Β. Χ. ΣΑΒΒΑΪΔΗ
Καθηγητοῦ Μαθηματικῶν

Α. Κ. ΚΥΡΙΑΚΟΠΟΥΛΟΥ
Καθηγητοῦ Μαθηματικῶν

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΥΝΟΛΩΝ

ΛΕΛΥΜΕΝΑΙ

ΔΙΑ ΤΗΝ Α΄ ΤΑΞΙΝ ΤΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
(συμφώνως πρὸς τὸ νέον πρόγραμμα)
ΚΑΙ ΔΙΑ ΠΑΝΤΑ ΑΣΧΟΛΟΥΜΕΝΟΝ ΜΕ ΤΑ ΣΥΝΟΛΑ

$\exists$

f(῾Ελλάς) = ᾿Αθῆναι

$A \subseteq B$

$A \times B$

$A \cup B$

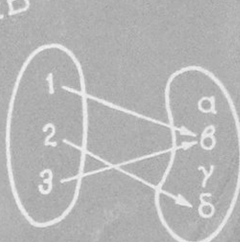
$C_E A$

$\alpha \notin A$

$\forall$

$x \in A \rightarrow f(x) \in B$

1. Βασικοὶ ὁρισμοί
2. Πράξεις μεταξὺ συνόλων
3. Καρτεσιανὸν γινόμενον δύο συνόλων
4. Διμελεῖς σχέσεις
5. ᾿Απεικονίσεις
6. Συναρτήσεις



$A \cap B$

$\emptyset$

$\alpha R \beta$

ΤΙΜΗΣ ΕΝΕΚΕΝ

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΑΘΑΝ. Θ. ΠΟΥΝΤΖΑ ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ

Β. Χ. ΣΑΒΒΑΪΔΗ
Καθηγητοῦ Μαθηματικῶν

Α. Κ. ΚΥΡΙΑΚΟΠΟΥΛΟΥ
Καθηγητοῦ Μαθηματικῶν

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΥΝΟΛΩΝ

ΛΕΛΥΜΕΝΑΙ

ΔΙΑ ΤΗΝ Α΄ ΤΑΞΙΝ ΤΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
(συμφώνως πρὸς τὸ νέον πρόγραμμα)
ΚΑΙ ΔΙΑ ΠΑΝΤΑ ΑΣΧΟΛΟΥΜΕΝΟΝ ΜΕ ΤΑ ΣΥΝΟΛΑ

1. Βασικοὶ ὁρισμοὶ
2. Πράξεις μεταξὺ συνόλων
3. Καρτεσιανὸν γινόμενον δύο συνόλων
4. Διμελεῖς σχέσεις
5. Ἀπεικονίσεις
6. Συναρτήσεις

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΑΘ. ΠΟΥΝΤΖΑ ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ

Πᾶν γνήσιον ἀντίτυπον φέρει τὴν ὑπογραφὴν τοῦ ἑνὸς τῶν συγγραφέων.

ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Τὸ παρὸν βιβλίον «**Ἀσκήσεις Συνόλων λελυμέναι**» ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο μέρη. Τὸ πρῶτον μέρος περιλαμβάνει τὰς ἀσκήσεις καὶ τὸ δεύτερον τὰς λύσεις αὐτῶν.

Αἱ ἀσκήσεις αὗται εἶναι αἱ περιλαμβανόμεναι ὡς ἄλυτοι εἰς τὸ βιβλίον τῶν ἰδίων συγγραφέων « ΣΥΝΟΛΑ » – διὰ τὴν πρώτην τάξιν τοῦ Λυκείου – εἰς τὸ ὁποῖον ἀναφέρονται καὶ αἱ παραπομπαί.

Τὸ βιβλίον τοῦτο εἶναι ἕνα αὐτοτελὲς βιβλίον ἀσκήσεων λελυμένων, ἐπὶ τῶν συνόλων, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ ἀποβῇ χρήσιμον καὶ εἰς πάντα ἀσχολούμενον μὲ τὴν θεωρίαν τῶν συνόλων.

Β. Χ. ΣΑΒΒΑΪΔΗΣ
Α. Κ. ΚΥΡΙΑΚΟΠΟΥΛΟΣ

ΠΙΝΑΞ ΣΥΜΒΟΛΩΝ

$\Rightarrow$: $A \Rightarrow B$	A συνεπάγεται (ἢ ἕπεται) B.
$\Leftrightarrow$: $A \Leftrightarrow B$	A ἰσοδυναμεῖ μὲ B, ἤτοι : $A \Rightarrow B$ καὶ $B \Rightarrow A$.
$\forall$:$(\forall x)(P)$	Ἡ ἰδιότης P ἐπαληθεύεται διὰ κάθε x.
$\exists$:$(\exists x)(P)$	Ὑπάρχει τουλάχιστον ἕνα x ἔχον τὴν ἰδιότητα P.
$\in$: $\alpha \in A$	Τὸ στοιχεῖον α ἀνήκει εἰς τὸ σύνολον A.
$\notin$: $\alpha \notin A$	Τὸ στοιχεῖον α δὲν ἀνήκει εἰς τὸ σύνολον A.
$=$: $\alpha = \beta$	α καὶ β εἶναι ὀνόματα τοῦ αὐτοῦ στοιχείου.
$\neq$: $\alpha \neq \beta$	α καὶ β δὲν εἶναι ἴσα. Εἶναι διάφορα.
$\varnothing$	Κενὸν σύνολον.
$\subseteqq$: $A \subseteqq B$	Τὸ σύνολον A εἶναι ὑποσύνολον τοῦ συνόλου B.
$\subset$: $A \subset B$	Τὸ σύνολον A εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ συνόλου B.
$P(E)$ ἢ 2^E	Δυναμοσύνολον τοῦ E. Σύνολον ὑποσυνόλων τοῦ E.
$\cap$: $A \cap B$	Τομὴ τῶν συνόλων A καὶ B.
$\cup$: $A \cup B$	Ἕνωσις τῶν συνόλων A καὶ B.
$-$: $A - B$	Διαφορὰ τῶν συνόλων A καὶ B.
C_E^A	Συμπλήρωμα τοῦ συνόλου A ὡς πρὸς τὸ E.
$\times$: $A \times B$	Καρτεσιανὸν γινόμενον τῶν συνόλων A καὶ B.
f : $A \rightarrow B$	f εἶναι μία ἀπεικόνισις τοῦ συνόλου A εἰς τὸ σύνολον B.
$\sim$: $A \sim B$	Τὸ σύνολον A εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ σύνολον B.
R : $\alpha R \beta$	Τὰ στοιχεῖα α καὶ β συνδέονται διὰ τῆς σχέσεως R.
$\not{R}$: $\alpha \not{R} \beta$	Τὰ στοιχεῖα α καὶ β δὲν συνδέονται διὰ τῆς σχέσεως R.

ΣΥΜΒΟΛΑ ΑΡΙΘΜΟΣΥΝΟΛΩΝ

Φ Σύνολον φυσικῶν ἀριθμῶν : $\{1, 2, 3, \ldots\}$

Φ_0 Σύνολον φυσικῶν ἀριθμῶν μετὰ τοῦ μηδενός : $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

A_κ Σύνολον ἀκεραίων ἀριθμῶν : $\{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$

P Σύνολον ρητῶν ἀριθμῶν $\left\{\frac{\kappa}{\lambda} \mid \kappa \in A_\kappa, \lambda \in A_\kappa \text{ μὲ } \lambda \neq 0\right\}$

Π Σύνολον πραγματικῶν ἀριθμῶν.

M Σύνολον μιγαδικῶν ἀριθμῶν.

Μεταξὺ αὐτῶν τῶν συνόλων διακρίνομεν τὰ ἑξῆς ὑποσύνολα :

Σύνολον ἀκεραίων
- ἐκτὸς τοῦ μηδενός : A_u^*
- θετικῶν . . . . . . : A_u^+
- ἀρνητικῶν . . . . : A_u^-

Σύνολον ρητῶν
- ἐκτὸς τοῦ μηδενὸς : P^*
- θετικῶν . . . . . . : P^+
- ἀρνητικῶν . . . . : P^-

Σύνολον πραγματικῶν
- ἐκτὸς τοῦ μηδενὸς : Π^*
- θετικῶν . . . . . . : Π^+
- ἀρνητικῶν . . . . : Π^-

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΙΣ ΟΡΙΣΜΟΙ

1. Σύνολα ἴσα : $(A=B)\Leftrightarrow(\forall x,\ x\in A\Leftrightarrow x\in B)$.
2. Ὑποσύνολον : $(A\subseteqq B)\Leftrightarrow(\forall x,\ x\in A\Rightarrow x\in B)$.
3. Τομὴ δύο συνόλων : $A\cap B=\{x \mid x\in A$ καὶ $x\in B\}$.
4. Ἕνωσις δύο συνόλων : $A\cup B=\{x \mid x\in A$ ἢ $x\in B\}$.
5. Διαφορὰ δύο συνόλων : $A-B=\{x \mid x\in A$ καὶ $x\notin B\}$.
6. Συμπλήρωμα : $\complement_E A=\{x \mid x\in E$ καὶ $x\notin A\}$ (ὑποτίθεται ὅτι $A\subseteqq E$).
7. Καρτεσιανὸν γινόμενον : $A\times B=\{(\alpha,\beta) \mid \alpha\in A$ καὶ $\beta\in B\}$.
8. Μία διμελὴς σχέσις R εἰς ἕνα σύνολον E, εἶναι :

Αὐτοπαθής, ἐάν : $\forall x,\ x\in E : xRx$ $\boxed{A}$

Συμμετρική, ἐάν : $\left.\begin{array}{r} x\in E \\ \text{καὶ } y\in E \\ \text{καὶ } xRy \end{array}\right\} \Rightarrow yRx.$ $\boxed{\Sigma}$

Ἀντισυμμετρική, ἐάν: $\left.\begin{array}{r} x\in E \\ \text{καὶ } y\in E \\ \text{καὶ } xRy \\ \text{καὶ } yRx \end{array}\right\} \Rightarrow x=y.$ $\boxed{AN}$

Μεταβατική, ἐάν : $\left.\begin{array}{r} x\in E \\ \text{καὶ } y\in E \\ \text{καὶ } z\in E \\ \text{καὶ } xRy \\ \text{καὶ } yRz \end{array}\right\} \Rightarrow xRz.$ $\boxed{M}$

9. Μία διμελὴς σχέσις R εἰς ἕνα σύνολον E, εἶναι :

Σχέσις ἰσοδυναμίας, ἐὰν εἶναι : $\left\{\begin{array}{l} \text{1. αὐτοπαθὴς} \\ \text{2. συμμετρικὴ} \\ \text{3. μεταβατικὴ} \end{array}\right.$

Σχέσις διατάξεως, ἐὰν εἶναι : $\left\{\begin{array}{l} \text{1. αὐτοπαθὴς} \\ \text{2. ἀντισυμμετρικὴ} \\ \text{3. μεταβατικὴ} \end{array}\right.$

10. Ἐὰν μία ἀπεικόνισις $f: A \to B$ εἶναι μονοσήμαντος (συνάρτησις) καὶ $x \in A$, $x' \in A$, τότε :

$$x = x' \Rightarrow f(x) = f(x'),$$

ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό :

$$f(x) \neq f(x') \Rightarrow x \neq x'.$$

11. Ἐὰν μία ἀπεικόνισις $f: A \to B$ εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος καὶ $x \in A$, $x' \in A$, τότε :

$$x \neq x' \Leftrightarrow f(x) \neq f(x'),$$

ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό :

$$f(x) = f(x') \Leftrightarrow x = x'.$$

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. ΒΑΣΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

1-1. Νὰ δοθοῦν παραδείγματα συνόλων.

1-2. Ἔστω $A=\{\alpha,\gamma,\delta,\eta\}$. Ποῖαι ἐκ τῶν ἑξῆς σχέσεων εἶναι ἀληθεῖς;

1) $\alpha\in A$. 2) $x\notin A$. 3) $\beta\in A$. 4) $\gamma\in A$. 5) $\eta\notin A$. 6) $\alpha\notin A$.
7) $\delta\in A$. 8) $\omega\in A$. 9) $\gamma\notin A$. 10) $x\in A$.

1-3. Ἔστω $E=\{x/x\in\Phi$ μὲ x ἄρτιος$\}$. Ποῖαι ἐκ τῶν ἑξῆς σχέσεων εἶναι ἀληθεῖς ;

1) $1\in E$. 2) $2\notin E$. 3) $3\in E$. 4) $-5\in E$. 5) $25\in E$. 6) $11\notin E$.
7) $8\in E$. 8) $\alpha\notin E$. 9) $\beta\in E$. 10) $2^{50}\in E$.

1-4. Τὰ στοιχεῖα $0,2,5,7,\frac{1}{7}$ ἀνήκουν εἰς τὰ κατωτέρω σύνολα ;

$E=\{x/x\in\Pi$ μὲ $x^2-12x+35=0\}$.
$\Sigma=\{x/x\in\Pi$ μὲ $7x-1=0\}$.
$T=\{x/x\in\Pi$ μὲ $x^2-0,2x=0\}$.

1-5. Τὰ στοιχεῖα -1, 0, 1 ἀνήκουν εἰς τὸ κατωτέρω σύνολον E ;

$E=\{x/x\in\Pi$ μὲ $x^{10}-2x^7+1=0\}$.

1-6. Ἐὰν $(x^2-2x+1)\in\{0,1\}$, νὰ εὑρεθοῦν αἱ δυναταὶ τιμαὶ τοῦ x. Ὁμοίως, ἐὰν $(x^2+1)\in\{1,2\}$.

1-7. Ποῖα τὰ στοιχεῖα ἑκάστου τῶν κατωτέρω συνόλων ;

$A=\{x/x\in\Phi$ μὲ x διαιρέτης τοῦ $12\}$.
$B=\{x/x$ ἀκέραιος μὲ $|x|<4\}$.
$\Gamma=\{x/x$ ἀκέραιος μὲ $8<x^2\leqq 25\}$.

1-8. Ὁρίσατε τὰ κάτωθι σύνολα διὰ καταγραφῆς τῶν στοιχείων των:

$A=\{x/x\in\Phi$ μὲ $x<3\}$.
$B=\{x/x\in\Phi$ μὲ $x^2<18\}$.
$\Gamma=\{x/x\in\Phi$ μὲ x ἄρτιος$\}$.
$\Delta=\{x/x\in\Phi$ μὲ $10<x^2<36\}$.

1-9. Προσδιορίσατε τὰ στοιχεῖα ἑκάστου τῶν κάτωθι συνόλων :

$A=\{x/x\in\Pi^+$ μὲ $x^2=4\}$.
$B=\{x/x\in\Pi$ μὲ $2x-3=5\}$.

$\Gamma=\{x/x \in \Pi$ μὲ $3x^2+1=0\}$.

$\Delta=\{x/x$ εἶναι γράμμα τῆς λέξεως «σύνολον»$\}$.

$E=\{x/x$ εἶναι ἡμέρα τῆς ἑβδομάδος$\}$.

Παραστήσατε ἕκαστον τῶν ἀνωτέρω συνόλων μὲ διάγραμμα τοῦ Venn.

1-10. Ὁρίσατε τὸ κάτωθι σύνολον E διὰ καταγραφῆς τῶν στοιχείων του:

$$E=\left\{x/x \in \Phi \text{ μὲ } \frac{x+2}{3x-4} \in \Phi\right\}$$

Παραστήσατε τὸ E μὲ διάγραμμα τοῦ Venn.

1-11. Ὁρίσατε ἕκαστον τῶν κάτωθι συνόλων διὰ μιᾶς χαρακτηριστικῆς ἰδιότητος τῶν στοιχείων του:

$E=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

$B=\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$.

$\Gamma=\{3, 10, 17, 24, 31, \ldots\}$.

$\Delta=\{$Παρασκευή, Κυριακή, Τρίτη, Δευτέρα, Τετάρτη, Πέμπτη, Σάββατον$\}$.

1-12. Ποῖα ἐκ τῶν κάτωθι συνόλων εἶναι πεπερασμένα σύνολα καὶ ποῖα ἀπειροσύνολα;

$A=\{x/x$ εἶναι ἀκέραιος περιττός$\}$.

$B=\{1, 2. 3, \ldots, 10^{123}\}$

$\Gamma=\{x/x$ εἶναι γράμμα τοῦ ἀνὰ χεῖρας βιβλίου$\}$.

$\Delta=\{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$.

$E=\{x/x$ εἶναι μὴν τοῦ ἔτους $\}$

$Z=\{x/x$ εἶναι νομὸς τῆς Ἑλλάδος$\}$.

$H=\{x/x$ εἶναι ὅρος τῆς Ἑλλάδος$\}$.

$\Theta=\{x/x \in \Phi$ μὲ $(x+1)^2=x^2+2x+1\}$.

1-13. Πόσα στοιχεῖα ἔχει ἕκαστον τῶν κάτωθι συνόλων;

$$\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}.$$

Παραστήσατε ἕκαστον τῶν ἀνωτέρω συνόλων μὲ διάγραμμα τοῦ Venn.

1-14. Πόσα στοιχεῖα ἔχει τὸ σύνολον:

$$\{\{1, 2, 3\}\}$$

1-15. Νὰ δοθοῦν παραδείγματα κενῶν συνόλων.

1-16. Ποῖον ἐκ τῶν κάτωθι συνόλων εἶναι κενόν ;

$A=\{x/x\in\Pi$ μὲ $x^2=16$ καὶ $x^2-5x+6=0\}$.

$B=\{x/x\in E$ μὲ $x\neq x\}$.

$\Gamma=\{x/x\in\Pi$ μὲ $x+5=5\}$,

$\Delta=\{x/x\in\Phi$ μὲ $9<x<10\}$.

$E=\{x/x\in\Phi$ μὲ x πρῶτος, ἄρτιος καὶ $x\neq 2\}$.

$Z=\{x/x$ ρητὸς ἀριθμὸς μὲ $0<x<1\}$.

1-17. Ποῖα ἐκ τῶν κάτωθι συνόλων εἶναι διάφορα ;

$$\varnothing,\quad \{0\},\quad \{\varnothing\}.$$

1-18. Τὰ σύνολα $\{\{1, 3, 5\}\}$ καὶ $\{1, 3, 5\}$ εἶναι ἴσα ; παραστήσατε ἕκαστον τῶν ἀνωτέρω συνόλων μὲ διάγραμμα τοῦ Venn.

1-19. Ποῖα ἐκ τῶν κάτωθι συνόλων εἶναι ἴσα ;

$A=\{x/x$ εἶναι γράμμα τῆς λέξεως «δυναταί»$\}$.

$B=\{x/x$ εἶναι γράμμα τῆς λέξεως «δύνανται»$\}$.

$\Gamma=\{\alpha, \delta, \iota, \nu, \tau, \upsilon\}$.

1-20. Ἔστωσαν τὰ σύνολα $A=\{1,3,5,6,7\}$ καὶ $B=\{6,7,1,5,3\}$. Ἡ ἰσότης $A=B$ εἶναι ἀληθής ;

1-21. Τὰ σύνολα $\{1,2,3\}$ καὶ $\{\varnothing,1,2,3\}$ εἶναι ἴσα ;

1-22. Τὰ σύνολα $\{1,2,3\}$ καὶ $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ εἶναι ἴσα ; Ἡ αὐτὴ ἐρώτησις διὰ τὰ σύνολα $\{1,2,3\}$ καὶ $\{1,2,\{3\}\}$.

1-23. Ἐὰν $\alpha\neq\beta$ καὶ $\gamma\neq\delta$, νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἰσότης $\{\alpha, \gamma\}=\{\beta, \delta\}$ συνεπάγεται τὰς δύο ἰσότητας $\alpha=\delta$ καὶ $\beta=\gamma$.

1-24. Ἐὰν ἰσχύῃ ἡ ἰσότης $\{\{x,y\}, z\}=\{1,\{2,3\}\}$, νὰ προσδιορισθοῦν τὰ x, y, z.

1-25. Νὰ ἀποδειχθῇ ἡ κάτωθι ἰσοδυναμία :

$$\alpha\neq\beta\Leftrightarrow\{\alpha\}\neq\{\beta\}.$$

1-26. Νὰ ἀποδειχθῇ ἡ ἰσοδυναμία :

$$\{\{\alpha\}, \{\alpha,\beta\}\}=\{\{\gamma\}, \{\gamma,\delta\}\} \Leftrightarrow (\alpha=\gamma \text{ καὶ } \beta=\delta).$$

1-27. Νὰ εὑρεθῇ ἡ σχέσις ἡ ὁποία συνδέει τὰ σύνολα :

$E=\{x/x\in\Phi$ μὲ $x=$πολ. $3\}$ καὶ Φ.

1-28. Ἔστωσαν τὰ σύνολα :

$A=\{2,4,6\}$ καὶ $B=\{1,2,3,4,5,6,7\}$.

Ποία σχέσις συνδέει τὰ σύνολα Α καὶ Β ; Ἡ αὐτὴ ἐρώτησις διὰ τὰ σύνολα :

$\Gamma=\{\varnothing,0,1,2\}$ καὶ $\Delta=\{1,2\}$.

1-29. α) Ἔστωσαν εἰς ἓν ἐπίπεδον Ε δύο περιφέρειαι (Γ) καὶ (Γ′) τεμνόμεναι εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Νὰ μελετηθῇ ἡ διαίρεσις τοῦ ἐπιπέδου Ε εἰς ὑποσύνολα. β) Τὸ ἴδιον πρόβλημα, ὅταν αἱ δύο περιφέρειαι (Γ) καὶ (Γ′) δὲν ἔχουν κοινὰ σημεῖα.

1-30. Ποία σχέσις ὑπάρχει μεταξύ :

1) τοῦ συνόλου τῶν πολυγώνων καὶ τοῦ συνόλου τῶν τετραπλεύρων· 2) τοῦ συνόλου τῶν τετραπλεύρων καὶ τοῦ συνόλου τῶν παραλληλογράμμων· 3) τοῦ συνόλου τῶν παραλληλογράμμων καὶ τοῦ συνόλου τῶν ρόμβων· 4) τοῦ συνόλου τῶν ρόμβων καὶ τοῦ συνόλου τῶν τετραγώνων.

1-31. Θεωροῦμεν ἓν σύνολον περιέχον πέντε στοιχεῖα. Πόσα ὑποσύνολα αὐτοῦ ὑπάρχουν περιέχοντα δύο στοιχεῖα ; Πόσα περιέχοντα τρία στοιχεῖα ; πόσα τέσσαρα ;

1-32. Ἔστω $A=\{x,y,z\}$. Νὰ εὑρεθοῦν ὅλα τὰ ὑποσύνολα τοῦ Α.

1-33. Ἐὰν $A\subseteqq B$, $B\subseteqq\Gamma$ καὶ $\alpha\in A$, $\beta\in B$, $\gamma\in\Gamma$, $\delta\notin A$, $\varepsilon\notin B$, $\zeta\notin\Gamma$. Ποῖαι ἐκ τῶν κάτωθι σχέσεων εἶναι ἀληθεῖς ;

1) $\alpha\in\Gamma$. 2) $\beta\in A$. 3) $\gamma\notin A$. 4) $\delta\in B$. 5) $\varepsilon\notin A$. 6) $\zeta\notin A$.

1-34. Ἔστω $E=\{\alpha,\beta,\gamma\}$. Νὰ εὑρεθῇ ἐὰν εἶναι ὀρθὸν νὰ γράφωμεν : 1) $\alpha\in E$. 2) $\alpha\subset E$. 3) $\{\alpha\}\in E$. 4) $\{\alpha\}\subseteqq E$. Νὰ δικαιολογηθοῦν αἱ ἀπαντήσεις.

1-35. Νὰ εὑρεθῇ ἐὰν εἶναι ὀρθὸν νὰ γράφωμεν : 1) $\alpha=\{\alpha\}$. 2) $\alpha\in\{\alpha\}$. 3) $\alpha\subseteqq\{\alpha\}$.

1-36. Ἔστω τὸ σύνολον $E=\big\{\,2,\{4,5\},4,\{4\},6\,\big\}$. Εἶναι ὀρθὸν νὰ γράφωμεν : 1) $\{4,5\}\subset E$. 2) $\{4,5\}\in E$. 3) $\big\{\{4,5\}\big\}\subset E$. 4) $4\in E$. 5) $5\in E$. 6) $\{2,4\}\in E$. 7) $\{6\}\subseteqq E$.

1-37. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐὰν $A\subseteqq B$ καὶ $B\subset\Gamma$, τότε $A\subset\Gamma$.

1-38. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $(A\subset B$ καὶ $B\subset\Gamma)\Rightarrow A\subset\Gamma$.

1-39. Θεωροῦμεν τὰ σύνολα $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $A_1\subseteqq A_2\subseteqq A_3\subseteqq\ldots\subseteqq A_\nu\subseteqq A_1$ ἄν, καὶ μόνον ἄν: $A_1=A_2=\ldots=A_\nu$.

1-40. Νὰ σχηματισθῇ τὸ σύνολον P(A), ἐὰν $A=\{\alpha,\beta\}$. 'Ομοίως νὰ σχηματισθῇ τὸ P(B), ἐὰν $B=\{\varnothing, 0, +\}$.

1-41. Ποῖον εἶναι τὸ σύνολον τῶν ὑποσυνόλων τοῦ κενοῦ συνόλου;

1-42. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον P(E), ἐὰν $E=\{1,\{1,2\}\}$. 'Ομοίως τὸ $P(\Sigma)$, ἐὰν $\Sigma=\{\alpha,\{\alpha\},\varnothing\}$.

1-43. Ἔστω ἓν σύνολον $E\neq\varnothing$. Νὰ εὑρεθῇ ἐὰν εἶναι ὀρθὸν νὰ γράφωμεν : 1) $E\in P(E)$, 2) $E\subseteqq P(E)$, 3) $\{E\}\in P(E)$, 4) $\{E\}\subseteqq P(E)$.

1-44. Συμβολίσατε τὰς ἀκολούθους σχέσεις : 1) Τὸ στοιχεῖον x δὲν ἀνήκει εἰς τὸ σύνολον A. 2) Τὸ A εἶναι ὑποσύνολον τοῦ B. 3) Τὸ α εἶναι στοιχεῖον τοῦ συνόλου E. 4) Τὸ Γ δὲν εἶναι ὑποσύνολον τοῦ Δ. 5) τὸ σύνολον Σ εἶναι κενόν. 6) Τὸ σύνολον E εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ T.

1-45. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐὰν $A\subseteqq\varnothing$ τότε $A=\varnothing$.

1-46. Θεωροῦμεν τὰς κάτωθι συνεπαγωγάς :

1) $(A\subseteqq B$ καὶ $B\nsubseteqq\Gamma)\Rightarrow(A\nsubseteqq\Gamma)$. 2) $(A\nsubseteqq B)\Rightarrow(B\nsubseteqq A)$.

3) $(A\subseteqq B)\Rightarrow(B\nsubseteqq A)$.

Νὰ ἐξετασθῇ ἡ ἀλήθεια ἑκάστης τούτων καὶ νὰ δικαιολογηθοῦν αἱ ἀπαντήσεις μὲ τὴν βοήθειαν διαγραμμάτων.

2. ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΣΥΝΟΛΩΝ

2-1. Θεωροῦμεν τὰ σύνολα :

$A=\{1, 2, 3. 4\}$, $B=\{2, 4, 6, 8\}$ καὶ $\Gamma=\{3, 4, 5, 6\}$.

Εὕρετε τὰ κάτωθι σύνολα :

1) $A\cap B$. 2) $A\cap\Gamma$. 3) $B\cap\Gamma$. 4) $B\cap B$.

5) $(A\cap B)\cap\Gamma$. 6) $A\cap(B\cap\Gamma)$.

2-2. Δίδονται τὰ ἑξῆς σύνολα : $A=\{\alpha,\beta,\gamma\}$, $B=\{\beta,\gamma,\delta\}$, $\Gamma=\{\gamma,\delta,\varepsilon\}$ καὶ $\Delta=\{\delta,\varepsilon,\varphi\}$.

1) Σχηματίσατε τὰ σύνολα : $A\cap B$, $B\cap\Gamma$, $A\cap\Gamma$.

2) Σχηματίσατε τὰ σύνολα :

$(A\cap B)\cap\Gamma$, $(A\cap B)\cap(\Gamma\cap\Delta)$, $(A\cap(B\cap\Gamma))\cap\Delta$.

2-3. 'Αποδείξατε ὅτι :

1) ἂν $\alpha\neq\beta$ τότε $\{\alpha\}\cap\{\beta\}=\varnothing$.

2) ἂν $\alpha=\beta$ τότε $\{\alpha\}\cap\{\beta\}=\{\alpha\}=\{\beta\}$.

2-4. Ἀποδείξατε ὅτι ἂν $B \subseteqq \Gamma$, τότε $A \cap B \subseteqq A \cap \Gamma$.

2-5. Ἀποδείξατε ὅτι ἂν $\Gamma \subseteqq A$ καὶ $\Gamma \subseteqq B$, τότε $\Gamma \subseteqq A \cap B$.

2-6. Ἀποδείξατε τὴν κάτωθι συνεπαγωγήν:

$(\Delta \subseteqq A$ καὶ $\Delta \subseteqq B$ καὶ $\Delta \subseteqq \Gamma) \Rightarrow \Delta \subseteqq (A \cap B \cap \Gamma)$.

2-7. Ἔστωσαν τὰ σύνολα $A \neq \varnothing$ καὶ $B \neq \varnothing$. Ἀποδείξατε ὅτι ἂν $A \cap B = \varnothing$, τότε οὐδεμία ἐκ τῶν σχέσεων: $A \subseteqq B$, $B \subseteqq A$, εἶναι ἀληθής.

2-8. Ἂν οὐδεμία ἐκ τῶν σχέσεων: $A \subseteqq B$ καὶ $B \subseteqq A$ εἶναι ἀληθής, ἕπεται $A \cap B = \varnothing$;

2-9. Θεωροῦμεν τὰ σύνολα:

$A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{2,4,6,8\}$ καὶ $\Gamma = \{3,4,5,6\}$.

Εὕρετε τὰ κάτωθι σύνολα:

1) $A \cup B$. 2) $A \cup \Gamma$. 3) $B \cup \Gamma$. 4) $B \cup B$. 5) $(A \cup B) \cup \Gamma$. 6) $A \cup (B \cup \Gamma)$.

2-10. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τομὴ καὶ ἡ ἕνωσις τῶν δύο συνόλων A καὶ B εἰς τὰς κάτωθι περιπτώσεις:

1) $A = \{\alpha,\gamma,\delta\}$ καὶ $B = \{\beta,\varepsilon\}$. 2) $A = \{\alpha,\gamma,\varepsilon\}$ καὶ $B = \{\alpha,\gamma,\varepsilon\}$.

3) $A = \{\beta,\gamma,\delta\}$ καὶ $B = \{\beta,\delta\}$. 4) $A = \{\alpha,\gamma\}$ καὶ $B = \{\alpha,\beta,\gamma\}$.

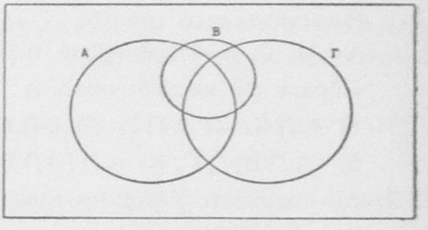
2-11. Εἰς τὸ παραπλεύρως διάγραμμα τοῦ Venn γραμμοσκιάσατε τὰ ἑξῆς σύνολα:

1) $A \cap (B \cup \Gamma)$.

2) $(A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$.

3) $A \cup (B \cap \Gamma)$.

4) $(A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$.



2-12. Θεωροῦμεν τὰ σύνολα:

$A = \{x / x \in \Pi$ μὲ $0 \leqq x \leqq 3\}$, $B = \{x / x \in \Pi$ μὲ $-1 \leqq x \leqq 2\}$.

Εὕρετε τὰ σύνολα: $A \cap B$ καὶ $A \cup B$.

2-13. Λύσατε τὰς δύο ἀνισότητας: $2x^2 - 3x + 1 < 0$ καὶ $2x - 1 > 0$. Ἐκφράσατε τὰς λύσεις των ὑπὸ μορφὴν συνόλων. Εὕρετε τὴν τομὴν καὶ τὴν ἕνωσιν τῶν δύο αὐτῶν συνόλων.

2-14. Ἂν $\nu \in \Phi$, θέτομεν: $A_\nu = \{x / x \in \Phi$ μὲ $x = \pi o\lambda.\nu\}$.

Κ. Κύρου

Εὕρετε τὰ κάτωθι σύνολα :

1) $A_2 \cap A_7$. 2) $A_6 \cap A_8$. 3) $A_3 \cup A_{12}$. 4) $A_3 \cap A_{12}$.

2-15. Ἀποδείξατε ὅτι : 1) $\varnothing \cup A = A$. 2) $A \cap \varnothing = \varnothing$.

2-16. Ἂν $A \subseteq \Gamma$ καὶ $B \subseteq \Gamma$, τότε $A \cup B \subseteq \Gamma$.

2-17. Ἀποδείξατε ὅτι : $A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B) = A$.

2-18. Ἀποδείξατε τὴν ἰσοδυναμίαν : $A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B$.

2-19. Ἐξετάσατε ἂν αἱ κάτωθι συνεπαγωγαὶ εἶναι ἀληθεῖς :

1) $A \cup B = A \cup \Gamma \Rightarrow B = \Gamma$. 2) $A \cap B = A \cap \Gamma \Rightarrow B = \Gamma$.

2-20. Ἀποδείξατε ὅτι :

1) $A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$.

2) $A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$.

Ἐπαληθεύσατε τὰς ἀνωτέρω ἰσότητας λαμβάνοντες :

$A = \{1,2,3\}$, $B = \{3,4,5\}$, $\Gamma = \{1,3,5\}$.

2-21. Θεωροῦμεν τὰ σύνολα: $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{2,4,6,8\}$ καὶ $\Gamma = \{3,4,5,6\}$

Εὕρετε τὰ κάτωθι σύνολα :

1) $A - B$. 2) $\Gamma - A$. 3) $B - \Gamma$. 4) $B - A$. 5) $B - B$.

2-22. Εὕρετε τὰ σύνολα X καὶ Y ἂν :

1) $\{1,2,3,5\} - \{1,3,8,9,10) = X$.

2) $\{1,2,3\} \cup \{2,7,8\} = X$.

3) $\{2,3,4\} \cap \{2,5,8\} = X$.

4) $A - B = X$ καὶ $B - A = Y$ ἔνθα :

$A = \{x / x \in \Pi$ μὲ $x \geqq 0\}$ καὶ $B = \{x / x \in \Pi$ μὲ $x \leqq 0\}$.

2-23. Ἀποδείξατε ὅτι : $A - A = \varnothing$.

2-24. Ἀποδείξατε ὅτι : $A - (A - \varnothing) = \varnothing$.

2-25. Ἀποδείξατε ὅτι : $A - B \neq B - A$.

2-26. Ἀποδείξατε ὅτι : $A - B \subseteq A \cup B$.

2-27. Ἀποδείξατε ὅτι ἂν $B \subseteq A$, τότε $B - \Gamma \subseteq A - \Gamma$.

2-28. Ἀποδείξατε ὅτι ἂν $B \subseteq A$, τότε $A - (A - B) = B$.

2-29. Ἀποδείξατε ὅτι : $(A - B) \cap B = \varnothing$.

2-30. Ἀποδείξατε τὴν ἰσοδυναμίαν : $A - B = A \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$.

2-31. Ἀποδείξατε τὴν ἰσοδυναμίαν : $(A - B) \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$.

2-32. Ἀποδείξατε ὅτι τὰ σύνολα: $A-B$, $A \cap B$, $B-A$ εἶναι ἀνὰ δύο ξένα μεταξύ των.

2-33. Ἀποδείξατε ὅτι: $A \cup B=(A-B) \cup B$.

2-34. Ἂν $A \subseteq \Gamma$ καὶ $B \subseteq \Gamma$, ἀποδείξατε ὅτι:
1) $A \subseteq \Gamma-B \Leftrightarrow A \cap B=\varnothing$ 2) $\Gamma-B \subseteq A \Leftrightarrow A \cup B=\Gamma$.

2-35. Ἀποδείξατε τοὺς κάτωθι τύπους τοῦ De Morgan:
1) $A-(B \cup \Gamma)=(A-B) \cap (A-\Gamma)$, 2) $A-(B \cap \Gamma)=(A-B) \cup (A-\Gamma)$.
Ἐπαληθεύσατε τοὺς ἀνωτέρω τύπους, λαμβάνοντες:
$A=\{1,2,3\}$, $B=\{3,4,5\}$, $\Gamma=\{1,3,5\}$.

2-36. Ἀποδείξατε ὅτι: $(A-\Gamma) \cup (B-\Gamma)=(A \cup B)-\Gamma$.

2-37. Ἀποδείξατε ὅτι ἂν $A \subseteq \Gamma$, $B \subseteq \Gamma$, $A \cup B=\Gamma$ καὶ $A \cap B=\varnothing$, τότε $B=\Gamma-A$.

2-38. Θεωροῦμεν τὰ σύνολα: $E=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{2,4,6,8\}$ καὶ $\Gamma=\{3,4,5,6\}$.
Εὕρετε τὰ κάτωθι σύνολα:
1) $\complement_E A=\bar{A}$. 2) $\complement_E B$. 3) $\complement_E(A \cup B)$. 4) $\complement_E \bar{A}$. 5) $\complement_E(B-\Gamma)$.

2-39. Ἔστω τὸ σύνολον $E=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ καὶ τὰ ὑποσύνολα αὐτοῦ $A=\{1,3,5,7,9,11\}$, $B=\{2,4,6,8\}$.
Θέτομεν: $\bar{A}=\complement_E A$ καὶ $\bar{B}=\complement_E B$.
Εὕρετε τὰ κάτωθι σύνολα:
1) $A \cap B$. 2) $\bar{A} \cap B$. 3) $A \cap \bar{B}$. 4) $\bar{A} \cap \bar{B}$. 5) $A \cup B$. 6) $\bar{A} \cup B$.
7) $A \cup \bar{B}$. 8) $\bar{A} \cup \bar{B}$. 9) $(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})$. 10) $(A \cup \bar{A}) \cap (B \cup \bar{B})$

2-40. Ἔστωσαν, τὸ σύνολον $E=\{1,2,3,4,5,6\}$ καὶ τὰ ὑποσύνολα αὐτοῦ $A=\{1,2,4\}$, $B=\{2,4,5,6\}$ καὶ $\Gamma=\{1,2,4,5\}$. Σχηματίσατε τὰ σύνολα: $\bar{A}=\complement_E A$, $\bar{B}=\complement_E B$, $\bar{\Gamma}=\complement_E \Gamma$.
Ἀκολούθως, εὕρετε τὰ κάτωθι σύνολα:
1) $(A \cup B) \cap (\bar{A} \cup B) \cap (A \cup \bar{B})$. 2) $(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cup \bar{B})$.
3) $(A \cup B) \cap (\bar{A} \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B})$. 4) $(A \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B})$.
5) $(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B})$.

2-41. Δίδονται τὰ σύνολα: $A=\{1,2,3,4\}$ καὶ $B=\{1,3,5,7\}$. Ἀποδείξατε ὅτι: $(A \cap B) \cup B=B$, $(A \cup B) \cup B=A \cup B$, $A \cap (A \cup B)=A$.

Ἂν ἀκολούθως θέσωμεν: $E=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, ἀποδείξατε ὅτι: $A \cap [(\complement_E A) \cup B] = A \cap B$, $A \cup [(\complement_E A) \cap B] = A \cup B$.

2-42. Ἂν $A \subseteqq E$, ἀποδείξατε ὅτι: $\complement_E(\complement_E A) = A$.

2-43. Ἂν $A \subseteqq E$, $B \subseteqq E$ καὶ $A \cap B = \varnothing$, ἀποδείξατε ὅτι:
1) $A \cup \complement_E B = \complement_E B$. 2) $B \cap \complement_E A = B$.

2-44. Ἂν $A \subseteqq E$ καὶ $B \subseteqq E$, ἀποδείξατε ὅτι:
1) $\complement_E(A \cap B) = (\complement_E A) \cup (\complement_E B)$. 2) $\complement_E(A \cup B) = (\complement_E A) \cap (\complement_E B)$.

2-45. Ἂν $A \subseteqq E$ καὶ $B \subseteqq E$, ἀποδείξατε ὅτι: $\complement_E A - \complement_E B = B - A$.

2-46. Ἂν $A \subseteqq E$ καὶ $B \subseteqq E$, ἀποδείξατε ὅτι $B - A \subseteqq \complement_E A$.

2-47. Θεωροῦμεν τὰ σύνολα:
$E = \{\alpha. \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta\}$, $A = \{\alpha, \gamma, \delta, \zeta\}$, $B = \{\gamma, \delta, \varepsilon, \zeta\}$.
1) Σχηματίσατε τὰ σύνολα: $P(A)$ καὶ $P(B)$. 2) Εὕρετε τὸ σύνολον: $[P(A)] \cap [P(B)]$. 3) Σχηματίσατε τὰ σύνολα: $P(\complement_E A)$ καὶ $P(\complement_E B)$. 4) Εὕρετε τὸ σύνολον: $[P(\complement_E A)] \cap [P(\complement_E B)]$.

2-48. Ἔστω $E = \{1,2,3,4,5,6\}$. Ἐξετάσατε ἂν ἕκαστον ἐκ τῶν κατωτέρω συνόλων εἶναι μία διαμέρισις τοῦ συνόλου E:
1) $\{\{1,3,5\}, \{2,4\}, \{3,6\}\}$. 2) $\{\{1,5\}, \{2\}, \{3,6\}\}$
3) $\{\{1,5\}, \{2\}, \{4\}, \{3,6\}\}$. 4) $\{\{1,2,3\}, \{4,5,6\}, \varnothing\}$

2.49. Ἔστωσαν τὰ σύνολα:
$A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta\}$,
$B_1 = \{\alpha, \gamma, \varepsilon\}$, $B_2 = \{\beta\}$, $B_3 = \{\delta, \eta\}$,
$\Gamma_1 = \{\alpha, \varepsilon, \eta\}$, $\Gamma_2 = \{\gamma, \delta\}$, $\Gamma_3 = \{\beta, \varepsilon, \zeta\}$,
$\Delta_1 = \{\alpha, \beta, \varepsilon, \eta\}$, $\Delta_2 = \{\gamma\}$, $\Delta_3 = \{\delta, \zeta\}$,
$E_1 = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta\}$.
Ἐξετάσατε ἂν ἕκαστον ἐκ τῶν συνόλων:
$\mathcal{D}_1 = \{B_1, B_2, B_3\}$, $\mathcal{D}_2 = \{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3\}$, $\mathcal{D}_3 = \{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3\}$, $\mathcal{D}_4 = \{E_1\}$, $\mathcal{D}_5 = \{B_1, B_3, \Delta_3\}$, $\mathcal{D}_6 = \{B_2, \Gamma_2, \Gamma_1\}$, εἶναι διαμέρισις τοῦ συνόλου A.

2-50. Ἔστωσαν τὰ σύνολα: $E=\{\varepsilon, \pi, \lambda, \alpha, \nu, o, \upsilon\}$,
$A=\{x/x$ εἶναι γράμμα τῆς λέξεως «ἀλλά»$\}$,
$B=\{x/x$ εἶναι γράμμα τῆς λέξεως «ὑπό»$\}$,
$\Gamma=\{x/x$ εἶναι γράμμα τῆς λέξεως «ἕν»$\}$.
'Αποδείξατε ὅτι τὸ σύνολον $\mathscr{D}=\{A,B,\Gamma,\}$ εἶναι μία διαμέρισις τοῦ συνόλου E.

2-51. Ἔστωσαν τὰ σύνολα: $E=\{x/x\in\Phi$ μὲ $1\leqq x\leqq 10\}$,
$B=\{x/x\in\Phi$ μὲ $1\leqq x\leqq 10$ καὶ x περιττός$\}$,
$B=\{x/x\in\Pi$ μὲ $(x-2)(x^2-14x+40)=0\}$,
$\Gamma=\{x/x\in\Pi$ μὲ $(x^2-11x+24)(x^2-11x+30)=0\}$.
'Εξετάσατε ἂν τὸ σύνολον $\mathscr{D}=\{A,B,\Gamma)$ εἶναι μία διαμέρισις τοῦ συνόλου E.

2-52. Ἔστωσαν τὰ σύνολα: $E=\{x/x\in\Phi$ μὲ $1\leqq x<11\}$.
$A=\{x/x\in\Phi$ μὲ $1\leqq x\leqq 6$ καὶ x περιττός$\}$,
$B=\{x/x\in\Phi$ μὲ $x=2+4\lambda$, ἔνθα λ ἀκέραιος μὲ $0\leqq\lambda<3\}$,
$\Gamma=\{x/x\in\Pi$ μὲ $(x-9).(x^2-12x+32)=0\}$.
'Εξετάσατε ἂν τὸ σύνολον $\mathscr{D}=\{A,B,\Gamma\}$ εἶναι μία διαμέρισις τοῦ συνόλου E.

2-53. Εὕρετε ὅλας τὰς δυνατάς διαμερίσεις τοῦ συνόλου $E=\{1,2,3\}$.

2-54. Εὕρετε ὅλας τὰς δυνατὰς διαμερίσεις τοῦ συνόλου $E=\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$.

2-55. Θέτομεν:

$$A_0=\{x/x\in\Phi \text{ μὲ } x=\text{πολ. } 3\}$$
$$A_1=\{x/x\in\Phi \text{ μέ } x=\text{πολ. } 3+1\}$$
$$A_2=\{x/x\in\Phi \text{ μὲ } x=\text{πολ. } 3+2\}.$$

'Αποδείξατε ὅτι τὸ σύνολον $\mathscr{D}=\{A_0, A_1, A_2\}$, εἶναι μία διαμέρισις τοῦ συνόλου Φ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν.

2-56. Ἔστω τὸ σύνολον $E=\{1,2,3,4,5\}$. 'Αποδείξατε ὅτι ἂν $\mathscr{D}=\{A,B\}$ εἶναι μία τυχοῦσα διαμέρισις τοῦ συνόλου E, περιλαμβάνουσα δύο σύνολα A καὶ B, τότε τὸ ἕν ἐκ τῶν συνόλων A,B περιέχει τὴν διαφορὰν δύο στοιχείων του.

3. ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΟΝ ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ ΔΥΟ ΣΥΝΟΛΩΝ

3-1. Ἔστω τὸ σύνολον $E=\{1, 2, 3, 4\}$. Εὕρετε ὅλα τὰ διατεταγμένα ζεύγη (x, y) μὲ $x \in E$, $y \in E$ καὶ $x<y$.

3-2. Θεωροῦμεν τὰ σύνολα $A=\{1, 2, 3\}$ καὶ $B=\{1, 3, 4\}$. Εὕρετε ὅλα τὰ διατεταγμένα ζεύγη (x, y) μὲ $x \in A$, $y \in B$ καὶ $x^2=y$.

3-3. Ἂν τὰ διατεταγμένα ζεύγη $(x+y, 1)$ καὶ $(3, x-y)$ εἶναι ἴσα, εὕρετε τὰ x καὶ y.

3-4. Ἂν $(y-2, 2x+1)=(x-1, y+2)$, εὕρετε τὰ x καὶ y.

3-5. Ἂν $\{(\alpha, \beta), \gamma\}=\{1, (3, 5)\}$ νὰ εὑρεθοῦν τὰ α, β, γ.

3-6. Ἔστω $A=\{1, 2, 3\}$. Εὕρετε τὸ $A \times A$ καὶ ἀκολούθως παραστήσατε αὐτὸ γραφικῶς.

3-7. Ἔστωσαν τὰ σύνολα:

$A=\{$Πέτρος, Ἰωάννης, Γεώργιος$\}$.

$B=\{$Χριστίνα, Ἑλένη$\}$.

Εὕρετε τὸ $A \times B$. Ἀκολούθως παραστήσατε τὸ $A \times B$ γραφικῶς.

3-8. Θεωροῦμεν τὰ σύνολα

$$A=\left\{x / x \in \Phi \text{ μὲ } x<\frac{13}{4}\right\},\quad B=\{x / x \in \Phi \text{ μὲ } x^2 \leqq 25\}.$$

Εὕρετε τὸ σύνολον $A \times B$.

3-9. Ἂν $A=\{\alpha, \beta, \gamma\}$ καὶ $B=\{\beta, \gamma, \delta\}$, εὕρετε τὰ κάτωθι σύνολα:

1) $A \times A$, 2) $B \times B$, 3) $A \times B$, 4) $(A \times A) \cap (B \times B)$,

5) $(A \times A) \cap (A \times B)$, 6) $(B \times B) \cap (A \times B)$.

3-10. α) Ἔστωσαν τὰ σύνολα $A=\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ καὶ $B=\{1, 2, 3\}$. Εὕρετε τὰ $A \times B$ καὶ $B \times A$. Παραστήσατε αὐτὰ γραφικῶς.
β) Θέτομεν: $A'=\{\alpha, \gamma, \delta\}$ καὶ $B'=\{1, 2\}$. Εὕρετε τὸ $A' \times B'$. Ἐπαληθεύσατε ὅτι $A' \times B' \subset A \times B$. Παραστήσατε τὸ $A' \times B'$ γραφικῶς.

3-11. Θεωροῦμεν τὰ σύνολα: $E=\{x / x \in \Phi \text{ μὲ } x<13\}$, $A=\{x / x \in \Phi$ μὲ $x<13$ καὶ x ἄρτιος$\}$ καὶ $B=\{4, 5, 6, 7, 8\}$. Εὕρετε τὰ κάτωθι σύνολα:

1) $A \times B$, 2) $A \times \complement_E B$. 3) $(\complement_E A) \times (\complement_E B)$.

3-12. Θεωροῦμεν τὰ σύνολα $E=\{1,2,3,4,5\}$, $A=\{1,2,3\}$ καὶ $B=\{3,4\}$. Εὕρετε καὶ ἀκολούθως συγκρίνατε τὰ κάτωθι σύνολα :
1) $\underset{E\times E}{C}(A\times B)$. 2) $(\underset{E}{C}A)\times(\underset{E}{C}B)$. 3) $B\times\underset{E}{C}A$. 4) $A\times\underset{E}{C}B$.

3-13. Ἂν $A=\{\alpha, \beta\}$, $B=\{2, 3\}$ καὶ $\Gamma=\{3, 4\}$, εὕρετε :
1) $A\times(B\cup\Gamma)$. 2) $(A\times B)\cup(A\times\Gamma)$. 3) $A\times(B\cap\Gamma)$.
4) $(A\times B)\cap(A\times\Gamma)$.

3-14. Ἂν $A=\{\alpha, \beta\}$, $B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ καὶ $\Gamma=\{3, 5, 7, 9\}$, εὕρετε :
1) $(A\times B)\cap(A\times\Gamma)$. 2) $(A\times B)\cup(A\times\Gamma)$.

3-15. Ἓν σύνολον A περιέχει 3 στοιχεῖα, ἓν ἄλλο σύνολον B περιέχει 4 στοιχεῖα. Πόσα στοιχεῖα περιέχει τὸ σύνολον $A\times B$;

3-16. Ἂν τὸ σύνολον A περιέχῃ ν τὸ πλῆθος στοιχεῖα καὶ τὸ σύνολον B μ, πόσα στοιχεῖα περιέχει τὸ σύνολον $A\times B$;

3-17. Τὸ σύνολον $A\times B$ περιέχει 6 στοιχεῖα. Πόσα στοιχεῖα εἶναι δυνατὸν νὰ περιέχῃ ἕκαστον τῶν συνόλων A καὶ B ; Ἐξετάσατε πλήρως ὅλας τὰς περιπτώσεις.

3-18. Τὸ σύνολον $A\times B$ περιέχει 7 στοιχεῖα. Πόσα στοιχεῖα εἶναι δυνατὸν νὰ περιέχῃ ἕκαστον τῶν συνόλων A καὶ B ;

3-19. Ἀποδείξατε τὴν κάτωθι συνεπαγωγήν :

$$\left.\begin{array}{r} A\subseteq B \\ \text{καὶ } \Gamma\subseteq\Delta \end{array}\right\} \Rightarrow (A\times\Gamma)\subseteq(B\times\Delta).$$

3-20. Ἂν $A\subseteq B$, ἀποδείξατε ὅτι :
1) $A\times B\subseteq B\times B$. 2) $A\times A\subseteq A\times B$.

3-21. Ἀποδείξατε ὅτι :
1) $A\times(B\cup\Gamma)=(A\times B)\cup(A\times\Gamma)$.
2) $A\times(B\cap\Gamma)=(A\times B)\cap(A\times\Gamma)$.

3-22. Ἀποδείξατε ὅτι :
1) $(A\cup B)\times\Gamma=(A\times\Gamma)\cup(B\times\Gamma)$.
2) $(A\cap B)\times\Gamma=(A\times\Gamma)\cap(B\times\Gamma)$.

4. ΔΙΜΕΛΕΙΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

4-1. Ἔστω R μία διμελὴς σχέσις ἐκ τοῦ συνόλου $E=\{2, 3, 4, 5\}$ εἰς τὸ σύνολον $M=\{3, 6, 7, 10\}$, ἡ ὁποία ὁρίζεται ὡς ἑξῆς :

$$x \in E,\ y \in M : xRy \Leftrightarrow (x \text{ διαιρεῖ } y).$$

1) Εὕρετε τὸ σύνολον R.

2) Παραστήσατε γραφικῶς τὴν R.

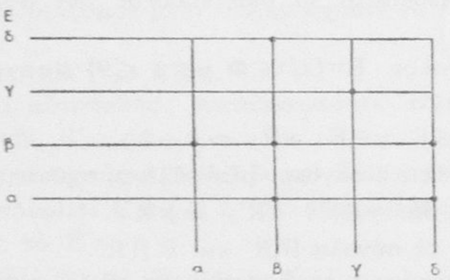
4-2. Ἔστω R μία διμελὴς σχέσις ἐκ τοῦ $A=\{1, 2, 3, 4\}$ εἰς τὸ $B=\{1, 3, 5\}$, ὁ ὁποία ὁρίζεται ὡς ἑξῆς :

$$\alpha \in A,\ \beta \in B : \alpha R \beta \Leftrightarrow (\alpha < \beta).$$

1) Εὕρετε τὸ σύνολον R.

2) Παραστήσατε γραφικῶς τὴν R.

4-3. Ἔστω τὸ σύνολον $E=\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ καὶ ἔστω R μία διμελὴς σχέσις εἰς τὸ E, τῆς ὁποίας ἡ γραφικὴ παράστασις εἶναι ἡ κατωτέρω :



1) Ἐξετάσατε, ἐὰν ἑκάστη τῶν κατωτέρω σχέσεων εἶναι ἀληθής:

$$\gamma R \beta,\quad \delta R \alpha,\quad \alpha R \gamma,\quad \beta R \beta.$$

2) Εὕρετε τὸ σύνολον $A=\{x / x \in E$ μὲ $xR\beta\}$.

3) Εὕρετε τὸ σύνολον $B=\{x / x \in E$ μὲ $\delta Rx\}$.

4) Εἰς τὸ E ὁρίζομεν μίαν ἄλλην σχέσιν R′ ὡς ἑξῆς :

$$x \in E,\ y \in E : xR'y \Leftrightarrow xRy.$$

α) εἶναι ὀρθὸν νὰ γράφωμεν :

$$\alpha R'\beta,\quad \beta R'\beta,\quad \gamma R'\beta,\quad \delta R'\delta :$$

β) Εὕρετε τὸ σύνολον $\Gamma=\{x/x\in E$ μὲ $xR'\gamma\}$.

γ) Εὕρετε τὸ σύνολον $\Delta=\{x/x\in E$ μὲ $\alpha R'x\}$.

5) Κατασκευάσατε τὰ διαγράμματα τῶν R καὶ R′.

4-4. Εἰς τὸ σύνολον $E=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ὁρίζομεν δύο διμελεῖς σχέσεις R καὶ R′ ὡς ἑξῆς:

$$x\in E,\ y\in E:\ xRy \Leftrightarrow x+1=y$$

$$\text{καί}:\ xR'y \Leftrightarrow x\leqq y.$$

1) Εὕρετε τὰ σύνολα $R, R', R\cap R'$ καὶ $R\cup R'$.

2) Εἰς τὸ E ὁρίζομεν μία νέαν διμελῆ σχέσιν R_1 ὡς ἑξῆς:

$$x\in E,\ y\in E:\ xR_1y \Leftrightarrow (xRy \text{ καὶ } x\ R'y).$$

Εὕρετε τὸ σύνολον R_1.

3) Εἰς τὸ E ὁρίζομεν μίαν τετάρτην διμελῆ σχέσιν R_2 ὡς ἑξῆς:

$$x\in E,\ y\in E:\ x\ R_2y \Leftrightarrow (xRy \text{ ἢ } x\ R'y).$$

Εὕρετε τὸ σύνολον R_2.

4) Παραστήσατε γραφικῶς τὰς σχέσεις R, R', R_1 καὶ R_2.

5) Κατασκευάσατε τὰ διαγράμματα τῶν ἀνωτέρω τεσσάρων σχέσεων.

4-5. Εἰς τὸ σύνολον $E=\{x/x\in\Phi$ μὲ $x<9\}$ εἰσάγομεν τὴν σχέσιν R, ὡς ἑξῆς:

$$x\in E,\ y\in E:\ xRy \Leftrightarrow x+2=y.$$

Ἀκολούθως εἰσάγομεν μίαν ἄλλην σχέσιν R′ ὡς ἑξῆς:

$$x\in E,\ y\in E:\ xR'y \Leftrightarrow x\bar{R}y.$$

1) Εὕρετε τὰ σύνολα R, R' καὶ $R\cap R'$.

2) Κατασκευάσατε τὰ διαγράμματα τῶν R καὶ R′.

3) Παραστήσατε τὰς R καὶ R′ γραφικῶς.

4-6. Ἔστω τὸ σύνολον $E=\{x/x\in\Phi$ μὲ $x<10\}$. Εἰς τὸ E ὁρίζομεν τρεῖς σχέσεις R_1, R_2 καὶ R ὡς ἑξῆς:

$$\begin{aligned} x\in E,\ y\in E:\ & xR_1y \Leftrightarrow y=x^2 \\ & xR_2y \Leftrightarrow y\leqq 16-x^2 \\ & xRy \ \Leftrightarrow (xR_1y \text{ καὶ } xR_2y). \end{aligned}$$

1) Εὕρετε τὰ σύνολα $R_1, R_2, R, R_1\cap R_2$ καὶ $R_1\cup R_2$.

2) Κατασκευάσατε τὰ διαγράμματα τῶν R_1, R_2 καὶ R.

3) Παραστήσατε γραφικῶς τὰς R_1, R_2 καὶ R.

4-7. Εἰς τὸ σύνολον $E=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ὁρίζομεν δύο διμελεῖς σχέσεις R καὶ R', ὡς ἑξῆς :

$$x \in E,\ y \in E : xRy \Leftrightarrow (x+1=y \text{ καὶ } x \leqq y)$$
$$xR'y \Leftrightarrow (x+1=y \text{ ἢ } x \leqq y)$$

1) Εὕρετε τὰ σύνολα $R, R', R \cap R', R \cup R'$.

2) Κατασκευάσατε τὰ διαγράμματα τῶν R καὶ R'.

3) Παραστήσατε γραφικῶς τὰς R καὶ R'.

4-8. Εἰς τὸ σύνολον $E=\{1, 2, 3, 4\}$ ὁρίζομεν τὴν διμελῆ σχέσιν $R=\{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (4, 4)\}$.

1) Κατασκευάσατε τὸ διάγραμμα τῆς R.

2) Ἡ σχέσις R εἶναι αὐτοπαθής ;

4-9. Ἔστω τὸ σύνολον $E=\{\alpha, \beta, \gamma\}$ καὶ ἔστω R μία διμελὴς σχέσις εἰς τὸ E, τῆς ὁποίας δίδεται παραπλεύρως τὸ διάγραμμα.

1) Ἡ R εἶναι αὐτοπαθής ;

2) Εἰς τὸ E ὁρίζομεν μίαν ἄλλην σχέσιν R' ὡς ἑξῆς :

$x \in E,\ y \in E : xR'y \Leftrightarrow x \not\mathrel{R} y$.

Ἡ R' εἶναι αὐτοπαθής ; κατασκευάσατε τὸ διάγραμμα τῆς R'.

3) Παραστήσατε τὰς σχέσεις R καὶ R' γραφικῶς.

4-10. Ἔστω τὸ σύνολον $E=\{1, 2, 3\}$. Θεωροῦμεν τὰς ἀκολούθους σχέσεις εἰς τὸ E :

$$R_1=\{(1, 2), (3, 2), (2, 2), (2, 3)\}.$$
$$R_2=\{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}.$$
$$R_3=\{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}.$$
$$R_4=E \times E$$

1) Ποῖαι ἐξ αὐτῶν εἶναι αὐτοπαθεῖς ;

2) Κατασκευάσατε τὰ διαγράμματα τῶν αὐτοπαθῶν μόνον ἐκ τῶν ἀνωτέρω σχέσεων.

3) Παραστήσατε γραφικῶς ὅλας τὰς ἀνωτέρω σχέσεις.

4-11. Εἰς τὸ σύνολον Φ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ὁρίζομεν τὰς ἀκολούθους σχέσεις :

$x \in \Phi,\ y \in \Phi: \ xR_1y \Leftrightarrow$ (x διαιρεῖ y).
$xR_2y \Leftrightarrow (x+y=10)$.
$xR_3y \Leftrightarrow$ (x καὶ y σχετικῶς πρῶτοι).

Ποῖαι ἐξ αὐτῶν εἶναι αὐτοπαθεῖς;

4-12. Ἔστω ἓν σύνολον $E \neq \varnothing$. Καλοῦμεν διαγώνιον τοῦ Καρτεσιανοῦ γινομένου $E \times E$ τὸ σύνολον, ἔστω Δ, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:

$$\Delta = \{(x, x) / x \in E\}.$$

Ἐὰν R εἶναι μία αὐτοπαθὴς διμελὴς σχέσις εἰς τὸ E, ποία σχέσις συνδέει τὰ δύο σύνολα Δ καὶ R;

4-13. Θεωροῦμεν ἓν σύνολον E ἐφωδιασμένον διὰ δύο διμελῶν σχέσεων R καὶ R′. Ἀποδείξατε ὅτι, ἐὰν ἑκάστη τῶν R καὶ R′ εἶναι αὐτοπαθής, τότε ἑκάστη τῶν διμελῶν σχέσεων $R \cap R'$, $R \cup R'$ εἶναι ἐπίσης αὐτοπαθής.

4-14. Ἔστω $E = \{1, 2, 3, 4\}$. Εἰς τὸ E ὁρίζομεν τὴν σχέσιν

$$R = \{(1, 2),\ (3, 4),\ (2, 1),\ (3, 3)\}.$$

1) Ζητοῦνται τὸ διάγραμμα καὶ ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς R.
2) Ἡ R εἶναι συμμετρική;

4-15. Ἔστω τὸ σύνολον $E = \{1, 2, 3\}$. Θεωροῦμεν τὰς ἀκολούθους σχέσεις εἰς τὸ E: $R_1 = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 2), (2, 3)\}$. $R_2 = \{(1, 1)\}$, $R_3 = \{(1, 2)\}$. $R_4 = \{(1, 1), (3,2), (2,3)\}$. $R_5 = E \times E$.
1) Ποῖαι ἐξ αὐτῶν εἶναι συμμετρικαί;
2) Ζητοῦνται τὰ διαγράμματα καὶ αἱ γραφικαὶ παραστάσεις τῶν συμμετρικῶν μόνον ἐκ τῶν ἀνωτέρω σχέσεων.

4-16. Εἰς τὸ σύνολον Φ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ὁρίζομεν τὰς ἀκολούθους σχέσεις:

$x \in \Phi,\ y \in \Phi: \ xR_1y \Leftrightarrow$ (x διαιρεῖ y).
$xR_2y \Leftrightarrow (x+y=6)$.
$xR_3y \Leftrightarrow (2x+y=15)$.

Ποῖαι ἐξ αὐτῶν εἶναι συμμετρικαί;

4-17. Θεωροῦμεν ἓν σύνολον E ἐφωδιασμένον διὰ δύο διμελῶν σχέσεων R καὶ R′. Ἀποδείξατε ὅτι, ἐὰν ἑκάστη τῶν R καὶ R εἶναι συμμετρική, τότε ἑκάστη τῶν διμελῶν σχέσεων $R \cap R'$, $R \cup R'$ εἶναι ἐπίσης συμμετρική.

4-18. Εἰς τὸ $E = \{1, 2, 3, 4\}$ ὁρίζομεν τὴν σχέσιν

$$R = \{(1, 2), (3, 4), (2, 2), (3, 3), (2, 1)\}.$$

1) Ζητοῦνται τὸ διάγραμμα καὶ ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς R.
2) Ἡ R εἶναι ἀντισυμμετρική;

4-19. Ἔστω $E = \{1, 2, 3\}$. Θεωροῦμεν τὰς ἀκολούθους σχέσεις εἰς τὸ E:

$R_1 = \{(1, 1)\ (2, 1), (2, 2), (3, 2), (2, 3)\}$. $R_2 = \{(1, 1)\}$.
$R_3 = \{(1, 2)\}$, $R_4 = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$. $R_5 = E \times E$.

1) Ποῖαι ἐξ αὐτῶν εἶναι ἀντισυμμετρικαί;
2) Ζητοῦνται τὰ διαγράμματα καὶ αἱ γραφικαὶ παραστάσεις τῶν ἀντισυμμετρικῶν μόνον ἐκ τῶν ἀνωτέρω σχέσεων.

4-20. Εἰς τὸ σύνολον Φ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ὁρίζομεν τὰς ἀκολούθους σχέσεις:

$$x \in \Phi,\ y \in \Phi: \quad \begin{aligned} xR_1y &\Leftrightarrow (x \leqq y) \\ xR_2y &\Leftrightarrow (x < y) \\ xR_3y &\Leftrightarrow (2x + y = 10) \\ xR_4y &\Leftrightarrow (x \text{ διαιρεῖ } y). \end{aligned}$$

Ποῖαι ἐξ αὐτῶν εἶναι ἀντισυμμετρικαί;

4-21. Εὕρετε μίαν σχέσιν R εἰς ἓν σύνολον E, ἡ ὁποία νὰ μὴ εἶναι συμμετρικὴ οὔτε ἀντισυμμετρική. Ἀκολούθως κατασκευάσατε τὸ διάγραμμα τῆς ἐν λόγῳ σχέσεως R.

4-22. Δύναται μία σχέσις R εἰς ἓν σύνολον E νὰ εἶναι ταυτοχρόνως συμμετρικὴ καὶ ἀντισυμμετρική;

4-23. Ἔστω $E = \{1, 2, 3, 4\}$. Ὁρίζομεν εἰς τὸ E τὰς ἀκολούθους σχέσεις:

$$R_1 = \{(1, 2), (4, 3), (2, 2), (2, 1), (3, 1)\}$$
$$R_2 = \{(1, 1), (4, 4), (1, 2), (2, 2), (2, 1)\}.$$

1) Ἐξετάσατε ἐὰν ἑκάστη τούτων εἶναι μεταβατική.
2) Ζητοῦνται τὰ διαγράμματα καὶ αἱ γραφικαὶ παραστάσεις αὐτῶν.

4-24. Ἔστω τὸ σύνολον $E = \{1, 2, 3\}$. Θεωροῦμεν εἰς τὸ E τὰς ἀκολούθους σχέσεις:

$R_1=\{(1, 2), (2, 2)\}$. $R_2=\{(1, 2), (2, 3), (1, 3), (2, 1), (1, 1)\}$.
$R_3=\{(1, 2)\}$. $R_4=\{(1, 1)\}$. $R_5=E\times E$.

1) Ποῖαι ἐξ αὐτῶν εἶναι μεταβατικαί ;

2) Ζητοῦνται τὰ διαγράμματα καὶ αἱ γραφικαὶ παραστάσεις τῶν μεταβατικῶν μόνον ἐκ τῶν ἀνωτέρω σχέσεων.

4-25. Εἰς τὸ σύνολον Φ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ὁρίζομεν τὰς ἀκολούθους σχέσεις :

$$x\in\Phi,\ y\in\Phi:\ xR_1y \Leftrightarrow (x\leqq y)$$
$$xR_2y \Leftrightarrow (x \text{ διαιρεῖ } y)$$
$$xR_3y \Leftrightarrow (x+2y=5).$$

Ποῖαι ἐξ αὐτῶν εἶναι μεταβατικαί ;

4-26. Θεωροῦμεν ἓν σύνολον E ἐφωδιασμένον διὰ δύο διμελῶν σχέσεων R καὶ R′. Ἀποδείξατε ὅτι, ἐὰν ἑκάστη τῶν R καὶ R′ εἶναι μεταβατική, τότε α) ἡ διμελὴς σχέσις $R\cap R'$ εἶναι ἐπίσης μεταβατική· β) ἡ διμελὴς σχέσις $R\cup R'$ δὲν ἕπεται ὅτι εἶναι ἐπίσης μεταβατική.

4-27. Ἔστω ἓν σύνολον $E=\{1, 2, 3, 4\}$. Θεωροῦμεν τὰς ἀκολούθους σχέσεις εἰς τὸ E :

$R_1=\{(1, 1), (1, 2)\}$. $R_2=\{(1, 1), (2, 3), (4, 1)\}$.
$R_3=\{(1, 3), (2, 4)\}$. $R_4=\{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$. $R_5=E\times E$.

1) Ἐξετάσατε ἐὰν ἑκάστη τῶν ἀνωτέρω σχέσεων εἶναι : α) αὐτοπαθής, β) συμμετρική, γ) ἀντισυμμετρική, δ) μεταβατική.

2) Κατασκευάσατε τὰ διαγράμματα τῶν ἀνωτέρω πέντε σχέσεων.

4-28. Εἰς τὸ σύνολον $A_\kappa=\{0, \pm 1. \pm 2,\ldots\}$, ὁρίζομεν μίαν σχέσιν R ὡς ἑξῆς :

$$\alpha\in A_\kappa\ \ \beta\in A_\kappa:\ \alpha R\beta \Leftrightarrow \alpha^2+\alpha=\beta^2+\beta.$$

Ἐξετάσατε ἐὰν ἡ R εἶναι αὐτοπαθής, συμμετρική, ἀντισυμμετρική, μεταβατική.

4-29. Ἔστω ἓν σύνολον $E\neq\varnothing$. Εἰς τὸ σύνολον P(E) ὁρίζομεν μίαν διμελῆ σχέσιν R ὡς ἑξῆς :

$$A\in P(E),\ B\in P(E):\ ARB \Leftrightarrow (A\cap B=\varnothing).$$

Ἐξετάσατε τὰς ἰδιότητας τῆς σχέσεως R.

4-30. Ἔστω E τὸ σύνολον τῶν κατοίκων μιᾶς πόλεως. Ὁρίζομεν τὰς ἀκολούθους σχέσεις εἰς τὸ E:

$\alpha \in E$, $\beta \in E$: $\alpha R_1 \beta \Leftrightarrow$ (α εἶναι ἀδελφὸς τοῦ β),
$\alpha R_2 \beta \Leftrightarrow$ (α εἶναι πατὴρ τοῦ β).
$\alpha R_3 \beta \Leftrightarrow$ (α εἶναι υἱὸς τοῦ β).
$\alpha R_4 \beta \Leftrightarrow$ (α εἶναι ἀπόγονος τοῦ β).

Ἐξετάσατε τὰς ἰδιότητας ἑκάστης τῶν ἀνωτέρω σχέσεων.

4-31. Ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου E θεωροῦμεν μίαν σταθερὰν περιφέρειαν (γ). Μεταξὺ τοῦ συνόλου τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου E ὁρίζομεν μίαν διμελῆ σχέσιν R ὡς ἑξῆς:

$A \in E$, $B \in E$:

$ARB \Leftrightarrow$ (Τὸ A εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τῆς (γ) καὶ τὸ B ἐξωτερικὸν σημεῖον τῆς (γ).)

Ἐξετάσατε τὰς ἰδιότητας τῆς σχέσεως R.

4-32. Καλοῦμεν E τὸ σύνολον τῶν περιφερειῶν ἑνὸς ἐπιπέδου. Εἰς τὸ E ὁρίζομεν τὰς ἀκολούθους σχέσεις:

$x \in E$, $y \in E$: $xR_1y \Leftrightarrow$ (x τέμνει τὴν y).
$xR_2y \Leftrightarrow$ (x εἶναι ὀρθαγώνιος τῆς y).
$xR_3y \Leftrightarrow$ (x ἐφάπτεται τῆς y).
$xR_4y \Leftrightarrow$ (x εἶναι ὁμόκεντρος τῆς y)·

Ἐξετάσατε τὰς ἰδιότητας ἑκάστης τῶν ἀνωτέρω σχέσεων.

4-33. Καλοῦμεν E τὸ σύνολον τῶν κύκλων ἑνὸς ἐπιπέδου. Εἰς τὸ E ὁρίζομεν τὰς ἀκολούθους σχέσεις:

$x \in E$, $y \in E$: $xR_1y \Leftrightarrow x \cap y \neq \emptyset$.
$xR_2y \Leftrightarrow x \cap y = \emptyset$.
$xR_3y \Leftrightarrow$ (x εἶναι ὁμόκεντρος τῆς y).

Ποῖαι αἱ ἰδιότητες ἑκάστης τῶν ἀνωτέρω σχέσεων;

4-34. Θεωροῦμεν ἓν σύνολον E ἐφωδιασμένον διὰ μιᾶς διμελοῦς σχέσεως R. Ἀποδείξατε ὅτι:

1) Ἐὰν ἡ R εἶναι αὐτοπαθής, τότε καὶ ἡ R^{-1} (§ 4.8, ἄσκησις 6) εἶναι αὐτοπαθής.

2) Ἐὰν ἡ R εἶναι συμμετρική, τότε καὶ ἡ R^{-1} εἶναι συμμετρική.

3) Ἐάν ἡ R εἶναι ἀντισυμμετρική, τότε καὶ ἡ R^{-1} εἶναι ἀντισυμμετρική,

4) $(R^{-1})^{-1}=R$.

4-35. Ἀποδείξατε ὅτι μία σχέσις R εἰς ἓν σύνολον E εἶναι συμμετρικὴ ἐάν, καὶ μόνον ἐάν : $R=R^{-1}$.

4-36. Ἀποδείζατε ὅτι μία σχέσις R εἰς ἓν σύνολον E εἶναι ἀντισυμμετρικὴ ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, $R \cap R^{-1} \subseteqq \Delta$, ἔνθα Δ εἶναι ἡ διαγώνιος τοῦ EXE (ἄσκησις 4—12).

4-37. Εἰς τὸ σύνολον A_κ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν εἰσάγομεν μίαν σχέσιν R ὡς ἑξῆς :

$$\alpha \in A_\kappa,\ \beta \in A_\kappa : \alpha R \beta \Leftrightarrow (\alpha-\beta \text{ διαιρεῖται διὰ } 2).$$

Ἀποδείξατε ὅτι ἡ R εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας. Ποῖαι αἱ κλάσεις ἰσοδυναμίας;

4-38. Εἰς τὸ σύνολον A_κ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν εἰσάγομεν μίαν σχέσιν R ὡς ἑξῆς :

$$\alpha \in A_\kappa,\ \beta \in A_\kappa : \alpha R \beta \Leftrightarrow (\alpha-\beta \text{ διαιρεῖται διὰ } 5).$$

Ἀποδείξατε ὅτι ἡ R εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας. Ποῖαι αἱ κλάσεις ἰσοδυναμίας καὶ ποῖον τὸ σύνολον πηλίκον;

4-39. Ἔστω Φ τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν. Θεωροῦμεν τὸ σύνολον $\Phi X \Phi = \Phi^2$. Εἰς τὸ σύνολον Φ^2 εἰσάγομεν μίαν σχέσιν R ὡς ἑξῆς :

$$(\alpha,\beta) \in \Phi^2,\ (\alpha',\beta') \in \Phi^2 : (\alpha,\beta) R (\alpha',\beta') \Leftrightarrow \alpha\beta' = \beta\alpha'.$$

Ἀποδείξατε ὅτι ἡ R εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας. Δώσατε στοιχεῖα τῆς κλάσεως τοῦ στοιχείου (1, 2).

4-40. Θεωροῦμεν τὸ σύνολον $\Phi_0 = \Phi \cup \{O\}$. Εἰς τὸ σύνολον $\Phi_0 X \Phi_0 = \Phi_0^2$ ὁρίζομεν μίαν σχέσιν R ὡς ἑξῆς: Δύο στοιχεῖα $(\alpha,\beta) \in \Phi_0^2$ καὶ $(\alpha',\beta') \in \Phi_0^2$ συνδέονται διὰ τῆς σχέσεως R, ὅταν $\alpha+\beta'=\beta+\alpha'$. Ἀποδείξατε ὅτι ἡ R εἰς τὸ Φ_0^2 εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας. Δώσατε στοιχεῖα τῆς κλάσεως τοῦ στοιχείου (2, 1).

4-41. Θεωροῦμεν μίαν εὐθεῖαν Δ καὶ ἓν σταθερὸν σημεῖον Ω ἐπ' αὐτῆς. Καλοῦμεν Σ τὸ σύνολον τῶν σημείων τῆς Δ πλὴν τοῦ σημείου Ω : $\Sigma = \Delta - \{\Omega\}$.

Εἰς τὸ Σ ὁρίζομεν μίαν σχέσιν R ὡς ἑξῆς :

$$A \in \Sigma,\ B \in \Sigma : ARB \Leftrightarrow (AB \cap \{\Omega\} = \varnothing).$$

Ἀποδείξατε ὅτι ἡ R εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας. Ποῖαι αἱ κλάσεις ἰσοδυναμίας;

4-42. Ἔστωσαν, ἓν ἐπίπεδον Ε καὶ μία σταθερὰ εὐθεῖα αὐτοῦ Δ. Θεωροῦμεν τὸ σύνολον Σ τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου Ε πλὴν τῶν σημείων τῆς εὐθείας Δ: $\Sigma = E - \Delta$. Εἰς τὸ Σ ὁρίζομεν μίαν σχέσιν R ὡς ἑξῆς:

$$A \in \Sigma,\ B \in \Sigma:\ ARB \Leftrightarrow (AB \cap \Delta = \varnothing).$$

Ἀποδείξατε ὅτι ἡ R εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας. Ποῖαι αἱ κλάσεις ἰσοδυναμίας;

4-43. Δύο εὐθεῖαι Δ_1 καὶ Δ_2 ἑνὸς ἐπιπέδου Ε συνδέονται διὰ τῆς σχέσεως R, ἐὰν $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \varnothing$ ἢ ἐὰν $\Delta_1 \equiv \Delta_2$. Ἀποδείξατε ὅτι ἡ R εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας. Ποῖαι αἱ κλάσεις ἰσοδυναμίας;

4-44. Ἔστω εἰς ἓν ἐπίπεδον Ε μία σταθερὰ εὐθεῖα (δ). Δύο σημεῖα $A \in E$ καὶ $B \in E$ συνδέονται διὰ τῆς σχέσεως R, ἐὰν ἡ εὐθεῖα AB εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν (δ). Ἡ σχέσις R μεταξὺ τῶν σημείων τοῦ Ε εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας; Ποῖαι αἱ κλάσεις ἰσοδυναμίας;

4-45. Καλοῦμεν Σ τὸ σύνολον τῶν σημείων ἑνὸς ἐπιπέδου Ε πλὴν ἑνὸς σταθεροῦ σημείου αὐτοῦ Ο:

$$\Sigma = E - \{O\}.$$

Εἰς τὸ Σ ὁρίζομεν μίαν σχέσιν R ὡς ἑξῆς:

$$A \in \Sigma,\ B \in \Sigma:\ ARB \Leftrightarrow (O,\ A,\ B \text{ συγγραμμικά}).$$

Ἡ σχέσις R εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας; Ποῖαι αἱ κλάσεις ἰσοδυναμίας;

4-46. Μία διμελὴς σχέσις R, εἰς ἕνα σύνολον Ε, καλεῖται κυκλική, ὅταν: $(\alpha R \beta \text{ καὶ } \beta R \gamma) \Rightarrow \gamma R \alpha$.
Ἀποδείξατε ὅτι μία σχέσις αὐτοπαθὴς καὶ κυκλικὴ εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας. Τὸ ἀντίστροφον εἶναι ἀληθές;

4-47. Ἔστω τὸ σύνολον $E = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12\}$. Εἰς τὸ Ε ὁρίζομεν μίαν διμελῆ σχέσιν, συμβολιζομένην διὰ τοῦ /, ὡς ἑξῆς: $\alpha \in E,\ \beta \in E:\ \alpha/\beta \Leftrightarrow$ (α διαιρεῖ τὸ β).

Ἀποδείξατε ὅτι ἡ ἐν λόγῳ σχέσις εἶναι σχέσις μερικῆς διατάξεως ἐπὶ τοῦ Ε. Κατασκευάσατε τὸ διάγραμμα τῆς σχέσεως αὐτῆς.

4-48. Εἰς τὸ σύνολον Φ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ὁρίζομεν μίαν σχέσιν R ὡς ἑξῆς: $\alpha \in \Phi$, $\beta \in \Phi$: $\alpha R \beta \Leftrightarrow$ (α=πολ. β).

'Αποδείξατε ὅτι ἡ R εἶναι σχέσις διατάξεως. Ἡ R εἶναι σχέσις μερικῆς ἢ ὁλικῆς διατάξεως ;

4-49. Καλοῦμεν E τὸ σύνολον τῶν δένδρων ἑνὸς δάσους. Εἰς τὸ E ὁρίζομεν μίαν σχέσιν R ὡς ἑξῆς :

$x \in E$, $y \in E$: $xRy \Leftrightarrow$ (x κεῖται δυτικῶς τοῦ y).

Ἡ R εἶναι σχέσις διατάξεως ; μερικῆς ἢ ὁλικῆς ; (θεωρήσατε ὅτι ἕκαστον δένδρον κεῖται δυτικῶς τοῦ ἑαυτοῦ του).

4-50. Ἔστω E τὸ σύνολον τῶν βιβλίων μιᾶς βιβλιοθήκης. Εἰς τὸ E ὁρίζομεν μίαν σχέσιν R ὡς ἑξῆς:

$x \in E$, $y \in E$: $xRy \Leftrightarrow$ (x κεῖται δεξιὰ τοῦ y).

Ἡ σχέσις R εἶναι σχέσις διατάξεως ; μερικῆς ἢ ὁλικῆς ; (θεωρήσατε ὅτι ἕκαστον βιβλίον κεῖται δεξιὰ τοῦ ἑαυτοῦ του).

5 ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ

5.1. Θεωροῦμεν τὰ σύνολα $A=\{\alpha,\beta,\gamma\}$ καὶ $B=\{1,2\}$. Κατασκευάσατε τὰ διαγράμματα ὅλων τῶν δυνατῶν μονοσημάντων ἀπεικονίσεων τοῦ A εἰς τὸ B.

5-2. Ὁ τύπος :

$$f(x) = \frac{3x}{x^2 - 2x}$$

δὲν ὁρίζει μίαν μονοσήμαντον ἀπεικόνισιν τοῦ Π εἰς τὸ Π. Διατί ; Ὁρίσατε τὸ εὐρύτερον σύνολον B, οὕτως ὥστε ὁ ἀνωτέρω τύπος νὰ ὁρίζῃ μίαν μονοσήμαντον ἀπεικόνισιν τοῦ B εἰς τὸ Π.

5-3. Ὁ τύπος :

$$f(x) = \frac{x^2}{x+2}$$

ὁρίζει μίαν μονοσήμαντον ἀπεικόνισιν τοῦ Π^+ εἰς τὸ Π^+. Διατί ; Ὁ ἴδιος τύπος δὲν ὁρίζει μίαν μονοσήμαντον ἀπεικόνισιν τοῦ A_κ (σύνολον ἀκεραίων ἀριθμῶν) εἰς τὸ Π. Διατί ;

5-4. Ἔστω τὸ σύνολον P τῶν ρητῶν ἀριθμῶν. Θεωροῦμεν τὰς ἀπεικονίσεις, f_1, f_2, f_3, f_4, τοῦ P εἰς τὸ P, αἱ ὁποῖαι ὁρίζονται ὡς ἑξῆς :

$$f_1 : x \in P \rightarrow f_1(x) = (3x - 7) \in P.$$
$$f_2 : x \in P \rightarrow f_2(x) = (5x + 2) \in P.$$
$$f_3 : x \in P \rightarrow f_3(x) = (3x + 3) \in P.$$
$$f_4 : x \in P \rightarrow f_4(x) = (3x + 2) \in P.$$

1) Ποία εἶναι δι' ἑκάστην ἀπεικόνισιν ἡ εἰκὼν τοῦ 0,08 ; ὁμοίως, τοῦ $-\frac{2}{3}$;

2) Ὑπάρχουν στοιχεῖα τὰ ὁποῖα ἔχουν εἰκόνα τὸ $\frac{2}{3}$;

3) Ὑπάρχουν στοιχεῖα τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν ἰδίαν εἰκόνα ὑπὸ τῶν f_1 καὶ f_2 ; τῶν f_3 καὶ f_4 ; τῶν f_1 καὶ f_4 ;

5-5. Θεωροῦμεν τὴν ἀπεικόνισιν :

$$f : x \in \Pi \rightarrow f(x) = (x^2 - 1) \in \Pi.$$

Ἐὰν $A = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$ καὶ $B = \{-1, 0, 1, 2, 4\}$, εὕρετε τὰ κάτωθι σύνολα :

$f(A)$, $f(B)$, $f(A \cap B)$, $f(A \cup B)$, $f(A) \cup f(B)$, $f(A) \cap f(B)$.

5-6. Δίδεται ἡ ἀπεικόνισις :

$$f : x \in \Pi \rightarrow f(x) = (x^2 - 3 \mid x \mid + 2) \in \Pi.$$

Ἂν $A = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$ καὶ $B = \{-1, 0, 1, 2, 4\}$, ἀποδείξατε ὅτι :

1) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$. 2) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

5-7. Ἔστω μία μονοσήμαντος ἀπεικόνισις :

$$f : E \rightarrow \Delta.$$

Ἐὰν $A \subseteq E$ καὶ $B \subseteq E$ 1) Ἀποδείξατε διὰ παραδειγμάτων τὴν κάτωθι συνεπαγωγήν :

$$A \subseteq B \Rightarrow f(A) \subseteq f(B).$$

2) Ἀποδείξατε, ἐπίσης διὰ παραδειγμάτων, ὅτι, ἐὰν $f(A) \subseteq f(B)$, τότε δὲν ἕπεται ἀναγκαίως $A \subseteq B$.

5-8. Ἐξετάσατε ἂν ἑκάστη ἐκ τῶν κάτωθι ἐπεικονίσεων f_1, f_2, f_3 καὶ f_4 εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος :

1) Διὰ τῆς f_1 εἰς ἕκαστον ἄνθρωπον ἐπὶ τῆς γῆς ἀντιστοιχοῦμεν τὴν ἡλικίαν του.
2) Διὰ τῆς f_2 εἰς ἑκάστην χώραν τοῦ κόσμου ἀντιστοιχοῦμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν κατοίκων της.
3) Διὰ τῆς f_3 εἰς ἕκαστον βιβλίον μιᾶς βιβλιοθήκης ἀντιστοιχοῦμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν σελίδων του.
4) Διὰ τῆς f_4 εἰς ἕκαστον νομὸν τῆς Ἑλλάδος ἀντιστοιχοῦμεν τὴν πρωτεύουσάν του.

5-9. Ἀποδείξατε ὅτι ἡ ἀπεικόνισις :

$$f : x \in \Phi \rightarrow f(x) = (2x) \in \Phi$$

εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος ἐν.

5-10. Ἀποδείξατε ὅτι ἡ ἀπεικόνισις :

$$f : x \in \Pi^+ \rightarrow f(x) = \frac{3x}{x+1} \in \Pi^+$$

εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος ἐν.

5-11. Ἀποδείξατε ὅτι ἡ ἀπεικόνισις :

$$f : x \in \Pi \rightarrow f(x) = \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1-x}} \in \Pi$$

εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος.

5-12. Ἔστω τὸ σύνολον $E = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$. Ὁρίζομεν μίαν ἀπεικόνισιν $f : E \rightarrow E$, ὡς ἑξῆς :

$$\begin{aligned} f : \alpha &\rightarrow f(\alpha) = \gamma \\ \beta &\rightarrow f(\beta) = \beta \\ \gamma &\rightarrow f(\gamma) = \delta \\ \delta &\rightarrow f(\delta) = \delta. \end{aligned}$$

1) Κατασκευάσατε τὸ διάγραμμα τῆς f.
2) Ποῖον τὸ πεδίον τιμῶν τῆς f ;
3) Ποῖον τὸ εἶδος τῆς f ;
4) Ἡ f εἶναι εἷς μετασχηματισμὸς τοῦ E ;

5-13. Θεωροῦμεν τὸ σύνολον $E = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$. Ὁρίζομεν μίαν ἀπεικόνισιν f τοῦ E εἰς τὸν ἑαυτόν του, ὡς ἑξῆς :

$$
\begin{aligned}
f : \alpha &\rightarrow f(\alpha) = \gamma \\
\beta &\rightarrow f(\beta) = \delta \\
\gamma &\rightarrow f(\gamma) = \beta \\
\delta &\rightarrow f(\delta) = \alpha \\
\varepsilon &\rightarrow f(\varepsilon) = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

1) Ποῖον εἶναι τὸ πεδίον ὁρισμοῦ καὶ ποῖον τὸ πεδίον τιμῶν αὐτῆς ;

2) Κατασκευάσατε τὸ διάγραμμα τῆς f.

3) Ποῖον εἶναι τὸ εἶδος τῆς f ;

5-14. Ἐξετάσατε τὸ εἶδος τῆς ἀπεικονίσεως

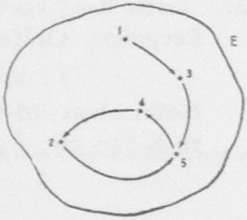
$$f : x \in \Pi^* \rightarrow f(x) = \frac{|x|}{x} \in \Pi.$$

Εὕρετε τὸ σύνολον f (Π^*).

5-15. Ποῖον τὸ εἶδος τῆς ἀπεικονίσεως

$$f : x \in \Phi \rightarrow f(x) = x^2 \in \Phi\ ;$$

5-16. Ἔστω τὸ σύνολον $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Ὁρίζομεν μίαν ἀπεικόνισιν $f : E \rightarrow E$ διὰ τοῦ παραπλεύρως διαγράμματος.



1) Ποῖον τὸ πεδίον τιμῶν τῆς f ;

2) Ἡ f εἶναι εἷς μετασχηματισμὸς τοῦ E;

5-17. Ἔστω ἓν σύνολον $E \neq \varnothing$. Θεωροῦμεν τὸ σύνολον P(E) καὶ ὁρίζομεν τὴν ἑξῆς ἀπεικόνισιν :

$$f : A \in P(E) \rightarrow f(A) = \underset{E}{\complement} A \in P(E).$$

Ἀποδείξατε ὅτι ἡ f εἶναι εἷς μετασχηματισμὸς τοῦ συνόλου P(E).

5-18. Ἐὰν A καὶ B εἶναι δύο μὴ κενὰ σύνολα, ἀποδείξατε ὅτι τὰ σύνολα $A \times B$ καὶ $B \times A$ εἶναι ἰσοδύναμα.

5-19. Ἀποδείξατε ὅτι τὸ σύνολον τῶν ἀκεραίων θετικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ σύνολον τῶν ἀκεραίων ἀρνητικῶν.

5-20. Ἀποδείξατε ὅτι τὸ σύνολον A_κ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ σύνολον Φ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν.

5-21. Ἔστωσαν τὰ σύνολα $E = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ καὶ $\Phi_0 = \Phi \cup \{0\}$. Θεωροῦμεν μίαν μονοσήμαντον ἀπεικόνισιν f τοῦ E εἰς τὸ Φ_0, ὡς ἑξῆς:

$$f : x \in E \to f(x) = \frac{|x| + x}{2} \in \Phi_0.$$

Εἰς τὸ E ὁρίζομεν μίαν διμελῆ σχέσιν R, ὡς ἑξῆς:

$$x \in E,\ x' \in E : xRx' \Leftrightarrow f(x) = f(x').$$

1) Εὕρετε τὸ σύνολον R.

2) Κατασκευάσατε τὸ διάγραμμα τῆς R.

3) Ἀποδείξατε ὅτι ἡ R εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας.

4) Εὕρετε τὰς κλάσεις ἰσοδυναμίας καὶ ἀκολούθως τὸ σύνολον — πηλίκον E/R.

5-22. Ἔστω μία μονοσήμαντος ἀπεικόνισις:

$$f : x \in E \to f(x) \in B.$$

Εἰς τὸ E ὁρίζομεν μίαν διμελῆ σχέσιν R, ὡς ἑξῆς:

$$x \in E,\ x' \in E : xRx' \Leftrightarrow f(x) = f(x').$$

Ἀποδείξατε ὅτι ἡ R εἰς τὸ E εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας.

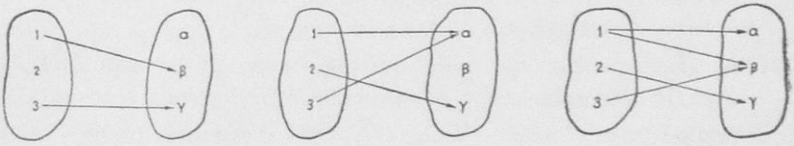
5-23. Ἔστω $E = \{x / x \in A_\kappa$ μὲ $|x| \leqq 5\}$, ἔνθα A_κ τὸ σύνολον τῶν ἀκεραίων. Ὁρίζομεν μίαν ἀπεικόνισιν f, ὡς ἑξῆς:

$$f : x \in E \to f(x) = (x^4 - x^2) \in A_\kappa.$$

Ποῖαι εἶναι αἱ κλάσεις ἰσοδυναμίας, αἱ ὁποῖαι ὁρίζονται εἰς τὸ E ὑπὸ τῆς f; (βλέπε καὶ προηγουμένην ἄσκησιν).

6. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

6-1. Ποῖα ἐκ τῶν κάτωθι διαγραμμάτων ὁρίζουν μίαν συνάρτησιν;



6-2. Δίδονται τὰ σύνολα $A = \{\alpha, \beta\}$ καὶ $B = \{1,2,3\}$. Πόσαι διαφορετικαὶ συναρτήσεις ὑπάρχουν τοῦ A εἰς τὸ B;

6-3. Δίδεται ἡ συνάρτησις $f: \Pi \to \Pi$, ὡρισμένη ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{ἂν } x \text{ ρητός.} \\ -1 & \text{ἂν } x \text{ ἄρρητος.} \end{cases}$$

Εὕρετε :

1) $f\left(\frac{1}{2}\right)$. 2) $f\left(-\frac{1}{2}\right)$. 3) $f(\sqrt{3})$. 4) $f(-\sqrt{3})$. 5) $f(1)$.

6) $f(-1)$. 7) $f(2^{50})$. 8) $f(-3^{-30})$. 9) $f(\sqrt{2}+\sqrt{3})$. 10) $f(1-\sqrt{5})$.

6-4. Ἔστω ἡ συνάρτησις $f: \Pi \to \Pi$, ὡρισμένη ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$f(x)=\begin{cases} 3x-1 & \text{ἂν } x>3 \\ x^2-2 & \text{ἂν } -2\leqq x\leqq 3 \\ 2x+3 & \text{ἂν } x<-2 \end{cases}$$

Εὕρετε : 1) $f(2)$. 2) $f(4)$. 3) $f(-1)$. 4) $f(-4)$.

6-5. Δίδεται ἡ συνάρτησις $f: \Pi \to \Pi$, ὡρισμένη ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$f(x)=\begin{cases} 2x+5 & \text{ἂν } x>9. \\ x^2-|x| & \text{ἂν } -9\leqq x\leqq 9. \\ x-4 & \text{ἂν } x<-9. \end{cases}$$

Εὕρετε : 1) $f(3)$. 2) $f(-10)$. 3) $f(12)$. 4) $f(f(5))$.

6-6. Δίδεται ἡ συνάρτησις :

$$f: x\in\Pi \to f(x) = (x^2-3x+2)\in\Pi.$$

Εὕρετε : 1) $f(-3)$. 2) $f(\alpha^2)$. 3) $f(x^2)$. 4) $f(x+3)$.

5) $f(2x-3)$. 6) $f(f(x))$. 7) $f(f(x+1))$.

6-7. Ἔστω τὸ σύνολον $E=\{1,2,3,4\}$. Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν :

$$f: x\in E \to f(x) = (x+3)\in\Pi.$$

1) Εὕρετε τὸ $f(E)$.

2) Ζητοῦνται, ἡ γραφικὴ παράστασις καὶ τὸ διάγραμμα τῆς f.

6-8. Ἔστω τὸ σύνολον $E=\{0,1,2,3\}$. Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν :

$$f: x\in E \to f(x) = (x^2+x-1)\in\Pi.$$

1) Εὕρετε τὸ $f(E)$.

2) Ζητοῦνται, ἡ γραφικὴ παράστασις καὶ τὸ διάγραμμα τῆς f.

6-9. Ἐὰν $\alpha\in\Pi$, καλοῦμεν ἀκέραιον μέρος τοῦ α, καὶ παριστῶμεν τοῦτο μὲ $[\alpha]$, τὸν μεγαλύτερον ἀκέραιον, ὁ ὁποῖος δὲν ὑπερβαίνει τὸν α.

1) Εὕρετε τά : $\left[\frac{1}{2}\right]$, $[\sqrt{2}]$, $[-3]$, $[5]$, $[\sqrt{7}]$, $\left[-\frac{23}{5}\right]$.

2) Θεωροῦμεν τὸ σύνολον $E=\{x/x\in\Pi$ μὲ $-2\leqq x\leqq 3\}$ καὶ ὁρίζομεν μίαν συνάρτησιν f ὡς ἑξῆς:

$$f: x\in E \rightarrow f(x) = [x]\in\Pi.$$

Εὕρετε τὸ f(E).

6-10. Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν $f: E \rightarrow E$, ἔνθα $E=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ὡρισμένην ὡς ἑξῆς:

$$f: \begin{array}{l} \text{ἂν } x<2 \rightarrow f(x) = 3 \\ \text{ἂν } x>2 \rightarrow f(x) = 4 \\ \text{ἂν } x=2 \rightarrow f(x) = 1 \end{array}$$

1) Εὕρετε τὸ f(E).

2) Ζητοῦνται, τὸ διάγραμμα καὶ ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς f.

3) Ποῖον τὸ εἶδος τῆς f;

6-11. Εὕρετε τὸ εὐρύτερον ὑποσύνολον τοῦ Π ἐπὶ τοῦ ὁποίου ὁ τύπος $f(x)=x^2$ ὁρίζει μίαν ἀμφιμονοσήμαντον συνάρτησιν.

6-12. Ἔστωσαν τὰ σύνολα:

$A=[1, 1]=\{x/x\in\Pi$ μὲ $-1\leqq x\leqq 1\}$, $B=[1, 3]$, $\Gamma=[-3, -1]$.

Θεωροῦμεν τὰς κάτωθι συναρτήσεις.

$$f_1: x\in A \rightarrow f_1(x) = x^2\in\Pi.$$
$$f_2: y\in B \rightarrow f_2(y) = y^2\in\Pi.$$
$$f_3: z\in\Gamma \rightarrow f_3(z) = z^2\in\Pi.$$

Ποῖαι ἐξ αὐτῶν τῶν συναρτήσεων εἶναι ἀμφιμονοσήμαντοι;

6-13. Ἔστω $E=\{0, 1\}$. Ἀποδείξατε ὅτι αἱ δύο συναρτήσεις.

$$f: x\in E \rightarrow f(x) = (x+1)\in\Pi$$
$$\varphi: x\in E \rightarrow \varphi(x) = (3x^2-2x+1)\in\Pi$$

εἶναι ἴσαι.

6-14. Ἔστω $E=\{0, 1\}$. Αἱ δύο συναρτήσεις:

$$f: x\in E \rightarrow f(x) = x^2\in\Pi$$
$$\varphi: x\in E \rightarrow \varphi(x) = x^3\in\Pi$$

εἶναι ἴσαι;

6-15. Ἔστωσαν τὰ κάτωθι σύνολα:

$A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ καὶ $\Gamma=\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$.

Θεωροῦμεν τὰς δύο συναρτήσεις $f: A \rightarrow B$ καὶ $\varphi: A \rightarrow \Gamma$, αἱ ὁποῖαι ὁρίζονται ὡς ἑξῆς:

$$
\begin{array}{llll}
f: & 1 \rightarrow f(1) = \alpha & \varphi: & 1 \rightarrow \varphi(1) = \alpha \\
 & 2 \rightarrow f(2) = \gamma & & 2 \rightarrow \varphi(2) = \gamma \\
 & 3 \rightarrow f(3) = \beta & & 3 \rightarrow \varphi(3) = \beta \\
 & 4 \rightarrow f(4) = \beta & & 4 \rightarrow \varphi(4) = \beta
\end{array}
$$

1) Ζητοῦνται, τὰ διαγράμματα καὶ αἱ γραφικαὶ παραστάσεις τῶν f καὶ φ.

2) Αἱ συναρτήσεις f καὶ φ εἶναι ἴσαι ;

6-16. Ἔστωσαν αἱ συναρτήσεις f, φ καὶ h αἱ ὁποῖαι ὁρίζονται ὑπὸ τῶν κάτωθι τύπων ἀντιστοίχως:

$$f(x) = x^2 \mid 0 \leqq x \leqq 1$$
$$\varphi(x) = x^2 \mid 0 < x < 1$$
$$h(x) = x^2 \mid x \in \Pi.$$

Ποῖαι ἐξ αὐτῶν τῶν συναρτήσεων εἶναι ἴσαι;

6-17. Ὁρίσατε τὸ εὐρύτερον σύνολον $E \subseteqq \Pi$ οὕτως ὥστε αἱ κάτωθι δύο συναρτήσεις:

$$f : x \in E \rightarrow f(x) = (2x^3 + 9x^2 - 5x) \in \Pi$$
$$\varphi : x \in E \rightarrow \varphi(x) = (x^3 + 4x^2 - 11x) \in \Pi$$

νὰ εἶναι ἴσαι.

6-18. Ἔστω $E = \{0,1,2,3\}$. Ἐξετάσατε ἐὰν ἡ συνάρτησις:

$$f : x \in E \rightarrow f(x) = (x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x + 3) \in \Pi$$

εἶναι σταθερά.

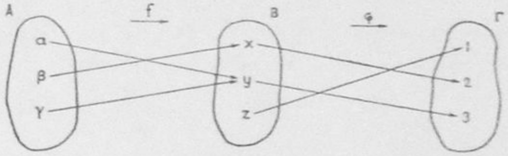
6-19. Ἔστω $E = \{0,1\}$. Ἀποδείξατε ὅτι αἱ δύο συναρτήσεις

$$f : x \in E \rightarrow f(x) = 2 \in \Pi.$$
$$\varphi : x \in E \rightarrow \varphi(x) = (x^2 - x + 2) \in \Pi$$

εἶναι ἴσαι. Τί συμπεραίνετε ἐξ αὐτοῦ διὰ τὴν συνάρτησιν φ;

6-20. Εἶναι δυνατὸν μία σταθερὰ συνάρτησις νὰ εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος ;

6-21. Ἔστωσαν αἱ συναρτήσεις $f : A \to B$ καὶ $\varphi : B \to \Gamma$ αἱ ὁποῖαι ὁρίζονται ὑπὸ τῶν κάτωθι διαγραμμάτων :



1) Ὁρίσατε τὴν συνάρτησιν : $(\varphi f) : A \to \Gamma$.

2) Κατασκευάσατε τὸ διάγραμμα καὶ τὴν γραφικὴν παράστασιν τῆς (φf).

3) Εὕρετε τὰ πεδία τιμῶν τῶν f, φ καὶ (φf).

6-22. Δίδονται αἱ συναρτήσεις

$$f : x \in \Pi \to f(x) = (x^2 - 2\,|\,x\,|\,) \in \Pi.$$
$$\varphi : x \in \Pi \to \varphi(x) = (x^2 + 1) \in \Pi.$$

Εὕρετε:

1) $(\varphi f)(3)$. 2) $(f\varphi)(-2)$. 3) $(f\varphi)(5)$.

6-23· Δίδονται αἱ συναρτήσεις :

$$f : x \in \Pi \to f(x) = (2x - 3) \in \Pi.$$
$$\varphi : x \in \Pi \to \varphi(x) = (x^2 + 5) \in \Pi.$$

Εὕρετε :

1) $(\varphi f)(2)$. 2) $(f\varphi)(2)$. 3) $(f\varphi)(\alpha - 1)$. 4) $(\varphi f)(x)$.
5) $(f\varphi)(x)$. 6) $(f\varphi)(x+1)$. 7) $(\varphi\varphi)(x)$. 8) $(ff)(x)$.

6-24. Ἔστω τὸ σύνολον $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Θεωροῦμεν τὰς δύο συναρτήσεις $f : A \to A$ καὶ $\varphi : A \to A$, αἱ ὁποῖαι ὁρίζονται ὡς ἑξῆς :

$$\begin{array}{llll} f : & 1 \to f(1) = 3 & \varphi : & 1 \to \varphi(1) = 4 \\ & 2 \to f(2) = 5 & & 2 \to \varphi(2) = 1 \\ & 3 \to f(3) = 3 & & 3 \to \varphi(3) = 1 \\ & 4 \to f(4) = 1 & & 4 \to \varphi(4) = 2 \\ & 5 \to f(5) = 2 & & 5 \to \varphi(5) = 3 \end{array}$$

1) Κατασκευάσατε τὸ διάγραμμα καὶ τὴν γραφικὴν παράστασιν ἑκάστης ἐξ αὐτῶν.

2) Ποῖον τὸ εἶδος ἑκάστης ἐκ τῶν f καὶ φ ;

3) Αἱ συναρτήσεις f καὶ φ εἶναι ἴσαι ;

4) Ὁρίσατε τὰς συναρτήσεις $(f\varphi)$ καὶ (φf).

5) Κατασκευάσατε τὸ διάγραμμα καὶ τὴν γραφικὴν παράστασιν ἑκάστης τῶν (fφ) καὶ (φf).

6) Αἱ συναρτήσεις (fφ) καὶ (φf) εἶναι ἴσαι;

6-25. Ἔστωσαν αἱ συναρτήσεις $f: \Pi \to \Pi$ καὶ $\varphi: \Pi \to \Pi$ αἱ ὁποῖαι ὁρίζονται ὑπὸ τῶν τύπων ἀντιστοίχως:

$$f(x) = \frac{1}{3}\,|x| + 2 \text{ καὶ } \varphi(x) = 2x^2 - 3.$$

Εὕρετε τοὺς τύπους οἱ ὁποῖοι ὁρίζουν τὰς συναρτήσεις (φf) καὶ (fφ). Ὁμοίως, ἐάν:

$$f(x) = x^2 - 5\,|x| + 1 \text{ καὶ } \varphi(x) = \frac{1}{|x| + 1}.$$

6-26. Θεωροῦμεν τὰς συναρτήσεις:

$$f: x \in \Pi \to f(x) = (2x+3) \in \Pi$$

$$\varphi: x \in \Pi \to \varphi(x) = \frac{x-3}{2} \in \Pi.$$

Ἀποδείξατε ὅτι ἡ συνάρτησις (fφ) εἶναι ταυτοτικὴ εἰς τὸ Π. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὴν συνάρτησιν (φf);

6-27. Ἐὰν f εἶναι μία συνάρτησις τοῦ Α ἐπὶ τὸ Β καὶ φ μία συνάρτησις τοῦ Β ἐπὶ τὸ Γ, ἀποδείξατε ὅτι ἡ (φf) εἶναι μία συνάρτησις τοῦ Α ἐπὶ τὸ Γ.

6-28. Ἐὰν ἡ συνάρτησις $f: A \to B$ εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος ἐπὶ καὶ ἡ συνάρτησις $\varphi: B \to \Gamma$ εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος ἐπί, ἀποδείξατε ὅτι καὶ τὸ γινόμενον (φf) εἶναι ἐπίσης μία ἀμφιμονοσήμαντος ἐπὶ συνάρτησις.

6-29. Ἔστω μία συνάρτησις $f: A \to B$. Ἀποδείξατε ὅτι:

$$1)\ (T_B f) = f. \qquad 2)\ (f T_A) = f.$$

6-30. Ἔστω ἡ συνάρτησις:

$$f: x \in \Pi \to f(x) = (3x-2) \in \Pi.$$

1) Ἀποδείξατε ὅτι ἡ f εἶναι μία ἀμφιμονοσήμαντος καὶ ἐπὶ συνάρτησις.

2) Εὕρετε τὸν τύπον ὁ ὁποῖος ὁρίζει τὴν ἀντίστροφον συνάρτησιν f^{-1}.

3) Εὕρετε: $f^{-1}(-1)$, $f^{-1}(1)$, $f^{-1}(0)$, $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$.

6-31. Θέτομεν $A=\Pi-\{3\}$, $B=\Pi-\{1\}$ καὶ θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν:

$$f: x\in A \rightarrow f(x) = \frac{x-2}{x-3} \in B.$$

1) 'Αποδείξατε ὅτι ἡ f εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος καὶ ἐπί.

2) Εὕρετε τὸν τύπον ὁ ὁποῖος ὁρίζει τὴν ἀντίστροφον συνάρτησιν f^{-1}.

6-32. Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν:

$$f: x\in A \rightarrow f(x)\in B,$$

ἔνθα $A=\{x/x\in\Phi$ μὲ $1\leqq x\leqq 10\}$, $B=\{x/x$ ἀκέραιος περιττός$\}$, ὡρισμένην ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{ἄν } x \text{ περιττὸς} \\ x-1 & \text{ἄν } x \text{ ἄρτιος} \end{cases}$$

1) Ποῖον τὸ πεδίον ὁρισμοῦ καὶ ποῖον τὸ πεδίον τιμῶν τῆς f;

2) Παραστήσατε γραφικῶς τὴν f.

3) Ποῖον τὸ εἶδος τῆς f;

4) Ὑπάρχει ἡ ἀντίστροφος συνάρτησις τῆς f;

6-33. Ἔστω ἡ συνάρτησις $f: x\in A \rightarrow f(x)\in A$, ἔνθα $A=\{1,2,3,4,5\}$, ὡρισμένη ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{ἄν } x\neq 1 \\ 5 & \text{ἄν } x=1 \end{cases}$$

1) Ποῖον τὸ πεδίον τιμῶν τῆς f;

2) Κατασκευάσατε τὴν γραφικὴν παράστασιν καὶ τὸ διάγραμμα τῆς f.

3) Ποῖον τὸ εἶδος τῆς f;

4) Ὑπάρχει ἡ ἀντίστροφος συνάρτησις τῆς f;

6-34. Ἔστω τὸ σύνολον $E=\{1, 2, 3, 4\}$. Θεωροῦμεν τὰς συναρτήσεις $f: E\rightarrow E$ καὶ $\varphi: E\rightarrow E$, ὡρισμένας ὡς ἑξῆς:

$$\begin{array}{llll} f: & 1 \rightarrow f(1) = 2 & \varphi: & 1 \rightarrow \varphi(1) = 3 \\ & 2 \rightarrow f(2) = 1 & & 2 \rightarrow \varphi(2) = 4 \\ & 3 \rightarrow f(3) = 4 & & 3 \rightarrow \varphi(3) = 2 \\ & 4 \rightarrow f(4) = 3 & & 4 \rightarrow \varphi(4) = 1 \end{array}$$

1) Κατασκευάσατε τὸ διάγραμμα καὶ τὴν γραφικὴν παράστασιν ἑκάστης τῶν f καὶ φ.

2) Εὕρετε τὰς συναρτήσεις $(f\varphi)$, (φf) καὶ κατασκευάσατε τὰ διαγράμματα αὐτῶν.

3) Μελετήσατε τὰς συναρτήσεις:

f^{-1}, φ^{-1}, $(f^{-1}. \varphi^{-1})$, (φ^{-1}, f^{-1}). $(\varphi f)^{-1}$, $(f\varphi)^{-1}$.

6-35. Ἔστω τὸ σύνολον $E = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$. Θεωροῦμεν τὰς τρεῖς συναρτήσεις:

$f : x \in E \to f(x) \in E$, $\varphi : x \in E \to \varphi(x) \in E$, $h : x \in E \to h(x) \in E$.

ὡρισμένας ὡς ἑξῆς:

$$\begin{array}{lll} f : \alpha \to f(\alpha) = \beta & \varphi : \alpha \to \varphi(\alpha) = \delta & h : \alpha \to h(\alpha) = \gamma \\ \quad \beta \to f(\beta) = \delta & \quad \beta \to \varphi(\beta) = \gamma & \quad \beta \to h(\beta) = \delta \\ \quad \gamma \to f(\gamma) = \alpha & \quad \gamma \to \varphi(\gamma) = \beta & \quad \gamma \to h(\gamma) = \alpha \\ \quad \delta \to f(\delta) = \gamma & \quad \delta \to \varphi(\delta) = \alpha & \quad \delta \to h(\delta) = \beta \end{array}$$

1) Μελετήσατε τὰς συναρτήσεις f^{-1}, φ^{-1}, h^{-1}.

2) Εὕρετε τὰς συναρτήσεις $(h\varphi)f$ καὶ $h(\varphi f)$.

3) Εὕρετε τὰς συναρτήσεις:

$(f^{-1}\ \varphi^{-1}\ h^{-1})$ καὶ $((h\varphi f)\ (f^{-1}\ \varphi^{-1}\ h^{-1}))$.

6-36. Ἔστω P τό σύνολον τῶν ρητῶν ἀριθμῶν. Ἀποδείξατε ὅτι ἡ συνάρτησις:

$$f : x \in P \to f(x) = (\alpha x + \beta) \in P.$$

ἔνθα $\alpha \in P$ μὲ $\alpha \neq 0$ καὶ $\beta \in P$ εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος ἐπί. Εὕρετε τὴν ἀντίστροφον συνάρτησιν f^{-1}. Εὕρετε τὰς συνθήκας ὑπὸ τὰς ὁποίας: $f = f^{-1}$.

6-37. Ἔστω μία συνάρτησις $f : A \to B$ ἀμφιμονοσήμαντος καὶ ἐπί. Ἀποδείξατε διὰ παραδειγμάτων ὅτι:

1) Ἡ συνάρτησις:

$$(f^{-1} f) : A \to A$$

εἶναι ἡ ταυτοτικὴ εἰς τὸ A.

2) Ἡ συνάρτησις:

$$(ff^{-1}) : B \to B$$

εἶναι ἡ ταυτοτικὴ εἰς τὸ B.

6-38. Δύο πραγματικαὶ συναρτήσεις, πραγματικῆς μεταβλητῆς f καὶ φ, ὁρίζονται ὑπὸ τῶν κάτωθι τύπων ἀντιστοίχως:

$$f(x) = \frac{x^2}{x} \text{ καὶ } \varphi(x) = x.$$

1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ εὐρύτερον πεδίον ὁρισμοῦ ἑκάστης αὐτῶν.

2) Αἱ δύο συναρτήσεις f καὶ φ εἶναι ἴσαι ;

6-39. Θεωροῦμεν τὰς κάτωθι πραγματικὰς συναρτήσεις, πραγματικῆς μεταβλητῆς :

1) $f(x) = \frac{x^2-x-2}{x^2-2x-3}$. 2) $f(x) = \frac{|x|}{x}$.

3) $f(x) = \sqrt{-x^2+5x+6}$. 4) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-|x|}}$.

5) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. 6) $f(x) = \sqrt{1-|x|}$.

Εὕρετε τὸ εὐρύτερον πεδίον ὁρισμοῦ ἑκάστης αὐτῶν.

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΛΥΣΕΙΣ

1. ΒΑΣΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

1-1. α) Τὸ σύνολον τῶν ποταμῶν τῆς Ἑλλάδος. β) Τὸ σύνολον τῶν συμβόλων τῶν τεσσάρων πράξεων: Προσθέσεως, ἀφαιρέσεως, πολλαπλασιασμοῦ, διαιρέσεως. γ) Τὸ σύνολον τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν. δ) Τὸ σύνολον τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων κλπ.

1-2. 1) ἀληθής. 2) ἀληθής. 3) ψευδής. 4) ἀληθής. 5) ψευδής. 6) ψευδής. 7) ἀληθής. 8) ψευδής. 9) ψευδής. 10) ψευδής.

1-3. 1) ψευδής. 2) ψευδής. 3) ψευδής. 4) ψευδής. 5) ψευδής. 6) ἀληθής. 7) ἀληθής. 8) ψευδής, ἂν τὸ α παριστᾶ ἕνα φυσικὸν ἄρτιον ἀριθμόν. Εἰς τὰς λοιπὰς περιπτώσεις ἀληθής. 9) ἀληθὴς ἂν τὸ β παριστᾶ ἕνα φυσικὸν ἄρτιον ἀριθμόν. Εἰς τὰς λοιπὰς περιπτώσεις ψευδής. 10) ἀληθής.

1-4. α) Διὰ $x=0$ ἡ ἐξίσωσις $x^2-12x+35=0$ δὲν ἐπαληθεύεται, ἄρα $0 \notin E$. Ὁμοίως $2 \notin E$. Διὰ $x=5$ ἐπαληθεύεται, ἄρα $5 \in E$. Ὁμοίως $7 \in E$. Τέλος $\frac{1}{7} \notin E$.

β) Εὑρίσκομεν ὁμοίως: $0 \notin \Sigma$, $2 \notin \Sigma$, $5 \notin \Sigma$, $7 \notin \Sigma$, $\frac{1}{7} \in \Sigma$.

γ) Ὁμοίως: $0 \in T$, $2 \notin T$, $5 \notin T$, $7 \notin T$, $\frac{1}{7} \notin T$.

1-5. α) Ἐπειδὴ $(-1)^{10}-2(-1)^7+1=1+2+1=4 \neq 0$, ἕπεται $-1 \notin E$.

β) Ὁμοίως $0 \notin E$. γ) Ἐπειδὴ $1^{10}-2.1^7+1=0$, ἕπεται $1 \in E$.

1-6. α) Ἐπειδὴ $(x^2-2x+1) \in \{0,1\}$, ἕπεται

$$x^2-2x+1=0 \quad \text{ἢ} \quad x^2-2x+1=1.$$

Ὅθεν, αἱ ζητούμεναι τιμαὶ τοῦ x εἶναι αἱ ῥίζαι τῶν δύο ἐξισώσεων: $x^2-2x+1=0$ καὶ $x^2-2x+1=1$. Ἡ πρώτη ἔχει μίαν (διπλῆν) ῥίζαν τὴν $x=1$ καὶ ἡ δευτέρα τὰς $x=0$ καὶ $x=2$. Ὥστε αἱ ζητούμεναι τιμαὶ τοῦ x εἶναι: 1, 0, 2.

β) Ἐπειδὴ $(x^2+1) \in \{1, 2\}$, ἕπεται $x^2+1=1$ ἢ $x^2+1=2$. Ὅπως προηγουμένως εὑρίσκομεν τὰς ἑξῆς τιμὰς τοῦ x: 0, +1, −1.

1-7. α) $A=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$. β) Ἐπειδὴ $|x|<4$, ἕπεται $-4<x<4$ καὶ συνεπῶς $B=\{0, \pm1, \pm2, \pm3\}$. γ) Ἐπειδὴ $8<x^2 \leqq 25$, ἕπεται $\sqrt{8}<|x| \leqq 5$, ἤτοι $2,\ldots<|x| \leqq 5$ καὶ συνεπῶς $|x|=3$ ἢ 4 ἢ 5. Ὅθεν: $\Gamma=\{\pm3, \pm4, \pm5\}$.

1-8. $A=\{1, 2\}$. $B=\{x \mid x \in \Phi$ μὲ $x<\sqrt{18}\}=\{1, 2, 3, 4\}$. $\Gamma=\{2, 4, 6, \ldots\}$. $\Delta=\{x \mid x \in \Phi$ μὲ $\sqrt{10}<x<6\}=\{4, 5\}$.

1-9. $A=\{2\}$. $B=\{4\}$. $\Gamma=\varnothing$. $\Delta=\{\sigma, \upsilon, \nu, o, \lambda\}$. $E=\{$Κυριακή, Δευτέρα, Τρίτη, Τετάρτη, Πέμπτη, Παρασκευή, Σάββατον$\}$.
Διαγράμματα τοῦ Venn.

1-10. Ἐπειδὴ $3(x+2)-(3x-4)=10$, διὰ νὰ ἀνάγεται τὸ κλάσμα $\frac{x+2}{3x-4}$ εἰς φυσικὸν ἀριθμόν, ἤτοι διὰ νὰ διαιρῆται τὸ $x+2$ ὑπὸ τοῦ $3x-4$, πρέπει τὸ $3x-4$ νὰ διαιρῇ τὸ 10. Ἑπομένως τὸ $3x-4$ πρέπει νὰ εἶναι διαιρέτης τοῦ 10.
Συνεπῶς:

$$3x-4=1 \text{ ἢ } 2 \text{ ἢ } 5 \text{ ἢ } 10.$$

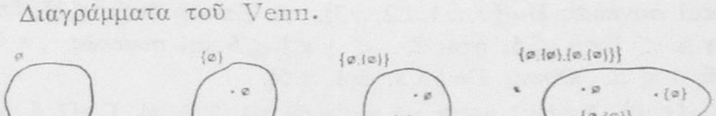
Διὰ $3x-4=5$, ἕπεται $x=3$. Διὰ $3x-4=2$, ἕπεται $x=2$. Διὰ $3x-4=1$ ἢ 10 αἱ εὑρισκόμεναι τιμαὶ τοῦ x δὲν εἶναι δεκταί.
Ὅθεν : $E=\{2, 3\}$.

Διάγραμμα τοῦ Venn. 

1-11. $E=\{x \mid x\in\Phi$ μὲ $1\leq x<7\}$.
$B=\{x \mid x\in\Phi$ μὲ $x=2^{\nu}$ ἔνθα $\nu=0, 1, \ldots, 6\}$.
$\Gamma=\{x \mid x\in\Phi$ μὲ $x=3+7.\lambda$ ἔνθα $\lambda=0, 1, 2, \ldots\}$.
$\Delta=\{x \mid x$ εἶναι ἡμέρα τῆς ἑβδομάδος$\}$.

1-12. Τὰ σύνολα A, Δ καὶ Θ εἶναι ἀπειροσύνολα. Τὰ ὑπόλοιπα εἶναι πεπερασμένα σύνολα.

1-13. Τὸ πρῶτον εἶναι τὸ κενὸν καὶ οὐδὲν στοιχεῖον περιέχει. Τὸ δεύτερον ἔχει ἕνα στοιχεῖον, τὸ $\varnothing$. Τὸ τρίτον ἔχει τὰ ἑξῆς δύο στοιχεῖα : $\varnothing, \{\varnothing\}$. Τὸ τέταρτον ἔχει τὰ ἑξῆς τρία στοιχεῖα : $\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.
Διαγράμματα τοῦ Venn.



1-14. Ἕνα, τὸ $\{1,2,3\}$.

1-15. α) Τὸ σύνολον $A = \left\{x \mid x \in \Phi \text{ μὲ } \frac{1}{2} < x < \frac{2}{3}\right\} = \varnothing$

β) Τὸ σύνολον $B = \{x \mid x \in \Pi \text{ μὲ } |x| < 0\} = \varnothing$.

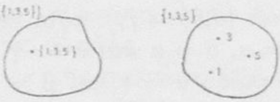
γ) Τὸ σύνολον τῶν τριγώνων τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν των εἶναι μεγαλύτερον τῶν 180°. κλπ.

1-16. Κενά εἶναι τὰ ἑξῆς σύνολα : Α,Β,Δ καὶ Ε.

1-17. Ἕκαστον εἶναι διάφορον τῶν ἄλλων. Τὸ σύνολον $\{0\}$ περιέχει ἕνα στοιχεῖον, τὸν ἀριθμὸν μηδέν. Τὸ σύνολον $\varnothing$ οὐδὲν στοιχεῖον περιέχει, εἶναι κενόν. Τὸ σύνολον $\{\varnothing\}$ περιέχει ἕνα στοιχεῖον, τὸ κενὸν σύνολον $\varnothing$, εἶναι δηλαδὴ ἕνα μονοσύνολον.

1-18. Ὄχι, διότι τὸ πρῶτον περιέχει ὡς στοιχεῖον τὸ $\{1,3,5\}$. Τὸ αὐτὸ ὅμως δὲν συμβαίνει καὶ διὰ τὸ δεύτερον.

Διαγράμματα τοῦ Venn :



1-19. Εἶναι : $A = B = \Gamma$.

1-20. Ναὶ (§ 1.6).

1-21. Ὄχι, διότι εἰς τὸ δεύτερον ἀνήκει τὸ $\varnothing$, τὸ ὁποῖον δὲν ἀνήκει εἰς τὸ πρῶτον.

1-22. α) Ὄχι, διότι π.χ. τὸ 3 ἀνήκει εἰς τὸ πρῶτον ἀλλὰ δὲν ἀνήκει εἰς τὸ δεύτερον. β) Ὄχι διὰ τὸν αὐτὸν λόγον.

1-23. Ἀφοῦ $\{\alpha,\gamma\} = \{\beta,\delta\}$ ἕπεται (§ 1.6) : $\alpha \in \{\beta,\delta\}$ καὶ συνεπῶς $(\alpha = \beta$ ἢ $\alpha = \delta)$. Ἐπειδὴ ὅμως $\alpha \neq \beta$ ἕπεται $\alpha = \delta$. Ὁμοίως, εὑρίσκομεν ὅτι καὶ $\beta = \gamma$.

1-24. Ἐπειδὴ $\{\{x,y\},z\} = \{1,\{2,3\}\}$ εὑρίσκομεν (§ 1,6) : $\{x,y\} = \{2,3\}$ κάὶ $z=1$. Ἐκ τῆς $\{x,y\} = \{2,3\}$ εὑρίσκομεν: $(x = 2$ καὶ $y = 3)$ ἢ $(x = 3$ καὶ $y = 2)$. Συνεπῶς : $(x = 2,\ y = 3,\ z = 1)$ ἢ $(x = 3,\ y = 2,\ z = 1)$.

1-25. α) Θὰ δείξωμεν ὅτι : $\alpha \neq \beta \Rightarrow \{\alpha\} \neq \{\beta\}$.

Πράγματι, ἂν ἦτο $\{\alpha\}=\{\beta\}$, τότε $\alpha=\beta$; ἄτοπον. Συνεπῶς $\{\alpha\}\neq\{\beta\}$.

β) Θὰ δείξωμεν ὅτι :

$$\{\alpha\}\neq\{\beta\} \Rightarrow \alpha\neq\beta.$$

Πράγματι, ἂν ἦτο $\alpha=\beta$, τότε $\{\alpha\}=\{\beta\}$, ἄτοπον, Συνεπῶς $\alpha\neq\beta$.

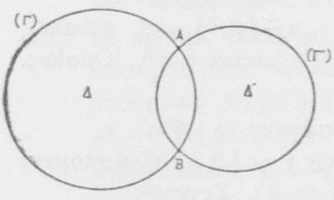
1-26. i) Ἂν ($\alpha=\gamma$ καὶ $\beta=\delta$) τότε $\{\alpha\}=\{\gamma\}$ καὶ $\{\alpha,\beta\}=\{\gamma,\delta\}$ καὶ συνεπῶς (§ 1.6): $\{\{\alpha\},\ \{\alpha,\beta\}\}=\{\{\gamma\},\ \{\gamma,\delta\}\}$.

ii) **Ἀντιστρόφως.** Ἔστω ὅτι εἶναι $\{\{\alpha\},\{\alpha,\beta\}\}=\{\{\gamma\},\{\gamma,\delta\}\}$. Τότε ($\{\alpha\}=\{\gamma\}$ καὶ $\{\alpha,\beta\}=\{\gamma,\delta\}$) ἢ ($\{\alpha\}=\{\gamma,\delta\}$ καὶ $\{\alpha,\beta\}=\{\gamma\}$).
Ἐὰν $\{\alpha\}=\{\gamma\}$ καὶ $\{\alpha,\beta\}=\{\gamma,\delta\}$ τότε ($\alpha=\gamma$) καὶ [($\alpha=\gamma$ καὶ $\beta=\delta$) ἢ ($\alpha=\delta$ καὶ $\beta=\gamma$)]. Ὅθεν ($\alpha=\gamma$ καὶ $\beta=\delta$) ἢ ($\alpha=\gamma$ καὶ $\alpha=\delta$ καὶ $\beta=\gamma$). Συνεπῶς ($\alpha=\gamma$ καὶ $\beta=\delta$) ἢ ($\alpha=\gamma$ καὶ $\beta=\gamma=\alpha=\delta$), δηλαδὴ καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις εἶναι $\alpha=\gamma$ καὶ $\beta=\delta$.
Ἐὰν $\{\alpha\}=\{\gamma,\delta\}$ καὶ $\{\alpha,\beta\}=\{\gamma\}$, τότε $\gamma\in\{\alpha\}$, $\delta\in\{\alpha\}$ καὶ $\alpha\in\{\gamma\}$, $\beta\in\{\gamma\}$. Ὅθεν, $\gamma=\alpha$, $\delta=\alpha$ καὶ $\alpha=\gamma$, $\beta=\gamma$, ἤτοι $\alpha=\gamma$ καὶ $\beta=\gamma=\alpha=\delta$, δηλαδὴ $\alpha=\gamma$ καὶ $\beta=\delta$.
Ὥστε εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις εἶναι $\alpha=\gamma$ καὶ $\beta=\delta$.

1-27. $E\subset\Phi$ (§ 1.8).

1-28. $A\subset B$ καὶ $\Delta\subset\Gamma$ (§ 1.8).

1-29. Καλοῦμεν : Γ τὸ σύνολον τῶν σημείων τῆς περιφερείας (Γ), Γ′ τὸ σύνολον τῶν σημείων τῆς περιφερείας (Γ)′, Δ τὸ σύνολον τῶν ἐσωτερικῶν σημείων τῆς (Γ), Δ′ τὸ σύνολον τῶν ἐσωτερικῶν σημείων τῆς (Γ)′, Ρ τὸ σύνολον τῶν ἐξωτερικῶν σημείων τῆς (Γ) καὶ Ρ′ τὸ σύνολον τῶν ἐξωτερικῶν σημείων τῆς (Γ′). Διακρίνομεν κατ᾽ἀρχὴν τὰ ἑξῆς ὑποσύνολα τοῦ Ε : Γ, Γ′, Δ, Δ′, Ρ, Ρ′.



Σχ. ἀσκήσεως 1-49.

Ἔπειτα, τὰς ἑνώσεις καὶ τὰς τομὰς αὐτῶν τῶν συνόλων (θεμελιώδη στοιχεῖα) καθ᾽ ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους.

1-30. 1) τὸ σύνολον τῶν τετραπλεύρων εἶναι ὑποσύνολον τοῦ συνόλου τῶν πολυγώνων 2) τὸ σύνολον τῶν παραλληλογράμμων εἶναι ὑποσύνολον τοῦ συνόλου τῶν τετραπλεύρων. 3) Τὸ σύνολον τῶν ρόμβων εἶναι ὑποσύνολον τοῦ συνόλου τῶν παραλληλογράμμων. 4) Τὸ σύνολον τῶν τετραγώνων εἶναι ὑποσύνολον τοῦ συνόλου τῶν ρόμβων.

1-31. Ὑποσύνολα τῶν δύο στοιχείων : 10.
Ὑποσύνολα τῶν τριῶν στοιχείων : 10.
Ὑποσύνολα τῶν τεσσάρων στοιχείων : 5.

1-32. $\varnothing$, $\{x\}$, $\{y\}$, $\{z\}$, $\{x,y\}$, $\{x,z\}$, $\{y,z\}$, A.

1-33. Ἐπειδὴ $A \subseteqq B$ καὶ $B \subseteqq \Gamma$ (§ 1.7, ἰδιότης γ), ἕπεται $A \subseteqq \Gamma$.
1) Ἐπειδὴ $A \subseteqq \Gamma$ καὶ $\alpha \in A$, ἕπεται (§ 1.7,i) ὅτι $\alpha \in \Gamma$. Ὥστε ἡ σχέσις $\alpha \in \Gamma$ εἶναι ἀληθής.
2) Ἐπειδὴ $A \subseteqq B$, ἐκ τῆς $\beta \in B$ δὲν ἕπεται ἀναγκαίως ὅτι καὶ $\beta \in A$. Ὥστε ἡ σχέσις $\beta \in A$ δὲν εἶναι ἀναγκαίως ἀληθής.
3) Τὸ $\gamma \in \Gamma$ δυνατὸν νὰ ἀνήκῃ εἰς τὸ A. Ὥστε ἡ σχέσις $\gamma \notin A$ δὲν εἶναι ἀναγκαίως ἀληθής.
4) Ἐπειδὴ $A \subseteqq B$, ἐκ τῆς σχέσεως $\delta \notin A$ δὲν ἕπεται ἀναγκαίως ὅτι $\delta \in B$. Ὥστε ἡ σχέσις $\delta \in B$ δὲν εἶναι ἀναγκαίως ἀληθής.
5) Ἐπειδὴ $A \subseteqq B$ καὶ $\varepsilon \notin B$, ἕπεται $\varepsilon \notin A$. Ὥστε ἡ σχέσις $\varepsilon \notin A$ εἶναι ἀληθής.
6) Ἐπειδὴ $A \subseteqq \Gamma$ καὶ $\zeta \notin \Gamma$, ἕπεται $\zeta \notin A$. Ὥστε ἡ σχέσις $\zeta \notin \Gamma$ εἶναι ἀληθής.

1-34. 1) Ὀρθόν. 2) Λάθος. Τὸ σύμβολον $\subset$ συνδέει δύο σύνολα καὶ δεικνύει ὅτι τὸ ἕνα εἶναι ὑποσύνολον τοῦ ἄλλου. Ἑπομένως, $\alpha \subset E$ εἶναι λάθος, διότι τὸ α εἶναι στοιχεῖον τοῦ E καὶ οὐχὶ ὑποσύνολον αὐτοῦ. 3) Λάθος. Τὸ σύμβολον $\in$ συνδέει ἕνα στοιχεῖον μὲ ἕνα σύνολον τὸ ὁποῖον περιέχει τὸ ἐν λόγῳ στοιχεῖον. Ἑπομένως, $\{\alpha\} \in E$ εἶναι λάθος, διότι τὸ $\{\alpha\}$ εἶναι ἕνα ὑποσύνολον τοῦ E καὶ οὐχὶ ἕνα στοιχεῖον αὐτοῦ. 4) Ὀρθόν.

1-35. 1) Λάθος (§ 1.4, σημείωσις). 2) Ὀρθόν. 3) Λάθος, διότι τὸ α εἶναι στοιχεῖον τοῦ $\{\alpha\}$ καὶ οὐχὶ ὑποσύνολον αὐτοῦ.

1-36. 1) Λάθος, διότι τὸ σύνολον $\{4,5\}$ εἶναι στοιχεῖον τοῦ E καὶ οὐχὶ ὑποσύνολον αὐτοῦ. 2) Ὀρθόν. 3) Ὀρθόν, διότι τὸ σύνολον $\{\{4,5\}\}$ εἶναι ὑποσύνολον τοῦ E. 4) Ὀρθόν. 5) Λάθος, διότι τὸ 5 δὲν εἶναι στοιχεῖον τοῦ Ε. 6) Λάθος, διότι τὸ $\{2,4\}$ εἶναι ὑποσύνολον τοῦ Ε καὶ οὐχὶ στοιχεῖον αὐτοῦ. 7) Ὀρθόν.

1-37. Βλέπε ἄσκ. 8 § 1.11.

1-38. Βλέπε ἄσκ. 8 § 1.11.

1-39. i) Ἂν $A_1 = A_2 = \ldots = A_\nu$, τότε (§ 1.7, ἰδιότης α) εἶναι :

$$A_1 \subseteqq A_2 \subseteqq A_3 \subseteqq \ldots \subseteqq A_\nu \subseteqq A_1.$$

ii) **Ἀντιστρόφως.** Ἔστω ὅτι εἶναι

$$A_1 \subseteqq A_2 \subseteqq A_3 \subseteqq \ldots \subseteqq A_\nu \subseteqq A_1.$$

Ἐξ αὐτῶν εὑρίσκομεν $A_1 \subseteqq A_2 \subseteqq A_1$, ἤτοι ($A_1 \subseteqq A_2$ καὶ $A_2 \subseteqq A_1$), συνεπῶς (§ 1.7, ἰδιότης β) $A_1 = A_2$. Ὁμοίως

$A_1 = A_3, \ldots, A_1 = A_\nu$, ἤτοι $A_1 = A_2 = \ldots = A_\nu$.

1-40. $P(A) = \{\varnothing, \{\alpha\}, \{\beta\}, A\}$.

$P(B) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{0\}, \{+\}, \{\varnothing, 0\}, \{\varnothing, +\}, \{0, +\}, B\}$.

1-41. Τὸ κενὸν σύνολον ἔχει ἕνα μόνον ὑποσύνολον, τὸν ἑαυτόν του : $P(\varnothing) = \{\varnothing\}$.

1-42. $P(E) = \{\varnothing, \{1\}, \{\{1,2\}\}, E\}$.

$P(\Sigma) = \{\varnothing, \{\alpha\}, \{\{\alpha\}\}, \{\varnothing\}, \{\alpha, \{\alpha\}\}, \{\alpha, \varnothing\}, \{\{\alpha\}, \varnothing\}, \Sigma\}$.

1-43. 1) Ὀρθόν, διότι $E \subseteqq E$ καὶ συνεπῶς $E \in P(E)$. 2) Λάθος, διότι τὸ Ε εἶναι στοιχεῖον τοῦ P(E) καὶ οὐχὶ ὑποσύνολον αὐτοῦ. 3) Λάθος, διότι τὸ Ε εἶναι στοιχεῖον τοῦ P(E), συνεπῶς τὸ $\{E\}$ εἶναι ὑποσύνολον τοῦ P(E) καὶ οὐχὶ στοιχεῖον αὐτοῦ. 4) Ὀρθόν, ὅπως ἐπεξηγήθη εἰς τὸ προηγούμενον ἐρώτημα.

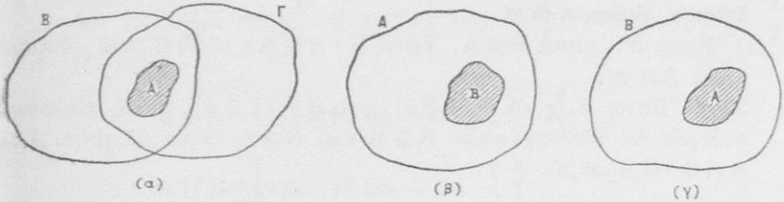
1-44. 1) $x \notin A$. 2) $A \subseteqq B$. 3) $\alpha \in E$. 4) $\Gamma \nsubseteqq \Delta$. 5) $\Sigma = \varnothing$. 6) $E \subset T$.

1-45. Ἔχομεν $A \subseteqq \varnothing$. Ἐξ ἄλλου (§ 1.7) : $\varnothing \subseteqq A$. Συνεπῶς (§ 1.7 Ἰδιότης β) : $A = \varnothing$.

1-46. 1) Ψευδής, διότι εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχωμεν τὴν περίπτωσιν τοῦ σχ. α, εἰς τὴν ὁποίαν $A \subseteqq \Gamma$.

2) Ψευδής, διότι εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχωμεν τὴν περίπτωσιν τοῦ σχ. β, εἰς τὴν ὁποίαν $B \subseteqq A$.

3) Ψευδής, διότι ἂν $A = B$ τότε $B = A$, δηλαδὴ $B \subseteqq A$. (Ἀληθὴς ἂν $A \neq B$ σχ. γ καὶ ψευδὴς ἂν $A = B$).



Σχήματα ἀσκήσεως 1-46.

2. ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΣΥΝΟΛΩΝ

2-1. 1) $A \cap B = \{2,4\}$, 2) $A \cap \Gamma = \{3,4\}$. 3) $B \cap \Gamma = \{4,6\}$. 4) $B \cap B = \{2,4,6,8\} = B$. 5) $(A \cap B) \cap \Gamma = \{2,4\} \cap \{3,4,5,6\} = \{4\}$.
6) $A \cap (B \cap \Gamma) = \{1,2,3,4,\} \cap \{4,6\} = \{4\}$.

2-2. 1) $A \cap B = \{\beta,\gamma\}$. $B \cap \Gamma = \{\gamma,\delta\}$. $A \cap \Gamma = \{\gamma\}$.
2) $(A \cap B) \cap \Gamma = \{\beta,\gamma\} \cap \Gamma = \{\gamma\}$.
$(A \cap B) \cap (\Gamma \cap \Delta) = \{\beta,\gamma\} \cap \{\delta,\varepsilon\} = \varnothing$.
$(A \cap (B \cap \Gamma)) \cap \Delta = (A \cap \{\gamma,\delta\}) \cap \Delta = \{\gamma\} \cap \{\delta,\varepsilon,\varphi\} = \varnothing$.

2-3. 1) Ἂν ἦτο $\{\alpha\} \cap \{\beta\} \neq \varnothing$, τότε τὰ δύο σύνολα $\{\alpha\}$ καὶ $\{\beta\}$ θὰ εἶχον τοὐλάχιστον ἕνα κοινὸ στοιχεῖον x. Ἀλλὰ $x \in \{\alpha\}$, ἕπεται $x = \alpha$ καὶ $x \in \{\beta\}$, ἕπεται $x = \beta$. Συνεπῶς, θὰ εἴχωμεν $\alpha = \beta (= x)$, τὸ ὁποῖον ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν $\alpha \neq \beta$.
2) Ἐκ τῆς $\alpha = \beta$, ἕπεται $\{\alpha\} = \{\beta\}$ καὶ ἀκόμη $\{\alpha\} \cap \{\beta\} = \{\alpha\} = \{\beta\}$.

2-4. Ἔστω $x \in (A \cap B)$. Τότε $x \in A$ καὶ $x \in B$ (§ 2.1). Ἐπειδὴ ὅμως $B \subseteqq \Gamma$, ἐκ τῆς $x \in B$ ἕπεται $x \in \Gamma$ (§ 1.7,i). Συνεπῶς :

$$x \in (A \cap B) \Rightarrow (x \in A \text{ καὶ } x \in \Gamma) \Rightarrow x \in (A \cap \Gamma)$$

καὶ ἄρα, βάσει τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ ὑποσονόλου (§ 1.7, i) :

$$A \cap B \subseteqq A \cap \Gamma.$$

2-5. Ἔστω $x \in \Gamma$. Τότε, ἐπειδὴ $\Gamma \subseteqq A$ καὶ $\Gamma \subseteqq B$, ἕπεται $x \in A$ καὶ $x \in B$. Συνεπῶς :

$$x \in \Gamma \Rightarrow (x \in A \text{ καὶ } x \in B) \Rightarrow x \in (A \cap B)$$

καὶ ἄρα (§ 1.7, i) : $\Gamma \subseteqq A \cap B$.

2-6. Ἔστω $x \in \Delta$. Τότε, ἐπειδὴ $\Delta \subseteqq A$ καὶ $\Delta \subseteqq B$ καὶ $\Delta \subseteqq \Gamma$, ἔπεται
$x \in A$ καὶ $x \in B$ καὶ $x \in \Gamma$. Συνεπῶς :

$$x \in \Delta \Rightarrow (x \in A \text{ καὶ } x \in B \text{ καὶ } x \in \Gamma) \Rightarrow x \in (A \cap B \cap \Gamma)$$

καὶ ἄρα (§ 1.7) : $\Delta \subseteqq (A \cap B \cap \Gamma)$.

2-7. i) Ἔστω ὅτι εἶναι $A \subseteqq B$. Τότε (§ 2.9 ἄσκ. 5) $A = A \cap B = \varnothing$,
ἄτοπον, διότι $A \neq \varnothing$.

ii) Ἔστω ὅτι εἶναι $B \subseteqq A$. Τότε $B = B \cap A = A \cap B = \varnothing$, ἄτοπον,
διότι $B \neq \varnothing$.

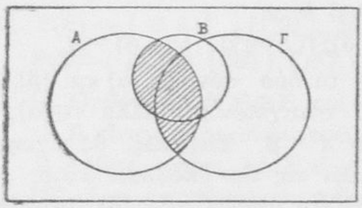
2-8. Ὄχι. Ἔστω π. χ. $A = \{1,2,3\}$ καὶ $B = \{1,3,5\}$. Τότε προφανῶς
οὐδεμία ἐκ τῶν σχέσεων $A \subseteqq B$ καὶ $B \subseteqq A$ εἶναι ἀληθής. Ἀλλὰ
$A \cap B = \{1,3\} \neq \varnothing$.

2-9. 1) $A \cup B = \{1,2,3,4,6,8\}$. 2) $A \cup \Gamma = \{1,2,3,4,5,6\}$.
3) $B \cup \Gamma = \{2,3,4,5,6,8\}$. 4) $B \cup B = \{2,4,6,8\} = B$
5) $(A \cup B) \cup \Gamma = \{1,2,3,4,6,8\} \cup \{3,4,5,6\} = \{1,2,3,4,5,6,8\}$.
6) $A \cup (B \cup \Gamma) = \{1,2,3,4\} \cup \{2,3,4,5,6,8\} = \{1,2,3,4,5,6,8\}$.

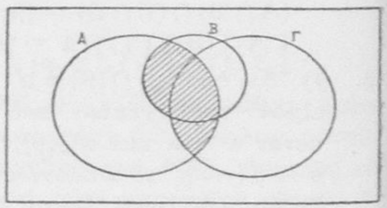
2-10. 1) $A \cap B = \varnothing$. $A \cup B = \{\alpha,\gamma,\delta,\beta,\varepsilon\}$.
2) $A \cap B = \{\alpha,\gamma,\varepsilon\} = A = B$. $A \cup B = \{\alpha,\gamma,\varepsilon\} = A = B$.
3) $A \cap B = \{\beta,\delta\} = B$. $A \cup B = \{\beta,\gamma,\delta\} = A$.
4) $A \cap B = \{\alpha,\gamma\} = A$. $A \cup B = \{\alpha,\beta,\gamma\} = B$.

2-11.

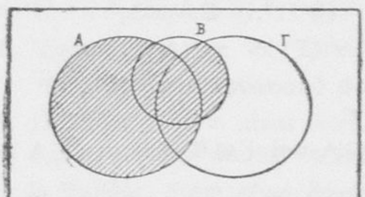
1) $A \cap (B \cup \Gamma)$



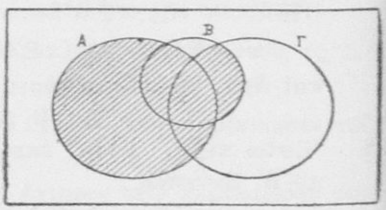
2) $(A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$



3) $A \cup (B \cap \Gamma)$



4) $(A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$



2-12. $A \cap B = \{x/x \in \Pi$ μὲ $0 \leqq x \leqq 2\}$. $A \cup B = \{x/x \in \Pi$ μὲ $-1 \leqq x \leqq 3\}$.

2-13. Ἡ πρώτη ἐπαληθεύεται διὰ $\frac{1}{2} < x < 1$ καὶ ἡ δευτέρα διὰ $x > \frac{1}{2}$. Θέτομεν :

$$A = \left\{x/x \in \Pi \text{ μὲ } \frac{1}{2} < x < 1\right\} \text{ καὶ } B = \left\{x/x \in \Pi \text{ μὲ } x > \frac{1}{2}\right\}.$$

Ἔχομεν :

$$A \cap B = \left\{x/x \in \Pi \text{ μὲ } \frac{1}{2} < x < 1\right\}.$$

$$A \cup B = \left\{x/x \in \Pi \text{ μὲ } x > \frac{1}{2}\right\}.$$

2-14. 1) Ἔχομεν : $A_2 = \{x \in \Phi$ μὲ $x =$ πολ. $2\}$ καὶ $A_7 = \{x/x \in \Phi$ μὲ $x =$ πολ. $7\}$.
Συνεπῶς : $A_2 \cap A_7 = \{x/x \in \Phi$ μὲ $x =$ πολ. 2 καὶ $x =$ πολ. $7\} =$ $= \{x/x \in \Phi$ μὲ $x =$ πολ. $14\} = A_{14}$. Ὥστε : $A_2 \cap A_7 = A_{14}$.
2) $A_6 \cap A_8 = A_{24}$. 3) $A_3 \cup A_{12} = A_3$. 4) $A_3 \cap A_{12} = A_{12}$.

2-15. 1) Ἔχομεν (§ 2.9 ἄσκ. 3) : $A \subseteqq A \cup \varnothing$. (1)
Ἔστω τώρα $x \in (A \cup \varnothing)$, ἕπεται : $x \in A$ ἢ $x \in \varnothing$. Ἀλλὰ (§ 1.3): $x \notin \varnothing$ καὶ συνεπῶς $x \in A$. Ἀπεδείχθη λοιπὸν ὅτι: $x \in (A \cup \varnothing)$ ἕπεται $x \in A$, ἤτοι : $A \cup \varnothing \subseteqq A$. (2)
Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) ἕπεται (§ 1.7, ἰδιότης β): $A \cup \varnothing = A$.
2) Ἔχομεν (§ 2.9 ἄσκ. 2) : $A \cap \varnothing \subseteqq \varnothing$. (3)
Ἐξ ἄλλου (§ 1.7) : $\varnothing \subseteqq A \cap \varnothing$. (4)
Ἐκ τῶν σχέσεων (3) καὶ (4) ἕπεται (§ 1.7, ἰδιότης β) $A \cap \varnothing = \varnothing$.

2-16. Ἔστω $x \in (A \cup B)$. Τότε $x \in A$ ἢ $x \in B$. Εἰς ἀμφοτέρας ὅμως τὰς περιπτώσεις, ἐπειδὴ $A \subseteqq \Gamma$ καὶ $B \subseteqq \Gamma$, ἕπεται $x \in \Gamma$.
Συνεπῶς : $A \cup B \subseteqq \Gamma$.

2-17. Ἔχομεν (§ 2.9 ἄσκ. 3) : $A \subseteqq A \cup (A \cap B)$. (1)
Ἐξ ἄλλου, ἐκ τῶν σχέσεων $A \subseteqq A$ καὶ $A \cap B \subseteqq A$ (§ 2.9 ἄσκ.2), βάσει τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως 2-16, ἕπεται :

$$A \cup (A \cap B) \subseteqq A. \quad (2)$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2), ἕπεται : $A \cup (A \cap B) = A$.
Ἐπίσης, ἔχομεν (§ 2.9 ἄσκ. 2) : $A \cap (A \cup B) \subseteqq A$. (3)
Ἐκ δὲ τῶν $A \subseteqq A$ καὶ $A \subseteqq A \cup B$, βάσει τῆς ἀσκήσεως 2—5, ἕπεται $A \subseteqq A \cap (A \cup B)$. (4)

Ἐκ τῶν (3) καὶ (4), ἕπεται $A \cap (A \cup B) = A$.

2-18. i) Ἔστω $A = B$. Τότε $A \cup B = A = B = A \cap B$, δηλαδὴ $A \cup B = A \cap B$.

ii) Ἀντιστρόφως: Ἔστω $A \cup B = A \cap B$. (1)
Ἔχομεν (§ 2.9 ἄσκ. 2): $A \cap B \subseteq A$ καὶ $A \cap B \subseteq B$. Ἐπίσης (§ 2.9 ἄσκ. 3): $A \subseteq A \cup B$ καὶ $B \subseteq A \cup B$. Ἐξ αὐτῶν εὑρίσκομεν ὅτι $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$ καὶ $A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B$. Συνεπῶς, βάσει τῆς (1): $A \cap B = A = B = A \cup B$, δηλαδὴ $A = B$.

2-19. 1) Λάθος. Ἔστω π. χ. $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3,4,5\}$ καὶ $\Gamma = \{4,5\}$. Τότε $A \cup B = \{1,2,3,4,5\} = A \cup \Gamma$, ἤτοι $A \cup B = A \cup \Gamma$, ἀλλὰ $B \neq \Gamma$.
2) Λάθος. Ἔστω π.χ. $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3,4\}$ καὶ $\Gamma = \{2,3,5\}$. Τότε $A \cap B = \{2,3\} = A \cap \Gamma$, ἤτοι $A \cap B = A \cap \Gamma$, ἀλλὰ $B \neq \Gamma$.

2-20. 1) Ἔστω $x \in (A \cup (B \cap \Gamma))$, τότε $x \in A$ ἢ $x \in (B \cap \Gamma)$. Ἐὰν $x \in A$, τότε $x \in (A \cup B)$ καὶ $x \in (A \cup \Gamma)$, διότι (§ 2.19 ἄσκ. 3) $A \subseteq A \cup B$ καὶ $A \subseteq A \cup \Gamma$. Συνεπῶς $x \in ((A \cup B) \cap (A \cup \Gamma))$. Ἐπίσης, ἐὰν $x \in (B \cap \Gamma)$, τότε $x \in B$ καὶ $x \in \Gamma$, ἄρα $x \in (A \cup B)$ καὶ $x \in (A \cup \Gamma)$, ὅθεν $x \in ((A \cup B) \cap (A \cup \Gamma))$. Εἰς ἀμφοτέρας λοιπὸν τὰς περιπτώσεις, ἔχομεν: $A \cup (B \cap \Gamma \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$. (1)
Ἀντιστρόφως. Ἔστω $x \in ((A \cup B) \cap (A \cup \Gamma))$, τότε $x \in (A \cup B)$ καὶ $x \in (A \cup \Gamma)$, συνεπῶς ($x \in A$ ἢ $x \in B$) καὶ ($x \in A$ ἢ $x \in \Gamma$), ἤτοι
$[x \in A$ ἢ $(x \in B$ καὶ $x \in \Gamma)] \Rightarrow (x \in A$ ἢ $x \in (B \cap \Gamma)) \Rightarrow x \in (A \cup (B \cap \Gamma))$.
Ὅθεν: $(A \cup B) \cap (A \cup \Gamma) \subseteq A \cup (B \cap \Gamma)$. (2)
Ἐκ τῶν (1) καὶ (2), ἕπεται:

$$A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma).$$

2) Ἀπόδειξις ἀνάλογος.

Ἐὰν $A = \{1,2,3\}$, $B = \{3,4,5\}$ καὶ $\Gamma = \{1,3,5\}$, τότε:
$A \cup (B \cap \Gamma) = \{1,2,3\} \cup \{3,5\} = \{1,2,3,5\}$.
$(A \cup B) \cap (A \cup \Gamma) = \{1,2,3,4,5\} \cap \{1,2,3,5\} = \{1,2,3,5\} = A \cup (B \cap \Gamma)$.
Ὁμοίως: $A \cap (B \cup \Gamma) = \{1,2,3\} \cap \{1,3,4,5\} = \{1,3\}$.
$(A \cap B) \cup (A \cap \Gamma) = \{3\} \cup \{1,3\} = \{1,3\} = A \cap (B \cup \Gamma)$.

2-21. 1) $A - B = \{1,3\}$. 2) $\Gamma - A = \{5,6\}$. 3) $B - \Gamma = \{2,8\}$. 4) $B - A = \{6,8\}$. 5) $B - B = \varnothing$.

2-22. 1) $X = \{2,5\}$. 2) $X = \{1,2,3,7,8\}$. 3) $X = \{2\}$
4) $X = \{x \mid x \in \Pi$ μὲ $x > 0\}$, $Y = \{x \mid x \in \Pi$ μὲ $x < 0\}$.

2-23. Ἔχομεν (§ 2.6) : $A - A = \{x \mid x \in A$ καὶ $x \notin A\} = \varnothing$

2-24. Ἔστω $x \in (A - (A - \varnothing))$. Τότε $x \in A$ καὶ $x \notin (A - \varnothing)$. Ἀλλὰ $x \notin (A - \varnothing)$ ἕπεται $x \notin A$ ἢ $x \in \varnothing$. Ὥστε $(x \in A)$ καὶ $(x \notin A$ ἢ $x \in \varnothing)$, δηλαδὴ $(x \in A$ καὶ $x \notin A)$ ἢ $(x \in A$ καὶ $x \in \varnothing)$. Ἐὰν $(x \in A$ καί $x \notin A)$, ἕπεται $x \in \varnothing$. Ἐὰν $(x \in A$ καὶ $x \in \varnothing)$, ἕπεται $x \in \varnothing$. Ὥστε εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις $x \in \varnothing$. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι τὸ τυχὸν στοιχεῖον x τοῦ $A - (A - \varnothing)$ ἀνήκει εἰς εἰς τὸ $\varnothing$. Ὅθεν : $A - (A - \varnothing) \subseteqq \varnothing$. (1)
Ἐξ ἄλλου $\varnothing \subseteqq A - (A - \varnothing)$. (2)
Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἕπεται : $A - (A - \varnothing) = \varnothing$.

2-25. Ἔστω $A = \{1,2,3\}$ καὶ $B = \{1,2,3,4\}$. Τότε $A - B = \varnothing$ καὶ $B - A = \{4\}$. Ἀλλὰ $\varnothing \neq \{4\}$, ἤτοι $A - B \neq B - A$. Ὅθεν, γενικῶς $A - B \neq B - A$, διότι ὑπάρχουν σύνολα A καὶ B τοιαῦτα ὥστε $A - B \neq B - A$.

2-26. Ἔστω $x \in (A - B)$. Τότε $x \in A$ καὶ $x \notin B$. Ἐπειδὴ $x \in A$, ἕπεται $x \in (A \cup B)$, διότι (§ 2.9 ἄσκ. 3) $A \subseteqq A \cup B$. Ὥστε :

$$x \in (A - B) \Rightarrow x \in (A \cup B).$$

Συνεπῶς : $A - B \subseteqq A \cup B$.

2-27. Ἐὰν $B - \Gamma = \varnothing$, τότε ἡ ἀποδεικτέα σχέσις εἶναι προφανής. Ἐὰν $B - \Gamma \neq \varnothing$, τότε, ἔστω $x \in (B - \Gamma)$ καὶ συνεπῶς $(x \in B$ καὶ $x \notin \Gamma)$. Ἀλλὰ ἐκ τῆς $x \in B$ ἕπεται $x \in A$, διότι $B \subseteqq A$. Ὥστε $x \in A$ καὶ $x \notin \Gamma$, δηλαδὴ $x \in (A - \Gamma)$. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι ἐκ τῆς $x \in (B - \Gamma)$ ἕπεται $x \in (A - \Gamma)$ καὶ συνεπῶς $B - \Gamma \subseteqq A - \Gamma$.

2-28. Θέτομεν $A - B = \Gamma$ καὶ ἡ ἀποδεικτέα γράφεται $A - \Gamma = B$.
i) Θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι $B \subseteqq A - \Gamma$.
Ἐὰν $B = \varnothing$, τότε προφανῶς $B \subseteqq A - \Gamma$.
Ἐὰν $B \neq \varnothing$ καὶ $x \in B$, ἕπεται $x \in A$ (διότι $B \subseteqq A$) καὶ $x \notin (A - B)$. Συνεπῶς $(x \in A$ καὶ $x \notin \Gamma)$, δηλαδὴ $x \in (A - \Gamma)$, ἤτοι $B \subseteqq A - \Gamma$, Ὥστε, εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις $(B = \varnothing, B \neq \varnothing)$, ἔχομεν : $B \subseteqq A - \Gamma$. (1)
ii) Θὰ δείξωμεν ὅτι $A - \Gamma \subseteqq B$.
Ἐὰν $A - \Gamma = \varnothing$, τότε προφανῶς $A - \Gamma \subseteqq B$.
Ἐὰν $A - \Gamma \neq \varnothing$ καὶ $x \in (A - \Gamma)$, ἕπεται $(x \in A$ καὶ $x \notin \Gamma)$, ἤτοι $(x \in A$ καὶ $x \notin (A - B))$, ὅθεν $x \in B$. Συνεπῶς $A - \Gamma \subseteqq B$.
Ὥστε, εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις $(A - \Gamma = \varnothing, A - \Gamma \neq \varnothing)$, ἔχομεν : $A - \Gamma \subseteqq B$. (2)

Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2), ἕπεται $A—\Gamma=B$, δηλαδὴ $A-(A-B)=B$.

2-29. Ἔστω ὅτι εἶναι $(A—B)\cap B\neq\varnothing$. Τότε, ἂν $x\in[(A—B)\cap B]$ ἕπεται $[x\in(A—B)$ καὶ $x\in B]$, ἤτοι $[x\in B$ καὶ $x\notin B$ καὶ $x\in B]$. Ἀλλά ($x\notin B$ καὶ $x\in B$) εἶναι ἄτοπον (§ 1.1). Ὥστε: $(A—B)\cap B=\varnothing$.

2-30. i) **Θὰ δείξωμεν ὅτι**: $A\cap B=\varnothing \Rightarrow A—B=A$.

Ἐπειδὴ $A\cap B=\varnothing$, ἔχομεν:

$$\forall x,\ x\in A \Rightarrow x\notin B.$$

Συνεπῶς, ἐὰν $x\in(A—B)$, τότε $x\in A$, δηλαδὴ $A—B\subseteq A$. (1)

Ἐπίσης, ἐὰν $x\in A$, τότε $x\notin B$, διότι $A\cap B=\varnothing$. Συνεπῶς $x\in(A—B)$, ἤτοι $A\subseteq A—B$. (2)

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2), ἕπεται $A-B=A$.

ii) **Θὰ δείξωμεν ὅτι**: $A—B=A\Rightarrow A\cap B=\varnothing$.

Ἐπειδὴ $A—B=A$, ἔχομεν:

$$\forall x,\ x\in(A—B)\Leftrightarrow x\in A,$$

ἤτοι: $\forall x$, $x\in A$ καὶ $x\notin B \Leftrightarrow x\in A$,

δηλαδὴ $A\cap B=\varnothing$.

2-31. Ἐν πρώτοις θὰ δείξωμεν ὅτι:

$$(A—B)\cup B=A\cup B. \tag{1}$$

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ $A—B\subseteq A\cup B$ (ἄσκ. 2-26) καὶ $B\subseteq A\cup B$ (§ 2.9 ἄσκ. 3). βάσει τῆς ἀσκήσεως 2-16, ἕπεται:

$$(A—B)\cup B\subseteq A\cup B. \tag{2}$$

Ἔστω τώρα $x\in(A\cup B)$. Τότε $x\in A$ ἢ $x\in B$. Ἐὰν $x\in B$, ἕπεται $x\in[(A—B)\cup A]$ καὶ ἐὰν $x\in A$ μὲ $x\notin B$, τότε $x\in(A—B)$ καὶ συνεπῶς $x\in[(A-B)\cup B]$. Ὅθεν: $A\cup A\subseteq(A-B)\cup B$ (3)

Ἐκ τῶν (2) καὶ (3), ἕπεται ἡ (1).

Ἀπόδειξις τῆς ἰσοδυναμίας:

$$(A—B)\cup B=A\Leftrightarrow B\subseteq A. \tag{4}$$

Βάσει τῆς (1), ἡ (4) γράφεται:

$$A\cup B=A\Leftrightarrow B\subseteq A,$$

ἡ ὁποία εἶναι ἀληθὴς (§ 2.9 ἄσκ. 6, σημείωσις).

2-32. Θά δείξωμεν ὅτι $(A-B)\cap(A\cap B)=\varnothing$.

Ἔστω ὅτι εἶναι $(A-B)\cap(A\cap B)\neq\emptyset$ καὶ ὅτι $x\in[(A-B)\cap(A\cap B)]$. Τότε $[x\in(A-B)$ καὶ $x\in(A\cap B)]$, ἤτοι $[x\in A$ καὶ $x\notin B$ καὶ $x\in A$ καὶ $x\in B]$. Ἀλλὰ $x\notin B$ καὶ $x\in B$ εἶναι ἄτοπον.
Ὥστε : $(A-B)\cap(A\cap B)=\emptyset$, δηλαδὴ τὰ σύνολα $A-B$ καὶ $A\cap B$ εἶναι ξένα μεταξύ των (§ 2.3).
Ἀποδεικνύομεν ὁμοίως ὅτι :
$(A\cap B)\cap(B-A)=\emptyset$ καὶ $(B-A)\cap(A-B)=\emptyset$.

2-33. Ἀπεδείχθη εἰς τὴν ἄσκησιν 2—31 (σχέσις (1)).

2-34. 1) α) Θὰ δείξωμεν ὅτι : $A\subseteq\Gamma-B\Rightarrow A\cap B=\emptyset$.
Ἔστω ὅτι εἶναι $A\cap B\neq\emptyset$ καὶ ὅτι $x\in(A\cap B)$. Τότε ($x\in A$ καὶ $x\in B$). ἤτοι $[x\in(\Gamma-B)$ καὶ $x\in B]$, διότι $A\subseteq\Gamma-B$, δηλαδὴ $[x\in\Gamma$ καὶ $x\notin B$ καὶ $x\in B]$. Ἀλλὰ $x\notin B$ καὶ $x\in B$ εἶναι ἄτοπον.
Ὥστε: $A\cap B=\emptyset$.

β) Θὰ δείξωμεν ὅτι : $A\cap B=\emptyset\Rightarrow A\subseteq\Gamma-B$.
Ἔστω $x\in A$, τότε $x\notin B$, διότι $A\cap B=\emptyset$. Ἀλλὰ $x\in A$ ἕπεται $x\in\Gamma$, διότι $A\subseteq\Gamma$. Ὥστε, ἂν $x\in A$ τότε ($x\in\Gamma$ καὶ $x\notin B$), ἤτοι $x\in(\Gamma-B)$ καὶ συνεπῶς $A\subseteq\Gamma-B$.

2) α) Θὰ δείξωμεν ὅτι : $\Gamma-B\subseteq A\Rightarrow A\cup B=\Gamma$.
Ἐπειδὴ $A\subseteq\Gamma$ καὶ $B\subseteq\Gamma$, ἕπεται (ἄσκ. 2-16) : $A\cup B\subseteq\Gamma$. (1)
Ἔστω τώρα $x\in\Gamma$. Τότε, ἂν μὲν καὶ $x\in B$, ἕπεται $x\in(A\cup B)$, ἂν δὲ $x\notin B$, ἕπεται $x\in(\Gamma-B)$ καὶ ἐπειδὴ $\Gamma-B\subseteq A$, ἕπεται $x\in A$ καὶ συνεπῶς πάλιν $x\in(A\cup B)$. Ὥστε : $x\in\Gamma\Rightarrow x\in(A\cup B)$, δηλαδή : $\Gamma\subseteq A\cup B$. (2)
Ἐκ τῶν (1) καὶ (2), ἕπεται ἡ ζητουμένη ἰσότης.

β) Θὰ δείξωμεν ὅτι : $A\cup B=\Gamma\Rightarrow\Gamma-B\subseteq A$.
Ἔστω $x\in(\Gamma-B)$, τότε ($x\in\Gamma$ καὶ $x\notin B$). Ἐπειδὴ $x\in\Gamma$ καὶ $\Gamma=A\cup B$, ἕπεται ($x\in A$ ἢ $x\in B$). Ἀλλὰ $x\notin B$, συνεπῶς $x\in A$.
Ὥστε : $x\in(\Gamma-B)\Rightarrow x\in A$, δηλαδή :

$$\Gamma-B\subseteq A.$$

2-35. 1) α) $x\in[A-(B\cup\Gamma)]\Rightarrow[x\in A$ καὶ $x\notin(B\cup\Gamma)]\Rightarrow$ $[x\in A$ καὶ ($x\notin B$ καὶ $x\notin\Gamma$)$]\Rightarrow[(x\in A$ καὶ $x\notin B)$ καὶ $(x\in A$ καὶ $x\notin\Gamma)]\Rightarrow[x\in(A-B)$ καὶ $x\in(A-\Gamma)]\Rightarrow x\in[(A-B)\cap(A-\Gamma)]$.
Συνεπῶς : $A-(B\cup\Gamma)\subseteq(A-B)\cap(A-\Gamma)$. (1)

β) $x\in[(A-B)\cap(A-\Gamma)]\Rightarrow[x\in(A-B)$ καὶ $x\in(A-\Gamma)]\Rightarrow$ $[(x\in A$ καὶ $x\notin B)$ καὶ $(x\in A$ καὶ $x\notin\Gamma)]\Rightarrow$

$[x \in A$ καὶ $x \notin B$ καὶ $x \notin \Gamma] \Rightarrow [x \in A$ καὶ $x \notin (B \cup \Gamma)] \Rightarrow$
$x \in [A - (B \cup \Gamma)]$.

Συνεπῶς : $(A - B) \cap (A - \Gamma) \subseteq A - (B \cup \Gamma)$. (2)

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἕπεται ἡ ζητουμένη ἰσότης.

2) Ἀπόδειξις ὁμοία.

Ἐὰν $A = \{1,2,3\}$, $B = \{3,4,5\}$ καὶ $\Gamma = \{1,3,5\}$, τότε :

$A - (B \cup \Gamma) = \{1,2,3\} - \{1,3,4,5\} = \{2\} = \{1,2\} \cap \{2\} = (A - B) \cap (A - \Gamma)$.

$A - (B \cap \Gamma) = \{1,2,3\} - \{3,5\} = \{1,2\} = \{1,2\} \cup \{2\} = (A - B) \cup (A - \Gamma)$.

2-36. $x \in [(A - \Gamma) \cup (B - \Gamma)] \Leftrightarrow [x \in (A - \Gamma)$ ἢ $x \in (B - \Gamma)] \Leftrightarrow$
$[(x \in A$ καὶ $x \notin \Gamma)$ ἢ $(x \in B$ καὶ $x \notin \Gamma)] \Leftrightarrow$
$[(x \in A$ ἢ $x \in B)$ καὶ $x \notin \Gamma] \Leftrightarrow [x \in (A \cup B)$ καὶ $x \notin \Gamma] \Leftrightarrow$
$x \in [(A \cup B) - \Gamma]$.

Συνεπῶς : $(A - \Gamma) \cup (B - \Gamma) = (A \cup B) - \Gamma$.

2-37. α) Ἔστω $x \in (\Gamma - A)$. Τότε $(x \in \Gamma$ καὶ $x \notin A)$. Ἐπειδὴ ὅμως $\Gamma = A \cup B$, ἕπεται: $[x \in (A \cup B)$ καὶ $x \notin A]$, ἤτοι
$[(x \in A$ ἢ $x \in B)$ καὶ $x \notin A]$, δηλαδὴ $(x \in B)$.

Συνεπῶς : $\Gamma - A \subseteq B$ (1)

β) Ἔστω $x \in B$. Τότε $x \in \Gamma$, διότι $B \subseteq \Gamma$. Τώρα, ἂν $x \in A$, ἕπεται $A \cap B \neq \varnothing$, τὸ ὁποῖον ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν $A \cap B = \varnothing$.
Ὅθεν : $(x \in \Gamma$ καὶ $x \notin A)$, ἕπεται $x \in (\Gamma - A)$. Ἑπομένως :

$$B \subseteq \Gamma - A. \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἕπεται $B = \Gamma - A$.

2-38. 1) $\underset{E}{C} A = \overline{A} = \{5,6,7,8,9\}$. 2) $\underset{E}{C} B = \{1,3,5,7,9\}$. 3) Ἐπειδὴ $A \cup B = \{1,2,3,4,6,8\}$, ἕπεται $\underset{E}{C}(A \cup B) = \{5,7,9\}$. 4) Ἐπειδὴ $\overline{A} = \{5,6,7,8,9\}$, ἕπεται $\underset{E}{C} \overline{A} = \{1,2,3,4\} = A$. 5) Ἐπειδὴ $B - \Gamma = \{2,8\}$, ἕπεται $\underset{E}{C}(B - \Gamma) = \{1,3,4,5,6,7,9\}$.

2-39. 1) $A \cap B = \varnothing$. 2) Ἔχομεν $\overline{A} = \{2,4,6,8,10,12\}$ καὶ συνεπῶς $\overline{A} \cap B = \{2,4,6,8\} = B$. 3) Ἔχομεν $\overline{B} = \{1,3,5,7,9,10,11,12\}$ καὶ συνεπῶς $A \cap \overline{B} = \{1,3,5,7,9,11\} = A$. 4) $\overline{A} \cap \overline{B} = \{10,12\}$. 5) $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,11\}$. 6) $\overline{A} \cup B = \{2,4,6,8,10,12\} = \overline{A}$.
7) $A \cup \overline{B} = \{1,3,5,7,9,10.11,12\} = \overline{B}$. 8) $\overline{A} \cup \overline{B} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$. 9) $(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) = \varnothing \cup \{10,12\} = \{10,12\}$ (§ 2.5 ἰδιότης δ). 10) Ἔχομεν : $A \cup \overline{A} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ καὶ

$B \cup \overline{B}=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$. Συνεπῶς:
$(A \cup \overline{A}) \cap (B \cup \overline{B})=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$.

2-40. $\overline{A}=\underset{E}{\complement}A=\{3,5,6\}$, $\overline{B}=\underset{E}{\complement}B=\{1,3\}$, $\overline{\Gamma}=\underset{E}{\complement}\Gamma=\{3,6\}$.

1) Ἔχομεν $A \cup B=\{1,2,4,5,6\}$, $\overline{A} \cup B=\{2,3,4,5,6\}$ καὶ $A \cup \overline{B}=\{1,2,3,4\}$. Συνεπῶς:
$(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B})=\{2,4\}$.
2), 3, 4), 5) ὁμοίως.

2-41. i) Ἔχομεν: $A \cap B=\{1,3\}$ καὶ συνεπῶς: $(A \cap B) \cup B=\{1,3,5,7\}=B$.
Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν ὅτι: $(A \cup B) \cup B=A \cup B$ καὶ $A \cap (A \cup B)=A$.

ii) α) Ἔχομεν: $\underset{E}{\complement}A=\{5,6,7,8,9\}$, συνεπῶς:
$(\underset{E}{\complement}A) \cup B=\{1,3,5,6,7,8,9\}$ καὶ ἑπομένως:
$$A \cap [(\underset{E}{\complement}A) \cup B]=\{1,3\}=\{1,2,3,4\} \cap \{1,3,5,7\}=A \cap B.$$

β) Ἔχομεν: $(\underset{E}{\complement}A) \cap B=\{5,7\}$ καὶ συνεπῶς:
$A \cup [(\underset{E}{\complement}A) \cap B]=\{1,2,3,4,5,7\}=\{1,2,3,4\} \cup \{1,3,5,7\}=A \cup B$.

2-42. $x \in [\underset{E}{\complement}(\underset{E}{\complement}A)] \Leftrightarrow [x \in E$ καὶ $x \notin (\underset{E}{\complement}A)] \Leftrightarrow [x \in E$ καὶ $x \in A] \Leftrightarrow (x \in A)$
Συνεπῶς: $\underset{E}{\complement}(\underset{E}{\complement}A)=A$.

2-43. 1) $x \in [A \cup \underset{E}{\complement}B] \Rightarrow [x \in A$ ἢ $x \in (\underset{E}{\complement}B)]$.
Ἐὰν $x \in A$, τότε $x \notin B$, διότι $A \cap B=\varnothing$. Ἐξ ἄλλου $x \in E$, διότι $A \subseteq E$ καὶ $x \in A$. Συνεπῶς $x \in \underset{E}{\complement}B$. Ὥστε:
$$x \in [A \cup \underset{E}{\complement}B] \Rightarrow x \in (\underset{E}{\complement}B),$$
δηλαδή:
$$A \cup \underset{E}{\complement}B \subseteq \underset{E}{\complement}B. \tag{1}$$
Ἐξ ἄλλου (§ 2.9 ἄσκ. 3), ἔχομεν:
$$\underset{E}{\complement}B \subseteq A \cup \underset{E}{\complement}B. \tag{2}$$
Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἕπεται ἡ ζητουμένη ἰσότης.
2) Ἀπόδειξις ἀνάλογος.

2-44. 1) $x \in (\underset{E}{\complement}(A \cap B)) \Leftrightarrow [x \in E$ καὶ $x \notin (A \cap B)] \Leftrightarrow$
$[x \in E$ καὶ $(x \notin A$ ἢ(*) $x \notin B)] \Leftrightarrow [(x \in E$ καὶ $x \notin A)$ ἢ $(x \in E$ καὶ $x \notin B)]$

(*) Ὁ σύνδεσμος «ἢ» σημαίνει ὅτι τὸ x ἐπαληθεύει τὴν μίαν τουλάχιστον ἐκ τῶν δύο σχέσεων καὶ ἑπομένως, ἴσως καὶ τὰς δύο (ἰδὲ § 2.4, σημ.)

$\Leftrightarrow [x \in \underset{E}{C}A$ ἢ $x \in \underset{E}{C}B] \Leftrightarrow x \in [(\underset{E}{C}A) \cup (\underset{E}{C}B)]$.

2) $x \in [\underset{E}{C}(A \cup B)] \Leftrightarrow [x \in E$ καὶ $x \notin (A \cup B)] \Leftrightarrow$

$[x \in E$ καὶ $(x \notin A$ καὶ $x \notin B)] \Leftrightarrow$

$[x \in E$ καὶ $x \notin A)$ καὶ $(x \in E$ καὶ $x \notin B)] \Leftrightarrow$

$[x \in (\underset{E}{C}A)$ καὶ $x \in (\underset{E}{C}B)] \Leftrightarrow x \in [(\underset{E}{C}A) \cap (\underset{E}{C}B)]$.

2-45. $x \in [\underset{E}{C}A - \underset{E}{C}B] \Leftrightarrow [x \in \underset{E}{C}A$ καὶ $x \notin \underset{E}{C}B] \Leftrightarrow$

$[(x \in E$ καὶ $x \notin A)$ καὶ $(x \in B)]$

$\Leftrightarrow [x \in B$ καὶ $x \notin A] \Leftrightarrow x \in (B - A)$.

2-46. $x \in (B - A) \Rightarrow [x \in B$ καὶ $x \notin A] \Rightarrow$ (διότι $B \subseteq E) \Rightarrow [x \in E$ καὶ $x \notin A]$

$\Rightarrow x \in \underset{E}{C}A$. Συνεπῶς : $B - A \subseteq \underset{E}{C}A$.

2-47. 1) $P(A) = \{\varnothing, \{\alpha\}, \{\gamma\}, \{\delta\}, \{\zeta\}, \{\alpha,\gamma\}, \{\alpha,\delta\}, \{\alpha,\zeta\}, \{\gamma,\delta\}, \{\gamma,\zeta\}, \{\delta,\zeta\}, \{\alpha,\gamma,\delta\}, \{\alpha,\gamma,\zeta\}, \{\alpha,\delta,\zeta\}, \{\gamma,\delta,\zeta\}, A\}$.

$P(B) = \{\varnothing, \{\gamma\}, \{\delta\}, \{\varepsilon\}, \{\zeta\}, \{\gamma,\delta\}, \{\gamma,\varepsilon\}, \{\gamma,\zeta\}, \{\delta,\varepsilon\}, \{\delta,\zeta\}, \{\varepsilon,\zeta\}, \{\gamma,\delta,\varepsilon\}, \{\gamma,\delta,\zeta\}, \{\delta,\varepsilon,\zeta\}, \{\varepsilon,\zeta,\gamma\}, B\}$.

2) $[P(A)] \cap [P(B)] = \{\varnothing, \{\gamma\}, \{\delta\}, \{\zeta\}, \{\gamma,\delta\}, \{\gamma,\zeta\}, \{\delta,\zeta\}, \{\gamma,\delta,\zeta\}\}$.

3) Ἔχομεν $\underset{E}{C}A = \{\beta,\varepsilon\}$ καὶ συνεπῶς $P(\underset{E}{C}A) = \{\varnothing, \{\beta\}, \{\varepsilon\}, \{\beta,\varepsilon\}\}$.

Ἐπίσης $\underset{E}{C}B = \{\alpha,\beta\}$ καὶ συνεπῶς $P(\underset{E}{C}B) = \{\varnothing, \{\alpha\}, \{\beta\}, \{\alpha,\beta\}\}$.

4) $[P(\underset{E}{C}A)] \cap [P(\underset{E}{C}B)] = \{\varnothing, \{\beta\}\}$.

2-48. 1) Ὄχι, διότι $\{1,3,5\} \cap \{3,6\} = \{3\} \neq \varnothing$.

2) Ὄχι, διότι $\{1,5\} \cup \{2\} \cup \{3,6\} = \{1,2,3,5,6\} \neq E$.

3) Ναὶ (§ 2.8).

4) Ὄχι, διὸτι περιέχει τὸ $\varnothing$.

2-49. $\mathscr{D}_1$. Ὄχι, διότι $\zeta \in A$ ἀλλὰ $\zeta \notin (B_1 \cup B_2 \cup B_3)$ καὶ συνεπῶς $A \neq B_1 \cup B_2 \cup B_3$.

$\mathscr{D}_2$. Ὄχι, διότι $\Gamma_1 \cap \Gamma_3 = \{\varepsilon\} \neq \varnothing$.

$\mathscr{D}_3$. Ναὶ (§ 2.8).

$\mathscr{D}_4$. Ναὶ (§ 2.8, παράδειγμα 3ον).

$\mathscr{D}_5$. Ὄχι, διότι $B_3 \cap \Delta_3 = \{\delta\} \neq \varnothing$.

$\mathscr{D}_6$. Ὄχι, διότι $\zeta \in A$ ἀλλὰ $\zeta \notin (B_2 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_1)$ καὶ συνεπῶς $A \neq B_2 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_1$.

2-50. Ἔχομεν : $A=\{\alpha,\lambda\}$, $B=\{\upsilon,\pi,o\}$, $\Gamma=\{\varepsilon,\nu\}$. Εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι : α) οὐδὲν ἐκ τῶν συνόλων Α,Β καὶ Γ εἶναι κενόν.
β) Τὰ σύνολα Α,Β καὶ Γ εἶναι ἀνὰ δύο ξένα μεταξύ των.
γ) $A \cup B \cup \Gamma = E$. Συμπεραίνομεν λοιπὸν (§ 2.8) ὅτι τὸ σύνολον $\mathscr{D}$ εἶναι μία διαμέρισις τοῦ συνόλου Ε.

2-51. Ἔχομεν $E=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, $A=\{1,3,5,7,9\}$, $B=\{2,4,10\}$, $\Gamma=\{3,8,5,6\}$. Τὸ σύνολον $\mathscr{D}$ δὲν εἶναι μία διαμέρισις τοῦ Ε, διότι $A \cap \Gamma = \{3\} \neq \varnothing$.

2-52. Ἔχομεν : $E=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, $A=\{1,3,5\}$, $B=\{2,6,10\}$, $\Gamma=\{9,4,8\}$. Τὸ σύνολον $\mathscr{D}$ δὲν εἶναι μία διαμέρισις τοῦ Ε, διότι $7 \in E$, ἀλλὰ $7 \notin (A \cup B \cup \Gamma)$ καὶ συνεπῶς $A \cup B \cup \Gamma \neq E$.

2-53. Παρατηροῦμεν ἐν πρώτοις ὅτι ἑκάστη διαμέρισις τοῦ Ε περιέχει 1, 2 ἢ 3 διαφορετικὰ σύνολα. Αἱ δυναταὶ διαμερίσεις τοῦ Ε εἶναι :
$\{\{1,2,3\}\}$, $\{\{1\},\{2,3\}\}$, $\{\{2\},\{1,3\}\}$, $\{\{3\},\{1,2\}\}$, $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$
Ὑπάρχουν λοιπὸν 5 δυναταὶ διαμερίσεις τοῦ Ε.

2-54. Παρατηροῦμεν ὅτι ἑκάστη διαμέρισις τοῦ Ε περιέχει 1, 2, 3 ἢ 4 διαφορετικὰ σύνολα. Αἱ δυναταὶ διαμερίσεις εἶναι :
(1) $\{\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}\}$.
(2) $\{\{\alpha\},\{\beta,\gamma,\delta\}\}$, $\{\{\beta\},\{\alpha,\gamma,\delta\}\}$, $\{\{\gamma\},\{\alpha,\beta,\delta\}\}$, $\{\{\delta\},\{\alpha,\beta,\gamma\}\}$, $\{\{\alpha,\beta\},\{\gamma,\delta\}\}$, $\{\{\alpha,\gamma\},\{\beta,\delta\}\}$, $\{\{\alpha,\delta\},\{\beta,\gamma\}\}$.
(3) $\{\{\alpha\},\{\beta\},\{\gamma,\delta\}\}$, $\{\{\alpha\},\{\gamma\},\{\beta,\delta\}\}$, $\{\{\alpha\},\{\delta\},\{\beta,\gamma\}\}$, $\{\{\beta\},\{\gamma\},\{\alpha,\delta\}\}$, $\{\{\beta\},\{\delta\},\{\alpha,\gamma\}\}$, $\{\{\gamma\},\{\delta\},\{\alpha,\beta\}\}$.
(4) $\{\{\alpha\},\{\beta\},\{\gamma\},\{\delta\}\}$.
Ὑπάρχουν λοιπὸν 15 δυναταὶ διαμερίσεις τοῦ Ε.

2-55. Διαπιστοῦμεν εὐκόλως ὅτι : α) οὐδὲν ἐκ τῶν συνόλων A_0, A_1, A_2 εἶναι κενόν. β) Τὰ σύνολα A_0, A_1, A_2 εἶναι ἀνὰ δύο ξένα μεταξύ των. γ) $A_0 \cup A_1 \cup A_2 = \Phi$. Συνεπῶς (§ 2.8) τὸ $\mathscr{D}$ εἶναι μία διαμέρισις τοῦ Φ.

2-56. Ἔστω $\mathscr{D}=\{A,B\}$ μία τυχοῦσα διαμέρισις τοῦ συνόλου Ε, περιλαμβάνουσα δύο σύνολα Α καὶ Β. Ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι οὐδὲν ἐκ τῶν συνόλων Α καὶ Β περιέχει τὴν διαφορὰν δύο στοιχείων του, τότε: τὸ 2 δὲν πρέπει νὰ εὑρίσκεται εἰς τὸ ἴδιον σύνολον οὔτε μὲ τὸ 1 οὔτε μὲ τὸ 4, διότι $2-1=1$ καὶ $4-2=2$. Ἄς εἶναι λοιπὸν $2\in A$ καὶ $1\in B$, $4\in B$. Παρατηροῦμεν ὅτι $3\notin B$, διότι $4-3=1$. Συνεπῶς $3\in A$. Τώρα ὅμως $5\notin A$, διότι $5-3=2$, ἀλλὰ καὶ $5\notin B$, διότι $5-4=1$. Τοῦτο εἶναι ἄτοπον, διότι $5\in E$, $5\notin (A\cup B)$ (ἀφοῦ $5\notin A$ καὶ $5\notin B$), δηλαδὴ $A\cup B\neq E$.

3. ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΟΝ ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ ΔΥΟ ΣΥΝΟΛΩΝ

3-1. (1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4).

3-2. (1,1), (2,4).

3-3. Ἐπειδὴ $(x+y, 1)=(3, x-y)$, ἔχομεν (§ 3.1): $x+y=3$ καὶ $1=x-y$. Ἐπιλύοντες τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων $x+y=3$ καὶ $x-y=1$, εὑρίσκομεν $x=2$ καὶ $y=1$.

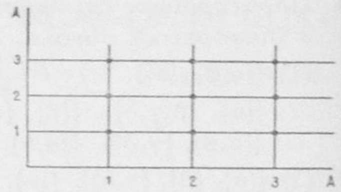
3-4. Ἐργαζόμενοι ὅπως καὶ εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν, εὑρίσκομεν $x=2$ καὶ $y=3$.

3-5. Ἔχομεν προφανῶς $(\alpha, \beta)=(3,5)$ καὶ $\gamma=1$, ἤτοι: $\alpha=3$, $\beta=5$ καὶ $\gamma=1$.

3-6. Ἔχομεν:

$A\times A=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$.

Ἡ γραφικὴ παράστασις τοῦ $A\times A$ δίδεται εἰς τὸ παραπλεύρως σχῆμα.



Σχῆμα ἀσκ. 3·6.

3-7. Ἔχομεν: $A\times B=\{(\Pi, X), (\Pi, E), (I, X), (I, E), (\Gamma, X), (\Gamma, E)\}$, ἔνθα ἐτέθη: Π ἀντὶ Πέτρος, Ι ἀντὶ Ἰωάννης κ.λ.π.

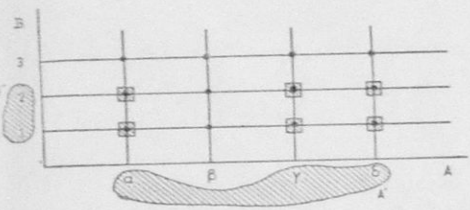
Ἡ γραφικὴ παράστασις τοῦ $A\times B$ δίδεται εἰς τὸ παραπλεύρως σχῆμα.

Σχ. ἀσκ. 3·7.

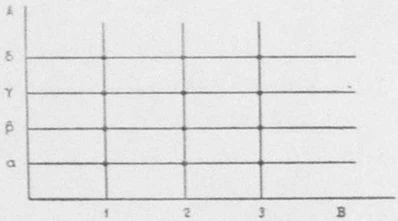
3-8. Ἔχομεν $A=\{1,2,3\}$ καὶ $B=\{1,2,3,4,5\}$. Συνεπῶς:
$A \times B = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5)\}$.

3-9. 1) $A\times A=\{(\alpha,\alpha), (\alpha,\beta), (\alpha,\gamma), (\beta,\alpha), (\beta,\beta), (\beta,\gamma), (\gamma,\alpha), (\gamma,\beta), (\gamma,\gamma)\}$.
2) $B\times B=\{(\beta,\beta), (\beta,\gamma), (\beta,\delta), (\gamma,\beta), (\gamma,\gamma), (\gamma,\delta), (\delta,\beta), (\delta,\gamma), (\delta,\delta)\}$.
3) $A\times B=\{(\alpha,\beta), (\alpha,\gamma), (\alpha,\delta), (\beta,\beta), (\beta,\gamma), (\beta,\delta), (\gamma,\beta), (\gamma,\gamma), (\gamma,\delta)\}$.
4) $(A\times A)\cap(B\times B)=\{(\beta,\beta), (\beta,\gamma), (\gamma,\beta), (\gamma,\gamma)\}$.
5) $(A\times A)\cap(A\times B)=\{(\alpha,\beta), (\alpha,\gamma), (\beta,\beta), (\beta,\gamma), (\gamma,\beta), (\gamma,\gamma)\}$.
6) $(B\times B)\cap(A\times B)=\{(\beta,\beta), (\beta,\gamma), (\beta,\delta), (\gamma,\beta), (\gamma,\gamma), (\gamma,\delta)\}$.

3-10. α) $A\times B)=\{(\alpha,1), (\alpha,2), (\alpha,3), (\beta,1), (\beta,2), (\beta,3), (\gamma,1), (\gamma,2), (\gamma,3), (\delta,1), (\delta,2), (\delta,3)\}$.
$B\times A=\{(1,\alpha), (1,\beta), (1,\gamma), (1,\delta), (2,\alpha), (2,\beta), (2,\gamma), (2,\delta), (3,\alpha), (3,\beta), (3,\gamma), (3,\delta)\}$.



Γραφικὴ παράστασις τοῦ $A\times B$ (•) καὶ τοῦ $A'\times B'$ (⊡)



Γραφικὴ παράστασις τοῦ $B\times A$.

β) $A'\times B'=\{(\alpha,1), (\alpha,2), (\gamma,1), (\gamma,2), (\delta,1), (\delta,2)\}$.
Εἶναι προφανὲς ὅτι $A'\times B'\subset A\times B$.

3-11. Ἔχομεν $E=\{1,2,3,\ldots,12\}$, $A=\{2,4,6,\ldots,12\}$, $B=\{4,5,6,7,8\}$.
1) $A\times B=\{(2,4), (2,5), (2,6), \ldots, (12,8)\}$.
2) Ἐπειδὴ $\complement_E B=\{1,2,3,9,10,11,12\}$, εἶναι $A\times \complement_E B=\{(2,1),\ldots,(12,12)\}$.
3) $\complement_E A=\{1,3,5,\ldots,11\}$, συνεπῶς $(\complement_E A)\times(\complement_E B)=\{(1,1),\ldots,(11,12)\}$.

3-12. Ἔχομεν $E\times E=\{(1,1), (1,2), (1,3), \ldots, (5,5)\}$, $A\times B=\{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4)\}$, $\complement_E A=\{4,5\}$, $\complement_E B=\{1,2,5\}$.

1) $\underset{E\times E}{C}(A\times B)=\{(1,1), (1,2), (1,5), (2,1), (2,2), (2,5), (3,1), (3,2), (3,5), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5)\}$.

2) $(\underset{E}{C}A)\times(\underset{E}{C}B)=\{(4,1), (4,2), (4,5), (5,1), (5,2), (5,5)\}$.

3) $B\times\underset{E}{C}A=\{(3,4), (3,5), (4,4), (4,5)\}$.

4) $A\times\underset{E}{C}B=\{(1,1),(1,2),(1,5),(2,1),(2,2),(2,5),(3,1),(3,2),(3,5)\}$.

Παρατηροῦμεν ὅτι

$(\underset{E}{C}A)\times(\underset{E}{C}B)\subset\underset{E\times E}{C}(A\times B)$ καὶ $A\times\underset{E}{C}B\subset\underset{E\times E}{C}(A\times B)$.

3-13. Εὑρίσκομεν ἐν πρώτοις τὰ $B\cup\Gamma$, $A\times B$, $A\times\Gamma$, $B\cap\Gamma$ καὶ ἀκολούθως τὰ ζητούμενα.

3-14. Εὑρίσκομεν ἐν πρώτοις τὰ $A\times B$, $A\times\Gamma$ καὶ ἀκολούθως τὰ ζητούμενα.

3-15. Τὸ σύνολον $A\times B$ περιέχει (§ 3.2, σημείωσις I) $3.4=12$ στοιχεῖα.

3-16. Τὸ σύνολον $A\times B$ περιέχει (§ 3.2, σημείωσις I) $\nu.\mu$ τὸ πλῆθος στοιχεῖα.

3-17. Ἔστω ὅτι τὸ σύνολον A περιέχει ν στοιχεῖα καὶ τὸ B μ. Τότε (ἄσκ. 3-16): $\nu.\mu=6$. Ἐπειδὴ $\nu\in\Phi$ καὶ $\mu\in\Phi$, αἱ δυναταὶ περιπτώσεις εἶναι αἱ ἑξῆς:
$\nu=1$ καὶ $\mu=6$, $\nu=2$ καὶ $\mu=3$, $\nu=3$ καὶ $\mu=2$, $\nu=6$ καὶ $\mu=1$.

3-18. Ἐργαζόμενοι ὅπως καὶ εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν, εὑρίσκομεν ἐδῶ: $\nu.\mu=7$. Αἱ δὲ δυναταὶ περιπτώσεις εἶναι: $\nu=1$ καὶ $\mu=7$, $\nu=7$ καὶ $\mu=1$.

3-19. $(x,y)\in(A\times\Gamma)\Rightarrow(x\in A$ καὶ $y\in\Gamma)\Rightarrow$ (διότι $A\subseteqq B$ καὶ $\Gamma\subseteqq\Delta$) $\Rightarrow(x\in B$ καὶ $y\in\Delta)\Rightarrow(x,y)\in(B\times\Delta)$.

3-20. 1) $(x,y)\in(A\times B)\Rightarrow(x\in A$ καὶ $y\in B)\Rightarrow$ (διότι $A\subseteqq B$) $\Rightarrow$ $(x\in B$ καὶ $y\in B)\Rightarrow(x,y)\in(B\times B)$.

2) $(x,y)\in(A\times A)\Rightarrow(x\in A$ καὶ $y\in A)\Rightarrow$ (διότι $A\subseteqq B$) $\Rightarrow$ $(x\in A$ καὶ $y\in B)\Rightarrow(x,y)\in(A\times B)$.

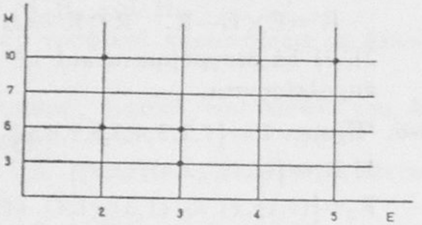
3-21. 1) $(x,y)\in[A\times(B\cup\Gamma)] \Leftrightarrow [x\in A$ καὶ $y\in(B\cup\Gamma)] \Leftrightarrow$
$[x\in A$ καὶ $(y\in B$ ἢ $y\in\Gamma)]\Leftrightarrow[(x\in A$ καὶ $y\in B)$ ἢ $(x\in A$ καὶ $y\in\Gamma)]$
$\Leftrightarrow[(x,y)\in(A\times B)$ ἢ $(x,y)\in(A\times\Gamma)]\Leftrightarrow(x,y)\in[(A\times B)\cup(A\times\Gamma)]$.
2) Ὁμοίως.

3-22. Ἐργαζόμεθα ὅπως καὶ εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν.

4. ΔΙΜΕΛΕΙΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

4-1. 1) $R=\{(2,6),(2,10),(3,3),(3,6),(5,10)\}$.

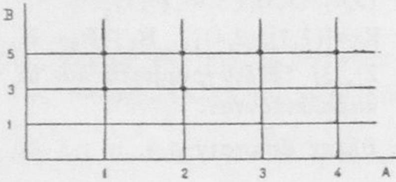
2) Ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς R δίδεται εἰς τὸ παραπλεύρως σχῆμα.



Σχῆμα ἀσκ. 4 1

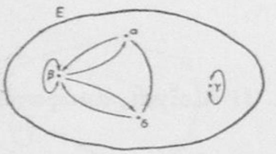
4-2. 1) $R=\{(1,3),(1,5),(2,3),(2,5),(3,5),(4,5)\}$.

2) Ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς R δίδεται εἰς τὸ παραπλεύρως σχῆμα.

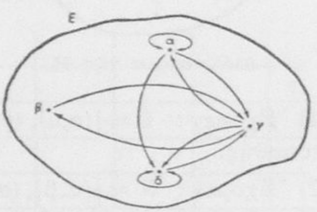


Σχῆμα ἀσκ. 4-2.

4-3. 1) $\gamma R \beta$ ψευδής, $\delta R \alpha$ ψευδής, $\alpha R \gamma$ ἀληθής, $\beta R \beta$ ψευδής.
2) $A=\{\alpha,\beta,\delta\}$. 3) $B=\{\alpha,\beta\}$.
4) α) $\alpha R'\beta$ ψευδής, $\beta R'\beta$ ἀληθής, $\gamma R'\beta$ ἀληθής, $\delta R'\delta$ ψευδής.
β) $\Gamma=\{\alpha,\beta,\delta\}$. γ) $\Delta=\{\alpha,\gamma,\delta\}$.



Διάγραμμα τῆς R



Διάγραμμα τῆς R′

4-4. 1) $R=\{(1,2),\ (2,3),\ (3,4),\ (4,5),\ (5,6)\}$.

$R'=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),$ $(2,6),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,4),(4,5),(4,6),(5,5),(5,6),(6,6)\}$.

Εἶναι προφανὲς ὅτι $R \subset R'$. Συνεπῶς $R \cap R'=R$ καὶ $R \cup R'=R'$.

2) $R_1=R$. 3) $R_2=R'$. 4), 5) Αἱ γραφικαὶ παραστάσεις καὶ τὰ διαγράμματα ὡς ἁπλᾶ παραλείπονται.

4-5. Ἔχομεν $E=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$.

1) $R=\{(1,3),(2,4),(3,5),(4,6),(5,7),(6,8)\}$.

$R'=E\times E-R$. $R \cap R'=\varnothing$.

2), 3) Τὰ διαγράμματα καὶ αἱ γραφικαὶ παραστάσεις ὡς ἁπλαῖ παραλείπονται.

4-6. Ἔχομεν $E=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

1) $R_1=\{(1,1),(2,4),(3,9)\}$.

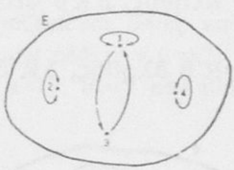
$R_2=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(1,7),(1,8),(1,9),(2,1),$ $(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(2,7),(2,8),(2,9),(3,1),(3,2),(3,3),$ $(3,4),(3,5),(3,6),(3,7)\}$.

$R=\{(1,1),(2,4)\}$. $R_1 \cap R_2=R$. $R_1 \cup R_2=R_2 \cup \{(3,9)\}$.

2), 3) Τὰ διαγράμματα καὶ αἱ γραφικαὶ παραστάσεις ὡς ἁπλαῖ παραλείπονται.

4-7. Βλέπε ἄσκησιν 4-4.

4-8. 1)

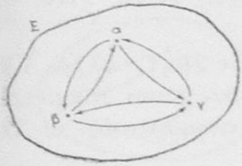


Διάγραμμα τῆς R.

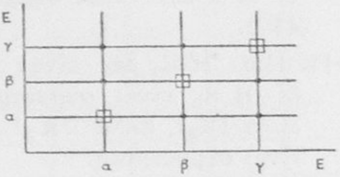
2) Ἡ σχέσις R δὲν εἶναι αὐτοπαθής, διότι $3 \in E$, ἀλλὰ $3 \not R 3$.

4-9. 1) Ἔχομεν: $R=\{(\alpha,\alpha),(\beta,\beta),(\gamma,\gamma)\}$. Ἡ R εἶναι, προφανῶς, αὐτοπαθής.

2) Ἔχομεν: $R'=\{(\alpha,\beta),(\alpha,\gamma),(\beta,\alpha),(\beta,\gamma),(\gamma,\alpha),(\gamma,\beta)\}$. Ἡ R' δὲν εἶναι αὐτοπαθής, διότι π.χ. $\alpha \in E$, ἀλλὰ $\alpha \not R' \alpha$.



Διάγραμμα τῆς R′



Γραφικὴ παράστασις τῆς R (⊡) καὶ τῆς R′ (•).

4-10. 1) Αὐτοπαθεῖς εἶναι μόνον αἱ R_3 καὶ R_4.

2), 3) Τὰ διαγράμματα καὶ αἱ γραφικαὶ παραστάσεις ὡς ἁπλαῖ παραλείπονται.

4-11. α) Ἐπειδὴ κάθε φυσικὸς ἀριθμὸς διαιρεῖ τὸν ἑαυτόν του, ἕπεται ὅτι ἡ R_1 εἶναι αὐτοπαθής.

β) Ἐπειδὴ π.χ. $7 \in \Phi$, ἀλλὰ $7 \not R_2 7$, διότι $7+7=14 \neq 10$, ἕπεται ὅτι ἡ R_2 δὲν εἶναι αὐτοπαθής.

γ) Ἐπειδὴ π.χ. $5 \in \Phi$, ἀλλὰ $5 \not R_3 5$, διότι ὁ μ.κ.δ. τῶν 5 καὶ 5 εἶναι ὁ 5 καὶ συνεπῶς δὲν εἶναι σχετικῶς πρῶτοι, ἕπεται ὅτι ἡ R_3 δὲν εἶναι αὐτοπαθής.

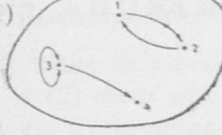
4-12. Ἐπειδὴ ἡ R εἶναι αὐτοπαθής, ἕπεται ὅτι εἰς τὸ σύνολον R περιέχονται ὅλα τὰ ζεύγη τῆς μορφῆς (x,x) διὰ κάθε $x \in E$. Συνεπῶς $\Delta \subseteqq R$.

Σημείωσις. Εἶναι προφανὲς ὅτι ἂν $\Delta \subseteqq R$, τότε ἡ R εἶναι αὐτοπαθής.

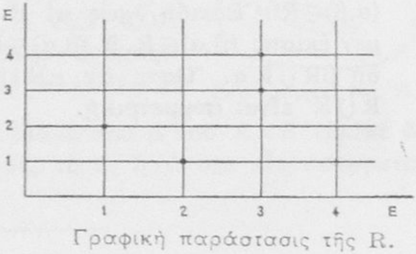
4-13. Ἐπειδὴ αἱ R καὶ R′ εἶναι αὐτοπαθεῖς, ἔχομεν: $\Delta \subseteqq R$ καὶ $\Delta \subseteqq R'$ (βλέπε προηγουμένην ἄσκησιν). Συνεπῶς (ἄσκ. 2 - 5): $\Delta \subseteqq R \cap R'$, ἤτοι ἡ $R \cap R'$ εἶναι αὐτοπαθής. Ἐξ ἄλλου (§ 2.9 ἄσκ. 3): $R \subseteqq R \cup R'$ καὶ ἐπειδὴ $\Delta \subseteqq R$, ἕπεται $\Delta \subseteqq R \cup R'$, ἤτοι καὶ ἡ $R \cup R'$ εἶναι αὐτοπαθής.

4-14.

1)



Διάγραμμα τῆς R.



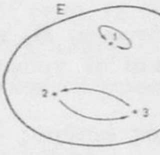
Γραφικὴ παράστασις τῆς R.

2) Ἡ R δὲν εἶναι συμμετρική, διότι $3 \in E$, $4 \in E$, $3R4$, ἀλλὰ $4 \not R 3$.

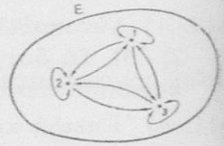
4-15. 1) α) Ἡ R_1 δὲν εἶναι συμμετρική, διότι $2R_11$, ἀλλὰ $1 \not R_1 2$. β) Ἡ R_2 εἶναι συμμετρική. γ) Ἡ R_3 δὲν εἶναι συμμετρική, διότι $1R_32$, ἀλλὰ $2 \not R_3 1$. δ) Ἡ R_4 εἶναι συμμετρική. ε) Ἡ R_5 εἶναι συμμετρική.

2)

Διάγραμμα τῆς R_2.



Διάγραμμα τῆς R_4.



Διάγραμμα τῆς R_5.

Αἱ γραφικαὶ παραστάσεις ὡς ἁπλαῖ παραλείπονται.

4-16. α) Ἐπειδὴ π.χ. ὁ 2 διαιρεῖ τὸν 6, δηλαδὴ $2R_16$, ἀλλὰ ὁ 6 δὲν διαιρεῖ τὸν 2, δηλαδὴ $6 \not R_1 2$, ἔπεται ὅτι ἡ R_1 δὲν εἶναι συμμετρική.

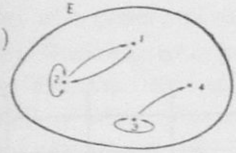
β) Ἐπειδή, ἂν $x+y=6$, τότε καὶ $y+x=6$, δηλαδὴ ἂν xR_2y, τότε καὶ yR_2x, ἔπεται ὅτι ἡ R_2 εἶναι συμμετρική.

γ) Ἐπειδὴ π.χ. $3R_39$, διότι $2.3+9=15$, ἀλλὰ $9 \not R_3 3$, διότι $2.9+3=21 \neq 15$, ἔπεται ὅτι ἡ R_3 δὲν εἶναι συμμετρική.

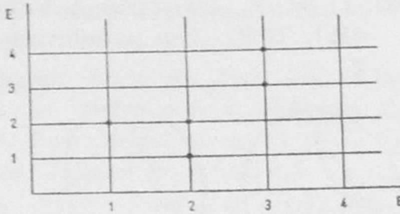
4-17. α) Ἔστω $\alpha R \cap R' \beta$, δηλαδὴ $(\alpha,\beta) \in R \cap R'$, τότε $(\alpha,\beta) \in R$ καὶ $(\alpha,\beta) \in R'$. Ἐπειδὴ ὅμως αἱ R καὶ R' εἶναι συμμετρικαί, ἔχομεν ἐπίσης: $(\beta,\alpha) \in R$ καὶ $(\beta,\alpha) \in R'$ καὶ ἄρα $(\beta,\alpha) \in R \cap R'$, δηλαδὴ $\beta R \cap R' \alpha$. Ὥστε, ἂν $\alpha R \cap R' \beta$, ἔπεται $\beta R \cap R' \alpha$, ἤτοι ἡ $R \cap R'$ εἶναι συμμετρική.

β) Ἔστω $\alpha R \cup R' \beta$, δηλαδὴ $(\alpha,\beta) \in R \cup R'$, τότε $(\alpha,\beta) \in R$ ἢ $(\alpha,\beta) \in R'$. Ἐπειδὴ ὅμως αἱ R καὶ R' εἶναι συμμετρικαί, ἔχομεν ἐπίσης $(\beta,\alpha) \in R$ ἢ $(\beta,\alpha) \in R'$ καὶ ἄρα $(\beta,\alpha) \in R \cup R'$, δηλαδὴ $\beta R \cup R' \alpha$. Ὥστε ἂν $\alpha R \cup R' \beta$, ἔπεται $\beta R \cup R' \alpha$, ἤτοι ἡ $R \cup R'$ εἶναι συμμετρική.

4-18.
1)



Διάγραμμα τῆς R



Γραφικὴ παράστασις τῆς R.

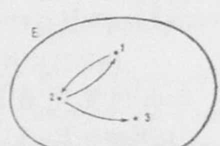
2) Ἡ R δὲν εἶναι ἀντισυμμετρική, διότι 1R2 καὶ 2R1, ἀλλὰ $1 \neq 2$.

4-19. 1) α) Ἡ R_1 δὲν εἶναι ἀντισυμμετρική, διότι $3R_12$ καὶ $2R_13$, ἀλλὰ $2 \neq 3$. β) Ἡ R_2 εἶναι ἀντισυμμετρική. γ) Ἡ R_3 εἶναι ἀντισυμμετρική. δ) Ἡ R_4 δὲν εἶναι ἀντισυμμετρική, διότι $2R_43$ καὶ $3R_42$, ἀλλὰ $2 \neq 3$. ε) Ἡ R_5 δὲν εἶναι ἀντισυμμετρική, διότι π.χ. $2R_53$ καὶ $3R_52$, ἀλλὰ $2 \neq 3$.

2) Τὰ διαγράμματα καὶ αἱ γραφικαὶ παραστάσεις ὡς ἁπλαῖ παραλείπονται.

4-20. α) Ἂν $\alpha \leqq \beta$ καὶ $\beta \leqq \alpha$, ἕπεται $\alpha = \beta$. Συνεπῶς ἡ R_1 εἶναι ἀντισυμμετρική. β) Ἐπειδὴ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχωμεν ταυτοχρόνως $\alpha < \beta$ καὶ $\beta < \alpha$, ἕπεται ὅτι ἡ R_2 εἶναι ἀντισυμμετρική. γ) Ἐκ τῆς $2x + y = 10$, ἕπεται $y = 10 - 2x$ καὶ ἐπειδὴ $y \in \Phi$, ἔχομεν $10 - 2x > 0$, ἤτοι $x < 5$ καὶ ἐπειδὴ $x \in \Phi$, αἱ δυναταὶ τιμαὶ τοῦ x εἶναι 1,2,3,4. Διὰ $x = 1$ εὑρίσκομεν $y = 8$, διὰ $x = 2$, $y = 6$, διὰ $x = 3$, $y = 4$ καὶ διὰ $x = 4$, $y = 2$. Συνεπῶς: $R_3 = \{(1,8), (2,6), (3,4), (4,2)\}$. Εἶναι προφανὲς τώρα (§ 4.3) ὅτι ἡ R_3 εἶναι ἀντισυμμετρική. δ) Ἐπειδή, ἂν α / β καὶ β / α ($\alpha \in \Phi$, $\beta \in \Phi$) τότε $\alpha = \beta$, ἕπεται ὅτι ἡ R_4 εἶναι ἀντισυμμετρική.

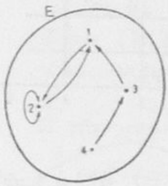
4-21. Ἔστω $E = \{1,2,3\}$.
Ἡ σχέσις $R = \{(1,2), (2,1), (2,3)\}$ εἰς τὸ E δὲν εἶναι συμμετρική, διότι 2R3, ἀλλὰ 3R2. Ἡ R ἐπίσης δὲν εἶναι ἀντισυμμετρική, διότι 1R2 καὶ 2R1, ἀλλὰ $1 \neq 2$.



Διάγραμμα τῆς R.

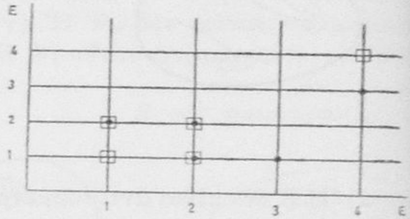
4-22. Κάθε ὑποσύνολον R τῆς διαγωνίου Δ τοῦ $E \times E$ (βλέπε ἄσκ. 4-12) εἶναι μία σχέσις R εἰς τὸ E, ἡ ὁποία εἶναι συμμετρικὴ καὶ ἀντισυμμετρική.

4-23. 1) Ἡ R_1 δὲν εἶναι μεταβατική, διότι $4R3$ καὶ $3R1$, ἀλλὰ $4\not{R}1$. Ἡ R_2 εἶναι μεταβατική.
2)



Διάγραμμα τῆς R_1.

Διάγραμμα τῆς R_2.



Γραφικὴ παράστασις τῆς R_1 (•) καὶ τῆς R_2 (⊡).

4-24. 1) Πλὴν τῆς R_2, αἱ ὑπόλοιποι σχέσεις εἶναι ὅλαι μεταβατικαί. Ἡ R_2 δὲν εἶναι μεταβατικὴ διότι $2R_21$ καὶ $1R_22$, ἀλλὰ $2\not{R}_22$. 2) Τὰ διαγράμματα καὶ αἱ γραφικαὶ παραστάσεις ὡς ἁπλαῖ παραλείπονται.

4-25. α) Ἡ R_1 εἶναι μεταβατική, διότι ἂν $\alpha \leqq \beta$ καὶ $\beta \leqq \gamma$, ἔπεται $\alpha = \gamma$. β) Ἡ R_2 εἶναι μεταβατική, διότι ἂν α/β καὶ β/γ, ἔπεται α/γ. γ) Ἡ R_3 δὲν εἶναι μεταβατική, διότι $3R_31$ καὶ $1R_32$, ἀλλὰ $3\not{R}_32$. Πράγματι: $3+2.1=5$ καὶ $1+2.2=5$, ἀλλὰ $3+2.2\neq 5$.

4-26. α) Ἔστω $\alpha R \cap R'\beta$ καὶ $\beta R \cap R'\gamma$, ἔνθα $\alpha \in E$, $\beta \in E$ καὶ $\gamma \in E$. Τότε $(\alpha,\beta) \in (R \cap R')$ καὶ $(\beta,\gamma) \in (R \cap R')$. Συνεπῶς: $(\alpha,\beta) \in R$ καὶ $(\alpha,\beta) \in R'$ καὶ $(\beta,\gamma) \in R$ καὶ $(\beta,\gamma) \in R'$. Ἐπειδὴ ἑκάστη τῶν R καὶ R' εἶναι μεταβατική, ἐκ τῶν $(\alpha,\beta) \in R$ καὶ $(\beta,\gamma) \in R$, ἔπεται $(\alpha,\gamma) \in R$. Ἐπίσης, ἐκ τῶν $(\alpha,\beta) \in R'$ καὶ $(\beta,\gamma) \in R'$, ἔπεται $(\alpha,\gamma) \in R'$. Ὥστε $(\alpha,\gamma) \in R$ καὶ $(\alpha,\gamma) \in R'$, ἄρα $(\alpha,\gamma) \in (R \cap R')$, δηλαδὴ $\alpha R \cap R'\beta$. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

$$(\alpha R \cap R'\beta \text{ καὶ } \beta R \cap R'\gamma) \Rightarrow (\alpha R \cap R'\gamma),$$

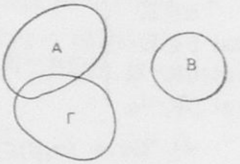
ἤτοι (§ 4.3), ἡ $R \cap R'$ εἶναι μεταβατική.

β) Ἔστω $E=\{1,2,3\}$. Ἑκάστη τῶν σχέσεων $R=\{(1,2)\}$ καὶ $R'=\{(2,3)\}$ εἶναι μεταβατικὴ εἰς τὸ E, ἀλλὰ ἡ $R \cup R'= =\{(1,2),(2,3)\}$ δὲν εἶναι μεταβατική, διότι $(1,2) \in R \cup R'$ καὶ $(2,3) \in R \cup R'$ ἀλλὰ $(1,3) \notin R \cup R'$.

4-27. 1) α) Μόνον ἡ R_5 εἶναι αὐτοπαθής. β) Αἱ R_4 καὶ R_5 εἶναι συμμετρικαί. γ) Μόνον ἡ R_5 δὲν εἶναι ἀντισυμμετρική. δ) Ὅλαι αἱ σχέσεις εἶναι μεταβατικαί.

4-28. α) Ἐπειδὴ $\alpha^2+\alpha=\alpha^2+\alpha$, ἕπεται ὅτι ἡ R εἶναι αὐτοπαθής. β) Ἐπειδή, ἂν $\alpha^2+\alpha=\beta^2+\beta \Rightarrow \beta^2+\beta=\alpha^2+\alpha$, δηλαδὴ ἐὰν $\alpha R\beta \Rightarrow \beta R\alpha$, ἕπεται ὅτι ἡ R εἶναι συμμετρική. γ) Ἂν $\alpha R\beta$, δηλαδὴ $\alpha^2+\alpha=\beta^2+\beta$ καὶ $\beta R\alpha$, δηλαδὴ $\beta^2+\beta=\alpha^2+\alpha$, ἔχομεν $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)=0 \Rightarrow (\alpha-\beta)(\alpha+\beta+1)=0$, ἐκ τῆς ὁποίας ὅμως δὲν ἕπεται ἀναγκαίως $\alpha=\beta$, διότι δυνατὸν νὰ εἶναι $\alpha+\beta+1=0$ π.χ. ὅταν $\alpha=-1$ καὶ $\beta=0$. Συμπεραίνομεν λοιπὸν ὅτι ἡ R δὲν εἶναι ἀντισυμμετρική.
δ) Ἂν $\alpha R\beta$, δηλαδὴ $\alpha^2+\alpha=\beta^2+\beta$ καὶ $\beta R\gamma$, δηλαδὴ $\beta^2+\beta=\gamma^2+\gamma$, ἕπεται $\alpha^2+\alpha=\gamma^2+\gamma$, δηλαδὴ $\alpha R\gamma$. Ὥστε ἡ R εἶναι μεταβατική.

4-29. α) Ἡ R δὲν εἶναι αὐτοπαθής, διότι ἂν $A\in P(E)$ μὲ $A\neq\varnothing$, ἔχομεν (§ 2.2, ἰδιότης γ) : $A\cap A=A\neq\varnothing$.
β) Ἡ R εἶναι συμμετρική, διότι ἂν $A\cap B=\varnothing$, τότε καὶ $B\cap A=\varnothing$.
γ) Ἡ R δὲν εἶναι ἀντισυμμετρική, διότι ἂν $A\cap B=\varnothing$ καὶ $B\cap A=\varnothing$ δὲν ἕπεται $A=B$.
δ) Ἡ R δὲν εἶναι μεταβατική, διότι ἂν $A\cap B=\varnothing$ καὶ $B\cap \Gamma=\varnothing$, δὲν ἕπεται ὅτι καὶ $A\cap\Gamma=\varnothing$ (βλέπε τὸ παραπλεύρως σχῆμα).



Σχῆμα ἀσκήσεως 4 29

4-30.

	A	Σ	AN	M
R_1	ναὶ	ναὶ	ὄχι	ναὶ
R_2	ὄχι	ὄχι	ναὶ	ὄχι
R_3	ὄχι	ὄχι	ναὶ	ὄχι
R_4	ὄχι	ὄχι	ναὶ	ναὶ

Σημειώσεις. i) Θεωροῦμεν ὅτι ἕκαστος ἄνθρωπος εἶναι ἀδελφὸς τοῦ ἑαυτοῦ του.
ii) Αἱ σχέσεις R_2, R_3, R_4 εἶναι $\boxed{AN}$, διότι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχωμεν ταυτοχρόνως π.χ. $\alpha R_2\beta$ καὶ $\beta R_2\alpha$.

4-31. Ἡ R δὲν εἶναι $\boxed{A}$, οὔτε $\boxed{\Sigma}$, εἶναι $\boxed{AN}$ διότι δὲν δύναται νὰ εἶναι ταυτοχρόνως ARB καὶ BRA, εἶναι $\boxed{M}$ διότι δὲν δύναται νὰ εἶναι ταυτοχρόνως ARB καὶ BRΓ.

4-32. $\boxed{\mathrm{A}}$ $\boxed{\Sigma}$ $\boxed{\mathrm{AN}}$ $\boxed{\mathrm{M}}$

	$\boxed{\mathrm{A}}$	$\boxed{\Sigma}$	$\boxed{\mathrm{AN}}$	$\boxed{\mathrm{M}}$
R_1	ὄχι	ναὶ	ὄχι	ὄχι
R_2	ὄχι	ναὶ	ὄχι	ὄχι
R_3	ὄχι	ναὶ	ὄχι	ὄχι
R_4	ναὶ	ναὶ	ὄχι	ναὶ

4-33. R_1: Εἶναι $\boxed{\mathrm{A}}$ καὶ $\boxed{\Sigma}$, δὲν εἶναι $\boxed{\mathrm{AN}}$ καὶ $\boxed{\mathrm{M}}$.
R_2: Ἰδὲ ἄσκ. 4-29
R_3: Ἰδὲ ἄσκ. 4-32 (σχέσις R_4).

4-34. 1) Ἐπειδὴ ἡ R εἶναι $\boxed{\mathrm{A}}$, ἔχομεν: $\forall \alpha, \alpha \in E : \alpha R \alpha$. Ἀλλὰ $\alpha R \alpha \Leftrightarrow \alpha R^{-1} \alpha$. Συνεπῶς: $\forall \alpha, \alpha \in E : \alpha R^{-1} \alpha$, ἤτοι ἡ R^{-1} εἶναι $\boxed{\mathrm{A}}$.

2) Θὰ δείξωμεν ὅτι:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \in E \\ \text{καὶ } \beta \in E \\ \text{καὶ } \alpha R^{-1} \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \beta R^{-1} \alpha \quad \left|\begin{array}{l} \text{Ἔχομεν:} \\ \alpha R^{-1} \beta \Rightarrow \beta R \alpha \Rightarrow (\text{ἐπειδὴ ἡ } R \text{ εἶναι } \boxed{\Sigma}) \\ \qquad \Rightarrow \alpha R \beta \Rightarrow \beta R^{-1} \alpha. \end{array}\right.$$

3) Θὰ δείξωμεν ὅτι:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \in E \\ \text{καὶ } \beta \in E \\ \text{καὶ } \alpha R^{-1} \beta \\ \text{καὶ } \beta R^{-1} \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = \beta. \quad \left|\begin{array}{l} \text{Ἔχομεν:} \\ \left.\begin{array}{c} \alpha R^{-1} \beta \\ \text{καὶ} \\ \beta R^{-1} \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} \beta R \alpha \\ \text{καὶ} \\ \alpha R \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} \alpha R \beta \\ \text{καὶ} \\ \beta R \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} \text{ἐπειδὴ ἡ } R \\ \text{εἶναι } \boxed{\mathrm{AN}} \end{array}\right) \Rightarrow \alpha = \beta \end{array}\right.$$

4) Ἔστω $(\alpha, \beta) \in (R^{-1})^{-1}$ ἔνθα $\alpha \in E$ καὶ $\beta \in E$. Ἔχομεν:
$(\alpha, \beta) \in (R^{-1})^{-1} \Leftrightarrow \alpha (R^{-1})^{-1} \beta \Leftrightarrow \beta R^{-1} \alpha \Leftrightarrow \alpha R \beta \Leftrightarrow (\alpha, \beta) \in R$.
Ὥστε:

$$(\alpha, \beta) \in (R^{-1})^{-1} \Leftrightarrow (\alpha, \beta) \in R,$$

ἤτοι $(R^{-1})^{-1} = R$.

4-35. α) Ἔστω ὅτι ἡ R εἶναι $\boxed{\Sigma}$ εἰς τὸ E καὶ ὅτι $(\alpha, \beta) \in R$, ἔνθα $\alpha \in E$ καὶ $\beta \in E$. Ἔχομεν:
$(\alpha, \beta) \in R \Leftrightarrow \alpha R \beta \Leftrightarrow$ (ἐπειδὴ ἡ R εἶναι $\boxed{\Sigma}$) $\Leftrightarrow \beta R \alpha \Leftrightarrow \alpha R^{-1} \beta \Leftrightarrow (\alpha, \beta) \in R^{-1}$.
Ὥστε: $(\alpha, \beta) \in R \Leftrightarrow (\alpha, \beta) \in R^{-1}$, ἤτοι $R = R^{-1}$.

β) Ἔστω ὅτι εἶναι $R = R^{-1}$. Τότε ἂν $\alpha R \beta$, ἔπεται $\alpha R^{-1} \beta$, ἤτοι $\beta R \alpha$. Ὥστε, ἐκ τῆς $\alpha R \beta$, ἔπεται $\beta R \alpha$. Συνεπῶς ἡ R εἶναι συμμετρική.

4-36. α) Ἔστω ὅτι ἡ R εἶναι $\boxed{\mathrm{AN}}$ εἰς τὸ E. Τότε, ἂν $(\alpha, \beta) \in (R \cap R^{-1})$, ἔνθα $\alpha \in E$, $\beta \in E$, ἔπεται $[(\alpha, \beta) \in R$ καὶ $(\alpha, \beta) \in R^{-1}]$, δηλαδὴ

[$\alpha R \beta$ καὶ $\alpha R^{-1}\beta$], ἤτοι [$\alpha R\beta$ καὶ $\beta R\alpha$] καὶ ἐπειδὴ ἡ R εἶναι $\boxed{AN}$ ἔχομεν $\alpha=\beta$ καὶ συνεπῶς $(\alpha,\beta)\in\Delta$, ἤτοι $R\cap R^{-1}\subseteqq\Delta$.

β) Ἔστω ὅτι εἶναι $R\cap R^{-1}\subseteqq\Delta$. Θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ R εἶναι $\boxed{AN}$ εἰς τὸ E, δηλαδὴ ὅτι:

$$\left.\begin{array}{r} \alpha\in\beta \\ \text{καὶ } \beta\in E \\ \text{καὶ } \alpha R\beta \\ \text{καὶ } \beta R\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha=\beta.$$

Ἔχομεν:
$(\alpha R\beta$ καὶ $\beta R\alpha) \Rightarrow (\alpha R\beta$ καὶ $\alpha R^{-1}\beta) \Rightarrow$
$[(\alpha,\beta)\in R$ καὶ $(\alpha,\beta)\in R^{-1}] \Rightarrow (\alpha,\beta)\in(R\cap R^{-1})$.
Ἐπειδὴ ὅμως $R\cap R^{-1}\subseteqq\Delta$ καὶ $(\alpha,\beta)\in(R\cap R^{-1})$,

ἕπεται $(\alpha,\beta)\in\Delta$, δηλαδὴ $\alpha=\beta$.

4-37. Ἡ R εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας (§ 4.4), διότι εἶναι:

$\boxed{A}$ $(\forall\alpha,\alpha\in A_\kappa)$: $\alpha R\alpha$.

Πρὰγματι, διότι $\alpha-\alpha=0=0.2=$ πολ. 2.

$\boxed{\Sigma}$ $(\alpha\in A_\kappa,\ \beta\in A_\kappa)$: $\alpha R\beta\Rightarrow\beta R\alpha$.

Πράγματι, διότι, ἐὰν $\alpha-\beta=$ πολ. 2, τότε καὶ $\beta-\alpha=$ πολ. 2.

$\boxed{M}$ $(\alpha\in A_\kappa,\ \beta\in A_\kappa,\ \gamma\in A_\kappa)$: $(\alpha R\beta$ καὶ $\beta R\gamma)\Rightarrow(\alpha R\gamma)$.

Πράγματι, διότι, ἐὰν $\alpha-\beta=$ πολ. 2 καὶ $\beta-\gamma=$ πολ. 2, τότε καὶ $\alpha-\gamma=$ πολ. 2.

Αἱ κλάσεις ἰσοδυναμίας εἶναι:

$\overline{0}=\{0,2,4,6,\dots,-2,-4,-6,\dots\}$.

$\overline{1}=\{1,3,5,7,\dots,-1,-3,-5,\dots\}$.

4-38. Ἔχομεν:

$\alpha R\beta\Leftrightarrow(\alpha-\beta$ διαιρεῖται διὰ $5)\Leftrightarrow(\alpha-\beta=$ πολ. $5)$.

Ἀποδεικνύομεν, ὅπως ἀκριβῶς καὶ εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν ὅτι ἡ R εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας (βλέπε καὶ § 4.5 παράδειγμα).

Αἱ κλάσεις ἰσοδυναμίας εἶναι:

$\overline{0}=\{0,5,10,\dots,-5,-10,\dots\}$. $\overline{1}=\{1,6,11,\dots,-4,-9,\dots\}$.

$\overline{2}=\{2,7,12,\dots,-3,-8,\dots\}$. $\overline{3}=\{3,8,13,\dots,-2,-7,\dots\}$.

$\overline{4}=\{4,9,14,\dots,-1,-6,\dots\}$.

Τὸ σύνολον — πηλίκον εἶναι $A_\kappa/R=\{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4}\}$.

4-39. Ἡ R εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας (§ 4.4), διότι εἶναι:

$\boxed{\text{Α}}$ $[\forall(\alpha,\beta),\ (\alpha,\beta)\in\Phi^2] : (\alpha,\beta)R(\alpha,\beta)$.

Πράγματι, διότι: $\alpha\beta=\beta\alpha$.

$\boxed{\Sigma}$ $[(\alpha,\beta)\in\Phi^2,\ (\alpha',\beta')\in\Phi^2] : (\alpha,\beta)R(\alpha',\beta') \Rightarrow (\alpha',\beta')R(\alpha,\beta)$.

Πράγματι, διότι, ἐὰν $\alpha\beta'=\beta\alpha'$, τότε $\alpha'\beta=\beta'\alpha$.

$\boxed{\text{Μ}}$ $[(\alpha,\beta)\in\Phi^2,\ (\alpha',\beta')\in\Phi^2,\ (\alpha'',\beta'')\in\Phi^2]$:

$[(\alpha,\beta)R(\alpha',\beta')$ καὶ $(\alpha',\beta')R(\alpha'',\beta'')] \Rightarrow (\alpha,\beta)R(\alpha'',\beta'')$.

Πράγματι, διότι, ἐὰν ($\alpha\beta'=\beta\alpha'$ καὶ $\alpha'\beta''=\beta'\alpha''$) τότε, διὰ πολλαπλασιασμοῦ αὐτῶν κατὰ μέλη, ἕπεται $\alpha\beta'\alpha'\beta''=\beta\alpha'\beta'\alpha''$, ἤτοι $\alpha\beta''=\beta\alpha''$.

Ἐὰν (x,y), ἔνθα $(x,y)\in\Phi^2$, εἶναι στοιχεῖον τῆς κλάσεως τοῦ στοιχείου $(1,2)$, ἔχομεν (§ 4.5): $(x,y)R(1,2)$, δηλαδὴ $x.2=y.1$ καὶ συνεπῶς $\frac{x}{y}=\frac{1}{2}$. Ἐπειδὴ ὅμως τὸ κλάσμα $\frac{1}{2}$ εἶναι ἀνάγωγον, ἕπεται:

$$(x=1.\rho \text{ καὶ } y=2.\rho, \text{ ἔνθα } \rho\in\Phi).$$

Διὰ $\rho=1,2,3,..$ ἔχομεν τὰ στοιχεῖα $(1,2)$, $(2,4)$, $(3,6)$,... τὰ ὁποῖα εἶναι τῆς κλάσεως τοῦ $(1,2)$.

4-40. Ἡ R εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας (§ 4.4), διότι εἶναι:

$\boxed{\text{Α}}$ $[\forall(\alpha,\beta),\ (\alpha,\beta)\in\Phi_0^2] : (\alpha,\beta)R(\alpha,\beta)$.

Πράγματι, διότι: $\alpha+\beta=\beta+\alpha$.

$\boxed{\Sigma}$ $[(\alpha,\beta)\in\Phi_0^2,\ (\alpha',\beta')\in\Phi_0^2] : (\alpha,\beta)R(\alpha',\beta') \Rightarrow (\alpha',\beta')R(\alpha,\beta)$.

Πράγματι, διότι, ἐὰν $\alpha+\beta'=\beta+\alpha'$, τότε καὶ $\alpha'+\beta=\beta'+\alpha$.

$\boxed{\text{Μ}}$ $[(\alpha,\beta)\in\Phi_0^2,\ (\alpha',\beta')\in\Phi_0^2,\ (\alpha'',\beta'')\in\Phi_0^2]$:

$[(\alpha,\beta)R(\alpha'\beta')$ καὶ $(\alpha',\beta')R(\alpha'',\beta'')] \Rightarrow (\alpha,\beta)R(\alpha'',\beta'')$.

Πράγματι, διότι, ἐὰν ($\alpha+\beta'=\beta+\alpha'$ καὶ $\alpha'+\beta''=\beta'+\alpha''$), τότε, διὰ προσθέσεως αὐτῶν κατὰ μέλη, ἕπεται:

$\alpha+\beta'+\alpha'+\beta''=\beta+\alpha'+\beta'+\alpha''$, ἤτοι $\alpha+\beta''=\beta+\alpha''$.

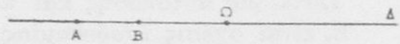
Ἐὰν (x,y), ἔνθα $(x,y)\in\Phi_0^2$, εἶναι στοιχεῖον τῆς κλάσεως τοῦ στοιχείου $(2,1)$, ἔχομεν (§ 4.5):

$(x,y)R(2,1)$ δηλαδὴ $x+1=y+2$ καὶ συνεπῶς $y=x-1$.

Διὰ $x=1,2,3,...$ ἔχομεν τὰ στοιχεῖα $(1,0)$, $(2,1)$, $(3,2)$... τὰ ὁποῖα εἶναι τῆς κλάσεως τοῦ $(2,1)$.

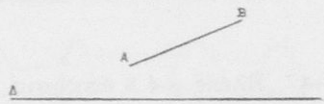
Κ. Κύρου

4-41. Ἡ R εἶναι αὐτοπαθής :
$\forall A,\ A\in\Sigma : ARA.$
Πράγματι, διότι $AA\cap\Omega=\varnothing$.
Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι συμμετρικὴ καὶ μεταβατική. Εἶναι λοιπὸν σχέσις ἰσοδυναμίας. Ὑπάρχουν δύο κλάσεις ἰσοδυναμίας. Αἱ δύο ἡμιευθεῖαι εἰς τὰς ὁποίας χωρίζεται ἡ Δ ὑπὸ τοῦ σημείου Ω.



Σχῆμα ἀσκ. 4 41.

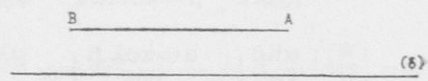
4-42. Ἀποδεικνύομεν εὐκόλως ὅτι ἡ R εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας. Ὑπάρχουν δύο κλάσεις ἰσοδυναμίας. Τὰ δύο ἡμιεπίπεδα εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζεται τὸ Ε ὑπὸ τῆς Δ.



Σχῆμα ἀσκ. 4·42.

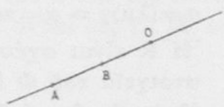
4-43. Ἡ R εἶναι ἡ σχέσις παραλληλίας (ὑπὸ τὴν εὐρεῖαν ἔννοιαν) μεταξὺ τῶν εὐθειῶν τοῦ ἐπιπέδου Ε, ἡ ὁποία (§ 4.4 παράδειγμα 2ον) εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας.
Αἱ κλάσεις ἰσοδυναμίας εἶναι αἱ διευθύνσεις, λαμβανόμεναι ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Ε.

4-44. Ἀποδεικνύομεν εὐκόλως ὅτι ἡ R εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας (§ 4.4). Αἱ κλάσεις ἰσοδυναμίας εἶναι αἱ εὐθεῖαι τοῦ Ε αἱ παράλληλοι πρὸς τὴν (δ).



Σχῆμα ἀσκ. 4 44.

4-45. Ἀποδεικνύομεν εὐκόλως ὅτι ἡ R εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας (§ 4.4). Αἱ κλάσεις ἰσοδυναμίας εἶναι αἱ εὐθεῖαι τοῦ Ε αἱ ὁποῖαι διέρχονται διὰ τοῦ σημείου Ο.



Σχῆμα ἀσκ. 4 45.

4-46. i) $\boxed{A}$: Εἶναι ἐξ ὑποθέσεως.

$\boxed{\Sigma}$: $$\left.\begin{array}{l} \alpha\in E\\ \text{καὶ } \beta\in E\\ \text{καὶ } \alpha R\beta \end{array}\right\} \Rightarrow \beta R\alpha.$$

Πράγματι. Ἐὰν αRβ, τότε ἐπειδὴ ἡ R εἶναι $\boxed{A}$, ἔχομεν βRβ. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι κυκλική, ἔχομεν :
$$(\alpha R\beta \text{ καὶ } \beta R\beta)\Rightarrow\beta R\alpha.$$

$\boxed{M}$: $$\left.\begin{array}{l} \alpha\in E\\ \text{καὶ } \beta\in E\\ \text{καὶ } \gamma\in E\\ \text{καὶ } \alpha R\beta\\ \text{καὶ } \beta R\gamma \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha R\gamma.$$

Πράγματι. Ἔχομεν :
(αRβ καὶ βRγ) ⇒ (ἐπειδὴ R κυκλικὴ) ⇒ γRα ⇒ (ἐπειδὴ R $\boxed{\Sigma}$) ⇒ αRγ.

Ὥστε, μία αὐτοπαθὴς καὶ κυκλικὴ σχέσις R εἰς ἕνα σύνολον E, εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας.

ii) Ἔστω ὅτι ἡ R εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας εἰς τὸ E, ἤτοι $\boxed{\mathrm{A}}$, $\boxed{\Sigma}$ καὶ $\boxed{\mathrm{M}}$. Ἂν $\alpha \in E$, $\beta \in E$ καὶ $\gamma \in E$, ἔχομεν :

$(\alpha R \beta$ καὶ $\beta R \gamma) \Rightarrow$ (ἐπειδὴ R $\boxed{\mathrm{M}}$) $\Rightarrow \alpha R \gamma \Rightarrow$ (ἐπειδὴ R $\boxed{\Sigma}$) $\Rightarrow \gamma R \alpha$.

Ὥστε : $(\alpha R \beta$ καὶ $\beta R \gamma) \Rightarrow \gamma R \alpha$, ἤτοι εἶναι κυκλική. Τὸ ἀντίστροφον λοιπὸν εἶναι ἀληθές.

4-47. Βλέπε § 4.8 ἄσκησις 10.

4-48. Εἶναι προφανὲς ὅτι, ἐὰν $\alpha =$ πολ. β, ἔνθα $\alpha \in \Phi$ καὶ $\beta \in \Phi$, τότε $\beta \leqq \alpha$.

Ἡ R εἶναι σχέσις διατάξεως, διότι εἶναι :

$\boxed{\mathrm{A}}$: $\forall \alpha, \alpha \in \Phi : \alpha = 1.\alpha =$ πολ. $\alpha \Rightarrow \alpha R \alpha$.

$$\boxed{\mathrm{AN}} : \left.\begin{array}{c} \alpha R \beta \\ \text{καὶ} \\ \beta R \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} \alpha = \text{πολ.}\beta \\ \text{καὶ} \\ \beta = \text{πολ.}\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} \beta \leqq \alpha \\ \text{καὶ} \\ \alpha \leqq \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = \beta.$$

$$\boxed{\mathrm{M}} : \left.\begin{array}{c} \alpha R \beta \\ \text{καὶ} \\ \beta R \gamma \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} \alpha = \text{πολ.}\beta \\ \text{καὶ} \\ \beta = \text{πολ.}\gamma \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} \exists \lambda, \lambda \in \Phi : \alpha = \lambda.\beta \\ \text{καὶ} \\ \exists \mu, \mu \in \Phi : \beta = \mu.\gamma \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = \lambda(\mu\gamma) \Rightarrow$$

$\alpha = (\lambda\mu)\gamma \Rightarrow \alpha =$ πολ. $\gamma \Rightarrow \alpha R \gamma$.

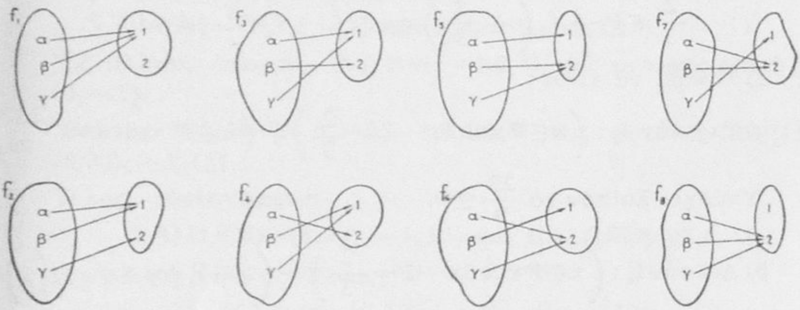
Ἡ R εἶναι σχέσις μερικῆς διατάξεως εἰς τὸ Φ, διότι ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ Φ δὲν εἶναι ἀνὰ δύο συγκρίσιμα διὰ τῆς R. Π.χ. ($3 \neq$ πολ. 5 καὶ $5 \neq$ πολ. 3) $\Rightarrow$ ($3 \not R 5$ καὶ $5 \not R 3$).

4-49. Ἡ R εἶναι, προφανῶς, σχέσις διατάξεως (§ 4.6). Ἡ διάταξις τοῦ E, διὰ τῆς R, εἶναι μερική, διότι ἂν π.χ. τὸ δένδρον α κεῖται βορείως τοῦ δένδρου β, τότε : $\alpha R \beta$ καὶ $\beta \not R \alpha$.

4-50. Ἡ R εἶναι, προφανῶς, σχέσις μερικῆς διατάξεως.

5 ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ

5-1. Δίδομεν κατωτέρω τὰ ζητούμενα διαγράμματα. Εἰς ἑκάστην τοιαύτην ἀπεικόνισιν, ἕκαστον στοιχεῖον τοῦ Α ἀπεικονίζεται εἰς τὸ 1 ἢ εἰς τὸ 2, ἀλλὰ οὐχὶ εἰς ἀμφότερα.



Σημειώσατε ὅτι ὑπάρχουν ὀκτὼ μονοσήμαντοι ἀπεικονίσεις τοῦ Α εἰς τὸ Β.

5-2. α) Διότι οἱ ἀριθμοὶ $0 \in \Pi$ καὶ $2 \in \Pi$ (τιμαὶ τοῦ x διὰ τὰς ὁποίας μηδενίζεται ὁ παρανομαστὴς) δὲν ἀπεικονίζονται εἰς τὸ Π, ὑπὸ τοῦ ἐν λόγῳ τύπου.

β) Τὸ εὐρύτερον σύνολον Β εἶναι.

$B = \{x / x \in \Pi$ μὲ $x^2 - 2x \neq 0\} = \{x / x \in \Pi$ μὲ $(x \neq 0$ καὶ $x \neq 2)\} = \Pi - \{0,2\}$.

5-3. α) Διότι $x + 2 \neq 0 \quad \forall x,\ x \in \Pi^+$.

β) Διότι ὁ ἀριθμὸς $-2 \in A_\kappa$ (τιμὴ τοῦ x διὰ τὴν ὁποίαν μηδενίζεται ὁ παρανομαστὴς) δὲν ἀπεικονίζεται εἰς τὸ Π, ὑπὸ τοῦ ἐν λόγῳ τύπου.

5-4. 1) $f_1 : 0{,}08 \in P \rightarrow f_1(0{,}08) = 3.0{,}08 - 7 = -6{,}76 \in P$.

$f_2 : 0{,}08 \in P \rightarrow f_2(0{,}08) = 5.0{,}08 + 2 = 2{,}40 \in P$.

$f_3 : 0{,}08 \in P \rightarrow f_3(0{,}08) = 3.0{,}08 + 3 = 3{,}24 \in P$.

$f_4 : 0{,}08 \in P \rightarrow f_4(0{,}08) = 3.0{,}08 + 2 = 2{,}24 \in P$.

Ὥστε: $A \subseteq B \Rightarrow f(A) \subseteq f(B)$.

2) Ἔστω ἡ μονοσήμαντος ἀπεικόνισις.

$$x \in E \rightarrow f(x) = |x| \in \Delta,$$

ἔνθα $E = \{-1,0,1,2,3\}$ καὶ $\Delta = \Pi$.

Ἔστω, ἐπίσης $A = \{-1,0,1\}$ καὶ $B = \{0,1,2\}$. Προφανῶς δὲν εἶναι $A \subseteq B$.

Ἔχομεν: $f(-1) = 1$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 2$ καὶ συνεπῶς: $f(A) = \{0,1\}$ καὶ $f(B) = \{0,1,2\}$. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι $f(A) \subseteq f(B)$, ἀλλὰ δὲν εἶναι $A \subseteq B$.

5-8. 1) Πολλοὶ ἄνθρωποι εἰς τὸν κόσμον ἔχουν τὴν ἰδίαν ἡλικίαν. Ὥστε ἡ f_1 δὲν εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος.

2) Ἂν καὶ εἶναι δυνατὸν δύο χῶραι νὰ ἔχουν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν κατοίκων, αἱ στατιστικαὶ ἀποδεικνύουν ὅτι τοῦτο δὲν συμβαίνει. Ὥστε ἡ f_2 εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος.

3) Ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν βιβλιοθήκην ἐπὶ τῆς ὁποίας ὁρίζεται ἡ f_3.

4) Ἡ f_4 εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος.

5-9. Ἂν $x_1 \in \Phi$ καὶ $x_2 \in \Phi$, ἔχομεν:

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow 2x_1 = 2x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

Ὥστε:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Ἡ ἀπεικόνισις λοιπὸν f εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος (§ 5.3).

Ἐπειδὴ οἱ περιττοὶ ἀριθμοὶ δὲν παρουσιάζονται ὡς εἰκόνες, ἕπεται ὅτι ἡ f εἶναι ἐν.

5-10. Ἂν $x_1 \in \Pi^+$ καὶ $x_2 \in \Pi^+$, ἔχομεν:

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{3x_1}{x_1+1} = \frac{3x_2}{x_2+1} \Leftrightarrow x_1x_2 + x_1 = x_1x_2 + x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

Ὥστε:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Ἡ ἀπεικόνισις λοιπὸν f εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος (§ 5.3).

Ἂς εἴδωμεν τώρα, ἂν π.χ. ὁ $6 \in \Pi^+$ παρουσιάζεται ὡς εἰκόνα. Θὰ ἔπρεπε νὰ εἴχωμεν:

$$\frac{3x}{x+1} = 6 \Leftrightarrow 3x = 6x + 6 \Leftrightarrow -3x = 6 \Leftrightarrow x = -2.$$

Ἐπειδὴ ὅμως $x \in \Pi^+$, ὁ x δὲν δύναται νὰ λάβῃ τὴν τιμὴν -2. Ὁ $6 \in \Pi^+$ π.χ. δὲν ἐμφανίζεται ὡς εἰκόνα καὶ συνεπῶς ἡ f εἶναι ἐν.

5-11. Ἂν $x_1 \in \Pi$ καὶ $x_2 \in \Pi$, ἔχομεν :

$$f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow \frac{\sqrt[3]{1+x_1}-\sqrt[3]{1-x_1}}{\sqrt[3]{1+x_1}+\sqrt[3]{1-x_1}} = \frac{\sqrt[3]{1+x_2}-\sqrt[3]{1-x_2}}{\sqrt[3]{1+x_2}+\sqrt[3]{1-x_2}} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt[3]{1+x_1}\cdot\sqrt[3]{1+x_2}+\sqrt[3]{1+x_1}\cdot\sqrt[3]{1-x_2}-\sqrt[3]{1-x_1}\cdot\sqrt[3]{1+x_2}-\sqrt[3]{1-x_1}\cdot\sqrt[3]{1-x_2}$$

$$=\sqrt[3]{1+x_2}\cdot\sqrt[3]{1+x_1}+\sqrt[3]{1+x_2}\cdot\sqrt[3]{1-x_1}-\sqrt[3]{1-x_2}\cdot\sqrt[3]{1+x_1}-\sqrt[3]{1-x_2}\cdot\sqrt[3]{1-x_1}$$

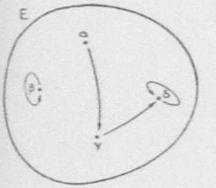
$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{1+x_1}\cdot\sqrt[3]{1-x_2}=\sqrt[3]{1+x_2}\cdot\sqrt[3]{1-x_1} \Leftrightarrow (1+x_1)(1-x_2)=(1+x_2)(1-x_1)$$

$$\Leftrightarrow 1-x_2+x_1-x_1x_2 = 1-x_1+x_2-x_2x_1 \Leftrightarrow 2x_1 = 2x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

Ὥστε : $f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow x_1=x_2$.

Ἡ ἀπεικόνισις λοιπὸν f εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος (§ 5.3).

5-12. 1) Διάγραμμα τῆς f :



2) Τὸ πεδίον τιμῶν τῆς f εἶναι :

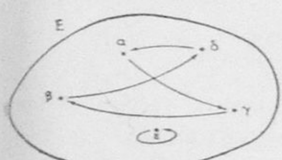
$$f(E)=\{\beta,\gamma,\delta\}.$$

3) Ἡ f εἶναι μία μονοσήμαντος ἀπεικόνισις τοῦ E εἰς τὸ E.

4) Ἡ f δὲν εἶναι ἕνας μετασχηματισμὸς τοῦ E (§ 5.5).

5-13. 1) Πεδίον ὁρισμοῦ **E**$=\{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\}$. Πεδίον τιμῶν $f(E)=\{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\}$.

2) Διάγραμμα τῆς f:



3) Ἡ f εἶναι μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις τοῦ E ἐπὶ τοῦ E. Εἶναι δηλαδὴ (§ 5.5) ἕνας μετασχηματισμὸς τοῦ συνόλου E.

5-14. Διὰ $x>0$, ἔχομεν $|x|=x$ καὶ συνεπῶς $f(x)=\dfrac{x}{x}=1$.

Διὰ $x<0$, ἔχομεν $|x| = -x$ καὶ συνεπῶς $f(x) = \frac{-x}{x} = -1$.

Ὅθεν, ἡ f δύναται νὰ γραφῇ :

$$f : x \in \Pi^* \to f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ἂν } x>0 \\ -1 & \text{ἂν } x<0. \end{cases}$$

Ἡ f εἶναι μία μονοσήμαντος ἐν ἀπεικόνισις τοῦ Π^* εἰς τὸ Π. Ἔχομεν, προφανῶς : $f(\Pi^*) = \{1, -1\}$.

5-15. Ἂν $x_1 \in \Phi$ καὶ $x_2 \in \Phi$, ἔχομεν :

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1^2 = x_2^2 \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

Ὥστε, ἡ f εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος. Ἐπειδὴ π.χ. ὁ $7 \in \Phi$ δὲν παρουσιάζεται ὡς εἰκόνα, διότι δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον, ἕπεται ὅτι ἡ f εἶναι ἐν.

5-16. 1) Πεδίον τιμῶν τῆς f : $f(E) = \{2, 3, 4, 5\}$.

2) Ἡ f δὲν εἶναι ἕνας μετασχηματισμὸς τοῦ συνόλου E (§ 5.5).

5-17. Ἂν $A_1 \in P(E)$ καὶ $A_2 \in P(E)$, ἔχομεν :

$$f(A_1) = f(A_2) \Leftrightarrow \underset{E}{C} A_1 = \underset{E}{C} A_2 \Leftrightarrow A_1 = A_2.$$

Ὥστε ἡ f εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος. Ἐπειδή, ἐξ ἄλλου, ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ P(E) ἐμφανίζονται ὡς εἰκόνες, ἕπεται ὅτι εἶναι καὶ ἐπί. Συνεπῶς, ἡ f εἶναι μία ἀμφιμονοσήμαντος καὶ ἐπὶ ἀπεικόνισις τοῦ συνόλου P(E) εἰς τὸν ἑαυτόν του, ἤτοι εἶναι ἕνας μετασχηματισμὸς τοῦ P(E) (§ 5.5).

5-18. Ἂν εἰς ἕκαστον στοιχεῖον (α, β) τοῦ $A \times B$ ἀντιστοιχήσωμεν τὸ στοιχεῖον (β, α) τοῦ $B \times A$, τότε ὁρίζομεν μίαν ἀμφιμονοσήμαντον καὶ ἐπὶ ἀπεικόνισιν τοῦ συνόλου $A \times B$ ἐπὶ τὸ σύνολον $B \times A$. Ὥστε (§ 5.4) : $A \times B \sim B \times A$.

5-19. Ἂν εἰς ἕκαστον ἀκέραιον θετικὸν ἀριθμὸν ἀντιστοιχήσωμεν τὸν ἀντίθετόν του, τότε ὁρίζομεν μίαν ἀμφιμονοσήμαντον καὶ ἐπὶ ἀπεικόνισιν τοῦ συνόλου A_κ^+ ἐπὶ τὸ σύνολον A_κ^-. Ὥστε (§ 5.4) : $A_\kappa^+ \sim A_\kappa^-$.

5-20. Δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν μίαν ἀμφιμονοσήμαντον καὶ ἐπὶ ἀπεικόνισιν f τοῦ συνόλου Φ εἰς τὸ σύνολον A_κ, ὡς ἑξῆς :

$$\begin{array}{cccccccccc} \Phi: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \cdots \\ A_\kappa: & 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & \end{array}$$

Ὥστε : $\Phi \sim A_\kappa$.

Σημείωσις. Ἡ ἀνωτέρω ἀπεικόνισις δύναται νὰ ὁρισθῆ ὑπὸ τοῦ ἑξῆς τύπου :

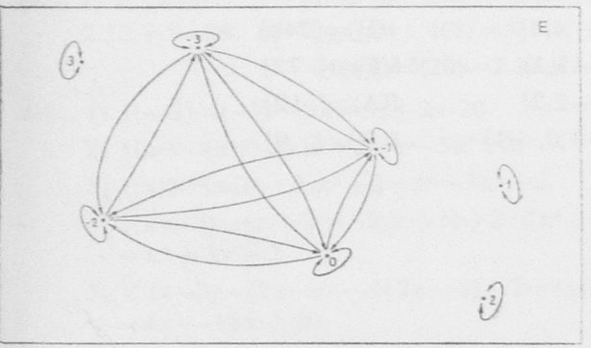
$$f : x \in \Phi \to f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x}{2} \in A_\kappa & \text{ἂν } x \text{ περιττὸς} \\ \dfrac{x}{2} \in A_\kappa & \text{ἂν } x \text{ ἄρτιος} \end{cases}$$

6-21. Ἐν πρώτοις, εὑρίσκομεν τὰς εἰκόνας τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου Ε. Ἔχομεν :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	$\frac{3+(-3)}{2}=0$	$\frac{2+(-2)}{2}=0$	$\frac{1+(-1)}{2}=0$	$\frac{0+0}{2}=0$	$\frac{1+1}{2}-1$	$\frac{2+2}{2}=2$	$\frac{3+3}{2}=3$

1) $R=\{(-3,-3), (-3,-2), (-3,-1), (-3,0), (-2,-3), (-2,-2), (-2,-1), (-2,0), (-1,-3), (-1,-2), (-1,-1), (-1,0), (0,-3), (0,-2), (0,-1), (0,0), (1,1), (2,2), (3,3)\}$.

2) Διάγραμμα τῆς R :



3) Διαπιστοῦμεν εὐκόλως, ἐκ τοῦ συνόλου R, ὅτι ἡ σχέσις R εἶναι [A], [Σ] καὶ [M], ἤτοι εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας (§ 4.4).

4) Αἱ κλάσεις ἰσοδυναμίας εἶναι :

$A=\{-3,-2,-1,0\}$ $\qquad f(A)=\{0\}$

$B=\{1\}$ $\qquad f(B)=\{1\}$

$\Gamma=\{2\}$ $\qquad f(\Gamma)=\{2\}$

$\Delta=\{3\}$ $\qquad f(\Delta)=\{3\}$.

Τὸ σύνολον—πηλίκον εἶναι $E/R=\{A,B,\Gamma,\Delta\}$.

5-22. Ἡ σχέσις R, εἰς τὸ E, εἶναι:

α) *Αὐτοπαθής*: $\forall x,\ x\in E: xRx$.

Πράγματι, διότι: $f(x)=f(x)$.

β) ***Συμμετρική***: $(x\in E, x'\in E): xRx' \Rightarrow x'Rx$.

Πράγματι: $xRx' \Rightarrow f(x)=f(x') \Rightarrow f(x')=f(x) \Rightarrow x'Rx$.

γ) ***Μεταβατική***: $(x\in E, x'\in E, x''\in E)$: $(xRx'$ καὶ $x'Rx'') \Rightarrow xRx''$.

Πράγματι:

$$\left.\begin{array}{l} xRx' \Rightarrow f(x)=f(x') \\ x'Rx'' \Rightarrow f(x')=f(x'') \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)=f(x'') \Rightarrow xRx''.$$

Ὥστε, ἡ R εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας (§ 4.4).

5-23. Ἐν πρώτοις, εὑρίσκομεν τὰς εἰκόνας τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου $E=\{-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$. Ἔχομεν:

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
f (x)	600	240	72	12	0	0	0	12	72	240	600

Εἶναι προφανὲς ὅτι αἱ κλάσεις ἰσοδυναμίας εἶναι:

$A=\{-5,5\}$ $f(A)=\{600\}$

$B=\{-4,4\}$ $f(B)=\{240\}$

$\Gamma=\{-3,3\}$ $f(\Gamma)=\{72\}$

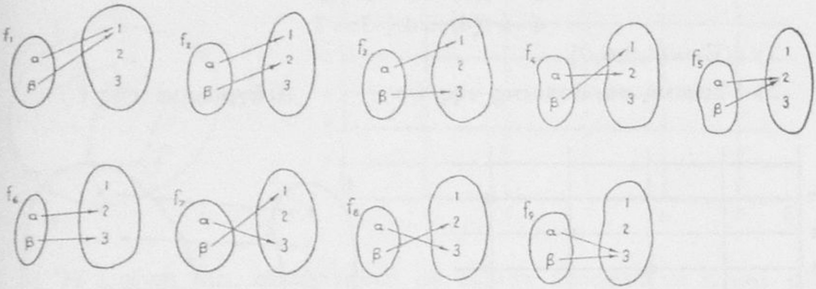
$\Delta=\{-2,2\}$ $f(\Delta)=\{12\}$

$H=\{-1,0,+1\}$ $f(H)=\{0\}$.

6. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

6-1. Μόνον τὸ δεύτερον διάγραμμα ὁρίζει μίαν συνάρτησιν.

6-2. Ἐννέα. Δίδομεν κατωτέρω τὰ διαγράμματα αὐτῶν:



6-3. 1) $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$. 2) $f\left(-\frac{1}{2}\right)=1$. 3) $f(\sqrt{3})=-1$. 4) $f(-\sqrt{3})=-1$.

5) $f(1)=1$ 6) $f(-1)=1$. 7) $f(2^{50})=1$. 8) $f(-3^{-30})=1$.

9) $f(\sqrt{2}+\sqrt{3})=-1$. 10) $f(1-\sqrt{5})=-1$.

6-4. 1) $f(2)=2^2-2=2$. 2) $f(4)=3.4-1=11$. 3) $f(-1)=(-1)^2-2=-1$.

4) $f(-4)=2(-4)+3=-5$.

6-5. 1) $f(3)=3^2-|3|=6$. 2) $f(-10)=(-10)-4=-14$. 3) $f(12)=2.12+5=29$. 4) Ἔχομεν: $f(5)=5^2-|5|=20$ καὶ συνεπῶς:

$$f(f(5))=f(20)=2.20+5=45.$$

6.6. 1) $f(-3)=(-3)^2-3.(-3)+2=20$

2) $f(\alpha^2)=(\alpha^2)^2-3.\alpha^2+2=\alpha^4-3\alpha^2+2$.

3) $f(x^2)=(x^2)^2-3.x^2+2=x^4-3x^2+2$.

4) $f(x+3)=(x+3)^2-3(x+3)+2=(x^2+6x+9)-3x-9+2=$
$=x^2+3x+2$

5) $f(2x-3)=(2x-3)^2-3(2x-3)+2=4x^2-12x+9-6x+9+2=$
$=4x^2-18x+20$.

6) $f(f(x))=f(x^2-3x+2)=(x^2-3x+2)^2-3(x^2-3x+2)+2=$
$=x^4-6x^3+10x^2-3x$.

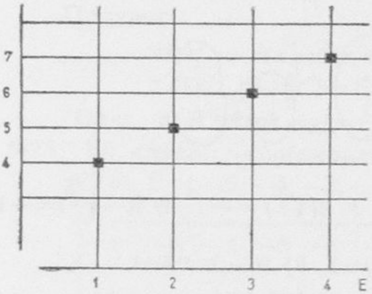
7) Ἔχομεν $f(x+1)=(x+1)^2-3(x+1)+2=x^2-x$ καὶ συνεπῶς:
$f(f(x+1))=f(x^2-x)=(x^2-x)^2-3(x^2-x)+2=$
$=x^4-2x^3-2x^2+3x+2$.

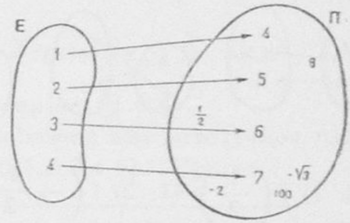
6-7. Ἔχομεν :

$$\begin{aligned} f:\ 1 &\rightarrow f(1)=1+3=4 \\ 2 &\rightarrow f(2)=2+3=5 \\ 3 &\rightarrow f(3)=3+3=6 \\ 4 &\rightarrow f(4)=4+3=7. \end{aligned}$$

1) $f(E)=\{4,5,6,7\}$.

2) Γραφικὴ παράστασις τῆς f : Διάγραμμα τῆς f :





6-8. Ἔχομεν :

$$\begin{aligned} f:\ 0 &\rightarrow f(0)=0^2+0-1=-1 \\ 1 &\rightarrow f(1)=1^2+1-1=1 \\ 2 &\rightarrow f(2)=2^2+2-1=5 \\ 3 &\rightarrow f(3)=3^2+3-1=11. \end{aligned}$$

1) $f(E)=\{-1,1,5,11\}$.

2) Ἡ γραφικὴ παράστασις καὶ τὸ διάγραμμα τῆς f, ὡς ἁπλᾶ, παραλείπονται (βλέπε προηγουμένην ἄσκησιν).

6-9. 1) $\left[\frac{1}{2}\right]=0, [\sqrt{2}]=1, [-3]=-3, [5]=5, [\sqrt{7}]=2, \left[-\frac{23}{5}\right]=-5$

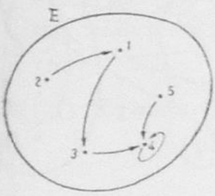
2) $f(E)=\{-2,-1,0,1,2,3\}$.

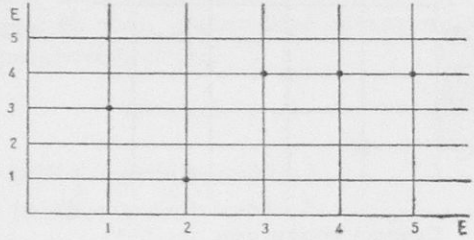
6-10. Ἔχομεν :

$$\begin{aligned} f:\ 1 &\rightarrow f(1)=3 \\ 2 &\rightarrow f(2)=1 \\ 3 &\rightarrow f(3)=4 \\ 4 &\rightarrow f(4)=4 \\ 5 &\rightarrow f(5)=4. \end{aligned}$$

1) $f(E)=\{3,1,4\}$.

2) Διάγραμμα τῆς f Γραφικὴ παράστασις τῆς f





3) Ἡ f εἶναι μία συνάρτησις μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ E καὶ μὲ τιμὰς ἐν E.

6-11. Ἄν ἕνα ὑποσύνολον A τοῦ Π περιέχει μόνον μὴ ἀρνητικοὺς ἀριθμοὺς (θετικοὺς ἢ καὶ τὸ μηδὲν) ἢ μόνον μὴ θετικοὺς (ἀρνητικοὺς ἢ καὶ τὸ μηδέν), τότε ἡ συνάρτησις $f(x)=x^2 \mid A$ εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ θεωρήσωμεν: $A=\{x/x\in\Pi$ μὲ $x\geqq 0\}=[0,+\infty)$ ἢ $A=\{x/x\in\Pi$ μὲ $x\leqq 0\}=$ $=(-\infty,0]$.

6-12. Ἡ f_1 δὲν εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος, διότι π.χ. $f_1\left(-\frac{1}{2}\right)=$ $=f_1\left(\frac{1}{2}\right)$, ἀλλὰ $-\frac{1}{2}\neq\frac{1}{2}$.

Αἱ f_2 καὶ f_3 εἶναι ἀμφιμονοσήμαντοι (βλέπε προηγουμένην ἄσκησιν).

6-13. Ἔχομεν:

$f: 0\to f(0)=0+1=1 \qquad \varphi: 0\to\varphi(0)=3.0^2-2.0+1=1$

$\quad 1\to f(1)=1+1=2. \qquad 1\to\varphi(1)=3.1^2-2.1+1=2.$

Αἱ συναρτήσεις f καὶ φ εἶναι ἴσαι, διότι ἔχουν τὸ αὐτὸ πεδίον ὁρισμοῦ E καὶ ἕκαστον πρότυπον ἀπεικονίζεται, ὑπὸ ἀμφοτέρων, εἰς τὴν ἰδίαν εἰκόνα (§ 6.2).

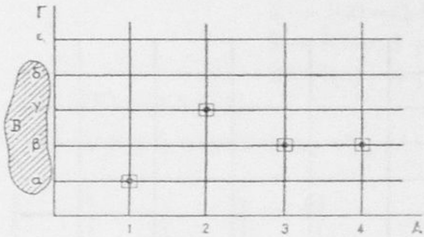
6-14. Ἔχομεν:

$f: 0\to f(0)=0^2=0 \qquad \varphi: 0\to\varphi(0)=0^3=0$

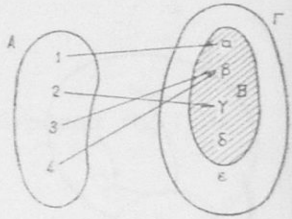
$\quad 1\to f(1)=1^2=1 \qquad 1\to\varphi(1)=1^3=1.$

Ὥστε: $f=\varphi$ (§ 6.2).

6-15. 1)



Γραφική παράστασις τῆς f (•) καὶ τῆς φ (⊡).



Διάγραμμα τῆς f καὶ τῆς φ.

2) Αἱ συναρτήσεις f καὶ φ εἶναι ἴσαι (§ 6.2).

6-16. Αἱ συναρτήσεις f, φ καὶ h εἶναι ἀνὰ δύο διάφοροι, διότι ἀνὰ δύο δὲν ἔχουν τὸ αὐτὸ πεδίον ὁρισμοῦ (§ 6.2).

6-17. Ἐπειδὴ αἱ συναρτήσεις f καὶ φ ἔχουν τὸ αὐτὸ πεδίον ὁρισμοῦ E, διὰ νὰ εἶναι ἴσαι (§ 6.2), πρέπει νὰ ἔχωμεν:

$$f(x)=\varphi(x) \mid \forall x,\ x\in E$$

Ὥστε, τὸ E πρέπει νὰ περιέχῃ πραγματικοὺς ἀριθμοὺς x διὰ τοὺς ὁποίους εἶναι:

$$2x^3+9x^2-5x=x^3+4x^2-11x. \quad (1)$$

Ἤτοι, τὸ E εἶναι τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως (1).

Ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται: $x^3+5x^2+6x=0$ ἢ $x(x^2+5x+6)=0$ ἢ $x(x+2)(x+3)=0$ καὶ συνεπῶς $E=\{0,-2,-3\}$.

6-18. Ἔχομεν:

$$\begin{aligned} f:\ 0 &\rightarrow f(0)=0^4-6.0^3+11.0^2-6.0+3=3\\ 1 &\rightarrow f(1)=1^4-6.1^3+11.1^2-6.1+3=3\\ 2 &\rightarrow f(2)=2^4-6.2^3+11.2^2-6.2+3=3\\ 3 &\rightarrow f(3)=3^4-6.3^3+11.3^2-6.3+3=3. \end{aligned}$$

Συνεπῶς $f(E)=\{3\}$. Ὥστε, ἡ f εἶναι σταθερὰ (§ 6 4)

6-19. Ἔχομεν:

$$f:\ 0\rightarrow f(0)=2 \qquad \varphi:\ 0\rightarrow \varphi(0)=2$$
$$1\rightarrow f(1)=2 \qquad 1\rightarrow \varphi(1)=2.$$

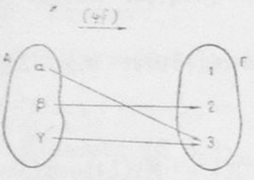
Ὥστε, αἱ συναρτήσεις f καὶ φ εἶναι ἴσαι (§ 6.2).
Ἐξ αὐτοῦ συμπεραίνομεν ὅτι καὶ ἡ φ εἶναι σταθερά.

6-20. Ἐὰν τὸ πεδίον ὁρισμοῦ μιᾶς συναρτήσεως περιέχῃ ἕνα μόνον στοιχεῖον, ἡ συνάρτησις θὰ εἶναι μία σταθερὰ συνάρτησις καὶ ἐπὶ πλέον θὰ εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος.

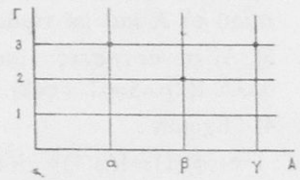
6-21. 1) Ἔχομεν (§ 6 5):

$$(\varphi f): \alpha \to (\varphi f)(\alpha) = \varphi(f(\alpha)) = \varphi(y) = 3$$
$$\beta \to (\varphi f)(\beta) = \varphi(f(\beta)) = \varphi(x) = 2$$
$$\gamma \to (\varphi f)(\gamma) = \varphi(f(\gamma)) = \varphi(y) = 3$$

2)



Διάγραμμα τῆς (φf)



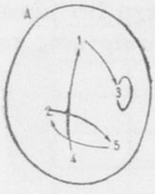
Γραφικὴ παράστασις τῆς (φf)

3) Πεδίον τιμῶν τῆς f: $f(A) = \{x, y\}$.
Πεδίον τιμῶν τῆς φ: $\varphi(B) = \{1, 2, 3\}$.
Πεδίον τιμῶν τῆς (φf): $(\varphi f)(A) = \{2, 3\}$.

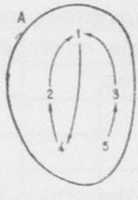
6-22. 1) $(\varphi f)(3) = \varphi(f(3)) = \varphi(3^2 - 2\,|\,3\,|) = \varphi(3) = 3^2 + 1 = 10.$
2) $(f\varphi)(-2) = f(\varphi(-2)) = f((-2)^2 + 1) = f(5) = 5^2 - 2\,|\,5\,| = 15.$
3) $(f\varphi)(5) = f(\varphi(5)) = f(5^2 + 1) = f(26) = 26^2 - 2\,|\,26\,| = 624.$

6-23. 1) $(\varphi f)(2) = \varphi(f(2)) = \varphi(2.2 - 3) = \varphi(1) = 1^2 + 5 = 6.$
2) $(f\varphi)(2) = f(\varphi(2)) = f(2^2 + 5) = f(9) = 2.9 - 3 = 15.$
3) $(f\varphi)(\alpha - 1) = f(\varphi(\alpha - 1)) = f((\alpha - 1)^2 + 5) = f(\alpha^2 - 2\alpha + 6) =$
$= 2(\alpha^2 - 2\alpha + 6) - 3 = 2\alpha^2 - 4\alpha + 9.$
4) $(\varphi f)(x) = \varphi(f(x)) = \varphi(2x - 3) = (2x - 3)^2 + 5 = 4x^2 - 12x + 14.$
5) $(f\varphi)(x) = f(\varphi(x)) = f(x^2 + 5) = 2(x^2 + 5) - 3 = 2x^2 + 7.$
6) $(f\varphi)(x + 1) = f(\varphi(x + 1)) = f((x + 1)^2 + 5) = f(x^2 + 2x + 6) =$
$= 2(x^2 + 2x + 6) - 3 = 2x^2 + 4x + 9.$
7) $(\varphi\varphi)(x) = \varphi(\varphi(x)) = \varphi(x^2 + 5) = (x^2 + 5)^2 + 5 = x^4 + 10x^2 + 30.$
8) $(ff)(x) = f(f(x)) = f(2x - 3) = 2(2x - 3) - 3 = 4x - 9.$

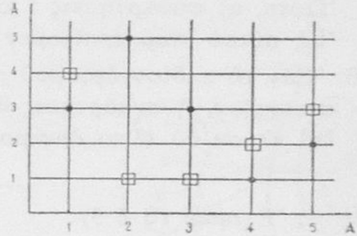
6-24. 1)



Διάγραμμα
τῆς f.



Διάγραμμα
τῆς φ.



Γραφικὴ παράστασις
τῆς f (•) καὶ τῆς φ (□).

2) Ἑκάστη τῶν f καὶ φ εἶναι μία συνάρτησις μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ A καὶ μὲ τιμὰς ἐν A.

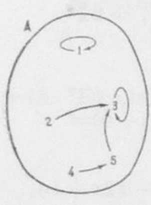
3) Αἱ συναρτήσεις f καὶ φ δὲν εἶναι ἴσαι, διότι π.χ. $2 \in A$, ἀλλὰ $f(2)=5 \neq 1=\varphi(2)$.

4) Ἔχομεν:

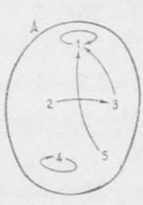
$(f\varphi)$: $1 \to (f\varphi)(1)=f(\varphi(1))=f(4)=1$
$2 \to (f\varphi)(2)=f(\varphi(2))=f(1)=3$
$3 \to (f\varphi)(3)=f(\varphi(3))=f(1)=3$
$4 \to (f\varphi)(4)=f(\varphi(4))=f(2)=5$
$5 \to (f\varphi)(5)=f(\varphi(5))=f(3)=3$

(φf): $1 \to (\varphi f)(1)=\varphi(f(1))=\varphi(3)=1$
$2 \to (\varphi f)(2)=\varphi(f(2))=\varphi(5)=3$
$3 \to (\varphi f)(3)=\varphi(f(3))=\varphi(3)=1$
$4 \to (\varphi f)(4)=\varphi(f(4))=\varphi(1)=4$
$5 \to (\varphi f)(5)=\varphi(f(5))=\varphi(2)=1$

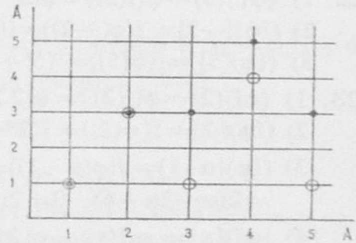
5)



Διάγραμμα
τῆς (fφ).



Διάγραμμα
τῆς (φf).



Γραφικὴ παράστασις
τῆς (fφ) (•) καὶ τῆς (φf) (O).

6) Αἱ συναρτήσεις (fφ) καὶ (φf) δὲν εἶναι ἴσαι, διότι π.χ. $3 \in A$, ἀλλὰ $(f\varphi)(3)=3 \neq 1=(\varphi f)(3)$.

6-25. Ἔχομεν:

$$(\varphi f)(x)=\varphi(f(x))=\varphi\left(\frac{1}{3}\mid x\mid+2\right)=2\left(\frac{1}{3}\mid x\mid+2\right)^2-3=$$

$$=\frac{2}{9}x^2+\frac{8}{3}\mid x\mid+5.$$

$$(f\varphi)(x)=f(\varphi(x))=7(2x^2-3)=\frac{1}{3}\mid 2x^2-3\mid+2.$$

Ὁμοίως:

$$(\varphi f)(x)=\varphi(f(x))=\varphi(x^2-5\mid x\mid+1)=\frac{1}{\mid x^2-5\mid x\mid+1\mid+1}.$$

$$(f\varphi)(x)=f(\varphi(x))=f\left(\frac{1}{\mid x\mid+1}\right)=\left(\frac{1}{\mid x\mid+1}\right)^2-5\left|\frac{1}{\mid x\mid+1}\right|+\mid=$$

$$=\frac{1}{(\mid x\mid+1)^2}-\frac{5}{\mid x\mid+1}+1.$$

6-26. Ἔχομεν:

$$(f\varphi)(x)=f(\varphi(x))=f\left(\frac{x-3}{2}\right)=2.\frac{x-3}{2}+3=x.$$

Ὅθεν: $(f\varphi)(x)= \mid \forall x, x\in\Pi$.

Συνεπῶς (§ 6.3), ἡ $(f\varphi)$ εἶναι ταυτοτικὴ εἰς τὸ Π. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὴν συνάρτησιν (φf), διότι:

$$(\varphi f)(x)=\varphi(f(x))=\varphi(2x+3)=\frac{(2x+3)-3}{2}=x,$$

ἤτοι: $(\varphi f)(x)=x\mid \forall x, x\in\Pi$.

6-27. Ἔστω γ ἓν τυχὸν στοιχεῖον τοῦ συνόλου Γ. Ἐπειδὴ ἡ φ εἶναι ἐπί, ὑπάρχει τουλάχιστον ἓν στοιχεῖον $\beta\in B$ τοιοῦτον ὥστε: $\varphi(\beta)=\gamma$. Ἐπειδὴ ὅμως καὶ ἡ f εἶναι ἐπί, ὑπάρχει τουλάχιστον ἓν στοιχεῖον $\alpha\in A$ τοιοῦτον ὥστε: $f(\alpha)=\beta$.
Ἔχομεν: $(\varphi f)(\alpha)=\varphi(f(\alpha))=\varphi(\beta)=\gamma$.
Οὕτω, διὰ κάθε στοιχεῖον $\gamma\in\Gamma$, ὑπάρχει τουλάχιστον ἓν στοιχεῖον $\alpha\in A$ τοιοῦτον ὥστε: $(\varphi f)(\alpha)=\gamma$. Συνεπῶς ἡ (φf) εἶναι ἐπί.

6-28. Ἐπειδὴ ἡ συνάρτησις $f: A\to B$ εἶναι ἐπὶ καὶ ἡ συνάρτησις $\varphi: B\to\Gamma$ εἶναι ἐπί, βάσει τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως καὶ ἡ συνάρτησις $(\varphi f): A\to\Gamma$ εἶναι ἐπί. Διὰ νὰ δείξωμτν τώρα ὅτι ἡ $(\varphi f): A\to\Gamma$ εἶναι καὶ ἀμφιμονοσήμαντος, ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι ἐκ τῆς $(\varphi f)(\alpha)=(\varphi f)(\beta)$, ἔνθα $\alpha\in A$ καὶ $\beta\in A$, ἕπεται $\alpha=\beta$ (§ 5.3). Πράγματι, ἡ ισότης $(\varphi f)(\alpha)=(\varphi f)(\beta)$, γράφεται: $\varphi(f(\alpha))=\varphi(f(\beta))$

καὶ ἐπειδὴ ἡ φ εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος, ἔχομεν: $f(\alpha)=f(\beta)$. Ἐπίσης, ἐκ τῆς $f(\alpha)=f(\beta)$ καὶ ἐπειδὴ ἡ f εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος, ἕπεται $\alpha=\beta$. Συνεπῶς, ἡ $(f\varphi): A \to \Gamma$ εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος καὶ ἐπί.

6-29. Ἐπειδὴ αἱ συναρτήσεις $(T_B f)$ καὶ f ἔχουν τὸ αὐτὸ πεδίον ὁρισμοῦ A, διὰ νὰ δείξωμεν ὅτι $(T_B f)=f$, ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι: $(T_B f)(x)=f(x) \mid \forall x, x\in A$ (§ 6.2). Πράγματι, ἔχομεν:

$\forall x, x\in A: (T_B f)(x)=T_B(f(x))=f(x)$,

διότι ἡ T_B εἶναι ταυτοτικὴ εἰς τὸ B.

2) Ὁμοίως, ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι:

$(fT_A)(x)=f(x) \mid \forall x, x\in A$.

Πράγματι, ἔχομεν:

$\forall x, x\in A: (fT_A)(x)=f(T_A(x))=f(x)$,

διότι ἡ T_A εἶναι ταυτοτικὴ εἰς τὸ A καὶ συνεπῶς:

$T_A(x)=x \mid Ax, x\in A$.

6-30. 1) Ἂν $x_1\in\Pi$ καὶ $x_2\in\Pi$, ἔχομεν:

$f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow 3x_1-2=3x_2-2 \Leftrightarrow 3x_1=3x_2 \Leftrightarrow x_1=x_2$, ἤτοι:

$$f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow x_1=x_2.$$

Ὅθεν, ἡ f εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος (§ 5.3).

Ἐξ ἄλλου, ἡ f εἶναι καὶ ἐπί, διότι:

$\forall y, y\in\Pi, \exists x, x\in\Pi: y=3x-2$.

Πράγματι: $x=\frac{y+2}{3}$.

2) Ἔχομεν: $f(x)=3x-2 \mid \Pi$ καὶ $f^{-1}(x)=\frac{x+2}{3} \mid \Pi$.

3) Εἶναι:

$$f^{-1}(-1)=\frac{-1+2}{3}=\frac{1}{3},\ f^{-1}(1)=\frac{1+2}{3}=1,\ f^{-1}(0)=\frac{0+2}{3}=\frac{2}{3},$$

$$f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{1}{2}+2}{3}=\frac{5}{6}.$$

6-31. 1) Ἂν $x_1 \in A$ καὶ $x_2 \in A$, ἔχομεν:

$$f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow \frac{x_1-2}{x_1-3}=\frac{x_2-2}{x_2-3} \Leftrightarrow (x_1-2)(x_2-3)=(x_1-3)(x_2-2)$$

$$\Leftrightarrow x_1x_2-3x_1-2x_2+6=x_1x_2-2x_1-3x_2+6 \Leftrightarrow -x_1=-x_2 \Leftrightarrow x_1=x_2,$$

ἤτοι: $f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow x_1=x_2$.

Ὅθεν, ἡ f εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος (§ 5.3).

Ἐξ ἄλλου, ἡ f εἶναι καὶ ἐπί, διότι:

$$\forall y,\ y \in B,\ \exists x,\ x \in A:\ y=\frac{x-2}{x-3}.$$

Πράγματι: $x=\dfrac{3y-2}{y-1}$.

2) Ἔχομεν: $f(x)=\dfrac{x-2}{x-3}\Big|\, A$ καὶ $f^{-1}(x)=\dfrac{3x-2}{x-1}\Big|\, B$.

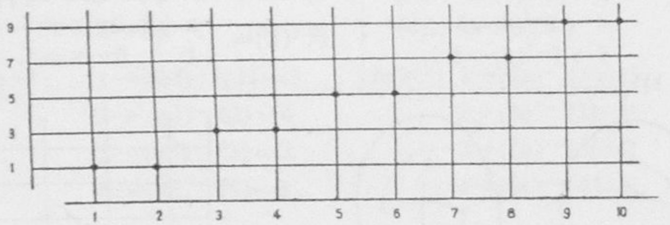
6-32. 1) Ἔχομεν:

f: $1 \to f(1)=1$	$6 \to f(6)=6-1=5$
$2 \to f(2)=2-1=1$	$7 \to f(7)=7$
$3 \to f(3)=3$	$8 \to f(8)=8-1=7$
$4 \to f(4)=4-1=3$	$9 \to f(9)=9$
$5 \to f(5)=5$	$10 \to f(10)=10-1=9$.

Πεδίον ὁρισμοῦ $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$.

Πεδίον τιμῶν $f(A)=\{1,3,5,7,9\}$.

2)



Γραφικὴ παράστασις τῆς f.

3) Ἡ f εἶναι μία συνάρτησις μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ A καὶ μὲ τιμὰς ἐν B.

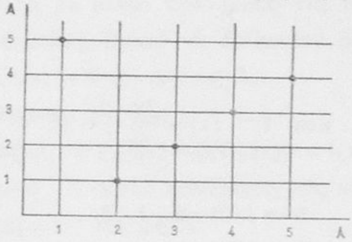
4) Ἡ f δὲν εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος (οὔτε καὶ ἐπὶ) καὶ συνεπῶς (§ 6.7) δὲν ὑπάρχει ἀντίστροφος συνάρτησις αὐτῆς.

6-33. 1) Ἔχομεν :

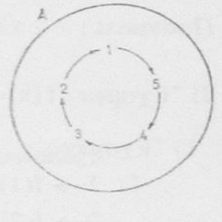
$$
\begin{aligned}
f:\ & 1 \rightarrow f(1)=5\\
& 2 \rightarrow f(2)=1\\
& 3 \rightarrow f(3)=2\\
& 4 \rightarrow f(4)=3\\
& 5 \rightarrow f(5)=4.
\end{aligned}
$$

Πεδίον τιμῶν τῆς f : $f(A)=\{5,1,2,3,4\}=A$.

2)



Γραφικὴ παράστασις τῆς f



Διάγραμμα τῆς f

3) Ἡ f εἶναι μία ἀμφιμονοσήμαντος καὶ ἐπὶ συνάρτησις μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ Α καὶ μὲ πεδίον τιμῶν, ἐπίσης, τὸ Α. Δηλαδή, εἶναι ἕνας μετασχηματισμὸς τοῦ συνόλου Α (§ 5.5).

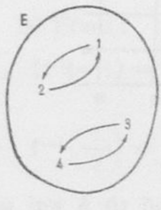
4) Ἡ ἀντίστροφος συνάρτησις f^{-1} τῆς f ὑπάρχει καὶ εἶναι ἡ ἑξῆς:

$$
\begin{aligned}
f^{-1}:\ & 1 \rightarrow f^{-1}(1)=2\\
& 2 \rightarrow f^{-1}(2)=3\\
& 3 \rightarrow f^{-1}(3)=4\\
& 4 \rightarrow f^{-1}(4)=5\\
& 5 \rightarrow f^{-1}(5)=1
\end{aligned}
$$

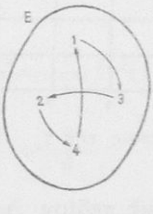
Ἡ ἀντίστροφος συνάρτησις: $f^{-1}: x\in A \rightarrow f^{-1}(x)\in A$, δύναται νὰ ὁρισθῇ καὶ ὑπὸ τοῦ ἑξῆς τύπου:

$$f^{-1}(x)=\begin{cases} x+1 & \text{ἂν } x\neq 5\\ 1 & \text{ἂν } x=5. \end{cases}$$

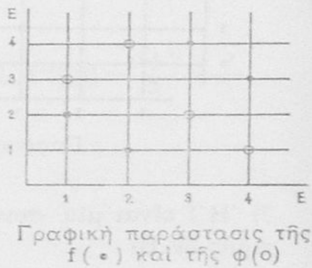
6-34. 1)



Διάγραμμα τῆς f



Διάγραμμα τῆς φ



Γραφικὴ παράστασις τῆς f (•) καὶ τῆς φ(ο)

2)

$(f\varphi): 1 \to (f\varphi)(1)=f(\varphi(1))=f(3)=4$

$2 \to (f\varphi)(2)=f(\varphi(2))=f(4)=3$

$3 \to (f\varphi)(3)=f(\varphi(3))=f(2)=1$

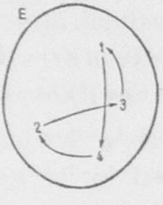
$4 \to (f\varphi)(4)=f(\varphi(4))=f(1)=2$

$(\varphi f): 1 \to (\varphi f)(1)=\varphi(f(1))=\varphi(2)=4$

$2 \to (\varphi f)(2)=\varphi(f(2))=\varphi(1)=3$

$3 \to (\varphi f)(3)=\varphi(f(3))=\varphi(4)=1$

$4 \to (\varphi f)(4)=\varphi(f(4))=\varphi(3)=2$



Διάγραμμα τῆς (fφ) καὶ τῆς (φf)

3) $f^{-1}: 1\to f^{-1}(1)=2$ $\qquad \varphi^{-1}: 1\to \varphi^{-1}(1)=4$

$2\to f^{-1}(2)=1$ $\qquad 2\to \varphi^{-1}(2)=3$

$3\to f^{-1}(3)=4$ $\qquad 3\to \varphi^{-1}(3)=1$

$4\to f^{-1}(4)=3$ $\qquad 4\to \varphi^{-1}(4)=2$

$(f^{-1}\varphi^{-1}): 1\to (f^{-1}\varphi^{-1})(1)=f^{-1}(\varphi^{-1}(1))=f^{-1}(4)=3$

$2\to (f^{-1}\varphi^{-1})(2)=f^{-1}(\varphi^{-1}(2))=f^{-1}(3)=4$

$3\to (f^{-1}\varphi^{-1})(3)=f^{-1}(\varphi^{-1}(3))=f^{-1}(1)=2$

$4\to (f^{-1}\varphi^{-1})(4)=f^{-1}(\varphi^{-1}(4))=f^{-1}(2)=1$

$(\varphi^{-1}f^{-1}): 1\to (\varphi^{-1}f^{-1})(1)=\varphi^{-1}(f^{-1}(1))=\varphi^{-1}(2)=3$

$2\to (\varphi^{-1}f^{-1})(2)=\varphi^{-1}(f^{-1}(2))=\varphi^{-1}(1)=4$

$3\to (\varphi^{-1}f^{-1})(3)=\varphi^{-1}(f^{-1}(3))=\varphi^{-1}(4)=2$

$4\to (\varphi^{-1}f^{-1})(4)=\varphi^{-1}(f^{-1}(4))=\varphi^{-1}(3)=1$

$(\varphi f)^{-1}: 1\to (\varphi f)^{-1}(1)=3$ $\qquad (f\varphi)^{-1}: 1\to (f\varphi)^{-1}(1)=3$

$2\to (\varphi f)^{-1}(2)=4$ $\qquad 2\to (f\varphi)^{-1}(2)=4$

$3\to (\varphi f)^{-1}(3)=2$ $\qquad 3\to (f\varphi)^{-1}(3)=2$

$4\to (\varphi f)^{-1}(4)=1$ $\qquad 4\to (f\varphi)^{-1}(4)=1$

6·35. 1)

$f^{-1}: \alpha\to f^{-1}(\alpha)=\gamma$ $\qquad \varphi^{-1}: \alpha\to \varphi^{-1}(\alpha)=\delta$ $\qquad h^{-1}: \alpha\to h^{-1}(\alpha)=\gamma$

$\beta\to f^{-1}(\beta)=\alpha$ $\qquad \beta\to \varphi^{-1}(\beta)=\gamma$ $\qquad \beta\to h^{-1}(\beta)=\delta$

$\gamma\to f^{-1}(\gamma)=\delta$ $\qquad \gamma\to \varphi^{-1}(\gamma)=\beta$ $\qquad \gamma\to h^{-1}(\gamma)=\alpha$

$\delta\to f^{-1}(\delta)=\beta$ $\qquad \delta\to \varphi^{-1}(\delta)=\alpha$ $\qquad \delta\to h^{-1}(\delta)=\beta$

2) Γνωρίζομεν (§ 6.6) ὅτι $((h\varphi)f)=(h(\varphi f))$:

$\alpha \to ((h\varphi)f)(\alpha)=(h\varphi)(f(\alpha))=h(\varphi(f(\alpha)))=h(\varphi(\beta))=h(\gamma)=\alpha$

$\beta \to ((h\varphi)f)(\beta)=(h\varphi)(f(\beta))=h(\varphi(f(\beta)))=h(\varphi(\delta))=h(\alpha)=\gamma$

$\gamma \to ((h\varphi)f)(\gamma)=(h\varphi)(f(\gamma))=h(\varphi(f(\gamma)))=h(\varphi(\alpha))=h(\delta)=\beta$

$\delta \to ((h\varphi)f)(\delta)=(h\varphi)(f(\delta)=h(\varphi(f(\delta)))=h(\varphi(\gamma))=h(\beta)=\delta$

3) $(f^{-1}\varphi^{-1}h^{-1})$:

$\alpha \to (f^{-1}\varphi^{-1}h^{-1})(\alpha)=((f^{-1}\varphi^{-1})h^{-1})(\alpha)=(f^{-1}\varphi^{-1})(h^{-1}(\alpha))=$
$=(f^{-1}\varphi^{-1})(\gamma)=f^{-1}(\varphi^{-1}(\gamma))=f^{-1}(\beta)=\alpha.$

$\beta \to (f^{-1}\varphi^{-1}h^{-1})(\beta)=((f^{-1}\varphi^{-1})h^{-1})(\beta)=(f^{-1}\varphi^{-1})(h^{-1}(\beta))=$
$=(f^{-1}\varphi^{-1})(\delta)=f^{-1}(\varphi^{-1}(\delta))=f^{-1}(\alpha)=\gamma.$

$\gamma \to (f^{-1}\varphi^{-1}h^{-1})(\gamma)=((f^{-1}\varphi^{-1})h^{-1})(\gamma)=(f^{-1}\varphi^{-1})(h^{-1}(\gamma))=$
$=(f^{-1}\varphi^{-1})(\alpha)=f^{-1}(\varphi^{-1}(\alpha))=f^{-1}(\delta)=\beta.$

$\delta \to (f^{-1}\varphi^{-1}h^{-1})(\delta)=((f^{-1}\varphi^{-1})h^{-1})(\delta)=(f^{-1}\varphi^{-1})(h^{-1}(\delta))=$
$=(f^{-1}\varphi^{-1})(\beta)=f^{-1}(\varphi^{-1}(\beta))=f^{-1}(\gamma)=\delta.$

$(h\varphi f)(f^{-1}\varphi^{-1}h^{-1})$:

$\alpha \to ((h\varphi f)(f^{-1}\varphi^{-1}h^{-1}))(\alpha)=(h\varphi f)((f^{-1}\varphi^{-1}h^{-1})(\alpha))=(h\varphi f)(\alpha)=\alpha$

$\beta \to ((h\varphi f)(f^{-1}\varphi^{-1}h^{-1}))(\beta)=(hf\varphi)((f^{-1}\varphi^{-1}h^{-1})(\beta))=(h\varphi f)(\gamma)=\beta$

$\gamma \to ((h\varphi f)(f^{-1}\varphi^{-1}h^{-1}))(\gamma)=(h\varphi f)((f^{-1}\varphi^{-1}h^{-1})(\gamma))=(h\varphi f)(\beta)=\gamma$

$\delta \to ((h\varphi f)(f^{-1}\varphi^{-1}h^{-1}))(\delta)=(h\varphi f)((f^{-1}\varphi^{-1}h^{-1})(\delta))=(h\varphi f)(\delta)=\delta.$

6-36. i) Ἂν $x_1 \in P$ καὶ $x_2 \in P$, ἔχομεν:

$f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow \alpha x_1+\beta=\alpha x_2+\beta \Leftrightarrow \alpha x_1=\alpha x_2 \Leftrightarrow x_1=x_2$ (διότι $\alpha \neq o$), ἤτοι: $f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow x_1=x_2$.

Συνεπῶς, ἡ f εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος. Ἐξ ἄλλου, ἡ f εἶναι καὶ ἐπί, διότι:

$$\forall y, y \in P, \ \exists x, \ x \in P: \ y=\alpha x+\beta$$

Πράγματι: $x=\dfrac{y-\beta}{\alpha}$ $(\alpha \neq o)$.

ii) Ἔχομεν: $f(x)=\alpha x+\beta \mid P$ καὶ $f^{-1}(x)=\dfrac{x-\beta}{\alpha} \mid P$.

iii) Αἱ συναρτήσεις f καὶ f^{-1} ἔχουν τὸ αὐτὸ πεδίον ὁρισμοῦ P. Διὰ νὰ εἶναι $f=f^{-1}$, ἀρκεῖ νὰ ἔχωμεν:

$$f(x)=f^{-1}(x) \mid \forall x, x \in P,$$

ἤτοι : $\alpha x+\beta=\frac{x-\beta}{\alpha} \mid \forall x, x \in P$, δηλαδή :

$\alpha^2 x+\alpha\beta=x-\beta \mid \forall x, x \in P$ καὶ συνεπῶς πρέπει :

$\alpha^2=1$ (1) καὶ $\alpha\beta=-\beta$ (2).

Ἐκ τῆς (1), εὑρίσκομεν : $\alpha=\pm 1$.

Ἂν $\alpha=1$, ἐκ τῆς (2), ἕπεται $\beta=0$.

Ἂν $\alpha=-1$, ἐκ τῆς (2), ἕπεται $-\beta=-\beta$, δηλαδὴ ὁ β δύναται νὰ εἶναι, τότε, ἕνας τυχὼν ρητὸς ἀριθμός.

Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν ($\alpha=1$ καὶ $\beta=0$), ἡ συνάρτησις, γίνεται :

$$f : x \in P \rightarrow f(x)=x \in P.$$

Εἰς δὲ τὴν δευτέραν ($\alpha=-1$ καὶ $\beta \in P$), γίνεται :

$$f : x \in P \rightarrow f(x)=(-x+\beta) \in P.$$

6-37. Ἔστω $A=\{1,2,3\}$ καὶ $B=\{\alpha,\beta,\gamma\}$. Ἃς θεωρήσωμεν τὴν ἀμφιμονοσήμαντον καὶ ἐπὶ συνάρτησιν f :

$$f : \begin{array}{l} 1 \rightarrow f(1)=\beta \\ 2 \rightarrow f(2)=\alpha \\ 3 \rightarrow f(3)=\gamma. \end{array} \qquad \Big| \qquad \text{Ἔχομεν} : f^{-1} : \begin{array}{l} \alpha \rightarrow f^{-1}(\alpha)=2 \\ \beta \rightarrow f^{-1}(\beta)=1 \\ \gamma \rightarrow f^{-1}(\gamma)=3. \end{array}$$

Ἔχομεν :

$$1)\ (f^{-1}f) : \begin{array}{l} 1 \rightarrow (f^{-1}f)(1)=f^{-1}(f(1))=f^{-1}(\beta)=1 \\ 2 \rightarrow (f^{-1}f)(2)=f^{-1}(f(2))=f^{-1}(\alpha)=2 \\ 3 \rightarrow (f^{-1}f)(3)=f^{-1}(f(3))=f^{-1}(\gamma)=3. \end{array}$$

Ὥστε :

$$(f^{-1}f)(x)=x \mid \forall x,\ x \in A,$$

ἤτοι, ἡ $(f^{-1}f)$ εἶναι ταυτοτικὴ εἰς τὸ A (§ 6.3).

$$2)\ (ff^{-1}) : \begin{array}{l} \alpha \rightarrow (ff^{-1})(\alpha)=f(f^{-1}(\alpha))=f(2)=\alpha \\ \beta \rightarrow (ff^{-1})(\beta)=f(f^{-1}(\beta))=f(1)=\beta \\ \gamma \rightarrow (ff^{-1})(\gamma)=f(f^{-1}(\gamma))=f(3)=\gamma. \end{array}$$

Ὥστε :

$$(ff^{-1})(x)=x \mid \forall x,\ x \in B,$$

ἤτοι, ἡ (ff^{-1}) εἶναι ταυτοτικὴ εἰς τὸ B (§ 6.3).

6.38. 1) Εἶναι $x \in \Pi$.

α) Διὰ νὰ εἶναι $f(x) \in \Pi$, πρέπει $x \neq 0$. Συνεπῶς, τὸ εὐρύτερον πεδίον ὁρισμοῦ τῆς f εἶναι τὸ σύνολον Π^*.

β) Τὸ εὐρύτερον πεδίον ὁρισμοῦ τῆς φ εἶναι τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν Π.

2) Αἱ συναρτήσεις f καὶ φ δὲν εἶναι ἴσαι, διότι δὲν ἔχουν τὸ αὐτὸ πεδίον ὁρισμοῦ.

6·39. 1) Πρέπει νὰ εἶναι $x^2-2x-3 \neq 0$, δηλαδὴ $x \neq 3$ καὶ $x \neq -1$. Ἑπομένως, τὸ εὐρύτερον πεδίον ὁρισμοῦ τῆς f εἶναι τὸ σύνολον $\{x \mid x \in \Pi$ μὲ $x \neq 3$ καὶ $x \neq -1\}$.

2) Τὸ εὐρύτερον πεδίον ὁρισμοῦ τῆς f εἶναι τὸ σύνολον Π^*.

3) Πρέπει νὰ εἶναι $-x^2+5x+6 \geqq 0$, ἤτοι $x^2-5x-6 \leqq 0$, δηλαδὴ $-1 \leqq x \leqq 6$. Ἑπομένως, τὸ εὐρύτερον πεδίον ὁρισμοῦ τῆς f εἶναι τὸ σύνολον :

$$\{x \mid x \in \Pi \text{ μὲ } -1 \leqq x \leqq 6\}.$$

4) Πρέπει νὰ εἶναι :

$$1-|x|>0 \Leftrightarrow |x|<1 \Leftrightarrow -1<x<1.$$

Ἑπομένως, τὸ εὐρύτερον πεδίον ὁρισμοῦ τῆς f εἶναι τὸ σύνολον $\{x \mid x \in \Pi$ μὲ $-1<x<1\}$.

5) Πρέπει νὰ εἶναι :

$$1-x^2 \geqq 0 \Leftrightarrow x^2 \leqq 1 \Leftrightarrow |x| \leqq 1 \Leftrightarrow -1 \leqq x \leqq 1.$$

Ἑπομένως, τὸ εὐρύτερον πεδίον ὁρισμοῦ τῆς f εἶναι τὸ σύνολον $\{x \mid x \in \Pi$ μὲ $-1 \leqq x \leqq 1\}$.

6) Πρέπει νὰ εἶναι :

$$1-|x| \geqq 0 \Leftrightarrow |x| \leqq 1 \Leftrightarrow -1 \leqq x \leqq 1.$$

Ἑπομένως, τὸ εὐρύτερον πεδίον ὁρισμοῦ τῆς f εἶναι τὸ σύνολον $\{x \mid x \in \Pi$ μὲ $-1 \leqq x \leqq 1\}$.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΛΥΣΕΙΣ

Τυπογραφικὸν Ἐργαστήριο ΣΤΕΦ. ΤΖΑΝΕΤΗ —Χαρ. Τρικούπη 7—Τηλ. 647-573

ΠΑΡΟΡΑΜΑΤΑ

Σελὶς 6 στίχος 8 ἀντὶ A_u^* γράφε A_κ^*

Σελὶς 6 στίχος 9 ἀντὶ A_u^+ γράφε A_κ^+

Σελὶς 6 στίχος 10 ἀντὶ A_u^- γράφε A_κ^-

Σελὶς 48 στίχος 13 «εἰς τὸ διάγραμμα τοῦ Venn ἀντὶ 1 νὰ γραφῇ 3».

Βιβλία ἀπαραίτητα διὰ τοὺς ὑποψηφίους τοῦ Ἀκαδημαϊκοῦ ἀπολυτηρίου τύπου Β', καθὼς καὶ διὰ τοὺς μαθητὰς τοῦ Λυκείου.

ΚΥΚΛΟΦΟΡΟΥΝ:

1) Β. Χ. ΣΑΒΒΑΪΔΗ καὶ Α. Κ. ΚΥΡΙΑΚΟΠΟΥΛΟΥ :

«ΣΥΝΟΛΑ»

διὰ τὴν Α' τάξιν τοῦ Λυκείου, συμφώνως πρὸς τὸ νέον πρόγραμμα.

2) Β. Χ. ΣΑΒΒΑΪΔΗ :

«ΑΛΓΕΒΡΑ»

εἰς δύο τεύχη.

3) Β. Χ. ΣΑΒΒΑΪΔΗ :

«ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ»

εἰς δύο τεύχη.

4) Β. Χ. ΣΑΒΒΑΪΔΗ :

«ΘΕΜΑΤΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ–ΣΕΙΡΑ Α»

ΥΠΟ ΕΚΔΟΣΙΝ:

1) Β. Χ. ΣΑΒΒΑΪΔΗ :

«ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΑΛΓΕΒΡΑΣ»

2) Α. Κ. ΚΥΡΙΑΚΟΠΟΥΛΟΥ :

«ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ–ΛΕΛΥΜΕΝΑΙ»

3) Α. Κ. ΚΥΡΙΑΚΟΠΟΥΛΟΥ :

«ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ–ΛΕΛΥΜΕΝΑΙ»

4) Α. Κ. ΚΥΡΙΑΚΟΠΟΥΛΟΥ :

«ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ καὶ ΓΡΑΦΙΚΑΙ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ»

5) Α. Κ. ΚΥΡΙΑΚΟΠΟΥΛΟΥ :

«ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ»