Δ. Παπαμιχαήλ
Σ. Μπαλής
Χρ. Γιαννίκος
Δ. Νοταρᾶς
Κ. Σολδάτος

μαθηματικά

γ΄ γυμνασίου
τεῦχος α΄

Ὀργανισμός
Ἐκδόσεως
Διδακτικῶν
Βιβλίων
Ἀθῆναι 1978

Σεπάρτη τις λοιπόν που είχαμε
της Γεωμετρία. τη θεωρία που
υπάρχει στη Κυριακή. που
είναι από το β' Γυμνασίου
Να βρεθεί η διαγώνιος ορθογωνίου
++ παραλληλεπιπέδου διαστάσεων α, β, γ.
η λύση του από το βιβλίο της
β' γυμνασίου.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Σταυρόπουλος Σωτήρης.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Μέ ἀπόφαση τῆς Ἑλληνικῆς Κυβερνήσεως τά διδακτικά βιβλία τοῦ Δημοτικοῦ, Γυμνασίου καί Λυκείου τυπώνονται ἀπό τόν Ὀργανισμό Ἐκδόσεως Διδακτικῶν Βιβλίων καί μοιράζονται ΔΩΡΕΑΝ.

Δ. ΠΑΠΑΜΙΧΑΗΛ - Σ. ΜΠΑΛΗΣ
ΧΡ. ΓΙΑΝΝΙΚΟΣ - Δ. ΝΟΤΑΡΑΣ - Κ. ΣΟΛΔΑΤΟΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ΄

ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΤΕΥΧΟΣ Α΄

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑ 1978

ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΥΜΒΟΛΩΝ

ΣΥΜΒΟΛΟ	ΣΗΜΑΣΙΑ
N, N^*	$N = \{0,1,2,3,\ldots\}$, $N^* = \{1, 2, 3,\ldots\}$
Z, Z^*	$Z = \{0, \pm 1, \pm 2,\ldots\}$, $Z^* = \{\pm 1, \pm 2,\ldots\}$
Q, Q^*	$Q = \left\{x \mid x = \frac{\alpha}{\beta},\ \alpha \in Z,\ \beta \in Z^*\right\}$, $Q^* = Q - \{0\}$
R, R^*	R : τό σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν $R^* = R - \{0\}$
$\in, \notin$	ἀνήκει, δέν ἀνήκει
$\Leftrightarrow$	ἰσοδυναμεῖ μέ...
$\Rightarrow$	συνεπάγεται
$<, >$	μικρότερο, μεγαλύτερο
$\leqq, \geqq$	μικρότερο ἤ ἴσο, μεγαλύτερο ἤ ἴσο
$\simeq$	ἴσο μέ προσέγγιση
$\cap, \cup$	τομή, ἕνωση
$\subseteq, \subset$	ὑποσύνολο, γνήσιο ὑποσύνολο
$A \times B$	καρτεσιανό γινόμενο τοῦ Α ἐπί τό Β
$\varphi: A \to B$	ἀπεικόνιση τοῦ συνόλου Α στό σύνολο Β ἤ συνάρτηση μέ πεδίο ὁρισμοῦ $A \subseteq R$ καί τιμές στό Β
$\varphi(\chi)$	εἰκόνα τοῦ x στὴν ἀπεικόνιση φ ἤ τιμή τῆς συναρτήσεως φ ἀντίστοιχη τοῦ x
$\overrightarrow{AB}$	διάνυσμα μέ ἀρχή τό Α καί τέλος τό Β
$\overline{AB}$, $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$	ἀλγεβρική τιμή τοῦ $\overrightarrow{AB}$, μέτρο τοῦ $\overrightarrow{AB}$
(AB)	μῆκος τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ
$M(\alpha,\beta)$	σημεῖο Μ, πού ἔχει συντεταγμένες α καί β
$\vec{\delta} = (\alpha, \beta)$	διάνυσμα $\vec{\delta}$, πού ἔχει συντεταγμένες α καί β
ημθ, συνθ, εφθ	ἡμίτονο, συνημίτονο, ἐφαπτομένη τῆς γωνίας θ
π	τό πηλίκο τοῦ μήκους ἑνός κύκλου πρός τό μῆκος μιᾶς διαμέτρου του, $\pi \simeq 3,14$
$\widehat{AOB}$	γωνία μέ κορυφή τό Ο καί πλευρές ΟΑ, ΟΒ
$\overset{\frown}{AB}$	τόξο μέ ἄκρα τά Α καί Β

1ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Εἰσαγωγή.

1.1. Στήν Α΄ καί τή Β΄ τάξη μάθαμε τά βασικά σύνολα ἀριθμῶν. Ξεκινήσαμε ἀπό τό *σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν*

$$N = \{0,1,2,3\ldots\}$$

στό ὁποῖο ὁρίσαμε τίς βασικές πράξεις, πρόσθεση καί πολλαπλασιασμό, καί μέ τή βοήθεια αὐτῶν τήν ἀφαίρεση καί τή διαίρεση. Διαπιστώσαμε ὅτι ἡ ἀφαίρεση καί ἡ διαίρεση δέν εἶναι πάντοτε δυνατές μέσα στό σύνολο τῶν φυσικῶν.

Γιά νά ἔχει πάντοτε νόημα ἡ διαφορά δύο φυσικῶν ἀριθμῶν «ἐπεκτείναμε» τό σύνολο τῶν φυσικῶν καί δημιουργήσαμε τό *σύνολο τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν*

$$Z = \{\ldots -2, -1, 0, 1, 2\ldots\}$$

Διαπιστώσαμε ὅτι:

- *Τό σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν περιέχεται στό σύνολο τῶν ἀκεραίων.*
- *Οἱ ἰδιότητες τῶν πράξεων τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ἰσχύουν καί στό σύνολο τῶν ἀκεραίων.*
- *Ἡ διάταξη τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν «ἐπεκτείνεται» καί στό σύνολο τῶν ἀκεραίων.*
- *Στό σύνολο τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἔχει πάντοτε νόημα ἡ ἀφαίρεση α—β.*

Στό νέο σύνολο τῶν ἀκεραίων Ζ δέν ἔχει πάντοτε νόημα τό πηλίκο α : β. Ἔτσι π.χ. δέν ἔχει νόημα τό πηλίκο 5 : 3 ἤ τό 8 : (—5). Γιά νά εἶναι πάντοτε δυνατή ἡ διαίρεση α : β ($\beta \neq 0$), κάναμε δύο νέες «ἐπεκτάσεις». Ἀπό τό σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν δημιουργήσαμε τό «σύνολο τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν» καί ἀπό τό σύνολο τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν δημιουργήσαμε τό «σύνολο τῶν σχετικῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν». Τότε ἡ διαίρεση π.χ. 5:3 μᾶς δίνει πηλίκο τό κλάσμα $\frac{5}{3}$ καί ἡ διαίρεση 8 : (—5) μᾶς δίνει πηλίκο τό σχετικό κλάσμα $-\frac{8}{5}$.

Μετά ἀπό αὐτές τίς «ἐπεκτάσεις» δημιουργήσαμε τό *σύνολο τῶν ρητῶν ἀριθμῶν:*

$$Q = \left\{ x | x = \frac{\alpha}{\beta},\ \alpha \in Z,\ \beta \in Z^* \right\},$$

πού ἔχει ὡς στοιχεῖα του ὅλα τά ἀνάγωγα σχετικά κλάσματα.

(Συνηθίζουμε ὅμως νά λέμε ρητό ἀριθμό καί κάθε μή ἀνάγωγο σχετικό κλάσμα, γιατί ὑπάρχει πάντα ἕνα στοιχεῖο τοῦ Q ἴσο μ' αὐτό).

Γιά τό σύνολο Q διαπιστώσαμε ὅτι:

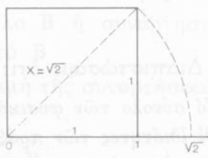
- *Τό σύνολο Z τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν περιέχεται στό σύνολο τῶν ρητῶν.*
- *Οἱ ἰδιότητες τῶν πράξεων τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἰσχύουν καί στό σύνολο τῶν ρητῶν ἀριθμῶν.*
- *Ἡ διάταξη τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν «ἐπεκτείνεται» καί στό σύνολο τῶν ρητῶν ἀριθμῶν.*
- *Στό σύνολο τῶν ρητῶν ἀριθμῶν ἔχει πάντοτε νόημα ἡ διαίρεση $\alpha : \beta$ ($\beta \neq 0$).*

Τό σύνολο τῶν ἄρρητων ἀριθμῶν.

1.2. Διαπιστώθηκε ὅτι καί μέ τό νέο σύνολο Q τῶν ρητῶν ἀριθμῶν δέ μποροῦμε νά λύσουμε ὁρισμένα προβλήματα, ὅπως π.χ. τό *«Νά ὑπολογισθεῖ τό μῆκος τῆς διαγωνίου ἑνός τετραγώνου μέ πλευρά 1 μονάδα μήκους».*
Ἄν τό μῆκος τῆς διαγωνίου εἶναι x μονάδες μήκους, τότε σύμφωνα μέ τό Πυθαγόρειο θεώρημα ἔχουμε (σχ. 1).

$$x^2 = 1^2 + 1^2 = 2.$$

Βλέπουμε δηλαδή ὅτι ὁ ἀριθμός x ἐπαληθεύει τή συνθήκη *«τό τετράγωνο τοῦ x ἰσοῦται μέ δύο»* καί, ὅπως ξέρουμε, σημειώνεται μέ $\sqrt{2}$.



(σχ. 1)

Μποροῦμε νά βεβαιωθοῦμε ὅτι ὁ $x = \sqrt{2}$ δέν εἶναι ρητός ἀριθμός, δηλαδή δέν εἶναι οὔτε ἀκέραιος οὔτε κλάσμα. Εἶναι φανερό ὅτι ὁ x δέν εἶναι ἀκέραιος, γιατί $1^2 = 1 < 2$ καί $2^2 = 4 > 2$. Ὥστε:

$$1 < \sqrt{2} < 2$$

Θά ἐξετάσουμε τώρα ἄν ὁ $\sqrt{2}$ εἶναι κλάσμα(1).

Ὑποθέτουμε ὅτι ὑπάρχει κλασματικός ἀριθμός $\frac{\mu}{\nu}$ τέτοιος, ὥστε

$$\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2 = \frac{\mu^2}{\nu^2} = 2, \qquad \mu, \nu \in N^*$$

(1). Θά ἀκολουθήσουμε μία μέθοδο συλλογισμοῦ πού, ὅπως θά μάθουμε ἀργότερα, λέγεται «ἀπαγωγή σέ ἄτοπο».

Ὑποθέτουμε ἀκόμη ὅτι τό κλάσμα $\frac{\mu}{\nu}$ εἶναι ἀνάγωγο, γιατί, ἄν δέν εἶναι, μποροῦμε νά τό κάνουμε διαιρώντας τούς ὅρους του μέ τό μ.κ.δ τῶν μ καί ν. Τότε ἔχουμε:

$$\frac{\mu^2}{\nu^2} = 2 \Leftrightarrow \mu^2 = 2\nu^2 \Leftrightarrow \mu \cdot \mu = 2\nu^2 \quad (1)$$

Ἡ ἰσότητα (1) φανερώνει ὅτι ὁ 2, πού εἶναι πρῶτος ἀριθμός, διαιρεῖ τόν μ.μ (γιατί διαιρεῖ τόν ἴσο του $2\nu^2$) συνεπῶς καί τό φυσικό ἀριθμό μ. Τότε ὅμως ὁ μ εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 2 καί μποροῦμε νά τόν γράψουμε $\mu = 2\lambda$, $\lambda \in N^*$. Ἄν στήν ἰσότητα (1) ἀντικαταστήσουμε τόν μ μέ 2λ, βρίσκουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned}(2\lambda)^2 &= 2\nu^2\\ 4\lambda^2 &= 2\nu^2\\ 2\lambda^2 &= \nu^2\\ 2\lambda^2 &= \nu \cdot \nu. \qquad (2)\end{aligned}$$

Ἀπό τήν ἰσότητα (2) καταλαβαίνουμε ἐπίσης ὅτι ὁ 2 διαιρεῖ τό ν. Καταλήξαμε λοιπόν στό συμπέρασμα ὅτι οἱ ἀριθμοί μ καί ν ἔχουν κοινό διαιρέτη τό 2, πράγμα πού δέν εἶναι σωστό, γιατί ὑποθέσαμε ὅτι ὁ μ καί ὁ ν δέν ἔχουν κοινό διαιρέτη διαφορετικό ἀπό τόν 1. Αὐτή ἡ ἀντίφαση, στήν ὁποία καταλήξαμε, μᾶς βεβαιώνει ὅτι ἡ ἀρχική ὑπόθεσή μας (ὁ x εἶναι ρητός) δέν εἶναι ἀληθής, δηλαδή δέν ὑπάρχει ρητός ἀριθμός x τέτοιος, ὥστε:

$$x^2 = 2.$$

Ἑπομένως ὁ $\sqrt{2}$ δέν εἶναι ρητός ἀριθμός. Βλέπουμε λοιπόν ὅτι: ἀπό τή μιά μεριά δέν ὑπάρχει ρητός x τέτοιος, ὥστε $x^2 = 2$, ἀπό τήν ἄλλη ὅμως τό μῆκος x τῆς διαγωνίου τοῦ παραπάνω τετραγώνου εἶναι τέτοιο, ὥστε $x^2 = 2$. Διαπιστώνουμε ἔτσι τήν ἀνεπάρκεια τῶν ρητῶν ἀριθμῶν νά παραστήσουν ὁρισμένα μήκη, ὅπως εἶναι ἡ διαγώνιος τοῦ τετραγώνου πού ἔχει πλευρά 1 καί συνεπῶς:

Ὑπάρχουν ἀριθμοί πού δέν εἶναι ρητοί

Οἱ ἀριθμοί αὐτοί λέγονται **ἄρρητοι** ἤ **ἀσύμμετροι**[1] καί τό σύνολο ὅλων αὐτῶν λέγεται **σύνολο τῶν ἄρρητων ἀριθμῶν.**

Τό σύνολο, πού ἔχει γιά στοιχεῖα του ὅλους τούς ρητούς καί ὅλους

1. **Ἱστορική σημείωση.** Τήν ἔννοια τοῦ ἄρρητου ἀριθμοῦ ἀνακάλυψαν οἱ Πυθαγόρειοι φιλόσοφοι (Ἵππασος) καί τή μελέτησε διεξοδικά ὁ Θεαίτητος καί ὁ Εὔδοξος ἀπό τήν Κνίδο. Ὁ ἄρρητος ἀριθμός, ὡς δεκαδικός μή περιοδικός, ορίστηκε τό 1886 (Otto Stolz), ἐνῶ τό 1696 εἶχε ὁρισθεῖ ὁ ρητός ὡς δεκαδικός περιοδικός (Wallis).

τούς ἄρρητους ἀριθμούς, λέγεται **σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν** καί συμβολίζεται μέ **R.** Τό R δηλαδή εἶναι ἕνωση τοῦ συνόλου τῶν ρητῶν Q καί τοῦ συνόλου τῶν ἄρρητων.

Κάθε στοιχεῖο τοῦ R λέγεται ἁπλῶς «πραγματικός ἀριθμός». Ἔτσι ὅταν λέμε ὅτι *ὁ ἀριθμός α εἶναι πραγματικός* ἤ ὅταν γράφουμε $\alpha \in R$, θά ἐννοοῦμε ὅτι ὁ α μπορεῖ νά εἶναι ρητός ἤ ἄρρητος.

Ρητή προσέγγιση ἄρρητου ἀριθμοῦ.

1.3. Ἄς πάρουμε πάλι τόν ἄρρητο ἀριθμό $\sqrt{2}$ πού εἶναι, ὅπως εἴδαμε, ρίζα τῆς ἐξισώσεως $x^2 = 2$, δηλαδή εἶναι τέτοιος, ὥστε $(\sqrt{2})^2 = 2$. Γιά τόν ἀριθμό αὐτό βρήκαμε στήν Β' Τάξη τίς ἀνισότητες

$$1 < \sqrt{2} < 2$$
$$1,4 < \sqrt{2} < 1,5$$
$$1,41 < \sqrt{2} < 1,42$$
$$1,414 < \sqrt{2} < 1,415$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Βλέπουμε δηλαδή ὅτι μποροῦμε νά βροῦμε πάντοτε δύο δεκαδικούς ἀριθμούς μέ ὅσα θέλουμε δεκαδικά ψηφία, οἱ ὁποῖοι νά διαφέρουν μόνο κατά τό τελευταῖο δεκαδικό ψηφίο καί μεταξύ τῶν ὁποίων περιέχεται ὁ ἄρρητος ἀριθμός $\sqrt{2}$. Ἀπ' αὐτούς ὁ μικρότερος λέγεται **προσέγγιση μέ ἔλλειψη** τοῦ $\sqrt{2}$ καί ὁ μεγαλύτερος λέγεται **προσέγγιση μέ ὑπεροχή** τοῦ $\sqrt{2}$.

Ἔτσι π.χ. ἀπό τίς ἀνισότητες $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$ καταλαβαίνουμε ὅτι ὁ δεκαδικός ἀριθμός 1,414 εἶναι *«προσέγγιση χιλιοστοῦ μέ ἔλλειψη»* τοῦ $\sqrt{2}$, ἐνῶ ὁ 1,415 εἶναι *«προσέγγιση χιλιοστοῦ μέ ὑπεροχή»* τοῦ $\sqrt{2}$. Ὅταν χρησιμοποιοῦμε τήν προσέγγιση μέ ἔλλειψη τοῦ $\sqrt{2}$, μποροῦμε νά γράφουμε

$$\sqrt{2} = 1,414\ldots \quad \text{ἤ} \quad \sqrt{2} \simeq 1,414$$

Παράδειγμα: Νά βρεθεῖ ἡ προσέγγιση ἑκατοστοῦ μέ ἔλλειψη τῆς ρίζας τῆς ἐξισώσεως $x^2 = 5$ (ἡ ὁποία σημειώνεται μέ $\sqrt{5}$).

Λύση: Ἡ ρίζα τῆς ἐξισώσεώς μας δέν εἶναι ἀκέραιος, ἀφοῦ $2^2 = 4 < 5$ καί $3^2 = 9 > 5$. Ἔχουμε λοιπόν

$$2 < \sqrt{5} < 3.$$

Οἱ δεκαδικοί ἀριθμοί μέ ἕνα δεκαδικό ψηφίο, πού περιέχονται μεταξύ 2 καί 3, δηλ. οἱ 2,1, 2,2...2,9, ἔχουν τετράγωνα $(2,1)^2 = 4,41$, $(2,2)^2 = 4,84$, $(2,3)^2 = 5,29, \ldots$ Συνεπῶς

$$2,2 < \sqrt{5} < 2,3$$

Οἱ δεκαδικοί ἀριθμοί μέ δύο δεκαδικά ψηφία, πού περιέχονται μεταξύ 2,2 καί 2,3, έχουν τετράγωνα $(2,21)^2 = 4,8841$, $(2,22)^2 = 4,9284$, $(2,23)^2 = 4,9729$, $(2,24)^2 = 5,0176\ldots$ Ὥστε

$$2,23 < \sqrt{5} < 2,24$$

καί μποροῦμε, ὕστερα ἀπό ὅσα εἴπαμε παραπάνω, νά γράψουμε

$$\sqrt{5} \simeq 2,23$$

Δηλαδή ὁ ἀριθμός 2,23 εἶναι ἡ προσέγγιση ἑκατοστοῦ μέ ἔλλειψη τοῦ $\sqrt{5}$. Συνεχίζοντας τήν κοπιαστική αὐτή ἐργασία μποροῦμε νά βροῦμε προσεγγίσεις τοῦ $\sqrt{5}$ μέ περισσότερα δεκαδικά ψηφία. Τά συνηθισμένα *«κομπιουτεράκια»*(1) μᾶς δίνουν τέτοιες προσεγγίσεις μέ ἑπτά δεκαδικά ψηφία.

1.4. Ὅπως ξέρουμε ἀπό τή Β' τάξη κάθε ρητός μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς *ἁπλός δεκαδικός* ἀριθμός ἤ ὡς *περιοδικός ἀπειροψήφιος δεκαδικός* ἀριθμός π.χ.

$$+\frac{17}{80} = 0,2125, \; -\frac{431}{250} = -1,724, \; \frac{5}{12} = 0,4166\ldots$$

Ἐπειδή ὅμως κάθε ἁπλός δεκαδικός μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς περιοδικός ἀπειροψήφιος δεκαδικός μέ περίοδο τό 0, ὅπως π.χ.

$$+\frac{17}{80} = +0,2125000\ldots, -\frac{431}{250} = -1,724000\ldots,$$

καταλαβαίνουμε ὅτι κάθε ρητός ἀριθμός γράφεται ὡς περιοδικός ἀπειροψήφιος δεκαδικός. Ἀντίστροφα, κάθε περιοδικός ἀπειροψήφιος δεκαδικός παριστάνει ἕνα ρητό ἀριθμό.

Ὅπως εἴδαμε παραπάνω γιά κάθε ἕναν ἀπό τούς ἄρρητους ἀριθμούς $\sqrt{2}$ καί $\sqrt{5}$, μποροῦμε νά ἔχουμε μιά δεκαδική προσέγγιση **μέ ὅσα δεκαδικά ψηφία θέλουμε**, π.χ.

$$\sqrt{2} = 1,41421\ldots \qquad \sqrt{5} = 2,23\ldots$$

Ἀκόμη γιά τό γνωστό μας ἀπό τή γεωμετρία ἄρρητο π (λόγος τοῦ μήκους τοῦ κύκλου πρός τή διάμετρό του) ἔχουμε

$$\pi = 3,1415926536\ldots$$

Οἱ δεκαδικοί ὅμως ἀριθμοί, πού παριστάνουν ἄρρητους ἀριθμούς, δέν μπορεῖ νά εἶναι περιοδικοί (γιατί οἱ περιοδικοί δεκαδικοί παριστάνουν ρητούς). Συνεπῶς:

> Ἄρρητος ἀριθμός εἶναι αὐτός ὁ ὁποῖος στή δεκαδική του μορφή ἔχει ἄπειρα δεκαδικά ψηφία μή περιοδικά.

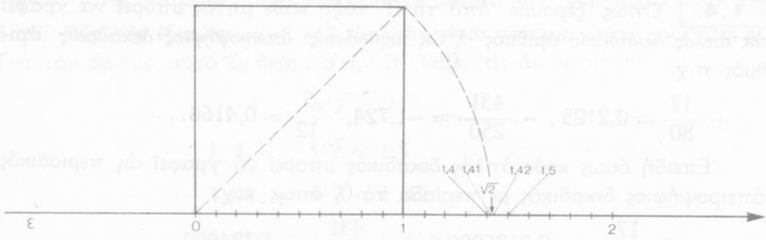
Ὥστε **ὅλοι οἱ πραγματικοί ἀριθμοί μποροῦν νά παρασταθοῦν μέ ἀπειροψήφιους δεκαδικούς· οἱ ρητοί μέ περιοδικούς δεκαδικούς καί οἱ ἄρρητοι μέ μή περιοδικούς.**

1. μικροί φορητοί ἠλεκτρονικοί ὑπολογιστές.

Ἡ εὐθεία τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

1.5. Ἐπάνω στή γνωστή μας εὐθεία τῶν ρητῶν ἀριθμῶν μποροῦμε νά ἀπεικονίσουμε καί τούς ἄρρητους.

Ὅπως εἴδαμε ὁ ἄρρητος $\sqrt{2}$ παριστάνει τό μῆκος διαγωνίου ἑνός τετραγώνου πού ἔχει πλευρά ἴση μέ μιά μονάδα μήκους (Σχ. 2). Ἑπομένως ὁ $\sqrt{2}$ θά ἔχει τήν εἰκόνα του ἐπάνω στό θετικό ἡμιάξονα τῶν ρητῶν πού ἀπέχει ἀπό τήν ἀρχή ἀπόσταση ἴση μέ τή διαγώνιο τοῦ τετραγώνου πού ἀναφέραμε.



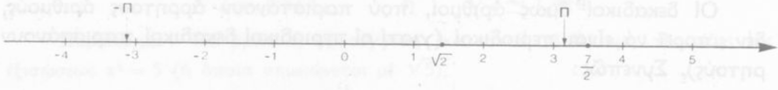
(σχ. 2)

Γενικά ὅμως ἕναν ἄρρητο ἀριθμό μποροῦμε νά τόν ἀπεικονίσουμε στήν εὐθεία ε καί μέ τή βοήθεια τῶν διαδοχικῶν προσεγγίσεών του. Τό σχ. 2 δείχνει πῶς κάνουμε τήν ἀπεικόνιση αὐτή βρίσκοντας κάθε φορά ἕνα πιό μικρό διάστημα, μέσα στό ὁποῖο περιέχεται ὁ ἀριθμός $\sqrt{2}$.

Ὁ τρόπος μέ τόν ὁποῖο ἀπεικονίσαμε τό $\sqrt{2}$ στήν εὐθεία ε μπορεῖ νά ἐφαρμοσθεῖ καί γιά ὁποιονδήποτε ἄλλο ἄρρητο ἀριθμό, καί ἔτσι:

- **Κάθε πραγματικός ἀριθμός ἀπεικονίζεται σέ ἕνα μόνο σημεῖο μιᾶς εὐθείας ε.**
- **Κάθε σημεῖο τῆς εὐθείας ε εἶναι εἰκόνα ἑνός μόνο πραγματικοῦ ἀριθμοῦ.**

Δηλαδή ὑπάρχει ἀντιστοιχία «ἕνα μέ ἕνα» τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου R μέ τά σημεῖα μιᾶς εὐθείας. Μιά τέτοια εὐθεία, στήν ὁποία ἀπεικονί-



(σχ. 3)

ζουμε ὅλους τούς πραγματικούς ἀριθμούς, (σχ. 3) τή λέμε **εὐθεία τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.**

Πράξεις στό σύνολο R.

1.6. Τό σύνολο R τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ἀποτελεῖται, ὅπως εἴπαμε, ἀπό τούς ρητούς καί τούς ἄρρητους ἀριθμούς. Ὅλες οἱ πράξεις, πού μάθαμε μέχρι τώρα, ἀφοροῦσαν τούς ρητούς ἀριθμούς. Τώρα θά δοῦμε πῶς γίνονται οἱ πράξεις μεταξύ ρητῶν καί ἄρρητων ἀριθμῶν ἤ μεταξύ ἄρρητων ἀριθμῶν.

Εἴδαμε ὅτι κάθε ἄρρητος προσεγγίζεται ὅσο θέλουμε μέ ἕνα ρητό ἀριθμό. Μποροῦμε λοιπόν νά συμφωνήσουμε ὅτι κάθε φορά, πού θά ἐμφανίζεται σέ μιά πράξη ἕνας ἄρρητος, θά παίρνουμε στή θέση του μιά «καλή» (μέ ὅσα δεκαδικά ψηφία θέλουμε) προσέγγισή του. Ἔτσι π.χ.

$$7+\sqrt{2}\simeq 7+1{,}414 \quad = 8{,}414, \qquad 3\sqrt{5} \quad \simeq 3.(2{,}236) \quad = 6.708$$

Ἀφοῦ λοιπόν οἱ πράξεις μέ ἄρρητους ἀριθμούς ἀνάγονται στίς πράξεις τῶν ρητῶν ἀριθμῶν, μποροῦμε νά δεχτοῦμε ὅτι **ὅλες οἱ ἰδιότητες τῶν πράξεων, πού ἰσχύουν στούς ρητούς, ἰσχύουν καί στούς πραγματικούς ἀριθμούς**.

Ἔτσι, ἄν $\alpha,\beta,\gamma \in \mathrm{R}$, θά ἔχουμε τίς ἑξῆς ἰδιότητες:

1. Τό ἄθροισμα $\alpha+\beta$ εἶναι πάντοτε ἕνας μοναδικός πραγματικός ἀριθμός, καθώς καί τό γινόμενο $\alpha.\beta$.
2. $\left.\begin{array}{l}\alpha+\beta=\beta+\alpha\\ \alpha.\beta=\beta.\alpha\end{array}\right\}$ Ἀντιμεταθετική ἰδιότητα
3. $\left.\begin{array}{l}(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)\\ (\alpha.\beta).\gamma=\alpha.(\beta.\gamma)\end{array}\right\}$ Προσεταιριστική ἰδιότητα
4. $\alpha.(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$ Ἐπιμεριστική ἰδιότητα
5. Γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό α εἶναι $\alpha+0=\alpha$ καί $\alpha.1=\alpha$
6. Γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό α ὑπάρχει ὁ *«ἀντίθετός»* του $-\alpha$ τέτοιος, ὥστε $\alpha+(-\alpha)=0$.
   Γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό $\alpha\neq 0$ ὑπάρχει ὁ *«ἀντίστροφός»* του $\frac{1}{\alpha}$ τέτοιος, ὥστε $\alpha.\frac{1}{\alpha}=1$.

Ἡ διαφορά $\alpha-\beta$ δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν α καί β ὁρίζεται ἀπό τήν ἰσότητα $\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$.

Τό πηλίκο $\frac{\alpha}{\beta}$ δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν α καί $\beta\neq 0$ ὁρίζεται ἀπό τήν ἰσότητα $\frac{\alpha}{\beta}=\alpha\cdot\frac{1}{\beta}$.

Παράδειγμα: Νά ἐκτελεσθοῦν οἱ πράξεις

α) $5\sqrt{2}+7\sqrt{2}-3\sqrt{2}$ β) $5\sqrt{2}-(5\sqrt{2}+2\beta)$ γ) $5\sqrt{2}:\frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$

Λύση: α) $5\sqrt{2}+7\sqrt{2}-3\sqrt{2} = (5+7-3)\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$ (ἰδιότητα 4)

β) $5\sqrt{2}-(5\sqrt{2}+2\beta) = 5\sqrt{2}+(-5\sqrt{2}-2\beta)$ (ἰδιότητα 6)

$= [5\sqrt{2}+(-5\sqrt{2})]-2\beta$ (ἰδιότητα 3)

$= 0-2\beta=-2\beta$ (ἰδιότητα 6,5)

γ) $5\sqrt{2} : \dfrac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = 5\sqrt{2} \cdot \dfrac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$

$= \dfrac{10\sqrt{2}+5 \cdot 2}{1+\sqrt{2}}$ (Ἰδιότητα 4)

$= \dfrac{10(\sqrt{2}+1)}{1+\sqrt{2}}$ (Ἰδιότητα 4)

$= 10$

Ἀπόλυτη τιμή πραγματικοῦ ἀριθμοῦ.

1.7. Ἂν α εἶναι ἕνας πραγματικός ἀριθμός, **ἡ ἀπόλυτη τιμή τοῦ α** συμβολίζεται μέ $|\alpha|$ καί ὁρίζεται (ὅπως καί στούς ρητούς ἀριθμούς) ἀπό τίς ἰσότητες:

$$\boxed{\begin{array}{ll} |\alpha| = \alpha, & \text{ἄν} \quad \alpha \geqq 0 \\ |\alpha| = -\alpha, & \text{ἄν} \quad \alpha < 0 \end{array}}$$

Ἔτσι π.χ. $|+\sqrt{2}| = \sqrt{2}$, $|-\sqrt{2}| = -(-\sqrt{2}) = \sqrt{2}$,

$$\left|-\frac{3}{\sqrt{2}}\right| = -\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = +\frac{3}{\sqrt{2}}$$

Βλέπουμε λοιπόν ὅτι **ἡ ἀπόλυτη τιμή ἑνός πραγματικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι πάντα θετικός ἀριθμός ἤ μηδέν.**

Ἐπειδή εἶναι π.χ. $|(-3)(-\sqrt{2})| = |3\sqrt{2}| = 3\sqrt{2}$ καί $|-3| \cdot |-\sqrt{2}| = 3 \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$, θά ἔχουμε $|(-3)(-\sqrt{2})| = |-3| \cdot |-\sqrt{2}|$. Γενικά ἔχουμε

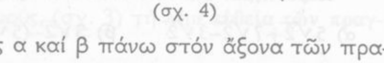
$$|\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta|.$$

Δηλαδή **ἡ ἀπόλυτη τιμή τοῦ γινομένου δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἴση μέ τό γινόμενο τῶν ἀπόλυτων τιμῶν τους.**

Διάταξη στό R.

1.8. Ἂν ἔχουμε δύο πραγματικούς ἀριθμούς α καί β, θά λέμε (ὅπως καί στούς ρητούς ἀριθμούς) ὅτι ὁ α **εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τό β,** ὅταν ἡ διαφορά α–β εἶναι θετικός ἀριθμός. Στήν περίπτωση αὐτή γράφουμε πάλι τίς «ἀνισότητες»

$\alpha > \beta$ ἤ $\beta < \alpha$



(σχ. 4)

καί ἄν τοποθετήσουμε τούς ἀριθμούς α καί β πάνω στόν ἄξονα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν (Σχ. 4), ὁ α θά βρίσκεται δεξιά τοῦ β. Ἔτσι π.χ. ἔχουμε

$\sqrt{2} > 1$, γιατί $\sqrt{2} - 1 \simeq 1{,}414 - 1 = 0{,}414$ (θετικός ἀριθμός)

$\sqrt{2} < 2$, γιατί $\sqrt{2} - 2 \simeq 1{,}414 - 2 = -0{,}586$ (ἀρνητικός ἀριθμός).

Ἀπό τόν παραπάνω ὁρισμό προκύπτει ἀμέσως ὅτι:

- *κάθε θετικός ἀριθμός εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τό μηδέν καί κάθε ἀρνητικός εἶναι μικρότερος ἀπό τό μηδέν.*
- *κάθε θετικός ἀριθμός εἶναι μεγαλύτερος ἀπό κάθε ἀρνητικό ἀριθμό.*
- *Ἄν $\alpha > \beta$, τότε θά εἶναι $-\alpha < -\beta$.*
- *Ἄν $\alpha > \beta$ καί $\beta > \gamma$, τότε θά εἶναι καί $\alpha > \gamma$ (μεταβατική ἰδιότητα).*

Ἰσχύουν ἐπίσης (καί δείχνονται μέ τόν ἴδιο τρόπο) ὅλες γενικά οἱ ἰδιότητες, πού μάθαμε στίς ἀνισότητες τῶν ρητῶν ἀριθμῶν:

I. Ἄν στά μέλη μιᾶς ἀνισότητας προσθέσουμε ἤ ἀφαιρέσουμε τόν ἴδιο πραγματικό ἀριθμό, ἡ φορά τῆς ἀνισότητας διατηρεῖται.

Ἔτσι, ἄν εἶναι $\alpha > \beta$, θά ἔχουμε καί

$$\alpha + \gamma > \beta + \gamma, \qquad \alpha - \gamma > \beta - \gamma.$$

II. Ἄν πολλαπλασιάσουμε τά μέλη μιᾶς ἀνισότητας μέ ἕνα θετικό πραγματικό ἀριθμό, ἡ φορά τῆς ἀνισότητας διατηρεῖται, ἐνῶ ἄν πολλαπλασιάσουμε τά μέλη της μέ ἕναν ἀρνητικό πραγματικό ἀριθμό ἡ ἀνισότητα ἀλλάζει φορά.

Ἔτσι, ἄν εἶναι $\alpha > \beta$, θά ἔχουμε

$$\alpha\gamma > \beta\gamma, \text{ ὅταν } \gamma > 0 \quad \text{καί} \quad \alpha\gamma < \beta\gamma, \text{ ὅταν } \gamma < 0.$$

III. Ἄν προσθέσουμε κατά μέλη ἀνισότητες μέ τήν ἴδια φορά, προκύπτει ἀνισότητα μέ τήν ἴδια φορά.

Δηλαδή, ἄν ἔχουμε $\alpha > \beta$ καί $\gamma > \delta$, τότε ἰσχύει καί ἡ ἀνισότητα

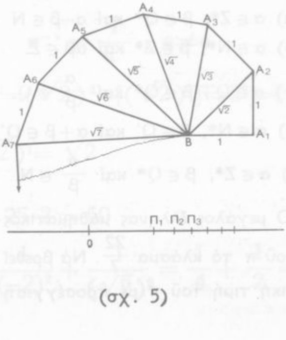
$$\alpha + \gamma > \beta + \delta.$$

Τονίζεται ὅτι **δέν μποροῦμε νά προσθέσουμε κατά μέλη ἀνισότητες, πού δέν ἔχουν τήν ἴδια φορά, οὔτε καί νά ἀφαιρέσουμε κατά μέλη ἀνισότητες.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Νά ἀπεικονίσετε στήν εὐθεία τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν μέ κατασκευή τῶν ἀντίστοιχων εὐθύγραμμων τμημάτων τούς πραγματικούς ἀριθμούς $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5} \ldots$

Λύση. Στό σχῆμα 5 τά τμήματα $BA_1, BA_2, BA_3 \ldots$ τά ὁποῖα κατασκευάσαμε μέ τήν βοήθεια τῶν ὀρθογώνιων τριγώνων $BA_1A_2, BA_2A_3, BA_3A_4 \ldots$, ἔχουν μήκη $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots$ Παίρνοντας στήν εὐθεία τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν τά τμήματα $O\Pi_1 = BA_1$, $O\Pi_2 = BA_2$, $O\Pi_3 = BA_3 \ldots$, ἔχουμε τά σημεῖα $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3 \ldots$, πού εἶναι εἰκόνες τῶν ἀριθμῶν $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3} \ldots$



(σχ. 5)

2. **Τί ἀριθμός εἶναι ὁ $\alpha = 0{,}101001000100001\ldots$**

Λύση. Παρατηροῦμε ὅτι τό δεκαδικό του μέρος ἔχει μετά τήν πρώτη μονάδα ἕνα μηδενικό, μετά τή δεύτερη μονάδα δύο μηδενικά, μετά τήν τρίτη τρία κ.ο.κ. Ὁ ἀριθμός αὐτός δέν εἶναι περιοδικός, γιατί δέν μπορεῖ π.χ. νά ἔχει περίοδο μέ δέκα ψηφία, ἀφοῦ ὑπάρχουν στό δεκαδικό του μέρος, ἀπό κάποιο ψηφίο τοῦ 1 καί πέρα, περισσότερα ἀπό 10 μηδενικά.

Ἑπομένως θά εἶναι ἀριθμός μέ ἄπειρα δεκαδικά ψηφία, πού δέν εἶναι περιοδικά, καί συνεπῶς εἶναι ἕνας ἄρρητος ἀριθμός.

3. **Ἄν α,β,γ εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί, νά βρεθεῖ τό ἄθροισμα**

$$\Sigma = (3\alpha-2\beta+5\gamma) + (4\alpha+3\beta-2\gamma) - (2\alpha-4\beta+2\gamma).$$

Λύση. $\Sigma = (3\alpha-2\beta+5\gamma)+(4\alpha+3\beta-2\gamma)+(-2\alpha+4\beta-2\gamma)$

(ἀφαίρεση εἶναι πρόσθεση τοῦ ἀντιθέτου)

$= (3\alpha+4\alpha-2\alpha)+(-2\beta+3\beta+4\beta)+(5\gamma-2\gamma-2\gamma)$ (ἰδιότητες, 2,3)

$= (3+4-2)\alpha+(-2+3+4)\beta+(5-2-2)\gamma$ (ἰδιότητα 4)

$= 5\alpha+5\beta+1\gamma \quad = 5\alpha+5\beta+\gamma$ (ἰδιότητα 5).

4. **Ἄν $\alpha,\beta,\gamma \in R$ καί $\alpha>\beta$, συγκρίνετε τούς ἀριθμούς $2\alpha+3\gamma$, $2\beta+3\gamma$.**

Λύση. Ἀφοῦ $\alpha>\beta$, θά εἶναι $2\alpha>2\beta$ (§1.8,II) καί συνεπῶς (§1,8,I)

$$2\alpha+3\gamma>2\beta+3\gamma$$

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ποιές ἀπό τίς παρακάτω προτάσεις εἶναι ἀληθεῖς καί ποιές ψευδεῖς;

α) $\frac{2}{3} \in Q$ β) $-3 \in Z$ γ) $-2 \in Q$ δ) $\sqrt{2} \in Q$ ε) $0{,}12323\ldots \in Q$

στ) $-7 \in N$ ζ) $1 \in R$ η) $\sqrt{-4} \in R$ θ) $1{,}30\ 330\ 3330\ldots \in Q$, $\underbrace{\ }_{2}\ \underbrace{\ }_{3}$

2. Ποιοί ἀπό τούς παρακάτω ἀριθμούς εἶναι ρητοί καί ποιοί ἄρρητοι;

$$\sqrt{5},\quad 0{,}232727\ldots,\ 0{,}38,\quad 2+\sqrt{3},\quad 3\pi.$$

3. Ἄν μέ Q' συμβολίσουμε τό σύνολο τῶν ἄρρητων ἀριθμῶν, ἐξηγῆστε γιά κάθε μία ἀπό τίς παρακάτω προτάσεις ἄν εἶναι ἀληθής:

I) Πάντοτε II) μερικές φορές III) ποτέ.

α) $\alpha \in Z^*$, $\beta \in Q^*$ καί $\alpha-\beta \in N$

β) $\alpha \in N^*$, $\beta \in Z^*$ καί $\alpha\beta \in Z$.

γ) $\alpha \in Q'$, $\beta \in Q^*$ καί $\frac{\alpha}{\beta} \in Q$.

δ) $\alpha \in N^*$, $\beta \in Q'$ καί $\alpha+\beta \in Q'$

ε) $\alpha \in Z^*$, $\beta \in Q^*$ καί $\frac{\alpha}{\beta} \in N$.

4. Ὁ μεγάλος ἕλληνας μαθηματικός τῆς ἀρχαιότητας Ἀρχιμήδης ἔπαιρνε γιά τιμή τοῦ π τό κλάσμα $\frac{22}{7}$. Νά βρεθεῖ πόσο «ἀπέχει» ἡ τιμή αὐτή ἀπό τήν πραγματική τιμή τοῦ π μέ προσέγγιση 0,001.

5. Νά ἀντικαταστήσετε τό ; μέ ἕνα ἀπό τά σύμβολα $<, >$ ἔτσι, ὥστε οἱ παρακάτω προτάσεις νά εἶναι ἀληθεῖς.

α) $7+\sqrt{5}\ ;\ 7+\sqrt{6}$ β) $3\sqrt{17};\ 12.$ γ) $-5\sqrt{26}\ ;\ -25$

δ) $\frac{1}{3}\ \pi;\ 1$ ε) $2(\sqrt{2}-2);\ 3(\sqrt{2}-2).$

6. Νά βρεθοῦν τά ἐξαγόμενα

α) $12+|-1-4|-|-8+3|$ β) $-2+|-5-1|-|+3-1|-|3-5|$

Δυνάμεις πραγματικῶν ἀριθμῶν.

1.9. Ἡ δύναμη ἑνός πραγματικοῦ ἀριθμοῦ α ὁρίζεται ὅπως καί ἡ δύναμη ἑνός ρητοῦ ἀριθμοῦ. Δηλαδή, ἄν ἔχουμε ἕνα φυσικό ἀριθμό $\nu \geqq 2$ καί $\alpha \in \mathrm{R}$, ὁρίζουμε ὅτι

$$\boxed{\alpha^{\nu} = \underbrace{\alpha\,.\,\alpha\,.\,\alpha\ldots\alpha}_{\nu \text{ παράγοντες}}}$$

Ἔτσι π.χ. $(-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = -8,\quad (\sqrt{2})^3 = \sqrt{2}\,.\,\sqrt{2}\,.\,\sqrt{2} = (\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$

Ἀπό τόν ὁρισμό τῆς δυνάμεως πραγματικοῦ ἀριθμοῦ α ἀποδεικνύονται, ὅπως ἀκριβῶς καί στούς ρητούς ἀριθμούς, οἱ ἰδιότητες:

$$\begin{array}{|ll|}\hline \mathrm{I} & \alpha^{\mu}\,.\,\alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu} \\ \mathrm{II} & \dfrac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\nu}} = \alpha^{\mu-\nu},\ \alpha \neq 0 \text{ καί } \mu > \nu+1 \\ \mathrm{III} & (\alpha\beta)^{\mu} = \alpha^{\mu}\beta^{\mu} \\ \mathrm{IV} & (\alpha^{\mu})^{\nu} = \alpha^{\mu\nu} \\ \hline \end{array}$$

Γιά τούς ἴδιους λόγους, πού ἀναφέραμε στούς ρητούς, δίνουμε καί στούς πραγματικούς ἀριθμούς ἔννοια στά σύμβολα α^0, α^1, καί $\alpha^{-\nu}$ ὁρίζοντας ὅτι:

$$\alpha^0 = 1\ (\alpha \neq 0),\qquad \alpha^1 = \alpha,\qquad \alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^{\nu}}\qquad \alpha \neq 0.$$

Παραδείγματα : α) $(\sqrt{2})^3 \cdot \sqrt{2} = (\sqrt{2})^{3+1} = (\sqrt{2})^4 = [(\sqrt{2})^2]^2 = 2^2 = 4$

β) $\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2})^2}{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^1 = \sqrt{2}$

γ) $(5\sqrt{2})^2 = 5^2(\sqrt{2})^2 = 25 \cdot 2 = 50$

δ) $(-2)^{-2} + (\sqrt{2})^{-2} = \frac{1}{(-2)^2} + \frac{1}{(\sqrt{2})^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

Τετραγωνική ρίζα θετικοῦ ἀριθμοῦ.

1.10. Ἡ τετραγωνική ρίζα ἑνός θετικοῦ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ α ὁρίζεται ὅπως στούς ρητούς. Ἔτσι, ἄν ἔχουμε ἕνα θετικό ἀριθμό α, ὀνομάζουμε **τετραγωνική ρίζα τοῦ α** κάθε πραγματικό x τέτοιον, ὥστε

$$x^2 = \alpha.$$

Π.χ ὁ 25 ἔχει δύο τετραγωνικές ρίζες, τόν $+5$ καί -5, γιατί $5^2 = 25$ καί $(-5)^2 = 25$.

Γενικά κάθε θετικός ἀριθμός ἔχει δύο τετραγωνικές ρίζες, πού εἶναι ἀντίθετοι ἀριθμοί. **Τή θετική τετραγωνική ρίζα τοῦ α τήν παριστάνουμε μέ τό σύμβολο $\sqrt{\alpha}$**, τό ὁποῖο διαβάζεται «τετραγωνική ρίζα τοῦ α». Μέ τόν συμβολισμό αὐτό οἱ ρίζες τοῦ 25 εἶναι:

$$\sqrt{25} = 5 \quad \text{καί} \quad -\sqrt{25} = -5.$$

Ἀπό τόν ὁρισμό τοῦ $\sqrt{\alpha}$ καταλαβαίνουμε ὅτι ὁ α δέν μπορεῖ νά εἶναι ἀρνητικός ἀριθμός, γιατί δέν μπορεῖ νά ὑπάρχει ἀριθμός x^2, πού νά εἶναι ἀρνητικός. Ἔτσι, **οἱ ἀρνητικοί ἀριθμοί δέν ἔχουν τετραγωνική ρίζα**, δηλαδή δέν ἔχουν νόημα π.χ. οἱ συμβολισμοί $\sqrt{-25}$, $\sqrt{-3}$, κ.λ.π.

Στίς τετραγωνικές ρίζες ἰσχύουν οἱ παρακάτω δύο βασικές ἰδιότητες:

> Ἄν α,β εἶναι θετικοί ἀριθμοί, τότε
>
> I $\quad \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\beta}$
>
> II $\quad \dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$

Δηλαδή **τό γινόμενο (ἤ τό πηλίκο) τῶν τετραγωνικῶν ριζῶν δύο ἀριθμῶν εἶναι ἴσο μέ τήν τετραγωνική ρίζα τοῦ γινομένου (ἤ τοῦ πηλίκου) τους.**

Γιά νά δείξουμε π.χ. ὅτι ἰσχύει ἡ ἰδιότητα I θέτουμε $\sqrt{\alpha} = x$ καί $\sqrt{\beta} = y$. Τότε ἔχουμε

$$\alpha = x^2 \qquad (1)$$
$$\beta = y^2 \qquad (2).$$

Πολλαπλασιάζοντας τίς ἰσότητες (1) καί (2) κατά μέλη βρίσκουμε τήν ἰσότητα

$$\alpha\beta = x^2y^2 = (xy)^2 \qquad (3)$$

ἡ ὁποία, ἀπό τόν ὁρισμό τῆς τετραγωνικῆς ρίζας, εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν

$$\sqrt{\alpha\beta} = xy = \sqrt{\alpha} \,.\, \sqrt{\beta}.$$

Οἱ ἰσότητες I καί II χρησιμοποιοῦνται συνήθως γιά τήν ἁπλοποίηση ὁρισμένων παραστάσεων.

Παραδείγματα : α) $\sqrt{12} = \sqrt{4.3} = \sqrt{4} \,.\, \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

$$β)\ \sqrt{12}-\sqrt{147}=\sqrt{4\cdot 3}-\sqrt{49\cdot 3}=2\sqrt{3}-7\sqrt{3}=-5\sqrt{3}$$

$$γ)\ \sqrt{\frac{3}{5}}=\sqrt{\frac{3\cdot 5}{5\cdot 5}}=\sqrt{\frac{15}{25}}=\frac{\sqrt{15}}{5}.$$

Τονίζεται ὅτι **τό ἄθροισμα τῶν τετραγωνικῶν ριζῶν δέν μποροῦμε νά τό συμπτύξουμε παρά μόνο ὅταν ἔχουν τό ἴδιο ὑπόρριζο**. Δηλαδή μποροῦμε νά γράψουμε $\sqrt{5}+\sqrt{5}=2\sqrt{5}$, ἐνῶ δέν ὑπάρχει πιό ἁπλή μορφή, γιά νά γράψουμε τό ἄθροισμα $\sqrt{5}+\sqrt{7}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Ἄν $α=-5$, $β=2$, βρεῖτε τίς τιμές τῶν $(α+β)^2$ καί $α^2+2αβ+β^2$. Νά συγκρίνετε τά ἐξαγόμενα. Νά κάμετε τήν ἴδια ἐργασία γενικά μέ τούς πραγματικούς α καί β.**

Λύση: $(α+β)^2 = [(-5)+2]^2=(-3)^2=9$

$α^2+2αβ+β^2=(-5)^2+2(-5).2+2^2=25-20+4=9$

Δηλαδή βλέπουμε ὅτι $(α+β)^2=α^2+2αβ+β^2$

Γενικά ἔχουμε

$(α+β)^2 = (α+β).(α+β)$ (ὁρισμός δυνάμεως)

$= (α+β)α+(α+β)β$ (ἐπιμεριστική ἰδιότητα)

$= α^2+βα+αβ+β^2$ (ἐπιμεριστική ἰδιότητα)

$= α^2+αβ+αβ+β^2$ (ἀντιμεταθετική ἰδιότητα)

$= α^2+2αβ+β^2$

Ὥστε ἰσχύει πάντοτε ἡ ἰσότητα

$$(α+β)^2=α^2+2αβ+β^2$$

2. **Νά ὑπολογισθοῦν τά γινόμενα α) $(8+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})$ β) $(2-\sqrt{3})(1+\sqrt{2})$**

Λύση: α) $(8+\sqrt{2})(3-\sqrt{2}) = (8+\sqrt{2})\,.\,3+(8+\sqrt{2})(-\sqrt{2})$

$= 24+3\sqrt{2}+[-8\sqrt{2}-(\sqrt{2})^2]$

$= 24+3\sqrt{2}-8\sqrt{2}-2=22+(3-8)\sqrt{2}$

$= 22-5\sqrt{2}$

β) $(2-\sqrt{3})(1+\sqrt{2}) = 2-\sqrt{3}+2\sqrt{2}-\sqrt{3}\,\sqrt{2}=2-\sqrt{3}+2\sqrt{2}-\sqrt{6}.$

3. **Νά ἁπλοποιηθεῖ ἡ παράσταση $\sqrt{12}-2\sqrt{27}+2\sqrt{75}-\sqrt{48}$.**

Λύση: $\sqrt{12}-2\sqrt{27}+2\sqrt{75}-\sqrt{48} = \sqrt{2^2.3}-2\sqrt{3^3}+2\sqrt{3.5^2}-\sqrt{2^4.3} =$

$= \sqrt{2^2}\cdot\sqrt{3}-2\sqrt{3^2}\sqrt{3}+2\sqrt{3}.\sqrt{5^2}-\sqrt{2^4}\sqrt{3}$

$= 2\sqrt{3}-6\sqrt{3}+10\sqrt{3}-2^2\sqrt{3}=$

$= (2-6+10-2^2)\sqrt{3}=2\sqrt{3}.$

4. **Νά βρεθεῖ τό ἐξαγόμενο $\sqrt{\frac{3}{2}}+2\sqrt{6}$.**

Λύση: $\sqrt{\frac{3}{2}}+2\sqrt{6} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+2\sqrt{6}=\frac{\sqrt{3}.\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}+2\sqrt{6}=$

$$=\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{2\sqrt{6}}{1}=\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{4\sqrt{6}}{2}=\frac{5\sqrt{6}}{2}$$

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

7. Ἂν α εἶναι πραγματικός ἀριθμός $\neq 0$, νά γράψετε σέ μορφή μιᾶς δυνάμεως τίς ἐκφράσεις :

α) $\alpha^{-5}\cdot\alpha$, $(\alpha^{-2})^2\cdot(\alpha^2)^3$, $\dfrac{\alpha^{-2}}{\alpha^{-4}}\cdot\dfrac{\alpha^2}{\alpha^{-3}}$, $\dfrac{\alpha^3}{\frac{1}{\alpha^{-2}}}\cdot\alpha$

8. Ἂν $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ καί $\alpha\beta\gamma\neq 0$, νά γραφοῦν σέ μορφή γινομένου δυνάμεων τῶν α,β,γ:

$(\alpha^2\beta^2\gamma)^2$, $(\alpha^{-1}\beta^{-1}\gamma)^{-2}$, $\dfrac{(\alpha^{-2}\beta\cdot\gamma)^4}{\alpha^{-2}\beta^{-2}}$, $\dfrac{\alpha^{-3}\beta^4\gamma^2}{\alpha\beta^{-1}\gamma}$

9. Νά ὑπολογιστοῦν οἱ τετραγωνικές ρίζες :

$\sqrt{2500}$, $\sqrt{0,81}$, $\sqrt{0,0049}$, $\sqrt{\dfrac{81}{49}}$, $\sqrt{\dfrac{0,01}{0,16}}$, $\sqrt{\dfrac{8.10^{-1}}{2.10^3}}$

10. Νά βρεῖτε τά γινόμενα καί τά πηλίκα:

α) $\sqrt{7}\cdot\sqrt{28}$, $2\sqrt{75}\cdot\sqrt{243}$ $\sqrt{3.10^3}\cdot\sqrt{27\cdot10^{-5}}$

β) $\dfrac{\sqrt{14}}{\sqrt{18}}$, $\dfrac{\sqrt{0,32}\cdot\sqrt{0,2}}{\sqrt{3,6}}$, $\sqrt{2}\cdot\sqrt{\dfrac{2}{9}}$

11. Νά βρεῖτε τά γινόμενα:

α) $(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})$ β) $(2\sqrt{3}+5)(2+\sqrt{3})$, γ) $(\sqrt{18}-\sqrt{2}):\sqrt{2}$

δ) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$ ε) $(2\sqrt{3}+5)^2$

12. Ὑπολογίστε: α) $\sqrt{9}+\sqrt{16}$ καί $\sqrt{9+16}$ β) $\sqrt{36}+\sqrt{64}$ καί $\sqrt{36+64}$.
Τί παρατηρεῖτε;

13. Νά συμπτύξετε τά παρακάτω ἀθροίσματα:

α) $\sqrt{5}+\sqrt{45}-2\sqrt{125}$ β) $\sqrt{27}-2\sqrt{243}+5\sqrt{147}+\sqrt{12}$

γ) $3\sqrt{2}-4\sqrt{8}+3\sqrt{32}$ δ) $\sqrt{45\alpha^3}-\sqrt{5\alpha^3}+\sqrt{80\alpha}$

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 1

1. Ἡ ἀνεπάρκεια τῶν ρητῶν ἀριθμῶν νά παραστήσουν ὁρισμένα μήκη εὐθύγραμμων τμημάτων μᾶς ὁδήγησε στή διαπίστωση πώς ὑπάρχουν κι ἄλλοι ἀριθμοί, πού τούς ὀνομάσαμε **ἄρρητους**. **Ὁ ἄρρητος ἀριθμός στή δεκαδική του μορφή ἔχει ἄπειρα δεκαδικά ψηφία μή περιοδικά**. Τό νέο σύνολο, πού περιέχει ὡς στοιχεῖα τούς ρητούς καί τούς ἄρρητους, τό ὀνομάσαμε **σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν** καί τό συμβολίσαμε μέ **R**.

Γιά τούς πραγματικούς ἀριθμούς ἰσχύουν τά ἑξῆς:

- Οἱ ἀριθμητικές πράξεις καί ἡ διάταξη ὁρίζονται ὅπως καί στούς ρητούς ἀριθμούς.
- Οἱ ἰδιότητες τῶν πράξεων καί τῶν ἀνισοτήτων εἶναι ἴδιες μέ ἐκεῖνες τῶν ρητῶν ἀριθμῶν.

Γιά τά σύνολα N,Z,Q,R ἰσχύει:

$$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}.$$

Ὑπάρχει ἀντιστοιχία **«ἕνα μέ ἕνα»** τῶν στοιχείων τοῦ R μέ τά σημεῖα μιᾶς εὐθείας ἡ ὁποία ὀνομάζεται **εὐθεία τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν**.

2. **Ἡ τετραγωνική ρίζα** ἑνός θετικοῦ πραγματικοῦ α συμβολίζεται μέ $\sqrt{\alpha}$ καί ὁρίζεται ἀπό τήν ἰσοδυναμία:

$$\sqrt{\alpha} = x \Leftrightarrow \alpha = x^2 \text{ καί } x > 0$$

Ἄν α καί β εἶναι πραγματικοί θετικοί ἀριθμοί ἰσχύουν οἱ ἰδιότητες:

$$\text{I} . \quad \sqrt{\alpha}\,\sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\beta}$$

$$\text{II} . \quad \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$$

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ*

14. Νά βρεῖτε τό γινόμενο $(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})$ μέ δύο τρόπους:
α) μέ τίς ἰδιότητες τῶν τετραγωνικῶν ριζῶν
β) Μέ προσέγγιση τῶν ἄρρητων $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$.
Νά συγκρίνετε τά ἀποτελέσματα.

15. Νά βρεῖτε τήν τιμή τῆς ἐκφράσεως

$x-\sqrt{x^2}$ ἄν $x=+2$, $x=-1$, $x=-\frac{3}{2}$

16. Νά βρεθεῖ τό ἐξαγόμενο $\left(2\sqrt{\frac{3}{2}}-3\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2$.

17. Ἄν $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ καί $\alpha>\beta$, συγκρίνετε τούς ἀριθμούς
α) $2\alpha-3\gamma$ καί $2\beta-3\gamma$ β) $2\gamma-3\alpha$ καί $2\gamma-3\beta$.

18. Δεῖξτε τήν ἰδιότητα II τῆς § 1.10.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ**

19. Ἕνα ὑποσύνολο Β τοῦ Α λέγεται *κλειστό* ὡς πρός μία πράξη τοῦ Α, ὅταν τό ἀποτέλεσμα τῆς πράξεως, γιά δύο ὁποιαδήποτε στοιχεῖα τοῦ Β, ἀνήκει στό Β. Ἔτσι π.χ. τό σύνολο $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$ εἶναι κλειστό ὡς πρός τήν πρόσθεση τοῦ $\mathbb{Q}$, ἀλλά δέν εἶναι κλειστό ὡς πρός τή διαίρεση τοῦ $\mathbb{Q}$.
Νά ἐξετάσετε ἄν εἶναι κλειστό ὡς πρός τήν πρόσθεση καί τόν πολλαπλασιασμό τό σύνολο α) τῶν ἄρτιων ἀριθμῶν β) τῶν περιττῶν ἀριθμῶν.

20. Θεωροῦμε τά σύνολα $A \subset \mathbb{N}$, $B \subset \mathbb{N}$, $\Gamma \subset \mathbb{Z}$ ὅπου

$$A = \{x \mid x = 2^\nu,\ \nu \in \mathbb{N}\}$$
$$B = \{x \mid x = 3\nu,\ \nu \in \mathbb{N}\}$$
$$\Gamma = \{x \mid x = 3\nu,\ \nu \in \mathbb{Z}\}$$

Εἶναι καθένα ἀπό τά παραπάνω σύνολα κλειστό ὡς πρός τίς πράξεις α) πρόσθεση β) ἀφαίρεση γ) πολλαπλασιασμό;

21. Νά δείξετε ὅτι τό 0 εἶναι ὁ μοναδικός πραγματικός ἀριθμός πού ὑπάρχει τέτοιος, ὥστε γιά κάθε πραγματικό α νά ἰσχύει $\alpha+0=\alpha$.

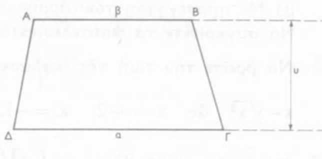
2° ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

Ἀρχικές ἔννοιες καί ὁρισμοί.

2.1. Στή Β′ τάξη μάθαμε ὅτι τό ἐμβαδό ἑνός τραπεζίου μέ βάσεις α,β καί ὕψος υ δίνεται ἀπό τόν τύπο

$$E = \frac{1}{2}\,(\alpha+\beta)\cdot\upsilon.$$



(σχ. 1)

Ἡ ἔκφραση $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\upsilon$, ἡ ὁποία δηλώνει τίς πράξεις, πού πρέπει νά κάνουμε, γιά νά βροῦμε τό ἐμβαδό τραπεζίου, λέγεται **ἀλγεβρική παράσταση.** Μέ αὐτή βρίσκουμε ὅτι τό ἐμβαδό ἑνός τραπεζίου μέ $\alpha = 4$ cm, $\beta = 3$ cm καί $\upsilon = 2$ cm εἶναι

$$\frac{1}{2}\,(4+3)\cdot 2 = 7\ \text{cm}^2.$$

Ὁ ἀριθμός 7 λέγεται ἀριθμητική τιμή τῆς ἀλγεβρικῆς παραστάσεως $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\upsilon$ γιά $\alpha = 4$, $\beta = 3$, $\upsilon = 2$. Γενικά:

> Ἀλγεβρική παράσταση λέγεται μιά ἔκφραση, πού δηλώνει μιά σειρά πράξεων μεταξύ ἀριθμῶν, ὁρισμένοι ἀπό τούς ὁποίους παριστάνονται μέ γράμματα.

Ἄν ἀντικαταστήσουμε τά γράμματα μιᾶς ἀλγεβρικῆς παραστάσεως μέ συγκεκριμένους ἀριθμούς καί μετά ἐκτελέσουμε τίς πράξεις, πού εἶναι σημειωμένες, θά προκύψει τελικά ἕνας ἀριθμός, πού λέγεται **ἀριθμητική τιμή** τῆς ἀλγεβρικῆς παραστάσεως. Ἔτσι π.χ. ἡ ἀλγεβρική παράσταση $3\alpha^2 + 5\alpha\beta$ γιά $\alpha = -2$ καί $\beta = 4$ ἔχει ἀριθμητική τιμή τήν $3(-2)^2+5(-2)\cdot 4 = 12-40 = -28$.

Μία ἀλγεβρική παράσταση δέν ἔχει ὑποχρεωτικά ἀριθμητική τιμή γιά ὁποιεσδήποτε τιμές τῶν γραμμάτων της. Ἔτσι π.χ. ἡ ἀλγεβρική παράσταση $3x^2 + \sqrt{y-3}$ δέν ἔχει ἀριθμητική τιμή γιά $y < 3$, γιατί δέν ὑπάρχει τετραγωνική ρίζα ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ. Ἐπίσης ἡ $2\alpha x + \dfrac{3x^2}{\alpha-1}$ δέν ἔχει ἀριθμητική τιμή γιά $\alpha = 1$.

2.2. Μία ἀλγεβρική παράσταση λέγεται εἰδικότερα:

- **Ἄρρητη,** ὅταν περιέχει γράμμα κάτω ἀπό σύμβολο τετραγωνικῆς ρίζας, ὅπως π.χ. ἡ $3x^2 + \sqrt{y-3}$.
- **Κλασματική,** ὅταν περιέχει γράμμα σέ παρονομαστή, ὅπως π.χ. οἱ

$$2\alpha x + \frac{3x}{\alpha-1}, \quad \frac{x^2+y^2}{x^2}.$$

- **Ἀκεραία,** ὅταν δέν εἶναι οὔτε ἄρρητη οὔτε κλασματική, ὅπως πχ. οἱ

$$-\frac{5}{3}x^4y^2, \quad x^2y-2x+\frac{3}{2}xy^2, \quad 3x^2-2x+1.$$

Οἱ πράξεις πού κάνουμε, γιά νά βροῦμε τήν ἀριθμητική τιμή μιᾶς ἀκεραίας ἀλγεβρικῆς παραστάσεως, ἡ ὁποία δέν περιέχει παρενθέσεις, γίνονται μέ τήν ἑξῆς σειρά:

- **Ὑπολογισμός δυνάμεων.**
- **Πολλαπλασιασμοί καί διαιρέσεις.**
- **Προσθέσεις καί ἀφαιρέσεις.**

Ἔτσι π.χ. γιά $x = -2$ καί $y = 3$ ἔχουμε

$$x^2y-2x+\frac{3}{2}xy^2 = (-2)^2\cdot 3-2(-2)+\frac{3}{2}(-2)3^2 =$$

$$=4\cdot 3-2(-2)+\frac{3}{2}(-2)\cdot 9=12+4-27=16-27=-11.$$

Ἄν ἡ ἀλγεβρική παράσταση περιέχει παρενθέσεις, **κάνουμε πρῶτα τίς πράξεις πού εἶναι σημειωμένες μέσα στίς παρενθέσεις.** Ἔτσι π.χ. γιά $\alpha = -2$, $\beta = 3$ καί $\gamma = 2$ ἔχουμε.

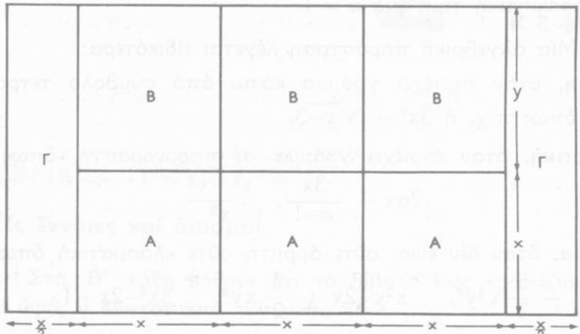
$$\begin{aligned}(\alpha^2\beta-\gamma)\alpha+4\gamma^2\beta &= [(-2)^2\cdot 3-2](-2)+4\cdot 2^2\cdot 3 =\\ &= (4\cdot 3-2)(-2)+4\cdot 4\cdot 3 =\\ &= (12-2)(-2)+48 =\\ &= 10(-2)+48 = -20+48 = 28.\end{aligned}$$

Τέλος, ἄν ἡ ἀλγεβρική παράσταση περιέχει παρενθέσεις μέσα σέ ἄλλες παρενθέσεις ἤ ἀγκύλες, ἀρχίζουμε συνήθως τίς πράξεις ἀπό τίς ἐσωτερικές παρενθέσεις. Ἔτσι π.χ. γιά $\alpha = -2$, $\beta = 3$ καί $\gamma = 2$ ἔχουμε

$$\begin{aligned}\beta+[\alpha^2-(\beta+\gamma)^3]\alpha+(\alpha-\gamma^2)\beta &= 3+[(-2)^2-(3+2)^3](-2)+(-2-2^2)\cdot 3 =\\ &= 3+(4-5^3)(-2)+(-2-4)\cdot 3 =\\ &= 3+242-18 = 245-18 = 227.\end{aligned}$$

Παράδειγμα: Γιά νά ἀξιοποιηθεῖ ἕνα κτῆμα, χωρίσθηκε σέ οἰκόπεδα, ὅπως δείχνει τό παρακάτω σχῆμα, καί κάθε ἕνα ἀπό τά οἰκόπεδα Α,Β,Γ πουλήθηκε μέ α,β,γ δρχ.

ἀντιστοίχως τό m^2. Νά βρεθεῖ μία ἀλγεβρική παράσταση, πού νά παριστάνει τό ποσό πού εἰσέπραξε ὁ ἰδιοκτήτης τοῦ κτήματος.



(σχ. 2)

Λύση: Τό ἐμβαδό κάθε ἑνός οἰκοπέδου ἀπό τά Α,Β,Γ σέ m^2 σύμφωνα μέ τό σχῆμα εἶναι $x^2, xy, \frac{x}{2}(x+y)$ ἀντιστοίχως. Συνεπῶς ἡ ἀξία κάθε οἰκοπέδου ἀπό τά Α,Β,Γ εἶναι ἀντιστοίχως $x^2\alpha$, $xy\beta$, $\frac{x}{2}(x+y)\gamma$ δραχμές καί τό ποσό πού εἰσέπραξε ὁ ἰδιοκτήτης εἶναι:

$$p = 3x^2\alpha + 3xy\beta + 2\,\frac{x}{2}\,(x+y)\gamma = 3x^2\alpha + 3xy\beta + x(x+y)\gamma \text{ δραχμές}$$

Ἀκέραια μονώνυμα.

2.3. Ἄν καταθέσουμε ἕνα κεφάλαιο κ δραχμῶν σέ μία τράπεζα γιά t χρόνια μέ ἐπιτόκιο 7%, ὁ τόκος, πού θά πάρουμε, εἶναι

$$T = \frac{7}{100}\,\kappa t.$$

Βλέπουμε δηλαδή ὅτι ὁ τόκος δίνεται ἀπό μία ἁπλή ἀκεραία παράσταση, τήν $\frac{7}{100}\kappa t$, στήν ὁποία σημειώνονται μεταξύ τῶν γραμμάτων μόνο πολλαπλασιασμοί. Μιά τέτοια ἀλγεβρική παράσταση λέγεται **ἀκέραιο μονώνυμο** ἤ ἁπλῶς **μονώνυμο.** Γενικά

> Μονώνυμο εἶναι μία ἀλγεβρική παράσταση, πού περιέχει μόνο πολλαπλασιασμούς μεταξύ γραμμάτων καί ἀριθμῶν.

Ἔτσι κάθε μονώνυμο, ὅπως π.χ. τό $x(-4)yxy\cdot\alpha\cdot\frac{5}{2}\,y\,\alpha\,y\cdot x$, εἶναι οὐσιαστικά ἕνα γινόμενο παραγόντων καί συνεπῶς (ἀφοῦ ἰσχύει ἡ ἀντιμεταθετική καί ἡ προσεταιριστική ἰδιότητα) μποροῦμε νά ἀντικαταστήσουμε ὁρισμένους ἀπό τούς παράγοντές του μέ τό γινόμενό τους. Ἄν λοιπόν στό παραπάνω μονώνυμο άντικαταστήσουμε μέ τό γινόμενό τους τούς άριθμητικούς παράγοντες, τούς παράγοντες x, τούς παράγοντες y καί τούς παράγοντες α, καταλήγουμε στήν *«τελική μορφή»* τοῦ μονωνύμου

$$-10x^3y^4\alpha^2.$$

Εἶναι φανερό ὅτι στήν τελική μορφή ἑνός μονωνύμου ἔχουμε μόνο ἕναν ἀριθμητικό παράγοντα. Ὁ παράγοντας αὐτός γράφεται πρῶτος καί λέγεται **συντελεστής** τοῦ μονωνύμου, ἐνῶ ὅλοι οἱ ἄλλοι παράγοντες, ἀποτελοῦν τό **κύριο μέρος** τοῦ μονωνύμου. Ἔτσι τό παραπάνω μονώνυμο ἔχει συντελεστή -10 καί κύριο μέρος $x^3y^4\alpha^2$. Ἐπίσης τά μονώνυμα $-\alpha^2\beta$ καί $\alpha^3\beta x^2$ ἔχουν ἀντιστοίχως συντελεστές -1 καί $+1$.

Ἄν ἔχουμε ἕνα ὁποιοδήποτε μονώνυμο, ὁ ἐκθέτης ἑνός γράμματός του λέγεται **«βαθμός τοῦ μονωνύμου» ὡς πρός τό γράμμα αὐτό,** ἐνῶ τό ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν δύο ἤ περισσοτέρων γραμμάτων του λέγεται **«βαθμός τοῦ μονωνύμου» ὡς πρός τά γράμματα αὐτά.** Ἔτσι π.χ. τό μονώνυμο $-0{,}2\ x^3y^2\omega$ εἶναι 3ου βαθμοῦ ὡς πρός x, 2ου βαθμοῦ ὡς πρός y, 1ου βαθμοῦ ὡς πρός ω, μηδενικοῦ βαθμοῦ ὡς πρός α καί 6ου βαθμοῦ ὡς πρός x,y,ω (γιατί $3+2+1=6$).

Κάθε μονώνυμο, πού ἔχει συντελεστή τό 0, ὅπως π.χ. τό $0x^3y$, λέγεται **μηδενικό μονώνυμο.** Ἡ ἀριθμητική τιμή τοῦ μηδενικοῦ μονωνύμου εἶναι πάντοτε (γιά ὁποιεσδήποτε τιμές τῶν γραμμάτων του) ἴση μέ 0, γι' αὐτό καί γράφουμε:

$$0x^3y = 0$$

Τά μονώνυμα, πού ἔχουν τό ἴδιο κύριο μέρος, λέγονται **ὅμοια.** Ἔτσι π.χ. ὅμοια μονώνυμα εἶναι τά

$$9x^3y^4\alpha^2, \qquad -\frac{3}{2}\,x^3y^4\alpha^2, \qquad -\alpha^2x^3y^4, \qquad -\frac{1}{2}\,x^3y^4\alpha^2$$

Δύο ὅμοια μονώνυμα μέ ἀντίθετους συντελεστές, ὅπως π.χ. τά $2x^3y^2$ καί $-2x^3y^2$, λέγονται **ἀντίθετα.**

Ἐπειδή ὁ πολλαπλασιασμός ἐπιμερίζει τήν πρόσθεση, μποροῦμε νά γράψουμε

$$\begin{aligned}(9x^3y^4\alpha^2)+\left(-\frac{3}{2}x^3y^4\alpha^2\right)+(-x^3y^4\alpha^2) &= 9x^3y^4\alpha^2-\frac{3}{2}x^3y^4\alpha^2-x^3y^4\alpha^2\\ &= \left(9-\frac{3}{2}-1\right)x^3y^4\alpha^2\\ &= \left(\frac{18}{2}-\frac{3}{2}-\frac{2}{2}\right)x^3y^4\alpha^2\\ &= \frac{13}{2}\,x^3\,y^4\alpha^2\end{aligned}$$

Βλέπουμε δηλαδή ὅτι:

> **Τό ἄθροισμα ὅμοιων μονωνύμων εἶναι ἕνα μονώνυμο ὅμοιο μέ αὐτά, πού ἔχει συντελεστή τό ἄθροισμα τῶν συντελεστῶν τους.**

Εἶναι φανερό ὅτι τό ἄθροισμα δύο ἀντίθετων μονωνύμων εἶναι μηδενικό μονώνυμο.

Ἄν τά μονώνυμα δέν εἶναι ὅμοια, τό ἄθροισμά τους δέν εἶναι μονώνυμο, ἀλλά εἶναι μία ἀλγεβρική παράσταση, πού λέγεται **πολυώνυμο.**

Ἀκέραια πολυώνυμα

2.4. Ἕνα ἄθροισμα, πού οἱ ὅροι του εἶναι ἀκέραια μονώνυμα, λέγεται **ἀκέραιο πολυώνυμο** ἤ ἁπλῶς **πολυώνυμο.** Ἔτσι π.χ. ἡ ἀλγεβρική παράσταση

$$4x^2y-\frac{3}{2}xy+5x^2+7y$$

εἶναι ἕνα πολυώνυμο, γιατί εἶναι ἄθροισμα τῶν μονωνύμων $4x^2y, -\frac{3}{2}xy$, $5x^2$, $7y$. Τά μονώνυμα αὐτά ἀποτελοῦν τούς **ὅρους** τοῦ πολυωνύμου καί οἱ συντελεστές τους ὀνομάζονται τώρα **συντελεστές** τοῦ πολυωνύμου.

Ἐπειδή σ' ἕνα ἄθροισμα ἰσχύει ἡ ἀντιμεταθετική καί ἡ προσεταιριστική ἰδιότητα, μποροῦμε σ' ἕνα πολυώνυμο νά ἀντικαταστήσουμε τά ὅμοια μονώνυμα (ἄν ὑπάρχουν) μέ τό ἄθροισμά τους. Ἡ ἐργασία αὐτή λέγεται **ἀναγωγή ὅμοιων ὅρων.** Ἔτσι π.χ. τό πολυώνυμο

$$2x^3y-5xy^2+x^3y+9xy^2-7x^3-8x^3y$$

μπορεῖ νά γραφεῖ

$$(2+1-8)x^3y+(-5+9)xy^2-7x^3$$

ἤ τελικά $\quad -5x^3y+4xy^2-7x^3$

Ἡ τελική αὐτή μορφή ἡ ὁποία δέν ἔχει ὅμοιους ὅρους, λέγεται **ἀνηγμένη μορφή** τοῦ πολυωνύμου. Ἀπό ἐδῶ καί πέρα, ὅταν λέμε *«πολυώνυμο»*, θά ἐννοοῦμε τήν ἀνηγμένη μορφή του. Ἕνα πολυώνυμο μέ δύο ὅρους λέγεται εἰδικότερα **διώνυμο,** ἐνῶ ἕνα πολυώνυμο μέ τρεῖς ὅρους λέγεται εἰδικότερα **τριώνυμο.** Τά μονώνυμα μποροῦμε νά τά θεωρήσουμε σάν πολυώνυμα πού ἀποτελοῦνται ἀπό ἕνα μόνο ὅρο.

> **Βαθμός πολυωνύμου** ὡς πρός ἕνα γράμμα του (ἤ ὡς πρός περισσότερα γράμματά του) λέγεται ὁ πιό μεγάλος βαθμός ὅλων τῶν ὅρων του ὡς πρός τό γράμμα αὐτό (ἤ ὡς πρός τά γράμματα αὐτά).

Ἔτσι π.χ. τό τριώνυμο $-5x^3y+4xy^2-7x^3$ εἶναι 3ου βαθμοῦ ὡς πρός x, 2ου βαθμοῦ ὡς πρός y καί 4ου βαθμοῦ ὡς πρός x,y.

Ὁμοίως τό διώνυμο $4x^4y^2\alpha-3x^2y^7\alpha^3$ εἶναι 4ου βαθμοῦ ὡς πρός x, 7ου βαθμοῦ ὡς πρός y, 9ου βαθμοῦ ὡς πρός x,y, καί 12ου βαθμοῦ ὡς πρός x,y,α.

2.5. Ἄν ὅλοι οἱ ὅροι ἑνός πολυωνύμου ἔχουν τόν ἴδιο βαθμό ὡς πρός ὁρισμένα γράμματα x,y..., τότε τό πολυώνυμο λέγεται **ὁμογενές** πρός τά γράμματα αὐτά. Ἔτσι π.χ. τό πολυώνυμο

$$2x^3y-5x^2y^2+4y^4$$

εἶναι ὁμογενές πολυώνυμο τετάρτου βαθμοῦ ὡς πρός x καί y, ἐνῶ τό πολυώνυμο $2x^3y^5-5xy\alpha^4+4y^3\alpha^2$ δέν εἶναι ὁμογενές ὡς πρός x καί y, εἶναι ὅμως ὁμογενές πέμπτου βαθμοῦ ὡς πρός y καί α.

Ἀκέραια πολυώνυμα μιᾶς μεταβλητῆς.

2.6. Ἄς θεωρήσουμε τό πολυώνυμο

$$5x^2+2x^5-6x^3+11x-3+7x^5+8-7x-x^5$$

τοῦ ὁποίου κάθε ὅρος περιέχει ἕνα μόνο γράμμα x ἤ εἶναι σταθερός ἀριθμός. Ἕνα τέτοιο πολυώνυμο γράφεται συνήθως στήν ἀνηγμένη του μορφή κατά τέτοιο τρόπο, ὥστε οἱ ἐκθέτες τοῦ γράμματος x νά ἐλαττώνονται, δηλαδή γράφεται

$$8x^5-6x^3+5x^2+4x+5,$$

καί τότε λέμε ὅτι τό πολυώνυμο εἶναι **διατεταγμένο κατά τίς φθίνουσες δυνάμεις τοῦ x.** Θά μπορούσαμε νά διατάξουμε τούς ὅρους του κατά τρόπο, πού οἱ ἐκθέτες τοῦ x νά αὐξάνονται καί τότε θά λέγαμε ὅτι τό πολυώνυμο εἶναι **διατεταγμένο κατά τίς αὔξουσες δυνάμεις τοῦ x.**

Τό μοναδικό γράμμα x, πού περιέχεται στούς ὅρους τοῦ πολυωνύμου, λέγεται **μεταβλητή** τοῦ πολυωνύμου καί ὁ μεγαλύτερος ἐκθέτης τοῦ x λέγεται ἁπλῶς **βαθμός τοῦ πολυωνύμου.** Ἔτσι τό παραπάνω πολυώνυμο εἶναι 5ου βαθμοῦ καί ἔχει ὡς ὅρο 3ου βαθμοῦ τό $-6x^3$, δευτέρου βαθμοῦ τό $5x^2$, πρώτου βαθμοῦ τό $4x$· ὁ ἀριθμός 5 λέγεται **σταθερός ὅρος** τοῦ πολυωνύμου καί θεωρεῖται σάν ὅρος του μηδενικοῦ βαθμοῦ, γιατί γράφεται καί $5x^0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Ἄν τό x παριστάνει στοιχεῖο τοῦ συνόλου {1,2,3} καί τό y παριστάνει στοιχεῖο τοῦ {1,3,7}, νά βρεθεῖ τό ἄθροισμα ὅλων τῶν ἀριθμητικῶν τιμῶν τῆς ἀλγεβρικῆς παραστάσεως

$$K = 2x^3+xy^2-3y.$$

Λύση: Γιά νά βροῦμε ὅλες τίς ἀριθμητικές τιμές τῆς K, σχηματίζουμε τόν παρακάτω πίνακα.

x	y	x^3	y^2	$2x^3$	xy^2	$-3y$	$K=2x^3+xy^2-3y$
1	1	1	1	2	1	− 3	0
1	3	1	9	2	9	− 9	2
1	7	1	49	2	49	−21	30
2	1	8	1	16	2	− 3	15
2	3	8	9	16	18	− 9	25
2	7	8	49	16	98	−21	93
3	1	27	1	54	3	− 3	54
3	3	27	9	54	27	− 9	72
3	7	27	49	54	147	−21	266
					ἄθροισμα		557

2. Νά ἀντικαταστήσετε τά ἀστεράκια μέ τά κατάλληλα μονώνυμα στήν ἰσότητα

$$3\alpha x^2y-7\alpha x^2y-5x^3y^5+7\alpha x^2y+\ *+\ *=5\alpha x^2y.$$

Λύση: Ἐπειδή τό δεύτερο μέλος εἶναι μονώνυμο μέ κύριο μέρος τό αx^2y, θά πρέπει στό πρῶτο μέλος νά ἔχουμε ὅμοια μονώνυμα μέ τό ἴδιο κύριο μέρος.

Θά πρέπει λοιπόν πρῶτα νά βάλουμε τό $5x^3y^5$, δηλαδή τό ἀντίθετο μονώνυμο τοῦ $-5x^3y^5$, ὥστε νά ἔχουμε

$$-5x^3y^5+5x^3y^5=0.$$

Ἀφοῦ ὅμως εἶναι καί $-7\alpha x^2y+7\alpha x^2y=0$, στό πρῶτο μέλος μένει μόνο τό $3\alpha x^2y$. Συνεπῶς θά πρέπει τό δεύτερο μονώνυμο νά εἶναι τό $2\alpha x^2y$, ὥστε νά ἔχει μέ τό $3\alpha x^2y$, ἄθροισμα τό $5\alpha x^2y$. Ἔτσι ἡ πλήρης ἰσότητα γράφεται:

$$3\alpha x^2y-7\alpha x^2y-5x^3y^5+7\alpha x^2y+5x^3y^5+2\alpha x^2y=5\alpha x^2y.$$

3. Νά προσδιορισθοῦν οἱ ἀκέραιοι λ καί μ, ὥστε νά εἶναι μονώνυμο ἡ ἀλγεβρική παράσταση $-3\alpha^2x^2y^{\mu+7}+2\alpha^2x^{\lambda+1}y^{12}$.

Λύση: Θά πρέπει οἱ ὅροι της νά εἶναι ὅμοια μονώνυμα, δηλαδή θά πρέπει

$$\lambda+1=2 \quad \text{καί} \quad \mu+7=12.$$

Ἀπό τίς ἰσότητες αὐτές βρίσκουμε $\lambda=1$ καί $\mu=5$ καί τότε ἡ ἀλγεβρική παράσταση γράφεται

$$-3\alpha^2x^2y^{12}+2\alpha^2x^2y^{12}=-\alpha^2x^2y^{12}$$

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Νά βρεθεῖ ποιές ἀπό τίς παρακάτω παραστάσεις εἶναι ἄρρητες, ποιές κλασματικές καί ποιές ἀκέραιες:

$$x-\frac{1}{x},\quad x^2-2xy+y^2,\quad \sqrt{x-3}+1,\quad 2\alpha x,\quad \frac{3\alpha^2+1}{2}$$

2. Νά βρεθεῖ ἡ ἀριθμητική τιμή τῆς παραστάσεως

$$\frac{2\alpha^3-3\alpha\beta+\beta^3}{\alpha^2+\beta^2},\quad \text{ἄν}\quad \alpha=-2,\quad \beta=-1$$

3. Νά συμπληρώσετε τόν παρακάτω πίνακα μέ τίς ἀριθμητικές τιμές τῆς παραστάσεως $\frac{2x^2-5x+1}{2}$

x	-3	-2	-1	0	1	$0{,}2$
$\frac{2x^2-5x+1}{2}$						

4. Νά συμπληρώσετε τόν παρακάτω πίνακα μέ τίς ἀριθμητικές τιμές τῆς παραστάσεως $x^2-2xy+y^2$.

$y \backslash x$	-1	0	1	2
-1				
0				
1				
2				

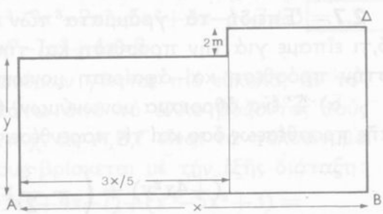
5. Νά συμπληρώσετε τόν παρακάτω πίνακα μέ τίς ἀριθμητικές τιμές τῶν παραστάσεων $\alpha^2-2\alpha\beta$ καί $\alpha(\alpha-2\beta)$ γιά τίς τιμές τῶν α καί β, πού δίνονται σέ αὐτόν.

α	β	$\alpha^2-2\alpha\beta$	$\alpha(\alpha-2\beta)$
-2	0		
10	$-0{,}25$		
-3	-1		

Τί παρατηρεῖτε;

6. Ἕνας ποδηλάτης καί ἕνας πεζός ξεκινοῦν ἀπό τήν ἴδια πόλη Α καί κινοῦνται πρός τήν ἴδια κατεύθυνση.
α) Ἄν ὁ ποδηλάτης ἔχει ταχύτητα υ km/h καί ὁ πεζός τ km/h, νά βρεῖτε μιά ἀλγεβρική παράσταση, πού νά παριστάνει πόσο θά ἀπέχουν μεταξύ τους μετά ἀπό 5 ὧρες.
β) Ἄν ὁ ποδηλάτης ἔτρεξε 5 ὧρες μέ ταχύτητα α km/h καί 3 ὧρες μέ ταχύτητα β km/h, νά βρεῖτε μιά ἀλγεβρική παράσταση, πού νά ἐκφράζει τή μέση ταχύτητα τοῦ ποδηλάτη.

7. Νά βρεθεῖ μία ἀλγεβρική παράσταση, πού νά δίνει τό ἐμβαδό τοῦ διπλανοῦ σχήματος τό ὁποῖο παριστάνει ἕνα οἰκόπεδο μιᾶς ἀγροτικῆς περιοχῆς.
Πόσα τετραγωνικά μέτρα εἶναι τό ἐμβαδό του, ὅταν ἡ πρόσοψη τοῦ οἰκοπέδου εἶναι (ΑΒ)=25 m καί τό βάθος του (ΒΔ) = 12 m;



8. Νά προσδιορισθοῦν οἱ ἀκέραιοι λ καί μ ἔτσι ,ὥστε ἡ ἀλγεβρική παράσταση $2\alpha^{\lambda+1}x^2+3\alpha^3x^{\mu+2}$ νά εἶναι μονώνυμο.

9. Γιά ποιά τιμή τοῦ α ἡ ἀλγεβρική παράσταση $(2\alpha+1)x^2y$ εἶναι τό μηδενικό μονώνυμο;

10. Θεωροῦμε τά μονώνυμα

$$A = -\frac{2}{3}x^2y, \quad B = -x^2y^3\omega, \quad \Gamma = xy^2\omega^3$$

α) Νά βρεῖτε τό συντελεστή καί τό κύριο μέρος καθενός ἀπό αὐτά.

β) Νά βρεῖτε τό βαθμό τοῦ Α ὡς πρός x καί ὡς πρός y, τό βαθμό τοῦ Β ὡς πρός y, ὡς πρός ω, ὡς πρός x καί y.

γ) Νά βρεῖτε τό βαθμό τοῦ Γ ὡς πρός x,y,ω.

11. Δίνεται τό σύνολο

$$A = \left\{-2x^2, \frac{1}{2}xy^2, -x^2y, yx^2, 2x^2y^2, -\frac{x^2}{3}, -\frac{1}{2}x^2\right\}.$$

Νά βρεῖτε τά ὑποσύνολα τοῦ Α, πού τά στοιχεῖα τους εἶναι ὅμοια μονώνυμα.

12. Νά βρεῖτε τό ἄθροισμα τῶν μονωνύμων:

α) $-2\alpha^2, \quad -3\alpha^2, \quad \alpha^2, \quad 3\alpha^2$

β) $2x^2y, \quad -3x^2y, \quad -x^2y, \quad \frac{1}{2}x^2y$

γ) $-\frac{1}{3}xy\omega, \quad -xy\omega, \quad -\frac{2}{3}xy\omega, \quad \frac{5}{6}xy\omega$

13. Νά γράψετε τά παρακάτω πολυώνυμα μέ τήν ἀνηγμένη μορφή τους, νά τά κατατάξετε κατά τίς φθίνουσες δυνάμεις τοῦ x καί νά βρεῖτε τό βαθμό τους ὡς πρός x·

α) $4x^2-3x^3+5x-2x^2+7-x-2+3x^2+4x^3$

β) $5x^4-3x^2+2x-7x^4-3x^3-1-2x+4-5x^2$

γ) $\alpha x^2+2x+3\alpha x^2-x+5-4x$

δ) $2\alpha^3x-6\alpha^2x^2+5\alpha^3x+\alpha^3-2\alpha^4+x^4$

14. Νά βρεῖτε τό βαθμό τῶν παρακάτω πολυωνύμων, ὡς πρός x, ὡς πρός α, ὡς πρός α καί x.

α) $2\alpha^3x-\alpha^2x^2+3\alpha x^3$

β) $2\alpha^4x-\alpha^3x^2-5\alpha^2x^3-7\alpha x^4-2x^5+\alpha$

γ) $2\alpha^3-\alpha^2x+2\alpha x^2-x^3$

Ποιά ἀπό τά πολυώνυμα αὐτά εἶναι ὁμογενή ὡς πρός α καί x;

ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΤΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

Ἀλγεβρικό ἄθροισμα μονωνύμων

2.7. Ἐπειδή τά γράμματα τῶν μονωνύμων παριστάνουν ἀριθμούς, ὅ,τι εἴπαμε γιά τήν πρόσθεση καί τήν ἀφαίρεση ἀριθμῶν, θά ἰσχύουν καί στήν πρόσθεση καί ἀφαίρεση μονωνύμων. Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι:

α) Σ' ἕνα ἄθροισμα μονωνύμων, θά παραλείπουμε τόσο τά σημεῖα + τῆς προσθέσεως ὅσο καί τίς παρενθέσεις τῶν προσθετέων. Ἔτσι τό ἄθροισμα

$$(+4x^2y) + \left(-\frac{3}{2}xy\right) + (5x^2) + (+7y)$$

γράφεται πιό ἁπλά (ὅπως εἴδαμε καί στήν § 2.4)

$$4x^2y - \frac{3}{2}xy + 5x^2 + 7y.$$

β) Γιά νά ἀφαιρέσουμε ἕνα μονώνυμο ἀπό ἕνα ἄλλο, προσθέτουμε τό ἀντίθετό του. Ἔτσι π.χ. ἔχουμε

$$4x^2y-(+7\alpha y^2x) = 4x^2y+(-7\alpha y^2x) = 4x^2y-7\alpha y^2x$$
$$4x^2y-(-7\alpha y^2x) = 4x^2y+(+7\alpha y^2x) = 4x^2y+7\alpha y^2x$$

Δηλαδή, ἡ ἀφαίρεση τῶν μονωνύμων ἀνάγεται πάλι σέ πρόσθεση.

Ὅταν λέμε **ἀλγεβρικό ἄθροισμα** μονωνύμων, ἐννοοῦμε μιά σειρά ἀπό προσθέσεις καί ἀφαιρέσεις μονωνύμων. Ἕνα τέτοιο ἀλγεβρικό ἄθροισμα εἶναι π.χ. τό

$$(-3x^2y)+(-4x^2)-(-2x^2y)+(+5xy),$$

πού, μετά ἀπό ὅσα εἴπαμε παραπάνω, γράφεται

$$\begin{aligned}(-3x^2y)+(-4x^2)-(-2x^2y)+(+5xy) &= (-3x^2y)+(-4x^2)+(+2x^2y)+\\ &\quad +(+5xy)\\ &= -3x^2y-4x^2+2x^2y+5xy\\ &= -x^2y-4x^2+5xy.\end{aligned}$$

Βλέπουμε δηλαδή ὅτι ἕνα ἀλγεβρικό ἄθροισμα μονωνύμων καταλήγει πάλι σ' ἕνα πολυώνυμο.

Πρόσθεση πολυωνύμων

2.8. Ἀφοῦ τά πολυώνυμα εἶναι ἀθροίσματα μονωνύμων καί τά μονώνυμα παριστάνουν ἀριθμούς, ἡ πρόσθεση τῶν πολυωνύμων θά γίνεται ὅπως καί ἡ πρόσθεση τῶν ἀριθμητικῶν ἀθροισμάτων.

Παράδειγμα 1:
$$\begin{aligned}(3x^2y-2xy+y^2)+(6xy-x^2y-4y^2) &=\\ &= 3x^2y-2xy+y^2+6xy-x^2y-4y^2 =\\ &= 3x^2y-x^2y-2xy+6xy+y^2-4y^2 =\\ &= (3-1)x^2y+(-2+6)xy+(1-4)y^2 =\\ &= 2x^2y+4xy-3y^2\end{aligned}$$

Παράδειγμα 2:
$$\begin{aligned}(x^3-2x^2-1)+(-3x^3+4x-7)+(x^4-5x^2+3) &=\\ &= x^3-2x^2-1-3x^3+4x-7+x^4-5x^2+3 =\\ &= x^4+x^3-3x^3-2x^2-5x^2+4x-1-7+3 =\\ &= x^4-2x^3-7x^2+4x-5\end{aligned}$$

Πρακτικά ἡ πρόσθεση τῶν πολυωνύμων γίνεται πιό εὔκολα, ἄν τοποθετήσουμε τά πολυώνυμα τό ἕνα κάτω ἀπό τό ἄλλο βάζοντας τούς ὅμοιους ὅρους στήν ἴδια στήλη. Ἔτσι π.χ. ἄν Α,Β,Γ εἶναι τά πολυώνυμα τοῦ παραδείγματος 2, τό ἄθροισμά τους βρίσκεται μέ τήν ἑξῆς διάταξη:

$$\begin{aligned}A+B+\Gamma &= (x^3-2x^2-1)+(-3x^3+4x-7)+(x^4-5x^2+3) =\\ &= \left.\begin{array}{rrrrr} & x^3 & -2x^2 & & -1- \\ & -3x^3 & & +4x & -7+ \\ +x^4 & & -5x^2 & & +3= \end{array}\right\}\\ &= x^4-2x^3-7x^2+4x-5.\end{aligned}$$

Ἄς θεωρήσουμε τώρα δύο πολυώνυμα πού οἱ ὅροι τους εἶναι ἀντίθετα μονώνυμα ὅπως π.χ τὰ

$$3x^2y-2xy+y^2, \quad -3x^2y+2xy-y^2$$

Δύο τέτοια πολυώνυμα λέγονται **ἀντίθετα** καί τό ἄθροισμά τους εἶναι πάντοτε ἕνα πολυώνυμο, πού οἱ συντελεστές του εἶναι μηδέν **(μηδενικό πολυώνυμο)** καί συμβολίζεται μέ 0. Πραγματικά τά παραπάνω πολυώνυμα ἔχουν ἄθροισμα

$$\begin{aligned}(3x^2y-2xy+y^2)+(-3x^2y+2xy-y^2) &= 3x^2y-2xy+y^2-3x^2y+2xy-y^2 = \\ &= 3x^2y-3x^2y-2xy+2xy+y^2-y^2 = \\ &= 0x^2y+0xy+0y^2 = \\ &= 0.\end{aligned}$$

Ἄν ἕνα πολυώνυμο σημειωθεῖ μέ A, τό ἀντίθετο του σημειώνεται μέ $-A$. Ἔτσι π.χ. ἄν εἶναι $A = 3x^2y-2xy+y^2$, θά ἔχουμε $-A = -3x^2y + 2xy-y^2$, δηλαδή

$$-(3x^2y-2xy+y^2) = -3x^2y+2xy-y^2$$

Ἀφαίρεση πολυωνύμων

2.9. Ἡ ἀφαίρεση πολυωνύμων γίνεται ὅπως καί ἡ ἀφαίρεση τῶν ἀλγεβρικῶν ἀθροισμάτων μέ ἀριθμητικούς ὅρους, δηλαδή:

> Γιά νά ἀφαιρέσουμε ἕνα πολυώνυμο B ἀπό ἕνα πολυώνυμο A, προσθέτουμε στό A τό ἀντίθετο τοῦ B.

Παράδειγμα 1: Ἄν $A = 3x^2y-2xy+y^2$ καί $B = 6xy-x^2y-4y^2$, τότε

$$\begin{aligned}A-B &= (3x^2y-2xy+y^2)-(6xy-x^2y-4y^2) = \\ &= (3x^2y-2xy+y^2)+(-6xy+x^2y+4y^2) = \\ &= 3x^2y-2xy+y^2-6xy+x^2y+4y^2 = \\ &= 3x^2y+x^2y-2xy-6xy+y^2+4y^2 = \\ &= 4x^2y-8xy+5y^2\end{aligned}$$

Παράδειγμα 2: Ἄν $A = x^3-2x^2-1$ καί $B = -3x^3+4x+7$ τότε εἶναι

$$\begin{aligned}A-B &= (x^3-2x^2-1)-(-3x^3+4x+7) = \\ &= (x^3-2x^2-1)+(3x^3-4x-7) = \\ &= x^3+3x^3-2x^2-4x-1-7 = \\ &= 4x^3-2x^2-4x-8.\end{aligned}$$

Πρακτικά ἡ διαφορά A–B δύο πολυωνύμων βρίσκεται μέ τή διάταξη πού μάθαμε στήν πρόσθεση, δηλαδή θέτουμε τό –B κάτω ἀπό τό A. Ἔτσι ἄν εἶναι $A = 5x^4-x^3-2x+1$ καί $B = 2x^4+3x^3+x^2-8$, γράφουμε

$$A - B = (5x^4 - x^3 - 2x + 1) - (2x^4 + 3x^3 + x^2 - 8)$$

$$\left.\begin{aligned} &= 5x^4 - x^3 \quad -2x + 1 - \\ &- 2x^4 - 3x^3 - x^2 \quad + 8 = \end{aligned}\right\}$$

$$= 3x^4 - 4x^3 - x^2 - 2x + 9.$$

Γενικά, ὅταν λέμε ἀλγεβρικό ἄθροισμα πολυωνύμων, ἐννοοῦμε μιά σειρά ἀπό προσθέσεις καί ἀφαιρέσεις πολυωνύμων. Ἕνα τέτοιο ἄθροισμα εἶναι π.χ. τό

$$(4x^2 - 3x) + (-2x^2 - 4x + 3) - (5x^3 - 6x^2 + x - 1)$$

Μετά ἀπό ὅσα εἴπαμε, καταλαβαίνουμε ὅτι μποροῦμε νά βγάλουμε τίς παρενθέσεις ἀκολουθώντας τούς ἑξῆς κανόνες:

- Ἄν μπροστά ἀπό μία παρένθεση ὑπάρχει τό +, παραλείπουμε τό πρόσημο αὐτό καί τήν παρένθεση γράφοντας τούς ὅρους της ὅπως εἶναι.
- Ἄν μπροστά ἀπό μία παρένθεση ὑπάρχει τό —, παραλείπουμε τό πρόσημο αὐτό καί τήν παρένθεση γράφοντας τούς ὅρους της μέ ἀντίθετα πρόσημα.

Ἔτσι π.χ. ἄν $A = 4x^2 - 3x$, $B = -2x^2 - 4x + 3$, $\Gamma = 5x^3 - 6x^2 + x - 1$, ἔχουμε

$$\begin{aligned} A + B - \Gamma &= (4x^2 - 3x) + (-2x^2 - 4x + 3) - (5x^3 - 6x^2 + x - 1) \\ &= 4x^2 - 3x - 2x^2 - 4x + 3 - 5x^3 + 6x^2 - x + 1 \\ &= -5x^3 + 8x^2 - 8x + 4. \end{aligned}$$

Τό πολυώνυμο αὐτό $A + B - \Gamma$ βρίσκεται ἀκόμη καί μέ τή γνωστή διάταξη:

$$A + B - \Gamma = \left.\begin{aligned} 4x^2 - 3x - \\ -2x^2 - 4x + 3 - \\ -5x^3 + 6x^2 - x + 1 = \end{aligned}\right\}$$

$$= -5x^3 + 8x^2 - 8x + 4$$

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

15. Νά βρεῖτε τά ἀθροίσματα τῶν μονωνύμων:

α) $2x$, y, $-3x$, $-2y$, $-x$

β) $-2x^2$, $-3x$, x, $2x^2$, -1

γ) $3x^2y$, $-2xy^2$, $4x^2y$, $-xy^2$, y^2x.

16. Ἄν $A = -3x^2y$, $B = -x^2y$, $\Gamma = -\frac{1}{2}xy$, $\Delta = 12xy$, νά βρεθοῦν οἱ διαφορές

α) $A - B$ β) $B - \Gamma$ γ) $\Gamma - \Delta$

17. Νά ἐκτελέσετε τίς πράξεις:

α) $4x^2 + (+2x^2) - (-3x^2) + (-6x^2) - (+4x^2)$
β) $\alpha - (-2\beta) + (-3\alpha) - (-2\alpha) + (-3\beta)$

18. Ἐπίσης τίς πράξεις:
α) $(-2x^2y^3) - (-3x^3y^2) + (+x^3y^2) - (-7x^2y^3) + (-x^2y^3)$
β) $\left(-\frac{2}{3}xy^2\right) - \left(-\frac{1}{2}xy^2\right) + \left(-\frac{3}{2}x^2y\right) - \left(+\frac{1}{4}xy\right) - \left(-\frac{1}{3}x^2\right)$

19. Ἄν $A = x^3-4x^2+3x-1$, $B = 2x^3-5x^2-2x+3$, $\Gamma = 4x^3+x^2-x-2$, νά βρεῖτε τά πολυώνυμα:
α) $A+B$ β) $A+B+\Gamma$ γ) $A-B$ δ) $A-B+\Gamma$ ε) $\Gamma-A-B$.

20. Νά ἐκτελεσθοῦν οἱ πράξεις:
α) $(2x+3y) - (-x-2y+1) + (3y-2)$
β) $(5\alpha^3-2\beta^2+1)-(2\alpha^2-3\beta+3) - (-2\alpha^2+4)$
γ) $(\alpha^2x^2-3\alpha x^3) + (2x^3-2\alpha^3+\alpha^3x) - (-\alpha^2x^2+\alpha^3)$

21. Στό πολυώνυμο $4x^4-5x^3-3x^2+7x-1$ νά βάλετε μέσα σέ παρένθεση: α) τούς τρεῖς τελευταίους ὅρους μέ τό πρόσημο (–) μπροστά ἀπό τήν παρένθεση β) τόν πρῶτο, τρίτο, πέμπτο ὅρο μέ τό πρόσημο (+) μπροστά ἀπό τήν παρένθεση.

22. Νά ἐκτελέσετε τίς πράξεις:
α) $\alpha-2\beta-[2\alpha-(\beta-3\gamma)]-2\gamma$
β) $3x^2-[(5x^3-x) + 4x^2-(2x^2+6)] + (-2x^2-5x)$
γ) $x^2-(y^2-xy) + [2y^2+3xy - (x^2+y^2)]$
δ) $-3\alpha\beta + (2\beta^2-\alpha^2) - [\alpha\beta-(\alpha^2+\beta^2) + 3\alpha^2] - (2\beta^2-\alpha^2)$

23. Νά ἐκτελέσετε τίς πράξεις:
α) $(2x-3) - [-2x - (x^2-2)] - \{x^2-[3x+4-(x^2-1)]\}$
β) $\alpha^2-2\alpha\beta- \{2\alpha^2-[3\beta^2-(\alpha^2+\beta^2)-3\alpha^2]-\alpha\beta\}$
γ) $3x^2- \{x^2-[x-(1-x^3)] + 2x\}- \{2x^3+[x+(x^2-3)-3x^2]-1\}-4$

Πολλαπλασιασμός πολυωνύμου ἐπί μονώνυμο.

2.10. Ἄς δοῦμε πρῶτα πῶς βρίσκουμε ἕνα γινόμενο μονωνύμων, π.χ. τό

$$(3x^2y) \cdot (-5x^2) \cdot (-xy^3\alpha)$$

Ἐπειδή τά γράμματα παριστάνουν ἀριθμούς, ἔχουμε οὐσιαστικά ἕνα γινόμενο παραγόντων, στό ὁποῖο ἰσχύει ἡ ἀντιμεταθετική καί ἡ προσεταιριστική ἰδιότητα. Ἔτσι τό γινόμενο αὐτό γράφεται

$$\begin{aligned}(3x^2y)\cdot(-5x^2)\cdot(-xy^3\alpha) &= 3x^2y(-5)x^2(-1)xy^3\alpha \\ &= 3(-5)\,(-1)\ x^2x^2xyy^3\alpha \\ &= 15x^5y^4\alpha.\end{aligned}$$

Βλέπουμε δηλαδή ὅτι:

> Τό γινόμενο μονωνύμων εἶναι ἕνα μονώνυμο, πού ἔχει συντελεστή τό γινόμενο τῶν συντελεστῶν καί πού τό κύριο μέρος του περιέχει ὅλα τά γράμματα, τά ὁποῖα ὑπάρχουν στούς παράγοντές του, καί τό καθένα μέ ἐκθέτη τό ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν του.

$\alpha^{\mu} \cdot \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu}$

Ἄς ἐφαρμόσουμε τόν κανόνα αὐτό, γιά νά βροῦμε τό τετράγωνο ἤ τόν κύβο ἑνός μονωνύμου, π.χ. τοῦ $-3\alpha x^2y$. Ἔχουμε

$$(-3\alpha x^2y)^2 = (-3\alpha x^2y)(-3\alpha x^2y) = (-3)^2\alpha^2x^4y^2 = 9\alpha^2x^4y^2$$

$$(-3\alpha x^2y)^3 = (-3\alpha x^2y)(-3\alpha x^2y)(-3\alpha x^2y) = (-3)^3\alpha^3x^6y^3 = -27\alpha^3x^6y^3.$$

Γενικά:

> Γιά νά ὑψώσουμε ἕνα μονώνυμο σέ μιά δύναμη λ, ὑψώνουμε τό συντελεστή του στήν λ δύναμη καί πολλαπλασιάζουμε ἐπί λ τούς ἐκθέτες τῶν γραμμάτων του.

Ἄς θεωρήσουμε τώρα τό γινόμενο ἑνός πολυωνύμου ἐπί ἕνα μονώνυμο, π.χ.

$$(2x^2y-3xy+5)\cdot(-4x^3y)$$

Ἐπειδή τό πολυώνυμο εἶναι ἄθροισμα μονωνύμων, μποροῦμε νά ἐφαρμόσουμε τήν ἐπιμεριστική ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὡς πρός τήν πρόσθεση, ὁπότε ἔχουμε

$$(2x^2y-3xy+5)\cdot(-4x^3y) = (2x^2y)(-4x^3y)+(-3xy)(-4x^3y)+5(-4x^3y)$$
$$= -8x^5y^2+12x^4y^2-20x^3y.$$

Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι:

> Γιά νά πολλαπλασιάσουμε ἕνα πολυώνυμο ἐπί ἕνα μονώνυμο, πολλαπλασιάζουμε κάθε ὅρο τοῦ πολυωνύμου ἐπί τό μονώνυμο καί προσθέτουμε τά γινόμενα πού προκύπτουν.

Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων

2.11. Ἀφοῦ τά πολυώνυμα εἶναι ἀθροίσματα (μονωνύμων), τό γινόμενο δύο πολυωνύμων θά βρίσκεται ὅπως τό γινόμενο δύο ἀριθμητικῶν ἀθροισμάτων, δηλαδή:

> Γιά νά πολλαπλασιάσουμε ἕνα πολυώνυμο ἐπί ἕνα ἄλλο πολυώνυμο, πολλαπλασιάζουμε κάθε ὅρο τοῦ πρώτου μέ κάθε ὅρο τοῦ δευτέρου καί προσθέτουμε τά γινόμενα πού προκύπτουν.

Ἔτσι π.χ. ἔχουμε: $(3x^2y+2xy^2-x^3)(2x-3y)=$

$$= (3x^2y+2xy^2-x^3)(2x)+(3x^2y+2xy^2-x^3)(-3y) =$$
$$= 6x^3y+4x^2y^2-2x^4-9x^2y^2-6xy^3+3x^3y =$$
$$= 9x^3y-5x^2y^2-6xy^3-2x^4.$$

$$(2x^3-x^2+3x+5)(x^2-3x+1) =$$
$$= (2x^3-x^2+3x+5)x^2+(2x^3-x^2+3x+5)(-3x)+$$
$$+(2x^3-x^2+3x+5)\cdot 1 =$$

$$= 2x^5 - x^4 + 3x^3 + 5x^2 - 6x^4 + 3x^3 - 9x^2 - 15x + 2x^3 -$$
$$- x^2 + 3x + 5 =$$
$$= 2x^5 - 7x^4 + 8x^3 - 5x^2 - 12x + 5.$$

Ὅταν ἔχουμε δύο πολυώνυμα μιᾶς μεταβλητῆς, τά ὁποῖα εἶναι διατεταγμένα κατά τίς φθίνουσες δυνάμεις, τό γινόμενό τους μπορεῖ νά βρεθεῖ καί ἄν διατάξουμε τά «μερικά γινόμενα» σέ στῆλες, ὅπως μάθαμε στήν πρόσθεση τῶν πολυωνύμων. Ἔτσι π.χ.

$$(5x^3 - x^2 + 2x - 3) \cdot (4x^2 - x + 2) =$$

$$\left.\begin{array}{l} = 20x^5 - 4x^4 + 8x^3 - 12x^2 - \\ \quad\; - 5x^4 + x^3 - 2x^2 + 3x + \\ \quad\; + 10x^3 - 2x^2 + 4x - 6 = \end{array}\right| \begin{array}{l} \leftarrow \alpha' \text{ μερικό γινόμενο} \\ \leftarrow \beta' \text{ μερικό γινόμενο} \\ \leftarrow \gamma' \text{ μερικό γινόμενο} \end{array}$$

$$= 20x^5 - 9x^4 + 19x^3 - 16x^2 + 7x - 6.$$

Ἀπό τό παραπάνω παράδειγμα βλέπουμε ὅτι ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ γινομένου εἶναι ἴσος μέ τό γινόμενο τῶν πρώτων ὅρων τῶν δύο πολυωνύμων, δηλαδή

$$20x^5 = (5x^3) \cdot (4x^2) \leftarrow 20x^5$$

καί συνεπῶς **ὁ βαθμός τοῦ γινομένου δύο πολυωνύμων εἶναι ἴσος μέ τό ἄθροισμα τῶν βαθμῶν τῶν δύο πολυωνύμων.**

Σέ πολυώνυμα μέ περισσότερα γράμματα ἡ ἰδιότητα αὐτή ἰσχύει γιά κάθε γράμμα τους. Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι, ἄν ἔχουμε δύο ὁμογενή πολυώνυμα καί βροῦμε τό γινόμενό τους, τό γινόμενο αὐτό θά εἶναι ἐπίσης ὁμογενές πολυώνυμο. Ἡ ἰσότητα π.χ.

$$(3x^2y + 2xy^2 - x^3)(2x - 3y) = 9x^3y - 5x^2y^2 - 6xy^3 - 2x^4$$

δείχνει ὅτι τό γινόμενο δύο ὁμογενῶν πολυωνύμων 3ου καί 1ου βαθμοῦ ὡς πρός x καί y εἶναι ὁμογενές πολυώνυμο 4ου (3+1=4) βαθμοῦ ὡς πρός x καί y.

Γιά νά βροῦμε τό γινόμενο τριῶν πολυωνύμων, πολλαπλασιάζουμε πρῶτα τά δύο πρῶτα καί τό γινόμενο πού βρίσκουμε τό πολλαπλασιάζουμε ἐπί τό τρίτο πολυώνυμο. Ἔτσι π.χ. ἔχουμε

$$(x^2 + 2)(2x + 3)(x - 1) = (2x^3 + 4x + 3x^2 + 6)(x - 1) =$$
$$= 2x^4 + 4x^2 + 3x^3 + 6x - 2x^3 - 4x - 3x^2 - 6 =$$
$$= 2x^4 + x^3 + x^2 + 2x - 6.$$

Εἶναι φανερό ὅτι μέ ἀνάλογη διαδικασία θά βρίσκουμε καί τό γινόμενο περισσότερων ἀπό τρία πολυωνύμων.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

24 Νά βρεῖτε τά γινόμενα:

α) $(-2x)\ (-3x^2)$ β) $2xy^2 \cdot (-x^2y^2)$ γ) $\left(\frac{2}{3}\alpha^2\right) \cdot \left(\frac{3}{4}\alpha y^2\right)$

δ) $(-3\alpha^2)\ (-5\beta^3)$ ε) $\frac{2}{5}\ x^2y^3z\ \left(-\frac{15}{8}\ x^3y^2z\right)$

25. Νά βρεῖτε τά γινόμενα:

α) $(-2\alpha^2)\ .\ 3\alpha^3\ .\ (-4\alpha^5)$ β) $2xy^2\ .\ (-4x^3y)\ .\ (-x^2y^2)$

γ) $xy\ .\ (-x^2y^2z)\ .\ 4xz^2\ .\ (-4x^3y^3z^3)$ δ) $\left(-\frac{4}{5}\ \alpha^3\beta\right).\left(\frac{5}{12}\beta^3\right).(-3\alpha).(-1)$

ε) $\alpha^{\mu-2}.\ \alpha^{\mu+3}\ .\ \alpha^{2\mu-1}$ στ) $\alpha^x\beta^{y-1}.(-3\alpha^{x+1}\beta^{y-2})\ .\ (-\alpha\beta)\ .\ \beta^2$

26. Νά ὑπολογισθοῦν οἱ δυνάμεις:

α) $\left(-\frac{1}{2}\ \alpha^2\beta^3\gamma\right)^3$ β) $(+3\alpha^4x^3y^2)^3$ γ) $\left(-\frac{3}{4}\alpha^3\beta\right)^3$

δ) $(-\alpha\beta)^{2\nu+1}$ ε) $(\alpha^x\beta^{y-1})^2$ στ) $(-\alpha\beta^2)^{2\mu}$

27. Νά κάμετε τίς πράξεις:

α) $\left(-\frac{1}{2}\ x^2y\right)^3.\ (-2x)\ .\ (4xy^3)^2$ β) $(-2x^3y^2\omega)^2\ .\left(\frac{1}{2}\ xy\right)^3$

γ) $(\alpha^\mu\ .\ \beta^\nu)^2\ .\ (-\alpha^{\mu-2}.\beta^{\nu-1})^2$ δ) $\left(\frac{1}{3}\ x^2y\right)\ (-1)\ \left(-\frac{1}{2}\ xy^3z\right)^2$

28. Νά κάμετε τίς πράξεις:

α) $(-3x^3-2x^2+5)\ (-2x^2)$ β) $-3\alpha^2\beta\ (\alpha^2\beta^2-2\alpha\beta+3\alpha^2\beta^3-1)$

γ) $\left(\frac{x^3}{4}-\frac{x^2}{2}-5x-\frac{1}{2}\right).\left(\frac{6}{5}x^2\right)$ δ) $\left(\frac{3}{2}\ \alpha x^2y-4\alpha^2x-5xy^2\right)(-3xy)$

29. Νά γίνουν οἱ πράξεις:

α) $3x(x^2-1)-4x^2(x+2)-3x+4(x^2-1)$

β) $-5x^2\ (x^3-2x^2+4)+(1-2x)\ (-4x^3)-x(x-1)-2x$

γ) $2\alpha(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)-\beta^3-(\alpha-\beta)\ (-3\alpha\beta)-4\alpha^2\beta$

δ) $3[x^2-(x+4)-3]-2x^2\ [x^2+(x-2)]-5$

ε) $2\alpha\{\alpha\beta-[\alpha^2-(-\alpha\beta+4)]+2\}-3\alpha\ (\alpha^2-2)$

30. Νά ἀντικατασταθοῦν οἱ παρακάτω ἀστερίσκοι ἔτσι, ὥστε νά ἰσχύει κάθε μιά ἀπό τίς παρακάτω ἰσότητες:

α) $*\ .\ (4\beta^2-7\beta+8)=28\beta^3-49\beta^2+56\beta$

β) $*\ .\ (3x^2+8x-7)=36x^5+*-*$

γ) $5\alpha^2\beta^3\ (*-9\beta^2+*)=20\alpha^5\beta^7-*+\alpha^4\beta^9$

31. Νά ἐκτελέσετε τούς πολλαπλασιασμούς:

α) $(3x+1)\ (2x-3)$ β) $(3x^2-2x+4)\ (2x-5)$

γ) $(-2x^3-4x^4+x^2-2x+1)\ .\ (-x+2x^2+3)$ δ) $(x-1)\ (2x^4-3x^2+2x-5)$

ε) $(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)\ (\alpha+\beta)$ στ) $(2x^3+2y^3+xy^2)\ (2x^2-xy+y^2)$

ζ) $(x^4-2x^2-3)\ (-2x^3-1+2x)$ η) $\left(\frac{2}{3}\ xy-x^2+\frac{y^2}{2}\right)\left(y^2-3xy-\frac{x^2}{2}\right)$

32. Νά ἐκτελέσετε τίς παρακάτω πράξεις καί μετά νά βρεῖτε τήν ἀριθμητική τιμή τῆς ἀρχικῆς παραστάσεως καί τοῦ ἐξαγομένου γιά τίς τιμές τῶν γραμμάτων πού ἀναφέρονται.

α) $(2x+3)\ (x^2+x-1)-(x^2-1)\ (x+2)-2x^3,\ x=-2$

β) $(x^2y-2xy^2).(2x-y)-2x^3\ (x+y)-(x-y)\ (-2y^3),\ \ x=-1,\ y=2$

γ) $\alpha^2+\alpha\beta^2-[\alpha^3-(\alpha+\beta)\ (\alpha^2+\beta^2)],\quad \alpha=-2,\ \beta=\frac{1}{2}$

δ) $x(x^2-2)-(x+2)\ [x^2-(1-x)],\quad x=-3.$

33. Νά βρεθοῦν τά γινόμενα:

α) $(x+1)\ (x-1)\ (x+3)$ β) $(x^2+xy+y^2)\ (x-y)\ (x^2+y^2)$

34. Ἄν $A=2x+3$, $B=3x-2$ καί $\Gamma=x-1$, νά ἐπαληθεύσετε:

α) τήν προσεταιριστική ἰδιότητα $(A.B).\Gamma=A\,.\,(B.\Gamma)$

β) τήν ἐπιμεριστική ἰδιότητα $A\,.\,(B+\Gamma)=A\,.\,B+A\,.\,\Gamma$.

Ἀξιοσημείωτοι πολλαπλασιασμοί

2.12. Ὑπάρχουν ὁρισμένα ἁπλά γινόμενα, τά ὁποῖα συναντᾶμε συχνά καί γι' αὐτό εἶναι χρήσιμο νά ἔχουμε μνημονικούς κανόνες, πού δίνουν τά ἐξαγόμενά τους. Τά πιό βασικά ἀπό τά γινόμενα αὐτά εἶναι:

Ι. Τό τετράγωνο ἑνός διωνύμου.

Ἐπειδή ἔχουμε

$$(\alpha+\beta)^2=(\alpha+\beta)\ (\alpha+\beta)=\alpha^2+\alpha\beta+\alpha\beta+\beta^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$$

$$(\alpha-\beta)^2=(\alpha-\beta)\ (\alpha-\beta)\ =\alpha^2-\alpha\beta-\alpha\beta+\beta^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$$

ἤ τελικά

$$\boxed{\begin{aligned}(\alpha+\beta)^2&=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\\(\alpha-\beta)^2&=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\end{aligned}}$$

βλέπουμε ὅτι **τό τετράγωνο τοῦ ἀθροίσματος (τῆς διαφορᾶς) δύο μονωνύμων(1) εἶναι ἴσο μέ τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τους σύν (μεῖον) τό διπλάσιο γινόμενό τους.**

Τό ἐξαγόμενο τοῦ $(\alpha+\beta)^2$ ἤ τοῦ $(\alpha-\beta)^2$ ἤ ὁποιασδήποτε δυνάμεως ἑνός πολυωνύμου λέγεται καί **ἀνάπτυγμά του.**

Παράδειγμα 1. Νά βρεθοῦν τά ἀναπτύγματα $(3x+2y)^2$ καί $(3xy-2)^2$.

$$\begin{array}{l}(3x\ +\ 2y)^2=(3x)^2+2(3x)\ (2y)+(2y)^2=9x^2+12xy+4y^2\\ \ \downarrow\qquad\ \downarrow\qquad\quad\ \uparrow\qquad\quad\ \uparrow\quad\ \ \uparrow\qquad\ \ \uparrow\\ (\alpha\ +\ \beta)^2=\ \ \alpha^2\ \ +\ \ 2\ \alpha\quad\ \beta\ \ +\ \ \beta^2\end{array}$$

$$\begin{array}{l}(3xy-2)^2=(3xy)^2-2(3xy)\,.\,2+2^2=9x^2y^2-12xy+4\\ \ \downarrow\qquad\ \ \downarrow\qquad\quad\ \uparrow\qquad\quad\ \uparrow\quad\ \ \uparrow\quad\ \ \uparrow\\ (\alpha-\ \ \beta)^2=\ \alpha^2-2\quad\ \alpha\quad\ \ \beta\ +\ \beta^2\end{array}$$

Παράδειγμα 2. Ποιοῦ διωνύμου ἀνάπτυγμα εἶναι τό πολυώνυμο $4x^2-28x+49$;

Εἶναι ἀνάπτυγμα τοῦ τετραγώνου τοῦ $2x-7$ γιατί

$$\begin{array}{l}4x^2-28x+49=(2x)^2-2.(2x).7+7^2=(2x-7)^2\\ \qquad\qquad\qquad\ \ \downarrow\qquad\ \ \downarrow\quad\ \downarrow\qquad\quad\ \uparrow\quad\ \ \uparrow\\ \qquad\qquad\qquad\ \alpha^2\ -\ 2\quad\ \alpha\quad\ \beta\ +\ \beta^2=(\alpha-\beta)^2\end{array}$$

Παράδειγμα 3. Νά βρεθεῖ ὁ ὅρος πού λείπει στά παρακάτω πολυώνυμα, γιά νά γίνουν ἀναπτύγματα τέλειων τετραγώνων διωνύμων:

(1) Τά α καί β μπορεῖ νά εἶναι καί ὁποιεσδήποτε ἀλγεβρικές παραστάσεις.

$1 - 6x + *$, $x^4 + 16y^2 + *$

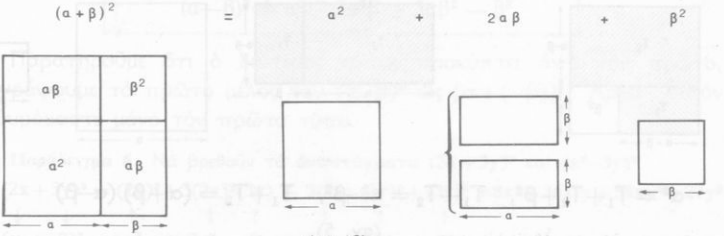
Ἐπειδή εἶναι $1-6x = 1^2-2\,(3x).1$, τό πολυώνυμο $1-6x$ γίνεται ἀνάπτυγμα τοῦ $(1-3x)^2$ ἄν συμπληρωθεῖ μέ τό τετράγωνο τοῦ $3x$, δηλαδή μέ τό $9x^2$. Ἔχουμε τότε

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1^2 & - & 2\,.\,1 & . & (3x) & + & (3x)^2 & = & (1 & - & 3x)^2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \alpha^2 & - & 2\alpha & & \beta & + & \beta^2 & = & (\alpha & - & \beta)^2 \end{array}$$

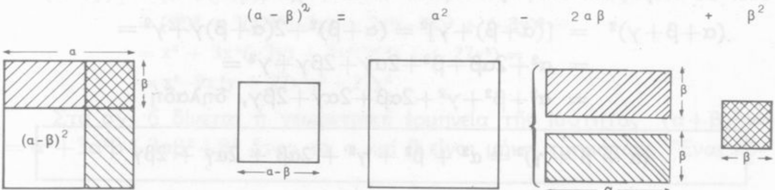
Ἐπειδή εἶναι $x^4 + 16y^2 = (x^2)^2 + (4y)^2$, τό πολυώνυμο x^4+16y^2 γίνεται ἀνάπτυγμα τοῦ $(x^2+4y)^2$ ἄν συμπληρωθεῖ μέ τό διπλάσιο γινόμενο τῶν x^2 καί $4y$ δηλαδή μέ τό $2x^2.4y$. Ἔχουμε τότε

$$\begin{array}{ccccccccccc} (x^2)^2 & + & 2x^2 & & (4y) & + & (4y)^2 & = & (x^2 & + & 4y)^2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \uparrow & & \uparrow \\ (\alpha^2 & + & 2\alpha & & \beta & + & \beta^2) & = & (\alpha & + & \beta)^2. \end{array}$$

Τά παρακάτω σχήματα 3 καί 4 δίνουν γεωμετρική ἑρμηνεία τῶν ἰσοτήτων $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ καί $(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$ ὅταν τά α καί β παριστάνουν μήκη τμημάτων.



(σχ. 3)



(σχ. 4)

II. Τό ἄθροισμα δύο μονωνύμων ἐπί τή διαφορά τους.

Ἐπειδή ἔχουμε $(\alpha+\beta)\,(\alpha-\beta) = \alpha^2+\alpha\beta-\alpha\beta-\beta^2 = \alpha^2-\beta^2$, δηλαδή

$$\boxed{(\alpha+\beta)\,(\alpha-\beta) = \alpha^2-\beta^2}$$

βλέπουμε ὅτι **τό γινόμενο τοῦ ἀθροίσματος δύο μονωνύμων ἐπί τή διαφορά τους εἶναι ἴσο μέ τό τετράγωνο τοῦ μειωτέου τῆς διαφορᾶς μεῖον τό τετράγωνο τοῦ ἀφαιρετέου.**

Παράδειγμα 4. Νά βρεθοῦν τά γινόμενα $(2x+3y)(2x-3y)$ καί $(5\alpha^2\beta+x)(x-5\alpha^2\beta)$

$$(2x+3y)(2x-3y)=(2x)^2-(3y)^2=4x^2-9y^2$$
$$\downarrow \quad \downarrow \qquad \downarrow \qquad\quad \uparrow \qquad \uparrow$$
$$(\alpha+\beta)\;(\alpha-\beta) = \alpha^2 - \beta^2$$

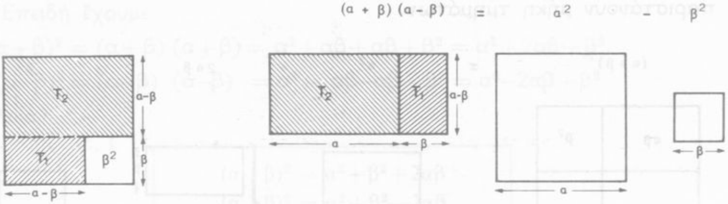
$$(5\alpha^2\beta+x)(x-5\alpha^2\beta)=x^2-(5\alpha^2\beta)^2=x^2-25\alpha^4\beta^2$$

Παράδειγμα 5. Νά γραφοῦν σέ μορφή γινομένου δύο διωνύμων τά διώνυμα α) x^2-9 β) $\alpha^2\beta^2-4y^2$

α) $x^2-9=x^2-3^2=(x+3)\;(x-3)$
$$\downarrow \quad \downarrow \qquad \uparrow \quad \uparrow \qquad \uparrow \quad \uparrow$$
$$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha+\beta)\;(\alpha-\beta)$$

β) $\alpha^2\beta^2-4y^2=(\alpha\beta)^2-(2y)^2=(\alpha\beta+2y)(\alpha\beta-2y)$

Τό παρακάτω σχῆμα δίνει τή γεωμετρική ἑρμηνεία τῆς ἰσότητας $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$ ὅταν τά α καί β παριστάνουν μήκη τμημάτων.



$$\alpha^2=T_1+T_2+\beta^2,\quad T_1+T_2=\alpha^2-\beta^2,\quad T_1+T_2=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$$

(σχ. 5)

III. Τό τετράγωνο ἑνός τριωνύμου. Ἐπειδή ἔχουμε

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta+\gamma)^2 &= [(\alpha+\beta)+\gamma]^2=(\alpha+\beta)^2+2(\alpha+\beta)\gamma+\gamma^2=\\ &= \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2+2\alpha\gamma+2\beta\gamma+\gamma^2=\\ &= \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma,\ \text{δηλαδή}\end{aligned}$$

$$\boxed{(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma}$$

βλέπουμε ὅτι **τό τετράγωνο τοῦ ἀθροίσματος τριῶν μονωνύμων εἶναι ἴσο μέ τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τους σύν ὅλα τά διπλάσια γινόμενά τους ἀνά δύο.** Ἔτσι π.χ.

$$\begin{aligned}(2x+3y+z)^2 &= (2x)^2+(3y)^2+z^2+2(2x)(3y)+2(2x)z+2(3y)z=\\ &= 4x^2+9y^2+z^2+12xy+4xz+6yz.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x^2-3y+2\alpha z)^2 &= [x^2+(-3y)+2\alpha z]^2=\\ &= (x^2)^2+(-3y)^2+(2\alpha z)^2+2x^2(-3y)+2x^2(2\alpha z)+\\ &\qquad +2(-3y)(2\alpha z)=\\ &= x^4+9y^2+4\alpha^2z^2-6x^2y+4\alpha x^2z-12\alpha yz.\end{aligned}$$

Ὁ κανόνας ἰσχύει καί γιά τό τετράγωνο ἀθροίσματος ὁσωνδήποτε προσθετέων.

IV. Ὁ κύβος διωνύμου. Ἐπειδή εἶναι

$$(\alpha+\beta)^3 = (\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta) = (\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta)(\alpha+\beta) =$$
$$= \alpha^3+\alpha\beta^2+2\alpha^2\beta+\alpha^2\beta+\beta^3+2\alpha\beta^2 =$$
$$= \alpha^3+\beta^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2,$$
$$(\alpha-\beta)^3 = (\alpha-\beta)^2(\alpha-\beta) = (\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta)(\alpha-\beta) =$$
$$= \alpha^3+\alpha\beta^2-2\alpha^2\beta-\alpha^2\beta-\beta^3+2\alpha\beta^2 =$$
$$= \alpha^3-\beta^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2,$$

ἔχουμε τελικά (1)

$$\boxed{\begin{aligned}(\alpha+\beta)^3 &= \alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3\\ (\alpha-\beta)^3 &= \alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3\end{aligned}}$$

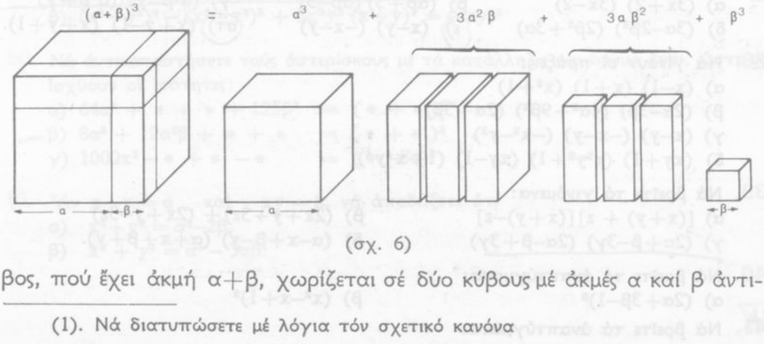
Παρατηροῦμε ὅτι ὁ δεύτερος τύπος προκύπτει ἀπό τόν πρῶτο, ἄν γράψουμε τό πρῶτο μέλος του $(\alpha-\beta)^3$ ὡς $[\alpha+(-\beta)]^3$. Ἀρκεῖ λοιπόν νά θυμόμαστε μόνο τόν πρῶτο τύπο.

Παράδειγμα 6: Νά βρεθοῦν τά ἀναπτύγματα $(2x+3y)^3$ καί $(x^2-3y)^3$

$$(2x+3y)^3 = (2x)^3+3(2x)^2(3y)+3(2x)(3y)^2+(3y)^3 = 8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3$$
$$\downarrow \quad \downarrow \qquad \uparrow \qquad \uparrow \quad \uparrow \qquad \uparrow \quad \uparrow \qquad \uparrow$$
$$(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2 \quad \beta \quad + 3\alpha \quad \beta^2 \quad + \beta^3$$

$$(x^2-3y)^3 = [x^2+(-3y)]^3 =$$
$$= (x^2)^3+3(x^2)^2(-3y)+3x^2(-3y)^2+(-3y)^3 =$$
$$= x^6+3x^4(-3y)+3x^2(9y^2)+(-27y^3) =$$
$$= x^6-9x^4y+27x^2y^2-27y^3$$

Στό σχ. 6 δίνεται ἡ γεωμετρική ἑρμηνεία τῆς ἰσότητας $(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$ ὅταν τά α καί β εἶναι μήκη τμημάτων. Ἕνας κύ-



(σχ. 6)

βος, πού ἔχει ἀκμή α+β, χωρίζεται σέ δύο κύβους μέ ἀκμές α καί β ἀντι-

(1). Νά διατυπώσετε μέ λόγια τόν σχετικό κανόνα στοίχως καί σέ δύο τριάδες ὀρθογώνιων παραλληλεπιπέδων, τῶν ὁποίων οἱ διαστάσεις εἶναι β,α,α καί β,β,α ἀντιστοίχως.

V. Ἄν κάνουμε τούς πολλαπλασιασμούς στά πρῶτα μέλη τους, βρίσκουμε ἐπίσης ὅτι ἰσχύουν οἱ ἰσότητες

$$\boxed{\begin{aligned}(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)&=\alpha^3+\beta^3\\(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)&=\alpha^3-\beta^3\end{aligned}}$$

Ἔτσι π.χ. ἔχουμε:

$$(x+3)(x^2-3x+9)=(x+3)(x^2-x\cdot 3+3^2)=x^3+3^3=x^3+27$$

$$\downarrow\quad\downarrow\quad\downarrow\quad\downarrow\quad\downarrow\quad\downarrow\qquad\qquad\uparrow\quad\uparrow$$

$$(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\,\beta+\beta^2)=\alpha^3+\beta^3$$

$$(2x-1)(4x^2+2x+1)=[(2x)-1]\cdot[(2x)^2+2x\cdot 1+1^2]=(2x)^3-1^3=8x^3-1$$

Οἱ ἰσότητες, πού προκύπτουν ἀπό τούς παραπάνω ἀξιοσημείωτους πολλαπλασιασμούς, ἐπαληθεύονται γιά ὅλες τίς ἀριθμητικές τιμές τῶν γραμμάτων τους. Κάθε ἰσότητα ὅμως, πού ἐπαληθεύεται γιά ὅλες τίς τιμές τῶν γραμμάτων της, λέγεται **ταυτότητα**· γι' αὐτό τούς παραπάνω ἀξιοσημείωτους πολλαπλασιασμούς τούς λέμε καί **ταυτότητες**.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

35. Νά βρεῖτε τά ἀναπτύγματα:
α) $(x+2)^2$ β) $(2x-3)^2$ γ) $(3\alpha-2\beta)^2$
δ) $(3xy+1)^2$ ε) $(-3x+2y)^2$ στ) $(x^2-3y)^2$
ζ) $(3x^3-xy^2)^2$ η) $(\alpha^3\beta^2-3\alpha\gamma^2)^2$ θ) $(5\alpha^2x+3\beta^2xy)^2$

36. Νά βρεῖτε τά ἀναπτύγματα:
α) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$ β) $\left(\alpha^3-\frac{1}{2}\right)^2$ γ) $\left(\frac{2\alpha}{3}-\frac{\beta^2}{2}\right)^2$
δ) $(-\alpha^3-\alpha)^2$ ε) $(\alpha^x+\beta^y)^2$ στ) $(\alpha^{x-1}+2\alpha\beta)^2$

37. Νά βρεῖτε τά γινόμενα:
α) $(3x+2)(3x-2)$ β) $(\alpha\beta+3)(\alpha\beta-3)$ γ) $(\alpha^2\beta-\gamma)(\alpha^2\beta+\gamma)$
δ) $(3\alpha-2\beta^3)(2\beta^3+3\alpha)$ ε) $(x-y)(-x-y)$ στ) $(x+y-1)(x+y+1)$.

38. Νά γίνουν οἱ πράξεις:
α) $(x-1)(x+1)(x^2+1)$
β) $(2\alpha-3\beta)(4\alpha^2+9\beta^2)(2\alpha+3\beta)$
γ) $(x-y)(-x-y)(-x^2-y^2)$
δ) $(xy+1)(x^2y^2+1)(xy-1)(1+x^4y^4)$

39. Νά βρεῖτε τά γινόμενα:
α) $[(x+y)+z][(x+y)-z]$ β) $(2x+y+3z)+(2x+y-3z)$
γ) $(2\alpha+\beta-3\gamma)(2\alpha-\beta+3\gamma)$ δ) $(\alpha-x+\beta-y)(\alpha+x+\beta+y)$.

40. Νά βρεῖτε τά ἀναπτύγματα:
α) $(2\alpha+3\beta-1)^2$ β) $(x^2-x+1)^2$

41. Νά βρεῖτε τά ἀναπτύγματα:

α) $(\alpha+2)^3$ β) $(2x-1)^3$ γ) $(-\alpha+3)^3$

δ) $(2\alpha^2+3)^3$ ε) $\left(x^2+\frac{y}{3}\right)^3$ στ) $(2x^2y-x^3y^2)^3$

42. Νά βρεῖτε τά γινόμενα:

α) $(x-1)(x^2+x+1)$ β) $(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)$

43. Νά βρεῖτε ποιῶν διωνύμων τέλεια τετράγωνα εἶναι τά τριώνυμα:

α) x^2-4x+4 β) $25x^2+10x+1$ γ) $9x^4+4-12x^2$

δ) $\alpha^2-6\alpha\beta+9\beta^2$ ε) $x^6+y^2-2x^3y$ στ) $(\alpha+1)^2-6(\alpha+1)+9$

44. Νά ἀντικαταστήσετε τόν ἀστερίσκο ἔτσι, ὥστε νά προκύψουν τριώνυμα, πού νά εἶναι τέλεια τετράγωνα διωνύμων:

α) x^2+2x+* β) x^2-6x+* γ) $\alpha^2-\alpha\beta+*$

δ) $9x^2+4y^2+*$ ε) $\alpha^2+\frac{1}{4}+*$ στ) $x^2+\frac{6}{5}x+*$

ζ) $\alpha^4+2\alpha^2+*$ η) $25x^2+1+*$ θ) $49\alpha^6+\beta^8+*$

45. Νά ἐκτελεσθοῦν οἱ πράξεις:

1) $(x+2)^2-(x+3)(x-3)-2(2x-3)$
2) $(2x+1)^2-(3x-2)^2-(2x+5)(5-2x)$
3) $2(\alpha-2\beta)^2-3(\alpha+3\beta)^2-(2\alpha+3\beta)(3\alpha-2\beta)$
4) $(2x^2+x-1)(2x^2-x+1)+(x-3)(x+1)-4(x-1)(x+1)(x^2+1)$.

46. Νά ἀποδείξετε τίς ἰσότητες:

1) $(\alpha-\beta)^2-(\beta-\alpha)^2=0$
2) $(\alpha+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2=4\alpha\beta$
3) $(\alpha^2+4)(x^2+1)-(\alpha x+2)^2=(2x-\alpha)^2$
4) $(\alpha+\beta)^2-2(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)+(\alpha-\beta)^2=4\beta^2$

47. Νά ἐκτελεσθοῦν οἱ πράξεις:

α) $(2x^2-x+1)^2-(x^2+x-1)^2-2(x-1)^2$
β) $(2\alpha-3\beta+1)^2-(\alpha-3\beta)(\alpha+3\beta)-\alpha(2\alpha-\beta)$
γ) $(x^2-3x+1)^2-(x^2+1)^2+3x(2x-1)(x-2)+6x^2$

48. Νά ἐκτελεσθοῦν οἱ πράξεις:

α) $(x-1)^3-2(3x+2)^3-x(x+2)(x-2)$
β) $(x+y)^3-y(x-y)(x+y)+x(x-y)^2$
γ) $(x+2)^3-3x(x-1)^2+(x-1)(x+1)(x-2)$

49. Νά ἀποδείξετε τίς ἰσότητες:

α) $(\alpha+\beta)^3=\alpha(\alpha-3\beta)^2+\beta(\beta-3\alpha)^2$
β) $(x^3+y^3)^2-(x^2+y^2)^3+3x^2y^2(x+y)^2=(2xy)^3$

50. Νά ἀντικαταστήσετε τούς ἀστερίσκους μέ τά κατάλληλα μονώνυμα ἔτσι, ὥστε νά ἰσχύουν οἱ ἰσότητες:

α) $64\alpha^3+*+*+125\beta^3=(*+*)^3$
β) $8\alpha^3+12\alpha^2\beta+*+*=(*+*)^3$
γ) $1000x^3-*+*-*=(*-3\alpha)^3$

51. Ἄν $x+y=\alpha$ καί $xy=\beta$, νά ἀποδείξετε ὅτι

α) $x^2+y^2=\alpha^2-2\beta$,
β) $x^3+y^3=\alpha^3-3\alpha\beta$.

Διαίρεση πολυωνύμου μέ μονώνυμο.

2.13. Ἄς δοῦμε πρῶτα πῶς βρίσκουμε τό πηλίκο δύο μονωνύμων, π.χ. τοῦ $A = 15x^3y^4\omega$ μέ τό $B = 3x^2y$.

Σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό τοῦ πηλίκου δύο ἀριθμῶν, τό πηλίκο τοῦ Α διά τοῦ Β θά εἶναι ἕνα μονώνυμο Γ τέτοιο, ὥστε $B \cdot \Gamma = A$ ἤ $3x^2y \cdot \Gamma = 15x^3y^4\omega$. Τότε ὅμως Γ εἶναι τό μονώνυμο $5xy^3\omega$, γιατί

$$\underset{\substack{\uparrow \\ B}}{(3x^2y)} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \Gamma}}{(5xy^3\omega)} = \underset{\substack{\uparrow \\ A}}{15x^3y^4\omega}$$

Τό πηλίκο δύο μονωνύμων Α καί Β σημειώνεται μέ $A : B$ ἤ $\dfrac{A}{B}$.

Ἔτσι γράφουμε

$$15x^3y^4\omega : 3x^2y = 5xy^3\omega \quad \text{ἤ} \quad \frac{15x^3y^4\omega}{3x^2y} = 5xy^3\omega$$

Βλέπουμε δηλαδή ὅτι:

> Τό πηλίκο Α : Β δύο μονωνύμων εἶναι ἕνα μονώνυμο, πού ἔχει ὡς συντελεστή τό πηλίκο τῶν συντελεστῶν καί ὡς κύριο μέρος ὅλα τά γράμματα τοῦ διαιρετέου Α καί τό καθένα μέ ἐκθέτη τή διαφορά πού βρίσκομε, ἄν ἀπό τόν ἐκθέτη του στό Α ἀφαιρέσουμε τόν ἐκθέτη του στό Β.

Ἔτσι π.χ.

$$7\alpha^5\beta : (-5\alpha^2\beta) = -\frac{7}{5}\alpha^3$$

$$(-6\alpha^4xy^2) : (-2\alpha xy) = +3\alpha^3y$$

Παρατηροῦμε ὅτι **τό πηλίκο Α : Β δύο ἀκεραίων μονωνύμων εἶναι ἀκέραιο μονώνυμο, μόνο ὅταν κάθε γράμμα τοῦ διαιρέτη Β ὑπάρχει καί στό διαιρετέο Α καί ὁ ἐκθέτης του στό Α εἶναι μεγαλύτερος ἤ ἴσος ἀπό τόν ἐκθέτη του στό Β.** Ὅταν συμβαίνει αὐτό, λέμε ὅτι τό μονώνυμο Α *«εἶναι διαιρετό»* διά τοῦ Β.(1)

Ἄς ζητήσουμε τώρα τό πηλίκο Α : Β, ὅπου Α εἶναι ἕνα πολυώνυμο καί Β ἕνα μονώνυμο, π.χ.

$$A = 9x^3y - 6x^4y^3 + 12x^2y^2, \quad B = -3x^2y$$

---

(1). Ὅταν τό μονώνυμο Α δέν εἶναι διαιρετό διά τοῦ Β, τό πηλίκο Α : Β εἶναι «κλασματικό μονώνυμο». Ἔτσι π.χ., ἄν $A = 15x^3y^4\alpha$ καί $B = 3x^2y\alpha^2$, τό πηλίκο εἶναι $A : B = 5\,\dfrac{xy^3}{\alpha}$.

$\frac{1}{2}\alpha^2 b^2$ $\quad \alpha^{-2}\cdot b^2 = b^2\cdot\frac{1}{\alpha^2}$

Ἐπειδή κάθε πολυώνυμο εἶναι ἄθροισμα (μονωνύμων), ἡ διαίρεση του μέ μονώνυμο θά ἀκολουθεῖ τόν ἑξῆς κανόνα:

Γιά νά διαιρέσουμε ἕνα πολυώνυμο μέ ἕνα μονώνυμο, διαιροῦμε κάθε ὅρο τοῦ πολυωνύμου μέ τό μονώνυμο καί προσθέτουμε τά πηλίκα πού βρίσκουμε.

Ἔχουμε λοιπόν

$$(9x^3y-6x^4y^3+12x^2y^2):(-3x^2y)=-3x+2x^2y^2-4y$$

Εἶναι φανερό ὅτι τό πηλίκο, πού προκύπτει, εἶναι ἀκέραιο πολυώνυμο, μόνο ὅταν κάθε ὅρος τοῦ διαιρετέου εἶναι «διαιρετός» μέ τό μονώνυμο τοῦ διαιρέτη. Ἔτσι π.χ. ἔχουμε καί

$$(20x^4-16x^3-7x^2):(-2x^2)=-10x^2+8x+\frac{7}{2}.$$

Ἄν ὅλοι οἱ ὅροι ἑνός πολυωνύμου περιέχουν δυνάμεις τοῦ ἴδιου γράμματος, τότε ἡ δύναμη τοῦ γράμματος αὐτοῦ μέ τό μικρότερο ἐκθέτη εἶναι **κοινός παράγοντας** ὅλων τῶν ὅρων τοῦ πολυωνύμου. Ἔτσι π.χ. τό πολυώνυμο

$$A=5x^3y\alpha-6x^4y^3+12x^2y^2\beta$$

ἔχει κοινούς παράγοντες τό x^2 καί τό y. Ἄν διαιρέσουμε τό A μέ τό μονώνυμο x^2y (πού εἶναι κι αὐτό ἕνας κοινός παράγοντας), βρίσκουμε

$$(5x^3y\alpha-6x^4y^3+12x^2y^2\beta):x^2y=5x\alpha-6x^2y^2+12y\beta$$

καί συνεπῶς μποροῦμε νά γράψουμε

$$5x^3y\alpha-6x^4y^3+12x^2y^2\beta=x^2y(5x\alpha-6x^2y^2+12y\beta).$$

Ἀκόμη κοινός παράγοντας εἶναι κάθε ἀκέραιος διαιρέτης τῶν συντελεστῶν τῶν ὅρων τοῦ πολυωνύμου. Βλέπουμε λοιπόν ὅτι:

Κάθε πολυώνυμο A πού ὅλοι οἱ ὅροι του ἔχουν κοινό παράγοντα ἕνα μονώνυμο B, γράφεται ὡς γινόμενο τοῦ B ἐπί τό πηλίκο A : B. Ἔτσι π.χ. εἶναι

$$x^2y+xy^2=xy(x+y)$$

$$12\alpha^3\beta^2x-18\alpha^2\beta^3+24\alpha^3\beta^3=6\alpha^2\beta^2(2\alpha x-3\beta+4\alpha\beta)$$

Ὅταν κάνουμε τήν ἐργασία αὐτή σ' ἕνα πολυώνυμο, λέμε ὅτι *βγάζουμε ἐκτός παρενθέσεως τούς κοινούς παράγοντες* τῶν ὅρων του.

Διαίρεση πολυωνύμου μέ πολυώνυμο.

2.14. Ἄς θεωρήσουμε δύο πολυώνυμα μιᾶς μεταβλητῆς x, π.χ. τά $B=5x+2$ καί $\Pi=3x^2-4x+3$. Βρίσκουμε εὔκολα ὅτι γινόμενο τῶν B καί Π εἶναι τό πολυώνυμο $A=15x^3-14x^2+7x+6$ καί ἔτσι μποροῦμε νά γράψουμε

$$15x^3-14x^2+7x+6 = (5x+2)\ (3x^2-4x+3)$$
$$\underset{A}{\downarrow} \quad = \quad \underset{B}{\downarrow} \quad \cdot \quad \underset{\Pi}{\downarrow}$$

Ἀπό τήν ἰσότητα αὐτή βλέπουμε ὅτι, ἄν δίνονται τά πολυώνυμα Α καί Β, ὑπάρχει ἕνα πολυώνυμο Π τέτοιο, ὥστε $A = B \cdot \Pi$. Στήν περίπτωση αὐτή (πού ὑπάρχει τό πολυώνυμο Π) λέμε ὅτι *τό πολυώνυμο Α εἶναι «διαιρετό» μέ τό πολυώνυμο Β* καί τό πολυώνυμο Π λέγεται **πηλίκο** τῆς διαιρέσεως τοῦ Α διά τοῦ Β.

Προκύπτει τώρα τό ἐρώτημα: **Ἄν δίνονται τά παραπάνω πολυώνυμα Α καί Β καί ξέρουμε ὅτι τό πολυώνυμο Α εἶναι διαιρετό μέ τό πολυώνυμο Β, πῶς θά βροῦμε τό πηλίκο Π;**

Τό πρῶτο πράγμα πού διακρίνουμε εἶναι ὅτι τό Π θά εἶναι δευτέρου βαθμοῦ (γιατί τό Β εἶναι πρώτου βαθμοῦ, ἐνῶ τό ἄθροισμα τῶν βαθμῶν τῶν Β καί Π πρέπει νά εἶναι ἴσο μέ τό βαθμό 3 τοῦ πολυωνύμου Α). Ἔτσι μποροῦμε νά γράψουμε

$$15x^3-14x^2+7x+6 = (5x+2)\ (q_0x^2+q_1x+q_2)$$

καί θά πρέπει νά προσδιορίσουμε τούς συντελεστές q_0, q_1, q_2 τοῦ πολυωνύμου Π.

Ὁ πρῶτος συντελεστής q_0 βρίσκεται ἀμέσως, γιατί ξέρουμε ὅτι τό γινόμενο τῶν συντελεστῶν τῶν πρώτων ὅρων τῶν Β καί Π εἶναι ἴσο μέ τό συντελεστή τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ Α. Ἔχουμε δηλαδή $15 = 5\,q_0$, ὁπότε εἶναι $q_0 = \dfrac{15}{5} = 3$.

Ἡ παραπάνω λοιπόν ἰσότητα γράφεται διαδοχικά

$$15x^3-14x^2+7x+6 = (5x+2)\ (3x^2+q_1x+q_2)$$
$$15x^3-14x^2+7x+6 = (5x+2)\cdot 3x^2+(5x+2)\ (q_1x+q_2)$$
$$15x^3-14x^2+7x+6 - (5x+2)\cdot 3x^2 = (5x+2)\ (q_1x+q_2)$$
$$-20x^2+7x+6 = (5x+2) \quad (q_1x+q_2)$$
$$\underset{A_1}{\downarrow} \quad = \quad \underset{B}{\downarrow} \quad \cdot \underset{\Pi_1}{\downarrow}$$

Ἀπό τήν παραπάνω ἰσότητα καταλαβαίνουμε ὅτι τό q_1x εἶναι πρῶτος ὅρος τοῦ πηλίκου τῆς διαιρέσεως ἑνός ἄλλου πολυωνύμου A_1 μέ τό ἴδιο πολυώνυμο Β. Τότε ὅμως τό q_1 θά βρίσκεται πάλι ὡς πηλίκο τῆς διαιρέσεως τοῦ πρώτου συντελεστῆ -20 τοῦ A_1 μέ τόν πρῶτο συντελεστή 5 τοῦ Β, δηλαδή θά εἶναι $q_1 = (-20) : 5 = -4$. Ἀφοῦ βρήκαμε καί τό q_1, μποροῦμε νά ἐπαναλάβουμε τήν ἴδια ἐργασία, γιά νά βροῦμε τόν ἑπόμενο συντελεστή q_2, κ.ο.κ.

Ὅλη αὐτή ἡ διαδικασία γίνεται μέ τήν παρακάτω διάταξη:

$$
\begin{array}{l|l}
\boxed{\text{Διαιρετέος Α}} & \boxed{\text{Διαιρέτης Β}} \\
\quad\uparrow & \quad\uparrow \\
15x^3-14x^2+7x+6 & 5x+2 \\
\underline{-15x^3-6x^2} & \overline{3x^2-4x+3} \rightarrow \boxed{\text{Πηλίκο Π}} \\
-20x^2+7x+6 & \rightarrow \boxed{\text{πρῶτο μερικό ὑπόλοιπο } A_1} \\
\underline{+20x^2+8x} & \\
15x+6 & \rightarrow \boxed{\text{δεύτερο μερικό ὑπόλοιπο } A_2} \\
\underline{-15x-6} & \\
0 &
\end{array}
$$

Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι, γιά νά διαιρέσουμε ἕνα πολυώνυμο Α μέ ἕνα πολυώνυμο Β, ἀκολουθοῦμε τήν ἑξῆς διαδικασία (ἡ ὁποία ἀποτελεῖ τήν περιγραφή τῆς παραπάνω διατάξεως):

— Γράφουμε τόσο τό διαιρετέο Α ὅσο καί τό διαιρέτη Β κατά τίς φθίνουσες δυνάμεις τοῦ γράμματος x.

— Διαιρώντας τόν πρῶτο ὅρο τοῦ διαιρετέου Α μέ τόν πρῶτο ὅρο τοῦ διαιρέτη Β βρίσκουμε $15x^3 : 5x = 3x^2$ καί τό μονώνυμο αὐτό εἶναι ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ πηλίκου Π.

— Πολλαπλασιάζουμε τό διαιρέτη Β μέ τόν πρῶτο ὅρο τοῦ πηλίκου καί τό γινόμενο αὐτό $3x^2(5x+2) = 15x^3+6x^2$ τό ἀφαιροῦμε ἀπό τό διαιρετέο Α. Βρίσκουμε ἔτσι τό πολυώνυμο $A_1 = -20x^2+7x+6$, πού λέγεται **πρῶτο μερικό ὑπόλοιπο**.

— Διαιροῦμε τόν πρῶτο ὅρο τοῦ A_1 μέ τόν πρῶτο ὅρο τοῦ διαιρέτη Β καί τό μονώνυμο $-20x^2 : 5x = -4x$ πού βρίσκουμε ἀποτελεῖ τό δεύτερο ὅρο τοῦ πηλίκου Π.

— Πολλαπλασιάζουμε τό διαιρέτη Β μέ τό δεύτερο ὅρο τοῦ πηλίκου καί τό γινόμενο αὐτό $-4x(5x+2) = -20x^2-8x$ τό ἀφαιροῦμε ἀπό τό πρῶτο μερικό ὑπόλοιπο A_1. Βρίσκουμε ἔτσι τό πολυώνυμο $A_2 = 15x+6$, πού λέγεται **δεύτερο μερικό ὑπόλοιπο**.

— Συνεχίζουμε μέ τόν ἴδιο τρόπο καί βρίσκουμε ὅλους τούς ὅρους τοῦ πηλίκου Π.

Ἄς δοῦμε ἕνα ἀκόμη παράδειγμα:

$$
\begin{array}{r|l}
-2x^4+8x^3-16x+8 & 2x^2-4 \\
\underline{+2x^4-4x^2} & \overline{-x^2+4x-2} \\
8x^3-4x^2-16x+8 & \\
\underline{-8x^3+16x} & \\
-4x^2+8 & \\
\underline{+4x^2-8} & \\
0 &
\end{array}
$$

Καί στά δύο παραδείγματα πού ἀναφέραμε ὁ διαιρετέος Α εἶναι πολυώνυμο «διαιρετό» μέ τό διαιρέτη Β καί μποροῦμε νά γράψουμε

$$A = B \cdot \Pi$$

Σέ μιά τέτοια περίπτωση λέμε ὅτι ἔχουμε **τελεία διαίρεση** καί καταλήγουμε πάντοτε σέ κάποιο μερικό ὑπόλοιπο, πού εἶναι ἴσο μέ μηδέν.

Ἄς προσπαθήσουμε τώρα νά ἐφαρμόσουμε τήν παραπάνω διαδικασία στή διαίρεση δύο ὁποιωνδήποτε πολυωνύμων, π.χ. τῶν

$$A = 6x^4-2x^3+9x^2-2x-2 \text{ καί } B = x^2+2$$

Ἡ γνωστή μας διάταξη δίνει

$$
\begin{array}{l|l}
\boxed{\text{Διαιρετέος Α}} & \boxed{\text{Διαιρέτης Β}} \\
\qquad\quad\uparrow & \qquad\quad\uparrow \\
6x^4-2x^3+9x^2-2x-2 & x^2+2 \\ \cline{2-2}
-6x^4 \qquad -12x^2 & 6x^2-2x-3 \ \rightarrow \boxed{\text{Πηλίκο Π}} \\ \cline{1-1}
\quad -2x^3-3x^2-2x-2 & \\
\quad\ \ 2x^3 \qquad\quad +4x & \\ \cline{1-1}
\qquad -3x^2+2x-2 & \\
\qquad +3x^2 \qquad +6 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\quad 2x+4 & \rightarrow \boxed{\text{Ὑπόλοιπο Υ}}
\end{array}
$$

Βλέπουμε δηλαδή ὅτι φθάνουμε σ' ἕνα μερικό ὑπόλοιπο $A_3 = 2x+4$, τό ὁποῖο ἔχει βαθμό **μικρότερο ἀπό τό βαθμό τοῦ διαιρέτη Β** καί ἔτσι δέ μπορεῖ νά συνεχισθεῖ ἄλλο ἡ διαίρεση.

Στήν περίπτωση αὐτή τό πολυώνυμο $\Pi = 6x^2-2x-3$ λέγεται πάλι *πηλίκο* τῆς διαιρέσεως τοῦ Α διά τοῦ Β, ἐνῶ τό τελευταῖο μερικό ὑπόλοιπο $2x+4$ λέγεται **ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως** καί θά σημειώνεται μέ Υ. Παρατηροῦμε ἀκόμη ὅτι

$$
\begin{aligned}
B \cdot \Pi + Y &= (x^2+2)\,(6x^2-2x-3)+(2x+4) = \\
&= (6x^4+12x^2-2x^3-4x-3x^2-6) + (2x+4) = \\
&= (6x^4-2x^3+9x^2-4x-6)+(2x+4) = \\
&= 6x^4-2x^3+9x^2-2x-2 = A
\end{aligned}
$$

καί συνεπῶς μποροῦμε νά γράφουμε πάντοτε τήν ἰσότητα

$$\boxed{A = B \cdot \Pi + Y}$$

ἡ ὁποία λέγεται *«ταυτότητα τῆς διαιρέσεως»* καί ἐκφράζει ὅτι:

> Ἄν ἔχουμε δύο ὁποιαδήποτε πολυώνυμα Α καί Β, ὅπου ὁ βαθμός τοῦ Β εἶναι μικρότερος ἤ ἴσος ἀπό τό βαθμό τοῦ Α, ὑπάρχουν πάντοτε δύο πολυώνυμα Π καί Υ, ὅπου ὁ βαθμός τοῦ Υ εἶναι μικρότερος ἀπό τό βαθμό τοῦ Β, τέτοια ὥστε $A = B \cdot \Pi + Y$.

"Οταν λοιπόν λέμε ὅτι *«διαιροῦμε τό πολυώνυμο Α μέ τό πολυώνυμο Β»*, ἐννοοῦμε ἀκριβῶς ὅτι βρίσκουμε, μέ τήν παραπάνω διαδικασία, τά δύο πολυώνυμα Π καί Υ τῆς ἰσότητας $A = B \cdot \Pi + Y$.

Γιά τά δύο αὐτά πολυώνυμα πρέπει νά θυμόμαστε ὅτι:

- **Τό Π λέγεται «πηλίκο» τῆς διαιρέσεως τοῦ Α διά τοῦ Β καί ὁ βαθμός του εἶναι ἴσος μέ τή διαφορά τοῦ βαθμοῦ τοῦ Β ἀπό τό βαθμό τοῦ Α. Ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ Π εἶναι τό πηλίκο τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ Α διά τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ Β.**
- **Τό Υ λέγεται «ὑπόλοιπο» τῆς διαιρέσεως τοῦ Α διά τοῦ Β καί ὁ βαθμός του εἶναι μικρότερος ἀπό τό βαθμό τοῦ Β.**

"Αν βροῦμε $Y = 0$, αὐτό σημαίνει ὅτι ἡ διαίρεση τοῦ Α διά τοῦ Β εἶναι τελεία καί τότε τό Α εἶναι «διαιρετό» μέ τό Β, γιατί ἰσχύει ἡ ἰσότητα $A = B \cdot \Pi$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Νά ὑπολογισθεῖ τό ἄθροισμα

$$A = (4\alpha^2 - 3\alpha) + [2 - (\alpha + \alpha^2) - 3\alpha^3] - [(2\alpha - 1) - \alpha^3].$$

Λύση. Ἀφοῦ ὑπάρχουν παρενθέσεις καί ἀγκύλες, βγάζουμε πρῶτα τίς ἀγκύλες καί ἔχουμε

$$\begin{aligned} A &= (4\alpha^2 - 3\alpha) + 2 - (\alpha + \alpha^2) - 3\alpha^3 - (2\alpha - 1) + \alpha^3 = \\ &= 4\alpha^2 - 3\alpha + 2 - \alpha - \alpha^2 - 3\alpha^3 - 2\alpha + 1 + \alpha^3 = \\ &= -2\alpha^3 + 3\alpha^2 - 6\alpha + 3. \end{aligned}$$

2. "Αν ἔχουμε τά δύο πολυώνυμα ν βαθμοῦ τῆς μεταβλητῆς x

$$A = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$$
$$B = \beta_\nu x^\nu + \beta_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + \beta_1 x + \beta_0$$

νά ὑπολογισθεῖ τό ἄθροισμα A+B καί ἡ διαφορά A—B.

Λύση. α)
$$\begin{aligned} A + B &= \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0 + \\ &\quad + \beta_\nu x^\nu + \beta_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + \beta_1 x + \beta_0 \\ &= (\alpha_\nu + \beta_\nu) x^\nu + (\alpha_{\nu-1} + \beta_{\nu-1}) x^{\nu-1} + \ldots + (\alpha_1 + \beta_1) x + (\alpha_0 + \beta_0) \end{aligned}$$

β)
$$\begin{aligned} A - B &= (\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0) - \\ &\quad - (\beta_\nu x^\nu + \beta_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + \beta_1 x + \beta_0) \\ &= (\alpha_\nu - \beta_\nu) x^\nu + (\alpha_{\nu-1} - \beta_{\nu-1}) x^{\nu-1} + \ldots + (\alpha_1 - \beta_1) x + (\alpha_0 - \beta_0) \end{aligned}$$

3. "Ας πάρουμε τά πολυώνυμα $A = \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$ καί $B = \beta_2 x^2 + \beta_1 x + \beta_0$ πού τό γινόμενό τους εἶναι 5ου βαθμοῦ. Νά βρεθοῦν οἱ συντελεστές τοῦ A·B.

Λύση. "Αν κάνουμε κανονικά τόν πολλαπλασιασμό, βλέπουμε ὅτι οἱ συντελεστές τοῦ Α.Β μποροῦν νά βρεθοῦν μέ τήν βοήθεια τοῦ παρακάτω πίνακα, πού ἔχει στά περιθώριά του τούς συντελεστές τῶν δύο πολυωνύμων καί στό ἐσωτερικό του τά γινόμενα τῶν συντελεστῶν.

α_3	α_2	α_1	α_0	
$\alpha_3\beta_2$	$\alpha_2\beta_2$	$\alpha_1\beta_2$	$\alpha_0\beta_2$	β_2
$\alpha_3\beta_1$	$\alpha_2\beta_1$	$\alpha_1\beta_1$	$\alpha_0\beta_1$	β_1
$\alpha_3\beta_0$	$\alpha_2\beta_0$	$\alpha_1\beta_0$	$\alpha_0\beta_0$	β_0

x^5 x^4 x^3 x^2 x^1 x^0

Τά ἀθροίσματα τῶν γινομένων, πού βρίσκονται στίς διαγώνιες γραμμές τοῦ σχήματος, εἶναι οἱ συντελεστές τῶν δυνάμεων $x^5, x^4, x^3 \ldots$ τοῦ γινομένου Α.Β. Ἔτσι ἔχουμε

$$A \cdot B = \alpha_3\beta_2 x^5 + (\alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_1)x^4 + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_3\beta_o)x^3 + $$
$$+ (\alpha_o\beta_2 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_o)x^2 + (\alpha_o\beta_1 + \alpha_1\beta_o)x + \alpha_o\beta_o.$$

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

52. Νά βρεῖτε τό πηλίκο στίς διαιρέσεις:

α) $(-12x^5) : (-6x^3)$ β) $(-2\alpha^2\beta) : \alpha\beta$ γ) $(7x^3y^2) : (-7x^3y)$

δ) $(-15x^3y) : (-3x^3)$ ε) $-18x^3y^2 : (-6x^3y)$ στ) $\frac{1}{2}xy^3 : \left(-\frac{1}{3}xy^2\right)$

53. Νά βρεῖτε τό πηλίκο στίς διαιρέσεις:

α) $(-2x^3y^2\omega)^2 : (-x^4y^3\omega)$ β) $\left(-\frac{2}{3}x^2y^3\omega\right)^2 . (xy\omega) : (x^2y^2\omega^2)$

γ) $(6\alpha^{x+1}\beta^2)(-2\alpha^3\beta^x) : (\alpha^x\beta^x)$ δ) $\alpha^{x+1}\beta^y : (-\alpha^{x+1}p^{y-1})$

54. Νά ἐκτελέσετε τίς πράξεις:

α) $(12x^5 - 6x^4 - 3x^3) : (-3x^3)$ β) $(10x^2y^2 + 15x^5y^2 + 20x^3y^4) : (-5x^2y^2)$

γ) $(2x^3y^2 - 6x^2y^3 + 3x^2y^2) : (3x^2y^2)$ δ) $(\alpha^2\beta^3x - 3\alpha^3\beta^2x + \alpha^2\beta x) . (-\alpha^2\beta x)$

ε) $\left(\frac{2}{3}x^5y^2 - \frac{3}{2}x^2y^4 - x^3y^2\right).\left(-\frac{1}{2}x^2y\right)$

στ) $(12\alpha^{\mu+1}\beta^{\nu} - 3\alpha^{\mu}\beta^{\nu+1} - 6\alpha^{\mu+1}\beta^{\nu+1}) : (2\alpha^{\mu}\beta^{\nu-1})$

55. Νά βγάλετε ἐκτός παρενθέσεως τούς κοινούς παράγοντες τῶν πολυωνύμων:

α) $2\alpha x + 2\alpha y$ β) $12\alpha^2\beta - 6\alpha\beta\gamma$

γ) $2\alpha^2y - 4x^3y^2 + xy^2$ δ) $6\alpha^3\beta^2\gamma - 12\alpha^4\beta^3\gamma^3 - 3\alpha^4\beta^2$

56. Νά γίνουν οἱ πράξεις καί οἱ ἐπαληθεύσεις:

α) $(2x^2 + 13x - 27) : (x + 6)$ β) $(3x^3 - 8x^2 + 7x - 2) : (3x - 2)$

γ) $(-3x^2 + 5x + x^3 - 6) : (x^2 - x + 3)$ δ) $(15x^4 + 2x^3 - 39x^2 - 16x + 10) : (3x^2 - 2x - 5)$

ε) $(2x^5 + 4x^6 + x^2 - 6 + 5x - 3x^3) : (x - 3 + x^2 + 2x^3)$

57. Ἀφοῦ διατάξετε τά πολυώνυμα κατά τίς φθίνουσες δυνάμεις ἑνός γράμματος, π.χ. τοῦ x, νά κάμετε τίς πράξεις:

α) $(x^2 + 7\alpha x + 12\alpha^2) : (x + 4\alpha)$

β) $(6x^3 - 29x^2y + 17xy^2 + 42y^3) : (3x - 7y)$

γ) $(28xy^3 + 3x^4 - 7x^3y + 24y^4 - 18x^2y^2) : (8xy + 4y^2 + 3x^2)$

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 2

1. Μία ἀλγεβρική παράσταση, πού ἔχει π.χ. τή μορφή $8x^{\mu}y^{\nu}z^{\rho}$, ὅπου $\mu, \nu, \rho \in N$ καί $x, y, z \in R$, ὀνομάζεται **ἀκέραιο μονώνυμο** μέ **συντελεστή** τό 8, **μεταβλητές** τά x, y, z καί **κύριο μέρος** τό γινόμενο $x^{\mu}y^{\nu}z^{\rho}$.
Ὅμοια μονώνυμα λέγονται αὐτά πού ἔχουν τό **ἴδιο** κύριο μέρος. Τό ἄθροισμα **ὁμοίων** μονωνύμων εἶναι ἕνα ὅμοιο μονώνυμο πού ἔχει συντελεστή τό ἄθροισμα τῶν συντελεστῶν τους.

2. Τό ἄθροισμα, πού οἱ ὅροι του εἶναι ἀκέραια μονώνυμα, λέγεται **ἀκέραιο πολυώνυμο.** Ἄν κάνουμε σ' ἕνα πολυώνυμο **«ἀναγωγή ὁμοίων ὅρων»** καταλήγουμε στήν ἀνηγμένη μορφή του πού δέν ἔχει ὅμοια μονώνυμα.

Οἱ πράξεις στά πολυώνυμα γίνονται ὅπως καί στά ἀριθμητικά ἀθροίσματα. Ἔτσι π.χ. ἄν A καί B εἶναι δύο πολυώνυμα, ὁρίσαμε ὡς ἄθροισμα $\mathbf{A+B}$ τό πολυώνυμο πού ἔχει ὅρους ὅλους τούς ὅρους τῶν A καί B. Ἐπίσης ὁρίσαμε ὡς γινόμενο $\mathbf{A \cdot B}$ τό πολυώνυμο, πού προκύπτει ὅταν πολλαπλασιάσουμε κάθε ὅρο τοῦ A μέ κάθε ὅρο τοῦ B. Ἰσχύουν οἱ ἀξιοσημείωτοι πολλαπλασιασμοί (ταυτότητες):

$$(\alpha \pm \beta)^2 = \alpha^2 \pm 2\alpha\beta + \beta^2$$
$$(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$$
$$(\alpha \pm \beta)^3 = \alpha^3 \pm 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 \pm \beta^3$$
$$\alpha^3 \mp \beta^3 = (\alpha \mp \beta)(\alpha^2 \pm \alpha\beta + \beta^2)$$

3. Τό πηλίκο $\mathbf{A : B}$ δύο πολυωνύμων βρίσκεται μέ τήν *«τεχνική»* πού ἐκτελοῦμε τή διαίρεση τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν καί ἰσχύει ἡ ταυτότητα τῆς διαιρέσεως

$$\mathbf{A = B \cdot \Pi + Y,}$$

ὅπου Π καί Υ εἶναι πολυώνυμα καί τό Π λέγεται **πηλίκο**, ἐνῶ τό Υ λέγεται **ὑπόλοιπο**. Στήν ταυτότητα τῆς διαιρέσεως ὁ βαθμός τοῦ Υ εἶναι μικρότερος ἀπό τόν βαθμό τοῦ B.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ*

58. Νά ἐκτελέσετε τίς πράξεις:

α) $x^2-[3xy-(x^2-2y^2+1)]-\{y^2-[2xy-3x^2-(x^2-y^2+1)]\}$

β) $3(x-2)-[2x-(x^2-1)] \cdot 2x^2+x^2$

γ) $[(x^2+1)-3x(x+2)][x-(x^2+1)]+2x$

59. Νά ἐκτελέσετε τίς πράξεις:

α) $(1+xy)(x^2y^2+1)(xy-1)(1-x^4y^4)+(x^4y^4-1)^2$

β) $(x-y)^3+y(y-x)(-x-y)-x(x-y)^2$

γ) $(x-1)^3-2x(x-1)^2+(x-1)(x+1)(x-2)$.

60. Νά βρεῖτε τά γινόμενα:

α) $(x-1)(x^2+x+1)$ β) $(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)$

γ) $(1-xy)(1+xy+x^2y^2)$ δ) $(\alpha^3-x)(\alpha^6+\alpha^3x+x^2)$.

61. Νά ἀντικαταστήσετε τούς ἀστερίσκους μέ τά κατάλληλα μονώνυμα ἔτσι, ὥστε νά ἰσχύουν οἱ ἰσότητες:

α) $(5x+4y)(*-*+*)=125x^3+64y^3$

$(*-*)(36\alpha^2+*+49\beta^2)=216\alpha^3-343\beta^3$.

62. Νά ἀποδείξετε τίς ἰσότητες:

α) $(\kappa x+\kappa y)^2=\kappa^2(x+y)^2$

β) $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2-\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2=\alpha\beta$.

γ) $(2\alpha+\beta)^2+\beta^2=2[\alpha^2+(\alpha+\beta)^2]$

δ) $(\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2)=(\alpha x+\beta y)^2+(\alpha y-\beta x)^2$

63. Νά ἐκτελεσθοῦν οἱ πράξεις:

α) $\left(x^4-\frac{13}{6}x^3+x^2+\frac{4}{3}x-2\right):\left(\frac{4}{3}x-2\right)$

β) $[2x^3+7x^2y-9y^2(x+y)]:(2x-3y)$

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ**

64. Νά ἀποδειχθοῦν οἱ ἰσότητες:

α) $(2\mu\nu)^2 + (\mu^2-\nu^2)^2 = (\mu^2+\nu^2)^2$

β) $\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)+1 = (\alpha^2+3\alpha+1)^2$

γ) $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(x^2+y^2+z^2)-(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2=(\beta z-\gamma y)^2+(\gamma x-\alpha z)^2+(\alpha y-\beta x)^2$.

65. Ἄν εἶναι $x = \alpha^2-\beta^2$, $y = 2\alpha\beta$, $z = \alpha^2+\beta^2$, ὅπου $\alpha,\beta \in N^*$ καί $\alpha>\beta$, νά δείξετε ὅτι τά x,y,z εἶναι πλευρές ὀρθογώνιου τριγώνου.

Ὅταν συμβαίνει τοῦτο, λέμε ὅτι τά x,y,z ἀποτελοῦν «πυθαγορική τριάδα». Νά βρεῖτε πυθαγορικές τριάδες μέ τά ζεύγη τῶν ἀριθμῶν $(\alpha = 2,\ \beta = 1)$, $(\alpha = 3,\ \beta = 2)$, $(\alpha = 4,\ \beta = 1)$.

66. Δίδονται τά πολυώνυμα:

$A = \alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_0, \quad \alpha_\nu \neq 0$

$B = \beta_\mu x^\mu+\beta_{\mu-1}x^{\mu-1}+\ldots+\beta_2x^2+\beta_1x+\beta_0, \quad \beta_\mu \neq 0$

$\Gamma = \gamma_\kappa x^\kappa+\gamma_{\kappa-1}x^{\kappa-1}+\ldots+\gamma_2x^2+\gamma_1x+\gamma_0, \quad \gamma_\kappa \neq 0$

καί ξέρουμε ὅτι τό Γ εἶναι γινόμενο τῶν Α καί Β.

α) Ποιά σχέση συνδέει τά ν,μ καί κ;

β) Ἄν $\nu = 4$ καί $\mu = 5$, νά βρεθοῦν οἱ συντελεστές $\gamma_3, \gamma_5, \gamma_7$ τοῦ πολυωνύμου Γ ἀπό τούς συντελεστάς τῶν Α καί Β.

γ) Ἄν $\nu = 5$, $\mu = 4$ καί $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\alpha_3 \neq 0$, $\beta_0 = \beta_1 = 0$, $\beta_2 \neq 0$, νά βρεθοῦν ποιοί ἀπό τούς συντελεστές $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \ldots$ εἶναι μηδέν.

δ) Ἄν $\nu = 4$, $\mu = 2$ καί $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = 0$, $\alpha_4 = 2$, $\beta_0 = 2$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = -3$, νά βρεθεῖ τό πολυώνυμο Γ.

(Νά χρησιμοποιήσετε τή μέθοδο τοῦ «πολλαπλασιαστικοῦ πίνακα» πού εἴδαμε στό Πρβ. 3 τῆς σελ. 47).

67. Νά δώσετε στό γινόμενο $(\alpha^2+\beta^2)(\gamma^2+\delta^2)$ μορφή ἀθροίσματος δύο τετραγώνων.

3ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ ΡΗΤΕΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

Διαίρεση πολυωνύμου μέ x–α.

3.1. Ἕνα πολυώνυμο μιᾶς μεταβλητῆς x σημειώνεται σύντομα $\Pi(x)$ ἤ $P(x)$ ἤ $Q(x)$ ἤ... καί τότε ἡ ἀριθμητική τιμή του γιά $x = \alpha$ σημειώνεται ἀντιστοίχως $\Pi(\alpha)$ ἤ $P(\alpha)$ ἤ $Q(\alpha)$ ἤ...

Ἄς θεωρήσουμε τό πολυώνυμο

$$P(x) = x^3-5x^2+7x-3$$

Ἄν κάνουμε τή διαίρεση τοῦ $P(x)$ μέ τό πρωτοβάθμιο διώνυμο $x-3$, βρίσκουμε πηλίκο $\Pi_1(x) = x^2-2x+1$ καί ὑπόλοιπο 0. Ἔτσι τό $P(x)$ γράφεται

$$P(x) = (x-3)\ \Pi_1(x).$$

Ἐπειδή ἡ ἰσότητα αὐτή γιά $x = 3$ δίνει $P(3) = (3-3)\Pi_1(3) = 0.\Pi_1(3)=0$,καταλαβαίνουμε ὅτι ἡ ἀριθμητική τιμή τοῦ πολυωνύμου $P(x)$ γιά $x = 3$ εἶναι ἴση μέ μηδέν, δηλαδή ἴση μέ τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεώς του μέ $x-3$.

Ἄν διαιρέσουμε τό $P(x)$ μέ τό $x-2$, βρίσκουμε πηλίκο $\Pi_2(x) = x^2-3x+1$ καί ὑπόλοιπο $Y = -1$. Ἀπό τήν ταυτότητα τῆς διαιρέσεως ἔχουμε πάλι

$$P(x) = (x-2) \cdot \Pi_2(x) + (-1)$$

Ἐπειδή ἡ ἰσότητα αὐτή γιά $x=2$ δίνει $P(2)=(2-2)\cdot\Pi_2(2)+(-1) = 0.\Pi_2(2)+(-1)=-1$, καταλαβαίνουμε πάλι ὅτι ἡ ἀριθμητική τιμή τοῦ πολυωνύμου $P(x)$ γιά $x=2$ εἶναι ἴση μέ τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεώς του μέ $x-2$

Βλέπουμε δηλαδή ὅτι ἡ διαίρεση τοῦ $P(x)$ μέ $x-3$ δίνει ὑπόλοιπο τό $P(3)$ καί ἡ διαίρεση μέ $x-2$ τό $P(2)$. Ἔτσι π.χ. γιά νά βροῦμε τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ $P(x)$ μέ $x-2$ δέ χρειάζεται νά κάνουμε τή διαίρεση, ἀλλά νά βροῦμε ἁπλῶς τήν ἀριθμητική τιμή τοῦ $P(x)$ γιά $x=2$.

Γενικά, ἄν διαιρέσουμε ἕνα πολυώνυμο $P(x)$ μέ τό $x-\alpha$, θά βροῦμε ὡς πηλίκο ἕνα πολυώνυμο $\Pi(x)$ καί ὡς ὑπόλοιπο Y ἕνα σταθερό ἀριθμό (πολυώνυμο μηδενικοῦ βαθμοῦ, ἀφοῦ ὁ διαιρέτης $x-\alpha$ εἶναι πρώτου βαθμοῦ). Ἄν τώρα στήν ταυτότητα τῆς διαιρέσεως

$$P(x) = (x-\alpha)\,\Pi(x) + Y,$$

ἡ ὁποία ἀληθεύει γιά κάθε τιμή $x \in \mathrm{R}$, βάλουμε τήν τιμή $x = \alpha$ πού μηδενίζει τό διαιρέτη $x-\alpha$, βρίσκουμε

$P(\alpha) = 0 \cdot \Pi(\alpha) + Y$ ἤ τελικά

$$\boxed{P(\alpha) = Y}$$

Συνεπῶς:

Σ.Θ.1

Τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως ἑνός πολυωνύμου $P(x)$ μέ τό διώνυμο $x-\alpha$ εἶναι ἴσο μέ τήν ἀριθμητική τιμή $P(\alpha)$ τοῦ πολυωνύμου γιά $x = \alpha$.

καὶ νὰ γράψετε

Ἔτσι π.χ. τά ὑπόλοιπα τῆς διαιρέσεως τοῦ

$P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 + 3x - 18$ μέ $x+2$ καί $x-2$ εἶναι ἀντιστοίχως

$Y_1 = P(-2) = (-2)^4 + (-2)^3 - 3(-2)^2 + 3(-2) - 18 = -28$

$Y_2 = P(2) = 2^4 + 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 - 18 = 0$

Ἐπειδή ἡ διαίρεση τοῦ $P(x)$ μέ $x-2$ δίνει ὑπόλοιπο μηδέν, καταλαβαίνουμε ὅτι τό πολυώνυμο $P(x)$ εἶναι *«διαιρετό»* μέ $x-2$. Γενικά ἀπό τήν προηγούμενη πρόταση συμπεραίνουμε ὅτι:

Σ.Θ.2

Ἕνα πολυώνυμο $P(x)$ θά διαιρεῖται ἀκριβῶς μέ τό διώνυμο $x-\alpha$, ὅταν ἡ ἀριθμητική τιμή του γιά $x = \alpha$ εἶναι μηδέν, δηλαδή ὅταν $P(\alpha) = 0$.

Τό πολυώνυμο λοιπόν $x^4 + x^3 - 3x^2 + 3x - 18$ διαιρεῖται μέ $x-2$ καί συνεπῶς γράφεται

$$x^4 + x^3 - 3x^2 + 3x - 18 = (x-2)(x^3 + 3x^2 + 3x + 9)$$

ὅπου $x^3 + 3x^2 + 3x + 9$ εἶναι τό πηλίκο τῆς διαιρέσεως αὐτῆς.

Εὕρεση πρωτοβάθμιων παραγόντων ἑνός πολυωνύμου.

3.2. Πολλές φορές μᾶς εἶναι χρήσιμο, ὅπως θά δοῦμε, νά γράφουμε ἕνα πολυώνυμο $P(x)$ ὡς γινόμενο ἑνός πρωτοβάθμιου παράγοντα $x-\alpha$ καί ἑνός πολυωνύμου $\Pi(x)$, πού ὁ βαθμός του εἶναι κατά μονάδα μικρότερος ἀπό τό βαθμό τοῦ $P(x)$. Αὐτό βέβαια δέν εἶναι πάντα δυνατό καί γίνεται μόνο ὅταν τό πολυώνυμο $P(x)$ εἶναι διαιρετό μέ $x-\alpha$, δηλαδή ὅταν $P(\alpha) = 0$.

Ἔτσι π.χ. εἴδαμε ὅτι τό πολυώνυμο $P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 + 3x - 18$ εἶναι διαιρετό μέ $x-2$ καί γράφεται

$$x^4 + x^3 - 3x^2 + 3x - 18 = (x-2)(x^3 + 3x^2 + 3x + 9).$$

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι καί τό $\Pi(x) = x^3+3x^2+3x+9$ εἶναι διαιρετό μέ τό $x+3$, γιατί $\Pi(-3) = (-3)^3+3(-3)^2+3(-3)+9 = 0$. Ἄν κάνουμε τήν διαίρεση αὐτή βρίσκουμε $(x^3+3x^2+3x+9) : (x+3) = x^2+3$, δηλαδή $\Pi(x)=(x+3)(x^2+3)$. Ἔτσι τό $P(x)$ γράφεται τελικά

$$P(x) = x^4+x^3-3x^2+3x-18 = (x-2)(x+3)(x^2+3).$$

Ὅταν κάνουμε τήν ἐργασία αὐτή, λέμε ὅτι *«βρίσκουμε τούς πρωτοβάθμιους παράγοντες»* τοῦ πολυωνύμου.

Εὔκολα διακρίνουμε ὅτι κάθε ἕνα ἀπό τά πολυώνυμα

$$P_1(x) = x^3-\alpha^3, \qquad P_2(x) = x^3+\alpha^3$$

ἔχει πρωτοβάθμιο παράγοντα, γιατί τό πρῶτο εἶναι διαιρετό μέ $x-\alpha$, ἀφοῦ $P_1(\alpha) = \alpha^3-\alpha^3 = 0$, καί τό δεύτερο εἶναι διαιρετό μέ $x+\alpha$, ἀφοῦ $P_2(-\alpha) = (-\alpha)^3+\alpha^3 = -\alpha^3+\alpha^3 = 0$. Ἀπό τίς δύο διαιρέσεις

$$\begin{array}{rr|l}
x^3 & -\alpha^3 & x-\alpha \\ \cline{3-3}
-x^3+\alpha x^2 & & x^2+\alpha x+\alpha^2 \\ \hline
+\alpha x^2 & -\alpha^3 & \\
-\alpha x^2+\alpha^2 x & & \\ \hline
+\alpha^2 x & -\alpha^3 & \\
-\alpha^2 x & +\alpha^3 & \\ \hline
 & 0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rr|l}
x^3 & +\alpha^3 & x+\alpha \\ \cline{3-3}
-x^3-\alpha x^2 & & x^2-\alpha x+\alpha^2 \\ \hline
-\alpha x^2 & +\alpha^3 & \\
+\alpha x^2+\alpha^2 x & & \\ \hline
\alpha^2 x & +\alpha^3 & \\
-\alpha^2 x & -\alpha^3 & \\ \hline
 & 0 &
\end{array}$$

βρίσκουμε πάλι τίς ἰσότητες (πού εἴχαμε συναντήσει στήν §2.12,V)

$$\mathbf{x^3+\alpha^3 = (x+\alpha)(x^2-\alpha x+\alpha^2)}$$
$$\mathbf{x^3-\alpha^3 = (x-\alpha)(x^2+\alpha x+\alpha^2)}$$

Παράδειγμα : Νά γίνουν γινόμενα τά διώνυμα x^3-1 καί $8x^3+\alpha^6$.

Λύση: $x^3-1 = x^3-1^3 = (x-1)(x^2+x.1+1^2) = (x-1)(x^2+x+1)$

$8x^3+\alpha^6 = (2x)^3+(\alpha^2)^3 = (2x+\alpha^2)[(2x)^2-2x.\alpha^2+(\alpha^2)^2] =$
$= (2x+\alpha^2)(4x^2-2\alpha^2x+\alpha^4).$

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Νά βρεθεῖ τό ὑπόλοιπο, χωρίς νά γίνει ἡ πράξη, στίς ἀκόλουθες διαιρέσεις:
   α) $(x^2-3x+2) : (x-2)$ β) $(x^2-3x-10) : (x+2)$
   γ) $(x^3+3x^2-7x+3) : (x-1)$ δ) $(5x^2-2x^3-3+4x) : (x-3)$
   ε) $(-x^5+2x^5+2x-3-2x^4) : (1-x)$ στ) $(\alpha^2+\alpha\beta-2\beta^2) : (\alpha-\beta)$
   ζ) $(32x^5+1) : (2x+1)$ η) $(8x+3x^2+4) : \left(x+\dfrac{2}{3}\right)$.
2. Νά προσδιορίσετε τό λ ἔτσι, ὥστε τό πολυώνυμο $P(x) = x^2-5x+2\lambda$ νά εἶναι διαιρετό μέ τό $x-2$.
3. Ὁμοίως γιά τό πολυώνυμο $2\lambda x^3-4x^2+\lambda x-2\lambda$.
4. Δίνεται τό πολυώνυμο $P(x) = 2x^3-7x^2-12x+45$.
   α) Νά βρεῖτε τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως του μέ $x-3$.

5.92 Προσοχή

β) Νά τό ἐκφράσετε σάν γινόμενο δύο παραγόντων, ἀπό τούς ὁποίους ὁ ἕνας εἶναι πρωτοβάθμιος.

5. Νά γίνουν γινόμενα τά διώνυμα:

α) $8x^3+27$ β) x^3-8

γ) x^6-y^3 δ) x^6+y^6

Παραγοντοποίηση πολυωνύμων.

3.3. Ὅταν γράφουμε ἕναν ἀκέραιο ἀριθμό ὡς γινόμενο δύο ἤ περισσότερων ἀκεραίων, ὅπως π.χ. $12=4\cdot3=2\cdot2\cdot3$, λέμε ὅτι *«ἀναλύσαμε»* τόν ἀκέραιο σέ γινόμενο παραγόντων καί εἴδαμε πόσο χρήσιμη εἶναι μιά τέτοια ἀνάλυση στίς πράξεις τῶν κλασμάτων. Ἀνάλογα τώρα, ὅταν γράφουμε π.χ.

$$x^3-\alpha^3=(x-\alpha)(x^2+\alpha x+\alpha^2)$$

λέμε ὅτι *«ἀναλύσαμε»* τό πολυώνυμο $x^3-\alpha^3$ σέ γινόμενο παραγόντων. Μία τέτοια ἀνάλυση λέγεται **παραγοντοποίηση τοῦ πολυωνύμου** καί εἶναι χρήσιμη στίς πράξεις τῶν κλασμάτων, πού οἱ ὅροι τους εἶναι πολυώνυμα, στήν ἐπίλυση ἐξισώσεων βαθμοῦ ἀνώτερου ἀπό πρῶτο καί ἀλλοῦ.

Ἕνα ὁποιοδήποτε πολυώνυμο δέν ἀναλύεται πάντοτε σέ γινόμενο παραγόντων. Ἄν καί στά προηγούμενα εἴδαμε μερικές περιπτώσεις, πού μιά τέτοια ἀνάλυση εἶναι δυνατή, ὅπως π.χ. στήν περίπτωση $\alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$, ἐδῶ θά ἀναφέρουμε πιό συστηματικά τίς χαρακτηριστικές περιπτώσεις παραγοντοποιήσεως ἑνός πολυωνύμου. Αὐτές εἶναι:

I) Οἱ ὅροι τοῦ πολυωνύμου ἔχουν κοινούς παράγοντες. Τότε βγάζουμε τούς κοινούς παράγοντες ἐκτός παρενθέσεως (βλ. καί § 2.13) ἐφαρμόζοντας τήν ἐπιμεριστική ἰδιότητα

$$\mu\alpha+\mu\beta+\mu\gamma=\mu(\alpha+\beta+\gamma).$$

Παραδείγματα:

α) $3\alpha^2+3\alpha\beta-3\alpha\gamma=3\alpha(\alpha+\beta-\gamma)$

β) $6\alpha^3\beta^2-3\alpha^2\beta^3=3\alpha^2\beta^2(2\alpha-\beta)$

γ) $\alpha(x^2+2)+\beta(x^2+2)=(x^2+2)(\alpha+\beta)$.

II) Μία ὁμαδοποίηση τῶν ὅρων τοῦ πολυωνύμου ἐμφανίζει κοινούς παράγοντες. Χωρίζοντας τούς ὅρους τοῦ πολυωνύμου σέ ὁμάδες (πολυώνυμα) μέ ἴσο πλῆθος ὅρων, βλέπουμε πολλές φορές ὅτι, ἄν βγάλουμε ἀπό τούς ὅρους κάθε ὁμάδας τούς κοινούς παράγοντές τους ἐκτός παρενθέσεως, ἐμφανίζεται τό ἴδιο πολυώνυμο μέσα στίς παρενθέσεις ὅλων τῶν ὁμάδων. Τότε τό πολυώνυμο τῶν παρενθέσεων εἶναι κοινός παράγοντας ὅλων τῶν ὁμάδων καί μπορεῖ νά γραφεῖ μπροστά ἀπό μιά νέα παρένθεση.

Ἡ δυσκολία στήν περίπτωση αὐτή εἶναι νά διακρίνουμε τήν κατάλληλη ὁμαδοποίηση τῶν ὅρων.

Παραδείγματα:

α) $\alpha x+\beta x+\alpha y+\beta y=x(\alpha+\beta)+y(\alpha+\beta)=(\alpha+\beta)(x+y)$

β) $5x^3y-2x^2y^2\beta+15\alpha x-6\alpha\beta y=$

$$=(5x^3y+15\alpha x)-(2x^2y^2\beta+6\alpha\beta y)=$$
$$=5x(x^2y+3\alpha)-2\beta y(x^2y+3\alpha)=$$
$$=(x^2y+3\alpha)(5x-2\beta y).$$

III) Τό πολυώνυμο εἶναι ἀνάπτυγμα τοῦ τετραγώνου ἑνός διωνύμου. Δηλαδή εἶναι ἕνα τριώνυμο τῆς μορφῆς $\alpha^2\pm2\alpha\beta+\beta^2$, ὁπότε εἶναι

$$\alpha^2\pm2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha\pm\beta)^2$$

Παραδείγματα:

α) $x^2+2x+1=x^2+2\cdot x\cdot 1+1^2=(x+1)^2$

β) $25x^2-20xy+4y^2=(5x)^2-2(5x)(2y)+(2y)^2=(5x-2y)^2$

γ) $4\alpha^2y^2-12\alpha\beta y+9\beta^2=(2\alpha y)^2-2\cdot2\alpha y\cdot3\beta+(3\beta)^2=(2\alpha y-3\beta)^2$

δ) $4x^4+4x^2y+y^2=(2x^2)^2+2\cdot2x^2y+y^2=(2x^2+y)^2$

IV) Τό πολυώνυμο εἶναι διαφορά δύο τετραγώνων. Τότε χρησιμοποιοῦμε τήν ταυτότητα:

$$\alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$$

Παραδείγματα:

α) $x^2-1=x^2-1^2=(x+1)(x-1)$

β) $4x^2-9y^2=(2x)^2-(3y)^2=(2x+3y)(2x-3y)$

V) Τό πολυώνυμο εἶναι ἄθροισμα ἤ διαφορά δύο κύβων. Τότε χρησιμοποιοῦμε τίς ἰσότητες τῆς § 3.2, δηλαδή τίς

$$x^3+\alpha^3=(x+\alpha)(x^2-\alpha x+\alpha^2)$$
$$x^3-\alpha^3=(x-\alpha)(x^2+\alpha x+\alpha^2)$$

Παραδείγματα:

α) $\alpha^3+8=\alpha^3+2^3=(\alpha+2)(\alpha^2-\alpha\cdot2+2^2)=(\alpha+2)(\alpha^2-2\alpha+4)$

β) $\alpha^3-8=\alpha^3-2^3=(\alpha-2)\cdot(\alpha^2+\alpha\cdot2+2^2)=(\alpha-2)(\alpha^2+2\alpha+4)$

VI) Συνδυασμός διαφόρων περιπτώσεων. Πολλές φορές γιά τήν παραγοντοποίηση ἑνός πολυωνύμου χρησιμοποιοῦμε συνδυασμό τῶν παραπάνω περιπτώσεων.

Παραδείγματα:

α) $x^3+2x^2+x=x(x^2+2x+1)=x(x+1)^2$

β) $x^3-9x+2x^2y-18y=x(x^2-9)+2y(x^2-9)=$
$$=(x^2-9)(x+2y)=(x+3)(x-3)(x+2y)$$

γ) $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-\gamma^2=(\alpha+\beta)^2-\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)$

δ) $x^4+y^4+x^2y^2=x^4+y^4+x^2y^2+x^2y^2-x^2y^2=x^4+y^4+2x^2y^2-x^2y^2$
$$=(x^2+y^2)^2-(xy)^2=(x^2+y^2+xy)(x^2+y^2-xy)$$

Παραγοντοποίηση τριωνύμου.

3.4. Θά δοῦμε τώρα πῶς ἀναλύεται ἕνα τριώνυμο μιᾶς μεταβλητῆς σέ γινόμενο παραγόντων, π.χ. τό

$$x^2-8x+15$$

Σ' ἕνα τέτοιο τριώνυμο γράφουμε πάντοτε τό συντελεστή τοῦ πρωτοβάθμιου ὅρου του ὡς γινόμενο τοῦ 2 (γράφουμε δηλαδή τό 8 ὡς 2.4) καί μετά προσθέτουμε καί ἀφαιροῦμε τό τετράγωνο τοῦ ἄλλου παράγοντα (δηλαδή τό τετράγωνο τοῦ 4). Ἔχουμε ἔτσι

$$\begin{aligned} x^2-8x+15 &= \underbrace{x^2-2\cdot 4x+4^2}-4^2+15 \\ &= (x-4)^2-1 \\ &= (x-4+1)\,(x-4-1) \\ &= (x-3)\,(x-5). \end{aligned}$$

Βλέπουμε δηλαδή ὅτι μετά τήν πρόσθεση καί τήν ἀφαίρεση τοῦ 4^2 οἱ τρεῖς ὅροι ἀποτελοῦν τό τετράγωνο ἑνός διωνύμου καί ἔτσι τό τριώνυμο ἔγινε διαφορά τετραγώνων. Μέ τόν ἴδιο τρόπο βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} x^2+5x-24 &= x^2+2\cdot\frac{5}{2}\,x-24 \\ &= \underbrace{x^2+2\cdot\frac{5}{2}x+\left(\frac{5}{2}\right)^2}-\left(\frac{5}{2}\right)^2-24 \\ &= \left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{121}{4}=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{11}{2}\right)^2 \\ &= \left(x+\frac{5}{2}+\frac{11}{2}\right)\left(x+\frac{5}{2}-\frac{11}{2}\right) \\ &= (x+8)\,(x-3). \end{aligned}$$

Ἄν ὁ συντελεστής τοῦ δευτεραβάθμιου ὅρου εἶναι διαφορετικός ἀπό τή μονάδα, βγαίνει ἐκτός παρενθέσεως ἀπό τήν ἀρχή. Ἔτσι π.χ. εἶναι

$$\begin{aligned} 3x^2-9x-30 = 3(x^2-3x-10) &= 3\left(x^2-2\cdot\frac{3}{2}\,x-10\right) \\ &= 3\left(\underbrace{x^2-2\cdot\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}}-\frac{9}{4}-10\right) \\ &= 3\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{49}{4}\right] \\ &= 3\left(x-\frac{3}{2}+\frac{7}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}-\frac{7}{2}\right) \\ &= 3(x+2)\,(x-5) \end{aligned}$$

Ἐπίσης εἶναι

$$2x^2+3x-5 = 2\left(x^2+\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}\right)$$

$$= 2\left[\underbrace{x^2+2\cdot\frac{3}{4}x+\left(\frac{3}{4}\right)^2}-\left(\frac{3}{4}\right)^2-\frac{5}{2}\right]$$

$$= 2\left[\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{49}{16}\right]$$

$$= 2\left(x+\frac{3}{4}+\frac{7}{4}\right)\cdot\left(x+\frac{3}{4}-\frac{7}{4}\right)$$

$$= 2\left(x+\frac{10}{4}\right)\cdot(x-1)$$

$$= (2x+5)(x-1)$$

Ἄν προσπαθήσουμε μέ τόν ἴδιο τρόπο νά ἀναλύσουμε τό τριώνυμο x^2+4x+7, βρίσκουμε ὅτι

$$x^2+4x+7 = x^2+2\cdot 2x+7$$

$$= \underbrace{x^2+2\cdot 2x+2^2}-2^2+7$$

$$= (x+2)^2+3$$

Βλέπουμε δηλαδή ὅτι μετά τή σύμπτυξη τῶν τριῶν πρώτων ὅρων σέ τετράγωνο ἑνός διωνύμου, δέν παρουσιάζεται διαφορά τετραγώνων, ἀλλά ἕνα ἄθροισμα τοῦ τετραγώνου τοῦ διωνύμου μέ ἕνα θετικό ἀριθμό. Ἔτσι τό τριώνυμο πού πήραμε δέν ἀναλύεται σέ γινόμενο παραγόντων. Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι ἕνα τριώνυμο δέν ἀναλύεται πάντοτε σέ γινόμενο παραγόντων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

6. Νά τραποῦν σέ γινόμενα παραγόντων τά πολυώνυμα:

α) $2\alpha\beta-2\alpha\gamma$ β) $6x^2+3x$

γ) $12x^2y+6xy^2-3xy$ δ) $15\alpha^3\beta^2\gamma-5\alpha^2\beta^3\gamma^2-20\alpha^4\beta^4\gamma^3x$

ε) $\alpha(x+y)-\beta(x+y)$ στ) $x(2\alpha-\beta)+y(\beta-2\alpha)$

ζ) $\alpha(x-1)-x+1$ η) $\alpha(x-y)-(y-x)$.

7. Νά τραποῦν σέ γινόμενα παραγόντων τά πολυώνυμα:

α) $(\alpha+\beta)(x-3y)-2\alpha(x-3y)$ β) $(4\alpha-2\beta)(2x-3y)+(3y-2x)(\beta-2\alpha)$

γ) $\alpha^2(x-1)(\alpha+\beta)+\alpha^2(1-x)$ δ) $\alpha(x-y)^2-\beta(x-y)$

ε) $(2x+y)-\alpha(2x+y)-(2x+y)^2$ στ) $(x+y)^3-(x+y)^2$

8. Νά τραποῦν σέ γινόμενα παραγόντων τά πολυώνυμα:

α) $\alpha x+\alpha y+3x+3y$ β) $x^2+xy-x-y$

γ) x^3+x^2+x+1 δ) $3\alpha^3-6\alpha^2+5\alpha-10$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma.$

ε) $2x^4-2x^3+3x-3$ στ) $\alpha^3-\alpha^2\beta-\alpha\beta^2+\beta^3$
ζ) $6x^2+xy+18x\omega+3y\omega$ η) $8xy^3-24y^2-7\alpha xy+21\alpha$.

9. Νά ἀναλυθοῦν σέ γινόμενα παραγόντων τά πολυώνυμα:
α) x^2-9 β) $25x^2-4$ γ) $\alpha^2\beta^2-\gamma^2$
δ) $81\alpha^2-49\beta^2$ ε) $16\alpha^2-x^2y^2$ στ) $4\alpha^4-9\beta^2$
ζ) $25\alpha^2x^4-9\beta^2$ η) $\dfrac{x^2y^2}{9}-\dfrac{1}{4}$ θ) $(x-y)^2-1$
ι) $(\alpha-2\beta)^2-4\beta^2$ ια) $(\alpha+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2$ ιβ) $(4x+2y)^2-(2x-3y)^2$

10. Νά ἀναλυθοῦν σέ γινόμενα παραγόντων τά πολυώνυμα:
α) $3x^3-3x$ β) $3\alpha^3\beta-27\alpha\beta^3$ γ) $5x^5y-20xy^3$
δ) $x^{\mu+2}-x^{\mu}$ ε) $(x-y)-(\alpha+\beta)^2(x-y)$ στ) x^4-y^4
ζ) $(\alpha^2-12)^2-4$ η) x^5y^4-x θ) $(5\alpha^2+2\alpha-3)^2-(\alpha^2-2\alpha-3)^2$

11. Νά ἀναλυθοῦν σέ γινόμενα παραγόντων τά πολυώνυμα:
α) $\alpha x^2-\alpha y^2+\beta x^2-\beta y^2$ β) $\alpha^2x-\alpha^2y+y-x$
γ) $x^2y^2-9y^2-x^2+9$ δ) $\alpha^5-1+\alpha^4-\alpha$
ε) $5(4-x^2)-(x-2)^2$ στ) $(5-3x)(x+4)+(3x-5)(2x-3)+9x^2-25$

12. Ἐπίσης τά πολυώνυμα:
α) α^3-8 β) $8x^3+27$ γ) x^3y^3-1
δ) $1-64x^3$ ε) $\alpha^3-(\beta-\gamma)^3$ στ) $\alpha^4\beta-\alpha\beta^4$
ζ) $\alpha^6-\beta^6$ η) $-3x^6+3$ θ) $\alpha^7-\alpha$.

13. Νά τραποῦν σέ γινόμενα οἱ παραστάσεις:
α) $\alpha^3x^3-\beta^3x^3+\alpha^3-\beta^3$ β) $\alpha^3+\beta^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$
γ) $(x-1)^3(x^2-4)-(x^2-4)$ δ) $(\alpha^3-1)-2(\alpha^2-1)-(\alpha-1)^2$

14. Νά ἀναλυθοῦν σέ γινόμενα τά πολυώνυμα:
α) $x^2+10x+25$ β) $9x^2+4-12x$ γ) $9x^2+4y^2-12xy$
δ) $4x^4+1+4x^2$ ε) $\alpha^4+9\beta^2-6\alpha^2\beta$ στ) $4x^6-4x^3+1$
ζ) $25x^2y^2-20xy+4$ η) $x^2-x+\dfrac{1}{4}$ θ) $\dfrac{xy}{3}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{x^2}{4}$

15. Νά τραποῦν σέ γινόμενα παραγόντων τά πολυώνυμα:
α) $(\alpha+\beta)^2-2(\alpha+\beta)+1$ β) $9(x+y)^2-6y(x+y)+y^2$
γ) $x^2-4x^3+4x^4$ δ) $x^3+2x^2+x+xy+y$

16. Νά τραποῦν σέ γινόμενο δύο πρωτοβάθμιων παραγόντων τά τριώνυμα:
α) x^2-4x+3 β) $x^2-3x-10$ γ) x^2-3x+7
δ) x^2+5x+4 ε) $\alpha^2-3\alpha\beta+2\beta^2$ στ) $x^2-3xy-4y^2$

17. Ἐπίσης τά τριώνυμα:
α) $2x^2-5x-3$ β) $6x^2+7x-3$ γ) $6x^2+x-2$
δ) $3x^2-4x+2$ ε) $2\alpha^2+3\alpha\beta-5\beta^2$ στ) $11xy-6y^2+10x^2$

18. Νά τραποῦν σέ γινόμενα οἱ παραστάσεις:
α) $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2-\gamma^2$ β) y^2+2x-x^2-1
γ) $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2-\alpha+\beta$ δ) $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-x^2+4x-4$
ε) $(\alpha^2+1)^2-4\alpha^2$ στ) $(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)^2-4\alpha^2\beta^2$
ζ) $x^4+5x^2y^2+9y^4$ η) $\alpha^4+4\beta^4-13\alpha^2\beta^2$

19. Ἐπίσης οἱ παραστάσεις:
α) $(3x-6)(x^2-1)-(5x-10)(x-1)^2$ β) $(\alpha^2-9)^2-(\alpha+3)^2$

Ἐπίλυση ἐξισώσεων.

3.5. Στή Β' τάξη μάθαμε ὅτι **ἐξίσωση** λέγεται γενικά κάθε προτασιακός τύπος, πού περιέχει τό σύμβολο τῆς ἰσότητας. Εἰδικότερα, ἕνας τέτοιος προτασιακός τύπος μέ μιά, δυό, τρεῖς,... μεταβλητές λέγεται ἀντίστοιχα ἐξίσωση μέ ἕναν, δύο, τρεῖς,... ἀγνώστους. Ἔτσι π.χ. ἀπό τίς ἐξισώσεις

$$2x+3=7 \quad , \quad x^2-1=5(x-1) \quad , \quad x^2+y=12$$

οἱ δύο πρῶτες εἶναι ἐξισώσεις μέ ἕναν ἄγνωστο (τόν x) καί ἡ τρίτη εἶναι ἐξίσωση μέ δύο ἀγνώστους (τούς x καί y). Ἄν ἡ ἐξίσωση *«καταλήγει»* (μετά τήν ἐκτέλεση τῶν πράξεων) σέ μιά ἰσότητα τῆς μορφῆς $A=0$, ὅπου A εἶναι πολυώνυμο μ βαθμοῦ ὡς πρός τούς ἀγνώστους του, ἡ ἐξίσωση λέγεται ἐπίσης «μ βαθμοῦ». Ἔτσι π.χ. ἀπό τίς παραπάνω ἐξισώσεις ἡ πρώτη εἶναι πρώτου βαθμοῦ, ἐνῶ οἱ δύο ἄλλες εἶναι δευτέρου βαθμοῦ.

Ἀφοῦ μιά ἐξίσωση εἶναι προτασιακός τύπος, θά ἔχει ἕνα σύνολο ἀλήθειας, τό ὁποῖο λέγεται τώρα **σύνολο λύσεων** τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς καί κάθε στοιχεῖο του λέγεται **λύση** τῆς ἐξισώσεως. Κάθε λύση μιᾶς ἐξισώσεως μέ ἕναν ἄγνωστο λέγεται καί **ρίζα** τῆς ἐξισώσεως. Ἔτσι π.χ. μιά λύση (ρίζα) τῆς $x^2-1=5(x-1)$ εἶναι ὁ ἀριθμός $x=4$, ἐνῶ μιά λύση τῆς $x^2+y=12$ εἶναι τό ζεῦγος $(x=2,\ y=8)$. Ἡ εὕρεση τοῦ συνόλου λύσεων μιᾶς ἐξισώσεως λέγεται **ἐπίλυση** (ἤ καί ἁπλῶς *«λύση»*) τῆς ἐξισώσεως.

Μποροῦμε λοιπόν γενικά νά λέμε ὅτι **ἐξίσωση εἶναι μιά ἰσότητα, ἡ ὁποία ἀληθεύει γιά ὁρισμένες τιμές τῶν γραμμάτων της.**

Στή Β' τάξη μάθαμε ἀκόμη πῶς λύνεται μιά ἐξίσωση πρώτου βαθμοῦ μέ ἕναν ἄγνωστο, ὅπως π.χ. ἡ

$$\frac{x+2}{3}+1=\frac{1}{2}-\frac{x}{4}$$

Εἴδαμε ὅτι ἡ ἐξίσωση αὐτή καταλήγει (μετά τήν ἀπαλοιφή τῶν παρονομαστῶν της, τήν ἐκτέλεση τῶν πράξεων, τό χωρισμό γνωστῶν καί ἄγνωστων ὅρων της καί τήν ἀναγωγή τῶν ὅμοιων ὅρων) σέ μιά τελική μορφή

$$7x=-14,$$

ἀπό τήν ὁποία βρίσκουμε τή μοναδική της ρίζα $x=-\frac{14}{7}=-2$.

Σέ ὁρισμένες περιπτώσεις, μέ τή βοήθεια τῆς παραγοντοποιήσεως πολυωνύμου, μποροῦμε νά λύσουμε ἐξισώσεις μεγαλύτερου ἀπό τόν πρῶτο βαθμοῦ. Ἄς θεωρήσουμε π.χ μία ἐξίσωση, τῆς ὁποίας τό πρῶτο μέλος εἶναι γινόμενο μέ πρωτοβάθμιους παράγοντες καί τό δεύτερο μέλος της εἶναι μηδέν, ὅπως ἡ

$$(x-3)(2x+1)x=0$$

23*x-3

Ἐπειδή ἕνα γινόμενο εἶναι μηδέν, ὅταν τουλάχιστον ὁ ἕνας του παράγοντας εἶναι μηδέν, ἡ λύση τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς θά ἀνάγεται στή λύση τῶν ἐξισώσεων:

$$x-3=0, \quad 2x+1=0, \quad x=0,$$

οἱ ὁποῖες ἔχουν ρίζες ἀντίστοιχα $x=3$, $x=-\frac{1}{2}$, $x=0$. Ἔτσι ρίζες τῆς ἐξισώσεως $(x-3)(2x+1)x=0$ εἶναι οἱ ἀριθμοί $3, -\frac{1}{2}, 0$.

Γενικά λοιπόν **οἱ ρίζες μιᾶς ἐξισώσεως τῆς μορφῆς Α.Β.Γ = 0 εἶναι οἱ ρίζες τῶν ἐξισώσεων Α=0, Β=0, Γ=0.**

Πολλές φορές καταλήγουμε στή μορφή αὐτή, ἀφοῦ μεταφέρουμε ὅλους τούς ὅρους τῆς ἐξισώσεως στό πρῶτο μέλος της καί μετά ἀναλύσουμε τό πρῶτο μέλος της σέ γινόμενο παραγόντων (ἄν φυσικά μιά τέτοια ἀνάλυση εἶναι δυνατή). Ἄς παρακολουθήσουμε τή διαδικασία αὐτή στά παρακάτω παραδείγματα.

Παράδειγμα 1: Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση $9x^2-1=0$

Λύση: Τό πολυώνυμο $9x^2-1$ ἀναλύεται σέ γινόμενο καί εἶναι $9x^2-1=(3x+1)(3x-1)$. Ἔχουμε λοιπόν τήν ἰσοδύναμη ἐξίσωση

$$(3x+1)(3x-1)=0$$

ρίζες τῆς ὁποίας εἶναι οἱ ρίζες τῶν ἐξισώσεων

$$3x+1=0, \quad 3x-1=0,$$

δηλαδή οἱ ἀριθμοί $-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$.

Παράδειγμα 2: Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση $x^2-8x+15=0$

Λύση: Εἴδαμε στήν §3.4 ὅτι τό πρῶτο μέλος της ἀναλύεται σέ γινόμενο δύο πρωτοβάθμιων παραγόντων καί εἶναι $x^2-8x+15=(x-3)(x-5)$.
Ἡ ἐξίσωση λοιπόν γράφεται

$$(x-3)(x-5)=0$$

καί συνεπῶς ἔχει ρίζες τούς ἀριθμούς 3 καί 5.

Παράδειγμα 3: Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση $11x^2+3=14x$

Λύση: Ἄν μεταφέρουμε τούς ὅρους της στό πρῶτο μέλος ἔχουμε διαδοχικά

$$11x^2-14x+3=0$$

$$11\left(x^2-\frac{14}{11}x+\frac{3}{11}\right)=0$$

$$x^2-\frac{14}{11}x+\frac{3}{11}=0$$

$$x^2-2.\frac{7}{11}x+\left(\frac{7}{11}\right)^2-\left(\frac{7}{11}\right)^2+\frac{3}{11}=0$$

$$\left(x-\frac{7}{11}\right)^2-\frac{49}{121}+\frac{3}{11}=0$$

$$\left(x-\frac{7}{11}\right)^2-\left(\frac{4}{11}\right)^2=0$$

$$\left(x-\frac{7}{11}+\frac{4}{11}\right)\left(x-\frac{7}{11}-\frac{4}{11}\right)=0$$

$$\left(x-\frac{3}{11}\right)(x-1)=0$$

Συνεπῶς ἡ ἐξίσωση ἔχει ρίζες τούς ἀριθμούς $x=\frac{3}{11}$, $x=1$.

Παράδειγμα 4: Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση $x^2(x+1)-4(x+1)=3(x-2)(x+1)$

Λύση: Μεταφέροντας ὅλους τούς ὅρους της στό πρῶτο μέλος ἔχουμε διαδοχικά

$$x^2(x+1)-4(x+1)-3(x-2)(x+1)=0$$
$$(x+1)(x^2-4)-3(x-2)(x+1)=0$$
$$(x+1)(x-2)(x+2)-3(x-2)(x+1)=0$$
$$(x+1)(x-2)(x+2-3)=0$$
$$(x+1)(x-2)(x-1)=0$$

Συνεπῶς ἡ ἐξίσωση ἔχει ρίζες τούς ἀριθμούς $x=-1$, $x=2$, $x=1$

Παράδειγμα 5: Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση $x^2+4x+7=0$

Λύση: Ἡ ἐξίσωση αὐτή δέν ἔχει ρίζες, γιατί, ὅπως εἴδαμε στήν §3.4, τό τριώνυμο x^2+4x+7 δέν ἀναλύεται σέ γινόμενο δύο πρωτοβάθμιων παραγόντων.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

20. Νά λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:

α) $4x^2-9=0$ β) $x^2-x-2=0$

γ) $3x^2+5x+2=0$ δ) $9x^2=2x$

+++ ε) $4x^3-4\sqrt{3}x^2-x+\sqrt{3}=0$ στ) $2x^3-4x^2-5x+10=0$ +++

++ ζ) $(x+1)(x^2-4)=3(x-2)(x+1)$ η) $x^5-x=0$ +++

θ) $x^3-x=\sqrt{2}(x^2-1)$ ι) $(x^2+1)^2+1=0$ ++

21. Νά λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:

α) $(x+2)^2+(x+5)^2=0$ +++ β) $(x-2)^2+(2x-4)^2=0$ +++

Μ.Κ.Δ καί Ε.Κ.Π πολυωνύμων.

3·6. Ὅπως εἴδαμε στήν §3.3 ἕνα πολυώνυμο δέν ἀναλύεται πάντα σέ γινόμενο παραγόντων. Τέτοια πολυώνυμα εἶναι π.χ. τά

$$x+2,\quad 2x+1,\quad x^2+\alpha^2,\quad (x+1)^2+11,\quad (3x-2)^2+7,\quad x^2+xy+y^2$$

καί λέγονται (ἀναλογικά μέ τούς ἀριθμούς πού δέν ἀναλύονται σέ γινόμενα) *«πρῶτα πολυώνυμα»*.

Κάθε πολυώνυμο λοιπόν ἤ εἶναι πρῶτο ἤ μπορεῖ νά ἀναλυθεῖ σέ γινόμενο, πού οἱ ἐγγράμματοι ὅροι του εἶναι πρῶτα πολυώνυμα. Ἡ ἀνάλυση ἑνός πολυωνύμου πρέπει νά φθάνει μέχρι τήν εὕρεση τῶν «πρώτων» παραγόντων του.

Ἄν ἔχουμε δύο ἤ περισσότερα πολυώνυμα, πού ἔχουν ἀναλυθεῖ σέ γινόμενα «πρώτων παραγόντων», ὁ Μ.Κ.Δ καί τό Ε.Κ.Π τους, βρίσκονται ὅπως ἀκριβῶς καί στούς ἀκέραιους ἀριθμούς, δηλαδή:

● **Μέγιστος κοινός διαιρέτης (Μ.Κ.Δ) τους εἶναι τό γινόμενο πού σχηματίζεται ἀπό τούς κοινούς πρώτους παράγοντές τους, στό ὁποῖο ὁ καθένας παίρνεται μέ τό μικρότερο ἐκθέτη.** (Ἀριθμητικός παράγοντας τοῦ γινομένου αὐτοῦ παίρνεται συνήθως ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν ἀριθμητικῶν παραγόντων τῶν ἀναλυμένων πολυωνύμων)

● **Ἐλάχιστο κοινό πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π) τους εἶναι τό γινόμενο πού σχηματίζεται ἀπό τούς κοινούς καί τούς μή κοινούς πρώτους παράγοντές τους, στό ὁποῖο ὁ καθένας παίρνεται μέ τό μεγαλύτερο ἐκθέτη.**

(Ἀριθμητικός παράγοντας τοῦ γινομένου αὐτοῦ παίρνεται συνήθως τό Ε.Κ.Π. τῶν ἀριθμητικῶν παραγόντων τῶν ἀναλυμένων πολυωνύμων).

Ἔτσι π.χ. τά μονώνυμα $18\alpha^3\beta^2\gamma$, $12\alpha^4\beta\gamma^2$, $6\alpha^5\beta^2$ ἔχουν

$$\text{Μ.Κ.Δ} : 6\alpha^3\beta, \quad \text{Ε.Κ.Π} : 36\alpha^5\beta^3\gamma^2$$

Ἐπίσης τά πολυώνυμα $2x(x+1)$, $6x^2(x+1)(x-1)$, $4x(x+1)^2$, ἔχουν

$$\text{Μ.Κ.Δ} : 2x(x+1), \quad \text{Ε.Κ.Π} : 12x^2(x+1)^2(x-1)$$

● **ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

22. Νά βρεῖτε τό Μ.Κ.Δ καί τό Ε.Κ.Π τῶν παραστάσεων:
α) $12\alpha^3\beta^2\gamma$, $15\alpha^2\beta^3\gamma$, $6\alpha^4\beta^3$
β) $8\alpha^2x^3$, $4\alpha^3x^5$, $12\alpha^3x^3$
γ) $3\alpha^2(\alpha-\beta)^2$, $6\alpha^2\beta(\alpha-\beta)^2(\alpha+\beta)$

23. Νά βρεῖτε τό Μ.Κ.Δ καί τό Ε.Κ.Π τῶν παραστάσεων:
α) $4(x^2-y^2)$, $6(x+y)^2$, $3(x-y)^2$
β) $\alpha^2-\beta^2$, $(\alpha-\beta)^2$, $\alpha^3-\beta^3$
γ) $\alpha^3-6\alpha^2+12\alpha-8$, α^2-4, $\alpha^2-2\alpha$
δ) $\alpha^2-3\alpha+2$, $\alpha^2+3\alpha-4$, $\alpha^3-\alpha$, $\alpha^2-2\alpha+1$.

Ρητές ἀλγεβρικές παραστάσεις.

3.7. Κάθε κλάσμα, πού οἱ δύο ὅροι του εἶναι ἀκέραια πολυώνυμα, λέγεται **ρητό ἀλγεβρικό κλάσμα** ἤ **ρητή ἀλγεβρική παράσταση** ἤ ἁπλῶς **ρητή παράσταση**. Ἔτσι π.χ. ρητές ἀλγεβρικές παραστάσεις εἶναι οἱ:

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}, \quad \frac{2x^2+4x-5}{x+3}, \quad \frac{4x^2-3xy+y^2}{(x-1)(y+2)}, \quad \frac{5}{x^2+1}$$

Σέ μία ρητή ἀλγεβρική παράσταση τά γράμματά της δέν μποροῦν νά πάρουν τιμές πού μηδενίζουν τόν παρονομαστή της (γιατί ἕνα κλάσμα ἔχει νόημα, μόνο ὅταν ὁ παρονομαστής του εἶναι διαφορετικός ἀπό τό μηδέν). Ἔτσι, γιά τίς παραπάνω παραστάσεις ὑποθέτουμε ὅτι στήν πρώτη ἔχουμε $\alpha\neq\beta$, στή δεύτερη $x\neq-3$ καί στήν τρίτη $x\neq1$ καί $y\neq-2$. Γενικά λοιπόν ἀπό ἐδῶ καί πέρα, **ὅταν γράφουμε μιά ρητή ἀλγεβρική παράσταση, θά ὑποθέτουμε ὅτι τά γράμματά της δέν παίρνουν τιμές πού μηδενίζουν τόν παρονομαστή της.**

Όπως καί στά ἀριθμητικά κλάσματα, ἔτσι κι ἐδῶ, γιά νά ἁπλοποιήσουμε μιά ρητή ἀλγεβρική παράσταση, πρέπει νά διαιρέσουμε τούς ὅρους της μέ τό ἴδιο πολυώνυμο. Τοῦτο γίνεται ἄν:

- *Ἀναλύσουμε καί τούς δύο ὅρους της σέ γινόμενα παραγόντων.*
- *Διαγράψουμε τούς κοινούς παράγοντές τους* (πράγμα πού σημαίνει διαίρεση τῶν ὅρων της μ' αὐτούς).

Παράδειγμα: Νά ἁπλοποιηθοῦν οἱ παραστάσεις:

I) $\dfrac{4\alpha x^2 y}{6\alpha^3 x^2}$ II) $\dfrac{x^2+2xy+y^2}{x^2+xy}$

Λύση: I) Ἔχουμε ἀμέσως ὅτι $\dfrac{4\alpha x^2 y}{6\alpha^3 x^2}=\dfrac{2y}{3\alpha^2}$

(Διαιρέσαμε καί τούς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος μέ τό μονώνυμο $2\alpha x^2$).

II) Βρίσκουμε εὔκολα ὅτι $\dfrac{x^2+2xy+y^2}{x^2+xy}=\dfrac{(x+y)^2}{x(x+y)}=\dfrac{x+y}{x}$

(Διαγράψαμε τόν κοινό παράγοντα $x+y$ τῶν δύο ὅρων).

Γιά νά μετατρέψουμε ρητές ἀλγεβρικές παραστάσεις σέ ἄλλες μέ ἴδιους παρονομαστές, ἐργαζόμαστε ὅπως ὅταν μετατρέπουμε ἑτερώνυμα ἀριθμητικά κλάσματα σέ ἄλλα ὁμώνυμα, δηλαδή:

- *Ἀναλύουμε τούς δύο ὅρους κάθε μιᾶς σέ γινόμενα παραγόντων.*
- *Βρίσκουμε τό Ε.Κ.Π τῶν παρονομαστῶν.*
- *Πολλαπλασιάζουμε τούς δύο ὅρους κάθε μιᾶς μέ τό πηλίκο πού βρίσκουμε, ἄν διαιρέσουμε τό Ε.Κ.Π μέ τόν παρονομαστή της.*

Στό παρακάτω παράδειγμα φαίνεται ἡ πλήρης ἀντιστοιχία τῶν ἐργασιῶν πού κάνουμε ὅταν τρέπουμε σέ ὁμώνυμα ἀριθμητικά κλάσματα καί ρητά ἀλγεβρικά κλάσματα.

Νά γίνουν ὁμώνυμα κλάσματα:	$\dfrac{5}{12}, \dfrac{3}{56}$	$\dfrac{3}{2x^2-6x}, \dfrac{5}{x^2-6x+9}$
Ἀναλύουμε τούς παρονομαστές σέ γινόμενα παραγόντων	$12=2^2.3$ $56=2^3.7$	$2x^2-6x=2x(x-3)$ $x^2-6x+9=(x-3)^2$
Ε.Κ.Π. παρανομαστῶν	$2^3.3.7$	$2x(x-3)^2\neq 0$
Πολλαπλασιάζουμε τούς ὅρους κάθε κλάσματος μέ τό πηλίκο τοῦ Ε.Κ.Π διά τοῦ παρονομαστῆ του	$\dfrac{5.14}{12.14}, \dfrac{3.3}{56.3}$	$\dfrac{3(x-3)}{2x(x-3)(x-3)}, \dfrac{5.2x}{(x-3)^2.2x}$
Τελική μορφή τῶν κλασμάτων	$\dfrac{70}{168}, \dfrac{9}{168}$	$\dfrac{3(x-3)}{2x(x-3)^2}, \dfrac{10x}{2x(x-3)^2}$

ΠΡΑΞΕΙΣ ΡΗΤΩΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ.

3.8. Οἱ πράξεις μεταξύ τῶν ρητῶν ἀλγεβρικῶν παραστάσεων γίνονται ὅπως καί οἱ πράξεις τῶν ἀριθμητικῶν κλασμάτων. Ἔτσι θά ἀναφέρουμε ἁπλῶς τόν κανόνα κάθε πράξεως καί θά δείχνουμε μέ ἕνα παράδειγμα τήν ὁμοιότητά της μέ τήν ἀντίστοιχη πράξη τῶν ἀριθμητικῶν κλασμάτων.

Ι. Πρόσθεση καί ἀφαίρεση

Γιά νά ὑπολογίσουμε ἕνα ἀλγεβρικό ἄθροισμα ρητῶν παραστάσεων

- *μετατρέπουμε ὅλες τίς παραστάσεις σέ ἄλλες πού ἔχουν τόν ἴδιο παρονομαστή,*
- *σχηματίζουμε μία ρητή παράσταση, πού ἔχει τόν ἴδιο παρονομαστή καί ἀριθμητή τό ἀλγεβρικό ἄθροισμα τῶν ἀριθμητῶν.*

Παράδειγμα 1:

Νά ὑπολογισθεῖ τό ἀλγεβρικό ἄθροισμα	$\frac{7}{12}-\frac{1}{15}-\frac{1}{6}$	$\frac{2}{x-y}-\frac{x}{x+y}-\frac{4x}{x^2-y^2}$
Ἀναλύομε τούς παρονομαστές σέ γινόμενα	$12=2^2.3$ $15=3.5$ $6=2.3$	τό $x-y$ εἶναι πρῶτο τό $x+y$ εἶναι πρῶτο $x^2-y^2=(x+y)\ (x-y)$
Ε.Κ.Π. παρονομαστῶν	$2^2.3.5$	$(x+y)\ (x-y)\neq 0$
Πολλαπλασιάζουμε καί τούς δύο ὅρους κάθε κλάσματος μέ τό πηλίκο τοῦ Ε.Κ.Π διά τοῦ παρονομαστῆ του	$\frac{7.5}{2^2.3.5}-\frac{1.4}{3.5.2^2}-\frac{1.10}{2^2.3.5}$	$\frac{2.(x+y)}{(x-y)\ (x+y)}-\frac{x(x-y)}{(x+y)(x-y)}-\frac{4x}{(x+y)\ (x-y)}$
Ἀθροίζουμε τούς ἀριθμητές	$\frac{7.5-1.4-1.10}{2^2.3.5}$	$\frac{2(x+y)-x(x-y)-4x}{(x+y)\ (x-y)}$
Ἐκτελοῦμε τίς πράξεις στόν ἀριθμητή καί τόν ἀναλύουμε σέ γινόμενο	$\frac{35-4-10}{2^2.3.5}$ $\frac{21}{2^2.3.5}$ $\frac{3.7}{2^2.3.5}$	$\frac{2x+2y-x(x-y)-4x}{(x+y)\ (x-y)}$ $\frac{-2\ (x-y)\ -x(x-y)}{(x+y)\ (x-y)}$ $\frac{-(x-y)\ (2+x)}{(x+y)\ (x-y)}$
Τελική μορφή ἀθροίσματος	$\frac{7}{2^2.5}$	$-\frac{2+x}{x+y}$

II. Πολλαπλασιασμός

λύθηξω

Γιά νά πολλαπλασιάσουμε ρητές ἀλγεβρικές παραστάσεις, σχηματίζουμε μία ρητή ἀλγεβρική παράσταση πού ἔχει ἀριθμητή τό γινόμενο τῶν ἀριθμητῶν τους καί παρονομαστή τό γινόμενο τῶν παρονομαστῶν τους.

Στό γινόμενο πού βρίσκουμε πρέπει νά κάνουμε ὅλες τίς δυνατές ἁπλοποιήσεις.

Παράδειγμα 2

Νά βρεθεῖ τό γινόμενο:	$\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4}$	$\frac{2x}{x-3} \cdot \frac{x^2-9}{2x^2+4x}$
Ἀναλύουμε τούς ὅρους σέ γινόμενα	$\frac{2}{3} \cdot \frac{3^2}{2^2}$	$\frac{2x}{x-3} \cdot \frac{(x+3)(x-3)}{2x(x+2)}$
Σχηματίζουμε τά γινόμενα ἀριθμητῶν καί παρονομαστῶν	$\frac{2.3^2}{3.2^2}$	$\frac{2x(x+3)(x-3)}{2x(x-3)(x+2)}$
Τελική μορφή γινομένου (μετά τίς ἁπλοποιήσεις)	$\frac{3}{2}$	$\frac{x+3}{x+2}$

III. Διαίρεση

λύθηξω

Γιά νά διαιρέσουμε μία ρητή παράσταση A μέ μιά ρητή παράσταση B, πολλαπλασιάζουμε τήν A μέ τή ρητή παράσταση πού βρίσκεται, ἄν ἀντιστρέψουμε τούς ὅρους τῆς B.

Παράδειγμα 3

Νά βρεθεῖ τό πηλίκο	$\frac{15}{8} : \frac{25}{12}$	$\frac{4\alpha^2-2\alpha\beta}{x+y} : \frac{4\alpha^2}{x^2-y^2}$
Τό γράφουμε ὡς γινόμενο μέ τήν ἀντίστροφη παράσταση	$\frac{15}{8} \cdot \frac{12}{25}$	$\frac{4\alpha^2-2\alpha\beta}{x+y} \cdot \frac{x^2-y^2}{4\alpha^2}$
Πολλαπλασιάζουμε τούς ἀριθμητές καί τούς παρονομαστές	$\frac{15 \,.\, 12}{8 \,.\, 25}$	$\frac{(4\alpha^2-2\alpha\beta)(x^2-y^2)}{4\alpha^2(x+y)}$
Ἀναλύουμε τούς ὅρους σέ γινόμενα	$\frac{3.5.2^2.3}{2^3 \,.\, 5^2}$	$\frac{2\alpha(2\alpha-\beta)(x+y)(x-y)}{4\alpha^2(x+y)}$
Τελική μορφή πηλίκου (μετά τίς ἁπλοποιήσεις)	$\frac{9}{10}$	$\frac{(2\alpha-\beta)(x-y)}{2\alpha}$

Εἶναι τώρα φανερό ὅτι καί κάθε «κλασματική» ἀλγεβρική παράσταση μπορεῖ νά γραφεῖ σάν ρητή ἀλγεβρική παράσταση, π.χ.

$$x+\frac{1}{x}-\frac{x^2}{x+1}=\frac{x^2(x+1)+(x+1)-x^3}{x(x+1)}=\frac{x^2+x+1}{x^2+x}$$

IV. Σύνθετα κλάσματα

Τό πηλίκο δύο ρητῶν ἀλγεβρικῶν παραστάσεων, ὅπως π.χ. τό $\frac{2x+2}{x} : \frac{(x+1)^2}{x^2}$ γράφεται καί μέ τή μορφή

$$\frac{\frac{2x+2}{x}}{\frac{(x+1)^2}{x^2}}$$

καί τότε λέγεται **σύνθετο ρητό κλάσμα** πού ἔχει ὅρους, ἀριθμητή καί παρονομαστή, τίς ρητές παραστάσεις $\frac{2x+2}{x}$ καί $\frac{(x+1)^2}{x^2}$ ἀντιστοίχως. Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι:

Ἕνα σύνθετο κλάσμα τρέπεται σέ ἁπλό, ἄν διαιρέσουμε τόν ἀριθμητή του μέ τόν παρονομαστή του.

Ἔτσι π.χ. τό προηγούμενο σύνθετο ρητό κλάσμα γράφεται:

$$\frac{\frac{2x+2}{x}}{\frac{(x+1)^2}{x^2}} = \frac{2x+2}{x} : \frac{(x+1)^2}{x^2} = \frac{2(x+1)}{x} \cdot \frac{x^2}{(x+1)^2} = \frac{2x}{x+1}$$

Πολλές φορές οἱ ὅροι ἑνός σύνθετου ρητοῦ κλάσματος παίρνουν τή μορφή ρητῆς ἀλγεβρικῆς παραστάσεως, ἀφοῦ πρῶτα κάνουμε τίς πράξεις πού εἶναι σημειωμένες σ' αὐτούς. Ἄς θεωρήσουμε π.χ. τό

$$K = \frac{\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta} - 2}{\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\beta^2}}$$

Ὁ ἀριθμητής καί ὁ παρονομαστής του γράφονται ἀντιστοίχως:

$$\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta} - 2 = \frac{\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta},$$

$$\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\beta^2} = \frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha^2\beta^2},$$

καί συνεπῶς $K = \dfrac{\frac{\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}}{\frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha^2\beta^2}} = \dfrac{\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta} \cdot \dfrac{\alpha^2\beta^2}{\beta^2-\alpha^2} =$

$$= \frac{(\alpha-\beta)^2}{\alpha\beta} \cdot \frac{\alpha^2\beta^2}{(\beta+\alpha)(\beta-\alpha)} = -\frac{\alpha\beta(\alpha-\beta)}{\alpha+\beta}$$

Τονίζεται πάλι ὅτι **στό ἀποτέλεσμα μιᾶς πράξεως πρέπει πάντοτε νά κάνουμε ὅλες τίς δυνατές ἁπλοποιήσεις καί νά τό φέρνουμε σέ μιά ὅσο τό δυνατό πιό ἁπλή μορφή.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Νά ἐκτελεσθοῦν οἱ πράξεις

$$\frac{1-x^2}{1+y+y^2}\cdot\frac{1-y^3}{y^2-2xy+x^2}\cdot\left(\frac{x}{1-x}-\frac{y}{1-y}\right)$$

Λύση: Ἄν ὀνομάσουμε Α τήν παράσταση ἔχουμε:

$$A=\frac{1-x^2}{1+y+y^2}\cdot\frac{1-y^3}{y^2-2xy+x^2}\cdot\left(\frac{x}{1-x}-\frac{y}{1-y}\right)=$$

$$=\frac{(1+x)(1-x)}{1+y+y^2}\cdot\frac{(1-y)(1+y+y^2)}{(x-y)^2}\cdot\frac{x(1-y)-y(1-x)}{(1-x)(1-y)}=$$

$$=\frac{(1+x)(1-x)(1-y)(1+y+y^2)(x-y)}{(1+y+y^2)(x-y)^2(1-x)(1-y)}=$$

$$=\frac{1+x}{x-y}$$

2. Νά ὑπολογισθεῖ ἡ παράσταση $A=\dfrac{x^3+y^3}{x^2-y^2}\cdot\dfrac{\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}}{\dfrac{x^2+y^2}{y}-x}$

Λύση: $$A=\frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{(x+y)(x-y)}\cdot\frac{\dfrac{x-y}{xy}}{\dfrac{x^2+y^2-xy}{y}}=$$

$$=\frac{x^2-xy+y^2}{x-y}\cdot\frac{x-y}{x(x^2+y^2-xy)}=\frac{1}{x}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

24. Νά ἁπλοποιηθοῦν τά κλάσματα:

α) $\dfrac{6x^2}{9x}$ β) $\dfrac{6\alpha^2\beta}{2\alpha^3\beta\gamma}$ γ) $\dfrac{-12\alpha^4x^2y}{-15\alpha^4y^2}$

δ) $\dfrac{3\alpha-3\beta}{4\alpha-4\beta}$ ε) $\dfrac{4x^2-xy}{12xy-3y^2}$ στ) $\dfrac{x^3-x}{x^2+x}$

ζ) $\dfrac{x^2-9}{x^2-4x+3}$ η) $\dfrac{(3x-2y)^2}{4y^2-9x^2}$ θ) $\dfrac{3\alpha\beta^3+3\alpha^3\beta-6\alpha^2\beta^2}{6\alpha\beta^3-6\alpha^3\beta}$

ι) $\dfrac{x^3+2x^2-2-x}{x^2+3x+2}$ ια) $\dfrac{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta}{\alpha^3\beta-\beta^4}$ ιβ) $\dfrac{\alpha^4x-\beta^4x}{2\alpha^3+2\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2+2\beta^3}$

25. Νά ἐκτελέσετε τίς πράξεις:

α) $\dfrac{3}{2x}+\dfrac{5}{2x}$ β) $\dfrac{5}{-3\alpha}+\dfrac{2}{3\alpha}$

γ) $\dfrac{2x-4}{2}+\dfrac{x-3}{6}-\dfrac{4x-5}{3}$ δ) $\dfrac{x-2}{4xy}-\dfrac{2-x}{6xy}$

2^{η}

ε) $x - \dfrac{3-x^2}{x}$ στ) $\dfrac{\alpha}{\beta\gamma} - \dfrac{\beta}{\alpha\gamma} - \dfrac{\gamma}{\alpha\beta}$

ζ) $\dfrac{3}{2\alpha+2} - \dfrac{2}{3\alpha-3} + \dfrac{5\alpha+3}{6\alpha^2-6}$ η) $\dfrac{2\beta}{\alpha-2\beta} + \dfrac{\alpha}{2\beta+\alpha} - \dfrac{4\alpha\beta}{\alpha^2-4\beta^2}$

θ) $\dfrac{1}{\alpha^2-\beta^2} + \dfrac{1}{\alpha^2+\alpha\beta} - \dfrac{1}{2\alpha^2-2\alpha\beta}$ ι) $\dfrac{2xy}{x^3+y^3} - \dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2} + \dfrac{1}{x+y}$

ια) $\dfrac{1}{x^2-3x+2} + \dfrac{3}{x^2+x-2} + \dfrac{1}{x^2-4}$ ιβ) $\dfrac{2x-1}{x^2-x-2} - \dfrac{2x+1}{x^2+x-6} + \dfrac{2x+4}{x^2-4x+4}$

26. Νά ἐκτελεσθοῦν οἱ πράξεις:

α) $\dfrac{-4\alpha}{3\beta\gamma} \cdot \dfrac{6\beta^2\gamma}{5\alpha^2}$ β) $12xy \cdot \dfrac{x^2}{6y^3}$

γ) $\dfrac{-\alpha^2}{12\beta} \cdot \dfrac{-2\alpha\beta}{3\gamma^2\delta} \cdot \dfrac{9\beta\gamma\delta}{-\alpha^4}$ δ) $(\alpha+3) \cdot \dfrac{\alpha^2\beta}{\alpha^2-9}$

ε) $\dfrac{\alpha+2}{\beta-4} \cdot \dfrac{\beta^2-\alpha\beta}{4-\alpha^2}$ στ) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+7x+12} \cdot \dfrac{x+3}{x-3}$

ζ) $\dfrac{x^4-x^2-4x+4}{x^3+8} \cdot \dfrac{x^2-4x+4}{x^3-4x}$ η) $\dfrac{\alpha^{2\nu}-1}{x^2} \cdot \dfrac{x^2}{\alpha^{\nu}+1}$

θ) $\dfrac{x^2-x}{x^2+4x+4} \cdot \dfrac{x^2+3x+2}{2-x} \cdot \dfrac{x^2-4}{x^2-1}$

ι) $\dfrac{3\alpha-5\beta}{7\gamma^2} \cdot \dfrac{42\alpha\gamma-42\beta\gamma}{3\alpha x-5\beta x+3\alpha y-5\beta y} \cdot (x+y)$

27. Νά γίνουν οἱ πράξεις:

α) $\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\right) \dfrac{x^2y^2}{x^2-y^2}$ β) $\left(\dfrac{2}{3x} - x + \dfrac{x}{3}\right)\left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{1+x}\right)$

γ) $\left(\dfrac{x}{y} - 1\right)\left(\dfrac{x}{y} + 1\right)\left(1 - \dfrac{x^2}{x^2-y^2}\right)$

δ) $\dfrac{y}{2}\left(\dfrac{1}{x+y} + \dfrac{1}{x-y}\right) \cdot \dfrac{x^2-y^2}{x^2y+xy^2} \cdot (x+y)$

28. Νά κάνετε τίς πράξεις:

α) $\dfrac{2x^2}{3y^2} : \dfrac{4x^2}{9y^3}$ β) $\left(\dfrac{-3x^2}{4\alpha y^2} : \dfrac{-5y}{6\alpha}\right) : \dfrac{4x}{5y^3}$

γ) $\dfrac{x^2-2x}{\alpha^3} : (x^2-4)$ δ) $(\alpha^3+\beta^3) : \dfrac{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2}{\alpha-\beta}$

ε) $\left(\dfrac{6x^3}{7\alpha\beta} - \dfrac{9x^2}{14\beta^2} + \dfrac{3x}{21\alpha^2}\right) : \dfrac{3x}{7\alpha}$ στ) $\dfrac{x^2-4}{x-3} \cdot \dfrac{x^2-6x+9}{x^3-8} : \dfrac{x^2-x-6}{x^2+x}$

3^{η}

29. Νά ἁπλοποιηθοῦν οἱ παραστάσεις:

α) $\left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{1}{xy}\right) : (x^3-y^3)$ β) $\left[\dfrac{x^2}{4} + y(x+4y)\right] : \dfrac{\alpha x+2\alpha y-x-2y}{\alpha^2-1}$

γ) $\left(\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\beta} - \alpha\right) \cdot \dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^3+\beta^3} : \left(\dfrac{1}{\beta} - \dfrac{1}{\alpha}\right)$

δ) $\left(1-2x+x^2+\dfrac{1-x^4}{1+2x+x^2}\right) : \dfrac{1-x}{1+x}$

30. Νά ἁπλοποιηθοῦν οἱ παραστάσεις:

α) $\dfrac{1+x}{1+\dfrac{1}{x}}$ β) $\dfrac{1-\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x}}$

γ) $\dfrac{\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\alpha\beta^3}}{\beta-1+\dfrac{1}{\beta}}$ δ) $\dfrac{\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}-2}{\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\beta}}$

ε) $\dfrac{\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{1}{y^2}}-\left(y\cdot\dfrac{1}{x}\right)^2$ στ) $\dfrac{1}{1+\dfrac{3}{x}}+\dfrac{1}{\dfrac{x}{3}-1}-\dfrac{2}{\dfrac{x}{3}-\dfrac{3}{x}}$

Ἐπίλυση κλασματικῶν ἐξισώσεων.

3.9. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι θέλουμε νά βροῦμε τίς ρίζες τῆς ἐξισώσεως

$$\frac{x-2}{x}+\frac{4}{x-2}-\frac{8}{x^2-2x}=0$$

Γιά νά ἔχει νόημα ἡ ἐξίσωση, θά πρέπει οἱ παρονομαστές ὅλων τῶν κλασμάτων νά εἶναι διάφοροι τοῦ μηδενός, δηλαδή θά πρέπει νά εἶναι $x\neq0$, $x\neq2$ καί $x^2-2x\neq0$. Ἐπειδή τό Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν $x(x-2)$ περιέχει ὅλους τούς παράγοντές τους, καταλαβαίνουμε ὅτι γιά νά ἔχει νόημα ἡ ἐξίσωση ἀρκεῖ τό Ε.Κ.Π. νά εἶναι διαφορετικό ἀπό τό μηδέν. Ὑποθέτουμε λοιπόν ὅτι $x(x-2)\neq0$ καί ἀπαλείφουμε τούς παρονομαστές πολλαπλασιάζοντας καί τά δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως μέ τό Ε.Κ.Π. Ἔχουμε τότε διαδοχικά

$$(x-2)^2+4x-8=0$$
$$(x-2)^2+4(x-2)=0$$
$$(x-2)(x-2+4)=0$$
$$(x-2)(x+2)=0.$$

Ἔτσι ἡ ἀρχική μας ἐξίσωση «ἀναλύεται» στίς δύο ἐξισώσεις

$$x-2=0 \quad\text{καί}\quad x+2=0,$$

οἱ ὁποῖες ἔχουν ρίζες τούς ἀριθμούς 2 καί -2. Ὁ ἀριθμός 2 ὅμως ἀπορρίπτεται ἀπό τήν ἀρχική ὑπόθεση $x(x-2)\neq0$ καί μένει ὡς μοναδική ρίζα τῆς ἐξισώσεως ὁ ἀριθμός -2.

Βλέπουμε δηλαδή ὅτι **στήν ἐπίλυση μιᾶς κλασματικῆς ἐξισώσεως πρέπει νά ἀπορρίπτουμε ἀπό τίς ρίζες πού βρίσκουμε ἐκεῖνες πού μηδενίζουν τούς παρονομαστές τῆς ἀρχικῆς ἐξισώσεως.**

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

31. Νά ἐπιλυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:

α) $\dfrac{2x}{x+2} + \dfrac{x+2}{2x} = 2$

β) $\dfrac{x-1}{x} - \dfrac{x}{x-2} + \dfrac{1}{x^2-2x} = 0$

γ) $\dfrac{2x-3}{x} + \dfrac{5x-3}{x^2} = \dfrac{2x^2+x-6}{x^3} + 2$

δ) $\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{2}{x+1} = \dfrac{3}{x^2-x-2}$

ε) $1 - \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{2-x} = \dfrac{2x}{x^2-4}$

στ) $\dfrac{12}{3x-2} - \dfrac{8}{3x+2} = \dfrac{2-33x}{4-9x^2}$.

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 3

1. Τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως ἑνός πολυωνύμου $p(x)$ μέ τό διώνυμο $x-\alpha$ βρίσκεται καί χωρίς νά κάνουμε τή διαίρεση γιατί εἶναι ἴσο μέ τήν ἀριθμητική τιμή $p(\alpha)$ τοῦ πολυωνύμου γιά $x=\alpha$.
"Αν εἶναι $p(\alpha)=0$, ἡ διαίρεση $p(x) : (x-\alpha)$ εἶναι τελεία καί μποροῦμε νά γράψουμε

$$p(x) = (x - \alpha)\pi(x)$$

2. Εἶναι πολύ χρήσιμο νά ἀναλύουμε τά πολυώνυμα σέ γινόμενα παραγόντων.
"Ενα πολυώνυμο ἀναλύεται σέ γινόμενο παραγόντων ὅταν:

- Οἱ ὅροι του ἔχουν κοινό παράγοντα, π.χ. $\mu\alpha+\mu\beta+\mu\gamma = \mu(\alpha+\beta+\gamma)$.
- Οἱ ὅροι του χωρίζονται σέ ὁμάδες κατά τέτοιο τρόπο, ὥστε ὅλες οἱ ὁμάδες, ὅταν τραποῦν σέ γινόμενα, νά ἔχουν κοινό παράγοντα, π.χ.
$$\alpha x+\alpha y+\beta x+\beta y = \alpha(x+y) + \beta(x+y) = (x+y)(\alpha+\beta).$$
- Εἶναι ἀνάπτυγμα τετραγώνου διωνύμου, δηλ. $\alpha^2 \pm 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha\pm\beta)^2$.
- Εἶναι διαφορά τετραγώνων, δηλ. $\alpha^2-\beta^2 = (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$.
- Εἶναι διαφορά ἤ ἄθροισμα κύβων, δηλ. $\alpha^3 \mp \beta^3 = (\alpha\mp\beta)(\alpha^2 \pm \alpha\beta + \beta^2)$.
- Εἶναι τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ $(\alpha \neq 0)$ τό ὁποῖο μετασχηματίζεται σέ διαφορά τετραγώνων.

"Ενα τριώνυμο πού μετασχηματίζεται σέ ἄθροισμα τετραγώνων δέν ἀναλύεται σέ γινόμενο παραγόντων. 2-θ1.

3. "Αν ἔχουμε μία ἐξίσωση ἀνώτερου βαθμοῦ, τῆς ὁποίας τό δεύτερο μέλος εἶναι μηδέν, αὐτή μπορεῖ νά ἐπιλυθεῖ μόνον, ὅταν τό πρῶτο μέλος της ἀναλύεται σέ γινόμενο παραγόντων πρώτου βαθμοῦ. Τότε γράφεται π.χ.

$$A.B.\Gamma = 0$$

καί ἔχει ρίζες τίς ρίζες τῶν ἐξισώσεων $A=0$, $B=0$, $\Gamma=0$.

4. Κάθε παράσταση τῆς μορφῆς $\dfrac{A}{B}$, ὅπου τά A καί B εἶναι ἀκέραια πολυώνυμα, λέγεται **ρητή ἀλγεβρική παράσταση** ἤ **ρητό ἀλγεβρικό κλάσμα**. Τά γράμματα μιᾶς ρητῆς ἀλγεβρικῆς παραστάσεως δέν μποροῦν νά πάρουν τιμές πού μηδενίζουν τόν παρονομαστή της.

Μία ρητή ἀλγεβρική παράσταση μποροῦμε νά τήν ἁπλοποιήσουμε ἀναλύοντας τούς ὅρους της σέ γινόμενο καί διαγράφοντας τούς κοινούς παράγοντες (ἄν ὑπάρχουν).

Οἱ πράξεις μεταξύ ρητῶν ἀλγεβρικῶν παραστάσεων γίνονται ὅπως οἱ πράξεις τῶν ρητῶν ἀριθμῶν. Πρέπει πάντοτε νά **ἁπλοποιοῦμε** τό ἀποτέλεσμα πού προκύπτει ἀπό τίς πράξεις ρητῶν ἀλγεβρικῶν παραστάσεων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ*

32. Νά προσδιορίσετε τό λ ἔτσι, ὥστε τό πολυώνυμο

$$x^3-3x^2-2\lambda x+6\lambda$$

νά εἶναι διαιρετό διά $x-2$. Τό πολυώνυμο πού προκύπτει γιά τήν τιμή τοῦ λ πού βρήκατε νά τό ἀναλύσετε σέ γινόμενο τριῶν πρωτοβάθμιων παραγόντων.

33. Νά δείξετε ὅτι τό πολυώνυμο $(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$ εἶναι διαιρετό μέ κάθε ἕνα ἀπό τά $x+y$, $y+z$, $z+x$.

34. Ἄν εἶναι $A=\frac{y}{z}+\frac{z}{y}$, $B=\frac{z}{x}+\frac{x}{z}$ $\Gamma=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$, νά ὑπολογιστεῖ ἡ παράσταση $A^2+B^2+\Gamma^2-AB\Gamma$.

35. Δίνεται τό πολυώνυμο $A=9x^2-(2x+1)^2$
α) Νά δώσετε τό Α μέ τήν ἀνηγμένη του μορφή.
β) Νά τό ἀναλύσετε σέ γινόμενο.
γ) Νά λύσετε τήν ἐξίσωση $A=0$.

36. Δίνεται τό πολυώνυμο $A=(17x^2-1)^2-64x^4$
α) Νά δώσετε τό Α μέ τήν ἀνηγμένη του μορφή.
β) Νά τό ἀναλύσετε σέ γινόμενο.
γ) Νά λύσετε τήν ἐξίσωση $A=0$.

37. α) Νά ἀναλύσετε σέ γινόμενα παραγόντων τά πολυώνυμα

$$3x^2-6x,\quad x^2+4x+4,\quad 2x^2-8,\quad 9(2x+1)^2-(4x-1)^2$$

β) Νά ἁπλοποιήσετε τά κλάσματα

$$A=\frac{3x^2-6x}{2x^2-8},\qquad B=\frac{9(2x+1)^2-(4x-1)^2}{4(x^2+4x+4)}$$

γ) Νά λύσετε τήν ἐξίσωση $A-B=0$.

38. Νά ἐκτελέσετε τίς πράξεις:

α) $\left[\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha\beta}\right)(\alpha+\beta+1)\right]:(\alpha^2+2\alpha\beta-1+\beta^2)$

β) $\left[\left(x^2-2+\frac{1}{x^2}\right):\left(\frac{1}{x}-1\right)^2\right]-x^2-1$

γ) $\dfrac{1-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}-\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}$ δ) $\dfrac{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$.

39. Νά ἐκτελεσθοῦν οἱ πράξεις:

α) $\frac{1}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{1}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}+\frac{1}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$

β) $\frac{\beta\gamma}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{\gamma\alpha}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}+\frac{\alpha\beta}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ**

40. Νά ἀποδειχθοῦν οἱ ταυτότητες:

α) $(\alpha+\beta)^2-(\gamma+\delta)^2+(\alpha+\gamma)^2-(\beta+\delta)^2=2(\alpha-\delta)(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$.

β) $(\alpha^2+\beta^2)^2+4\alpha\beta(\alpha^2-\beta^2)=(\alpha^2-\beta^2+2\alpha\beta)^2$.

γ) $x^3+(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)x+\alpha\beta\gamma=(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma)$.

41. Θεωροῦμε τά πολυώνυμα

$$A=25x^2+20x+4,\quad B=9x^2-24x+16\quad \text{καί}\quad \Gamma=A-B.$$

α) Νά βρεῖτε τό πολυώνυμο Γ νά τό διατάξετε κατά τίς φθίνουσες δυνάμεις τοῦ x καί νά βρεῖτε τήν ἀριθμητική τιμή του γιά $x=\sqrt{2}$.

β) Νά γράψετε τό καθένα ἀπό τά πολυώνυμα Α καί Β σέ μορφή τετραγώνου ἑνός διωνύμου ὡς πρός x καί ἔπειτα νά ἀναλύσετε τό Γ σέ γινόμενο παραγόντων.

γ) Νά λύσετε τήν ἐξίσωση $\Gamma=0$.

42. Νά ἐκτελεσθοῦν οἱ πράξεις:

$$\left(1+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^3}\right)\cdot\frac{\alpha^4-\alpha^3}{\alpha^4-1}.$$

43. Νά ἐκτελεσθοῦν οἱ πράξεις:

α) $\frac{1}{(x+y)^2}\cdot\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)+\frac{2}{(x+y)^3}\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$

β) $\frac{\alpha-\gamma}{\alpha^2+\alpha\gamma+\gamma^2}\cdot\frac{\alpha^3-\gamma^3}{\alpha^2\beta-\beta\gamma^2}\cdot\left(1+\frac{\gamma}{\alpha-\gamma}-\frac{1+\gamma}{\gamma}\right):\frac{\gamma(1+\gamma)-\alpha}{\beta\gamma}$

γ) $\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}-\frac{x}{\alpha\beta}\right)(\alpha+\beta+x):\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{2}{\alpha\beta}-\frac{x^2}{\alpha^2\beta^2}\right)$

δ) $\dfrac{1+\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\cdot\dfrac{x-1+\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}:\dfrac{x^2+\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$

ε) $\dfrac{1-\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}{\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}}\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$

44. Ἄν εἶναι $y=x+\frac{1}{x}$, νά ἐκφρασθοῦν τά πολυώνυμα $A=x^2+\frac{1}{x^2}$, $B=x^3+\frac{1}{x^3}$ σάν πολυώνυμα τοῦ y

4° ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΕΥΘΕΙΕΣ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΑ ΣΤΟ ΧΩΡΟ

Πῶς ὁρίζεται ἕνα ἐπίπεδο.

4.1. Στήν Α΄ τάξη μάθαμε ὅτι **ἐπίπεδο** εἶναι μία ἐπιφάνεια, στήν ὁποία ὁ χάρακας ἐφαρμόζει ἐντελῶς κατά ὁποιαδήποτε διεύθυνση κι ἄν τοποθετηθεῖ πάνω σ' αὐτή.

Φυσική εἰκόνα ἑνός ἐπιπέδου μᾶς δίνει ἡ ἐπιφάνεια ἑνός τραπεζιοῦ, ὁ μαυροπίνακας τῆς τάξεώς μας, ἕνας τοῖχος ἑνός δωματίου χωρίς προεξοχές, μία σελίδα ἑνός βιβλίου, κ.λ.π. (ἄν φαντασθοῦμε ὅτι κάθε μία ἀπ' αὐτές τίς ἐπιφάνειες προεκτείνεται ἀπεριόριστα πρός ὅλες τίς μεριές της). Τό ἐπίπεδο δέν ἔχει πάχος (ὕψος) καί ἔχει μόνο δύο διαστάσεις, μῆκος καί πλάτος.

σχ. 1

Φυσική εἰκόνα ἑνός ἐπιπέδου μᾶς δίνει ἐπίσης μία πόρτα, πού βρίσκεται στόν τοῖχο ἑνός δωματίου, ἄν φανταστοῦμε ὅτι εἶναι λεπτή χωρίς προεξοχές καί ἐκτείνεται ἀπεριόριστα.

(σχ. 2)

Ὅταν ἡ πόρτα ἀνοίγει, ἡ μία ἀκμή της ΑΒ (πού εἶναι εὐθεία) παραμένει ἀκίνητη, δηλαδή σέ κάθε της θέση ἡ πόρτα (ἤ τό ἐπίπεδο πού παριστάνει) περιέχει τήν ΑΒ (σχ. 2). Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι

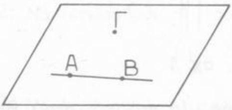
'Από μία εὐθεία ΑΒ διέρχονται ἄπειρα ἐπίπεδα.

Ἂν φανταστοῦμε τώρα καί ἕνα σημεῖο Γ στό χῶρο τοῦ δωματίου, ἡ πόρτα σέ μιά μόνο θέση της θά «περάσει» ἀπό τό σημεῖο Γ. Ἔτσι βλέπουμε ὅτι:

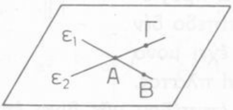
'Από μία εὐθεία ΑΒ καί ἕνα σημεῖο ἔξω ἀπ' αὐτή διέρχεται ἕνα καί μόνο ἐπίπεδο.

Αὐτό σημαίνει ὅτι, ἄν δύο ἐπίπεδα ἔχουν κοινή τήν εὐθεία ΑΒ καί κοινό ἕνα σημεῖο Γ, πού βρίσκεται ἔξω ἀπ' αὐτή, τότε τά δύο ἐπίπεδα ταυτίζονται, δηλαδή ἀποτελοῦν ἕνα καί μοναδικό ἐπίπεδο. Τό ἐπίπεδο αὐτό θεωρεῖται ἐντελῶς γνωστό, ὅταν ξέρουμε τήν εὐθεία ΑΒ καί τό σημεῖο Γ, γι' αὐτό λέμε ὅτι **μία εὐθεία καί ἕνα σημεῖο ἔξω ἀπ' αὐτή ὁρίζουν ἕνα ἐπίπεδο.**

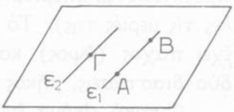
Τρία μή συνευθειακά σημεῖα Α,Β,Γ ὁρίζουν ἐπίσης ἕνα ἐπίπεδο (βλ. σχ. 3), αὐτό πού διέρχεται ἀπό τήν εὐθεία ΑΒ καί ἀπό τό σημεῖο Γ. Ἐπί-



(σχ. 3)



(σχ. 4)



(σχ. 5)

σης καί δύο τεμνόμενες εὐθεῖες ε_1 καί ε_2 θά ὁρίζουν ἐπίπεδο, (βλ. σχ. 4), αὐτό πού διέρχεται ἀπό τήν ε_1 καί ἀπό ἕνα σημεῖο Γ τῆς ε_2, διαφορετικό ἀπό τό σημεῖο τομῆς Α τῶν ε_1 καί ε_2. Τέλος, στόν ὁρισμό τῶν παράλληλων εὐθειῶν εἴδαμε ὅτι δύο εὐθεῖες ε_1 καί ε_2 εἶναι παράλληλες, ὅταν βρίσκονται στό ἴδιο ἐπίπεδο καί δέν ἔχουν κοινό σημεῖο (βλ. σχ. 5). Τό ἐπίπεδο τῶν δύο παράλληλων εὐθειῶν ε_1 καί ε_2 εἶναι ἐντελῶς ὁρισμένο, ἀφοῦ ταυτίζεται μέ τό ἐπίπεδο πού ὁρίζει ἡ ε_1 καί ἕνα σημεῖο Γ τῆς ε_2.

Συνοψίζοντας λοιπόν ἔχουμε:

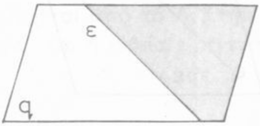
Ἕνα ἐπίπεδο ὁρίζεται:

- 'Από μία εὐθεία καί ἕνα σημεῖο ἔξω ἀπ' αὐτή.
- 'Από τρία μή συνευθειακά σημεῖα.
- 'Από δύο τεμνόμενες εὐθεῖες.
- 'Από δύο παράλληλες εὐθεῖες.

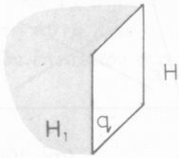
Οἱ ἡμιχῶροι.

4.2. Στήν Α' τάξη μάθαμε ὅτι κάθε σημεῖο Α μιᾶς εὐθείας ε διαχωρίζει ὅλα τά ἄλλα σημεῖα τῆς εὐθείας σέ δύο μέρη (σχ. 6). Τά σημεῖα πού ἀνήκουν σέ κάθε ἕνα ἀπό τά μέρη αὐτά καί τό Α ἀποτελοῦν ἕνα σημειοσύνολο, πού λέγεται *«ἡμιευθεία»*. Μάθαμε ἐπίσης ὅτι κάθε εὐθεία ε ἑνός ἐπιπέδου q διαχωρίζει ὅλα τά ἄλλα σημεῖα τοῦ q σέ δύο μέρη (σχ. 7). Τά σημεῖα πού ἀνήκουν σέ κάθε ἕνα ἀπό τά μέρη αὐτά καί τά σημεῖα τῆς ε ἀποτελοῦν ἕνα σημειοσύνολο, πού λέγεται *«ἡμιεπίπεδο»*.

(σχ. 6)



(σχ. 7)

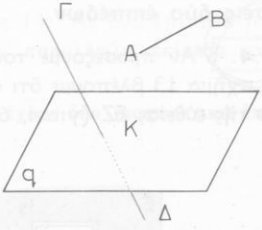


(σχ. 8)

Ἐντελῶς ὅμοια, κάθε ἐπίπεδο q διαχωρίζει ὅλα τά ἄλλα σημεῖα τοῦ χώρου σέ δύο μέρη (σχ. 8). Τά σημεῖα πού ἀνήκουν σέ κάθε ἕνα ἀπό τά μέρη αὐτά καί τά σημεῖα τοῦ q ἀποτελοῦν ἕνα σημειοσύνολο, πού λέγεται **ἡμιχῶρος.** Ἔχουμε λοιπόν γιά κάθε ἐπίπεδο q δύο ἡμιχώρους H_1 καί H_2 καί, ὅπως εἶναι φανερό,

$$\mathbf{H_1 \cap H_2 = q, \qquad H_1 \cup H_2 = \text{χῶρος}}.$$

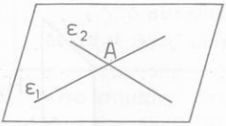
Ἄν πάρουμε δύο σημεῖα Α καί Β τοῦ ἴδιου ἡμιχώρου, πού νά μή βρίσκονται στό ἐπίπεδο q, βλέπουμε ὅτι τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ δέν ἔχει κοινό σημεῖο μέ τό q. Ἀντίθετα, κάθε εὐθύγραμμο τμῆμα ΓΔ, πού ἔχει τά ἄκρα του στούς διαφορετικούς ἡμιχώρους, ἔχει ἕνα κοινό σημεῖο Κ μέ τό ἐπίπεδο q (βλ. σχ. 9) ἤ, ὅπως λέμε, *«τέμνει»* τό q στό Κ.



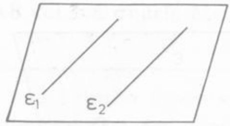
(σχ. 9)

Ἀσύμβατες εὐθεῖες.

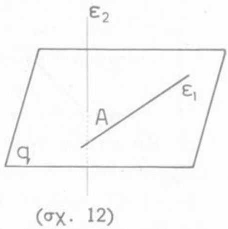
4.3. Ξέρουμε ἀπό τήν Α' τάξη ὅτι δύο εὐθεῖες ε_1 καί ε_2 ἔχουν τό πολύ ἕνα κοινό σημεῖο. Ἔτσι λοιπόν δύο εὐθεῖες ε_1 καί ε_2 ἔχουν ἤ ἕνα κοινό σημεῖο καί τότε *τέμνονται* (σχ. 10) ἤ κανένα κοινό σημεῖο. Δύο εὐθεῖες, πού δέν ἔχουν κοινό σημεῖο καί βρίσκονται στό ἴδιο ἐπίπεδο, εἶναι παράλληλες (σχ. 11). Εἶναι δυνατό ὅμως οἱ δύο εὐθεῖες ε_1 καί ε_2 νά μήν ἔχουν κοινό σημεῖο καί νά μή βρίσκονται στό ἴδιο ἐπίπεδο, ὅπως π.χ. ὅταν ἡ ε_1 βρίσκεται σ' ἕνα ἐπίπεδο q καί ἡ ε_2 «τέμνει» τό q σέ σημεῖο Α, πού δέν ἀνήκει



(σχ. 10)



(σχ. 11)



(σχ. 12)

στήν ε_1 (βλ. σχ. 12). Δύο τέτοιες εὐθεῖες, πού δέν ἔχουν κοινό σημεῖο καί δέν εἶναι παράλληλες, λέγονται **ἀσύμβατες** (ἤ καί **στρεβλές**). Βλέπουμε λοιπόν ὅτι:

Οἱ μόνες δυνατές θέσεις, πού μπορεῖ νά ἔχουν δυό διαφορετικές εὐθεῖες τοῦ χώρου, εἶναι:

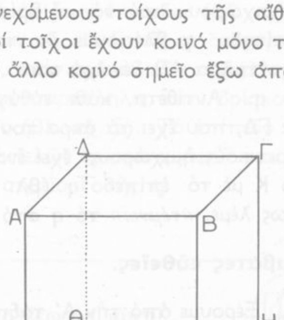
- **Νά τέμνονται.**
- **Νά εἶναι παράλληλες.**
- **Νά εἶναι ἀσύμβατες.**

Στίς δύο πρῶτες περιπτώσεις οἱ εὐθεῖες, ὅπως εἴδαμε, ὁρίζουν τή θέση ἑνός ἐπιπέδου.

Θέσεις δύο ἐπιπέδων.

4.4. Ἄν προσέξουμε τούς δύο συνεχόμενους τοίχους τῆς αἴθουσας στό σχῆμα 13 βλέπουμε ὅτι οἱ δύο αὐτοί τοῖχοι ἔχουν κοινά μόνο τά σημεῖα τῆς εὐθείας ΕΖ (γιατί, ἄν εἶχαν καί ἄλλο κοινό σημεῖο ἔξω ἀπό τήν

(σχ. 13)



(σχ. 14)

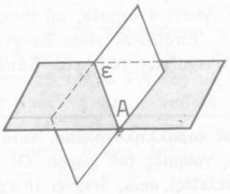
ρ ∩ q = ΕΖ.

ΕΖ, τά ἐπίπεδά τους θά ταυτίζονταν). Ἐπίσης, γιά τόν ἴδιο λόγο οἱ δύο ἕδρες ΑΒΓΔ καί ΒΖΗΓ στόν κύβο τοῦ σχήματος 14 ἔχουν κοινά μόνο τά σημεῖα τῆς ἀκμῆς ΒΓ.

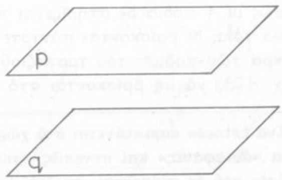
Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι:

Τά κοινά σημεῖα δύο ἐπιπέδων βρίσκονται πάνω σέ μία εὐθεία.

Γενικά, ὅταν ἔχουμε δύο διαφορετικά ἐπίπεδα, πού ἔχουν ἕνα κοινό σημεῖο Α (σχ. 15), τότε τά δύο ἐπίπεδα ἔχουν κοινά ὅλα τά σημεῖα μιᾶς εὐθείας ε, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπό τό Α. Στήν περίπτωση αὐτή λέμε ὅτι τά δύο ἐπίπεδα **τέμνονται** καί ἡ εὐθεία ε λέγεται **τομή** τῶν ἐπιπέδων αὐτῶν.



(σχ. 15)



(σχ. 16)

Εἶναι δυνατό ὅμως δύο ἐπίπεδα p καί q νά μήν ἔχουν κοινά σημεῖα, ὅπως π.χ. ἡ ὀροφή καί τό πάτωμα ἑνός δωματίου ἤ οἱ *«ἀπέναντι»* ἕδρες ΑΒΓΔ καί ΕΖΗΘ στόν κύβο τοῦ σχήματος 14. Ἄν δύο ἐπίπεδα p καί q δέν ἔχουν κοινό σημεῖο (σχ. 16) λέγονται **παράλληλα ἐπίπεδα** καί τότε γράφουμε p // q. Βλέπουμε δηλαδή ὅτι:

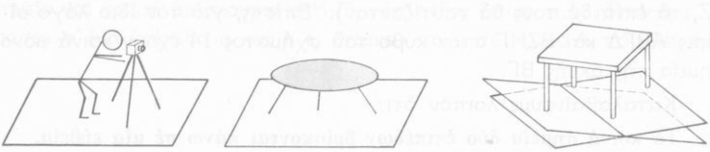
Οἱ μόνες δυνατές θέσεις, πού μπορεῖ νά ἔχουν δύο διαφορετικά ἐπίπεδα, εἶναι:

- **Νά τέμνονται κατά μία εὐθεία.**
- **Νά εἶναι παράλληλα.**

Ὅταν δύο ἐπίπεδα εἶναι γνωστά (δεδομένα), τότε καί ἡ τομή τους θεωρεῖται γνωστή (δεδομένη) εὐθεία.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά ἐξηγήσετε γιατί οἱ φωτογράφοι στηρίζουν τίς μηχανές τους σέ τρίποδα ἤ γιατί ἕνα τραπέζι μέ τρία πόδια στηρίζεται πάντοτε σταθερά (ἐνῶ ἕνα τραπέζι μέ τέσσερα πόδια δέν στηρίζεται πάντοτε σταθερά).**

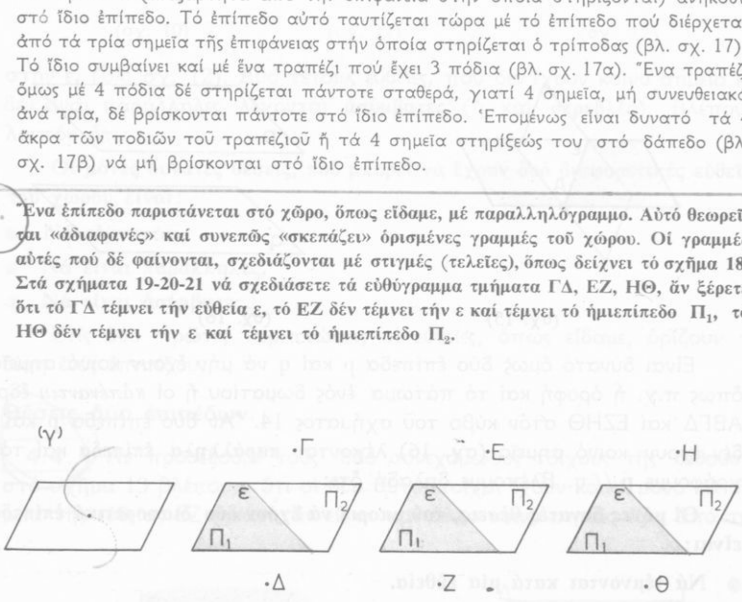


(σχ. 17) (σχ. 17α) (σχ. 17β)

Λύση: Ἐπειδή τρία μή συνευθειακά σημεῖα ὁρίζουν ἕνα ἐπίπεδο, τά τρία σημεῖα-ἀκίδες τοῦ τρίποδα (ἀνεξάρτητα ἀπό τήν ἐπιφάνεια στήν ὁποία στηρίζονται) ἀνήκουν στό ἴδιο ἐπίπεδο. Τό ἐπίπεδο αὐτό ταυτίζεται τώρα μέ τό ἐπίπεδο πού διέρχεται ἀπό τά τρία σημεῖα τῆς ἐπιφάνειας στήν ὁποία στηρίζεται ὁ τρίποδας (βλ. σχ. 17). Τό ἴδιο συμβαίνει καί μέ ἕνα τραπέζι πού ἔχει 3 πόδια (βλ. σχ. 17α). Ἕνα τραπέζι ὅμως μέ 4 πόδια δέ στηρίζεται πάντοτε σταθερά, γιατί 4 σημεῖα, μή συνευθειακά ἀνά τρία, δέ βρίσκονται πάντοτε στό ἴδιο ἐπίπεδο. Ἑπομένως εἶναι δυνατό τά 4 ἄκρα τῶν ποδιῶν τοῦ τραπεζιοῦ ἤ τά 4 σημεῖα στηρίξεώς του στό δάπεδο (βλ. σχ. 17β) νά μή βρίσκονται στό ἴδιο ἐπίπεδο.

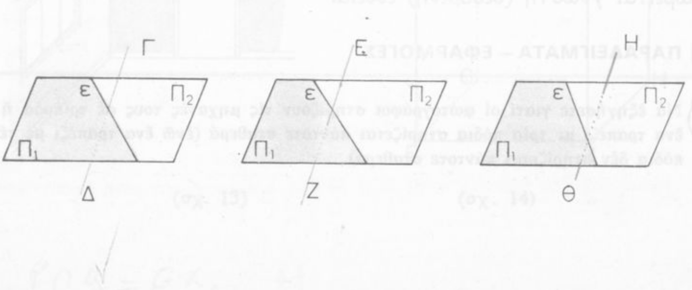
---

2. Ἕνα ἐπίπεδο παριστάνεται στό χῶρο, ὅπως εἴδαμε, μέ παραλληλόγραμμο. Αὐτό θεωρεῖται «ἀδιαφανές» καί συνεπῶς «σκεπάζει» ὁρισμένες γραμμές τοῦ χώρου. Οἱ γραμμές αὐτές πού δέ φαίνονται, σχεδιάζονται μέ στιγμές (τελεῖες), ὅπως δείχνει τό σχῆμα 18. Στά σχήματα 19-20-21 νά σχεδιάσετε τά εὐθύγραμμα τμήματα ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ἄν ξέρετε ὅτι τό ΓΔ τέμνει τήν εὐθεία ε, τό ΕΖ δέν τέμνει τήν ε καί τέμνει τό ἡμιεπίπεδο Π_1, τό ΗΘ δέν τέμνει τήν ε καί τέμνει τό ἡμιεπίπεδο Π_2.



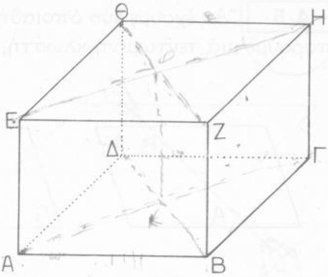
σχ. 18 σχ. 19 σχ. 20 σχ. 21

Λύση: Ἡ ἀπάντηση δίνεται μέ τά παρακάτω σχήματα.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Στό διπλανό κύβο θεωροῦμε τά ζεύγη τῶν εὐθειῶν πού ὁρίζονται ἀπό τά ζεύγη τῶν εὐθύγραμμων τμημάτων:



α) ΑΒ, ΓΔ　　δ) ΕΒ, ΘΓ

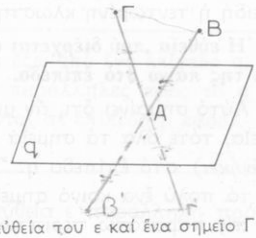
β) ΑΒ, ΗΘ　　ε) ΗΖ, ΔΓ

γ) ΑΒ, ΗΓ　　στ) ΗΒ, ΕΔ

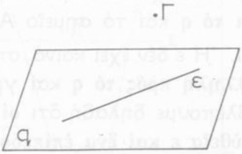
Ξεχωρίστε τά ζεύγη τῶν εὐθειῶν πού ὁρίζουν ἐπίπεδο καί τά ζεύγη πού ἀποτελοῦνται ἀπό ἀσύμβατες εὐθεῖες.

2. Στόν παραπάνω κύβο δεῖξτε ὅτι οἱ δύο εὐθεῖες ΘΒ καί ΖΔ τέμνονται, ἐνῶ οἱ δύο εὐθεῖες ΑΗ καί ΕΖ δέν τέμνονται.

3. Στό διπλανό σχῆμα δίνεται ἕνα ἐπίπεδο q, ἕνα σημεῖο του Α καί δύο σημεῖα Β καί Γ ἔξω ἀπό τό q. Νά φέρετε τό τμῆμα ΒΑ καί νά τό προεκτείνετε πρός τό μέρος τοῦ Α κατά τμῆμα ΑΒ′ = ΑΒ. Νά φέρετε ἐπίσης τό τμῆμα ΓΑ καί νά τό προεκτείνετε πρός τό μέρος τοῦ Α κατά τμῆμα ΑΓ′ = ΑΓ. Δεῖξτε ὅτι τά σημεῖα Β,Γ,Γ′,Β′ βρίσκονται σ' ἕνα ἐπίπεδο καί ὅτι τά τμήματα ΒΓ καί Β′Γ′ εἶναι ἴσα.



4. Στό διπλανό σχῆμα δίνεται ἕνα ἐπίπεδο q, μία εὐθεία του ε καί ἕνα σημεῖο Γ ἔξω ἀπό τό q. Ἄν ὀνομάσουμε p τό ἐπίπεδο πού ὁρίζεται ἀπό τό σημεῖο Γ καί τήν εὐθεία ε,



α) νά βρεῖτε τήν τομή τῶν p καί q,

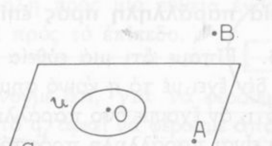
β) νά σχεδιάσετε τό p,

γ) νά δείξετε ὅτι, ἄν μία εὐθεία τοῦ p διέρχεται ἀπό τό Γ καί τέμνει τό q, τό τέμνει σέ σημεῖο τῆς εὐθείας ε.

5. Στόν κύβο τῆς ἀσκήσεως 1 δεῖξτε ὅτι οἱ εὐθεῖες ΘΖ καί ΔΒ βρίσκονται στό ἴδιο ἐπίπεδο καί ὀνομάστε το p. Δεῖξτε ἐπίσης ὅτι οἱ εὐθεῖες ΕΗ καί ΑΓ βρίσκονται στό ἴδιο ἐπίπεδο καί ὀνομάστε το q. Νά βρεῖτε τήν τομή τῶν p καί q.

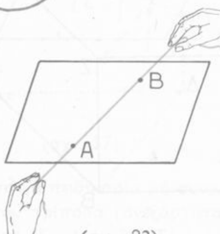
6. Πάρτε ἕνα ἐπίπεδο q, δύο εὐθεῖες του $ε_1$ καί $ε_2$, πού τέμνονται στό Α, καί ἕνα σημεῖο Β ἔξω ἀπό τό q. Ὀνομάστε p_1 καί p_2 τά δύο ἐπίπεδα, πού ὁρίζει τό σημεῖο Β μέ κάθε μία ἀπό τίς εὐθεῖες $ε_1$ καί $ε_2$. Βρεῖτε τήν τομή τῶν p_1 καί p_2.

7. Δίνεται ἕνα ἐπίπεδο q, ἕνας κύκλος του κ μέ κέντρο Ο καί ἕνα σημεῖο του Α. Δίνεται ἐπίσης ἕνα σημεῖο Β ἔξω ἀπό τό q. Ἄν p εἶναι τό ἐπίπεδο πού ὁρίζεται ἀπό τά τρία σημεῖα Α, Β, Ο, νά βρεῖτε ποῦ τό ἐπίπεδο p τέμνει τόν κύκλο κ.

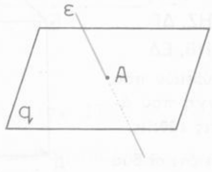


Θέσεις εὐθείας καί ἐπιπέδου.

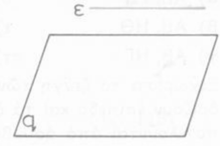
4·5· Ἄν ἔχουμε δύο ὁποιαδήποτε σημεῖα Α καί Β ἑνός ἐπιπέδου καί πάρουμε μιά τεντωμένη κλωστή, πού νά περνάει ἀπό τά Α καί Β, βλέπου-



(σχ. 22)



(σχ. 23)



(σχ. 24)

με ὅτι ὅλα τά σημεῖα τῆς κλωστῆς «ἀκουμπᾶνε» πάνω στό ἐπίπεδο (σχ. 22). Ἐπειδή ἡ τεντωμένη κλωστή παριστάνει μία εὐθεία, καταλαβαίνουμε ὅτι:

Ἡ εὐθεία ,πού διέρχεται ἀπό δύο σημεῖα ἑνός ἐπιπέδου, ἔχει ὅλα τά σημεῖα της πάνω στό ἐπίπεδο.

Αὐτό σημαίνει ὅτι, ἄν μιά εὐθεία ε καί ἕνα ἐπίπεδο q ἔχουν δυό κοινά σημεῖα, τότε ὅλα τά σημεῖα τῆς ε ἀνήκουν στό q καί ἡ εὐθεία *περιέχεται* (ἤ *ἀνήκει*) στό ἐπίπεδο q. Ἔτσι μία εὐθεία, πού δέν περιέχεται στό q, ἔχει τό πολύ ἕνα κοινό σημεῖο μέ τό q. Γιά μιά τέτοια εὐθεία ἔχουμε μία ἀπό τίς παρακάτω περιπτώσεις:

I. Ἡ ε ἔχει ἕνα κοινό σημεῖο Α μέ τό q (σχ. 23). Τότε λέμε ὅτι **ἡ ε τέμνει τό q** καί τό σημεῖο Α λέγεται **ἴχνος** τῆς ε στό q.

II. Ἡ ε δέν ἔχει κοινό σημεῖο μέ τό q (σχ. 24). Τότε λέμε ὅτι **ἡ ε εἶναι παράλληλη πρός τό q** καί γράφουμε ε∥q.

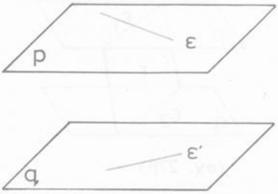
Βλέπουμε δηλαδή ὅτι **οἱ μόνες δυνατές θέσεις, πού μποροῦν νά ἔχουν μιά εὐθεία ε καί ἕνα ἐπίπεδο q, εἶναι:**

- **Ἡ ε νά περιέχεται στό q.**
- **Ἡ ε νά τέμνει τό q σ' ἕνα σημεῖο.**
- **Ἡ ε νά εἶναι παράλληλη πρός τό q.**

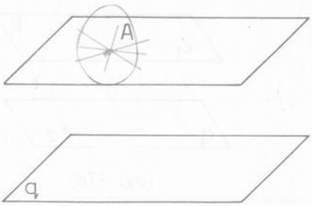
Στήν περίπτωση πού ἡ εὐθεία ε εἶναι γνωστή καί τέμνει γνωστό ἐπίπεδο q, τό ἴχνος της Α θεωρεῖται ἐπίσης γνωστό.

Εὐθεία παράλληλη πρός ἐπίπεδο.

4.6. Εἴπαμε ὅτι μιά εὐθεία ε λέγεται παράλληλη πρός ἐπίπεδο q, ὅταν δέν ἔχει μέ τό q κοινό σημεῖο. Ἀπό τόν ὁρισμό καταλαβαίνουμε ἀμέσως ὅτι, ἄν ἔχουμε δύο παράλληλα ἐπίπεδα p καί q (σχ. 25), κάθε εὐθεία ε τοῦ p εἶναι παράλληλη πρός τό q (καί κάθε εὐθεία τοῦ q εἶναι παράλληλη πρός τό p). Ἄν λοιπόν θεωρήσουμε ὅλες τίς εὐθεῖες τοῦ ἐπιπέδου p, πού διέρχονται ἀπό ἕνα σημεῖο A, οἱ εὐθεῖες αὐτές εἶναι παράλληλες πρός τό ἐπίπεδο q. Βλέπουμε δηλαδή ὅτι:



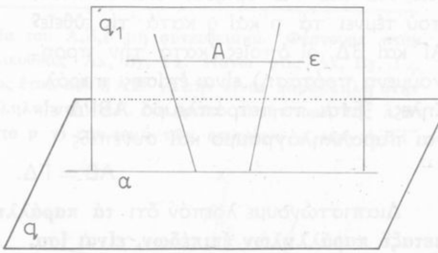
(σχ. 25)



(σχ. 26)

Ἀπό ἕνα σημεῖο A, πού βρίσκεται ἔξω ἀπό ἕνα ἐπίπεδο q, μποροῦμε νά φέρουμε ἄπειρες εὐθεῖες παράλληλες πρός τό q καί ὅλες αὐτές οἱ παράλληλες περιέχονται σέ ἐπίπεδο p παράλληλο πρός τό q.

Ἄς ὑποθέσουμε τώρα ὅτι ἔχουμε μία εὐθεία ε παράλληλη πρός μία εὐθεία α ἑνός ἐπιπέδου q. Οἱ δύο παράλληλες εὐθεῖες ε καί α ὁρίζουν ἕνα ἐπίπεδο q_1 (βλ. σχ. 27), τό ὁποῖο τέμνει τό q κατά τήν ἴδια τήν εὐθεία α. Ἔτσι, ἄν μία ὁποιαδήποτε εὐθεία τοῦ q_1 τέμνει τό q, θά τό τέμνει σέ σημεῖο τῆς εὐθείας α. Ἀφοῦ λοιπόν ἡ ε δέν τέμνει τήν α, δέν θά τέμνει οὔτε τό q καί συνεπῶς θά εἶναι παράλληλη πρός τό q. Ὥστε:



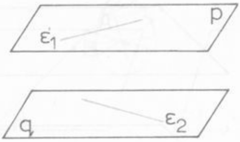
(σχ. 27)

Ἄν μία εὐθεία ε εἶναι παράλληλη πρός μία εὐθεία ἑνός ἐπιπέδου, τότε εἶναι παράλληλη καί πρός τό ἐπίπεδο.

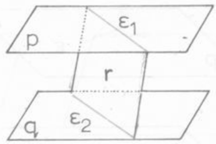
Ἀπό τήν πρόταση αὐτή καταλαβαίνουμε ὅτι, γιά νά φέρουμε ἀπό ἕνα σημεῖο A μία εὐθεία παράλληλη πρός τό q, ἀρκεῖ νά φέρουμε ἀπό τό A μία εὐθεία ε παράλληλη πρός μία ὁποιαδήποτε εὐθεία τοῦ q.

Παράλληλα ἐπίπεδα.

4. 7. Δύο ὁποιεσδήποτε εὐθεῖες $ε_1$ καί $ε_2$, πού περιέχονται σέ δύο παράλληλα ἐπίπεδα p καί q, δέν ἔχουν κοινό σημεῖο καί συνεπῶς εἶναι ἤ ἀσύμβατες (σχ. 27α) ἤ παράλληλες. Οἱ εὐθεῖες $ε_1$ καί $ε_2$ θά εἶναι παράλληλες,



(σχ. 27α)



(σχ. 27β)

μόνο ὅταν ἀνήκουν σ' ἕνα τρίτο ἐπίπεδο r (σχ. 27β), ὁπότε κάθε μία ἀπ' αὐτές θά εἶναι ἡ τομή τοῦ r μέ ἕνα ἀπό τά ἐπίπεδα p καί q. Ἔτσι λοιπόν:

> Δύο παράλληλα ἐπίπεδα τέμνονται ἀπό ἕνα τρίτο ἐπίπεδο κατά εὐθεῖες παράλληλες.

Ἄς θεωρήσουμε τώρα δύο ὁποιαδήποτε παράλληλα εὐθύγραμμα τμήματα AB καί ΓΔ, τά ὁποῖα ἔχουν τά ἄκρα τους σέ δύο παράλληλα ἐπίπεδα p καί q (σχ. 28). Τότε οἱ παράλληλες εὐθεῖες AB καί ΓΔ ὁρίζουν ἕνα ἐπίπεδο, πού τέμνει τά p καί q κατά τίς εὐθεῖες ΑΓ καί ΒΔ, οἱ ὁποῖες (κατά τήν προηγούμενη πρόταση) εἶναι ἐπίσης παράλληλες. Ἔτσι τό τετράπλευρο ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμο καί συνεπῶς

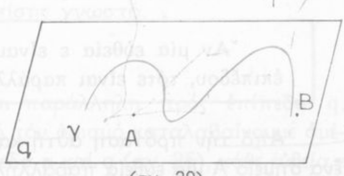
(σχ. 28)

$$AB = ΓΔ.$$

Διαπιστώνουμε λοιπόν ὅτι **τά παράλληλα τμήματα, πού περιέχονται μεταξύ παράλληλων ἐπιπέδων, εἶναι ἴσα.**

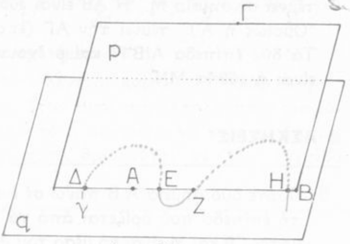
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Στό διπλανό σχῆμα ἡ γραμμή γ καί τά σημεῖα Α καί Β βρίσκονται πάνω στό ἐπίπεδο q, ἐνῶ τό σημεῖο Γ βρίσκεται ἔξω ἀπό τό q. Νά σχεδιασθεῖ τό ἐπίπεδο p, πού διέρχεται ἀπό τά Α,Β,Γ, καί νά βρεθοῦν τά σημεῖα, στά ὁποῖα τό p τέμνει τή γραμμή γ.**



(σχ. 29)

Λύση: Τά σημεῖα Α καί Β ἀνήκουν στό q, ἐπομένως καί ἡ εὐθεία ΑΒ ἀνήκει στό q. Ὁμοίως τά σημεῖα Α καί Β ἀνήκουν στό p, ἐπομένως καί ἡ εὐθεία ΑΒ ἀνήκει στό p. Συνεπῶς ἡ ΑΒ εἶναι κοινή εὐθεία τῶν δύο ἐπιπέδων p καί q, δηλαδή εἶναι ἡ τομή τους. Ἡ εὐθεία ΑΒ τέμνει τή γ (σχ. 30) στά σημεῖα Δ,Ε,Ζ,Η, ἀφοῦ βρίσκεται στό ἴδιο ἐπίπεδο q μέ αὐτή.

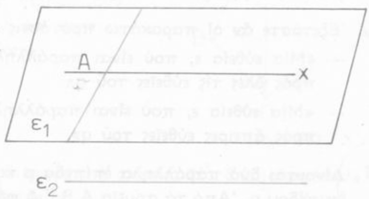


(σχ. 30)

---

2. Δίνονται δύο ἀσύμβατες εὐθεῖες ε_1 καί ε_2. Νά σχεδιάσετε ἕνα ἐπίπεδο, πού νά διέρχεται ἀπό τήν ε_1 καί νά εἶναι παράλληλο πρός τήν ε_2.

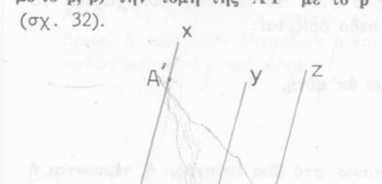
Λύση: Γιά νά εἶναι ἕνα ἐπίπεδο παράλληλο πρός τήν εὐθεία ε_2 ἀρκεῖ μιά εὐθεία του νά εἶναι παράλληλη πρός τήν εὐθεία ε_2. Ἄν λοιπόν ἀπό ἕνα σημεῖο Α τῆς εὐθείας ε_1 φέρουμε μιά εὐθεία Ax παράλληλη πρός τήν ε_2, οἱ εὐθεῖες ε_1 καί Ax ὁρίζουν ἕνα ἐπίπεδο p (σχ. 31) τό ὁποῖο εἶναι παράλληλο πρός τήν ε_2 (ἀφοῦ ἡ ε_2 εἶναι παράλληλη πρός τήν εὐθεία του Ax).



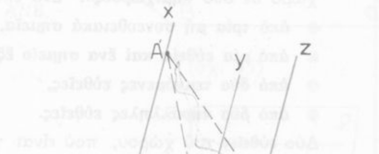
(σχ. 31)

---

3. Δίνονται ἕνα ἐπίπεδο p καί τρία σημεῖα του Α,Β,Γ μή συνευθειακά. Φέρνουμε στόν ἴδιο ἡμιχῶρο τρεῖς παράλληλες ἡμιευθεῖες Ax, By, Γz. Πάνω στίς Ax, By, Γz, παίρνουμε σημεῖα Α΄,Β΄,Γ΄ ἀντιστοίχως ἔτσι, πού ἡ Α΄Β΄ νά μήν εἶναι παράλληλη στήν ΑΒ καί ἡ Α΄Γ΄ νά μήν εἶναι παράλληλη στήν ΑΓ. Νά βρεῖτε α) τήν τομή τῆς Α΄Β΄ μέ τό p, β) τήν τομή τῆς Α΄Γ΄ μέ τό p γ) τήν τομή τῶν ἐπιπέδων p καί Α΄Β΄Γ΄ (σχ. 32).



(σχ. 32)



(σχ. 33)

Λύση: Ἡ Α'Β' εἶναι συνεπίπεδη μέ τήν ΑΒ καί δέν εἶναι παράλληλη πρός αὐτή, ἄρα τήν τέμνει σέ σημεῖο Μ. Ἡ ΑΒ εἶναι εὐθεία τοῦ p, ἐπομένως ἡ Α'Β' τέμνει τό p στό Μ. Ὁμοίως ἡ Α'Γ' τέμνει τήν ΑΓ (ἐπομένως καί τό p) στό Ν.
Τά δύο ἐπίπεδα Α'Β'Γ' καί p ἔχουν κοινά τά σημεῖα Μ,Ν καί συνεπῶς τομή τους εἶναι ἡ εὐθεία ΜΝ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

8. Πάρτε δύο σημεῖα Α,Β πάνω σέ ἕνα ἐπίπεδο q καί ἕνα σημεῖο Γ ἔξω ἀπό τό q. Ἄν τό ἐπίπεδο πού ὁρίζεται ἀπό τά Α,Β,Γ εἶναι τό p, Δ εἶναι τό μέσο τοῦ τμήματος ΓΒ καί Μ εἶναι τό μέσο τοῦ ΑΔ, νά δικαιολογήσετε γιατί οἱ εὐθεῖες ΑΔ καί ΓΜ βρίσκονται πάνω στό ἐπίπεδο p καί να βρεῖτε τήν τομή τῆς εὐθείας ΓΜ μέ τό ἐπίπεδο q.

9. Δίνονται δύο ἐπίπεδα p καί q, πού τέμνονται κατά τήν εὐθεία ε. Ἀπό ἕνα σημεῖο Α τοῦ ἐπιπέδου p φέρνουμε εὐθεία α παράλληλη πρός τήν ε. Νά δικαιολογήσετε γιατί ἡ α βρίσκεται στό p καί νά δείξετε ὅτι ἡ α εἶναι παράλληλη πρός τό q.

10. Ἐξετάστε ἄν οἱ παρακάτω προτάσεις εἶναι ἀληθεῖς:
— «Μία εὐθεία ε, πού εἶναι παράλληλη πρός ἕνα ἐπίπεδο q, εἶναι παράλληλη πρός ὅλες τίς εὐθεῖες τοῦ q».
— «Μία εὐθεία ε, πού εἶναι παράλληλη πρός ἕνα ἐπίπεδο q, εἶναι παράλληλη πρός ἄπειρες εὐθεῖες τοῦ q».

11. Δίνονται δύο παράλληλα ἐπίπεδα p καί q καί ἕνα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ τοῦ ἐπιπέδου p. Ἀπό τά σημεῖα Α,Β,Γ,Δ φέρνουμε παράλληλες εὐθεῖες, πού τέμνουν τό q στά σημεῖα Α',Β',Γ'Δ' ἀντιστοίχως. Νά δείξετε ὅτι: α) Τά τετράπλευρα ΑΒΒ'Α', ΒΓΓ'Β', ΓΔΔ'Γ', ΔΑΑ'Δ' εἶναι παραλληλόγραμμα. β) Τό τετράπλευρο Α'Β'Γ'Δ' εἶναι ἐπίσης παραλληλόγραμμο.

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 4

1. Βασικό γεωμετρικό σχῆμα τοῦ χώρου εἶναι τό **ἐπίπεδο,** πού χωρίζει τό χῶρο σέ δύο «**ἡμιχώρους**». Ἕνα ἐπίπεδο ὁρίζεται:
   - **ἀπό τρία μή συνευθειακά σημεῖα,**
   - **ἀπό μία εὐθεία καί ἕνα σημεῖο ἔξω ἀπ' αὐτή,**
   - **ἀπό δύο τεμνόμενες εὐθεῖες,**
   - **ἀπό δύο παράλληλες εὐθεῖες.**

   Δύο εὐθεῖες τοῦ χώρου, πού εἶναι πάνω στό ἴδιο ἐπίπεδο, ἤ τέμνονται ἤ εἶναι παράλληλες. Δύο εὐθεῖες, πού δέ βρίσκονται στό ἴδιο ἐπίπεδο, λέγονται **ἀσύμβατες** (ἤ **στρεβλές).**

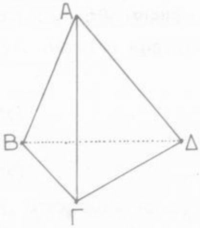
2. Ἄν δύο διαφορετικά ἐπίπεδα ἔχουν ἕνα κοινό σημεῖο, τότε ἔχουν ἄπειρα κοινά σημεῖα, πού βρίσκονται ὅλα σέ μία εὐθεία.
   Ἡ εὐθεία αὐτή λέγεται **τομή** τῶν δύο ἐπιπέδων.
   Δύο ἐπίπεδα, πού δέν ἔχουν κοινό σημεῖο, λέγονται **παράλληλα.**
   Δύο παράλληλα ἐπίπεδα τέμνονται ἀπό ἕνα ὁποιοδήποτε ἐπίπεδο (πού δέν εἶναι παράλληλο πρός αὐτά) κατά παράλληλες εὐθεῖες.
   Τά παράλληλα τμήματα, πού περιέχονται μεταξύ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων, εἶναι ἴσα.

3. Μία εὐθεία ε, πού διέρχεται ἀπό δύο σημεῖα ἑνός ἐπιπέδου q, βρίσκεται πάνω στό ἐπίπεδο. Ἔτσι κάθε εὐθεία τοῦ χώρου, πού δέν περιέχεται σ' ἕνα ἐπίπεδο q,

- ἤ ἔχει ἕνα κοινό σημεῖο μέ τό q καί τότε **τέμνει** τό q,
- ἤ δέν ἔχει κοινό σημεῖο μέ τό q καί τότε λέγεται **παράλληλη πρός τό q**.

Μία εὐθεία εἶναι παράλληλη πρός τό q, ὅταν εἶναι παράλληλη πρός μία εὐθεία τοῦ q. Ἔτσι ἀπό σημεῖο Α ἔξω ἀπό τό q μποροῦμε νά φέρουμε ἄπειρες εὐθεῖες παράλληλες πρός τό q καί ὅλες αὐτές βρίσκονται σέ ἕνα ἐπίπεδο παράλληλο πρός τό ἐπίπεδο q.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ*

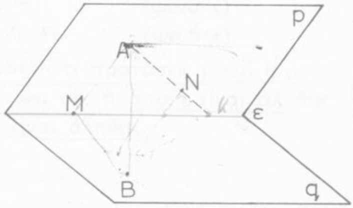


(σχ. 34)

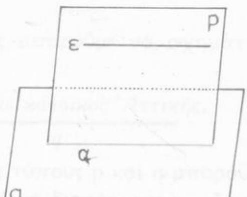
12. Δίνονται τέσσερα σημεῖα Α,Β,Γ,Δ πού δέν εἶναι συνεπίπεδα. Ὀνομάστε τά ἐπίπεδα, πού ὁρίζουν ἀνά τρία, καθώς καί τά ζεύγη τῶν ἀσύμβατων εὐθειῶν, πού τά σημεῖα αὐτά ὁρίζουν.

13. Τρεῖς εὐθεῖες τέμνονται ἀνά δύο σέ διαφορετικά σημεῖα. Νά δικαιολογήσετε γιατί οἱ εὐθεῖες αὐτές ἀνήκουν στό ἴδιο ἐπίπεδο.

14. Δίνονται δύο ἐπίπεδα p καί q, πού τέμνονται κατά τήν εὐθεία ε (σχ. 35) καί τά σημεῖα $Α \in p$ καί $Β \in q$. Ἄν Μ εἶναι ἕνα σημεῖο τῆς ε, νά βρεθεῖ ἡ τομή τῶν ἐπιπέδων p καί ΑΜΒ, καθώς καί τῶν q καί ΑΜΒ. Ἄν Ν εἶναι ἕνα σημεῖο τοῦ p, νά βρεθεῖ ἡ τομή τῶν ἐπιπέδων q καί ΑΝΒ, καθώς καί τῶν p καί ΑΝΒ.



(σχ. 35)



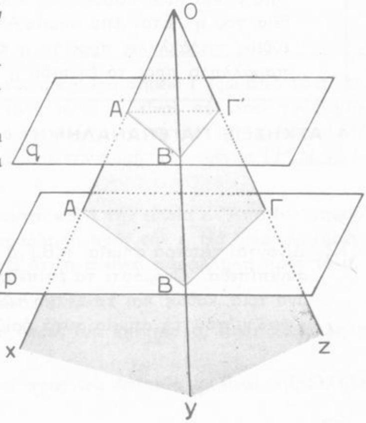
(σχ. 36)

15. Δίνεται ἕνα ἐπίπεδο q καί μία εὐθεία ε παράλληλη πρός αὐτό. Ἀπό τήν ε φέρνουμε ἕνα ὁποιοδήποτε ἐπίπεδο p, πού τέμνει τό q κατά εὐθεία α. Ἐξηγεῖστε γιατί ἡ ε εἶναι παράλληλη πρός τήν α.

16. Δίνεται ἕνα ἐπίπεδο q, ἕνα σημεῖο του Α καί μία εὐθεία ε παράλληλη πρός τό q. Φέρνουμε ἀπό τό Α μία εὐθεία α παράλληλη πρός τήν ε. Ἐξηγεῖστε γιατί ἡ α βρίσκεται πάνω στό ἐπίπεδο q.

17. Δίνονται δύο ἀσύμβατες εὐθεῖες $ε_1$ καί $ε_2$. Νά φέρετε δύο παράλληλα ἐπίπεδα, πού νά διέρχονται ἀπ' αὐτές.

18. Δίνονται τρεῖς ἡμιευθεῖες Οx, Οy, Οz, πού δέν εἶναι συνεπίπεδες.
Δύο παράλληλα ἐπίπεδα p καί q τίς τέμνουν στά σημεῖα Α,Β,Γ καί Α'Β',Γ' ἀντιστοίχως (σχ. 37). Νά δικαιολογήσετε
α) γιατί τά τρίγωνα ΟΑ'Β' καί ΟΑΒ εἶναι ὅμοια β) γιατί τά ΑΒΓ καί Α'Β'Γ' εἶναι ὅμοια.



(σχ. 37)

5ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Σύνθεση προτάσεων.

5.1. Στή Β' τάξη μάθαμε ὅτι ἕνα σύνολο ἀπό λέξεις καί σύμβολα, πού ἔχει κάποιο νοητικό περιεχόμενο, λέγεται **ἔκφραση** καί κάθε ἔκφραση, πού μπορεῖ νά χαρακτηρισθεῖ ὡς «ἀληθής» ἤ «ψευδής», λέγεται **πρόταση**. Ἄς δοῦμε μερικές προτάσεις:

«ὁ 8 εἶναι ἄρτιος» (ἀληθής)
«ὁ 5 εἶναι περιττός» (ἀληθής)
«ὁ 5 διαιρεῖ τόν 8» (ψευδής)

Ἄν συνδέσουμε δυό προτάσεις μέ ὁρισμένες λέξεις, μποροῦμε νά σχηματίσουμε ἄλλες *πιό σύνθετες* προτάσεις. Ἔτσι π.χ. ἑνώνοντας δύο ἀπό τίς παραπάνω προτάσεις μέ τή λέξη **«καί»** σχηματίζουμε τίς προτάσεις:

«ὁ 8 εἶναι ἄρτιος καί ὁ 5 εἶναι περιττός» (ἀληθής)
«ὁ 8 εἶναι ἄρτιος καί ὁ 5 διαιρεῖ τόν 8» (ψευδής)
«ὁ 5 εἶναι περιττός καί ὁ 5 διαιρεῖ τόν 8» (ψευδής)

Βλέπουμε λοιπόν ὅτι ἀπό δύο ὁποιεσδήποτε προτάσεις p καί q μποροῦμε νά σχηματίσουμε τήν πρόταση *«p καί q»*, ἡ ὁποία εἶναι ἀληθής, μόνο ὅταν καί οἱ δυό προτάσεις p καί q εἶναι ἀληθεῖς.

Ἡ συνεπαγωγή.

5.2. Ἄς θεωρήσουμε τούς δύο προτασιακούς τύπους:

p : ὁ x εἶναι κάτοικος Ἀθηνῶν.
q : ὁ x εἶναι κάτοικος Ἀττικῆς.

Μέ τούς δύο αὐτούς προτασιακούς τύπους μποροῦμε νά σχηματίσουμε τόν προτασιακό τύπο:

$$\text{ἄν } \underbrace{\text{ὁ } x \text{ εἶναι κάτοικος Ἀθηνῶν}}_{p}, \text{ τότε } \underbrace{\text{ὁ } x \text{ εἶναι κάτοικος Ἀττικῆς}}_{q}.$$

Βλέπουμε δηλαδή ὅτι ἀπό δύο προτασιακούς τύπους p καί q μποροῦμε νά σχηματίσουμε ἕνα νέο προτασιακό τύπο μέ τή διατύπωση: «ἄν p τότε q». Αὐτός ὁ προτασιακός τύπος λέγεται **συνεπαγωγή** καί σημειώνεται

$$\mathbf{p \Rightarrow q}$$

Σέ μιά συνεπαγωγή $p \Rightarrow q$ ὁ προτασιακός τύπος p λέγεται **ὑπόθεση** καί ὁ προτασιακός τύπος q λέγεται **συμπέρασμα.**

Ἐπειδή κάθε κάτοικος Ἀθηνῶν εἶναι καί κάτοικος Ἀττικῆς, τό σύνολο ἀλήθειας τοῦ p εἶναι ὑποσύνολο τοῦ συνόλου ἀλήθειας τοῦ q καὶ τότε λέμε ὅτι ἡ συνεπαγωγή $p \Rightarrow q$ εἶναι **ἀληθής.** Ἐπίσης ἡ συνεπαγωγή

$$\underbrace{\text{ἄν οἱ γωνίες } x \text{ καί } y \text{ εἶναι κατακορυφήν}}_{p}, \text{ τότε } \underbrace{x = y}_{q}$$

εἶναι «ἀληθής», γιατί τό σύνολο ἀλήθειας A τοῦ p εἶναι ὑποσύνολο τοῦ συνόλου ἀλήθειας B τοῦ q, (ἀφοῦ τὸ A ἀποτελεῖται ἀπό ὅλα τά ζεύγη τῶν κατακορυφήν γωνιῶν καί τά ζεύγη αὐτά περιέχονται στό σύνολο B τό ὁποῖο ἀποτελεῖται ἀπό ὅλα τά ζεύγη τῶν ἴσων γωνιῶν). Γενικά λοιπόν θά λέμε ὅτι:

> Μία συνεπαγωγή $p \Rightarrow q$ στήν ὁποία τά p καί q εἶναι προτασιακοί τύποι μέ σύνολα ἀλήθειας A καί B ἀντιστοίχως, εἶναι **ἀληθής**, ὅταν $A \subseteq B$.

Παράδειγμα 1. Ἄν α,β,γ εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί, τότε ἀληθεύουν οἱ συνεπαγωγές :

I $\quad \alpha > \beta \Rightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$

II $\quad \alpha > \beta \Rightarrow \alpha - \gamma > \beta - \gamma$

Παράδειγμα 2. Ἄν $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ εἶναι εὐθεῖες τοῦ ἐπιπέδου, τότε ἀληθεύουν οἱ συνεπαγωγές:

I $\quad \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ καί $\varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3 \Rightarrow \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_3$

II $\quad \varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$ καί $\varepsilon_2 \perp \varepsilon_3 \Rightarrow \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_3$

Ἐπειδή καί οἱ ἐξισώσεις εἶναι προτασιακοί τύποι, καταλαβαίνουμε ὅτι, ἄν τά σύνολα ἀλήθειας A καί B δύο ἐξισώσεων $P_1 = 0$ καί $P_2 = 0$ εἶναι τέτοια ὥστε $A \subseteq B$, μποροῦμε νά γράφουμε

$$P_1 = 0 \Rightarrow P_2 = 0$$

Ἔτσι π.χ. οἱ δύο ἐξισώσεις $x - 2 = 0$ καί $x^2 - 4 = 0$ ἔχουν σύνολα ἀλήθειας τά $A = \{2\}$ καί $B = \{-2, 2\}$ ἀντιστοίχως καί εἶναι $A \subseteq B$. Συνεπῶς μποροῦμε νά γράψουμε

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0$$

Ἄς θεωρήσουμε τέλος τρεῖς προτασιακούς τύπους p, q, r μέ σύνολα ἀλήθειας A,B,Γ ἀντιστοίχως καί ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ἀληθεύουν οἱ συνεπαγωγές $p \Rightarrow q$ καί $q \Rightarrow r$. Ἀφοῦ ἀληθεύει ἡ $p \Rightarrow q$, θά ἔχουμε $A \subseteq B$ καί; ἀφοῦ ἀληθεύει ἡ $q \Rightarrow r$, θά ἔχουμε $B \subseteq \Gamma$. Τότε ὅμως θά εἶναι καί $A \subseteq \Gamma$, ὁπότε ἀληθεύει καί ἡ συνεπαγωγή $p \Rightarrow r$. Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι:

> Ἄν ἀληθεύουν οἱ συνεπαγωγές $p \Rightarrow q$ καί $q \Rightarrow r$, τότε ἀληθεύει καί ἡ συνεπαγωγή $p \Rightarrow r$.

Βλέπουμε δηλαδή ὅτι στή *συνεπαγωγή* ἰσχύει ἡ μεταβατική ἰδιότητα.

ʼΑντίστροφη πρόταση (1)

5·3. ʼΑπό τίς ἀνοικτές προτάσεις

p : ὁ x εἶναι κάτοικος ʼΑθηνῶν.

q : ὁ x εἶναι κάτοικος ʼΑττικῆς.

σχηματίσαμε τή συνεπαγωγή

$p \Rightarrow q$: $\underbrace{\text{ἄν ὁ x εἶναι κάτοικος ʼΑθηνῶν,}}_{p}$ τότε $\underbrace{\text{ὁ x εἶναι κάτοικος ʼΑττικῆς}}_{q}$

Μέ τίς ἴδιες ἀνοικτές προτάσεις p καί q μποροῦμε νά σχηματίσουμε καί μία ἄλλη συνεπαγωγή παίρνοντας τήν q γιά ὑπόθεση καί τήν p γιά συμπέρασμα. Ἡ συνεπαγωγή αὐτή

$q \Rightarrow p$: $\underbrace{\text{ἄν ὁ x εἶναι κάτοικος ʼΑττικῆς,}}_{q}$ τότε $\underbrace{\text{ὁ x εἶναι κάτοικος ʼΑθηνῶν}}_{p}$

λέγεται **ἀντίστροφη πρόταση** τῆς $p \Rightarrow q$. Εἶναι φανερό ὅτι ἡ ἀντίστροφη αὐτή πρόταση $q \Rightarrow p$ δέν ἀληθεύει, ἐνῶ ἀληθεύει ἡ $p \Rightarrow q$.

ʼΕπίσης, ἀπό τίς δύο ἀνοικτές προτάσεις

p : ὁ α εἶναι ἄρτιος , q : ὁ α διαιρεῖται διά 4

μποροῦμε νά σχηματίσουμε τίς «ἀντίστροφες» προτάσεις:

$p \Rightarrow q$: *ʼΑν ὁ α εἶναι ἄρτιος, τότε ὁ α διαιρεῖται διά 4*

$q \Rightarrow p$: *ʼΑν ὁ α διαιρεῖται διά 4, τότε ὁ α εἶναι ἄρτιος.*

ʼΑπό τίς προτάσεις αὐτές ἡ $p \Rightarrow q$ δέν ἀληθεύει, ἐνῶ ἀληθεύει ἡ ἀντίστροφή της $q \Rightarrow p$.

ʼΙσοδύναμες προτάσεις.

5·4. ʼΑς θεωρήσουμε τώρα τίς δύο ἀνοικτές προτάσεις

p : ὁ α εἶναι ἄρτιος

q : ὁ α εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 2

καί ἄς σχηματίσουμε μ' αὐτές τίς δύο ἀντίστροφες προτάσεις (συνεπαγωγές)

$p \Rightarrow q$: *ʼΑν ὁ α εἶναι ἄρτιος, τότε ὁ α εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 2*

$q \Rightarrow p$: *ʼΑν ὁ α εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 2, τότε ὁ α εἶναι ἄρτιος.*

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι ἀληθεύουν καί οἱ δύο προτάσεις $p \Rightarrow q$ καί $q \Rightarrow p$. Σέ μιά τέτοια περίπτωση λέμε ὅτι **οἱ ἀνοικτές προτάσεις p καί q εἶναι «ἰσοδύναμες»** καί γράφουμε

$$p \Leftrightarrow q$$

ὁ συμβολισμός $p \Leftrightarrow q$ παριστάνει μιά καινούργια πρόταση, πού λέγεται **ἰσοδυναμία,** καί διαβάζεται:

1. Στίς παραγράφους πού ἀκολουθοῦν οἱ προτασιακοί τύποι p,q, $p \Rightarrow q$... ἀναφέρονται ὡς «ἀνοικτές προτάσεις», ἤ καί ἁπλῶς ὡς «προτάσεις».

«ὁ α εἶναι ἄρτιος, ἄν καί μόνο ἄν ὁ α εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 2»

$$\underbrace{\text{ὁ α εἶναι ἄρτιος}}_{p} \qquad \underbrace{\text{ὁ α εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 2}}_{q}$$

ἤ ἀκόμη

«ὁ α εἶναι ἄρτιος, ὅταν καί μόνο ὅταν ὁ α εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 2»

$$\underbrace{\text{ὁ α εἶναι ἄρτιος}}_{p} \qquad \underbrace{\text{ὁ α εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 2}}_{q}$$

Βλέπουμε δηλαδή ὅτι τό σύμβολο τῆς ἰσοδυναμίας «$\Leftrightarrow$» διαβάζεται **«ἄν καί μόνο ἄν»** ἤ **«ὅταν καί μόνο ὅταν».** Ἐπίσης, καταλαβαίνουμε ὅτι ἡ ἰσοδυναμία $p \Leftrightarrow q$ εἶναι μία πρόταση, πού ἀντικαθιστᾶ τίς δύο συνεπαγωγές $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow p$ καί γι' αὐτό πολλές φορές διαβάζεται

«ἄν p τότε q καί ἀντιστρόφως»

Γιά τόν ἴδιο λόγο τό σύμβολο τῆς ἰσοδυναμίας «$\Leftrightarrow$» λέγεται καί σύμβολο **«διπλῆς συνεπαγωγῆς».**

5·5. Εἶναι φανερό ὅτι μία ἰσοδυναμία $p \Leftrightarrow q$ θά ἀληθεύει, μόνο ὅταν ἀληθεύουν καί οἱ δύο συνεπαγωγές.

$$p \Rightarrow q \quad , \quad q \Rightarrow p$$

Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι οἱ δύο ἀνοικτές προτάσεις (προτασιακοί τύποι) p καί q ἔχουν σύνολα ἀλήθειας A καί B ἀντιστοίχως. Γιά νά ἀληθεύει ἡ συνεπαγωγή $p \Rightarrow q$, θά πρέπει νά ἔχουμε $A \subseteq B$, ἐνῶ γιά νά ἀληθεύει ἡ $q \Rightarrow p$, θά πρέπει νά ἔχουμε $B \subseteq A$. Ἔτσι, γιά νά ἀληθεύουν συγχρόνως οἱ συνεπαγωγές $p \Rightarrow q$ καί $q \Rightarrow p$, θά πρέπει νά ἔχουμε $A=B$ (ἀφοῦ, ἀπό τήν ἀντισυμμετρική ἰδιότητα τῆς σχέσεως $\subseteq$, οἱ $A \subseteq B$ καί $B \subseteq A$ δίνουν $A=B$). Βλέπουμε δηλαδή ὅτι:

> Μία ἰσοδυναμία $p \Leftrightarrow q$ ἀληθεύει μόνο ὅταν οἱ προτασιακοί τύποι p καί q ἔχουν τό ἴδιο σύνολο ἀλήθειας.

Παράδειγμα 1. Ἄν α,β,γ εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί, ἀληθεύουν οἱ ἰσοδυναμίες:

I. $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma = \beta + \gamma$

II. $\alpha + \beta = \gamma \Leftrightarrow \alpha = \gamma - \beta$

Παράδειγμα 2. Σέ ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ ἔχουμε τίς ἰσοδυναμίες:

I. $AB = A\Gamma \Leftrightarrow \widehat{B} = \widehat{\Gamma}$

II. $\widehat{A} = 90^0 \Leftrightarrow (B\Gamma)^2 = (A\Gamma)^2 + (AB)^2$

Ἐπειδή καί οἱ ἐξισώσεις (ἤ ἀνισώσεις) εἶναι προτασιακοί τύποι, καταλαβαίνουμε ὅτι, ἄν δύο ἐξισώσεις $P_1 = 0$ καί $P_2 = 0$ ἔχουν τό ἴδιο σύνολο ἀλήθειας, μποροῦμε νά γράφουμε

$$P_1 = 0 \Leftrightarrow P_2 = 0$$

Ἔτσι π.χ. οἱ δύο ἐξισώσεις $2x+7=5$ καί $2x = 5-7$ ἔχουν τό ἴδιο σύνολο ἀλήθειας καί συνεπῶς μποροῦμε νά γράψουμε:

$$2x + 7 = 5 \Leftrightarrow 2x = 5-7.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ποιές ἀπό τίς παρακάτω προτάσεις εἶναι ἀληθεῖς καί ποιές ὄχι.

α) «ὁ 5 διαιρεῖ τόν 12» β) «ὁ 12 εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 6»

γ) «ὁ 2 εἶναι ἄρτιος καί ὁ 4 περιττός» δ) «$\alpha \in N$ καί $\alpha \notin N$»

ε) «ὁ x εἶναι ἄρρητος ἀριθμός».

2. Θεωροῦμε τή συνεπαγωγή: *Ἄν δύο γωνίες εἶναι κατακορυφήν, τότε εἶναι ἴσες.* Νά διατυπώσετε τήν ἀντίστροφη συνεπαγωγή καί νά ἐξετάσετε ἄν εἶναι ἀληθής.

3. Θεωροῦμε τή συνεπαγωγή: $x > 1 \Rightarrow x > 0$. Νά διατυπώσετε τήν ἀντίστροφη συνεπαγωγή καί νά ἐξετάσετε ἄν ἀληθεύει.

4. Ποιές ἀπό τίς παρακάτω συνεπαγωγές εἶναι ἀληθεῖς;

α) $x + 1 > 3 \Rightarrow x > 2$

β) $x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$

γ) $x = 3 \Rightarrow x^2 = 9$

γ) $x > -1 \Rightarrow x > 0$

5. Ποιές ἀπό τίς παρακάτω ἰσοδυναμίες εἶναι ἀληθεῖς;

α) $\alpha + 3 = \beta + 3 \Leftrightarrow \alpha = \beta$

β) $2\alpha = 2\beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$

γ) $\alpha^2 = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1$

6. Σέ τρίγωνο ΑΒΓ, ποιές ἀπό τίς παρακάτω προτάσεις εἶναι ἀληθεῖς καί ποιές ὄχι.

α) $(AB = A\Gamma = B\Gamma) \Rightarrow (\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{\Gamma})$

β) $\widehat{A} + \widehat{B} = 90° \Leftrightarrow \widehat{\Gamma} = 90°$

Ἀπόδειξη μιᾶς συνεπαγωγῆς.

5·6· Πολλές φορές ἡ ἀλήθεια μιᾶς συνεπαγωγῆς $p \Rightarrow q$ εἶναι φανερή ἀπό κάποιο ὁρισμό. Τέτοιες συνεπαγωγές π.χ. εἶναι οἱ

«*Ἄν ὁ α εἶναι ἄρτιος, τότε ὁ α εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 2*»

«*Ἄν ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμο, τότε $AB \| \Gamma\Delta$ καί $B\Gamma \| A\Delta$*».

Σέ ἄλλες περιπτώσεις ἡ ἀλήθεια μιᾶς συνεπαγωγῆς δέν εἶναι φανερή, ἀλλά προκύπτει ἀπό μιά σειρά συλλογισμῶν. Οἱ συλλογισμοί, μέ τούς ὁποίους προκύπτει ἡ ἀλήθεια μιᾶς συνεπαγωγῆς, ἀποτελοῦν τήν **ἀπόδειξή** της.

Γιά νά ἀποδείξουμε μιά συνεπαγωγή $p \Rightarrow q$, δεχόμαστε τήν ἀλήθεια τῆς ὑποθέσεώς της p καί προσπαθοῦμε νά καταλήξουμε μέ συλλογισμούς στήν ἀλήθεια τοῦ συμπεράσματός της.

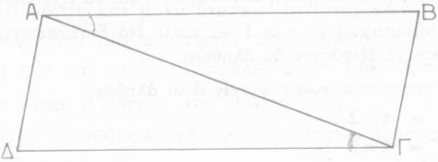
Παράδειγμα: Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι, ἄν τό τετράπλευρο ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμο, τότε οἱ ἀπέναντι πλευρές του εἶναι ἴσες.

Ἄν θεωρήσουμε τίς δύο προτάσεις:

p : «*τό ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμο*»

q : «*οἱ ἀπέναντι πλευρές τοῦ ΑΒΓΔ εἶναι ἴσες*»

Θέλουμε νά ἀποδείξουμε τή συνεπαγωγή $p \Rightarrow q$. Ἡ ἀπόδειξή της θά προκύψει ἀπό μιά σειρά συλλογισμῶν, στήν ὁποία κάθε πρόταση εἶναι λογική συνέπεια τῶν προηγουμένων ἤ ἄλλων γνωστῶν προτάσεων. Ἡ σειρά αὐτή τῶν συλλογισμῶν φαίνεται στήν παρακάτω διάταξη ὅπου χωρίσαμε τή σελίδα σέ δύο στῆλες. Στήν πρώτη στήλη γράψαμε τίς προτάσεις τοῦ συλλογισμοῦ, ἐνῶ στή δεύτερη στήλη γράψαμε τίς αἰτιολογήσεις τους.



(σχ. 1)

Ἀπόδειξη

Προτάσεις	*Αἰτιολογήσεις*
1. Τό τετράπλευρο ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλλόγραμμο.	1. Ὑπόθεση.
2. Φέρνουμε τή διαγώνιο ΑΓ	2. Ὑπάρχει μιά μόνο εὐθεία, πού συνδέει τά σημεῖα Α καί Β.
3. $AB \parallel \Delta\Gamma$ καί $A\Delta \parallel B\Gamma$	3. Ὁρισμός παραλληλογράμμου.
4. $B\widehat{\Gamma}A = \Delta\widehat{A}\Gamma$	4. Δύο παράλληλες εὐθεῖες πού τέμνονται ἀπό ἀπό μιά τρίτη σχηματίζουν τίς ἐντός ἐναλλάξ γωνίες τους ἴσες.
5. $B\widehat{A}\Gamma = \Delta\widehat{\Gamma}A$	5. Ὁμοίως μέ 4.
6. $A\Gamma = A\Gamma$	6. Ταυτότητα.
7. $\overset{\Delta}{AB\Gamma} = \overset{\Delta}{A\Delta\Gamma}$	7. Ἀπό τίς 4,5,6 (κριτήριο ἰσότητας τριγώνων).
8. $AB = \Delta\Gamma$ καί $A\Delta = B\Gamma$	8. Ἀπό τήν 7 τά τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΔΓ εἶναι ἴσα καί θά ἔχουν τίς ἀντίστοιχες πλευρές τους ἴσες.

Ἀπό τό παράδειγμά μας αὐτό καταλαβαίνουμε ὅτι, γιά νά ἀποδείξουμε μιά συνεπαγωγή $p \Rightarrow q$, δεχόμαστε τήν ἀλήθεια τῆς ὑποθέσεως p καί βρίσκουμε, μέ τή βοήθεια ὁρισμῶν ἤ γνωστῶν ἰδιοτήτων ἤ πράξεων, διαδοχικές προτάσεις πού ἀληθεύουν. Ἡ τελευταία ἀπό τίς διαδοχικές αὐτές προτάσεις εἶναι τό συμπέρασμα q. Βλέπουμε λοιπόν ὅτι γιά νά φθάσουμε στό συμπέρασμα q κάνουμε ὁρισμένα *λογικά βήματα*, πού καθένα τους μᾶς φέρνει πιό κοντά στό σκοπό μας, δηλαδή πιό κοντά στήν ἀλήθεια τῆς q. Κάθε τέτοιο *λογικό βῆμα* εἶναι μιά ἐνδιάμεση πρόταση τῆς ὁποίας ἡ ἀλήθεια πρέπει νά αἰτιολογεῖται. Πολλές φορές μία πρόταση, πού θέλουμε νά ἀποδείξουμε, δέν εἶναι διατυπωμένη μέ τή μορφή «συνεπαγωγῆς» καί τότε ἡ διατύπωση αὐτή πρέπει νά γίνει ἀπό ἐμᾶς. Ἔτσι π.χ. γιά νά ἀποδείξουμε τήν πρόταση:

«Σ' ἕνα παραλληλόγραμμο οἱ ἀπέναντι πλευρές εἶναι ἴσες», θά πρέπει πρῶτα νά τή διατυπώσουμε μέ τή μορφή «συνεπαγωγῆς», ὅπως ἀκριβῶς κάναμε στό προηγούμενο παράδειγμα.

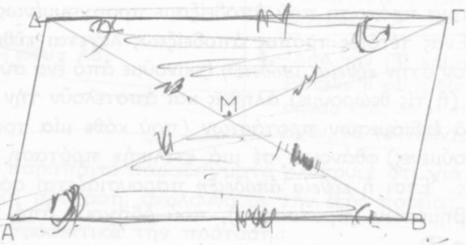
Εἶναι φανερό ὅτι μιά πρόταση πού ἀποδείχτηκε, μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ σάν λογικό βῆμα (ἐνδιάμεση πρόταση) στήν ἀπόδειξη μιᾶς ἄλλης προτάσεως.

Εὐθεία ἀπόδειξη.

5·7. Ἄς προσπαθήσουμε νά ἀποδείξουμε τήν πρόταση:

«Οἱ διαγώνιοι τοῦ παραλληλογράμμου διχοτομοῦνται».

Ἀφοῦ σχεδιάσουμε ἕνα παραλληλόγραμμο καί βάλουμε τά γράμματα Α,Β,Γ,Δ στίς κορυφές του (βλ. σχ. 2), ξεχωρίζουμε τήν ὑπόθεση ἀπό τό συμπέρασμα.



(σχ. 2)

Ὑπόθεση: Τό ΑΒΓΔ εἶναι ἕνα παραλληλόγραμμο πού οἱ διαγώνιες του ΑΓ καί ΒΔ τέμνονται στό Μ.

Συμπέρασμα: ΑΜ = ΜΓ καί ΒΜ = ΜΔ.

Ἡ σειρά τῶν συλλογισμῶν πού ἀποτελεῖ τήν ἀπόδειξη τῆς προτάσεως φαίνεται στήν παρακάτω διάταξη:

Νά μάθη τά θεωρήματα.

Ἀπόδειξη

Προτάσεις	*Αἰτιολογήσεις*
1. ΑΒΓΔ εἶναι ἕνα παραλληλόγραμμο μέ ἀπέναντι πλευρές ΑΒ καί ΔΓ	1. Ὑπόθεση.
2. ΑΒ ∥ ΔΓ	2. Ὁρισμός παραλληλογράμμου.
3. $\widehat{\Gamma A B} = \widehat{A \Gamma \Delta}$	3. Δύο παράλληλες εὐθεῖες πού τέμνονται ἀπό μία τρίτη ἔχουν τίς ἐντός ἐναλλάξ γωνίες ἴσες.
4. Ὁμοίως $\widehat{A B \Delta} = \widehat{B \Delta \Gamma}$	4. Βλ. βῆμα 3.
5. ΑΒ = ΔΓ	5. Οἱ ἀπέναντι πλευρές τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι ἴσες.
6. $\overset{\Delta}{ABM} = \overset{\Delta}{\Delta\Gamma M}$	6. Ἀπό κριτήριο ἰσότητας δύο τριγώνων (βλ. βήματα 3,4,5).
7. ∴(1) ΑΜ = ΜΓ, ΒΜ = ΜΔ	7. Τά ἴσα τρίγωνα ἔχουν ἴσες τίς ἀντίστοιχες πλευρές τους (βῆμα 6).

Βλέπουμε λοιπόν ὅτι, γιά νά ἀποδείξουμε τήν παραπάνω πρόταση, ξεκινήσαμε πάλι ἀπό τήν ὑπόθεσή μας (πρόταση 1) καί μέ *λογικά βήματα* (προτάσεις 2,3,4,...) φθάσαμε στό συμπέρασμά μας (πρόταση 7). Κάθε «*βῆμα*» γινόταν, ἀφοῦ μᾶς τό ἐπέτρεπε κάποιος ὁρισμός ἤ κάποια γνωστή πρόταση ἤ κάποια πρόταση πού ἀποδείξαμε προηγουμένως (ὅπως π.χ. στό βῆμα 5). Ἕνας τέτοιος τρόπος ἀποδείξεως λέγεται **εὐθεία ἀπόδειξη.**

Γενικά λοιπόν στήν *εὐθεία ἀπόδειξη* ξεκινοῦμε ἀπό ἕνα σύνολο προτάσεων, πού εἶναι (ἤ τίς θεωροῦμε) ἀληθεῖς καί ἀποτελοῦν τήν *ὑπόθεσή* μας, καί μέ μιά σειρά ἐνδιάμεσων προτάσεων (πού κάθε μία τους προκύπτει ἀπό τίς προηγούμενες) φθάνουμε σέ μιά «τελική» πρόταση, πού εἶναι τό συμπέρασμά μας. Ἔτσι ἡ *εὐθεία ἀπόδειξη* παρουσιάζεται σάν μιά «συνέχεια» λογικῶν βημάτων (προτάσεων), πού ὁδηγοῦν ἀπό τήν ὑπόθεση στό συμπέρασμα.(2)

---

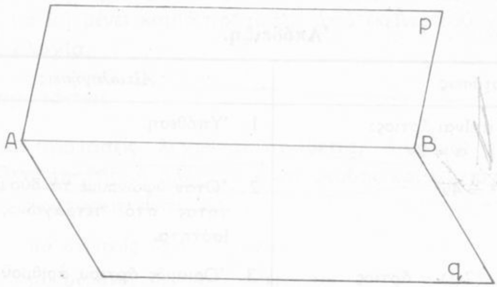
1. Πολλές φορές τό συμπέρασμα σημειώνεται μέ τό σύμβολο ∴.

2. Ὁ μεγάλος Γερμανός μαθηματικός D. Hilbert (1862-1943) εἶχε πεῖ ὅτι: «*Τά μαθηματικά δέν εἶναι τίποτα περισσότερο ἀπό ἕνα παιγνίδι, τό ὁποῖο παίζεται ἐπάνω σ' ἕνα φύλλο χαρτί μέ μερικούς ἁπλούς κανόνες καί σύμβολα*».

Ἔτσι μποροῦμε νά ποῦμε ὅτι καί ἡ «ἀπόδειξη» εἶναι ἕνα παιγνίδι λογικῶν βημάτων πού παίζεται μέ προτάσεις. Ἀφετηρία τοῦ παιγνιδιοῦ εἶναι ἡ «ὑπόθεσή» μας, ἐνῶ κάθε λογικό βῆμα εἶναι μία πρόταση, πού προκύπτει ἀπό τίς προηγούμενες μέ κάποιον κανόνα καί μᾶς φέρνει πιό κοντά στόν τελικό σκοπό μας. Τό παιγνίδι τελειώνει ὅταν φθάσουμε στό «συμπέρασμά» μας.

5.8. Ἄς δοῦμε τήν ἀπόδειξη μιᾶς ἀκόμη προτάσεως τῆς γεωμετρίας ἀπό τό κεφ. 4.

«Ἡ τομή δύο διαφορετικῶν ἐπιπέδων, πού ἔχουν δύο κοινά σημεῖα, εἶναι εὐθεία».



Ὑπόθεση: Τά ἐπίπεδα p καί q ἔχουν κοινά τά σημεῖα A καί B.
Συμπέρασμα: Ἡ τομή τους εἶναι εὐθεία.

Ἀπόδειξη

Προτάσεις	*Αἰτιολογήσεις*
1. p καί q ἐπίπεδα	1. Ὑπόθεση.
2. $A \in (p \cap q)$ καί $B \in (p \cap q)$	2. Ὑπόθεση.
3. Ἡ AB ἀνήκει καί στό p καί στό q	3. Ἄν A καί B εἶναι δύο σημεῖα ἑνός ἐπιπέδου, τότε ἡ εὐθεία AB ἀνήκει στό ἐπίπεδο.
4. $\therefore\ p \cap q =$ εὐθεία AB	4. Ἀπό τήν (3) καί τή σκέψη πώς τά ἐπίπεδα p καί q δέν ἔχουν ἄλλο κοινό σημεῖο ἔξω ἀπό τήν AB (γιατί, ἄν εἶχαν, θά ταυτίζονταν).

Ἀπό τά παραπάνω παραδείγματα βλέπουμε ὅτι γιά νά ἀποδείξουμε μιά γεωμετρική πρόταση, ἀκολουθοῦμε τήν ἑξῆς πορεία:

- Μελετοῦμε προσεκτικά τήν πρόταση.
- Σχεδιάζουμε τό σχετικό σχῆμα καί ὀνομάζουμε τά διάφορα στοιχεῖα του.
- Μεταφέρουμε τήν πρόταση στό σχῆμα πού σχεδιάσαμε· ξεχωρίζουμε τήν ὑπόθεσή της p, ἀπό τό συμπέρασμά της q γράφοντας:
  Ὑπόθεση: p
  Συμπέρασμα: q
  ἤ διατυπώνουμε τήν πρόταση μέ μορφή συνεπαγωγῆς $p \Rightarrow q$.
- Ἀρχίζοντας ἀπό τήν πρόταση p φθάνουμε στήν πρόταση q. μέ μιά σειρά λογικῶν βημάτων.

5.9. Ἄς δοῦμε τέλος καί δύο παραδείγματα ἀπό τήν Ἄλγεβρα.

1. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι, ἄν ἕνας ἀριθμός εἶναι ἄρτιος, τότε καί τό τετράγωνό του εἶναι ἄρτιος ἀριθμός.

Ὑπόθεση: $\alpha = 2\nu$ (ἄρτιος), $\nu \in N^*$
Συμπέρασμα: α^2 εἶναι ἄρτιος

Ἀπόδειξη.

Προτάσεις	*Αἰτιολογήσεις*
1. ὁ ἀριθμός α εἶναι ἄρτιος: $\alpha = 2\nu$	1. Ὑπόθεση.
2. $\alpha^2 = (2\nu)^2 = 4\nu^2$	2. Ὅταν ὑψώνουμε τά δύο μέλη μιᾶς ἰσότητας στό τετράγωνο, προκύπτει ἰσότητα.
3. $\therefore\ \alpha^2 = 2.(2\nu^2) =$ ἄρτιος	3. Ὁρισμός ἄρτιου ἀριθμοῦ (ὅταν $\nu \in N^*$ καί $2\nu^2 \in N^*$).

Ἡ παραπάνω ἀπόδειξη γράφεται πιό σύντομα μέ διαδοχικές συνεπαγωγές:

$$\alpha = \text{ἄρτιος} \Rightarrow \alpha = 2\nu \Rightarrow \alpha^2 = 4\nu^2 \Rightarrow \alpha^2 = 2(2\nu^2) \Rightarrow \alpha^2 = \text{ἄρτιος}$$

2. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ὁ ἀριθμός $\nu^3 - \nu$, ὅπου $\nu \in N^*$, διαιρεῖται μέ τόν 6.

Ὑπόθεση: $\nu \in N^*$
Συμπέρασμα: Ὁ 6 διαιρεῖ τόν φυσικό $\nu^3 - \nu$

Ἀπόδειξη

Προτάσεις	*Αἰτιολογήσεις*
1. $\nu^3 - \nu = \nu\ (\nu^2 - 1)$	1. Ἐπιμεριστική ἰδιότητα.
2. $\nu^3 - \nu = \nu\ (\nu + 1)\ (\nu - 1)$	2. Ἀπό τήν (1) καί τήν ταυτότητα $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)\ (\alpha - \beta)$.
3. ὁ 2 διαιρεῖ τόν ν ἤ τόν $\nu + 1$	3. Ἀπό δύο διαδοχικούς φυσικούς ἀριθμούς ὁ ἕνας εἶναι ἄρτιος.
4. ὁ 3 διαιρεῖ τόν $\nu - 1$ ἤ τόν ν ἤ τόν $\nu + 1$	4. Ἀπό τούς τρεῖς διαδοχικούς φυσικούς ἀριθμούς $\nu - 1$, ν, $\nu + 1$, ὁ ἕνας εἶναι ὁπωσδήποτε πολλαπλάσιο τοῦ 3.
5. ὁ 2 διαιρεῖ τό γινόμενο $(\nu - 1)\ \nu\ (\nu + 1)$	5. Ὅταν ἕνας φυσικός ἀριθμός διαιρεῖ ἕναν παράγοντα ἑνός γινομένου, τότε διαιρεῖ καί τό γινόμενο.
6. ὁ 3 διαιρεῖ τό γινόμενο $(\nu - 1)\ \nu\ (\nu + 1)$	6. Ὁμοίως μέ τήν (5).
7. ὁ $6 = 2.3$ διαιρεῖ τόν ἀκέραιο $\nu^3 - \nu = (\nu - 1)\ \nu\ (\nu + 1)$	7. Ὅταν ἕνας ἀκέραιος ἀριθμός διαιρεῖται ἀπό δύο πρώτους μεταξύ τους ἀριθμούς, διαιρεῖται καί ἀπό τό γινόμενό τους.

Στά προηγούμενα παραδείγματα γράψαμε τίς ἀποδείξεις τους μέ μιά διάταξη, ἡ ὁποία ἐπισημαίνει τήν αἰτιολόγηση κάθε προτάσεως πού χρησιμοποιήσαμε. Συνήθως ὅμως γράφουμε ἤ διατυπώνουμε τίς ἀποδείξεις σέ «συνεχή» λόγο (βλ. § 1.10,I) καί τότε πρέπει νά εἴμαστε πολύ προσεκτικοί, γιά νά μή μένει καμιά πρόταση, ἀπό ἐκεῖνες πού χρησιμοποιοῦμε, δίχως αἰτιολογία.

Ἀντίθετες προτάσεις

5·10. Δύο προτάσεις λέγονται **ἀντίθετες,** ἄν εἶναι τέτοιες, ὥστε, ὅταν ἡ μία εἶναι ἀληθής, ἡ ἄλλη νά εἶναι ψευδής καί ἀντιστρόφως. Ἔτσι π.χ. ἀντίθετες προτάσεις εἶναι οἱ

«ὁ οὐρανός ἔχει σύννεφα»
«ὁ οὐρανός δέν ἔχει σύννεφα».

Ὅταν ἔχουμε δύο τέτοιες προτάσεις, ἡ κάθε μία λέγεται **ἀντίθετη πρόταση** ἤ **ἄρνηση** τῆς ἄλλης καί, ἄν ἡ μία σημειωθεῖ μέ p, ἡ ἄλλη σημειώνεται μέ p′ ἤ ~ p καί διαβάζεται **«ὄχι p»**.

Δύο ἄλλες ἀντίθετες προτάσεις εἶναι οἱ

p : *«ὁ α εἶναι ἄρτιος»*, p′ : *«ὁ α δέν εἶναι ἄρτιος».*

Ἄν σχηματίσουμε τή σύνθετη πρόταση «p καί p′», δηλαδή τήν

«ὁ α εἶναι ἄρτιος καί ὁ α δέν εἶναι ἄρτιος»,

βλέπουμε ὅτι αὐτή εἶναι μιά ψευδής πρόταση. Γενικά:

> **Ἡ σύνθετη πρόταση, πού προκύπτει, ὅταν συνδέουμε δύο ἀντίθετες προτάσεις μέ τό «καί», εἶναι πάντοτε ψευδής.**

Ἔμμεση ἀπόδειξη.

5·11. Στήν § 1.2 εἴχαμε μιά πρώτη ἐπαφή μέ μιά ἀποδεικτική μέθοδο, πού λέγεται *«ἀπαγωγή σέ ἄτοπο»*. Συγκεκριμένα ἀποδείξαμε ὅτι «ὁ $\sqrt{2}$ δέν εἶναι ρητός ἀριθμός» μέ τόν ἑξῆς τρόπο: Δεχτήκαμε τό ἀντίθετο· δηλαδή δεχτήκαμε ὅτι «ὁ $\sqrt{2}$ ἰσοῦται μέ τό ρητό $\frac{\alpha}{\beta}$» καί καταλήξαμε σέ *«ἀντίφαση»* ἤ ὅπως λέμε σέ *«ἄτοπο»*. Ἔτσι βγάλαμε τό συμπέρασμα πώς ὁ $\sqrt{2}$ δέν εἶναι ἴσος μέ ρητό ἀριθμό.

Ἄς ἐφαρμόσουμε τώρα τήν ἴδια μέθοδο στήν ἀπόδειξη τῆς προτάσεως:

«Τό ἄθροισμα ἑνός ρητοῦ ἀριθμοῦ x καί ἑνός ἄρρητου ἀριθμοῦ y εἶναι ἀριθμός ἄρρητος».

Ἄν θεωρήσουμε τίς προτάσεις *A: «ὁ x εἶναι ρητός ἀριθμός», B: «ὁ* *y εἶναι ἄρρητος ἀριθμός»* καί *Γ: «ὁ x+y εἶναι ἄρρητος ἀριθμός»*, θέλουμε νά ἀποδείξουμε τή συνεπαγωγή

$$(\text{A καί B}) \Rightarrow \Gamma$$

Ἀρχίζουμε τήν ἀπόδειξη μέ τήν ἄρνηση τοῦ συμπεράσματος, δηλαδή δεχόμαστε ὅτι *«ὁ x+y δέν εἶναι ἄρρητος ἀριθμός»*, δηλαδή ὅτι ὁ $x+y$ εἶναι ἕνας ρητός ἀριθμός ρ καί τότε ἔχουμε

$$x+y=\rho \Rightarrow y=\rho-x$$

Βλέπουμε τώρα ὅτι ὁ y ἰσοῦται μέ τή διαφορά $\rho-x$ δύο ρητῶν ἀριθμῶν καί συνεπῶς (ἀφοῦ ἡ διαφορά δύο ρητῶν εἶναι πάντοτε ρητός) ὁ y εἶναι ρητός ἀριθμός. Αὐτό ὅμως εἶναι ἀντιφατικό (ἄτοπο), γιατί ἀπό τήν ὑπόθεσή μας ἔχουμε δεδομένο ὅτι ὁ y εἶναι ἄρρητος. Ἔτσι, ἡ παραδοχή *«ὁ x+y δέν εἶναι ἄρρητος»*, δέν εἶναι σωστή, γιατί ὁδηγεῖ σέ ἄτοπο καί ἑπομένως ὁ ἀριθμός $x+y$ εἶναι ἄρρητος.

Ἡ μέθοδος, πού χρησιμοποιήσαμε, γιά νά ἀποδείξουμε τήν παραπάνω πρόταση, λέγεται **«μέθοδος τῆς ἀπαγωγῆς σέ ἄτοπο»**. Γενικά, ὅταν θέλουμε νά ἀποδείξουμε μιά συνεπαγωγή $p \Rightarrow q$ μέ τή μέθοδο τῆς *«ἀπαγωγῆς σέ ἄτοπο»* ἀκολουθοῦμε τήν παρακάτω πορεία:

- Δεχόμαστε τήν ἄρνηση τοῦ συμπεράσματός μας q, δηλαδή δεχόμαστε ὅτι ἀληθεύει ἡ ἀντίθετη πρόταση q'.
- Μέ τήν παραδοχή αὐτή καί μέ μιά σειρά λογικῶν βημάτων ὁδηγούμαστε σέ μιά ἀντίφασή (ἄτοπο), δηλαδή σέ μιά πρόταση πού εἶναι ἀντίθετη πρός τήν ὑπόθεσή μας ἤ πρός μιά ἄλλη ἀληθή πρόταση.
- Ἀπό τό ἄτοπο, στό ὁποῖο καταλήγουμε, συμπεραίνουμε ὅτι ἡ παραδοχή μας q' δέν εἶναι ἀληθής καί ἑπομένως εἶναι ἀληθές τό συμπέρασμά μας q.

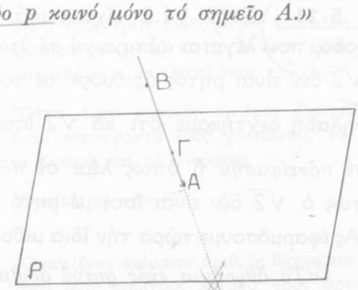
Ἄς δοῦμε ἕνα ἀκόμα παράδειγμα ἀπό τή Γεωμετρία.

«Ἄν A εἶναι ἕνα σημεῖο ἑνός ἐπιπέδου p καί B εἶναι σημεῖο ἔξω ἀπό τό p, τότε ἡ εὐθεία AB ἔχει μέ τό ἐπίπεδο p κοινό μόνο τό σημεῖο A.»

Ὑπόθεση: p ἐπίπεδο, $A \in p$, $B \notin p$

Συμπέρασμα: $AB \cap p = \{A\}$

Ἀπόδειξη: Δεχόμαστε ὅτι ἡ AB δέν ἔχει κοινό σημεῖο μέ τό p μόνο τό A, ἀλλά ἔχει καί ἕνα δεύτερο κοινό σημεῖο Γ. Τότε ἡ AB ἔχει μέ τό p δύο κοινά σημεῖα (τά A καί Γ) καί ἑπομένως εἶναι εὐθεία τοῦ ἐπιπέδου p, ὁπότε καί τό B εἶναι σημεῖο τοῦ p. Ἀλλ' αὐτό εἶναι ἄτοπο, γιατί τό B, ἀπό τήν



(σχ. 7)

ὑπόθεση μας, δέν ἀνήκει στό p. Ἑπομένως ἡ ΒΑ δέν ἔχει ἄλλο κοινό σημεῖο μέ τό p ἐκτός ἀπό τό Α.

Ἡ μέθοδος τῆς ἀπαγωγῆς σέ ἄτοπο λέγεται καί **«ἔμμεση ἀπόδειξη»**, ὅταν ἡ ἄρνηση τοῦ συμπεράσματός μας ὁδηγεῖ σέ ἄρνηση τῆς ὑποθέσεως.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

7. Νά ἀποδείξετε ὅτι

α) τό ἄθροισμα δύο ἄρτιων ἀριθμῶν εἶναι ἄρτιος,

β) τό ἄθροισμα δύο περιττῶν ἀριθμῶν εἶναι ἄρτιος,

γ) τό ἄθροισμα ἑνός ἄρτιου ἀριθμοῦ καί ἑνός περιττοῦ εἶναι περιττός.

8. Ἄν $\nu \in N$, νά ἀποδείξετε ὅτι

α) ὁ ἀκέραιος $\nu^2-\nu$ διαιρεῖται διά 2,

β) ὁ ἀκέραιος $\nu^3+11\nu$ διαιρεῖται διά 6.

9. Στίς πλευρές ΟΧ καί ΟΨ μιᾶς γωνίας $\widehat{XO\Psi}$ παίρνουμε ἀντιστοίχως τά σημεῖα Α,Β καί Α′, Β′ ἔτσι, ὥστε $OA = OA'$ καί $OB = OB'$.

Φέρνουμε τίς ΑΒ′ καί Α′Β, πού τέμνονται στό Ι.

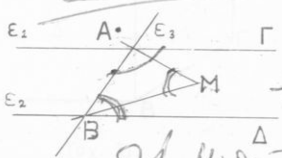
Νά ἀποδείξετε ὅτι:

α) Τά τρίγωνα ΟΑΒ′ καί ΟΑ′Β εἶναι ἴσα.

β) Τά τρίγωνα ΙΑΒ καί ΙΑ′Β′ εἶναι ἴσα.

γ) Ἡ ΟΙ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{XO\Psi}$

10. Στό διπλανό σχῆμα ἔχουμε δύο παράλληλες εὐθεῖες ε_1 καί ε_2, μία εὐθεία ε_3 πού τίς τέμνει στά σημεῖα Α καί Β καί ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Μ μέσα στή ζώνη τῶν παραλλήλων ε_1 καί ε_2. Νά ἀποδείξετε ὅτι $\widehat{AMB} = \widehat{MA\Gamma} + \widehat{MB\Delta}$.



11. Ἄν ρ εἶναι ρητός ἀριθμός καί α ἄρρητος, νά δείξετε ὅτι τό γινόμενο ρα εἶναι ἄρρητος ἀριθμός.

12. Δίνονται δύο ἀσύμβατες εὐθεῖες ε_1, ε_2 καί παίρνουμε δύο σημεῖα Α,Β τῆς ε_1 καί δύο σημεῖα Γ,Δ τῆς ε_2. Νά δείξετε ὅτι οἱ εὐθεῖες ΑΓ καί ΒΔ εἶναι ἀσύμβατες.

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 5

1. Μία ἔκφραση, πού μπορεῖ νά χαρακτηρισθεῖ ὡς *«ἀληθής»* ἤ *«ψευδής»*, λέγεται **πρόταση**. Ἄν p καί q εἶναι δύο προτασιακοί τύποι μέ σύνολα ἀλήθειας Α καί Β, τότε:

α) Ἡ πρόταση **«ἄν p τότε q»** συμβολίζεται μέ

$$p \Rightarrow q$$

καί λέγεται **συνεπαγωγή**. Ἡ συνεπαγωγή αὐτή εἶναι ἀληθής, μόνο ὅταν $A \subseteq B$.

β) Ἡ πρόταση **«p ἄν καί μόνο ἄν q»** συμβολίζεται μέ

$$p \Leftrightarrow q$$

καί λέγεται **ἰσοδυναμία**. Ἡ ἰσοδυναμία ἀντικαθιστᾶ τίς δύο συνεπαγωγές $p \Rightarrow q$ καί $q \Rightarrow p$ καί ἀληθεύει, μόνο ὅταν $A = B$.

2. Γιά τήν ἀπόδειξη μιᾶς συνεπαγωγῆς $p \Rightarrow q$ ἔχουμε δύο μεθόδους:

- **Τήν εὐθεία ἀπόδειξη,** στήν ὁποία ξεκινᾶμε ἀπό τήν ὑπόθεσή μας p καί μέ μιά σειρά λογικῶν βημάτων καταλήγουμε στό συμπέρασμα q.
- **Τήν ἀπαγωγή σέ ἄτοπο,** στήν ὁποία δεχόμαστε τήν ἄρνηση q' τοῦ συμπεράσματός μας καί μέ μιά σειρά λογικῶν βημάτων φθάνουμε σέ ἀντίφαση πρός τήν ὑπόθεσή μας ἤ πρός ἄλλη ἀληθή πρόταση.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ *

13. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό τετράγωνο ἑνός περιττοῦ ἀριθμοῦ εἶναι περιττός.

14. Νά ἀποδείξετε ὅτι ὁ $\sqrt{3}$ εἶναι ἄρρητος ἀριθμός.

15. Ἄν γνωρίζουμε ὅτι σέ τρίγωνο ΑΒΓ ἰσχύει ἡ πρόταση $\widehat{A} > \widehat{B} \Rightarrow \alpha > \beta$, νά δείξετε ὅτι ἰσχύει καί ἡ $\alpha > \beta \Rightarrow \widehat{A} > \widehat{B}$.

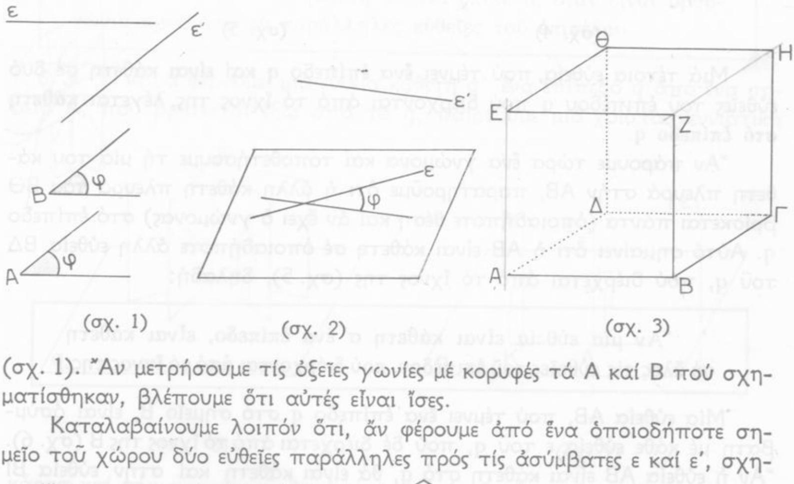
6ο

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΚΑΘΕΤΟΤΗΤΑ ΣΤΟ ΧΩΡΟ

Γωνία δύο ἀσύμβατων εὐθειῶν.

6.1. Ἄς πάρουμε δυό ἀσύμβατες εὐθεῖες ε καί ε′ καί ἄς φέρουμε ἀπό δύο ὁποιαδήποτε σημεῖα Α καί Β τοῦ χώρου παράλληλες πρός αὐτές



(σχ. 1) (σχ. 2) (σχ. 3)

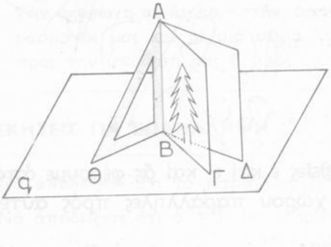
(σχ. 1). Ἄν μετρήσουμε τίς ὀξεῖες γωνίες μέ κορυφές τά Α καί Β πού σχηματίσθηκαν, βλέπουμε ὅτι αὐτές εἶναι ἴσες.

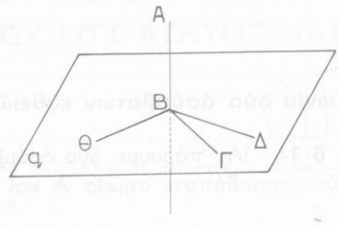
Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι, ἄν φέρουμε ἀπό ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τοῦ χώρου δύο εὐθεῖες παράλληλες πρός τίς ἀσύμβατες ε καί ε′, σχηματίζουν πάντα τήν ἴδια ὀξεία γωνία $\widehat{\varphi}$, πού λέγεται **γωνία τῶν ἀσύμβατων εὐθειῶν ε καί ε′**. Συνήθως γιά νά βροῦμε τή $\widehat{\varphi}$ φέρνουμε ἀπό ἕνα σημεῖο τῆς μιᾶς εὐθεία παράλληλη πρός τήν ἄλλη (βλ. σχ. 2).

Δύο ἀσύμβατες εὐθεῖες θά λέγονται **ὀρθογώνιες**, ὅταν ἡ γωνία τους $\widehat{\varphi}$ εἶναι ὀρθή. Τέτοιες ὀρθογώνιες εὐθεῖες εἶναι π.χ. οἱ ἀκμές ΑΕ καί ΖΗ στόν κύβο τοῦ σχήματος 3.

Εὐθεία κάθετη σέ ἐπίπεδο.

6.2. Ἄς πάρουμε μία δίφυλλη χριστουγεννιάτικη κάρτα καί ἄς τήν τοποθετήσουμε πάνω σέ ἐπίπεδο q (σχ. 4). Ἐπειδή τά φύλλα τῆς κάρτας εἶναι ὀρθογώνια, οἱ γωνίες $\widehat{ΑΒΓ}$ καί $\widehat{ΑΒΔ}$ εἶναι ὀρθές. Βλέπουμε δηλαδή ὅτι ἡ εὐθεία ΑΒ εἶναι κάθετη σέ δύο εὐθεῖες τοῦ ἐπιπέδου q, πού διέρχονται ἀπό τό ἴχνος της, τίς ΒΓ καί ΒΔ.





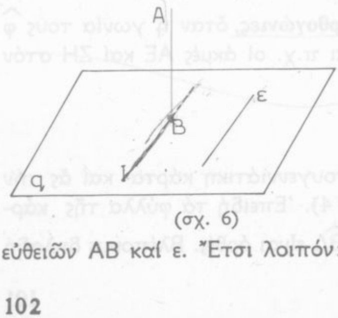
(σχ. 4) (σχ. 5)

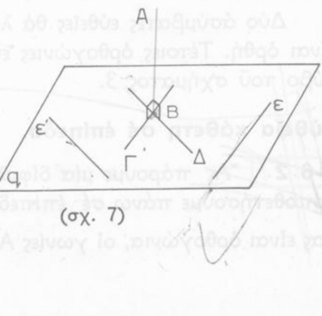
Μιά τέτοια εὐθεία, πού τέμνει ἕνα ἐπίπεδο q καί εἶναι κάθετη σέ δυό εὐθεῖες τοῦ ἐπιπέδου q πού διέρχονται ἀπό τό ἴχνος της, λέγεται **κάθετη στό ἐπίπεδο q**.

Ἄν πάρουμε τώρα ἕνα γνώμονα καί τοποθετήσουμε τή μία του κάθετη πλευρά στήν ΑΒ, παρατηροῦμε ὅτι ἡ ἄλλη κάθετη πλευρά του ΒΘ βρίσκεται πάντα (ὁποιαδήποτε θέση καί ἄν ἔχει ὁ γνώμονας) στό ἐπίπεδο q. Αὐτό σημαίνει ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι κάθετη σέ ὁποιαδήποτε ἄλλη εὐθεία ΒΔ τοῦ q, πού διέρχεται ἀπό τό ἴχνος της (σχ. 5), δηλαδή:

Ἄν μία εὐθεία εἶναι κάθετη σ' ἕνα ἐπίπεδο, εἶναι κάθετη σέ ὅλες τίς εὐθεῖες τοῦ ἐπιπέδου, πού διέρχονται ἀπό τό ἴχνος της.

Μία εὐθεία ΑΒ, πού τέμνει ἕνα ἐπίπεδο q στό σημεῖο Β, εἶναι ἀσύμβατη μέ κάθε εὐθεία ε τοῦ q, πού δέ διέρχεται ἀπό τό ἴχνος της Β (σχ. 6). Ἄν ἡ εὐθεία ΑΒ εἶναι κάθετη στό q, θά εἶναι κάθετη καί στήν εὐθεία ΒΙ τοῦ q, πού διέρχεται ἀπό τό Β καί εἶναι παράλληλη πρός μία ὁποιαδήποτε εὐθεία ε τοῦ q. Ἡ γωνία ὅμως $\widehat{ABI}$ εἶναι ἡ γωνία τῶν ἀσύμβατων





(σχ. 6) (σχ. 7)

εὐθειῶν ΑΒ καί ε. Ἔτσι λοιπόν:

Μία εὐθεία, πού εἶναι κάθετη σ' ἕνα ἐπίπεδο, εἶναι ὀρθογώνια πρός κάθε εὐθεία τοῦ ἐπιπέδου.

Ἄς πάρουμε τώρα μία εὐθεία ΑΒ, πού νά εἶναι ὀρθογώνια πρός δύο μή παράλληλες εὐθεῖες ε καί ε' τοῦ ἐπιπέδου q (σχ. 7) καί ἄς φέρουμε ἀπό τό ἴχνος της Β τίς εὐθεῖες ΒΓ καί ΒΔ τοῦ ἐπιπέδου q, παράλληλες πρός τίς ε καί ε' ἀντιστοίχως. Ἐπειδή ἡ ΑΒ εἶναι ὀρθογώνια πρός τίς ε καί ε', θά εἶναι $A\widehat{B}\Gamma = A\widehat{B}\Delta = 1$ ὀρθή. Βλέπουμε λοιπόν ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι κάθετη σέ δύο εὐθεῖες τοῦ ἐπιπέδου q, πού διέρχονται ἀπό τό ἴχνος της (τίς ΒΓ καί ΒΔ) καί συνεπῶς εἶναι κάθετη στό ἐπίπεδο q. Ἔτσι καταλαβαίνουμε ὅτι:

Μία εὐθεία εἶναι κάθετη σέ ἕνα ἐπίπεδο, ὅταν εἶναι ὀρθογώνια πρός δύο μή παράλληλες εὐθεῖες τοῦ ἐπιπέδου.

6.3. Γιά νά φέρουμε μιά εὐθεία κάθετη σ' ἕνα ἐπίπεδο q ἀπό ἕνα σημεῖο Α, πού βρίσκεται ἔξω ἀπό τό q, παίρνουμε μιά χριστουγεννιάτικη

(σχ. 8)

(σχ. 9)

κάρτα καί τήν τοποθετοῦμε πάνω στό ἐπίπεδο ἔτσι, ὥστε ἡ «ράχη» της νά περάσει ἀπό τό Α (σχ. 8). Ἡ εὐθεία, τήν ὁποία ὁρίζει ἡ ράχη τῆς κάρτας, εἶναι ἡ ζητούμενη. Βλέπουμε τώρα ὅτι, ἄν πάρουμε καί μιά ὁποιαδήποτε ἄλλη χριστουγεννιάτικη κάρτα καί κάνουμε τήν ἴδια ἐργασία, θά καταλήξουμε πάλι στήν ἴδια εὐθεία. Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι:

Ἀπό ἕνα σημεῖο Α, πού βρίσκεται ἔξω ἀπό ἕνα ἐπίπεδο q, μόνο μία κάθετη εὐθεία στό q μποροῦμε νά φέρουμε.

Μέ τόν ἴδιο ἀκριβῶς τρόπο βλέπουμε ὅτι **ἀπό ἕνα σημεῖο Κ τοῦ ἐπιπέδου q μόνο μία κάθετη στό ἐπίπεδο μποροῦμε νά φέρουμε.**

Ἄς φέρουμε τώρα ἀπό δύο διαφορετικά σημεῖα Κ καί Λ τοῦ ἐπιπέδου q δύο εὐθεῖες κάθετες στό q (σχ. 9). Ἐπειδή οἱ εὐθεῖες αὐτές εἶναι κάθετες στήν ΚΛ καί βρίσκονται στό ἴδιο ἐπίπεδο (ὅπως διαπιστώνουμε, ἄν πλησιάσουμε τό ἕνα φύλλο τῆς κάρτας), θά εἶναι παράλληλες, δηλαδή:

> Δύο εὐθεῖες κάθετες στό ἴδιο ἐπίπεδο εἶναι μεταξύ τους παράλληλες.

Ἀπό τήν πρόταση αὐτή καταλαβαίνουμε ὅτι:

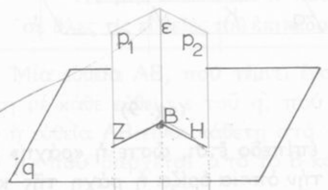
α) Ἄν ἔχουμε δύο παράλληλες εὐθεῖες ε_1 *καί* ε_2 *καί ἡ μία εἶναι κάθετη σέ ἕνα ἐπίπεδο q, τότε καί ἡ ἄλλη θά εἶναι κάθετη στό q.*

β) Ἄν ἔχουμε δύο ὁποιεσδήποτε εὐθεῖες ε_1 *καί* ε_2 *καί κάθε μιά τους εἶναι παράλληλη πρός μιά τρίτη εὐθεία* ε_3*, τότε οἱ* ε_1 *καί* ε_2 *θα εἶναι μεταξύ τους παράλληλες* (γιατί, ἄν ὑποθέσουμε ὅτι ἡ ε_3 εἶναι κάθετη σ' ἕνα ἐπίπεδο q, τότε (βλ. σχ. 9) καί οἱ ε_1 καί ε_2 εἶναι κάθετες στό q).

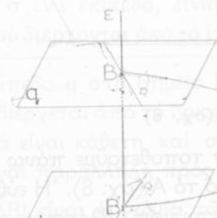
Ἐπίπεδα κάθετα σέ εὐθεία.

6.4. Στό σχῆμα 5 βλέπουμε ὅτι ὑπάρχουν ἄπειρες εὐθεῖες τοῦ χώρου, πού εἶναι κάθετες πρός μιά εὐθεία ε σ' ἕνα ὁρισμένο σημεῖο της Β καί μάλιστα ὅλες βρίσκονται στό ἴδιο ἐπίπεδο q.

Γενικά, ὅλες οἱ εὐθεῖες τοῦ χώρου, πού εἶναι κάθετες σέ μία εὐθεία ε σ' ἕνα ὁρισμένο σημεῖο της Β, βρίσκονται σ' ἕνα καί μοναδικό ἐπίπεδο q, τό ὁποῖο λέγεται **κάθετο ἐπίπεδο** πρός τήν ε στό σημεῖο της Β.



(σχ. 10)



(σχ. 11)

Γιά νά κατασκευάσουμε τό ἐπίπεδο q, ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς: Φέρνουμε ἕνα ὁποιοδήποτε ἐπίπεδο p_1, πού διέρχεται ἀπό τήν ε, καί πάνω σ' αὐτό φέρνουμε τήν εὐθεία ΒΖ κάθετη στήν ε (σχ. 10). Ἔπειτα φέρνουμε ἕνα ἄλλο ἐπίπεδο p_2, πού διέρχεται ἀπό τήν ε καί πάνω σ' αὐτό φέρνουμε τήν εὐθεία ΒΗ κάθετη στήν ε. Τό ἐπίπεδο πού ὁρίζουν οἱ δύο εὐθεῖες ΒΖ καί ΒΗ εἶναι τό q.

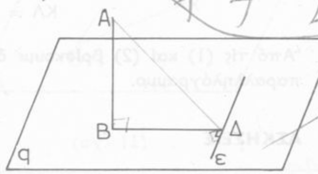
Ἄς φέρουμε τώρα τά κάθετα ἐπίπεδα q καί q' (σχ. 11) σέ δύο σημεῖα Β καί Β′ μιᾶς εὐθείας ε. Τά ἐπίπεδα αὐτά δέν ἔχουν κοινό σημεῖο (γιατί, ἄν εἶχαν ἕνα κοινό σημεῖο Ι, τό τρίγωνο ΙΒΒ′ θά εἶχε δύο γωνίες ὀρθές) καί συνεπῶς εἶναι παράλληλα. Ἔτσι λοιπόν:

> Δύο ἐπίπεδα κάθετα στήν ἴδια εὐθεία εἶναι παράλληλα.

Ἄς θεωρήσουμε τώρα μιά ὁποιαδήποτε εὐθεία α τοῦ ἐπιπέδου q, πού διέρχεται ἀπό τό Β, καί μιά ὁποιαδήποτε εὐθεία α′ τοῦ ἐπιπέδου q′, πού διέρχεται ἀπό τό Β′. Οἱ εὐθεῖες αὐτές εἶναι γενικά ἀσύμβατες, ἐνῶ εἶναι κάθετες στήν ε. Βλέπουμε δηλαδή ὅτι δύο εὐθεῖες τοῦ χώρου, πού εἶναι κάθετες στήν ἴδια εὐθεία, δέν εἶναι ἀπαραίτητα παράλληλες, ὅπως εἶναι στό ἐπίπεδο.

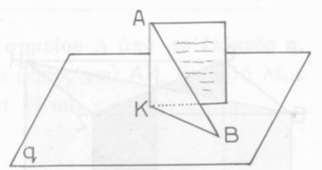
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Μία εὐθεία ΑΒ εἶναι κάθετη σ' ἕνα ἐπίπεδο q. Ἄν φέρουμε ἀπό τό Β τήν εὐθεία ΒΔ κάθετη σέ μιά εὐθεία ε τοῦ q, ἀποδείξτε ὅτι καί ἡ ΑΔ εἶναι κάθετη στήν ε.



Λύση: Ἐπειδή $AB \perp q$, ἡ ΑΒ εἶναι ὀρθογώνια πρός τήν ε. Ἔτσι ἡ ε εἶναι κάθετη πρός τήν εὐθεία ΒΔ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΔ καί ὀρθογώνια πρός τήν ΑΒ. Συνεπῶς εἶναι κάθετη στό ἐπίπεδο ΑΒΔ, ὁπότε εἶναι κάθετη καί στήν ΑΔ.

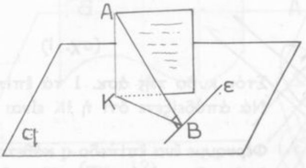
2. Τό διπλανό σχῆμα δείχνει μιά κομμένη χριστουγεννιάτικη κάρτα πάνω σ' ἕνα τραπέζι.
Νά βρεῖτε εὐθεία τοῦ ἐπιπέδου q, πού νά διέρχεται ἀπό τό Β καί νά εἶναι κάθετη στήν ΑΒ. Πόσες τέτοιες εὐθεῖες ὑπάρχουν;



Λύση: Φέρνουμε τήν εὐθεία ε τοῦ ἐπιπέδου q, πού εἶναι κάθετη στήν ΚΒ στό σημεῖο Β. Αὐτή εἶναι ἡ εὐθεία πού ζητούσαμε.

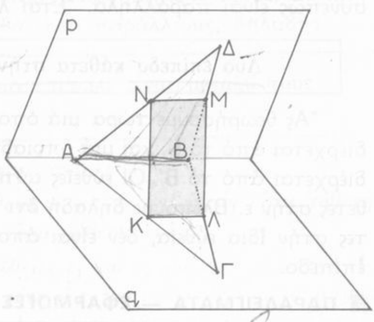
Πραγματικά, ὅπως εἴδαμε παραπάνω (πρβ. 1), ἐπειδή $AK \perp q$ καί $KB \perp \varepsilon$, θά εἶναι καί $AB \perp \varepsilon$.

Ἡ ε εἶναι μοναδική, γιατί, ἄν ὑπῆρχε καί ἄλλη κάθετη, π.χ. ἡ ε_1, τότε ἡ ε_1 θά ἦταν κάθετη στό ἐπίπεδο ΑΚΒ. Αὐτό ὅμως εἶναι ἄτοπο, γιατί θά εἴχαμε δύο κάθετες πρός τό ἐπίπεδο ΑΚΒ στό ἴδιο σημεῖο του Β.



Προσοχή

3. Δίνονται δύο ἐπίπεδα p καί q καί δύο σημεῖα Α καί Β τῆς τομῆς τους. Ἄν Γ εἶναι ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τοῦ q καί Δ εἶναι ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τοῦ p, τό σχῆμα ΑΔΒΓ λέγεται «στρεβλό τετράπλευρο» μέ πλευρές ΑΔ,ΔΒ,ΒΓ,ΓΑ. Ἀποδεῖξτε ὅτι τά μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ στρεβλοῦ τετραπλεύρου εἶναι κορυφές παραλληλογράμμου.



Λύση: Ἐπειδή τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΜΝ συνδέει τά μέσα τῶν πλευρῶν ΔΑ καί ΔΒ τοῦ τριγώνου ΔΑΒ, θά ἔχουμε:

$$MN = \parallel \frac{AB}{2} \qquad (1)$$

Γιά τόν ἴδιο λόγο ἀπό τό τρίγωνο ΓΑΒ θά ἔχουμε:

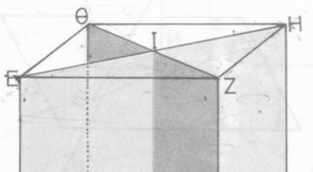
$$K\Lambda = \parallel \frac{AB}{2} \qquad (2)$$

Ἀπό τίς (1) καί (2) βρίσκουμε ὅτι ΜΝ = ∥ ΚΛ καί συνεπῶς τό ΚΛΜΝ εἶναι παραλληλόγραμμο.

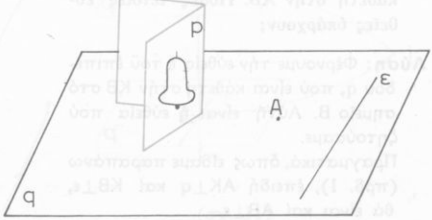
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Νά βρεθοῦν οἱ γωνίες τίς ὁποῖες σχηματίζουν στόν παρακάτω κύβο τά ζεύγη τῶν εὐθειῶν:

α) ΕΖ καί ΒΓ β) ΕΗ καί ΓΒ γ) ΑΓ καί ΘΖ δ) ΔΒ καί ΘΗ



(σχ. Ι)



(σχ. ΙΙ)

2. Στόν κύβο τῆς ἄσκ. 1 τά ἐπίπεδα ΕΑΓΗ καί ΘΖΒΔ τέμνονται κατά τήν εὐθεία ΙΚ. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ ΙΚ εἶναι κάθετη στά ἐπίπεδα ΑΒΓΔ καί ΕΖΗΘ.

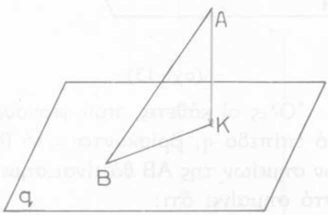
3. Φέρνουμε ἕνα ἐπίπεδο q κάθετο στό μέσο Κ ἑνός εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ. Ἀποδεῖξτε ὅτι κάθε σημεῖο Μ τοῦ q ἀπέχει ἴσα ἀπό τά σημεῖα Α καί Β.

4. Δίνεται μία εὐθεία ε καί ἕνα σημεῖο Α ἑνός ἐπιπέδου q. Τοποθετῆστε τήν κάρτα, πού εἶναι ἐπάνω στό ἐπίπεδο q, ἔτσι ὥστε τό ἕνα φύλλο της p νά παριστάνει ἐπίπεδο, πού νά διέρχεται ἀπό τό Α καί νά εἶναι κάθετο στήν ε (σχ. II).

5. Τά ἴχνη τῶν καθέτων εὐθειῶν, πού φέρνουμε πρός ἕνα ἐπίπεδο p ἀπό δύο σημεῖα Α καί Β ἔξω ἀπό τό p, συμπίπτουν στό ἴδιο σημεῖο Κ τοῦ p. Νά βρεῖτε:
α) Ποιά εἶναι ἡ θέση τῶν σημείων Α,Β,Κ;
β) Ἄν εἶναι (ΑΚ) = 12 cm καί (ΒΚ) = 6 cm, ποιά εἶναι ἡ ἀπόσταση ΑΒ;

Ἀπόσταση σημείου ἀπό ἐπίπεδο.

6.5. Ἄς φέρουμε ἀπό ἕνα σημεῖο Α, πού βρίσκεται ἔξω ἀπό ἕνα ἐπίπεδο q, τήν κάθετη εὐθεία στό ἐπίπεδο q καί μία πλάγια εὐθεία. Ἄν οἱ εὐθεῖες αὐτές τέμνουν τό q στά σημεῖα Κ καί Β ἀντιστοίχως, τό τρίγωνο ΑΚΒ εἶναι ὀρθογώνιο μέ ὑποτείνουσα τήν ΑΒ καί συνεπῶς ΑΚ < ΑΒ. Βλέπουμε λοιπόν ὅτι:



(σχ. 11)

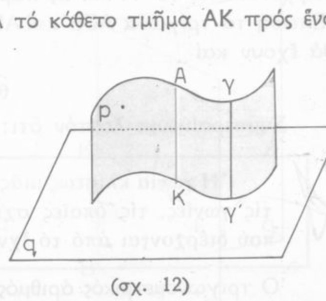
Τό κάθετο τμῆμα ΑΚ, πού φέρνουμε πρός ἕνα ἐπίπεδο q ἀπό ἕνα σημεῖο Α ἔξω ἀπό τό ἐπίπεδο, εἶναι μικρότερο ἀπό κάθε πλάγιο τμῆμα ΑΒ.

Τό τμῆμα αὐτό λέγεται **ἀπόσταση τοῦ σημείου Α ἀπό τό ἐπίπεδο q**. Συνήθως ἡ ἀπόσταση αὐτή ἐκφράζεται μέ τό μῆκος τοῦ ΑΚ, δηλαδή λέμε π.χ. ὅτι ἡ ἀπόσταση τοῦ Α ἀπό τό q εἶναι 11 cm.

Προβολή σχήματος. Κλίση εὐθείας.

6·6. Ἄν φέρουμε ἀπό ἕνα σημεῖο Α τό κάθετο τμῆμα ΑΚ πρός ἕνα ἐπίπεδο q, τό ἴχνος του Κ λέγεται ἐπίσης καί **προβολή τοῦ Α** (ἤ **ὀρθή προβολή τοῦ Α**) στό ἐπίπεδο q (σχ. 12).

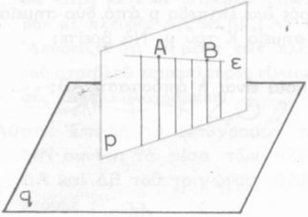
Ἄς θεωρήσουμε τώρα μιά γραμμή γ (ἤ γενικότερα ἕνα σχῆμα) τοῦ χώρου. Οἱ προβολές ὅλων τῶν σημείων τῆς γραμμῆς (ἤ τοῦ σχήματος) στό ἐπίπεδο q ἀποτελοῦν μιά ἄλλη γραμμή γ′ (ἤ ἕνα ἄλλο σχῆμα) πού βρίσκεται στό ἐ-



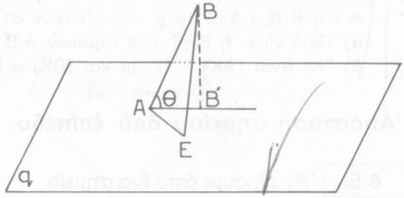
(σχ. 12)

πίπεδο q καί λέγεται **προβολή τῆς γραμμῆς γ (ἤ προβολή τοῦ σχήματος)** στό ἐπίπεδο q.

Ἄς ἐξετάσουμε τώρα πιό ειδικά τήν προβολή μιᾶς εὐθείας ε.



(σχ. 13)



(σχ. 14)

Ὅλες οἱ κάθετες, πού φέρνουμε ἀπό τά σημεῖα τῆς εὐθείας ε (σχ. 13) στό ἐπίπεδο q, βρίσκονται στό ἴδιο ἐπίπεδο p καί συνεπῶς οἱ προβολές τῶν σημείων της AB θά εἶναι σημεῖα τῆς τομῆς τῶν δύο ἐπιπέδων p καί q. Αὐτό σημαίνει ὅτι:

> **Ἡ προβολή μιᾶς εὐθείας πάνω σέ ἐπίπεδο εἶναι εὐθεία.**

Ἔτσι, γιά νά βροῦμε τήν προβολή μιᾶς εὐθείας σέ ἕνα ἐπίπεδο q, δέ χρειάζεται νά παίρνουμε τίς προβολές ὅλων τῶν σημείων της, ἀλλά μόνο δύο σημείων της, π.χ. τῶν A καί B.

Στήν περίπτωση πού ἡ εὐθεία AB τέμνει τό ἐπίπεδο q στό σημεῖο A (σχ. 14), τότε τό A συμπίπτει μέ τήν προβολή του, καί συνεπῶς, ἄν βροῦμε μόνο τήν προβολή B′ τοῦ B, ἡ AB′ θά εἶναι ἡ προβολή τῆς AB.

Ἡ ὀξεία γωνία θ, πού σχηματίζει μία εὐθεία AB μέ τήν προβολή της σ' ἕνα ἐπίπεδο q, λέγεται **γωνία τῆς εὐθείας AB καί τοῦ ἐπιπέδου q** ἤ καί **γωνία κλίσεως τῆς εὐθείας AB ὡς πρός τό ἐπίπεδο q.**

Ἄς φέρουμε τώρα καί μία ἄλλη ὁποιαδήποτε εὐθεία τοῦ q, πού νά διέρχεται ἀπό τό A καί ἄς πάρουμε πάνω σ' αὐτή ἕνα τμῆμα $AE = AB'$. Ἐπειδή τά τρίγωνα ABB′ καί ABE ἔχουν $AB=AB$, $AB'=AE$ καί $BB'<BE$, θά ἔχουν καί

$$\widehat{\theta} < \widehat{BAE}$$

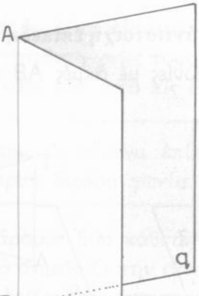
Συμπεραίνουμε λοιπόν ὅτι:

> **Ἡ γωνία κλίσεως μιᾶς εὐθείας AB εἶναι μικρότερη ἀπό ὅλες τίς γωνίες, τίς ὁποῖες σχηματίζει ἡ AB μέ τίς εὐθεῖες τοῦ q, πού διέρχονται ἀπό τό ἴχνος της.**

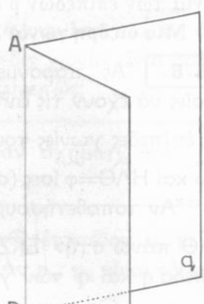
Ὁ τριγωνομετρικός ἀριθμός εφθ λέγεται συνήθως «κλίση» τῆς εὐθείας AB.

Δίεδρες γωνίες.

6.7. Δύο διαφορετικά ἡμιεπίπεδα p καί q, πού ἔχουν κοινή ἀκμή AB, διαχωρίζουν ὅλα τά ἄλλα σημεῖα τοῦ χώρου σέ δύο μέρη. Τά σημεῖα τοῦ κάθε μέρους μαζί μέ τά σημεῖα τῶν ἡμιεπιπέδων αὐτῶν ἀποτελοῦν ἕνα σχῆμα, πού λέγεται **δίεδρη γωνία** (σχ. 15). Ἡ κοινή εὐθεία AB τῶν δύο ἡμιεπιπέδων λέγεται **ἀκμή** τῆς δίεδρης γωνίας, ἐνῶ τά ἡμιεπίπεδα p καί q λέγονται **ἕδρες** της.



(σχ. 15)

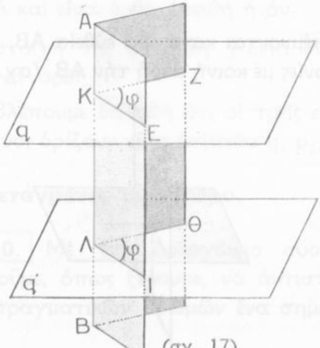


(σχ. 16)

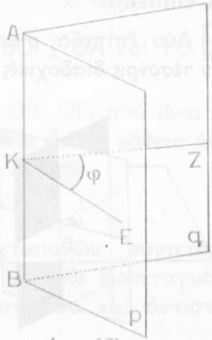
Μία δίεδρη γωνία λέγεται εἰδικότερα:

- **Κυρτή,** ἄν κάθε ἕδρα της, ὅταν προεκταθεῖ, ἀφήνει ὅλη τή δίεδρη γωνία πρός τό ἕνα μέρος της (σχ. 15).
- **Μή κυρτή,** ἄν κάθε ἕδρα της, ὅταν προεκταθεῖ, «κόβει» τή δίεδρη γωνία (σχ. 16).

Ἄν φέρουμε τώρα δύο ἐπίπεδα κάθετα πρός τήν ἀκμή AB μιᾶς δίεδρης γωνίας σέ δύο διαφορετικά σημεῖα της K καί Λ (σχ. 17), βλέπουμε ὅτι οἱ ἐπίπεδες γωνίες $E\widehat{K}Z$ καί $I\widehat{\Lambda}\Theta$, πού σχηματίζονται, εἶναι ἴσες.



(σχ. 17)



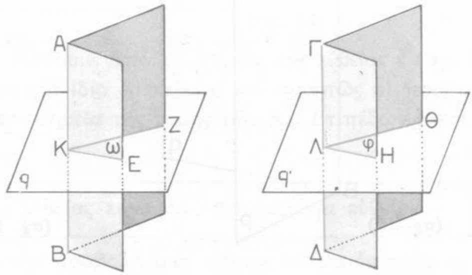
(σχ. 18)

Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι, ἄν φέρουμε ἕνα ἐπίπεδο κάθετο στήν ἀκμή ΑΒ μιᾶς δίεδρης γωνίας καί σέ ὁποιοδήποτε σημεῖο της Κ, σχηματίζεται πάνω στό ἐπίπεδο πάντα ἡ ἴδια ἐπίπεδη γωνία $\widehat{\varphi}$, πού λέγεται **ἀντίστοιχη ἐπίπεδη** τῆς δίεδρης. Συνήθως κατασκευάζουμε τή γωνία $\widehat{\varphi}$ φέρνοντας σέ ἕνα σημεῖο Κ τῆς ἀκμῆς ΑΒ τήν εὐθεία ΚΕ τοῦ p κάθετη στήν ΑΒ καί τήν εὐθεία ΚΖ τοῦ q κάθετη στήν ΑΒ (σχ. 18). Ἡ ὀξεία γωνία $\widehat{\varphi}$ λέγεται καί **γωνία τῶν ἐπιπέδων p καί q.**

Μία δίεδρη γωνία λέγεται «ὀρθή», ὅταν ἡ ἀντίστοιχη ἐπίπεδη εἶναι ὀρθή.

6.8. Ἄς πάρουμε τώρα δύο δίεδρες γωνίες μέ ἀκμές ΑΒ καί ΓΔ, οἱ ὁποῖες νά ἔχουν τίς ἀντίστοιχες ἐπίπεδες γωνίες τους $E\widehat{K}Z = \widehat{\omega}$ καί $H\widehat{\Lambda}\Theta = \widehat{\varphi}$ ἴσες (σχ.19).

Ἄν τοποθετήσουμε τήν $H\widehat{\Lambda}\Theta$ πάνω στήν $E\widehat{K}Z$, τά ἐπίπεδα q καί q' τῶν γωνιῶν $E\widehat{K}Z$ καί $H\widehat{\Lambda}\Theta$ συμπίπτουν. Τότε ὅμως συμπίπτουν καί οἱ εὐθεῖες ΑΒ καί ΓΔ πού εἶναι κάθετες πρός αὐτά, καί συνεπῶς οἱ δύο δίεδρες γωνίες εἶναι ἴσες, γιατί ἐφαρμόζουν. Ἔτσι:



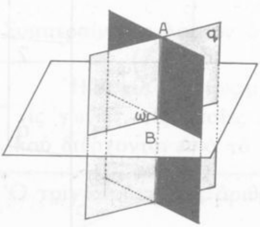
(σχ. 19)

> Δύο δίεδρες γωνίες εἶναι ἴσες, ὅταν ἔχουν τίς ἀντίστοιχες ἐπίπεδες γωνίες τους ἴσες.

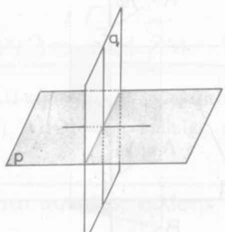
Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι ἡ σύγκριση ἤ γενικά ἡ μελέτη τῶν δίεδρων γωνιῶν ἀνάγεται στή σύγκριση ἤ τή μελέτη τῶν ἀντίστοιχων ἐπίπεδων γωνιῶν τους.

Κάθετα ἐπίπεδα.

6.9. Δύο ἐπίπεδα p καί q, πού τέμνονται κατά μία εὐθεία ΑΒ, σχηματίζουν τέσσερις διαδοχικές δίεδρες γωνίες μέ κοινή ἀκμή τήν ΑΒ (σχ. 20).



(σχ. 20)



(σχ. 21)

Δύο όποιεσδήποτε ἀπέναντι ἀπ' αὐτές εἶναι ἴσες, γιατί οἱ ἀντίστοιχες ἐπίπεδες γωνίες τους εἶναι κατακορυφήν.

Ἄν συμβεῖ τώρα καί οἱ τέσσερις διαδοχικές δίεδρες γωνίες νά εἶναι ἴσες (σχ. 21), τότε τά p καί q λέγονται **κάθετα ἐπίπεδα**. Δηλαδή:

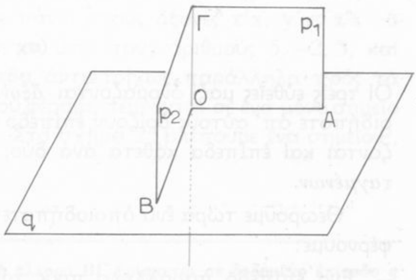
> Δύο ἐπίπεδα p καί q λέγονται κάθετα, ὅταν σχηματίζουν τέσσερις δίεδρες γωνίες ἴσες.

Ἐπειδή ὅμως οἱ τέσσερις ἴσες δίεδρες γωνίες θά ἔχουν ἴσες καί τίς ἀντίστοιχες ἐπίπεδες γωνίες τους, κάθε μία ἀπό τίς ἐπίπεδες γωνίες εἶναι ὀρθή, ὁπότε καί κάθε μία ἀπό τίς δίεδρες τή λέμε ὀρθή. Συνεπῶς:

> Δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα εἶναι κάθετα, ὅταν σχηματίζουν μία ὀρθή δίεδρη γωνία.

Ἄς πάρουμε δύο κάθετες εὐθεῖες ΟΑ καί ΟΒ ἑνός ἐπιπέδου q, κι ἄς φέρουμε στό σημεῖο Ο τήν εὐθεία ΟΓ κάθετη στό q. Ἄν p_1, p_2 εἶναι τά ἐπίπεδα πού ὁρίζονται ἀντιστοίχως ἀπό τίς εὐθεῖες ΟΑ, ΟΓ καί ΟΒ, ΟΓ (βλ. σχ. 22), παρατηροῦμε ὅτι:

- Τά ἐπίπεδα p_1 καί p_2 εἶναι κάθετα, γιατί ἡ ἀντίστοιχη ἐπίπεδη γωνία $\widehat{BOA}$ μιᾶς δίεδρης, πού σχηματίζουν, εἶναι ὀρθή.
- Κάθε ἕνα ἀπό τά ἐπίπεδα p_1 καί p_2 εἶναι κάθετο στό q, γιατί σχηματίζει μέ τό q μιά ὀρθή δίεδρη γωνία· μιά δίεδρη γωνία π.χ. τῶν p_1 καί q ἔχει ἀκμή τήν ΟΑ καί εἶναι ὀρθή, ἐπειδή ἡ ἀντίστοιχή της ἐπίπεδη γωνία $\widehat{ΓOB}$ (ἀφοῦ $BO \perp OA$ καί $ΓO \perp OA$) εἶναι ὀρθή,



(σχ. 22)

Βλέπουμε δηλαδή ὅτι οἱ τρεῖς εὐθεῖες ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, πού εἶναι κάθετες ἀνά δύο, ὁρίζουν τρία ἐπίπεδα q, p_1, p_2, πού εἶναι ἐπίσης κάθετα ἀνά δύο.

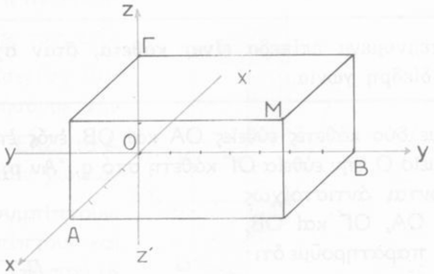
Συντεταγμένες στό χῶρο.

6.10. Μέ ἕνα ὀρθογώνιο σύστημα καρτεσιανῶν συντεταγμένων μποροῦμε, ὅπως ξέρουμε, νά ἀντιστοιχίσουμε σέ κάθε διατεταγμένο ζεῦγος πραγματικῶν ἀριθμῶν ἕνα σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου καί ἀντιστρόφως.

Ὑπάρχει δηλαδή μία ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία μεταξύ τῶν στοιχείων τοῦ $R \times R$ καί τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου.

Ἡ ἔννοια τῶν καρτεσιανῶν συντεταγμένων *«ἐπεκτείνεται»* καί στό χῶρο ὡς ἑξῆς: Παίρνουμε τρεῖς ὁρισμένες εὐθεῖες τοῦ χώρου xx', yy', zz', πού διέρχονται ἀπό ἴδιο σημεῖο Ο καί εἶναι κάθετες ἀνά δύο. Θεωροῦμε ὅτι κάθε μία ἀπ' αὐτές εἶναι «ἄξονας» καί ὀνομάζουμε:

- **ἄξονα τετμημένων** τήν xx'
- **ἄξονα τεταγμένων** τήν yy'
- **ἄξονα κατηγμένων** τήν zz'



(σχ 23)

Οἱ τρεῖς εὐθεῖες μαζί ὀνομάζονται *ἄξονες τῶν συντεταγμένων* καί δυό ὁποιοιδήποτε ἀπ' αὐτούς ὁρίζουν ἐπίπεδο κάθετο στόν τρίτο ἄξονα. Ἔτσι ὁρίζονται καί ἐπίπεδα κάθετα ἀνά δύο, πού λέγονται *ἐπίπεδα τῶν συντεταγμένων*.

Θεωροῦμε τώρα ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Μ τοῦ χώρου καί ἀπ' αὐτό φέρνουμε:

— Ἕνα ἐπίπεδο παράλληλο πρός τό yOz, πού τέμνει τόν ἄξονα $x'x$ στό σημεῖο Α. Ὁ ἀριθμός x, πού ἀντιπροσωπεύει τό Α πάνω στόν ἄξονα $x'x$, λέγεται **τετμημένη τοῦ σημείου Μ.**

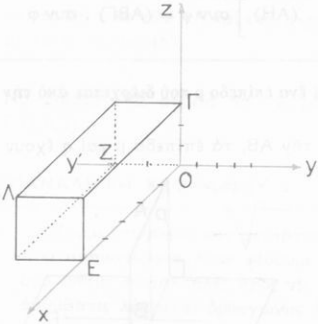
— Ἕνα ἐπίπεδο παράλληλο πρός τό xOz, πού τέμνει τόν ἄξονα $y'y$ στό σημεῖο Β. Ὁ ἀριθμός y, πού ἀντιπροσωπεύει τό Β πάνω στόν ἄξονα $y'y$, λέγεται **τεταγμένη τοῦ σημείου Μ.**

— Ἕνα ἐπίπεδο παράλληλο πρός τό xOy, πού τέμνει τόν ἄξονα $z'z$ στό σημεῖο Γ. Ὁ ἀριθμός z, πού ἀντιπροσωπεύει τό Γ πάνω στόν ἄξονα $z'z$, λέγεται **κατηγμένη τοῦ σημείου Μ.**

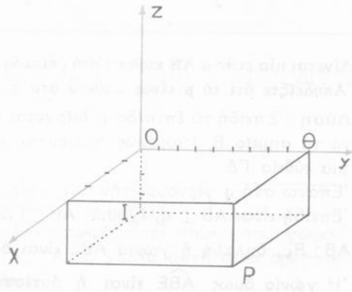
Οἱ τρεῖς ἀριθμοί x,y,z, ὅταν τούς παίρνουμε ὡς διατεταγμένη τριάδα (x,y,z), λέγονται **συντεταγμένες τοῦ Μ.**

Ἔτσι π.χ. ἄν τά Α,Β,Γ ἀντιπροσωπεύονται στούς ἄξονες ἀπό τούς ἀριθμούς 4,7,3 (σχ. 23), οἱ συντεταγμένες τοῦ Μ δίνονται ἀπό τή διατεταγμένη τριάδα (4,7,3) καί γράφουμε Μ (4,7,3).

Βλέπουμε λοιπόν ὅτι σέ κάθε σημεῖο Μ τοῦ χώρου ἀντιστοιχίζεται μιά ὁρισμένη διατεταγμένη τριάδα ἀριθμῶν.



(σχ. 24)



(σχ. 25)

Ἀντιστρόφως, σέ κάθε διατεταγμένη τριάδα ἀριθμῶν, π.χ. τήν (5,–2,3), ἀντιστοιχίζεται ἕνα ὁρισμένο σημεῖο τοῦ χώρου (βλ. σχ. 24). Τό σημεῖο αὐτό βρίσκεται, ἄν πάρουμε πάνω στούς ἄξονες x′x, y′y, z′z τά σημεῖα Ε,Ζ,Γ, πού ἀντιπροσωπεύονται ἀπό τούς ἀριθμούς 5, –2, 3, καί φέρουμε ἀπό τά σημεῖα αὐτά ἐπίπεδα ἀντιστοίχως παράλληλα πρός τά yOz, xOz, xOy. Τά τρία ἐπίπεδα, πού φέραμε, τέμνονται σέ ἕνα μόνο σημεῖο Λ, πού ἔχει συντεταγμένες (5,–2,3). Στό σχῆμα 25 βλέπουμε ἕνα σημεῖο Ρ, πού ἔχει συντεταγμένες (4,9–3).

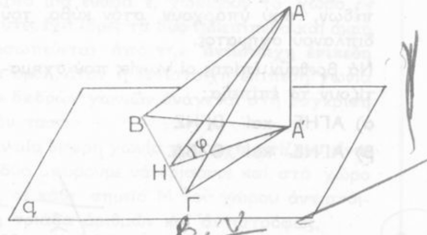
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Δίνεται ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρά ΒΓ βρίσκεται σέ δεδομένο ἐπίπεδο q καί ἡ κορυφή του Α εἶναι ἔξω ἀπό τό q. Παίρνουμε τήν προβολή Α′ τοῦ Α στό ἐπίπεδο q καί τό ὕψος Α′Η τοῦ τριγώνου Α′ΒΓ.**

Νά ἀποδείξετε ὅτι:

α) Τό ΑΗ εἶναι τό ὕψος τοῦ ΑΒΓ.

β) Ἡ γωνία $A'\widehat{H}A = \widehat{\varphi}$ εἶναι ἡ γωνία τῶν δύο ἐπιπέδων ΑΒΓ καί q.



γ) Γιά τά ἐμβαδά (ΑΒΓ) καί (Α′ΒΓ) ἰσχύει ἡ ἰσότητα (Α′ΒΓ) = (ΑΒΓ) συνφ.

Λύση: α) Ἐπειδή ΑΑ′ ⊥ q καί Α′Η ⊥ ΒΓ (ΒΓ∈q), θά εἶναι καί ΑΗ ⊥ ΒΓ (βλ. στά παραδείγματα καί ἐφαρμογές τῆς § 6.4 τό 1) β) Ἀφοῦ εἶναι Α΄Η⊥ΒΓ καί ΑΗ ⊥ ΒΓ, ἡ $\widehat{Α΄ΗΑ} = φ$ εἶναι ἡ ἀντίστοιχη ἐπίπεδη γωνία μιᾶς δίεδρης, πού σχηματίζουν τά ἐπίπεδα ΑΒΓ καί q, δηλ. εἶναι ἡ γωνία τῶν δύο ἐπιπέδων.

γ) Τό τρίγωνο ΑΑ΄Η εἶναι ὀρθογώνιο στό Α΄ καί ἐπομένως (Α΄Η) = (ΑΗ) . συνφ. Τότε ὅμως

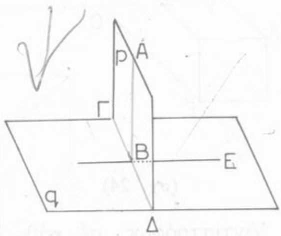
$$(Α΄ΒΓ) = \frac{1}{2}\,(ΒΓ)\ (Α΄Η) = \left[\frac{1}{2}\,(ΒΓ)\,.\,(ΑΗ)\right] συν\,φ = (ΑΒΓ)\,.\,συν\,φ$$

2. **Δίνεται μία εὐθεία ΑΒ κάθετη στό ἐπίπεδο q καί ἕνα ἐπίπεδο p πού διέρχεται ἀπό τήν ΑΒ. Ἀποδεῖξτε ὅτι τό p εἶναι κάθετο στό q.**

Λύση: Ἐπειδή τό ἐπίπεδο p διέρχεται ἀπό τήν ΑΒ, τά ἐπίπεδα p καί q ἔχουν κοινό τό σημεῖο Β, ἐπομένως τέμνονται κατά μία εὐθεία ΓΔ.

Ἐπάνω στό q φέρνουμε τήν εὐθεία ΕΒ⊥ΓΔ. Ἐπειδή εἶναι ΑΒ ⊥ q, ἔχουμε ΑΒ⊥ ΓΔ καί ΑΒ⊥ΒΕ, δηλαδή ἡ γωνία $\widehat{ΑΒΕ}$ εἶναι ὀρθή.

Ἡ γωνία ὅμως $\widehat{ΑΒΕ}$ εἶναι ἡ ἀντίστοιχη ἐπίπεδη μιᾶς δίεδρης, πού σχηματίζεται ἀπό τά ἐπίπεδα p καί q. Συνεπῶς τά ἐπίπεδα p καί q εἶναι κάθετα.



● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

6. Δίνεται ἕνα ἐπίπεδο q καί ἕνα τμῆμα ΑΒ μέ Β ∈ q. Ἄν εἶναι (ΑΒ) = 10 cm καί ἡ προβολή Α΄Β τοῦ τμήματος ΑΒ στό ἐπίπεδο q ἔχει μῆκος (Α΄Β) = 6 cm, νά ὑπολογισθεῖ ἡ ἀπόσταση τοῦ Α ἀπό τό ἐπίπεδο q.

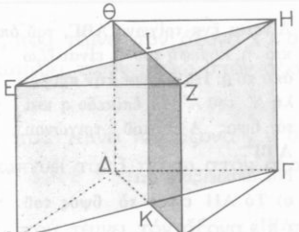
7. Ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ μέ Β ∈ p σχηματίζει μέ τό ἐπίπεδο p γωνία 30°. Ἄν εἶναι (ΑΒ) = 8 cm, νά ὑπολογισθεῖ τό μῆκος τῆς προβολῆς τοῦ ΑΒ στό ἐπίπεδο p καί ἡ ἀπόσταση τοῦ Α ἀπό τό p.

8. Νά βρεθοῦν τά ζεύγη τῶν κάθετων ἐπιπέδων, πού ὑπάρχουν στόν κύβο τοῦ διπλανοῦ σχήματος.

Νά βρεθοῦν ἐπίσης οἱ γωνίες πού σχηματίζουν τά ἐπίπεδα:

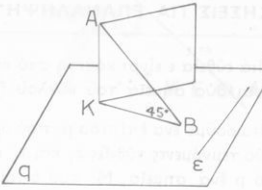
α) ΑΓΗΕ καί ΒΓΗΖ

β) ΑΓΗΕ καί ΘΖΒΔ.



9. Δίνεται ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{Α} = 90°$), τοῦ ὁποίου ἡ πλευρά ΑΒ βρίσκεται σέ δεδομένο ἐπίπεδο p. Ἄν (ΑΒ) = 5 cm, (ΒΓ) = 13 cm καί ἡ γωνία τῶν ἐπιπέδων ΑΒΓ καί p εἶναι 60°, νά βρεθεῖ τό ἐμβαδό τῆς προβολῆς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ στό ἐπίπεδο p.

10. Τό διπλανό σχῆμα δείχνει μία κομμένη κάρτα πάνω σ' ἕνα τραπέζι (ἐπίπεδο) q καί μία εὐθεία ε τοῦ q. Τοποθετῆστε τήν κάρτα κατά τέτοιο τρόπο πάνω στό q, ὥστε τό σημεῖο Β νά εἶναι πάνω στήν ε καί τό ἐπίπεδο τῶν ΑΒ καί ε νά σχηματίζει μέ τό q γωνία 45°.



11. Νά βρεθοῦν τά σημεῖα τοῦ χώρου: Α (–2,3,2), Β(0,0,0), Γ(1,1,1), Δ(0,0,2), Ε (1,0,3).

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 6

1. Ὁρίζουμε ὅτι **γωνία τῶν ἀσύμβατων εὐθειῶν ε καί ε΄** λέγεται ἡ ὀξεία γωνία, πού σχηματίζεται, ὅταν φέρουμε ἀπό ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τοῦ χώρου δύο εὐθεῖες παράλληλες πρός τίς ε καί ε΄. Ἄν ἡ γωνία αὐτή εἶναι ὀρθή, οἱ ἀσύμβατες λέγονται ὀρθογώνιες ἤ κάθετες.

2. Μία εὐθεία πού τέμνει ἕνα ἐπίπεδο p καί εἶναι κάθετη σέ **δύο** εὐθεῖες τοῦ p, πού διέρχονται ἀπό τό ἴχνος της, (ἤ εἶναι ὀρθογώνια πρός δύο μή παράλληλες εὐθεῖες τοῦ p) λέγεται **κάθετη στό p.** Ὅταν μία εὐθεία εἶναι κάθετη σ' ἕνα ἐπίπεδο p, εἶναι κάθετη σέ **ὅλες** τίς εὐθεῖες τοῦ p, πού διέρχονται ἀπό τό ἴχνος της. Τονίζεται ὅτι:
   - Σέ ἕνα σημεῖο ἑνός ἐπιπέδου p (ἤ ἀπό ἕνα σημεῖο πού βρίσκεται ἔξω ἀπό τό p) μποροῦμε νά φέρουμε **μία μόνο** κάθετη εὐθεία στό p.
   - Δύο εὐθεῖες κάθετες στό ἴδιο ἐπίπεδο εἶναι παράλληλες.

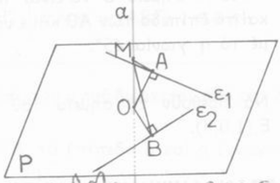
3. Τό τμῆμα ΑΒ, πού φέρνουμε κάθετο πρός ἕνα ἐπίπεδο p, ἀπό ἕνα σημεῖο Α, τό ὁποῖο βρίσκεται ἔξω ἀπό τό p, λέγεται **ἀπόσταση** τοῦ σημείου Α ἀπό τό ἐπίπεδο p, ἐνῶ τό ἴχνος του Β λέγεται καί **προβολή τοῦ Α** πάνω στό p. Ἡ ἀπόσταση ΑΒ εἶναι μικρότερη ἀπό κάθε ἄλλο τμῆμα, πού συνδέει τό σημεῖο Α μέ ὁποιοδήποτε ἄλλο σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου p.
   Τό σύνολο τῶν προβολῶν ὅλων τῶν σημείων ἑνός σχήματος σ σ' ἕνα ἐπίπεδο p ἀποτελεῖ ἕνα σχῆμα τοῦ p, πού λέγεται **προβολή τοῦ σ** στό ἐπίπεδο p. **Ἡ προβολή μιᾶς εὐθείας πάνω σέ ἐπίπεδο εἶναι εὐθεία.**

4. Δύο ἡμιεπίπεδα, πού διέρχονται ἀπό μιά εὐθεία ε, χωρίζουν τό χῶρο σέ δύο **δίεδρες γωνίες**. Κάθε μία ἀπ' αὐτές ἔχει ἕδρες τά δύο ἡμιεπίπεδα καί ἀκμή τήν ε. Κάθε δίεδρη γωνία ἀντιπροσωπεύεται ἀπό τήν **ἀντίστοιχη ἐπίπεδη** γωνία της. Ἔτσι, μιά δίεδρη εἶναι ὀρθή, ὅταν ἡ ἀντίστοιχη ἐπίπεδη γωνία εἶναι ὀρθή. Γενικά, ἡ σύγκριση τῶν δίεδρων γωνιῶν ἀνάγεται στή σύγκριση τῶν ἀντίστοιχων ἐπιπέδων γωνιῶν τους.
   Δύο ἐπίπεδα λέγονται **κάθετα,** ὅταν μία δίεδρη γωνία πού σχηματίζουν εἶναι ὀρθή. Μέ τρία ἐπίπεδα κάθετα ἀνά δύο μποροῦμε νά ὁρίσουμε καί στό χῶρο ἕνα **σύστημα συντεταγμένων**. Τότε, σέ κάθε σημεῖο Μ τοῦ χώρου ἀντιστοιχίζεται μία ὁρισμένη διατεταγμένη τριάδα ἀριθμῶν καί ἀντιστρόφως.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ*

12. Μιά εὐθεία ε εἶναι κάθετη στό κέντρο Ο ἑνός κυκλικοῦ δίσκου (O,R). Ἄν Α καί Β εἶναι δύο σημεῖα τοῦ κύκλου (O,R) καί $M \in \varepsilon$, νά ἀποδείξετε ὅτι $MA = MB$.

13. Θεωροῦμε ἕνα ἐπίπεδο p, πού ὁρίζεται ἀπό δύο τεμνόμενες εὐθεῖες ε_1 καί ε_2 καί ἔξω ἀπό τό p ἕνα σημεῖο Μ τοῦ ὁποίου οἱ ἀποστάσεις ΜΑ καί ΜΒ ἀπό τίς εὐθεῖες ε_1 καί ε_2 εἶναι ἴσες. Φέρνουμε ἀπό τό Μ τήν κάθετη εὐθεία πρός τό p καί ὀνομάζουμε Ο τό ἴχνος της καί Σ ἕνα ὁποιοδήποτε ἄλλο σημεῖο της. Νά ἀποδείξετε ὅτι:
α) $OA = OB$ β) $\Sigma A = \Sigma B$.



14. Οἱ ἀποστάσεις δύο σημείων Α καί Β ἀπό ἕνα ἐπίπεδο p εἶναι $(AA') = 6$ cm καί $(BB') = 9$ cm. Ἄν εἶναι $(AB) = 5$ cm, νά βρεῖτε τό μῆκος τῆς προβολῆς τοῦ ΑΒ στό p.

15. Τό ἐπίπεδο ἑνός τριγώνου ΑΒΓ εἶναι παράλληλο πρός ἕνα ἐπίπεδο p. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ προβολή Α΄Β΄Γ΄ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ στό p εἶναι τρίγωνο ἴσο μέ τό ΑΒΓ.

16. Ἕνα ἰσόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ μέ πλευρά α ἔχει τήν πλευρά του ΒΓ ἐπάνω σέ δεδομένο ἐπίπεδο q. Ἄν ἡ γωνία τῶν ἐπιπέδων ΑΒΓ καί q εἶναι 30°, νά βρεῖτε τό ἐμβαδό τῆς προβολῆς τοῦ ΑΒΓ στό ἐπίπεδο q.

7ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

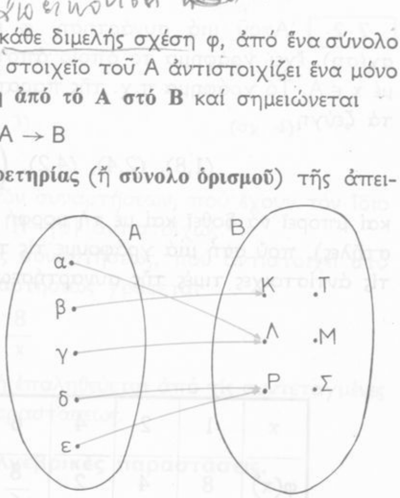
ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Συνάρτηση μιᾶς μεταβλητῆς.

7·1. Στή Β' τάξη μάθαμε ὅτι κάθε διμελής σχέση φ, ἀπό ἕνα σύνολο Α σ' ἕνα σύνολο Β, ἡ ὁποία σέ κάθε στοιχεῖο τοῦ Α ἀντιστοιχίζει ἕνα μόνο στοιχεῖο τοῦ Β, λέγεται **ἀπεικόνιση ἀπό τό Α στό Β** καί σημειώνεται

$$φ\colon A \to B$$

Τό σύνολο Α λέγεται **σύνολο ἀφετηρίας** (ἤ **σύνολο ὁρισμοῦ**) τῆς ἀπεικονίσεως φ καί τό Β λέγεται **σύνολο ἀφίξεως.** Στό διπλανό σχῆμα βλέπουμε μιά ἀπεικόνιση τοῦ συνόλου $A = \{α,β,γ,δ,ε\}$ στό σύνολο $B = \{Κ,Λ,Μ,Ρ,Σ,Τ\}$.



(σχ. 1)

Ἄν στό στοιχεῖο x τοῦ συνόλου Α ἀντιστοιχίζεται (ἀπό τήν ἀπεικόνιση φ) τό στοιχεῖο y τοῦ συνόλου Β, τότε τό **y** λέγεται **εἰκόνα τοῦ x** καί σημειώνεται φ(x).

Μάθαμε ἀκόμη ὅτι, ἄν τά Α καί Β εἶναι ἀριθμητικά σύνολα, ἡ ἀπεικόνιση $φ : A \to B$ λέγεται καί **συνάρτηση μέ πεδίο ὁρισμοῦ Α** πού παίρνει **τιμές** στό Β. Συνήθως θεωροῦμε ὅτι μιά συνάρτηση παίρνει τιμές σέ ὅλο τό σύνολο R τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, δηλαδή θεωροῦμε ὅτι εἶναι

$$φ : A \to R$$

Γιά νά προσδιορίσουμε λοιπόν μιά συνάρτηση, πρέπει νά ξέρουμε

- τό πεδίο ὁρισμοῦ της Α, τό ὁποῖο εἶναι ὑποσύνολο τοῦ R,
- τόν «κανόνα» μέ τόν ὁποῖο θά ἀντιστοιχίζεται σέ κάθε $x \in A$ ἕνας πραγματικός ἀριθμός.

Ἔτσι π.χ. γιά νά προσδιορίσουμε μιά συνάρτηση φ μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό $A = \{1,2,4,6,7\}$, θά πρέπει νά ὁρίσουμε ἕναν *κανόνα*, ὁ ὁποῖος θά ἀντιστοιχίζει σέ κάθε $x \in A$ ἕναν πραγματικό ἀριθμό $\varphi(x)$. Ἕνας τέτοιος κανόνας ὁρίζεται π.χ. μέ τήν ἰσότητα

$$(1) \qquad \varphi(x) = \frac{8}{x}$$

ἡ ὁποία λέγεται **τύπος** τῆς συναρτήσεως φ. Στή συνάρτηση αὐτή εἰκόνες τῶν στοιχείων 1,2,4,... τοῦ Α εἶναι ἀντιστοίχως οἱ ἀριθμοί

$$\varphi(1) = \frac{8}{1} = 8, \quad \varphi(2) = \frac{8}{2} = 4, \quad \varphi(4) = \frac{8}{4} = 2, \ldots,$$

οἱ ὁποῖοι λέγονται τώρα **τιμές** τῆς συναρτήσεως φ γιά $x = 1$, $x = 2$, $x = 4, \ldots$

7·2. Ἀφοῦ μιά συνάρτηση φ εἶναι ἀπεικόνιση (δηλαδή διμελής σχέση), ἔχει γράφημα τό ὁποῖο ἀποτελεῖται ἀπό ὅλα τά ζεύγη $(x, \varphi(x))$ μέ $x \in A$. Τό γράφημα π.χ. τῆς παραπάνω συναρτήσεως ἀποτελεῖται ἀπό τά ζεύγη

$$(1,8),\ (2,4),\ (4,2),\ \left(6, \frac{8}{6}\right),\ \left(7, \frac{8}{7}\right)$$

καί μπορεῖ νά δοθεῖ καί μέ τή μορφή ἑνός πίνακα μέ δύο γραμμές (ἤ δύο στῆλες), πού στή μιά γράφουμε τίς τιμές τοῦ Α καί στήν ἄλλη γράφουμε τίς ἀντίστοιχες τιμές τῆς συναρτήσεως.

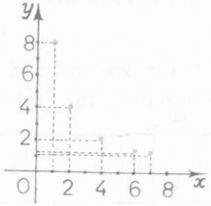
x	1	2	4	6	7
$\varphi(x)$	8	4	2	$\frac{8}{6}$	$\frac{8}{7}$

x	$\varphi(x)$
1	8
2	4
4	2
6	$\frac{8}{6}$
7	$\frac{8}{7}$

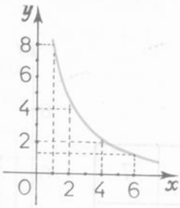
Κάθε ἕνας ἀπό τούς πίνακες αὐτούς λέγεται **πίνακας τιμῶν** τῆς συναρτήσεως φ.

Ἄς πάρουμε ἕνα σύστημα συντεταγμένων καί ἄς σημειώσουμε ὅλα τά σημεῖα πού ἔχουν συντεταγμένες τά ζεύγη τοῦ γραφήματος τῆς φ. Τό σύνολο τῶν σημείων αὐτῶν δίνει τή γεωμετρική εἰκόνα τοῦ γραφήματος καί λέγεται **γραφική παράσταση** τῆς συναρτήσεως φ. Στό σχῆμα 2 δίνεται ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως, πού ἔχει τύπο τόν

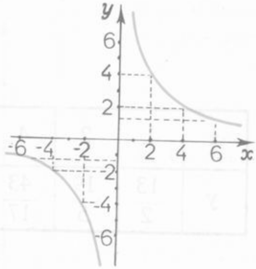
(1) καί πεδίο ὁρισμοῦ τό $A = \{1,2,4,6,7\}$, ἐνῶ στά σχήματα 3 καί 4



(σχ. 2)



(σχ. 3)



(σχ. 4)

δίνονται οἱ γραφικές παραστάσεις τῶν συναρτήσεων, πού ἔχουν τόν ἴδιο τύπο καί πεδία ὁρισμοῦ τά R^+ καί $R-\{0\}$ ἀντιστοίχως.[1]

Ἄν ὀνομάσουμε y τήν τιμή τῆς συναρτήσεως, πού ἀντιστοιχεῖ στό $x \in A$, ὁ τύπος τῆς παραπάνω συναρτήσεως γράφεται

$$(2) \qquad y = \frac{8}{x}$$

Εἶναι φανερό ὅτι ἡ ἰσότητα αὐτή ἐπαληθεύεται ἀπό τίς συντεταγμένες ὅλων τῶν σημείων τῆς γραφικῆς παραστάσεως.

Συναρτήσεις πού ὁρίζονται μέ ἀλγεβρικές παραστάσεις.

7·3. Ἄς θεωρήσουμε μιά ἀλγεβρική παράσταση, πού περιέχει μόνο ἕνα γράμμα x, π.χ. τήν

$$\frac{2x^2+11}{x^2+1}$$

καί ἄς ὑποθέσουμε ὅτι τό x παίρνει τιμές στό σύνολο $A = \{1,2,4,6,7\}$.

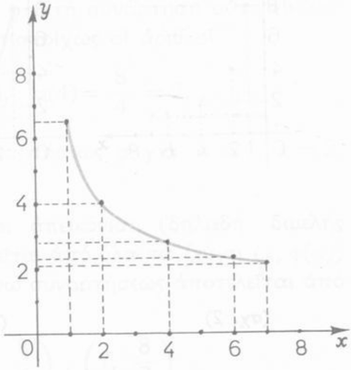
Μέ τήν ἀλγεβρική αὐτή παράσταση μποροῦμε νά ὁρίσουμε μιά συνάρτηση φ, ἡ ὁποία ἔχει πεδίο ὁρισμοῦ τό A καί τύπο

$$(3) \qquad y = \frac{2x^2+11}{x^2+1}$$

1. Μέ R^+ σημειώνουμε τό σύνολο τῶν θετικῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Μέ τό σύμβολο $R-\{0\}$ σημειώνουμε τό σύνολο, πού ἔχει στοιχεῖα ὅλους τούς πραγματικούς ἀριθμούς ἐκτός ἀπό τό μηδέν.

Δηλαδή ἡ συνάρτηση φ εἶναι τέτοια, ὥστε σέ κάθε τιμή $x \in A$, π.χ. τήν $x=1$, ἀντιστοιχίζεται ἡ ἀριθμητική τιμή τῆς ἀλγεβρικῆς παραστάσεως γιά $x=1$. Ἄν βροῦμε τίς ἀριθμητικές τιμές τῆς παραστάσεως γιά ὅλες τίς τιμές τοῦ x, σχηματίζουμε τόν παρακάτω πίνακα τιμῶν της καί

x	1	2	4	6	7
y	$\frac{13}{2}$	$\frac{19}{5}$	$\frac{43}{17}$	$\frac{83}{37}$	$\frac{109}{50}$



(σχ. 5)

τή γραφική της παράσταση, ἡ ὁποία θά ἀποτελεῖται ἀπό τά σημεῖα $\left(1, \frac{13}{2}\right)$, $\left(2, \frac{19}{5}\right)$, $\left(4, \frac{43}{17}\right)$,... Βλέπουμε λοιπόν ὅτι:

> Κάθε ἀλγεβρική παράσταση, πού περιέχει ἕνα γράμμα x, ὁρίζει μιά συνάρτηση, ἡ ὁποία ἔχει πεδίο ὁρισμοῦ τό σύνολο στό ὁποῖο παίρνει τιμές τό γράμμα x.

Ἄν σέ μιά τέτοια συνάρτηση δέ δίνεται τό σύνολο στό ὁποῖο παίρνει τιμές τό γράμμα x, τότε παίρνουμε γιά πεδίο ὁρισμοῦ της τό σύνολο ὅλων τῶν τιμῶν τοῦ x, γιά τίς ὁποῖες ἡ ἀλγεβρική παράσταση ἔχει νόημα πραγματικοῦ ἀριθμοῦ. Ἔτσι π.χ. ἄν δίνεται ἡ συνάρτηση φ πού ἔχει τύπο τόν (3), δίχως νά δίνεται τό πεδίο ὁρισμοῦ της, τότε παίρνουμε γιά πεδίο ὁρισμοῦ τῆς φ τό σύνολο R, γιατί τό δεύτερο μέλος τῆς (3) ἔχει νόημα πραγματικοῦ ἀριθμοῦ γιά κάθε $x \in R$. Ἡ συνάρτηση αὐτή ἔχει γραφική παράσταση μιά «συνεχή» γραμμή, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπό τά σημεῖα τοῦ σχήματος 5.

Ἐπίσης, ἄν δίνεται ἡ συνάρτηση μέ τύπο

$$(4) \qquad y = \frac{2x+3}{(x-1)(x-5)}$$

παίρνουμε γιά πεδίο ὁρισμοῦ της τό $A = R - \{1,5\}$, γιατί τό δεύτερο μέλος τῆς (4) δέν ἔχει νόημα πραγματικοῦ ἀριθμοῦ γιά $x=1$ καί $x=5$.

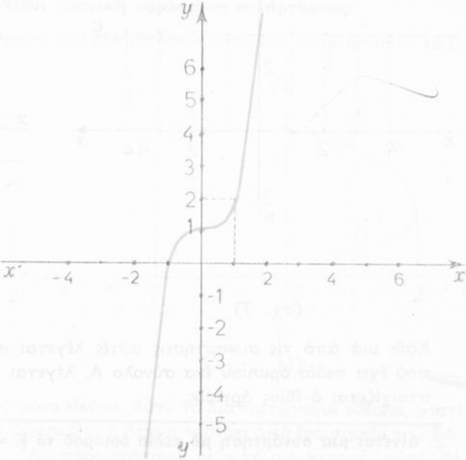
7.4. Ἂν ἡ ἀλγεβρική παράσταση, ἡ ὁποία ὁρίζει μιά συνάρτηση, εἶναι πολυώνυμο ὡς πρός x, τότε ἡ συνάρτηση λέγεται **πολυωνυμική**. Μιά τέτοια συνάρτηση εἶναι π.χ. αὐτή πού ἔχει τύπο

$$y = x^3 + 1$$

Στόν παρακάτω πίνακα δίνονται μερικές τιμές της καί

x	–2	–1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
y	–7	0	$\frac{7}{8}$	1	$\frac{9}{8}$	2	9

ἀπ᾽αὐτές βλέπουμε ὅτι ἡ γραφική της παράσταση θά εἶναι μιά *συνεχής* γραμμή, πού διέρχεται ἀπό τά σημεῖα $(-2,-7)$, $(-1,0)$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{8}\right)$, $(0,1), \ldots$



(σχ. 6)

Εἶναι φανερό ὅτι σέ κάθε πολυωνυμική συνάρτηση, πού δέ δίνεται τό πεδίο ὁρισμοῦ της, παίρνουμε γιά πεδίο ὁρισμοῦ τό σύνολο R.

Ἂν ἡ ἀλγεβρική παράσταση, ἡ ὁποία ὁρίζει μιά συνάρτηση, εἶναι πηλίκο δύο ἀκέραιων πολυωνύμων ὡς πρός x, τότε ἡ συνάρτηση λέγεται **ρητή**. Μιά τέτοια συνάρτηση εἶναι π.χ. αὐτή πού ἔχει τύπο

$$y = \frac{x^2+3}{x+1}$$

καί πεδίο ὁρισμοῦ τό $A = R - \{-1\}$. Ἐπίσης ἡ συνάρτηση, πού ἔχει τύπο τόν (4), εἶναι ρητή καί ἔχει, ὅπως εἴπαμε, πεδίο ὁρισμοῦ τό $A = R - \{1{,}5\}$.

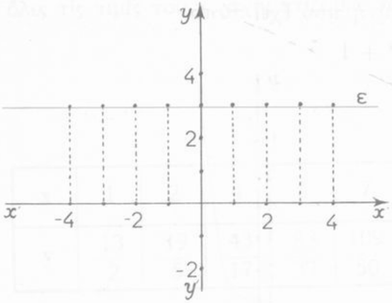
Γενικά, σέ κάθε ρητή συνάρτηση φ, πού δέ δίνεται τό πεδίο ὁρισμοῦ της, παίρνουμε γιά πεδίο ὁρισμοῦ τό $A = R - \{\rho_1, \rho_2, \ldots\}$, ὅπου $\rho_1, \rho_2, \ldots$ εἶναι οἱ ρίζες τοῦ παρονομαστῆ της.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

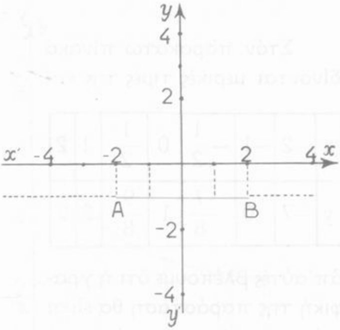
1. **Νά βρεθεῖ ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως, πού ἔχει πεδίο ὁρισμοῦ τό R καί τύπο τόν y = 3. Ἐπίσης, νά βρεθεῖ ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως, πού ἔχει πεδίο ὁρισμοῦ τό $E = \{x: -2 \leqslant x \leqslant 2\}$ καί τύπο $y = -1$.**

Λύση. Ἡ γραφική παράσταση τῆς πρώτης συναρτήσεως εἶναι μιά εὐθεία παράλληλη πρός τόν ἄξονα Ox (σχ. 7).

Ἡ γραφική παράσταση τῆς δεύτερης συναρτήσεως εἶναι ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ παράλληλο πρός τόν ἄξονα Ox (σχ. 8).



(σχ. 7)



(σχ. 8)

Κάθε μιά ἀπό τίς συναρτήσεις αὐτές λέγεται *σταθερή*. Γενικά, μία συνάρτηση φ, πού ἔχει πεδίο ὁρισμοῦ ἕνα σύνολο Α, λέγεται **σταθερή**, ὅταν σέ κάθε $x \in A$ ἀντιστοιχίζεται ὁ ἴδιος ἀριθμός.

---

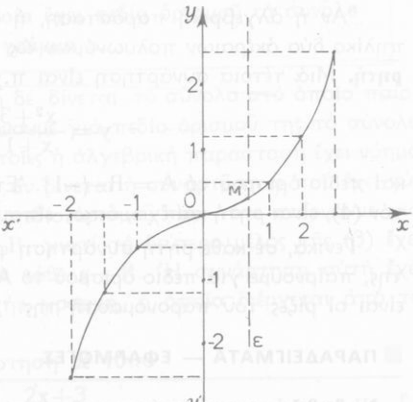
2. **Δίνεται μιά συνάρτηση μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό $E = \{x: -2 \leqslant x \leqslant 2\}$ καί τύπο**

$$y = \frac{x}{4}\,(x^2+1)$$

Νά βρεθεῖ ἡ γραφική της παράσταση γ καί νά ἀποδειχθεῖ ὅτι κάθε εὐθεία ε παράλληλη πρός τόν ἄξονα Oy τέμνει τήν γ σέ ἕνα τό πολύ σημεῖο.

Λύση: Ὁ παρακάτω πίνακας δίνει μερικές τιμές τῆς συναρτήσεως, μέ τή βοήθεια τῶν ὁποίων κατασκευάζουμε τή γραφική της παράσταση γ.

x	−2	−1,5	−1	0	1	1,5	2
y	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{39}{32}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{39}{32}$	$\frac{5}{2}$



(σχ. 9)

Ἄς φέρουμε τώρα μιά εὐθεία ε παράλληλη πρός τόν ἄξονα Oy, ἡ ὁποία τέμνει τόν ἄξονα Ox στό σημεῖο x=0,7. Ἡ ε τέμνει καί τή γ σέ ἕνα σημεῖο Μ πού ἔχει συντεταγμένες

$$x = 0{,}7 \quad , \quad y = 0{,}26$$

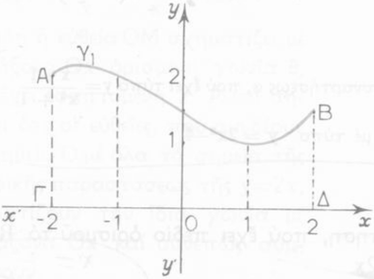
γιατί εἰκόνα τῆς τιμῆς x = 0,7 εἶναι ὁ ἀριθμός 0,26. Ἡ ε δέν μπορεῖ νά τέμνει τή γ καί σέ ἄλλο σημεῖο Μ', γιατί τότε ἡ τιμή x=0,7 θά εἶχε δύο εἰκόνες, πράγμα ἄτοπο (ἀφοῦ κάθε στοιχεῖο τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ μιᾶς συναρτήσεως ἔχει μιά μόνο εἰκόνα).

3. **Στά παρακάτω σχήματα δίνονται δύο γραμμές γ_1 καί γ_2, πού οἱ προβολές τους στόν ἄξονα Ox εἶναι τό ἴδιο σύνολο $E = \{x: -2 \leqslant x \leqslant 2\}$.**
Νά δικαιολογήσετε ὅτι:

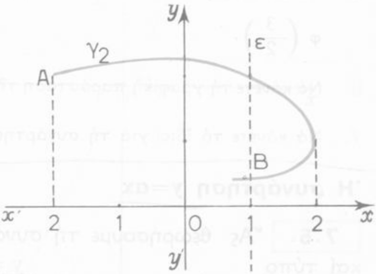
— **Ἡ γραμμή γ_1 εἶναι γραφική παράσταση μιᾶς συναρτήσεως, πού ἔχει πεδίο ὁρισμοῦ τό E, καί νά βρεῖτε τίς τιμές της γιά $x = -1, 0, 1$.**

— **Ἡ γραμμή γ_2 δέν μπορεῖ νά εἶναι γραφική παράσταση συναρτήσεως.**

Λύση: Ἡ γ_1 εἶναι γραφική παράσταση μιᾶς συναρτήσεως, πού ἔχει πεδίο ὁρισμοῦ τό E,



(σχ. 10)



(σχ. 11)

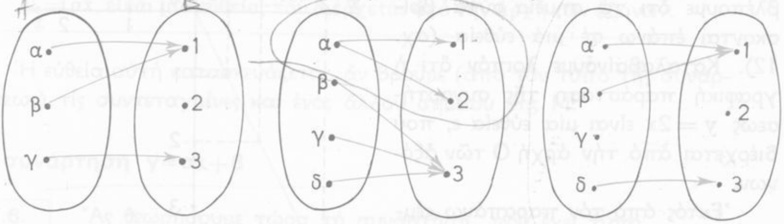
γιατί κάθε στοιχεῖο $x \in E$ ἔχει μιά μόνο εἰκόνα. Αὐτό τό διαπιστώνουμε εὔκολα, γιατί κάθε εὐθεία παράλληλη πρός τόν ἄξονα Oy, ἡ ὁποία περνάει ἀπό ἕνα σημεῖο τοῦ ΓΔ, τέμνει τή γ_1 σέ ἕνα μόνο σημεῖο. Ἄν παραστήσουμε μέ φ τή συνάρτηση αὐτή, θά ἔχουμε

$$\varphi(-1) = 2, \quad \varphi(0) = 1{,}5, \quad \varphi(1) = 1$$

Ἡ γ_2 δέν εἶναι γραφική παράσταση συναρτήσεως, γιατί π.χ. ἡ εὐθεία ε, πού περνάει ἀπό τό σημεῖο 1 καί εἶναι παράλληλη πρός τόν Oy, τέμνει τή γ_2 σέ δύο σημεῖα καί ἑπομένως τό στοιχεῖο 1 ἔχει δύο εἰκόνες.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ποιά ἀπό τά παρακάτω σχήματα ὁρίζουν ἀπεικόνιση;



(α) (β) (γ)

2. Ἄν ἡ συνάρτηση φ ἔχει τύπο $\varphi(x) = \dfrac{4}{x-1}$ καί πεδίο ὁρισμοῦ τό $A = \{0, 2, 3, 4, 5, 6\}$, νά βρεῖτε τό γράφημά της, νά γράψετε τόν πίνακα τιμῶν της καί νά κάνετε τή γραφική της παράσταση.

3. Τό ἴδιο γιά τή συνάρτηση f, πού ἔχει τύπο $f(x) = x^3 - 1$ καί πεδίο ὁρισμοῦ τό $A = \left\{-2, -\frac{3}{2}, -1, 0, 1, \frac{3}{2}, 2\right\}$.

4. Νά βρεῖτε τά πεδία ὁρισμοῦ τῶν συναρτήσεων, πού ἔχουν τύπους

$$y = x^2 - 2x, \quad y = \frac{2x+3}{x^2-4x+3}, \quad y = \frac{1}{x^2-1}, \quad y = \sqrt{2x-1}$$

5. Ἄν εἶναι $\varphi(x) = -x^2 + \frac{1}{2}$, νά βρεῖτε τίς εἰκόνες $\varphi(0)$, $\varphi(-2)$, $\varphi\left(-\frac{1}{2}\right)$, $\varphi(1)$, $\varphi\left(\frac{3}{2}\right)$.

6. Νά κάνετε τή γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως φ, πού ἔχει τύπο $y = \frac{x+1}{x^2+1}$

7. Νά κάνετε τό ἴδιο γιά τή συνάρτηση μέ τύπο $y = 2x^3 - 4$

Ἡ συνάρτηση $y = \alpha x$

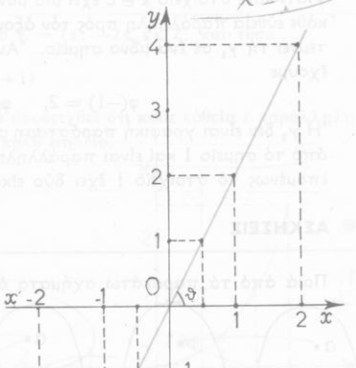
7.5. Ἄς θεωρήσουμε τή συνάρτηση, πού ἔχει πεδίο ὁρισμοῦ τό $\mathbb{R}$ καί τύπο

$$y = 2x$$

καί ἄς καταρτίσουμε τόν παρακάτω πίνακα

x	−2	−1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
y	−4	−2	−1	0	1	2	4

πού δίνει μερικές τιμές της. Ἄν κατασκευάσουμε σέ ἕνα ὀρθογώνιο σύστημα ἀξόνων τά σημεῖα... $(-1,-2)$, $\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$ $(0,0)$, $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, ..., βλέπουμε ὅτι τά σημεῖα αὐτά βρίσκονται ἐπάνω σέ μιά εὐθεία (σχ. 12). Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως $y = 2x$ εἶναι μία εὐθεία ε, πού διέρχεται ἀπό τήν ἀρχή O τῶν ἀξόνων.

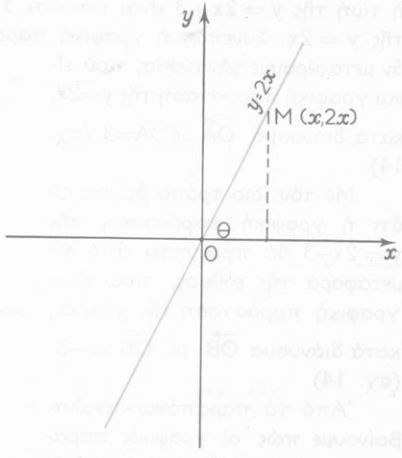


(σχ. 12)

Ἐκτός ἀπό τόν παραπάνω «ἐμπειρικό» τρόπο, μποροῦμε νά ἀποδείξουμε καί θεωρητικά ὅτι ἡ γραφική παράσταση τῆς $y = 2x$ εἶναι εὐθεία. Πραγματικά, ἡ $y = 2x$ γιά $x = 0$ δίνει $y = 2.0 = 0$ καί αὐτό σημαίνει ὅτι τό σημεῖο (0,0) ἀνήκει στή γραφική παράσταση τῆς $y=2x$. Ἄς θεωρήσουμε τώρα ἕνα ὁποιοδήποτε ἄλλο σημεῖο $M(x,y)$ τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῆς $y=2x$ καί ἄς ὀνομάσουμε θ τήν γωνία $x\widehat{O}M$. Ἐπειδή τό M ἔχει συντεταγμένες $(x,2x)$, θά ἔχουμε

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{y}{x} = \frac{2x}{x} = 2,$$

δηλαδή ἡ εὐθεία OM σχηματίζει μέ τόν ἄξονα Ox ὁρισμένη γωνία θ, πού ἔχει ἐφαπτομένη 2. Αὐτό σημαίνει ὅτι οἱ εὐθεῖες, πού συνδέουν τό σημεῖο O μέ ὅλα τά σημεῖα τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῆς $y=2x$, σχηματίζουν τήν ἴδια γωνία μέ τόν ἄξονα Ox καί συνεπῶς συμπίπτουν.



(σχ. 13)

Δείξαμε λοιπόν ὅτι κάθε σημεῖο M, πού οἱ συντεταγμένες του ἐπαληθεύουν τήν $y=2x$, βρίσκεται ἐπάνω σέ μία εὐθεία πού σχηματίζει μέ τόν ἄξονα Ox γωνία θ τέτοια, ὥστε $\varepsilon\varphi\theta=2$. Ἀντιστρόφως, οἱ συντεταγμένες κάθε σημείου $M(x,y)$ τῆς εὐθείας αὐτῆς ἐπαληθεύουν τήν $y=2x$, γιατί $\frac{y}{x}=\varepsilon\varphi\theta \Leftrightarrow \frac{y}{x}=2 \Leftrightarrow y=2x$. Ἔτσι ἡ εὐθεία αὐτή εἶναι γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως πού ἔχει τύπο $y=2x$.

Γενικά, ἀποδεικνύεται ὅτι:

> Ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως, πού ἔχει τύπο $y=\alpha x$, εἶναι μία εὐθεία, πού διέρχεται ἀπό τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων.

Ἡ εὐθεία αὐτή κατασκευάζεται, ἄν βροῦμε (ἀπό τόν τύπο τῆς συναρτήσεως) τίς συντεταγμένες καί ἑνός ἄλλου σημείου της M.

Ἡ συνάρτηση $y=\alpha x+\beta$

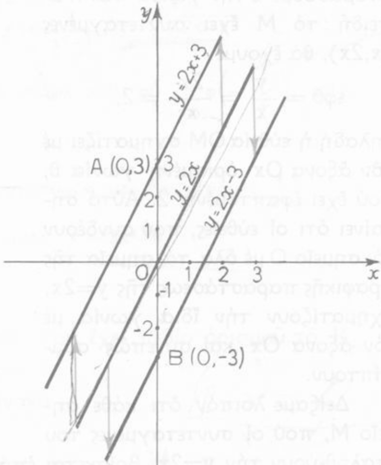
7.6. Ἄς θεωρήσουμε τώρα τή συνάρτηση, πού ἔχει τύπο

$$y=2x+3$$

καί ἄς συγκρίνουμε τίς τιμές της μέ τίς τιμές τῆς συναρτήσεως $y=2x$. Παίρνοντας π.χ. $x=1$, βλέπουμε ὅτι ἡ τιμή τῆς $y=2x$ εἶναι $y=2\cdot 1=2$, ἐνῶ ἡ τιμή τῆς $y = 2x+3$ εἶναι $y = 2\cdot 1+3 = 5$, δηλαδή εἶναι 3 μονάδες μεγαλύτερη. Γενικά, διαπιστώνουμε εὔκολα ὅτι γιά ὁποιοδήποτε $x \in R$ ἡ τιμή τῆς $y = 2x+3$ εἶναι πάντοτε 3 μονάδες μεγαλύτερη ἀπό τήν τιμή τῆς $y = 2x$. Συνεπῶς ἡ γραφική παράσταση τῆς $y = 2x+3$ προκύπτει, ἄν μεταφέρουμε τήν εὐθεία, πού εἶναι γραφική παράσταση τῆς $y=2x$, κατά διάνυσμα $\overrightarrow{OA}$ μέ $\overline{OA}=3$ (σχ. 14).

Μέ τόν ἴδιο τρόπο βρίσκουμε ὅτι ἡ γραφική παράσταση τῆς $y = 2x-3$ θά προκύπτει ἀπό τή μεταφορά τῆς εὐθείας, πού εἶναι γραφική παράσταση τῆς $y = 2x$, κατά διάνυσμα $\overrightarrow{OB}$ μέ $\overline{OB} = -3$ (σχ. 14)

Ἀπό τά παραπάνω καταλαβαίνουμε πώς οἱ γραφικές παραστάσεις τῶν συναρτήσεων πού ἔχουν τύπους
$y = 2x$, $y = 2x+3$, $y = 2x-3$,
εἶναι εὐθεῖες παράλληλες.



(σχ. 14)

Γενικά ἀποδεικνύεται μέ τόν ἴδιο τρόπο ὅτι:

> Ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως $y = \alpha x+\beta$ εἶναι μιά εὐθεία παράλληλη πρός τή γραφική παράσταση τῆς $y = \alpha x$.

Ὅταν $\beta \neq 0$, ἡ εὐθεία αὐτή δέ διέρχεται ἀπό τήν ἀρχή O τῶν ἀξόνων καί τέμνει τόν ἄξονα Oy στό σημεῖο $(0,\beta)$.

Ἄς θεωρήσουμε τέλος δύο συναρτήσεις, πού ἔχουν τύπους

$$y = \alpha x+\beta \quad , \quad y = \alpha' x+\beta'$$

καί ἄς ὀνομάσουμε ε καί ε′ τίς δύο εὐθεῖες, πού εἶναι γραφικές παραστάσεις τους. Ἀπό τά προηγούμενα εἶναι φανερό ὅτι

— *ὅταν $\alpha = \alpha'$, οἱ εὐθεῖες ε καί ε′ εἶναι παράλληλες,*

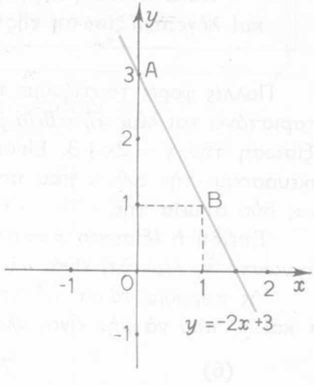
— *ὅταν $\alpha = \alpha'$ καί $\beta=\beta'$, οἱ εὐθεῖες ε καί ε′ συμπίπτουν,* γιατί ἔχουν κοινό τό σημεῖο $(0,\beta)$

Παράδειγμα. Νά γίνει ή γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως, πού ἔχει τύπο $y = -2x+3$.

Λύση: Δίνουμε δύο τιμές στό x, π.χ. τίς $x=0$ καί $x=1$, καί βρίσκουμε τίς ἀντίστοιχες τιμές τῆς συναρτήσεως, πού εἶναι $\psi=3$ καί $\psi=1$.

Ἔτσι ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως εἶναι μιά εὐθεία ΑΒ (βλ. σχ. 15), πού διέρχεται ἀπό τά σημεῖα

Α(0,3) καί Β(1,1)



(σχ. 15)

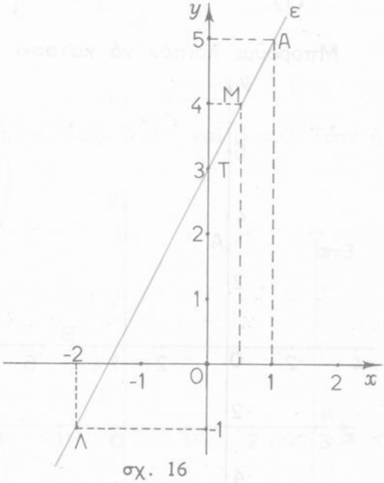
Ἐξίσωση εὐθείας.

7.7. Ἄς θεωρήσουμε τή συνάρτηση, πού ἔχει πεδίο ὁρισμοῦ τό R καί τύπο τόν

(5) $y = 2x+3$

Ἡ γραφική παράστασή της εἶναι, ὅπως εἴδαμε, μία εὐθεία ε, ἡ ὁποία κατασκευάζεται ἄν βροῦμε δύο σημεῖα της, π.χ. τά Τ (0,3) καί Α (1,5). Παρατηροῦμε τώρα ὅτι:

—Ἡ ἰσότητα (5) εἶναι μία ἐξίσωση μέ δύο ἀγνώστους x καί y καί κάθε διατεταγμένο ζεῦγος (x,y), πού τήν ἐπαληθεύει (ὅπως π.χ. τό $x = \frac{1}{2}$, $y = 4$), παριστάνει τίς συντεταγμένες ἑνός σημείου Μ, πού βρίσκεται πάνω στήν εὐθεία ε.



σχ. 16

—Ἀντιστρόφως, ἄν πάρουμε ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τῆς ε, π.χ. τό Λ (−2, −1), οἱ συντεταγμένες του ἐπαληθεύουν τήν ἐξίσωση (5).

Συνεπῶς, ἡ ἐξίσωση (5) ἐπαληθεύεται ἀπό τίς συντεταγμένες ὅλων τῶν σημείων τῆς ε καί μόνο ἀπ' αὐτές. Γιά τό λόγο αὐτό λέμε ὅτι *«ἡ $y = 2x+3$ εἶναι ἐξίσωση τῆς εὐθείας ε»*.

Γενικά λοιπόν καταλαβαίνουμε ὅτι:

Κάθε ἐξίσωση τῆς μορφῆς $y = \alpha x + \beta$ παριστάνει μιά εὐθεία καί λέγεται ἐξίσωση τῆς εὐθείας αὐτῆς.

Πολλές φορές ταυτίζουμε τήν ἐξίσωση $y = \alpha x + \beta$ μέ τήν εὐθεία πού παριστάνει καί λέμε «*ἡ εὐθεία* $y = 2x+3$» ἐννοώντας τήν εὐθεία, πού ἔχει ἐξίσωση τήν $y = 2x+3$. Εἶναι φανερό ὅτι μποροῦμε πάντοτε νά κατασκευάσουμε τήν εὐθεία πού παριστάνει μιά ἐξίσωση $y = \alpha x + \beta$ βρίσκοντας δύο σημεῖα της.

Ἐπειδή ἡ ἐξίσωση $y = \alpha x + \beta$ ἔχει στό πρῶτο μέλος της μόνο τόν ἄγνωστο y, λέμε ὅτι εἶναι «*λυμένη*» ὡς πρός y.

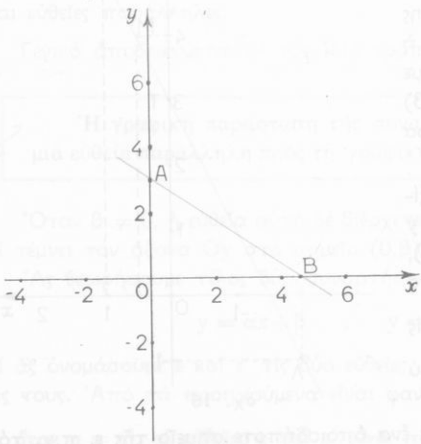
Ἄς πάρουμε τώρα πιό γενικά μιά ἐξίσωση πρώτου βαθμοῦ ὡς πρός x καί y, πού νά μήν εἶναι «λυμένη» ὡς πρός y, π.χ. τήν

$$2x + 3y = 9 \tag{6}$$

Ἡ ἐξίσωση αὐτή παριστάνει πάλι μία ὁρισμένη εὐθεία, γιατί γράφεται $3y = -2x+9$ ἤ τελικά

$$y = -\frac{2}{3}x + 3 \tag{7}$$

Μποροῦμε λοιπόν νά κατασκευάσουμε τήν εὐθεία (6) βρίσκοντας ὅπως καί προηγουμένως δύο σημεῖα της ἀπό τήν ἐξίσωση (7). Συνήθως ὅμως κατασκευάζουμε τήν εὐθεία αὐτή βρίσκοντας κατευθείαν ἀπό τήν ἐξίσωση (6) τά σημεῖα Α καί Β (σχ. 17), στά ὁποῖα τέμνει τούς ἄξονες Ογ καί Οx. Αὐτό γίνεται ὡς ἑξῆς:



(σχ. 17)

— Γιά νά βροῦμε τό Α, βάζουμε στήν ἐξίσωση (6) $x=0$ (ἀφοῦ τό Α ἔχει τετμημένη μηδέν) καί βρίσκουμε τήν τεταγμένη του $y = \frac{9}{3} = 3$.

— Γιά νά βροῦμε τό Β, βάζουμε στήν ἐξίσωση (6) $y=0$ (ἀφοῦ τό Β ἔχει τεταγμένη μηδέν) καί βρίσκουμε τήν τετμημένη του $x = \frac{9}{2}$.

Γενικά λοιπόν:

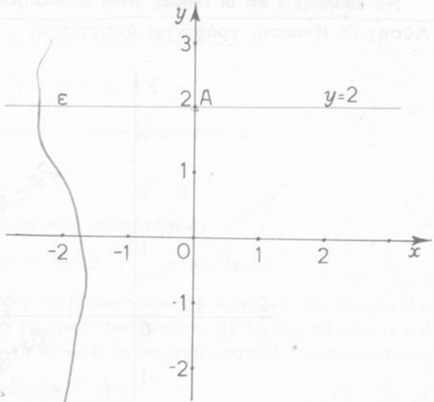
> Κάθε ἐξίσωση $\alpha x+\beta y=\gamma$ πρώτου βαθμοῦ ὡς πρός x καί y παριστάνει μιά εὐθεία ε.

Ἡ ἐξίσωση αὐτή λέγεται πάλι «ἐξίσωση τῆς εὐθείας ε».

Μία μερική περίπτωση ἔχουμε, ὅταν $\alpha=0$ καί $\beta=1$. Τότε ἡ ἐξίσωση ἔχει τή μορφή

$$y=\gamma$$

καί παριστάνει μία εὐθεία ε ἡ ὁποία εἶναι παράλληλη πρός τόν ἄξονα Ox. Ἔτσι π.χ. γιά $\gamma=2$, ἔχουμε τήν ἐξίσωση $y=2$ ἡ ὁποία παριστάνει μιά εὐθεία ε παράλληλη πρός τόν ἄξονα Ox πού τέμνει τόν ἄξονα Oy (σχ. 18) στό σημεῖο (0,2) (γιατί ὅλα τά σημεῖα τῆς ε καί μόνο αὐτά ἔχουν τεταγμένη 2).

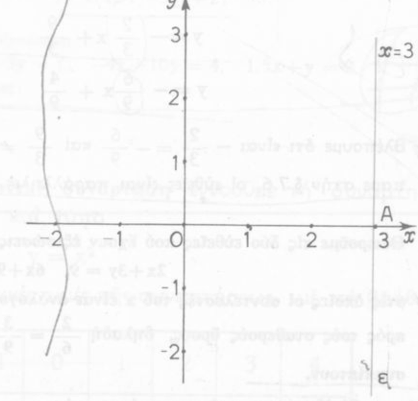


(σχ. 18)

Μιά ἄλλη μερική περίπτωση ἔχουμε, ὅταν $\alpha=1$ καί $\beta=0$. Τότε ἡ ἐξίσωση ἔχει τή μορφή

$$x=\gamma$$

καί παριστάνει μιά εὐθεία ἡ ὁποία εἶναι παράλληλη πρός τόν ἄξονα Oy. Ἔτσι π.χ. γιά $\gamma=3$ ἔχουμε τήν ἐξίσωση $x=3$ ἡ ὁποία παριστάνει μιά εὐθεία ε παράλληλη πρός τόν ἄξονα Oy (σχ. 19), πού τέμνει τόν Ox στό σημεῖο (3,0) (γιατί ὅλα τά σημεῖα τῆς ε καί μόνο αὐτά ἔχουν τετμημένη 3).



(σχ. 19)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

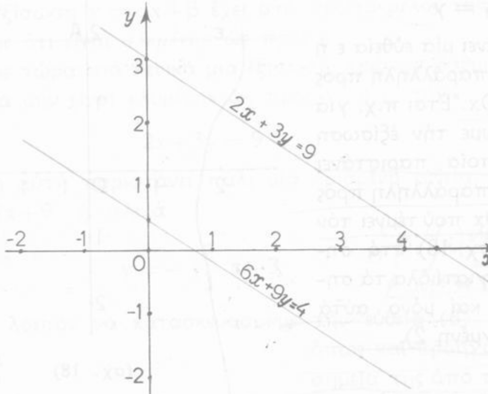
1. Θεωροῦμε τίς δύο εὐθεῖες πού ἔχουν ἐξισώσεις

$$2x + 3y = 9, \qquad 6x + 9y = 4$$

Στίς ἐξισώσεις αὐτές οἱ συντελεστές τοῦ x εἶναι ἀνάλογοι πρός τούς συντελεστές τοῦ y, ἐνῶ δέν εἶναι ἀνάλογοι πρός τούς γνωστούς ὅρους $\left(\frac{2}{6} = \frac{3}{9} \neq \frac{9}{4}\right)$.

Νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ εὐθεῖες εἶναι παράλληλες.

Λύση: Οἱ ἐξισώσεις γράφονται ἀντιστοίχως



(σχ. 20)

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{9}{3}$$

$$y = -\frac{6}{9}x + \frac{4}{9}$$

Βλέπουμε ὅτι εἶναι $-\frac{2}{3} = -\frac{6}{9}$ καί $\frac{9}{3} \neq \frac{4}{9}$, ὁπότε σύμφωνα μ' αὐτά πού εἴπαμε στήν § 7.6, οἱ εὐθεῖες εἶναι παράλληλες.

2. Θεωροῦμε τίς δύο εὐθεῖες πού ἔχουν ἐξισώσεις

$$2x + 3y = 9, \quad 6x + 9y = 27,$$

στίς ὁποῖες οἱ συντελεστές τοῦ x εἶναι ἀνάλογοι καί πρός τούς συντελεστές τοῦ y καί πρός τούς σταθερούς ὅρους, δηλαδή $\frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{9}{27}$. **Νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ εὐθεῖες συμπίπτουν.**

Λύση: Οἱ ἐξισώσεις γράφονται ἀντιστοίχως

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{9}{3}, \quad y = -\frac{6}{9}x + \frac{27}{9}$$

Ὅπως εἴδαμε προηγουμένως, οἱ εὐθεῖες εἶναι παράλληλες καὶ ἔχουν κοινό τό σημεῖο (0,3), ἀφοῦ γιά $x = 0$ καί οἱ δύο δίνουν τήν τιμή $y = 3$. Ἑπομένως οἱ εὐθεῖες συμπίπτουν.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

8. Νά ἐξετάσετε ἄν τά σημεῖα

α) $A(-15, 50)$ β) $B(1{,}8\ ,\ 0{,}4)$ γ) $Γ(1/3,\ 4)$ δ) $Δ(1,\ 3)$

ἀνήκουν στή γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως $y = -3x+5$.

9. Νά γίνουν οἱ γραφικές παραστάσεις τῶν συναρτήσεων

α) $y = 3x$ β) $y = 0{,}5x$ γ) $y = \frac{2}{3}x$

10. Νά συγκριθοῦν οἱ γραφικές παραστάσεις τῶν συναρτήσεων

$$y = \frac{3}{4}x\ , \quad y = x\ , \quad y = \frac{4}{3}x$$

11. Νά γίνουν οἱ γραφικές παραστάσεις τῶν συναρτήσεων

$$y = -3x+1\ , \quad y = -3x-2\ , \quad y = -3x+4$$

12. α) Νά γίνει ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως $y = αx+2$, ἄν ξέρουμε ὅτι τό σημεῖο $A(-7, -12)$ ἀνήκει στή γραφική παράσταση. β) Τό ἴδιο νά κάνετε καί μέ τή συνάρτηση $y = -3x+β$, ἄν τό $B(-2,4)$ ἀνήκει στή γραφική της παράσταση.

13. Δίνονται οἱ εὐθεῖες πού ἔχουν ἐξισώσεις

$$y = \frac{1}{2}x+1\ , \quad y = 3x+2\ , \quad y = 0{,}5x\ , \quad y = x+3\ , \quad y = 3x-2$$

Ποιές ἀπ' αὐτές εἶναι παράλληλες;

14. Νά κατασκευάσετε τίς εὐθεῖες πού ἔχουν ἐξισώσεις:

α) $-2x+3y = 1$ β) $x-y = 1$ γ) $2(x-1)-3(y+2) = 0$.

15. Δίνονται οἱ εὐθεῖες πού ἔχουν ἐξισώσεις:

$3x+2y = 1$, $6x-4y = 4$, $2x-5y = 1$, $-4x+10y = 4$, $1{,}5x+y = 2$

Ποιές ἀπ' αὐτές εἶναι παράλληλες;

Ἡ τετραγωνική συνάρτηση.

7.8. Μέ τόν ὅρο **τετραγωνική συνάρτηση** ἐννοοῦμε τή συνάρτηση πού ἔχει πεδίο ὁρισμοῦ τό R καί τύπο

$$y = x^2$$

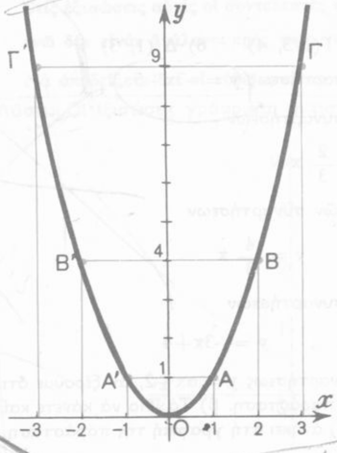
Ὁ παρακάτω πίνακας δίνει μερικές τιμές τῆς συναρτήσεως, μέ τή βοήθεια

x	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	9	4	1	0	1	4	9	16

Παραβολή είναι μία συνεχής καμπύλη γραμμή γ ή οποία, είναι ή γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2$

τῶν ὁποίων κατασκευάζεται ἡ γραφική της παράσταση. (σχ. 21).

Η γραμμή γ είναι συμμετρική ως προς τον άξονα Oy



(σχ. 21)

Ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως αὐτῆς, εἶναι μία «συνεχής» καμπύλη γραμμή γ, πού λέγεται *παραβολή*. Παρατηροῦμε ὅτι:

- Ἡ συνάρτηση παίρνει ὁμόσημες (θετικές) τιμές.
- Γιά ἀντίθετες τιμές τοῦ x ἔχουμε τήν ἴδια τιμή τῆς συναρτήσεως.

Διακρίνουμε λοιπόν εὔκολα ὅτι ἡ γραμμή γ ἔχει ἄξονα συμμετρίας τόν Oy, δηλαδή εἶναι, ὅπως λέμε, *συμμετρική ὡς πρός τόν ἄξονα Oy*. Τό σημεῖο O, πού εἶναι ἡ τομή τῆς γ καί τοῦ ἄξονα συμμετρίας της, λέγεται *κορυφή* τῆς παραβολῆς.

Πιό γενικά ὀνομάζουμε **παραβολή** τή γραφική παράσταση κάθε συναρτήσεως πού ἔχει τύπο

$$(8) \qquad y = \alpha x^2$$

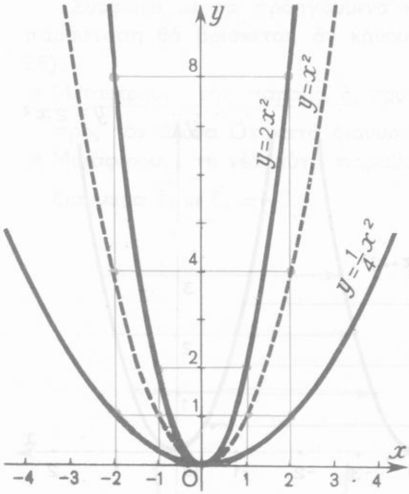
Ἐπειδή γιά $x = 0$ ἔχουμε καί $y = 0$, καταλαβαίνουμε ὅτι ἡ ἐξίσωση (8) ἐπαληθεύεται ἀπό τό ζεῦγος $x=0$, $y = 0$ καί ἑπομένως ἡ γραμμή διέρχεται ἀπό τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων.

Ἄν εἶναι $\alpha > 0$, τότε γιά κάθε $x \neq 0$ ἔχουμε $y > 0$ καί συνεπῶς ὁλόκληρη ἡ παραβολή βρίσκεται στό ἡμιεπίπεδο, πού ἔχει ἀκμή τόν ἄξονα τῶν x καί περιέχει τό θετικό ἡμιάξονα Oy. Ὅταν τό $|x|$ αὐξάνει, αὐξάνει καί τό y, ἑπομένως ἡ παραβολή «πορεύεται» μεταξύ τῶν ἡμιαξόνων Ox καί Oy στό 1ο τεταρτημόριο καθώς καί μεταξύ τῶν Ox′ καί Oy στό 2ο τεταρτημόριο (σχ. 22).

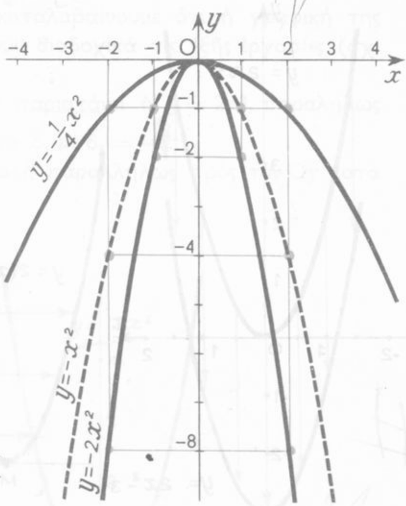
Ἄν εἶναι $\alpha < 0$, τότε γιά κάθε $x \neq 0$ ἔχουμε $y < 0$ καί συνεπῶς ὁλόκληρη ἡ παραβολή βρίσκεται στό ἡμιεπίπεδο πού ἔχει ἀκμή τόν ἄξονα τῶν x καί περιέχει τόν ἀρνητικό ἡμιάξονα τῶν y. Ἐπειδή, ὅταν τό $|x|$ αὐξάνει, τό y ἐλαττώνεται, ἡ καμπύλη βρίσκεται στό 3ο καί 4ο τεταρτημόριο (σχ. 23).

Στά σχήματα 22 καί 23 δίνονται οἱ γραφικές παραστάσεις τῶν συναρτήσεων, πού ἔχουν τύπο $y=\alpha x^2$, γιά διάφορες τιμές τοῦ α.

Θεωροῦμε τώρα τίς συναρτήσεις, πού ἔχουν τύπους $y = 2x^2$ καί $y = -2x^2$. Γιά μιά ὁποιαδήποτε τιμή τοῦ x, π.χ. τήν $x = 3$, οἱ ἀντίστοιχες τιμές τῶν δύο αὐτῶν συναρτήσεων εἶναι: $y = 2 . 3^2 = 18$ καί $y = -2 . 3^2 = -18$. Ἀπό αὐτό καταλαβαίνουμε ὅτι οἱ δύο παραβολές, ὅταν σχεδιαστοῦν στό ἴδιο σύστημα ἀξόνων, εἶναι συμμετρικές ὡς πρός τόν ἄξονα τῶν x.



(σχ. 22)



(σχ. 23)

Γενικότερα οἱ παραβολές, τίς ὁποῖες παριστάνουν οἱ συναρτήσεις $y = \alpha x^2$ καί $y = -\alpha x^2$, εἶναι πάντοτε συμμετρικές ὡς πρός τόν ἄξονα τῶν x.

Ἡ συνάρτηση $y=\alpha x^2+\gamma$.

7.9. Ἄς θεωρήσουμε τώρα τή συνάρτηση πού ἔχει τύπο

$$y = 2x^2 - 3$$

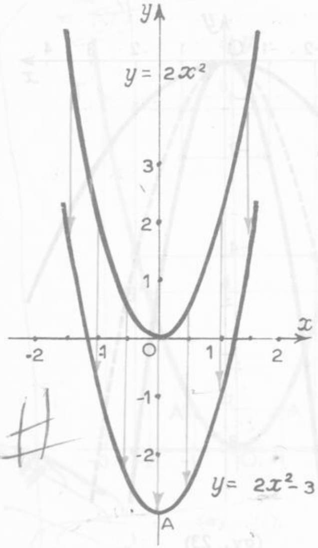
Παρατηροῦμε ὅτι ἡ τιμή τῆς συναρτήσεως αὐτῆς γιά κάθε x εἶναι 3 μονάδες μικρότερη ἀπό τήν ἀντίστοιχη τιμή τῆς συναρτήσεως $y = 2x^2$. Συνεπῶς ἡ γραφική παράσταση τῆς $y = 2x^2-3$ θά προκύπτει ἀπό τή μεταφορά τῆς παραβολῆς, πού παριστάνει ἡ $y=2x^2$, κατά ἕνα διάνυσμα $\overrightarrow{OA}$ πού ἔχει φορέα τόν Oy καί $\overline{OA} = -3$ (σχ. 24). Ἔτσι καί ἡ γραφική παράσταση τῆς $y = 2x^2-3$ εἶναι ἐπίσης μία *παραβολή* πού ἔχει κορυφή τό σημεῖο $(0, -3)$. Γενικά λοιπόν:

> Ἡ γραφική παράσταση τῆς $y = \alpha x^2+\gamma$ προκύπτει, ἄν μετατοπίσουμε τή γραφική παράσταση τῆς $y = \alpha x^2$ παραλλήλως πρός τόν ἄξονα Oy κατά διάνυσμα $\overrightarrow{OA}$ μέ $\overline{OA} = \gamma$.

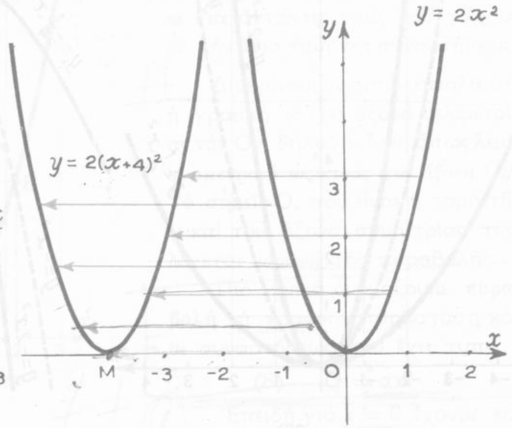
Θεωροῦμε τώρα τή συνάρτηση πού ἔχει τύπο

$$y = 2(x+4)^2$$

$y = 2x'^2$



(σχ. 24)



(σχ. 25)

Ἄν θέσουμε $x' = x+4$ ὁ τύπος της γίνεται

$$y = 2x'^2$$

δηλαδή γίνεται τύπος μιᾶς συναρτήσεως τῆς ὁποίας ἡ γραφική παράσταση εἶναι παραβολή (1).

Ἀπό τή σχέση ὅμως $x' = x+4$ ἤ $x = x'-4$ βλέπουμε ὅτι σέ κάθε τιμή τοῦ x' ἀντιστοιχίζεται μιά τιμή τοῦ x, πού εἶναι 4 μονάδες μικρότερη. Αὐτό σημαίνει ὅτι ἡ γραφική παράσταση τῆς $y = 2(x+4)^2$ θά προκύπτει μέ τή μετατόπιση τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῆς $y = 2x^2$ παραλλήλως πρός τόν ἄξονα Ox κατά διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ μέ $\overline{OM} = -4$ (σχ. 25). Ἔτσι καί ἡ γραφική παράσταση τῆς $y = 2(x+4)^2$ εἶναι ἐπίσης μία *παραβολή* πού ἔχει κορυφή τό σημεῖο (–4,0). Γενικά λοιπόν:

> Ἡ γραφική παράσταση τῆς $y = \alpha(x-p)^2$ προκύπτει, ἄν μετατοπίσουμε τή γραφική παράστασή τῆς $y = \alpha x^2$, παραλλήλως πρός τόν ἄξονα Ox κατά διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ μέ $\overline{OM} = p$.

1. Ἡ ἀλλαγή τῆς μεταβλητῆς ἀπό x σέ x΄ δέν ἔχει σημασία

$x+4=0 \Rightarrow x=-4$

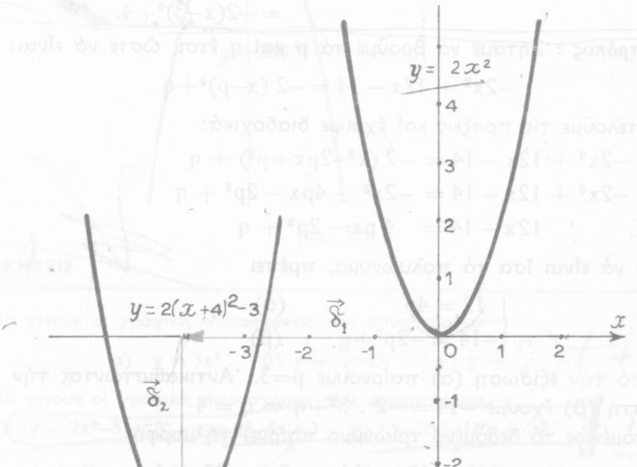
Ἡ συνάρτηση $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$.

7·10. Ἂς θεωρήσουμε τέλος τή συνάρτηση πού ἔχει τύπο

$$y = 2(x+4)^2-3$$

Σύμφωνα μέ τά προηγούμενα καταλαβαίνουμε ὅτι ἡ γραφική της παράσταση θά βρίσκεται, ἄν κάνουμε διαδοχικά τίς ἑξῆς ἐργασίες (σχ. 26):

- Μεταφέρουμε τήν παραβολή, πού παριστάνει ἡ $y = 2x^2$, παραλλήλως πρός τόν ἄξονα Ox κατά διάνυσμα $\vec{\delta_1}$ μέ $\overline{\delta_1} = -4$.
- Μεταφέρουμε τή νέα αὐτή παραβολή παραλλήλως πρός τόν Oy κατά διάνυσμα $\vec{\delta_2}$ μέ $\overline{\delta_2} = -3$.



(σχ. 26)

Συμπεραίνουμε λοιπόν γενικά ὅτι:

> Ἡ συνάρτηση $y = \alpha(x-p)^2+q$ $(\alpha \neq 0)$ παριστάνει μιά παραβολή, πού βρίσκεται, ἄν μετατοπίσουμε διαδοχικά τήν παραβολή $y = \alpha x^2$ κατά διάνυσμα $\vec{\delta_1}$, μέ $\overline{\delta_1} = p$, παραλλήλως πρός τόν ἄξονα Ox καί κατά διάνυσμα $\vec{\delta_2}$, μέ $\overline{\delta_2} = q$, παραλλήλως πρός τόν ἄξονα Oy.

Εἶναι φανερό ὅτι, γιά νά βροῦμε τή γραφική παράσταση μιᾶς συναρτήσεως πού ἔχει τύπο

$$y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,$$

θά πρέπει νά φέρουμε τόν τύπο της στή μορφή $y = \alpha(x-p)^2+q$ καί νά ἐργασθοῦμε ὅπως προηγουμένως. Ἔτσι, κάθε συνάρτηση τῆς μορφῆς $y = \alpha x^2+\beta x+\gamma$ μέ $\alpha \neq 0$ παριστάνει *παραβολή*.

Παράδειγμα: Νά φέρετε τή συνάρτηση $y = -2x^2 + 12x - 14$ στή μορφή $y = \alpha(x-p)^2+q$ καί νά κάνετε τή γραφική της παράσταση.

Α΄ τρόπος : Ἔχουμε $-2x^2+12x-14 = -2(x^2-6x+7) =$

$$= -2[x^2-2\cdot 3x+3^2-3^2+7]$$
$$= -2[(x-3)^2-2]$$
$$= -2(x-3)^2+4.$$

Β΄ τρόπος : Ζητᾶμε νά βροῦμε τά p καί q ἔτσι, ὥστε νά εἶναι:

$$-2x^2 + 12x - 14 = -2\,(x-p)^2+q$$

Ἐκτελοῦμε τίς πράξεις καί ἔχουμε διαδοχικά:

$$-2x^2 + 12x - 14 = -2\,(x^2-2px+p^2) + q$$
$$-2x^2 + 12x - 14 = -2x^2 + 4px - 2p^2 + q$$
$$12x - 14 = 4\,px - 2p^2 + q$$

Γιά νά εἶναι ἴσα τά πολυώνυμα, πρέπει

$$\begin{cases} 12 = 4p & (\alpha) \\ -14 = -2p^2+q & (\beta) \end{cases}$$

Ἀπό τήν ἐξίσωση (α) παίρνουμε $p=3$. Ἀντικαθιστώντας τήν τιμή τοῦ p στή (β) ἔχουμε $-14 = -2\,.\,3^2+q \Leftrightarrow q = 4$

Ἑπομένως τό δεδομένο τριώνυμο παίρνει τή μορφή

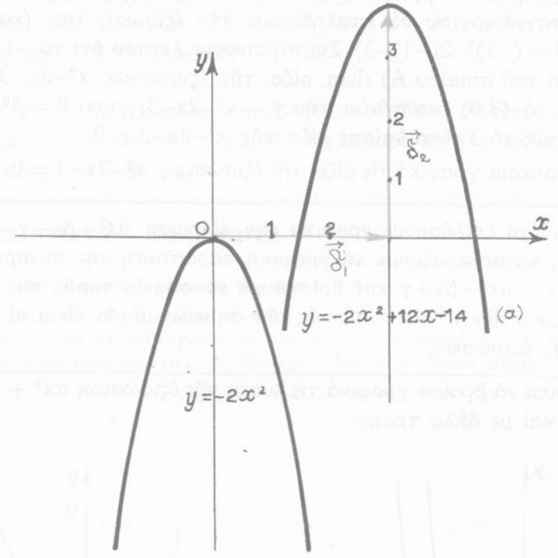
$$-2x^2 + 12x - 14 = -2\,(x-3)^2 + 4$$

Καταρτίζουμε πρῶτα τόν παρακάτω πίνακα τιμῶν τῆς $y = -2x^2$

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$y=-2x^2$	-8	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2	-8

Κατασκευάζουμε τώρα τήν παραβολή, πού παριστάνει ἡ $y = -2x^2$, καί τή μεταφέρουμε διαδοχικά κατά διάνυσμα $\vec{\delta}_1$ ($\delta_1 = 3$) παράλληλο πρός τόν Ox καί κατά διάνυσμα $\vec{\delta}_2$ ($\delta_2 = 4$) παράλληλο πρός τόν ἄξονα Oy.

Ἔτσι, παίρνουμε τήν παραβολή (α) (σχ. 27), πού εἶναι ἡ γραφική παράσταση τῆς $y = -2x^2+12x-14$.



(σχ. 27)

● **ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

16. Νά γίνουν οἱ γραφικές παραστάσεις τῶν συναρτήσεων

α) $y = 3x^2$ β) $y = \frac{2}{5}x^2$ γ) $y = \frac{x^2}{4}$

17. Νά γίνουν οἱ γραφικές παραστάσεις τῶν συναρτήσεων

α) $y = 2x^2-5$ β) $y = x^2-4x+3$ γ) $y=2x^2-16x+27$

Γραφική ἐπίλυση τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ $(\alpha\neq 0)$.

7.11. Θεωροῦμε τήν ἐξίσωση $x^2-2x-3=0$ καί τήν ἀντίστοιχη πολυωνυμική συνάρτηση $y = x^2-2x-3$.

Γιά νά κατασκευάσουμε τή γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως αὐτῆς:

— Δίνουμε στή συνάρτηση τή μορφή $y=\alpha(x-p)^2+q$ γράφοντας.

$$y = x^2-2\cdot 1\,x+1^2-1^2-3=(x-1)^2-4$$

— Κατασκευάζουμε τήν παραβολή $y = x^2$ (βλ. πίνακα § 7.8) καί τή μεταφέρουμε διαδοχικά κατά διανύσματα $\vec{\delta_1}\,||\,Ox\,(\overline{\delta_1}=1)$ καί $\vec{\delta_2}\,||\,Oy$ $(\overline{\delta_2}=-4)$ (σχ. 28).

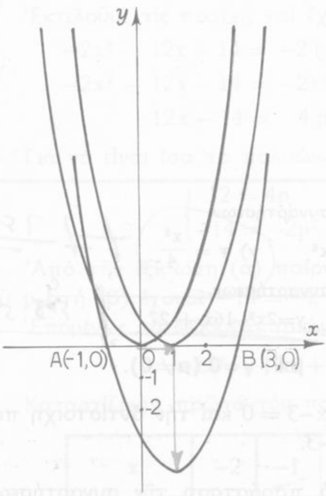
Παίρνουμε ἔτσι τήν παραβολή $y = x^2-2x-3$ ἡ ὁποία τέμνει τόν ἄξονα τῶν x στά σημεῖα $A(-1,0)$ καί $B(3,0)$.

Ἀφοῦ τό σημεῖο Α βρίσκεται πάνω στήν παραβολή $y = x^2-2x-3$, οἱ συντεταγμένες του θά ἐπαληθεύουν τήν ἐξίσωσή της (καί πραγματικά $0 = (-1)^2-2(-1)-3$). Συμπεραίνουμε λοιπόν ὅτι τό -1 (δηλ. ἡ τετμημένη τοῦ σημείου Α) εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως $x^2-2x-3 = 0$. Ὁμοίως, τό (3,0) ἐπαληθεύει τήν $y = x^2-2x-3$, γιατί $0 = 3^2-2.3-3$, καί συνεπῶς τό 3 εἶναι ἐπίσης ρίζα τῆς $x^2-2x-3 = 0$.

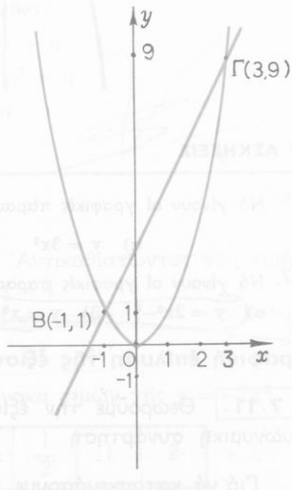
Ἔτσι βρήκαμε γραφικά τίς ρίζες τῆς ἐξισώσεως $x^2-2x-3 = 0$. Γενικά:

> Γιά νά ἐπιλύσουμε γραφικά τήν ἐξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma = 0$ $(\alpha\neq 0)$, κατασκευάζουμε τή γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως $y = \alpha x^2+\beta x+\gamma$ καί βρίσκουμε τά σημεῖα τομῆς της μέ τόν ἄξονα τῶν x. Οἱ τετμημένες τῶν σημείων αὐτῶν εἶναι οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως.

Μποροῦμε νά βροῦμε γραφικά τίς λύσεις τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2 + \beta x+\gamma = 0$ $(\alpha\neq 0)$ καί μέ ἄλλο τρόπο.



(σχ. 28)



(σχ. 29)

Ἡ ἐξίσωση $x^2-2x-3 = 0$ γράφεται $x^2 = 2x+3$. Συνεπῶς ρίζα της θά εἶναι κάθε πραγματικός ἀριθμός, πού, ὅταν τόν θέσουμε στή θέση τοῦ x στίς συναρτήσεις $y = x^2$ καί $y = 2x+3$, δίνει τιμές τοῦ y ἴσες.

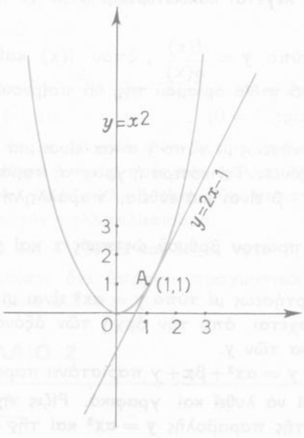
Κατασκευάζουμε λοιπόν τήν παραβολή, πού παριστάνει ἡ συνάρτηση $y = x^2$, καί τήν εὐθεία $y=2x+3$. Αὐτές τέμνονται στά σημεῖα Β(−1,1) καί Γ(3,9) (σχ. 29). Οἱ τετμημένες −1 καί 3 τῶν σημείων αὐτῶν εἶναι οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως $x^2-2x-3 = 0$. Πραγματικά, ὅταν $x = -1$, οἱ τιμές τῆς $y = x^2$ καί τῆς $y = 2x+3$ εἶναι ἴσες, ἀφοῦ τό $B(-1,1)$ εἶναι κοινό σημεῖο τῶν δύο γραμμῶν. Τό ἴδιο ἰσχύει καί γιά τήν τετμημένη 3 τοῦ κοινοῦ σημείου (3,9). Συνεπῶς:

> Ρίζες τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma = 0$ $(\alpha \neq 0)$ εἶναι οἱ τετμημένες τῶν κοινῶν σημείων τῆς παραβολῆς $y = \alpha x^2$ καί τῆς εὐθείας $y = -\beta x - \gamma$.

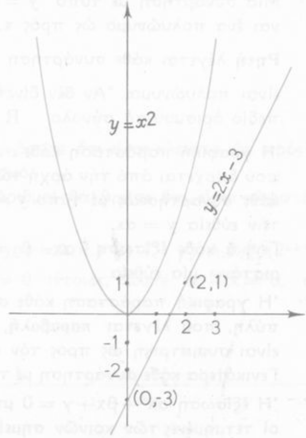
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά ἐπιλυθεῖ γραφικά ἡ ἐξίσωση $x^2-2x+1 = 0$.**

Λύση: Ἔχουμε $x^2-2x+1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2x-1$.
Κατασκευάζουμε σέ τετραγωνισμένο χαρτί τήν παραβολή $y = x^2$ καί τήν εὐθεία $y = 2x-1$ καί βλέπουμε (σχ. 30) ὅτι ἔχουν ἕνα μόνο κοινό σημεῖο (ἐφάπτονται),



(σχ. 30)



(σχ. 31)

τό A(1,1). Ἡ τετμημένη 1 τοῦ σημείου A εἶναι ἡ λύση τῆς ἐξισώσεως $x^2-2x+1=0$ (1).
Ἐπειδή ἡ (1) εἶναι δευτέρου βαθμοῦ καί ἔχει μιά μόνο ρίζα, λέμε πώς ἔχει *διπλή ρίζα* τό 1.

2. **Νά ἐπιλυθεῖ γραφικά ἡ ἐξίσωση $x^2 - 2x+3 = 0$.**

Λύση: Ἐπειδή $x^2-2x+3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2x-3$, κατασκευάζουμε τήν παραβολή $y= x^2$ καί τήν εὐθεία $y=2x-3$. Βλέπουμε (σχ. 31) πώς αὐτές δέν ἔχουν κοινά σημεῖα (δέν τέμνονται).
Συνεπῶς ἡ ἐξίσωση $x^2-2x+3 = 0$ δέν ἔχει καμιά ρίζα στό σύνολο $\mathbb{R}$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.
Ἀπό τά παραπάνω γίνεται φανερό ὅτι ἡ ἐξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma = 0$ $(\alpha \neq 0)$ ἔχει στό $\mathbb{R}$ δύο ρίζες ἤ μιά ρίζα (διπλή) ἤ καμμία ρίζα, ἀνάλογα μέ τό πλῆθος τῶν κοινῶν σημείων τῆς παραβολῆς $y = \alpha x^2$ καί τῆς εὐθείας $y = -\beta x - \gamma$.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

18. Νά ἐπιλυθοῦν γραφικά οἱ ἐξισώσεις

α) $x^2-9=0$ β) $x^2+4=0$ γ) $x^2-4x-5=0$

δ) $2x^2-3x+4=0$ ε) $2x^2-x-3=0$ στ) $x^2-4x+4=0$

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 7

1. Ἄν Α καί Β εἶναι δύο ἀριθμητικά σύνολα, ἡ ἀπεικόνιση $\varphi : A \to B$ λέγεται **συνάρτηση** μέ πεδίο ὁρισμοῦ Α καί τιμές στό Β.

Γιά νά προσδιορίσουμε μιά συνάρτηση $\varphi: A \to \mathbf{R}$ πρέπει νά ξέρουμε:

- Τό **πεδίο ὁρισμοῦ** Α, τό ὁποῖο εἶναι ὑποσύνολο τοῦ R.
- Τόν «**κανόνα**» μέ τόν ὁποῖο ἀντιστοιχίζεται σέ κάθε $x \in A$ ἕνας πραγματικός ἀριθμός.

Τό σύνολο τῶν σημείων, πού ἔχουν συντεταγμένες τό ζεύγη τοῦ γραφήματος, μᾶς δίνουν τή **γραφική παράσταση** τῆς συναρτήσεως.

2. Μία συνάρτηση μέ τύπο $y = f(x)$ λέγεται **πολυωνυμική**, ὅταν τό $f(x)$ εἶναι ἕνα πολυώνυμο ὡς πρός x.

Ρητή λέγεται κάθε συνάρτηση μέ τύπο $y = \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$, ὅπου $f(x)$ καί $\varphi(x)$ εἶναι πολυώνυμα. Ἄν δέν δίνεται τό πεδίο ὁρισμοῦ της, θά παίρνουμε σάν πεδίο ὁρισμοῦ τό σύνολο $R - \{x|\varphi(x) = 0\}$

3. Ἡ γραφική παράσταση κάθε συναρτήσεως μέ τύπο $y = \alpha x$ εἶναι μιά εὐθεία, πού διέρχεται ἀπό τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων. Γενικότερα ἡ γραφική παράσταση κάθε συναρτήσεως μέ τύπο $y = \alpha x + \beta$ εἶναι μιά εὐθεία, παράλληλη πρός τήν εὐθεία $y = \alpha x$.

Γενικά κάθε ἐξίσωση $\alpha x + \beta y = \gamma$, πρώτου βαθμοῦ ὡς πρός x καί y, παριστάνει μία εὐθεία.

4. Ἡ γραφική παράσταση κάθε συναρτήσεως μέ τύπο $y = \alpha x^2$ εἶναι μία καμπύλη, πού λέγεται **παραβολή**, διέρχεται ἀπό τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων καί εἶναι συμμετρική ὡς πρός τόν ἄξονα τῶν y.

Γενικότερα κάθε συνάρτηση μέ τύπο $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ παριστάνει παραβολή.

5. Ἡ ἐξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ μπορεῖ νά λυθεῖ καί γραφικά. Ρίζες της εἶναι οἱ τετμημένες τῶν κοινῶν σημείων τῆς παραβολῆς $y = \alpha x^2$ καί τῆς εὐθείας $y = -\beta x - \gamma$.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ*

19. Ἔστω ἡ συνάρτηση $f : R \to R$ μέ τύπο

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ἄν x εἶναι ρητός} \\ -1 & \text{ἄν x εἶναι ἄρρητος} \end{cases}$$

Νά βρεῖτε τά $f(-2)$, $f(\sqrt{2})$, $f(0{,}5)$, $f(0{,}4545\ldots)$, $f(\pi)$, $f(5)$.

20. Γιά ποιά τιμή τοῦ α οἱ εὐθεῖες $y = (\alpha-1)x+3$ καί $y = 3x-2$ εἶναι παράλληλες;

21. Νά γίνει ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως $y = \dfrac{1}{2}x + \beta$, ἄν ξέρουμε ὅτι διέρχεται ἀπό τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων.

22. Νά γίνει ἡ γραφική παράσταση τῆς παραβολῆς $y = x^2 + \alpha x + \beta$, ἄν γνωρίζετε ὅτι διέρχεται ἀπό τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων καί ἀπό τό σημεῖο (1,3).

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗ ΛΥΣΗ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

3. α) Μερικές φορές β) πάντοτε γ) ποτέ δ) πάντοτε ε) μερικές φορές.
5. α) $<$ β) $>$ γ) $<$ δ) $>$ ε) $>$
6. α) 12 β) 0
7. α) α^{-4}, α^2, α^7, α^2
10. α) 14, 270, $\frac{9}{10}$, β) $\frac{\sqrt{7}}{3}$, $\frac{2}{15}$, $\frac{2}{3}$
11. α) -1 β) $16+9\sqrt{3}$ γ) 2 δ) $5-2\sqrt{6}$ ε) $37+20\sqrt{3}$
12. α) $\sqrt{9}+\sqrt{16} \neq \sqrt{9+16}$ β) ὁμοίως
13. α) $-6\sqrt{5}$ β) $22\sqrt{3}$ γ) $7\sqrt{2}$ δ) $2(\alpha+2)\sqrt{5\alpha}$
14. α) 1 β) 1,000428
15. 0, -2, -3
16. 0
17. α) $2\alpha-3\gamma > 2\beta-3\gamma$ β) $2\gamma-3\alpha < 2\gamma-3\beta$
18. Βλ. § 1.10
19. α) Ἄν 2κ, 2λ εἶναι δύο ἄρτιοι ἀριθμοί θά βρεῖτε ὅτι εἶναι κλειστό ὡς πρός τήν πρόσθεση καί ὡς πρός τόν πολλαπλασιασμό.
   β) Ἄν 2κ+1, 2λ+1 εἶναι δύο περιττοί ἀριθμοί θά βρεῖτε ὅτι εἶναι κλειστό ὡς πρός τόν πολλαπλασιασμό.
20. α) Β καί Γ ($3\mu\in B$ καί $3\nu\in B$, τότε $3(\mu+\nu)\in B$ κ.λ.π.) β) Γ γ) Α,Β,Γ ($2^{\mu+\nu}\in A$)
21. Ὑποθέστε ὅτι ὑπάρχει πραγματικός $x \neq 0$ τέτοιος, ὥστε $\alpha + x = \alpha$, ἀλλά $\alpha+0=\alpha$ κ.λ.π.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

2. $-4\ \frac{3}{5}$
4. Τιμές πρώτης στήλης 0,1,4,9.
5. Οἱ ἀριθμητικές τιμές, πού δίνουν οἱ παραστάσεις, εἶναι ἴσες
6. α) $5\upsilon-5\tau$ β) $\frac{5\alpha+3\beta}{8}$
7. $xy+\frac{4x}{5}$, 270 m²
8. $\lambda=2$, $\mu=0$
9. $\alpha=-\ \frac{1}{2}$
12. α) $-\alpha^2$ β) $-\frac{3}{2}x^2y$ γ) $-\frac{7}{6}xy\omega$
13. α) x^3+5x^2+4x+5
15. α) $-2x-y$ β) $-2x-1$ γ) $7x^2y-2xy^2$

16. α) $-2x^2y$ β) $-x^2y+\frac{1}{2}xy$ γ) $-\frac{25}{2}xy$

17. α) $-x^2$ β) $-\beta$

18. α) $4x^2y^3+4x^3y^2$ β) $-\frac{1}{6}xy^2-\frac{3}{2}x^2y-\frac{1}{4}xy+\frac{1}{3}x^2$

19. α) $3x^3-9x^2+x+2$ β) $7x^3-8x^2$ γ) $-x^3+x^2+5x-4$ δ) $3x^3+2x^2+4x-6$
ε) x^3+10x^2-2x-4

20. α) $3x+8y-3$ β) $5\alpha^3-2\beta^2+3\beta-6$ γ) $2\alpha^2x^2-3\alpha x^3+\alpha^3x-3\alpha^3+2x^3$

22. α) $-\alpha-\beta-5\gamma$ β) $-5x^3-x^2-4x+6$ γ) $4xy$ δ) $-2\alpha^2+\beta^2-4\alpha\beta$

23. α) $-x^2+7x$ β) $-5\alpha^2-\alpha\beta+2\beta^2$ γ) $-x^3+4x^2-2x-1$

24. α) $+6x^3$, β,γ,δ ὁμοίως

25. α) $24\alpha^{10}$ ε) $\alpha^{4\mu}$ στ) $3\alpha^{2x+2}\beta^{2y}$

26. α) $-\frac{1}{8}\alpha^6\beta^9\gamma^3$

27. α) $4x^9y^9$ β) $\frac{1}{2}x^9y^7\omega^2$ γ) $\alpha^{4\mu-4}\beta^{4\nu-2}$ δ) $-\frac{1}{12}x^4y^7z^2$

28. α) $6x^5+4x^4-10x^2$

29. α) $-x^3-4x^2-6x-4$ β) $-5x^5+18x^4-4x^3-21x^2-x$
γ) $2\alpha^3-3\alpha^2\beta-\alpha\beta^2-\beta^3$ δ) $-2x^4-2x^3+7x^2-3x-26$ ε) $-5\alpha^3+18\alpha$

31. α) $6x^2-7x-3$ β) $6x^3-19x^2+18x-20$ γ) $-8x^6-8x^4-11x^3+7x^2-7x+3$
δ) $2x^5-2x^4-3x^3+5x^2-7x+5$ ε) $\alpha^3+\beta^3$
στ) $4x^5-2x^4y+4x^3y^2+3x^2y^3-xy^4+2y^5$
ζ) $-2x^7+6x^5-x^4+2x^3+2x^2-6x+3$ η) $\frac{x^4}{2}+\frac{8}{3}x^3y-\frac{13}{4}x^2y^2-\frac{5}{6}xy^3+\frac{y^4}{2}$

32. α) $-x^3+3x^2+2x-1$ β) $-2x^4-5x^2y^2+4xy^3-2y^4$
γ) $\alpha^2+2\alpha\beta^2+\alpha^2\beta+\beta^3$ δ) $-3x^2-3x+2$

33. α) x^3+3x^2-x-3 β) $x^5-x^2y^3+x^3y^2-y^5$

35. Βλ. § 2.12 παραδ. 1

36. Βλ. § 2.12 παραδ. 1

37. Βλ. § 2.12 παραδ. 4

38. α) x^4-1 β) $16\alpha^4-81\beta^4$ γ) x^4-y^4 δ) x^8y^8-1

39. Βλ. § 2.12, II α) $(x+y)^2-z^2=x^2+2xy+y^2-z^2$

40. Βλ. § 2.12, III παραδ. 6

41. Βλ. § 2.12, IV παραδ. 6

42. Βλ. § 2.12, V

43. Βλ. § 2.12 παραδ. 2

44. Βλ. § 2.12 παραδ. 3

45. α) 19 β) $-x^2+16x-28$ γ) $-7\alpha^2-31\alpha\beta-13\beta^2$ δ) 0

46. Ἐκτελέστε τίς πράξεις στό α΄ μέλος.

47. α) $3x^4-6x^3+4x^2+4x-2$ β) $\alpha^2-11\alpha\beta+18\beta^2+4\alpha-6\beta+1$ γ) 0

48. α) $-54x^3-111x^2-65x-17$ β) $2x^3+4xy^2+2y^3$ γ) $-x^3+10x^2+8x+10$

49. α) Ἐκτελέστε τίς πράξεις στό β΄ μέλος.

51. Ὑψῶστε τήν $x+y=\alpha$ α) στό τετράγωνο β) στόν κύβο.

52. α) $2x^2$

53. α) $4x^2y\omega$ β) $\frac{4}{9}x^3y^5\omega$ γ) $-12\alpha^4\beta^2$ δ) $-\beta$

54. α) $-4x^2+2x+1$

55. α) $2\alpha(x+y)$

56. α) $\Pi=2x+1,\quad Y=-33$ β) x^2-2x+1 γ) $x-2$ δ) $5x^2+4x-2$
ε) $2x^3-x+2$

57. α) $x+3\alpha$ β) $2x^2-5xy-6y^2$ γ) $x^2-5xy+6y^2$

58. α) $-2x^2-xy-2y^2$ β) $2x^4-4x^3-x^2+3x-6$
γ) $2x^4+4x^3-5x^2+9x-1$

59. α) 0 β) $2xy^2-2y^3$ γ) $-x^2+1$

60. Βλ. § 2.12, V

61. Βλ. § 2.12, V

62. α,β,γ ἐκτελέστε τίς πράξεις στό α' μέλος δ) μετά τήν ἐκτέλεση τῶν πράξεων στό α' μέλος προσθέστε καί ἀφαιρέστε τό $2\alpha\beta xy$.

63. α) $\frac{3}{4}x^3-\frac{1}{2}x^2+1$ β) $x^2+5xy+3y^2$

64. Ἐκτελέστε τίς πράξεις στό α' μέλος.

65. Ἀποδεῖξτε ὅτι $x^2+y^2=z^2$

66. α) $\mu+\nu=\kappa$ β) $\gamma_3=\alpha_3\beta_0+\alpha_2\beta_1+\alpha_1\beta_2+\alpha_0\beta_3$
$\gamma_5=\alpha_4\beta_1+\alpha_3\beta_2+\alpha_2\beta_3+\alpha_1\beta_4+\alpha_0\beta_5,\ \gamma_7=\alpha_4\beta_3+\alpha_3\beta_4+\alpha_2\beta_5$
β) $\gamma_0=\gamma_1=\gamma_2=\gamma_3=\gamma_4=0\quad \gamma_5=\alpha_3\beta_2\neq 0$ γιά τούς $\gamma_6, \gamma_7, \gamma_8, \gamma_9$ δέν μποροῦμε νά ποῦμε.
δ) $-6x^6+7x^4-9x^3-5x^2+6x+2$

67. Νά προσθέσετε καί νά ἀφαιρέσετε τό μονώνυμο $2\alpha\beta\gamma\delta$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

1. Σύμφωνα μέ τό παράδειγμα τῆς § 3.1 θά ἔχουμε ὑπόλοιπο ἴσο μέ
α) 0, β) 0, γ) 0, δ) 0, ε) −2, στ) 0 ζ) 0 η) 0.

2. Θά πρέπει $P(2)=0$, ἀπ' ὅπου ἔχουμε $\lambda=3$.

3. Μέ τόν ἴδιο τρόπο βρίσκουμε $\lambda=1$.

4. α) Ἄν ἐργαστεῖτε ὅπως στήν ἄσκηση 1, θά βρεῖτε $Y=0$ β) Κάνοντας τή διαίρεση καί ἐφαρμόζοντας τήν ταυτότητα τῆς διαιρέσεως θά βρεῖτε:
$P(x)=(x-3)(2x^2-x-15)$.

5. Σύμφωνα μέ τό παράδειγμα τῆς § 3.2 θά βρεῖτε:
α) $(2x+3)(4x^2-6x+9)$ β) $(x-2)(x^2+2x+4)$
γ) $(x^2-y)(x^4+x^2y+y^2)$ δ) $(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$.

6. Σύμφωνα μέ τά παραδείγματα τῆς § 3.3, I θά βρεῖτε:
α) $2\alpha(\beta-\gamma)$ β) $3x(2x+1)$ γ) $3xy(4x+2y-1)$ δ) $5\alpha^2\beta^2\gamma(3\alpha-\beta\gamma-4\alpha^2\beta^2\gamma^2x)$
ε) $(x+y)(\alpha-\beta)$ στ) $(2\alpha-\beta)(x-y)$ ζ) $(x-1)(\alpha-1)$ η) $(x-y)(\alpha+1)$

7. Μέ τόν ἴδιο τρόπο βρίσκετε:
α) $(x-3y)(\beta-\alpha)$ β) $3(2x-3y)(2\alpha-\beta)$ γ) $\alpha^2(x-1)(\alpha+\beta-1)$
δ) $(x-y)(\alpha x-\alpha y-\beta)$ ε) $(2x+y)(1-\alpha-2x-y)$ στ) $(x+y)^2(x+y-1)$.

8. Σύμφωνα μέ τά παραδείγματα τῆς § 3.3, II θά βρεῖτε:
α) $(x+y)(\alpha+3)$ β) $(x+y)(x-1)$ γ) $(x+1)(x^2+1)$ δ) $(\alpha-2)(3\alpha^2+5)$
ε) $(x-1)(2x^3+3)$ στ) $(\alpha-\beta)^2(\alpha+\beta)$ ζ) $(6x+y)(x+3\omega)$ η) $(xy-3)(8y^2-7\alpha)$

9. Σύμφωνα μέ τά παραδείγματα τῆς § 3.3, IV θά βρεῖτε:
α) $(x+3)(x-3)$ β) $(5x+2)(5x-2)$ γ) $(\alpha\beta+\gamma)(\alpha\beta-\gamma)$ δ) $(9\alpha+7\beta)(9\alpha-7\beta)$
ε) $(4\alpha+xy)(4\alpha-xy)$ στ) $(2\alpha^2+3\beta)(2\alpha^2-3\beta)$ ζ) $(5\alpha x^2+3\beta)(5\alpha x^2-3\beta)$
η) $\dfrac{(2xy+3)(2xy-3)}{36}$ θ) $(x-y+1)(x-y-1)$ ι) $\alpha(\alpha-4\beta)$
ια) $4\alpha\beta$ ιβ) $(6x-y)(2x+5y)$

10. Σύμφωνα μέ τά παραδείγματα τῆς § 3.3, I καί IV θά βρεῖτε:
α) $3x(x-1)(x+1)$ β) $3\alpha\beta(\alpha+3\beta)(\alpha-3\beta)$ γ) $5xy(x^2+2y)(x^2-2y)$
δ) $x^\mu(x+1)(x-1)$ ε) $(x-\psi)(1+\alpha+\beta)(1-\alpha-\beta)$ στ) $(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$
ζ) $(\alpha+\sqrt{10})(\alpha-\sqrt{10})(\alpha+\sqrt{14})(\alpha-\sqrt{14})$ η) $x(x^2y^2+1)(xy+1)(xy-1)$
θ) $24\alpha(\alpha+1)^2(\alpha-1)$

11. Νά χρησιμοποιήσετε πρῶτα τά παραδείγματα II ἤ I καί ὕστερα τά παραδείγματα τῆς § 3.3, IV καί θά βρεῖτε:
α) $(x+y)(x-y)(\alpha+\beta)$ β) $(x-y)(\alpha+1)(\alpha-1)$ γ) $(x+3)(x-3)(y+1)(y-1)$
δ) $(\alpha^2+1)(\alpha+1)(\alpha-1)^2$ ε) $2(2-x)(3x+4)$ στ) $2(3x-5)(2x-1)$

12. Σύμφωνα μέ τά παραδείγματα τῆς § 3.3, V θά βρεῖτε:
α) $(\alpha-2)(\alpha^2+2\alpha+4)$ β) $(2x+3)(4x^2-6x+9)$ γ) $(xy-1)(x^2y^2+xy+1)$
δ) $(1-4x)(1+4x+16x^2)$ ε) $(\alpha+\beta-\gamma)[\alpha^2-\alpha(\beta-\gamma)+(\beta-\gamma)^2]$
στ) $\alpha\beta(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$ ζ) $(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$
η) $-3(x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1)$ θ) $\alpha(\alpha+1)(\alpha^2-\alpha+1)(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)$

13. Νά χρησιμοποιήσετε πρῶτα τά παραδείγματα II ἤ I καί ὕστερα τό παράδειγμα V τῆς § 3.3 καί θά βρεῖτε:
α) $(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)(x+1)(x^2-x+1)$ β) $(\alpha+\beta)$ $(\alpha^2+\beta^2)$
γ) $(x+2)(x-2)^2(x^2-x+1)$ δ) $\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)$

14. Σύμφωνα μέ τό παράδειγμα III θά βρεῖτε:
α) $(x+5)^2$ β) $(3x-2)^2$ γ) $(3x-2y)^2$ δ) $(2x^2+1)^2$ ε) $(\alpha^2-3\beta)^2$ κ.λ.π.

15. Σύμφωνα μέ τά παραδείγματα III καί VI τῆς § 3.3 θά βρεῖτε:
α) $(\alpha+\beta-1)^2$ β) $(3x+2y)^2$ γ) $(x-2x^2)^2$ δ) $(x+1)(x^2+x+y)$

16. Σύμφωνα μέ τό παράδειγμα 1 τῆς § 3.4 ἔχουμε:
α) $(x-3)(x-1)$ β) $(x-5)(x+2)$ γ) δέν ἀναλύεται
δ) $(x+4)(x+1)$ ε) $(\alpha-\beta)(\alpha-2\beta)$ στ) $(x+y)(x-4y)$

17. Σύμφωνα μέ τό παράδειγμα 2 τῆς § 3.4 ἔχουμε:
α) $(2x+1)(x-3)$ β) $(2x+3)(3x-1)$ γ) $(3x+2)(2x-1)$ δ) δέν ἀναλύεται.
ε) $(2\alpha+5\beta)(\alpha-\beta)$ στ) $(2x+3y)(5x-2y)$

18. Σύμφωνα μέ τό παράδειγμα τῆς § 3.3, VI.
α) $(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha-\beta-\gamma)$ β) $(y+x-1)(y-x+1)$ γ) $(\alpha-\beta)(\alpha-\beta-1)$.
δ) $(\alpha+\beta+x-2)(\alpha+\beta-x+2)$ ε) $(\alpha+1)^2(\alpha-1)^2$
στ) $(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha-\beta-\gamma)$
ζ) $(x^2+3y^2+xy)(x^2+3y^2-xy)$ η) $(\alpha^2-2\beta^2-3\alpha\beta)(\alpha^2-2\beta^2+3\alpha\beta)$

19. Μέ τόν ἴδιο τρόπο ἔχουμε α) $2(x-2)(x-1)(4-x)$ β) $(\alpha+3)^2(\alpha-2)(\alpha-4)$

20. Ἀφοῦ μετατρέψουμε κάθε ἐξίσωση στή μορφή Α.Β.Γ = 0, ἔχουμε ρίζες:
α) $-\dfrac{3}{2}$, $\dfrac{3}{2}$ β) $-1, 2$ γ) -1, $-\dfrac{2}{3}$ δ) 0, $\dfrac{2}{9}$ ε) $-\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{2}$, $\sqrt{3}$ στ) 2, $-\sqrt{\dfrac{5}{2}}$, $\sqrt{\dfrac{5}{2}}$
ζ) $-1, 1, 2$ η) $0, -1, 1$ θ) $-1, 1, \sqrt{2}$ ι) ἀδύνατη.

21. α) ἀδύνατη β) 2 (διπλή ρίζα)

22. Σύμφωνα μέ τό παράδειγμα τῆς § 3.6 θά βρεῖτε
α) $Μ.Κ.Δ = 3α^2β^2$, $Ε.Κ.Π = 60α^4β^3γ$ β) $Μ.Κ.Δ = 4α^2x^3$, $Ε.Κ.Π = 24α^3x^5$
γ) $Μ.Κ.Δ = 3α^2(α-β)^2$, $Ε.Κ.Π = 6α^2β(α-β)^2(α+β)$

23. Ἐπίσης α) $Μ.Κ.Δ = 1$, $Ε.Κ.Π = 12(x+y)^2(x-y)^2$
β) $Μ.Κ.Δ = α-β$, $Ε.Κ.Π = (α+β)(α-β)^2(α^2+αβ+β^2)$
γ) $Μ.Κ.Δ = α-2$, $Ε.Κ.Π = α(α-2)(α+2)(α^2+2α+4)$
δ) $Μ.Κ.Δ = α-1$, $Ε.Κ.Π = (α-2)(α-1)^2(α+4)(α+1)α$

24. Σύμφωνα μέ τό παράδειγμα τῆς § 3.7 θά βρεῖτε:
α) $\frac{2x}{3}$ β) $\frac{3}{αγ}$ γ) $\frac{4x^2}{5y}$ δ) $\frac{3}{4}$ ε) $\frac{x}{3y}$ στ) $x-1$ ζ) $\frac{x+3}{x-1}$ η) $\frac{2y-3x}{2y+3x}$
θ) $\frac{β-α}{2(β+α)}$ ι) $x-1$ ια) $\frac{1}{β(α-β)}$ ιβ) $\frac{x(α-β)}{2}$

25. Σύμφωνα μέ τό παράδειγμα 1 τῆς § 3.8 θά βρεῖτε:
α) $\frac{4}{x}$ β) $-\frac{1}{α}$ γ) $-\frac{x+5}{6}$ δ) $\frac{5x-10}{12xy}$ ε) $\frac{2x^2-3}{x}$ στ) $\frac{α^2-β^2-γ^2}{αβγ}$
ζ) $\frac{5}{3(α+1)}$ η) $\frac{α-2β}{α+2β}$ θ) $\frac{3}{2α(α+β)}$ ι) $-\frac{xy}{x^3+y^3}$ ια) $\frac{3x-1}{(x-2)(x-1)(x+2)}$
ιβ) $\frac{2(x^3+7x^2+7x+10)}{(x-2)^2(x+1)(x+3)}$

26. Σύμφωνα μέ τό παράδειγμα 2 τῆς § 3.8 θά βρεῖτε:
α) $-\frac{8β}{5α}$ β) $\frac{2x^3}{y^2}$ γ) $\frac{β}{2γα}$ δ) $\frac{α^2β}{α-3}$ ε) $\frac{β(β-α)}{(β-4)(2-α)}$ στ) $\frac{x-2}{x+4}$
ζ) $\frac{(x-1)(x^3+x^2-4)(x-2)}{x(x+2)^2(x^2-2x+4)}$ η) $α^ν-1$ θ) $-x$ ι) $6(α-β)$

27. α) $-\frac{xy}{x+y}$ β) $\frac{4}{3}$ γ) -1 δ) 1

28. Σύμφωνα μέ τό παράδειγμα 3 τῆς § 3.8 θά βρεῖτε:
α) $\frac{3y}{2}$ β) $\frac{9x}{8}$ γ) $\frac{x}{α^3(x+2)}$ δ) $α^2-β^2$ ε) $\frac{12αβx^2-9α^2x+2β^2}{6αβ^2}$
στ) $\frac{x(x+1)}{x^2+2x+4}$

29. α) $\frac{1}{x^2y^2(x-y)}$ β) $\frac{(x^2+4xy+16y^2)(α+1)}{4(x+2y)}$ γ) α δ) 2

30. α) x β) $\frac{x+1}{x}$ γ) $\frac{β+1}{αβ^2}$ δ) $β-α$ ε) 0 στ) $\frac{x-3}{x+3}$

31. Σύμφωνα μέ τήν παράγραφο 3.9 καί ἀπορρίπτοντας τίς ρίζες, πού μηδενίζουν τούς παρονομαστές, θά βρεῖτε τίς λύσεις: α) 2 διπλή β) 1 γ) $\frac{3}{2}$
δ) ἀδύνατη ($x \neq 2$) ε) 0, ἡ 2 ἀπορρίπτεται στ) 2

32. α) Πρέπει τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως μέ $x-2$ νά εἶναι 0 ἀπ' ὅπου $λ = 2$
β) $(x-3)(x+2)(x-2)$

33. Βάζοντας ὅπου x τό $-y$ θά βρεῖτε 0, ἄρα διαιρεῖται μέ $x+y$, κ.λ.π.

34. 4

35. α) $5x^2-4x-1$ β) $(5x+1)(x-1)$ γ) $x=-\frac{1}{5}$, $x=1$.

36. α) $225x^4-34x^2+1$ β) $(5x+1)(5x-1)(3x+1)(3x-1)$ γ) $-\frac{1}{5}$, $\frac{1}{5}$, $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$

37. α) $3x(x-2)$, $(x+2)^2$, $2(x+2)(x-2)$, $4(5x+1)(x+2)$
β) $A=\frac{3x}{2(x+2)}$ $B=\frac{5x+1}{x+2}$ γ) $x=-\frac{2}{7}$

38. α) $\frac{1}{\alpha\beta}$ β) $2x$ γ) 0 δ) $x+y$

39. α) 0, β) 1

40. α) Μετατρέποντας τίς διαφορές τετραγώνων τοῦ α' μέλους σέ γινόμενα θά βρεῖτε τό δεύτερο μέλος. β) Κάνοντας τίς πράξεις καί στά δύο μέλη χωριστά θά βρεῖτε ἴσα ἐξαγόμενα. γ) Κάνοντας πράξεις στό δεύτερο μέλος καί μετά τίς ἀναγωγές ὅμοιων ὅρων θά βρεῖτε τό πρῶτο μέλος.

41. α) $20+44\sqrt{2}$ β) $\Gamma=4(4x-1)(x+3)$ γ) $x=\frac{1}{4}$, $x=-3$

42. Κάνοντας τήν πρόσθεση στήν παρένθεση καί ἀναλύοντας τούς ὅρους τῶν κλασμάτων σέ γινόμενα θά βρεῖτε 1.

43. α) $\frac{1}{x^2y^2}$ β) $\frac{1}{\alpha+\gamma}$ γ) $\alpha\beta$ δ) 1 ε) -1

44. Γιά τό Α, χρησιμοποιώντας τήν ταυτότητα $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$, θά βρεῖτε $A=y^2-2$. Γιά τό Β, μέ τήν ταυτότητα $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta)$ καί τήν τιμή τοῦ Α, θά βρεῖτε $B=y^3-3y$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

2. α) Βρίσκονται στό ἴδιο ἐπίπεδο. β) Δέ βρίσκονται στό ἴδιο ἐπίπεδο.
3. β) Συγκρίνετε τά τρίγωνα ΑΒΓ καί ΑΒ'Γ'.
4. α) Εὐθεία ε γ) βλ. α
5. ΒΖ || ΔΘ. κ.λ.π.
6. ΒΑ
7. Τέμνει τόν κύκλο Ο κατά μία διάμετρο.
8. Ἡ ΓΜ τέμνει τήν ΑΒ.
9. Ἡ α καί ε ορίζουν ἕνα ἐπίπεδο, πού ταυτίζεται μέ τό p.
11. Βλ. § 4.7
13. Οἱ δύο τέμνονται στό Ο ἡ τρίτη θά τέμνει αὐτές σέ δύο διαφορετικά σημεῖα.
14. Νά βρεῖτε τήν τομή τῆς ΑΝ μέ τήν ε.
15. Ὑποθέστε ὅτι ἡ ε τέμνει τήν α.

16. Ὑποθέστε ὅτι ἡ α δέ βρίσκεται στό q. Τό ἐπίπεδο, πού ὁρίζουν οἱ ε καί ἡ α, τέμνει τό q κ.λ.π.

17. Βλ. ΚΕΦ. 4 παραδείγματα καί ἐφαρμογές 2.

18. α) Α'Β' || ΑΒ β) Χρησιμοποιῆστε τό α.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

7. α) Νά παραστήσετε τόν ἄρτιο ἀριθμό μέ 2μ ($\mu \in N^*$)
β) Νά παραστήσετε τόν περιττό ἀριθμό μέ $2\mu+1$ ($\mu \in N^*$)

8. α) Βλ. § 5.9 παράδειγμα 2. β) $\nu^3+11\nu=\nu^3-\nu+12$ κ.λ.π.

9. Ἐφαρμόστε διαδοχικά τά τρία κριτήρια ἰσότητας τῶν τριγώνων.

10. Ἡ ΑΜΒ νά χωρισθεῖ σέ δύο γωνίες, πού εἶναι ἀντιστοίχως ἴσες μέ τίς $\widehat{MAΓ}$ καί $\widehat{MBΔ}$.

11. Βλ. § 5.11 (ἀπαγωγή σέ ἄτοπο)

12. (Ἀπαγωγή σέ ἄτοπο)

13. Βλ. § 5.9 παράδειγμα 1

14. Βλ. § 1.2 (ἀπαγωγή σέ ἄτοπο)

15. Ἀποκλεῖστε νά εἶναι α) $\widehat{A}=\widehat{B}$, β) $\widehat{A}<\widehat{B}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

1. α) 90° β) 45° γ) 90° δ) 45°

2. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ ΙΚ εἶναι κάθετη σέ δύο εὐθεῖες τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓΔ, πού περνᾶνε ἀπό τό ἴχνος της. Τό ἴδιο νά κάνετε καί γιά τό ἄλλο.

3. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ ΜΚ εἶναι μεσοκάθετος τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ.

5. α) Βρίσκονται στήν ἴδια εὐθεία. β) (ΑΒ) = 6 cm ἤ (ΑΒ) = 18 cm.

6. Ἡ ἀπόσταση εἶναι 8 cm.

7. Νά χρησιμοποιήσετε τούς τύπους, πού δίνουν τούς τριγωνομετρικούς ἀριθμούς ὀξείας γωνίας (προβολή = 6,92 cm, ἀπόσταση = 4 cm)

8. β) 1) 45° 2) 90°

9. Νά βρεῖτε πρῶτα τήν ΑΓ. Ἄν Γ' εἶναι ἡ προβολή τοῦ Γ στό p, νά βρεῖτε τήν ΑΓ' ἀπό τό τρίγωνο ΑΓΓ'. Τέλος νά παρατηρήσετε ὅτι τό τρίγωνο ΑΓ'Β εἶναι ὀρθογώνιο. (Ε = 15 cm²). ἤ βλ. παραδείγματα καί ἐφαρμογές 1.

10. Ἡ ἀντίστοιχη ἐπίπεδη τῆς δίεδρης, πού σχηματίζεται, πρέπει νά εἶναι 45°, δηλ. ἴση μέ τήν $\widehat{ABK}$.

11. Νά ἐργασθεῖτε ὅπως στό παράδειγμα τῆς § 6.10.

12. Νά συγκρίνετε τά τρίγωνα ΜΟΑ, ΜΟΒ.

13. α) Νά συγκρίνετε τά τρίγ. ΜΟΑ, ΜΟΒ β) Νά συγκρίνετε τά τριγ. ΣΟΑ, ΣΟΒ.

14. Νά φέρετε τήν ΑΓ ⊥ ΒΒ' καί νά ἐφαρμόσετε τό Πυθαγόρειο θεώρημα στό ΑΓΒ. (προβολή = 4 cm)

15. Νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ πλευρές τῶν δύο τριγώνων εἶναι ἀνά δύο ἴσες.

16. Νά φέρετε τήν ΑΑ′ $\perp$ q καί ἀπό τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΑ′Δ (Δ μέσο τῆς ΒΓ) νά ὑπολογίσετε τήν Α′Δ. $\left(E = \frac{3\alpha^2}{8}\right)$ ἤ βλ. παραδείγματα καί ἐφαρμογές 1.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

1. α

2. α) $G = \left\{(0,-4), (2,4), (3,2), \left(4, \frac{4}{3}\right), (5,1), \left(6, \frac{4}{5}\right)\right\}$

   β) Βλ. § 7.2

   γ) Βλ. § 7.2

3. Βλ. § 7.4

4. R, R−{1,3}, R−{−1,1}, $\left\{x \mid x > \frac{1}{2}\right\}$

5. Βλ. § 7.1.

6. Βλ. § 7.3 παραδείγματα καί ἐφαρμογές 2.

7. Βλ. § 7.4 παραδείγματα καί ἐφαρμογές 2.

8. Ἀνήκουν τά Α καί Γ.

9. Βλ. § 7.5.

10. Βλ. § 7.5.

11. Βλ. § 7.6.

12. α) Ἀπό τήν ἐξίσωση $-12 = \alpha.(-7)+2$ προσδιορίζεται τό α.

    β) Ὁμοίως μέ τήν α.

13. Πρώτη - τρίτη, δεύτερη - πέμπτη.

14. Βλ. § 7.7

15. Πρώτη - πέμπτη, τρίτη - τέταρτη.

16. Βλ. § 7.8.

17. α) Βλ. § 7.9 β) § 7.10 καί παράδ. γ) § 7.10 καί παράδ.

18. Βλ. § 7.11 α) $x = \pm 3$ β) ἀδύνατη γ) $x_1 = -1$, $x_2 = 5$ δ) ἀδύνατη

    ε) $x_1 = 1\frac{1}{2}$, $x_2 = -1$ στ) $x_1 = x_2 = 2$

19. $f(-2)=1$, $f(\sqrt{2}) = -1$ κ.λ.π.

20. $\alpha = 4$

21. $y = \frac{1}{2}x$

22. Ἡ ἐξίσωση $y = x^2+\alpha x+\beta$ ἐπαληθεύεται ἀπό τά (0,0) καί (1,3) καί γίνεται $y = x^2+2x$

Πίνακας τῶν τετραγώνων

καί τῶν τετραγωνικῶν ριζῶν τῶν ἀριθμῶν 1 μέχρι 100.

ΑΡΙΘΜΟΣ x	x^2	$\sqrt{x}$	ΑΡΙΘΜΟΣ x	x^2	$\sqrt{x}$
1	1	1,000	51	2 601	7,141
2	4	1,414	52	2 704	7,211
3	9	1,732	53	2 809	7,280
4	16	2,000	54	2 916	7,349
5	25	2,236	55	3 025	7,416
6	36	2,450	56	3 136	7,483
7	49	2,646	57	3 249	7,550
8	64	2,828	58	3 364	7,616
9	81	3,000	59	3 481	7,681
10	100	3,162	60	3 600	7,746
11	121	3,317	61	3 721	7,810
12	144	3.464	62	3 844	7,874
13	169	3,606	63	3 969	7,937
14	196	3,742	64	4 096	8,000
15	225	3,873	65	4 225	8,062
16	256	4,000	66	4 356	8,124
17	289	4,123	67	4 489	8,185
18	324	4,243	68	4 624	8,246
19	361	4,359	69	4 761	8,307
20	400	4,472	70	4 900	8,367
21	441	4,583	71	5 041	8,426
22	484	4,690	72	5 184	8,485
23	529	4,796	73	5 329	8,544
24	576	4,899	74	5 476	8,602
25	625	5,000	75	5 625	8,660
26	676	5,099	76	5 776	8,718
27	729	5,196	77	5 929	8,775
28	784	5,292	78	6 084	8,832
29	841	5,385	79	6 241	8,888
30	900	5,477	80	6 400	8,944
31	961	5,568	81	6 561	9,000
32	1 024	5,657	82	6 724	9,055
33	1 089	5,745	83	6 889	9,110
34	1 156	5,831	84	7 056	9,165
35	1 225	5,916	85	7 225	9,220
36	1 296	6,000	86	7 396	9,274
37	1 369	6,083	87	7 569	9,327
38	1 444	6,164	88	7 714	9,381
39	1 521	6,245	89	7 921	9,434
40	1 600	6,325	90	8 100	9,487
41	1 681	6,403	91	8 281	9,539
42	1 761	6,481	92	8 464	9,592
43	1 849	6,507	93	8 649	9,644
44	1 936	6,633	94	8 836	9,695
45	2 025	6,708	95	9 025	9,747
46	2 116	6,782	96	9 216	9,798
47	2 209	6,856	97	9 409	9,849
48	2 304	6,928	98	9 604	9,900
49	2 401	7,000	99	9 801	9,950
50	2 500	7,071	100	10 000	10,000

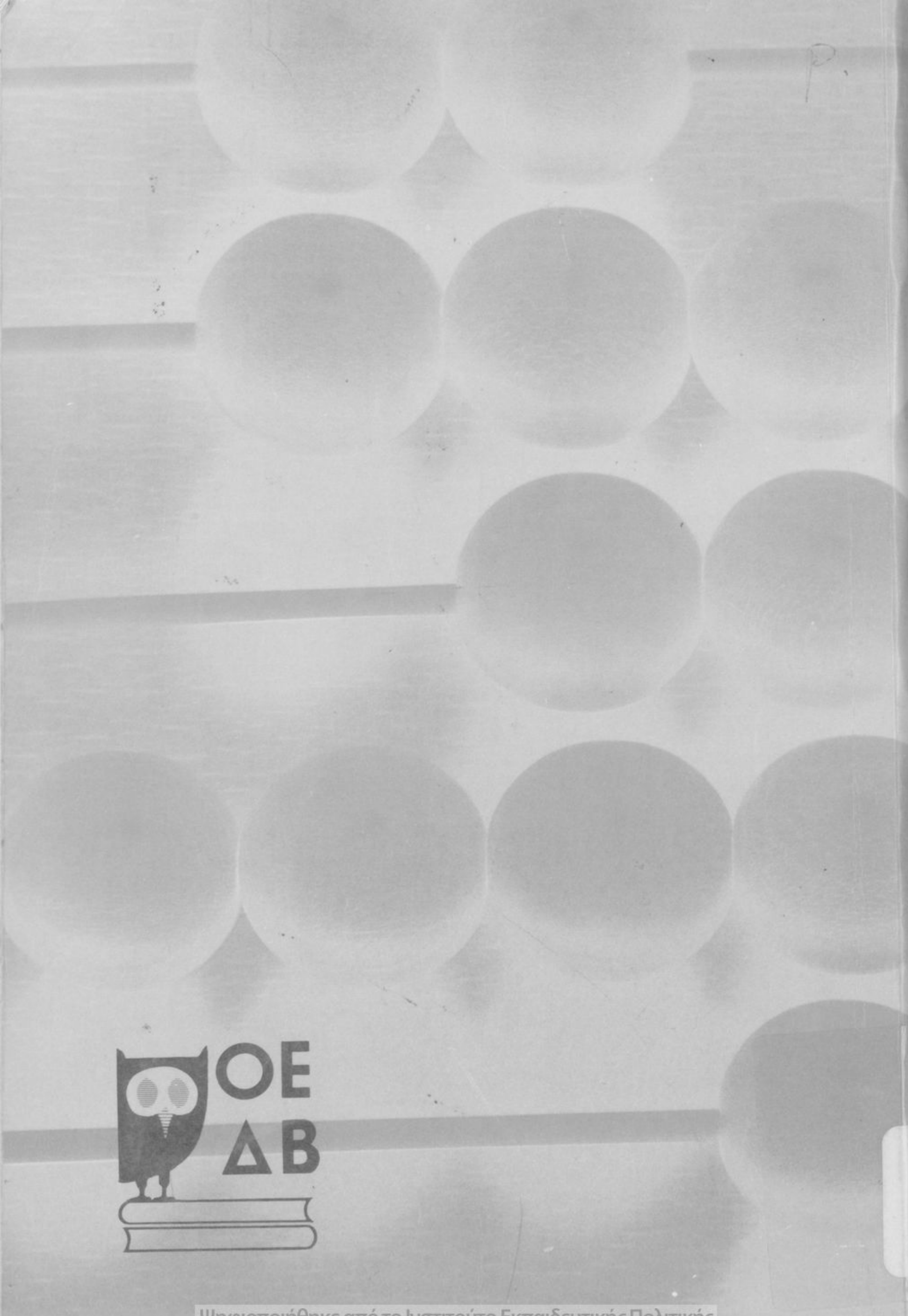
ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΓΩΝΙΑ	ημ	συν	εφ	ΓΩΝΙΑ	ημ	συν	εφ
1°	0.0175	0.9998	0.0175	46°	0.7193	0.6947	1.036
2°	0.0349	0.9994	0.0349	47°	0.7314	0.6820	1.072
3°	0.0523	0.9986	0.0524	48°	0.7431	0.6691	1.111
4°	0.0698	0.9976	0.0699	49°	0.7547	0.6561	1.150
5°	0.0872	0.9962	0.0875	50°	0.7660	0.6428	1.192
6°	0.1045	0.9945	0.1051	51°	0,7771	0,6293	1,235
7°	0.1219	0.9925	0.1228	52°	7.7880	0.6157	1.280
8°	0.1392	0.9903	0.1405	53°	0.7986	0.6018	1.327
9°	0.1564	0.9877	0.1584	54°	0.8090	0.5878	1.376
10°	0.1736	0.9848	0.1763	55°	0.8192	0.5736	1.428
11°	0.1908	0.9816	0.1944	56°	0.8290	0.5592	1.483
12°	0.2079	0.9781	0.2126	57°	0.8387	0.5446	1.540
13°	0.2250	0.9744	0.2309	58°	0.8480	0.5299	1.600
14°	0.2419	0.9703	0.2493	59°	0.8572	0.5150	1.664
15°	0.2588	0.9659	0.2679	60°	0.8660	0.5000	1.732
16°	0.2756	0.9613	0.2867	61°	0.8746	0.4848	1.804
17°	0.2924	0.9563	0.3057	62°	0.8829	0.4695	1.881
18°	0.3090	0.9511	0.3249	63°	0.8910	0.4540	1.963
19°	0.3256	0.9455	0.3443	64°	0.8988	0.4384	2.050
20°	0.3420	0.9397	0.3640	65°	0.9063	0.4226	2.145
21°	0.3584	0.9336	0.3839	66°	0.9135	0.4067	2.246
22°	0.3746	0.9272	0.4040	67°	0.9205	0.3907	2.356
23°	0.3907	0.9205	0.4245	68°	0.9272	0.3746	2.475
24°	0.4067	0.9135	0.4452	69°	0.9336	0.3584	2.605
25°	0.4226	0.9063	0.4663	70°	0.9397	0.3420	2.747
26°	0.4384	0.8988	0.4877	71°	0.9455	0.3256	2.904
27°	0.4540	0.8910	0.5095	72°	0.9511	0.3090	3.078
28°	0.4695	0.8829	0.5317	73°	0.9563	0.2924	3.271
29°	0.4848	0.8746	0.5543	74°	0.9613	0.2756	3.487
30°	0.5000	0.8660	0.5774	75°	0.9659	0.2586	3.732
31°	0.5150	0.8572	0.6009	76°	0.9703	0.2419	4.011
32°	0.5299	0.8480	0.6249	77°	0.9744	0.2250	4.332
33°	0.5446	0.8387	0.6494	78°	0.9781	0.2079	4.705
34°	0.5592	0.8290	0.6745	79°	0.9816	0.1908	5.145
35°	0.5736	0.8192	0.7002	80°	0.9848	0.1736	5.671
36°	0.5878	0.8090	0.7265	81°	0.9877	0.1564	6.314
37°	0.6018	0.7986	0.7536	82°	0.9903	0.1392	7.115
38°	0.6157	0.7880	0.7813	83°	0.9925	0.1219	8.144
39°	0.6293	0.7771	0.8098	84°	0.9945	0.1045	9.514
40°	0.6428	0.7660	0.8391	85°	0.9962	0.0872	11.43
41°	0.6561	0.7547	0.8693	86°	0.9976	0.0698	14.30
42°	0.6691	0.7431	0.9004	87°	0.9986	0.0523	19.08
43°	0.6820	0.7314	0.9325	88°	0.9994	0.0349	28.64
44°	0.6947	0.7193	0.9657	89°	0.9998	0.0175	57.29
45°	0.7071	0.7071	1.000				

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΤΕΥΧΟΣ Α'—ΕΚΔΟΣΗ Α, 1978—ΑΝΤΙΤΥΠΑ 160.000

ΕΚΤΥΠΩΣΗ : ΓΡΑΦΙΣ Ο.Ε.
ΒΙΒΛΙΟΔΕΣΙΑ : Δ. ΚΑΤΣΑΒΡΙΑΣ Ο.Ε.


ΟΕ
ΔΒ