ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΤΟΜΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΣ

Ι. ΙΩΑΝΝΙΔΗ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑΙ 1968

40532

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΔΩΡΕΑ
ΕΘΝΙΚΗΣ ΚΥΒΕΡΝΗΣΕΩΣ

Τὸ παρὸν ἀποτελεῖ τὸν Β΄ Τόμον τοῦ διὰ τοὺς μαθητὰς τῆς Γ' Τάξεως τοῦ Γυμνασίου προοριζομένου διδακτικοῦ βιβλίου, ἡ συγγραφὴ τοῦ ὁποίου ἀνετέθη, διὰ τῆς ὑπ' ἀριθμ. 57338 26-4-1968 Ὑπουργικῆς ἀποφάσεως, εἰς τοὺς καθηγητὰς τῶν Μαθηματικῶν κ. κ. :

1) Ἰωάννην Ἰωαννίδην, Ἐπιμελητὴν τοῦ Ἐθν. Μ. Πολυτεχνίου.
2) Γεώργιον Μποῦσγον, Δρα τῶν Μαθηματικῶν, καθηγητὴν Λεοντείου Σχολῆς.
3) Ἰωάννην Ταμβακλῆν, βοηθὸν Γυμν/ρχην τοῦ Γυμν. Ἀρρένων Ἄρτης.

Συνετάγη βάσει τοῦ ἐγκριθέντος, διὰ τῆς ὑπ' ἀριθμ. 126711/19-9-68 Ὑπουργικῆς ἀποφάσεως, νέου Ἀναλυτικοῦ Προγράμματος, καταρτισθέντος ὑπὸ τῆς, ἐκ τοῦ Καθηγητοῦ τοῦ Ἐθν. Μ. Πολυτεχνείου κ. Παναγ. Λαδοπούλου καὶ τῶν κ.κ. Δημ. Κάππου Καθηγητοῦ τοῦ Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν, Ἀρισ. Πάλλα Καθηγητοῦ τῆς Σχολῆς Ναυτ. Δοκίμων, Νικ. Μπάρκα Προέδρου τοῦ Α.Ε.Σ. καὶ Δημ. Φιλαρέτου Συμβούλου τοῦ Α.Ε.Σ., ἐπὶ τούτῳ συσταθείσης Ἐπιτροπῆς.

Ἡ ἐποπτεία τῆς, συμφώνως πρὸς τὸ πνεῦμα τοῦ νέου Ἀναλυτικοῦ Προγράμματος, συγγραφῆς τοῦ βιβλίου, ὑπῆρξεν ἔργον τῆς ὑπὸ τὸν Καθηγητὴν κ. Π. Λαδόπουλον Ἐπιτροπῆς, εἰς ἣν μετέσχον οἱ Καθηγηταὶ κ.κ. Δ. Κάππος καὶ Α. Πάλλας, τὰ μέλη τοῦ Α.Ε.Σ. κ.κ. Ν. Μπάρκας καὶ Δ. Φιλάρετος καὶ οἱ Γενικοὶ Ἐπιθεωρηταὶ κ.κ. Δ. Κάρτσωνας καὶ Φ. Σπηλιώτης.

ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΤΟΜΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΣ

Ι. ΙΩΑΝΝΙΔΗ

ΕΛΛΑΣ

21 ΑΠΡΙΛΙΟΥ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ

ΑΘΗΝΑΙ 1968

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ — ΑΙΣΘΗΤΟΣ ΧΩΡΟΣ

Ἡ σπουδὴ τῆς Γεωμετρίας ὅπως καὶ τῶν ἄλλων Ἐπιστημῶν συνδέεται μὲ τὴν προσπάθειαν τοῦ ἀνθρώπου νὰ ἑρμηνεύσῃ κατὰ ἕνα τρόπον καθολικὸν τὸν περὶ αὐτὸν Κόσμον. Κατὰ τὴν προσπάθειαν ταύτην συνειδητοποιεῖ ὅτι ἡ γνῶσις του εἶναι κατ' ἀνάγκην περιωρισμένη, διότι, ὡς ἐμπειρική, ἀναφέρεται εἰς ὅ,τι ἡ ἀντίληψις ἐκ τοῦ αἰσθητοῦ Κόσμου τοῦ ἐπιτρέπει ἑκάστοτε νὰ ἐννοήσῃ. Πιστεύει ὅτι προώρισται νὰ ἔχῃ ἀντίληψιν πέραν τῆς ὑπὸ τῆς ἐκ τοῦ αἰσθητοῦ ἐμπειρίας παρεχομένης καὶ πρὸς τὴν κατεύθυνσιν αὐτὴν ἀποβλέπει : πρὸς τὴν ἀπελευθέρωσίν του ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ αἰσθητοῦ δεσποτείας. Δὲν δύναται νὰ περιορισθῇ εἰς τὴν καταγραφὴν τῶν φαινομένων τοῦ αἰσθητοῦ Κόσμου, ἐνδιαφέρεται διὰ τὰς μεταξὺ αὐτῶν σχέσεις. Θὰ προετίμα νὰ εὑρίσκεται εἰς ἕνα Κόσμον, τὸν ὁποῖον νὰ δύναται νὰ ἑρμηνεύσῃ ἐν παντί. Οὕτως ἄγεται εἰς τὸ νὰ κατασκευάσῃ μὲ τὸν νοῦν του ἕνα τοιοῦτον Κόσμον, ἀπηλλαγμένον ἀπὸ τὰς ἀντιφάσεις τοῦ αἰσθητοῦ καὶ μέσῳ τούτου νὰ ἑρμηνεύσῃ τὸν αἰσθητόν, νὰ ἐπιστρέψῃ δηλαδὴ εἰς αὐτόν. Εἰς τὴν περιοχὴν τῆς Ἐπιστήμης τοῦ Χώρου, ὁ δραματικὸς οὗτος ἀγὼν τοῦ ἀνθρωπίνου νοῦ καὶ αἱ σημειωθεῖσαι ἐπιτυχίαι δὲν ὑπῆρξαν θεαματικαί, δὲν ἀπησχόλησαν τὸ εὐρὺ κοινόν, θὰ παραμείνουν ὅμως αἱ εὐγενέστεραι κατακτήσεις τοῦ ἀνθρωπίνου πνεύματος, πρὸς τὰς ὁποίας πρέπει ἑκάστοτε νὰ ἀποβλέπωμεν, ὅταν ἡ πίστις μας πρὸς τὴν πνευματικὴν δημιουργίαν ἐμφανίζεται μειωμένη.

Πρέπει νὰ δεχθῶμεν, ὅτι μέχρι τοῦ Θαλοῦ τοῦ Μιλησίου (639—548 π. Χ.) ὁ ἀνθρώπινος νοῦς δὲν εἶχεν ἀπελευθερωθῆ ἀπὸ τὴν ἐκ τοῦ αἰσθητοῦ ἐποπτείαν. Ἡ τοιαύτη ἐκ τοῦ αἰσθητοῦ ἐποπτεία ἀπετέλει, μέχρι τῆς ἐποχῆς του τὴν προϋπόθεσιν καὶ τὴν αἰτίαν τῆς δημιουργίας τῆς Γεωμετρίας, τὴν ὁποίαν ἤσκουν οἱ Αἰγύπτιοι καὶ οἱ Ἀνατολικοὶ λαοί.

Ὁ Θαλῆς διὰ τῆς εἰσαγωγῆς τοῦ «Ἀπαγωγικοῦ συλλογισμοῦ» καὶ τῆς «Ὑποθέσεως», μετέφερε τὴν ἀναζήτησιν τῆς ἀληθείας ἀπὸ τὴν περιοχὴν τοῦ «αἰσθητοῦ» εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ «νοητοῦ». Ἡ ὑπὸ τοῦ Θαλοῦ θεμελιωθεῖσα ἀποδεικτικὴ Ἐπιστήμη, τίποτε τὸ κοινὸν δὲν ἔχει μὲ τὴν πρὸ αὐτοῦ Γεωμετρίαν τῶν Ἀνατολικῶν λαῶν. διαφέρει αὐτῆς καὶ κατὰ τὸ περιεχόμενον καὶ κατὰ τὸν σκοπόν. Αἱ ἀπὸ τοῦ τέλους τοῦ παρελθόντος αἰῶνος ἐπελθοῦσαι βελτιώσεις καὶ τροποποιήσεις καθ' ὅσον ἀφορᾷ τὴν «παρουσίασιν» τῆς Ἑλληνικῆς Γεωμετρίας, οὐδὲν σχεδὸν προσθέτουν εἰς τὴν δημιουργίαν τοῦ Θαλοῦ, ἡ ὁποία ὑπῆρξεν ἡ ἀπαλ-

λαγὴ τῆς ἀνθρωπίνης σκέψεως ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ αἰσθητοῦ δεσποτείας. Ἡ ἐκ τοῦ αἰσθητοῦ ἐποπτεία ἀντικαθίσταται διὰ τοῦ Θαλοῦ ὑπὸ τῆς Γεωμετρικῆς ἐποπτείας, καὶ ὁ α ἰ σ θ η τ ὸ ς Χ ῶ ρ ο ς ὑπὸ τοῦ Γ ε ω μ ε τ ρ ι κ ο ῦ Χ ώ ρ ο υ. Οὕτω, ἡ ε ὐ θ ε ῖ α τοῦ Γεωμετρικοῦ Χώρου δὲν εἶναι ἡ «εὐθεῖα γραμμὴ» τῆς ὁποίας «λαμβάνομεν ἔννοιαν» θεωροῦντες ἕνα νῆμα τεταμένον.

Ἐν πρώτοις δὲν εἶναι ὑλικὸν ἀλλὰ νοητὸν ἀντικείμενον, ἔννοια ἀφῃρημένη, κατασκεύασμα τοῦ νοῦ. Ἠμπορεῖ ἀκόμη νὰ μὴ ἔχῃ σχέσιν μὲ τὴν ε ὐ θ ύ τ η τ α τὴν ὁποίαν τῆς ἀποδίδομεν, ὅταν ζητοῦμεν νὰ τὴν ἴδωμεν. Ἡ ἔννοια τῆς ε ὐ θ ε ί α ς τοῦ Γεωμετρικοῦ Χώρου θὰ καθορισθῇ ἀπὸ τὰς ἰδιότητας τὰς ὁποίας ἡμεῖς θὰ ἀποδώσωμεν εἰς αὐτήν, θὰ δεχθῶμεν ὅτι ἔχει.

Ὁ Γεωμετρικὸς Χῶρος ἀποτελεῖ νοητικὸν κατασκεύασμα ὅλως διάφορον τοῦ αἰσθητοῦ Χώρου. Ἡ Γεωμετρικὴ ἕνεκα τούτου ἐποπτεία πρθώρισται νὰ μᾶς ὁδηγήσῃ εἰς ἀληθείας τὰς ὁποίας οὐδέποτε θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ γνωρίσωμεν διὰ τῆς ἐκ τοῦ αἰσθητοῦ ἐποπτείας.

2. ΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙ ΕΝΝΟΙΑΙ ΤΟΥ ΟΓΚΟΥ, ΤΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ΤΗΣ ΓΡΑΜΜΗΣ ΚΑΙ ΤΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

Ἐκ τῆς ἐποπτείας τοῦ αἰσθητοῦ Χώρου ἔχομεν τὰς ἐννοίας τοῦ ὄ γ κ ο υ τῶν φυσικῶν σωμάτων, τῆς ἐ π ι φ α ν ε ί α ς αὐτῶν, τὴν ἔννοιαν τῆς γ ρ α μ μ ῆ ς κλπ. Ἡ μετάβασις ἐκ τῶν ἐννοιῶν τούτων εἰς τὰς ἀντιστοίχους Γεωμετρικὰς ἐννοίας θὰ καταστῇ δυνατὴ τῇ βοηθείᾳ μιᾶς νοητικῆς ἀφαιρέσεως τῶν μὴ κοινῶν γνωρισμάτων ἑκάστης τῶν ἐννοιῶν τούτων καὶ ἐπιλογῆς τῶν κοινῶν καὶ κυρίων γνωρισμάτων αὐτῆς. Οὕτω, καθ' ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὴν ἔννοιαν τοῦ ὄγκου τῶν φυσικῶν σωμάτων, δι' ἀφαιρέσεως τῶν γνωρισμάτων τῶν ἀναφερομένων εἰς τὴν ἐξωτερικὴν μορφὴν τοῦ φυσικοῦ σώματος, τὸ βάρος, τὸ χρῶμα κλπ. φθάνομεν εἰς τὴν ἀφῃρημένην ἔννοιαν τοῦ ὄγκου.

Ἀνάλογος εἶναι ἡ μετάβασις ἐκ τῆς ἐποπτικῆς ἐννοίας τῆς ἐπιφανείας τῶν φυσικῶν σωμάτων ἢ τῆς γραμμῆς, εἰς τὴν ἀντίστοιχον ἀφῃρημένην ἔννοιαν, δι' ἀφαιρετικῆς ἐνεργείας τοῦ νοῦ δι' ἧς ἡ ἔννοια αὕτη ἀπαλλάσσεται ἀπὸ τὰ ἰδιαίτερα ἤτοι τὰ μὴ κοινὰ χαρακτηριστικὰ (χρῶμα, πάχος κλπ.) μὲ τὰ ὁποῖα ἐμφανίζεται συνδεομένη.

Αἱ ἀνωτέρω ἀφῃρημέναι ἔννοιαι θὰ ὀνομασθοῦν Γ ε ω μ ε τ ρ ι κ α ί.

Κατὰ τὴν σπουδὴν τῆς Γεωμετρίας θὰ ἴδωμεν πῶς δύναται νὰ εἰσαχθῇ λογικῶς ἡ ἔννοια τῆς ἐπιφανείας ἢ τοῦ ὄγκου τῶν Γεωμετρικῶν σχημάτων βάσει μιᾶς ἀντιστοιχίας μεταξὺ τούτων πρὸς ἄλλα Γεωμετρικὰ σχήματα, ἱδρυομένης ἐπὶ χαρακτηριστικῶν ἰδιοτήτων τῶν Γεωμετρικῶν σχημάτων αἱ ὁποῖαι ἔχουν προηγουμένως ἐξετασθῆ.

Ἡ ἀφορμὴ κατὰ ταῦτα διὰ τὴν δημιουργίαν τῶν ἀνωτέρω Γεωμετρικῶν ἐννοιῶν ὑπῆρξεν ἡ ἐμπειρία ἐκ τοῦ αἰσθητοῦ Κόσμου. Οὕτω ἡ Γεωμετρία, ἐξετάζουσα τὰς ἀνωτέρω ἐννοίας καὶ τὰς μεταξύ των σχέσεις, δύναται νὰ θεωρηθῇ συνδεομένη μὲ τὴν ἐποπτείαν τοῦ αἰσθητοῦ Χώρου. μόνον καθ' ὅσον ἀφορᾷ τὴν προ-

έλευσιν τῶν ἀρχικῶν της ἐννοιῶν. Ἐκ τούτου βεβαίως δὲν ἕπεται ὅτι εἶναι, ὅπως αἱ Φυσικαὶ Ἐπιστῆμαι, Πειραματικὴ Ἐπιστήμη, διότι δὲν ἐπιστρέφει εἰς τὴν ἐποπτείαν διὰ τὴν βάσει ταύτης ἐπαλήθευσιν τῶν συμπερασμάτων της. Δὲν ὑπηρετεῖ εἰς τὴν ἐποπτείαν τοῦ αἰσθητοῦ Κόσμου. Τουναντίον τὰ ἐκ τῆς Γεωμετρικῆς θεωρίας συμπεράσματα ἐμφανίζονται πολλάκις ἀρνούμενα τὴν ἐκ τοῦ αἰσθητοῦ ἐμπειρίαν.

Κατὰ τὴν περαιτέρω σπουδὴν τῆς Γεωμετρίας θέλουν εἰσαχθῇ, κατὰ λογικὴν ἀνάγκην, ὡρισμένα Γεωμετρικὰ στοιχεῖα, τὰ ὁποῖα θὰ ὀνομασθοῦν φανταστικὰ Γεωμετρικὰ στοιχεῖα. Τὰ στοιχεῖα αὐτὰ εἶναι στοιχεῖα τοῦ Γεωμετρικοῦ Χώρου μὴ ἔχοντα, ἀσφαλῶς, σχέσιν μὲ τὴν ἐκ τοῦ αἰσθητοῦ ἐμπειρίαν.

3. ΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ ΚΑΙ ΤΑ ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Ἡ Γεωμετρία βασίζεται ἐπὶ «ἀρχικῶν» τινων ἐννοιῶν, αἱ ὁποῖαι, ὡς ἀπέδειξεν ἡ περὶ τὰς βάσεις αὐτῆς ἔρευνα, δὲν δύνανται νὰ ὁρισθοῦν.

Πράγματι, διὰ τὸν ὁρισμὸν κάθε ἐννοίας πρέπει νὰ χρησιμοποιηθοῦν ἀναγκαίως ἄλλαι ἔννοιαι, αἱ ὁποῖαι μὲ τὴν σειράν των, θὰ πρέπει νὰ ὁρισθοῦν ἐπίσης τῇ βοηθείᾳ ἄλλων ἐννοιῶν κ.ο.κ. Ἐπιβάλλεται ἑπομένως, ἐκ τοῦ λόγου τούτου, ὅπως ἐκλεγοῦν ὡρισμένα στοιχεῖα, αἱ ἔννοιαι τῶν ὁποίων θὰ θεωρηθοῦν ὡς ἀρχικαί, βάσει δὲ τούτων ὁρισθοῦν αἱ ἔννοιαι τῶν ἄλλων στοιχείων τοῦ Γεωμετρικοῦ Χώρου. Αἱ ἀρχικαὶ αὗται ἔννοιαι ὠνομάσθησαν θεμελιώδη ἢ ἀρχικὰ στοιχεα τοῦ Γεωμετρικοῦ Χώρου.

Ὡς θεμελιώδη Γεωμετρικὰ στοιχεῖα ἐθεωρήθησαν τὸ σημεῖον, ἡ εὐθεῖα καὶ τὸ ἐπίπεδον.

Τὰ στοιχεῖα ταῦτα πρέπει νὰ θεωρηθοῦν ἀνεξαρτήτως καὶ ἀσχέτως τῆς προελεύσεώς των ἢ τοῦ ἐποπτικοῦ των περιεχομένου.

Ἀσφαλῶς ὅταν ὁμιλοῦμεν περὶ τῆς εὐθείας ἢ τοῦ ἐπιπέδου ἔχομεν κατὰ νοῦν ἕνα ἀντικείμενον ἔχον κάποιαν σχέσιν μὲ τὴν «ἐποπτικὴν εὐθεῖαν» ἢ τὸ «ἐποπτικὸν ἐπίπεδον». Ἡ μετάβασις εἰς τὰς ἀντιστοίχους Γεωμετρικὰς ἐννοίας δὲν εἶναι ἀμέσως εὔκολος. Ἀσφαλῶς δὲν κερδίζομεν τίποτε, καθ' ὅσον ἀφορᾷ τὴν ἐξοικείωσίν μας μὲ τὴν ἀφῃρημένην ἔννοιαν τῆς εὐθείας, ἂν τὴν εἴπωμεν «εὐθεῖαν γραμμήν». Θὰ ἠδυνάμεθα νὰ τὴν ὀνομάσωμεν ἁπλῶς «γραμμὴν» ἢ νὰ χρησιμοποιήσωμεν μίαν οἱανδήποτε ἄλλην λέξιν.

Αἱ ἀνωτέρω ἀρχικαὶ ἔννοιαι : τοῦ σημείου, τῆς εὐθείας καὶ τοῦ ἐπιπέδου θὰ ὁρισθοῦν ἐμμέσως διὰ τῶν ἀξιωμάτων τῆς Γεωμετρίας, ἤτοι τῶν ἀρχικῶν προτάσεων διὰ τῶν ὁποίων ὁρίζονται, αἱ μεταξὺ τῶν ἀνωτέρω Γεωμετρικῶν στοιχείων σχέσεις. Εἰς τὰς σχέσεις αὐτὰς ἀναφέρεται ἡ Γεωμετρικὴ θεωρία καὶ ὄχι εἰς τὰ Γεωμετρικὰ ἀντικείμενα καθ' ἑαυτά. Οὕτω διὰ τοῦ ἀξιώματος : «Πᾶσα εὐθεῖα περιέχει δύο τουλάχιστον σημεῖα», δεχόμεθα μίαν σχέσιν μεταξὺ τῶν ἐννοιῶν τῆς εὐθείας καὶ τοῦ σημείου, ἡ ὁποία περιγράφεται διὰ τοῦ ἀνωτέρω ἀξιώματος. Ὑπὸ τὴν ἔννοιαν αὐτὴν λέγομεν ὅτι ὁρίζονται ἐ μ μ έ σ ω ς τὰ Γεωμετρικὰ ἀντικείμενα διὰ τῶν ἀξιωμάτων τῆς Γεωμετρίας.

Ἡ ὕπαρξις τῶν ἀντικειμένων τὰ ὁποῖα ὠνομάσαμεν Γεωμετρικὰ στοιχεῖα εἶναι ἕνα ἀξίωμα τῆς Γεωμετρίας: τὸ ἀξίωμα τῆς ὑπάρξεως.

Τὰ ἀξιώματα τῆς Γεωμετρίας διατυποῦνται μὲ τὴν βοήθειαν τῆς βασικῆς γλώσσης καὶ ἐννοιῶν τινων μὴ ὁριζομένων ἢ ὅπως δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ἀ ρ χ ι κ ῶ ν. Βάσει τῆς εἰς αὐτὰ εἰσαγομένης ἀρχικῆς ἐννοίας τὰ ἀξιώματα χαρακτηρίζονται, ὡς κατωτέρω θέλομεν ἴδει, εἰς πέντε κατηγορίας.

Τὰ ἀξιώματα τῆς Γεωμετρίας, μακρὰν τοῦ νὰ ἔχουν τὴν μορφὴν δογμάτων, ἐκφράζουν τὰς θεμελιώδεις ἀληθείας, τὰς ὁποίας ἡ πεῖρα καὶ ἡ παρατήρησις μόναι, δὲν δύνανται νὰ δώσουν.

Τὸ σύνολον τῶν ἀξιωμάτων ἐπὶ τῶν ὁποίων ἱδρύεται ἡ Γεωμετρικὴ θεωρία, ὀνομάζεται καὶ σ ύ σ τ η μ α ἀξιωμάτων αὐτῆς. Ἡ ἐκλογὴ ἑνὸς συστήματος ἀξιωμάτων εἰς τὴν Γεωμετρίαν ἀποτελεῖ τὴν θ ε μ ε λ ί ω σ ι ν αὐτῆς.

Ἡ μέθοδος κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ ἵδρυσις τῆς Γεωμετρίας βασίζεται ἐπὶ ἀξιωμάτων ὠνομάσθη ἀ ξ ι ω μ α τ ι κ ή.

Ἡ κατὰ τὴν μέθοδον ταύτην ἵδρυσις τῆς Γεωμετρίας, δὲν ἐπιβάλλεται μόνον διὰ τὸν λόγον ὅτι ἀποκαλύπτει εἰς τὸν σπουδάζοντα αὐτὴν τὸ κάλλος τῆς κατὰ Λ ό γ ο ν ἐξαρτήσεως τῶν Γεωμετρικῶν ἐννοιῶν, ἀλλὰ καὶ διότι ἐξοικειώνει τοῦτον μὲ τὴν αὐστηρότητα τῆς λογικῆς δημιουργίας, ἡ ὁποία εἶναι ἕνα προνόμιον τοῦ ἀνθρωπίνου πνεύματος, δίδουσα εἰς τοῦτο τὴν εὐκαιρίαν νὰ χαίρεται τὴν δημιουργίαν αὐτήν.

Ἀπὸ τὴν καθαρότητα τοῦ Γεωμετρικοῦ συλλογισμοῦ ἐνθουσιασθεὶς ὁ B. Spinoza (1632—1677) δίδει εἰς τὴν φιλοσοφίαν του «Γεωμετρικὸν ρυθμόν».

Συμπεραίνοντες παρατηροῦμεν ὅτι: Τὰ συμπεράσματα ἐκ τῆς κατὰ τὴν ἀξιωματικὴν μέθοδον ἐρεύνης τῶν σχέσεων μεταξὺ τῶν στοιχείων, τὰ ὁποῖα συνθέτουν τὴν ἔννοιαν τοῦ Γεωμετρικοῦ Χώρου, δὲν προκύπτουν, ὡς ἐκ τῶν ἀνωτέρω καταδεικνύεται, ἐκ τῆς ἐμπειρίας, οὔτε δύναται νὰ ἐξετασθῇ ἂν ἐπαληθεύωνται ἐξ αὐτῆς.

4. ΤΟ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΝ ΣΧΗΜΑ

Γ ε ω μ ε τ ρ ι κ ὸ ν σ χ ῆ μ α ὀνομάζομεν κάθε πεπερασμένον ἢ μὴ σύνολον Γεωμετρικῶν στοιχείων.

Αἱ σχέσεις μεταξὺ τῶν Γεωμετρικῶν στοιχείων, τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦν ἕνα Γεωμετρικὸν σχῆμα, ὀνομάζονται καὶ ἰ δ ι ό τ η τ ε ς αὐτοῦ.

Ἡ διατύπωσις τῶν ἀνωτέρω σχέσεων μεταξὺ τῶν στοιχείων τῶν Γεωμε-

τρικῶν σχημάτων, γίνεται διὰ τῶν ἀποδεικτέων προτάσεων ἢ θ ε ω ρ η μ ά τ ω ν τῆς Γεωμετρίας.

Ὑ π ό θ ε σ ι ν ἑνὸς θεωρήματος ὀνομάζομεν τὸ σύνολον τῶν συνθηκῶν αἱ ὁποῖαι θεωροῦνται ὑφιστάμεναι μεταξὺ στοιχείων τινων ἑνὸς Γεωμετρικοῦ σχήματος. Ἐκ τῶν ὑφισταμένων ἐν τῇ ὑποθέσει συνθηκῶν συνεπάγονται αἱ πρὸς ἀπόδειξιν σχέσεις μεταξὺ αὐτῶν ἢ καὶ ἄλλων στοιχείων τοῦ Γεωμετρικοῦ σχήματος.

Ἡ διὰ τῶν κανόνων τῆς Λογικῆς βεβαίωσις τῶν ἐκ τῆς ὑποθέσεως συνεπαγομένων ἰδιοτήτων ὀνομάζεται ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς.

Ἡ κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἀπόδειξις δέον ἀναγκαίως νὰ βασίζεται εἰς τὰ εἰσαχθέντα ἀξιώματα, τοὺς ὁρισμοὺς καὶ τὰ προηγουμένως ἀποδειχθέντα θεωρήματα. Π ό ρ ι σ μ α ἑνὸς θεωρήματος ὀνομάζεται. πᾶσα πρότασις τῆς ὁποίας ἡ ἰσχὺς προκύπτει ἀπ' εὐθείας ἐκ τοῦ θ εωρήματος.

Ὡς κατὰ τὴν ἀνάπτυξιν τῆς Γεωμετρικῆς θεωρίας θέλει καταστῇ σαφές, αἱ ἰδιότητες τῶν σχημάτων δύνανται νὰ εἶναι μ ε τ ρ ι κ α ί, ὡς αἱ ἀναφερόμεναι εἰς τὴν μέτρησιν εὐθυγράμμων τμημάτων, γωνιῶν κλπ. ἢ γ ρ α φ ι κ α ί. Ὡς γραφικαὶ ἰδιότητες τῶν σχημάτων χαρακτηρίζονται αἱ μὴ μετρικαὶ τοιαῦται.

5. Η ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Τὰ «Σ τ ο ι χ ε ῖ α» τοῦ Εὐκλείδου (330 - 273 π. Χ.) ἀποτελοῦν τὸ πρῶτον εἰς τὴν ἱστορίαν παράδειγμα ἱδρύσεως Ἐπιστήμης διὰ τῆς ἀξιωματικῆς μεθόδου.

Αἱ εἰς τὰ «Στοιχεῖα» περιλαμβανόμεναι προτάσεις, ὡς καὶ αἱ προτάσεις τῶν ὁποίων ἡ ἀπόδειξις στηρίζεται εἰς τὰ ἀξιώματα τοῦ Εὐκλείδου, ἀποτελοῦν ἕνα σύνολον προτάσεων, τὸ ὁποῖον χαρακτηρίζεται διὰ τοῦ ὅρου Ε ὐ κ λ ε ί δ ε ι ο ς Γ ε ω μ ε τ ρ ί α ἢ Γεωμετρία τοῦ Ε ὐ κ λ ε ι δ ε ί ο υ Χ ώ ρ ο υ.

Ἡ κατὰ τὸν 19ον αἰῶνα σημειωθεῖσα συστηματικὴ ἔρευνα περὶ τὰς βάσεις τῆς Εὐκλειδείου Γεωμετρίας, εἶχεν ὡς ἀποτέλεσμα τὴν ἵδρυσιν ὑπὸ τῶν N. I. Lobatchewsky (1793 - 1856) καὶ J. Bolyai (1802 - 1860) μιᾶς πρώτης μὴ Ε ὐ κ λ ε ι δ ε ί ο υ Γ ε ω μ ε τ ρ ί α ς.

Εἰς τὴν Γεωμετρίαν αὐτὴν ἀντὶ τοῦ ε' αἰτήματος τῶν «Στοιχείων» τοῦ Εὐκλείδου κατὰ τὸ ὁποῖον : «Δ ι ὰ σ η μ ε ί ο υ ἐ κ τ ὸ ς δ ο θ ε ί σ η ς ε ὐ θ ε ί α ς, μ ί α μ ό ν ο ν π α ρ ά λ λ η λ ο ς π ρ ὸ ς τ ὴ ν δ ο θ ε ῖ σ α ν ε ὐ θ ε ῖ α ν ἄ γ ε τ α ι», εἰσάγεται ἄλλο ἀξίωμα κατὰ τὸ ὁποῖον: «Δ ι ὰ σ η μ ε ί ο υ κ ε ι μ έ ν ο υ ἐ κ τ ὸ ς ε ὐ θ ε ί α ς ἄ γ ο ν τ α ι π ε ρ ι σ σ ό τ ε ρ α ι τ ῆ ς μ ι ᾶ ς ε ὐ θ ε ῖ α ι μ ὴ τ έ μ ν ο υ σ α ι τ ὴ ν θ ε ω ρ ο υ μ έ ν η ν ε ὐ θ ε ῖ α ν».

Ἀργότερον ἱδρύεται παρὰ τοῦ B. Riemann (1826 - 1866) μία ἄλλη μὴ Εὐκλείδειος Γεωμετρία εἰς τὴν ὁποίαν εἰσάγεται τὸ ἀξίωμα καθ' ὃ «Δ ι ὰ σ η μ ε ί ο υ ἐ κ τ ὸ ς ε ὐ θ ε ί α ς ο ὐ δ ε μ ί α π α ρ ά λ λ η λ ο ς π ρ ὸ ς τ ὴ ν ε ὐ θ ε ῖ α ν τ α ύ τ η ν ἄ γ ε τ α ι».

Ἐκ πρώτης ὄψεως αἱ Γεωμετρίαι αὗται φαίνονται ἀρνούμεναι τὴν Εὐκλείδειον Γεωμετρίαν. Δὲν πρόκειται ὅμως περὶ αὐτοῦ :

Τὸ περιεχόμενον τοῦ ἀνωτέρω ε' ἀξιώματος ἐτέθη ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου ὡς «α ἴ τ η μ α» καὶ οὐχὶ ὡς θεώρημα, ὅπως τὸ ἐθεώρησαν οἱ ἐπὶ πολλοὺς αἰῶνας ματαίως προσπαθήσαντες νὰ τὸ ἀποδείξουν Μαθηματικοί.

Μόλις κατὰ τὸν 19ον αἰῶνα διαπιστοῦται ὅτι ἂν ἤθελεν ἐπιχειρηθῆ ἀπόδειξις τοῦ αἰτήματος τοῦ Εὐκλείδου διὰ τῆς μεθόδου τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς, οὐδεμία ἀντίφασις πρὸς τὰς εἰσαχθείσας προτάσεις προέρχεται.

Ἐκ τῆς διαπιστώσεως αὐτῆς δημιουργοῦνται αἱ προϋποθέσεις ἱδρύσεως τῶν ἀνωτέρω νέων Γεωμετριῶν. Ἑκάστη τούτων εἶναι, ὅπως δυνάμεθα νὰ λέγωμεν, Γεωμετρία ἑνὸς ἄλλου Χώρου, διαφόρου τοῦ Εὐκλειδείου. Δὲν ἔχει κατὰ ταῦτα νόημα ἡ ἐρώτησις : Ποία Γεωμετρία εἶναι ἡ ὀρθοτέρα. Καὶ αἱ δύο νεώτεραι Γεωμετρίαι εἶναι ὀρθαὶ ὅπως καὶ ἡ Γεωμετρία τοῦ Εὐκλείδου.

Ἡ «Προβολικὴ Γεωμετρία», τὴν ὁποίαν θὰ σπουδάσωμεν πολὺ ἀργότερον, περιέχει καὶ τὰς τρεῖς ὡς ἄνω Γεωμετρίας ὡς μερικάς, οὕτως εἰπεῖν, περιπτώσεις αὐτῆς.

Μετὰ τοὺς N. I. Labatchewsky καὶ B. Riemann ὁ D. Hilbert (1862-1943), ἀποβλέπων εἰς τὴν θεμελίωσιν τῆς Εὐκλειδείου Γεωμετρίας ἐπὶ σταθερᾶς βάσεως, παρουσίασεν ἕνα σύστημα ἀξιωμάτων διὰ τοῦ ὁποίου θεμελιοῦται πλήρως ἡ Εὐκλείδειος Γεωμετρία. Τὸ σύστημα τοῦτο ἀποτελεῖ σήμερον τὴν βάσιν τῆς ἀναπτύξεως τῆς Γεωμετρικῆς θεωρίας εἰς τὸ Σχολεῖον.

Ἐπειδὴ εἰς τὰ Σχολικὰ βιβλία περιοριζόμεθα κατ' ἀνάγκην εἰς τὰς θεμελιώδεις προτάσεις, ὑφίσταται εὐρὺ πεδίον πρωτοβουλίας διὰ τὸν καθηγητὴν περὶ τὴν ἐκλογὴν τῶν θεμάτων, μέσω τῶν ὁποίων θὰ καταστῇ ἐφικτὴ ἡ ταχυτέρα ἐξοικείωσις τῶν μαθητῶν μὲ τὰς Γεωμετρικὰς ἐννοίας καὶ τὸν ἀπαγωγικὸν συλλογισμόν, διὰ τῶν ὁποίων κτᾶται ἡ Γεωμετρικὴ ἐποπτεία, ἤτοι ἡ γνῶσις τῶν στοιχείων καὶ σχημάτων τοῦ Γεωμετρικοῦ Χώρου καὶ τῶν μεταξύ των σχέσεων.

6. ΤΟ ΑΞΙΩΜΑ ΤΟΥ ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΟΥ ΤΟΥ ΓΕΩΜ. ΣΧΗΜΑΤΟΣ

Ὡς ἐσημειώσαμεν ἤδη, τὰ θεμελιώδη Γεωμετρικὰ στοιχεῖα ἢ ἀντικείμενα τοῦ Γεωμετρικοῦ Χώρου, κατατάσσονται εἰς τρεῖς κατηγορίας.

Ὀνομάζομεν σ η μ ε ῖ α τὰ ἀντικείμενα τῆς πρώτης κατηγορίας, ε ὐ θ ε ί α ς τὰ ἀντικείμενα τῆς δευτέρας κατηγορίας καὶ ἐ π ί π ε δ α τὰ ἀντικείμενα τῆς τρίτης κατηγορίας. Συμβολίζομεν, συνήθως, τὰ σημεῖα μὲ τὰ κεφαλαῖα γράμματα Α, Β, Γ, ... τοῦ ἀλφαβήτου, τὰς εὐθείας μὲ τὰ πεζὰ α, β, γ, ... καὶ τὰ ἐπίπεδα μὲ τὰ Λατινικὰ πεζὰ a, b, c, ... ἢ μὲ τὰ κεφαλαῖα γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου τιθέμενα ἐντὸς παρενθέσεως.

Τὰ ἀξιώματα ἐπὶ τῶν ὁποίων ἱδρύεται ἡ Εὐκλείδειος Γεωμετρία κατατάσσονται εἰς πέντε κατηγορίας :

1. Εἰς τὴ πρώτην κατηγορίαν κατατάσσονται τὰ ἀξιώματα εἰς τὰ ὁποῖα ἡ εἰσαγομένη ἀρχικὴ ἔννοια εἶναι ἡ ἔννοια τοῦ π ε ρ ι έ χ ε ι ν ἢ ἀ ν ή κ ε ι ν. Τὰ ἀξιώματα ταῦτα δύνανται νὰ ὀνομάζωνται ἀξιώματα θ έ σ ε ω ς. Οὕτω, τὸ ἀξίωμα :

«Πᾶσα εὐθεῖα α περιέχει τουλάχιστον δύο σημεῖα Α καὶ Β διάφορα ἀλλήλων», εἶναι ἕνα ἀξίωμα θέσεως.

Ἡ ἔννοια τοῦ ἀξιώματος τούτου εἶναι ὅτι : Κάθε ἀντικείμενον τῆς δευτέρας κατηγορίας (εὐθεῖα), περιέχει τουλάχιστον δύο ἀντικείμενα τῆς πρώτης κατηγορίας (σημεῖα).

2. Εἰς τὴν δευτέραν κατηγορίαν κατατάσσονται τὰ ἀξιώματα εἰς τὰ ὁποῖα ἡ εἰσαγομένη ἀρχικὴ ἔννοια εἶναι ἡ ἔννοια τοῦ κεῖται μεταξύ. Τὰ ἀξιώματα ταῦτα ὀνομάζονται ἀξιώματα διατάξεως. Οὕτω τὸ ἀξίωμα : «Μεταξὺ δύο σημείων Α καὶ Β μιᾶς εὐθείας ε, ὑπάρχει τουλάχιστον ἕνα σημεῖον Γ», εἶναι ἕνα ἀξίωμα διατάξεως.

3. Ἡ τρίτη κατηγορία ἀξιωμάτων εἶναι ἡ τῶν ἀξιωμάτων τῆς ἰσότητος. Τὰ ἀξιώματα ταῦτα ἀναφέρονται εἰς τὰ ὁρισθέντα βάσει τῶν ἀξιωμάτων θέσεως καὶ διατάξεως σχήματα, τὰ ὁποῖα ὀνομάζονται εὐθύγραμμον τμῆμα καὶ γωνία.

Ἡ εἰς τὰ ἀξιώματα ταῦτα εἰσαγομένη ἀρχικὴ ἔννοια εἶναι ἡ ἔννοια τοῦ εἶναι ἴσον. Ἐπὶ τῆς ἐννοίας αὐτῆς παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς :

Εἶναι γνωστὸν ἀπὸ τὴν Πρακτικὴν Γεωμετρίαν, τὴν ὁποίαν διδασκόμεθα εἰς τὰς δύο πρώτας τάξεις τοῦ Γυμνασίου, ὅτι διὰ νὰ βεβαιωθῶμεν διὰ τὴν ἰσότητα δύο τριγώνων, καταφεύγομεν εἰς μέθοδον βασιζομένην ἐπὶ τῆς ἐννοίας τῆς μετακινήσεως τοῦ ἑνὸς τούτων βάσει τῆς ὁποίας ἐλέγχομεν ἂν τοῦτο δύναται, βάσει τῶν διδομένων συνθηκῶν, νὰ ἀχθῇ εἰς σύμπτωσιν πρὸς τὸ ἄλλο. Δεχόμεθα δηλαδὴ ὅτι ἕνα Γεωμετρικὸν σχῆμα δύναται νὰ μετακινηθῇ καὶ ὅτι κατὰ τὴν τοιαύτην μετακίνησιν παραμένει ἀναλλοίωτον. Τοῦτο ὅμως δὲν δύναται νὰ σημαίνῃ ἄλλο τι εἰμὴ ὅτι παραμένει ἴσον πρὸς ἑαυτό. Τὸ αὐτὸ ἰσχύει καὶ διὰ τὰ εὐθύγραμμα τμήματα καὶ τὰς γωνίας.

Ἡ μέθοδος ἐπομένως ἡ ὁποία συνίσταται εἰς τὸ νὰ ἀποδείξωμεν τὰ θεωρήματα τῆς ἰσότητος χρησιμοποιοῦντες τὴν ἔννοιαν τῆς μετακινήσεως δὲν εἶναι ὀρθή, ἀκριβῶς διότι ἡ ἔννοια τῆς μετακινήσεως προϋποθέτει τὴν ἔννοιαν τῆς ἰσότητος τὴν ὁποίαν θέλομεν νὰ ὁρίσωμεν. Ἡ μέθοδος αὕτη προσήκει, βεβαίως, ὡς ἀποδεικτικὴ μέθοδος τῆς «Ἐποπτικῆς Γεωμετρίας» ἡ ὁποία διδάσκεται εἰς τὰς πρώτας τάξεις τοῦ Γυμνασίου.

Εἰς τὴν θεωρητικὴν ὅμως Γεωμετρίαν, δὲν θὰ χρησιμοποιήσωμεν τὸ ἀνωτέρω ἀξίωμα τοῦ ἀναλλοιώτου τοῦ Γεωμετρικοῦ σχήματος, ἀλλὰ θὰ θέσωμεν ἄλλα ἀξιώματα διὰ τὴν κατοχύρωσιν τῶν ἀποδείξεων τῶν προτάσεων τῆς Γεωμετρίας, αἱ ὁποῖαι ἀναφέρονται εἰς τὴν ἔννοιαν τῆς ἰσότητος. Οὕτω θέλει συνειδητοποιηθῇ ἀμεσώτερον ἡ καθαρότης τοῦ Γεωμετρικοῦ συλλογισμοῦ.

4. Ἡ τετάρτη κατηγορία ἀξιωμάτων περιλαμβάνει τὸ ἀξίωμα τοῦ Εὐκλείδου ἐπὶ τοῦ ὁποίου θέλομεν ἐπανέλθει κατὰ τὴν εἰσαγωγήν του.

5. Ἡ πέμπτη κατηγορία περιλαμβάνει ἕνα ἀξίωμα συνεχείας, ὡς τὸ

ἀξίωμα τοῦ Ἀρχιμήδους ἢ τὸ ἀξίωμα τοῦ R. Dedekind περὶ τῶν ὁποίων θὰ γίνῃ λόγος εἰς ἑπομένην τάξιν.

Ὡς θέλει διαπιστωθῆ ἐκ τῆς ἀναπτύξεως τῆς εἰς τὸ ἀνὰ χεῖρας βιβλίον περιλαμβανομένης θεωρίας, δυνάμεθα, βασιζόμενοι μόνον εἰς τὰ ἀξιώματα τῶν τεσσάρων πρώτων κατηγοριῶν, χωρὶς δηλαδὴ τὴν χρησιμοποίησιν ἀξιώματός τινος συνεχείας, νὰ ἔχωμεν μίαν Γεωμετρικὴν θεωρίαν ἀνεξάρτητον ἀριθμητικῶν ἐννοιῶν. Αἱ εἰσαγόμεναι ἑκάστοτε σχέσεις καὶ πράξεις διατηροῦν τὸν Γεωμετρικὸν χαρακτῆρα αὐτῶν καὶ ὅταν ἀκόμη ὑφίσταται ἀναλογία πρὸς τὰς ἀντιστοίχους ἐπὶ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Οὕτω, ἡ διδασκαλία τῆς Γεωμετρίας κατὰ τὰς Γ′ καὶ Δ′ τάξεις τῶν Γυμνασιακῶν σπουδῶν καθίσταται συντομωτέρα καὶ ἁπλουστέρα.

Ἡ ἀπὸ τῶν πρώτων ἤδη ὁρισμῶν τῆς Γεωμετρίας εἰσαγωγὴ τῆς ἐννοίας τοῦ «προσανατολισμοῦ», εἰς τὴν εὐθεῖαν καὶ τὸ ἐπίπεδον ἐθεωρήθη ἀναγκαία διὰ τὴν ἁπλούστευσιν τῆς διατυπώσεως, τὴν ἀποφυγὴν τῆς περιπτωσιολογίας καὶ τὴν γενικότητα τῶν ἀποδείξεων. Ἐν προκειμένῳ, ἀλλὰ καὶ εἰς ὅ,τι ἀφορᾶ εἰς τὰς βασικὰς ἐννοίας τοῦ γινομένου καὶ τοῦ λόγου τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων καὶ τὴν ἔννοιαν τοῦ προσανατολισμοῦ εἰς τὸν Χῶρον, ἠκολουθήσαμεν τὰς ὑποδείξεις τὰς ἀναφερομένας εἰς τὴν μὴ εἰσέτι ἐκδοθεῖσαν ἐργασίαν τοῦ καθηγητοῦ κ. Παναγ. Λαδοπούλου: «Ἐπὶ βασικῶν τινων ἐννοιῶν τῆς Εὐκλειδίου Γεωμετρίας».

Καθ' ὅσον, ἐξ ἄλλου, ἀφορᾶ εἰς τὴν ἔννοιαν τοῦ «Γεωμετρικοῦ Χώρου» καὶ τὴν ἀνάλυσιν τῶν στοιχείων τὰ ὁποῖα συνθέτουν τὴν ἔννοιαν ταύτην, συνεβουλεύθημεν τὴν Εἰσαγωγὴν τοῦ συγγράμματος «Στοιχεῖα Προβολικῆς Γεωμετρίας» Τόμος Α′ Ἔκδοσις 1966 τοῦ αὐτοῦ καθηγητοῦ κ. Π. Λαδοπούλου, διὰ τῆς ὁποίας δίδεται λεπτομερὴς καὶ διαφωτιστικὴ ἀνάλυσις τῶν ἀνωτέρω στοιχείων καὶ ἐννοιῶν, ὡς καὶ γενικώτερον τῆς πορείας τῆς ἀνθρωπίνης σκέψεως, εἰς ὅ,τι ἀφορᾶ τὴν Ἐπιστήμην τοῦ Χώρου, ἀπὸ τοῦ Θαλοῦ μέχρι σήμερον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

ΤΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΚΑΙ ΤΑ ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΘΕΣΕΩΣ ΚΑΙ ΔΙΑΤΑΞΕΩΣ

ΣΚΟΠΟΣ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Σκοπὸς τῆς Γεωμετρίας εἶναι ἡ γνῶσις τῶν μεταξὺ τῶν στοιχείων τοῦ Γεωμετρικοῦ Χώρου **σχέσεων**, ὡς καὶ ἡ ἑρμηνεία καὶ περιγραφὴ τῶν σχέσεων μεταξὺ τῶν στοιχείων, τὰ ὁποῖα συνθέτουν τὴν ἔννοιαν τοῦ **Γεωμετρικοῦ σχήματος,** ὡς συνόλου στοιχείων τοῦ Γεωμετρικοῦ Χώρου καὶ ἡ περαιτέρω ἀναζήτησις νέων **ἰδιοτήτων** τῶν γεωμετρικῶν σχημάτων, βασιζομένων εἰς γνωστὰς ἰδιότητας τούτων καὶ ἐκείνας αἱ ὁποῖαι ἀναφέρονται εἰς τὸ θεωρούμενον ἑκάστοτε σχῆμα.

ΤΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Τὰ γεωμετρικὰ στοιχεῖα τῶν ὁποίων αἱ ἔννοιαι θεωροῦνται ὡς ἀρχικαὶ εἶναι τὸ **σημεῖον** ἡ **εὐθεῖα** καὶ τὸ **ἐπίπεδον.**

Δεχόμεθα ὅτι ὑπάρχουν αἱ ἀνωτέρω τρεῖς κατηγορίαι ἀντικειμένων τοῦ Γεωμετρικοῦ Χώρου. Τὰ ἀντικείμενα τῆς πρώτης κατηγορίας, τὰ ὁποῖα ὀνομάζομεν **σημεῖα,** συμβολίζονται, συνήθως, μὲ τὰ Κεφαλαῖα γράμματα, Α, Β, Γ, ... τοῦ ἀλφαβήτου. Τὰ ἀντικείμενα τῆς δευτέρας κατηγορίας, τὰ ὁποῖα ὀνομάζομεν **εὐθείας,** συμβολίζονταιὶ μὲ τὰ πεζὰ γράμματα, α, β, γ, ... τοῦ ἀλφαβήτου, καὶ τὰ ἀντικείμενα τῆς τρίτης κατηγορίας, τὰ ὁποῖα ὀνομάζομεν **ἐπίπεδα,** συμβολίζονται μὲ τὰ Λατινικὰ πεζὰ γράμματα a, b, c, ... ἢ μὲ τὰ κεφαλαῖα γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου, τιθέμενα ἐντὸς παρενθέσεως.

Δεχόμεθα ὅτι μεταξὺ τῶν ἀνωτέρω Γεωμετρικῶν στοιχείων ὑπάρχουν ὡρισμέναι σχέσεις, διὰ τὴν περιγραφὴν τῶν ὁποίων εἰσάγονται αἱ ἀρχικαὶ ἔννοιαι αἱ ἀποδιδόμεναι δι' ὅρων ὡς οἱ : **κεῖται** ἢ **εἶναι ἐπί, εἶναι μεταξύ, εἶναι ἴσον** κλπ.

Τὰ **ἀξιώματα τῆς Γεωμετρίας** εἶναι αἱ θεμελιώδεις προτάσεις, αἱ διατυπούμεναι μέσῳ τῆς βασικῆς γλώσσης καὶ τῶν ἀνωτέρω ἀρχικῶν ἐννοιῶν, διὰ τῶν ὁποίων περιγράφονται, κατὰ τρόπον πλήρη καὶ ἀκριβῆ, αἱ μεταξὺ τῶν Γεωμετρικῶν στοιχείων εἰσαγόμεναι σχέσεις.

Τὰ ἀξιώματα τῆς Γεωμετρίας διαιροῦνται εἰς πέντε κατηγορίας (1).

---

(1) Βλέπε: Εἰσαγωγῆς παραγρ. 6.

Εἰς ἑκάστην τῶν κατηγοριῶν τούτων ἀντιστοιχεῖ ἕνας ἀριθμὸς ἀξιωμάτων τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦν τὰς θεμελιώδεις διὰ τὸ Γεωμετρικόν μας ἔνστικτον ἀληθείας, αἱ ὁποῖαι ἀναφέρονται εἰς τὴν αὐτὴν ἀρχικὴν ἔννοιαν.

ΤΑ ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΘΕΣΕΩΣ

Ὡς ἀξιώματα **θέσεως** χαρακτηρίζονται ἐκεῖνα εἰς τὰ ὁποῖα ἡ εἰσαγομένη ἀρχικὴ ἔννοια εἶναι ἡ ἔννοια τοῦ **ἀνήκειν** ἢ **περιέχειν.**

Τὰ ἀξιώματα ταῦτα εἶναι τὰ ἑξῆς :

1. ΑΞΙΩΜΑ. *Πᾶσα εὐθεῖα ε περιέχει τουλάχιστον δύο σημεῖα Α καὶ Β διάφορα ἀλλήλων.*

Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι τὸ σημεῖον Α, ἢ τὸ Β, **κεῖται ἐπὶ** τῆς ε ἢ ὅτι **ἀνήκει** εἰς τὴν ε ἢ καὶ ἀκόμη ὅτι ἡ ε **διέρχεται** διὰ τοῦ Α ἢ τοῦ Β. (Σχ. 1) (1).

Σχ. 1

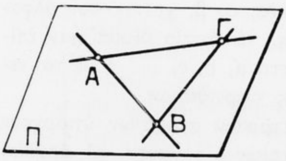
Ὅροι τινὲς ἐκ τῶν ἀνωτέρω, θεωρούμενοι ταυτόσημοι πρὸς τὸν ὅρον «ἀνήκειν» ἢ »περιέχειν», ὡς ὁ ὅρος «κεῖται ἐπὶ» ἢ «διέρχεται» ἔχουν τὴν προέλευσίν των εἰς τὴν ἐποπτείαν (2).

2. ΑΞΙΩΜΑ. *Ἂν δύο σημεῖα Α καὶ Β εἶναι διάφορα ἀλλήλων, τότε ὑπάρχει εὐθεῖα ε περιέχουσα τὰ σημεῖα αὐτὰ καὶ μόνον μία.*

Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι τὰ σημεῖα Α καὶ Β **ὁρίζουν** τὴν εὐθεῖαν ε ἢ ὅτι ἡ ε **συνδέει** τὰ σημεῖα Α καὶ Β.

3. ΑΞΙΩΜΑ. *Πᾶν ἐπίπεδον (Π) περιέχει τουλάχιστον τρία σημεῖα Α, Β, Γ, διάφορα ἀλλήλων καὶ μὴ ἀνήκοντα εἰς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.*

Τοῦτο σημαίνει ὅτι ὑπάρχουν τρία σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου (Π) ἕκαστον τῶν ὁποίων δὲν κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας τὴν ὁρίζουν ὁρίζουν τὰ ἄλλα δύο (Σχ. 3).



Σχ. 3

Ἀντὶ τοῦ ὅρου **δὲν κεῖται ἐπὶ** ἢ **δὲν ἀνήκει** δύναται νὰ εἰσάγεται ὁ ὅρος **κεῖται ἐκτός.** Οὕτω λέγοντες ὅτι : τὸ σημεῖον Α κεῖται ἐκτὸς τῆς εὐθείας ΒΓ, ἐννοοῦμεν ὅτι τοῦτο δέν κεῖται ἐπὶ τῆς ΒΓ.

4. ΑΞΙΩΜΑ. *Ἂν Α, Β, Γ εἶναι τρία σημεῖα μὴ ἀνήκοντα εἰς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν, τότε ὑπάρχει ἐπίπεδον (Π) περιέχον τὰ σημεῖα αὐτὰ καὶ ἕνα μόνον.*

Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι τὰ σημεῖα Α, Β, Γ **ὁρίζουν** τὸ ἐπίπεδον (Π).

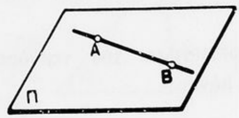
---

(1) Αἱ εἰς τὸ κείμενον παρεμβαλλόμεναι γ ρ α φ ι κ α ὶ ε ἰ κ ό ν ε ς ἢ γραφικὰ σχήματα δὲν εἶναι ἄλλο τι εἰμὴ **σύμβολα** τοῦ περιεχομένου τῶν διὰ τῶν ἀντιστοίχων ἀξιωμάτων ἢ θεωρημάτων περιγραφομένων σχέσεων. **Εἶναι** ἀ π ε ι κ ο ν ί σ ε ι ς τοῦ Γεωμετρικοῦ Χώρου εἰς τὸν αἰσθητὸν Χῶρον.

(2) Οἱ ὅροι οὗτοι εἶναι ἄνευ περιεχομένου εἰς τὴν Θεωρητικὴν Γεωμετρίαν.

Ἐφεξῆς λέγοντες ἐπίπεδον ΑΒΓ θὰ ἐννοοῦμεν τὸ ἐπίπεδον τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Α, Β, Γ.

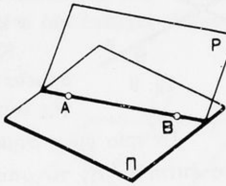
5. ΑΞΙΩΜΑ. *Ἂν Α καὶ Β εἶναι δύο σημεῖα ἑνὸς ἐπιπέδου (Π), διάφορα ἀλλήλων, τότε κάθε σημεῖον τῆς εὐθείας ΑΒ εἶναι σημεῖον τοῦ (Π).*



Σχ. 5

Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΒ **κεῖται ἐπὶ** τοῦ ἐπιπέδου (Π) ἢ ὅτι **ἀνήκει** εἰς τὸ (Π) ἢ ὅτι **εἶναι εὐθεῖα** αὐτοῦ (Σχ. 5).

6. ΑΞΙΩΜΑ. *Ἂν δύο ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ), διάφορα ἀλλήλων, ἔχουν ἕνα κοινὸν σημεῖον Α, τότε ἔχουν καὶ ἕνα δεύτερον κοινὸν σημεῖον Β.*



Σχ. 6

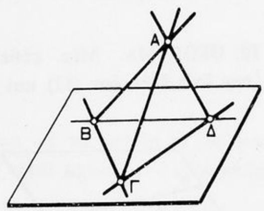
Ἐκ τοῦ ἀξιώματος τούτου ἕπεται ὅτι : Κάθε σημεῖον τῆς εὐθείας ΑΒ εἶναι κοινὸν σημεῖον τῶν δύο ἐπιπέδων καὶ ἀντιστρόφως, κάθε κοινὸν σημεῖον τῶν ἐπιπέδων τούτων εἶναι σημεῖον τῆς εὐθείας ΑΒ.

Ἡ εὐθεῖα ΑΒ ὀνομάζεται **τομὴ** τῶν ἐπιπέδων (Π) καὶ (Ρ) ἢ καὶ **ἴχνος** ἑκάστου τούτων ἐπὶ τοῦ ἄλλου. (Σχ. 6).

Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι τὰ ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) **τέμνονται** ἢ ὅτι ἕκαστον τούτων **τέμνει** τὸ ἄλλο κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ.

7. ΑΞΙΩΜΑ. *Ὑπάρχουν τέσσαρα σημεῖα μὴ κείμενα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.*

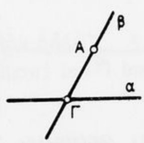
Τοῦτο σημαίνει ὅτι ὑπάρχουν τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ ἕκαστον τῶν ὁποίων κεῖται ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου τὸ ὁποῖον ὁρίζουν τὰ ἄλλα τρία. (Σχ. 7). Βάσει τῶν ἀνωτέρω ἀξιωμάτων ἀποδεικνύονται αἱ ἑξῆς προτάσεις :



Σχ. 7

8. ΘΕΩΡΗΜΑ Δύο εὐθεῖαι α καὶ β, διάφοροι ἀλλήλων, ἔχουν τὸ πολὺ ἕνα κοινὸν σημεῖον.

Ἀπόδειξις. Ἂν αἱ εὐθεῖαι α καὶ β εἶχον δύο κοινὰ σημεῖα, τότε τὰ σημεῖα αὐτὰ ὡς ἀνήκοντα εἰς τὴν α, συμφώνως πρὸς τὸ ἀξίωμα (2), τὴν προσδιορίζουν. Ἀφοῦ ὅμως ἀνήκουν καὶ εἰς τὴν β, δυνάμει τοῦ αὐτοῦ ἀξιώματος (2), τὴν προσδιορίζουν. Ἑπομένως ἡ α συμπίπτει μὲ τὴν β Συμβολικῶς: $\alpha \equiv \beta$. Τοῦτο ὅμως εἶναι ἄτοπον διότι ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν αἱ α καὶ β εἶναι διάφοροι ἀλλήλων.



Σχ. 8

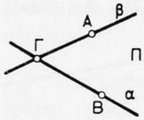
Τὸ κοινὸν σημεῖον Γ δύο εὐθειῶν α καὶ β ὀνομάζεται **τομὴ** αὐτῶν ἢ καὶ ἴχνος ἑκάστης τούτων ἐπὶ τῆς ἄλλης. (Σχ. 8).

Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι αἱ εὐθεῖαι α καὶ β **τέμνονται** ἢ ὅτι ἑκάστη τούτων **τέμνει** τὴν ἄλλην κατὰ τὸ σημεῖον Γ.

Οὕτως ἡ εὐθεῖα α, καὶ ἡ εὐθεῖα β ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπὸ ἕνα σημεῖον Γ τῆς α καὶ ἕνα σημεῖον Α κείμενον ἐκτὸς τῆς α (Σχ. 8) εἶναι δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι κατὰ τὸ σημεῖον Γ.

9. ΘΕΩΡΗΜΑ. **Δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι α καὶ β ὁρίζουν ἕνα ἐπίπεδον (Π) καὶ ἕνα μόνον.**

Ἤτοι, ὑπάρχει ἐπίπεδον (Π) περιέχον τὰς εὐθείας α καὶ β καὶ ἕνα μόνον.



Σχ. 9

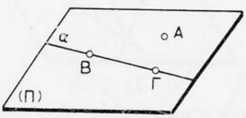
Ἀπόδειξις. Ἑκάστη τῶν εὐθειῶν α καὶ β περιέχει, πλὴν τοῦ κοινοῦ σημείου Γ αὐτῶν (Σχ. 9) καὶ ἕνα ἄλλο. Ἔστωσαν Α καὶ Β τὰ σημεῖα αὐτά, κείμενα ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν εὐθειῶν β καὶ α καὶ διάφορα τοῦ Γ.

Κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα (8), τὰ δύο ταῦτα νέα σημεῖα εἶναι διάφορα ἀλλήλων καὶ δὲν κεῖνται μετὰ τοῦ Γ ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας (2).

Τὰ τρία ὅμως σημεῖα Α, Β, Γ προσδιορίζουν, δυνάμει τοῦ ἀξιώματος (4), ἕνα ἐπίπεδον εἰς τὸ ὁποῖον περιέχεται, συμφώνως πρὸς τὸ ἀξίωμα (5), ἑκάστη τῶν ἀνωτέρω εὐθειῶν.

Κάθε ἐπίπεδον περιέχον τὰς δύο ταύτας εὐθείας θὰ περιέχῃ τὰ τρία ἐν λόγῳ σημεῖα. Ἑπομένως, δυνάμει τοῦ ἀξιώματος (4), ταυτίζεται πρὸς τὸ πρῶτον ἐπίπεδον, τὸ προσδιοριζόμενον ὑπὸ τῶν σημείων τούτων.

10. ΘΕΩΡΗΜΑ. **Μία εὐθεῖα α καὶ ἕνα σημεῖον Α μὴ κείμενον ἐπὶ τῆς α, ὁρίζουν ἕνα ἐπίπεδον (Π) καὶ ἕνα μόνον.**



Σχ. 10

Ἀπόδειξις. Ἐπὶ τῆς α ὑπάρχουν δυνάμει τοῦ ἀξιώματος (1) δύο σημεῖα Β καὶ Γ (Σχ. 10).

Ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Α, Β, Γ δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας προσδιορίζουν δυνάμει τοῦ ἀξιώματος (4) ἕνα ἐπίπεδον (Π). Τὸ ἐπίπεδον τοῦτο (Π), ὡς περιέχον τὰ Β καὶ Γ, περιέχει, δυνάμει τοῦ ἀξιώματος (5), τὴν εὐθεῖαν α.

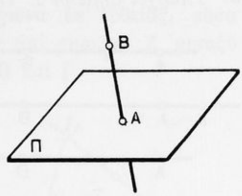
Ἀλλὰ κάθε ἐπίπεδον περιέχον τὴν α καὶ τὸ Α, θὰ περιέχῃ τὰ σημεῖα Α, Β, καὶ Γ καὶ ἑπομένως τὸ ἐπίπεδον τοῦτο συμπίπτει μὲ τὸ (Π).

11. ΘΕΩΡΗΜΑ. **Ἂν Α καὶ Β εἶναι δύο σημεῖα ἐκ τῶν ὁποίων τὸ Α κεῖται ἐπὶ ἐπιπέδου (Π) καὶ τὸ Β ἐκτὸς αὐτοῦ, τότε ἡ εὐθεῖα ΑΒ καὶ τὸ ἐπίπεδον (Π), δὲν ἔχουν, ἐκτὸς τοῦ Α, ἄλλο κοινὸν σημεῖον.**

Ἀπόδειξις. Ἂν ἡ εὐθεῖα ΑΒ (Σχ. 11) καὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) εἶχον ἕνα δεύτερον, ἐκτὸς τοῦ Α, κοινὸν σημεῖον Γ, τότε ἡ εὐθεῖα ΑΒ θὰ ἔκειτο (5) ἐπὶ τοῦ (Π). Ἀλλὰ τότε καὶ τὸ σημεῖον Β θὰ ἔκειτο ἐπὶ τοῦ (Π), τὸ ὁποῖον ἀποκλείεται ἐκ τῆς ὑποθέσεως.

Τὸ σημεῖον Α ὀνομάζεται **τομὴ** τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π) ἢ καὶ **ἴχνος** αὐτῆς ἐπὶ τοῦ (Π).

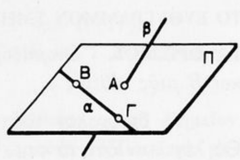
Ἡ εὐθεῖα ΑΒ λέγεται **τέμνουσα** τὸ (Π). Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι ἡ ΑΒ **τέμνει** τὸ ἐπίπεδον (Π) κατὰ τὸ σημεῖον Α. (Σχ. 11).



Σχ. 11

12. ΘΕΩΡΗΜΑ. **Ἂν μία εὐθεῖα α κεῖται ἐπὶ ἐπιπέδου (Π) καὶ μία εὐθεῖα β τέμνῃ τὸ (Π) κατὰ σημεῖον Α μὴ κείμενον ἐπὶ τῆς α, τότε δὲν ὑπάρχει ἐπίπεδον περιέχον τὰς εὐθείας α καὶ β.**

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν Β καὶ Γ δύο σημεῖα τῆς εὐθείας α. (Σχ. 12). Ἂν ὑπῆρχεν ἐπίπεδον (Ρ) περιέχον τὰς α καὶ β, τοῦτο θὰ περιεῖχε τὰ σημεῖα Α, Β, Γ καὶ λόγῳ τούτου δὲν θὰ ἦτο, συμφώνως πρὸς τὸ ἀξίωμα (4), διάφορον τοῦ (Π). Οὕτω, ἡ εὐθεῖα β τοῦ ἐπιπέδου (Ρ) θὰ ἦτο εὐθεῖα του (Π). Τοῦτο ὅμως ἀποκλείεται ἐκ τῆς ὑποθέσεως, κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ β τέμνει τὸ (Π).



Σχ. 12

Δύο εὐθεῖαι α καὶ β ὡς αἱ ἀνωτέρω θὰ ὀνομάζωνται **ἀσύμβατοι.**

ΤΑ ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΔΙΑΤΑΞΕΩΣ

Ὡς ἀξιώματα διατάξεως χαρακτηρίζονται ἐκεῖνα εἰς τὰ ὁποῖα ἡ εἰσαγομένη ἀρχικὴ ἔννοια εἶναι ἡ ἔννοια τοῦ **κεῖται μεταξὺ** ἢ **εἶναι μεταξύ.** Τὰ ἀξιώματα ταῦτα εἶναι τὰ ἑξῆς :

13. ΑΞΙΩΜΑ. *Ἂν Α καὶ Β εἶναι δύο σημεῖα μιᾶς εὐθείας ε, διάφορα ἀλλήλων, καὶ τὸ σημεῖον Γ αὐτῆς κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Β, τότε τὸ σημεῖον τοῦτο Γ κεῖται μεταξὺ τῶν Β καὶ Α καὶ εἶναι διάφορον τοῦ Α καὶ τοῦ Β.* (Σχ. 13.)

Σχ. 13

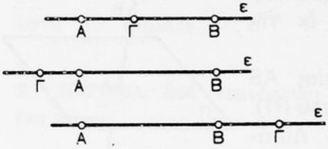
Διὰ τοῦ ἀξιώματος τούτου ὁρίζεται, ὡς δυνάμεθα νὰ λέγωμεν, ἐμμέσως, ἡ ἔννοια τοῦ **κεῖται μεταξύ.**

14. ΑΞΙΩΜΑ. *Ἂν Α καὶ Β εἶναι δύο σημεῖα μιᾶς εὐθείας ε, διάφορα ἀλλήλων, τότε:*

1. Ὑπάρχει σημεῖον Γ τῆς ε κείμενον μεταξὺ τῶν Α καὶ Β.

2. Ὑπάρχει σημεῖον Γ τῆς ε ὥστε τὸ Α νὰ κεῖται μεταξὺ τῶν Β καὶ Γ.

3. Ὑπάρχει σημεῖον Γ τῆς ε ὥστε τὸ Β νὰ κεῖται μεταξὺ τῶν Γ καὶ Α (Σχ. 14).



Σχ. 14

Λέγοντες ἐφεξῆς ὅτι τὸ σημεῖον Γ κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Β θὰ ἐννοοῦμεν ὅτι τὸ Γ εἶναι ἕνα σημεῖον τῆς εὐθείας ΑΒ, κείμενον μεταξὺ τῶν Α καὶ Β. Ἐξ ἄλλου, ἂν ἕνα σημεῖον Γ κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Β θὰ λέγωμεν ὅτι τὰ Α καὶ Β **κεῖνται ἑκατέρωθεν** αὐτοῦ.

15. ΑΞΙΩΜΑ. *Ἂν Α, Β, Γ εἶναι τρία σημεῖα μιᾶς εὐθείας ε, διάφορα ἀλλήλων, τότε τὸ ἕνα ἐξ αὐτῶν, καὶ μόνον αὐτό, κεῖται μεταξὺ τῶν δύο ἄλλων.*

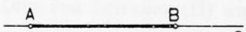
Τοῦτο σημαίνει ὅτι, ἂν τὸ Β κεῖται μεταξὺ τῶν Γ καὶ Α, τότε ἀποκλείεται νὰ κεῖται τὸ Γ μεταξὺ τῶν Α καὶ Β ἢ τὸ Α μεταξὺ τῶν Β καὶ Γ.

ΤΟ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΝ ΤΜΗΜΑ

16. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ὀνομάζομεν* **εὐθύγραμμον τμῆμα** *τὸ σύνολον δύο σημείων Α καὶ Β μιᾶς εὐθείας ε.*

Τὸ δισύνολον τοῦτο {Α, Β}, θὰ συμβολίζεται μὲ τὸ σύμβολον ΑΒ ἢ ΒΑ. Θὰ λέγωμεν ὅτι τὰ σημεῖα Μ τῆς εὐθείας ε τὰ ὁποῖα κεῖνται μεταξὺ τῶν Α καὶ Β, **εἶναι σημεῖα** τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ ἢ ὅτι **κεῖνται ἐπὶ** τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ (Σχ. 16).

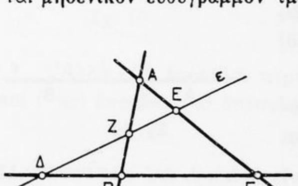
Κάθε σημεῖον τῆς εὐθείας ε τὸ ὁποῖον εἶναι διάφορον τοῦ Α καὶ τοῦ Β καὶ δὲν εἶναι σημεῖον τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ, θὰ λέγωμεν ὅτι **κεῖται ἐκτὸς** τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ.



Σχ. 16

Τὰ σημεῖα Α καὶ Β ὀνομάζονται **ἄκρα σημεῖα** ἢ ἁπλῶς **ἄκρα** τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ. Δυνάμεθα νὰ δεχθῶμεν ὅτι τὰ σημεῖα Α καὶ Β ἀποτελοῦν δισύνολον σημείων καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν ἔχουν τὴν αὐτὴν θέσιν ἐπὶ τῆς εὐθείας ε (δὲν εἶναι, ἀπὸ τῆς ἀπόψεως ταύτης, διάφορα ἀλλήλων).

Τὸ ὑπὸ τῶν σημείων τούτων ὁριζόμενον εὐθύγραμμον τμῆμα θὰ ὀνομάζεται **μηδενικὸν εὐθύγραμμον τμῆμα.** καὶ θὰ συμβολίζεται μὲ τὸ σύμβολον 0.



Σχ. 17

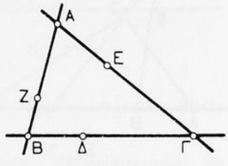
17. ΑΞΙΩΜΑ. *Ἔστωσαν Α, Β, Γ τρία σημεῖα μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας καὶ ε μία εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓ, μὴ περιέχονουσα οὐδὲν ἐκ τῶν ἀνωτέρω σημείων. Ἂν ἡ εὐθεῖα ε περιέχῃ σημεῖον Ζ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ* (1), *τότε ἢ περιέχει σημεῖον Δ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΒΓ ἢ περιέχει σημεῖον Ε τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΓΑ* (2) (Σχ. 17).

---

(1) Ἔχῃ σημεῖον Ζ μεταξὺ Α καὶ Β ἢ διέρχεται διὰ σημείου Ζ τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ.
(2) Pasch M.

18. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν Α, Β, Γ εἶναι τρία σημεῖα μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας, πᾶσα εὐθεῖα ε ἡ ὁποία ἔχει σημεῖον Ε μεταξὺ τῶν Α καὶ Γ καὶ σημεῖον Ζ μεταξὺ τῶν Α καὶ Β, δὲν δύναται νὰ ἔχῃ σημεῖον μεταξὺ τῶν Β καὶ Γ.

Ἀπόδειξις. Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ ε ἔχει σημεῖον μεταξὺ τῶν Β καὶ Γ καὶ ἔστω Δ τὸ σημεῖον τοῦτο. (Σχ. 18). Τότε, ἐκ τῶν τριῶν ἐπ' εὐθείας κειμένων σημείων Δ, Ε,Ζ, τὸ ἕν, ἔστω τὸ Ζ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τῆς ΑΒ, θὰ κεῖται (15) μεταξὺ τῶν δύο ἄλλων. Ἀλλὰ τότε, ἀφοῦ τὰ σημεῖα Γ, Δ, Ε δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας, ἡ εὐθεῖα ΑΒ, ἔχουσα σημεῖον μεταξὺ τῶν Δ καὶ Ε, πρέπει (17) νὰ ἔχῃ σημεῖον μεταξὺ τῶν Γ καὶ Ε ἢ μεταξὺ τῶν Γ καὶ Δ.



Σχ. 18

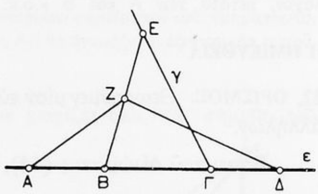
Ἡ εὐθεῖα ὅμως ΑΒ δὲν δύναται νὰ ἔχῃ σημεῖον μεταξὺ τῶν Γ καὶ Ε διότι ἔχει σημεῖον, τὸ Α, μὴ κείμενον μεταξὺ τῶν Γ καὶ Ε (18).

Ἐπίσης δὲν δύναται νὰ ἔχῃ σημεῖον μεταξὺ τῶν Γ καὶ Δ (17).

Ὥστε, ἡ ὑπόθεσις ὅτι ἡ ε ἔχει σημεῖον μεταξὺ τῶν Β καὶ Γ ἄγει εἰς ἄτοπον.

19. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν, δοθέντων τεσσάρων σημείων ἐπὶ εὐθείας ε, τὸ σημεῖον Β κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Γ καὶ τὸ Γ μεταξὺ τῶν Α καὶ Δ, τότε τὸ Γ κεῖται μεταξὺ τῶν Β καὶ Δ.

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ τῆς εὐθείας ε (Σχ. 19). Θεωροῦμεν μίαν εὐθεῖαν γ διὰ τοῦ σημείου Γ, διάφορον τῆς ε, καὶ ἕνα σημεῖον Ε αὐτῆς, διάφορον τοῦ Γ. Ἀκολούθως ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΕ, θεωροῦμεν, μεταξὺ τῶν Β καὶ Ε, ἕνα σημεῖον Ζ. Οὕτω μεταξὺ τῶν Β καὶ Ζ δὲν ὑπάρχει σημεῖον τῆς εὐθείας γ. Ἂν ἡ εὐθεῖα γ εἶχε σημεῖον μεταξὺ τῶν Α καὶ Ζ, τότε θὰ εἶχεν αὕτη, δυνάμει τοῦ ἀξιώματος (16), σημεῖον μεταξὺ τῶν Α καὶ Β, διότι ἐκ τῆς θέσεως τοῦ Ζ ἡ εὐθεῖα αὕτη δὲν δύναται νὰ ἔχῃ σημεῖον μεταξὺ τῶν Β καὶ Ζ. Ἀλλὰ τότε τὸ Γ θὰ ἔκειτο μεταξὺ τῶν Α καὶ Β. Τοῦτο ὅμως εἶναι ἀντίθετον πρὸς τὴν ὑπόθεσιν κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ Β κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Γ. Ἑπομένως ἡ εὐθεῖα γ δὲν ἔχει σημεῖον μεταξὺ τῶν Α καὶ Ζ. Κατόπιν τούτου, ἡ εὐθεῖα γ πρέπει νὰ ἔχῃ σημεῖον μεταξὺ τῶν Ζ καὶ Δ (Σχ. 16). Οὕτω : τὰ σημεῖα Β, Ζ, Δ, δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας, ἡ εὐθεῖα γ, δὲν ἔχει σημεῖον μεταξὺ τῶν Β καὶ Ζ, ἐνῶ ἔχει σημεῖον μεταξὺ τῶν Δ καὶ Ζ. Ἑπομένως (13), ἡ γ, πρέπει νὰ ἔχῃ σημεῖον μεταξὺ τῶν Β καὶ Δ. Ἀλλὰ τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι τὸ Γ.



Σχ. 19

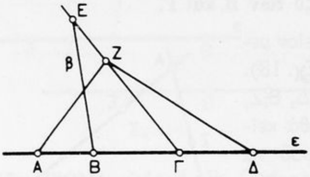
Ὥστε τὸ Γ κεῖται μεταξὺ τῶν Β καὶ Δ.

20. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν δοθέντων τεσσάρων σημείων Α, Β, Γ, Δ μιᾶς εὐθείας ε, τὸ σημεῖον Γ κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Δ καὶ τὸ Β μεταξὺ τῶν Α καὶ Γ, τότε τὸ Β κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Δ.

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν μίαν εὐθεῖαν β διὰ τοῦ σημείου Β καὶ ἐπ' αὐτῆς ἕνα σημεῖον Ε διάφορον τοῦ Β (Σχ. 20). Ἀκόμη θεωροῦμεν, ἐπὶ τῆς ΓΕ, καὶ μεταξὺ τῶν Γ καὶ Ε, τὸ σημεῖον Ζ, ὡς καὶ τὰ εὐθ. τμήματα ΖΑ καὶ ΖΔ.

Μεταξὺ τῶν Γ καὶ Ζ δὲν ὑπάρχει σημεῖον τῆς εὐθείας β, διότι τὸ ἐπὶ τῆς ΓΖ σημεῖον

Ε τῆς β δὲν κεῖται μεταξὺ τῶν Γ καὶ Ζ. Ἐπειδὴ τὸ Β κεῖται, ἐξ ὑποθέσεως, μεταξὺ τῶν Α καὶ Γ, ἡ εὐθεῖα β ἔχει, συμφώνως πρὸς τὸ ἀξίωμα (17), σημεῖον μεταξὺ τοῦ Α καὶ Ζ. Θεωροῦμεν τὰ μὴ ἐπ' εὐθείας κείμενα σημεῖα Α, Ζ, Δ. Ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα β ἔχει σημεῖον μεταξὺ τῶν Α καὶ Ζ, θὰ ἔχῃ (17) σημεῖον μεταξὺ τῶν Α καὶ Δ. Ἡ εὐθεῖα ὅμως β δὲν δύναται νὰ ἔχῃ σημεῖον μεταξὺ Δ καὶ Ζ διότι τότε ἢ θὰ εἶχε σημεῖον μεταξὺ τῶν Γ καὶ Ζ, τὸ ὁποῖον ἀποκλείεται ἀφοῦ τὸ Ζ ἐθεωρήθη μεταξὺ τῶν Γ καὶ Ε, ἢ μεταξὺ τῶν Γ καὶ Δ τὸ ὁποῖον ἀποκλείεται ἐκ τοῦ θεωρήματος (19), βάσει τοῦ ὁποίου τὸ Γ κεῖται μετακὺ τῶν Β καὶ Δ.



Σχ. 20

Ἑπομένως ἡ εὐθεῖα β ἔχει σημεῖον μεταξὺ τῶν Α καὶ Δ, δηλαδὴ τὸ Β κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Δ.

21. ΘΕΩΡΗΜΑ. Μεταξὺ δύο οἱωνδήποτε σημείων Α καὶ Β μιᾶς εὐθείας ε ὑπάρχουν περισσότερα τοῦ ἑνὸς σημεῖα αὐτῆς.

Ἀπόδειξις. Μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β (Σχ. 21) τῆς εὐθείας ε ὑπάρχει (14) τοὐλάχιστον ἕνα σημεῖον Γ αὐτῆς.

Σχ. 21

Ὁμοίως, μεταξὺ τῶν Α καὶ Γ, ὑπάρχει τουλάχιστον ἕνα σημεῖον Γ'.

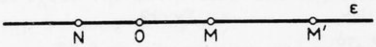
Ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Γ κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Β καὶ τὸ Γ' μεταξὺ τῶν Α καὶ Γ ἕπεται (20) ὅτι τὸ Γ' κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Β. Ὥστε ἐκτὸς τοῦ Γ ὑπάρχει ἐπὶ τῆς ε καὶ ἕνα ἄλλο σημεῖον Γ' κείμενον μεταξὺ τῶν Α καὶ Β.

Ἂν θεωρήσωμεν ἕνα σημεῖον Γ'' κείμενον μεταξὺ τῶν Α καὶ Γ' τοῦτο θὰ κεῖται, δι' ὅμοιον λόγον, μεταξὺ τῶν Α καὶ Β κ.ο.κ.

Η ΗΜΙΕΥΘΕΙΑ

22. ΟΡΙΣΜΟΣ. Θεωροῦμεν μίαν εὐθεῖαν ε καὶ δύο σημεῖα Ο καὶ Μ αὐτῆς διάφορα ἀλλήλων.

Βάσει τοῦ ἀξιώματος (14), ὑπάρχει σημεῖον Μ' τῆς ε ὥστε τὸ Μ νὰ κεῖται μεταξὺ τῶν Ο καὶ Μ' καὶ σημεῖον Ν τῆς ε ὥστε τὸ Ο νὰ κεῖται μεταξὺ τῶν Μ καὶ Ν.



Σχ. 22

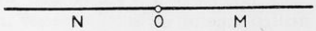
Τὸ σημεῖον Ο δὲν κεῖται μεταξὺ τῶν Μ καὶ Μ', διότι τὸ Μ κεῖται μεταξὺ τῶν Ο καὶ Μ' (15). Οὕτω ἐπὶ τῆς εὐθείας ε ἔχομεν τέσσερα σημεῖα : Μ, Μ', Ο, Ν τοιαῦτα ὥστε τὸ Ο κεῖται μεταξὺ τῶν Μ καὶ Ν καὶ ὄχι μεταξὺ τῶν Μ καὶ Μ'.

Ἂν Μ, Μ', Ο καὶ Ν εἶναι τέσσαρα σημεῖα μιᾶς εὐθείας ε ***τοιαῦτα*** *ὥστε τὸ σημεῖον Ο νὰ κεῖται μεταξὺ τῶν Μ καὶ Ν, ἀλλὰ ὄχι μεταξὺ τῶν Μ καὶ Μ', θὰ λέγωμεν ὅτι τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ' τῆς εὐθείας ε κεῖνται πρὸς ἕνα καὶ τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ σημείου Ο καὶ ὅτι τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν τῆς εὐθείας ε κεῖνται ἑκατέρωθεν τοῦ σημείου Ο.* (Σχ. 22)

23. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ὀνομάζομεν* **ἡμιευθεῖαν,** *ὁριζομένην ἀπὸ τὰ σημεῖα Ο καὶ Μ μιᾶς εὐθείας ε, συμβολικῶς ἡμιευθεῖα ΟΜ, τὸ σύνολον τῶν σημείων Μ' τὰ ὁποῖα εἶναι τοιαῦτα ὥστε τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ' νὰ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ σημείου Ο.*

Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι τὸ σημεῖον Μ' κεῖται πρὸς τὸ μέρος τοῦ Ο πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται τὸ Μ (Σχ. 23.1).

Τὸ σημεῖον Ο ὀνομάζεται **ἀρχικὸν σημεῖον** τῆς ἡμιευθείας ΟΜ. Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι ἡ ἡμιευθεῖα ΟΜ **ἄρχεται** ἀπὸ τοῦ Ο.



Σχ. 23.1

Ἡ ἡμιευθεῖα ΟΝ ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο καὶ τὸ σημεῖον Ν (τὸ σημεῖον Ν εἶναι τοιοῦτον ὥστε τὸ Ο νὰ κεῖται μεταξὺ τῶν Μ καὶ Ν) ὀνομάζεται **ἀντικειμένη** τῆς ἡμιευθείας ΟΜ.

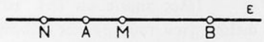
Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι κάθε σημεῖον τῆς ἡμιευθείας ΟΝ **κεῖται πρὸς τὸ μέρος τοῦ Ο πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται τὸ Μ.**

Ἕκαστον, ἑπομένως σημεῖον τῆς εὐθείας ε εἶναι ἀρχικὸν σημεῖον δύο ἡμιευθειῶν ὁριζομένων ἀπὸ δύο σημεῖα τῆς ε κείμενα ἑκατέρωθεν αὐτοῦ.(1)

Σημειοῦμεν ὅτι :

1. Κάθε σημεῖον Μ τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ (16) δύναται νὰ ὀνομάζεται καὶ **ἐσωτερικὸν σημεῖον** αὐτοῦ.

Κάθε ἐσωτερικὸν σημεῖον εὐθ. τμήματος ΑΒ δύναται, κατὰ ταῦτα, νὰ θεωρηθῇ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν δύο ἡμιευθειῶν ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία ἔχει ἀρχικὸν σημεῖον τὸ Α καὶ περιέχει τὸ Β καὶ ἡ ἄλλη ἔχει ἀρχικὸν σημεῖον τὸ Β καὶ περιέχει τὸ Α.



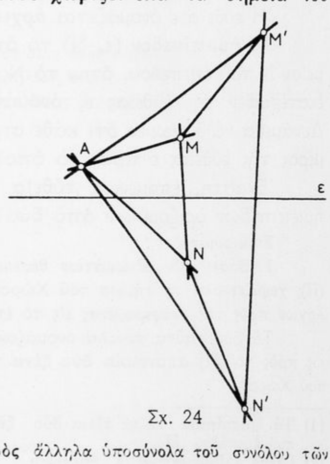
Σχ. 23.2

Τὸ σύνολον τῶν ἐσωτερικῶν σημείων τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ ὀνομάζεται **ἐσωτερικὸν** αὐτοῦ.

Κάθε σημεῖον Ν τῆς εὐθείας ΑΒ(Σχ. 23.2), τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Β καὶ εἶναι διάφορον τοῦ Α καὶ τοῦ Β, δύναται νὰ ὀνομάζεται **ἐξωτερικὸν σημεῖον** τοῦ εὐθ. τμήματοςΑΒ. Τὸ σύνολον τῶν ἐξωτερικῶν σημείων τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ θὰ ὀνομάζεται **ἐξωτερικὸν** αὐτοῦ.

ΤΟ ΗΜΙΕΠΙΠΕΔΟΝ

24. ΘΕΩΡΗΜΑ. **Ἑκάστη εὐθεῖα ε τοῦ ἐπιπέδου χωρίζει ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου, τὰ μὴ ἀνήκοντα εἰς αὐτήν, εἰς δύο σύνολα σημείων : Κάθε σημεῖον Μ τοῦ ἑνὸς συνόλου ὁρίζει μὲ ἕνα τυχὸν σημεῖον Ν τοῦ ἄλλου συνόλου ἕνα εὐθ. τμῆμα τὸ ὁποῖον περιέχει ἕνα σημεῖον τῆς ε. Ἀντιθέτως, δύο σημεῖα Μ καὶ Μ' τοῦ αὐτοῦ συνόλου ὁρίζουν πάντοτε εὐθ. τμῆμα τὸ ὁποῖον δὲν περιέχει σημεῖον τῆς ε.**



Σχ. 24

Ἀπόδειξις. Ἔστω Α ἕνα σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου μὴ κείμενον ἐπὶ τῆς ε. Καθορίζομεν ὅπως : Εἰς ἕνα πρῶτον σύνολον ἀνήκῃ, κάθε σημεῖον Μ ἔχον τὴν ἑξῆς ἰδιότητα : Μεταξὺ τῶν Α καὶ Μ, ἤτοι ἐπὶ τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΜ, δὲν ὑπάρχει σημεῖον τῆς ε. Καθορίζομεν ἐπίσης ὅπως εἰς ἕνα δεύτερον σύνολον ἀνήκῃ κάθε σημεῖον Ν ἔχον τὴν

(1) Αἱ ἡμιευθεῖαι ΟΜ καὶ ΟΝ εἶναι δύο ξένα πρὸς ἄλληλα ὑποσύνολα τοῦ συνόλου τῶν σημείων τῆς εὐθείας ε.

ἰδιότητα : Μεταξὺ τῶν Α καὶ Ν ὑπάρχει σημεῖον τῆς ε, ἤτοι τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΝ περιέχει ἕνα σημεῖον τῆς ε. Πρέπει νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι :

(1) Ἂν εἶναι Μ καὶ Μ′ δύο σημεῖα τοῦ πρώτου συνόλου, τὸ εὐθ. τμῆμα ΜΜ′ δὲν περιέχει σημεῖον τῆς ε.

(2) Ἂν εἶναι Ν καὶ Ν′ δύο σημεῖα τοῦ δευτέρου συνόλου, τὸ εὐθ. τμῆμα ΝΝ′ δὲν περιέχει σημεῖον τῆς ε.

(3) Ἂν εἶναι Μ ἕνα σημεῖον τοῦ πρώτου συνόλου καὶ Ν ἕνα σημεῖον τοῦ δευτέρου, τὸ εὐθ. τμῆμα ΜΝ περιέχει πάντοτε ἕνα σημεῖον τῆς ε.

Πράγματι ἔχομεν :

(1) Ἐξ ὑποθέσεως, οὔτε τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΜ οὔτε τὸ ΑΜ′ περιέχουν σημεῖον τῆς ε. Ἂν ἡ ε εἶχε σημεῖον μεταξὺ τῶν Μ καὶ Μ′, τότε, συμφώνως πρὸς τὸ ἀξίωμα (17), θὰ εἶχε σημεῖον μεταξὺ τῶν Α καὶ Μ ἢ μεταξὺ τῶν Α καὶ Μ′. Ἀλλὰ τοῦτο ἀκριβῶς ἀποκλείεται ἐκ τῆς ἀνωτέρω ὑποθέσεως.

(2) Ἐξ ὑποθέσεως ἕκαστον τῶν εὐθ. τμημάτων ΑΝ καὶ ΑΝ′ περιέχει ἕνα σημεῖον τῆς ε. Ἑπομένως συμφώνως πρὸς τὸ θεώρημα (18) τὸ εὐθ. τμῆμα ΝΝ′ δὲν περιέχει σημεῖον τῆς ε.

(3) Ἐξ ὑποθέσεως, τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΜ δὲν περιέχει σημεῖον τῆς ε, ἐνῷ τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΝ′ περιέχει ἕνα σημεῖον τῆς ε. Συμφώνως πρὸς τὸ ἀξίωμα (17) μεταξὺ τῶν Μ καὶ Ν ὑπάρχει σημεῖον τῆς ε (ἡ εὐθεῖα ΜΝ τέμνει τὴν ε).

Θὰ λέγωμεν ὅτι, τὰ σημεῖο Μ καὶ Μ′ (Σχ. 24) τοῦ ἐπιπέδου, κεῖνται πρὸς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας ε καὶ ὅτι τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν τοῦ ἐπιπέδου κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς εὐθείας ε.

Τέλος σημειοῦμεν ὅτι, τὸ κατὰ τὰ ἀνωτέρω ὁριζόμενον σύνολον τῶν σημείων Μ εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ ἀρχικῶς θεωρηθέντος σημείου Α, ἤτοι ὅτι μονοσημάντως ὁρίζεται τὸ σύνολον τοῦτο ἐκ τῶν ε καὶ Α.

25. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ὀνομάζομεν* **ἡμιεπίπεδον,** *ὁριζόμενον ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν ε ἑνὸς ἐπιπέδου καὶ ἕνα σημεῖον Μ αὐτοῦ, μὴ κείμενον ἐπὶ τῆς ε, καὶ τὸ συμβολίζομεν μὲ τὸ σύμβολον : ἡμιεπίπεδον (ε, Μ), τὸ σύνολον τῶν σημείων Μ′ τὰ ὁποῖα εἶναι τοιαῦτα ὥστε, τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ′ νὰ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ε.*

Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι τὸ σημεῖον Μ′ κεῖται πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας ε πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται τὸ Μ.

Ἡ εὐθεῖα ε ὀνομάζεται **ἀρχικὴ εὐθεῖα** τοῦ ἡμιεπιπέδου (ε, Μ).

Τὸ ἡμιεπίπεδον (ε, Ν) τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν ε καὶ ἕνα σημεῖον Ν τοῦ ἐπιπέδου, ὅταν τὸ Ν εἶναι τοιοῦτον ὥστε τὰ Μ καὶ Ν νὰ κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς εὐθείας ε, ὀνομάζεται ἡμιεπίπεδον **ἀντικείμενον** τοῦ (ε, Μ). Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι κάθε σημεῖον τοῦ ἡμιεπιπέδου (ε, Ν) κεῖται πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας ε πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται τὸ Μ.

Ἑκάστη, ἑπομένως, εὐθεῖα ἑνὸς ἐπιπέδου (Π) εἶναι ἀρχικὴ εὐθεῖα δύο ἡμιεπιπέδων ὁριζομένων ἀπὸ δύο σημεῖα τοῦ (Π), κείμενα ἑκατέρωθεν τῆς ε ([1]).

Σημειοῦμεν ὅτι :

1. Βάσει τῶν ἀξιωμάτων θέσεως καὶ διατάξεως ἀποδεικνύεται([2]) ὅτι : Κάθε ἐπίπεδον (Π), **χωρίζει** ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ Χώρου εἰς δύο σύνολα σημείων, ὁριζόμενα βάσει τῶν ἀναλόγων πρὸς τὰς ἀναφερομένας εἰς τὸ ἐπίπεδον συνθηκῶν.

Τὰ δύο ταῦτα σύνολα ὀνομάζονται «**ἡμίχωροι**» ὡς πρὸς τὸ (Π). Οἱ δύο ἡμίχωροι ὡς πρὸς τὸ (Π) ἀποτελοῦν δύο **ξένα** πρὸς ἄλληλα ὑποσύνολα τοῦ συνόλου τῶν σημείων τοῦ Χώρου.

---

(1) Τὰ ἡμιεπίπεδα ταῦτα εἶναι δύο **ξένα** πρὸς ἄλληλα ὑποσύνολα τοῦ συνόλου τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου (Π).

(2) Βλέπε «Μαθηματικὰ Δ′ τάξεως».

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Θεωροῦμεν ν εὐθείας $\varepsilon_1, \varepsilon_2\, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon\nu$ αἱ ὁποῖαι, θεωρούμεναι ἀνὰ δύο, τέμνονται χωρὶς νὰ κεῖνται ὅλαι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ εὐθεῖαι αὗται διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

2. Θεωροῦμεν ν εὐθείας $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon\nu$ αἱ ὁποῖαι, θεωρούμεναι ἀνὰ δύο τέμνονται χωρὶς νὰ διέρχωνται ὅλαι διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ εὐθεῖαι αὗται κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

3. Θεωροῦμεν τρία ἐπίπεδα (Α), (Β), (Γ), τὰ ὁποῖα, θεωρούμενα ἀνὰ δύο τέμνονται. Ἔστωσαν α, β, γ αἱ τομαὶ τούτων θεωρουμένων ἀνὰ δύο (α ἡ τομὴ τῶν (Β) καὶ (Γ), β ἡ τομὴ τῶν (Γ) καὶ (Α) καὶ γ ἡ τομὴ τῶν (Α) καὶ (Β). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι κάθε κοινὸν σημεῖον δύο οἱωνδήποτε ἐκ τῶν ἀνωτέρω εὐθειῶν α, β, γ εἶναι κοινὸν σημεῖον τῶν τριῶν ἐπιπέδων (Α), (Β), (Γ).

4. Δίδονται ἐπὶ ἐπιπέδου (Π) δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι α καὶ β καὶ μία εὐθεῖα γ τέμνουσα τὸ ἐπίπεδον (Π). Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν εὐθειῶν, ἑκάστη τῶν ὁποίων τέμνει καὶ τὰς τρεῖς εὐθείας α, β, γ.

5. Δίδονται ἐπὶ εὐθείας ε τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ ὥστε τὸ σημεῖον Β νὰ κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Γ καὶ τὸ Γ μεταξὺ τῶν Α καὶ Β. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ Β κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Δ καὶ ὄχι μεταξὺ τῶν Γ καὶ Δ.

6. Δίδονται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τρεῖς εὐθεῖαι α, β, γ αἱ ὁποῖαι, θεωρούμεναι ἀνὰ δύο, τέμνονται χωρὶς νὰ διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείουι Νὰ ὁρισθοῦν τὰ σύνολα σημείων (περιοχαί) εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζεται τὸ ἐπίπεδον (1) ἀπὸ τὰς ἀνωτέρω τρεῖς εὐθείας α, β, γ.

Νὰ ὁρισθοῦν ἐπίσης τὰ σύνολα σημείοων εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζεται τὸ ἐπίπεδον ἀπὸ τέσσαρας εὐθείας α, β, γ, δ αὐτοῦ, αἱ ὁποῖαι θεωρούμεναι ἀνὰ δύο τέμνονται καὶ θεωρούμεναι ἀνὰ τρεῖς δὲν διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

7. Δίδονται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ν σημεῖα, τὰ ὁποῖα θεωρούμενα ἀνὰ δύο εἶναι διάφορα ἀλλήλων Νὰ ὁρισθῇ τὸ πλῆθος τῶν εὐθ. τμημάτων τὰ ὁποῖα ὁρίζονται ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω ν σημεῖα.

Ἐπίσης νὰ εὑρεθῇ τὸ πλῆθος τῶν διαφόρων ἀλλήλων, εὐθειῶν αἱ ὁποῖαι ὁρίζονται ἀπὸ τὰ σημεῖα αὐτά, ἤτοι πόσαι τὸ πολύ, ἢ τουλάχιστον, εἶναι αἱ ὁριζόμεναι ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω ν σημεῖα διάφοροι ἀλλήλων εὐθεεῖαι.

8. Δίδονται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ν εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι θεωρούμεναι ἀνὰ δύο τέμνονται. Νὰ εὑρεθῇ τὸ πλῆθος τῶν ὁριζομένων, διαφόρων ἀλλήλων, σημείων, ἤτοι πόσα τὸ πολύ, ἢ τουλάχιστον, εἶναι τὰ ὁριζόμενα ἀπὸ τὰς ἀνωτέρω ν εὐθείας διάφορα ἀλλήλων σημεῖα.

(1) Θεωρούμενον ὡς τὸ σύνολον τῶν σημείων του.

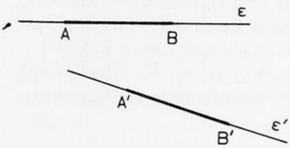
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

ΤΑ ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΤΗΣ ΙΣΟΤΗΤΟΣ

Η ΣΧΕΣΙΣ ΤΗΣ ΙΣΟΤΗΤΟΣ ΕΙΣ ΤΟ ΣΥΝΟΛΟΝ ΤΩΝ ΕΥΘ. ΤΜΗΜΑΤΩΝ

Ἡ σχέσις τῆς ἰσότητος εἰς τὸ σύνολον τῶν εὐθ. τμημάτων εἰσάγεται διὰ τοῦ κατωτέρω ἀξιώματος :

26. ΑΞΙΩΜΑ. *Ἂν Α καὶ Β εἶναι δύο σημεῖα μιᾶς εὐθείας ε καὶ Α′ ἕνα σημεῖον τῆς αὐτῆς ἢ μιᾶς ἄλλης εὐθείας ε′, ὑπάρχει ἐπὶ τῆς εὐθείας ε′ καὶ ἐπὶ δοθείσης ἐκ τῶν δύο ἀπὸ τοῦ Α′ ἡμιευθειῶν, ἕνα σημεῖον Β′ καὶ ἕνα μόνον ὥστε τὸ εὐθ. τμῆμα Α′Β′ νὰ* **εἶναι ἴσον** *πρὸς τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ* (Σχ. 23).



Σχ. 26

Σημειοῦμεν συμβολικῶς : $AB = A'B'$ (1)
Ἐν προκειμένῳ σημειοῦμεν ὅτι ἡ εἰς τὸ ἀνωτέρω ἀξίωμα εἰσαγομένη ἔννοια τοῦ **εἶναι ἴσον** εἶναι ἔννοια ἀρχική (2).

27. ΑΞΙΩΜΑ. *Εἰς τὸ σύνολον τῶν εὐθ. τμημάτων ἰσχύουν αἱ ἰδιότητες τῆς ἰσότητος : αὐτοπαθὴς ἢ ἀνακλαστική, συμμετρικὴ καὶ μεταβατική.*

Αἱ ἰδιότητες αὗται διατυποῦνται συμβολικῶς ὡς κάτωθι ἀντιστοίχως :
(1) $AB = AB$ καὶ $AB = BA$ (2) $AB = A'B' \Rightarrow A'B' = AB$
(3) $AB = A'B'$ καὶ $A'B' = A''B'' \Rightarrow AB = A''B''$.

ΠΟΡΙΣΜΑ. 1. *Ἂν $AB = A'B'$ καὶ $AB = A''B''$, τότε θὰ εἶναι $A'B' = A''B''$.*
Πράγματι, ἐκ τῆς $AB = A'B'$ ἕπεται, κατὰ τὰ ἀνωτέρω (27) ἀξίωμα ὅτι : $A'B' = AB$ (συμμετρικὴ ἰδιότης). Ἐκ ταύτης καὶ τῆς εἰς τὴν ὑπόθεσιν ἰσότητος $AB = A''B''$ ἕπεται, κατὰ τὸ αὐτὸ (27) ἀξίωμα, ὅτι : $A'B' = A''B''$.

ΚΛΑΣΙΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ

28. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἡ ἀνωτέρω σχέσις ἰσότητος ἐπιτρέπει τὸν διαμερισμὸν τοῦ συνόλου Σ τῶν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου εὐθ. τμημάτων εἰς ὑποσύνολα, ἕκαστον τῶν

---

(1) Ἀντὶ τοῦ συμβόλου = δύναται νὰ εἰσαχθῇ τὸ σύμβολον $\cong$

(2) Ἐν σχέσει πρὸς τὴν εἰσαγωγὴν τῆς ἐννοίας τῆς ἰσότητος ὡς *ἀρχικῆς*, βλέπε Εἰσαγωγῆς παράγρ. 6.

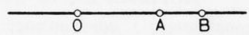
ὁποίων ἀποτελεῖται ἀπὸ ὅλα τὰ εὐθ. τμήματα τὰ ἴσα πρὸς δοθὲν εὐθ. τμῆμα ΑΒ. *Κάθε τοιοῦτον ὑποσύνολον, ὀνομάζεται* **κλάσις ἰσοδυναμίας** [1] *ἐν τῷ Σ, ὁριζομένη ἀπὸ τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ.*

Δύο σημεῖα Α καὶ Α′ μιᾶς εὐθείας Σ κείμενα ἑκατέρωθεν ἑνὸς σημείου Ο αὐτῆς, θὰ ὀνομάζωνται **συμμετρικὰ** *ἀλλήλων, ὡς πρὸς τὸ Ο, ὅταν ΟΑ = ΟΑ′. (Τὰ ΟΑ καὶ ΟΑ′ εἶναι στοιχεῖα τῆς αὐτῆς κλάσεως ἰσότητος).*

ΣΧΕΣΕΙΣ ΔΙΑΤΑΞΕΩΣ

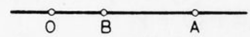
29. ΟΡΙΣΜΟΙ. Ἔστωσαν δύο εὐθ. τμήματα α καὶ β. Θεωροῦμεν ἐπὶ εὐθείας ε ἕνα σημεῖον Ο καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτοῦ τὰ σημεῖα Α καὶ Β τῆς ε ὥστε ΟΑ = α καὶ ΟΒ = β.

Ἂν τὸ σημεῖον Α συμπίπτῃ μὲ τὸ Β, τότε τὰ εὐθ. τμήματα α καὶ β ἀνήκουν εἰς τὴν αὐτὴν κλάσιν ἰσότητος καὶ σημειοῦμεν α = β.



Σχ. 29.1

Ἂν τὸ Α κεῖται μεταξὺ τῶν Ο *καὶ Β* (Σχ. 29.1), *ἤτοι εἶναι ἐσωτερικὸν τοῦ εὐθ. τμήματος ΟΒ, θὰ λέγωμεν ὅτι τὸ εὐθ. τμῆμα α εἶναι* **μικρότερον** *τοῦ β, συμβολικῶς $\alpha < \beta$, καὶ τὸ β* **μεγαλύτερον** *τοῦ α, συμβολικῶς $\beta > \alpha$.*



Σχ. 29.2

Ἂν τὸ σημεῖον Α κεῖται πρὸς τὸ μέρος τοῦ Β πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται τὸ Ο (Σχ. 29.2), *τότε τὸ εὐθ. τμῆμα α ὀνομάζεται μεγαλύτερον τοῦ β, καὶ τὸ β μικρότερον τοῦ α.*

Ὥστε ἐξ ὁρισμοῦ ἔχομεν τὰς ἰσοδυναμίας :

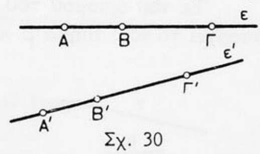
$\alpha < \beta \Leftrightarrow \beta > \alpha$ καὶ $\alpha > \beta \Leftrightarrow \beta < \alpha$

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ ἐπίσης προκύπτει ὅτι εἰς τὸ σύνολον Σ τῶν εὐθ. τμημάτων ἰσχύει ἡ πρότασις :

ΠΟΡΙΣΜΑ $\forall\ \alpha, \beta, \gamma \in \Sigma :\quad \alpha > \beta$ *καὶ* $\beta > \gamma \Rightarrow \alpha > \gamma$

ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΕΥΘ. ΤΜΗΜΑΤΩΝ

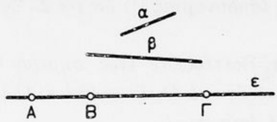
30. ΑΞΙΩΜΑ *Ἂν Α, Β, Γ εἶναι τρία σημεῖα μιᾶς εὐθείας ε καὶ Α′, Β′, Γ′ τρία σημεῖα τῆς ε ἢ μιᾶς εὐθείας ε′ διαφόρου τῆς ε, ὥστε νὰ ἱκανοποιοῦνται αἱ ἑξῆς συνθῆκαι : (1) Τὸ Β νὰ κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Γ καὶ τὸ Β′ μεταξὺ τῶν Α′ καὶ Γ′ καὶ (2) ΑΒ = Α′Β′ καὶ ΒΓ = Β′Γ′, τότε θὰ εἶναι ΑΓ = Α′Γ′.*



Σχ. 30

(1) Εἰδικῶς εἰς τὸ σύνολον τῶν εὐθ. τμημάτων ἡ κλάσις αὕτη θὰ ὀνομάζεται κλάσις ἰσότητος. Ἡ κλάσις αὕτη ἰσότητος δύναται νὰ συμβολίζεται μὲ ἕνα πεζὸν γράμμα π.χ. α τοῦ ἀλφαβήτου. Τὸ γράμμα τοῦτο α παριστᾷ ἕνα τυχὸν στοιχεῖον τῆς κλάσεως ἰσότητος τῆς ὁρισθείσης ἐκ τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ (ἀντιπροσωπεῦον τὴν κλάσιν ἰσότητος).

31. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ἔστωσαν α καὶ β δύο εὐθ. τμήματα. Θεωροῦμεν ἐπὶ εὐθείας ε δύο σημεῖα Α καὶ Β ὥστε ΑΒ = α καὶ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Β πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται τὸ Α, τὸ σημεῖον Γ ὥστε ΒΓ = β. Τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΓ ὀνομάζεται* **ἄθροισμα** *τῶν α καὶ β κατὰ τὴν θεωρουμένην τάξιν.* (Σχ. 31).



Σχ. 31

Τὸ ἄθροισμα τοῦτο συμβολίζεται μὲ τὸ σύμβολον : $\alpha + \beta$.

Ἐκ τοῦ ἀξιώματος (30) προκύπτει ὅτι τὸ ἄθροισμα τοῦτο εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς εὐθείας ε καὶ τοῦ σημείου Α αὐτῆς. Ἂν εἶναι γ ἕνα στοιχεῖον τῆς κλάσεως ἰσότητος ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπὸ τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΓ, δυνάμεθα νὰ σημειοῦμεν : $\gamma = \alpha + \beta$

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω (31) ὁρισμοῦ προκύπτει ὅτι :

ΠΟΡΙΣΜΑ *Εἰς τὸ σύνολον Σ τῶν εὐθ. τμημάτων ἰσχύουν αἱ ἰδιότητες τῆς προσθέσεως : μονότροπος, μεταθετικὴ καὶ προσεταιριστική.*

Αἱ ἰδιότητες αὗται διατυποῦνται, συμβολικῶς, ὡς κάτωθι ἀντιστοίχως :

$\forall\ \alpha, \beta, \gamma \in \Sigma$:

(1) $\alpha = \beta \Rightarrow \alpha + \gamma = \beta + \gamma$ (2) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ (3) $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$.

Ἐξ ἄλλου σημειοῦμεν ὅτι :

1. Τὸ ἄθροισμα περισσοτέρων τῶν δύο εὐθ. τμημάτων ὁρίζεται ἐκ τῆς σχέσεως : $\alpha + \beta + \gamma = (\alpha + \beta) + \gamma$.

2. Ἂν συμβολίσωμεν μὲ τὸ Ο τὴν κλάσιν (ἕνα στοιχεῖον αὐτῆς) τοῦ μηδενικοῦ εὐθ. τμήματος, θὰ ἔχωμεν ὅτι :

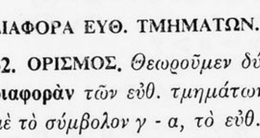
$\forall\ \alpha \in \Sigma : \ \alpha + O = \alpha$

Θὰ λέγωμεν ὅτι τὸ μηδενικὸν εὐθ. τμῆμα εἶναι τὸ **οὐδέτερον** στοιχεῖον τοῦ συνόλου Σ τῶν εὐθ. τμημάτων ὡς πρὸς τὴν ἐν αὐτῷ πρᾶξιν τῆς προσθέσεως.

ΔΙΑΦΟΡΑ ΕΥΘ. ΤΜΗΜΑΤΩΝ.

32. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Θεωροῦμεν δύο εὐθ. τμήματα γ καὶ α ἔνθα γ > α. Ὀνομάζομεν* **διαφορὰν** *τῶν εὐθ. τμημάτων γ καὶ α κατὰ τὴν τάξιν (γ, α), καὶ τὴν συμβολίζομεν μὲ τὸ σύμβολον γ - α, τὸ εὐθ. τμῆμα β, τὸ ὁποῖον εἶναι τοιοῦτον ὥστε : γ = α + β.*

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ ἀθροίσματος δύο εὐθ. τμημάτων (31) προκύπτει ὅτι ὑπάρχει τὸ εὐθ. τμῆμα β καὶ εἶναι ἕνα μόνον. Πράγματι, ἂν θεωρήσωμεν ἐπὶ εὐθείας ε ἕνα σημεῖον Ο (Σχ. 32) καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ Ο τὰ σημεῖα Γ καὶ Α αὐτῆς, ὥστε $O\Gamma = \gamma$ καὶ $OA = \alpha$, τὸ σημεῖον Α κεῖται μεταξὺ τῶν Ο καὶ Γ, διότι $\gamma > \alpha$.



Σχ. 32

Ἔστω β ἡ κλάσις τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΓ Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ (31) τοῦ ἀθροίσματος ἔχομεν ὅτι :

$O\Gamma = OA + A\Gamma$, ἤτοι : $\gamma = \alpha + \beta$

Ἐξ ἄλλου, ἂν ὑπῆρχεν εὐθ. τμῆμα β′ διάφορον τοῦ β (κλάσεως ἰσότητος διαφόρου τῆς τοῦ β) ὥστε : $\gamma = \alpha + \beta'$, τότε ἐκ τῆς τελευταίας αὐτῆς καὶ τῆς $\gamma = \alpha + \beta$ ἕπεται (27) ὅτι : $\alpha + \beta = \alpha + \beta'$ καὶ ἐξ αὐτῆς (31) ὅτι $\beta = \beta'$.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ ἑπομένως, ἔχομεν τὴν ἰσοδυναμίαν :

$\beta = \gamma - \alpha \Leftrightarrow \gamma = \alpha + \beta$.

ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ ΕΥΘ. ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΕΠΙ ΦΥΣΙΚΟΝ ΑΡΙΘΜΟΝ

33. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ὀνομάζομεν* **γινόμενον** *εὐθ. τμήματος α ἐπὶ φυσικὸν ἀριθμὸν μ, καὶ τὸ συμβολίζομεν μὲ τὸ σύμβολον μ. α, τὸ ἄθροισμα εὐθ. τμημάτων πλήθους μ, ἴσων πρὸς τὸ α.*

Ἂν εἶναι γ τὸ ἄθροισμα τοῦτο, θὰ σημειοῦμεν :

$$\gamma = \mu \cdot \alpha.$$

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου προκύπτει ὅτι εἰς τὸ σύνολον Σ τῶν εὐθ. τμημάτων ἔχομεν :

ΠΟΡΙΣΜΑ. $\forall\ \alpha, \beta \in \Sigma$ *καὶ* $\mu \in N$(1) :

(1) $\alpha = \beta \Rightarrow \mu \cdot \alpha = \mu \cdot \beta$

(2) $\alpha > \beta \Rightarrow \mu \cdot \alpha > \mu\ \beta,\ \alpha < \beta \Rightarrow \mu \cdot \alpha < \mu \cdot \beta$

(3) $\mu \cdot (\alpha + \beta) = \mu\ \alpha + \mu \cdot \beta$

(4) $\mu \cdot (\alpha - \beta) = \mu \cdot \alpha - \mu \cdot \beta$

ΠΗΛΙΚΟΝ ΕΥΘ. ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΔΙΑ ΦΥΣΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

34. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ὀνομάζομεν* **πηλίκον** *εὐθ. τμήματος α διὰ φυσικοῦ ἀριθμοῦ ν, καὶ τὸ συμβολίζομεν μὲ τὸ σύμβολον* $\frac{\alpha}{\nu}$, *τὸ εὐθ. τμῆμα β διὰ τὸ ὁποῖον εἶναι :*

$$\alpha = \nu \cdot \beta \text{(2)}$$

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ, ἑπομένως ἔχομεν ὅτι :

$$\beta = \frac{\alpha}{\nu} \cdot \Longleftrightarrow \alpha = \nu \cdot \beta$$

ΠΟΡΙΣΜΑ. $\forall\ \alpha, \beta \in \Sigma$ *καὶ* $\nu \in N$: $\alpha = \nu \cdot \beta$ *καὶ* $\alpha = \nu \cdot \beta' \Rightarrow \beta = \beta'$

Πράγματι, ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι $\beta > \beta'$, θὰ ἔχωμεν (33) : $\nu \cdot \beta > \nu \cdot \beta'$, καὶ ἐπειδή, ἐξ ὑποθέσεως $\alpha = \nu \cdot \beta$ καὶ $\alpha = \nu \cdot \beta'$, θὰ εἶναι : $\alpha > \alpha$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἄτοπον, διότι $\alpha = \alpha$.

Ἐκ τούοου ἕπεται ὅτι **ἕνα μόνον** εὐθ. τμῆμα β ὑπάρχει ὥστε : $\beta = \frac{\alpha}{\nu}$.

ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ ΕΥΘ. ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΕΠΙ ΡΗΤΟΝ ΑΡΙΘΜΟΝ

35. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ὀνομάζομεν* **γινόμενον** *εὐθ. τμήματος β ἐπὶ τὸν ῥητὸν ἀριθμὸν* $\frac{\mu}{\nu}$, *τὸ γινόμενον τοῦ εὐθ. τμήματος* $\frac{\beta}{\nu}$ *ἐπὶ τὸν φυσικὸν ἀριθμὸν μ*

Ἂν ὀνομάσωμεν α τὸ γινόμενον τοῦτο θὰ ἔχωμεν, ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ :

$$\alpha = \frac{\mu}{\nu} \cdot \beta \Longleftrightarrow \alpha = \mu \cdot \frac{\beta}{\nu}$$

---

(1) N : τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν.

(2) Ἡ ὕπαρξις τοῦ εὐθ. τμήματος β θὰ ἀποδειχθῇ μετὰ τὴν εἰσαγωγὴν τοῦ ἀξιώματος τοῦ Εὐκλείδου (Κεφ. IV).

(3) $\mu, \nu \in N$

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΜΕΓΕΘΗ.

36. ΟΡΙΣΜΟΣ. Τὰ εὐθ. τμήματα, θεωρούμενα πάντοτε ὡς Γεωμετρικὰ ἀντικείμενα ἢ σχήματα [1] δύνανται νὰ ὀνομάζωνται **Γεωμετρικὰ μεγέθη.**

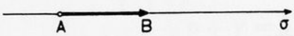
Γενικώτερον, ὀνομάζομεν **Γεωμετρικὰ μεγέθη** τοῦ αὐτοῦ εἴδους, τὰ σχήματα εἰς τὸ σύνολον τῶν ὁποίων ἔχει ὁρισθῆ : μία σχέσις ἰσοδυναμίας [2], μία σχέσις διατάξεως καὶ ἡ πρᾶξις τῆς προσθέσεως μὲ τὰς σημειωθείσας ἀντιστοίχως ἰδιότητας τούτων.

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΑ ΤΜΗΜΑΤΑ ΕΠΙ ΑΞΟΝΟΣ

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΗ ΕΥΘΕΙΑ

Δύο οἱαδήποτε σημεῖα Α καὶ Β [3] μιᾶς εὐθείας **σ** (Σχ. 29) ὁρίζουν δύο διατεταγμένα ζεύγη [4] : τὸ (Α,Β) καὶ τὸ (Β,Α).

37. ΑΞΙΩΜΑ. *Τὸ διατεταγμένον ζεῦγος (Α, Β) σημείων τῆς εὐθείας* **σ** *ὁρίζει ἐπ' αὐτῆς μίαν φοράν* [5]. *Τὸ διατεταγμένον ζεῦγος (Β, Α) ὁρίζει ἐπ' αὐτῆς μίαν ἄλλην φοράν, διάφορον τῆς πρώτης.*



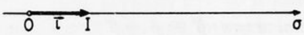
Σχ. 37

Ἂν ἡ μία ἀπὸ τὰς ἀνωτέρω φορὰς ὀνομασθῆ **θετική,** ἡ ἄλλη θὰ ὀνομασθῆ **ἀρνητική.**

38. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Μία εὐθεῖα σ ὀνομάζεται* **προσημασμένη** *ἤ, ὅπως συνήθως λέγομεν,* **προσανατολισμένη,** *ὅταν ἔχῃ ὁρισθῆ ἐπ' αὐτῆς ἡ θετικὴ φορά.*

Ἡ προσανατολισμένη εὐθεῖα ὀνομάζεται καὶ **ἄξων.**

Λέγοντες ἐφ' ἑξῆς ὅτι «θεωροῦμεν ἐπὶ τῆς σ ἕνα ἄξονα», θὰ ἐννοοῦμεν ἀκριβῶς ὅτι θεωροῦμεν τὴν εὐθεῖαν ταύτην προσανατολισμένην βάσει ἑνὸς διατεταγμένου ζεύγους σημίων (0,1) αὐτῆς τὸ ὁποῖον καθορίζει τὴν ἐπ' αὐτῆς θετικὴν φορὰν (Σχ. 38).



Σχ. 38

---

(1) Ἐπὶ τῆς ἐννοίας τοῦ «Γεωμ. σχήματος» βλέπε Εἰσαγωγῆς **παραγρ. 4.**

(2) Ἡ σχέσις αὕτη δὲν εἶναι ἀναγκαίως Γεωμετρικὴ *ἰσότης.*

(3) Διμελὲς σύνολον {Α,Β}.

(4) Ἕνα διμελὲς σύνολον σημείων μιᾶς εὐθείας **σ** ὀνομάζεται *διατεταγμένον ζεῦγος* ἢ ἁπλῶς *ζεῦγος,* ὅταν ἔχῃ ὁρισθῆ τὸ ἐκ τῶν στοιχείων αὐτοῦ τὸ ὁποῖον θεωρεῖται *πρῶτον.*

Τὸ γράμμα μὲ τὸ ὁποῖον συμβολίζεται τὸ πρῶτον σημεῖον τοῦ ζεύγους γράφεται, εἰς τὸ ἀντίστοιχον σύμβολον, ἀριστερὰ τοῦ γράμματος μὲ τὸ ὁποῖον συμβολίζεται τὸ δεύτερον.

Τὸ ζεῦγος σημείων (Α,Β) συμβολίζεται μὲ τὸ σύμβολον $\overrightarrow{AB}$ ἢ $\overline{AB}$.

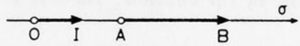
(5) Ἡ ἔννοια τῆς *φορᾶς* εἶναι ἔννοια *ἀρχικὴ* μὴ δυναμένη νὰ ὁρισθῆ ἐξ ἄλλων ἐννοιῶν. Δύναται νὰ ἑρμηνευθῆ διὰ τῆς συσχετίσεώς της μὲ τὴν ἔννοιαν τῆς κινήσεως :

Δεχόμεθα ὅτι : Κάθε σημεῖον Μ μιᾶς εὐθείας **σ** δύναται νὰ λάβῃ, ἅπαξ, τὴν θέσιν κάθε ἄλλου σημείου της, κινούμενον ἐπ' αὐτῆς κατὰ δύο ἀντιθέτους φοράς. Ἂν Α καὶ Β εἶναι δύο σημεῖα τῆς εὐθείας **σ**, διάφορα ἀλλήλων, τότε τὸ σημεῖον Μ, κινούμενον κατὰ τὴν μίαν ἀπὸ τὰς ἀνωτέρω δύο φοράς, λαμβάνει τὴν θέσιν τῶν σημείων Α καὶ Β κατὰ τὴν τάξιν (Α,Β), κινούμενον δὲ κατὰ τὴν ἄλλην λαμβάνει τὴν θέσιν τῶν σημείων τούτων κατὰ τὴν τάξιν (Β,Α).

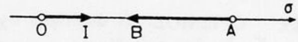
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΟΝ ΕΥΘ. ΤΜΗΜΑ.

39. ΟΡΙΣΜΟΣ. Προσανατολισμένον εὐθ. τμῆμα *ἐπὶ ἄξονος* **σ** *ὀνομάζομεν κάθε διατεταγμένον ζεῦγος σημείων (Α,Β) αὐτοῦ.*

Ἂν ἡ ἐκ τοῦ ζεύγους (Α, Β) ὁριζομένη ἐπὶ τοῦ **σ** φορὰ εἶναι ἡ θετικὴ φορὰ αὐτοῦ, θὰ λέγωμεν ὅτι τὸ εὐθ. τμῆμα (Α, Β) ἢ $\overline{AB}$ εἶναι **θετικῶς προσανατολισμένον** (Σχ. 39.1). Ἂν ἡ ἐκ τοῦ ζεύγους (Α, Β) ὁριζομένη ἐπὶ τοῦ **σ** φορὰ εἶναι ἡ ἀρνητική, θὰ λέγωμεν ὅτι τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ εἶναι **ἀρνητικῶς προσανατολισμένον** (Σχ. 39.2).



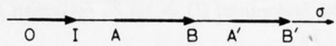
Σχ. 39.1



Σχ. 39.2

Τὸ πρῶτον σημεῖον τοῦ τμήματος $\overline{AB}$ ὀνομάζεται **ἀρχικὸν σημεῖον** ἢ **ἀρχὴ** αὐτοῦ, τὸ δὲ δεύτερον σημεῖον του, **τελικὸν σημεῖον** ἢ **πέρας** αὐτοῦ.

Τὰ Α καὶ Β ὀνομάζονται **ἄκρα σημεῖα** ἢ ἁπλῶς **ἄκρα** τοῦ τμήματος $\overline{AB}$. Δύο τμήματα $\overline{AB}$ καὶ $\overline{A'B'}$ τοῦ ἄξονος **σ** τὰ ὁποῖα εἶναι ἀμφότερα θετικῶς ἢ ἀμφότερα ἀρνητικῶς προσανατολισμένα θὰ ὀνομάζονται **ὁμόρροπα** (Σχ. 39.3). Ἂν τὸ ἓν ἐκ τούτων εἶναι θετικῶς προσανατολισμένον καὶ τὸ ἄλλο ἀρνητικῶς, θὰ ὀνομάζονται **ἀντίρροπα** (Σχ. 39.4).



Σχ. 39.3

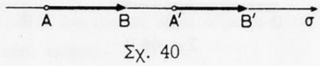
Ἂν τὰ σημεῖα Α καὶ Β ταυτίζωνται, τὸ εὐθ. τμῆμα $\overline{AB}$ θὰ ὀνομάζεται **μηδενικὸν** εὐθ. τμῆμα καὶ θὰ συμβολίζεται μὲ τὸ σύμβολον 0 ὥστε, ἐξ ὁρισμοῦ ἔχομεν : $A \equiv B \Rightarrow AB = 0$.

Σχ. 39.4 34

Η ΣΧΕΣΙΣ ΤΗΣ ΙΣΟΤΗΤΟΣ

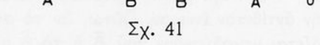
Ἡ σχέσις τῆς ἰσότητος ἢ τὸ σύνολον τῶν ἐπὶ ἄξονος σ προσανατολισμένων τμημάτων εἰσάγεται διὰ τῶν κατωτέρω ἀξιώματος :

40. ΑΞΙΩΜΑ. *Δοθέντος ἐπὶ τῆς προσανατολισμένης εὐθείας* **σ** *ἑνὸς προσανατολισμένου τμήματος $\overline{AB}$ καὶ ἑνὸς σημείου Α′ αὐτῆς, ὑπάρχει ἐπὶ τῆς* **σ** *σημεῖον Β′ καὶ ἕνα μόνον ὥστε τὸ τμῆμα $\overline{A'B'}$ νὰ* **εἶναι ἴσον** *(1) πρὸς τὸ ΑΒ. Συμβολικῶς :* $\overline{A'B'} = \overline{AB}$ (Σχ. 40).



Σχ. 40

41. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Τὸ τμῆμα Α′Β′ τὸ* **ἴσον** *πρὸς τὸ ΒΑ, ὀνομάζεται* **ἀντίθετον** *τοῦ ΑΒ.* **Συμβολικῶς** *:* $\overline{A'B'} = -\,AB'$ (Σχ. 41).



Σχ. 41

42. ΑΞΙΩΜΑ. *Εἰς τὸ σύνολον Σ τῶν ἐπὶ τοῦ ἄξονος* **σ** *εὐθ. τμημάτων ἰσχύουν αἱ ἰδιότητες τῆς ἰσότητος : αὐτοπαθὴς ἢ ἀνακλαστική, συμμετρικὴ καὶ μεταβατική.*

Αὗται διατυποῦνται συμβολικῶς, ὡς κάτωθι ἀντιστοίχως :

(1) $\overline{AB} = \overline{AB}$ (2) $\overline{AB} = \overline{A'B'} \Rightarrow \overline{A'B'} = \overline{AB}$

---

(1) Ἡ ἔννοια *εἶναι ἴσον*, εἶναι, ὡς ἐσημειώσαμεν ἤδη (26), ἀρχικὴ ἔννοια προϋποθέτουσα ἐν προκειμένῳ τὴν ταυτότητα τοῦ προσανατολισμοῦ τῶν $\overline{AB}$ καὶ $\overline{A'B'}$.

Ἡ ἰσότης εἰς τὸ σύνολον Σ τῶν προσανατολισμένων τμημάτων εἶναι, ὅπως καὶ ἡ ἰσότης εἰς τὸ σύνολον τῶν ἀριθμῶν, μία σχέσις ἰσοδυναμίας, ἤτοι, ἐξ ὁρισμοῦ μία σχέσις αὐτοπαθής, συμμετρικὴ καὶ μεταβατική.

(3). $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ καὶ $\overline{A'B'} = \overline{A''B''}$ $\Rightarrow$ $\overline{AB} = \overline{A''B''}$

Ἐκ τῆς μεταβατικῆς ἰδιότητος προκύπτει ἀμέσως ὅτι :

ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἄν $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ καὶ $\overline{AB} = \overline{A''B''}$, τότε $\overline{A'B'} = \overline{A''B''}$

Πράγματι, ἐκ τῆς $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ ἕπεται ὅτι : $\overline{A'B'} = \overline{AB}$. Ἐκ τῆς τελευταίας αὐτῆς καὶ τῆς εἰς τὴν ὑπόθεσιν: $\overline{AB} = \overline{A''B''}$, ἕπεται ὅτι: $\overline{A'B'} = \overline{A''B''}$.

ΚΛΑΣΙΣ ΙΣΟΤΗΤΟΣ

43. ΟΡΙΣΜΟΣ· Ἡ ἀνωτέρω σχέσις τῆς ἰσότητος ἐπιτρέπει τὸν διαμερισμὸν τοῦ συνόλου Σ τῶν ἐπὶ τοῦ ἄξονος **σ** προσανατολισμένων εὐθ. τμημάτων, εἰς ὑποσύνολα αὐτοῦ, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἀποτελεῖται ἀπὸ ὅλα τὰ ἐπὶ τοῦ **σ** προσανατολισμένα τμήματα τὰ ἴσα πρὸς δοθὲν ἐπ' αὐτοῦ τμῆμα $\overline{AB}$.

Κάθε τοιοῦτον ὑποσύνολον ὁριζόμενον ἀπὸ ἕνα τμῆμα $\overline{AB}$ τοῦ ἄξονος **σ**, ὀνομάζεται *κλάσις ἰσοδυναμίας* (1) *ἐν τῷ Σ, ὁριζομένη ἀπὸ τὸ εὐθ. τμῆμα* $\overline{AB}$.

ΣΧΕΣΕΙΣ ΔΙΑΤΑΞΕΩΣ

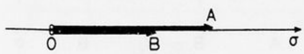
44. ΟΡΙΣΜΟΣ· Ἔστωσαν ἐπὶ ἄξονος **σ** δύο τμήματα $\overline{\alpha}$ καὶ $\overline{\beta}$ θετικῶς προσανατολισμένα. Θεωροῦμεν σημεῖον O τοῦ **σ** καὶ τὰ σημεῖα A καὶ B αὐτοῦ ὥστε : $\overline{OA} = \overline{\alpha}$ καὶ $\overline{OB} = \overline{\beta}$ (Σχ. 44.1).


Σχ. 44.1

Ἄν τὸ σημεῖον B συμπίπτῃ μὲ τὸ A, τότε τὰ $\overline{\alpha}$ καὶ $\overline{\beta}$ ἀνήκουν εἰς τὴν αὐτὴν κλάσιν ἰσότητος καὶ θὰ σημειοῦμεν : $\overline{\alpha} = \overline{\beta}$.

Ἄν τὸ σημεῖον A κεῖται μεταξὺ τῶν O καὶ B, ἤτοι εἶναι ἐσωτερικὸν τοῦ εὐθ. τμήματος $\overline{OB}$, *θὰ λέγωμεν ὅτι τὸ τμῆμα* $\overline{\alpha}$ *εἶναι* **μικρότερον** *τοῦ* $\overline{\beta}$, *συμβολικῶς* $\overline{\alpha} < \overline{\beta}$ *ἢ τὸ* $\overline{\alpha}$ **μεγαλύτερον** *τοῦ* $\overline{\alpha}$, *συμβολικῶς* $\overline{\beta} > \overline{\alpha}$. (Σχ. 44.1).

Ἄν τὸ σημεῖον A κεῖται πρὸς τὸ μέρος τοῦ B πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται τὸ O τότε τὸ τμῆμα $\overline{\alpha}$ *ὀνομάζεται μεγαλύτερον τοῦ* $\overline{\beta}$, *συμβολικῶς* $\overline{\alpha} > \overline{\beta}$, *ἢ τὸ* $\overline{\beta}$ *μικρότερον τοῦ* $\overline{\alpha}$. (Σχ. 44.2).


Σχ. 44.2

Ἐξ ὁρισμοῦ, ἐπομένως, ἔχομεν τὰς ἰσοδυναμίας :

$\overline{\alpha} < \overline{\beta} \Rightarrow \overline{\beta} > \overline{\alpha}$ καὶ $\overline{\alpha} > \overline{\beta} \Rightarrow \overline{\beta} < \overline{\alpha}$.

Σημειοῦμεν ὅτι :

Ἐπὶ ἀρνητικῶς προσανατολισμένων εὐθ. τμημάτων οἱ ἀνωτέρω ὁρισμοὶ ἰσχύουν κατὰ τὴν ἀντίθετον ἔννοιαν. Οὕτω, ἂν τὸ σημεῖον A κεῖται μεταξὺ τῶν O καὶ B, τὸ τμῆμα $\overline{\alpha}$ ὀνομάζεται μεγαλύτερον τοῦ $\overline{\beta}$ ἢ τὸ $\overline{\beta}$ μικρότερον τοῦ $\overline{\alpha}$ κλπ.

Ἐπὶ ἀντιρρόπων εὐθ. τμημάτων θεωρεῖται μεγαλύτερον τὸ ἐκ τούτων θετικῶς προσανατολισμένον.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ ἕπεται ὅτι :

ΠΟΡΙΣΜΑ· $\forall$ α, β, γ $\in$ Σ (1) : $\overline{\alpha} > \overline{\beta}$ καὶ $\overline{\beta} > \overline{\gamma} \Rightarrow \overline{\alpha} > \overline{\gamma}$ (μεταβατικὴ ἰδιότης).

---

(1) Εἰδικῶς, εἰς τὸ σύνολον Σ τῶν προσανατολισμένων ἐπὶ τοῦ **σ** τμημάτων, ἡ κλάσις αὐτὴ ὀνομάζεται *κλάσις ἰσότητος* ἐν τῷ Σ.

Ἡ κλάσις ἰσότητος ἡ ὁριζομένη ἀπὸ τὸ τμῆμα $\overline{AB}$ δύναται νὰ συμβολίζεται μὲ τὸ σύμβολον $\overline{\alpha}$ ($\overline{\alpha}$ τυχὸν τμῆμα τοῦ **σ** ἴσον πρὸς τὸ $\overline{AB}$).

ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΕΥΘ. ΤΜΗΜΑΤΩΝ

45. ΟΡΙΣΜΟΣ· *Δύο τμήματα* $\overline{AB}$ *καὶ* $\overline{B\Gamma}$ *τοῦ ἄξονος* **σ** *ὀνομάζονται* **διαδοχικὰ** *ἂν τὸ πέρας τοῦ ἑνὸς συμπίπτη μὲ τὴν ἀρχὴν τοῦ ἄλλου* (Σχ. 45).

Σχ. 45

Ἔστωσαν $\overline{\alpha}$ *καὶ* $\overline{\beta}$ *δύο εὐθ. τμήματος ἐπὶ ἄξονος* **σ**. *Θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον Α τοῦ ἄξονος* **σ** *καὶ τὰ σημεῖα Β καὶ Γ αὐτοῦ ὥστε* $\overline{AB} = \overline{\alpha}$ *καὶ* $\overline{B\Gamma} = \overline{\beta}$. *Τὸ εὐθ. τμῆμα* $\overline{A\Gamma}$ *ὀνομάζεται* **ἄθροισμα** *τῶν* $\overline{\alpha}$ *καὶ* $\overline{\beta}$ *κατὰ τὴν θεωρουμένην τάξιν.*

46. ΑΞΙΩΜΑ· *Τὸ τμῆμα* $\overline{A\Gamma}$ *(45) εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς ἐκλογῆς τοῦ σημείου Α ἐπὶ τοῦ ἄξονος* **σ**

Τὸ ἄθροισμα, κατὰ ταῦτα τῶν τμημάτων α καὶ β εἶναι ἕνα στοιχεῖον τῆς κλάσεως ἰσότητος τοῦ συνόλου τῶν ἐπὶ τοῦ **σ** εὐθ. τμημάτων: τῆς ὁριζομένης ἀπὸ τὸ τμῆμα $\overline{A\Gamma}$.

Ἂν συμβολίσωμεν μὲ τὸ $\overline{\gamma}$ τὸ στοιχεῖον τοῦτο, θὰ σημειοῦμεν : $\overline{\gamma} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$.

Εὐκόλως βάσει τῶν ἀνωτέρω ἀποδεικνύεται ἡ πρότασις :

ΠΟΡΙΣΜΑ *Εἰς τὸ σύνολον τῶν ἐπὶ ἄξονος σ εὐθ. τμημάτων ἰσχύουν αἱ ἰδιότητες τῆς προσθέσεως : μονότροπος, μεταθετικὴ καὶ προσεταιριστική.*

Αὗται διατυποῦνται, συμβολικῶς, ὡς κάτωθι, ἀντιστοίχως :

$\forall\ \alpha, \beta, \gamma \in \Sigma$: (1)

(1) $\overline{\alpha} = \overline{\beta} \Rightarrow \overline{\alpha} + \overline{\gamma} = \overline{\beta} + \overline{\gamma}$ (2) $\overline{\alpha} + \overline{\beta} = \overline{\beta} + \overline{\alpha}$ (3) $\overline{\alpha} + (\overline{\beta} + \overline{\gamma}) = (\overline{\alpha} + \overline{\beta}) + \overline{\gamma}$

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἐπὶ τοῦ ἄξονος **σ** εὐθ. τμημάτων, ἕπεται ὅτι :

(1) $\overline{\alpha} + \overline{0} = \overline{\alpha}$

Τὸ μηδενικὸν εὐθ. τμῆμα: $\overline{0}$ ὀνομάζεται **οὐδέτερον** στοιχεῖον τοῦ συνόλου Σ τῶν ἐπὶ τοῦ ἄξονος **σ** εὐθ. τμημάτων, ὡς πρὸς τὴν ἐν αὐτῷ πρᾶξιν τῆς προσθέσεως.

(2) $\overline{\alpha} + \overline{\alpha'} = \overline{0}$

Ὅπου $\overline{\alpha'}$ τυχὸν στοιχεῖον τῆς κλάσεως ἰσότητος τοῦ ἀντιθέτου πρὸς τὰ $\overline{\alpha}$ εὐθ. τμήματος. Τὸ $\overline{\alpha'}$ ὀνομάζεται **συμμετρικὸν** ἢ **ἀντίθετον** τοῦ $\overline{\alpha}$ στοιχεῖον τοῦ ἀνωτέρω συνόλου Σ, ὡς πρὸς τὴν ἐν αὐτῷ πρᾶξιν τῆς προσθέσεως.

47. ΘΕΩΡΗΜΑ. Οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι τρία σημεῖα Α, Β, Γ ἐπὶ ἄξονος σ τὸ ἄθροισμα τῶν τμημάτων $\overline{AB}$, $\overline{B\Gamma}$, $\overline{\Gamma A}$ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ μηδενικὸν εὐθ. τμῆμα.

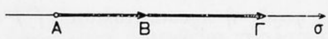
Ἤτοι : $\overline{AB} + \overline{B\Gamma} + \overline{\Gamma A} = \overline{0}$ (2)

Ἀπόδειξις. Ἔστω ὅτι τὸ Β κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Γ. Εἶναι : $\overline{AB} + \overline{B\Gamma} = \overline{A\Gamma}$,

Ἑπομένως : $\overline{AB} + \overline{B\Gamma} + \overline{\Gamma A} = \overline{A\Gamma} + \overline{\Gamma A} \Rightarrow \overline{AB} + \overline{B\Gamma} + \overline{\Gamma A} = \overline{0}$.

Διότι τὰ διανύσματα $\overline{A\Gamma}$ καὶ $\overline{\Gamma A}$ εἶναι ἀντίθετα (Σχ. 47).

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ἡ πρότασις καὶ εἰς τὰς λοιπὰς περιπτώσεις:



Σχ. 47

ΔΙΑΦΟΡΑ ΕΥΘ. ΤΜΗΜΑΤΩΝ

48. ΟΡΙΣΜΟΣ *Ὀνομάζομεν* **διαφορὰν** *δύο τμημάτων* $\overline{\alpha}$ *καὶ* $\overline{\beta}$ *τοῦ ἄξονος* **σ** *κατὰ τὴν θεωρουμένην τάξιν, καὶ τὴν συμβολίζομεν μὲ τὸ σύμβολον* $\overline{\alpha} - \overline{\beta}$, *τὸ ἄθροισμα τοῦ* $\overline{\alpha}$ *καὶ τοῦ ἀντιθέτου* $\overline{\beta'}$ *τοῦ* $\overline{\beta}$.

---

(1) Σ τὸ σύνολον τῶν ἐπὶ τοῦ ἄξονος σ εὐθ. τμημάτων.
(2) Σχέσις τοῦ Chasles – Möbius.

Ὥστε, ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ ἔχομεν ὅτι : $\overline{\alpha} - \overline{\beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}'$

Ἄν $\overline{\alpha} = \overline{\beta}$, τότε θὰ εἶναι : $\overline{\alpha} - \overline{\beta} = \overline{0}$.

ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ ΕΥΘ. ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΕΠΙ ΦΥΣΙΚΟΝ ΑΡΙΘΜΟΝ

49. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ὀνομάζομεν* **γινόμενον** *εὐθ. τμήματος* $\overline{\alpha}$ *τοῦ ἄξονος* **σ**, *ἐπὶ ἀκέραιον* μ, *καὶ τὸ συμβολίζομεν μὲ τὸ σύμβολον* $\mu.\overline{\alpha}$, *τὸ ἄθροισμα* μ *τμημάτων τοῦ* **σ** *ἴσων πρὸς τὸ* $\overline{\alpha}$,

Ἄν εἶναι γ τὸ γινόμενον τοῦτο, θὰ σημειοῦμεν : $\overline{\gamma} = \mu \cdot \overline{\alpha}$.

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ ἔχομεν :

ΠΟΡΙΣΜΑ $\forall\ \alpha, \beta \in \Sigma$ *καὶ* $\mu \in N$: (1)

(1) $\overline{\alpha} = \overline{\beta} \Rightarrow \mu \cdot \overline{\alpha} = \mu \cdot \overline{\beta}$ (2) $\mu \cdot (\overline{\alpha} + \overline{\beta}) = \mu \cdot \overline{\alpha} + \mu \cdot \overline{\beta}$ (3) $\mu \cdot (\overline{\alpha} - \overline{\beta}) = \mu \cdot \overline{\alpha} - \mu \cdot \overline{\beta}$

ΠΗΛΙΚΟΝ ΕΥΘ. ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΕΠΙ ΑΞΟΝΟΣ ΔΙΑ ΦΥΣΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

50. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ὀνομάζομεν* **πηλίκον** *προσανατολισμένου εὐθ. τμήματος* $\overline{\alpha}$ *τοῦ ἄξονος* **σ** *διὰ φυσικοῦ* ν *καὶ τὸ συμβολιζόμενον μὲ τὸ σύμβολον :* $\frac{\overline{\alpha}}{\nu}$, *τὸ εὐθ. τμῆμα* $\overline{\beta}$ *τὸ ὁριζόμενον ἐκ τῆς ἰσότητος :* $\overline{\alpha} = \nu \cdot \overline{\beta}$ (2)

Εὐκόλως, βάσει τῶν ἀνωτέρω ὁρίζεται τὸ **γινόμενον** διανύσματος $\overline{\alpha}$ ἐπὶ τὸν ρητὸν $\frac{\mu}{\nu}$, ἐκ τῆς ἰσότητος : $\overline{\alpha} \cdot \frac{\mu}{\nu} = \mu \cdot \frac{\overline{\alpha}}{\nu}$

Η ΣΧΕΣΙΣ ΤΗΣ ΙΣΟΤΗΤΟΣ ΕΙΣ ΤΟ ΣΥΝΟΛΟΝ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΟΝ ΕΠΙΠΕΔΟΝ

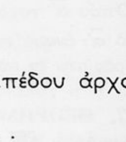
Θ ωροῦμεν τρεῖς ἡμιευθεῖες ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ ἢ α, β, γ τοῦ ἐπιπέδου ἀρχομένας ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο.

Ἐκ τῶν ἡμιευθειῶν τούτων ὁρίζονται ἓξ διατεταγμέναι τριάδες :

Αἱ (α,β,γ), (β,γ,α), (γ,α,β), (α,γ,β), (γ,β,α,), (β,α,γ).

51. ΑΞΙΩΜΑ. *Ἐκ τῶν ἓξ διατεταγμένων τριάδων αἱ ὁποῖαι ὁρίζονται ἀπὸ τὰς ἡμιευθείας α, β, γ τοῦ ἐπιπέδου, αἱ ὁποῖαι ἔχουν κοινὸν ἀρχικὸν σημεῖον, αἱ (α, β, γ), (β, γ, α), (γ, α, β) ὁρίζουν μίαν καὶ τὴν αὐτὴν φορὰν ἢ προσανατολισμὸν* (3) *ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου.* (Σχ. 41).

Αἱ (α, γ, β), (γ, β, α), (β, α, γ) ὁρίζουν ἐπίσης μίαν καὶ αὐτὴν φορὰν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, διάφορον τῆς πρώτης.



Σχ. 51

---

(1) Σ τὸ σύνολον τῶν ἐπὶ τοῦ ἄξονος σ προσανατολισμένων τμημάτων καὶ Ν τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν.

(2) Ἡ ὕπαρξις τοῦ β θὰ ἀποδειχθῇ μετὰ τὴν εἰσαγωγὴν τοῦ ἀξιώματος τοῦ Εὐκλείδου.

(3) Ἡ ἔννοια τῆς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου *φορᾶς* εἶναι ἔννοια *ἀρχικὴ* μὴ δυναμένη νὰ ὁρισθῇ ἐξ ἄλλων ἐννοιῶν. Δύναται νὰ ἑρμηνευθῇ διὰ τῆς συσχετίσεώς της μὲ τὴν ἔννοιαν τῆς κινήσεως :

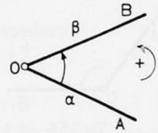
Ἂν ἡ μία ἀπὸ τὰς ἀνωτέρω δύο φορὰς ὀνομασθῇ **θετική**, ἡ ἄλλη θὰ ὀνομάζεται **ἀρνητική** (1).

52. ΟΡΙΣΜΟΣ *Τὸ ἐπίπεδον ὀνομάζεται προσημασμένον ἢ* **προσανατολισμένον** *ὅταν ἔχῃ ὁρισθῇ εἰς αὐτὸ ἡ θετικὴ φορά.*

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΗ ΓΩΝΙΑ.

53. ΟΡΙΣΜΟΣ. Προσανατολισμένην γωνίαν *ὀνομάζομεν κάθε διατεταγμένον ζεῦγος ἡμιευθειῶν τοῦ προσανατολισμένου ἐπιπέδου, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὸ αὐτὸ ἀρχικὸν σημεῖον.*

Οὕτω τὸ ζεῦγος (ΟΑ, ΟΒ) ἢ (α,β) τὸ ὁποῖον ὁρίζουν αἱ ἡμιευθεῖαι ΟΑ καὶ ΟΒ (Σχ. 53) εἶναι μία προσανατολισμένη γωνία.



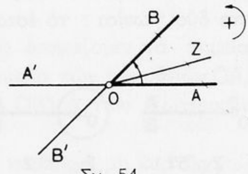
Σχ. 53

Αἱ ἡμιευθεῖαι ΟΑ καὶ ΟΒ ὀνομάζονται **πλευραὶ** τῆς γωνίας καὶ τὸ ἀρχικὸν σημεῖον Ο αὐτῶν **κορυφὴ** τῆς γωνίας.

Ἡ προσανατολισμένη γωνία τῆς ὁποίας ἡ πρώτη πλέυρὰ εἶναι ἡ ΟΑ καὶ ἡ δευτέρα ἡ ΟΒ συμβολίζεται μὲ τὸ σύμβολον (ΟΑ,ΟΒ). Εἰς τὸ σύμβολον τοῦτο τὸ στοιχεῖον ΟΑ, διὰ τοῦ ὁποίου συμβολίζεται ἡ πρώτη πλευρὰ γράφεται ἀριστερὰ τοῦ στοιχείου ΟΒ διὰ τοῦ ὁποίου συμβολίζεται ἡ δευτέρα. Ἡ ΟΑ λέγεται **ἀρχικὴ** καὶ ἡ ΟΒ **τελικὴ** πλευρὰ τῆς γωνίας.

ΚΥΡΤΗ ΚΑΙ ΜΗ ΚΥΡΤΗ ΓΩΝΙΑ.

54. ΟΡΙΣΜΟΣ Ἔστωσαν ΟΑ′ καὶ ΟΒ′ (Σχ. 54) αἱ ἡμιευθεῖαι αἱ ἀντικείμεναι τῶν πλευρῶν ΟΑ καὶ ΟΒ ἀντιστοίχως μιᾶς γωνίας (ΟΑ,ΟΒ). Θεωροῦμεν τὸ σύνολον (Χ) τῶν ἀπὸ τοῦ Ο ἡμιευθειῶν ἑκάστη τῶν ὁποίων κεῖται πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας Β′Β πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται ἡ ἡμιευθεῖα ΟΑ καὶ τὸ σύνολον (Υ) τῶν ἀπὸ τοῦ Ο ἡμιευθειῶν ἑκάστη τῶν ὁποίων κεῖται πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας Α′Α πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται ἡ ἡμιευθεῖα ΟΒ. *Ἡ τομὴ τῶν συνόλων (Χ) καὶ (Υ) εἶναι ἕνα σύνολον (Ζ) ἡμιευθειῶν, τὸ ὁποῖον ὀνομάζεται* **ἐσωτερικὸν** *τῆς γωνίας (ΟΑ, ΟΒ).*



Σχ. 54

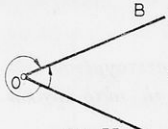
Τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου (Ζ), ἤτοι αἱ ἡμιευθεῖαι αἱ ἀνήκουσαι εἰς αὐτό, ὀνομάζονται καὶ **ἐσωτερικαὶ ἡμιευθεῖαι** τῆς γωνίας

Δεχόμεθα ὅτι : Κάθε ἡμιευθεῖα ΟΧ τοῦ ἐπιπέδου δύναται νὰ λάβῃ, ἅπαξ, τὴν θέσιν κάθε ἄλλης ἐκ τῶν ἀπὸ τοῦ Ο ἡμιευθειῶν αὐτοῦ κινουμένη περὶ τὸ Ο κατὰ δύο ἀντιθέτους φοράς. Ἡ εἰς τὴν τριάδα π.χ. (β,γ,α) ἡμιευθειῶν τοῦ ἐπιπέδου, ἀρχομένων ἀπὸ τοῦ Ο, ἀντιστοιχοῦσα φορὰ εἶναι ἐκείνη κατὰ τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ κινηθῇ μία ἡμιευθεῖα Χ ἀρχομένη ἀπὸ τοῦ Ο ὥστε νὰ λάβῃ διαδοχικῶς τὴν θέσιν τῶν ἀνωτέρω ἡμιευθειῶν κατὰ τὴν τάξιν (β,γ,α).

(1) Ἐκ τῆς ἐποπτείας, δικαιολογεῖται ἡ συσχέτισις τῆς μιᾶς ἀπὸ τὰς ἀνωτέρω δύο φορὰς πρὸς μίαν γνωστὴν κίνησιν, οἷα εἶναι ἡ τῆς κινήσεως τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου. Δυνάμεθα κατὰ ταῦτα, νὰ δεχθῶμεν ὡς θετικὴν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου φοράν, τὴν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὴν ἀντίθετον τῆς κινήσεως τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου.

(ΟΑ,ΟΒ). Τὸ σύνολον (Ζ΄) τῶν ἀπὸ τοῦ Ο ἡμιευθειῶν ἑκάστη τῶν ὁποίων εἶναι διάφορος τῶν ΟΑ, ΟΒ καὶ δὲν εἶναι ἐσωτερικὴ ἡμιευθεῖα τῆς γωνίας (ΟΑ, ΟΒ) ὀνομάζεται **ἐξωτερικὸν** αὐτῆς. Τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου (Ζ΄) ὀνομάζονται **ἐξωτερικαὶ ἡμιευθεῖαι** τῆς γωνίας (ΟΑ,ΟΒ).

55. ΟΡΙΣΜΟΣ *Ἡ ἕνωσις τῆς γωνίας (ΟΑ, ΟΒ) καὶ τοῦ ἐσωτερικοῦ αὐτῆς ὀνομάζεται* **κυρτὴ γωνία** *ὁριζομένη ἐκ τῆς γωνίας (ΟΑ, ΟΒ).*

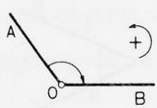


Σχ. 55

Ἡ ἕνωσις τῆς γωνίας (ΟΑ,ΟΒ) καὶ τοῦ ἐξωτερικοῦ αὐτῆς ὀνομάζεται **μὴ κυρτὴ γωνία** *(ΟΑ, ΟΒ).*

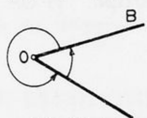
Ἐκ τῆς γωνίας, ἑπομένως, (ΟΑ,ΟΒ) ὁρίζονται μία κυρτὴ καὶ μία μὴ κυρτὴ γωνία (ΟΑ,ΟΒ) (Σχ. 55).

56. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἡ κυρτὴ ἢ μὴ κυρτὴ γωνία (ΟΑ,ΟΒ) ὀνομάζεται **θετικῶς προσανατολισμένη** ἂν ἡ φορὰ αὐτῆς(1) συμπίπτη μὲ τὴν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου φορὰν (Σχ. 55), **ἀρνητικῶς** δέ, **προσανατολισμένη** εἰς τὴν ἀντίθετον περίπτωσιν (Σχ. 56).



Σχ. 56

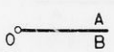
Δύο γωνίαι αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀμφότεραι θετικῶς ἢ ἀμφότεραι ἀρνητικῶς προσανατολισμέναι θὰ ὀνομάζονται **ὁμοίως προσανατολισμέναι.** Οὕτως, ἡ κυρτὴ γωνία (ΟΑ,ΟΒ) καὶ ἡ μὴ κυρτὴ γωνία (ΟΒ,ΟΑ) εἶναι ὁμοίως προσανατολισμέναι (Σχ. 56.1). Δύο δὲ γωνίαι ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία εἶναι θετικῶς καὶ ἡ ἄλλη ἀρνητικῶς προσανατολισμένη θὰ ὀνομάζωνται **ἀντιθέτως προσανατολισμέναι.** Οὕτως, ἡ κυρτὴ γωνία (ΟΑ, ΟΒ) καὶ ἡ μὴ κυρτὴ γωνία (ΟΑ,ΟΒ) εἶναι ἀντιθέτως προσανατολισμέναι (Σχ. 55).



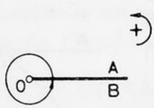
Σχ. 56.1

ΜΗΔΕΝΙΚΗ ΚΑΙ ΠΛΗΡΗΣ ΓΩΝΙΑ — ΕΥΘΕΙΑ ΓΩΝΙΑ

57. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἐξ ἑνὸς ζεύγους συμπιπτουσῶν ἡμιευθειῶν (ΟΑ,ΟΒ) ὁρίζονται δύο γωνίαι : τὸ ἐσωτερικὸν τῆς μιᾶς ἐκ τούτων εἶναι τὸ κενὸν σύνολον, τὸ ἐσωτερικὸν τῆς ἄλλης εἶναι τὸ σύνολον ὅλων τῶν ἀπὸ τοῦ Ο ἡμιευθειῶν τοῦ ἐπιπέδου. Ἡ πρώτη γωνία ὀνομάζεται *μηδενικὴ γωνία* (Σχ. 57.1) ἡ δὲ δευτέρα *πλήρης γωνία* (Σχ. 57.2).

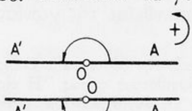


Σχ. 57.1



Σχ. 57.2

58. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ἡ γωνία τῆς ὁποίας αἱ πλευραὶ ΟΑ, ΟΑ΄ εἶναι ἡμιευθεῖαι ἀντικείμεναι ὀνομάζεται* **εὐθεῖα γωνία** (ΟΑ, ΟΑ΄). (2)



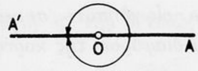
Σχ. 58.1

Ὡς ἐσωτερικαὶ ἡμιευθεῖαι τῆς εὐθείας γωνίας (ΟΑ, ΟΑ΄) θεωροῦνται αἱ ἀπὸ τῆς κορυφῆς αὐτῆς ἡμιευθεῖαι αἱ κείμεναι πρὸς τὸ ἓν ἢ τὸ ἄλλο μέρος τῆς εὐθείας Α΄Α. (Σχ. 58.1).

(1) Ἡ φορὰ κατὰ τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ κινηθῇ ἡ ἀρχικὴ πλευρὰ ΟΑ ὥστε νὰ παραχθῇ ἡ θεωρουμένη γωνία, ἤτοι λάβῃ ἡ ΟΑ τὴν θέσιν τῶν ἡμιευθειῶν τῆς γωνίας αὐτῆς.

(2) Ἡ εὐθεῖα γωνία δύναται νὰ ὀνομάζεται καὶ ἀποπλατυσμένη γωνία.

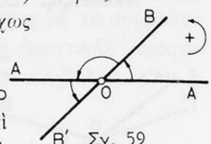
Ἐκ τοῦ ζεύγους (ΟΑ, ΟΑ′) ὁρίζονται δύο εὐθεῖαι γωνίαι (ΟΑ, ΟΑ′) ἀντιθέτως προσανατολισμέναι (Σχ. 58.2).



Σχ. 58.2

ΓΩΝΙΑΙ ΚΑΤΑ ΚΟΡΥΦΗΝ

59. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Δύο κυρταὶ γωνίαι (ΟΑ, ΟΒ) καὶ (ΟΑ′, ΟΒ′) ὀνομάζονται* **κατὰ κορυφήν,** *ὅταν αἱ πλευραὶ ἑκάστης τούτων εἶναι ἀντιστοίχως ἀντικείμεναι τῶν πλευρῶν τῆς ἄλλης.*



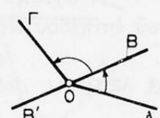
Σχ. 59

Σημειοῦμεν ὅτι δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι ὁρίζουν δύο ζεύγη κατὰ κορυφὴν γωνιῶν. Οὕτως, αἱ γωνίαι (ΟΑ, ΟΒ) καὶ (ΟΑ′, ΟΒ′), ὡς καὶ αἱ (ΟΒ, ΟΑ′) καὶ (ΟΒ′, ΟΑ) εἶναι κατὰ κορυφήν.

Δύο κατὰ κορυφὴν γωνίαι εἶναι ὁμοίως προσανατολισμέναι.

ΓΩΝΙΑΙ ΕΦΕΞΗΣ

60. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Δύο κυρταὶ γωνίαι τοῦ ἐπιπέδου ὀνομάζονται* **ἐφεξῆς,** *ὅταν ἔχουν μίαν πλευρὰν κοινὴν καὶ τὰς μὴ κοινὰς πλευρὰς αὐτῶν ἑκατέρωθεν τᾶς εὐθείας ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖνται ἡ κοινὴ πλευρά.*



Σχ. 60

Αἱ ἐφεξῆς γωνίαι (ΟΑ, ΟΒ) καὶ (ΟΒ, ΟΓ) εἶναι ὁμοίως προσανατολισμέναι. Ἡ ἕνωσις αὐτῶν εἶναι μία κυρτὴ (Σχ. 60) ἢ μὴ κυρτὴ γωνία (ΟΑ, ΟΓ).

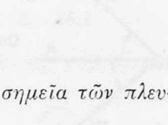
ΣΗΜΕΙΑ ΓΩΝΙΑΣ

61. ΟΡΙΣΜΟΣ. Σημεῖα *μιᾶς γωνίας (ΟΑ, ΟΒ) ὀνομάζονται τὰ σημεῖα τῶν πλευρῶν ΟΑ, ΟΒ αὐτῆς.*

Σημεῖα μιᾶς κυρτῆς ἢ μὴ κυρτῆς **γωνίας** (ΟΑ, ΟΒ) ὀνομάζομεν τὰ σημεῖα τῶν ἡμιευθειῶν αἱ ὁποῖαι ἀνήκουν εἰς αὐτήν, ἤτοι τὰ σημεῖα τῶν ἡμιευθειῶν ΟΑ, ΟΒ καὶ τῶν ἐσωτερικῶν ἡμιευθειῶν τῆς γωνίας (ΟΑ, ΟΒ) ἢ τῶν ἐξωτερικῶν ἡμιευθειῶν αὐτῆς ἀντιστοίχως.

Κάθε σημεῖον Μ μὴ κείμενον ἐπὶ τῶν πλευρῶν τῆς κυρτῆς ἢ μὴ κυρτῆς γωνίας (ΟΑ, ΟΒ) ὀνομάζεται **ἐσωτερικὸν** τῆς κυρτῆς ἢ μὴ κυρτῆς γωνίας (ΟΑ, ΟΒ) καθ᾽ ὅσον ἡ ἡμιευθεῖα ΟΜ ἀνήκη εἰς τὴν κυρτὴν ἢ τὴν μὴ κυρτὴν (ΟΑ, ΟΒ) ἀντιστοίχως.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ. *1. Ἂν Α καὶ Β εἶναι ἀντιστοίχως δύο σημεῖα τῶν πλευρῶν μιᾶς γωνίας (ΟΑ, ΟΒ), διάφορα τῆς κορυφῆς Ο αὐτῆς, τότε κάθε σημεῖον Μ κείμενον μεταξὺ τῶν Α καὶ Β εἶναι σημεῖον τῆς κυρτῆς γωνίας (ΟΑ, ΟΒ).*



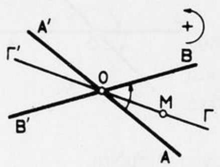
Σχ. 61

2. Ἑκάστη ἡμιευθεῖα ἀνήκουσα εἰς τὴν κυρτὴν γωνίαν (ΟΑ, ΟΒ) καὶ διάφορος τῶν ΟΑ, ΟΒ, ἔχει σημεῖον μεταξὺ *δύο οἱωνδήποτε σημείων A καὶ B, κειμένων ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν πλευρῶν αὐτῆς καὶ διαφόρων τῆς κορυφῆς O.*

62. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν μία ἡμιευθεῖα ΟΓ ἀνήκη εἰς τὴν κυρτὴν γωνίαν (ΟΑ,ΟΒ), τότε ἡ ἀντικειμένη ΟΓ′ αὐτῆς ἀνήκει εἰς τὴν κατὰ κορυφὴν γωνίαν (ΟΑ′,ΟΒ′) αὐτῆς.

Ἀπόδειξις. Ἔστω Μ ἕνα τυχὸν σημεῖον τῆς ΟΓ (Σχ. 62). Τὸ Μ κεῖται πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας Β′Β πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται τὸ Α. Ἕνα τυχὸν σημεῖον Μ′ τῆς ἀντικειμένης ΟΓ′ τῆς ΟΓ κεῖται πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας Β′Β πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται τὸ Α ἤτοι πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας Β′Β πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται τὸ Α′, καὶ δι᾽ ὅμοιον λόγον πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας Α′Α πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται τὸ Β′.

Ἤτοι τὸ Μ′ εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τῆς γωνίας (ΟΑ′,ΟΒ′).

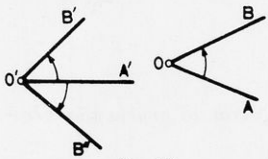


Σχ. 62

Η ΣΧΕΣΙΣ ΙΣΟΤΗΤΟΣ ΕΙΣ ΤΟ ΣΥΝΟΛΟΝ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ.

Ἡ σχέσις τῆς ἰσότητος εἰς τὸ σύνολον τῶν προσανατολισμένων γωνιῶν τοῦ ἐπιπέδου εἰσάγεται διὰ τῶν κατωτέρω ἀξιωμάτων :

63. ΑΞΙΩΜΑ. *Δοθείσης ἐπὶ τοῦ προσανατολισμένου ἐπιπέδου μιᾶς γωνίας (OA, OB) καὶ μιᾶς ἡμιευθείας O′A′, ὑπάρχει ἐπ᾽ αὐτοῦ ἡμιευθεῖα O′B′, καὶ μόνον μία, ὥστε ἡ γωνία (O′A′, O′B′) νὰ* **εἶναι ἴση** *πρὸς τὴν (OA, OB) καὶ ἡμιευθεῖα O′B″, καὶ μόνον μία, ὥστε ἡ γωνία (O′A′, O′B″) νὰ* **εἶναι ἀντίθετος** *τῆς γωνίας (OA, OB).*(1).



Σχ. 63

Σημειοῦμεν ἀντιστοίχως : (Ο′Α′,Ο′Β′) = (ΟΑ,ΟΒ) καὶ (Ο′Α′,Ο′Β″) = – (ΟΑ,ΟΒ).

64. ΑΞΙΩΜΑ. *Εἰς τὸ σύνολον τῶν προσανατολισμένων γωνιῶν τοῦ ἐπιπέδου ἰσχύουν αἱ ἰδιότητες τῆς ἰσότητος : αὐτοπαθὴς ἢ ἀνακλαστική, συμμετρική, μεταβατική.*

ΚΛΑΣΙΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ.

65. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἡ ἀνωτέρω σχέσις τῆς ἰσότητος ἐπιτρέπει τὸν διαμερισμὸν τοῦ συνόλου τῶν προσανατολισμένων γωνιῶν τοῦ ἐπιπέδου εἰς ὑποσύνολα, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἀποτελεῖται ἀπὸ ὅλας τὰς γωνίας τὰς ἴσας πρὸς δοθεῖσαν γωνίαν (ΟΑ, ΟΒ). *Κάθε τοιοῦτον ὑποσύνολον τοῦ συνόλου τῶν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου γωνιῶν θὰ ὀνομάζεται* **κλάσις ἰσοδυναμίας** *ἐν αὐτῷ*, ὁριζομένη ἀπὸ τὴν γωνίαν (ΟΑ, ΟΒ), ἢ καὶ **κλάσις ἰσότητος** εἰς τὸ σύνολον τῶν γωνιῶν.

Ἑκάστη κλάσις ἐκ τῶν ἀνωτέρω δύναται νὰ συμβολίζεται μὲ ἕνα πεζὸν

(1) Οἱ ὅροι *εἶναι ἴση καὶ εἶναι ἀντίθετος* θεωροῦνται ὡς *ἀρχικοὶ*

γράμμα τοῦ ἀλφαβήτου φέρον πρὸ αὐτοῦ τὴν ἔνδειξιν ∢ ἢ ∢ τῆς θετικῶς ἢ ἀρνητικῶς προσανατολισμένης γωνίας ἀντιστοίχως.

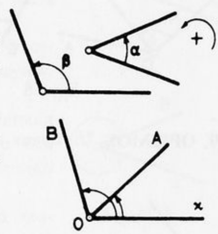
Τὸ σύμβολον τοῦτο δύναται νὰ χρησιμοποιῆται ἀντὶ τοῦ συμβόλου (ΟΑ, ΟΒ), ἐφ' ὅσον ἀποκλείεται παρεξήγησις ὡς πρὸς τὴν συμβολιζομένην γωνίαν.

Κάθε στοιχεῖον τῆς κλάσεως ἰσότητος τῆς ὁριζομένης ἀπὸ τὴν θετικῶς προσανατολισμένην εὐθεῖαν γωνίαν (ΟΑ, ΟΑ'), θὰ συμβολίζεται μὲ τὸ σύμβολον ∢ π ἢ ἁπλῶς π. Κάθε στοιχεῖον τῆς κλάσεως ἰσότητος τῆς ἀρνητικῶς προσανατολιζομένης γωνίας (ΟΑ, ΟΑ') θὰ συμβολίζεται μὲ τὸ σύμβολον ∢ π ἢ μὲ τὸ — π.

ΣΧΕΣΕΙΣ ΔΙΑΤΑΞΕΩΣ

66. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἔστωσαν ἐπὶ τοῦ προσανατολισμένου ἐπιπέδου δύο θετικῶς προσανατολισμέναι γωνίαι ∢ α καὶ ∢ β. (Σχ. 66.1). Θεωροῦμεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τυχοῦσαν ἡμιευθεῖαν ΟΧ καὶ τὰς ἡμιευθείας ΟΑ καὶ ΟΒ ὥστε : (ΟΧ, ΟΑ) = ∢ α καὶ (ΟΧ, ΟΒ) = ∢ β (63).

Ἂν ἡ ἡμιευθεῖα ΟΑ συμπίπτῃ μὲ τὴν ΟΒ τότε αἱ γωνίαι ∢ α καὶ ∢ β εἶναι τῆς αὐτῆς κλάσεως ἰσότητος. Θὰ σημειοῦμεν ∢ α = ∢ β.

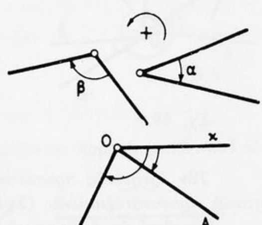


Σχ. 66.1

Ἂν ἡ ἡμιευθεῖα ΟΑ ἀνήκῃ εἰς τὴν γωνίαν (ΟΧ,ΟΒ), τότε ἡ ∢ α ὀνομάζεται **μικροτέρα** *τῆς ∢ β, συμβολικῶς ∢ α < ∢ β, καὶ ἡ γωνία ∢ β* **μεγαλυτέρα** *τῆς ∢ α, συμβολικῶς ∢ β > ∢ α.* (Σχ. 66.1)

Ἂν ἡ ἡμιευθεῖα ΟΑ δὲν ἀνήκῃ εἰς τὴν γωνίαν (ΟΧ, ΟΒ), τότε ἡ ∢ α ὀνομάζεται μεγαλυτέρα τῆς ∢ β καὶ ἡ ∢ β μικροτέρα τῆς ∢ α.

Ἂν αἱ ∢ α καὶ ∢ β εἶναι ἀρνητικῶς προσανατολισμένα (Σχ. 66.2) τότε οἱ ἀνωτέρω ὁρισμοὶ ἰσχύουν κατὰ τὴν ἀντίθετον ἔννοιαν. Οὕτω ἂν ἡ ἡμιευθεῖα ΟΑ ἀνήκῃ εἰς τὴν γωνίαν (ΟΧ, ΟΒ), τότε ἡ γωνία ∢ α ὀνομάζεται μεγαλυτέρα τῆς ∢ β καὶ ἡ ∢ β μικροτέρα τῆς ∢ α κλπ.



Σχ. 66.2

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ. *1. Πᾶσα θετικῶς προσανατολισμένη κυρτὴ γωνία ∢ α εἶναι μικροτέρα τῆς ὁμοίως προσανατολισμένης εὐθείας γωνίας.*

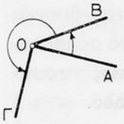
2. Πᾶσα θετικῶς προσανατολισμένη μὴ κυρτὴ γωνία ∢ α εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ὁμοίως προσανατολισμένης εὐθείας γωνίας.

3. Πᾶσα θετικῶς προσανατολισμένη κυρτὴ ἢ μὴ κυρτὴ γωνία ∢ α εἶναι μικροτέρα τῆς ὁμοίως προσανατολισμένης πλήρους γωνίας.

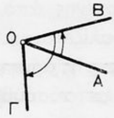
ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΓΩΝΙΩΝ

67. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Δύο γωνίαι ὀνομάζονται* **διαδοχικαὶ** *ἂν ἡ δευτέρα (τελική) πλευρὰ τῆς μιᾶς ἐκ τούτων συμπίπτῃ μὲ τὴν πρώτην (ἀρχικὴν) πλευρὰν τῆς ἄλλης.*

Δύο διαδοχικαὶ γωνίαι (ΟΑ, ΟΒ) καὶ (ΟΒ,ΟΓ) δύνανται νὰ εἶναι ὁμοίως (Σχ. 67.1) ἢ ἀντιθέτως (Σχ. 67.2) προσανατολισμέναι.



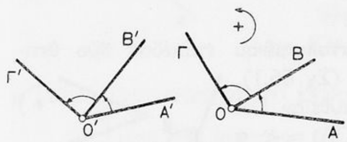
Σχ. 67.1



Σχ. 67.2

Ὡς προκύπτει ἐκ τοῦ ἀξιώματος (63), οἱαιδήποτε καὶ ἂν εἶναι δύο προσανατολισμέναι, κυρταὶ ἢ μὴ κυρταὶ γωνίαι α καὶ β, ὑπάρχουν δύο, τουλάχιστον, διαδοχικαὶ γωνίαι (ΟΑ,ΟΒ) καὶ (ΟΒ,ΟΓ) ἴσαι ἀντιστοίχως πρὸς τὰς α καὶ β. Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι αἱ α καὶ β εἶναι δυνατὸν νὰ γίνουν διαδοχικαί.

68. ΑΞΙΩΜΑ. *Ἂν δύο διαδοχικαί, κυρταὶ ἢ μὴ κυρταί, γωνίαι (ΟΑ, ΟΒ) καὶ (ΟΒ, ΟΓ) τοῦ ἐπιπέδου εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς (Ο′Α′, Ο′Β′) καὶ (Ο′Β′, Ο′Γ′), τότε αἱ κυρταὶ ἢ μὴ κυρταὶ γωνίαι (ΟΑ, ΟΓ) καὶ (Ο′Α′, Ο′Γ′) εἶναι ἴσαι* (Σχ. 68).

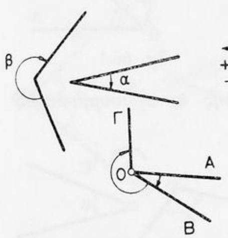


Σχ. 68

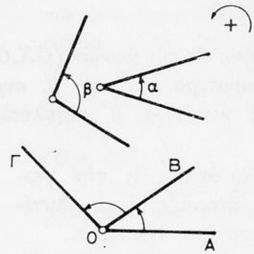
69. ΟΡΙΣΜΟΣ *Ἔστωσαν α καὶ β δύο προσανατολισμέναι κυρταὶ ἢ μὴ κυρταὶ γωνίαι τοῦ ἐπιπέδου. Θεωροῦμεν δύο διαδοχικὰς γωνίας (ΟΑ, ΟΒ) καὶ (ΟΒ, ΟΓ) ἴσας ἀντιστοίχως πρὸς τὰς α καὶ β.*

Ὀνομάζομεν **ἄθροισμα** *τῶν γωνιῶν α καὶ β κατὰ τὴν θεωρουμένην τάξιν καὶ τὸ συμβολίζομεν μὲ τὸ σύμβολον α+β:*

Τὴν θετικῶς προσανατολισμένην γωνίαν (ΟΑ, ΟΓ), ἂν αἱ δοθεῖσαι γωνίαι εἶναι θετικῶς προσανατολισμέναι. (Σχ. 69.1). *Συμβολικῶς :* $\sphericalangle$ *(ΟΑ, ΟΓ)* $= \sphericalangle$ *α* $+ \sphericalangle$ *β.*



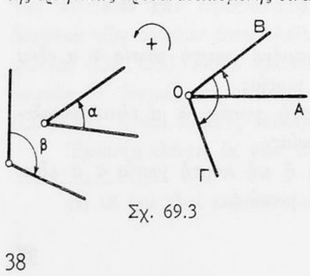
Σχ. 69.1



Σχ. 69.2

Τὸν ἀρνητικῶς προσανατολισμένην γωνίαν (ΟΑ, ΟΓ), ἂν αἱ δοθεῖσαι γωνίαι εἶναι ἀρνητικῶς προσανατολισμέναι (Σχ. 69.2). *Συμβολικῶς : (ΟΑ, ΟΓ)* $= \sphericalangle$ *α* $+ \sphericalangle$ *β, καί,*

Τὴν θετικῶς ἢ ἀρνητικῶς προσανατολισμένην γωνίαν (ΟΑ, ΟΓ), καθ' ὅσον ἡ ἀντίθετος τῆς ἀρνητικῶς προσανατολισμένης εἶναι μικροτέρα ἢ μεγαλυτέρα τῆς ἄλλης, ἀντιστοίχως.(Σχ. 69.3)



Σχ. 69.3

Οὕτως, ἂν ἡ ἀντίθετος τῆς ἀρνητικῶς προσανατολισμένης γωνίας β εἶναι μεγαλυτέρα τῆς α (Σχ. 69.3), τότε τὸ ἄθροισμα εἶναι ἡ ἀρνητικῶς προσανατολισμένη γωνία (ΟΑ,ΟΓ), συμβολικῶς : $\sphericalangle$ (ΟΑ, ΟΓ) $= \sphericalangle$ α $+ \sphericalangle$ β. Ἂν συμβολίσωμεν μὲ τὸ σύμβολον γ τὴν κλάσιν ἰσότητος τὴν ὁριζομένην ἀπὸ τὴν γωνίαν (ΟΑ,ΟΓ), θὰ σημειοῦμεν, κατὰ τὰς ἀνωτέρω ἀντιστοίχως περιπτώσεις :

$\sphericalangle \gamma = \sphericalangle \alpha + \sphericalangle \beta$ ἢ $\sphericalangle \gamma = \sphericalangle \alpha + \sphericalangle \beta$ ἢ $\sphericalangle \gamma = \sphericalangle \alpha + \sphericalangle \beta$,
συνοπτικῶς δέ: $\gamma = \alpha + \beta$.

Σημειοῦμεν, ὅτι κατόπιν τοῦ εἰσαχθέντος (68) ἀξιώματος, τὸ ἀνωτερω ἄθροισμα εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς ἐκλογῆς τοῦ σημείου Ο καὶ τῆς ἡμιευθείας ΟΑ.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ (67) τοῦ ἀθροίσματος γωνιῶν προκύπτει ὅτι :

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ. *1. Εἰς τὸ σύνολον τῶν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (1) προσανατολισμένων γωνιῶν ἰσχύουν αἱ ἰδιότητες τῆς προσθέσεως : μονότροπος, μεταθετικὴ καὶ προσεταιριστική.*

Δυνάμεθα, κατόπιν τῶν ἀνωτέρω, νὰ ὁρίσωμεν τὸ ἄθροισμα περισσοτέρων τῶν δύο γωνιῶν, ἐκ τῆς σχέσεως: $\alpha + \beta + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ κλπ.

2. Τὸ ἄθροισμα οἱασδήποτε γωνίας α καὶ τῆς μηδενικῆς εἶναι ἡ γωνία α.

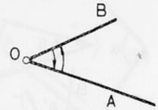
Συμβολικῶς : $a + o = a$

Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι εἰς τὸ σύνολον τῶν γωνιῶν, ἡ μηδενικὴ γωνία εἶναι τὸ **οὐδέτερον στοιχεῖον** τοῦ συνόλου τούτου, ὡς πρὸς τὴν πρᾶξιν τῆς προσθέσεως ἐν αὐτῷ.

3. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιθέτων γωνιῶν α καὶ α′ εἶναι ἡ μηδενικὴ γωνία (Σχ. 69.4).

Δυνάμεθα νὰ σημειοῦμεν $\alpha + \alpha' = o$.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ ἀθροίσματος εἰς τὸ σύνολον τῶν γωνιῶν, ἔχομεν ὅτι :



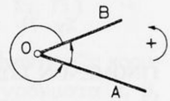
69.4

Δοθείσης μιᾶς γωνίας $\sphericalangle \alpha$ ὑπάρχει γωνία $\sphericalangle \alpha'$, καὶ μία μόνον, ὥστε $\sphericalangle \alpha + \sphericalangle \alpha' = 0$.

Τὸ στοιχεῖον α′ ὀνομάζεται **ἀντίθετον ἢ συμμετρικὸν** τοῦ στοιχείου α, ὡς πρὸς τὴν πρᾶξιν τῆς προσθέσεως εἰς τὸ σύνολον τῶν γωνιῶν.

Σημειοῦμεν ὅτι :

1. Τὸ ἄθροισμα δύο γωνιῶν δύναται νὰ εἶναι μία πλήρης, θετικῶς ἢ ἀρνητικῶς προσανατολισμένη γωνία. Τοιοῦτον εἶναι τὸ ἄθροισμα δύο ὁμοίως προσανατολισμένων γωνιῶν (ΟΑ,ΟΒ) καὶ (ΟΒ,ΟΑ) τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ συμπίπτουν (Σχ. 69.5).

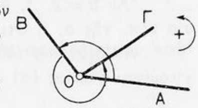


Σχ. 69.5

2. Τὸ ἄθροισμα δύο προσανατολισμένων γωνιῶν δύναται νὰ «καλύψῃ» τὸ ἐπίπεδον περισσοτέρας τῆς μιᾶς φοράς. Τοιοῦτον δύναται νὰ εἶναι τὸ ἄθροισμα μιᾶς κυρτῆς καὶ μιᾶς μὴ κυρτῆς ἢ τὸ ἄθροισμα δύο μὴ κυρτῶν γωνιῶν.

Εἰς τὴν ἐμφανιζομένην (Σχ. 69.6) περίπτωσιν τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν (ΟΑ,ΟΒ) καὶ (ΟΒ, ΟΓ) εἶναι γωνία : ἡ ἀποτελουμένη ἀπὸ μίαν πλήρη γωνίαν καὶ ἀπὸ τὴν κυρτὴν γωνίαν (ΟΑ,ΟΓ).

Γενικεύοντες, δηλαδή, τὴν ἔννοιαν τῆς γωνίας δεχόμεθα ὅτι τὸ ἄθροισμα τοῦτο εἶναι μία προσανατολισμένη γωνία.



Σχ. 69.6

ΓΩΝΙΑΙ ΠΑΡΑΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΑΙ

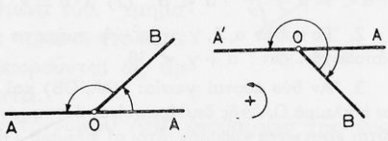
70. ΟΡΙΣΜΟΣ· *Δύο προσανατολισμέναι γωνίαι α καὶ β ὀνομάζονται* **παραπληρωματικαὶ** *ἀλλήλων, ἂν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι ἡ θετικῶς προσανατολισμένη εὐθεῖα γωνία.*

Δυνάμεθα νὰ σημειοῦμεν :

$\alpha + \beta = \pi$ (58).

Ἂν τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν α καὶ β εἶναι ἡ ἀρνητικῶς προσανατολισμένη εὐθεῖα γωνία, θὰ σημειοῦμεν :

$$\alpha + \beta = -\pi$$



Σχ. 70.1

Ἐξ ἄλλου, ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ καὶ τῶν ἰδιοτήτων τοῦ ἀθροίσματος τῶν γωνιῶν (69), προκύπτει ὅτι :

---

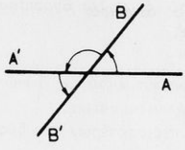
(1) Προσανατολισμένου.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ. *1. Δύο ἐφεξῆς γωνίαι (ΟΑ, ΟΒ) καὶ (ΟΒ, ΟΑ′) τῶν ὁποίων αἱ μ κοιναὶ πλευραὶ εἶναι ἀντικείμεναι εἶναι παραπληρωματικαί, καὶ ἀντι στρόφως :*

Ἂν δύο παραπληρωματικαὶ γωνίαι εἶναι ἐφεξῆς, τότε αἱ μ κοιναὶ πλευραὶ αὐτῶν εἶναι ἡμιευθεῖαι ἀντικείμεναι.

2. Δύο οἱαιδήποτε κατὰ κορυφὴν γωνίαι (ΟΑ, ΟΒ) καὶ (ΟΑ′, ΟΒ′) εἶναι ἴσαι

Πράγματι, ἑκάστη τούτων εἶναι παραπληρωματικὴ τῆ κυρτῆς γωνίας (ΟΒ,ΟΑ′).



Σχ. 70.2

ΔΙΑΦΟΡΑ ΓΩΝΙΩΝ

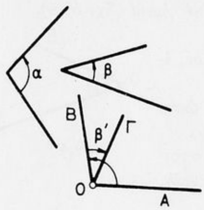
71. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ὀνομάζομεν* **διαφορὰν** *δύο γωνιῶν α καὶ β τοῦ ἐπιπέδου, κατὰ τὴν θεω ρουμένην τάξιν, καὶ τὴν συμβολίζομεν μὲ τὸ σύμβολον : α - β, τ ἄθροισμα τῆς γωνίας α καὶ τῆς ἀντιθέτου β′ τῆς β.*

Ὥστε ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ ἔχομεν ὅτι : $\alpha - \beta = \alpha + \beta'$, ὅπο β′ ἡ κλάσις τῆς ἀντιθέτου πρὸς τὴν γωνίαν β γωνίας).

Οὕτω ἡ διαφορὰ τῶν γωνιῶν ∢ α καὶ ∢ β (Σχ. 71 εἶναι ἡ γωνία (ΟΑ,ΟΓ).

Τὸ πρόσημον, κατὰ συνέπειαν, τῆς διαφορᾶς α – εἶναι τὸ τοῦ ἀθροίσματος $\alpha + \beta'$ (69).

Ἂν $\alpha = \beta$, ἡ διαφορὰ $\alpha - \beta$ εἶναι ἡ μηδενικὴ γωνία



Σχ. 71

ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ ΓΩΝΙΑΣ ΕΠΙ ΑΚΕΡΑΙΟΝ ΑΡΙΘΜΟΝ

72. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ὀνομάζομεν* **γινόμενον** *γωνίας α ἐπὶ ἀκέραιον ἀριθμὸν μ, καὶ τὸ συμβολίζομε μὲ τὸ σύμβολον μ . α, τὸ ἄθροισμα μ γωνιῶν ἴσων πρὸς τὴν α.*

Ἂν εἶναι γ τὸ ἄθροισμα τοῦτο, θὰ σημειοῦμεν : $\gamma = \mu \cdot \alpha$

Ἂν $\mu = 2, 3, 4, \ldots$ θὰ λέγωμεν ἀντιστοίχως ὅτι ἡ γωνία γ εἶναι διπλασία, τριπλα σία κλπ. τῆς α, ἢ ὅτι ἡ α εἶναι τὸ ἥμισυ, τὸ τρίτον κλπ. τῆς γ.

Αἱ ἰδιότητες τοῦ γινομένου εὐθ. τμήματος α ἐπὶ ἀκέραιον μ (49) ἰσχύουν καὶ ἐπὶ το γινομένου γωνίας ἐπὶ ἀκέραιον μ (1).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ἔστωσαν α, β δύο εὐθ. τμήματα ἢ γωνίαι καὶ μ, ν δύο φυσικοὶ ἀριθμοί. Ν ἀποδειχθῇ ὅτι :

(1)$\mu \cdot \alpha < \nu \cdot \beta \Rightarrow \frac{\mu}{\nu} \cdot \alpha < \beta$ (2) $\mu \cdot \alpha = \nu \cdot \beta \Rightarrow \frac{\mu}{\nu} \cdot \alpha = \beta$ (3) $\mu \cdot \alpha > \nu \cdot \beta \Rightarrow \frac{\mu}{\nu} \alpha <$

2. Ἔστωσαν α, β, γ τρία εὐθ. τμήματα ἢ γωνίαι ὥστε : $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$ καὶ $\alpha + \beta >$ Νὰ ἀποδειχθεῖ ὅτι : $\alpha + \gamma < 3\beta$.

3. Ἂν δύο κυρταὶ γωνίαι (ΟΑ, ΟΒ) καὶ (ΟΑ′, ΟΒ′) τοῦ ἐπιπέδου εἶναι ἴσαι καὶ ἐ πλέον ἡ πλευρὰ ΟΑ′ τῆς δευτέρας εἶναι ἀντικειμένη τῆς πλευρᾶς ΟΑ τῆς πρώτης, τότε αἱ γων αι αὗται εἶναι κατὰ κορυφήν, ἤτοι αἱ πλευραὶ ΟΒ′ καὶ ΟΒ αὐτῶν εἶναι ἡμιευθεῖαι ἀντικείμενο

---

(1) Ἂν δεχθῶμεν ὅτι δοθείσης γωνίας γ καὶ ἀκεραίου ν, ὑπάρχει γωνία α, ὥστε γ ν.α, δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν, ὅπως καὶ εἰς τὰ εὐθ. τμήματα, τὸ *γινόμενον* μιᾶς γωνίας γ ἐ τὸν ρητὸν $\frac{\mu}{\nu}$, ἐκ τῆς ἰσοδυναμίας :

$$\alpha = \gamma \cdot \frac{\mu}{\nu} \Leftrightarrow \alpha = \mu \cdot \frac{\gamma}{\nu}$$

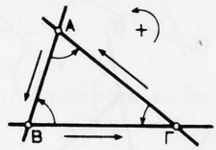
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

ΤΟ ΤΡΙΓΩΝΟΝ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

73. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Θεωροῦμεν τρία σημεῖα A, B, Γ μὴ κείμενα, ἐν γένει, ἐπ' εὐθείας. Ὀνομάζομεν* **τρίγωνον** *ὁριζόμενον ἀπὸ τὰ σημεῖα ταῦτα τὸ σύνολον τῶν τριῶν εὐθυγράμμων τμημάτων $B\Gamma$, ΓA, AB.*

Τὰ σημεῖα Α, Β, Γ ὀνομάζονται **κορυφαὶ** καὶ τὰ εὐθ. τμήματα ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ **πλευραὶ** τοῦ τριγώνου.



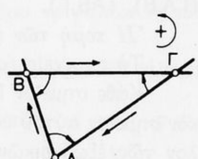
Σχ. 73.1

Σημεῖα τοῦ τριγώνου ὀνομάζονται τὰ σημεῖα τῶν πλευρῶν αὐτοῦ. Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι: Ἑκάστη κορυφὴ τοῦ τριγώνου καὶ ἡ πλευρὰ αὐτοῦ ἡ ὁποία ἔχει ἄκρα τὰς δύο ἄλλας κορυφὰς αὐτοῦ, **κεῖνται ἀπέναντι** ἀλλήλων. (Σχ. 73.1).

Αἱ πλευραί, ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τοῦ τριγώνου αἱ κείμεναι ἀπέναντι τῶν κορυφῶν, Α, Β, Γ αὐτοῦ δύνανται νὰ συμβολίζωνται μὲ τὰ πεζὰ γράμματα α, β, γ, ἀντιστοίχως.

Ἐπὶ τοῦ προσημασμένου (προσανατολισμένου) ἐπιπέδου, τὸ ἐκ τῆς διατεταγμένης τριάδος σημείων (Α, Β, Γ) ὁριζόμενον τρίγωνον ὀνομάζεται **προσανατολισμένον τρίγωνον.**

Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ λέγεται **θετικῶς** ἢ **ἀρνητικῶς προσανατολισμένον** καθ' ὅσον ἡ ἐκ τῆς διατεταγμένης τριάδος (Α, Β, Γ) ὁριζομένη ἐπ' αὐτοῦ φορὰ εἶναι ἡ θετικὴ (Σχ. 73.1) ἢ ἡ ἀρνητικὴ (Σχ. 73.2) ἀντιστοίχως.



Σχ. 73.2

Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν, θετικῶς προσανατολισμένου τριγώνου ΑΒΓ, αἱ πλευραὶ ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ αὐτοῦ θεωροῦνται ὡς θετικῶς προσανατολισμένα εὐθ. τμήματα(1). Εἰς τὴν περίπτωσιν ἀρνητικῶς προσανατολισμένου τριγώνου αἱ ἀνωτέρω πλευραὶ θεωροῦνται ὡς ἀρνητικῶς προσανατολισμένα εὐθ. τμήματα.

Γωνίας τοῦ προσανατολισμένου τριγώνου ΑΒΓ ὀνομάζομεν τὰς κυρτὰς γωνίας (ΑΒ, ΑΓ), (ΒΓ, ΒΑ), (ΓΑ, ΓΒ).

Ἂν τὸ τρίγωνον εἶναι θετικῶς προσανατολισμένον, τότε αἱ ἀνωτέρω

---

(1) Καθορίζοντα τὴν θετικὴν φορὰν τῶν ἐπὶ τοῦ προσανατολισμένου ἐπιπέδου φορέων των, ἤτοι τῶν εὐθειῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ, θεωρουμένων ὡς ἀξόνων. Ἡ διάταξις, κατὰ ταῦτα, (Α, Β, Γ) καθορίζει τὸ πρόσημον τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

γωνίαι αὐτοῦ εἶναι θετικῶς προσανατολισμέναι. Εἰς τὴν ἀντίθετον περίπτωσι ἀρνητικῶς προσανατολισμένου τριγώνου, αἱ γωνίαι αὐτοῦ εἶναι ἀρνητικῶ προσανατολισμέναι.

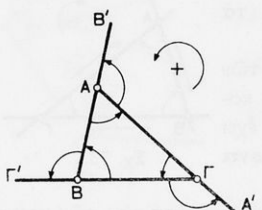
Ἐπὶ θετικῶς προσανατολισμένου τριγώνου, ἑκάστη γωνία αὐτοῦ ἔχε ὡς πρώτην πλευρὰν τὴν θετικὴν ἡμιευθεῖαν ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται καὶ ὡς δευτέ ραν τὴν ἀρνητικὴν ἡμιευθεῖαν ἐπὶ τῆς ὁποίας αὕτη κεῖται.

Αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου δύνανται νὰ συμβολίζωνται μὲ τὰ σύμβολα :

∢ Α, ∢ Β, ∢ Γ ἢ μὲ τὰ ∢ Α, ∢ Β, ∢ Γ, καθ᾽ ὅσον εἶναι ἀντιστοίχω θετικῶς ἢ ἀρνητικῶς προσανατολισμέναι.

ΕΞΩΤΕΡΙΚΑΙ ΓΩΝΙΑΙ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

74. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἔστωσαν ΑΒ′, ΒΓ′, ΓΑ′ αἱ ἡμιευθεῖαι αἱ ἀντικείμεναι τῶ ἡμιευθειῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ ἐπὶ τῶν ὁποίων κεῖνται α πλευραὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.



Σχ. 74

Αἱ γωνίαι (ΑΓ, ΑΒ′), (ΒΑ, ΒΓ′), (ΓΒ, ΓΑ′ ὀνομάζονται **ἐξωτερικαὶ γωνίαι** *τοῦ τριγώνου ΑΒ* (Σχ. 74).

Αἱ γωνίαι αὗται εἶναι ὁμοίως πρὸς τὰς γω νίας τοῦ τριγώνου προσανατολισμέναι.

Αἱ κατὰ κορυφὴν τῶν ἀνωτέρω ἐξωτερικῶ γωνιῶν ὀνομάζονται ἐπίσης ἐξωτερικαὶ γωνίαι το τριγώνου. Αἱ τελευταῖαι αὗται εἶναι ὁμοίως πρὸς τὰς πρώτας προσανατολι σμέναι.

ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΝ ΚΑΙ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΝ

75. ΟΡΙΣΜΟΣ. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ καὶ τὰ ἡμιεπίπεδα : (ΒΓ, Α) (ΓΑ,Β), (ΑΒ,Γ).

Ἡ τομὴ τῶν ἡμιεπιπέδων τούτων ὀνομάζεται **ἐσωτερικὸν** *τοῦ τριγώνου.*

Τὰ στοιχεῖα (σημεῖα) αὐτῆς ὀνομάζονται **ἐσωτερικὰ σημεῖα** τοῦ τριγώνου

Κάθε σημεῖον Ν τὸ ὁποῖον δὲν εἶναι σημεῖον τοῦ τριγώνου οὔτε ἐσωτερ κὸν σημεῖον αὐτοῦ θὰ ὀνομάζεται **ἐξωτερικὸν σημεῖον** τοῦ τριγώνου, τὸ δὲ σύνο λον τῶν ἐξωτερικῶν σημείων τοῦ τριγώνου **ἐξωτερικὸν** αὐτοῦ (1).

ΣΧΕΣΙΣ ΙΣΟΤΗΤΟΣ

76. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἂν δοθέντων ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου δύο τριγώνων, θεωρήσωμε μίαν ἀντιστοιχίαν μεταξὺ τῶν κορυφῶν των κατὰ τὴν ὁποίαν αἱ ἀντίστοιχο κορυφαὶ ἀντιστοιχοῦν διττῶς πρὸς ἀλλήλας καὶ κατὰ τὰ τρία ζεύγη, τὰ τρ γωνα ταῦτα θὰ ὀνομάζωνται **ὁμόλογα.**

Εἶναι εὐνόητον ὅτι, δοθέντων δύο οἱωνδήποτε τριγώνων ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου

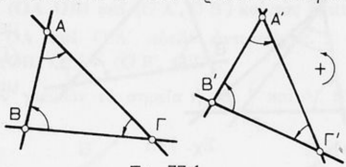
(1) Ἡ ὕπαρξις τοῦ *ἐσωτερικοῦ* καὶ τοῦ *ἐξωτερικοῦ* τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἀποδεικνύετ βάσει τῶν εἰσαχθέντων ἀξιωμάτων διατάξεως.

δύνανται ταῦτα νὰ θεωρηθοῦν ὁμόλογα κατὰ περισσοτέρους τοῦ ἑνὸς τρόπους.

Αἱ ἀντίστοιχοι, ἤ, ὅπως δυνάμεθα νὰ λέγωμεν, **ὁμόλογοι** κορυφαὶ συμβολίζονται συνήθως μὲ τὸ αὐτὸ γράμμα, ἐπιφυλασσομένου ἑνὸς τόνου ἢ δείκτου ἢ ἀστερίσκου διὰ τὰς κορυφὰς τοῦ ἑνὸς τριγώνου.

Ἂν εἶναι ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ δύο ὁμόλογα τρίγωνα, αἱ πλευραὶ ΒΓ καὶ Β΄Γ΄, οἱ ὁποῖαι ὁρίζονται ἀπὸ τὰς ὁμολόγους κορυφὰς Β, Β΄ καὶ Γ, Γ΄ θὰ ὀνομάζωνται **ὁμόλογοι**. **Ὁμόλογοι** θὰ ὀνομάζωνται ἐπίσης καὶ αἱ γωνίαι (ΑΒ, ΑΓ) καὶ (Α΄Β΄, Α΄Γ΄) κλπ.

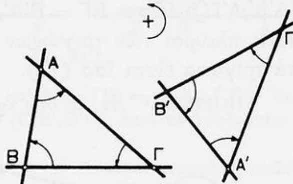
77. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Δύο ὁμόλογα τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ τοῦ προσανατολισμένου ἐπιπέδου ὀνομάζονται* **ὁμορρόπως ἴσα** *ἢ ἁπλῶς* **ἴσα,** *ὅταν αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ καὶ αἱ ὁμόλογοι γωνίαι αὐτῶν εἶναι ἴσαι,* **ἀντιρρόπως** *δὲ* **ἴσα** *ὅταν αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ αὐτῶν εἶναι ἴσαι καὶ αἱ ὁμόλογοι γωνίαι αὐτῶν ἀντίθετοι.*



Σχ. 77.1

Οὕτω, τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ (Σχ. 77.1) εἰς τὰ ὁποῖα εἶναι, ὡς ὑποθέτομεν: $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$,
$\sphericalangle A = \sphericalangle A'$, $\sphericalangle B = \sphericalangle B'$, $\sphericalangle \Gamma = \sphericalangle \Gamma'$,
εἶναι ἴσα πρὸς ἄλληλα.

Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ (Σχ. 77.2) εἰς τὰ ὁποῖα εἶναι, ὡς ὑποθέτομεν :
$\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$, $\sphericalangle A = -\sphericalangle A'$,
$\sphericalangle B = -\sphericalangle B'$, $\sphericalangle \Gamma = -\sphericalangle \Gamma'$, εἶναι ἀντιρρόπως ἴσα.



Σχ. 77.2

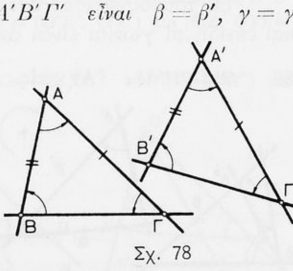
Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ ἕπεται ὅτι :

1. Δύο ἴσα τρίγωνα τοῦ ἐπιπέδου (1) εἶναι ὁμοίως (θετικῶς ἢ ἀρνητικῶς) προσανατολισμένα.

2. Ἡ κατὰ τὰ ἀνωτέρω ὁρισθεῖσα ἰσότης εἶναι μία ἰσοδυναμία, ἐπιτρέπουσα τὸν διαμερισμὸν τοῦ συνόλου τῶν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τριγώνων εἰς κλάσεις ἰσότητος ἐν αὐτῷ.

Διὰ τὴν ὕπαρξιν τῶν ἴσων τριγώνων ἀρκεῖ νὰ δεχθῶμεν τὸ ἑξῆς ἀξίωμα :

78. ΑΞΙΩΜΑ. *Ἂν εἰς δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ εἶναι* $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$, *καὶ* $(AB,\ A\Gamma) = (A'B',\ A'\Gamma')$, *τότε θὰ εἶναι καὶ* $(B\Gamma,\ BA) = (B'\Gamma',\ B'A')$, $(\Gamma A,\ \Gamma B) = (\Gamma'A',\ \Gamma'B')$. *Ἂν εἶναι* $(AB,\ A\Gamma) = -(A'B', A'\Gamma')$, *τότε θὰ εἶναι καὶ* $(B\Gamma,\ BA) = -(B'\Gamma', B'A')$, $(\Gamma A, \Gamma B) = -(\Gamma'A',\ \Gamma'B')$.



Σχ. 78

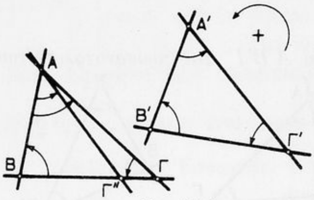
Ἤτοι, ἂν αἱ πλευραὶ τῶν τριγώνων εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι κατὰ τὰ δύο ζεύγη καὶ αἱ ὑπὸ τούτων περιεχόμεναι γωνίαι εἶναι ἴσαι, τότε καὶ

(1) Ἐκτὸς ἐναντίας ἐνδείξεως τὸ ἐπίπεδον θεωρεῖται προσανατολισμένον.

αἱ δύο ἄλλαι γωνίαι εἶναι ἴσαι. Ἂν αἱ περιεχόμεναι γωνίαι εἶναι ἀντίθετο τότε καὶ αἱ δύο ἄλλαι γωνίαι τῶν τριγώνων εἶναι ἀντιστοίχως ἀντίθετοι

Ἐκ τοῦ ἀξιώματος τούτου προκύπτουν αἱ ἀναγκαῖαι καὶ ἱκαναὶ συνθῆκα αἱ ἀναφερόμεναι εἰς τὴν ἰσότητα τῶν τριγώνων. Οὕτω ἔχομεν τὰ ἑξῆς θεωρή ματα :

79. ΘΕΩΡΗΜΑ. **Ἂν εἰς δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ εἶναι : $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma$ καὶ (ΑΒ, ΑΓ) = (Α΄Β΄, Α΄Γ΄) τὰ τρίγωνα ταῦτο εἶναι ἴσα.**



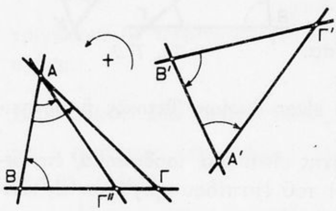
Σχ. 79.1

Ἀπόδειξις. Ἐκ τοῦ ἀξιώματος (78) ἔχο- μεν (Σχ. 79.1) ὅτι (ΒΓ, ΒΑ) = (Β΄Γ΄, Β΄Α΄) κα (ΓΑ,ΓΒ) = (Γ΄Α΄,Γ΄Β΄). Θεωροῦμεν ἐπὶ τῆς ἡ- μιευθείας ΒΓ τὸ σημεῖον Γ΄΄ ὥστε :

$$ΒΓ'' = Β'Γ'(= \alpha')$$

Ἐκ τῶν τριγώνων ΑΒΓ΄΄ καὶ Α΄Β΄Γ΄ ἔ- χομεν (78) ὅτι : (ΑΒ, ΑΓ΄΄) = (Α΄Β΄, Α΄Γ΄). Τοῦτο ὅμως εἶναι ἄτοπον (63) διότι, ἐξ ὑποθέσεως, εἶναι καὶ (ΑΒ,ΑΓ) = (Α΄Β΄,Α΄Γ΄). Ὥστε ΒΓ = Β΄Γ΄, ἤτοι $\alpha = \alpha'$. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι ἴσαι καὶ αἱ τρεῖς πλευραὶ τῶν τριγώνων ἀντιστοίχως, ἐπειδὴ δὲ καὶ αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι, τὰ τρίγωνα εἶσαι ἴσα (77).

ΠΟΡΙΣΜΑ· *Ἂν εἰς δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ εἶναι:* $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$ *καὶ (ΑΒ, ΑΓ) = —(Α΄Β΄, Α΄Γ΄) τότε τὰ τρί- γωνα εἶναι ἀντιρρόπως ἴσα.*

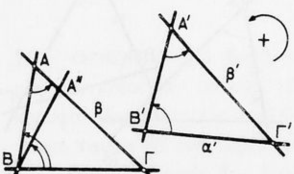


Σχ. 79.2

Πράγματι, ἐκ τοῦ ἀξιώματος (78) ἔχομεν (Σχ. 79.2) (ΒΓ, ΒΑ) = – (Β΄Γ΄, Β΄Α΄) καὶ (ΓΑ,ΓΒ) = – (Γ΄Α΄, Γ΄Β΄). Ἂν θεωρήσωμεν ἐπὶ τῆς ΒΓ τὸ σημεῖον Γ΄΄ ὥστε ΒΓ΄΄ = Β΄Γ΄ (= α΄), ἐκ τῶν τριγώνων ΑΒΓ΄΄ καὶ Α΄Β΄Γ΄ ἔχομεν : (ΑΒ, ΑΓ΄΄) = –(Α΄Β΄, Α΄Γ΄). Τοῦτο ὅμως εἶναι ἄτοπον (63), διότι εἶναι καὶ (ΑΒ, ΑΓ) = = – (Α΄Β΄, Α΄Γ΄). Ἑπομένως $\alpha = \alpha'$.

Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι αἱ πλευραὶ τῶν τριγώνων εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι καὶ ἐπειδὴ αἱ γωνίαι εἶναι ἀντίθετοι, τὰ τρίγωνα εἶναι ἀντιρρόπως ἴσα (77).

80. ΘΕΩΡΗΜΑ. **Ἂν εἰς δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ εἶναι : $\alpha = \alpha'$, (ΒΓ,ΒΑ) = (Β΄Γ΄, Β΄Α΄), (ΓΑ, ΓΒ) = (Γ΄Α΄, Γ΄Β΄), τότε τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα.**



Σχ. 80

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας ΓΑ τὸ σημεον Α΄΄ ὥστε ΓΑ΄΄ = Γ΄Α΄ (= β΄) καὶ ὑποθέτομεν Α΄΄ ≢ Α. Ἐκ τῶν ἴσων (79) τριγώ- νων Α΄΄ΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ ἔχομεν (Σχ. 80):

(ΒΓ,ΒΑ΄΄) = (Β΄Γ΄, Β΄Α). Τοῦτο ὅμως εἶναι ἄτοπον (63) διότι ἐξ ὑποθέσεως, εἶναι καὶ (ΒΓ,ΒΑ) = (Β′Γ′,Β′Α′). Ἑπομένως Α′′ ≡ Α, ἤτοι β = β′. Ἑπομένως τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα, συμφώνως πρὸς τὸ προηγούμενον θεώρημα (79).

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Ἂν εἰς δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α′Β′Γ′ εἶναι :*

$α = α'$, $(ΒΓ, ΒΑ) = -(Β'Γ', Β'Α')$, $(ΓΑ, ΓΒ') = -(Γ'Α', Γ'Β')$,

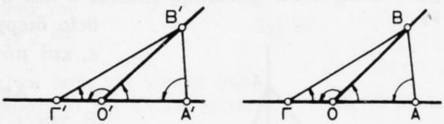
τότε τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἀντιρρόπως ἴσα.

Βασιζόμενοι ἤδη ἀποκλειστικῶς εἰς τὰς ἀνωτέρω δύο (79, 80) προτάσεις, τὰς ἀναφερομένας εἰς τὴν ἰσότητα τῶν τριγώνων, ἀποδεικνύομεν ὅτι :

81. ΘΕΩΡΗΜΑ. Θεωροῦμεν δύο κυρτὰς γωνίας (ΟΑ, ΟΒ) καὶ (Ο′Α′, Ο′Β′) καὶ τὰς ἡμιευθείας ΟΓ καὶ Ο′Γ′, τὰς ἀντικειμένας τῶν πλευρῶν ΟΑ καὶ Ο′Α′ αὐτῶν ἀντιστοίχως. Ἂν (ΟΑ, ΟΒ) = (Ο′Α′, Ο′Β′), τότε θὰ εἶναι καὶ (ΟΒ, ΟΓ) = (Ο′Β′, Ο′Γ′).

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν ἐπὶ τῶν πλευρῶν τῶν γωνιῶν τὰ σημεῖα Α, Β, Γ καὶ Α′, Β′, Γ′ ἀντιστοίχως ὥστε : ΟΑ = Ο′Α′, ΟΒ = Ο′Β′ καὶ ΟΓ = Ο′Γ′ (Σχ. 81.1). Τὰ τρίγωνα ΑΟΒ καὶ Α′Ο′Β′ εἶναι ἴσα (80).

Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι ΑΒ = Α′Β′ καὶ (ΑΒ,ΑΟ) = (Α′Β′, Α′Ο′). Ἐξ ἄλλου συμφώνως πρὸς τὸ ἀξίωμα (30) θὰ εἶναι : ΑΓ = Α′Γ′.

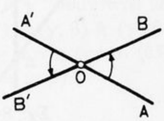


Σχ. 81.1

Ἑπομένως τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α′Β′Γ′ εἶναι ἴσα, καὶ λόγῳ τούτου θὰ εἶναι καὶ ΒΓ = Β′Γ′ καὶ (ΓΑ, ΓΒ) = (Γ′Α′, Γ′Β′). Ἐκ τῶν τριγώνων ΟΒΓ καὶ Ο′Β′Γ′ ἔχομεν (78) ὅτι (ΟΒ, ΟΓ) = (Ο′Β′,Ο′Γ′), ἤτοι τὸ ἀποδεικτέον.

Σημειοῦμεν ὅτι :

Ἡ πρότασις (70, Πόρ. 2), ἡ ἀναφερομένη εἰς τὴν ἰσότητα τῶν κατὰ κορυφὴν γωνιῶν εἶναι πόρισμα τῆς ἀνωτέρω προτάσεως. Πράγματι, ἂν εἶναι (ΟΑ, ΟΒ) καὶ (ΟΑ′,ΟΒ′) αἱ θεωρούμεναι (Σχ. 81.2) κατὰ κορυφὴν γωνίαι, ἡ ΟΑ εἶναι ἡ ἀντικειμένη τῆς πλευρᾶς ΟΑ′ τῆς γωνίας (ΟΒ,ΟΑ′) καὶ ἡ ΟΒ′ ἡ ἀντικειμένη τῆς πλευρᾶς ΟΒ τῆς γωνίας αὐτῆς, ἑπομένως, δυνάμει τοῦ προηγουμένου θεωρήματος, θὰ εἶναι (ΟΑ,ΟΒ) = (ΟΑ′, ΟΒ′).



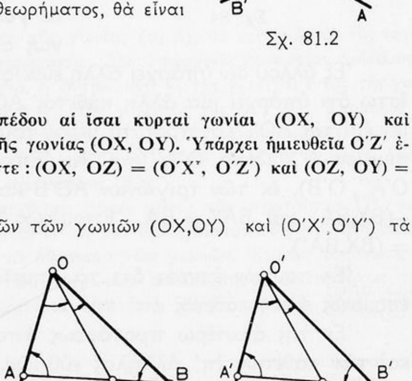
Σχ. 81.2

82. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἔστωσαν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου αἱ ἴσαι κυρταὶ γωνίαι (ΟΧ, ΟΥ) καὶ (Ο′Χ′, Ο′Υ′) καὶ μία ἡμιευθεῖα ΟΖ ἐσωτερικὴ τῆς γωνίας (ΟΧ, ΟΥ). Ὑπάρχει ἡμιευθεῖα Ο′Ζ′ ἐσωτερικὴ τῆς γωνίας (Ο′Χ′, Ο′Υ′) τοιαύτη ὥστε : (ΟΧ, ΟΖ) = (Ο′Χ′, Ο′Ζ′) καὶ (ΟΖ, ΟΥ) = = (Ο′Ζ′, Ο′Υ′).

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν ἐπὶ τῶν πλευρῶν τῶν γωνιῶν (ΟΧ,ΟΥ) καὶ (Ο′Χ′,Ο′Υ′) τὰ σημεῖα Α, Β καὶ Α′, Β′ ὥστε ΟΑ = Ο′Α′ καὶ ΟΒ = Ο′Β′ (Σχ. 82).

Τὰ τρίγωνα ΟΑΒ καὶ Ο′Α′Β′ εἶναι (79) ἴσα. Ἑπομένως : ΑΒ = Α′Β′, (ΑΒ, ΑΟ) = = (Α′Β′,Α′Ο′) καὶ (ΒΟ,ΒΑ) = (Β′Ο′,Β′Α′). Ἔστω Γ τὸ ἐπὶ τῆς ΑΒ σημεῖον τῆς ΟΖ (61, Πόρισμα 2)

Θεωροῦμεν τὸ σημεῖον Γ′ τοῦ εὐθ. τμήματος Α′Β′ διὰ τὸ ὁποῖον Α′Γ′ = ΑΓ. Ἡ Ο′Γ′



Σχ. 82

εἶναι ἡ ζητουμένη ἡμιευθεῖα O΄Z΄. Πράγματι, ἐκ τῶν $ΑΓ = Α'Γ'$, καὶ $ΑΒ = Α'Β'$ ἕπεται (30) ὅτι $ΒΓ = Β'Γ'$. Ἐκ τῶν τριγώνων ΟΑΓ καὶ Ο΄Α΄Γ΄ ($ΑΟ = Α'Ο', ΑΓ = Α'Γ'$ καὶ $(ΑΓ, ΑΟ) = (Α'Γ', Α'Ο'))$, ἕπεται (78) ὅτι $(ΟΑ, ΟΓ) = (Ο'Α', Ο'Γ')$ ἤτοι $(ΟΧ, ΟΖ) = (Ο'Χ', Ο'Ζ')$, καὶ ἐκ τῶν τριγώνων ΟΓΒ καὶ Ο΄Γ΄Β΄ ὅτι $(ΟΖ, ΟΥ) = (Ο'Ζ', Ο'Υ')$.

ΟΡΘΗ ΓΩΝΙΑ — ΕΥΘΕΙΑΙ ΚΑΘΕΤΟΙ ΕΠ' ΑΛΛΗΛΑΣ

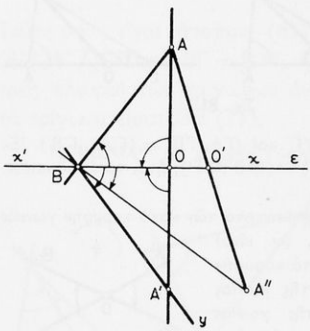
83. ΟΡΙΣΜΟΣ. Θεωροῦμεν δύο ἐφεξῆς γωνίας (ΟΑ,ΟΒ) καὶ (ΟΑ΄,ΟΒ) τῶν ὁποίων αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ εἶνα ἀντικείμεναι.

Ἂν αἱ ἀνωτέρω γωνίαι εἶναι ἀντίθετοι, τότε ἑκάστη τούτων ὀνομάζεται **ὀρθή.**

Συμβολικῶς : $(ΟΑ, ΟΒ) = \frac{\pi}{2}$.

Αἱ εὐθεῖαι ἐπὶ τῶν ὁποίων κεῖνται αἱ πλευραὶ τῆς ὀρθῆς γωνίας ὀνομάζονται **κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας.**

84. ΘΕΩΡΗΜΑ. Δοθείσης εὐθείας ε καὶ σημείου Α ἐκτὸς αὐτῆς, ὑπάρχει εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ Α καὶ κάθετος ἐπὶ τὴν ε, καὶ μόνον μία.



Σχ. 84

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον Β τῆς ε, τὴν ἡμιευθεῖαν ΒΥ, πρὸς τὸ μέρος τῆς ε πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἡ ΒΑ, ὥστε $(ΒΧ, ΒΥ) = -(ΒΧ, ΒΑ)$ καὶ τὸ σημεῖον Α΄ τῆς ἡμιευθείας ΒΥ ὥστε $ΒΑ' = ΒΑ$ (Σχ. 84). Τὰ σημεῖα Α καὶ Α΄ κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς ε. Ἑπομένως ὑπάρχει (24) σημεῖον τῆς ε μεταξὺ τῶν Α καὶ Α΄. Ἔστω Ο τὸ σημεῖον τοῦτο. Ἐκ τῶν τριγώνων ΟΑΒ καὶ ΟΑ΄Β ἔχομεν (79) ὅτι $(ΟΑ, ΟΒ) = -(ΟΑ', ΟΒ)$, ἤτοι ὅτι αἱ γωνίαι αὗται εἶναι (83) ὀρθαὶ καὶ ἑπομένως αἱ εὐθεῖαι ΑΑ΄ καὶ ε κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας.

Ἐξ ἄλλου δὲν ὑπάρχει ἄλλη εὐθεῖα διὰ τοῦ Α κάθετος ἐπὶ τὴν ε. Πράγματι, ἔστω ὅτι ὑπάρχει μία ἄλλη κάθετος ΑΟ΄ ἐπὶ τὴν ε διὰ τοῦ Ο καὶ ἂς θεωρήσωμεν ἐπὶ τῆς ΑΟ΄, καὶ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Ο΄ πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται τὸ Α, τὸ σημεῖον Α΄΄ ὥστε $Ο'Α'' = Ο'Α$. Ἐπειδή, ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $(Ο'Α, Ο'Β) = Ο'Α'', Ο'Β)$, ἐκ τῶν τριγώνων ΑΟ΄Β καὶ Α΄΄Ο΄Β θὰ ἔχωμεν (79) ὅτι $(ΒΧ, ΒΑ'') = -(ΒΧ, ΒΑ)$ καὶ $ΒΑ'' = ΒΑ$. Ἑπομένως (27) $ΒΑ'' = ΒΑ'$ καὶ (64): $(ΒΧ, ΒΑ'') = (ΒΧ, ΒΑ')$.

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι τὰ σημεῖα Α΄ καὶ Α΄΄ συμπίπτουν. Δὲν ὑπάρχει ἑπομένως ἄλλη κάθετος ἐπὶ τὴν ε.

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω προτάσεως ἀποδεικνύεται ἡ ὕπαρξις τῆς ὀρθῆς γωνίας καὶ τῶν καθέτων ἐπ' ἀλλήλας εὐθειῶν.

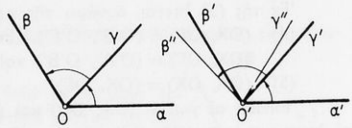
85. ΟΡΙΣΜΟΣ. Τὸ ἐπὶ τῆς εὐθείας ε σημεῖον Ο τῆς ἐκ τοῦ Α καθέτου ἐπὶ τὴν ε (84) ὀνομάζεται *ὀρθὴ προβολὴ* ἢ ἁπλῶς *προβολὴ* τοῦ σημείου Α ἐπὶ τὴν ε.

Ἡ ἐκ τοῦ Α κάθετος ΑΑ′ ἐπὶ τὴν ε ὀνομάζεται *προβάλλουσα* τὸ Α ἐπὶ τὴν ε. Τὸ συμμετρικὸν Α′ τοῦ Α ὡς πρὸς τὸ Ο ὀνομάζεται *συμμετρικὸν* τοῦ Α ὡς πρὸς τὴν ε.

86. ΘΕΩΡΗΜΑ. Θεωροῦμεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τρεῖς ἡμιευθείας ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ ἀγομένας ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο καὶ τρεῖς ἡμιευθείας Ο′Α′, Ο′Β′, Ο′Γ′ ἀπὸ σημείου Ο′ αὐτοῦ.

Ἂν εἶναι (ΟΑ, ΟΓ) = (Ο′Α′, Ο′Γ′) καὶ (ΟΓ, ΟΒ) = (Ο′Γ′, Ο′Β′) τότε θὰ εἶναι καὶ (ΟΑ, ΟΒ) = (Ο′Α′, Ο′Β′).

Ἀπόδειξις. Διὰ τὴν συντομίαν συμβολίζομεν μὲ τὰ γράμματα α, β, γ καὶ α′, β′, γ′ τὰς ἀνωτέρω τριάδας ἡμιευθειῶν ἀντιστοίχως. Οὕτω ἔχομεν ἐξ ὑποθέσεως : (α,γ) = (α′, γ′) καὶ (γ,β) = (γ′,β′). Πρέπει νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι (α,β) = = (α′,β′). Διὰ τὴν ἀπόδειξιν θεωροῦμεν πρῶτον τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν δὲν ὑπάρχουν ἡμιευθεῖαι ἀπὸ τοῦ Ο ἀνήκουσαι καὶ εἰς τὰς δύο γωνίας (α,γ) καὶ (γ,β), οὔτε ἡμιευθεῖαι ἀπὸ τοῦ Ο′ ἀνήκουσαι καὶ εἰς τὰς δύο γωνίας (α′,γ′) καὶ (γ′,β′)



Σχ. 86

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ γ κεῖται ἐντὸς τῆς γωνίας (α,β).

Θεωροῦμεν πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται ἡ α′, πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται ἡ β′, τὴν ἡμιευθεῖαν β″ (Σχ. 86) ὥστε :

(1) (α′, β″) = (α, β)

καὶ ἐντὸς τῆς γωνίας (α′, β″), τὴν ἡμιευθεῖαν γ″ ὥστε :

(2) (α′, γ″) = (α, γ). Συμφώνως πρὸς τὸ θεώρημα (82) θὰ εἶναι :

(3) (γ″,β″) = (γ, β). Ὅμως ἐξ ὑποθέσεως εἶναι :

(4) (α′, γ′) = (α, γ). Ἐκ τῶν (2) καὶ (4) ἕπεται, κατὰ τὸ ἀξίωμα (64), ὅτι (α′,γ″) = (α′, γ′) καὶ ἐξ αὐτῆς, κατὰ τὸ ἀξίωμα (63), ὅτι γ″ = γ′, ἤτοι ὅτι ἡ γ″ συμπίπτει μὲ τὴν γ′. Οὕτω ἔχομεν ὅτι (γ″, β″) = (γ′, β″) καὶ λόγῳ τῆς (3) ὅτι: (γ′, β″) = (γ, β) ἢ (γ′, β″) = = (γ′, β′), διότι ἐξ ὑποθέσεως (γ, β) = (γ′, β′). Ἐκ τῆς τελευταίας αὐτῆς ἕπεται (63) ὅτι β′ = β″. Ἐξ αὐτῆς καὶ τῆς (1) ἕπεται ἡ ἀποδεικτέα ἰσότης (α′, β′) = (α,β).

Σημειοῦμεν ὅτι :

1. Ἂν ἡ γ δὲν κεῖται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας (α, β), θὰ κεῖται ἐντὸς τῆς κατὰ κορυφήν της, ἀφοῦ, εἰς τὴν θεωρουμένην περίπτωσιν, δὲν ὑπάρχουν ἡμιευθεῖαι ἀνήκουσαι καὶ εἰς τὰς δύο γωνίας (α, γ) καὶ (γ, β). Οὕτω, ἡ ἀντικειμένη γ_1 τῆς γ κεῖται ἐντὸς τῆς γωνίας (α, β) καί, δι' ὅμοιον λόγον ἡ ἀντικειμένη γ_1' τῆς γ′ ἐντὸς τῆς (α′, β′). Ἑπομένως ἡ ὑποπερίπτωσις αὕτη ἀνάγεται, βάσει τῆς προτάσεως (81) εἰς τὴν προηγουμένην.

2. Εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ γωνία (α,γ) κεῖται ἐντὸς τῆς (γ,β), ἡ ἀποδεικτέα πρότασις εἶναι ἄμεσος συνέπεια τῆς προτάσεως (82).

3. Ἡ ἀνωτέρω πρότασις (86), ἀποδειχθεῖσα βάσει μόνον τῶν προτάσεων (79) καὶ (80), ἐπὶ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων, δὲν εἶναι εἰ μὴ μία ἄλλη διατύπωσις τοῦ ἀξιώματος (68) ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ ὁποίου ὡρίσθη (69) τὸ **ἄθροισμα** τῶν γωνιῶν. Ἐπειδὴ τὰ ἀνωτέρω (79 καὶ 80) θεωρήματα ἐπὶ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων ἀπεδείχθησαν ἀνεξαρτήτως τῆς ἐννοίας τοῦ ἀθροίσματος τῶν γωνιῶν, ἡ ἀνωτέρω πρότασις (86) ἀπεδείχθη βάσει μόνον τῶν ἀξιωμάτων (63 καὶ 64) τῆς ἰσότητος.

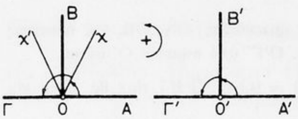
87. ΘΕΩΡΗΜΑ. Δύο ὁμοίως προσανατολισμέναι ὀρθαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι.

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν (ΟΑ,ΟΒ) καὶ (Ο′Α′, Ο′Β′) δύο ὁμοίως προσανατολισμέναι ὀρθαὶ γωνίαι καὶ ΟΓ καὶ Ο′Γ′ αἱ ἡμιευθεῖαι αἱ ἀντικείμεναι τῶν ΟΑ καὶ Ο′Α′ ἀντιστοίχως.

Ἔχομεν ἐκ τῆς ὑποθέσεως (κατὰ τὴν ὁποίαν αἱ γωνίαι (OA,OB) καὶ (O'A', O'B') εἶναι ὀρθαὶ) ὅτι :

(1) (OA, OB) = (OB, OΓ), (2) (O'A', O'B') = (O'B', O'Γ')

ἤτοι ὅτι ἑκάστη τῶν εἰς τὰς ἀνωτέρω ἰσότητας ἐμφανιζομένων γωνιῶν εἶναι ὀρθή.



Σχ. 87—1

Πρέπει νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι (OA, OB) = (O'A',O'B').

Διὰ τὴν ἀπόδειξιν ὑποθέτομεν ὅτι αἱ ἀνωτέρω γωνίαι δὲν εἶναι ἴσαι καὶ θεωροῦμεν πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας AΓ πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται ἡ ἡμιευθεῖα OB (Σχ. 87.1), τὴν ἡμιευθεῖαν OX ὥστε :

(3) : (OA, OX) = (O'A', O'B').

Ἡ OX θὰ κεῖται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας (OA, OB) ἢ τῆς (OB, OΓ). Ἔστω ὅτι κεῖται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς (OA, OB).

Ἐκ τῆς (3) ἕπεται, δυνάμει τῆς προτάσεως (81), ὅτι :

(4) : (OX, OΓ) = (O'B', O'Γ'). Ἐκ τῆς (4) καὶ τῆς (2) ἕπεται :

(OX, OΓ) = (O'A', O'B') καὶ λόγῳ τῆς (3) ὅτι :

(5) : (OA, OX) = (OX, OΓ).

Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι (OA, OB) καὶ (OB, OΓ) εἶναι, ἐξ ὑποθέσεως, ἴσαι καὶ ἔχομεν εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς (OA, OB) τὴν ἡμιευθεῖαν OX, ὑπάρχει, δυνάμει τῆς προτάσεως (82). εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας (OB, OΓ) μία ἡμιευθεῖα OX' καὶ μία μόνον, ὥστε :

(OX', OΓ) = (OA, OX) καὶ (OB, OX') = (OX, OB)

Ἐκ τῆς πρώτης τῶν ἀνωτέρω καὶ τῆς (5) ἕπεται (64) (1) ὅτι

(OX', OΓ) = (OX, OΓ) ἢ (OΓ, OX') = (OΓ, OX).

Τὸ ἀνωτέρω ὅμως συμπέρασμα, λόγῳ τοῦ ἀξιώματος (63), εἶναι ἄτοπον. Ἐπομένως ἡ πρότασις ἀπεδείχθη.

Εὐνόητον ὅτι ἡ ἀπόδειξις εἶναι ἡ αὐτὴ καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν, ἡ θεωρηθεῖσα ἡμιευθεῖα OX ὑποτεθῇ κειμένη εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας (OB, OΓ).

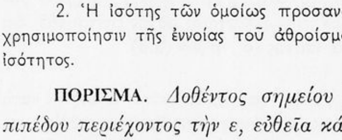
Σημειοῦμεν ὅτι :

1. Ἂν αἱ θεωρούμεναι (87) ὀρθαὶ γωνίαι εἶναι ἀντιθέτως προσανατολισμέναι, θὰ εἶναι ἀντίθετοι.

2. Ἡ ἰσότης τῶν ὁμοίως προσανατολισμένων ὀρθῶν γωνιῶν, ἀπεδείχθη χωρὶς τὴν χρησιμοποίησιν τῆς ἐννοίας τοῦ ἀθροίσματος τῶν γωνιῶν, βασισθεῖσα εἰς τὰ ἀξιώματα τῆς ἰσότητος.

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Δοθέντος σημείου A ἐπὶ εὐθείας ε, ὑπάρχει, ἐπὶ τυχόντος ἐπιπέδου περιέχοντος τὴν ε, εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὴν ε καὶ μόνον μία.*

Πράγματι, ἂν ἐπὶ τοῦ ἀνωτέρω ἐπιπέδου θεωρήσωμεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν ε' καὶ τυχὸν σημεῖον B' αὐτοῦ κείμενον ἐκτὸς τῆς ε, ὑπάρχει, συμφώνως πρὸς τὸ θεώρημα (84), εὐθεῖα B'A' διὰ τούτου κάθετος ἐπὶ τὴν ε' καὶ μόνον μία (Σχ. 87.2).



Σχ. 87—2

Ἂν διὰ τοῦ σημείου A τῆς ε θεωρήσωμεν τὴν ἡμιευθεῖαν AB ὥστε : (AX, AB)=(A'X',A'B'), ἡ γωνία (AX, AB) θὰ εἶναι ὀρθή, ὡς ἴση πρὸς τὴν ὀρθὴν γωνίαν (A'X',A'B').

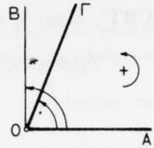
Ἐξ ἄλλου δὲν ὑπάρχει ἄλλη διὰ τοῦ A κάθετος AB_1 ἐπὶ τὴν ε διότι εἰς

(1) Μεταβατικὴ ἰδιότης τῆς ἰσότητος.

τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θὰ ἦτο : $(AX, AB) = (AX, AB_1)$, ἐνῶ αἱ ΑΒ καὶ AB_1 κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ε. Τοῦτο ὅμως ἀποκλείεται ἐκ τοῦ ἀξιώματος (63).

ΜΕΤΡΟΝ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ — ΓΩΝΙΑ ΟΞΕΙΑ ΚΑΙ ΑΜΒΛΕΙΑ

Ἡ ὀρθὴ γωνία λαμβάνεται ὡς **μέτρον** [1] τῶν γωνιῶν.

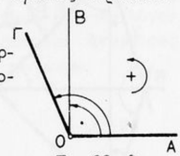


Σχ. 88.1

88. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ὀξεῖα *ὀνομάζεται κάθε κυρτὴ γωνία μικροτέρα τῆς ὁμοίως προσανατολισμένης ὀρθῆς γωνίας.* (Σχ. 88.1)

Ἀμβλεῖα *ὀνομάζεται κάθε κυρτὴ γωνία μεγαλυτέρα τῆς ὁμοίως προσανατολισμένης ὀρθῆς γωνίας.* (Σχ. 88.2)

Δύο γωνίαι τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι ἴσον πρὰς μίαν ὀρθὴν γωνίαν θὰ ὀνσμάζωνται **συμπληρωματικαί**, Ἑκατέρα τούτων θὰ ὀνομάζεται **συμπλήρωμα** τῆς ἄλλης.



Σχ. 88—2

ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΝ

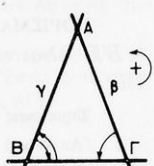
89. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ ὀνομάζεται* **ἰσοσκελὲς** *ὅταν δύο τουλάχιστον ἐκ τῶν πλευρῶν του εἶναι ἴσαι.* [2]

Ἂν καὶ αἱ τρεῖς πλευραὶ τοῦ τριγώνου εἶναι ἴσαι τὸ τρίγωνον ὀνομάζεται **ἰσόπλευρον** [3].

90. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν δύο πλευραὶ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ἴσαι, τότε αἱ ἀπέναντι αὐτῶν γωνίαι εἶναι ἴσαι, καὶ ἀντιστρόφως.

Ἤτοι : $\beta = \gamma \Leftrightarrow (B\Gamma, BA) = (\Gamma A, \Gamma B)$. Ἐθέσαμεν $AB = \gamma$, $A\Gamma = \beta$.

Ἀπόδειξις. Ἔστω $\beta = \gamma$. Εἰς τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΓΒ (Σχ. 90) ἔχομεν : $\gamma = \beta$, $\beta = \gamma$ καὶ $(AB, A\Gamma) = -(A\Gamma, AB)$. Ἑπομένως θὰ εἶναι (79) : $(B\Gamma, BA) = -(\Gamma B, \Gamma A)$, ἤτοι $(B\Gamma, BA) = (\Gamma A, \Gamma B)$. Ἀντιστρόφως : ἔστω $(B\Gamma, BA) = (\Gamma A, \Gamma B)$.



Σχ. 90

---

(1) Ὑπὸ τὴν ἔννοιαν τῆς πρὸς αὐτὴν συγκρίσεως τῶν λοιπῶν γωνιῶν τοῦ ἐπιπέδου (Βλέπε σχετικοὺς ὁρισμοὺς (66)). Ὑπὸ τὴν ἔννοιαν αὐτὴν θεωρουμένη ἡ ὀρθὴ γωνία δύναται νὰ ὀνομάζεται καὶ *μοναδιαία γωνία*.
Εἰς τὴν Πρακτικὴν Γεωμετρίαν ὡς μέτρον τῶν γωνιῶν ἐλήφθη ἡ *μοῖρα* ἢ ὁ *βαθμὸς* Ἡ ὀρθὴ γωνία, ἡ ὁποία εἶναι τὸ μέτρον τῶν γωνιῶν εἰς τὴν Θεωρητικὴν Γεωμετρίαν, δύναται νὰ ὀνομάζεται καὶ *ἀπόλυτον μέτρον* αὐτῶν. Ἡ ἐκλογὴ τῆς ὀρθῆς γωνίας ὡς τοῦ ἀπολύτου μέτρου τῶν γωνιῶν ἐπιβάλλεται διὰ λόγους οἱ ὁποῖοι θέλουν γίνη κατανοητοὶ κατὰ τὴν περαιτέρω σπουδὴν τῆς Γεωμετρίας. Ἐκ τῆς σπουδῆς ταύτης θέλει κατανοηθῆ καὶ ὁ λόγος διὰ τὸν ὁποῖον δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχωμεν ἕνα ἀπόλυτον μέτρον διὰ τὰ εὐθ. τμήματα.

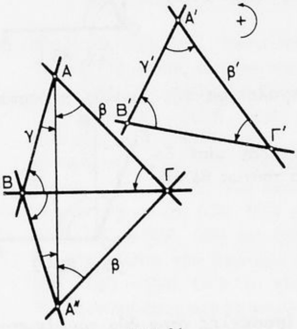
(2) Ἡ ὕπαρξις τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου προκύπτει ἐκ τοῦ ἀξιώματος (26).

(3) Ἡ ὕπαρξις τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου θὰ ἀποδειχθῇ μετὰ τὴν εἰσαγωγὴν τῆς ἐννοίας τοῦ κύκλου.

Εἰς τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΓΒ ἔχομεν ΒΓ = ΓΒ, (ΒΓ, ΒΑ) = – (ΓΒ, ΓΑ) καὶ (ΓΑ,ΓΒ) = –(ΒΓ,ΒΑ). Ἑπομένως θὰ εἶναι (80) $\beta = \gamma$.

91. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν εἰς δύο ὁμοίως προσανατολισμένα τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄, εἶναι $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$, τότε τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα.

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν, πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας ΒΓ πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἡ κορυφὴ Α, τὴν ἡμιευθεῖαν ΒΧ ὥστε : (ΒΓ, ΒΧ) = – (Β′ Γ′, Β′Α′) καὶ ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας αὐτῆς ΒΧ τὸ σημεῖον Α′′ ὥστε ΒΑ′′ = Β′Α′ (=γ').



Σχ. 91

Εἶναι ΒΑ′′ = ΒΑ (=γ), διότι ἐξ ὑποθέσεως $\gamma = \gamma'$ (Σχ. 91).

Ἐκ τῶν τριγώνων Α′′ΒΓ κσὶ Α′Β′Γ′ ἔχομεν (80) ὅτι Α′′Γ = β' = β καὶ (Α′′Β, Α′′Γ) = = – (Α′Β′, Α′Γ′). Ἐκ τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων ΒΑΑ′′ καὶ ΓΑΑ′′ ἔχομεν ἀντιστοίχως (90) :

(1) (ΑΒ, ΑΑ′′) = (Α′′Α, Α′′Β) καὶ

(2) (ΑΑ′′, ΑΓ) = (Α′′Γ, Α′′Α) ἢ (ΑΑ′′, ΑΓ) = = – (ΑΑ′′, Α′′Γ).

Διὰ προσθέσεως τῶν (1) καὶ (2) κατὰ μέλη εὑρίσκομεν : (ΑΒ,ΑΓ) = = (Α′′Γ, Α′′Β). Ἀλλὰ εἶναι καὶ (Α′Β′, Α′Γ′) = (Α′′Γ, Α′′Β)

Ἐκ τῶν δύο τελευταίων ἕπεται ὅτι : (ΑΒ,ΑΓ) = (Α′Β′, Α′Γ′), ἤτοι ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α′Β′Γ′ εἶναι ἴσα (79).

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Ἂν εἰς δύο ἀντιθέτως προσανατολισμένα τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α′Β′Γ′ εἶναι* $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$, *τότε τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἀντιρρόπως ἴσα.*

Σημείωσις : Ἐκ τῆς ἀνωτέρω προτάσεως προκύπτει ὅτι :

Ἂν Α καὶ Β εἶναι δύο οἱαδήποτε σημεῖα διάφορα ἀλλήλων, τότε :

Δοθέντος ἑνὸς σημείου Μ μὴ κειμένου κειμένου ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ, ὑπάρχει σημεῖον Μ′, διάφορον τοῦ Μ, καὶ ἕνα μόνον ὥστε Μ′Α = ΜΑ καὶ Μ′Β = ΜΒ καὶ εἶναι τοῦτο τὸ συμμετρικὸν (85) τοῦ Μ ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΒ.

Ἀντιθέτως, δοθέντος σημείου Μ, κειμένου ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ, δὲν ὑπάρχει σημεῖον Μ′, διάφορον τοῦ Μ, ὥστε νὰ ἱκανοποιοῦνται αἱ ἀνωτέρω δύο ἰσότητες. Ἑπομένως :

Ἡ εὐθεῖα ΑΒ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς τὸ σύνολον τῶν σημείων Μ, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἐκ τῆς συνθήκης :

$M \in AB \Rightarrow$ Δὲν ὑπάρχει $M' \neq M$ ὥστε : $M'A = MA$ καὶ $M'B = MB$

Ἀνάλογος τῆς ἀνωτέρω πρότασις δύναται, νὰ διατυπωθῇ διὰ τὸ ἐπίπεδον.

Αἱ ἀνωτέρω προτάσεις δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς ὁρισμοί.

Ἕνα Γεωμετρικὸν σχῆμα, θεωρούμενον ὡς σύνολον σημείων, θὰ ὀνομάζεται **ἐπίπεδον σχῆμα,** ὅταν ὅλα τὰ σημεῖα αὐτοῦ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

Διὰ τῶν προηγουμένων προτάσεων ἐξητάσθη ἡ ἰσότης τῶν εὐθ. τμημάτων, τῶν γωνιῶν καὶ τῶν τριγώνων τοῦ ἐπιπέδου. Καθ' ὅσον ἀφορᾷ τὴν ἰσότητα τῶν **σχημάτων** ἐν γένει ἡ λεπτομερὴς ἐξέτασις αὐτῆς θέλει γίνει εἰς ἑπομένην τάξιν. Ἐν προκειμένῳ περιοριζόμεθα νὰ σημειώσωμεν ὅτι :

Δύο σχήματα τοῦ ἐπιπέδου θὰ ὀνομάζωνται **ἴσα**, ὅταν τὰ σημεῖα αὐτῶν δύνανται νὰ ἀντιστοιχοῦν ἀνὰ δύο ὥστε τὰ ἀντίστοιχα (ὁριζόμενα ἀπὸ ζεύγη ἀντιστοίχων σημείων) εὐθ. τμήματα καὶ αἱ ἀντίστοιχοι γωνίαι νὰ εἶναι ἴσαι. Ἀναλόγως πρὸς τὰ ἀνωτέρω θέλει ὁρισθῆ ἡ ἰσότης τῶν μὴ ἐπιπέδων σχημάτων.

Ἀναφερόμενοι εἰς τὰς μέχρι τοῦδε γνώσεις μας ἐπὶ τῆς ἰσότητος δύο τριγώνων τοῦ ἐπιπέδου παρατηροῦμεν ὅτι αὕτη δὲν ἐβασίσθη ἐπὶ τῆς ἐννοίας τῆς μετακινήσεως (μεταθέσεως) τοῦ τριγώνου, ἀλλὰ εἰς τὰ ἀνεξάρτητα αὐτῆς ἀξιώματα τῆς ἰσότητος.

Ἑρμηνεύοντες, ἐποπτικῶς, τὴν ἀνωτέρω ἔννοιαν διὰ δύο τρίγωνα τοῦ ἐπιπέδου παρατηροῦμεν ὅτι :

Δύο ὁμορρόπως ἴσα τρίγωνα τοῦ ἐπιπέδου δύνανται διὰ μετακινήσεως τοῦ ἑνὸς τούτων ἐν τῷ ἐπιπέδῳ νὰ ἀχθοῦν εἰς σύμπτωσιν.

Ἂν τὰ τρίγωνα εἶναι ἀντιρρόπως ἴσα, διὰ νὰ ἀχθοῦν εἰς σύμπτωσιν, θέλει ἀπαιτηθῆ μετακίνησις τοῦ ἑνὸς τῶν τριγώνων ἥτις φέρει τοῦτο ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον **εἰς τὴν Γεωμετρίαν τοῦ Ἐπιπέδου,** τὰ τρίγωνα ταῦτα ὠνομάσθησαν **ἀντιρρόπως ἴσα.** Θεωρούμενα εἰς τὸν Χῶρον εἶναι δύο διάφοροι θέσεις τοῦ αὐτοῦ τριγώνου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἐπὶ τῶν ἡμιευθειῶν τῶν ἀντικειμένων τῶν ΑΒ καὶ ΑΓ τὰ σημεῖα Β′ καὶ Γ′ ἀντιστοίχως ὥστε ΑΒ′ = ΑΒ καὶ ΑΓ′ = ΑΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι (1) Β′Γ′ = ΒΓ καὶ (2) (ΒΓ, ΒΑ) = (Β′Γ′, Β′Α) καὶ (ΓΑ, ΓΒ) = (Γ′Α, Γ′Β′)

2. Θεωροῦμεν ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) καὶ ἐπὶ τῶν ἴσων πλευρῶν ΑΓ καὶ ΑΒ αὐτοῦ τὰ σημεῖα Β′, Γ′ ἀντιστοίχως ὥστε ΑΒ′ = ΑΓ′. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ΒΒ′ = ΓΓ′ καὶ ὅτι (ΒΓ, ΒΒ′) = (ΓΓ′, ΓΒ)

3. Θεωροῦμεν ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) καὶ δύο σημεῖα Β′ καὶ Γ′ τῶν εὐθειῶν ΑΓ καὶ ΑΒ ἀντιστοίχως ὥστε : (ΒΓ, ΒΒ′) = (ΓΓ′, ΓΒ). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ΒΒ′ = ΓΓ′.

4. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ καὶ δύο σημεῖα Β′ καὶ Γ′ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΑΓ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: ἂν ΒΒ′ = ΓΓ′ καὶ (ΒΓ, ΒΒ′) = (ΓΓ′, ΓΒ), τότε ΑΒ = ΑΓ ἤτοι ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές.

5. Θεωροῦμεν: κυρτὴν γωνίαν (ΑΥ, ΑΖ), ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΥ δύο σημεῖα Β καὶ Γ′ καὶ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΖ δύο σημεῖα Β′ καὶ Γ ὥστε ΑΒ = ΑΒ′ καὶ ΑΓ′ = ΑΓ. Ἔστω Δ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν εὐθειῶν ΒΓ καὶ Β′Γ′. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : (ΑΔ, ΑΒ) = –(ΑΔ, ΑΓ).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

ΤΟ ΑΞΙΩΜΑ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΚΑΙ ΑΙ ΣΥΝΕΠΕΙΑΙ ΑΥΤΟΥ

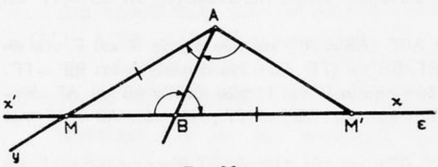
ΕΥΘΕΙΑΙ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΙ

92. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Δύο εὐθεῖαι α καὶ β ὀνομάζονται* **παράλληλοι,** *ὅταν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ δὲν ἔχουν κοινὸν σημεῖον* (1).

Ἡ κατωτέρω πρότασις ἀναφέρεται εἰς τὴν ὕπαρξιν τῶν παραλλήλων εὐθειῶν.

93. ΘΕΩΡΗΜΑ. **Δοθείσης εὐθείας ε καὶ σημείου Α κειμένου ἐκτὸς αὐτῆς, ὑπάρχει εὐθεῖα διὰ τοῦ Α παράλληλος πρὸς τὴν ε.**

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν σημεῖον Β τῆς ε. Ἂν εἶναι Χ ἕνα ἄλλο, ἐκτὸς τοῦ Β, σημεῖον τῆς εὐθείας ε, θεωροῦμεν πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας ΑΒ πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται τὸ Χ, τὴν γωνίαν (ΑΒ, ΑΥ) τὴν ἴσην πρὸς των γωνίαν (ΒΑ, ΒΧ) (Σχ. 93). Θὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΥ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ε. Διὰ τὴν ἀπόδειξιν ὑποθέτομεν ὅτι τὴν τέμνει εἰς σημεῖον Μ (Σχ. 93) τοιοῦτον ὥστε τὸ Β, ἔστω, νὰ κεῖται μεταξὺ τῶν Μ καὶ Χ.



Σχ. 93

Θεωροῦμεν ἐπὶ τῆς ε τὸ σημεῖον Μ′ ὥστε τὸ Β νὰ κεῖται μεταξὺ τῶν Μ καὶ Μ′ καὶ ἐπὶ πλέον νὰ εἶναι ΒΜ′ = ΑΜ. Τὰ τρίγωνα ΑΒΜ καὶ ΒΑΜ′ εἶναι (79) ἴσα. Πράγματι εἶναι : ΑΒ = ΒΑ, ΑΜ = ΒΜ′, καὶ (ΑΒ,ΑΜ) = (ΒΑ, ΒΜ′).

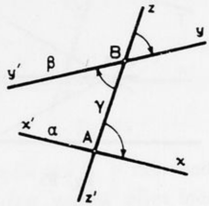
Ἑπομένως θὰ εἶναι : (ΒΜ, ΒΑ) = (ΑΜ′, ΑΒ).

Ἀλλὰ αἱ γωνίαι (ΒΜ, ΒΑ) καὶ (ΒΑ, ΒΜ′) εἶναι παραπληρωματικαί, ἤτοι ἐφεξῆς τῶν ὁποίων αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ κεῖνται ἐπ᾽ εὐθείας. Ἑπομένως καὶ αἱ ἴσαι ἀντιστοίχως πρὸς αὐτὰς γωνίαι : (ΑΒ, ΑΜ) καὶ (ΑΜ′, ΑΒ) εἶναι (81) παραπληρωματικαί, ἤτοι αἱ ἡμιευθεῖαι ΑΜ καὶ ΑΜ′ εἶναι ἀντικείμεναι. Ἀλλὰ τὸ συμπέρασμα τοῦτο εἶναι ἄτοπον (8), διότι αἱ εὐθεῖαι ε καὶ ΜΜ′, αἱ ὁποῖαι εἶναι διάφοροι ἀλλήλων, ἔχουν δύο κοινὰ σημεῖα : τὰ Μ καὶ Μ′.

---

(1) Οὐδὲν ἀξίωμα ἐπὶ τῶν παραλλήλων ἀπαιτεῖται διὰ τὴν κατοχύρωσιν τῶν ἀποδείξεων τῶν εἰς τὴν *ἰσότητα* ἀναφερομένων προτάσεων.

94. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἂν θεωρήσωμεν δύο εὐθείας α καὶ β καὶ μίαν τρίτην εὐθεῖαν ε τέμνουσαν αὐτάς, ἕκαστον τῶν κοινῶν σημείων Α καὶ Β, τῆς ε μὲ τὰς α καὶ β ἀντιστοίχως, εἶναι κορυφὴ τεσσάρων κυρτῶν γωνιῶν, ὁριζομένων ἀπὸ τὰς ἀνωτέρω εὐθείας α, β καὶ ε (Σχ. 94).



Σχ. 94

Μία οἱαδήποτε ἐκ τῶν ἀνωτέρω ὀκτὼ γωνιῶν θὰ ὀνομάζεται **ἐσωτερικὴ** ἢ **ἐντός**, ἂν ἔχῃ ὡς πλευρὰν μίαν τῶν ἡμιευθειῶν ΑΒ, ἢ ΒΑ καὶ **ἐξωτερικὴ** ἢ **ἐκτὸς** ἂν ἔχῃ ὡς πλευρὰν μίαν τῶν ἡμιευθειῶν τῶν ἀντικειμένων τῆς ΑΒ ἢ τῆς ΒΑ.

Δύο γωνίαι ἐκ τῶν ἀνωτέρω, ἔχουσαι κορυφὰς ἀντιστοίχως τὰ Α καὶ Β θὰ ὀνομάζωνται :

Ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, ὅταν κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς τεμνούσης ε καὶ εἶναι καὶ αἱ δύο ἐσωτερικαί.

Τοιαῦται γωνίαι εἶναι π.χ. αἱ (ΑΒ,ΑΧ) καὶ (ΒΥ,ΒΑ).

Ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη. Τοιαῦται εἶναι π.χ. αἱ γωνίαι (ΑΧ, ΑΖ΄) καὶ (ΒΖ, ΒΥ).

Ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη. Τοιαῦται εἶναι π.χ. αἱ γωνίαι (ΑΒ, ΑΧ) καὶ (ΒΖ, ΒΥ).

Ἐντὸς ἐναλλάξ. Τοιαῦται εἶναι π.χ. αἱ γωνίαι (ΑΒ, ΑΧ) καὶ (ΒΑ, ΒΥ΄).

Ἐκτὸς ἐναλλάξ. Τοιαῦται εἶναι π.χ. αἱ γωνίαι (ΑΧ,ΑΖ΄), καὶ (ΒΥ,ΒΖ).

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω, ἡ πρότασις (93) διατυποῦται ὡς ἑξῆς :

Ἂν μία εὐθεῖα ε τέμνῃ δύο εὐθείας α καὶ β καὶ ἐκ τῶν ὁριζομένων κυρτῶν γωνιῶν, δύο ἐντὸς ἐναλλὰξ εἶναι ἴσαι, τότε αἱ εὐθεῖαι α καὶ β εἶναι παράλληλοι.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ. *1. Ἂν δύο ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι εἶναι ἴσαι ἢ δύο ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί, τότε αἱ α καὶ β εἶναι παράλληλοι.*

2. Ἂν δύο εὐθεῖαι α καὶ β εἶναι κάθετοι ἐπὶ μίαν εὐθεῖαν ε, τότε αἱ α καὶ β εἶναι παράλληλοι.

ΑΞΙΩΜΑ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ.

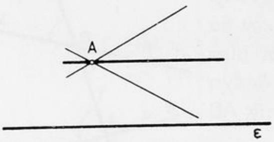
Ἀπεδείχθη (93) ὅτι :

Δοθείσης ἐπὶ ἐπιπέδου εὐθείας ε καὶ σημείου Α ἐκτὸς αὐτῆς, ὑπάρχει διὰ τοῦ Α εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν ε.

Τὸ ὅτι μόνον μία τοιαύτη παράλληλος ὑπάρχει δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἀποδειχθῇ βάσει τῶν εἰσαχθέντων ἀξιωμάτων. Ἡ σχετικὴ πρότασις εἰσήχθη ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου (300 π.Χ.) εἰς τὸ σύστημα τῶν ἀξιωμάτων τῆς Γεωμετρίας του ὡς **αἴτημα :**

95. ΑΞΙΩΜΑ. *Δοθείσης εὐθείας ε καὶ σημείου Α, ἐκτὸς αὐτῆς, μόνον μία διὰ τοῦ Α παράλληλος πρὸς τὴν ε ἄγεται* (1).

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ. *1. Ἂν ἑκάστη ἐκ δύο παραλλήλων εὐθειῶν α καὶ β εἶναι παράλληλος πρὸς μίαν εὐθεῖαν ε, τότε αἱ α καὶ β εἶναι παράλληλοι.*



Σχ. 95

Πράγματι, ἂν αἱ α καὶ β ἐτέμνοντο, θὰ ἦσαν δύο διάφοροι ἀλλήλων παράλληλοι πρὸς τὴν ε, ἀγόμεναι διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου (τοῦ κοινοῦ των σημείου).

2. Ἂν δύο εὐθεῖαι α καὶ β εἶναι παράλληλοι, τότε τὰ σημεῖα ἑκάστης τούτων κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ἄλλης.

Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι :

Κάθε σημεῖον τὸ ὁποῖον κεῖται πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας α πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται ἡ β καὶ πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας β πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται ἡ α, ἤτοι κάθε σημεῖον τῆς τομῆς τῶν δύο ἡμιεπιπέδων τὰ ὁποῖα ἔχουν ἀντιστοίχως ὡς ἀρχικὰς εὐθείας τὰς α καὶ β καὶ περιέχουν ἀντιστοίχως τὰς β καὶ α, **κεῖται** μεταξὺ τῶν α καὶ β.(2)

96. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν μία εὐθεῖα ε τέμνη δύο παραλλήλους εὐθείας α καὶ β, τότε ἐκ τῶν ὁριζομένων κυρτῶν γωνιῶν δύο οἱαδήποτε ἐντὸς ἢ ἐκτὸς ἐναλλὰξ εἶναι ἴσαι.

---

(1) Τὸ ἀξίωμα τοῦτο εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ε' *αἴτημα* τῶν *«Στοιχείων»* τοῦ Εὐκλείδου, ἔνθα εὑρίσκεται ὑπὸ τὴν ἑξῆς διατύπωσιν :

«Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες».

Ἡ ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου εἰσαγωγὴ τῆς ἀνωτέρω (95) προτάσεως ὡς *αἰτήματος* καὶ οὐχὶ ὡς *θεωρήματος*, ὡς τοῦτο ἐθεωρήθη ἐπὶ πολλοὺς αἰῶνας, ἀποτελεῖ μίαν ἀπόδειξιν τῆς μεγαλοφυΐας του.

Ἔπρεπε νὰ φθάσωμεν εἰς τὸν 19ον αἰῶνα διὰ νὰ διαπιστωθῇ ὅτι ἂν ἤθελεν ἐπιχειρηθῇ ἀπόδειξις τοῦ αἰτήματος τοῦ Εὐκλείδου διὰ τῆς μεθόδου τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς, ὑποτεθῇ δηλαδὴ ὅτι διὰ σημείου Α, κειμένου ἐκτὸς εὐθείας ε, διέρχονται περισσότεραι τῆς μιᾶς εὐθεῖαι μὴ τέμνουσαι τὴν ε, οὐδεμία ἀντίφασις πρὸς τὰς εἰσαχθείσας προτάσεις προέρχεται. Οὕτω, μόλις κατὰ τὸ δεύτερον τέταρτον τοῦ 19ου αἰῶνος ἱδρύεται ὑπὸ τῶν N. I. Lobachewsky (1793 - 1856) καὶ J. Bolyai (1802 - 1860) *μία πρώτη μὴ Εὐκλείδειος Γεωμετρία* εἰς τὴν ὁποίαν ἀντὶ τοῦ ἀξιώματος τοῦ Εὐκλείδου εἰσάγεται τὸ ἀκόλουθον :

«Ἐπὶ ἐπιπέδου (Π), διὰ σημείου Α, μὴ κειμένου ἐπὶ εὐθείας ε, διέρχονται περισσότεραι τῆς μιᾶς εὐθεῖαι μὴ τέμνουσαι τὴν ε».

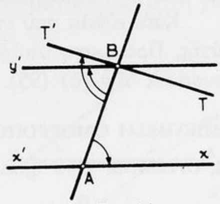
Δοθέντος ὅτι, ὅπως καὶ εἰς τὴν Εἰσαγωγὴν ἐσημειώσαμεν, αἱ μεταξὺ τῶν Γεωμετρικῶν στοιχείων σχέσεις ἀναφέρονται εἰς τὸν «Γεωμετρικὸν Χῶρον» ἤτοι εἰς νοητικὸν κατασκεύασμα ὅλως διάφορον τοῦ «αἰσθητοῦ Χώρου», δὲν πρέπει νὰ θεωρηθῇ ὅτι ἡ Γεωμετρία τοῦ N. I. Lobachewsky ἀρνεῖται τὴν Εὐκλείδειον Γεωμετρίαν (Βλέπε σχετικῶς Εἰσαγωγῆς παράγρ. 5).

Καθ' ὅσον ἀφορᾷ τὰς μέχρι τῆς εἰσαγωγῆς τοῦ ἀξιώματος τοῦ Εὐκλείδου εἰσαχθείσας καὶ ἀποδειχθείσας προτάσεις, σημειοῦμεν ὅτι αὗται ἰσχύουν καὶ εἰς τὴν Γεωμετρίαν τοῦ N. I. Lobachewsky.

Διὰ τῆς εἰσαγωγῆς, ἐξ ἄλλου, τοῦ ἀξιώματος τοῦ Εὐκλείδου προέρχεται ἁπλοποίησις τῶν ἀποδεικτικῶν μέσων καὶ διευκολύνεται ἡ ἵδρυσις τῆς Γεωμετρίας ἥτις, ἐκ τοῦ ἱδρυτοῦ της, ὀνομάζεται *Εὐκλείδειος Γεωμετρία* ἢ *Γεωμετρία τοῦ Εὐκλειδείου Χώρου.*

(2) Ἡ ἕνωσις τῆς τομῆς αὐτῆς καὶ τῶν εὐθειῶν α καὶ β, θεωρουμένων ὡς συνόλων σημείων, ὀνομάζεται, συνήθως, **ταινία**, ὁριζομένη ἀπὸ τὰς α καὶ β.

Ἀπόδειξις. Ἀρκεῖ νὰ ἀποδειχθῇ ἡ πρότασις διὰ δύο ἐντὸς-ἐναλλὰξ γωνίας π.χ. τὰς (ΑΒ,ΑΧ) καὶ (ΒΑ,ΒΥ'). Ὑποθέτομεν ὅτι αἱ γωνίαι αὐταὶ δὲν εἶναι ἴσαι καὶ θεωροῦμεν τὴν ἡμιευθεῖαν ΒΤ' (Σχ. 96) ὥστε : (ΒΑ,ΒΤ') = (ΑΒ,ΑΧ). Ἡ ΒΤ' εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν α (94), ἤτοι μία δευτέρα, ἐκτὸς τῆς β, παράλληλος πρὸς τὴν α διὰ τοῦ σημείου Β. Τοῦτο ὅμως ἀποκλείεται ἐκ τοῦ ἀξιώματος τοῦ Εὐκλείδου.



Σχ. 96

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ. *1. Ἂν αἱ εὐθεῖαι α καὶ β εἶναι παράλληλοι καὶ ἡ γ τέμνουσα αὐτὰς τότε, δύο οἱαιδήποτε ἐντὸς - ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι εἶναι ἴσαι καὶ δύο οἱαιδήποτε ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί.*

2. Κάθε εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὴν μίαν ἐκ δύο παραλλήλων εὐθειῶν, εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ἄλλην.

3. Δύο οἱαιδήποτε εὐθεῖαι κάθετοι ἀντιστοίχως ἐπὶ δύο παραλλήλους εὐθείας εἶναι παράλληλοι.

4. Δύο εὐθεῖαι κάθετοι ἀντιστοίχως ἐπὶ δύο τεμνομένας εὐθείας, τέμνονται.

5. Ἂν δύο εὐθεῖαι α καὶ β τέμνωνται ὑπὸ τρίτης ε καὶ ἐκ τῶν σχηματιζομένων κυρτῶν γωνιῶν δύο ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι ἔχουν ἄθροισμα μικρότερον τῶν δύο ὀρθῶν, τότε αἱ α καὶ β τέμνονται καὶ μάλιστα πρὸς τὸ μέρος τῆς ε πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖνται αἱ θεωρούμεναι γωνίαι. (1)

ΔΙΕΥΘΥΝΣΙΣ ΕΙΣ ΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟΝ

97. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Τὸ σύνολον τῶν εὐθειῶν τοῦ ἐπιπέδου ἑκάστη τῶν ὁποίων εἶναι παράλληλος πρὸς μίαν εὐθεῖαν δ αὐτοῦ ὀνομάζεται* **διεύθυνσις** *ἐν τῷ ἐπιπέδῳ.*

Αἱ εὐθεῖαι τοῦ ἀνωτέρω συνόλου, θεωρούμεναι ἀνὰ δύο εἶναι παράλληλοι (95, Πόρισμα 1).

Μία διεύθυνσις ἐν τῷ ἐπιπέδῳ εἶναι, κατὰ ταῦτα, ἕνα ὑποσύνολον τῶν εὐθειῶν αὐτοῦ, ὁριζόμενον ἀπὸ μίαν εὐθεῖαν δ αὐτοῦ καὶ συμβολιζόμενον, συνήθως, μὲ τὸ σύμβολον (δ) ἢ (Δ).

Ἂν, γενικεύοντες τὴν ἔννοιαν τῶν παραλλήλων, δεχθῶμεν ὅτι ἡ σύμπτωσις δύο εὐθειῶν εἶναι μία περίπτωσις παραλληλίας, τὸ ἐκ τῆς δ ὁριζόμενον κατὰ τ' ἀνωτέρω ὑποσύνολον, εἶναι μία **κλάσις ἰσοδυναμίας** ἐν τῷ συνόλῳ τῶν εὐθειῶν τοῦ ἐπιπέδου. (2)

---

(1) Αἴτημα τοῦ Εὐκλείδου.

(2) Ἰσχύουν αἱ ἰδιότητες : ἀνακλαστική, συμμετρική καὶ μεταβατική : διατυπούμεναι συμβολικῶς ὡς κάτωθι :

$\forall\ \alpha,\ \beta \in (\delta) : \alpha \parallel \alpha, \quad \alpha \parallel \beta \Rightarrow \beta \parallel \alpha$ καί, $\alpha \parallel \beta$ καὶ $\beta \parallel \gamma \Rightarrow \alpha \parallel \gamma$

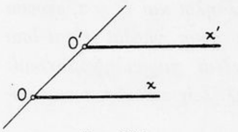
Μία τοιαύτη κλάσις ἰσοδυναμίας ἐν τῷ ἐπιπέδῳ δύναται νὰ ὀνομάζεται καὶ κλάσις παραλληλίας εἰς αὐτό.

Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι κάθε εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν δ ἀνήκει εἰς τὴν κλάσιν ἢ εἰς τὴν διεύθυνσιν (δ). Οὕτω :

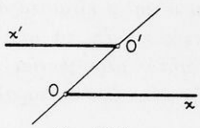
Κάθε εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου ὁρίζεται ἀπὸ ἕνα σημεῖον Α καὶ τὴν διεύθυνσιν αὐτῆς. Πράγματι, ὑπάρχει μία μόνον εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ Α καὶ ἀνήκουσα εἰς τὴν (δ) (95).

ΗΜΙΕΥΘΕΙΑΙ ΟΜΟΡΡΟΠΟΙ ΚΑΙ ΑΝΤΙΡΡΟΠΟΙ

98. ΟΡΙΣΜΟΣ. Δύο ἡμιευθεῖαι ΟΧ καὶ Ο'Χ', κείμεναι ἀντιστοίχως ἐπὶ εὐθειῶν τῆς αὐτῆς διευθύνσεως, λέγομεν ὅτι εἶναι *τῆς αὐτῆς* ἢ *ἀντιθέτου* φορᾶς, ὅταν κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπὸ τὰ ἀρχικὰ σημεῖα Ο καὶ Ο' αὐτῶν (Σχ. 98.1) ἢ ἑκατέρωθεν αὐτῆς (Σχ. 98.2) ἀντιστοίχως. Ἂν αἱ ἡμιευθεῖαι κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, θὰ λέγωμεν ὅτι εἶναι τῆς αὐτῆς φορᾶς, ὅταν ἡ μία τούτων περιέχῃ τὴν ἄλλην καὶ ἀντιθέτου φορᾶς εἰς τὴν ἀντίθετον περίπτωσιν.



Σχ. 98.1



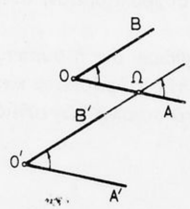
Σχ. 98.2

Δύο ἡμιευθεῖαι τῆς αὐτῆς φορᾶς δύνανται νὰ ὀνομάζωνται **ὁμόρροποι,** τῆς δὲ ἀντιθέτου φορᾶς **ἀντίρροποι.**

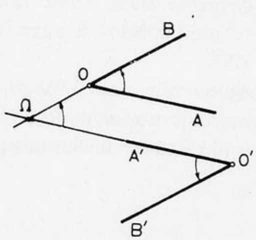
99. ΘΕΩΡΗΜΑ. 1. Ἂν αἱ πλευραὶ δύο ὁμοίως προσανατολισμένων γωνιῶν εἶναι ἀντιστοίχως παράλληλοι, τότε αἱ γωνίαι αὗται εἶναι ἴσαι.

2. Ἂν αἱ πλευραὶ δύο ἀντιθέτως προσανατολισμένων γωνιῶν εἶναι ἀντιστοίχως παράλληλοι, τότε ἑκάστη τούτων καὶ ἡ ἀντίθετος τῆς ἄλλης εἶναι παραπληρωματικαί.

Ἀπόδειξις. 1. Ἔστωσαν (ΟΑ, ΟΒ) καὶ (Ο'Α', Ο'Β') δύο ὁμοίως προσανατολισμέναι γωνίαι τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ εἶναι ἀντιστοίχως παράλληλοι (Σχ. 99.1). Παρατηροῦμεν ὅτι ἂν εἶναι Ω τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν εὐθειῶν ἐπὶ τῶν ὁποίων κεῖνται αἱ πλευραὶ ΟΑ καὶ Ο'Β', ἑκάστη τῶν θεωρουμένων γωνιῶν εἶναι (96, Πόρισμα 1) ἴση πρὸς τὴν γωνίαν (ΩΑ, ΩΒ'').



Σχ. 99.1



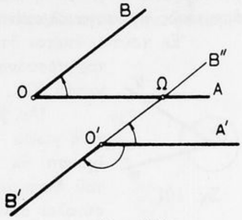
Σχ. 99.2

Δι' ὅμοιον λόγον εἶναι ἴσαι αἱ γωνίαι (Σχ. 99.2) : (ΟΑ, ΟΒ) καὶ (Ο'Α', Ο'Β'). Πράγματι, ἑκάστη τούτων εἶναι ἴση πρὸς τὴν (ΩΑ',ΩΒ).

2. Ἂν αἱ γωνίαι (ΟΑ, ΟΒ) καὶ (Ο'Α', Ο'Β') τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ εἶναι

ἀντιστοίχως παράλληλοι, εἶναι ἀντιθέτως προσανατολισμέναι (Σχ. 99.3) θεωροῦμεν τὴν ἡμιευθεῖαν O'B'' τὴν ἀντικειμένην τῆς O'B' καὶ παρατηροῦμεν ὅτι ἡ γωνία (O'A',O'B'') εἶναι (99.1) ἴση πρὸς τὴν (OA, OB).

Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι ἡ ἀντίθετος (O'B'', O'A') τῆς (O'A', O'B'') καὶ ἡ (O'A', O'B') εἶναι παραπληρωματικαί, ἤτοι ὁμοίως προσανατολισμέναι ἐφεξῆς γωνίαι τῶν ὁποίων αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ O'B' καὶ O'B'' εἶναι ἡμιευθεῖαι ἀντικείμεναι (Σχ. 99.3).



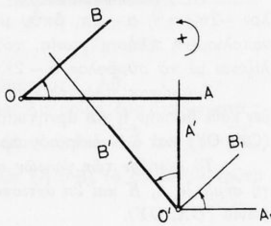
Σχ. 99.3

Σημειοῦμεν ὅτι, ὅταν αἱ πλευραὶ τῶν θεωρουμένων γωνιῶν εἶναι ἀντιστοίχως ὁμόρροποι ἢ ἀντιστοίχως ἀντίρροποι καὶ κατὰ τὰ δύο ζεύγη, τότε αἱ γωνίαι εἶναι ὁμοίως προσανατολισμέναι καὶ ἀντιστρόφως:

Ἂν δύο γωνίαι ἔχουσαι τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἀντιστοίχως παραλλήλους καὶ κατὰ τὰ δύο ζεύγη εἶναι ἴσαι τότε αἱ πλευραὶ τῶν γωνιῶν τούτων εἶναι ἀντιστοίχως ὁμόρροποι ἢ ἀντίρροποι καὶ κατὰ τὰ δύο ζεύγη.

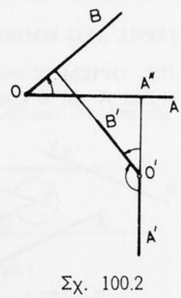
100. ΘΕΩΡΗΜΑ. 1. Ἂν αἱ πλευραὶ δύο ὁμοίως προσανατολισμένων γωνιῶν εἶναι ἀντιστοίχως κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας τότε αἱ γωνίαι αὗται εἶναι ἴσαι.

2. Ἂν αἱ πλευραὶ δύο ἀντιθέτως προσανατολισμένων γωνιῶν εἶναι ἀντιστοίχως κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας, τότε ἑκάστη τούτων καὶ ἡ ἀντίθετος τῆς ἄλλης εἶναι παραπληρωματικαί.



Σχ. 100.1

Ἀπόδειξις. 1. Ἔστωσαν (OA,OB) καὶ (O'A',O'B') δύο ὁμοίως προσανατολισμέναι γωνίαι τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ εἶναι ἀντιστοίχως κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας (Σχ. 100.1). Θεωροῦμεν τὰς ἡμιευθείας $O'A_1$ καὶ $O'B_1$ τὰς ὁμορρόπους ἀντιστοίχως τῶν OA καὶ OB. Αἱ γωνίαι $(O'A_1,O'B_1)$ καὶ (OA,OB) εἶναι (99) ἴσαι. Ἀρκεῖ ἐπομένως νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ γωνίαι $(O'A_1,O'B_1)$ καὶ (O'A',O'B') εἶναι ἴσαι. Τοῦτο ὅμως προκύπτει ἀμέσως ἐκ τοῦ ὅτι ἑκάστη τῶν ἀνωτέρω γωνιῶν εἶναι συμπλήρωμα τῆς γωνίας (OB_1,OA'). Πράγματι ἡ OA' ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν OA εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλόν της $O'A_1$, ἤτοι ἡ γωνία $(O'A_1,O'A')$ εἶναι ὀρθὴ καὶ δι' ὅμοιον λόγον εἶναι ὀρθὴ καὶ ἡ $(O'B_1,O'B')$.



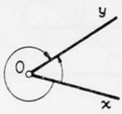
Σχ. 100.2

2. Ἂν αἱ γωνίαι, τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ εἶναι κάθετοι ἀντιστοίχως, εἶναι ἀντιθέτως προσανατολισμέναι (Σχ. 100.2), τότε ἡ παραπληρωματικὴ (O'B',O'A'') τῆς (O'A', O'B') ἐκ τούτων, εἶναι ἀντίθετος τῆς (OA,OB), ἤτοι ἡ ἀντίθετος τῆς (OA, OB) καὶ ἡ (O'A', O'B') εἶναι παραπληρωματικαί.

ΓΕΝΙΚΗ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΗ ΓΩΝΙΑ

101. ΟΡΙΣΜΟΣ. Συμφώνως πρὸς τὰ ἀναφερόμενα εἰς τὸν ὁρισμὸν τῆς προσανατολισμένης γωνίας (53), ἐκ τοῦ ζεύγους (ΟΧ, ΟΥ) ὁρίζονται δύο γωνίαι : ἡ κυρτὴ καὶ ἡ μὴ κυρτὴ γωνία (ΟΧ, ΟΥ). Ἂν ἡ μία τούτων εἶναι θετικῶς προσανατολισμένη, ἡ ἄλλη θὰ εἶναι ἀρνητικῶς προσανατολισμένη.

Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι ἐκ τοῦ ζεύγους (ΟΧ, ΟΥ) ὁρίζεται μία μόνον γωνία δοθέντος προσανατολισμοῦ, ἤτοι **μία μόνον** θετικὴ (θετικῶς προσανατολισμένη) γωνία (ΟΧ, ΟΥ) καὶ **μία μόνον** ἀρνητικὴ γωνία (ΟΧ, ΟΥ).



Σχ. 101

Ἂν, γενικεύοντες τὴν ἔννοιαν τῆς γωνίας, δεχθῶμεν ὅτι θετικὴ ἢ ἀρνητικὴ γωνία (ΟΧ, ΟΥ) εἶναι κάθε γωνία, θετικὴ ἢ ἀρνητικὴ ἀντιστοίχως, ἔχουσα ὡς πρώτην πλευρὰν τὴν ΟΧ καὶ ὡς δευτέραν τὴν ΟΥ, τότε ἐκ τοῦ διατεταγμένου ζεύγους (ΟΧ, ΟΥ) ὁρίζεται ἕνα σύνολον θετικῶν καὶ ἕνα σύνολον ἀρνητικῶν γωνιῶν.

Ἐκ τῶν θετικῶν γωνιῶν (ΟΧ, ΟΥ) μικροτέρα εἶναι ἡ μικροτέρα τῆς θετικῶς προσανατολισμένης πλήρους γωνίας, θετικὴ γωνία (ΟΧ, ΟΥ).

Ἐκ τῶν ἀρνητικῶν γωνιῶν (ΟΧ, ΟΥ) μεγαλυτέρα εἶναι ἡ ἀντίθετος τῆς θετικῶς προσανατολισμένης γωνίας (ΟΥ, ΟΧ).

Μία τυχοῦσα ἐκ τῶν θετικῶν γωνιῶν (ΟΧ, ΟΥ) ἀποτελεῖται ἀπὸ τὴν μικροτέραν ἐκ τούτων καὶ ἕνα ἀκέραιον πολλαπλάσιον τῆς θετικῶς προσανατολισμένης πλήρους γωνίας. Ἂν τὴν μικροτέραν τῶν θετικῶν γωνιῶν (ΟΧ, ΟΥ) συμβολίσωμεν μὲ τὸ σύμβολον α, τότε ἡ τυχοῦσα τῶν θετικῶν γωνιῶν (ΟΧ, ΟΥ) θὰ συμβολίζεται μὲ τὸ σύμβολον $\alpha + K \cdot 2\pi$ ἢ $\alpha + 2K\pi$ (ὅπου Κ τυχὼν φυσικὸς ἀριθμός).

Ἂν τὴν μικροτέραν τῶν ἀρνητικῶν γωνιῶν (ΟΧ, ΟΥ) συμβολίσωμεν μὲ τὸ σύμβολον $-2\pi+\alpha$ ἢ $\alpha - 2\pi$, ὅπου μὲ τὸ σύμβολον -2π συμβολίζεται (65) ἡ ἀρνητικῶς προσανατολισμένη πλήρης γωνία, τότε ἡ τυχοῦσα τῶν ἀρνητικῶν γωνιῶν (ΟΧ, ΟΥ) θὰ συμβολίζεται μὲ τὸ σύμβολον $\alpha - 2K\pi$ ὅπου Κ τυχὼν φυσικὸς ἀριθμός.

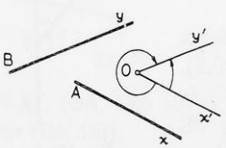
Συμφώνως πρὸς τὰ ἀνωτέρω μὲ τὸ σύμβολον $\alpha + 2K\pi$ δυνάμεθα νὰ συμβολίζωμεν κάθε θετικὴν ἢ καὶ ἀρνητικὴν γωνίαν (ΟΧ, ΟΥ), ὅπου α εἶναι ἡ μικροτέρα θετικὴ γωνία (ΟΧ, ΟΥ) καὶ ὁ Κ ἀκέραιος ἀριθμὸς (θετικὸς ἢ ἀρνητικὸς) .

Τὸ σύνολον τῶν γωνιῶν αἱ ὁποῖαι συμβολίζονται μὲ τὸ σύμβολον : $\alpha + 2K\pi$, *ἔνθα εἰς τὰ σύμβολα α, Κ καὶ 2π ἀντιστοιχοῦν αἱ ἀνωτέρω ἀναφερόμεναι ἔννοιαι, ὀνομάζεται* **γενικὴ γωνία** *(ΟΧ, ΟΥ).*

Εὐνόητον εἶναι ὅτι τὸ σύμβολόν α δύναται νὰ παριστᾷ μίαν οἱανδήποτε ἐκ τῶν γωνιῶν (ΟΧ, ΟΥ) ἤτοι ὄχι μόνον τὴν ἐλαχίστην θετικὴν ἐκ τούτων ἀλλὰ τὴν γωνίαν $\alpha + 2K'\pi$ π.χ. ὅπου Κ' ἀκέραιος ἀριθμὸς θετικὸς ἢ ἀρνητικός. Πράγματι, ἂν ἀντὶ τῆς ἐλαχίστης γωνίας α θεωρηθῇ ἡ $\alpha' = \alpha + 2K'\pi$ ὅπου $K' = 5$, τότε ἡ γωνία π.χ. $\alpha - 4\pi$ εἶναι τῆς μορφῆς $\alpha' + 2K\pi$, διότι διὰ $\alpha' = \alpha + 10\pi$, εὑρίσκομεν ὅτι $\alpha - 4\pi = \alpha' + 2K\pi$, ὅταν $K = -7$.

ΓΩΝΙΑ ΔΥΟ ΗΜΙΕΥΘΕΙΩΝ

102. ΟΡΙΣΜΟΣ Θεωροῦμεν δύο ἡμιευθείας ΑΧ καὶ ΒΥ τοῦ ἐπιπέδου τῶν ὁποίων τὰ ἀρχικὰ σημεῖα Α καὶ Β εἶναι διάφορα ἀλλήλων καὶ τὰς ἡμιευθείας ΟΧ' καὶ ΟΥ', τὰς ὁμορρόπους ἀντιστοίχως πρὸς τὰς ἐνωτέρω καὶ ἀγομένας ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο τοῦ ἐπιπέδου (Σχ. 102.1).



Σχ. 102.1

Τὴν γωνίαν (ΟΧ' ΟΥ') ὀνομάζομεν γωνίαν τῶν ἡμιευθειῶν ΑΧ καὶ ΒΥ κατὰ τὴν θεωρουμένην διάταξιν (ΑΧ, ΒΥ).

Ἐκ τοῦ ζεύγους (ΟΧ', ΟΥ') ὁρίζονται, βεβαίως δύο γωνίαι : ἡ κυρτὴ καὶ ἡ μὴ κυρτὴ γωνία (ΟΧ', ΟΥ') Ἂν ἡ μία ἐκ τούτων εἶναι θετικῶς προσανατολισμένη, ἡ δευτέρα θὰ εἶναι ἀρνητικῶς προσανατολισμένη.

Οὕτω, ἐκ τοῦ ζεύγους (ΟΧ', ΟΥ') ὁρίζεται μία μόνον γωνία δοθέντος προσανατολισμοῦ, ἐφ' ὅσον αὕτη εἶναι μικροτέρα τῆς πλήρους γωνίας (θετικῶς ἢ ἀρνητικῶς προσανατολισμένης) ἤτοι ἐφ' ὅσον περιοριζόμεθα εἰς τὰς γωνίας τὰς μικροτέρας τῆς πλήρους. Ἡ γωνία (ΟΧ', ΟΥ') εἶναι (99) ἀνεξάρτητος τοῦ σημείου Ο.

Γενικήν, ἐξ ἄλλου, γωνίαν τῶν ἡμιευθειῶν ΑΧ καὶ ΒΥ θὰ ὀνομάσωμεν τὴν γενικὴν γωνίαν (ΟΧ', ΟΥ').

Ἂν κατὰ ταῦτα εἶναι α μία τῶν γωνιῶν (ΟΧ', ΟΥ') θὰ ἔχωμεν διὰ τὴν γενικὴν γωνίαν (ΟΧ', ΟΥ') :

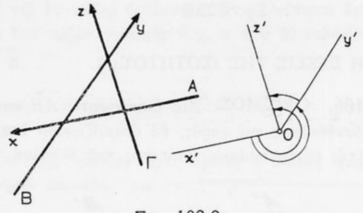
$(OX', OY') = \alpha + 2K\pi$, ἔνθα $K \in Z$

Σημειοῦμεν ὅτι :

Ἂν θεωρήσωμεν μίαν τρίτην ἡμιευθεῖαν ΓΖ τοῦ ἐπιπέδου (Σχ. 102.2), καὶ τὴν ἀπὸ τοῦ Ο ὁμόρροπον αὐνῆς ἡμιευθεῖαν ΟΖ' θὰ εἶναι :

$(OX', OZ') = (OX', OY') + (OY', OZ') + 2K\pi$

ἤτοι: $(AX, \Gamma Z) = (AX, BY) + (BY, \Gamma Z) + 2K\pi$ (1)



Σχ. 102.2

ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΕΙΣ ΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟΝ

103. ΟΡΙΣΜΟΣ *Ὀνομάζομεν* **ἐφαρμοστὸν διάνυσμα** *εἰς τὸ ἐπίπεδον ἢ προσανατολισμένον εὐθ. τμῆμα ἐν αὐτῷ, κάθε διατεταγμένον ζεῦγος σημείων (Α, Β) αὐτοῦ.*

Τὸ πρῶτον σημεῖον Α τοῦ διανύσματος, ὀνομάζεται **ἀρχὴ** ἢ ἀρχικὸν σημεῖον καὶ τὸ δεύτερον σημεῖον Β, **πέρας** ἢ τελικὸν σημεῖον αὐτοῦ (Σχ. 103).

Σχ. 103

Τὸ διάνυσμα (Α, Β) συμβολίζεται συνήθως μὲ τὸ σύμβολον : $\overrightarrow{AB}$.

Συμφώνως πρὸς τὰ ἀνωτέρω, κάθε εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ ὁρίζει δύο διανύσματα : τὸ $\overrightarrow{AB}$ καὶ τὸ $\overrightarrow{BA}$. Ἡ εὐθεῖα ΑΒ θὰ ὀνομάζεται **φορεὺς** τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ καὶ τοῦ $\overrightarrow{BA}$.

Ἂν τὰ ἄκρα Α καὶ Β τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ συμπίπτουν ($A \equiv B$) τὸ διάνυσμα τοῦτο θὰ ὀνομάζεται **μηδενικὸν** διάνυσμα. Συμβολικῶς $\overrightarrow{O}$.

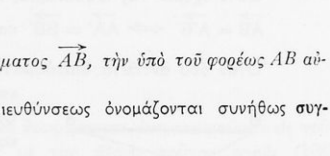
ΔΙΕΥΘΥΝΣΙΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

104. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ὀνομάζομεν* **διεύθυνσιν** *τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{AB}$, τὴν ὑπὸ τοῦ φορέως ΑΒ αὐτοῦ ὁριζομένην διεύθυνσιν* (97).

Δύο ἢ περισσότερα διανύσματα τῆς αὐτῆς διευθύνσεως ὀνομάζονται συνήθως **συγγραμμικὰ** διανύσματα.

ΟΜΟΡΡΟΠΑ ΚΑΙ ΑΝΤΙΡΡΟΠΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

105. ΟΡΙΣΜΟΣ *Δύο διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{A'B'}$ τῆς αὐτῆς διευθύνσεως λέγομεν ὅτι εἶναι τῆς αὐτῆς φορᾶς ἢ* **ὁμόρροπα** *ἂν τὰ πέρατα Β καὶ Β' αὐτῶν κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπὸ τὰ ἀρχικὰ σημεῖα Α καὶ Α' αὐτῶν* (Σχ. 105.1).

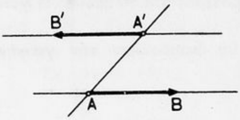


105.1

Ἂν τὰ σημεῖα Β καὶ Β' κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς εὐθείας ΑΑ' θὰ λέγωμεν ὅτι τὰ διανύσματα εἶναι ἀντιθέτου φορῆς ἢ **ἀντίρροπα** (Σχ. 105.2).

(1) Σχέσις τῶν Chasles — Möbius.

"Αν τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{A'B'}$ ἔχουν τὸν αὐτὸν φορέα, θὰ λέγωνται **ὁμόρροπα** ἢ **ἀντίρροπα** καθ' ὅσον ἡ ἡμιευθεῖα ἡ ἔχουσα ἀρχικὸν τὸ σημεῖον Α καὶ περιέχουσα τὸ Β καὶ ἡ ἡμιευθεῖα ἡ ἔχουσα ἀρχικὸν τὸ σημεῖον Α' καὶ περιέχουσα τὸ Β' εἶναι ἀντιστοίχως ὁμόροποι ἢ ἀντίρροποι (98).



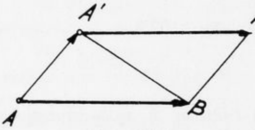
Σχ. 105.2

Η ΣΧΕΣΙΣ ΤΗΣ ΙΣΟΤΗΤΟΣ[1]

106. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Δύο διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{A'B'}$ τοῦ ἐπιπέδου, τὰ ὁποῖα εἶναι τῆς αὐτῆς διευθύνσεως καὶ φορᾶς, θὰ ὀνομάζωνται* **ἴσα,** *ὅταν τὰ εὐθ. τμήματα ΑΒ καὶ Α'Β' εἶναι ἴσα (τῆς αὐτῆς κλάσεως ἰσότητος τοῦ συνόλου τῶν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου εὐθ. τμημάτων).*

Θὰ σημειοῦμεν συμβολικῶς : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ (Σχ. 106.1)·

Τὰ διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{BA}$ τὰ ὁποῖα ὁρίζονται ἐκ τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ ὀνομάζονται **ἀντίθετα.** Ἀντίθετα θὰ ὀνομάζωνται καὶ δύο οἱαδήποτε διανύσματα ἴσα ἀντιστοίχως πρὸς τὰ ἀνωτέρω.



Σχ. 106.1

Σημειοῦντες $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{A'B'}$ ἐννοοῦμεν ὅτι τὰ διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{A'B'}$ εἶναι ἀντίθετα (Σχ. 106.2).

Σημειοῦμεν ὅτι :

Ὅταν δύο ἴσα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{A'B'}$ δὲν ἔχουν τὸν αὐτὸν φορέα, θὰ εἶναι $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$. Πράγματι, τὰ τρίγωνα ΑΒΑ' καὶ Β'Α'Β (Σχ. 106.1) εἶναι ἴσα (80).

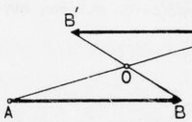
Ἀντιστρόφως, ἂν $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$, τότε θὰ εἶναι $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$. Πράγματι, τὰ τρίγωνα ΑΒΑ' καὶ Β'Α'Β (Σχ. 106.1) εἶναι ἴσα (80).

Ἡ ἀνωτέρω ἰδιότης ἰσχύει καὶ ὅταν οἱ φορεῖς τῶν ἴσων διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{A'B'}$ συμπίπτουν.

Ὥστε ἔχομεν τὰς ἰσοδυναμίας :

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$ καὶ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} \Longleftrightarrow \overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{A'A}$

Ὅταν δύο ἀντίθετα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{A'B'}$ (Σχ. 106.2) δὲν ἔχουν τὸν αὐτὸν φορέα καὶ εἶναι Ο τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν ΑΑ' καὶ ΒΒ', θὰ εἶναι ΟΑ = ΟΑ' καὶ ΟΒ=ΟΒ'. Πράγματι τὰ τρίγωνα ΑΟΒ καὶ Α'ΟΒ' εἶναι ἴσα (80). Ἀντιστρόφως :



Σχ. 106.2

"Αν δύο σημεῖα Α καὶ Α' εἶναι συμμετρικὰ (28) ὡς πρὸς σημεῖον Ο τοῦ ἐπιπέδου, καὶ δύο ἄλλα Β καὶ Β' εἶναι ἐπίσης συμμετρικὰ ἀλλήλων ὡς πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον Ο, τότε τὰ διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{A'B'}$ εἶναι ἀντίθετα. Πράγματι, τὰ τρίγωνα ΑΟΒ καὶ Α'ΟΒ' εἶναι ἴσα(79).

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ προκύπτει ὅτι :

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Εἰς τὸ σύνολον τῶν διανυσμάτων τοῦ ἐπιπέδου ἰσχύουν αἱ ἰδιότητες τῆς ἰσότητος : ἀνακλαστική, συμμετρικὴ καὶ μεταβατική.*

---

(1) Εἰς τὸ σύνολον τῶν ἐπὶ τοῦ ἐππέδου διανυσμάτων.

ΚΛΑΣΙΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ

107. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἡ ἀνωτέρω (106) σχέσις ἰσότητος ἐπιτρέπει τὸν διαμερισμὸν τοῦ συνόλου τῶν διανυσμάτων τοῦ ἐπιπέδου εἰς ὑποσύνολα, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἀποτελεῖται ἀπὸ ὅλα τὰ διανύσματα τοῦ ἐπιπέδου τὰ ἴσα πρὸς δοθὲν ἐν αὐτῷ διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$. Κάθε τοιοῦτον ὑποσύνολον διανυσμάτων θὰ ὀνομάζεται *κλάσις ἰσοδυναμίας,* εἰδικώτερον κλάσις *ἰσότητος,* εἰς τὸ σύνολον Σ τῶν διανυσμάτων τοῦ ἐπιπέδου, ὁριζομένη ἀπὸ τὸ $\overrightarrow{AB}$.

Κάθε στοιχεῖον τῆς ἀνωτέρω κλάσεως ἰσοδυναμίας (ἰσότητος) τοῦ συνόλου τῶν διανυσμάτων τοῦ ἐπιπέδου ὀνομάζεται *ἐλεύθερον* ἐν τῷ ἐπιπέδῳ διάνυσμα. Ἕνα ἐλεύθερον διάνυσμα εἰς τὸ ἐπίπεδον συμβολίζεται συνήθως μὲ ἕνα πεζὸν γράμμα π.χ. α τοῦ ἀλφαβήτου φέρον τὸ σύμβολον $\rightarrow$, ἤτοι μὲ τὸ σύμβολον : $\vec{\alpha}$.

ΑΞΩΝ ΕΙΣ ΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟΝ

108. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Κάθε εὐθεῖα ξ τοῦ ἐπιπέδου ἐπὶ τῆς ὁποίας ἔχει ὁρισθῆ ἡ θετικὴ φορὰ ὀνομάζεται προσανατολισμένη εὐθεῖα ἢ* **ἄξων** *ἐν τῷ ἐπιπέδῳ καὶ συμβολίζεται μὲ τὸ σύμβολον* $\vec{\xi}$.

Σχ. 108.1

Ἡ ἐπὶ τοῦ ἄξονος $\vec{\xi}$ θετικὴ φορὰ καθορίζεται ἐξ ἑνὸς διανύσματος $\vec{\iota}$ αὐτοῦ τὸ ὁποῖον ὀνομάζεται **διευθῦνον διάνυσμα** τοῦ ἄξονος (Σχ. 108,1).

Ἂν θεωρήσωμεν ἕνα σημεῖον Ο τοῦ ἄξονος $\vec{\xi}$ (Σχ. 108.2) αἱ ἡμιευθεῖαι ΟΧ καὶ ΟΧ′ αἱ ὁποῖαι ὁρίζονται ἐκ τοῦ Ο ἐπὶ τοῦ ἄξονος $\vec{\xi}$ ὀνομάζονται **ἡμιάξονες.** Ἂν εἶναι Α καὶ Α′ δύο τυχόντα σημεῖα τῶν ἡμιαξόνων ΟΧ καὶ ΟΧ′ ἀντιστοίχως, τότε, ἂν τὰ διανύσματα $\overrightarrow{OA}$ καὶ $\vec{\iota}$ εἶναι ὁμόρροπα, ὁ ἡμιάξων ΟΧ (ὁ περιέχων τὸ σημεῖον Α) ὀνομάζεται **θετικὸς** ἡμιάξων. Ὁ ΟΧ′, διὰ τὸν ὁποῖον τὰ διανύσματα $\overrightarrow{OA'}$ καὶ $\vec{\iota}$ εἶναι ἀντίρροπα, ὀνομάζεται **ἀρνητικὸς** ἡμιάξων.

Σχ. 108.2

Λέγομεν ὅτι μία ἡμιευθεῖα ΟΧ καὶ ἕνας ἄξων $\vec{\xi}$, τῶν ὁποίων οἱ φορεῖς εἶναι παράλληλοι ἢ ταυτίζονται, ἔχουν τὴν αὐτὴν φοράν, ὅταν διὰ κάθε σημεῖον Α τῆς ἡμιευθείας ΟΧ τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{OA}$ καὶ τὸ διευθῦνον διάνυσμα $\vec{\iota}$ τοῦ ἄξονος $\vec{\xi}$ εἶναι ὁμόρροπα. Εἰς τὴν ἀντίθετον περίπτωσιν ($\overrightarrow{OA}$ καὶ $\vec{\iota}$ ἀντίρροπα) θὰ λέγωμεν ὅτι ἡ ἡμιευθεῖα ΟΧ καὶ ὁ ἄξων $\vec{\xi}$ ἔχουν ἀντίθετον φορὰν (προσανατολισμόν).

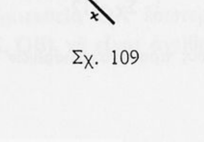
ΓΩΝΙΑ ΔΥΟ ΑΞΟΝΩΝ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

109. ΟΡΙΣΜΟΣ. Δοθέντος ἑνὸς ἄξονος $\vec{\xi}$ δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τοῦτον μίαν ἡμιευθεῖαν ΟΧ παράλληλον καὶ τῆς αὐτῆς μὲ τὸν ἄξονα τοῦτον φορᾶς (108) ἀγομένην ἀπὸ δοθέντος σημείου Ο τοῦ ἐπιπέδου.

Τὴν ἡμιευθεῖαν ταύτην ὀνομάζομεν **διυθύνουσαν ἡμιευθεῖαν** τοῦ ἄξονος $\vec{\xi}$.

Ἔστωσαν ΟΧ καὶ ΟΥ αἱ διευθύνουσαι ἡμιευθεῖαι δύο ἀξόνων $\vec{\xi}$ καὶ $\vec{\eta}$ ἀντιστοίχως (Σχ. 109).

Ὀνομάζομεν **γωνίαν τῶν ἀξόνων** $\vec{\xi}$ **καὶ** $\vec{\eta}$, κατὰ τὴν θεωρουμένην διάταξιν, $(\vec{\xi}, \vec{\eta})$, **τὴν γωνίαν (ΟΧ, ΟΥ) τῶν διευθυνουσῶν ἡμιευθειῶν** τῶν ἀξόνων τούτων, τῶν ἀγομένων ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου Ο.



Σχ. 109

Ἡ γωνία (ΟΧ, ΟΥ) εἶναι (99) ἀνεξάρτητος τοῦ θεωρουμένου σημείου Ο. Ἤτοι ἂν θεωρήσωμεν τὰς ἀπὸ σημείου Ο', διαφόρου τοῦ Ο, διευθυνούσας ἡμιευθείας Ο'Χ' καὶ Ο'Υ' τῶν ἀξόνων $\vec{\xi}$ καὶ $\vec{\eta}$, ἡ γωνία (Ο'Χ', Ο'Υ') εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν (ΟΧ, ΟΥ).

Συμφώνως πρὸς τὰ ἀνωτέρω, θὰ ὀνομάσωμεν **γενικὴν γωνίαν** δύο ἀξόνων $\vec{\xi}$ καὶ $\vec{\eta}$ τοῦ ἐπιπέδου, τὴν γενικὴν γωνίαν (ΟΧ, ΟΥ) τῶν διευθουνουσῶν τούτους ἡμιευθειῶν (102). Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ ἑπομένως ἔχομεν ὅτι :

$$(\vec{\xi},\ \vec{\eta}) = = \alpha + 2K\pi.$$

ἔνθα: διὰ τοῦ $(\vec{\xi},\ \vec{\eta})$ συμβολίζεται ἡ γωνία τῶν ἀξόνων $\vec{\xi}$ καὶ $\vec{\eta}$, διὰ τοῦ α μία τυχοῦσα τῶν γωνιῶν (ΟΧ, ΟΥ), διὰ τοῦ Κ ἕνας ἀκέραιος ἀριθμός, θετικὸς ἢ ἀρνητικός, καὶ διὰ τοῦ 2π ἡ θετικῶς προσανατολισμένη πλήρης γωνία.

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΗ ΔΙΕΥΘΥΝΣΙΣ ΕΙΣ ΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟΝ

110. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἔστω $\vec{\xi}$ μία προσανατολισμένη εὐθεῖα, ἤτοι ἕνας ἄξων τοῦ ἐπιπέδου Τὸ σύνολον τῶν πρὸς τὴν $\vec{\xi}$ παραλλήλων καὶ ὁμοίως πρὸς ταύτην προσανατολισμένων εὐθειῶν τοῦ ἐπιπέδου, ὀνομάζεται **προσανατολισμένη διεύθυνσις** ἐν αὐτῷ.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ προκύπτει ὅτι κάθε προσανατολισμένη διεύθυνσις τοῦ ἐπιπέδου εἶναι γνωστή, ὅταν δίδεται ἕνας μόνον ἐκ τῶν ἀξόνων τῶν ἀνηκόντων εἰς τὴν διεύθυνσιν ταύτην.

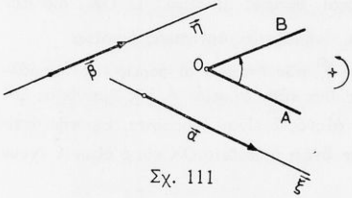
Ὀνομάζομεν **γωνίαν δύο προσανατολισμένων διευθύνσεων** τὴν γωνίαν τῶν δύο ἀξόνων (109), οἱ ὁποῖοι ὁρίζουν τὰς διευθύνσεις ταύτας.

ΓΩΝΙΑ ΔΥΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

111. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ὀνομάζομεν **γωνίαν** δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ καὶ $\vec{\beta}$ τοῦ ἐπιπέδου τὴν γωνίαν τῶν βάσει τούτων προσανατολιζομένων φορέων των. Ἂν ὀνομάσωμεν $\vec{\xi}$ καὶ $\vec{\eta}$ τοὺς ἄξονας τούτους θὰ ἔχωμεν ἐξ ὁρισμοῦ :

$$(\vec{\alpha},\ \vec{\beta}) = (\vec{\xi},\ \vec{\eta})$$

ἔνθα μὲ τὸ σύμβολον $(\vec{\alpha},\ \vec{\beta})$ συμβολίζομεν τὴν γωνίαν τῶν διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ καὶ $\vec{\beta}$. (Σχ. 111).

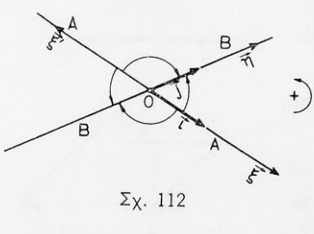


Σχ. 111

ΓΩΝΙΑ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΩΝ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

112. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἔστωσαν ξ καὶ η δύο εὐθεῖαι τοῦ ἐπιπέδου (Σχ. 112). Ὁρίζομεν αὐθαιρέτως ἐπὶ τῶν εὐθειῶν τούτων δύο διανύσματα $\vec{i}$ καὶ $\vec{j}$ ἀντιστοίχως, βάσει τῶν ὁποίων ὁρίζεται ἐπὶ ἑκάστου τούτων ἡ θετικὴ φορὰ (θεωροῦνται αἱ εὐθεῖαι προσανατολισμέναι). Ἂν θέσωμεν :

(ΟΑ, ΟΒ) $= \alpha + 2K\pi$, θὰ ἔχωμεν (111) :



Σχ. 112

1. $(\vec{\xi},\ \vec{\eta})$ = (ΟΑ', ΟΒ') = (ΟΑ', ΟΑ)+(ΟΑ, ΟΒ')$+2K\pi$= = (ΟΑ', ΟΑ)+(ΟΑ, ΟΒ) + (ΟΒ,ΟΒ') $+ 2K\pi$, καὶ ἐπειδὴ (ΟΑ', ΟΑ) = (ΟΒ, ΟΒ')$=\pi + 2K\pi$, θὰ ἔχωμεν:

(ΟΑ', ΟΒ') = (ΟΑ, ΟΒ) $+ 2\pi + 2K\pi$ ἤτοι :

(1) (ΟΑ', ΟΒ') = (ΟΑ, ΟΒ) $+ 2K\pi = \alpha + 2K\pi$

Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ γωνία τῶν θεωρουμένων ἀξόνων εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν τῶν ἀντιθέτως πρὸς τούτους προσανατολισμένων ἀξόνων.

2. $(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = (OA', OB) = (OA', OB') + (OB', OB) = \alpha + 2K\pi + \pi$ ἤτοι :

(2) $(OA', OB) = \alpha + (2K + 1)\pi$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἔπεται ὅτι ἡ γωνία τῶν ἀξόνων $\vec{\xi}$ καὶ $\vec{\eta}$, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ πρῶτος κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας ξ καὶ ὁ δεύτερος ἐπὶ τῆς η, εἶναι ἀντιστοίχως ἡ γωνία : $\alpha + 2K\pi$ καὶ ἡ $\alpha + (2K + 1)\pi$ ἤτοι ἡ γωνία $\alpha + K\pi$, ἔνθα K ἀκέραιος θετικὸς ἢ ἀρνητικὸς ($K \in Z$).

Ἂν εἶναι α_1 καὶ α_2 δύο ἐκ τῶν ἀνωτέρω γωνιῶν, ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τοὺς ἀριθμοὺς K_1 καὶ K_2, θὰ ἔχωμεν :

$$\alpha_1 - \alpha_2 = (K_1 - K_2)\pi = \lambda\pi \text{ ἔνθα } \lambda \in Z \text{ ἢ } \alpha_1 = \alpha + \lambda\pi$$

Αἱ ἀνωτέρω γωνίαι εἶναι στοιχεῖα μιᾶς κλάσεως ἰσοδυναμίας, ἡ ὁποία ὀνομάζεται **γωνία τῶν εὐθειῶν** ξ καὶ η, κατὰ τὴν διάταξιν (ξ, η). Συμβολικῶς : $(\xi, \eta) = \alpha + \lambda\pi$

Σημειοῦμεν ὅτι :

Ἂν $\vec{\xi}$ καὶ $\vec{\eta}$ εἶναι δύο ἄξονες τῶν ὁποίων οἱ φορεῖς εἶναι αἱ εὐθεῖαι ξ καὶ η, ἔχομεν ἐξ ὁρισμοῦ :

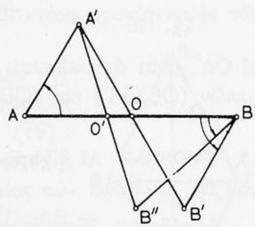
$$(\xi, \eta) = (\vec{\xi}, \vec{\eta}) + K\pi$$

Ἡ σχέσις αὐτὴ δὲν εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τήν : $(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = (\xi, \eta) + K\pi$, διότι τὸ πρῶτον μέλος τῆς τελευταίας εἶναι γωνία ὁριζομένη κατὰ προσέγγισιν $2K\pi$, ἐνῶ τὸ δεύτερον μέλος αὐτῆς εἶναι γωνία ὁριζομένη κατὰ προσέγγισιν $K\pi$.

ΜΕΣΟΝ ΕΥΘ. ΤΜΗΜΑΤΟΣ

113. ΘΕΩΡΗΜΑ. Δοθέντος εὐθ. τμήματος AB, ὑπάρχει σημεῖον O αὐτοῦ καὶ ἕνα μόνον ὥστε : OA = OB.

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν δύο παραλλήλους διὰ τῶν A καὶ B εὐθείας καὶ ἐπὶ τούτων ἀντιστοίχως τὰ σημεῖα A′ καὶ B′, ἑκατέρωθεν τῆς AB (Σχ. 113), ὥστε AA′ = BB′. Ἔστω O τὸ μεταξὺ τῶν A καὶ B σημεῖον τῆς A′B′. Ἐκ τῶν ἴσων τριγώνων AOB′ καὶ BOB′ (80), ἔπεται ὅτι OA = OB.



Σχ, 113

Ἐξ ἄλλου, ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι O′A = O′B (O′ σημεῖον διάφορον τοῦ O, μεταξὺ τῶν A καὶ B) ἀγόμεθα εἰς ἄτοπον. Πράγματι, ἂν εἶναι B″ τὸ συμμετρικὸν τοῦ A′ ὡς πρὸς τὸ O′, ἐκ τῶν ἴσων τριγώνων AO′A′ καὶ BO′B″ ἔπεται (79), ὅτι: (BA,BB″) = = (AB,AA′). Τοῦτο ὅμως ἀποκλείεται ἐκ τοῦ ἀξιώματος (63), δοθέντος ὅτι εἶναι καὶ (BA,BB′) = (AB,AA′).

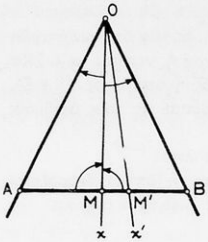
Τὸ σημεῖον O ὀνομάζεται **μέσον σημεῖον** ἢ ἁπλῶς **μέσον** τοῦ εὐθ. τμήματος AB. Σημειοῦμεν OA = OB ἢ AB = 2OA.

114. ΟΡΙΣΜΟΣ. Δοθέντος εὐθ. τμήματος AB, ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν AB, εἰς τὸ *μέσον* O τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος AB, ὀνομάζεται *μεσοκάθετος* αὐτοῦ.

ΔΙΧΟΤΟΜΟΣ ΓΩΝΙΑΣ

115. ΘΕΩΡΗΜΑ. Δοθείσης γωνίας (OA, OB), ὑπάρχει ἡμιευθεῖα OX ἐσωτερικὴ αὐτῆς καὶ μία μόνον ὥστε αἱ γωνίαι (OX, OA) καὶ (OX, OB), νὰ εἶναι ἀντίθετοι.

'Απόδειξις. Θεωροῦμεν δύο σημεῖα Α καὶ Β ἐπὶ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας ἀντιστοίχως ὥστε ΟΑ = ΟΒ καὶ τὸ μέσον Μ τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ. 'Εκ τῶν τριγώνων ΟΜΑ καὶ ΟΜΒ τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι καὶ (ΜΑ,ΜΟ) = −(ΜΒ,ΜΟ) ἕπεται (91) ὅτι (ΟΜ,ΟΑ) = −(ΟΜ,ΟΒ) ἤτοι (ΟΧ,ΟΑ) = −(ΟΧ,ΟΒ).



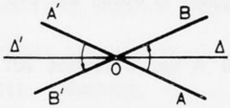
Σχ. 115

'Εξ ἄλλου, ἂν δεχθῶμεν ὅτι ὑπάρχει καὶ μία δευτέρα ἡμιευθεῖα ΟΧ′ ὥστε (ΟΧ′,ΟΑ) = −(ΟΧ′,ΟΒ) καὶ εἶναι Μ′ τὸ ἐπὶ τῆς ΑΒ σημεῖον αὐτῆς, τότε ἐκ τῶν τριγώνων ΟΜ′Α καὶ ΟΜ′Β ἔχομεν (79) ὅτι Μ′Α = Μ′Β, τὸ ὁποῖον εἶναι ἄτοπον (113).

'Η ἡμιευθεῖα ΟΧ ὀνομάζεται **διχοτόμος** τῆς γωνίας (ΟΑ, ΟΒ).

116. ΘΕΩΡΗΜΑ. **Αἱ διχοτόμοι δύο κατὰ κορυφὴν γωνιῶν εἶναι ἡμιευθεῖαι ἀντικείμεναι** (1).

'Απόδειξις. Ἔστωσαν (ΟΑ, ΟΒ) καὶ (ΟΑ′,ΟΒ′) δύο κατὰ κορυφὴν γωνίαι καὶ ΟΔ, ΟΔ′ αἱ διχοτόμοι αὐτῶν ἀντιστοίχως (Σχ. 116). Εἶναι: (ΟΑ,ΟΔ) + (ΟΔ,ΟΒ) + (ΟΒ, ΟΑ′) = = π καὶ ἐπειδὴ (ΟΑ, ΟΔ) = (ΟΑ′, ΟΔ′), διότι αἱ γωνίαι αὗται εἶναι τὰ ἡμίση τῶν θεωρουμένων κατὰ κορυφὴν γωνιῶν, ἕπεται ὅτι: (ΟΑ′, ΟΔ′) + (ΟΔ, ΟΒ) + + (ΟΒ,ΟΑ′) = π ἢ (ΟΔ,ΟΒ) + (ΟΒ,ΟΔ′) = π.

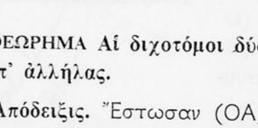


Σχ. 116

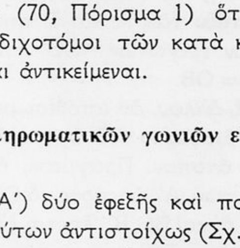
'Εκ ταύτης ἕπεται (70, Πόρισμα 1) ὅτι αἱ ΟΔ καὶ ΟΔ′ εἶναι ἀντικείμεναι. Δι' ὅμοιον λόγον αἱ διχοτόμοι τῶν κατὰ κορυφὴν γωνιῶν (ΟΒ,ΟΑ′) καὶ (ΟΒ′, ΟΑ) εἶναι ἡμιευθεῖαι ἀντικείμεναι.

117. ΘΕΩΡΗΜΑ **Αἱ διχοτόμοι δύο ἐφεξῆς παραπληρωματικῶν γωνιῶν εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας.**

'Απόδειξις. Ἔστωσαν (ΟΑ,ΟΒ) καὶ (ΟΒ,ΟΑ′) δύο ἐφεξῆς καὶ παραπληρωματικαὶ γωνίαι, καὶ ΟΔ καὶ ΟΔ′ αἱ διχοτόμοι τούτων ἀντιστοίχως (Σχ. 117,1). Αἱ ἡμιευθεῖαι ΟΑ καὶ ΟΑ′ εἶναι ἀντικείμεναι



Σχ. 117.1



Σχ. 117.2

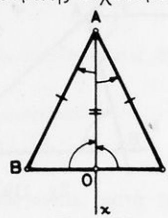
(1) 'Αποτελοῦν εὐθεῖαν.

Εἶναι (ΟΑ,ΟΒ) = 2 (ΟΔ,ΟΒ) καὶ (ΟΒ, ΟΑ') = 2 (ΟΒ, ΟΔ'). Διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη εὑρίσκομεν : $\pi = 2$ (ΟΔ, ΟΒ) + 2 (ΟΒ,ΟΔ') καὶ ἐξ αὐτῆς ὅτι : (ΟΔ, ΟΒ) + (ΟΒ, ΟΔ') $= \frac{\pi}{2}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τῶν ὁριζομένων ὑπὸ δύο τεμνομένων εὐθειῶν ἀποτελοῦν δύο εὐθείας δ καὶ δ' καθέτους ἐπ' ἀλλήλας.* (Σχ. 117.2).

118. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ΑΒ= ΑΓ, τότε ἡ διχοτόμος ΑΧ τῆς γωνίας (ΑΒ, ΑΓ) αὐτοῦ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ καὶ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τῆς πλευρᾶς ΒΓ.

Ἀπόδειξις. Ἔστω Ο τὸ ἐπὶ τῆς ΒΓ σημεῖον τῆς θεωρουμένης διχοτόμου. Εἶναι : (ΑΟ,ΑΒ) = – (ΑΟ,ΑΓ). Ἐκ τῶν τριγώνων ΑΟΒ καὶ ΑΟΓ ἔχομεν (79) : (ΟΒ,ΟΑ) = – (ΟΓ,ΟΑ), ἤτοι ὅτι ἡ ΟΑ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ, καὶ ΟΒ = ΟΓ, ἤτοι ὅτι τὸ Ο εἶναι τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΒΓ.



Σχ. 118.1

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ. Ἂν ἐκ τῶν τριῶν συνθηκῶν : (1) Ἡ ἡμιευθεῖα ΑΧ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Α τοῦ τριγώνου (2) Ἡ ΑΧ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ (3) Ἡ ΑΧ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου Ο τῆς πλευρᾶς ΒΓ, ἰσχύουν δύο οἱαιδήποτε, τότε τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές.*

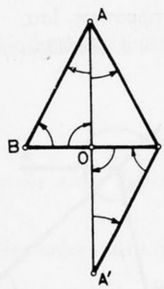
Πράγματι :

Ἂν ἰσχύουν αἱ συνθῆκαι (1) καὶ (2), τὸ ἀποδεικτέον προκύπτει ἐκ τῶν τριγώνων ΑΟΒ καὶ ΑΟΓ (80).

Ἂν ἰσχύουν αἱ συνθῆκαι (1) καὶ (3), θεωροῦμεν τὸ συμμετρικὸν Α' τοῦ Α ὡς πρὸς τὸ μέσον Ο τῆς πλευρᾶς ΒΓ. Ἐκ τῶν τριγώνων ΑΟΒ καὶ Α'ΟΓ ἔχομεν (79) : (ΑΟ,ΑΒ) = (Α'Ο, Α'Γ') καὶ ἐπειδὴ (ΑΟ,ΑΒ) = – (ΑΟ,ΑΓ), θὰ εἶναι (Α'Ο, Α'Γ) = – (ΑΟ,ΑΓ). Ἐκ τῆς τελευταίας αὐτῆς ἕπεται (90) ὅτι : ΑΓ = Α'Γ ἢ ΑΓ = ΑΒ, διότι Α'Γ=ΑΒ.

Ἂν ἰσχύουν αἱ συνθῆκαι (2) καὶ (3), τὸ ἀποδεικτέον προκύπτει ἐκ τῶν τριγώνων ΑΟΒ καὶ ΑΟΓ (79).

Αἱ κατωτέρω εἰς τὸ τρίγωνον ἀναφερόμεναι προτάσεις εἶναι συνέπειαι τοῦ ἀξιώματος τοῦ Εὐκλείδου.

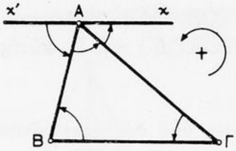


118.2

ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

119. ΘΕΩΡΗΜΑ. Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντὸς τριγώνου εἶναι ἴσον πρὸς τὴν εὐθεῖαν γωνίαν.

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν (Σχ. 119.1) τὴν διὰ τῆς κορυφῆς π.χ. Α, παράλληλον Χ'Χ πρὸς τὴν ΒΓ (Χ' καὶ Χ ἑκατέρωθεν τοῦ Α, καὶ Χ' πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας ΑΓ πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται ἡ κορυφὴ Β). Αἱ γωνίαι (ΑΧ', ΑΒ) καὶ (ΑΓ, ΑΧ)

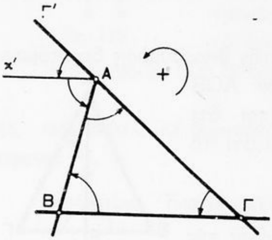


Σχ. 119.1

εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς γωνίας (ΒΓ,ΒΑ) καὶ (ΓΑ,ΓΒ) τοῦ τριγώνου. Ἑπομένως τὸ ἄθροισμα : (ΑΒ,ΑΓ) + (ΒΓ,ΒΑ) + (ΓΑ,ΓΒ) εἶναι ἴσον πρὸς τὸ (ΑΒ,ΑΓ) + (ΑΧ',ΑΒ) + (ΑΓ,ΑΧ) ἤτοι πρὸς τὴν εὐθεῖαν γωνίαν (ΑΧ', ΑΧ).

Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι τὸ ἀνωτέρω ἄθροισμα εἶναι ἴσον πρὸς δύο ὀρθὰς γωνίας.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ 1. *Ἑκάστη ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο γωνιῶν αὐτοῦ τῶν μὴ προσκειμένων τῆς θεωρουμένης ἐξωτερικῆς γωνίας.* (1)



Σχ. 119.2

Πράγματι, ἡ ἐξωτερικὴ γωνία (ΑΓ', ΑΒ) τοῦ τριγώνου εἶνα ἴση πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν (ΑΓ', ΑΧ') καὶ (ΑΧ', ΑΒ), αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς (ΒΓ,ΒΑ) καὶ (ΓΑ,ΓΒ) (Σχ. 119.2).

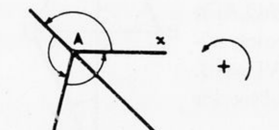
2. Ἂν εἰς δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' αἱ γωνίαι των εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι κατὰ τὰ δύο ζεύγη, τότε θὰ εἶναι ἴσαι καὶ κατὰ τὸ τρίτον.

Ἂν αἱ γωνίαι τῶν τριγώνων εἶναι ἀντίθετοι κατὰ τὰ δύο ζεύγη, τότε θὰ εἶναι ἀντίθετοι καὶ κατὰ τὸ τρίτον ζεῦγος.

3. Ἂν εἰς δύο ὁμοίως προσανατολισμένα τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' εἶναι $\alpha = \alpha'$, $A = A'$, $B = B'$, *τότε τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα.*

Ἂν τὰ ἀνωτέρω τρίγωνα εἶναι ἀντιθέτως προσανατολισμένα, τότε εἶναι ἀντιρρόπως ἴσα.

4. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν τριγώνου εἶναι ἴσον πρὸς μίαν πλήρη γωνίαν.



119 3

Πράγματι, ἂν θεωρήσωμεν τὴν ἡμιευθεῖαν ΑΧ (Σχ. 119.3) τὴν παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ καὶ κειμένην πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας ΑΒ πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται ἡ κορυφὴ Γ, ἔχομεν ὅτι τὸ ἄθροισμα (ΑΓ', ΑΒ) + (ΒΑ', ΒΓ) + (ΓΒ',ΓΑ) εἶναι ἴσον πρὸς τὸ (ΑΓ',ΑΒ)+(ΑΒ,ΑΧ)+(ΑΧ,ΑΓ')=2π.

Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι τὸ ἄθροισμα τοῦτο εἶναι ἴσον πρὸς τέσσαρας ὀρθὰς γωνίας.

5. Κάθε ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ (ΑΒ = = ΑΓ) αἱ γωνίαι (ΒΓ,ΒΑ) καὶ (ΓΑ,ΓΒ) εἶναι ὀξεῖαι.

6. Ἐκ δύο οἱωνδήποτε γωνιῶν τριγώνου ἡ μία τουλάχιστον εἶναι ὀξεῖα.

Ἐκ τῶν τριῶν γωνιῶν τριγώνου αἱ δύο τουλάχιστον εἶναι ὀξεῖαι.

Ἐκ τῶν τριῶν γωνιῶν τριγώνου ἡ μία τὸ πολὺ εἶναι ὀρθὴ ἢ ἀμβλεῖα.

---

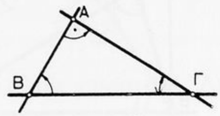
(1) Καὶ ἑπομένως μεγαλυτέρα ἑκάστης τούτων.

ΤΡΙΓΩΝΟΝ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΝ

120. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Κάθε τρίγωνον ΑΒΓ τοῦ ὁποίου μία τῶν γωνιῶν εἶναι ὀρθὴ ὀνομάζεται* **ὀρθογώνιον.**

Ἂν εἶναι ὀρθὴ ἡ γωνία (ΑΒ,ΑΓ), τὸ τρίγωνον θὰ ὀνομάζεται ὀρθογώνιον κατὰ τὴν γωνίαν ταύτην (Σχ. 120).

Ἡ ὕπαρξις τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου προκύπτει ἐκ τῆς ὑπάρξεως τῆς ὀρθῆς γωνίας (84).



Σχ. 120

Ἡ ἀπέναντι τῆς ὀρθῆς γωνίας πλευρὰ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ὀνομάζεται ὑποτείνουσα πλευρὰ ἢ ἁπλῶς **ὑποτείνουσα** αὐτοῦ (Σχ. 120).

Αἱ δύο ἄλλαι πλευραὶ ὀνομάζονται **κάθετοι πλευραὶ** τοῦ τριγώνου.

ΠΟΡΙΣΜΑ *1. Αἱ γωνίαι (ΒΓ,ΒΑ) καὶ (ΓΑ,ΓΒ) ὀρθογωνίου, κατὰ τὴν γωνίαν (ΑΒ,ΑΓ), τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ὀξεῖαι.*

2. Αἱ ὀξεῖαι γωνίαι ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι συμπληρωματικαί.

Πράγματι, τὸ ἄθροισμα τούτων εἶναι ἡ ὀρθὴ γωνία. (119)

121. ΘΕΩΡΗΜΑ **Ἂν εἰς δύο ὁμοίως προσανατολισμένα ὀρθογώνια, κατὰ τὰς γωνίας Α καὶ Α΄, τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ εἶναι :**
(1) $\beta = \beta'$ καὶ $\gamma = \gamma'$ ἢ (2) $\beta = \beta'$, $B = B'$, ἢ (3) $\alpha = \alpha'$, $B = B'$,
τότε τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα.

Ἂν τὰ ἀνωτέρω τρίγωνα εἶναι ἀντιθέτως προσανατολισμένα, τότε εἶναι ἀντιρρόπως ἴσα.

Ἀπόδειξις. Βασίζεται εἰς τὰς προτάσεις (79) καὶ (80) τὰς ἀναφερομένας εἰς τὴν ἰσότητα τῶν τριγώνων καὶ τὴν πρότασιν (119).

ΤΡΙΓΩΝΟΝ ΑΜΒΛΥΓΩΝΙΟΝ

122. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Κάθε τρίγωνον ΑΒΓ τοῦ ὁποίου μία τῶν γωνιῶν εἶναι ἀμβλεῖα ὀνομάζεται* **ἀμβλυγώνιον.**

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Αἱ γωνίαι (ΒΓ,ΒΑ) καὶ (ΓΑ, ΓΒ) ἀμβλυγωνίου κατὰ τὴν γωνίαν (ΑΒ,ΑΓ) τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ὀξεῖαι.* (119)

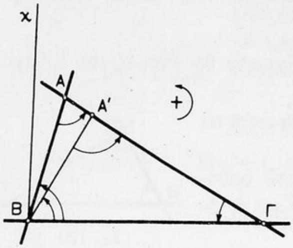
ΤΡΙΓΩΝΟΝ ΟΞΥΓΩΝΙΟΝ

123. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Κάθε τρίγωνον ΑΒΓ τοῦ ὁποίου καὶ αἱ τρεῖς γωνίαι εἶναι ὀξεῖαι, ὀνομάζεται* **ὀξυγώνιον.**

Ὡς πρὸς τὴν ὕπαρξιν τοῦ ὀξυγωνίου τριγώνου παρατηροῦμεν :

Θεωροῦμεν ἕνα ὀρθογώνιον κατὰ τὴν γωνίαν (Α΄Β, Α΄Γ) τρίγωνον Α΄ΒΓ (Σχ. 123) καὶ τὴν ἡμιευθεῖαν ΒΧ, τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ καὶ κειμένην πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας ΒΓ πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται ἡ κορυφὴ Α΄ τοῦ τριγώνου.

Ἡ ἡμιευθεῖα ΒΑ′ κεῖται ἐντὸς τῆς ὀρθῆς γωνίας (ΒΓ,ΒΧ), διότι ἡ γωνία (ΒΓ,ΒΑ′) εἶναι ὀξεῖα.



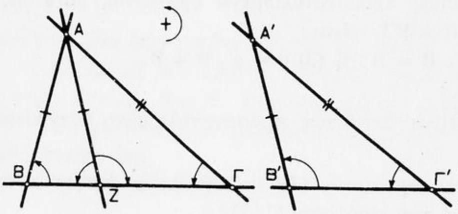
Σχ. 123

Θεωροῦμεν τυχοῦσαν ἡμιευθεῖαν κειμένην ἐντὸς τῆς γωνίας (ΒΑ′,ΒΧ) καὶ τὸ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΓΑ′ σημεῖον Α αὐτῆς. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὀξυγώνιον.

Πράγματι, ἡ γωνία (ΓΑ,ΓΒ) αὐτοῦ εἶναι ὀξεῖα (120, Πόρισμα 1). Ἡ γωνία (ΒΓ, ΒΑ) αὐτοῦ εἶναι ὀξεῖα, ὡς μικροτέρα τῆς ὀρθῆς (ΒΓ, ΒΧ). Ἡ γωνία (ΑΒ,ΑΓ) εἶναι ἐπίσης ὀξεῖα, ὡς τοῦτο προκύπτει ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΑ′Β (120, Πόρισμα 1).

124. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν εἰς δύο ὁμοίως προσανατολισμένα τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α′Β′Γ′ εἶναι $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$ καὶ $\Gamma = \Gamma'$, τότε αἱ γωνίαι Β καὶ Β′ αὐτῶν εἶναι ἴσαι ἢ παραπληρωματικαί.

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας ἡ ὁποία ἔχει ἀρχικὸν σημεῖον τὸ Γ καὶ περιέχει τὸ Β, τὸ σημεῖον Ζ ὥστε ΓΖ = Γ′Β′.



Σχ. 124

Ἂν τὸ Ζ συμπίπτῃ μὲ τὸ Β, τότε θὰ εἶναι $\alpha = \alpha'$. Τὰ θεωρούμενα τρίγωνα θὰ εἶναι ἴσα, καὶ λόγῳ τούτου Β = Β′.

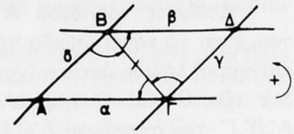
Ἂν τὸ Ζ εἶναι διάφορον τοῦ Β (Σχ. 124), ἐκ τῶν ἴσων (79) τριγώνων ΑΖΓ καὶ Α′Β′Γ′ ἕπεται ὅτι (ΖΓ,ΖΑ)=(Β′Γ′,Β′Α′) καὶ ΑΖ = Α′Β′. Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι ΑΒ = Α′Β′, θὰ ἔχωμεν : ΑΒ = ΑΖ καὶ ἐξ αὐτῆς ὅτι (ΖΑ,ΖΒ) = (ΒΓ,ΒΑ) Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα (ΖΓ,ΖΑ) + (ΖΑ,ΖΒ) εἶναι ἴσον πρὸς τὴν εὐθεῖαν γωνίαν (ΖΓ,ΖΒ) ἑπομένως καὶ τὸ ἄθροισμα (Β′Γ′,Β′Α′) + (ΒΓ,ΒΑ), ἤτοι τὸ ἄθροισμα Β + Β′, εἶναι ἴσον πρὸς μίαν εὐθεῖαν γωνίαν.

Ἂν τὰ ἀνωτέρω τρίγωνα εἶναι ἀντιθέτως προσανατολισμένα, τότε ἢ αἱ Β καὶ Β′ εἶναι ἀντίθετοι ἢ ἡ Β καὶ ἡ ἀντίθετος τῆς Β′ εἶναι παραπληρωματικαί.

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Ἂν εἰς δύο ὁμοίως προσανατολισμένα τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α′Β′Γ′ εἶναι* $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $A = A'$, *καὶ αἱ γωνίαι Α καὶ Α′ εἶναι ὀρθαὶ ἢ ἀμβλεῖαι, τότε τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα.*

Πράγματι, αἱ γωνίαι Β καὶ Β′ θὰ εἶναι ἴσαι ἢ παραπληρωματικαὶ (124) Ἐπειδὴ ὅμως αὗται εἶναι ὀξεῖαι ἀποκλείεται νὰ εἶναι παραπληρωματικαί. Ἑπομένως εἶναι Β = Β′ καὶ λόγῳ τούτου τὰ θεωρούμενα τρίγωνα εἶναι ἴσα (80).

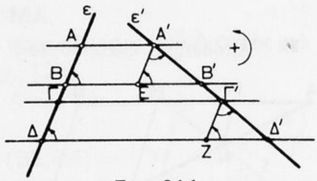
125. ΘΕΩΡΗΜΑ. **Ἂν δύο παράλληλοι εὐθεῖαι α καὶ β τέμνωνται ἀπὸ δύο ἄλλας παραλλήλους εὐθείας γ καὶ δ καὶ εἶναι Α, Β, Γ, Δ τὰ κοινὰ σημεῖα (Α, Β τὰ κοινὰ σημεῖα τῆς δ μὲ τὰς α, β ἀντιστοίχως καὶ Γ, Δ τὰ κοινὰ σημεῖα τῆς γ μὲ αὐτὰς ἀντιστοίχως), τότε: ΑΒ = = ΓΔ καὶ ΑΓ = ΒΔ.**



Σχ. 125

Ἀπόδειξις. Τὰ ὁμοίως προσανατολισμένα τρίγωνα ΑΓΒ καὶ ΔΒΓ (Σχ. 125) εἶναι ἴσα. Πράγματι, ἡ ΒΓ εἶναι κοινὴ αὐτῶν πλευρὰ καὶ αἱ προσκείμεναι αὐτῆς γωνίαι (ΓΒ,ΓΑ), (ΒΓ,ΒΔ) εἶναι ἴσαι (96), ὡς καὶ αἱ (ΒΑ,ΒΓ), (ΓΔ,ΓΒ).

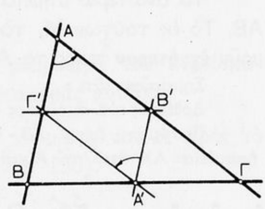
126. ΘΕΩΡΗΜΑ. **Θεωροῦμεν τὰς παραλλήλους εὐθείας α, β, γ, δ καὶ τὰ κοινὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ καὶ Α′, Β′, Γ′, Δ′ αὐτῶν μὲ δύο εὐθείας ε καὶ ε′. Ἂν ΑΒ = ΓΔ, τότε θὰ εἶναι καὶ Α′Β′ = Γ′Δ′.**



Σχ. 126.1

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν (Σχ. 126.1) τὰς παραλλήλους Α′Ε καὶ Γ′Ζ πρὸς τὴν ε (Ε καὶ Ζ ἐπὶ τῶν β καὶ δ ἀντιστοίχως). Εἶναι: Α′Ε = ΑΒ καὶ Γ′Ζ = ΓΔ (125) καὶ ἐπειδὴ ΑΒ = ΓΔ θὰ εἶναι καὶ Α′Ε = Γ′Ζ. Ἐκ τῶν παραλλήλων Α′Ε καὶ Γ′Ζ πρὸς τὴν ε ἔχομεν: (Α′Ε, Α′Β′) = = (Γ′Ζ, Γ′Δ′) (96, Πόρισμα 1) καὶ (ΕΒ′, ΕΑ′) = (ΖΔ′,ΖΓ′)(99). Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι τὰ τρίγωνα Α′ΕΒ′ καὶ Γ′ΖΔ′ εἶναι ἴσα (80), καὶ ἑπομένως Α′Β′ = Γ′Δ′.

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Ἡ εὐθεῖα ἡ συνδέουσα τὰ μέσα δύο πλευρῶν τριγώνου εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτην πλευρὰν αὐτοῦ, καὶ τὸ εὐθ. τμῆμα τὸ ἔχον ἄκρα τὰ θεωρούμενα μέσα εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς τρίτης πλευρᾶς.*



Σχ. 126.2

Πράγματι, ἂν θεωρήσωμεν τὴν διὰ τοῦ μέσου Β′ τῆς πλευρᾶς ΓΑ παράλληλον πρὸς τὴν ΓΒ, τὸ κοινὸν σημεῖον Γ′ αὐτῆς μὲ τὴν ΑΒ θὰ εἶναι (126) τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΑΒ (Σχ. 126.2). Ἐξ ἄλλου, ἐκ τῶν ἴσων τριγώνων ΑΓ′Β′ καὶ Α′Β′Γ′ (80) ἕπεται ὅτι Γ′Β′ = Α′Γ.

ΜΕΣΟΤΡΙΓΩΝΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ.

127. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Τὸ τρίγωνον τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς τὰ μέσα Α′, Β′, Γ′ τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἀντιστοίχως, ὀνομάζεται* **μεσοτρίγωνον** *τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.*

Ἐκ τοῦ προηγουμένου θεωρήματος (126, Πόρισμα) ἔχομεν ὅτι: Αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου Α′Β′Γ′ εἶναι ἀντιστοίχως παράλληλοι πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ δύναται νὰ ὀνομάζεται *ἀντιμεσοτρίγωνον* τοῦ τριγώνου Α'Β'Γ' (Σχ. 126.2).

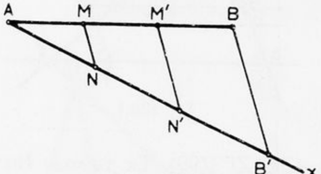
Δοθέντος τριγώνου Α'Β'Γ', αἱ κορυφαὶ Α, Β, Γ τοῦ ἀντιμεσοτριγώνου του, εἶναι τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν εὐθειῶν τῶν ἀγονένων διὰ τῶν κορυφῶν Α',Β',Γ', καὶ παραλλήλων ἀντιστοίχως πρὸς τὰς Β'Γ', Γ'Α', Α'Β' (Α κοινὸν σημεῖον τῶν διὰ τῶν Β' καὶ Γ' παραλλήλων πρὸς τὰς Γ'Α' καὶ Α'Β' κλπ.). Αἱ κορυφαὶ Α',Β',Γ' τοῦ τριγώνου Α'Β'Γ' εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τοῦ προκύπτοντος ἀντιμεσοτριγώνου ΑΒΓ τοῦ Α'Β'Γ'. Πράγματι, ἐκ τῶν Α'Γ = Γ'Β' καὶ ΒΑ' = Γ'Β' (126, Πόρισμα), ἔπεται ὅτι Α'Γ = ΒΑ', ἤτοι ὅτι τὸ Α' καὶ τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΒΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

ΣΗΜΕΙΑ ΤΡΙΧΟΤΟΜΟΥΝΤΑ ΕΥΘ. ΤΜΗΜΑ

128. ΘΕΩΡΗΜΑ Δοθέντος εὐθ. τμήματος ΑΒ, ὑπάρχουν μεταξὺ τῶν Α καὶ Β δύο σημεῖα Μ καὶ Μ', καὶ μόνον δύο, ὥστε :

$$AM = MM' = M'B.$$

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν : τυχοῦσαν ἀπὸ τοῦ Α ἡμιευθεῖαν ΑΧ, ἕνα τυχὸν σημεῖον Ν αὐτῆς, καὶ τὰ σημεῖα Ν' καὶ Β' (Ν' μεταξὺ τῶν Ν καὶ Β') ὥστε ΑΝ = ΝΝ' = = Ν'Β, καὶ τὰς διὰ τῶν Ν καὶ Ν' παραλλήλως ΝΜ καὶ Ν'Μ' πρὸς τὴν ΒΒ' (Μ καὶ Μ' ἐπὶ τῆς ΑΒ). Εἶναι (Σχ. 128.1) ΑΜ = ΜΜ' = Μ'Β (126).



Σχ. 128.1

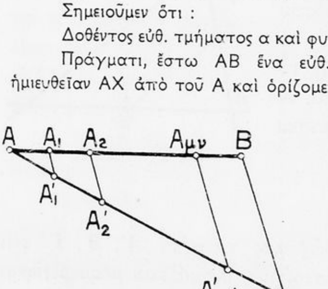
Ἐξ ἄλλου, ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι ὑπάρχουν δύο ἄλλα σημεῖα Ρ καὶ Ρ', διάφορα τῶν Μ καὶ Μ', ἱκανοποιοῦντα τὰς ἀνωτέρω συνθήκας, ἀγόμεθα εἰς ἄτοπον (126, Πόρισμα).

Τὰ ἀνωτέρω σημεῖα Μ καὶ Μ' ὀνομάζονται **τριχοτομοῦντα** τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ. Τὸ ἐκ τούτων Μ, τὸ κείμενον μεταξὺ τῶν Α καὶ Μ', ὀνομάζεται τριχοτομοῦν **ἐγγύτερον** πρὸς τὸ Α καὶ τὸ Μ' ἐγγύτερον πρὸς τὸ Β.

Σημειοῦμεν ὅτι :

Δοθέντος εὐθ. τμήματος α καὶ φυσικοῦ ἀριθμοῦ μ, ὑπάρχει εὐθ. τμῆμα γ ὥστε : $\alpha = \mu \cdot \gamma$

Πράγματι, ἔστω ΑΒ ἕνα εὐθ. τμῆμα ἴσον πρὸς τὸ α. Θεωροῦμεν μίαν τυχοῦσαν ἡμιευθεῖαν ΑΧ ἀπὸ τοῦ Α καὶ ὁρίζομεν ἐπ' αὐτῆς μ διαδοχικὰ καὶ ἴσα εὐθ. τμήματα AA_1', $A_1'A_2'$ . . ., $A'\mu\!-\!1\ A'\mu$. Αἱ διὰ τῶν A_1', A_2' . . ., $A'\mu\!-\!1$, παράλληλοι πρὸς τὴν $A'\mu B$ ὁρίζουν ἐπὶ τῆς ΑΒ τὰ σημεῖα A_1, A_2, . . ., $A\mu\!-\!1$, τὰ ὁποῖα χωρίζουν (126) τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ εἰς μ ἴσα εὐθ. τμήματα.



Σχ. 128.2

Τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ εἶναι τὸ **γνόμενον** τοῦ εὐθ. τμήματος $AA_1 = \gamma$ ἐπὶ τὸν φυσικὸν μ.

Ὁ φυσικὸς ἀριθμὸς μ δύναται νὰ ὀνομάζεται **λόγος** τῶν εὐθ. τμημάτων α καὶ γ κατὰ τὴν τάξιν (α, γ). Συμβολικῶς : $\frac{\alpha}{\gamma} = \mu$. Ὥστε ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ αὐτοῦ ἔχομεν τὴν ἰσοδυναμίαν:

$$\alpha = \mu \cdot \gamma \iff \frac{\alpha}{\gamma} = \mu.$$

Τὸ εὐθ. τμῆμα γ ὀνομάζεται **ἀκέραιον ὑποπολλαπλάσιον** τοῦ α.

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ ἕπεται ὅτι ἂν ἕνα εὐθ. τμῆμα δ εἶναι ὑποπολλαπλάσιον τοῦ γ, θὰ εἶναι καὶ ὑποπολλαπλάσιον τοῦ α ἤτοι θὰ εἶναι ἕνα **κοινὸν** ὑποπολλαπλάσιον τῶν α καὶ γ.

Δυνάμεθα, κατὰ ταῦτα, νὰ ἔχωμεν πάντοτε δύο εὐθ. τμήματα τὰ ὁποῖα νὰ ἔχουν (δέχωνται) ἕνα κοινὸν ὑποπολλαπλάσιον. Ἐκ τούτου δὲν ἕπεται ὅτι οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι δύο δοθέντα εὐθ. τμήματα α καὶ β, ὑπάρχει πάντοτε κοινὸν ὑποπολλαπλάσιον τούτων. Ἐπὶ τοῦ θέματος τούτου γίνεται λόγος εἰς τὰ Μαθηματικὰ τῆς Δ' τάξεως (Κεφ. Ι.).

Σημειοῦμεν ὅτι : Δὲν δυνάμεθα, βάσει τῶν εἰσαχθέντων ἀξιωμάτων, νὰ ἀποδείξωμεν διὰ τὴν τυχοῦσαν γωνίαν (ΟΑ,ΟΒ) πρότασιν ἀνάλογον τῆς ἀνωτέρω. (128).

ΣΧΕΣΕΙΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΟΣ ΕΙΣ ΤΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

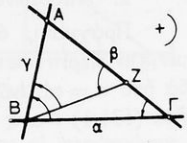
129. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν δύο πλευραὶ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ἄνισοι, τότε καὶ αἱ ἀπέναντι αὐτῶν γωνίαι εἶναι ὁμοίως ἄνισοι, καὶ ἀντιστρόφως.

Ἤτοι : $\beta > \gamma \Leftrightarrow B > \Gamma$

Ἀπόδειξις. Ἔστω Ζ τὸ σημεῖον τῆς ΑΓ, τὸ προς τὸ μέρος τοῦ Α πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται τὸ Γ, διὰ τὸ ὁποῖον ΑΖ = ΑΒ (Σχ. 129).

Ἂν $\beta > \gamma$, τὸ Ζ κεῖται μεταξὺ τῶν Γ καὶ Α καὶ ἐπομένως (119, Πόρισμα 1) : (ΖΑ, ΖΒ) > (ΓΑ, ΓΒ).

Ἀλλὰ (ΒΓ,ΒΑ) > (ΖΑ,ΖΒ) καὶ ἐπειδὴ (ΒΖ,ΒΑ) = (ΖΑ,ΖΒ) (90), θὰ εἶναι (ΒΓ,ΒΑ) > (ΓΑ,ΓΒ), ἤτοι Β > Γ.


Σχ. 129

Ἡ ἀντίστροφος πρότασις ἀποδεικνύεται εὐκόλως διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἐπαγωγῆς. Πράγματι, ἂν Β > Γ, θὰ εἶναι καὶ $\beta > \gamma$, διότι ἀποκλείονται αἱ περιπτώσεις $\beta = \gamma$ καὶ $\beta < \gamma$, ἀφοῦ, εἰς μὲν τὴν περίπτωσιν, $\beta = \gamma$, θὰ εἴχομεν (90) Β = Γ, ἐνῶ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι Β > Γ, εἰς δὲ τὴν περίπτωσιν $\beta < \gamma$ θὰ εἴχομεν (129) Β < Γ, ἐνῶ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι Β > Γ.

130. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἑκάστη πλευρὰ τριγώνου, εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του καὶ μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς αὐτῶν.

Ἀπόδειξις. Ἔστω Ζ τὸ σημεῖον τῆς ΑΓ, πρὸς τὸ μέρος τοῦ Α πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται τὸ Γ, διὰ τὸ ὁποῖον ΑΖ = ΑΒ (Σχ. 130).

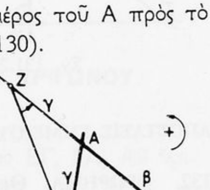
Εἶναι : (ΒΑ,ΒΖ) = (ΖΒ,ΖΑ) (90), καὶ $\Gamma Z = \beta + \gamma$.

Ἐπειδὴ (ΒΓ,ΒΖ) > (ΒΑ,ΒΖ) θὰ εἶναι (ΒΓ, ΒΖ) > (ΖΒ,ΖΑ). Ἐκ τῆς τελευταίας αὐτῆς ἕπεται ὅτι ΖΓ > ΒΓ, ἤτοι $\beta + \gamma > \alpha$ ἢ $\alpha < \beta + \gamma$.

Ἂν εἶναι $\alpha > \beta > \gamma$ τότε $\beta > \alpha - \gamma$ κλπ.

Σημειοῦμεν ὅτι, ἂν τὰ Α, Β, Γ κεῖνται ἀπ' εὐθείας, θὰ εἶναι :

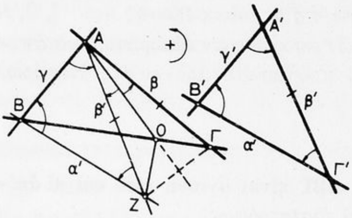
$$\alpha = \beta + \gamma \quad \text{καὶ} \quad \beta = \alpha - \gamma.$$


Σχ. 130

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Ἡ ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ἡ μεγαλυτέρα πλευρὰ αὐτοῦ.*

Ἡ ἀπέναντι τῆς ἀμβλείας γωνίας πλευρὰ ἀμβλυγωνίου τριγώνου, εἶναι ἡ μεγαλυτέρα πλευρὰ αὐτοῦ.

131. Θεώρημα. 1. Ἂν εἰς δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ εἶναι: $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$, $A > A'$, τότε θὰ εἶναι καὶ $\alpha > \alpha'$ καὶ 2. Ἂν εἶναι $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$, $\alpha > \alpha'$, τότε θὰ εἶναι $A > A'$.

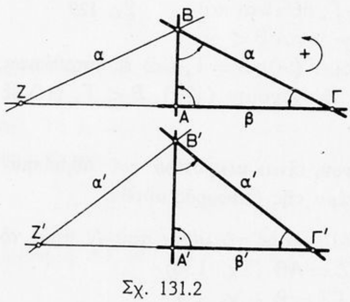


Σχ. 131.1

Ἀπόδειξις. 1. Θεωροῦμεν (Σχ. 131.1) τὴν ἡμιευθεῖαν ΑΖ ὥστε (ΑΒ, ΑΖ) = (Α΄Β΄, Α΄Γ΄) καὶ ἐπ᾽ αὐτῆς τὸ σημεῖον Ζ ὥστε $AZ = \beta'$. Ἐκ τῶν ἴσων τριγώνων ΑΒΖ καὶ Α΄Β΄Γ΄ ἔπεται ὅτι $BZ = \alpha'$. Ἔστω Ο τὸ ἐπὶ τῆς ΒΓ σημεῖον τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας (ΑΖ, ΑΓ). Ἐκ τῶν τριγώνων ΑΟΓ καὶ ΑΟΖ ἔπεται (79, Πόρισμα 1) ὅτι $OZ = O\Gamma$. Ἔχομεν ὅμως (130) : $OB + OZ > BZ$, ἤτοι $OB + O\Gamma > BZ$ ἢ $B\Gamma > \alpha'$ ἤτοι $\alpha > \alpha'$.

2. Ἀποδεικνύεται εὐκόλως διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς :

Πράγματι, ἀποκλείονται αἱ περιπτώσεις $A = A'$ καὶ $A < A'$, διότι εἰς μὲν τὴν περίπτωσιν $A = A'$ τὰ τρίγωνα θὰ ἦσαν ἴσα (79) καὶ λόγῳ τούτου θὰ ἦτο $\alpha = \alpha'$, ἐνῶ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $\alpha > \alpha'$, εἰς δὲ τὴν περίπτωσιν $A < A'$, θὰ ἦτο (131.1) : $\alpha < \alpha'$, ἐνῶ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $\alpha > \alpha'$.



Σχ. 131.2

ΠΟΡΙΣΜΑ *1. Ἂν εἰς δύο ὀρθογώνια, κατὰ τὰς γωνίας A καὶ A′, τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α′Β′Γ′ εἶναι $\alpha = \alpha'$ καὶ $B > B'$, τότε θὰ εἶναι καὶ $\beta > \beta'$ καὶ*

2. Ἂν $\alpha = \alpha'$ καὶ $\beta > \beta'$, τότε θὰ εἶναι $B > B'$.

Πράγματι, ἂν θεωρήσωμεν τὰ συμμετρικὰ Ζ καὶ Ζ′ τῶν Γ καὶ Γ′ ἀντιστοίχως ὡς πρὸς τὰ Α καὶ Α′, τὰ τρίγωνα ΒΓΔ καὶ Β′Γ′Δ′ εἶναι τρίγωνα τοῦ θεωρήματος (131).

ΑΠΟΣΤΑΣΙΣ ΣΗΜΕΙΟΥ ΑΠΟ ΕΥΘΕΙΑΣ

132. ΘΕΩΡΗΜΑ. Θεωροῦμεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου εὐθεῖαν ε, σημεῖον Α ἐκτὸς αὐτῆς καὶ τὴν κάθετον ΑΟ ἐπὶ τὴν ε (Ο σημεῖον τῆς ε).

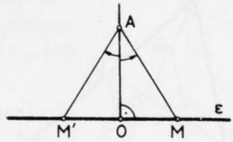
1. Διὰ κάθε σημεῖον Μ τῆς ε, διάφορον τοῦ Ο, εἶναι : $AO < AM$.

2. Ἂν Μ καὶ Μ′ εἶναι δύο σημεῖα τῆς ε, διάφορα ἀλλήλων καὶ τοῦ Ο, τότε ἰσχύει ἡ πρότασις :

(α) $OM = OM' \Leftrightarrow AM = AM'$, καὶ (β) $OM < OM' \Leftrightarrow AM < AM'$.

Ἀπόδειξις. 1. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΟΜ (Σχ. 132.1) ἔχομεν (129) ΑΟ < ΑΜ.

Τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΟ ὀνομάζεται **ἀπόστασις** τοῦ σημείου Α ἀπὸ τῆς εὐθείας ε.

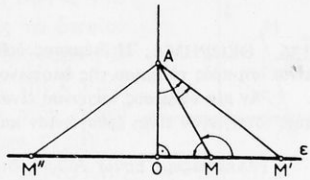


Σχ. 132.1

2. (α) Ἔστω ΟΜ = ΟΜ′ (Σχ. 132.1). Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΑΟΜ καὶ ΑΟΜ′ ἔχομεν (79, Πόρισμα) ὅτι ΑΜ = ΑΜ′.

Ἂν ΑΜ = ΑΜ′ ἐκ τῶν αὐτῶν τριγώνων ἔχομεν (124, Πόρισμα) : ΟΜ = ΟΜ′.

(β) Ἔστω ΟΜ < ΟΜ′. Τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ′ (Σχ. 132. 2) δύνανται νὰ θεωρηθοῦν πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ Ο, διότι ἂν κεῖνται ἑκατέρωθεν τοῦ Ο, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὸ συμμετρικὸν Μ″ τοῦ Μ′ ὡς πρὸς τὸ Ο, ὅτε ἀναγόμεθα εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν τὰ Μ καὶ Μ′ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ Ο.



Σχ. 132.2

Ἐκ τῆς ΟΜ < ΟΜ′ ἕπεται (119, Πόρισμα 1) ὅτι (Μ′Α, Μ′Μ) > (ΜΑ,ΜΟ). Ἀλλὰ (ΜΑ,ΜΟ) < (ΜΜ′,ΜΑ), διότι ἡ (ΜΑ,ΜΟ) εἶναι ὀξεῖα. Ἑπομένως :

(Μ′Α, Μ′Μ) < (ΜΜ′, ΜΑ) καὶ λόγῳ τούτου ΑΜ < ΑΜ′ (129).

Ἂν ΑΜ < ΑΜ′, τότε ΟΜ < ΟΜ′, διότι ἀποκλείονται αἱ περιπτώσεις ΟΜ = ΟΜ′, ἀφοῦ τότε θὰ ἦτο (79 Πόρισμα) ΑΜ = ΑΜ′, καὶ ΟΜ > ΟΜ′, ἀφοῦ τότε θὰ ἦτο ΑΜ > ΑΜ′, ἐνῶ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι ΑΜ < ΑΜ′.

ΑΠΟΣΤΑΣΙΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ

133. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ὀνομάζομεν* **ἀπόστασιν** *δύο παραλλήλων εὐθειῶν α καὶ β τὴν ἀπόστασιν τοῦ τυχόντος σημείου Α τῆς μιᾶς ἀπὸ τῆς ἄλλης* (132).

Ἡ ἀπόστασις αὕτη εἶναι (125) ἀνεξάρτητος τοῦ θεωρουμένου σημείου Α τῆς εὐθείας α ἢ τῆς β.

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΣΗΜΕΙΑ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΤΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

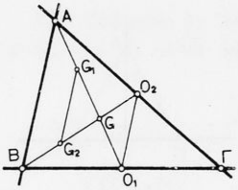
ΚΟΙΝΟΝ ΣΗΜΕΙΟΝ ΔΙΑΜΕΣΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

134. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἔστωσαν O_1, O_2, O_3 τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ ἀντιστοίχως.

Ὀνομάζομεν **διαμέσους** *τοῦ τριγώνου, καὶ τὰς συμβολίζομεν συνήθως μὲ τὰ γράμματα* μ_1, μ_2, μ_3, *τὰ εὐθύγραμμα τμήματα* AO_1, BO_2, ΓO_3.

135. ΘΕΩΡΗΜΑ. Αἱ διάμεσοι παντὸς τριγώνου διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου. Τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι τὸ τριχοτομοῦν ἑκάστην τούτων τὸ ἐγγύτερον πρὸς τὸ ἀντίστοιχον μέσον.

'Απόδειξις. Ἔστω G τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαμέσων AO_1 καὶ AO_2, καὶ G_1, G_2 τὰ μέσα τῶν εὐθ. τμημάτων GA, GB, ἀντιστοίχως. Αἱ G_1G_2 καὶ O_1O_2 εἶναι παράλληλοι καὶ $G_1G_2 = O_1O_2$ (126, Πόρισμα). Ἐκ τῶν ἴσων (80) τριγώνων GG_1G_2 καὶ $GO_1.O_2$ ἕπεται ὅτι $GG_1 = GO_1$, ἤτοι ὅτι τὸ G εἶναι τὸ τριχοτομοῦν τὴν διάμεσον AO_1 σημεῖον τὸ ἐγγύτερον πρὸς τὸ O_1 καὶ τὸ τριχοτομοῦν ὁμοίως τὴν BO_2. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαμέσων AO_1, καὶ $ΓO_3$ εἶναι τὸ τριχοτομοῦν τὴν AO_1 τὸ ἐγγύτερον πρὸς τὸ O_1.



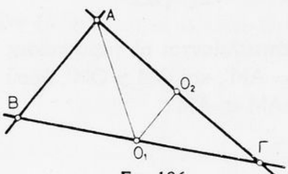
Σχ. 135

Τὸ ἀνωτέρω σημεῖον ὀνομάζεται, συνήθως, **κέντρον βάρους** τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

136. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἡ διάμεσος ὀρθογωνίου τριγώνου, ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν ὑποτείνουσαν, εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης καὶ ἀντιστρόφως :

Ἂν μία διάμεσος τριγώνου εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς εἰς τὴν ὁποίαν ἀντιστοιχεῖ, τότε τὸτρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον κατὰ τὴν ἀπέναντι τῆς πλευρᾶς ταύτης γωνίαν.

'Απόδειξις. Ἔστω AO_1 ἡ διάμεσος τοῦ ὀρθογωνίου, κατὰ τὴν γωνίαν Α, τριγώνου ΑΒΓ (Σχ. 136). Ἡ O_1O_2 (O_2 τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΓΑ) εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ (126, Πόρισμα) καὶ ἑπομένως κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΑ. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι τὸ τρίγωνον AO_1 Γ εἶναι ἰσοσκελὲς (118, Πόρισμα), ἤτοι $AO_1 = O_,Γ$



Σχ. 136

Ἀντιστρόφως, ἔστω ὅτι ἡ διάμεσος AO_1 τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ἴση πρὸς $O_1Γ$ (ἥμισυ τῆς πλευρᾶς ΒΓ). Ἐκ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου $O_1AΓ$ ἔχομεν (126, Πόρισμα) ὅτι ἡ Ο O_2 (O_2 τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΓΑ) εἶναι (118, Πόρισμα) κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ. Ἀλλὰ ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν O_1O_2, ἑπομένως (96.2) κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ, ἤτοι ἡ γωνία (ΑΒ,ΑΓ) ὀρθή.

ΠΟΡΙΣΜΑ *Ἂν εἰς ὀρθογώνιον, κατὰ τὴν γωνίαν Α, τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι* $α = 2γ$, *τότε θὰ εἶναι* $B = 2Γ$ *καὶ ἀντιστρόφως.*

Ἤτοι : $α = 2γ \Leftrightarrow B = 2Γ$ (ἢ $Γ = \frac{π}{3}$).

Πράγματι, τὸ τρίγωνον AO_1B εἶναι ἰσόπλευρον διότι $AO_1 = BO_1$, καὶ ἐξ ὑποθέσεως $AB = BO_1$.

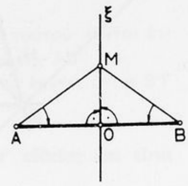
ΠΕΡΙΚΕΝΤΡΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Ἀποδεικνύονται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου αἱ ἑξῆς προτάσεις :

137. ΘΕΩΡΗΜΑ. (1) Πᾶν σημεῖον Μ τῆς μεσοκαθέτου εὐθ. τμήματος ΑΒ ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν ἄκρων Α καὶ Β αὐτοῦ, καὶ ἀντιστρόφως :

(2) Πᾶν σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου, ἀπέχον ἴσον ἀπὸ δύο σημείων Α καὶ Β αὐτοῦ κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ.

Ἀπόδειξις. (1) Ἔστω Μ ἕνα σημεῖον τῆς μεσοκαθέτου ξ τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ. Ἐκ τῶν ἀντιρρόπως ἴσων ὀρθογωνίων τριγώνων ΜΟΑ καὶ ΜΟΒ (79, Πόρισμα) ἔχομεν ΜΑ=ΜΒ (Σχ. 137).



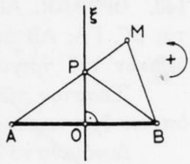
Σχ. 137.1

(2) Ἐκ τῶν αὐτῶν ἀντιρρόπως ἴσων (91, Πόρισμα) τριγώνων ΜΟΑ καὶ ΜΟΒ (Σχ. 137.1), ἔχομεν : (ΟΑ ΟΜ) = −(ΟΒ,ΟΜ) καὶ ΟΑ = ΟΒ, καὶ ἐκ τούτων ὅτι ἡ ΟΜ εἶναι ἡ μεσοκάθετος τοῦ εὐθ τμήματος ΑΒ.

Σημειοῦμεν ὅτι :

Ἂν ἕνα σημεῖον Μ δὲν κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου ξ εὐθ. τμήματος ΑΒ, δὲν ἀπέχει ἴσον τῶν Α καὶ Β, καὶ εἶναι ΜΑ > ΜΒ ἢ ΜΑ < ΜΒ καθ' ὅσον τὸ Μ κεῖται πρὸς τὸ μέρος τῆς ξ πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται τὸ Β ἢ τὸ Α ἀντιστοίχως (Σχ. 137.2), Πράγματι, ἔστω ὅτι τὸ Μ (Σχ. 137.2) κεῖται πρὸς τὸ μέρος τῆς ξ πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται τὸ Β καὶ ὅτι εἶναι Ρ τὸ μεταξὺ τῶν Α καὶ Μ σημεῖον τῆς ξ. Ἐκ τοῦ τριγώνου ΡΒΜ ἔχομεν (130) :

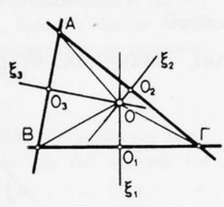
ΜΡ + ΡΒ > ΜΒ ἢ ΜΡ + ΡΑ > ΜΒ ἢ ΜΑ > ΜΒ κλπ.



Σχ. 137.2

138. ΘΕΩΡΗΜΑ. Αἱ μεσοκάθετοι τῶν πλευρῶν τριγώνου διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου (1).

Ἀπόδειξις. Ἔστω Ο τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν μεσοκαθέτων ξ_1 καὶ ξ_2 τῶν πλευρῶν ΒΓ καὶ ΓΑ (2) (Σχ. 137). Εἶναι (137) : ΟΒ = ΟΓ καὶ ΟΓ = ΟΑ. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι ΟΒ = ΟΑ καὶ ἐπομένως (137) ὅτι τὸ Ο εἶναι σημεῖον τῆς μεσοκαθέτου ξ_3 τῆς πλευρᾶς ΑΒ.



Σχ. 138

Σημειοῦμεν ὅτι :

Ἐκτὸς τοῦ ἀνωτέρω σημείου Ο δὲν ὑπάρχει ἄλλο ἀπέχον ἴσον ἀπὸ τῶν κορυφῶν Α, Β, Γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Πράγματι, ἂν ἕνα σημεῖον Ο' ἀπέχῃ ἴσον ἀπὸ τῶν Α,Β,Γ, τότε ἐκ τῆς ΟΒ = ΟΓ ἕπεται (137) ὅτι κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου ξ_1 τῆς πλευρᾶς ΒΓ καὶ ἐκ τῆς ΟΓ = ΟΑ ὅτι κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου ξ_2 τῆς πλευρᾶς ΓΑ. Ἑπομένως τὸ Ο' δὲν εἶναι διάφορον τοῦ Ο.

Τὸ σημεῖον τοῦτο Ο ὀνομάζεται **περίκεντρον** τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

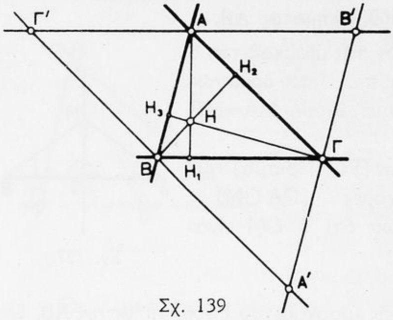
ΟΡΘΟΚΕΝΤΡΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

139. ΘΕΩΡΗΜΑ. Αἱ διὰ τῶν κορυφῶν τριγώνου ΑΒΓ κάθετοι ἐπὶ τὰς εὐθείας ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου. (1)

---

(1) Εἶναι εὐθεῖαι **συντρέχουσαι**.
(2) Αἱ μεσοκάθετοι αὗται τέμνονται συμφώνως πρὸς τὸ θεώρημα (96, Πόρισμα 4).

'Απόδειξις. Θεωροῦμεν (Σχ. 139) τὸ ἀντιμεσοτρίγωνον Α'Β'Γ' τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (127). Αἱ κορυφαὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου Α'Β'Γ' καὶ ἑπομένως αἱ διὰ τῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ κάθετοι ἐπὶ τὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ εἶναι μεσοκάθετοι τοῦ τριγώνου Α'Β'Γ' καὶ ἑπομένως διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου (138).



Σχ. 139

'Ονομάζομεν Η τὸ σημεῖον τοῦτο. Τὸ σημεῖον Η ὀνομάζεται **ὀρθόκεντρον** τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

140. ΟΡΙΣΜΟΙ. Αἱ προβολαὶ H_1,H_2,H_3 τῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἐπὶ τὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως εἶναι κορυφαὶ τριγώνου τὸ ὁποῖον ὀνομάζεται **ὀρθικὸν** τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Ἕκαστον τῶν σημείων Α,Β,Γ,Η, εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς τὰ τρία ἄλλα.

Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι τὰ σημεῖα αὐτὰ ἀποτελοῦν **ὀρθοκεντρικὸν σύνολον.**

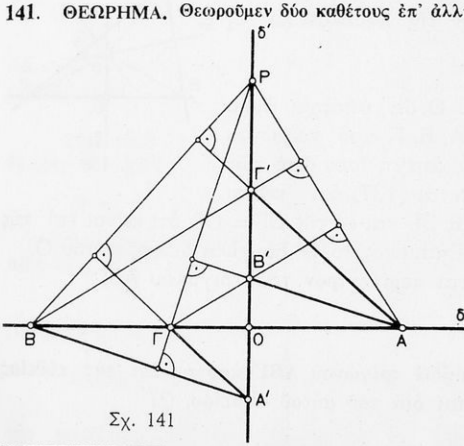
Τὰ εὐθ. τμήματα $AH_1,BH_2,\Gamma H_3$ ὀνομάζονται **ὕψη** τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, συμβολίζονται δὲ μὲ τὰ γράμματα $\upsilon_1,\upsilon_2,\ \upsilon_3$ ἀντιστοίχως.

Σημειοῦμεν ὅτι :

1. Τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι τὸ περίκεντρον τοῦ τριγώνου Α'Β'Γ'.

2. Τὸ ὀρθόκεντρον ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ἡ κορυφὴ τῆς ὀρθῆς γωνίας αὐτοῦ.

141. ΘΕΩΡΗΜΑ. Θεωροῦμεν δύο καθέτους ἐπ' ἀλλήλας εὐθείας δ καὶ δ' καὶ ἐπὶ τούτων ἀντιστοίχως τὰ σημεῖα Α, Β, Γ καὶ Α', Β', Γ'. Ἂν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ' καὶ Α'Β εἶναι παράλληλοι ὡς καὶ αἱ ΑΓ' καὶ Α'Γ, τότε θὰ εἶναι παράλληλοι καὶ αἱ ΒΓ' καὶ Β'Γ (1)



Σχ. 141

'Απόδειξις. Διὰ νὰ ἔχωμεν τὰ εἰς τὴν πρότασιν σημεῖα, θεωροῦμεν ἕνα τυχὸν σημεῖον Α τῆς δ, δύο τυχούσας διὰ τούτου εὐθείας ΑΒ', ΑΓ' (Β' καὶ Γ' τὰ κοινὰ σημεῖα αὐτῶν μὲ τὴν δ'), ἕνα τυχὸν σημεῖον Α' τῆς δ' καὶ τὰς διὰ τούτου παραλλήλους Α'Β καὶ Α'Γ πρὸς τὰς ΑΒ' καὶ ΑΓ' ἀντιστοίχως (Β καὶ Γ τὰ κοινὰ σημεῖα αὐτῶν μὲ τὴν δ).

Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τῆς προτάσεως θεωροῦμεν τὴν διὰ τοῦ Α

(1) Θεώρημα τοῦ Πάππου (300 μ. Χ.).

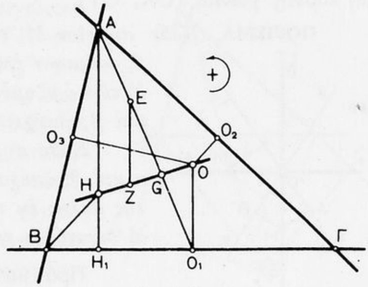
π.χ. κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ' καὶ τό κοινὸνσημεῖον Ρ αὐτῆς μὲ τὴν δ'. Πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ΡΑ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν Β'Γ. Παρατηροῦμεν ὅτι : Τὸ σημεῖον Γ' εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου ΑΡΒ. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι ἡ ΑΓ', καὶ ἑπομένως καὶ ἡ παράλληλος αὐτῆς Α'Γ, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΡΒ.

Τὸ σημεῖον Γ εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου Α'ΡΒ. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι ἡ ΡΓ είναι κάθετος ἐπὶ τὴν Α'Β καὶ ἑπομένως καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλον της ΑΒ'.

Τὸ σημεῖον Β' εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου ΑΡΓ. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι ἡ Β'Γ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΡ. Τοῦτο ὅμως εἶναι τὸ ἀποδεικτέον (1).

142. ΘΕΩΡΗΜΑ. Εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ τὰ σημεῖα H, G, O κεῖνται ἐπ' εὐθείας καὶ εἶναι HG = 2GO (1).

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν Η καὶ G τὸ ὀρθόκεντρον καὶ τὸ κέντρον βάρους τριγώνου ΑΒΓ Θεωροῦμεν ἐπὶ τῆς εὐθείας HG καὶ πρὸς τὸ μέρος τοῦ G πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται τὸ Η, τὸ σημεῖον Ο ὥστε $HG = 2 \cdot GO$ καὶ τὰ μέσα Ε καὶ Ζ τῶν εὐθ. τμημάτων AG καὶ HG ἀντιστοίχως (Σχ. 142).



Σχ. 142

Τὰ τρίγωνα GEZ καὶ GO_1O, εἶναι ἴσα (79). Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης ἔχομεν ὅτι $(O_1O, O_1G) = (EZ, EG)$. Ἐξ αὐτῆς ἕπεται ὅτι ἡ OO_1 εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΕΖ. Ἀλλὰ ἡ ΕΖ, ὡς συνδέουσα τὰ μέσα τῶν δύο πλευρῶν τοῦ τριγώνου AHG, εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΗ καὶ λόγῳ τούτου κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι καὶ ἡ OO_1 εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ. Τοῦτο σημαίνει ὅτι· ἡ εὐθεῖα ἡ συνδέουσα τὸ μέσον O_1, ἤτοι ἕνα τυχὸν ἀπὸ τὰ μέσα τῶν τριῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, μὲ τὸ θεωρηθὲν σημεῖον Ο εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ, ἤτοι μεσοκάθετος τῆς πλευρᾶς ΒΓ αὐτοῦ. Ἡ πρότασις ἀπεδείχθη, διότι δι' ὅμοιον λόγον καὶ ἡ OO_2 εἶναι μεσοκάθετος τῆς πλευρᾶς ΓΑ. Ὥστε τὸ Ο εἶναι τὸ περίκεντρον τοῦ τριγώνου.

Ἡ εὐθεῖα HGO ὀνομάζεται **εὐθεῖα Euler** (2) τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Ἐκ τῆς ἀποδείξεως τῆς ἀνωτέρω προτάσεως προκύπτει ὅτι :

ΠΟΡΙΣΜΑ *Ἡ ἀπόστασις τοῦ περικέντρου τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἀπὸ τοῦ μέσου τῆς πλευρᾶς ΒΓ αὐτοῦ εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ἀποστάσεως τῆς ἀπέναντι τῆς ΒΓ κορυφῆς τοῦ τριγώνου ἀπὸ τοῦ ὀρθοκέντρου του.*

Πράγματι, $OO_1 = EZ = \frac{AH}{2}$

143. ΘΕΩΡΗΜΑ 1. Κάθε σημεῖον Μ κείμενον ἐπὶ τῆς διχοτόμου γωνίας (ΟΧ,ΟΥ) ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν εὐθειῶν ΟΧ καὶ ΟΥ, καὶ ἀντιστρόφως :

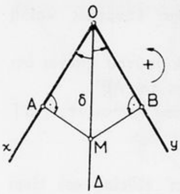
2. Κάθε σημεῖον ἐσωτερικὸν γωνίας (ΟΧ,ΟΥ) ἀπέχον ἴσον ἀπὸ τῶν εὐθειῶν ΟΧ, ΟΥ εἶναι σημεῖον τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας αὐτῆς.

---

(1) Τὸ θεώρημα τοῦτο εἶναι *θεμελιώδους σημασίας* διὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ γινομένου καὶ τοῦ *λόγου* δύο εὐθ. τμημάτων, περὶ τῶν ὁποίων γίνεται λόγος εἰς τὴν ἑπομένην τάξιν.

(2) Euler L. (1708 – 1783).

Ἀπόδειξις. 1. Ἔστω Μ ἕνα σημεῖον τῆς διχοτόμου ΟΔ τῆς κυρτῆς γωνίας (ΟΧ, ΟΥ) καὶ ΜΑ, ΜΒ αἱ ἀποστάσεις αὐτοῦ ἀπὸ τῶν ΟΧ καὶ ΟΥ ἀντιστοίχως.



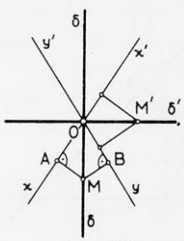
Σχ. 143.1

Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΟΜΑ καὶ ΟΜΒ τὰ ὁποῖα ἔχουν κοινὴν ὑποτείνουσαν καὶ ἀντιθέτους τὰς γωνίας (ΟΜ, ΟΑ) καὶ (ΟΜ, ΟΒ) ἕπεται (121) ὅτι ΜΑ = ΜΒ.

2. Ἂν αἱ ἀποστάσεις ΜΑ καὶ ΜΒ εἶναι ἴσαι, ἐκ τῶν ἰδίων ὀρθογωνίων τριγώνων ἔχομεν (121) ὅτι: (ΟΜ, ΟΑ) = −(ΟΜ, ΟΒ), ἤτοι ὅτι τὸ Μ εἶναι σημεῖον τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας (ΟΑ, ΟΒ), ἤτοι τῆς (ΟΧ, ΟΥ).

Σημειοῦμεν ὅτι, ὁμοίως ἀποδεικνύεται ἡ πρότασις εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς μὴ κυρτῆς γωνίας (ΟΧ, ΟΥ).

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Κάθε σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου δύο τεμνομένων εὐθειῶν α καὶ β, κείμενον ἐπὶ τῆς μιᾶς ἢ τῆς ἄλλης ἐκ τῶν εὐθειῶν δ καὶ δ' τῶν ὁριζομένων ἀπὸ τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν τῶν α καὶ β, ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τοῦ α καὶ β καὶ ἀντιστρόφως :*



Σχ. 143.2

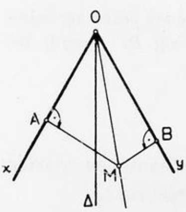
Κάθε σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου δύο τεμνομένων εὐθειῶν α καὶ β, ἀπέχον ἴσον ἀπὸ τούτων, κεῖται ἐπὶ τῆς μιᾶς ἢ τῆς ἄλλης ἐκ τῶν εὐθειῶν δ καὶ δ' ἐπὶ τῶν ὁποίων κεῖνται αἱ διχοτόμοι τῶν ὑπὸ τῶν α καὶ β ὁριζομένων γωνιῶν.

Πράγματι, ἂν τὸ σημεῖον Μ κεῖται ἐπὶ τῆς δ ἢ τῆς δ' ἀπέχει (143.1) ἴσον τῶν α καὶ β.

Ἀντιστρόφως, ἂν ἀπέχῃ ἴσον τῶν α καὶ β τότε, ἂν εἶναι ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας (ΟΧ, ΟΥ) ἢ τῆς ἀντικειμένης της, κεῖται (143. 2) ἐπὶ τῆς δ, καὶ ἂν εἶναι ἐσωτερικὸν τῆς (ΟΥ', ΟΧ) ἢ τῆς ἀντικειμένης της, κεῖται ἐπὶ τῆς δ'.

Σημειοῦμεν ὅτι :

Ἂν ἕνα σημεῖον Μ, ἐσωτερικὸν γωνίας (ΟΧ,ΟΥ), δὲν κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου ΟΔ αὐτῆς, δὲν ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν ΟΧ καὶ ΟΥ, καὶ εἶναι ΜΑ > ΜΒ ἢ ΜΑ < ΜΒ καθ' ὅσον τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας (ΟΔ, ΟΥ) ἢ τῆς (ΟΧ, ΟΔ) ἀντιστοίχως.



Σχ. 143.3

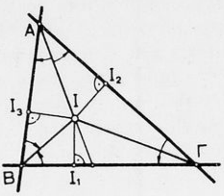
Πράγματι, ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΟΜΑ καὶ ΟΜΒ (Σχ. 143.3), τὰ ὁποῖα ἔχουν κοινὴν ὑποτείνουσαν καὶ τὴν (ΟΧ, ΟΜ) > (ΟΜ, ΟΥ), ἕπεται (131, Πόρισμα 1) ὅτι ΜΑ > ΜΒ κλπ.

144. ΘΕΩΡΗΜΑ. 1. Αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τριγώνου διέρχοναι διὰ τοῦ αὐτοῦ σημεἰου.

2. Αἱ διχοτόμοι δύο ἐξωτερικῶν γωνιῶν καὶ ἡ διχοτόμος τῆς τρίτης γωνίας αὐτοῦ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Ἀπόδειξις. 1. Ἔστω Ι τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν

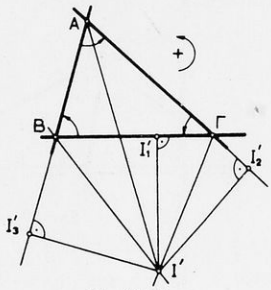
Β καὶ Γ τοῦ τριγώνου (96.5) καὶ I_1, I_2, I_3 αἱ προβολαὶ τοῦ Ι ἐπὶ τὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως (Σχ. 144.1). Ἐπειδὴ τὸ Ι εἶναι σημεῖον τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Γ τοῦ τριγώνου θὰ ἔχωμεν (143.1) ὅτι $II_1 = II_2$ καὶ ἐπειδὴ εἶναι σημεῖον τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Β, ὅτι $II_1 = II_3$. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι $II_2 = II_3$ καὶ ἐξ αὐτῆς ὅτι τὸ Ι εἶναι σημεῖον τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Α τοῦ τριγώνου, διότι εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον αὐτῆς ἀπέχον ἴσον τῶν ΑΓ καὶ ΑΒ (143.2). Ὥστε αἱ τρεῖς διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου εἶναι εὐθεῖαι συντρέχουσαι.



Σχ. 144.1

Τὸ κοινὸν σημεῖον Ι αὐτῶν ὀνομάζεται **ἔγκεντρον** (1) τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

2. Ἔστω Ι′ τὸ κοινὸν σημεῖον τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Α καὶ τῆς διχοτόμου τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας Β τοῦ τριγώνου. Ἔχομεν ἀντιστοίχως (143. 1) ὅτι $I'I'_2 = I'I_3'$ καὶ $I'I_1' > I'I_3'$. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι $I'I_1' = I'I_2'$ καὶ ἐξ αὐτῆς ὅτι τὸ σημεῖον Ι′, ὡς ἐσωτερικὸν τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας Γ τοῦ τριγώνου, κεῖται (143.2) ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας αὐτῆς. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν Γ καὶ Α καὶ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Β τοῦ τριγώνου διέρχονται διὰ σημείου Ι″, καὶ ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν Α καὶ Β καὶ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Γ αὐτοῦ διέρχονται διὰ σημείου Ι‴.



Σχ 144.2

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῶν ἀνωτέρω σημείων Ι, Ι′, Ι″, Ι‴ προκύπτει ὅτι :

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ. *1. Τὸ σημεῖον Ι εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ τὰ Ι′, Ι″, Ι‴ ἐξωτερικὰ σημεῖα αὐτοῦ.*

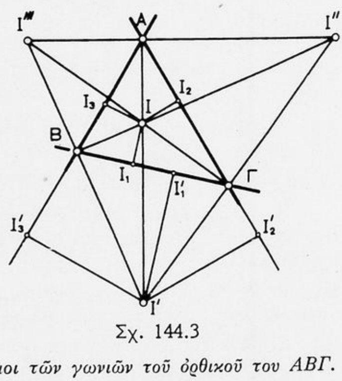
2. Τὰ σημεῖα Α, Ι″, Ι‴ κεῖνται ἐπὶ εὐθείας.

Πράγματι, αἱ διχοτόμοι τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν Α τοῦ τριγώνου εἶναι ἡμιευθεῖαι ἀντικείμεναι. Δι’ ὅμοιον λόγον τὰ σημεῖα Β, Ι′, Ι‴ ὡς αἱ τὰ Γ, Ι′, Ι″ κεῖνται ἐπ’ εὐθείας.

Οὕτως, αἱ κορυφαὶ Α, Β, Γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι σημεῖα τῶν εὐθειῶν Ι″ Ι‴, Ι‴ Ι′, Ι′Ι″ ἀντιστοίχως.

3. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ὀρθικὸν τρίγωνον τοῦ τριγώνου Ι′ Ι″ Ι‴.

Πράγματι, αἱ Ι′Α, Ι″Β, Ι‴Γ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς Ι″Ι‴, Ι‴ Ι′, Ι′Ι″ ἀντιστοίχως (Σχ. 144.3).



Σχ. 144.3

4. Τὰ ὕψη τοῦ τριγώνου Ι′ Ι″ Ι‴ εἶναι διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τοῦ ὀρθικοῦ του ΑΒΓ.

5. Ἐκτὸς τῶν σημείων Ι, Ι′ Ι″, Ι‴, δὲν ὑπάρχει ἄλλο σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου ἀπέχον ἴσον ἀπὸ τῶν εὐθειῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ.

(1) Incentre.

Πράγματι, ἂν ἕνα τοιοῦτον σημεῖον Μ ὑπῆρχε, τοῦτο, ὡς ἀπέχον ἴσον ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΑΓ θὰ κεῖται (143, Πόρισμα) ἐπὶ τῆς μιᾶς ἢ τῆς ἄλλης ἐκ τῶν διχοτόμων δ_1 ἢ δ_1' τῶν γωνιῶν τῶν ὁριζομένων ἀπὸ τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΑΓ. Ὡς ἀπέχον ἴσον ἀπὸ τῶν ΒΓ, ΒΑ θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς μιᾶς ἢ τῆς ἄλλης ἐκ τῶν διχοτόμων δ_2 ἢ δ_2' τῶν γωνιῶν τῶν ὁριζομένων ἀπὸ τὰς εὐθείας ΒΓ καὶ ΒΑ. Ἑπομένως θὰ εἶναι κοινὸν σημεῖον μιᾶς τῶν δ_1, δ_1' καὶ μιᾶς τῶν δ_2, δ_2'.

Ἂν εἶναι σημεῖον τῶν δ_1 καὶ δ_2 δὲν θὰ εἶναι διάφορον τοῦ Ι.

Ἂν εἶναι σημεῖον τῶν δ_1 καὶ δ_2' δὲν θὰ εἶναι διάφορον τοῦ Ι'.

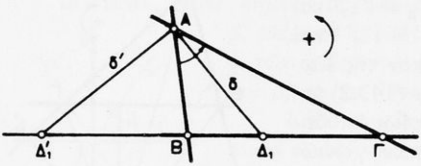
Ἂν εἶναι σημεῖον τῶν δ_1' καὶ δ_2 δὲν εἶναι διάφορον τοῦ Ι'' καὶ

Ἂν εἶναι σημεῖον τῶν δ_1' καὶ δ_2' δὲν εἶναι διάφορον τοῦ Ι'''.

6. Αἱ εὐθεῖαι ΙΑ, ΙΒ, ΙΓ εἶναι αἱ μεσοκάθετοι τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου $I_1I_2I_3$.

Πράγματι, εἶναι $II_2 = II_3$ καὶ $AI_2 = AI_3$, ἤτοι ἕκαστον τῶν Α καὶ Ι ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν I_2 καὶ I_3, ἑπομένως τὰ σημεῖα ταῦτα ὁρίζουν τὴν μεσοκάθετον τοῦ εὐθ. τμήματος I_2I_3 κλπ.

145. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἔστωσαν Δ_1, Δ_2, Δ_3 τὰ ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ σημεῖα τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν Α, Β, Γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἀντιστοίχως καὶ Δ_1', Δ_2', Δ_3' τὰ ἐπὶ τούτων σημεῖα τῶν διχοτόμων τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν Α, Β, Γ τοῦ τριγώνου (Σχ. 145). Τὰ εὐθ. τμήματα $A\Delta_1$, $B\Delta_2$, $\Gamma\Delta_3$ ὀνομάζονται *ἐσωτερικαὶ διχοτόμοι* τοῦ τριγώνου καὶ συμβολίζονται ἀντιστοίχως μὲ τὰ γράμματα δ_1, δ_2, δ_3.



Σχ. 145

Τὰ εὐθ. τμήματα $A\Delta'_1$, $B\Delta'_2$, $\Gamma\Delta'_3$ ὀνομάζονται *ἐξωτερικοὶ διχοτόμοι* τοῦ τριγώνου καὶ συμβολίζονται ἀντιστοίχως μὲ τὰ γράμματα δ_1', δ_2', δ_3'.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Θεωροῦμεν ἐπὶ ἄξονος ξ τρία τυχόντα σημεῖα Ο, Α, Β καὶ τὸ μέσον Μ τοῦ εὐθ. τμήματος $\overline{AB}$. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $\overline{OA} + \overline{OB} = 2\overline{OM}$. Νὰ εὑρεθῇ ἀνάλογος σχέσις διὰ τρεῖς ἡμιευθείας ΟΧ, ΟΑ, ΟΒ.

2. Θεωροῦμεν ἐπὶ ἄξονος ξ τέσσαρα τυχόντα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ καὶ τὰ μέσα Μ, Ν, Ρ, Σ τῶν εὐθ. τμημάτων $\overline{A\Gamma}$, $\overline{B\Delta}$, $\overline{A\Delta}$, $\overline{B\Gamma}$ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

(1) $\overline{AB} + \overline{\Gamma\Delta} = \overline{A\Delta} + \overline{\Gamma B} = 2\overline{MN}$ (2) $\overline{AB} - \overline{\Gamma\Delta} = \overline{A\Gamma} - \overline{B\Delta} = 2\overline{P\Sigma}$.

3. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : Ἂν αἱ διχοτόμοι δύο ἐφεξῆς γωνιῶν (ΟΑ, ΟΒ) καὶ (ΟΒ, ΟΓ) εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας, τότε αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ τούτων εἶναι ἡμιευθεῖαι ἀντικείμεναι καὶ ἀντιστρόφως.

4. Ἂν αἱ πλευραὶ δύο ἴσων γωνιῶν εἶναι ἀντιστοίχως παράλληλοι, τότε καὶ αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τούτων εἶναι παράλληλοι.

5. Κάθε ἐξωτερικὴ γωνία τριγώνου εἶναι μεγαλυτέρα ἑκάστης τῶν γωνιῶν αὐτοῦ τῶν μὴ προσκειμένων πρὸς τὴν θεωρουμένην ἐξωτερικὴν γωνίαν.

6. Κάθε γωνία δύναται νὰ χωρισθῇ εἰς 2ν ἴσας γωνίας (ν τυχὼν φυσικὸς ἀριθμὸς)

7. Θεωροῦμεν δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) καὶ Α'ΒΓ (Α'Β = Α'Γ, τὰ ὁποῖα ἔχουν κοινὴν τὴν πλευρὰν ΒΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ εὐθεία ΑΑ' εἶναι ἡ μεσοκάθετος τῆς πλευρᾶς αὐτῆς ΒΓ.

8. Ἂν ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελὲς (ΑΒ = ΑΓ), τότε ἡ διχοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας Α αὐτοῦ καὶ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ, καὶ ἀντιστρόφως.

9. Θεωροῦμεν ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) καὶ ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΑΓ δύο σημεῖα Ε καὶ Ζ ἀντιστοίχως ὥστε ΑΕ = ΑΖ, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ εὐθεῖα ΕΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ ἢ κάθετος ἐπ' αὐτήν.

10. Θεωροῦμεν ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἑκάστη τῶν γωνιῶν ($ΒΓ$, $ΒΗ_2$), ($ΓΗ_3$, ΓΒ) εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς γωνίας (ΑΒ, ΑΓ) αὐτοῦ.

11. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ εἰς τὸ ὁποῖον ΑΒ < ΑΓ καὶ ἐπὶ τῆς ΑΓ τὰ σημεῖα Ζ καὶ Ζ' ἑκατέρωθεν τῆς κορυφῆς Α, ὥστε ΑΖ = ΑΖ' = γ. (Ζ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Α πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται τὸ Γ). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :
1. Ἑκάστη τῶν γωνιῶν (ΒΓ, ΒΖ) καὶ (ΑΗ, ΑΔ) εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς διαφορᾶς τῶν γωνιῶν (ΒΓ, ΒΑ) καὶ (ΓΑ, ΓΒ) τοῦ τριγώνου [1].
2. Ἡ διαφορὰ τῶν γωνιῶν (ΒΓ, ΒΖ') καὶ (ΒΓ, ΒΖ) εἶναι ἴση πρὸς μίαν ὀρθὴν γωνίαν.

12. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ εἰς τὸ ὁποῖον ΑΒ < ΑΓ.
1. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι (O_3H, O_3O) = (ΒΓ, ΒΑ) – (ΓΑ, ΓΒ)
2. Ἔστω Σ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν εὐθειῶν ΓΑ καὶ O_3H. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :
($ΣH_1$, ΣΓ) = (ΒΓ, ΒΑ) – (ΓΑ, ΓΒ)
3. Ἂν ἡ γωνία Α τοῦ τριγώνου εἶναι ὀρθή, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : (ΑΗ, ΑΟ·) = (ΒΓ, ΒΑ) – – (ΓΑ, ΓΒ) καὶ ὅτι ἡ $ΑΔ_1$ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίσς (ΑΗ, $ΑΟ_1$)

13. Θεωροῦμεν ὀρθογώνιον, κατὰ τὴν γωνίαν Α, τρίγωνον ΑΒΓ καὶ τὰς προβολὰς Ε καὶ Ζ τοῦ σημείου H_1 ἐπὶ τὰς ΑΓ καὶ ΑΒ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :
1. Ἡ εὐθεῖα $ΑΟ_1$ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΕΖ, καὶ 2. (ΓΑ, ΓΒ) = (ΖΕ, ΖΑ).

14. Θεωροῦμεν δύο σημεῖα Μ καὶ Ν τῆς μεσοκαθέτου τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι (ΑΜ, ΒΝ) = –(ΒΜ, ΑΝ).

15. Δίδεται ἕνας ἄξων $\vec{x}$. Ἂν ὀνομάσωμεν **πολικὴν γωνίαν** ἑνὸς ἄξονος $\vec{\xi}$, ὡς πρὸς τὸν $\vec{x}$, τὴν γωνίαν τῶν ἀξόνων $(\vec{x}, \vec{\xi})$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

Ἂν εἶναι θ_1 καὶ θ_2 αἱ πολικαὶ γωνίαι δύο ἀξόνων $\vec{\xi_1}$, καὶ $\vec{\xi_2}$ ἀντιστοίχως ὡς πρὸς τὸν ἄξονα $\vec{x}$, ἤτοι ἂν : $(\vec{x}, \vec{\xi_1}) = \theta_1$ καὶ $(\vec{x}, \vec{\xi_2}) = \theta_2$, τότε ἡ γωνία $(\vec{\xi_1}, \vec{\xi_2})$, τῶν ἀξόνων $\vec{\xi_1}$ καὶ $\vec{\xi_2}$, δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν :

$$(\vec{\xi_1}, \vec{\xi_2}) = \theta_2 - \theta_1 + 2K\pi \qquad (K \in Z)$$

Ἡ πρότασις ἰσχύει καὶ ὡς πρὸς τὴν γωνίαν δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha_1}$ καὶ $\vec{\alpha_2}$.

16. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι οἱαιδήποτε καὶ ἂν εἶναι τρεῖς εὐθεῖαι δ_1, δ_2, δ_3 τοῦ ἐπιπέδου, θὰ εἶναι :

$$(\delta_1, \delta_2) + (\delta_2, \delta_3) = (\delta_1, \delta_3) + K\pi$$

(Σχέσις τῶν Chasles - Möbius διὰ τρεῖς **εὐθείας** τοῦ ἐπιπέδου).

17. Θεωροῦμεν εὐθεῖαν ε καὶ ἄξονα $\vec{x}$ καὶ ὀνομάζομεν **πολικὴν γωνίαν** τῆς εὐθείας ε ὡς πρὸς τὸν ἄξονα $\vec{x}$, τὴν γωνίαν : (x, ε) + Κπ (Κ ∈ Ζ) τῆς εὐθείας ε μὲ τὴν εὐθεῖαν x ὑπὸ τῆς ὁποίας φέρεται ὁ ἄξων $\vec{x}$. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

---

(1) Εἰς τὰς προετινομένας ἐφεξῆς ἀσκήσεις, τὰς ἀναφερομένας εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, θὰ συμβολίζωνται, ἐκτὸς ἀντιθέτου ἐνδείξεως, μὲ τὰ γράμματα :
O_1, O_2, O_3 τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τοῦ τριγώνου ἀντιστοίχως.
Ο τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν μεσοκαθέτων τοῦ τριγώνου : (περίκεντρον).
H_1, H_2, H_3, τὰ ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ σημεῖα τῶν ἀντιστοίχων ὑψῶν κλπ., κατὰ τὰ εἰς τὰς οἰκείας παραγράφους 134 — 135 ἀναφερόμενα.

Ἂν εἶναι θ_1 καὶ θ_2 αἱ πολικαὶ γωνίαι δύο εὐθειῶν ε_1 καὶ ε_2, ὡς πρὸς ἄξονα $\vec{x}$, τότε ἡ γωνία $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ αὐτῶν δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν :

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (\theta_2 - \theta_1) + K\pi \quad (K \in Z)$$

18. Θεωροῦμεν ἐπὶ τοῦ προσανατολισμένου ἐπιπέδου δύο ἄξονας $\vec{\xi_1}$ καὶ $\vec{\xi_2}$. καὶ ὀνομάζομεν **διχοτόμον** τῆς γωνίας αὐτῶν, τὸν ἄξονα $\vec{\delta}$ διὰ τὸν ὁποῖον :

$$(\vec{\xi_1}, \vec{\delta}) = (\vec{\delta}, \vec{\xi_2})$$

Ἂν εἶναι θ_1, θ_2 καὶ φ αἱ πολικαὶ γωνίαι τῶν ἀξόνων $\vec{\xi_1}$, $\vec{\xi_2}$ καὶ τῆς διχοτόμου $\vec{\delta}$ τῆς γωνίας αὐτῶν ὡς πρὸς ἕνα πολικὸν ἄξονα $\vec{x}$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\varphi = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} + K\pi$$

Ἡ ἀνωτέρω σχέσις ἰσχύει καὶ διὰ τὴν γωνίαν δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha_1}$ καὶ $\vec{\alpha_2}$.

19. Θεωροῦμεν εὐθεῖαν ε καὶ ἕνα ἄξονα $\vec{x}$. Ὀνομάζομεν **πολικὴν γωνίαν** τῆς εὐθείας ὡς πρὸς τὸν πολικὸν ἄξονα $\vec{x}$, τὴν γωνίαν :

$$(x, \varepsilon) + K\pi \quad (K \in Z)$$

τῆς εὐθείας ε μὲ τὴν εὐθεῖαν ὑπὸ τῆς ὁποίας φέρεται ὁ ἄξων.

Ἂν εἶναι θ_1 καὶ θ_2 αἱ πολικαὶ γωνίαι δύο εὐθειῶν ε_1 καὶ ε_2 ἀντιστοίχως καὶ ὀνομάσωμεν **διχοτόμον** τῆς γωνίας τῶν εὐθειῶν τούτων, διερχομένην διὰ τοῦ κοινοῦ σημείου αὐτῶν, τὴν εὐθεῖαν δ διὰ τὴν ὁποίαν : $(\varepsilon_1, \delta) = (\delta, \varepsilon_2) + K\pi$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

Ἡ γωνία τῶν εὐθειῶν $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ δέχεται δύο διχοτόμους δ_1 καὶ δ_2 καθέτους ἐπ' ἀλλήλας καὶ ὅτι αἱ πολικαὶ γωνίαι φ_1 καὶ φ_2 τῶν εὐθειῶν τούτων δ_1 καὶ δ_2 ἀντιστοίχως δίδονται ἀπὸ τὰς σχέσεις :

$$\varphi_1 = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} + \lambda\pi \quad (\lambda \in Z) \quad \text{καὶ} \quad \varphi_2 = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} + \frac{\pi}{2} + \lambda'\pi \quad (\lambda' \in Z)$$

20. Θεωροῦμεν δύο ζεύγη εὐθειῶν (α,α') καὶ (β,β') διερχομένων διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ συνθήκη :

$$(\alpha, \beta) = (\beta', \alpha') + K\pi$$

εἶναι ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ ἵνα νὰ ζεύγη ταῦτα εἶναι ἰσογώνια

21. Θεωροῦμεν δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ'. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι εἰς ἑκάστην τῶν περιπτώσεων :

(1) $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$ καὶ $\mu_1 = \mu'_1$ (ἢ $\mu_2 = \mu'_2$) (2) $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$ καὶ $\upsilon_1 = \upsilon'_1$ (ἢ $\upsilon_2 = \upsilon'_2$)
(3) $\alpha = \alpha'$ καὶ $\upsilon_2 = \upsilon'_2$, $\upsilon_3 = \upsilon'_3$ (ἢ $\upsilon_1 = \upsilon'_1$, $\upsilon_2 = \upsilon'_2$) (4) $\alpha = \alpha'$, $\upsilon_1 = \upsilon'_1$, $\mu_1 = \mu'_1$
(5) $B = B'$, $\Gamma = \Gamma'$ καὶ $\upsilon_1 = \upsilon'_1$ (6) $\alpha = \alpha'$ $\upsilon_1 = \upsilon'_1$ καὶ $B = B'$
(7) $\alpha = \alpha'$, $B = B'$, $\delta_2 = \delta'_2$.
τὰ θεωρούμενα τρίγωνα εἶναι ἴσα.

22. Θεωροῦμεν δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΑΒΓ αἱ Α'Β'Γ' (ΑΒ = ΑΓ καὶ Α'Β' = Α'Γ'). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι εἰς ἑκάστην τῶν περιπτώσεων :

(1) $A = A'$, $\upsilon'_1 = \upsilon'_1$. (2) $\alpha = \alpha'$, $\upsilon_1 = \upsilon'_1$ (ἢ $\upsilon_2 = \upsilon'_2$ ἢ $\upsilon_3 = \upsilon_3'$)
(3) $B = B'$, $\upsilon_1 = \upsilon'_1$ (ἢ $\upsilon_2 = \upsilon'_2$), τὰ θεωρούμενα τρίγωνα εἶναι ἴσα.

23. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ κορυφαὶ Β καὶ Γ τριγώνου ΑΒΓ ἀπέχουν ἴσον τῆς εὐθείας AO_1 (O_1 τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΒΓ αὐτοῦ).

24. Θεωροῦμεν ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ), τὴν διχοτόμον ΑΔ τῆς γωνίας Α αὐτοῦ, ἕνα τυχὸν σημεῖον Μ τῆς εὐθείας ΑΔ καὶ τὰ κοινὰ σημεῖα Β' καὶ Γ' τῶν εὐθειῶν ΒΜ καὶ ΓΜ μὲ τὰς ΑΓ καὶ ΑΒ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ΒΒ' = ΓΓ'

25. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι εἰς τὸ ὀρθογώνιον, κατὰ τὴν γωνίαν Α, τρίγωνον ΑΒΓ αἱ εὐθεῖαι H_1O_2 καὶ H_1O_3 εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας.

26. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ καὶ τὰς καθέτους ΒΖ καὶ ΒΖ' ἐπὶ τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν Α τοῦ τριγώνου. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : 1. Ἡ εὐθεῖα ΖΖ' εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ καὶ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου O_1 τῆς πλευρᾶς ΒΓ. 2. Τὰ εὐθ. τμήματα O_1Z' καὶ O_1Z εἶναι ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς τὸ ἡμιάθροισμα καὶ τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν πλευρῶν β καὶ γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

27. Θεωροῦμεν : γωνίαν (ΟΧ, ΟΥ), σημεῖον Ρ ἐσωτερικὸν αὐτῆς καὶ τὰς καθέτους ΡΑ καὶ ΡΒ ἐπὶ τὰς ΟΧ καὶ ΟΥ ἀντιστοίχως (Α καὶ Β ἐπὶ τῶν ΟΧ, ΟΥ). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ εὐθεῖα ἡ ὁποία συνδέει τὰ μέσα Ι καὶ Ζ τῶν ΟΡ καὶ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ.

28. Θεωροῦμεν : εὐθ τμῆμα ΑΒ, τὸ τριχοτομοῦν σημεῖον Γ αὐτοῦ τὸ ἐγγύτερον πρὸς τὸ Β, τὰ ἰσόπλευρα τρίγωνα ΒΓΑ' καὶ ΓΑΒ' καὶ τὴν κάθετον Β'Η ἐπὶ τὴν ΑΒ, (Η ἐπὶ τῆς ΑΒ). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : Α'Β' = Β'Η.

29. Θεωροῦμεν : ὀρθογώνιον κατὰ τὴν γωνίαν Α τρίγωνον ΑΒΓ, τὴν διχοτόμον $Α\Delta_1$ αὐτοῦ, τὴν διὰ τοῦ Δ_1 κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ καὶ τὰ κοινὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ αὐτῆς μὲ τὰς ΑΓ καὶ ΑΒ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $\Delta_1 E = \Delta_1 B$ καὶ $\Delta_1 Z = \Delta_1 \Gamma$.

30. Θεωροῦμεν : ὀρθογώνιον, κατὰ τὴν γωνίαν Α, τρίγωνον ΑΒΓ, τυχὸν σημεῖον Ε τῆς ΑΒ, τὴν διὰ τούτου παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ καὶ τὸ κοινὸν σημεῖον Η αὐτῆς μὲ τὴν $ΑΗ_1$. τὴν εἰς τὸ Η κάθετον ἐπὶ τὴν ΗΓ καὶ τὸ κοινὸν σημεῖον Ζ αὐτῆς μὲ τὴν ΑΒ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ΑΖ = ΒΕ.

31. Θεωροῦμεν : τρίγωνον ΑΒΓ, τὴν ἀπὸ τοῦ Γ ἡμιευθεῖαν τὴν παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ, τὴν κειμένην πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας ΒΓ πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται ἡ κορυφὴ Α τοῦ τριγώνου, καὶ τὸ σημεῖον Ζ τῆς ἡμιευθείας αὐτῆς διὰ τὸ ὁποῖον ΓΖ = ΓΒ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ΒΖ εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Β τοῦ τριγώνου.

32. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ σημεῖον Ι τοῦ ἐπιπέδου του (1), τὴν διὰ τοῦ Ι παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ καὶ τὰ κοινὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ αὐτῆς μὲ τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : τὸ εὐθ. τμῆμα ΕΖ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ΒΕ καὶ ΓΖ.
Ἀνάλογος πρότασις ἰσχύει διὰ τὰ σημεῖα Ι', Ι'', Ι'''.

33. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι εἰς τὸ τυχὸν τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι :

(1) $(ΙΒ, ΙΓ) = \frac{\pi}{2} + \frac{A}{2}$ καὶ (2) $(Ι'Γ, Ι'Β=)\ \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}$, ἔνθα Α ἡ γωνία (ΑΒ, ΑΓ) τοῦ τριγώνου.

Νὰ ὁρισθοῦν ὁμοίως αἱ γωνίαι (ΙΓ, ΙΑ); (Ι''Α, Ι''Γ) οἱ καὶ αἱ (ΙΑ, ΙΒ), (Ι'''Β, Ι'''Α).

34. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι μεταξὺ τῶν πλευρῶν καὶ γωνιῶν δύο τριγώνων ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' ἰσχύουν αἱ σχέσεις :

(1) $B + B' = \pi,\ \gamma = \gamma',\quad \Gamma = \Gamma' \Rightarrow \beta = \beta'$ (2) $\beta = \beta',\ B + B' = \pi,\quad \Gamma = \Gamma' \Rightarrow \gamma = \gamma'$
(3) $\beta = \beta',\ \gamma = \gamma',\quad B + B' = \pi \Rightarrow \Gamma = \Gamma'$

35. Ἂν αἱ πλευραὶ δύο τριγώνων ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' εἶναι ἀντιστοίχως παράλληλοι ἢ κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας, τότε αἱ γωνίαι τούτων εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι.

36. Ἂν αἱ γωνίαι δύο τριγώνων ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' εἶναι ἴσαι ἢ ἀντίθετοι καὶ κατὰ τὰ τρία ζεύγη καὶ ἐπὶ πλέον εἶναι $\alpha = \beta'$, τότε τὰ τρίγωνα δὲν εἶναι, ἐν γένει, ἴσα, οὔτε ἀντιρρόπως ἴσα.

37. Θεωροῦμεν δύο σημεῖα Α καὶ Β καὶ μίαν εὐθεῖαν ε. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ἀπόστασις τοῦ μέσου Ο τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ ἀπὸ τῆς ε εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἡμιάθροισμα ἢ τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν ἀποστάσεων τῶν Α καὶ Β ἀπὸ τῆς ε, καθ' ὅσον τὰ Α καὶ Β κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος ἢ ἑκατέρωθεν τῆς ε.

38. Θεωροῦμεν ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ), σημεῖον Μ μεταξὺ τῶν Β καὶ Γ καὶ τὰς εὐθείας ΜΒ', ΜΓ' (Β' καὶ Γ' ἐπὶ τῶν ΓΑ καὶ ΑΒ ἀντιστοίχως) τὰς τεμνούσας τὰς ΓΑ καὶ ΑΒ ὑπὸ σταθερὰν γωνίαν φ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα ΜΒ' + ΜΓ' εἶναι σταθερόν, ἤτοι ἀνεξάρτητον τοῦ σημείου Μ.
Ἂν αἱ ΜΒ', ΜΓ' εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως, τότε τὸ ἄθροισμα ΜΒ' + ΜΓ' εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου τὸ ἀγόμενον ἀπὸ τῆς κορυφῆς Β ἢ τῆς Γ.

---

(1) Ἔγκεντρον τοῦ τριγώνου

39. Θεωροῦμεν : ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ, σσημεῖον Μ ἐσωτερικὸν αὐτοῦ καὶ τὰς παραλλήλους ΜΑ', ΜΒ', ΜΓ' πρὸς τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ ἀντιστοίχως (Α', Β', Γ' σημεῖα τῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως.). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1. Τὸ ἄθροισμα ΜΑ' + ΜΒ' + ΜΓ' εἶναι σταθερόν, ἤτοι ἀνεξάρτητον τοῦ ἐσωτερικοῦ σημείου Μ.

Γενίκευσις εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν αἱ ΜΑ', ΜΒ', ΜΓ' τέμνουν τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν φ.

2. Ἂν αἱ ΜΑ', ΜΒ', ΜΓ' εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τότε τὸ ἄθροισμα ΜΑ' + ΜΒ' + ΜΓ' εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὕψος υ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου.

3. Ἂν εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν (ΜΑ', ΜΒ', ΜΓ' κάθετοι ἐπὶ τὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως) τὸ σημεῖον Μ εἶναι ἐξωτερικὸν τοῦ τριγώνου καὶ ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας Α αὐτοῦ, τότε εἶναι :

$$ΜΒ' + ΜΓ' - ΜΑ' = υ$$

4. Ἂν τὸ Μ εἶναι ἐξωτερικὸν τοῦ τριγώνου καὶ ἐσωτερικὸν τῆς κατὰ κορυφὴν τῆς γωνίας Α αὐτοῦ, τότε θὰ εἶναι :

$$ΜΑ' - ΜΒ' - ΜΓ' = υ$$

40. Θεωροῦμεν : τρίγωνον ΑΒΓ, σημεῖον Μ τῆς ΒΓ μεταξὺ τῶν Β καὶ Γ, τὴν διὰ τοῦ Μ παράλληλον πρὸς τὴν διάμεσον $ΑΟ_1$, καὶ τὰ κοινὰ σημεῖα Β' καὶ Γ' τῆς παραλλήλου αὐτῆς μὲ τὰς ΑΓ καὶ ΑΒ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα ΜΒ' + ΜΓ' εἶναι σταθερὸν, ἤτοι ἀνεξάρτητον τοῦ σημείου Μ.

41. Δίδεται ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ. Θεωροῦμεν σημεῖον Μ μεταξὺ τῶν Β καὶ Γ καὶ τὴν διὰ τοῦ Μ κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ τῆς ὁποίας ἔστωσαν Β' καὶ Γ' τὰ κοινὰ σημεῖα μὲ τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα ΜΒ' + ΜΓ' εἶναι σταθερόν, ἤτοι ἀνεξάρτητον τοῦ σημείου Μ.

42. Δίδεται ὀρθογώνιον κατὰ τὴν γωίαν Α καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ. Θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον Μ μεταξὺ τῶν Β καὶ Γ καὶ τὰς προβολὰς Ε καὶ Ζ αὐτοῦ ἐπὶ τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : ἡ διὰ τοῦ Μ κάθετος ἐπὶ τὴν ΕΖ διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου, ἤτοι ἀνεξαρτήτου τοῦ σημείου Μ.

43. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ καὶ τὸ μέσον Κ τῆς διαμέσου $ΒΟ_2$ αὐτοῦ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν ΑΚ καὶ ΒΓ εἶναι τὸ τριχοτομοῦν τὴν πλευρὰν ΒΓ αὐτοῦ σημεῖον τὸ ἐγγύτερον πρὸς τὸ Β.

44. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ θεωροῦμεν τὰ σημεῖα Α', Β', Γ' ἀντιστοίχως, ὥστε ΒΑ' = ΓΒ' = ΑΓ'. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι (1) Τὸ τρίγωνον Α'Β'Γ' εἶναι ἰσόπλευρον καὶ (2) τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' ἔχουν τὸ αὐτὸ κέντρον.

45. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ καὶ τὸ μέσον $Ε_1$ τοῦ εὐθ. τμήματος ΗΑ (Η τὸ ὀρθόκεντρον). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ εὐθεῖα $Ο_1Ε_1$ εἶναι ἡ μεσοκάθετος τοῦ εὐθ. τμήματος $Η_2Η_3$.

46. Θεωροῦμεν : τρίγωνον ΑΒΓ εἰς τὸ ὁποῖον $β > γ$, τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας Α αὐτοῦ, τὴν διὰ τοῦ μέσου $Ο_1$ τῆς πλευρᾶς ΒΓ κάθετον ἐπὶ τὴν ἀνωτέρω διχοτόμον καὶ τὰ κοινὰ σημεῖα Β' καὶ Γ' αὐτῆς μὲ τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ εὐθ. τμήματα ΑΒ' καὶ ΑΓ' εἶναι ἴσα πρὸς τὸ ἡμιάθροισμα τῶν πλευρῶν β καὶ γ τοῦ τριγώνου.

Περίπτωσις διχοτόμου ἐξωτερικῆς γωνίας Α.

47. Ἂν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ ἡ $Δ_2Δ_3$ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ, τότε τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἀντιστρόφως.

48. Αἱ προβολαὶ τῆς κορυφῆς Α τριγώνου ΑΒΓ ἐπὶ τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ αὐτοῦ κεῖνται ἐπ' εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὴν ΒΓ.

49. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ καὶ τὰς προβολὰς Ε καὶ Ζ τῶν Β καὶ Γ ἀντιστοίχως ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν $ΑΔ_1$. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $Ο_1Ε = Ο_1Ζ$.

50. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ, τὴν διχοτόμον $ΑΔ_1$ καὶ τὰ κοινὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ αὐτῆς μὲ τὰς εὐθείας $ΒΗ_2$ καὶ $ΓΗ_3$ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τρίγωνον ΗΕΖ εἶναι ἰσοσκελές.

51. Θεωροῦμεν: ὀρθογώνιον, κατὰ τὴν γωνίαν Α, τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ συμμετρικὸν Α' τοῦ Α ὡς πρὸς τὸ μέσον O_1 τῆς πλευρᾶς ΒΓ, τὴν διὰ τοῦ Α' κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ καὶ τὰ κοινὰ σημεῖα Β' καὶ Γ' αὐτῆς μὲ τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν Γ καὶ Β τοῦ τριγώνου ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: Α'Γ' = ΑΓ καὶ Α'Β' = ΑΒ.

52. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ σημεῖον Ι', τὴν διὰ τοῦ Ι' παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ καὶ τὰ κοινὰ σημεῖα Α' καὶ Β' τῆς παραλλήλου αὐτῆς μὲ τὰς ΒΓ καὶ ΓΑ ἀντιστοίχως, Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι Α'Β' = ΑΒ' – Α'Β.

53. Νὰ ἀποδειχθοῦν εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ αἱ σχέσεις: (1) $\beta = \gamma \Leftrightarrow \mu_2 = \mu_3$ (2) $\beta = \gamma \Leftrightarrow OO_2 = OO_3$ (3) $\beta = \gamma \Leftrightarrow \upsilon_2 = \upsilon_3$ (4) $\beta = \gamma \Leftrightarrow \delta_2 = \delta_3$.

54. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι (1) Ἂν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσόπλευρον, τότε: $H \equiv G \equiv O \equiv I$ καὶ (2) Εἰς ἑκάστην τῶν περιπτώσεων: $H \equiv G$, $H \equiv O$, $H \equiv I$, $G \equiv O$, $G \equiv I$, $O \equiv I$, τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσόπλευρον.

55. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: (1) Ἂν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ΑΒ = ΑΓ, τότε τὰ σημεῖα G, O, I, I' κεῖνται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΗ (Η τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου) καὶ (2) Ἂν μία ἀπὸ τὰς τριάδας σημείων: AGH, AHO, AHI, AHI', AGO, AGI, AGI', AOI, AOI', HII', GII', OII', κεῖται ἐπ' εὐθείας, τότε τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελὲς (ΑΒ = ΑΓ).

56. Ἂν αἱ γωνίαι Β καὶ Γ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ὀξεῖαι, τότε τὸ σημεῖον H_1 αὐτοῦ κεῖται μεταξὺ τῶν Β καὶ Γ. Ἂν ἡ γωνία Β εἶναι ἀμβλεῖα, τὸ H_1 κεῖται πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς Β πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἡ Γ.

57. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ εἰς τὸ ὁποῖον Β = 2Γ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:
(1) Ἂν ἡ γωνία Β εἶναι ὀξεῖα, τότε $\gamma = H_1\Gamma - H_1B$.
(2) Ἂν ἡ γωνία Β εἶναι ἀμβλεῖα, τότε $\gamma = H_1\Gamma + H_1B$.

58. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: (1) Τὸ περίκεντρον τριγώνου ΑΒΓ εἶναι σημεῖον ἐσωτερικὸν ἢ ἐξωτερικὸν αὐτοῦ καθ' ὅσον τὸ τρίγωνον εἶναι ἀντιστοίχως ὀξυγώνιον ἢ ἀμβλυγώνιον. Ἂν τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον, τὸ περίκεντρον αὐτοῦ εἶναι τὸ μέσον τῆς ὑποτεινούσης του. (2) Τὸ ὀρθόκεντρον τριγώνου εἶναι σημεῖον ἐσωτερικὸν ἢ ἐξωτερικὸν αὐτοῦ καθ' ὅσον τὸ τρίγωνον εἶναι ἀντιστοίχως ὀξυγώνιον ἢ ἀμβλυγώνιον. Ἂν τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον, τὸ ὀρθόκεντρον αὐτοῦ εἶναι ἡ κορυφὴ τῆς ὀρθῆς γωνίας.

59. Θεωροῦμεν ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ ($\beta = \gamma$) καὶ σημεῖον Μ μεταξὺ τῶν Γ καὶ Α. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $MB > M\Gamma$

60. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ κάθε ἐσωτερικὸν σημεῖον Μ τριγώνου ΑΒΓ ἰσχύουν αἱ σχέσεις:
(1) $(MB, M\Gamma) > (AB, A\Gamma)$ (2) $MB + M\Gamma < \beta + \gamma$ (3) $\tau < MA + MB + M\Gamma < 2\tau$

61. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, διὰ κάθε σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου τριγώνου ΑΒΓ ἰσχύει ἡ σχέσις: $\tau < MA + MB + M\Gamma$ (τ ἡ ἡμιπερίμετρος τοῦ τριγώνου)

62. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ, εἰς τὸ ὁποῖον $\alpha > \beta > \gamma$, καὶ σημεῖον Μ ἐσωτερικὸν αὐτοῦ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $MA + MB + M\Gamma < \alpha + \beta$

63. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι οἱασδήποτε καὶ ἂν εἶναι τρία σημεῖα Α',Β',Γ' τριγώνου ΑΒΓ, κείμενα ἐπὶ τῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως, ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$\tau < AA' + BB' + \Gamma\Gamma' < 3\tau$$

64. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ, σημεῖον Μ αὐτοῦ μεταξὺ τῶν Β καὶ Γ καὶ τὰς καθέτους ΜΒ' καὶ ΜΓ' ἐπὶ τὰς ΑΓ καὶ ΑΒ ἀντιστοίχως (Β' καὶ Γ' σημεῖα τῶν ΑΓ καὶ ΑΒ ἀντιστοίχως). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $B'\Gamma' < B\Gamma$.

65. Θεωροῦμεν: τρίγωνον ΑΒΓ εἰς τὸ ὁποῖον $\beta > \gamma$, σημεῖον Μ αὐτοῦ μεταξὺ τῶν Β καὶ Γ καὶ τὰς παραλλήλους ΜΒ' καὶ ΜΓ' πρὸς τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ ἀντιστοίχως (Β' καὶ Γ' ἐπὶ τῶν ΑΓ καὶ ΑΒ ἀντιστοίχως). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\gamma < MB' + M\Gamma' < \beta.$$

66. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ τοῦ ὁποίου ἡ γωνία Α εἶναι ὀρθὴ ἢ ἀμβλεῖα καὶ δύο σημεῖα Β′ καὶ Γ′ αὐτοῦ κείμενα ἐπὶ τῶν ΑΒ καὶ ΑΓ ἀντιστοίχως καὶ πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας ΒΓ πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἡ κορυφὴ Α. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $B'\Gamma' > B\Gamma$

67. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ καὶ δύο σημεῖα Β′ καὶ Γ′ αὐτοῦ κείμενα ἐπὶ τῶν ΑΒ καὶ ΑΓ ἀντιστοίχως καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας ΒΓ, ὥστε $BB' = \Gamma\Gamma'$. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

Ἂν τὰ Β′ καὶ Γ′ κεῖνται πρὸς τὸ μέρος τῆς ΒΓ πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἡ κορυφὴ Α, θὰ εἶναι $B'\Gamma' > B\Gamma$, καὶ

Ἂν τὰ Β′ καὶ Γ′ κεῖνται πρὸς τὸ μέρος τῆς ΒΓ πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται ἡ κορυφὴ Α, θὰ εἶναι $B'\Gamma' < B\Gamma$.

68. Θεωροῦμεν ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ ($\beta = \gamma$) καὶ τὰ σημεῖα Β′ καὶ Γ′ αὐτοῦ τὰ κείμενα ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν ΑΒ καὶ ΑΓ καὶ ἑκατέρωθεν τῆς εὐθείας ΒΓ, ὥστε $BB' = \Gamma\Gamma'$. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $B'\Gamma' > B\Gamma$.

69. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι εἰς δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α′Β′Γ′ ἰσχύουν αἱ σχέσεις :

(1). $\alpha = \alpha', \Gamma = \Gamma', B < B' \Rightarrow \beta < \beta'$. (2). $A = A', \gamma = \gamma', B < B' \Rightarrow \beta < \beta'$.

70. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ εἰς τὸ ὁποῖον $\alpha > \beta > \gamma$. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$OO_1 < OO_2 < OO_3$ (O_1, O_2, O_3 τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΒΓ,ΓΑ,ΑΒ καὶ Ο τὸ περίκεντρον αὐτοῦ).

71. Νὰ ἀποδειχθοῦν εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ αἱ σχέσεις :

(1). $\beta > \gamma \Leftrightarrow (AO_1, A\Gamma) < (AB, AO_1)$ (2) $\beta > \gamma \Leftrightarrow (O_1\Gamma, O_1A) > (O_1A, O_1B)$

(3). $A < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \mu_1 > \frac{\alpha}{2}$, $A > \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \mu_1 < \frac{\alpha}{2}$ (4). $\frac{3\tau}{2} < \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 < 2\tau$

(5). $\beta > \gamma \Leftrightarrow \mu_2 < \mu_3$, (6) $\beta - \gamma < 2\mu_1 < \beta + \gamma - \alpha$ (7) $\beta > \gamma \Rightarrow \mu_3 - \mu_2 < \mu_1 < \mu_2 + \mu$

72. Νὰ ἀποδειχθοῦν εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ αἱ σχέσεις :

(1). $2\upsilon_1 < \beta + \gamma$ (2). $\tau < \upsilon_1 + \upsilon_2 + \upsilon_3 < 2\tau$

(3). $\beta > \gamma \Leftrightarrow (AH_1, A\Gamma) > (AB, AH_1)$ (4). $\beta > \gamma \Leftrightarrow \upsilon_2 < \upsilon_3$

73. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ εἰς τὸ ὁποῖον $\alpha > \beta > \gamma$, σημεῖον Μ ἐσωτερικὸν αὐτο καὶ τὰς ἀποστάσεις : $MM_1 = x_1$, $MM_2 = x_2$, $MM_3 = x_3$ τοῦ Μ ἀπὸ τῶν εὐθειῶν ΒΓ,ΓΑ,Α ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $x_1 + x_2 + x_3 < \upsilon_1$

74. Νὰ ἀποδειχθοῦν εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ αἱ σχέσεις :

(1). $\beta > \gamma \Leftrightarrow > \Delta_1\Gamma > \Delta_1B$ (2). $\beta > \gamma \Leftrightarrow (\Delta_1\Gamma, \Delta_1A) > (\Delta_1A, \Delta_1B)$

(3). $2\delta_1 < \beta + \gamma$ (4). $\tau < \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 < 2\tau$ (5). $\beta > \gamma \Leftrightarrow \delta_2 < \delta_3$

(6). $\beta > \gamma \Rightarrow B\Delta_3 < \Delta_2\Delta_3 < \Delta_3\Gamma$

75. Νὰ ἀποδειχθοῦν εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ αἱ σχέσεις :

(1). $\beta > \gamma \Leftrightarrow IB < I\Gamma$ (2). $\beta > \gamma \Leftrightarrow I'B > I'\Gamma$

(Ι τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν ἐσωτ. διχοτόμων τοῦ τριγώνου καὶ Ι′ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶ διχοτόμων τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν Β καὶ Γ αὐτοῦ).

76. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ εἰς τὸ ὁποῖον $\beta > \gamma$. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ σημεῖον κεῖται μεταξὺ τῶν H_1 καὶ O_1 (Δ_1, H_1, O_1 τὰ ἐπὶ τῆς ΒΔ σημεῖα τῆς διχοτόμου τοῦ ὕψους κ τῆς διαμέσου αὐτοῦ ἀντιστοίχως).

77 Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ καὶ τὴν διὰ τῆς κορυφῆς Α κάθετον δ′ ἐπὶ τὴν διχ τόμον $A\Delta_1$ τῆς γωνίας Α αὐτοῦ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

Διὰ κάθε σημεῖον Μ τῆς εὐθείας δ′, διάφορον τοῦ Α, ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου ΜΕ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς περιμέτρου τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

78. Θεωροῦμεν : τρίγωνον ΑΒΓ εἰς τὸ ὁποῖον $AB < A\Gamma$, ἕνα τυχὸν σημεῖον Μ μετα τῶν Α καὶ Δ_1, τὰς ΒΜ καὶ ΓΜ, καὶ τὰ κοινὰ σημεῖα Β′ καὶ Γ′ αὐτῶν μὲ τὰ ΑΓ καὶ ΑΒ ἀν στοίχως. Νὰ ἐποδειχθῇ ὅτι :

(1) $(BM, BA) > (\Gamma A, \Gamma M)$ (2) $MB < M\Gamma$ (3) $\Gamma M - MB < A\Gamma - AB$ (4) $BB' < \Gamma$

79. Ἂν εἰς τὴν προηγουμένην πρότασιν ἀντὶ τῆς συνθήκης $AB < A\Gamma$, δίδεται ἡ $AB = A\Gamma$ τότε θὰ εἶναι $BB' = \Gamma\Gamma'$.

80. Νὰ διατυπωθῇ καὶ ἀποδειχθῇ ἀντίστοιχος τῆς ἀνωτέρω (78) πρότασις, διὰ σημεῖον Μ κείμενον μεταξὺ τῶν Α καὶ O_1 (O_1 τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΒΓ).

81. Νὰ ἀποδειχθῇ εἰς τὸ τρίγωνον ἡ σχέσις : $B = 2\Gamma \Rightarrow \beta < 2\gamma$.

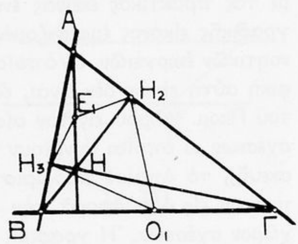
82. Θεωροῦμεν : Γωνίαν (ΑΥ,ΑΖ), σημεῖον Δ τῆς διχοτόμου αὐτῆς, τὴν διὰ τοῦ Δ κάθετον ἐπὶ τὴν ἀνωτέρω διχοτόμον, τὰ κοινὰ σημεῖα Β καὶ Γ αὐτῆς μὲ τὰς ΑΥ καὶ ΑΖ ἀντιστοίχως καὶ μίαν τυχοῦσαν διὰ τοῦ Δ εὐθεῖαν, τῆς ὁποίας ἔστωσαν Β′ καὶ Γ′ τὰ κοινὰ σημεῖα μὲ τὰς ΑΥ καὶ ΑΖ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $B\Gamma < B'\Gamma'$.

83. Θεωροῦμεν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ ἑκάστου τῶν ὁποίων αἱ κορυφαὶ Β καὶ Γ εἶναι δοθέντα σημεῖα καὶ τὸ ὕψος τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν ΒΓ ἴσον πρὸς δοθὲν εὐθ. τμῆμα. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἐκ τῶν τριγώνων τούτων ἔχον τὴν ἐλαχίστην περίμετρον εἶναι τὸ ἰσοσκελές.

84. Θεωροῦμεν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ ἑκάστου τῶν ὁποίων ἡ γωνία Α εἶναι ἴση πρὸς δοθεῖσαν γωνίαν φ καὶ τὸ ἄθροισμα $AB + A\Gamma$ ἴσον πρὸς δοθὲν εὐθ. τμῆμα 2λ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἐκ τούτων ἔχον τὴν ἐλαχίστην πλευρὰν ΒΓ εἶναι τὸ ἰσοσκελές.

85. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἐπὶ τῶν ΑΒ, ΑΓ καὶ πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας ΒΓ πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἡ κορυφὴ Α, δύο σημεῖα Ε καὶ Ζ ἀντιστοίχως ὥστε $BE + \Gamma Z = B\Gamma$. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἐλάχιστον εὐθ. τμῆμα ΕΖ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν περίπτωσιν $AE = AZ$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Κατὰ τὴν ἀναζήτησιν τῆς **ἀποδείξεως** τῶν εἰς τὸ παρὸν καὶ τὰ ἑπόμενα κεφάλαια ἀναφερομένων ἀποδεικτικῶν προτάσεων, δυνάμεθα νὰ ἀκολουθήσωμεν δύο μεθόδους. Ἡ μία ἐκ τούτων, λεγομένη **ἀνάλυσις**, μᾶς ὁδηγεῖ εἰς τὴν **ἀναλυτικὴν ἀπόδειξιν** τῆς θεωρουμένης προτάσεως. Ἡ ἄλλη εἶναι ἡ **σύνθεσις**. Ἡ μὲ ταύτην συνδεομένη ἀπόδειξις ὀνομάζεται **συνθετικὴ ἀπόδειξις**.



Κατὰ τὴν ἀναλυτικὴν ἀπόδειξιν ὑποθέτομεν ὅτι ἰσχύει ἡ ἀποδεικτέα πρότασις, καὶ ἐκ τῆς ὑποθέσεως αὐτῆς, συνδυαζομένης μὲ γνωστὰς (ἀποδειχθείσας) προτάσεις πορίζόμεθα τὴν ἀποδεικτέαν σχέσιν. Ὡς παράδειγμα ἀναφέρομεν τὴν πρότασιν περὶ ἧς ἡ ὑπ' ἀριθ. 45 ἄσκησις τοῦ παρόντος κεφαλαίου.

Ἐν προκειμένῳ, ὑποθέτομεν ὅτι ἡ εὐθεῖα O_1E_1 εἶναι ἡ μεσοκάθετος τοῦ εὐθ. τμήματος H_2H_3. Ἐκ τῆς ὑποθέσεως αὐτῆς ἐν συνδυασμῷ πρὸς τὴν πρότασιν (137) προκύπτει ὅτι (1) $O_1H_2 = O_1H_3$ καὶ (2) $E_1H_2 = E_1H_3$. Παρατηροῦμεν ὅμως ὅτι αἱ ἀνωτέρω σχέσεις (1) καὶ (2) ἰσχύουν συμφώνως πρὸς τὴν πρότασιν (136).

Ἡ ἀνάλυσις μόνη δὲν ἀποτελεῖ ἀπόδειξιν, διότι ἐκ τοῦ ὅτι ὑποθέτοντες ἰσχύουσαν τὴν ἀποδεικτέαν πρότασιν, ἀγόμεθα εἰς πρότασιν ἰσχύουσαν, δὲν ἕπεται ὅτι ἰσχύει ἡ ἀποδεικτέα πρότασις. Τοῦτο εἶναι βέβαιον μόνον ὅταν αἱ εἰς ἃς ἀναφερόμεθα κατὰ τὴν ἀνάλυσιν προτάσεις εἶναι **ἀντιστρεπταί**. Ὁ περὶ τούτου ἔλεγχος γίνεται διὰ τῆς συνθετικῆς ἀποδείξεως, κατὰ τὴν ὁποίαν ἀκολουθεῖται ἡ ἀντίστροφος ἀποδεικτικὴ πορεία.

Οὕτως, ἡ σύνθεσις μόνη ἀποτελεῖ πλήρη ἀπόδειξιν.

Ἡ ἀναλυτικὴ πορεία κατὰ τὴν ὁποίαν ἐκ τῆς ἀποδεικτέας προτάσεως ἀγόμεθα εἰς μίαν γνωστὴν (ἰσχύουσαν) πρότασιν, μέσῳ προτάσεων αἵτινες ἐλέγχονται **ἰσοδύναμοι**, ἀποτελεῖ βεβαίως πλήρη ἀπόδειξιν (ἀναλυτικὴ ἀπόδειξις).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ ΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ

146. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἀπὸ ἀπόψεως θεωρητικῆς τὰ προβλήματα τῶν γεωμ. κατασκευῶν εἶναι θεωρήματα ὑπάρξεως. Ἀποδεικνύεται διὰ τούτων ὅτι ἡ ὕπαρξις τῶν γεωμετρικῶν στοιχείων ἢ σχημάτων (σημείων, εὐθειῶν, εὐθ. τμημάτων, γωνιῶν, τριγώνων κλπ.) προκύπτει ἐκ τῶν εἰσαχθέντων ἀξιωμάτων ὑπάρξεως.

Ἀπεδείχθη (113) ὅτι δοθέντος εὐθ. τμήματος AB, ὑπάρχει μέσον σημεῖον αὐτοῦ καὶ ἕνα μόνον. Δυνάμεθα, κατόπιν τούτου, νὰ εἴπωμεν ὅτι τὸ πρόβλημα τῆς διχοτομήσεως τοῦ εὐθ. τμήματος ἔχει ἐπιλυθῇ. Τοῦτο ἰσχύει καὶ διὰ τὴν διχοτόμησιν τῆς γωνίας κλπ.

Ἀπὸ πρακτικῆς ἀπόψεως τὸ πρόβλημα τῆς γεωμ. κατασκευῆς συνδέεται μὲ τὰς πρακτικὰς ἐκείνας ἐνεργείας, αἱ ὁποῖαι ἀποβλέπουν εἰς τήν, μέσῳ μιᾶς γραφικῆς εἰκόνος ἐμφανιζομένης ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου σχεδιάσεως, ὑλοποίησιν τῶν νοητικῶν ἐνεργειῶν, αἱ ὁποῖαι συνδέονται μὲ τὸ ἀντίστοιχον πρόβλημα. Ἡ γραφικὴ αὕτη εἰκὼν δὲν εἶναι, ὡς ἤδη ἐσημειώσαμεν, ἄλλο τι, εἰμὴ μία ἀπεικόνισις τοῦ Γεωμ. χώρου εἰς τὸν αἰσθητὸν χῶρον, ἕνα σύμβολον τοῦ περιεχομένου τῶν σχέσεων αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰ διδόμενα πρὸς τὰ ζητούμενα στοιχεῖα τῆς κατασκευῆς, τὸ ὁποῖον προώρισται νὰ διευκολύνῃ τοὺς συλλογισμοὺς καὶ τὴν ἔμπνευσιν εἰς ὅ,τι ἀφορᾷ τὴν ἀναζήτησιν τῶν ὑφισταμένων εἰς τὸν Γεωμετρικὸν χῶρον σχέσεων. Ἡ γραφικὴ αὕτη εἰκὼν δέον νὰ ἀνταποκρίνεται, κατὰ τὴν ἐπιβαλλομένην ἑκάστοτε πρακτικὴν ἀκρίβειαν, πρὸς τὰς διδομένας συνθήκας καὶ πρὸς τὰ ἐκ τῶν ἀξιωμάτων καὶ τῶν ἀποδειχθέντων θεωρημάτων συμπεράσματα.

Οὕτω, συμφώνως πρὸς τὰ ἀξιώματα θέσεως, ἡ ὕπαρξις μιᾶς εὐθείας συνδέεται μὲ τὴν ὕπαρξιν δύο σημείων. Δεχόμεθα ὅτι τοῦτο :

(1) Ἐπιτρέπει τὴν γραφικὴν ἐμφάνισιν τῶν δύο τούτων σημείων καὶ τὴν πρᾶξιν διὰ τῆς ὁποίας τὰ σημεῖα αὐτὰ συνδέονται διὰ μιᾶς εὐθείας, καὶ

(2) Ἐξασφαλίζει ὅτι ἡ πρᾶξις αὕτη δύναται πάντοτε νὰ ἐκτελεσθῇ.

Δεχόμεθα ἐπίσης ὅτι, ἡ πρᾶξις ἡ ὁποία συνίσταται εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ κοινοῦ σημείου δύο εὐθειῶν, κειμένων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ μὴ παραλλήλων, δύναται πάντοτε νὰ ἐκτελεσθῇ.

Διὰ τὴν πρακτικὴν ἐκτέλεσιν τῶν γραφικῶν τούτων πράξεων ἐπιτρέπεται ἡ χρησιμοποίησις τοῦ ὀργάνου τὸ ὁποῖον ὀνομάζεται **κανών**.

Οὕτω, δεχόμεθα ὅτι ἡ ἐπίλυσις τῶν κατωτέρω θεμελιωδῶν προβλημάτων ἐξασφαλίζεται ἐκ τῶν εἰσαχθέντων ἀξιωμάτων θέσεως :

147. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Νὰ κατασκευασθῆ δοθὲν σημεῖον Α τοῦ ἐπιπέδου.

148. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Νὰ κατασκευασθῆ ἡ εὐθεῖα ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπὸ δύο δο-θέντα σημεῖα Α καὶ Β.

149. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Νὰ κατασκευασθῆ τὸ κοινὸν σημεῖον δύο δοθεισῶν μὴ πα-ραλλήλων εὐθειῶν τοῦ ἐπιπέδου.

Δεχόμεθα ἐπίσης ὅτι ἡ κατωτέρω κατασκευὴ ἐξασφαλίζεται ἐκ τῶν εἰσα-χθέντων ἀξιωμάτων τῆς ἰσότητος :

150. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Ἐπὶ δοθείσης ἡμιευθείας ΑΧ νὰ εὑρεθῆ σημεῖον Β, ὥστε τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ νὰ εἶναι ἴσον πρὸς δοθὲν εὐθ. τμῆμα λ.

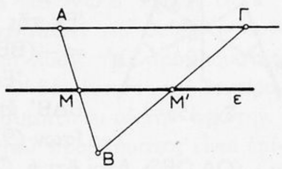
Ἡ ἀνωτέρω κατασκευὴ πραγματοποιεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ πίνα-κος σχεδιάσεως τῇ βοηθείᾳ τοῦ ὀργάνου τὸ ὁποῖον ὀνομάζεται **μεταφορεύς.**

Τέλος δεχόμεθα ὅτι ἡ κίνησις τῶν ὀργάνων σχεδιάσεως εἶναι κίνησις στε-ρεοῦ σώματος.

Ἐξ ἄλλου, τὰ κατωτέρω προβλήματα ἀνάγονται εἰς τὰ τέσσαρα προη-γούμενα καὶ ἐπιλύονται διὰ τῆς ἀποκλειστικῆς χρησιμοποιήσεως τοῦ κανόνος καὶ τοῦ μεταφορέως (1).

151. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Δοθείσης εὐθείας ε καὶ σημείου Α ἐκτὸς αὐτῆς, νὰ κατα-σκευασθῆ ἡ διὰ τοῦ Α παράλληλος πρὸς τὴν ε.

Λύσις. Συνδέομεν δι᾽ εὐθείας τὸ Α μὲ τυχὸν σημεῖον Μ τῆς ε καὶ εὑρίσκομεν τὸ συμμετρικὸν Β τοῦ Α ὡς πρὸς τὸ Μ (Σχ. 151). Συνδέομεν ἀκο-λούθως δι᾽ εὐθείας τὸ Β μὲ ἕνα ἄλλο τυχὸν σημεῖον Μ′ τῆς ε καὶ εὑρίσκομεν τὸ συμμετρικὸν Γ τοῦ Β ὡς πρὸς τὸ Μ′. Ἡ εὐθεία ΑΓ εἶναι ἡ ζητουμένη παράλληλος πρὸς τὴν ε (126, Πόρισμα).

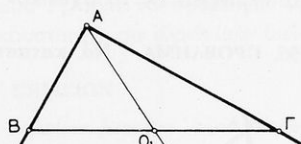


Σχ. 151

152. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Νὰ κατασκευασθῆ ὀρθὴ γωνία ἔχουσα κορυφὴν δοθὲν ση-μεῖον Α.

Λύσις. Κατασκευάζεται (Σχ. 152) τυχοῦ-σα ἀπὸ τοῦ Α ἡμιευθεῖα καὶ ὁρίζεται ἐπ᾽ αὐ-τῆς τυχὸν σημεῖον O_1. Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας διερχο-μένης διὰ τοῦ O_1 ὁρίζονται, ἑκατέρωθεν τοῦ O_1, τὰ σημεῖα Β καὶ Γ ὥστε $O_1B = O_1A$ (Σχ. 152).

Ἡ γωνία (ΑΒ,ΑΓ) εἶναι ὀρθή (136).

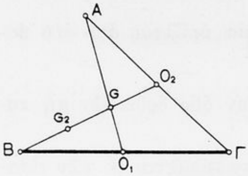


Σχ. 152

(1) Διὰ τῶν προβλημάτων τούτων ἐπιδιώκεται, παραλλήλως πρὸς τὴν εἰσαχθεῖσαν ἔν-νοιαν τῆς γεωμ. κατασκευῆς, ἡ ἄσκησις τῆς ἱκανότητος τοῦ μαθητοῦ εἰς τὸ νὰ δίδη λύσιν, βάσει τῆς μέχρι τοῦδε ἀποκτηθείσης γνώσεως (ἀποδεικτικῶν προτάσεων), εἰς προβλήματα εἰς τὰ ὁποῖα δὲν εἶναι ἀπαραίτητος ἡ ἔννοια τοῦ κύκλου καὶ ἡ μὲ ταύτην συνδεομένη χρῆσις τοῦ **διαβήτου.**

Εἰς τὸ ἑπόμενον Κεφάλαιον θὰ δοθοῦν προβλήματα γεωμ. κατασκευῶν τῶν ὁποίων ἡ ἐπί-λυσις γίνεται τῇ βοηθείᾳ εὐθειῶν καὶ κύκλων, ἤτοι εἰς προβλήματα τὰ ὁποῖα ἑρμηνεύονται ἐπο-πτικῶς, διὰ γραφικῶν εἰκόνων πραγματοποιουμένων ἐπὶ τοῦ πίνακος σχεδιάσεως, τῇ βοηθείᾳ τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου.

153. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. **Δοθέντος εὐθυγράμμου τμήματος ΒΓ νὰ εὑρεθῇ τὸ μέσον αὐτοῦ.**



Σχ. 153

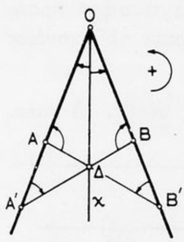
Λύσις. Ἐπὶ τυχούσης ἀπὸ τοῦ Β ἡμιευθείας ὁρίζονται τὰ σημεῖα G_2, G καὶ O_2 ὥστε $BG_2 = G_2G = GO_2$ (Σχ. 153) καὶ τὸ συμμετρικὸν Α τοῦ Γ ὡς πρὸς τὸ O_2. Τὸ κοινὸν σημεῖον O_1 τῶν ΒΓ καὶ AG εἶναι τὸ ζητούμενον μέσον (135).

154. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. **Νὰ χωρισθῇ δοθὲν εὐθ. τμῆμα ΑΒ εἰς ν ἴσα εὐθ. τμήματα**

Λύσις. Βλέπε πρότασιν (128).

155. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. **Νὰ διχοτομηθῇ δοθεῖσα γωνία (ΟΧ, ΟΥ).**

Λύσις. Ὁρίζονται ἐπὶ τῶν πλερρῶν ΟΧ καὶ ΟΥ τῆς γωνίας : δύο τυχόντα σημεῖα Α καὶ Β ἀντιστοίχως ὥστε ΟΑ = ΟΒ καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας ΑΒ δύο ἄλλα σημεῖα Α′ καὶ Β′ ὥστε ΟΑ′ = ΟΒ (Σχ. 155). Ὁρίζεται τὸ κοινὸν σημεῖον Δ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ Α′Β. Ἡ ἡμιευθεῖα ΟΔ εἶναι ἡ ζητουμένη διχοτόμος.



Σχ. 155

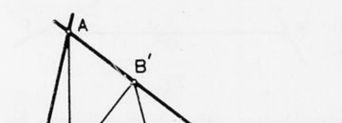
Πράγματι, ἐκ τῶν τριγώνων ΟΑΒ′ καὶ ΟΒΑ′ ἔχομ (78): (ΑΒ′, ΑΟ) = – (ΒΑ′, ΒΟ) καὶ (Β′Ο,Β′Α) = – (Α′Ο,Α′Β Ἐκ τῆς πρώτης τῶν ἀνωτέρω ἔπεται (81) (ΑΑ′, ΑΔ) = – (ΒΒ′,ΒΔ), ἤτοι (ΑΔ,ΑΑ′) = – (ΒΔ, ΒΒ′).

Ἐκ τῶν ἀντιρρόπως ἴσων (81) τριγώνων ΑΔΑ′ κ ΒΔΒ′ ἔπεται ὅτι ΔΑ′ = ΔΒ′ καὶ ἐκ τῶν ἐπίσης ἀντιρρόπω ἴσων (91) τριγώνων ΟΔΑ′ καὶ ΟΔΒ′ ἔπεται ὅτι (ΟΔ,ΟΑ′) = – (ΟΔ,ΟΒ′), ἤτοι ὅτι ἡ ΟΔ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας (ΟΧ,ΟΥ).

Ἡ ἐπίλυσις τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος ἐγένετο χωρὶς τὴν χρησιμοποίησιν τοῦ ἀξιώματος τῆς παραλλήλου (95).

Ἐξ ἄλλου ἕνας δεύτερος τρόπος ἐπιλύσεως τοῦ προβλήματος αὐτοῦ ἀνταποκρίνεται εἰς τὸ σχετικὸν (93) θεώρημα ὑπάρξεως.

156. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. **Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ δοθεῖσαν εὐθεῖαν**



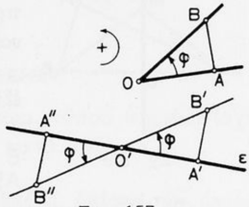
Σχ. 156

Λύσις. Ὁρίζεται τυχὸν σημεῖον Ο τ ε καὶ ἀκολούθως δύο σημεῖα Β καὶ Γ αὐτ συμμετρικὰ ἀλλήλων ὡς πρὸς τὸ Ο. Ἐπὶ δ οἱωνδήποτε ἡμιευθειῶν ἀγομένων ἀπὸ τοῦ καὶ κειμένων πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ε ὁ ζονται ἀντιστοίχως τὰ σημεῖα Β′ καὶ Γ′ ὥσ ΟΒ′ = ΟΓ′ = ΟΒ. Ὁρίζεται τὸ κοινὸν σημε Α τῶν εὐθειῶν ΒΓ′ καὶ ΓΒ′ καὶ τὸ κοινὸν σ μεῖον Η τῶν εὐθειῶν ΒΒ′ καὶ ΓΓ′. Ἡ εὐθ ΑΗ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ε. Πράγματι, ἡ γ νία (Β'Β, Β'Γ) εἶναι (136) ὀρθή, ἤτοι ἡ ΒΒ' εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΑ καὶ δι' ὅμοιον λόγον ἡ ΓΓ' κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι τὸ σημεῖον Η εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ ἑπομένως ἡ ΑΗ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ (139).

Ἂν ζητῆται ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν ε ἡ διερχομένη διὰ δοθέντος σημείου Ρ κειμένου ἐπὶ τῆς ε ἢ ἐκτὸς αὐτῆς, κατασκευάζεται τυχοῦσα, κατὰ τὰ ἀνωτέρω κάθετος ἐπὶ τὴν ε. Ἡ διὰ τοῦ Ρ παράλληλος πρὸς αὐτὴν εἶναι ἡ ζητουμένη κάθετος (94, Πόρισμα 2).

157. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα τέμνουσα δοθεῖσαν εὐθεῖαν ε ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν φ.

Λύσις. Κατασκευάζεται τυχοῦσα κάθετος ἐπὶ τὴν μίαν τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας φ (Σχ. 157). Ἔστωσαν Α καὶ Β τὰ κοινὰ σημεῖα αὐτῆς μὲ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας φ. Ὁρίζεται τυχὸν σημεῖον Ο' τῆς ε καὶ λαμβάνεται ἐπ' αὐτῆς, πρὸς τὸ ἕνα ἢ τὸ ἄλλο μέρος τοῦ Ο', τὸ σημεῖον Α' ὥστε Ο'Α' = ΟΑ. Κατασκευάζεται ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν ε εἰς τὸ Α' καὶ ὁρίζεται ἐπ' αὐτῆς τὸ σημεῖον Β' ὥστε νὰ εἶναι : Α'Β' = ΑΒ καὶ αἱ γωνίαι (Ο'Α',Ο'Β') καὶ (ΟΑ,ΟΒ) ὁμοίως προσανατολισμέναι.



Σχ. 157

Ἐξ τῶν ἴσων (121) ὀρθογωνίων τριγώνων ΑΟΒ καὶ Α'Ο'Β' ἔχομεν ὅτι : (Ο'Α',Ο'Β') = (ΟΑ,ΟΒ), ἤτοι ὅτι ἡ εὐθεῖα Ο'Β' ἱκανοποιεῖ τὴν δοθεῖσαν συνθήκην. Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι ἡ εὐθεῖα Ο'Β' εἶναι λύσις τοῦ προβλήματος. Εἰς τὸ συμμετρικὸν Α'' τοῦ σημείου Α' ὡς πρὸς τὸ Ο' δὲν ἀντιστοιχεῖ δευτέρα λύσις τοῦ προβλήματος. Ὁ ὁριζομένη εὐθεῖα Ο'Β'' συμπίπτει μὲ τὴν πρώτην.

Κάθε παράλληλος πρὸς τὴν εὑρεθεῖσαν λύσιν τοῦ προβλήματος εἶναι ἐπίσης λύσις τοῦ προβλήματος. Ὑπάρχει ἑπομένως μία διεύθυνσις (97), ἀνταποκρινομένη εἰς τὴν δοθεῖσαν συνθήκην.

Σημειοῦμεν ὅτι :

Ἂν ἡ ζητουμένη εὐθεῖα δέον ὅπως ἱκανοποιῇ καὶ μίαν δευτέραν δοθεῖσαν συνθήκην. π.χ. ὅπως διέρχεται διὰ δοθέντος σημείου Ρ, τότε τὸ πρόβλημα δέχεται μίαν λύσιν : τὴν διὰ τοῦ Ρ εὐθεῖαν τὴν ἀνήκουσαν εἰς τὴν εὑρεθεῖσαν διεύθυνσιν.

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΓΕΩΜ. ΤΟΠΟΥ ΣΗΜΕΙΩΝ

158. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ὀνομάζομεν* **γεωμετρικὸν τόπον** *σημείων ἕκαστον τῶν ὁποίων ἱκανοποιεῖ μίαν συνθήκην (Σ), τὸ σύνολον τῶν σημείων τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἐκ τῆς συνθήκης (Σ).*

Ὁ γεωμ. τόπος εἶναι κατὰ ταῦτα, ἕνα γεωμ. σχῆμα, ὑπὸ τὴν ἔννοιαν τοῦ δοθέντος [1] ὁρισμοῦ.

Ἐκ τῶν ἀξιωμάτων θέσεως (6) προκύπτει ὅτι :

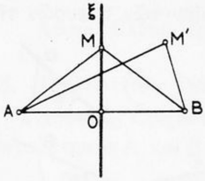
Ὁ γεωμ. τόπος τῶν κοινῶν σημείων δύο ἐπιπέδων εἶναι ἡ τομὴ αὐτῶν.

(1) Βλέπε : Εἰσαγωγῆς παράγρ. 4.

Εἰς τὴν Γεωμετρίαν τοῦ Ἐπιπέδου ἀποδεικνύονται εὐκόλως αἱ ἑξῆς προτάσεις αἱ ἀναφερόμεναι εἰς γεωμ. τόπους σημείων ἀντιστοιχοῦντας εἰς θεμελιώσεις (βασικὰς) τινας συνθήκας :

159. ΘΕΩΡΗΜΑ. **Ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Μ ἑκάστου τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ δύο δοθέντων σημείων Α καὶ Β(1) εἶναι ἴσαι, εἶναι ἡ μεσοκάθετος τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ.**

Ἀπόδειξις. Πράγματι, κάθε σημεῖον Μ τῆς μεσοκαθέτου ξ τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν Α καὶ Β (137). Ἀντιθέτως (Σχ. 159) :



Σχ. 159

Κάθε σημεῖον Μ′ τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἐπὶ τῆς ΑΒ δὲν ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν Α καὶ Β. Πράγματι, ἂν κεῖται πρὸς τὸ μέρος τῆς ξ πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται τὸ Β θὰ εἶναι (137) $M'A > M'B$.

Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὰς ἑξῆς δύο προτάσεις :

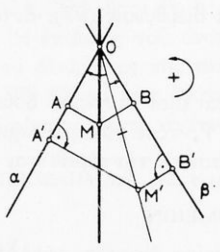
(1) Κάθε σημεῖον Μ ἀπέχον ἴσον ἀπὸ τῶν Α καὶ Β εἶναι σημεῖον τῆς μεσοκαθέτου ξ τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ, καὶ

(2) Κάθε σημεῖον τῆς ἀνωτέρω μεσοκαθέτου ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν Α καὶ Β.

Ἑκάστη τῶν προτάσεων τούτων ἀποδεικνύεται, ἐπίσης, ἐκ τῆς θεωρήσεως τῶν τριγώνων ΜΟΑ καὶ ΜΟΒ (137).

Ὡς κατωτέρω θέλομεν ἴδει, ὁ εἰς δοθεῖσαν συνθήκην (Σ) ἀντιστοιχῶν γεωμ. τόπος δύναται νὰ ἀποτελῆται ἀπὸ δύο ἢ περισσοτέρας εὐθείας ἢ εὐθ. τμήματα.

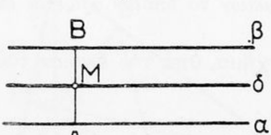
160. ΘΕΩΡΗΜΑ. **Ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων ἑκάστου τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ δύο δοθεισῶν τεμνομένων εὐθειῶν α καὶ β εἶναι ἴσαι, εἶναι οἱ διχοτόμοι δ καὶ δ′ τῶν ὑπὸ τῶν εὐθειῶν τούτων ὁριζομένων γωνιῶν.**



Σχ. 160.1

Ἀπόδειξις (1) Κάθε σημεῖον Μ (Σχ. 160.1) τῆς δ ἢ τῆς δ′ ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν α καὶ β. Τοῦτο προκύπτει ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΟΜΑ καὶ ΟΜΒ (121).

(2) Κάθε σημεῖον Μ′ (Σχ. 160.1) μὴ κείμενον ἐπὶ τῆς δ ἢ τῆς δ′ δὲν ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν α καὶ β. Τοῦτο προκύπτει ἐκ τῶν τριγώνων ΟΜ′Α′ καὶ ΟΜ′Β (131, Πόρισμα 1).



Σχ 160.2

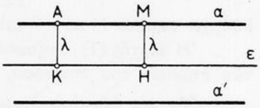
Σημειοῦμεν ὅτι (Σχ. 160.2) :

Ἂν αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι α καὶ β εἶναι παράλληλοι, ὁ γεωμ. τόπος εἶναι ἡ παράλληλος δ πρὸς τὰς α καὶ β ἡ ἀπέχουσα ἴσον ἀπὸ τούτων (**μεσοπαράλληλος** τῶν α καὶ β).

(1) Ἕκαστον τῶν ὁποίων ἱκανοποιεῖ τὴν συνθήκην : $MA = MB$

161. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων ἑκάστου τῶν ὁποίων ἡ ἀπόστασις ἀπὸ μιᾶς δοθείσης εὐθείας ε εἶναι ἴση πρὸς δοθὲν εὐθ. τμῆμα λ, ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰς παραλλήλους α καὶ α′ πρὸς τὴν ε τὰς ἀπεχούσας ἀπὸ αὐτῆς ἀπόστασιν ἴσην πρὸς τὸ δοθὲν εὐθ. τμῆμα λ.

Ἀπόδειξις. Ἡ ἀπόδειξις προκύπτει ἀμέσως ἐκ τῆς προτάσεως (125): Πράγματι, ἂν εἶναι Α (Σχ. 161) ἕνα σημεῖον ἱκανοποιοῦν τὴν δοθεῖσαν συνθήκην, καὶ α ἡ διὰ τούτου παράλληλος πρὸς τὴν ε, κάθε σημεῖον Μ τῆς α ἱκανοποιεῖ τὴν δοθεῖσαν συνθήκην, ἤτοι ἡ ἀπόστασις του ἀπὸ τῆς ε εἶναι ἴση πρὸς τὸ δοθὲν εὐθ. τμῆμα λ (125), καὶ ἀντιθέτως κάθε σημεῖον μὴ κείμενον ἐπὶ τῆς α δὲν ἀπέχει ἀπὸ τῆς ε ἀπόστασιν λ.



Σχ. 161

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΓΕΩΜ. ΤΟΠΟΥ ΕΥΘΕΙΩΝ.

Τὰ ἀνωτέρω ἀναφερόμενα εἰς τὴν ἔννοιαν τοῦ γεωμ. τόπου σημείων ἰσχύουν καὶ ὡς πρὸς τὸν γεωμ. τόπον εὐθειῶν. Ἔχομεν, κατὰ ταῦτα:

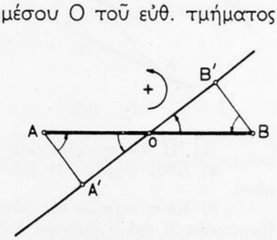
162. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ὀνομάζομεν* **γεωμετρικὸν τόπον εὐθειῶν,** *ἑκάστη τῶν ὁποίων ἱκανοποιεῖ μίαν συνθήκην (Σ), τὸ σύνολον τῶν εὐθειῶν τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἐκ τῆς συνθήκης (Σ).*

Ἡ κατωτέρω πρότασις ἀναφέρεται εἰς γεωμ. τόπον ἀντιστοιχοῦντα εἰς συνθήκην ἀντίστοιχον τῆς ἀναφερομένης εἰς τὸ θεώρημα (159).

163. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ὁ γεωμ. τόπος τῶν εὐθειῶν ε τοῦ ἐπιπέδου, ἑκάστη τῶν ὁποίων ἀπέχει ἴσον ἀπὸ δύο δοθέντων σημείων Α καὶ Β εἶναι δύο δέσμαι εὐθειῶν τοῦ ἐπιπέδου. Ἡ μία τούτων εἶναι ἡ ἔχουσα κέντρον τὸ μέσον Ο τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ (1) καὶ ἡ ἄλλη εἶναι ἡ δέσμη τῶν εὐθειῶν τῶν παραλλήλων πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΒ (2).

Ἀπόδειξις. Κάθε εὐθεῖα ε διερχομένη διὰ τοῦ μέσου Ο τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ ἱκανοποιεῖ τὴν δοθεῖσαν συνθήκην, ἤτοι αἱ ἀποστάσεις ΑΑ′ καὶ ΒΒ′ τῶν σημείων Α καὶ Β ἀπὸ αὐτῆς εἶναι ἴσαι (121). Τοῦτο ἰσχύει καὶ διὰ κάθε εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ (125).

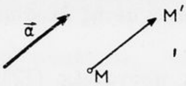
Ἐξ ἄλλου κάθε εὐθεῖα ἱκανοποιοῦσα τὴν ἀνωτέρω συνθήκην ΑΑ′ = ΒΒ′, διέρχεται διὰ τοῦ μέσου Ο τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ ἢ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΒ. Πράγματι, ἂν τὰ Α καὶ Β κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς ε καὶ εἶναι Ο τὸ μεταξὺ τῶν Α καὶ Β σημεῖον τῆς ε, ἐκ τῶν ἴσων ὀρθογωνίων τριγώνων ΟΑΑ′ καὶ ΟΒΒ′ ἕπεται ὅτι ΟΑ = ΟΒ.



Σχ. 163

(1) Τὸ σύνολον τῶν εὐθειῶν τοῦ ἐπιπέδου τῶν διερχομένων διὰ τοῦ Ο.
(2) Παράλληλος δέσμη εὐθειῶν.

164. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἔστω $\vec{\alpha}$ ἕνα δοθὲν διάνυσμα τοῦ ἐπιπέδου. Θεωροῦμεν ἕνα τυχὸν σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου καὶ ἐπὶ τῆς ἀπὸ τοῦ Μ ἡμιευθείας ΜΧ τῆς ἐχούσης τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ διάνυσμα $\vec{\alpha}$ φορὰν (108), τὸ σημεῖον Μ′ ὥστε (1) $\overrightarrow{MM'} = \vec{\alpha}$. Ὡς γνωστόν, ὑπάρχει σημεῖον Μ′ τοῦ ἐπιπέδου ἱκανοποιοῦν τὴν συνθήκην (1), καὶ ἕνα μόνον.



Σχ. 164

Ἐξ ἄλλου, οἱονδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἕνα σημεῖον Μ′ τοῦ ἐπιπέδου, ὑπάρχει σημεῖον Μ αὐτοῦ καὶ ἕνα μόνον, ὥστε νὰ ἰσχύῃ ἡ (1).

Ἡ ἐκ τῆς (1) ὁριζομένη κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία μεταξὺ τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου, ὀνομάζεται παράλληλος μεταφορὰ ἢ ἁπλῶς **μεταφορά**.[1]

Ἂν τὴν ἀνωτέρω ἀντιστοιχίαν συμβολίσωμεν μὲ τὸ σύμβολον **Τ** $(\vec{\alpha})$ καὶ εἶναι Μ′ τὸ ἀντίστοιχον ἑνὸς τυχόντος σημείου Μ τοῦ ἐπιπέδου, κατὰ τὴν μεταφορὰν ταύτην, δυνάμεθα νὰ σημειοῦμεν συμβολικῶς :

$$M \xrightarrow{\mathbf{T}\,(\vec{\alpha})} M'$$

Τὸ σημεῖον Μ′ δύναται νὰ ὀνομάζεται **ὁμόλογον** τοῦ Μ κατὰ τὴν μεταφορὰν **Τ** $(\vec{\alpha})$.

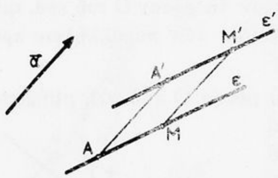
Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἀντιστοιχίας αὐτῆς, τὴν ὁποίαν ὠνομάσαμεν **μεταφοράν**, προκύπτει ὅτι αὐτὴ ὁρίζεται ἀπὸ ἕνα ζεῦγος ἀντιστοίχων σημείων (Μ,Μ′). Τὸ διάνυσμα τὸ ὁρίζον τὴν μεταφορὰν εἶναι τὸ $\overrightarrow{MM'}$.

Ὁμόλογον ἑνὸς σχήματος (Φ) [2] κατὰ μίαν μεταφορὰν **Τ** $(\vec{\alpha})$ ὀνομάζομεν τὸν γεωμετρικὸν τόπον τῶν ὁμολόγων ὅλων τῶν σημείων αὐτοῦ κατὰ τὴν μεταφορὰν ταύτην.

Ὁ ἀνωτέρω γεωμ. τόπος εἶναι, κατὰ ταῦτα, ἕνα σύνολον σημείων (Φ′) ὁριζόμενον ἐκ τοῦ (Φ), καὶ τῆς συνθήκης $\overrightarrow{MM'} = \vec{\alpha}$.

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ ἕπεται ὅτι :

165. ΘΕΩΡΗΜΑ. Τὸ ὁμόλογον μιᾶς εὐθείας ε κατὰ μίαν μεταφορὰν Τ $(\vec{\alpha})$ εἶναι μία εὐθεῖα ε′ παράλληλος πρὸς τὴν ε



Σχ. 165

Ἀπόδειξις. Ἔστω Α′ τὸ ὁμόλογον ἑνὸς δοθέντος σημείου Α τῆς ε καὶ Μ′ τὸ ὁμόλογον ἑνὸς τυχόντος σημείου Μ αὐτῆς, κατὰ τὴν μεταφορὰν **Τ** $(\vec{\alpha})$.

Ἡ εὐθεῖα Α′Μ′ ἢ ε′ εἶναι γνωστὴ εὐθεῖα, ὡς διερχομένη διὰ τοῦ Α′ καὶ παράλληλος πρὸς τὴν ε (95).

Ἐξ ἄλλου κάθε σημεῖον Μ′ τῆς ε′ εἶναι ὁμόλογον ἑνὸς σημείου Μ τῆς ε. Πράγματι, ἂν θεωρή-

(1) Ἡ ἀντιστοιχία αὕτη κατὰ τὴν ὁποίαν :
α) Κάθε σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου (πρότυπον) ἔχει ἐν αὐτῷ ἕνα μόνον ἀντίστοιχον (εἰκόνα).
β) Κάθε σημεῖον Μ′ (εἰκὼν) εἶναι ἀντίστοιχον ἑνὸς μόνον σημείου Μ (προτύπου), ἤτοι δύο σημεῖα Μ καὶ Ν διάφορα ἀλλήλων (πρότυπα) δὲν δύνανται νὰ ἔχουν τὸ αὐτὸ ἀντίστοιχον σημεῖον (εἰκόνα).
γ) Δὲν ὑπάρχουν σημεῖα Μ′, μὴ ἔχοντα ἀντίστοιχον σημεῖον Μ (πρότυπον), ὀνομάζεται ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία ἢ **ἀπεικόνισις** τοῦ συνόλου τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ συνόλου (ἐφ' ἑαυτοῦ).

Ἡ ἀπεικόνισις Τ $(-\vec{\alpha})$ ἢ $T^{-1}(\vec{\alpha})$ ὀνομάζεται *ἀντίστροφος* τῆς Τ $(\vec{\alpha})$. Ἔχομεν ἐπομένως:

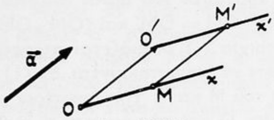
$$M \xrightarrow{T} M' \Leftrightarrow M' \xrightarrow{T^{-1}} M.$$

(2) Θεωρουμένου ὡς συνόλου σημείων.

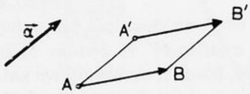
σωμεν τὴν διὰ τούτου παράλληλον Μ'Μ πρὸς τὸν φορέα τοῦ $\vec{\alpha}$ (Μ ἐπὶ τῆς ε), θὰ εἶναι : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'} = \vec{\alpha}$, ἤτοι τὸ Μ' εἶναι ὁμόλογον τοῦ Μ κατὰ τὴν μεταφορὰν Τ $(\vec{\alpha})$.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ *1. Τὸ ὁμόλογον εὐθ. τμήματος ΑΒ, κατὰ μίαν μεταφορὰν Τ $(\vec{\alpha})$, εἶναι εὐθ. τμῆμα Α'Β' ἴσον πρὸς τὸ ΑΒ.*

2. Τὸ ὁμόλογον ἡμιευθείας ΟΧ κατὰ μίαν μεταφορὰν Τ $(\vec{\alpha})$ εἶναι ἡμιευθεῖα Ο'Χ' ὁμόρροπος πρὸς τὴν ΟΧ (Σχ. 165.2).



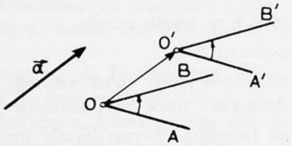
Σχ. 165.2



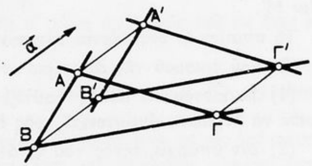
Σχ. 165.3

3. Τὸ ὁμόλογον διανύσματος $\overrightarrow{AB}$, εἶναι διάνυσμα $\overrightarrow{A'B'}$ ἴσον πρὸς τὸ $\overrightarrow{AB}$ (Σχ. 165.3)

4. Τὸ ὁμόλογον γωνίας (ΟΑ, ΟΒ) εἶναι γωνία (Ο'Α', Ο'Β') ἴση πρὸς τὴν (ΟΑ, ΟΒ). (Σχ. 165.4).



Σχ. 165.4



Σχ. 165.5

5. Τὸ ὁμόλογον τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τρίγωνον Α'Β'Γ' ἴσον πρὸς τὸ ΑΒΓ. (Σχ. 165.5).

Παρατηροῦμεν ὅτι, κατὰ τὴν μεταφορὰν διατηροῦνται τὰ εὐθ. τμήματα καὶ αἱ γωνίαι. (1) Ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ταύτην ἡ παράλληλος μεταφορὰ εἶναι ὅπως δυνάμεθα νὰ λέγωμεν μία **ὁμόρροπος ἰσότης.**

Ἐξ ἄλλου σημειοῦμεν ὅτι :

Ἂν τὸ ὁμόλογον ἑνὸς σημείου Μ κατὰ τὴν μεταφορὰν **Τ** $(\vec{\alpha})$ εἶναι τὸ σημεῖον Μ', τὸ ὁμόλογον τοῦ Μ', κατὰ τὴν μεταφορὰν ταύτην εἶναι ἕνα σημεῖον Μ'' διάφορον τοῦ Μ', ἐκτὸς ἂν $\vec{\alpha} = \vec{O}$.

ΣΤΡΟΦΗ

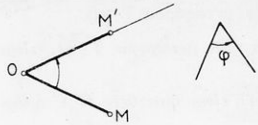
166. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἔστωσαν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ἕνα σημεῖον Ο καὶ μία προσανατολισμένη γωνία φ. Θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου καὶ τὸ σημεῖον Μ' αὐτοῦ τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἐκ τῶν συνθηκῶν :

(1) ΟΜ = ΟΜ' καὶ (ΟΜ, ΟΜ') = φ.

Ὡς γνωστὸν (63) δοθέντος τοῦ σημείου Μ, μία μόνον ἡμιευθεῖα ΟΧ τοῦ ἐπιπέδου ὑπάρχει ὥστε ἡ γωνία (ΟΜ, ΟΧ) νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν δοθεῖσαν γωνίαν φ. Ἐξ ἄλλου ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας ΟΧ ὑπάρχει ἕνα μόνον (28) σημεῖον Μ' ὥστε τὸ εὐθ. τμῆμα ΟΜ' νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΟΜ. Οὕτω :

(1) Δύο οἱαδήποτε ὁμόλογα κατὰ τὴν μεταφορὰν εὐθ. τμήματα εἶναι ἴσα ὡς καὶ δύο οἱαιδήποτε ὁμόλογοι γωνίαι.

Δοθέντος σημείου Μ τοῦ ἐπιπέδου, ὑπάρχει σημεῖον Μ′ αὐτοῦ καὶ ἕνα μόνον ὥστε νὰ ἱκανοποιοῦνται αἱ δύο συνθῆκαι :



Σχ. 166

$$(1)\quad OM = OM' \quad \text{καὶ} \quad (OM,\ OM') = \varphi$$

Τὸ σημεῖον τοῦτο Μ′ δύναται νὰ ὀνομασθῇ **εἰκὼν** τοῦ Μ ὁριζομένη ἐκ τῶν (Ι), καὶ τὸ σημεῖον Μ **πρότυπον**.

Οὕτω δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι κάθε πρότυπον Μ ἔχει μίαν μόνον εἰκόνα Μ′. Ἐξ ἄλλου, κάθε σημεῖον Μ′ τοῦ ἐπιπέδου ἔχει ὡς πρότυπον ἕνα μόνον σημεῖον Μ αὐτοῦ, εὑρισκόμενον ἐκ τῶν : $OM = OM'$ καὶ $(OM', OM) = -\varphi$.

Ἡ κατὰ τὰ ἀνωτέρω ὁριζομένη σημειακὴ ἀντιστοιχία (1) ὀνομάζεται **στροφή.**

Τὸ σημεῖον Μ′ τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἐκ τοῦ Μ ὥστε νὰ ἱκανοποιοῦνται αἱ (1), ἤτοι ἡ εἰκὼν τοῦ Μ, δύναται νὰ ὀνομάζεται καὶ **ὁμόλογον** σημεῖον τοῦ Μ κατὰ τὴν ἀνωτέρω στροφήν.

Ἂν τὴν στροφὴν ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο καὶ τὴν γωνίαν φ συμβολίσωμεν μὲ τὸ σύμβολον R (Ο, φ), σημειοῦντες :

$$M \xrightarrow{\mathbf{R}\,(O,\varphi)} M'$$

ἐννοοῦμεν ἀκριβῶς ὅτι τὸ ὁμόλογον τοῦ σημείου Μ κατὰ τὴν στροφὴν R (Ο, φ) εἶναι τὸ σημεῖον Μ′.

Τὸ σημεῖον Ο ὀνομάζεται **κέντρον** τῆς στροφῆς καὶ ἡ φ **γωνία** αὐτῆς.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἀνωτέρω ἀντιστοιχίας προκύπτει ὅτι :

(1) Τὸ κέντρον Ο αὐτῆς ταυτίζεται πρὸς τὸ ὁμόλογόν του, κατὰ ταύτην, ἢ ὅπως δυνάμεθα νὰ λέγωμεν, **ἀντιστοιχεῖ πρὸς ἑαυτὸ** ἢ εἶναι **ἡνωμένον** πρὸς τὸ ὁμόλογόν του.

(2) Δὲν ὑπάρχει, ἐκτὸς τοῦ 0, ἄλλο σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου ἀντιστοιχοῦν πρὸς ἑαυτό.

(3) Ἂν τὸ ὁμόλογον τοῦ σημείου Μ, κατὰ τὴν στροφὴν R (Ο,φ), εἶναι τὸ σημεῖον Μ′, τὸ ὁμόλογον τοῦ Μ′ κατὰ τὴν στροφὴν ταύτην εἶναι, ἐν γένει, ἕνα σημεῖον Μ′′, διάφορον τοῦ Μ′.

Ἂν $\varphi = \pi$ θὰ εἶναι $M'' \equiv M'$ (Βλέπε παράγρ. 168 : Συμμετρία ὡς πρὸς σημεῖον).

Ὁμόλογον ἑνὸς σχήματος (Φ) (2) κατὰ μίαν στροφὴν R (Ο,φ) ὀνομάζομεν τὸ σύνολον (γεωμ. τόπον) τῶν ὁμολόγων ὅλων τῶν σημείων του, κατὰ τὴν στροφὴν ταύτην.

Τὸ ἀνωτέρω σύνολον εἶναι, κατὰ ταῦτα, ἕνα σχῆμα (Φ′), ὁριζόμενον ἐκ τοῦ (Φ) καὶ τῆς συνθήκης :

$$(1)\quad OM = OM' \quad \text{καὶ} \quad (OM,\ OM') = \varphi$$

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ ἕπεται ὅτι :

167. ΘΕΩΡΗΜΑ Τὸ ὁμόλογον δοθείσης εὐθείας α, κατὰ δοθεῖσαν στροφὴν R (Ο, φ), εἶναι μία εὐθεῖα α′. Ἡ γωνία τῶν α καὶ α′ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν φ τῆς στροφῆς.

Ἀπόδειξις. Ἔστω Μ′ τὸ ὁμόλογον τοῦ τυχόντος σημείου Μ τῆς εὐθείας α κατὰ τὴν δοθεῖσαν στροφὴν καὶ Α′ τὸ ὁμόλογον τῆς προβολῆς Α τοῦ κέντρου Ο ἐπὶ τὴν α. (**Σχ.** 167). Ἐκ τῶν ἴσων (79) τριγώνων ΟΑΜ καὶ ΟΑ′Μ′ ἕπεται ὅτι αἱ ὁμόλογοι γωνίαι (ΑΜ, ΑΟ) καὶ (Α′Μ′, Α′Ο′) αὐτῶν εἶναι ἴσαι καὶ ἐπειδὴ ἡ ἐκ τούτων (ΑΜ, ΑΟ) εἶναι ὀρθή, θὰ εἶναι ὀρθὴ καὶ ἡ (Α′Μ′, Α′Ο′). Οὕτως, ἡ εὐθεῖα Α′Μ′ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΑ′ κατὰ τὸ γνωστὸν σημεῖον Α′ αὐτῆς. Ἡ εὐθεῖα Α′Μ′ εἶναι, κατὰ ταῦτα, μία γνωστὴ εὐθεῖα α′, ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ὅτι ἡ

---

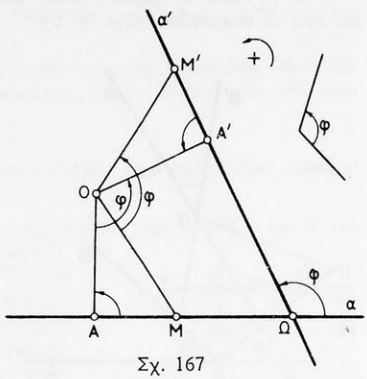
(1) Ἀμφιμονοσήμαντος *ἀπεικόνισις* τοῦ συνόλου τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ συνόλου (ἐφ' ἑαυτοῦ).

(2) Θεωρουμένου ὡς συνόλου σημείων.

ὕπαρξις, καὶ ἑπομένως καὶ ἡ κατασκευὴ ταύτης προκύπτει, ἀποκλειστικῶς, ἐκ τῶν δοθέντων στοιχείων (κάθετος ἐπὶ τὴν γνωστὴν εὐθεῖαν ΟΑ′ κατὰ τὸ γνωστὸν σημεῖον Α′ αὐτῆς).

Ἐξ ἄλλου, ἂν εἶναι Ω τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν εὐθειῶν α καὶ α′, ἡ γωνία τούτων (α,α′) εἶναι ἴση (100) πρὸς τὴν γωνίαν (ΟΑ, ΟΑ′) ἤτοι πρὸς τὴν γωνίαν φ τῆς στροφῆς.

Ἐξ ἄλλου ἂν εἶναι Μ′ ἕνα τυχὸν σημεῖον τῆς εὐθείας α′, εὑρεθείσης κατὰ τὰ ἀνωτέρω, ὑπάρχει σημεῖον Μ τῆς α καὶ ἕνα μόνον, ὥστε τὸ ὁμόλογον αὐτοῦ, κατὰ τὴν ἀνωτέρω στροφήν, νὰ εἶναι τὸ σημεῖον τοῦτο Μ′.



Σχ. 167

Πράγματι, ἔστω ΟΜ (Μ ἐπὶ τῆς α) ἡ ἡμιευθεῖα διὰ τὴν ὁποίαν εἶναι : (ΟΑ, ΟΜ) = (ΟΑ′, ΟΜ′). Ἐκ τῶν ἴσων ὀρθογωνίων τριγώνων ΟΑΜ καὶ ΟΑ′Μ′ ἕπεται (121) ὅτι ΟΜ′ = ΟΜ. Ἐξ ἄλλου (ΟΜ, ΟΜ′) = (ΟΑ, ΟΑ′) = φ.

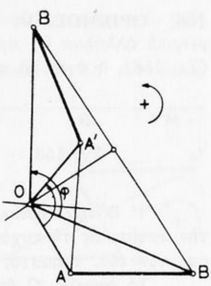
Ἑπομένως τὸ θεωρηθὲν τυχὸν σημεῖον Μ τῆς α′ εἶναι ὁμόλογον τοῦ ὡς ἄνω σημείου Μ τῆς α, κατὰ τὴν στροφὴν **R**(Ο, φ).

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ. *1. Τὸ ὁμόλογον εὐθ. τμήματος ΑΒ κατὰ μίαν στροφὴν* **R** *(Ο, φ) εἶναι εὐθ. τμῆμα Α′Β′ ἴσον πρὸς τὸ ΑΒ.*

Πράγματι, ἡ ἰσότης τῶν εὐθ. τμημάτων ΑΒ καὶ Α′Β′ προκύπτει ἐκ τῆς ἰσότητος (79) τῶν τριγώνων ΟΑΒ καὶ ΟΑ′Β′ τῶν ὁποίων εἶναι ἴσαι αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ κατὰ τὰ ζεύγη ΟΑ, ΟΑ′ καὶ ΟΒ, ΟΒ′ καὶ αἱ περιεχόμεναι ἀντιστοίχως ὁμόλογοι γωνίαι (ΟΑ, ΟΒ) καὶ (ΟΑ′, ΟΒ′) (Σχ. 167.1).

Σημειοῦμεν ὅτι ἐκ τῶν ΟΑ = ΟΑ′ καὶ ΟΒ = ΟΒ′ ἕπεται ὅτι τὸ κέντρον Ο τῆς στροφῆς, κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ Α′Β′ εἶναι τὸ ὁμόλογον τοῦ ΑΒ, εἶναι τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν μεσοκαθέτων τῶν εὐθ. τμημάτων ΑΑ′ καὶ ΒΒ′. Ἐξ ἄλλου :

Οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι δύο ἴσα εὐθ. τμήματα ΑΒ καὶ Α′Β′ τοῦ ἐπιπέδου, ὑπάρχει στροφὴ **R***(Ο,φ) κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ τυχὸν ἐκ τούτων εἶναι ὁμόλογον τοῦ ἄλλου, ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ὅτι τὰ ζεύγη (Α,Α′) καὶ (Β,Β′) εἶναι ζεύγη ὁμολόγων σημείων κατὰ τὴν στροφὴν ταύτην.*



Σχ. 167.1

Πράγματι, τὸ κέντρον Ο τῆς στροφῆς ταύτης εἶναι, ὡς ἐσημειώσαμεν, τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν μεσοκαθέτων τῶν εὐθ. τμημάτων ΑΑ′ καὶ ΒΒ′. Ἡ γωνία τῆς στροφῆς εἶναι ἡ γωνία (ΟΑ, ΟΑ′) ἢ (ΟΒ,ΟΒ′). Ἡ ἰσότης τῶν γωνιῶν τούτων προκύπτει ἐκ τῶν τριγώνων ΟΑΒ καὶ ΟΑ′Β′, τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἀντιστοίχως ἴσας (91).

2. Τὸ ὁμόλογον δοθείσης γωνίας (ΩΑ, ΩΒ) κατὰ μίαν οἱανδήποτε δοθεῖσαν στροφὴν **R***, εἶναι γωνία (Ω′Α′, Ω′Β′) ἴση πρὸς τὴν (ΩΑ, ΩΒ).* (Σχ. 167.2).

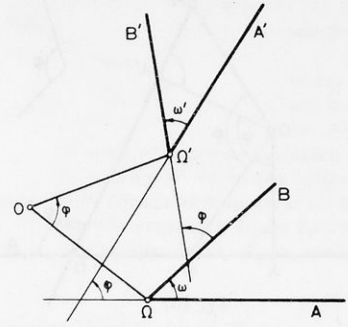
Παρατηροῦμεν ὅτι, ὡς ἐκ τοῦ πορίσματος τούτου καὶ τοῦ προηγουμένου προκύπτει, **διατηροῦνται,** ὡς δυνάμεθα νὰ λέγωμεν, κατὰ τὴν στροφὴν τὰ εὐθ. τμήματα καὶ αἱ γωνίαι.

Ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ταύτην, ἡ στροφὴ εἶναι, μία **ἰσότης** (1).

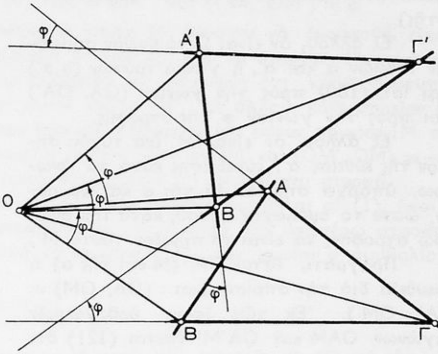
---

(1) Ἡ παρατήρησις αὕτη ἔχει μεγάλην σπουδαιότητα ἀπὸ τῆς ἀπόψεως ὅτι διὰ ταύτης παρέχεται ἡ γεωμετρικὴ ἑρμηνεία τῆς ἐννοίας τῆς μετακινήσεως, βασιζομένης ἤδη εἰς τὴν ἔννοιαν τῆς ἀπεικονίσεως (ἀντιστοιχίας). Ὡς ἐκ τῶν συνθηκῶν βάσει τῶν ὁποίων ὁρίζεται ἡ ἀνωτέρω ἀπεικόνισις (στροφὴ) προκύπτει, ἡ ἔννοια ταύτης ἐβασίσθη ἀποκλειστικῶς εἰς τὰ ἀξιώματα τῆς ἰσότητος.

3. Τὸ ὁμόλογον τριγώνου ΑΒΓ, κατὰ οἱανδήποτε στροφὴν **R** *(Ο, φ), εἶναι τρίγωνον ἴσον πρὸς τὸ θεωρούμενον* (Σχ. 167.3).



Σχ. 167.2

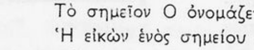


Σχ. 167.3

Ὡς ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει, τὰ ὁμόλογα τῶν ἁπλῶν γεωμ. σχημάτων εὑρέθησαν ὡς γεωμ. τόποι σημείων ἱκανοποιούντων δοθείσας συνθήκας ἀναφερομένας εἰς τὰ σημεῖα τῶν σχημάτων τούτων. Ἡ τοιαύτη θεώρησις ἀνταποκρίνεται, ὡς θέλομεν ἴδει, εἰς τὴν μεθοδικὴν ἐπίλυσιν τῶν προβλημάτων τῶν γεωμετρικῶν κατασκευῶν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου.

ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΩΣ ΠΡΟΣ ΣΗΜΕΙΟΝ

168. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ὡς ἐσημειώσαμεν ἤδη (28), δύο σημεῖα Μ καὶ Μ′ ὀνομάζονται συμμετρικὰ ἀλλήλων ὡς πρὸς σημεῖον Ο, ὅταν τοῦτο εἶναι τὸ μέσον τοῦ εὐθ. τμήματος ΜΜ′ (Σχ. 168), ἢ ὅταν τὰ σημεῖα ταῦτα Μ καὶ Μ′ ταυτίζωνται πρὸς τὸ Ο.



Σχ. 168

Ἔστω Ο ἕνα δοθὲν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου. Παρατηροῦμεν ὅτι οἱονδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἕνα σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου ὑπάρχει σημεῖον Μ′, καὶ ἕνα μόνον, ὥστε τὸ Ο νὰ εἶναι τὸ μέσον τοῦ εὐθ. τμήματος ΜΜ′. Ἂν τὸ σημεῖον Μ ὀνομασθῇ **πρότυπον**, τὸ Μ′ θὰ ὀνομασθῇ **εἰκὼν** τοῦ Μ.

Ἡ ἐκ τοῦ σημείου Ο ὁριζομένη ἀντιστοιχία μεταξὺ τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου, κατὰ τὴν ὁποίαν εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον Μ αὐτοῦ ἀντιστοιχεῖ τὸ Μ′ ὥστε τὸ Ο νὰ εἶναι τὸ μέσον τοῦ εὐθ. τμήματος ΜΜ′ ὀνομάζεται **συμμετρία** ὡς πρὸς τὸ Ο.

Τὸ σημεῖον Ο ὀνομάζεται **κέντρον τῆς συμμετρίας**.

Ἡ εἰκὼν ἑνὸς σημείου Μ τοῦ ἐπιπέδου κατὰ τὴν συμμετρίαν τὴν ὁριζομένην ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο, ἤτοι τὸ συμμετρικὸν Μ′ τοῦ Μ ὡς πρὸς τὸ Ο, δύναται νὰ ὀνομάζεται καὶ **ὁμόλογον** τοῦ Μ κατὰ τὴν συμμετρίαν τὴν ἔχουσαν κέντρον τὸ Ο.

Ἂν συμβολίσωμεν μὲ τὸ σύμβολον **Σ** (Ο) τὴν ὡς πρὸς τὸ Ο συμμετρίαν καὶ μὲ τὸ Μ′ τὸ ὁμόλογον τοῦ σημείου Μ κατὰ τὴν συμμετρίαν αὐτήν, θὰ σημειοῦμεν :

$$M \xrightarrow{\Sigma\,(O)} M'$$

Σημειοῦμεν ὅτι :

1. Ἂν τὸ ὁμόλογον Μ′ τοῦ Μ κατὰ τὴν συμμετρίαν **Σ**(Ο) θεωρηθῇ ὡς πρότυπον, τότε ἡ εἰκὼν αὐτοῦ, κατὰ τὴν **Σ** (Ο), εἶναι τὸ Μ. Δυνάμεθα ἑπομένως νὰ σημειώσωμεν :

$$M \xrightarrow{\Sigma} M' \Leftrightarrow M' \xrightarrow{\Sigma} M.$$

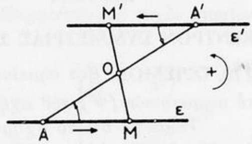
Τοῦτο δὲν ἰσχύει, ὡς ἐσημειώσαμεν κατὰ τὴν στροφὴν **R** (Ο, φ), τῆς ὁποίας ἡ γωνία φ εἶναι διάφορος τῆς εὐθείας γωνίας π.

2. Ἡ συμμετρία ὡς πρὸς σημεῖον Ο, λεγομένη καὶ **κεντρικὴ συμμετρία,** εἶναι μία μερικὴ περίπτωσις τῆς στροφῆς : ἐκείνη κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ γωνία τῆς στροφῆς εἶναι ἴση πρὸς τὴν εὐθεῖαν γωνίαν π.

Ὀνομάζομεν **ὁμόλογον** ἑνὸς σχήματος (Φ), κατὰ μίαν κεντρικὴν συμμετρίαν, τὸν γεωμ. τόπον (Φ′) τῶν ὁμολόγων (συμμετρικῶν) τῶν σημείων τοῦ σχήματος (Φ), κατὰ τὴν συμμετρίαν αὐτήν. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι :

169. ΘΕΩΡΗΜΑ· Τὸ συμμετρικὸν δοθείσης εὐθείας ε ὡς πρὸς σημεῖον Ο, εἶναι εὐθεῖα ε′ παράλληλος πρὸς τὴν ε.

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν Α καὶ Μ ἕνα δοθὲν καὶ ἕνα τυχὸν σημεῖον τῆς ε καὶ Α′ καὶ Μ′ τὰ συμμετρικὰ αὐτῶν ὡς πρὸς τὸ Ο ἀντιστοίχως (Σχ. 169). Ἐκ τῶν ἴσων τριγώνων ΟΑΜ καὶ ΟΑ′Μ′ (78), ἕπεται ὅτι αἱ γωνίαι (ΑΜ,ΑΟ) καὶ (Α′Μ′,Α′Ο) εἶναι ἴσαι καὶ ἑπομένως ὅτι ἡ εὐθεῖα Α′Μ′ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ε. Ἡ εὐθεῖα αὐτὴ Α′Μ′ εἶναι γνωστὴ εὐθεῖα, ὡς διερχομένη διὰ τοῦ γνωστοῦ σημείου Α καὶ παράλληλος πρὸς τὴν ε. Ἔστω ε′ ἡ εὐθεῖα αὐτή.



Σχ. 169

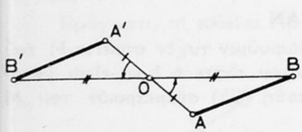
Παρατηροῦμεν ὅτι, τὸ συμμετρικὸν τῆς εὐθείας ε′ ὡς πρὸς τὸ Ο εἶναι ἡ εὐθεῖα ε.

Αἱ εὐθεῖαι ε καὶ ε′ ὀνομάζονται **συμμετρικαὶ ἀλλήλων** ὡς πρὸς τὸ Ο.

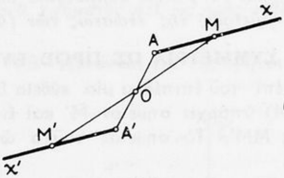
Ἂν ἡ εὐθεῖα ε διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Ο, ἡ συμμετρικὴ ε′ αὐτῆς, ὡς πρὸς τὸ Ο, συμπίπτει μὲ τὴν ε. Πράγματι, τὸ σημεῖον Ο συμπίπτει μὲ τὸ συμμετρικόν του [1], καὶ τὸ συμμετρικὸν τοῦ τυχόντος σημείου Μ τῆς ε εἶναι σημεῖον τῆς ε.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ. *1 Τὸ συμμετρικὸν εὐθ. τμήματος ΑΒ, ὡς πρὸς σημεῖον Ο, εἶναι εὐθ. τμῆμα Α′Β′ ἴσον πρὸς τὸ ΑΒ* (Σχ. 169.1)

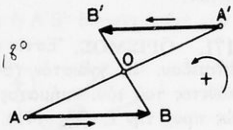
2. Τὸ συμμετρικὸν ἡμιευθείας ΑΧ, ὡς πρὸς σημεῖον Ο, εἶναι ἡμιευθεῖα Α′Χ ἀντίρροπος τῆς ΑΧ



Σχ. 169.1



Σχ. 169.2



Σχ. 169.3

Αἱ ἡμιευθεῖαι ΑΧ καὶ Α′Χ′ κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς εὐθείας ΑΑ′, ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπὸ τὰ ἀρχικὰ σημεῖα Α τῶν Α′ αὐτῶν (Σχ. 169.2).

3. Τὸ συμμετρικὸν διανύσματος $\overrightarrow{AB}$, ὡς πρὸς σημεῖον Ο, εἶναι διάνυσμα $\overrightarrow{A'B'}$ ἀντίθετον τοῦ $\overrightarrow{AB}$

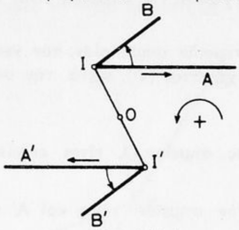
Τὰ τελικὰ σημεῖα τῶν $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'}$ κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς εὐθείας ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπὸ τὰ ἀρχικὰ σημεῖα των. (Σχ. 169.3).

4. Τὸ συμμετρικὸν γωνίας (ΙΑ, ΙΒ) εἶναι γωνία (Ι′Α′, Ι′Β′) ἴση πρὸς τὴν θεωρουμένην (Σχ. 169.4).

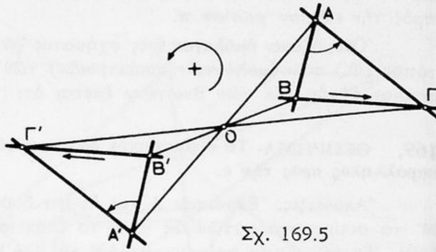
(1) Τὸ Ο εἶναι τὸ μόνον σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τὸ ὁποῖον συμπίπτει μὲ τὸ συμμετρικόν του.

5. Τὸ συμμετρικὸν τριγώνου ΑΒΓ εἶναι τρίγωνον Α'Β'Γ' ὁμορρόπως ἴσον πρὸς τὸ ΑΒΓ

Πράγματι, αἱ πλευραὶ καὶ αἱ γωνίαι τῶν τριγώνων εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι. (Σχ. 169.5)



Σχ. 169.4



Σχ. 169.5

ΚΕΝΤΡΟΝ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ ΣΧΗΜΑΤΟΣ

170. ΟΡΙΣΜΟΣ *Ἕνα σημεῖον Ο ὀνομάζεται* **κέντρον συμμετρίας** *ἑνὸς σχήματος (Φ) ὅταν τὸ συμμετρικὸν (Φ') τοῦ σχήματος (Φ), ὡς πρὸς τὸ Ο, συμπίπτει μὲ τὸ (Φ).*

Λέγοντες ὅτι τὸ σχῆμα (Φ) **δέχεται** ἕνα σημεῖον Ο ὡς κέντρον συμμετρίας, ἐννοοῦμεν ἀκριβῶς ὅτι τὸ (Φ) συμπίπτει μὲ τὸ συμμετρικόν του (Φ') ὡς πρὸς τὸ Ο.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ ἕπεται ὅτι :

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ. *1. Τὸ μέσον Ο ἑνὸς εὐθ. τμήματος ΑΒ εἶναι κέντρον συμμετρίας αὐτοῦ.*

2. Κάθε σημεῖον μιᾶς εὐθείας ε εἶναι κέντρον συμμετρίας αὐτῆς.

3. Τὸ κοινὸν σημεῖον Ο δύο τεμνομένων εὐθειῶν ε καὶ ε' εἶναι κέντρον συμμετρίας τοῦ ὑπὸ τούτων ἀποτελουμένου σχήματος.

4. Κάθε σημεῖον τῆς μεσοπαραλλήλου (160) δύο παραλλήλων εὐθειῶν ε καὶ ε', εἶναι κέντρον συμμετρίας τοῦ ὑπὸ τούτων ἀποτελουμένου σχήματος, ἤτοι τῆς ἑνώσεως τῶν ε καὶ ε'. Γενικώτερον :

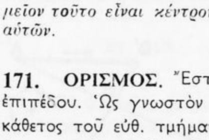
5. Ἂν δύο σχήματα (Φ) καὶ (Φ') ἔχουν ἕνα κοινὸν κέντρον συμμετρίας, τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι κέντρον συμμετρίας τῆς ἑνώσεως τῶν (Φ) καὶ (Φ'), ὡς καὶ τῆς τομῆς αὐτῶν, καί

Ἂν δύο σχήματα (Φ) καὶ (Φ') εἶναι συμμετρικὰ ἀλλήλων, ὡς πρὸς σημεῖον Ο, τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι κέντρον συμμετρίας τῆς ἑνώσεως τῶν (Φ) καὶ (Φ') καθὼς καὶ τῆς τομῆς αὐτῶν.

ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΩΣ ΠΡΟΣ ΕΥΘΕΙΑΝ

171. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἔστω ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου μία εὐθεῖα ξ. Θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου. Ὡς γνωστὸν (84) ὑπάρχει σημεῖον Μ' καὶ ἕνα μόνον ὥστε ἡ ξ νὰ εἶναι μεσοκάθετος τοῦ εὐθ. τμήματος ΜΜ'. Τὸ σημεῖον τοῦτο ὠνομάσθη (85) **συμμετρικὸν** τοῦ Μ ὡς πρὸς τὴν ξ. (Σχ. 171).

Ἡ μεταξὺ τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου ὁριζομένη, ἐκ τῆς εἰς τὴν εὐθεῖαν ξ ἀναφερομένης ὡς ἄνω συνθήκης, ἀντιστοιχία ὀνομάζεται **συμμετρία ὡς πρὸς εὐθεῖαν.**



Σχ. 171

Ἂν τὴν ἀνωτέρω συμμετρίαν συμβολίσωμεν μὲ τὸ σύμβολον Σ(ξ), καὶ εἶναι Μ' τὸ ἀντίστοιχον (εἰκὼν) ἑνὸς σημείου Μ τοῦ ἐπιπέδου, κατὰ ταύτην, θὰ σημειοῦμεν :

$$M \xrightarrow{\Sigma(\xi)} M'$$

Τὸ σημεῖον Μ' δύναται νὰ ὀνομάζεται καὶ ὁμόλογον τοῦ Μ κατὰ τὴν συμμετρίαν Σ(ξ).

Παρατηροῦμεν ὅτι :

Ἂν $M \xrightarrow{\Sigma(\xi)} M'$, τότε θὰ εἶναι : $M' \xrightarrow{\Sigma(\xi)} M$

Ὥστε, κατὰ τὴν συμμετρίαν Σ (ξ) τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ' ἀντιστοιχοῦν, ὅπως δυνάμεθα νὰ λέγωμεν, **διττῶς** πρὸς ἄλληλα.

Τοῦτο ἰσχύει, ὡς ἐσημειώσαμεν ἤδη, καὶ εἰς τὴν συμμετρίαν **Σ** (Ο) ὡς πρὸς σημεῖον Ο, δὲν ἰσχύει ὅμως, ἐν γένει, εἰς τὴν **μεταφορὰν** καὶ τὴν **στροφήν.**

Ἐξ ἄλλου, τὰ σημεῖα τῆς εὐθείας ξ, ἡ ὁποία ὀνομάζεται καὶ **ἄξων** τῆς συμμετρίας **Σ** (ξ), συμπίπτουν πρὸς τὰ συμμετρικά των, κατὰ τὴν συμμετρίαν αὐτήν. Τὰ σημεῖα τοῦ ἄξονος ξ τῆς συμμετρίας, δύνανται νὰ ὀνομάζονται **διπλᾶ** σημεῖα αὐτῆς.

Ὁμόλογον ἑνὸς σχήματος (Φ) κατὰ μίαν συμμετρίαν **Σ** (ξ), ἢ **συμμετρικὸν** αὐτοῦ ὡς πρὸς εὐθεῖαν ξ, ὀνομάζεται τὸ σύνολον (Φ′) τῶν συμμετρικῶν ὅλων τῶν σημείων τοῦ σχήματος (Φ), ὡς πρὸς αὐτήν.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ὁρισμῶν ἕπεται ὅτι :

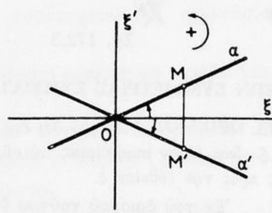
172. ΘΕΩΡΗΜΑ. Τὸ συμμετρικὸν εὐθείας α, ὡς πρὸς εὐθεῖαν ξ, εἶναι εὐθεῖα α′.

Ἀπόδειξις. Ἔστω Ο τὸ κοινὸν σημεῖον τῆς α μὲ τὴν ξ. Θεωροῦμεν ἕνα τυχὸν σημεῖον Μ τῆς α καὶ τὸ συμμετρικὸν Μ′ αὐτοῦ ὡς πρὸς τὴν ξ. Ἐπειδὴ ἡ ξ εἶναι ἡ μεσοκάθετος τοῦ εὐθ. τμήματος ΜΜ′, θά, εἶναι (Σχ. 172) : (ΟΣ,ΟΜ′) = −(ΟΣ, ΟΜ)

Ἡ εὐθεῖα ΟΜ′ εἶναι εὐθεῖα γνωστὴ διότι διέρχεται διὰ τοῦ Ο καὶ σχηματίζει μὲ τὴν εὐθεῖαν ξ γωνίαν ἀντίθετον τῆς γωνίας τῶν ξ καὶ α.

Ἡ εὐθεῖα ξ εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς μιᾶς ἐκ τῶν γωνιῶν τῶν α καὶ α′.

Ἡ α′ εἶναι συμμετρικὴ τῆς α καὶ ὡς πρὸς τὴν κάθετον ξ′ ἐπὶ τὴν ξ εἰς τὸ σημεῖον Ο. Παρατηροῦμεν ὅτι, τὸ συμμετρικὸν τῆς εὐθείας α′ ὡς πρὸς τὴν ξ εἶναι ἡ εὐθεῖα α.



Σχ. 172.

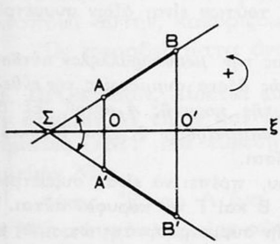
Αἱ εὐθεῖαι α καὶ α′ ὀνομάζονται **συμμετρικαὶ ἀλλήλων** ὡς πρὸς τὴν ξ.

Τὸ κοινὸν σημεῖον Ο τῶν α καὶ α′, τὸ ὁποῖον εἶναι σημεῖον τῆς ξ, συμπίπτει μὲ τὸ συμμετρικόν του ὡς πρὸς τὴν ξ.

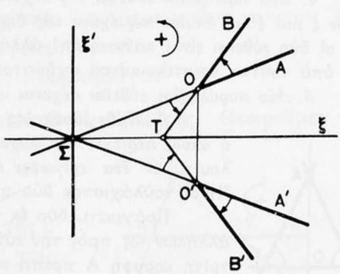
Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι :

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ. *1. Τὸ συμμετρικὸν εὐθ. τμήματος ΑΒ, ὡς πρὸς εὐθεῖαν, εἶναι εὐθ. τμῆμα Α′Β′, ἴσον πρὸς τὸ ΑΒ*

Πράγματι, αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ Α′Β′ τέμνονται ἐπὶ τῆς ξ, ἤτοι ἡ Α′Β′ διέρχεται διὰ τοῦ



Σχ. 172.1



Σχ. 172.2

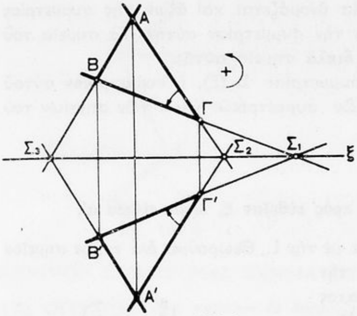
κοινοῦ σημείου Σ τῶν ΑΒ καὶ ε. Ἐκ τῶν ΣΒ = ΣΒ′ καὶ ΣΑ = ΣΑ′ ἕπεται ὅτι ΑΒ = Α′Β′ (Σχ. 172.1).

2. Τὸ συμμετρικὸν γωνίας (ΟΑ, ΟΒ) εἶναι γωνία (Ο′Α′, Ο′Β′) ἀντίθετος τῆς θεωρουμένης (ΟΑ, ΟΒ)

Πράγματι, ἐκ τῶν ἀντιρρόπως, ἴσων τριγώνων ΟΣΤ καὶ Ο'ΣΤ ἔχομεν (Σχ. 172.2):

(ΟΣ,ΟΤ) = – (Ο'Σ,Ο'Τ) καὶ ἐπομένως

(ΟΑ,ΟΒ) = –(Ο'Α',Ο'Β') (1)



Σχ. 172.3

3. Τὸ συμμετρικὸν τριγώνου ΑΒΓ, εἶναι τρίγωνον Α'Β'Γ' ἀντιρόπως ἴσον πρὸς τὸ θεωρούμενον τρίγωνον ΑΒΓ'

Πράγματι, αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ τῶν τριγώνων τούτων εἶναι (172, πόρισμα 1) ἴσαι καὶ αἱ ὁμόλογοι γωνίαι (172, πόρισμα 2) ἀντίθετοι (Σχ. 172.3).

Σημειοῦμεν ὅτι :

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω πορισμάτων προκύπτει ὅτι ἡ συμμετρία ὡς πρὸς εὐθεῖαν ξ εἶναι, ὅπως δυνάμεθα νὰ λέγωμεν, μία **ἀντίρροπος ἰσότης**.

ΑΞΩΝ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ ΣΧΗΜΑΤΟΣ

173. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Λέγομεν ὅτι ἕνα σχῆμα (Φ) δέχεται τὴν εὐθεῖαν ξ ὡς ἄξονα συμμετρίας, ἢ ὅτι ἡ ξ εἶναι* **ἄξων συμμετρίας** *αὐτοῦ, ὅταν τὸ σχῆμα τοῦτο συμπίπτῃ μὲ τὸ συμμετρικόν του (Φ') ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ξ.*

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου ἕπεται ὅτι :

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ. *1. Κάθε εὐθεῖα ε δέχεται ὡς ἄξονα συμμετρίας :*

(α) Αὐτὴν τὴν ε. (β) Κάθε εὐθεῖαν ξ κάθετον ἐπ' αὐτήν.

Δέχεται, ἐπομένως, ἀπείρους ἄξονας συμμετρίας.

2. Κάθε εὐθ. τμῆμα δέχεται ὡς ἄξονα συμμετρίας:

(α) Τὴν εὐθεῖαν ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται. (β) Τὴν μεσοκάθετον ξ ***αὐτοῦ.***

Δὲν ὑπάρχουν ἄλλοι ἄξονες συμμετρίας, διότι λόγῳ τῆς ἰσότητος τῶν συμμετρικῶν εὐθ. τμημάτων, δύο περιπτώσεις εἶναι δυναταί: Ἢ τὰ ἄκρα αὐτῶν συμπίπτουν μὲ τὰ συμμετρικά των, ἢ εἶναι συμμετρικὰ ἀλλήλων.

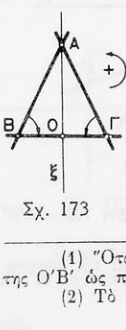
3. Κάθε γωνία δέχεται ὡς ἄξονα συμμετρίας τὴν εὐθεῖαν ἡ ὁποία περιέχει τὴν διχοτόμον της.

4. Δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι (2) δέχονται ὡς ἄξονα συμμετρίας ἑκάστην ἐκ τῶν δύο εὐθειῶν ξ καὶ ξ' αἱ ὁποῖαι περιέχουν τὰς διχοτόμους τῶν ὑπό τούτων ὁριζομένων γωνιῶν.

Ἂν αἱ δύο εὐθεῖαι εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας, τότε ἑκάστη τούτων εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ ὑπὸ τούτων ἀποτελουμένου σχήματος.

5. Δύο παράλληλοι εὐθεῖαι δέχεται ως ἄξονα συμμετρίας τὴν μεσοπαράλληλον αὐτῶν.

6. Κάθε ἰσοσκελὲς τρίγωνον δέχεται ὡς ἄξονα συμμετρίας τὴν εὐθεῖαν ἡ ὁποία περιέχει τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς Α αὐτοῦ. Ἐξ ἄλλου : *Ἂν ἕνα τρίγωνον δέχεται ἕνα ἄξονα σαμμετρίας, ξ, εἶναι ἰσοσκελές.* Ἤτοι τοὐλάχιστον δύο πλευραί του εἶναι ἴσαι.



Σχ. 173

Πράγματι, δύο ἐκ τῶν κορυφῶν του, πρέπει νὰ εἶναι συμμετρικαὶ ἀλλήλων ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ξ. Ἔστωσαν Β καὶ Γ αἱ κορυφαὶ αὗται. Ἡ τρίτη κορυφὴ Α πρέπει νὰ συμπίπτῃ μὲ τὴν συμμετρικήν της ὡς πρὸς τὴν ξ, ἤτοι πρέπει νὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος συμμετρίας ξ. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι ΑΒ = ΑΓ (172, πόρισμα 1).

7. Κάθε ἰσόπλευρον τρίγωνον δέχεται τρεῖς ἄξονας συμμετρίας..

---

(1) Ὅταν ἡ ἡμιευθεῖα ΟΒ στρέφεται περὶ τὸ Ο κατὰ τὴν θετικὴν φοράν, ἡ συμμετρική της Ο'Β' ὡς πρὸς τὴν ξ, στρέφεται περὶ τὸ συμμετρικὸν Ο' τοῦ Ο κατὰ τὴν ἀρνητικὴν φοράν.

(2) Τὸ ὑπὸ τούτων ἀποτελούμενον σχῆμα.

Ἐξ ἄλλου: *Ἂν ἕνα τρίγωνον δέχεται δύο ἄξονας συμμετρίας, εἶναι ἰσόπλευρον.*

Ἑπομένως δέχεται καὶ ἕνα τρίτον ἄξονα συμμετρίας.

Γενικώτερον :

8. *Ἂν δύο σχήματα (Φ) καὶ (Φ') εἶναι συμμετρικὰ ἀλλήλων ὡς πρὸς μίαν εὐθεῖαν ξ, ὅτε ἡ ἕνωσις αὐτῶν ὡς καὶ ἡ τομὴ των, δέχονται τὴν ξ ὡς ἄξονα συμμετρίας,* καὶ

Ἂν δύο σχήματα (Φ) καὶ (Φ') δέχωνται κοινὸν ἄξονα συμμετρίας, μίαν εὐθεῖαν ξ, τότε ξ εἶναι ἄξων συμμετρίας τῆς ἑνώσεως καὶ τῆς τομῆς αὐτῶν

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΟΥ ΓΕΩΜ. ΤΟΠΟΥ — ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΙ ΣΥΝΘΗΚΑΙ

174. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἡ πρότασις τοῦ γεωμ. τόπου δύναται νὰ διατυποῦται ὑπὸ μορφὴν προβλήματος. Οὕτω ἀντὶ τοῦ θεωρήματος (159) θὰ ἔχωμεν τὸ πρόβλημα :

Δίδονται εἰς τὸ ἐπίπεδον δύο σημεῖα Α καὶ Β. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου ἑκάστου τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τῶν Α καὶ Β εἶναι ἴσαι.

Τὸ πρόβλημα τοῦτο θεωρεῖται ἐπιλυθέν, ἂν ἐποδειχθοῦν αἱ προτάσεις (1) καὶ (2) τοῦ θεωρήματος (159).

Γενικώτερον, ὅταν ἡ πρότασις τοῦ γεωμ. τόπου διατυποῦται ὡς πρόβλημα, διὰ τὴν ἐπίλυσιν αὐτοῦ :

1. Θεωροῦμεν, ἂν πρόκειται περὶ γεωμ. τόπου σημείων, ἕνα σημεῖον Μ περὶ τοῦ ὁποίου ὑποθέτομεν ὅτι ἱκανοποιεῖ τὴν δοθεῖσαν συνθήκην (Σ) καὶ ἀποδεικνύομεν ὅτι τοῦτο εἶναι σημεῖον **γνωστοῦ**(1) σχήματος.

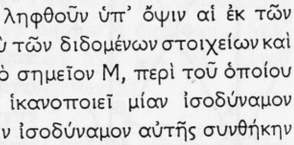
Διὰ τὴν κατὰ τ' ἀνωτέρω ἀπόδειξιν δέον νὰ ληφθοῦν ὑπ' ὄψιν αἱ ἐκ τῶν σχετικῶν θεωρημάτων προκύπτουσαι σχέσεις, μεταξὺ τῶν διδομένων στοιχείων καὶ τοῦ σημείου Μ. Βάσει τούτων θὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ σημεῖον Μ, περὶ τοῦ ὁποίου ὑπετέθη ὅτι ἱκανοποιεῖ τὴν δοθεῖσαν συνθήκην (Σ), ἱκανοποιεῖ μίαν ἰσοδύναμον αὐτῆς συνθήκην (Σ_1) καὶ λόγῳ τούτου, μίαν ἄλλην ἰσοδύναμον αὐτῆς συνθήκην (Σ_2) κ.ο.κ. μέχρι μιᾶς θεμελιώδους συνθήκης (Σ_ν), εἰς τὴν ὁποίαν ἀντιστοιχεῖ ἕνα γνωστὸν γεωμετρικὸν σχῆμα.

Αἱ ἀνωτέρω συνθῆκαι (Σ_1), (Σ_2) . . ,(Σ_ν) ὀνομάζονται **ἰσοδύναμοι** συνθῆκαι

2. Ἐξετάζομεν, ἂν ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ εὑρεθέντος σχήματος ἱκανοποιοῦν τὴν δοθεῖσαν συνθήκην (Σ), ἤ, ἂν λόγῳ ταύτης, ἕνα ὑποσύνολον τούτου δὲν ἱκανοποιεῖ αὐτήν, καθοριζομένου οὕτω τοῦ γεωμ. τόπου.

Ὡς παραδείγματα ἀναφέρομεν τὰ ἑξῆς προβλήματα:

175. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Δίδεται εὐθεῖα ε καὶ σημεῖον Ο ἐκτὸς αὐτῆς. Θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον Μ τῆς ε καὶ τὸ μέσον Μ' τοῦ εὐθ. τμήματος ΟΜ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Μ'.



Σχ. 175

Λύσις. Ἔστω Α ἕνα δοθὲν σημεῖον τῆς ε καὶ Μ ἕνα τυχὸν σημεῖον αὐτῆς. Τὸ μέσον Α' τοῦ εὐθ. τμήματος ΟΑ εἶναι ἕνα γνωστὸν σημεῖον τοῦ γεωμ. τόπου καὶ τὸ μέσον Μ' τοῦ ΟΜ ἕνα τυχὸν σημεῖον αὐτοῦ. Ἐκ τοῦ τριγώνου ΟΑΜ

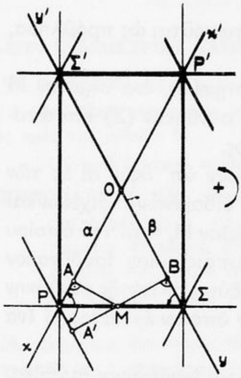
(1) Ἡ ὕπαρξις τοῦ ὁποίου, καὶ ἑπομένως ἡ κατασκευὴ αὐτοῦ, προκύπτουν ἀποκλειστικῶς ἐκ τῶν δοθέντων στοιχείων, εἰς τὰ ὁποῖα ἀναφέρεται ἡ δοθεῖσα συνθήκη.

προκύπτει ὅτι ἡ $A'M'$ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ε (126, Πόρισμα), ἤτο ὅτι ἡ $A'M'$, ἤ ε', εἶναι γνωστὴ εὐθεῖα (95).

Ἐξ ἄλλου κάθε σημεῖον M' τῆς ε' ἱκανοποιεῖ τὴν δοθεῖσαν συνθήκην, διότ ἂν εἶναι M τὸ κοινὸν σημεῖον τῆς ε καὶ τῆς AM', τὸ M' εἶναι τὸ μέσον τοῦ εὐθ. τμήματος AM (126, Πόρισμα).

176. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Δίδονται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι α καὶ β τῶν ὁποίων ἔστω Ο τὸ κοινὸν σημεῖον. Ὀνομάζομεν Μ κάθε σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ὁποίου αἱ ἀποστάσεις ΜΑ καὶ ΜΒ ἀπὸ τῶν α καὶ β ἀντιστοίχως, ἔχουν δοθὲν ἄθροισμα λ (λ δοθὲν εὐθ. τμῆμα). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημεων Μ.

Λύσις. Ἔστω Μ ἕνα σημεῖον περὶ τοῦ ὁποίου ὑποθέτομεν ὅτι ἀνήκει εἰς τὸν ζητούμενον γεωμ. τόπον, ἤτοι ὅτι ἱκανοποιεῖ τὴν συνθήκην (1) : $MA + MB = \lambda$.



Σχ. 176.1

Ἔστω ὅτι τὸ Μ εἶναι ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας (ΟΧ,ΟΥ) ἐκ τῶν ὁριζομένων ἀπὸ τὰς α καὶ β.

Θεωροῦμεν ἐπὶ τῆς ΜΒ καὶ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Μ πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται τὸ Β, τὸ σημεῖον Α' ὥστε $MA' = MA$. Θὰ εἶναι :

$MA' + MB = MA + MB = \lambda$, ἤτοι $A'B = \lambda$. Ἐκ τούτων ἕπεται (161) ὅτι τὸ Α' εἶναι σημεῖον γνωστῆς εὐθείας : τῆς παραλλήλου β' πρὸς τὴν β τῆς ἐπεχούσης ἀπὸ αὐτῆς τὴν δοθεῖσαν ἀπόστασιν λ. Ἔστω Ρ τὸ κοινὸν σημεῖον τῆς παραλλήλου ταύτης μὲ τὴν α, καὶ Σ τὸ κοινὸν σημεῖον τῆς ΡΜ μὲ τὴν β.

Ἐκ τῶν ἀντιρρόπως ἴσων ὀρθογωνίων τριγώνων ΜΑΡ καὶ ΜΑ'Ρ (124, Πόρισμα), ἔχομεν ὅτι :

$(PM,PA) = -(PM,PA')$.

Ἐξ ἄλλου εἶναι καὶ (96) : $(\Sigma B,\Sigma M) = -(PM,PA')$.

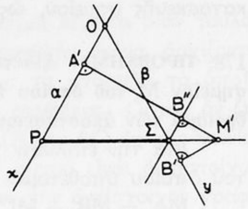
Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι $(PM,PA) = (\Sigma B,\Sigma M)$ ἤτοι : $(P\Sigma,PO) = (\Sigma O,\Sigma P)$, καὶ ἐξ αὐτῆς ὅτι $O\Sigma = OP$ (90), ἤτοι ὅτι τὸ τρίγωνον ΟΡΣ εἶναι ἰσοσκελές.

Ἡ ἀπόστασις ἑπομένως τοῦ Ρ ἀπὸ τῆς β εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀπόστασιν τοῦ Σ ἀπὸ τῆς α. Ὥστε τὸ Σ κεῖται ἐπὶ γνωστῆς παραλλήλου πρὸς τὴν α, ἀπεχούσης ἀπὸ αὐτῆς τὴν ἀπόστασιν λ. Εἶναι, λόγῳ τούτου, γνωστὸν σημεῖον, ὡς κοινὸν σημεῖον δύο γνωστῶν εὐθειῶν.

Οὕτως ἀπεδείχθη ὅτι τὸ σημεῖον Μ εἶναι σημεῖον τῆς γνωστῆς εὐθείας ΡΣ. Ἂν τὸ σημεῖον Μ θεωρηθῇ ἐσωτερικὸν τῆς κατὰ κορυφὴν (ΟΧ',ΟΥ') τῆς (ΟΧ,ΟΥ), θὰ εἶναι, δι' ὅμοιον λόγον, σημεῖον τῆς εὐθείας Ρ'Σ', ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπὸ τὰ συμμετρικὰ Ρ' καὶ Σ' τῶν Ρ καὶ Σ ἀντιστοίχως, ὡς πρὸς τὸ Ο.

Ἂν τέλος θεωρηθῇ ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας (ΟΥ,ΟΧ') ἢ τῆς (ΟΥ', ΟΧ) θὰ εἶναι σημεῖον τῆς εὐθείας ΣΡ' ἢ τῆς Σ'Ρ ἀντιστοίχως.

Κάθε σημεῖον τῶν εὐθειῶν τούτων, τὸ ὁποῖον δὲν εἶναι σημεῖον τοῦ ὀρθογωνίου ΡΣΡ'Σ'[1], δὲν ἱκανοποιεῖ τὴν δοθεῖσαν συνθήκην. Πράγματι, ἂν εἶναι Μ' ἕνα τοιοῦτον σημεῖον (Σχ. 176.2) κείμενον πρὸς τὸ μέρος τοῦ Σ πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται τὸ Ρ, ἡ διαφορὰ τῶν ἀποστάσεων Μ'Α' καὶ Μ'Β' αὐτοῦ ἀπὸ τῶν α καὶ β εἶναι ἴση πρὸς λ. Πράγματι, ἂν εἶναι Β'' τὸ κοινὸν σημεῖον τῆς Μ'Α' μὲ τὴν διὰ τοῦ Σ παράλληλον πρὸς τὴν α, καὶ ἐπομένως κάθετον ἐπὶ τὴν ΜΑ', θὰ εἶναι Μ'Β' = Μ'Β'' (τρίγωνα Μ'ΣΒ' καὶ Μ'ΣΒ'') καὶ ἐπομένως :



Σχ. 176.2

$$M'A' - M'B' = M'A' - M'B'' = A'B'' = \lambda.$$

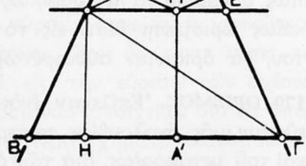
Ἐξ ἄλλου, εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι, κάθε σημείου τοῦ ἀνωτέρω ὀρθογωνίου αἱ ἀποστάσεις ΜΑ καὶ ΜΒ ἀπὸ τῶν α καὶ β ἔχουν ἄθροισμα λ.

Ὁ ζητούμενος, ἐπομένως, γεωμ. τόπος εἶναι τὸ σύνολον τῶν σημείων τοῦ ἀνωτέρω ὀρθογωνίου ΡΣΡ'Σ'.

177. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Δίδεται ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ). Ὀνομάζομεν Μ κάθε ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ τοῦ ὁποίου ἡ ἀπόστασις ΜΑ' ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ΜΒ' καὶ ΜΓ' αὐτοῦ ἀπὸ τῶν ΓΑ καὶ ΑΒ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Μ.

Λύσις. Ἔστω Μ (Σχ. 177) ἕνα σημεῖον περὶ τοῦ ὁποίου ὑποθέτομεν ὅτι ἀνήκει εἰς τὸν ζητούμενον γεωμ. τόπον, ἤτοι ἱκανοποιεῖ τὴν συνθήκην : ΜΑ' = ΜΒ' + ΜΓ'.

Θεωροῦμεν τὴν διὰ τοῦ Μ παράλληλον ΔΕ πρὸς τὴν ΒΓ (Δ καὶ Ε σημεῖα τῶν ΑΒ καὶ ΑΓ ἀντιστοίχως) Εἶναι : (1) ΜΒ' + ΜΓ' = ΔΚ, ὅπου ΔΚ ἡ ἀπόστασις τοῦ Δ ἀπὸ τῆς ΓΑ καὶ (2) ΜΑ' = ΔΗ, ὅπου ΔΗ ἡ ἀπόστασις τοῦ Δ ἀπὸ τῆς ΒΓ. Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) ἕπεται ὅτι ΔΚ = ΔΗ καὶ ἐξ αὐτῆς ὅτι τὸ Δ εἶναι σημεῖον τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Γ τοῦ τριγώνου, ἤτοι γνωστὸν σημεῖον, ὡς κοινὸν τῆς ΑΒ καὶ τῆς ἀνωτέρω διχοτόμου. Ἡ εὐθεῖα ΔΕ εἶναι ἐπομένως, γνωστὴ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ (95).



Σχ. 177

Ὡς ἐκ τῆς προηγουμένης (176) προτάσεως προκύπτει, τὰ σημεῖα τῆς ἀνωτέρω παραλλήλου τὰ μὴ κείμενα μεταξὺ τῶν Δ καὶ Ε δὲν ἱκανοποιοῦν τὴν δοθεῖσαν συνθήκην. Συμπεραίνομεν οὕτως ὅτι, ὁ ζητούμενος γεωμ. τόπος εἶναι τὸ εὐθ. τμῆμα ΔΕ, θεωρούμενον ὡς τὸ σύνολον τῶν σημείων του.

1) Τοῦ συνόλου τῶν σημείων τῶν εὐθ. τμημάτων ΡΣ, ΣΡ', Ρ'Σ', Σ'Ρ.

ΣΧΕΣΕΙΣ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΟΥ ΓΕΩΜ. ΤΟΠΟΥ ΚΑΙ ΤΗΣ ΓΕΩΜ. ΚΑΤΑΣΚΕΥ

Τὸ πρόβλημα (176) γεωμ. τόπου ἠδύνατο νὰ διατυπωθῇ ὡς πρόβλη κατασκευῆς σημείου, ὡς κάτωθι :

178. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Δίδεται ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ). Νὰ εὑρε σημεῖον Μ τοῦ ὁποίου ἡ ἀπόστασις ΜΑ ἀπὸ τῆς ΒΓ νὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ θροισμα τῶν ἀποστάσεων ΜΒ καὶ ΜΓ αὐτοῦ ἀπὸ τῶν ΑΓ καὶ ΑΒ.

Διὰ τὴν ἐπίλυσιν τοῦ προβλήματος τούτου, θεωροῦμεν ἕνα σημεῖον πε τοῦ ὁποίου ὑποθέτομεν ὅτι ἱκανοποιεῖ τὴν δοθεῖσαν συνθήκην :

ΜΑ′ = ΜΒ′ + ΜΓ′, ἤτοι ὅτι εἶναι, ὡς δυνάμεθα νὰ λέγωμεν, **λύσις** τ προβλήματος. Ἀπεδείχθη, ὅτι ὑπάρχουν ἄπειρα σημεῖα, ἱκανοποιοῦντα τ συνθήκην αὐτήν, ἤτοι ὅτι τὸ πρόβλημα τοῦτο δέχεται ἀπείρους λύσεις. Δυν μεθα ἑπομένως νὰ εἴπωμεν ὅτι τὰ προβλήματα τῶν γεωμ. τόπων εἶναι πρ βλήματα γεωμ. κατασκευῶν : τὰ ἐκ τούτων δεχόμενα ἀπείρους λύσεις.

Ἐξ ἄλλου, τὰ προβλήματα τῶν γεωμ. κατασκευῶν σημείων καὶ εὐθειῶ εἰς τὰ ὁποῖα ἀνάγονται αἱ πλεῖσται τῶν γεωμ. κατασκευῶν ἐν γένει, ἐπιλύοντ τῇ βοηθείᾳ τῶν γεωμ. τόπων. Πράγματι, διὰ τὸν προσδιορισμὸν ἑνὸς σημεί ἢ μιᾶς εὐθείας, εἰς τὸ ἐπίπεδον, βάσει δύο συνθηκῶν ἀναφερομένων εἰς τὸ σ μεῖον ἢ τὴν εὐθεῖαν, δέον νὰ εὑρεθοῦν οἱ γεωμ. τόποι τῶν σημείων τοῦ ἐπιτ δου, οἱ ὁποῖοι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς διδομένας συνθήκας, θεωρουμένας ἀνεξα τήτως ἀλλήλων. Ἤτοι, δέον νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων τοῦ ἐτ πέδου τὰ ὁποῖα ἱκανοποιοῦν τὴν πρώτην ἐκ τῶν ἀνωτέρω δύο συνθηκῶν, λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν (ἀφαιρουμένης) τῆς δευτέρας, καὶ ὁ γεωμ. τόπος τ σημείων τὰ ὁποῖα ἱκανοποιοῦν τὴν δευτέραν, μὴ λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν τ πρώτης. Ἡ λύσις τοῦ προβλήματος εἶναι ἡ τομὴ τῶν ἀνωτέρω δύο γεω τόπων, ἀποτελουμένη ἀπὸ ἕνα ἢ περισσότερα σημεῖα.

Καθ' ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὴν φύσιν τῶν διδομένων στοιχείων καὶ συνθηκῶν, τῶν ὁποίων ζητεῖται ἡ κατασκευὴ ἑνὸς σχήματος, π.χ. εὐθείας, εὐθυγράμμ τμήματος, γωνίας, τριγώνου, τὰ στοιχεῖα ταῦτα δύνανται νὰ ἔχουν ἢ νὰ ἔχουν **δοθεῖσαν θέσιν** εἰς τὸ ἐπίπεδον. Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν, δίδονται, πως δυνάμεθα νὰ λέγωμεν, ὡς **μεγέθη**. Τὸ ζητούμενον σχῆμα δὲν ἔχει τότε ἀνα καίως ὡρισμένην θέσιν εἰς τὸ ἐπίπεδον. Δυνάμεθα ἑπομένως, διὰ τὴν κατασκευ του, νὰ ὁρίσωμεν αὐθαιρέτως τὴν θέσιν στοιχείων τινων ἐκ τῶν δοθέντων.

179. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἐπίλυσιν ἑνὸς προβλήματος γεωμ. κατασκευῆς ὀνομάζομεν τ εὕρεσιν μιᾶς ἀκολουθίας πεπερασμένου πλήθους κατασκευῶν, διὰ τοῦ κανόν καὶ τοῦ μεταφορέως, διὰ τῶν ὁποίων ἐπιτυγχάνεται ἡ εὕρεσις ἑνὸς σχήματος ἱκ νοποιοῦντος δοθείσας τινας συνθήκας. Ἕνα τοιοῦτον σχῆμα ὀνομάζεται, ἐσημειώσαμεν, **λύσις** τοῦ προβλήματος.

ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΚΑΙ ΣΥΝΘΕΣΙΣ

180. ΟΡΙΣΜΟΣ. Διὰ τὴν ἐπίλυσιν ἑνὸς προβλήματος γεωμ. κατασκευῆς δέον, κατ τὰ ἀνωτέρω, νὰ ἀναλυθοῦν αἱ μεταξὺ τῶν διδομένων στοιχείων καὶ τοῦ ζητουμέν σχήματος σχέσεις. Μία τοιαύτη ἀνάλυσις εἶναι ἡ αὐτοτελὴς θεώρησις τῶν διδομένων συνθηκῶν, τῶν μὲ αὐτὰς συνδεομένων γεωμ. τόπων, ὡς καὶ τῶν ἐκ τῶν ἀποδεικτικῶν προτάσεων γνωστῶν σχέσων.

Δυνάμεθα, ἐν γένει, νὰ δεχθῶμεν ὅτι, τὸ πρόβλημα δέχεται μίαν τουλάχιστον λύσιν καὶ νὰ ἐμφανίσωμεν μίαν ἀντίστοιχον γραφικὴν εἰκόνα, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὸ ζητούμενον στοιχεῖον. Σημειοῦμεν ἀκολούθως τὰ στοιχεῖα τὰ ὁποῖα συνδέονται πρὸς αὐτὸ συμφώνως πρὸς τὰς διδομένας συνθήκας. Οὕτω, ἂν ζητῆται ἡ κατασκευή, ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) ἐκ τῆς γωνίας Α αὐτοῦ καὶ τῆς συνθήκης ὅπως αἱ κορυφαί, Α,Β,Γ αὐτοῦ εἶναι ἀντιστοίχως σημεῖα τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν, α,β,γ, θὰ ἐμφανίσωμεν τὴν ἀντίστοιχον γραφικὴν εἰκόνα, ἀρχίζοντες πρῶτον ἀπὸ ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον. Ἀκολούθως θὰ ἐμφανίσωμεν τρεῖς τυχούσας διὰ τῶν κορυφῶν εὐθείας α, β, γ, περὶ τῶν ὁποίων θὰ ὑποθέσωμεν ὅτι εἶναι αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι. Μὲ τὴν βοήθειαν τῆς γραφικῆς αὐτῆς εἰκόνος θὰ ἀναζητήσωμεν τὰς ὑφισταμένας μεταξὺ τῶν διδομένων στοιχείων καὶ τοῦ ζητουμένου σχήματος σχέσεις. Εἰς τὴν κατὰ τὰ ἀνωτέρω γραφικὴν εἰκόνα δέον ὅπως ἐμφανίζωνται ἱκανοποιούμεναι, κατὰ μίαν εὔλογον προσέγγισιν αἱ διδόμεναι συνθῆκαι, ὥστε νὰ διευκολύνεται ἡ ἀναζήτησις τῶν ὑφισταμένων σχέσεων.

Ἐν προκειμένῳ δέον νὰ σημειώσωμεν ὅτι:

Ἀνεξαρτήτως τῆς συμβολῆς τῆς γραφικῆς εἰκόνος (γραφικοῦ σχήματος) εἰς τὴν ἐπίλυσιν καὶ τὴν ἀπόδειξιν, ἡ τελευταία αὕτη δέον νὰ εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς ἀντιλήψεως τὴν ὁποίαν ἔχομεν ἀποκλειστικῶς ἐξ αὐτῆς (τῆς γραφικῆς εἰκόνος).

Τὰ ἐκ τῆς ἀναζητήσεως τῶν σχέσεων, αἱ ὁποῖαι ὑφίστανται μεταξὺ τῶν διδομένων καὶ τῶν ζητουμένων στοιχείων, συμπεράσματα, πρέπει, διὰ νὰ διατηροῦν τὸ λογικὸν αὐτῶν **κῦρος**, νὰ προκύπτουν ἀποκλειστικῶς ἀπὸ τὰ εἰσαχθέντα ἀξιώματα καὶ τὰ ἀποδειχθέντα θεωρήματα ὑπάρξεως.

Τὸ σύνολον τῶν παρατηρήσεων αἱ ὁποῖαι ἀναφέρονται εἰς τὰς μεταξὺ τῶν διδομένων καὶ τῶν ζητουμένων στοιχείων σχέσεις, βάσει τῶν ὁποίων πραγματοποιεῖται ἡ σύνθεσις (κατασκευή), ἀποτελεῖ τὴν λεγομένην **ἀνάλυσιν.**

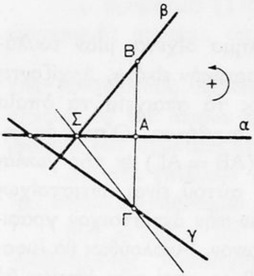
Ἡ **σύνθεσις** εἶναι τὸ σύνολον τῶν γεωμετρικῶν πράξεων μέσω τῶν ὁποίων πραγματοποιεῖται ἡ κατασκευὴ τοῦ ζητουμένου σχήματος.

Κατὰ τὴν **ἀπόδειξιν** ἐπαληθεύεται ὅτι τὸ εὑρεθὲν σημεῖον, ἢ γενικώτερον τὸ εὑρεθὲν σχῆμα, ἱκανοποιεῖ τὰς δοθείσας συνθήκας, ἤτοι ὅτι εἶναι **λύσις** τοῦ προβλήματος. Ἡ λεγομένη **διερεύνησις** ἀφορᾷ εἰς τὴν εὕρεσιν τῶν σχέσεων αἱ ὁποῖαι πρέπει νὰ ὑφίστανται μεταξὺ τῶν διδομένων στοιχείων διὰ νὰ ὑπάρχουν λύσεις τοῦ προβλήματος, ἤτοι ἕνα ἢ περισσότερα σχήματα, ἱκανοποιοῦντα τὰς διδομένας συνθήκας.

Ἂν πρόκειται περὶ κατασκευῆς σημείου, ἔνθα ἡ **λύσις** προκύπτει ὡς τομὴ δύο γεωμετρικῶν τόπων, αἱ ἀνωτέρω σχέσεις ἀνταποκρίνονται εἰς τὴν ὕπαρξιν τῶν δύο γεωμετρικῶν τούτων τόπων καὶ τῆς τομῆς αὐτῶν.

Κατωτέρω δίδεται ἕνα πρόβλημα κατασκευῆς πρὸς καλλιτέραν κατανόησιν τῶν ἀνωτέρω:

181. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Δίδονται τρεῖς εὐθεῖαι α, β, γ. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα ε κάθετος ἐπὶ τὴν α ὥστε ἂν εἶναι Α, Β, Γ τὰ κοινὰ σημεῖα αὐτῆς μὲ τὰς α, β, γ ἀντιστοίχως, νὰ εἶναι ΑΒ = ΑΓ.



Σχ. 181

Λύσις. Ὑποθέτομεν ὅτι μία εὐθεῖα ε εἶναι λύσις τοῦ προβλήματος (Σχ. 181). Παρατηροῦμεν ὅτι : (1). Τὸ σημεῖον Γ εἶναι τὸ συμμετρικὸν τοῦ Β ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν α (2). Ἐπειδὴ τὸ Β εἶναι σημεῖον τῆς δοθείσης εὐθείας β, ἕπεται (172) ὅτι τὸ Γ εἶναι σημεῖον τῆς συμμετρικῆς β′ τῆς β ὡς πρὸς τὴν α, ἡ ὁποία β′ εἶναι γνωστὴ εὐθεῖα.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παρατηρήσεων ἕπεται ἡ ἑξῆς σύνθεσις :

Κατασκευάζεται ἡ συμμετρικὴ β′ τῆς εὐθείας β ὡς πρὸς τὴν α καὶ εὑρίσκεται τὸ κοινὸν σημεῖον Γ αὐτῆς μὲ τὴν εὐθεῖαν γ. Ἡ διὰ τοῦ σημείου τούτου Γ κάθετος ἐπὶ τὴν α εἶναι λύσις τοῦ προβλήματος. Πράγματι :

Τὸ κοινὸν σημεῖον Β τῆς ἀνωτέρω καθέτου ἐπὶ τὴν α μὲ τὴν β εἶναι τὸ συμμετρικὸν τοῦ Γ ὡς πρὸς τὴν α (172), διότι ἡ α εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ ὑπὸ τῶν β καὶ β′ ἀποτελουμένου σχήματος. Ἑπομένως ΑΒ = ΑΓ. Σημειοῦμεν ὅτι : Διὰ νὰ ἔχῃ τὸ πρόβλημα λύσιν πρέπει ἡ β′ νὰ τέμνῃ τὴν γ, ἤτοι ἡ γ πρέπει νὰ ἔχῃ διεύθυνσιν διάφορον τῆς β′. Ἐξ ἄλλου ἡ διὰ τοῦ Γ′ κάθετος ἐπὶ τὴν α πρέπει νὰ τέμνῃ τὴν β, ἤτοι ἡ β δὲν πρέπει νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν α. Ὑπὸ τὰς συνθήκας αὐτὰς τὸ πρόβλημα δέχεται λύσιν καὶ μόνον μίαν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίδονται δύο εὐθεῖαι α καὶ β κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας καὶ ἕνα σημεῖον Ρ. Θεωροῦμεν τυχοῦσαν ὀρθὴν γωνίαν ἔχουσαν κορυφὴν τὸ Ρ καὶ ὀνομάζομεν Α καὶ Β τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν πλευρῶν αὐτῆς μὲ τὰς α καὶ β ἀντιστοίχως. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν μέσων Μ τῶν εὐθ. τμημάτων ΑΒ.

2. Δίδονται ἐπὶ εὐθείας ε δύο σημεῖα Α καὶ Β καὶ μία εὐθεῖα η κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ. Θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον Μ τῆς η καὶ ὀνομάζομεν Μ′ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν καθέτων ἐπὶ τὰς ΜΑ καὶ ΜΒ εἰς τὰ Α καὶ Β ἀντιστοίχως. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Μ′

3. Δίδεται γωνία (ΟΧ,ΟΥ). Θεωροῦμεν δύο σημεῖα Α καὶ Β τῶν πλευρῶν ΟΧ καὶ ΟΥ τῆς γωνίας ἀντιστοίχως ὥστε : ΟΑ + ΟΒ = λ, ἔνθα λ δοθὲν εὐθ. τμῆμα. Νὰ εὑρεθῇ ἡ γεωμ. τόπος τῶν μέσων Μ τῶν εὐθ. τμημάτων ΑΒ.

4. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Θεωροῦμεν δύο σημεῖα Β′ καὶ Γ′ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΑΓ ἀντιστοίχως, κείμενα πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας ΒΓ, ὥστε ΒΒ′=ΓΓ′. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν μέσων Μ τῶν εὐθ. τμημάτων Β′Γ′.
Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Μ, τῆς ἀνωτέρω προτάσεως, εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν τὰ σημεῖα Β′ καὶ Γ′ θεωροῦνται ἑκατέρωθεν τῆς εὐθείας ΒΓ.

5. Δίδεται ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ. Θεωροῦμεν τρία σημεῖα Α′, Β′, Γ′ τοῦ τριγώνου κείμενα ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ, ὥστε ΒΑ′ = ΓΒ′ = ΑΓ′. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ γεωμ. τόποι τῶν μέσων τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου Α′Β′Γ′.

6. Δίδονται δύο γωνίαι τριγώνου. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ τρίτη γωνία αὐτοῦ.

7. Δίδονται δύο εὐθεῖαι α καὶ β καὶ ἕνα σημεῖον Α τῆς α. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τῆς α τοῦ ὁποίου ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τοῦ Α νὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀπόστασιν αὐτοῦ ἀπὸ τῆς β.

8. Δίδονται δύο σημεῖα Α καὶ Β καὶ εὐθεῖα α διερχομένη διὰ τοῦ Α. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τῆς α ὥστε ΜΑ + ΜΒ = λ.

9. Δίδεται ὀρθογώνιον, κατὰ τὴν γωνίαν Α, τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σημεῖον Μ τῆς ΒΓ, τοῦ ὁποίου αἱ προβολαὶ Β′ καὶ Γ′ ἐπὶ τὰς ΑΓ καὶ ΑΒ ἀντιστοίχως, ὁρίζουν τὸ ἐλάχιστον εὐθ. τμῆμα Β′Γ′.

10. Δίδεται εὐθεῖα ε καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τῆς ε ὥστε: (1). ΜΑ = ΜΒ. (2). Τὸ ἄθροισμα ΜΑ + ΜΒ νὰ εἶναι ἐλάχιστον (3). Ἡ διαφορὰ ΜΑ − ΜΒ νὰ εἶναι μεγίστη.

11. Δίδονται τρία σημεῖα Α, Β, Γ μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ ἀπέχον ἴσον ἀπὸ τούτων.

12. Δίδονται τρεῖς εὐθεῖαι α, β, γ μὴ διερχόμεναι διὰ σημείου. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ ἀπέχον ἴσον ἀπὸ τούτων.

13. Δίδονται τρεῖς εὐθεῖαι α, β, γ. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τῆς α ἀπέχον ἴσον ἀπὸ τῶν, β καὶ γ.

14. Δίδονται δύο εὐθεῖαι α καὶ β. Νὰ εὑρεθοῦν ἐπὶ τούτων δύο σημεῖα Α καὶ Β ἀντιστοίχως ὥστε ἡ εὐθεῖα ΑΒ νὰ εἶναι γνωστῆς διευθύνσεως καὶ τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ ἴσον πρὸς δοθὲν εὐθ. τμῆμα λ (ΑΒ = λ).

15. Δίδονται τρεῖς εὐθεῖαι α, β, γ. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τῆς α τοῦ ὁποίου αἱ ἀποστάσεις ΜΒ καὶ ΜΓ ἀπὸ τῶν β καὶ γ νὰ ἔχουν δοθὲν ἄθροισμα λ (λ δοθὲν εὐθ. τμῆμα). Γενίκευσις εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν, ἀντὶ τῶν καθέτων ΜΒ καὶ ΜΓ ἐπὶ τὰς β καὶ γ, θεωροῦνται αἱ τέμνουσαι ταύτας ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν φ.

16. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καὶ σημεῖον Α′ τῆς εὐθείας ΒΓ. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τῆς εὐθείας ΑΑ′ ὥστε : (ΜΑ′,ΜΒ) = − (ΜΑ′,ΜΓ).

17. Δίδονται δύο εὐθεῖαι α καὶ β καὶ σημεῖον Ρ. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ Ρ καὶ σχηματίζουσα ἴσας γωνίας μὲ τὰς α καὶ β.

18. Δίδονται δύο εὐθεῖαι α καὶ β, τῶν ὁποίων ἔστω Ο τὸ κοινὸν σημεῖον, καὶ σημεῖον Ρ. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα διὰ τοῦ Ρ τέμνουσα τὰς α καὶ β ὥστε νὰ εἶναι Α καὶ Β τὰ κοινὰ σημεῖα ἀντιστοίχως, νὰ εἶναι ΟΑ = ΟΒ.

19. Δίδονται δύο εὐθεῖαι β καὶ γ καὶ ἕνα σημεῖον Η. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ Η καὶ τοῦ κοινοῦ σημείου Α τῶν β καὶ γ χωρὶς τὴν χρησιμοποίησιν τοῦ σημείου τούτου Α.

20. Δίδεται ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ). Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ, ὥστε ἂν εἶναι Χ καὶ Υ τὰ κοινὰ σημεῖα αὐτῆς μὲ τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ ἀντιστοίχως, νὰ εἶναι : ΒΧ = ΧΥ = ΥΓ.

21 Δίδονται δύο ζεύγη παραλλήλων εὐθειῶν α, β καὶ γ, δ ἔχοντα διαφόρους ἀλλήλων διευθύνσεις, καὶ ἕνα σημεῖον Ρ. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα διὰ τοῦ Ρ τέμνουσα τὰς α, β, γ, δ, ὥστε ἂν εἶναι Α,Β,Γ,Δ, τὰ κοινὰ σημεῖα ἀντιστοίχως, νὰ εἶναι : ΑΒ = ΓΔ.

22. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ διὰ τῆς κορυφῆς Α αὐτοῦ εὐθεῖα τῆς ὁποίας αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τῶν κορυφῶν Β καὶ Γ ἔχουν ἄθροισμα (1). Μέγιστον (2). Ἐλάχιστον.

23. Δίδονται: δύο παράλληλοι εὐθεῖαι α καὶ β, δύο σημεῖα Α καὶ Β ἐπὶ τούτων ἀντιστοίχως καὶ ἕνα σημεῖον Ο μεταξὺ τῶν α καὶ β. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα διὰ τοῦ Ο τέμνουσα τὰς α καὶ β ὥστε ἂν εἶναι Χ καὶ Υ ἀντιστοίχως τὰ κοινὰ σημεῖα νὰ εἶναι ΑΧ + ΒΥ = λ.

24. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα παράλληλος, πρὸς τὴν ΒΓ ὥστε ἂν εἶναι Χ καὶ Υ τὰ κοινὰ σημεῖα αὐτῆς μὲ τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ ἀντιστοίχως νὰ εἶναι :

(1). ΧΥ = ΒΧ + ΓΥ (2). ΒΧ + ΓΥ = λ (3). ΒΧ + ΑΥ = λ

25. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα διερχομένη διὰ δοθέντος σημείου Ο καὶ ἀπέχουσα ἴσον ἀπὸ δύο δοθέντων σημείων Α καὶ Β.

26. Δίδονται δύο εὐθεῖαι α καὶ β καὶ σημεῖον Ο. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα διὰ τοῦ Ο τέμνουσα τὰς α καὶ β ὥστε ἂν εἶναι Α καὶ Β τὰ κοινὰ σημεῖα ἀντιστοίχως νὰ εἶναι ΟΑ = ΟΒ

27. Νὰ κατασκευασθοῦν αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τῶν ὁριζομένων ἀπὸ δύο εὐθείας α καὶ β, χωρὶς τὴν χρησιμοποίησιν τοῦ κοινοῦ σημείου Ο αὐτῶν.

28. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα δοθείσης διευθύνσεως, ὥστε ἂν εἶναι Χ καὶ Υ τὰ κοινὰ σημεῖα αὐτῆς μὲ τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ, νὰ εἶναι ΧΑ = ΥΓ. Περίπτωσις κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ ζητουμένη εὐθεῖα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ.

29. Δίδονται δύο παράλληλοι εὐθεῖαι α καὶ β καὶ σημεῖον Ρ. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα δοθείσης διευθύνσεως, τέμνουσα τὰς α καὶ β, ὥστε ἂν εἶναι Α αἱ Β ἀντιστοίχως τὰ κοινὰ σημεῖα νὰ εἶναι ΡΑ = ΡΒ.

30. Δίδονται δύο εὐθεῖαι β καὶ γ καὶ σημεῖον Α. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα διὰ τοῦ Α τέμνουσα τὰς β καὶ γ, ὥστε ἂν εἶναι Β καὶ Γ τὰ κοινὰ σημεῖα ἀντιστοίχως νὰ εἶναι ΑΒ = ΒΓ.

31. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων :

(1). β, γ, Α (2). α, Β, γ (3). α, Α, Β (4). α, Β, $\beta+\gamma$ (ἢ $\beta-\gamma$) (5). Α, β, $\alpha+\gamma$ (ἢ $\alpha-\gamma$) (6). Β, Γ, 2τ (7). α, Α, Β − Γ (8). Α, ΗΑ = λ, ΗΓ = μ (9). Β, Γ, $\beta+\gamma$ (ἢ $\beta-\gamma$) (10). Α, δ_1, υ_2 (11). Β, Γ, υ_1 (12). α, Β, υ_1.

32. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων (σημείων) :

(1). Β, Γ, Η (2). Β, Γ, G, (3). Β, Γ, Ι (ἢ Ι′ ἢ Ι″ ἢ Ι‴). (4). Α, H_2, H_3 (ἢ H_1, H_2) (5). O_1, O_2, O_3 (6). H_1, H_2, H_3 (7). Ι, Ι′, Ι″ (ἢ Ι‴) (8). Ι′, Ι″, Ι‴.

33. Δίδονται τρεῖς εὐθεῖαι α, β, γ διερχόμεναι διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Κ καὶ σημεῖον Α ἐπὶ τῆς α. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ὥστε νὰ ἱκανοποιοῦνται αἱ ἑξῆς συνθῆκαι : Αἱ κορυφαὶ Β καὶ Γ αὐτοῦ νὰ εἶναι ἀντιστοίχως σημεῖα τῶν β καὶ γ, καὶ τὰ σημεῖα H_1, H_2, H_3 αὐτοῦ (ἢ τὰ O_1, O_2, O_3 ἢ τὰ Δ_1, Δ_2, Δ_3 ἢ τὰ Δ_1', Δ_2', Δ_3') νὰ εἶναι ἀντιστοίχως σημεῖα τῶν εὐθειῶν α, β, γ.

34. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς δοθὲν ὀξυγώνιον τρίγωνον ΑΒΓ τὸ τρίγωνον τὸ ἔχον τὴν ἐλαχίστην περίμετρον.

35. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων :

(1). Κορυφαὶ Β καὶ Γ, ὕψος υ_1, καὶ συνθήκη ὅπως ἡ κορυφὴ Α εἶναι σημεῖον μιᾶς δοθείσης εὐθείας ε. (2). Γωνία Α, ὕψη υ_2, υ_3 (3). Γωνία Α, περίμετρος 2τ, ὕψος υ_2 (4). μ_1, (AO_1,ΑΒ), (AO_1,ΑΓ) (5) β, γ, Β − Γ (6). Σημεῖα : Ι, Δ_2, Δ_3 (7). Αἱ μεσοκάθετοι ξ_1, ξ_2, ξ_3 τῶν πλευρῶν αὐτοῦ καὶ ἕνα σημεῖον Ρ αὐτοῦ (8). Αἱ εὐθεῖαι ἐπὶ τῶν ὁποίων κεῖνται αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ αὐτοῦ, ἕνα σημεῖον Ρ τῆς ΑΒ καὶ ἕνα σημεῖον Σ τῆς ΑΓ.

36. Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον κατὰ τὴν γωνίαν Α τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων :

(1). α, β (2). β, Β (3). Β, $\beta+\gamma$ (4). β, $\alpha+\gamma$ (ἢ $\alpha-\gamma$)

(5). υ_1 (ἢ δ_1), Β − Γ (6). Β − Γ, 2τ (7). Β, $\alpha+\gamma$(ἢ $\alpha-\gamma$) (8). α, $\Delta_2\Gamma(=\lambda)$.

37. Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον, κατὰ τὴν γωνίαν Α, καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, ἐκ τῶν στοιχείων : $\alpha+\beta$ (= λ).

38. Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον, κατὰ τὴν γωνίαν Α, τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων : (1). Β, υ, (2). Σημεῖα Α, O_2, Δ_3

39. Νὰ κατασκευασθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) ἐκ τῶν στοιχείων :

(1). α, Α (2). Α, υ_1 (ἢ υ_2) (3). Β, υ_1 (ἢ υ_2) (4). υ_1, μ_2 (5). Α, $\alpha+\beta$ (ἢ $\alpha-\beta$) (6). Β, α+β (7). Α, 2τ (8). υ_1, 2τ (9). α, $\beta+\upsilon_1$ (10). Σημεῖα H_2, H_3 καὶ σημεῖον Ρ τῆς ΒΓ.

40. Νὰ κατασκευασθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ), τοῦ ὁποίου δίδονται τὰ στοιχεῖα : (1). α, υ_1 (2). υ_1, ἡ συνθήκη ὅπως αἱ κορυφαὶ Β καὶ Γ εἶναι σημεῖα μιᾶς δοθείσης εὐθείας καὶ ἡ συνθήκη ὅπως αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΑΓ διέρχονται ἀντιστοίχως ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα Ρ καὶ Σ. (3). Ἡ κορυφὴ Α, (ΑΒ, ΑΓ) = φ, καὶ ἡ συνθήκη ὅπως αἱ κορυφαὶ Β καὶ Γ εἶναι ἀντιστοίχως σημεῖα δύο δοθεισῶν εὐθειῶν β καὶ γ.

41. Νὰ κατασκευασθῇ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ, ἐκ τῆς συνθήκης ὅπως αἱ κορυφαὶ αὐτοῦ εἶναι ἀντιστοίχως σημεῖα τριῶν δοθεισῶν παραλλήλων εὐθειῶν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

ΤΟ ΠΟΛΥΓΩΝΟΝ

Η ΠΟΛΥΓΩΝΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ

182. ΟΡΙΣΜΟΣ. Θεωροῦμεν ἕνα διατεταγμένον σύνολον ν σημείων:

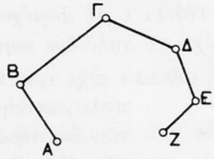
Α, Β, Γ, . . ., Ε, Ζ (1)

Ὀνομάζομεν **πολυγωνικὴν γραμμὴν** *ΑΒΓ. . .ΕΖ τὸ σύνολον τῶν ν-1 εὐθ. τμημάτων ἑκάστου τῶν ὁποίων τὰ ἄκρα εἶναι διαδοχικὰ σημεῖα τοῦ ἀνωτέρω διατεταγμένου συνόλου, σημείων* (Σχ. 182).

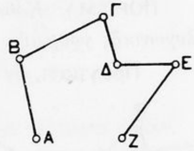
Τὰ σημεῖα Α,Β, . . ., Ζ ὀνομάζονται *κορυφαὶ* τῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς καὶ τὰ ἐκ τούτων Α καὶ Ζ **ἄκρα** αὐτῆς.

Τὰ εὐθ. τμήματα ΑΒ,ΒΓ,. . .ΖΑ ὀνομάζονται *πλευραὶ* τῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς.

Σημεῖα τῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς ὀνομάζομεν τὰ σημεῖα τῶν πλευρῶν αὐτῆς. Τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν τῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς ὀνομάζεται *περίμετρος* αὐτῆς.

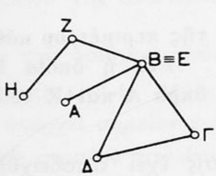


Σχ. 182.1

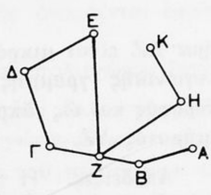


Σχ. 182.2

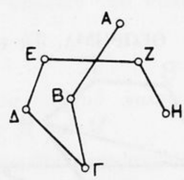
Διαγώνιος τῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς ὀνομάζεται κάθε εὐθ. τμῆμα τοῦ ὁποίου τὰ ἄκρα εἶναι δύο κορυφαὶ τῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς, μὴ διαδοχικαί.



Σχ. 182.3



Σχ. 182.4



Σχ. 182.5

Μία πολυγωνικὴ γραμμὴ θὰ ὀνομάζεται **ἁπλῆ**, τότε μόνον ὅταν ἰσχύουν αἱ ἑξῆς συνθῆκαι :

(1) Σημειοῦντες : Α,Β,Γ,. . .,Ε,Ζ θεωροῦμεν **ἀλφαβητικὴν** διάταξιν τοῦ συνόλου. Σημειοῦντες : $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{\nu-1}\ A_\nu$ θεωροῦμεν **ἀριθμητικὴν** διάταξιν.

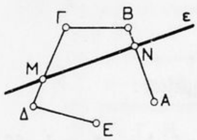
(1) Αἱ κορυφαὶ αὐτῆς εἶναι σημεῖα διάφορα ἀλλήλων.

(2) Οἱαιδήποτε καὶ ἂν εἶναι δύο διαδοχικαὶ κορυφαὶ αὐτῆς, δὲν ὑπάρχει κορυφὴ αὐτῆς ἡ ὁποία νὰ κεῖται μεταξὺ τούτων.

(3) Δὲν ὑπάρχουν, ἐκτὸς τῶν κορυφῶν της, σημεῖα αὐτῆς τὰ ὁποῖα νὰ ἀνήκουν εἰς περισσοτέρας τῆς μιᾶς πλευράς.

Ἂν μία τῶν ἀνωτέρω συνθηκῶν δὲν ἰσχύῃ, ἡ πολυγωνικὴ γραμμὴ θὰ ὀνομάζεται **μὴ ἁπλῆ** (Σχ. 182.3,182.4,182.5).

183. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Μία ἁπλῆ πολυγωνικὴ γραμμὴ ΑΒΓ...ΕΖ, ἔχουσα ν κορυφάς, θὰ ὀνομάζεται* **κυρτὴ** *ὅταν οἱαιδήποτε καὶ ἂν εἶναι δύο διαδοχικαὶ κορυφαὶ αὐτῆς, αἱ λοιπαὶ ν - 2 κορυφαί της κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπὸ τὰς ἄνω διαδοχικὰς κορυφάς.*



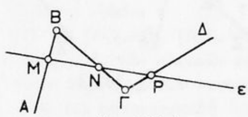
Σχ. 183.1

Ἂν ὑπάρχουν κορυφαὶ τῆς ἁπλῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς κείμεναι ἑκατέρωθεν μιᾶς τουλάχιστον ἐκ τῶν εὐθειῶν, ἑκάστη τῶν ὁποίων ὁρίζεται ἀπὸ δύο διαδοχικὰς κορυφάς της, ἡ πολυγωνικὴ γραμμὴ θὰ ὀνομάζεται *μὴ κυρτή.* (Σχ. 183 2).

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς κυρτῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς ἕπεται ὅτι :

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Κάθε εὐθεῖα ε μὴ περιέχουσα δύο διαδοχικὰς κορυφὰς κυρτῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς, ἔχει τὸ πολὺ δύο κοινὰ σημεῖα μὲ αὐτὴν* (Σχ. 183.1).

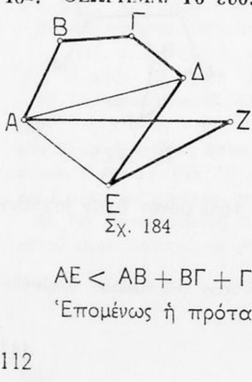
Πράγματι, ἂν ἡ εὐθεῖα ε εἶχε τρία κοινὰ σημεῖα Μ, Ν, Ρ (Σχ. 183.2) μὲ τὴν πολυγωνικὴν γραμμὴν ΑΒΓ... ΕΖ, τότε τὸ ἕνα ἐκ τῶν ἀνωτέρω κοινῶν σημείων, ἔστω τὸ σημεῖον Ν τῆς πλευρᾶς ΒΓ, θὰ ἔκειτο μεταξὺ τῶν δύο ἄλλων (15) ἤτοι τὰ Μ καὶ Ρ θὰ ἔκειντο ἑκατέρωθεν τῆς εὐθείας ΒΓ. Τοῦτο ὅμως ἀποκλείεται, διότι, ἐξ ὑποθέσεως, ἡ πολυγωνικὴ γραμμὴ εἶναι κυρτή.



Σχ. 183.2

Ἐξ ἄλλου εὐκόλως ἀποδεικνύεται ἡ πρότασις :

184. ΘΕΩΡΗΜΑ. **Τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΖ εἶναι μικρότερον τῆς περιμέτρου κάθε πολυγωνικῆς γραμμῆς ΑΒΓ...ΕΖ, ἡ ὁποία ἔχει ν κορυφὰς καὶ ὡς ἄκρα τὰ ἄκρα Α καὶ Ζ τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΖ.**



Σχ. 184

Ἀπόδειξις. Ἡ πρότασις ἔχει ἀποδειχθῆ διὰ $\nu = 3$ (130). Ἔστω ἡ πρότασις ἰσχύει διὰ $\nu = \mu$ θὰ εἶναι : $ΑΔ < ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ$. Ἀλλὰ εἶναι (130): $ΑΕ < ΑΔ + ΔΕ$ (Σχ. 184).

Διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη τῶν ἀνωτέρω ἔχομεν:

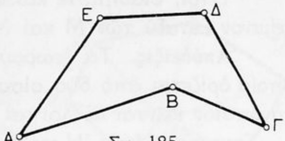
$ΑΕ < ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΕ$, ἤτοι ἡ πρότασις ἰσχύει διὰ $\nu = \mu + 1$.

Ἑπομένως ἡ πρότασις ἰσχύει διὰ κάθε ν.

185. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ὅταν τὰ ἄκρα μιᾶς πολυγωνικῆς γραμμῆς συμπίπτουν τότε ἡ πολυγωνικὴ γραμμὴ ὀνομάζεται *πολύγωνον*.

Ἂν ἕνα πολύγωνον ἔχῃ ν κορυφάς, θὰ ἔχῃ ν πλευρὰς (Σχ. 185).

Ἂν $\nu = 4,5,6,\ldots,\nu$, τὸ πολύγωνον ὀνομάζεται ἀντιστοίχως : **τετράπλευρον, πεντάγωνον, ἑξάγωνον,. . ., ν—γωνον.**



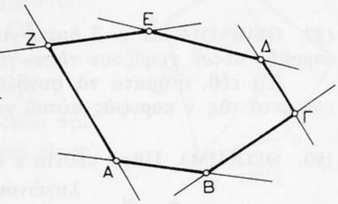
Σχ. 185

Σημειοῦμεν ὅτι :

Οἱ ὁρισμοὶ οἱ ὁποῖοι ἀναφέρονται εἰς τὴν ἁπλῆν, κυρτὴν ἢ μὴ κυρτήν, καὶ τὴν μὴ ἁπλῆν πολυγωνικὴν γραμμὴν ἰσχύουν καὶ εἰς τὸ πολύγωνον.

ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΝ ΚΥΡΤΟΥ ΠΟΛΥΓΩΝΟΥ

186. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ὀνομάζομεν* **ἐσωτερικὸν** *κυρτοῦ ν—γώνου $AB\Gamma\ldots EZ$ τὴν τομὴν τῶν ν ἡμιεπιπέδων τὰ ὁποῖα ἔχουν ὡς ἀρχικὰς εὐθείας τὰς AB, $B\Gamma,\ldots,ZA$ ἀντιστοίχως καὶ περιέχουν τὰς ἄλλας $\nu-2$ κορυφὰς αὐτοῦ* [1].



Σχ. 186

ΓΩΝΙΑΙ ΤΟΥ ΚΥΡΤΟΥ ΠΟΛΥΓΩΝΟΥ

187. ΟΡΙΣΜΟΣ. Κάθε κυρτὴ γωνία ὡς ἡ (ΑΒ, ΑΖ) τῆς ὁποίας αἱ πλευραὶ ἄγονται ἀπὸ μιᾶς κορυφῆς Α καὶ διέρχονται ἀπὸ τὰς γειτονικὰς αὐτῆς κορυφὰς Β καὶ Ζ τοῦ πολυγώνου, περιέχει εἰς τὸ ἐσωτερικόν της ὅλας τὰς ἄλλας ν–3 κορυφὰς αὐτοῦ. Μία τοιαύτη γωνία ὀνομάζεται **ἐσωτερικὴ γωνία** ἢ ἁπλῶς **γωνία** τοῦ πολυγώνου. Τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ κυρτοῦ πολυγώνου δύναται, κατὰ ταῦτα, νὰ ὁρισθῇ ὡς ἡ τομὴ τῶν συνόλων τῶν ἐσωτερικῶν σημείων τῶν γωνιῶν αὐτοῦ. Κάθε σημεῖον τῆς ἀνωτέρω τομῆς ὀνομάζεται **ἐσωτερικὸν σημεῖον** τοῦ πολυγώνου.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ κυρτοῦ πολυγώνου ἕπεται ὅτι :

ΠΟΡΙΣΜΑ *Ἂν M καὶ M' εἶναι δύο ἐσωτερικὰ σημεῖα κυρτοῦ πολυγώνου, δὲν ὑπάρχει σημεῖον τοῦ πολυγώνου κείμενον μεταξὺ τῶν M καὶ M'.*

Κάθε σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τοῦ πολυγώνου τὸ ὁποῖον δὲν εἶναι σημεῖον αὐτοῦ οὔτε ἐσωτερικὸν αὐτοῦ, θὰ ὀνομάζεται *ἐξωτερικὸν σημεῖον* αὐτοῦ, τὸ δὲ σύνολον τῶν ἐξωτερικῶν σημείων τοῦ πολυγώνου, *ἐξωτερικὸν* αὐτοῦ [2].

Ἀποδεικνύεται εὐκόλως ὅτι :

(1) Ἡ ὕπαρξις τῆς ἀνωτέρω τομῆς ἀποδεικνύεται βάσει τῶν ἀξιωμάτων διατάξεως.

(2) Τὸ ἐσωτερικὸν καὶ τὸ ἐξωτερικὸν κάθε ἁπλοῦ πολυγώνου, κυρτοῦ ἢ μὴ κυρτοῦ, δύναται νὰ ὁρισθῇ βάσει τοῦ ἑξῆς θεωρήματος :

188. ΘΕΩΡΗΜΑ. Τὸ ἐσωτερικὸν κυρτοῦ πολυγώνου εἶναι ἕνα κυρτὸν σύνολο σημείων.

Ἤτοι, οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι δύο σημεῖα Μ καὶ Μ′ αὐτοῦ, κάθε σημεῖο κείμενον μεταξὺ τῶν Μ καὶ Μ′ εἶναι σημεῖον τοῦ συνόλου.

Ἀπόδειξις. Τὰ θεωρούμενα σημεῖα, κεῖνται, πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπὸ δύο οἱασδήποτε διαδοχικὰς κορυφὰς τοῦ πολυγώνου πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖνται αἱ λοιπαὶ ν–2 κορυφαὶ αὐτοῦ.

Σημειοῦμεν ὅτι : Ἡ πρότασις ἰσχύει καὶ εἰς τὰς περιπτώσεις κατὰ τὰς ὁποίας

1. Τὰ Μ καὶ Μ′ εἶναι σημεῖα τοῦ πολυγώνου μὴ ἀνήκοντα εἰς τὴν αὐτὴν πλευράν.

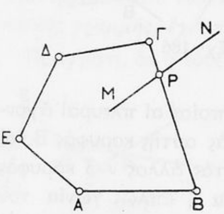
2. Τὰ Μ καὶ Μ′ εἶναι ἀντιστοίχως : ἕνα σημεῖον τοῦ πολυγώνου καὶ ἕνα ἐσωτερικὸν σημεῖον αὐτοῦ.

Εὐκόλως ἀποδεικνύεται ἀκόμη ὅτι :

189. ΘΕΩΡΗΜΑ Αἱ ν–3 διαγώνιοι κυρτοῦ ν–γώνου αἱ ἀγόμεναι διὰ τῆς αὐτῆς κορυφῆς αὐτοῦ χωρίζουν τὸ ν–γωνον τοῦτο εἰς ν–2 τρίγωνα.

Τὰ εὐθ. τμήματα τὰ συνδέοντα ἕνα ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ κυρτοῦ ν–γώνου μετὰ τὰς ν κορυφὰς αὐτοῦ χωρίζουν τὸ ν–γωνον τοῦτο εἰς ν τρίγωνα.

190. ΘΕΩΡΗΜΑ. Πᾶσα εὐθεῖα ε διερχομένη διὰ ἐσωτερικοῦ σημείου κυρτοῦ πολυγώνου ἔχει δύο, καὶ μόνον δύο, κοινὰ σημεῖα μὲ τὸ πολύγωνον.



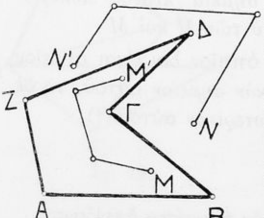
Σχ. 190

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ. 1. *Πᾶσα ἡμιευθεῖα ἀγομένη ἀπὸ σημείου ἐσωτερικοῦ κυρτοῦ πολυγώνου ΑΒΓ. . .ΕΖ ἔχει ἕνα μόνον κοινὸν σημεῖον μὲ τὸ πολύγωνον.*

2. *Τὸ εὐθ. τμῆμα τὸ ὁποῖον συνδέει ἕνα ἐσωτερικὸν καὶ ἕνα ἐξωτερικὸν σημεῖον κυρτοῦ πολυγώνου ἔχει ἕνα κοινὸν σημεῖον μὲ τὸ πολύγωνον καὶ μόνον ἕν.*

3. *Πᾶσα εὐθεῖα μὴ περιέχουσα δύο διαδοχικὰς κορυφὰς κυρτοῦ πολυγώνου ἔχει τὸ πολὺ δύο κοινὰ σημεῖα μὲ τὸ πολύγωνον.*

«Κάθε ἁπλοῦν πολύγωνον χωρίζει τὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου του τὰ μὴ ἀνήκοντα εἰς αὐτὸ εἰς δύο σύνολα :



Σχ. 187

Ἂν εἶναι Μ καὶ Μ′ δύο οἱαδήποτε σημεῖα τοῦ ἑνὸς συνόλου, ὑπάρχει πολυγωνικὴ γραμμὴ ἔχουσα ἄκρα τὰ σημεῖα αὐτὰ καὶ μὴ ἔχουσα κοινὸν σημεῖον μὲ τὸ πολύγωνον. Τοῦτο ἰσχύει καὶ διὰ δύο οἱαδήποτε σημεῖα Ν καὶ Ν (Σχ. 187) τοῦ ἄλλου συνόλου. Ἂν εἶναι Μ ἕνα σημεῖον τοῦ ἑνὸς συνόλου καὶ Ν ἕνα σημεῖον τοῦ ἄλλου, τότε κάθε πολυγωνικὴ γραμμὴ ἔχουσα ἄκρα τὰ σημεῖα αὐτά, ἔχει τουλάχιστον ἕνα κοινὸν σημεῖον μὲ τὸ πολύγωνον.

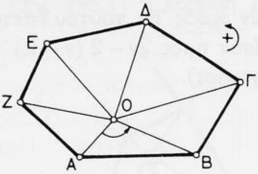
Ὑπάρχουν εὐθεῖαι τοῦ ἐπιπέδου τοῦ πολυγώνου ἀποτελούμεναι μόνον ἀπὸ σημεῖα Ν. Δὲν ὑπάρχουν εὐθεῖαι τοῦ ἐπιπέδου τοῦ πολυγώνου ἀποτελούμεναι μόνον ἀπὸ σημεῖα Μ».

Τὸ σύνολον τῶν σημείων Μ ὀνομάζεται *ἐσωτερικὸν* τοῦ πολυγώνου καὶ τὸ σύνολον τῶν σημείων Ν *ἐξωτερικὸν* αὐτοῦ.

Βάσει τοῦ αὐτοῦ θεωρήματος δύναται νὰ ὁρισθῇ τὸ ἐσωτερικὸν καὶ τὸ ἐξωτερικὸν τοῦ τριγώνου (75).

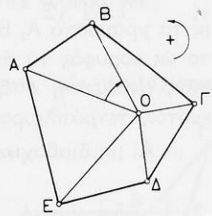
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΟΝ ΚΥΡΤΟΝ ΠΟΛΥΓΩΝΟΝ

191 ΟΡΙΣΜΟΣ *Ὅταν τὸ ἐπίπεδον κυρτοῦ πολυγώνου ΑΒΓ...ΕΖ εἶναι προσημασμένον (προσανατολισμένον) τότε τὸ πολύγωνον ὀνομάζεται* **προσανατολισμένον** (1).



Σχ. 191.1

Ἂν θεωρήσωμεν ἕνα ἐσωτερικὸν σημεῖον Ο τοῦ πολυγώνου τούτου καὶ τὰς ἀπὸ τούτου ἡμιευθείας τὰς διερχομένας διὰ τῶν κορυφῶν αὐτοῦ, τότε δύο οἱαιδήποτε ἐκ τῶν ὁριζομένων διαδοχικῶν γωνιῶν (ΟΑ,ΟΒ), (ΟΒ,ΟΓ),..., (ΟΖ, ΟΑ) εἶναι ἐφεξῆς. Ἂν μία ἐκ τούτων εἶναι θετικῶς προσανατολισμένη τότε καὶ αἱ λοιπαὶ εἶναι ὁμοίως προσανατολισμέναι καὶ λέγομεν ὅτι τὸ πολύγωνον εἶναι θετικῶς προσανατολισμένον.



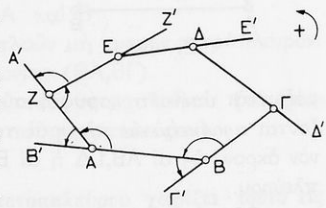
Σχ. 191.2

Ἂν ἡ (ΟΑ,ΟΒ) εἶναι ἀρνητικῶς προσανατολισμένη, τότε καὶ αἱ λοιπαὶ ἐκ τῶν (ΟΒ, ΟΓ),..., (ΟΖ,ΟΑ) εἶναι ἀρνητικῶς προσανατολισμέναι καὶ τὸ πολύγωνον εἶναι ἀρνητικῶς προσανατολισμένον.

Αἱ εἰς τὸν προσανατολισμὸν τῶν γωνιῶν τριγώνου ἀναφερόμεναι παρατηρήσεις ἰσχύουν καὶ εἰς τὸ κυρτὸν πολύγωνον.

ΕΞΩΤΕΡΙΚΑΙ ΓΩΝΙΑΙ ΚΥΡΤΟΥ ΠΟΛΥΓΩΝΟΥ

192. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἔστωσαν ΑΒ′, ΒΓ′,...,ΖΑ′ αἱ ἡμιευθεῖαι αἱ ἀντικείμεναι τῶν ΑΒ,ΒΓ...ΖΑ, τῶν ὁποίων τὰ ἀρχικὰ σημεῖα Α, Β, Γ,...Ε,Ζ καθορίζουν τὴν θετικὴν ἐπὶ τοῦ πολυγώνου φοράν. Αἱ κυρταὶ γωνίαι (ΑΖ,ΑΒ′), (ΒΑ,ΒΓ′),..., (ΖΕ,ΖΑ′), ὀνομάζονται *ἐξωτερικαὶ γωνίαι* τοῦ πολυγώνου. Αἱ ἀνωτέρω ἐξωτερικαὶ γωνίαι τοῦ πολυγώνου εἶναι ὁμοίως πρὸς τὰς γωνίας αὐτοῦ προσανατολισμέναι. Αἱ κατὰ κορυφὴν τῶν ὡς ἄνω ἐξωτερικῶν γωνιῶν εἶναι ἐπίσης ἐξωτερικαὶ γωνίαι τοῦ πολυγώνου.



Σχ. 192

Εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι :

193. ΘΕΩΡΗΜΑ. 1. Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν κυρτοῦ ν—γώνου εἶναι ἴσον πρὸς 2(ν—2) ὀρθὰς γωνίας 2. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν αὐτοῦ εἶναι ἴσον πρὸς μίαν πλήρη γωνίαν, ἤτοι πρὸς τέσσαρας ὀρθὰς γωνίας.

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν τὰς διαγωνίους, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ μιᾶς κορυφῆς αὐτοῦ. Τὸ ἀποδεικτέον προκύπτει ἐκ τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ θεωρήματος

---

(1) Δοθέντος ὅτι, τὸ σύνολον τῶν κορυφῶν αὐτῶν θεωρεῖται διατεταγμένον, ὁρίζεται ἐκ τούτου μία φορὰ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ, ἡ ὁποία εἶναι ἡ θετικὴ ἢ ἡ ἀρνητικὴ καθ' ὅσον τρεῖς διαδοχικαὶ κορυφαὶ τοῦ πολυγώνου ὁρίζουν τὴν θετικὴν ἢ τὴν ἀρνητικήν, ἐν τῷ ἐπιπέδῳ, φοράν.

(119) εἰς τὰ ὁριζόμενα $\nu-2$ τρίγωνα καὶ προσθέσεως κατὰ μέλη τῶν ἀντιστοίχω ἰσοτήτων.

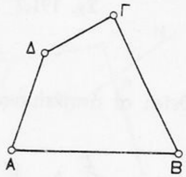
2. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐσωτερικῶν καὶ ἐξωτερικῶν γωνιῶν εἶναι ἴσον πρὸ 2ν ὀρθάς. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν αὐτοῦ εἶνα ἴσον πρὸς $2\nu - 2(\nu - 2)$ ὀρθὰς ἤτοι πρὸς 4 ὀρθὰς γωνίας ἢ 2π (δύο πλήρει γωνίας).

ΤΟ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟΝ

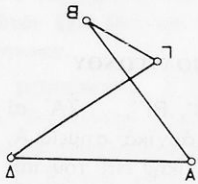
194. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Τὸ πολύγωνον τοῦ ὁποίου τὸ πλῆθος τῶν κορυφῶν εἶναι ὁ 4 ($\nu = 4$) ὀνομάζεται* **τετράπλευρον.**

Ἂν δοθοῦν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τέσσαρα σημεῖα τὰ ὁποῖα συμβολίζοντα μὲ τὰ γράμματα Α, Β, Γ, Δ ὑπάρχουν τρία διάφορα ἀλλήλων τετράπλευρα ἔχον- τα ὡς κορυφὰς τὰ ἀνωτέρω δοθέντα σημεῖα (Σχ. 194). Ἐκτὸς ἐναντίας δηλώ- σεως (ἐνδείξεως) ὁ ὅρος *τετράπλευρον* ἀναφέρεται εἰς τὸ ἁπλοῦν, κυρτὸν ἢ μὴ κυρτόν, τετράπλευρον.

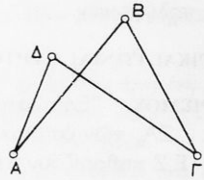
Αἱ μὴ διαδοχικαὶ κορυφαὶ Α, Γ, ὡς καὶ αἱ Β, Δ κάθε τετραπλεύρου θὰ ὀνο-



Σχ. 194.1



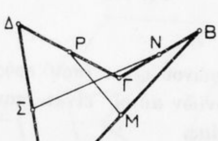
Σχ. 194.2



Σχ. 194.3

μάζωνται *ἀπέναντι* κορυφαὶ αὐτοῦ. Δύο πλευραὶ ἔχουσαι κοινὸν ἄκρον ὀνομά- ζονται *προσκείμεναι* πλευραὶ τοῦ τετραπλεύρου. Δύο πλευραὶ μὴ ἔχουσα κοι- νὸν ἄκρον, ὡς αἱ ΑΒ,ΓΔ ἢ αἱ ΒΓ,ΔΑ ὀνομάζονται *ἀπέναντι πλευραὶ* τοῦ τετρα- πλεύρου.

Οὕτω, εἰς τὸ τετράπλευρον ἔχομεν δύο ζεύγη ἀπέναντι κορυφῶν καὶ δύο ζεύγη ἀπέναντι πλευρῶν.



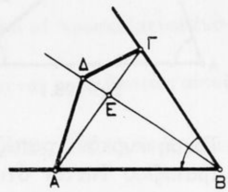
Σχ· 194.4

Αἱ διαγώνιοι ΑΓ καὶ ΒΔ τοῦ ἁπλοῦ τετρα- πλεύρου ΑΒΓΔ (Σχ. 194.1) εἶναι τὸ ζεῦγος τῶν ἀπέ- ναντι πλευρῶν, ΑΒ, ΓΔ τοῦ μὴ ἁπλοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ (Σχ. 194.2).

Τὰ δύο εὐθ. τμήματα ἕκαστον τῶν ὁποίων συν- δέει τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν τετραπλεύρου ὀνομάζονται *διάμεσοι* αὐτοῦ. Ἂν εἶναι Μ, Ν, Ρ, Σ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, αἱ διάμεσοι αὐτοῦ εἶναι τὰ εὐθ. τμήματα ΜΡ,ΝΣ (Σχ. 194.4).

195. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἵνα ἕνα τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι κυρτόν, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ὅπως αἱ διαγώνιοι ΑΓ καὶ ΒΔ αὐτοῦ ἔχουν κοινὸν σημεῖον.

Ἀπόδειξις. Ἂν τὸ τετράπλευρον εἶναι κυρτὸν (Σχ. 195.1) ἡ κορυφὴ Δ αὐτοῦ εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τῆς γωνίας (ΒΓ,ΒΑ). Ἡ ἡμιευθεῖα ἑπομένως ΒΔ ἔχει (61, Πόρισμα 2) σημεῖον μεταξὺ τῶν Α καὶ Γ. Δι' ὅμοιον λόγον ἡ διαγώνιος ΑΓ ἔχει σημεῖον μεταξὺ τῶν Β καὶ Δ.

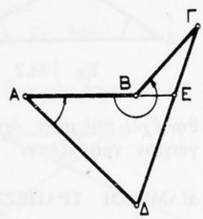


Σχ. 195.1

Ἀντιστρόφως, ἂν αἱ διαγώνιοι ΑΓ αἱ ΒΔ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ ἔχουν κοινὸν σημεῖον, ἔστω Ε, τότε δύο οἱαδήποτε διαδοχικαὶ κορυφαὶ τοῦ τετραπλεύρου κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας ἡ ὁποία συνδέει τὰς δύο ἄλλας, διαδοχικάς, κορυφὰς αὐτοῦ. Ἑπομένως τὸ τετράπλερρον εἶναι κυρτὸν (185).

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ. *1. Ἂν ἕνα τετράπλευρον εἶναι μὴ κυρτόν, μία τουλάχιστον ἐκ τῶν εὐθειῶν αἱ ὁποῖαι συνδέουν δύο διαδοχικὰς κορυφάς του ἔχει ἑκατέρωθεν αὐτῆς τὰς δύο ἄλλας διαδοχικὰς κορυφάς του.*

Ἂν αἱ κορυφαὶ Γ καὶ Δ κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς εὐθείας ΑΒ, ἡ εὐθεῖα ΑΒ ἔχει σημεῖον Ε μεταξὺ τῶν Γ καὶ Δ (24).



Σχ. 195.2

Ὅταν τὸ σημεῖον τοῦτο Ε κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Β, αἱ πλευραὶ ΑΒ καὶ ΓΔ ἔχουν κοινὸν σημεῖον καὶ ἑπομένως τὸ τετράπλευρον εἶναι μὴ ἁπλοῦν. Ὅταν τὸ σημεῖον Ε τῆς εὐθείας ΑΒ δὲν κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Β (Σχ. 195.2) τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ἕνα ἁπλοῦν μὴ κυρτὸν τετράπλευρον. Τὸ τετράπλευρον τοῦτο ἔχει μίαν μὴ κυρτὴν γωνίαν (ΒΑ,ΒΓ).

Ἡ κυρτὴ γωνία (ΒΑ,ΒΓ) δὲν εἶναι γωνία τοῦ τετραπλεύρου (τὰ ἐσωτερικὰ σημεῖα αὐτῆς δὲν εἶναι ἐσωτερικὰ σημεῖα τοῦ τετραπλεύρου).

196. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἑκάστη διαγώνιος κυρτοῦ τετραπλεύρου χωρίζει τοῦτο εἰς δύο τρίγωνα. (189)

Εἰς τὸ ἁπλοῦν μὴ κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ (Σχ. 195.2) ἡ μία μόνον διαγώνιος ΒΔ αὐτοῦ τὸ χωρίζει εἰς δύο τρίγωνα.

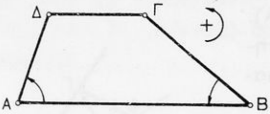
197. ΘΕΩΡΗΜΑ. Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντὸς κυρτοῦ τετραπλεύρου εἶναι ἴσον πρὸς μία πλήρη γωνίαν.

Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ ἁπλοῦ μὴ κυρτοῦ τετραπλεύρου εἶναι ἴσον πρὸς μίαν πλήρη γωνίαν.

Ἡ ἀπόδειξις τῶν ἀνωτέρω προτάσεων παραλείπεται ὡς ἁπλῆ.

ΤΟ ΤΡΑΠΕΖΙΟΝ

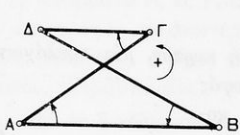
198. ΟΡΙΣΜΟΣ. Τραπέζιον *ὀνομάζεται κάθε τετράπλευρον τοῦ ὁποίου αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι παράλληλοι κατὰ τὸ ἕνα μόνον ζεῦγος.*



Σχ. 198.1

Αἱ παράλληλοι πλευραὶ τοῦ τραπεζίου ὀνομάζονται **βάσεις** αὐτοῦ. Ἡ ἀπόστασις τῶν παραλλήλων εὐθειῶν τῶν βάσεων τοῦ τραπεζίου ὀνομάζεται **ὕψος** αὐτοῦ. Ἕνα τραπέζιον δύναται νὰ εἶναι κυρτὸν (Σχ. 198.1) ἢ μὴ κυρτὸν (Σχ. 198.2). Τὸ μὴ κυρτὸν τραπέζιον δὲν εἶναι ἁπλοῦν τετράπλευρον. Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ τραπεζίου ἕπεται ὅτι :

ΠΟΡΙΣΜΑ *1. Παντὸς κυρτοῦ τραπεζίου, αἱ βάσεις εἶναι ἄνισα εὐθ. τμήματα.*



Σχ. 198.2

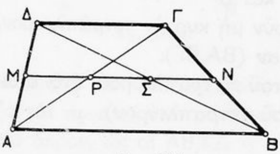
2. Παντὸς κυρτοῦ τραπεζίου αἱ γωνίαι αἱ προσκείμεναι ἑκάστης τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν αὐτοῦ εἶναι παραπληρωματικαὶ (96, Πόρισμα 1).

3. Παντὸς μὴ κυρτοῦ τραπεζίου αἱ κυρταὶ γωνίαι αἱ προσκείμεναι ἑκάστης τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν αὐτοῦ εἶναι ἀντίθετοι.

4. Κάθε τραπέζιον τὸ ὁποῖον ἔχει μίαν ὀρθὴν ἔχει καὶ μίαν δευτέραν ὀρθὴν γωνίαν. Τὸ τραπέζιον τοῦτο ὀνομάζεται **ὀρθογώνιον τραπέζιον.**

ΔΙΑΜΕΣΟΙ ΤΡΑΠΕΖΙΟΥ

199. ΘΕΩΡΗΜΑ. Τὰ μέσα τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν καὶ τὰ μέσα τῶν διαγωνίων κάθε τραπεζίου κεῖνται ἐπ' εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὰς βάσεις του.



Σχ. 199

Ἀπόδειξις. Ἡ διὰ τοῦ μέσου Μ (Σχ. 199) μιᾶς τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν τοῦ τραπεζίου παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις του διέρχεται ἀπὸ τὰ μέσα τῶν διαγωνίων του (126, Πόρισμα) καὶ ἀπὸ τὸ μέσον τῆς ἄλλης ἐκ τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν αὐτοῦ.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ *1. Ἡ διάμεσος κάθε κυρτοῦ τραπεζίου, ἡ συνδέουσα τὰ μέσα τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν αὐτοῦ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἡμιάθροισμα τῶν βάσεών του.*

Πράγματι, τὰ εὐθ. τμήματα ΜΣ καὶ ΣΝ (Σχ. 199) εἶναι ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς τὰ ἡμίση τῶν βάσεων ΑΒ καὶ ΓΔ (126, Πόρισμα).

2. Τὸ εὐθ. τμῆμα τὸ συνδέον τὰ μέσα τῶν διαγωνίων κάθε κυρτοῦ τραπεζίου, ἰσοῦται μὲ τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν βάσεων αὐτοῦ.

Πράγματι, τὸ εὐθ. τμῆμα ΡΣ (Σχ. 199) εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν εὐθ. τμημάτων ΜΣ καὶ ΜΡ τὰ ὁποῖα εἶναι ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς τὰ ἡμίση τῶν βάσεων ΑΒ καὶ ΓΔ τοῦ τραπεζίου.

ΤΟ ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ ΤΡΑΠΕΖΙΟΝ

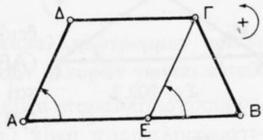
200. ΟΡΙΣΜΟΣ. **Ἰσοσκελὲς** *τραπέζιον ὀνομάζεται κάθε τραπέζιον, κυρτὸν ἢ μὴ κυρτόν, τοῦ ὁποίου αἱ μὴ παράλληλοι πλευραὶ εἶναι ἴσαι.*

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου ἕπεται ὅτι :

201. ΘΕΩΡΗΜΑ. 1. Παντὸς ἰσοσκελοῦς τραπεζίου αἱ γωνίαι αἱ προσκείμεναι ἑκάστης τῶν βάσεων αὐτοῦ εἶναι ἴσαι καὶ ἀντιστρόφως :

2. Κάθε τραπέζιον τοῦ ὁποίου αἱ γωνίαι αἱ προσκείμεναι μιᾶς βάσεως αὐτοῦ εἶναι ἴσαι, εἶναι ἰσοσκελές.

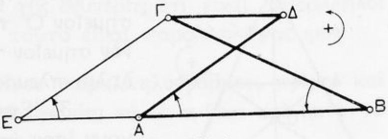
Ἀπόδειξις. Ἂν τὸ ἰσοσκελὲς τραπέζιον εἶναι κυρτὸν (Σχ. 201.1), θεωροῦμεν τὴν διὰ τῆς κορυφῆς αὐτοῦ Γ παράλληλον ΓΕ πρὸς τὴν ΔΑ (Ε ἐπὶ τῆς ΑΒ). Εἶναι ΓΕ = ΔΑ (125) καί, λόγω τῆς ὑποθέσεως, ΒΓ = ΔΑ. Ἑπομένως ΓΕ = ΓΒ, ἤτοι τὸ τρίγωνον ΓΒΕ εἶναι ἰσοσκελές. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι (ΕΒ, ΕΓ) = (ΒΓ, ΒΕ) καὶ ἐπειδὴ (ΑΒ, ΑΔ) = (ΕΒ, ΕΓ), θὰ εἶναι (ΑΒ,ΑΔ) = (ΒΓ, ΒΑ). Αἱ γωνίαι Δ καὶ Γ εἶναι ἴσαι ὡς παραπληρωματικαὶ τῶν Α αἱ Β ἀντιστοίχως.



Σχ. 201.1

Ἡ ἀνωτέρω, διὰ τῆς θεωρήσεως τῆς παραλλήλου ΓΕ πρὸς τὴν ΔΑ ἀπόδειξις ἰσχύει καὶ διὰ τὸ μὴ κυρτὸν ἰσοσκελὲς τραπέζιον (Σχ. 201.2).

2. Ἂν τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ (Σχ. 201.1) εἶναι κυρτόν, θεωροῦμεν τὴν παράλληλον ΓΕ πρὸς τὴν ΔΑ. Ἔχομεν ὅτι: (ΑΒ, ΑΔ) = (ΕΒ, ΕΓ). Ἀλλὰ ἐξ ὑποθέσεως ἔχομεν (ΑΒ, ΑΔ) = (ΒΓ, ΒΑ). Ἑπομένως (ΒΓ, ΒΑ) = (ΕΒ, ΕΓ). Ἐκ τῆς τελευταίας αὐτῆς ἕπεται (90) ὅτι ΒΓ = ΓΕ. Ἀλλὰ ΔΑ = ΓΕ (125). Ἑπομένως ΒΓ = ΔΑ, ἤτοι τὸ τραπέζιον εἶναι ἰσοσκελές.



Σχ. 201.2

Ἂν εἶναι (ΔΑ, ΔΓ) = (ΓΔ, ΓΒ), τότε θὰ εἶναι καὶ (ΑΒ, ΑΔ) = (ΒΓ, ΒΑ) καί, ὡς ἀπεδείχθη, ΒΓ = ΑΔ.

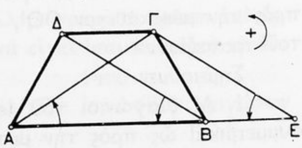
Ἡ ἀνωτέρω ἀπόδειξις ἰσχύει καὶ διὰ τὸ μὴ κυρτὸν ἰσοσκελὲς τραπέζιον (Σχ. 201.2).

202. ΘΕΩΡΗΜΑ. 1. Αἱ διαγώνιοι παντὸς ἰσοσκελοῦς τραπεζίου εἶναι ἴσαι, καὶ

2. Ἂν αἱ διαγώνιοι τραπεζίου εἶναι ἴσαι, τότε τὸ τραπέζιον εἶναι ἰσοσκελές.

Ἀπόδειξις. 1. Τὸ ἀποδεικτέον, καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις: κυρτοῦ ἢ μὴ κυρτοῦ ἰσοσκελοῦς τραπεζίου ΑΒΓΔ, προκύπτει ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΒΑΔ (79, Πόρισμα).

2. Ἂν τὸ τραπέζιον εἶναι κυρτὸν (Σχ. 202.1) θεωροῦμεν τὴν διὰ τῆς κορυφῆς Γ παράλληλον ΓΕ πρὸς τὴν ΔΒ (Ε ἐπὶ τῆς ΑΒ). Εἶναι ΔΒ = ΓΕ



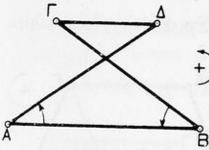
Σχ. 202.1

καὶ ἐξ ὑποθέσεως : ΒΔ = ΑΓ. Ἑπομένως εἶναι ΓΑ = ΓΕ. Ἐκ τῆς τελευταίας αὐτῆς ἕπεται ὅτι, (ΑΒ, ΑΓ) = (ΕΓ, ΕΑ). Ἀλλὰ καὶ (ΒΔ, ΒΑ) = (ΕΓ, ΕΑ) (96, Πόρισμα 1), ἑπομένως : (ΑΒ, ΑΓ) = (ΒΔ, ΒΑ). Ἐκ τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΒΑΔ ἔχομεν (80, Πόρισμα) : ΒΓ = ΔΑ, ἤτοι ὅτι τὸ τραπέζιον εἶναι ἰσοσκελές.

Ἂν τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ (Σχ. 202.2) εἶναι μὴ κυρτόν, τότε τὸ κυρτὸν τραπέζιον ΑΒΔΓ εἶναι ἰσοσκελές, διότι ἐξ ὑποθέσεως ΑΓ = ΒΔ (διαγώνιοι τοῦ μὴ κυρτοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ) καὶ ἑπομένως (I) ΑΔ = ΒΓ.

Σημειοῦμεν ὅτι :

1. Εἰς τὸ κυρτὸν ἰσοσκελὲς τραπέζιον ΑΒΓΔ (Σχ. 202.3), τὸ κοινὸν σημεῖον Ο τῶν διαγωνίων αὐτοῦ ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν ἄκρων ἑκάστης βάσεως αὐτοῦ, ἤτοι ΟΑ = ΟΒ καὶ ΟΓ = ΟΔ.

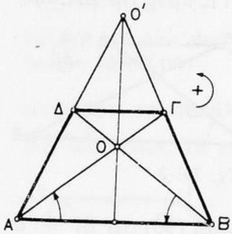


Σχ. 202.2

Τὸ αὐτὸ ἰσχύει καὶ διὰ τὸ κοινὸν σημεῖον Ο′ τῶν εὐθειῶν ΑΔ καὶ ΒΓ. Πράγματι, ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν γωνιῶν (ΑΒ, ΑΓ) καὶ (ΒΔ, ΒΑ) (Σχ. 202.3) ἕπεται ὅτι ΟΑ = ΟΒ καὶ ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν γωνιῶν (ΓΔ, ΓΑ) καὶ (ΔΒ, ΔΓ) (90) ὅτι ΟΓ = ΟΔ.

Ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν γωνιῶν Α καὶ Β τοῦ τραπεζίου ἕπεται ὅτι Ο′Α = = Ο′Β καὶ ἐξ αὐτῆς ὅτι Ο′Γ = Ο′Δ.

2. Ἡ ἀνωτέρω παρατήρησις ἰσχύει καὶ εἰς τὸ μὴ κυρτὸν τραπέζιον ΑΒΓΔ (Σχ. 202.2), διότι τὸ κοινὸν σημεῖον Ο′ τῶν διαγωνίων εὐθειῶν αὐτοῦ εἶναι τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν ΑΓ καὶ ΒΔ (ΑΓ καὶ ΒΔ αἱ μὴ παράλληλοι πλευραὶ τοῦ κυρτοῦ τραπεζίου ΑΒΔΓ).



Σχ. 202.3

3. Ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Ο καὶ Ο′ (Σχ. 202.3) ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τῶν Α καὶ Β, κεῖνται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου τῆς βάσεως ΑΒ τοῦ ἰσοσκελοῦς τραπεζίου ΑΒΓΔ. ἤτοι ἡ εὐθεῖα ΟΟ′ εἶναι ἡ μεσοκάθετος τῆς βάσεως ΑΒ τοῦ τραπεζίου καὶ δι᾽ ὅμοιον λόγον καὶ ἡ μεσοκάθετος τῆς βάσεως ΓΔ αὐτοῦ.

203. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἡ μεσοκάθετος τῶν βάσεων ἰσοσκελοῦς τραπεζίου εἶναι ἄξων συμμετρίας αὐτοῦ.

Ἀπόδειξις. Τὸ συμμετρικὸν κάθε σημείου τῆς μιᾶς τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν τοῦ τραπεζίου ὡς πρὸς τὴν ΟΟ′ (202) εἶναι σημεῖον τῆς ἄλλης ἐκ τούτων, διότι ἡ ΟΟ′ εἶναι διχοτόμος (118, Πόρισμα) τῆς γωνίας Ο′.

Ἐξ ἄλλου τὸ συμμετρικὸν κάθε σημείου τῆς μιᾶς ἢ τῆς ἄλλης βάσεως ὡς πρὸς τὴν μεσοκάθετον ΟΟ′, εἶναι σημεῖον τῆς αὐτῆς βάσεως δηλαδὴ σημεῖον τοῦ τραπεζίου.

Σημειοῦμεν ὅτι :

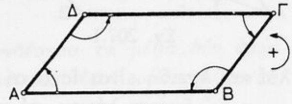
1. Αἱ διαγώνιοι τοῦ ἰσοσκελοῦς, κυρτοῦ ἢ μὴ κυρτοῦ, τραπεζίου εἶναι συμμετρικαὶ ὡς πρὸς τὴν μεσοκάθετον τῶν βάσεων αὐτοῦ καὶ ἑπομένως εἶναι ἴσαι ἐκ τοῦ λόγου τούτου.

ΤΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟΝ

204. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ὀνομάζομεν* **παραλληλόγραμμον** *κάθε τετράπλευρον τοῦ ὁποίου αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι παράλληλοι καὶ κατὰ τὰ δύο ζεύγη.*

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου ἕπεται ὅτι :

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Κάθε παραλληλόγραμμον εἶναι κυρτὸν τετράπλευρον.*



Σχ. 204

Πράγματι, οἱαιδήποτε καὶ ἂν εἶναι δύο διαδοχικαὶ κορυφαὶ Α,Β αὐτοῦ, αἱ δύο ἄλλαι Γ,Δ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας ΑΒ, διότι ἄλλως αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ δὲν θὰ ἦταν παράλληλοι (Σχ. 204).

ΓΩΝΙΑΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟΥ.

205. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἵνα ἕνα κυρτὸν τετράπλευρον εἶναι παραλληλόγραμμον πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι παραπληρωματικαὶ αἱ προσκείμεναι τῶν πλευρῶν γωνίαι αὐτοῦ.

Ἀπόδειξις. Ἂν τὸ κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον, αἱ προσκείμεναι τῆς πλευρᾶς ΑΒ γωνίαι Α καὶ Β αὐτοῦ εἶναι παραπληρωματικαὶ (96, Πόρισμα 1).

Ἀντιστρόφως, ἂν εἰς τὸ κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι $Α + Β = \pi$ καὶ $Β + Γ = \pi$, τότε ἐκ τῆς πρώτης τῶν ἀνωτέρω ἕπεται (94, πόρισμα 1) ὅτι εἶναι παράλληλοι αἱ ΑΔ καὶ ΒΓ καὶ ἐκ τῆς δευτέρας ὅτι εἶναι παράλληλοι αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ, ἤτοι ὅτι τὸ τετράπλευρον τοῦτο εἶναι παραλληλόγραμμον.

206. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἵνα ἕνα τετράπλευρον εἶναι παραλληλόγραμμον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι κυρτὸν καὶ αἱ ἀπέναντι αὐτοῦ γωνίαι νὰ εἶναι ἴσαι καὶ κατὰ τὰ δύο ζεύγη.

Ἀπόδειξις. Αἱ ἀπέναντι γωνίαι κάθε παραλληλογράμμου ἔχουν τὸ αὐτὸ παραπλήρωμα (96, Πόρισμα 1) καὶ ἑπομένως εἶναι ἴσαι.

Ἔστω ὅτι εἰς τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ (Σχ. 204) εἶναι (I) $Α = Γ$ καὶ $Β = Δ$.

Ἂν τὸ τετράπλευρον εἶναι κυρτόν, τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν Α, Β, Γ, Δ αὐτοῦ εἶναι ἴσον πρὸς τέσσαρας ὀρθὰς γωνίας. Ἑπομένως, λόγω τῶν (I), θὰ εἶναι:

$$Α + Β = Β + Γ = Γ + Δ = Δ + Α = \pi$$

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι τὸ κυρτὸν τοῦτο τετράπλευρον εἶναι παραλληλόγραμμον (205).

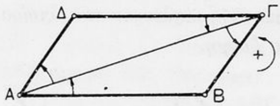
ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΠΛΕΥΡΩΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟΥ

207. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἵνα ἕνα τετράπλευρον εἶναι παραλληλόγραμμον πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι κυρτὸν καὶ αἱ ἀπέναντι πλευραὶ αὐτοῦ νὰ εἶναι ἴσαι καὶ κατὰ τὰ δύο ζεύγη.

Ἀπόδειξις. 1. Τὸ ἀποδεικτέον προκύπτει ἐκ τῶν ἴσων (80) τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΓΔΑ. (Σχ. 207.1)

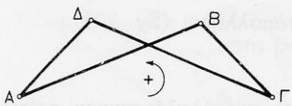
2. Καθ' ὅσον ἀφορᾶ τὴν ἀντίστροφον πρότασιν παρατηροῦμεν :

Ἔστω ΑΒΓΔ (Σχ. 207.1) ἕνα τετράπλευρον εἰς τὸ ὁποῖον ΑΒ = ΓΔ καὶ ΒΓ = ΔΑ. Ἐκ τῶν ἴσων τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΓΔΑ (91) ἕπεται ὅτι : (ΑΒ, ΑΓ) = (ΓΔ, ΓΑ) καὶ (ΓΑ, ΓΒ) = (ΑΓ, ΑΔ). Ἂν τὰ σημεῖα Β καὶ Δ κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς εὐθείας ΑΓ (Σχ. 207.1), αἱ γωνίαι (ΑΓ, ΑΓ) καὶ (ΓΔ,ΓΑ) εἶναι ἐντὸς ἐναλλὰξ καὶ ἐπειδὴ εἶναι ἴσαι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι.



Σχ. 207.1

Δι' ὅμοιον λόγον, αἱ εὐθεῖαι ΑΔ καὶ ΒΓ εἶναι παράλληλοι, καὶ ἐπομένως τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον (204).



Σχ. 207.2

Ἂν τὰ σημεῖα Β καὶ Δ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας ΑΓ (Σχ. 207.2), αἱ διαγώνιοι ΑΓ καὶ ΒΔ (εὐθ. τμήματα ΑΓ καὶ ΒΔ) δὲν ἔχουν κοινὸν σημεῖον. Τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ δὲν εἶναι ἐπομένως κυρτὸν (195) καὶ λόγω τούτου δὲν εἶναι παραλληλόγραμμον.

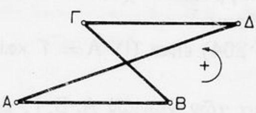
208. ΘΕΩΡΗΜΑ. *Ἵνα ἕνα τετράπλευρον εἶναι παραλληλόγραμμον πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι κυρτὸν καὶ αἱ ἀπέναντι πλευραὶ αὐτοῦ νὰ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι κατὰ τὸ ἓν ζεῦγος.*

Ἀπόδειξις. Ἂν τὸ τετράπλευρον εἶναι παραλληλόγραμμον, τὸ ἀποδεικτέον προκύπτει ἐκ τῶν ἴσων (80) τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΓΔΑ (Σχ. 207.1).

Καθ' ὅσον ἀφορᾷ τὴν ἀντίστροφον πρότασιν παρατηροῦμεν :

Ἔστω ΑΒΓΔ ἕνα τετράπλευρον εἰς τὸ ὁποῖον δύο ἀπέναντι πλευραί, ἔστω αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ, εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι (Σχ. 207.1 καὶ 208).

Ἂν τὸ τετράπλευρον εἶναι κυρτὸν (Σχ. 208), τὰ εὐθ. τμήματα ΒΑ καὶ ΓΔ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας ΒΓ καὶ τὸ ἀποδεικτέον προκύπτει ἐκ τῶν ἴσων τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΓΔΑ (79).



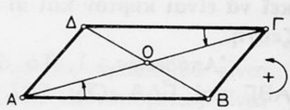
Σχ. 208.2

Ἂν τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ δὲν εἶναι κυρτὸν (Σχ. 208) δὲν δύναται νὰ εἶναι παραλληλόγραμμον.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΔΙΑΓΩΝΙΩΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟΥ

209. ΘΕΩΡΗΜΑ. *Ἵνα ἕνα τετράπλευρον εἶναι παραλληλόγραμμον πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ διχοτομοῦνται αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ.*

Ἀπόδειξις. Κάθε παραλληλόγραμμον εἶναι κυρτὸν τετράπλευρον (204, Πόρισμα). Ἑπομένως αἱ διαγώνιοι ΑΓ καὶ ΒΔ (Σχ. 209) αὐτοῦ τέμνονται. Ἐξ ἄλλου ἐκ τῶν ἴσων τριγώνων ΟΑΒ καὶ ΟΓΔ (80) ἕπεται ὅτι : ΟΑ = ΟΓ καὶ ΟΒ = ΟΔ.



Σχ. 209

Ἀντιστρόφως, ἂν αἱ διαγώνιοι τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ διχοτομοῦνται, αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι συμμετρικαὶ ὡς πρὸς τὸ σημεῖον Ο καὶ λόγω τούτου παράλληλοι (169).

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος ἕπεται ὅτι :

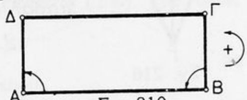
ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ. *1. Τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαγωνίων κάθε παραλληλογράμμου εἶναι κέντρον συμμετρίας τοῦ τετραπλεύρου τούτου.*

2. Ἡ διάμεσος κάθε παραλληλογράμμου, ἡ συνδέουσα τὰ μέσα δύο ἀπέναντι πλευρῶν αὐτοῦ, εἶναι ἴση πρὸς τὰς δύο ἄλλας πλευρὰς αὐτοῦ καὶ περιέχει τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαγωνίων του.

ΤΟ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΝ

210. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ὀρθογώνιον *ὀνομάζεται κάθε τετράπλευρον τοῦ ὁποίου αἱ γωνίαι εἶναι ὀρθαί. (Σχ. 210).*

Ἀποδεικνύεται εὐκόλως ὅτι :



Σχ. 210

211. ΘΕΩΡΗΜΑ. Πᾶν κυρτὸν τετράπλευρον τοῦ ὁποίου αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι εἶναι ὀρθογώνιον.

Ἀπόδειξις. Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ τετραπλεύρου τούτου εἶναι ἴσον πρὸς τέσσαρας ὀρθάς (199). Ἐπειδὴ αἱ γωνίαιαὐ τοῦ εἶναι ἴσαι, ἑκάστη τούτων θὰ εἶναι ὀρθή.

212. ΘΕΩΡΗΜΑ. Πᾶν ὀρθογώνιον εἶναι παραλληλόγραμμον.

Ἀπόδειξις. Αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι παράλληλοι (94, Πόρισμα 1).

213. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν ἑνὸς παραλληλογράμμου μία γωνία εἶναι ὀρθή, τότε τοῦτο εἶναι ὀρθογώνιον.

Ἀπόδειξις. Δύο γωνίαι τοῦ παραλληλογράμμου ἔχουσαι διαδοχικὰς κορυφὰς εἶναι παραληρωματικαὶ (94, Πόρισμα 1). Ἂν ἑπομένως ἡ μία τούτων εἶναι ὀρθὴ θὰ εἶναι ὅλαι αἱ γωνίαι ὀρθαί.

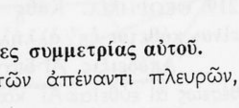
214. ΘΕΩΡΗΜΑ. Αἱ δύο διάμεσοι ὀρθογωνίου εἶναι ἄξονες συμμετρίας αὐτοῦ.

Ἀπόδειξις. Ἑκάστη τούτων εἶναι μεσοκάθετος τῶν ἀπέναντι πλευρῶν, ἀπὸ τὰ μέσα τῶν ὁποίων διέρχεται.

Σημειοῦμεν ὅτι :

Αἱ διαγώνιοι τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι συμμετρικαὶ ἀλλήλων ὡς πρὸς ἑκάστην τῶν διαμέσων αὐτοῦ.

215. ΘΕΩΡΗΜΑ 1. Παντὸς ὀρθογωνίου οἱ διαγώνιοι εἶναι ἴσαι, καὶ 2. Ἂν παραλληλογράμμου αἱ διαγώνιοι εἶναι ἴσαι, τότε τοῦτο εἶναι ὀρθογώνιον.



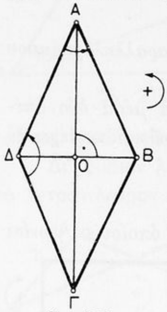
Σχ. 215

Ἀπόδειξις. 1. Αἱ διαγώνιοι εἶναι συμμετρικαὶ ὡς πρὸς ἑκάστην τῶν διαμέσων τοῦ ὀρθογωνίου, καὶ ἑπομένως ἴσαι. (Σχ. 215).

2. Ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (Σχ. 215) τοῦ ὁποίου ἡ διάμεσος ΒΟ εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς ΑΓ, εἰς τὴν ὁποίαν ἀντιστοιχεῖ, ἔχομεν (136) ὅτι $(\text{ΒΓ}, \text{ΒΑ}) = \frac{\pi}{2}$.

Ο ΡΟΜΒΟΣ

216. ΟΡΙΣΜΟΣ **Ρόμβος** *ὀνομάζεται κάθε τετράπλευρον τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ πλευραὶ εἶναι ἴσαι (Σχ. 216).*



Σχ. 216

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ ἕπεται :

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ. 1. *Κάθε παραλληλόγραμμον τοῦ ὁποίου δύο προσκείμεναι πλευραὶ εἶναι ἴσαι, εἶναι ρόμβος.*

Πράγματι, ἔστω ὅτι ΑΒ = ΔΑ. Ἐπειδὴ τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι, ἐξ ὑποθέσεως παραλληλόγραμμον, θὰ εἶναι (207): ΑΒ = ΓΔ καὶ ΔΑ = ΒΓ. Ὥσται ὅλαι αἱ πλευραὶ τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι ἴσαι.

2. *Κάθε ρόμβος εἶναι παραλληλόγραμμον.*

217. ΘΕΩΡΗΜΑ. Αἱ εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι τὰς ἀπέναντι κορυφὰς ρόμβου[1] εἶναι ἄξονες συμμετρίας αὐτοῦ.

Ἀπόδειξις.. Ἐκ τῶν ΑΒ = ΑΔ καὶ ΓΒ = ΓΔ ἕπεται ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΓ εἶναι ἡ μεσοκάθετος τῆς διαγωνίου ΒΔ τοῦ ρόμβου (159).

Δι' ὅμοιον λόγον καὶ ἡ εὐθεῖα ΒΔ εἶναι ἡ μεσοκάθετος τῆς διαγωνίου ΑΓ.

ΠΟΡΙΣΜΑ. *1. Αἱ διαγώνιοι τοῦ ρόμβου διχοτομοῦνται καὶ κεῖνται ἐπὶ τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν του.*

218. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν αἱ εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι τὰς ἀπέναντι κορυφὰς τετραπλεύρου εἶναι ἄξονες συμμετρίας αὐτοῦ, τὸ τετράπλευρον τοῦτο εἶναι ρόμβος.

Ἀπόδειξις. Δύο οἱαιδήποτε διαδοχικαὶ πλευραὶ τοῦ τετραπλεύρου τούτου εἶναι ἴσαι, ὡς συμμετρικαὶ ὡς πρὸς τὴν διαγώνιον εὐθεῖαν ΑΓ ἢ τὴν ΒΔ.

219. ΘΕΩΡΗΜΑ. Κάθε παραλληλόγραμμον τοῦ ὁποίου αἱ διαγώνιοι εὐθεῖαι εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας εἶναι ρόμβος.

Ἀπόδειξις. Αἱ διαγώνιοι ΑΓ καὶ ΒΔ διχοτομοῦνται (209). Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως αἱ εὐθεῖαι ΑΓ καὶ ΒΔ εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας, ἔχομεν ὅτι ἑκάστη τούτων κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου τῆς ἄλλης. Οὕτω, θὰ εἶναι ΑΒ = ΑΔ.

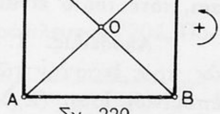
ΤΟ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟΝ

220. ΟΡΙΣΜΟΣ. **Τετράγωνον** *ὀνομάζεται κάθε τετράπλευρον τοῦ ὁποίου αἱ γωνίαι εἶναι ὀρθαὶ καὶ αἱ πλευραὶ ἴσαι (Σχ. 220).*

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ ἕπεται ὅτι :

ΠΟΡΙΣΜΑ *1. Ἵνα ἕνα τετράπλευρον εἶναι τετράγωνον πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι ρόμβος καὶ ὀρθογώνιον.*

2. Ἵνα ἕνα παραλληλλόγραμμον εἶναι τετράγωνον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἔχῃ μίαν γωνίαν ὀρθὴν καὶ δύο προσκειμένας πλευράς, ἴσας.



Σχ. 220

---

1. Διαγώνιοι εὐθεῖαι.

3. Ἵνα ἕνα τετράπλευρον εἶναι τετράγωνον πρέπει καὶ ἀρκεῖ αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ νὰ διχοτομοῦνται καὶ νὰ εἶναι ἴσαι καὶ κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας.

4. Κάθε τετράγωνον ἔχει τέσσαρας ἄξονας συμμετρίας : τὰς δύο διαγωνίους καὶ τὰς δύο διαμέσους εὐθείας αὐτοῦ.

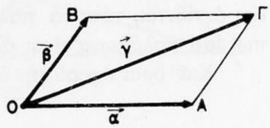
ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

Ἀναφερόμενοι εἰς τὴν σχέσιν τῆς ἰσότητος εἰς τὸ σύνολον τῶν διανυσμάτων τοῦ ἐπιπέδου, σημειοῦμεν ὅτι :

Δύο διανύσμα $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{A'B'}$ εἶναι **ἴσα** ἢ **ἀντίθετα**, καθ' ὅσον δυχστομοῦνται τὰ εὐθ. τμήματα AB', $A'B$ ἢ τὰ AA', BB' ἀντιστοίχως. (209)

Δυνάμεθα, οὕτω, νὰ ἔχωμεν ἕνα ὁρισμὸν ἰσοδύναμον τοῦ δοθέντος (106). Καθ' ὅσον, ἤδη, ἀφορᾶ, εἰς τὴν πρᾶξιν τῆς προσθέσεως, ἔχομεν :

221. ΟΡΙΣΜΟΣ Ἔστωσαν $\vec{\alpha}$ καὶ $\vec{\beta}$ δύο διανύσματα τοῦ ἐπιπέδου.



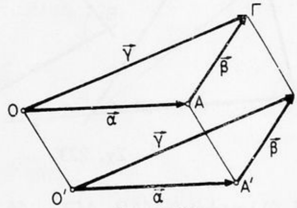
Σχ. 221.1

Θεωροῦμεν ἕνα σημεῖον 0 τοῦ ἐπιπέδου, τὰ διανύσματα $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$ καὶ $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$ καὶ τὸ παραλληλόγραμμον ΟΑΓΒ (Σχ. 221.1) Τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{O\Gamma}$ ὀνομάζεται **ἄθροισμα** τῶν διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ καὶ $\vec{\beta}$ κατὰ τὴν θεωρουμένην διάταξιν (α, β).

Ἂν εἶναι $\vec{\gamma}$ ἕνα στοιχεῖον τῆς κλάσεως ἰσότητος τῆς ὁριζομένης ἀπὸ τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{O\Gamma}$, θὰ σημειοῦμεν: $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

Τὸ ἀνωτέρω ἄθροισμα εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ θεωρουμένου σημείου Ο.

Πράγματι, ἔστω $\overrightarrow{O'\Gamma'}$ τὸ εἰς τὸ σημεῖον Ο' ἀντιστοιχοῦν ἄθροισμα τῶν διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ καὶ $\vec{\beta}$ (Σχ. 221.2). Εἶναι : $\overrightarrow{O'O} = \overrightarrow{A'A} = \overrightarrow{\Gamma'\Gamma}$. Ἑπομένως (106) εἶναι καὶ $\overrightarrow{O'\Gamma'} = \overrightarrow{O\Gamma}$.



Σχ. 221.2

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ ἀθροίσματος δύο διανυσμάτων τοῦ ἐπιπέδου προκύπτει ὅτι :

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Εἰς τὸ σύνολον τῶν διανυσμάτων τοῦ ἐπιπέδου ἰσχύουν αἱ ἰδιότητες τῆς προσθέσεως : μονότροπος, μεταθετικὴ καὶ προσεταιριστική.*

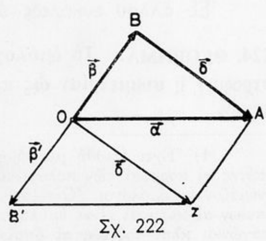
ΔΙΑΦΟΡΑ ΔΥΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

222. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ὀνομάζομεν **διαφορὰν** δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ καὶ $\vec{\beta}$, κατὰ τὴν θεωρουμένην διάταξιν, τὸ ἄθροισμα τοῦ $\vec{\alpha}$ καὶ τοῦ ἀντιθέτου $\vec{\beta'}$ τοῦ $\vec{\beta}$.

Ἂν εἶναι $\overrightarrow{OA}$ καὶ $\overrightarrow{OB}$ δύο διανύσματα ἴσα ἀντιστοίχως πρὸς τὰ $\vec{\alpha}$ καὶ $\vec{\beta}$, τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{BA}$ εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν $\vec{\alpha}$ καὶ $\vec{\beta}$ (Σχ. 222). Πράγματι, ἔχομεν

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OZ} = \overrightarrow{BA}$$

Ἂν συμβολίσωμεν μὲ τὸ σύμβολον $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ τὴν διαφορὰν $\overrightarrow{BA} = \vec{\delta}$, θὰ σημειοῦμεν : $\vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{\delta}$.



Σχ. 222

Σημείωσις. Καθ' ὅσον ἀφορᾷ τὸ **γινόμενον** διανύσματος $\vec{\alpha}$ τοῦ ἐπιπέδου ἐπὶ φυσικὸν ἀριθμὸν μ, ὡς καὶ τὸ **πηλίκον** διανύσματος $\vec{\alpha}$ τοῦ ἐπιπέδου διὰ φυσικοῦ ν, ἰσχύουν οἱ ἐν παραγράφῳ (49) ὁρισμοὶ οἱ ἀναφερόμενοι εἰς τὰ εὐθ. τμήματα ἐπὶ ἄξονος μὲ τὴν παρατήρησιν ὅτι ὁ ἄξων ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἐμφανίζεται τὸ ἀνωτέρω γινόμενον ἢ τὸ πηλίκον εἶναι ὁ ἄξων τοῦ διανύσματος $\vec{\alpha}$ ἢ ἕνας ἄξων τῆς αὐτῆς διευθύνσεως πρὸς τὸν φορέα τοῦ $\vec{\alpha}$.

ΠΟΛΥΓΩΝΑ ΙΣΑ

223. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Δύο ὁμοίως προσανατολισμένα ὁμόλογα*[1] *κυρτὰ πολύγωνα ΑΒΓ. . .ΕΖ καὶ Α'Β'Γ' . . . Ε'Ζ' ὀνομάζονται* **ἴσα**, *ὅταν εἶναι ἴσαι αἱ ὁμόλογαι πλευραὶ καὶ αἱ ὁμόλογοι γωνίαι τούτων.*

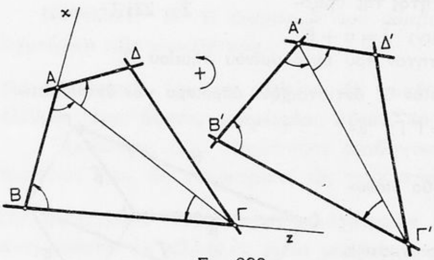
Ἤτοι, ὅταν :

$A = A'$, $B = B'$, $\Gamma = \Gamma'$, ..., $Z = Z'$ καὶ

$AB = A'B'$, $B\Gamma = B'\Gamma'$, $\Gamma\Delta = \Gamma'\Delta'$,..., $ZA = Z'A'$.

Ἂν αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι, ἀλλὰ αἱ ὁμόλογοι γωνίαι ἀντίθετοι, τότε τὰ πολύγωνα ὀνομάζωνται **ἀντιρρόπως ἴσα.** Δύο ἀντιρρόπως ἴσα πολύγωνα εἶναι ἀντιθέτως προσανατολισμένα.

Καθ' ὅσον ἀφορᾷ τὴν ὕπαρξιν δύο ἴσων κυρτῶν πολυγώνων. παρατηροῦμεν:



Σχ. 223

Ἂν ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' εἶναι δύο ἴσα τρίγωνα τοῦ ἐπιπέδου καὶ Δ τυχὸν σημεῖον ἐσωτερικὸν π.χ. τῆς γωνίας (ΒΓ, ΒΑ), ὑπάρχει σημεῖον Δ' καὶ ἕνα μόνον, ὥστε τὰ τρίγωνα ΓΔΑ καὶ Γ'Δ'Α' νὰ εἶναι ἴσα. Τὰ πολύγωνα ΑΒΓΔ καὶ Α'Β'Γ'Δ' εἶναι ἴσα ὑπὸ τὴν ἔννοιαν τοῦ δοθέντος ὁρισμοῦ. Πράγματι, αἱ πλευραί των ΓΔ, Γ'Δ' καὶ ΔΑ, Δ'Α' καὶ ἴσαι λόγῳ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων ΑΓΔ καὶ Α'Γ'Δ'. Ἐξ ἄλλου ἐκ τῶν (ΑΒ, ΑΓ) = (Α'Β', Α'Γ') καὶ (ΑΓ, ΑΔ) = (Α'Γ'Α'Δ'), διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη προκύπτει ὅτι αἱ γωνίαι (ΑΒ, ΑΔ) καὶ (Α'Β', Α'Δ') τῶν πολυγώνων εἶναι ἴσαι καὶ δι' ὅμοιον λόγον κσὶ αἱ (ΓΔ, ΓΒ) καὶ (Γ'Δ', Γ'Β'). Ἡ ἰσότης τῶν γωνιῶν Δ καὶ Δ' προκύπτει ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων ΑΓΔ καὶ Α'Γ'Δ'.

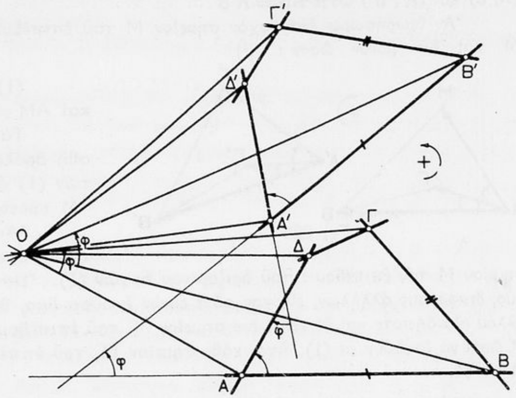
Ἐξ ἄλλου εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι :

224. ΘΕΩΡΗΜΑ. Τὸ ὁμόλογον κυρτοῦ πολυγώνου εἰς παράλληλον μεταφορὰν ἢ στροφὴν ἢ συμμετρίαν ὡς πρὸς σημεῖον, εἶναι πολύγωνον ἴσον πρὸς τὸ θεωρούμενον.

(1) Ἔχει ὁρισθῆ μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία μεταξὺ τῶν κορυφῶν των. Βάσει ταύτης αἱ κορυφαὶ τῶν πολυγώνων ἀντιστοιχοῦν διττῶς πρὸς ἀλλήλας. Αἱ ἀντίστοιχαι κορυφαὶ ὀνομάζονται *ὁμόλογοι*. *Ὁμόλογοι* γωνίαι τῶν πολυγώνων ὀνομάζονται αἱ γωνίαι τούτων, τῶν ὁποίων αἱ κορυφαὶ εἶναι ὁμόλογοι. Ὁμόλογοι πλευραί, διαγώνιοι κλπ. ὀνομάζονται αἱ πλευραί, διαγώνιοι κλπ. τούτων, αἱ ὁποῖαι ὁρίζονται ἀπὸ ὁμολόγους κορυφάς.

Τὸ ὁμόλογον κυρτοῦ πολυγώνου, εἰς μίαν συμμετρίαν ὡς πρὸς εὐθεῖαν, εἶναι καὶ πολύγωνον ἀντιρρόπως ἴσον πρὸς τὸ θεωρούμενον.

Ἀπόδειξις. Πράγματι, ἔστω ΑΒΓΔ ἕνα κυρτὸν τετράπλευρον καὶ Α΄Β΄Γ΄Δ΄ τὸ ὁμόλογον αὐτοῦ κατὰ μίαν στροφὴν R (Ο, φ) (Σχ. 224.1).

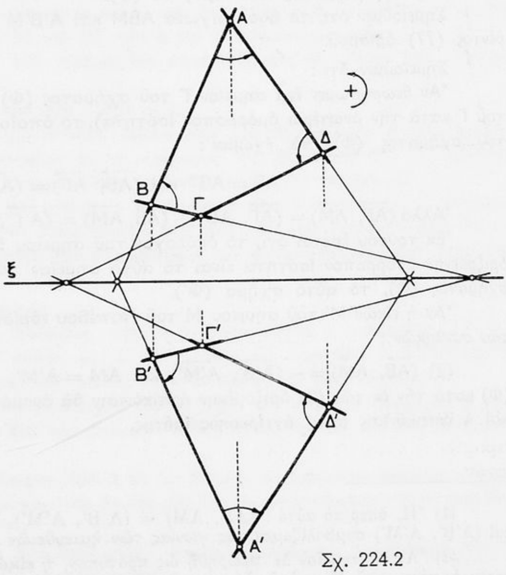


Σχ. 224.1

Αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ τῶν ἀνωτέρω τετραπλεύρων εἶναι (167) ἴσαι. Πράγματι, ἡ πλευρὰ π.χ. Α΄Β΄ εἶναι εὐθ. τμῆμα ὁμόλογον τοῦ ΑΒ κατὰ τὴν ἀνωτέρω στροφήν. Ἐξ ἄλλου, ἐκ τῶν ἴσων (79) τριγώνων ΟΑΒ καὶ ΟΑ΄Β ἕπεται ὅτι (1) (ΑΒ, ΑΟ)= (Α΄Β΄, Α΄Ο΄) καὶ ἐπειδὴ ἐκ τῶν ἴσων τριγώνων ΟΑΔ, ΟΑ΄Δ΄ ἔχομεν ὅτι (2) (ΑΔ, ΑΟ) = (Α΄Δ΄, Α΄Ο΄), δι᾽ ἀφαιρέσεως τῶν ἀνωτέρω (1) καὶ (2) κατὰ μέλη ἔχομεν (ΑΒ, ΑΔ) = (Α΄Β΄, Α΄Δ΄), ἤτοι ὅτι αἱ γωνίαι Α καὶ Α΄ τῶν θεωρουμένων τετραπλεύρων εἶναι ἴσαι (Βλέπε καὶ 167, Πόρισμα 2).

Ἡ γενομένη ἀπόδειξις ἰσχύει καὶ διὰ τὸ τυχὸν κυρτὸν πολύγωνον ΑΒΓ. . . ΕΖ.

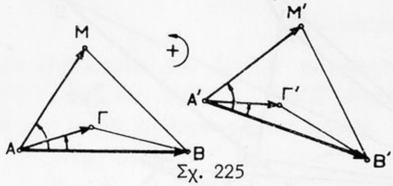
Ἐξ ἄλλου ὁμοία εἶναι ἡ ἀπόδειξις διὰ δύο κυρτὰ πολύγωνα ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἓν εἶναι ὁμόλογον τοῦ ἄλλου κατὰ μίαν μεταφοράν, συμμετρίαν ὡς πρὸς σημεῖον (μερικὴ περίπτωσις στροφῆς) ἢ συμμετρίαν ὡς πρὸς εὐθεῖαν ξ (Σχ. 224.2). Εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς συμμετρίας ὡς πρὸς σημεῖον αἱ ὁμόλογοι, κατὰ τὴν συμμετρίαν, πλευραὶ εἶναι (172, Πόρισμα 1) ἴσαι. καὶ αἱ ὁμόλογοι γωνίαι ἀντίθετοι (172, Πόρισμα 2).



Σχ. 224.2

225. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἔστωσαν ἐπὶ τοῦ προσανατολισμένου ἐπιπέδου δύο ζεύγη σημείων : (Α, Β) καὶ (Α′, Β′) ὥστε $AB = A'B'$.

Ἂν θεωρήσωμεν ἕνα τυχὸν σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου, ὑπάρχει ἐπ' αὐτοῦ ἕνα σημεῖον Μ′ καὶ ἕνα μόνον ὥστε : (1)



Σχ. 225

(1) $(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AM}) = (\overrightarrow{A'B'},\ \overrightarrow{A'M'})$ (1) καὶ $AM = A'M'$

Τὸ σημεῖον Μ′ δύναται νὰ ὀνομασθῇ ὁμόλογον ἢ **εἰκὼν** τοῦ Μ κατὰ τὴν ἐκ τῶν (1) ὁριζομένην ἀντιστοιχίαν καὶ τὸ Μ **πρότυπον.** (2)

Ἂν θεωρήσωμεν ἕνα σημεῖον Μ′, τοῦτο εἶναι ὁμόλογον (εἰκὼν) ἑνὸς μόνον σημείου Μ τοῦ ἐπιπέδου : τοῦ ὁριζομένου ἐκ τῶν (1). Ὥστε δὲν ὑπάρχει πρότυπον ἔχον δύο, διαφόρους ἀλλήλων, εἰκόνας, οὔτε εἰκὼν ἔχουσα δύο, διάφορα ἀλλήλων, πρότυπα. Ἐκ ἄλλου οἱονδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἕνα σημεῖον Μ′ τοῦ ἐπιπέδου, ὑπάρχει ἐπ' αὐτοῦ ἕνα σημεῖον Μ ὥστε νὰ ἰσχύουν αἱ (1), ἤτοι κάθε σημεῖον Μ′ τοῦ ἐππέδου εἶναι ὁμόλογον ἑνὸς σημείου Μ αὐτοῦ.

Ἡ ἐκ τῶν (1) ὁριζομένη ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία (ἀπεικόνισις) τοῦ συνόλου τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ συνόλου (ἐφ' ἑαυτοῦ) ὀνομάζεται ***ὁμόρροπος ἰσότης.***

Ἂν θεωρήσωμεν ἕνα σχῆμα (Φ) τοῦ ἐπιπέδου, τὸ σύνολον τῶν ὁμολόγων τῶν σημείων τοῦ (Φ) κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἀπεικόνισιν (ὁμόρροπον ἰσότητα) εἶναι ἕνα σχῆμα (Φ′) τὸ ὁποῖον θὰ ὀνομάζεται **ὁμορρόπως ἴσον** πρὸς τὸ (Φ).

Σημειοῦμεν ὅτι, τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΜ καὶ Α′Β′Μ′ εἶναι ἴσα ὑπὸ τὴν ἔννοιαν τοῦ δοθέντος (77) ὁρισμοῦ.

Σημειοῦμεν ὅτι :

Ἂν θεωρήσωμεν ἕνα σημεῖον Γ τοῦ σχήματος (Φ) καὶ τὸ ὁμόλογον Γ′ αὐτοῦ (εἰκόνα τοῦ Γ κατὰ τὴν ἀνωτέρω ὁμόρροπον ἰσότητα), τὸ ὁποῖον εἶναι σημεῖον τοῦ ὁμολόγου (Φ′) τοῦ σχήματος (Φ), θὰ ἔχωμεν :

$$A\Gamma = A'\Gamma' \text{ καὶ } (\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{A\Gamma}) = (\overrightarrow{A'B'},\ \overrightarrow{A'\Gamma'})$$

Ἀλλὰ $(\overrightarrow{A\Gamma},\ \overrightarrow{AM}) = (\overrightarrow{A\Gamma},\ \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = (\overrightarrow{A'\Gamma'}, \overrightarrow{A'B'}) + (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'M'}) = (\overrightarrow{A'\Gamma'}, \overrightarrow{A'M'})$

Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι, τὸ ὁμόλογον τοῦ σημείου Μ κατὰ τὴν βάσει τῶν ΑΓ καὶ Α′Γ′ ὁριζομένην ὁμόρροπον ἰσότητα εἶναι τὸ αὐτὸ σημεῖον Μ′, καὶ ἑπομένως τὸ ὁμόλογον τοῦ σχήματος (Φ), τὸ αὐτὸ σχῆμα (Φ′).

Ἂν ἡ εἰκὼν Μ′ τοῦ σημείου Μ τοῦ ἐπιπέδου εὑρίσκεται ἐκ τοῦ Μ (προτύπου) βάσει τῶν συνθηκῶν :

(2) $(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AM}) = -(\overrightarrow{A'B'},\ \overrightarrow{A'M'})$ καὶ $AM = A'M'$, τὸ ὁμόλογον (Φ′) τοῦ σχήματος (Φ) κατὰ τὴν ἐκ τῶν (2) ὁριζομένην ἀπεικόνισιν θὰ ὀνομάζεται **ἀντιρρόπως ἴσον** πρὸς τὸ (Φ) καὶ ἡ ἀπεικόνισις αὕτη **ἀντίρροπος ἰσότης.**

---

(1) Ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό : (AB, AM) = (A′B′, A′M′), ἐφ' ὅσον μὲ τὰ σύμβολα (AB, AM) καὶ (A′B′, A′M′) συμβολίζομεν τὰς γωνίας τῶν ἡμιευθειῶν AB, AM καὶ A′B′, A′M′.

(2) Ἂν τὸ σημεῖον M′ θεωρηθῇ ὡς πρότυπον, ἡ εἰκὼν αὐτοῦ εἶναι ἕνα σημεῖον M″ διάφορον, ἐν γένει, τοῦ M : τὸ ὁριζόμενον ἐκ τῶν συνθηκῶν : (1) (AB, AM′) = (A′B′, A′M″) καὶ AM′ = A′M″

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ πλῆθος τῶν κοινῶν σημείων ἑνὸς ἁπλοῦ πολυγώνου καὶ μιᾶς εὐθείας ε, ἡ ὁποία δὲν περιέχει οὐδεμίαν κορυφὴν αὐτοῦ, εἶναι ἀριθμὸς ἄρτιος.

2. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαγωνίων κυρτοῦ τετραπλεύρου εἶναι τὸ σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου του, τοῦ ὁποίου αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τῶν κορυφῶν αὐτοῦ ἔχουν ἄθροισμα ἐλάχιστον.

3. Θεωροῦπεν κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι δύο σημεῖα Ε καὶ Ζ αὐτοῦ, τὸ εὐθ. τμῆμα ΕΖ εἶναι μικρότερον τῆς μεγαλυτέρας διαγωνίου του.

4. Θεωροῦμεν : κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ, τὸ κοινὸν σημεῖον Ο τῶν εὐθειῶν ΑΔ καὶ ΒΓ, τὸ κοινὸν σημεῖον Ι τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν Α καὶ Β καὶ τὸ κοινὸν σημεῖον Ι' τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν Γ καὶ Δ αὐτοῦ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ σημεῖα Ι καὶ Ι' κεῖνται ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας (ΟΑ,ΟΒ).

5. Ἂν κυρτοῦ τετραπλεύρου αἱ ἀπέναντι γωνίαι εἶναι ἴσαι κατὰ τὸ ἓν ζεῦγος, τότε αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τοῦ ἄλλου ζεύγους εἶναι παράλληλοι ἢ συμπίπτουσαι.

6. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : 1. Ἂν ἁπλοῦν τετράπλευρον δέχεται ἕνα ἄξονα συμμετρίας καὶ ἕνα κέντρον συμμετρίας, τότε τὸ κέντρον τοῦτο κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος συμμετρίας 2. Ἂν δέχεται ἕνα ἄξονα συμμετρίας, τότε ὁ ἄξων οὗτος περιέχει μίαν διαγώνιον ἢ μίαν διάμεσον αὐτοῦ.

7. Δοθέντος τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, ὑπάρχουν ἄπειρα τετράπλευρα Α'Β'Γ'Δ' ἑκάστου τῶν ὁποίων τὰ μέσα τῶν πλευρῶν εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ δοθέντος. Γενίκευσις εἰς τὸ πολύγωνον τὸ ἔχον ἄρτιον πλῆθος πλευρῶν.

8. Θεωροῦμεν τραπέζιον ΑΒΓΔ, τὸ κοινὸν σημεῖον Ι τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν Α καὶ Δ καὶ τὸ κοινὸν σημεῖον Ι' τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ αὐτοῦ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ εὐθεῖα ΙΙ' εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις τοῦ τραπεζίου.

9. Δίδονται δύο παράλληλοι εὐθεῖαι ε καὶ ε' καὶ ἐπὶ τούτων ἀντιστοίχως τὰ σημεῖα Α καὶ Α'. Θεωροῦμεν δύο σημεῖα Μ καὶ Μ' τῶν ε καὶ ε' ἀντιστοίχως ὥστε :
$AM + A'M' = \lambda$, ἔνθα λ δοθὲν εὐθ. τμῆμα. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΜΜ' διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Περίπτωσις κατὰ τὴν ὁποίαν $AM - AM' = \lambda$.

10. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ καὶ εὐθεῖαν διερχομένην διὰ τῆς κορυφῆς Α καὶ μὴ ἔχουσαν, ἐκτὸς τοῦ Α, ἄλλο κοινὸν σημεῖον μὲ τὸ τρίγωνον. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ προβολαὶ τῶν κορυφῶν Β καὶ Γ ἐπὶ τὴν ε ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τοῦ μέσου τῆς πλευρᾶς ΒΓ.

11. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ καὶ εὐθεῖαν ε μὴ ἔχουσαν κοινὸν σημεῖον μὲ τὸ τρίγωνον Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου ἀπὸ τῆς εὐθείας ε εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τριπλάσιον τῆς ἀποστάσεως τοῦ κέντρου βάρους τοῦ τριγώνου ἀπὸ τῆς ε.

Γενίκευσις εἰς τὸ τετράπλευρον.

12. 1. Ἂν ἕνα τραπέζιον εἶναι ἰσοσκελές, τότε ἡ διάμεσος αὐτοῦ ἡ συνδέουσα τὰ μέσα τῶν βάσεων του εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτάς, καὶ 2. Ἂν ἡ διάμεσος τραπεζίου ἡ συνδέουσα τὰ μέσα τῶν βάσεών του εἶναι κάθετος, ἐπ' αὐτὰς τότε τὸ τραπέζιον εἶναι ἰσοσκελές.

13. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν αὐτοῦ καὶ ἡ προβολὴ μιᾶς τυχούσης κορυφῆς του ἐπὶ τὴν ἀπέναντι αὐτῆς πλευρὰν εἶναι κορυφαὶ ἰσοσκελοῦς τραπεζίου.

14. Θεωροῦμεν κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἰς τὸ ὁποῖον αἱ διαγώνιοι εἶναι ἴσαι ὡς καὶ αἱ ἀπέναντι πλευραὶ κατὰ τὸ ἓν ζεῦγος. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τετράπλευρον τοῦτο εἶναι ἰσοσκελὲς τραπέζιον.

15. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἐκ τῶν δύο διαγωνίων παραλληλογράμμου μεγαλυτέρα εἶναι ἡ συνδέουσα τὰς κορυφὰς τῶν ὀξειῶν γωνιῶν αὐτοῦ.

16. Θεωροῦμεν παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ καὶ τὰ μέσα Μ καὶ Ρ τῶν ἀπέναντι πλευρῶν ΑΒ καὶ ΓΔ αὐτοῦ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν ΑΡ καὶ ΓΜ μὲ τὴν ΒΔ εἶναι τὰ τριχοτομοῦντα τὴν διαγώνιον ΒΔ.

17. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ διάμεσοι κάθε τετραπλεύρου καὶ τὸ εὐθ. τμῆμα τὸ συνδέον τὰ μέσα τῶν διαγωνίων του διχοτομοῦνται.

18. Θεωροῦμεν δύο παραλληλόγραμμα ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἓνα εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τὸ ἄλλο. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ταῦτα ἔχουν τὸ αὐτὸ κέντρον συμμετρίας.

19. Θεωροῦμεν κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ. Ἔστω Κ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαγωνίων του. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ περίκεντρα τῶν τριγώνων ΚΑΒ, ΚΒΓ, ΚΓΔ, ΚΔΑ, ὡς καὶ τὰ ὀρθόκεντρα αὐτῶν, εἶναι κορυφαὶ παραλληλογράμμου.

20. Θεωροῦμεν τυχὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἰς τὸ ὁποῖον ΑΒ = ΓΔ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : ἡ εὐθεῖα ἡ ὁριζομένη ἀπὸ τὰ μέσα Ν καὶ Σ τῶν ἀπέναντι πλευρῶν ΒΓ καὶ ΑΔ αὐτοῦ, εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν μίαν ἢ τὴν ἄλλην τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν τῶν ὁριζομένων ἀπὸ τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΓΔ.

21. Θεωροῦμεν παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ καὶ τὰ μέσα Μ καὶ Ν τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΒΓ αὐτοῦ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ κοινὰ σημεῖα Μ καὶ Μ′ τῶν ΔΜ καὶ ΔΝ μὲ τὴν ΑΓ εἶναι τὰ τριχοτομοῦντα τὴν διαγώνιον ΑΓ.

22. Θεωροῦμεν κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ καὶ πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας ΑΓ πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἡ κορυφὴ Β αὐτοῦ, τὸ παραλληλόγραμμον ΑΓΕΖ τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ ΑΖ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος πρὸς τὴν διαγώνιον ΒΔ τοῦ τετραπλεύρου. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: (1) Αἱ πλευραὶ τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς διαγωνίους τοῦ τετραπλεύρου. (2) Αἱ γωνίαι τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς γωνίας τῶν διαγωνίων τοῦ τετραπλεύρου (3) Αἱ διαγώνιοι τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι ἀντιστοίχως διπλάσιαι τῶν διαμέσων τοῦ τετραπλεύρου (4) Αἱ ἀποστάσεις τῆς κορυφῆς Δ τοῦ τετραπλεύρου ἀπὸ τῶν κορυφῶν τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ τετραπλεύρου (5) Αἱ γωνίαι ὑπὸ τὰς ὁποίας φαίνονται ἀπὸ τῆς κορυφῆς Δ αἱ πλευραὶ τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς γωνίας τοῦ τετραπλεύρου.

23. Θεωροῦμεν κυρτὸν ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ τοῦ ὁποίου αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι κατὰ τὰ δύο ζεύγη. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, αἱ διαγώνιοι ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ αὐτοῦ, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ μέσον ἑκάστης τούτων.

24. Θεωροῦμεν : ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ, ἕνα τυχὸν σημεῖον Ρ τῆς εὐθείας ΒΔ, τὸ συμμετρικὸν Γ′ τῆς κορυφῆς Γ αὐτοῦ ὡς πρὸς τὸ Ρ καὶ τὰς προβολὰς Η αἱ Κ τοῦ Γ′ ἐπὶ τὰς ΑΒ καὶ ΑΔ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, τὰ σημεῖα Κ, Η, Ρ, κεῖνται ἀπ' εὐθείας.

25. Θεωροῦμεν ρόμβον ΑΒΓΔ καὶ τὰ ὀρθόκεντρα Η καὶ Η′ τῶν τριγώνων ΑΒΔ καὶ ΓΒΔ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι 1. Τὰ σημεῖα Η καὶ Η′ κεῖνται ἐπὶ τῆς ΑΓ. 2. Τὸ τετράπλευρον ΒΗΔΗ′ εἶναι ρόμβος.

26. Θεωροῦμεν τετράγωνον ΑΒΓΔ καὶ ἕνα σημεῖον Μ ἐξωτερικὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ΜΒ < ΜΔ.

27. Θεωροῦμεν τετράγωνον ΑΒΓΔ καὶ δύο τυχούσας εὐθείας ε καὶ ε′ καθέτους ἐπ' ἀλλήλας. Ἔστωσαν Α′ καὶ Γ′ τὰ κοινὰ σημεῖα τῆς ε μὲ τὰς ΑΒ καὶ ΓΔ ἀντιστοίχως, καὶ Β′ καὶ Δ′ τὰ κοινὰ σημεῖα τῆς ε′ μὲ τὰς ΒΓ καὶ ΑΔ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι Α′Γ′ = Β′Δ′.

28. Θεωροῦμεν: τετράγωνον ΑΒΓΔ, τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΕ (Ε πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας ΑΒ πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖνται αἱ κορυφαὶ Γ καὶ Δ) καὶ τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΒΓΖ (Ζ πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας ΒΓ πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖνται αἱ κορυφαὶ Α καὶ Δ). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ σημεῖα Δ,Ε,Ζ, κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

29. Θεωροῦμεν παραλληλόγραμμον καὶ τὰ τετράγωνα τὰ ὁποῖα κατασκευάζονται ἐπὶ τῶν πλευρῶν τοῦ παραλληλογράμμου ἀντιστοίχως καὶ κεῖνται πρὸς τὸ μέρος τῶν ἀντιστοίχων εὐθειῶν (ἐπὶ τῶν ὁποίων κεῖνται αἱ θεωρούμεναι πλευραὶ) πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται τὸ παραλληλόγραμμον. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ κέντρα τῶν ἀνωτέρω τετραγώνων εἶναι κορυφαὶ τετραγώνου.

30. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ καὶ πρὸς τὸ μέρος ἑκάστης τῶν εὐθειῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται τὸ τρίγωνον, τὰ τετράγωνα ΒΓΔΕ, ΓΑΖΗ καὶ ΑΒΙΚ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : 1. Ἡ διάμεσος τοῦ τριγώνου ΑΚΖ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν ΒΓ. 2. Τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν εὐθειῶν ΒΗ καὶ ΓΙ κεῖται ἐπὶ τῆς ΑΜ. 3. Ἂν εἶναι Β′ καὶ Γ′ τὰ κέντρα τῶν τετραγώνων ΓΑΖΗ καὶ ΑΒΙΚ ἀντιστοίχως καὶ Α′ τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΒΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, τότε : Α′Β′ = Α′Γ′ καὶ ἡ γωνία (Α′Β′,Α′Γ′) εἶναι ὀρθή. 4. Αἱ μεσοκάθετοι τῶν εὐθ. τμημάτων ΖΚ, ΙΒ, ΔΗ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

31. Δίδονται δύο εὐθεῖαι α καὶ β. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Μ ἑκάστου τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ΜΑ καὶ ΜΒ ἀπὸ τῶν εὐθειῶν α καὶ β ἀντιστοίχως ἔχουν : (1) δοθὲν ἄθροισμα λ. (2) δοθεῖσαν διαφορὰν λ.

Περίπτωσις κατὰ τὴν ὁποίαν αἱ ΜΑ, ΜΒ τέμνουν τὰς α καὶ β ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν φ.

Γενίκευσις εἰς τὴν περίπτωσιν $\mu \cdot MA + \nu \cdot MB = \lambda$ καὶ $\mu \cdot MA - \nu \cdot MB = \lambda$ (μ καὶ ν φυσικοὶ ἀριθμοὶ καὶ λ δοθὲν εὐθ. τμῆμα).

32. Δίδεται εὐθεῖα ε καὶ σημεῖον Ο ἐκτὸς αὐτῆς. Θεωροῦμεν τυχοῦσαν διὰ τοῦ Ο εὐθεῖαν, τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν αὐτῆς μὲ τὴν ε καὶ τὰς προβολὰς τοῦ Ο ἐπὶ τὰς διχοτόμους αὐτῆς. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν ἀνωτέρω προβολῶν.

33. Δίδονται ἐπ' εὐθείας ε δύο σημεῖα Α καὶ Β. Θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον Γ μεταξὺ τῶν Α καὶ Β καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας ε τὰ τετράγωνα ΑΓΔΕ καὶ ΓΒΖΗ τῶν ὁποίων ἔστωσαν Ι καὶ Κ τὰ κέντρα. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν μέσων Μ τῶν εὐθ. τμημάτων ΙΚ.

34. Δίδεται ὀρθογώνιον, κατὰ τὴν γωνίαν Α, τρίγωνον ΑΒΓ. Ὀνομάζομεν Β′ καὶ Γ′ τὰς προβολὰς τοῦ τυχόντος σημείου τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ αὐτοῦ ἐπὶ τὰς ΓΑ καὶ ΑΒ ἀντιστοίχως. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σημεῖον τῆς ὑποτεινούσης διὰ τὸ ὁποῖον τὸ εὐθ. τμῆμα Β′Γ′ εἶναι ἐλάχιστον.

35. Δίδεται παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τῆς ΓΔ ὥστε :
ΑΜ = ΑΒ + ΜΔ.

36. Δίδονται δύο παράλληλοι εὐθεῖαι α καὶ β καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β ἐκ τῶν ὁποίων τὸ Α κεῖται πρὸς τὸ μέρος τῆς β πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἡ α καὶ τὸ Β πρὸς τὸ μέρος τῆς α πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἡ β. Νὰ εὑρεθοῦν δύο σημεῖα Μ καὶ Ν τῶν α καὶ β ἀντιστοίχως, ὥστε ἡ εὐθεῖα ΜΝ νὰ ἔχῃ δοθεῖσαν διεύθυνσιν καὶ ἡ πολυγωνικὴ γραμμὴ ΑΜΝΒ τὴν ἐλαχίστην περίμετρον.

37. Δίδεται ὀξεῖα γωνία ΧΟΥ καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β ἐσωτερικὰ αὐτῆς. Νὰ εὑρεθοῦν ἐπὶ τῶν ΟΧ καὶ ΟΥ δύο σημεῖα Χ καὶ Υ ἀντιστοίχως, ὥστε ἡ περίμετρος τῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς ΑΧΥΒ νὰ εἶναι ἐλαχίστη.

38. Δίδεται ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ καὶ δύο σημεῖα Ρ καὶ Σ ἐσωτερικὰ αὐτοῦ. Νὰ εὑρεθοῦν δύο σημεῖα Χ καὶ Υ τῶν ΑΒ καὶ ΒΓ ὥστε ἡ περίμετρος τῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς ΡΧΥΣ νὰ εἶναι ἐλαχίστη.

39. Δίδεται τετράπλευρον ΑΒΓΔ καὶ σημεῖον Α′ τῆς πλευρᾶς ΑΒ αὐτοῦ. Νὰ εὑρεθοῦν ἐπὶ τῶν ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ ἀντιστοίχως τρία σημεῖα Β′, Γ′, Δ′ ὥστε ἡ περίμετρος τοῦ τετραπλεύρου Α′Β′Γ′Δ′ νὰ εἶναι ἐλαχίστη.

40. Δίδονται δύο ζεύγη παραλλήλων εὐθειῶν α, β, καὶ γ, δ καὶ ἕνα σημεῖον Ρ τοῦ ἐπιπέδου αὐτῶν. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα διὰ τοῦ Ρ, τέμνουσα τὰς α, β, γ, δ ὥστε ἂν εἶναι Α, Β, Γ, Δ τὰ κοινὰ σημεῖα ἀντιστοίχως, νὰ εἶναι ΑΒ = ΓΔ.

41. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα δοθείσης διευθύνσεως τέμνουσα τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ ὥστε ἂν εἶναι Χ καὶ Υ ἀντιστοίχως τὰ κοινὰ σημεῖα, νὰ εἶναι ΑΧ = ΓΥ.

42. Νὰ κατασκευασθῇ πεντάγωνον τοῦ ὁποίου δίδονται τὰ μέσα τῶν πλευρῶν.

43. Νὰ κατασκευασθῇ κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἐκ τῶν στοιχείων : (1) α, γ, Α, Β, Γ (2) Μέσων Μ, Ν, Ρ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ ἀντιστοίχως καὶ τῆς συνθήκης $\alpha = \beta = \gamma$.

44. Νὰ κατασκευασθῇ τετράπλευρον ἐκ τῶν στοιχείων :

Σημεῖα : (1) Β, Ε, Ζ, Σ. (2) Μ, Ν, Σ, Ζ. (3) Α, Β, Γ, Ζ. (4) Α, Β, Γ, Κ. (5) Α, Β, Ν, Ρ. (6) Α, Β, Ν, Ζ. (7) Α, Β, Ν, Κ. (8) Α, Β, Ζ, Κ. (9) Α, Μ, Ν, Ρ. (10) Α, Μ, Ν, Ζ. (11) Α, Μ, Ν, Κ. (12) Μ, Ν, Ζ, Κ.

(Ε, Ζ τὰ μέσα τῶν διαγωνίων ΑΓ,ΒΔ, Κ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαγωνίων καὶ Μ, Ν, Ρ, Σ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ἀντιστοίχως).

45. Νὰ κατασκευασθῇ τραπέζιον ΑΒΓΔ ὅταν δίδωνται : (1) Αἱ διαγώνιοι, ἡ γωνία αὐτῶν καὶ ἡ γωνία (ΒΑ,ΒΔ). (2) Ἡ βάσις α, αἱ διαγώνιοι καὶ ἡ γωνία αὐτῶν (3) Τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του καὶ τὸ εὐθ. τμῆμα λ, τὸ ὁποῖον συνδέει τὰ μέσα τῶν διαγωνίων του (4). Αἱ βάσεις α, γ, καὶ αἱ γωνίαι Α καὶ Β. (5) Αἱ βάσεις α, γ, τὸ ὕψος υ καὶ ἡ συνθήκη ὅπως εἶναι ἰσοσκελές. (6) Αἱ διαγώνιοι, ἡ γωνία αὐτῶν καὶ ἡ γωνία Α.

46. Νὰ κατασκευασθῇ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ ὅταν δίδωνται : (1) Αἱ διαγώνιοι καὶ ἡ γωνία αὐτῶν (2) Ἡ πλευρὰ ΑΒ, ἡ γωνία (ΒΑ, ΒΔ) καὶ ἡ γωνία (ΑΒ, ΑΓ). (3) Ἡ πλευρὰ ΑΒ, ἡ γωνία Α καὶ τὸ ὕψος υ τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν ΑΒ. (4) Τὰ μέσα τριῶν πλευρῶν του.

47 Εἰς δοθὲν τετράπλευρον ΑΒΓΔ νὰ ἐγγραφῇ παραλληλόγραμμον, ἔχον ὡς κέντρον δοθὲν σημεῖον Ο.

48. Θεωροῦμεν τὰ παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ ἑκάστου τῶν ὁποίων αἱ κορυφαὶ Α καὶ Γ εἶναι δοθέντα σημεῖα καὶ αἱ δύο ἄλλαι κορυφαὶ Β καὶ Δ εἶναι ἀντιστοίχως σημεῖα δύο δοθεισῶν εὐθειῶν β καὶ δ, παραλλήλων πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΓ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐκ τούτων ἔχον τὴν ἐλαχίστην περίμετρον.

49. Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ ὅταν δίδωνται : (1) Ἡ διαφορὰ λ δύο προσκειμένων πλευρῶν καὶ ἡ γωνία τῶν διαγωνίων του (2) Ἡ περίμετρος καὶ ἡ γωνία τῶν διαγωνίων.

50. Δίδεται ρόμβος ΑΒΓΔ. Θεωροῦμεν τὰ ὀρθογώνια τὰ ἐγγεγραμμένα εἰς τὸν ρόμβον, ἑκάστου τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς διαγωνίους τοῦ ρόμβου. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐκ τούτων ἔχον : (1) Τὴν μεγίστην (ἢ ἐλαχίστην) περίμετρον. (2) Τὸ ἐλάχιστον ἄθροισμα διαγωνίων.

51. Νὰ κατασκευασθῇ ρόμβος ΑΒΓΔ ὅταν δίδωνται : (1) Μία κορυφὴ αὐτοῦ καὶ ἡ συνθήκη ὅπως εἶναι ἐγγεγραμμένος εἰς δοθὲν παραλληλόγραμμον. (2) Ἡ διεύθυνσις μιᾶς διαγωνίου του καὶ ἡ συνθήκη ὅπως αἱ πλευραί του διέρχονται ἀντιστοίχως ἀπὸ τέσσαρα δοθέντα σημεῖα.

52. Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ΑΒΓΔ ὅταν δίδωνται : (1) Ἡ διαγώνιος αὐτοῦ (2) Τὸ ἄθροισμα (ἢ ἡ διαφορὰ) διαγωνίου καὶ πλευρᾶς. (3) Ἡ ἀπόστασις τοῦ μέσου μιᾶς πλευρᾶς ἀπὸ μιᾶς διαγωνίου. (4) Ἡ κορυφὴ Α καὶ ἡ συνθήκη ὅπως αἱ κορυφαὶ Β καὶ Δ εἶναι ἀντιστοίχως σημεῖα δύο δοθεισῶν εὐθειῶν. (5) Ἡ συνθήκη ὅπως εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς δοθὲν παραλληλόγραμμον (Αἱ κορυφαί του εἶναι ἀντιστοίχως σημεῖα τῶν εὐθειῶν ἐπὶ τῶν ὁποίων κεῖνται αἱ πλευραὶ τοῦ παραλληλογράμμου).

53. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ καὶ τὰ τετράγωνα ΒΓΔΕ καὶ ΓΑΖΗ (Δ, Ε πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας ΒΓ πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἡ κορυφὴ Α καὶ Ζ,Η πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας ΓΑ πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἡ κορυφὴ Β. Νὰ ἐποδειχθῇ ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΔ καὶ ΒΗ εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας.

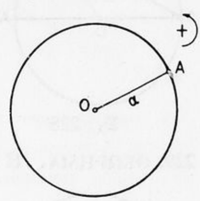
54. Θεωροῦμεν ὀρθογώνιον, κατὰ τὴν γωνίαν Α, τρίγωνον ΑΒΓ, τὰ τετράγωνα ΑΒΔΕ καὶ ΓΑΖΗ (Δ, Ε πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας ΑΒ πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται τὸ Γ καὶ Ζ, Η πρὸς τὸ μέρος τῆς ΓΑ πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται τὸ Β) καὶ πρὸς τὰς προβολὰς Δ' καὶ Η' τῶν Δ καὶ Η ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΒΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : (1) ΔΔ' + ΗΗ' = ΒΓ (2) Τὰ σημεῖα Δ, Α, Η κεῖνται ἀπ' εὐθείας. (3) Τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν ΔΕ καὶ ΖΗ κεῖται ἐπὶ τῆς διὰ τοῦ Α καθέτου ἐπὶ τὴν ΒΓ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII

Ο ΚΥΚΛΟΣ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ

226. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ὀνομάζομεν* **κύκλον** *ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, κάθε σύνολον σημείων Μ αὐτοῦ τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἐκ τῆς συνθήκης : ΟΜ = α, ὅπου Ο δοθὲν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου καὶ α δοθὲν εὐθ. τμῆμα.*



Σχ. 226

Τὸ σημεῖον Ο ὀνομάζεται **κέντρον** τοῦ κύκλου καὶ τὸ εὐθ. τμῆμα α **ἀκτίς,** αὐτοῦ.

Ἂν ἑπομένως συμβολίσωμεν τὸν κύκλον κέντρου Ο καὶ ἀκτῖνος α μὲ τὸ σύμβολον (Ο, α)(1) θὰ ἔχωμεν :

$$(O, \alpha) = \{ M : OM = \alpha\}$$

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ κύκλου ἔπεται ὅτι : Κάθε ἡμιευθεῖα ἀγομένη ἀπὸ τοῦ κέντρου Ο κύκλου (Ο, α) περιέχει ἕνα σημεῖον Μ αὐτοῦ καὶ ἕνα μόνον (26) καί,

Κάθε εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου περιέχει δύο σημεῖα Μ καὶ Μ′ τοῦ κύκλου καὶ μόνον δύο. Τὰ σημεῖα ταῦτα εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΝ ΚΑΙ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΝ ΚΥΚΛΟΥ

227. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἕνα σημεῖον Α τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κύκλου (Ο,α) θα ὀνομάζεται *ἐσωτερικὸν σημεῖον* αὐτοῦ, ὅταν εἶναι ΟΑ < α. Τὸ σύνολον τῶν ἐσωτερικῶν σημείων κύκλου (Ο, α) ὀνομάζεται *ἐσωτερικὸν* αὐτοῦ. Ἕνα σημεῖον Β τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κύκλου (Ο), θὰ ὀνομάζεται *ἐξωτερικὸν σημεῖον* αὐτοῦ, ὅταν εἶναι ΟΑ > α. Τὸ σύνολον τῶν ἐξωτερικῶν σημείων τοῦ κύκλου ὀμομάζεται *ἐξωτερικόν* αὐτοῦ.

ΧΟΡΔΑΙ ΚΥΚΛΟΥ

228. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Κάθε εὐθ. τμῆμα ΑΒ τοῦ ὁποίου τὰ ἄκρα εἶναι σημεῖα τοῦ κύκλου (Ο) ὀνομάζεται* **χορδὴ** *αὐτοῦ.*

Κάθε χορδὴ τοῦ κύκλου περιέχουσα τὸ κέντρον ὀνομάζεται *διάμετρος* αὐτοῦ. Τὰ ἄκρα Α καὶ Α′ κάθε διαμέτρου κύκλου εἶναι σημεῖα συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ κέντρον του καὶ ὀνομάζονται, συνήθως, *ἀντιδιαμετρικὰ* σημεῖα τοῦ κύκλου.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ. *1. Κάθε κύκλος ἔχει ἕνα μόνον κέντρον Ο.*

Πράγματι, ἂν εἶχε δύο κέντρα, τότε ἡ διάμετρος αὐτοῦ, ἡ περιέχουσα τὰ κέντρα θὰ εἶχε δύο μέσα.

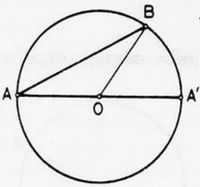
(1) Ἀντὶ τοῦ συμβόλου (Ο, α) χρησιμοποιεῖται καὶ τό : Ο(α).

2. *Μία εὐθεῖα ε καὶ ἕνας κύκλος (Ο) δὲν δύνανται νὰ ἔχουν κοινὰ σημεῖα περισσότερα τῶν δύο.*

Πράγματι, ἂν εἶχον τρία κοινὰ σημεῖα Α,Β,Γ, θὰ εἴχομεν : ΟΑ=ΟΒ=ΟΓ. Ἀλλά, τότε ἂν εἶναι Ι καὶ Ι′ τὰ μέσα τῶν ΑΒ καὶ ΑΓ, αἱ ΟΙ καὶ ΟΙ′ θὰ ἦσαν κάθετοι ἐπὶ τῶν ε (118). Τοῦτο ὅμως εἶναι ἄτοπον (83).

3. *Δύο οἱαιδήποτε διάμετροι τοῦ κύκλου εἶναι ἴσαι.*

Πράγματι, ἑκάστη τούτων εἶναι διπλασία τῆς ἀκτῖνος α τοῦ κύκλου.



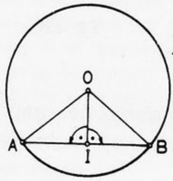
Σχ. 228

4. *Κάθε χορδὴ ΑΒ κύκλου (Ο) (1) εἶναι μικροτέρα τῆς διαμέτρου ΑΑ′ αὐτοῦ.*

Ἑπομένως εἶναι μικροτέρα κάθε διαμέτρου τοῦ (Ο).

Πράγματι, ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΟΒ (Σχ. 228) ἔχομεν : $AB < OA + OB$, καὶ ἐπειδὴ $OB = OA'$: $AB < OA + OA'$, ἤτοι $AB < AA'$.

229. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἡ εὐθεῖα ἡ ὁποία συνδέει τὸ κέντρον Ο ἑνὸς κύκλου (Ο) μὲ τὸ μέσον Ι οἱασδήποτε χορδῆς ΑΒ αὐτοῦ, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ.



Σχ. 229.1

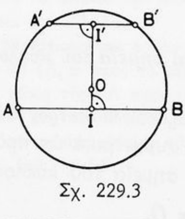
Ἀπόδειξις. Ἐκ τῶν τριγώνων ΟΑΙ καὶ ΟΒΙ (Σχ. 229.1) Ἔχομεν (91, Πόρισμα) ὅτι : (ΙΟ, ΙΑ) = –(ΙΟ, ΙΒ).

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ 1. *Ἡ προβολὴ τοῦ κέντρου Ο κύκλου (Ο) ἐπὶ οἱανδήποτε εὐθεῖαν ὁριζομένην ἀπὸ δύο σημεῖα Α καὶ Β αὐτοῦ, εἶναι τὸ μέσον τῆς χορδῆς ΑΒ* (118, Πόρισμα)

2. *Ἡ μεσοκάθετος κάθε χορδῆς ΑΒ κύκλου (Ο) διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου του.* (159)

Ἑπομένως τὸ κέντρον τοῦ (Ο) εἶναι τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν μεσοκαθέτων δύο οἱωνδήποτε χορδῶν αὐτοῦ.

3. *Ἡ εὐθεῖα ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπὸ τὰ μέσα Ι καὶ Ι′ δύο παραλλήλων χορδῶν (2) ΑΒ καὶ Α′Β′ κύκλου(Ο), διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον Ο αὐτοῦ.*



Σχ. 229.3

4. *Ἂν δύο χορδαὶ κύκλου (Ο) διχοτομοῦνται, τότε τὸ κοινὸν σημεῖον αὐτῶν εἶναι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου (Ο).*

Ἤτοι αἱ ἐν λόγῳ χορδαὶ εἶναι διάμετροι τοῦ (Ο). Πράγματι, ἂν τὸ κοινὸν σημεῖον Ι τῶν χορδῶν τούτων ἦτο διάφορον τοῦ κέντρου Ο, τότε ἡ εὐθεῖα ΟΙ θὰ ἦτο κάθετος καὶ ἐπὶ τὰς δύο χορδάς (εὐθείας).

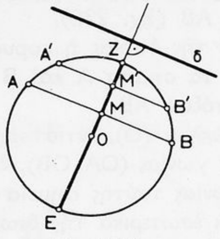
---

(1) Ὅταν δὲν εἶναι ἀπαραίτητον νὰ μνημονεύεται ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου Ο(α), θὰ συμβολίζεται οὗτος μὲ τὸ σύμβολον (Ο).

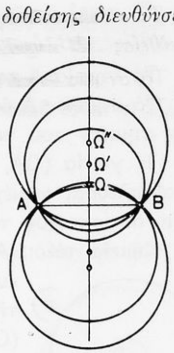
(2) Αἱ χορδαὶ ΑΒ καὶ Α′Β′ ὀνομάζονται, συνήθως, παράλληλοι, ὅταν αἱ εὐθεῖαι ἐπὶ τῶν ὁποίων κεῖνται αὗται εἶναι παράλληλοι.

5. Ὁ γεωμ. τόπος τῶν μέσων χορδῶν κύκλου (O) δοθείσης διευθύνσεως, εἶναι ἡ διάμετρος τοῦ (O) ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν διεύθυνσιν.

6. Ὁ γεωμ. τόπος τῶν κέντρων Ω τῶν κύκλων (Ω) τοῦ ἐπιπέδου, ἕκαστος τῶν ὁποίων διέρχεται διὰ δύο δοθέντων σημείων A καὶ B αὐτοῦ, εἶναι ἡ μεσοκάθετος τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος AB.



Σχ. 229.5



Σχ. 229.6

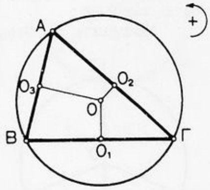
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΟΣ ΚΥΚΛΟΣ

230. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Κάθε κύκλος (O) εἰς τὸν ὁποῖον ἔχομεν προσαρτήσει μίαν φορὰν διαγραφῆς, θεωρούμενος εἰς τὸ προσημασμένον, ἢ ὅπως συνήθως λέγομεν εἰς τὸ προσανατολισμένον, ἐπίπεδον ὀνομάζεται* **προσανατολισμένος** *κύκλος* (1).

Ἡ ἐπὶ τοῦ κύκλου (O) φορὰ δύναται νὰ ὁρισθῆ ἐκ μιᾶς διατεταγμένης τριάδος (A,B,Γ) σημείων αὐτοῦ (2), καὶ εἶναι ἡ θετικὴ ἢ ἡ ἀρνητικὴ καθ' ὅσον ἡ εἰς τὴν διατεταγμένην τριάδα τῶν ἀπὸ τοῦ κέντρου O ἡμιευθειῶν OA, OB, OΓ ἀντιστοιχοῖσα ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου φορὰ εἶναι ἀντιστοίχως ἡ θετικὴ ἢ ἡ ἀρνητική (51).

231. ΘΕΩΡΗΜΑ Μία διατεταγμένη τριὰς (A, B, Γ) σημείων τοῦ προσανατολισμένου ἐπιπέδου ὁρίζει ἕνα προσανατολισμένον κύκλον.

Ἀπόδειξις. Τὸ κέντρον τοῦ κύκλου εἶναι τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν μεσοκαθέτων (περίκεντρον) τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (138) καὶ ἡ ἀκτὶς τὸ εὐθ. τμῆμα OA(= OB = = OΓ). Ἡ ἐπὶ τοῦ κύκλου φορὰ ὁρίζεται ἐκ τῆς διατεταγμένης τριάδος (A, B, Γ) σημείων αὐτοῦ. (3).



Σχ. 231

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Ἂν ἕνα σημεῖον O ἀπέχῃ ἴσον ἀπὸ τριῶν σημείων A,B,Γ ἑνὸς κύκλου (O), τότε τοῦτο εἶναι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου (O).*

ΤΟΞΟΝ ΚΥΚΛΟΥ - ΕΠΙΚΕΝΤΡΟΣ ΓΩΝΙΑ

232. ΟΡΙΣΜΟΣ. Θεωροῦμεν κύκλον (0) καὶ δύο σημεῖα A καὶ B αὐτοῦ.

(1) Ὁ κύκλος μὲ τὴν προσαρτηθεῖσαν εἰς αὐτὸν φορὰν εἶναι, καθ' ἑαυτόν, ἕνας προσημασμένος κύκλος. Ὁ προσημασμένος οὗτος κύκλος, ἐν ἀναφορᾷ πρὸς τὸ προσημασμένον (προσανατολισμένον) ἐπίπεδον, εἶναι προσανατολισμένος.

(2) Ἡ εἰς τὴν ἀνωτέρω διαπεταγμένην τριάδα (A, B, Γ) ἀντιστοιχοῦσα φορὰ εἶναι ἡ φορὰ κατὰ τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ κινηθῆ ἐπὶ τοῦ κύκλου ἕνα σημεῖον, M ὥστε νὰ λάβῃ διαδοχικῶς τὴν θέσιν τῶν σημείων A, B, Γ κατὰ τὴν σημειωθεῖσαν τάξιν.

(3) Αἱ τριάδες (A, B, Γ), (B, Γ, A), (Γ, A, B) ὁρίζουν τὴν αὐτὴν φορὰν ἐπὶ τοῦ κύκλου, καὶ αἱ (A, Γ, B), (Γ, B, A), (B, A, Γ) τὴν ἀντίθετον αὐτῆς.

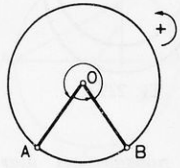
Τὸ σύνολον τῶν σημείων τοῦ κύκλου τὰ ὁποῖα κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας ΑΒ ὀνομάζεται **τόξον** *τοῦ κύκλου* (1).

Τὰ σημεῖα Α καὶ Β ὀνομάζονται **ἄκρα** σημεῖα ἢ ἁπλῶς **ἄκρα** τοῦ τόξου.

Τὸ σημεῖον Α ὀνομάζεται **ἀρχὴ** ἢ ἀρχικὸν σημεῖον καὶ τὸ Β **πέρας** ἢ τελικὸν σημεῖον τοῦ τόξου ΑΒ (Σχ. 232).

Ἡ γωνία (ΟΑ, ΟΒ) τῆς ὁποίας ἡ κορυφὴ εἶναι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου καὶ αἱ πλευραὶ περιέχουν τὰ σημεῖα Α καὶ Β τοῦ (Ο) ὀνομάζεται **ἐπίκεντρος γωνία** ἀντίστοιχος τοῦ τόξου ΑΒ.

Σημεῖα τόξου ΑΒ κύκλου (Ο), ἀντιστοίχου τῆς ἐπικέντρου κυρτῆς ἢ μὴ κυρτῆς γωνίας (ΟΑ, ΟΒ), ὀνομάζομεν τὰ ἐπὶ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας ταύτης σημεῖα τοῦ (Ο), καὶ τὰ σημεῖα τοῦ (Ο) τὰ ἐσωτερικὰ τῆς θεωρουμένης γωνίας.



Σχ. 232

Τὸ τόξον ΑΒ κύκλου (Ο) θεωρεῖται **θετικῶς ἢ ἀρνητικῶς προσανατολισμένον,** καθ' ὅσον ἡ ἀντίστοιχος αὐτοῦ ἐπίκεντρος γωνία (ΟΑ, ΟΒ) εἶναι θετικῶς ἢ ἀρνητικῶς προσανατολισμένη ἀντιστοίχως.

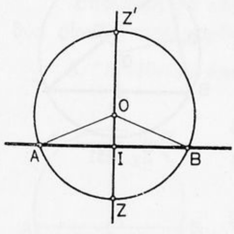
Τὰ δύο τόξα ΑΒ τῶν ὁποίων τὰ σημεῖα εἶναι ἀντιστοίχως τὰ ἐσωτερικὰ τῆς κυρτῆς καὶ τῆς μὴ κυρτῆς γωνίας (ΟΑ, ΟΒ), ἀντιστοίχως, εἶναι τὸ **ἔλασσον** καὶ τὸ **μεῖζον** τόξον ΑΒ.

233. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἡ χορδὴ ΑΒ κύκλου (0) ἡ ὁριζομένη ἀπὸ τὰ ἄκρα τοῦ ἐλάσσονος ἢ μείζονος τόξου ΑΒ τοῦ (0) δύναται νὰ ὀνομάζεται *ἀντίστοιχος* τοῦ θεωρουμένου ἐλάσσονος ἢ μείζονος τόξου ΑΒ.

---

(1) Ὅτι ὑπάρχουν δύο σύνολα σημείων τοῦ κύκλου ἑκατέρωθεν τῆς εὐθείας ΑΒ ἀποδεικνύεται εὐκόλως :

Πράγματι, ἂν θεωρήσωμεν τὴν εὐθεῖαν ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπὸ τὸ κέντρον Ο τοῦ κύκλου καὶ τὸ μέσον Ι τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ, ἐκ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΟΑΒ (ΟΑ = ΟΒ) προκύπτει ὅτι ἡ εὐθεῖα ΟΙ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ λόγῳ τούτου (132) ὅτι ΟΙ< ΟΑ. Ἂν εἶναι Ζ καὶ Ζ' τὰ ἄκρα τῆς διαμέτρου τοῦ (Ο) τῆς κειμένης ἐπὶ τῆς εὐθείας ΟΙ (Σχ. 232.1), θὰ εἶναι ΟΖ >ΟΙ, διότι ΟΑ >ΟΙ. Ἑπομένως τὸ σημεῖον Ζ τοῦ κύκλου κεῖται πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας ΑΒ πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται τὸ Ο. Τὸ Ζ' κεῖται πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας ΑΒ πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται τὸ Ο. (Σχ. 232.1).



Σχ. 232.1

Ἂν ἡ εὐθεῖα ΑΒ περιέχῃ τὸ κέντρον Ο, τότε τὰ ἄκρα κάθε διαμέτρου τοῦ (Ο) κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς εὐθείας ΑΒ. Οὕτω, τὰ σημεῖα τοῦ κύκλου χωρίζονται ἀπὸ τὰ Α κὶ Β εἰς δύο σύνολα, τῶν ὁποίων τὰ σημεῖα ἀντιστοιχοῦν διττῶς (ἀντιδιαμετρικὰ σημεῖα). Ἕκαστον ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω δύο σύνολα ὀνομάζεται *ἡμικύκλιον* συζυγὲς τοῦ ἄλλου. Τὰ σημεῖα Α καὶ Β εἶναι τὰ *ἄκρα* τῶν δύο τούτων ἡμικυκλίων.

Τὸ σύνολον τῶν σημείων τοῦ κύκλου (Ο) τὰ ὁποῖα κεῖνται πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας ΑΒ πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται τὸ κέντρον Ο αὐτοῦ ὀνομάζεται *μεῖζον* τόξον ΑΒ τοῦ (Ο). Τὸ σύνολον τῶν σημείων τοῦ (Ο) τὰ ὁποῖα κεῖνται πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας ΑΒ πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται τὸ κέντρον ὀνομάζεται *ἔλασσον* τόξον ΑΒ τοῦ (Ο).

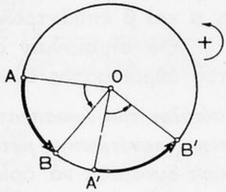
Ἂν τὸ δισύνολον {Α, Β} τῶν ἄκρων τοῦ τόξου θεωρηθῇ διατεταγμένον ζεῦγος σημείων τοῦ προσανατολισμένου κύκλου (Ο), τὸ ὑπὸ τῶν σημείων τούτων Α καὶ Β ὁριζόμενον, μεῖζον ἢ ἔλασσον, τόξον ΑΒ, ὀνομάζεται *προσανατολισμένον τόξον* ΑΒ τοῦ κύκλου (Ο) καὶ συμβολίζεται μὲ τὸ σύμβολον $\overrightarrow{AB}$.

Ἂν ἡ χορδὴ ΑΒ εἶναι διάμετρος τοῦ (0), ἕκαστον τῶν ἀντιστοίχων αὐτῆς τόξων ΑΒ ὀνομάζεται *ἡμικύκλιον*.

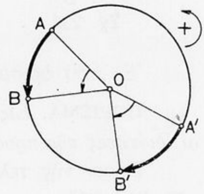
234. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Δύο κύκλοι (Ο) καὶ (Ο′) θὰ ὀνομάζωνται* **ἴσοι**, *ὅταν αἱ ἀκτῖνες αὐτῶν εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι.*

ΣΧΕΣΙΣ ΙΣΟΤΗΤΟΣ

235. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Δύο κυκλικὰ τόξα ΑΒ καὶ Α′Β′ ὀνομάζονται* **ἴσα** (Σχ. 235.1) *ἢ* **ἀντίθετα,** (Σχ. 235.2) *ὅταν ἀνήκουν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς δύο ἴσους κύκλους ἀντιστοίχως, καὶ αἱ ἀντίστοιχοι αὐτῶν ἐπίκεντροι γωνίαι εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι ἢ ἀντίθετοι.*



Σχ. 235.1

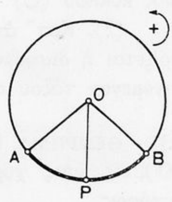


Σχ. 235.2

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ *1. Εἰς τὸ σύνολον τῶν προσσνατολισμένων τόξων ἑνὸς κύκλου (Ο) ἢ κύκλων ἴσων πρὸς ἀλλήλους ἰσχύουν αἱ ἰδιότητες τῆς ἰσότητος : αὐτοπαθὴς ἢ ἀνακλαστική, συμμετρικὴ καὶ μεταβατική.*

Αἱ ἰδιότητες αὗται ἀποδεικνύονται διὰ τῆς θεωρήσεως τῶν ἀντιστοίχων ἐπικέντρων γωνιῶν. Ἡ ἀνωτέρω σχέσις ἰσότητος εἰς τὸ σύνολον τῶν τόξων, ἑνὸς κύκλου (Ο) ἢ κύκλων ἴσων πρὸς ἀλλήλους, ἐπιτρέπει τὸν διαμερισμὸν τοῦ συνόλου τούτου εἰς **κλάσεις.** Ἑκάστη τούτων δύναται νὰ συμβολίζεται μὲ ἕνα πεζὸν γράμμα τοῦ ἀλφαβήτου φέρον τὴν ἔνδειξιν $\overset{\frown}{\rightarrow}$ π.χ. $\overrightarrow{\alpha}$.

2. Ἂν εἶναι Ρ τὸ ἐπὶ τῆς διχοτόμου μιᾶς ἐπικέντρου γωνίας (ΟΑ, ΟΒ) σημεῖον τοῦ ἀντιστοίχου αὐτῆς τόξου ΑΒ, τὰ τόξα $\overrightarrow{AP}$ *καὶ* $\overrightarrow{PB}$ *εἶναι ἴσα.*



Σχ. 235.3

Τὸ σημεῖον Ρ ὀνομάζεται **μέσον σημεῖον** ἢ ἁπλῶς **μέσον** τοῦ τόξου τούτου ΑΒ.

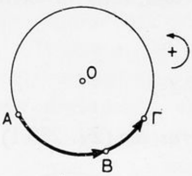
ΣΧΕΣΕΙΣ ΔΙΑΤΑΞΕΩΣ

Αἱ σχέσεις διατάξεως εἰς τὸ σύνολον τῶν τόξων κύκλου (Ο) ἢ ἴσων πρὸς ἀλλήλους κύκλων, ὁρίζονται, ὅπως καὶ ἡ σχέσις τῆς ἰσότητος, διὰ τῆς θεωρήσεως τῶν ἀντιστοίχων πρὸς αὐτὰ ἐπικέντρων γωνιῶν. Ἤτοι ἔχομεν :

Ἂν εἶναι $\overrightarrow{\alpha}$ καὶ $\overrightarrow{\beta}$ ἀντιστοίχως, αἱ κλάσεις τῶν τόξων αἱ ὁποῖαι ὁρίζονται ἀπὸ δύο τόξα $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{EZ}$ καὶ $\alpha\sphericalangle$ καὶ $\sphericalangle\beta$ αἱ κλάσεις τῶν ἀντιστοίχων πρὸς τὰ ἀνωτέρω τόξα ἐπικέντρων γωνιῶν (ΟΑ, ΟΒ) καὶ (ΟΕ, ΟΖ), θὰ σημειοῦμεν :

$$\overrightarrow{\alpha} > \overrightarrow{\beta} \Leftrightarrow \sphericalangle\alpha > \sphericalangle\beta \text{ κλπ.}$$

236. ΟΡΙΣΜΟΣ. Δύο τόξα ΑΒ καὶ ΒΓ τοῦ αὐτοῦ κύκλου (Ο), ὀνομάζεται *διαδοχικὰ* ἂν αἱ ἀντίστοιχοι αὐτῶν ἐπίκεντροι γωνίαι εἶναι διαδοχικαί. (Σχ. 236).



Σχ. 236

Ὀνομάζομεν *ἄθροισμα* δύο τόξων $\overrightarrow{\alpha}$ καὶ $\overrightarrow{\beta}$ τοῦ αὐτοῦ κύκλου (Ο) ἢ ἴσων κύκλων, κατὰ τὴν θεωρουμένην τάξιν, καὶ τὸ συμβολίζομεν μὲ τὸ σύμβολον $\overrightarrow{\alpha}+\overrightarrow{\beta}$, τὸ τόξον τοῦ ὁποίου ἡ κλάσις $\overrightarrow{\gamma}$ ὁρίζεται ἀπὸ ἕνα τόξον τοῦ κύκλου (Ο) τοῦ ὁποίου ἡ ἀντίστοιχος ἐπίκεντρος γωνία, εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστοίχων πρὸς τὰ τόξα α καὶ β ἐπικέντρων γωνιῶν τοῦ κύκλου (Ο).

Θὰ σημειοῦμεν συμβολικῶς : $\overrightarrow{\gamma}=\overrightarrow{\alpha}+\overrightarrow{\beta}$.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ ἀθροίσματος δύο τόξων ἕπεται ὅτι :

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Εἰς τὸ σύνολον τῶν προσανατολισμένων τόξων κύκλου*(1) *ἰσχύουν αἱ ἰδιότητες τῆς προσθέσεως : μονότροπος, μεταθετικὴ καὶ προσεταιριστική.*

Βάσει τῆς τελευταίας δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν τὸ ἄθροισμα περισσοτέρων τῶν δύο τόξων.

Σημειοῦμεν ὅτι :

(1) Τὸ **μηδενικὸν τόξον** καὶ τὸ **ἀντίθετον** δοθέντος τόξου α, κύκλου (Ο), ὁριζόμενον ἐκ τῶν ἀντιστοίχων ἐπικέντρων γωνιῶν, εἶναι ἀντιστοίχως τὸ οὐδέτερον καὶ τὸ ἀντίθετον στοιχεῖον τῆς προθέσεως εἰς τὸ σύνολον τῶν τόξων ἑνὸς κύκλου (Ο) ἢ κύκλων ἴσων πρὸς ἀλλήλους.

(2). Κατ' ἀναλογίαν πρὸς τὰ ἀναφερόμενα εἰς τὸ σύνολον τῶν γωνιῶν, ὁρίζεται ἡ **διαφορὰ** δύο τόξων α καὶ β τοῦ αὐτοῦ ἢ ἴσων κύκλων, ὡς καὶ τὸ **γινόμενον** τόξου α ἐπὶ ἀκέραιον ἀριθμόν. (2)

237. ΘΕΩΡΗΜΑ. Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον (Ο) ἢ εἰς δύο ἴσους κύκλους (Ο) καὶ (Ο′), εἰς ἴσας χορδὰς ἀντιστοιχοῦν ἴσα μείζονα ἢ ἐλάσσονα τόξα καὶ ἀντιστρόφως.

---

(1) Ἢ ἴσων πρὸς ἀλλήλους κύκλων.

(2) Τὸ ἄθροισμα δύο ἢ περισσοτέρων κυκλικῶν τόξων δύναται νὰ καλύψῃ τὸν κύκλον περισσοτέρας τῆς μιᾶς φοράς. Γενικεύοντες τὴν ἔννοιαν τοῦ τόξου δεχόμεθα ὅτι καὶ τὸ ἄθροισμα τοῦτο εἶναι ἕνα προσανατολισμένον τόξον.

Σημειοῦμεν ὅτι :

(α) Ἡ σχέσις τῶν Chasles – Möbius ἡ ἀναφερομένη εἰς τὸ σύνολον τῶν γωνιῶν, ἰσχύει, κατόπιν τῶν ἀνωτέρω ὁρισμῶν, καὶ εἰς τὸ σύνολον τῶν τόξων κύκλου (Ο).

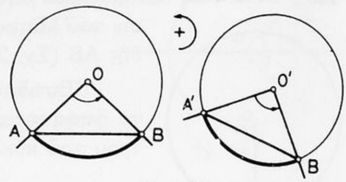
Συμφώνως πρὸς αὐτήν :

Ἂν Α, Β, Γ, . . . , Ζ εἶναι τυχόντα σημεῖα τοῦ κύκλου (Ο), τὸ ἄθροισμα τῶν διαδοχικῶν τόξων ΑΒ, ΒΓ, . . . , ΓΑ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ μηδενικὸν τόξον τοῦ (Ο), ἤτοι :
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}+\ldots+\overrightarrow{ZA}=O$.

(β) Ὡς *μέτρον* τῶν τόξων τοῦ αὐτοῦ κύκλου (Ο) ἢ ἴσων κύκλων, ἤτοι ὡς *μοναδιαῖον* τόξον, τοῦ συνόλου τῶν ἀνωτέρω τόξων δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν τὸ τόξον τοῦ ὁποίου ἡ ἀντίστοιχος ἐπίκεντρος γωνία εἶναι ἡ θετικῶς προσανατολισμένη *ὀρθὴ γωνία*.

Ἐπὶ τῆς ἐννοίας αὐτῆς καὶ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἀλγεβρικῆς τιμῆς προσανατολισμένης γωνίας γίνεται λόγος εἰς τὰ Μαθηματικὰ τῶν ἑπομένων τάξεων.

'Απόδειξις. Ἔστωσαν ΑΒ καὶ Α'Β' αἱ ἴσαι χορδαί, 'Εκ τῶν ἴσων (91) τριγώνων ΑΟΒ καὶ Α'Ο'Β' (Σχ. 237), ἕπεται ὅτι (ΟΑ, ΟΒ) = (Ο'Α', Ο'Β') καὶ ἐξ αὐτῆς ὅτι ΑΒ = Α'Β'. Ἡ ἀντίστροφος πρότασις ἀποδεικνύεται ἐκ τῶν αὐτῶν τριγώνων.



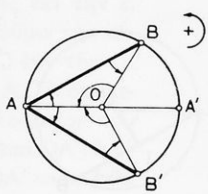
Σχ. 237

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ. *1. Δοθείσης χορδῆς ΑΒ κύκλου (Ο) ὑπάρχει χορδὴ Α'Β' τοῦ (Ο) ἴση πρὸς τὴν ΑΒ καὶ μία μόνον.*

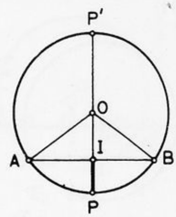
Πράγματι, ὑπάρχει ἡμιευθεῖα ΑΒ' καὶ μία μόνον ὥστε (ΟΑ, ΟΒ') = − (ΟΑ, ΟΒ).

Τὰ σημεῖα Β καὶ Β' (Σχ. 237.1) εἶναι συμμετρικὰ ἀλλήλων ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΟΑ. Πράγματι, εἶναι ΑΒ = ΑΒ' καὶ ΟΒ = ΟΒ'. Ἑπομένως ἡ ΟΑ εἶναι ἡ μεσοκάθετος τῆς χορδῆς ΒΒ'.

2. Ἡ εὐθεῖα ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπὸ τὸ μέσον Ι μιᾶς χορδῆς ΑΒ κύκλου (Ο) καὶ ἀπὸ τὸ μέσον Ρ τοῦ ἀντιστοίχου ἐλάσσονος ἢ μείζονος τόξου ΑΒ εἶναι ἡ μεσοκάθετος τῆς χορδῆς ΑΒ.



Σχ. 237.1



Σχ. 237.2

Πράγματι, εἰς τὰ τρίγωνα ΟΡΑ καὶ ΟΡΒ (Σχ. 237.2) ἔχομεν ΟΑ = ΟΒ (ἀκτῖνες τοῦ κύκλου (Ο)) καὶ ΡΑ = ΡΒ (237). Ἑπομένως (ΟΡ, ΟΑ) = − (ΟΡ, ΟΒ). Ἤτοι ἡ ΟΡ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας (ΟΑ, ΟΒ) τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΟΑΒ καὶ ἑπομένως μεσοκάθετος τῆς πλευρᾶς ΑΒ αὐτοῦ.

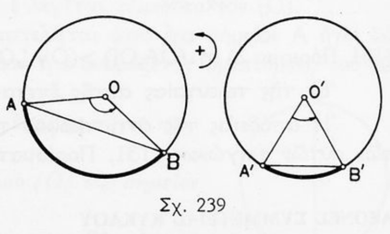
238. ΟΡΙΣΜΟΣ Τὸ εὐθ. τμῆμα ΙΡ (Σχ. 237.2) τὸ συνδέον τὸ μέσον τοῦ μείζονος ἢ ἐλάσσονος τόξου ΑΒ κύκλου (Ο), μὲ τὸ μέσον τῆς ἀντιστοίχου χορδῆς ὀνομάζεται *βέλος* τοῦ θεωρουμένου μείζονος ἢ ἐλάσσονος τόξου.

239. ΘΕΩΡΗΜΑ. Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον (Ο) ἢ εἰς δύο ἴσους κύκλους (Ο) καὶ (Ο'), εἰς δύο ἄνισα ἐλάσσονα τόξα ΑΒ καὶ Α'Β'[1] ἀντιστοιχοῦν ὁμοίως ἄνισοι χορδαὶ καὶ ἀντιστρόφως εἰς ἀνίσους χορδὰς ἀντιστοιχοῦν ὁμοίως ἄνισα ἐλάσσονα τόξα.

'Απόδειξις. Ἂν $\overrightarrow{AB} > \overrightarrow{A'B'}$ θὰ εἶναι (ΟΑ, ΟΒ) > (Ο'Α', Ο'Β').

'Εκ τῶν τριγώνων ΑΟΒ καὶ Α'Ο'Β' ἕπεται (131) ὅτι ΑΒ > Α'Β' (Σχ. 239).

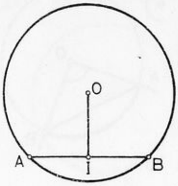
Ἡ ἀπόδειξις τῆς ἀντιστρόφου προτάσεως προκύπτει ἐκ τῆς θεωρήσεως τῶν αὐτῶν τριγώνων (133).



Σχ. 239

(1) Ὁμοίως προσανατολισμένα.

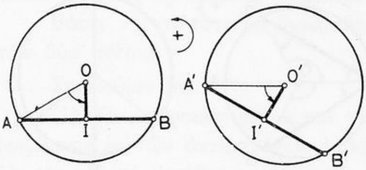
240. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ὀνομάζομεν *ἀπόστημα* χορδῆς ΑΒ κύκλου (Ο), τὴν ἀπόστασιν τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου (Ο) ἀπὸ τοῦ μέσου Ι τῆς χορδῆς ΑΒ (Σχ. 240).



Σχ. 240

Ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΟΙ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ (229), τὸ ἀπόστημα τῆς χορδῆς ΑΒ εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἀπὸ τῆς εὐθείας ΑΒ.

241. ΘΕΩΡΗΜΑ. **Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον (Ο) ἢ εἰς δύο ἴσους κύκλους (Ο) καὶ (Ο′) : Ἂν δύο χορδαὶ εἶναι ἴσαι, τότε καὶ τὰ ἀποστήματα αὐτῶν εἶναι ἴσα καὶ ἀντιστρόφως.**

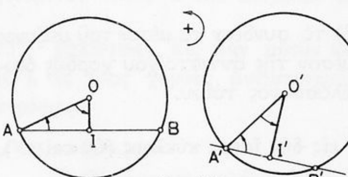


Σχ. 241

Ἀπόδειξις. Ἂν ΑΒ = Α′Β′, τὸ ἀποδεικτέον προκύπτει ἐκ τῶν ἴσων τριγώνων ΟΑΙ καὶ Ο′Ο′Ι′. (124, Πόρισμα).

Ἂν ΟΙ = Ο′Ι′, τὸ ἀποδεικτέον προκύπτει ἐπίσης ἐκ τῶν ἀνωτέρω τριγώνων ΟΑΙ καὶ Ο′Α′Ι′. (124, Πόρισμα).

242. ΘΕΩΡΗΜΑ. **Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον (Ο) ἢ εἰς δύοι ἴσους κύκλους (Ο) καὶ (Ο′) : Ἂν δύο χορδαὶ εἶναι ἄνισοι, τότε καὶ τὰ ἀποστήματα αὐτῶν εἶναι ἄνισα καὶ εἰς τὴν μεγαλυτέραν χορδὴν ἀντιστοιχεῖ τὸ μικρότερον ἀπόστημα καὶ ἀντιστρόφως.**



Σχ. 242

Ἀπόδειξις. Ἂν ΑΒ > Α′Β′ θὰ εἶναι καὶ ΙΑ > ΙΑ′ (Σχ. 242). Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΟΑΙ καὶ Ο′Α′Ι′ ἔχομεν (131, Πόρισμα 2) ὅτι (ΟΑ,ΟΙ) >(Ο′Α′,Ο′Ι′) καὶ ἐξ αὐτῆς ὅτι (ΑΙ,ΑΟ)< (Α′Ι′,Α′Ο′).

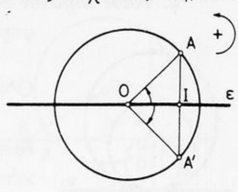
Ἐκ τῆς τελευταίας αὐτῆς ἕπεται (131, Πόρισμα 1) ὅτι ΟΙ < Ο′Ι′.

Ἡ ἀπόδειξις τῆς ἀντιστρόφου προτάσεως προκύπτει ἐκ τῆς θεωρήσεως τῶν αὐτῶν τριγώνων (131, Πορίσματα 1 καὶ 2).

ΑΞΟΝΕΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ ΚΥΚΛΟΥ

243. ΘΕΩΡΗΜΑ. **Κάθε εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου κύκλου (Ο), εἶναι ἄξων συμμερίας αὐτοῦ.**

Ἀπόδειξις. Ἂν εἶναι Α (Σχ. 243) τὸ συμμετρικὸν ἑνὸς τυχόντος σημείου Α τοῦ (Ο) ὡς πρὸς τυχοῦσαν εὐθεῖαν διερχομένην διὰ τοῦ κέντρου Ο τοῦ κύκλου, ἐκ τῶν τριγώνων ΟΙΑ καὶ ΟΙΑ′ ἕπεται (121) ὅτι ΟΑ′ = ΟΑ ἤτοι ΟΑ′ = α, ἔνθα α ἡ ἀκτὶς τοῦ (Ο).



Σχ. 243

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Δύο ἴσα ἢ ἀντίθετα τόξα ΑΒ καὶ Α′Β′ κύκλου (Ο) εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς εὐθεῖαν διερχομένην διὰ κέντρου Ο τοῦ (Ο).*

ΤΟΜΗ ΕΥΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΥ

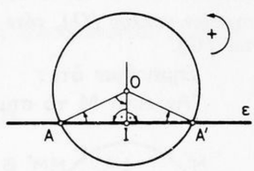
244. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν μία εὐθεῖα ε καὶ ἕνας κύκλος (Ο) ἔχουν ἕνα κοινὸν σημεῖον Α, τότε θὰ ἔχουν καὶ ἕνα δεύτερον κοινὸν σημεῖον Α′.

Ἀπόδειξις. Παρατηροῦμεν ὅτι δύο περιπτώσεις εἶναι δυναταί.

(1) Ἡ εὐθεῖα ΟΑ δὲν εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ε.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θεωροῦμεν τὴν κάθετον ΟΙ ἐπὶ τὴν ε (Ι ἡ προβολὴ τοῦ Ο ἐπὶ τὴν ε).

Τὸ σημεῖον Ι εἶναι διάφορον τοῦ Α. Τὸ συμμετρικὸν Α′ τοῦ Α ὡς πρὸς τὸ Ι, εἶναι σημεῖον τοῦ (Ο). Πράγματι, ἐκ τῶν τριγώνων ΟΑΙ καὶ ΟΑ′Ι ἔχομεν (121) ὅτι : ΟΑ′ = ΟΑ, ἤτοι ὅτι ΟΑ′ = α, ἔνθα α ἡ ἀκτὶς τοῦ (Ο). Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι τὸ Α′ εἶναι σημεῖον τοῦ (Ο). Ὥστε ἡ τομὴ τῆς ε καὶ τοῦ (Ο) ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο σημεῖα διάφορα ἀλλήλων.



Σχ. 244

(2) Ἡ εὐθεῖα ΟΑ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ε.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, ἡ προβολὴ Ι τοῦ Ο ἐπὶ τὴν ε εἶναι τὸ σημεῖον Α. Τὸ συμμετρικὸν Α′ τοῦ Α ὡς πρὸς τὸ Ι συμπτύπτει μὲ τὸ Α. Ἡ τομὴ τῆς ε καὶ τοῦ (Ο) ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο σημεῖα Α καὶ Α′ συμπίπτοντα εἰς ἕν.

ΤΕΜΝΟΥΣΑ ΚΑΙ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΚΥΚΛΟΥ

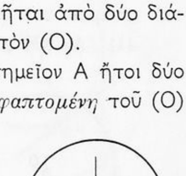
245. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἂν ἡ τομὴ εὐθείας ε καὶ κύκλου (Ο) ἀποτελῆται ἀπὸ δύο διάφορα ἀλλήλων σημεῖα Α καὶ Α′, τότε ἡ ε λέγεται *τέμνουσα* τὸν (Ο).

Ἂν ἡ τομὴ τῆς ε καὶ τοῦ (Ο) ἀποτελῆται ἀπὸ ἕνα σημεῖον Α ἤτοι δύο σημεῖα Α καὶ Α′ συμπτίπτοντα εἰς ἕν τότε ἡ ε ὀνομάζεται *ἐφαπτομένη* τοῦ (Ο) εἰς τὸ σημεῖον Α αὐτοῦ (Σχ. 245).

Τὸ σημεῖον Α ὀνομάζεται **σημεῖον ἐπαφῆς** τῆς ε καὶ τοῦ (Ο).

ΠΟΡΙΣΜΑ *1. Ἡ ἐφαπτομένη κύκλου (Ο) εἰς σημεῖον Α αὐτοῦ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΑ.*

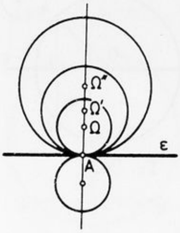
Πράγματι, εἰς τὴν ἀντίθετον περίπτωσιν θὰ εἶχε μὲ τὸν (Ο) καὶ ἕνα δεύτερον κοινὸν σημεῖον Α′ διάφορον τοῦ Α (244.1).



Σχ. 245

2. Κάθε σημεῖον Ν τῆς ἐφαπτομένης κύκλου (Ο) εἰς σημεῖον Α αὐτοῦ, διάφορον τοῦ Α, εἶναι ἐξωτερικὸν σημεῖον τοῦ (Ο).

Πράγματι, ἐκ τοῦ ὀρθογ. τριγώνου ΟΑΝ ἔχομεν ὅτι ΟΝ > ΟΑ ἤτοι ΟΝ > α.



Σχ. 245.4

3. Ἡ διὰ σημείου Α κύκλου (Ο) κάθετος ξ ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην αὐτοῦ εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο, διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου Ο τοῦ κύκλου (Ο).

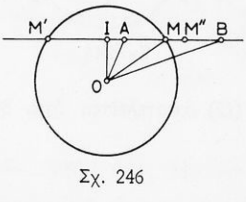
Πράγματι, εἰς τὴν ἀντίθετον περίπτωσιν θὰ ὑπῆρχον δύο κάθετοι ἐπὶ τὴν ε εἰς τὸ σημεῖον Α : ἡ ξ καὶ ἡ ΟΑ.

4. Ὁ γεωμ. τόπος τῶν κέντρων Ω τῶν κύκλων (Ω), ἕκαστος τῶν ὁποίων ἐφάπτεται δοθείσης εὐθείας ε εἰς δοθὲν σημεῖον Α αὐτῆς εἶναι ἡ εἰς τὸ Α κάθετος ἐπὶ τὴν ε (Σχ. 245.4)

246. ΑΞΙΩΜΑ. *Ἂν Α καὶ Β εἶναι ἀντιστοίχως ἕνα ἐσωτερικὸν καὶ ἕνα ἐξωτερικὸν σημεῖον κύκλου (Ο), τότε μεταξὺ τῶν Α καὶ Β ὑπάρχει τουλάχιστον ἕνα σημεῖον τοῦ (Ο).*

Σημειοῦμεν ὅτι :

Ἂν εἶναι Μ τὸ σημεῖον τοῦτο (Σχ. 246), δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπάρχῃ καὶ δεύτερον σημεῖον Μ'' τοῦ (Ο) μεταξὺ τῶν Α καὶ Β, διότι τότε ἡ εὐθεῖα ΑΒ καὶ ὁ κύκλος (Ο) θὰ εἶχον κοινὰ σημεῖα περισσότερα τῶν δύο.



Σχ. 246

Πράγματι, ἡ ΟΜ δὲν εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ διότι τότε ἡ ΑΒ θὰ ἦτο ἡ ἐφαπτομένη τοῦ (Ο) εἰς τὸ Μ, καὶ ὅλα τὰ σημεῖα αὐτῆς, ἑπομένως καὶ τὰ Α, Β, θὰ ἦσαν ἐξωτερικὰ τοῦ (Ο), ἐνῶ ἐξ ὑποθέσεως τὸ Α εἶναι ἐσωτερικὸν αὐτοῦ.

Λόγῳ τούτου ἡ εὐθεῖα ΑΒ ἔχει ἕνα δεύτερον κοινὸν σημεῖον Μ' μὲ τὸν (Ο) (244), τὸ ὁποῖον εἶναι διάφορον τῶν Μ καὶ Μ''.

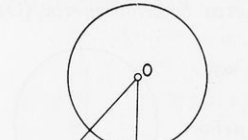
Ὥστε μεταξὺ τῶν Α καὶ Β ὑπάρχει ἕνα μόνον σημεῖον τοῦ (Ο).

247. ΘΕΩΡΗΜΑ. Θεωροῦμεν : κύκλον Ο (α), εὐθεῖαν ε καὶ τὴν ἀπόστασιν ΟΙ τοῦ κέντρου τοῦ (Ο) ἀπὸ τῆς (ε).

(1) Ἂν ΟΙ > α, τότε ἡ ε δὲν ἔχει κοινὸν σημεῖον μὲ τὸ (Ο).

(2) Ἂν ΟΙ < α, τότε ἡ ε εἶναι τέμνουσα τὸν (Ο).

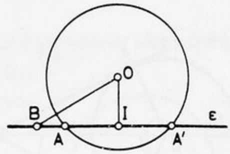
(3) Ἂν ΟΙ = α, τότε ἡ ε εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ (Ο).



247.1

Ἀπόδειξις. (1) Ἐκ τῆς ΟΙ > α ἕπεται ὅτι τὸ σημεῖον Ι (προβολὴ τοῦ Ο ἐπὶ τὴν ε) εἶναι ἐξωτερικὸν σημεῖον τοῦ (Ο). Ἐξ ἄλλου κάθε σημεῖον Β τῆς ε, διάφορον τοῦ Ι, εἶναι ἐξωτερικὸν σημεῖον τοῦ (Ο). Πράγματι, ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΒΙ ἔχομεν ὅτι ΟΒ > ΟΙ (129), καὶ ἑπομένως ΟΒ > α, ἀφοῦ ΟΙ > α. Ὥστε τὸ Β εἶναι ἐξωτερικὸν σημεῖον τοῦ (Ο).

(2) Ἐκ τῆς $OI < \alpha$ ἕπεται ὅτι τὸ I εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ (O). Θεωροῦμεν (Σχ. 247.2) ἐπὶ τῆς ε, ἐπὶ τῆς μιᾶς ἢ τῆς ἄλλης ἡμιευθείας αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἀρχικὸν σημεῖον τὸ I, τὸ σημεῖον B ὥστε $IB = \alpha$ (α ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου (O). Τὸ σημεῖον B εἶναι ἐξωτερικὸν σημεῖον τοῦ (O). Πράγματι εἶναι $OB > IB$ (129), ἤτοι $OB > \alpha$. Ὑπάρχει, ἑπομένως, μεταξὺ τῶν I καὶ B σημεῖον M ταῦ κύκλου (O) καὶ ἕνα μόνον (246). Ἔστω A τὸ σημεῖον τοῦτο. Τὸ συμμετρικὸν A′ τοῦ A, ὡς πρὸς τὸ I, εἶναι κοινὸν σημεῖον τῆς ε καὶ τοῦ (O), διάφορον τοῦ A.



Σχ. 247.2

Ὥστε ἡ ε εἶναι τέμνουσα τὸν (O).

(3) Ἐκ τῆς $OI = \alpha$ ἕπεται ὅτι τὸ I εἶναι σημεῖον τοῦ (O) καὶ ὅτι ἡ ε ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν OI εἰς τὸ I, εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ (O).

Παρατηροῦμεν ὅτι :

Ἡ ἀντίστροφος τῆς ἀνωτέρω προτάσεως (247) ἀποδεικνύεται εὐκόλως διὰ τῆς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

Δυνάμεθα ἑπομένως νὰ σημειώσωμεν :

$OI > \alpha \Leftrightarrow$ ε δὲν ἔχει κοινὸν σημεῖον μὲ τὴν (O).

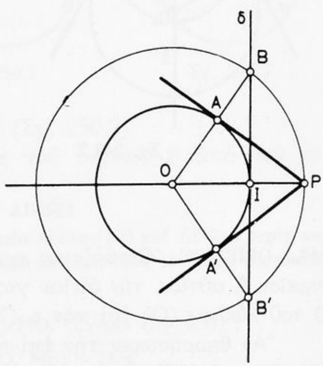
$OI = \alpha \Leftrightarrow$ ε εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ (O).

$OI < \alpha \Leftrightarrow$ ε εἶναι τέμνουσα τὸν (O).

ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΚΥΚΛΟΥ ΔΙΑ ΣΗΜΕΙΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ ΑΥΤΟΥ

248. ΘΕΩΡΗΜΑ **Ἂν ἕνα σημεῖον P εἶναι ἐξωτερικὸν σημεῖον κύκλου O (α), ὑπάρχουν διὰ τοῦ P δύο ἐφαπτόμεναι τοῦ (O) καὶ μόνον δύο.**

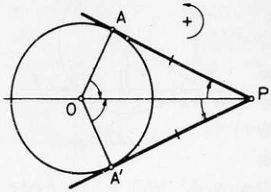
Ἀπόδειξις. Ἔστω A τὸ σημεῖον ἐπαφῆς μὲ μίαν ἐφαπτομένην διερχομένην διὰ τοῦ P (Σχ. 248). Τὸ τρίγωνον OAP εἶναι ὀρθογώνιον κατὰ τὴν γωνίαν A(245, Πόρ. 1). Ἔστω I τὸ μεταξὺ τῶν O καὶ P σημεῖον τοῦ (O). Ἡ κάθετος δ ἐπὶ τὴν OI εἰς τὸ σημεῖον I, ἡ ὁποία εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ (O), τέμνει τὴν OA εἰς ἕνα σημεῖον, ἔστω B. Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων OAP καὶ OIB ἕπεται (121) ὅτι $OB = OP$, ἤτοι τὸ B εἶναι σημεῖον τοῦ ὁμοκέντρου τοῦ (O) κύκλου, τοῦ ἔχοντος ἀκτῖνα ἴσην πρὸς τὸ εὐθ. τμῆμα OP.



Σχ. 248

Ὥστε τὸ σημεῖον P εἶναι κοινὸν σημεῖον τῆς δ καὶ τοῦ κύκλου O (OP). Ἀλλὰ ἡ δ ἔχει δύο κοινὰ σημεῖα B καὶ B′ μὲ τὸν ἀνωτέρω κύκλον O (OP), διότι ἡ ἀπόστασις OI τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου τούτου ἀπὸ αὐτῆς εἶναι μικροτέρα τῆς ἀκτῖνος OP αὐτοῦ. Ἑπομένως ὑπάρχουν δύο ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου O (α) διὰ τοῦ σημείου P καὶ μόνον δύο. Τᾶ σημεῖα ἐπαφῆς A καὶ A′ εἶναι τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν OB καὶ OB′ μὲ τὸν κύκλον O(α).

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ. *1. Ἡ ἡμιευθεῖα PO εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας (PA,PA') καὶ ἡ OP διχοτόμος τῆς γωνίας (OA, OA').*



Σχ. 248.1

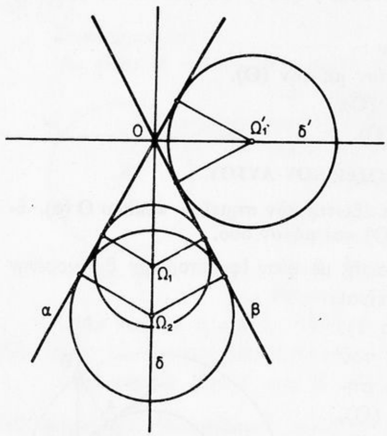
Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι ἡ γωνία (PA, PA') εἶναι ἡ γωνία ὑπὸ τὴν ὁποίαν ὁ κύκλος (O) *φαίνεται* ἀπὸ τοῦ σημείου P. (Σχ. 248.1)

2. Τὰ εὐθ. τμήματα PA καὶ PA' εἶναι ἴσα. Τὰ σημεῖα A καὶ A' εἶναι συμμετρικὰ ἀλλήλων ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν PO.

Τὸ εὐθ. τμῆμα PA, ἢ τὸ PA', ὀνομάζεται καὶ *ἐφαπτομενικὴ ἀπόστασις* τοῦ σημείου P ἀπὸ τοῦ κύκλου (O).

Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι ὁ κύκλος (O) ὁ ὁποῖος ἐφάπτεται τῶν πλευρῶν τῆς κυρτῆς γωνίας (PA, PA') εἶναι *ἐγγεγραμμένος* εἰς αὐτήν.

3. Ὁ γεωμ. τόπος τῶν κέντρων τῶν κύκλων ἕκαστος τῶν ὁποίων ἐφάπτεται δύο τεμνομένων εὐθειῶν α καὶ β ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ σημεῖα τῶν διχοτόμων τῶν κυρτῶν γωνιῶν τῶν ὁριζομένων ὑπὸ τῶν εὐθειῶν τούτων.



Σχ. 248.2

Αἱ διχοτόμοι αὗται ἀποτελοῦν, ὡς γνωστόν, δύο εὐθείας δ καὶ δ' καθέτους ἐπ' ἀλλήλας.

Πράγματι, κάθε σημεῖον τῆς δ ἢ τῆς δ' εἶναι κέντρον κύκλου ἐγγεγραμμένου εἰς τὴν γωνίαν, ἐντὸς τῆς ὁποίας κεῖται τὸ θεωρούμενον σημεῖον. Ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου τούτου εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ θεωρουμένου σημείου ἀπὸ τῆς α ἢ τῆς β.

Ἂν αἱ α καὶ β εἶναι παράλληλοι ὁ ἀνωτέρω γεωμ. τόπος εἶναι ὁ μεσοπαράλληλος αὐτῶν.

ΓΩΝΙΑ ΕΥΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΥ

249. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ὀνομάζομεν *γωνίαν* εὐθείας ε καὶ κύκλου (O), εἰς ἕνα κοινὸν σημεῖον A αὐτῶν, τὴν ὀξεῖαν γωνίαν (OI, OA), ὅπου I ἡ προβολὴ τοῦ κέντρου O τοῦ κύκλου (O) ἐπὶ τὴν ε. (Σχ. 249)

Ἂν θεωρήσωμεν τὴν ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ σημεῖον A τοῦ κύκλου ἡμιευθεῖαν AX (1), τὴν κειμένην πρὸς τὸ μέρος τῆς ε πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται τὸ κέντρον O τοῦ κύκλου, θὰ ἔχωμεν: (OA, OI) = (AX, AI).

---

(1) Ἡμιεφαπτομένην AX.

Ἡ γωνία τῶν ε καὶ (O) εἰς τὸ δεύτερον κοινὸν σημεῖον A′ αὐτῶν εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν αὐτῶν εἰς τὸ A. (Σχ. 249).

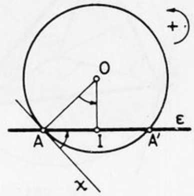
Ἂν ἡ ε διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου O τοῦ (O), ἡ ἀνωτέρω γωνία εἶναι ὀρθή.

Δυνάμεθα, εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν νὰ λέγωμεν ὅτι ἡ ε **τέμνει ὀρθογωνίως** τὸν (O) ἢ ὅτι ἡ ε εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸν (O).

Ἀντιστρόφως, ἂν μία εὐθεῖα ε τέμνῃ ὀρθογωνίως ἕνα κύκλον, διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου του.

Ἂν ἡ ε εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ (O), ἡ γωνία (OA, OI) τῶν ε καὶ (O) εἶναι ἡ μηδενικὴ γωνία.

Ἀντιστρόφως, κάθε εὐθεῖα ε τέμνουσα τὸν (O) ὑπὸ γωνίαν μηδενικήν, εἶναι ἐφαπτομένη αὐτοῦ.



Σχ. 249

ΑΠΟΣΤΑΣΙΣ ΣΗΜΕΙΟΥ ΑΠΟ ΚΥΚΛΟΥ

250. ΘΕΩΡΗΜΑ. Θεωροῦμεν σημεῖον P τοῦ ἐπιπέδου ἑνὸς κύκλου (O) καὶ τὰ κοινὰ σημεῖα A καὶ A′ τοῦ (O) μὲ τὴν εὐθεῖαν PO (A πρὸς τὸ μέρος τοῦ O πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται τὸ P). Ἂν εἶναι B ἕνα τυχὸν σημεῖον τοῦ (O), διάφορον των A καὶ A′, τότε:

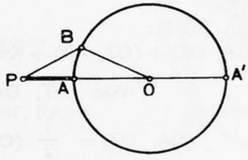
$$PA < PB \quad \text{καὶ} \quad PA' > PB$$

Ἀπόδειξις. Ἂν τὸ P εἶναι ἐξωτερικὸν σημεῖον τοῦ κύκλου (O), θὰ ἔχωμεν (Σχ.250.1): $PO < OB + PB$ (128) ἢ $PA + OA < OB + PB$ δηλαδὴ $PA < PB$, ἀφοῦ $OA = OB$. Ἐξ ἄλλου:

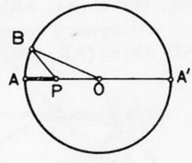
$PB < OP + OB$ (128) ἢ

$PB < OP + OA'$, δηλαδὴ

$PB < PA'$ ἢ $PA' > PB$.



Σχ. 250.1



Σχ. 250.2

Ἂν τὸ σημεῖον P εἶναι ἐσωτερικὸν τοῦ κύκλου (O), τὸ ἀποδεικτέον προκύπτει ἐκ τῆς $OB < PB + PO$. (Σχ. 250.2)

Τὸ εὐθ. τμῆμα PA ὀνομάζεται **ἀπόστασις** τοῦ σημείου P ἀπὸ τοῦ κύκλου (O).

251. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν A καὶ B εἶναι δύο σταθερὰ σημεῖα κύκλου (O) καὶ M ἕνα τυχὸν σημεῖον αὐτοῦ, ἡ γωνία τῶν εὐθειῶν (MA, MB) εἶναι σταθερὰ καὶ ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς γωνίας τῶν ἡμιευθειῶν $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$. (1)

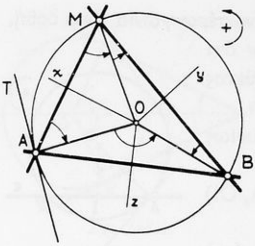
Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν τὰς ἡμιευθείας MA, MB, MO. Ἔχομεν (Σχ. 251):

$$(\text{I}) \quad (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) + (\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MB}) + 2K\pi$$

---

(1) Μὲ τὸ σύμβολον (MA, MB) συμβολίζομεν τὴν γωνίαν τῶν εὐθειῶν MA καὶ MB καὶ μὲ τὸ $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ τὴν γωνίαν τῶν ἡμιευθειῶν MA, MB ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, τὴν γωνίαν τῶν ἀξόνων $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$.

Έστωσαν OX καὶ OY αἱ μεσοκάθετοι τῶν MA καὶ MB ἀντιστοίχως, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἄξονες συμμετρίας τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων MOA καὶ MOB ἀντιστοίχως. Ἔχομεν :



Σχ. 251

$(\overrightarrow{MA},\ \overrightarrow{MO}) = -(\overrightarrow{AM},\ \overrightarrow{AO})$ καὶ $(\overrightarrow{MO},\ \overrightarrow{MB}) = -(\overrightarrow{BO},\ \overrightarrow{BM})$,

καὶ ἐκ τῆς (1) :

$$(\overrightarrow{MA},\ \overrightarrow{MB}) = -(\overrightarrow{AM},\ \overrightarrow{AO}) - (\overrightarrow{BO},\ \overrightarrow{BM}) + 2K\pi =$$

$$(\overrightarrow{AO},\ \overrightarrow{AM}) + (\overrightarrow{BM},\ \overrightarrow{BO}) + 2K\pi$$

Ἀλλὰ $(\overrightarrow{AO},\ \overrightarrow{AM}) = (\overrightarrow{AO},\ \overrightarrow{BO}) + (\overrightarrow{BO},\ \overrightarrow{AM}) + 2K\pi$, συμφώνως πρὸς τὴν σχέσιν τῶν Chasles–Möbius, ἡ ὁποία ἰσχύει διὰ τρεῖς οἱασδήποτε ἡμιευθείας ἢ ἄξονας (102). Ἑπομένως :

$$(\overrightarrow{MA},\ \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{AO},\ \overrightarrow{BO}) + (\overrightarrow{BO},\ \overrightarrow{AM}) + (\overrightarrow{BM},\ \overrightarrow{BO}) +$$

$+ 2K\pi = (\overrightarrow{AO},\ \overrightarrow{BO}) + (\overrightarrow{BM},\ \overrightarrow{AM}) + 2K\pi$ διότι $(\overrightarrow{BM},\ \overrightarrow{BO}) + (\overrightarrow{BO},\ \overrightarrow{AM}) = (\overrightarrow{BM},\ \overrightarrow{AM})$

Ἐπειδὴ ὅμως $(\overrightarrow{BM},\ \overrightarrow{AM}) = -(\overrightarrow{MA},\ \overrightarrow{MB})$ ἡ ἀνωτέρω σχέσις εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τήν: $(\overrightarrow{MA},\ \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{AO},\ \overrightarrow{BO}) - (\overrightarrow{MA},\ \overrightarrow{MB}) + 2K\pi$, ἢ τήν :

$2(\overrightarrow{MA},\ \overrightarrow{MB}) = -(\overrightarrow{AO},\ \overrightarrow{BO}) + 2K\pi$ ἢ $2(\overrightarrow{MA},\ \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB}) + 2K\pi$ ἢ

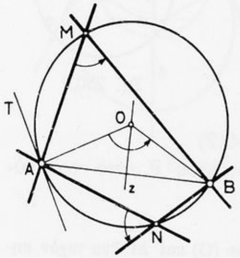
$$(2)\quad (MA,\ MB) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB}) + 2K\pi$$

Ὥστε ἡ γωνία τῶν εὐθειῶν (MA, MB) εἶναι σταθερὰ καὶ ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς γωνίας τῶν ἡμιευθειῶν (OA, OB).

ΠΟΡΙΣΜΑ *1. Ἂν εἶναι AT ἡ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου (O) κατὰ τὸ σημεῖον A, τότε:* $(MA,\ MB) = (AT,\ AB) + K\pi$

Πράγματι, ἔχομεν (Σχ. 251.1):

$(AT,\ AB) = (AT,\ OA) + (OA,\ OZ) + (OZ,\ AB) + K\pi$



Σχ. 251.1

Ἀλλὰ $(AT,\ OA) = \frac{\pi}{2} + K\pi$, $(OZ,\ AB) = \frac{\pi}{2} + K\pi$,

$(OA,\ OZ) = \frac{1}{2}(OA, OB) + K\pi$ Ἑπομένως :

$$(AT,\ AB) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB}) + K\pi$$

Ἐξ αὐτῆς καὶ τῆς σχέσεως (2) τοῦ θεωρήματος (251) ἕπεται ὅτι :

$$(MA,\ MB) = (AT,\ AB) + K\pi$$

Ἂν εἶναι N ἕνα ἄλλο σημεῖον τοῦ κύκλου, θὰ ἔχωμεν

$$(NB,\ NA) = (AB,\ AT) + K\pi$$

Ἑπομένως : $(MB,\ MA) = (NB,\ NA) + K\pi$

252. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἡ συνθήκη :

$$(1)\quad \mathbf{(MA, MB) = (NA, NB) + K\pi}$$

εἶναι ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ ἵνα τὰ τέσσαρα σημεῖα A, B, M, N, ἐκ τῶν ὁποίων τρία οἱαδήποτε δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας, εἶναι σημεῖα τοῦ αὐτοῦ κύκλου.

Πράγματι, ἂν τὰ A, B, M, N εἶναι σημεῖα τοῦ αὐτοῦ κύκλου, ἀπεδείχθη (251, Πόρισμα) ὅτι ἡ ἀνωτέρω (1) ἰσχύει.

Ἂς θεωρήσωμεν τώρα τέσσαρα σημεῖα A, B, M, N (Σχ. 251.1), διὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύει ἡ (1).

Θεωροῦμεν τὸν κύκλον ΜΒΑ καὶ τὴν ἐφαπτομένην ΑΤ αὐτοῦ κατὰ τὸ σημεῖον Α Θὰ εἶναι : $(MB,\ MA) = (AB,\ AT) + K\pi$

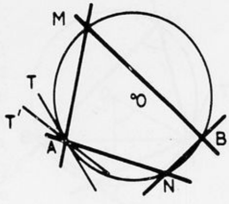
Θεωροῦμεν τὸν κύκλον ΝΒΑ καὶ τὴν ἐφαπτομένην ΑΤ′ αὐτοῦ κατὰ τὸ σημεῖον Α. Θὰ εἶναι :

$$(NB,\ NA) = (AB,\ AT') + K\pi$$

Ἐκ τῶν δύο τελευταίων καὶ τῆς ἐν τῇ ὑποθέσει (1) ἔχομεν :

$$(AB,\ AT) = (AB,\ AT') + K\pi$$

Ἐξ αὐτῆς ἕπεται ὅτι αἱ δύο ἐφαπτόμεναι ΑΤ καὶ ΑΤ′ συμπίπτουν καὶ λόγῳ τούτου καὶ οἱ ἀνωτέρω κύκλοι ΜΒΑ καὶ ΝΒΑ συμπίπτουν. Ἑπομένως τὰ τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Μ, Ν εἶναι σημεῖα τοῦ αὐτοῦ κύκλου.



Σχ. 252

253. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἵνα ἕνα σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ. εἶναι σημεῖον τοῦ κύκλου ΑΒΓ, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ὅπως αἱ προβολαὶ αὐτοῦ, ἐπὶ τὰς εὐθείας ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως, κεῖνται ἐπ᾽ εὐθείας.

Ἀπόδειξις. Ἔστω Μ ἕνα σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ Α′, Β′, Γ′ αἱ προβολαὶ αὐτοῦ ἐπὶ τὰς ΒΓ ΓΑ ΑΒ ἀντιστοίχως. Ἐκ τῶν ἐγγραψίμων τετραπλεύρων ΜΒ′Α′Γ καὶ ΜΒ′ΑΓ′, ἔχομεν ἀντιστοίχως :

(1) $(B'\Gamma,\ B'A') = (M\Gamma,\ MA') + K\pi =$
$= (M\Gamma, MA) + (MA,\ MA') + K\pi$

(2) $(B'A,\ B'\Gamma') = (MA,\ M\Gamma') + K\pi =$
$= (MA,\ MA') + (MA',\ M\Gamma') + K\pi$

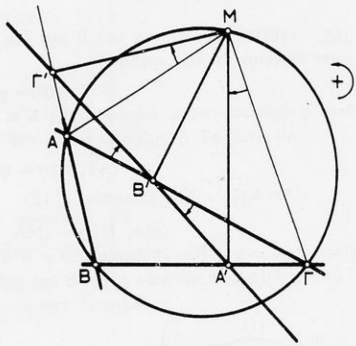
Ἐκ τοῦ ἐγγραψίμου τετραπλεύρου ΜΑ′ΒΓ′ ἔχομεν ὅτι :

(3) $(MA',\ M\Gamma') = (BA',\ B\Gamma') + K\pi =$
$= (B\Gamma,\ BA) + K\pi$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἑπομένως ἔχομεν :

(4) $(B'\Gamma,\ B'A') = (M\Gamma,\ MA) +$
$+ (MA,\ MA') + K\pi$

(5) $(B'A, B'\Gamma') = (MA, MA') + (B\Gamma, BA) +$
$+ K\pi.$



Σχ. 253

Οὕτω :

1. Ἂν τὸ Μ εἶναι σημεῖον τοῦ κύκλου ΑΒΓ, θὰ εἶναι :

$(M\Gamma,\ MA) = (B\Gamma,\ BA)$

Ἑπομένως : $(B'\Gamma,\ B'A') = (B'A,\ B'\Gamma') + K\pi$

καὶ ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Α, Β′, Γ κεῖνται ἐπ᾽ εὐθείας θὰ εἶναι καὶ τὰ Α′, Β′, Γ′ ἐπ᾽ εὐθείας [1]

Ἀντιστρόφως : Ἂν τὰ σημεῖα Α′, Β′, Γ′ κεῖνται ἐπ᾽ εὐθείας ἐκ τῶν (4) καὶ (5) εὑρίσκομεν ὅτι :

$(M\Gamma,\ MA) = (B\Gamma,\ BA) + K\pi$

ἐκ τῆς ὁποίας ἕπεται ὅτι τὸ Μ εἶναι σημεῖον τοῦ κύκλου ΑΒΓ.

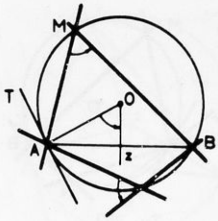
254. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν Α καὶ Β εἶναι δύο δοθέντα σημεῖα τὸ σύνολον τῶν σημείων Μ τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἐκ τῆς συνθήκης :

$$(MA, MB) = \varphi + K\pi$$

(1) Ἡ εὐθεῖα αὕτη ὀνομάζεται εὐθεῖα Simson τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἀναφερομένη εἰς τὸ σημεῖον Μ ἢ καὶ εὐθεῖα Simson τοῦ σημείου Μ ἀναφερομένη εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (τρίγωνον ἀναφορᾶς).

ὅπου φ δοθεῖσα γωνία, διάφορος τῆς Κ΄π, εἶναι κύκλος διερχόμενος διὰ τῶν Α καὶ Β. Ἂν εἶναι ΑΤ ἡ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου τούτου κατὰ τὸ σημεῖον Α, τότε

$$(AT, AB) = \varphi + K\pi$$



Σχ. 254

Ἀπόδειξις. Ἔστω Μ ἕνα σημεῖον ἱκανοποιοῦν τὴν συνθήκην $(MA, MB) = \varphi$. Τὸ σημεῖον τοῦτο δὲν κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ, διότι τότε θὰ ἦτο $\varphi = K'\pi$, τὸ ὁποῖον ἀπεκλείσθη ἐκ τῆς ὑποθέσεως. Ἔστω ΑΤ ἡ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου ΑΜΒ κατὰ τὸ σημεῖον Α. Ἐκ τῆς σχέσεως $(AT, AB) = \varphi$ προκύπτει· ὅτι ἡ εὐθεῖα αὐτὴ ΑΤ εἶναι σταθερὰ καὶ ἑπομένως ὅτι ὁ κύκλος ΑΜΒ εἶναι σταθερὸς (ἀνεξάρτητος τῆς θέσεως τοῦ σημείου Μ). Ἀντιστρόφως, διὰ κάθε σημεῖον Ν τοῦ κύκλου τούτου θὰ εἶναι : $(NA, NB) = (TA, TB)$, ἑπομένως $(NA, NB) = \varphi$.

Ὡς πρὸς τὴν κατασκευὴν τοῦ ἀνωτέρω κύκλου παρατηροῦμεν ὅτι τὸ κέντρον αὐτοῦ κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ καὶ ἐπὶ τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν ΑΤ κατὰ τὸ σημεῖον Α. Ἂν εἶναι Ο τὸ κέντρον τοῦτο, θὰ εἶναι :

$$(OA, OB) = 2 \cdot (MA, MB) = 2\varphi + 2K\pi$$

Ἂν $\varphi = K'\pi$, τὸ σύνολον τοῦ σημείου Μ τὸ ὁριζόμενον ἐκ τῆς συνθήκης $(MA, MB) = \varphi + K\pi$ εἶναι τὸ σύνολον τῶν σημείων τῆς εὐθείας ΑΒ.

Ἂν ἡ διδομένη γωνία φ εἶναι ὀρθή, τὸ ἀνωτέρω σύνολον εἶναι τὸ σύνολον τῶν σημείων τοῦ κύκλου διαμέτρου ΑΒ.

255. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν Α καὶ Β καὶ δύο δοθέντα σημεῖα, τὸ σύνολον τῶν σημείων Μ, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἐκ τῆς συνθήκης :

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \varphi + 2K\pi$$

ὅπου φ δοθεῖσα γωνία, διάφορος τῆς Κ΄π, εἶναι ἕνα τόξον κύκλου, ἔχον ἄκρα τὰ Α καὶ Β.

Ἂν εἶναι ΑΤ ἡ ἡμιεφαπτομένη τοῦ κύκλου τούτου, τότε :

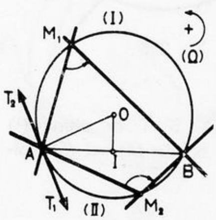
$$(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = \varphi + 2K\pi$$

Ἀπόδειξις. Ὡς γνωστὸν (112)

$$(MA, MB) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) + K\pi, \text{ ἤτοι :}$$

$(MA, MB) = \varphi + K\pi$, ἑπομένως, ἂν $\varphi \neq 0$ καὶ $\varphi \neq \pi$, τὸ Μ εἶναι σημεῖον τοῦ κύκλου (Ω) ὁ ὁποῖος διέρχεται διὰ τῶν Α καὶ Β καὶ τοῦ ὁποίου ἡ ἐφαπτομένη ΑΤ κατὰ τὸ σημεῖον Α ἱκανοποιεῖ τήν :

$$(AT, AB) = \varphi + K\pi$$



Σχ. 255

Θεωροῦμεν τὴν ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΤ τὸν ἄξονα $\overrightarrow{AT}$ διὰ τὸν ὁποῖον :

$$(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = \varphi + 2\kappa\pi.$$

Τὰ σημεῖα Α καὶ Β ὁρίζουν ἐπὶ τοῦ κύκλου (Ω) δύο τόξα (I) καὶ (II). Ἂν ἕνα σημεῖον M_1 κεῖται ἐπὶ τοῦ τόξου (I) ἡ γωνία $(\overrightarrow{M_1A}, \overrightarrow{M_1B})$ εἶναι σταθερὰ (ἀνεξάρτητος τῆς ἐπὶ τοῦ τόξου τούτου θέσεως τοῦ σημείου M_1).

Εἰς τὴν θέσιν Α τοῦ M_1 θὰ ἔχωμεν (Σχ. 255) (¹).

$$(\overrightarrow{M_1A}, \overrightarrow{M_1B}) = (\overrightarrow{AT_1}, \overrightarrow{AB}).$$

Ἂν ἕνα σημεῖον M_2 κεῖται ἐπὶ τοῦ τόξου (II), ἡ γωνία (M_2A, M_2B) εἶναι ἐπίσης σταθερὰ καὶ ὅταν τὸ M_2 λάβῃ τὴν θέσιν Α, τὸ $\overrightarrow{M_2A}$ γίνεται συγγραμμικὸν τοῦ ἐφαπτομενικοῦ διανύσματος $\overrightarrow{AT_2}$. Ἔχομεν ἑπομένως :

(1) Ὅταν τὸ M_1 λάβῃ τὴν θέσιν Α, τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{M_1A}$ γίνεται συγγραμμικὸν τοῦ ἐφαπτομενικοῦ διανύσματος $\overrightarrow{AT_1}$,

$(\overrightarrow{M_2A}, \overrightarrow{M_2B}) = (\overrightarrow{AT_2}, \overrightarrow{AB})$

Ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι : $(\overrightarrow{AT_1}, \overrightarrow{AB}) = \varphi + 2k\pi$, θὰ ἔχωμεν :

$(\overrightarrow{AT_2}, \overrightarrow{AB}) = \varphi + \pi$.

Ἑπομένως μόνον τὰ σημεῖα τοῦ τόξου (I) ἱκανοποιοῦν τὴν δοθεῖσαν συνθήκην (1). Τὸ ζητούμενον δηλαδὴ σύνολον εἶναι τὸ σύνολον τῶν σημείων τοῦ τόξου (I).

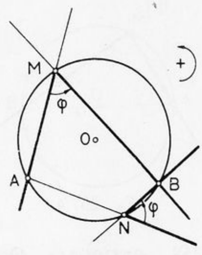
Σημειοῦμεν ὅτι :

1. Εἰς τὴν περίπτωσιν $\varphi = (2k + 1)\pi$, τὸ σύνολον τῶν σημείων M εἶναι τὸ εὐθ. τμῆμα AB.
2. Εἰς τὴν περίπτωσιν $\varphi = 2k\pi$ τὸ σύνολον ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς εὐθείας AB τὰ μὴ κείμενα μεταξὺ τῶν A καὶ B.

ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΗ ΓΩΝΙΑ

256. ΟΡΙΣΜΟΣ. Θεωροῦμεν κύκλον (O) καὶ δύο σημεῖα A καὶ B αὐτοῦ. *Κάθε γωνία τῆς ὁποίας ἡ κορυφὴ M εἶναι σημεῖον τοῦ κύκλου (O), αἱ δὲ πλευραὶ ἀνήκουν ἀντιστοίχως εἰς τὰς εὐθείας τὰς διερχομένας διὰ τῶν A καὶ B ὀνομάζεται ἐγγεγραμμένη* εἰς τὸν κύκλον (O).

Ἐκ τῶν δύο ἀντιθέτως προσανατολισμένων τόξων AB τοῦ (O) ἀντίστοιχον τῆς ἐγγεγραμμένης γωνίας (MA, MB) ὀνομάζεται τὸ ὁμόσημον αὐτῆς τόξον AB. Οὕτω τῆς θετικῶς προσανατολισμένης γωνίας (MA, MB) ὡς καὶ τῆς ὁμοίως προσανατολισμένης γωνίας (NA, NB), ἀντίστοιχον τόξον εἶναι τὸ θετικῶς προσανατολισμένον τόξον AB (Σχ. 256).



Σχ. 256

257. ΘΕΩΡΗΜΑ. Πᾶσα ἐγγεγραμμένη εἰς κύκλον (O) γωνία (MA, MB) εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ἀντιστοίχου ἐπικέντρου γωνίας (OA, OB).

Ἀπόδειξις. Ἐκ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου OMA τοῦ ὁποίου ἡ γωνία (OA, OM′) εἶναι ἐξωτερικὴ ἔχομεν (Σχ. 257) :

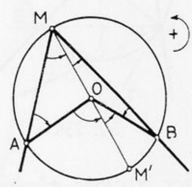
(1) (OA, OM′) = 2(MA, MO).

Ὁμοίως ἐκ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου OBM ἔχομεν :

(2) (OM′, OB) = 2(MO, MB)

Διὰ προσθέσεως τῶν ἀνωτέρω ἰσοτήτων (1) καὶ (2) κατὰ μέλη ἔχομεν :

(OA, OB) = 2 (MA, MB).

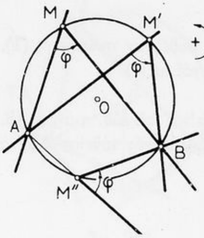


Σχ. 257

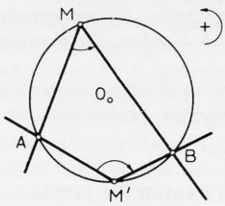
Ἡ ἀπόδειξις, εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ κέντρον κεῖται ἐκτὸς τῆς ἐγγεγραμμένης γωνίας (MA, MB), εἶναι ἡ αὐτή, μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι ἀντὶ προσθέσεως θὰ ἔχωμεν ἀφαίρεσιν τῶν (1) καὶ (2) κατὰ μέλη.

Ἂν τὸ κέντρον O εἶναι σημεῖον μιᾶς πλευρᾶς τῆς γωνίας (MA, MB), τὸ ἀποδεικτέον προκύπτει ἐκ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου OMA, διότι τὸ B ἢ τὸ A συμπίπτει μὲ τὸ M′ (M, B ἢ M, A ἀντιδιαμετρικὰ σημεῖα τοῦ (O)).

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ. *1. Δύο ἐγγεγραμμέναι εἰς κύκλον γωνίαι αἱ ὁποῖαι εἶναι ὁμοίως προσανατολισμέναι καὶ ἔχουν τὸ αὐτὸ ἀντιστοιχον τόξον ἢ ἴσα ἀντίστοιχα τόξα, εἶναι ἴσαι.*



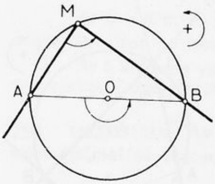
Σχ. 257.1



Σχ. 257.2

Πράγματι, ἑκάστη τούτων εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ἀντιστοίχου ἐπικέντρου γωνίας. (Σχ. 257.1)

2. Ἂν δύο ἐγγεγραμμέναι εἰς κύκλον γωνίαι (MA, MB) καὶ (M′A, M′B) εἶναι ἀντιθέτως προσανατολισμέναι, τότε ἑκάστη τούτων εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς ἀντιθέτου τῆς ἄλλης. (Σχ. 257.2).

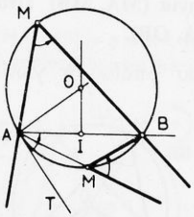


Σχ. 257.4

3. Δύο ἴσαι γωνίαι ἐγγεγραμμέναι εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον, ἔχουν ἴσα ἀντίστοιχα τόξα.

4. Πᾶσα ἐγγεγραμμένη εἰς κύκλον γωνία τῆς ὁποίας τὸ ἀντίστοιχον τόξον εἶναι ἡμικύκλιον εἶναι ὀρθή, καὶ ἀντιστρόφως, τὸ ἀντίστοιχον τόξον κάθε ἐγγεγραμμένης εἰς κύκλον ὀρθῆς γωνίας εἶναι ἡμικύκλιον τοῦ κύκλου τούτου. (Σχ. 257.4)

258. ΘΕΩΡΗΜΑ. Θεωροῦμεν κύκλον (O), γωνίαν (MA, MB) ἐγγεγραμμένην εἰς τὸν (O) καὶ τὴν ἡμιεφαπτομένην AT τοῦ κύκλου (O) τὴν κειμένην πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας AB πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἡ κορυφὴ M τῆς ἐγγρεγραμμένης γωνίας (MA, MB). Αἱ γωνίαι (MA, MB) καὶ (AT, AB) εἶναι ἴσαι.



Σχ. 258

Ἀπόδειξις. Ἡ γωνία (MA, MB) εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν (OA, OI), ἔνθα OI ἡ διὰ τοῦ O κάθετος ἐπὶ τὴν AB. Πράγματι, ἡ (OA, OI) εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ἐπικέντρου γωνίας (OA, OB) (Σχ. 258).

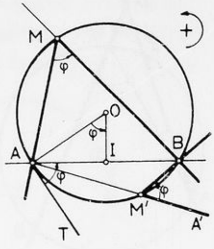
Ἐξ ἄλλου (OA, OI) = (AT, AB), διότι αἱ γωνίαι αὗται εἶναι ὁμοίως προσανατολισμέναι καὶ ἔχουν τὰς πλευρὰς αὐτῶν καθέτους. Ἑπομένως :

$$(MA, MB) = (AT, AB).$$

259. ΘΕΩΡΗΜΑ. Δίδονται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου δύο σημεῖα A καὶ B. Ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων M τοῦ ἐπιπέδου, ἕκαστον τῶν ὁποίων εἶναι κορυφὴ γωνίας ἴσης πρὸς δοθεῖσαν[1] γωνίαν φ, τῆς ὁποίας αἱ πλευραί, ἢ ἡ μία τούτων καὶ ἡ ἀντικειμένη τῆς ἄλλης, διέρχονται ἀντιστοίχως διὰ τῶν δοθέντων σημείων A καὶ B, εἶναι ἕνας κύκλος (O).

(1) Προσανατολισμένην

Ἀπόδειξις. Ἔστω Μ (Σχ. 259) ἕνα σημεῖον τοῦ (Ο) διὰ τὸ ὁποῖον (ΜΑ, ΜΒ) = φ. Θεωροῦμεν τὸν κύκλον ΑΜΒ καὶ τὴν ἡμιεφαπτομένην ΑΤ αὐτοῦ τὴν κειμένην πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας ΑΒ πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται τὸ σημεῖον Μ. Ἡ γωνία (ΑΤ, ΑΒ) εἶναι ἴση πρὸς τὴν (ΜΑ, ΜΒ) (258), ἤτοι πρὸς τὴν δοθεῖσαν γωνίαν φ καὶ λόγῳ τούτου ἡ ΑΤ εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ θεωρουμένου σημείου Μ. Τοῦτο ἰσχύει καὶ διὰ τὸ σημεῖον Ο τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ κοινὸν σημεῖον τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν ΑΤ κατὰ τὸ Α, καὶ τῆς μεσοκαθέτου τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ. Ὁ κύκλος ἑπομένως ΑΜΒ εἶναι σταθερός, ὁρίζεται δηλαδὴ ἐκ τῶν δοθέντων στοιχείων : σημείων Α, Β καὶ τῆς γωνίας φ.



Σχ. 259

Ὥστε κάθε σημεῖον ἱκανοποιοῦν τὴν συνθήκην (ΜΑ,ΜΒ)=φ εἶναι σημεῖον τοῦ ἀνωτέρω κύκλου Ο(ΟΑ).

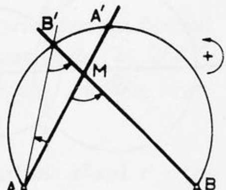
Ἀντιστρόφως, κάθε σημεῖον Μ′ τοῦ κύκλου Ο(ΟΑ) ἱκανοποιεῖ τὴν ἀνωτέρω συνθήκην. Πράγματι, αἱ ἐγγεγραμμέναι γωνίαι (Μ′Α, Μ′Β) καὶ (ΜΑ, ΜΒ) εἶναι ἴσαι.

Ἂν ἐκτὸς τῆς συνθήκης (ΜΑ, ΜΒ) = φ δίδεται καὶ ἡ συνθήκη ὅπως τὰ σημεῖα Μ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας ΑΒ, ὁ γεωμ. τόπος περιορίζεται εἰς τὸ τόξον τοῦ (Ο) τὸ κείμενον πρὸς τὸ μέρος τοῦτο.

Ἡ κατασκευὴ τοῦ τόπου προκύπτει ἐκ τῆς ἀποδείξεως : Τὸ κέντρον του κατασκευάζεται ὡς τὸ κοινὸν σημεῖον τῆς μεσοκαθέτου τοῦ τμήματος ΑΒ καὶ τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν ΑΤ, διὰ τὴν ὁποίαν (ΑΤ, ΑΒ) = φ, κατὰ τὸ σημεῖον Α αὐτῆς. Ἡ ἀκτὶς εἶναι τὸ εὐθ. τμῆμα ΟΑ = ΟΒ.

260. ΘΕΩΡΗΜΑ. (1) Πᾶσα γωνία τῆς ὁποίας ἡ κορυφὴ Μ εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ κύκλου (Ο) εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἄθροισμα δύο γωνιῶν ἐγγρεγραμμένων εἰς τὸν (Ο), τῶν ὁποίων τὰ ἀντίστοιχα τόξα εἶναι ἀντιστοίχως τὰ τόξα τοῦ (Ο) τὰ κείμενα ἐντὸς τῆς θεωρουμένης γωνίας καὶ τῆς κατὰ κορυφὴν αὐτῆς.

(2) Πᾶσα γωνία τῆς ὁποίας ἡ κορυφὴ εἶναι ἐξωτερικὸν σημεῖον τοῦ κύκλου (Ο) καὶ αἱ πλευραὶ τέμνουσαι ἢ ἐφαπτόμεναι τοῦ (Ο) ἢ ἡ μία τούτων τέμνουσα καὶ ἡ ἄλλη ἐφαπτομένη αὐτοῦ, εἶναι ἴση πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν δύο ἐγγεγραμμένων γωνιῶν, τῶν ὁποίων τὰ ἀντίστοιχα τόξα εἶναι ἀντιστοίχως τὰ τόξα τοῦ (Ο) τὰ ἐσωτερικὰ τῆς θεωρουμένης γωνίας.

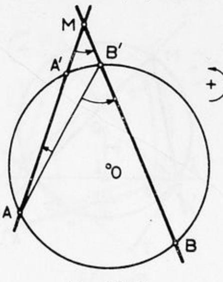


Σχ. 260.1

Ἀπόδειξις. (1) Ἡ γωνία (ΜΑ,ΜΒ) εἶναι (Σχ. 260.1) ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου ΑΜΒ′ καὶ ἑπομένως ἴση πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐγγεγραμμένων γωνιῶν (Β′Α, Β′Β) καὶ (ΑΑ′, ΑΒ′) τῶν ὁποίων τὰ ἀντίστοιχα τόξα εἶναι τὰ ΑΒ καὶ Α′Β′ τὰ κείμενα ἐντὸς τῆς γωνίας (ΜΑ, ΜΒ) καὶ τῆς κατὰ κορυφὴν αὐτῆς.

(2) Ἂν ἡ κορυφὴ Μ τῆς γωνίας (ΜΑ, ΜΒ) εἶναι ἐξωτερικὸν σημεῖον

τοῦ κύκλου (Ο) καὶ αἱ πλευραὶ τέμνουσαι τὸν (Ο) (Σχ. 260.2), ἐκ τοῦ τριγώνου



Σχ. 260.2

ΑΒ′Μ τοῦ ὁποίου ἡ γωνία (Β′Α, Β′Β) εἶναι ἐξωτερικὴ προκύπτει ὅτι:

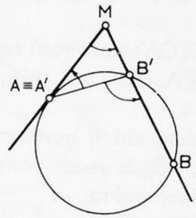
$$(B'A, B'B) = (MA, MB) + (AB', AA'),$$

ἤτοι ὅτι:

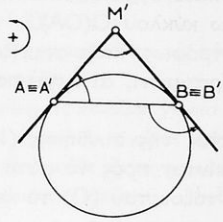
$$(MA, MB) = (B'A, B'B) - (AB', AA'),$$

ἤτοι τὸ ἀποδεικτέον.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ἡ πρότασις εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ μία τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας (ΜΑ, ΜΒ) (Σχ. 260.3) ἢ καὶ αἱ δύο (Σχ. 260.4) εἶναι ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου (0).



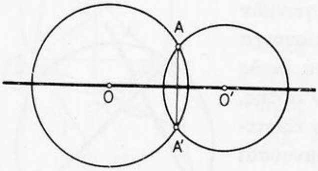
Σχ. 260.3



Σχ. 260.4

ΤΟΜΗ ΔΥΟ ΚΥΚΛΩΝ

261. ΘΕΩΡΗΜΑ. **Ἂν δύο κύκλοι (Ο) καὶ (Ο′) ἔχουν ἕνα κοινὸν σημεῖον Α, κείμενον ἐκτὸς τῆς διακέντρου ΟΟ′ αὐτῶν,(1) τότε ἔχουν ἕνα δεύτερον κοινὸν σημεῖον Α′: τὸ συμμετρικὸν τοῦ Α ὡς πρὸς τὴν διάκεντρον.**



Σχ. 261

Ἀπόδειξις. Τὸ συμμετρικὸν Α′ τοῦ Α ὡς πρὸς τὸν ΟΟ′ εἶναι (243) σημεῖον τοῦ (Ο) καὶ δι' ὅμοιον λόγον καὶ τοῦ (Ο′) ἤτοι εἶναι τὸ δεύτερον, ἐκτὸς τοῦ Α, κοινὸν σημεῖον τῶν δύο κύκλων (Σχ. 261).

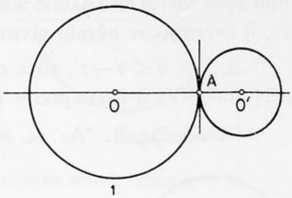
Ὅταν δύο κύκλοι ἔχουν δύο κοινὰ σημεῖα θὰ ὀνομάζωνται **τεμνόμενοι.**

262. ΘΕΩΡΗΜΑ. **Ἂν δύο κύκλοι (Ο) καὶ (Ο′), διάφοροι ἀλλήλων, ἔχουν ἕνα κοινὸν σημεῖον Α, κείμενον ἐπὶ τῆς διακέντρου αὐτῶν, τότε δὲν ἔχουν, ἐκτὸς αὐτοῦ, ἄλλο κοινὸν σημεῖον.**

---

(1) Δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν δύο κύκλους τῆς προτάσεως ἂν θεωρήσωμεν δύο σημεῖα Ο καὶ Ο′ διάφορα ἀλλήλων καὶ ἕνα σημεῖον Α κείμενον ἐκτὸς τῆς εὐθείας ΟΟ′. Οἱ κύκλοι Ο(ΟΑ) καὶ Ο′(Ο′Α) ἔχουν κοινὸν τὸ σημεῖον Α, τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἐπὶ τῆς διακέντρου ΟΟ′ αὐτῶν.

Ἀπόδειξις. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ ἀνωτέρω κύκλοι ἔχουν ἕνα δεύτερον κοινὸν σημεῖον Β. ἀγόμεθα εἰς ἄτοπον. Πράγματι, ἂν τὸ Β ἔκειτο ἐπὶ τῆς διακέντρου ΟΟ′, τότε οἱ κύκλοι θὰ εἶχον μίαν κοινὴν διάμετρον καὶ ἑπομένως δὲν θὰ ἦσαν διάφοροι ἀλλήλων. Ἂν τὸ Β ἔκειτο ἐκτὸς τῆς διακέντρου, τότε οἱ κύκλοι θὰ εἶχον (261) καὶ ἕνα τρίτον κοινὸν σημεῖον : τὸ συμμετρικὸν Β′ τοῦ Β ὡς πρὸς τὴν διάκεντρον ΟΟ′, καὶ ἑπομένως δὲν θὰ ἦσαν διὰ τὸν λόγον τοῦτον (231) διάφοροι ἀλλήλων, ὅπως ἐξ ὑποθέσεως θεωροῦνται (1).

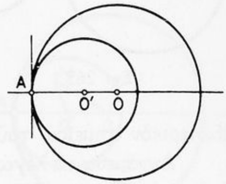


Σχ. 262.1

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Ἂν δύο κύκλοι ἔχουν ἕνα μόνον κοινὸν σημεῖον Α, τότε τοῦτο κεῖται ἐπὶ τῆς διαμέτρου αὐτῶν.*

Πράγματι, ἂν τὸ Α ἔκειτο ἐκτὸς τῆς διακέντρου, τότε οἱ κύκλοι θὰ εἶχον καὶ ἕνα δεύτερον κοινὸν σημεῖον Α′, διάφορον τοῦ Α.

Θὰ λέγωμεν ὅτι οἱ κύκλοι (Ο) καὶ (Ο′) **ἐφάπτονται** ἀλλήλων κατὰ τὸ σημεῖον Α. Τὸ σημεῖον Α, τὸ ὁποῖον συμπίπτει μὲ τὸ συμμετρικὸν αὐτοῦ ὡς πρὸς τὴν διάκεντρον ΟΟ′ τῶν κύκλων, ὀνομάζεται **σημεῖον ἐπαφῆς** τῶν κύκλων (Σχ. 262.1 καὶ 262.2).



Σχ. 262.2

Ὥστε ἡ τομὴ δύο κύκλων (Ο) καὶ (Ο′) ἀποτελεῖται, ἐν γένει, ἀπὸ δύο σημεῖα, τὰ ὁποῖα, ὅταν οἱ κύκλοι ἐφάπτωνται, συμπίπτουν εἰς ἕν.

Σημειοῦμεν ὅτι :

Ἡ ἐφαπτομένη ἑκάστου τῶν δύο ἐφαπτομένων κύκλων (Ο) καὶ (Ο′) εἰς τὸν κοινὸν σημεῖον Α αὐτῶν, εἶναι, ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΟ′ εἰς τὸ Α, ἐφαπτομένη καὶ τοῦ ἄλλου, ἤτοι μία **κοινὴ ἐφαπτομένη** τῶν δύο κύκλων.

Ἂν τὰ κέντρα Ο καὶ Ο′ τῶν ἐφαπτομένων κύκλων κεῖνται ἑκατέρωθεν τοῦ σημείου ἐπαφῆς Α αὐτῶν, λέγομεν ὅτι οἱ κύκλοι **ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς** (Σχ. 262.1)

Ἂν τὰ κέντρα κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ σημείου ἐπαφῆς λέγομεν ὅτι **ἐφάπτωνται ἐσωτερικῶς.** (Σχ. 262. 2).

263. ΘΕΩΡΗΜΑ. Θεωροῦμεν δύο κύκλους (Ο) καὶ (Ο′) ἀκτίνων r καὶ r′ ἀντιστοίχως ($r \geqslant r'$) καὶ τὴν ἀπόστασιν ΟΟ′ = δ τῶν κέντρων των.

1. Ἂν $\delta > r + r'$ τότε οἱ κύκλοι (Ο) καὶ (Ο′) δὲν ἔχουν κοινὸν σημεῖον, καὶ κάθε σημεῖον Μ ἑκάστου τούτων ἢ ἐσωτερικὸν αὐτοῦ εἶναι ἐξωτερικὸν τοῦ ἄλλου.

2. Ἂν $\delta = r + r'$ τότε οἱ κύκλοι (Ο) καὶ (Ο′) ἔχουν ἕνα κοινὸν σημεῖον

(1) Τὸ ἐπὶ τῆς διακέντρου κοινὸν σημεῖον Α τῶν δύο κύκλων, συμπίπτει μὲ τὸ συμμετρικὸν Α′ αὐτοῦ ὡς πρὸς τὴν διάκεντρον. Δυνάμεθα, λόγω τούτου, νὰ θεωρήσωμεν ὅτι καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν οἱ κύκλοι ἔχουν δύο κοινὰ σημεῖα Α καὶ Α′, τὰ ὁποῖα συμπίπτουν εἰς ἕν.

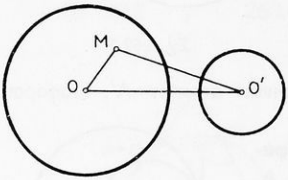
καὶ ἕνα μόνον, ἤτοι ἐφάπτονται ἀλλήλων, καὶ κάθε σημεῖον M ἑκάστου τούτων, ἐκτὸς τοῦ κοινοῦ σημείου, ἢ ἐσωτερικὸν αὐτοῦ εἶναι ἐξωτερικὸν τοῦ ἄλλου.

3. Ἂν $r - r' < \delta < r + r'$, τότε οἱ κύκλοι τέμνονται.

4. Ἂν $\delta = r - r'$, τότε οἱ κύκλοι ἔχουν ἕνα κοινὸν σημεῖον καὶ ἕνα μόνον, ἤτοι ἐφάπτονται ἀλλήλων, καὶ κάθε σημεῖον τοῦ (O′), ἐκτὸς τοῦ κοινοῦ σημείου, ἢ ἐσωτερικὸν αὐτοῦ, εἶναι ἐσωτερικὸν τοῦ (O).

5. Ἂν $\delta < r - r'$, τότε οἱ κύκλοι δὲν ἔχουν κοινὸν σημεῖον, καὶ κάθε σημεῖον τοῦ (O′) ἢ ἐσωτερικὸν αὐτοῦ, εἶναι ἐσωτερικὸν τοῦ (O).

Ἀπόδειξις. 1. Ἂν οἱ κύκλοι εἶχον κοινὸν σημεῖον A ἐκτὸς τῆς διακέντρου, τότε ἐκ τῶν $OA = r$ καὶ $O'A = r'$ καὶ τοῦ τριγώνου OAO′ θὰ εἴχομεν :



Σχ. 263.1

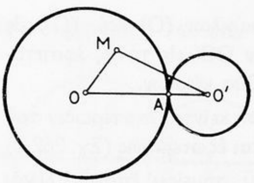
$\delta < r + r'$, ἐνῷ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $\delta > r + r'$.

Δι' ὅμοιον λόγον δὲν ὑπάρχει σημεῖον ἐπὶ τῆς διακέντρου. Ἐξ ἄλλου, διὰ κάθε σημεῖον M διὰ τὸ ὁποῖον $OM \leqslant r$ ἔχομεν (Σχ. 263.1) : $O'M \geqslant OO' - OM > r + r' - OM > r'$, διότι $OO' > r + r'$

Ἑπομένως κάθε τοιοῦτον σημεῖον M εἶναι ἐξωτερικὸν σημεῖον τοῦ κύκλου (O′).

Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι ἕκαστος τῶν (O) καὶ (O′) **κεῖται ἐκτὸς** τοῦ ἄλλου, ἢ ὅτι οἱ (O) καὶ (O′) **κεῖνται ἐκτὸς** ἀλλήλων.

2. Ἔστω A τὸ σημεῖον τοῦ εὐθ. τμήματος OO′ διὰ τὸ ὁποῖον $OA = r$. Θὰ εἶναι $O'A = r'$ Τὸ σημεῖον A εἶναι, ἑπομένως, κοινὸν σημεῖον τῶν (O) καὶ (O′). Δὲν ὑπάρχει (262), ἐκτὸς τοῦ A, ἄλλο κοινὸν σημεῖον τῶν (O) καὶ (O′). Ἐξ ἄλλου ἂν $OM \leqslant r$, θὰ ἔχωμεν (Σχ. 263.2) $O'M \geqslant OO' - OM \geqslant r + r' - OM > r'$.



Σχ. 263.2

Ἑπομένως κάθε τοιοῦτον σημεῖον M. εἶναι ἐξωτερικὸν σημεῖον τοῦ κύκλου (O′).

Ἕκαστος τῶν (O) καὶ (O′) **ἐφάπτεται ἐξωτερικῶς** τοῦ ἄλλου, ἢ (262, Πόρισμα) οἱ κύκλοι (O) καὶ (O′) **ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς** ἀλλήλων.

3. Ἔστωσαν P καὶ Σ (Σχ. 263.3), τὰ κοινὰ σημεῖα τοῦ (O) μὲ τὴν διάκεντρον OO′ τῶν κύκλων. (Σ πρὸς τὸ μέρος τοῦ O πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται τὸ O′).

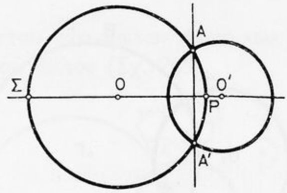
Ἐκ τῆς $r \geqslant r'$ ἕπεται ὅτι $r' < \delta + r$, ἤτοι ὅτι $r' < O'\Sigma$ ἢ $O'\Sigma > r'$. Ἐξ αὐτῆς ἕπεται ὅτι τὸ σημεῖον Σ εἶναι ἐξωτερικὸν σημεῖον τοῦ κύκλου (O′). Ἐξ ἄλλου :

Ἂν $\delta > r$, τὸ σημεῖον O′ εἶναι ἐξωτερικὸν σημεῖον τοῦ κύκλου (O). Ἐκ τῆς $\delta < r + r'$ ἕπεται ὅτι : $\delta - r < r'$ ἢ $O'P < r'$, ἤτοι ὅτι τὸ P εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ κύκλου (O′).

Ἂν $\delta = r$, τὸ O′ εἶναι σημεῖον τοῦ (O), καὶ ἐκ τῆς $\delta < r + r'$ ἕπεται ὅτι

$r' > 0$. Ἀλλὰ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ σημεῖον O συμπίπτει μὲ τὸ P καὶ ἐπειδὴ $r' > 0$, τὸ P εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ (O′).

Ἂν $\delta < r$, τὸ O′ εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ (O). Ἐκ τῆς $\delta > r - r'$ ἕπεται ὅτι $r' > r - \delta$ ἢ $r - \delta < r'$ ἢ $O'P < r'$, ἤτοι ὅτι τὸ σημεῖον P εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ (O′).



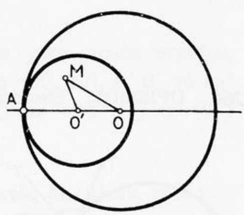
Σχ. 263.3

Ὥστε καὶ εἰς τὰς τρεῖς περιπτώσεις: $\delta > r$, $\delta = r$, $\delta < r$, τὸ P εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ (O′), ἐνῷ τὸ Σ εἶναι ἐξωτερικὸν σημεῖον αὐτοῦ. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι οἱ δύο κύκλοι (O) καὶ (O′) ἔχουν δύο κοινὰ σημεῖα A καὶ A′.

Τὰ σημεῖα ταῦτα, δὲν κεῖνται ἐπὶ τῆς διακέντρου OO′ αὐτῶν.

Πράγματι, ἂν ἦσαν σημεῖα τῆς OO′, δὲν θὰ ἦσαν διάφορα τῶν P καὶ Σ. Ἀλλὰ τὰ P καὶ Σ δὲν εἶναι κοινὰ σημεῖα τῶν κύκλων, διότι $O'P < r'$ καὶ $O'\Sigma > r'$.

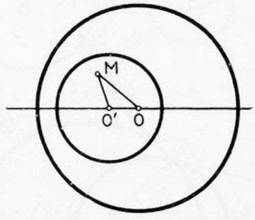
4. Ἔστω A τὸ σημεῖον τῆς εὐθείας OO′, τὸ πρὸς τὸ μέρος τοῦ O πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται τὸ O′, διὰ τὸ ὁποῖον $OA = r$. Θὰ εἶναι $O'A = r'$. Τὸ σημεῖον A εἶναι κοινὸν σημεῖον τῶν (O) καὶ (O′), κείμεναν ἐπὶ τῆς OO′, καὶ ἑπομένως δὲν ὑπάρχει, ἐκτὸς αὐτοῦ, ἄλλο κοινὸν σημεῖον τῶν κύκλων (O) καὶ (O′). Ἐξ ἄλλου, ἂν $O'M \leqslant r'$, θὰ ἔχωμεν (Σχ. 263.4): $OM \leqslant OO' + O'M \leqslant OO' + r$, ἤτοι $OM \leqslant r$.



Σχ. 263.4

Οἱ κύκλοι (O) καὶ (O′) **ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐσωτερικῶς.** (262, Πόρισμα).

5. Ἂν οἱ κύκλοι εἶχον κοινὸν σημεῖον ἐκτὸς τῆς OO′, τότε θὰ ἦτο: $\delta > r - r'$, ἐνῷ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $\delta < r - r'$. Ὁμοίως ἀποκλείεται νὰ ἔχουν οἱ κύκλοι κοινὸν σημεῖον ἐπὶ τῆς OO′. Ἐξ ἄλλου ἂν $O'M \leqslant r'$, τότε θὰ ἔχωμεν (Σχ. 263.5): $OM \leqslant OO' + O'M \leqslant OO' + r' < r$, διότι $OO' = \delta < r - r'$ Θὰ λέγωμεν ὅτι ὁ κύκλος (O′) **κεῖται ἐντὸς** τοῦ (O).



Σχ. 263.5

Σημειοῦμεν ὅτι:

1. Αἱ σημειωθεῖσαι, ὡς ἄνω, πέντε περιπτώσεις, εἶναι αἱ μόναι δυναταί, διότι ἐθεωρήθησαν ὅλαι αἱ δυναταὶ σχέσεις τοῦ δ πρὸς τὸ ἄθροισμα $r + r'$ καὶ τὴν διαφορὰν $r - r'$.

2. Τῆς ἀνωτέρω προτάσεως (263) ἰσχύει καὶ ἡ ἀντίστροφος, ἀποδεικνυομένη εὐκόλως, διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς. Ὥστε:

Διὰ δύο κύκλους (O) καὶ (O′) ἀκτίνων r καὶ r′ ἀντιστοίχως ($r \geqslant r'$) ἔχομεν:

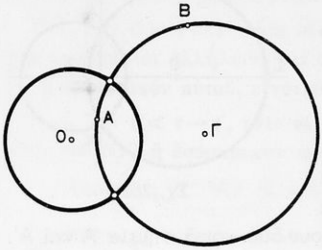
(1) $\delta > r + r' \Leftrightarrow$ Οἱ κύκλοι κεῖνται ἐκτὸς ἀλλήλων.

(2) $\delta = r + r' \Leftrightarrow$ Οἱ κύκλοι ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐξωτερικῶς.

(3) $r - r' < \delta < r + r' \Leftrightarrow$ Οἱ κύκλοι τέμνονται.

(4) $\delta = r - r' \Leftrightarrow$ Οἱ κύκλοι ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐσωτερικῶς.

(5) $\delta < r - r' \Leftrightarrow$ Ὁ κύκλος (Ο′) κεῖται ἐντὸς τοῦ (Ο).



Σχ. 263.6

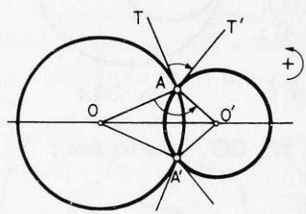
3. Ἐν συνεχείᾳ πρὸς τὸ **ἀξίωμα** (246) δεχόμεθα ὅτι :

Ἂν Α καὶ Β εἶναι ἀντιστοίχως ἕνα ἐσωτερικὸν καὶ ἕνα ἐξωτερικὸν σημεῖον κύκλου (Ο) καὶ (Γ) ἕνας κύκλος διερχόμενος διὰ τῶν Α καὶ Β, ὑπάρχει ἐπὶ ἑκάστου τῶν τόξων ΑΒ τοῦ κύκλου (Γ), ἕνα τουλάχιστον, σημεῖον τοῦ κύκλου (Ο).

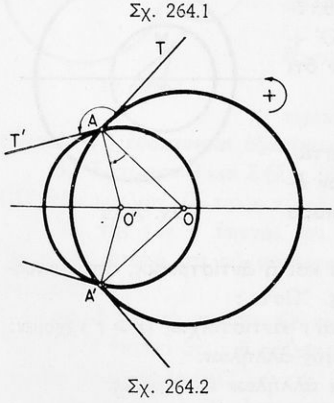
Ἐκ τῆς προτάσεως (231) προκύπτει ὅτι ἐπὶ ἑκάστου τῶν τόξων ΑΒ ὑπάρχει ἕνα μόνον σημεῖον τοῦ (Ο).

ΓΩΝΙΑ ΔΥΟ ΚΥΚΛΩΝ

264. ΟΡΙΣΜΟΣ. Θεωροῦμεν δύο τεμνομένους κύκλους (Ο) καὶ (Ο′), τῶν ὁποίων ἔστωσαν Α καὶ Α′ τὰ κοινὰ σημεῖα.



Σχ. 264.1



Σχ. 264.2

Ὀνομάζομεν **γωνίαν** τῶν κύκλων (Ο) καὶ (Ο′), εἰς τὸ κοινὸν σημεῖον Ο αὐτῶν, τὴν κυρτὴν γωνίαν (ΑΤ, ΑΤ′), τῶν ἡμιεφαπτομένων ΑΤ καὶ ΑΤ′ τῶν (Ο) καὶ (Ο′) ἀντιστοίχως, τῶν ὁποίων τὰ σημεῖα, ἐκτὸς τοῦ Α, εἶναι ἐξωτερικὰ τῶν (Ο′) καὶ (Ο) ἀντιστοίχως. (ΑΤ ἡ ἡμιεφαπτομένη τοῦ (Ο), τῆς ὁποίας τὰ σημεῖα εἶναι ἐξωτερικὰ τοῦ (Ο′) καὶ τοῦ ΑΤ′ ἡ ἡμιεφαπτομένη τοῦ (Ο′) τῆς ὁποίας τὰ σημεῖα εἶναι ἐξωτερικὰ σημεῖα τοῦ (Ο)).

Ἡ ἀνωτέρω γωνία (ΑΤ, ΑΤ′) εἶναι (100) παραπληρωματικὴ τῆς ἀντιθέτου τῆς γωνίας (ΑΟ ΑΟ′), ἤτοι τῆς γωνίας (ΑΟ′, ΑΟ) (Σχ. 264.1 καὶ 264.2).

1. Ἡ γωνία τῶν κύκλων (Ο) καὶ (Ο′) εἰς τὸ δεύτερον κοινὸν σημεῖον Α′ αὐτῶν εἶναι ἀντίθετος τῆς γωνίας αὐτῶν εἰς τὸ Α. Πράγματι, αἱ γωνίαι τῶν κύκλων κατὰ τὰ σημεῖα Α καὶ Α′ εἶναι συμμετρικαὶ ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΟΟ′ (261). Τὰ τρίγωνα ΑΟΟ′ καὶ Α′ΟΟ′ εἶναι ἀντιρρόπως ἴσα.

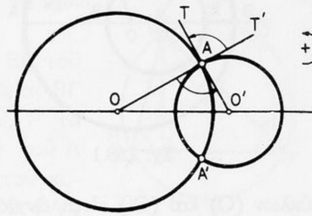
265. **ΟΡΙΣΜΟΣ.** Ἂν ἡ γωνία (ΑΤ, ΑΤ′) δύο κύκλων εἶναι ὀρθή, λέγομεν ὅτι οἱ κύκλοι **τέμνονται ὀρθογωνίως.**

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ἐφαπτομένη ἑκάστου τῶν κύκλων εἰς τὸ κοινὸν σημεῖον Α αὐτῶν διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τοῦ ἄλλου (Σχ. 265).

Σημειοῦμεν ὅτι :

Ἂν οἱ κύκλοι (Ο) καὶ (Ο′) ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐξωτερικῶς, ἡ γωνία αὐτῶν εἰς τὸ κοινὸν σημεῖον των εἶναι ἡ μηδενικὴ γωνία, διότι αἱ πλευραὶ ΑΤ καὶ ΑΤ′ αὐτῆς ταυτίζονται.

Ἂν οἱ κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐσωτερικῶς, ἡ γωνία αὐτῶν εἰς τὸ κοινὸν σημεῖον των εἶναι ἡ εὐθεῖα γωνία.



Σχ. 265

ΑΠΟΣΤΑΣΙΣ ΔΥΟ ΚΥΚΛΩΝ

Θεωροῦμεν δύο κύκλους (Ο) καὶ (Ο′) οἱ ὁποῖοι δὲν ἔχουν κοινὸν σημεῖον, καὶ ὀνομάζομεν : Α, Β τὰ ἐπὶ τῆς διακέντρου ΟΟ′ σημεῖα τοῦ (Ο), Α′ Β′ τὰ ἐπ' αὐτῆς σημεῖα τοῦ (Ο′) (1) καὶ Μ, Μ′ δύο τυχόντα σημεῖα τῶν (Ο) καὶ (Ο′) ἀντιστοίχως. Ἀποδεικνύεται ὅτι :

266. **ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν δύο κύκλοι (Ο) καὶ (Ο′) κεῖνται ἐκτὸς ἀλλήλων, τότε :**

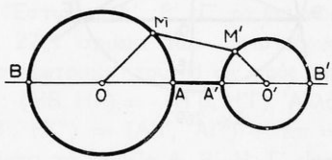
$$AA' < MM' < BB'$$

Ἀπόδειξις. Ἔχομεν (184) ὅτι :

(1) $OO' < OM + MM' + O'M'$

Ἐξ αὐτῆς ἕπεται ὅτι : $MM' > AA'$.

(2) $MM' < OM + OO' + O'M'$. Ἐξ αὐτῆς ἕπεται ὅτι $MM' < BB'$. Ὥστε τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΑ′ εἶναι τὸ **ἐλάχιστον** ἐκ τῶν εὐθ. τμημάτων ΜΜ′, ἑκάστου τῶν ὁποίων τὰ ἄκρα Μ καὶ Μ′ εἶναι ἀντιστοίχως σημεῖα τῶν (Ο) καὶ (Ο′).



Σχ. 266

Τὸ εὐθ. τμῆμα ΒΒ′ εἶναι τὸ **μέγιστον** ἐκ τούτων.

267. **ΟΡΙΣΜΟΣ.** *Τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΑ′ τῆς προτάσεως (266) ὀνομάζεται* **ἀπόστασις** *τῶν κύκλων (Ο) καὶ (Ο′), εἰς τὴν θεωρουμένην περίπτωσιν :* $\delta > r + r'$

268. **ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν ὁ κύκλος (Ο′) κεῖται ἐντὸς τοῦ (Ο), τότε :**

Ἂν τὸ Ο′ κεῖται μεταξὺ τῶν Ο καὶ Β, εἶναι $A'B < MM' < AA'$ (Σχ. 268.1).(2)

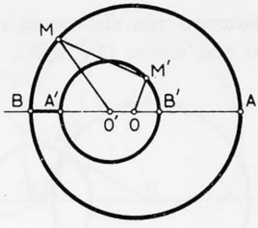
Ἂν τὸ Ο′ κεῖται μεταξὺ τῶν Ο καὶ Α, εἶναι $AB' < MM' < BB'$ (Σχ. 268.2).

---

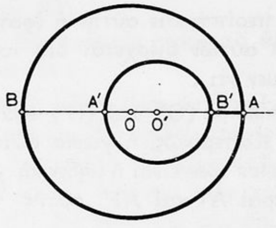
(1) Ἕκαστον τῶν Α′, Β′ θεωρεῖται μεταξὺ τῶν Β καὶ Β′.

(2) Τὸ σημεῖον Α′ θεωρεῖται μεταξὺ τῶν Β καὶ Β′.

'Απόδειξις. Όμοία πρὸς τὴν τῆς προτάσεως (266). Ἡ **ἀπόστασις** τῶν



Σχ. 268.1

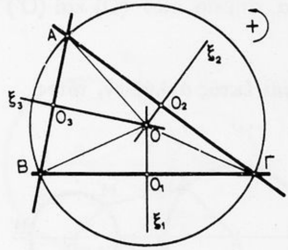


Σχ. 268.2

κύκλων (Ο) καὶ (Ο') εἶναι ἀντιστοίχως τὸ εὐθ. τμῆμα Α'Β (Σχ. 268.1) ἢ τὸ ΑΒ' (Σχ. 268.2).

ΚΥΚΛΟΣ ΠΕΡΙΓΕΓΡΑΜΜΕΝΟΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ.

269. ΟΡΙΣΜΟΣ. Δοθέντος τριγώνου ΑΒΓ, ὁ κύκλος ΑΒΓ ὀνομάζεται *περιγεγραμμένος* κύκλος αὐτοῦ. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ὀνομάζεται *ἐγγεγραμμένον* εἰς τὸν κύκλον. Τὸ κέντρον Ο τοῦ κύκλου ΑΒΓ εἶναι τὸ περίκεντρον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (138.).



Σχ. 269

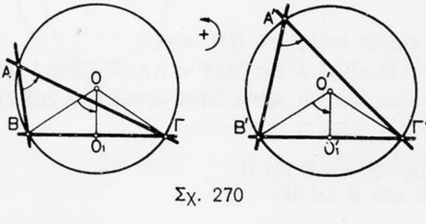
Τὸ κέντρον Ο τοῦ κύκλου ΑΒΓ εἶναι ἐσωτερικὸν ἢ ἐξωτερικὸν σημεῖον τοῦ τριγώ-καθ' ὅσον τοῦτο εἶναι ἀντιστοίχως ὀξυγώνιον νου, ἢ ἀμβλυγώνιον.

Ἂν τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον κατὰ τὴν γωνίαν Α, τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ εἶναι τὸ μέσον τῆς ὑποκεινούσης ΒΓ αὐτοῦ (136).

'Αποδεικνύεται ὅτι :

270. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν εἰς δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' εἶναι $\alpha = \alpha'$ καὶ $A = A'$, τότε οἱ περιγεγραμμένοι αὐτῶν κύκλοι (Ο) καὶ (Ο') εἶναι ἴσοι.

'Απόδειξις. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα OO_1B καὶ $O'O'_1B'$ εἶναι ἴσα (121), διότι εἶναι ἴσαι αἱ κάθετοι πλευραὶ O_1B καὶ O_1B' αὐτῶν καὶ αἱ ἀπέναντι γωνίαι (OB, OO_1) καὶ ($O'B'$, $O'O'_1$), ὡς ἴσαι πρὸς τὰ ἡμίση τῶν γωνιῶν Α καὶ Α' τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ'. Ἑπομένως $OB = O'B'$, ἤτοι $r = r'$.

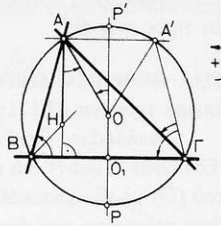


Σχ. 270

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Ἂν δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα, τότε καὶ οἱ περιγεγραμμένοι αὐτῶν κύκλοι (Ο) καὶ (Ο′) εἶναι ἴσοι.*

271. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἡ διαφορὰ τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν (ΑΗ, ΑΟ).

(Η τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου καὶ Ο τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ)



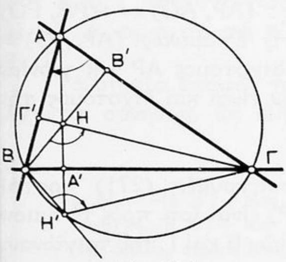
Σχ. 271

Ἀπόδειξις: Ἔστω Ρ τὸ μέσον τοῦ τόξου ΒΓ τοῦ κύκλου (Ο) τοῦ κειμένου πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας ΒΓ πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἡ κορυφὴ Α αὐτοῦ, Ρ′ τὸ ἀντιδιαμετρικὸν τοῦ Ρ καὶ Α′ τὸ συμμετρικὸν τοῦ Α ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΡΡ′. Τὸ Α′ εἶναι σημεῖον τοῦ κύκλου ΑΒΓ (243). Αἱ γωνίαι (ΒΓ, ΒΑ) καὶ (ΓΒ, ΓΑ′) εἶναι ἀντίθετοι, ὡς συμμετρικαὶ ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΡΡ′, ἤτοι : (ΒΓ, ΒΑ) = – (ΓΒ, ΓΑ′). Ἑπομένως :

(Ι) (ΒΓ, ΒΑ) = (ΓΑ′, ΓΒ)

Ἐξ ἄλλου : (ΓΑ′, ΓΑ) = (ΓΑ′, ΓΒ) – (ΓΑ, ΓΒ), καὶ λόγω τῆς (Ι) :
(ΓΑ′, ΓΑ) = (ΒΓ, ΒΑ) –(ΓΑ, ΓΒ) ἤτοι (ΓΑ′, ΓΑ) = Β – Γ
Ἀλλὰ (ΓΑ′, ΓΑ) = (ΟΡ′, ΟΑ) = (ΑΗ, ΑΟ)
Ἐκ τῶν δύο τελευταίων ἕπεται ὅτι (ΑΗ, ΑΟ) = Β – Γ.

272. ΘΕΩΡΗΜΑ. Τὰ σημεῖα τὰ συμμετρικὰ τοῦ ὀρθοκέντρου Η τριγώνου ΑΒΓ, ὡς πρὸς τὰς εὐθείας ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως, εἶναι σημεῖα τοῦ κύκλου ΑΒΓ.



Σχ. 272

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν Α′, Β′, Γ′ τὰ ἐπὶ τῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ (Σχ. 272) σημεῖα τῶν ἀντιστοίχων ὑψῶν καὶ Η′ τὸ συμμετρικὸν τοῦ Η ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΒΓ. Εἶναι : (ΗΒ, ΗΓ) = –(Η′Β, Η′Γ). Ἀλλὰ (ΗΒ, ΗΓ) = (ΗΒ′, ΗΓ′) = (ΑΒ′, ΑΓ′) + Κπ = (ΑΓ, ΑΒ) + Κπ, διότι τὰ σημεῖα Α, Β′, Η, Γ′ εἶναι σημεῖα τοῦ αὐτοῦ κύκλου, διαμέτρου ΑΗ. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι : (ΑΓ, ΑΒ) + Κπ= (Η′Γ, Η′Β), καὶ ἐξ αὐτῆς ὅτι τὰ τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Η′, Γ εἶναι σημεῖα τοῦ αὐτοῦ κύκλου. (252)

ΠΟΡΙΣΜΑ *Ἂν τὸ συμμετρικὸν ἑνὸς σημείου τοῦ ὕψους ΑΑ′ τριγώνου ΑΒΓ, ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΒΓ, εἶναι σημεῖον τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ κύκλου, τότε τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.*

Πράγματι, τὸ σημεῖον Η′ ἔχει ἕνα μόνον συμμετρικὸν ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΒΓ καὶ συμφώνως πρὸς τὸ θεώρημα (272), τὸ Η ἔχει ὡς συμμετρικὸν τὸ Η′. Ἡ ἰδιότης αὕτη εἶναι, κατὰ ταῦτα, **χαρακτηριστικὴ** ἰδιότης τοῦ ὀρθοκέντρου τοῦ τριγώνου.

Σημειοῦμεν ὅτι :

1. Οἱ κύκλοι ΒΗΓ, ΓΗΑ, ΑΗΒ, καὶ ΑΓΒ εἶναι ἴσοι.

Πράγματι, τὰ τρίγωνα ΒΗΓ καὶ ΒΗ'Γ εἶναι ἀντιρρόπως ἴσα, ὡς συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΒΓ, ἐπομένως οἱ περιγεγραμμένοι κύκλοι ἔχουν ἴσας ἀκτῖνας.

Τὰ κέντρα τῶν ἀνωτέρω κύκλων ΒΗΓ καὶ ΒΗ'Γ εἶναι συμμετρικὰ ἀλλήλων ὡς πρὸς τὴν ΒΓ.

273. ΘΕΩΡΗΜΑ. Δοθέντος κύκλου (Ο) καὶ σημείου Η τοῦ ἐπιπέδου του, ὑπάρχουν ἄπειρα τρίγωνα ΑΒΓ ἐγγεγραμμένα εἰς τὸν (Ο) καὶ ἔχοντα ὡς ὀρθόκεντρον τὸ Η.

'Απόδειξις. Θεωροῦμεν τυχοῦσαν διὰ τοῦ Η εὐθεῖαν τέμνουσαν τὸν (Ο). Ἔστωσαν Α καὶ Η' τὰ κοινὰ σημεῖα αὐτῆς μὲ τὸν (Ο) καὶ Β καὶ Γ τὰ κοινὰ σημεῖα τοῦ (Ο) μὲ τὴν μεσοκάθετον τοῦ εὐθ. τμήματος ΗΗ' (Σχ. 272). Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τρίγωνον τοῦ θεωρήματος.

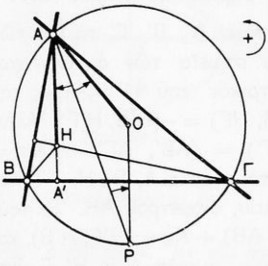
Πράγματι, τὸ σημεῖον Η εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (272, Πόρισμα).

Εἰς ἑκάστην διὰ τοῦ Η εὐθεῖαν ἀντιστοιχεῖ ἕνα τρίγωνον τῆς προτάσεως

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος* (273) *ἔχουν τὸ αὐτὸ κέντρον βάρους.*

Πράγματι, τὸ κέντρον βάρους G τοῦ τυχόντος ἐκ τούτων εἶναι τὸ σημεῖον τὸ τριχοτομοῦν τὸ εὐθ. τμῆμα ΒΟ τὸ ἐγγύτερον πρὸς τὸ Ο (135).

274. ΘΕΩΡΗΜΑ. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον (Ο). Αἱ ἡμιευθεῖαι ΑΟ καὶ ΑΗ εἶναι συμμετρικαὶ ὡς πρὸς τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας Α αὐτοῦ. (1)



Σχ. 274

'Απόδειξις. Εἶναι : (ΑΡ, ΑΟ) = −(ΡΑ, ΡΟ) καὶ (ΡΑ, ΡΟ) = (ΑΡ, ΑΗ) Ἐπομένως: (ΑΡ, ΑΟ) = −(ΑΡ, ΑΗ). Ὥστε ἡ διχοτόμος ΑΡ τῆς γωνίας (ΑΒ, ΑΓ) τοῦ τριγώνου εἶναι καὶ διχοτόμος τῆς γωνίας (ΑΗ, ΑΟ). (2)

Σημειοῦμεν ὅτι :

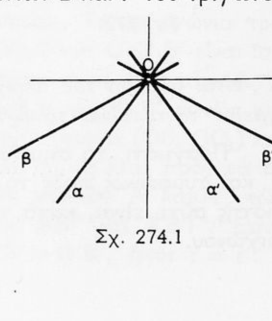
Κατόπιν τῆς προηγουμένς (271) προτάσεως ἡ γωνία (ΑΗ, ΑΡ) εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς διαφορᾶς τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ τοῦ τριγώνου.

(1) Η τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου.

(2) Αἱ εὐθεῖαι ΑΗ, ΑΟ ὀνομάζονται **ἰσογώνιοι** ὡς πρὸς τὰς ΑΒ, ΑΓ.

Γενικώτερον, δοθεισῶν τεσσάρων εὐθειῶν α, α',β, β' διερχομένων διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, θὰ λέγωμεν ὅτι αὗται ἀποτελοῦν δύο **ζεύγη ἰσογώνια,** ὅταν ἡ γωνία τῶν εὐθειῶν (α, α') ἔχῃ τὰς αὐτὰς διχοτόμους μὲ τὴν γωνίαν τῶν (β, β'). (Σχ. 274, 1).

Ἂν τὰ ζεύγη (α, α') καὶ (β, β') εἶναι ἰσογώνια, αἱ γωνίαι (α, β) καὶ (α', β') εἶναι συμμετρικαὶ ὡς πρὸς τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν τῶν (α,α') καὶ (β,β') (Σχ. 274.1) Ἐπομένως θὰ ἔχωμεν :



Σχ. 274.1

275. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ὡς ἀπεδείχθη ἤδη (144, Πόρισμα 5), δοθέντος τριγώνου ΑΒΓ ὑπάρχουν τέσσαρα σημεῖα I, I′, I″, I‴ καὶ μόνον τέσσαρα ἕκαστον τῶν ὁποίων ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν εὐθειῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ.

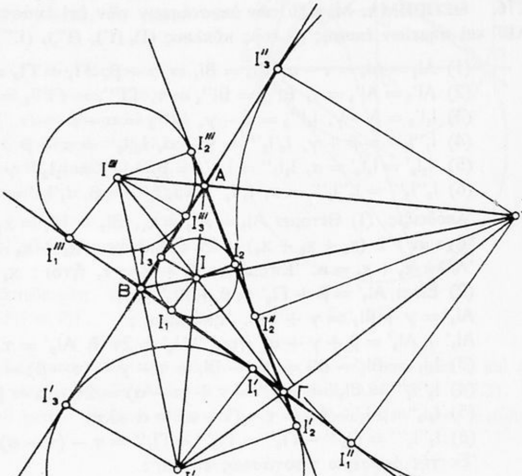
Ἕκαστον ἐκ τῶν σημείων τούτων εἶναι κέντρον κύκλου ἐφαπτομένου τῶν ἀνωτέρω εὐθειῶν (245, Πόρισμα 1). Ἡ ἀκτὶς ἑκάστου κύκλου εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου του ἀπὸ τῶν εὐθειῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ. Συμβολίζομεν μὲ τὰ σύμβολα (I), (I′), (I″), (I‴) τοὺς κύκλους τούτους (Σχ. 275).

Ὁ κύκλος (I) ὀνομάζεται **ἐγγεγραμμένος** εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ οἱ (I′), (I″), (I‴) **παρεγγεγραμμένοι** κύκλοι αὐτοῦ.

Αἱ ἀκτῖνες τῶν κύκλων τούτων συμβολίζονται ἀντιστοίχως :

Τοῦ ἐγγεγραμμένου μὲ τὸ γράμμα ρ.

Τῶν παραγγεγραμμένων (I′), (I″), (I‴), τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς τὰς γωνίας Α, Β, Γ ἀντιστοίχως, μὲ τὰ ρ_1, ρ_2, ρ_3 ἢ τὰ ρ', ρ'', ρ'''.



Σχ. 275

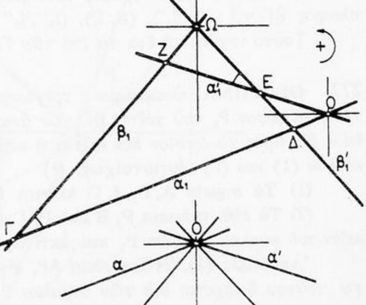
Τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν ἀνωτέρω κύκλων μὲ τὰς εὐθείας ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ συμβολίζονται συνήθως, ὡς ἑξῆς :

$(\alpha,\beta) = -(\alpha',\beta') + K\pi$ ἤ

$(\alpha,\beta) = (\beta',\alpha') + K\pi$

Ἐξ ἄλλου, σημειοῦμεν ὅτι :

Δύο ζεύγη εὐθειῶν (α_1, α_1') καὶ (β_1, β_1') (Σχ. 274.2) θὰ ὀνομάζωνται **ζεύγη ἀντιπαραλλήλων** εὐθειῶν ὅταν τὰ ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου Ο τοῦ ἐπιπέδου ζεύγη (α, α′) καὶ (β, β′) τῶν παραλλήλων πρὸς τὰ πρῶτα εὐθειῶν, εἶναι ζεύγη ἰσογωνίων εὐθειῶν. Ἂν τὰ κοινὰ σημεῖα Γ, Δ, Ε, Ζ τῶν εὐθειῶν τῶν δύο ζευγῶν εἶναι διάφορα ἀλλήλων (Σχ. 274,2), εἶναι συγκυκλικά. Πράγματι, (ΓΔ, ΓΖ) = (ΕΔ, ΕΖ) + Κπ.



Σχ. 274.2

Τὰ ἐπὶ τῆς ΒΓ σημεῖα ἐπαφῆς μὲ τοὺς κύκλους (Ι), (Ι′), (Ι″), (Ι‴) μὲ τὰ I_1, I'_1, I_1'', I_1''' ἀντιστοίχως.

Τὰ ἐπὶ τῆς ΓΑ σημεῖα ἐπαφῆς μὲ τοὺς ἀνωτέρω κύκλους μὲ τὰς I_2, I_2', I_2'', I_2''' ἀντιστοίχως καὶ τὰ ἐπὶ τῆς ΑΒ σημεῖα ἐπαφῆς αὐτῶν μὲ τὰ I_3, I'_3, I_3'', I_3''' ἀντιστοίχως.

Ἀποδεικνύεται ὅτι :

276. ΘΕΩΡΗΜΑ. Μεταξὺ τῶν ἀποστάσεων τῶν ἐπὶ ἑκάστης πλευρᾶς κορυφῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ σημείων ἐπαφῆς μὲ τοὺς κύκλους (Ι), (Ι′), (Ι″), (Ι‴) ὑπάρχουν οἱ ἑξῆς ἁπλαῖ σχέσεις:

(1) $AI_2 = AI_3 = \tau - \alpha,\ BI_3 = BI_1 = \tau - \beta,\ \Gamma I_1 = \Gamma I_2 = \tau - \gamma$

(2) $AI'_2 = AI'_3 = \tau,\ BI''_3 = BI''_1 = \tau,\ \Gamma I'''_1 = \Gamma I'''_2 = \tau$

(3) $I_1I'_1 = \beta - \gamma,\ I_2I''_2 = \alpha - \gamma,\ I_3I'''_3 = \alpha - \beta$

(4) $I_1''I_1''' = \beta + \gamma,\ I_3'I_2''' = \gamma + \alpha,\ I_3'I_3'' = \alpha + \beta$

(5) $I_2I_2' = I_3I_3' = \alpha,\ I_1I_1'' = I_3I_3'' = \beta,\ I_1I_1''' = I_2I_2'''\ \gamma$

(6) $I_2''I_2''' = I_3''I_3''' = \alpha,\ I_3'I_3''' = I_1'I_1''' = \beta,\ I_1'I_1'' = I_2'I_2'' = \gamma$, κλπ.

Ἀπόδειξις. (Ι) Θέτομεν $AI_2 = AI_3 = x_1,\ BI_3 = BI_1 = x_2,\ \Gamma I_1 = \Gamma I_2 = x_3$

Ἔχομεν : $2\ (x_1 + x_2 + x_3) = 2\tau$ ἑπομένως : $x_1 + x_2 + x_3 = \tau$

Ἀλλὰ $x_2 + x_3 = \alpha$. Ἑπομένως $x_1 + \alpha = \tau$, ἤτοι : $x_1 = \tau - \alpha$ κλπ.

(2) Εἶναι $AI_2' = \beta + \Gamma I_2' = \beta + \Gamma I_1'$ καί,

$AI_3' = \gamma + BI_3' = \gamma + BI_1'$. Ἑπομένως :

$AI_2' + AI_3' = \beta + \gamma + \alpha$, ἤτοι $2AI_2' = 2\tau$ ἢ $AI_2' = \tau$. κλπ.

(3) $I_1I_1' = BI_1' - BI_1 = BI_3' - BI_1 = \tau - \gamma - (\tau - \beta) = \beta - \gamma$ κλπ.

(4) $I_1''I_1''' = BI_1'' + BI_1''' = \tau + (\tau - \alpha) = 2\tau - \alpha = \beta + \gamma$ κλπ.

(5) $I_2I_2' = AI_2' - AI_2 = \tau - (\tau - \alpha) = \alpha$ κλπ.

(6) $I_2''I_2''' = \Gamma I_2''' - \Gamma I_2'' = \Gamma I_2''' - \Gamma I_1'' = \tau - (\tau - \alpha) = \alpha$ κλπ.

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω προτάσεως ἕπεται :

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Τὰ σημεῖα I_1, I'_1 τῆς ΒΓ, ὡς καὶ τὰ I''_1, I'''_1 εἶναι συμμετρικὰ ἀλλήλων ὡς πρὸς τὸ μέσον O_1 τῆς πλευρᾶς ΒΓ.*

Πράγματι εἶναι : $BI_1 = \tau - \beta$ καὶ $\Gamma I_1' = \Gamma I_2' = AI_2' - A\Gamma = \tau - \beta$ ὥστε $BI_1 = \Gamma I_1'$, ἤτοι τὰ I_1 καὶ I_1' εἶναι συμμετρικὰ ἀλλήλων ὡς πρὸς τὸ μέσον O_1 τῆς πλευρᾶς ΒΓ. Τὸ αὐτὸ ἰσχύει καὶ διὰ τὰ σημεῖα I_1'' καὶ I_1''', διότι $\Gamma I_1'' = BI_1'''$. Πράγματι εἶναι :
$\Gamma I_1'' = BI_1'' - B\Gamma = \tau - \alpha$ καὶ $BI_1''' = \Gamma I_1''' - \Gamma B = \tau - \alpha$.

Οὕτω, ἐπὶ τῆς ΒΓ ἔχομεν τρία ζεύγη συμμετρικῶν σημείων, ὡς πρὸς τὸ μέσον O_1 τῆς πλευρᾶς ΒΓ, τὰ : (I_1, I_1'), (Β, Γ), (I_1'', I_1''').

Τοῦτο ἰσχύει καὶ διὰ τὰ ἐπὶ τῶν ΓΑ καὶ ΓΒ σημεῖα.

277. ΘΕΩΡΗΜΑ. Θεωροῦμεν : τρίγωνον ΑΒΓ, τὸν κύκλον ΑΒΓ τοῦ ὁποίου ἔστω C τὸ κέντρον, τὸ μέσον P_1 τοῦ τόξου ΒΓ τοῦ ἀνωτέρω κύκλου, τοῦ κειμένου πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας ΒΓ πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἡ κορυφὴ Α τοῦ τριγώνου, καὶ τὰ κέντρα Ι καὶ Ι′ τῶν κύκλων (1) καὶ (Ι′) ἀντιστοίχως. [1]

(1) Τὰ σημεῖα Α, P_1, Ι, Ι′ κεῖνται ἐπ' εὐθείας

(2) Τὰ εὐθ. τμήματα P_1 Β καὶ P_1 Γ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ P_1 Ι, ἤτοι τὸ σημεῖον Ι εἶναι σημεῖον τοῦ κύκλου κέντρου P_1 καὶ ἀκτῖνος P_1 Β (Σχ. 277).

Ἀπόδειξις (1). Ἡ ἡμιευθεῖα AP_1 εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Α τοῦ τριγώνου καὶ λόγω τούτου διέρχεται διὰ τῶν σημείων Ι καὶ Ι′.

(1) Τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ τοῦ παρεγγεγραμμένου κύκλου, τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὴν γωνίαν Α τοῦ τριγώνου.

(2) Αἱ γωνίαι Β καὶ Ι τοῦ τριγώνου P_1BI εἶναι ἴσαι. Πράγματι εἶναι :

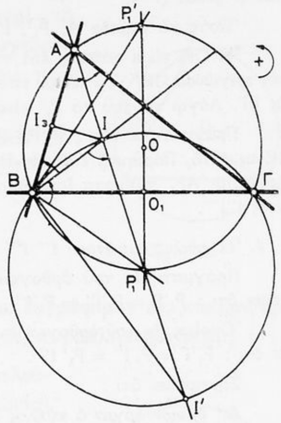
$(BP_1,\ BI) = (BP_1,\ B\Gamma) + (B\Gamma,\ BI) =$
$(AP_1,\ A\Gamma) + (B\Gamma,\ BI)$ καὶ

$(IP_1,\ IB) = (AB,\ AP_1) + (BI,\ BA) =$
$(AP_1,\ A\Gamma) + (B\Gamma,\ BI)$

Ἐπομένως $P_1I = P_1B$. Ἐξ ἄλλου $P_1B = P_1\Gamma$ ὡς χορδαὶ ἴσων τόξων.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ. *1. Τὸ μέσον P_1 τοῦ τόξου ΒΓ τῆς προηγουμένης προτάσεως (277) εἶναι τὸ μέσον τοῦ εὐθ. τμήματος ΙΙ΄.*

Πράγματι, ἀφοῦ τὸ O_1 εἶναι (276, Πόρισμα) τὸ μέσον τοῦ εὐθ. τμήματος I_1I_1', τὸ P_1 θὰ εἶναι (126) τὸ μέσον τοῦ ΙΙ΄, διότι αἱ OP_1, II_1, $I'I'_1$ εἶναι παράλληλοι, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΒΓ. Ἐπειδὴ αἱ παράλληλοι αὗται ὁρίζουν ἐπὶ τῆς ΒΓ τμήματα ἴσα($O_1I_1 = O_1I_1'$) ὁρίζουν (126) καὶ ἐπὶ τῆς AP_1 τμήματα ἴσα, ἤτοι $P_1I = P_1I'$.



Σχ. 277

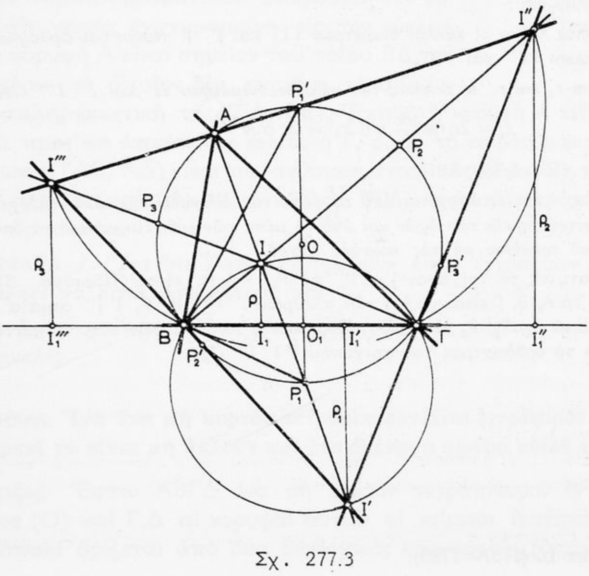
2. Ὁ κύκλος διαμέτρου ΙΙ΄ διέρχεται διὰ τῶν κορυφῶν Β καὶ Γ τοῦ τριγώνου.

Πράγματι, εἶναι, ὡς ἀπεδείχθη (277,2) : $P_1I = P_1B = P_1\Gamma$, ἐνῶ εἶναι καὶ $P_1I = P_1I'$.

Σημειοῦμεν ὅτι :

Ὁ κύκλος διαμέτρου ΙΙ΄΄ διέρχεται, διὰ τὸν αὐτὸν λόγον, διὰ τῶν κορυφῶν Γ καὶ Α καὶ ὁ κύκλος διαμέτρου ΙΙ΄΄΄ διὰ τῶν κορυφῶν Α καὶ Β τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. (Σχ. 277.3)

3. Τὸ ἀντιδιαμετρικὸν P_1', τοῦ μέσου P_1 τοῦ τόξου ΒΓ, εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓ, εἶναι τὸ μέσον τοῦ εὐθ. τμήματος Ι΄΄ Ι΄΄΄.



Σχ. 277.3

Πράγματι, ἡ γωνία (AP_1, AP_1') εἶναι ὀρθή, ἤτοι ἡ AP_1' εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν AP_1· Οὕτω, ἡ AP_1' περιέχει τὴν διχοτόμον τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας Α τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ ἑπομένως τὰ κοινὰ σημεῖα αὐτῆς μὲ τὰς ΙΒ καὶ ΙΓ εἶναι τὰ κέντρα Ι'' καὶ Ι''' (Σχ. 277.3) τῶν κύκλων (Ι'') καὶ (Ι''').

Ὥστε τὰ σημεῖα Α, P_1', Ι'', Ι''' κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

Ἡ OP_1 εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ, ὡς διχοτόμος τῆς γωνίας (ΟΒ, ΟΓ) τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΟΒΓ. Τὸ κοινὸν ἑπομένως σημεῖον της Ο, μὲ τὴν ΒΓ εἶναι τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΒΓ. Λόγῳ τούτου τό P_1' εἶναι τὸ μέσον τοῦ εὐθ. τμήματος Ι'' Ι'''.

Πράγματι, αἱ $I''I_1''$, $P_1'P_1$, $I'''I_1'''$, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν ΒΓ, εἶναι παράλληλοι καὶ ἐπειδὴ ὁρίζουν (276, Πόρισμα) ἐπὶ τῆς ΒΓ τμήματα ἴσα ($O_1I_1'' = O_1I_1'''$) θὰ ὁρίζουν (126) καὶ ἐπὶ τῆς εὐθείας AP_1' τμήματα ἴσα, ἤτοι $P_1'I'' = P_1'I'''$. Ὥστε τὸ P_1' εἶναι τὸ μέσον τοῦ εὐθ. τμήματος Ι''Ι'''.

4. *Ὁ κύκλος διαμέτρου Ι'' Ι''' διέρχεται ἀπὸ τὰς κορυφὰς Β καὶ Γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.*

Πράγματι, ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΒΙ'' Ι''', τοῦ ὁποίου ἡ BP_1' εἶναι διάμεσος, ἔχομεν ὅτι : $P_1'B = P_1'I'' = P_1'I'''$.

Ὁμοίως, ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΓΙ''Ι''', τοῦ ὁποίου ἡ $ΓP_1'$ εἶναι διάμεσος, ἔχομεν ὅτι : $P_1'Γ = P_1'I'' = P_1'I'''$.

Σημειοῦμεν ὅτι :

Δι' ὅμοιον λόγον ὁ κύκλος διαμέτρου Ι'''Ι' διέρχεται διὰ τῶν κορυφῶν Γ καὶ Α καὶ ὁ κύκλος διαμέτρου Ι' Ι'' διὰ τῶν κορυφῶν Α καὶ Β τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

5. *Οἱ κύκλοι διαμέτρου ΙΙ'' καὶ Ι'' Ι''' τέμνονται ὀρθογωνίως.*

Πράγματι, ἡ κορυφὴ Β εἶναι κοινὸν σημεῖον τῶν ἀνωτέρω κύκλων, τὰ κέντρα δὲ τούτων εἶναι ἀντιστοίχως τὰ σημεῖα P_1 καὶ P_1'. Ἡ γωνία (BP_1, BP_1') εἶναι ὀρθή, διότι τὰ P_1 καὶ P_1' εἶναι ἀντιδιαμετρικὰ σημεῖα τοῦ κύκλου ΑΒΓ.

Σημειοῦμεν ὅτι :

Δι' ὅμοιον λόγον οἱ κύκλοι διαμέτρων Ι Ι'' καὶ Ι''' Ι' τέμνονται ὀρθογωνίως, ὡς καὶ οἱ κύκλοι διαμέτρων Ι Ι''' καὶ Ι' Ι''.

6. *Ἂν εἶναι r_1 καὶ r_1' αἱ ἀκτῖνες τῶν κύκλων διαμέτρων ΙΙ' καὶ Ι'' Ι''' εἶναι:*

$$r_1 = 2r \text{ ημ} \frac{A}{2} \text{ καὶ } r_1' = 2r \text{ συν } \frac{A}{2}$$

ἔνθα r ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου ΑΒΓ.

7. *Ὁ κύκλος ὁ ὁποῖος διέρχεται ἀπὸ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τριγώνου διέρχεται ἀπὸ τὰ ἐπὶ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ σημεῖα τῶν ὑψῶν καὶ ἀπὸ τὰ μέσα τῶν εὐθ. τμημάτων τὰ ὁποῖα συνδέουν τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου μὲ τὰς κορυφὰς αὐτοῦ.*

Πράγματι, εἰς τὸ τρίγωνον Ι' Ι'' Ι''' τὰ P_1', P_2', P_3' εἶναι (Πόρισμα 3) τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του. Τὰ Α, Β, Γ εἶναι τὰ ἐπὶ τῶν πλευρῶν Ι'' Ι''', Ι''' Ι', Ι' Ι'' σημεῖα τῶν ἀντιστοίχων ὑψῶν καὶ τὰ P_1, P_2, P_3 εἶναι (277, Πόρισμα 1) τὰ μέσα τῶν εὐθ. τμημάτων ΙΙ', ΙΙ'', ΙΙ''', ἐνῶ τὸ Ι εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου Ι' Ι'' Ι''' (1).

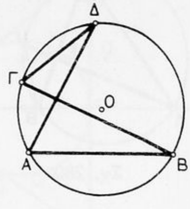
---

(1) Euler L. (1707—1783).

278. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἕνα πολύγωνον ΑΒΓ... ΕΖ ὀνομάζεται *ἐγγεγραμμένον* εἰς κύκλον (Ο) καὶ ὁ κύκλος (Ο) *περιγεγραμμένος* περὶ τὸ πολύγωνον τοῦτο, ὅταν ὅλαι αἱ κορυφαὶ τοῦ πολυγώνου εἶναι σημεῖα τοῦ (Ο). Αἱ πλευραὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου εἶναι χορδαὶ τοῦ κύκλου (Ο).

Ἂν δοθέντος πολυγώνου ΑΒΓ... ΕΖ ὑπάρχῃ κύκλος περιέχων τὰς κορυφὰς αὐτοῦ, τότε τὸ πολύγωνον τοῦτο θὰ ὀνομάζεται **ἐγγράψιμον** εἰς κύκλον.

Ἀποδεικνύεται ὅτι :

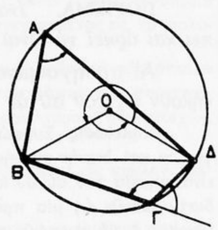


Σχ. 278

279. ΘΕΩΡΗΜΑ. **Ἵνα ἕνα κυρτὸν τετράπλευρον εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ὅπως δύο ἀπέναντι γωνίαι αὐτοῦ εἶναι παραπληρωματικαί.**

Ἀπόδειξις. Ἔστω ΑΒΓΔ ἕνα κυρτὸν τετράπλευρον ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον (Ο). Αἱ γωνίαι (ΑΒ, ΑΔ) καὶ (ΓΔ, ΓΒ) εἶναι παραπληρωματικαί, διότι αἱ ἀντίστοιχοι αὐτῶν ἐπίκεντροι ἔχουν ἄθροισμα ἴσον πρὸς μίαν πλήρη γωνίαν (257).

Ἀντιστρόφως, ἔστω ΑΒΓΔ ἕνα κυρτὸν τετράπλευρον τοῦ ὁποίου αἱ ἀπέναντι γωνίαι (ΑΒ, ΑΔ) καὶ (ΓΔ, ΓΒ) εἶναι παραπληρωματικαί. Θεωροῦμεν τὸν κύκλον ΓΒΔ. Κάθε γωνία ἐγγεγραμμένη εἰς τὸν κύκλον, τῆς ὁποίας ἡ κορυφὴ Α εἶναι σημεῖον τοῦ τόξου ΒΔ τοῦ ἀνωτέρω κύκλου, τὸ ὁποῖον δὲν περιέχει τὸ σημεῖον Γ, εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς (ΓΔ, ΓΒ). Ἐπειδὴ ἡ κορυφὴ Α κεῖται πρὸς τὸ μέρος τῆς ΒΔ πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἡ Γ, ἀφοῦ τὸ τετράπλευρον εἶναι κυρτὸν καὶ ἡ γωνία (ΑΒ, ΑΔ) εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς (ΓΔ, ΓΒ), ἡ κορυφὴ Α αὐτῆς, εἶναι σημεῖον τοῦ ἀνωτέρω κύκλου ΒΓΔ, ἤτοι τὸ τετράπλευρον εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.



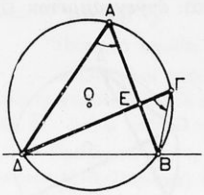
Σχ. 279

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ *1. Ἵνα ἕνα παραλληλόγραμμον εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι ὀρθογώνιον, καὶ*

2. Ἵνα ἕνα κυρτὸν τραπέζιον εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι ἰσοσκελές.

280. ΘΕΩΡΗΜΑ. **Ἵνα ἕνα μὴ κυρτὸν τετράπλευρον εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι μὴ ἁπλοῦν καὶ δύο ἀπέναντι γωνίαι αὐτοῦ νὰ εἶναι ἴσαι.**

Ἀπόδειξις. Ἔστω ΑΒΓΔ ἕνα μὴ κυρτὸν τετράπλευρον ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον (Ο) καὶ Γ,Δ αἱ κορυφαὶ αὐταῦ αἱ κείμεναι ἑκατέρωθεν τῆς εὐθείας ΑΒ ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπὸ δύο διαδοχικὰς κορυφάς του (ὑπάρχει μιὰ τοιαὐτὴ εὐθεῖα ὡς πρὸς τὴν ὁποίαν αἱ Γ, Δ κεῖνται ἑκατέρωθεν, ἀφοῦ τὸ τετράπλευρον εἶναι μὴ κυρτόν).



Σχ. 280

Ἔστω, ἀκόμη, Ε τὸ μεταξὺ τῶν Γ καὶ Δ σημεῖον τῆς εὐθείας ΑΒ. Τὸ Ε εἶναι ἐσωτερικὸν τοῦ κύκλου (Ο) διότι εἶναι σημεῖον τῆς χορδῆς ΓΔ αὐτοῦ. Τὸ Ε ἑπομένως εἶναι σημεῖον τῆς χορδῆς ΑΒ (κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Β). Ὥστε τὸ μὴ κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι μὴ ἁπλοῦν.

Δύο ἀπέναντι κορυφαὶ π.χ. αἱ Α καὶ Γ, κεῖνται πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας ΒΔ πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται τὸ κοινὸν σημεῖον Ε τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΓΔ. Οὕτως, αἱ γωνίαι (ΑΔ, ΑΒ) καὶ (ΓΔ, ΓΒ) εἶναι ἴσαι (257, Πόρισμα 1).

Ἀντιστρόφως, ἂν τοῦ μὴ ἁπλοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ αἱ ἀπέναντι γωνίαι (ΑΔ, ΑΒ) καὶ (ΓΔ, ΓΒ) εἶναι ἴσαι, αἱ κορυφαὶ Α καὶ Γ αὐτοῦ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας ΒΔ, ἑπομένως ὁ κύκλος ΔΒΓ περιέχει τὴν κορυφὴν Α, ἤτοι τὸ τετράπλευρον εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Ἵνα ἕνα μὴ κυρτὸν τραπέζιον εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι ἰσοσκελές.*

Αἱ προηγούμεναι προτάσεις ἀποτελοῦν κριτήρια ἵνα τέσσαρα σημεῖα ἀνήκουν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἤ, ὅπως λέγομεν, εἶναι σημεῖα *συγκυκλικά*.

Σημείωσις. Συμφώνως καὶ πρὸς τὴν πρότασιν (252), τὴν ἀναφερομένην εἰς μίαν ἀναγκαίαν καὶ ἱκανὴν συνθήκην ἵνα τέσσαρα σημεῖα, ἐκ τῶν ὁποίων τρία δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας, εἶναι σημεῖα τοῦ αὐτοῦ κύκλου, τὰ δύο προηγούμενα θεωρήματα (279 καὶ 280) δύναται νὰ διατυπωθοῦν ὡς μία πρότασις. Οὕτω, ἀνεξαρτήτως τοῦ εἴδους τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ (κυρτὸν ἢ μὴ κυρτόν), τὸ σχετικὸν θεώρημα εἶναι τὸ ἑξῆς :

281. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἡ συνθήκη :

$$(ΓΑ, ΓΒ) = (ΔΑ, ΔΒ)$$

εἶναι ἀναγκαία καὶ ἱκανή, ἵνα τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

Ἀπόδειξις. Ἡ τῆς προτάσεως (252), τῆς ἀναφερομένης εἰς τὰ σημεῖα Α, Β, Μ, Ν.

Ἐξ ἄλλου, ἀνεξαρτήτως τῶν ἀνωτέρω, εἰς γωνιακὰς συνθήκας, ἀναφερομένων συνθηκῶν εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι :

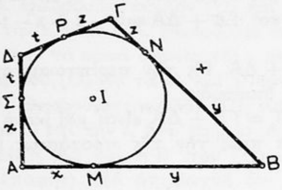
282. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν αἱ μεσοκάθετοι τριῶν πλευρῶν τετραπλεύρου διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, τότε τὸ τετράπλευρον εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

Ἀπόδειξις Ἂν καὶ Ο τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν μεσοκαθέτων τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, θὰ ἔχωμεν (137) : ΟΑ = ΟΒ, ΟΒ = ΟΓ, ΟΓ = ΟΔ, ἐκ τῶν ὁποίων ἕπεται ὅτι ΟΑ = ΟΔ, ἤτοι ὅτι τὸ σημεῖον Ο ἀπέχει ἴσον ἀπὸ ὅλων τῶν κορυφῶν τοῦ τετραπλεύρου καὶ ἑπομένως ὅτι αὗται εἶναι σημεῖα τοῦ κύκου Ο (ΟΑ).

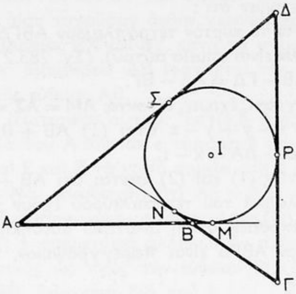
283. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ἕνα πολύγωνων ΑΒΓ... ΕΖ ὀνομάζεται* **περιγεγραμμένον** *εἰς κύκλον (Ι), ὅταν οἱαιδήποτε καὶ ἂν εἶναι δύο διαδοχικαὶ κορυφαί του, ἡ ὑπὸ τούτων ὁριζομένη εὐθεῖα εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου (Ι).*

Τὰ σημεῖα ἐπαφῆς δύνανται νὰ εἶναι (Σχ. 283.1) ἢ νὰ μὴ εἶναι (Σχ. 283.2) σημεῖα τοῦ πολυγώνου.

Εἰδικώτερον, ὅταν τὰ σημεῖα τοῦ κύκλου (I), ἐκτὸς τῶν σημείων ἐπαφῆς, εἶναι ἐσωτερικὰ



Σχ. 283.1



Σχ. 283.2

σημεῖα τοῦ πολυγώνου, (Σχ. 283.1 καὶ 283.2) ὁ κύκλος ὀνομάζεται **ἐγγεγραμμένος** εἰς τὸ πολύγωνον.

Ὅταν, τὰ σημεῖα τοῦ κύκλου (I), ἐκτὸς τῶν σημείων ἐπαφῆς, εἶναι ἐξωτερικὰ σημεῖα τοῦ πολυγώνου (Σχ. 283.2), ὁ κύκλος δύναται νὰ ὀνομάζεται **περιγεγραμμένος** εἰς τὸ πολύγωνον.

Ἂν δοθέντος πολυγώνου, ὑπάρχῃ κύκλος (I) ἐφαπτόμενος τῶν εὐθειῶν ἐπὶ τῶν ὁποίων κεῖνται αἱ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου, τὸ πολύγωνον θὰ ὀνομάζεται **περιγράψιμον** ἢ **παρεγγράψιμον**, καθ' ὅσον ὁ κύκλος οὗτος (I) κεῖται ἐντὸς ἢ ἐκτὸς τοῦ τετραπλεύρου ἀντιστοίχως.

284. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἵνα ἕνα κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι περιγράψιμον εἰς κύκλον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ αἱ ἀπέναντι πλευραὶ αὐτοῦ νὰ ἔχουν τὸ αὐτὸ ἄθροισμα.

Ἀπόδειξις. Ἔστω ὅτι τὸ κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι περιγεγραμμένον περὶ κύκλον (I) καὶ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς εἶναι σημεῖα τοῦ τετραπλεύρου (Σχ. 283.1).

Ἔστωσαν Μ, Ν, Ρ, Σ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς μὲ τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ ἀντιστοίχως καὶ x, y, z, t αἱ ἐφαπτομενικαὶ ἀποστάσεις αὐτῶν ἀπὸ τοῦ (I) ἀντιστοίχως.

Εἶναι : $AM = A\Sigma = x$, $BM = BN = y$, $\Gamma N = \Gamma P = z$ $\Delta P = \Delta\Sigma = t$.

Ἔχομεν ὅτι : $AB + \Gamma\Delta = x + y + z + t$ καὶ $B\Gamma + \Delta A = x + y + z + t$.

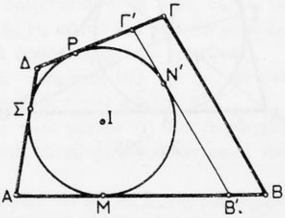
Ἑπομένως : (I) $AB + \Gamma\Delta = B\Gamma + \Delta A$.

Ἀντιστρόφως, ἂν ἰσχύῃ ἡ (I) τὸ τετράπλευρον εἶναι περιγράψιμον.

Πράγματι, ἔστω (I) ὁ κύκλος ὁ ἐφαπτόμενος τριῶν ἐκ τῶν ἀνωτέρω εὐθειῶν, ἔστω τῶν ΑΒ, ΓΔ, ΔΑ (Σχ. 284.1). Τὸ κέντρον του I εἶναι τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν Α καὶ Δ τοῦ τετραπλεύρου. Θὰ ἀποδειχθῇ ὅτι καὶ ἡ ΒΓ εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ (I). Θεωροῦμεν τὴν ἐφαπτομένην Β′Γ′ τοῦ κύκλου (I) τὴν παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ (Β′ καὶ Γ′ σημεῖα τῶν ΑΒ καὶ ΓΔ ἀντιστοίχως). Ἐκ τοῦ περιγεγραμμένου εἰς τὸν (I) κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒ′Γ′Δ ἔχομεν : (2) $AB' + \Gamma'\Delta = B'\Gamma' + \Delta A$

Ἐκ τῆς (2) καὶ τῆς ὑποθέσεως (1) προκύπτει ὅτι :

$$BB' + \Gamma\Gamma' + B'\Gamma' = B\Gamma$$



Σχ. 284.1

ἤτοι ἄτοπον (184) συμπέρασμα.

Ὥστε ὁ κύκλος (I) εἶναι ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ, ἤτοι τοῦτο εἶναι περιγράψιμον.

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Ἵνα ἕνα παραλληλόγραμμον καὶ περιγράψιμον εἰς κύκλον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι ῥόμβος.*

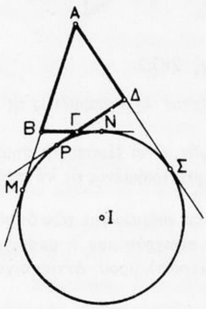
Σημειοῦμεν ὅτι :

1. Ἂν τὸ κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι παρεγγράψιμον (τὰ σημεῖα ἐπαφῆς μὲ τὸν κύκλον (Ι) δὲν εἶναι σημεῖα αὐτοῦ). (Σχ. 283.2) ἀποδεικνύεται ὁμοίως ὅτι $AB + B\Gamma = \Gamma\Delta + \Delta A$, ἤτοι ὅτι $AB - \Gamma\Delta = A\Delta - B\Gamma$.

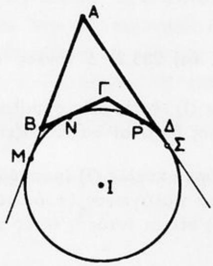
Πράγματι, ἔχομεν, θέτοντες $AM = A\Sigma = x$, $BM = BN = y$ $\Gamma N = \Gamma P = z$, $\Delta P = \Delta\Sigma = t$: $AB + B\Gamma = x - y + y - z$ ἤτοι (1) $AB + B\Gamma = x - z$ καὶ $\Gamma\Delta + \Delta A = t - z + x - t = x - z$ ἤτοι (2) $\Gamma\Delta + \Delta A = x - t$.

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἕπεται ὅτι $AB + B\Gamma = \Gamma\Delta + \Delta A$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν αἱ ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ τετραπλεύρου ἔχουν τὴν αὐτὴν διαφοράν.

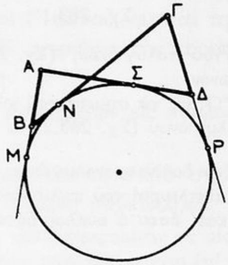
Ἡ ἀπόδειξις ὅτι ἡ ἀνωτέρω συνθήκη : $AB + B\Gamma = \Gamma\Delta + \Delta A$ εἶναι καὶ ἱκανὴ ἵνα τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι παρεγγράψιμον, εἶναι ὁμοία πρὸς τὴν τῆς προτάσεως (284).



Σχ. 284.2



Σχ. 284.3

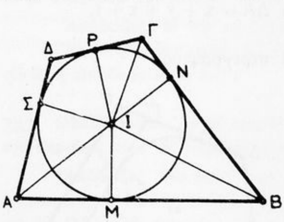


Σχ. 284.4

2. Ἀνάλογοι πρὸς τὰς ἀνωτέρω προτάσεις ἰσχύουν καὶ ἐπὶ μὴ κυρτοῦ (Σχ. 284.3) καὶ μὴ ἁπλοῦ (Σχ. 284.4) τετραπλεύρου ΑΒΓΔ καὶ ἀποδεικνύονται ὁμοίως.

Ἐξ ἄλλου ἀποδεικνύεται ὅτι :

285. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν αἱ διχοτόμοι τριῶν γωνιῶν κυρτοῦ τετραπλεύρου διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ι, τότε τὸ τετράπλευρον τοῦτο εἶναι περιγράψιμον εἰς κύκλον. (Σχ. 285)



Σχ. 285

Ἀπόδειξις. Ἔστω Ι τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν Α, Β, Γ τοῦ τετραπλεύρου (Σχ. 285). Ἐπειδὴ τὸ Ι εἶναι σημεῖον τῆς διχοτόμου ΑΙ τῆς γωνίας Α, θὰ εἶναι $I\Sigma = IM$. Δι' ὅμοιον λόγον εἶναι $IM = IN$ καὶ $IN = IP$. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι καὶ $I\Sigma = IP$, ἤτοι ὅτι τὸ Ι ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ. Ἑπομένως ὁ κύκλος Ι (ΙΜ) ἐφάπτεται τούτων κατὰ τὰ σημεῖα Μ, Ν, Ρ, Σ, ἤτοι τὸ τετράπλευρον εἶναι περιγράψιμον.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Θεωροῦμεν κύκλον (Ο) καὶ σημεῖον Α ἐσωτερικὸν αὐτοῦ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἐκ τῶν χορδῶν τοῦ κύκλου (Ο) αἱ ὁποῖαι περιέχουν τὸ σημεῖον Α, ἡ μικροτέρα εἶναι ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΑ.

2. Θεωροῦμεν ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἕνα τυχὸν σημεῖον Μ τοῦ ἐλάσσονος τόξου ΒΓ τοῦ κύκλου ΑΒΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : ΜΑ = ΜΒ + ΜΓ.

3. Θεωροῦμεν : δύο παραλλήλους ἡμιευθείας ΑΧ καὶ ΒΥ τῶν ὁποίων ἡ ΑΒ εἶναι κοινὴ κάθετος, τὸ μέσον Ο τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ καὶ μίαν τυχοῦσαν ὀρθὴν γωνίαν ἔχουσαν κορυφὴν τὸ Ο, τῆς ὁποίας αἱ πλευραὶ τέμνουν τὰς ἡμιευθείας ΑΧ καὶ ΒΥ, κατὰ τὰ σημεῖα Α′ καὶ Β′ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι (1) Ὁ κύκλος διαμέτρου ΑΒ ἐφάπτεται τῆς εὐθείας Α′Β′ καὶ (2) Ὁ κύκλος διαμέτρου Α′Β′ ἐφάπτεται τῆς εὐθείας ΑΒ.

4. Θεωροῦμεν κύκλον (Ο) καὶ σημεῖον Α ἐξωτερικὸν αὐτοῦ. Ἔστω δ ἡ εἰς τὸ Α κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθείαν ΟΑ. Θεωροῦμεν τυχοῦσαν διὰ τοῦ Α εὐθεῖαν ε τέμνουσαν τὸν (Ο). Ἔστωσαν Β καὶ Γ τὰ κοινὰ σημεῖα τῆς ε μὲ τὸν (Ο) καὶ Ε καὶ Ζ τὰ κοινὰ σημεῖα τῆς δ μὲ τὰς ἐφαπτομένας τοῦ (Ο) εἰς τὰ Β καὶ Γ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ΑΕ = ΑΖ.

5. Θεωροῦμεν: κύκλον (Ο), εὐθεῖαν ε μὴ ἔχουσαν κοινὸν σημεῖον μὲ τὸν (Ο), τὴν προβολὴν Ι τοῦ Ο ἐπὶ τὴν ε, δύο σημεῖα Α καὶ Α′ τῆς ε συμμετρικὰ ἀλλήλων ὡς πρὸς τὸ Ι καὶ δύο ἐφαπτομένας ΑΒ καὶ Α′Β′ τοῦ (Ο) μὴ συμμετρικὰς ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΟΙ (Β καὶ Β′ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ εὐθεῖα ΒΒ′ διέρχεται διὰ τοῦ Ι.

6. Θεωροῦμεν : κύκλον (Ο), δύο σημεῖα Α καὶ Α′ συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ κέντρον Ο τοῦ (Ο), ἕνα σημεῖον Μ τοῦ (Ο), τὰ δεύτερα ἐκτὸς τοῦ Μ κοινὰ σημεῖα Β, Β′ καὶ Σ τῶν ΜΑ, ΜΑ′ καὶ ΜΟ ἀντιστοίχως μὲ τὸν κύκλον (Ο) καὶ τὸ κοινὸν σημεῖον Ρ τῶν ΑΑ′ καὶ ΒΒ′. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ εὐθεῖα ΡΣ εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ (Ο).

7. Θεωροῦμεν : Τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ ὀρθόκεντρον Η αὐτοῦ, τοὺς κύκλους ΒΗΓ καὶ ΓΗΑ καὶ τὰ δεύτερα ἐκτὸς τῶν Α καὶ Β, κοινὰ σημεῖα Β′ καὶ Α′ αὐτῶν ἀντιστοίχως μὲ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ΑΑ′ = ΒΒ′.

8. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι εἰς οἱονδήποτε τρίγωνον ΑΒΓ ἰσχύει ἡ σχέσις : $2.OO_1 = HA$ (Ο καὶ Η τὸ περίκεντρον καὶ τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου ἀντιστοίχως).

9. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι εἰς οἱονδήποτε τρίγωνον ΑΒΓ αἱ ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ εἶναι ἀντιστοίχως κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ ὀρθικοῦ τοῦ θεωρουμένου τριγώνου.

10. Θεωροῦμεν κυρτὸν τετρύπλευρον ΑΒΓΔ καὶ τὰς διχοτόμους δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 τῶν γωνιῶν Α, Β, Γ, Δ αὐτοῦ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ σημεῖα Α′ $(\delta_1 \cdot \delta_2)$ (1), Β′ $(\delta_2 \cdot \delta_3)$ · Γ′ $(\delta_3 \cdot \delta_4)$, Δ′ $(\delta_4 \cdot \delta_1)$ εἶναι κορυφαὶ τετραπλεύρου ἐγγραψίμου εἰς κύκλον.

11. Θεωροῦμεν δύο χορδὰς ΑΒ καὶ ΓΔ κύκλου (Ι) καθέτους ἐπ' ἀλλήλας. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ κυρτὸν τετράπλευρον Α′Β′Γ′Δ′ τοῦ ὁποίου αἱ κορυφαὶ εἶναι τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν ἐφαπτομένων τοῦ κύκλου (Ι) εἰς τὰ Α, Β, Γ, Δ, εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

12. Θεωροῦμεν : δύο κύκλους (Ο) καὶ (Ο′) ἐφαπτομένους ἐσωτερικῶς (Ο′ ἐσωτερικὸν τοῦ κύκλου (Ο)) κατὰ τὸ σημεῖον Α, τὸ ἀντιδιαμετρικὸν Α′ τοῦ Α εἰς τὸν κύκλον (Ο) καὶ τὴν μίαν τῶν διὰ τούτου ἐφαπτομένων τοῦ (Ο′) τῆς ὁποίας ἔστω Δ τὸ σημεῖον ἐπαφῆς μὲ τὸν (Ο′) καὶ Β τὸ κοινόν, ἐκτὸς τοῦ Α′, σημεῖον μὲ τὸν (Ο). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ΑΔ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας (ΑΑ′, ΑΒ).

13. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι (1) Ὁ κύκλος (Ω) ὁ ὁποῖος ὁρίζεται ἀπὸ τὰ μέσα O_2, O_2, O_3 τῶν πλευρῶν τριγώνου ΑΒΓ διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα H_1, H_2, H_3 αὐτοῦ καὶ ἀπὸ τὰ μέσα Z_1, Z_2, Z_3 τῶν εὐθ. τμημάτων ΗΑ, ΗΒ, ΗΓ ἀντιστοίχως (Η τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου). (2) Τὸ κέντρον Ω τοῦ κύκλου τούτου εἶναι τὸ μέσον τοῦ εὐθ. τμήματος ΗΟ (Ο τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ) καὶ ἡ ἀκτὶς εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος r τοῦ κύκλου ΑΒΓ.

14. Θεωροῦμεν τετράπλευρον ΑΒΓΔ περιγεγραμμένον περὶ κύκλον (Ι). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ γωνίαι ὑπὸ τὰς ὁποίας φαίνονται αἱ ἀπέναντι πλευραὶ αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ κέντρου Ι τοῦ κύκλου (Ι) εἶναι παραπληρωματικαί.

15. Δίδεται γωνία (ΑΥ, ΑΖ). Θεωροῦμεν ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΥ καὶ ΑΖ αὐτῆς δύο σημεῖα Β καὶ Γ ὥστε ΑΒ + ΑΓ = 2λ καὶ τὸ μέσον Α′ τοῦ τόξου ΒΓ τοῦ κύκλου ΑΒΓ, τοῦ ἀντιστοίχου

---

(1) Τὸ ὑπὸ τῶν εὐθειῶν δ_1 καὶ δ_2 ὁριζόμενον σημεῖον δύναται νὰ συμβολίζεται μὲ τὸ σύμβολον $(\delta_1 \cdot \delta_2)$, ἡ δὲ ὑπὸ τῶν σημείων Α, Β ὁριζομένη εὐθεῖα, μὲ τὸ σύμβολον : [Α·Β].

τῆς γωνίας (ΑΥ, ΑΖ). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι (1). Ἂν Β' καὶ Γ' εἶναι δύο τυχόντα σημεῖα τῶν ΑΥ καὶ ΑΖ ἀντιστοίχως ὥστε ΑΒ' + ΑΓ' = 2λ, τότε ὁ κύκλος ΑΒ'Γ' διέρχεται διὰ τοῦ Α' καὶ (2) Ἂν εἶναι Ο τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν ΒΓ καὶ Β'Γ', ἡ ΟΑ' εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν Β'Γ', ἤτοι ὅτι αἱ μεσοκάθετοι τῶν εὐθ. τμημάτων Β'Γ' διέρχονται διὰ τοῦ Α'.

16. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ προβολαὶ τοῦ τυχόντος σημείου Μ τοῦ κύκλου ΑΒΓ ἐπὶ τὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως κεῖνται ἐπ' εὐθείας (1).

17. Δίδεται κύκλος (Ο) καὶ δύο σημεῖα Β καὶ Γ αὐτοῦ. Θεωροῦμεν : σημεῖον Α τοῦ (Ο) τὴν προβολὴν Α' αὐτοῦ ἐπὶ τὴν ΒΓ καὶ τὰς προβολὰς Β' καὶ Γ' τῶν σημείων Β καὶ Γ ἀντιστοίχως ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΟΑ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου Α'Β'Γ' εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ σημείου Α τοῦ κύκλου (Ο).

18. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καὶ σημεῖον Ρ τοῦ ἐπιπέδου του. Θεωροῦμεν τοὺς τρεῖς κύκλους ΡΑΒ, ΡΒΓ, ΡΓΑ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι οἱ συμμετρικοὶ τῶν ἀνωτέρω κύκλων ὡς πρὸς τὰς εὐθείας ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ ἀντιστοίχως, διέρχονται διὰ σημείου Ρ'.

19. Τὰ ὀρθόκεντρα τύν τεσσάρων τριγώνων ἕκαστον τῶν ὁποίων ὁρίζεται ἀπὸ δύο προσκευμένας πλευρὰς καὶ μίαν διαγώνιον ἐγγραψίμου εἰς κύκλον τετραπλεύρου, εἶναι κορυφαὶ τετραπλεύρου ἴσου πρὸς τὸ θεωρούμενον.

20. Θεωροῦμεν ἐγγράψιμον εἰς κύκλον τετράπλευρον τοῦ ὁποίου αἱ διαγώνιοι εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας καὶ τὰς προβολὰς τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν διαγωνίων του ἐπὶ τὰς πλευράς του (εὐθείας ἐπὶ τῶν ὁποίων κεῖνται αἱ πλευραί του). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :
(1) Τὸ τετράπλευρον τὸ ἔχον κορυφὰς τὰς ἀνωτέρω προβολὰς εἶναι ἐγγράψιμον καὶ περιγράψιμον εἰς κύκλον.
(2) Ὁ κύκλος ὁ διερχόμενος διὰ τῶν τεσσάρων τούτων προβολῶν διέρχεται καὶ διὰ τῶν μέσων τῶν πλευρῶν τοῦ ἀρχικοῦ τεραπλεύρου.

21. Θεωροῦμεν : Κύκλον (Ο), εὐθεῖαν ε μὴ ἔχουσαν κοινὸν σημεῖον μὲ τὸν (Ο), δύο διαμέτρους τοῦ (Ο) καθέτους ἐπ' ἀλλήλας καὶ τὰ κοινὰ σημεῖα Ρ καὶ Σ αὐτῶν μὲ τὴν ε. Θεωροῦμεν ἐπίσης τὰς διὰ τῶν Ρ καὶ Σ ἐφαπτομένας τοῦ (Ο) καὶ τὰ τέσσαρα κοινὰ σημεῖα αὐτῶν, τὰ διάφορα τῶν Ρ καὶ Σ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ τέσσαρα ταῦτα σημεῖα εἶναι συγκυκλικά.

22. Θεωροῦμεν τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἐγγρεγραμμένον εἰς κύκλον (Ο) καὶ σημεῖον Μ τοῦ κύκλου (Ο). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι οἱ κύκλοι οἱ ἐγγεγραμμένοι εἰς τὰ τετράπλευρα τὰ ὁποῖα ἔχουν ὡς διαγωνίους τὰς ἀποστάσεις τοῦ Μ ἀπὸ τῶν πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου, δέχονται, ἐκτὸς τῶν δύο ἀπὸ τοῦ Μ καθέτων ἐπὶ τὰς διαγωνίους τοῦ τετραπλεύρου κοινῶν ἐφαπτομένων αὐτῶν, καὶ μίαν τρίτην κοινὴν ἐφαπτομένην.

23. Δίδεται, εἰς τὸ προσανατολισμένον ἐπίπεδον, ἕνα τρίωνον ΑΒΓ. Θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον Μ τῆς εὐθείας ΒΓ καὶ συμβολίζομεν μὲ τὸ γράμμα Ρ τὸ δεύτερον, ἐκτὸς τοῦ Μ, κοινὸν σημεῖον τῶν δύο κύκλων οἱ ὁποῖοι διέρχονται διὰ τοῦ Μ καὶ ἐφάπτονται ἀντιστοίχως τῆς ΑΒ εἰς τὸ Β καὶ τῆς ΑΓ εἰς τὸ Γ. (1). Νὰ εὑρεθοῦν συναρτήσει τῶν προσανατολισμένων γωνιῶν τῶν εὐθειῶν ἐπὶ τῶν ὁποίων φέρονται αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, αἱ γωνίαι (ΡΒ. ΡΜ) καὶ (ΡΜ, ΡΓ) καὶ ἡ ἰσότης ἐκ τῆς ὁποίας ἀποδεικνύεται ὅτι τὸ σημεῖον Ρ εἶναι σημεῖον τοῦ κύκλου ΑΒΓ. (2) Ἔστω Α τὸ δεύτερον κοινὸν σημεῖον τῆς εὐθείας ΡΜ καὶ τοῦ κύκλου ΑΒΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι σταθερὸν, ὅταν τὸ Μ μεταβάλεται.

Νὰ ἀποδειχθῇ, βάσει τῶν ἀνωτέρω, ὅτι ὅταν τὸ σημεῖον Μ μεταβάλεται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΓ, τὸ σημεῖον Ρ μεταβάλλεται ἐπὶ ὁλοκλήρου τοῦ κύκλου ΑΒΓ.

24. Ἔστωσαν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου δύο τετράδες σημείων Α, Β, Γ, Δ καὶ Α', Β', Γ', Δ' τοιαῦται ὥστε τὰ σημεῖα Α, Α', Β, Β' νὰ εἶναι σημεῖα συγκυκλικά, ὡς ἐπίσης τὰ Β, Β' Γ, Γ', τὰ Γ, Γ', Δ, Δ' καὶ τὰ Δ, Δ', Α, Α'. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἂν τὸ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ εἶναι σημεῖα συγκυκλικὰ, τότε καὶ τὰ σημεῖα Α', Β', Γ', Δ' θὰ εἶναι ἐπίσης συγκυλικά. Βάσει τῆς ἀνωτέρω προτάσεως νὰ ἀποδειχθοῦν αἱ :

---

(1) Εὐθεῖα R. Simson. (1767-1868)

(1) Ἂν A', B', Γ' εἶναι τρία τυχόντα σημεῖα τῶν πλευρῶν $B\Gamma$, ΓA, AB τριγώνου $AB\Gamma$ ἀντιστοίχως, οἱ κύκλοι $AB'\Gamma'$, $B\Gamma'A'$, $\Gamma A'B'$ διέρχονται διὰ σημείου.
(2) Θεωροῦμεν τρία σημεῖα A', B', Γ' ἐπὶ τῶν πλευρῶν $B\Gamma$, ΓA, AB ἀντιστοίχως τριγώνου $AB\Gamma$ καὶ τὸ δεύτερον ἐκτὸς τοῦ A', κοινὸν σημεῖον M τῶν κύκλων $BA'\Gamma'$ καὶ $\Gamma B'A'$. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἂν τὸ M εἶναι σημεῖον τοῦ κύκλου $AB\Gamma$, τότε τὰ σημεῖα A', B', Γ' κεῖνται ἐπ' εὐθείας καὶ ἀντιστρόφως.
(3) Ἂν α, β, γ, δ εἶναι τέσσαρες τυχοῦσαι εὐθεῖαι τοῦ ἐπιπέδου, οἱ κύκλοι οἱ περιγεγραμμένοι περὶ τὰ τέσσαρα τρίγωνα τὰ ὁριζόμενα ἀπὸ τὰς ἀνωτέρω εὐθείας, θεωρουμένας ἀνὰ τρεῖς, διέρχονται διὰ σημείου.

25. Θεωροῦμεν : τρίγωνον $AB\Gamma$, ἕνα σημεῖον M τοῦ κύκλου $AB\Gamma$ καὶ τὴν εὐθεῖαν Simson δ τοῦ σημείου M. Ἔστω H τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ εὐθεῖα δ εἶναι εὐθεῖα Simson ὡς πρὸς τὰ τρίγωνα $HB\Gamma$, $H\Gamma A$, HAB, τριῶν σημείων α, β, γ ἀντιστοίχως, τὰ ὁποῖα εἶναι κορυφαὶ τριγώνου $\alpha\beta\gamma$ ἴσου πρὸς τὸ $AB\Gamma$ καὶ τοῦ ὁποίου τὸ ὀρθόκεντρον εἶναι τὸ σημεῖον M

26. Ἔστωσαν A', B', Γ' αἱ ὀρθαὶ σημείου προβολαὶ M τοῦ προσανατολισμένου ἐπιπέδου ἐπὶ τὰς πλευρὰς $B\Gamma$, ΓA, AB δοθέντος τριγώνου $AB\Gamma$. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων M τῶν ὁριζομένων ἐκ τῆς συνθήκης ὅπως ἡ γωνία τῶν εὐθειῶν $A'B'$, $A'\Gamma'$ εἶναι ἴση πρὸς δοθεῖσαν γωνίαν α.

27. Δίδονται ἐπὶ τοῦ προσανατολισμένου ἐπιπέδου δύο ὁμοίως προσανατολισμένοι ἴσοι κύκλοι (O) καὶ (O') καὶ ἐπὶ τούτων ἀντιστοίχως δύο σημεῖα A καὶ A'. Θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον M τοῦ κύκλου (O) καὶ τὸ σημεῖα M' καὶ μ' τοῦ κύκλου (O') ὥστε $\widehat{A'M'} = \widehat{AM}$ καὶ $\widehat{A'\mu'} = \widehat{AM}$. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ γεωμ. τόποι τῶν μέσων τῶν εὐθ. τμημάτων MM' καὶ $M\mu'$

28. Ἔστω (Γ) ἕνας κύκλος κέντρου O καὶ AB μία σταθερὰ διάμετρος αὐτοῦ. Θεωροῦμεν ἕνα σημεῖον P τῆς AB καὶ ὀνομάζομεν Ω καὶ Ω' τὰ κέντρα τῶν κύκλων MBP καὶ MAP. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ πέντε σημεῖαν P, Ω, M, O, Ω' εἶναι συγκυκλικά.

29. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι εἰς τὸ ὀρθογώνιον κατὰ τὴν γωνίαν A τρίγωνον $AB\Gamma$, ἰσχύει ἡ σχέσις : $\beta + \gamma - \alpha = 2\rho$ (ρ ἡ ἀκτὶς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου)

30. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον $AB\Gamma$ ἰσχύουν αἱ σχέσεις :(1)$\upsilon_1 = 3\rho$ (2) $r = 2\rho$.

31. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι εἰς οἱονδήποτε τρίγωνον ἰσχύουν αἱ σχέσεις :
(1) $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = 4r + \rho$ (ρ, ρ_1, ρ_2, ρ_3 αἱ ἀκτῖνες τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων τοῦ τριγώνου καὶ r ἡ ἀκτὶς τοῦ περιγεγραμμένου αὐτοῦ κύκλου)
(2)$O_1P_1 + O_2P_2 + O_3P_3 = 2r - \rho$ (P_1, P_2, P_3 τὰ μέσα τῶν τόξων $B\Gamma$, ΓA, AB τοῦ κύκλου $AB\Gamma$ τὰ ὁποῖα κεῖνται ἀντιστοίχως πρὸς τὸ μέρος τῶν εὐθειῶν $B\Gamma$, ΓA, AB, πρὸς ὁ ὁποῖον δὲν κεῖνται αἱ κορυφαὶ A, B, Γ ἀντιστοίχως).

32. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι (1) Εἰς τὸ ὀξυγώνιον τρίγωνον $AB\Gamma$ ἰσχύει ἡ σχέσις : $OO_1 + OO_2 + OO_3 = r + \rho$ καὶ (2) Εἰς τὸ ἀμβλυγώνιον, κατὰ τὴν γωνίαν A, τρίγωνον $AB\Gamma$ ἰσχύει ἡ σχέσις : $OO_2 + OO_3 - OO_1 = r + \rho$

33. Θεωροῦμεν κυρτὸν τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$ ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον (O). Ἔστωσαν ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_3 αἱ ἀκτῖνες τῶν κύκλων τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς τὰ τρίγωνα $B\Gamma\Delta$, $\Gamma\Delta A$, ΔAB, $AB\Gamma$ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $\rho_1 + \rho_3 = \rho_2 + \rho_4$

34. Θεωροῦμεν ἰσόπλευρον ἑπτάγωνον $AB\Gamma\ldots H$ ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον (O) καὶ τὸ τρίγωνον MNP τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἀπὸ τὰς εὐθείας AB, ΓE, ΔH. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ περὶ τὸ τρίγωνον τοῦτο περιγεγραμμένον κύκλος διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Z.

35. Ἔστω P σημεῖον τοῦ περὶ τρίγωνον $AB\Gamma$ περιγεγραμμένου κύκλου καὶ A_1, B_1, Γ_1 τὰ κοινὰ σημεῖα τριῶν παραλλήλων εὐθειῶν ἀγομένων ἀπὸ τὰς κορυφὰς A, B, Γ μὲ τὰς καθέτους εἰς τὸ σημεῖον P ἐπὶ τὰς εὐθείας PA, PB, $P\Gamma$ ἀντιστοίχως. Ἂν εἶναι Δ, E, Z αἱ προβολαὶ τοῦ P ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου $A_1B_1\Gamma_1$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ κύκλος ΔEZ ἔχει τὸ κέντρον του ἐπὶ τῆς εὐθείας Simson τοῦ σημείου P.

36. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ καὶ τὰ ἰσόπλευρα τρίγωνα ΒΓΑ', ΓΑΒ', ΑΒΓ' τῶν ὁποίων αἱ καρυφαὶ Α', Β', Γ' κεῖνται ἀντιστοίχως πρὸς τὸ μέρος τῶν εὐθειῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖνται αἱ κορυφαὶ Α, Β, Γ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : (1) Αἱ εὐθεῖαι ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ' διέρχονται διὰ σημείου (2) Τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι τὸ σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τριγώνου τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τῶν κορυφῶν εἶναι ἐλάχιστον.

37. Δίδεται ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ. Θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον Μ τῆς βάσεως ΒΓ καὶ ἀπὸ τοῦ Μ τὰς παραλλήλους πρὸ τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ, τῶν ὁποίων ἔστωσαν Ε καὶ Ζ τὰ κοινὰ σημεῖα μὲ τὰς ΑΓ καὶ ΑΒ ἀντιστοίχως.

1. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ μεσοκάθετος τοῦ εὐθ. τμήματος ΕΖ διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου.

2. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ κύκλος ΑΖΕ διέρχεται διὰ ἑνὸς δευτέρου, ἐκτὸς τοῦ Α, σταθεροῦ σημείου.

38. Δίδονται δύο εὐθεῖαι δ καὶ δ' κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας καὶ ἕνα σημεῖον Α μιᾶς τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν (δ, δ'). Θεωροῦμεν δύο κύκλους ἕκαστος τῶν ὁποίων διέρχεται διὰ τῶν Ο καὶ Α καὶ ὀνομάζομεν Μ, Μ' τὰ κοινὰ σημεῖα τούτων μὲ τὴν δ καὶ Ν, Ν' τὰ κοινὰ σημεῖα τούτων μὲ τὴν δ'. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ΜΜ' = ΝΝ'.

39. Δίδεται κύκλος (Ο) καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β αὐτοῦ μὴ ἀντιδιαμετρικά. Θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον Ρ τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ ὀνομάζομεν Ω καὶ Ω' τὰ κέντρα τῶν κύκλων οἱ ὁποῖοι διέρχονται διὰ τοῦ Ρ καὶ ἐφάπτονται ἀντιστοίχως τοῦ κύκλου (Ο) κατὰ τὰ σημεῖα ἔστω Α καὶ Β.

(1) Νὰ εὑρεθοῦν σύνολα τῶν σημείων Ω καὶ Ω'.

(2) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ μεσοκάθετος τοῦ εὐθ. τμήματος ΩΩ' διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου (ἀνεξαρτήτου τοῦ σημείου Ρ).

40. Θεωροῦμεν : τρίγωνον ΑΒΓ ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον (Ο), τὸ κέντρον βάρους G αὐτοῦ, τὸ ὀρθόκεντρον Η αὐτοῦ, τὸ μέσον Μ τῆς πλευρᾶς ΒΓ καὶ τὸ ἀντιδιαμετρικὸν Α' τοῦ Α εἰς τὸν κύκλον (Ο).

1. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{H\Gamma} = 2\overrightarrow{HO}$ καὶ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Gamma} = \overrightarrow{OH}$

2. Ἐκ τῆς σχέσεως: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{G\Gamma} = O$ νὰ ἀποδειχθῇ ἡ: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Gamma} = 3\overrightarrow{OG}$.

41. Ἔστω G τὸ κέντρον βάρους ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ, Α' τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΒΓ αὐτοῦ καὶ Μ ἕνα τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου.

Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : (1) $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{G\Gamma} = 2\overrightarrow{GA'}$

(2) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{G\Gamma} = O$. (3) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Gamma} = 3\overrightarrow{MG}$.

42. Ἔστωσαν G καὶ G' τὰ κέντρα βάρους δύο τριγώνων ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' ἀντιστοίχως.

(1) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $3\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{\Gamma\Gamma'} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{B\Gamma'} + \overrightarrow{\Gamma A'}$.

(2) Νὰ εὑρεθῇ μία συνθήκη ἵνα τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' ἔχουν τὸ αὐτὸ κέντρον βάρους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VIII

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ ΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

Εἰς τὸ προηγούμενον κεφάλαιον ἐδόθη ἡ ἔννοια τοῦ γεωμ. τόπου σημείων καὶ τοῦ γεωμ. τόπου εὐθειῶν εἰς τὸ ἐπίπεδον. Εἰς τὸ κεφάλαιον τοῦτο (226, 254, 259) ὁ κύκλος ὡρίσθη ὡς σύνολον σημείων ὁριζόμενον βάσει τῆς συνθήκης $OM = \alpha$ ἢ τῆς $(MA, MB) = \varphi$. Ὅπου φ δοθεῖσα προσανατολισμένη γωνία καὶ Α, Β δοθέντα σημεῖα.

Ἐκ τῶν εἰς τὸν κύκλον ἀναφερομέων προτάσεων προκύπτει ὅτι :

286. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ὁ γεωμ. τόπος τῶν κέντρων τῶν κύκλων ἕκαστος τῶν ὁποίων διέρχεται διὰ δύο δοθέντων σημείων Α καὶ Β εἶναι ἡ μεσοκάθετος ξ τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ. (229, Πόρισμα 6).

287. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ὁ Γεωμ. τόπος τῶν κέντρων τῶν κύκλων ἕκαστος τῶν ὁποίων ἐφάπτεται δοθείσης εὐθείας α εἰς δοθὲν σημεῖον Α αὐτῆς εἶναι ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν α εἰς τὸ σημεῖον Α. (245, Πόρισμα 4).

288. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ὁ γεωμ. τόπος τῶν κέντρων τῶν κύκλων ἕκαστος τῶν ὁποίων ἐφάπτεται δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν τῶν ὁριζομένων ἀπὸ τὰς δοθείσας εὐθείας. (248, Πόρισμα 3).

289. ΘΕΩΡΗΜΑ. Τὸ σύνολον τῶν εὐθειῶν ε ἑκάστη τῶν ὁποίων ἀπέχει ἀπὸ δοθέντος σημείου Ο ἀπόστασιν ἴσην πρὸς δοθὲν εὐθ. τμῆμα α εἶναι τὸ σύνολον τῶν ἐφαπτομένων τοῦ κύκλου κέντρου Ο καὶ ἀκτῖνος α.

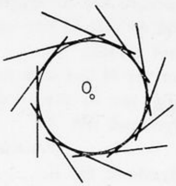
Ἀπόδειξις. Ἂν μία εὐθεῖα ε ἀπέχῃ ἀπὸ τοῦ Ο ἀπόστασιν α εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου κέντρου Ο καὶ ἀκτῖνος α.

Σημειοῦμεν ὅτι :

Ὁ κύκλος (Ο) ὡς ὡρίσθη ἀρχικῶς (226) θεωρεῖται, κατὰ τὴν ἐποπτικὴν ἑρμηνείαν τοῦ ὁρισμοῦ τούτου (226) **παραγόμενος** ὑπὸ σημείου μεταβαλλομένου θέσει καὶ διατηροῦντος σταθερὰν ἀπόστασιν ἀπὸ δοθέντος σημείου Ο, ἤτοι ὡς **σημειογενής.**

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω (289) θεωρήματος ἔχομεν μίαν ἄλλην θεώρησιν τοῦ κύκλου, ἀνταποκρινομένην εἰς τὴν γένεσιν αὐτοῦ ὑπὸ μιᾶς εὐθείας μεταβαλλομένης θέσει ὥστε νὰ διατηρῇ σταθερὰν ἀπόστασιν ἀπὸ δοθέντος σημείου Ο.

Βάσει ταύτης ὁ κύκλος θεωρεῖται ὡς **εὐθειορενής**, ἤτοι ὡς τὸ σύνολον τῶν ἐφαπτομένων του. (Σχ. 289).



Σχ. 289

Γενικώτερον ὅταν αἱ εὐθεῖαι ἑνὸς συνόλου εἶναι ἐφαπτόμεναι ἑνὸς κύκλου (Ο), ὁ κύκλος οὗτος (Ο) δύναται νὰ ὀνομάζεται καὶ **περιβάλλουσα** τοῦ συνόλου τῶν ἀνωτέρω εὐθειῶν.

Τὸ αὐτὸ δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν καὶ δι' ἕνα σύνολον κύκλων: Ἂν οἱ κύκλοι τοῦ συνόλου εἶναι ἐφαπτόμενοι ἑνὸς κύκλου (Ο) ὁ κύκλος οὗτος (Ο), δύνανται νὰ ὀνομάζεται καὶ περιβάλλουσα τοῦ συνόλου τῶν ἀνωτέρω κύκλων.

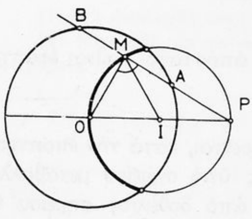
290. ΘΕΩΡΗΜΑ. **Τὸ σύνολον τῶν εὐθειῶν ἐπὶ τῶν ὁποίων κεῖνται αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς κύκλον (Ο), αἱ ὁποῖαι ἔχουν δοθὲν ἀντίστοιχον τόξον, εἶναι ἡ δέσμη τῶν εὐθειῶν τῶν διερχομένων διὰ τοῦ μέσου τοῦ τόξου τούτου.**

Ἀπόδειξις. Ἑκάστη τῶν διχοτόμων τῆς προτάσεως διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τοῦ ἀνωτέρω τόξου. Τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι ἡ περιβάλλουσα τῶν ἀνωτέρω εὐθειῶν.

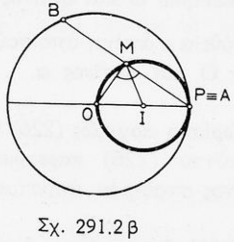
Αἱ κατωτέρω προτάσεις ἀναφέρονται εἰς γεωμ. τόπους ἀντιστοιχοῦντας εἰς θεμελιώδεις τινὰς συνθήκας :

291. ΘΕΩΡΗΜΑ. **(1). Ὁ γεωμ. τόπος τῶν μέσων τῶν χορδῶν ΑΒ δοθέντος κύκλου (Ο), αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἐπὶ εὐθειῶν γνωστῆς διευθύνσεως (δ), εἶναι ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου (Ο) ἡ κειμένη ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν διεύθυνσιν.**

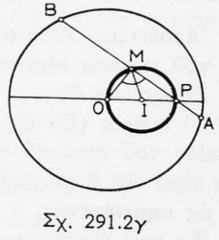
(2). Ὁ γεωμ. τόπος τῶν μέσων τῶν χορδῶν ΑΒ δοθέντος κύκλου (Ο) αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἐπὶ εὐθειῶν διερχομένων διὰ δοθέντος σημείου Ρ εἶναι τὸ σύνολον τῶν σημείων τοῦ κύκλου διαμέτρου ΟΡ, τὰ ὁποῖα εἶναι ἐσωτερικὰ τοῦ (Ο).



Σχ. 291.2α



Σχ. 291.2β



Σχ. 291.2γ

Ἀπόδειξις. (1). Ἂν εἶναι Μ τὸ μέσον μιᾶς χορδῆς ΑΒ τῆς διευθύνσεως (δ), ἡ ΟΜ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ ἐπὶ ἤτοι τὴν (δ), καὶ ἑπομένως γνωστὴ εὐθεῖα

(Σχ. 229.5). Ὁ γεωμ. τόπος εἶναι ἡ ἐπὶ τῆς εὐθείας αὐτῆς ΟΜ διάμετρος τοῦ κύκλου (Ο) (229, Πόρισμα 5).

(2) Ἐπειδὴ εἶναι ὀρθὴ ἡ γωνία (ΜΟ,ΜΡ), τὸ σημεῖον Μ εἶναι σημεῖον τοῦ κύκλου (Ι) διαμέτρου ΟΡ. Ὁ γεωμ. τόπος περιορίζεται, προφανῶς, εἰς τὸ σύνολον τῶν σημείων τοῦ (Ι) τὰ ὁποῖα εἶναι ἐσωτερικὰ τοῦ (Ο).

Σημειοῦμεν ὅτι :

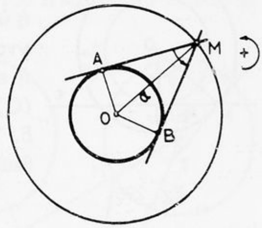
Ἡ εὐθεῖα ΟΡ εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ γεωμ. τόπου.

Εἰς τὰς ἐποπτικὰς εἰκόνας (Σχ. 291.2α, 291.2β, 291.2γ) ἐμφανίζονται αἱ τρεῖς περιπτώσεις αἱ ἀναφερόμεναι εἰς τὴν θέσιν τοῦ δοθέντος σημείου Ρ ὡς πρὸς τὸν κύκλον (Ο) (Σημεῖον ἐξωτερικὸν τοῦ κύκλου (Ο), σημεῖον τοῦ (Ο), σημεῖον ἐσωτερικὸν τοῦ (Ο).

292. ΘΕΩΡΗΜΑ. **Ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Μ ἀπὸ ἑκάστου τῶν ὁποίων ἕνας δοθεὶς κύκλος Ο(r) φαίνεται ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν φ εἶναι ἕνας κύκλος ὁμόκεντρος τοῦ δοθέντος.**

Ἀπόδειξις. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΜΑΟ (Σχ. 292) τοῦ ὁποίου εἶναι γνωστὴ ἡ κάθετος πλευρὰ ΟΑ (= r) καὶ ἡ ἀπέναντι αὐτῆς γωνία, ὡς ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς φ, ἕπεται ὅτι εἶναι γνωστὴ ἡ ὑποτείνουσα ΟΜ = α.

Τὸ Μ εἶναι σημεῖον τοῦ κύκλου Ο (α).



Σχ. 292

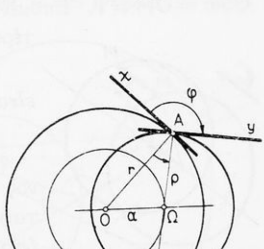
293. ΘΕΩΡΗΜΑ. **Ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Μ ἑκάστου τῶν ὁποίων ἡ ἐφαπτομένικὴ ἀπόστασις ἀπὸ δοθέντος κύκλου Ο(r), εἶναι ἴση πρὸς δοθὲν εὐθ. τμῆμα λ, εἶναι ἕνας κύκλος ὁμόκεντρος τοῦ δοθέντος.**

Ἀπόδειξις. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΑΜ (Σχ. 293), τοῦ ὁποίου εἶναι γνωσταὶ αἱ κάθετοι πλευραὶ (ΟΑ = r, ΜΑ = λ) ἕπεται ὅτι εἶναι γνωστὴ ἡ ὑποτείνουσα ΟΜ = α. Τὸ Μ εἶναι σημεῖον τοῦ κύκλου Ο (α).

294. ΘΕΩΡΗΜΑ. **Ὁ γεωμ. τόπος τῶν κέντρων τῶν κύκλων (Ω) δοθείσης ἀκτῖνος ρ, ἕκαστος τῶν ὁποίων τέμνει δοθέντα κύκλον Ο(r) ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν φ, εἶναι ἕνας κύκλος ὁμόκεντρος τοῦ δοθέντος.**

Ἀπόδειξις. Ἔστω Α τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ κοινὰ σημεῖα τοῦ (Ο) μὲ ἕνα κύκλον (Ω) τέμνοντα τὸν (Ο) ὑπὸ τὴν γωνίαν φ.

Ἐκ τοῦ τριγώνου ΟΑΩ τοῦ ὁποίου εἶναι γνωσταὶ αἱ πλευραὶ ΟΑ (= r) καὶ ΩΑ (= ρ) καὶ ἡ περιεχομένη γωνία (ΑΩ, ΑΟ), ὡς παραπληρωματικὴ τῆς φ, προκύπτει ὅτι εἶναι γνωστὴ ἡ πλευρὰ ΟΩ = α. Τὸ σημεῖον Ω εἶναι σημεῖον τοῦ κύκλου Ο(α).



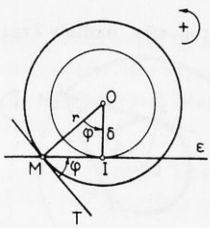
Σχ. 294

295. ΘΕΩΡΗΜΑ. **Ὁ γεωμ. τόπος τῶν κέντρων Ω τῶν κύκλων (Ω) δοθείσης ἀκτῖνος ρ, ἕκαστος τῶν ὁποίων ἐφάπτεται ἑνὸς δοθέντος κύκλου O(r) εἶναι ἕνας κύκλος ὁμόκεντρος τοῦ δοθέντος.**

Ἀπόδειξις. Παραλείπεται ὡς ἁπλῆ. Ἡ ἀκτὶς τοῦ τόπου εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν τῶν ἀκτίνων r καὶ ρ τῶν κύκλων (O) καὶ (Ω) (263).

296. ΘΕΩΡΗΜΑ. **Τὸ σύνολον τῶν εὐθειῶν ε ἑκάστη τῶν ὁποίων τέμνει δοθέντα κύκλον (O) ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν φ, εἶναι τὸ σύνολον τῶν ἐφαπτομένων ἑνὸς κύκλου ὁμοκέντρου τοῦ (O).**

Ἀπόδειξις. Ἔστω ε μία τυχοῦσα εὐθεῖα τέμνουσα τὸν (O) ὑπὸ γωνίαν φ καὶ OI ἡ διὰ τοῦ O κάθετος ἐπὶ τὴν ε. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου IOM (Σχ. 296), τοῦ ὁποίου εἶναι γνωστὴ ἡ ὑποτείνουσα OM ($=r$) καὶ ἡ γωνία φ, ἕπεται ὅτι εἶναι γνωστὴ ἡ ἀπόστασις OI τοῦ O ἀπὸ τῆς ε. Ἑπομένως ἡ ε εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου, τοῦ ὁμοκέντρου τοῦ (O), τοῦ ἔχοντος ἀκτῖνα τὸ γνωστὸν εὐθ. τμῆμα OI = δ. Ὁ κύκλος οὗτος O (δ) εἶναι ἡ περιβάλλουσα τῶν εὐθειῶν ε.



Σχ. 296

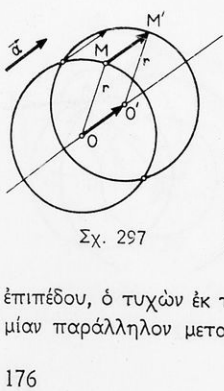
297. ΘΕΩΡΗΜΑ. **Δίδεται κύκλος O(r) καὶ διάνυσμα $\vec{\alpha}$. Θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον M τοῦ κύκλου O(r) καὶ τὸ ὁμόλογον M′ αὐτοῦ κατὰ τὴν μεταφορὰν $T(\vec{\alpha})$. Ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων M′ εἶναι ἕνας κύκλος O′(r) ἴσος πρὸς τὸν (O) τοῦ ὁποίου τὸ κέντρον O′ εἶναι τὸ ὁμόλογον τοῦ O κατὰ τὴν μεταφορὰν $T(\vec{\alpha})$.**

Ἀπόδειξις. Ἔστω O′ (Σχ. 297) τὸ ὁμόλογον τοῦ O κατὰ τὴν μεταφορὰν $T(\vec{\alpha})$ $(\overrightarrow{OO'} = \vec{\alpha})$. Ἐκ τοῦ παραλληλογράμμου OO′M′M ἔχομεν ὅτι : $\overrightarrow{O'M'} = \overrightarrow{OM} = r$. Ἑπομένως τὸ M′ εἶναι σημεῖον τοῦ κύκλου O′ (r). Ἡ ἀνωτέρω (297) πρότασις δύναται νὰ διατυπωθῇ ὡς ἑξῆς:

Τὸ ὁμόλογον κύκλου (O), κατὰ τὴν μεταφορὰν $T(\vec{\alpha})$, *εἶναι κύκλος (O′) ἴσος πρὸς τὸν (O).*

Σημειοῦμεν ὅτι :

1. Ἂν ὁ κύκλος (O) θεωρηθῇ προσανατολισμένος, τότε ὁ ὁμόλογος (O′) αὐτοῦ, κατὰ οἱανδήποτε μεταφοράν, ἔχει τὸν αὐτὸν μὲ τὸν (O) προσανατολισμόν, ἤτοι δύο ὁμόλογα τόξα ἢ ὁμόλογοι ἐπίκεντροι γωνίαι αὐτῶν εἶναι ὁμοίως προσανατολισμέναι.



Σχ. 297

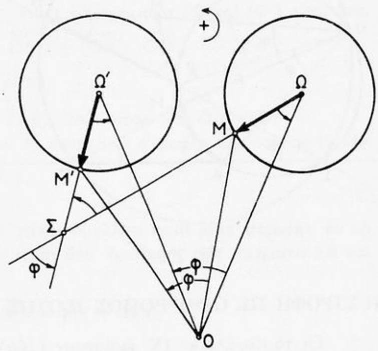
2. Οἱοιδήποτε καὶ ἂν εἶναι δύο ἴσοι κύκλοι τοῦ ἐπιπέδου, ὁ τυχὼν ἐκ τούτων δύναται νὰ θεωρηθῇ ὁμόλογος τοῦ ἄλλου κατὰ μίαν παράλληλον μεταφοράν.

Πράγματι, ἡ μεταφορὰ αὕτη ὁρίζεται ἀπὸ τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{OO'}$.

3. Ἂν ἕνας κύκλος (Ο) καὶ μία εὐθεῖα ε ἢ δύο κύκλοι (Ο) καὶ (Ω) τέμνωνται ὑπὸ γωνίαν φ, τότε καὶ τὰ ὁμόλογα αὐτῶν σχήματα, κατὰ μίαν οἱανδήποτε μεταφορὰν $\mathbf{T}\,(\vec{\alpha})$ τέμνονται ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν φ. Τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν (Ο) καὶ ε ἢ τῶν (Ο) καὶ (Ω), εἶναι τὸ ὁμόλογον τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν ὁμολόγων σχημάτων, κατὰ τὴν θεωρουμένην μεταφοράν.

298. ΘΕΩΡΗΜΑ. Δίδεται σημεῖον Ο καὶ κύκλος (Ω). Θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον Μ τοῦ (Ω) καὶ τὸ ὁμόλογον Μ΄ αὐτοῦ κατὰ τὴν στροφὴν R (Ο,φ) ἡ ὁποία ἔχει κέντρον τὸ Ο καὶ γωνίαν μίαν δοθεῖσαν προσανατολισμένην γωνίαν φ. Ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Μ΄ εἶναι ἕνας κύκλος (Ω΄) ἴσος πρὸς τὸν (Ω), τοῦ ὁποίου τὸ κέντρον Ω΄ εἶναι τὸ ὁμόλογον τοῦ κέντρου Ω τοῦ (Ω) κατὰ τὴν ἀνωτέρω στροφήν.

Ἀπόδειξις. Ἔστω Ω΄ (Σχ. 298.1) τὸ ὁμόλογον τοῦ Ω καὶ Μ΄ τὸ ὁμόλογον τοῦ τυχόντος σημείου Μ τοῦ (Ω) κατὰ τὴν θεωρουμένην στροφήν. Ἐκ τῶν ἴσων τριγώνων ΟΩΜ καὶ ΟΩ΄Μ΄ ἕπεται ὅτι Ω΄Μ΄ = ΩΜ = r, ὅπου r ἡ ἀκτὶς τοῦ (Ω)· Ἤτοι τὸ Μ΄ εἶναι σημεῖον γνωστοῦ κύκλου (Ω΄), ἴσου πρὸς τὸν (Ω). Ἐξ ἄλλου, οἱονδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἕνα σημεῖον Μ΄ τοῦ (Ω΄), ὑπάρχει σημεῖον Μ τοῦ (Ω), καὶ μόνον ἕνα, ὥστε (ΟΜ, ΟΜ΄) = φ καὶ ΟΜ = ΟΜ΄. Ὁ κύκλος (Ω΄) ὀνομάζεται **ὁμόλογος** τοῦ (Ω) **κατὰ τὴν στροφὴν** ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο καὶ τὴν προσανατολισμένην γωνίαν φ.



Σχ. 298.1

Σημειοῦμεν ὅτι :

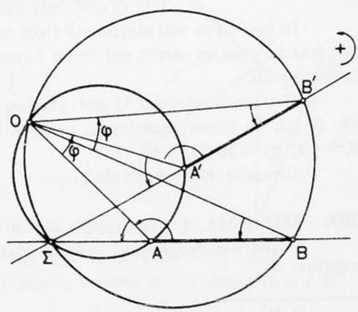
1. Τὸ Ο εἶναι τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν μεσοκαθέτων τῶν εὐθ. τμημάτων ΩΩ΄ καὶ ΜΜ΄

2. Ἂν εἶναι Σ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν εὐθειῶν ΩΜ καὶ Ω΄Μ΄, ἐκ τῶν ἐγγραψίμων τετραπλεύρων ΟΣΜΜ΄ καὶ ΟΣΩΩ΄ ἕπεται ὅτι, τὸ Ο εἶναι τὸ δεύτερον, ἐκτὸς τοῦ Σ, κοινὸν σημεῖον τῶν κύκλων ΣΜΜ΄ καὶ ΣΩΩ΄.

3. Οἱ κύκλοι (Ω) καὶ (Ω΄) εἶναι ὁμοίως προσανατολισμένοι.

4. Οἱοιδήποτε καὶ ἂν εἶναι δύο ἴσοι κύκλοι (Ω) καὶ (Ω΄), ὁ τυχὼν ἐκ τούτων δύναται νὰ θεωρηθῇ ὁμόλογος τοῦ ἄλλου εἰς στροφὴν τῆς ὁποίας ἡ γωνία εἶναι μία δοθεῖσα προσανατολισμένη γωνία φ. Τὸ κέντρον εἶναι σημεῖον τῆς μεσοκαθέτου τοῦ εὐθ. τμήματος ΩΩ΄.

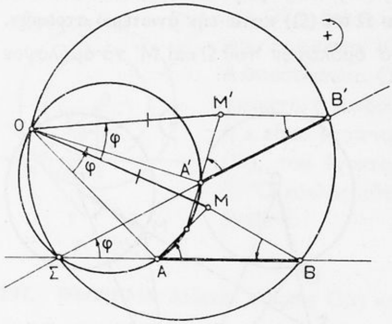
5. Ἂν μία εὐθεῖα καὶ ἕνας κύκλος ἢ δύο κύκλοι, τέμνωνται ὑπὸ γωνίαν φ, τότε τὰ ὁμόλογα τούτων σχήματα, κατὰ οἱανδήποτε στροφήν, τέμνονται ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν φ.



Σχ. 298.2

6. Ἂν εἶναι ΑΒ καὶ Α'Β' δύο τυχόντα ἴσα εὐθ. τμήματα (Σχ.298.2), καὶ Σ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ Α'Β', τότε τὸ δεύτερον, ἐκτὸς τοῦ Σ, κοινὸν σημεῖον Ο τῶν κύκλων ΣΑΑ' καὶ ΣΒΒ' εἶναι τὸ κέντρον τῆς στροφῆς κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ εὐθ. τμῆμα Α'Β' εἶναι ὁμόλογον τοῦ ΑΒ. Ἡ γωνία Α τῆς στροφῆς εἶναι ἡ γωνία (ΟΑ, ΟΑ') = (ΟΒ, ΟΒ') Πράγματι τὰ τρίγωνα ΟΑΒ καὶ ΟΑ'Β' (Σχ. 298.2) εἶναι ἴσα, διότι εἶναι : ΑΒ = Α'Β', (ΒΟ, ΒΑ) = (Β'Ο, Β'Α') = φ διότι εἶναι ἐγγεγραμμέναι εἰς τὸν κύκλον ΣΒΒ' ἔχουσαι τὸ αὐτὸ ἀντιστοιχον τόξον, καὶ (ΑΒ, ΑΟ) = (Α'Β', Α'Ο) διότι αἱ παραπληρωματικαὶ αὐτῶν ἀντιστοίχως εἶναι ἴσαι ὡς ἐγγεγραμμέναι εἰς τὸν κύκλον ΣΑΑ' ἔχουσαι τὸ αὐτὸ ἀντίστοιχον τόξον. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἴσων τριγώνων ἕπεται ὅτι ΟΑ = ΟΑ' καὶ ΟΒ = ΟΒ', ἤτοι ὅτι τὸ Ο εἶναι τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν μεσοκαθέτων τῶν εὐθ. τμημάτων ΑΑ' καὶ ΒΒ'.

Ἐξ ἄλλου τὸ Ο εἶναι τὸ μόνον σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ πρὸς ἑαυτό, κατὰ τὴν ἀνωτέρω στροφὴν R(Ο, φ), ἤτοι τὸ σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου διὰ τὸ ὁποῖον τὰ τρίγωνα ΟΑΒ καὶ ΟΑ'Β' εἶναι ἴσα.



Σχ. 298.3

7. Εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι :

Ἂν δοθέντων τῶν ἴσων εὐθ. τμημάτων ΑΒ καὶ Α'Β', θεωρήσωμεν (Σχ. 298.3) δύο σημεῖα Μ καὶ Μ' ὥστε τὰ τρίγωνα ΜΑΒ καὶ Μ'Α'Β' νὰ εἶναι ἴσα, τότε ΟΜ = ΟΜ' καὶ (ΟΜ, ΟΜ') = (ΟΑ, ΟΑ') = φ, δηλαδὴ ὅτι τὸ Μ' εἶναι τὸ ὁμόλογον τοῦ Μ κατὰ τὴν στροφὴν R(Ο,φ) ἡ ὁποία ὁρίζεται, ἀπὸ τὰ ἴσα εὐθ. τμήματα ΑΒ καὶ Α'Β'.

Διὰ τὴν ἀπόδειξιν ἀρκεῖ νὰ θεωρήσωμεν τὰ ἴσα (79) τρίγωνα ΟΑΜ καὶ ΟΑ'Μ'.

Ἀναφερόμενοι, εἰδικώτερον, εἰς τὴν ἔννοιαν τῆς στροφῆς ὡς ὁμορρόπου ἰσότητος εἰς τὸ ἐπίπεδον, παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς :

Η ΣΤΡΟΦΗ ΩΣ ΟΜΟΡΡΟΠΟΣ ΙΣΟΤΗΣ

Εἰς τὸ Κεφάλαιον IV ὡρίσαμεν (166) τὴν στροφὴν R (Ο, φ) ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ὡς τὴν ἀμφιμονοσήμαντον ἀπεικόνισιν (1) τοῦ συνόλου τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ συνόλου (ἐφ' ἑαυτοῦ), κατὰ τὴν ὁποίαν δοθέντος ἑνὸς σημείου Ο (ὀνομασθέντος κέντρου) καὶ μιᾶς προσανατολισμένης γωνίας φ, τὸ ὁμόλογον Μ' κάθε σημείου Μ τοῦ ἐπιπέδου ὁρίζεται ἐκ τῶν σχέσεων :

$$ΟΜ = ΟΜ' \text{ καὶ } (ΟΜ, ΟΜ') = φ$$

Τὸ ὁμόλογον τοῦ κέντρου Ο εἶναι αὐτὸ τὸ Ο. Εἶναι κατὰ ταῦτα τὸ κέντρον Ο τῆς στροφῆς *διπλοῦν* σημεῖον αὐτῆς καὶ ὅπως λέγομεν ἀντιστοιχοῦν πρὸς ἑαυτὸ ἢ *ἡνωμένον* μὲ τὸ ὁμόλογον αὐτοῦ.

Ἡ στροφὴ κέντρου Ο καὶ γωνίας −φ (τῆς ἀντιθέτου τῆς φ), ὠνομάσθη ἀντίστροφος τῆς R (Ο, φ) μετασχηματισμός, συμβολιζόμενος μὲ τὸ σύμβολον R^{-1} (Ο, φ). Ἤτοι : R^{-1} (Ο, φ) = R (Ο, −φ)

Δυνάμεθα ἤδη νὰ ἀποδείξωμεν τὸ ἑξῆς θεώρημα :

299. ΘΕΩΡΗΜΑ. 1. Ἡ στροφὴ εἰς τὸ ἐπίπεδον εἶναι μία ὁμόρροπος ἰσότης (2) καί,

2. Ἵνα μία ὁμόρροπος ἰσότης εἶναι στοφή, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἔχῃ ἕνα διπλοῦν σημεῖον.

---

(1) Ἡ **μετασχηματισμόν.**

(2) Βλέπε Κεφ. V, 225

Ἀπόδειξις 1. Θεωροῦμεν ἕνα σχῆμα (Φ) ὁριζόμενον ἀπὸ δύο σημεῖα : Τὸ Ο καὶ ἕνα σημεῖον Α. Τὰ ὁμόλογα τούτων κατὰ τῆν στροφὴν R(O, φ), εἶναι ἀντιστοίχως τὰ σημεῖα Ο καὶ Α′ (Σχ. 298.3). Ἔχομεν :

$$OA = OA' \text{ καὶ } (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = \varphi \ (+2k\pi)$$

Ἔστω Μ ἕνα τυχὸν σημεῖον τοῦ σχήματος (Φ) καὶ Μ′ τὸ ὁμόλογον αὐτοῦ : Ἔχομεν :

$$OM = OM' \text{ καὶ } (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \varphi \ (+2k\pi)$$

Ἀλλὰ $(\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OM'}) = (\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) + (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) =$

$= -\varphi + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) + \varphi = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω σχέσεως καὶ τῆς OM = OM′ προκύπτει (225) ὅτι τὸ σχῆμα (Φ′) καὶ ὁμορρόπως ἴσον πρὸς τὸ (Φ).

2. Ἂς θεωρήσωμεν δύο ὁμορρόπως ἴσα σχήματα (Φ) καὶ (Φ′) τὰ ὁποῖα ἔχουν δύο ὁμόλογα σημεῖα συμπίπτοντα εἰς τὸ Ο. Ὁρίζομεν τὰ ἀνωτέρω σχήματα ἀπὸ τὰ δύο ζεύγη ὁμολόγων σημείων : (Ο, Α) καὶ (Ο, Α′). Θὰ ἔχωμεν ἀντιστοίχως : ΟΑ = ΟΑ′.

Ἔστω (Μ, Μ′) ἕνα τυχὸν ζεῦγος ὁμολόγων σημείων. Εἶναι, ἐξ ὑποθέσεως :

$OM = OM'$ καὶ $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = (\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OM'}) \ (+2k\pi)$, διότι τὰ σχήματα (Φ καὶ (Φ′) εἶναι ἴσα.

Ἀλλὰ $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) + (\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OM'}) \ (+2k\pi)$

$= -(\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OM'}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) + (\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OM'}) \ (+2k\pi)$

Ἐπομένως : $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) \ (+2k\pi)$, ἐνῶ εἶναι καὶ OM = OM′

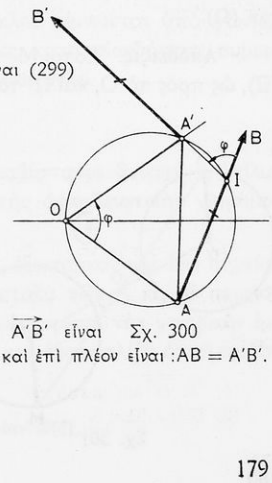
Ὥστε, τὸ σημεῖον Μ′ εἶναι τὸ ὁμόλογον τοῦ Μ κατὰ τὴν στροφὴν τῆς ὁποίας τὸ κέντρον εἶναι τὸ σημεον Ο καὶ ἡ γωνία ἡ $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'})$.

300. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἵνα δύο σχήματα (Φ) καὶ (Φ′) (1)εἶναι ὁμόλογα κατὰ μίαν στροφὴν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ὅπως, οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι δύο ὁμόλογα εὐθ. τμήματα ΑΒ καὶ Α′Β′ αὐτῶν, νὰ εἶναι :

$$AB = A'B' \text{ καὶ } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \varphi \ (+2k\pi),$$

ὅπου φ μία σταθερὰ γωνία.

Ἀπόδειξις. Ἔστω ἡ στροφὴ R (O, φ) κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ ὁμόλογον τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ καὶ τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{A'B'}$ (Σχ. 300).



Ἔχομεν : $OA = OA'$ καὶ $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = \varphi \ (+2k\pi)$.

Ἐπειδὴ ὁ θεωρούμενος μετασχηματισμὸς (στροφὴ) εἶναι (299) μία ὁμόρροπος ἰσότης θὰ ἔχωμεν :

$AB = A'B'$ καὶ $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{A'B'})$

Ἀλλά : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) +$
$(\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{A'B'}) \ (+2k\pi) = -(\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{A'B'}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) +$
$(\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{A'B'}) \ (+2k\pi)$

Ἤτοι : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) \ (+2k\pi)$ ἢ

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \varphi \ (+2k\pi)$, ἐνῶ εἶναι καὶ AB = A′B′

Σχ. 300

Ὥστε ἡ γωνία δύο ὁμολόγων διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{A'B'}$ εἶναι σταθερὰ ἐπὶ πλέον εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν τῆς στροφῆς, καὶ ἐπὶ πλέον εἶναι :AB = A′B′.

(2) Ἀντιστοιχοῦντα σημειακῶς

2. Ἔστωσαν δύο σχήματα (Φ) καὶ (Φ′) ἀντιστοιχοῦντα σημειακῶς, ὥστε σὲ κάθε διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ τοῦ (Φ) νὰ ἀντιστοιχῇ εἰς τὸ (Φ′) ἕνα διάνυσμα $\overrightarrow{A'B'}$ ὥστε :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \varphi \text{ καὶ } AB = A'B',$$

ὅπου φ μία σταθερὰ γωνία.

Ἂν ὁ μετασχηματισμὸς εἶναι στροφή, ἡ γωνία αὐτῆς θὰ εἶναι, ὡς ἀπεδείχθη, ἴση πρὸς τὴν φ.

Τὸ διπλοῦν σημεῖον O τοῦ μετασχηματισμοῦ, ἂν ὑπάρχῃ, θὰ εἶναι τὸ σημεῖον τῆς μεσοκαθέτου τοῦ εὐθ. τμήματος AA′ διὰ τὸ ὁποῖον : $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = \varphi \ (+\,2k\pi)$, καὶ λόγῳ τούτου θὰ εἶναι καὶ σημεῖον γνωστοῦ κυκλικοῦ τόξου (255), ἤτοι κοινὸν σημεῖον τῆς ἀνωτέρω μεσοκαθέτου καὶ τοῦ κυκλικοῦ τούτου τόξου. Τὸ σημεῖον τοῦτο O εἶναι τὸ κέντρον τῆς ζητουμένης στροφῆς. Πράγματι, θεωροῦντες τὸ ὁμόλογον τοῦ σχήματος (Φ) κατὰ τὴν στροφὴν R (O, φ), ἔχομεν : Τὸ ὁμόλογον τοῦ σημείου A εἶναι, λόγῳ τῆς ἐκλογῆς τοῦ O, τὸ A′ καὶ τὸ ὁμόλογον τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ ἕνα διάνυσμα $\overrightarrow{A'B''}$ διὰ τὸ ὁποῖον : $\overrightarrow{A'B''} = \overrightarrow{AB}$. Ἑπομένως $\overrightarrow{A'B''} = \overrightarrow{A'B'}$ καὶ $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B''}) = \varphi$, ἤτοι $(\overrightarrow{A'B''}, \overrightarrow{A'B'}) = 0 \ (+\,2k\pi)$. Οὕτω, τὸ σημεῖον B′ εἶναι τὸ ὁμόλογον τοῦ B καὶ ἑπομένως ὁ μετασχηματισμὸς εἶναι στροφή.

Ὡς ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει, αἱ μεσοκάθετοι τῶν εὐθ. τμημάτων τὰ ὁποῖα συνδέουν δύο ὁμόλογα σημεῖα, κατὰ μίαν στροφὴν R, διέρχονται διὰ τοῦ κέντρου τῆς στροφῆς καὶ τὸ κυκλικὸν τόξον ἀπὸ τὰ σημεῖα τοῦ ὁποίου δύο ὁμόλογα σημεῖα φαίνονται ὑπὸ γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν γωνίαν τῆς στροφῆς, περιέχει τὸ κέντρον O τῆς στροφῆς.

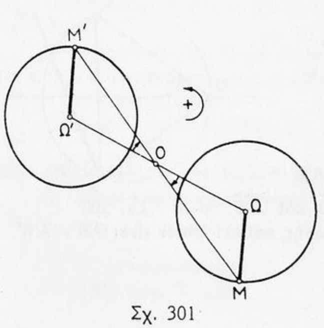
Τὸ κέντρον O τῆς στροφῆς δύναται, κατὰ ταῦτα, νὰ κατασκευασθῇ ὡς τομὴ δύο ἐκ τῶν προηγουμένων τόπων.

Σημειοῦμεν ἐπίσης ὅτι ἂν εἶναι I τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν φορέων (εὐθειῶν) δύο ὁμολόγων διανυσμάτων, $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{A'B'}$ θὰ εἶναι: $(IA, IA') = \varphi \ (+\,k\pi)$. Ἑπομένως : $(OA, OA') = (IA, IA') \ (+\,k\pi)$. Ἤτοι τὰ σημεῖα O, A, A′, I εἶναι συγκυκλικά.

Ἐπειδὴ ἡ ἀνωτέρω παρατήρησις ἰσχύει καὶ διὰ τὰ σημεῖα O, B, B′, I, τὸ κέντρον τῆς στροφῆς δύναται, ὡς ἐσημειώσαμεν ἤδη νὰ ὁρισθῇ (298), ὡς τὸ δεύτερον ἐκτὸς τοῦ I, κοινὸν σημεῖον τῶν κύκλων : (I, A, A′) καὶ (I, B, B′).

301. ΘΕΩΡΗΜΑ. Δίδεται κύκλος (Ω) καὶ σημεῖον O. Ὁ γεωμ. τόπος τῶν συμμετρικῶν τῶν σημείων τοῦ (Ω), ὡς πρὸς τὸ O, εἶναι ἕνας κύκλος (Ω′) ἴσος πρὸς τὸν (Ω).

Ἀπόδειξις. Ἔστω M′ τὸ συμμετρικὸν τοῦ τυχόντος σημείου M τοῦ κύκλου (Ω), ὡς πρὸς τὸ O, καὶ Ω′ τὸ συμμετρικὸν τοῦ κέντρου Ω τοῦ (Ω), ὡς πρὸς τὸ O.



Σχ. 301

Ἐκ τῶν ἴσων (79) τριγώνων OΩM καὶ OΩ′M′ προκύπτει ὅτι : Ω′M′ = ΩM = r. Ἀλλὰ τὸ σημεῖον Ω′ εἶναι γνωστὸν σημεῖον. Ἑπομένως τὸ σημεῖον M′ εἶναι σημεῖον τοῦ κύκλου Ω′(r). Ἐν προκειμένῳ ἔχομεν μίαν μερικὴν περίπτωσιν τοῦ προηγουμένου γεωμ. τόπου, κατὰ τὴν ὁποίαν φ = π. Ὁ κύκλος (Ω′) ὀνομάζεται **συμμετρικὸς** τοῦ (Ω) ὡς πρὸς τὸ σημεῖον O.

Σημειοῦμεν ὅτι :

1. Οἱ κύκλοι (Ω) καὶ (Ω′) εἶναι ὁμοίως προσανατολισμένοι.

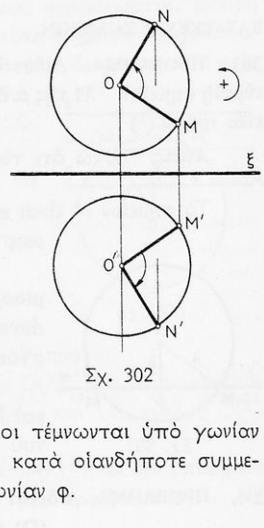
2. Οἱοιδήποτε καὶ ἂν εἶναι δύο ἴσοι κύκλοι (Ω) καὶ (Ω'), ὁ τυχὼν ἐκ τούτων δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ὁμόλογος τοῦ ἄλλου, εἰς μίαν μόνον συμμετρίαν. Τὸ κέντρον τῆς συμμετρίας αὐτῆς εἶναι τὸ μέσον Ο τοῦ εὐθ. τμήματος ΩΩ'.

3. Ἂν μία εὐθεῖα καὶ ἕνας κύκλος ἢ δύο κύκλοι τέμνωνται ὑπὸ γωνίαν φ, τότε καὶ τὰ συμμετρικὰ αὐτῶν, κατὰ οἱανδήποτε συμμετρίαν ὡς πρὸς σημεῖον, τέμνονται ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν φ.

302. ΘΕΩΡΗΜΑ. Δίδεται κύκλος Ο(r) καὶ εὐθεῖα ξ. Ὁ γεωμ. τόπος τῶν συμμετρικῶν τῶν σημείων τοῦ (Ο) ὡς πρὸς τὴν ξ (1) εἶναι ἕνας κύκλος (Ο') ἴσος πρὸς τὸν (Ο).

Ἀπόδειξις. Ἔστω Ο' τὸ συμμετρικὸν τοῦ κέντρου Ο τοῦ (Ο) ὡς πρὸς τὴν ξ καὶ Μ' τὸ συμμετρικὸν τοῦ τυχόντος σημείου Μ τοῦ (Ο). Εἶναι : Ο'Μ' = = ΟΜ = r. Ἐπειδὴ τὸ Ο' εἶναι γνωστὸν σημεῖον, τὸ σημεῖον Μ' εἶναι σημεῖον τοῦ κύκλου Ο' (r).

Ἡ πρότασις δύναται νὰ διατυπωθῇ καὶ ὡς ἑξῆς : Τὸ συμμετρικὸν ἑνὸς κύκλου (Ο) ὡς πρὸς εὐθεῖαν ξ εἶναι κύκλος (Ο') ἴσος πρὸς τὸν (Ο).



Σχ. 302

Σημειοῦμεν ὅτι :

1. Οἱ κύκλοι (Ο) καὶ (Ο') εἶναι ἀντιθέτως προσανατολισμένοι.

Πράγματι, δύο οἱαιδήποτε ὁμόλογοι, κατὰ τὴν συμμετρίαν, ἐπίκεντροι γωνίαι αὐτῶν εἶναι ἀντίθετοι.

2. Οἱοιδήποτε καὶ ἂν εἶναι δύο ἴσοι κύκλοι (Ο) καὶ (Ο'), ὁ τυχὼν ἐκ τούτων δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς συμμετρικὸς τοῦ ἄλλου κατὰ μίαν μόνον συμμετρίαν : Τὴν ἔχουσαν ὡς ἄξονα τὴν μεσοκάθετον τοῦ εὐθ. τμήματος ΟΟ'.

3. Ἂν μία εὐθεῖα καὶ ἕνας κύκλος, ἢ δύο κύκλοι τέμνωνται ὑπὸ γωνίαν φ, τότε καὶ τὰ συμμετρικὰ τῶν ἀνωτέρω σχήματα, κατὰ οἱανδήποτε συμμετρίαν ὡς πρὸς εὐθεῖαν, τέμνονται ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν φ.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ

Διὰ τῆς εἰσαγωγῆς τῆς ἐννοίας τοῦ κύκλου καθίσταται δυνατὴ ἡ ἐπίλυσις προβλημάτων μὴ δυναμένων νὰ ἐπιλυθῶσι μὲ τὴν ἀποκλειστικὴν χρησιμοποίησιν τοῦ κανόνος καὶ τοῦ μεταφορέως.

Ἐδέχθημεν (246) ὅτι ἂν ἕνα σημεῖον Α εἶναι ἐξωτερικὸν καὶ ἕνα σημεῖον Β ἐσωτερικὸν ἑνὸς δοθέντος κύκλου (Ο), ὑπάρχει μεταξὺ τῶν Α καὶ Β σημεῖον τοῦ κύκλου (Ο) καὶ ἕνα μόνον. Δεχόμεθα ὅτι τοῦτο ἐπιτρέπει τὴν γραφικὴν ἐμφάνισιν τῶν δύο τούτων σημείων καὶ τοῦ κύκλου, καὶ ἐξασφαλίζει ὅτι ἡ πρᾶξις

---

(1). Τὸ ὁμόλογον τοῦ κύκλου (Ο), κατὰ τὴν συμμετρίαν Σ(ξ).

ἡ ὁποία συνίσταται εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β σημείου τοῦ κύκλου, δύνανται πάντοτε νὰ ἐκτελεσθῇ. Ἀπεδείχθη (244) ὅτι ἕνας κύκλος καὶ μία εὐθεῖα, ἔχουν ἐν γένει, δύο κοινὰ σημεῖα. Δεχόμεθα ὅτι ἐκ τούτου ἐξασφαλίζεται ὅτι ἡ πρᾶξις διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκονται τὰ σημεῖα ταῦτα δύνανται πάντοτε νὰ ἐκτελεσθῇ. Διὰ τὴν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ἐκτέλεσιν τῶν ἐποπτικῶν τούτων ἐνεργειῶν, τῶν ἀνταποκρινομένων εἰς τὰς ἀντίστοιχα ἀξιώματα καὶ θεωρήματα ὑπάρξεως, ἐπιτρέπεται ἡ χρησιμοποίησις τοῦ ὀργάνου τὸ ὁποῖον ὀνομάζομεν **διαβήτην**. Κατὰ τὴν τοιαύτην ἐποπτικὴν ἑρμηνείαν δεχόμεθα ὅτι ἡ κίνησις τῶν ὀργάνων σχεδιάσεως (κανόνος καὶ διαβήτου ἢ κανόνος καὶ μεταφορέως, ὅταν ἡ χρησιμοποίησις τοῦ διαβήτου, ἤτοι τῆς ἐννοίας τοῦ κύκλου, δὲν εἶναι ἀπαραίτητος) εἶναι κίνησις στερεοῦ σώματος.

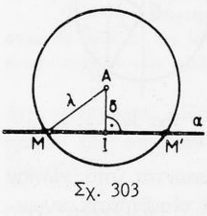
Κατωτέρω δίδονται θεμελιώδη τινα προβλήματα γεωμετρικῶν κατασκευῶν, ἡ ἐπίλυσις τῶν ὁποίων πραγματοποιεῖται διὰ τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ ΣΗΜΕΙΩΝ

303. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. **Δίδονται εὐθεῖα α καὶ σημεῖον Α μὴ κείμενον ἐπὶ τῆς α. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τῆς α ἀπέχον ἀπὸ τοῦ Α δοθεῖσαν ἀπόστασιν λ, ἔνθα λ δοθὲν εὐθ. τμῆμα.**(1)

Λύσις. Ἔστω ὅτι τὸ Μ (Σχ.303) εἶναι λύσις τοῦ προβλήματος, ἤτοι ὅτι $AM = \lambda$.

Τὸ σημεῖον Μ εἶναι σημεῖον τοῦ κύκλου κέντρου Α καὶ ἀκτῖνος λ. Ἑπομένως εἶναι κοινὸν σημεῖον τῆς α καὶ τοῦ κύκλου Α (λ).

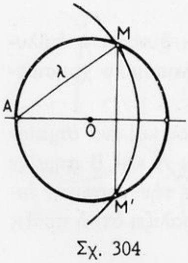


Σχ. 303

Ἡ σύνθεσις εἶναι ἁπλῆ. Τὸ πρόβλημα δέχεται δύο, μίαν, ἢ οὐδεμίαν λύσιν καθ' ὅσον τὸ εὐθ. τμῆμα λ εἶναι ἀντιστοίχως μεγαλύτερον, ἴσον ἢ μικρότερον τῆς ἀποστάσεως δ τοῦ σημείου Α ἀπὸ τῆς εὐθείας.

Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν ($\lambda > \delta$) αἱ λύσεις Μ καὶ Μ' εἶναι σημεῖα συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν προβολὴν Ι τοῦ Α ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν α.

304. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. **Δίδεται κύκλος Ο(r) καὶ σημεῖον Α Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τοῦ (Ο) ἀπέχον ἀπὸ τοῦ Α δοθεῖσαν ἀπόστασιν λ, ἔνθα λ δοθὲν εὐθ. τμῆμα.**



Σχ. 304

Λύσις. Ἔστω ὅτι τὸ Α δίδεται ἐπὶ τοῦ δοθέντος κύκλου (Ο) καὶ ὅτι τὸ σημεῖον Μ εἶναι λύσις τοῦ προβλήματος. Ἐκ τῆς $AM = \lambda$ ἕπεται ὅτι τὸ σημεῖον Μ εἶναι σημεῖον τοῦ κύκλου Α(λ). Ἑπομένως τὸ Μ εἶναι κοινὸν σημεῖον τῶν κύκλων (Ο) καὶ Α (λ).

Ἡ σύνθεσις εἶναι ἁπλῆ. Ὑπάρχουν ἐν γένει, δύο λύσεις, αἱ ὁποῖαι εἶναι συμμετρικαί, ὡς πρὸς τὴν διάκεντρον ΟΑ τῶν ἀνωτέρω κύκλων (261).

(1) Εὐθ. τμῆμα μιᾶς δοθείσης κλάσεως ἰσότητος λ τοῦ συνόλου τῶν εὐθ. τμημάτων.

Ἂν $\lambda < 2r$ τὸ πρόβλημα δέχεται δύο λύσεις, διότι ἡ τομὴ τῶν κύκλων $O(r)$ καὶ A (λ) ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο διάφορα ἀλλήλων σημεῖα (263).

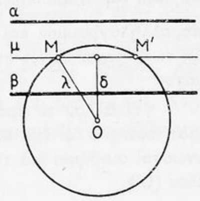
Ἂν $\lambda = 2r$, τὸ πρόβλημα δέχεται μίαν λύσιν : τὸ ἀντιδιαμετρικὸν τοῦ σημείου A εἰς τὸν κύκλον (O), διότι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ τομὴ τῶν κύκλων περιορίζεται εἰς ἕνα σημεῖον : τὸ σημεῖον ἐπαφῆς αὐτῶν. (Δύο σημεῖα συμπίπτοντα εἰς ἕν).

Ἐὰν $\lambda > 2r$, δὲν ὑπάρχει λύσις τοῦ προβλήματος (263).

Ὁμοίως ἐπιλύεται τὸ πρόβλημα εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ σημεῖον A δὲν εἶναι σημεῖον τοῦ (O), εἶναι δηλαδὴ ἐσωτερικὸν ἢ ἐξωτερικὸν σημεῖον αὐτοῦ.

305. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Νὰ κατασκευασθῇ σημεῖον ἀπέχον ἴσον ἀπὸ δύο δοθεισῶν παραλλήλων εὐθειῶν α καὶ β καὶ δοθεῖσαν ἀπόστασιν λ ἀπὸ δοθέντος σημείου Ο.

Λύσις. Ἔστω ὅτι τὸ σημεῖον M εἶναι λύσις τοῦ προβλήματος. Ἐπειδὴ ἱκανοποιεῖ τὴν πρώτην ἐκ τῶν δοθεισῶν συνθηκῶν, εἶναι σημεῖον τῆς μεσοπαραλλήλου μ (160) τῶν α καὶ β. Ἐπειδὴ ἱκανοποιεῖ τὴν δευτέραν, $OM = \lambda$, εἶναι σημεῖον τοῦ κύκλου O (λ). Ἡ σύνθεσις εἶναι ἁπλῆ. Τὸ σημεῖον M κατασκευάζεται ὡς κοινὸν σημεῖον τῆς εὐθείας μ καὶ τοῦ κύκλου O (λ).



Σχ. 305

Τὸ πρόβλημα δέχεται τόσας λύσεις, ὅσα εἶναι τὰ σημεῖα τῆς τομῆς τοῦ κύκλου $O(\lambda)$ καὶ τῆς εὐθείας μ. Οὕτω, ἂν εἶναι δ ἡ ἀπόστασ ς τοῦ O ἀπὸ τῆς μεσοπαραλλήλου μ τῶν α καὶ β, θὰ ἔχωμεν :

1. Ἂν $\delta > \lambda$, ἡ τομὴ τῆς εὐθείας μ καὶ τοῦ κύκλου $O(\lambda)$ ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο διάφορα ἀλλήλων σημεῖα M καὶ M'. Ὑπάρχουν δηλαδὴ δύο λύσεις τοῦ προβλήματος.

2. Ἂν $\delta = \lambda$, ἡ μ εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου $O(\lambda)$, ἤτο ἡ τομὴ ἀποτελεῖτα ἀπὸ ἕνα σημεῖον M : τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τῆς μ καὶ τοῦ κύκλου $O(\lambda)$ Ὑπάρχει μία λύσις.

3. Ἂν $\delta > \lambda$, ἡ εὐθεῖα μ κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου $O(\lambda)$, ἤτοι δὲν ὑπάρχουν κοινὰ σημεῖα αὐτῶν. Δὲν ὑπάρχει, ἑπομένως, λύσις τοῦ προβλήματος.

Παρατηροῦμεν ὅτι :

Ὅπως ἐσημειώσαμεν ἤδη (178) αἱ πλεῖσται τῶν γεωμετρικῶν κατασκευῶν ἀνάγονται εἰς κατασκευὰς σημείων. Ἀπὸ τῆς ἀπόψεως αὐτῆς πρέπει νὰ δοθῇ μεγαλυτέρα σημασία εἰς τὴν κατηγορίαν αὐτὴν τῶν κατασκευῶν.

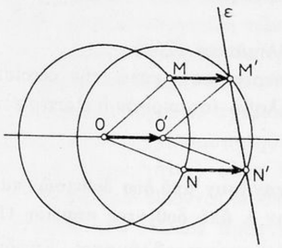
Κατωτέρω παραθέτομεν παραδείγματά τινα κατασκευῶν, ἀναγομένων εἰς κατασκευὰς σημείων.

306. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Δίδεται κύκλος (Ο) καὶ εὐθεῖα ε. Νὰ εὑρεθοῦν δύο σημεῖα Μ καὶ Μ′ τῶν (Ο) καὶ ε ἀντιστοίχως ὥστε νὰ ἱκανοποιῆται ἡ συνθήκη :

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{\lambda}\ (^1)$$

(1) $\vec{\lambda}$ δοθὲν ἐλεύθερον διάνυσμα τοῦ ἐπιπέδου (107).

Λύσις. Ὑποθέτοντες ὅτι τὰ Μ, Μ′ (Σχ. 306) ἀποτελοῦν λύσιν ἔχομεν: Τὸ Μ′ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ὁμόλογον τοῦ Μ κατὰ τὴν μεταφορὰν $T(\vec{\lambda})$.



Σχ. 306

Ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Μ εἶναι σημεῖον τοῦ κύκλου (Ο), ἕπεται (297) ὅτι τὸ Μ′ εἶναι σημεῖον τοῦ κύκλου (Ο′) τοῦ ὁμολόγου τοῦ (Ο) κατὰ τὴν ἀνωτέρω μεταφοράν. Οὕτω, τὸ σημεῖον Μ′ προσδιορίζεται ὡς κοινὸν σημεῖον τῆς εὐθείας ε μὲ τὸν κύκλον (Ο′). Ὑπάρχουν ἐν γένει, δύο σημεῖα κοινὰ τῆς (ε) καὶ τοῦ (Ο′). Ἡ σύνθεσις κατόπιν τῆς παρατηρήσεως ταύτης εἶναι ἁπλῆ:

Κατασκευάζεται ὁ κύκλος (Ο′), ὁ ὁποῖος εἶναι κύκλος ἴσος πρὸς τὸν (Ο), μὲ κέντρον τὸ ὁμόλογον Ο′ τοῦ Ο κατὰ τὴν μεταφορὰν $T(\vec{\lambda})$. Ἔστω Μ′ τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ κοινα σημεῖα τοῦ (Ο′) μὲ τὴν ε. Ἄγεται ἡ Ο′Μ′ καὶ ἡ διὰ τοῦ Ο παράλληλος ΟΜ (Μ ἐπὶ τοῦ (Ο) πρὸς τὴν Ο′Μ′. Τὸ εὐθ. τμῆμα ΜΜ′ εἶναι λύσις τοῦ προβλήματος.

Πράγματι, ἐπειδὴ αἱ ἀπέναντι πλευραὶ ΟΜ καὶ Ο′Μ′ τοῦ τετραπλεύρου ΟΟ′Μ′Μ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι (κεῖνται ἐπὶ εὐθειῶν παραλλήλων), τὸ τετράπλευρον τοῦτο εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ ἑπομένως $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OO'}$ Ἀλλὰ $\overrightarrow{OO'} = \vec{\lambda}$ ἑπομένως καὶ τὸ $\overrightarrow{MM'} = \vec{\lambda}$. Εἰς τὸ δεύτερον κοινὸν σημεῖον Ν′ τῶν (Ο′) καὶ ε ἀντιστοιχεῖ μία δευτέρα λύσις τοῦ προβλήματος.

Ἐξ ἄλλου τὸ πρόβλημα ἔχει δύο, μίαν ἢ οὐδεμίαν λύσιν καθ' ὅσον ἡ ε εἶναι τέμνουσα, ἐφαπτομένη ἢ δὲν ἔχει κοινὰ σημεῖον μὲ τὸν (Ο′) ἀντιστοίχως, ἤτοι καθ' ὅσον ὑφίστανται αἱ γνωσταὶ συνθῆκαι διὰ τὴν ὕπαρξιν τῆς τομῆς τῆς δοθείσης εὐθείας ε καὶ τοῦ γνωστοῦ κύκλου (Ο′).

Τέλος σημειοῦμεν ὅτι, ἂν θεωρηθῇ τὸ Μ ὡς ὁμόλογον τοῦ Μ′, ὅτε ἡ μεταφορὰ ὁρίζεται ἀπὸ τὸ ἀντίθετον τοῦ προηγουμένου διάνυσμα $-\vec{\lambda}$, τὸ σημεῖον Μ θὰ εὑρεθῇ ὡς κοινὸν σημεῖον τοῦ (Ο) μὲ τὴν ὁμόλογον ε′ τῆς ε κατὰ τὴν μεταφορὰν ταύτην $T(-\vec{\lambda})$ ἢ $T^{-1}(\vec{\lambda})$ Εὐνόητον ὅτι ἡ δευτέρα αὕτη θεώρησις δὲν μᾶς δίδει ἄλλας λύσεις, ἀλλὰ τὰς εὑρεθείσας κατὰ τὴν πρώτην (ἀφοῦ ἡ ὁμόλογος ε′ τῆς ε εἶναι ἡ Μ′Ν′).

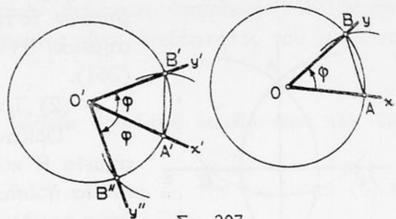
Ὁμοίως ἐπιλύεται τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν ἀντὶ τοῦ (Ο) καὶ τῆς ε, δοθοῦν δύο κύκλοι (Ο) καὶ (Ω).

ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ ΕΥΘΕΙΩΝ

307. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. **Νὰ κατασκευασθῇ ἡμιευθεῖα Ο′Υ′ σχηματίζουσα μὲ δοθεῖσαν ἡμιευθεῖαν Ο′Χ′ γωνίαν ἴσην πρὸς δοθεῖσαν γωνίαν φ.**

Λύσις. Ἔστω (ΟΧ, ΟΥ) ἡ δοθεῖσα γωνία φ. Ἐκ τῶν γνωστῶν (235) σχέσεων μεταξὺ τῶν ἐπικέντρων γωνιῶν καὶ τῶν ἀντιστοίχων τόξων εἰς δύο ἴσους κύκλους ἕπεται ἡ ἑξῆς σύνθεσις (Σχ. 307).

Κατασκευάζομεν δύο ἴσους κύκλους μὲ κέντρα τὰ Ο καὶ Ο′ καὶ ἀκτῖνα τυχοῦσαν. Ἔστωσαν Α καὶ Β τὰ κοινὰ σημεῖα τοῦ πρώτου κύκλου μὲ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας (ΟΧ, ΟΥ) ἀντιστοίχως καὶ Α τὸ ἐπὶ τῆς Ο'Χ' σημεῖον τοῦ δευτέρου κύκλου. Ὁρίζομεν (304) τὰ σημεῖα Β' καὶ Β'' ὥστε Α'Β' = Α'Β'' = ΑΒ (Σχ. 307). Αἱ ἡμιευθεῖαι Ο'Β' καὶ Ο'Β'' εἶναι λύσεις τοῦ προβλήματος. Πράγματι, αἱ χορδαὶ ΑΒ καὶ Α'Β', ὡς καὶ αἱ ΑΒ καὶ Α'Β'' εἶναι ἐκ κατασκευῆς ἴσαι. Ἑπομένως θὰ εἶναι καὶ (Ο'Χ', Ο'Υ') = = (ΟΥ, ΟΥ) καὶ (Ο'Χ', Ο'Υ'') = = –(ΟΧ, ΟΥ).



Σχ. 307

Σημειοῦμεν ὅτι : Ἐκ τῶν εὑρεθεισῶν δύο γωνιῶν ἡ λύσις εἶναι ἡ ὁμοίως πρὸς τὴν δοθεῖσαν γωνίαν φ προσανατολισμένη.

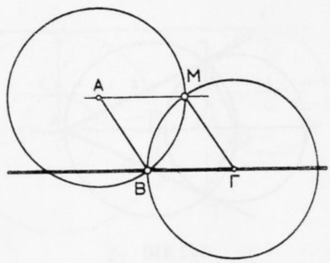
308. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ διὰ δοθέντος σημείου Α παράλληλος δοθεῖσαν εὐθεῖαν α.

Λύσις. Ἐκ τοῦ σχετικοῦ (93) θεωρήματος ὑπάρξεως ἕπεται ἡ ἑξῆς σύνθεσις : Ὁρίζεται τυχὸν σημεῖον Β τῆς α. Τοῦτο χωρίζει τὴν α εἰς τὰς ἡμιευθείας ΒΧ καὶ ΒΧ'. Κατασκευάζεται (307), πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας ΑΒ πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἡ γωνία (ΒΑ, ΒΧ), ἡ ἡμιευθεῖα ΑΥ ὥστε (ΑΒ, ΑΥ) = (ΒΑ, ΒΧ). Ἡ εὐθεῖα ἡ περιέχουσα τὴν ΑΥ εἶναι ἡ ζητουμένη παράλληλος (93).

Σημειοῦμεν ὅτι :

Ἐκ τῆς προτάσεως (207) τῆς ἀναφερομένης εἰς τὸ παραλληλόγραμμον, ἔχομεν τὴν ἑξῆς σύνθεσιν :

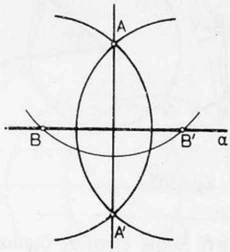
Λαμβάνονται ἐπὶ τῆς α δύο τυχόντα σημεῖα Β καὶ Γ (Σχ. 308) καὶ κατασκευάζονται οἱ κύκλοι Α(ΒΓ) καὶ Γ(ΑΒ). Διὰ λόγους πρακτικοὺς λαμβάνεται ΒΓ=ΑΒ. Ἔστω Μ τὸ δεύτερον, ἐκτὸς τοῦ Β, κοινὸν σημεῖον τῶν κύκλων τούτων. Ἡ εὐθεῖαν ΑΜ εἶναι ἡ ζητουμένη παράλληλος. Πράγματι, τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΜ εἶναι παραλληλόγραμμον.



Σχ. 308

309. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα διερχομένη διὰ δοθόντος σημείου Α καὶ κάθετος ἐπὶ δοθεῖσαν εὐθεῖαν α.

Λύσις. Θεωροῦμεν τὰς περιπτώσεις : (1) Τὸ Α δὲν εἶναι σημεῖον τῆς α. Ἐκ τῶν προτάσεων τῶν ἀναφερομένων εἰς τὴν τομὴν δύο κύκλων ἕπεται ἡ ἑξῆς σύνθεσις : Ὁρίζεται ἐπὶ τῆς α τυχὸν σημεῖον Β καὶ κατασκευάζεται ὁ κύκλος κέντρου Α καὶ ἀκτῖνος ΑΒ. Ἔστω Β′ τὸ δεύτερον, ἐκτὸς τοῦ Β, σημεῖον τοῦ κύκλου τούτου μὲ τὴν α. Κατασκευάζονται οἱ κύκλοι Β(ΒΑ) καὶ Β′(Β′Α)(1) τῶν ὁποίων ἔστω Α′ τὸ δεύτερον, ἐκτὸς τοῦ Α, κοινὸν σημεῖον. Ἡ εὐθεῖα ΑΑ′ εἶναι ἡ ζητουμένη κάθετος (261).



Σχ. 309

(2) Τὸ σημεῖον Α κεῖται ἐπὶ τῆς α.

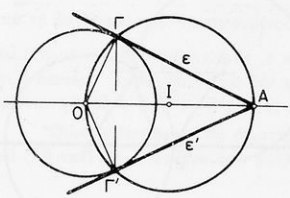
Ὁρίζονται ἑκατέρωθεν αὐτοῦ δύο τυχόντα σημεῖα Β καὶ Β′ συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ Α. Ἡ εὐθεῖα ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπὸ τὰ κοινὰ σημεῖα δύο ἴσων κύκλων Β (ρ) καὶ Β′ (ρ), ἔνθα ρ τυχὸν εὐθ. τμῆμα μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεως τοῦ ΑΒ, εἶναι ἡ ζητουμένη. Πράγματι, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ε καὶ διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον τοῦ εὐθ. τμήματος ΒΒ′, ἤτοι διὰ τοῦ Α.

Σημειοῦμεν ὅτι :

1. Εὐκόλως βάσει τῶν ἀνωτέρω ἐπιλύεται τὸ πρόβλημα τῆς κατασκευῆς διὰ τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου, τῆς μεσοκαθέτου δοθέντος εὐθ. τμήματος.

310. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα διερχομένη διὰ δοθέντος σημείου Α καὶ ἐφαπτομένη δοθέντος κύκλου (Ο).

Λύσις. Ἂν τὸ σημεῖον Α εἶναι ἐσωτερικὸν τοῦ (Ο) τὸ πρόβμηνα δὲν ἔχει λύσιν. Ἂν τὸ Α εἶναι σημεῖον τοῦ (Ο), ἡ διὰ τοῦ Α κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΑ εἶναι ἡ μόνη λύσις τοῦ προβλήματος.



Σχ. 310

Ἂν τὸ σημεῖον Α εἶναι ἐξωτερικὸν τοῦ (Ο), ἡ σύνθεσις προκύπτει ἐκ τῶν ἑξῆς παρατηρήσεων (Σχ. 310): Ἂν ἡ εὐθεῖα ε εἶναι λύσις τοῦ προβλήματος καὶ εἶναι Γ τὸ σημεῖον ἐπαφῆς της μὲ τὸν κύκλον (Ο), ἡ εὐθεῖα ΟΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ε, ἤτοι εἶναι ὀρθὴ ἡ γωνία (ΓΟ,ΓΑ). Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι τὸ σημεῖον Γ εἶναι σημεῖον τοῦ κύκλου διαμέτρου ΟΑ ὁ ὁποῖος κατασκευάζεται ἐκ τῶν δοθέντων στοιχείων.

Ἡ σύνθεσις κατόπιν τῶν ἀνωτέρω εἶναι ἁπλῆ: Τὰ σημεῖα Γ καὶ Γ′ εὑρίσκονται ὡς κοινὰ σημεῖα τοῦ κύκλου (Ο) καὶ τοῦ κύκλου διαμέτρου ΟΑ (263.3). Αἱ εὐθεῖαι ΑΓ καὶ ΑΓ′ εἶναι αἱ δύο λύσεις τοῦ προβλήματος. Τὸ σχῆμα εἶναι συμμετρικὸν ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΟΑ.

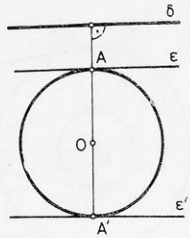
Σημειοῦμεν ὅτι, ἡ προηγουμένη κατασκευὴ ἐπιτρέπει τὴν εὕρεσιν τῆς

(1) Ἡ δύο τυχόντες ἴσοι κύκλοι, ἔχοντες κέντρα τὰ Β καὶ Β′ καὶ ἀκτῖνα μεγαλυτέραν τοῦ ἡμίσεος τοῦ εὐθ. τμήματος ΒΒ′.

τομῆς δύο συνόλων (οἰκογενειῶν) εὐθειῶν. Τοῦ συνόλου τῶν διὰ τοῦ σημείου Α εὐθειῶν (ἐπίπεδος δέσμη εὐθειῶν κέντρου Α) καὶ τοῦ συνόλου τῶν ἐφαπτομένων τοῦ κύκλου (Ο). Ἡ εἰς τὸ σχετικὸν θεώρημα ὑπάρξεως (248) ἀνταποκρινομένη ἐπίλυσις τοῦ αὐτοῦ προβλήματος εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ ἀξιώματος τῆς παραλλήλου (95).

311. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα δοθείσης διευθύνσεως (δ), ἐφαπτομένη δοθέντος κύκλου (Ο).

Λύσις. Ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ εὐθεῖα ε ἀνήκει εἰς τὴν διεύθυνσιν (δ) καὶ εἶναι Α τὸ σημεῖον ἐπαφῆς της μὲ τὸν (Ο), ἡ εὐθεῖα ΟΑ, ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν ε, εἶναι ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν (δ). Ἡ σύνθεσις κατόπιν τούτου εἶναι ἁπλῆ: Κατασκευάζεται ἡ διὰ τοῦ κέντρου Ο τοῦ κύκλου (Ο) κάθετος ἐπὶ τὴν (δ) καὶ εὑρίσκονται τὰ κοινὰ σημεῖα Α καὶ Α′ αὐτῆς μὲ τὸν (Ο). Αἱ ἐφαπτόμεναι τοῦ (Ο) εἰς τὰ Α καὶ Α′ εἶναι αἱ λύσεις τοῦ προβλήματος. Ἡ κατασκευὴ αὕτη ἐπιτρέπει τὴν εὕρεσιν τῆς τομῆς τῶν ἑξῆς δύο συνόλων εὐθειῶν: τοῦ συνόλου τῶν εὐθειῶν τῆς δοθείσης διεθύνσεως καὶ τοῦ συνόλου τῶν ἐφαπτομένων τοῦ κύκλου (Ο).

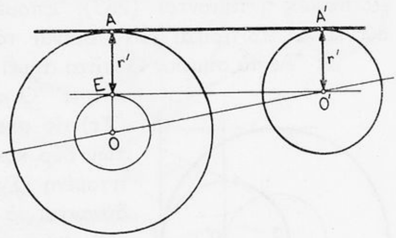


Σχ. 311

312. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Νὰ κατασκευασθῇ κοινὴ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη δύο δοθέντων κύκλων (Ο) καὶ (Ο′).[1]

Λύσις. Ἔστωσαν r καὶ r′ αἱ ἀκτῖνες τῶν κύκλων (Ο) καὶ (Ο′) ἀντιστοίχως. Ὑποθέτομεν $r > r'$. Ἔστω ΑΑ′ μία κοινὴ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη τῶν (Ο) καὶ (Ο′). Ἂν θεωρήσωμεν τὴν διὰ τοῦ Ο′ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΑ′, τὸ κοινὸν σημεῖον Ε αὐτῆς μὲ τὴν ΟΑ κεῖται μεταξὺ τῶν Ο καὶ Α, διότι $AE = r'$ καὶ $AO > r'$

Ἑπομένως: $OE = r - r'$ Ἐξ ἄλλου, ἐπειδὴ εἶναι ὀρθὴ ἡ γωνία (ΕΟ, ΕΟ′), ὡς ἴση πρὸς τὴν (ΑΟ, ΑΑ′),



Σχ. 312.1

ἡ εὐθεῖα Ο′Ε εἶναι ἐφαρτομένη τοῦ κύκλου κέντρου Ο καὶ ἀκτῖνος r – r′ (Σχ. 312.1). Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω παρατηρήσεων ἕπεται ἡ ἑξῆς σύνθεσις (Σχ. 311.2):

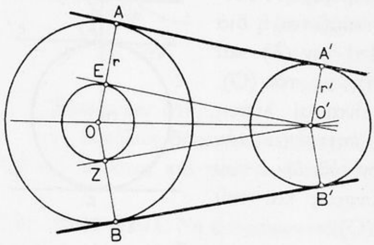
Κατασκευάζεται ὁ κύκλος Ο(r - r′) καὶ αἱ διὰ τοῦ Ο′ ἐφαπτόμεναι Ο′Ε, Ο′Ζ (Σχ. 312, 2) τοῦ κύκλου τούτου (Ε καὶ Ζ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς). Εὑρίσκονται

(1) Μία κοινὴ ἐφαπτομένη δύο κύκλων (Ο) καὶ (Ο′) θὰ ὀνομάζεται **ἐξωτερικὴ** ἢ **ἐσωτερικὴ** καθ' ὅσον τὰ κέντρα Ο καὶ Ο′ τῶν κύκλων κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος ἢ ἑκατέρωθεν αὐτῆς. Ἡ κατασκευὴ τῶν κοινῶν ἐφαπτομένων δύο κύκλων ταυτίζεται, ἀπὸ ἀπόψεως θεωρητικῆς, μὲ τὴν ἀπόδειξιν τῆς ὑπάρξεως τῆς τομῆς τοῦ συνόλου τῶν ἐφαπτομένων τοῦ (Ο) καὶ τοῦ συνόλου τῶν ἐφαπτομένων τοῦ (Ο′).

τὰ ἐπὶ τῶν ΟΕ καὶ ΟΖ σημεῖα Α καὶ Β τοῦ (Ο) καὶ κατασκευάζονται αἱ διὰ τοῦ Ο′ παράλληλοι Ο′Α′, καὶ Ο′Β′ πρὸς τὰς ἀκτῖνας ΟΑ καὶ ΟΒ ἀντιστοίχως. Αἱ εὐθεῖαι ΑΑ′ καὶ ΒΒ′ εἶναι λύσεις τοῦ προβλήματος.

Πράγματι, ἔχομεν ὅτι : $ΕΑ = ΟΑ - ΟΕ = r - (r - r') = r'$. Ἀλλὰ εἶναι καὶ $Ο'Α' = r'$. Ἑπομένως τὸ τετράπλευρον ΕΑΑ′Ο′ εἶναι παραλληλόγραμμον. Ἐπειδὴ αἱ γωνία (ΕΟ′, ΕΑ) τοῦ παραλληλογράμμου τούτου καὶ ὀρθή, θὰ εἶναι ὀρθὴ καὶ ἡ (ΑΕ, ΑΑ′) καὶ ἡ (ΑΑ′, Α′Ο′), ἑπομένως ἡ ΑΑ′ εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ (Ο), ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα ΟΑ αὐτοῦ κατὰ τὸ ἄκρον Α αὐτῆς, καὶ τοῦ (Ο′) διὰ τὸν αὐτὸν λόγον.

Σημειοῦμεν ὅτι : ἡ κοινὴ ἐφαπτομένη ΑΑ′ εἶναι ἡ ὁμόλογος τῆς ἐφαπτομένης Ο′Ε τοῦ κύκλου Ο $(r-r')$ κατὰ τὴν μεταφορὰν $\overrightarrow{ΕΑ} = \overrightarrow{r'}$ τῆς ὁποίας ἡ διεύθυνσις εἶναι ἡ τῆς εὐθείας ΟΕ ἡ φορὰ ἡ τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{ΟΕ}$.



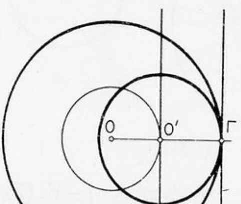
Σχ. 312.2

Δι᾽ ὅμοιον λόγον ἡ ΒΒ′ εἶναι κοινὴ ἐφαπτομένη τῶν (Ο) καὶ (Ο′). Ἐκ τῆς ἀναλύσεως προκύπτει ὅτι δὲν ὑπάρχουν ἄλλαι κοιναὶ ἐξωτερικαὶ ἐφαπτόμεναι τῶν δοθέντων κύκλων.

Ὡς πρὸς τὴν ὕπαρξιν λύσεως παρατηροῦμεν :

1. Ἂν τὸ σημεῖον Ο′ εἶναι ἐξωτερικὸν τοῦ κύκλου $Ο(r - r')$, ἤτοι : Ἂν $ΟΟ' > r - r'$, οἱ κύκλοι (Ο) καὶ (Ο′) κεῖνται ἐκτὸς ἀλλήλων, ἢ ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς ἢ τέμνονται (263). Ἑπομένως εἰς τὴν περπτωσιν αὐτὴν ὑπάρχουν δύο κοιναὶ ἐξωτερικαὶ ἐφαπτόμεναι τῶν (Ο) καὶ (Ο′).

2. Ἂν τὸ σημεῖον Ο′ εἶναι σημεῖον τοῦ κύκλου $Ο(r - r')$, θὰ εἶναι : $ΟΟ' = r - r'$ Ὁ κύκλος Ο′ (r') ἐφάπτεται ἐσωτερικῶς τοῦ $Ο(r)$ εἰς σημεῖον, ἔστω Γ. Ἡ εἰς τὸ Γ ἐφαπτομένη τῶν δύο κύκλων εἶναι ἡ κοινὴ αὐτῶν ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη (Σχ. 312.3). Οἱ δύο κύκλοι (Ο) καὶ (Ο′) δὲν δύνανται νὰ ἔχουν ἄλλας κοινὰς ἐφαπτομένας, διότι κάθε ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου $Ο'(r')$ εἶναι τέμνουσα τοῦ $Ο(r)$.



Σχ. 312.3

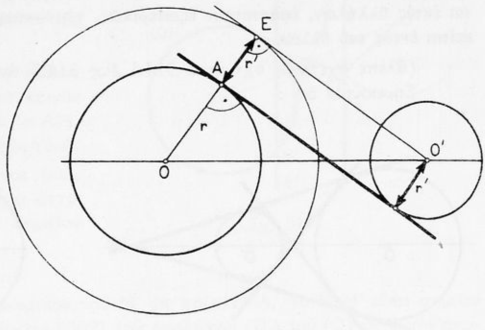
3. Ἂν τὸ σημεῖον Ο′. εἶναι ἐσωτερικὸν τοῦ κύκλου $Ο(r-r')$ θὰ εἶναι : $ΟΟ' < r - r'$. Ὁ κύκλος $Ο'(r')$ κεῖται ἐντὸς τοῦ $Ο(r)$. Οἱ δύο κύκλοι δὲν ἔχουν κοινὴν ἐφαπτομένην, διότι κάθε ἐφαπτομένη τοῦ $Ο'(r')$ εἶναι τέμνουσα τοῦ $Ο(r)$. Ἀναλόγως ἐπιλύεται καὶ τὸ πρόβλημα τῆς κατασκευῆς κοινῆς ἐσωτερικῆς ἐφαπτομένης δύο κύκλων $Ο(r)$ καὶ $Ο'(r')$.

Σημειοῦμεν ὅτι :

Ἂν οἱ διδόμενοι κύκλοι εἶναι ἴσοι τότε κάθε κοινὴ αὐτῶν ἐφαπτομένη εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν διάκεντρον ΟΟ′ αὐτῶν ἢ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τοῦ εὐθ. τμήματος ΟΟ′. Ἑπομένως κατασκευάζεται κατὰ τὸ πρόβλημα (311 ἢ 310). Ὑπάρχουν τό, πολὺ τέσσαρες κοιναὶ ἐφαπτόμεναι: δύο ἐξωτερικαὶ καὶ δύο ἐσωτερικαί.

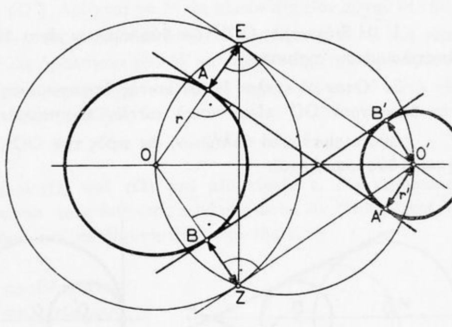
313. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Νὰ κατασκευασθῇ κοινὴ ἐσωτερικὴ ἐφαπτομένη δύο δοθέντων κύκλων (Ο) καὶ (Ο′)

Λύσις. Ἂν ἡ ΑΑ′ εἶναι λύσις τοῦ προβλήματος, ἥτις μία κοινὴ ἐσωτερικὴ ἐφαπτομένη τῶν (Ο) καὶ (Ο′), ἡ διὰ τοῦ Ο παράλληλος πρὸς τὴν ΑΑ′ εἶναι γνωστὴ εὐθεῖα. Πράγματι, ἄγεται ἀπὸ τοῦ γνωστοῦ σημείου Ο′ καὶ εἶναι ἀφαπτομένη τοῦ κύκλου Ο(r + r′). Ἂν εἶναι Ε τὸ κοινὸν σημεῖον τῆς ἀνωτέρω παραλλήλου μὲ τὴν ΟΑ, ἐκ τοῦ ὀρθογ. παραλληλογράμμου ΑΑ′Ο′Ε ἔχομεν ὅτι ΑΕ = Α′Ο′ = r′. Ἑπομένως ΟΕ= ΟΑ + ΑΕ = r + r′. Ἐπειδὴ ἡ ΟΑ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΑ′ θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν Ο′Ε καὶ ἑπομένως ἡ Ο′Ε εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου Ο(r + r′).



Σχ. 313.1

Ἡ σύνθεσις εἶναι ὁμοία μὲ τὴν ἀναφερομένην εἰς τὴν κοινὴν ἐξωτερικὴν ἐφαπτομένην : Κατασκευάζονται αἱ διὰ τοῦ Ο′ ἐφαπτόμεναι.(Σχ. 313.2) Ο′Ε καὶ Ο′Ζ τοῦ κύκλου Ο(r + r′) 313.2) (Ε καὶ Ζ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς). Ἂν εἶναι Α τὸ κοινὸν σημεῖον τῆς ΟΕ μὲ τὸν κύκλον Ο(r) καὶ Α′ τὸ ὁμόλογον τοῦ Ο′ κατὰ τὴν μεταφορὰν $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{r'}$, ἡ ΑΑ′ εἶναι λύσις τοῦ προβλήματος. Ἡ δευτέρα λύσις ΒΒ′ εὑρίσκεται ὁμοίως ἐκ τῆς ΟΖ.



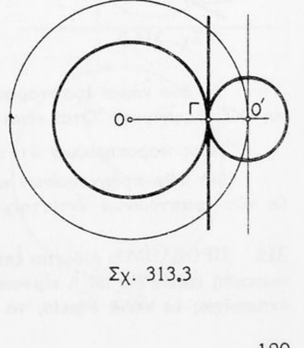
Σχ. 313.2

Καθ' ὅσον ἀφορᾷ τὴν ὕπαρξιν λύσεως παρατηροῦμεν :

1. Ἂν τὸ σημεῖον Ο′ εἶναι ἐξωτερικὸν τοῦ κύκλου Ο(r + r′), θὰ ἔχωμεν : ΟΟ′ > r+r′. Οἱ κύκλοι Ο(r) καὶ Ο′(r′) κεῖνται ἐκτὸς ἀλλήλων καὶ δέχονται δύο κοινὰς ἐσωτερικὰς ἐφαπτομένας (Σχ. 313.2).

2. Ἂν τὸ Ο′ εἶναι σημεῖον τοῦ κύκλου Ο(r + r′) θὰ ἔχωμεν : ΟΟ′ = r + r′. Οἱ κύκλοι Ο(r) καὶ Ο′(r′) ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐξωτερικῶς κατὰ ἕνα σημεῖον ἔστω Γ. (Σχ. 313. 3). Ἡ ἐφαπτομένη εἰς τὸ Γ εἶναι ἡ μόνη κοινὴ ἐσωτερικὴ ἐφαπτομένη.

3. Ἂν τὸ Ο′ εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ κύκλου Ο(r + r′), δὲν ὑπάρχει κοινὴ ἐσωτερικὴ ἐφαπτομένη τῶν κύκλων Ο(r) καὶ Ο′(r′). Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἔχομεν :



Σχ. 313.3

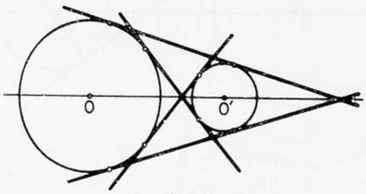
$OO' < r + r'$. Οἱ κύκλοι $O(r)$ καὶ $O'(r')$ τέμνονται ἢ ὁ ἐκ τούτων ἔχων τὴν μικροτέραν ἀκτῖνα ἐφάπτεται ἐσωτερικῶς τοῦ ἄλλου ἢ κεῖται ἐντὸς αὐτοῦ.

Συνοψίζοντες ἔχομεν :

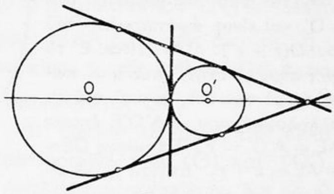
314. ΘΕΩΡΗΜΑ. Δύο κύκλοι $O(r)$ καὶ $O'(r')$ τῶν ὁποίων τὰ κέντρα εἶναι διάφορα ἀλλήλων, ἔχουν τέσσαρας, τρεῖς, δύο, μίαν ἢ οὐδεμίαν κοινὴν ἐφαπτομένην καθ' ὅσον ἀντιστοίχως : κεῖνται ἐκτὸς ἀλλήλων, ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς, τέμνονται, ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς, ὁ εἷς τούτων κεῖται ἐντὸς τοῦ ἄλλου.

(Βλέπε σχετικῶς σχήματα 314.1 ἕως 314.5 ἀντιστοίχως).

Σημειοῦμεν ὅτι :



Σχ. 314.1

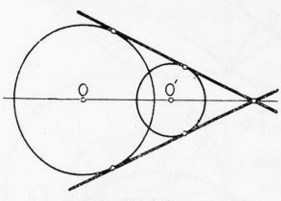


Σχ. 314.2

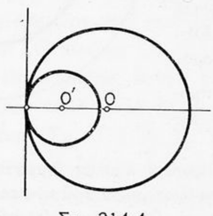
1. Ἡ διάκεντρος OO' τῶν δύο κύκλων εἶναι ἄξων συμμετρικὸς αὐτῶν (τοῦ ὑπὸ τούτων ἀποτελουμένου σχήματος).

2. Ὅταν οἱ κύκλοι ἔχουν κοινὰς ἐφαπτομένας ἡ συμμετρικὴ ἑκάστης τούτων ὡς πρὸς τὴν διάκεντρον OO' εἶναι κοινὴ αὐτῶν ἐφαπτομένη.

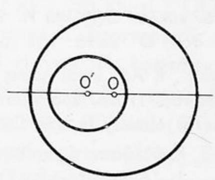
Δύο συμμετρικαὶ ἀλλήλων, ὡς πρὸς τὴν OO', ἐφαπτόμεναι εἶναι καὶ αἱ δύο ἐξωτερικαὶ ἢ καὶ αἱ δύο ἐσωτερικαί.



Σχ. 314.3



Σχ. 314.4



Σχ. 314.5

Ἂν δύο κοιναὶ ἐφαπτόμεναι τέμνωνται, τὸ κοινὸν αὐτῶν σημεῖον κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος OO' συμμετρίας. Ὅταν εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὸν ἄξονα συμμετρίας συμπίπτουν.

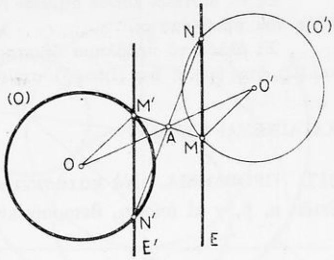
Τέλος παρατηροῦμεν ὅτι :

Διὰ τῶν προηγουμένων κατασκευῶν εὑρίσκομεν τὴν τομὴν τῶν δύο συνόλων εὐθειῶν τῶν ἐφαπτομένων ἀντιστοίχως τῶν δύο δοθέντων κύκλων.

315. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Δίδονται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου : εὐθεῖα ε, κύκλος (Ο) καὶ σημεῖον Α. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα διὰ τοῦ Α τέμνουσα τὴν εὐθεῖαν ε καὶ τὸν κύκλον (Ο), ὥστε ἂν εἶναι Μ καὶ Μ' ἀντιστοίχως τὰ κοινὰ σημεῖα, νὰ εἶναι ΑΜ = ΑΜ'.

Λύσις. Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ εὐθεῖα ΜΜ′ εἶναι λύσις τοῦ προβλήματος. Ἐκ τῆς ΑΜ′ = ΑΜ ἕπεται ὅτι : τὸ σημεῖον Μ′ εἶναι ὁμόλογον τοῦ Μ κατὰ τὴν συμμετρίαν ἡ ὁποία ἔχει κέντρον τὸ σημεῖον Α.

Ἀλλὰ τὸ Μ εἶναι σημεῖον τῆς εὐθείας ε. Ἐπομένως τὸ Μ′ εἶναι σημεῖον τῆς ὁμολόγου ε′ τῆς ε κατὰ τὴν συμμετρίαν αὐτὴν (302). Οὕτω, τὸ Μ′ εὑρίσκεται ὡς κοινὸν σημεῖον τῆς ε′ μὲ τὸν κύκλον (Ο).



Σχ. 315

Εὑρεθέντος τοῦ Μ′ ἡ ζητουμένη εὐθεῖα εἶναι ἡ ΑΜ′. Πράγματι ἂν εἶναι Μ τὸ κοινὸν σημεῖον τῆς ΑΜ′ μὲ τὴν ε, θὰ εἶναι ΑΜ′ = ΑΜ, διότι ἡ ε εἶναι ἡ συμμετρικὴ τῆς ε′ ὡς πρὸς τὸ Α.

Τὸ πρόβλημα, ἐπομένως, δέχεται δύο, μίαν ἢ οὐδεμίαν λύσιν καθ' ὅσον ἡ ε′ ἔχει ἀντιστοίχως, δύο, ἕνα ἢ οὐδὲν κοινὸν σημεῖον μὲ τὸν (Ο).

Σημειοῦμεν ὅτι :

Ἐπειδὴ καὶ τὸ Μ εἶναι τὸ συμμετρικὸν τοῦ Μ′ ὡς πρὸς τὸ Α, τὸ δὲ Μ′ εἶναι σημεῖον τοῦ κύκλου (Ο), τὸ σημεῖον Μ εἶναι σημεῖον (302) τοῦ ὁμολόγου (Ο′) τοῦ (Ο) κατὰ τὴν ἀνωτέρω συμμετρίαν.

Οὕτω, ἂν κατασκευασθῇ ὁ κύκλος (Ο′), ὁρίζεται τὸ Μ ὡς κοινὸν σημεῖον αὐτοῦ μὲ τὴν ε.

Εὐνόητον εἶναι ὅτι, ἡ δευτέρα αὕτη θεώρησις δὲν δίδει ἄλλας λύσεις, ἀλλὰ τὰς εὑρεθείσας κατὰ τὴν πρώτην θεώρησιν τοῦ Μ ὡς ὁμολόγου τοῦ Μ′ κατὰ τὴν συμμετρίαν ὡς πρὸς Α.

Σημειοῦμεν ὅτι, ὁμοίως ἐπιλύεται τὸ πρόβλημα τοῦτο εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν ἀντὶ τῆς εὐθείας ε δίδεται ἕνας κύκλος (Ω).

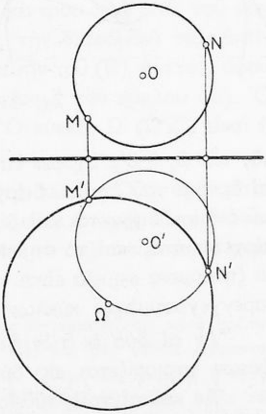
316. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Δίδονται δύο κύκλοι (Ο) καὶ (Ω) καὶ μία εὐθεῖα ε. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα δ κάθετος ἐπὶ τὴν ε καὶ τέμνουσα τοὺς δοθέντας κύκλους ὥστε, ἂν εἶναι Μ καὶ Μ′ τὰ κοινὰ σημεῖα ἀντιστοίχως, τὸ εὐθ. τμῆμα καὶ νὰ διχοτομῆται ὑπὸ τῆς ε.

Λύσις. Ἔστω δ μία λύσις τοῦ προβλήματος καὶ Μ καὶ Μ′ κοινὰ σημεῖα τῆς δ μὲ τοὺς κύκλους (Ο) καὶ (Ω) ἀντιστοίχως. Παρατηροῦμεν ὅτι :

Τὸ σημεῖον Μ′ (Σχ. 316) εἶναι τὸ συμμετικὸν τοῦ Μ ὡς πρὸς τὴν ε. Ἐπειδὴ τὸ Μ εἶναι σημεῖον τοῦ κύκλου (Ο) τὸ Μ′ εἶναι (302) σημεῖον τοῦ συμμετρικοῦ (Ο′) τοῦ κύκλου (Ο) ὡς πρὸς τὴν ε. Ἐπομένως τὸ Μ′ εἶναι κοινὸν σημεῖον τῶν κύκλων (Ω) καὶ (Ο′).

Ἡ σύνθεσις κατόπιν τῶν ἀνωτέρω εἶναι ἁπλῆ:

Κατασκευάζεται ὁ κύκλος (Ο′) ὁ συμμετρικὸς τοῦ (Ο) ὡς πρὸς τὴν δ. Ἔστωσαν Μ′ καὶ Ν′ τὰ κοινὰ σημεῖα αὐτοῦ μὲ τὸν (Ω). Κατασκευάζεται ἡ διὰ τοῦ Μ′ κάθετος δ ἐπὶ τὴν ε καὶ εὑρίσκεται τὸ σημεῖον Μ ὡς τὸ κοινὸν σημεῖον τῆς δ μὲ τὸν (Ω), διὰ τὸ ὁποῖον τὸ τετράπλευρον ΟΜΜ′Ο′ καὶ ἰσοσκελὲς τραπέζιον. Εἶναι ΙΜ = ΙΜ′ (Ι τὸ κοινὸν σημεῖ-



Σχ. 316.1

ον τῆς δ μὲ τὴν ε), διότι ὁ κύκλος (Ο) εἶναι ὁ συμμετρικὸς τοῦ (Ο') ὡς πρὸς τὴν ε. (ἡ μεσοκάθετος τῆς βάσεως Ο'Ο τοῦ ἰσοσκελοῦς τραπεζίου ΟΜΜ'Ο' εἶναι μεσοκάθετος καὶ τῆς βάσεως ΜΜ' αὐτοῦ).

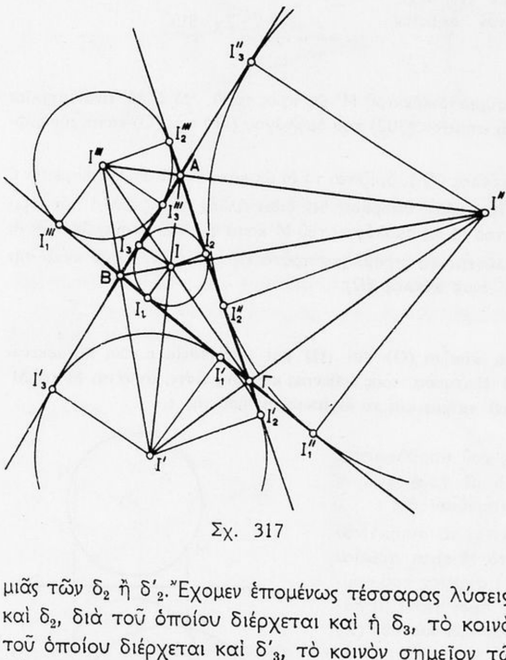
Εἰς τὸ δεύτερον κοινὸν σημεῖον Ν' τῶν κύκλων (Ο') καὶ (Ω) ἀντιστοιχεῖ μία δευτέρα λύσις τοῦ προβλήματος.

Ἐξ ἄλλου τὸ πρόβλημα δέχεται λύσιν μόνον ὅταν ὑπάρχῃ ἡ τομὴ τῶν κύκλων (Ο') καὶ (Ω), ἤτοι δύο ἢ ἕνα (ἐπαφὴ) σημεῖα.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ ΚΥΚΛΩΝ

317. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Νὰ κατασκευασθῇ κύκλος ἐφαπτόμενος τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν α, β, γ αἱ ὁποῖαι, θεωρούμεναι ἀνὰ δύο, τέμνονται.

Λύσις. Ἔστωσαν Α, Β, Γ τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν εὐθειῶν (Α τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν β καὶ γ κλπ). Τὸ κέντρον μιᾶς λύσεως τοῦ προβλήματος ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν διδομένων εὐθειῶν. Ὡς ἀπέχον ἴσον ἀπὸ τῶν β καὶ γ εἶναι σημεῖον τῆς μιᾶς ἢ τῆς ἄλλης ἐκ τῶν διχοτόμων $δ_1$ ἢ $δ'_1$ τῶν γωνιῶν τῶν β καὶ γ. Ἐπίσης ὡς ἀπέχον ἴσον ἀπὸ τῶν εὐθειῶν γ καὶ α εἶναι σημεῖον τῆς μιᾶς τῶν διχοτόμων $δ_2$ ἢ $δ_2'$ τῶν γωνιῶν τῶν εὐθειῶν γ καὶ α (Σχ. 317).



Σχ. 317

Ἑπομένως ἡ λύσις τοῦ προβλήματος εἶναι σημεῖον μιᾶς τῶν $δ_1$ ἢ $δ_2'$ καὶ μιᾶς τῶν $δ_2$ ἢ $δ'_2$. Ἔχομεν ἑπομένως τέσσαρας λύσεις : Τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν $δ_1$ καὶ $δ_2$, διὰ τοῦ ὁποίου διέρχεται καὶ ἡ $δ_3$, τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν $δ_1$ καὶ $δ'_2$ διὰ τοῦ ὁποίου διέρχεται καὶ $δ'_3$, τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν $δ_1'$ καὶ $δ_2$ διὰ τοῦ ὁποίου διέρχεται ἡ $δ_3'$ καὶ τὸ σημεῖον τῶν $δ'_1$ καὶ $δ'_2$ διὰ τοῦ ὁποίου διέρχεται καὶ $δ_3$. Τὰ ζητούμενα σημεῖα εἶναι τὰ κέντρα Ι καὶ Ι', Ι'', Ι''' τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

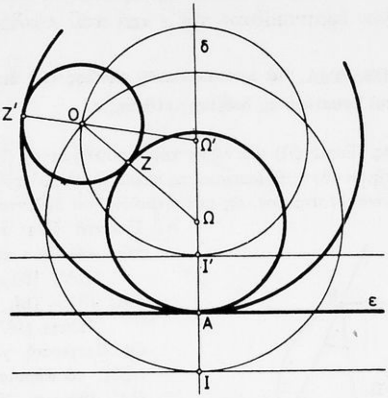
Ἂν αἱ δύο ἐκ τῶν διδομένων εὐθειῶν εἶναι παράλληλοι, ὁ ἀριθμὸς τῶν λύσεων περιορίζεται εἰς δύο.

Ἂν καὶ αἱ τρεῖς εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι δὲν ὑπάρχει λύσις τοῦ προβλήματος.

318. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Νὰ κατασκευασθῇ κύκλος (Ω) ἐφαπτόμενος δοθείσης εὐθείας ε εἰς δοθὲν σημεῖον Α αὐτῆς καὶ δοθέντος κύκλου Ο(r).

Λύσις. Θεωροῦμεν ἕνα κύκλον (Ω) περὶ ταῦ ὁποίου ὑποθέτομεν ὅτι εἶναι λύσις τοῦ προβλήματος [1].

Θεωροῦμεν (Σχ. 318) τὸν κύκλον ὁ ὁποῖος ἔχει κέντρον τὸ σημεῖον Ω (ὁμόκεντρον τοῦ (Ω), καὶ διέρχεται διὰ τοῦ Ο, καὶ ἐφαπτομένην αὐτοῦ παράλληλον πρὸς τὴν ε. Ἐπειδὴ ἡ ἀπόστασις τῆς ἐφαπτομένης αὐτῆς ἀπὸ τῆς ε εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀκτῖνα r τοῦ κύκλου (Ο), ἡ ἐφαπτομένη αὕτη εἶναι μία γνωστὴ εὐθεῖα. Τὸ σημεῖον ἐπαφῆς της Ι μὲ τὸν θεωρηθέντα κύκλον κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου δ ἐπὶ τὴν ε κατὰ τὸ σημεῖον Α αὐτῆς.



Σχ. 318

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ἡ ἑξῆς σύνθεσις :

Ἐπὶ τῆς καθέτου δ ἐπὶ τὴν ε κατὰ τὸ σημεῖον Α, ὁρίζονται τὰ σημεῖα Ι καὶ Ι' ἑκατέρωθεν τοῦ Α ὥστε : $AI = AI' = r$ καὶ εὑρίσκονται τὰ κοινὰ σημεῖα Ω καὶ Ω' τῆς δ μὲ τὰς μεσοκαθέτους τῶν εὐθ. τμημάτων ΟΙ καὶ ΟΙ'.

Οἱ κύκλοι οἱ ὁποῖοι ἔχουν ὡς κέντρα τὰ Ω καὶ Ω' ἀντιστοίχως καὶ δέρχονται διὰ τοῦ Α εἶναι λύσεις τοῦ προβλήματος.

Πράγματι, ἕκαστος τούτων ἐφάπτεται τῆς ε κατὰ τὸ Α, ἀφοῦ τὸ κέντρον του εἶναι ἐπὶ τῆς καθέτου δ ἐπὶ τὴν ε κατὰ τὸ Α καὶ διέρχεται διὰ τοῦ Α, ὡς ἐπίσης καὶ τοῦ κύκλου (Ο), ἀφοῦ ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου του ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου (Ο) καὶ ἴση πρὸς τὸ ἄθροισμα (ἢ τὴν διαφοράν) τῶν ἀκτίνων τῶν κύκλων τούτων. Πράγματι, διὰ τὴν κατασκευήν τοῦ (Ω) ἄγεται, ἀφοῦ ὁρισθῇ τὸ Ω, ἡ ΩΟ καὶ εὑρίσκεται τὸ ἐπ' αὐτῆς σημεῖον Ζ τοῦ κύκλου (Ο). Ὁ κύκλος Ω (ΩΖ) εἶναι ἡ μία λύσις τοῦ προβλήματος. Ὁ κύκλος Ω' (Ω'Ζ') εἶναι ἡ δευτέρα λύσις αὐτοῦ.

Τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις, ἐκτὸς ἂν ὁ δοθεὶς κύκλος Ο(r) ἐφάπτεται τῆς εὐθείας ε. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, ὅταν τὸ σημεῖον ἐπαφῆς εἶναι διάφορον τοῦ Α, τὸ πρόβλημα ἔχει μίαν μόνον λύσιν. Ὅταν τὸ σημεῖον ἐπαφῆς συμ-

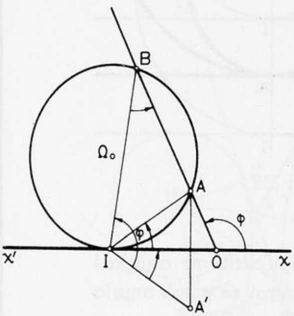
(1) Διὰ τὴν ἐμφάνισιν τῆς ἀντιστοίχου γραφικῆς εἰκόνος κατασκευάζεται κατὰ πρῶτον ἕνας κύκλος (Ω), ἀκολούθως ἕνας κύκλος (Ο) ἐφαπτόμενος τοῦ (Ω) καὶ μία εὐθεῖα ε ἐφαπτομένη τοῦ (Ω) καὶ ὀνομάζεται Α τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τῶν (Ω) καὶ ε. Οὕτω, ἂν θεωρηθῇ ἡ ε, τὸ ἐπ' αὐτῆς σημεῖον Α, καὶ ὁ κύκλος (Ο) ὡς δοθέντα στοιχεῖα, ὁ κύκλος (Ω) εἶναι λύσις τοῦ προβλήματος.

πίπτει μὲ τὸ Α, τὸ πρόβλημα ἔχει ὡς μόνην λύσιν τὸν κύκλον κέντρου Α καὶ ἀκτῖνος μηδενικῆς. Σημειοῦμεν ὅτι :

Ὅταν τὸ σημεῖον Α μεταβάλλεται θέσει ἐπὶ τῆς ε, εὑρίσκομεν μίαν ἀπειρίαν κύκλων ἐφαπτομένων τῆς ε καὶ τοῦ κύκλου (Ω).

319. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Νὰ κατασκευασθῇ κύκλος (Ω) διερχόμενος διὰ δύο δοθέντων σημείων Α καὶ Β καὶ ἐφαπτόμενος δοθείσης εὐθείας ε.

Λύσις. Ἔστω (Ω) μία λύσις τοῦ προβλήματος (Σχ. 319) καὶ Ι τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τῆς λύσεως αὐτῆς μὲ τὴν ε. Θεωροῦμεν τὸ συμμετρικὸν Α′ τοῦ Α ὡς πρὸς τὴν ε. Τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι ἕνα γνωστὸν σημεῖον, ὡς συμμετρικὸν τοῦ δοθέντος Α ὡς πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ε. Γνωστὴ εἶναι ἐπίσης καὶ ἡ γωνία (ΟΧ, ΟΑ) = φ τῶν εὐθειῶν ε καὶ ΑΒ (Σχ. 319). Ἔχομεν ὅμως :



Σχ, 319

(ΙΑ′, ΙΒ) = (ΙΑ′, ΙΧ) + (ΙΧ, ΙΒ) = (ΙΧ, ΙΑ) + (ΙΧ, ΙΒ) = (ΒΙ, ΒΟ) + (ΙΟ, ΙΒ)

Ὥστε (ΙΑ′, ΙΒ) = (ΟΧ,ΟΒ), διότι ἡ (ΟΧ, ΟΒ) ὡς ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου ΙΟΒ εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἄθροισμα (ΒΙ, ΒΟ) + (ΙΟ, ΙΒ). Ἑπομένως (ΙΑ′, ΙΒ)= φ. Ἐκ τῆς τελευταίας ἕπεται ὅτι τὸ σημεῖον Ι εἶναι σημεῖον γνωστοῦ κύκλου, διερχομένου διὰ τῶν Α′ καὶ Β, καὶ ἑπομένως ὁρίζεται ὡς κοινὸν σημεῖον τῆς ε μὲ τὸν ἀνωτέρω κύκλον.

Ὁρισθέντος τοῦ Ι, ὁ κύκλος (Ω) κατασκευάζεται, ὡς διερχόμενος ἀπὸ τὰ τρία σημεῖο Ι, Α, Β. Ὁ κύκλος οὗτος ἐφάπτεται τῆς ε διότι ἐκ τῆς σχέσεως : (ΙΑ′, ΙΒ) = φ, ἤτοι τῆς (ΙΑ,′ ΙΒ) = (ΟΧ, ΟΒ), ἡ ὁποία τώρα ἰσχύει, προκύπτει ὅτι: (ΙΧ, ΙΑ) =(ΒΙ, ΒΑ) καὶ ἐξ αὐτῆς ὅτι· ἡ ΙΧ, ἤτοι ἡ ε, εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου ΙΑΒ.

Διὰ νὰ ἔχῃ λύσιν τὸ πρόβλημα πρέπει τὰ Α καὶ Β νὰ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ε. Ἐφ' ὅσον ἡ συνθήκη αὕτη ἱκανοποιῆται, ὁ ἐκ τῶν σημείων Α′ καὶ Β′ καὶ τῆς γωνίας φ ὁρισθεὶς κύκλος ἔχει· δύο κοινὰ σημεῖα μὲ τὴν ε καὶ ἑπομένως τὸ πρόβλημά μας δέχεται δύο λύσεις.

Αἱ λύσεις αὗται περιορίζονται εἰς μίαν ὅταν ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ε. Ἂν ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ε, αἱ δύο λύσεις (Ω) καὶ (Ω′) εἶναι κύκλοι ἴσοι [1].

ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ ΤΡΙΓΩΝΩΝ.

320. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ὅταν δίδωνται αἱ τρεῖς πλευραὶ αὐτοῦ.

Λύσις. Αἱ δοθεῖσαι πλευραὶ εἶναι αἱ ΒΓ = α, ΓΑ = β ΑΒ = γ. Ὑποθέτομεν $\alpha > \beta > \gamma$. Δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν ἐπὶ τυχούσης εὐθείας εὐθ. τμῆμα ΒΓ ἴσον πρὸς τὸ δοθὲν α. Ἡ κορυφὴ Α εἶναι σημεῖον τοῦ κύκλου Β (γ) : κέντρου Β καὶ ἀκτῖνος ἴσης πρὸς τὸ γ, καὶ τοῦ κύκλου Γ(β) : κέντρου Γ καὶ ἀκ-

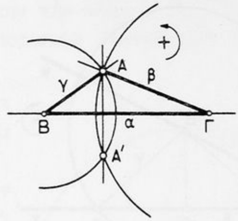
---

(1) Εἰς τὰ Μαθηματικὰ τῆς Δ′ τάξεως, θὰ ἔχωμεν καὶ μιὰν ἄλλην μέθοδον εὑρέσεως τῶν λύσεων τοῦ προβλήματος αὐτοῦ, βασιζομένην εἰς τὴν ἔννοιαν τοῦ **γινομένου** δύο εὐθ. τμημάτων:

ἴσης πρὸς τὸ β. Ἑπομένως εἶναι σημεῖον τῆς τομῆς τῶν δύο τούτων κύ-
. Ἂν ἡ τομὴ ἀποτελῆται ἀπὸ δύο διακεκριμένα σημεῖα Α καὶ Α' τὰ τρί-
ΑΒΓ αἱ Α'ΒΓ εἶναι λύσεις τοῦ προβλήματος. Αἱ δύο αὗται λύσεις εἶναι
ωνα συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΒΓ καὶ
τούτου ἀντιρρόπως ἴσα.

Ἵνα εἶναι δυνατὴ ἡ κατασκευή, ἤτοι ἵνα ὑ-
η λύσις, πρέπει καὶ ἀρκεῖ οἱ ἀνώτερω κύκλοι
ων Β καὶ Γ νὰ ἔχουν τομὴν (δύο ἢ ἕνα σημεῖ-
Διὰ νὰ ὑπάρχουν δύο λύσεις πρέπει ἑπομένως
ρκεῖ νὰ εἶναι (263) :

$$\beta - \gamma < \alpha < \beta + \gamma.$$



Σχ. 320

Ἐπειδὴ τὸ εὐθ. τμῆμα α εἶναι μεγαλύτερον
του τῶν β καὶ γ, θὰ εἶναι μεγαλύτερον τῆς δια-
ς β - γ. Ἑπομένως ἡ συνθήκη διὰ νὰ ὑπάρ-
ύσις ἀνάγεται εἰς τὴν

$$\alpha < \beta + \gamma.$$

Ὥστε ἵνα τρία εὐθ. τμήματα εἶναι πλευραὶ τριγώνου, πρέπει καὶ ἀρκεῖ
τὸ μεγαλύτερον τούτων εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλ-

Ἂν $\alpha = \beta = \gamma$, οἱ ἀνωτέρω κύκλοι ἔχουν δύο διακεκριμμένα κοινὰ σημεῖα
Α', διότι ἡ ἀπόστασις α τῶν κέντρων των εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσμα-
τῶν ἀκτίνων των καὶ μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς αὐτῶν, ἡ ὁποία εἶναι τὸ
ικὸν εὐθ. τμῆμα.

Τὸ κατασκευαζόμενον τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι **ἰσόπλευρον**.

Ἂν ἡ μεγαλυτέρα πλευρὰ $\alpha = \beta + \gamma$, τότε ἡ τομὴ τῶν ἀνωτέρω κύκλων
σημεῖον τῆς ΒΓ. Αἱ κορυφαὶ τοῦ τριγώνου κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

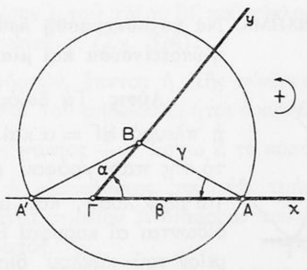
**ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον τοῦ ὁποίου δίδονται δύο πλευ-
αὶ μία γωνία κειμένη ἀπέναντι μιᾶς τῶν διδομένων πλευρῶν.**

Λύσις. Ἔστω ὅτι δίδονται αἱ πλευραὶ $ΒΓ = \alpha$, $ΑΒ = \gamma$, καὶ ἡ γωνία $Γ = \varphi$.

Περίπτωσις. Ι : $\alpha < \gamma$.

Ἐπὶ τῆς μιᾶς τῶν πλευρῶν μιᾶς γωνίας
ΓΥ) ἴσης πρὸς τὴν δοθεῖσαν φ, πχ. ἐπὶ
Υ, ὁρίζεται τὸ σημεῖον Β ὥστε $ΓΒ = \alpha$
ατασκευάζεται ὁ κύκλος κέντρου Β καὶ
ς γ. Ὁ κύκλος οὗτος ἔχει (247) δύο
α Α καὶ Α' ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΓ, ἡ ὁποία
χει τὴν ἄλλην πλευρὰν τῆς γωνίας Γ
ημεῖον Γ κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Α' (Σχ.
).

Ἂν ἡ γωνία Γ εἶναι ὀρθή, ἔχομεν δύο

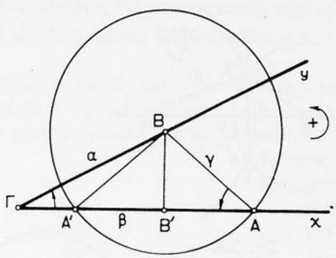


Σχ. 521.1

λύσεις ΑΒΓ καὶ Α′ ΒΓ. Ἂν ἡ γωνία Γ δὲν εἶναι ὀρθή, ἔχομεν ἕνα τρίγωνον ὡς λύσιν.

Περίπτωσις ΙΙ. $\alpha = \gamma$. Ἡ γωνία Γ εἶναι τότε ὀξεῖα.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, τὸ Γ συμπίπτει μὲ τὸ Α′ ἢ μὲ τὸ Α. Τὸ πρόβλημα ἔχει τότε μίαν μόνον λύσιν.



Σχ. 321.3

Περίπτωσις ΙΙΙ. $\alpha > \gamma$. Ἡ γωνία Γ εἶναι τότε ὀξεῖα.

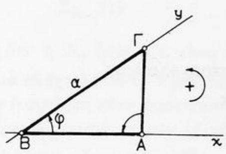
Κατασκευάζεται ἡ διὰ τοῦ Β κάθετος ΒΒ′ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν α.

1. Ἂν $\gamma = BB'$, ὑπάρχει ἕνα μόνον τρίγωνον : τὸ ΒΒ′Γ (Σχ. 321.3).

2. Ἂν $\gamma > BB'$, τὰ σημεῖα Α καὶ Α′ τῆς εὐθείας ΑΓ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς κορυφῆς Γ (Σχ. 321.3), καὶ ὑπάρχουν δύο τρίγωνα ἱκανοποιοῦντα τὰς δοθείσας συνθήκας : τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ τὸ Α′ΒΓ (Σχ. 321.3).

3. Ἂν $\gamma < BB'$ Δὲν ὑπάρχει λύσις προβλήματος.

322. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. **Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον τοῦ ὁποίου δίδεται ἡ ὑποτείνουσα καὶ μία ὀξεῖα γωνία.**

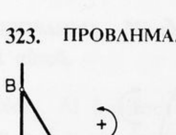


Σχ. 322

Λύσις. Τὰ διδόμενα στοιχεῖα εἶναι: ἡ γωνία $A = \frac{\pi}{2}$, ἡ $B\Gamma = \alpha$ καὶ ἡ ὀξεῖα γωνία $B = \varphi$.

Λύσις. Κατασκευάζεται γωνία (ΒΧ, ΒΥ) ἴση πρὸς τὴν δοθεῖσαν γωνίαν $B = \varphi$. Λαμβάνεται ἐπὶ τῆς ΒΥ τὸ σημεῖον Γ ὥστε $B\Gamma = \alpha$ καὶ ἄγεται ἡ διὰ τοῦ Γ κάθετος ΓΑ ἐπὶ τὴν ΒΧ. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι **λύσις** τοῦ προβλήματος. Τὸ πρόβλημα δέχεται πάντοτε λύσιν καὶ μόνον μίαν (Σχ. 322).

323. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. **Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον τοῦ ὁποίου δίδεται ἡ ὑποτείνουσα καὶ μία κάθετος πλευρά.**



Σχ. 323

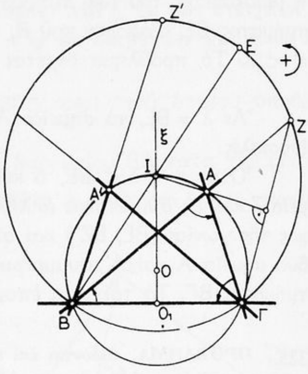
Λύσις. Τὰ διδόμενα στοιχεῖα εἶναι ἡ γωνία $A = \frac{\pi}{2}$, ἡ πλευρὰ $B\Gamma = \alpha$ καὶ ἡ $AB = \gamma$. Τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι τὸ τῆς παραγράφου (321), ὅταν ἡ γωνία $A = \frac{\pi}{2}$. Δέχεται μίαν λύσιν, καὶ μόνον μίαν, ἂν $\alpha > \gamma$ (Σχ. 323.). Ἂν δίδωνται αἱ κορυφαὶ Β καὶ Γ, ἡ κορυφὴ Α εἶναι κοινὸν σημεῖον τοῦ κύκλου διαμέτρου ΒΓ καὶ τοῦ κύκλου Β (γ) : κέντρου Β καὶ ἀκτῖνος γ.

324. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων: πλευρᾶς ΒΓ $=\alpha$, γωνίας (ΑΒ, ΑΓ) $=\varphi$, καὶ ἀθροίσματος ΓΑ $+$ ΑΒ $=\lambda$.

Λύσις Θεωροῦμεν ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ περὶ τοῦ ὁποίου ὑποθέτομεν ὅτι εἶναι λύσις προβλήματος (ἱκανοποιεῖ τὰς δοθείσας συνθήκας). Παρατηροῦμεν ὅτι δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν εἰς τυχοῦσαν θέσιν τὴν πλευρὰν ΒΓ $=\alpha$. Κατόπιν τούτου τὸ πρόβλημα ἀνάγεται τὸν προσδιορισμὸν (κατασκευὴν τῆς κορυφῆς Α).

Ἐκ τῆς συνθήκης (ΑΒ, ΑΓ) $=\varphi$ ἕπεται ὅτι τὸ σημεῖον Α εἶναι σημεῖον γνωστοῦ κύκλου (259) διερχομένου διὰ τῶν σημείων Β καὶ Γ.

Καθ' ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὴν συνθήκην ΓΑ $+$ ΑΒ $=\lambda$, παρατηροῦμεν ὅτι δυνάμεθα νὰ ἐμφανίσωμεν τὸ εὐθ. τμῆμα λ, θεωροῦντες ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ, καὶ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Α πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται τὸ Β, τὸ σημεῖον Ζ ὥστε ΑΖ $=$ ΓΑ, διότι τότε θὰ εἶναι : ΒΖ $=$ ΒΑ $+$ ΑΖ $=$ ΒΑ $+$ ΓΑ $=\lambda$. Παρατηροῦμεν ὅτι ἂν εὑρεθῇ τὸ σημεῖον Ζ, εὑρίσκεται ἐκ τούτου τὸ σημεῖον Α (διότι εἰς τῆς ΑΖ $=$ ΑΓ προκύπτει ὅτι τὸ Α εἶναι σημεῖον τῆς μεσοκαθέτου τοῦ εὐθ. τμήματος ΓΖ).



Σχ. 324

Καθ' ὅσον ἀφορᾷ τώρα εἰς τὸ σημεῖον Ζ παρατηροῦμεν :

Ἐκ τῆς ΒΖ $=\lambda$ προκύπτει ὅτι τοῦτο εἶναι σημεῖον τοῦ κύκλου Β(λ) : κέντρου Β καὶ ἀκτῖνος λ. Ἐξ ἄλλου, ἐπειδὴ ἡ γωνία (ΑΒ, ΑΓ) εἶναι ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΓΖ, θὰ εἶναι :

$$(ZB, Z\Gamma) = \frac{1}{2}\,(AB, A\Gamma) = \frac{1}{2}\,\varphi.$$

Ἐκ τῆς τελευταίας αὐτῆς : $(ZB, Z\Gamma) = \frac{\varphi}{2}$, ἕπεται ὅτι τὸ Ζ εἶναι σημεῖον γνωστοῦ κύκλου, διερχομένου διὰ τῶν γνωστῶν σημείων Β καὶ Γ. Τὸ κέντρον μάλιστα τοῦ κύκλου τούτου εἶναι τὸ μέσον Ι τοῦ τόξου ΒΓ τοῦ κύκλου τοῦ ὁριζομένου ἐκ τῶν σημείων Β,Γ καὶ τῆς γωνίας φ. (Σχ. 324).

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω παρατηρήσεων, ἕπεται ἡ ἑξῆς σύνθεσις : Κατασκευάζονται οἱ ἀνωτέρω δύο γεωμ. τόποι τοῦ σημείου Ζ, ἤτοι ὁ κύκλος Β(λ) καὶ ὁ ὁριζόμενος ἐκ τῶν σημείων Β,Γ καὶ τῆς γωνίας $\frac{\varphi}{2}$. Ἔστω Ζ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν κύκλων τούτων. Κατασκευάζεται ἡ μεσοκάθετος τοῦ εὐθ. τμήματος ΓΖ. Ἂν ἡ τελευταῖα αὕτη τέμνῃ τὴν ΒΔ κατὰ σημεῖον Α διάφορον τοῦ Β, τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι λύσις τοῦ προβλήματος.

Ἡ περὶ τούτου ἀπόδειξις παραλείπεται ὡς ἁπλῆ.

Καθ' ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὰς συνθήκας (σχέσεις μεταξὺ τῶν διδομένων στοιχείων) αἱ ὁποῖαι πρέπει νὰ ὑφίστανται διὰ νὰ ἔχῃ τὸ πρόβλημα λύσιν παρατηροῦμεν :

Ἂν εἶναι Ε τὸ δεύτερον, ἐκτὸς τοῦ Β, κοινὸν σημεῖον τῆς εὐθείας ΒΙ μὲ τὸν κύκλον τὸν ὁριζόμενον ἀπὸ τὰ Β, Γ καὶ τὴν γωνίαν $\frac{\varphi}{2}$, πρέπει, διὰ νὰ ὑπάρχῃ τομὴ τοῦ τελευταίου αὐτοῦ κύκλου καὶ τοῦ Β(λ), νὰ εἶναι :

$$\lambda \leqslant BE$$

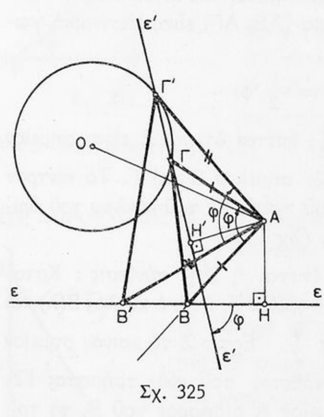
Ἐφ' ὅσον ἡ συνθήκη αὕτη ἱκανοποιῆται, διὰ νὰ ὑπάρχῃ λύσις πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἡ μεσοκάθετος τοῦ εὐθ. τμήματος ΓΖ νὰ τέμνῃ τὴν ΒΖ εἰς σημεῖον Α τοῦ εὐθ. τμήματος ΒΖ, διάφορον τοῦ Β, ἤτοι πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι : $B\Gamma < BZ$ ἤτοι $\alpha < \lambda$. Τὸ πρόβλημα δέχεται τουλάχιστον μίαν λύσιν ὅταν :

$$\alpha < \lambda \leqslant BE$$

Ἂν $\lambda = BE$, τὸ σημεῖον Α συμπίπτει μὲ τὸ Ι καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές.

Ὅταν $\alpha < \lambda < BE$, ὁ κύκλος Β(λ) τέμνει τὸν κύκλον ΒΕΓ κατὰ τὰ σημεῖα Ζ καὶ Ζ', συμμετρικὰ ἀλλήλων ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΒΕ. Ἡ ΒΕ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας (ΒΕ, ΒΖ') καὶ αἱ πλευραὶ αὐτῆς τέμνουσιν τὸν κύκλον ΒΙΓ κατὰ δύο σημεῖα Α καὶ Α', συμμετρικὰ ἀλλήλων ὡς πρὸς τὴν μεσοκάθετον τοῦ εὐθ. τμήματος ΒΓ. Τὰ τρίγωνα ἑπομένως ΑΒΓ καὶ Α'ΒΓ εἶναι ἀντιρρόπως ἴσα.

325. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Δίδονται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου : κύκλος (Ο), εὐθεῖα ε καὶ σημεῖον Α. Νὰ κατασκευασθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ (ΑΒ= ΑΓ) τοῦ ὁποίου ἡ κορυφὴ Α νὰ εἶναι τὸ δοθὲν σημεῖον Α, αἱ κορυφαὶ Β καὶ Γ σημεῖα τῆς εὐθείας ε καὶ τοῦ κύκλου (Ο) ἀντιστοίχως καὶ ἡ γωνία (ΑΒ, ΑΓ) ἴση μὲ δοθεῖσαν γωνίαν φ.



Σχ. 325

Λύσις : Ἔστω ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (Σχ. 325) εἶναι λύσις τοῦ προβλήματος.

Παρατηροῦμεν ὅτι : Ἡ κορυφὴ Γ εἶναι τὸ σημεῖον τὸ ὁμόλογον τοῦ Β κατὰ τὴν στροφὴν R (Α, φ). Ἀλλὰ τὸ Β εἶναι σημεῖον τῆς εὐθείας ε. Ἑπομένως τὸ Γ εἶναι σημεῖον τῆς ὁμολόγου ε' τῆς ε (167), κατὰ τὴν ἀνωτέρω στροφήν. Ἡ σύνθεσις κατόπιν τῆς ἀνωτέρω παρατηρήσεως εἶναι ἡ ἑξῆς :

Κατασκευάζεται κατὰ τὰ γνωστὰ (167) ἡ ὁμόλογος ε' τῆς ε κατὰ τὴν στροφὴν R (Α, φ) .

Ἔστωσαν Γ καὶ Γ' τὰ κοινὰ σημεῖα τῆς ε' μὲ τὸν κύκλον (Ο). Εἰς ἕκαστον τῶν κοινῶν τούτων σημείων ἀντιστοιχεῖ μία λύσις τοῦ προβλήματος, εὑρισκομένη ὡς ἑξῆς : Ἄγεται ἡ ΑΓ καὶ ἡ ἡμιευθεῖα ΑΒ ὥστε (ΑΒ, ΑΓ) = φ. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι λύσις. Πράγματι, εἶναι ΑΒ = ΑΓ. Τοῦτο προκύπτει ἐκ τῶν ἴσων ὀρθογωνίων τριγώνων ΑΗΒ καὶ ΑΗ'Γ. (Η' τὸ ὁμόλογον τῆς προβολῆς Η τοῦ Α ἐπὶ τὴν ε, κατὰ τὴν θεωρουμένην στροφήν, βάσει τοῦ ὁποίου κατεσκευάσθη ἡ ε'). Εἰς τὸ δεύτερον κοινὸν σημεῖον Γ' τῆς ε' μὲ τὸν (Ο) ἀντιστοιχεῖ μία δευτέρα λύσις ΑΒ'Γ' τοῦ προβλήματος.

Τὸ πρόβλημα δέχεται δύο, μίαν ἢ οὐδεμίαν λύσιν καθ' ὅσον ἡ ε' καὶ ὁ κύκλος (Ο) ἔχουν δύο, ἕνα ἢ οὐδὲν κοινὸν σημεῖον ἀντιστοίχως.

Σημειοῦμεν ὅτι, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὸ Β ὡς ὁμόλογον τοῦ Γ κατὰ τὴν στροφὴν τὴν ἔχουσαν κέντρον τὸ Α καὶ γωνίαν τὴν ἀντίθετον τῆς θεωρηθείσης φ. Τότε τὸ σημεῖον τοῦτο Β θὰ προσδιορισθῇ ὡς κοινὸν σημεῖον τῆς ε μὲ τὸν κύκλον (Ο′) τὸν ὁμόλογον τοῦ (Ο) κατὰ τὴν στροφὴν ταύτην. Ἡ τοιαύτη θεώρησις δὲν μᾶς δίδει ἄλλας λύσεις. Πράγματι, ἂν εἶναι Ο′ τὸ ὁμόλογον τοῦ Ο κατὰ τὴν ἀνωτέρω στροφήν, ἐκ τῶν ἴσων (79) τριγώνων ΑΓΟ καὶ ΑΒΟ′ ἕπεται ὅτι $Ο'Β = ΟΓ = r$, ἔνθα r ἡ ἀκτὶς τοῦ (Ο), καὶ ἐξ αὐτῆς ὅτι τὸ Β εἶναι κοινὸν σημεῖον τῆς ε μὲ τὸν κύκλον Ο′ (r). Τοῦτο ἰσχύει καὶ διὰ τὸ σημεῖον Β′.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΩΝ

326. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Νὰ κατασκευασθῇ τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἐκ τῶν στοιχείων: Διαγώνιοι $ΑΓ = λ$ καὶ $ΒΔ = μ$, γωνία $(ΑΓ, ΒΔ) = φ$ τῶν διαγωνίων καὶ γωνία $Γ$ $Α = θ$ καὶ $Γ = ω$.

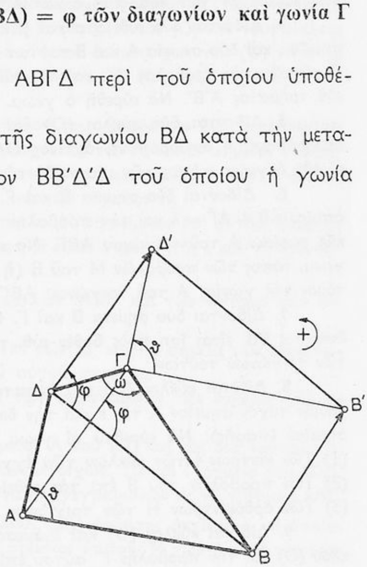
Λύσις. Θεωροῦμεν ἕνα τετράπλευρον ΑΒΓΔ περὶ τοῦ ὁποίου ὑποθέτομεν ὅτι εἶναι λύσις. (Σχ. 326).

Ἂν θεωρήσωμεν τὴν ὁμόλογον Β′Δ′ τῆς διαγωνίου ΒΔ κατὰ τὴν μεταφορὰν $\overrightarrow{ΑΓ}$, ἔχομεν ἕνα παραλληλόγραμμον ΒΒ′Δ′Δ τοῦ ὁποίου ἡ γωνία (ΔΒ,ΔΔ′) εἶναι ἡ γωνία φ τῶν διαγωνίων, καὶ αἱ προσκείμεναι πλευραὶ ΔΒ καὶ ΔΔ′ ἴσαι πρὸς τὰς διαγωνίους ΒΔ καὶ ΑΓ τοῦ τετραπλεύρου ἀντιστοίχως.

Ἐξ ἄλλου αἱ γωνίαι ὑπὸ τὰς ὁποίας φαίνονται ἀπὸ τοῦ σημείου Γ αἱ πλευραὶ τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς γωνίας τοῦ τετραπλεύρου.

Εἰδικώτερον, εἰς τὸ προκείμενον πρόβλημα εἶναι:

$(ΓΒ', ΓΔ') = (ΑΒ, ΑΔ) = θ$ καὶ $(ΓΔ, ΓΒ) = ω$.



Σχ. 326

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω παρατηρήσεων ἕπεται ἡ ἑξῆς σύνθεσις:

Κατασκευάζεται παραλληλόγραμμον ΒΒ′Δ′Δ ἐκ τῶν προσκειμένων πλευρῶν του $ΔΒ = μ$, $ΔΔ' = λ$ καὶ τῆς περιεχομένης γωνίας $(ΔΒ, ΔΔ') = φ$.

Τὸ σημεῖον (κορυφὴ) Γ ὁρίζεται ὡς κοινὸν σημεῖον δύο γνωστῶν κύκλων ἀντιστοιχούντων εἰς τὰς συνθήκας $(ΓΔ, ΓΒ) = ω$ καὶ $(ΓΒ', ΓΔ') = θ$. Εὑρεθείσης τῆς κορυφῆς Γ, ἡ ὑπολειπομένη κορυφὴ Α ὁρίζεται ὡς ὁμόλογος τῆς Γ κατὰ τὴν μεταφορὰν $\overrightarrow{Δ'Δ} = \overrightarrow{λ}$, ἢ ὡς κοινὸν σημεῖον τῶν διὰ τῶν Β καὶ Δ παραλλήλων πρὸς τὰς Β′Γ καὶ Δ′Γ ἀντιστοίχως [1].

---

(1) Ἡ θεώρησις τοῦ μὲ τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ **συνδεομένου**, κατὰ τὰ ἀνωτέρω, παραλληλογράμμου, ἐπιβάλλεται εἰς πλείστας ἐκ τῶν κατασκευῶν τετραπλεύρων (Βλέπε καὶ Μαθηματικὰ Δ′ τάξεως).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Γεωμετρικοὶ τόποι

1. Δίδεται εὐθεῖα ε καὶ σημεῖον Α, αὐτῆς. Θεωροῦμεν τυχόντα κύκλον ἐφαπτόμενον τῆς ε εἰς τὸ Α καὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ τὴν παράλληλον πρὸς τὴν ε. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν ἄκρων Μ καὶ Μ' τῆς διαμέτρου αὐτῆς.

2. Δίδεται εὐθεῖα ε καὶ σημεῖον Α αὐτῆς. Θεωροῦμεν τυχόντα ἐκ τῶν κύκλων (Ω) ἕκαστος τῶν ὁποίων ἐφάπτεται τῆς ε εἰς τὸ Α καὶ τὰς ἐφαπτομένας αὐτοῦ τὰς παραλλήλους πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν δ. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ γεωμ. τόποι τῶν σημείων ἐπαφῆς.

3. Δίδονται δύο εὐθεῖαι α καὶ β κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας. Θεωροῦμεν τυχὸν εὐθ. τμῆμα ΑΒ = λ τοῦ ὁποίου τὰ ἄκρα εἶναι ἀντιστοίχως σημεῖα τῶν α καὶ β. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν μέσων Μ τῶν εὐθ. τμημάτων ΑΒ.

4. Δίδονται δύο εὐθεῖα α καὶ β κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας, τῶν ὁποίων ἔστω Ο τὸ κοινὸν σημεῖον, καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β τούτων ἀντιστοίχως. Θεωροῦμεν : τυχοῦσαν ἐκ τῶν διὰ τοῦ Ο εὐθειῶν, τὰς προβολὰς Α' καὶ Β' τῶν Α καὶ Β ἀντιστοίχως ἐπ' αὐτὴν καὶ τὸ μέσον Μ τοῦ εὐθ. τμήματος Α'Β'. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Μ.

5. Δίδονται δύο κύκλοι (Ο) καὶ (Ο'). Θεωροῦμεν δύο τυχούσας παραλλήλους καὶ ὁμορρόπους, ἢ ἀντιρρόπους, ἀκτῖνας ΟΑ καὶ Ο'Α' τῶν ἀνωτέρω κύκλων ἀντιστοίχως. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν μέσων Μ τῶν εὐθ. τμημάτων ΑΑ'.

6. Δίδονται δύο σημεῖα Β καὶ Γ. Θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον Α τοῦ ἐπιπέδου διὰ τὸ ὁποῖον ΑΒ + ΑΓ = λ καὶ τὴν προβολὴν Μ τοῦ Β (ἢ τοῦ Γ) ἐπὶ τὴν διχοτόμον τῆς ἐξωτερικῆς γωνίαω Α τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Μ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν προβολῶν Μ τοῦ Β (ἢ τοῦ Γ) τῆς προηγουμένης προτάσεως ἐπὶ τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας Α τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ὅταν ΑΓ − ΑΒ = λ

7. Δίδονται δύο σημεῖα Β καὶ Γ. Θεωροῦμεν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ ἑκάστου τῶν ὁποίων ἡ διάμεσος ΒΒ' εἶναι ἴση πρὸς δοθὲν εὐθ. τμῆμα μ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν κορυφῶν Α τῶν τριγώνων τούτων.

8. Δίδεται κύκλος (Ο) καὶ ἐφαπτομένη ε αὐτοῦ. Ἔστω Β τὸ σημεῖον ἐπαφῆς. Θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον Α τῆς ε καὶ τὴν δευτέραν, ἐκτὸς τῆς ε ἐφαπτομένην ΑΓ τοῦ (Ο) (Γ τὸ σημεῖον ἐπαφῆς). Νὰ εὑρεθοῦ οἱ γεωμ. τόποι :

(1) Τῶν κέντρων Ι τῶν κύκλων τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς τὰ τρίγωνα ΑΒΓ.

(2) Τῶν προβολῶν τοῦ Β ἐπὶ τὰς εὐθείας ΟΑ.

(3) Τῶν ὀρθοκέντρων Η τῶν τριγώνων ΑΒΓ.

9. Δίδεται κύκλος (Ο) καὶ διάμεσος ΑΒ αὐτοῦ. Θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον Γ τοῦ κύκλου (Ο) καὶ τὴν προβολὴν Γ' αὐτοῦ ἐπὶ τὴν ΑΒ. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ γεωμ. τόποι :

(1) Τοῦ σημείου Μ τῆς ΟΓ διὰ τὸ ὁποῖον ΑΜ = ΓΓ'.

(2) Τοῦ σημείου Μ' τῆς ΟΓ διὰ τὸ ὁποῖον ΟΜ = ΟΓ'

(3) Τοῦ κέντρου Ι τοῦ κύκλου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ τρίγωνον ΟΓΓ'.

10. Δίδονται δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι ε καὶ ε', τῶν ὁποίων ἔστω Ο τὸ κοινὸν σημεῖον, καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Α' ἐπὶ τούτων ἀντιστοίχως. Θεωροῦμεν δύο κύκλους (Ω) καὶ (Ω') ἐφαπτομένους ἀλλήλων καὶ τῶν ε καὶ ε' κατὰ τὰ Α καὶ Α' ἀντιστοίχως. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τοῦ σημείου ἐπαφῆς Μ τῶν κύκλων τούων.

11. Δίδεται εὐθεῖα ε καὶ σημεῖον Α αὐτῆς. Θεωροῦμεν ἑκατέρωθεν τοῦ Α δύο σημεῖα Ω καὶ Ω' τῆς ε, τοὺς κύκλους Ω (ΩΑ) καὶ Ω'(Ω'Α), τὰ δεύτερα, ἐκτὸς τοῦ Α, κοινὰ σημεῖα Β καὶ Β' τῶν κύκλων τούτων μὲ τὴν ε ἀντιστοίχως καὶ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς Ι καὶ Ι' τῶν κύκλων (Ω) καὶ (Ω') ἀντιστοίχως μὲ μίαν κοινὴν ἐξωτερικὴν αὐτῶν ἐφαπτομένην. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ζεωμ. τόπος τῶν κέντρων τῶν κύκλων ΒΙΙ'Β', ὅταν τα Ω καὶ Ω' μεταβάλωνται ἐπὶ τῆς ε ὥστε : ΑΩ − ΑΩ' = λ.

12. Δίδεται κύκλος (Ο) καὶ εὐθεῖα δ διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου του. Θεωροῦμεν τυχοῦσαν ἐφαπτομένην ε τοῦ (Ο) καὶ τὰς προβολὰς Μ καὶ Μ' τοῦ Ο ἐπὶ τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν τῶν δ καὶ ε ἀντιστοίχως. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν Μ καὶ τῶν Μ'.

13. Δίδονται δύο σημεῖα Ο καὶ Α. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ γεωμ. τόποι :
(1) Τῶν προβολῶν τοῦ Α ἐπὶ τὰς εὐθείας τὰς διερχομένας διὰ τοῦ Ο.
(2) Τῶν συμμετρικῶν τοῦ Α ὡς πρὸς τὰς ἀνωτέρω εὐθείας.

14. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Θεωροῦμεν τρεῖς τυχούσας ἡμιευθείας ΑΧ, ΒΥ, ΓΖ ὥστε (ΑΒ, ΑΧ) = (ΒΓ, ΒΥ) = (ΓΑ, ΓΖ). Νὰ εὑρεθοῦν οἱ γεωμ. τόποι τῶν σημείων : Α' (ΑΧ. ΓΖ), Β'(ΑΧ. ΒΥ), Γ' (ΒΥ. ΓΖ)

15. Δίδονται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι β καὶ γ, ἕνα σημεῖον Α καὶ μία εὐθεῖα α διερχομένη διὰ τοῦ Α, τῆς ὁποίας ἔστωσαν Β καὶ Γ τὰ κοινὰ σημεῖα μὲ τὰς β καὶ γ ἀντιστοίχως. Θεωροῦμεν τυχοῦσαν διὰ τοῦ Α εὐθεῖαν ε τῆς ὁποίας ἔστωσαν Μ καὶ Ν τὰ κοινὰ σημεῖα μὲ τὰς β καὶ γ ἀντιστοίχως. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τοῦ δευτέρου, ἐκτὸς τοῦ Α, κοινοῦ σημείου Α' τῶν κύκλων ΑΜΒ καὶ ΑΝΓ.

16. Δίδεται κύκλος (Ο) καὶ σημεῖον Α. Θεωροῦμεν τυχοῦσαν ἐκ τῶν διὰ τοῦ Α εὐθειῶν τῶν τεμνουσῶν τὸν (Ο), τὰ κοινὰ σημεῖα Β καὶ Γ αὐτῆς μὲ τὸν (Ο) καὶ τοὺς κύκλους (Ω) καὶ (Ω') οἱ ὁποῖοι διέρχονται διὰ τοῦ Α καὶ ἐφάπτονται ἀντιστοίχως τοῦ (Ο) κατὰ τὰ σημεῖα Β καὶ Γ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τοῦ δευτέρου, ἐκτὸς τοῦ Α, κοινοῦ σημείου Μ τῶν (Ω) καὶ (Ω').

17. Δίδεται κύκλος (Ο) καὶ σημεῖον Ρ τοῦ ἐπιπέδου του. Θεωροῦμεν δύο τυχούσας τεμνούσας ΡΑΑ' καὶ ΡΒΒ' τοῦ (Ο). Ἔστω Μ τὸ δεύτερον, ἐκτὸς τοῦ Ρ, κοινὸν σημεῖον τῶν κύκλων ΡΑΒ καὶ ΡΑ'Β' καὶ Ν τὸ δεύτεῖον, ἐκτὸς τοῦ Ρ, κοινὸν σημεῖον τῶν κύκλων ΡΑΒ' καὶ ΡΑ'Β. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ γεωμ. τόποι τῶν σημείων Μ καὶ τῶν σημείων Ν.

18. Δίδεται εὐθεῖα ε, σημεῖον Α αὐτῆς καὶ σημεῖον Η μὴ κείμενον ἐπ' αὐτῆς. Θεωροῦμεν τυχὸν ἐκ τῶν τριγώνων ΑΒΓ τῶν ὁποίων ἡ κορυφὴ Β εἶναι σημεῖον τῆς ε καὶ τὸ ὀρθόκεντρον τὸ Η.
1. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν κέντρων Ο τῶν κύκλων ΑΒΓ καὶ τῶν κέντρων τῶν κύκλων Euler τῶν τριγώνων ΑΒΓ.
2. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ εὐθεῖαι $Η_1Η_2$ ($Η_1$ καὶ $Η_2$ τὰ ἐπὶ τῶν ΒΓ καὶ ΓΑ σημεῖα τῶν ἀντιστοίχων ὑψῶν τῶν τριγώνων ΑΒΓ) διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.
3. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τοῦ κοινοῦ σημείου Μ τῶν ἐφαπτομένων τῶν κύκλων ΑΒΓ εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Γ.

19. Δίδεται κύκλος (Ο). Θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον Α τοῦ (Ο) καὶ τὰς διὰ τούτου παραλλήλους ΑΒ καὶ ΑΓ πρὸς δοθείας εὐθείας δ καὶ δ' ἀντιστοίχως. (Β καὶ Γ σημεῖα τοῦ (Ο)). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν κέντρων Ι τῶν κύκλων τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς τὰ τρίγωνα ΑΒΓ.

20. Δίδεται κύκλος (Ο). Θεωροῦμεν τοὺς κύκλους (Ω), δοθείσης ἀκτῖνος ρ, οἱ ὁποῖοι ἐφάπτονται τοῦ (Ο). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων ἐπαφῆς Μ τῶν (Ω) μὲ τὰς ἐφαπτομένας αὐτῶν τὰς παραλλήλους πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν δ.

21. Δίδεται κύκλος (Ο) καὶ σημεῖον Ρ ἐξωτερικὸν αὐτοῦ. Ἔστω Α τὸ σημεῖον ἐπαφῆς μὲ τὴν μίαν τῶν διὰ τοῦ Ρ ἐφαπτομένων τοῦ (Ο). Θεωροῦμεν τυχοῦσαν ἐκ τῶν διὰ τοῦ Ρ τεμνουσῶν τὸν (Ο), τὰ κοινὰ σημεῖα Β καὶ Γ αὐτῆς μὲ τὸν (Ο), καὶ τὸ ὀρθόκεντρον Η τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Η.

22. Δίδονται δύο ἴσοι κύκλοι (Ο) καὶ (Ο') καὶ ἐπὶ τούτων δύο σημεῖα Α καὶ Α' ἀντιστοίχως. Θεωροῦμεν δύο σημεῖα Μ καὶ Μ' τῶν (Ο) καὶ (Ο') ἀντιστοίχως ὥστε (ΟΑ, ΟΜ) = = −(Ο'Α', Ο'Μ'). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν μέσων Ρ τῶν εὐθ. τμημάτων ΜΜ'.

23. Δίδονται δύο κύκλοι (Ο) καὶ (Ο') καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Α' ἐπὶ τούτων ἀντιστοίχως. Θεωροῦμεν δύο τυχούσας ἀκτῖνας ΟΒ καὶ Ο'Β' τῶν (Ο) καὶ (Ο') ἀντιστοίχως (Β καὶ Β' σημεῖα τῶν (Ο) καὶ (Ο')), τεμνομένας ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν φ. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ γεωμ. τόποι:
(1) Τοῦ κοινοῦ σημείου Μ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ Α'Β'.
(2) Τοῦ κέντρου Ω τοῦ κύκλου ΜΒΒ'

24. Δίδονται δύο σημεῖα Α καὶ Β. Θεωροῦμεν : τυχὸν σημεῖον Μ, τὸ συμμετρικὸν Μ' τοῦ Μ ὡς πρὸς τὸ Α, τὸ συμμετρικὸν Μ'' τοῦ Μ' ὡς πρὸς τὸ Β καὶ τὸ συμμετρικὸν Μ''' τοῦ Μ'' ὡς πρὸς τὸ Α. Νὰ εὑρεθῇ ἡ περιβάλλουσα τῶν εὐθειῶν ΜΜ'''

25. Δίδονται δύο σημεῖα Ρ καὶ Σ. Θεωροῦμεν τὰ παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ τὰ ἴσα πρὸς δοθὲν παραλληλόγραμμον, ἑκάστου τῶν ὁποίων αἱ ΑΒ καὶ ΑΔ διέρχονται ἀντιστοίχως ἀπὸ τὰ σημεῖα Ρ καὶ Σ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ περιβάλλουσα τῶν εὐθειῶν ΑΓ.

26. Δίδεται εὐθεῖα ε καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Α′ αὐτῆς. Θεωροῦμεν δύο κύκλους (Ω) καὶ (Ω′) ἐφαπτομένους ἀλλήλων καὶ τῆς ε κατὰ τὰ σημεῖα Α καὶ Α′ ἀντιστοίχως. Νὰ εὑρεθῇ ἡ περιβάλλουσα τῶν διακέντρων ΩΩ′ τῶν κύκλων (Ω) καὶ (Ω′).

27. Δίδονται δύο σημεῖα Β καὶ Γ. Θεωροῦμεν τυχὸν ἐκ τῶν τριγώνων ΑΒΓ τῶν ὁποίων ἡ γωνία (ΑΒ, ΑΓ) εἶναι ἴση πρὸς δοθεῖσαν γωνίαν φ. Ἔστωσαν Β′ καὶ Γ′ αἱ προβολαὶ τῶν κορυφῶν Β καὶ Γ ἐπὶ τῆς ΓΑ καὶ ΑΒ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ περιβάλλουσα τῶν εὐθειῶν Β′Γ′.

28. Δίδονται δύο σημεῖα Α καὶ Β Νὰ εὑρεθῇ ἡ περιβάλλουσα τῶν εὐθειῶν ε ἑκάστης τῶν ὁποίων ἀπέχει ἀπὸ τῶν Α καὶ Β ἀποστάσεις αἱ ὁποῖαι ἔχουν :
1. Δοθὲν ἄθροισμα λ. 2. Δοθεῖσαν διαφορὰν λ.

29. Δίδονται δύο σημεῖα Ρ καὶ Σ. Θεωροῦμεν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ τὰ ἴσα πρὸς δοθὲν τρίγωνον, ἑκάστου τῶν ὁποίων αἱ ΑΒ καὶ ΑΓ διέρχονται ἀντιστοίχως διὰ τῶν σημείων Ρ καὶ Σ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον (περιβάλλουσα) τῶν εὐθειῶν ΒΓ.

30. Δίδονται δύο σημεῖα Α καὶ Β. Θεωροῦμεν τυχὸν ἐκ τῶν σημείων Μ διὰ τὰ ὁποῖα εἶναε : $MA + MB = \lambda$, καὶ τοὺς κύκλους (Ω) καὶ (Ω′) οἱ ὁποῖοι ἔχουν διαμέτρους τὰ εὐθ. τμήματα ΜΑ καὶ ΜΒ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ περιβάλλουσα τῶν κύκλων (Ω) καὶ (Ω′).

Γεωμετρικαὶ κατασκευαὶ

1. Δίδεται ἡμιευθεῖα ΑΧ. Νὰ κατασκευασθῇ ἡμιευθεῖα ΑΥ ὥστε $(AX, AY) = \pi/2$, χωρὶς τὴν χρησιμοποίησιν σημείων τῆς ἡμιευθείας ΑΧ′ τῆς ἀντικειμένης τῆς ΑΧ.

2. Νὰ κατασκευασθῇ διὰ τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου, ὀρθὴ γωνία ἔχουσα κορυφὴν ἕνα δοθὲν σημεῖον Α.

3. Νὰ τριχοτομηθῇ δοθεῖσα ὀρθὴ γωνία.

4. Δίδεται κύκλος (Ο), εὐθεῖα ε καὶ σημεῖον Α τῆς ε. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τῆς ε ἀπέχον ἴσον ἀπὸ τοῦ σημείου Α καὶ ἀπὸ τοῦ κύκλου (Ο).

5. Δίδεται κύκλος (Ο) καὶ εὐθεῖα ε τέμνουσα τοῦτον. Νὰ κατασκευασθῇ χορδὴ $AB = \lambda$ τοῦ (Ο) ὥστε τὸ μέσον αὐτῆς νὰ εἶναι σημεῖον τῆς ε. (1)

6. Δίδεται εὐθεῖα ε, σημεῖον Α αὐτῆς καὶ σημεῖον Β ἐκτὸς αὐτῆς. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τῆς ε ὥστε : $MA + MB = \lambda$. (1)

7. Δίδεται κύκλος (Ο) καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β αὐτοῦ. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τοῦ (Ο) ὥστε (1). $MA + MB = \lambda$ (2). $MA - MB = \lambda$. (1)

8. Δίδεται κύκλος (Ο) καὶ τρία σημεῖα Α, Β, Γ αὐτοῦ. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Δ τοῦ (Ο) ὥστε τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ νὰ εἶναι περιγράψιμον.

9. Δίδονται τρία σημεῖα Ρ, Α, Β. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ Ρ καὶ ἀπέχουσα ἀπὸ τῶν Α καὶ Β ἀποστάσεις ἐχούσας (1). Δοθὲν ἄθροισμα λ (2). Δοθεῖσαν διαφορὰν λ. (1)

10. Δίδεται κύκλος (Ο) καὶ εὐθεῖα ε. Ἔστω ΟΗ ἡ προβάλλουσα τὸ κέντρον τοῦ (Ο) ἐπὶ τὴν ε (Η ἐπὶ τῆς ε). Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τῆς ΟΗ τοῦ ὁποίου ἡ ἐφαπτομενικὴ ἀπόστασις ἀπὸ τοῦ (Ο) νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀπόστασίν του ΜΗ ἀπὸ τῆς ε.

11. Δίδεται κύκλος (Ο) καὶ εὐθεῖα ε. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τῆς ε τοῦ ὁποίου ἡ ἐφαπτομενικὴ ἀπόστασις ἀπὸ τοῦ κύκλου (Ο) νὰ εἶναι δοθεῖσα λ. (1)

12. Δίδεται κύκλος (Ο) καὶ σημεῖον Α. Νὰ κατασκευασθῇ διάμετρος ΒΓ τοῦ (Ο) ὥστε $(AB, A\Gamma) = \varphi$ (φ δοθεῖσα γωνία).

13. Δίδεται κύκλος (Ο) καὶ εὐθεῖα ε. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τῆς ε ἀπὸ τοῦ ὁποίου ὁ κύκλος (Ο) νὰ φαίνεται ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν φ ἢ ἡ χορδὴ ἡ ὁποία ἔχει ἄκρα τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τοῦ (Ο) μὲ τὰς ἀπὸ τοῦ Μ ἐφαπτομένας αὐτοῦ νὰ εἶναι ἴση πρὸς δοθὲν εὐθ. τμῆμα λ. (1)

---

(1) λ δοθὲν εὐθ. τμῆμα.

14. Δίδονται δύο εὐθ. τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ ἀπὸ τοῦ ὁποίου τὰ εὐθύγραμμα ταῦτα τμήματα νὰ φαίνωνται ὑπὸ δοθείσας γωνίας φ καὶ ω ἀντιστοίχως.

15. Δίδονται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ἕνας κύκλος (Ο) καὶ δύο σημεῖα Ρ καὶ Σ. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τοῦ (Ο) ὥστε ἂν εἶναι Α καὶ Β τὰ δεύτερα, ἐκτὸς τοῦ Μ, κοινὰ σημεῖα τῶν ΜΡ καὶ ΜΣ μὲ τὸν (Ο) νὰ εἶναι ΑΒ = λ. (1)

16. Δίδονται δύο ἐφαπτόμενοι κύκλοι (Ο) καὶ (Ο') τῶν ὁποίων ἔστω Α τὸ σημεῖον ἐπαφῆς. Νὰ κατασκευασθοῦν δύο χορδαὶ ΑΜ καὶ ΑΜ' τῶν κύκλων τούτων ἀντιστοίχως, κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας, ὥστε ΜΜ' = λ. (1)

17. Δίδεται ὀρθὴ γωνία (ΟΧ,ΟΥ) καὶ ἐπὶ τῆς ΟΧ δύο σημεῖα Α καὶ Β (Α μεταξὺ τῶν Ο καὶ Β). Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τῆς ΟΒ ὥστε : (Μ , ΜΒ) = 2 · (ΒΜ, ΒΑ)

18. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ ἀπὸ τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου νὰ φαίνωνται ὑπὸ ἴσας γωνίας.

19. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου του διὰ τὸ ὁποῖον : (ΑΒ, ΑΜ) = (ΒΓ, ΒΜ) = (ΓΑ, ΓΜ).

20. Δίδονται ἐπὶ ἐπιπέδου δύο παράλληλοι εὐθεῖαι α καὶ β καὶ ἕνα σημεῖον Ρ. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα διὰ τοῦ Ρ τέμνουσα τὰς α καὶ β ὥστε ἂν εἶναι Α καὶ Β τὰ κοινὰ σημεῖα ἀντιστοίχως, νὰ εἶναι ΑΒ = λ. (1)

21. Δίδονται δύο τεμνόμενοι κύκλοι (Ο) καὶ (Ο') τῶν ὁποίων ἔστωσαν Α καὶ Β τὰ κοινὰ σημεῖα. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα ε διερχομένη διὰ τοῦ Α, ὥστε ἂν εἶναι Μ καὶ Μ' τὰ δεύτερα ἐκτὸς τοῦ Α, κοινὰ σημεῖα αὐτῆς μὲ τοὺς κύκλους (Ο) καὶ (Ο'), νὰ εἶναι ΜΜ' = λ. (1)

22. Δίδεται κύκλος (Ο). Νὰ κατασκευασθῇ χορδὴ ΑΒ αὐτοῦ ὥστε (1). ΑΒ = λ καὶ (2). Ἡ εὐθεῖα ΑΒ νὰ ἔχῃ δοθεῖσαν διεύθυνσιν.

23. Δίδεται κύκλος (Ο) καὶ εὐθεῖα ε. Νὰ κατασκευασθῇ χορδὴ ΑΒ τοῦ (Ο) παράλληλος πρὸς τὴν ε, ὥστε ἂν εἶναι Α' καὶ Β' αἱ προβολαὶ τῶν Α καὶ Β ἀντιστοίχως ἐπὶ τὴν ε, ἡ περίμετρος τοῦ ὀρθογωνίου ΑΑ'Β'Β νὰ εἶναι δοχεῖσα 2τ (τ δοθὲν εὐθ. τμῆμα).

24. Δίδονται δύο κύκλοι (Ο) καὶ (Γ). Νὰ εὑρεθοῦν δύο σημεῖα Μ καὶ Μ' τούτων ἀντιστοίχως, ὥστε νὰ ἱκανοποιοῦνται αἱ ἑξῆς δύο συνθῆκαι : (1) ΜΜ' = λ, ἔνθα λ δοθὲν εὐθ. τμῆμα καὶ (2). Ἡ εὐθεῖα ΜΜ' νὰ ἔχῃ δοθεῖσαν διεύθυνσιν.

25. Δίδονται δύο ἴσοι κύκλοι (Ο) καὶ (Ο') καὶ σημεῖον Α τοῦ (Ο). Νὰ εὑρεθοῦν δύο σημεῖα Μ καὶ Μ' τῶν (Ο) καὶ (Ο') ἀντιστοίχως ὥστε : (1) Ἡ ΜΜ' νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν διάκεντρον ΟΟ' καὶ (2) ἡ γωνία (ΑΜ, ΑΜ') ἴση πρὸς δοθεῖσαν γωνίαν φ.

26. Δίδεται εὐθεῖα ξ καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς δύο σημεῖα Α κὶ Β. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τῆς ξ ὥστε (ΜΑ, ΜΧ')=2 · (ΜΧ, ΜΒ), ἔνθα Χ' καὶ Χ σημεῖα τῆς ξ ἑκατέρωθεν τοῦ Μ.

27. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τῆς διχοτόμου τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας Α αὐτοῦ ὥστε (ΜΒ, ΜΑ) + (ΜΓ, ΜΑ) = φ, ἔνθα φ δοθεῖσα γωνία.

28. Δίδονται ἐπὶ του ἐπιπέδου δύο κύκλοι (Ο) καὶ (Γ) καὶ ἕνα σημεῖον Σ. Νὰ εὑρεθοῦν δύο σημεῖα Μ καὶ Μ' συμμετρικὰ ἀλλήλων ὡς πρὸς τὸ Σ καὶ κείμενα ἀντιστοίχως ἐπὶ τοῦ (Ο) καὶ (Γ).

29. Δίδονται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου δύο κύκλοι (Ο) καὶ (Γ) καὶ μία εὐθεῖα ξ. Νὰ εὑρεθοῦν δύο σημεῖα Μ καὶ Μ' τοῦ (Ο) καὶ (Γ) ἀντιστοίχως ὥστε νὰ ἱκανοποιοῦνται αἱ ἑξῆς συνθῆκαι : (1). Ἡ εὐθεῖα ΜΜ' νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ξ καὶ (2). τὸ εὐς τμῆμα ΜΜ' νὰ διχοτομῆται ὑπὸ τῆς ξ.

30. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Α αὐτοῦ σημεῖον Μ τοιοῦτον ὥστε ἡ διαφορὰ τῶν γωνιῶν (ΜΓ, ΜΑ) καὶ (ΜΑ, ΜΒ) νὰ εἶναι δοθεῖσα φ. Μέγιστον τῆς ἀνωτέρω διαφορᾶς.

31. Δίδονται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου δύο κύκλοι (Ο) καὶ (Ο') καὶ μία εὐθεῖα ξ. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τῆς ξ ὥστε αἱ ἀπὸ τούτου δύο ἐφαπτόμεναι τῶν (Ο) καὶ (Ο') ἀντιστοίχως νὰ σχηματίζουν ἴσας γωνίας μὲ τὴν ξ.

32. Δίδονται τρεῖς εὐθεῖαι α, β, γ. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τῆς μιᾶς τούτων ὥστε ἂν

---

(1) λ δοθὲν εὐθ. τμῆμα.

θεωρηθῆ ἡ διὰ τούτου παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν δ καὶ εἶναι Β καὶ Γ τὰ κοινὰ σημεῖα τῆς παραλλήλου αὐτῆς μὲ τὰς δύο ἄλλας ἐκ τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν, νὰ εἶναι ΜΒ = ΜΓ.

33. Δίδεται κύκλος (Ο) καὶ σημεῖον Α. Νὰ εὑρεθοῦν δύο σημεῖα Β καὶ Γ τοῦ (Ο) ὥστε ΑΒ = ΑΓ καὶ (ΑΒ, ΑΓ) = φ, ἔνθα φ δοθεῖσα γωνία.

34. Δίδονται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου : κύκλος (Ο), εὐθεῖα ε καὶ σημεῖον Α. Νὰ εὑρεθοῦν δύο σημεῖα Β καὶ Γ τῶν (Ο) καὶ ε ἀντιστοίχως ὥστε ΑΒ = ΑΓ καὶ (ΑΒ, ΑΓ) = φ.

35. Δίδονται δύο κύκλοι (Ο) καὶ (Ο΄) καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β τοῦ (Ο). Νὰ εὑρεθῆ σημεῖον Μ τοῦ (Ο), ὥστε ἂν Α΄ καὶ Β΄ εἶναι κοινὰ σημεῖα τοῦ (Ο΄) μὲ τὰς ΜΑ καὶ ΜΒ άζτιστοίχως, νὰ εἶναι Α΄Β΄ = λ, ἔνθα λ δοθὲν εὐθ τμῆμα.

36. Δίδονται δύο παράλληλοι εὐθεῖαι α καὶ β καὶ ἕνα σημεῖον Ο. Να΄ εὑρεθοῦν ἐπὶ τῶν α καὶ β ἀντιστοίχως, δύο σημεῖα Ε καὶ Ζ ὥστε ΕΖ = λ καὶ (ΟΕ, ΟΖ) = π/2

37. Δίδονται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου εὐθεῖα ε καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ε. Νὰ εὑρεθῆ τὸ σημεῖον Μ τῆς ε διὰ τὸ ὁποῖον ἡ γωνία (ΜΑ, ΜΒ) εἶναι μεγίστη.

38. Δίδονται δύο κύκλοι (Ο) καὶ (Ο΄). Νὰ εὑρεθῆ σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου των ὥστε νὰ ἱκανοποιοῦνται αἱ ἑξῆς δύο συνθῆκαι : (1) Αἱ ἐφαπτόμενικαὶ ἀποστάσεις ΜΑ καὶ ΜΑ΄ τοῦ Μ ἀπὸ τῶν (Ο) καὶ (Ο΄) νὰ εἶναι ἴσαι καὶ (2) Ἡ γωνία (ΜΑ, ΜΑ΄) νὰ εἶναι ἴση πρὸς δοθεῖσαν γωνίαν φ.

39. Δίδονται δύο σημεῖα Α καὶ Β. Νὰ κατασκευασθοῦν δύο παράλληλοι εὐθεῖαι α καὶ β διερχόμεναι ἀντιστοίχως διὰ τῶν Α καὶ Β ἀπέχουσαι ἀλλήλων δοθεῖσαν ἀπόστασιν λ.

40. Δίδονται τρία σημεῖα Α, Β, Γ. Νὰ κατασκευασθῆ εὐθεῖα ἀπέχουσα ἴσον ἀπὸ τούτων.

41. Δίδονται τρία σημεῖα Ρ, Α, Β. Νὰ κατασκευασθῆ εὐθεῖα δερχομένη διὰ τοῦ Ρ καὶ ἀπέχουσα ἀπὸ τῶν Α καὶ Β ἀποστάσεις ἐχούσας δοθεῖσαν διαφορὰν λ.

42. Δίδονται : εὐθεῖαι ε, σημεῖον Ο αὐτῆς καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β ἐκτὸς αὐτῆς. Νὰ κατασκεασθοῦν δύο εὐθεῖαι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας διερχόμεναι ἀντιστοίχως διὰ τῶν Α καὶ Β καὶ τέμνουσαι τὴν ε, ὥστε ἂν εἶναι Μ καὶ Ν τὰ κοινὰ σημεῖα ἀντιστοίχως, τὸ σημεῖον Ο νὰ εἶναι τὸ μέσον τοῦ εὐθ. τμήματος ΜΝ.

43. Δίδεται κύκλος (Ο) καὶ σημεῖον Α ἐξωτερικὸν αὐτοῦ. Νὰ κατασκευασθῆ εὐθεῖα διὰ τοῦ Α τέμνουσα τὸν (Ο) ὥστε ἡ ὁριζομένη ἐπ' αὐτῆς χορδὴ τοῦ (Ο) νὰ εἶναι ἴση πρὸς δοθὲν εὐθ. τμῆμα λ.

44. Δίδονται δύο κύκλοι (Ο) καὶ (Ο΄). Νὰ κατασκευασθῆ εὐθεῖα τέμνουσα τούτους ὥστε αἱ ὁριζόμεναι ἐπ' αὐτῆς χορδαὶ τῶν κύκλων τούτων νὰ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς δύο δοθέντα εὐθ. τμήματα λ καὶ λ΄.

45. Δίδονται δύο κύκλοι (Ο) καὶ (Ο΄), ἐκ τῶν ὁποίων ὁ (Ο΄) κεῖται ἐντὸς τοῦ (Ο). Νὰ κατασκευασθῆ ἐφαπτομένη τοῦ (Ο) ὥστε ἡ ἐπ' αὐτῆς ὁριζομένη χορδὴ τοῦ (Ο) νὰ εἶναι δοθεῖσα λ.

46. Δίδεται κύκλος (Ο) καὶ δύο ἐφαπτόμεναι α καὶ β αὐτοῦ. Νὰ κατασκευαστῆ ἐφαπτομένη τοῦ (Ο) ὥστε, ἂν εἶναι Μ καὶ Ν τὰ κοινὰ σημεῖα αὐτῆς μὲ τὰς α καὶ β ἀντιστοίχως, νὰ εἶναι ΜΝ = λ.

47. Δίδεται γωνία (ΟΧ, ΟΥ) καὶ ἐπὶ τῆς ΟΧ δύο σημεῖα Α καὶ Β. Νὰ κατασκευασθοῦν δύο παράλληλοι εὐθεῖαι διὰ τῶν Α καὶ Β ἀντιστοίχως, ὥστε ἂν εἶναι Α΄ καὶ Β΄ ἀντιστοίχως τὰ κοινὰ σημεῖα τούτων μὲ τὴν ΟΥ, νὰ εἶναι ΑΑ΄ + ΒΒ΄ = 2λ.

48. Δίδεται γωνία (ΑΥ, ΑΖ) καὶ σημεῖα Ρ. Νὰ κατασκευασθῆ εὐθεῖα ε διὰ τοῦ Ρ τέμνουσα τὰς πλευρὰς ΑΥ καὶ ΑΖ τῆς γωνίας ὥστε, ἂν εἶναι Β καὶ Γ ἀντιστοίχως τὰ κοινὰ σημεῖα, ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ νὰ εἶναι δοθεῖσα 2τ.

49. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ κατασκευασθῆ εὐθεῖα ε διερχομένη διὰ τοῦ Α ὥστε αἱ προβολαὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ τοῦ τριγώνου ἐπ' αὐτὴν νὰ ἔχουν (1) δοθὲν ἄθροισμα λ (2) δοθεῖσαν διαφορὰ λ.

50. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ κατασκευασθῆ εὐθεῖα ε τέμνουσα τὸ τρίγωνον ὥστε ἂν εἶναι Α΄, Β΄, Γ΄ τὰ κοινὰ σημεῖα αὐτῆς μὲ τὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως, νὰ εἶναι Α΄Β΄ = = Α΄Γ΄ = λ, ἔνθα λ δοθὲν εὐθ. τμῆμα.

51. Δίδεται τετράπλευρον ΑΒΓΔ, Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου του, τοῦ ὁποίου αἱ προβολαὶ ἐπὶ τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ ἀντιστοίχως κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

52. Νὰ κατασκευασθῇ κύκλος (Ω) δοθείσης ἀκτῖνος r
(1) Ἐφαπτόμενος δοθείσης εὐθείας ε καὶ διερχόμενος διὰ δοθέντος σημείου Α.
(2) Διερχόμενος διὰ δοθέντος σημείου Α καὶ ὁρίζων ἐπὶ δοθείσης εὐθείας ε, ἢ ἐπὶ δοθέντος κύκλου (Ο), χορδὴν ἴσην πρὸς δοθὲν εὐθ. τμῆμα λ.
(3) Ἐφαπτόμενος δοθέντος κύκλου (Ο) καὶ ἔχων τὸν κέντρον του ἐπὶ δευτέρου δοθέντος κύκλου (Ο').
(4) Ὁρίζων ἐπὶ δοθέντος κύκλου (Ο) χορδὴν ἴσην πρὸς δοθὲν εὐθ. τμῆμα λ καὶ ἐφαπτόμενος δοθείσης εὐθείας ε (ἢ δοθέντος κύκλου (Ο')).
(5) Τέμνων δύο δοθέντας κύκλους (Ο) καὶ (Ο') κατὰ διάμετρον
(6) Ἐφαπτόμενος ἐσωτερικῶς ἢ ἐξωτερικῶς δύο δοθέντων τεμνομένων κύκλων (Ο) καὶ (Ο')
(7) Τέμνων ὀρθογωνίως δοθέντα κύκλον (Ο) καὶ κατὰ διάμετρον δεύτερον δοθέντα κύκλον (Ο').

53. Νὰ κατασκευασθῇ κύκλος (Ω) :
(1) Ἐφαπτόμενος δύο δοθεισῶν παραλλήλων εὐθειῶν καί, ἐξωτερικῶς, ἑνὸς δοθέντος κύκλου (Ο)
(2) Ὁρίζων ἐπὶ τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν χορδὰς ἴσας πρὸς δοθὲν εὐθ. τμῆμα λ.
(3) Ἐφαπτόμενος τριῶν δοθέντων ἴσων κύκλων.

54. Νὰ κατασκευασθῇ κύκλος (Ω) ἐφαπτόμενος δοθείσης εὐθείας ε καὶ δοθέντος κύκλου (Ο) εἰς δοθὲν σημεῖον αὐτοῦ.

55. Νὰ κατασκευασθῇ κύκλος (Ω) ἐφαπτόμενος δοθέντος κύκλου (Ο) καὶ δευτέρου δοθέντος κύκλου (Ο') εἰς δοθὲν σημεῖον Α αὐτοῦ.

56. Νὰ κατασκευασθῇ κύκλος ἐφαπτόμενος δοθείσης εὐθείας ε εἰς δοθὲν σημεῖον Α αὐτῆς καὶ διερχόμενος διὰ δευτέρου δοθέντος σημείου Β.

57. Δίδεται γωνία (ΟΧ, ΟΥ). Νὰ ἐγγραφῇ εἰς τὴν γωνίαν αὐτὴν κύκλος (Ω) ἔχων δοθεῖσαν ἀκτῖνα ρ.

58. Νὰ κατασκευασθῇ κύκλος (Ω) δοθείσης ἀκτῖνος ρ
(1) Διερχόμενος διὰ δύο δοθέντων σημείων Α καὶ Β.
(2) Ἐφαπτόμενος δοθείσης εὐθείας ε εἰς δοθὲν σημεῖον Α αὐτῆς.

59. Νὰ κατασκευασθοῦν δύο κύκλοι (Ω) καὶ (Ω') ὥστε νὰ ἱκανοποιοῦνται αἱ ἑξῆς δύο συνθῆκαι : (1) Οἱ κύκλοι νὰ διέρχωνται ἀντιστοίχως διὰ δύο δοθέντων σημείων Α καὶ Β (2) Νὰ τέμνωνται ὀρθογωνίως κατὰ ἕνα τρίτον δοθὲν σημεῖον Γ.

60. Δίδονται τρία σημεῖα Α, Β, Γ μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας. Νὰ κατασκευασθοῦν τρεῖς κύκλοι ἔχοντες κέντρα τὰ ἀνωτέρω σημεῖα καὶ ἐφάπτόμενοι ἀλλήλων ἀνὰ δύο.

61. Νὰ κατασκευασθοῦν δύο κύκλοι (Ω) καὶ (Ω') ὅταν δίδωνται αἱ ἐφαπτομενικαὶ αὐτῶν ἀποστάσεις (ἐπὶ τῶν ἐξωτερικῶν καὶ ἐσωτερικῶν ἐφαπτομένων των) καὶ ἡ γωνία τῆς διακέντρου των μὲ μίαν κοινὴν ἐξωτερικὴν ἐφαπτομένην.

62. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων :
(1). α, Γ, υ_1. (2). α, Γ, υ_2. (3). α, Γ, μ_1 · (4). α, Γ, μ_2. (5). α, Γ, μ_3. (6). α, Γ, $\beta+\gamma$ (7). α, Γ,$\beta-\gamma$. (8). α, Α, υ_1 (9). α, Α, υ_2 (10). α, Α, μ_1. (11). α, Α, μ_2. (12). α, Α, ρ (13). α, Α, $\beta+\gamma$. (14). α, Α,$\beta-\gamma$

63. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων :
(1). $\beta+\gamma$, Β – Γ, υ_2 (2). $\beta-\gamma$, Β – Γ, υ_2 (3). r, $\beta+\gamma$, Β – Γ. (4). r, $\beta-\gamma$, Β – Γ. (5). r, $\beta+\gamma$, $\upsilon_2+\upsilon_3$ (6). ρ, υ_1, Α (7). ρ, υ_1, Β – Γ (8). r, υ_1, Β – Γ. (9). υ_1, δ_1, μ_1 (10). r, δ_1, Β – Γ.

64. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων :
(1). Β, υ_2, υ_3 (2). Β, υ_1, υ_3 (3). Β, μ_3, μ_2, (4). Β, μ_3, μ_1. (5). υ_1, μ_1, μ_2 (6). Β, δ_2, υ_1. (7). Β, δ_2, υ_2 (8). Α, ρ, 2r. (9). Α, r, 2τ. (10). Α, δ_1, ρ (11). Α, υ_2, μ_2 (12). Α, υ_2, μ_1 (13). Α, υ_2, μ_3. (14). Α, r, ρ (15). Α, υ_1, r (16). Α, υ_2, r (17). Α, μ_1, r (18). Α, μ_2, r.

65. Νὰ κατασκευασθῆ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων (σημείων) :
(1). A, O, O_1 (2). A, O_1, H (3). B, G, H (4). B, Γ, G (5). B, Γ, I (6). B, Γ, I' (7). B, Γ, I'' (8). B, Γ, I''' (9). H, G, H_1 (10). H_1, H, O (11). H_1, H_2, H_3 (12). O_1, O_2, O_3 (13). A, H, G (14). I, O, I'. (15). I, I', I''. (16). I', I'', O (17). A, G, O (18). B, O, Ω (1)

66. Νὰ κατασκευασθῆ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων :
(1). α, A, $B-\Gamma$. (2). $\alpha, \beta+\gamma, B-\Gamma$ (3). $\alpha, \beta-\gamma, B-\Gamma$ (4). α, 2τ, r (5). α, $OO_1=\lambda$, $OO_2=\mu$. (6). $\beta, \gamma, B-\Gamma$.

67. Νὰ κατασκευασθῆ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων :
(1). $\alpha, \beta+\gamma$ (2). $\alpha, \beta-\gamma$. (3). B, ρ. (4). $B, 2\tau$ (5). α, μ_2 (6). β, μ_1. (7). β, μ_2. (8). $\upsilon_1, B-\Gamma$ (9). $\delta_1, B-\Gamma$ (10). $2\tau, B-\Gamma$. (11). δ_2, σημεῖον Ι.

68. Νὰ κατασκευασθῆ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἐκ τῶν στοιχείων :
(1). A, 2τ (2). υ_1, 2τ

69. Νὰ κατασκευασθῆ τρίγωνον ΑΒΓ ὅταν δίδωνται τὰ στοιχεῖα :
(1). (Ο), γωνίαι Β, Γ. (2). (Ι), γωνίαι Β, Γ. (3). Κύκλοι (Ι) καὶ (Ι').
(4). Κύκλοι (Ι'') καὶ (Ι''').
(5). (Ο), αἱ διευθύνσεις τῶν ΑΒ, ΑΓ καὶ ἡ συνθήκη ὅπως ἡ ΑΓ διέρχεται διὰ δοθέντος σημείου Ρ.
(6). (Ο), καὶ αἱ διευθύνσεις τῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ.
(7). (Ο), Α, καὶ ἡ συνθήκη ὅπως αἱ ΑΒ καὶ ΑΓ διέρχωνται ἀντιστοίχως ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖο Ρ καὶ Σ.
(8). (Ο), ἡ διεύθυνσις τῆς ΒΓ, καὶ ἡ συνθήκη ὅπως αἱ ΑΒ καὶ ΑΓ διέρχωνται ἀντιστοίχως ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα Ρ καὶ Σ.
(9). Σημεῖα O_2, O_3 καὶ ἡ συνθήκη ὅπως οἱ κορυφαὶ Α καὶ Β εἶναι ἀντιστοίχως σημεῖα δύο δοθέντων κύκλων (ἢ μιᾶς εὐθείας καὶ ἑνὸς κύκλου ἢ δύο εὐθειῶν).
(10). Κορυφαί, Β, Γ, Γωνία Β καὶ τὸ ἐπὶ τῆς ΒΓ σημεῖον Ρ τῆς ΟΑ.
(11). Κορυφὴ Α, πλευρὰ α, συνθῆκαι ὅπως : ἡ ΒΓ εἶναι γνωστῆς διευθύνσεως καὶ αἱ κορυφαὶ Β καὶ Γ ἀντιστοίχως σημεῖα δύο δοθεισῶν εὐθεῶν ε_1 καὶ ε_2 (ἢ δύο δοθέντων κύκλων ἢ μιᾶς εὐθείας καὶ ἑνὸς κύκλου).
(12). Κορυφαὶ Β, Γ, διαφορὰ γωνιῶν $B-\Gamma$, καὶ συνθήκη ὅπως ἡ κορυφὴ Α εἶναι σημεῖον μιᾶς δοθείσης εὐθείας ε.
(13) Κορυφαὶ Β, Γ, $\beta-\gamma$ καὶ συνθήκη ὅπως ἡ κορυφὴ Α εἶναι σημεῖον μιᾶς εὐθείας δοθείσης ε.

70. Νὰ κατασκευασθῆ τρίγωνον ΑΒΓ ὅταν δίδωνται :
(1) Αἱ συνθῆκαι : (α) Ὅπως εἶναι ἴσον πρὸς δοθὲν τρίγωνον.
(β) Αἱ ΑΒ καὶ ΑΓ διέρχωνται ἀντιστοίχως ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα Ρ καὶ Σ.
καὶ (γ) Ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Α οὐτοῦ εἶναι ἐφαπτομένη δοθέντος κύκλου (Γ).
(2) Αἱ συνθῆκαι ὅπως εἶναι ἴσον πρὸς δοθὲν τρίγωνον καὶ περιγεγραμμένον περὶ δοθὲν τρίγωνον Α'Β'Γ'.

71. Νὰ κατασκευασθῆ τρίγωνον ΑΒΓ ὅταν δίδωνται :
(1) Αἱ μεσοκάθετοι ξ_1, ξ_2, ξ_3 τῶν πλευρῶν του καὶ ἡ συνθήκη ὅπως ἡ κορυφὴ Α εἶναι σημεῖον τῆς ξ_1.
(2) Αἱ μεσοκάθετοι ξ_1, ξ_2, ξ_3 καὶ τὸ σημεῖον O_1 (μέσον τῆς πλευρᾶς ΒΓ).
(3) Αἱ διὰ τῶν κορυφῶν του κάθετοι η_1, η_2, η_3 ἐπὶ τὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως καὶ ἡ κορυφὴ Α.
(4) Αἱ εὐθεῖαι ἐπὶ τῶν ὁποίων κεῖνται αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν του καὶ ἕνα σημεῖον Ρ αὐτοῦ (ἢ ἡ κορυφὴ Α).
(5) Αἱ δύο εὐθεῖαι ἐπὶ τῶν ὁποίων κεῖνται αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ αὐτοῦ καὶ δύο σημεῖα Ρ καὶ Σ τῶν ΑΒ καὶ ΑΓ ἀντιστοίχως (ἢ ἡ κορυφὴ Α).
(6) Ὁ κύκλος (Ι) καὶ ἡ συνθήκη ὅπως αἱ κορυφαί του εἶναι ἀντιστοίχως σημεῖα τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν διερχομένων διὰ τοῦ κέντρου Ι τοῦ κύκλου (Ι).

---

(1) Ω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου Euler τοῦ τριγώνου

72. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ὅταν δίδωνται :
(1) Σημεῖα O_2, O_3 καὶ συνθήκη ὅπως αἱ κορυφαὶ Β καὶ Γ εἶναι ἀντιστοίχως σημεῖα δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ε_2 καὶ ε_3 (ἢ κύκλων)
(2) Σημεῖα Α, O_1 καὶ συνθήκη ὅπως αἱ κορυφαὶ Β καὶ Γ εἶναι ἀντιστοίχως σημεῖα δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ε_2 καὶ ε_3 (ἢ κύκλων).
(3) Σημεῖα O_1, H_3, Δ_2 καὶ ἡ συνθήκη $O_1H_3 = O_1\Delta_2$ ἢ σημεῖα O_1, H_3, Δ_3 καὶ συνθήκη $\Delta_2O_1 = \Delta_2H_3$
(4) Σημεῖα Β, Γ, Η, καὶ διαφορὰ γωνιῶν $B - \Gamma$
(5) Σημεῖα O_1, Δ_1, H_1, καὶ ἀκτὶς r
(6) Κορυφαὶ Β, Γ, ὕψος υ_1 καὶ συνθήκη ὅπως ἡ περίμετρος εἶναι ἐλαχίστη.
(7) Κορυφαὶ Β, Γ καὶ μέσον P_3 τοῦ εὐθ. τμήματος I′ I″
(8) Κορυφαὶ Β, Γ, Γωνία Α καὶ ἡ συνθήκη ὅπως ἡ διχοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας Α τοῦ τριγώνου διέρχεται διὰ δοθέντος σημείου Ρ.
(9) Κορυφαί, Α′, Β′, Γ′ τῶν ἰσοπλεύρων τριγώνων ΒΓΑ′, ΓΑΒ′ ΑΒΓ′ τὰ ὁποῖα κεῖνται πρὸς τὸ μέρος τῶν εὐθειῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖνται αἱ κορυφαὶ Α, Β, Γ

73. Εἰς δοθέντα κύκλον (Ο) νὰ ἐγγραφῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νὰ διέρχωνται ἀντιστοίχως διὰ τριῶν δοθέντων σημείων.

74. Δίδονται δύο εὐθεῖαι ε καὶ ε′ τῶν ὁποίων ἔστω Ο τὸ κοινὸν σημεῖον. Νὰ εὑρεθοῦν δύο σημεῖα Μ καὶ Μ′ τῶν ε καὶ ε′ ἀντιστοίχως ὥστε νὰ ἱκανοποιοῦνται αἱ ἑξῆς δύο συνθῆκαι : (α) $MM' = \lambda$ (β) Ἂν εἶναι Σ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν καθέτων ἐπὶ τὰς ε καὶ ε′ εἰς τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ′ ἀντιστοίχως, καὶ Ν καὶ Ν′ τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν ε καὶ ε′ ἀντιστοίχως μὲ τὴν διὰ τοῦ Σ κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΣ, νὰ εἶναι $NN' = \mu$ (λ καὶ μ δοθέντα εὐθ. τμήματα).

75. Νὰ κατασκευασθῇ τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἐκ τῶν στοιχείων :
(1) $AB = \alpha$, $\Gamma\Delta = \gamma$, $\Delta A = \delta$ καὶ Γωνίαι Β, Γ
(2) Κύκλος (Ο), $AB = \alpha$, $\Delta A = \delta$, $\beta + \gamma = \delta$.
(3) Κύκλος (Ο), $AB = \alpha$, $\Gamma\Delta = \gamma$, $\beta + \delta = \lambda$
(4) $A\Gamma = \lambda$, $B\Delta = \mu$, Γωνίαι Α, Γ, γωνία $(A\Gamma, B\Delta) = \varphi$.
(5) $AB = \alpha$, $\Gamma\Delta = \gamma$, $A\Gamma = \lambda$, $B\Delta = \mu$, γωνία $(A\Gamma, B\Delta) = \varphi$.
(6) $AB = \alpha$, $B\Gamma = \beta$ $\Gamma\Delta = \gamma$, $\Delta A = \delta$ καὶ τῆς συνθήκης ὅμως ἡ διαγώνιος ΑΓ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Α αὐτοῦ.
(7) $AB = \alpha$, $\Delta A = \delta$, Γωνίαι Β, Δ καὶ συνθήκη ὅπως εἶναι περιγράψιμον.
(8) Γωνίαι Α,Β,Γ, διαγώνιοι $A\Gamma = \lambda$, $B\Delta = \mu$.

76. Νὰ κατασκευασθῇ τραπέζιον ΑΒΓΔ ἐκ τῶν στοιχείων :
(1) $B\Gamma = \beta$, $A\Gamma = \lambda$, $B\Delta = \mu$, διάμεσος σ συνδέουσα τὰ μέσα τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν.
(2) Μέσα, Μ, Ν, Ρ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ αὐτοῦ ἀντιστοίχως καὶ εὐθ. τμῆμα σ συνδέον τὰ μέσα τῶν δαγωνίων του.

77. Νὰ κατασκεεασθῇ ἐγγράψιμον τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἐκ τῶν στοιχείων :
$AB = \alpha$, $B\Gamma = \beta$, $A\Gamma = \lambda$, γωνία$(A\Gamma, B\Delta) = \varphi$.

78. Νὰ κατασκευασθῇ τετράπλευρον τοῦ ὁποίου δίδονται :
(1) Ὁ ἐγγρεγραμμένος κύκλος (Ι) καὶ αἱ τρεῖς γωνίαι.
(2) Ἡ πλευρὰ $AB = \alpha$ καὶ αἱ γωνίαι Α καὶ Γ.
(3) Αἱ πλευραὶ $AB = \alpha$, $B\Gamma = \beta$, $\Gamma\Delta = \gamma$, $\Delta A = \delta$ καὶ τὸ εὐθ. τμῆμα τὸ ὁποῖον συνδέει τὰ μέσα δύο ἀπέναντι πλευρῶν του.
(4) Τὰ μέσα Μ, Ν, Ρ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ καὶ αἱ γωνίαι Α καὶ Γ (ἢ αἱ γωνίαι Α καὶ Β).

79. Δίδονται δύο ὁμόκεντροι κύκλοι. Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον τοῦ ὁποίου αἱ δύο πλευραὶ νὰ εἶναι χορδαὶ τῶν δύο κύκλων ἀντιστοίχως.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

(1) Εἰς τὸ σύνολον τῶν προσανατολισμένων εὐθ. τμημάτων ἐπὶ ἄξονος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

ΤΟ ΤΡΙΓΩΝΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

ΤΟ ΑΞΙΩΜΑ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΚΑΙ ΑΙ ΣΥΝΕΠΕΙΑΙ ΑΥΤΟΥ

(1) Εἰς τὸ συνόλου τῶν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου διανυσμάτων

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ ΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

ΤΟ ΠΟΛΥΓΩΝΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII

Ο ΚΥΚΛΟΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VIII

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ ΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ

---

(1) Εἰς τὸ σύνολον τῶν τόξων.

024000039894

ΕΚΔΟΣΙΣ Α΄ 1968 (XII) - ΑΝΤ. 90.000 - ΣΥΜΒ. 1786 / 12 - 10 - 68

'Εκτύπωσις - Βιβλιοδεσία : 'Ιω. Καμπανᾶ Ο.Ε. Φιλαδελφείας 4 ΑΘΗΝΑΙ