrac{1}{1+εφ^2x}=\dfrac{1}{1+\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\dfrac{1}{1+\dfrac{3}{9}}=\dfrac{9}{12}=\dfrac{3}{4}$,

ὁπότε, ἐπειδή $\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$, θά εἶναι :

$$συνx=-\sqrt{\frac{3}{4}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$ημ^2x=\frac{εφ^2x}{1+εφ^2x}=\frac{\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}{1+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{\dfrac{3}{9}}{1+\dfrac{3}{9}}=\frac{\dfrac{3}{9}}{\dfrac{12}{9}}=\frac{1}{4}$$

ὁπότε, ἐπειδή $\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$, θά εἶναι :

$$ημx=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2} \quad καί \quad σφx=\frac{1}{εφx}=-\frac{3}{\sqrt{3}}=-\frac{3\sqrt{3}}{3}=-\sqrt{3}.$$

3. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι εφ.θ.

α) $\dfrac{\varepsilon\varphi\theta+\sigma\varphi\omega}{\varepsilon\varphi\omega+\sigma\varphi\theta}=\dfrac{\cancel{\sigma\varphi\theta}}{\varepsilon\varphi\omega}$ β) $\varepsilon\varphi^2\theta-\eta\mu^2\theta=\varepsilon\varphi^2\theta\eta\mu^2\theta$.

α) Ἔχουμε $\dfrac{\varepsilon\varphi\theta+\sigma\varphi\omega}{\varepsilon\varphi\omega+\sigma\varphi\theta}=\dfrac{\varepsilon\varphi\theta+\dfrac{1}{\varepsilon\varphi\omega}}{\varepsilon\varphi\omega+\dfrac{1}{\varepsilon\varphi\theta}}=\dfrac{\dfrac{\varepsilon\varphi\theta\,\varepsilon\varphi\omega+1}{\varepsilon\varphi\omega}}{\dfrac{\varepsilon\varphi\theta\,\varepsilon\varphi\omega+1}{\varepsilon\varphi\theta}}=\dfrac{\varepsilon\varphi\theta}{\varepsilon\varphi\omega}$.

β) $\varepsilon\varphi^2\theta-\eta\mu^2\theta=\dfrac{\eta\mu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}-\eta\mu^2\theta=\dfrac{\eta\mu^2\theta-\eta\mu^2\theta\,\sigma\upsilon\nu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}$

$=\dfrac{\eta\mu^2\theta(1-\sigma\upsilon\nu^2\theta)}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}=\dfrac{\eta\mu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}\,\eta\mu^2\theta=\varepsilon\varphi^2\theta\,.\,\eta\mu^2\theta.$

Ἀσκήσεις 9, 10, 11, 12, 13.

Τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τόξου ἤ γωνίας

6.18 Ἔστω α ἕνας πραγματικός ἀριθμός καί $\overset{\frown}{AM}$ τό τόξο α ἀκτινίων στόν τριγωνομετρικό κύκλο **C**. Οἱ ἀριθμοί συνα καί ημα, δηλαδή οἱ συντεταγμένες τοῦ σημείου Μ, λέγονται ἀντιστοίχως **συνημίτονο** καί **ἡμίτονο** τοῦ $\overset{\frown}{AM}$ καθὼς καὶ κάθε ἄλλου **τόξου** ἤ **γωνίας** α ἀκτινίων.
Ἔτσι ἔχουμε

$$\sigma\upsilon\nu\overset{\frown}{AM}=\text{τετμημένη τοῦ } M=\sigma\upsilon\nu\alpha$$

$$\eta\mu\overset{\frown}{AM}=\text{τεταγμένη τοῦ } M=\eta\mu\alpha$$

Ἐπίσης οἱ εφα καί σφα λέγονται **ἐφαπτομένη** καί **συνεφαπτομένη** κάθε τόξου ἤ γωνίας α ἀκτινίων.
Τό ἡμίτονο, τό συνημίτονο, ἡ ἐφαπτομένη καί ἡ συνεφαπτομένη ἑνός τόξου (γωνίας) ω λέγονται καί **τριγωνομετρικοί ἀριθμοί** τοῦ τόξου ἢ τῆς γωνίας ω. Οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τῶν γωνιῶν 0^0—90^0 δίνονται στό τέλος τοῦ βιβλίου.
Ἐξάλλου, ἐπειδή ἕνα τόξο (ἤ γωνία), πού ἡ ἀλγεβρική του τιμή σέ μοῖρες, βαθμούς ἤ ἀκτίνια εἶναι ἀντιστοίχως μ,β,α, γράφεται συνήθως μ^0, β^g, α^{rad} θά εἶναι π.χ.

$$\sigma\upsilon\nu\mu^0=\sigma\upsilon\nu\beta^g=\sigma\upsilon\nu\alpha^{rad}=\sigma\upsilon\nu\alpha,\quad \varepsilon\varphi\mu^0=\varepsilon\varphi\alpha \text{ κτλ.}$$

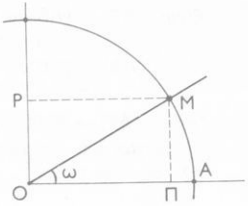
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

$\eta\mu30^0=\eta\mu\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$, $\sigma\upsilon\nu30^0=\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\eta\mu60^0=\eta\mu\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\sigma\upsilon\nu60^0=\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$, $\sigma\upsilon\nu(-270^0)=\sigma\upsilon\nu\left(-\dfrac{3\pi}{2}\right)=0$, $\eta\mu(-270^0)=1$,

$\varepsilon\varphi(1845^0)=\varepsilon\varphi(5\cdot360^0+45^0)=\varepsilon\varphi45^0=1.$

6.19 Οἱ ὁρισμοί τῆς προηγούμενης παραγράφου ὄχι μόνο δέν ἀναιροῦν ἀλλά γενικεύουν τούς ἀντίστοιχους ὁρισμούς γιά ὀξεῖες γωνίες πού εἴχαμε δώσει στό Γυμνάσιο.



16

Πράγματι γιά τό συνημίτονο π.χ. μιᾶς ὀξείας γωνίας ω:

- Σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό πού εἴχαμε δώσει στό Γυμνάσιο, κατασκευάζουμε ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ΟΠΜ (σχ. 16) καί ἔχουμε:

$$\text{συν}\omega = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{ὑποτείνουσα}} = \frac{\text{ΟΠ}}{\text{ΟΜ}}$$

ἤ, ἄν ὡς μονάδα μήκους ληφθεῖ τό τμῆμα ΟΜ, συνω = (ΟΠ).

- Σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό πού δίνουμε τώρα, θεωροῦμε τόν τριγωνομετρικό κύκλο κέντρου Ο, τοῦ ὁποίου ἀρχή Α εἶναι τό σημεῖο τομῆς του μέ τήν εὐθεία ΟΠ. Τότε, ἐπειδή ἡ γωνία ω καί τό ἀντίστοιχο τόξο $\overset{\frown}{\text{ΑΜ}}$ ἔχουν ἴδια ἀλγεβρική τιμή, θά ἔχουμε:

$$\text{συν}\omega = \text{συν}\,\overset{\frown}{\text{ΑΜ}} = \text{τετμημένη τοῦ Μ} = (\text{ΟΠ})$$

Ἔτσι, οἱ δύο αὐτοί ὁρισμοί τοῦ συνημιτόνου ὁδηγοῦν στό ἴδιο ἀποτέλεσμα. Τό ἴδιο ἀποδεικνύεται καί γιά τούς ἄλλους τριγωνομετρικούς ἀριθμούς ημω, εφω καί σφω.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Γενικότερα γιά **ὁποιοδήποτε** τόξο $\overset{\frown}{\text{ΑΜ}}$, ἄν (ΟΜ) = 1, εἶναι (σχ. 16) $\overline{\text{ΟΠ}} = \text{συν}\overset{\frown}{\text{ΑΜ}}$ καί $\overline{\text{ΟP}} = \text{ημ}\overset{\frown}{\text{ΑΜ}}$. Ἄρα, ἄν ἡ ἀκτίνα τοῦ κύκλου ἔχει μῆκος (ΟΜ) = ρ, θά εἶναι

$$\overline{\text{ΟΠ}} = \rho\,\text{συν}\overset{\frown}{\text{ΑΜ}} \quad \text{καί} \quad \overline{\text{ΟP}} = \rho\,\text{ημ}\overset{\frown}{\text{ΑΜ}}.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Ἕνας παρατηρητής Β (σχ. 17), πού βρίσκεται σέ ἀπόσταση 10 m ἀπό τή βάση Γ ἑνός πύργου, βλέπει τήν κορυφή Α τοῦ πύργου ὑπό γωνία 60°. Νά βρεθεῖ τό ὕψος τοῦ πύργου.**

17

Εἶναι $\text{εφ}\,B = \frac{(\text{ΑΓ})}{(\text{ΒΓ})}$, ὁπότε:

(ΑΓ) = (ΒΓ) εφ Β.

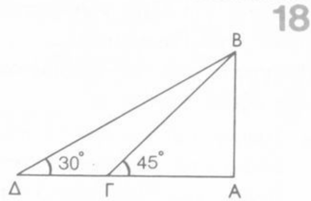
Ἄρα (ΑΓ) = 10 εφ 60° = $= 10 \times \sqrt{3} = 10 \times 1{,}732 =$ $= 17{,}32$ m.

2. Ἕνας πλοίαρχος παρατηρεῖ ἀπό τό πλοῖο του πού κατευθύνεται πρός τήν ἀκτή τήν κορυφή ἑνός φάρου AB, πού ἔχει ὕψος 50 m. Ἄν ἡ γωνία ὕψους μεταβάλλεται σέ χρόνο 2 min ἀπό 30^0 στό σημεῖο Δ σέ 45^0 στό Γ ποιά εἶναι ἡ ταχύτητα τοῦ πλοίου, (σχ. 18),

Εἶναι $(ΑΓ) = (ΑΒ)σφ\, 45^0 =$
$= 50 \cdot 1 = 50$
$(ΑΔ) = (ΑΒ)σφ\, 30^0 =$
$= 50 \cdot 1{,}732 = 86{,}60$

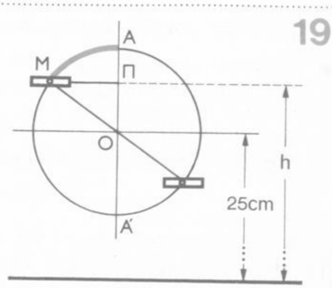
Ἄρα $(ΔΓ) = 86{,}60 - 50 = 36{,}60$·
Ἑπομένως ἡ ταχύτητα τοῦ πλοίου εἶναι:

$\frac{36{,}6}{2} = 18{,}3$ m/min $= 1098$ m/h



3. Ἔστω Μ ἡ θέση τοῦ ποδιοῦ σέ ἕνα πετάλι ποδηλάτου (σχ. 19) κέντρου Ο μέ ΟΜ = 10 cm. Ἄν τό ὕψος τοῦ Ο ἀπό τό ἔδαφος εἶναι 25 cm καί τό πετάλι, ἀρχίζοντας ἀπό τό Α μέ σταθερή ταχύτητα, συμπληρώνει μιά πλήρη περιστροφή σέ 4 sec, νά βρεθεῖ τό ὕψος τῆς θέσεως τοῦ ποδιοῦ ἀπό τό ἔδαφος, 2, 3, 25, 52 sec μετά τή διέλευσή του ἀπό τό Α.

Ἐπειδή σέ 1 sec τό Μ διαγράφει τόξο $\frac{\pi}{2}$, σέ t sec θά διαγράφει τόξο $t \cdot \frac{\pi}{2}$.



Ἐξάλλου τό ὕψος τοῦ πεταλιοῦ θά εἶναι $h = 25 + \overline{ΟΠ}$.

Ἄρα (§ 6.19 Παρατ.) θά εἶναι:

$$h = 25 + 10\, συν\, t\frac{\pi}{2}.$$

Ἔτσι μετά ἀπό:

$t = 2$ sec $\quad h = 25 + 10\, συν\, \pi = 25 + 10(-1) = 15$

$t = 3$ sec $\quad h = 25 + 10 συν\, 3\frac{\pi}{2} = 25 + 10 \cdot 0 = 25$

$t = 25$ sec $\quad h = 25 + 10\, συν 25\frac{\pi}{2} = 25 + 10 συν\left(12\pi + \frac{\pi}{2}\right)$
$= 25 + 10 συν\frac{\pi}{2} = 25.$

$t = 52$ sec $\quad h = 25 + 10\, συν\, 52\frac{\pi}{2} = 25 + 10 \cdot συν(26\pi) =$
$= 25 + 10 \cdot 1 = 35$

Ἀσκήσεις 14, 15, 16.

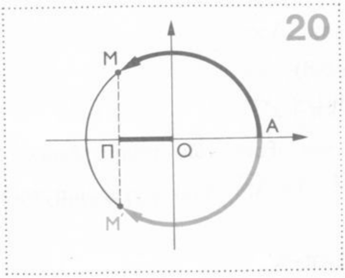
ΣΧΕΣΕΙΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΤΟΞΩΝ ΜΕ ΕΙΔΙΚΟ ΑΘΡΟΙΣΜΑ Ή ΔΙΑΦΟΡΑ

Γενικά

6.20 Στά ἑπόμενα θεωροῦμε στόν τριγωνομετρικό κύκλο δύο τόξα $\overset{\frown}{AM}$ καί $\overset{\frown}{AM'}$ πού βρίσκονται σέ εἰδική σχέση (εἶναι π.χ. ἀντίθετα, παραπληρωματικά κτλ.) καί μέ βάση τήν ἀμοιβαία θέση τῶν σημείων M καί M′ βρίσκουμε ἀντίστοιχη σχέση τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῶν τόξων αὐτῶν. Αὐτό σημαίνει ὅτι, ἄν x καί x′ εἶναι οἱ ἀλγεβρικές τιμές τους, ἔχουμε σχέσεις τῶν τιμῶν τῶν τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων στούς ἀριθμούς x καί x′ σέ ὁρισμένες ἀξιοσημείωτες περιπτώσεις, ὅπως π.χ. ὅταν ὁ x′ εἶναι $-x$, $\pi - x$, $\frac{\pi}{2} + x$ κτλ.

Ἀντίθετα τόξα

6.21 Οἱ ἀντίθετοι ἀριθμοί x καί $x' = -x$ εἶναι ἀλγεβρικές τιμές τῶν ἀντίθετων τόξων $\overset{\frown}{AM}$ καί $\overset{\frown}{AM'}$ (σχ 20). Τά σημεῖα M καί M′ εἶναι συμμετρικά ὡς πρός τόν ἄξονα τῶν συνημιτόνων καί συνεπῶς ἔχουν (§ 6.4) τήν ἴδια τετμημένη καί ἀντίθετες τεταγμένες. Συμπεραίνουμε λοιπόν ὅτι γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$



$$\textbf{συν}(-x) = \textbf{συν}x$$

$$ημ(-x) = -ημx$$

ὁπότε, ἄν ὁρίζεται στό $-x$ ἡ ἐφαπτομένη, δηλαδή ἄν $x \in \mathbb{R}_1$, θά εἶναι

$$εφ(-x) = \frac{ημ(-x)}{συν(-x)} = \frac{-ημx}{συνx} = -εφx$$

Ὁμοίως, ἄν ὁρίζεται στό $-x$ ἡ συνεφαπτομένη, δηλαδή ἄν $x \in \mathbb{R}_2$, θά εἶναι

$$σφ(-x) = -σφx$$

Τά παραπάνω τά διατυπώνουμε καί ὡς ἑξῆς:

Τά ἀντίθετα τόξα ἔχουν τό ἴδιο συνημίτονο καί ἀντίθετους τούς ἄλλους τριγωνομετρικούς ἀριθμούς

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

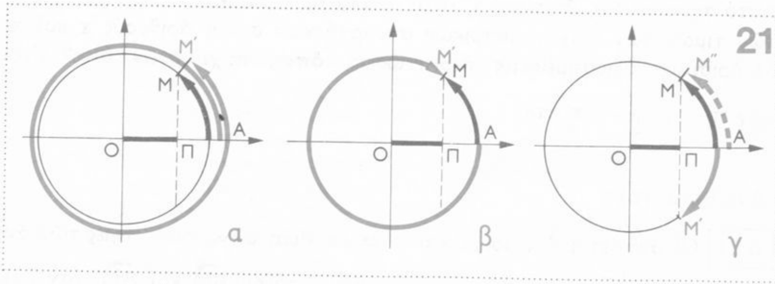
$$συν\left(-\frac{π}{3}\right)=συν\frac{π}{3}=\frac{1}{2} \qquad ημ\left(-\frac{π}{3}\right)=-ημ\frac{π}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$εφ(-45^0)=-εφ45^0=-1$$

Τόξα μέ τό ἴδιο συνημίτονο

6.22 Ἔστω $\overset{\frown}{AM}$ καί $\overset{\frown}{AM}'$ δύο τόξα μέ τό ἴδιο συνημίτονο καί x καί x' οἱ ἀλγεβρικές τους τιμές. Ἐπειδή εἶναι

$$συνx = συνx'$$



τά πέρατα Μ καί Μ′ ἔχουν ἴδια τετμημένη. Ἄρα

- ἤ συμπίπτουν (σχ. 21α, β), ὁπότε (§ 6.8)

$$\exists\, k \in \mathbb{Z}, \quad x = 2kπ + x'$$

- ἤ εἶναι συμμετρικά (σχ 21γ) ὡς πρός τόν ἄξονα τῶν συνημιτόνων.

  Ἔστω $\overset{\frown}{AM}''$ τό ἀντίθετο τοῦ τόξου $\overset{\frown}{AM}'$. Τό $\overset{\frown}{AM}''$ ἔχει ἀλγεβρική τιμή $-x'$ καί πέρας τό σημεῖο Μ. Συνεπῶς

$$\exists\, k \in \mathbb{Z}, \quad x = 2kπ - x'$$

Ὥστε $συνx = συνx' \Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z},\ x = 2kπ + x'$ **ἤ** $x = 2kπ - x'$.

Ἀλλά καί ἡ ἀντίστροφη συνεπαγωγή προκύπτει ἀμέσως ἀπό τήν παρατήρηση 2 τῆς § 6.10, ἀφοῦ

$$συν(2kπ + x') = συνx' \quad καί \quad συν(2kπ - x') = συν(-x) = συνx'.$$

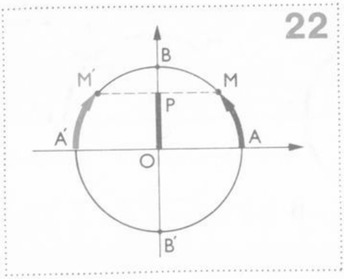
Ἄρα ἔχουμε τελικά τήν ἰσοδυναμία

$$\boxed{\mathbf{συν\,x = συν\,x' \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z},\quad x = 2kπ + x' \;.\; ἤ \quad x = 2kπ - x'}}$$

Παραπληρωματικά τόξα

6.23 Οἱ ἀριθμοί x καί $π-x$ εἶναι ἀλγεβρικές τιμές τῶν παραπληρωματικῶν τόξων $\overset{\frown}{AM}$ καί $\overset{\frown}{AM}'$ ἀντιστοίχως. Ἐπειδή ὅμως $π-x = π+(-x)$, τό $\overset{\frown}{AM}'$

θά εἶναι ἄθροισμα (§ 6.6 Ἰδιότ.1) τοῦ ἡμικυκλίου $\overset{\frown}{ABA'}$ καί ἑνός τόξου $\overset{\frown}{A'M'}$



ἀντίθετου τοῦ $\overset{\frown}{AM}$ (σχ. 22). Συνεπῶς τά σημεῖα M καί M′ εἶναι συμμετρικά ὡς πρός τόν ἄξονα τῶν ἡμιτόνων, ἔχουν δηλαδή (§ 6.4) ἴδια τεταγμένη καί ἀντίθετες τετμημένες.

Ἄρα θά εἶναι, γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$ημ(π-x) = ημx$$

$$\boxed{συν(π-x) = -συνx.}$$

Ἑπομένως, ἄν ὁρίζεται στό $π-x$ ἡ ἐφαπτομένη, δηλαδή ἄν $x \in \mathbb{R}_1$, θά εἶναι:

$$εφ(π-x) = \frac{ημ(π-x)}{συν(π-x)} = \frac{ημx}{-συνx} = -εφx$$

Ὁμοίως, γιά κάθε $x \in \mathbb{R}_2$ θά εἶναι:

$$σφ(π-x) = -σφx.$$

Δηλαδή:

> **Τά παραπληρωματικά τόξα ἔχουν τό ἴδιο ἡμίτονο καί ἀντίθετους τούς ἄλλους τριγωνομετρικούς ἀριθμούς**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

$$ημ\frac{2π}{3} = ημ\left(π - \frac{π}{3}\right) = ημ\frac{π}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$συν\,150^0 = συν(180^0 - 30^0) = -συν30^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

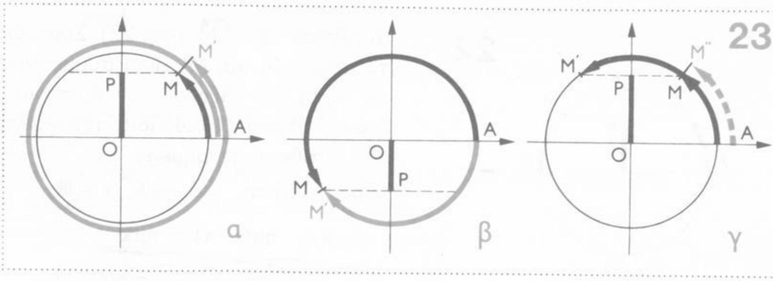
$$εφ\frac{3π}{4} = εφ\left(π - \frac{π}{4}\right) = -εφ\frac{π}{4} = -1.$$

Τόξα μέ τό ἴδιο ἡμίτονο

6.24 Ἔστω $\overset{\frown}{AM}$ καί $\overset{\frown}{AM'}$ δύο τόξα μέ τό ἴδιο ἡμίτονο καί x καί x' οἱ ἀλγεβρικές τιμές τους. Ἐπειδή εἶναι

$$ημx = ημx'$$

τά πέρατα Μ καί Μ′ ἔχουν τήν ἴδια τεταγμένη. Ἄρα



- ἤ συμπίπτουν (σχ. 23α, β), ὁπότε (§ 6.8),

$$\exists\, k \in \mathbb{Z}, \quad x = 2k\pi + x'$$

- ἤ εἶναι συμμετρικά (σχ. 23γ) ὡς πρός τόν ἄξονα τῶν ἡμιτόνων.

Ἔστω $\overset{\frown}{AM''}$ τό παραπληρωματικό τοῦ τόξου $\overset{\frown}{AM'}$. Τό $\overset{\frown}{AM''}$ ἔχει ἀλγεβρική τιμή $\pi - x'$ καί πέρας τό Μ. Συνεπῶς

$$\exists\, k \in \mathbb{Z}, \quad x = 2k\pi + \pi - x' = (2k+1)\pi - x'$$

Ὥστε $\quad \eta\mu x = \eta\mu x' \Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z},\ x = 2k\pi + x'$ **ἤ** $x = (2k+1)\pi - x'$
Ἀλλά καί ἡ ἀντίστροφη συνεπαγωγή προκύπτει ἀμέσως ἀπό τήν παρατήρηση 2 τῆς § 6.10, ἀφοῦ

$$\eta\mu(2k\pi + x') = \eta\mu x' \text{ καί } \eta\mu[(2k+1)\pi - x'] = \eta\mu(\pi - x') = \eta\mu x'$$

Ἄρα ἔχουμε τελικά τήν ἰσοδυναμία:

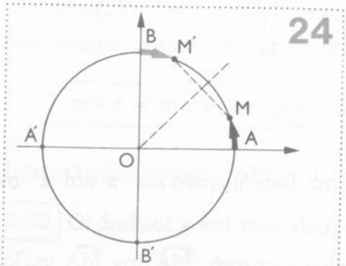
$$\boxed{\eta\mu\, x = \eta\mu\, x' \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}, \quad x = 2k\pi + x \ \text{ ἤ } \ x = (2k+1)\pi - x'}$$

Συμπληρωματικά τόξα

6.25 Οἱ ἀριθμοί x καί $\frac{\pi}{2} - x$ εἶναι ἀλγεβρικές τιμές ἀντιστοίχως τῶν συμπληρωματικῶν τόξων $\overset{\frown}{AM}$ καί $\overset{\frown}{AM'}$ (σχ. 24). Ἐπειδή ὅμως

$$\frac{\pi}{2} - x = \frac{\pi}{2} + (-x),$$

τό τόξο $\overset{\frown}{AM'}$ εἶναι ἄθροισμα (§ 6.6 Ἰδιότ. 1) τοῦ τεταρτοκυκλίου $\overset{\frown}{AB}$ καί τοῦ τόξου $\overset{\frown}{BM'}$, πού εἶναι ἀντίθετο πρός τό $\overset{\frown}{AM}$.



Ἑπομένως τά σημεῖα Μ καί Μ' εἶναι συμμετρικά ὡς πρός τή διχοτόμο τῆς γωνίας τῶν θετικῶν ἡμιαξόνων. Ἄρα (§ 6.4) γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$ εἶναι:

$$\text{συν}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\text{ημ}x$$

$$\text{ημ}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\text{συν}x$$

Συνεπῶς, ἄν ὁρίζεται στό $\frac{\pi}{2}-x$ ἡ ἐφαπτομένη, δηλαδή ἄν εἶναι $\text{συν}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\text{ημ}x \neq 0$ ἤ $x \in \mathbb{R}_2$, τότε θά ἔχουμε:

$$\text{εφ}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{\text{ημ}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\text{συν}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=\frac{\text{συν}x}{\text{ημ}x}=\text{σφ}x$$

Ὁμοίως, γιά κάθε $x \in \mathbb{R}_1$ εἶναι: $\text{σφ}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\text{εφ}x.$

Δηλαδή:

Στά συμπληρωματικά τόξα, τό ἡμίτονο τοῦ καθενός ἰσοῦται μέ τό συνημίτονο τοῦ ἄλλου καί ἡ ἐφαπτομένη τοῦ καθενός ἰσοῦται μέ τή συνεφαπτομένη τοῦ ἄλλου

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

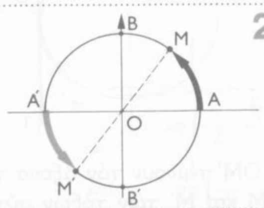
$$\text{ημ}\frac{\pi}{6}=\text{συν}\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

$$\text{εφ}\,72^0=\text{εφ}(90^0-18^0)=\text{σφ}18^0>0.$$

Τόξα πού ἔχουν διαφορά π

6.26 Οἱ ἀριθμοί x καί $\pi+x$ εἶναι ἀλγεβρικές τιμές ἀντιστοίχως τῶν τόξων $\overset{\frown}{AM}$ καί $\overset{\frown}{AM'}$ (σχ. 25). Τό $\overset{\frown}{AM'}$ εἶναι ἄθροισμα τοῦ ἡμικυκλίου $\overset{\frown}{ABA'}$ καί τοῦ τόξου $\overset{\frown}{A'M'}$ πού εἶναι τόξο ἴσο πρός τό $\overset{\frown}{AM}$. Ἑπομένως τά σημεῖα Μ καί Μ' εἶναι συμμετρικά ὡς πρός τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων καί ἑπομένως (§ 6.4) ἔχουν ἀντίθετες τίς ὁμώνυμες συντεταγμένες.

25



Ἄρα, γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$, $\eta\mu(\pi+x) = -\eta\mu x$

$$\sigma\upsilon\nu(\pi+x) = -\sigma\upsilon\nu x$$

Ὁπότε, ἄν ὁρίζεται ἡ ἐφαπτομένη στό $\pi+x$, δηλαδή ἄν

$$\sigma\upsilon\nu(\pi+x) = -\sigma\upsilon\nu x \neq 0 \text{ ἤ } x \in \mathbb{R}_1$$

θά ἔχουμε:

$$\varepsilon\varphi(\pi+x) = \frac{\eta\mu(\pi+x)}{\sigma\upsilon\nu(\pi+x)} = \frac{-\eta\mu x}{-\sigma\upsilon\nu x} = \varepsilon\varphi x$$

Ὁμοίως, γιά κάθε $x \in \mathbb{R}_2$, εἶναι

$$\sigma\varphi(\pi+x) = \sigma\varphi x$$

Δηλαδή:

> **Τά τόξα πού ἔχουν διαφορά π ἔχουν ἀντίθετο ἡμίτονο καί συνημίτονο, ἐνῶ ἔχουν τήν ἴδια ἐφαπτομένη καί συνεφαπτομένη**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

$$\eta\mu\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \eta\mu\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\eta\mu\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\varepsilon\varphi\,(225^\circ) = \varepsilon\varphi\,(180^\circ + 45^\circ) = \varepsilon\varphi\, 45^\circ = 1.$$

Τόξα μέ τήν ἴδια ἐφαπτομένη ἤ συνεφαπτομένη

6.27 Ἔστω $\overset{\frown}{AM}$ καί $\overset{\frown}{AM'}$ δύο τόξα μέ τήν ἴδια ἐφαπτομένη (ἤ συνεφαπτομένη) καί x, x' οἱ ἀλγεβρικές τους τιμές.

Ἐπειδή εἶναι

$$\varepsilon\varphi x' = \varepsilon\varphi x$$

τά σημεῖα T, T′, στά ὁποῖα οἱ εὐθεῖες OM καί OM′ τέμνουν τόν ἄξονα τῶν ἐφαπτομένων, συμπίπτουν. Ἄρα τά πέρατα M καί M′ τῶν τόξων αὐτῶν

● ἤ συμπίπτουν (σχ. 26α, β), ὁπότε (§ 6.8)

$$\exists\, k \in \mathbb{Z}, \quad x = 2k\pi + x' \tag{1}$$

● ἤ τό M′ εἶναι συμμετρικό τοῦ M ὡς πρός τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων.

Ἔστω $\overset{\frown}{AM''}$ τό τόξο $\overset{\frown}{AM'} + \overset{\frown}{ABA'}$. Τό τόξο $\overset{\frown}{AM''}$ ἔχει ἀλγεβρική τιμή $\pi + x'$ καί πέρας τό M. Ἄρα

$$\exists\, k \in \mathbb{Z}, \quad x = 2k\pi + (\pi + x') = (2k+1)\pi + x' \tag{2}$$

Ἡ (1) καί (2) συνοψίζονται στήν: $\exists\, \lambda \in \mathbb{Z}, \quad x = \lambda\pi + x'$

Ὥστε $\qquad$ $\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi x' \Rightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{Z}, \quad x = \lambda\pi + x'$

Ἀλλά καί ἡ ἀντίστροφη συνεπαγωγή προκύπτει ἀπό τήν παρατήρηση 2 τῆς § 6.10 ἀφοῦ

$$\varepsilon\varphi\,(\lambda\pi + x') = \begin{cases} \varepsilon\varphi(2k\pi + x') = \varepsilon\varphi x', & \text{ἄν } \lambda \text{ ἄρτιος} \\ \varepsilon\varphi[(2k+1)\pi + x'] = \varepsilon\varphi(\pi + x') = \varepsilon\varphi x', & \text{ἄν } \lambda \text{ περιττός.} \end{cases}$$

Ὥστε τελικά ἔχουμε τήν ἰσοδυναμία:

$$\boxed{\boldsymbol{\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi x' \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}, \quad x = k\pi + x'}}$$

Ὁμοίως γιά τήν συνεφαπτομένη ἔχουμε:

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma\varphi x = \sigma\varphi x' \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}, \quad x = k\pi + x'}}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Νά βρεθοῦν οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τόξων πού ἔχουν διαφορά $\frac{\pi}{2}$.

Ἔχουμε $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \eta\mu\left[\frac{\pi}{2} - (-\theta)\right] = \sigma\upsilon\nu(-\theta) = \sigma\upsilon\nu\,\theta$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \sigma\upsilon\nu\left[\frac{\pi}{2} - (-\theta)\right] = \eta\mu(-\theta) = -\eta\mu\theta$$

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \varepsilon\varphi\left[\frac{\pi}{2} - (-\theta)\right] = \sigma\varphi(-\theta) = -\sigma\varphi\theta$$

καί $\qquad \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\varepsilon\varphi\theta$

Ὁμοίως εἶναι π. χ. $\quad \varepsilon\varphi 120^0 = \varepsilon\varphi(90^0 + 30^0) = -\,\sigma\varphi\,30^0 = -\sqrt{3}$.

2. **Νά βρεθοῦν οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τόξων πού ἔχουν ἄθροισμα $\frac{3\pi}{2}$.**

Ἔχουμε $\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=\eta\mu\left[\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right]=-\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=-\sigma\upsilon\nu\,\theta$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=\sigma\upsilon\nu\left[\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right]=-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=-\eta\mu\,\theta$$

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=\varepsilon\varphi\left[\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right]=\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sigma\varphi\,\theta.$$

καί $\sigma\varphi\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)==\varepsilon\varphi\,\theta.$

Ὁμοίως εἶναι π.χ. $\eta\mu\,210^0=\eta\mu\,(270^0-60^0)=-\sigma\upsilon\nu\,60^0=-\frac{1}{2}$.

3. **Νά βρεθοῦν οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τόξων πού ἔχουν διαφορά $\frac{3\pi}{2}$.**

Ἔχουμε $\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=\eta\mu\left[\frac{3\pi}{2}-(-\theta)\right]=-\sigma\upsilon\nu(-\theta)=-\sigma\upsilon\nu\,\theta$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=\sigma\upsilon\nu\left[\frac{3\pi}{2}-(-\theta)\right]=-\eta\mu(-\theta)=\eta\mu\,\theta$$

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=\varepsilon\varphi\left[\frac{3\pi}{2}-(-\theta)\right]=\sigma\varphi\,(-\theta)=-\sigma\varphi\,\theta$$

καί $\sigma\varphi\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=-\varepsilon\varphi\theta.$

Ὁμοίως εἶναι π.χ. $\sigma\upsilon\nu\,300^0=\sigma\upsilon\nu\,(270^0+30^0)=\eta\mu\,30^0=\frac{1}{2}$.

Σημείωση

Γιά τήν ἀπομνημόνευση τῶν σχέσεων τῶν προηγούμενων ἐφαρμογῶν 1, 2, 3 καθώς καί τῶν § 6.21, 6.23, 6.25 καί 6.26 χρησιμοποιεῖται ὁ ἑπόμενος μνημονικός κανόνας:

Ὅταν δύο τόξα ἔχουν ἄθροισμα ἤ διαφορά 0, π, 2π ἔχουν ὁμώνυμους τριγωνομετρικούς ἀριθμούς, ἐνῶ ὅταν ἔχουν ἄθροισμα ἤ διαφορά $\frac{\pi}{2}$ ἤ $\frac{3\pi}{2}$ οἱ τριγωνομετρικοί τους ἀριθμοί ἐναλλάσσονται (ημ μέ συν καί εφ μέ σφ). Τό πρόσημο, γιά τό τόξο πού ἔχει μορφή $\lambda\pi\pm\theta$ ἤ $\lambda\frac{\pi}{2}\pm\theta$, καθορίζεται ἀπό τό τεταρτημόριο στό ὁποῖο λήγει, ἄν ὑποτεθεῖ ὅτι $0<\theta<\frac{\pi}{2}$.

4. **Γιά τίς συναρτήσεις**

$$f \text{ μέ } f(x)=2\,\sigma\upsilon\nu^2x+3\,\sigma\upsilon\nu\,x-1 \quad \text{καί}$$

$$g \text{ μέ } g(x)=5\,\eta\mu^2x-2\,\eta\mu x+3$$

νά ἀποδειχθεῖ ὅτι $f(x)=f(-x)$ καί $g(x)=g(\pi-x)$.

Εἶναι $f(-x) = 2\,συν^2(-x)+3\,συν\,(-x)-1$

$$= 2\,συν^2 x+3\,συν\,x-1$$

$$= f(x)$$

$$g\,(\pi-x) = 2\,ημ^2(\pi-x)-2ημ(\pi-x)+3$$

$$= 2ημ^2x-2ημx+3$$

$$= g(x)$$

5. **Νά ἁπλοποιηθοῦν οἱ παραστάσεις**

$$A = \frac{2ημ(\pi-θ)+συν\left(\frac{\pi}{2}-θ\right)-2ημ(2\pi-θ)}{ημ\left(\frac{\pi}{2}-θ\right)-3συν\,(\pi-θ)+συν(2\pi-θ)}$$

$$B = \frac{εφ(90^\circ+θ)συν(270^\circ+θ)ημ(180^\circ+θ)}{ημ(180^\circ-θ)συν(360^\circ+θ)σφ(270^\circ-θ)}$$

Εἶναι: $A = \frac{2ημθ+ημθ-2(-ημθ)}{συν\,θ-3(-συνθ)+συν\,θ} = \frac{5\,ημ\,θ}{5\,συνθ} = εφ\,θ.$

$$B = \frac{σφ(-θ)[-συν(90^\circ+θ)](-ημθ)}{ημ\,θ\,συν\,θ\,σφ(90^\circ-θ)} = \frac{-σφθ\,ημθ(-ημθ)}{ημ\,θ\,συνθ\,εφθ}$$

$$= \frac{σφ\,θ\,ημθ\,ημ\,θ}{ημθ\,συνθ\,εφθ} = \frac{σφθ}{εφθ}\cdot\frac{ημθ}{συνθ} = \frac{σφθ}{εφθ}\cdot εφθ = σφθ.$$

'Ασκήσεις 17, 18, 19, 20.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Ἔννοια τῆς τριγωνομετρικῆς ἐξισώσεως

6.28 Ἄν μιά ἐξίσωση περιλαμβάνει τιμές τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων ἐξαρτώμενες ἀπό τούς ἀγνώστους, τότε ἡ ἐξίσωση αὐτή λέγεται **τριγωνομετρική.**

Π.χ. τριγωνομετρικές εἶναι οἱ ἐξισώσεις

$$συνx+συν2x+συν\,3x = 0$$

$$ημ\,(συν\,x) = 1$$

$$ημ^2x-συν\,x = 1$$

$$ημ\,x = συν\,2x$$

$$εφ\,x = εφ\,(\pi-x).$$

Ἡ ἐξίσωση $x^2-2(συναημα)x+ημ^2α = 0$, μέ ἄγνωστο x, δέν εἶναι τριγωνομετρική.

Εἶναι φανερό ὅτι οἱ μορφές τῶν τριγωνομετρικῶν ἐξισώσεων ποικίλουν. Ἡ ἐπίλυση ὅμως πολλῶν ἀπό αὐτές ἀνάγεται στήν ἐπίλυση τῶν ἁπλῶν μορφῶν πού ἐξετάζονται στά ἑπόμενα.

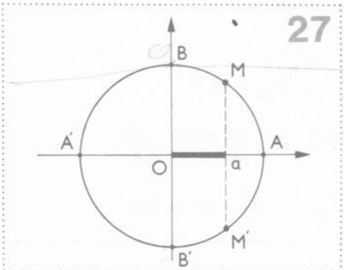
Ἡ ἐξίσωση συνx = α

6.29 Εἶναι προφανές ὅτι ἡ ἐξίσωση αὐτή δέν ἔχει λύση, ὅταν $\alpha > 1$ ἤ $\alpha < -1$, δηλαδή ὅταν $|\alpha| > 1$, ἐπειδή (§ 6.10, Παρατ. 1)

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, \quad -1 \leqslant \text{συν}x \leqslant 1.$$

Ὑποθέτουμε λοιπόν $|\alpha| \leqslant 1$.

Στήν περίπτωση αὐτή ὑπάρχουν σημεῖα Μ καί Μ′ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου μέ τετμημένη α (σχ. 27).



27

Οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως εἶναι προφανῶς οἱ ἀλγεβρικές τιμές ὅλων τῶν τόξων $\overset{\frown}{AM}$ καί $\overset{\frown}{AM'}$. Ἄν θ εἶναι μιά ἀπό αὐτές, δηλαδή ἄν $\text{συν}\theta = \alpha$, τότε ἡ ἐξίσωση $\text{συν}x = \alpha$ γράφεται

$$\text{συν}x = \text{συν}\,\theta$$

καί σύμφωνα μέ τήν § 6.22, ὅλες οἱ ρίζες της δίνονται ἀπό τούς τύπους

$$\mathbf{x = 2k\pi \pm \theta}, \quad \text{γιά τίς διάφορες τιμές τοῦ } k \in \mathbb{Z}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Γιά τήν ἐξίσωση $2\text{συν}x - \sqrt{2} = 0$ ἔχουμε $\text{συν}x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ καί ἐπειδή $\frac{\sqrt{2}}{2} = \text{συν}\frac{\pi}{4}$, ἡ ἐξίσωση γίνεται $\text{συν}x = \text{συν}\frac{\pi}{4}$. Αὐτή ἔχει λύσεις τίς

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ἡ ἐξίσωση ημx = α

6.30 Ὅπως καί στήν προηγούμενη περίπτωση, διαπιστώνουμε ὅτι ἡ ἐξίσωση αὐτή ἔχει λύση **μόνο** ἄν $|\alpha| \leqslant 1$.

Στήν περίπτωση αὐτή ἔστω θ μιά ρίζα της. Ἐπειδή $\text{ημ}\theta = \alpha$, ἡ ἐξίσωση $\text{ημ}x = \alpha$, γράφεται

$$\text{ημ}x = \text{ημ}\theta$$

καί σύμφωνα μέ τήν § 6.24 ὅλες οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως δίνονται ἀπό τούς τύπους

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \mathbf{x = 2k\pi + \theta} \\ \mathbf{x = (2k+1)\pi - \theta} \end{array}\right\} \text{ γιά } k \in \mathbb{Z}.}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Γιά τήν ἐξίσωση $2\,ημx-1=0$ ἔχουμε $ημx=\frac{1}{2}$. Εἶναι ὅμως $\frac{1}{2}=ημ\frac{π}{6}$.

Ἄρα $ημx=ημ\frac{π}{6}$ ὁπότε

$$x=2kπ+\frac{π}{6} \quad \text{καί}$$

$$x=(2k+1)π-\frac{π}{6}, \quad k\in\mathbb{Z}$$

Ἡ ἐξίσωση $εφx=α$

6.31 Ἄν θ εἶναι ἕνας ἀριθμός τέτοιος, ὥστε $εφθ=α$, ἡ ἐξίσωση $εφx=α$ γράφεται

$$εφx=εφθ$$

ὁπότε, σύμφωνα μέ τήν § 6.27, ὅλες οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως δίνονται ἀπό τόν τύπο

$$\boxed{x=kπ+θ, \quad \text{γιά } k\in\mathbb{Z}}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Γιά τήν ἐξίσωση $εφ\,x-\sqrt{3}=0$ ἔχουμε $εφx=\sqrt{3}$ καί ἐπειδή $\sqrt{3}=εφ\frac{π}{3}$, εἶναι $εφx=εφ\frac{π}{3}$, ὁπότε οἱ λύσεις εἶναι

$$x=kπ+\frac{π}{3}, \quad k\in\mathbb{Z}.$$

Σημείωση

Ἡ λύση τῆς ἐξισώσεως $σφx=β$.

- ἄν $β\neq 0$, ἀνάγεται στή λύση τῆς $\frac{1}{εφx}=β$ ἤ $εφx=\frac{1}{β}$
- ἄν $β=0$, λύσεις τῆς $σφx=β$ εἶναι οἱ ἀλγεβρικές τιμές ὅλων τῶν τόξων πού λήγουν στό Β ἤ Β΄, δηλαδή $x=kπ+\frac{π}{2}$.

Π.χ. ἡ ἐξίσωση $σφx=1$ εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν $εφx=1$.
Οἱ λύσεις της εἶναι λοιπόν

$$x=kπ+\frac{π}{4}, \quad k\in\mathbb{Z}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις**

α) $(2ημx+1)^2-4(1-ημx)(2\,ημx+1)=0$ (παρ/ση)

β) $συν\,2x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ **μέ** $x\in[0,2π]$.

α) Είναι

$$(2\eta\mu x+1)^2-4(1-\eta\mu x)(2\eta\mu x+1)=0 \Leftrightarrow (2\eta\mu x+1)(2\eta\mu x+1-4+4\eta\mu x)=0$$

$$\Leftrightarrow (2\eta\mu x+1)(6\eta\mu x-3)=0$$

$$\Leftrightarrow (2\eta\mu x+1=0) \text{ ἤ } (6\eta\mu x-3)=0)$$

$$\Leftrightarrow \left(\eta\mu x=-\frac{1}{2}\right) \text{ ἤ } \left(\eta\mu x=\frac{1}{2}\right)$$

Ἀπό τίς δύο τελευταῖες ἐξισώσεις ἔχουμε:

$$\eta\mu x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x=\eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

Ἄρα $x=2k\pi-\dfrac{\pi}{6}$

ἤ $x=(2k+1)\pi+\dfrac{\pi}{6}$, $k\in\mathbb{Z}$

$$\eta\mu x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x=\eta\mu\frac{\pi}{6}$$

Ἄρα $x=2k\pi+\dfrac{\pi}{6}$

ἤ $x=(2k+1)\pi-\dfrac{\pi}{6}$, $k\in\mathbb{Z}$

β) Είναι

$$\sigma\upsilon\nu 2x=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}.$$

Ἄρα $2x=2k\pi\pm\dfrac{\pi}{4}$ καί $x=k\pi\pm\dfrac{\pi}{8}$, $k\in\mathbb{Z}$.

Ἐπειδή $x\in[0,2\pi]$ θά ἔχουμε $0\leqslant k\pi\pm\dfrac{\pi}{8}\leqslant 2\pi$.

- Ἀπό τήν $0\leqslant k\pi+\dfrac{\pi}{8}\leqslant 2\pi$ εἶναι $0\leqslant k+\dfrac{1}{8}\leqslant 2$ ἤ $-\dfrac{1}{8}\leqslant k\leqslant\dfrac{15}{8}$,

  ἄρα $k=0$ ἤ 1. Γιά $k=0$ ἔχουμε $x=\dfrac{\pi}{8}$ καί

  γιά $k=1$ ἔχουμε $x=\pi+\dfrac{\pi}{8}$

- Ἀπό τήν $0\leqslant k\pi-\dfrac{\pi}{8}\leqslant 2\pi$ εἶναι $0\leqslant k-\dfrac{1}{8}\leqslant 2$ ἤ $\dfrac{1}{8}\leqslant k\leqslant\dfrac{17}{8}$,

  ἄρα $k=1$ ἤ 2.

  Γιά $k=1$ ἔχουμε $x=\pi-\dfrac{\pi}{8}$ καί

  γιά $k=2$ ἔχουμε $x=2\pi-\dfrac{\pi}{8}$

Ἄρα οἱ λύσεις στό $[0,2\pi]$ εἶναι $\dfrac{\pi}{8}$, $\pi+\dfrac{\pi}{8}$, $\pi-\dfrac{\pi}{8}$, $2\pi-\dfrac{\pi}{8}$.

2. Νά λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:

α) $\eta\mu\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\sigma\upsilon\nu\, x$

β) $\varepsilon\varphi^2x-\sigma\varphi^2x=0$

α) Είναι:

$$\eta\mu\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\sigma\upsilon\nu\, x \Leftrightarrow \eta\mu\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

Ἄρα

$$2x+\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{\pi}{2}-x \tag{1}$$

ἤ $\quad 2x + \frac{\pi}{6} = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{2} + x \qquad (2)$

Ἀπό τή (1) ἔχουμε $\quad 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$ ἤ $x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{9}$.

Ἀπό τή (2) ἔχουμε $\quad x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$ ἤ $x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$.

β) Εἶναι

$$\varepsilon\varphi^2 x - \sigma\varphi^2 x = 0 \Leftrightarrow (\varepsilon\varphi x - \sigma\varphi x)(\varepsilon\varphi x + \sigma\varphi x) = 0$$
$$\Leftrightarrow (\varepsilon\varphi x - \sigma\varphi x = 0) \text{ ἤ } (\varepsilon\varphi x + \sigma\varphi x = 0)$$
$$\Leftrightarrow (\varepsilon\varphi x = \sigma\varphi x) \text{ ἤ } (\varepsilon\varphi x = -\sigma\varphi x)$$

Ἀπό τήν $\varepsilon\varphi x = \sigma\varphi x$ ἔχουμε $\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Ἄρα

$$x = k\pi + \frac{\pi}{2} - x \quad \text{ἤ} \quad x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ἀπό τήν $\varepsilon\varphi x = -\sigma\varphi x$ ἔχουμε $\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$. Ἄρα

$$x = k\pi + \frac{\pi}{2} + x \quad \text{ἤ} \quad 0x = k\pi + \frac{\pi}{2},$$ πού εἶναι ἀδύνατη.

3. **Νά λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις**

$$\textbf{συν}\ x^0 = \frac{1}{2}, \quad \textbf{ημ}\ x^0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \textbf{καί} \quad \textbf{εφ}\ x^0 = -\sqrt{3}.$$

Ἐπειδή $\frac{1}{2} = \sigma\upsilon\nu\, 60^0$, οἱ λύσεις τῆς $\sigma\upsilon\nu\, x^0 = \frac{1}{2}$ δίνονται ἀπό τούς τύπους $x^0 = k \cdot 360^0 \pm 60^0$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ὁμοίως οἱ λύσεις τῆς $\eta\mu x^0 = \frac{\sqrt{2}}{2} = \eta\mu\, 45^0$ δίνονται ἀπό τούς τύπους

$$x^0 = k \cdot 360^0 + 45^0, \quad x^0 = (2k+1)180^0 - 45^0, \quad k \in \mathbb{Z},$$

καί οἱ λύσεις τῆς $\varepsilon\varphi\, x^0 = -\sqrt{3} = \varepsilon\varphi(-30^0)$ εἶναι $x^0 = k \cdot 180^0 - 30^0$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ἀσκήσεις 21, 22, 23.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ποιῶν ἀριθμῶν οἱ εἰκόνες στόν τριγωνομετρικό κύκλο σχηματίζουν:
α) κανονικό ἑξάγωνο **β)** ἰσόπλευρο τρίγωνο.

2. Ποιῶν ἀριθμῶν οἱ εἰκόνες στόν τριγωνομετρικό κύκλο ὁρίζουν χορδές παράλληλες **α)** πρός τή διάμετρο ΑΑ' **β)** πρός τή διάμετρο ΒΒ'.

3. Νά βρεῖτε τίς εἰκόνες τῶν ἀριθμῶν $\frac{5\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{3}, \frac{11\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}$, στόν τριγωνομετρικό κύκλο. Τί παρατηρεῖτε;

4. Ἄν $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ καί τό ἀντίστοιχο τόξο ἔχει πέρας $M\left(-\frac{5}{13}, y\right)$, νά βρεθεῖ ὁ y καί ἡ ἀριθμητική τιμή τῆς παραστάσεως

$$A = \frac{(2\eta\mu x - 3\sigma\upsilon\nu x) - (\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x)}{2\eta\mu x\ \sigma\upsilon\nu x}$$

5. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι $ημ\frac{23π}{5} = ημ\frac{3π}{5}$, $συν\frac{-28π}{5} = συν\frac{2π}{5}$, $ημ\left(-\frac{30π}{7}\right) = ημ\frac{12π}{7}$

6. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι

α) $ημ^6x + συν^6x = 1 - 3\,ημ^2x\,συν^2x$

β) $ημ^4x - συν^4x = 1 - 2συν^2x$

γ) $ημ^2xσυν^2φ - ημ^2φσυν^2x = ημ^2x - ημ^2φ$

δ) $\frac{ημx}{1+συνx} + \frac{1+συνx}{ημx} = \frac{2}{ημx}$.

7. Νά δειχθεῖ ὅτι δέν ὑπάρχει πραγματικός ἀριθμός θ τέτοιος, ὥστε ημθ$=0$ **καί** συνθ$=0$.

8. Οἱ ἀριθμοί $\frac{12}{13}$ καί $-\frac{5}{13}$ εἶναι δυνατόν νά εἶναι τιμές στό ἴδιο x τῶν συναρτήσεων ἡμίτονο καί συνημίτονο ἀντιστοίχως;
Σέ ποιό τεταρτημόριο καταλήγει τό ἀντίστοιχο τόξο;

9. Νά ὑπολογιστεῖ ἡ τιμή τῆς παραστάσεως

$$A = \frac{ημx + συνx}{εφx + σφx} \quad \text{ὅταν } x = \frac{π}{3},\ \frac{π}{4},\ \frac{π}{6}.$$

10. Νά βρεθοῦν οἱ $εφ\left(-\frac{23π}{6}\right)$ καί $σφ\frac{17π}{4}$.

11. Νά ὑπολογιστεῖ ἡ τιμή τῆς παραστάσεως $A = \dfrac{ημ\frac{13π}{6} + συν\left(-\frac{15π}{4}\right)}{εφ\frac{19π}{3} + σφ\frac{13π}{6}}$

12. Ἄν $ημx = \frac{12}{15}$ καί $0 < x < \frac{π}{2}$ νά βρεθεῖ ἡ ἀριθμητική τιμή τῆς παραστάσεως

$$A = \frac{2εφx - 3συνx + 2σφx}{5ημx}.$$

13. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι

α) $σφx + εφx = \frac{1}{ημxσυνx} \quad (ημx\,συνx \neq 0)$

β) $ημxσυνx(1+εφx)(1+σφx) = 1 + 2ημxσυνx$.

14. Ἕνα σῶμα ταλαντώνεται κατακόρυφα στό ἄκρο ἑνός ἐλατηρίου. Τό ὕψος του h cm σέ χρόνο t sec δίνεται ἀπό τόν τύπο :

$$h = 50 + 20\,ημ\,t\frac{π}{4}.$$

Νά βρεθεῖ

α) Τό ὕψος του σέ 1, 2, 4, 6, 9 sec

β) Τό μέγιστο καί ἐλάχιστο ὕψος.

28

15. Τά σημεῖα Α καί Β βρίσκονται τό ἕνα ἀνατολικά καί τό ἄλλο δυτικά ἑνός πύργου ΓΔ. Ἄν οἱ γωνίες ὕψους τοῦ Δ ἀπό τά σημεῖα Α καί Β εἶναι ἀντιστοίχως α καί β, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τό ὕψος τοῦ πύργου εἶναι:

$$υ = \frac{(AB)}{σφ\,α + σφ\,β}.$$

16. Σέ ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι $A = 120^0$. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

α) $εφ\,B = \dfrac{β\sqrt{3}}{β+2γ}$ καί β) $α^2 = β^2+γ^2+βγ$.

17. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι σέ κάθε τρίγωνο ΑΒΓ:

α) $ημA = ημ\,(B+Γ)$ $\qquad$ $συνA = -συν(B+Γ)$

$ημ\,\dfrac{A}{2} = συν\,\dfrac{B+Γ}{2}$ $\qquad$ $συν\,\dfrac{A}{2} = ημ\,\dfrac{B+Γ}{2}$

β) Τό ἐμβαδό τοῦ τριγώνου ἰσοῦται μέ $\dfrac{1}{2}\,αβ\,ημΓ$

γ) Ἄν $A = 90^0$, τότε $ημ^2B+ημ^2Γ = 1$.

18. Γιά τίς συναρτήσεις

$$\begin{aligned} f \text{ μέ } f(x) &= 2συν^2x+3ημx\,συνx+5ημ^2x+1 \\ g \text{ μέ } g(x) &= 2εφx-3σφx+2 \qquad \text{καί} \\ φ \text{ μέ } φ(x) &= 4εφx+4σφx-1 \end{aligned}$$

νά ἀποδειχθεῖ ὅτι $f(x) = f(π+x)$, $g(x) = g(π+x)$

$$φ(x) = φ\left(\frac{π}{2}-x\right) = φ(π+x) = φ\left(\frac{3π}{2}-x\right).$$

19. Νά δειχθεῖ ὅτι:

α) $ημ\,(270^0+θ)+ημ\,(180^0+θ))+ημ\,(90^0+θ)+ημ\,θ = 0$

β) $εφ\,1^0\,εφ\,2^0\,εφ\,3^0 \ldots εφ\,89^0 = 1$

γ) Ἄν $-90^0 < θ < 90^0$, τότε $ημ(180^0-θ)σφ(90^0-θ) > 2-2συν\,θ$.

20. Νά ἁπλοποιηθεῖ ἡ παράσταση

$$A = \frac{εφ(π-θ)\,συν(2π+θ)\,συν\left(\dfrac{π}{2}+θ\right)}{ημ(π+θ)\,συν(-θ)\,σφ\left(\dfrac{π}{2}-θ\right)}$$

21. Νά λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:

α) $\eta\mu^2 2x - \eta\mu^2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$

β) $\sigma\upsilon\nu^2 3x + \eta\mu^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1.$

22. Νά λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:

α) $\varepsilon\varphi\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sigma\varphi x$

β) $\eta\mu 5x = \sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\pi}{3}\right).$

23. Νά λυθοῦν στό διάστημα $[0, 2\pi]$ οἱ ἐξισώσεις:

α) $2\eta\mu 3x = \sqrt{2}$

β) $3\varepsilon\varphi\, 2x = \sqrt{3}$.

1. α) Οἱ εἰκόνες τῶν ἀριθμῶν 0, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, π, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$ στόν τριγωνομετρικό κύκλο εἶναι κορυφές κανονικοῦ ἑξαγώνου.

   β) Οἱ εἰκόνες τῶν ἀριθμῶν 0, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$ στόν τριγωνομετρικό κύκλο εἶναι κορυφές ἰσόπλευρου τριγώνου.

2. α) Οἱ εἰκόνες τῶν ἀριθμῶν $2k\pi+x$ καί $(2k+1)\pi-x$, $k\in\mathbb{Z}$ ὁρίζουν χορδές παράλληλες πρός τή διάμετρο ΑΑ'.

   β) Οἱ εἰκόνες τῶν ἀριθμῶν $2k\pi+x$ καί $2k\pi-x$, $k\in\mathbb{Z}$ ὁρίζουν χορδές παράλληλες πρός τή διάμετρο ΒΒ'.

3. Οἱ εἰκόνες τῶν ἀριθμῶν $\frac{5\pi}{6}$ καί $-\frac{\pi}{6}$ καθώς καί τῶν $\frac{11\pi}{6}$ καί $\frac{5\pi}{6}$ εἶναι σημεῖα ἀντιδιαμετρικά. Οἱ εἰκόνες τῶν ἀριθμῶν $\frac{5\pi}{6}$ καί $-\frac{7\pi}{6}$ συμπίπτουν κτλ.

4. Εἶναι $\text{συν}\,x=-\frac{5}{13}$, $y=\text{ημ}x=-\frac{12}{13}$ καί $A=-\frac{59}{30}$.

5. α) Εἶναι $\frac{23\pi}{5}=4\pi+\frac{3\pi}{5}$.

   β) Εἶναι $-\frac{28\pi}{5}=-6\pi+\frac{2\pi}{5}$.

   γ) Εἶναι $-\frac{30\pi}{7}=-6\pi+\frac{12\pi}{7}$.

6. α) Τό $\text{ημ}^6x+\text{συν}^6x$ νά γραφτεῖ $(\text{ημ}^2x)^3+(\text{συν}^2x)^3$ καί νά γίνει χρήση τῆς ταυτότητας $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$ καί τῆς $\text{ημ}^2x+\text{συν}^2x=1$.

   β) Παρατηρῆστε ὅτι τό πρῶτο μέλος τῆς ταυτότητας εἶναι διαφορά τετραγώνων.

   γ) Τό $\text{συν}^2\varphi$ νά γραφτεῖ $1-\text{ημ}^2\varphi$, τό συν^2x νά γραφτεῖ $1-\text{ημ}^2x$ καί νά γίνουν οἱ πράξεις στό α' μέλος τῆς ἰσότητας.

   δ) Κάνουμε τίς πράξεις στό πρῶτο μέλος τῆς ἰσότητας καί καταλήγουμε στό δεύτερο.

7. Ἄν $\text{ημ}x=0$ **καί** $\text{συν}x=0$, τότε $\text{ημ}^2x=0$ **καί** $\text{συν}^2x=0$.

8. Οἱ ἀριθμοί $\frac{12}{13}$ καί $\frac{-5}{13}$ μπορεῖ νά εἶναι τιμές τῶν συναρτήσεων ἡμίτονο καί συνημίτονο στόν ἴδιο ἀριθμό x.

9. Γιά $x=\frac{\pi}{3}$, βρίσκουμε $A=\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{8}$

   Γιά $x=\frac{\pi}{4}$, βρίσκουμε $A=\frac{\sqrt{2}}{2}$

   Γιά $x=\frac{\pi}{6}$, βρίσκουμε $A=\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{8}$

10. Ὁ ἀριθμός $-\frac{23\pi}{6}$ νά γραφτεῖ $-\frac{24\pi}{6}+\frac{\pi}{6}$, ἐνῶ ὁ ἀριθμός $\frac{17\pi}{4}$ νά γραφτεῖ $\frac{16\pi}{4}+\frac{\pi}{4}$.

11. Εἶναι $ημ\frac{13π}{6} = ημ\left(\frac{12π}{6} + \frac{π}{6}\right) = ημ\left(2π + \frac{π}{6}\right) = ημ\frac{π}{6} = \frac{1}{2}$ κτλ.

Βρίσκουμε $A = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)}{12}$.

12. Εἶναι $συνx = \frac{9}{15}$, $εφx = \frac{4}{3}$, $σφx = \frac{3}{4}$ καί $A = \frac{71}{120}$.

13. **α)** Κάνουμε τίς πράξεις στό πρῶτο μέλος τῆς ἰσότητας καί καταλήγουμε στό δεύτερο.

β) Ὁμοίως.

14. **α)** Τό ὕψος τοῦ σώματος σέ 1, 2, 4, 6, 9 sec εἶναι ἀντιστοίχως 64,14 cm, 70 cm, 50 cm, 30 cm, 64,14 cm.

β) Τό μέγιστο ὕψος εἶναι 70 cm καί τό ἐλάχιστο 50 cm.

15. Παρατηρῆστε ὅτι $υ = (ΑΓ)\,εφ\,α = (ΒΓ)\,εφ\,β$.

16. Ἄν Δ εἶναι ἡ προβολή τοῦ Γ στήν ΑΒ, τότε $εφ\,Β = \frac{(ΓΔ)}{(ΒΔ)}$.

17. **α)** Οἱ γωνίες Α καί Β+Γ εἶναι παραπληρωματικές

β) Τό ὕψος $υ_α$ ἰσοῦται μέ $β\,ημΓ$.

γ) Οἱ γωνίες Β καί Γ εἶναι συμπληρωματικές.

18. Εἶναι $f(x+π) = 2\,συν^2(x+π) + 3ημ(x+π)συν(x+π) + 5ημ^2(x+π) + 1$ κτλ.

$g(x+π) = 2εφ(x+π) - 3σφ(x+π) + 2$ κτλ.

$φ\left(\frac{π}{2} - x\right) = 4\,εφ\left(\frac{π}{2} - x\right) + 4\,σφ\left(\frac{π}{2} - x\right) + 1$ κτλ.

$φ\left(\frac{3π}{2} - x\right) = 4\,εφ\left(\frac{3π}{2} - x\right) + 4\,σφ\left(\frac{3π}{2} - x\right) - 1$ κτλ.

19. **α)** Εἶναι $ημ(270^0 + θ) = -συν\,θ$, $ημ(180^0 + θ) = -ημθ$ κτλ.

β) Παρατηρῆστε ὅτι τά τόξα 1^0 καί 89^0, 2^0 καί 88^0 κ.ο.κ. εἶναι συμπληρωματικά.

γ) Ἐπειδή $συν\,θ > 0$, ἡ ἀνισότητα εἶναι ἰσοδύναμη τῆς $(1 - συν\,θ)^2 > 0$.

20. Βρίσκουμε $A = -1$.

21. **α)** $ημ^2 2x - ημ^2\left(x - \frac{π}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[ημ2x + ημ\left(x - \frac{π}{3}\right)\right]\left[ημ2x - ημ\left(x - \frac{π}{3}\right)\right] = 0$

$\Leftrightarrow ημ2x + ημ\left(x - \frac{π}{3}\right) = 0$ ἤ $ημ2x - ημ\left(x - \frac{π}{3}\right) = 0$ κτλ.

β) Ὁμοίως.

22. **α)** $εφ\left(2x + \frac{π}{4}\right) = σφx \Leftrightarrow εφ\left(2x + \frac{π}{4}\right) = εφ\left(\frac{π}{2} - x\right)$ κτλ.

β) $ημ5x = συν\left(x + \frac{π}{3}\right) \Leftrightarrow ημ5\,x = ημ\left(\frac{π}{2} - x - \frac{π}{3}\right)$ κτλ.

23. **α)** Γράφεται ἰσοδύναμα $ημ3x = ημ\,\frac{π}{4}$. Ἐργαζόμαστε ὅπως στήν Ἐφαρμογή 1β τῆς § 6.31.

β) Ὁμοίως.

7 ΜΕΛΕΤΗ ΒΑΣΙΚΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Στό κεφάλαιο αὐτό γίνεται ἡ μελέτη βασικῶν συναρτήσεων πού ὁ μαθητής ἔχει ἤδη συναντήσει στά γυμνασιακά μαθήματα. Γιά τή συμπλήρωση τῶν γνώσεών του ἐκείνων σημαντικό ρόλο θά παίξει ἡ ἔννοια τῆς γραφικῆς παραστάσεως μιᾶς συναρτήσεως, ἐπειδή μέ αὐτή, πού ὥς τώρα ἦταν ἕνα ἁπλό σύνολο σημείων, θά ἑρμηνευθοῦν ἐποπτικά βασικές ἔννοιες, ὅπως ἡ μονοτονία, ἡ περιοδικότητα, ἡ ἀρτιότητα καί ἄλλες ἰδιότητες τῶν συναρτήσεων.

Ἡ μελέτη διευκολύνεται μέ τή συστηματική χρησιμοποίηση τῆς ἔννοιας τοῦ λόγου μεταβολῆς μιᾶς συναρτήσεως καθώς καί τῆς ἀλλαγῆς τοῦ συστήματος ἀναφορᾶς, πού ἐπιτρέπει τήν ἀναγωγή σέ γνωστές ἁπλές μορφές συναρτήσεων.

Ἐκτός ἀπό τό λόγο μεταβολῆς, πού ἀποτελεῖ προεισαγωγή στήν ἔννοια τῆς παραγώγου, εἰσάγονται εὐκαιριακά καί ὁρισμένες ἁπλές περιπτώσεις ὁρίου συναρτήσεως, ἀκροτάτων κτλ., πού ἀποτελοῦν μιά πρώτη ἐπαφή τοῦ μαθητῆ μέ θέματα πού θά μελετήσει βαθύτερα καί ἐκτενέστερα σέ μεγαλύτερη τάξη.

ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

Γραφική παράσταση συναρτήσεως καί ἡ ἐξίσωσή της

$\boxed{7.1}$ Ἔστω f μιά συνάρτηση μέ πεδίο ὁρισμοῦ A. Γιά κάθε $x \in A$ ὁρίζεται τό ζεῦγος $(x, f(x))$, πού ἀνήκει στό γράφημα G τῆς f. Ἄν λοιπόν θεωρήσουμε στό ἐπίπεδο ἕνα καρτεσιανό σύστημα ἀναφορᾶς, τότε κάθε ζεῦγος $(x, y) \in G$ μπορεῖ νά παρασταθεῖ μέ ἕνα σημεῖο $M(x, y)$, τοῦ ὁποίου συντεταγμένες εἶναι ἀκριβῶς οἱ x καί y.

Τό σύνολο $\mathscr{C}$ τῶν σημείων $M(x, y)$, γιά τά ὁποῖα $(x, y) \in G$, λέγεται **γραφική παράσταση** τῆς συναρτήσεως f. Εἶναι λοιπόν:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{G} \Leftrightarrow \mathbf{M}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathscr{C}$$

Ἐπειδή τά στοιχεῖα τοῦ G εἶναι τῆς μορφῆς $(x, f(x))$, εἶναι προφανές ὅτι ἕνα σημεῖο M ἀνήκει στή γραφική παράσταση $\mathscr{C}$ τῆς f, ἄν καί μόνο ἄν τό ζεῦγος (x, y) τῶν συντεταγμένων του ἐπαληθεύει τήν ἐξίσωση

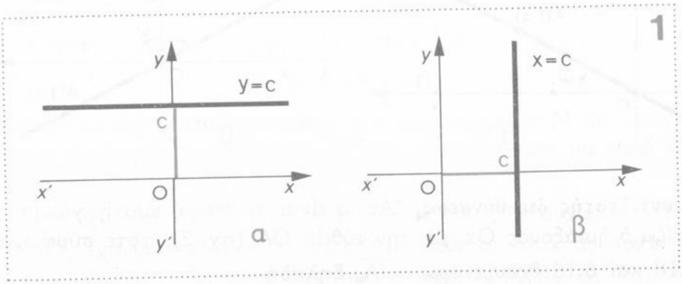
$$y = f(x) \qquad (x \in A).$$

Ἡ γραφική παράσταση $\mathscr{C}$ προσδιορίζεται λοιπόν ἀπό τό σύνολο λύσεων τῆς ἐξισώσεως $y = f(x)$, πού λέγεται καί **ἐξίσωση τῆς** $\mathscr{C}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ἡ γραφική παράσταση τῆς σταθερῆς συναρτήσεως μέ τιμή c ἔχει ἐξίσωση $y = c$, πού ἐπαληθεύεται ἀπό ὅλα τά ζεύγη τῆς μορφῆς (x, c). Εἶναι λοιπόν ἡ παράλληλος πρός τόν ἄξονα $x'x$, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπό τό σημεῖο $A(0,c)$ (σχ. 1α).

Γιά $c = 0$ ἔχουμε $y = 0$ πού εἶναι ἡ ἐξίσωση τοῦ ἄξονα $x'x$.



Σημείωση

Γενικότερα μιά ἐξίσωση μέ μεταβλητές x, y λέγεται καί ἐξίσωση τοῦ συνόλου τῶν σημείων, τῶν ὁποίων οἱ συντεταγμένες ἐπαληθεύουν αὐτή τήν ἐξίσωση. Π.χ. ἡ $x^2 + y^2 = 1$ εἶναι ἡ ἐξίσωση τοῦ μοναδιαίου κύκλου (§ 6.12).

Ἐπίσης τό σύνολο τῶν σημείων μέ συντεταγμένες (c, y) ἔχει ὡς ἐξίσωση τήν $x = c$ καί εἶναι εὐθεία παράλληλη πρός τόν ἄξονα $y'y$ (Σχ. 1β). Γιά $c = 0$ ἔχουμε $x = 0$, πού εἶναι ἡ ἐξίσωση τοῦ ἄξονα $y'y$. Ἐδῶ, ὅπως καί στό προηγούμενο παράδειγμα, ἡ ἐξίσωση δέν εἶναι τῆς μορφῆς $y = f(x)$. Ἄρα ἔχουμε ἐξίσωση σημειοσυνόλου πού δέν εἶναι γραφική παράσταση συναρτήσεως.

7.2 Γραφική παράσταση τῆς f μέ f(x) = αx. Ἡ ζητούμενη γραφική παράσταση $\mathscr{C}$ ἔχει ἐξίσωση $y = \alpha x$ καί περιέχει προφανῶς τήν ἀρχή $O(0, 0)$ τῶν ἀξόνων..

Ἄν $\alpha = 0$, ἡ ἐξίσωση γίνεται $y = 0$ καί ἡ $\mathscr{C}$ εἶναι (§ 7.1, Παράδ.) ἡ εὐθεία $x'x$. Ὑποθέτουμε $\alpha \neq 0$. Τότε:

Ἐκτός ἀπό τό O καί τό σημεῖο $A(1, \alpha)$ ἀνήκει στή $\mathscr{C}$ (σχ. 2). Γιά κάθε ἄλλο σημεῖο της $M(x,y)$ ἔχουμε $x \neq 0$ καί

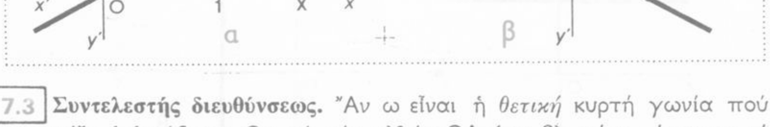
$$y = \alpha x, \quad \text{ἤ} \quad \frac{y}{x} = \frac{\alpha}{1} \tag{1}$$

Ἔστω Ι καί Π οἱ προβολές τῶν Α καί Μ ἀντιστοίχως στόν ἄξονα $x'x$. Ἀπό τήν (1) προκύπτει ὅτι τά τρίγωνα ΟΙΑ καί ΟΠΜ εἶναι ὅμοια. Οἱ ἡμιευθεῖες ΟΜ καί ΟΑ ἤ συμπίπτουν ἤ εἶναι ἀντικείμενες, ἐπειδή, λόγω τῆς (1):

- ἄν $\alpha > 0$, τό Μ ἔχει συντεταγμένες ὁμόσημες καί βρίσκεται στό α', ὅπως τό Α, ἤ στό γ' τεταρτημόριο (σχ. 2α).
- ἄν $\alpha < 0$, τό Μ ἔχει συντεταγμένες ἑτερόσημες καί βρίσκεται στό β' ἤ στό δ', ὅπως τό Α, τεταρτημόριο (σχ. 2β).

Ἄρα τό Μ εἶναι σημεῖο τῆς εὐθείας ΟΑ.

Ἀντιστρόφως οἱ συντεταγμένες κάθε σημείου Μ τῆς ΟΑ ἐπαληθεύουν τήν (1). Συνεπῶς ἡ γραφική παράσταση τῆς f εἶναι ἡ εὐθεία ΟΑ.



7.3 Συντελεστής διευθύνσεως. Ἄν ω εἶναι ἡ *θετική* κυρτή γωνία πού σχηματίζει ὁ ἡμιάξονας Ox μέ τήν εὐθεία ΟΑ (σχ. 2), τότε σύμφωνα μέ τίς § 6.18 καί 6.16 ἔχουμε $\varepsilon\varphi\omega = \overline{IA}$, δηλαδή

$$\varepsilon\varphi\,\omega = \alpha \tag{2}$$

Ἡ εφω, δηλαδή ὁ α, καθορίζει πλήρως τή διεύθυνση τῆς εὐθείας καί λέγεται **συντελεστής διευθύνσεως** τῆς εὐθείας.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

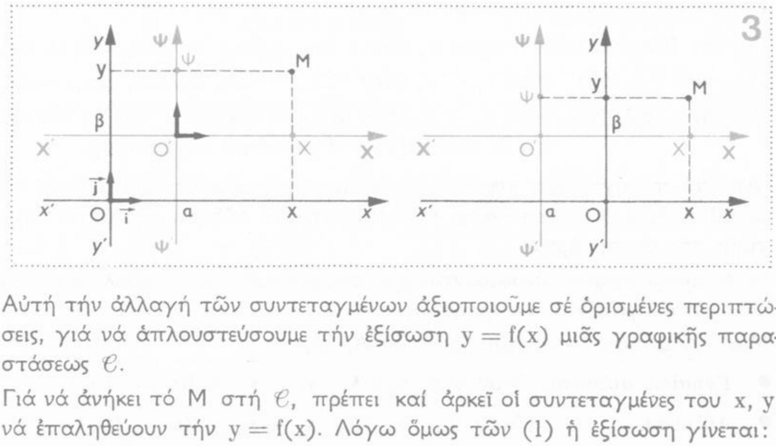
1. Ἡ (2) ἰσχύει καί ὅταν $\alpha = 0$, ὁπότε $\omega = 0$.

2. Εἶναι $0 \leq \omega < \pi$ μέ $\omega \neq \frac{\pi}{2}$, γιατί γιά $\omega = \frac{\pi}{2}$ ἡ εὐθεία συμπίπτει μέ τόν ἄξονα $y'y$, πού δέν εἶναι γραφική παράσταση συναρτήσεως (§ 7.1 Σημ.).

Ἀλλαγή συστήματος ἀναφορᾶς

7.4 Ἔστω Μ ἕνα σημεῖο μέ συντεταγμένες (x, y) ὡς πρός τό καρτεσιανό σύστημα ἀναφορᾶς Oxy (σχ. 3). Ἄν ἀλλάξουμε σύστημα ἀναφορᾶς, τότε προφανῶς τό **ἴδιο** σημεῖο Μ ἔχει **ἄλλες** συντεταγμένες. Ἄς θεωρήσουμε π.χ. τό σύστημα $O'X\Psi$ μέ ἀρχή $O'(\alpha, \beta)$ καί ἄξονες παράλληλους [1] πρός τούς ἄξονες τοῦ πρώτου συστήματος. Ἄν (X, Ψ) εἶναι οἱ συντεταγμένες τοῦ Μ ὡς πρός τό νέο σύστημα ἀναφορᾶς, τότε ἔχουμε:

$$x = X + \alpha \quad \text{καί} \quad y = \Psi + \beta \tag{1}$$



Αὐτή τήν ἀλλαγή τῶν συντεταγμένων ἀξιοποιοῦμε σέ ὁρισμένες περιπτώσεις, γιά νά ἁπλουστεύσουμε τήν ἐξίσωση $y = f(x)$ μιᾶς γραφικῆς παραστάσεως $\mathcal{C}$.

Γιά νά ἀνήκει τό Μ στή $\mathcal{C}$, πρέπει καί ἀρκεῖ οἱ συντεταγμένες του x, y, νά ἐπαληθεύουν τήν $y = f(x)$. Λόγω ὅμως τῶν (1) ἡ ἐξίσωση γίνεται:

$$\Psi + \beta = f(X + \alpha) \tag{2}$$

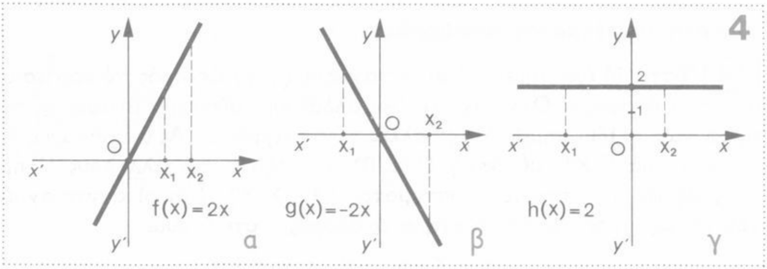
πού σημαίνει ὅτι οἱ συντεταγμένες τοῦ **ἴδιου** σημείου Μ ὡς πρός τό νέο σύστημα ἀναφορᾶς ἐπαληθεύουν τή (2) πού πιθανόν νά εἶναι ἐξίσωση ἁπλούστερη.

Π.χ. ἄν ἡ ἐξίσωση τῆς $\mathcal{C}$ εἶναι ἡ $y = (x-2)^2 + 3$, θέτοντας $y = \Psi + 3$ καί $x = X + 2$, ἔχουμε τήν $\Psi = X^2$ πού ἐπαληθεύεται ἀπό τίς συντεταγμένες τῶν σημείων τῆς $\mathcal{C}$ ὡς πρός σύστημα ἀναφορᾶς μέ ἄξονες παράλληλους πρός τούς ἀρχικούς καί διερχόμενους ἀπό τό σημεῖο $O'(2, 3)$.

(1) Τό $O'X\Psi$ ὁρίζεται ἀπό τό O' καί τά μοναδιαῖα διανύσματα τοῦ Oxy.

Μονότονες συναρτήσεις

7.5 Στό σχῆμα 4 ἔχουμε τίς γραφικές παραστάσεις τῶν συναρτήσεων f μέ $f(x) = 2x$, g μέ $g(x) = -2x$ καί h μέ $h(x) = 2$.



Μποροῦμε νά παρατηρήσουμε τά ἑξῆς:

Γιά τήν f (σχ. 4α): ὅταν $x_1 < x_2$ εἶναι $2x_1 < 2x_2$, δηλαδή $f(x_1) < f(x_2)$

Γιά τήν g (σχ. 4β): ὅταν $x_1 < x_2$ εἶναι $-2x_1 > -2x_2$, δηλαδή $g(x_1) > g(x_2)$

Γιά τήν h (σχ. 4γ): ὅταν $x_1 < x_2$ εἶναι $h(x_1) = h(x_2) = 2$, ἐπειδή γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$ εἶναι $h(x) = 2$ (σταθερή συνάρτηση).

Ἀπό τά προηγούμενα παραδείγματα διαπιστώνουμε ὅτι μιά αὔξηση τῆς μεταβλητῆς x δέ συνεπάγεται ὁπωσδήποτε καί αὔξηση τῆς ἀντίστοιχης τιμῆς τῆς συναρτήσεως.

Οἱ ἑπόμενοι ὁρισμοί ἀναφέρονται στό συσχετισμό τῶν μεταβολῶν τῶν τιμῶν μεταβλητῆς καί συναρτήσεως.

Μιά συνάρτηση f, μέ πεδίο ὁρισμοῦ A, λέγεται:

- **Γνησίως αὔξουσα,** ὅταν $\forall\, x_1, x_2 \in A,\quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- **Αὔξουσα,** ὅταν $\forall\, x_1, x_2 \in A,\quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$
- **Γνησίως φθίνουσα,** ὅταν $\forall\, x_1, x_2 \in A,\quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
- **Φθίνουσα,** ὅταν $\forall\, x_1, x_2 \in A,\quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$

Γενικότερα μιά συνάρτηση λέγεται **μονότονη,** ὅταν εἶναι αὔξουσα ἤ φθίνουσα, καί **γνησίως μονότονη,** ὅταν εἶναι γνησίως αὔξουσα ἤ γνησίως φθίνουσα.

Συνήθως ἐξετάζουμε μιά συνάρτηση σέ κατάλληλα ὑποσύνολα τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ της, σέ καθένα ἀπό τά ὁποῖα παρουσιάζει ἕνα συγκεκριμένο εἶδος μονοτονίας.

Ἄν ὁ περιορισμός (§ 4.10) τῆς f σέ ἕνα ὑποσύνολο A′ τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ της Α είναι συνάρτηση γνησίως αύξουσα (αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, φθίνουσα), τότε λέμε ότι ή f είναι γνησίως αύξουσα (αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, φθίνουσα) **στό A'**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Μιά σταθερή συνάρτηση f είναι καί αύξουσα καί φθίνουσα, ἀφοῦ γιά κάθε $x_1, x_2 \in A$ μέ $x_1 < x_2$ είναι $f(x_1) = f(x_2)$.
2. Ἡ συνάρτηση g μέ $g(x) = x+1$ είναι γνησίως αύξουσα στό $\mathbb{R}$, ἐπειδή $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1+1 < x_2+1$, δηλαδή $g(x_1) < g(x_2)$.
3. Ἡ h μέ $h(x) = 2-x^3$ είναι γνησίως φθίνουσα. Πράγματι:

   $0 < x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3$ [§ 3.11 Θεωρ. 7]

   $x_1 < 0 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < 0 < x_2^3$

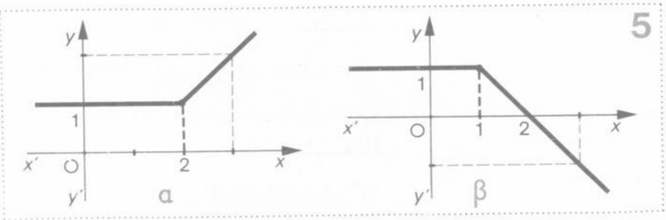
   $x_1 < x_2 < 0 \Rightarrow -x_1 > -x_2 > 0 \Rightarrow (-x_1)^3 > (-x_2)^3 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3$.

   Ἄρα σέ κάθε περίπτωση, ἄν $x_1 < x_2$, τότε $x_1^3 < x_2^3$ ἤ $-x_1^3 > -x_2^3$ ἤ $2-x_1^3 > 2-x_2^3$, δηλαδή $h(x_1) > h(x_2)$.
4. Γιά τή συνάρτηση σ μέ $\sigma(x) = \begin{cases} 1, & \text{ἄν } x < 2 \\ x-1, & \text{ἄν } x \geqslant 2 \end{cases}$

   ἔχουμε :

   $$x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} \sigma(x_1) = 1 = \sigma(x_2), & \text{ἄν } x_1, x_2 < 2 \\ \sigma(x_1) = x_1-1 < x_2-1 = \sigma(x_2), & \text{ἄν } x_1, x_2 \geqslant 2 \\ \sigma(x_1) = 1 = 2-1 \leqslant x_2-1 = \sigma(x_2), & \text{ἄν } x_1 < 2 \leqslant x_2 \end{cases}$$

   Ἄρα ή σ είναι αύξουσα. Ειδικότερα ή σ είναι σταθερή γιά $x < 2$ καί γνησίως αύξουσα γιά $x \geqslant 2$. Ἡ γραφική παράστασή της δίνεται στό σχῆμα 5 α.



Ὁμοίως διαπιστώνουμε ότι ή συνάρτηση φ μέ

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{ἄν } x < 1 \\ 2-x, & \text{ἄν } x \geqslant 1 \end{cases}$$

είναι φθίνουσα. Ἡ γραφική παράστασή της δίνεται στό σχῆμα 5 β.

Λόγος μεταβολῆς συναρτήσεως

7.6 Ἔστω f μιά συνάρτηση μέ πεδίο ὁρισμοῦ Α καί x_1, x_2 δύο διαφορετικά στοιχεῖα τοῦ Α. Ὁ λόγος

$$\boxed{\lambda = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}}$$

λέγεται **λόγος μεταβολῆς** τῆς συναρτήσεως f μεταξύ τῶν x_1 καί x_2.

Μπορούμε νά παρατηρήσουμε ὅτι, ἄν ἡ συνάρτηση εἶναι μονότονη σέ ἕνα σύνολο $B \subseteq A$, τότε ὁ λόγος μεταβολῆς της μεταξύ δύο ὁποιωνδήποτε στοιχείων τοῦ B διατηρεῖ σταθερό πρόσημο. Πράγματι, ἄν ἡ f εἶναι π.χ. γνησίως αὔξουσα, τότε γιά κάθε $x_1, x_2 \in B$ ἔχουμε

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2),$$

πού σημαίνει ὅτι οἱ ἀριθμοί $x_1 - x_2$ καί $f(x_1) - f(x_2)$ εἶναι ὁμόσημοι. Συνεπῶς ἔχουμε[1] $\lambda > 0$. Ἀλλά καί ἀντιστρόφως, ἄν γιά κάθε $x_1, x_2 \in B$ εἶναι $\lambda > 0$, τότε οἱ ἀριθμοί $x_1 - x_2$ καί $f(x_1) - f(x_2)$ εἶναι ὁμόσημοι. Ἄρα ἔχουμε $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, ὁπότε ἡ f εἶναι γνησίως αὔξουσα. Συμπεραίνουμε λοιπόν ὅτι γιά νά εἶναι ἡ f:

- γνησίως αὔξουσα στό B, πρέπει καί ἀρκεῖ: $\forall\, x_1, x_2 \in B, \quad \lambda > 0$

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι, γιά νά εἶναι ἡ f:

- γνησίως φθίνουσα στό B, πρέπει καί ἀρκεῖ $\forall\, x_1, x_2 \in B, \quad \lambda < 0$
- σταθερή » » » » » $\forall\, x_1, x_2 \in B, \quad \lambda = 0$
- αὔξουσα » » » » » $\forall\, x_1, x_2 \in B, \quad \lambda \geqslant 0$
- φθίνουσα » » » » » $\forall\, x_1, x_2 \in B, \quad \lambda \leqslant 0$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Γιά τή συνάρτηση f μέ $f(x) = x^3 + 1$ ἔχουμε:

$$\begin{aligned}\lambda = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} &= \frac{(x_1^3+1)-(x_2^3+1)}{x_1-x_2}\\ &= \frac{x_1^3-x_2^3}{x_1-x_2}\\ &= \frac{(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)}{x_1-x_2}\\ &= x_1^2+x_1x_2+x_2^2\\ &= \frac{2(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)}{2}\\ &= \frac{x_1^2+x_2^2+(x_1+x_2)^2}{2} > 0.\end{aligned}$$

Ἄρα γιά κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ εἶναι $\lambda > 0$ καί ἑπομένως ἡ f εἶναι γνησίως αὔξουσα.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά ἐξεταστεῖ ἡ μονοτονία τῶν συναρτήσεων:**

   α) f μέ $f(x) = 2x^2+1$

   β) g μέ $g(x) = 2x - |3 - x|$.

   α) Ὁ λόγος μεταβολῆς τῆς συναρτήσεως f εἶναι:

$$\begin{aligned}\lambda = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} &= \frac{(2x_1^2+1)-(2x_2^2+1)}{x_1-x_2}\\ &= \frac{2(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{x_1-x_2}\\ &= 2(x_1+x_2).\end{aligned}$$

(1) Ἐννοεῖται ὅτι $x_1 \neq x_2$ ὥστε νά ὁρίζεται ὁ λ.

Τό πρόσημο τοῦ λ μένει σταθερό στό καθένα ἀπό τά σύνολα $\mathbb{R}_-$ καί $\mathbb{R}_+$
Πράγματι:

- ἄν $x_1 < x_2 \leqslant 0$, τότε $x_1+x_2 < 0$, ἄρα $\lambda < 0$. Ἡ συνάρτηση λοιπόν εἶναι γνησίως φθίνουσα στό $\mathbb{R}_-$.
- ἄν $0 \leqslant x_1 < x_2$, τότε $x_1+x_2 > 0$, ἄρα $\lambda > 0$ καί ἡ συνάρτηση εἶναι γνησίως αὔξουσα στό $\mathbb{R}_+$

β) Γιά τή συνάρτηση g, ἐπειδή $|3-x| = \begin{cases} 3-x, & \text{ἄν } x \leqslant 3 \\ x-3, & \text{ἄν } x \geqslant 3 \end{cases}$, ἔχουμε :

$$g(x) = \begin{cases} 3x-3, & \text{ἄν } x \leqslant 3 \\ x+3, & \text{ἄν } x \geqslant 3 \end{cases}$$

Ἄρα

- ἄν $x_1 < x_2 \leqslant 3$, ἔχουμε $\lambda = \dfrac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2} = \dfrac{(3x_1-3)-(3x_2-3)}{x_1-x_2}$

$$= \frac{3(x_1-x_2)}{x_1-x_2} = 3 > 0.$$

Ἄρα ἡ g εἶναι γνησίως αὔξουσα γιά $x \leqslant 3$.

- ἄν $3 \leqslant x_1 < x_2$, ἔχουμε $\lambda = 1 > 0$. Ἄρα ἡ g εἶναι γνησίως αὔξουσα γιά $x \geqslant 3$.

2. **Ἄν στό σύνολο Α ἡ συνάρτηση f εἶναι γνησίως αὔξουσα, τότε ἡ —f εἶναι γνησίως φθίνουσα.**

Ἐπειδή ἡ f εἶναι αὔξουσα, γιά κάθε $x_1, x_2 \in A$, θά εἶναι:

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} > 0$$

καί ἐπειδή

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} > 0 \Rightarrow -\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{-f(x_1)-[(-f(x_2)]}{x_1-x_2} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{(-f)(x_1)-[(-f)(x_2)]}{x_1-x_2} < 0,$$

συμπεραίνουμε ὅτι ὁ λόγος μεταβολῆς τῆς συναρτήσεως $-f$ εἶναι ἀρνητικός, δηλαδή ἡ $-f$ εἶναι γνησίως φθίνουσα.

3. **Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι, ἄν μία συνάρτηση f εἶναι γνησίως μονότονη, τότε εἶναι συνάρτηση 1—1.**

Θά πρέπει νά δείξουμε (§ 4.6) ὅτι, ἄν x_1, x_2 εἶναι τιμές τῆς μεταβλητῆς x, τότε:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \qquad (1)$$

Πράγματι, ἄς ὑποθέσουμε $x_1 \neq x_2$ καί ἔστω $x_1 < x_2$. Ἐπειδή ἡ f εἶναι γνησίως μονότονη γιά $x_1 < x_2$, θά εἶναι ἤ $f(x_1) < f(x_2)$ ἤ $f(x_1) > f(x_2)$, δηλαδή γιά $x_1 \neq x_2$ εἶναι πάντοτε $f(x_1) \neq f(x_2)$. Ἄρα ἰσχύει ἡ (1).

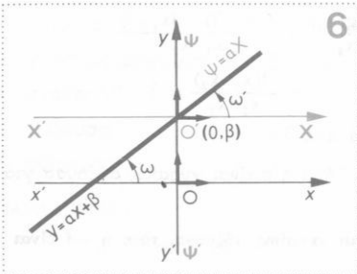
Ἀσκήσεις 1, 2, 3.

Μελέτη τῆς συναρτήσεως f μέ $f(x) = \alpha x+\beta$

$\boxed{7.7}$ Ἡ συνάρτηση f μέ $f(x) = \alpha x+\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ λέγεται **ὁμοπαραλληλική** συνάρτηση. Παρατηροῦμε ὅτι ἡ ἐξίσωση $y = \alpha x+\beta$ τῆς γραφικῆς της παραστάσεως ὡς πρός σύστημα ἀναφορᾶς Oxy γράφεται:

$$y-\beta = \alpha x \tag{1}$$

Ἄν θέσουμε $x = X$ καί $y = \Psi+\beta$, ἡ (1) γίνεται $\Psi = \alpha X$. Ἡ ἐξίσωση αὐτή, ὡς πρός νέο σύστημα ἀναφορᾶς τό O'XΨ (§ 7.4), πού ἔχει ἀρχή τό O'(0,β) καί ἄξονες X'X, Ψ'Ψ, παράλληλους ἀντιστοίχως πρός τούς x'x, y'y, εἶναι (§ 7.2) ἐξίσωση εὐθείας ε (σχ. 6), ἡ ὁποία διέρχεται ἀπό τό O' καί ἔχει συντελεστή διευθύνσεως $\alpha = \varepsilon\varphi\omega'$.



Συνεπῶς καί ἡ $y = \alpha x+\beta$ εἶναι ὡς πρός τό Oxy ἐξίσωση τῆς εὐθείας ε, πού τέμνει τόν Oy στό σημεῖο (0, β). Ὁ συντελεστής διευθύνσεώς της εἶναι $\varepsilon\varphi\omega = \varepsilon\varphi\omega' = \alpha$.

Γιά $y = 0$, εἶναι $x = \dfrac{-\beta}{\alpha}$, δηλαδή ἡ ε τέμνει τόν ἄξονα x'x στό σημεῖο $\left(\dfrac{-\beta}{\alpha}, 0\right)$.

Ἐξάλλου ὁ λόγος μεταβολῆς τῆς f εἶναι

$$\lambda = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = \frac{\alpha x_1+\beta-\alpha x_2-\beta}{x_1-x_2} = \frac{\alpha(x_1-x_2)}{x_1-x_2} = \alpha$$

Δηλαδή ὁ λ εἶναι **σταθερός** καί μάλιστα ἴσος μέ τό συντελεστή διευθύνσεως τῆς εὐθείας.

Ἄρα ἔχουμε (§ 7.6):

- ἄν $\alpha > 0$, ἡ συνάρτηση εἶναι γνησίως αὔξουσα,
- ἄν $\alpha < 0$, ἡ συνάρτηση εἶναι γνησίως φθίνουσα,
- ἄν $\alpha = 0$, ἡ συνάρτηση εἶναι σταθερή.

Σημείωση

Ἄν γιά μιά συνάρτηση f ὁ λόγος μεταβολῆς λ εἶναι σταθερός, ἔστω $\lambda = \alpha$, τότε ἡ συνάρτηση εἶναι ὁμοπαραλληλική μέ συντελεστή διευθύνσεως α.

Πράγματι ὁ λόγος μεταβολῆς τῆς f μεταξύ τῶν x καί 0 εἶναι $\alpha = \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$.
Ἄρα $f(x) = \alpha x+f(0)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Ἡ συνάρτηση f μέ $f(x) = \frac{2}{3}x-5$ εἶναι γνησίως αὔξουσα, γιατί $\alpha = \frac{2}{3} > 0$, ἐνῶ ἡ συνάρτηση g μέ $g(x) = -x+6$ εἶναι γνησίως φθίνουσα, γιατί $\alpha = -1 < 0$.

Εἰδικότερα γιά $\beta = 0$ ἔχουμε τή γνωστή μας συνάρτηση f μέ $f(x) = \alpha x$, πού λέγεται **γραμμική** συνάρτηση καί ἡ ὁποία παρουσιάζει τό ἴδιο εἶδος μονοτονίας μέ τήν προηγούμενη. Ἐπιπλέον ἡ συνάρτηση αὐτή ἔχει τίς ἀκόλουθες ἰδιότητες:

1. $f(x_1+x_2) = \alpha(x_1+x_2) = \alpha x_1 + \alpha x_2$, δηλαδή $\mathbf{f(x_1+x_2) = f(x_1)+f(x_2)}$
2. $f(\lambda x) = \alpha(\lambda x) = \lambda(\alpha x)$ δηλαδή $\mathbf{f(\lambda x) = \lambda f(x)}$

Συνθῆκες παραλληλίας καί καθετότητας

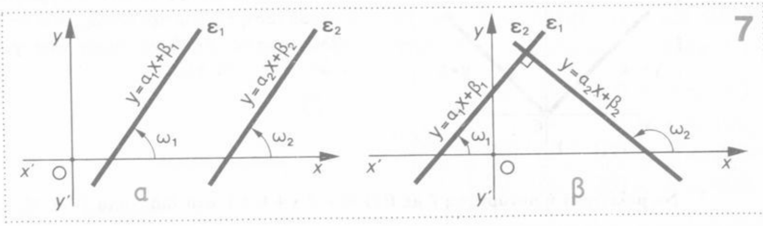
7.8 Ἔστω ε_1, ε_2 δύο εὐθεῖες (σχ. 7) μέ ἀντίστοιχες ἐξισώσεις $y = \alpha_1 x + \beta_1$ καί $y = \alpha_2 x + \beta_2$ καί ω_1, ω_2 οἱ (θετικές κυρτές) γωνίες τοῦ ἡμιάξονα Ox μέ τίς εὐθεῖες αὐτές. Τότε $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow \omega_1 = \omega_2$

$\Leftrightarrow$ εφω_1 = εφω_2, ἀφοῦ $0 \leqslant \omega_1, \omega_2 < \pi$ (§ 6.27)

$\Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2$ (§ 7.3).

Ἄρα ἡ ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη παραλληλίας τῶν εὐθειῶν $y = \alpha_1 x + \beta_1$ καί $y = \alpha_2 x + \beta_2$ εἶναι ἡ

$$\boxed{\alpha_1 = \alpha_2}$$



Ἄν οἱ εὐθεῖες ε_1 καί ε_2 (σχ. 7β) εἶναι κάθετες, τότε, ὑποθέτοντας $0 < \omega_1 < \frac{\pi}{2}$ θά εἶναι $\omega_2 = \frac{\pi}{2} + \omega_1$, καί ἀντιστρόφως.

Ἄρα $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \omega_2 = \frac{\pi}{2} + \omega_1$

$\Leftrightarrow$ εφω_2 = εφ$\left(\frac{\pi}{2} + \omega_1\right)$, ἀφοῦ $\frac{\pi}{2} < \omega_2 < \pi$, (§ 6.27)

$\Leftrightarrow$ εφω_2 = −σφω_1

$\Leftrightarrow$ εφ$\omega_2 = -\frac{1}{\text{εφ}\omega_1}$

$\Leftrightarrow$ εφω_1 εφ$\omega_2 = -1$.

Ἑπομένως ἡ ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη καθετότητας τῶν εὐθειῶν $y = \alpha_1 x + \beta_1$ καί $y = \alpha_2 x + \beta_2$ εἶναι ἡ

$$\boxed{\alpha_1 \alpha_2 = -1}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Οἱ εὐθεῖες μέ ἐξισώσεις $y = 2x+3$ καί $y = 2x-1$ εἶναι παράλληλες, γιατί $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$, ἐνῶ οἱ εὐθεῖες μέ ἐξισώσεις $y = \frac{2}{3}x+1$ καί $y = -\frac{3}{2}x+7$ εἶναι κάθετες, γιατί $\alpha_1\alpha_2 = \frac{2}{3}\left(-\frac{3}{2}\right) = -1$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

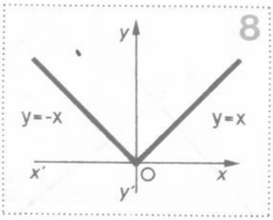
1. **Νά μελετηθεῖ ἡ συνάρτηση f μέ $f(x) = |x|$.**

Γιά τή συνάρτηση f εἶναι:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{ἄν } x \leqslant 0 \\ x, & \text{ἄν } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Ὅταν $x \leqslant 0$, ἐπειδή $\alpha = -1 < 0$, ἡ f εἶναι γνησίως φθίνουσα.

Ὅταν $x \geqslant 0$, ἐπειδή $\alpha = 1 > 0$, ἡ f εἶναι γνησίως αὔξουσα.



Στό διπλανό σχῆμα ἔχουμε τή γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως, πού ἀποτελεῖται ἀπό τίς διχοτόμους τῶν γωνιῶν x′Oy καί yOx.

2. **Νά μελετηθεῖ ἡ συνάρτηση f μέ $f(x) = -2|x+1|+1$ στό διάστημα $[-3, 3]$.**

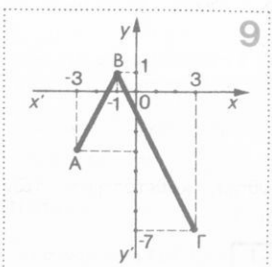
Γιά τή συνάρτηση f, ἐπειδή $|x+1| = \begin{cases} x+1, & \text{ἄν } x \geqslant -1 \\ -(x+1), & \text{ἄν } x \leqslant -1, \end{cases}$

ἔχουμε :

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3, & \text{ἄν } x \leqslant -1 \\ -2x-1, & \text{ἄν } x \geqslant -1 \end{cases}$$

Ὅταν $x \leqslant -1$, ἐπειδή $\alpha = 2 > 0$, ἡ f εἶναι γνησίως αὔξουσα.

Ὅταν $x \geqslant -1$, ἐπειδή $\alpha = -2 < 0$, ἡ f εἶναι γνησίως φθίνουσα.



Στό διπλανό σχῆμα ἔχουμε τή γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως, πού ἀποτελεῖται ἀπό τά δύο εὐθύγραμμα τμήματα AB καί BΓ.

3. **Νά ἐξετάσετε γιά ποιές τιμές τοῦ λ οἱ εὐθεῖες μέ ἐξισώσεις**

$$y = (\lambda-1)x+5 \quad \text{καί} \quad y = (2\lambda+1)x+7 \qquad \text{εἶναι :}$$

α) παράλληλες καί β) κάθετες.

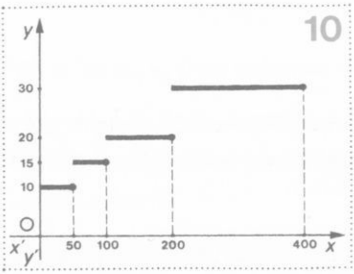
α) Γιά νά εἶναι οἱ εὐθεῖες παράλληλες, θά πρέπει νά εἶναι $\alpha_1 = \alpha_2$, δηλαδή $\lambda-1 = 2\lambda+1$ ἤ $\lambda = -2$.

β) Γιά νά εἶναι κάθετες θά πρέπει $\alpha_1\alpha_2 = -1$, δηλαδή $(\lambda-1)(2\lambda+1) = -1$ ἤ $2\lambda^2-\lambda = 0$ ἤ $\lambda(2\lambda-1) = 0$, ὁπότε $\lambda = 0$ ἤ $\lambda = \frac{1}{2}$.

Ἀσκήσεις 4, 5, 6, 7.

Συνάρτηση μονότονη κατά τμήματα

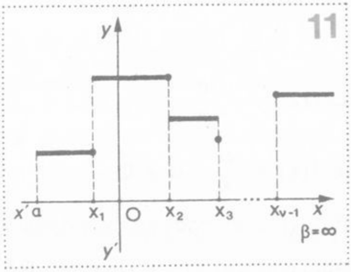
7.9 Ἔστω ὅτι τό ταχυδρομικό τέλος σέ δραχμές ἑνός δέματος βάρους x γραμμαρίων εἶναι f(x). Ἄν γιά δέματα βάρους μέχρι καί 50 gr τό τέλος αὐτό εἶναι 10 δρχ., πάνω ἀπό 50 gr μέχρι καί 100 gr εἶναι 15 δρχ., πάνω ἀπό 100 gr μέχρι καί 200 gr εἶναι 20 δρχ. καί ἀπό 200 gr μέχρι καί 400 gr εἶναι 30 δρχ., τότε θά ἔχουμε τή συνάρτηση τῶν *ταχυδρομικῶν τελῶν* f μέ



$$f(x) = \begin{cases} 10, & \text{ἄν} \quad 0 < x \leqslant 50 \\ 15, & \text{ἄν} \quad 50 < x \leqslant 100 \\ 20, & \text{ἄν} \quad 100 < x \leqslant 200 \\ 30, & \text{ἄν} \quad 200 < x \leqslant 400. \end{cases}$$

Ἡ συνάρτηση αὐτή εἶναι σταθερή στό καθένα ἀπό τά διαστήματα $(0, 50]$, $(50, 100]$, $(100, 200]$, $(200, 400]$ καί λέγεται **κλιμακωτή** συνάρτηση (σχ. 10).

Γενικότερα ἔστω f μιά συνάρτηση ὁρισμένη σ' ἕνα διάστημα μέ ἄκρα α καί β.



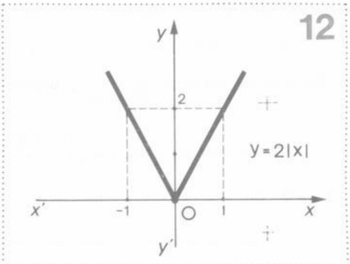
Ἡ f θά λέγεται **κλιμακωτή** συνάρτηση, ἄν ὑπάρχουν ἀριθμοί $x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1}$ τέτοιοι, ὥστε

$$\alpha = x_0 < x_1 < \cdots < x_{\nu-1} < x_\nu = \beta$$

καί ἡ f εἶναι σταθερή σέ κάθε ἀνοικτό ὑποδιάστημα (x_k, x_{k+1}) γιά $k = 0, 1, 2, \ldots, \nu-1$.

Ἄν γενικότερα ἡ f εἶναι **μονότονη** σέ καθένα ἀπό τά διαστήματα (x_k, x_{k+1}), τότε θά λέγεται **μονότονη κατά τμήματα.**

Π.χ. ἡ συνάρτηση f μέ $f(x) = 2|x|$ (σχ. 12) εἶναι μονότονη κατά τμήματα, ἀφοῦ:



- γιά $x \geq 0$ εἶναι $f(x) = 2x$, ἑπομένως ἡ f εἶναι γνησίως αὔξουσα στό $[0, +\infty)$.
- γιά $x \leq 0$ εἶναι $f(x) = -2x$, ἑπομένως ἡ f εἶναι γνησίως φθίνουσα στό $(-\infty, 0]$.

Ἄσκηση 8.

Μέγιστο καί ἐλάχιστο συναρτήσεως

7.10 Ἔστω f μιά συνάρτηση μέ πεδίο ὁρισμοῦ A. Θά λέμε ὅτι ἡ f παρουσιάζει:

- **μέγιστο** στό $\alpha \in A$, ὅταν $\forall\, x \in A$, $f(x) \leq f(\alpha)$
- **ἐλάχιστο** στό $\alpha \in A$, ὅταν $\forall\, x \in A$, $f(x) \geq f(\alpha)$.

Παρατηροῦμε ὅτι, ἄν ἡ συνάρτηση f εἶναι αὔξουσα γιά $x \leq \alpha$ καί φθίνουσα γιά $x \geq \alpha$, τότε:

$$x < \alpha \Leftrightarrow f(x) \leq f(\alpha)$$
$$\alpha < x \Leftrightarrow f(\alpha) \geq f(x),$$

δηλαδή $\forall\, x \in A$, $f(x) \leq f(\alpha)$ καί ἡ συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο στό α.
Ὁμοίως διαπιστώνουμε ὅτι, ἄν ἡ f εἶναι φθίνουσα γιά $x \leq \alpha$ καί αὔξουσα γιά $x \geq \alpha$, τότε παρουσιάζει ἐλάχιστο στό α.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Ἡ συνάρτηση f μέ $f(x) = |x|$ (§ 7.8 Ἐφ. 1), εἶναι φθίνουσα γιά $x \leq 0$ καί αὔξουσα γιά $x \geq 0$. Ἄρα παρουσιάζει ἐλάχιστο στό 0 ἴσο μέ $f(0) = 0$.
2. Ἡ συνάρτηση f μέ $f(x) = -2|x+1|+1$, μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό διάστημα $[-3, 3]$ (§ 7.8 Ἐφ. 2), εἶναι αὔξουσα γιά $x \leq -1$ καί φθίνουσα γιά $x \geq -1$. Ἄρα παρουσιάζει μέγιστο στό -1 ἴσο μέ $f(-1) = 1$.

ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ $y = \dfrac{\alpha}{x}$

Γενική μελέτη τῆς συναρτήσεως f μέ $f(x) = \dfrac{\alpha}{x}$, $\alpha \neq 0$

7.11 Παρατηροῦμε ὅτι γιά κάθε $x \neq 0$ ὑπάρχει ἕνας πραγματικός ἀριθμός $y = \dfrac{\alpha}{x} \neq 0$ πού εἶναι εἰκόνα τοῦ x. Ἄρα πεδίο ὁρισμοῦ τῆς f εἶναι τό $\mathbb{R}^*$.

'Εξάλλου, ἄν $y = 0$, θά ἔχουμε $0 \cdot x = \alpha \neq 0$, ἑπομένως δέν ὑπάρχει $x \in \mathbb{R}^*$ πού νά ἔχει ὡς εἰκόνα τό 0. Ἄν ὅμως εἶναι $y \neq 0$, τότε ὑπάρχει πάντοτε ἕνας μοναδικός πραγματικός ἀριθμός $x = \dfrac{\alpha}{y} \neq 0$ πού ἔχει ὡς εἰκόνα τόν y. Ἑπομένως, ἄν περιορίσουμε τό σύνολο ἀφίξεως τῆς f στό $\mathbb{R}^*$, ἡ f εἶναι μιά συνάρτηση **1—1 καί ἐπί** τοῦ $\mathbb{R}^*$ στό $\mathbb{R}^*$. Ἑπομένως ὁρίζεται καί ἡ ἀντίστροφη συνάρτηση f^{-1}, ἡ ὁποία σέ κάθε $y \in \mathbb{R}^*$ ἀντιστοιχίζει τόν ἀριθμό $\dfrac{\alpha}{y} \in \mathbb{R}^*$. Εἶναι δηλαδή

$$\mathbf{f = f^{-1}}.$$

Σημείωση

Κάθε συνάρτηση f, πού εἶναι ἴση μέ τήν ἀντίστροφή της f^{-1}, λέγεται **ἐνελικτική.**

Ἔστω τώρα x_1, x_2 δύο ὁποιεσδήποτε διαφορετικές τιμές τοῦ x. Τότε ὁ λόγος μεταβολῆς τῆς f μεταξύ τῶν x_1, x_2 θά εἶναι:

$$\lambda = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\dfrac{\alpha}{x_1} - \dfrac{\alpha}{x_2}}{x_1 - x_2} = \frac{\dfrac{-\alpha(x_1 - x_2)}{x_1 x_2}}{x_1 - x_2} = \frac{-\alpha}{x_1 x_2}.$$

Ὅταν τά x_1, x_2 εἶναι ὁμόσημα, ὅταν δηλαδή $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^*_-$ ἤ $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^*_+$, τότε καί $x_1 x_2 > 0$. Συνεπῶς ὁ λόγος μεταβολῆς $\dfrac{-\alpha}{x_1 x_2}$ ἔχει τό πρόσημο τοῦ $-\alpha$, δηλαδή εἶναι θετικός, ἄν $\alpha < 0$, καί ἀρνητικός, ἄν $\alpha > 0$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ὅτι:

Ἡ συνάρτηση f μέ $f(x) = \dfrac{\alpha}{x}$, $\alpha \neq 0$ στά ὑποσύνολα $\mathbb{R}^*_-$ καί $\mathbb{R}^*_+$ εἶναι **γνησίως αὔξουσα, ἄν $\alpha < 0$,** καί **γνησίως φθίνουσα, ἄν $\alpha > 0$.**

'Εξάλλου

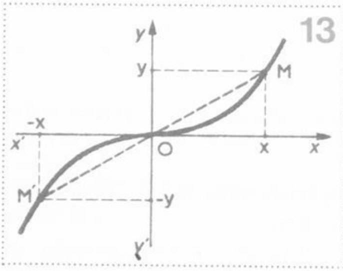
- ἄν $\alpha > 0$, ἐπειδή οἱ x καί $y = \dfrac{\alpha}{x}$ εἶναι ὁμόσημοι, ἡ γραφική παράσταση τῆς f ἔχει δύο κλάδους στό **α' καί γ'** τεταρτημόριο.
- ἄν $\alpha < 0$, ἐπειδή οἱ x καί $y = \dfrac{\alpha}{x}$ εἶναι ἑτερόσημοι, ἡ γραφική παράσταση τῆς f ἔχει δύο κλάδους στό **β' καί δ'** τεταρτημόριο.

Τέλος παρατηροῦμε ὅτι $f(-x) = \dfrac{\alpha}{-x} = -\dfrac{\alpha}{x} = -f(x)$. Δηλαδή στούς **ἀντίθετους** x καί $-x$ ἡ f ἔχει **ἀντίθετες** τιμές. Εἶναι, ὅπως θά λέμε, μιά **περιττή** συνάρτηση.

7.12 **Περιττή συνάρτηση.** Θά λέμε ὅτι μιά συνάρτηση μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό $A \subseteq \mathbb{R}$ εἶναι ***περιττή***, ὅταν

$$\boxed{\forall\, x \in A, \quad f(-x) = -f(x)}$$

Ἀπό τόν παραπάνω ὁρισμό προκύπτει ὅτι, ἄν $\mathcal{C}$ εἶναι ἡ γραφική παράσταση μιᾶς περιττῆς συναρτήσεως καί $M(x, y) \in \mathcal{C}$, τότε $-y = -f(x) = f(-x)$. Ἄρα καί τό $M'(-x, -y)$, συμμετρικό τοῦ M ὡς πρός τό O (§ 6.4), εἶναι σημεῖο τῆς $\mathcal{C}$.



Μέ ἄλλα λόγια ἡ γραφική παράσταση (σχ. 13) μιᾶς περιττῆς συναρτήσεως ἔχει κέντρο συμμετρίας τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Ἡ συνάρτηση $f(x) = x^3$ εἶναι περιττή στό $\mathbb{R}$, γιατί

$\forall\, x \in \mathbb{R}, f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$.

Ἐπίσης ἡ συνάρτηση f μέ $f(x) = \text{ημ}x$ εἶναι περιττή, γιατί

$\forall\, x \in \mathbb{R}, f(-x) = \text{ημ}(-x) = -\text{ημ}x = -f(x)$.

Μελέτη τῆς συναρτήσεως f μέ $f(x) = \frac{1}{x}$

7.13 Ἐπειδή $\alpha = 1 > 0$, ἡ συνάρτηση αὐτή εἶναι (§ 7.11) γνησίως φθίνουσα στά διαστήματα $(-\infty, 0)$ καί $(0, +\infty)$. Ἡ γραφική της παράσταση περιέχει τά σημεῖα π.χ. $M(1, 1)$, $N\left(2, \frac{1}{2}\right)$, $P\left(\frac{1}{3}, 3\right)$ ἄρα (§ 7.12) καί τά σημεῖα $M'(-1, -1)$, $N'\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$, $P\left(-\frac{1}{3}, -3\right)$.

Ἄς δοῦμε τώρα πῶς συμπεριφέρεται ἡ συνάρτηση αὐτή γιά *πολύ μικρές* καί *πολύ μεγάλες* τιμές τοῦ $|x|$.

α) Μελέτη γιά «πολύ μικρές» τιμές τοῦ $|x|$.

Ἔστω ὅτι ὁ x παίρνει τίς θετικές τιμές $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{100000}, \ldots$ Τότε οἱ ἀντίστοιχες τιμές $\frac{1}{x}$ τῆς συναρτήσεως θά εἶναι $10, 100, 100000, \ldots$

Γεννιέται τώρα τό ἐρώτημα: Μποροῦμε νά βροῦμε μιά τιμή τοῦ $\frac{1}{x}$ ὁσοδήποτε μεγάλη θέλουμε; Μέ ἄλλα λόγια, ἄν δοθεῖ ἕνα θετικός ἀριθμός Α, ὁσοδήποτε μεγάλος, ὑπάρχει θετική τιμή τοῦ x τέτοια, ὥστε νά εἶναι $\frac{1}{x} > A$; Ἔχουμε λοιπόν νά λύσουμε στό $\mathbb{R}_+^*$ τήν ἀνίσωση

$$\frac{1}{x} > A \tag{1}$$

πού εἶναι ἰσοδύναμη τῆς $1 > xA$ ἤ τῆς $x < \frac{1}{A}$.

Ἄρα λύσεις τῆς (1) ὑπάρχουν καί τό σύνολό τους εἶναι τό διάστημα $\left(0, \frac{1}{A}\right)$, τοῦ ὁποίου τό πλάτος ἐλαττώνεται, ὅσο τό Α αὐξάνει, ἐπειδή (§ 3.11. Εφ. 1α)

$$A < A' \Rightarrow \frac{1}{A} > \frac{1}{A'}$$

Ὥστε ἡ τιμή $\frac{1}{x}$ τῆς συναρτήσεως γίνεται ὅσο θέλουμε μεγάλη, ἀρκεῖ ὁ *θετικός* x νά παίρνει τιμές «ἀρκετά κοντά» στό μηδέν.

Αὐτό τό ἐκφράζουμε λέγοντας ὅτι

ὁ $\frac{1}{x}$ τείνει στό $+\infty$, ὅταν ὁ x τείνει στό 0 μέ θετικές τιμές.

Ὁμοίως διαπιστώνουμε ὅτι, ὁσοδήποτε μεγάλος καί ἄν εἶναι ὁ ἀριθμός $A > 0$, ὑπάρχει *ἀρνητική* τιμή τοῦ x, τέτοια ὥστε $\frac{1}{x} < -A$. Πράγματι, σύνολο λύσεων τῆς $\frac{1}{x} < -A$ στό $\mathbb{R}_-^*$ εἶναι τό διάστημα $\left(-\frac{1}{A}, 0\right)$.

Λέμε λοιπόν ὅτι

ὁ $\frac{1}{x}$ τείνει στό $-\infty$, ὅταν ὁ x τείνει στό 0 μέ ἀρνητικές τιμές.

β) Μελέτη γιά «πολύ μεγάλες» τιμές τοῦ $|x|$.

Ἄν ὁ x παίρνει π.χ. τίς τιμές 10, 100, 1000000,... ὁ $\frac{1}{x}$ παίρνει τίς τιμές $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000000}, \ldots$ Ἀποδεικνύεται ὅτι μποροῦμε νά βροῦμε θετική τιμή τῆς συναρτήσεως ὅσο μικρή θέλουμε. Δηλαδή, ἄν δοθεῖ ἕνας θετικός ἀριθμός ε, ὁσοδήποτε μικρός, ὑπάρχει θετική τιμή τοῦ x τέτοια, ὥστε $\frac{1}{x} < \varepsilon$. Πράγματι γιά $x > 0$,

$$\frac{1}{x} < \varepsilon \Leftrightarrow 1 < x\varepsilon \Leftrightarrow x > \frac{1}{\varepsilon}.$$

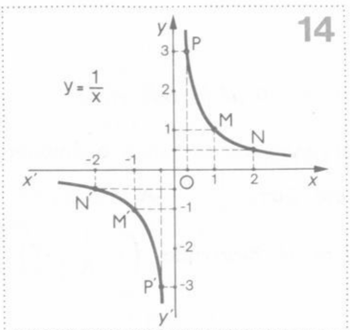
Ἄρα λύσεις ὑπάρχουν καί τό σύνολό τους εἶναι τό διάστημα $\left(\frac{1}{\varepsilon}, +\infty\right)$, τοῦ ὁποίου τό ἄκρο $\frac{1}{\varepsilon}$ αὐξάνει, ὅσο τό ε μικραίνει. Ὥστε ἡ τιμή $\frac{1}{x}$ τῆς συναρτήσεως γίνεται ὅσο θέλουμε μικρή, ἀρκεῖ ὁ *θετικός* x νά παίρνει τιμές «ἀρκετά μεγάλες». Αὐτό τό ἐκφράζουμε λέγοντας ὅτι

ὁ $\frac{1}{x}$ τείνει στό 0, ὅταν ὁ x τείνει στό $+\infty$.

Ὁμοίως διαπιστώνουμε ὅτι, ὁσοδήποτε μικρός καί ἄν εἶναι ὁ ἀριθμός ε, ὑπάρχει *ἀρνητική* τιμή τοῦ x τέτοια, ὥστε $\frac{1}{x} > -\varepsilon$.

Λέμε τότε ὅτι

ὁ $\frac{1}{x}$ τείνει στό 0, ὅταν ὁ x τείνει στό $-\infty$.



Ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως $y = \frac{1}{x}$ δίνεται στό σχῆμα 14 καί λέγεται **ὑπερβολή.**

Ἀποτελεῖται ἀπό δύο κλάδους, πού βρίσκονται στό α′ καί γ′ τεταρτημόριο καί εἶναι συμμετρικοί ὡς πρός τήν ἀρχή O τῶν ἀξόνων. Οἱ εὐθεῖες $x'x$ καί yy', λέγονται **ἀσύμπτωτες** τῆς ὑπερβολῆς.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

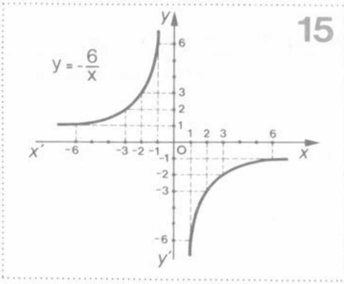
Νά μελετηθεῖ ἡ συνάρτηση f μέ $f(x) = -\frac{6}{x}$.

Ἐπειδή $\alpha = -6 < 0$, ἡ f εἶναι γνησίως αὔξουσα στά διαστήματα $(-\infty, 0)$ καί $(0, +\infty)$ καί ἡ γραφική της παράσταση ἀποτελεῖται ἀπό δύο κλάδους συμμετρικούς ὡς πρός τήν ἀρχή O. Ἄν τώρα ἐργαστοῦμε ὅπως στήν § 7.13, βρίσκουμε ὅτι ἡ τιμή $-\frac{6}{x}$ τῆς συναρτήσεως τείνει

στό $-\infty$, ὅταν ὁ x τείνει στό 0 μέ θετικές τιμές

στό $+\infty$, ὅταν ὁ x τείνει στό 0 μέ ἀρνητικές τιμές

στό 0, ὅταν ὁ x τείνει στό $+\infty$ ἤ $-\infty$.



Ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως δίνεται στό σχῆμα 15, καί εἶναι ὅπως καί στήν προηγούμενη ἐφαρμογή, ὑπερβολή. Ἀποτελεῖται ἀπό δύο κλάδους πού βρίσκονται ὅμως στό β' καί στό δ' τεταρτημόριο.

7.14 Ἀπό τήν προηγούμενη παράγραφο προκύπτει ὅτι γενικότερα ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως f μέ $f(x) = \frac{\alpha}{x}$, $\alpha \neq 0$, εἶναι ὑπερβολή μέ κέντρο συμμετρίας τό O(0, 0) καί ἀσύμπτωτες τούς ἄξονες $x'x$ καί $y'y$.

Ἀσκήσεις 9, 10.

ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ $y = \alpha x^2$

Γενική μελέτη τῆς συναρτήσεως f μέ $f(x) = \alpha x^2$, $\alpha \neq 0$.

7.15 Ἡ συνάρτηση αὐτή ὁρίζεται γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ἐπειδή $f(0) = 0$, ἡ γραφική της παράσταση περιέχει τό σημεῖο O(0, 0).
Ὁ λόγος μεταβολῆς της εἶναι

$$\lambda = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\alpha x_1^2 - \alpha x_2^2}{x_1 - x_2} = \frac{\alpha(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = \alpha(x_1 + x_2).$$

Διακρίνουμε τίς ἑξῆς περιπτώσεις:

- $\alpha > 0$. Τότε, ἄν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_-$, εἶναι $\lambda < 0$, ἐνῶ ἄν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$, εἶναι $\lambda > 0$. Ἄρα ἡ συνάρτηση εἶναι **φθίνουσα στό** $\mathbb{R}_-$ καί **αὔξουσα στό** $\mathbb{R}_+$ (γνησίως). Ἑπομένως (§ 7.10) ἡ f παρουσιάζει **ἐλάχιστο** $f(0) = 0$.

  Ἐξάλλου, γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$, εἶναι $f(x) \geqslant 0$ καί ἡ γραφική παράσταση τῆς f βρίσκεται στό **α' καί β'** τεταρτημόριο.

- $\alpha < 0$. Τότε, ἄν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_-$, εἶναι $\lambda > 0$, ἐνῶ ἄν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$ εἶναι $\lambda < 0$. Ἄρα ἡ συνάρτηση εἶναι **αὔξουσα στό** $\mathbb{R}_-$ καί **φθίνουσα στό** $\mathbb{R}_+$. Ἑπομένως (§ 7.10) ἡ f παρουσιάζει **μέγιστο** $f(0) = 0$.

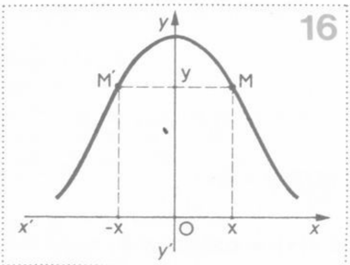
  Ἐξάλλου, γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$, εἶναι $f(x) \leqslant 0$ καί ἡ γραφική παράσταση τῆς f βρίσκεται στό **γ' καί δ'** τεταρτημόριο.

᾽Ακόμη ἔχουμε ὅτι $f(-x) = \alpha(-x)^2 = \alpha x^2 = f(x)$. Δηλαδή ἡ συνάρτηση f στούς **ἀντίθετους** x καί $-x$, ἔχει τήν **ἴδια** τιμή. Εἶναι, ὅπως θά λέμε, **ἄρτια** συνάρτηση.

7.16 **῎Αρτια συνάρτηση.** Μιά συνάρτηση f μέ πεδίο ὁρισμοῦ $A \subseteq \mathbb{R}$ θά λέμε ὅτι εἶναι **ἄρτια**, ὅταν

$$\boxed{\forall\, x \in A, \quad f(-x) = f(x)}$$

᾽Από τόν παραπάνω ὁρισμό συνάγεται ὅτι, ἄν $\mathcal{C}$ εἶναι ἡ γραφική παράσταση μιᾶς ἄρτιας συναρτήσεως f καί $M(x, y) \in \mathcal{C}$, τότε $y = f(x) = f(-x)$. ῎Αρα καί τό $M'(-x, y)$, συμμετρικό τοῦ Μ ὡς πρός τόν ἄξονα $y'y$ (§ 6.4), εἶναι σημεῖο τῆς $\mathcal{C}$, πράγμα πού σημαίνει ὅτι ἡ $\mathcal{C}$ ἔχει ἄξονα συμμετρίας τόν ἄξονα $y'y$ (σχ. 16).



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. ῾Η συνάρτηση f μέ $f(x) = x^4$ εἶναι ἄρτια, γιατί

   $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(-x) = (-x)^4 = x^4 = f(x)$.

2. ῾Η συνάρτηση f μέ $f(x) = \text{συν}x$ εἶναι ἄρτια, γιατί (§ 6.21)

   $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \ \text{συν}(-x) = \text{συν}x$.

Μελέτη τῆς συναρτήσεως f μέ $f(x) = x^2$

7.17 Σύμφωνα μέ τήν § 7.15 (περίπτ. $\alpha > 0$), ἡ συνάρτηση αὐτή θά εἶναι φθίνουσα στό $\mathbb{R}_-$ καί αὔξουσα στό $\mathbb{R}_+$ καί παρουσιάζει ἐλάχιστο ἴσο μέ $f(0) = 0$. ῾Η γραφική της παράσταση περιέχει τά σημεῖα π.χ. $M(1, 1)$, $N(2, 4)$, $P\left(2\frac{1}{2}, 6\frac{1}{4}\right)$. ῎Αρα (§ 7.16) καί τά σημεῖα $M'(-1, 1)$, $N'(-2, 4)$, $P'\left(-2\frac{1}{2}, 6\frac{1}{4}\right)$.

῎Ας ἐξετάσουμε τώρα πῶς μεταβάλλεται ἡ τιμή x^2 τῆς συναρτήσεως γιά «πολύ μεγάλες» τιμές τοῦ $|x|$.

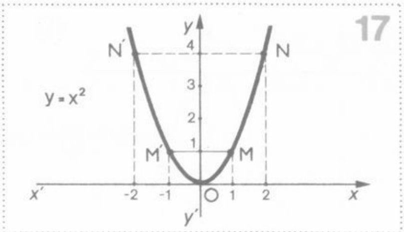
῎Εστω Α ἕνας ὁσοδήποτε μεγάλος θετικός ἀριθμός. Τότε (§ 5.10) ὑπάρχει $\alpha > 0$, ὥστε νά εἶναι $\alpha^2 = A$. ῾Επομένως:

$$\begin{aligned} x^2 > A &\Leftrightarrow x^2 > \alpha^2 \\ &\Leftrightarrow |x| > \alpha \\ &\Leftrightarrow x > \alpha \text{ ἤ } x < -\alpha. \end{aligned}$$

῎Ετσι, γιά κάθε $x \in (-\infty, -\alpha)$ ἤ $x \in (\alpha, +\infty)$ τό $x^2 \in (A, +\infty)$

Βλέπουμε λοιπόν ὅτι ὁ x^2 γίνεται ὅσο θέλουμε μεγάλος ἀρκεῖ νά πάρουμε τόν x ἀπολύτως ἀρκετά μεγάλο. Αὐτό τό ἐκφράζουμε λέγοντας ὅτι:

τό x^2 τείνει στό $+\infty$, ὅταν τό x τείνει στό $-\infty$ ἤ τό $+\infty$.

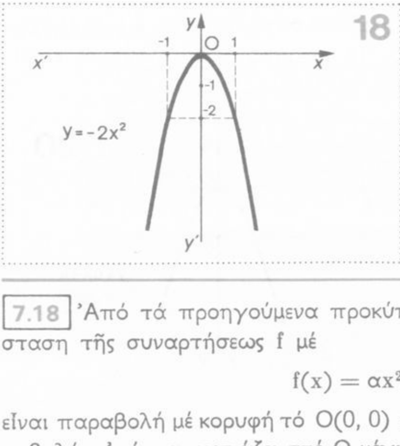


῾Η γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως $y = x^2$ δίνεται στό σχῆμα 17 καί λέγεται **παραβολή** μέ **κορυφή** τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων O(0, 0) καί ἄξονα συμμετρίας τόν ἄξονα $y'y$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Νά μελετηθεῖ ἡ συνάρτηση f μέ $f(x) = -2x^2$.

᾿Επειδή $-2 < 0$, ἡ συνάρτηση αὐτή (§ 7.15) εἶναι αὔξουσα στό $(-\infty, 0)$ καί φθίνουσα στό $(0, +\infty)$. ῾Επομένως ἡ f ἔχει μέγιστο στό $x = 0$, πού εἶναι $f(0) = 0$. ῎Αν ἐργαστοῦμε ὅπως στή § 7.17, καταλήγουμε στό συμπέρασμα ὅτι, ὅταν x τείνει στό $+\infty$ ἤ στό $-\infty$, τότε τό $-2x^2$ τείνει στό $-\infty$.



῾Η γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως, πού εἶναι παραβολή μέ κορυφή τό O(0, 0) καί ἄξονα συμμετρίας τόν $y'y$, δίνεται στό σχῆμα 18.

$\boxed{7.18}$ ᾿Από τά προηγούμενα προκύπτει γενικότερα ὅτι ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως f μέ

$$f(x) = \alpha x^2, \quad \alpha \neq 0 \qquad (1)$$

εἶναι παραβολή μέ κορυφή τό O(0, 0) καί ἄξονα συμμετρίας τόν $y'y$. ῾Η παραβολή αὐτή παρουσιάζει στό O μέγιστο, ἄν $\alpha < 0$ καί ἐλάχιστο, ἄν $\alpha > 0$.

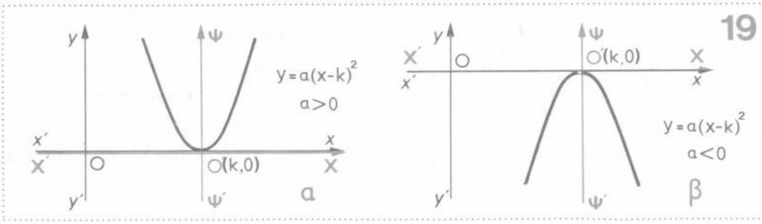
῾Η γραφική παράσταση τῆς f μέ $f(x) = \alpha(x - k)^2$, $\alpha \neq 0$

$\boxed{7.19}$ Παρατηροῦμε ὅτι ἡ ἐξίσωση $y = \alpha(x-k)^2$, ἄν θέσουμε $x-k = X$ καί $y = \Psi$, γίνεται:

$$\Psi = \alpha X^2 \qquad (1)$$

῾Η (1) ὅμως, ὡς πρός νέο σύστημα ἀναφορᾶς τό $O'X\Psi$ (§ 7.4) πού ἔχει ἀρχή

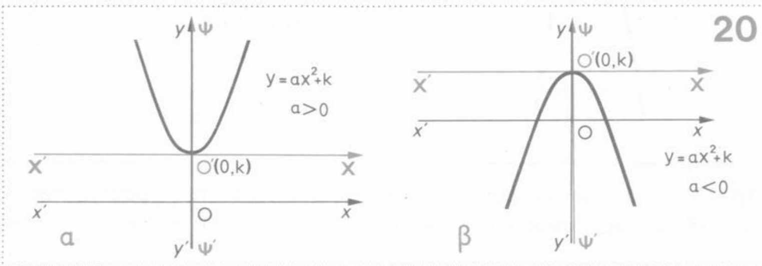
O′(k, 0) καί ἄξονες X′X, Ψ′Ψ ἀντιστοίχως παράλληλους πρός τούς x′x, y′y, εἶναι (§ 7.18) ἐξίσωση παραβολῆς μέ κορυφή τό O′ καί ἄξονα συμμετρίας τόν Ψ′Ψ (σχ. 19). Ἑπομένως καί ἡ $y = \alpha(x-k)^2$, ὡς πρός τό Oxy, εἶναι



ἐξίσωση παραβολῆς μέ κορυφή τό σημεῖο O′(k,0) καί ἄξονα συμμετρίας τήν εὐθεία $x = k$. Ἡ παραβολή αὐτή ἔχει στό $x = k$ ἐλάχιστο, ἄν $\alpha > 0$ καί μέγιστο, ἄν $\alpha < 0$. Τό μέγιστο ἤ τό ἐλάχιστο εἶναι $f(k) = \alpha(k-k)^2 = 0$.

Ἡ γραφική παράσταση τῆς f μέ $f(x) = \alpha x^2 + k$

7.20 Ἄν ἐργαστοῦμε ὅπως καί στήν § 7.19, διαπιστώνουμε ὅτι ἡ $y = \alpha x^2 + k$ εἶναι ἐξίσωση παραβολῆς μέ κορυφή τό σημεῖο O′(0, k) καί ἄξονα συμμετρίας τόν ἄξονα y′y. Ἡ παραβολή αὐτή ἔχει στό $x = 0$ ἐλάχιστο, ἄν $\alpha > 0$ καί μέγιστο, ἄν $\alpha < 0$. Τό μέγιστο ἤ τό ἐλάχιστο εἶναι $f(0) = \alpha 0^2 + k = k$.



Ἀσκήσεις 11, 12.

ΜΕΛΕΤΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Περιοδικές συναρτήσεις

7.21 Ἔστω ἡ συνάρτηση f μέ $f(x) = \text{συν}x$. Ἐπειδή γιά κάθε $k \in \mathbb{Z}$ εἶναι

$$\text{συν}\, x = \text{συν}\,(x + 2k\pi),$$

θά ἔχουμε $\text{συν}\, x = \text{συν}\,(x + 2\pi) = \text{συν}(x + 2.2\pi) = \text{συν}(x + 3.2\pi) = \dots$

Μιά τέτοια συνάρτηση λέγεται **περιοδική συνάρτηση.**

Γενικότερα:

Μιά συνάρτηση f ὁρισμένη στό A, λέγεται **περιοδική,** ὅταν ὑπάρχει $T \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ὥστε:

$$\forall\ x \in A, \quad f(x+T) = f(x) \tag{1}$$

῾Ο ἀριθμός T λέγεται **περίοδος** τῆς συναρτήσεως.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

᾿Από τήν (1) προκύπτει ἐπαγωγικά ὅτι, ἄν $x \in A$, γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι $f(x+\nu T) = f(x)$, δηλαδή καί ὁ νT εἶναι περίοδος. ᾿Αλλά καί ὁ $-\nu T$ εἶναι περίοδος ἀφοῦ $f(x) = f(x-\nu T+\nu T) = f(x-\nu T)$.

῾Επομένως, ἄν γιά τή μελέτη τῆς μεταβολῆς τῆς f περιοριστοῦμε σέ ἕνα διάστημα τῆς μορφῆς $[\alpha, \alpha+T]$, οἱ τιμές τῆς συναρτήσεως ἐπαναλαμβάνονται σέ κάθε διάστημα $[\alpha+kT, \alpha+(k+1)T]$, $k \in \mathbb{Z}$.

῎Αρα ἡ μελέτη μιᾶς περιοδικῆς συναρτήσεως ἀρκεῖ νά γίνει στό διάστημα $[\alpha, \alpha+T]$, ὅπου T ἡ μικρότερη θετική περίοδος, πού λέγεται καί **βασική.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

῾Η συνάρτηση f μέ $f(x) = \eta\mu x$ εἶναι περιοδική μέ περίοδο 2π, γιατί $\eta\mu(x+2\pi) = \eta\mu x$ καί ὁ 2π εἶναι ὁ μικρότερος θετικός ἀριθμός, γιά τόν ὁποῖο ἰσχύει αὐτή ἡ σχέση.

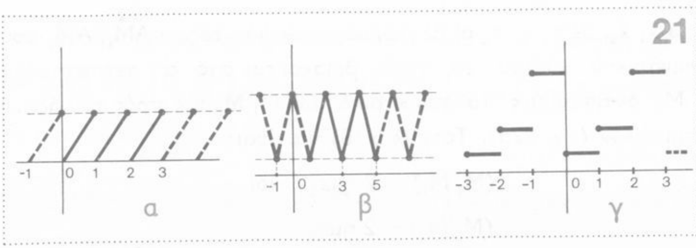
᾿Επίσης, ἄν $\mathbb{R}_1$ εἶναι τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως ἐφαπτομένη εἶναι

$$\mathbb{R}_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}:\ x \neq k\pi + \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \text{καί} \quad \varepsilon\varphi\,(x+\pi) = \varepsilon\varphi x.$$

῎Αρα ἡ συνάρτηση ἐφαπτομένη εἶναι περιοδική στό $\mathbb{R}_1$ μέ περίοδο π.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά βρεθεῖ ἡ (βασική) περίοδος τῶν συναρτήσεων τῶν ὁποίων οἱ γραφικές παραστάσεις δίνονται στό παρακάτω σχῆμα**



Οἱ συναρτήσεις τοῦ σχήματος ἔχουν περιόδους 1 (21α), 2 (21β) καί 3(21γ).

2. **Νά βρεθεῖ ἡ περίοδος τῶν συναρτήσεων:**
f μέ $f(x) = ημ5x$ ἤ γενικότερα ημλx, συνλx, εφλx, σφλx.

Ἔστω T μία περίοδος. Τότε θά εἶναι $f(x+T) = f(x)$. Ὁπότε:

$$ημ\,5(x+T) = ημ\,5x$$

$$5(x+T) = 2k\pi + 5x \qquad (1)$$

$$ή \quad 5(x+T) = (2k+1)\pi - 5x \qquad (2)$$

Ἀπό τήν (1) ἔχουμε $T = \frac{2k\pi}{5}$ καί γιά $k = 1$, $T = \frac{2\pi}{5}$.

Πράγματι εἶναι
$$f\left(x + \frac{2\pi}{5}\right) = ημ\,5\left(x + \frac{2\pi}{5}\right) = ημ\,(5x + 2\pi) = ημ\,5x = f(x).$$

Ἀπό τή (2) ἔχουμε:

$$5T = (2k+1)\pi - 10x$$

$$T = \frac{(2k+1)\pi - 10x}{5}.$$

Ἀπό τήν τελευταία σχέση παρατηροῦμε ὅτι γιά κάθε τιμή τοῦ x ἔχουμε καί διαφορετική τιμή τοῦ T. Ἄρα ὁ T δέν εἶναι σταθερός. Ἐπομένως δέν μπορεῖ νά εἶναι περίοδος.

Γενικότερα γιά τήν συνάρτηση f μέ $f(x) = ημλx$, περίοδος εἶναι ὁ $\frac{2\pi}{|\lambda|}$, γιά τήν g μέ $g(x) = συνλx$, εἶναι ὁ $\frac{2\pi}{|\lambda|}$ καί γιά τίς συναρτήσεις φ μέ $φ(x) = εφλx$ καί h μέ $h(x) = σφλx$ εἶναι ὁ $\frac{\pi}{|\lambda|}$.

•*Ἀσκήσεις 13, 14, 15.*

Μελέτη τῆς συναρτήσεως ἡμίτονο

7.22 Ἐπειδή ἡ συνάρτηση αὐτή εἶναι περιοδική μέ περίοδο 2π, θά μελετήσουμε τή μεταβολή της στό διάστημα $[0, 2\pi]$.

Ἔστω x_1, x_2, μέ $x_1 < x_2$ οἱ ἀλγεβρικές τιμές δύο τόξων $\overset{\frown}{AM_1}$, $\overset{\frown}{AM_2}$ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου, τά ὁποῖα βρίσκονται στό α' τεταρτημόριο καί M_1', M_2' ἀντιστοίχως τά συμμετρικά τῶν M_1, M_2, ὡς πρός τόν ἄξονα τῶν συνημιτόνων (σχ. 22α). Τότε (§ 6.10) θά εἶναι:

$$(M_1'M_1) = 2\,ημx_1 \quad καί$$

$$(M_2'M_2) = 2\,ημx_2 \qquad (1)$$

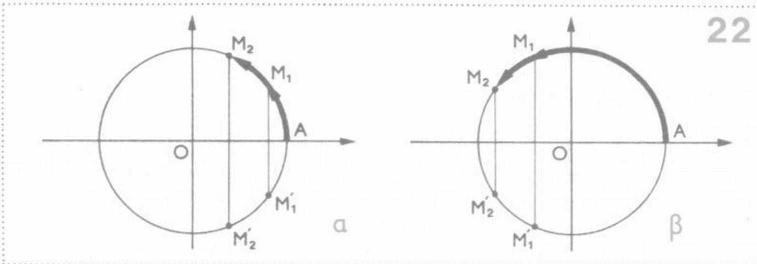
Ἔχουμε ὅμως

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\Leftrightarrow 2x_1 < 2x_2 \\ &\Leftrightarrow \text{τόξο } M_1'M_1 < \text{τόξο } M'_2M_2 \\ &\Leftrightarrow \text{χορδή } M'_1M_1 < \text{χορδή } M'_2M_2 \\ &\Leftrightarrow (M_1'M_1) = (M_2'M_2) \end{aligned} \qquad (2)$$

ὁπότε ἀπό τίς (1) καί (2) προκύπτει ὅτι:

$$\forall\ x_1, x_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\quad x_1 < x_2 \Rightarrow \eta\mu x_1 < \eta\mu x_2$$

δηλαδή ἡ συνάρτηση ἡμίτονο εἶναι γνησίως **αὔξουσα στό** $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.



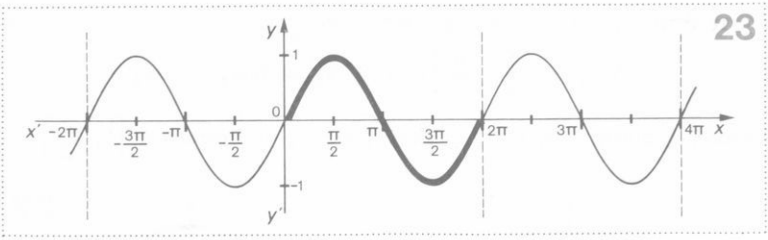
Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι:

- ἄν $x_1, x_2 \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, τότε (σχ. 22β) $x_1 < x_2 \Rightarrow \eta\mu x_1 > \eta\mu x_2$, δηλαδή ἡ συνάρτηση ἡμίτονο εἶναι γνησίως **φθίνουσα στό** $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$
- ἄν $x_1, x_2 \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, τότε $x_1 < x_2 \Rightarrow \eta\mu x_1 > \eta\mu x_2$, δηλαδή ἡ συνάρτηση ἡμίτονο εἶναι γνησίως **φθίνουσα στό** $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$.
- ἄν $x_1, x_2 \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, τότε $x_1 < x_2 \Rightarrow \eta\mu x_1 < \eta\mu x_2$, δηλαδή ἡ συνάρτηση ἡμίτονο εἶναι γνησίως **αὔξουσα στό** $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$.

Ἀπό τά προηγούμενα συμπεραίνουμε ὅτι, ἀφοῦ ἡ συνάρτηση ἡμίτονο εἶναι αὔξουσα στό $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ καί φθίνουσα στό $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, θά παρουσιάζει μέγιστο στό $x = \frac{\pi}{2}$ ἴσο μέ $\eta\mu\frac{\pi}{2} = 1$.

Ὁμοίως, ἐπειδή αὐτή εἶναι φθίνουσα στό $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ καί αὔξουσα στό $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ θά παρουσιάζει ἐλάχιστο στό $x = \frac{3\pi}{2}$ ἴσο μέ $\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$.

Τέλος, ἐπειδή ημ$(-x) = -$ημx ἡ συνάρτηση ἡμίτονο εἶναι περιττή, ὁπότε ἡ γραφική της παράσταση θά εἶναι συμμετρική ὡς πρός τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων. Τά προηγούμενα συμπεράσματα παριστάνονται γραφικά στό σχῆμα 23.



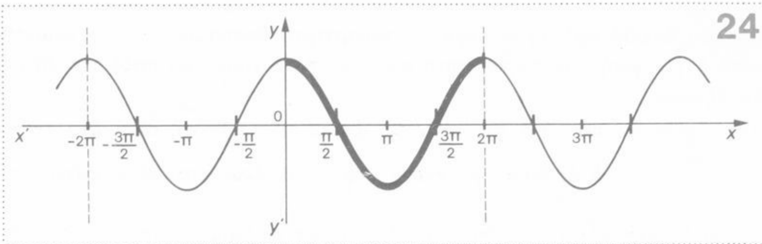
Ἡ συνάρτηση συνημίτονο

7.23 Ἐπειδή ἡ συνάρτηση αὐτή εἶναι περιοδική μέ περίοδο 2π, ἀρκεῖ νά τή μελετήσουμε στό διάστημα $[0, 2\pi]$. Ἄν λοιπόν ἐργαστοῦμε ὅπως στήν περίπτωση τοῦ ἡμιτόνου, θά ἔχουμε:

- ἄν $x_1, x_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, τότε $x_1 < x_2 \Rightarrow$ συν$x_1 >$ συνx_2, δηλαδή ἡ συνάρτηση συνημίτονο εἶναι γνησίως **φθίνουσα στό** $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,
- ἄν $x_1, x_2 \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, τότε $x_1 < x_2 \Rightarrow$ συν$x_1 >$ συνx_2, δηλαδή ἡ συνάρτηση συνημίτονο εἶναι γνησίως **φθίνουσα στό** $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$,
- ἄν $x_1, x_2 \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, τότε $x_1 < x_2 \Rightarrow$ συν $x_1 <$ συνx_2, δηλαδή ἡ συνάρτηση συνημίτονο εἶναι γνησίως **αὔξουσα στό** $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$,
- ἄν $x_1, x_2 \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, τότε $x_1 < x_2 \Rightarrow$ συν$x_1 <$ συνx_2, δηλαδή ἡ συνάρτηση συνημίτονο εἶναι γνησίως **αὔξουσα στό** $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$.

Ἀπό τά προηγούμενα συμπεραίνουμε ὅτι, ἀφοῦ ἡ συνάρτηση συνημίτονο εἶναι φθίνουσα στό $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ καί αὔξουσα στό $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, θά παρουσιάζει ἐλάχιστο στό $x = \pi$, ἴσο μέ συν$\pi = -1$.

Τέλος, ἐπειδή συν$(-x) =$ συνx, ἡ συνάρτηση συνημίτονο εἶναι ἄρτια συνάρτηση, ὁπότε ἡ γραφική της παράσταση εἶναι συμμετρική ὡς πρός τόν ἄξονα y'y. Τά προηγούμενα συμπεράσματα παριστάνονται γραφικά στό σχῆμα 24.



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Ἡ γραφική παράσταση τῆς $y = συνx$ μπορεῖ νά προκύψει ἀπό τή γραφική παράσταση τῆς $y = ημx$, ἄν λάβουμε ὑπόψη ὅτι $συνx = ημ\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

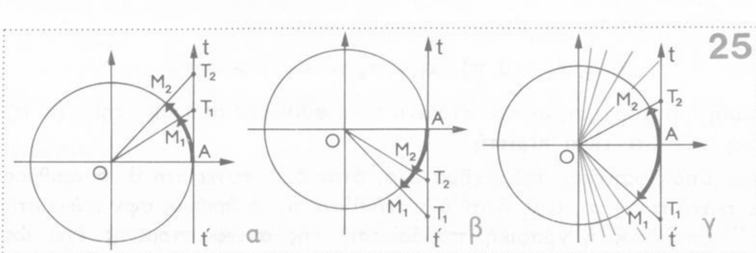
Ἡ συνάρτηση ἐφαπτομένη

7.24 Ἐπειδή εἶναι $εφ(x+\pi) = εφx$, ἡ συνάρτηση ἐφαπτομένη εἶναι περιοδική μέ περίοδο π. Ἑπομένως ἀρκεῖ νά τή μελετήσουμε στό διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, ἀφοῦ ὅπως εἴδαμε (§ 6.14) ἡ συνάρτηση δέν ὁρίζεται γιά $x = \pm\frac{\pi}{2}$.

Ἔστω x_1, x_2, μέ $x_1 < x_2$, οἱ ἀλγεβρικές τιμές δύο τόξων $\overset{\frown}{AM_1}$, $\overset{\frown}{AM_2}$ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου (σχ. 25), τά ὁποῖα ἀνήκουν στό α' ἤ δ' τεταρτημόριο. Τότε (§ 6.16) θά εἶναι:

$$εφx_1 = \overline{AT}_1$$
$$εφx_2 = \overline{AT}_2.$$

Εἶναι ὅμως $\overline{AT}_1 < \overline{AT}_2$, ἄρα καί $εφx_1 < εφx_2$.

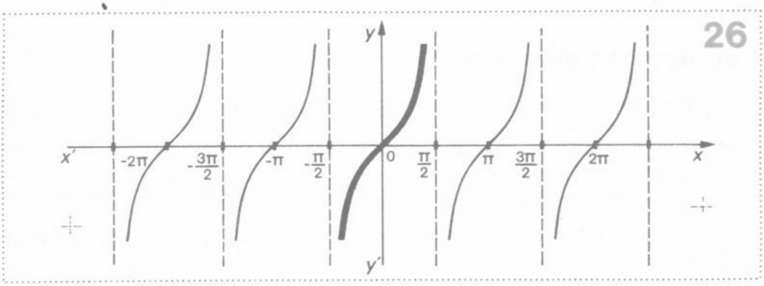


Ἑπομένως ἄν $x_1, x_2 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, τότε $x_1 < x_2 \Rightarrow$ εφ$x_1 <$ εφx_2, δηλαδή ἡ ἐφαπτομένη εἶναι γνησίως **αὔξουσα στό** $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Ἐξάλλου, ἐπειδή εφ$(-x) = -$εφx, ἡ συνάρτηση ἐφαπτομένη εἶναι **περιττή** ὁπότε ἡ γραφική της παράσταση θά εἶναι συμμετρική ὡς πρός τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων.

Τέλος, ὅπως δείχνει τό σχῆμα 25γ μποροῦμε νά λέμε ὅτι, ὅταν ὁ x *τείνει στό* $+\frac{\pi}{2}$, τότε ὁ ἀριθμός εφx *τείνει στό* $+\infty$, ἐνῶ ὅταν ὁ x *τείνει στό* $-\frac{\pi}{2}$, ὁ ἀριθμός εφx *τείνει στό* $-\infty$. Ἑπομένως ἡ γραφική παράσταση τῆς ἐφαπτομένης ἔχει ὡς ἀσύμπτωτες τίς εὐθεῖες $x = \frac{\pi}{2}$, $x = -\frac{\pi}{2}$ καί περνάει ἀπό τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων O, ἀφοῦ εἶναι εφ$0 = 0$.

Τά παραπάνω συμπεράσματα παριστάνονται γραφικά στό σχῆμα 26.



Ἡ συνάρτηση συνεφαπτομένη

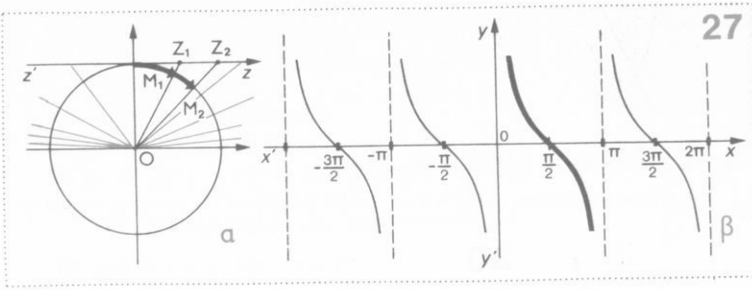
7.25 Ἐπειδή εἶναι σφ$(x+\pi) =$ σφx, ἡ συνάρτηση συνεφαπτομένη εἶναι περιοδική μέ περίοδο π. Ἑπομένως ἀρκεῖ νά τή μελετήσουμε στό διάστημα $(0, \pi)$, ἀφοῦ ὅπως εἴδαμε (§ 6.14) ἡ συνάρτηση αὐτή δέν ὁρίζεται γιά $x = 0, \pi$. Ἄν τώρα ἐργαστοῦμε ὅπως στήν προηγούμενη παράγραφο, βρίσκουμε ὅτι:

$$\forall\, x_1, x_2 \in (0, \pi),\ x_1 < x_2 \Rightarrow \text{σφ}x_1 > \text{σφ}x_2$$

δηλαδή ἡ συνάρτηση συνεφαπτομένη εἶναι **φθίνουσα** στό διάστημα $(0, \pi)$ καθώς καί ὅτι εἶναι **περιττή.**

Τέλος, ὅπως φαίνεται στό σχῆμα 27α, ὅταν ὁ x *τείνει στό* 0, ὁ ἀριθμός σφx *τείνει στό* $+\infty$, ἐνῶ, ὅταν ὁ x *τείνει στό* π, ὁ ἀριθμός σφx *τείνει στό* $-\infty$. Ἑπομένως ἡ γραφική παράσταση τῆς συνεφαπτομένης ἔχει ὡς ἀσύμπτωτες τίς εὐθεῖες $x = 0$, $x = \pi$ καί περνάει ἀπό τό σημεῖο $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, ἀφοῦ εἶναι $\sigma\varphi \frac{\pi}{2} = 0$.

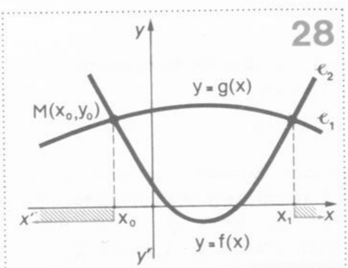
Τά συμπεράσματα αὐτά παριστάνονται γραφικά στό σχ. 27β.



Ἀσκήσεις 16, 17.

ΓΡΑΦΙΚΗ ΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΩΣ

7.26 Οἱ ρίζες μιᾶς ἐξισώσεως $f(x) = g(x)$ (§ 4.29) μποροῦν νά προσδιοριστοῦν μέ τή βοήθεια γραφικῶν παραστάσεων. Πράγματι οἱ ἐξισώσεις



$$y = f(x)$$
$$y = g(x)$$

ὁρίζουν δύο συναρτήσεις f καί g μέ ἀντίστοιχες γραφικές παραστάσεις, ἔστω $\mathcal{C}_1$ καί $\mathcal{C}_2$. Ἄν $M(x_0, y_0)$ εἶναι κοινό σημεῖο τῶν $\mathcal{C}_1$ καί $\mathcal{C}_2$ τότε, $y_0 = f(x_0) = g(x_0)$, δηλαδή ὁ x_0 εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως $f(x) = g(x)$.

Ἀντιστρόφως, γιά κάθε ρίζα x_0 τῆς $f(x) = g(x)$ ἔχουμε $f(x_0) = g(x_0) = y_0$ δηλαδή $M(x_0, y_0) \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$. Ὥστε οἱ **τετμημένες** τῶν σημείων τομῆς, ἄν ὑπάρχουν, τῶν $\mathcal{C}_1$ καί $\mathcal{C}_2$ θά εἶναι **οἱ ρίζες** τῆς ἐξισώσεως $f(x) = g(x)$.

Ὁμοίως συμπεραίνουμε ὅτι:

Ἡ ἀνίσωση $f(x) > g(x)$ ἀληθεύει στά διαστήματα ἐκεῖνα πού ἡ γραμμή $\mathcal{C}_1$ $y = f(x)$ βρίσκεται *πάνω* ἀπό τή γραμμή $\mathcal{C}_2$ $y = g(x)$.

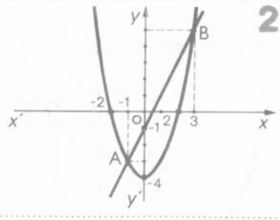
Π.χ. στό σχῆμα 28 ἀληθεύει γιά $x < x_0$ καί γιά $x > x_1$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά λυθεῖ γραφικά ἡ ἐξίσωση $x^2 - 4 = 2x - 1$.**

Βρίσκουμε τίς γραφικές παραστάσεις τῶν συναρτήσεων $y = x^2 - 4$ καί

$y = 2x - 1$ πού εἶναι παραβολή καί εὐθεία ἀντιστοίχως (σχ. 29).

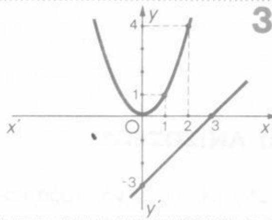


29

Αὐτές τέμνονται στά σημεῖα Α καί Β μέ τετμημένες -1 καί 3, πού εἶναι οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως $x^2 - 4 = 2x - 1$.

2. Νά λυθεῖ γραφικά ἡ ἐξίσωση $x^2 - x + 3 = 0$.

Ἡ ἐξίσωση γράφεται καί $x^2 = x - 3$, ὁπότε βρίσκουμε τίς γραφικές παραστάσεις τῶν συναρτήσεων



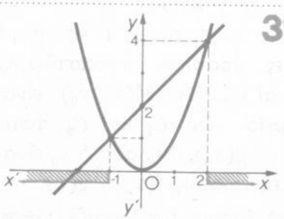
30

$$y = x^2 \quad \text{καί} \quad y = x - 3 \ (\text{σχ. } 30).$$

Αὐτές δέν ἔχουν κανένα κοινό σημεῖο, ἄρα ἡ ἐξίσωση δέν ἔχει λύση.

3. Νά λυθεῖ γραφικά ἡ ἀνίσωση $x^2 - x - 2 > 0$.

Ἡ ἀνίσωση γράφεται $x^2 > x + 2$. Βρίσκουμε τίς γραφικές παραστάσεις τῶν συναρτήσεων



31

$$y = x^2 \quad \text{καί} \quad y = x + 2 \quad (\text{σχ. } 31).$$

Ἡ ἀνίσωση ἀληθεύει στά διαστήματα ὅπου ἡ παραβολή $y = x^2$ βρίσκεται πάνω ἀπό τήν εὐθεία $y = x + 2$. Αὐτό συμβαίνει, ὅταν $x < -1$ ἤ $x > 2$.

Ἀσκήσεις 18, 19.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Γιά τίς συναρτήσεις:

$$f \text{ μέ } f(x) = x^3 + 5x^2 + 6 \qquad \text{καί}$$

$$g \text{ μέ } g(x) = \frac{1}{x^2} + 2x + 5$$

νά ὑπολογιστεῖ ὁ λόγος μεταβολῆς γιά τά ζεύγη τῶν τιμῶν $(-1, 2)$, $(3, 5)$.

2. Νά ἐξεταστεῖ στό R^*_+ ἡ μονοτονία τῆς συναρτήσεως:

$$f \quad \text{μέ} \quad f(x) = \frac{1}{x^3} + 1$$

3. Νά ἐξεταστεῖ ἡ μονοτονία τῶν συναρτήσεων:

$$f \quad \text{μέ} \quad f(x) = |x| + |1-x| - x$$

$$g \quad \text{μέ} \quad g(x) = \frac{x-1}{|x-1|}.$$

4. Νά μελετηθοῦν οἱ συναρτήσεις:

α) f μέ $f(x) = |x-2| - x$

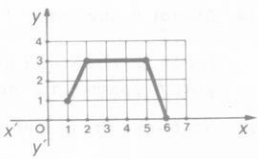
β) g μέ $g(x) = -2-3x$ στό διάστημα $[-5, +5]$.

5. Νά γίνει γραφική παράσταση τῶν συναρτήσεων:

α) f μέ $f(x) = \begin{cases} x+3, & \text{ἄν } -3 \leq x \leq -2 \\ 1\ , & \text{ἄν } -2 < x < 2 \\ 3-x, & \text{ἄν } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$

β) g μέ $g(x) = \begin{cases} 2\ , & \text{ἄν } 1 \leq x < 2 \\ 3x-4, & \text{ἄν } 2 \leq x < 3 \\ -3x+14, & \text{ἄν } 3 \leq x < 4 \\ 2\ , & \text{ἄν } 4 \leq x \leq 5 \end{cases}$

6. Νά βρεθεῖ ἡ τιμή $f(x)$ τῆς συναρτήσεως f τῆς ὁποίας ἡ γραφική παράσταση δίνεται στό διπλανό σχῆμα.



7. Νά προσδιοριστεῖ ὁ λ, ὥστε οἱ εὐθεῖες

$$y = (2\lambda+1)x+3 \qquad \text{καί} \qquad y = (5\lambda-1)x-2$$

α) νά εἶναι παράλληλες καί β) νά εἶναι κάθετες.

8. Τά ταχυδρομικά τέλη γιά μιά ταχυδρομική ἐπιταγή καθορίζονται ἀπό τό διπλανό πίνακα. Νά γίνει γραφική παράσταση τῆς ἀντίστοιχης συναρτήσεως.

Ἐπιταγή σέ δραχμές	Τέλη σέ δραχμές
1- 200	10
201- 500	20
501- 1.000	29
1.001- 2.000	35
2.001- 3.000	41
3.001- 4.000	47
4.001- 5.000	53
5.001-10.000	60
10.001-20.000	75
ΣΤΟΙΧΕΙΑ τῶν ΕΛΤΑ 7.12.79	

9. Νά δειχθεῖ ὅτι εἶναι περιττές οἱ συναρτήσεις:

α) f μέ $f(x) = \frac{1}{x} + \varepsilon\varphi x$

β) g μέ $g(x) = x^3 + \eta\mu x$

10. Νά μελετηθοῦν οἱ συναρτήσεις

α) f μέ $f(x) = \frac{2}{x}$ β) g μέ $g(x) = \frac{1}{x-2} + 1$ γ) φ μέ $\varphi(x) = \frac{2x-4}{x+1}$.

11. Νά μελετηθοῦν οἱ συναρτήσεις:

α) f μέ $f(x) = \frac{x^2}{2}$ β) φ μέ $\varphi(x) = (x-3)^2$ καί

γ) g μέ $g(x) = \frac{-x^2}{3} + 1$

12. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι εἶναι ἄρτιες οἱ συναρτήσεις:

α) f μέ $f(x) = \alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma$ β) g μέ $g(x) = x^2 + \sigma\upsilon\nu x$.

13. Νά βρεθεῖ ἡ περίοδος τῶν συναρτήσεων

α) f μέ $f(x) = \eta\mu\, 3x$ β) g μέ $g(x) = \eta\mu \frac{x}{2}$ γ) φ μέ $\varphi(x) = \sigma\upsilon\nu \frac{x}{3}$.

14. Δίνεται ἡ συνάρτηση f μέ $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ἄν } x \text{ ἄρτιος} \\ 0, & \text{ἄν } x \text{ περιττός.} \end{cases}$

Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ f εἶναι περιοδική συνάρτηση, νά βρεθεῖ ἡ περίοδός της καί νά γίνει ἡ γραφική της παράσταση.

15. Νά δειχθεῖ ὅτι ἡ συνάρτηση f μέ $f(x) = \eta\mu\,(x^2-2x+5)$ δέν εἶναι περιοδική.

16. Νά γίνουν οἱ γραφικές παραστάσεις τῶν συναρτήσεων:

α) f μέ $f(x) = \eta\mu\, 2x$ β) g μέ $g(x) = 3\sigma\upsilon\nu \frac{x}{2} - 1$

γ) φ μέ $\varphi(x) = \varepsilon\varphi\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$.

17. Νά ἀποδείξετε μέ τή βοήθεια τῶν γραφικῶν παραστάσεων τίς σχέσεις:

α) $\sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\eta\mu x$ β) $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sigma\upsilon\nu x$.

18. Νά λυθοῦν γραφικά οἱ ἐξισώσεις:

α) $\frac{4}{x} = x$ β) $x^2 = |x|$ γ) $x^2 - 4 = -\frac{3}{x}$.

19. Νά λυθοῦν γραφικά οἱ ἀνισώσεις:

α) $|x| > 5$ β) $\frac{1}{x} > x^2$.

1. Ὁ λόγος μεταβολῆς τῆς f μεταξύ τῶν -1 καί 2 εἶναι $\lambda = 8$ καί μεταξύ τῶν 3 καί 5 εἶναι $\lambda = 89$.

Ὁ λόγος μεταβολῆς τῆς g μεταξύ τῶν -1 καί 2 εἶναι $\lambda = \frac{7}{4}$ καί μεταξύ τῶν 3 καί 5 εἶναι $\lambda = \frac{442}{225}$.

2. Γιά τή συνάρτηση f ἔχουμε: $\lambda = -\frac{x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2}{x_1^3x_2^3} < 0$.

Ἄρα ἡ f εἶναι γνησίως φθίνουσα στό $\mathbb{R}_+^*$.

3. Γιά τή συνάρτηση f ἔχουμε : $f(x) = \begin{cases} -3x+1, & \text{ἄν } x < 0 \\ 1-x, & \text{ἄν } 0 \leqslant x < 1 \\ x-1, & \text{ἄν } x \geqslant 1 \end{cases}$

Ἡ f εἶναι γνησίως φθίνουσα γιά $x < 1$ καί γνησίως αὔξουσα γιά $x \geqslant 1$.
Ἡ g εἶναι σταθερή ἴση μέ -1 γιά $x < 1$ καί ἴση μέ 1 γιά $x > 1$.

4. Γιά τή συνάρτηση f εἶναι :

$$f(x) = \begin{cases} -2x+2, & \text{ἄν } x < 2 \\ -2, & \text{ἄν } x \geqslant 2, \end{cases} \quad \text{κτλ.}$$

Ἡ συνάρτηση g εἶναι ὁμοπαραλληλική, γνησίως φθίνουσα στό $[-5, +5]$.

5. **α)** Βρίσκουμε τή μονοτονία τῆς συναρτήσεως f σέ κάθε διάστημα καί μετά κάνουμε τή γραφική της παράσταση. Ἐργαζόμαστε δηλαδή ὅπως στήν ἐφαρμογή 2 τῆς § 7.8.

β) Ὁμοίως.

6. Ἡ f εἶναι αὔξουσα στό $[1,2)$, σταθερή στό $[2,5)$ καί φθίνουσα στό $[5,6]$. Ἡ τιμή τῆς f στό x εἶναι:

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1, & \text{ἄν } 1 \leq x < 2 \\ 3, & \text{ἄν } 2 \leq x < 5 \\ -3x+8, & \text{ἄν } 5 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

7. Οἱ εὐθεῖες εἶναι παράλληλες, ὅταν $\lambda = \frac{2}{3}$ καί κάθετες, ὅταν $\lambda = 0$ ἤ $\lambda = \frac{7}{10}$.

8. Ἐργαζόμαστε ὅπως στή § 7.9.

9. **α)** Γιά τήν f ἰσχύει :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_1^*,\ f(-x) = \frac{1}{-x} + \varepsilon\varphi(-x) \ \text{κτλ.}$$

β) Ὁμοίως.

10. **α)** Εἶναι ὑπερβολή μέ ἀσύμπτωτες τούς ἄξονες $x'x$ καί $y'y$

β) Εἶναι ὑπερβολή μέ ἀσύμπτωτες τίς εὐθεῖες $x = 2$ καί $y = 1$

γ) Εἶναι $\varphi(x) = 2 - \frac{6}{x+1}$ κτλ.

11. α) Ἐργαζόμαστε ὅπως στήν ἐφαρμογή τῆς § 7.17.

β) Ἡ συνάρτηση εἶναι τῆς μορφῆς f μέ $f(x) = \alpha(x-k)^2$, μέ $\alpha = 1$ καί $k = 3$.

γ) Ἡ συνάρτηση εἶναι τῆς μορφῆς f μέ $f(x) = \alpha x^2 + k$, μέ $\alpha = -\frac{1}{3}$ καί $k = 1$.

12. α) Γιά τήν f ἰσχύει: $\forall\, x,\ f(-x) = \alpha(-x)^4 + \beta(-x)^2 + \gamma$ κτλ.

β) Ὁμοίως.

13. α) Ἡ περίοδος τῆς f εἶναι $\frac{2\pi}{3}$

β) Ἡ περίοδος τῆς g εἶναι $\frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$

γ) Ἡ περίοδος τῆς φ εἶναι $\frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$.

14. Ἡ συνάρτηση f εἶναι περιοδική μέ περίοδο 2.

15. Ἐργαζόμαστε ὅπως στήν ἐφαρμογή 2 τῆς § 7.21.

16. α) Ἡ f εἶναι περιοδική μέ περίοδο π (§ 7.21, Ἐφ. 2)

β) Θέτουμε $y = \Psi - 1$ καί $x = X$ καί ἔχουμε $\Psi = 3\sigma\upsilon\nu\frac{X}{2}$

γ) Θέτουμε $y = \Psi + 1$ καί $x = X + \frac{\pi}{4}$ κτλ.

17. α) Παρατηροῦμε ὅτι οἱ γραφικές παραστάσεις τοῦ $\sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ καί $-\eta\mu x$ συμπίπτουν.

β) Παρατηροῦμε ὅτι οἱ γραφικές παραστάσεις τῶν $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ καί $\sigma\upsilon\nu x$ συμπίπτουν.

18. α) Βρίσκουμε τίς γραφικές παραστάσεις τῶν συναρτήσεων $y = \frac{4}{x}$ καί $y = x$.

Οἱ τετμημένες τῶν σημείων τομῆς τους εἶναι οἱ λύσεις τῆς ἐξισώσεως.

β) Βρίσκουμε τίς γραφικές παραστάσεις τῶν συναρτήσεων $y = x^2$ καί $y = |x|$ κτλ.

γ) Βρίσκουμε τίς γραφικές παραστάσεις τῶν συναρτήσεων $y = x^2 - 4$ καί $y = -\frac{3}{x}$ κτλ.

19. α) Βρίσκουμε τίς γραφικές παραστάσεις τῶν συναρτήσεων $y = |x|$ καί $y = 5$ κτλ.

β) Βρίσκουμε τίς γραφικές παραστάσεις τῶν συναρτήσεων $y = \frac{1}{x}$ καί $y = x^2$ κτλ.

8 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΣΤΟ $\mathbb{R}$

Ἡ ἀνάπτυξη τῶν θεμάτων ἀπό τήν παραδοσιακή Ἄλγεβρα πού περιλαμβάνει τό κεφάλαιο αὐτό, χαρακτηρίζεται ἀπό θεωρία, περιορισμένη στίς ἀπόλυτα βασικές γνώσεις, ὅπως ἀναφέρονται στό νέο ἀναλυτικό πρόγραμμα, καί ἀπό ποικιλία ἐφαρμογῶν. Μιά τέτοια παρουσίαση, χωρίς νά εἶναι ἐκτεταμένη ὅπως ἄλλοτε, δέν χάνει τήν πληρότητά της καί ἀνταποκρίνεται στήν ἐπιδίωξη ἐκσυγχρονισμοῦ τῆς ὕλης. Σέ ὁρισμένες περιπτώσεις ἀποτελεῖ ἐμβάθυνση καί ἐπέκταση γνώσεων πού ἤδη ἔχει ὁ μαθητής (π. χ. λύση δευτεροβάθμιας ἐξισώσεως, συστήματα κτλ.).

Ἡ ἐπεξεργασία κύριων θεμάτων τοῦ κεφαλαίου στηρίζεται στίς μορφές πού μπορεῖ νά πάρει τό δευτεροβάθμιο τριώνυμο ἀνάλογα μέ τό πρόσημο τῆς διακρίνουσάς του. Παράλληλα ἐπισημαίνεται ἡ σημασία τοῦ προσήμου τοῦ τριωνύμου γιά τίς ἀνισώσεις β΄ βαθμοῦ καθώς καί γιά τή θέση ἀριθμοῦ ὡς πρός τίς ρίζες τοῦ τριωνύμου.

Τό τελευταῖο τμῆμα τοῦ κεφαλαίου ἀποτελεῖ ἕνα ἀπαραίτητο συμπλήρωμα, σέ θεωρητικότερη βάση, γιά τά συστήματα ἐξισώσεων ἁπλῆς μορφῆς.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

Γενικά

8.1 Κάθε ἐξίσωση μέ ἄγνωστο $x \in \mathbb{R}$ πού ἔχει ἤ μπορεῖ νά πάρει τή μορφή

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma = 0,$$

ὅπου α, β, γ εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί μέ $\alpha \neq 0$, λέγεται **ἐξίσωση δεύτερου βαθμοῦ** στό $\mathbb{R}$. Οἱ ἀριθμοί α, β, γ λέγονται **συντελεστές** τῆς ἐξισώσεως. Παραδείγματα ἐξισώσεων β' βαθμοῦ δίνονται στόν ἀκόλουθο πίνακα.

Ἐξίσωση	Συντελεστές		
	α	**β**	**γ**
$\sqrt{2}\,x^2-x=0$	$\sqrt{2}$	-1	0
$\frac{x^2}{2}+x=\sqrt{3}\,x+1$	$\frac{1}{2}$	$1-\sqrt{3}$	-1
$\lambda x^2-\lambda x+\lambda\mu = x^2-\mu x$	$\lambda-1\neq 0$	$\mu-\lambda$	$\lambda\mu$
$\alpha^2x^2+\beta x+\alpha^2= x^2+\alpha x-\beta^2$	$\alpha^2-1\neq 0$	$\beta-\alpha$	$\alpha^2+\beta^2$

Γιά νά λύσουμε μιά δευτεροβάθμια ἐξίσωση, ἀρκεῖ νά τή μετασχηματίσουμε, μέ παραγοντοποίηση τοῦ πρώτου μέλους της, σέ ἰσοδύναμη τῆς μορφῆς $A(x)B(x)=0$, ὅπου $A(x)$, $B(x)$ εἶναι πρωτοβάθμιοι παράγοντες. Γιατί τότε ἡ λύση της ἀνάγεται στή λύση τῶν πρωτοβάθμιων ἐξισώσεων $A(x)=0$ καί $B(x)=0$, ἀφοῦ $A(x)B(x)=0 \Leftrightarrow A(x)=0$ **ἤ** $B(x)=0$. Τή μέθοδο αὐτή, πού εἶναι γνωστή ἀπό τά γυμνασιακά μαθήματα καί πού ἤδη ἔχουμε ἐφαρμόσει (§ 4.21 ἐφ. 1), θά θυμίσουμε μέ τά ἀκόλουθα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Ἔστω ἡ ἐξίσωση $\sqrt{2}\,x^2-3x=0$ (1)

Ἐπειδή $\sqrt{2}\,x^2-3x = x(\sqrt{2}\,x-3)$, ἔχουμε :

$(1) \Leftrightarrow (x=0$ **ἤ** $\sqrt{2}\,x-3=0) \Leftrightarrow \left(x=0 \text{ ἤ } x=\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$. Ἡ ἐξίσωση λοιπόν ἔχει ρίζες : 0 καί $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Γενικότερα ἡ ἐξίσωση $\alpha x^2+\beta x = 0$ $(\alpha \neq 0)$ ἔχει ρίζες: 0 καί $-\dfrac{\beta}{\alpha}$ (που συμπίπτουν στό 0, ἄν $\beta = 0$).

2. Ἔστω ἡ ἐξίσωση $$(x+2)^2-5 = 0 \tag{2}$$

Εἶναι $(x+2)^2-5 = (x+2)^2-(\sqrt{5})^2 = (x+2-\sqrt{5})(x+2+\sqrt{5})$. Ἄρα:

$$(2) \Leftrightarrow (x+2-\sqrt{5})(x+2+\sqrt{5}) = 0 \Leftrightarrow (x+2-\sqrt{5}=0 \text{ ἤ } x+2+\sqrt{5}=0)$$

$$\Leftrightarrow (x = -2+\sqrt{5} \quad \text{ἤ} \quad x = -2-\sqrt{5})$$

Μέ τόν ἴδιο τρόπο λύνεται γενικότερα ἡ ἐξίσωση

$$(x+k)^2-\lambda = 0 \tag{3}$$

- Ἄν $\lambda \geqslant 0$, τότε $(x+k)^2-\lambda = (x+k)^2-(\sqrt{\lambda})^2$ καί

  $(3) \Leftrightarrow (x+k-\sqrt{\lambda} = 0$ ἤ $x+k+\sqrt{\lambda} = 0)$.

  Ἡ ἐξίσωση λοιπόν ἔχει ρίζες $-k+\sqrt{\lambda}$ καί $-k-\sqrt{\lambda}$ (οἱ ὁποῖες ἄν $\lambda=0$ συμπίπτουν στήν $-k$).

- Ἄν $\lambda < 0$, τότε $-\lambda = |\lambda| > 0$ καί ἡ (3) γίνεται $(x+k)^2+|\lambda| = 0$, μέ πρῶτο μέλος θετικό γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ἄρα ἡ ἐξίσωση δέν ἔχει λύση στό $\mathbb{R}$.

3. Ἡ ἐξίσωση $$x^2-3x+2 = 0 \tag{4}$$

μπορεῖ νά ἀναχθεῖ στήν προηγούμενη μορφή $(x+k)^2-\lambda = 0$, ἀρκεῖ νά παρατηρήσουμε ὅτι τό x^2-3x, πού γράφεται $x^2-2\cdot\dfrac{3}{2}x$, περιέχει τούς δύο ὅρους τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ $\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2$.

Ἄρα $x^2-3x = \left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\left(\dfrac{3}{2}\right)^2$ καί

$$x^2-3x+2 = \left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+2 = \left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}.$$

Ἄν ἐργαστοῦμε ὅπως στό προηγούμενο παράδειγμα $\left(\text{γιά } k = -\dfrac{3}{2} \text{ καί } \lambda = \dfrac{1}{4}\right)$, βρίσκουμε ὡς ρίζες τῆς (4) τούς ἀριθμούς 2 καί 1.

Λύση τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma = 0$

$\boxed{8.2}$ Ἔστω ἡ ἐξίσωση

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma = 0, \quad \alpha \neq 0. \tag{1}$$

Ἄν διαιρέσουμε τά μέλη της μέ α, ἡ (1) παίρνει τήν ἰσοδύναμη μορφή

$$x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha} = 0 \tag{2}$$

ὁπότε, ἄν ἐργαστοῦμε ὅπως στό παράδειγμα 3 τῆς § 8.1, θά ἔχουμε:

$$x^2+\frac{\beta}{\alpha}x=x^2+2\cdot\frac{\beta}{2\alpha}x=\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2.\quad \text{Ἄρα:}$$

$$x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}=\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}+\frac{\gamma}{\alpha}$$

$$=\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}\quad \text{καί θέτοντας } \boldsymbol{\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma}$$

$$=\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\Delta}{4\alpha^2}\qquad (3)$$

Διακρίνουμε τίς ἑξῆς περιπτώσεις:

1. $\Delta \geqslant 0$, ὁπότε $\Delta=(\sqrt{\Delta})^2$, καί ἡ (3) γράφεται:

$$x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}=\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)^2$$

$$=\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)$$

$$=\left(x+\frac{\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)\left(x-\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)\qquad (4)$$

Ἄρα $x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=0 \text{ ἤ } x-\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=0\right)$

$$\Leftrightarrow \left(x=\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \text{ ἤ } x=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right).$$

Δηλαδή ἡ ἐξίσωση ἔχει ρίζες τούς ἀριθμούς

$$\rho_1=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha} \quad \text{καί} \quad \rho_2=\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}.$$

Συντομότερα γράφουμε

$$\boxed{\boldsymbol{\rho_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}}}\qquad (5)$$

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι:

Ἐπειδή $\rho_1=\rho_2 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta}=-\sqrt{\Delta} \Leftrightarrow 2\sqrt{\Delta}=0 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta}=0 \Leftrightarrow \Delta=0$, θά εἶναι καί $\rho_1\neq\rho_2 \Leftrightarrow \Delta\neq 0$.

Δηλαδή εἰδικότερα:

- Ἄν $\Delta>0$, ἡ ἐξίσωση ἔχει **δύο ρίζες ἄνισες.**

● Ἄν $\Delta = 0$, τότε οἱ ρίζες τοῦ τύπου (5) συμπίπτουν καί λέμε ὅτι ἡ ἐξίσωση ἔχει μιά **ρίζα διπλή**, τήν $\rho = \frac{-\beta}{2\alpha}$.

2. $\boldsymbol{\Delta < 0}$, ὁπότε $\frac{-\Delta}{4\alpha^2} = \frac{|\Delta|}{4\alpha^2} > 0$. Τότε, ὅπως προκύπτει ἀπό τήν (3), τό πρῶτο μέλος τῆς ἐξισώσεως (2) εἶναι θετικό γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$. Συνεπῶς ἡ ἐξίσωση δέν ἔχει λύση στό $\mathbb{R}$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ὅτι ὁ ἀριθμός τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$$

στό $\mathbb{R}$ ἐξαρτᾶται ἀπό τό πρόσημο τοῦ ἀριθμοῦ $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$, πού λέγεται **διακρίνουσα** τῆς ἐξισώσεως.

Τά προηγούμενα συμπεράσματα συνοψίζονται στόν παρακάτω πίνακα.

Ἐξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ $(\alpha \neq 0)$, $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$	
$\boldsymbol{\Delta > 0}$	Δύο ἄνισες ρίζες $\rho_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$
$\boldsymbol{\Delta = 0}$	Μία ρίζα διπλή $\rho = \frac{-\beta}{2\alpha}$
$\boldsymbol{\Delta < 0}$	Δέν ἔχει ρίζα στό $\mathbb{R}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Γιά τήν ἐξίσωση $3x^2 - 15x + 18 = 0$ εἶναι $\Delta = 15^2 - 4 \cdot 3 \cdot 18 = 225 - 216 = 9$, ὁπότε οἱ ρίζες της εἶναι:

$$\rho_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{9}}{6} = \frac{15 \pm 3}{6} \quad \begin{array}{l} \nearrow \rho_1 = \frac{15+3}{6} = 3 \\ \searrow \rho_2 = \frac{15-3}{6} = 2 \end{array}$$

2. Γιά τήν ἐξίσωση $x^2 - 6x + 9 = 0$ εἶναι $\Delta = 36 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$, ὁπότε

$$\rho_1 = \rho_2 = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{-(-6)}{2 \cdot 1} = 3.$$

3. Γιά τήν ἐξίσωση $2x^2 - 3x + 10 = 0$ εἶναι $\Delta = 9 - 4 \cdot 2 \cdot 10 = -71 < 0$, ὁπότε αὐτή δέν ἔχει λύση στό $\mathbb{R}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Ἄν οἱ συντελεστές α καί γ εἶναι ἑτερόσημοι, τότε εἶναι $-\alpha\gamma > 0$ ἄρα καί $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$, ὁπότε ἡ ἐξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ἔχει δύο ρίζες ἄνισες.

2. Ἄν ὁ συντελεστής β ἔχει τή μορφή $2\beta'$ (π.χ ἄν εἶναι ἄρτιος), τότε $\Delta = \beta^2-4\alpha\gamma = (2\beta')^2-4\alpha\gamma = 4\beta'^2-4\alpha\gamma = 4(\beta'^2-\alpha\gamma) = 4\Delta'$, ὅπου

$$\Delta' = \beta'^2-\alpha\gamma$$

Στή περίπτωση αὐτή ὁ τύπος (5) γράφεται ἁπλούστερα

$$\boxed{\rho_{1,2} = \frac{-\beta' \pm \sqrt{\Delta'}}{\alpha}} \qquad (5')$$

3. Ἐπειδή Δ καί Δ′ εἶναι ὁμόσημοι, τά συμπεράσματα τοῦ παραπάνω πίνακα ἰσχύουν, ἄν ἀντί Δ, παίρνουμε τήν ἁπλοποιημένη μορφή Δ′.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:**

α) $\sqrt{2}\,x^2-(\sqrt{5}+\sqrt{2})x+\sqrt{5}=0$ **β)** $(\alpha^2-\beta^2)x^2-2\alpha^2\beta\, x+\alpha^2\beta^2=0,\ \alpha\neq\pm\beta$

α) Ἔχουμε $\Delta = [-(\sqrt{5}+\sqrt{2})]^2-4\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{5} = (\sqrt{5}-\sqrt{2})^2$.

Ἄρα οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως εἶναι:

$$\rho_{1,2} = \frac{(\sqrt{5}+\sqrt{2}) \pm \sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2}}{2\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2} \pm (\sqrt{5}-\sqrt{2})}{2\sqrt{2}} \begin{cases} \rho_1 = \dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{10}}{2} \\[2ex] \rho_2 = \dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{5}+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 1 \end{cases}$$

β) Ἔχουμε $\Delta' = (\alpha^2\beta)^2-(\alpha^2-\beta^2)\alpha^2\beta^2$

$= \alpha^4\beta^2-\alpha^4\beta^2+\alpha^2\beta^4$

$= \alpha^2\beta^4$.

Ἄρα οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως εἶναι

$$\rho_{1,2} = \frac{\alpha^2\beta \pm \sqrt{\alpha^2\beta^4}}{(\alpha^2-\beta^2)} = \frac{\alpha^2\beta \pm \alpha\beta^2}{(\alpha^2-\beta^2)}$$

$$= \frac{\alpha\beta(\alpha \pm \beta)}{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)} \begin{cases} \rho_1 = \dfrac{\alpha\beta(\alpha+\beta)}{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)} = \dfrac{\alpha\beta}{\alpha-\beta} \\[2ex] \rho_2 = \dfrac{\alpha\beta(\alpha-\beta)}{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)} = \dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}. \end{cases}$$

2. **Νά ἐξεταστεῖ πόσες ρίζες ἔχουν οἱ παρακάτω ἐξισώσεις:**

α) $x^2-sx-1=0$ **β)** $\alpha^2x^2-2\alpha\beta x+\beta^2=0,\ \alpha\neq0$ **γ)** $\alpha^2x^2-2\alpha x+1+\alpha^2\beta^2=0,\ \alpha\neq0$.

Ἔχουμε:

α) $\Delta = s^2-4\cdot1\cdot(-1) = s^2+4>0$. Ἄρα ἡ ἐξίσωση ἔχει δύο ρίζες ἄνισες. Στό ἴδιο συμπέρασμα καταλήγουμε ἄν παρατηρήσουμε ὅτι οἱ συντελεστές α καί γ εἶναι ἑτερόσημοι (§ 8.2 παρατ. 1).

β) $\Delta' = \alpha^2\beta^2 - \alpha^2\beta^2 = 0$. Ἄρα ἡ ἐξίσωση ἔχει μιά ρίζα διπλή, τήν $\rho = \frac{\alpha\beta}{\alpha^2} = \frac{\beta}{\alpha}$.

γ) $\Delta' = \alpha^2 - \alpha^2(1+\alpha^2\beta^2) = \alpha^2 - \alpha^2 - \alpha^4\beta^2 = -\alpha^4\beta^2$. Συνεπῶς, ἀφοῦ $\alpha \neq 0$, ἄν καί $\beta \neq 0$, θά εἶναι $\Delta' < 0$ καί ἡ ἐξίσωση δέν ἔχει ρίζες στό $\mathbb{R}$.

Ἄν $\beta = 0$, τότε $\Delta' = 0$ καί ἡ ἐξίσωση ἔχει τή διπλή ρίζα $\rho = \frac{\alpha}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha}$.

3. Νά λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις :

α) $4\,\sigma\upsilon\nu^2 x - 2(\sqrt{3}+1)\sigma\upsilon\nu x + \sqrt{3} = 0$

591. β) $x^2 - 7|x| - 18 = 0$.

α) Θέτουμε $\sigma\upsilon\nu x = y$ (1), ὁπότε ἔχουμε τήν ἐξίσωση:

$4y^2 - 2(\sqrt{3}+1)y + \sqrt{3} = 0$ μέ $y \in [-1, +1]$.

$$\begin{aligned} \text{Ἔχουμε}\quad \Delta' &= (\sqrt{3}+1)^2 - 4\sqrt{3} \\ &= 3 + 2\sqrt{3} + 1 - 4\sqrt{3} \\ &= 3 - 2\sqrt{3} + 1 \\ &= (\sqrt{3}-1)^2. \end{aligned}$$

Ἄρα ἔχουμε :

$$\rho_{1,2} = \frac{(\sqrt{3}+1) \pm \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}{4} = \frac{(\sqrt{3}+1) \pm (\sqrt{3}-1)}{4} =$$

$$= \begin{cases} \rho_1 = \dfrac{\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-1}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \rho_2 = \dfrac{\sqrt{3}+1-\sqrt{3}+1}{4} = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Ἀπό τήν (1) ἔχουμε:

γιά $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ἤ $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6}$. Ἑπομένως $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ $k \in \mathbb{Z}$,

γιά $y = \frac{1}{2}$, $\sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2}$ ἤ $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3}$. Ἑπομένως $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ $k \in \mathbb{Z}$.

β) Ἐπειδή $|x|^2 = x^2$ (§ 3.14), ἡ ἐξίσωση γράφεται $|x|^2 - 7|x| - 18 = 0$ καί, ἄν θέσουμε $|x| = y$ (2), τότε ἔχουμε :

$y^2 - 7y - 18 = 0$ μέ $y \in \mathbb{R}_+$.

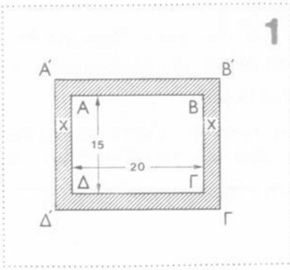
Εἶναι $\Delta = 49 + 72 = 121$ καί

$$\rho_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{121}}{2} = \frac{7 \pm 11}{2} \begin{cases} \rho_1 = 9 \\ \rho_2 = -2 \end{cases}$$

Ἡ $\rho_2 = -2$ ἀπορρίπτεται, ἐπειδή $-2 \notin \mathbb{R}_+$, ὁπότε ἀπό τήν (2) ἔχουμε: γιά $y = 9$, $|x| = 9$, ὁπότε $x = \pm 9$ (§ 3.14 ἐφαρ. 1).

4. **Γύρω ἀπό μιά πισίνα ΑΒΓΔ (σχ. 1) μέ διαστάσεις 15 m καί 20 m θέλουμε νά σχηματίσουμε μιά πράσινη περιμετρική ζώνη μέ ἐμβαδό 200 m² καί σταθερό πλάτος. Νά βρεθεῖ τό πλάτος αὐτῆς τῆς ζώνης.**

Ἔστω x τό πλάτος τῆς ζώνης ($x > 0$). Τότε τό ὀρθογώνιο Α΄Β΄Γ΄Δ΄ ἔχει διαστάσεις $20+2x$, $15+2x$ καί ἐμβαδό $(20+2x)(15+2x)$. Τό ἐμβαδό τῆς πράσινης ζώνης βρίσκεται, ἄν ἀπό τό ἐμβαδό τοῦ Α΄Β΄Γ΄Δ΄ ἀφαιρέσουμε τό ἐμβαδό τοῦ ΑΒΓΔ πού εἶναι



$$15 \cdot 20 = 300 \text{ m}^2.$$

Ἑπομένως ἔχουμε :

$$(20+2x)(15+2x)-300 = 200$$

$$\text{ἤ} \quad 4x^2+70x-200 = 0.$$

Οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως εἶναι -20 καί $2{,}5$. Ἄρα τό πλάτος τῆς ζώνης πρέπει νά εἶναι 2,5 m (ἡ ἀρνητική λύση -20 ἀπορρίπτεται).

5. **Νά βρεθεῖ ὁ χρόνος τῆς κατακόρυφης πτώσεως ἑνός σώματος, ἄν γνωρίζουμε ὅτι κατά τό τελευταῖο δευτερόλεπτο τό σῶμα διέτρεξε διάστημα ἴσο μέ τά τρία τέταρτα τοῦ ὁλικοῦ διαστήματος.**

Ἔστω ΑΒ τό ὁλικό διάστημα καί ΓΒ τό διάστημα πού διανύει τό σῶμα στό τελευταῖο δευτερόλεπτο. Ἄν t sec εἶναι ὁ χρόνος τῆς πτώσεως ($t > 1$) γιά τό διάστημα ΑΒ, τότε γιά τό διάστημα ΑΓ θά εἶναι $t-1$.

Ὅπως ξέρουμε ὅμως ἀπό τή Φυσική, τό διάστημα s τό ὁποῖο διανύει ἕνα σῶμα πού πέφτει κατακόρυφα μέ ἀρχική ταχύτητα μηδέν σέ χρόνο t εἶναι $s = \frac{1}{2} gt^2$, ὅπου $g=10 \text{ m/sec}^2$. Ἑπομένως, ἐπειδή εἶναι ΑΒ–ΑΓ=ΓΒ, ἔχουμε:

$$\frac{1}{2} gt^2 - \frac{1}{2} g(t-1)^2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} gt^2,$$

$$t^2-(t-1)^2 = \frac{3}{4} t^2$$

$$3t^2-8t+4 = 0.$$

Οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως εἶναι 2 καί $\frac{2}{3}$. Ἄρα ὁ χρόνος τῆς πτώσεως εἶναι 2 sec. (Ἡ τιμή $\frac{2}{3}$ sec ἀπορρίπτεται, γιατί σύμφωνα μέ τό πρόβλημα ὁ ὁλικός χρόνος εἶναι μεγαλύτερος ἀπό ἕνα δευτερόλεπτο).

6. **Γιά ποιές τιμές τοῦ λ οἱ παρακάτω ἐξισώσεις ἔχουν ἴσες ρίζες:**

α) $\lambda x^2-(\lambda-1)x+2\lambda-2 = 0$

β) $x^2-2(\lambda-1)x+\lambda^2-2\lambda+1 = 0$

γ) $\lambda x^2-3(\lambda-3)x-(2\lambda+10) = 0.$

Γιά νά ἔχουν οἱ ἐξισώσεις ἴσες ρίζες, θά πρέπει $\Delta = 0$ (ἤ $\Delta' = 0$).

α) $\Delta = (\lambda-1)^2 - 4\lambda(2\lambda-2) = -7\lambda^2+6\lambda+1$

Θά πρέπει λοιπόν $-7\lambda^2+6\lambda+1=0$. Ἄν λύσουμε τήν ἐξίσωση αὐτή, βρίσκουμε $\lambda = 1$ καί $\lambda = -\frac{1}{7}$.

β) $\Delta' = (\lambda-1)^2-(\lambda^2-2\lambda+1) = 0$ γιά κάθε τιμή τοῦ λ. Ἄρα γιά ὁποιαδήποτε τιμή τοῦ λ ἡ ἐξίσωση θά ἔχει ἴσες ρίζες.

γ) $\Delta = 9(\lambda-3)^2+4\lambda(2\lambda+10) = 17\lambda^2-14\lambda+81$.

Θά πρέπει $17\lambda^2-14\lambda+81=0$. Ἡ ἐξίσωση ὅμως αὐτή δέν ἔχει ρίζες στό $\mathbb{R}$. Συνεπῶς ἡ ἀρχική ἐξίσωση δέν ἔχει ρίζες ἴσες γιά καμιά τιμή τοῦ λ.

Ἀσκήσεις 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Ἄθροισμα καί γινόμενο ριζῶν

8.3 Ἔστω ἡ ἐξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ μέ $\alpha \neq 0$ καί $\Delta \geqslant 0$, πού, ὅπως εἴδαμε, ἔχει ὡς ρίζες τούς ἀριθμούς:

$$\rho_1 = \frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \quad \text{καί} \quad \rho_2 = \frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

Τότε θά εἶναι:

$$\rho_1+\rho_2 = \frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}+\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-\beta+\sqrt{\Delta}-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-\beta}{\alpha}$$

$$\rho_1\rho_2 = \frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\cdot\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{(-\beta+\sqrt{\Delta})(-\beta-\sqrt{\Delta})}{4\alpha^2} = \frac{\beta^2-\Delta}{4\alpha^2} = \frac{\beta^2-(\beta^2-4\alpha\gamma)}{4\alpha^2} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

Δηλαδή $\boxed{\rho_1+\rho_2 = \frac{-\beta}{\alpha}}$ **(1)** καί $\boxed{\rho_1\rho_2 = \frac{\gamma}{\alpha}}$ **(2)**

Ἔτσι μέ τίς σχέσεις (1) καί (2) μποροῦμε νά βροῦμε τό ἄθροισμα καί τό γινόμενο τῶν ριζῶν μιᾶς δευτεροβάθμιας ἐξισώσεως, χωρίς προηγουμένως νά τή λύσουμε.

Ἄν π.χ. ρ_1 καί ρ_2 εἶναι οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως $2x^2-5x+1=0$, (τῆς ὁποίας $\Delta > 0$), θά ἔχουμε:

$$\rho_1+\rho_2 = \frac{-\beta}{\alpha} = \frac{-(-5)}{2} = \frac{5}{2} \quad \text{καί} \quad \rho_1\rho_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{1}{2}$$

SOS 10 φορ.

8.4 **Ἀξιοσημείωτη ἐφαρμογή.** Ὅταν δίνεται τό ἄθροισμα s δύο ἀριθμῶν καί τό γινόμενό τους p, μποροῦμε νά βροῦμε τούς ἀριθμούς αὐτούς. Πράγματι οἱ ζητούμενοι ἀριθμοί x καί y, **ἄν** ὑπάρχουν, θά εἶναι ρίζες τῆς ἐξισώσεως

$$(\omega-x)(\omega-y)=0$$

πού εἶναι δευτεροβάθμια, μέ ἄγνωστο ω. Ἀλλά

$$(\omega-x)(\omega-y)=0 \Leftrightarrow \omega^2-(x+y)\omega+xy=0$$
$$\Leftrightarrow \omega^2-s\omega+p=0.$$

Ἡ τελευταία ἔχει ρίζες, μόνο ὅταν $\Delta=s^2-4p \geqslant 0$.

Π.χ. οἱ ἀριθμοί x καί y, πού ἔχουν ἄθροισμα 18 καί γινόμενο 65, εἶναι ρίζες τῆς ἐξισώσεως $\omega^2-18\omega+65=0$. Πράγματι οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εἶναι οἱ ἀριθμοί (§ 8.2)

$$\frac{9\pm\sqrt{9^2-65}}{1}=9\pm\sqrt{16}=9\pm4, \text{ δηλαδή } 13 \text{ καί } 5.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Ἄν ρ_1, ρ_2 εἶναι ρίζες τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, νά ἐκφρασθοῦν μέ τή βοήθεια τῶν συντελεστῶν α,β,γ τά ἀθροίσματα $\rho_1^2+\rho_2^2$ καί $\rho_1^3+\rho_2^3$.**

Εἶναι $\rho_1^2+\rho_2^2=(\rho_1+\rho_2)^2-2\rho_1\rho_2$

$$=\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)^2-2\frac{\gamma}{\alpha}$$

$$=\frac{\beta^2-2\alpha\gamma}{\alpha^2}$$

καί $\rho_1^3+\rho_2^3=(\rho_1+\rho_2)^3-3\rho_1\rho_2(\rho_1+\rho_2)$

$$=\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)^3-3\frac{\gamma}{\alpha}\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

$$=\frac{3\alpha\beta\gamma-\beta^3}{\alpha^3}.$$

2. **Ἄν ρ_1 καί ρ_2 εἶναι οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως $x^2-5x+6=0$, νά ὑπολογιστοῦν, χωρίς νά βρεθοῦν οἱ ρίζες, οἱ παραστάσεις:**

α) $\dfrac{1}{\rho_1}+\dfrac{1}{\rho_2}$ **β)** $\dfrac{\rho_1^2}{\rho_2}+\dfrac{\rho_2^2}{\rho_1}$.

Ἀπό τήν ἐξίσωση $x^2-5x+6=0$ ἔχουμε $\rho_1+\rho_2=5$, $\rho_1\rho_2=6$ ὁπότε εἶναι:

α) $\dfrac{1}{\rho_1}+\dfrac{1}{\rho_2}=\dfrac{\rho_1+\rho_2}{\rho_1\rho_2}=\dfrac{5}{6}$

β) $\dfrac{\rho_1^2}{\rho_2}+\dfrac{\rho_2^2}{\rho_1}=\dfrac{\rho_1^3+\rho_2^3}{\rho_1\rho_2}=\dfrac{(\rho_1+\rho_2)^3-3\rho_1\rho_2(\rho_1+\rho_2)}{\rho_1\rho_2}=\dfrac{5^3-3\cdot6\cdot5}{6}=\dfrac{35}{6}$.

3. Ἀπό τά ζεύγη τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν μέ σταθερό ἄθροισμα νά βρεθοῦν ἐκεῖνοι πού ἔχουν μέγιστο γινόμενο.

Ἔστω x,y οἱ ζητούμενοι ἀριθμοί, k τό σταθερό ἄθροισμά τους καί p τό γινόμενό τους. Τότε ἔχουμε:

$$x+y=k \quad \text{καί} \quad xy=p.$$

Ἄρα (§ 8.4) οἱ x,y εἶναι ρίζες τῆς ἐξισώσεως $\omega^2-k\omega+p=0$ (1)

Ἐπειδή ὅμως $x,y \in \mathbb{R}$, πρέπει ἡ διακρίνουσα τῆς (1) νά εἶναι μεγαλύτερη ἤ ἴση μέ τό μηδέν. Δηλαδή

$$\Delta = k^2-4p \geqslant 0 \quad \text{ἤ} \quad p \leq \frac{k^2}{4}.$$

Δηλαδή ἡ μεγαλύτερη τιμή τοῦ p εἶναι ἡ $\frac{k^2}{4}$. Τότε ὅμως

$\Delta = k^2-4\frac{k^2}{4} = k^2-k^2=0$, ὁπότε οἱ ρίζες εἶναι ἴσες, $x=y=\frac{k}{2}$.

Π.χ. Τό γινόμενο $x^2(8-x^2)$, ἐπειδή τό ἄθροισμα $x^2+(8-x^2)=8$ εἶναι σταθερό, γίνεται μέγιστο, ὅταν $x^2=8-x^2$ ἤ $2x^2=8$ καί $x=\pm 2$.

Ἀσκήσεις 8, 9, 10, 11, 12, 13.

Πρόσημο ριζῶν

8.5 Ἡ διακρίνουσα, τό γινόμενο καί τό ἄθροισμα τῶν ριζῶν τῆς δευτεροβάθμιας ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, μᾶς δίνουν τή δυνατότητα νά προσδιορίζουμε τό πρόσημο τῶν ριζῶν της ρ_1 καί ρ_2 χωρίς νά τή λύνουμε.

Ἐξετάζουμε πρῶτα τό πρόσημο τοῦ $\frac{\gamma}{\alpha}$. Ἄν εἶναι:

- $\frac{\gamma}{\alpha}<0$, τότε, ἐπειδή οἱ α καί γ εἶναι ἑτερόσημοι (§ 8.2 Παρατ. 1), ἡ ἐξίσωση ἔχει δύο ρίζες ἄνισες, οἱ ὁποῖες εἶναι καί ἑτερόσημες ἀφοῦ τό γινόμενό τους $\rho_1\rho_2=\frac{\gamma}{\alpha}$ εἶναι ἀρνητικό.
- $\frac{\gamma}{\alpha}=0$, τότε $\rho_1\rho_2=\frac{\gamma}{\alpha}=0$, ὁπότε ἡ μία ρίζα τουλάχιστο, ἔστω ἡ ρ_1, θά εἶναι μηδέν καί ἡ ἄλλη θά εἶναι $\rho_2=\rho_1+\rho_2=\frac{-\beta}{\alpha}$.
- $\frac{\gamma}{\alpha}>0$, τότε ἡ ἐξίσωση ἔχει λύση στό $\mathbb{R}$, μόνο ἄν $\Delta \geqslant 0$. Στήν περίπτωση αὐτή οἱ ρίζες εἶναι ὁμόσημες, θετικές ὅταν $\rho_1+\rho_2=\frac{-\beta}{\alpha}>0$, καί ἀρνητικές ὅταν $\rho_1+\rho_2=\frac{-\beta}{\alpha}<0$.

Τά παραπάνω συμπεράσματα συνοψίζονται στόν ἀκόλουθο πίνακα.

Πρόσημο τῶν ριζῶν ρ_1, ρ_2 τῆς $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ μέ $\rho_1 \leqslant \rho_2$		
$\frac{\gamma}{\alpha}<0$		ρίζες ἑτερόσημες $\rho_1<0<\rho_2$
$\frac{\gamma}{\alpha}=0$		οἱ ρίζες εἶναι 0 καί $\frac{-\beta}{\alpha}$
$\frac{\gamma}{\alpha}>0$ καί $\Delta \geqslant 0$	$\frac{-\beta}{\alpha}>0$	δύο ρίζες θετικές $0<\rho_1 \leqslant \rho_2$
	$\frac{-\beta}{\alpha}<0$	δύο ρίζες ἀρνητικές $\rho_1 \leqslant \rho_2<0$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Ἡ ἐξίσωση $5x^2+7x-6=0$ ἔχει ρίζες ἄνισες καί ἑτερόσημες, γιατί εἶναι $\frac{\gamma}{\alpha}=-\frac{6}{5}<0$.

Ἡ ἐξίσωση $-x^2+3x=0$ ἔχει ρίζες 0 καί $\frac{-\beta}{\alpha}=-\frac{3}{-1}=3$, γιατί εἶναι $\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{0}{-1}=0$.

Ἡ ἐξίσωση $x^2-7x+10=0$ ἔχει δύο ρίζες θετικές ἄνισες, γιατί εἶναι $\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{10}{1}=10>0$, $\Delta=49-4 \cdot 1 \cdot 10=9>0$ καί $\frac{-\beta}{\alpha}=7>0$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Νά βρεθοῦν οἱ τιμές τοῦ λ, γιά τίς ὁποῖες ἡ ἐξίσωση $x^2-2x+\lambda+2=0$ ἔχει α) 2 ρίζες ἑτερόσημες β) 2 ρίζες θετικές καί ἄνισες γ) 2 ρίζες ἀρνητικές.

Εἶναι $\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\lambda+2}{1}=\lambda+2$, $\Delta'=1-(\lambda+2)=-\lambda-1$, $\frac{-\beta}{\alpha}=2$.

α) Πρέπει νά εἶναι $\frac{\gamma}{\alpha}<0$ ἤ $\lambda+2<0$. Ἄρα $\lambda<-2$.

β) Πρέπει νά εἶναι $\frac{\gamma}{\alpha}>0$ **καί** $\Delta'>0$, ἀφοῦ $\frac{-\beta}{\alpha}=2>0$. Ἑπομένως πρέπει $\lambda+2>0$ **καί** $-\lambda-1>0$, δηλαδή: $\lambda>-2$ **καί** $\lambda<-1$, ἄρα $-2<\lambda<-1$.

γ) Πρέπει νά είναι $\frac{\gamma}{\alpha} > 0$ καί $\Delta' > 0$ καί $\frac{-\beta}{\alpha} < 0$. Ἐπειδή ὅμως $\frac{-\beta}{\alpha} = 2 > 0$, δέν ὑπάρχει τιμή τοῦ λ, γιά νά ἔχουμε δύο ρίζες ἀρνητικές.

2. **Ἄν x_1, x_2 εἶναι οἱ ρίζες τῆς $\alpha x^2+\beta x+\gamma = 0$ μέ $\alpha\beta\gamma \neq 0$ καί ρ_1, ρ_2 εἶναι οἱ ρίζες τῆς $x_1(x-x_2)^2+x_2(x-x_1)^2 = 0$, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι, ἄν οἱ x_1, x_2 εἶναι ἑτερόσημες, τότε καί οἱ $\rho_1\ \rho_2$ εἶναι ἑτερόσημες.**

Ἡ ἐξίσωση $x_1(x-x_2)^2+x_2(x-x_1)^2 = 0$ μετά τίς πράξεις γίνεται

$$(x_1+x_2)x^2-4x_1x_2x+x_1x_2(x_1+x_2) = 0$$

καί ἐπειδή ἀπό τήν πρώτη ἐξίσωση ἔχουμε $x_1+x_2 = \frac{-\beta}{\alpha}$ καί $x_1x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$

θά εἶναι $$-\alpha\beta x^2-4\alpha\gamma x-\beta\gamma = 0.$$

Γιά νά ἔχει ἡ ἐξίσωση αὐτή ρίζες ἑτερόσημες, πρέπει καί ἀρκεῖ

$$\frac{-\beta\gamma}{-\alpha\beta} < 0 \quad \text{ἤ} \quad \frac{\gamma}{\alpha} < 0.$$

Αὐτό ὅμως ἰσχύει, γιατί ἡ $\alpha x^2+\beta x+\gamma = 0$ ἔχει ρίζες ἑτερόσημες.

3. **Ἄν k, λ, μ εἶναι μέτρα πλευρῶν τριγώνου, νά δειχθεῖ ὅτι ἡ ἐξίσωση**

$$kx^2-2(\lambda+\mu)x+k = 0$$

ἔχει δύο ρίζες θετικές καί ἄνισες.

Θά πρέπει $\frac{\gamma}{\alpha} > 0$ **καί** $\Delta' > 0$ **καί** $\frac{-\beta}{\alpha} > 0$. Δηλαδή

$$\frac{k}{k} > 0 \quad \textbf{καί} \quad (\lambda+\mu)^2-k^2 > 0 \quad \textbf{καί} \quad \frac{2(\lambda+\mu)}{k} > 0 \quad \text{ἤ}$$

$$1 > 0 \quad \textbf{καί} \quad (\lambda+\mu-k)(\lambda+\mu+k) > 0 \quad \textbf{καί} \quad k(\lambda+\mu) > 0.$$

Οἱ ἀνισότητες αὐτές ἀληθεύουν, γιατί οἱ k, λ, μ εἶναι θετικοί ἀριθμοί καί $\lambda+\mu > k$ ἤ $\lambda+\mu-k > 0$, ἐπειδή κάθε πλευρά τριγώνου εἶναι μικρότερη ἀπό τό ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων.

Ἀσκήσεις ***14, 15, 16.***

ΤΡΙΩΝΥΜΟ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

Μορφές τριωνύμου δεύτερου βαθμοῦ

8.6 Τό πολυώνυμο $f(x) = \alpha x^2+\beta x+\gamma$, μέ $\alpha \neq 0$, ὀνομάζεται **τριώνυμο δεύτερου βαθμοῦ.** Οἱ ρίζες ρ_1, ρ_2 τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma = 0$ λέγονται καί **ρίζες τοῦ τριωνύμου** καί ἡ διακρίνουσα $\Delta = \beta^2-4\alpha\gamma$ **διακρίνουσα τοῦ τριωνύμου.** Οἱ ρίζες τοῦ τριωνύμου προφανῶς ὑπάρχουν, ὅταν $\Delta \geqslant 0$.

Ἀπό τή λύση τῆς δευτεροβάθμιας ἐξισώσεως (§ 8.2) $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ προκύπτουν διάφορες μορφές τοῦ τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$. Ἔτσι ἀπό τήν (3) τῆς § 8.2 ἔχουμε

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\Delta}{4\alpha^2}\right] \qquad (1)$$

Εἰδικότερα

- Ἄν $\Delta>0$, καί ρ_1,ρ_2 εἶναι οἱ ρίζες του, τότε ἀπό τήν (4), λόγω τῶν (5) τῆς § 8.2, ἔχουμε $x^2+\dfrac{\beta}{\alpha}x+\dfrac{\gamma}{\alpha}=(x-\rho_1)(x-\rho_2)$, ἄρα

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2) \qquad (2)$$

- Ἄν $\Delta=0$, τότε $\rho_1=\rho_2=\rho=-\dfrac{\beta}{2\alpha}$, ὁπότε ἔχουμε:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-\rho)^2=\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 \qquad (3)$$

- Ἄν $\Delta<0$, τότε ἡ (1) γράφεται καί

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{|\Delta|}{4\alpha^2}\right] \qquad (4)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Γιά τό τριώνυμο $f(x)=2x^2-6x+4$, πού ἔχει ρίζες $\rho_1=1$ καί $\rho_2=2$, ἔχουμε:

$$f(x)=2(x-1)(x-2).$$

$\alpha(\rho-1)(\rho-2)$

2. Ἡ τιμή τοῦ λ, γιά τήν ὁποία τό τριώνυμο $f(x)=3x^2-2x+2\lambda-1$ παίρνει τή μορφή (3), βρίσκεται ἀπό τήν ἰσότητα:

$$\Delta'=0 \quad \text{ἤ} \quad 1-3(2\lambda-1)=0 \quad \text{ἤ} \quad 6\lambda-4=0 \quad \text{ἤ} \quad \lambda=\frac{2}{3}.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά παραγοντοποιηθοῦν τά τριώνυμα:**

α) $f(x)=x^2-(k+\lambda+2)x+2(k+\lambda)$

β) $g(x)=(x+3)^2+(x+4)^2+(x+5)^2-(x+6)^2$.

① λύνομε τὴν ἐξίσωση. βρίσκ τὶς ρίζες και ἐφαρμόζομε τὸν τύπο.

$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)$

α) Βρίσκουμε τίς ρίζες τῆς ἐξισώσεως $f(x)=0$. Εἶναι

$$\rho_{1,2}=\frac{k+\lambda+2\pm\sqrt{(k+\lambda+2)^2-8(k+\lambda)}}{2}=\frac{k+\lambda+2\pm\sqrt{(2-k-\lambda)^2}}{2}$$

$$=\frac{k+\lambda+2\pm(2-k-\lambda)}{2} \begin{cases} \rho_1=\dfrac{k+\lambda+2+2-k-\lambda}{2}=2 \\[2ex] \rho_2=\dfrac{k+\lambda+2-2+k+\lambda}{2}=k+\lambda. \end{cases}$$

Ἄρα εἶναι $f(x)=\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)$

$=(x-2)(x-k-\lambda)$.

β) Εἶναι $g(x) = x^2+6x+9+x^2+8x+16+x^2+10x+25-x^2-12x-36$
$= 2x^2+12x+14.$

Βρίσκουμε τίς ρίζες τῆς $g(x)=0$, οἱ ὁποῖες εἶναι

$$\rho_{1,2} = \frac{-6\pm\sqrt{36-2\cdot 14}}{2} = \frac{-6\pm\sqrt{8}}{2} = \frac{-6\pm 2\sqrt{2}}{2} \begin{array}{l} \nearrow \rho_1 = -3+\sqrt{2} \\ \searrow \rho_2 = -3-\sqrt{2} \end{array}$$

Ἄρα εἶναι $g(x) = 2(x+3-\sqrt{2})(x+3+\sqrt{2})$.

2. Νά ἁπλοποιηθοῦν τά κλάσματα:

α) $\dfrac{x^2-(k+\lambda)x+k\lambda}{x^2-(1+\lambda)x+\lambda}$, β) $\dfrac{x^2-3kx+2k^2}{x^2-4k^2}$.

Παραγοντοποιοῦμε τούς ὅρους κάθε κλάσματος καί ἔχουμε:

α) $\dfrac{x^2-(k+\lambda)x+k\lambda}{x^2-(1+\lambda)x+\lambda} = \dfrac{(x-k)(x-\lambda)}{(x-1)(x-\lambda)} = \dfrac{x-k}{x-1}$.

β) $\dfrac{x^2-3kx+2k^2}{x^2-4k^2} = \dfrac{(x-2k)(x-k)}{(x-2k)(x+2k)} = \dfrac{x-k}{x+2k}$.

3. Νά βρεθοῦν οἱ τιμές τοῦ λ, γιά τίς ὁποῖες τό τριώνυμο

$$f(x) = x^2-(6\lambda-3)x+9\lambda^2-8$$

εἶναι τετράγωνο πρωτοβάθμιου πολυωνύμου τό ὁποῖο καί νά προσδιοριστεῖ.

Γιά νά εἶναι τετράγωνο πρωτοβάθμιου πολυωνύμου, ἐπειδή $\alpha=1$, θά πρέπει $\Delta=0$. Δηλαδή $(6\lambda-3)^2-4(9\lambda^2-8)=0$ ἤ $\lambda=\dfrac{41}{36}$.

Γιά $\Delta = 0$ τό τριώνυμο γίνεται:

$$f(x) = \alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \left(x+\frac{-(6\lambda-3)}{2}\right)^2$$

καί γιά $\lambda=\dfrac{41}{36}$, $f(x) = \left(x-\dfrac{6\cdot\frac{41}{36}-3}{2}\right)^2 = \left(x-\dfrac{23}{12}\right)^2$.

Ἀσκήσεις 17, 18, 19.

Πρόσημο τριωνύμου

8.7 Ἔστω f ἡ πολυωνυμική συνάρτηση, μέ τιμή στό x τό τριώνυμο

$$f(x) = \alpha x^2+\beta x+\gamma.$$

Θά ἐξετάσουμε τό πρόσημο τοῦ $f(x)$ γιά τίς διάφορες τιμές τῆς μεταβλητῆς x. Διακρίνουμε τίς περιπτώσεις:

1. **$\Delta>0$.** Τότε τό τριώνυμο, πού ἔχει δύο ρίζες ρ_1, ρ_2 ἄνισες, γράφεται (§ 8.6)

$$f(x) = \alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)$$

Ὑποθέτοντας $\rho_1 < \rho_2$ ἔχουμε:

- Προφανῶς $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$
- Γιά $x < \rho_1 < \rho_2$ εἶναι $x-\rho_1 < 0$ **καί** $x-\rho_2 < 0$, ὁπότε $(x-\rho_1)(x-\rho_2) > 0$.

  Ἄρα τό τριώνυμο εἶναι **ὁμόσημο** τοῦ α.
- Γιά $\rho_1 < \rho_2 < x$ εἶναι $x-\rho_1 > 0$ **καί** $x-\rho_2 > 0$, ὁπότε $(x-\rho_1)(x-\rho_2) > 0$.

  Ἄρα τό τριώνυμο εἶναι **ὁμόσημο** τοῦ α.
- Γιά $\rho_1 < x < \rho_2$ ἔχουμε $x-\rho_1 > 0$ **καί** $x-\rho_2 < 0$, ὁπότε $(x-\rho_1)(x-\rho_2) < 0$.

  Ἄρα τό τριώνυμο εἶναι **ἑτερόσημο** τοῦ α.

2. $\Delta = 0$. Τότε τό τριώνυμο (§ 8.6) γράφεται

$$f(x) = \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$$

Ἄρα μηδενίζεται γιά $x = \frac{-\beta}{2\alpha}$, ἐνῶ γιά κάθε $x \neq \frac{-\beta}{2\alpha}$, ἐπειδή $\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 > 0$, εἶναι **ὁμόσημο** τοῦ α.

3. $\Delta < 0$. Τότε ἀπό τή σχέση (4) τῆς § 8.6 ἔχουμε:

$$f(x) = \alpha\left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{|\Delta|}{4\alpha^2}\right]$$

καί ἐπειδή $\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 \geqslant 0$ καί $\frac{|\Delta|}{4\alpha^2} > 0$, ἡ παράσταση $\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{|\Delta|}{4\alpha^2}$ εἶναι πάντοτε θετική καί τό τριώνυμο εἶναι **ὁμόσημο** τοῦ α γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Ἀπό τά προηγούμενα συμπεραίνουμε ὅτι:

Τό τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ εἶναι ἑτερόσημο τοῦ α μόνο στήν περίπτωση πού εἶναι $\Delta > 0$ καί ὁ x παίρνει τιμές πού βρίσκονται μεταξύ τῶν ριζῶν τοῦ τριωνύμου.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Ἔστω ξ ἕνας πραγματικός ἀριθμός. Τότε, ἐξετάζοντας τήν τιμή τῆς f στό ξ, δηλαδή τήν $f(\xi)=\alpha\xi^2+\beta\xi+\gamma$, ἔχουμε τίς περιπτώσεις:

   - **$f(\xi)=0$.** Τότε ὁ ξ εἶναι ρίζα τοῦ $f(x)$
   - **$\alpha f(\xi)<0$,** δηλαδή ὁ $f(\xi)$ εἶναι ἑτερόσημος τοῦ α. Τότε τό τριώνυμο ἔχει δύο ρίζες ἄνισες ρ_1, ρ_2 μεταξύ τῶν ὁποίων βρίσκεται ὁ ἀριθμός ξ.
   - **$\alpha f(\xi)>0$,** δηλαδή ὁ $f(\xi)$ εἶναι ὁμόσημος τοῦ α. Τότε, **ἄν** ὑπάρχουν οἱ ρίζες ρ_1, ρ_2 καί εἶναι $\rho_1<\rho_2$, τό $\xi\notin[\rho_1, \rho_2]$. Στή περίπτωση αὐτή μποροῦμε νά διακρίνουμε ποιά ἀπό τίς περιπτώσεις $\xi<\rho_1$ ἤ $\xi>\rho_2$ ἔχουμε, ἄν συγκρίνουμε τόν ξ μέ τό ἡμιάθροισμα $\dfrac{-\beta}{2\alpha}=\dfrac{\rho_1+\rho_2}{2}$, ἐπειδή εἶναι πάντοτε $\rho_1<\dfrac{\rho_1+\rho_2}{2}<\rho_2$.

2. Ἄν γιά τούς πραγματικούς ἀριθμούς ξ_1, ξ_2 ἰσχύει $\mathbf{f(\xi_1)\cdot f(\xi_2)<0}$, τότε οἱ ἀριθμοί $f(\xi_1)$ καί $f(\xi_2)$ εἶναι ἑτερόσημοι. Αὐτό σημαίνει ὅτι ἕνας ἀπό τούς $f(\xi_1)$, $f(\xi_2)$ εἶναι ἑτερόσημος τοῦ α. Ἑπομένως (Παρατ. 1) ἕνας μόνο ἀπό τούς ξ_1, ξ_2 βρίσκεται μεταξύ τῶν ριζῶν τοῦ τριωνύμου $f(x)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Ἔστω τό τριώνυμο $-x^2+6x-9$. Ἐπειδή $\Delta'=3^2-(-1)(-9)=9-9=0$, τό τριώνυμο ἔχει τή διπλή ρίζα $\rho=\dfrac{-\beta}{2\alpha}=3$ καί εἶναι ὁμόσημο τοῦ α, δηλαδή ἀρνητικό γιά κάθε $x\neq 3$, ἐνῶ γιά $x=3$ μηδενίζεται.

Τό τριώνυμο $2x^2-16x+30$, ἐπειδή $\Delta'=8^2-2\cdot 30=4>0$, εἶναι ἑτερόσημο τοῦ $\alpha=2$, δηλαδή ἀρνητικό γιά τίς τιμές τοῦ x πού βρίσκονται μεταξύ τῶν ριζῶν του 3 καί 5. Ἑπομένως γιά $3<x<5$ εἶναι ἀρνητικό καί γιά $x<3$ ἤ $x>5$ θετικό.

Τά συμπεράσματα αὐτά συνοψίζονται στούς παρακάτω πίνακες

$\Delta=0$	x	$-\infty$	3	$+\infty$
	$-x^2+6x-9$	$-$	0	$-$

$\Delta>0$	x	$-\infty$		3		5		$+\infty$
	$2x^2-16x+30$		$+$	0	$-$	0	$+$	

1. **Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ἄν α, β, γ εἶναι μέτρα πλευρῶν τριγώνου, τότε τό τριώνυμο**

$$f(x) = \beta^2 x^2 + (\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)x + \gamma^2, \quad \beta \neq 0$$

εἶναι θετικό γιά ὁποιαδήποτε τιμή τοῦ x.

Γιά νά εἶναι τό τριώνυμο πάντοτε θετικό, δηλαδή ὁμόσημο τοῦ συντελεστῆ β^2 γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$, πρέπει $\Delta < 0$. Εἶναι:

$$\begin{aligned}\Delta &= (\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)^2-4\beta^2\gamma^2\\ &= [\beta^2+\gamma^2-\alpha^2+2\beta\gamma][\beta^2+\gamma^2-\alpha^2-2\beta\gamma]\\ &= [(\beta+\gamma)^2-\alpha^2]\,[(\beta-\gamma)^2-\alpha^2]\\ &= (\beta+\gamma+\alpha)\,(\beta+\gamma-\alpha)\,(\beta-\gamma+\alpha)\,(\beta-\gamma-\alpha).\end{aligned}$$

Ἐπειδή α, β, γ εἶναι πλευρές τριγώνου, θά εἶναι

$\alpha+\beta+\gamma > 0$ [ἄθροισμα θετικῶν ἀριθμῶν]

$\beta+\gamma-\alpha > 0$ [$\beta+\gamma > \alpha$]

$\beta-\gamma+\alpha > 0$ [$\beta+\alpha > \gamma$]

$\beta-\gamma-\alpha < 0$ [$\beta < \alpha+\gamma$]

Ἄρα μόνο ὁ τελευταῖος παράγοντας εἶναι ἀρνητικός καί ἑπομένως $\Delta < 0$.

2. **Νά βρεθοῦν οἱ τιμές τοῦ λ, γιά τίς ὁποῖες τό τριώνυμο $f(x) = x^2 - x + \lambda - 1$ εἶναι γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$ θετικό καί γιά ποιές τιμές τῶν λ καί x τό τριώνυμο γίνεται ἀρνητικό.**

Ἐπειδή $\alpha = 1 > 0$, γιά νά εἶναι τό τριώνυμο πάντοτε θετικό, δηλαδή ὁμόσημο τοῦ α, θά πρέπει νά εἶναι $\Delta < 0$. Ἑπομένως:

$$1-4(\lambda-1) < 0 \quad \text{ἤ} \quad \lambda > \frac{5}{4}.$$

Τό τριώνυμο γίνεται ἀρνητικό, δηλαδή ἑτερόσημο τοῦ α, ὅταν $\Delta > 0$ καί ὁ x παίρνει τιμές μεταξύ τῶν ριζῶν. Δηλαδή

ὅταν $1-4(\lambda-1) > 0$ ἤ $\lambda < \dfrac{5}{4}$ καί (ἐπειδή οἱ ρίζες εἶναι

$\dfrac{1+\sqrt{5-4\lambda}}{2}$, $\dfrac{1-\sqrt{5-4\lambda}}{2}$), $\quad \dfrac{1-\sqrt{5-4\lambda}}{2} < x < \dfrac{1+\sqrt{5-4\lambda}}{2}$

3. **Νά ἀποδειχθεῖ, χωρίς νά χρησιμοποιηθεῖ ἡ διακρίνουσα, ὅτι τά τριώνυμα:**

α) $f(x) = (x-k)(x-\lambda)+(x-\lambda)(x-\mu)+(x-\mu)(x-k) \quad (k < \lambda < \mu)$

β) $g(x) = (x-k)(x-\lambda)+p(x-k)+q(x-\lambda) \quad (k \neq \lambda, \ \ pq > 0)$

ἔχουν ρίζες ἄνισες.

α) Μετά τίς πράξεις ἔχουμε :

$f(x) = 3x^2-2(k+\lambda+\mu)x+k\lambda+\lambda\mu+\mu k$, ὁπότε $\alpha = 3 > 0$.

Ἐξάλλου ἀπό τήν ἀρχική μορφή τοῦ $f(x)$ εἶναι $f(\lambda) = (\lambda-\mu)(\lambda-k) < 0$, ἐπειδή $k < \lambda < \mu$. Ἄρα $\alpha f(\lambda) < 0$.

Συνεπῶς (§ 8.7, Παρατ. 1) τό τριώνυμο ἔχει ρίζες ἄνισες.

β) Ἔχουμε $g(k) = q(k-\lambda)$, $\quad g(\lambda) = p(\lambda-k)$, $\quad$ ἄρα

$g(k) \cdot g(\lambda) = -pq(k-\lambda)^2 < 0$.

Συνεπῶς (§ 8.7 Παρατ. 2) τό τριώνυμο ἔχει ρίζες ἄνισες.

4. Νά βρεθεῖ ἡ μέγιστη καί ἐλάχιστη τιμή τοῦ κλάσματος :

$$\frac{x^2-3x+4}{x^2+3x+4}$$

γιά πραγματικές τιμές τοῦ x.

Θέτουμε $\frac{x^2-3x+4}{x^2+3x+4}=y$. Τότε θά εἶναι :

$$x^2-3x+4=y(x^2+3x+4) \quad \text{ἤ}$$

$$(y-1)x^2+3(y+1)x+4(y-1)=0.$$

Ἀφοῦ ὁ x εἶναι πραγματικός ἀριθμός, θά πρέπει $\Delta \geqslant 0$, δηλαδή:

$$9(y+1)^2-16(y-1)^2 \geqslant 0$$

$$\text{ἤ} \quad -7y^2+50y-7 \geqslant 0.$$

Ἐπειδή τό τριώνυμο $-7y^2+50y-7$ ἔχει $\alpha=-7<0$ καί ρίζες τίς $\frac{1}{7}$, 7 θά γίνεται θετικό, δηλαδή ἑτερόσημο τοῦ α, ὅταν $\frac{1}{7} \leqslant y \leqslant 7$.

Ἄρα ἡ ἐλάχιστη τιμή τοῦ κλάσματος εἶναι $\frac{1}{7}$ καί ἡ μέγιστη 7.

5. Νά συγκριθοῦν οἱ ρίζες τοῦ τριωνύμου:

α) $f(x)=3x^2-5x-7$ μέ τόν ἀριθμό 2

β) $g(x)=x^2-6x+8$ μέ τόν ἀριθμό 5.

α) Ἐπειδή $\alpha=3>0$ καί $f(2)=-5$, ἔχουμε $\alpha f(2)<0$.

Ἄρα τό f(x) ἔχει ρίζες x_1, x_2 ἄνισες καί ὁ ἀριθμός 2 βρίσκεται μεταξύ τους, δηλαδή $x_1<2<x_2$.

β) Ἐπειδή $\alpha=1>0$ καί $g(5)=3>0$, ἔχουμε $\alpha g(5)>0$. Ἐπειδή ἀκόμη εἶναι $\Delta'=9-8=1>0$, τό τριώνυμο ἔχει ρίζες ἄνισες καί ἑπομένως ὁ ἀριθμός 5 βρίσκεται ἐκτός τοῦ διαστήματος τῶν ριζῶν.

Γιά νά διαπιστώσουμε ἄν ὁ ἀριθμός 5 εἶναι μικρότερος ἀπό τή μικρότερη ἤ μεγαλύτερος ἀπό τή μεγαλύτερη ρίζα, τόν συγκρίνουμε μέ τό ἡμιάθροισμα τῶν ριζῶν $\frac{-\beta}{2\alpha}$ πού βρίσκεται πάντοτε μεταξύ τῶν ριζῶν.

Εἶναι $\frac{-\beta}{2\alpha}=\frac{6}{2\cdot 1}=3$ καί ἐπειδή $\rho_1<3<\rho_2$ καί $5>3$ θά εἶναι $5>\rho_2$.

Ἀσκήσεις 20, 21, 22, 23, 24.

Ἀνισώσεις δεύτερου βαθμοῦ

8.8 Μιά ἀνίσωση δεύτερου βαθμοῦ μέ ἄγνωστο $x \in \mathbb{R}$ εἶναι τῆς μορφῆς

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma>0 \quad \text{ἤ} \quad \alpha x^2+\beta x+\gamma<0 \quad (\alpha \neq 0).$$

Γιά νά λύσουμε μιά τέτοια ἀνίσωση, πρέπει νά βροῦμε τίς τιμές τοῦ x, γιά τίς ὁποῖες τό τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ γίνεται ἀντιστοίχως θετικό ἤ ἀρνητικό. Ἄρα ἡ λύση μιᾶς ἀνισώσεως δεύτερου βαθμοῦ ἀνάγεται στήν εὕρεση τοῦ προσήμου τοῦ τριωνύμου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. $-x^2+6x-8>0$. Ἐδῶ ζητοῦμε τίς τιμές τοῦ x, γιά τίς ὁποῖες τό τριώνυμο $-x^2+6x-8$ εἶναι θετικό, δηλαδή ἑτερόσημο τοῦ $\alpha=-1$. Ἐπειδή ὅμως $\Delta'=9-(-1)(-8)=1>0$, τό τριώνυμο $-x^2+6x-8$ εἶναι ἑτερόσημο τοῦ $\alpha=-1$ γιά τιμές τοῦ x πού εἶναι μεταξύ τῶν ριζῶν του 2 καί 4, ὅπως φαίνεται καί στόν παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$-x^2+6x-8$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Συνεπῶς τό σύνολο λύσεων τῆς ἀνισώσεως εἶναι τό διάστημα (2, 4).

2. $x^2-6x+10>0$. Ἐδῶ ζητοῦμε τίς τιμές τοῦ x, γιά τίς ὁποῖες τό τριώνυμο εἶναι θετικό, δηλαδή ὁμόσημο τοῦ $\alpha=1$. Ἐπειδή ὅμως εἶναι $\Delta'=9-10=$ $=-1<0$, τό τριώνυμο εἶναι πάντοτε ὁμόσημο τοῦ α καί συνεπῶς ἡ ἀνίσωση ἀληθεύει γιά κάθε $x\in\mathbb{R}$.

3. $4x^2-12x+9<0$. Ἔχουμε $\Delta'=36-4\cdot 9=0$. Ἄρα τό τριώνυμο ἔχει διπλή ρίζα τήν $\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$ καί εἶναι ὁμόσημο τοῦ $\alpha=4$, δηλαδή θετικό, γιά κάθε $x\neq\frac{3}{2}$. Συνεπῶς ἡ ἀνίσωση δέν ἔχει λύση.

4. Στό παράδειγμα 1, ἄν εἴχαμε τήν $-x^2+6x-8\geqslant 0$, τότε στό σύνολο λύσεων θά πρέπει νά ὑπάρχουν καί οἱ τιμές τοῦ x, οἱ ὁποῖες μηδενίζουν τό τριώνυμο, δηλαδή οἱ ρίζες του.

Συνεπῶς ἐδῶ τό σύνολο λύσεων εἶναι τό κλειστό διάστημα [2, 4].

Ἀνισώσεις εἰδικῆς μορφῆς

8.9 Γιά νά λύσουμε ἀνισώσεις τῆς μορφῆς

$$\mathbf{A(x).B(x).\Gamma(x)...Q(x)\lesseqgtr 0} \qquad \mathbf{(1)}$$

ὅπου Α(x), Β(x), Γ(x)... Q(x) πολυώνυμα πρώτου ἤ δεύτερου βαθμοῦ ὡς πρός x, βρίσκουμε τό πρόσημο κάθε παράγοντα χωριστά καί μετά προσδιορίζουμε τό πρόσημο τοῦ γινομένου Α(x).Β(x).Γ(x)...Q(x), ὅπως φαίνεται στό ἑπόμενο

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ἔστω ἡ ἀνίσωση

$$(3x-7)(-x^2+3x+4)(x^2-6x+9)<0.$$

Βρίσκουμε τό πρόσημο κάθε παράγοντα χωριστά. Ἔτσι ἔχουμε:

x	$-\infty$		$\frac{7}{3}$		$+\infty$
$3x-7$		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$-x^2+3x+4$		$-$	0	$+$	0	$-$	

x	$-\infty$		3		$+\infty$
x^2-6x+9		$+$	0	$+$	

Τοποθετοῦμε στή συνέχεια σέ ἕναν κοινό ἄξονα τίς ρίζες τῶν παραγόντων καί σχηματίζουμε τόν παρακάτω συγκεντρωτικό πίνακα, ὁ ὁποῖος δίνει καί τό πρόσημο τοῦ γινομένου

$$\Gamma = (5x-7)(-x^2+3x+4)(x^2-6x+9)$$

x	$-\infty$		-1		$\frac{7}{3}$		3		4		$+\infty$
$3x-7$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$-x^2+3x+4$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
x^2-6x+9		$+$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
Γ		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$		$-$	

Βλέπουμε ὅτι τό γινόμενο $\Gamma = (3x-7)(-x^2+3x+4)(x^2-6x+9)$ εἶναι ἀρνητικό γιά $-1 < x < \frac{7}{3}$ καί γιά $x > 4$. Συνεπῶς ἡ ἀνίσωση ἀληθεύει γιά $-1 < x < \frac{7}{3}$ ἤ $4 < x$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Ἐπειδή εἶναι $\frac{A(x)}{B(x)} \gtrless 0 \Leftrightarrow A(x)B(x) \lesseqgtr 0$,

τό σύνολο λύσεων τῆς κλασματικῆς ἀνισώσεως $\frac{A(x)}{B(x)} \gtrless 0$ εἶναι τό ἴδιο μέ τό σύνολο λύσεων τῆς $A(x)B(x) \gtrless 0$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά λυθεῖ ἡ ἀνίσωση** $\frac{x^3-5x^2+6x}{x+1} < 0$.

Ἡ ἀνίσωση ὁρίζεται στό $\mathbb{R}-\{-1\}$ καί εἶναι :

$$\frac{x^3-5x^2+6x}{x+1} < 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^3-5x^2+6x) < 0.$$

$$\Leftrightarrow x(x+1)(x^2-5x+6) < 0.$$

Ἄν ἐργαστοῦμε ὅπως στό προηγούμενο παράδειγμα, ἔχουμε:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
x^2-5x+6		$+$	0	$-$	0	$+$	

Σχηματίζουμε λοιπόν τόν παρακάτω συγκεντρωτικό πίνακα πού μᾶς δίνει τό πρόσημο τοῦ γινομένου

$$\Gamma = x(x+1)(x^2-5x+6)$$

x	$-\infty$		-1		0		2		3		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
x^2-5x+6		$+$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Γ		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Ἄρα ἡ ἀνίσωση ἀληθεύει, ὅταν

$$-1 < x < 0 \quad \text{ἤ} \quad 2 < x < 3.$$

2. **Νά βρεθοῦν οἱ τιμές τοῦ x, γιά τίς ὁποῖες συναληθεύουν οἱ ἀνισώσεις:**

$$x^2-3x+2 > 0$$
$$x^2-5x-50 < 0$$
$$x^2-2x-15 > 0.$$

Βρίσκουμε τό πρόσημο κάθε τριωνύμου χωριστά:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
x^2-3x+2		$+$	0	$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		-5		10		$+\infty$
$x^2-5x-50$		$+$	0	$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		-3		5		$+\infty$
$x^2-2x-15$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Τά συμπεράσματα αὐτά τά συνοψίζουμε στόν ἑπόμενο πίνακα :

x	$-\infty$		-5		-3		1		2		5		10		$+\infty$
x^2-3x+2		$+$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x^2-5x-50$		$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x^2-2x-15$		$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	

Οἱ ἀνισώσεις συναληθεύουν, ὅταν τά τριώνυμα εἶναι, κατά τή σειρά πού δόθηκαν, θετικό, ἀρνητικό, θετικό $(+, -, +)$, πού συμβαίνει στίς στῆλες τῶν διαστημάτων $(-5, -3)$ καί $(5, 10)$. Δηλαδή, ὅταν

$$-5 < x < -3 \quad \text{ἤ} \quad 5 < x < 10.$$

3. Νά βρεθεῖ γιά ποιές τιμές τοῦ λ ἡ ἀνίσωση

$$(\lambda-2)x^2+2(2\lambda-3)x+5\lambda-6>0$$

ἀληθεύει γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γιά νά εἶναι τό τριώνυμο $(\lambda-2)x^2+2(2\lambda-3)x+5\lambda-6$ πάντοτε θετικό, θά πρέπει $\Delta' < 0$ καί $\alpha > 0$, δηλαδή νά συναληθεύουν οἱ ἀνισώσεις

$$\left.\begin{aligned}(2\lambda-3)^2-(\lambda-2)(5\lambda-6) &< 0\\ \lambda-2 &> 0\end{aligned}\right\} \quad \text{ἤ} \quad \left.\begin{aligned}-\lambda^2+4\lambda-3 &< 0\\ \lambda-2 &> 0.\end{aligned}\right\}$$

Ἔχουμε τόν πίνακα

λ	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$-\lambda^2+4\lambda-3$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$\lambda-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	

ἀπό τόν ὁποῖο προκύπτει ὅτι οἱ ἀνισώσεις συναληθεύουν γιά $\lambda > 3$.

Ἄρα ἡ ἀνίσωση $(\lambda-2)x^2+2(2\lambda-3)x+5\lambda-6>0$ ἀληθεύει γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$ ὅταν $\lambda > 3$.

Ἀσκήσεις 25, 26, 27, 28, 29.

Μελέτη τῆς συναρτήσεως f μέ $f(x) = \alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha \neq 0$

8.10 Ἔστω $\mathscr{C}$ ἡ γραφική παράσταση τῆς f ὡς πρός σύστημα ἀναφορᾶς Oxy. Τότε ἡ ἐξίσωση $y=f(x)$ τῆς $\mathscr{C}$, σύμφωνα μέ τήν (1) τῆς § 8.6, γράφεται:

$$y=\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\Delta}{4\alpha} \qquad (1)$$

$$\text{ἤ} \quad y+\frac{\Delta}{4\alpha}=\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$$

Ἄν τώρα θέσουμε $x = X+\dfrac{-\beta}{2\alpha}$ καί $y = \Psi+\dfrac{-\Delta}{4\alpha}$, ἡ (1) γίνεται

$$\Psi = \alpha X^2 \qquad (2)$$

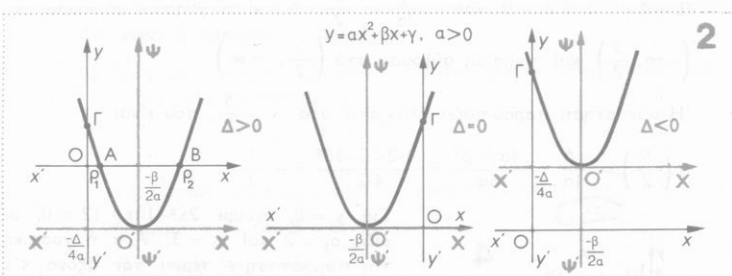
ὡς πρός νέο σύστημα ἀναφορᾶς τό $O'X\Psi$ (§ 7.4), πού ἔχει ἀρχή τό $O'\left(\dfrac{-\beta}{2\alpha}, \dfrac{-\Delta}{4\alpha}\right)$ καί ἄξονες $X'X$, $\Psi'\Psi$, ἀντιστοίχως παράλληλους πρός τούς $x'x$, $y'y$.

Ἡ (2) ὅμως (§ 7.8) εἶναι ἐξίσωση παραβολῆς, ἡ ὁποία ἔχει κορυφή τό O' καί ἄξονα συμμετρίας τόν $\Psi'\Psi$. Ἑπομένως καί ἡ (1) ὡς πρός τό ἀρχικό σύστημα Oxy θά εἶναι ἐξίσωση παραβολῆς μέ κορυφή τό $O'\left(\frac{-\beta}{2\alpha}, \frac{-\Delta}{4\alpha}\right)$ καί ἄξονα συμμετρίας τήν εὐθεία Ψ'Ψ μέ ἐξίσωση $x = \frac{-\beta}{2\alpha}$. Ἔτσι, ἄν λάβουμε ὑπόψη τά συμπεράσματα τῆς § 7.15 καί ἀναχθοῦμε συγχρόνως στό ἀρχικό σύστημα ἀναφορᾶς Oxy, θά ἔχουμε τά ἑξῆς:

1. $\alpha > 0$. Τότε ἡ f εἶναι γνησίως φθίνουσα στό $\left(-\infty, \frac{-\beta}{2\alpha}\right)$ καί γνησίως αὔξουσα στό $\left(\frac{-\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$. Ἄρα στό $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$ παρουσιάζει (§ 7.10) ἐλάχιστο, πού εἶναι ἴσο μέ $f\left(\frac{-\beta}{2\alpha}\right) = \frac{-\Delta}{4\alpha}$. Γιά $x = 0$ ἔχουμε $y = \gamma$ καί τό $y = 0$, ὅταν $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$. Ἄρα ἡ $\mathscr{C}$ τέμνει τόν Oy στό σημεῖο $\Gamma(0, \gamma)$ καί τόν Ox στά σημεῖα πού ἔχουν ὡς τετμημένες τίς ρίζες ρ_1, ρ_2 τῆς $f(x) = 0$. Ἑπομένως ὁ ἄξονας τῶν τετμημένων ἔχει μέ τή $\mathscr{C}$:

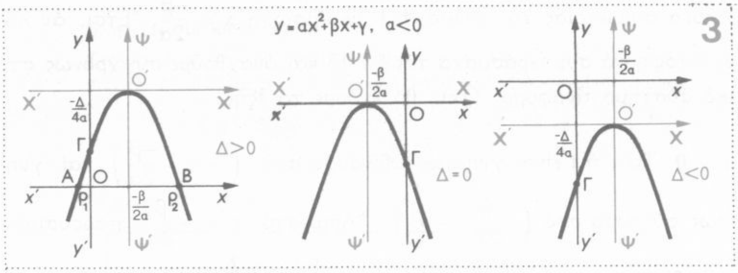
- Δύο κοινά σημεῖα, τά $A(\rho_1, 0)$ καί $B(\rho_2, 0)$, ἄν $\Delta > 0$.
- Ἕνα κοινό σημεῖο, τό $O'\left(\frac{-\beta}{2\alpha}, 0\right)$, ἄν $\Delta = 0$.
- κανένα κοινό σημεῖο, ἄν $\Delta < 0$.

Τά παραπάνω συμπεράσματα παριστάνονται γραφικά στό σχῆμα 2.



2. $\alpha < 0$. Τότε ἡ f εἶναι γνησίως αὔξουσα στό $\left(-\infty, \frac{-\beta}{2\alpha}\right)$ καί γνησίως φθίνουσα στό $\left(\frac{-\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$. Ἄρα στό $x = \frac{-\beta}{2\alpha}$ παρουσιάζει μέγιστο, πού εἶναι ἴσο μέ $f\left(\frac{-\beta}{2\alpha}\right) = \frac{-\Delta}{4\alpha}$. Ἡ γραφική παράσταση $\mathscr{C}$ τῆς f τέμνει ὅπως καί στήν περίπτωση 1 τόν Oy στό σημεῖο $\Gamma(0, \gamma)$ καί

τόν Ox στά σημεῖα πού ἔχουν ὡς τετμημένη τίς ρίζες τῆς $f(x) = 0$. Τά παραπάνω συμπεράσματα παριστάνονται γραφικά στό σχῆμα 3.



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Ἀπό τήν προηγούμενη ἀνάλυση (σχ. 2 καί 3) προκύπτουν τά ἑξῆς:

1. Τό τριώνυμο $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ εἶναι ἑτερόσημο τοῦ α, ὅταν $\Delta > 0$ καί $\rho_1 < x < \rho_2$.
2. Ἡ παραβολή μέ ἐξίσωση $y = \alpha x^2$ εἶναι «ἴση» μέ τήν παραβολή πού ἔχει ἐξίσωση $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Οἱ δύο παραβολές διαφέρουν μόνο ὡς πρός τή θέση τῆς κορυφῆς τους.

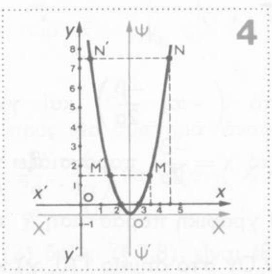
ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Νά μελετηθεῖ ἡ συνάρτηση f μέ $f(x) = 2x^2 - 10x + 12$.

Ἐπειδή $\alpha = 2 > 0$ καί $\dfrac{-\beta}{2\alpha} = \dfrac{5}{2}$, ἡ f εἶναι γνησίως φθίνουσα στό $\left(-\infty, \dfrac{5}{2}\right)$ καί γνησίως αὔξουσα στό $\left(\dfrac{5}{2}, +\infty\right)$.

Ἡ συνάρτηση παρουσιάζει ἐλάχιστο στό $x = \dfrac{5}{2}$, πού εἶναι:

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{-\Delta}{4\alpha} = \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha} = \frac{4\cdot 2\cdot 12 - 10^2}{4\cdot 2} = -\frac{1}{2}.$$



Γιά $y = 0$, ἔχουμε $2x^2 - 10x + 12 = 0$, μέ ρίζες $\rho_1 = 2$ καί $\rho_2 = 3$. Ἄρα ἡ γραφική της παράσταση $\mathcal{C}$ τέμνει τόν ἄξονα x′x στά σημεῖα Α(2, 0) καί Β(3, 0).

Γιά $x = 0$, ἔχουμε $y = 12$. Ἄρα ἡ $\mathcal{C}$ τέμνει τόν ἄξονα y′y στό σημεῖο Γ(0, 12).

Ἐπειδή $\dfrac{-\beta}{2\alpha} = \dfrac{5}{2}$, ἡ $\mathcal{C}$ ἔχει ἄξονα συμμετρίας τήν εὐθεία $x = \dfrac{5}{2}$.

Στή $\mathcal{C}$ ἀνήκουν π.χ. καί τά σημεῖα Μ καί Ν μέ συντεταγμένες ἀντιστοίχως (Παρ. 2)

$$x = \frac{5}{2} + 1 = 3{,}5\,, \qquad y = -\frac{1}{2} + 2.1^2 = 1{,}5$$

$$\text{καί} \quad x = \frac{5}{2} + 2 = 4{,}5\,, \qquad y = -\frac{1}{2} + 2.2^2 = 7{,}5.$$

καθώς καί τά συμμετρικά τους M′, N′ ὡς πρός τήν εὐθεία $x = \frac{5}{2}$.

Μέ τά παραπάνω συμπεράσματα κατασκευάζουμε τή γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως (σχ. 4).

Ἄσκηση 30.

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Ἐξισώσεις μέ περισσότερους ἀπό ἕναν ἀγνώστους

8.11 Στά ἑπόμενα ἀναφερόμαστε σέ ἐξισώσεις μέ δύο ἤ περισσότερους ἀγνώστους $x, y, \ldots, z$ (§ 1.6 Σημ.) πού εἶναι μεταβλητές **πραγματικές.** Κάθε τέτοια ἐξίσωση, ἐπειδή μπορεῖ νά μετατραπεῖ σέ ἰσοδύναμη μέ δεύτερο μέλος 0, παίρνει τή μορφή $\sigma(x, y, \ldots, z) = 0$. Συνήθως τό πρῶτο μέλος $\sigma(x, y, \ldots, z)$ εἶναι πολυώνυμο μέ πραγματικούς συντελεστές καί ὁ βαθμός του **ὡς πρός τούς ἀγνώστους** λέγεται καί **βαθμός τῆς ἐξισώσεως.** Π.χ. ἡ ἐξίσωση $\alpha x + \beta y = \gamma$ εἶναι α′ βαθμοῦ μέ δύο ἀγνώστους. Ἡ ἐξίσωση $xy + zx = 2z + 3$ εἶναι β′ βαθμοῦ μέ τρεῖς ἀγνώστους κ.ο.κ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση $\quad \alpha x + \beta y = \gamma \quad$ **(1)**

- Ἄν ἕνας ἀπό τούς συντελεστές α, β εἶναι διαφορετικός ἀπό τό 0, π.χ. ὁ β, ἡ (1) εἶναι ἰσοδύναμη τῆς

$$y = \frac{\gamma}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta} x$$

τῆς ὁποίας λύσεις εἶναι ὅλα τά ζεύγη τῆς μορφῆς $(x, \frac{\gamma}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta} x)$ γιά τίς διάφορες τιμές τοῦ $x \in \mathbb{R}$.

- Ἄν $\alpha = \beta = 0$, τότε:
  ἄν $\gamma \neq 0$, ἡ (1) δέν ἔχει λύση (ἀδύνατη)
  ἄν $\gamma = 0$, ἡ (1) ἀληθεύει γιά κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ (ταυτότητα).

Συστήματα ἐξισώσεων

8.12 Ἕνα σύστημα ἐξισώσεων εἶναι **σύζευξη** ἐξισώσεων (§ 1.10 Σημ.). Ἡ ἐπίλυσή του, δηλαδή ἡ εὕρεση τοῦ συνόλου τῶν λύσεων πού ἐπαληθεύουν **ὅλες** τίς ἐξισώσεις του, γίνεται μέ κατάλληλη μετατροπή του σέ ἄλλα ἰσοδύναμα συστήματα καί τελικά σέ σύστημα μέ λύσεις γνωστές. Γι' αὐτή τή μετατροπή συχνά ἀντικαθιστοῦμε μιά ἐξίσωση τοῦ συστήματος μέ ἄλλη ἰσοδύναμή της (Κ. 'Αντ. § 1.27).

Εἰδικότερα, ὅπως εἶναι γνωστό καί ἀπό τά γυμνασιακά μαθήματα, ἐφαρμόζουμε κυρίως τίς ἀκόλουθες μεθόδους.

- **Μέθοδος ἀντικαταστάσεως.**

Λύνουμε μιά ἐξίσωση $\sigma(x, y, \ldots, z) = 0$ τοῦ συστήματος ὡς πρός ἕναν ἄγνωστο, π.χ. τόν x, δηλαδή τή μετατρέπουμε σέ ἰσοδύναμη τῆς μορφῆς $x = \sigma_1(y, \ldots, z)$ καί ἀντικαθιστοῦμε σέ ἄλλη ἐξίσωσή του $\varphi(x, y, \ldots, z) = 0$ τό x μέ $\sigma_1(y, \ldots, z)$.

Τά συστήματα π.χ.

$$\begin{cases} \sigma(x, y) = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases} \quad (1) \qquad \text{καί} \qquad \begin{cases} x = \sigma_1(y) \\ \varphi(\sigma_1(y), y) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

εἶναι ἰσοδύναμα.

Πράγματι, γιά κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ εἶναι $\sigma(\alpha, \beta) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \sigma_1(\beta)$.
"Αν λοιπόν (α, β) εἶναι λύση τοῦ (1), ἔχουμε $\{\alpha = \sigma_1(\beta)$ **καί** $\varphi(\alpha, \beta) = 0\}$. "Αρα $\varphi(\sigma_1(\beta), \beta) = 0$ καί τό (α, β) εἶναι λύση τοῦ (2).
'Αντιστρόφως, ἄν (α, β) εἶναι λύση τοῦ (2), εἶναι $\{\alpha = \sigma_1(\beta)$ **καί** $\varphi(\sigma_1(\beta), \beta) = 0\}$.
"Αρα $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ καί τό (α, β) εἶναι λύση τοῦ (1).

- **Μέθοδος ἀντίθετων συντελεστῶν.**

'Από τίς ἐξισώσεις $\sigma(x, y, \ldots, z) = 0$ καί $\varphi(x, y, \ldots, z) = 0$ τοῦ συστήματος σχηματίζουμε ἕνα *γραμμικό συνδυασμό* τους

$$\lambda\sigma(x, y, \ldots, z) + \mu\varphi(x, y, \ldots, z) = 0$$

μέ *συντελεστές* $\lambda, \mu \neq 0$, μέ τόν ὁποῖο ἀντικαθιστοῦμε μιά ἀπό τίς ἐξισώσεις αὐτές.

Τά συστήματα π.χ.

$$\begin{cases} \sigma(x, y) = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases} \quad (1) \qquad \text{καί} \qquad \begin{cases} \sigma(x, y) = 0 \\ \lambda\sigma(x, y) + \mu\varphi(x, y) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

εἶναι ἰσοδύναμα.

Πράγματι, ἄν (α, β) εἶναι λύση τοῦ (1), ἔχουμε $\sigma(\alpha, \beta) = 0$ **καί** $\varphi(\alpha, \beta) = 0$. "Αρα $\lambda\sigma(\alpha, \beta) + \mu\varphi(\alpha, \beta) = 0$ καί τό (α, β) εἶναι λύση τοῦ συστήματος (2). 'Αντιστρόφως, ἄν (α, β) εἶναι λύση τοῦ (2), ἔχουμε $\sigma(\alpha, \beta) = 0$ **καί** $\lambda\sigma(\alpha, \beta) + \mu\varphi(\alpha, \beta) = 0$. "Αρα $\mu\varphi(\alpha, \beta) = 0$ καί ἐπειδή $\mu \neq 0$, εἶναι $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ καί τό (α, β) εἶναι λύση τοῦ (1).

Συνήθως οἱ συντελεστές λ καί μ ἐκλέγονται ἔτσι, ὥστε στήν ἐξίσωση $\lambda\sigma(x, y) + \mu\varphi(x, y) = 0$ νά μηδενίζεται ὁ συντελεστής τοῦ ἑνός ἀπό τούς ἀγνώστους.

Νά λυθεῖ τό σύστημα:

$$\begin{cases} x-2y+3z=0 & (1)\\ 2x+y-z=5 & (2)\\ x-y-2z=1 & (3)\end{cases}$$

Ἀντικαθιστοῦμε τήν (1) μέ τό γραμμικό συνδυασμό τῶν (1) καί (3) πού ἔχει συντελεστές -1 καί 1, δηλαδή μέ τήν ἐξίσωση

$$y-5z=1 \qquad (1^*)$$

Ἐπίσης ἀντικαθιστοῦμε τήν (2) μέ τό γραμμικό συνδυασμό τῶν (1) καί (2) πού ἔχει συντελεστές -2 καί 1, δηλαδή μέ τήν ἐξίσωση

$$5y-7z=5 \qquad (2^*)$$

Μποροῦμε τώρα νά λύσουμε τό σύστημα τῶν (1*) καί (2*) μέ τή μέθοδο τῆς ἀντικαταστάσεως. Ἔχουμε δηλαδή

$$\begin{cases} y-5z=1\\ 5y-7z=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5z+1\\ 5y-7z=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5z+1\\ 5\cdot(5z+1)-7z=5\end{cases}$$

$$\begin{cases} y=5z+1\\ 25z+5-7z=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5z+1\\ 18z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5z+1\\ z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1\\ z=0\end{cases}$$

Ὁπότε ἀπό τήν (1) παίρνουμε

$$x=2\cdot 1-3\cdot 0=2.$$

Ἄρα ἡ λύση τοῦ συστήματος εἶναι (2, 1, 0).

Συστήματα ἐξισώσεων α΄ βαθμοῦ μέ δύο ἀγνώστους

8.13 Ἔστω τό σύστημα

$$\begin{cases} \alpha x+\beta y=\gamma & (1)\\ \alpha' x+\beta' y=\gamma' & (2)\end{cases}$$

Διακρίνουμε τίς ἀκόλουθες περιπτώσεις:

I. Οἱ συντελεστές $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ εἶναι ὅλοι 0. Τότε (§ 8.11 Ἐφ.)

1. ἄν ἕνας ἀπό τούς γ, γ' εἶναι διαφορετικός ἀπό τό 0, τότε μιά ἀπό τίς ἐξισώσεις του, ἄρα καί τό σύστημα, δέν ἔχει λύση.
2. ἄν $\gamma=\gamma'=0$, τό σύστημα ἀληθεύει γιά κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

II. Ἕνας τουλάχιστο ἀπό τούς $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ δέν εἶναι 0, π.χ. $\alpha \neq 0$.

Λύνουμε τό σύστημα μέ τή μέθοδο τῆς ἀντικαταστάσεως:

Ἡ (1) γράφεται ἰσοδύναμα:

$$x=\frac{\gamma-\beta y}{\alpha} \qquad (3)$$

καί ἀντικαθιστώντας τό x στήν (2) ἔχουμε

$$\alpha'\left(\frac{\gamma-\beta y}{\alpha}\right)+\beta' y=\gamma' \qquad \text{ἤ}$$

$$(\alpha\beta'-\alpha'\beta)y=\alpha\gamma'-\alpha'\gamma \qquad (4)$$

ὁπότε (§ 2.21):

1. ἄν $\alpha\beta'-\alpha'\beta \neq 0$, ἔχουμε $\quad y = \dfrac{\alpha\gamma'-\alpha'\gamma}{\alpha\beta'-\alpha'\beta}$ (5)

καί ἀπό τήν (3) βρίσκουμε $\quad x = \dfrac{\gamma\beta'-\gamma'\beta}{\alpha\beta'-\alpha'\beta}$ (6)

2. ἄν $\alpha\beta'-\alpha'\beta = 0$, τότε:

i. ἄν $\alpha\gamma'-\alpha'\gamma \neq 0$, ἡ (4) δέν ἔχει λύση, ἄρα οὔτε καί τό σύστημα ἔχει λύση

ii. ἄν $\alpha\gamma'-\alpha'\gamma = 0$, ἡ (4) ἀληθεύει γιά κάθε $y \in \mathbb{R}$, ὁπότε τό σύστημα ἔχει ἄπειρες λύσεις (τά ζεύγη $\left(\dfrac{\gamma-\beta y}{\alpha}, y\right)$, πού προκύπτουν ἀπό τήν (3)).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Στά ἴδια συμπεράσματα θά καταλήγαμε, ἄν ὑποθέταμε $\alpha' \neq 0$. Ἐξάλλου ὑποθέτοντας $\beta \neq 0$ ἤ $\beta' \neq 0$ καί ἐργαζόμενοι ὁμοίως καταλήγουμε σέ παρόμοια συμπεράσματα (Στίς περιπτώσεις, **ΙΙ**2, i καί ii ἀντί γιά $\alpha\gamma'-\alpha'\gamma$ ἐμφανίζεται ὁ ἀριθμός $\gamma\beta'-\gamma'\beta$).

2. Ὁ ἀριθμός $\mathbf{D} = \alpha\beta'-\alpha'\beta$ μπορεῖ νά παρασταθεῖ σχηματικά $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}$ καί λέγεται **ὁρίζουσα** τῶν α, β, α′ β′. Ὁμοίως θέτουμε

$$\mathbf{D_1} = \begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix} = \gamma\beta' - \gamma'\beta \text{ καί } \mathbf{D_2} = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha' & \gamma' \end{vmatrix} = \alpha\gamma' - \alpha'\gamma.$$

Παρατηροῦμε ὅτι, ἄν ἔστω καί μιά ἀπό τίς ὁρίζουσες D, D_1, D_2 δέν εἶναι 0, τότε ὁπωσδήποτε ἕνας ἀπό τούς α, α′, β, β′ δέν εἶναι 0 (Περίπτ. **ΙΙ**). Εἰδικότερα:

- ἄν $\mathbf{D \neq 0}$ (Περίπτ. **ΙΙ**1), τό σύστημα ἔχει τή μοναδική λύση, σύμφωνα μέ τίς (5) καί (6),

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{D_1}}{\mathbf{D}} \quad \text{καί} \quad \mathbf{y} = \frac{\mathbf{D_2}}{\mathbf{D}}$$

- ἄν $\mathbf{D = 0}$ καί ($\mathbf{D_1 \neq 0}$ ἤ $\mathbf{D_2 \neq 0}$) (Περίπτ. **ΙΙ**2i), τό σύστημα δέν ἔχει λύση.

Γιά τίς ἄλλες εἰδικότερες περιπτώσεις πού μελετήσαμε εἶναι $\mathbf{D = D_1 = D_2 = 0}$ καί τό σύστημα ἔχει ἄπειρες λύσεις ἐκτός τῆς περιπτώσεως **Ι**1: $\alpha = \beta = \alpha' = \beta' = 0$ καί γ ἤ $\gamma' \neq 0$ πού τό σύστημα δέν ἔχει λύση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Γιά τό σύστημα $\begin{cases} \lambda x - y = \lambda^2 \\ x - \lambda y = \lambda^4 \end{cases}$

Ἔχουμε: $D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} = \alpha\beta'-\alpha'\beta = \lambda(-\lambda)-1(-1) = -\lambda^2+1 = -(\lambda+1)(\lambda-1)$

$$D_1 = \begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix} = \gamma\beta'-\gamma'\beta = -\lambda\lambda^2-(-1)\lambda^4 = -\lambda^3+\lambda^4 = \lambda^3(\lambda-1)$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha' & \gamma' \end{vmatrix} = \alpha\gamma'-\alpha'\gamma = \lambda\lambda^4-1.\lambda^2 = \lambda^5-\lambda^2 = \lambda^2(\lambda^3-1) = \\ = \lambda^2(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+1)$$

Εἶναι $D = 0 \Leftrightarrow -\lambda^2+1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda = 1$ ἤ $\lambda = -1)$

Ἄρα:

- ἄν $\lambda \neq 1$ **καί** $\lambda \neq -1$, τό σύστημα ἔχει μιά λύση, τήν

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{\lambda^3(\lambda-1)}{-(\lambda+1)(\lambda-1)} = -\frac{\lambda^3}{\lambda+1}$$

$$y = \frac{D_2}{D} = \frac{\lambda^2(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+1)}{-(\lambda+1)(\lambda-1)} = -\frac{\lambda^2(\lambda^2+\lambda+1)}{\lambda+1}$$

- ἄν $\lambda = 1$, τότε $D = D_1 = D_2 = 0$ καί τό σύστημα ἔχει ἄπειρες λύσεις. Πράγματι γιά $\lambda = 1$ τό σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} x-y = 1 \\ x-y = 1 \end{cases}$$

πού εἶναι ἰσοδύναμο μέ τήν $x-y = 1$.

Ἄρα λύσεις τοῦ συστήματος εἶναι ὅλα τά ζεύγη τῆς μορφῆς $(x, x-1)$.

- ἄν $\lambda = -1$, τότε $D = 0$ καί $D_2 \neq 0$, καί τό σύστημα δέν ἔχει λύση. Πράγματι γιά $\lambda = 1$ τό σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} -x-y = 1 \\ x+y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} x+y = -1 \\ x+y = 1, \end{matrix}$$

πού προφανῶς δέν ἔχει λύση (ἀδύνατο).

Ἀξιοσημείωτες ἐφαρμογές

8.14 Γιά τή λύση τῶν συστημάτων πού ἀκολουθοῦν, ἐφαρμόζονται βασικά οἱ μέθοδοι ἀντικαταστάσεως καί γραμμικοῦ συνδυασμοῦ τῆς § 8.12. Σέ ὁρισμένες περιπτώσεις εἰσάγονται «βοηθητικοί ἄγνωστοι», μέ ἐξισώσεις πού ἐκφράζουν ἁπλή ἐξάρτηση τῶν βοηθητικῶν μέ τούς ἀρχικούς ἀγνώστους τοῦ συστήματος. Ἔτσι ἡ εὕρεση τῶν τιμῶν τῶν βοηθητικῶν ἀγνώστων ὁδηγεῖ ἄμεσα στή λύση τοῦ συστήματος.

1. **Νά λυθεῖ τό σύστημα:**

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{5} & (1) \\ 2x-5y+6z = 38 & (2) \end{cases}$$

Ἄν $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{5} = t$, θά εἶναι $x = 2t$, $y = 3t$, $z = 5t$ (3)

καί ἡ (2) γίνεται

$$2.2t-5.3t+6.5t = 38 \Leftrightarrow 4t-15t+30t = 38 \Leftrightarrow 19t = 38 \Leftrightarrow t = 2$$

ὁπότε ἀπό τίς (3) ἔχουμε:

$$x = 2.2 = 4, \quad y = 3.2 = 6, \quad z = 5.2 = 10.$$

2. **Νά λυθεῖ τό σύστημα:**

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = 2\dfrac{1}{6} & (1) \\ x+y = 5 & (2) \end{cases}$$

Προφανῶς πρέπει $xy \neq 0$, ὁπότε, ἄν $\dfrac{x}{y} = t$ (3)

ἡ (1) γίνεται $t + \dfrac{1}{t} = 2\dfrac{1}{6} \Leftrightarrow 6t^2 - 13t + 6 = 0 \Leftrightarrow \left(t = \dfrac{2}{3} \text{ ἤ } t = \dfrac{3}{2}\right)$

καί λόγω τῆς (3), $\dfrac{x}{y} = \dfrac{2}{3}$ ἤ $\dfrac{x}{y} = \dfrac{3}{2}$ (4)

Ἑπομένως, ἄν ἀντικαταστήσουμε τήν (1) μέ τήν (4), τό ἀρχικό σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{2}{3} \text{ ἤ } \dfrac{x}{y} = \dfrac{3}{2} \\ x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{2}{3} \\ x + y = 5 \end{cases} \text{ ἤ } \begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{3}{2} \\ x + y = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{3}y \\ x + y = 5 \end{cases} \text{ ἤ } \begin{cases} x = \dfrac{3}{2}y \\ x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{3}y \\ \dfrac{2}{3}y + y = 5 \end{cases} \text{ ἤ } \begin{cases} x = \dfrac{3}{2}y \\ \dfrac{3}{2}y + y = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{3}y \\ y = 3 \end{cases} \text{ ἤ } \begin{cases} x = \dfrac{3}{2}y \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \text{ ἤ } \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

3. **Νά λυθεῖ τό σύστημα:**

$$\begin{cases} \mathbf{2x^2 - 3y^2 - 2x + y = 30} \\ \mathbf{x - y = 3} \end{cases}$$

Ἔχουμε:

$$\begin{cases} 2x^2 - 3y^2 - 2x + y = 30 \\ x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3y^2 - 2x + y = 30 \\ x = 3 + y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(3+y)^2 - 3y^2 - 2(3+y) + y = 30 \\ x = 3 + y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -y^2 + 11y - 18 = 0 \\ x = 3 + y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 9 \text{ ἤ } y = 2 \\ x = 3 + y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = 9 \end{cases} \text{ ἤ } \begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$$

4. **Νά λυθεῖ τό σύστημα:** $\begin{cases} \mathbf{x^2 + y^2 = 625} \\ \mathbf{x + y = 35} \end{cases}$

Εἶναι $\begin{cases} x^2 + y^2 = 625 \\ x + y = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = 625 \\ x + y = 35 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 35^2 - 2xy = 625 \\ x + y = 35 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy = 300 \\ x + y = 35 \end{cases}$$

Στό τελευταῖο σύστημα οἱ ἄγνωστοι x καί y εἶναι ρίζες τῆς ἐξισώσεως

$$\omega^2 - 35\omega + 300 = 0$$

Είναι $\omega_{1,2} = \frac{-35 \pm \sqrt{1225-1200}}{2} = \frac{35 \pm 5}{2}$ $\nearrow \omega_1 = 20$, $\searrow \omega_2 = 15$

Άρα οἱ λύσεις τοῦ συστήματος εἶναι ($x = 20$ **καί** $y = 15$) ἤ ($x = 15$ **καί** $y = 20$).

Ἀσκήσεις 31, 32, 33, 34.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Νά λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις

α) $1-\frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{1-x}-6$ β) $\frac{x+5}{x-5}+\frac{x-5}{x+5} = \frac{10}{3}$ γ) $\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} = \frac{3\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2+3\beta^2}$

δ) $\frac{\alpha^2}{(x-\alpha)^2}-\frac{\beta^2}{(x+\beta)^2} = 0, \quad \alpha \neq \pm\beta$ ε) $|2x+6| = -x^2+x-4$

2. Νά δειχθεῖ ὅτι οἱ ἐξισώσεις

α) $x^2-2\lambda x+\lambda^2-\mu^2-\nu^2+2\mu\nu = 0$

β) $(\alpha^2+\alpha\beta-2\beta^2)\, x^2+3\beta^2 x-(\alpha^2-\alpha\beta-2\beta^2) = 0$

γ) $\alpha x^2-(\alpha+2\beta)\, x+\beta = 0$

ἔχουν πάντοτε ρίζες στό $\mathbb{R}$.

3. Ἄν $\alpha^2+\beta^2 < \gamma^2$ καί $\beta \neq 0$,νά δειχθεῖ,ὅτι ἡ ἐξίσωση $(\alpha^2+\beta^2)x^2-2\alpha\gamma x-\beta^2+\gamma^2 = 0$ δέν ἔχει ρίζες στό $\mathbb{R}$.

4. Δίνονται οἱ ἐξισώσεις

$$x^2+(\alpha-3\beta)x+\alpha\beta = 0$$
$$x^2+(\alpha-5\beta)x+4\beta^2 = 0$$

Νά δειχθεῖ ὅτι, ἄν ἡ μία ἀπό αὐτές ἔχει ρίζες ἴσες, τότε θά ἔχει καί ἡ ἄλλη ρίζες ἴσες.

5. Νά λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις

α) $4\,\eta\mu^2 x-2(\sqrt{3}+1)\eta\mu x+\sqrt{3} = 0$

β) $\varepsilon\varphi^2 x-(\sqrt{3}+1)\varepsilon\varphi x+\sqrt{3} = 0$

γ) $(x+1)^2-9\,|x+1|-10 = 0$

6. Στίς παρακάτω ἐξισώσεις γιά ποιές τιμές τοῦ λ ἔχουμε: 1) ρίζες ἄνισες. 2) ρίζες ἴσες 3) καμία ρίζα.

α) $8x^2-(\lambda-1)x-\lambda-7 = 0$ β) $\lambda x^2+(\lambda-1)x-2\lambda = 0$

7. Δίνεται ἡμικύκλιο διαμέτρου ΑΒ μήκους 2α. Ἐπάνω στήν ΑΒ νά βρεθεῖ ἕνα σημεῖο Γ τέτοιο ὥστε, ἄν κατασκευάσουμε μέσα στό ἡμικύκλιο ΑΒ ἡμικύκλια μέ διαμέτρους ΑΓ καί ΒΓ, ἡ ἐπιφάνεια πού περιέχεται μεταξύ αὐτῶν νά εἶναι ἰσοδύναμη μέ κύκλο ἀκτίνας $\frac{\alpha}{2}$.

8. Ἄν x_1 καί x_2 εἶναι οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως $x^2-2x+(\lambda-1) = 0$, νά βρεθεῖ ὁ λ ἔτσι ὥστε νά ἔχουμε

$$3x_1^3+8x_1x_2^2+8x_1^2x_2+3x_2^3 = 192.$$

9. Ἄν x_1, x_2 εἶναι οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, νά βρεθεῖ ἡ ἐξίσωση τῆς ὁποίας οἱ ρίζες εἶναι $\rho_1=\dfrac{x_1}{x_2}$ καί $\rho_2=\dfrac{x_2}{x_1}$.

10. Ποιά ἡ μέγιστη καί ποιά ἡ ἐλάχιστη θερμοκρασία σέ μιά πόλη, ἄν τό ἄθροισμά τους εἶναι $+4^0$ C καί τό γινόμενό τους -12^0 C.

11. Νά δειχθεῖ ὅτι ἀπό τά ζεύγη τῶν θετικῶν ἀριθμῶν πού ἔχουν σταθερό γινόμενο, ἐλάχιστο ἄθροισμα ἔχουν αὐτοί πού εἶναι ἴσοι.

12. Ἀπό ὅλα τά ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα πού ἔχουν σταθερή περίμετρο, τό τετράγωνο ἔχει τό μέγιστο ἐμβαδό.

13. Νά ὑπολογιστεῖ ἡ τιμή τοῦ k, ὅταν ἡ μιά ρίζα τῆς ἐξισώσεως $4x^2+kx+6=0$ εἶναι ἴση μέ -2. Τό ἴδιο γιά τήν ἐξίσωση $x^2-3x+k^2-7k=0$.

14. Νά βρεθεῖ τό πρόσημο τῶν ριζῶν τῶν ἐξισώσεων:

α) $2x^2-7x-13=0$ β) $6x^2+5x+1=0$ γ) $7x^2-5x=0$

15. Νά βρεθεῖ τό πρόσημο τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως:

$$3x^2-7x-k^2=0$$

16. Νά βρεθοῦν οἱ τιμές τοῦ λ, ὥστε ἡ ἐξίσωση $x^2-3x+\lambda-1=0$ νά ἔχει

α) δύο ρίζες ἑτερόσημες β) δύο ρίζες ἴσες γ) δύο ρίζες θετικές.

17. Νά ἁπλοποιηθοῦν τά κλάσματα

α) $\dfrac{(x^2-\alpha^2)(x^2+\alpha^2)}{2x^2+\alpha x-3\alpha^2}$ β) $\dfrac{(x-\alpha)^2-\beta^2}{x^2-2\alpha x+\alpha^2-\beta^2}$ γ) $\dfrac{(x^2+3x-4)^2-(x^2-x)^2}{(x^3-1)-(x^2+x-2)}$

18. Γιά ποιές τιμές τοῦ λ τά τριώνυμα

α) $f(x)=x^2-6\lambda x+9\lambda^2-3\lambda+5$

β) $g(x)=4x^2-(3\lambda-1)x+\lambda^2-2$

γίνονται τετράγωνα πρωτοβάθμιων πολυωνύμων.

19. Γιά ποιές τιμές τοῦ λ τό τριώνυμο $x^2-5x+\lambda^2$ εἶναι ἴσο μέ $(x-1)(x-4)$.

20. Νά δειχθεῖ ὅτι γιά $\beta\neq\gamma$ τό τριώνυμο $f(x)=x^2-(\beta+\gamma)x+\beta^2-\beta\gamma+\gamma^2$ εἶναι πάντοτε θετικό.

21. Νά δειχθεῖ ὅτι γιά κάθε $x\in\mathbb{R}-\{3\}$ τό κλάσμα $\dfrac{x^2+5x+10}{-x^2+6x-9}$ παίρνει ἀρνητικές τιμές.

22. Νά βρεθεῖ τό σύνολο τιμῶν τῆς συναρτήσεως f μέ $f(x)=\dfrac{x^2-6x+5}{x^2-6x+8}$.

23. Νά βρεθοῦν οἱ πραγματικοί ἀριθμοί x καί y, ἄν $x^2+y^2=6x-8y$.

24. Νά συγκριθοῦν οἱ ἀριθμοί 1 καί 4 μέ τίς ρίζες τοῦ τριωνύμου $f(x)=2x^2-8x+4$ χωρίς νά βρεθοῦν οἱ ρίζες του.

25. Νά λυθοῦν οἱ ἀνισώσεις

α) $(1-x)(x^2-10x+21)(-x^2+x-5) < 0$

β) $\dfrac{(x-1)(x^2-9x+20)}{x^2-x+1} > 0$

γ) $|-x^2+x-4| > 2x+6$.

26. Νά λυθοῦν τά συστήματα

α) $\begin{aligned} x-2 &> 0 \\ 6x^2+5x+1 &> 0 \\ -x^2+5x-6 &< 0 \end{aligned}$

β) $\begin{aligned} &\dfrac{x-1}{2x+1} > 0 \\ &(x^2-4)(x^2+2x+4) < 0 \end{aligned}$

27. Γιά ποιά τιμή τοῦ λ ἡ ἐξίσωση $x^2-2(\lambda-3)x+\lambda^2-1=0$ ἔχει

α) δύο ρίζες ἀρνητικές β) δύο ρίζες ἑτερόσημες γ) δύο ρίζες ἀντίστροφες.

28. Νά δειχθεῖ ὅτι δέν μπορεῖ νά εἶναι $2 < \dfrac{x^2+2x-11}{2(x-3)} < 6$.

29. Νά ὁριστεῖ ὁ x, ὥστε οἱ ἀριθμοί x^2+x+1, $2x+1$ καί x^2+1 νά εἶναι μέτρα πλευρῶν τριγώνου.

30. Νά μελετηθοῦν οἱ συναρτήσεις:

α) f μέ $f(x)=3x^2+5x+2$

β) f μέ $f(x)=-x^2+3x-4$

γ) f μέ $f(x)=4x^2-4x+1$.

31. Νά λυθοῦν τά συστήματα:

α) $\begin{cases} (\lambda-2)x+\lambda y = 2\lambda \\ 3x+(\lambda+2)y = 12 \end{cases}$ β) $\begin{cases} (1-\lambda)x-2\lambda y = 2 \\ 2\lambda x+(\lambda-1)y = \lambda-4 \end{cases}$

32. Νά λυθοῦν τά συστήματα:

α) $\begin{cases} x^2+xy = 6 \\ 2x+3y = 7 \end{cases}$ β) $\begin{cases} 2x^2+3y^2-4x+y = 14 \\ 2y-x = 2 \end{cases}$

33. Νά λυθοῦν τά συστήματα:

α) $\begin{cases} x^2+y^2 = 73 \\ xy = 24 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x+y+xy = 23 \\ xy(x+y) = 120 \end{cases}$

34. Νά λυθοῦν τά συστήματα:

α) $\begin{cases} x^2+y^2+x+y = 62 \\ x^2-y^2+x-y = 50 \end{cases}$ β) $\begin{cases} xy = \dfrac{2}{3} \\ yz = \dfrac{1}{15} \\ zx = \dfrac{2}{5} \end{cases}$

1. α) Πρέπει $x-1 \neq 0$. Μετά τίς πράξεις, βρίσκουμε τήν ἐξίσωση $x^2-7x+6=0$, ἡ ὁποία ἔχει ρίζες τή $\rho_1=1$, πού ἀπορρίπτεται καί τή $\rho_2=6$, πού εἶναι δεκτή.

   β) Πρέπει $(x-5)(x+5) \neq 0$, δηλαδή $x \neq \pm 5$. Μετά τίς πράξεις, βρίσκουμε τήν ἐξίσωση $x^2-100=0$, ἡ ὁποία ἔχει ρίζες $\rho_1=10$ καί $\rho_2=-10$.

   γ) Μετά τίς πράξεις βρίσκουμε τήν ἐξίσωση:
   $(\alpha^2-\beta^2)x^2-(\alpha^2+\beta^2)x+\alpha^2-\beta^2=0$, ἡ ὁποία ὅταν $\alpha=\pm\beta$ εἶναι πρωτοβάθμια μέ ρίζα $x=0$. Ὅταν $\alpha \neq 0$ καί $\alpha \neq \pm\beta$, ἔχει ρίζες $\rho_1=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}$ καί $\rho_2=\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$.

   δ) Πρέπει $(x-\alpha)(x-\beta) \neq 0$, δηλαδή $x \neq \alpha$ καί $x \neq -\beta$. Μετά τίς πράξεις βρίσκουμε τήν ἐξίσωση $(\alpha-\beta)x^2+2\alpha\beta x=0$, ἡ ὁποία ἔχει ρίζες $\rho_1=0$, $\rho_2=-\dfrac{2\alpha\beta}{\alpha-\beta}$.

   ε) Ἄν εἶναι $x \geqslant -3$, ἔχουμε τήν ἐξίσωση $x^2+x+10=0$, πού δέν ἔχει ρίζες.
   Ἄν εἶναι $x \leqslant -3$, ἔχουμε τήν ἐξίσωση $x^2-3x-2=0$, ἡ ὁποία ἔχει ρίζες
   $\rho_1=\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$ καί $\rho_2=\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$, πού ἀπορρίπτονται.

2. Βρίσκουμε τή διακρίνουσα κάθε ἐξισώσεως καί ἀποδεικνύουμε ὅτι εἶναι μεγαλύτερη ἤ ἴση μέ τό μηδέν.

3. Ἡ διακρίνουσα τῆς ἐξισώσεως εἶναι $\Delta=4\beta^2(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)<0$.

4. Οἱ δύο ἐξισώσεις ἔχουν ἴσες διακρίνουσες.

5. α) Ἄν θέσουμε ημ$x=y$, ἔχουμε: $4y^2-2(\sqrt{3}+1)y+\sqrt{3}=0$ μέ $y \in [-1,+1]$ κτλ.

   β) Ἄν θέσουμε εφ$x=y$, ἔχουμε: $y^2-(\sqrt{3}+1)y+\sqrt{3}=0$ κτλ.

   γ) Ἐπειδή εἶναι $(x+1)^2=|x+1|^2$ (§ 3.14), ἄν θέσουμε $|x+1|=y$, ἔχουμε: $y^2-9y-10=0$ $y \in \mathbb{R}_+$ κτλ.

6. α) Ἄν $\lambda \neq -15$, ἡ ἐξίσωση ἔχει ρίζες ἄνισες. Ἄν $\lambda=-15$, ἡ ἐξίσωση ἔχει ρίζες ἴσες.

   β) Ἡ ἐξίσωση ἔχει ρίζες ἄνισες γιά κάθε τιμή τοῦ λ.

7. Ἄν θέσουμε $\mathrm{A\Gamma}=x$, τότε εἶναι $\mathrm{B\Gamma}=2\alpha-x$, ὁπότε καταλήγουμε στήν ἐξίσωση $x^2-2\alpha x+\alpha^2=0$.

8. Ἔχουμε $3(x_1^3+x_2^3)+8x_1x_2(x_1+x_2)=192$ ἤ

$$3(x_1+x_2)[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2]+8x_1x_2(x_1+x_2)=192.$$

   Στήν παράσταση αὐτή θέτουμε $x_1+x_2=2$ καί $x_1x_2=\lambda-1$ κτλ.

9. Ἔχουμε $x_1+x_2=-\dfrac{\beta}{\alpha}$ καί $x_1x_2=\dfrac{\gamma}{\alpha}$, ὁπότε εἶναι:

$$\rho_1+\rho_2=\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2} \text{ καί } \rho_1\rho_2=\frac{x_1x_2}{x_2x_1}=1 \text{ κτλ.}$$

10. Ἡ μέγιστη καί ἡ ἐλάχιστη θερμοκρασία θά εἶναι ρίζες τῆς ἐξισώσεως
$$x^2-4x-12=0.$$

11. Ἐργαζόμαστε ὅπως στήν ἐφαρμογή 3 τῆς § 8.4.

12. Ὁμοίως μέ τήν 11.

13. Ἡ πρώτη ἐξίσωση, ἐπειδή ἔχει ρίζα τό -2 γίνεται $4(-2)^2+k(-2)+6=0$. Ὁμοίως ἐργαζόμαστε καί γιά τή δεύτερη ἐξίσωση.

14. Ἐργαζόμαστε ὅπως στά παραδείγματα τῆς § 8.5.

15. Ἐξετάζουμε τό πρόσημο τοῦ $\frac{\gamma}{\alpha}$.

16. Ἐργαζόμαστε ὅπως στήν ἐφαρμογή 1 τῆς § 8.5.

17. Παραγοντοποιοῦμε τόν ἀριθμητή καί τόν παρονομαστή κάθε κλάσματος μέ τή βοήθεια τοῦ τύπου $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)$.

18. Πρέπει ἡ διακρίνουσα κάθε τριωνύμου νά εἶναι ἴση μέ μηδέν.

19. Εἶναι $x^2-5x+\lambda^2=(x-\rho_1)(x-\rho_2)=(x-1)(x-4)$ κτλ.

20. Εἶναι $\alpha=1>0$ καί $\Delta<0$.

21. Εἶναι $x^2+5x+10>0$ γιά κάθε $x\in\mathbb{R}$ καί $-x^2+6x-9<0$ γιά κάθε $x\in\mathbb{R}-\{3\}$.

22. Ἐργαζόμαστε ὅπως στήν ἐφαρμογή 4 τῆς § 8.7

23. Θεωροῦμε τήν ἐξίσωση πρῶτα μέ ἄγνωστο τόν x, ὁπότε πρέπει $\Delta\geqslant 0$ καί βρίσκουμε $-9\leqslant y\leqslant 1$. Ὁμοίως καί γιά τόν y.

24. Βρίσκουμε ὅτι $2f(1)<0$ κτλ.

25. **α)** Ἐξετάζουμε τό πρόσημο καθενός παράγοντα κτλ.

β) Ἐπειδή εἶναι $x^2-x+1>0$ γιά κάθε $x\in\mathbb{R}$, ἡ ἀνίσωση εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν $(x-1)(x^2-9x+20)>0$.

γ) Ἐπειδή γιά κάθε $x\in\mathbb{R}$ $-x^2+x-4<0$, ἡ ἀνίσωση εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν $-(-x^2+x-4)>2x-6$.

26. Ἐργαζόμαστε ὅπως στήν ἐφαρμογή 2 τῆς § 8.9.

27. **α)** Πρέπει $\frac{\gamma}{\alpha}>0,\ \Delta>0,\ -\frac{\beta}{\alpha}<0$

β) Πρέπει $\frac{\gamma}{\alpha}<0$

γ) Πρέπει $\Delta>0,\ \frac{\gamma}{\alpha}=1$

28. Θέτουμε $y=\frac{x^2+2x-11}{2(x-3)}$ καί ἀποδεικνύουμε ὅτι $y\notin(2,6)$.

29. Ὁ x εἶναι ἡ λύση τοῦ συστήματος τῶν ἀνισώσεων

$$x^2+x+1 < (2x+1)+(x^2+1)$$
$$2x+1 < (x^2+x+1)+(x^2+1)$$
$$x^2+1 < (x^2+x+1)+(2x+1).$$

30. Ἐργαζόμαστε ὅπως στήν ἐφαρμογή τῆς § 8.10.

31. **α)** Γιά $\lambda \neq -1$ καί $\lambda \neq 4$ τό σύστημα ἔχει τή λύση $x = \dfrac{2\lambda}{\lambda+1}$, $y = \dfrac{6}{\lambda+1}$

Γιά $\lambda = -1$ τό σύστημα δέν ἔχει λύση

Γιά $\lambda = 4$ τό σύστημα ἔχει ἄπειρες λύσεις.

β) Γιά $\lambda \neq -1$ καί $\lambda \neq \dfrac{1}{3}$ τό σύστημα ἔχει τήν λύση

$$x = \frac{2(\lambda^2-3\lambda-1)}{(\lambda+1)(3\lambda-1)}, \quad y = \frac{-\lambda^2+\lambda-4}{(\lambda+1)(3\lambda-1)}$$

Γιά $\lambda = -1$ ἤ $\lambda = \dfrac{1}{3}$ τό σύστημα εἶναι ἀδύνατο.

32. **α)** Οἱ λύσεις τοῦ συστήματος εἶναι:

$$(x = 2 \textbf{ καί } y = 1) \textbf{ ἤ } \left(x = -9 \textbf{ καί } y = \frac{25}{3}\right)$$

β) Οἱ λύσεις τοῦ συστήματος εἶναι:

$$(x = 2 \textbf{ καί } y = 2) \textbf{ ἤ } \left(x = -\frac{20}{11} \textbf{ καί } y = \frac{1}{11}\right)$$

33. **α)** Οἱ λύσεις τοῦ συστήματος εἶναι:

$(x = 8$ **καί** $y = 3)$ **ἤ** $(x = 3$ **καί** $y = 8)$ **ἤ** $(x = -8$ **καί** $y = -3)$
ἤ $(x = -3)$ **καί** $y = -8)$

β) Οἱ λύσεις τοῦ συστήματος εἶναι:

$$(x = 5 \textbf{ καί } y = 3) \textbf{ ἤ } (x = 3 \textbf{ καί } y = 5) \textbf{ ἤ } \left(x = \frac{15+\sqrt{193}}{2}, \; y = \frac{15-\sqrt{193}}{2}\right)$$

$$\textbf{ἤ } \left(x = \frac{15-\sqrt{193}}{2} \textbf{ καί } y = \frac{15+\sqrt{193}}{2}\right)$$

34. **α)** Οἱ λύσεις τοῦ συστήματος εἶναι: $(x=-8$ **καί** $y=-3)$ **ἤ** $(x=-8$ **καί** $y = 2)$ **ἤ** $(x = 7$ **καί** $y=-3)$ **ἤ** $(x = 7$ **καί** $y = 2)$

β) Οἱ λύσεις τοῦ συστήματος εἶναι:

$$\left(x = 2 \textbf{ καί } y = \frac{1}{3} \textbf{ καί } z = \frac{1}{5}\right) \textbf{ ἤ } \left(x = -2 \textbf{ καί } y = -\frac{1}{3} \textbf{ καί } z = -\frac{1}{5}\right)$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. **α)** Ἄν $x = 0{,}3232\ldots32\ldots$, θά εἶναι $100x = 32{,}3232\ldots32\ldots = 32 + x$ ἤ $x = \frac{32}{99}$.

β) Ἄν $x = 2{,}34545\ldots45\ldots$, θά εἶναι $10x = 23{,}4545\ldots45\ldots$ καί $1000x = 2345{,}4545\ldots45\ldots$ Ἄρα $1000x - 10x = 2345 - 23$ ἤ $x = \frac{129}{55}$.

γ) Ὁ ἀριθμός $-32{,}52699\ldots9\ldots$ εἶναι τό μοναδικό στοιχεῖο τῶν διαστημάτων: $[-32{,}527,\ -32{,}526]$, $[-32{,}527,\ -32{,}5269], \ldots$ $[-32{,}527,\ -32{,}52699\ldots9\ldots]\ldots$, δηλαδή ὁ ἀριθμός $-32{,}527$.

2. **α)** Ἄν x εἶναι ἡ τετραγωνική ρίζα τοῦ 7, τότε $x^2 = 7$. Ἔστω k_1 ἕνας ἀκέραιος τέτοιος, ὥστε $\frac{k_1}{10} \leqslant x < \frac{k_1+1}{10}$ ἤ $k_1 \leqslant 10x < k_1 + 1$. Ἐπειδή ὅμως $k_1 \leqslant 10x < k_1 + 1 \Leftrightarrow k_1^2 \leqslant 100\,x^2 < (k+1)^2$ καί $100x^2 = 100 \cdot 7 = 700$, οἱ διαδοχικοί ἀκέραιοι k_1, $k_1 + 1$ εἶναι οἱ 26 καί 27, ἀφοῦ $26^2 \leqslant 700 < 27^2$. Ἑπομένως ἡ ζητούμενη προσέγγιση εἶναι $\frac{k_1}{10} = 2{,}6$ (μέ ἔλλειψη) καί $\frac{k_1+1}{10} = \frac{26+1}{10} = 2{,}7$ (μέ ὑπεροχή).

β) Ἄν ἐργαστοῦμε ὅπως παραπάνω, βρίσκουμε ὅτι ἡ ζητούμενη προσέγγιση $\frac{1}{10}$ εἶναι $\frac{17}{10} = 1{,}7$ (μέ ἔλλειψη) καί $\frac{17+1}{10} = 1{,}8$ (μέ ὑπεροχή).

3. Εἶναι: **α)** $\sqrt[3]{216} = \sqrt[3]{6^3} = 6$, **β)** $\sqrt[4]{625} = \sqrt[4]{5^4} = 5$, **γ)** $\sqrt[3]{\frac{125}{512}} = \sqrt[3]{\left(\frac{5}{8}\right)^3} = \frac{5}{8}$,

δ) $\sqrt{0{,}0009} = \sqrt{\left(\frac{3}{100}\right)^2} = \frac{3}{100}$, **ε)** $\sqrt[3]{\frac{64x^6y^9}{125}} = \frac{4x^2y^3}{5}$.

4. **α)** Εἶναι $A = \frac{|x|}{x}$. Ἄρα

$$A = \begin{cases} 1, & \text{ἄν } x > 0 \\ -1, & \text{ἄν } x < 0 \end{cases}$$

β) Εἶναι $A = |x-1| + |x-3|$, ὁπότε:

- ἄν $x \leqslant 1$, τότε $x - 1 \leqslant 0$ καί $x - 3 \leqslant 0$. Ἄρα $B = -(x-1)-(x-3) = -2x + 4$.
- ἄν $1 < x \leqslant 3$, τότε $x - 1 > 0$ καί $x - 3 \leqslant 0$. Ἄρα $B = x - 1 - x + 3 = 2$
- ἄν $x > 3$, τότε $x - 1 > 0$ καί $x - 3 > 0$. Ἄρα $B = x - 1 + x - 3 = 2x - 4$.

5. Ἔχουμε:

α) $\sqrt{36x^4 + 12x^2 + 1} = \sqrt{(6x^2+1)^2} = 6x^2 + 1$, ἀφοῦ $6x^2 + 1 > 0$

β) $\sqrt{\frac{1}{4}\,x^4 + \frac{3}{5}\,x^2 + \frac{9}{25}} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\,x^2 + \frac{3}{5}\right)^2} = \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{3}{5}$,

ἀφοῦ $\frac{1}{2}\,x^2 + \frac{3}{5} > 0$

γ) $\sqrt{\frac{x^4}{25y^2} + 1 + \frac{25y^2}{4x^4}} = \sqrt{\left(\frac{x^2}{5y} + \frac{5y}{2x^2}\right)^2} = \left|\frac{x^2}{5y} + \frac{5y}{2x^2}\right|$.

6. **α)** Πρέπει νά εἶναι $x+3 \geqslant 0$ **καί** $2x-1 \geqslant 0$, δηλαδή $x \geqslant \frac{1}{2}$. Γιά $x \geqslant \frac{1}{2}$ ὅμως ἔχουμε :

$$\sqrt{x+3} = \sqrt{2x-1} \Leftrightarrow x+3 = 2x-1 \Leftrightarrow x = 4,$$ πού εἶναι λύση παραδεκτή.

β) Πρέπει νά εἶναι $x-2 \geqslant 0$ ἤ $x \geqslant 2$. Γιά $x \geqslant 2$ ὅμως ἔχουμε :

$4-\sqrt{x-2} = 0 \Leftrightarrow 4 = \sqrt{x-2} \Leftrightarrow 16 = x-2 \Leftrightarrow x = 18$, πού εἶναι λύση παραδεκτή.

γ) Πρέπει νά εἶναι $x-2 \geqslant 0$ **καί** $2x+3 \geqslant 0$, δηλαδή $x \geqslant 2$. Γιά $x \geqslant 2$ ὅμως ἔχουμε: $\sqrt{x-2} = \sqrt{2x+3} \Leftrightarrow x-2 = 2x+3 \Leftrightarrow x = -5$ πού ἀποκλείεται, ἀφοῦ $-5 < 2$.

δ) Πρέπει νά εἶναι $-3x+5 \geqslant 0$ **καί** $x-7 \geqslant 0$, δηλαδή $x \leqslant \frac{5}{3}$ **καί** $x \geqslant 7$. Οἱ ἀνισώσεις ὅμως αὐτές δέ συναληθεύουν γιά καμιά τιμή τοῦ x. Ἄρα ἡ ἐξίσωση εἶναι ἀδύνατη.

7. Ἔχουμε :

α) $\sqrt{\sqrt[4]{16}} = \sqrt[8]{16} = \sqrt[8]{2^4} = \sqrt{2}$

β) $\sqrt[9]{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^3} = \sqrt[3]{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

γ) $\sqrt[8]{(\sqrt{5}-2)^4} = \sqrt{\sqrt{5}-2}$

8. Εἶναι:

α) $\sqrt{19600} = \sqrt{4 \cdot 49 \cdot 100} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{49} \cdot \sqrt{100} = 2 \cdot 7 \cdot 10 = 140$

β) $\sqrt[3]{27 \cdot 64 \cdot 343} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{343} = \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{4^3} \cdot \sqrt[3]{7^3} = 3 \cdot 4 \cdot 7 = 84$

γ) $\sqrt[5]{32 \cdot 243 \cdot 3125} = \sqrt[5]{32}\,\sqrt[5]{243}\,\sqrt[5]{3125} = \sqrt[5]{2^5}\,\sqrt[5]{3^5}\,\sqrt[5]{5^5} = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30.$

9. Ἔχουμε:

α) $\sqrt[4]{16\alpha^4\beta^8} = \sqrt[4]{(2\alpha\beta^2)^4} = 2|\alpha|\beta^2$

β) $\sqrt{108x^5y^6} = \sqrt{2^2 \cdot 3^3x^5y^6} = 2 \cdot 3x^2|y^3|\,\sqrt{3x} = 6x^2|y|^3\sqrt{3x}$

γ) $\sqrt{3\sqrt[4]{3\sqrt[5]{3}}} = \sqrt{\sqrt[4]{3^5\sqrt[5]{3}}} = \sqrt{\sqrt[4]{\sqrt[5]{3^{26}}}} = \sqrt[40]{3^{26}} = \sqrt[20]{3^{13}}$

δ) $\sqrt[3]{\sqrt{\alpha\sqrt[4]{\beta^2}}} = \sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[4]{\alpha^4\beta^2}}} = \sqrt[24]{\alpha^4\beta^2} = \sqrt[12]{\alpha^2|\beta|}$

10. Είναι:

α) $\sqrt[5]{\alpha^2}\,\sqrt[15]{\alpha^4} = \sqrt[15]{\alpha^6}\,\sqrt[15]{\alpha^4} = \sqrt[15]{\alpha^{10}} = \sqrt[3]{\alpha^2}$

β) $\sqrt[12]{\alpha^7}\,\sqrt[20]{\alpha^3}\,\sqrt[15]{\alpha^2} = \sqrt[60]{\alpha^{35}\,\alpha^9\,\alpha^8} = \sqrt[60]{\alpha^{52}} = \sqrt[15]{\alpha^{13}}$

γ) $\sqrt{2}\,\sqrt[3]{3}\,\sqrt[5]{\frac{1}{6}} = \sqrt[30]{2^{15}\,3^{10}\,\frac{1}{6^6}} = \sqrt[30]{\frac{2^{15}\,3^{10}}{2^6 . 3^6}} = \sqrt[30]{2^9\,3^4}$

11. Έχουμε:

α) $\sqrt[12]{\alpha^5} : \sqrt[4]{\alpha} = \sqrt[12]{\alpha^5} : \sqrt[12]{\alpha^3} = \sqrt[12]{\alpha^{5-3}} = \sqrt[6]{\alpha}$

β) $\sqrt[9]{\alpha^8} : \sqrt[6]{\alpha^5} = \sqrt[18]{\alpha^{16} : \alpha^{15}} = \sqrt[18]{\alpha}$

γ) $\sqrt[15]{3^{10}} : \sqrt[10]{3^3} = \sqrt[30]{3^{20} : 3^9} = \sqrt[30]{3^{11}}$

12. Έχουμε:

α) $\sqrt{8} + \sqrt{32} - \sqrt{18} = \sqrt{2^2.2} + \sqrt{2^4.2} - \sqrt{3^2.2} = 2\sqrt{2} + 2^2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

β) $3\sqrt{32} - 2\sqrt{50} = 12\sqrt{2} - 10\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

γ) $-\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{375} - \sqrt[3]{54} = -\sqrt[3]{2^3.2} + \sqrt[3]{5^3.3} - \sqrt[3]{3^3.2} = -2\sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{3} - 3\sqrt[3]{2}$

$= -5\sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{3}$

δ) $8\sqrt{20} + 3\sqrt{80} - 2\sqrt{500} = 8\sqrt{2^2 \cdot 5} + 3\sqrt{2^4 \cdot 5} - 2\sqrt{5 \cdot 10^2} = (16+12-20)\sqrt{5} = 8\sqrt{5}$

13. Είναι:

α) $\sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{3+2-2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2} = |\sqrt{3}-\sqrt{2}| = \sqrt{3}-\sqrt{2}$

β) $\sqrt{9-4\sqrt{5}} = \sqrt{4+5-2.2\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} = |\sqrt{5}-2| = \sqrt{5}-2$

γ) $\sqrt{54+14\sqrt{5}} = \sqrt{49+5+2.7\sqrt{5}} = \sqrt{(7+\sqrt{5})^2} = 7+\sqrt{5}$

14. Έχουμε:

α) $\frac{1}{\sqrt[3]{5}} = \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5}\,\sqrt[3]{5^2}} = \frac{\sqrt[3]{5^2}}{5}$

β) $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3})^2-1^2} = \frac{3+1-2\sqrt{3}}{3-1} = 2-\sqrt{3}$

γ) $\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{(x-\sqrt{x^2+1})^2}{(x+\sqrt{x^2+1})(x-\sqrt{x^2+1})} = \frac{x^2+x^2+1-2x\sqrt{x^2+1}}{x^2-x^2-1}$

$= -2x^2+2x\sqrt{x^2+1}-1$

δ) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}$

$$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{5+2\sqrt{6}-5}$$

$$= \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})\sqrt{6}}{2\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})\sqrt{6}}{12}$$

15. Έχουμε:

α) $\frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{8}-\sqrt{3}}{8-3} + \frac{\sqrt{8}+\sqrt{3}}{8-3} = \frac{2\sqrt{8}}{5} = \frac{4\sqrt{2}}{5}$

β) $(2-\sqrt{3})^{-3}+(2+\sqrt{3})^{-3} = \frac{1}{(2-\sqrt{3})^3} + \frac{1}{(2+\sqrt{3})^3} =$

$$= \frac{(2+\sqrt{3})^3+(2-\sqrt{3})^3}{[(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})]^3} = \frac{2\cdot 2^3+6\cdot 2\cdot(\sqrt{3})^2}{1} = 16+36 = 52.$$

16. Άν $x = \sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}$, τότε θά έχουμε:

$x^2 = 4+2\sqrt{3}+4-2\sqrt{3}-2\sqrt{(4+2\sqrt{3})(4-2\sqrt{3})} = 8-2\sqrt{16-12} = 4$. Καί έπειδή $x > 0$, $x = \sqrt{4} = 2$.

17. Έστω $\alpha \neq \alpha'$. Τότε θά είναι $\alpha + \sqrt{\beta} = \alpha' + \sqrt{\beta'} \Rightarrow$

$\sqrt{\beta} = \alpha'-\alpha + \sqrt{\beta'} \Rightarrow (\sqrt{\beta})^2 = (\alpha'-\alpha+\sqrt{\beta'})^2 \Rightarrow$

$\sqrt{\beta'} = \frac{\beta-\beta'-(\alpha'-\alpha)^2}{2(\alpha'-\alpha)}$. Άρα $\sqrt{\beta'}$ ρητός ώς πηλίκο δύο ρητῶν. Αὐτό ὅμως εἶναι ἄτοπο. Ἑπομένως $\alpha = \alpha'$, ὁπότε καί $\beta = \beta'$.

18. Εἶναι:

α) $27^{-\frac{5}{6}} \cdot 3^{2,5} = \frac{1}{\sqrt[6]{27^5}} \cdot \sqrt{3^5} = \frac{1}{\sqrt{3^6}} \cdot \sqrt{3^5} = 1$

β) $(6,25)^{-\frac{3}{4}} \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = \sqrt[4]{\left(\frac{100}{625}\right)^3} \cdot 5^3 = \sqrt[4]{\left(\frac{10}{25}\right)^6} \cdot 5^3 = \sqrt{\frac{10^3}{5^6}} \cdot 5^3 = 10\sqrt{10}.$

19. Εἶναι:

$$A = \left(\alpha^{-\frac{3}{2}} \beta \alpha^{-\frac{1}{2}} \beta \alpha^{\frac{2}{3}}\right)^3 = \left(\alpha^{-2}\beta^2\alpha^{\frac{2}{3}}\right)^3 = \alpha^{-6}\beta^6\alpha^2 = \alpha^{-4}\beta^6.$$

Ὁπότε γιά $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ καί $\beta = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ ἔχουμε:

$$A = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-4} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^6 = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^4 \frac{1}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^6} = \frac{2^4}{2^2} \cdot \frac{1}{2^2} = 1.$$

20. Ἄν θέσουμε $\alpha^{\frac{1}{3}}=k$, $\beta^{\frac{1}{3}}=\lambda$, θά ἔχουμε:

α) $(k+\lambda)(k^2-k\lambda+\lambda^2)=k^3+\lambda^3=\left(\alpha^{\frac{1}{3}}\right)^3+\left(\beta^{\frac{1}{3}}\right)^3=\alpha+\beta$

β) $(k-\lambda)(k^2+k\lambda+\lambda^2)=k^3-\lambda^3=\left(\alpha^{\frac{1}{3}}\right)^3-\left(\beta^{\frac{1}{3}}\right)^3=\alpha-\beta.$

21. Ἔχουμε:

α) $\left(7^{\frac{1}{2}}-6^{\frac{1}{2}}\right)\left(7^{\frac{1}{2}}+6^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+1\right)\left(x^{\frac{1}{2}}-1\right)=\left[\left(7^{\frac{1}{2}}\right)^2-\left(6^{\frac{1}{2}}\right)^2\right]\left[\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2-1^2\right]$

$=(7-6)(x-1)=x-1$

β) $-2(\alpha\beta)^{\frac{1}{2}}\left(\alpha^{\frac{1}{2}}-\beta^{\frac{1}{2}}\right)=-2\alpha^{\frac{1}{2}}\beta^{\frac{1}{2}}\alpha^{\frac{1}{2}}+2\alpha^{\frac{1}{2}}\beta^{\frac{1}{2}}\beta^{\frac{1}{2}}=-2\alpha\sqrt{\beta}+2\beta\sqrt{\alpha}$

γ) $2\sqrt{6}\left(3^{\frac{1}{2}}-2\sqrt{6}+12^{\frac{1}{2}}\right)=2\sqrt{6}\,(\sqrt{3}-2\sqrt{6}+\sqrt{12})=$

$=2\sqrt{18}-4.6+2\sqrt{6.12}=6\sqrt{2}-24+12\sqrt{2}=18\sqrt{2}-24$

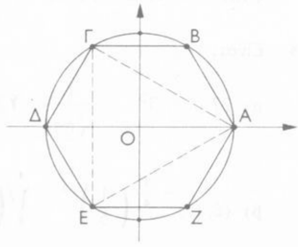
δ) $\left(5.6^{\frac{1}{2}}+5^{\frac{1}{2}}\right)^2-\left(5.6^{\frac{1}{2}}-5^{\frac{1}{2}}\right)^2=$

$=5^2.6+5+2.5.6^{\frac{1}{2}}.5^{\frac{1}{2}}-\left(5^2.6+5-2.5.6^{\frac{1}{2}}.5^{\frac{1}{2}}\right)=20\sqrt{30}.$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

1. α) Ἔστω τό κανονικό ἑξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ. Οἱ κορυφές του χωρίζουν τόν τριγωνομετρικό κύκλο (μέ ἀρχή Α) σέ 6 ἴσα τόξα,

μέ μῆκος $\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$. Ἑπομένως,



στό Α ἀπεικονίζονται οἱ ἀριθμοί $0+2k\pi$

» Β » » » $\frac{\pi}{3}+2k\pi$

» Γ » » » $\frac{2\pi}{3}+2k\pi$

» Δ » » » $\pi+2k\pi$

» Ε » » » $\frac{4\pi}{3}+2k\pi$

» Ζ » » » $\frac{5\pi}{3}+2k\pi$

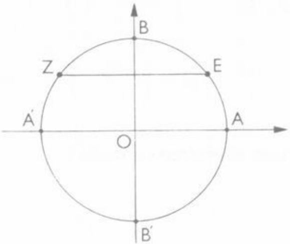
β) Οἱ κορυφές τοῦ ἰσόπλευρου τριγώνου ΑΓΕ χωρίζουν τόν τριγωνομετρικό κύκλο σέ 3 ἴσα τόξα μέ μῆκος $\frac{2\pi}{3}$. Ἑπομένως,

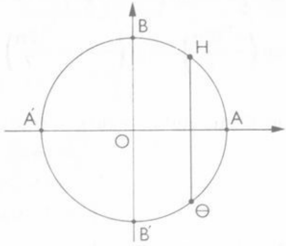
στό Α ἀπεικονίζονται οἱ ἀριθμοί $0+2k\pi$

» Γ » » » $\frac{2\pi}{3}+2k\pi$

» Ε » » » $\frac{4\pi}{3}+2k\pi$

2. α) Ἔστω ἡ χορδή ΕΖ // ΑΑ'. Ἄν στό σημεῖο Ε ἀπεικονίζεται ὁ ἀριθμός x, τότε στό Ζ θά ἀπεικονίζεται ὁ π−x.



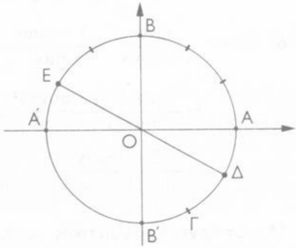


Ἄρα οἱ εἰκόνες τῶν ἀριθμῶν $2k\pi+x$ καί $2k\pi+\pi-x$, $k\in\mathbb{Z}$ ὁρίζουν χορδές παράλληλες πρός τόν ἄξονα ΑΑ'.

β) Ὁμοίως, ἔστω ἡ χορδή ΗΘ // ΒΒ', ὁπότε, ἄν στό σημεῖο Η ἀπεικονίζεται ὁ ἀριθμός x, τότε στό Θ θά ἀπεικονίζεται ὁ −x.

Ἄρα οἱ εἰκόνες τῶν ἀριθμῶν $2k\pi+x$ καί $2k\pi-x$, $k\in\mathbb{Z}$ ὁρίζουν χορδές παράλληλες πρός τόν ἄξονα ΒΒ'.

3. Οἱ εἰκόνες τῶν ἀριθμῶν $\frac{5\pi}{3}$ καί $-\frac{\pi}{3}$ συμπίπτουν στό σημεῖο Γ, τῶν ἀριθμῶν $\frac{5\pi}{6}$ καί $-\frac{7\pi}{6}$ στό σημεῖο Ε καί τῶν ἀριθμῶν $-\frac{\pi}{6}$ καί $\frac{11\pi}{6}$ στό σημεῖο Δ.



Ἄρα οἱ εἰκόνες τῶν ἀριθμῶν:

$\frac{5\pi}{6}$ καί $-\frac{\pi}{6}$ εἶναι τά ἀντιδιαμετρικά σημεῖα Ε καί Δ

$-\frac{7\pi}{6}$ καί $\frac{11\pi}{6}$ εἶναι τά ἀντιδιαμετρικά σημεῖα Ε καί Δ.

4. Ἀφοῦ τό σημεῖο Μ ἔχει συντεταγμένες $-\frac{5}{13}$, y, συμπεραίνουμε ὅτι

$$\text{συν}x = -\frac{5}{13} \quad \text{καί} \quad \text{ημ}x = y.$$

Ἄρα $\text{ημ}^2x = 1-\text{συν}^2x = 1-\left(-\frac{5}{13}\right)^2 = 1-\frac{25}{169} = \frac{144}{169}$ καί ἐπειδή εἶναι $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$

ἔχουμε $\text{ημ}x = -\sqrt{\frac{144}{169}} = -\frac{12}{13}$.

Ἄν τώρα ἀντικαταστήσουμε τίς τιμές τῶν συνx καί ημx στήν παράσταση Α, θά ἔχουμε:

$$A = \frac{\left[2\left(-\frac{12}{13}\right)-3\left(-\frac{5}{13}\right)\right]-\left[\left(-\frac{12}{13}\right)^2-\left(-\frac{5}{13}\right)^2\right]}{2\left(-\frac{12}{13}\right)\left(-\frac{5}{13}\right)} = -\frac{59}{30}.$$

5. Είναι :

$$ημ\frac{23π}{5} = ημ\left(4π + \frac{3π}{5}\right) = ημ\frac{3π}{5},\ συν\left(\frac{-28π}{5}\right) = συν\left(-6π + \frac{2π}{5}\right) = συν\frac{2π}{5},$$

$$ημ\left(-\frac{30π}{7}\right) = ημ\left(-6π + \frac{12π}{7}\right) = ημ\frac{12π}{7}.$$

6. **α)** Είναι: $ημ^6x + συν^6x = (ημ^2x)^3 + (συν^2x)^3$

$$= (ημ^2x + συν^2x)^3 - 3ημ^2x\,συν^2x(ημ^2x + συν^2x)$$
$$= 1^3 - 3ημ^2x\,συν^2x . 1$$
$$= 1 - 3ημ^2x\,συν^2x$$

β) Είναι: $ημ^4x - συν^4x = (ημ^2x + συν^2x)\,(ημ^2x - συν^2x) =$

$$= 1\cdot(ημ^2x - συν^2x)$$
$$= ημ^2x - συν^2x$$
$$= 1 - συν^2x - συν^2x$$
$$= 1 - 2συν^2x$$

γ) Είναι: $ημ^2xσυν^2φ - ημ^2φσυν^2x = ημ^2x(1 - ημ^2φ) - ημ^2φ(1 - ημ^2x)$

$$= ημ^2x - ημ^2xημ^2φ - ημ^2φ + ημ^2φ\,ημ^2x = ημ^2x - ημ^2φ.$$

δ) Είναι: $\dfrac{ημx}{1 + συνx} + \dfrac{1 + συνx}{ημx} = \dfrac{ημx . ημx}{ημx(1 + συνx)} + \dfrac{(1 + συνx)(1 + συνx)}{ημx(1 + συνx)}$

$$= \frac{ημ^2x + (1 + συνx)^2}{ημx(1 + συνx)} = \frac{ημ^2x + 1 + 2συνx + συν^2x}{ημx(1 + συνx)}$$

$$= \frac{2 + 2συνx}{ημx(1 + συνx)} = \frac{2(1 + συνx)}{ημx(1 + συνx)} = \frac{2}{ημx}$$

7. Ἂν ὑπῆρχε πραγματικός ἀριθμός x τέτοιος, ὥστε $ημx = 0$ **καί** $συνx = 0$, τότε $ημ^2x = 0$ **καί** $συν^2x = 0$, ὁπότε $ημ^2x + συν^2x = 0$, πού εἶναι ἄτοπο, γιατί $\forall\, x,\ ημ^2x + συν^2x = 1$.

8. Ἐπειδή $\left(\frac{12}{13}\right)^2 + \left(-\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{144}{169} + \frac{25}{169} = 1$, οἱ ἀριθμοί $\frac{12}{13}$ καί $\frac{-5}{13}$ μπορεῖ νά εἶναι τιμές τῶν συναρτήσεων ἡμίτονο καί συνημίτονο στόν ἴδιο ἀριθμό x καί ἐπειδή οἱ $\frac{12}{13}$ καί $\frac{-5}{13}$ εἶναι ἑτερόσημοι, τό ἀντίστοιχο τόξο θά λήγει στό β′ ἤ γ′ τεταρτημόριο.

9. Γιά $x = \frac{π}{3}$ ἔχουμε : $A = \dfrac{ημ\frac{π}{3} + συν\frac{π}{3}}{εφ\frac{π}{3} + σφ\frac{π}{3}} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}}{\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}} = \dfrac{\sqrt{3}\,(\sqrt{3} + 1)}{8}$

Γιά $x = \frac{π}{4}$ ἔχουμε : $A = \dfrac{ημ\frac{π}{4} + συν\frac{π}{4}}{εφ\frac{π}{4} + σφ\frac{π}{4}} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + 1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Γιά $x = \frac{\pi}{6}$ ἔχουμε : $A = \dfrac{\eta\mu\frac{\pi}{6} + \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}}{\varepsilon\varphi\frac{\pi}{6} + \sigma\varphi\frac{\pi}{6}} = \dfrac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{8}.$

10. Εἶναι : $\varepsilon\varphi\left(-\frac{23\pi}{6}\right) = \varepsilon\varphi\left(-\frac{24\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) = \varepsilon\varphi\left(-4\pi + \frac{\pi}{6}\right)$

$$= \varepsilon\varphi\left(-2\cdot 2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sigma\varphi\left(\frac{17\pi}{4}\right) = \sigma\varphi\left(\frac{16\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \sigma\varphi\left(4\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sigma\varphi\left(2\cdot 2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \sigma\varphi\frac{\pi}{4} = 1.$$

11. Εἶναι : $\eta\mu\frac{13\pi}{6} = \eta\mu\left(\frac{12\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) = \eta\mu\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \eta\mu\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$$\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{15\pi}{4}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(-\frac{16\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(-4\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sigma\upsilon\nu\left(-2.2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{19\pi}{3}\right) = \varepsilon\varphi\left(\frac{18\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \varepsilon\varphi\left(6\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \varepsilon\varphi\left(3.2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$\sigma\varphi\left(\frac{13\pi}{6}\right) = \sigma\varphi\left(\frac{12\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) = \sigma\varphi\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sigma\varphi\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$$

Ἄρα: $A = \dfrac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2}+1}{4\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)}{12}$

12. Εἶναι: $\sigma\upsilon\nu^2 x = 1 - \eta\mu^2 x = 1 - \left(\frac{12}{15}\right)^2 = 1 - \frac{144}{225} = \frac{81}{225}$ καί ἐπειδή εἶναι $0 < x < \frac{\pi}{2}$,

θά εἶναι $\sigma\upsilon\nu\, x = \sqrt{\frac{81}{225}} = \frac{9}{15}$, ὁπότε $\varepsilon\varphi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{4}{3}$ καί $\sigma\varphi x = \frac{1}{\varepsilon\varphi x} = \frac{3}{4}$.

Ἑπομένως

$$A = \frac{2\cdot\frac{4}{3} - 3\frac{9}{15} + 2\cdot\frac{3}{4}}{5\cdot\frac{12}{15}} = \frac{71}{120}.$$

13. **α)** Εἶναι $\sigma\varphi x + \varepsilon\varphi x = \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} + \dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \dfrac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x} + \dfrac{\eta\mu^2 x}{\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x}$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x} = \frac{1}{\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x}$$

β) Είναι : ημx συνx(1+εφx) (1+σφx) =

$$= \eta\mu x\ \sigma\upsilon\nu x\ (1+\varepsilon\varphi x+\sigma\varphi x+\varepsilon\varphi x\ \sigma\varphi x)$$
$$= \eta\mu x\ \sigma\upsilon\nu x\ (1+\varepsilon\varphi x+\sigma\varphi x+1)$$
$$= \eta\mu x\ \sigma\upsilon\nu x\ (2+\varepsilon\varphi x+\sigma\varphi x)$$
$$= 2\eta\mu x\ \sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x\ \sigma\upsilon\nu x\ \varepsilon\varphi x+\eta\mu x\ \sigma\upsilon\nu x\ \sigma\varphi x$$
$$= 2\eta\mu x\ \sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x\ \sigma\upsilon\nu x\ \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}+\eta\mu x\ \sigma\upsilon\nu\ x\ \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$$
$$= 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x = 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x+1 = 1+2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x$$

14. α) Γιά $t=1$ είναι $h = 50+20\ \eta\mu\frac{\pi}{4} = 50+20\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 64{,}14$ cm

$t=2$ είναι $h = 50+20\ \eta\mu\ 2\frac{\pi}{4} = 50+20\ \eta\mu\ \frac{\pi}{2} = 70$ cm

$t=4$ είναι $h = 50+20\ \eta\mu\ 4\frac{\pi}{4} = 50+20\ \eta\mu\ \pi = 50$ cm

$t=6$ είναι $h = 50+20\ \eta\mu\ 6\frac{\pi}{4} = 50+20\ \eta\mu\ \frac{3\pi}{2} = 30$ cm

$t=9$ είναι $h = 50+20\ \eta\mu\ 9\frac{\pi}{4} = 50+20\ \eta\mu\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right) = 64{,}14$ cm.

β) Τό μέγιστο ὕψος είναι 70 cm καί τό ἐλάχιστο 30 cm.

15. Ἀπό τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΓΔ ἔχουμε $\upsilon = (\text{ΑΓ})\varepsilon\varphi\ \alpha$ ἤ

$$(\text{ΑΓ}) = \upsilon\ \sigma\varphi\ \alpha \qquad (1)$$

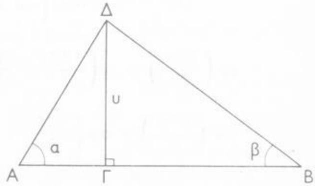
Ὁμοίως ἀπό τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΔΓΒ ἔχουμε $\upsilon = (\text{ΒΓ})\varepsilon\varphi\ \beta$ ἤ

$$(\text{ΒΓ}) = \upsilon\ \sigma\varphi\ \beta \qquad (2)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τίς (1) καί (2) βρίσκουμε

$(\text{ΑΓ})+(\text{ΒΓ}) = \upsilon\ (\sigma\varphi\ \alpha+\sigma\varphi\ \beta)$ ἤ

$$\upsilon = \frac{(\text{ΒΑ})}{\sigma\varphi\alpha+\sigma\varphi\beta}.$$

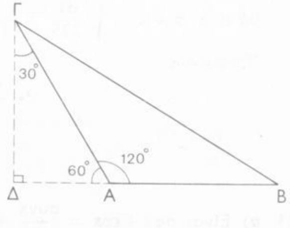


16. α) Ἄν Δ είναι ἡ ὀρθή προβολή τῆς κορυφῆς Γ στήν πλευρά ΑΒ, τότε ἀπό τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΓΔ θά ἔχουμε:

$$(\text{ΔΑ}) = \beta\eta\mu 30^\circ = \frac{\beta}{2} \quad \text{καί}$$
$$(\text{ΔΓ}) = \beta\eta\mu 60^\circ = \frac{\beta\sqrt{3}}{2}.$$

Ἑπομένως ἀπό τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΒΓΔ θά ἔχουμε:

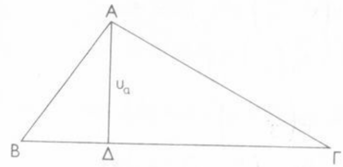
$$\varepsilon\varphi\text{Β} = \frac{(\text{ΓΔ})}{(\text{ΒΔ})} = \frac{\frac{\beta\sqrt{3}}{2}}{\gamma+\frac{\beta}{2}} = \frac{\beta\sqrt{3}}{2\gamma+\alpha}.$$



β) Ἀπό τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΒΓΔ ἔχουμε:

$$\alpha^2 = \left(\gamma+\frac{\beta}{2}\right)^2+\left(\frac{\beta\sqrt{3}}{2}\right) = \gamma^2+\frac{\beta^2}{4}+\beta\gamma+\frac{3\beta^2}{4} = \beta^2+\gamma^2+\beta\gamma.$$

17. **α)** Είναι $A+B+\Gamma=180^0$ καί $\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{\Gamma}{2}=90^0$. Ἄρα



$$\eta\mu A=\eta\mu[180^0-(B+\Gamma)]=\eta\mu(B+\Gamma)$$
$$\sigma\upsilon\nu A=\sigma\upsilon\nu[180^0-(B+\Gamma)]=-\sigma\upsilon\nu(B+\Gamma)$$
$$\eta\mu\frac{A}{2}=\eta\mu\left(90^0-\frac{B+\Gamma}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{B+\Gamma}{2}$$
$$\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}=\sigma\upsilon\nu\left(90^0-\frac{B+\Gamma}{2}\right)=\eta\mu\frac{B+\Gamma}{2}$$

β) Είναι $\upsilon_\alpha=\beta\,\eta\mu\,\Gamma$. Ἄρα τό ἐμβαδόν τοῦ ΑΒΓ εἶναι:

$$E=\frac{1}{2}\alpha\cdot\upsilon_\alpha=\frac{1}{2}\alpha\,\beta\,\eta\mu\Gamma.$$

γ) Ἐπειδή $A=90^0$, θά εἶναι $B+\Gamma=90^0$ καί $\sigma\upsilon\nu B=\sigma\upsilon\nu(90^0-\Gamma)=\eta\mu\Gamma$. Ἑπομένως ἡ βασική σχέση $\eta\mu^2B+\sigma\upsilon\nu^2B=1$ γίνεται $\eta\mu^2B+\eta\mu^2\Gamma=1$.

18. Είναι:
$$f(\pi+x)=2\,\sigma\upsilon\nu^2(\pi+x)+3\eta\mu(\pi+x)\sigma\upsilon\nu(\pi+x)+5\eta\mu^2(\pi+x)+1$$
$$=2(-\sigma\upsilon\nu x)^2+3(-\eta\mu x)\,(-\sigma\upsilon\nu x)+5(-\eta\mu x)^2+1$$
$$=2\sigma\upsilon\nu^2x+3\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x+5\eta\mu^2x+1=f(x)$$
$$g(\pi+x)=2\,\varepsilon\varphi(\pi+x)-3\sigma\varphi(\pi+x)+2$$
$$=2\,\varepsilon\varphi x-3\sigma\varphi x+2=g(x)$$
$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=4\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+4\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-1$$
$$=4\,\sigma\varphi x+4\varepsilon\varphi x-1=\varphi(x)$$
$$\varphi(\pi+x)=4\varepsilon\varphi(\pi+x)+4\sigma\varphi(\pi+x)-1$$
$$=4\varepsilon\varphi x+4\sigma\varphi x-1=\varphi(x)$$
$$\varphi\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=4\varepsilon\varphi\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)+4\sigma\varphi\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)-1$$
$$=4\sigma\varphi x+4\varepsilon\varphi x-1=\varphi(x)$$

19. **α)** Είναι:
$$\eta\mu(270^0+\theta)+\eta\mu(180^0+\theta)+\eta\mu(90^0+\theta)+\eta\mu\theta$$
$$=-\sigma\upsilon\nu\theta+(-\eta\mu\theta)+\sigma\upsilon\nu\theta+\eta\mu\theta=0.$$

β) Είναι
$$\varepsilon\varphi1^0\varepsilon\varphi2^0\varepsilon\varphi3^0\cdots\varepsilon\varphi89^0=(\varepsilon\varphi1^0\,\varepsilon\varphi89^0)(\varepsilon\varphi2^0\,\varepsilon\varphi88^0)\cdots(\varepsilon\varphi45^0\,\sigma\varphi45^0)$$
$$=(\varepsilon\varphi1^0\sigma\varphi1^0)(\varepsilon\varphi2^0\sigma\varphi2^0)\cdots(\varepsilon\varphi45^0\sigma\varphi45^0).$$
$$=1.1.1\ldots1=1$$

γ) Ἐπειδή $\eta\mu(180^0-\theta)=\eta\mu\theta$, $\sigma\varphi(90^0-\theta)=\varepsilon\varphi\theta$ καί $\sigma\upsilon\nu\theta>0$, θά ἔχουμε τίς ἰσοδυναμίες :
$$\eta\mu(180^0-\theta)\sigma\varphi(90^0-\theta)>2-2\sigma\upsilon\nu\theta\Leftrightarrow\eta\mu\theta\,\varepsilon\varphi\theta>2-2\sigma\upsilon\nu\theta$$
$$\Leftrightarrow\eta\mu^2\theta>2\sigma\upsilon\nu\theta-2\sigma\upsilon\nu^2\theta\Leftrightarrow1-2\sigma\upsilon\nu\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta>0\Leftrightarrow(1-\sigma\upsilon\nu\theta)^2>0,$$
πού εἶναι ἀληθής.

20. Είναι:
$$A=\frac{\varepsilon\varphi(\pi-\theta)\sigma\upsilon\nu(2\pi+\theta)\,\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{\eta\mu(\pi+\theta)\sigma\upsilon\nu(-\theta)\,\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=\frac{-\varepsilon\varphi\theta\sigma\upsilon\nu\theta(-\eta\mu\theta)}{-\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta\varepsilon\varphi\theta}=-1.$$

21. **α)** Έχουμε:

$$\eta\mu^2 2x - \eta\mu^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\eta\mu 2x+\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right]\left[\eta\mu 2x-\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right]=0$$

$\Leftrightarrow \eta\mu 2x+\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=0$ ή $\eta\mu 2x-\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=0$ Είναι όμως:

$$\eta\mu 2x+\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=0 \Leftrightarrow \eta\mu 2x=-\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu 2x=\eta\mu\left[-\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right] \Leftrightarrow \eta\mu 2x=\eta\mu\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[2x=2k\pi+\frac{\pi}{3}-x, \text{ ή } 2x=(2k+1)\pi-\left(\frac{\pi}{3}-x\right),\ k\in\mathbb{Z}\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[3x=2k\pi+\frac{\pi}{3} \text{ ή } x=(2k+1)\pi-\frac{\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[x=\frac{2\pi}{3}k+\frac{\pi}{9} \text{ ή } x=(2k+1)\pi-\frac{\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[x=\frac{(6k+1)\pi}{9} \text{ ή } x=\frac{2(3k+1)\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}\right]$$

$$\eta\mu 2x-\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=0 \Leftrightarrow \eta\mu 2x=\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[2x=2k\pi+x-\frac{\pi}{3} \text{ ή } 2x=(2k+1)\pi-\left(x-\frac{\pi}{3}\right),\ k\in\mathbb{Z}\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[x=2k\pi-\frac{\pi}{3} \text{ ή } 3x=(2k+1)\pi+\frac{\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[x=\frac{(6k-1)\pi}{3} \text{ ή } x=\frac{2(3k+2)\pi}{9},\ k\in\mathbb{Z}\right]$$

β) Επειδή $\eta\mu^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1-\sigma\upsilon\nu^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ η εξίσωση γράφεται:

$$\sigma\upsilon\nu^2 3x-\sigma\upsilon\nu^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\sigma\upsilon\nu 3x+\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]\left[\sigma\upsilon\nu 3x-\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\sigma\upsilon\nu 3x+\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0 \text{ ή } \sigma\upsilon\nu 3x-\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0\right].$$

Είναι όμως:

$$\sigma\upsilon\nu 3x+\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\sigma\upsilon\nu(3x)$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu(\pi-3x) \Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=2k\pi\pm(\pi-3x)\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\pi-3x \text{ ή } x+\frac{\pi}{4}=2k\pi-\pi+3x,\ k\in\mathbb{Z}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(4x=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{4} \text{ ή } -2x=2k\pi-\pi-\frac{\pi}{4},\ k\in\mathbb{Z}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{16} \text{ ή } x=-k\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8},\ k\in\mathbb{Z}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(x = \frac{8k\pi+3\pi}{16} \text{ ἢ } x = -\frac{8k\pi-5\pi}{16}, \quad k \in \mathbb{Z}\right)$$

$$\Leftrightarrow \text{συν}3x - \text{συν}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \text{συν}\,3x = \text{συν}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow 3x = 2k\pi \pm \left(x + \frac{\pi}{4}\right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \left(3x = 2k\pi + x + \frac{\pi}{4} \text{ ἢ } 3x = 2k\pi - x - \frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(2x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \text{ ἢ } 4x = 2k\pi - \frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(x = k\pi + \frac{\pi}{8} \text{ ἢ } x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{16}, \quad k \in \mathbb{Z}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(x = \frac{(8k+1)\pi}{8} \text{ ἢ } x = \frac{(8k-1)\pi}{16}, \quad k \in \mathbb{Z}\right)$$

22. **α)** Εἶναι: $\text{εφ}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \text{σφ}x \Leftrightarrow \text{εφ}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \text{εφ}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$$\Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{4} = k\pi + \frac{\pi}{2} - x, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 3x = k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{12} \Leftrightarrow x = \frac{(4k+1)\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

β) Εἶναι: $\text{ημ}5x = \text{συν}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \text{ημ}5x = \text{ημ}\left(\frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi}{3}\right)$

$$\Leftrightarrow \text{ημ}5x = \text{ημ}\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[5x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} - x \text{ ἢ } 5x = 2k\pi + \pi - \left(\frac{\pi}{6} - x\right), \quad k \in \mathbb{Z}\right]$$

$$\Leftrightarrow \left(x = \frac{(12k+1)\pi}{36} \text{ ἢ } x = \frac{(12k+5)\pi}{24}, \quad k \in \mathbb{Z}\right).$$

23. **α)** Ἐπειδὴ $\frac{\sqrt{2}}{2} = \text{ημ}\frac{\pi}{4}$, ἡ ἐξίσωση γράφεται :

$$\text{ημ}3x = \text{ημ}\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \left(3x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \text{ ἢ } 3x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(x = \frac{(8k+1)\pi}{12} \quad (1) \quad \text{ἢ} \quad x = \frac{(8k+3)\pi}{12} \quad (2) \quad k \in \mathbb{Z}\right).$$

Πρέπει ὅμως νά εἶναι $0 \leqslant \frac{(8k+1)\pi}{12} \leqslant 2\pi$ ἤ $-1 \leqslant k \leqslant \frac{23}{8}$.

Ἄρα πρέπει $k = 0,1,2$. Ἑπομένως οἱ ρίζες τῆς (1) στό διάστημα $[0, 2\pi]$ θά εἶναι $\frac{\pi}{12}$, $\frac{9\pi}{12}$ καί $\frac{17\pi}{12}$.

Ὁμοίως πρέπει νά εἶναι:

$0 \leqslant \frac{(8k+3)\pi}{12} \leqslant 2\pi$ ἤ $-\frac{3}{8} \leqslant k \leqslant \frac{21}{8}$. Ἄρα πρέπει $k = 0, 1, 2$. Ἑπομένως οἱ ρίζες τῆς (2) στό διάστημα $[0,2\pi]$ θά εἶναι $\frac{\pi}{4}$, $\frac{11\pi}{12}$ καί $\frac{19\pi}{12}$.

β) Ἐπειδή $\frac{\sqrt{3}}{3} = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{6}$, ἡ ἐξίσωση γράφεται:

$$\varepsilon\varphi 2x = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{6},\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{(6k+1)\pi}{12},\quad k \in \mathbb{Z}.$$

Πρέπει ὅμως νά εἶναι $0 \leqslant \frac{(6k+1)\pi}{12} \leqslant 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. ἤ $-\frac{1}{6} \leqslant k \leqslant \frac{23}{6}$.

Ἄρα πρέπει $k = 0, 1, 2, 3$.

Ἑπομένως οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως στό διάστημα $[0, 2\pi]$ θά εἶναι:

$\frac{\pi}{12}$, $\frac{17\pi}{12}$, $\frac{13\pi}{12}$ καί $\frac{19\pi}{12}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

1. Ὁ λόγος μεταβολῆς τῆς f μεταξύ τῶν x_1, x_2 εἶναι:

$$\lambda = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = \frac{(x_1^3+5x_1^2+6)-(x_2^3+5x_2^2+6)}{x_1-x_2} = \frac{x_1^3-x_2^3+5(x_1^2-x_2^2)}{x_1-x_2}$$

$$= \frac{(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)+5(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{x_1-x_2}$$

$$= \frac{(x_1-x_2)[x_1^2+x_1x_2+x_2^2+5(x_1+x_2)]}{x_1-x_2} = (x_1+x_2)^2-x_1x_2+5(x_1+x_2).$$

Ἄρα ὁ λόγος μεταβολῆς τῆς f μεταξύ -1, 2 εἶναι:

$$\lambda = (-1+2)^2-(-1)\cdot 2+5(-1+2) = 1+2+5 = 8.$$

Ὁ λόγος μεταβολῆς τῆς f μεταξύ 3 καί 5 εἶναι:

$$\lambda = (3+5)^2-3.5+5(3+5) = 8^2-15+5.8 = 64-15+40 = 89.$$

Ὁ λόγος μεταβολῆς τῆς g μεταξύ τῶν x_1, x_2 εἶναι:

$$\lambda = \frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2} = \frac{\left(\frac{1}{x_1^2}+2x_1+5\right)-\left(\frac{1}{x_2^2}+2x_2+5\right)}{x_1-x_2} = \frac{\frac{1}{x_1^2}+2x_1-\frac{1}{x_2^2}-2x_2}{x_1-x_2}$$

$$= \frac{\frac{x_2^2-x_1^2}{x_1^2x_2^2}-2(x_1-x_2)}{x_1-x_2} = \frac{(x_1-x_2)\left(-\frac{x_1+x_2}{x_1^2x_2^2}+2\right)}{x_1-x_2} = 2-\frac{x_1+x_2}{x_1^2x_2^2}.$$

Ἄρα ὁ λόγος μεταβολῆς τῆς g μεταξύ -1, 2 εἶναι:

$$\lambda = 2-\frac{-1+2}{(-1)^2\cdot 2^2} = 2-\frac{1}{4} = \frac{7}{4}.$$

Ὁ λόγος μεταβολῆς τῆς g μεταξύ 3, 5 εἶναι:

$$\lambda = 2-\frac{3+5}{3^2.5^2} = 2-\frac{8}{225} = \frac{442}{225}.$$

2. Ἂν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^*_+$, τότε ὁ λόγος μεταβολῆς τῆς συναρτήσεως f μεταξύ τῶν x_1, x_2 θά εἶναι:

$$\lambda = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = \frac{\left(\frac{1}{x_1^3}+1\right)-\left(\frac{1}{x_2^3}+1\right)}{x_1-x_2} = \frac{\frac{1}{x_2^3}+1-\frac{1}{x_2^3}-1}{x_1-x_2}$$

$$= \frac{\frac{1}{x_1^3}-\frac{1}{x_2^2}}{x_1-x_2} = \frac{\frac{x_2^3-x_1^3}{x_1^3x_2^3}}{x_1-x_2} = \frac{x_2^3-x_1^3}{x_1^3x_2^3(x_1-x_2)} = \frac{(x_2-x_1)(x_2^2+x_1x_2+x_1^2)}{x_1^3x_2^3(x_1-x_2)}$$

$$= -\frac{x_1^2+x_1x_2+x_2^2}{x_1^3x_2^3} < 0, \text{ ἀφοῦ γιά } 0 < x_1 < x_2 \text{ εἶναι } \frac{x_1^2+x_1x_2+x_2^2}{x_1^3x_2^3} > 0.$$

Ἄρα ἡ f εἶναι γνησίως φθίνουσα στό $\mathbb{R}^*_+$.

3. Γιά τή συνάρτηση f, ἐπειδή

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{ἄν } x \geqslant 0 \\ -x, & \text{ἄν } x \leqslant 0 \end{cases} \quad \text{καί} \quad |1-x| = \begin{cases} 1-x, & \text{ἄν } x \leqslant 1 \\ x-1, & \text{ἄν } x \geqslant 1 \end{cases}$$

ἔχουμε: $$f(x) = \begin{cases} -3x+1, & \text{ἄν } x \leqslant 0 \\ 1-x, & \text{ἄν } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ x-1, & \text{ἄν } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Ἄρα

- $x_1 < x_2 \leqslant 0$, ἔχουμε $\lambda = \dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = \dfrac{(-3x_1+1)-(-3x_2+1)}{x_1-x_2}$

$$= \frac{-3x_1+1+3x_2-1}{x_1-x_2} = \frac{-3(x_1-x_2)}{x_1-x_2} = -3 < 0$$

καί ἡ συνάρτηση εἶναι γνησίως φθίνουσα

- ἄν $0 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant 1$, ἔχουμε

$$\lambda = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = \frac{(1-x_1)-(1-x_2)}{x_1-x_2} = \frac{1-x_1-1+x_2}{x_1-x_2} = \frac{-(x_1-x_2)}{x_1-x_2} = -1 < 0$$

καί ἡ συνάρτηση εἶναι γνησίως φθίνουσα.

- ἄν $1 \leqslant x_1 < x_2$, ἔχουμε $\lambda = \dfrac{(x_1-1)-(x_2-1)}{x_1-x_2} = \dfrac{x_1-1-x_2+1}{x_1-x_2} = \dfrac{x_1-x_2}{x_1-x_2} = 1 > 0$

καί ἡ συνάρτηση εἶναι γνησίως αὔξουσα.

Γιά τή συνάρτηση g, ἐπειδή $|x-1| = \begin{cases} 1-x, & \text{ἄν } x \leqslant 1 \\ x-1, & \text{ἄν } x \geqslant 1 \end{cases}$

ἔχουμε: $$g(x) = \begin{cases} -1, & \text{ἄν } x \leqslant 1 \\ 1, & \text{ἄν } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Ἄρα ἡ g εἶναι σταθερή γιά $x \leqslant 1$ καί γιά $x \geqslant 1$.

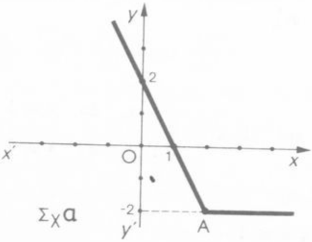
4. **α)** Γιά τή συνάρτηση f, ἐπειδή $|x-2| = \begin{cases} 2-x, & \text{ἄν } x \leqslant 2 \\ x-2, & \text{ἄν } x \geqslant 2 \end{cases}$,

ἔχουμε:
$$f(x) = \begin{cases} -2x+2, & \text{ἄν } x \leqslant 2 \\ -2, & \text{ἄν } x \geqslant 2 \end{cases}$$

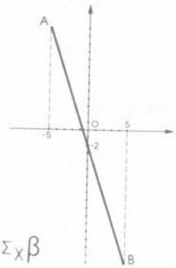
Δηλαδή ἡ f εἶναι τῆς μορφῆς $f(x) = \alpha x + \beta$ καί ἔχουμε :

- ἄν $x \leqslant 2$, τότε $\alpha = -2$. Ἄρα ἡ f εἶναι γνησίως φθίνουσα,
- ἄν $x \geqslant 2$, τότε $\alpha = 0$. Ἄρα ἡ f εἶναι σταθερή.

Στό σχῆμα α ἔχουμε τή γραφική παράσταση τῆς f, πού ἀποτελεῖται ἀπό δύο ἡμιευθεῖες μέ κοινή ἀρχή Α.



Σχ α



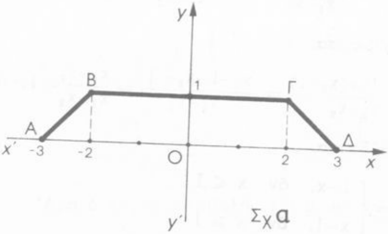
Σχ β

β) Ἡ συνάρτηση g εἶναι ὁμοπαραλληλική μέ $\alpha = -3 < 0$. Ἄρα εἶναι γνησίως φθίνουσα γιά κάθε $x \in [-5, +5]$. Στό σχῆμα β ἔχουμε τή γραφική παράσταση τῆς g, πού ἀποτελεῖται ἀπό τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ.

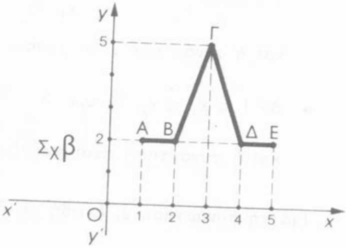
5. **α)** Ἡ συνάρτηση f εἶναι τῆς μορφῆς $f(x) = \alpha x + \beta$ καί ἔχουμε:

- ἄν $-3 \leqslant x \leqslant -2$, τότε $\alpha = 1 > 0$. Ἄρα ἡ συνάρτηση εἶναι γνησίως αὔξουσα
- ἄν $-2 < x < 2$, τότε $\alpha = 0$. Ἄρα ἡ συνάρτηση εἶναι σταθερή
- ἄν $2 \leqslant x \leqslant 3$, τότε $\alpha = -1 < 0$. Ἄρα ἡ συνάρτηση εἶναι γνησίως φθίνουσα.

Ἡ γραφική παράσταση τῆς f δίνεται στό σχῆμα α καί ἀποτελεῖται ἀπό τά εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ καί ΓΔ.



Σχ α



Σχ β

β) Ἡ συνάρτηση g εἶναι τῆς μορφῆς $f(x) = \alpha x + \beta$ καί ἔχουμε:

- ἄν $1 \leqslant x < 2$, τότε $\alpha = 0$. Ἄρα ἡ συνάρτηση εἶναι σταθερή
- ἄν $2 \leqslant x < 3$, τότε $\alpha = 3 > 0$. Ἄρα ἡ συνάρτηση εἶναι γνησίως αὔξουσα

- ἄν $3 \leqslant x < 4$, τότε $\alpha = -3 < 0$. Ἄρα ἡ συνάρτηση εἶναι γνησίως φθίνουσα
- ἄν $4 \leqslant x < 5$, τότε $\alpha = 0$. Ἄρα ἡ συνάρτηση εἶναι σταθερή.

Ἡ γραφική της παράσταση, πού δίνεται στό σχῆμα β, ἀποτελεῖται ἀπό τά εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ καί ΔΕ.

6. Ὅπως φαίνεται στό σχῆμα (σελ. 99), οἱ συντεταγμένες τῶν σημείων Α, Β, Γ καί Δ εἶναι ἀντιστοίχως (1, 1), (2, 3), (5, 3) καί (6, 0), ἐνῶ ἡ γραφική παράσταση ἀποτελεῖται ἀπό τά εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ,ΒΓ καί ΓΔ. Ἀπό τό σχῆμα ἀκόμη διαπιστώνεται ὅτι ἡ συνάρτηση, πού εἶναι προφανῶς τῆς μορφῆς f μέ $f(x)=\alpha x+\beta$, εἶναι γνησίως αὔξουσα στό διάστημα $[1, 2]$, σταθερή στό $[2, 5]$ καί γνησίως φθίνουσα στό $[5, 6]$.

Γιά τόν καθορισμό τῶν α καί β, χρησιμοποιοῦμε τό γεγονός ὅτι ἡ ΑΒ διέρχεται ἀπό τά σημεῖα Α(1,1) καί Β(2,3), ὁπότε ἔχουμε:

$$\left.\begin{matrix} 1 = \alpha+\beta \\ 3 = 2\alpha+\beta \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 2 = 2\alpha+2\beta \\ 3 = 2\alpha+\beta \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \text{καί } (\alpha = 2 \textbf{ καί } \beta = -1)$$

Ἄρα στό $[1,2]$ ἡ τιμή $f(x)$ τῆς συναρτήσεως εἶναι:

$$f(x) = 2x-1.$$

Ὁμοίως γιά τό ΓΔ, ἐπειδή Γ(5,3) καί Δ(6,0) ἔχουμε:

$$\left.\begin{matrix} 3 = 5\alpha+\beta \\ 0 = 6\alpha+\beta \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow (\alpha = -3 \textbf{ καί } \beta = 18).$$

Ἄρα ἡ τιμή τῆς f στό x εἶναι: $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & \text{ἄν } 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 3, & \text{ἄν } 2 \leqslant x \leqslant 5 \\ -3x+18, & \text{ἄν } 5 \leqslant x \leqslant 6 \end{cases}$

7. **α)** Ἡ ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη παραλληλίας δύο εὐθειῶν $y = \alpha_1 x+\beta_1$ (1) καί $y = \alpha_2 x+\beta_2$ (2) εἶναι $\alpha_1 = \alpha_2$.

Ἐδῶ ἔχουμε: $\alpha_1 = 2\lambda+1$ καί $\alpha_2 = 5\lambda-1$.

Ἄρα $2\lambda+1 = 5\lambda-1 \Leftrightarrow 2\lambda-5\lambda = -1-1 \Leftrightarrow -3\lambda = -2 \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{3}$

β) Ἡ ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη καθετότητας τῶν εὐθειῶν (1) καί (2) εἶναι:

$$\alpha_1\alpha_2 = -1$$

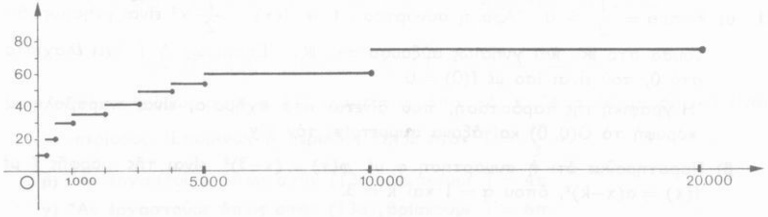
Ἄρα $(2\lambda+1)(5\lambda-1) = -1 \Leftrightarrow 10\lambda^2+5\lambda-2\lambda-1 = -1$

$$\Leftrightarrow 10\lambda^2+3\lambda = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda(10\lambda+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\lambda = 0 \textbf{ ἤ } \lambda = -\frac{3}{10}\right)$$

8. Ἡ γραφική παράσταση αὐτῆς τῆς συναρτήσεως, πού εἶναι μιά κλιμακωτή συνάρτηση, δίνεται στό παρακάτω σχῆμα.



9. α) Ἡ f ὁρίζεται στό σύνολο $\mathbb{R}_1-\{0\}=\mathbb{R}_1^*$ καί ἰσχύει:

$$\forall x \in \mathbb{R}_1^*,\ f(-x)=\frac{1}{-x}+\varepsilon\varphi(-x)=-\frac{1}{x}-\varepsilon\varphi x=-\left(\frac{1}{x}+\varepsilon\varphi x\right)=-f(x).$$

Ἄρα ἡ συνάρτηση εἶναι περιττή στό $\mathbb{R}_1^*$.

β) Γιά τή g ἰσχύει:

$$\forall x,\ g(-x)=(-x)^3+\eta\mu(-x)=-x^3-\eta\mu x=-(x^3+\eta\mu x)=-g(x)$$

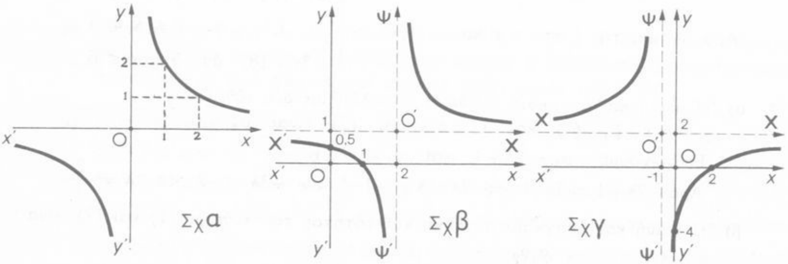
Ἄρα ἡ συνάρτηση εἶναι περιττή.

10. α) Ἡ συνάρτηση εἶναι τῆς μορφῆς $y=\dfrac{\alpha}{x}$ μέ $\alpha=2>0$.

Ἄρα (§ 7.14) ἡ γραφική της παράσταση θά εἶναι ὑπερβολή (σχ. α) μέ κέντρο συμμετρίας τό O(0, 0) καί ἀσύμπτωτες τούς ἄξονες x΄x καί y΄y.

β) Ἄν θέσουμε $y-1=\Psi$ καί $x-2=X$, ἡ $y=\dfrac{1}{x-2}+1$ (1) γίνεται $\Psi=\dfrac{1}{X}$ (2).

Ἑπομένως ἡ γραφική παράσταση τῆς (1) θά εἶναι (§ 7.14 καί 7.13) ὑπερβολή μέ κέντρο τό O΄(2, 1) καί ἀσύμπτωτες τίς εὐθεῖες $x=2$ καί $y=1$. Ἡ ὑπερβολή αὐτή τέμνει τούς ἄξονες x΄x καί y΄y ἀντιστοίχως στά σημεῖα (1, 0) καί $\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ (σχ. β).



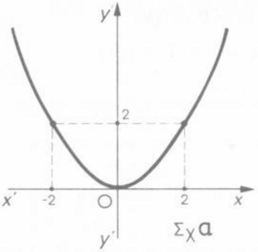
γ) Ἡ ἐξίσωση $y=\dfrac{2x-4}{x+1}$ γράφεται $y=\dfrac{2(x+1)-6}{x+1}=2-\dfrac{6}{x+1}$. Ὁπότε, ἄν ἐργαστοῦμε ὅπως καί στήν 10 β, βρίσκουμε ὅτι ἡ γραφική παράσταση τῆς φ εἶναι ὑπερβολή μέ ἀσύμπτωτες τίς εὐθεῖες $x=-1$ καί $y=2$ καί κέντρο τό (−1 2). Ἡ ὑπερβολή αὐτή (σχ. γ) τέμνει τόν ἄξονα y΄y στό (0, −4) καί τόν x΄x στό (2, 0).

11. α) Εἶναι $\alpha=\dfrac{1}{2}>0$. Ἄρα ἡ συνάρτηση f μέ $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2$ εἶναι γνησίως φθίνουσα στό $\mathbb{R}_-$ καί γνησίως αὔξουσα στό $\mathbb{R}_+$. Ἑπομένως ἡ f ἔχει ἐλάχιστο στό 0, πού εἶναι ἴσο μέ $f(0)=0$.

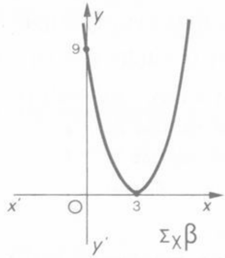
Ἡ γραφική της παράσταση, πού δίνεται στό σχῆμα α, εἶναι παραβολή μέ κορυφή τό O(0, 0) καί ἄξονα συμμετρίας τόν y΄y.

β) Παρατηροῦμε ὅτι ἡ συνάρτηση φ μέ $\varphi(x)=(x-3)^2$ εἶναι τῆς μορφῆς f μέ $f(x)=\alpha(x-k)^2$, ὅπου $\alpha=1$ καί $k=3$.

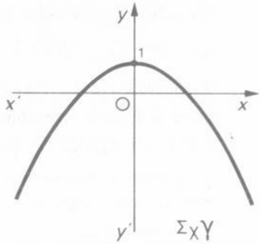
Ἄν λοιπόν ἐργαστοῦμε ὅπως στήν § 7.19, διαπιστώνουμε ὅτι ἡ $y=(x-3)^2$ εἶναι ἐξίσωση παραβολῆς μέ κορυφή τό σημεῖο $O'(3,0)$ καί ἄξονα συμμετρίας τήν εὐθεία $x=3$. Ἡ παραβολή αὐτή, ἐπειδή $\alpha = < 0$, ἔχει ἐλάχιστο στό $x=3$, πού εἶναι ἴσο μέ $f(3)=(3-3)^2=0$. Ἡ γραφική της παράσταση δίνεται στό σχῆμα β.



Σχα



Σχβ



Σχγ

γ) Παρατηροῦμε ὅτι ἡ συνάρτηση g μέ $g(x)=-\dfrac{x^2}{3}+1$, εἶναι τῆς μορφῆς f μέ $f(x)=\alpha x^2+k$, ὅπου $\alpha=-\dfrac{1}{3}$ καί $k=1$.

Ἄν λοιπόν ἐργαστοῦμε ὅπως στήν § 7.20, διαπιστώνουμε ὅτι ἡ $y=-\dfrac{1}{3}x^2+1$ εἶναι ἐξίσωση παραβολῆς μέ κορυφή τό σημεῖο $O'(0,1)$ καί ἄξονα συμμετρίας τόν $y'y$. Ἡ παραβολή αὐτή, ἐπειδή $\alpha=-\dfrac{1}{3}<0$, ἔχει μέγιστο στό $x=0$ πού εἶναι ἴσο μέ $f(0)=-\dfrac{1}{3}\cdot 0^2+1=1$. Ἡ γραφική της παράσταση δίνεται στό σχῆμα γ.

12. α) Γιά τήν f ἰσχύει: $\forall x,\ f(-x)=\alpha(-x)^4+\beta(-x)^2+\gamma=\alpha x^4+\beta x^2+\gamma=f(x)$

Ἄρα ἡ f εἶναι ἄρτια συνάρτηση

β) Γιά τήν g ἰσχύει: $\forall x,\ g(-x)=(-x)^2+\text{συν}(-x)=x^2+\text{συν}x=g(x)$.

Ἄρα ἡ g εἶναι ἄρτια συνάρτηση.

13. α) Ἔστω T ἡ περίοδος τῆς συναρτήσεως f. Τότε θά εἶναι: $f(x+T)=f(x)$

ὁπότε: $f(x+T)=f(x) \Rightarrow \text{ημ}\,3(x+T)=\text{ημ}3x$

$$\Rightarrow 3(x+T)=2k\pi+3x \qquad (1)$$

$$\text{ἤ} \quad 3(x+T)=(2k+1)\pi-3x \qquad (2)$$

Ἀπό τήν (1) γιά $k=1$ ἔχουμε $T=\dfrac{2\pi}{3}$. Ἀπό τήν (2) ἔχουμε

$$3x+3T=(2k+1)\pi-3x \quad \text{ἤ} \quad T=\frac{(2k+1)\pi-6x}{3}$$

Ἡ τιμή ὅμως αὐτή τοῦ T ἐξαρτᾶται ἀπό τό x. Ἄρα δέ μπορεῖ νά εἶναι περίοδος. Ἑπομένως ἡ περίοδος τῆς f εἶναι $T=\dfrac{2\pi}{3}$.

β) Ἄν ἐργαστοῦμε ὅπως στήν (13α), βρίσκουμε $T=4\pi$

γ) Ἄν ἐργαστοῦμε ὅπως στήν (13α), βρίσκουμε $T=6\pi$.

14. Παρατηροῦμε ὅτι ἄν ὁ x εἶναι ἄρτιος, εἶναι δηλαδή τῆς μορφῆς $2k$, $k \in \mathbb{Z}$, θά εἶναι:

$$f(x+2\nu) = f(2k+2\nu) = f(2(k+\nu)) = f(2k') = 1 = f(x)$$

$$f(x+2\nu+1) = f(2k+2\nu+1) = f(2(k+\nu)+1) = f(2k'+1) = 0 \neq f(x),$$

ἐνῶ ἄν ὁ x εἶναι περιττός, εἶναι δηλαδή τῆς μορφῆς $2k+1$, $k \in \mathbb{Z}$ θά εἶναι

$$f(x+2\nu) = f(2k+1+2\nu) = f(2(k+\nu)+1) = f(2k'+1) = 0 = f(x)$$

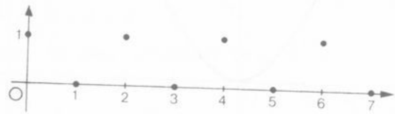
$$f(x+2\nu+1) = f(2k+1+2\nu+1) = f(2(k+\nu+1)) = f(2k'') = 1 \neq f(x).$$

Ἑπομένως εἶναι: $f(x)+2\nu) = f(x)$, $f(x+2\nu+1) \neq f(x)$

Ἄρα ἡ f εἶναι περιοδική μέ περίοδο 2ν.

Γιά $\nu = 1$ ἔχουμε τή βασική περίοδο 2.

Ἡ γραφική παράσταση τῆς f δίνεται στό διπλανό σχῆμα.



15. Ἔστω ὅτι ἡ συνάρτηση εἶναι περιοδική μέ περίοδο τό σταθερό ἀριθμό T. Τότε ἔχουμε:

$$f(x+T) = f(x) \Rightarrow \eta\mu[(x+T)^2-2(x+T)+5] = \eta\mu(x^2-2x+5)$$

$$\Rightarrow (x+T)^2-2(x+T)+5 = 2k\pi+x^2-2x+5 \qquad (1)$$

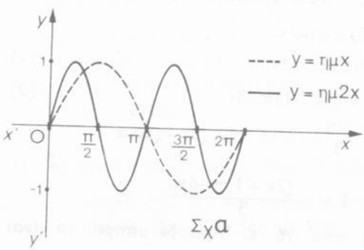
$$\text{ἤ } (x+T)^2-2(x+T)+5 = (2k+1)\pi-(x^2-2x+5) \qquad (2)$$

Ἀπό τή σχέση (1) ἤ (2) παρατηροῦμε ὅτι γιά κάθε τιμή τοῦ x ἔχουμε καί διαφορετική τιμή τοῦ T. Ἄρα ὁ T δέν εἶναι σταθερός. Ἑπομένως δέν μπορεῖ νά εἶναι περίοδος καί συνεπῶς ἡ f δέν μπορεῖ νά εἶναι περιοδική συνάρτηση.

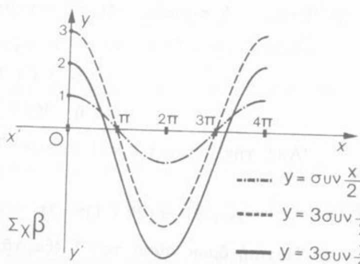
16. α) Παρατηροῦμε ὅτι ἡ συνάρτηση $y = \eta\mu 2x$ εἶναι περιοδική μέ περίοδο π (§ 7.21 Ἐφαρ. 2). Ἡ γραφική της παράσταση δίνεται στό σχῆμα α.

β) Κάνουμε διαδοχικά τίς γραφικές παραστάσεις τῶν συναρτήσεων $y = \sigma\upsilon\nu\,\frac{x}{2}$, $3\sigma\upsilon\nu\,\frac{x}{2}$, $3\sigma\upsilon\nu\,\frac{x}{2}-1$ (σχ. β).

Παρατηροῦμε ὅτι ἡ περίοδος τῆς $y = \sigma\upsilon\nu\,\frac{x}{2}$ εἶναι 4π.



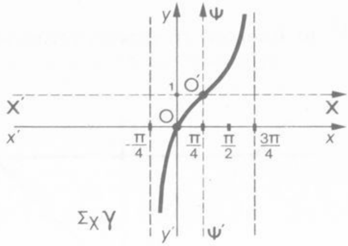
Σχα



Σχβ

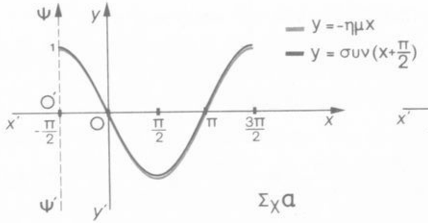
γ) Ἄν κάνουμε τόν μετασχηματισμό $x-\frac{\pi}{4} = X$ καί $y-1 = \Psi$, ἡ $y = \varepsilon\varphi\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+1$ (1) γίνεται $\Psi = \varepsilon\varphi X$. Ἄρα ἡ γραφική παράσταση τῆς (1) (§ 7.4 καί 7.24) ἔχει ἀσύμπτωτες τίς εὐθεῖες

$x = \frac{3\pi}{4}$ καί $x = -\frac{\pi}{4}$, κέντρο συμμετρίας τό $O'\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$ καί περνάει ἀπό τό σημεῖο $O(0, 0)$ (Σχ. γ).

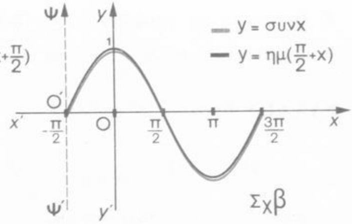


Σχ γ

17. α) Ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως f μέ $f(x) = \sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ καί ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως g μέ $g(x) = -\eta\mu x$ συμπίπτουν, ὅπως φαίνεται στό σχῆμα α.



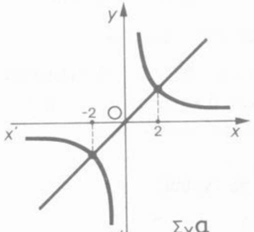
Σχα



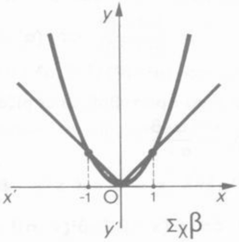
Σχβ

β) Ἡ γραφική παράσταση τῆς f μέ $f(x) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ καί τῆς g μέ $g(x)=\sigma\upsilon\nu x$ συμπίπτουν, ὅπως διαπιστώνεται στό σχῆμα β.

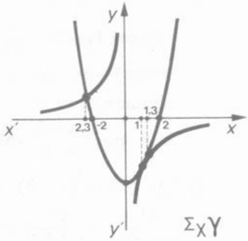
18. α) Βρίσκουμε τίς γραφικές παραστάσεις τῶν συναρτήσεων $y = \frac{4}{x}$ καί $y = x$. Οἱ τετμημένες τῶν σημείων τομῆς τους, δηλαδή οἱ -2, $+2$ (σχ. α), εἶναι οἱ λύσεις τῆς ἐξισώσεως.



Σχα



Σχβ

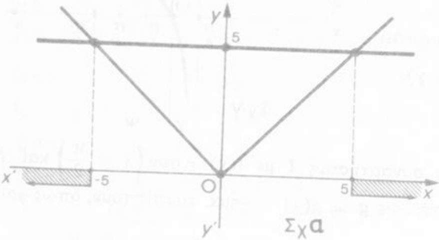


Σχγ

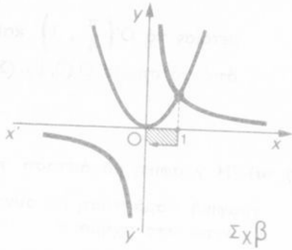
β) Βρίσκουμε τίς γραφικές παραστάσεις τῶν συναρτήσεων $y=x^2$ καί $y=|x|$ (σχ. β). Οἱ τετμημένες τῶν σημείων τομῆς τους, δηλαδή οἱ -1, $+1$, εἶναι οἱ λύσεις τῆς ἐξισώσεως.

γ) Βρίσκουμε τή γραφική παράσταση τῶν συναρτήσεων $y = x^2 - 4$ καί $y = -\frac{3}{x}$ (σχ. γ). Οἱ τετμημένες τῶν σημείων τομῆς της εἶναι οἱ λύσεις τῆς ἐξισώσεως.

19. α) Βρίσκουμε τή γραφική παράσταση τῶν συναρτήσεων $y = |x|$ καί $y=5$ (σχ. α). Ἡ ἀνίσωση θά ἀληθεύει γιά $x < -5$ ἤ $x > 5$.



Σχα



Σχβ

β) Βρίσκουμε τίς γραφικές παραστάσεις τῶν $y = \frac{1}{x}$ καί $y = x^2$ (σχ. β). Ἡ ἀνίσωση θά ἀληθεύει γιά $0 < x < 1$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

1. α) $1 - \frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{1-x} - 6 \Leftrightarrow 1 - \frac{x^2}{x-1} = \frac{-1}{x-1} - 6$ (1). Πρέπει $x-1 \neq 0$, δηλαδή $x \neq 1$. Ὁπότε ἔχουμε:

(1) $\Leftrightarrow (x-1)-x^2 = -1-6(x-1) \Leftrightarrow -x^2+7x-6 = 0$.

Ἡ τελευταία ἐξίσωση ἔχει ρίζες $\rho_1 = 1$ πού ἀπορρίπτεται καί $\rho_2 = 6$.

β) $\frac{x+5}{x-5} + \frac{x-5}{x+5} = \frac{10}{3}$ (1). Πρέπει $x-5 \neq 0$ καί $x+5 \neq 0$, δηλαδή $x \neq 5$ καί $x \neq -5$

Τότε ἔχουμε: (1) $\Leftrightarrow 3(x+5)^2+3(x-5)^2 = 10(x+5)(x-5)$

$\Leftrightarrow 4x^2-400 = 0 \Leftrightarrow x^2-100 = 0$, ὁπότε $\rho_1 = 10$ καί $\rho_2 = -10$.

γ) Εἶναι $x^2-x+1 \neq 0$ γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$ καί $\alpha^2+3\beta^2 \neq 0$, ὅταν $\alpha \neq 0$ ἤ $\beta \neq 0$.

Ὁπότε ἔχουμε: $\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} = \frac{3\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2+3\beta^2} \Leftrightarrow (\alpha^2+3\beta^2)(x^2+x+1) =$

$= (3\alpha^2+\beta^2)(x^2-x+1) \Leftrightarrow (\alpha^2-\beta^2)x^2-2(\alpha^2+\beta^2)x+\alpha^2-\beta^2 = 0$. Ἡ τελευταία ἐξίσωση ὅταν $\alpha = \pm\beta$ εἶναι πρωτοβάθμια μέ ρίζα $x = 0$ καί ὅταν $\alpha \neq \pm\beta$ ἔχει ρίζες $\rho_1 = \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}$ καί $\rho_2 = \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$.

δ) Ἄν $(x-\alpha)(x+\beta) \neq 0$, δηλ. $x \neq \alpha$ καί $x \neq -\beta$, θά ἔχουμε:

$\frac{\alpha^2}{(x-\alpha)^2} - \frac{\beta^2}{(x+\beta)^2} = 0 \Leftrightarrow \alpha^2(x+\beta)^2-\beta^2(x-\alpha)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (\alpha^2-\beta^2)x^2+2\alpha\beta(\alpha+\beta)x = 0 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)x^2+2\alpha\beta x = 0$. Ἡ τελευταία ἐξίσωση ἔχει ρίζες $\rho_1 = 0$ καί $\rho_2 = -\frac{2\alpha\beta}{\alpha-\beta}$.

ε) Ἄν $2x+6 \geqslant 0$ ἤ $x \geqslant -3$, ἔχουμε:

$$2x+6 = -x^2+x-4 \Leftrightarrow x^2+x+10 = 0 \quad (1).$$

Ἡ (1) δέν ἔχει λύση στό $\mathbb{R}$, ἀφοῦ $\Delta = 1^2-4.1.10 = -39 < 0$.

Ἂν $2x+6<0$ ἢ $x<-3$, ἔχουμε:

$-(2x+6)=-x^2+x-4 \Leftrightarrow x^2-3x-2=0$ (2). Ἡ (2) ἔχει ρίζες $\rho_1=\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$

καί $\rho_2=\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$, οἱ ὁποῖες ἀπορρίπτονται ἀφοῦ εἶναι μεγαλύτερες τοῦ -3.

2. α) Ἡ ἐξίσωση ἔχει διακρίνουσα

$$\Delta=4\lambda^2-4(\lambda^2-\mu^2-\nu^2+2\mu\nu)=4(\mu^2+\nu^2-2\mu\nu)=4(\mu-\nu)^2\geqslant 0$$

β) Ἡ ἐξίσωση ἔχει διακρίνουσα

$$\begin{aligned}\Delta&=9\beta^4+(\alpha^2+\alpha\beta-2\beta^2)(\alpha^2-\alpha\beta-2\beta^2)\\&=9\beta^4+[(\alpha^2-2\beta^2)^2-\alpha^2\beta^2]=9\beta^4+\alpha^4+4\beta^4-4\alpha^2\beta^2-\alpha^2\beta^2\\&=9\beta^4+\alpha^4-6\alpha^2\beta^2+\alpha^2\beta^2+4\beta^4=(3\beta^2-\alpha^2)^2+\alpha^2\beta^2+4\beta^4\geqslant 0\end{aligned}$$

γ) Ἡ ἐξίσωση ἔχει διακρίνουσα

$$\Delta=(\alpha+2\beta)^2-4\alpha\beta=\alpha^2+4\beta^2\geqslant 0.$$

3. Ἡ διακρίνουσα τῆς ἐξισώσεως εἶναι

$$\begin{aligned}\Delta&=4\alpha^2\gamma^2-4(\alpha^2+\beta^2)(-\beta^2+\gamma^2)=4\alpha^2\gamma^2-4(-\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2-\beta^4+\beta^2\gamma^2)\\&=4\beta^2(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)<0 \quad \text{ἀφοῦ} \quad \beta^2>0 \quad \text{καί} \quad \alpha^2+\beta^2-\gamma^2<0.\end{aligned}$$

4. Ἂν εἶναι Δ_1 ἡ διακρίνουσα τῆς $x^2+(\alpha-3\beta)x+\alpha\beta=0$ (1)

καί Δ_2 ἡ διακρίνουσα τῆς $x^2+(\alpha-5\beta)x+4\beta^2=0$, (2)

τότε ἔχουμε: $\Delta_1=(\alpha-3\beta)^2-4\alpha\beta=\alpha^2-10\alpha\beta+9\beta^2$ καί

$\Delta_2=(\alpha-5\beta)^2-16\beta^2=\alpha^2-10\alpha\beta+9\beta^2$, δηλαδή $\Delta_1=\Delta_2$.

Ὁπότε, ἄν $\Delta_1=0$, τότε $\Delta_2=0$ καί ἀντιστρόφως.

5. α) Ἂν θέσουμε ημx $=y$, τότε ἡ ἐξίσωση γίνεται

$4y^2-2(\sqrt{3}+1)y+\sqrt{3}=0$ μέ $y\in[-1,1]$. Αὐτή ἔχει ρίζες

$$\rho_{1,2}=\frac{\sqrt{3}+1\pm\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2-4\sqrt{3}}}{4}=\frac{\sqrt{3}+1\pm\sqrt{3+1+2\sqrt{3}-4\sqrt{3}}}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{3}+1\pm\sqrt{3+1-2\sqrt{3}}}{4}=\frac{\sqrt{3}+1\pm\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{3}+1\pm(\sqrt{3}-1)}{4}\begin{cases}\rho_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\[2mm]\rho_2=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

Τώρα ἔχουμε νά λύσουμε τίς τριγωνομετρικές ἐξισώσεις

$$\eta\mu x=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (1) \qquad \text{καί} \qquad \eta\mu x=\frac{1}{2} \quad (2)$$

Ἀλλά: $(1)\Leftrightarrow \eta\mu x=\eta\mu\dfrac{\pi}{3}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2k\pi+\dfrac{\pi}{3}\\[2mm] x=(2k+1)\pi-\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$ $k\in\mathbb{Z}$.

Ἐπίσης: $(2)\Leftrightarrow \eta\mu x=\eta\mu\dfrac{\pi}{6}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2k\pi+\dfrac{\pi}{6}\\[2mm] x=(2k+1)\pi-\dfrac{\pi}{6}\end{cases}$ $k\in\mathbb{Z}$.

β) Ἂν θέσουμε εφx=y, ἔχουμε: $y^2-(\sqrt{3}+1)y+\sqrt{3}=0$ μέ ρίζες $\rho_1=1$ καί $\rho_2=\sqrt{3}$.

"Αρα $εφx = 1$ (1) ἤ $εφx = \sqrt{3}$ (2).

'Αλλά: (1) $\Leftrightarrow εφx = εφ\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$ καί

(2) $\Leftrightarrow εφx = εφ\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

γ) "Αν θέσουμε $|x+1| = y$, τότε ἔχουμε:

$$(x+1)^2-9|x+1|-10 = 0 \Leftrightarrow |x+1|^2-9|x+1|-10 = 0$$

$$\Leftrightarrow y^2-9y-10 = 0, \quad y \in \mathbb{R}_+ \qquad (1)$$

'Η (1) ἔχει ρίζες $\rho_1 = -1$ πού ἀπορρίπτεται καί $\rho_2 = 10$.

"Αρα ἔχουμε: $|x+1| = 10 \Leftrightarrow x+1 = \pm 10 \Leftrightarrow (x+1 = 10$ ἤ $x+1 = -10)$ $\Leftrightarrow (x = 9$ ἤ $x = -11)$.

6. α) "Αν Δ ἡ διακρίνουσα τῆς ἐξισώσεως, ἔχουμε:

$\Delta = (\lambda-1)^2+32(\lambda+7) = \lambda^2+30\lambda+225 = (\lambda+15)^2$.

"Αν τώρα $\lambda \neq -15$, εἶναι $\Delta > 0$ καί ἡ ἐξίσωση ἔχει ρίζες ἄνισες, ἐνῶ ἄν $\lambda = -15$ εἶναι $\Delta = 0$ καί ἡ ἐξίσωση ἔχει ρίζες ἴσες.

β) "Αν Δ ἡ διακρίνουσα τῆς ἐξισώσεως, ἔχουμε:

$\Delta = (\lambda-1)^2+8\lambda^2 > 0$, γιά κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, ἄρα ἡ ἐξίσωση ἔχει ρίζες ἄνισες.

7. "Αν θέσουμε $ΑΓ = x$, τότε εἶναι $ΒΓ = 2\alpha - x$, ὁπότε ἔχουμε τήν ἐξίσωση:

$$\frac{\pi\alpha^2}{2} - \frac{\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2} - \frac{\pi\left(\frac{2\alpha-x}{2}\right)^2}{2} = \pi\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi\alpha^2}{2} - \frac{\pi x^2}{8} - \frac{\pi(2\alpha-x)^2}{8} = \frac{\pi\alpha^2}{4} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow x^2-2\alpha x+\alpha^2 = 0 \Leftrightarrow x = \alpha.$$

8. 'Επειδή $x_1+x_2 = 2$ καί $x_1x_2 = \lambda-1$, ἔχουμε:

$$3x_1^3+8x_1x_2+8x_1^2x_2+3x_2^3 = 192 \Leftrightarrow 3(x_1^3+x_2^3)+8x_1x_2(x_1+x_2) = 192$$

$$\Leftrightarrow 3(x_1+x_2)[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2]+8x_1x_2(x_1+x_2) = 192$$

$$\Leftrightarrow 3\cdot 2[4-3(\lambda-1)]+8(\lambda-1)\cdot 2 = 192$$

$$\Leftrightarrow 24-18\lambda+18+16\lambda-16 = 192 \Leftrightarrow -2\lambda = 166 \Leftrightarrow \lambda = -83.$$

9. Θά βροῦμε τό $\rho_1+\rho_2$ καί τό $\rho_1\rho_2$. "Εχουμε:

$$\rho_1+\rho_2 = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2} = \frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2} = \frac{\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)^2-2\frac{\gamma}{\alpha}}{\frac{\gamma}{\alpha}} =$$

$= \frac{\beta^2-2\alpha\gamma}{\alpha\gamma}$ καί $\rho_1\rho_2 = \frac{x_1}{x_2}\cdot\frac{x_2}{x_1} = 1$. "Αρα ἡ ζητούμενη ἐξίσωση εἶναι ἡ $x^2 - \frac{\beta^2-2\alpha\gamma}{\alpha\gamma}x+1 = 0$ ἤ $\alpha\gamma x^2-(\beta^2-2\alpha\gamma)x+\alpha\gamma = 0$.

10. "Αν ρ_1 ἡ ἐλάχιστη καί ρ_2 ἡ μέγιστη θερμοκρασία, τότε εἶναι $\rho_1+\rho_2 = +4$ καί $\rho_1\rho_2 = -12$. "Αρα οἱ ρ_1, ρ_2 εἶναι ρίζες τῆς ἐξισώσεως $x^2-4x-12 = 0$. 'Οπότε $\rho_1 = -2$ καί $\rho_2 = 6$.

11. "Αν x,y δύο τέτοιοι ἀριθμοί, k τό σταθερό γινόμενό τους καί λ τό ἄθροισμά τους, τότε θά εἶναι: $x+y = \lambda > 0$ καί $xy = k > 0$. "Αρα οἱ x, y εἶναι ρίζες τῆς ἐξισώσεως $\omega^2-\lambda\omega+k = 0$, τῆς ὁποίας ἡ διακρίνουσα $\Delta = \lambda^2-4k$ πρέπει νά εἶναι μεγαλύτερη ἤ ἴση τοῦ μηδενός.

Δηλαδή $\lambda^2-4k \geqslant 0$ ἤ $\lambda^2 \geqslant 4k$ ἤ $\lambda \geqslant 2\sqrt{k}$. 'Επομένως ἡ ἐλάχιστη τιμή τοῦ λ εἶναι τό $2\sqrt{k}$. Τότε ὅμως $\Delta = 0$ καί ἡ ἐξίσωση ἔχει ρίζες ἴσες, δηλαδή $x = y$.

12. Ἄν x,y εἶναι οἱ διαστάσεις ἑνός ὀρθογωνίου μέ σταθερή περίμετρο 2λ, τότε θά εἶναι $x+y=\lambda$. Ἑπομένως τό ἐμβαδόν του $E=xy$ γίνεται μέγιστο, ὅταν $x=y=\frac{\lambda}{2}$.

13. Ἐπειδή τό -2 εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως $4x^2+kx+6=0$, θά εἶναι:

$4(-2)^2+k(-2)+6=0 \Leftrightarrow 16-2k+6=0 \Leftrightarrow 2k=22 \Leftrightarrow k=11.$

Ὁμοίως γιά τή δεύτερη ἐξίσωση ἔχουμε:

$$(-2)^2-3(-2)+k^2-7k=0 \Leftrightarrow 4+6+k^2-7k=0 \Leftrightarrow k^2-7k+10=0$$
$$\Leftrightarrow (k=2 \quad \text{ἤ} \quad k=5).$$

14. **α)** Γιά τήν ἐξίσωση $2x^2-7x-13=0$ ἔχουμε $\frac{\gamma}{\alpha}=-\frac{13}{2}<0$, ἄρα αὐτή ἔχει δύο ρίζες ἑτερόσημες.

β) Γιά τήν ἐξίσωση $6x^2+5x+1=0$ ἔχουμε :

$$\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{1}{6}>0, \quad \Delta=5^2-4\cdot6\cdot1=1>0 \quad \text{καί} \quad \frac{-\beta}{\alpha}=-\frac{5}{6}<0.$$

Ἄρα αὐτή ἔχει δύο ρίζες ἄνισες ἀρνητικές.

γ) Γιά τήν ἐξίσωση $7x^2-5x=0$ ἔχουμε:

$$\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{0}{7}=0. \text{ Ἄρα οἱ ρίζες της εἶναι 0 καί } \frac{-\beta}{\alpha}=\frac{-(-5)}{7}=\frac{5}{7}.$$

15. Ἔχουμε $\frac{\gamma}{\alpha}=-\frac{k^2}{3}$.

Ἄν $k=0$, τότε $\rho_1=0$ καί $\rho_2=-\frac{\beta}{\alpha}=\frac{7}{3}$.

Ἄν $k\neq0$, τότε $\frac{\gamma}{\alpha}<0$ καί ἑπομένως ἡ ἐξίσωση ἔχει δύο ρίζες ἑτερόσημες.

16. **α)** Πρέπει $\frac{\gamma}{\alpha}=\lambda-1<0$ ἤ $\lambda<1$.

β) Πρέπει $\Delta=9-4(\lambda-1)=0$ ἤ $13-4\lambda=0$ ἤ $\lambda=\frac{13}{4}$.

γ) Ἐπειδή $\frac{-\beta}{\alpha}=3>0$, πρέπει νά εἶναι $\left(\frac{\gamma}{\alpha}>0 \ \textbf{καί} \ \Delta>0\right)$ ἤ

$(\lambda-1>0 \ \textbf{καί} \ 13-4\lambda>0)$ ἤ $\left(\lambda>1 \ \textbf{καί} \ \lambda<\frac{13}{4}\right)$, δηλαδή $1<\lambda<\frac{13}{4}$.

17. **α)** Ἐπειδή οἱ ρίζες τοῦ τριωνύμου $2x^2+\alpha x-3\alpha^2$ εἶναι $\rho_1=-\frac{3\alpha}{2}$ καί $\rho_2=\alpha$, θά εἶναι: $2x^2+\alpha x-3\alpha^2=2\left(x+\frac{3\alpha}{2}\right)(x-\alpha)=(2x+3\alpha)(x-\alpha)$. Ἄρα

$$\frac{(x^2-\alpha^2)(x^2+\alpha^2)}{2x^2+\alpha x-3\alpha^2}=\frac{(x-\alpha)(x+\alpha)(x^2+\alpha^2)}{(2x+3\alpha)(x-\alpha)}=\frac{(x+\alpha)(x^2+\alpha^2)}{(2x+3\alpha)}.$$

β) Ὁμοίως $x^2-2\alpha x+\alpha^2-\beta^2=(x-\alpha+\beta)(x-\alpha-\beta)$. Ἄρα

$$\frac{(x-\alpha)^2-\beta^2}{x^2-2\alpha x+\alpha^2-\beta^2}=\frac{(x-\alpha-\beta)(x-\alpha+\beta)}{(x-\alpha+\beta)(x-\alpha-\beta)}=1.$$

γ) Ὁμοίως ἔχουμε:

$$\frac{(x^2+3x-4)^2-(x^2-x)^2}{(x^3-1)-(x^2+x-2)}=\frac{[(x+4)(x-1)]^2-[x(x-1)]^2}{(x-1)(x^2+x+1)-(x+2)(x-1)}$$
$$=\frac{(x-1)^2[(x+4)^2-x^2]}{(x-1)(x^2+x+1-x-2)}=\frac{(x-1)^2(x+4+x)(x+4-x)}{(x-1)(x^2-1)}$$
$$=\frac{(x-1)^2\cdot8(x+2)}{(x-1)^2(x+1)}=\frac{8(x+2)}{x+1}.$$

18. α) Έχουμε $\alpha = 1 > 0$.
Άρα, γιά νά είναι τό τριώνυμο τετράγωνο πρωτοβάθμιου πολυωνύμου, πρέπει νά είναι

$$\Delta = (3\lambda)^2-(9\lambda^2-3\lambda+5) = 0 \Leftrightarrow 3\lambda-5 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{5}{3}.$$

β) Ομοίως πρέπει

$$\Delta = (3\lambda-1)^2-16(\lambda^2-2) = 0 \Leftrightarrow -7\lambda^2-6\lambda+33 = 0 \Leftrightarrow 7\lambda^2+6\lambda-33 = 0.$$

Από τήν τελευταία έξίσωση έχουμε $\lambda = \frac{-3\pm 4\sqrt{15}}{7}$.

19. Άν ρ_1, ρ_2 είναι οί ρίζες τοῦ τριωνύμου

$x^2-5x+\lambda^2$, τότε θά είναι $x^2-5x+\lambda^2 = (x-\rho_1)(x-\rho_2)$.

Άρα, γιά νά είναι $x^2-5x+\lambda^2 = (x-1)(x-4)$, πρέπει $\rho_1 = 1$ καί $\rho_2 = 4$. Είναι όμως $\rho_1 \cdot \rho_2 = \lambda^2$. Όπότε $1 \cdot 4 = \lambda^2$ ή $\lambda^2 = 4$ ή $\lambda = \pm 2$.

20. Έπειδή στό τριώνυμο $f(x) = x^2-(\beta+\gamma)x+\beta^2-\beta\gamma+\gamma^2$ είναι $\alpha = 1 > 0$, γιά νά είναι $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, πρέπει $\Delta < 0$. Άλλά $\Delta = (\beta+\gamma)^2-4(\beta^2-\beta\gamma+\gamma^2) = \beta^2+\gamma^2+2\beta\gamma-4\beta^2+4\beta\gamma-4\gamma^2 = -3\beta^2-3\gamma^2+6\beta\gamma = -3(\beta-\gamma)^2 < 0$ (άφοῦ $\beta \neq \gamma$).

21. Έχουμε: $\frac{x^2+5x+10}{-x^2+6x-9} = \frac{x^2+5x+10}{-(x-3)^2}$.

Άλλά τό τριώνυμο $x^2+5x+10$ έχει $\alpha = 1 > 0$ καί $\Delta = 25-40 = -15 < 0$.
Άρα $x^2+5x+10 > 0$ γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έπίσης $-(x-3)^2 < 0$ γιά κάθε $x \in \mathbb{R}-\{3\}$. Έπομένως $\frac{x^2+5x+10}{-(x-3)^2} < 0$ γιά κάθε $x \in \mathbb{R}-\{3\}$.

22. Άν λ μιά τιμή τῆς f, τότε θά είναι:

$$\frac{x^2-6x+5}{x^2-6x+8} = \lambda \Leftrightarrow x^2-6x+5 = \lambda x^2-6\lambda x+8\lambda$$
$$\Leftrightarrow (\lambda-1)x^2-6(\lambda-1)x+8\lambda-5 = 0 \quad (1).$$

Έπειδή όμως $x \in \mathbb{R}$, πρέπει ή (1) νά έχει ρίζες πραγματικές καί έπομένως $\Delta \geq 0$.
Όπότε:

$$3^2(\lambda-1)^2-(\lambda-1)(8\lambda-5) \geq 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)[9(\lambda-1)-(8\lambda-5)] \geq 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda-4) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (\lambda \leq 1 \text{ ή } \lambda \geq 4).$$

23. Ίσχύει: $x^2+y^2 = 6x-8y \Leftrightarrow x^2-6x+y^2+8y = 0 \quad (1)$
Έπειδή $x \in \mathbb{R}$ πρέπει ή (1) μέ άγνωστο τόν x νά έχει $\Delta \geq 0$. Όπότε:
$3^2-(y^2+8y) \geq 0 \Leftrightarrow -y^2-8y+9 \geq 0 \Leftrightarrow y^2+8y-9 \leq 0 \Leftrightarrow -9 \leq y \leq 1$.
Ομοίως: $x^2+y^2 = 6x-8y \Leftrightarrow y^2+8y+x^2-6x = 0 \quad (1)$
Έπειδή $y \in \mathbb{R}$, πρέπει πάλι $\Delta \geq 0$. Όπότε:
$4^2-(x^2-6x) \geq 0 \Leftrightarrow -x^2+6x+16 \geq 0 \Leftrightarrow x^2-6x-16 \leq 0 \Rightarrow 2 \leq x \leq 8$

24. Έπειδή $f(1) = 2\cdot 1^2-8\cdot 1+4 = -2$ καί $\alpha = 2$, είναι $\alpha f(1) = -4 < 0$. Άρα τό $f(x)$ έχει δύο άνισες ρίζες καί ό άριθμός 1 βρίσκεται μεταξύ τῶν ριζῶν. Έπομένως, άν ρ_1, ρ_2 είναι οί δύο ρίζες μέ $\rho_1 \leq \rho_2$, θά έχουμε: $\rho_1 < 1 < \rho_2 \quad (1)$.
Έπειδή άκόμη $f(4) = 2\cdot 4^2-8\cdot 4+4 = 4 > 0$, ό άριθμός 4 δέν άνήκει στό διάστημα (ρ_1, ρ_2) καί λόγῳ τῆς (1) έχουμε: $\rho_1 < 1 < \rho_2 < 4$.

25. α) Γιά τό πρόσημο τοῦ $1-x$ ἔχουμε

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	

Γιά τό πρόσημο τοῦ $x^2-10x+21$, ἐπειδή αὐτό ἔχει ρίζες $\rho_1=3$ καί $\rho_2=7$, ἔχουμε:

x	$-\infty$		3		7		$+\infty$
$x^2-10x+21$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ἐπειδή τέλος ἡ διακρίνουσα τοῦ $-x^2+x-5$ εἶναι $\Delta=-19<0$, θά ἔχουμε: $\forall x \in \mathbb{R}$, $-x^2+x-5<0$.

Στή συνέχεια κατασκευάζουμε τόν παρακάτω συγκεντρωτικό πίνακα, ὁ ὁποῖος δίνει τό σημεῖο τοῦ γινομένου: $(1-x)(x^2-10x+21)(-x^2+x-5)$

x	$-\infty$		1		3		7		$+\infty$
$1-x$		$+$		$-$		$-$		$-$	
$(x^2-10x+21)$		$+$		$+$		$-$		$+$	
$(-x^2+x-5)$		$-$		$-$		$-$		$-$	
$(1-x)(x^2-10x+21)(-x^2+x-5)$		$-$		$+$		$-$		$+$	

Ἄρα ἡ ἀνίσωση ἀληθεύει, ὅταν $x<1$ ἤ $3<x<7$.

β) Ἐπειδή εἶναι $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2-x+1>0$ (ἔχει $\Delta<0$), ἰσχύει:

$$\frac{(x-1)(x^2-9x+20)}{x^2-x+1}>0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-9x+20)>0 \quad (1)$$

Ἄν ἐργαστοῦμε ὅπως προηγουμένως, ἔχουμε τόν παρακάτω συγκεντρωτικό πίνακα, ὁ ὁποῖος δίνει τό πρόσημο τοῦ γινομένου $(x-1)(x^2-9x+20)$.

x	$-\infty$		1		4		5		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x^2-9x+20$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$(x-1)(x^2-9x+20)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Ἄρα ἡ (1) ἀληθεύει, ὅταν $1<x<4$ ἤ $x>5$.

γ) Ἐπειδή ἡ διακρίνουσα τοῦ τριωνύμου $-x^2+x-4$ εἶναι $\Delta=1-16=-15<0$, θά εἶναι: $\forall x \in \mathbb{R}$, $-x^2+x-4<0$ Ἄρα ἰσχύει:

$$|-x^2+x-4|>2x+6 \Leftrightarrow -(-x^2+x-4)>2x+6 \Leftrightarrow x^2-x+4-2x-6>0$$

$$\Leftrightarrow x^2-3x-2>0 \quad (1).$$

Τό τριώνυμο x^2-3x-2 ἔχει ρίζες $\rho_1=\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$ καί $\rho_2=\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$ καί ἐπομένως ἡ (1) ἀληθεύει, ὅταν $x<\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$ ἤ $x>\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$.

26. α) Βρίσκουμε τό πρόσημο τῶν $x-2$, $6x^2+5x+1$ καί $-x^2+5x-6$ γιά $x \in \mathbb{R}$ καί κατασκευάζουμε τόν παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{3}$		2		3		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$6x^2+5x+1$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$-x^2+5x-6$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Τό σύστημά μας ἀληθεύει, ὅταν $x > 3$.

β) Ἐπειδή ἡ διακρίνουσα τοῦ x^2+2x+4 εἶναι $\Delta = -12 < 0$, θά εἶναι, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2+2x+4 > 0$. Ἑπομένως ἔχουμε:

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{2x+1} > 0 \\ (x^2-4)(x^2+2x+4) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(2x+1) > 0 \\ x^2-4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-x-1 > 0 \\ x^2-4 < 0 \end{cases} \quad (1)$$

Τώρα κατασκευάζουμε τόν παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{2}$		1		2		$+\infty$
$2x^2-x-1$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
x^2-4		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	

Τό σύστημα (1) ἀληθεύει, ὅταν τό πρῶτο πολυώνυμο εἶναι θετικό (+) καί τό δεύτερο πολυώνυμο ἀρνητικό (–), δηλαδή ὅταν $-2 < x < -\frac{1}{2}$ **ἤ** $1 < x < 2$.

27. α) Γιά νά ἔχει ἡ ἐξίσωση δύο ρίζες ἀρνητικές, πρέπει νά ἰσχύουν:

$$\left(\frac{\gamma}{\alpha} > 0,\ \Delta > 0,\ -\frac{\beta}{\alpha} < 0\right) \Leftrightarrow (\lambda^2-1 > 0,\ (\lambda-3)^2-(\lambda^2-1) < 0,\ 2(\lambda-3) < 0)$$

$\Leftrightarrow (\lambda^2-1 > 0,\ -6\lambda+10 > 0,\ \lambda-3 < 0)$ καί ἀπό τόν πίνακα

λ	$-\infty$		-1		1		$\frac{10}{6}$		3		$+\infty$
λ^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$-6\lambda+10$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$\lambda-3$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	

ἔχουμε: $\lambda < -1$ **ἤ** $1 < \lambda < \frac{10}{6}$.

β) Πρέπει $\frac{\gamma}{\alpha} < 0$ ἤ $\lambda^2-1 < 0$. Ὁπότε ἀπό τόν προηγούμενο πίνακα ἔχουμε $-1 < \lambda < 1$.

γ) Πρέπει: $\left(\Delta > 0 \textbf{ καί } \frac{\gamma}{\alpha} = 1\right) \Leftrightarrow (-6\lambda+10 > 0 \textbf{ καί } \lambda^2-1 = 1)$

$$\Leftrightarrow \left(\lambda < \frac{10}{6} \textbf{ καί } \lambda = \pm\sqrt{2}\right) \Leftrightarrow \lambda = \pm\sqrt{2}.$$

28. Θέτουμε $\dfrac{x^2+2x-11}{2(x-3)}=y$ (1) καί θά ἀποδείξουμε ὅτι: $\forall\, x \in \mathbb{R},\ y \notin (2, 6)$.

Πράγματι ἔχουμε:

$(1) \Leftrightarrow x^2+2x-11 = 2xy-6y \Leftrightarrow x^2+2(1-y)x+6y-11=0$ (2)

Ἐπειδή $x \in \mathbb{R}$, πρέπει, ἄν Δ ἡ διακρίνουσα τῆς (1), νά ἰσχύει:

$\Delta \geqslant 0 \Leftrightarrow (1-y)^2-(6y-11) \geqslant 0 \Leftrightarrow y^2-2y+1-6y+11 \geqslant 0$

$\Leftrightarrow y^2-8y+12 \leqslant 0 \Leftrightarrow (y \leqslant 2$ ἤ $y \geqslant 6)$. Ἄρα $y \notin (2, 6)$.

29. Ἐπειδή οἱ ἀριθμοί x^2+x+1, $2x+1$, x^2+1 εἶναι μέτρα πλευρῶν τριγώνου, θά πρέπει

$$\begin{cases} x^2+x+1 < (2x+1)+(x^2+1) \\ 2x+1 < (x^2+x+1)+(x^2+1) \\ x^2+1 < (x^2+x+1)+(2x+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1>0 \\ 2x^2-x+1>0 \\ 3x+1>0 \end{cases}$$

ὁπότε ἀπό τόν πίνακα

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$
$x+1$	$-$	0 $+$		$+$
$2x^2-x+1$	$+$		$+$	$+$
$3x+1$	$-$		$-$ 0	$+$

ἔχουμε $x > -\dfrac{1}{3}$.

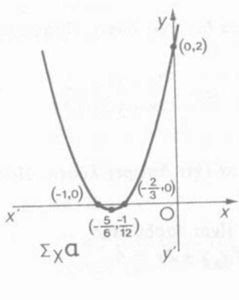
30. α) Ἐπειδή $\alpha = 3 > 0$ καί $-\dfrac{\beta}{2\alpha} = -\dfrac{5}{6}$, ἡ f εἶναι γνησίως φθίνουσα στό $\left(-\infty, -\dfrac{5}{6}\right)$ καί γνησίως αὔξουσα στό $\left(-\dfrac{5}{6}, \infty\right)$. Ἄρα ἡ συνάρτηση παρουσιάζει ἐλάχιστο στό $x=-\dfrac{5}{6}$ (σχ. α), πού εἶναι ἴσο μέ

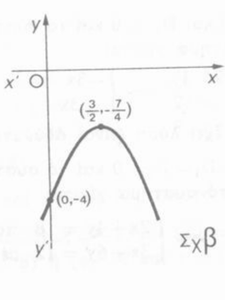
$$f\left(-\frac{5}{6}\right) = \frac{-\Delta}{4\alpha} = \frac{4\cdot 3\cdot 2-5^2}{4\cdot 3} = -\frac{1}{12}.$$

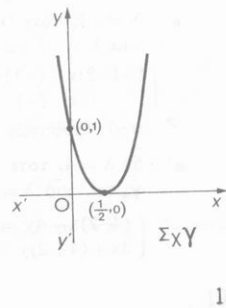
Γιά $x=0$ εἶναι $y=2$ καί γιά $y=0$ ἔχουμε:

$$3x^2+5x+2=0 \quad \text{μέ ρίζες} \quad \rho_1=-1, \quad \rho_2=-\frac{2}{3}.$$

Ἑπομένως ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως, πού εἶναι παραβολή μέ κορυφή τό $\left(-\dfrac{5}{6}, -\dfrac{1}{12}\right)$ καί ἄξονα συμμετρίας τήν εὐθεία $x=-\dfrac{5}{6}$, τέμνει τόν ἄξονα $x'x$ στά σημεῖα $(-1, 0)$, $\left(-\dfrac{2}{3}, 0\right)$ καί τόν $y'y$ στό σημεῖο $(0, 2)$.







β) Ἐπειδή $\alpha=-1<0$ καί $\frac{-\beta}{2\alpha}=\frac{-3}{2(-1)}$ ἡ f εἶναι γνησίως αὔξουσα στό $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$ καί γνησίως φθίνουσα στό $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$ (σχ. β). Ἄρα ἡ συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο στό $x=\frac{3}{2}$, πού εἶναι ἴσο μέ

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{4(-1)(-4)-3^2}{4(-1)}=-\frac{7}{4}.$$

Γιά $x=0$ ἔχουμε $y=-4$ ἐνῶ $-x^2+3x-4\neq 0$ γιά κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Ἐπομένως ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως ἡ ὁποία εἶναι παραβολή μέ κορυφή τό $\left(\frac{3}{2}, -\frac{7}{4}\right)$ καί ἄξονα συμμετρίας τήν εὐθεία $x=\frac{3}{2}$ τέμνει μόνο τόν ἄξονα $y'y$ στό σημεῖο $(0, -4)$.

γ) Ἐπειδή $\alpha=4>0$ καί $\frac{-\beta}{2\alpha}=\frac{4}{2\cdot 4}=\frac{1}{2}$ ἡ f εἶναι γνησίως φθίνουσα στό $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ καί γνησίως αὔξουσα στό $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ (σχ. γ). Ἄρα ἡ συνάρτηση παρουσιάζει ἐλάχιστο στό $x=\frac{1}{2}$, πού εἶναι ἴσο μέ

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{-\Delta}{4\alpha}=\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}=\frac{4\cdot 4\cdot 1-(-4)^2}{4\cdot 4}=\frac{16-16}{16}=0.$$

Γιά $y=0$ ἔχουμε $4x^2-4x+1=0$, μέ ρίζες $\rho_1=\rho_2=\frac{1}{2}$ καί γιά $x=0$, ἔχουμε $y=1$.
Ἄρα ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως, ἡ ὁποία εἶναι παραβολή μέ κορυφή τό $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ καί ἄξονα συμμετρίας τήν εὐθεία $x=\frac{1}{2}$, τέμνει τόν ἄξονα $y'y$ στό σημεῖο $(0, 1)$.

31. α) Ἔχουμε $D=\alpha\beta'-\alpha'\beta=(\lambda-2)(\lambda+2)-3\lambda=\lambda^2-3\lambda-4=(\lambda+1)(\lambda-4)$

$D_1=\beta'\gamma-\beta\gamma'=(\lambda+2)2\lambda-12\lambda=2\lambda^2-8\lambda=2\lambda(\lambda-4)$

$D_2=\alpha\gamma'-\alpha'\gamma=(\lambda-2)\cdot 12-3\cdot 2\lambda=6\lambda-24=6(\lambda-4)$

Εἶναι $D=0 \Leftrightarrow (\lambda_1=-1$ ἤ $\lambda_2=4)$. Ἄρα:

- ἄν $\lambda\neq -1$ καί $\lambda\neq 4$ τό σύστημα ἔχει μιά λύση, τήν

$$x=\frac{D_1}{D}=\frac{2\lambda}{\lambda+1} \quad \text{καί} \quad y=\frac{D_2}{D}=\frac{6}{\lambda+1}$$

- $\lambda=-1$, τότε $D=0$ καί $D_1\neq 0$ καί τό σύστημα δέν ἔχει λύση. Πράγματι, γιά $\lambda=-1$ τό σύστημα γίνεται

$$\begin{cases}(-1-2)x+(-1)y=2(-1)\\ 3x+(-1+2)y=12\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-3x-y=-2\\ 3x+y=12\end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l}3x+y=2\\ 3x+y=12\end{array}$$

πού προφανῶς δέν ἔχει λύση (εἶναι ἀδύνατο).

- ἄν $\lambda=4$, τότε $D=D_1=D_2=0$ καί τό σύστημα ἔχει ἄπειρες λύσεις. Πράγματι, γιά $\lambda=4$, τό σύστημα γίνεται

$$\begin{cases}(4-2)x+4y=4.2\\ 3x+(4+2)y=12\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x+4y=8\\ 3x+6y=12\end{cases}$$ πού εἶναι ἰσοδύναμο μέ τήν $x+2y=4$.

β) Ἔχουμε: $D = (1-\lambda)(\lambda-1) - (-2\lambda)(2\lambda) = -(\lambda-1)^2+4\lambda^2 = (\lambda+1)(3\lambda-1)$

$D_1 = (\lambda-1)2-(-2\lambda)(\lambda-4) = 2\lambda-2+2\lambda^2-8\lambda = 2(\lambda^2-3\lambda-1)$

$D_2 = (1-\lambda)(\lambda-4)-4\lambda = -\lambda^2+5\lambda-4-4\lambda = -\lambda^2+\lambda-4$

Εἶναι $D = 0 \Leftrightarrow (\lambda+1)(3\lambda-1) = 0 \Leftrightarrow \left(\lambda_1 = -1 \text{ ἢ } \lambda_2 = \frac{1}{3}\right)$. Ἄρα:

- ἄν $\lambda \neq -1$ καί $\lambda \neq \frac{1}{3}$ τό σύστημα ἔχει μιά λύση τήν

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{2(\lambda^2-3\lambda-1)}{(\lambda+1)(3\lambda-1)} \quad \textbf{καί} \quad y = \frac{D_2}{D} = \frac{-\lambda^2+\lambda-4}{(\lambda+1)(3\lambda-1)}$$

- ἄν $\lambda = -1$ ἤ $\lambda = \frac{1}{3}$ εἶναι $D_1 \neq 0$ καί $D_2 \neq 0$ καί τό σύστημα δέν ἔχει λύση.

32. α) Ἔχουμε:

$$\begin{cases} x^2+xy = 6 \\ 2x+3y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+xy = 6 \\ y = \frac{7-2x}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x\,\frac{7-2x}{3} = 6 \\ y = \frac{7-2x}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+7x-2x^2 = 18 \\ y = \frac{7-2x}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+7x-18 = 0 \\ y = \frac{7-2x}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \text{ ἢ } x = -9 \\ y = \frac{7-2x}{3} \end{cases} \Leftrightarrow (x = 2 \textbf{ καί } y = 1) \text{ ἢ } \left(x = -9 \textbf{ καί } y = \frac{25}{3}\right).$$

β) Ἔχουμε:

$$\begin{cases} 2x^2+3y^2-4x+y = 14 \\ 2y-x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+3y^2-4x+y = 14 \\ x = 2y-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(2y-2)^2+3y^2-4(2y-2)+y = 14 \\ x = 2y-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(4y^2-8y+4)+3y^2-8y+8+y = 14 \\ x = 2y-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8y^2-16y+8+3y^2-8y+8+y-14 = 0 \\ x = 2y-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 11y^2-23y+2 = 0 \\ x = 2y-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \text{ ἢ } y = \frac{1}{11} \\ x = 2y-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x = 2 \textbf{ καί } y = 2) \text{ ἢ } \left(x = -\frac{20}{11} \textbf{ καί } y = \frac{1}{11}\right)$$

33. α) Ἔχουμε:

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 73 \\ xy = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2-2xy = 73 \\ xy = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2-2.24 = 73 \\ xy = 24 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = 121 \\ xy = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \pm 11 \\ xy = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 11 \\ xy = 24 \end{cases} \text{ ἢ } \begin{cases} x+y = -11 \\ xy = 24 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (x = 8 \textbf{ καί } y = 3)$ ἢ $(x = 3 \textbf{ καί } y = 8)$ ἢ $(x = -8 \textbf{ καί } y = -3)$ ἢ
$(x = -3 \textbf{ καί } y = -8)$

β) Θέτουμε $x+y = z$ (1) καί $xy = \varphi$ (2) ὁπότε ἔχουμε $\begin{matrix} \varphi+z = 23 \\ \varphi z = 120 \end{matrix}$

Οἱ φ, z εἶναι ρίζες τῆς ἐξισώσεως $\omega^2-23\omega+120 = 0$ πού εἶναι 15 καί 8. Συνεπῶς ἔχουμε ($\varphi = 15$ **καί** $z = 8$) ἢ ($\varphi = 8$ **καί** $z = 15$)

Ὁπότε ἀπό τίς (1) καί (2) προκύπτουν τά συστήματα

$$\left.\begin{aligned} x+y &= 8 \\ xy &= 15 \end{aligned}\right\} \ (3) \quad \text{καί} \quad \left.\begin{aligned} x+y &= 15 \\ xy &= 8 \end{aligned}\right\} \ (4)$$

Ἀπό τό σύστημα (3) βρίσκουμε $(x = 5$ **καί** $y = 3)$ **ἤ** $(x = 3$ **καί** $y = 5)$

Ἀπό τό σύστημα (4) βρίσκουμε $\left(x = \frac{15+\sqrt{193}}{2}\right.$ **καί** $\left.y = \frac{15-\sqrt{193}}{2}\right)$ ἤ

$$\left(x = \frac{15-\sqrt{193}}{2} \ \textbf{καί} \ y = \frac{15+\sqrt{193}}{2}\right)$$

34. α) Προσθέτουμε κατά μέλη τίς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος καί ἔχουμε:

$2x^2+2x = 112 \Leftrightarrow 2x^2+2x-112 = 0 \Leftrightarrow x^2+x-56 = 0 \Leftrightarrow (x = -8$ **ἤ** $x = 7)$

Ἀφαιροῦμε κατά μέλη τίς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος καί ἔχουμε:

$2y^2+2y = 12 \Leftrightarrow 2y^2+2y-12 = 0 \Leftrightarrow y^2+y-6 = 0 \Leftrightarrow (y = -3$ **ἤ** $y = 2)$

Ἄρα οἱ λύσεις τοῦ συστήματος εἶναι:

$(x = -8$ **καί** $y = -3)$ **ἤ** $(x = -8$ **καί** $y = 2)$ ἤ $(x = 7$ **καί** $y = -3)$ **ἤ** $(x = 7$ **καί** $y = 2)$

β) Πολλαπλασιάζουμε τίς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος κατά μέλη καί ἔχουμε:

$$x^2y^2z^2 = \frac{4}{225} \Leftrightarrow xyz = \pm\frac{2}{15} \Leftrightarrow xyz = \frac{2}{15} \ (1) \quad \text{ἤ} \quad xyz = -\frac{2}{15} \ (2)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τήν (1) μέ καθεμιά ἐξίσωση παίρνουμε:

$$z = \frac{1}{5}, \quad y = \frac{1}{3}, \quad x = 2$$

Ὁμοίως ἀπό τήν (2) παίρνουμε:

$$z = -\frac{1}{5}, \quad y = -\frac{1}{3}, \quad x = -2$$

Ἄρα οἱ λύσεις τοῦ συστήματος εἶναι:

$$\left(x = 2 \ \textbf{καί} \ y = \frac{1}{3} \ \textbf{καί} \ z = \frac{1}{5}\right) \ \textbf{ἤ} \ \left(x = -2 \ \textbf{καί} \ y = -\frac{1}{3} \ \textbf{καί} \ z = -\frac{1}{5}\right)$$

ΠΑΡΟΡΑΜΑΤΑ

Σελ.	**στ.**	**ἀντί**	**νά γραφεῖ**
26	3	$\alpha = \alpha'+\sqrt{\beta'}-\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\beta} = \alpha'-\alpha+\sqrt{\beta'}$
26	10	$18\sqrt{2}-14$	$18\sqrt{2}-24$
64	7	θ	x

ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΓΩΝΙΑ	ημ	συν	εφ	ΓΩΝΙΑ	ημ	συν	εφ
1°	0.0175	0.9998	0.0175	46°	0.7193	0.6947	1.036
2°	0.0349	0.9994	0.0349	47°	0.7314	0.6820	1.072
3°	0.0523	0.9986	0.0524	48°	0.7431	0.6691	1.111
4°	0.0698	0.9976	0.0699	49°	0.7547	0.6561	1.150
5°	0.0872	0.9962	0.0875	50°	0.7660	0.6428	1.192
6°	0.1045	0.9945	0.1051	51°	0,7771	0,6293	1,235
7°	0.1219	0.9925	0.1228	52°	7.7880	0.6157	1.280
8°	0.1392	0.9903	0.1405	53°	0.7986	0.6018	1.327
9°	0.1564	0.9877	0.1584	54°	0.8090	0.5878	1.376
10°	0.1736	0.9848	0.1763	55°	0.8192	0.5736	1.428
11°	0.1908	0.9816	0.1944	56°	0.8290	0.5592	1.483
12°	0.2079	0.9781	0.2126	57°	0.8387	0.5446	1.540
13°	0.2250	0.9744	0.2309	58°	0.8480	0.5299	1.600
14°	0.2419	0.9703	0.2493	59°	0.8572	0.5150	1.664
15°	0.2588	0.9659	0.2679	60°	0.8660	0.5000	1.732
16°	0.2756	0.9613	0.2867	61°	0.8746	0.4848	1.804
17°	0.2924	0.9563	0.3057	62°	0.8829	0.4695	1.881
18°	0.3090	0.9511	0.3249	63°	0.8910	0.4540	1.963
19°	0.3256	0.9455	0.3443	64°	0.8988	0.4384	2.050
20°	0.3420	0.9397	0.3640	65°	0.9063	0.4226	2.145
21°	0.3584	0.9336	0.3839	66°	0.9135	0.4067	2.246
22°	0.3746	0.9272	0.4040	67°	0.9205	0.3907	2.356
23°	0.3907	0.9205	0.4245	68°	0.9272	0.3746	2.475
24°	0.4067	0.9135	0.4452	69°	0.9336	0.3584	2.605
25°	0.4226	0.9063	0.4663	70°	0.9397	0.3420	2.747
26°	0.4384	0.8988	0.4877	71°	0.9455	0.3256	2.904
27°	0.4540	0.8910	0.5095	72°	0.9511	0.3090	3.078
28°	0.4695	0.8829	0.5317	73°	0.9563	0.2924	3.271
29°	0.4848	0.8746	0.5543	74°	0.9613	0.2756	3.487
30°	0.5000	0.8660	0.5774	75°	0.9659	0.2586	3.732
31°	0.5150	0.8572	0.6009	76°	0.9703	0.2419	4.011
32°	0.5299	0.8480	0.6249	77°	0.9744	0.2250	4.332
33°	0.5446	0.8387	0.6494	78°	0.9781	0.2079	4.705
34°	0.5592	0.8290	0.6745	79°	0.9816	0.1908	5.145
35°	0.5736	0.8192	0.7002	80°	0.9848	0.1736	5.671
36°	0.5878	0.8090	0.7265	81°	0.9877	0.1564	6.314
37°	0.6018	0.7986	0.7536	82°	0.9903	0.1392	7.115
38°	0.6157	0.7880	0.7813	83°	0.9925	0.1219	8.144
39°	0.6293	0.7771	0.8098	84°	0.9945	0.1045	9.514
40°	0.6428	0.7660	0.8391	85°	0.9962	0.0872	11.43
41°	0.6561	0.7547	0.8693	86°	0.9976	0.0698	14.30
42°	0.6691	0.7431	0.9004	87°	0.9986	0.0523	19.08
43°	0.6820	0.7314	0.9325	88°	0.9994	0.0349	28.64
44°	0.6947	0.7193	0.9657	89°	0.9998	0.0175	57.29
45°	0.7071	0.7071	1.000				

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Βαγγέλης 2614248

ΕΚΔΟΣΗ Α' 1980 (III) ΑΝΤΙΤΥΠΑ 140.000 - ΣΥΜΒΑΣΗ 3365/29-2-80

ΕΚΤΥΠΩΣΗ-ΒΙΒΛΙΟΔΕΣΙΑ: Ι. ΔΙΚΑΙΟΣ Α.Ε.