Δ. Παπαμιχαήλ
Σ. Μπαλής
Χρ. Γιαννίκος
Δ. Νοταρᾶς
Κ. Σολδάτος

μαθηματικά
β΄ γυμνασίου
τεῦχος α΄

Ὀργανισμός
Ἐκδόσεως
Διδακτικῶν
Βιβλίων
Ἀθήνα 1978

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Δ. ΠΑΠΑΜΙΧΑΗΛ - Σ. ΜΠΑΛΗΣ
ΧΡ. ΓΙΑΝΝΙΚΟΣ - Δ. ΝΟΤΑΡΑΣ - Κ. ΣΟΛΔΑΤΟΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

β΄

ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΤΕΥΧΟΣ Α΄

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑ 1978

ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΥΜΒΟΛΩΝ

ΣΥΜΒΟΛΟ	ΣΗΜΑΣΙΑ
N, N^*	$N = \{0,1,2,3,\ldots\}$, $N^* = \{1, 2, 3,\ldots\}$
Z, Z^*	$Z = \{0, \pm 1, \pm 2,\ldots\}$, $Z^* = \{\pm 1, \pm 2,\ldots\}$
Q, Q^*	$Q = \left\{x \mid x = \frac{\alpha}{\beta},\ \alpha \in Z,\ \beta \in Z^*\right\}$, $Q^* = Q - \{0\}$
R, R^*	R : τό σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν $R^* = R - \{0\}$
$\in, \notin$	ἀνήκει, δέν ἀνήκει
$\Leftrightarrow$	ἰσοδυναμεῖ μέ...
$\Rightarrow$	συνεπάγεται
$<, >$	μικρότερο, μεγαλύτερο
$\leqq, \geqq$	μικρότερο ἤ ἴσο, μεγαλύτερο ἤ ἴσο
$\simeq$	ἴσο μέ προσέγγιση
$\cap, \cup$	τομή, ἕνωση
$\subseteq, \subset$	ὑποσύνολο, γνήσιο ὑποσύνολο
$A \times B$	καρτεσιανό γινόμενο τοῦ Α ἐπί τό Β
$\varphi: A \rightarrow B$	ἀπεικόνιση τοῦ συνόλου Α στό σύνολο Β ἤ συνάρτηση μέ πεδίο ὁρισμοῦ $A \subseteq R$ καί τιμές στό Β
$\varphi(\chi)$	εἰκόνα τοῦ x στὴν ἀπεικόνιση φ ἤ τιμή τῆς συναρτήσεως φ ἀντίστοιχη τοῦ x
$\overrightarrow{AB}$	διάνυσμα μέ ἀρχή τό Α καί τέλος τό Β
$\overline{AB}$, $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$	ἀλγεβρική τιμή τοῦ $\overrightarrow{AB}$, μέτρο τοῦ $\overrightarrow{AB}$
(AB)	μῆκος τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ
$M(\alpha,\beta)$	σημεῖο Μ, πού ἔχει συντεταγμένες α καί β
$\overrightarrow{\delta} = (\alpha, \beta)$	διάνυσμα $\overrightarrow{\delta}$, πού ἔχει συντεταγμένες α καί β
ημθ, συνθ, εφθ	ἡμίτονο, συνημίτονο, ἐφαπτομένη τῆς γωνίας θ
π	τό πηλίκο τοῦ μήκους ἑνός κύκλου πρός τό μῆκος μιᾶς διαμέτρου του, $\pi \simeq 3{,}14$
$A\hat{O}B$	γωνία μέ κορυφή τό Ο καί πλευρές ΟΑ, ΟΒ
$\overset{\frown}{AB}$	τόξο μέ ἄκρα τά Α καί Β

1ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΡΗΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Τό σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν

1.1. Τό πρῶτο σύνολο ἀριθμῶν, πού γνωρίσαμε στήν Α' τάξη, ἦταν τό *σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν*[1].

$$N = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

Στό σύνολο αὐτό ὁρίσαμε δυό βασικές πράξεις, τήν πρόσθεση καί τόν πολλαπλασιασμό καί εἴδαμε ὅτι:

- *Τό ἄθροισμα δύο φυσικῶν ἀριθμῶν εἶναι πάντοτε φυσικός ἀριθμός.*
- *Τό γινόμενο δύο φυσικῶν ἀριθμῶν εἶναι πάντοτε φυσικός ἀριθμός.*
- *Γιά κάθε φυσικό ἀριθμό α ἔχουμε $\alpha + 0 = \alpha$ καί λέμε ὅτι τό 0 εἶναι «οὐδέτερο» στοιχεῖο τῆς προσθέσεως.*
- *Γιά κάθε φυσικό ἀριθμό α ἔχουμε $\alpha \cdot 1 = \alpha$ καί λέμε ὅτι τό 1 εἶναι «οὐδέτερο» στοιχεῖο τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.*

Μέ τή βοήθεια τῆς προσθέσεως καί τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὁρίσαμε στό σύνολο N καί ἄλλες δύο πράξεις, τήν ἀφαίρεση καί τή διαίρεση. Ἔτσι π.χ. ἔχουμε

$$21 - 7 = 14, \quad \text{γιατί} \quad 7 + 14 = 21$$
$$21 : 7 = 3, \quad \text{γιατί} \quad 7 \cdot 3 = 21.$$

Διαπιστώσαμε ὅμως ὅτι οἱ πράξεις *«ἀφαίρεση» καί «διαίρεση»* δέν εἶναι πάντοτε δυνατές μέσα στό σύνολο N τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, γιατί π.χ. δέν μποροῦμε νά βροῦμε τά ἐξαγόμενα

$$3 - 10 \quad \text{καί} \quad 3 : 10.$$

Γιά νά μποροῦμε νά βρίσκουμε τέτοια ἐξαγόμενα καί νά λύνουμε σχετικά προβλήματα, σκεφθήκαμε νά «ἐπεκτείνουμε» τούς φυσικούς ἀριθμούς καί νά κατασκευάσουμε πιό «πλούσια» σύνολα.

Τό σύνολο τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.

1.2. Στήν Α' τάξη μάθαμε ἐπίσης ὅτι σύνολο τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν εἶναι τό

$$Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots\}.$$

1. Τό σύνολο ὅλων τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ἐκτός ἀπό τό 0 σημειώνεται μέ N*, δηλαδή $N^* = \{1,2,3,\ldots\}$

Βλέπουμε ὅτι κάθε στοιχεῖο τοῦ Z, ἐκτός ἀπό τό μηδέν[1], ἀποτελεῖται ἀπό ἕνα φυσικό ἀριθμό, πού ἔχει μπροστά του ἕνα ἀπό τά πρόσημα + ἤ –. Κάθε στοιχεῖο τοῦ Z, πού ἔχει τό πρόσημο +, λέγεται **θετικός ἀκέραιος**, ἐνῶ κάθε στοιχεῖο τοῦ Z, πού ἔχει τό πρόσημο –, λέγεται **ἀρνητικός ἀκέραιος**. Συμφωνοῦμε τούς θετικούς ἀκέραιους νά τούς γράφουμε καί χωρίς τό πρόσημο +. Ἔτσι π.χ. ὅταν γράφουμε +2 ἤ 2, ἐννοοῦμε τόν ἴδιο ἀκέραιο ἀριθμό. Εἶναι φανερό ὅτι

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$$

Στό σύνολο Z ὁρίσαμε ἀρχικά τίς δύο βασικές πράξεις, πρόσθεση καί πολλαπλασιασμό. Ἔτσι π.χ. ἔχουμε:

$$\begin{array}{ll} (+21)+(+7)=+28 & (+21)\cdot(+7)=147 \\ (+21)+(-7)=+14 & (+21)\cdot(-7)=-147 \\ (-21)+(+7)=-14 & (-21)\cdot(+7)=-147 \\ (-21)+(-7)=-28 & (-21)\cdot(-7)=+147 \end{array}$$

Γιά τίς δύο αὐτές πράξεις εἴδαμε ἐπίσης ὅτι:

- *Τό ἄθροισμα δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν εἶναι πάντοτε ἀκέραιος.*
- *Τό γινόμενο δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν εἶναι πάντοτε ἀκέραιος.*
- *Γιά κάθε ἀκέραιο ἀριθμό α (θετικό, ἀρνητικό ἤ μηδέν) ἔχουμε*

$$\alpha+0=\alpha, \quad \alpha\,.\,1=\alpha,$$

δηλαδή τό μηδέν εἶναι πάλι «οὐδέτερο» στοιχεῖο τῆς προσθέσεως καί τό 1 εἶναι πάλι «οὐδέτερο» στοιχεῖο τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Στό σύνολο Z τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἰσχύει ἐπίσης ἡ ἰδιότητα:

- *Ἄν $\alpha \neq 0$ εἶναι ἕνας ὁποιοσδήποτε ἀκέραιος ἀριθμός, ὑπάρχει πάντοτε ἕνας ἄλλος ἀκέραιος ἀριθμός πού, ὅταν τόν προσθέσουμε στόν α, βρίσκουμε ἄθροισμα ἴσο μέ μηδέν.* Ὁ ἀκέραιος αὐτός σημειώνεται μέ –α καί λέγεται **ἀντίθετος τοῦ α.** Ἔχουμε λοιπόν

$$\alpha+(-\alpha)=0$$

Ἔτσι π.χ. ἀντίθετος τοῦ +7 εἶναι ὁ –7, γιατί $(+7)+(-7)=0$. Ἐπίσης ἀντίθετος τοῦ –5 εἶναι ὁ +5, γιατί $(-5)+(+5)=0$. Βλέπουμε δηλαδή ὅτι

$$-(+7)=-7, \qquad -(-5)=+5$$

Στό σύνολο Z ἡ διαφορά α–β ἔχει πάντοτε νόημα, γιατί ὁρίζεται ἀπό τήν ἰσότητα

$$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$$

δηλαδή, *γιά νά ἀφαιρέσουμε τόν ἀκέραιο β ἀπό τόν ἀκέραιο α, προσθέ-*

1. Τό σύνολο ὅλων τῶν ἀκέραιων ἐκτός ἀπό τό 0 σημειώνεται μέ Z*.

τουμε στόν α τόν ἀντίθετο τοῦ β. Συνεπῶς **ἡ διαφορά δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν εἶναι πάντοτε ἀκέραιος ἀριθμός**. Ἔτσι π.χ. ἔχουμε:

$$(+21)-(+7)=(+21)+(-7)=+14$$
$$(+21)-(-7)=(+21)+(+7)=+28$$
$$(-21)-(+7)=(-21)+(-7)=-28$$
$$(-21)-(-7)=(-21)+(+7)=-14\,.$$

Τό σύνολο τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν.

1.3. Στό σύνολο N τό πηλίκο α : β ἔχει νόημα, μόνο ὅταν ὁ α διαιρεῖται ἀκριβῶς μέ τό β ($\beta \neq 0$). Σκεφθήκαμε λοιπόν πάλι νά δημιουργήσουμε ἕνα σύνολο ἀριθμῶν, στό ὁποῖο τό πηλίκο α : β νά ἔχει νόημα, ὁποιοιδήποτε καί ἄν εἶναι οἱ φυσικοί ἀριθμοί α καί β. Ἔτσι κατασκευάσαμε τούς **κλασματικούς ἀριθμούς**, πού ἔχουν τή μορφή.

$$\frac{\alpha}{\beta},\ \alpha\in N,\ \beta\in N^*.$$

Στούς κλασματικούς ἀριθμούς, πού λέγονται καί ἁπλῶς **κλάσματα**, περιέχονται καί οἱ φυσικοί ἀριθμοί, γιατί θεωροῦνται κλάσματα μέ παρονομαστή τή μονάδα.

Στήν Α' τάξη μάθαμε ὅτι δύο κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ καί $\frac{\gamma}{\delta}$ εἶναι ἴσα, ὅταν $\alpha\delta=\beta\gamma$, δηλαδή

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \quad \text{ὅταν} \quad \alpha\delta=\beta\gamma.$$

Μάθαμε ἀκόμη ὅτι:

- *Ἄν πολλαπλασιάσουμε ἤ διαιρέσουμε τούς ὅρους ἑνός κλάσματος μέ τόν ἴδιο φυσικό ἀριθμό (διαφορετικό ἀπό τό μηδέν), προκύπτει ἴσο κλάσμα.* Ἔτσι π.χ. εἶναι

$$\frac{5}{7}=\frac{5\cdot 3}{7\cdot 3}=\frac{15}{21}\ ,\quad \frac{21}{14}=\frac{21:7}{14:7}=\frac{3}{2}\,.$$

Ὅταν διαιροῦμε τούς ὅρους ἑνός κλάσματος μέ τό Μ.Κ.Δ. τους, προκύπτει ἕνα ἴσο **ἀνάγωγο** κλάσμα. Τό σύνολο, πού ἔχει στοιχεῖα ὅλα τά ἀνάγωγα κλάσματα, λέγεται **σύνολο τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν**.

- *Ἄν ἔχουμε δύο ἤ περισσότερα κλάσματα, μποροῦμε νά τά «τρέπουμε» σέ* **ὁμώνυμα** (δηλαδή νά βρίσκουμε ἴσα κλάσματα μέ τόν ἴδιο παρονομαστή) *πολλαπλασιάζοντας τούς ὅρους τοῦ καθενός μέ τόν ἀριθμό πού βρίσκουμε διαιρώντας τό Ε.Κ.Π. τῶν παρανομαστῶν μέ τόν ἀντίστοιχο παρονομαστή.*

- *Γιά νά προσθέσουμε κλάσματα, τά τρέπουμε σέ ὁμώνυμα καί προσθέτουμε τούς ἀριθμητές τους*, δηλαδή

$$\frac{5}{7}+\frac{2}{3}=\frac{15}{21}+\frac{14}{21}=\frac{29}{21}, \quad \frac{5}{7}+0=\frac{5}{7}+\frac{0}{7}=\frac{5}{7}.$$

Γενικά, γιά κάθε κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ ἔχουμε $\frac{\alpha}{\beta}+0=\frac{\alpha}{\beta}$ καί ἔτσι τό 0 εἶναι πάλι «οὐδέτερο στοιχεῖο» τῆς προσθέσεως.

- *Γιά νά ἀφαιρέσουμε δύο κλάσματα, τά τρέπουμε σέ ὁμώνυμα καί ἀφαιροῦμε τούς ἀριθμητές τους.* Ἔτσι π.χ. ἔχουμε

$$\frac{5}{7}-\frac{2}{3}=\frac{15}{21}-\frac{14}{21}=\frac{1}{21}$$

Παρατηροῦμε ὅτι ὁ ἀριθμητής τοῦ μειωτέου (ὅταν τά κλάσματα γίνουν ὁμώνυμα) εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τόν ἀριθμητή τοῦ ἀφαιρετέου.

- *Γιά νά πολλαπλασιάσουμε δύο κλάσματα, πολλαπλασιάζουμε ἁπλῶς τούς ἀριθμητές τους καί τούς παρονομαστές τους,* δηλαδή

$$\frac{5}{7}\cdot\frac{2}{3}=\frac{10}{21}, \quad \frac{5}{7}\cdot 1=\frac{5}{7}\cdot\frac{1}{1}=\frac{5}{7}.$$

Γενικά, γιά κάθε κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ ἔχουμε $\frac{\alpha}{\beta}\cdot 1=\frac{\alpha}{\beta}$ καί ἔτσι τό 1 εἶναι πάλι *«οὐδέτερο στοιχεῖο»* τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Ἄν δυό κλάσματα ἔχουν γινόμενο ἴσο μέ 1, τότε τό καθένα λέγεται **ἀντίστροφο** τοῦ ἄλλου. Εἶναι φανερό ὅτι ἀντίστροφο κλάσμα τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}\neq 0$ εἶναι τό $\frac{\beta}{\alpha}$, γιατί

$$\boxed{\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\alpha}=1}$$

Ἔτσι π.χ. ἀντίστροφο τοῦ $\frac{5}{7}$ εἶναι τό $\frac{7}{5}$ γιατί $\frac{5}{7}\cdot\frac{7}{5}=1$, ἐνῶ ἀντίστροφο τοῦ 7 εἶναι τό $\frac{1}{7}$, γιατί $7\cdot\frac{1}{7}=1$. Τό ἀντίστροφο ἑνός κλάσματος $\kappa\neq 0$ σημειώνεται μέ $\frac{1}{\kappa}$.

Στό σύνολο τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν ἡ διαίρεση εἶναι πάντα δυνατή, γιατί τό πηλίκο $\kappa:\lambda$ δύο κλασμάτων κ καί $\lambda\neq 0$ ὁρίζεται ἀπό τήν ἰσότητα

$$\boxed{\kappa:\lambda=\kappa\cdot\frac{1}{\lambda}}$$

Ἔτσι π.χ. εἶναι

$$\frac{5}{7}:\frac{2}{3}=\frac{5}{7}\cdot\frac{3}{2}=\frac{15}{14}, \quad 3:4=\frac{3}{1}:\frac{4}{1}=\frac{3}{1}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$

Βλέπουμε δηλαδή ὅτι, γιά νά διαιρέσουμε ἕνα κλάσμα κ μέ ἕνα κλάσμα λ, πολλαπλασιάζουμε τό κ μέ τό ἀντίστροφο κλάσμα $\frac{1}{\lambda}$ τοῦ διαιρέτη.

Τό σύνολο τῶν ρητῶν ἀριθμῶν.

1.4. Ὅπως μέ τούς φυσικούς ἀριθμούς κατασκευάσαμε τά κλάσματα, ἔτσι καί μέ τούς ἀκέραιους ἀριθμούς κατασκευάζουμε τά **σχετικά κλάσματα** πού ἔχουν τήν μορφή

$$\frac{\alpha}{\beta}, \quad \alpha\in Z, \ \beta\in Z^*.$$

Ἔτσι π.χ. σχετικά κλάσματα εἶναι τά

$$\frac{+2}{-3}, \frac{-5}{2}, \frac{-4}{-5}, \frac{+8}{1}, \frac{0}{3}, \ldots$$

Ἐπίσης ἕνα ὁποιοδήποτε κλάσμα εἶναι καί σχετικό κλάσμα (ἀφοῦ οἱ φυσικοί ἀριθμοί περιέχονται στούς ἀκέραιους). Τέλος κάθε ἀκέραιος ἀριθμός θεωρεῖται σχετικό κλάσμα μέ παρονομαστή $+1$.

Δύο σχετικά κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ καί $\frac{\gamma}{\delta}$ λέγονται **ἴσα**, ὅταν $\alpha\delta=\beta\gamma$ καί τότε γράφουμε $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$, δηλαδή

$$\boxed{\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \ \text{ὅταν } \alpha\delta=\beta\gamma}$$

Ἔτσι π.χ. $\frac{-2}{3}=\frac{4}{-6}$ γιατί $(-2)(-6)=3\cdot 4$, $\frac{-5}{-7}=\frac{5}{7}$, γιατί $(-5)\cdot 7=5\cdot(-7)$ καί ἀκόμη $\frac{0}{2}=\frac{0}{-3}$ γιατί $0\cdot(-3)=0\cdot 2$.

Ἀπό τόν τρόπο πού ὁρίσαμε τά ἴσα σχετικά κλάσματα συμπεραίνουμε τά ἑξῆς:

α) **Ὅταν ἀλλάζουμε τά πρόσημα τῶν ὅρων ἑνός σχετικοῦ κλάσματος, προκύπτει ἴσο σχετικό κλάσμα.** Ἔτσι π.χ. εἶναι

$$\frac{-5}{-7}=\frac{5}{7}, \quad \frac{+5}{-7}=\frac{-5}{+7}$$

β) **Ὁ παρονομαστής ἑνός σχετικοῦ κλάσματος μπορεῖ νά θεωρεῖται πάντοτε θετικός ἀκέραιος ἀριθμός** (γιατί, ἄν εἶναι ἀρνητικός ἀκέραιος ἀριθμός, ἀλλάζουμε τά πρόσημα καί τῶν δύο ὅρων του).

Στήν περίπτωση αὐτή ἕνα σχετικό κλάσμα, πού ἔχει θετικό ἀριθμητή, λέγεται **θετικό σχετικό κλάσμα**, ἐνῶ ἕνα σχετικό κλάσμα, πού ἔχει ἀρνητικό ἀριθμητή, λέγεται **ἀρνητικό σχετικό κλάσμα**. Συμφωνοῦμε ἀκόμη τό πρόσημο + ἤ − τοῦ ἀριθμητῆ νά τό γράφουμε μπροστά ἀπό τή γραμμή τοῦ κλάσματος (καί ὅταν εἶναι +, μποροῦμε νά τό παραλείπουμε). Ἔτσι π.χ. γράφουμε

$$\frac{+2}{+3}=+\frac{2}{3}=\frac{2}{3} \qquad \frac{-5}{-7}=\frac{+5}{+7}=+\frac{5}{7}=\frac{5}{7}$$

$$\frac{-2}{+3}=\frac{-2}{3}=-\frac{2}{3} \qquad \frac{+5}{-7}=\frac{-5}{+7}=\frac{-5}{7}=-\frac{5}{7}.$$

Βλέπουμε λοιπόν ὅτι τελικά **ἕνα σχετικό κλάσμα ἀποτελεῖται ἀπό ἕνα κλάσμα καί ἕνα πρόσημο + ἤ —, πού βρίσκεται μπροστά ἀπό τή γραμμή τοῦ κλάσματος** (ὅταν δέν ὑπάρχει πρόσημο, ἐννοοῦμε τό +).

Δύο σχετικά κλάσματα λέγονται «ὁμόσημα», ἄν ἔχουν τό ἴδιο πρόσημο καί «ἑτερόσημα» ἄν ἔχουν διαφορετικά πρόσημα.

γ) **Ἄν πολλαπλασιάσουμε ἤ διαιρέσουμε τούς ὅρους ἑνός σχετικοῦ κλάσματος μέ τόν ἴδιο ἀκέραιο ἀριθμό (διάφορετικό ἀπό τό 0), προκύπτει ἴσο σχετικό κλάσμα.** Ἔτσι π.χ.

$$+\frac{5}{7}=\frac{(+5)\,(-3)}{7(-3)}=\frac{-15}{-21}=\frac{+15}{+21}=+\frac{15}{21}$$

$$-\frac{21}{9}=\frac{(-21):(-3)}{9:(-3)}=\frac{+7}{-3}=\frac{-7}{3}=-\frac{7}{3}.$$

Ὅταν διαιροῦμε τούς ὅρους ἑνός σχετικοῦ κλάσματος μέ τό Μ.Κ.Δ. τους, προκύπτει ἕνα ἴσο **ἀνάγωγο** σχετικό κλάσμα. **Τό σύνολο, πού ἔχει στοιχεῖα ὅλα τά ἀνάγωγα σχετικά κλάσματα, λέγεται «σύνολο τῶν ρητῶν ἀριθμῶν» καί σημειώνεται μέ Q.**

Συνεπῶς ὅταν λέμε *«ὁ ἀριθμός ρ εἶναι ρητός»* ἤ ὅταν γράφουμε

$$\rho \in Q,$$

ἐννοοῦμε ὅτι ὁ ρ εἶναι ἕνα ὁποιοδήποτε ἀνάγωγο σχετικό κλάσμα ἤ ὁποιοσδήποτε ἀκέραιος ἀριθμός ἤ τό μηδέν[1]. Ἔτσι μποροῦμε νά γράψουμε

$$+\frac{7}{3}\in Q, \quad -2\in Q, \quad 0\in Q, \quad 5\in Q, \quad -\frac{2}{5}\in Q.$$

Ἐπειδή κάθε σχετικό κλάσμα εἶναι ἴσο μέ ἕνα ἀνάγωγο σχετικό κλάσμα, δηλαδή ἴσο μέ ἕνα ρητό ἀριθμό, συνηθίζουμε νά λέμε «ρητό ἀριθμό» καί ἕνα ὁποιοδήποτε σχετικό κλάσμα, ἄσχετα ἄν εἶναι ἀνάγωγο ἤ ὄχι. Γιά νά δηλώσουμε λοιπόν ὅτι ἕνα γράμμα κ παριστάνει γενικά σχετικό κλάσμα, γράφουμε πάλι

$$\kappa \in Q$$

ὅπως π.χ. $\frac{12}{8}\in Q, -\frac{3}{9}\in Q, \ldots$ κ.λ.π.

1. Τό σύνολο ὅλων τῶν ρητῶν ἀριθμῶν ἐκτός ἀπό τό μηδέν σημειώνεται μέ Q*

Πρόσθεση ρητῶν ἀριθμῶν

1.5. Στήν Α' τάξη μάθαμε πῶς κάνουμε πράξεις μέ κλάσματα καί εἴδαμε ὅτι, γιά νά προσθέσουμε ἤ νά ἀφαιρέσουμε κλάσματα, πρέπει πρῶτα νά τά τρέψουμε σέ ὁμώνυμα. Θά μάθουμε τώρα πῶς κάνουμε πράξεις μέ ρητούς ἀριθμούς (σχετικά κλάσματα) καί θά δοῦμε ὅτι οἱ πράξεις αὐτές ἀκολουθοῦν τούς ἴδιους κανόνες τῶν κλασμάτων.

Ἡ πρόσθεση τῶν ρητῶν ἀριθμῶν ἀκολουθεῖ τόν ἑξῆς κανόνα:

> Γιά νά προσθέσουμε ρητούς ἀριθμούς, τούς τρέπουμε πρῶτα σέ ὁμώνυμα σχετικά κλάσματα καί μετά προσθέτουμε τούς ἀριθμητές τους ἀφήνοντας τόν ἴδιο παρονομαστή.

Ἔτσι π.χ.

$$+\frac{5}{7}+\left(+\frac{2}{3}\right)=+\frac{15}{21}+\left(+\frac{14}{21}\right)=\frac{+15+(+14)}{21}=+\frac{29}{21}$$

$$+\frac{5}{7}+\left(-\frac{2}{3}\right)=+\frac{15}{21}+\left(-\frac{14}{21}\right)=\frac{+15+(-14)}{21}=+\frac{1}{21}$$

$$-1+\left(+\frac{5}{7}\right)+\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{21}{21}+\left(+\frac{15}{21}\right)+\left(-\frac{14}{21}\right)=$$

$$=\frac{(-21)+(+15)+(-14)}{21}=-\frac{20}{21}$$

Βλέπουμε δηλαδή ὅτι ἡ πρόσθεση ρητῶν ἀριθμῶν ἀνάγεται τελικά σέ πρόσθεση ἀκέραιων ἀριθμῶν (οἱ ὁποῖοι εἶναι ἀριθμητές τῶν ἀντίστοιχων ὁμώνυμων σχετικῶν κλασμάτων). Τότε ὅμως θά ἰσχύουν γιά τήν πρόσθεση τῶν ρητῶν ἀριθμῶν ὅλες οἱ ἰδιότητες πού ἰσχύουν στήν πρόσθεση τῶν ἀκέραιων ἀριθμῶν. Ἔτσι, ἄν κ,λ,ρ εἶναι ρητοί ἀριθμοί θά ἰσχύουν οἱ ἰδιότητες:

$\kappa+\lambda=\lambda+\kappa$	(ἀντιμεταθετική)
$(\kappa+\lambda)+\rho=\kappa+(\lambda+\rho)$	(προσεταιριστική)

Οἱ δύο αὐτές ἰδιότητες μᾶς ἐπιτρέπουν, ὅταν θέλουμε νά ὑπολογίσουμε ἕνα ἄθροισμα, νά κάνουμε ἀντικατάσταση ὁσωνδήποτε καί ὁποιωνδήποτε ὅρων θέλουμε μέ τό ἄθροισμά τους. Ἔτσι π.χ.

$$\left(+\frac{5}{4}\right)+\left(+\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{11}{2}\right)+\left(+\frac{1}{6}\right)+(-7)=$$

$$=\left(+\frac{5}{4}\right)+\left(+\frac{2}{3}\right)+\left(+\frac{1}{6}\right)+\left(-\frac{11}{2}\right)+(-7)=$$

$$=\left(+\frac{15}{12}\right)+\left(+\frac{8}{12}\right)+\left(+\frac{2}{12}\right)+\left(-\frac{66}{12}\right)+\left(-\frac{84}{12}\right)=$$

$$=\frac{(+15)+(+8)+(+2)}{12}+\frac{(-66)+(-84)}{12}=$$

$$=\left(+\frac{25}{12}\right)+\left(-\frac{150}{12}\right)=\frac{(+25)+(-150)}{12}=-\frac{125}{12}$$

Ἐπίσης εἶναι φανερό ὅτι γιά κάθε ρητό ἀριθμό κ ἔχουμε

$$\boxed{\kappa+0=\kappa}$$

καί ἡ ἰσότητα αὐτή μᾶς λέει ὅτι τό 0 εἶναι πάλι «οὐδέτερο» στοιχεῖο τῆς προσθέσεως.

1.6. Ἄν δίνεται ἕνας ρητός ἀριθμός, π.χ. ὁ $+\frac{2}{3}$, βρίσκεται πάντοτε ἕνας ἄλλος ρητός ἀριθμός, πού ἔχει μέ τόν $+\frac{2}{3}$ ἄθροισμα μηδέν. Αὐτός εἶναι ὁ $-\frac{2}{3}$, γιατί

$$\left(+\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{2}{3}\right)=0,$$

καί λέγεται **ἀντίθετος** τοῦ $+\frac{2}{3}$.

Γενικά, γιά κάθε ρητό ἀριθμό $\kappa \neq 0$ βρίσκεται πάντοτε ὁ «ἀντίθετός» του ὁ ὁποῖος σημειώνεται μέ $-\kappa$ καί εἶναι τέτοιος, ὥστε

$$\boxed{\kappa+(-\kappa)=0}$$

Ἔτσι ὅταν γράφουμε, $-\kappa$ ἐννοοῦμε ἁπλῶς τό ρητό ἀριθμό πού εἶναι ἀντίθετος τοῦ κ, δηλαδή πού ἀποτελεῖται ἀπό τό ἴδιο κλάσμα μέ ἀντίθετο πρόσημο, π.χ.

$$-\left(+\frac{5}{7}\right)=-\frac{5}{7}, \qquad -\left(-\frac{5}{7}\right)=+\frac{5}{7}.$$

Καταλαβαίνουμε τώρα ὅτι, **ὅταν παριστάνουμε ἕνα ρητό ἀριθμό μέ τό γράμμα k, αὐτό δέ σημαίνει ὅτι ὁ k εἶναι θετικός καί ὁ —k εἶναι ἀρνητικός** γιατί, ὅπως εἴδαμε, μπορεῖ νά εἶναι $k=-\frac{5}{7}$ καί $-k=+\frac{5}{7}$.

Ἀφαίρεση ρητῶν ἀριθμῶν.

1.7. Ἡ διαφορά δύο ρητῶν ἀριθμῶν κ καί λ ἔχει πάντοτε νόημα, γιατί ὁρίζεται (ὅπως καί ἡ διαφορά δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν) ἀπό τήν ἰσότητα

$$\boxed{\kappa - \lambda = \kappa + (-\lambda)}$$

δηλ. **γιά νά ἀφαιρέσουμε ἀπό τό ρητό k τό ρητό λ, προσθέτουμε στόν k τόν ἀντίθετο τοῦ λ.** Ἔτσι π.χ. ἔχουμε:

$$\left(+\frac{2}{3}\right)-\left(-\frac{5}{3}\right)=\left(+\frac{2}{3}\right)+\left(+\frac{5}{3}\right)=+\frac{7}{3}$$

$$\left(+\frac{2}{3}\right)-\left(+\frac{5}{3}\right)=\left(+\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{5}{3}\right)=-\frac{3}{3}=-1$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)-\left(+\frac{5}{3}\right)=\left(-\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{5}{3}\right)=-\frac{7}{3}$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)-\left(-\frac{5}{3}\right)=\left(-\frac{2}{3}\right)+\left(+\frac{5}{3}\right)=+\frac{3}{3}=+1.$$

Ἀλγεβρικὰ ἀθροίσματα.

1.8. Στήν §1.5 μάθαμε πῶς ὑπολογίζεται ἕνα ἄθροισμα ρητῶν ἀριθμῶν μέ περισσότερους ἀπό δύο προσθετέους, ὅπως π.χ. τό

$$\left(+\frac{5}{4}\right)+\left(+\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{11}{2}\right)+\left(+\frac{1}{6}\right)+(-7)$$

Σ' ἕνα τέτοιο ἄθροισμα παραλείπουμε τά σύμβολα + τῆς προσθέσεως καί τό γράφουμε πιό ἁπλά

$$+\frac{5}{4}+\frac{2}{3}-\frac{11}{2}+\frac{1}{6}-7$$

Ὅταν ἔχουμε μιά σειρά ἀπό προσθέσεις καί ἀφαιρέσεις ρητῶν ἀριθμῶν, λέμε ὅτι ἔχουμε ἕνα **ἀλγεβρικό ἄθροισμα** ρητῶν ἀριθμῶν. Ἕνα ἀλγεβρικό ἄθροισμα εἶναι π.χ. τό

$$\left(-\frac{3}{2}\right)+\left(-\frac{1}{4}\right)-\left(+\frac{5}{3}\right)+\left(+\frac{7}{2}\right)-(-6).$$

Ἐπειδή ἡ ἀφαίρεση ρητοῦ ἀριθμοῦ ἰσοδυναμεῖ μέ πρόσθεση τοῦ ἀντιθέτου του, κάθε ἀλγεβρικό ἄθροισμα γράφεται μέ τή μορφή ἑνός ἁπλοῦ ἀθροίσματος. Ἔτσι, τό παραπάνω ἄθροισμα γράφεται:

$$\left(-\frac{3}{2}\right)+\left(-\frac{1}{4}\right)-\left(+\frac{5}{3}\right)+\left(+\frac{7}{2}\right)-(-6)=$$

$$=\left(-\frac{3}{2}\right)+\left(-\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{5}{3}\right)+\left(+\frac{7}{2}\right)+(+6)=$$

$$=-\frac{3}{2}-\frac{1}{4}-\frac{5}{3}+\frac{7}{2}+6=-\frac{18}{12}-\frac{3}{12}-\frac{20}{12}+\frac{42}{12}+\frac{72}{12}=+\frac{73}{12}$$

Βλέπουμε δηλαδή ὅτι σ' ἕνα ἀλγεβρικό ἄθροισμα μποροῦμε νά παραλείπουμε τίς παρενθέσεις τῶν ὅρων του ἀκολουθώντας τούς ἑξῆς κανόνες:

- **Ὅταν μπροστά ἀπό μιά παρένθεση ὑπάρχει τό σημεῖο + τῆς προσθέσεως, γράφουμε τόν ὅρο ὅπως εἶναι (μέ τό ἴδιο πρόσημο).**
- **Ὅταν μπροστά ἀπό μιά παρένθεση ὑπάρχει τό σημεῖο — τῆς ἀφαιρέσεως, γράφουμε τόν ὅρο μέ ἀντίθετο πρόσημο.**

Ἄς θεωρήσουμε τώρα ἕνα ἀλγεβρικό ἄθροισμα, πού οἱ ὅροι του (ἤ μερικοί ἀπό τούς ὅρους του) εἶναι ἐπίσης ἀθροίσματα, π.χ. τό

$$+\left(-3+\frac{1}{2}\right)-\left(+\frac{5}{2}-7+\frac{1}{4}\right)+\left(2-\frac{3}{2}-\frac{7}{4}\right).$$

Ἡ περίπτωση αὐτή ἀνάγεται στήν προηγούμενη, ἄν ἀντικαταστήσουμε τούς ὅρους μέσα σέ κάθε παρένθεση μέ τό ἄθροισμά τους. Ἐπειδή ὅμως δύο ἀθροίσματα, πού ἔχουν ἀντίθετους ὅρους $\left(\text{ὅπως π.χ. τά } +\frac{5}{2}-7+\frac{1}{4} \text{ καί } -\frac{5}{2}+7-\frac{1}{4}\right)$, εἶναι ἀντίθετοι ἀριθμοί, μποροῦμε πάλι νά παραλείψουμε πρῶτα τίς παρενθέσεις ἀκολουθώντας τούς ἴδιους κανόνες, δηλαδή

- **Ὅταν μπροστά ἀπό μιά παρένθεση ὑπάρχει τό σημεῖο + τῆς προσθέσεως, γράφουμε τούς ὅρους τῆς παρενθέσεως ὅπως εἶναι (μέ τό ἴδιο πρόσημο).**
- **Ὅταν μπροστά ἀπό μιά παρένθεση ὑπάρχει τό σημεῖο — τῆς ἀφαιρέσεως, γράφουμε τούς ὅρους τῆς παρενθέσεως μέ ἀντίθετα πρόσημα.**

Ἔτσι π.χ. τό παραπάνω ἄθροισμα γράφεται:

$$+\left(-3+\frac{1}{2}\right)-\left(+\frac{5}{2}-7+\frac{1}{4}\right)+\left(2-\frac{3}{2}-\frac{7}{4}\right)=$$

$$=-3+\frac{1}{2}-\frac{5}{2}+7-\frac{1}{4}+2-\frac{3}{2}-\frac{7}{4}=$$

$$=-\frac{12}{4}+\frac{2}{4}-\frac{10}{4}+\frac{28}{4}-\frac{1}{4}+\frac{8}{4}-\frac{6}{4}-\frac{7}{4}=+\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

Γιά τά ἀλγεβρικά ἀθροίσματα χρησιμοποιοῦμε πολλές φορές, ἀντί γιά παρενθέσεις, ἀγκύλες [ ] ἤ ἄγκιστρα { }. Συνήθως, ἕνα ἀλγεβρικό ἄθροισμα Α (τό ὁποῖο εἶναι ὅρος κάποιου ἄλλου ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος) τό βάζουμε μέσα σέ ἀγκύλες, ὅταν περιέχει τουλάχιστον μιά παρένθεση καί τό βάζουμε μέσα σέ ἄγκιστρα, ὅταν περιέχει τουλάχιστον μιά ἀγκύλη. Γράφουμε π.χ.

$$-\frac{2}{3}+\left[-3-\left(\frac{5}{2}+1\right)\right]-\left(-2+\frac{1}{4}\right)$$

$$\left(+\frac{3}{2}-5\right)-\left\{-\left(\frac{2}{3}-1\right)+\left[-3+\left(\frac{7}{2}-2\right)\right]\right\}$$

Σέ ἕνα τέτοιο ἀλγεβρικό ἄθροισμα μποροῦμε νά παραλείπουμε τίς ἀγκύλες ἤ τά ἄγκιστρα ἐφαρμόζοντας κάθε φορά τούς ἴδιους κανόνες, μέ τούς ὁποίους παραλείπουμε τίς παρενθέσεις.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά βρεθεῖ ὁ ἀριθμός x στήν ἰσότητα** $\left(-\frac{7}{2}\right)+x+(-4)+\left(+\frac{5}{2}\right)=0$

Λύση. Ἐπειδή σέ κάθε ἄθροισμα μποροῦμε νά ἀντιμεταθέσουμε τούς ὅρους του καί νά ἀντικαταστήσουμε ὁρισμένους μέ τό ἄθροισμά τους, ἡ ἰσότητα γράφεται διαδοχικά

$$\left(-\frac{7}{2}\right)+(-4)+\left(+\frac{5}{2}\right)+x=0\,,\quad \left(-\frac{7}{2}-\frac{8}{2}+\frac{5}{2}\right)+x=0\,,$$

$$\left(-\frac{10}{2}\right)+x=0$$

καί συνεπῶς ὁ x εἶναι ἀντίθετος τοῦ $-\frac{10}{2}=-5$, δηλαδή εἶναι $x=+5$

2. **Νά ὑπολογισθεῖ μέ 2 τρόπους τό ἄθροισμα**

$$A=-7+\left(-\frac{8}{3}+2-\frac{1}{3}\right)-\left[\frac{5}{3}-\left(4-\frac{1}{3}\right)\right]$$

Λύση. α) Μποροῦμε πρῶτα σέ κάθε παρένθεση νά ἀντικαταστήσουμε τούς ὅρους της μέ τό ἄθροισμά τους. Ἐπειδή εἶναι

$$-\frac{8}{3}+2-\frac{1}{3}=-\frac{8}{3}+\frac{6}{3}-\frac{1}{3}=-\frac{3}{3}=-1\,,\quad 4-\frac{1}{3}=\frac{12}{3}-\frac{1}{3}=\frac{11}{3}\,,$$

θά ἔχουμε $A=-7+(-1)-\left(\frac{5}{3}-\frac{11}{3}\right)=-7-1-\frac{5}{3}+\frac{11}{3}=-\frac{18}{3}=-6$

β) Μποροῦμε νά παραλείψουμε ἀπό τήν ἀρχή τήν ἀγκύλη καί τίς παρενθέσεις, ὁπότε

$$A=-7-\frac{8}{3}+2-\frac{1}{3}-\frac{5}{3}+\left(4-\frac{1}{3}\right)=-7-\frac{8}{3}+2-\frac{1}{3}-\frac{5}{3}+4-\frac{1}{3}=$$

$$=-\frac{21}{3}-\frac{8}{3}+\frac{6}{3}-\frac{1}{3}-\frac{5}{3}+\frac{12}{3}-\frac{1}{3}=-\frac{18}{3}=-6.$$

3. **Στό πρῶτο ἀπό τά παρακάτω σχήματα ἔχουμε ἕνα «μαγικό τετράγωνο», στό ὁποῖο**

11	16	9
10	12	14
15	8	13

-4		-8
		2
4		0

3	-12	9
6		
		-3

16	5		3
	4	15	
7	14		12
2			

τό ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν, πού βρίσκονται σέ κάθε γραμμή του, κάθε στήλη του καί κάθε διαγώνιό του εἶναι τό ἴδιο. Στά ἑπόμενα σχήματα ἔχουμε μαγικά τετράγωνα πού «σβήστηκαν» ὁρισμένα στοιχεῖα τους. Μπορεῖτε νά τά συμπληρώσετε;

Λύση. Ἡ συμπλήρωση γίνεται εὔκολα, γιατί σέ κάθε τετράγωνο δίνονται ὅλα τά στοιχεῖα μιᾶς τουλάχιστον γραμμῆς ἤ στήλης ἤ διαγωνίου καί συνεπῶς ξέρουμε τό ἄθροισμά τους.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ποιοί ἀπό τούς παρακάτω ρητούς εἶναι ἴσοι;

α) $\frac{-2}{3}$, $\frac{8}{12}$ β) $-\frac{4}{5}$, $\frac{2}{3}$ γ) $-\frac{6}{4}$, $\frac{-15}{8}$ δ) $\frac{4}{-10}$, $\frac{-6}{15}$ ε) $\frac{-3}{5}$, $\frac{6}{10}$

2. Νά τρέψετε τά παρακάτω σχετικά κλάσματα σέ ἴσα μέ θετικό παρονομαστή:

$$\frac{3}{-5}\ ,\ \frac{-2}{-3}\ ,\ -\frac{2}{-5}\ ,\ -\frac{-4}{-5}$$

3. Νά ὁρίσετε τόν x ἔτσι, ὥστε νά ἀληθεύουν οἱ ἰσότητες:

α) $\frac{x}{-4}=\frac{5}{2}$ β) $\frac{-x}{-36}=\frac{5}{12}$ γ) $\frac{x}{45}=\frac{-4}{15}$

4. Νά βρεῖτε δύο ἴσα σχετικά κλάσματα γιά καθένα ἀπό τά παρακάτω σχετικά κλάσματα:

$$\frac{3}{4}\ ,\ -\frac{1}{2}\ ,\ \frac{-4}{-5}\ ,\ \frac{0}{3}\ ,\ 3\ ,\ -3\ ,\ \frac{-5}{2}$$

5. Νά ὑπολογιστοῦν τά ἀθροίσματα:

α) $(-5)+(-7)$ β) $(-8)+(+3)$ γ) $(+7)+(-2)$

δ) $(+11)+(+9)$ ε) $\left(-\frac{2}{3}\right)+\left(+\frac{1}{6}\right)$ στ) $-2+\left(-\frac{3}{5}\right)$

ζ) $\left(-1\frac{3}{4}\right)+\left(-2\frac{5}{6}\right)$ η) $8+\left(-9\frac{1}{8}\right)$ θ) $-3\frac{2}{12}+\left(-2\frac{5}{8}\right)$

6. Νά ὑπολογιστεῖ ὁ $x=\alpha+\beta$, ἄν

α) $\alpha=-5$, $\beta=+7$ β) $\alpha=+3$, $\beta=-\frac{1}{8}$ γ) $\alpha=15$, $\beta=-15$.

7. Νά ὑπολογιστοῦν τά ἀθροίσματα:

α) $(-2)+(-13)+(+8)+(-7)+(+14)$

β) $\left(-\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{4}{3}\right)+\left(+\frac{1}{6}\right)+\left(-\frac{5}{6}\right)+\left(-\frac{3}{4}\right)$

γ) $-2+3-8+11+15-23-1$

δ) $-1\frac{1}{5}-2+3\frac{1}{12}+\frac{1}{6}-13$

8. Νά ὑπολογιστεῖ ὁ $x=\alpha+\beta+\gamma+\delta$ γιά

α) $\alpha=-2$, $\beta=-3$, $\gamma=+13$, $\delta=-3$

β) $\alpha=-4$, $\beta=1\frac{3}{4}$, $\gamma=-2\frac{5}{6}$, $\delta=5{,}6$

9. Νά βρεῖτε τούς ρητούς ἀριθμούς x καί y, πού ἐπαληθεύουν τίς ἰσότητες:

α) $(-7)+(-4)+(-2{,}5)+x=0$ β) $(-13{,}25)+5{,}75+(-4{,}8)+y=0$

10 Νά βρεῖτε τά ἐξαγόμενα:

α) $(2-3+5)+(-8+7)$ β) $(-2+7+11)+(-2-7)+(-3+8)$

11 Νά ἐλέγξετε μέ βάση τόν ὁρισμό τῆς ἀφαιρέσεως ρητῶν ἀριθμῶν ἄν ἰσχύουν οἱ παρακάτω ἰσότητες.

α) $(-5)-(+2)=-7$ β) $(+8)-(-3)=11$ γ) $(+5)-(+8)=-3$

12. Νά ὑπολογίσετε τίς διαφορές:

α) $(+8)-(+7)$ β) $(-8)-(-3)$ γ) $(+15)-(-12)$

δ) $\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(+1\frac{5}{6}\right)$ ε) $-1-\left(-1\frac{2}{3}\right)$ στ) $(-3{,}75)-\left(-\frac{3}{5}\right)$

13. Νά ὑπολογίσετε τόν $x=\alpha-\beta$ γιά

α) $\alpha=-2,\ \beta=-\frac{1}{2}$ β) $\alpha=+5,\ \beta=-7$ γ) $\alpha=-3\frac{2}{9},\ \beta=1\frac{1}{12}$

14. Νά βγάλετε τίς παρενθέσεις καί μετά νά ὑπολογίσετε τά ἀθροίσματα:

α) $(-5)+(-6)-(+3)-(-7)+(-12)-(-13)$

β) $(-7)-(+8)+(-3)+(+7)-(-3)-(+1)$

15. Νά ὑπολογιστεῖ ὁ $x=\alpha-\beta-\gamma+\delta$, ἄν

α) $\alpha=-5,\quad \beta=-12,\quad \gamma=+7,\quad \delta=-3$

β) $\alpha=\frac{5}{6},\quad \beta=0{,}6,\quad \gamma=-1\frac{3}{4},\quad \delta=-2\frac{7}{9}$

16. Νά ὑπολογιστοῦν τά παρακάτω ἀλγεβρικά ἀθροίσματα μέ δύο τρόπους: α) ἀντικαθιστώντας, τούς ὅρους σέ κάθε παρένθεση μέ έναν ἀριθμό β) βγάζοντας ἀπό τήν ἀρχή τίς παρενθέσεις.

α) $-3-(8-7)-(-12+11)-(5+2)$

β) $3-[-2-(8+2)]-12-(8-3)$

γ) $7-(-8+3)-[-5-(10-13)-3]-1$

δ) $-(-3+1)-\{-5+(-3+7)-[-3-(-7+1)]\}-(8-5)$

ε) $-\frac{1}{2}+\left(-\frac{3}{8}\right)-\left\{-\frac{3}{4}+\left(1-\frac{1}{4}\right)-\left[-\frac{1}{3}-\left(-2+\frac{1}{4}\right)\right]\right\}-(-1)$

Πολλαπλασιασμός ρητῶν ἀριθμῶν.

1.9. Τό γινόμενο ρητῶν ἀριθμῶν ὁρίζεται (ὅπως καί τό γινόμενο τῶν κλασμάτων) μέ τόν ἑξῆς κανόνα:

> Τό γινόμενο ρητῶν ἀριθμῶν εἶναι ρητός ἀριθμός, πού ἔχει ἀριθμητή τό γινόμενο τῶν ἀριθμητῶν τους καί παρονομαστή τό γινόμενο τῶν παρονομαστῶν τους.

Ἔτσι π.χ.

$$\left(+\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)=\frac{(+2)\cdot(-4)}{3\cdot 5}=-\frac{8}{15}$$

$$(-3)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{(-3)\,(-3)}{1\cdot 4}=+\frac{9}{4}$$

$$\left(+\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)(-2)\left(+\frac{5}{6}\right)=\frac{(+3)\,(-4)\,(-2)\,(+5)}{5\cdot 3\cdot 1\cdot 6}=\frac{+120}{90}=+\frac{4}{3}.$$

Καταλαβαίνουμε λοιπόν πάλι ὅτι, **ἄν ἔχουμε ἄρτιο πλῆθος ἀρνητικῶν πα-**

ραγόντων, τό γινόμενο εἶναι θετικός ἀριθμός, ἐνῶ, ἄν ἔχουμε περιττό πλῆθος ἀρνητικῶν παραγόντων, τό γινόμενο εἶναι ἀρνητικός ἀριθμός.

Ἄς θεωρήσουμε τώρα τούς ρητούς ἀριθμούς $\kappa=+\frac{5}{6}$, $\lambda=-\frac{2}{3}$, $\rho=-\frac{1}{2}$ καί ἄς ὑπολογίσουμε τά γινόμενα:

$$\kappa\cdot\lambda=\left(+\frac{5}{6}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{10}{18}$$

$$\lambda\cdot\kappa=\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(+\frac{5}{6}\right)=-\frac{10}{18}$$

$$(\kappa\lambda)\rho=\left[\left(+\frac{5}{6}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\right]\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{10}{18}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)=+\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$$

$$\kappa(\lambda\rho)=\left(+\frac{5}{6}\right)\left[\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\right]=\left(+\frac{5}{6}\right)\left(+\frac{2}{6}\right)=+\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$$

Συγκρίνοντας τά γινόμενα αὐτά βλέπουμε ὅτι στόν πολλαπλασιασμό τῶν ρητῶν ἀριθμῶν ἰσχύουν οἱ ἰδιότητες:

$\kappa.\lambda=\lambda.\kappa$	(ἀντιμεταθετική)
$(\kappa\lambda)\rho=\kappa(\lambda\rho)$	(προσεταιριστική)

Οἱ δύο αὐτές ἰδιότητες μᾶς ἐπιτρέπουν, ὅταν θέλουμε νά ὑπολογίσουμε ἕνα γινόμενο, νά κάνουμε ἀντικατάσταση ὁσωνδήποτε καί ὁποιωνδήποτε ὅρων θέλουμε μέ τό γινόμενό τους. Ἔτσι π.χ.

$$\left(+\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)(-2)\left(+\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)=$$

$$=\left(+\frac{3}{5}\right)\left(+\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)(-2)\left(-\frac{3}{2}\right)=$$

$$=\frac{(+3)\,(+1)}{5\cdot 4}\cdot\frac{(-4)\,(-2)(-3)}{3\cdot 1\cdot 2}=\left(+\frac{3}{20}\right)\left(-\frac{24}{6}\right)=-\frac{72}{120}=-\frac{3}{5}$$

Ἄς ὑπολογίσουμε ἀκόμη τό γινόμενο $\kappa(\lambda+\rho)$ καί τό ἄθροισμα $\kappa\lambda+\kappa\rho$. Ἔχουμε

$$\kappa(\lambda+\rho)=\left(+\frac{5}{6}\right)\left[\left(-\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)\right]=$$

$$=\left(+\frac{5}{6}\right)\left[\left(-\frac{4}{6}\right)+\left(-\frac{3}{6}\right)\right]=\left(+\frac{5}{6}\right)\left(-\frac{7}{6}\right)=-\frac{35}{36}$$

$$\kappa\lambda+\kappa\rho=\left(+\frac{5}{6}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)+\left(+\frac{5}{6}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\left(-\frac{10}{18}\right)+\left(-\frac{5}{12}\right)=\left(-\frac{20}{36}\right)+\left(-\frac{15}{36}\right)=-\frac{35}{36}$$

Βλέπουμε δηλαδή ὅτι ἰσχύει ἡ ἰσότητα

$$\boxed{\kappa(\lambda+\rho) = \kappa\lambda + \kappa\rho}$$

ἡ ὁποία μᾶς λέει ὅτι στόν πολλαπλασιασμό τῶν ρητῶν ἀριθμῶν ἰσχύει ἡ **ἐπιμεριστική ἰδιότητα** ὡς πρός τήν πρόσθεση.

Ἀκόμη, εἶναι φανερό ὅτι γιά κάθε ρητό ἀριθμό κ ἔχουμε

$$\boxed{\kappa \,.\, 1 = \kappa}$$

καί ἀπό τήν ἰσότητα αὐτή καταλαβαίνουμε ὅτι τό 1 εἶναι «οὐδέτερο» στοιχεῖο τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

1.10. Ἄν δίνεται ἕνας ρητός ἀριθμός, π.χ. ὁ $+\frac{2}{3}$, βρίσκεται πάντοτε ἕνας ἄλλος ρητός ἀριθμός, πού ἔχει μέ τόν $+\frac{2}{3}$ γινόμενο ἴσο μέ 1. Αὐτός εἶναι ὁ $+\frac{3}{2}$, γιατί

$$\left(+\frac{2}{3}\right)\left(+\frac{3}{2}\right) = 1,$$

καί λέγεται **ἀντίστροφος** τοῦ $+\frac{2}{3}$.

Γενικά γιά κάθε ρητό ἀριθμό $\kappa \neq 0$ βρίσκεται πάντοτε ὁ ἀντίστροφός του, ὁ ὁποῖος εἶναι ἕνα ὁμόσημο σχετικό κλάσμα μέ ἀνεστραμμένους τούς ὅρους του καί σημειώνεται $\frac{1}{\kappa}$. Ἔχουμε λοιπόν πάντοτε

$$\boxed{\kappa \,.\, \frac{1}{\kappa} = 1}$$

Ἔτσι π.χ. ἄν $\kappa = -\frac{3}{5}$, θά εἶναι $\frac{1}{\kappa} = -\frac{5}{3}$, καί ἄν $\kappa = +\frac{1}{2}$, τότε $\frac{1}{\kappa} = +2$.

Διαίρεση ρητῶν ἀριθμῶν.

1.11 Ἄν ἔχουμε δύο ρητούς ἀριθμούς κ καί λ, ὅπου $\lambda \neq 0$, ὀνομάζουμε **πηλίκο** τοῦ κ διά τοῦ λ τόν ἀριθμό $\kappa \cdot \frac{1}{\lambda}$, τόν ὁποῖο σημειώνουμε $\kappa : \lambda$ ἤ $\frac{\kappa}{\lambda}$. Ἔτσι ἔχουμε τήν ἰσότητα

$$\boxed{\kappa : \lambda = \kappa \,.\, \frac{1}{\lambda}}$$

ἡ ὁποία μᾶς λέει ὅτι **γιά νά βροῦμε τό πηλίκο τοῦ ρητοῦ k μέ τό ρητό λ, πολλαπλασιάζουμε τόν k μέ τόν ἀντίστροφο τοῦ λ.** Ἔτσι π.χ. ἔχουμε

$$\left(+\frac{2}{3}\right):\left(+\frac{5}{6}\right)=\left(+\frac{2}{3}\right)\left(+\frac{6}{5}\right)=+\frac{12}{15}$$

$$\left(+\frac{2}{3}\right):(-3)=\left(+\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{2}{9}$$

$$\left(-\frac{3}{5}\right):\left(+\frac{3}{4}\right)=\left(-\frac{3}{5}\right)\left(+\frac{4}{3}\right)=-\frac{12}{15}$$

$$\left(-\frac{3}{5}\right):(-2)=\left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)=+\frac{3}{10}$$

Παρατηροῦμε ὅτι **τό πηλίκο ὁμόσημων ρητῶν ἀριθμῶν εἶναι θετικός ρητός ἀριθμός, ἐνῶ τό πηλίκο ἑτερόσημων ρητῶν εἶναι ἀρνητικός ρητός.**

Τό πηλίκο τῶν ρητῶν ἀριθμῶν $\kappa=-\frac{3}{5}$ καί $\lambda=+\frac{3}{4}$ γράφεται, ὅπως εἴπαμε, καί $\frac{\kappa}{\lambda}$. Ἔχουμε λοιπόν

$$\frac{-\frac{3}{5}}{+\frac{3}{4}}=\left(-\frac{3}{5}\right):\left(+\frac{3}{4}\right)=\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(+\frac{4}{3}\right)=-\frac{12}{15}=-\frac{4}{5}.$$

Τό πρῶτο μέλος τῆς ἰσότητας αὐτῆς εἶναι ἕνα **σύνθετο σχετικό κλάσμα** καί, ὅπως βλέπουμε, ὑπολογίζεται μέ τόν ἴδιο κανόνα πού μάθαμε γιά ἁπλά κλάσματα.

Ἀριθμητικές παραστάσεις.

1.12. Ὅταν λέμε **«ἀριθμητική παράσταση»**, ἐννοοῦμε μιά ἔκφραση ἡ ὁποία δηλώνει μιά σειρά πράξεων μεταξύ ρητῶν ἀριθμῶν. Τέτοιες ἐκφράσεις εἶναι π.χ. οἱ

$$\left(-\frac{2}{5}\right)(+3)+[6:(-2)]-\frac{8}{5}\,,$$

$$(-3)\left(\frac{7}{2}+6-\frac{1}{3}\right)-4\left(5-\frac{3}{4}\right)\left(-1+\frac{1}{2}\right).$$

Ἄν σέ μιά ἀριθμητική παράσταση ἐκτελέσουμε τίς πράξεις πού εἶναι σημειωμένες, καταλήγουμε σ' ἕναν ἀριθμό, ὁ ὁποῖος λέγεται **τιμή** τῆς ἀριθμητικῆς παραστάσεως. Γιά νά βροῦμε τήν τιμή μιᾶς ἀριθμητικῆς παραστάσεως, ἀκολουθοῦμε μιά ὁρισμένη σειρά (προτεραιότητα) στήν ἐκτέλεση τῶν πράξεων πού εἶναι σημειωμένες. Ἡ σειρά αὐτή εἶναι ἡ ἑξῆς:

α) **Ἄν ἡ ἀριθμητική παράσταση ἔχει παρενθέσεις (ἤ ἀγκύλες ἤ ἄγκιστρα), κάνουμε πρῶτα τίς πράξεις μέσα σ' αὐτές.**

β) Ἐκτελοῦμε τούς πολλαπλασιασμούς ἀπό ἀριστερά πρός τά δεξιά καί μετά τίς διαιρέσεις, πού εἶναι σημειωμένες.

γ) Τέλος, ἐκτελοῦμε τίς προσθέσεις καί ἀφαιρέσεις, πού ἐμφανίζονται, καί πάντοτε ἀπό τά ἀριστερά πρός τά δεξιά.

Εἶναι φανερό ὅτι καί στίς πράξεις, πού κάνουμε μέσα σέ μιά παρένθεση, ὁ πολλαπλασιασμός καί ἡ διαίρεση θά προηγοῦνται ἀπό τήν πρόσθεση καί τήν ἀφαίρεση. Ἔτσι π.χ. ἔχουμε

$$\left(-\frac{2}{5}\right)(+3)+[6:(-2)]-\frac{8}{5}=\left(-\frac{2}{5}\right)(+3)+(-3)-\frac{8}{5}=$$

$$=-\frac{6}{5}-3-\frac{8}{5}=-\frac{29}{5}$$

$$(-3)\left(\frac{7}{2}+6-\frac{1}{3}\right)-4\left(5-\frac{3}{4}\right)\left(-1+\frac{1}{2}\right)=$$

$$=(-3)\left(\frac{21}{6}+\frac{36}{6}-\frac{2}{6}\right)-4\left(+\frac{17}{4}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)=$$

$$=(-3)\left(+\frac{55}{6}\right)+\frac{17}{2}=-\frac{55}{2}+\frac{17}{2}=-\frac{38}{2}=-19$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Ἄν εἶναι $\alpha=+\frac{2}{3}$, $\beta=-2$, $\gamma=-\frac{5}{6}$, νά βρεθοῦν τά ἐξαγόμενα

$\alpha\cdot\beta$, $\alpha.\gamma$, $\beta.\gamma$, $\alpha+\beta$, $\alpha+\gamma$, $\beta+\gamma$, $\alpha(\beta+\gamma)$, $\alpha\beta+\alpha\gamma$, $\alpha+\beta.\gamma$, $(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)$

καί νά ἐξετασθεῖ ἄν ἰσχύουν οἱ δύο ἰσότητες

(I) $\alpha.(\beta+\gamma)=(\alpha.\beta)+(\alpha.\gamma)$

(II) $\alpha+(\beta.\gamma)=(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)$

Λύση.

$$\alpha.\beta=\left(+\frac{2}{3}\right)(-2)=-\frac{4}{3}$$

$$\alpha.\gamma=\left(+\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{6}\right)=-\frac{10}{18}$$

$$\beta.\gamma=(-2)\left(-\frac{5}{6}\right)=+\frac{10}{6}$$

$$\alpha+\beta=\left(+\frac{2}{3}\right)+(-2)=\left(+\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{6}{3}\right)=-\frac{4}{3}$$

$$\alpha+\gamma=\left(+\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{5}{6}\right)=\left(+\frac{4}{6}\right)+\left(-\frac{5}{6}\right)=-\frac{1}{6}$$

$$\beta+\gamma=(-2)+\left(-\frac{5}{6}\right)=\left(-\frac{12}{6}\right)+\left(-\frac{5}{6}\right)=-\frac{17}{6}$$

$$\alpha(\beta+\gamma)=\left(+\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{17}{6}\right)=-\frac{34}{18}$$

$$(\alpha+\beta)\,(\alpha+\gamma)=\left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{1}{6}\right)=\frac{4}{18}$$

$$\alpha\beta+\alpha\gamma=\left(-\frac{4}{3}\right)+\left(-\frac{10}{18}\right)=\left(-\frac{24}{18}\right)+\left(-\frac{10}{18}\right)=-\frac{34}{18}$$

$$\alpha+(\beta.\gamma)=\left(+\frac{2}{3}\right)+\left(+\frac{10}{6}\right)=\frac{2}{3}+\frac{5}{3}=\frac{7}{3}$$

Ἀπό αὐτές βλέπουμε ὅτι $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$ δηλαδή ἰσχύει ἡ (I) πού ἐκφράζει τήν ἐπιμεριστική ἰδιότητα, ἤ ὅπως λέμε καλύτερα, ἐκφράζει ὅτι ὁ πολλαπλ/σμός ἐπιμερίζει τήν πρόσθεση.

Βλέπουμε ἀκόμη ὅτι $\alpha+(\beta.\gamma)\neq(\alpha+\beta)\,(\alpha+\gamma)$, δηλαδή ὅτι δέν ἰσχύει ἡ (II). Ἡ (II) ὅμως προκύπτει ἀπό τήν (I) ἄν ἀλλάξουμε μεταξύ τους τά σημεῖα + καί . Αὐτό σημαίνει ὅτι ἡ πρόσθεση δέν ἐπιμερίζει τόν πολλαπλασιασμό.

---

2. **Ἀπό τήν ἐπιμεριστική ἰδιότητα $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$ καταλαβαίνουμε ὅτι ἰσχύουν οἱ ἰσότητες $\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta=\alpha(\beta+\gamma+\delta)$ $\quad -\alpha\beta+\alpha\gamma-\alpha\delta=-\alpha(\beta-\gamma+\delta)$**

Χρησιμοποιώντας τίς ἰσότητες αὐτές (οἱ ὁποῖες ἐκφράζουν ὅτι, ἄν σ' ἕνα ἄθροισμα γινομένων ὑπάρχει κοινός παράγοντας, αὐτός γράφεται ἔξω ἀπό μιά παρένθεση) νά βρεῖτε τά ἐξαγόμενα:

I) $21.7+21.13$ $\quad$ **II)** $\frac{3}{4}.\frac{3}{5}-\frac{3}{4}.\frac{4}{5}+\frac{3}{4}.\frac{1}{5}$

III) $-\frac{3}{4}.5+\frac{3}{4}.7-\frac{3}{4}.11$

Λύση. I) $21.7+21.13=21(7+13)=21.20=420$

II) $\frac{3}{4}.\frac{3}{5}-\frac{3}{4}.\frac{4}{5}+\frac{3}{4}.\frac{1}{5}=\frac{3}{4}\left(\frac{3}{5}-\frac{4}{5}+\frac{1}{5}\right)=$

$$=\frac{3}{4}.\frac{3-4+1}{5}=\frac{3}{4}.0=0$$

III) $-\frac{3}{4}.5+\frac{3}{4}.7-\frac{3}{4}.11=-\frac{3}{4}(5-7+11)=-\frac{3}{4}.9=-\frac{27}{4}$

---

3. **Νά ὑπολογιστοῦν τά ἀθροίσματα:**

$A=1+2+3+\ldots+87$, $\quad B=1+2+3+\ldots+999$, $\quad \Gamma=1+2+3+\ldots+\nu$

Λύση. Χρησιμοποιώντας τήν ἀντιμεταθετική ἰδιότητα, μποροῦμε νά γράψουμε ἀκόμη $A=87+\ldots+3+2+1$ καί τότε προσθέτουμε κατά μέλη τίς δύο ἰσότητες

$$\begin{aligned} A&=1+2+3+\ldots\ldots+86+87\\ A&=87+86+85+\ldots\ldots+2+1\\ \hline 2A&=88+88+88+\ldots\ldots+88+88\end{aligned}$$

Στό δεύτερο μέλος ἔχουμε 87 προσθετέους ἴσους μέ 88 καί συνεπῶς

$$2A=87.88,\quad \text{δηλαδή}\quad A=\frac{87.88}{2}=3828$$

Ἄν ἐργασθοῦμε μέ τόν ἴδιο ἀκριβῶς τρόπο, βρίσκουμε

$$B=\frac{999.1000}{2}=999.500=499500,\qquad \Gamma=\frac{\nu(\nu+1)}{2}$$

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

17. Νά βρεῖτε τά γινόμενα

α) $(-5)\cdot(-3)$ β) $(+7)\cdot(+12)$ γ) $(-5)\cdot(+3)$

δ) $(+8)(-10)$ ε) $\left(-\frac{5}{12}\right)\cdot\left(+\frac{4}{3}\right)$ στ) $\left(-\frac{7}{8}\right)\cdot\left(-\frac{8}{7}\right)$

18. Νά ὑπολογιστεῖ ὁ $x = 2\alpha - 3\beta$ ἄν

α) $\alpha = -2,\ \beta = +13$ β) $\alpha = -6,\ \beta = -\frac{7}{12}$ γ) $\alpha = -\frac{3}{4},\ \beta = 1\frac{4}{9}$

19. Νά ὑπολογίσετε τά παρακάτω γινόμενα μέ δύο τρόπους

α) $(-7+8+3)\cdot(-2)$ β) $\frac{1}{2}(12-8-6+4)$ γ) $\left(-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)$

δ) $(-8+3)\cdot(-5+7)$ ε) $\left(-8+\frac{1}{2}-0{,}8\right)\left(-2+\frac{1}{3}\right)$

20. Νά ὑπολογιστεῖ ἡ τιμή τῶν παραστάσεων:

α) $(-5+3-2)(-3)+6$ β) $(+3)(-5)+(-2)(-7)$

γ) $(-2)\cdot[-3-(-7+5)]$ δ) $\left(-4+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)\cdot\left(-8+\frac{3}{4}+\frac{1}{12}\right)$

ε) $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\cdot(-6)+2$

21. Νά ὑπολογίσετε τά παρακάτω γινόμενα

α) $(-2)\cdot(+3)(-4)$ β) $\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{4}{6}\right)$

γ) $\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(+\frac{4}{7}\right)\cdot\left(-\frac{7}{8}\right)\cdot(-3)\cdot(+3)$

22. Νά ὑπολογίσετε τό $x = \alpha\beta\gamma\delta$, ἄν

α) $\alpha = -2,\ \beta = -\frac{4}{3},\ \gamma = \frac{3}{2},\ \delta = 1$ β) $\alpha = -\frac{3}{4},\ \beta = \frac{1}{2},\ \gamma = \frac{2}{5},\ \delta = -\frac{4}{3}$

23. Νά ὑπολογίσετε τήν τιμή τῶν παραστάσεων:

α) $[(-2)(-4)(+2)](-10)$ β) $\left[4\left(-\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\right](-1)$

24. Νά ὑπολογιστεῖ ἡ τιμή τῶν παραστάσεων:

α) $[3-(3-4)][5+(2-3)](6-4)$

β) $\left(3-\frac{2}{3}\right)\left[4-\left(+\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{10}{3}\right)\right]\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$

γ) $(-3)\cdot\left(7+6-\frac{2}{3}\right)-4\cdot\left(4-\frac{3}{4}\right)\left(7-\frac{1}{2}\right)(-1)$

25. Νά βρεῖτε τά πηλίκα:

α) $(-12):(+4)$ β) $(-121):(+11)$ γ) $(-42):\left(-\frac{6}{7}\right)$

δ) $\left(+\frac{4}{5}\right):(+2)$ ε) $\left(+\frac{8}{11}\right):\left(-\frac{11}{2}\right)$ στ) $(-0{,}2):(+0{,}4)$

26. Μέ έφαρμογή τοῦ ὁρισμοῦ τῆς διαιρέσεως νά ἐλέγξετε τήν ὀρθότητα τῶν ἰσοτήτων:

α) $(-15):(-5)=3$ β) $\left(-\frac{42}{5}\right):\frac{7}{10}=-12$ γ) $\frac{4}{3}:\left(-\frac{7}{9}\right)=-\frac{12}{7}$

27. Ὑπολογίστε τόν $x=\alpha:\beta$, ἄν

α) $\alpha=-144$, $\beta=+6$ β) $\alpha=\frac{12}{7}$, $\beta=-4$ γ) $\alpha=-2{,}5$, $\beta=-0{,}5$

28. Νά ὑπολογιστοῦν μέ δύο τρόπους τά πηλίκα:

α) $(12+6-15):(-2)$ β) $(7{,}7+0{,}77-77):(0{,}7)$

γ) $\left(-\frac{5}{12}+\frac{1}{4}-2\right):\left(-\frac{1}{2}\right)$ δ) $\left(\frac{5}{2}-\frac{5}{4}-\frac{5}{3}\right):\frac{5}{2}$

29. Νά ὑπολογιστοῦν τά πηλίκα

α) $[60\,.\,(-8)\,.\,(-12)]:(-3)$ β) $[(-3)\,.\,5\,.\,(-6)\,.\,(-77)]:(-11)$

γ) $\left(\frac{6}{7}-\frac{1}{14}+\frac{3}{7}\right):\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\right)$ δ) $\left(\frac{3}{2}-\frac{5}{2}+\frac{1}{8}\right):\left[\frac{1}{5}-\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{5}\right)\right]$

30. Νά βρεθοῦν τά ἐξαγόμενα:

α) $45-19+3.6$

β) $45-(19+3.6)$

γ) $(45-19)+3.6$

δ) $45-(19+3)\,.\,6$

ε) $(45-19+3)\,.\,6$

στ) $12.48-36:3$

ζ) $12\,.\,(48-36:3)$

η) $(12\,.\,48)-(36:3)$

θ) $12\,.\,[(48-36):3]$

ι) $[12\,\,(48-36)]:3$

31. Νά ἐκτελεστοῦν οἱ πράξεις:

α) $-(8-5)-\{-2+[-3-(12-10)-5]-3\}-(-7+2-1)$

β) $(-8+1)\,.\,(-3)-7\,.\,(-5+1-3)-12$

γ) $\left(1-\frac{1}{3}\right):\left(-\frac{3}{2}\right)-\left(1\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right):1\frac{1}{5}$

δ) $\left(2-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right):\frac{1}{6}-\left(3-\frac{5}{6}\right)(-2)$

ε) $\left(2+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right):\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)-\left(2-\frac{1}{4}\right)$

32. Νά βρεῖτε τά ἐξαγόμενα:

α) $\dfrac{4+\frac{1}{3}}{-2+\frac{5}{9}}\cdot\dfrac{4}{-\frac{1}{2}}$ β) $\dfrac{\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\right)-\left(1-\frac{1}{-2}\right)}{\frac{5}{-2}+\frac{-7}{2}-1}$

γ) $\dfrac{\left(\frac{4}{5}+\frac{1}{3}\right):\frac{3}{5}-\frac{1}{6}+\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}+\frac{1}{3}:\frac{2}{3}-\left(\frac{1}{6}-\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{2}{3}}$ δ) $\dfrac{\frac{4}{-7}-\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{-3}}\cdot\left(3+\frac{1}{-5}\right)$

33. Συμπληρῶστε τόν παρακάτω πίνακα καί νά συγκρίνετε τά ἀποτελέσματα στίς τρεῖς τελευταῖες στῆλες:

α	β	γ	αβ	αγ	αβ+αγ	αβ+γ	α(β+γ)
-5	$\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{5}$	-2	3	1	$-\frac{13}{5}$	1
-6	$\frac{3}{5}$	0					
-1	$\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{5}$					

34. Νά βρεθεῖ ἡ τιμή τῶν παραστάσεων:

α) $2\alpha - 3\beta - 5$, ἄν $\alpha = -1,\ \beta = -2$

β) $2\beta(\alpha+\gamma) - \delta$, ἄν $\alpha = -2,\ \beta = -\frac{1}{2},\ \gamma = 1,\ \delta = -5$

γ) $x + \frac{2}{3}\left(x - \frac{2}{3}\right)$, ἄν $x = \frac{1}{6}$

δ) $\dfrac{x-\beta\ (x+2\beta)}{(x-\beta)\ (x+2\beta)}$ ἄν $x = 5,\ \beta = -3$

35. Ἄν $\alpha = \frac{1}{3},\ \beta = -\frac{2}{3},\ \gamma = -\frac{4}{3},\ \delta = \frac{1}{5}$, ἐπαληθεῦστε τίς παρακάτω ἰσότητες:

α) $\alpha : \beta = (\alpha.\gamma) : (\beta.\gamma)$

β) $(\alpha+\beta+\gamma) : \delta = (\alpha : \delta) + (\beta : \delta) + (\gamma : \delta)$

γ) $(\alpha.\beta) : \gamma = (\alpha : \gamma).\beta$

δ) $\alpha : (\beta.\gamma) = (\alpha : \beta) : \gamma.$

36. Χρησιμοποιῆστε τήν ἰδιότητα $\alpha\beta + \alpha\gamma = \alpha(\beta+\gamma)$, γιά νά βρεῖτε μέ σύντομο τρόπο τίς τιμές τῶν παραστάσεων:

α) $5.(-3) + 5.(-17)$ β) $-8.3 - 8.4$ γ) $-12\,(-3) - 12\,(-7)$

Διάταξη στό σύνολο Q.

1.13. Ἄν ἔχουμε δύο ὁποιουσδήποτε ρητούς ἀριθμούς α καί β πού ἡ διαφορά τους α−β εἶναι θετικός ἀριθμός, τότε λέμε ὅτι **ὁ α εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τό β** ἤ ὅτι **ὁ β εἶναι μικρότερος ἀπό τόν α** καί γράφουμε ἀντίστοιχα

$$\alpha > \beta \quad \text{ἤ} \quad \beta < \alpha$$

Οἱ δύο αὐτές σχέσεις λέγονται **ἀνισότητες** καί τά **σύμβολα** > καί < λέγονται σύμβολα **ἀνισότητας**. Ἔτσι π.χ. εἶναι

$+\frac{3}{4} > -2$, γιατί $+\frac{3}{4} - (-2) = +\frac{3}{4} + 2 = +\frac{11}{4}$ θετικός ἀριθμός

$-1 > -2$, γιατί $-1 - (-2) = -1 + 2 = +1$ θετικός ἀριθμός

$+\frac{3}{4} > +\frac{1}{2}$, γιατί $+\frac{3}{4} - \left(+\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = +\frac{1}{4}$ θετικός ἀριθ.

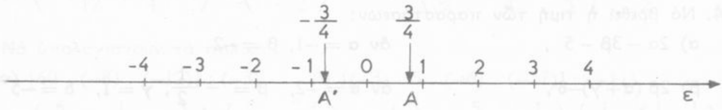
Ἀπό τόν ὁρισμό πού δώσαμε, καταλαβαίνουμε ὅτι:

- **Κάθε θετικός ἀριθμός εἶναι μεγαλύτερος ἀπό κάθε ἀρνητικό.**
- **Κάθε θετικός ἀριθμός εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τό μηδέν.**
- **Κάθε ἀρνητικός ἀριθμός εἶναι μικρότερος ἀπό τό μηδέν.**

Γι' αὐτό ἀκριβῶς, ὅταν θέλουμε νά δηλώσουμε ὅτι ἕνας ρητός ἀριθμός α εἶναι θετικός (ἤ ἀρνητικός), γράφουμε $\alpha > 0$ (ἤ $\alpha < 0$).

Στήν Α' τάξη μάθαμε πῶς μποροῦμε νά παρουσιάσουμε τούς ἀκέραιους ἀριθμούς πάνω σέ μιά εὐθεία ε.

Ἄν θεωρήσουμε μιά τέτοια παρουσίαση, μποροῦμε νά ἀντιστοιχίσουμε



σέ κάθε ρητό ἀριθμό ἕνα σημεῖο τῆς ε. Ἔτσι π.χ. στόν ἀριθμό $+\frac{3}{4}$ ἀντιστοιχίζεται ἕνα σημεῖο Α μεταξύ 0 καί 1 πού βρίσκεται ἄν χωρίσουμε τό τμῆμα αὐτό σέ τέσσερα ἴσα μέρη. Σ' ἕνα σημεῖο Α' μεταξύ 0 καί -1 τέτοιο, ὥστε ΟΑ'=ΟΑ, ἀντιστοιχίζεται τό $-\frac{3}{4}$. Ὑπάρχει λοιπόν τρόπος νά ἀντιστοιχίσουμε ὅλους τούς ρητούς ἀριθμούς σέ σημεῖα μιᾶς εὐθείας ε καί τότε ἡ ε λέγεται **ἄξονας τῶν ρητῶν ἀριθμῶν.** Στήν ἀντιστοιχία αὐτή κάθε ἀριθμός x μεγαλύτερος ἀπό ἕναν ἀριθμό α βρίσκεται δεξιά τοῦ α, ἐνῶ κάθε ἀριθμός y μικρότερος τοῦ α βρίσκεται ἀριστερά τοῦ α. Συνεπῶς οἱ θετικοί ἀριθμοί βρίσκονται δεξιά ἀπό τό 0 καί οἱ ἀρνητικοί ἀριστερά ἀπό τό 0. Μέ τήν ἀντιστοιχία αὐτή βάζουμε τούς ρητούς ἀριθμούς σέ μιά «σειρά» δηλαδή κάνουμε, ὅπως λέμε, μιά «διάταξη» τοῦ συνόλου Q τῶν ρητῶν ἀριθμῶν.

Ἰδιότητες τῶν ἀνισοτήτων.

1.14. Ἄς πάρουμε δύο ρητούς ἀριθμούς, π.χ. $\alpha = 5$ καί $\beta = 3$. Ἔχουμε $\alpha - \beta = = 5 - 3 = 2$, θετικός, ὥστε $\alpha > \beta$.

Ἄν προσθέσουμε καί στούς δύο ἕναν ἄλλο ρητό, π.χ. τόν $\gamma = -6$, ἔχουμε $\alpha + \gamma = 5 + (-6) = -1$ καί $\beta + \gamma = 3 + (-6) = -3$. Παρατηροῦμε ὅμως ὅτι $-1 - (-3) = -1 + 3 = 2$, θετικός. Ἑπομένως ἔχουμε καί

$$\alpha + \gamma > \beta + \gamma.$$

Ἄν ἀφαιρέσουμε καί ἀπό τούς δύο τόν γ, ἔχουμε $\alpha - \gamma = 5 - (-6) = = 5 + 6 = 11$ καί $\beta - \gamma = 3 - (-6) = 3 + 6 = 9$. Παρατηροῦμε πάλι ὅτι $11 - 9 = 2$, θετικός. Ἑπομένως ἔχουμε καί

$$\alpha - \gamma > \beta - \gamma$$

Γενικά, ὅταν τά γράμματα α, β καί γ παριστάνουν ρητούς ἀριθμούς, ἄν εἶναι $\alpha > \beta$ θά εἶναι καί $\alpha+\gamma > \beta+\gamma$ καί $\alpha-\gamma > \beta-\gamma$, δηλ.

> Ἄν στά μέλη μιᾶς ἀνισότητας προσθέσουμε τόν ἴδιο ρητό ἀριθμό ἤ ἀφαιρέσουμε ἀπ' αὐτά τόν ἴδιο ρητό ἀριθμό, ἡ ἀνισότητα διατηρεῖ τή φορά της.

Ἄς πάρουμε πάλι τήν ἀνισότητα $\alpha > \beta$ ὅπου $\alpha = 5$ καί $\beta = 3$ καί ἄς πολλαπλασιάσουμε τούς ρητούς, α καί β πρῶτα μέ ἕνα θετικό ρητό καί ὕστερα μέ ἕνα ἀρνητικό.

Ἄν π.χ. πάρουμε πρῶτα $\gamma = 2$, ἔχουμε $\alpha \cdot \gamma = 5 \cdot 2 = 10$ καί $\beta \cdot \gamma = 3 \cdot 2 = 6$. Παρατηροῦμε ὅτι $\alpha \cdot \gamma - \beta \cdot \gamma = 10 - 6 = 4$, θετικός. Ἑπομένως ἔχουμε καί

$$\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$$

Ἄν πάρουμε τώρα $\gamma = -2$, ἔχουμε $\alpha \cdot \gamma = 5 \cdot (-2) = -10$ καί $\beta \cdot \gamma = = 3 \cdot (-2) = -6$. Παρατηροῦμε ὅτι $\alpha \cdot \gamma - \beta \cdot \gamma = -10 - (-6) = = -10 + 6 = -4$, ἀρνητικός. Ἑπομένως ἔχουμε καί

$$\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$$

Γενικά, ὅταν τά γράμματα α, β καί γ παριστάνουν ρητούς ἀριθμούς, τότε, ἄν $\alpha > \beta$ καί γ θετικός, θά εἶναι καί $\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$, ἐνῶ, ἄν $\alpha > \beta$ καί γ ἀρνητικός, θά εἶναι $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$. Δηλαδή

> Ἄν πολλαπλασιάσουμε τά μέλη μιᾶς ἀνισότητας μέ ἕνα θετικό ρητό, ἡ ἀνισότητα διατηρεῖ τή φορά της, ἐνῶ ἄν τά πολλαπλασιάσουμε μέ ἕναν ἀρνητικό ρητό, ἡ ἀνισότητα ἀλλάζει φορά.

Ἄς πάρουμε τώρα τίς ἀνισότητες

$$5 > 2 \quad \text{καί} \quad 2 > -3$$

Παρατηροῦμε ὅτι ἡ διαφορά $5-(-3) = 5+3 = 8$, θετικός, ἐπομένως καί

$$5 > -3.$$

Γενικά :

> Ἄν τά γράμματα α, β καί γ παριστάνουν ρητούς ἀριθμούς καί εἶναι $\alpha > \beta$ καί $\beta > \gamma$, τότε εἶναι καί $\alpha > \gamma$.

Βλέπουμε δηλαδή ὅτι ἡ σχέση *«μεγαλύτερος»* εἶναι **μεταβατική.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Νά μποῦν σέ μιά σειρά ἀπό τό μικρότερο πρός τό μεγαλύτερο οἱ ἀριθμοί

$$3, \ -\frac{4}{5}, \ -2{,}3, \ -\frac{2}{3}, \ -4, \ 1{,}5, \ \frac{5}{2}$$

καί νά τοποθετηθοῦν στόν ἄξονα τῶν ρητῶν ἀριθμῶν.

Λύση.

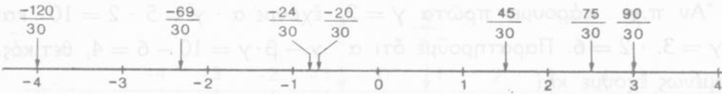
Οἱ ἀριθμοί αὐτοί σέ κλασματική μορφή γράφονται :

$$\frac{3}{1},\ -\frac{4}{5},\ -\frac{23}{10},\ -\frac{2}{3},\ -\frac{4}{1},\ \frac{15}{10},\ \frac{5}{2}$$

ἤ ἀκόμη, ἄν τραποῦν σέ ὁμώνυμα κλάσματα (ΕΚΠ = 30),

$$\frac{90}{30},\ -\frac{24}{30},\ -\frac{69}{30},\ -\frac{20}{30},\ -\frac{120}{30},\ \frac{45}{30},\ \frac{75}{30}$$

Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι ἀρκεῖ τώρα νά διατάξουμε τούς ἀριθμητές τους. Μποροῦμε ἀκόμη νά τούς τοποθετήσουμε ἀπό τήν ἀρχή στόν ἄξονα τῶν ρητῶν ἀριθμῶν.



Βλέπουμε λοιπόν ὅτι $-\frac{120}{30} < -\frac{69}{30} < -\frac{24}{30} < -\frac{20}{30} < \frac{45}{30} < \frac{75}{30} < \frac{90}{30}$

ἤ $-4 < -2{,}3 < -\frac{4}{5} < -\frac{2}{3} < 1{,}5 < \frac{5}{2} < 3$

---

2. **Ἄν α εἶναι ἕνας ρητός ἀριθμός, ὀνομάζουμε ἀ π ό λ υ τ η τ ι μ ή τ ο ῦ α τόν ἴδιο τόν α, ἄν εἶναι θετικός ἤ μηδέν, καί τόν ἀντίθετό του ἄν εἶναι ἀρνητικός. Ἡ ἀπόλυτη τιμή τοῦ α σημειώνεται μέ |α|, δηλαδή**

$$|\alpha| = \alpha \quad , \quad \text{ἄν } \alpha > 0 \text{ ἤ } \alpha = 0$$
$$|\alpha| = -\alpha \quad , \quad \text{ἄν } \alpha < 0$$

Ἔτσι π.χ. εἶναι $\left|+\frac{2}{3}\right| = +\frac{2}{3}$, $\left|-\frac{2}{3}\right| = -\left(-\frac{2}{3}\right) = +\frac{2}{3}$,

$\left|-\frac{1}{2}\right| = -\left(-\frac{1}{2}\right) = +\frac{1}{2}$.

α) Νά βρεῖτε τίς ἀπόλυτες τιμές τῶν ἀριθμῶν $x = +\frac{5}{2}$, $y = -\frac{3}{4}$, $z = -2$, $\omega = \frac{1}{4}$.

β) Μέ τίς ἀπόλυτες τιμές τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν νά δείξετε ὅτι σέ κάθε περίπτωση ἔχουμε

$$|\alpha+\beta| \leq |\alpha| + |\beta| \qquad , \qquad |\alpha\beta| = |\alpha| . |\beta|$$

Λύση. α) $|x| = \left|+\frac{5}{2}\right| = \frac{5}{2}$, $|y| = \left|-\frac{3}{4}\right| = +\frac{3}{4}$, $|z| = |-2| = +2$, $|\omega| = \frac{1}{4}$

β) $|x| + |y| = +\frac{5}{2} + \frac{3}{4} = \frac{13}{4}$, ἐνῶ $|x+y| = \left|\frac{5}{2} - \frac{3}{4}\right| = \left|+\frac{7}{4}\right| = \frac{7}{4}$

Συνεπῶς $|x+y| < |x| + |y|$

$|x| + |\omega| = +\frac{5}{2} + \frac{1}{4} = \frac{11}{4}$, ἐνῶ $|x+\omega| = \left|\frac{5}{2} + \frac{1}{4}\right| = \left|+\frac{11}{4}\right| = \frac{11}{4}$

Συνεπῶς $|x+\omega| = |x| + |\omega|$

Ὁμοίως βρίσκουμε $|x+y| < |x| + |z|$ καί $|y+\omega| = |y| + |\omega|$. Δηλαδή σέ κάθε περίπτωση ἔχουμε

$$|\alpha+\beta| \leqslant |\alpha| + |\beta|$$

$|x|\,|y| = \left(+\frac{5}{2}\right) . \left(+\frac{3}{4}\right) = \frac{15}{8}$, ἐνῶ $|x . y| = \left|\left(+\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{3}{4}\right)\right|$

$$=\left|-\frac{15}{8}\right|=+\frac{15}{8}.$$ Συνεπῶς $|xy|=|x||y|$.

Ὁμοίως βρίσκουμε $|x\omega|=|x||\omega|$, $|y\omega|=|y||\omega|,\ldots$, δηλαδή ἔχουμε πάντα $|\alpha\beta|=|\alpha||\beta|$.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

37. Νά δείξετε μέ τόν ὁρισμό τῆς ἀνισότητας ὅτι

$$-\frac{2}{3}>-\frac{12}{5},\quad \frac{2}{3}<\frac{12}{5},\quad -\frac{2}{3}<\frac{12}{5}$$

38. Νά βάλετε ἕνα ἀπό τά σύμβολα $<$ καί $>$ στή θέση πού ὑπάρχουν οἱ τελεῖες στά παρακάτω ζεύγη ἀριθμῶν.

$$-\frac{3}{11}\ \ldots\ldots -\frac{7}{11}\qquad \frac{7}{8}\ \ldots\ldots \frac{8}{9}\qquad -\frac{170}{83}\ \ldots\ldots \frac{1}{27}$$

$$-\frac{27}{11}\ \ldots\ldots -\frac{7}{11}\qquad \frac{7}{8}\ \ldots\ldots -\frac{8}{9}\qquad \frac{11}{123}\ \ldots\ldots -\frac{27}{91}.$$

39. Ἄν εἶναι $\alpha>\beta$ καί $\gamma>0$ δεῖξτε ὅτι $\dfrac{\alpha+\gamma}{\gamma}>\dfrac{\beta+\gamma}{\gamma}$, $\dfrac{\alpha-\gamma}{\gamma}>\dfrac{\beta-\gamma}{\gamma}$.

40. Ἄν εἶναι $\alpha>\beta$ καί $\gamma<0$, δεῖξτε ὅτι $\dfrac{\alpha+\gamma}{\gamma}<\dfrac{\beta+\gamma}{\gamma}$, $\dfrac{\alpha-\gamma}{\gamma}<\dfrac{\beta-\gamma}{\gamma}$.

Δύναμη ρητοῦ ἀριθμοῦ μέ ἐκθέτη ἀκέραιο.

1.15. Μάθαμε στήν πρώτη τάξη ὅτι ἕνα γινόμενο, πού ὅλοι οἱ παράγοντές του εἶναι ἴσοι μεταξύ τους, τό γράφουμε πιό σύντομα σάν δύναμη. Ἔτσι π.χ. ἔχουμε

$$5\cdot 5\cdot 5=5^3,$$ τρίτη δύναμη τοῦ 5,

$$(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)=(-2)^4,$$ τετάρτη δύναμη τοῦ -2.

Ἡ ἔννοια αὐτή τῆς δύναμης ἐπεκτείνεται καί στούς ρητούς ἀριθμούς. Ἄν τό γράμμα α παριστάνει ἕνα ρητό ἀριθμό, **νιοστή δύναμη τοῦ α λέγεται ἕνα γινόμενο μέ ν παράγοντες ἴσους μέ α καί συμβολίζεται α^ν**, δηλ.

$$\boxed{\alpha^\nu=\underbrace{\alpha\,.\,\alpha\,.\,\alpha\ldots\alpha}_{\nu\ \text{παράγοντες}}}$$

Ὁ ρητός ἀριθμός α λέγεται βάση τῆς δύναμης καί ὁ φυσικός ν ἐκθέτης. Εἶναι φανερό ὅτι ὁ ἐκθέτης ν εἶναι μεγαλύτερος ἤ ἴσος ἀπό τόν 2, γιατί, γιά νά ἔχουμε γινόμενο, πρέπει νά ἔχουμε τουλάχιστο δυό παράγοντες.

Συμφωνοῦμε ὅτι **κάθε ρητό ἀριθμό α θά τόν γράφουμε καί σάν δύναμη πού ἔχει ἐκθέτη ἴσο μέ 1,** δηλ.

$$\boxed{\alpha^1=\alpha}$$ πρώτη δύναμη τοῦ α.

Ἔτσι π.χ. ἔχουμε

$$(-2)^3=(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)=-8, \quad \left(-\frac{3}{4}\right)^2=\left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{3}{4}\right)=+\frac{9}{16}$$

$$\alpha^5=\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha, \qquad 10^6=10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10=1000000.$$

Εἰδικά τή δεύτερη δύναμη ἑνός ἀριθμοῦ τήν ὀνομάζουμε καί **τετράγωνο** τοῦ ἀριθμοῦ καί τήν τρίτη δύναμή του τήν ὀνομάζουμε καί **κύβο** τοῦ ἀριθμοῦ.

Παρατηροῦμε ὅτι ὁποιαδήποτε δύναμη τοῦ 0 εἶναι ἴση μέ 0 καί ὁποιαδήποτε δύναμη τοῦ 1 εἶναι ἴση μέ ἕνα, ἔχουμε δηλ. πάντοτε τίς ἰσότητες:

$$\mathbf{0^\nu=0\ (\nu \in N^*)\ \text{καί}\ 1^\nu=1\ (\nu \in N)}$$

Ἐπίσης, παρατηροῦμε ὅτι:

$$10^1=10 \qquad 10^4=10000$$
$$10^2=100 \qquad 10^5=100000$$
$$10^3=1000 \qquad 10^6=1000000$$

δηλ. παρατηροῦμε ὅτι κάθε δύναμη τοῦ 10 εἶναι ἴση μέ ἕναν ἀριθμό μέ πρῶτο ψηφίο τό 1, πού ἀκολουθεῖται ἀπό τόσα μηδενικά, ὅσος εἶναι ὁ ἐκθέτης. Ὥστε

$$\mathbf{10^\nu=1\underbrace{000\ldots0}_{\nu\ \text{μηδενικά}}}$$

Ἰδιότητες τῶν δυνάμεων. Δύναμη μέ ἀρνητικό ἐκθέτη.

1.16. Ἐπειδή τό γινόμενο θετικῶν ἀριθμῶν εἶναι πάντοτε θετικός ἀριθμός, κάθε δύναμη θετικοῦ ἀριθμοῦ θά εἶναι θετικός ἀριθμός, δηλ.

$$\boxed{\text{ἄν } \alpha \text{ θετικός τότε καί } \alpha^\nu \text{ θετικός.}}$$

Ἄς πάρουμε ἕναν ἀρνητικό ἀριθμό π.χ τόν $\alpha=-3$ καί ἄς ὑπολογίσουμε διάφορες δυνάμεις του. Ἔχουμε

$$(-3)^1=-3 \qquad (-3)^3=(-3)(-3)(-3)=-27$$
$$(-3)^2=(-3)(-3)=9 \qquad (-3)^4=(-3)(-3)(-3)(-3)=81$$

Γενικά διαπιστώνουμε ὅτι οἱ **ἄρτιες δυνάμεις ἑνός ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι θετικοί ἀριθμοί, ἐνῶ οἱ περιττές δυνάμεις του εἶναι ἀρνητικοί ἀριθμοί.** Ὥστε:

α ἀρνητικός	καί	ν ἄρτιος,	τότε	α^ν θετικός,
α ἀρνητικός	καί	ν περιττός,	τότε	α^ν ἀρνητικός.

Πρέπει νά προσέξουμε ὅτι $(-2)^4=(-2)(-2)(-2)(-2)=16=2^4$, ἐνῶ

$-2^4=-(2\cdot 2\cdot 2\cdot 2)=-16$, δηλ.

$$(-2)^4 \neq -2^4$$

Εἰδικά γιά τόν ἀριθμό -1 ἔχουμε

$(-1)^\nu=1$, ὅταν ν ἄρτιος καί $(-1)^\nu=-1$, ὅταν ν περιττός.

Ἔτσι π.χ. εἶναι $(-1)^{100}=1$ καί $(-1)^{13}=-1$.

Ἄν τά γράμματα α καί β παριστάνουν ρητούς ἀριθμούς, παρατηροῦμε ὅτι:

$$\alpha^2\cdot\alpha^3=(\alpha\cdot\alpha)\cdot(\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha)=\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha=\alpha^5$$

καί γενικά

$$\alpha^\nu\cdot\alpha^\mu=\underbrace{(\alpha\cdot\alpha\ldots\alpha)}_{\nu\ \text{παράγ.}}\cdot\underbrace{(\alpha\cdot\alpha\ldots\alpha)}_{\mu\ \text{παράγ.}}=\underbrace{\alpha\cdot\alpha\ldots\alpha}_{\mu+\nu\ \text{παράγ.}}=\alpha^{\mu+\nu},$$

δηλ. **τό γινόμενο δύο δυνάμεων ἑνός ἀριθμοῦ α εἶναι δύναμη μέ βάση τόν α καί ἐκθέτη τό ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν.**

$$\boxed{\alpha^\nu\cdot\alpha^\mu=\alpha^{\nu+\mu}}$$

Ἐπίσης, παρατηροῦμε π.χ. ὅτι:

$$(\alpha\beta)^3=(\alpha\beta)\cdot(\alpha\beta)\cdot(\alpha\beta)=(\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha)\cdot(\beta\cdot\beta\cdot\beta)=\alpha^3\cdot\beta^3$$

καί γενικά

$$(\alpha\beta)^\nu=\underbrace{(\alpha\beta)(\alpha\beta)\ldots(\alpha\beta)}_{\nu\ \text{παράγ.}}=\underbrace{(\alpha\cdot\alpha\ldots\alpha)}_{\nu\ \text{παράγ.}}\cdot\underbrace{(\beta\cdot\beta\ldots\beta)}_{\nu\ \text{παράγ.}}=\alpha^\nu\cdot\beta^\nu,$$

δηλ. **ἡ δύναμη τοῦ γινομένου δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται μέ τό γινόμενο τῶν δυνάμεων τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν.**

$$\boxed{(\alpha\cdot\beta)^\nu=\alpha^\nu\cdot\beta^\nu}$$

Ἔτσι π.χ. ἔχουμε:

$$2^3\cdot 2^5=2^{3+5}=2^8,\qquad \left(-\frac{3}{5}\right)^2\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)^4=\left(-\frac{3}{5}\right)^6$$

$$(2\cdot 3)^5=2^5\cdot 3^5,\qquad \left[(-2)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)\right]^6=(-2)^6\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^6$$

Ἄς πάρουμε τώρα μιά δύναμη ἑνός ἀριθμοῦ, π.χ τοῦ 2^3 καί ἄς τήν ὑψώσουμε σέ μιά ἄλλη δύναμη. Ἔχουμε τότε

$$(2^3)^2=2^3\cdot 2^3=2^{3+3}=2^{2\cdot 3}$$

$$(2^3)^5=2^3\cdot 2^3\cdot 2^3\cdot 2^3\cdot 2^3=2^{3+3+3+3+3}=2^{5\cdot 3}$$

Γενικά, ἔχουμε

$$(\alpha^\nu)^\mu=\underbrace{\alpha^\nu\cdot\alpha^\nu\cdot\alpha^\nu\ldots\alpha^\nu}_{\mu\ \text{παράγοντες}}=\alpha^{\overbrace{\nu+\nu+\cdots+\nu}^{\mu\ \text{προσθετέοι}}}=\alpha^{\mu\cdot\nu},$$

δηλ. **ἡ δύναμη μιᾶς δύναμης ἑνός ἀριθμοῦ α εἶναι ἴση μέ δύναμη, πού ἔχει βάση τόν ἀριθμό α καί ἐκθέτη τό γινόμενο τῶν ἐκθετῶν.**

$$\boxed{(\alpha^{\nu})^{\mu} = \alpha^{\nu\mu}}$$

Ἄς πάρουμε διάφορες δυνάμεις ἑνός ἀριθμοῦ καί ἄς τίς διαιρέσουμε. Ἔχουμε π.χ.

$$\frac{2^5}{2^3} = \frac{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2}{2\cdot2\cdot2} = 2\cdot2 = 2^2 = 2^{5-3}$$

Γενικά, ἄν α^{ν} καί α^{μ} εἶναι δυό δυνάμεις τοῦ α καί εἶναι $\nu > \mu$. τότε ἔχουμε

$$\frac{\alpha^{\nu}}{\alpha^{\mu}} = \frac{\overbrace{\alpha\cdot\alpha\ldots\alpha}^{\nu}}{\underbrace{\alpha.\alpha\ldots\alpha}_{\mu}} = \frac{\overbrace{(\alpha\cdot\alpha\ldots\alpha)}^{\mu}\cdot\overbrace{(\alpha.\alpha\ldots\alpha)}^{\nu-\mu}}{\underbrace{(\alpha.\alpha\ldots\alpha)}_{\mu}} = \alpha^{\nu-\mu}.$$

Συνεπῶς :

$$\boxed{\text{Ὅταν } \nu > \mu, \text{ τότε } \alpha^{\nu} : \alpha^{\mu} = \alpha^{\nu-\mu}.}$$

Ἔτσι π.χ. ἔχουμε

$$(-2)^5 : (-2)^2 = (-2)^3, \quad \left(\frac{4}{5}\right)^4 : \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^2$$

Στίς διαιρέσεις

$$4^3 : 4^3 \quad \text{καί} \quad 4^3 : 4^5$$

δέν μποροῦμε νά χρησιμοποιήσουμε τόν προηγούμενο κανόνα, γιατί ὁ ἐκθέτης τοῦ διαιρετέου δέν εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τόν ἐκθέτη τοῦ διαιρέτη. Ἄν ὅμως κάνουμε τίς διαιρέσεις βρίσκουμε:

$$4^3 : 4^3 = \frac{4\cdot4\cdot4}{4\cdot4\cdot4} = 1,\ 4^3 : 4^5 = \frac{4\cdot4\cdot4}{4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4} = \frac{1}{4\cdot4} = \frac{1}{4^2}.$$

Ἄν τώρα κάναμε χρήση τοῦ προηγούμενου κανόνα, θά βρίσκαμε

$$4^3 : 4^3 = 4^{3-3} = 4^0 \quad \text{καί} \quad 4^3 : 4^5 = 4^{3-5} = 4^{-2}$$

Τά σύμβολα 4^0 καί 4^{-2}, σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό πού δώσαμε, δέν εἶναι δυνάμεις, γιατί δέν ἔχουν ἀκέραιο θετικό ἐκθέτη. Συμφωνοῦμε ὅμως νά γράφουμε:

$$4^0 = 1 \quad \text{καί} \quad 4^{-2} = \frac{1}{4^2}$$

Γενικά συμφωνοῦμε ὅτι γιά κάθε ρητό $\alpha \neq 0$ θά γράφουμε:

$$\boxed{\alpha^{\circ}=1 \quad \text{καί} \quad \alpha^{-\nu}=\frac{1}{\alpha^{\nu}} \quad (\nu \in \mathbb{N}).}$$

Ὕστερα ἀπό τή συμφωνία αὐτή ἔχουμε πάντοτε

$$\boxed{\alpha^{\nu} : \alpha^{\mu} = \alpha^{\nu-\mu}}$$

δηλ. **τό πηλίκο δυό δυνάμεων τοῦ ἴδιου ἀριθμοῦ εἶναι ἴσο μέ δύναμη πού ἔχει τήν ἴδια βάση καί ἐκθέτη τή διαφορά τῶν ἐκθετῶν.**

Ἔτσι π.χ. ἔχουμε:

$$(-2)^3 : (-2)^5 = (-2)^{3-5} = (-2)^{-2} = \frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{2^2}$$

$$\left(-\frac{3}{4}\right)^5 : \left(-\frac{3}{4}\right)^5 = \left(-\frac{3}{4}\right)^{5-5} = \left(-\frac{3}{4}\right)^0 = 1$$

$$\left[(-3)\cdot\left(+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)\right]^0 = 1$$

Ἐκθετική μορφή πολύ μικρῶν καί πολύ μεγάλων ἀριθμῶν.

1.17. Στίς θετικές ἐπιστῆμες, ὅπως στήν Ἀστρονομία, τή Φυσική κλπ., χρησιμοποιοῦμε μερικές φορές ἀριθμούς πολύ μεγάλους ἤ πολύ μικρούς, πού εἶναι δύσκολο νά γραφτοῦν καί νά διαβαστοῦν καί πολύ περισσότερο νά γίνουν πράξεις μ᾽ αὐτούς. Τούς ἀριθμούς αὐτούς μποροῦμε νά τούς γράφουμε σύντομα μέ τή βοήθεια τῶν δυνάμεων τοῦ 10, οἱ ὁποῖες εὔκολα ὑπολογίζονται. Παρατηροῦμε ὅτι:

$$10^1 = 10 \qquad 10^{-1} = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

$$10^2 = 100 \qquad 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = 0{,}01$$

$$10^3 = 1000 \qquad 10^{-3} = \frac{1}{10^3} = 0{,}001$$

$$10^4 = 10000 \qquad 10^{-4} = \frac{1}{10^4} = 0{,}0001$$

$$10^{\nu} = 1\underbrace{000\ldots0}_{\nu\ \text{μηδενικά}} \qquad 10^{-\nu} = \frac{1}{10^{\nu}} = \underbrace{0{,}000\ldots}_{\nu\ \text{μηδενικά}}1$$

Συμφωνοῦμε λοιπόν τούς πολύ μεγάλους ἤ πολύ μικρούς ἀριθμούς νά τούς γράφουμε σάν γινόμενο ἑνός ρητοῦ α, πού περιέχεται μεταξύ τοῦ 1 καί τοῦ 10, καί μιᾶς δύναμης τοῦ 10, δηλαδή νά τούς γράφουμε στή μορφή

$$\alpha \cdot 10^{\nu}$$

῎Ετσι π.χ. ἔχουμε:

$$0{,}000000000000001 = 10^{-15}$$

$$0{,}000000000000007 = 7 \cdot 0{,}000000000000001 = 7 \cdot 10^{-15}$$

$$0{,}0000000128 = 1{,}28 \cdot 0{,}00000001 = 1{,}28 \cdot 10^{-8}$$

῾Η ἀπόσταση τῆς γῆς ἀπό τό ἥλιο, πού εἶναι 150000000 km, γράφεται

$$150000000 = 1{,}5 \cdot 100000000 = 1{,}5 \cdot 10^{8}$$

῾Η ταχύτητα, μέ τήν ὁποία κινεῖται τό φῶς εἶναι 30000000000 cm/sec καί γράφεται $30000000000 = 3 \cdot 10^{10}$.

῾Η μάζα, πού ἔχει ἕνα ἠλεκτρόνιο, εἶναι $9{,}109 \cdot 10^{-28}$ gr. Γιά νά γραφεῖ ὁ ἀριθμός αὐτός σέ δεκαδική μορφή, πρέπει νά μετακινήσουμε τήν ὑποδιαστολή του 28 θέσεις ἀριστερά, καί τότε γίνεται

$$0{,}0000000000000000000000000009109$$

῾Ο ὄγκος, πού ἔχει ὁ πυρήνας ἑνός ἀτόμου, εἶναι περίπου 10^{-36} cm^3. ῾Ο ἀριθμός αὐτός στή δεκαδική του μορφή θά γράφεται μέ ἀκέραιο μέρος μηδέν καί μετά τήν ὑποδιαστολή θά ἀκολουθοῦν 35 μηδενικά καί τό 1.

Μέ τή μορφή αὐτή γίνονται καί σχετικά εὔκολα πράξεις μέ τέτοιους ἀριθμούς. ῎Ας ὑπολογίσουμε π.χ. τό γινόμενο

$$\begin{aligned} &140 \cdot 32000000000 \cdot 0{,}0000000000006 = \\ &= (1{,}4 \cdot 10^{2}) \cdot (3{,}2 \cdot 10^{10}) \cdot (6 \cdot 10^{-13}) = \\ &= (1{,}4 \cdot 3{,}2 \cdot 6) \cdot 10^{2} \cdot 10^{10} \cdot 10^{-13} \\ &= 26{,}88 \cdot 10^{-1} = 2{,}688. \end{aligned}$$

Σημείωση. Αὐτή ἡ μορφή χρησιμοποιεῖται στούς ἠλεκτρονικούς ὑπολογιστές καί σέ μερικά μικρά *«κομπιουτεράκια»*.

῎Ετσι, ὅταν γράφεται στόν πίνακα τοῦ ὑπολογιστῆ ἕνας δεκαδικός ἀριθμός καί στά δυό τελευταῖα τετραγωνάκια του ἕνας ἀκέραιος θετικός ἤ ἀρνητικός π.χ,

$$2{,}35120 \quad \boxed{+}\boxed{1}\boxed{2}$$

αὐτό σημαίνει ὅτι ὁ ἀριθμός, πού παρουσιάζεται στόν ὑπολογιστή, εἶναι ὁ $2{,}35120 \cdot 10^{12} = 2351200000000$.

1.18. Γιά νά βροῦμε τήν τιμή μιᾶς ἀριθμητικῆς παραστάσεως, πού περιέχει καί δυνάμεις, **κάνουμε πρῶτα τίς πράξεις, πού εἶναι σημειωμένες μέσα σέ παρενθέσεις (ἄν ὑπάρχουν), κατόπιν ὑπολογίζουμε τίς δυνάμεις καί τέλος ἐκτελοῦμε τίς ἄλλες πράξεις, πού εἶναι σημειωμένες καί μέ τή σειρά πού εἴδαμε στήν 1.12.** ῎Ετσι π.χ. ἔχουμε

$$\left(-\frac{3}{5}+1\right) \cdot (-2)^{2} + \left(4 \cdot \frac{1}{5}\right)^{2} : \left(-\frac{2}{3}\right) - \frac{7}{10} =$$

$$= \left(+\frac{2}{5}\right)\cdot(-2)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 : \left(-\frac{2}{3}\right) - \frac{7}{10} =$$

$$= \left(+\frac{2}{5}\right)\cdot 4 + \frac{16}{25} : \left(-\frac{2}{3}\right) - \frac{7}{10} =$$

$$= \left(+\frac{2}{5}\right)\cdot 4 + \frac{16}{25}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) - \frac{7}{10} = +\frac{8}{5} - \frac{48}{50} - \frac{7}{10} =$$

$$= \frac{80-48-35}{50} = -\frac{3}{50}.$$

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

41. Νά ύπολογιστοῦν οἱ δυνάμεις:

α) $(-1)^3$, 1^5, $(-2)^3$, $(-2)^4$, -2^4

β) $\left(-\frac{1}{2}\right)^2$, $\left(\frac{2}{3}\right)^2$, $-\left(\frac{3}{4}\right)^2$, $\left(-\frac{3}{4}\right)^4$, $-(-5)^2$

γ) 2^{-2}, $(-2)^{-2}$, $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$, $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}$, 5^{-2}

42. Νά ἐκτελεστοῦν οἱ πράξεις:

α) $(-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3$ β) $(-2)^1+(-2)^2+(-2)^3+(-2)^4$

γ) $(-3)^2 - 3^2 + (-3)^3 - 3^3$ δ) $2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 - 4\left(-\frac{1}{2}\right)^3$

ε) $(-8) : \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - (-8)\left(-\frac{1}{2}\right)^3$ στ) $\frac{(-3)^2}{-9} + \frac{5^2}{3} - \left(4 - \frac{1}{3}\right)^2$

43. Νά γίνουν μία δύναμη μέ βάση ρητό οἱ παραστάσεις:

α) $2^5 \cdot 2^3 : 2^4$ β) $[(-2)^2]^3 \cdot (-2)^4 : [(-2)^3]^2$

γ) $(2^2)^3 + 2^7 : 2 + (2^3)^2 + 2^2 \cdot 2^4$ δ) $[(-2)^2 \cdot (-5)^2]^3 : 100$

44. Νά ύπολογιστοῦν οἱ δυνάμεις:

α) $(-1)^{-1}$, $(-2)^{-2}$, -2^{-2}, $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$, $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}$

β) $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-4}$, $-\frac{3}{4}^{-4}$, $-\left(\frac{3}{4}\right)^{-4}$, $\frac{3}{4^{-4}}$

45. Νά ἐκτελέσετε τίς πράξεις:

α) $(-1)^2 + (-1)^1 + (-1)^0 + (-1)^{-1} + (-1)^{-2}$

β) $2\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} - 2\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} - \left(+\frac{2}{3}\right)^{-3}$

46. Νά γράψετε μέ μορφή δυνάμεως τούς ἀριθμούς:

0,1, –0,1, 10000, 0,00001, –0,001

47. Νά γράψετε μέ σύντομο τρόπο τούς ἀριθμούς:

0,00001, 0,00000007, $\frac{1}{0{,}000000015}$, $\frac{1}{0{,}000006}$

48. Συμπληρῶστε τούς παρακάτω πίνακες

x	2x	x^2	x+2	2^x
–3				
4				

x	y	x^2+y^2	$(x+y)^2$	x^3+y^3	$(x+y)^3$
–2	1				
–3	$\frac{1}{2}$				
$-\frac{1}{2}$	–1				

49. Νά ὑπολογιστεῖ ἡ τιμή τῶν παρακάτω παραστάσεων:

α) $\dfrac{(-1)^2-(-1)^3-(-1)^5}{-2-(-2)^2-(-2)^3}\cdot\dfrac{(-2)^4-2^3}{(-3)^3+(-3)^2}$

β) $\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^3-\left(-\frac{1}{4}\right)^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2+(-1)^4}:\dfrac{\left(\frac{1}{-2}-\frac{-1}{4}\right)^5}{\left(1+\frac{2}{-3}\right)^3}$

50. Νά ὑπολογίσετε τήν τιμή τῶν παραστάσεων:

α) x^3-3x^2+3x-1 ἄν $x=-3$

β) $2\alpha^2-3\beta^2-\gamma$ ἄν $\alpha=-2$ $\beta=5$ $\gamma=-3$

γ) $\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^2-\dfrac{\alpha}{\gamma}+\dfrac{\alpha\beta}{2}$ ἄν $\alpha=2^{-2}$ $\beta=\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}$ $\gamma=-2$

δ) $3\cdot\left(\dfrac{\alpha}{\beta}-\dfrac{3}{\alpha\beta}\right)^2-\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{2}$ ἄν $\alpha=-3$ $\beta=2$

ε) $\dfrac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{y^2}}-\left(y\cdot\dfrac{1}{x}\right)^2$ ἄν $x=-2$ $y=3$

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 1

Τά βασικά σύνολα ἀριθμῶν, πού μάθαμε ὡς τώρα, εἶναι:

- Τό σύνολο N τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν

$$N=\{0,1,2,3,\dots\}$$

- Τό σύνολο Z τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν

$$Z=\{\dots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\dots\}$$

- Τό σύνολο Q τῶν ρητῶν ἀριθμῶν

$$Q=\left\{x \mid x=\frac{\alpha}{\beta},\ \alpha\in Z,\ \beta\in N^*\right\}$$

Γιά τά σύνολα αὐτά ἔχουμε $N\subset Z\subset Q$ καί ὅταν δέν παίρνουμε τό στοιχεῖο τους 0, τά σημειώνουμε ἀντίστοιχα N^*, Z^*, Q^*.
Στό σύνολο τῶν ρητῶν ἀριθμῶν ὁρίσαμε τίς δυό βασικές πράξεις πρόσθεση καί πολλαπλασιασμό. Ἄν τά γράμματα α,β,γ παριστάνουν ρητούς ἀριθμούς, ἔχουμε τίς ἑξῆς ἰδιότητες:

α) Γιά τήν πρόσθεση:

- Τό ἄθροισμα $\alpha+\beta$ εἶναι πάντοτε ρητός ἀριθμός.
- Ἰσχύει ἡ ἀντιμεταθετική ἰδιότητα $\alpha+\beta=\beta+\alpha$
- Ἰσχύει ἡ προσεταιριστική ἰδιότητα $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$
- Γιά κάθε ρητό ἀριθμό α ἔχουμε $\alpha+0=\alpha$.
- Γιά κάθε ρητό ἀριθμό α ὑπάρχει ὁ ἀντίθετός του $-\alpha$ τέτοιος, ὥστε $\alpha+(-\alpha)=0$
- Ἡ διαφορά $\alpha-\beta$ δυό ρητῶν ἀριθμῶν ὁρίζεται ἀπό τήν ἰσότητα

$$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$$

β) Γιά τόν πολλαπλασιασμό:

- Τό γινόμενο $\alpha\cdot\beta$ εἶναι πάντοτε ρητός ἀριθμός.
- Ἰσχύει ἡ ἀντιμεταθετική ἰδιότητα $\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$
- Ἰσχύει ἡ προσεταιριστική ἰδιότητα $\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)=(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma$
- Ἰσχύει ἡ ἐπιμεριστική ἰδιότητα $\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$
- Γιά κάθε ρητό ἀριθμό α ἔχουμε $\alpha\cdot 1=\alpha$ καί $\alpha\cdot 0=0$
- Γιά κάθε ρητό ἀριθμό α ($\alpha\neq 0$) ὑπάρχει ὁ ἀντίστροφός του $\frac{1}{\alpha}$ τέτοιος, ὥστε $\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}=1$
- Τό πηλίκο $\frac{\alpha}{\beta}$ ($\beta\neq 0$) δυό ρητῶν ἀριθμῶν ὁρίζεται ἀπό τήν ἰσότητα

$$\frac{\alpha}{\beta}=\alpha\cdot\frac{1}{\beta}$$

Στό σύνολο τῶν ρητῶν ἀριθμῶν ὁρίσαμε διάταξη. Εἶναι

$$\alpha>\beta,\ \text{ὅταν}\ \alpha-\beta>0$$
$$\alpha<\beta,\ \text{ὅταν}\ \alpha-\beta<0$$

Ἰσχύουν οἱ ἰδιότητες:

$$\text{ἄν}\ \alpha>\beta,\ \text{τότε}\ \alpha+\gamma>\beta+\gamma$$
$$\text{ἄν}\ \alpha>\beta\ \text{καί}\ \gamma>0,\ \text{τότε}\ \alpha\cdot\gamma>\beta\cdot\gamma$$
$$\text{ἄν}\ \alpha>\beta\ \text{καί}\ \gamma<0,\ \text{τότε}\ \alpha\cdot\gamma<\beta\cdot\gamma$$

Ἡ δύναμη ρητοῦ ἀριθμοῦ ὁρίζεται ἀπό τίς ἰσότητες:

$$\alpha^\nu=\underbrace{\alpha\cdot\alpha\ldots\alpha}_{\nu\ \text{παράγ.}},\quad \alpha^1=\alpha,\quad \alpha^0=1\quad(\alpha\neq 0)$$

Ἄν τά γράμματα ν,μ παριστάνουν φυσικούς ἀριθμούς, ἰσχύουν οἱ ἰδιότητες:

$$\alpha^\nu\cdot\alpha^\mu=\alpha^{\nu+\mu}\qquad(\alpha\cdot\beta)^\nu=\alpha^\nu\cdot\beta^\nu$$

$$\alpha^\nu:\alpha^\mu=\alpha^{\nu-\mu},\ \alpha\neq 0\qquad\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu=\frac{\alpha^\nu}{\beta^\nu},\ \beta\neq 0$$

$$(\alpha^\nu)^\mu=\alpha^{\nu\mu}\qquad\alpha^{-\nu}=\frac{1}{\alpha^\nu},\ \alpha\neq 0$$

Εἰδικότερα ἔχουμε: $0^\nu=0(\nu\in N^*)$, $1^\nu=1$, $10^\nu=\underbrace{1000\ldots0}_{\nu\ \text{μηδενικά}}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ*

51. Νά ἐκτελεστοῦν οἱ πράξεις:

α) $4-[3-(8-5)]+(15-17)+\{-5-[6-(-2-7)]\}$

β) $-\{-2+[(8-3)-1]-7\}-[(-13+9)-12]-12$

γ) $\left(-1+\frac{1}{2}+\frac{7}{9}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)-\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right):\left(\frac{3}{5}-1\right)$

δ) $-5-\{-2+3[-2-(12-3)(-5)]-7\}-2[(-8+1)-3]$

52. Νά ὑπολογιστεῖ ἡ τιμή τῶν παραστάσεων:

α) $(-1)^{2\nu}+(-1)^{2\nu+1} \quad (\nu\in N^*)$

β) $(-1)^{\nu}+(-1)^{\nu+1}+(-1)^{\nu+2}+(-1)^{\nu+3} \quad (\nu\in N^*)$

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ**

53. Ἄν $\alpha=-2$ καί $\beta=3$, νά ἐπαληθεύσετε τίς ἰσότητες:

α) $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ β) $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

γ) $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$ δ) $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$

54. Νά ἐπαληθεύσετε τίς ἰσότητες:

α) $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2-\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2=\alpha\beta$, ὅταν $\alpha=2^{-2}$, $\beta=3^{-1}$

β) $(\alpha+\beta)^3=\alpha(\alpha-3\beta)^2+\beta(\beta-3\alpha)^2$, ὅταν $\alpha=-2$, $\beta=3$

γ) $(\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2)=(\alpha x+\beta y)^2+(\alpha y-\beta x)^2$,
ὅταν $\alpha=-1$, $\beta=2$, $x=-2$, $y=-3$

δ) $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(x^2+y^2+z^2)-(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2=$
$=(\beta z-\gamma y)^2+(\gamma x-\alpha z)^2+(\alpha y-\beta x)^2$,
ὅταν $\alpha=\beta=\gamma=+2$ καί $x=y=z=-3$

55. Νά βρεθεῖ ἡ ἀριθμητική τιμή τῶν παραστάσεων:

α) $\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\frac{xy}{x-y}$, ἄν $x=2^{-1}$, $y=-3$

β) $\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{xy}\right):(x^3-y^3)$, ἄν $x=-2$, $y=-3$

γ) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-\frac{1}{x}\left(3+\frac{1}{x^2}\right)$, ἄν $x=-\frac{1}{2}$

δ) $\frac{3\alpha^2-\beta^2+\gamma^2}{\alpha-\beta}-\frac{\alpha^2-2\beta^2}{\gamma-1}$, ἄν $\alpha=-2$, $\beta=3$, $\gamma=4$

ε) $(x^2+1)^{xy}-2(y-4)^{x-3}-3(2y-1)^{y-5}$, ἄν $x=-1$, $y=2$

56. Ἄν x εἶναι ρητός ἀριθμός ($x\neq 0$), νά ἁπλοποιηθοῦν τά κλάσματα:

α) $\frac{x^3\cdot x^{-2}}{x^{-4}}$ β) $\frac{x^2\cdot x^3}{x^5\cdot x^4}$ γ) $\frac{x^{-2}\cdot x^3\cdot x^{-4}}{x^{10}\cdot x^{-2}\cdot x^6}$ δ) $\frac{x^3+x}{x^2+1}$

57. Νά γίνουν μία δύναμη μέ βάση ρητό ἀριθμό οἱ παραστάσεις:

α) $\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(-\frac{8}{27}\right)\right]^3:\left[(-4)\cdot\left(\frac{4}{27}\right)^2\right]$ β) $-2^6\cdot(-25)^3\cdot 2^{-3}\cdot\frac{1}{125}$

58. Νά ἐπαληθεύσετε μέ ἀριθμητικά παραδείγματα τίς ἀνισώσεις:

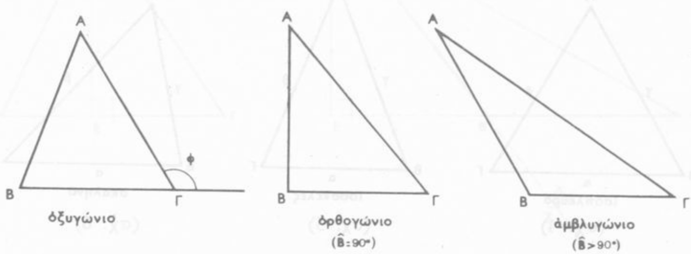
α) $\alpha^2+\beta^2>2\alpha\beta$ β) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2>\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma$

2ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΙΣΟΤΗΤΑ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Ἐπανάληψη βασικῶν ἐννοιῶν.

2.1. Στήν Α΄ τάξη μάθαμε ὅτι ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ, τό ὁποῖο ἐξετάζεται ὡς πρός τίς γωνίες του, λέγεται **ὀξυγώνιο**, ὅταν οἱ τρεῖς γωνίες του εἶναι ὀξεῖες, **ὀρθογώνιο** ὅταν μιά γωνία του εἶναι ὀρθή, **ἀμβλυγώνιο** ὅταν μιά γωνία του εἶναι ἀμβλεία.



(σχ. 1) (σχ. 2) (σχ. 3)

Τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{\Gamma}$ σέ ὁποιοδήποτε τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι

$$\boxed{\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^0}$$

Ἀπό τήν ἰσότητα αὐτή συμπεραίνουμε ὅτι:

- **Ἕνα τρίγωνο ἔχει μιά τό πολύ γωνία του ὀρθή ἤ ἀμβλεία.**
- **Κάθε ἐξωτερική γωνία τριγώνου εἶναι ἴση μέ τό ἄθροισμα τῶν δύο ἀπέναντι γωνιῶν του, π.χ.** (βλ. σχ. 1).

$$\boxed{\varphi = \widehat{A} + \widehat{B}}$$

- **Ἄν δυό τρίγωνα ἔχουν δυό γωνίες τους μία πρός μία ἴσες, τότε ἔχουν καί τίς τρίτες γωνίες τους ἴσες.**

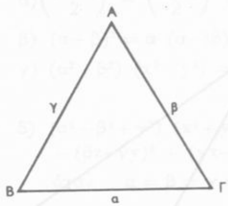
Σέ ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ἡ πλευρά, πού βρίσκεται ἀπέναντι στήν ὀρθή γωνία του, λέγεται **ὑποτείνουσα,** ἐνῶ οἱ δύο ἄλλες πλευρές του λέγονται **κάθετες πλευρές.** Στά ὀρθογώνια τρίγωνα ἰσχύουν οἱ προτάσεις:

- **Τό ἄθροισμα τῶν ὀξειῶν γωνιῶν εἶναι 90^0.**
- **Δυό ὀρθογώνια τρίγωνα, στά ὁποῖα ἡ μιά ὀξεία γωνία τοῦ ἑνός εἶναι ἴση μέ μιά ὀξεία τοῦ ἄλλου, ἔχουν καί τίς ἄλλες ὀξεῖες γωνίες τους ἴσες.**
- **Κάθε κάθετη πλευρά εἶναι μικρότερη ἀπό τήν ὑποτείνουσα.**

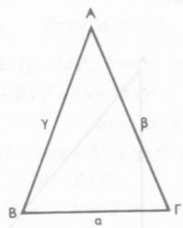
2.2. Σέ κάθε τρίγωνο ΑΒΓ σημειώνουμε μέ α,β,γ τά μήκη τῶν πλευρῶν του, πού βρίσκονται ἀπέναντι τῶν γωνιῶν $\widehat{A},\widehat{B},\widehat{\Gamma}$ ἀντίστοιχα, δηλαδή

$$\alpha = (B\Gamma), \qquad \beta = (A\Gamma), \qquad \gamma = (AB)$$

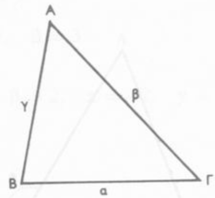
Ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ, τό ὁποῖο ἐξετάζεται ὡς πρός τίς πλευρές του, λέγεται **ἰσόπλευρο,** ὅταν ἔχει τίς τρεῖς πλευρές του ἴσες, **ἰσοσκελές** ὅταν ἔχει δυό πλευρές του ἴσες, **σκαληνό** ὅταν ἔχει ὅλες τίς πλευρές του ἄνισες.



ἰσόπλευρο
(σχ. 4)



ἰσοσκελές
(σχ. 5)



σκαληνό
(σχ. 6)

Σέ ἰσοσκελές τρίγωνο μέ $\beta = \gamma$ ἡ πλευρά ΒΓ λέγεται **βάση** του καί τό σημεῖο Α **κορυφή** του. Τό ἰσόπλευρο τρίγωνο μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ἰσοσκελές μέ βάση ὁποιαδήποτε πλευρά του. Γενικά ἔχουμε ὅτι:

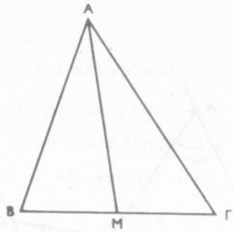
- Κάθε πλευρά τριγώνου εἶναι μικρότερη ἀπό τό ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων, δηλαδή

$$\boxed{\alpha < \beta + \gamma, \qquad \beta < \alpha + \gamma, \qquad \gamma < \alpha + \beta}$$

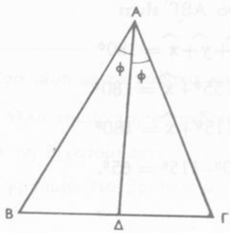
Ἄλλα στοιχεῖα τριγώνου.

2.3. Ἄν Μ εἶναι τό μέσο τῆς πλευρᾶς ΒΓ ἑνός τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 7), τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΜ λέγεται **διάμεσος** τοῦ τριγώνου. Ἕνα τρίγωνο ἔχει τρεῖς διαμέσους καί κάθε μιά τους βρίσκεται *«μέσα»* στό τρίγωνο.

Ἄν φέρουμε τή διχοτόμο τῆς γωνίας $\widehat{A}$ (σχ. 8) καί ὀνομάσουμε Δ τό σημεῖο, στό ὁποῖο τέμνει τήν πλευρά ΒΓ, τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΔ λέγεται **διχοτόμος** τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἕνα τρίγωνο ἔχει τρεῖς διχοτόμους καί κάθε μιά τους βρίσκεται μέσα στό τρίγωνο.

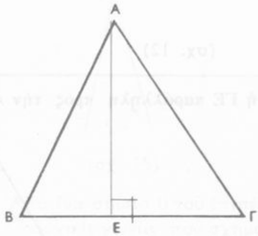


(σχ. 7)

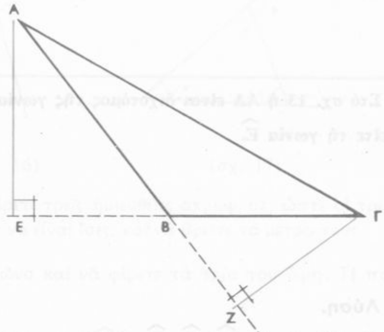


(σχ. 8)

Τέλος, ἄν φέρουμε ἀπό τήν κορυφή Α τό κάθετο τμῆμα ΑΕ (σχ. 9) πρός τήν πλευρά ΒΓ, τό ΑΕ λέγεται **ὕψος** τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἕνα τρίγω-



(σχ. 9)



(σχ. 10)

νο ἔχει τρία ὕψη. Σέ ὀξυγώνιο τρίγωνο τό κάθε ὕψος βρίσκεται *«μέσα»* στό τρίγωνο (σχ. 9). Ὅταν τό τρίγωνο εἶναι ἀμβλυγώνιο στό Β, τά δύο ὕψη ΑΕ καί ΓΖ (σχ. 10) βρίσκονται «ἔξω» ἀπό τό τρίγωνο, ἐνῶ, ὅταν τό τρίγωνο εἶναι ὀρθογώνιο στό Α, οἱ δύο κάθετες πλευρές του ΒΑ καί ΓΑ (σχ. 11) εἶναι καί ὕψη τοῦ τριγώνου. Τό τρίτο ὕψος του εἶναι τό ΑΔ.

(σχ. 11)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Στό σχ. 12 οἱ εὐθεῖες ΑΒ, ΔΕ εἶναι παράλληλες. Βρεῖτε τίς γωνίες x καί ψ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.**

Λύση.

Ἀπό τίς παράλληλες εὐθεῖες ΑΒ καί ΔΕ ἔχουμε $\widehat{y} = B\widehat{\Theta}E = 55^0$ (γιατί εἶναι ἐντός ἐναλλάξ).

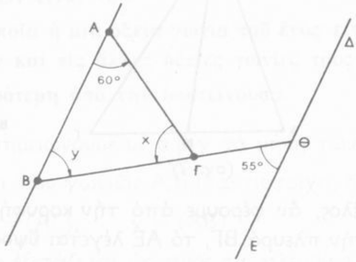
Στό τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι

$$\widehat{A}+\widehat{y}+\widehat{x}=180^{o}$$

ἤ $\quad 60^{o}+55^{o}+\widehat{x}=180^{o}$

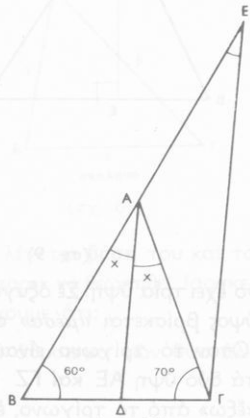
ἤ $\quad 115^{o}+\widehat{x}=180^{o}$

ἤ $\quad \widehat{x}=180^{o}-115^{o}=65^{o}.$



(σχ. 12)

2. **Στό σχ. 13 ἡ ΑΔ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{A}$ καί ἡ ΓΕ παράλληλη πρός τήν ΑΔ. Βρεῖτε τή γωνία $\widehat{E}$.**



Λύση.

Ἐπειδή εἶναι $\quad \widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{\Gamma}=180^{o}$, ἔχουμε

$$\widehat{A}+60^{o}+70^{o}=180^{o}$$

ἤ $\quad \widehat{A}=180^{o}-130^{o}$

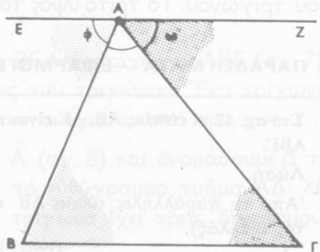
ἤ $\quad \widehat{A}=50^{o}$

Ἐπομένως εἶναι $\widehat{x}=50^{o}:2=25^{o}$. Ἐπειδή ἡ ΕΓ εἶναι παράλληλη πρός τήν ΑΔ,

θά εἶναι $\widehat{E}=\widehat{x}=25^{o}$ (ἐντός ἐκτός καί ἐπί τά αὐτά).

(σχ. 13)

3. **Στό σχ. 14 ἡ ΕΖ εἶναι παράλληλη πρός τήν ΒΓ. Μέ τή βοήθεια τοῦ σχήματος αὐτοῦ διαπιστῶστε ὅτι τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνός τριγώνου εἶναι ἴσο μέ 180°.**



Λύση. Οἱ γωνίες, $\widehat{\varphi}$, $\widehat{A}$ καί $\widehat{\omega}$ εἶναι διαδοχικές καί ἔχουν ἄθροισμα 180°, δηλ.

$$\widehat{\omega}+\widehat{A}+\widehat{\varphi}=180^{o}$$

Ἐπειδή ἡ ΕΖ εἶναι παράλληλη πρός τή ΒΓ, θά εἶναι

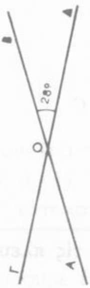
$\widehat{\varphi}=\widehat{B}$ καί $\widehat{\omega}=\widehat{\Gamma}$ (ἐντός ἐναλλάξ),

ὥστε: $\quad \widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{\Gamma}=180^{o}$

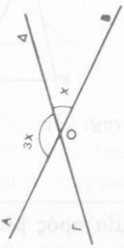
(σχ. 14)

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

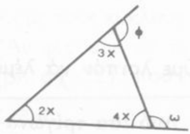
1. Νά χωρίσετε ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα σέ 4 ἴσα μέρη μέ τό χάρακα καί τό διαβήτη.
2. Νά πάρετε μιά γωνία $\widehat{\varphi}$ καί μέ κορυφή ἕνα ἄλλο σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου νά κατασκευάσετε μιά ἄλλη γωνία ἴση μέ τή $\widehat{\varphi}$ καί νά τή διχοτομήσετε.
3. Στό σχ. 15 οἱ ΑΒ καί ΓΔ εἶναι εὐθεῖες γραμμές. Νά βρεθοῦν οἱ ἄλλες γωνίες.



(σχ. 15)

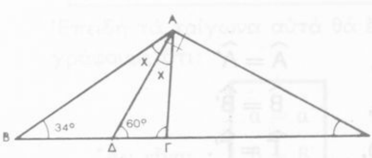


(σχ. 16)

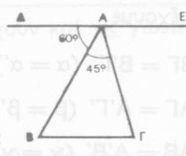


(σχ. 17)

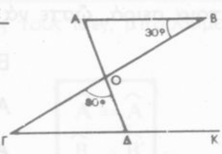
4. Ἀπό ἕνα σημεῖο 0 τοῦ ἐπιπέδου νά φέρετε τρεῖς ἡμιευθεῖες οx, οψ, οz, ὥστε οἱ τρεῖς διαδοχικές γωνίες πού σχηματίζονται νά εἶναι ἴσες, καί νά βρεῖτε τό μέτρο τους.
5. Νά σχεδιάσετε ἕνα ἀμβλυγώνιο τρίγωνο καί νά φέρετε τά τρία του ὕψη. Τί παρατηρεῖτε;
6. Στό σχ. 16 ἡ γωνία $\widehat{ΑΟΔ}$ εἶναι τριπλάσια τῆς $\widehat{ΒΟΔ}$. Νά βρεθοῦν ὅλες οἱ γωνίες τοῦ σχήματος.
7. Στό σχ. 17 νά βρεθοῦν οἱ γωνίες τοῦ τριγώνου καί οἱ ἐξωτερικές γωνίες $\widehat{\omega}$ καί $\widehat{\varphi}$.



(σχ. 18)



(σχ. 19)

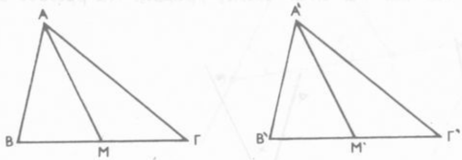


(σχ. 20)

8. Στό σχ. 18 ἡ ΑΔ εἶναι διχοτόμος καί ἡ $\widehat{ΔΑΕ} = 90^0$. Νά βρεθοῦν οἱ γωνίες $\widehat{ΑΕΓ}$, $\widehat{ΒΑΔ}$, $\widehat{ΔΓΑ}$.
9. Στό σχ. 19 ἡ ΔΕ εἶναι παράλληλη πρός τή ΒΓ. Νά βρεθοῦν οἱ γωνίες $\widehat{Β}$ καί $\widehat{Γ}$.
10. Στό σχ. 20 ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλη πρός τή ΓΔ. Νά βρεθεῖ ἡ γωνία $\widehat{ΟΔΚ}$.

Ἴσα τρίγωνα.

2.4. Στήν Α' τάξη μάθαμε ὅτι δυό τρίγωνα (ἤ γενικά δυό σχήματα) λέγονται ἴσα, ὅταν τό ἕνα μπορεῖ (μέ κατάλληλη μετατόπιση) νά ἐφαρμόσει πάνω στό ἄλλο. Τότε κάθε πλευρά καί κάθε γωνία τοῦ ἑνός τριγώνου θά συμπέσει μέ μιά πλευρά καί μέ μιά γωνία τοῦ ἄλλου τριγώνου.



(σχ. 21)

Μποροῦμε λοιπόν νά λέμε ὅτι:

- Δυό ἴσα τρίγωνα ἔχουν μία πρός μία ἴσες ὅλες τίς πλευρές καί ὅλες τίς γωνίες τους.
- Σέ δύο ἴσα τρίγωνα ἀπέναντι ἴσων πλευρῶν βρίσκονται ἴσες γωνίες καί ἀπέναντι ἴσων γωνιῶν βρίσκονται ἴσες πλευρές.

Ἄν ἔχουμε δυό ἴσα τρίγωνα καί ἐφαρμόσουμε τό ἕνα πάνω στό ἄλλο, τότε συμπίπτουν καί ὅλα τά ἄλλα ἀντίστοιχα στοιχεῖα τους, ὅπως π.χ. οἱ διάμεσοι ΑΜ καὶ Α'Μ' (σχ. 21). Συμπεραίνουμε λοιπόν ὅτι:

Δυό ἴσα τρίγωνα ἔχουν ὅλα τά ἀντίστοιχα στοιχεῖα τους ἴσα.

Γιά νά δηλώσουμε ὅτι δύο τρίγωνα ΑΒΓ καί Α'Β'Γ' εἶναι ἴσα, θά γράφουμε

$$\text{τριγ } ΑΒΓ = \text{τριγ } Α'Β'Γ' \qquad \text{εἴτε} \qquad Α\overset{\Delta}{Β}Γ = Α'\overset{\Delta}{Β'}Γ'$$

Στήν περίπτωση αὐτή γράφουμε τά γράμματα τῶν κορυφῶν τους μέ τέτοια σειρά, ὥστε νά ἔχουμε

$$ΒΓ = Β'Γ' \ (\alpha = \alpha'), \qquad \widehat{Α} = \widehat{Α'}$$

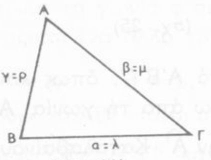
$$ΑΓ = Α'Γ' \ (\beta = \beta'), \qquad \widehat{Β} = \widehat{Β'}$$

$$ΑΒ = Α'Β' \ (\gamma = \gamma'), \qquad \widehat{Γ} = \widehat{Γ'}.$$

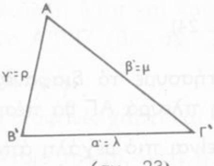
Γιά νά ἐλέγξουμε τήν ἰσότητα δυό τριγώνων, δέν εἶναι εὔκολο νά μεταφέρουμε κάθε φορά τό ἕνα πάνω στό ἄλλο, γιά νά δοῦμε ἄν ἐφαρμόζουν. Γι' αὐτό ἀκριβῶς θά προσπαθήσουμε νά βροῦμε προτάσεις, πού θά μᾶς ἐξασφαλίζουν τήν ἰσότητα δυό τριγώνων ἀπό τήν ἰσότητα ὁρισμένων μόνο στοιχείων τους. Οἱ προτάσεις αὐτές θά εἶναι τά **κριτήρια ἰσότητας** τῶν τριγώνων.

Πρῶτο κριτήριο ἰσότητας δυό τριγώνων.

2.5. Ἄς πάρουμε τρία ὁρισμένα εὐθύγραμμα τμήματα λ, μ, ρ, π.χ. $\lambda = 6$ cm, $\mu = 5$ cm, $\rho = 4$ cm, καί ἄς κατασκευάσουμε ἕνα τρίγωνο μέ πλευρές ἴσες μ' αὐτά.



(σχ. 22)



(σχ. 23)

Παίρνουμε ἕνα τμῆμα $B\Gamma = \lambda = 6$ cm καί γράφουμε τούς κύκλους (Γ, $\mu = 5$) καί (B, $\rho = 4$), πού τέμνονται στό σημεῖο Α. Ἄν φέρουμε τά τμήματα ΑΒ καί ΑΓ, τότε κατασκευάζεται τό τρίγωνο ΑΒΓ (βλ. σχ. 22), πού ἔχει πλευρές

$$\alpha = \lambda \qquad \beta = \mu \qquad \gamma = \rho .$$

Ἄν πάρουμε ἕνα ἄλλο εὐθύγραμμο τμῆμα $B'\Gamma' = \lambda = 6$ cm καί κάνουμε τήν ἴδια δουλειά (βλ. σχ. 23), κατασκευάζεται ἕνα ἄλλο τρίγωνο Α'Β'Γ', πού ἔχει πλευρές

$$\alpha' = \lambda \qquad \beta' = \mu \qquad \gamma' = \rho .$$

Ἄς ἀποτυπώσουμε τώρα τό ΑΒΓ σ' ἕνα διαφανές χαρτί καί ἄς τοποθετήσουμε τό διαφανές χαρτί πάνω στό Α'Β'Γ' κατά τέτοιο τρόπο, ὥστε ἡ ΑΒ νά ἐφαρμόσει πάνω στήν Α'Β' καί οἱ δυό κορυφές Γ καί Γ' νά βρεθοῦν στό ἴδιο ἡμιεπίπεδο μέ ἀκμή τήν Α'Β'. Βλέπουμε τότε ὅτι ἡ κορυφή Γ θά πέσει πάνω στή Γ' καί ὅτι τό τρίγωνο ΑΒΓ θά ἐφαρμόσει στό Α'Β'Γ'. Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι:

> Δυό τρίγωνα εἶναι ἴσα, ὅταν οἱ πλευρές τοῦ ἑνός εἶναι ἀντίστοιχα ἴσες μέ τίς πλευρές τοῦ ἄλλου.

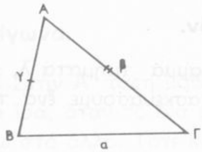
Ἐπειδή τά τρίγωνα αὐτά θά ἔχουν καί τίς γωνίες τους ἴσες, μποροῦμε νά γράφουμε ὅτι:

Ἄν εἶναι $\boxed{\begin{array}{c}\alpha = \alpha' \\ \beta = \beta' \\ \gamma = \gamma'\end{array}}$, τότε θά εἶναι καί $\boxed{\begin{array}{c}\widehat{A} = \widehat{A'} \\ \widehat{B} = \widehat{B'} \\ \widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'}\end{array}}$

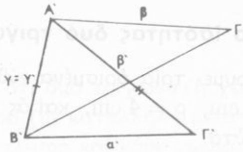
2.6. Ἄς θεωρήσουμε δυό τρίγωνα ΑΒΓ καί Α'Β'Γ', πού ἔχουν

$$\alpha > \alpha', \qquad \beta = \beta', \qquad \gamma = \gamma'$$

Εἶναι φανερό ὅτι **τά τρίγωνα αὐτά δέν εἶναι ἴσα** (γιατί, ἄν ἦταν ἴσα, θά εἶχαν τότε καί $\alpha = \alpha'$). Ἄν ἀποτυπώσουμε τό ΑΒΓ σ' ἕνα διαφανές χαρ-



(σχ. 24)



(σχ. 25)

τί καί τοποθετήσουμε τό διαφανές στό Α'Β'Γ', ὅπως καί προηγούμενα, βλέπουμε ὅτι ἡ πλευρά ΑΓ θά πέσει ἔξω ἀπό τή γωνία Α' καί ἐπομένως ἡ γωνία $\widehat{A}$ θά εἶναι πιό μεγάλη ἀπό τήν $\widehat{A'}$. Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι:

> Ὅταν δυό τρίγωνα ἔχουν μόνο δυό πλευρές τους μία πρός μία ἴσες, τότε ἀπέναντι ἀπό τίς ἄνισες τρίτες πλευρές τους βρίσκονται ὅμοια ἄνισες γωνίες.

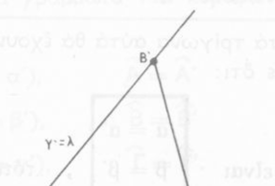
Ἡ πρόταση αὐτή διατυπώνεται καί ὡς ἑξῆς:

Ἄν εἶναι $\boxed{\begin{array}{l} \alpha > \alpha' \\ \beta = \beta' \\ \gamma = \gamma' \end{array}}$, τότε θά εἶναι $\boxed{\widehat{A} > \widehat{A'}}$

Δεύτερο κριτήριο ἰσότητας δυό τριγώνων.

2.7. Ἄς πάρουμε δυό ὁρισμένα εὐθύγραμμα τμήματα λ καί μ καί μιά ὁρισμένη γωνία φ, π.χ. $\lambda = 6$ cm, $\mu = 5$ cm καί $\widehat{\varphi} = 50^0$ καί ἄς κατασκευάσουμε ἕνα τρίγωνο, πού οἱ δυό πλευρές του νά εἶναι ἴσες μέ λ καί μ καί ἡ γωνία πού σχηματίζουν, ἴση μέ τή $\widehat{\varphi}$.

(σχ. 26)



(σχ. 27)

Κατασκευάζουμε πρῶτα, ὅπως μάθαμε στήν Α' τάξη, μιά γωνία $\widehat{A} = \widehat{\varphi}$

καί μετά παίρνουμε μέ τό διαβήτη στίς πλευρές της τμήματα $AB = \lambda$ καί $A\Gamma = \mu$ (βλ. σχ. 26).

Ἄν ἑνώσουμε τά σημεῖα B καί Γ, σχηματίζεται ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ, πού ἔχει

$$\gamma = \lambda, \qquad \beta = \mu, \qquad \widehat{A} = \widehat{\varphi}$$

Ἄν κατασκευάσουμε τή γωνία $\widehat{\varphi}$ σέ μιά ἄλλη θέση καί κάνουμε τήν ἴδια δουλειά, σχηματίζεται ἕνα ἄλλο τρίγωνο Α'Β'Γ' (βλ. σχ. 27), πού ἔχει

$$\gamma' = \lambda, \qquad \beta' = \mu, \qquad \widehat{A}' = \widehat{\varphi}.$$

Ἄν ἀποτυπώσουμε τό ΑΒΓ πάνω σ' ἕνα διαφανές χαρτί καί τοποθετήσουμε τό διαφανές πάνω στό Α'Β'Γ' κατά τέτοιο τρόπο, ὥστε ἡ $\widehat{A}$ νά ἐφαρμόσει πάνω στήν $\widehat{A}'$, βλέπουμε ὅτι τά σημεῖα B καί Γ θά πέσουν πάνω στά B' καί Γ' καί ἔτσι τό τρίγωνο ΑΒΓ θά ἐφαρμόσει στό Α'Β'Γ'. Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι:

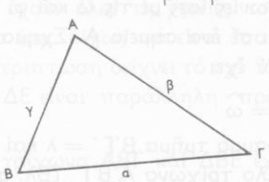
> Δυό τρίγωνα εἶναι ἴσα, ὅταν οἱ δυό πλευρές καί ἡ περιεχόμενη ἀπ' αὐτές γωνία τοῦ ἑνός εἶναι ἀντίστοιχα ἴσες μέ τίς δυό πλευρές καί τήν περιεχόμενη ἀπ' αὐτές γωνία τοῦ ἄλλου.

Ἐπειδή τά τρίγωνα αὐτά θά ἔχουν καί τά ἄλλα ἀντίστοιχα στοιχεῖα τους ἴσα, μποροῦμε νά γράφουμε ὅτι:

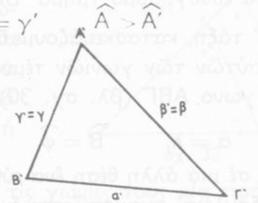
$$\textbf{Ἄν εἶναι} \quad \boxed{\begin{array}{c} \beta = \beta' \\ \gamma = \gamma' \\ \widehat{A} = \widehat{A}' \end{array}} \quad \textbf{τότε θά εἶναι καί} \quad \boxed{\begin{array}{c} \widehat{B} = \widehat{B}' \\ \widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma}' \\ \alpha = \alpha' \end{array}}$$

2.8. Ἄς θεωρήσουμε τώρα δυό τρίγωνα, πού ἔχουν

$$\beta = \beta' \qquad \gamma = \gamma' \qquad \widehat{A} > \widehat{A}'$$



(σχ. 28)



(σχ. 29)

Εἶναι φανερό ὅτι **τά τρίγωνα αὐτά δέν εἶναι ἴσα,** (γιατί, ἄν ἦταν ἴσα, θά εἶχαν καί $\widehat{A} = \widehat{A}'$). Ἄς συγκρίνουμε τίς πλευρές τους α καί α'. Δέν μπορεῖ νά εἶναι $\alpha = \alpha'$, γιατί τότε θά ἦταν καί $\widehat{A} = \widehat{A}'$, οὔτε $\alpha < \alpha'$, γιατί τότε θά ἦταν $\widehat{A} < \widehat{A}'$. Ἑπομένως ἡ μόνη δυνατή περίπτωση εἶναι $\alpha > \alpha'$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ὅτι:

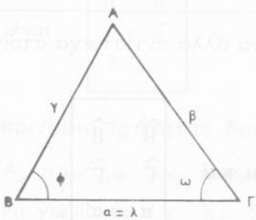
Ὅταν δυό τρίγωνα ἔχουν δυό πλευρές τους μία πρός μία ἴσες καί τίς περιεχόμενες γωνίες τους ἄνισες, ἀπέναντι τῶν ἄνισων αὐτῶν γωνιῶν βρίσκονται ὅμοια ἄνισες πλευρές.

Ἡ πρόταση αὐτή διατυπώνεται καί ὡς ἑξῆς:

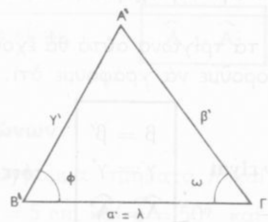
Ἂν εἶναι $\boxed{\begin{array}{c}\beta=\beta' \\ \gamma=\gamma' \\ \widehat{A}>\widehat{A'}\end{array}}$, **τότε θά εἶναι** $\boxed{\alpha>\alpha'}$

Τρίτο κριτήριο ἰσότητας δυό τριγώνων.

2.9. Ἄς πάρουμε ἕνα ὁρισμένο εὐθύγραμμο τμῆμα λ καί δυό ὁρισμένες γωνίες φ καί ω, π.χ. $\lambda = 6$ cm, $\widehat{\varphi}=58^0$, $\widehat{\omega}=55^0$, καί ἄς κατασκευάσουμε ἕνα τρίγωνο πού ἡ μιά πλευρά του νά εἶναι ἴση μέ λ καί οἱ δυό γωνίες οἱ ὁποῖες ἔχουν τίς κορυφές τους πάνω στήν πλευρά αὐτή, νά εἶναι ἴσες μέ τίς $\widehat{\omega}$ καί $\widehat{\varphi}$.



σχ. 30



σχ. 31

Παίρνουμε ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΒΓ = λ καί στά ἄκρα του, ὅπως μάθαμε στήν Α' τάξη, κατασκευάζουμε δυό γωνίες ἴσες μέ τίς $\widehat{\omega}$ καί $\widehat{\varphi}$. Οἱ ἄλλες πλευρές αὐτῶν τῶν γωνιῶν τέμνονται σέ ἕνα σημεῖο Α. Σχηματίζεται ἔτσι ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ (βλ. σχ. 30), πού ἔχει

$$\alpha=\lambda, \qquad \widehat{B}=\widehat{\varphi}, \qquad \widehat{\Gamma}=\widehat{\omega}$$

Ἄν πάρουμε σέ μιά ἄλλη θέση ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα Β'Γ' = λ καί κάνουμε τήν ἴδια δουλειά, σχηματίζεται ἕνα ἄλλο τρίγωνο Α'Β'Γ' (βλ. σχ. 31), πού ἔχει

$$\alpha'=\lambda, \qquad \widehat{B'}=\widehat{\varphi}, \qquad \widehat{\Gamma'}=\widehat{\omega}.$$

Ἄν ἀποτυπώσουμε τό ΑΒΓ πάνω σ' ἕνα διαφανές χαρτί καί τοποθετήσουμε τό διαφανές κατά τέτοιο τρόπο, ὥστε ἡ ΒΓ νά ἐφαρμόσει στή Β'Γ' καί οἱ κορυφές Α καί Α' νά βρεθοῦν στό ἴδιο ἡμιεπίπεδο μέ ἀκμή Β'Γ', βλέπουμε τότε ὅτι ἡ κορυφή Α θά πέσει πάνω στήν Α′ καί ἔτσι τό τρίγωνο ΑΒΓ θά ἐφαρμόσει στό Α′Β′Γ′. Συμπεραίνουμε λοιπόν ὅτι:

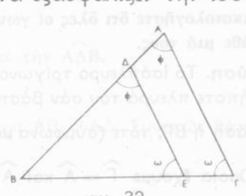
> Δυό τρίγωνα εἶναι ἴσα, ὅταν ἡ μιά πλευρά καί οἱ προσκείμενες σ' αὐτή γωνίες τοῦ ἑνός τριγώνου, εἶναι ἀντίστοιχα ἴσες μέ μιά πλευρά καί τίς προσκείμενες σ' αὐτή γωνίες τοῦ ἄλλου τριγώνου.

Ἐπειδή τά τρίγωνα αὐτά θά ἔχουν καί τά ἄλλα ἀντίστοιχα στοιχεῖα τους ἴσα, μποροῦμε νά γράφουμε:

Ἄν εἶναι $\boxed{\begin{array}{c} \alpha = \alpha' \\ \widehat{B} = \widehat{B}' \\ \widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma}' \end{array}}$ **, τότε θά εἶναι καί** $\boxed{\begin{array}{c} \widehat{A} = \widehat{A}' \\ \beta = \beta' \\ \gamma = \gamma' \end{array}}$

Ἄν τά παραπάνω τρίγωνα ἔχουν $\alpha = \alpha'$, $\widehat{B} = \widehat{B}'$, $\widehat{A} = \widehat{A}'$, πάλι θά εἶναι ἴσα, γιατί θά ἔχουν καί $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma}'$ (ἀφοῦ δυό τρίγωνα, πού ἔχουν δυό γωνίες τους μία πρός μία ἴσες, ἔχουν καί τίς τρίτες γωνίες τους ἴσες). Βλέπουμε δηλαδή ὅτι δυό τρίγωνα, πού ἡ μιά πλευρά τοῦ ἑνός εἶναι ἴση μέ μιά πλευρά τοῦ ἄλλου, εἶναι ἴσα ὄχι μόνο ὅταν ἔχουν ἴσες μία πρός μία τίς προσκείμενες γωνίες, ἀλλά καί ὅταν ἔχουν ἴσες μία πρός μία δυό γωνίες τους **ὅμοια κείμενες** ὡς πρός τίς ἴσες πλευρές.

2.10. Παρατηροῦμε ὅτι σέ ὅλα τά κριτήρια ἰσότητας τριγώνων, πού ἀναφέραμε, **ἡ ἰσότητα δυό τριγώνων ἐξασφαλίζεται μέ τίς ἰσότητες τριῶν ἀντίστοιχων στοιχείων τους, ἀπό τίς ὁποῖες μιά τουλάχιστο εἶναι ἰσότητα πλευρῶν.** Δηλαδή δέν ὑπάρχει κριτήριο πού νά ἐξασφαλίζει τήν ἰσότητα δυό τριγώνων μόνο μέ γωνίες τους. Καί αὐτό γιατί μπορεῖ νά ὑπάρχουν τρίγωνα, πού ἔχουν ὅλες τίς γωνίες τους μία πρός μία ἴσες δίχως νά εἶναι ἴσα. Μιά τέτοια περίπτωση δείχνει τό σχ. 32, στό ὁποῖο ἡ ΔΕ εἶναι παράλληλη πρός τή ΑΓ.



σχ. 32

Τά τρίγωνα ΑΒΓ καί ΔΒΕ ἔχουν τίς γωνίες τους μία πρός μία ἴσες, ἐνῶ τό ἕνα εἶναι μέρος τοῦ ἄλλου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

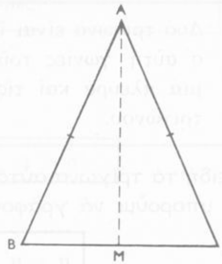
1. **Σ' ἕνα ἰσοσκελές τρίγωνο ἀπέναντι ἀπό τίς ἴσες πλευρές του βρίσκονται ἴσες γωνίες.**

Λύση.
Ἄς εἶναι ΑΒΓ ἕνα ἰσοσκελές τρίγωνο μέ ΑΒ=ΑΓ καί ἄς φέρουμε τή διάμεσό του. Βλέπουμε ὅτι τά τρίγωνα ΑΒΜ καί ΑΜΓ ἔχουν

ΑΒ = ΑΓ (Τό ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές)
ΒΜ = ΜΓ (Μ μέσο τῆς ΒΓ)
ΑΜ = ΑΜ (κοινή πλευρά)

Ἑπομένως τά τρίγωνα εἶναι ἴσα καί θά ἔχουν ὅλα τά ἀντίστοιχά τους στοιχεῖα ἴσα, ἑπομένως καί

$$\widehat{B} = \widehat{\Gamma}.$$



(σχ. 33)

---

2. **Γιά νά μετρήσουμε τήν ἀπόσταση δύο σημείων Α καί Β, πού χωρίζονται ἀπό ἕνα βάλτο, παίρνουμε ἕνα σημεῖο Γ καί στήν προέκταση τῶν ΑΓ καί ΓΒ παίρνουμε τμήματα ΓΑ′=ΓΑ καί ΓΒ′=ΓΒ. Νά συγκριθοῦν τά τμήματα ΑΒ καί Α′Β′.**

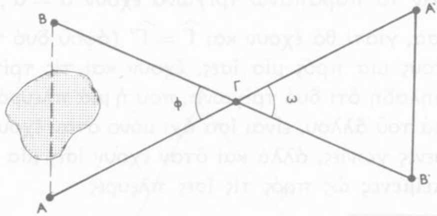
Λύση.

Συγκρίνουμε τά τρίγωνα ΑΒΓ καί Α′Β′Γ. Αὐτά ἔχουν

ΓΒ = ΓΒ′ (ἀπό τήν ὑπόθεση)
ΓΑ = ΓΑ′ (ἀπό τήν ὑπόθεση)
$\widehat{\varphi} = \widehat{\omega}$ (εἶναι κατακορυφήν)

Ἑπομένως τά τρίγωνα εἶναι ἴσα καί θά ἔχουν ὅλα τά ἀντίστοιχα στοιχεῖα τους ἴσα, ἑπομένως καί

$$AB = A'B'.$$



(σχ. 34)

---

3. **Δικαιολογῆστε ὅτι ὅλες οἱ γωνίες ἰσόπλευρου τριγώνου εἶναι ἴσες καί ὑπολογίστε τήν κάθε μιά τους.**

Λύση. Τό ἰσόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὅτι εἶναι ἰσοσκελές μέ ὁποιαδήποτε πλευρά του σάν βάση. Ἄν θεωρήσουμε ὅτι εἶναι βάση ἡ ΒΓ, τότε (σύμφωνα μέ τήν ἀσκ. 1) ἔχουμε $\widehat{B}=\widehat{\Gamma}$.

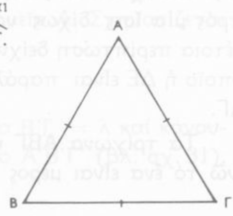
Ὅμοια ἔχουμε $\widehat{\Gamma} = \widehat{A}$ καί $\widehat{A} = \widehat{B}$. Ἑπομένως

$$\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{\Gamma}$$

Ἐπειδή $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{\Gamma} = 180^0$, ἔχουμε διαδοχικά

$$\widehat{A}+\widehat{A}+\widehat{A} = 180 \text{ ἤ } 3\widehat{A} = 180^0$$

$$\widehat{A} = 60^0$$



(σχ. 35)

Συνεπῶς: **Κάθε γωνία ἰσόπλευρου τριγώνου εἶναι 60⁰.**

---

4. **Νά συγκρίνετε τίς ἀπέναντι πλευρές παραλληλογράμμου.**

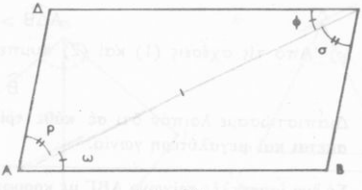
Λύση. Φέρνουμε τή διαγώνιο ΑΓ καί συγκρίνουμε τά τρίγωνα ΑΒΓ καί ΑΔΓ.

Αὐτά ἔχουν

$A\Gamma \quad = \quad A\Gamma$ (κοινή πλευρά)

$\widehat{\omega} \quad = \quad \widehat{\varphi}$ (ΑΒ//ΔΓ καί οἱ $\widehat{\omega}$ καί $\widehat{\varphi}$ εἶναι ἐντός ἐναλλάξ)

$\widehat{\sigma} \quad = \quad \widehat{\rho}$ (ΑΔ//ΒΓ καί οἱ $\widehat{\sigma}$ καί $\widehat{\rho}$ εἶναι ἐντός ἐναλλάξ)



(σχ. 36)

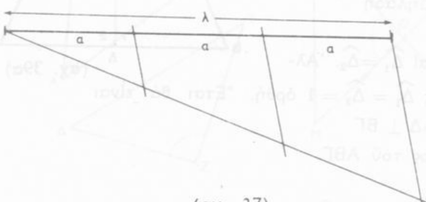
Ἑπομένως τά τρίγωνα εἶναι ἴσα καί θά ἔχουν ὅλα τά ἀντίστοιχα στοιχεῖα τους ἴσα, ἐπομένως καί

$$AB = \Delta\Gamma, \quad B\Gamma = A\Delta.$$

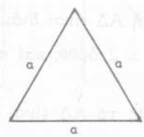
Συνεπῶς: **Οἱ ἀπέναντι πλευρές κάθε παραλληλογράμμου εἶναι ἴσες.**

5. **Νά κατασκευασθεῖ ἰσόπλευρο τρίγωνο, στό ὁποῖο ἡ περίμετρος νά εἶναι ἴση μέ ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα πού ἔχει μῆκος λ, π.χ. λ=9 cm.**

Λύση. Παίρνουμε ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ἴσο μέ τό λ καί τό χωρίζουμε σέ τρία ἴσα



(σχ. 37)



(σχ. 38)

μέρη (βλ. σχ. 37). Τό κάθε ἕνα ἀπό αὐτά εἶναι ἡ πλευρά τοῦ τριγώνου. Ἡ κατασκευή γίνεται κατά τά γνωστά, ὅπως δείχνει τό σχῆμα 38.

6. **Ἔχουμε τρίγωνο ΑΒΓ μέ ΑΓ>ΑΒ καί στήν ΑΓ παίρνουμε τμῆμα ΑΔ = ΑΒ. Νά συγκρίνετε:**

α) Τίς γωνίες $\widehat{AB\Delta}$ καί $\widehat{A\Delta B}$.

β) Κάθε μιά ἀπό τίς γωνίες $\widehat{B}$ καί $\widehat{\Gamma}$ τοῦ τριγώνου μέ τήν $\widehat{A\Delta B}$.

γ) Τίς γωνίες $\widehat{B}$ καί $\widehat{\Gamma}$ τοῦ τριγώνου.

Λύση. α) Τό τρίγωνο ΑΒΔ εἶναι ἰσοσκελές, γιατί ἔχει ΑΒ = ΑΔ. Συνεπῶς θά εἶναι

$$\widehat{AB\Delta} = \widehat{A\Delta B}.$$

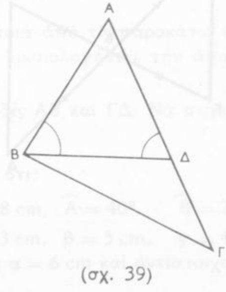
β) Ἡ ΒΔ, ὅπως φαίνεται στό σχῆμα 39, εἶναι στό ἐσωτερικό τῆς γωνίας $\widehat{B}$ καί ἑπομένως θά εἶναι

$$\widehat{B} > \widehat{AB\Delta}.$$

Τότε ὅμως θά ἔχουμε καί

$$\widehat{B} > \widehat{A\Delta B} \quad (1)$$

Ἡ γωνία $\widehat{A\Delta B}$ εἶναι ἐξωτερική γωνία τοῦ τριγώνου ΒΔΓ. Ἔτσι θά εἶναι $\widehat{A\Delta B} = \widehat{\Delta B\Gamma} + \widehat{\Gamma}$ καί συνεπῶς ἔχουμε



(σχ. 39)

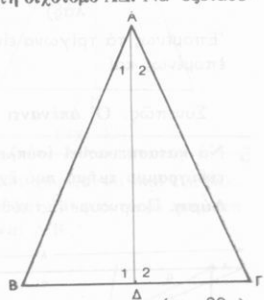
$$\widehat{A\Delta B} > \widehat{\Gamma} \quad (2)$$

γ) Ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) συμπεραίνουμε (μέ τή μεταβατική ἰδιότητα) ὅτι

$$\widehat{B} > \widehat{\Gamma}.$$

Διαπιστώσαμε λοιπόν ὅτι **σέ κάθε τρίγωνο ἀπέναντι ἀπό μεγαλύτερη πλευρά βρίσκεται καί μεγαλύτερη γωνία.**

7. **Σέ ἕνα ἰσοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ μέ κορυφή τό Α φέρνουμε τή διχοτόμο ΑΔ. Νά ἐξετάσετε ἄν ἡ ΑΔ εἶναι ἐπίσης ὕψος καί διάμεσος.**



(σχ. 39α)

Λύση: Συγκρίνουμε τά τρίγωνα ΑΒΔ καί ΑΓΔ.

Αὐτά ἔχουν:

ΑΒ = ΑΓ (ΑΒΓ ἰσοσκελές)

ΑΔ = ΑΔ (κοινή πλευρά)

$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ (ΑΔ διχοτόμος)

Συνεπῶς τά τρίγωνα εἶναι ἴσα καί θά ἔχουν ὅλα τά ἀντίστοιχα στοιχεῖα τους ἴσα. Δηλαδή

$$B\Delta = \Delta\Gamma$$

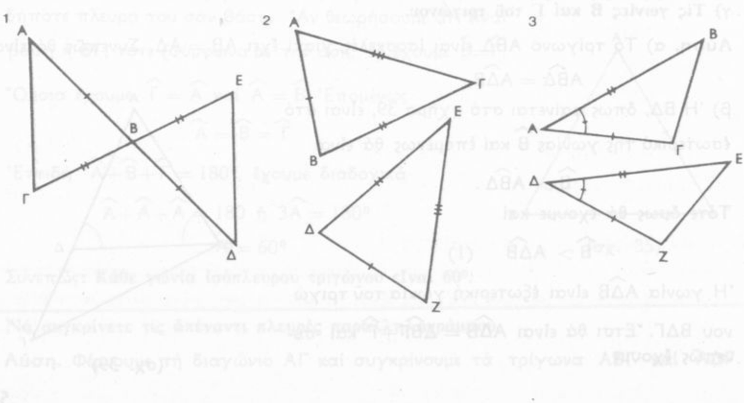
(ἑπομένως ἡ ΑΔ εἶναι διάμεσος) καί $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Delta}_2$. Ἀλλά $\widehat{\Delta}_1 + \widehat{\Delta}_2 = 2$ ὀρθές καί συνεπῶς $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Delta}_2 = 1$ ὀρθή. Ἔτσι θά εἶναι

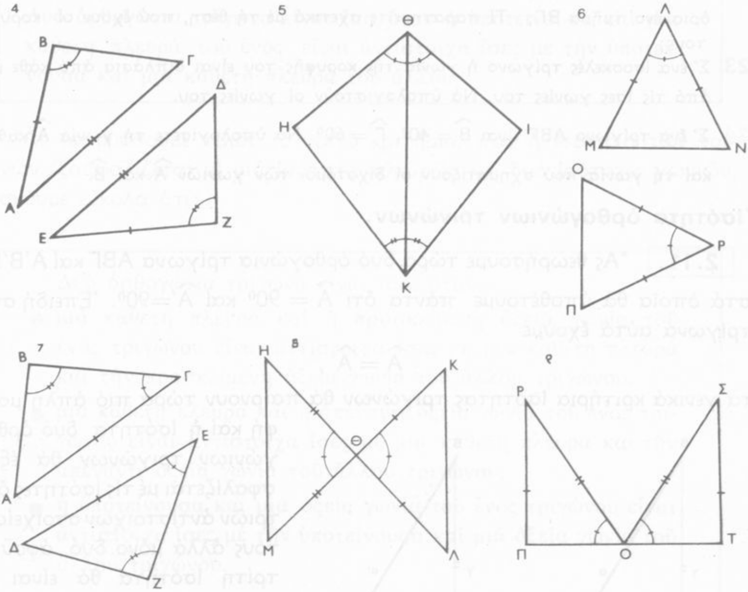
$$A\Delta \perp B\Gamma$$

καί συνεπῶς τό ΑΔ εἶναι καί ὕψος τοῦ ΑΒΓ.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

11. Στά σχήματα, πού ἀκολουθοῦν, ὑπάρχουν 9 ζεύγη μέ τρίγωνα, στά ὁποῖα ἔχουμε σημειώσει μέ τό ἴδιο σημάδι τίς ἴσες πλευρές καί τίς ἴσες γωνίες. Νά βρεῖτε ποιά ζεύγη τριγώνων εἶναι ἴσα καί νά ἀναφέρετε σ' αὐτά τά ἄλλα ἴσα ἀντίστοιχά τους στοιχεῖα. Δικαιολογῆστε τίς ἀπαντήσεις σας μέ τά κριτήρια ἰσότητας.





12. Σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ ἔχουμε $\widehat{A} = 75^0$ καί $\widehat{B} = 45^0$. Νά βρεθεῖ ἡ $\widehat{\Gamma}$.

13. Σέ ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ μέ $\widehat{A} = 90^0$, γνωρίζουμε ὅτι ἡ γωνία $\widehat{B}$ εἶναι διπλάσια ἀπό τή $\widehat{\Gamma}$. Νά ὑπολογιστοῦν οἱ γωνίες $\widehat{B}$ καί $\widehat{\Gamma}$.

14. Σ' ἕνα κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ εἶναι ΑΒ = ΒΓ καί ΑΔ = ΔΓ. Νά συγκρίνετε τίς γωνίες $\widehat{A}$ καί $\widehat{\Gamma}$.

15. Σ' ἕνα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ νά φέρετε τίς διαγωνίους του καί νά συγκρίνετε τά τμήματα, στά ὁποῖα χωρίζονται ἀπό τό σημεῖο τομῆς τους Ο.

16. Νά δικαιολογήσετε γιατί δέν μπορεῖ νά εἶναι ὀρθή ἤ ἀμβλεία ἡ γωνία Β ἑνός ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ, πού ἔχει κορυφή τό Α.

17. Σ' ἕνα ἰσοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, μέ κορυφή Α, φέρνουμε τή διάμεσο ΑΜ. Νά ἐξετάσετε ἄν ἡ ΑΜ εἶναι ἐπίσης διχοτόμος καί ὕψος τοῦ ΑΒΓ.

18. Σέ ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι $\widehat{B} > \widehat{\Gamma}$. Νά ἐξετάσετε ποιά ἀπό τίς παρακάτω σχέσεις ἰσχύει: α) ΑΓ=ΑΒ β) ΑΓ<ΑΒ γ) ΑΓ>ΑΒ. Νά δικαιολογήσετε τήν ἀπάντησή σας.

19. Σ' ἕναν κύκλο μέ κέντρο Ο παίρνουμε δυό ἴσες χορδές ΑΒ καί ΓΔ. Νά συγκριθοῦν οἱ γωνίες $\widehat{AOB}$ καί $\widehat{\Gamma O \Delta}$.

20. Νά κατασκευάσετε ἕνα τρίγωνο, ὅταν γνωρίζετε ὅτι:

1. $\alpha = 5$ cm, $\beta = 3$ cm, $\widehat{\Gamma} = 45^0$
2. $\alpha = 8$ cm, $\widehat{B} = 43^0$, $\widehat{\Gamma} = 80^0$
3. $\beta = 8$ cm, $\widehat{A} = 40^0$, $\widehat{B} = 75^0$
4. $\alpha = 3$ cm, $\beta = 5$ cm, $\gamma = 4$ cm

21. Νά κατασκευάσετε ἕνα ἰσοσκελές τρίγωνο μέ βάση $\alpha = 6$ cm καί ἀντίστοιχο ὕψος $\upsilon = 4$ cm.

22. Πόσα ἰσοσκελῆ τρίγωνα μπορεῖτε νά κατασκευάσετε, πού ἔχουν βάση ἴση μέ ἕνα ὁρισμένο τμῆμα ΒΓ; Τί παρατηρεῖτε σχετικά μέ τή θέση, πού ἔχουν οἱ κορυφές τους;

23. Σ' ἕνα ἰσοσκελές τρίγωνο ἡ γωνία τῆς κορυφῆς του εἶναι διπλάσια ἀπό κάθε μιά ἀπό τίς ἴσες γωνίες του. Νά ὑπολογιστοῦν οἱ γωνίες του.

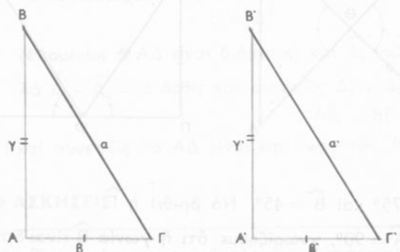
24. Σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι $\widehat{B} = 40^0$, $\widehat{\Gamma} = 60^0$. Νά ὑπολογίσετε τή γωνία $\widehat{A}$ καθώς καί τή γωνία πού σχηματίζουν οἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν $\widehat{A}$ καί $\widehat{B}$.

Ἰσότητα ὀρθογώνιων τριγώνων.

2.11. Ἄς θεωρήσουμε τώρα δυό ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ καί Α'Β'Γ', στά ὁποῖα θά ὑποθέτουμε πάντα ὅτι $\widehat{A} = 90^0$ καί $\widehat{A'} = 90^0$. Ἐπειδή στά τρίγωνα αὐτά ἔχουμε

$$\widehat{A} = \widehat{A'},$$

τά γενικά κριτήρια ἰσότητας τριγώνων θά παίρνουν τώρα πιό ἁπλή μορφή καί ἡ ἰσότητα δυό ὀρθογώνιων τριγώνων θά ἐξασφαλίζεται μέ τίς ἰσότητες ὄχι τριῶν ἀντίστοιχων στοιχείων τους ἀλλά μόνο δυό, ἀφοῦ ἡ τρίτη ἰσότητα θά εἶναι ἡ $\widehat{A} = \widehat{A'}$.



(σχ. 40)

Ἄς ὑποθέσουμε π.χ. ὅτι τά δυό ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχουν ΑΒ=Α'Β' καί ΑΓ=Α'Γ'. Ἐπειδή εἶναι καί $\widehat{A} = \widehat{A'}$, τά τρίγωνα αὐτά σύμφωνα μέ τό δεύτερο κριτήριο ἰσότητας θά εἶναι ἴσα. Συμπεραίνουμε λοιπόν ὅτι:

> Δυό ὀρθογώνια τρίγωνα εἶναι ἴσα, ὅταν οἱ κάθετες πλευρές τοῦ ἑνός εἶναι ἀντίστοιχα ἴσες μέ τίς κάθετες πλευρές τοῦ ἄλλου.

Ἄς ὑποθέσουμε τώρα ὅτι τά ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχουν ΑΒ = Α'Β' καί ΒΓ = Β'Γ'. Ἄν ἀποτυπώσουμε τό ΑΒΓ πάνω σ'ἕνα διαφανές χαρτί καί τοποθετήσουμε τό διαφανές πάνω στό Α' Β' Γ' κατά τέτοιο τρόπο, ὥστε ἡ ΑΒ νά ἐφαρμόσει στήν Α'Β', βλέπουμε ὅτι τό ΑΒΓ ἐφαρμόζει στό Α'Β'Γ'. Συμπεραίνουμε λοιπόν ὅτι:

(σχ. 41)

Δυό ὀρθογώνια τρίγωνα εἶναι ἴσα, ὅταν ἡ ὑποτείνουσα καί μιά κάθετη πλευρά τοῦ ἑνός εἶναι ἀντίστοιχα ἴσες μέ τήν ὑποτείνουσα καί μιά κάθετη πλευρά τοῦ ἄλλου.

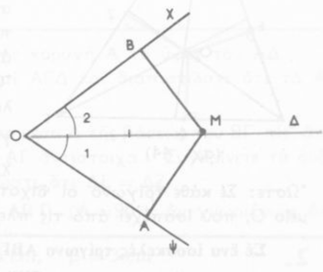
Ἄν ἐφαρμόσουμε τέλος τό τρίτο κριτήριο, πού ἡ ἰσότητα τῶν τριγώνων ἐξασφαλίζεται μέ μιά ἰσότητα πλευρῶν καί δυό ἰσότητες γωνιῶν, βρίσκουμε εὔκολα ὅτι:

Δυό ὀρθογώνια τρίγωνα εἶναι ἴσα, ὅταν:

- μιά κάθετη πλευρά καί ἡ προσκείμενη ὀξεία γωνία τοῦ ἑνός τριγώνου εἶναι ἀντίστοιχα ἴσες μέ μιά κάθετη πλευρά καί τήν προσκείμενη ὀξεία γωνία τοῦ ἄλλου τριγώνου,
- μιά κάθετη πλευρά καί ἡ ἀπέναντι ὀξεία γωνία τοῦ ἑνός τριγώνου εἶναι ἀντίστοιχα ἴσες μέ μιά κάθετη πλευρά καί τήν ἀπέναντι ὀξεία γωνία τοῦ ἄλλου τριγώνου,
- ἡ ὑποτείνουσα καί μιά ὀξεία γωνία τοῦ ἑνός τριγώνου εἶναι ἀντίστοιχα ἴσες μέ τήν ὑποτείνουσα καί μιά ὀξεία γωνία τοῦ ἄλλου τριγώνου.

Χαρακτηριστική ἰδιότητα διχοτόμου γωνίας.

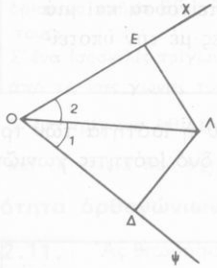
2.12. Ἄς θεωρήσουμε μιά ὀξεία γωνία $x\widehat{O}\psi$ καί τή διχοτόμο της ΟΔ. Ἄς εἶναι Μ ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τῆς διχοτόμου καί ΜΑ καί ΜΒ οἱ ἀποστάσεις του ἀπό τίς πλευρές τῆς γωνίας. Τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΟΜ καί ΒΟΜ εἶναι ἴσα, γιατί ἔχουν ΟΜ = ΟΜ, $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$ Ἑπομένως ΜΑ = ΜΒ καί ἀπό τήν ἰσότητα αὐτή συμπεραίνουμε ὅτι:



(σχ. 42)

Κάθε σημεῖο τῆς διχοτόμου μιᾶς γωνίας ἰσαπέχει ἀπό τίς πλευρές της.

Τήν ἰδιότητα αὐτή ἔχουν μόνο τά σημεῖα τῆς διχοτόμου. Πραγματικά, ἄν πάρουμε μέσα σέ μιά γωνία ΧΟΨ ἕνα σημεῖο Λ, πού νά ἰσαπέχει ἀπό τίς πλευρές τῆς γωνίας (δηλαδή οἱ ἀποστάσεις του ΛΔ καί ΛΕ νά εἶναι μεταξύ τους ἴσες) τότε, ἄν φέρουμε τήν ΟΛ, σχηματίζονται τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΔΟΛ καί ΕΟΛ πού ἔχουν



σχ. 43

ΟΛ = ΟΛ

ΛΔ = ΛΕ.

Ὥστε: τριγ ΔΟΛ = τριγ ΕΟΛ καί ἐπομένως

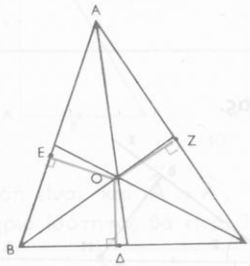
$\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$.

Ἀπό τήν ἰσότητα $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$ συμπεραίνουμε ὅτι ἡ ΟΛ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας $X\widehat{O}\Psi$, δηλαδή τό σημεῖο Λ βρίσκεται πάλι πάνω στή διχοτόμο τῆς $\widehat{O}$. Ὥστε

Κάθε σημεῖο, πού ἰσαπέχει ἀπό τίς πλευρές μιᾶς γωνίας, βρίσκεται πάνω στή διχοτόμο της.

■ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Σέ ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ νά χαράξετε τίς διχοτόμους τῶν γωνιῶν του $\widehat{B}$ καί $\widehat{\Gamma}$ μέχρι τό σημεῖο τομῆς τους 0. Φέρτε τίς ἀποστάσεις τοῦ 0 ἀπό τίς τρεῖς πλευρές τοῦ τριγώνου καί συγκρίνετέ τες. Τί παρατηρεῖτε; Θά περάσει καί ἡ διχοτόμος τῆς τρίτης γωνίας ἀπό τό 0;

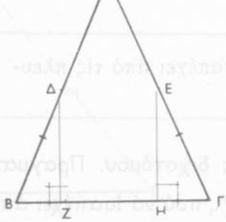


(σχ. 44)

Λύση. Ἄς ὀνομάσουμε ΟΔ, ΟΕ καί ΟΖ τίς τρεῖς αὐτές ἀποστάσεις. Ἐπειδή τό σημεῖο Ο βρίσκεται πάνω στή διχοτόμο τῆς γωνίας Β, θά ἰσαπέχει ἀπό τίς πλευρές της, δηλαδή εἶναι ΟΔ = ΟΕ. Ὅμοια εἶναι ΟΔ = ΟΖ. Ὥστε καί ΟΕ = ΟΖ, δηλαδή τό σημεῖο Ο ἰσαπέχει ἀπό τίς πλευρές τῆς γωνίας $\widehat{A}$ καί ἐπομένως βρίσκεται πάνω στή διχοτόμο τῆς γωνίας $\widehat{A}$.

Ὥστε: Σέ κάθε τρίγωνο οἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν του περνᾶνε ἀπό τό ἴδιο σημεῖο Ο, πού ἰσαπέχει ἀπό τίς πλευρές τοῦ τριγώνου.

2. Σέ ἕνα ἰσοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ μέ κορυφή τό Α νά φέρετε τίς ἀποστάσεις τῶν μέσων τῶν ἴσων πλευρῶν του ἀπό τή βάση ΒΓ καί νά τίς συγκρίνετε.



σχ. 45

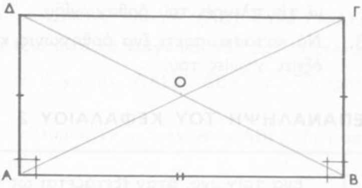
Λύση: Συγκρίνουμε τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΒΔΖ καί ΗΕΓ. Αὐτά ἔχουν:

$\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$ (γωνίες ἰσοσκελοῦς τριγώνου)

ΒΔ=ΕΓ (εἶναι ΑΒ=ΑΓ καί ἔχουμε πάρει τά μέσα τους).

Ὥστε τά τρίγωνα εἶναι ἴσα καί θά ἔχουν καί τά ἄλλα ἀντίστοιχά τους στοιχεῖα ἴσα, δηλ. ΔΖ=ΕΗ.

3. Σέ ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ συγκρίνετε μέ τό διαβήτη σας τίς διαγωνίους του καί δικαιολογῆστε τό συμπέρασμά σας συγκρίνοντας τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ καί ΑΒΔ.



(σχ. 46)

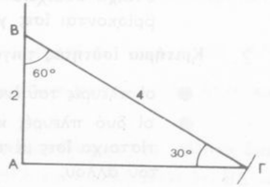
Λύση. Τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ καί ΑΒΔ ἔχουν

ΑΒ = ΑΒ (κοινή πλευρά)

ΒΓ = ΑΔ (ἀπέναντι πλευρές παραλληλογράμμου),

ὥστε τά τρίγωνα εἶναι ἴσα καί θά ἔχουν καί τά ἄλλα τους ἀντίστοιχα στοιχεῖα ἴσα καί ἑπομένως ΑΓ = ΔΒ. Δηλ. **οἱ διαγώνιοι ὀρθογώνιου παραλληλογράμμου εἶναι ἴσες μεταξύ τους.**

4. Νά κατασκευάσετε ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο, πού νά ἔχει μιά κάθετη πλευρά ἴση μέ τό μισό τῆς ὑποτείνουσας καί νά μετρήσετε τίς γωνίες του.



(σχ. 47)

Λύση. Κατασκευάζουμε μιά ὀρθή γωνία Α καί πάνω στή μιά πλευρά της παίρνουμε ἕνα σημεῖο Β ὥστε (ΑΒ) = 2 cm. Μέ κέντρο Β καί ἀκτίνα τό διπλάσιο τῆς ΑΒ δηλ. 4cm γράφουμε ἕναν κύκλο πού τέμνει τήν ἄλλη πλευρά τῆς ὀρθῆς γωνίας σ' ἕνα σημεῖο Γ. Χαράζουμε τή ΒΓ καί ἔτσι κατασκευάστηκε ἕνα τέτοιο ὀρθογώνιο τρίγωνο.

Ἡ μέτρηση τῶν γωνιῶν του, ἄν γίνει μέ προσοχή, δίνει $\widehat{\Gamma} = 30^0$ καί $\widehat{B} = 60^0$.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

25. Σ'ἕνα ἰσοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ φέρτε ἀπό τήν κορυφή Α τό ὕψος του ΑΔ. Συγκρίνετε τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ καί ΑΓΔ καί διαπιστῶστε ὅτι τό ΑΔ εἶναι διχοτόμος καί διάμεσος τοῦ τριγώνου.

26. Σ' ἕνα ἰσοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε ἀπό τό μέσο Δ τῆς βάσεώς του ΒΓ τίς ἀποστάσεις ΔΕ καί ΔΖ ἀπό τίς πλευρές ΑΒ καί ΑΓ ἀντίστοιχα. Συγκρίνετε τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΕΒΔ καί ΖΓΔ καί διαπιστῶστε ὅτι ΔΕ = ΔΖ.

27. Νά κατασκευαστεῖ ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($A = 90^0$), ἄν γνωρίζουμε ὅτι:

α) $\widehat{\Gamma} = 45^0$ $\beta = 2$ cm δ) $\alpha = 5$ cm, $\beta = 3$ cm

β) $\widehat{B} = 30^0$, $\beta = 3$ cm ε) $\alpha = 4$ cm $\gamma = 3$ cm

γ) $\widehat{B} = 50^0$ $\alpha = 6$ cm στ) $\beta = 3$ cm, $\gamma = 4$ cm

28. Νά κατασκευάσετε ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο, πού νά ἔχει μιά πλευρά 4 cm καί διαγώνιο 5 cm.

29. Σ' ἕνα ὀξυγώνιο τρίγωνο χαράξετε προσεκτικά τά τρία ὕψη του. Τί παρατηρεῖτε;

30. Νά κάνετε τήν ἴδια ἐργασία σ' ἕνα ἀμβλυγώνιο τρίγωνο καί σ' ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο. Παρατηρεῖτε τό ἴδιο;

31. Σέ ἕναν κύκλο νά φέρετε μιά διάμετρο ΒΓ, νά πάρετε ἕνα σημεῖο Α στό ἕνα ἡμικύκλιο καί νά χαράξετε τίς ΑΒ καί ΑΓ. Μετρῆστε τή γωνία Α. Κάνετε τήν ἴδια ἐργασία γιά διάφορες θέσεις τοῦ σημείου Α. Τί παρατηρεῖτε;

32. Σ' ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο μιά διαγώνιος σχηματίζει μέ μιά πλευρά του γωνία 70^0. Νά ὑπολογίσετε τίς ἄλλες γωνίες, πού σχηματίζουν οἱ διαγώνιοί του μέ τίς πλευρές τοῦ ὀρθογωνίου.

33. Νά κατασκευάσετε ἕνα ὀρθογώνιο καί ἰσοσκελές τρίγωνο καί νά ὑπολογίσετε τίς ὀξεῖες γωνίες του.

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 2

1. Ἕνα τρίγωνο, ὅταν ἐξετάζεται ὡς πρός τίς γωνίες του, εἶναι **ὀξυγώνιο** ἤ **ὀρθογώνιο** ἤ **ἀμβλυγώνιο**. Ὅταν ἐξετάζεται ὡς πρός τίς πλευρές του, εἶναι **ἰσόπλευρο** ἤ **ἰσοσκελές** ἤ **σκαληνό**.

Τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν κάθε τριγώνου εἶναι ἴσο μέ 180^0.

- Δύο ἴσα τρίγωνα ἔχουν μιά πρός μιά ἴσες ὅλες τίς πλευρές καί ὅλες τίς γωνίες τους. Δυό ἴσα τρίγωνα ἔχουν **ἐπίσης** ὅλα τά ἀντίστοιχα στοιχεῖα τους ἴσα. Σέ ἴσα τρίγωνα **ἀπέναντι** ἴσων πλευρῶν βρίσκονται ἴσες γωνίες καί **ἀπέναντι** ἴσων γωνιῶν ἴσες πλευρές.

2. **Κριτήρια ἰσότητας τριγώνων**. Δυό τρίγωνα εἶναι ἴσα, ὅταν:

- οἱ πλευρές τοῦ ἑνός εἶναι ἀντίστοιχα ἴσες μέ τίς πλευρές τοῦ ἄλλου,
- οἱ δυό πλευρές καί ἡ περιεχόμενη ἀπ' αὐτές γωνία τοῦ ἑνός εἶναι ἀντίστοιχα ἴσες μέ τίς δυό πλευρές καί τήν περιεχόμενη ἀπ' αὐτές γωνία τοῦ ἄλλου,
- ἡ μιά πλευρά καί οἱ προσκείμενες σ' αὐτήν γωνίες τοῦ ἑνός τριγώνου εἶναι ἀντίστοιχα ἴσες μέ μιά πλευρά καί τίς προσκείμενες σ' αὐτήν γωνίες τοῦ ἄλλου.

Οἱ ἀπέναντι πλευρές καί οἱ ἀπέναντι γωνίες κάθε παραλληλογράμμου εἶναι ἴσες.

3. **Κριτήρια ἰσότητας ὀρθογώνιων τριγώνων**. Δυό ὀρθογώνια τρίγωνα εἶναι ἴσα, ὅταν:

- οἱ κάθετες πλευρές τοῦ ἑνός εἶναι ἀντίστοιχα ἴσες μέ τίς κάθετες πλευρές τοῦ ἄλλου.
- ἡ ὑποτείνουσα καί μιά κάθετη πλευρά τοῦ ἑνός εἶναι ἀντίστοιχα ἴσες μέ τήν ὑποτείνουσα καί μιά κάθετη πλευρά τοῦ ἄλλου.
- μιά κάθετη πλευρά καί ἡ προσκείμενη (ἤ ἀπέναντι) ὀξεία γωνία τοῦ ἑνός εἶναι ἀντίστοιχα ἴσες μέ μιά κάθετη πλευρά καί τήν προσκείμενη (ἤ ἀπέναντι) ὀξεία γωνία τοῦ ἄλλου,
- ἡ ὑποτείνουσα καί μιά ὀξεία γωνία τοῦ ἑνός εἶναι ἀντίστοιχα ἴσες μέ τήν ὑποτείνουσα καί μιά ὀξεία γωνία τοῦ ἄλλου.

Κάθε σημεῖο τῆς διχοτόμου μιᾶς γωνίας ἰσαπέχει ἀπό τίς πλευρές της καί κάθε σημεῖο πού ἰσαπέχει ἀπό τίς πλευρές της βρίσκεται πάνω στή διχοτόμο. Σέ κάθε ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο οἱ διαγώνιοί του εἶναι ἴσες.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ *

34. Ἔστω Α,Β καί Γ τρία σημεῖα σέ εὐθεία γραμμή τέτοια ὥστε (ΑΒ) = (ΒΓ) = 4 cm. Μέ πλευρές τίς ΑΒ καί ΒΓ κατασκευάστε πρός τό ἴδιο μέρος τῆς εὐθείας δυό ἰσό-

πλευρα τρίγωνα ΑΒΔ καί ΒΓΕ. Χαράξτε τή ΔΕ. Τί τρίγωνο είναι τό ΒΔΕ; Είναι ΔΕ//ΑΓ;

35. Κατασκευάστε ένα ὀρθογώνιο τρίγωνο μέ κάθετες πλευρές (ΑΒ) = (ΑΓ) = 3 cm. Μέ πλευρές τίς ΑΒ καί ΑΓ κατασκευάστε ἔξω ἀπό τό τρίγωνο ΑΒΓ δυό ἰσόπλευρα τρίγωνα ΑΒΔ καί ΑΓΕ. Νά ὑπολογιστοῦν οἱ γωνίες $\widehat{\Delta A E}$, $\widehat{\Delta A B}$ καί $\widehat{E A \Gamma}$. Χαράξτε τήν ΕΔ. Τί τρίγωνο εἶναι τό ΑΔΕ;

36. Χαράξτε τίς κάθετες στά μέσα τῶν τριῶν πλευρῶν ἑνός τριγώνου ΑΒΓ. Τί παρατηρεῖτε; Δικαιολογῆστε τήν ἀπάντησή σας.

37. Χαράξτε ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα (ΒΓ) = 4 cm. Ἑκατέρωθεν τοῦ ΒΓ κατασκευάστε δυό ἰσοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ καί ΔΒΓ τέτοια ὥστε (ΑΒ) = (ΑΓ) = 3 cm καί (ΔΒ) = (ΔΓ) = 5 cm. Χαράξετε τήν ΑΔ πού τέμνει τήν ΒΓ στό 0. Μετρῆστε τίς ΟΒ, ΟΓ, $\widehat{\Delta A B}$, $\widehat{\Gamma A \Delta}$, Τί παρατηρεῖτε; Δικαιολογῆστε τίς ἀπαντήσεις σας.

38. Σ' ἕνα ἰσοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ χαράξτε τά ὕψη ΒΔ καί ΓΕ ἀπό τά ἄκρα τῆς βάσεώς του ΒΓ. Συγκρίνετε τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΒΓΔ καί ΒΓΕ. Τί συμπεραίνετε γιά τά ὕψη ΒΔ καί ΓΕ;

39. Δυό κύκλοι μέ κέντρα Κ καί Λ τέμνονται στά σημεῖα Α καί Β. Χαράξτε τίς ΚΛ, ΑΚ, ΑΛ, ΒΚ, ΒΛ καί ἐξετάσετε ἄν ἡ ΚΛ εἶναι διχοτόμος τῶν γωνιῶν $\widehat{A K B}$ καί $\widehat{A \Lambda B}$.

40. Σ' ἕνα ἰσοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ χαράξτε ἀπό τά ἄκρα τῆς βάσεώς του ΒΓ τίς διαμέσους ΒΔ καί ΓΕ. Συγκρίνετε τά τρίγωνα ΒΓΔ καί ΒΓΕ καί συμπεράνετε ὅτι ΒΔ = = ΓΕ.

41. Σ' ἕνα ἰσοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ μέ κορυφή τό Α συγκρίνετε τίς ἐξωτερικές γωνίες του $\widehat{B}$ καί $\widehat{\Gamma}$.

42. Νά κατασκευάσετε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ, ὅταν

α) $\widehat{B} = 40^0$, $\gamma = 8$ cm, $\beta = 6$ cm

β) $\widehat{B} = 40^0$ $\gamma = 8$ cm $\beta = 10$ cm

Πόσα διαφορετικά τρίγωνα κατασκευάζονται μέ τά στοιχεῖα αὐτά;

43. Χαράξτε σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ τίς τρεῖς διαμέσους του. Τί παρατηρεῖτε;

3ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

Τό διατεταγμένο ζεῦγος.

3.1. Στήν καθημερινή μας ζωή μιλᾶμε συχνά γιά ζεύγη πραγμάτων ἤ προσώπων δίχως νά μᾶς ἐνδιαφέρει ποιό θά ἀναφέρουμε πρῶτο καί ποιό δεύτερο. Ἔτσι π.χ. οἱ δύο φράσεις:

«Χθές παντρεύτηκαν ὁ Γιῶργος καί ἡ Μαρία»
«Χθές παντρεύτηκαν ἡ Μαρία καί ὁ Γιῶργος»

ἔχουν τό ἴδιο ἀκριβῶς νόημα. Σέ ἄλλες ὅμως περιπτώσεις, ὅταν μιλᾶμε γιά ἕνα ζεῦγος, ἔχει σημασία ποιό ἀπό τά στοιχεῖα του θά ἀναφέρουμε πρῶτο καί ποιό δεύτερο. Ἔτσι π.χ. οἱ δυό φράσεις

«Χθές ἔγινε ὁ ἀγώνας ΠΑΟΚ-ΟΛΥΜΠΙΑΚΟΥ»
«Χθές ἔγινε ὁ ἀγώνας ΟΛΥΜΠΙΑΚΟΥ-ΠΑΟΚ»

ἔχουν διαφορετικό νόημα, γιατί ἡ πρώτη σημαίνει ὅτι ὁ ἀγώνας ἔγινε στό γήπεδο τοῦ ΠΑΟΚ στή Θεσσαλονίκη, ἐνῶ ἡ δεύτερη σημαίνει ὅτι ὁ ἀγώνας ἔγινε στό γήπεδο τοῦ ΟΛΥΜΠΙΑΚΟΥ στό Φάληρο. Στήν περίπτωση αὐτή λέμε ὅτι τό ζεῦγος (ΠΑΟΚ, ΟΛΥΜΠΙΑΚΟΣ) εἶναι **διατεταγμένο ζεῦγος**.

Ὥστε:

> Ἕνα ζεῦγος στοιχείων λέγεται *διατεταγμένο*, ὅταν παίρνουμε τά στοιχεῖα του μέ μιά ὁρισμένη σειρά καί τά ξεχωρίζουμε σέ πρῶτο καί δεύτερο.

Ἕνα διατεταγμένο ζεῦγος θά σημειώνεται

$$(\alpha,\ \beta)$$

καί θά ἔχει διαφορετική σημασία ἀπό τό (β,α), δηλ. θά εἶναι $(\alpha,\beta) \neq (\beta,\alpha)$. Δύο διατεταγμένα ζεύγη (α,β) καί (γ,δ) θεωροῦνται ἴσα, ὅταν $\alpha = \gamma$ καί $\beta = \delta$, δηλ.

$$\boxed{(\alpha,\beta) = (\gamma,\delta) \text{ σημαίνει } \alpha = \gamma \text{ καί } \beta = \delta}$$

Ἔτσι π.χ. ἡ ἰσότητα $(\alpha,\beta) = (3,5)$ σημαίνει ὅτι $\alpha = 3$ καί $\beta = 5$.

Μέ τά διατεταγμένα ζεύγη μπορούμε νά διατυπώνουμε πιό άπλά καί πιό σύντομα πολλά άπό τά θέματα, πού άντιμετωπίζουμε καθημερινά. Έτσι π.χ., άν θέλουμε νά καταγράψουμε τίς πρωτεύουσες τών εύρωπαϊκών κρατών, μπορούμε νά κατασκευάσουμε τά διατεταγμένα ζεύγη:

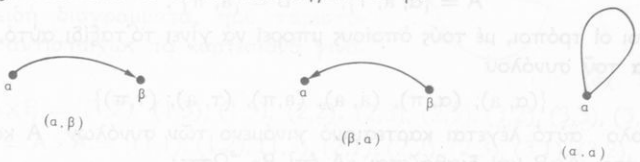
('Ελλάδα, 'Αθήνα), ('Ιταλία, Ρώμη), (Γαλλία, Παρίσι), . . .

όπου τό πρώτο όνομα τού ζεύγους δηλώνει τό κράτος καί τό δεύτερο όνομα δηλώνει τήν πρωτεύουσά του.

Μέ διατεταγμένα ζεύγη μπορούμε νά παραστήσουμε τούς διψήφιους άριθμούς, άν συμφωνήσουμε ότι τό πρώτο στοιχείο τού ζεύγους παριστάνει τό ψηφίο τών δεκάδων καί τό δεύτερο στοιχείο παριστάνει τό ψηφίο τών μονάδων. Έτσι π.χ. γράφουμε

$$(3,5) = 35, \qquad (5,3) = 53, \qquad (4,4) = 44.$$

3.2. Ένα διατεταγμένο ζεύγος (α,β) παριστάνεται γραφικά μέ δύο σημεία, πού τά σημειώνουμε μέ α καί β, καί μέ ένα καμπυλόγραμμο βέλος, πού ξεκινάει άπό τό α καί καταλήγει στό β.



(σχ. 1)

Ή γραφική παράσταση τού ζεύγους (α,α) στό σχ. 1 είναι μιά «θηλιά» χωρίς καμιά ένδειξη γιά τή φορά.

■ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Σχηματίστε όλα τά ζεύγη μέ στοιχεία άπό τό σύνολο { α,β }.**

Λύση. Άπό τό σύνολο αύτό μπορούμε νά σχηματίσουμε τά έξής διαφορετικά ζεύγη:

(α,β), (β,α), (α,α), (β,β)

2. **Τί διαφέρουν μεταξύ τους τά παρακάτω σύμβολα;**

{ 1,5 }, (1,5), { (1,5) }

Λύση.

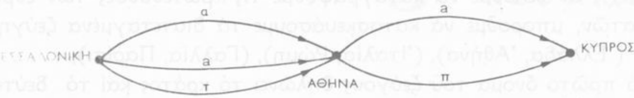
{ 1,5 } είναι ένα σύνολο, πού έχει στοιχεία τούς άριθμούς 1 καί 5.

(1,5) είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος μέ πρώτο στοιχείο τό 1 καί δεύτερο τό 5.

{ (1,5) } είναι ένα σύνολο, πού έχει μοναδικό στοιχείο τό ζεύγος (1,5).

Καρτεσιανό γινόμενο.

3.3. Άς ύποθέσουμε ότι ένα άτομο μπορεί νά ταξιδέψει άπό τή Θεσσαλονίκη στήν 'Αθήνα μέ αύτοκίνητο (= α), άεροπλάνο (= a) ή τραίνο (=τ) καί ἀπό τήν Ἀθήνα στήν Κύπρο μέ ἀεροπλάνο (= a) ἤ πλοῖο (=π).



(σχ. 2)

Οἱ τρόποι, πού μπορεῖ νά ταξιδέψει τό ἄτομο αὐτό ἀπό τή Θεσσαλονίκη στήν Κύπρο, μπορεῖ νά σημειωθοῦν μέ τά διατεταγμένα ζεύγη:

$$(\alpha,a),\ (\alpha,\pi),\ (a,a),\ (a,\pi),\ (\tau,a),\ (\tau,\pi),$$

ὅπου τό πρῶτο στοιχεῖο τοῦ ζεύγους δείχνει τόν τρόπο ταξιδιοῦ ἀπό τή Θεσσαλονίκη στήν Ἀθήνα καί τό δεύτερο δείχνει τόν τρόπο ταξιδιοῦ ἀπό τήν Ἀθήνα στήν Κύπρο. Ἄν σημειώσουμε μέ Α καί Β τά σύνολα αὐτῶν τῶν μεταφορικῶν μέσων, δηλ.

$$A=\{\alpha, a, \tau\}, \qquad B=\{a, \pi\},$$

τότε ὅλοι οἱ τρόποι, μέ τούς ὁποίους μπορεῖ νά γίνει τό ταξίδι αὐτό, εἶναι στοιχεῖα τοῦ συνόλου

$$\{(\alpha, a),\ (\alpha,\pi),\ (a, a),\ (a,\pi),\ (\tau, a),\ (\tau,\pi)\}$$

Τό σύνολο αὐτό λέγεται καρτεσιανό γινόμενο τῶν συνόλων Α καί Β, σημειώνεται $A\times B$ καί διαβάζεται «Α ἐπί Β». Ὥστε:

Καρτεσιανό γινόμενο $A\times B$ δύο συνόλων Α καί Β λέγεται τό σύνολο πού ἔχει στοιχεῖα ὅλα τά διατεταγμένα ζεύγη, τά ὁποῖα ἔχουν πρῶτο στοιχεῖο ἀπό τό Α καί δεύτερο στοιχεῖο ἀπό τό Β, δηλ.

$$\boxed{A\times B=\{\text{διατεταγμένα ζεύγη } (\alpha,\beta) \text{ μέ } \alpha\in A \text{ καί } \beta\in B\}}$$

Εἶναι φανερό ὅτι, ἄν τό Α ἔχει μ στοιχεῖα καί τό Β ἔχει ν στοιχεῖα, τό σύνολο $A\times B$ ἔχει $\mu\cdot\nu$ στοιχεῖα.

Ἄν πάρουμε τά σύνολα

$$A=\{1, 2, 3\} \quad \text{καί} \quad B=\{\alpha,\beta\},$$

ἔχουμε:

$$A\times B=\{(1,\alpha),\ (1,\beta),\ (2,\alpha),\ (2,\beta),\ (3,\alpha),\ (3,\beta)\}$$
$$B\times A=\{(\alpha,1),\ (\alpha,2),\ (\alpha,3),\ (\beta,1),\ (\beta,2),\ (\beta,3)\}$$

Παρατηροῦμε ὅτι

$$\mathbf{A\times B\neq B\times A}$$

δηλ. στό καρτεσιανό γινόμενο *δέν ἰσχύει ἡ ἀντιμεταθετική ἰδιότητα.*

Μποροῦμε, βέβαια, νά ἔχουμε καί καρτεσιανά γινόμενα $A\times A$ καί $B\times B$. Αὐτά εἶναι:

$A\times A=A^2=\{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$

$B\times B=B^2=\{(\alpha,\alpha),\ (\alpha,\beta),\ (\beta,\alpha),\ (\beta,\beta)\}.$

Παράσταση τοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου.

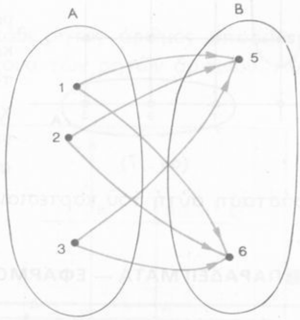
3.4. Ἄς θεωρήσουμε δύο σύνολα ξένα μεταξύ τους π.χ. τά

$$A = \{1,2,3\} \quad \text{καί} \quad B = \{5,6\}.$$

Τό καρτεσιανό τους γινόμενο εἶναι:

$$A \times B = \{(1,5), (1,6), (2,5), (2,6), (3,5), (3,6)\}.$$

Στό σχ. 3 ἔχουμε παραστήσει μέ διαγράμματα τοῦ Venn τά σύνολα A καί B καί ἔχουμε φέρει βέλη, πού ξεκινοῦν ἀπό κάθε στοιχεῖο τοῦ A καί καταλήγουν σέ κάθε στοιχεῖο τοῦ B. Ἕνα τέτοιο σχῆμα, ἐπειδή ἀκριβῶς περιέχει τά βέλη, τό λέμε **βελοειδές διάγραμμα.** Εἶναι φανερό ὅτι τό βελοειδές διάγραμμα τοῦ σχήματος 3 παριστάνει τό καρτεσιανό γινόμενο A × B.



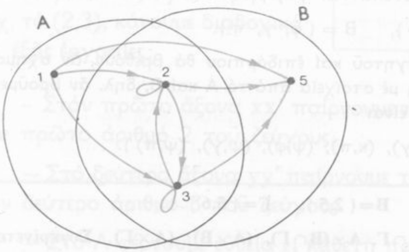
(σχ. 3)

Στά σχήματα 4 καί 5 ἔχουμε δύο βελοειδή διαγράμματα, πού παριστάνουν ἀντιστοίχως τά καρτεσιανά γινόμενα

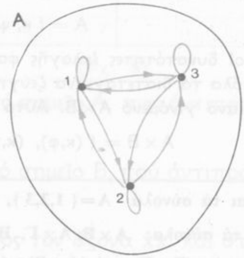
$$A \times B = \{(1,2), (1,3), (1,5), (2,2), (2,3), (2,5), (3,2), (3,3), (3,5)\}$$

$$A^2 = A \times A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\},$$

ὅπου εἶναι $A = \{1,2,3\}$ καί $B = \{2,3,5\}$



(σχ. 4)



(σχ. 5)

3.5. Τό παραπάνω καρτεσιανό γινόμενο A × B μποροῦμε νά τό παραστήσουμε καί μέ ἕναν ἀπό τούς παρακάτω πίνακες.

5	(1,5)	(2,5)	(3,5)
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)
2	(1,2)	(2,2)	(3,2)
↑ B╲A	1	2	3

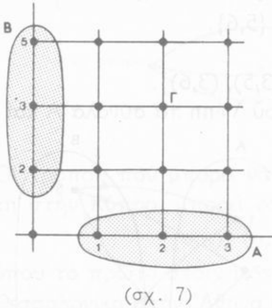
→

→ B╲A ↓	1	2	3
2	(1,2)	(2,2)	(3,2)
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)
5	(1,5)	(2,5)	(3,5)

(σχ. 6)

Οἱ πίνακες αὐτοί λέγονται **πίνακες μέ διπλή εἴσοδο.**

3.6. Τέλος δίνουμε στό σχ. 7 έναν τρίτο τρόπο γραφικής παράστασης τοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου, πού συνδυάζει τήν παράσταση μέ πίνακα καί τήν παράσταση μέ διαγράμματα τοῦ Venn. Σέ δύο κάθετες εὐθεῖες σημειώνουμε τά στοιχεῖα τῶν συνόλων Α καί Β καί ἀπό τά σημεῖα αὐτά φέρνουμε παράλληλες εὐθεῖες πρός τό ζεῦγος τῶν κάθετων εὐθειῶν. Τό σημεῖο στό ὁποῖο τέμνονται οἱ δύο εὐθεῖες, πού ξεκινοῦν ἀπό ἕνα στοιχεῖο τοῦ Α καί ἕνα στοιχεῖο τοῦ Β, παριστάνει τό ζεῦγος τῶν στοιχείων αὐτῶν. Π.χ. τό σημεῖο Γ παριστάνει τό ζεῦγος (2,3). Ἡ παράσταση αὐτή τοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου λέγεται **καρτεσιανό διάγραμμα.**



(σχ. 7)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Σέ ἕνα γεῦμα τό φαγητό εἶναι ψάρι (=ψ) ἤ κρέας (=κ) καί τό ἐπιδόρπιο φροῦτο (=φ), γλυκό (=γ) ἤ παγωτό (=π). Ποιοί εἶναι ὅλοι οἱ δυνατοί τρόποι, μέ τούς ὁποίους μπορεῖ κάποιος νά διαλέξει τό φαγητό καί τό ἐπιδόρπιό του;**

Λύση :

Ἄς σημειώσουμε μέ Α καί Β τά σύνολα τῶν φαγητῶν καί τῶν ἐπιδόρπιων,

$$A = \{ \kappa, \psi \}, \quad B = \{ \varphi, \gamma, \pi \}.$$

Ὅλες οἱ δυνατότητες ἐκλογῆς φαγητοῦ καί ἐπιδόρπιου θά βρεθοῦν, ἄν σχηματίσουμε ὅλα τά διατεταγμένα ζεύγη μέ στοιχεῖα ἀπό τό Α καί Β, δηλ. ἄν βροῦμε τό καρτεσιανό γινόμενο Α×Β. Αὐτό εἶναι

$$A \times B = \{ (\kappa,\varphi), (\kappa,\gamma), (\kappa,\pi), (\psi,\varphi), (\psi,\gamma), (\psi,\pi) \}.$$

2. **Δίνονται τά σύνολα Α={1,2,3}, Β={2,5}, Γ={5,6}.**

Βρεῖτε τά σύνολα: Α×Β, Α×Γ, Β∩Γ, Α×(Β∩Γ), (Α×Β)∩(Α×Γ). Συγκρίνετε τά σύνολα: Α×(Β∩Γ) καί (Α×Β)∩(Α×Γ) Τί παρατηρεῖτε;

Λύση:

Ἔχουμε:

$$A \times B = \{ (1,2), (1,5), (2,2), (2,5), (3,2), (3,5) \}$$
$$A \times \Gamma = \{ (1,5), (1,6), (2,5), (2,6), (3,5), (3,6) \}$$
$$B \cap \Gamma = \{ 5 \}$$
$$A \times (B \cap \Gamma) = \{ (1,5), (2,5), (3,5) \}$$
$$(A \times B) \cap (A \times \Gamma) = \{ (1,5), (2,5), (3,5) \}$$

Παρατηροῦμε ὅτι:

$$A \times (B \cap \Gamma) = (A \times B) \cap (A \times \Gamma)$$

δηλ. τό καρτεσιανό γινόμενο ἔχει τήν ἐπιμεριστική ἰδιότητα ὡς πρός τήν τομή.

3. Μέ τά ἴδια σύνολα Α καί Β βρεῖτε τά σύνολα: $B\cup\Gamma$, $(A\times B)\cup(A\times\Gamma)$ καί διαπιστῶστε ὅτι

$$A\times(B\cup\Gamma)=(A\times B)\cup(A\times\Gamma)$$

δηλ. τό καρτεσιανό γινόμενο ἔχει τήν ἐπιμεριστική ἰδιότητα ὡς πρός τήν ἕνωση.

Καρτεσιανές συντεταγμένες.

3.7. Στό πρῶτο κεφάλαιο εἴδαμε ὅτι κάθε ρητός ἀριθμός μπορεῖ νά ἀπεικονίζεται σέ ἕνα ὁρισμένο σημεῖο τοῦ ἄξονα τῶν ρητῶν ἀριθμῶν. Αὐτό θά μᾶς βοηθήσει τώρα νά ἀντιστοιχίσουμε σέ κάθε διατεταγμένο ζεῦγος ρητῶν ἀριθμῶν ἕνα ὁρισμένο σημεῖο ἑνός ἐπιπέδου.

Παίρνουμε δύο κάθετους ἄξονες xx΄ καί yy΄ ἑνός ἐπιπέδου καί ὑποθέτουμε ὅτι ἔχουν κοινή ἀρχή τό σημεῖο τομῆς τους Ο. Ἀπό τούς ἄξονες αὐτούς ὁ xx΄ θεωρεῖται *«πρῶτος»* καί ὁ yy΄ θεωρεῖται *«δεύτερος»*. Γιά κάθε διατεταγμένο ζεῦγος ρητῶν, π.χ. τό (2,3), κάνουμε διαδοχικά τίς ἑξῆς ἐργασίες:

(σχ. 8)

– Στόν πρῶτο ἄξονα xx΄ παίρνουμε τό σημεῖο Α, πού ἀντιπροσωπεύει τόν πρῶτο ἀριθμό 2 τοῦ ζεύγους.

– Στό δεύτερο ἄξονα yy΄ παίρνουμε τό σημεῖο Β, πού ἀντιπροσωπεύει τόν δεύτερο ἀριθμό 3 τοῦ ζεύγους.

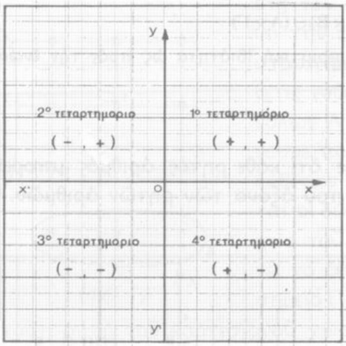
– Στό Α φέρνουμε εὐθεία ε_1 κάθετη πρός τόν ἄξονα xx΄ καί στό Β φέρνουμε εὐθεία ε_2 κάθετη πρός τόν ἄξονα yy΄ καί σημειώνουμε μέ ἕνα γράμμα, π.χ. μέ Μ, τό σημεῖο τομῆς τῶν ε_1 καί ε_2.

Ἐπειδή οἱ εὐθεῖες ε_1 καί ε_2 τέμνονται πάντοτε καί μάλιστα σ᾽ ἕνα μοναδικό σημεῖο Μ, τό Μ καθορίζεται ἐντελῶς ἀπό τό διατεταγμένο ζεῦγος (2,3) καί θεωρεῖται εἰκόνα του.

Οἱ ἀριθμοί τοῦ διατεταγμένου ζεύγους (2,3) λέγονται **καρτεσιανές συντεταγμένες** τοῦ σημείου Μ. Εἰδικότερα, ὁ πρῶτος ἀπ᾽ αὐτούς λέγεται **τετμημένη τοῦ Μ** καί ὁ δεύτερος λέγεται **τεταγμένη τοῦ Μ.** Τό σημεῖο Μ, πού ἔχει συντεταγμένες τό ζεῦγος (2,3), τό σημειώνουμε **Μ(2,3).**

Στό σχ. 8 δίνονται τά σημεῖα Ρ(–3,2), $T\left(\dfrac{7}{2},\dfrac{3}{2}\right)$ καί Η(–3, –3).

Εἶναι φανερό ὅτι **κάθε σημεῖο τοῦ ἄξονα xx΄ ἔχει τεταγμένη μηδέν** καί εἶναι π.χ. Α(2,0), Δ(–2,0), ἐνῶ **κάθε σημεῖο τοῦ ἄξονα yy΄ ἔχει τεταγμένη μηδέν** καί εἶναι π.χ. Β(0,3) Ε(0,–2), Ζ $\left(0,-\frac{7}{2}\right)$. Ἡ ἀρχή Ο τῶν ἀξόνων ἔχει συντεταγμένες (0,0).



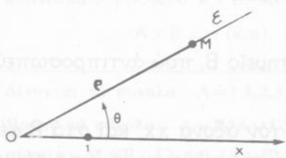
(σχ. 9)

Τό σύστημα τῶν συντεταγμένων χωρίζει τό ἐπίπεδο σέ 4 περιοχές, πού λέγονται **τεταρτημόρια** καί χαρακτηρίζονται ὡς 1°, 2°, 3° καί 4°, ὅπως φαίνεται στό σχ. 9, ὅπου σημειώνονται καί τά πρόσημα τῆς τετμημένης καί τῆς τεταγμένης τῶν σημείων, πού βρίσκονται σέ κάθε ἕνα ἀπό αὐτά.

Πολικές συντεταγμένες.

3.8. Οἱ καρτεσιανές συντεταγμένες ἑνός σημείου Μ προσδιορίζουν τή θέση του στό ἐπίπεδο μέ τή βοήθεια δύο ἀξόνων xx΄ καί yy΄. Μποροῦμε ὅμως νά προσδιορίσουμε τή θέση ἑνός σημείου Μ στό ἐπίπεδο καί μέ τή βοήθεια μόνο ἑνός ἡμιάξονα **Οx**. Ὁ προσδιορισμός αὐτός γίνεται ὡς ἑξῆς:

Παίρνουμε ἕναν ὁρισμένο ἡμιάξονα Οx καί θεωροῦμε σάν μονάδα μετρήσεως τῶν εὐθύγραμμων τμημάτων τοῦ ἐπιπέδου τή μονάδα, πού ἔχουμε στόν ἡμιάξονα Οx. Παίρνουμε ἀκόμη μιά ἡμιευθεία Οε, πού σχηματίζει μέ τόν ἡμιάξονα Οx γωνία, τῆς ὁποίας τό μέτρο θ περιέχεται μεταξύ 0° καί 360°.



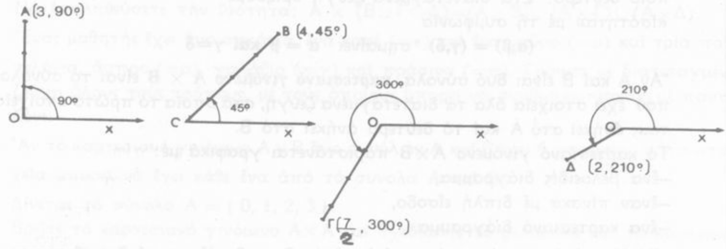
(σχ. 10)

Ἄν θεωρήσουμε τώρα ἕνα θετικό ρητό ἀριθμό ρ καί πάρουμε πάνω στήν Οε ἕνα σημεῖο Μ τέτοιο, ὥστε τό μέτρο τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος ΟΜ νά εἶναι ρ, τό ζεῦγος (ρ,θ) ὁρίζει τή θέση τοῦ σημείου Μ πάνω στό ἐπίπεδο.

Οἱ ἀριθμοί ρ καί θ λέγονται **πολικές συντεταγμένες** τοῦ Μ καί γράφουμε **Μ (ρ,θ)**. Εἰδικότερα:

- Ἡ γωνία θ, πού εἶναι τέτοια ὥστε $0° \leq \theta < 360°$, λέγεται **πολική γωνία** τοῦ Μ.
- Ὁ θετικός ἀριθμός ρ λέγεται **πολική ἀπόσταση** τοῦ Μ.

● Ὁ ἡμιάξονας Ox λέγεται **πολικός ἄξονας** καί ἡ ἀρχή του O λέγε-



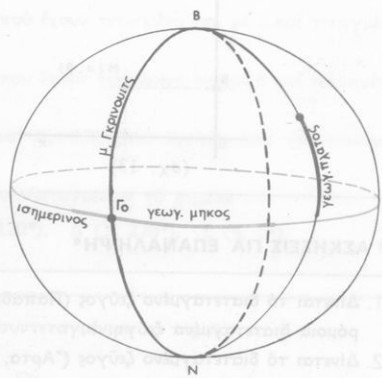
(σχ. 11)

ται **πόλος.** Στό σχῆμα 11 δίνονται ὁρισμένα σημεῖα μέ τίς πολικές συντεταγμένες τους.

Γεωγραφικές συντεταγμένες.

3.9. Ὅπως μέ τή βοήθεια τῶν καρτεσιανῶν καί πολικῶν συντεταγμένων ὁρίζεται ἡ θέση ἑνός σημείου στό ἐπίπεδο, ἔτσι μέ κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων μπορεῖ νά ὁριστεῖ ἡ θέση ἑνός σημείου στό χῶρο ἤ ἑνός σημείου πάνω στήν ἐπιφάνεια μιᾶς σφαίρας.

Στό μάθημα τῆς γεωγραφίας μαθαίνουμε ὅτι ἡ θέση ἑνός σημείου πάνω στήν ἐπιφάνεια τῆς γῆς ὁρίζεται μέ τίς **γεωγραφικές συντεταγμένες.** Παίρνοντας σάν βασικούς κύκλους τόν *ἰσημερινό τῆς γῆς* καί τό *μεσημβρινό τοῦ Γκρίνουιτς*, θεωροῦμε κάθε σημεῖο πάνω στήν ἐπιφάνεια τῆς γῆς ὡς τομή τοῦ μεσημβρινοῦ του καί ἑνός κύκλου παράλληλου πρός τόν ἰσημερινό. Ἔτσι, ὅταν γράφουμε π.χ. γιά ἕνα σημεῖο M τῆς ἐπιφάνειας τῆς γῆς



(σχ. 12)

$$M\,(30^0 B,\ 40^0 A),$$

ἐννοοῦμε ὅτι τό σημεῖο M ἔχει **γεωγραφικό πλάτος 30^0 βόρειο** καί **γεωγραφικό μῆκος 40^0 ἀνατολικό.**

Τό γεωγραφικό πλάτος μεταβάλλεται ἀπό 0^0–90^0 B καί 0^0–90^0 N, ἐνῶ τό γεωγραφικό μῆκος μεταβάλλεται ἀπό 0^0–180^0 A καί 0^0–180^0 Δ.

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 3

Στό **διατεταγμένο** ζεῦγος (α,β) ἔχει σημασία ποιό στοιχεῖο εἶναι πρῶτο καί ποιό δεύτερο. Στά διατεταγμένα ζεύγη ὁρίζουμε «ἰσότητα» μέ τή συμφωνία

$$(\alpha,\beta) = (\gamma,\delta) \quad \text{σημαίνει} \quad \alpha = \beta \text{ καί } \gamma = \delta$$

Ἄν Α καί Β εἶναι δυό σύνολα, **καρτεσιανό γινόμενο Α × Β** εἶναι τό σύνολο, πού ἔχει στοιχεῖα ὅλα τά διατεταγμένα ζεύγη, στά ὁποῖα τό πρῶτο στοιχεῖο τους ἀνήκει στό Α καί τό δεύτερο ἀνήκει στό Β.

Τό καρτεσιανό γινόμενο Α×Β παριστάνεται γραφικά μέ:

–ἕνα βελοειδές διάγραμμα,

–ἕναν πίνακα μέ διπλή εἴσοδο,

–ἕνα καρτεσιανό διάγραμμα.

Ἡ θέση ἑνός σημείου πάνω σ' ἕνα ἐπίπεδο καθορίζεται μέ ἕνα διατεταγμένο ζεῦγος ἀριθμῶν.

I. Μέ ἕνα **σύστημα καρτεσιανῶν συντεταγμένων.**

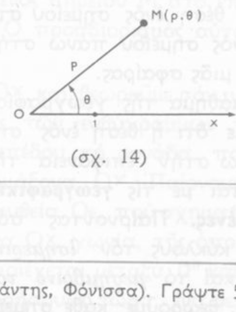
Τό σημεῖο Μ τοῦ σχ. 13 ἔχει συντεταγμένες (α,β). Τό α εἶναι ἡ **τετμημένη** του, β εἶναι ἡ **τεταγμένη** του.

II) Μέ ἕνα **σύστημα πολικῶν συντεταγμένων.**

Τό σημεῖο Μ τοῦ σχ. 14 ἔχει πολικές συντεταγμένες (ρ,θ). Τό ρ εἶναι ἡ **πολική του ἀπόσταση** καί θ εἶναι ἡ **πολική του γωνία.**

Ἡ θέση ἑνός σημείου στήν ἐπιφάνεια τῆς γῆς καθορίζεται μέ τίς γεωγραφικές συντεταγμένες.

(σχ. 13)



(σχ. 14)

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ*

1. Δίνεται τό διατεταγμένο ζεῦγος (Παπαδιαμάντης, Φόνισσα). Γράψτε 5 ἄλλα παρόμοια διατεταγμένα ζεύγη.
2. Δίνεται τό διατεταγμένο ζεῦγος (Ἄρτα, Ἤπειρος). Γράψτε 5 ἄλλα διατεταγμένα ζεύγη μέ τήν ἴδια σημασία.
3. Νά βρεθοῦν οἱ ἀριθμοί α καί β, ὅταν:

   $(\alpha, 3) = (2, \beta)$ $\qquad$ $(\alpha-2,\ \beta+3) = (4, 3)$

   $(\alpha+1, 5) = (4, \beta-1)$ $\qquad$ $(\alpha, 3) = (\beta,\ \beta+1)$
4. Δίνονται τά σύνολα

   $A = \{0, 2, 3\}$, $B = \{1, 4\}$, $\Gamma = \{3, 5, 8\}$, $\Delta = \{3, 4, 8\}$

   Βρεῖτε τά σύνολα Α × Β καί Γ × Δ καί κάνετε τό καρτεσιανό διάγραμμα καί τόν πίνακα μέ διπλή εἴσοδο γιά τό Α×Β. Ἐπίσης τό βελοειδές διάγραμμα γιά τό Γ×Δ.

5. Δίνονται τά σύνολα $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, $\Gamma = \{4\}$, $\Delta = \{5\}$.
Νά βρεθοῦν τά σύνολα: $A \times B$, $A \times \Gamma$, $A \times \Delta$, $B \cup \Gamma \cup \Delta$ καί $(A \times B) \cup (A \times \Gamma) \cup (A \times \Delta)$.
Νά ἐπαληθεύσετε τήν ἰσότητα: $A \times (B \cup \Gamma \cup \Delta) = (A \times B) \cup (A \times \Gamma) \cup (A \times \Delta)$.

6. Ἕνας μαθητής ἔχει δυό σακάκια, ἕνα καφέ (=κ) καί ἕνα μαῦρο (=μ) καί τρία παντελόνια, ἄσπρο (=α), γαλάζιο (=γ) καί πράσινο (=π). Γράψτε μέ διατεταγμένα ζεύγη ὅλους τούς τρόπους, μέ τούς ὁποίους μπορεῖ νά συνδυάσει σακάκι μέ παντελόνι.

7. Ἄν τό καρτεσιανό γινόμενο $A \times B$ δύο συνόλων A καί B ἔχει 6 στοιχεῖα, πόσα στοιχεῖα μπορεῖ νά ἔχει κάθε ἕνα ἀπό τά σύνολα A καί B;

8. Δίνεται τό σύνολο $A = \{0, 1, 2, 3\}$.
Βρεῖτε τό καρτεσιανό γινόμενο $A \times A$ καί σχεδιάστε τό βελοειδές καί τό καρτεσιανό του διάγραμμα.

9. Σημειῶστε σ' ἕνα σύστημα συντεταγμένων τά σημεῖα:

$$A(-3, -2), \quad B\left(2, -\frac{5}{2}\right), \quad \Gamma\left(-\frac{5}{2}, 2\right), \quad \Delta(0,4), \quad E(4,0)$$

10. Σημειῶστε σ' ἕνα σύστημα συντεταγμένων τό σημεῖο M (3,2).
Βρεῖτε τά συμμετρικά του ὡς πρός τόν ἄξονα **ox** καί ὡς πρός τόν **oy**. Ποιές εἶναι οἱ συντεταγμένες τους;

11. Σέ ποιό τεταρτημόριο βρίσκεται ἕνα σημεῖο, ὅταν ἔχει:
α. τετμημένη θετική β. τεταγμένη ἀρνητική γ. τετμημένη ἀρνητική καί τεταγμένη θετική;

12. Βρεῖτε ὅλα τά σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου, πού ἔχουν τετμημένη ἴση μέ 2 καί τεταγμένη ὁποιοδήποτε ἀριθμό.

13. Βρεῖτε ὅλα τά σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου, πού ἔχουν τεταγμένη ἴση μέ 3 καί τετμημένη ὁποιοδήποτε ἀριθμό.

14. Τά σημεῖα A(3,1), B(3,3), Γ(−2,1) καί Δ(−2,3) εἶναι κορυφές ἑνός ὀρθογωνίου. Βρεῖτε τήν περίμετρό του.

15. Σημειῶστε σ' ἕνα σύστημα πολικῶν συντεταγμένων τά σημεῖα

$$A(5,\ 30^{0}), \quad B(7,\ 30^{0}), \quad \Gamma(2,\ 120^{0}), \quad \Delta\ (3,\ 270^{0}), \quad E\ (4,\ 0^{0}).$$

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ**

16. Σημειῶστε σ' ἕνα σύστημα πολικῶν συντεταγμένων τά σημεῖα
$A(3,0^{0})$ καί $B(3,60^{0})$.
Τί εἴδους τρίγωνο εἶναι τό AOB; Δικαιολογῆστε τήν ἀπάντηση.

17. Σέ ἕνα σύστημα πολικῶν καί σέ ἕνα καρτεσιανῶν συντεταγμένων ὁ πολικός ἄξονας ταυτίζεται μέ τόν ἄξονα **ox**.
α. Ἕνα σημεῖο M ἔχει πολικές συντεταγμένες $M(3,\ 90^{0})$. Ποιές εἶναι οἱ καρτεσιανές του συντεταγμένες;
β. Ἕνα σημεῖο N ἔχει καρτεσιανές συντεταγμένες N (−5,0). Ποιές εἶναι οἱ πολικές του συντεταγμένες;

18. Πόσο γεωγραφ. πλάτος ἔχουν τά σημεῖα, πού βρίσκονται στόν Ἰσημερινό τῆς γῆς καί πόσο οἱ πόλοι τῆς γῆς;

4ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΔΙΜΕΛΕΙΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

Ἡ ἔννοια τῆς προτάσεως.

4.1. Οἱ ἄνθρωποι, γιά νά συνεννοηθοῦν μεταξύ τους, χρησιμοποιοῦν διάφορα σύνολα ἀπό λέξεις καί σύμβολα, ὅπως π.χ.

«ὁ ἀριθμός 8 εἶναι ἄρτιος»
«ἡ Θεσσαλονίκη εἶναι πρωτεύουσα τῆς Ἑλλάδας»
«φέρε μου ἕνα ποτήρι νερό»
«αὔριο μπορεῖ νά ἔρθει ὁ Γιάννης».

Κάθε τέτοιο σύνολο ἀπό λέξεις καί σύμβολα, πού ἔχει κάποιο νοητικό περιεχόμενο, λέγεται γενικά *ἔκφραση*. Πολλές φορές μποροῦμε νά χαρακτηρίσουμε μιά ἔκφραση σάν *«ἀληθή»* ἤ *«ψευδή»*. Ἔτσι π.χ. ἡ ἔκφραση *«ὁ ἀριθμός 8 εἶναι ἄρτιος»* εἶναι *«ἀληθής»*, ἐνῶ ἡ ἔκφραση *«ἡ Θεσσαλονίκη εἶναι πρωτεύουσα τῆς Ἑλλάδας»* εἶναι *«ψευδής»*. Ὑπάρχουν ὅμως καί ἐκφράσεις, πού δέν μποροῦν νά χαρακτηριστοῦν *«ἀληθεῖς»* ἤ *«ψευδεῖς»*, ὅπως π.χ. ἡ ἔκφραση *«φέρε μου ἕνα ποτήρι νερό».*

Κάθε ἔκφραση, πού μπορεῖ νά χαρακτηριστεῖ μόνο σάν «ἀληθής» ἤ μόνο σάν «ψευδής», λέγεται «λογική πρόταση» ἤ ἁπλά «πρόταση».

Ἔτσι π.χ. οἱ ἐκφράσεις

«ὁ ἀριθμός 8 εἶναι ἄρτιος» (ἀληθής)
«ἡ Θεσσαλονίκη εἶναι πρωτεύουσα τῆς Ἑλλάδας (ψευδής)
«ὁ 4 εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τόν 7» (ψευδής)
«ὁ Σολωμός ἔγραψε τόν ἐθνικό ὕμνο» (ἀληθής)

εἶναι προτάσεις, ἐνῶ ἡ ἔκφραση *«φέρε μου ἕνα ποτήρι νερό»* δέν εἶναι στά μαθηματικά πρόταση. Οὔτε καί ἡ ἔκφραση *«αὔριο μπορεῖ νά ἔρθει ὁ Γιάννης»* εἶναι πρόταση.

Προτασιακοί τύποι

4.2. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι τό γράμμα x παριστάνει ἕνα ὁποιοδήποτε στοιχεῖο τοῦ συνόλου

$$A = \{1, 2, 4, 9, 11\}$$

καί ἄς σημειώσουμε μέ p(x) μιά ἔκφραση, πού περιέχει τό γράμμα x, π.χ. τήν

p(x): ὁ x εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τόν 7.

Ἡ ἔκφραση αὐτή δέν εἶναι πρόταση, γιατί δέν μπορεῖ νά χαρακτηριστεῖ σάν ἀληθής ἤ σάν ψευδής. Ἡ p(x) ὅμως γίνεται πρόταση, ὅταν ἀντικατασταθεῖ τό x μέ ὁρισμένο στοιχεῖο τοῦ A. Ἄν λοιπόν ἀντικαταστήσουμε τό x διαδοχικά μέ ὅλα τά στοιχεῖα 1,2,4... τοῦ συνόλου A καί σημειώσουμε μέ p(1), p(2), p(4),... τίς ἀντίστοιχες ἐκφράσεις πού θά προκύψουν, ἔχουμε τίς προτάσεις:

p(1)	: *ὁ 1 εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τόν 7,*	(ψευδής)
p(2)	: *ὁ 2 εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τόν 7,*	(ψευδής)
p(4)	: *ὁ 4 εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τὸν 7,*	(ψευδής)
p(9)	: *ὁ 9 εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τόν 7,*	(ἀληθής)
p(11)	: *ὁ 11 εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τόν 7.*	(ἀληθής)

Βλέπουμε δηλαδή ὅτι, ἐνῶ ἡ ἴδια ἡ ἔκφραση p(x) δέν εἶναι πρόταση, μποροῦμε νά βροῦμε ἀπό τήν ἔκφραση αὐτή προτάσεις καί μάλιστα τόσες, ὅσα εἶναι τά στοιχεῖα τοῦ συνόλου. Γι᾽ αὐτό μιά τέτοια ἔκφραση p(x) λέγεται **προτασιακός τύπος** (εἴτε **ἀνοικτή πρόταση** εἴτε **συνθήκη**) **μέ μιά μεταβλητή.**

Τό γράμμα x, πού περιέχεται στόν προτασιακό τύπο καί παριστάνει ἕνα ὁποιοδήποτε στοιχεῖο ἑνός ὁρισμένου συνόλου A, λέγεται **μεταβλητή**, ἐνῶ τό σύνολο A λέγεται **σύνολο ἀναφορᾶς** τοῦ προτασιακοῦ τύπου. Συνηθίζουμε νά λέμε ὅτι ἡ μεταβλητή x *παίρνει τιμές* ἀπό τό σύνολο A ἤ *διατρέχει* τό σύνολο A.

Προτασιακὸς τύπος μέ δυὸ μεταβλητές.

4.3. Ἄς ὑποθέσουμε τώρα ὅτι ἔχουμε δυό μεταβλητές x καί y καί ὅτι ἡ x παίρνει τιμές ἀπό τό σύνολο $A = \{1, 2, 9, 11\}$ καί ἡ y παίρνει τιμές ἀπό τό σύνολο $B = \{1, 3, 9, 10, 17\}$. Ἄς σημειώσουμε μέ p(x,y) μιά ἔκφραση πού περιέχει καί τά δύο γράμματα x καί y, π.χ.

p(x,y): *ὁ x εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τόν y.*

Ἡ ἔκφραση αὐτή δέν εἶναι πρόταση, γιατί δέν μπορεῖ νά χαρακτηριστεῖ σάν ἀληθής ἤ ψευδής, γίνεται ὅμως πρόταση, ἄν ἀντικατασταθεῖ τό x μέ ὁρισμένο στοιχεῖο τοῦ A καί τό y μέ ὁρισμένο στοιχεῖο τοῦ B. Ἔτσι, ἄν σημειώσουμε π.χ. μέ p(2,10) τήν ἔκφραση, πού προκύπτει ἀπό τήν p(x,y) ὅταν ἀντικαταστήσουμε τό x μέ τό $2 \in A$ καί τό y μέ τό $10 \in B$, ἔχουμε τήν πρόταση p(2,10) : *2 εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τόν 10* (ψευδής)

Ἀπό τήν ἔκφραση p(x,y), προκύπτουν ἐπίσης οἱ προτάσεις ·

p(9,3) : *ὁ 9 εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τόν 3,* (ἀληθής)

p(9,11) : *ὁ 9 εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τόν 11* (ψευδής)

. . . .

Μιά τέτοια ἔκφραση p(x,y) λέγεται **προτασιακός τύπος μέ δυό μεταβλητές** (εἴτε **ἀνοικτή πρόταση μέ δυό μεταβλητές** εἴτε **συνθήκη μέ δυό μεταβλητές**).

Ἀπό ἕναν προτασιακό τύπο μέ δυό μεταβλητές προκύπτει μιά πρόταση, μόνο ὅταν τά x καί y ἀντικατασταθοῦν ἀντίστοιχα, μέ ὁρισμένα στοιχεῖα τῶν συνόλων A καί B δηλ. μόνο ὅταν τό ζεῦγος (x,y) τῶν μεταβλητῶν του ἀντικατασταθεῖ μέ ὁρισμένο ζεῦγος τοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου A×B. Γι' αὐτό ἀκριβῶς **σύνολο ἀναφορᾶς τοῦ προτασιακοῦ τύπου p(x,y) εἶναι τό καρτεσιανό γινόμενο AxB.**

Σύνολο ἀλήθειας ἑνὸς προτασιακοῦ τύπου.

4.4 Ἄς πάρουμε πάλι τόν προτασιακό τύπο τῆς μεταβλητῆς x

p(x) : ὁ x εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τόν 7

μέ σύνολο ἀναφορᾶς τό $A = \{1, 2, 4, 9, 11\}$. Ὁ προτασιακός αὐτός τύπος δίνει ἀληθεῖς προτάσεις, μόνο ὅταν τό x ἀντικατασταθεῖ μέ τά ὁρισμένα στοιχεῖα 9 καί 11 τοῦ συνόλου A. Γι' αὐτό τό σύνολο $\mathbf{G = \{9, 11\}}$, πού εἶναι ὑποσύνολο τοῦ A, λέγεται **σύνολο ἀλήθειας** τοῦ παραπάνω προτασιακοῦ τύπου καί γράφεται ἀκόμη

G = {x∈A : ὁ x μεγαλύτερος ἀπό τόν 7}

Γενικά:

> Σύνολο ἀλήθειας ἑνός προτασιακοῦ τύπου p(x) λέγεται τό σύνολο G, πού ἀποτελεῖται ἀπό ὅλα τά στοιχεῖα τοῦ συνόλου ἀναφορᾶς A, γιά τά ὁποῖα προκύπτουν ἀπό τόν p(x) ἀληθεῖς προτάσεις.

Τό σύνολο ἀλήθειας G ἑνός προτασιακοῦ τύπου p(x) γράφεται ἀκόμη

$$\mathbf{G = \{x \in A : p(x)\}}$$

Βλέπουμε ,δηλ. ὅτι **κάθε προτασιακός τύπος συνοδεύεται ἀπό δυό σύνολα:**

- **Τό σύνολο ἀναφορᾶς του A.**
- **Τό σύνολο ἀληθείας του G** (πού εἶναι ὑποσύνολο τοῦ A).

Δέν ἀποκλείεται τό σύνολο ἀλήθειας G νά εἶναι τό ἴδιο τό A ἤ νά εἶναι τό κενό σύνολο ∅. Ἔτσι π.χ. ἄν ἔχουμε τόν προτασιακό τύπο

p(x) : ὁ x διαιρεῖ τόν 20

καί ὀνομάσουμε A τό σύνολο ἀναφορᾶς του, παρατηροῦμε ὅτι:

Ἄν εἶναι $A=\{3, 8, 11, 17\}$, τότε εἶναι
$G=\{x \in A : x$ διαιρεῖ τόν $20\}=\varnothing$

Ἄν εἶναι $A=\{2, 4, 5, 10\}$, τότε εἶναι
$G=\{x \in A : x$ διαιρεῖ τόν $20\}=\{2, 4, 5, 10\}=A$

Ἄν εἶναι $A=\{2, 3, 5, 8, 10, 11\}$, τότε εἶναι
$G=\{x \in A : x$ διαιρεῖ τόν $20\}=\{2,5,10\} \subset A$

4.5. Ἄς πάρουμε τώρα προτασιακό τύπο μέ δυό μεταβλητές x καί y, π.χ. τόν

$p(x,y)$: *ὁ x μεγαλύτερος ἀπό τόν y,*

καί ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ἡ μεταβλητή x παίρνει τιμές ἀπό τό $A=\{1, 2, 9, 11\}$ καί ἡ μεταβλητή y παίρνει τιμές ἀπό τό $B=\{1, 3, 9, 10, 17\}$. Τότε σύνολο ἀναφορᾶς τοῦ προτασιακοῦ τύπου $p(x,y)$ εἶναι, ὅπως εἴπαμε, τό καρτεσιανό γινόμενο $A \times B$. Παρατηροῦμε ὅτι μόνο τά ζεύγη

$$(2,1)\ (9,1)\ (9,3),\ (11,1),\ (11,3),\ (11,9),\ (11,10)$$

τοῦ $A \times B$ δίνουν ἀληθεῖς προτάσεις. Τά ζεύγη αὐτά ἀποτελοῦν ἕνα σύνολο, ὑποσύνολο τοῦ $A \times B$, τό ὁποῖο λέγεται **σύνολο ἀλήθειας** τοῦ προτασιακοῦ τύπου $p(x,y)$. Γενικά:

> Σύνολο ἀλήθειας ἑνός προτασιακοῦ τύπου $p(x,y)$ λέγεται τό σύνολο, πού ἀποτελεῖται ἀπό ὅλα τά ζεύγη τοῦ συνόλου ἀναφορᾶς $A \times B$, γιά τά ὁποῖα προκύπτουν ἀληθεῖς προτάσεις ἀπό τόν $p(x,y)$.

Τό σύνολο ἀλήθειας ἑνός προτασιακοῦ τύπου $p(x,y)$ σημειώνεται

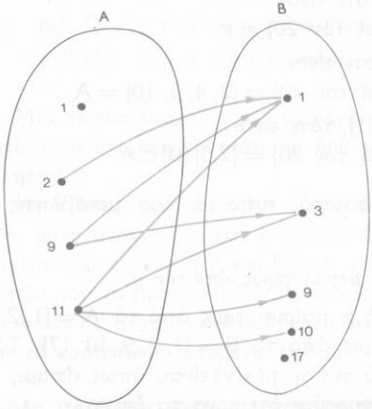
$$\mathbf{G=\{(x,y) \in A \times B : p(x,y)\}}$$

Ἔτσι π.χ. τό σύνολο ἀλήθειας τοῦ παραπάνω προτασιακοῦ τύπου γράφεται καί

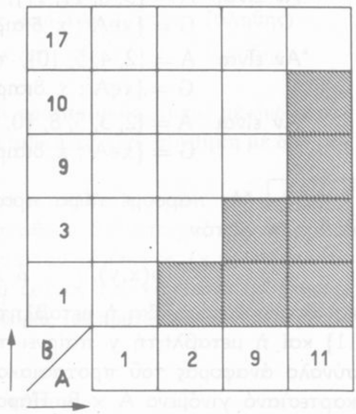
$$G=\{(x,y) \in A \times B : \underbrace{\text{ὁ } x \text{ εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τόν } y}_{p(x,y)}\}$$

Ἀφοῦ τό σύνολο ἀλήθειας ἑνός προτασιακοῦ τύπου $p(x,y)$ εἶναι ὑποσύνολο τοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου $A \times B$, μποροῦμε νά τό παραστήσουμε ὅπως καί τό καρτεσιανό γινόμενο.

Στό σχ. 1 ἔχουμε τό βελοειδές διάγραμμα, πού παριστάνει τό σύνολο ἀλήθειας τοῦ προηγούμενου προτασιακοῦ τύπου $p(x,y)$. Σημειώνουμε μέ βέλη μόνο τά ζεύγη τοῦ $A \times B$, πού ἀνήκουν στό σύνολο ἀλήθειας. Στό σχ. 2 ἔχουμε τόν πίνακα μέ διπλή εἴσοδο, πού παριστάνει ἐπίσης τό σύνολο ἀλήθειας τοῦ p(x,y). Στόν πίνακα αὐτό «μαυρίσαμε» μόνο τά τε-



(σχ. 1)



(σχ. 2)

τράγωνα, στά ὁποῖα βρίσκονται τά ζεύγη τοῦ A × B, πού ἀνήκουν στό σύνολο ἀλήθειας τοῦ p(x,y).

Ἰσοδύναμοι προτασιακοί τύποι

4.6. Ἄς θεωρήσουμε δύο προτασιακούς τύπους μιᾶς μεταβλητῆς μέ τό ἴδιο σύνολο ἀναφορᾶς $A = \{1, 2, 4, 9, 11\}$ π.χ.

p(x) : *ὁ x εἶναι μικρότερος ἀπό τό 7*
g(x) : *ὁ x εἶναι διαιρέτης τοῦ 8*

Εἶναι φανερό ὅτι ὁ p(x) ἔχει σύνολο ἀλήθειας τό {1,2,4}, ἀλλά καί ὁ g(x) ἔχει σύνολο ἀλήθειας τό ἴδιο. Ἔτσι οἱ δύο αὐτοί προτασιακοί τύποι ἔχουν ὄχι μόνο τό ἴδιο σύνολο ἀναφορᾶς, ἀλλά καί τό ἴδιο σύνολο ἀλήθειας. Οἱ προτασιακοί αὐτοί τύποι λέγονται **ἰσοδύναμοι**. Γενικά:

> Δύο προτασιακοί τύποι λέγονται ἰσοδύναμοι, ὅταν ἔχουν τό ἴδιο σύνολο ἀναφορᾶς καί τό ἴδιο σύνολο ἀλήθειας.

Γιά νά δηλώσουμε ὅτι δυό προτασιακοί τύποι p(x) καί g(x) εἶναι ἰσοδύναμοι, γράφουμε ἁπλά

$$\mathbf{p(x) \Leftrightarrow g(x).}$$

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ποιές ἀπό τίς παρακάτω ἐκφράσεις εἶναι λογικές προτάσεις καί ποιές ὄχι.
   α. Ὁ 5 εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τό 10.

β. Ἄνοιξε τήν πόρτα.
γ. Ὁ 10 εἶναι ἄρτιος ἀριθμός.
δ. Σήμερα μπορεῖ νά ἐξεταστῶ στά μαθηματικά.
ε. Ὁ Σεφέρης πῆρε τό βραβεῖο Nobel.

2. Μέ σύνολο ἀναφορᾶς τό $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, βρεῖτε τό σύνολο ἀλήθειας τῶν προτασιακῶν τύπων:
α. $p(x)$: ὁ x διαιρεῖ τό 12
β. $g(x) : x + 2 = 6$
γ. $\sigma(x) : 2x + 1 = 9$
δ. $\tau(x)$: $2x < 10$
Ποιοί προτασιακοί τύποι εἶναι ἰσοδύναμοι;

3. Ἄν οἱ μεταβλητές x καί y «διατρέχουν» τά σύνολα $A = \{3,2,5\}$ καί $B = \{5,8,6\}$ ἀντιστοίχως, νά βρεῖτε τό σύνολο ἀλήθειας τῶν προτασιακῶν τύπων:
α. $p(x,y)$: ὁ x διαιρεῖ τόν y.
β. $g(x,y)$: $x + y = 10$

4. Οἱ μεταβλητές x καί y διατρέχουν ἀντίστοιχως τά σύνολα
Α = {Ἀθήνα (Α), Ρώμη (Ρ), Λονδίνο (Λ), Τόκιο (Τ)} καί
Β = {Ἑλλάδα (Ε), Ἰαπωνία (Ι), Γαλλία (Γ)}.
Νά βρεῖτε τό σύνολο ἀλήθειας τοῦ προτασιακοῦ τύπου
$p(x,y)$: ἡ πόλη x εἶναι πρωτεύουσα τοῦ κράτους ψ.

5. Ἡ ἔκφραση «ὁ x εἶναι διαιρέτης τοῦ 20» εἶναι προτασιακός τύπος μέ μιά μεταβλητή; Ἄν ὄχι, συμπληρῶστε την καί βρεῖτε τό σύνολο ἀλήθειας.

6. Ἡ ἔκφραση «ὁ x εἶναι διπλάσιος ἀπό τόν y» εἶναι προτασιακός τύπος μέ δυό μεταβλητές; Ἄν ὄχι, συμπληρῶστε την καί βρεῖτε τό σύνολο ἀλήθειας.

7. Μέ σύνολο ἀναφορᾶς τό $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ βρεῖτε δυό ἰσοδύναμους προτασιακούς τύπους μέ μιά μεταβλητή.

8. Μέ σύνολο ἀναφορᾶς τό $A = \{2, 4, 8\}$ βρεῖτε ἕναν προτασιακό τύπο μιᾶς μεταβλητῆς, πού νά ἔχει σύνολο ἀλήθειας:
α. Τό Α β. Τό κενό σύνολο. γ. Ἕνα γνήσιο ὑποσύνολο τοῦ Α.

Διμελὴς σχέση ἀπὸ σύνολο Α σὲ σύνολο Β.

4.7. Κάθε προτασιακός τύπος $p(x,y)$ μέ δυό μεταβλητές, στόν ὁποῖο ἡ μεταβλητή x παίρνει τιμές σ' ἕνα σύνολο Α καί ἡ y σ' ἕνα σύνολο Β, συνδέει γενικά ὁρισμένα στοιχεῖα τοῦ Α μέ ὁρισμένα στοιχεῖα τοῦ Β. Ἄς θεωρήσουμε π.χ. τά δυό σύνολα

Α = {Ἀθήνα(=α), Θεσσαλονίκη(=θ), Σόφια(=σ), Βουκουρέστι(=β), Μόναχο(=μ), Ρώμη(=ρ)}

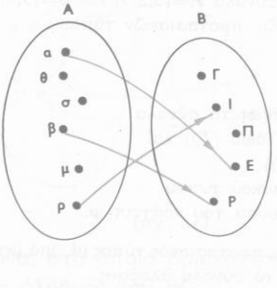
Β = {Γερμανία(=Γ), Ἰταλία(=Ι), Πολωνία(=Π), Ἑλλάδα(=Ε), Ρουμανία(=Ρ)}

καί τόν προτασιακό τύπο

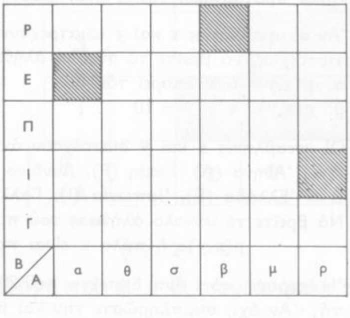
$p(x,y)$: *ἡ πόλη x εἶναι πρωτεύουσα τοῦ κράτους y*

μέ σύνολο ἀναφορᾶς τό $A \times B$.

Τά ζεύγη (α,Ε), (β,Ρ), (ρ,Ι) ἀποτελοῦν τά στοιχεῖα τοῦ συνόλου ἀλήθειας τοῦ p(x,y). Βλέπουμε λοιπόν ὅτι μέ τόν τύπο αὐτό τά στοιχεῖα α,β,ρ τοῦ συνόλου Α συνδέονται, ἀντίστοιχα, μέ τά στοιχεῖα Ε,Ρ,Ι τοῦ συνόλου Β. Στά σχ. 3 καί 4 δίνονται τό βελοειδές διάγραμμα καί ὁ πίνακας τοῦ συνόλου ἀλήθειας τοῦ προτασιακοῦ τύπου p(x,y).



(σχ. 3)

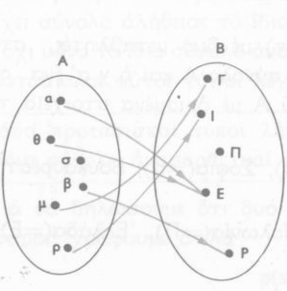


(σχ. 4)

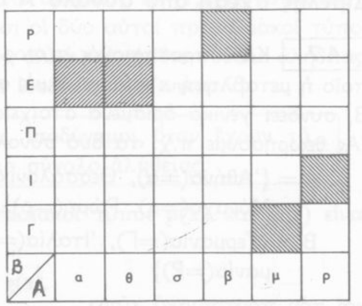
Ἄς θεωρήσουμε τώρα ἕναν ἄλλο προτασιακό τύπο μέ τό ἴδιο σύνολο ἀναφορᾶς $A \times B$, π.χ. τόν

g(x,y) : *ἡ πόλη x ἀνήκει στό κράτος y.*

Αὐτός συνδέει τώρα ἄλλα στοιχεῖα τοῦ Α μέ ἄλλα στοιχεῖα τοῦ Β



(σχ. 5)



(σχ. 6)

καί συγκεκριμένα συνδέει τά α,θ,β,μ,ρ τοῦ Α μέ τά Ε,Ε,Ρ,Γ,Ι ἀντιστοίχως τοῦ Β. Σχηματίζονται ἔτσι τά διατεταγμένα ζεύγη

(α,Ε), (θ,Ε), (β,Ρ), (μ,Γ), (ρ,Ι)

τά ὁποῖα ἀποτελοῦν τό σύνολο ἀλήθειας τοῦ $g(x,y)$. Στά σχ. 5 καί 6 δίνονται τό βελοειδές διάγραμμα καί ὁ πίνακας τοῦ συνόλου ἀλήθειας τοῦ τύπου $g(x,y)$.

Γενικά λοιπόν κάθε προτασιακός τύπος $p(x,y)$ μέ σύνολο ἀναφορᾶς $A \times B$ συνδέει ὁρισμένα στοιχεῖα τοῦ συνόλου Α μέ ὁρισμένα στοιχεῖα τοῦ συνόλου Β καί λέμε ὅτι ὁρίζει μιά **διμελή σχέση ἀπό τό Α στό Β**. Ἔτσι ὁ ὅρος «σχέση» εἶναι μιά γενική ἔννοια, πού δηλώνει τρόπο συνδέσεως ὁρισμένων στοιχείων τοῦ Α μέ ὁρισμένα στοιχεῖα τοῦ Β. Λέγοντας λοιπόν ὅτι *τά στοιχεῖα* $\alpha \in A$ *καί* $\beta \in B$ *ἱκανοποιοῦν τή «σχέση»*, ἐννοοῦμε ὅτι ἡ πρόταση $p(\alpha,\beta)$ εἶναι ἀληθής, δηλαδή ὅτι τό ζεῦγος (α,β) ἀνήκει στό σύνολο ἀλήθειας G.

Τό σύνολο ἀλήθειας G τοῦ προτασιακοῦ τύπου λέγεται πιό ἁπλά **γράφημα** τῆς διμελοῦς σχέσεως.

Διμελής σχέση σέ ἕνα σύνολο Α.

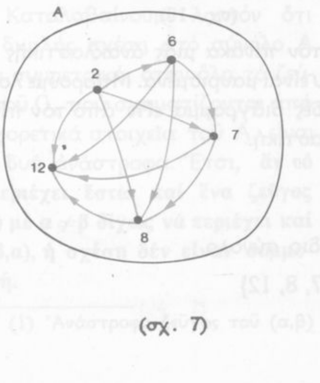
4.8. Σ' ἕναν προτασιακό τύπο $p(x,y)$ μπορεῖ οἱ δυό μεταβλητές του x καί y νά παίρνουν τιμές ἀπό τό ἴδιο σύνολο Α, ὁπότε ὁ τύπος θά ἔχει σύνολο ἀναφορᾶς τό $A \times A$. Ἕνας τέτοιος προτασιακός τύπος εἶναι π.χ. ὁ

$p(x,y)$: *ὁ x εἶναι μικρότερος ἀπό τόν y,*

ὅταν τά x καί y παίρνουν τιμές ἀπό τό σύνολο $A = \{2,6,7,8,12\}$. Ἡ διμελής σχέση, πού ὁρίζεται ἀπό ἕναν τέτοιο προτασιακό τύπο, λέγεται **διμελής σχέση στό σύνολο Α** καί ἔχει γράφημα τό

$$G = \{(2,6), (2,7), (2,8), (2,12), (6,7), (6,8), (6,12), (7,8), (7,12), (8,12)\}.$$

Τό σχ. 7 παριστάνει τό βελοειδές διάγραμμα τῆς σχέσεως αὐτῆς, ἐνῶ τό σχ. 8 εἶναι ὁ πίνακάς της.



(σχ. 7)

(σχ. 8)

Παρατηροῦμε ὅτι ὁ πίνακας τῆς σχέσεως αὐτῆς εἶναι τώρα «τετραγωνικός», δηλ. ἔχει τόσες ὁριζόντιες λωρίδες ὅσες καί κατακόρυφες.

Ἀνακλαστική σχέση.

4.9. Ἄς θεωρήσουμε πάλι τό σύνολο

$$A = \{2,6,7,8,12\}$$

καί τή διμελή σχέση στό A, πού ὁρίζεται μέ τόν προτασιακό τύπο

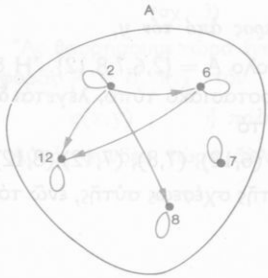
$$p(x,y) \ : \quad \textit{ὁ } x \textit{ διαιρεῖ τόν } y$$

καί ἔχει γράφημα τό σύνολο

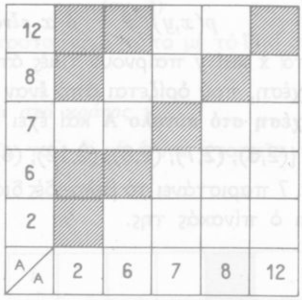
$$G = \{\mathbf{(2,2)}, (2,6), (2,8), (2,12), \mathbf{(6,6)}, (6,12), \mathbf{(7,7)}, \mathbf{(8,8)}, \mathbf{(12,12)}\}.$$

Παρατηροῦμε ὅτι τό σύνολο G **περιέχει ὅλα τά ζεύγη μέ ἴδια στοιχεῖα, πού μποροῦμε νά πάρουμε ἀπό τό σύνολο A.** Μιά τέτοια σχέση λέγεται **ἀνακλαστική**.

Στό βελοειδές διάγραμμα μιᾶς ἀνακλαστικῆς σχέσεως κάθε στοιχεῖο



(σχ. 9)



(σχ. 10)

τοῦ A εἶναι ἀρχή μιᾶς θηλιᾶς, ἐνῶ στόν πίνακα μιᾶς ἀνακλαστικῆς σχέσεως ὅλα τά τετράγωνα τῆς διαγωνίου εἶναι μαυρισμένα. Μποροῦμε λοιπόν εὔκολα νά διακρίνουμε ἀπό τό βελοειδές διάγραμμα εἴτε ἀπό τόν πίνακα μιᾶς σχέσεως ἄν ἡ σχέση εἶναι ἀνακλαστική.

Συμμετρική σχέση.

4.10. Ἄς θεωρήσουμε τώρα τό ἴδιο σύνολο

$$A = \{2, 6, 7, 8, 12\}$$

καί τή διμελή σχέση στό Α, πού ὁρίζεται ἀπό τόν προτασιακό τύπο

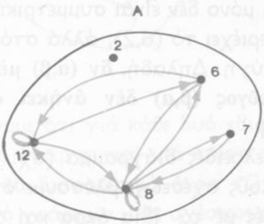
p(x,y) : *Οἱ x καί y ἔχουν ἄθροισμα μεγαλύτερο ἀπό 14* $(x+y>14)$

καί ἔχει γράφημα τό σύνολο

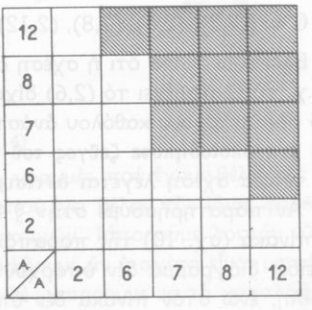
$$G=\{(6,12),(12,6),(7,8),(8,7),(8,8),(7,12),(12,7),(8,12),(12,8),(12,12)\}.$$

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι, **ἄν ἕνα ὁποιοδήποτε ζεῦγος (α,β) ἀνήκει στό G, τότε καί τό «ἀνάστροφο»** (1) **ζεῦγος ἀνήκει ἐπίσης στό G.** Μιά τέτοια διμελής σχέση λέγεται **συμμετρική.**

Στό βελοειδές διάγραμμα μιᾶς συμμετρικῆς σχέσεως, ἄν δυό στοιχεῖα



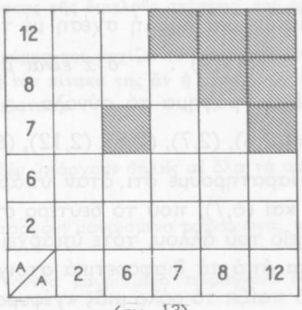
(σχ. 11)



(σχ. 12)

τοῦ Α συνδέονται μέ μιά γραμμή, θά συνδέονται καί μέ μιά δεύτερη γραμμή, πού ἔχει ἀντίθετο βέλος. Ἐπίσης στόν πίνακα μιᾶς συμμετρικῆς σχέσεως ὅλα τά μαυρισμένα τετράγωνα (πού δέ βρίσκονται στή διαγώνιό του) χωρίζονται σέ ζεύγη πού εἶναι συμμετρικά ὡς πρός τή διαγώνιο.

Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι μιά διμελής σχέση στό σύνολο Α εἶναι συμμετρική, ὅταν ὅλα τά ζεύγη τοῦ G, πού σχηματίζονται ἀπό διαφορετικά στοιχεῖα τοῦ Α, εἶναι ἀνά δυό ἀνάστροφα. Ἔτσι, **ἄν τό G περιέχει ἔστω καί ἕνα ζεῦγος (α,β) μέ α ≠ β δίχως νά περιέχει καί τό (β,α), ἡ σχέση δέν εἶναι συμμετρική.**



(σχ. 13)

(1) Ἀνάστροφο ζεῦγος τοῦ (α,β) λέμε τό ζεῦγος (β,α)

Στό σχ. 13 βλέπουμε τόν πίνακα μιᾶς διμελοῦς σχέσεως στό σύνολο Α, ἡ ὁποία δέν εἶναι συμμετρική, γιατί τό σύνολο G περιέχει τό ζεῦγος (6,7) δίχως νά περιέχει τό (7,6). Βέβαια αὐτή ἡ ὄχι συμμετρική σχέση περιέχει καί ἀνάστροφα ζεύγη, ὅπως π.χ. τά (7,12) καί (12,7).

˙Αντισυμμετρική σχέση

4.11. Ἄς θεωρήσουμε πάλι στό ἴδιο σύνολο

$$A = \{2, 6, 7, 8, 12\}$$

μιά διμελή σχέση, πού ὁρίζεται ἀπό τόν προτασιακό τύπο

$$p(x,y): \quad \textit{ὁ } x \textit{ διαιρεῖ τόν } y,$$

καί ἔχει γράφημα τό σύνολο

$$G = \{(2,2), (2,6), (2,8), (2,12), (6,6), (6,12), (7,7), (8,8), (12,12)\}.$$

Βλέπουμε τώρα ὅτι ἡ σχέση αὐτή ὄχι μόνο δέν εἶναι συμμετρική, γιατί π.χ. τό G περιέχει τό (2,6) δίχως νά περιέχει τό (6,2), ἀλλά στό σύνολο G δέν ὑπάρχουν καθόλου ἀνάστροφα ζεύγη. Δηλαδή, **ἄν (α,β) μέ $\alpha \neq \beta$ εἶναι ἕνα ὁποιοδήποτε ζεῦγος τοῦ G, τό ζεῦγος (β,α) δέν ἀνήκει στό G.** Μιά τέτοια σχέση λέγεται **ἀντισυμμετρική.**

Ἄν παρατηρήσουμε στήν § 4.9 τό βελοειδές διάγραμμα (σχ. 9) καί τόν πίνακα (σχ. 10) τῆς παραπάνω διμελοῦς σχέσεως, βλέπουμε ὅτι στό βελοειδές διάγραμμα δέν ὑπάρχουν γραμμές μέ τά ἴδια ἄκρα καί ἀντίθετα βέλη, ἐνῶ στόν πίνακα δέν ὑπάρχουν μαυρισμένα τετράγωνα συμμετρικά ὡς πρός τή διαγώνιο.

Σχέση μεταβατική.

4..12 Στό ἴδιο σύνολο

$$A = \{2,6,7,8,12\}$$

παίρνουμε μιά διμελή σχέση μέ τόν προτασιακό τύπο

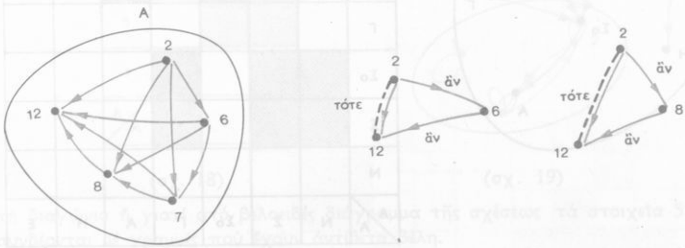
$$p(x,y): \quad \textit{ὁ } x \textit{ εἶναι μικρότερος ἀπό τόν } y \qquad (x<y),$$

πού ἔχει γράφημα τό σύνολο

$$G = \{(2,6), (2,7), (2,8), (2,12), (6,7), (6,8), (6,12), (7,8), (7,12), (8,12)\}.$$

Παρατηροῦμε ὅτι, ὅταν ὑπάρχουν στό G δυό ζεύγη, ὅπως π.χ. τά (2,6) καί (6,7), πού τό δεύτερο στοιχεῖο τοῦ ἑνός εἶναι ἴδιο μέ τό πρῶτο στοιχεῖο τοῦ ἄλλου, τότε ὑπάρχει στό G καί τό ζεῦγος (2,7), πού σχηματίζεται ἀπό τά διαφορετικά στοιχεῖα τῶν δύο ζευγῶν. Δηλαδή τό στοιχεῖο 6 παίζει τό ρόλο μιᾶς «γέφυρας», γιά νά «μεταβοῦμε» ἀπό τά δυό ζεύγη (2,6) καί (6,7) στό ζεῦγος (2,7). Τό ἴδιο συμβαίνει καί μέ ὅλα τά ἄλλα ἀνάλογα ζεύγη. Ἔτσι π.χ. στό G ἀνήκουν ὄχι μόνο τά ζεύγη (2,8) καί (8,12), ἀλλά καί τό (2,12). Γενικά λοιπόν ἡ διμελής αὐτή σχέση εἶναι τέτοια ὥστε, **ὅταν τό G περιέχει δυό ζεύγη τῆς μορφῆς (α,β) καί (β,γ), περιέχει ὁπωσδήποτε καί τό (α, γ).** Μιά τέτοια σχέση λέγεται **μεταβατική.**

Ἄν προσέξουμε τό βελοειδές διάγραμμα μιᾶς μεταβατικῆς σχέσεως,



(σχ. 14)

βλέπουμε ὅτι γιά κάθε δυό «διαδοχικές» γραμμές, πού ἔχουν βέλη τῆς ἴδιας φορᾶς, ὑπάρχει καί μιά τρίτη γραμμή, πού ἔχει βέλος τῆς ἴδιας φορᾶς καί ἄκρα τά διαφορετικά ἄκρα τῶν δυό γραμμῶν. Μποροῦμε λοιπόν εὔκολα ἀπό τό γράφημα μιᾶς σχέσεως νά καταλάβουμε ἄν ἡ σχέση εἶναι μεταβατική, ἐνῶ ἀπό τόν πίνακα τῆς σχέσεως δέ μποροῦμε νά τό καταλάβουμε.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Τό παρακάτω σύνολο Α ἔχει στοιχεῖα τά μέλη μιᾶς συντροφιᾶς**

Α = {Νίκος (Ν), Σταῦρος (Σ), Σοφία(Σο), Γιῶργος(Γ), Ἄννα(Α), Ἡρώ (Η), Ἑλένη(Ε)}.

Νά βρεθεῖ τό βελοειδές διάγραμμα καί ὁ πίνακας τῆς διμελοῦς σχέσεως, πού ὁρίζεται ἀπό τόν προτασιακό τύπο

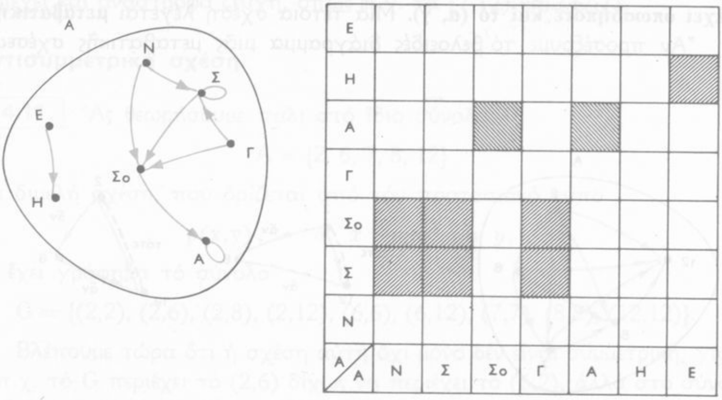
p(x,y): Τό ὄνομα τοῦ (τῆς) x τελειώνει στό γράμμα πού ἀρχίζει τό ὄνομα τοῦ (τῆς) y.

Νά ἐξετασθεῖ ἀπό τό βελοειδές διάγραμμα ἤ τόν πίνακά της ἄν ἡ σχέση εἶναι ἀνακλαστική, συμμετρική, ἀντισυμμετρική, μεταβατική.

Λύση.

- Ἡ σχέση δέν εἶναι ἀνακλαστική, γιατί δέν ὑπάρχουν θηλιές σέ ὅλα τά στοιχεῖα τοῦ Α.
- Ἡ σχέση δέν εἶναι συμμετρική, γιατί ὑπάρχουν μαυρισμένα τετράγωνα, πού δέν εἶναι συμμετρικά ὡς πρός τή διαγώνιο.
- Ἡ σχέση εἶναι ἀντισυμμετρική, γιατί κανένα μαυρισμένο τετράγωνο δέν ἔχει συμμετρικό ὡς πρός τή διαγώνιο.
- Ἡ σχέση δέν εἶναι μεταβατική, γιατί ὑπάρχουν τά ζεύγη (Γ, $Σ_0$), ($Σ_0$, Α) καί δέν

ὑπάρχει τό ζεῦγος (Γ,Α). Αὐτό φαίνεται καί στό διάγραμμα τῆς σχέσεως στό ὁποῖο ὑπάρχουν οἱ «διαδοχικές» γραμμές $ΓΣ_0$, $Σ_0Α$ καί δέν ὑπάρχει ἡ ΓΑ.



(σχ. 15)

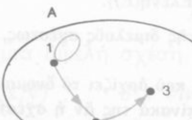
2. Τό παρακάτω βελοειδές διάγραμμα παριστάνει διμελή σχέση σέ σύνολο Α. Νά γραφοῦν τό σύνολο Α, τό γράφημα G καί νά συμπληρωθεῖ ὁ πίνακας τῆς σχέσεως. Ἡ σχέση εἶναι μεταβατική; Εἶναι ἀντισυμμετρική;

Λύση. Σύνολο Α εἶναι τό

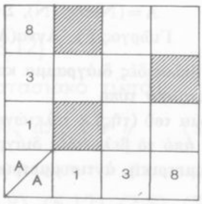
$$A = \{1, 3, 8\},$$

ἐνῶ τό γράφημα τῆς σχέσεως εἶναι $G = \{(1,1),\ (1,8),\ (8,3)\}$.

Πίνακας τῆς σχέσεως εἶναι τό σχ. 17. Ἡ σχέση δέν εἶναι μεταβατική, γιατί ὑπάρ-



(σχ. 16)



(σχ. 17)

χουν τά ζεύγη (1,8), (8,3) καί δέν ὑπάρχει τό (1,3).

Ἡ σχέση εἶναι ἀντισυμμετρική, γιατί δέν ὑπάρχουν μαυρισμένα τετράγωνα συμμετρικά ὡς πρός τή διαγώνιο ἤ γιατί δέν ἀνήκουν στό G «ἀνάστροφα» ζεύγη.

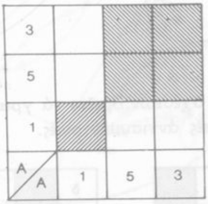
3. Ὁ παρακάτω πίνακας παριστάνει μιά διμελή σχέση σέ σύνολο Α. Νά γραφοῦν τό σύνολο Α, τό σύνολο G καί νά γίνει τό βελοειδές διάγραμμα τῆς σχέσεως. Ἡ σχέση αὐτή εἶναι ἀνακλαστική; Εἶναι συμμετρική;

Λύση. Σύνολο Α εἶναι τό

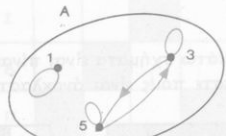
$$A = \{1,5,3\},$$

ἐνῶ τό γράφημα τῆς σχέσεως εἶναι $G = \{(1,1), (5,5), (5,3), (3,5), (3,3)\}$ καί παριστάνεται ἀπό τό σχ. 19.

Ἡ σχέση εἶναι ἀνακλαστική, γιατί ὑπάρχουν θηλιές σέ ὅλα τά στοιχεῖα τοῦ Α. Εἶναι ἐπίσης συμμετρική, γιατί τά μαυρισμένα τετράγωνα εἶναι συμμετρικά ὡς πρός



(σχ. 18)



(σχ. 19)

τή διαγώνιο ἤ γιατί στό βελοειδές διάγραμμα τῆς σχέσεως τά στοιχεῖα 5 καί 3 συνδέονται μέ γραμμές πού ἔχουν ἀντίθετα βέλη.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

9. Δίνονται τά σύνολα
   Α = {Καβάλλα (Κ), Ἄρτα (Α), Δράμα (Δ), Χανιά (Χ), Πάτρα (Π), Ξάνθη (Ξ)}
   Β = {Θράκη (Θ), Κρήτη (Κρ.), Ἤπειρος (Η), Μακεδονία (Μ)}.
   Ὁ προτασιακός τύπος $p(x,y)$: «ἡ πόλη x βρίσκεται στήν περιοχή ψ» ὁρίζει μιά διμελή σχέση ἀπό τό Α στό Β. Νά βρεθεῖ τό γράφημα G τῆς σχέσεως αὐτῆς καί νά γίνει ὁ πίνακάς της.

10. Δίνονται τά σύνολα
    Α = {Ἔντισον, Μαρκόνι, Μπέλ, Στέφενσον},
    Β = {Ἀσύρματος, τηλέφωνο, φωνογράφος}.
    Ὁ προτασιακός τύπος $p(x,y)$: «ὁ x ἐφεῦρε τό y» ὁρίζει μιά διμελή σχέση ἀπό τό Α στό Β. Νά γίνει τό γράφημα καί ὁ πίνακάς της.

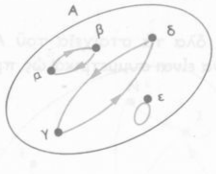
11. Δίνονται τά σύνολα
    Α = {Παλαμᾶς, Παπαδιαμάντης, Δροσίνης, Ρίτσος, Σολωμός, Καζαντζάκης, Βενέζης}
    Β = {Φόνισσα, Ἐπιτάφιος, Δωδεκάλογος τοῦ γύφτου, Ζορμπᾶς, Ἐθνικός Ὕμνος, Γαλήνη}.
    Ὁ προτασιακός τύπος $p(x,y)$: «ὁ x ἔγραψε τό ἔργο ψ» ὁρίζει μιά διμελή σχέση ἀπό τό Α στό Β. Νά βρεθεῖ τό γράφημά της.

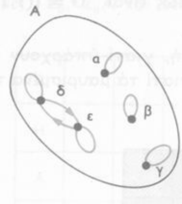
12. Στά σύνολα $A = \{2, 6, 8, 10, 12\}$, $B = \{5, 9, 10, 11, 15\}$ ὁ προτασιακός τύπος $p(x,y)$: $y = x + 3$ ὁρίζει μιά διμελή σχέση. Νά βρεῖτε τό γράφημά της καί νά τό παραστήσετε μ' ἕναν πίνακα μέ διπλή εἴσοδο.

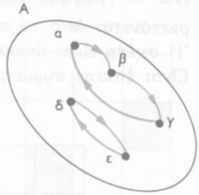
13. Στό σύνολο $A = \{\alpha,\beta\}$ ἔχουμε ὁρίσει μιά διμελή σχέση, πού τό γράφημά της εἶναι $G = \{(\alpha,\beta), (\beta,\alpha)\}$. Ἐξηγῆστε γιατί ἡ σχέση δέν εἶναι μεταβατική.

14. Τά παρακάτω σχήματα εἶναι τά βελοειδή διαγράμματα διάφορων διμελῶν σχέ-

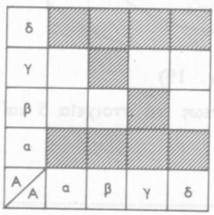
σεων. Βρεῖτε τά γραφήματά τους καί ἐξετάστε ποιές ἀπ' αὐτές εἶναι ἀνακλαστικές, συμμετρικές, ἀντισυμμετρικές, μεταβατικές.

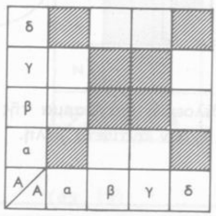


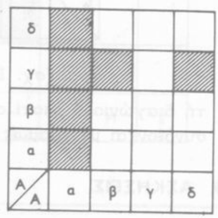




15. Τά παρακάτω σχήματα εἶναι πίνακες διμελῶν σχέσεων. Βρεῖτε τά γραφήματά τους καί ἐξετάστε ποιές εἶναι ἀνακλαστικές καί ποιές ἀντισυμμετρικές.







16. Στό σύνολο $A = \{1,2,3,4\}$ ἔχουμε ὁρίσει διάφορες διμελεῖς σχέσεις, πού ἔχουν γραφήματα:

$G_1 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (3,2), (3,4)\}$.

$G_2 = \{(1,2), (2,3), (3,4)\}$, $\quad G_3 = \{(1,4), (1,2), (1,3), (1,1), (2,1)\}$

Σχεδιάστε τό βελοειδές διάγραμμα ἤ τόν πίνακά τους καί βρεῖτε ποιές ἀπ' αὐτές εἶναι ἀνακλαστικές, συμμετρικές, ἀντισυμμετρικές, μεταβατικές.

Σχέση ἰσοδυναμίας.

4.13. Ἄς θεωρήσουμε ἕνα σύνολο μαθητῶν, π.χ. τό

Ε = {Πέτρος (Π), Ἀπόστολος (Α), Σωτήρης (Σ), Πάνος (Πα), Σπύρος (Σπ), Σταῦρος (Στ)}

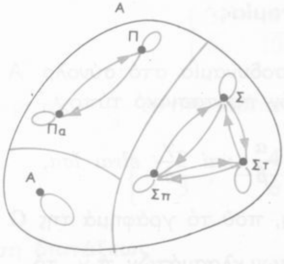
καί τή διμελή σχέση, πού ὁρίζεται ἀπό τόν προτασιακό τύπο

$p\ (x,y)$: ὁ x *ἔχει τό ἴδιο ἀρχικό γράμμα μέ τόν* y.

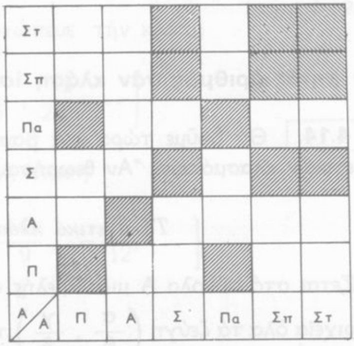
Ἡ σχέση αὐτή ἔχει γράφημα τό

G = {(Π,Π), (Πα,Πα), (Α,Α), (Σ,Σ), (Σ,Σπ), (Σ, Στ), (Πα,Π), (Π,Πα), (Σπ,Σ), (Στ,Σ), (Σπ,Σπ), (Σπ,Στ), (Στ, Σπ), (Στ, Στ)}.

Τό βελοειδές διάγραμμα καί ὁ πίνακάς της δίνονται στά παρακάτω σχήματα.



(σχ. 20)



(σχ. 21)

Παρατηροῦμε ἀπό τό βελοειδές διάγραμμά της ὅτι ἡ σχέση αὐτή εἶναι

- **ἀνακλαστική,** γιατί περιέχει ὅλα τά ζεύγη μέ ἴδια στοιχεῖα,
- **συμμετρική,** γιατί ὅταν περιέχει ἕνα ζεῦγος (α,β) περιέχει καί τό ἀνάστροφό του (β,α),
- **μεταβατική,** γιατί ὅταν περιέχει δυό ζεύγη τῆς μορφῆς (α,β) καί (β,γ) περιέχει καί τό (α,γ).

Μιά τέτοια σχέση λέγεται **σχέση ἰσοδυναμίας** ἤ **ἰσοδυναμία** καί τότε ἀντί νά λέμε ὅτι τά στοιχεῖα x καί y τοῦ Ε «ἱκανοποιοῦν» τή σχέση λέμε ἁπλά ὅτι **«τά x καί y εἶναι ἰσοδύναμα»** καί γράφουμε

$$x \sim y \quad \text{εἴτε} \quad x \equiv y$$

Γενικά λοιπόν:

> Μιά διμελής σχέση στό σύνολο Α εἶναι «ἰσοδυναμία» ὅταν εἶναι ἀνακλαστική, συμμετρική καί μεταβατική.

Παρατηροῦμε ὅτι ὑπάρχουν ὑποσύνολα τοῦ Ε πού τά στοιχεῖα τους εἶναι *«ἰσοδύναμα»*. **Κάθε ὑποσύνολο τοῦ Ε πού ἀποτελεῖται ἀπό στοιχεῖα ἰσοδύναμα μεταξύ τους λέγεται κλάση ἰσοδυναμίας.** Ἔτσι π.χ. στή παραπάνω ἰσοδυναμία ἔχουμε τίς κλάσεις ἰσοδυναμίας

{Σ, Σπ, Στ}, {Π,Πα}, {Α}.

Παρατηροῦμε ὅτι οἱ κλάσεις ἰσοδυναμίας εἶναι σύνολα ξένα μεταξύ τους, πού ἔχουν ἕνωση τό σύνολο Ε. Ἄν πάρουμε ἕνα ὁποιοδήποτε στοιχεῖο τοῦ συνόλου Ε, αὐτό θά ἀνήκει σέ μιά μόνο κλάση ἰσοδυναμίας καί μάλιστα θά προσδιορίζει έντελώς τήν κλάση αὐτή, ἀφοῦ ὅλα τά στοιχεῖα της θά εἶναι ἰσοδύναμά του. Ἔτσι λοιπόν μιά ὁποιαδήποτε κλάση καθορίζεται πλήρως, ἤ ὅπως λέμε «ἀντιπροσωπεύεται», μόνο ἀπό ἕνα στοιχεῖο της.

Ὁ ρητός ἀριθμός σάν κλάση ἰσοδυναμίας

4.14. Θά δοῦμε τώρα μιά βασική ἰσοδυναμία στό σύνολο A τῶν σχετικῶν κλασμάτων. Ἄν θεωρήσουμε τόν προτασιακό τύπο

$$\textit{Τά σχετικά κλάσματα } \frac{\alpha}{\beta} \textit{ καί } \frac{\gamma}{\delta} \textit{ εἶναι ἴσα,}$$

ὁρίζεται στό σύνολο A μιά διμελής σχέση, πού τό γράφημά της G ἔχει στοιχεῖα ὅλα τά ζεύγη $\left(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\delta}\right)$ τῶν ἴσων κλασμάτων, π.χ. τό $\left(\frac{3}{4}, \frac{6}{8}\right)$. Παρατηροῦμε ὅτι ἡ σχέση αὐτή εἶναι

- **ἀνακλαστική,** γιατί τό G περιέχει κάθε ζεῦγος τῆς μορφῆς $\left(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$,
- **συμμετρική,** γιατί ἄν τό G περιέχει ἕνα ζεῦγος $\left(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\delta}\right)$, θά περιέχει καί τό $\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$, ἀφοῦ ἀπό τήν ἰσότητα $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ προκύπτει καί ἡ $\frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta}$,
- **μεταβατική,** γιατί, ἄν τό G περιέχει τά ζεύγη $\left(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\delta}\right)$ καί $\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\varepsilon}{\zeta}\right)$, θά περιέχει καί τό ζεῦγος $\left(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\varepsilon}{\zeta}\right)$, ἀφοῦ ἀπό τίς

ἰσότητες $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, $\frac{\gamma}{\delta} = \frac{\varepsilon}{\zeta}$ προκύπτει ἡ $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\varepsilon}{\zeta}$.

Ἑπομένως εἶναι μιά ἰσοδυναμία. Ὅλα τά σχετικά κλάσματα, πού εἶναι ἴσα μέ ἕνα ἀνάγωγο κλάσμα, ἀποτελοῦν μιά κλάση ἰσοδυναμίας. **Κάθε τέτοια κλάση ἰσοδυναμίας, πού ὁρίζεται ἀπό τόν παραπάνω προτασιακό τύπο, δηλαδή ἀπό τήν ἰσότητα τῶν σχετικῶν κλασμάτων, λέγεται «ρητός ἀριθμός».** Ἡ κλάση αὐτή ἰσοδυναμίας *«ἀντιπροσωπεύεται»* συνήθως μέ τό ἀνάγωγο κλάσμα της. Καταλαβαίνουμε λοιπόν, ὅτι, ὅταν στό κεφάλαιο 1 καλέσαμε «ρητό ἀριθμό» κάθε ἀνάγωγο κλάσμα, θεωρήσαμε ὅτι τό ἀνάγωγο κλάσμα *«ἀντιπροσώπευε»* τήν κλάση ἰσοδυναμίας του.

Ἔτσι π.χ. ὁ ρητός $\frac{3}{5}$ ἀντιπροσώπευε τήν κλάση

$$\left\{\frac{3}{5}, \frac{6}{10}, \frac{9}{15}, \frac{12}{20}, \ldots\right\}.$$

ἐνῶ ὁ ρητός $-\frac{2}{3}$ ἀντιπροσώπευε τήν κλάση

$$\left\{-\frac{2}{3}, -\frac{4}{6}, -\frac{6}{9}, -\frac{8}{12}, \ldots\right\}$$

Σχέση διατάξεως

4.15. Ἄς θεωρήσουμε τό σύνολο

$$A = \{3, 6, 12, 15, 17\}$$

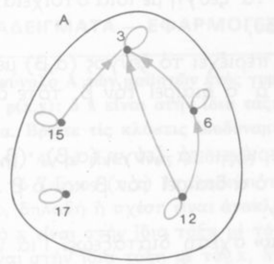
καί τή διμελή σχέση πού ὁρίζεται ἀπό τόν προτασιακό τύπο

$$p(x,y) : \quad \textit{ὁ x εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ y.}$$

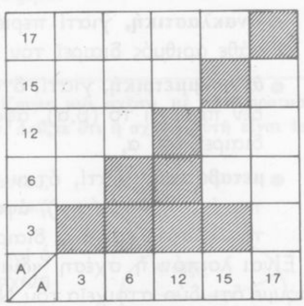
Γράφημα τῆς σχέσεως αὐτῆς εἶναι τό

$$G = \{(3,3), (6,3), (12,3), (15,3), (6,6), (12,6), (12,12), (15,15), (17,17)\}$$

Τό βελοειδές διάγραμμα καί ὁ πίνακάς της δίνονται στά παρακάτω σχήματα.



(σχ. 22)



(σχ. 23)

Παρατηροῦμε ὅτι ἡ σχέση αὐτή εἶναι

● **ἀνακλαστική,** γιατί περιέχει ὅλα τά ζεύγη μέ ἴδια στοιχεῖα,

● **ἀντισυμμετρική**, γιατί δέν ὑπάρχουν στό G ἀνάστροφα ζεύγη (α,β) καί (β,α) μέ $\alpha \neq \beta$,

● **μεταβατική**, γιατί, ὅταν περιέχει δυό ζεύγη τῆς μορφῆς (α,β) καί (β,γ), περιέχει καί τό (α,γ).

Ὅλα αὐτά διαπιστώνονται εὔκολα ἀπό τό βελοειδές διάγραμμα εἴτε ἀπό τόν πίνακα τῆς σχέσεως. Μιά τέτοια σχέση λέγεται **σχέση διατάξεως.**

Γενικά λοιπόν:

Μιά διμελής σχέση στό σύνολο Α εἶναι «σχέση διατάξεως», ὅταν εἶναι ἀνακλαστική, ἀντισυμμετρική καί μεταβατική.

Τό σύνολο Α μέσα στό ὁποῖο ὁρίσαμε μιά σχέση διατάξεως λέγεται **διατεταγμένο σύνολο.** Ἄν στό βελοειδές διάγραμμα τῆς σχέσεως ὑπάρχουν γραμμές πού ἑνώνουν ἀνά δυό ὅλα τά στοιχεῖα τοῦ συνόλου Α, τότε ἡ σχέση εἶναι **ὁλικῆς διατάξεως.** Ἄν ὑπάρχει τουλάχιστο ἕνα ζεῦγος στοιχείων τοῦ Α, πού δέ συνδέονται μέ γραμμές, ἡ σχέση εἶναι **μερικῆς διατάξεως.** Στό παράδειγμα πού ἀναφέραμε ἔχουμε **μερική διάταξη.**

Ἡ διαιρετότητα σάν διάταξη

4.16. Στό σύνολο

$$N^* = \{1, 2, 3 \ldots\}$$

ὁ προτασιακός τύπος

$$p(x,y) : \quad \text{ὁ } x \text{ διαιρεῖ τόν } y,$$

ὁρίζει μιά διμελή σχέση. Ἄς ὀνομάσουμε G τό γράφημά της.

Παρατηροῦμε ὅτι ἡ σχέση αὐτή εἶναι

● **ἀνακλαστική,** γιατί περιέχει ὅλα τά ζεύγη μέ ἴδια στοιχεῖα, ἀφοῦ κάθε ἀριθμός διαιρεῖ τόν ἑαυτό του,

● **ἀντισυμμετρική,** γιατί, ὅταν τό G περιέχει τό ζεῦγος (α,β) μέ $\alpha \neq \beta$ δέν περιέχει τό (β,α), ἀφοῦ ὅταν ὁ α διαιρεῖ τόν β, τότε ὁ β δέν διαιρεῖ τόν α,

● **μεταβατική,** γιατί, ὅταν τό G περιέχει τά ζεύγη (α,β), (β,γ), θά περιέχει καί τό (α,γ), ἀφοῦ, ὅταν ὁ α διαιρεῖ τόν β καί ὁ β διαιρεῖ τόν γ τότε καί ὁ α διαιρεῖ τόν γ.

Εἶναι λοιπόν ἡ σχέση **«διαιρετότητα»** σχέση διατάξεως. Γιά νά δηλώσουμε ὅτι δύο στοιχεῖα τοῦ N* ἱκανοποιοῦν τή παραπάνω σχέση διατάξεως, ὅπως π.χ. τό 2 καί 8, γράφουμε

$$\mathbf{2 \mid 8}$$

καί διαβάζουμε: *ὁ 2 διαιρεῖ τόν 8.*

Ἔτσι οἱ συμβολισμοί $2|8$ καί $(2,8) \in G$ δηλώνουν τό ἴδιο πράγμα.

Ἡ φυσική διάταξη στό Q

4.17. Στό σύνολο Q τῶν ρητῶν ἀριθμῶν μέ τόν προτασιακό τύπο

$p(x,y)$: *ὁ x εἶναι μικρότερος ἤ ἴσος τοῦ y* $(x \leq y)$

ὁρίζεται μιά διμελής σχέση. Τό γράφημά της G περιέχει ὅλα τά ζεύγη τῶν ρητῶν ἀριθμῶν, τῶν ὁποίων τό πρῶτο στοιχεῖο εἶναι ἴσο ἤ μικρότερο ἀπό τό δεύτερο.

Ἔτσι ὁ γνωστός μας συμβολισμός $\alpha \leq \beta$ σημαίνει $(\alpha,\beta) \in G$. Παρατηροῦμε ὅτι ἡ σχέση αὐτή εἶναι:

- **ἀνακλαστική**, γιατί τό G περιέχει ὅλα τά ζεύγη τῆς μορφῆς (α,α)
- **ἀντισυμμετρική**, γιατί ἄν τό G περιέχει τό ζεῦγος (α,β) μέ $\alpha \neq \beta$ δέν θά περιέχει τό (β,α), ἀφοῦ, ἄν εἶναι $\alpha < \beta$ δέ μπορεῖ νά εἶναι καί $\beta < \alpha$,
- **μεταβατική**, γιατί, ἄν τό G περιέχει τά ζεύγη (α,β) καί (β,γ) τότε θά περιέχει καί τό (α,γ), ἀφοῦ ἀπό τίς $\alpha \leq \beta$ καί $\beta \leq \gamma$ προκύπτει ἡ $\alpha \leq \gamma$.

Ἔτσι λοιπόν ἡ παραπάνω διμελής σχέση στό Q εἶναι σχέση διατάξεως, πού λέγεται εἰδικότερα **φυσική διάταξη στό Q**.

Παρατηροῦμε, ἀκόμα, ὅτι, ἄν πάρουμε δυό ὁποιουσδήποτε ρητούς ἀριθμούς α καί β, θά εἶναι πάντοτε

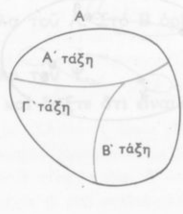
$$\alpha = \beta \quad \text{ἤ} \quad \alpha < \beta \quad \text{ἤ} \quad \alpha > \beta .$$

Ἑπομένως ἕνα ἀπό τά ζεύγη (α,β) ἤ (β,α) θά ἀνήκει πάντοτε στό G καί συνεπῶς ἡ σχέση αὐτή εἶναι ὁλική διάταξη.

■ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Στό σύνολο Α τῶν μαθητῶν ἑνός γυμνασίου ὁρίζουμε μιά σχέση μέ τόν προτασιακό τύπο p(x,y): ὁ x εἶναι στήν ἴδια τάξη μέ τόν y. Δεῖξτε ὅτι ἡ σχέση αὐτή εἶναι ἰσοδυναμία. Βρεῖτε τίς κλάσεις ἰσοδυναμίας.**

Λύση. Ἄν x εἶναι ἕνας μαθητής τοῦ γυμνασίου, τότε τό ζεῦγος (x,x) ἐπαληθεύει τόν προτασιακό τύπο, δηλαδή ἡ σχέση εἶναι **ἀνακλαστική**.
Ἄν ὁ x εἶναι στήν ἴδια τάξη μέ τόν y, τότε καί ὁ y εἶναι στήν ἴδια τάξη μέ τόν x, δηλαδή ἡ σχέση εἶναι **συμμετρική**.
Ἄν ὁ x εἶναι στήν ἴδια τάξη μέ τόν y καί ὁ y εἶναι στήν ἴδια τάξη μέ τόν z, τότε καί ὁ x εἶναι στήν ἴδια τάξη μέ τόν z, δηλαδή ἡ σχέση εἶναι **μεταβατική**.
Συνεπῶς ἡ σχέση εἶναι μιά ἰσοδυναμία. Ὅλοι οἱ



μαθητές μιᾶς τάξεως, σύμφωνα μέ τή σχέση αὐτή, εἶναι «ἰσοδύναμοι». Ἑπομένως κλάσεις ἰσοδυναμίας εἶναι οἱ τρεῖς τάξεις τοῦ γυμνασίου. Στό σχῆμα μας ἔχουμε μιά εἰκόνα τῶν κλάσεων ἰσοδυναμίας.

2. **Στό σύνολο Α τῶν μαθητῶν μιᾶς τάξης ὁρίζουμε μιά σχέση μέ τόν προτασιακό τύπο p(x,y): ὁ x ἔχει τόν ἴδιο βαθμό μέ τόν y. Δεῖξτε ὅτι ἡ σχέση αὐτή εἶναι ἰσοδυναμία.**

Λύση. Ἄν x εἶναι ἕνας μαθητής τῆς τάξης, τότε τό ζεῦγος (x,x) ἐπαληθεύει τόν προτασιακό τύπο, δηλαδή ἡ σχέση εἶναι **ἀνακλαστική.** Ἄν ὁ x ἔχει τόν ἴδιο βαθμό μέ τόν y, τότε καί ὁ y ἔχει τόν ἴδιο βαθμό μέ τόν x, δηλαδή ἡ σχέση εἶναι **συμμετρική.** Ὅμοια διαπιστώνεται ὅτι εἶναι καί **μεταβατική,** ἑπομένως εἶναι μιά ἰσοδυναμία.

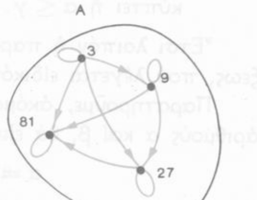
Παρατήρηση

Βλέπουμε δηλαδή ὅτι ἡ ἰσοδυναμία στά Μαθηματικά εἶναι αὐτό πού ἐννοοῦμε στή καθημερινή ζωή ὅταν λέμε ὅτι δυό πράγματα εἶναι ἰσοδύναμα ὡς πρός κάποια ἰδιότητά τους. Ἔτσι λέμε π.χ. ὅτι οἱ μαθητές πού παίρνουν τούς ἴδιους βαθμούς εἶναι ἰσοδύναμοι, ἤ οἱ ἀθλητές πού πηδοῦν τό ἴδιο ὕψος εἶναι ἰσοδύναμοι ἤ οἱ μηχανές πού ἔχουν τήν ἴδια ἰσχύ εἶναι ἰσοδύναμες.

3. **Στό σύνολο Α={9, 27, 3, 81} ὁρίζουμε μιά σχέση μέ τόν προτασιακό τύπο p(x,y): ὁ x διαιρεῖ τόν y. Δεῖξτε ὅτι εἶναι σχέση ὁλικῆς διάταξεως καί σχεδιάστε τό γράφημά της.**

Λύση. Γράφημα τῆς σχέσεως αὐτῆς εἶναι τό

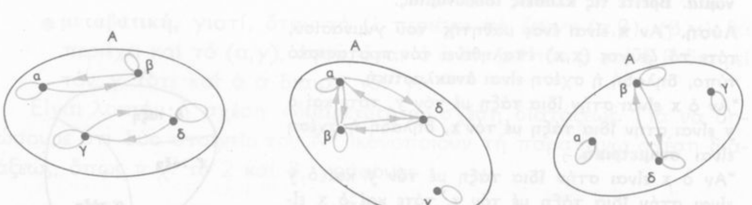
$$G = \{(9,9),\ (9,27),\ (9,81),\ (27,27),\ (27,81),\ (3,3),\ (3,9),\ (3,27),\ (3,81),\ (81,81)\}.$$



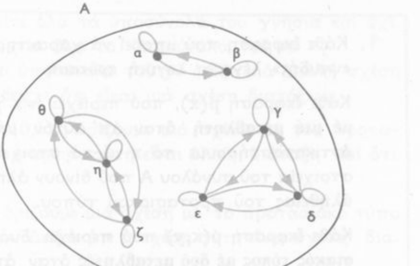
Εἰκόνα τοῦ γραφήματος εἶναι τό διπλανό σχῆμα. Εὔκολα διαπιστώνουμε ἀπό τό σχῆμα αὐτό ὅτι ἡ σχέση εἶναι **ἀνακλαστική, ἀντισυμμετρική** καί **μεταβατική,** δηλαδή εἶναι σχέση διατάξεως. Παρατηροῦμε ὅτι ὅλα τά στοιχεῖα τοῦ συνόλου Α συνδέονται μέ βέλη. Ἑπομένως εἶναι σχέση **ὁλικῆς διατάξεως.**

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

17. Στά παρακάτω σχήματα ἔχουμε τά βελοειδή διαγράμματα διάφορων σχέσεων. Βρεῖτε ποιές ἀπ' αὐτές εἶναι σχέσεις ἰσοδυναμίας καί σημειῶστε τίς κλάσεις ἰσοδυναμίας.



18. Στό σύνολο Α τῶν κατοίκων μιᾶς πολυόροφης πολυκατοικίας ὁρίζουμε μιά διμελή σχέση μέ τή συνθήκη



p(x,y): ὁ x κατοικεῖ σέ ὄροφο ὄχι ἀνώτερο ἀπό τόν ὄροφο τοῦ y.

Δεῖξτε ὅτι εἶναι σχέση διατάξεως.

19. Ἐξηγῆστε γιατί τό διπλανό σχῆμα εἶναι τό βελοειδές διάγραμμα μιᾶς σχέσεως ἰσοδυναμίας. Ποιές εἶναι οἱ κλάσεις ἰσοδυναμίας;

20. Στό σύνολο Α τῶν ἀθλητῶν μπάσκετ μιᾶς ὁμάδας ὁρίζουμε μιά σχέση μέ τόν προτασιακό τύπο p(x,y): ὁ x πέτυχε τόσα καλάθια, ὅσα καί ὁ y. Δεῖξτε ὅτι ἡ σχέση αὐτή εἶναι μιά ἰσοδυναμία.

21. Στό σύνολο

Α = { Ἀθήνα, Ρώμη, Βενετία, Δράμα, Σπάρτη, Παρίσι, Μασαλία }
ὁρίζουμε μιά σχέση μέ τόν προτασιακό τύπο

p(x,y) : ἡ πόλη x βρίσκεται στήν ἴδια χώρα μέ τή πόλη y.

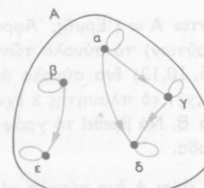
Σχεδιάστε τό βελοειδές διάγραμμα τῆς σχέσεως; δείξτε ὅτι εἶναι σχέση ἰσοδυναμίας καί βρεῖτε τίς κλάσεις ἰσοδυναμίας.

22. Στό σύνολο Α = { παίζω, τρέχω, κοιμᾶμαι, διαβάζω, αἰσθάνομαι }
ὁρίζουμε μιά σχέση μέ τό προτασιακό τύπο

p(x,y) : τό ρῆμα x ἀνήκει στήν ἴδια φωνή μέ τό ρῆμα y.

Δεῖξτε ὅτι εἶναι σχέση ἰσοδυναμίας καί βρεῖτε τίς κλάσεις ἰσοδυναμίας.

23. Στό σύνολο Α={ 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12 } ὁρίζουμε μιά σχέση μέ τόν προτασιακό τύπο p(x,y): ὁ x ὅταν διαιρεῖται μέ τόν 4 ἀφήνει τό ἴδιο ὑπόλοιπο πού ἀφήνει καί ὁ y. Σχεδιάστε τό βελοειδές διάγραμμα τῆς σχέσεως, δεῖξτε ὅτι εἶναι ἰσοδυναμία καί βρεῖτε τίς κλάσεις ἰσοδυναμίας.



24. Στό διπλανό σχῆμα ἔχουμε τό βελοειδές διάγραμμα μιᾶς σχέσεως. Εἶναι σχέση διατάξεως;

25. Δίνεται τό σύνολο Α = { 1, 2 }.

α. Βρεῖτε ὅλα τά ὑποσύνολά του γνήσια καί ὄχι.

β. Ἄς εἶναι Β τό σύνολο μέ στοιχεῖα ὅλα τά ὑποσύνολα τοῦ Α. Στό Β ὁρίζουμε μιά σχέση μέ τήν συνθήκη

p(Χ,Ψ) : Τό Χ εἶναι ὑποσύνολο τοῦ Ψ.

Σχεδιάστε τό βελοειδές διάγραμμα τῆς σχέσεως αὐτῆς καί δεῖξτε ὅτι εἶναι σχέση διατάξεως.

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 4

1. Κάθε ἔκφραση πού μπορεῖ νά χαρακτηριστεῖ μόνο σάν «ἀληθής» ἤ μόνο σάν «ψευδής» λέγεται **λογική πρόταση.**

Κάθε ἔκφραση p(x), πού περιέχει ἕνα γράμμα x, λέγεται **προτασιακός τύπος μέ μιά μεταβλητή** ὅταν ἀπ' αὐτόν μποροῦμε νά πάρουμε προτάσεις ἄν ἀντικαταστήσουμε τό x μέ τά στοιχεῖα ἑνός ὁρισμένου σύνολου Α. Τά στοιχεῖα τοῦ συνόλου Α πού δίνουν ἀληθεῖς προτάσεις ἀποτελοῦν τό **σύνολο ἀλήθειας** τοῦ προτασιακοῦ τύπου.

Κάθε ἔκφραση p(x,y) πού περιέχει δυό γράμματα x καί y λέγεται **προτασιακός τύπος μέ δυό μεταβλητές** ὅταν ἀπ' αὐτόν μποροῦμε νά πάρουμε προτάσεις ἄν ἀντικαταστήσουμε τά x καί y μέ στοιχεῖα δυό ὁρισμένων συνόλων Α καί Β. Σύνολο ἀλήθειας τοῦ p(x,y) λέγεται τό σύνολο πού ἀποτελεῖται ἀπό ὅλα τά ζεύγη (x,ψ) πού δίνουν ἀληθεῖς προτάσεις.

Δυό προτασιακοί τύποι λέγονται **ἰσοδύναμοι** ὅταν ἔχουν τό ἴδιο σύνολο ἀναφορᾶς καί τό ἴδιο σύνολο ἀλήθειας.

2. Κάθε προτασιακός τύπος p(x,y) μέ δυό μεταβλητές πού ἔχει σύνολο ἀναφορᾶς $A \times B$ ὁρίζει μιά **διμελή σχέση ἀπό τό Α στό Β**. Ὅταν ἔχει σύνολο ἀναφορᾶς τό $A \times A$ τότε ὁρίζει **μιά διμελή σχέση στό Α**.

Μιά διμελής σχέση στό σύνολο Α, μπορεῖ νά εἶναι: **ἀνακλαστική, συμμετρική, ἀντισυμμετρική, μεταβατική.**

Μιά σχέση στό Α λέγεται **ἰσοδυναμία** ὅταν εἶναι ἀνακλαστική — συμμετρική — μεταβατική ἐνῶ λέγεται **σχέση διατάξεως** ὅταν εἶναι ἀνακλαστική—ἀντισυμμετρική — μεταβατική.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ*

26. Ἔστω Α = {Ἑρμῆς, Ἀφροδίτη, Γῆ, Ἄρης, Ζεύς, Κρόνος, Οὐρανός, Ποσειδών, Πλούτων} τό σύνολο τῶν πλανητῶν τοῦ ἡλιακοῦ μας συστήματος καί Β = { 0, 1, 2, 5, 10,12} ἕνα σύνολο ἀριθμῶν. Ὁ προτασιακός τύπος p(x,y): «ὁ πλανήτης x ἔχει ψ φυσικούς δορυφόρους», ὁρίζει μιά σχέση ἀπό τό Α στό Β. Νά βρεθεῖ τό γράφημά της καί νά γίνει ἕνας πίνακας τῆς σχέσεως μέ διπλή εἴσοδο.

27. Ἄς εἶναι Α ἕνα σύνολο μέ στοιχεῖα τίς λέξεις τῆς προτάσεως «Ἄν αὔριο ὁ καιρός εἶναι καλός θά πᾶμε ἐκδρομή» καί Β τό σύνολο μέ στοιχεῖα τά μέρη τοῦ λόγου, δηλ. Β ={ οὐσιαστικό, ἄρθρο, ρῆμα, ἐπίρρημα, ἐπίθετο, ἀντωνυμία, πρόθεση, σύνδεσμος} Ὁ προτασιακός τύπος p(x,y): «ἡ λέξη x εἶναι μέρος τοῦ λόγου y» ὁρίζει μιά σχέση ἀπό τό Α στό Β. Νά γίνει τό βελοειδές διάγραμμα τῆς σχέσεως.

28. Ἄς εἶναι Α={642, 811, 1117, 84, 55, 64, 66, 1234, 823, 52} ἕνα σύνολο ἀριθμῶν. Ὁ προτασιακός τύπος p(x,y): «ὁ x ἔχει ἄθροισμα ψηφίων ὅσο καί ὁ y» ὁρίζει στό Α μιά σχέση. Βρεῖτε τό γράφημα τῆς σχέσεως καί τό βελοειδές διάγραμμα. Ἀποδεῖξτε ὅτι ἡ σχέση εἶναι ἰσοδυναμία καί βρεῖτε τίς κλάσεις ἰσοδυναμίας.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ**

29. Δίνεται τό σύνολο Α={ α, β, γ }. Βρεῖτε ὅλα τά ὑποσύνολά του γνήσια καί ὄχι. Ἄς εἶναι Β τό σύνολο πού ἔχει στοιχεῖα ὅλα τά ὑποσύνολα τοῦ Α. Ὁ προτασιακός τύπος p(x,y):«x εἶναι ὑποσύνολο τοῦ y» ορίζει μιά διμελή σχέση στό Β. Βρεῖτε τό γράφημά της, καί δεῖξτε ὅτι εἶναι μιά σχέση διατάξεως.

30. Μέσα στό σύνολο Α ={ 1, 2, 3,..., 9,10,11 } ὁρίζουμε μιά σχέση μέ τόν προτασιακό τύπο p(x,y): $x < y$. Δεῖξτε ὅτι ἡ σχέση αὐτή εἶναι ὁλική διάταξη καί ὅτι τό γράφημά της περιέχει 55 ζεύγη.

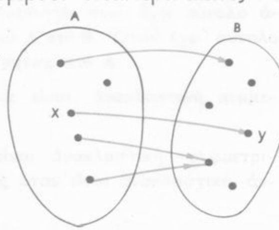
31. Στό σύνολο Ν τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ὁρίζουμε μιά σχέση μέ τό προτασιακό τύπο p(x,y): «ὁ x εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ y». Δεῖξτε ὅτι ἡ σχέση αὐτή εἶναι σχέση διατάξεως.

5ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ

Ἡ ἔννοια τῆς ἀπεικονίσεως.

5.1. Ἄς ξαναρθοῦμε στίς διμελεῖς σχέσεις ἀπό ἕνα σύνολο Α σ' ἕνα σύνολο Β. Ἀπό τίς σχέσεις αὐτές μᾶς ἐνδιαφέρουν ἰδιαίτερα ἐκεῖνες πού σέ **κάθε** στοιχεῖο τοῦ Α ἀντιστοιχίζεται **ἕνα μόνο** στοιχεῖο τοῦ Β. Μιά τέτοια διμελής σχέση ἀπό τό Α στό Β λέγεται **«ἀπεικόνιση»** τοῦ συνόλου Α στό σύνολο Β. Τίς ἀπεικονίσεις τίς παριστάνουμε συνήθως μέ ἕνα ἀπό τά γράμματα φ, f, σ, . . .



(σχ. 1)

Παράδειγμα. Ἄς θεωρήσουμε τά δυό σύνολα

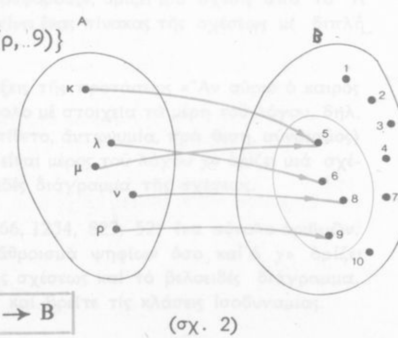
$$A = \{\kappa, \lambda, \mu, \nu, \rho\}, \qquad B = \{1, 2, 3, \ldots, 10\},$$

ἀπό τά ὁποῖα τό Α παριστάνει ἕνα σύνολο μαθητῶν, πού ἔγραψαν ἕνα διαγώνισμα, καί τό Β παριστάνει τό σύνολο τῶν βαθμῶν μέ τούς ὁποίους βαθμολογεῖται ἡ ἐπίδοση ἑνός μαθητῆ. Ἄς ὑποθέσουμε ἀκόμα ὅτι ἡ διμελής σχέση, πού ὁρίζει ὁ προτασιακός τύπος p(x,y): «ὁ μαθητής x πῆρε βαθμό y» ἔχει γράφημα

$$G = \{(\kappa, 5), (\lambda, 6), (\mu, 5), (\nu, 8), (\rho, 9)\}$$

Ἡ διμελής αὐτή σχέση εἶναι μιά ἀπεικόνιση τοῦ Α στό Β, γιατί σέ **κάθε** μαθητή (στοιχεῖο τοῦ Α) ἀντιστοιχίζεται **ἕνας μόνο βαθμός** (ἕνα στοιχεῖο τοῦ Β). Μιά ἀπεικόνιση φ τοῦ συνόλου Α στό σύνολο Β θά σημειώνεται

$$\boxed{\varphi : A \rightarrow B}$$



(σχ. 2)

Σέ μιά ἀπεικόνιση φ ὁρίζουμε ὅτι:

- Τό σύνολο Α λέγεται **σύνολο ἀφετηρίας** ἤ **σύνολο ὁρισμοῦ** τῆς φ.
- Τό σύνολο Β λέγεται **σύνολο ἀφίξεως** τῆς φ.
- Τό στοιχεῖο y τοῦ Β, πού ἀπεικονίζεται τό x τοῦ Α, λέγεται **εἰκόνα** τοῦ x.

Βλέπουμε λοιπόν ὅτι σέ μιά ἀπεικόνιση $\varphi: A \to B$ κάθε στοιχεῖο τοῦ Α ἔχει μιά μόνο εἰκόνα στό Β, δέν ἀποκλείεται ὅμως δυό ἤ περισσότερα στοιχεῖα τοῦ Α νά ἔχουν τήν ἴδια εἰκόνα στό Β. Γιά νά δηλώσουμε ὅτι ἡ ἀπεικόνιση φ ἀντιστοιχίζει στό στοιχεῖο $x \in A$ τό στοιχεῖο $y \in B$, γράφουμε

$$x \xrightarrow{\varphi} y \quad ἤ \quad \varphi(x) = y$$

Ἔτσι στό προηγούμενο παράδειγμά μας ἔχουμε

$$\varphi(\kappa) = 5, \quad \varphi(\lambda) = 6, \quad \varphi(\mu) = 5, \quad \varphi(\nu) = 8, \quad \varphi(\rho) = 9.$$

Ἡ ἔννοια τῆς συναρτήσεως.

5.2. Μιά ἀπεικόνιση $\varphi: A \to B$ λέγεται ἐπίσης καί **συνάρτηση μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό Α**. Τότε οἱ εἰκόνες τῆς φ ὀνομάζονται «τιμές» τῆς συναρτήσεως καί λέμε ὅτι *«ἡ συνάρτηση παίρνει τιμές στό Β»*. Ἄν καί δέν ὑπάρχει καμιά διαφορά μεταξύ τῶν ὅρων «ἀπεικόνιση» καί «συνάρτηση», συνηθίζουμε νά χρησιμοποιοῦμε τόν ὅρο «συνάρτηση» μόνο ὅταν τά Α καί Β εἶναι ἀριθμητικά σύνολα.

Ἔτσι π.χ. γιά νά ὁρίσουμε μιά συνάρτηση φ μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό $A = \{1,2,4,7,9\}$ πού παίρνει τιμές στό $N = \{0,1,2,3,\ldots\}$, θά πρέπει νά ἀντιστοιχίσουμε σέ κάθε ἀριθμό x ἀπό τό Α ἕναν ἀριθμό φ(x) ἀπό τό Ν. Ἔστω π.χ. ἡ συνάρτηση φ μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό Α, πού ὁρίζεται μέ τήν ἰσότητα

$$\varphi(x) = 3x,$$

ἡ ὁποία λέγεται **τύπος** τῆς συναρτήσεως φ. Οἱ τιμές τῆς συναρτήσεως αὐτῆς γιά $x = 1,2,4,7,9$ εἶναι ἀντίστοιχα οἱ ἀριθμοί

$$\varphi(1) = 3\cdot 1 = 3, \varphi(2) = 3\cdot 2 = 6, \varphi(4) = 3\cdot 4 = 12,$$
$$\varphi(7) = 3\cdot 7 = 21, \quad \varphi(9) = 3\cdot 9 = 27.$$

Τό σύνολο ὅλων τῶν τιμῶν τῆς φ τό συμβολίζουμε μέ φ(Α), δηλαδή

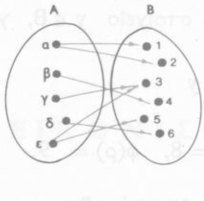
$$\varphi(A) = \{3,6,12,21,27\}.$$

Σέ μιά συνάρτηση σχηματίζουμε πολλές φορές ἀντί γιά τό γράφημά της ἕναν πίνακα μέ δυό γραμμές, ὁ ὁποῖος ἔχει στήν πρώτη γραμμή τά στοιχεῖα τοῦ συνόλου Α καί στή δεύτερη γραμμή τίς ἀντίστοιχες τιμές τῆς συναρτήσεως. Ἔτσι π.χ. γιά τό προηγούμενο παράδειγμα σχηματίζουμε τόν παρακάτω πίνακα τιμῶν.

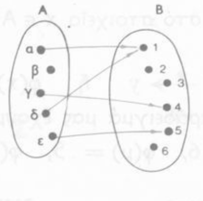
x	1	2	4	7	9
φ(x)	3	6	12	21	27

■ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

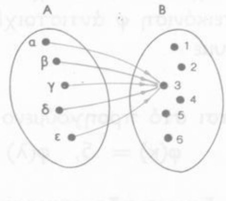
1. Τά παρακάτω σχήματα δείχνουν βελοειδή διαγράμματα διάφορων διμελῶν σχέσεων ἀπό τό σύνολο $A = \{ \alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon \}$ στό σύνολο $B=\{ 1,2,3,4,5,6\}$. Ἐξετάστε σέ κάθε περίπτωση ἄν εἶναι ἀπεικόνιση ἤ ὄχι.



(σχ. 3)



(σχ. 4)



(σχ. 5)

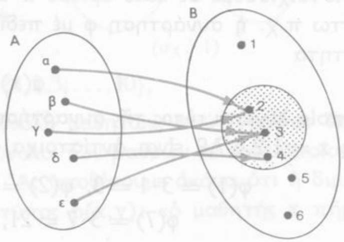
Λύση: Ἡ πρώτη δέν εἶναι ἀπεικόνιση, γιατί σέ ὁρισμένα στοιχεῖα τοῦ A ἀντιστοιχίζονται δυό στοιχεῖα τοῦ B.

Ἡ δεύτερη δέν εἶναι ἀπεικόνιση, γιατί τό στοιχεῖο β τοῦ A δέν ἀντιστοιχίζεται μέ στοιχεῖο τοῦ B.

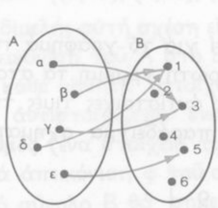
Ἡ τρίτη εἶναι ἀπεικόνιση, γιατί κάθε στοιχεῖο τοῦ A ἀντιστοιχίζεται μέ ἕνα στοιχεῖο τοῦ B. Ἐδῶ ὅλα τά στοιχεῖα τοῦ A ἀντιστοιχίζονται σέ ἕνα μόνο στοιχεῖο τοῦ B. Μιά τέτοια ἀπεικόνιση, πού ὅλα τά στοιχεῖα του A ἔχουν τήν ἴδια εἰκόνα, λέγεται **σταθερή ἀπεικόνιση**.

2. Σέ μιά ἀπεικόνιση $\varphi : A \to B$ τό σύνολο τῶν εἰκόνων ὅλων τῶν στοιχείων τοῦ A εἶναι ἕνα ὑποσύνολο τοῦ B καί σημειώνεται, ὅπως εἴπαμε, μέ $\varphi(A)$. Στό διπλανό σχῆμα ἔχουμε $\varphi(A)=\{ 2,3,4\}$.

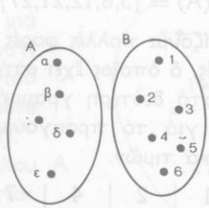
Στό πρῶτο ἀπό τά παρακάτω σχήματα νά συμπληρωθοῦν τά στοιχεῖα τοῦ $\varphi(A)$, ἐνῶ στά δυό ἄλλα σχήματα νά ὁρισθεῖ μιά ἀπεικόνιση, πού νά ἔχει $\varphi(A)$ αὐτό πού σημειώνεται.



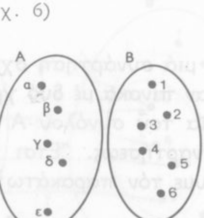
(σχ. 6)



$\varphi(A) = \{\ldots\}$

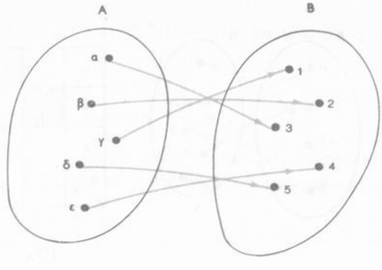


$\varphi(A) = \{1,2,5,6\}$



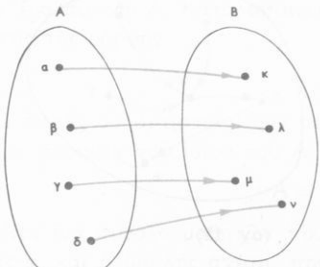
$\varphi(A) = \{4\}$

3. **Στό διπλανό σχῆμα ἔχουμε μιά ἀπεικόνιση φ:Α→Β, στήν ὁποία δυό διαφορετικά στοιχεῖα τοῦ Α ἔχουν πάντα διαφορετικές εἰκόνες καί ἀκόμα εἶναι φ(Α) = Β. Μιά τέτοια ἀπεικόνιση λέγεται «ἀμφιμονοσήμαντη» ἤ ἀπεικόνιση «ἕνα πρός ἕνα». Νά ὁρισθοῦν δυό διαφορετικές ἀμφιμονοσήμαντες ἀπεικονίσεις τοῦ Α = {α,β,γ,δ} στό Β= {κ,λ,μ,ν}. Νά ὁρισθεῖ μιά ἀμφιμονοσήμαντη ἀπεικόνιση τοῦ Β στό Α.**



(σχ. 7)

Λύση: Τά παρακάτω σχήματα μᾶς δίνουν δυό ἀμφιμονοσήμαντες ἀπεικονίσεις φ καί f τοῦ Α στό Β.



(σχ. 8)

Στήν πρώτη εἶναι φ(α) = κ, φ(β) = λ, φ(γ) = μ, φ(δ) = ν.
Στή δεύτερη εἶναι f(α)=κ, f(β)=μ, f(γ)=λ, f(δ) = ν.

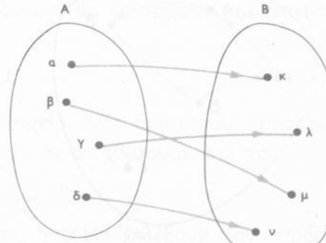
Ἄν ἀλλάξουμε τή φορά τοῦ βέλους, ἔχουμε ἀμέσως μιά ἀμφιμονοσήμαντη ἀπεικόνιση τοῦ Β στό Α.

Στό διπλανό σχῆμα ἔχουμε μιά τέτοια ἀπεικόνιση σ : Β → Α, πού προέκυψε ἀπό τή δεύτερη μέ ἀλλαγή τῆς φορᾶς τῶν βελῶν.

Ἔχουμε

σ(κ) = α, σ(λ) = γ, σ(μ) = β, σ(ν) = δ.

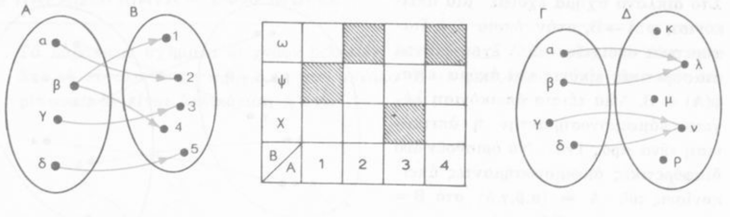
Ἡ ἀπεικόνιση αὐτή λέγεται **ἀντίστροφη** τῆς f. Βρεῖτε καί τήν ἀντίστροφη τῆς φ.



(σχ. 9)

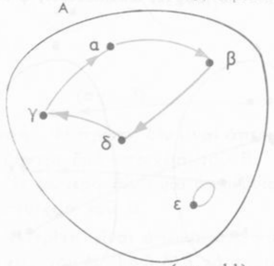
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Τά ἑπόμενα σχήματα δείχνουν βελοειδή διαγράμματα καί πίνακες διάφορων διμελῶν σχέσεων. Ἐξετάστε σέ κάθε περίπτωση ἄν εἶναι ἀπεικονίσεις ἤ ὄχι. Στίς ἀπεικονίσεις βρεῖτε σέ κάθε περίπτωση τό γράφημα G καί τό φ(Α).

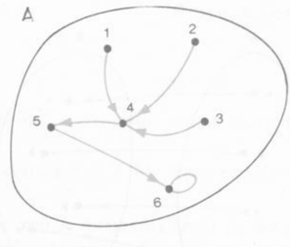


(σχ. 10)

2. Τά παρακάτω σχήματα δείχνουν βελοειδή διαγράμματα σχέσεων ἀπό τό Α στό Α. Εἶναι ἀπεικονίσεις; Βρεῖτε τά γραφήματά τους.



(σχ. 11)



(σχ. 12)

3. Ἀπό τά σύνολα

Α = { Καβάλλα (Κ), Πάτρα (Π), Ἄρτα (Α), Βόλος (Β) }

Β = { Ἤπειρος (Η), Θεσσαλία (Θ), Πελοπόννησος (Π), Μακεδονία (Μ) }

καί τή συνθήκη $p(x,y)$: «ἡ πόλη x βρίσκεται στήν περιοχή y» ὁρίζεται μιά σχέση ἀπό τό Α στό Β. Βρεῖτε τό γράφημά της. Εἶναι ἀπεικόνιση; Εἶναι ἀπεικόνιση ἀμφιμονοσήμαντη;

4. Ἀπό τά σύνολα

Α = { Σολωμός (Σ), Καβάφης (Κ), Παλαμᾶς (Π), Ρίτσος (Ρ), Ἐλύτης (Ε)}

Β = { Ἰθάκη (Ι), Ρωμιοσύνη (Ρ), Τάφος (Τ), Ἄξιον ἐστί (ΑΕ), Ἐθνικός ὕμνος (ΕΥ }

καί τή συνθήκη $p(x,y)$: «ὁ ποιητής x ἔγραψε τό ποίημα y» ὁρίζεται μιά διμελής σχέση ἀπό τό Α στό Β. Βρεῖτε τό γράφημά της. Εἶναι ἀπεικόνιση; Εἶναι ἀμφιμονοσήμαντη;

5. Δίνονται τά σύνολα $A = \{1,2,3\}$, $B = \{3,4,5\}$ καί τά ἀκόλουθα γραφήματα διμελῶν σχέσεων ἀπό τό Α στό Β. Ποιές εἶναι ἀπεικονίσεις;

$G_1 = \{ (1,3),\ (2,5),\ (3,4) \}$, $G_3 = \{ (1,5),\ (2,5),\ (3,3) \}$

$G_2 = \{ (1,5),\ (2,5),\ (3,5) \}$, $G_4 = \{ (1,3),\ (1,4),\ (1,5) \}$

6. Δίνονται τά σύνολα $A = \{\alpha,\beta\}$, $B = \{\gamma,\delta\}$. Βρεῖτε ὅλες τίς δυνατές ἀμφιμονοσήμαντες ἀπεικονίσεις τοῦ Α στό Β καί σχεδιάστε τά βελοειδή τους διαγράμματα.

7. Σέ μιά ἀμφιμονοσήμαντη ἀπεικόνιση $\varphi : A \to B$ ἔχουμε $\varphi(x) = \alpha$, $\varphi(y) = \beta$, $\varphi(\omega) = \gamma$, $\varphi(z) = \delta$. Βρεῖτε τά σύνολα Α καί Β καί ὁρίστε μιά ἀμφιμονοσήμαντη ἀπεικόνιση ἀπό τό Β στό Α.

8. Δίνονται τά σύνολα $A = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\}$, $B = \{1,2,3,4\}$. Ὁρίστε μιά ἀπεικόνιση τοῦ A στό B ὥστε:

I. $\varphi(A) = \{2,3\}$ II. $\varphi(A) = \{1,3,4\}$ III. $\varphi(A) = \{1,2,3,4\}$.

Μπορεῖτε νά ὁρίσετε μιά ἀμφιμονοσήμαντη ἀπεικόνιση τοῦ A στό B;

9. Δίνονται τά σύνολα $A = \{\alpha,\beta,\gamma\}$, $B = \{1,2,3\}$. Βρεῖτε ὅλες τίς δυνατές ἀμφιμονοσήμαντες ἀπεικονίσεις τοῦ A στό B καί σχεδιάστε τά βελοειδή τους διαγράμματα.

10. Τό ἴδιο γιά τά σύνολα $A = \{\alpha,\beta,\gamma\}$ καί $B = \{\alpha,\beta,\delta\}$.

Μετασχηματισμοί.

5.3. Στό προηγούμενο κεφάλαιο μιλήσαμε καί γιά διμελεῖς σχέσεις σ' ἕνα σύνολο A. Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι θά ὑπάρχουν καί ἀπεικονίσεις τῆς μορφῆς

$$\varphi : A \to A,$$

οἱ ὁποῖες θά ἀντιστοιχίζουν σέ κάθε στοιχεῖο ἑνός ὁρισμένου συνόλου A ἕνα στοιχεῖο τοῦ ἴδιου τοῦ A. Ἔτσι π.χ. ἄς ὑποθέσουμε ὅτι τό

$$A = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta,\eta,\theta\}$$

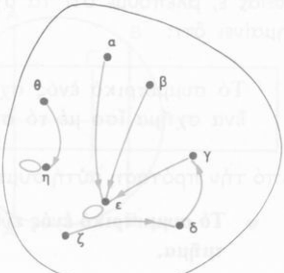
εἶναι ἕνα σύνολο μαθητῶν πού ψήφισαν, γιά νά ἐκλέξουν τόν πρόεδρό τους, καί ἡ διμελής σχέση, πού ὁρίζεται ἀπό τόν προτασιακό τύπο

$p(x,y)$: ὁ μαθητής x ψήφισε τό μαθητή y

ἔχει γράφημα τό

$$G = \{(\alpha,\varepsilon), (\beta,\varepsilon), (\gamma,\varepsilon), (\delta,\gamma), (\varepsilon,\varepsilon), (\zeta,\delta), (\eta,\eta), (\theta,\eta)\}.$$

Ἡ σχέση αὐτή εἶναι μιά ἀπεικόνιση, γιατί κάθε μαθητής ψήφισε μόνο ἕνα συμμαθητή του, δηλαδή σέ κάθε στοιχεῖο τοῦ A ἀντιστοιχίζεται ἕνα στοιχεῖο τοῦ ἴδιου τοῦ A.



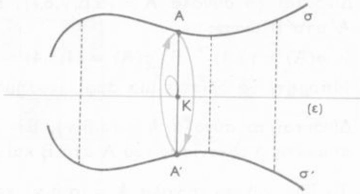
(σχ. 13)

> Μιά τέτοια ἀπεικόνιση ἑνός συνόλου A στόν ἑαυτό του λέγεται καί **μετασχηματισμός τοῦ συνόλου A**.

Συνήθως ὁ ὅρος «μετασχηματισμός τοῦ A» χρησιμοποιεῖται πιό πολύ, ὅταν τό A εἶναι ἕνα σύνολο σημείων.

Ἀξονική συμμετρία

5.4. Ἄς θεωρήσουμε τό σύνολο E τῶν σημείων ἑνός ἐπιπέδου καί μιά εὐθεία ε τοῦ ἐπιπέδου, πού τήν ὀνομάζουμε «ἄξονα». Μέ τή βοήθεια τῆς εὐθείας ε μποροῦμε νά ὁρίσουμε ἕνα μετασχηματισμό τοῦ συνόλου Ε τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο: Σέ κάθε σημεῖο Α ἀντιστοιχίζουμε τό σημεῖο Α′ πού βρίσκεται, ὅταν φέρουμε τό κάθετο τμῆμα ΑΚ πρός τήν ε καί πάρουμε στήν προέκτασή του τμῆμα



(σχ. 14)

$$KA' = KA.$$

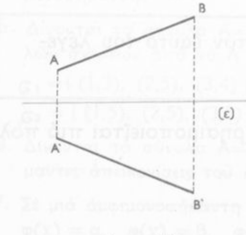
Ὁ μετασχηματισμός αὐτός τοῦ Ε λέγεται **συμμετρία ὡς πρός τόν ἄξονα ε** καί τό σημεῖο Α′, πού εἶναι εἰκόνα τοῦ Α, λέγεται **συμμετρικό τοῦ Α ὡς πρός τόν ἄξονα ε.** Στό μετασχηματισμό αὐτό εἰκόνα τοῦ Α′ εἶναι τό Α. Γι' αὐτό, ὅταν μιά εὐθεία ε εἶναι μεσοκάθετος σ' ἕνα τμῆμα ΑΑ′, λέμε ὅτι **τά δυό σημεῖα Α καί Α′ εἶναι συμμετρικά ὡς πρός ἄξονα ε.** Εἶναι φανερό ὅτι ὅλα τά σημεῖα τοῦ ἄξονα ε συμπίπτουν μέ τά συμμετρικά τους.

Ἄν ἔχουμε τώρα ἕνα σχῆμα σ καί πάρουμε τά συμμετρικά ὅλων τῶν σημείων τοῦ σ ὡς πρός τόν ἄξονα ε, βρίσκουμε ἕνα νέο σχῆμα σ′, τό ὁποῖο λέγεται **συμμετρικό τοῦ σ ὡς πρός τόν ἄξονα ε.** Ἄν διπλώσουμε τό χαρτί μας, στό ὁποῖο εἶναι σχεδιασμένα τά σχήματα **σ,** σ′ κατά μῆκος τῆς εὐθείας ε, βλέπουμε ὅτι τά σχήματα σ καί σ′ ἐφαρμόζουν ἐντελῶς. Αὐτό σημαίνει ὅτι:

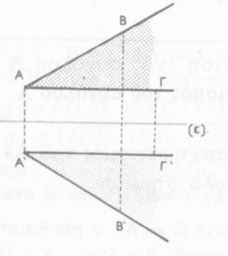
> Τό συμμετρικό ἑνός σχήματος σ ὡς πρός ἕναν ἄξονα ε εἶναι ἕνα σχῆμα ἴσο μέ τό σ.

Ἀπό τήν πρόταση αὐτή συμπεραίνουμε ὅτι στή συμμετρία ὡς πρός ἄξονα:

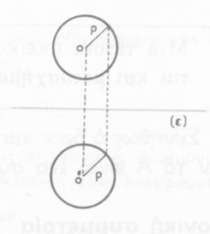
- **Τό συμμετρικό ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος εἶναι ἕνα ἴσο εὐθύγραμμο τμῆμα.**



(σχ. 15)



(σχ. 16)



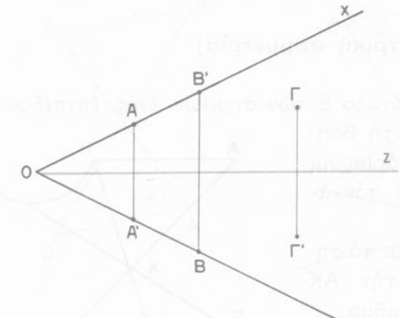
(σχ. 17)

- **Τό συμμετρικό μιᾶς γωνίας εἶναι μιά γωνία ἴση.**
- **Τό συμμετρικό ἑνός κύκλου (Ο,ρ) εἶναι ἕνας ἴσος κύκλος πού ἔχει κέντρο τό συμμετρικό τοῦ Ο.**

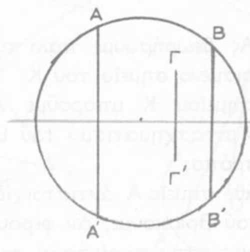
Στά παραπάνω σχήματα δίνονται τά συμμετρικά σχήματα ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος ΑΒ, μιᾶς γωνίας $\widehat{ΒΑΓ}$ καί ἑνός κύκλου (Ο,ρ). Ἀπό τό πρῶτο σχῆμα καταλαβαίνουμε ὅτι, γιά νά βρίσκουμε τό συμμετρικό ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος, ἀρκεῖ νά βρίσκουμε μόνο τά συμμετρικά τῶν ἄκρων του. Γενικά, γιά νά βρίσκουμε τό συμμετρικό μιᾶς εὐθείας, ἀρκεῖ νά βρίσκουμε μόνο τά συμμετρικά δυό σημείων της.

Σχήματα μέ ἄξονα συμμετρίας

5.5. Ἄν ἔχουμε μιά γωνία $\widehat{ΧΟΨ}$ καί πάρουμε τά συμμετρικά Α′,Β′, Γ′,... ὁποιωνδήποτε σημείων της Α,Β,Γ... ὡς πρός τή διχοτόμο ΟΖ τῆς γωνίας, βλέπουμε ὅτι τά σημεῖα Α′,Β′,Γ′... ἀνήκουν ἐπίσης στή γωνία καί γι αὐτό λέμε ὅτι **ἡ εὐθεία τῆς διχοτόμου μιᾶς γωνίας εἶναι ἄξονας συμμετρίας τῆς γωνίας.** Αὐτό μποροῦμε νά τό διαπιστώσουμε εὔκολα, ἄν ἀποτυπώσουμε τό σχῆμα αὐτό σέ ἕνα διαφανές χαρτί καί τό διπλώσουμε



(σχ. 18)



(σχ. 19)

κατά μῆκος τῆς ΟΖ. Τότε τά σημεῖα Α,Β,Γ,... θά συμπέσουν μέ τά συμμετρικά τους Α′,Β′,Γ′,..., πού εἶναι ὅλα σημεῖα τῆς ἴδιας γωνίας. Ἀκόμα, ἄν ἔχουμε ἕναν κυκλικό δίσκο (Ο,ρ) καί πάρουμε τά συμμετρικά Α′,Β′,Γ′ ... ὁποιωνδήποτε σημείων του Α,Β,Γ,... ὡς πρός μιά διάμετρο[1] του, βλέπουμε ὅτι τά σημεῖα Α′,Β′,Γ′,... ἀνήκουν στόν κυκλικό δίσκο καί λέμε ὅτι **κάθε διάμετρος ἑνός κυκλικοῦ δίσκου εἶναι ἕνας ἄξονας συμμετρίας του.**

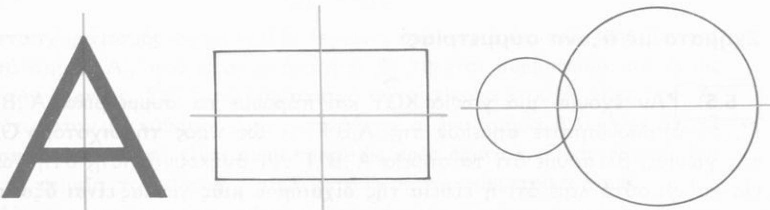
---

(1) Μέ τόν ὅρο «διάμετρος» κυκλικοῦ δίσκου ἐννοοῦμε ἐδῶ μιά εὐθεία πού περνάει ἀπό τό κέντρο του.

Γενικά λοιπόν θά λέμε ὅτι:

> Ἕνα σχῆμα σ ἔχει **ἄξονα συμμετρίας** μιά ὁρισμένη εὐθεία ε, ὅταν ὅλα τά σημεῖα τοῦ σχήματος χωρίζονται σέ ζεύγη, πού τά μέλη τους εἶναι συμμετρικά ὡς πρός τήν εὐθεία ε.

Ἑπομένως, γιά νά ἐλέγξουμε ἄν ἕνα σχῆμα σ ἔχει ἄξονα συμμετρίας μιά εὐθεία ε, πρέπει νά ἐξετάσουμε ἄν τό συμμετρικό κάθε σημείου τοῦ σχήματος ὡς πρός ἄξονα ε εἶναι ἐπίσης σημεῖο τοῦ σχήματος. Κάθε ἕνα ἀπό τά παρακάτω σχήματα ἔχει ἄξονα συμμετρίας.



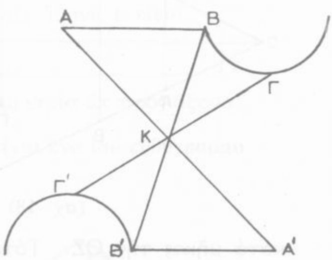
(σχ. 20)

Συμμετρία ὡς πρὸς κέντρο (κεντρική συμμετρία)

5.6. Ἄς θεωρήσουμε πάλι τό σύνολο Ε τῶν σημείων ἑνός ἐπιπέδου καί ἕνα ὁρισμένο σημεῖο του Κ. Μέ τή βοήθεια τοῦ σημείου Κ μποροῦμε νά ὁρίσουμε ἕναν ἄλλο μετασχηματισμό τοῦ Ε μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο:

Σέ κάθε σημεῖο Α ἀντιστοιχίζουμε τό σημεῖο Α′ πού βρίσκουμε, ἄν φέρουμε τήν ΑΚ καί πάρουμε στήν προέκτασή της τμῆμα

$$KA' = KA.$$



(σχ. 21)

Ὁ μετασχηματισμός αὐτός λέγεται **συμμετρία ὡς πρός κέντρο Κ** καί τό σημεῖο Α′, πού εἶναι εἰκόνα τοῦ Α, λέγεται **συμμετρικό τοῦ Α ὡς πρός τό Κ.** Στό μετασχηματισμό αὐτό εἰκόνα τοῦ Α′ εἶναι τό Α καί γι αὐτό, ἄν ἕνα σημεῖο Κ εἶναι μέσο τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος ΑΑ′, λέμε ὅτι **τά σημεῖα Α καί Α′ εἶναι συμμετρικά ὡς πρός τό Κ.** Εἶναι φανερό ὅτι τό συμμετρικό τοῦ σημείου Κ εἶναι τό ἴδιο τό Κ. Ἄν ἔχουμε τώρα ἕνα σχῆμα σ καί πάρουμε τά συμμετρικά ὅλων τῶν σημείων του Α,Β,Γ. . . ὡς πρός κέντρο Κ, βρίσκουμε ἕνα νέο σχῆμα σ′, τό ὁποῖο λέγεται **συμμετρικό τοῦ σ** ὡς πρός τό κέντρο

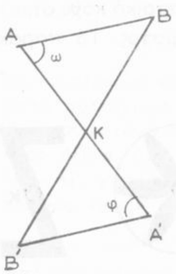
Κ. Ἄν φανταστοῦμε ὅτι ὅλες οἱ ἡμιευθεῖες ΚΑ,ΚΒ,ΚΓ,. . . στρέφονται συγχρόνως καί κατά τήν ἴδια φορά κατά γωνία 180^0, ὅλα τά σημεῖα Α,Β,Γ,. . . τοῦ σ θά ἐφαρμόσουν στά ἀντίστοιχα σημεῖα Α',Β',Γ',. . . τοῦ σ' καί ἔτσι τά σχήματα σ καί σ' θά ἐφαρμόσουν ἐντελῶς. Αὐτό σημαίνει ὅτι:

Τό συμμετρικό ἑνός σχήματος σ ὡς πρός κέντρο Κ εἶναι ἕνα σχῆμα ἴσο μέ τό σ.

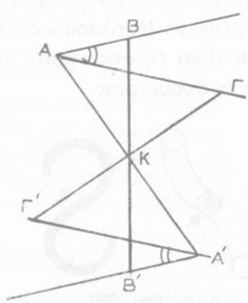
Ἀπό τήν πρόταση αὐτή συμπεραίνουμε ὅτι στή συμμετρία ὡς πρός κέντρο:

- **Τό συμμετρικό ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος εἶναι ἕνα ἴσο εὐθύγραμμο τμῆμα.**
- **Τό συμμετρικό μιᾶς γωνίας εἶναι μιά ἴση γωνία.**
- **Τό συμμετρικό ἑνός κύκλου (Ο,ρ) εἶναι ἕνας ἴσος κύκλος, πού ἔχει κέντρο τό συμμετρικό τοῦ Ο.**

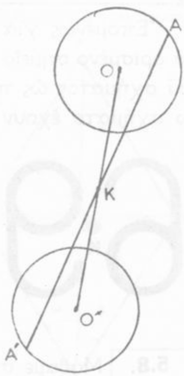
Στά παρακάτω σχήματα δίνονται τά συμμετρικά ὡς πρός κέντρο ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος ΑΒ, μιᾶς γωνίας $\widehat{ΒΑΓ}$ καί ἑνός κύκλου (Ο,ρ).



(σχ. 22)



(σχ. 23)



(σχ. 24)

Ἀπό τό πρῶτο σχῆμα βλέπουμε ὅτι, γιά νά βρίσκουμε τό συμμετρικό ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος ὡς πρός κέντρο Κ, ἀρκεῖ νά βρίσκουμε μόνο τά συμμετρικά τῶν ἄκρων του. Γενικά, γιά νά βρίσκουμε τό συμμετρικό μιᾶς εὐθείας, ἀρκεῖ νά βρίσκουμε τά συμμετρικά δυό μόνο σημείων της. Ἐπίσης, στό σχῆμα αὐτό τά τρίγωνα ΚΑΒ καί ΚΑ'Β' εἶναι ἴσα, γιατί ἔχουν

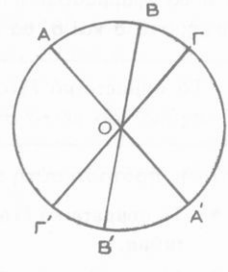
$$ΚΑ = ΚΑ', \ ΚΒ = ΚΒ' \text{ καί } \widehat{ΑΚΒ} = \widehat{Α'ΚΒ'} \text{ (κατακορυφήν γωνίες)}$$

καί ἑπομένως θά εἶναι καί $\widehat{ω} = \widehat{φ}$, ὁπότε ΑΒ//Α'Β'. Βλέπουμε δηλαδή ὅτι:

Τό συμμετρικό ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος ΑΒ (ἤ μιᾶς εὐθείας ε) ὡς πρός κέντρο εἶναι ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα παράλληλο καί ἴσο πρός τό ΑΒ (ἤ εὐθεία παράλληλη πρός τήν ε).

Σχήματα μέ κέντρο συμμετρίας

5.7. Ἄν ἔχουμε ἕναν κύκλο (Ο,ρ) καί πάρουμε τά συμμετρικά ὁποιωνδήποτε σημείων του Α,Β,Γ,... ὡς πρός τό κέντρο του Ο, βλέπουμε ὅτι οἱ εἰκόνες τους Α΄,Β΄,Γ΄,..., ἀνήκουν ἐπίσης στόν κύκλο (Ο,ρ) καί γι αὐτό λέμε ὅτι τό **κέντρο ἑνός κύκλου εἶναι κέντρο συμμετρίας του.**



(σχ. 25)

Γενικά λοιπόν θά λέμε ὅτι:

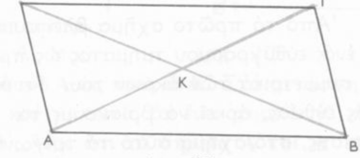
Ἕνα σχῆμα σ ἔχει **κέντρο συμμετρίας** ἕνα ὁρισμένο σημεῖο Κ, ὅταν ὅλα τά σημεῖα τοῦ σχήματος χωρίζονται σέ ζεύγη, πού τά μέλη τους εἶναι συμμετρικά ὡς πρός τό Κ.

Ἑπομένως γιά νά ἐλέγξουμε ἄν ἕνα σχῆμα σ ἔχει κέντρο συμμετρίας ἕνα ὁρισμένο σημεῖο Κ, πρέπει νά ἐξετάσουμε ἄν τό συμμετρικό κάθε σημείου τοῦ σχήματος ὡς πρός Κ εἶναι ἐπίσης σημεῖο τοῦ σχήματος. Τά παρακάτω σχήματα ἔχουν κέντρο συμμετρίας.

(σχ. 26)

5.8. Μάθαμε στήν πρώτη τάξη ὅτι παραλληλόγραμμο εἶναι ἕνα τετράπλευρο, πού ἔχει τίς ἀπέναντι πλευρές του παράλληλες. Ἄν στό παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ φέρουμε τίς διαγωνίους του ΑΓ καί ΒΔ καί μέ τό διαβήτη μας μετρήσουμε τά τμήματα ΚΑ, ΚΓ καί ΚΒ, ΚΔ, βλέπουμε ὅτι

ΚΑ = ΚΓ καί ΚΒ = ΚΔ.



(σχ. 27)

Ἀπό τίς ἰσότητες αὐτές βλέπουμε ὅτι τό συμμετρικό τοῦ παραλληλογράμμου ὡς πρός τό σημεῖο Κ εἶναι τό ἴδιο τό παραλληλόγραμμο. Ἔτσι τό σημείο Κ τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων του εἶναι κέντρο συμμετρίας τοῦ παραλληλογράμμου καί οἱ πλευρές ΑΒ, ΓΔ καί ΑΔ, ΒΓ εἶναι συμμετρικές ὡς πρός Κ. Ἐπίσης οἱ γωνίες του $\widehat{Α\Delta Γ}$, $\widehat{ΑΒΓ}$ καί $\widehat{\Delta ΑΒ}$, $\widehat{\Delta ΓΒ}$ εἶναι συμμετρικές ὡς πρός Κ. Ἑπομένως σέ κάθε παραλληλόγραμμο:

- **Οἱ ἀπέναντι πλευρές εἶναι ἴσες μεταξύ τους.**
- **Οἱ ἀπέναντι γωνίες εἶναι ἴσες μεταξύ τους.**
- **Οἱ διαγώνιοί του διχοτομοῦνται.**

Διαπιστώνεται ὅτι, ἄν ἔχουμε ἕνα τετράπλευρο ΑΒΓΔ στό ὁποῖο ἰσχύει μιά ἀπό τίς ἰδιότητες αὐτές, τό τετράπλευρο ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμο.

ΠΑΡΑΔΕΙΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Βρεῖτε τό συμμετρικό ἑνός ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ ὡς πρός ἄξονα συμμετρίας τή βάση του ΒΓ. Συγκρίνετε μέ τό διαβήτη σας τίς πλευρές τοῦ τετραπλεύρου πού σχηματίστηκε. Δικαιολογῆστε τά συμπεράσματά σας μέ συλλογισμούς.**

Λύση. Βρίσκουμε τό συμμετρικό Α′ τοῦ Α ὡς πρός τή ΒΓ. Συμμετρικό τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ, ὡς πρός τή ΒΓ, εἶναι τό ἴσο ἰσοσκελές τρίγωνο Α′ΒΓ. Εἶναι

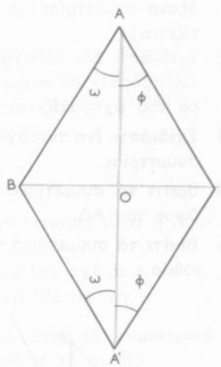
$$ΑΒ = ΑΓ = Α'Β = Α'Γ.$$

Στό συμπέρασμα αὐτό καταλήγουμε καί μέ τόν ἀκόλουθο συλλογισμό. Α′Β = ΑΒ καί Α′Γ = ΑΓ, γιατί τό συμμετρικό ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος ὡς πρός ἄξονα εἶναι ἴσο εὐθύγραμμο τμῆμα. Ἀλλά ΑΒ = ΑΓ, γιατί τό τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές. Ἑπομένως ἔχουμε

$$ΑΒ = ΑΓ = Α'Β = Α'Γ.$$

Ἀπό τήν ἰσότητα τῶν τριγώνων ΑΒΑ′ καί ΑΓΑ′ (ΑΒ=ΑΓ, Α′Β=Α′Γ, ΑΑ′=κοινή πλευρά) προκύπτει ὅτι καί ω = φ, ἑπομένως προκύπτει

$$ΑΒ // Α'Γ \text{ καί } ΒΑ' // ΑΓ,$$



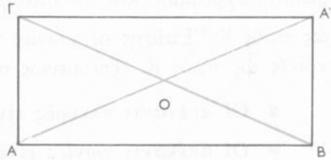
(σχ. 28)

δηλαδή τό τετράπλευρο ΑΒΑ′Γ εἶναι παραλληλόγραμμο μέ ἴσες ὅλες τίς πλευρές του. Τό παραλληλόγραμμο αὐτό λέγεται **ρόμβος**. Παρατηροῦμε ἀκόμα ὅτι σέ κάθε ρόμβο:

- **Οἱ διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα.**
- **Οἱ διαγώνιοί του εἶναι καί διχοτόμοι τῶν γωνιῶν του.**
- **Οἱ διαγώνιοί του εἶναι ἄξονες συμμετρίας του.**

2. **Βρεῖτε τό συμμετρικό ἑνός ὀρθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ μέ κέντρο συμμετρίας τό μέσο Ο τῆς ὑποτείνουσάς του ΒΓ. Μελετῆστε τίς ἰδιότητες τοῦ τετραπλεύρου πού σχηματίζεται.**

Λύση. Συμμετρικό τοῦ Α εἶναι τό σημεῖο Α', τοῦ Β τό Γ καί τοῦ Γ τό Β, ἑπομένως συμμετρικό τοῦ ὀρθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ εἶναι τό ἴσο ὀρθογώνιο τρίγωνο Α'ΒΓ. Ἐπειδή τό συμμετρικό ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος ὡς πρός κέντρο εἶναι ἴσο καί παράλληλο εὐθύγραμμο τμῆμα, θά εἶναι Α'Β//ΑΓ καί Α'Γ//ΑΒ, δηλαδή τό τετράπλευρο ΑΒΑ'Γ εἶναι παραλληλόγραμμο καί μάλιστα μέ γωνίες ὀρθές. Τό παραλληλόγραμμο αὐτό λέγεται **ὀρθογώνιο**. Ἄν μέ τό διαβήτη μας συγκρίνουμε τίς διαγωνίους του ΑΑ' καί ΓΒ, διαπιστώνουμε ὅτι ΑΑ' = ΓΒ, δηλαδή ὅτι:



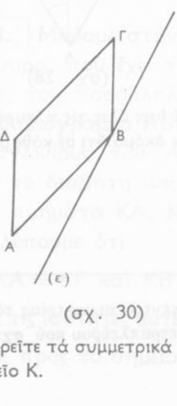
(σχ. 29)

Τό ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο ἔχει ἴσες διαγωνίους.

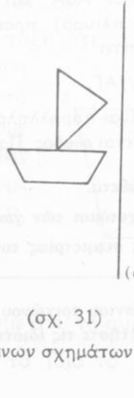
Ἐπειδή $ΑΟ = \frac{1}{2}ΑΑ'$, θά εἶναι καί $ΑΟ = \frac{1}{2}ΓΒ$, δηλαδή **στό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ἡ διάμεσος ἀπό τήν κορυφή τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι ἴση μέ τό $\frac{1}{2}$ τῆς ὑποτείνουσάς του.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

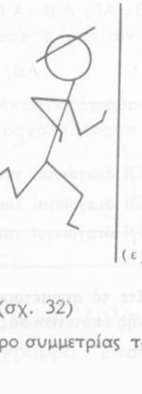
11. Σχεδιάστε ἕνα ἰσόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ καί βρεῖτε τό συμμετρικό του ὡς πρός ἄξονα συμμετρίας μιά πλευρά τοῦ τριγώνου. Τί εἶναι τό τετράπλευρο πού σχηματίζεται;
12. Σχεδιάστε ἕνα ὀρθογώνιο ἰσοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ καί βρεῖτε τό συμμετρικό του ὡς πρός κέντρο συμμετρίας τό μέσο τῆς ὑποτείνουσάς του. Τί εἶναι τό τετράπλευρο πού σχηματίζεται;
13. Σχεδιάστε ἕνα τετράγωνο ΑΒΓΔ καί ἐξετάστε ἄν ἔχει ἄξονες συμμετρίας καί κέντρο συμμετρίας.
14. Βρεῖτε τό συμμετρικό ἑνός σκαληνοῦ τριγώνου ΑΒΓ ὡς πρός ἄξονα συμμετρίας τό ὕψος του ΑΔ.
15. Βρεῖτε τά συμμετρικά τῶν παρακάτω σχημάτων ὡς πρός ἄξονα συμμετρίας τήν εὐθεία ε.



(σχ. 30)

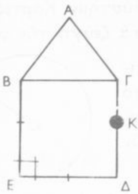


(σχ. 31)

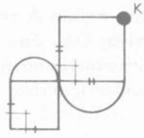


(σχ. 32)

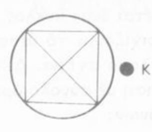
16. Βρεῖτε τά συμμετρικά τῶν ἑπόμενων σχημάτων ὡς πρός κέντρο συμμετρίας τό σημεῖο Κ.



(σχ. 33)



(σχ. 34)



(σχ. 35)

17 Σέ ἕνα σύστημα συντεταγμένων σημειῶστε τά σημεῖα Α(1,3), Β(–2,3) Γ(–4, –5) καί βρεῖτε τά συμμετρικά τους: α) ὡς πρός τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων, β) ὡς πρός τόν ἄξονα **Ox**, γ) ὡς πρός τόν ἄξονα **Oψ**.

18. Ἄν ἕνα σημεῖο Μ ἔχει συντεταγμένες (α,β), ποιές θά εἶναι οἱ συντεταγμένες τοῦ συμμετρικοῦ του: α) ὡς πρός τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων, β) ὡς πρός τόν ἄξονα **Ox**, γ) ὡς πρός τόν ἄξονα **oy**;

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 5

1. **Ἀπεικόνιση ἑνός συνόλου Α σ' ἕνα σύνολο Β λέγεται μιά διμελής σχέση ἀπό τό Α στό Β, ὅταν κάθε στοιχεῖο τοῦ Α ἀντιστοιχίζεται μέ ἕνα μόνο στοιχεῖο τοῦ Β.**
Μιά ἀπεικόνιση φ σημειώνεται

$$\varphi : A \rightarrow B$$

Τό σύνολο Α λέγεται **σύνολο ὁρισμοῦ** τῆς ἀπεικονίσεως καί τό σύνολο Β λέγεται **σύνολο ἀφίξεως**. Ἡ εἰκόνα τοῦ στοιχείου $x \in A$ σημειώνεται μέ $\varphi(x)$.
Ἄν τά σύνολα Α καί Β εἶναι ἀριθμητικά σύνολα, τότε ἡ ἀπεικόνιση λέγεται καί **συνάρτηση**.

2. Μιά ἀπεικόνιση

$$\varphi : A \rightarrow A$$

λέγεται καί **μετασχηματισμός τοῦ Α.** Τέτοιοι μετασχηματισμοί εἶναι ἡ ἀξονική συμμετρία καί ἡ κεντρική συμμετρία.

- Τό συμμετρικό ἑνός σχήματος ὡς πρός ἄξονα εἶναι ἕνα ἴσο σχῆμα.
- Τό συμμετρικό ἑνός σχήματος ὡς πρός κέντρο εἶναι ἕνα ἴσο σχῆμα.

3. Ἕνα σχῆμα λέμε ὅτι ἔχει **ἄξονα συμμετρίας** μιά εὐθεία ε, ὅταν τό συμμετρικό τοῦ σχήματος ὡς πρός ἄξονα τήν εὐθεία ε ταυτίζεται μέ τό σχῆμα.
Ἕνα σχῆμα λέμε ὅτι ἔχει **κέντρο συμμετρίας** ἕνα σημεῖο Κ, ὅταν τό συμμετρικό τοῦ σχήματος ὡς πρός τό Κ ταυτίζεται μέ τό σχῆμα.

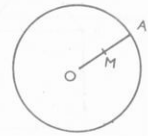
- Ἡ εὐθεία τῆς διχοτόμου μιᾶς γωνίας εἶναι ἄξονας συμμετρίας τῆς γωνίας.
- Κάθε διάμετρος κύκλου εἶναι ἄξονας συμμετρίας του.
- Τό σημεῖο τομῆς τῶν διαγωνίων ἑνός παραλληλογράμμου εἶναι κέντρο συμμετρίας τοῦ παραλληλογράμμου.
- Τό κέντρο ἑνός κύκλου εἶναι κέντρο συμμετρίας του.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ*

19. Στό σύνολο $A = \{0,2,-1,1,-2,3,-3\}$ ὁρίζουμε μιά ἀπεικόνιση φ μέ τύπο $\varphi(x)=x^2$.

Κάνετε έναν πίνακα τιμῶν της καί βρεῖτε τό φ(A). Σ' ἕνα σύστημα Καρτεσιανῶν συντεταγμένων σημειῶστε τά σημεῖα, πού ἀντιστοιχοῦν στά ζεύγη τῆς φ.

20. Δίνεται ἕνας κύκλος (O,ρ). Σέ κάθε σημεῖο A τοῦ κύκλου ἀντιστοιχίζουμε τό μέσο M τῆς ἀκτίνας OA, ὅπως φαίνεται στό διπλανό σχῆμα. Δεῖξτε ὅτι ἡ ἀντιστοιχία αὐτή εἶναι μιά ἀπεικόνιση μέ σύνολο ὁρισμοῦ τόν κύκλο. Ποιό εἶναι τό σύνολο τῶν εἰκόνων;



21. Στό σύνολο $A = \{1,2,3,4,5\}$ ὁρίζουμε δυό ἀπεικονίσεις φ καί f μέ τύπους ἀντίστοιχα $\varphi(x) = 2x$ καί $f(x) = \frac{1}{2x}$. Κάνετε έναν πίνακα τιμῶν γιά κάθε ἀπεικόνιση καί βρεῖτε τά σύνολα φ(A) καί f(A). Σ' ἕνα σύστημα συντεταγμένων σημειῶστε τά σημεῖα πού ἀντιστοιχοῦν στά ζεύγη τῆς φ καί τῆς f.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ••

22. Στό σύνολο $A = \{-2,-1,0,1,2\}$ ὁρίζουμε μιά σταθερή ἀπεικόνιση φ μέ τύπο $\varphi(x) = 3$. Βρεῖτε τό φ(A) καί σημειῶστε σ' ἕνα σύστημα συντεταγμένων τά ζεύγη τῆς φ. Τί παρατηρεῖτε γιά τά σημεῖα αὐτά;

23. Νά βρεῖτε τό συμμετρικό
α) ἑνός τριγώνου ὡς πρός κέντρο συμμετρίας ἕνα ἐσωτερικό σημεῖο του,
β) ἑνός κύκλου ὡς πρός κέντρο συμμετρίας ἕνα σημεῖο του,
γ) ἑνός παραλληλογράμμου ὡς πρός κέντρο συμμετρίας μιά κορυφή του.

24. Σ' ἕνα σύστημα συντεταγμένων σημειῶστε τά σημεῖα A(1,3), B(4,4) καί Γ(−3,5). Σχηματίστε τό τρίγωνο ΑΒΓ, βρεῖτε τό συμμετρικό του Α'Β'Γ' ὡς πρός τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων καί τίς συντεταγμένες τῶν σημείων Α', Β', Γ'.

25. Ἄν ἕνα σχῆμα ἔχει δυό ἄξονες συμμετρίας πού τέμνονται κάθετα, θά ἔχει τότε καί κέντρο συμμετρίας; Σέ ποιά γεωμετρικά σχήματα, ἀπό ὅσα γνωρίζετε, συμβαίνει αὐτό;

6ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΕΜΒΑΔΑ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Μονάδες μετρήσεως ἐπιφανειῶν.

6.1. Στήν Α΄ τάξη μάθαμε ὅτι, γιά νά μετρήσουμε ἕνα ὁποιοδήποτε μέγεθος Α, τό συγκρίνουμε μέ ἕνα ὁμοειδές του μέγεθος Μ, τό ὁποῖο ὀνομάζουμε **μονάδα μετρήσεως**. Ὁ ἀριθμός πού προκύπτει ἀπό τή μέτρηση τοῦ Α μέ τή «μονάδα» Μ λέγεται γενικά **μέτρο** τοῦ Α. Μάθαμε ἀκόμη ὅτι στή μέτρηση τῶν ἐπιφανειῶν παίρνουμε συνήθως γιά μονάδα μετρήσεως τό **τετραγωνικό μέτρο (m^2)**, δηλαδή τήν ἐπιφάνεια ἑνός τετραγώνου, πού ἔχει πλευρά 1 m.

(σχ. 1)

Γιά νά μετρήσουμε μικρές ἐπιφάνειες, χρησιμοποιοῦμε μονάδες, οἱ ὁποῖες εἶναι ὑποδιαιρέσεις τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου. Μιά τέτοια μονάδα π.χ. βρίσκεται, ἄν χωρίσουμε τό τετραγωνικό μέτρο σέ 100 ἴσα τετράγωνα, ὅπως δείχνει τό διπλανό σχῆμα. Κάθε ἕνα ἀπό τά ἴσα αὐτά τετράγωνα ἔχει πλευρά $\frac{1}{10}$ m (δηλαδή 10 cm) καί ἡ ἐπιφάνειά του λέγεται **τετραγωνικό δεκατόμετρο (dm^2)**. Ἄν χωρίσουμε μέ τόν ἴδιο τρόπο τό τετραγωνικό δεκατόμετρο σέ 100 ἴσα τετράγωνα, ἔχουμε τό **τετραγωνικό ἑκατοστόμετρο (cm^2)** κ.ο.κ.

Οἱ ὑποδιαιρέσεις λοιπόν τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου, πού χρησιμοποιοῦνται γιά τή μέτρηση μικρῶν ἐπιφανειῶν, εἶναι:

- **Τό τετραγωνικό δεκατόμετρο** $(dm^2) = \frac{1}{100}\ m^2$
- **Τό τετραγωνικό ἑκατοστόμετρο** $(cm^2) = \frac{1}{100}\ dm^2 = \frac{1}{10.000}\ m^2$
- **Τό τετραγωνικό χιλιοστόμετρο** $(mm^2) = \frac{1}{100}\ cm^2 = \frac{1}{10.000}\ dm^2 = \frac{1}{1.000.000}\ m^2$

Γιά τή μέτρηση μεγάλων ἐπιφανειῶν χρησιμοποιοῦνται μονάδες, οἱ ὁποῖες εἶναι πολλαπλάσια τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου· αὐτές εἶναι:

- **Τό τετραγωνικό δεκάμετρο (dam^2) = 100 m^2**
- **Τό τετραγωνικό ἑκατόμετρο (hm^2) = 100 dam^2 = 10.000 m^2**
- **Τό τετραγωνικό χιλιόμετρο (km^2) = 100 hm^2 = 10.000 dam^2 = = 1.000.000 m^2**

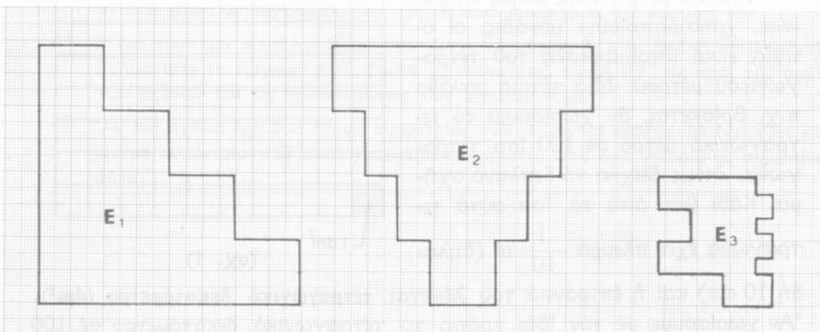
Στή χώρα μας γιά τή μέτρηση ἐκτάσεων γῆς χρησιμοποιεῖται τό **στρέμμα** καί εἶναι

1 στρέμμα = 1.000 m^2

Ἐμβαδὸ σχήματος. Ἰσοδύναμα σχήματα.

6.2. Τό μέτρο μιᾶς ἐπιφάνειας λέγεται **ἐμβαδό τῆς ἐπιφάνειας.** Ἔτσι, **τό ἐμβαδό μιᾶς ἐπιφάνειας εἶναι ἕνας ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἀναφέρεται σέ συγκεκριμένη μονάδα μετρήσεως καί προκύπτει ἀπό τή σύγκριση τῆς ἐπιφάνειας μέ τή μονάδα αὐτή.**

Στά παρακάτω σχήματα (σχ. 2) βλέπουμε τρεῖς ἐπιφάνειες E_1, E_2,E_3

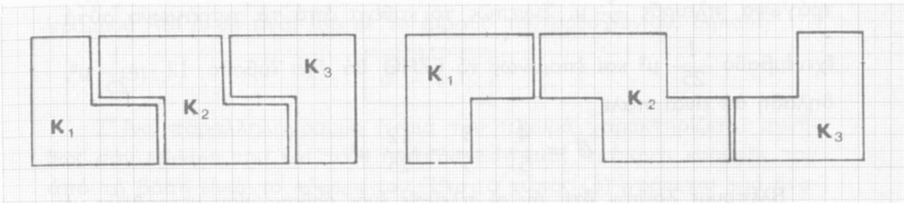


(σχ. 2)

ἀπό τίς ὁποῖες οἱ E_1 καί E_2 ἔχουν ἐμβαδό 10 cm^2, ἐνῶ ἡ E_3 ἔχει ἐμβαδό 249 mm^2 ἤ 2,49 cm^2.

Δύο σχήματα, πού ἔχουν τό ἴδιο ἐμβαδό, λέγονται ἰσοδύναμα. Τά παραπάνω σχήματα E_1 καί E_2 εἶναι ἰσοδύναμα δίχως βέβαια νά εἶναι ἴσα. Γενικά δύο ἴσα σχήματα εἶναι πάντοτε ἰσοδύναμα, ἀφοῦ, ὅταν τοποθετήσουμε τό ἕνα πάνω στό ἄλλο, ἔχουν ἀκριβῶς τήν ἴδια ἐπιφάνεια. Τά ἰσοδύναμα ὅμως σχήματα δέν εἶναι ἀπαραιτήτως ἴσα.

Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι, ἄν κομματιάσουμε ἕνα σχῆμα καί τοποθετήσουμε τά κομμάτια του τό ἕνα δίπλα στό ἄλλο κατά διάφορους

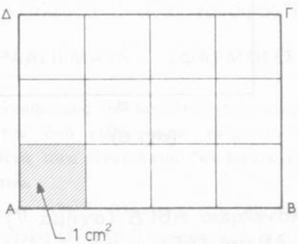


(σχ. 3)

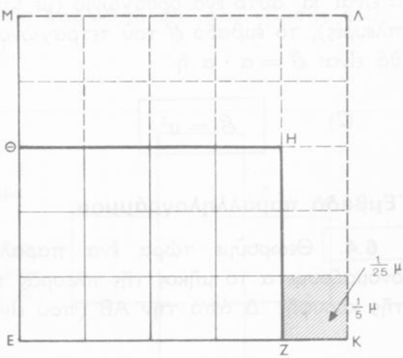
τρόπους, θά προκύψουν σχήματα ἰσοδύναμα. Μιά τέτοια ἐργασία φαίνεται στό παραπάνω σχῆμα 3.

Ἐμβαδὸ ὀρθογωνίου.

6.3. Ἕνα ὀρθογώνιο ΑΒΓΔ, πού ἔχει πλευρές μέ μήκη (ΑΒ) = 4 cm καί (ΒΓ) = 3 cm, χωρίζεται μέ τόν τρόπο πού δείχνει τό σχῆμα 4 σέ



(σχ. 4)



(σχ. 5)

$4 \times 3 = 12$ τετράγωνα, πού τό καθένα τους ἔχει πλευρά 1 cm. Ἔτσι τό ἐμβαδό τοῦ ὀρθογωνίου αὐτοῦ εἶναι

$$\mathscr{E} = 4 \cdot 3 = 12 \text{ cm}^2$$

Ἄς θεωρήσουμε τώρα ἕνα ὀρθογώνιο ΕΖΗΘ, πού οἱ πλευρές του ΕΖ καί ΖΗ εἶναι τά $\frac{4}{5}$ καί τά $\frac{3}{5}$ μιᾶς μονάδας μήκους μ (βλ. σχῆμα 5). Τό ὀρθογώνιο αὐτό χωρίζεται μέ τόν ἴδιο τρόπο σέ $4 \times 3 = 12$ τετράγωνα, πού τό καθένα τους ἔχει πλευρά τό $\frac{1}{5}$ τοῦ μ. Προεκτείνουμε τώρα τήν κάθε πλευρά τοῦ ὀρθογωνίου ὥσπου νά γίνει ἴση μέ μ. Σχηματίζεται ἔτσι τό τετράγωνο ΕΚΛΜ, πού ἔχει ἐμβαδό 1 μ² καί ἀποτελεῖται ἀπό 25 τετράγωνα πλευρᾶς $\frac{1}{5}$ μ. Συνεπῶς τό καθένα ἀπό τά τετράγωνα αὐτά ἔχει ἐμβαδό $\frac{1}{25}$ μ² καί ἐπομένως τό ΕΖΗΘ θά ἔχει ἐμβαδό $12 \cdot \frac{1}{25}$ μ², δηλαδή θά εἶναι πάλι

$$\mathscr{E} = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{25} \text{ μ}^2$$

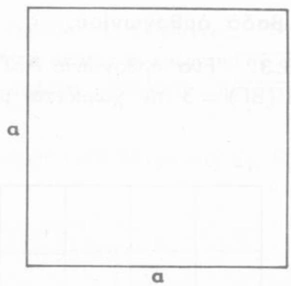
Βλέπουμε λοιπόν ὅτι, ἄν οἱ πλευρές ἑνός ὀρθογωνίου μετρηθοῦν μέ τήν ἴδια μονάδα μετρήσεως καί ἔχουν μήκη α καί β, τό ἐμβαδό θά εἶναι

$$\boxed{\mathscr{E} = \alpha . \beta} \qquad (1)$$

δηλαδή **τό ἐμβαδό ἑνός ὀρθογωνίου εἶναι ἴσο μέ τό γινόμενο τῶν μηκῶν δύο διαδοχικῶν πλευρῶν του.**

Ἐπειδή τό τετράγωνο μέ πλευρά[1] α εἶναι κι αὐτό ἕνα ὀρθογώνιο (μέ ἴσες πλευρές), τό ἐμβαδό $\mathscr{E}$ τοῦ τετραγώνου θά εἶναι $\mathscr{E} = \alpha \cdot \alpha$ ἤ

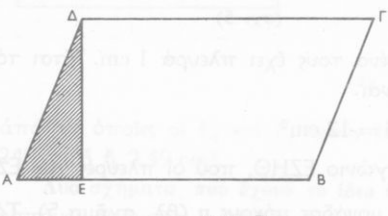
$$\boxed{\mathscr{E} = \alpha^2} \qquad (2)$$



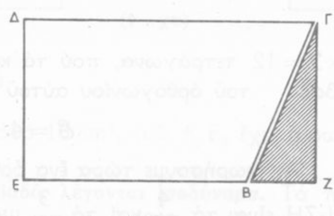
(σχ. 6)

Ἐμβαδό παραλληλογράμμου.

6.4. Θεωροῦμε τώρα ἕνα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ (σχῆμα 7) καί ὀνομάζουμε α τό μῆκος τῆς πλευρᾶς του ΑΒ καί (ΔΕ)=υ τήν ἀπόσταση τῆς κορυφῆς Δ ἀπό τήν ΑΒ (πού εἶναι ἴση μέ τήν ἀπόσταση τῶν δύο



(σχ. 7)



(σχ. 8)

παράλληλων εὐθειῶν ΑΒ καί ΓΔ). Κόβουμε μέ ἕνα ψαλίδι τό τρίγωνο ΑΔΕ καί τό τοποθετοῦμε στή θέση ΒΓΖ, ὅπως δείχνει τό σχῆμα 8. Ἔτσι τό παραλληλόγραμμο μετατρέπεται σέ ὀρθογώνιο, πού ἔχει πλευρές (ΕΖ)=

(1) Ἀπό δῶ καί πέρα λέγοντας πλευρά ἤ βάση ἤ ὕψος θά ἐννοοῦμε συνήθως τά μήκη τους.

$=(\Delta\Gamma)=\alpha$ καί $(\Delta E)=\upsilon$. Ἑπομένως τό ἐμβαδό $\mathscr{E}$ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ θά εἶναι ἴσο μέ τό ἐμβαδό τοῦ ὀρθογωνίου, δηλαδή

$$\mathscr{E} = \alpha . \upsilon \tag{3}$$

Σ' ἕνα παραλληλόγραμμο ἡ μιά του πλευρά χαρακτηρίζεται συνήθως σάν *«βάση»* του καί τότε ἡ ἀπόσταση μιᾶς ἀπέναντι κορυφῆς του ἀπό τή βάση εἶναι τό *«ὕψος»* του. Ἔτσι ὁ τύπος (3) γράφεται πιό ἀναλυτικά

$$\mathscr{E} = \text{βάση} \times \text{ὕψος} \tag{3'}$$

δηλαδή **τό ἐμβαδό ἑνός παραλληλογράμμου εἶναι γινόμενο τῆς βάσεώς του ἐπί τό ὕψος του.**

Ἔτσι π.χ. ἄν εἶναι $(AB)=5$ cm καί $\upsilon=3$ cm, τό ἐμβαδό τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ εἶναι $\mathscr{E}=5\times3=15\ \text{cm}^2$.

Εἶναι φανερό ὅτι ὁ ἴδιος κανόνας μπορεῖ νά διατυπωθεῖ καί γιά τό ὀρθογώνιο (γιατί, ἄν ἡ πλευρά του α χαρακτηρισθεῖ σάν «βάση» του, τότε ἡ πλευρά β εἶναι τό ὕψος του).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

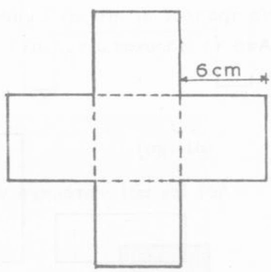
1. **Ἡ περίμετρος τοῦ διπλανοῦ σχήματος ἀποτελεῖται ἀπό εὐθύγραμμα τμήματα, πού τό καθένα τους εἶναι 6 cm. Νά βρεῖτε τό ἐμβαδό του.**

Λύση. Ὅπως βλέπουμε (σχ. 9), τό σχῆμα ἀποτελεῖται ἀπό 5 τετράγωνα, πού τό καθένα τους ἔχει πλευρά 6 cm. Ἑπομένως τό ἐμβαδό τοῦ καθενός τετραγώνου εἶναι

$$\mathscr{E}_1 = 6^2 = 36\ \text{cm}^2$$

καί τό ἐμβαδό τοῦ σχήματος εἶναι

$$\mathscr{E} = 5.36 = 180\ \text{cm}^2.$$



(σχ. 9)

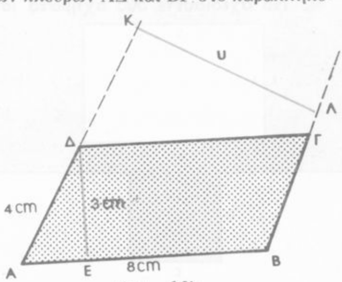
2. **Νά ὑπολογίσετε τήν ἀπόσταση υ τῶν παράλληλων πλευρῶν ΑΔ καί ΒΓ στό παραλληλόγραμμο τοῦ σχήματος 10.**

Λύση. Ἄν χαρακτηρίσουμε σάν βάση τοῦ παραλληλογράμμου τήν πλευρά ΑΒ, ὕψος θά εἶναι τό ΔΕ καί συνεπῶς τό ἐμβαδό του θά εἶναι

$$\mathscr{E} = 8.3 = 24\ \text{cm}^2.$$

Παίρνουμε τώρα σάν βάση τήν ΒΓ (πού εἶναι ἴση μέ τήν ΑΔ), ὁπότε ὕψος θά εἶναι τό $(K\Lambda)=\upsilon$. Θά ἔχουμε λοιπόν

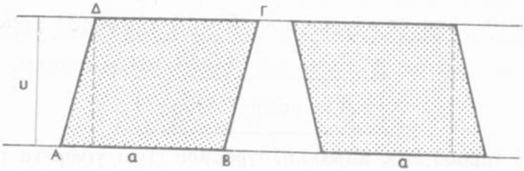
$$\mathscr{E} = (B\Gamma).\upsilon \ \text{ἤ}\ 24 = 4.\upsilon \ \text{ἤ}\ \upsilon = \frac{24}{4} = 6\ \text{cm}.$$



(σχ. 10)

3. **Δύο ἴσα εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καί ΔΓ μήκους α μετακινοῦνται πάνω σέ δύο παράλληλες εὐθεῖες. Νά δείξετε ὅτι σέ ὁποιαδήποτε θέση τους τό ἐμβαδό τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ εἶναι πάντοτε τό ἴδιο.**

Λύση: Σέ κάθε θέση τῶν εὐθύγραμμων τμημάτων ΑΒ καί ΔΓ τό τετράπλευρο ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμο, γιατί, ὅπως διαπιστώνουμε εὔκολα μέ τό διαβήτη, ἔχει τίς ἀπέναντι πλευρές του ἴσες.



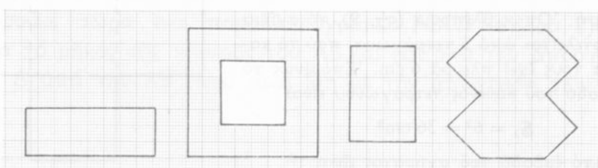
(σχ. 11)

Ἄν πάρουμε λοιπόν σάν βάση τήν πλευρά (ΑΒ)=α, ὕψος θά εἶναι ἡ ἀπόσταση υ τῶν δύο παράλληλων εὐθειῶν. Συνεπῶς γιά ὁποιαδήποτε θέση τῶν ΑΒ καί ΔΓ τό ἐμβαδό τοῦ τετραπλεύρου (παραλληλογράμμου) ΑΒΓΔ θά εἶναι

$$E = \alpha . \upsilon$$

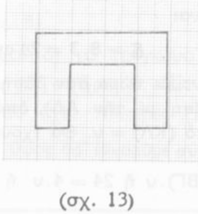
● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Νά τραποῦν σέ cm^2: α) $3\ m^2$ β) $5\ m^2\ 12\ dm^2\ 17\ cm^2$ γ) $4\ dam^2\ 5\ m^2\ 12\ cm^2$.
2. Νά τραποῦν σέ m^2: α) $5\ km^2$ β) $3\ km^2\ 12\ hm^2$ γ) $3267\ cm^2$.
3. Ἀπό τά παρακάτω σχήματα νά βρεῖτε ποιά εἶναι ἰσοδύναμα.



(σχ. 12)

4. Νά σχεδιάσετε δύο σχήματα ἰσοδύναμα μέ τό σχῆμα 13.



(σχ. 13)

5. Νά βρεῖτε τό ἐμβαδό ἑνός ὀρθογωνίου, πού ἔχει περίμετρο 48 cm καί ἡ μιά του πλευρά εἶναι 16 cm.

6. Ἀγόρασε κάποιος ἕνα χαλί, πού εἶχε μῆκος 3,5 m καί πλάτος 1,8 m. Νά βρεῖτε πόσα πλήρωσε, ἄν τό 1 m^2 κοστίζει 800 δρχ.

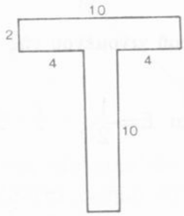
7. Μιά αὐλή, πού ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου μέ μῆκος 12 m καί πλάτος 8 m, πρόκειται νά τή στρώσουμε μέ τετραγωνικά πλακάκια πλευρᾶς 40 cm. Πόσα πλακάκια θά χρειαστοῦμε;

8. Ἕνα ὀρθογώνιο ἔχει βάση 15 cm καί εἶναι ἰσοδύναμο μέ τετράγωνο πλευρᾶς 12 cm. Νά βρεῖτε τό ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου.

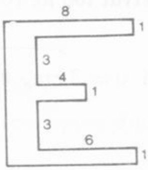
9. Ἕνα παραλληλόγραμμο ἔχει βάση 6,5 cm καί ἐμβαδό 39 cm^2. Νά βρεῖτε τό ὕψος του.

10. Τί θά πάθει ἕνα παραλληλόγραμμο, ἄν ἀφήσουμε τή βάση του ἀμετάβλητη καί διπλασιάσουμε τό ὕψος του;

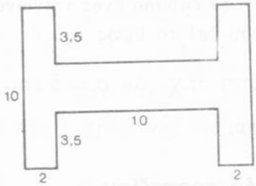
11. Νά βρεῖτε τά ἐμβαδά τῶν παρακάτω σχημάτων. (Οἱ ἀριθμοί ἐκφράζουν τά μήκη τῶν τμημάτων σέ cm).



(σχ. 14)

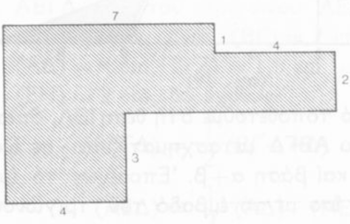


(σχ. 15)

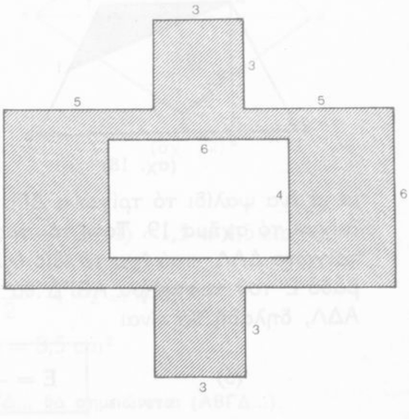


(σχ. 16)

12. Νά βρεῖτε τά ἐμβαδά τῶν γραμμοσκιασμένων σχημάτων 16α καί 16β .



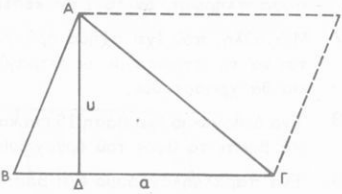
(σχ. 16α)



(σχ. 16β)

Ἐμβαδὸ τριγώνου

6.5. Θεωροῦμε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ, τό ὁποῖο ἔχει βάση (ΒΓ)=α καί ὕψος (ΑΔ)=υ. Ἀπό τό Α φέρνουμε παράλληλη πρός τή ΒΓ καί ἀπό τό Γ παράλληλη πρός τήν ΑΒ. Σχηματίζεται ἔτσι τό παραλληλόγραμμο ΑΒΓΘ, πού ἔχει τήν ἴδια βάση καί τό ἴδιο ὕψος μέ τό τρίγωνο. Ἑπομένως τό ἐμβαδό τοῦ παραλληλογράμμου αὐτοῦ εἶναι α · υ.



(σχ. 17)

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι τό τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι τό μισό τοῦ παραλληλογράμμου (γιατί τά δύο τρίγωνα ΑΒΓ καί ΑΓΘ εἶναι ἴσα). Συνεπῶς τό ἐμβαδό Ε τοῦ τριγώνου θά εἶναι

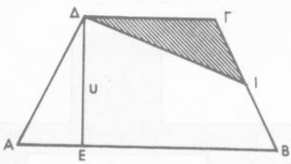
$$\boxed{E = \frac{1}{2}\,\alpha\,.\,\upsilon} \qquad (4)$$

δηλαδή, **τό ἐμβαδό ἑνός τριγώνου εἶναι ἴσο μέ τό μισό τοῦ γινομένου τῆς βάσεώς του ἐπί τό ὕψος του.**

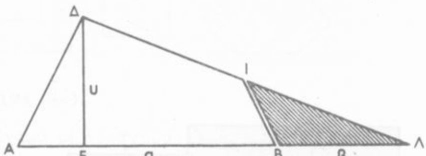
Ἔτσι π.χ. ἄν $\alpha = 5$ cm καί $\upsilon = 3$ cm, θά εἶναι $E = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 =$ $= 7{,}5\ \mathrm{cm}^2$

Ἐμβαδὸ τραπεζίου

6.6. Ἔστω ἕνα τραπέζιο ΑΒΓΔ, πού ἔχει βάσεις (ΑΒ) = α, (ΓΔ) = β καί ὕψος (ΔΕ)=υ (σχῆμα 18). Ἄν Ι εἶναι τό μέσο τῆς πλευρᾶς ΒΓ, κόβουμε μέ ἕνα ψαλίδι τό τρίγωνο ΔΓΙ καί τό τοποθετοῦμε στή θέση ΙΒΛ, ὅπως δείχνει τό σχῆμα 19. Τότε τό τραπέζιο ΑΒΓΔ μετασχηματίζεται σέ ἕνα τρίγωνο ΔΑΛ, πού ἔχει τό ἴδιο ὕψος υ καί βάση α+β. Ἑπομένως τό ἐμβαδό Ε τοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ θά εἶναι ἴσο μέ τό ἐμβαδό τοῦ τριγώνου ΑΔΛ, δηλαδή θά εἶναι



(σχ. 18)



(σχ. 19)

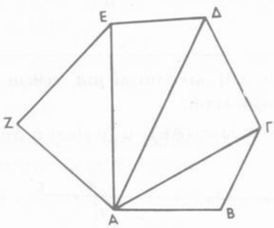
$$\boxed{E = \frac{1}{2}\,(\alpha+\beta)\,.\,\upsilon} \qquad (5)$$

Ὥστε: **Τό ἐμβαδό ἑνός τραπεζίου εἶναι ἴσο μέ τό ἡμιάθροισμα τῶν βάσεών του ἐπί τό ὕψος του.**

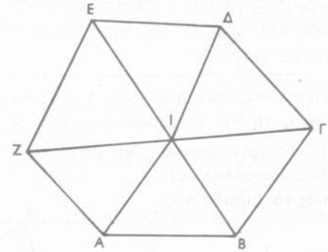
Ἔτσι π.χ. ἄν εἶναι (ΑΒ) = 6 cm, (ΔΓ) = 4 cm καί (ΔΕ) = 5 cm, τό ἐμβαδό τοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ θά εἶναι $E = \frac{1}{2}(6+4) \cdot 5 = 25\ \text{cm}^2$.

Ἐμβαδό πολυγώνου

6.7. Γιά νά ὑπολογίσουμε τό ἐμβαδό ἑνός πολυγώνου(1), χωρίζουμε τό πολύγωνο σέ ἄλλα σχήματα, πού ξέρουμε νά βρίσκουμε τό ἐμβαδό τους. Συνήθως τό χωρίζουμε σέ τρίγωνα ἤ μέ τίς διαγωνίους, πού διέρχονται ἀπό μιά κορυφή του (βλέπε σχῆμα 20), ἤ μέ εὐθύγραμμα τμήματα,



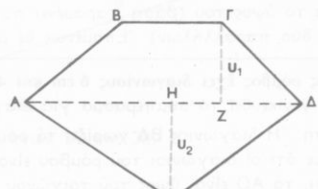
(σχ. 20)



(σχ. 21)

πού φέρνουμε ἀπό ἕνα ἐσωτερικό σημεῖο του Ι πρός ὅλες τίς κορυφές του (βλέπε σχῆμα 21).

Ὁ τρόπος πού χωρίζουμε τό πολύγωνο ἐξαρτᾶται κάθε φορά ἀπό τό σχῆμα του. Ἔτσι π.χ. στό διπλανό πολύγωνο, πού ἡ διαγώνιός του ΑΔ εἶναι παράλληλη πρός τήν πλευρά ΒΓ, τό ἐμβαδό του βρίσκεται, ἄν προσθέσουμε τά ἐμβαδά τοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ καί τοῦ τριγώνου ΑΕΔ. Ἄν λοιπόν εἶναι (ΒΓ) = 2 cm, (ΑΔ) = 4 cm, (ΓΖ) = 1,5 cm καί (ΕΗ) = 2 cm, θά ἔχουμε



(σχ. 22)

$$(ΑΒΓΔ) = \frac{1}{2}(ΒΓ + ΑΔ) \cdot (ΓΖ) = \frac{1}{2}(2+4) \cdot 1{,}5 = 4{,}5\ \text{cm}^2$$

$$(ΑΕΔ) = \frac{1}{2}(ΑΔ) \cdot (ΗΕ) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4\ \text{cm}^2$$

Ἑπομένως $(ΑΒΓΔΕ) = 4{,}5 + 4 = 8{,}5\ \text{cm}^2$

(1) Τό ἐμβαδό ἑνός πολυγώνου ΑΒΓΔ... θά σημειώνεται (ΑΒΓΔ...).

■ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά δείξετε ὅτι κάθε διάμεσος τριγώνου χωρίζει γενικά τό τρίγωνο σέ δύο (ἄνισα) τρίγωνα ἰσοδύναμα.**

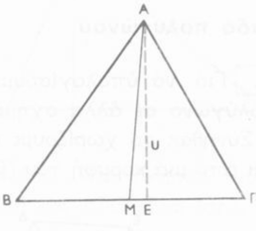
Λύση. Ὀνομάζουμε $(ΒΓ) = α$ καί ὕψος $(ΑΕ) = υ$. Τά τρίγωνα ΑΒΜ καί ΑΜΓ ἔχουν τό ἴδιο ὕψος (τό υ) καί βάσεις τίς ΒΜ καί ΜΓ. Ἀλλά $(ΒΜ)=(ΜΓ)=\frac{α}{2}$.

Ἑπομένως εἶναι

$$(ΑΒΜ) = \frac{1}{2}(ΒΜ).(ΑΕ) = \frac{1}{2}.\frac{α}{2}.υ = \frac{1}{4}α.υ$$

$$(ΑΜΓ) = \frac{1}{2}(ΜΓ).(ΑΕ) = \frac{1}{2}.\frac{α}{2}.υ = \frac{1}{4}α.υ$$

Συνεπῶς εἶναι $(ΑΒΜ) = (ΑΜΓ)$, δηλαδή ἡ διάμεσος ΑΜ χώρισε τό τρίγωνο σέ δύο ἰσοδύναμα τρίγωνα.

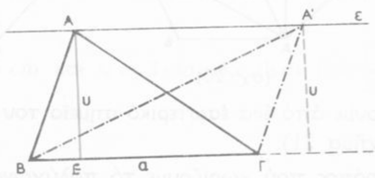


(σχ. 23)

2. **Νά δείξετε ὅτι, ὅταν ἡ κορυφή Α ἑνός τριγώνου ΑΒΓ κινεῖται σέ μιά εὐθεία παράλληλη πρός τή ΒΓ, τό ἐμβαδό τοῦ ΑΒΓ δέ μεταβάλλεται.**

Λύση. Τό τρίγωνο ΑΒΓ ἔχει βάση $(ΒΓ)=α$ καί ὕψος $(ΑΕ)=υ$ (υ εἶναι ἡ ἀπόσταση τῶν δύο παραλλήλων).
Συνεπῶς τό ἐμβαδό του εἶναι

$$Ε = \frac{1}{2}\ α.υ$$



(σχ. 24)

Καθώς τώρα κινεῖται ἡ κορυφή Α στήν εὐθεία ε, οὔτε ἡ βάση τοῦ τριγώνου μεταβάλλεται οὔτε τό ὕψος του (βάση παραμένει πάντοτε ἡ $(ΒΓ)=α$ καί ὕψος ἡ ἀπόσταση υ τῶν δύο παραλλήλων). Ἑπομένως δέ μεταβάλλεται οὔτε τό ἐμβαδό τοῦ τριγώνου.

3. **Ἕνας ρόμβος ἔχει διαγωνίους 6 cm καί 4 cm. Νά ὑπολογίσετε τό ἐμβαδό του.**
(Νά γενικευθεῖ τό συμπέρασμα γιά διαγωνίους λ καί μ cm).

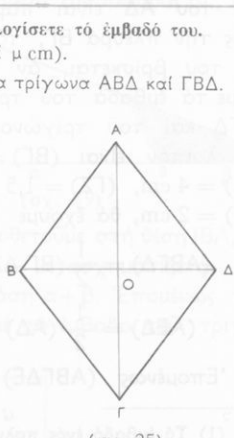
Λύση. Ἡ διαγώνιος ΒΔ χωρίζει τό ρόμβο σέ δύο ἴσα τρίγωνα ΑΒΔ καί ΓΒΔ. Ξέρουμε ὅτι οἱ διαγώνιοι τοῦ ρόμβου εἶναι κάθετες.
Ἔτσι, τό ΑΟ εἶναι ὕψος τοῦ τριγώνου ΑΒΔ καί συνεπῶς ἔχουμε:

$$(ΑΒΔ) = \frac{1}{2}(ΒΔ).(ΑΟ) = \frac{1}{2}4 . 6/2 = 6\ cm^2$$

Ἑπομένως $(ΑΒΓΔ) = 2.6 = 12\ cm^2$.
Ἄν τώρα οἱ διαγώνιοι εἶναι λ καί μ cm, θά ἔχουμε

$$(ΑΒΔ)=\frac{1}{2}(ΒΔ).(ΑΟ)=\frac{1}{2}.λ.\frac{μ}{2}=\frac{1}{4}λ.μ \text{ καί}$$

$(ΑΒΓΔ) = 2\cdot\frac{1}{4}λ.μ = \frac{1}{2}λ.μ$, δηλαδή, **τό ἐμβαδό ρόμβου εἶναι ἴσο μέ τό μισό τοῦ γινομένου τῶν διαγωνίων του.**



(σχ. 25)

13. Νά βρεῖτε τό ἐμβαδό ἑνός τριγώνου ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρά ΒΓ εἶναι 12 cm καί τό ὕψος, πού ἀντιστοιχεῖ στή ΒΓ, εἶναι 8 cm.

14. Στό τρίγωνο τῆς προηγούμενης ἀσκήσεως ἡ πλευρά ΑΓ εἶναι 16 cm. Νά βρεῖτε τό ὕψος, πού ἀντιστοιχεῖ στήν ΑΓ.

15. Τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι ἰσοδύναμο μέ τετράγωνο πλευρᾶς 8 cm. Νά βρεῖτε τήν πλευρά ΒΓ, ἄν τό ἀντίστοιχο ὕψος εἶναι 10 cm.

16. Νά βρεῖτε τό ἐμβαδό ὀρθογώνιου τριγώνου, τοῦ ὁποίου οἱ κάθετες πλευρές εἶναι 5 cm καί 8 cm.

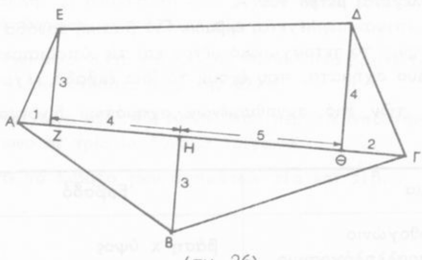
17. Νά βρεῖτε τό ἐμβαδό ἑνός τραπεζίου, τό ὁποῖο ἔχει βάσεις 6 cm καί 4 cm καί ὕψος 3 cm.

18. Νά βρεῖτε τό ὕψος ἑνός τραπεζίου, τοῦ ὁποίου οἱ βάσεις εἶναι 10 cm καί 6 cm κα τό ἐμβαδό 40 cm^2.

19. Ἕνα ἀγρόκτημα ἔχει σχῆμα τραπεζίου μέ βάσεις 140 m καί 80 m καί ὕψος 56 m. Πόσα θά εἰσπράξει ὁ ἰδιοκτήτης του, ἄν τό πουλήσει πρός 7.200 δρχ. τό στρέμμα;

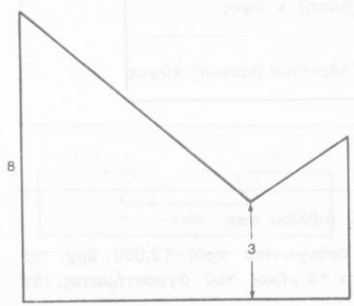
20. Ἕνας ρόμβος ἔχει ἐμβαδό 60 cm^2. Ἡ μία διαγώνιός του εἶναι 12 cm. Νά ὑπολογίσετε τήν ἄλλη διαγώνιο.

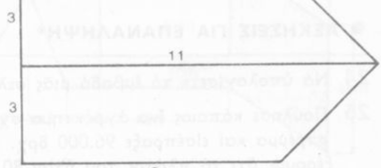
21. Νά ὑπολογίσετε τό ἐμβαδό τοῦ πενταγώνου ΑΒΓΔΕ τοῦ σχήματος 26.



(σχ. 26)

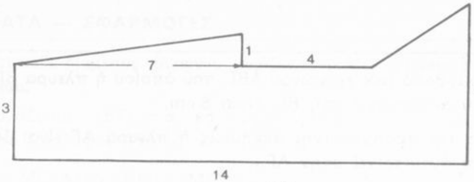
22. Νά ὑπολογίσετε τά ἐμβαδά τῶν σχημάτων 27 καί 28.



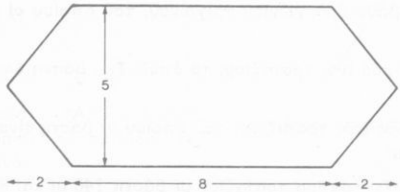


(σχ. 27) (σχ. 28)

23. Νά ὑπολογίσετε τό ἐμβαδό τῶν σχημάτων 29 καί 29α.



(σχ. 29)



(σχ. 29α)

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 6

1. Γιά νά μετρήσουμε ένα μέγεθος Α, τό συγκρίνουμε μέ ένα όμοειδές του μέγεθος Μ, πού λέγεται **μονάδα μετρήσεως**. Ό άριθμός πού προκύπτει άπό τή σύγκριση αύτή, λέγεται **μέτρο** τοῦ Α.

Τό μέτρο μιᾶς έπιφάνειας λέγεται **έμβαδό**. Γιά βασική μονάδα μετρήσεως τῶν έπιφανειῶν παίρνουμε τό τετραγωνικό μέτρο καί τίς ύποδιαιρέσεις ἤ τά πολλαπλάσιά του. Δύο σχήματα, πού έχουν τό ἴδιο έμβαδό, λέγονται **ίσοδύναμα**.

2. Τά έμβαδά τῶν πιό συνηθισμένων σχημάτων δίνονται στόν παρακάτω πίνακα.

Σχῆμα	Ἐμβαδό
— Ὀρθογώνιο — Παραλληλόγραμμο	βάση x ὕψος
Τρίγωνο	$\frac{1}{2}$ (βάση) x ὕψος
Τραπέζιο	$\frac{1}{2}$ (ἄθροισμα βάσεων) xὕψος

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ*

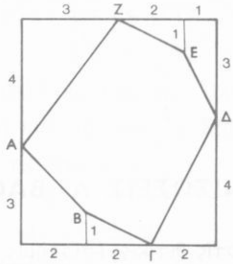
24. Νά ύπολογίσετε τό έμβαδό μιᾶς σελίδας τοῦ βιβλίου σας.

25. Πούλησε κάποιος ένα άγρόκτημα σχήματος όρθογωνίου πρός 12.000 δρχ. τό στρέμμα καί είσέπραξε 96.000 δρχ. Νά βρεῖτε τό μῆκος τοῦ άγροκτήματος, ἄν ξέρουμε ὅτι τό πλάτος του ἦταν 80 m.

26. Ένα τρίγωνο καί ένα παραλληλόγραμμο εἶναι ίσοδύναμα καί έχουν τήν ἴδια βάση.

Τό ὕψος τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι 6 cm. Πόσο εἶναι τό ὕψος τοῦ τριγώνου;

27. Στό σχῆμα 30 νά ὑπολογίσετε τό ἐμβαδό τοῦ ἑξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ.



(σχ. 30)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ**

28. Τί παθαίνει τό ἐμβαδό ἑνός τριγώνου, ἄν διπλασιασθεῖ ἡ βάση του καί τό ὕψος του γίνει τό μισό;

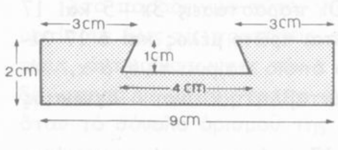
29. Ἕνα παραλληλόγραμμο εἶναι ἰσοδύναμο μέ τετράγωνο πλευρᾶς 7 cm καί ἔχει περίμετρο 28 cm. Νά βρεῖτε τήν ἀπόσταση τῶν μεγαλύτερων πλευρῶν τοῦ παραλληλογράμμου, ἄν ξέρετε ὅτι ἡ μιά πλευρά του εἶναι 6 cm.

30. Ἕνα παραλληλόγραμμο ἔχει περίμετρο 42 cm καί ἡ μιά πλευρά του εἶναι διπλάσια ἀπό τήν ἄλλη. Ἡ ἀπόσταση τῶν μεγαλύτερων πλευρῶν του εἶναι 3,5 cm. Πόση εἶναι ἡ ἀπόσταση τῶν ἄλλων πλευρῶν του;

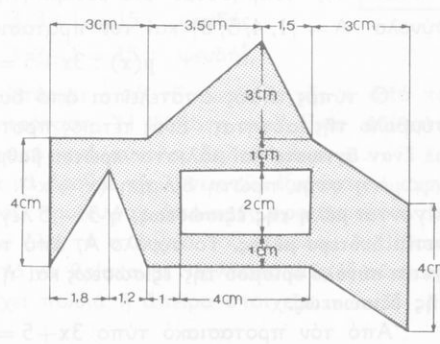
31. Ἕνα τραπέζιο ἔχει ὕψος 8 cm καί ἐμβαδό 96 cm^2. Νά βρεῖτε τίς βάσεις του, ἄν ξέρετε ὅτι ἡ μιά εἶναι διπλάσια ἀπό τήν ἄλλη.

32. Θεωροῦμε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ. Μέ εὐθεῖες πού περνᾶνε ἀπό τήν κορυφή Α, νά χωρίσετε τό τρίγωνο σέ τρία ἰσοδύναμα τρίγωνα.

33. Νά ὑπολογίσετε τό ἐμβαδό τῶν σχημάτων 31α καί 31β.



(σχ. 31α)



(σχ. 31β)

7ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ Α΄ ΒΑΘΜΟΥ

7.1. Πολλοί νόμοι στίς θετικές ἐπιστῆμες διατυπώνονται σύντομα καί ξεκάθαρα μέ ἐξισώσεις. Μιά τέτοια πολύ γνωστή ἐξίσωση εἶναι ὁ τύπος τοῦ Einstein

$$\boxed{E = mc^2}$$

πού χαρακτήρισε τόν αἰώνα μας σάν ἀτομικό. Ἡ ἐξίσωση αὐτή μᾶς δίνει τήν ἐνέργεια E πού προκύπτει ἀπό τή διάσπαση μάζας m. Τό c εἶναι ἡ ταχύτητα μέ τήν ὁποία κινεῖται τό φῶς.

Γιά νά βροῦμε πόση μάζα πρέπει νά διασπάσουμε, γιά νά πάρουμε μιά ὁρισμένη ποσότητα ἐνέργειας, πρέπει ἀπό τήν ἐξίσωση $E = mc^2$ νά ὑπολογίσουμε τή μάζα m, ὅταν ξέρουμε τήν ἐνέργεια E. Πρέπει δηλαδή, ὅπως λέμε, νά «λύσουμε» τήν ἐξίσωση αὐτή ὡς πρός m. Γιά νά καταλαβαίνουμε λοιπόν σωστά τούς διάφορους νόμους, πού ἰσχύουν στίς θετικές ἐπιστῆμες καί νά λύνουμε πολλά ἄλλα ἀνάλογα προβλήματα πού μᾶς παρουσιάζονται, πρέπει νά μελετήσουμε τίς ἐξισώσεις.

Ἐξίσωση α΄ βαθμοῦ μ' ἕναν ἄγνωστο.

7.2. Ἄς θεωρήσουμε μιά μεταβλητή x, πού παίρνει τιμές ἀπό τό σύνολο $A = \{1, 4, 5, 8\}$ καί τόν προτασιακό τύπο

$$p(x) : 3x + 5 = 17$$

Ὁ τύπος αὐτός ἀποτελεῖται ἀπό δυό μέρη, πού συνδέονται μέ τό σύμβολο τῆς ἰσότητας. Ἕνας τέτοιος προτασιακός τύπος λέγεται **ἐξίσωση μέ ἕναν ἄγνωστο** καί μάλιστα **πρώτου βαθμοῦ,** γιατί ἡ μεταβλητή x εἶναι ὑψωμένη στήν πρώτη δύναμη ($x = x^1$). Οἱ παραστάσεις $3x+5$ καί 17 λέγονται **μέλη τῆς ἐξισώσεως,** ἡ $3x+5$ λέγεται **πρῶτο μέλος** καί ὁ 17 λέγεται **δεύτερο μέλος.** Τό σύνολο A, ἀπό τό ὁποῖο παίρνει τιμές ὁ x, λέγεται **σύνολο ὁρισμοῦ** τῆς ἐξισώσεως καί ἡ μεταβλητή x εἶναι ὁ **ἄγνωστος τῆς ἐξισώσεως.**

Ἀπό τόν προτασιακό τύπο $3x+5 = 17$ παίρνουμε τίς παρακάτω προτάσεις:

$x=1 \quad , \quad 3\cdot 1+5=17$ ψευδής,

$x=4 \quad , \quad 3\cdot 4+5=17$ **ἀληθής**,

$x=5 \quad , \quad 3\cdot 5+5=17$ ψευδής,

$x=8 \quad , \quad 3\cdot 8+5=17$ ψευδής

Ἡ τιμή $x=4$ τῆς μεταβλητῆς, πού δίνει ἀληθή πρόταση, λέγεται **λύση** ἤ **ρίζα** τῆς ἐξισώσεως καί τό σύνολο $E\{4\}$ λέγεται **σύνολο λύσεων**.

7.3. Ἄς θεωρήσουμε τίς ἐξισώσεις

α. $2x-3=1$ β. $x^2=4$ γ. $3x+1=15$

μέ σύνολο ὁρισμοῦ τό $A=\{1, -2, 3, 2\}$

Γιά τήν ἐξίσωση α ἔχουμε:

$x=1 \quad , \quad 2\cdot 1-3=1$ ψευδής,

$x=-2 \quad , \quad 2(-2)-3=1$ ψευδής,

$x=3 \quad , \quad 2\cdot 3-3=1$ ψευδής,

$x=2 \quad , \quad 2\cdot 2-3=1$ ἀληθής,

δηλαδή $x=2$ εἶναι λύση τῆς ἐξισώσεως καί $L=\{2\}$.

Γιά τήν ἐξίσωση β ἔχουμε:

$x=1 \quad , \quad 1^2=4$ ψευδής,

$x=-2 \quad , \quad (-2)^2=4$ ἀληθής,

$x=3 \quad , \quad 3^2=4$ ψευδής,

$x=2 \quad , \quad 2^2=4$ ἀληθής,

δηλαδή $x=-2$ καί $x=2$ εἶναι λύσεις τῆς ἐξισώσεως καί $L=\{-2,2\}$.

Γιά τήν ἐξίσωση γ ἔχουμε:

$x=1 \quad , \quad 3\cdot 1+1=15$ ψευδής,

$x=-2 \quad , \quad 3\cdot(-2)+1=15$ ψευδής,

$x=3 \quad , \quad 3\cdot 3+1=15$ ψευδής,

$x=2 \quad , \quad 3\cdot 2+1=15$ ψευδής,

δηλαδή παρατηροῦμε ὅτι δέν ὑπάρχει τιμή τῆς μεταβλητῆς x ἀπό τό σύνολο A, πού νά δίνει ἀληθή πρόταση. Ἡ ἐξίσωση αὐτή εἶναι **ἀδύνατη** στό A, καί ἔχει σύνολο λύσεων τό κενό σύνολο, δηλαδή $L=\varnothing$.

Στό παράδειγμα αὐτό, γιά νά βροῦμε τίς λύσεις τῶν ἐξισώσεων, σχηματίσαμε ὅλες τίς προτάσεις, πού προέκυψαν ἀπό τούς προτασιακούς τύπους, ἀντικαθιστώντας τόν x μέ ὅλα τά στοιχεῖα τοῦ συνόλου A. Βέβαια δέν μποροῦμε μέ τόν τρόπο αὐτό νά βρίσκουμε τίς λύσεις μιᾶς ἐξισώσεως, ὅταν τό σύνολο ὁρισμοῦ της ἔχει πολλά ἤ ἄπειρα στοιχεῖα.

Ἰσοδύναμες ἐξισώσεις.

7.4. Ἄς θεωρήσουμε τίς ἐξισώσεις

α. $3x-1=8$ γ. $\frac{x}{2}+\frac{1}{2}=2$

β. $3x+2=5x-4$ δ. $x=3$

μέ σύνολο ὁρισμοῦ γιά ὅλες τό $A=\{0,1,2,3,4\}$.

Ἀντικαθιστώντας στή θέση τοῦ x τιμές ἀπό τό σύνολο A εὔκολα διαπιστώνουμε ὅτι ὅλες αὐτές οἱ ἐξισώσεις ἔχουν τήν ἴδια λύση $x=3$. Οἱ ἐξισώσεις αὐτές λέγονται **ἰσοδύναμες**. Γενικά:

> Δυό ἤ περισσότερες ἐξισώσεις λέγονται ἰσοδύναμες, ὅταν ἔχουν ὅλες τό ἴδιο σύνολο λύσεων.

Γιά νά σημειώσουμε ὅτι δυό ἐξισώσεις εἶναι ἰσοδύναμες, γράφουμε ἀνάμεσά τους τό σύμβολο ⇔, ἔτσι π.χ γράφουμε

$$3x-1=8 \Leftrightarrow x=3.$$

Ἀπό τίς παραπάνω ἰσοδύναμες ἐξισώσεις ἡ ἐξίσωση $x=3$ ἔχει τήν πιό ἁπλή μορφή, ἀπό τήν ὁποία καταλαβαίνουμε ἀμέσως τή λύση της. Ἑπομένως, εὔκολα θά μποροῦμε νά λύσουμε μιά ἐξίσωση, ἄν μποροῦμε νά βροῦμε μιά ἰσοδύναμή της πού ἔχει τήν ἁπλή αὐτή μορφή. Γιά τό σκοπό αὐτό εἶναι χρήσιμο νά ἐπαναλάβουμε δύο βασικές ἰδιότητες τῆς ἰσότητας στό σύνολο τῶν ρητῶν ἀριθμῶν.

Ἄν α, β, καί γ εἶναι ρητοί ἀριθμοί, ἔχουμε:

$$\boxed{\alpha=\beta \Leftrightarrow \alpha+\gamma=\beta+\gamma}$$

δηλαδή, **ἄν στά μέλη μιᾶς ἰσότητας προσθέσουμε τόν ἴδιο ἀριθμό, προκύπτει νέα ἰσότητα.** Ἐπίσης

$$\boxed{\alpha=\beta \Leftrightarrow \alpha\cdot\gamma=\beta\cdot\gamma} \quad (\gamma\neq 0)$$

δηλαδή, **ἄν τά μέλη μιᾶς ἰσότητας πολλαπλασιασθοῦν ἤ διαιρεθοῦν μέ τόν ἴδιο ἀριθμό (διαφορετικό ἀπό τό μηδέν), προκύπτει νέα ἰσότητα.** Μέ τή βοήθεια τῶν ἰδιοτήτων αὐτῶν λύνουμε εὔκολα ἐξισώσεις πρώτου βαθμοῦ.

Λύση ἐξισώσεως α΄ βαθμοῦ.

7.5. Ἄς θεωρήσουμε τήν ἐξίσωση

$$7x+3=17$$

ὁρισμένη στό Q. Ἀφαιροῦμε ἀπό τά δυό μέλη της τόν 3 καί ἔχουμε

$$7x+3=17 \Leftrightarrow 7x+3-\mathbf{3}=17-\mathbf{3}$$
$$\Leftrightarrow 7x=14$$

Διαιροῦμε τά δύο μέλη της μέ 7 καί ἔχουμε

$$7x = 14 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{7x}{7} = \frac{14}{7} \Leftrightarrow x = 2$$

δηλαδή σύνολο λύσεων εἶναι τό $L = \{2\}$.

Παρατηροῦμε ὅτι ἡ ἰσοδύναμη ἐξίσωση $7x = 17-3$ προκύπτει ἀπό τήν ἀρχική ἐξίσωση, ἄν μεταφέρουμε τόν ὅρο $+3$ ἀπό τό πρῶτο μέλος της στό δεύτερο μέ ἀντίθετο πρόσημο. Ἔχουμε ἑπομένως τό πρακτικό συμπέρασμα:

> Ἀπό μιά ἐξίσωση προκύπτει ἰσοδύναμη ἐξίσωση, ὅταν μεταφέρουμε ἕναν ὅρο ἀπό τό ἕνα μέλος της στό ἄλλο ἀλλάζοντας τό πρόσημό του.

7.6. Ἄς λύσουμε στό σύνολο Q τῶν ρητῶν ἀριθμῶν τήν ἐξίσωση

$$3x-2 = 5x+8$$

Σύμφωνα μέ τό προηγούμενο συμπέρασμα ἔχουμε διαδοχικά

$$3x-2 = 5x+8 \Leftrightarrow 3x-5x = 8+2 \Leftrightarrow -2x = 10.$$

Πολλαπλασιάζουμε τά δυό μέλη της ἐπί -1 καί ἔχουμε

$$\begin{aligned} -2x = 10 \quad &\Leftrightarrow \quad (-2x)\cdot(-1) = 10\cdot(-1) \\ &\Leftrightarrow \quad 2x = -10 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{2x}{2} = -\frac{10}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad x = -5 \end{aligned}$$

δηλαδή σύνολο λύσεων εἶναι τό $L = \{-5\}$.

7.7. Ἄς λύσουμε στό Q τήν ἐξίσωση

$$\frac{x+1}{2} - \frac{x}{3} = \frac{3}{4}$$

Ὅταν στά μέλη μιᾶς ἐξισώσεως ὑπάρχουν κλάσματα, φροντίζουμε νά βροῦμε μιά ἰσοδύναμη ἐξίσωση χωρίς κλάσματα καί αὐτό λέγεται *ἀπαλοιφή τῶν παρονομαστῶν*. Γιά τό σκοπό αὐτό βρίσκουμε τό Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν καί πολλαπλασιάζουμε τά μέλη τῆς ἐξισώσεως μέ τό Ε.Κ.Π. Ἔτσι, ἐπειδή Ε.Κ.Π. τῶν 2,3 καί 4 εἶναι τό 12, ἔχουμε

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{2} - \frac{x}{3} = \frac{3}{4} &\Leftrightarrow 12\cdot\frac{x+1}{2} - 12\cdot\frac{x}{3} = 12\cdot\frac{3}{4} \\ &\Leftrightarrow 6(x+1) - 4x = 3\cdot 3 \\ &\Leftrightarrow 6x+6-4x = 9 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 6x - 4x = 9 - 6$$
$$\Leftrightarrow 2x = 3$$
$$\Leftrightarrow \frac{2x}{2} = \frac{3}{2}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

δηλαδή σύνολο λύσεων εἶναι τό $L = \left\{\frac{3}{2}\right\}$

7.8. Ἀπό τά παραπάνω παραδείγματα προκύπτει ὅτι μιά ἐξίσωση α' βαθμοῦ εἶναι πάντοτε ἰσοδύναμη μέ μιά ἐξίσωση τῆς μορφῆς

$$\boxed{\alpha \cdot x = \beta}$$

ὅπου α,β εἶναι γνωστοί ρητοί ἀριθμοί καί x εἶναι ὁ ἄγνωστος.

Γιά τήν ἐξίσωση $\alpha . x = \beta$ ἔχουμε:

- Ἄν εἶναι $\alpha \neq 0$, τότε $x = \frac{\beta}{\alpha}$
- Ἄν εἶναι $\alpha = 0$ καί $\beta \neq 0$, ἡ ἐξίσωση γίνεται $0 . x = \beta$ καί ἐπειδή δέν ὑπάρχει ρητός ἀριθμός x πού νά τήν ἐπαληθεύει, λέμε ὅτι ἡ ἐξίσωση εἶναι **ἀδύνατη** (σύνολο λύσεών της εἶναι τό κενό σύνολο).
- Ἄν εἶναι $\alpha = 0$ καί $\beta = 0$, ἡ ἐξίσωση γίνεται $0 . x = 0$ καί ἐπειδή γιά κάθε ρητό ἀριθμό x ἰσχύει ἡ ἰσότητα αὐτή, λέμε ὅτι ἡ ἐξίσωση εἶναι **ἀόριστη** ἤ ὅτι εἶναι *«ταυτότητα»* (σύνολο λύσεών της εἶναι τό σύνολο ὁρισμοῦ τοῦ x).

Ἀπό τά προηγούμενα καταλαβαίνουμε ὅτι γιά νά λύσουμε μιά ἐξίσωση α' βαθμοῦ κάνουμε τίς ἑξῆς ἐργασίες:

- Ἀπαλείφουμε τούς παρονομαστές (ἄν ὑπάρχουν) πολλαπλασιάζοντας καί τά δύο μέλη μέ τό Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν.
- Ἐξαλείφουμε τίς παρενθέσεις (ἄν ὑπάρχουν) κάνοντας τίς πράξεις πού εἶναι σημειωμένες.
- Μεταφέρουμε τούς ὅρους, πού περιέχουν τόν ἄγνωστο, στό ἕνα μέλος καί τούς ὑπόλοιπους ὅρους στό ἄλλο μέλος (χωρίζουμε, ὅπως λέμε, τούς γνωστούς ὅρους ἀπό τούς ἀγνώστους).
- Κάνοντας τίς προσθέσεις καί ἀφαιρέσεις πού εἶναι σημειωμένες (δηλαδή κάνοντας ἀναγωγή ὅμοιων ὅρων) καταλήγουμε στή μορφή $\alpha . x = \beta$.

• Διαιροῦμε καί τά δύο μέλη τῆς $\alpha \cdot x = \beta$ μέ τόν ἀριθμό $\alpha \neq 0$ καί βρίσκουμε γιά ρίζα τήν $x = \dfrac{\beta}{\alpha}$.

Πολλές φορές κάνουμε καί «ἐπαλήθευση», γιά νά διαπιστώσουμε ἄν ἡ ρίζα πού βρήκαμε ἐπαληθεύει τήν ἀρχική μας ἐξίσωση. Ἔτσι π.χ. γιά νά διαπιστώσουμε ἄν ἡ τιμή $x=3/2$ πού βρήκαμε στήν § 7.7 εἶναι πράγματι ρίζα τῆς ἐξισώσεως

$$\frac{x+1}{2} - \frac{x}{3} = \frac{3}{4}$$

βάζουμε στή θέση τοῦ x τό 3/2 καί βρίσκουμε

$$\frac{\frac{3}{2}+1}{2} - \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{3}{4} \quad \text{ἤ} \quad \frac{\frac{5}{2}}{2} - \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{3}{4} \quad \text{ἤ} \quad \frac{5}{4} - \frac{3}{6} = \frac{3}{4}$$

$$\text{ἤ} \quad \frac{15}{12} - \frac{6}{12} = \frac{3}{4} \quad \text{ἤ} \quad \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

Πραγματικά λοιπόν ἡ τιμή $x = \dfrac{3}{2}$ εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως.

Ἐφαρμογή στή λύση προβλημάτων.

7.9. Μποροῦμε, τώρα, χρησιμοποιώντας ἐξισώσεις α' βαθμοῦ νά λύνουμε διάφορα προβλήματα. Γιά τή λύση τῶν προβλημάτων πρέπει νά ἔχουμε ὑπόψη μας τά ἑξῆς:

— Διαβάζουμε τό πρόβλημα προσεκτικά καί ὄχι μόνο μιά φορά.
— Συμβολίζουμε μέ ἕνα γράμμα, π.χ. μέ x, τό ζητούμενο τοῦ προβλήματος.
— Ὁρίζουμε τό σύνολο, στό ὁποῖο πρέπει ν' ἀνήκει ὁ ἄγνωστος.
— Γράφουμε, χρησιμοποιώντας μαθηματικά σύμβολα, τά δεδομένα καί τά ζητούμενα τοῦ προβλήματος.
— Σχηματίζουμε μιά ἐξίσωση μέ αὐτά, σύμφωνα μέ τίς ἐπιταγές τοῦ προβλήματος.
— Λύνουμε τήν ἐξίσωση.
— Ἐλέγχουμε ἄν ἡ λύση πού βρήκαμε ἱκανοποιεῖ τίς ἐπιταγές τοῦ προβλήματος.

Στά παραδείγματα πού ἀκολουθοῦν ἐξηγεῖται ὅλη αὐτή ἡ διαδικασία.

■ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά βρεθεῖ ἕνας ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τό διπλάσιο, ὅταν αὐξηθεῖ κατά 5, γίνεται ἴσο μέ τό τριπλάσιό του ἐλαττωμένο κατά 2.**

Λύση. Ἄς ὀνομάσουμε x τό ζητούμενο ἀριθμό, ὅπου $x \in Q$. Τό διπλάσιο τοῦ ἀριθμοῦ, αὐξημένο κατά 5 εἶναι: $2x+5$. Τό τριπλάσιο τοῦ ἀριθμοῦ, ἐλαττωμένο κατά 2 εἶναι: $3x-2$. Σύμφωνα μέ τήν ἐπιταγή τοῦ προβλήματος ἔχουμε τήν ἐξίσωση

$$2x+5 = 3x-2$$

πού γράφεται διαδοχικά:

$$\begin{aligned} 2x-3x &= -2-5 \\ -x &= -7 \\ x &= 7. \end{aligned}$$

Δηλαδή, ζητούμενος ἀριθμός εἶναι ὁ 7.

Ἐπαλήθευση: $2.7+5 = 14+5 = 19$ καί $3.7-2 = 21-2 = 19$.

---

2. **Ἕνα Γυμνάσιο ἔχει 350 μαθητές. Ἡ Α΄ τάξη ἔχει 20 μαθητές περισσότερους ἀπό τή Β΄ καί ἡ Γ΄ τάξη ἔχει 12 μαθητές λιγότερους ἀπό τή Β΄. Πόσους μαθητές ἔχει κάθε τάξη τοῦ Γυμνασίου;**

Λύση. Στό πρόβλημα αὐτό ἔχουμε τρεῖς ἄγνωστους. Θά συμβολίσουμε μέ x τόν ἕνα ἄγνωστο καί θά προσπαθήσουμε νά ἐκφράσουμε τούς ἄλλους μέ τή βοήθεια τοῦ x. Ἄν εἶναι x οἱ μαθητές τῆς Β΄ τάξεως, τότε $x+20$ θά εἶναι οἱ μαθητές τῆς Α΄ καί $x-12$ οἱ μαθητές τῆς Γ΄. Ὁ ἄγνωστος x παριστάνει ἀριθμό μαθητῶν, ἑπομένως πρέπει νά εἶναι ὁ x φυσικός ἀριθμός μικρότερος ἀπό 351. Ἀλλά καί $x-12$ παριστάνει ἀριθμό μαθητῶν, ἑπομένως πρέπει $x > 12$. Ὥστε ὁ x πρέπει ν' ἀνήκει στό σύνολο $\{13, 14, 15, \ldots, 350\}$.

Σύμφωνα μέ τά δεδομένα τοῦ προβλήματος ἔχουμε τήν ἐξίσωση:

$$(x+20) + x + (x-12) = 350$$

πού γράφεται διαδοχικά

$$\begin{aligned} x+20+x+x-12 &= 350 \\ x+x+x &= 350-20+12 \\ 3x &= 342 \\ x &= \frac{342}{3} = 114 \end{aligned}$$

Συνεπῶς:

ἡ Β΄ τάξη ἔχει 114 μαθητές

ἡ Α΄ τάξη ἔχει $114+20 = 134$ μαθητές καί

ἡ Γ΄ τάξη ἔχει $114-12 = 102$ μαθητές.

---

3. **Τό ἐνοίκιο ἑνός διαμερίσματος αὐξήθηκε ἀπό 2800 δρχ. σέ 4.200 δρχ. Πόση εἶναι ἡ ἑκατοστιαία αὔξηση;**

Λύση. Ἄς εἶναι x ἡ ἑκατοστιαία αὔξηση. Ὁ x πρέπει νά εἶναι θετικός ἀριθμός. Ἡ διαφορά ἀνάμεσα στά δυό ἐνοίκια εἶναι

$$4200 - 2800 = 1400.$$

Ἀφοῦ ἡ ἑκατοστιαία αὔξηση εἶναι x, ἡ αὔξηση γιά μιά δραχμή θά εἶναι $x/100$ καί γιά 2800 δρχ. θά εἶναι $(x/100) \cdot 2800 = 28x$. Ἔχουμε ἑπομένως τήν ἐξίσωση

$$28x = 1400 \Leftrightarrow x = \frac{1400}{28} \Leftrightarrow x = 50.$$

Ὥστε ἡ αὔξηση εἶναι 50%.

---

4. Ένας λογαριασμός τῆς Δ.Ε.Η εἶναι 1595 δρχ. Ἀπό τό ποσό αὐτό οἱ 287 δρχ. εἶναι δημοτικά τέλη καί εἰσφορά στήν Ε.Ρ.Τ. Ἄν ἡ κατανάλωση ρεύματος ἐπιβαρύνεται μέ φόρο 9%, ποιά εἶναι ἡ πραγματική ἀξία τοῦ ρεύματος πού καταναλώθηκε;

Λύση. Ἔστω x ἡ ἀξία τοῦ ρεύματος πού καταναλώθηκε. Ὁ x πρέπει νά εἶναι θετικός ἀριθμός μικρότερος ἀπό 1595 δρχ. Ὁ φόρος μέ τόν ὁποῖο ἐπιβαρύνεται ὁ λογαριασμός εἶναι $x \cdot \frac{9}{100} = \frac{9x}{100}$. Ἔχουμε, ἑπομένως τήν ἐξίσωση

$$x+\frac{9x}{100}=1595-287 \Leftrightarrow x+\frac{9x}{100}=1308 \Leftrightarrow 100x+9x=130800 \Leftrightarrow$$

$$109x=130800 \Leftrightarrow x=\frac{130800}{109} \Leftrightarrow x=1200$$

Ὥστε ἡ πραγματική ἀξία τοῦ ρεύματος πού καταναλώθηκε ἦταν 1200 δρχ.

---

5. Πόσα κιλά ψευδάργυρου πρέπει νά συντήξουμε μέ 140 κιλά χαλκοῦ, ὥστε νά πάρουμε ἕνα κράμα πού νά περιέχει 44% ψευδάργυρο καί 56% χαλκό;

Λύση. Ἄν εἶναι x τά κιλά τοῦ ψευδάργυρου, ὁ x πρέπει νά εἶναι θετικός ἀριθμός. Ὅλο τό κράμα θά εἶναι 140+x κιλά. Ὁ χαλκός πού περιέχεται στό κράμα εἶναι

$$(140+x)\cdot\frac{56}{100}.$$

Ἔχουμε ἑπομένως τήν ἐξίσωση

$$(140+x)\cdot\frac{56}{100}=140 \Leftrightarrow (140+x)\cdot 56=14000 \Leftrightarrow 7840+56x=14000 \Leftrightarrow$$

$$56x=14000-7840 \Leftrightarrow 56x=6160 \Leftrightarrow x=\frac{6160}{56}=110.$$

Ὥστε χρειάζεται 110 κιλά ψευδάργυρου.

---

6. Ἄς παίξουμε τό ἑξῆς μαθηματικό παιχνίδι:

	Π.χ.
Σκέψου ἕναν ἀριθμό.	10
Διπλασίασε τόν ἀριθμό.	$10.2=20$
Πρόσθεσε 4.	$20+4=24$
Τριπλασίασε τόν ἀριθμό πού βρῆκες.	$24.3=72$
Διαίρεσε μέ 6.	$72:6=12$
Ἀφαίρεσε τόν ἀριθμό πού σκέφθηκες.	$12-10=2$

Βρῆκες σάν ἀποτέλεσμα τόν ἀριθμό 2.

Ἄν κάνεις τά ἴδια καί μέ ἄλλον ἀριθμό θά βρεῖς πάλι 2. Γιατί;

Ἄς προσπαθήσουμε νά σχηματίσουμε μιά ἐξίσωση ἡ ὁποία νά περιγράφει τίς πράξεις πού ἀναφέραμε γιά ἕναν ὁποιονδήποτε ἀριθμό $x \in Q$. Ἔχουμε:

$$\frac{(2x+4).3}{6}-x=2 \Leftrightarrow \frac{2x+4}{2}-x=2 \Leftrightarrow 2x+4-2x=4 \Leftrightarrow$$

$$2x-2x=4-4 \Leftrightarrow 0.x=0.$$

Ἡ ἐξίσωση αὐτή εἶναι ἀόριστη, ἔχει δηλαδή σύνολο λύσεων ὅλους τούς ρητούς ἀριθμούς. Ὥστε μέ ὁποιονδήποτε ἀριθμό καί ἄν ξεκινήσουμε τό παιχνίδι, βρίσκουμε πάντοτε 2.

---

7. Ἕνας ἐργάτης ἐκτελεῖ ἕνα ἔργο σέ 8 ὧρες καί ἕνας ἄλλος ἐκτελεῖ τό ἴδιο ἔργο σέ 12 ὧρες. Σέ πόσες ὧρες θά ἐκτελέσουν τό ἔργο καί οἱ δύο ἐργάτες, ἄν ἐργασθοῦν μαζί;

Λύση. Ἔστω ὅτι ἄν ἐργασθοῦν μαζί θά τελειώσουν τό ἔργο σέ x ὧρες. Ὁ x πρέπει νά εἶναι θετικός ἀριθμός.

Ὁ πρῶτος ἐργάτης μόνος του ἐκτελεῖ τό ἔργο σέ 8 ὧρες. Συνεπῶς σέ 1 ὥρ. ἐκτελεῖ τό $\frac{1}{8}$ τοῦ ἔργου καί σέ x ὧρες τά $\frac{x}{8}$ τοῦ ἔργου. Μέ τόν ἴδιο τρόπο βρίσκουμε ὅτι ὁ δεύτερος ἐργάτης σέ x ὧρες ἐκτελεῖ τά $\frac{x}{12}$ τοῦ ἔργου. Ἐπειδή καί οἱ δύο μαζί σέ x ὧρες ἐκτελοῦν ὅλο τό ἔργο, θά ἔχουμε τήν ἐξίσωση

$$\frac{x}{8}+\frac{x}{12}=1 \Leftrightarrow 3x+2x=24 \Leftrightarrow 5x=24 \Leftrightarrow x=\frac{24}{5} \Leftrightarrow x=4{,}8 \text{ ὥρ.}$$

Ὥστε καί οἱ δύο μαζί θά ἐκτελέσουν τό ἔργο σέ 4,8 ὥρ.

8. Τό ψηφίο τῶν δεκάδων ἑνός διψήφιου ἀριθμοῦ εἶναι διπλάσιο ἀπό τό ψηφίο τῶν μονάδων του. Ἄν ἀλλάξουμε τή θέση τῶν ψηφίων του, προκύπτει ἀριθμός κατά 36 μονάδες μικρότερος. Ποιός εἶναι ὁ ἀριθμός;

Λύση. Ἄν εἶναι x τό ψηφίο τῶν μονάδων τοῦ ἀριθμοῦ, τό ψηφίο τῶν δεκάδων θά εἶναι 2x.

Ὁ x πρέπει νά εἶναι μονοψήφιος φυσικός ἀριθμός. Ὁ ἀριθμός πού ζητᾶμε θά ἔχει $10.2x+1.x$ μονάδες. (Ξέρουμε ὅτι, γιά νά βροῦμε τό πλῆθος τῶν μονάδων ἑνός ἀριθμοῦ, πολλαπλασιάζουμε τό ψηφίο τῶν μονάδων ἐπί 1, τό ψηφίο τῶν δεκάδων ἐπί 10,...). Ὁ ἀριθμός πού προκύπτει μέ τήν ἀλλαγή τῆς θέσεως τῶν ψηφίων θά ἔχει ψηφίο μονάδων τό 2x καί ψηφίο δεκάδων τό x. Συνεπῶς θά ἔχει $10.x+1.2x$ μονάδες. Σχηματίζουμε λοιπόν τήν ἐξίσωση

$$10.2x+x=10x+2x+36 \Leftrightarrow 20x+x-10x-2x=36 \Leftrightarrow 9x=36 \Leftrightarrow x=4.$$

Ὥστε τό ψηφίο τῶν μονάδων εἶναι 4, ὁπότε τῶν δεκάδων θά εἶναι 8. Δηλαδή ὁ ἀριθμός εἶναι ὁ 84.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Νά λυθοῦν στό σύνολο Q οἱ ἐξισώσεις.

α) $7x-15=3x+9$

β) $8(x+2)-5=2(x+3)$

γ) $3y-4=5y+2$

δ) $9\omega+3=2\omega+10$

ε) $\frac{x+2}{3}=\frac{2x-7}{4}$

στ) $\frac{3-x}{2}=\frac{-6-5x}{7}$

ζ) $\frac{3y+5}{2}-\frac{3y+1}{4}=3$

2. Νά λυθοῦν στό σύνολο Q οἱ ἐξισώσεις:

α) $\frac{x-7}{2}-\frac{1}{3}=1+\frac{x+9}{9}$

β) $6-\frac{x-1}{2}=\frac{x-2}{3}-\frac{x-3}{4}$

γ) $\frac{2x-1}{3}-\frac{7x+6}{12}=\frac{3x-2}{4}+\frac{5x-4}{6}$

δ) $\frac{2(\omega-3)}{5}-\frac{3(\omega-2)}{4}=1$

3. Νά βρεθοῦν τά στοιχεῖα τοῦ συνόλου A ∪ B ὅταν:

α) $A=\left\{x\in Q \mid 3x-1=x+2\right\}$, $B=\left\{x \mid \frac{x-1}{2}=\frac{x-2}{3}\right\}$

β) $A=\left\{x\in Q \mid 2(x-1)-3(x-2)=x\right\}$, $B=\left\{x\in Q \mid x-\frac{x-1}{2}=\frac{x-2}{3}\right\}$

4. Μιά ἀμφιμονοσήμαντη ἀπεικόνιση μέ σύνολο ὁρισμοῦ Α ἔχει τύπο $\varphi(x)=2x-3$. Ἄν $\varphi(A)=\{0,-1,2,1/2\}$, ποιό εἶναι τό σύνολο Α;

5. Νά λύσετε στό Q τίς ἐξισώσεις

α) $\frac{5}{x+3}=\frac{3}{2x-1}$ β) $\frac{2x+5}{3x-1}=\frac{25}{29}$

6. Νά βρεῖτε τή ρίζα τῆς ἐξισώσεως $(\alpha-1)x=3$, ὅταν εἶναι $\alpha\neq1$ καί ὅταν εἶναι $\alpha=1$.

7. Νά λυθοῦν στό Q οἱ ἐξισώσεις:

α) $(x-1).(x-2)=0$ β) $(2x+1).(3x-2)=0$

8. Νά λυθοῦν στό Q οἱ ἐξισώσεις:

α) $3(x+5)=15+3x$ γ) $\frac{2x-5}{3}=\frac{3x-1}{2}-\frac{5x+1}{6}$.

β) $2(x+1)=2x+3$ δ) $2-3y=1-3(y-1)$

Προβλήματα πού λύνονται μέ ἐξισώσεις.

9. Ποιός ἀριθμός πρέπει νά προστεθεῖ στούς ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{5}{12}$, ὥστε αὐτό νά γίνει ἴσο μέ $\frac{4}{5}$;

10. Ὁ ἀριθμητής ἑνός κλάσματος εἶναι μικρότερος ἀπό τόν παρονομαστή του κατά 4. Ἄν προσθέσουμε στούς ὅρους του τόν 29, προκύπτει κλάσμα ἴσο μέ $\frac{8}{9}$. Ποιό ἦταν τό κλάσμα;

11. Ποιοῦ ἀριθμοῦ τό μισό ἰσοῦται μέ τό διπλάσιό του;

12. Οἱ ἡλικίες τριῶν ἀδερφῶν ἔχουν ἄθροισμα 34. Ὁ πιό μεγάλος εἶναι 5 χρόνια μεγαλύτερος ἀπό τον πιό μικρό καί αὐτός 2 χρόνια μικρότερος ἀπό τό μεσαῖο. Ποιά εἶναι ἡ ἡλικία τοῦ καθενός;

13. Ἕνας πατέρας εἶναι 46 χρονῶν καί ὁ γιός του 14. Μετά πόσα χρόνια ἡ ἡλικία τοῦ πατέρα θά εἶναι διπλάσια ἀπό τήν ἡλικία τοῦ γιοῦ του;

14. Ἕνας πατέρας ἔχει τετραπλάσια ἡλικία ἀπό τήν κόρη του. Μετά ἀπό 20 χρόνια θά ἔχει διπλάσια. Ποιά εἶναι ἡ σημερινή τους ἡλικία;

15. Νά μοιραστεῖ ἕνα ποσό 4500 δρχ. σέ τρία ἄτομα Α,Β,Γ ὥστε ὁ Α νά πάρει 1800 δρχ. περισσότερες ἀπό τό Β καί ὁ Β 600 δρχ. περισσότερες ἀπό τό Γ.

16. Μιά κατοικία ἔχει 4 διαμερίσματα. Ὁ λογαριασμός τοῦ καλοριφέρ ἦταν γιά ὅλο τό χειμώνα 31.000 δρ. Τό Α διαμέρισμα εἶναι διπλάσιο ἀπό τό Γ καί τό Β εἶναι τά $\frac{5}{2}$ τοῦ Δ. Ὁ ἔνοικος τοῦ Δ πλήρωσε 800 δρ. λιγότερο ἀπό τόν ἔνοικο τοῦ Α. Πόσα πλήρωσε ὁ καθένας;

17. Ὁ μισθός ἑνός ὑπαλλήλου αὐξήθηκε ἀπό 14000 σέ 15100. Ἄν ὁ πληθωρισμός τό χρόνο αὐτό εἶναι 8%, ὁ ὑπάλληλος θά εἶναι πιό πλούσιος ἤ πιό φτωχός τόν χρόνο αὐτό;

18. Τό ἐνοίκιο ἑνός σπιτιοῦ αὐξήθηκε τόν ἕνα χρόνο κατά 20%, τόν ἑπόμενο χρόνο κατά 25% καί τόν τρίτο χρόνο κατά 30%. Ἡ τελική τιμή ἔφτασε τίς 3900 δρχ. τό μήνα. Ποιά ἦταν ἡ ἀρχική τιμή;

19. Ἕνας ἐκσκαφέας χρειάζεται 6 μέρες γιά νά σκάψει τά θεμέλια μιᾶς οἰκοδομῆς. Σέ πόσες μέρες θά τελειώσει ἡ δουλειά, ἄν ἀπό τήν τρίτη μέρα βοηθάει καί ἄλλος ἐκσκαφέας μέ τή μισή ἀπόδοση;

20. Μιά βρύση γεμίζει μιά δεξαμενή σέ 6 ὧρες καί μιά ἄλλη σέ 4 ὧρ. Σέ πόσες ὧρες θά γεμίσει ἡ δεξαμενή: α) Ἄν ἀνοιχτοῦν καί οἱ δυό βρῦσες μαζί; β) Ἄν ἡ δεύτερη βρύση ἀνοιχτεῖ μία ὥρα ἀργότερα ἀπό τήν πρώτη;

21. Ἕνα κοστούμι ἀξίας 5140 δραχ. πουλήθηκε 3855 δρχ. Πόσο % ἔκπτωση ἔγινε;

22. Ἕνα ἠλεκτρικό πλυντήριο πουλήθηκε μέ ἔκπτωση 3% γιά 14841 δρ. Ποιά ἦταν ἡ τιμή του χωρίς τήν ἔκπτωση;

23. Μιά τηλεόραση ἀντί γιά 12800 δρ. πουλήθηκε 12000 δρχ. Πόσο % μειώθηκε ἡ τιμή της;

24. Μιά οἰκογένεια ξόδεψε τόν προηγούμενο χρόνο τό $\frac{1}{12}$ τῶν ἐσόδων της γιά ἐνοίκιο, τό $\frac{1}{2}$ γιά φαγητό καί ἄλλα ἔξοδα τοῦ σπιτιοῦ, τό $\frac{1}{15}$ γιά ροῦχα καί τό $\frac{1}{4}$ γιά τά ὑπόλοιπα ἔξοδα. Ἀκόμα ἔκανε καί ἀποταμίευση 15 600 δρ. Πόσα ἦταν τά ἔσοδά της;

25. Πόσα κουνέλια καί πόσα περιστέρια ἔχει ὁ Δημήτρης, ἄν ὅλα αὐτά τά ζῶα ἔχουν 19 κεφάλια καί 52 πόδια;

Ἀνίσωση α΄ βαθμοῦ μέ ἕναν ἄγνωστο.

7.10 Ἄς θεωρήσουμε μιά μεταβλητή x, πού παίρνει τιμές ἀπό τό σύνολο $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ καί τόν προτασιακό τύπο

$$p(x): \quad 3x+2>10$$

Ὁ τύπος αὐτός ἀποτελεῖται ἀπό δυό μέρη, πού συνδέονται μέ τό σύμβολο τῆς ἀνισότητας. Ἕνας τέτοιος προτασιακός τύπος λέγεται **ἀνίσωση μέ ἕναν ἄγνωστο** καί μάλιστα **πρώτου βαθμοῦ**, γιατί ἡ μεταβλητή x εἶναι ὑψωμένη στήν πρώτη δύναμη ($x = x^1$). Ὅπως καί στίς ἐξισώσεις α΄ βαθμοῦ, ἡ παράσταση $2x+2$ εἶναι τό **πρῶτο μέλος** τῆς ἀνισώσεως καί ὁ 10 τό **δεύτερο μέλος**. Τό σύνολο A εἶναι τό **σύνολο ὁρισμοῦ** τῆς ἀνισώσεως καί ὁ x εἶναι ὁ **ἄγνωστος** τῆς ἀνισώσεως. Ἀπό τόν προτασιακό τύπο $3x+2>10$ παίρνουμε τίς παρακάτω προτάσεις:

$x=1$,	$3\cdot1+2>10$	ψευδής,
$x=2$,	$3\cdot2+2>10$	ψευδής,
$x=3$,	$3\cdot3+2>10$	ἀληθής,
$x=4$,	$3\cdot4+2>10$	ἀληθής,
$x=5$,	$3\cdot5+2>10$	ἀληθής.

Οἱ τιμές τῆς μεταβλητῆς $x = 3$, $x = 4$, $x = 5$, πού δίνουν ἀληθεῖς προτάσεις, λέγονται **λύσεις τῆς ἀνισώσεως** καί τό σύνολό τους

$$L = \{3, 4, 5\}$$

λέγεται **σύνολο λύσεων τῆς ἀνισώσεως.**

Ἰσοδύναμες ἀνισώσεις.

7.11. Ἄς θεωρήσουμε δύο ἀνισώσεις μέ τό ἴδιο σύνολο ὁρισμοῦ $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, π.χ. τίς

$$2x+1>4 \quad \text{καί} \quad 2x>3$$

Εὔκολα διαπιστώνουμε ὅτι οἱ δύο ἀνισώσεις αὐτές ἔχουν τό ἴδιο σύνολο λύσεων $L = \{2, 3, 4\}$ καί γι' αὐτό λέγονται **ἰσοδύναμες**. Γενικά:

> Δυό ἤ περισσότερες ἀνισώσεις λέγονται ἰσοδύναμες, ὅταν ἔχουν ὅλες τό ἴδιο σύνολο λύσεων.

Γιά νά δηλώσουμε ὅτι οἱ δυό αὐτές ἀνισώσεις εἶναι ἰσοδύναμες, γράφουμε, ὅπως καί στίς ἐξισώσεις,

$$2x+1>4 \Leftrightarrow 2x>3$$

Λύση ἀνισώσεως α΄ βαθμοῦ.

7.12. Ὅπως καί στίς ἐξισώσεις α΄ βαθμοῦ ἔτσι καί ἐδῶ, γιά νά λύσουμε μιά ἀνίσωση α΄ βαθμοῦ προσπαθοῦμε νά βροῦμε μιά ἰσοδύναμή της μέ ἁπλή μορφή. Στήν προσπάθειά μας αὐτή χρησιμοποιοῦμε συνήθως τίς δύο βασικές ἰδιότητες τῶν ἀνισοτήτων:

Ἄν στά μέλη μιᾶς ἀνισότητας προσθέσουμε τόν ἴδιο ἀριθμό, προκύπτει ἀνισότητα μέ τήν ἴδια φορά, δηλ.

$$\boxed{\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha+\gamma > \beta+\gamma}$$

Ἄν τά μέλη μιᾶς ἀνισότητας πολλαπλασιασθοῦν ἤ διαιρεθοῦν μέ τόν ἴδιο ἀριθμό, τότε προκύπτει ἀνισότητα μέ τήν ἴδια φορά, ὅταν ὁ ἀριθμός εἶναι θετικός ἐνῶ, προκύπτει ἀνισότητα μέ ἀντίθετη φορά, ὅταν ὁ ἀριθμός εἶναι ἀρνητικός, δηλ.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{ἄν } \alpha>\beta \text{ καί } \gamma>0 \text{ τότε } \alpha.\gamma>\beta.\gamma \\ \text{ἄν } \alpha>\beta \text{ καί } \gamma<0 \text{ τότε } \alpha.\gamma<\beta.\gamma \end{array}}$$

Γιά νά λύνουμε ἀνισώσεις α΄ βαθμοῦ, ἀκολουθοῦμε πορεία ἐργασίας παρόμοια μέ ἐκείνη πού ἀκολουθήσαμε γιά τή λύση τῶν ἐξισώσεων α΄ βαθμοῦ.

7.13. Ἄς λύσουμε στό σύνολο N τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν τήν ἀνίσωση

$$3x-10<5$$

Προσθέτοντας καί στά δυό μέλη της τό 10 ἔχουμε

$$3x-10<5 \Leftrightarrow 3x-10+\mathbf{10}<5+\mathbf{10}$$
$$\Leftrightarrow 3x<15$$

Διαιροῦμε τώρα καί τά δυό μέλη της μέ 3 καί ἔχουμε

$$3x<15 \Leftrightarrow \frac{3x}{3}<\frac{15}{3}$$
$$\Leftrightarrow x<5.$$

Ὥστε, σύνολο λύσεων εἶναι τό $L=\{0,1,2,3,4\}$.

Ὅπως καί στίς ἐξισώσεις ἔτσι καί στίς ἀνισώσεις ἔχουμε τό πρακτικό συμπέρασμα:

> Ἀπό μιά ἀνίσωση προκύπτει ἰσοδύναμη ἀνίσωση, ὅταν μεταφέρουμε ἕναν ὅρο ἀπό τό ἕνα μέλος της στό ἄλλο ἀλλάζοντας τό πρόσημό του.

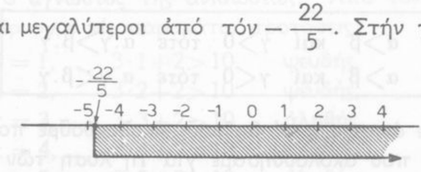
7.14. Ἄς λύσουμε στό σύνολο Q τῶν ρητῶν ἀριθμῶν τήν ἀνίσωση

$$\frac{2x-5}{3}-\frac{3x}{2}<2$$

Στά μέλη τῆς ἀνισώσεως αὐτῆς ὑπάρχουν κλάσματα. Στήν περίπτωση αὐτή, ὅπως καί στίς ἐξισώσεις, πολλαπλασιάζουμε τά μέλη της μέ τό Ε.Κ.Π τῶν παρονομαστῶν. Ἔτσι ἔχουμε

$$\frac{2x-5}{3}-\frac{3x}{2}<2 \Leftrightarrow 6\cdot\frac{(2x-5)}{3}-6\cdot\frac{3x}{2}<6\cdot 2$$
$$\Leftrightarrow 2(2x-5)-3\cdot 3x<12$$
$$\Leftrightarrow 4x-10-9x<12$$
$$\Leftrightarrow 4x-9x<12+10$$
$$\Leftrightarrow -5x<22$$
$$\Leftrightarrow 5x>-22$$
$$\Leftrightarrow x>-22/5$$

Ὥστε τό σύνολο λύσεων ἀποτελεῖται ἀπό ὅλους τούς ρητούς ἀριθμούς πού εἶναι μεγαλύτεροι ἀπό τόν $-\frac{22}{5}$. Στήν περίπτωση αὐτή τό



σχ. 1

σύνολο λύσεων σημειώνεται στόν ἄξονα τῶν ρητῶν ἀριθμῶν ὅπως δείχνει τό σχ. 1.

7.15. Ἀπό τά προηγούμενα παραδείγματα προκύπτει ὅτι μιά ἀνίσωση α΄ βαθμοῦ εἶναι πάντοτε ἰσοδύναμη μέ μιά ἀνίσωση τῆς μορφῆς

$$\alpha \cdot x > \beta \quad \text{ἤ} \quad \alpha \cdot x < \beta,$$

ὅπου α,β εἶναι γνωστοί ρητοί ἀριθμοί καί x ὁ ἄγνωστος.

Γιά τήν ἀνίσωση $\alpha \cdot x > \beta$ ἔχουμε:

— Ἄν $\alpha > 0$, τότε $\alpha \cdot x > \beta \Leftrightarrow x > \dfrac{\beta}{\alpha}$

— Ἄν $\alpha < 0$, τότε $\alpha \cdot x > \beta \Leftrightarrow x < \dfrac{\beta}{\alpha}$

Στήν περίπτωση πού ἔχουμε $\alpha = 0$, δηλαδή ἔχουμε μιά ἀνίσωση τῆς μορφῆς $0 \cdot x > \beta$ ἤ $0 \cdot x < \beta$, ἡ ἀνίσωση ἤ θά εἶναι ἀδύνατη ἤ θά ἀληθεύει γιά κάθε τιμή τοῦ x (γιατί γράφεται τελικά $0 > \beta$ ἤ $0 < \beta$).

Συναληθεύουσες ἀνισώσεις.

7.16. Πολλές φορές εἶναι χρήσιμο νά γνωρίζουμε γιά ποιές τιμές μιᾶς μεταβλητῆς ἀληθεύουν συγχρόνως δυό ἤ περισσότερες ἀνισώσεις. Λέμε τότε ὅτι ἔχουμε ἕνα **σύστημα ἀνισώσεων** ἤ **συναληθεύουσες ἀνισώσεις.** Ἄς ὑποθέσουμε π.χ. ὅτι θέλουμε νά βροῦμε ἕνα φυσικό ἀριθμό, πού τό τριπλάσιό του αὐξημένο κατά 5 νά εἶναι μικρότερο ἀπό 29 καί μεγαλύτερο ἀπό 20. Ἄν ὀνομάσουμε τόν ἀριθμό αὐτό x, τότε τό τριπλάσιό του αὐξημένο κατά 5 εἶναι $3x+5$. Ἔχουμε ἐπομένως τίς ἀνισώσεις

$$3x+5<29 \quad \text{καί} \quad 3x+5>20, \quad \text{ὅπου} \quad x \in N.$$

Εἶναι φανερό ὅτι ἡ λύση τοῦ προβλήματός μας θά εἶναι ἡ τομή δύο συνόλων πού καθένα τους εἶναι τό σύνολο λύσεων τῆς κάθε μιᾶς ἀνισώσεως χωριστά. Ἔχουμε ὅμως

$$3x+5<29 \Leftrightarrow 3x<29-5 \Leftrightarrow 3x<24$$
$$\Leftrightarrow x<\frac{24}{3} \Leftrightarrow x<8$$

δηλ. τό σύνολο λύσεων τῆς πρώτης εἶναι $L_1 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

$$3x+5>20 \Leftrightarrow 3x>20-5 \Leftrightarrow 3x>15$$
$$\Leftrightarrow x>5$$

δηλ. τό σύνολο λύσεων τῆς δευτέρας εἶναι $L_2 = \{6, 7, 8, 9, \ldots\}$.

Ἑπομένως, σύνολο λύσεων τοῦ συστήματος τῶν δύο ἀνισώσεων εἶναι το

$$L = L_1 \cap L_2 = \{6, 7\}$$

καί συνεπῶς, ὁ ἀριθμός x πού ζητούσαμε εἶναι $x=6$ ἤ $x=7$.

■ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Στό σύνολο Q τῶν ρητῶν ἀριθμῶν νά λυθεῖ τό σύστημα τῶν ἀνισώσεων:

$$\frac{x+2}{3}-\frac{x}{4}>\frac{1}{2}, \quad 5x-8<x+4, \quad 2x-3<3x-2$$

Λύση. Λύνουμε κάθε μιά ἀνίσωση χωριστά. Ἔχουμε

$$\frac{x+2}{3}-\frac{x}{4}>\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{12(x+2)}{3}-\frac{12x}{4}>\frac{12}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4(x+2)-3x>6$$

$$\Leftrightarrow 4x+8-3x>6$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x>-2} \quad (1)$$

$$5x-8<x+4 \Leftrightarrow 5x-x<4+8$$

$$\Leftrightarrow 4x<12$$

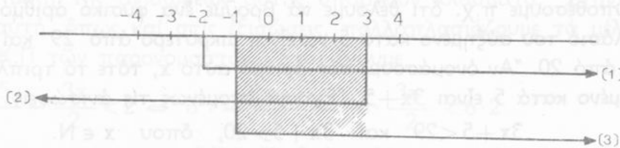
$$\Leftrightarrow \boxed{x<3} \quad (2)$$

$$2x-3<3x-2 \Leftrightarrow 2x-3x<-2+3$$

$$\Leftrightarrow -x<1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x>-1} \quad (3)$$

Γιά νά βροῦμε τό σύνολο λύσεων τοῦ συστήματος, σημειώνουμε τίς λύσεις τῶν τριῶν ἀνισώσεων στόν ἄξονα τῶν ρητῶν ἀριθμῶν.



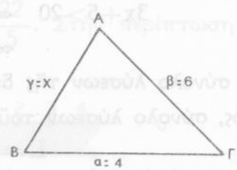
(σχ. 2)

Τό σκιασμένο τμῆμα τοῦ σχ. 2 μᾶς δίνει τό σύνολο τῶν λύσεων τοῦ συστήματος τῶν ἀνισώσεων. Τό σύνολο αὐτό μέ περιγραφή γράφεται

$$L=\{x \in Q \mid -1<x<3\}$$

2. Σέ ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ οἱ δυό πλευρές εἶναι $\alpha = 4$ cm καί $\beta = 6$ cm. Πόσο μπορεῖ νά εἶναι τό μῆκος τῆς τρίτης πλευρᾶς;

Λύση. Ἔστω ὅτι εἶναι $\gamma = x$ cm. Γνωρίζουμε ὅτι κάθε πλευρά ἑνός τριγώνου εἶναι μικρότερη ἀπό τό ἄθροισμα τῶν δυό ἄλλων. Ἑπομένως ἔχουμε τό σύστημα τῶν ἀνισώσεων:



(σχ. 3)

$$x<4+6 \Leftrightarrow \boxed{x<10} \quad (1)$$

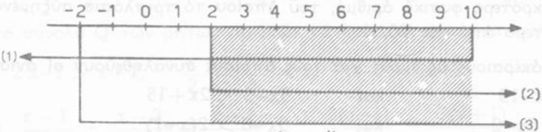
$$6<4+x \Leftrightarrow -x<4-6$$

$$\Leftrightarrow -x<-2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x > 2} \quad (2)$$

$$4 < 6 + x \Leftrightarrow -x < 6-4$$
$$\Leftrightarrow -x < 2$$
$$\Leftrightarrow \boxed{x > -2} \quad (3)$$

Ἄν σημειώσουμε τί λύσεις τῶν τριῶν ἀνισώσεων στόν ἄξονα τῶν ρητῶν ἀριθμῶν,



(σχ. 4)

βρίσκουμε ὅτι τό μῆκος τῆς τρίτης πλευρᾶς εἶναι μεγαλύτερο ἀπό 2 cm καί μικρότερο ἀπό 10 cm.

3. Νά βρεθεῖ ὁ μικρότερος φυσικός ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τό ἑφταπλάσιο ἐλαττωμένο κατά τρία εἶναι μεγαλύτερο ἀπό 86.

Λύση. Ἄν x εἶναι ἕνας φυσικός ἀριθμός, τό ἑφταπλάσιό του ἐλαττωμένο κατά τρία εἶναι 7x–3. Ἔχουμε ἑπομένως τήν ἀνίσωση

$$7x-3 > 86 \Leftrightarrow 7x > 86+3$$
$$\Leftrightarrow 7x > 89$$
$$\Leftrightarrow x > \frac{89}{7}$$
$$\Leftrightarrow x > 12\ \frac{5}{7}$$

Ὥστε σύνολο λύσεων εἶναι τό L={13, 14, 15, . . .} καί ὁ ζητούμενος ἀριθμός εἶναι ὁ 13.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

26. Ἄν $A = \{0, 5, -2, 2\}$, ποιά στοιχεῖα τοῦ A εἶναι λύσεις τῆς ἀνισώσεως

$$3x-5 < 13-3x\,;$$

27. Νά λυθοῦν στό σύνολο N τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν οἱ ἀνισώσεις:

α) $3x-5 < 13-3x$ δ) $-2x+3 < -4x-5$

β) $8+2x < 28-3x$ ε) $\frac{x-1}{3} > \frac{x-3}{2}$

γ) $5x-2 < 2x+10$ στ) $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} > 2$

28. Νά λυθοῦν στό σύνολο Q τῶν ρητῶν ἀριθμῶν οἱ ἀνισώσεις:

α) $4(x-4) < 3x-14$ δ) $2x+3 < 3x+2$

β) $5x+2-(3x+5) < 4x+17$ ε) $x - \frac{x}{5} < \frac{3x-2}{4}$

γ) $\frac{x+2}{2} - \frac{2x+3}{\ } < \frac{x+5}{\ }$ στ) $\frac{4x-3}{5} - \frac{7x+5}{2} \geq -\frac{x+3}{2}$

29. Ἂν εἶναι $\alpha<6$, ποιές ἀπό τίς παρακάτω ἀνισώσεις εἶναι σωστές; Δικαιολογῆστε τήν ἀπάντησή σας

α) $\alpha+3 < 6+3$ γ) $2.\alpha < 2.6$

β) $\alpha-2 < 6-2$ δ) $-3.\alpha < -3.6$

30. Βρεῖτε τό μεγαλύτερο φυσικό ἀριθμό τοῦ ὁποίου τό πενταπλάσιο ἐλαττωμένο κατά 8 εἶναι μικρότερο ἀπό τόν 30.

31. Βρεῖτε τό μικρότερο φυσικό ἀριθμό, τοῦ ὁποίου τό τριπλάσιο αὐξημένο κατά 5 εἶναι μεγαλύτερο ἀπό τόν 20.

32. Βρεῖτε τούς ἀκέραιους ἀριθμούς γιά τούς ὁποίους συναληθεύουν οἱ ἀνισώσεις:

α) $3x-5 > x-13$ καί $5x-3 < 2x+15$

β) $4x+1 > 5x-2$ καί $3x-8 > 2(x-1)$

33. Σέ ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι $\beta = 3$ cm, $\gamma = 2$ cm. Πόσο μπορεῖ νά εἶναι τό μῆκος τῆς πλευρᾶς α, ὅταν ὁ α εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός;

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 7

1. **Ἐξίσωση πρώτου βαθμοῦ** εἶναι ἕνας προτασιακός τύπος πού μπορεῖ τελικά νά πάρει τή μορφή

$$\alpha \cdot x = \beta$$

ὅπου α καί β γνωστοί ρητοί ἀριθμοί. Ἂν $\alpha \neq 0$, τότε ἡ λύση τῆς ἐξισώσεως εἶναι

$$x = \frac{\beta}{\alpha}$$

2. **Ἀνίσωση α' βαθμοῦ** εἶναι ἕνας προτασιακός τύπος πού μπορεῖ τελικά νά πάρει τή μορφή

$$\alpha \cdot x > \beta$$

ὅπου α καί β εἶναι γνωστοί ρητοί ἀριθμοί. Οἱ λύσεις τῆς ἀνισώσεως εἶναι:

Ἂν $\alpha > 0$, $x > \dfrac{\beta}{\alpha}$

Ἂν $\alpha < 0$, $x < \dfrac{\beta}{\alpha}$

3. Μέ ἐξισώσεις καί ἀνισώσεις α' βαθμοῦ μποροῦμε νά λύσουμε διάφορα προβλήματα. Γιά τή λύση τῶν προβλημάτων ἀκολουθοῦμε τήν παρακάτω πορεία:

– Συμβολίζουμε μ' ἕνα γράμμα, π.χ. τό x, τόν ἄγνωστο τοῦ προβλήματος.
– Ὁρίζουμε τό σύνολο στό ὁποῖο πρέπει νά ἀνήκει ὁ x.
– Γράφουμε μέ παραστάσεις, πού περιέχουν τόν ἄγνωστο x, τά στοιχεῖα τοῦ προβλήματος καί σχηματίζουμε μέ αὐτά ἐξίσωση (ἤ ἀνίσωση).
– Λύνουμε τήν ἐξίσωση (ἤ τήν ἀνίσωση).
– Ἐλέγχουμε τό ἀποτέλεσμα πού βρήκαμε.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ*

34. Νά λυθοῦν στό Q οἱ ἐξισώσεις:

α) $2-\frac{3(x+1)}{2}=3-\frac{2(x+1)}{3}$ β) $(x+1)(x-2)=0$

γ) $\frac{x+1}{2}-\frac{x+2}{3}=\frac{x+3}{4}$ δ) $\frac{\omega-2}{3}-\frac{3(\omega-1)}{2}=\frac{\omega+1}{6}$

35. Στό σύνολο Q τῶν ρητῶν ἀριθμῶν νά λυθεῖ τό σύστημα τῶν ἀνισώσεων.

α) $2x-1>x+2,\quad \frac{x}{2}-\frac{x}{3}<1,\quad 3x-5<4x-2$

β) $\frac{x-1}{2}+\frac{x-2}{3}>\frac{x-1}{4},\quad \frac{2(x-1)}{3}<\frac{3(x+1)}{4}$

36. Νά βρεθεῖ ἕνας διψήφιος ἀριθμός, πού τό ἄθροισμα τῶν ψηφίων του εἶναι ἴσο μέ 8 καί, ὅταν τά ψηφία του ἀναστραφοῦν, προκύπτει ἀριθμός μεγαλύτερος κατά 18.

37. Νά βρεθεῖ ἕνας διψήφιος ἀριθμός, πού τό ψηφίο τῶν δεκάδων εἶναι τριπλάσιο ἀπό τό ψηφίο τῶν μονάδων καί, ὅταν τά ψηφία του ἀναστραφοῦν, προκύπτει ἀριθμός μικρότερος κατά 36.

38. Ἡ γωνία τῆς κορυφῆς ἑνός ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι τό μισό τῆς μιᾶς ἀπό τίς παρά τή βάση γωνίες του. Νά βρεθοῦν οἱ γωνίες τοῦ τριγώνου.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ**

39. Νά βρεθοῦν οἱ φυσικοί ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τό τριπλάσιο αὐξημένο κατά 4 εἶναι μεγαλύτερο ἀπό τό διπλάσιό τους καί μικρότερο ἀπό τό τετραπλάσιό τους.

40. Ἡ τιμή ἑνός πλυντηρίου τή μιά χρονιά μειώθηκε κατά 10% καί τήν ἑπόμενη αὐξήθηκε κατά 10%. Τώρα κοστίζει 15840. Πόσο κόστιζε πρίν γίνουν οἱ ἀλλαγές;

41. Ὁ πληθυσμός τῆς Εὐρώπης αὐξήθηκε ἀπό τό 1800 ὡς τό 1850 κατά 50%, ἀπό τό 1850 ὡς τό 1900 κατά 55% καί ἀπό τό 1900 ὡς τό 1950 κατά $33\frac{1}{3}\%$. Τό 1950 οἱ κάτοικοι τῆς Εὐρώπης ἦταν 539.400.000. Πόσοι ἦταν τό 1800, τό 1850 καί τό 1900;

42. Πέρυσι σ' ἕνα προϊόν ἔγινε μείωση τῆς τιμῆς του κατά 20%. Πόσο % πρέπει νά αὐξηθεῖ φέτος ἡ τωρινή τιμή του, ὥστε τό προϊόν νά πουλιέται ὅσο καί πρίν ἀπό τίς δυό αὐτές μεταβολές τῆς τιμῆς του;

43. Παίξετε τά παρακάτω **«μαθηματικά παιχνίδια»** καί προσπαθῆστε νά τά δικαιολογήσετε:

I) α) Σκέψου ἕναν ἀριθμό.
β) Πρόσθεσε 5.
γ) Διπλασίασε τό ἀποτέλεσμα.
δ) Ἀφαίρεσε 4.
ε) Διαίρεσε τό ἀποτέλεσμα μέ 2.
στ) Ἀφαίρεσε τόν ἀριθμό πού σκέφθηκες.
Τό ἀποτέλεσμα εἶναι 3.

II) α) Σκέψου ἕναν ἀριθμό.

β) Τριπλασίασέ τον.

γ) Πρόσθεσε τόν ἀριθμό πού σκέφθηκες καί μιά μονάδα.

δ) Πρόσθεσε 11.

ε) Διαίρεσε μέ τό 4.

στ) Ἀφαίρεσε τό 3.

Τό ἀποτέλεσμα εἶναι ὁ ἀριθμός πού σκέφθηκες.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗ ΛΥΣΗ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

1. Βλ. § 1.4

3. α) $x = -10$ β) $x = 15$ γ) $x = -12$

6. α) 2 β) $2\frac{7}{8}$ γ) 0.

7. α) 0 β) $-3\frac{5}{12}$ γ) -5 δ) $-12\frac{19}{20}$

8. α) 5 β) $\frac{31}{60}$

9. α) $x = 13{,}5$ β) $y = 12{,}30$

10 α) 3 β) 12

13 α) $-\frac{3}{2}$ β) 12 γ) $-4\frac{11}{36}$

14 α) -6 β) -9

15. α) -3 β) $-\frac{143}{180}$

16. α) -10 β) -2 γ) 16 δ) 3 ε) $1\frac{13}{24}$

18. α) -43 β) $-\frac{41}{4}$ γ) $-\frac{35}{6}$

19. α) -8 β) 1 γ) $\frac{1}{2}$ δ) -10 ε) $13\frac{5}{6}$

20. α) 18 β) -1 γ) 2 δ) $27\frac{17}{36}$ ε) 1

21. α) 24 β) $-\frac{1}{2}$ γ) -3

22. α) 4 β) $\frac{1}{5}$

23. α) -160 β) $\frac{5}{3}$

24. α) 32 β) $2\frac{2}{27}$ γ) $47\frac{1}{2}$

27. α) -24 β) $-\frac{3}{7}$ γ) 5

28. α) $-\frac{3}{2}$ β) $-97{,}9$ γ) $\frac{13}{3}$ δ) $-\frac{1}{6}$

29. α) -1920 β) 630 γ) $-\frac{102}{7}$ δ) $-\frac{35}{12}$

30. α) 44 β) 8 γ) 44 δ) -87 ε) 174 στ) 564 ζ) 432 η) 564 θ) 48 ι) 48

31. α) 18 β) 58 γ) $-\frac{29}{24}$ δ) $15\frac{1}{3}$ ε) $-7\frac{1}{12}$

32. α) 24 β) $\frac{13}{84}$ γ) $\frac{25}{19}$ δ) $-\frac{13}{5}$

33. Τιμές πρώτης γραμμῆς $-2, 3, 1, -\frac{13}{5}, 1$

34. α) -1 β) 6 γ) $-\frac{1}{6}$ δ) $-\frac{1}{4}$

36. α) -100 β) -56 γ) 120

38. Νά χρησιμοποιήσετε τόν ὁρισμό τῆς § 1.13

39. Νά ἐφαρμόσετε στήν $\alpha > \beta$ διαδοχικά τίς ἰδιότητες τῆς § 1.14

40. Νά ἐργασθεῖτε ὅπως στήν προηγούμενη ἄσκηση.

42. α) 0 β) 10 γ) -54 δ) $\frac{15}{16}$ ε) -19 στ) $-6\frac{1}{9}$

43. α) 2^4 β) $(-2)^4$ γ) 2^8 δ) 10^4

45. α) 1 β) $-10\frac{1}{8}$

48. α) Τιμές πρώτης γραμμῆς: $-6, 9, -1, \frac{1}{8}$
β) Τιμές πρώτης γραμμῆς: $5, 1, -7, -1$

49. α) $-\frac{2}{3}$ β) $-\frac{32}{15}$

50. α) -64 β) -64 γ) $1297{,}25$ δ) $0{,}5$ ε) 0

51. α) -18 β) 9 γ) $\frac{5}{4}$ δ) -105

52 α) 0 β) 0

53. Νά βρεῖτε τίς τιμές τῶν δύο μελῶν κάθε ἰσότητας καί νά τίς συγκρίνετε.

54. Νά ἐργασθεῖτε ὅπως στήν προηγούμενη ἄσκηση.

55. α) $-\frac{5}{2}$ β) $\frac{1}{36}$ γ) $-1\frac{5}{8}$ δ) $\frac{13}{15}$ ε) $\frac{17}{72}$

56. α) x^5 β) x^{-4} γ) x^{-17} δ) x

57. α) $\left(\frac{2}{3}\right)^9$ β) 10^3

58. Νά ἐργασθεῖτε ὅπως στήν ἄσκηση 53

3. 152°
4. 120°
6. $x = 45°$
7. 60°, 40°, 80°
8. $(\widehat{AE\Gamma}) = 30°$, $(\widehat{BA\Delta}) = 26°$, $(\widehat{\Delta\Gamma A}) = 94°$
9. $(\widehat{B}) = 60°$, $(\widehat{\Gamma}) = 75°$
10. $(\widehat{O\Delta K}) = 110°$
12. $(\widehat{\Gamma}) = 60°$
13. $(\widehat{B}) = 60°$, $(\widehat{\Gamma}) = 30°$
14. Νά συγκρίνετε τά τρίγωνα ΑΒΔ καί ΒΔΓ.
15. Συγκρίνετε τά τρίγωνα ΟΑΒ καί ΟΔΓ.
16. Οἱ γωνίες $\widehat{B}$ καί $\widehat{\Gamma}$ θά εἶναι τοῦ ἴδιου εἴδους.
17. Νά συγκρίνετε τά τρίγωνα ΑΜΒ καί ΑΜΓ.
18. Σκεφθεῖτε τί θά συμβαίνει, ἄν ἰσχύει ἡ (α) ἤ ἡ (β).
19. Συγκρίνετε τά τρίγωνα ΑΟΒ καί ΓΟΔ.
22. Βρίσκονται στή μεσοκάθετο τοῦ τμήματος ΒΓ.
23. 90°, 45°, 45°
24. $(\widehat{A}) = 80°$, γωνία διχοτόμων 120°
27. Νά ξεκινήσετε κατασκευάζοντας πρῶτα μιά ὀρθή γωνία $\widehat{A}$.
28. Νά κατασκευάσετε πρῶτα τό ὀρθογώνιο τρίγωνο, πού εἶναι τό μισό τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου.

29-30. Περνᾶνε ἀπό τό ἴδιο σημεῖο.

31. Εἶναι ὀρθή.
32. 70° καί 20°
33. 45°, 45°
34. $\overset{\Delta}{B\Delta E}$ ἰσόπλευρο. ΔΕ//ΑΓ
35. $(\widehat{\Delta AE}) = 150°$, $(\widehat{\Delta AB}) = 60°$, $(\widehat{EA\Gamma}) = 60°$. $\overset{\Delta}{A\Delta E}$ ἰσοσκελές
36. Περνᾶνε ἀπό τό ἴδιο σημεῖο.
37. Εἶναι ἴσες. Ἡ ΑΔ εἶναι μεσοκάθετη στό ΒΓ.
38. Εἶναι ἴσες.
39. Νά παρατηρήσετε ὅτι ΚΑ ⊥ ΑΒ καί ὅτι τά τριγ. ΑΒΚ, ΑΒΛ εἶναι ἰσοσκελή.
41. Εἶναι ἴσες.
43. Διέρχονται ἀπό τό ἴδιο σημεῖο.

1. (Καρκαβίτσας, Λόγια τῆς πλώρης), (Παλαμᾶς, Τάφος), (Καζαντζάκης, Ζορμπᾶς), (Σολωμός, Ἐθνικός ὕμνος), (Ἐλύτης, Ἄξιον ἐστί).

2. (Κιλκίς, Μακεδονία), (Βόλος, Θεσσαλία), (Κόρινθος, Πελοπόννησος), (Κέρκυρα, Ἑπτάνησα), (Χανιά, Κρήτη).

3. α) $\alpha = 2, \quad \beta = 3$
β) $\alpha + 1 = 4$ ἤ $\alpha = 3$
$\beta - 1 = 5$ ἤ $\beta = 6$
γ) $\alpha - 2 = 4$ ἤ $\alpha = 6$
$\beta + 3 = 3$ ἤ $\beta = 0$
δ) $\beta + 1 = 3$ ἤ $\beta = 2, \quad \alpha = \beta = 2$

4. $A \times B = \{(0,1), (0,4), (2,1), (2,4), (3,1), (3,4)\}$
$\Gamma \times \Delta = \{(3,3), (3,4), (3,8), (5,3), (5,4), (5,8), (8,3), (8,4), (8,8)\}$

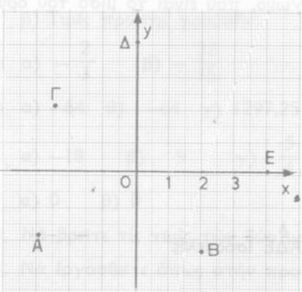
5. $A \times B = \{(1,2), (1,3), (2,2), (2,3)\}, \quad A \times \Gamma = \{(1,4), (2,4)\}$
$(A \times \Delta) = \{(1,5), (2,5)\}$
$B \cup \Gamma \cup \Delta = \{1, 2, 4, 5\}$
$(A \times B) \cup (A \times \Gamma) \cup (A \times \Delta) = \{(1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (1,4), (2,4), (1,5), (2,5)\}$
Νά βρεῖτε τό $A \times (B \cup \Gamma \cup \Delta)$ καί νά τό συγκρίνετε μέ τό $(A \times B) \cup (A \times \Gamma) \cup (A \times \Delta)$

6. $A = \{\kappa, \mu\}, \quad B = \{\alpha, \gamma, \pi\}$
$A \times B = \{(\kappa,\alpha), (\kappa,\gamma), (\kappa,\pi), (\mu,\alpha), (\mu,\gamma), (\mu,\pi)\}$

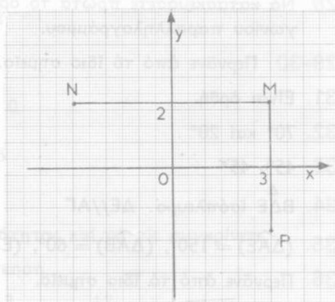
7. Ἐπειδή $6 = 1 \,.\, 6 = 6 \,.\, 1 = 2 \,.\, 3 = 3 \,.\, 2$, τό σύνολο A μπορεῖ νά ἔχει 1 στοιχεῖο καί τό B 6 ἤ 6 καί 1 ἤ 2 καί 3 ἤ 3 καί 2.

8. $A \times A = \{(0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (1,0), (1,1), (1,2), (1,3), (2,0), (2,1), (2,2), (2,3), (3,0), (3,1), (3,2), (3,3)\}$

9.



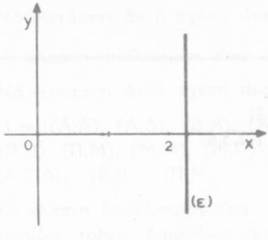
10.



11. α) α′ ἤ δ′, β) γ′ ἤ δ′, γ) β′

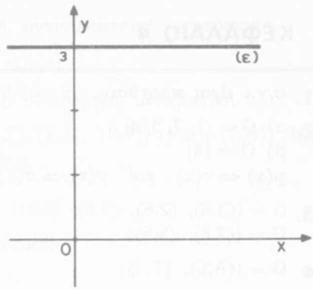
N(–3,2), P(3,–2),

12.



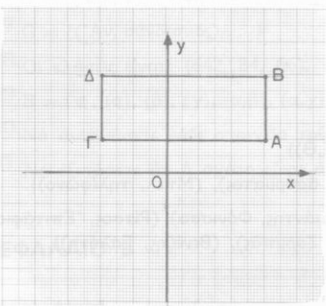
Τά σημεῖα τῆς εὐθείας ε

13.

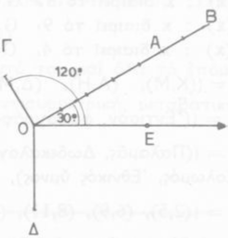


Τά σημεῖα τῆς εὐθείας ε

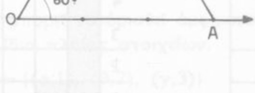
14.



15.

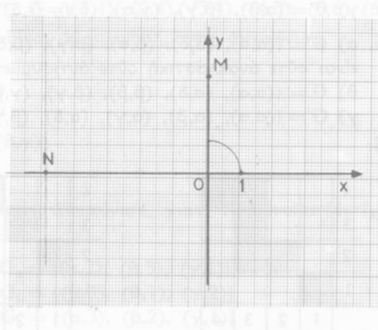


16.



Τό τρίγωνο ΟΑΒ εἶναι ἰσόπλευρο

17.



18. 0°, 90°

M (0,3), N(5, 180°)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

1. α,γ,ε εἶναι προτάσεις, β καί δ ὄχι.

2. α) $G = \{1, 2, 3, 4\}$ γ) $G = \{4\}$
β) $G = \{4\}$ δ) $G = \{1,2,3,4\}$
$p(x) \Leftrightarrow \tau(x)$ καί $g(x) \Leftrightarrow \sigma(x)$

3. $G = \{(3,6), (2,8), (2,6), (5,5)\}$
$G = \{(2,8), (5,5)\}$

4. $G = \{(A,E), (T, I)\}$

5. Ὄχι, γιατί δέ δίνεται σύνολο ἀναφορᾶς. Ἄν π.χ. εἶναι σύνολο ἀναφορᾶς τό $A = \{1, 2, 3\}$, τότε $G = \{1,2\}$.

6. Ὄχι, γιατί δέ δίνονται τά σύνολα ἀναφορᾶς. Ἄν π.χ. εἶναι σύνολα ἀναφορᾶς τά $A = \{2, 4, 5\}$ καί $B = \{1, 3, 8, 10\}$, τότε $G = \{(2,1)\}$.

7. $p(x) : x + 2 = 6$, $G = \{4\}$
$g(x) : x > 3$, $G = \{4\}$

8. $p(x)$: x διαιρεῖ τό 8, $G = \{2,4,8\} = A$
$g(x)$: x διαιρεῖ τό 9, $G = \{\ \}$
$\tau(x)$: x διαιρεῖ τό 4, $G = \{2,4\} \subset A$

9. $G = \{(K,M), (A,H), (\Delta,M), (X,K\rho), (\Xi,\Theta)\}$

10. G = {(Ἔντισον, φωνογράφος), (Μαρκόνι, ἀσύρματος), (Μπέλ, τηλέφωνο)}.

11. G = {(Παλαμᾶς, Δωδεκάλογος), (Παπαδιαμάντης, Φόνισσα), (Ρίτσος, Ἐπιτάφιος), (Σολωμός, Ἐθνικός ὕμνος), (Καζαντζάκης, Ζορμπᾶς), (Βενέζης, Γαλήνη)}.

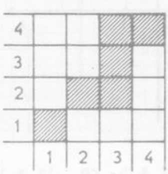
12. $G = \{(2,5), (6,9), (8,11), (12,15)\}$

13. Γιατί δέν περιέχει τό ζεῦγος (α,α).

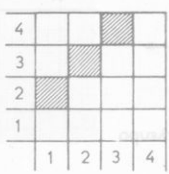
14. α) $G = \{(\alpha,\beta), (\beta,\alpha), (\varepsilon,\varepsilon), (\delta,\gamma)\}$
β) $G = \{(\alpha,\alpha), (\beta,\beta), (\gamma,\gamma), (\delta,\delta), (\varepsilon,\varepsilon), (\varepsilon,\delta), (\delta,\varepsilon)\}$
γ) $G = (\alpha,\beta), (\beta,\gamma), (\gamma,\alpha), (\delta,\varepsilon), (\varepsilon,\delta)\}$

15. α) $G = \{(\alpha,\alpha), (\alpha,\delta), (\beta,\alpha), (\beta,\gamma), (\beta,\delta), (\gamma,\alpha), (\gamma,\beta), (\gamma,\delta), (\delta,\alpha), (\delta,\delta)\}$. Δέν εἶναι οὔτε ἀνακλαστική οὔτε ἀντισυμμετρική.
β) $G = \{(\alpha,\alpha), (\alpha,\delta), (\beta,\beta), (\beta,\gamma), (\gamma,\beta), (\gamma,\gamma), (\delta,\alpha), (\delta,\delta)\}$. Εἶναι ἀνακλαστική.
γ) $G = \{(\alpha,\alpha), (\alpha,\beta), (\alpha,\gamma), (\alpha,\delta), (\beta,\gamma), (\delta,\gamma)\}$. Εἶναι ἀντισυμμετρική.

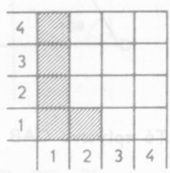
16.



ἀνακλαστική
ἀντισυμμετρική



ἀντισυμμετρική



17. α) Εἶναι σχέση ἰσοδυναμίας. Οἱ κλάσεις εἶναι {α,β} καί {δ,γ}
β) Εἶναι ἰσοδυναμία. Οἱ κλάσεις εἶναι {α,β,δ}, {γ}
γ) Εἶναι ἰσοδυναμία. Οἱ κλάσεις εἶναι {α}, {β,δ}, {γ}

18. Νά ἐξετάσετε ἄν ἡ σχέση εἶναι ἀνακλαστική, ἀντισυμμετρική, μεταβατική.

19. Οἱ κλάσεις ἰσοδυναμίας εἶναι $\{\alpha,\beta\}$, $\{\gamma,\delta,\varepsilon\}$, $\{\zeta,\eta,\theta\}$

20. Νά ἐξετάσετε ἄν ἡ σχέση εἶναι ἀνακλαστική, συμμετρική, μεταβατική.

21. G = {(Α,Α), (Α,Δ), (Δ,Α), (Α,Σ), (Σ,Α), (Δ,Σ), (Σ,Δ), (Ρ,Ρ), (Ρ,Β), (Β,Β), (Β,Ρ), (Π,Π), (Π,Μ), (Μ,Μ), (Μ,Π)}. Οἱ κλάσεις εἶναι
{Α,Σ,Δ}, {Ρ,Β}, {Π,Μ}.

22. Οἱ κλάσεις ἰσοδυναμίας εἶναι
{παίζω, τρέχω, διαβάζω}, {κοιμᾶμαι, αἰσθάνομαι}

23. Οἱ κλάσεις εἶναι: {4,8,12}, {5,9}, {6}, {7,11}

24. Ναί.

25. ϕ, {1}, {2}, {1,2}
$B = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

26. G = {('Ερ., 0), ('Αφ., 0), (Γ, 1), (Α,2) (Ζ, 12), (Κ,10) (Οὐρ., 5), (Ποσ., 2) (Πλ.,0)}.

27. G = {("Αν, σύνδεσμος),...}

28. Οἱ κλάσεις εἶναι: {642, 84, 66}, {811, 1117, 55, 64, 1234}, {823}, {53}

29. $B = \{\phi, \{\alpha\}, \{\beta\}, \{\gamma\}, \{\alpha,\beta\}, \{\alpha,\gamma\}, \{\beta,\gamma\}, \{\alpha,\beta,\gamma\}\}$

30. Νά συνδυάσετε κάθε στοιχεῖο τοῦ Α μέ τόν ἑαυτό του καί ὅλα τά ἑπόμενα.

31. Νά ἐξετάσετε ἄν ἡ σχέση εἶναι ἀνακλαστική, ἀντισυμμετρική, μεταβατική.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

1. α) Δέν εἶναι ἀπεικόνιση.
β) $\varphi(1) = \psi$, $\varphi(2) = \omega$, $\varphi(3) = x$, $\varphi(4) = \omega$, $\varphi(A) = \{x,y,\omega\}$
γ) $\varphi(A) = \{\lambda,\nu\}$

2. $G=\{(\gamma,\alpha), (\alpha,\beta), (\beta,\delta), (\delta,\gamma), (\varepsilon,\varepsilon)\}$ $G=\{(1,4), (2,4), (3,4), (4,5), (5,6), (6,6)\}$

3. G = {(Κ,Μ), (Π,Π), (Α,Η), (Β,Θ)}. Εἶναι ἀμφιμονοσήμαντη ἀπεικόνιση.

4. Εἶναι ἀμφιμονοσήμαντη ἀπεικόνιση.

5. Εἶναι ἀπεικονίσεις ἐκτός ἀπό τήν φ_4

6. $G_1 = \{(\alpha,\gamma), (\beta,\delta)\}$ $G_2 = \{(\alpha,\delta), (\beta,\gamma)\}$

7. $A = \{x, y, \omega, z\}$, $B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$

8. Δέν μπορεῖ νά ὁρισθεῖ ἀμφιμονοσήμαντη ἀπεικόνιση, γιατί τά σύνολα δέν ἔχουν τό ἴδιο πλῆθος στοιχείων.

9. $G_1 = \{(\alpha,1), (\beta,2), (\gamma,3)\}$ $G_4 = \{(\alpha,2), (\beta,3), (\gamma,1)\}$
$G_2 = \{(\alpha,1), (\beta,3), (\gamma,2)\}$ $G_5 = \{(\alpha,3), (\beta,1), (\gamma,2)\}$
$G_3 = \{(\alpha,2), (\beta,1), (\gamma,3)\}$ $G_6 = \{(\alpha,3), (\beta,2), (\gamma,1)\}$

10. $G_1 = \{(\alpha,\alpha), (\beta,\beta), (\gamma,\delta)\}$ $G_4 = \{(\alpha,\beta), (\beta,\delta), (\gamma,\alpha)\}$
$G_2 = \{(\alpha,\alpha), (\beta,\delta), (\gamma,\beta)\}$ $G_5 = \{(\alpha,\delta), (\beta,\alpha), (\gamma,\beta)\}$
$G_3 = \{(\alpha,\beta), (\beta,\alpha), (\gamma,\delta)\}$ $G_6 = \{(\alpha,\delta), (\beta,\beta), (\gamma,\alpha)\}$

11. Ρόμβος 12. τετράγωνο. 13. 4 ἄξονες, ἕνα κέντρο.

14. Νά βρεῖτε τά συμμετρικά τῶν κορυφῶν του.

17. α) (–1,–3), (2,–3), (4,5) β) (1,–3), (–2,–3), (–4,5) γ) (–1,3), (2,3), (4, –5)

18. Νά ἐργασθεῖτε ὅπως στήν προηγούμενη ἄσκηση.

19. $\varphi(A) = \{0, 4, 1, 9\}$

20. Εἶναι ὁ κύκλος $\left(O, \frac{\rho}{2}\right)$

21. $\varphi(A) = \{2,4,6,8,10\}$, $f(A) = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}\right\}$

22. $\varphi(A) = \{3\}$. Τά σημεῖα βρίσκονται σέ εὐθεία γραμμή.

24. Α′ (–1, –3), Β′ (–4,–4), Γ′ (3,–5)

25. Στό τετράγωνο, στόν κύκλο, στό ρόμβο καί στό ὀρθογώνιο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

1. α) 30.000 cm^2 β) 51217 cm^2 γ) 4.050.012 cm^2
2. α) 5.000.000 m^2 β) 3.120.000 m^2 γ) 0,3267 m^2
3. Ἰσοδύναμα εἶναι: τό (α) καί τό (γ), τό (β) καί τό (δ)
5. Νά βρεῖτε πρῶτα τήν ἄλλη πλευρά καί κατόπιν νά ἐφαρμόσετε τόν τύπο 1 τῆς σελ. 112. (Ε = 128 cm^2).
6. Πλήρωσε 5.040 δρχ.
7. Θά χρειαστοῦμε 600 πλακάκια.
8. Νά βρεῖτε πρῶτα τό ἐμβαδό του. (υ = 9,6 cm).
9. Νά χρησιμοποιήσετε τόν τύπο 3 τῆς σελ. 113 (υ = 6 cm).
10. Νά πάρετε δύο παραλληλόγραμμα, πού νά ἔχουν τήν ἴδια βάση (π.χ. 12 cm) καί τό ὕψος τοῦ ἑνός νά εἶναι διπλάσιο ἀπό τό ὕψος τοῦ ἄλλου (π.χ. 5 cm καί 10 cm)
11. Νά χωρίσετε τά σχήματα σέ ὀρθογώνια. ($E_1 = 40$ cm^2, $E_2 = 34$ cm^2, $E_3 = 70$ cm^2).
12. $E_1 = 41$ cm^2, $E_2 = 72$ cm^2
13. Νά ἐφαρμόσετε τόν τύπο 4 τῆς σελ. 116 (Ε = 48 cm^2)
14. υ = 6 cm
15. Νά βρεῖτε πρῶτα τό ἐμβαδό του. (ΒΓ) = 12,8 cm.
16. Νά πάρετε σάν βάση τή μιά κάθετη πλευρά. (Ε = 20 cm^2).
17. Νά ἐφαρμόσετε τόν τύπο 5 τῆς σελ. 116. (Ε = 15 cm^2)
18. υ = 5 cm
19. Θά εἰσπράξει 44.352 δρχ.
20. Νά χρησιμοποιήσετε τό συμπέρασμα τοῦ παραδ. 3 τῆς σελ. 118 (δ = 10 cm)
21. Νά προσθέσετε τά ἐμβαδά τῶν ὀρθογ. τριγώνων καί τοῦ τραπεζίου. (Ε = 55 cm^2)
22. Νά χωρίσετε τά σχήματα σέ τραπέζια ($E_1 = 50{,}5$ cm^2, $E_2 = 57$ cm^2)

23. Νά χωρίσετε τά σχήματα σέ τρίγωνα καί ὀρθογώνια. ($E_1 = 48{,}5\ cm^2$, $E_2 = 50\ cm^2$).

25. Μῆκος = 100 m.

26. Νά πάρετε δύο δικά σας σχήματα ($\upsilon = 12$ cm).

27. Ἀπό τό ἐμβαδό τοῦ μεγάλου ὀρθογωνίου νά ἀφαιρέσετε τά ἐμβαδά τῶν ὀρθογ. τριγώνων καί τραπεζίων. ($E = 24\ cm^2$).

28. Νά πάρετε ἕνα δικό σας παράδειγμα.

29. Ἡ ἀπόσταση εἶναι 6,125 cm.

30. Νά βρεῖτε πρῶτα τίς πλευρές του καί κατόπιν τό ἐμβαδό του. Νά πάρετε σάν βάση μιά ἀπό τίς μικρότερες πλευρές καί νά βρεῖτε τό ἀντίστοιχο ὕψος. (Ἀπόσταση = = 7 cm).

31. Νά ὀνομάσετε x τή μικρή βάση. ($\beta_1 = 8$ cm, $\beta_2 = 16$ cm).

32. Νά χωρίσετε τή βάση σέ τρία ἴσα μέρη.

33. $E_1 = 14{,}5\ cm^2$, $E_2 = 39\ cm^2$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

1. α) $x=6$, β) $x=-\frac{5}{6}$, γ) $y=-3$ δ) $\omega=1$ ε) $x=\frac{29}{2}$ στ) $x=-11$ ζ) $y=1$

2. α) $x = 15$ β) $x = 11$, γ) $x = \frac{2}{9}$ δ) $\omega = -2$

3. α) $A \cup B = \left\{\frac{3}{2}, -1\right\}$ β) $A \cup B = \{2, -7\}$

4. $A = \left\{\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{2}, \frac{7}{4}\right\}$

5. α) $x = 2$ β) $x = 10$

6. α) $x = \frac{3}{\alpha-1}$ β) ἀδύνατη

7. α) $x = 1$, $x = 2$ β) $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{2}{3}$

8. α) $L = Q$, β) $L = \phi$, γ) $L = \phi$, δ) $L = Q$

9. 23

10. $\frac{3}{7}$

11. 0

12. 9, 11, 14

13. 18

14. 40 καί 10

15. $\Gamma = 500$, $B = 1100$, $A = 2900$

16. $A = 6760$, $B = 14900$, $\Gamma = 3380$ $\Delta = 5960$

17. Πληθωρ. 8%, αὔξηση 7,8%

18. ἀρχική τιμή 2600

19. $4\frac{2}{3}$

20. α) $2\frac{2}{5}$ ὥρ. , β) 3 ὥρ.

21. 25%

22. 15300

23. 6,25%

24. 156000

25. 7 κουνέλια, 12 περιστέρια

26. −2, 0, 2

27. α) $L=\{0,1,2\}$ β) $L=\{0,1,2,3\}$ γ) $L=\{0,1,2,3\}$ δ) $L=\phi$
ε) $L=\{0,1,2,3,4,5,6\}$ στ) $L=\{13, 14, 15, \ldots\}$

28. α) $x<2$ β) $x>-10$ γ) $x>-\frac{17}{3}$ δ) $x>1$
ε) $x\leqslant-10$ στ) $x<-\frac{8}{11}$

29. α, β, γ σωστές, δ λάθος

30. 7

31. 6

32. α) $L=\{-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$
β) $L=\varnothing$

33. 2 cm, 3 cm, 4 cm

34. α) $x=-\frac{11}{5}$ β) $x=-1$, $x=2$ γ) $x=-11$, δ) $\omega=\frac{1}{2}$

35. α) $3<x<6$ β) $x>\frac{11}{7}$

36. 35

37. 62

38. 72°, 72°, 36°

39. $L=\{5,6,7,\ldots\}$

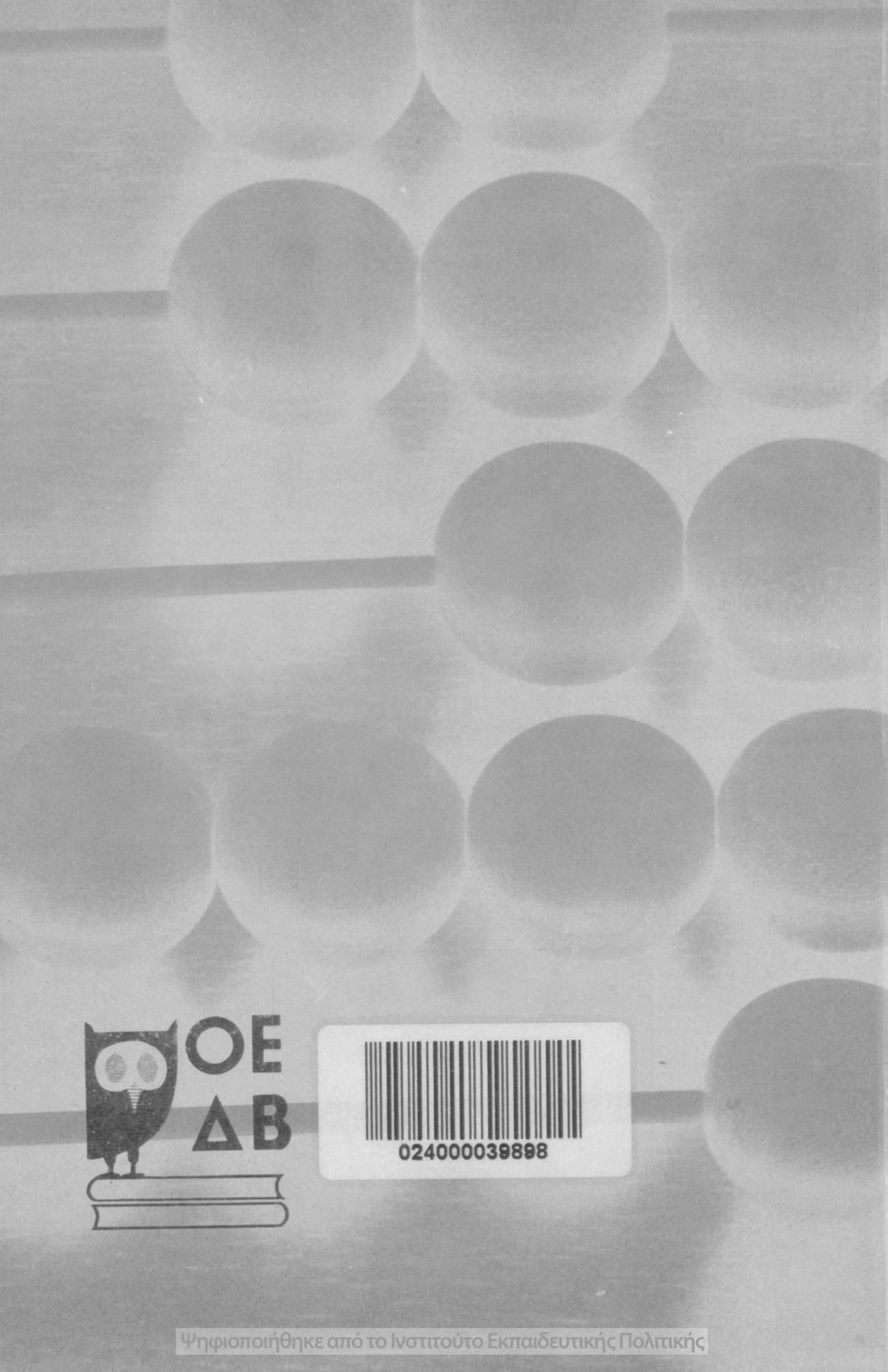
40. 16.000

41. 174 ἑκατομ.

42. 25%

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΤΕΥΧΟΣ Α'—ΕΚΔΟΣΗ Α', 1978—ΑΝΤΙΤΥΠΑ 180.000
ΕΚΤΥΠΩΣΗ: ΧΡΩΜΟΛΙΘΟΓΡΑΦΙΚΗ
ΒΙΒΛΙΟΔΕΣΙΑ: Ι. ΙΟΡΔΑΝΙΔΗΣ & ΣΙΑ



ΟΕ ΔΒ

024000039898