

ΗΛΙΑ Β. ΝΤΖΙΩΡΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
αλγεβρα

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ ΑΘΗΝΑ 1979

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΗΛΙΑ Β. ΝΤΖΙΩΡΑ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ

ΑΘΗΝΑ 1979

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΝΑΤΑ Β. ΝΤΣΙΩΡΑ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑ 1979

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ

ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΤΟΥ ΠΕΑΝΟ - ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ

* Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο Ι

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΠΟ ΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ ΚΑΙ ΤΑ ΣΥΝΟΛΑ

ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΙΣ ΚΑΙ ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΕΙΣ

Σκοπός αὐτοῦ τοῦ Κεφαλαίου εἶναι νά ἐπαναλάβουμε τίς πιό βασικές ἔννοιες ἀπό τή Μαθηματική προτασιακή Λογική καί τά Σύνολα, πού μάθαμε στήν προηγούμενη τάξη, καί νά διευκρινίσουμε τή σημασία τῶν λογικῶν λέξεων καί συμβόλων, τά ὁποῖα πρόκειται νά χρησιμοποιήσουμε παρακάτω, ὥστε οἱ ὀρίσμοι καί οἱ προτάσεις πού ὑπάρχουν σ' αὐτό τό βιβλίο νά μποροῦν νά διατυπωθοῦν μέ συντομία καί μέ σαφήνεια.

§ 1. Προτασιακοί τύποι - Προτάσεις.— Οἱ ἔννοιες: *προτασιακός τύπος*, *πρόταση* μᾶς εἶναι γνωστές ἀπό τήν προηγούμενη τάξη. Ἐκεῖ μάθαμε ὅτι: Μία μαθηματική ἔκφραση πού περιέχει ἓνα σύμβολο x τή λέμε **προτασιακό τύπο τῆς μεταβλητῆς x** καί τήν παριστάνουμε μέ $p(x)$. *Αν τώρα στόν προτασιακό τύπο $p(x)$ ἀντικαταστήσουμε τή μεταβλητή (*ἀκαθόριστο σύμβολο*) x μέ μία συγκεκριμένη ἔννοια, ἔστω λ , τότε τήν ἔκφραση πού θά προκύψει τή λέμε **λογική πρόταση** ἢ ἀπλῶς **πρόταση** καί τήν παριστάνουμε μέ $p(\lambda)$ ἢ ἀπλούστερα μέ p .

Στά μαθηματικά καί γενικά στή λογική (κλασική λογική) μέ τόν ὅρο «**πρόταση**» ἐννοοῦμε μία ἔκφραση μέ αὐτοτελές νόημα, ἡ ὁποία ἐπιδέχεται ἕναν ἀ κ ρ ι β ῶ ς ἀπό τούς δύο χαρακτηρισμούς: «**ἀληθής**», «**ψευδής**» καί μέ τήν ἴδια πάντοτε σημασία.

Παράδειγμα. *Ἐστω ὁ προτασιακός τύπος:

$p(x)$: «ὁ x εἶναι ἄρτιος ἀριθμός».

*Ἡ πρόταση: $p(2)$: «ὁ 2 εἶναι ἄρτιος ἀριθμός» εἶναι **ἀληθής**, ἐνῶ ἡ πρόταση:

$p(3)$: «ὁ 3 εἶναι ἄρτιος ἀριθμός» εἶναι **ψευδής**.

Οἱ χαρακτηρισμοί *ἀληθής*, *ψευδής* λέγονται **τιμές ἀλήθειας** τῆς προτάσεως p καί συμβολίζονται μέ α , ψ ἀντιστοίχως. Τίς διάφορες (λογικές) προτάσεις, ὅπως ξέρουμε καί ἀπό τά μαθήματα τῆς προηγούμενης τάξεως, τίς παριστάνουμε γενικά μέ μικρά γράμματα τοῦ λατινικοῦ ἀλφαβήτου καί κατά προτίμηση μέ p , q , r , ...

Όταν τό περιεχόμενο μιᾶς προτάσεως p εἶναι ἀληθές, τότε λέμε ὅτι ἡ πρόταση ἔχει **τιμὴ ἀλήθειας** α καὶ γράφουμε $\tau(p) = \alpha$, ἐνῶ ὅταν τό περιεχόμενο τῆς p εἶναι ψευδές, τότε λέμε ὅτι ἡ p ἔχει **τιμὴ ἀλήθειας** ψ καὶ γράφουμε $\tau(p) = \psi$.
 Ὡστε:

$$\tau(p) \stackrel{*}{=}_{\text{ορσ}} \begin{cases} \alpha, & \text{ἂν } p \text{ ἀληθής} \\ \psi, & \text{ἂν } p \text{ ψευδής.} \end{cases}$$

Ἡ συγκεκριμένη ἔννοια λ , μέ τήν ὁποία ἀντικαθιστοῦμε τή μεταβλητή x τοῦ προτασιακοῦ τύπου $p(x)$ γιά νά προκύψει πρόταση, τή λέμε **τιμὴ** τῆς μεταβλητῆς. Τό σύνολο Ω τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς τό λέμε **σύνολο ἀναφορᾶς** τοῦ ἀντίστοιχου προτασιακοῦ τύπου καί τό σύνολο τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς, γιά τίς ὁποῖες ὁ προτασιακός τύπος γίνεται πρόταση ἀληθής, τό λέμε: **σύνολο τιμῶν ἀλήθειας** τοῦ προτασιακοῦ τύπου.

§ 2. Ποσοδείκτες.—Σύμφωνα μέ αὐτά πού εἶπαμε πιοῦ πάνω, ἂν ἡ μεταβλητή ἐνός προτασιακοῦ τύπου ἀντικατασταθεῖ μέ ἕνα ὀρισμένο στοιχεῖο τοῦ συνόλου ἀναφορᾶς του, τότε ὁ προτασιακός τύπος γίνεται μία (λογική) πρόταση. Εἶναι δυνατό ὁμως ἀπό ἕναν προτασιακό τύπο νά λάβουμε μία λογική πρόταση, ἂν τοῦ προτάξουμε διάφορες ἐκφράσεις, ὅπως: «*ὑπάρχει (τουλάχιστο) ἕνα...*», «*γιά μερικὰ*», «*γιά κάθε*», «*γιά ἕνα ἀκριβῶς*», «*γιά ἕνα τό πολύ*», «*γιά κανένα*» κ.ἄ., αὐτές λέγονται **ποσοδείκτες**. Ἀπό τοὺς πιοῦ πάνω ποσοδείκτες οἱ: «*ὑπάρχει (τουλάχιστο) ἕνα*» καί «*γιά κάθε*», ὅπως ξέρομε καί ἀπό τήν A' τάξη, ἔχουν ἰδιαίτερη σημασία στά Μαθηματικά καί λέγονται **ὑπαρξιακός**, καί ἀντίστοιχα **καθολικός**, **ποσοδείκτης**. Ὁ πρῶτος συμβολίζεται μέ τό σύμβολο $\exists$ καί ὁ δεῦτερος μέ τό $\forall$. Οἱ ποσοδείκτες, ὅπως εἶπαμε καί πιοῦ πάνω, μπαίνουν μπροστά ****** στοὺς προτασιακοὺς τύπους. Ἐτσι οἱ ἐκφράσεις:

α) « $\exists x \in \Omega, p(x)$ » (διαβάζουμε: «*ὑπάρχει (τουλάχιστο) ἕνα x στό Ω , ὥστε νά ἰσχύει $p(x)$* » ἢ καί ἄλλιῶς: «*γιά ἕνα (τουλάχιστο) $x \in \Omega$ ἰσχύει $p(x)$* »).

β) « $\forall x \in \Omega, p(x)$ » (διαβάζουμε: «*γιά κάθε $x \in \Omega$ ἰσχύει $p(x)$* ») εἶναι λογικές προτάσεις καί μάλιστα ἡ πρώτη λέγεται **ὑπαρξιακή** καί ἡ δεῦτερη **καθολική πρόταση**. Ἀπό αὐτά πού εἶπαμε, συμπεραίνουμε τώρα ὅτι: **Κάθε ὑπαρξιακή, καί ἀντίστοιχα κάθε καθολική, πρόταση εἶναι πάντοτε λογική πρόταση.**

Σημείωση. Ἡ ἐκφραση: «*ὑπάρχει ἀκριβῶς ἕνα*» ἢ ἄλλιῶς «*ὑπάρχει ἕνα καί μόνο ἕνα*» παριστάνεται συμβολικά μέ ἕνα ἀπό τὰ σύμβολα: « $\exists!$ », « $\exists'$ », « $\exists$ ».

§ 3. Λογικοί σύνδεσμοι—Σύνθετες προτάσεις.—Στή Μαθηματική Λογική, ὅπως καί στήν καθημερινή ὁμιλία, δέ χρησιμοποιοῦμε μόνο ἀπλές προτάσεις. Συνήθως τίς ἀπλές προτάσεις τίς συνδέουμε μεταξύ τους μέ διάφορες λέξεις καί ἐκφράσεις (συνδετικά), τίς ὁποῖες ὀνομάζουμε **λογικούς συνδέσμους**, καί σχηματίζουμε μ' αὐτό τόν τρόπο νέες (συνθετότερες) προτάσεις. Τίς προτάσεις αὐτές

* Τό σύμβολο $\stackrel{*}{=}_{\text{ορσ}}$ σημαίνει, ὅπου συναντᾶται ἐδῶ, «ἴσον ἐξ ὀρισμοῦ».

** Στά ἐπόμενα, γιά εὐκολία στό γράψιμο, οἱ ποσοδείκτες θά ἀκολουθοῦν πολλές φορές τοὺς προτασιακοὺς τύπους.

τίς λέμε **σύνθετες προτάσεις**. Στή λογική τών προτάσεων ὡς λογικοί σύνδεσμοι θεωροῦνται οἱ ἑξῆς ἑκφράσεις: «καί», «εἴτε», «ἤ», «ἂν . . . , τότε», «τότε καί μόνο τότε, ἂν»· ἐπίσης ἡ ἑκφραση «ὄχι (δέν)», ὅταν μπαίνει μπροστά ἀπό μία πρόταση. Ἀμέσως παρακάτω θά δοῦμε μέ ποιόν τρόπο ἐπιδροῦν στή σημασία τών προτάσεων οἱ λογικοί σύνδεσμοι.

§ 4. Πράξεις μεταξύ λογικῶν προτάσεων.— Ἐστω L τό σύνολο τῶν (ἀπλῶν) λογικῶν προτάσεων καί μία συνάρτηση τ μέ πεδίο ὀρισμοῦ τό σύνολο L καί πεδίο τιμῶν τό (διμελές) σύνολο $\{\alpha, \psi\}$, δηλαδή:

$$\tau: L \rightarrow \{\alpha, \psi\}: p \rightarrow \tau(p) \in \{\alpha, \psi\}.$$

Οἱ διάφοροι τρόποι, σύμφωνα μέ τούς ὁποίους συνδέονται οἱ ἀπλές προτάσεις γιά νά σχηματίσουν μία σύνθετη πρόταση, ἀποτελοῦν τίς **λογικές πράξεις** μεταξύ τῶν προτάσεων. Μέ τή βοήθεια, λοιπόν, τῶν λογικῶν συνδέσμων ἐφοδιάζουμε τό σύνολο L τῶν ἀπλῶν προτάσεων μέ λογικές πράξεις. Εἶναι φανερό τώρα ὅτι γιά κάθε σύνθετη πρόταση ὀρίζεται ἀκριβῶς μία τιμή στό $\{\alpha, \psi\}$. Ἡ τιμή τῆς σύνθετης προτάσεως στό $\{\alpha, \psi\}$, ἡ ὁποία λέγεται καί **τιμή ἀλήθειας τῆς σύνθετης προτάσεως**, ὀρίζεται ἐπακριβῶς ἀπό, τίς τιμές ἀλήθειας τῶν ἀπλῶν προτάσεων πού τήν ἀποτελοῦν καί ἀπό τόν τρόπο πού συνδέονται αὐτές γιά τό σχηματισμό τῆς σύνθετης προτάσεως.

Οἱ θεμελιώδεις λογικές πράξεις καί οἱ τιμές ἀλήθειας τῶν σύνθετων προτάσεων πού σχηματίζονται μ' αὐτό τόν τρόπο, ὅπως ξέρουμε καί ἀπό τά μαθήματα τῆς προηγούμενης τάξεως, εἶναι οἱ ἑξῆς:

1. Σύζευξη. Σύζευξη δύο προτάσεων p, q ὀνομάζουμε τήν πρόταση « p καί q », (συμβολικά « $p \wedge q$ »), τήν ὁποία δεχόμαστε ἀληθῆ, μόνο ὅταν καί οἱ δύο προτάσεις p, q εἶναι ἀληθεῖς, καί ψευδῆ σέ κάθε ἄλλη περίπτωση· δηλαδή:

$$\tau(p \wedge q) \stackrel{\text{ορσ}}{=} \begin{cases} \alpha, & \text{ἂν } \tau(p) = \alpha = \tau(q) \\ \psi, & \text{σέ κάθε ἄλλη περίπτωση} \end{cases} \quad (1)$$

2. Ἐγκλειστική διάζευξη. Ἐγκλειστική διάζευξη δύο προτάσεων p, q ὀνομάζουμε τήν πρόταση « p εἴτε q » (συμβολικά « $p \vee q$ »), τήν ὁποία δεχόμαστε ψευδή μόνο ὅταν καί οἱ δύο προτάσεις p, q εἶναι ψευδεῖς, καί ἀληθῆ σέ κάθε ἄλλη περίπτωση· δηλαδή:

$$\tau(p \vee q) \stackrel{\text{ορσ}}{=} \begin{cases} \psi, & \text{ἂν } \tau(p) = \psi = \tau(q) \\ \alpha, & \text{σέ κάθε ἄλλη περίπτωση} \end{cases} \quad (2)$$

3. Ἀποκλειστική διάζευξη. Ἀποκλειστική διάζευξη δύο προτάσεων p, q ὀνομάζουμε τήν πρόταση « p ἤ q » ἢ ἄλλιῶς «ἤ μόνο p ἤ μόνο q » (συμβολικά « $p \vee q$ »), τήν ὁποία δεχόμαστε ψευδή, ὅταν οἱ δύο προτάσεις p καί q ἔχουν τήν ἴδια τιμή ἀλήθειας, καί ἀληθῆ, ὅταν οἱ p καί q ἔχουν διαφορετικές τιμές ἀλήθειας.

δηλαδή :

$$\tau(p \vee q) \stackrel{\text{ορσ}}{=} \begin{cases} \psi, & \text{αν } \tau(p) = \tau(q) \\ \alpha, & \text{αν } \tau(p) \neq \tau(q) \end{cases} \quad (3)$$

4. Άρνηση. Άρνηση μιᾶς προτάσεως p ονομάζουμε τήν πρόταση « $\text{όχι } p$ » (συμβολικά « $\sim p$ »), τήν οποία δεχόμαστε αληθή, όταν ή p είναι ψευδής, καί ψευδή όταν ή p είναι αληθής· δηλαδή:

$$\tau(\sim p) \stackrel{\text{ορσ}}{=} \begin{cases} \alpha, & \text{αν } \tau(p) = \psi \\ \psi, & \text{αν } \tau(p) = \alpha \end{cases} \quad (4)$$

Άπό τήν (4) συμπεραίνουμε ὅτι οἱ τιμές ἀλήθειας τῶν p καί $\sim p$ εἶναι πάντοτε ἀντίθετες.

5. Συνεπαγωγή. Συνεπαγωγή δύο προτάσεων p, q ονομάζουμε τήν πρόταση « $\text{αν } p, \text{ τότε } q$ » ή ἀλλιῶς « p συνεπάγεται q » (συμβολικά « $p \Rightarrow q$ »), τήν οποία δεχόμαστε ψευδή, μόνο όταν ή p εἶναι αληθής καί ή q ψευδής, καί αληθή σέ κάθε ἄλλη περίπτωση· δηλαδή:

$$\tau(p \Rightarrow q) \stackrel{\text{ορσ}}{=} \begin{cases} \psi, & \text{αν } \tau(p) = \alpha \text{ καί } \tau(q) = \psi \\ \alpha, & \text{σέ κάθε ἄλλη περίπτωση} \end{cases} \quad (5)$$

Παρατηρήσεις: α). Ἄλλοι τρόποι διατυπώσεως τῆς συνεπαγωγῆς $p \Rightarrow q$ εἶναι καί οἱ ἑξῆς:

1. « p εἶναι ἱκανή συνθήκη γιά q »
2. « q εἶναι ἀναγκαία συνθήκη γιά p ».

β). Ἄν ή πρόταση p εἶναι ψευδής, τότε ή συνεπαγωγή $p \Rightarrow q$ εἶναι πάντοτε ἀληθής γιά κάθε τιμή ἀλήθειας τῆς προτάσεως q . Ἄν ὁμως ή συνεπαγωγή $p \Rightarrow q$ εἶναι ἀληθής, τότε δέν ἔπεται ὅτι ὅπωςδήποτε οἱ προτάσεις p καί q εἶναι ἀληθεῖς.

γ). Ἡ συνεπαγωγή $q \Rightarrow p$ λέγεται ἀντίστροφη τῆς: $p \Rightarrow q$ καί ή συνεπαγωγή: $\sim p \Rightarrow \sim q$ λέγεται ἀντίθετη τῆς: $p \Rightarrow q$. Τέλος ή συνεπαγωγή: $\sim q \Rightarrow \sim p$ λέγεται ἀντιστροφoαντίθετη τῆς: $p \Rightarrow q$.

6. Λογική ἰσοδυναμία. Λογική ἰσοδυναμία δύο προτάσεων p, q ονομάζουμε τήν πρόταση « p τότε καί μόνο τότε, ἂν q » ή ἀλλιῶς « p συνεπάγεται q καί ἀντιστρέφως» (συμβολικά « $p \Leftrightarrow q$ »), τήν οποία δεχόμαστε αληθή, μόνο όταν καί οἱ δύο προτάσεις p, q ἔχουν τήν ἴδια τιμή ἀλήθειας, καί ψευδή, όταν οἱ p καί q ἔχουν διαφορετικές τιμές ἀλήθειας· δηλαδή:

$$\tau(p \Leftrightarrow q) \stackrel{\text{ορσ}}{=} \begin{cases} \alpha, & \text{αν } \tau(p) = \tau(q) \\ \psi, & \text{αν } \tau(p) \neq \tau(q) \end{cases} \quad (6)$$

Άπό τόν ὀρισμό τῆς ἰσοδυναμίας εὐκόλα διαπιστώνουμε τώρα ὅτι:

1. $p \Leftrightarrow p$, 2. $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$, 3. $(p \Leftrightarrow q \wedge q \Leftrightarrow r) \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$

Σημείωση: Όταν θέλουμε νά δηλώσουμε ότι ή ισοδυναμία $p \iff q$ δύο προτάσεων υπάρχει έξ όρισμού χρησιμοποιούμε τό σύμβολο $\iff$, δηλ. γράφουμε $p \iff q$.

Ανακεφαλαίωση. Οί τιμές αλήθειας τῶν προηγούμενων λογικῶν πράξεων (συνδέσεων) πού απορρέουν από τούς όρισμούς (1) - (6) αποδίδονται συνοπτικά μέ τόν ακόλουθο **πίνακα τιμῶν αλήθειας**:

p	q	Σύζευξη	Έγκλ. Διάζ.	Άπ. Διάζ.	Συνεπιγωγή	Ίσοδυναμία	Άρνηση	
		$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \underline{\vee} q$	$p \Rightarrow q$	$p \iff q$	$\sim p$	$\sim q$
α	α	α	α	ψ	α	α	ψ	ψ
α	ψ	ψ	α	α	ψ	ψ	ψ	α
ψ	α	ψ	α	α	α	ψ	α	ψ
ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	α	α	α	α

§ 5. Ταυτολογίες - ταυτολογικές ισοδυναμίες καί αντιλογίες.—Μία σύνθετη πρόταση, ή όποία σχηματίζεται από ένα «πεπερασμένο*» πλήθος απλῶν προτάσεων $p, q, r, \dots$, πού συνδέονται μεταξύ τούς μέ τά σύμβολα (λογικούς συνδέσμους) $\wedge, \vee, \underline{\vee}, \sim, \Rightarrow$ καί $\iff$ τήν ονομάζουμε, όπως μάθαμε καί στην προηγούμενη τάξη, **λογικό τύπο**. Έτσι, λ.χ., ή έκφραση:

$[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$ είναι ένας λογικός τύπος.

Δίνουμε τώρα τούς ακόλουθους όρισμούς:

1. Θά λέμε ότι ένας λογικός τύπος P είναι ταυτολογία, τότε καί μόνο τότε, αν έχει τιμή αλήθειας α για κάθε συνδυασμό τιμῶν αλήθειας τῶν προτάσεων πού τόν συνθέτουν.

Αν P είναι μία ταυτολογία, τότε γράφουμε: $\vdash P$ καί διαβάζουμε: ή πρόταση P είναι ταυτολογία.

Όρισμένες ταυτολογίες, έπειδή έχουν καθολική ισχύ, λέγονται **άρχές ή νόμοι**. Τέτοιες ταυτολογίες είναι οί **νόμοι τοῦ Ἀριστοτέλη**:

1. **Νόμος τῆς ταυτότητας:** $\vdash p \Rightarrow p$
2. **Νόμος τῆς μή αντιφάσεως:** $\vdash \sim[p \wedge (\sim p)]$
3. **Νόμος τοῦ αποκλεισμοῦ τοῦ τρίτου:** $\vdash p \underline{\vee} (\sim p)$.

Σημείωση. Φραστικά οί δύο τελευταίοι νόμοι διατυπώνονται ως εξής:

Νόμος τῆς μή αντιφάσεως: «μία πρόταση καί ή άρησή της δέν μπορεί νά είναι καί οί δύο αληθείς». Νόμος τοῦ αποκλεισμοῦ τοῦ τρίτου: «κάθε πρόταση καί ή άρησή της αποκλείονται άμοιβαία».

***Άλλες άξιόλογες ταυτολογίες είναι καί οί εξής:**

4. $p \iff \sim(\sim p)$ (νόμος διπλῆς άρνήσεως)
5. $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ (νόμος συλλογισμοῦ).

2. Θά λέμε ότι ένας λογικός τύπος P είναι ταυτολογικά ισοδύναμος μέ έναν

* δηλ. τό πλήθος τούς νά εκφράζεται μέ ένα φυσικό άριθμό (≥ 2).

άλλο λογικό τύπο Q , και θα γράφουμε $P \equiv Q$, τότε και μόνο τότε, αν έχουν πάντοτε την ίδια τιμή αλήθειας, δηλ. αν η ισοδυναμία $P \iff Q$ είναι ταυτολογία.

Από τον ορισμό αυτό συνάγεται ότι οι συμβολισμοί: $P \equiv Q$ και $\vdash (P \iff Q)$ είναι ταυτόσημοι. Ωστε:

$$P \equiv Q \iff \vdash (P \iff Q)$$

Παρατήρηση. Ο συμβολισμός $P \equiv Q$ δεν είναι ταυτόσημος με τον: $P \iff Q$, γιατί ο πρώτος δηλώνει ότι ο λογικός τύπος P βρίσκεται στη σχέση « $\equiv$ » με τον Q , ενώ $P \iff Q$ δηλώνει μία λογική πρόταση.

Αξιολογα παραδείγματα ισοδυναμιών, που είναι ταυτολογίες, είναι οι γνωστοί από την προηγούμενη τάξη **νόμοι του De Morgan**:

$$\sim (p \wedge q) \iff (\sim p) \vee (\sim q)$$

$$\sim (p \vee q) \iff (\sim p) \wedge (\sim q).$$

Τό ότι οι παραπάνω ισοδυναμίες είναι ταυτολογίες αποδεικνύεται με τη βοήθεια των αντίστοιχων πινάκων αλήθειας.

Σημείωση. Έπειδή $\vdash (P \iff Q)$ και $P \equiv Q$ είναι, όπως είπαμε πιο πάνω, ταυτόσημοι συμβολισμοί, γι' αυτό οι νόμοι του De Morgan μπορεί να διατυπωθούν και έτσι:

$$[\sim (p \wedge q)] \equiv [(\sim p) \vee (\sim q)], \quad [\sim (p \vee q)] \equiv [(\sim p) \wedge (\sim q)].$$

Αξιοσημείωτες επίσης είναι και οι γνωστές από την Α' τάξη ισοδυναμίες:

$$1. (p \implies q) \equiv (\sim p) \vee q$$

$$2. (p \iff q) \equiv [(\sim p) \vee q] \wedge [p \vee (\sim q)]$$

$$3. (p \underline{\vee} q) \equiv [(\sim p) \wedge q] \vee [p \wedge (\sim q)].$$

Παρατήρηση. Από τις τρεις τελευταίες ταυτολογίες συμπεραίνουμε ότι με τις λογικές πράξεις: $\sim, \vee, \wedge$ μπορούμε να εκφράσουμε τις άλλες λογικές πράξεις, δηλαδή τη συνεπαγωγή ($\implies$), την ισοδυναμία ($\iff$) και την αποκλειστική διάζευξη ($\underline{\vee}$). Έπομένως οποιοσδήποτε λογικός τύπος μπορεί να διατυπωθεί **μόνο** με τα τρία συνδετικά: $\wedge, \vee, \sim$.

Εξάλλου από τον πρώτο νόμο του De Morgan έχουμε: $p \wedge q \equiv \sim [(\sim p) \vee (\sim q)]$.

Άρα μπορούμε οποιοδήποτε λογικό τύπο να τον εκφράσουμε **μόνο** με τους λογικούς συνδέσμους: $\vee, \sim$.

3. Θά λέμε ότι ένας λογικός τύπος Q είναι αντίλογια (ή αλλιώς: αντίφαση), τότε και μόνο τότε, αν η άρνησή του $\sim Q$ είναι ταυτολογία, δηλαδή αν έχει τιμή αλήθειας ψ για κάθε συνδυασμό τιμών αλήθειας των προτάσεων που τον συνθέτουν.

Μία αντίλογια συμβολίζεται με πρόταση του συμβόλου: $\sim \vdash$.

Παράδειγμα. Νά δείξετε ότι ο λογικός τύπος $Q(p, q): (p \implies q) \iff (p \wedge \sim q)$ είναι αντίλογια.

Λύση. Αυτό συνάγεται άμεσα από τον ακόλουθο πίνακα:

p	q	$\sim q$	$p \implies q$	$p \wedge \sim q$	$Q(p, q)$	$\sim Q(p, q)$
α	α	ψ	α	ψ	ψ	α
α	ψ	α	ψ	α	α	ψ
ψ	α	ψ	α	ψ	ψ	α
ψ	ψ	α	α	ψ	ψ	α

Γενική παρατήρηση. Αυτά που μέχρι τώρα αναπτύξαμε σχετικά με το λογισμό των προτάσεων ισχύουν και για προτασιακούς τύπους (άνοιχτες προτάσεις), με τη μόνη διαφορά ότι ο χαρακτηρισμός «*αληθείας*» ή «*ψευδής*» θα αναφέρεται στο σύνολο τιμών της μεταβλητής ή των μεταβλητών των αντίστοιχων προτασιακών τύπων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ομάδα Α'. 1. Να βρείτε τις τιμές αλήθειας των ακόλουθων σύνθετων προτάσεων:

- α) $(5 > 7) \wedge (9 = 3^2)$, β) $(4 < 3) \vee (8 = 7 + 1)$, γ) $(17 = 8 + 7) \vee (5^2 = 25)$,
 δ) $(2 > 5) \implies (3 = 4)$, ε) $(2 > 5) \iff (4^2 = 9)$, στ) $(7 = 4 + 3) \iff (2 = 5)$.

2. Να βρείτε ποιές από τις επόμενες προτάσεις είναι ταυτολογίες και ποιές αντιλογίες:

- α) $[p \wedge (p \implies q)] \implies q$, β) $(p \vee q) \wedge [(\sim p) \wedge (\sim q)]$, γ) $p \vee (p \wedge q) \iff p$
 δ) $\sim(p \wedge q) \iff \sim[(\sim p) \vee (\sim q)]$, ε) $[p \vee (\sim p)] \wedge [q \vee (\sim q)]$.

3. Να αποδείξετε ότι $\forall p, \forall q$ και $\forall r$ από το σύνολο L ισχύουν:

- α) $[p \wedge (q \vee r)] \equiv [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$, β) $p \vee (p \wedge r) \equiv p \equiv p \wedge (p \vee r)$
 γ) $[(p \implies q) \wedge (r \implies q)] \equiv [(p \vee r) \implies q]$, δ) $[(p \vee q) \vee (p \wedge q)] \equiv (p \vee q)$
 ε) $[(p \wedge q) \vee [(\sim p) \wedge (\sim q)]] \equiv [p \iff q]$, στ) $[p \implies q] \equiv \sim[p \wedge (\sim q)] \equiv [(\sim p) \vee q]$.

Ομάδα Β'. 4. *Αν για κάθε πρόταση q είναι $\tau[(\sim p) \Rightarrow q] = \alpha$, να αποδείξετε ότι: $\tau(p) = \alpha$.

5. Να βρείτε τις τιμές αλήθειας $\tau(p)$, $\tau(q)$, αν είναι γνωστό ότι:

- α) $\tau[(p \implies q) \wedge (q \vee p)] = \alpha$, β) $\tau[(p \vee q) \wedge (q \implies p)] = \psi$.

6. *Αν $\tau(p \iff q) = \psi$, να βρείτε την τιμή αλήθειας $\tau(P)$, όπου το P παριστάνει μία από τις ακόλουθες (σύνθετες) προτάσεις:

- α) $[p \iff (\sim q)] \wedge [(\sim p) \iff q]$, β) $[p \implies (q \vee p)] \wedge [q \vee p]$.

§ 6. Η έννοια του συνόλου — Έννοιες συναφείς με αυτή.— α). Η

έννοια του **συνόλου** που μας είναι γνωστή από τις προηγούμενες τάξεις, είναι σήμερα μία από τις πιο βασικές και χρήσιμες έννοιες στα Μαθηματικά. Η έννοια αυτή, όπως ακριβώς και η έννοια της (άπλης) προτάσεως, θεωρείται στα Μαθηματικά ως «*αρχική*» έννοια, δηλαδή ως έννοια που δεν επιδέχεται όρισμό, ως έννοια που δεν μπορεί να αναχθεί σε άλλη έννοια.

Τή λέξη **σύνολο**, όπως μάθαμε και στην Α' τάξη, τη χρησιμοποιούμε όταν θέλουμε να αναφερθούμε σε αντικείμενα τελείως **ορισμένα** και «*διακεκριμένα**», που τα θεωρούμε ως μία «*ολότητα*».

*Ακριβολογώντας περισσότερο, μπορούμε να πούμε ότι:

Στά Μαθηματικά δεχόμαστε ότι επιτρέπεται «*πολλά*» αντικείμενα που είναι εντελώς καθορισμένα και διακεκριμένα μεταξύ τους να τα θεωρούμε ως ένα *νέο* αντικείμενο, που το λέμε το **σύνολο των αντικειμένων αυτών**.

Αυτά τα αντικείμενα τα λέμε συνήθως **στοιχεία** του συνόλου.

Μερικές φορές, κυρίως σε μερικά θέματα γεωμετρικής φύσεως, αντί για τον όρο «*σύνολο*» χρησιμοποιείται ο όρος «*χώρος*» και τότε αντί να λέμε στοιχείο του συνόλου, λέμε «*σημείο*» του χώρου.

* που ξεχωρίζουν το ένα από το άλλο.

Τά σύνολα συμβολίζονται συνήθως με τὰ κεφαλαῖα γράμματα: $A, B, \Gamma, \dots$ καί τὰ στοιχεῖα τους με τὰ μικρά γράμματα: $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

Γιά νά δηλώσουμε ὅτι τὸ στοιχεῖο x ἀνήκει στό σύνολο A , γράφουμε: $x \in A$. Ἐνῶ ὅταν τὸ στοιχεῖο x δέν ἀνήκει στό A , γράφουμε: $x \notin A$.

Γιά κάθε στοιχεῖο x καί κάθε σύνολο A ἰσχύει μία, καί μόνο μία, ἀπό τίς ἑξῆς δύο σχέσεις: $x \in A, x \notin A$.

β). Βασική ἰσότητα συνόλου. Σύμφωνα μέ ὅσα εἶπαμε παραπάνω, τὰ ἀντικείμενα πού προορίζονται νά ἀποτελέσουν ἓνα σύνολο, ὀφείλουν νά διακρίνονται τὸ ἓνα ἀπὸ τὸ ἄλλο. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι: ἂν πάρουμε δύο ὅποιαδήποτε ἀπ' αὐτὰ τὰ ἀντικείμενα, πρέπει νά μπορούμε νά ποῦμε μέ βεβαιότητα ὅτι τὰ ἀντικείμενα αὐτὰ εἶναι διαφορετικά μεταξύ τους ἢ ὄχι. Ἀκριβέστερα, ἂν α, β παριστάνουν δύο ὅποιαδήποτε στοιχεῖα ἑνὸς συνόλου Σ , τότε εἶναι βέβαιο καί μέ τήν ἴδια πάντοτε σημασία, ὅτι τὰ α καί β παριστάνουν ἢ δέν παριστάνουν τὸ ἴδιο στοιχεῖο τοῦ Σ . Ἔτσι, βλέπουμε ὅτι ἡ ἔννοια τοῦ συνόλου συνδέεται στενά μέ τήν ἔννοια μιᾶς «σχέσεως ἰσότητας» πού ὀρίζεται μεταξύ τῶν στοιχείων του, μέ τήν ὁποία μπορούμε νά τὰ διακρίνουμε. Αὐτὴ τήν ἰσότητα, πού τήν συμβολίζουμε μέ « $=$ », τή λέμε **βασική ἰσότητα** τοῦ συνόλου, γιὰ νά τήν ἀντιδιαστέλλουμε πρὸς κάθε ἄλλη «ἰσότητα» πού μπορεῖ νά εἰσαχθεῖ μεταξύ τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου. Ἔτσι, γιὰ νά δηλώσουμε ὅτι τὰ α καί β παριστάνουν τὸ ἴδιο στοιχεῖο ἑνὸς συνόλου Σ , γράφουμε $\alpha = \beta$, ἐνῶ ἂν τὰ α καί β δέν παριστάνουν τὸ ἴδιο στοιχεῖο τοῦ Σ , γράφουμε $\alpha \neq \beta$. Π.χ. στό σύνολο $\mathbb{N}$ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ἔχουμε:

$$7 = 5 + 2, \quad 5 = 4 + 1, \quad 3 \neq 2, \quad 8 \neq 5 + 4.$$

γ). Παραδείγματα: Ἀξιοσημεῖωτα σύνολα ἀριθμῶν, μέ τὰ ὁποία ἔχουμε ἤδη ἀσχοληθεῖ καί πού θά τὰ συναντήσουμε στὰ ἐπόμενα κεφάλαια, εἶναι τὰ ἀκόλουθα:

$\mathbb{N}$: τὸ σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν: $1, 2, 3, \dots$

$\mathbb{N}_0$: τὸ σύνολο τῶν ἀκεραίων τῆς ἀριθμητικῆς: $0, 1, 2, 3, \dots$

$\mathbb{Z}$: τὸ σύνολο τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν: $\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$

$\mathbb{Q}$: τὸ σύνολο τῶν ρητῶν ἀριθμῶν.

$\mathbb{R}$: τὸ σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

$\mathbb{R}^+, \mathbb{R}_0^+$: τὸ σύνολο τῶν θετικῶν, ἀντιστοίχως μὴ ἀρνητικῶν, πραγματικῶν ἀριθμῶν.

$\mathbb{C}$: τὸ σύνολο τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν.

§ 7. Τρόποι παραστάσεως ἑνὸς συνόλου.—Μάθαμε στὶς προηγούμενες τάξεις ὅτι ἓνα σύνολο εἶναι ἐντελῶς καθορισμένο ὅταν δίνονται ὅλα του τὰ στοιχεῖα εἴτε ὅταν δίνεται μία ιδιότητα πού χαρακτηρίζει τὰ στοιχεῖα του. Ἔτσι οἱ πιὸ συνηθισμένοι τρόποι παραστάσεως ἑνὸς συνόλου εἶναι:

α). Παράσταση συνόλου μέ ἀναγραφή τῶν στοιχείων του. Σ' αὐτὴ τήν περίπτωση ἀναγράφουμε ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου ἀνάμεσα σέ δυὸ ἀντικριστὰ ἄγκιστρα. Ὁ τρόπος βέβαια αὐτός δέν εἶναι πάντοτε πρακτικός καί γι' αὐτὸ μερικές φορές ἓνα σύνολο παριστάνεται μέ ἀναγραφή, μέσα σέ ἄγκιστρα, ὁρισμένων ἀπὸ τὰ στοιχεῖα του σέ συνδυασμὸ μέ τελείες (συνήθως τρεῖς) μέ τίς ὁποῖες ἀφήνουμε νά ἐννοηθοῦν ὅλα τὰ στοιχεῖα πού παραλείψαμε στήν

ἀναγραφή. Ἐτσι, π.χ., τὸ σύνολο $\mathbf{N}$ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν μπορεῖ νά παρασταθεῖ μέ: $\{1, 2, 3, \dots\}$.

Σημειώνουμε ἐδῶ ὅτι, ἐπειδὴ ἡ ἔννοια τοῦ συνόλου δέ συνεπάγεται καμιά διάταξη γιὰ τὰ στοιχεῖα του, μπορούμε κατὰ τὴν ἀναγραφή νά γράφουμε τὰ σύμβολα τῶν στοιχείων του μέ ὅποια τάξη θέλουμε.

β). Παράσταση συνόλου μέ περιγραφή χαρακτηριστικῆς ιδιότητος τῶν στοιχείων του. Ἐστω ἕνας προτασιακός τύπος $p(x)$ μέ σύνολο ἀναφορᾶς τὸ Ω . Τά διάφορα στοιχεῖα τοῦ Ω πού ἔχουν τὴν «ιδιότητα» p (δηλ. οἱ τιμές τῆς μεταβλητῆς, μέ τίς ὁποῖες ὁ προτασιακός τύπος γίνεται πρόταση ἀληθῆς) ἀποτελοῦν (προσδιορίζουν) ἕνα σύνολο. Τὸ σύνολο αὐτὸ συμβολίζεται ὡς ἐξῆς:

$\{x \in \Omega: x \text{ ἔχει τὴν ιδιότητα } p\}$ ἢ $\{x \in \Omega: p(x) \text{ ἀληθῆς}\}$ ἢ ἀπλούστερα, ὅταν εἶναι γνωστό ὅτι πρόκειται γιὰ τὸ σύνολο ἀναφορᾶς Ω , ἀπλῶς μέ: $\{x: p(x)\}$. Μέ τὴν παραπάνω σημασίαν θά θεωροῦμε στὰ ἐπόμενα τὸ συμβολισμό: $\{x \in \Omega: p(x)\}$. Ἐπομένως, ἂν $A = \{x \in \Omega: p(x)\}$, τότε ὁ προτασιακός τύπος $p(x)$ «περιγράφει» τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου A . Πράγματι:

$$(\forall x) x \in A \iff p(x) \text{ ἀληθῆς.}$$

Ἀξιοσημείωτα σύνολα πραγματικῶν ἀριθμῶν πού περιγράφονται μέ προτασιακοὺς τύπους εἶναι τὰ ἀκόλουθα, γνωστά ὡς **διαστήματα** πραγμ. ἀριθμῶν:

1. **Ἀνοικτὸ διάστημα μέ ἄκρα a, β ($a < \beta$):**

$$(a, \beta) = \{x \in \mathbf{R}: a < x < \beta\},$$



2. **Κλειστὸ διάστημα μέ ἄκρα a, β ($a < \beta$):**

$$[a, \beta] = \{x \in \mathbf{R}: a \leq x \leq \beta\},$$



3. **Ἡμι-ανοικτὸ ἀπὸ δεξιὰ μέ ἄκρα a, β ($a < \beta$):**

$$[a, \beta) = \{x \in \mathbf{R}: a \leq x < \beta\},$$



4. **Ἡμι-ανοικτὸ ἀπὸ ἀριστερά μέ ἄκρα a, β ($a < \beta$):**

$$(a, \beta] = \{x \in \mathbf{R}: a < x \leq \beta\}.$$



§ 8. Ἐπέκταση τῆς ἔννοιας τοῦ συνόλου. Σύνολα μονομελή. Τὸ κενὸ σύνολο.—Ἀπὸ τὸν τρόπο πού ἔχει χρησιμοποιηθεῖ μέχρι τώρα ἡ ἔννοια τοῦ συνόλου, συμπεραίνεται ὅτι κάθε σύνολο ἔχει δύο τουλάχιστο στοιχεῖα.

Στὴ Θεωρίαν τῶν Συνόλων εἰσάγουμε καὶ σύνολα πού ἔχουν ἕνα μόνο στοιχεῖο καὶ τὰ λέμε **μονομελῆ σύνολα** ἢ μέ μιά λέξη **μονοσύνολα**. Ἐνα τέτοιο σύνολο μέ (μοναδικό) στοιχεῖο τὸ α , συμβολίζεται μέ $\{\alpha\}$. Τονίζουμε ἐδῶ τὴν διαφορὰ πού ὑπάρχει ἀνάμεσα στὸ α καὶ στὸ $\{\alpha\}$: τὸ πρῶτο συμβολίζει ἕνα στοιχεῖο κάποιου συνόλου, ἐνῶ τὸ δεύτερο εἶναι σύνολο μέ μοναδικὸ στοιχεῖο τὸ α . Ἐτσι ἔχουμε: $\alpha \in \{\alpha\}$ καὶ $\alpha \neq \{\alpha\}$.

Τὸ κενὸ σύνολο. Ἐστω ἕνας προτ. τύπος $p(x)$, ὁ ὁποῖος γιὰ κάθε τιμὴ τῆς μεταβλητῆς x γίνεται ψευδὴς πρόταση, π.χ., ὁ προτασιακός τύπος:

$$p(x): x \text{ εἶναι φυσικὸς ἀριθμὸς διάφορος τοῦ } x.$$

Γεννᾶται τὸ ἐρώτημα: ποῖο εἶναι τότε τὸ σύνολο $\{x: p(x)\}$;

Είναι άμέσως φανερό ότι για κανένα $x \in \mathbb{N}$ δέ γίνεται αληθής πρόταση ό $p(x)$. Άρα τό $\{x: p(x)\}$ είναι ένα «σύνολο» μέ κανένα στοιχείο (!)

Τέτοιο επίσης είναι καί τό σύνολο: $\{x \in \mathbb{R}: x^2 + 1 \leq 0\}$.

Άπό τά προηγούμενα παραδείγματα γίνεται φανερή ή ανάγκη νά παραδεχθούμε ένα σύνολο πού νά μήν έχει κανένα στοιχείο. Αυτό τό σύνολο αντιστοιχεί στους προτ. τύπους $p(x)$, πού γίνονται ψευδείς προτάσεις για κάθε στοιχείο x τού συνόλου αναφοράς τους. Έτσι φθάνουμε νά δεχθούμε τήν ύπαρξη ενός καί μοναδικού συνόλου, πού δέν έχει στοιχεία (!) Αυτό τό λέμε, όπως ξέρουμε, «τό κενό σύνολο» καί τό παριστάνουμε μέ $\emptyset$ ή μέ $\{\}$.

Σημείωση. Δέν πρέπει νά συγχέουμε τά σύμβολα: $\{0\}$, $\{\emptyset\}$, $\emptyset$. Τά δύο πρώτα παριστάνουν άπό ένα μονομελές σύνολο μέ στοιχείο τό 0, αντίστοιχως τό $\emptyset$, ενώ τό τελευταίο παριστάνει τό κενό σύνολο. Επίσης σημειώνουμε ότι $\{0\} \neq 0$ (γιατί;).

§ 9. Συνθήκη καί ταυτότητα σέ σύνολο. — Κάθε προτασιακός τύπος $p(x)$, τού όποιου ή μεταβλητή x λαμβάνει ως τιμές τά στοιχεία ενός συνόλου A , λέγεται **συνθήκη στό A** . Θά λέμε ότι ένα στοιχείο a τού A ικανοποιεί τή συνθήκη $p(x)$, τότε καί μόνο τότε, αν ή πρόταση $p(x)$ είναι αληθής.

Μία συνθήκη $p(x)$, πού αληθεύει για κάθε $x \in A$, λέγεται **ταυτότητα στό A** . Έτσι, π.χ., ό προτ. τύπος $p(x)$: « $x^2 + 1 > 0$ » είναι ταυτότητα στό $\mathbb{R}$, έπειδή αυτός αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ενώ ό προτ. τύπος $q(x)$: « $x + 1 > 0$ » είναι συνθήκη στό $\mathbb{R}$, έπειδή αληθεύει μόνο για $x > -1$.

§ 10. Έννοια τού ύποσυνόλου. Ίσότητα δύο συνόλων. — Έστω ότι A καί B είναι δύο μή κενά σύνολα. Θά λέμε ότι «τό σύνολο A είναι ύποσύνολο τού B », ή (άλλιως) «τό A περιέχεται στό B », καί θά τό συμβολίζουμε μέ: $A \subseteq B$, τότε καί μόνο τότε, αν ή συνθήκη $x \in A$ συνεπάγεται τήν $x \in B$.

Γιά συντομία γράφουμε:

$$A \subseteq B \iff (\forall x: x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Άντί $A \subseteq B$ γράφουμε ισοδύναμα καί $B \supseteq A$. όποτε διαβάζουμε: B είναι **ύπερσύνολο** τού A ή τό B **περιέχει** τό A .

Τό $\emptyset$ θεωρείται ύποσύνολο κάθε συνόλου καί ύπερσύνολο μόνο τού ίδιου. δηλ. $\emptyset \subseteq B$ για κάθε σύνολο B καί μόνο $\emptyset \supseteq \emptyset$.

Η **ίσότητα** δύο συνόλων καί ή έννοια τού **γνήσιου ύποσυνόλου** (πού συμβολίζεται μέ C) όρίζονται, όπως ξέρουμε, ως έξης:

$$A = B \iff A \subseteq B \text{ καί } B \subseteq A$$

$$A \subset B \iff A \subseteq B \text{ καί } A \neq B.$$

Παρατήρηση. Πρέπει νά γίνεται διάκριση μεταξύ των συμβόλων « $\in$ », τό όποιο λέγεται σύμβολο τού **άνήκει σέ** ..., καί « $\subseteq$ », τό όποιο λέγεται σύμβολο **έγκλεισμού**. Γιατί τό $\in$ συσχετίζει στοιχείο μέ σύνολο, ενώ τό $\subseteq$ συσχετίζει σύνολο μέ σύνολο, καί στή Θεωρία των Συνόλων στοιχείο καί σύνολο παίζουν διαφορετικούς ρόλους.

§ 11. Δυναμοσύνολο ενός συνόλου.—Όταν δοθεί ένα σύνολο, μπορούμε να θεωρούμε τό σύνολο τών υποσυνόλων του. Τό σύνολο τών υποσυνόλων ενός συνόλου E συμβολίζεται μέ $\mathcal{P}(E)$. "Ωστε:

$$\mathcal{P}(E) = \{X: X \subseteq E\} = \{X: x \in X \Rightarrow x \in E\}.$$

Τό $\emptyset$ καί τό E είναι προφανώς υποσύνολα τοῦ E , ἄρα είναι στοιχεῖα τοῦ $\mathcal{P}(E)$. Ἐπομένως ἰσχύουν: $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$ καί $E \in \mathcal{P}(E)$.

Ἐξάλλου ἔχουμε τίς λογικές ἰσοδυναμίες:

$$A \in \mathcal{P}(E) \iff A \subseteq E$$

$$\{\alpha\} \in \mathcal{P}(E) \iff \alpha \in E.$$

Σημείωση. Ὁ παρακάτω πίνακας κινεῖ τήν προσοχή μας σ' ἕναν τύπο, ὁ ὁποῖος συσχετίζει τόν ἀριθμό τών υποσυνόλων ενός συνόλου μέ τόν ἀριθμό, πού ἐκφράζει τό πλῆθος τών στοιχείων τοῦ συνόλου. Τόν ἀριθμό, πού ἐκφράζει τό πλῆθος τών στοιχείων ενός συνόλου E , ὅπως ξέρομε καί ἀπό τίς προηγούμενες τάξεις, τόν ὀνομάζουμε **πληθικό ἀριθμό** καί τόν συμβολίζουμε μέ $v(E)$.

σύνολο E	$v(E)$	Ὑποσύνολα τοῦ E	$v(\mathcal{P}(E))$
$\emptyset$	0	$\emptyset$	$1 (= 2^0)$
$\{\alpha\}$	1	$\emptyset, \{\alpha\}$	$2 (= 2^1)$
$\{\alpha, \beta\}$	2	$\emptyset, \{\alpha\}, \{\beta\}, \{\alpha, \beta\}$	$4 (= 2^2)$
$\{\alpha, \beta, \gamma\}$	3	$\emptyset, \{\alpha\}, \{\beta\}, \{\gamma\}, \{\alpha, \beta\}, \{\alpha, \gamma\}, \{\beta, \gamma\}, \{\alpha, \beta, \gamma\}$	$8 (= 2^3)$
$\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$	4	$\emptyset, \{\alpha\}, \{\beta\}, \{\gamma\}, \{\delta\}, \{\alpha, \beta\}, \{\alpha, \gamma\}, \{\alpha, \delta\}, \{\beta, \gamma\}, \{\beta, \delta\}, \{\gamma, \delta\}, \{\alpha, \beta, \gamma\}, \{\alpha, \beta, \delta\}, \{\alpha, \gamma, \delta\}, \{\beta, \gamma, \delta\}, \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$	$16 (= 2^4)$

*Από τούς ἀριθμούς τῆς τελευταίας στήλης τοῦ παραπάνω πίνακα ὀδηγούμαστε στήν ἐκκασία ὅτι: *ἕνα σύνολο μέ k στοιχεῖα ἔχει 2^k υποσύνολα.*

Ἰσοδύναμα ἀποδεικνύεται ὅτι: *Ἄν τό σύνολο E ἔχει k στοιχεῖα ($k \in \mathbb{N}_0$), τότε τό σύνολο $\mathcal{P}(E)$ τών υποσυνόλων του θά ἔχει 2^k στοιχεῖα.*

Δηλαδή:

$$v(E) = k \Rightarrow v(\mathcal{P}(E)) = 2^k$$

Γι' αὐτό, τό σύνολο $\mathcal{P}(E)$ λέγεται καί **δυναμοσύνολο** τοῦ E καί συμβολίζεται πολλές φορές στή διεθνή βιβλιογραφία μέ 2^E .

§ 12. Βασικό σύνολο ἢ σύνολο ἀναφορᾶς.—Στά μαθηματικά προκειμένου νά ἐπεξεργασθοῦμε ἕνα θέμα ξεκινᾶμε ἀπό ἕνα ὀρισμένο σύνολο, ἔστω $\Omega \neq \emptyset$, καί κατόπιν μέ βάση τά στοιχεῖα του καί τά διάφορα ὑποσύνολά του προχωροῦμε στήν ἀνάπτυξη τοῦ θέματος. Ἐνα τέτοιο σύνολο Ω , πού τά στοιχεῖα του καί τά ὑποσύνολά του ἐμφανίζονται ἀποκλειστικά κατά τήν ἐπεξεργασία τοῦ θέματος λέγεται **βασικό σύνολο ἢ σύνολο ἀναφορᾶς** (ἐπειδή σ' αὐτό κατά τήν ἐπεξεργασία τοῦ θέματος, ἀναφέρονται ὅλα τά ἄλλα σύνολα).

Τό βασικό σύνολο γενικά διαφέρει από θέμα σέ θέμα. Πολλές φορές μάλιστα δέν αναφέρουμε ιδιαίτερα τό βασικό σύνολο, αν αυτό καθορίζεται από τό περιεχόμενο του θέματος.

Σημείωση. Σ' ένα διάγραμμα του Venn τό βασικό σύνολο παριστάνεται συνήθως μέ ὀρθογώνιο, ὁπότε κάθε ὑποσύνολό του πρέπει νά σχεδιάζεται μέσα σ' αὐτό τό ὀρθογώνιο.

§ 13. Καρτεσιανό γινόμενο συνόλων. — Ἀς θεωρήσουμε δύο μή κενά σύνολα A καί B ὡς ὑποσύνολα ενός βασικοῦ συνόλου Ω . Ἀπό αὐτά τά δύο σύνολα σχηματίζεται (ὀρίζεται) ἕνα νέο σύνολο, τό ὁποῖο λέγεται **καρτεσιανό γινόμενο μέ πρώτη παράγοντα τό A καί δεύτερο παράγοντα τό B** καί συμβολίζεται μέ $A \times B$. Αὐτό τό καινούργιο σύνολο ὀρίζεται ὡς ἑξῆς:

$$A \times B \stackrel{\text{ορισ}}{=} \{(\alpha, \beta) : \alpha \in A \text{ καί } \beta \in B\}$$

Τό στοιχείο $(\alpha, \beta) \in A \times B$ λέγεται «διατεταγμένο ζεύγος». Τά στοιχεῖα α καί β τοῦ ζεύγους λέγονται ἀντιστοίχως *πρώτη* καί *δευτέρα συντεταγμένη* (ἢ *προβολή*) τοῦ ζεύγους. Ἡ *βασική ἰσότητα* ὀρίζεται στό $A \times B$ ὡς ἑξῆς:

$$(\alpha, \beta) = (\alpha', \beta') \stackrel{\text{ορισ}}{\iff} (\alpha = \alpha' \text{ καί } \beta = \beta').$$

Δεχόμαστε ἐξ ὀρισμοῦ ὅτι: ἂν $A = \emptyset$ εἴτε $B = \emptyset$, τότε $A \times B = \emptyset$.

Ἔχουμε τώρα τίς ἰσοδυναμίες:

$$A \times B = \emptyset \iff (A = \emptyset \text{ εἴτε } B = \emptyset)$$

$$A \times B \neq \emptyset \iff (A \neq \emptyset \text{ καί } B \neq \emptyset).$$

Στήν περίπτωση πού εἶναι $A = B$, τότε τό καρτεσιανό γινόμενο $A \times A$ συμβολίζεται μέ A^2 , ὁπότε τό σύνολο τῶν ζευγῶν (α, α) μέ $\alpha \in A$ συμβολίζεται μέ Δ καί λέγεται *ἡ διαγώνιος* τοῦ A^2 . Προφανῶς εἶναι: $\Delta \subseteq A^2$.

Ὑπενθυμίζουμε ἀκόμη ὅτι: **στό καρτεσιανό γινόμενο δύο συνόλων δέν ἐπιτρέπεται ἡ ἀντιμετάθεση τῶν παραγόντων**, δηλαδή, γενικά, εἶναι: $A \times B \neq B \times A$.

§ 14. Πράξεις μεταξύ συνόλων.—Στά ἐπόμενα ὑποθέτουμε ὅτι τά σύνολα πού παίρνουμε εἶναι ὑποσύνολα ενός ὀρισμένου βασικοῦ συνόλου $\Omega \neq \emptyset$, δηλαδή στοιχεῖα τοῦ $\mathcal{P}(\Omega)$. Ὅπως ξέρουμε καί ἀπό τίς προηγούμενες τάξεις, μεταξύ τῶν στοιχείων τοῦ $\mathcal{P}(\Omega)$ μπορούμε νά ὀρίσουμε μερικές **πράξεις**.

Ὑπενθυμίζουμε μέ συντομία αὐτές τίς πράξεις:

α). Τομή δύο συνόλων. Σέ κάθε ζεύγος $(A, B) \in \mathcal{P}(\Omega) \times \mathcal{P}(\Omega)$ ἀντιστοιχεῖ ἕνα ὑποσύνολο τοῦ Ω , πού λέγεται **τομή** τῶν A καί B , συμβολίζεται μέ $A \cap B$ καί ὀρίζεται ὡς ἑξῆς:

$$A \cap B \stackrel{\text{ορισ}}{=} \{x \in \Omega : x \in A \text{ καί } x \in B\}.$$

Δύο σύνολα A καί B λέγονται **ξένα μεταξύ τους**, τότε καί μόνο τότε, ἂν $A \cap B = \emptyset$.

Τό κενό σύνολο εἶναι ξένο μέ ὁποιοδήποτε σύνολο A , ἐπεὶδὴ ἰσχύει:

$$A \cap \emptyset = \emptyset \quad \text{καί} \quad \emptyset \cap A = \emptyset.$$

β). Ένωση δύο συνόλων. Σέ κάθε ζεύγος $(A, B) \in \mathcal{P}(\Omega) \times \mathcal{P}(\Omega)$ αντι-στοιχεί ένα υποσύνολο του Ω , πού λέγεται **ένωση** τών συνόλων A και B , συμβολίζεται μέ $A \cup B$ και όρίζεται ώς έξης:

$$A \cup B \stackrel{\text{ορσ}}{=} \{x \in \Omega: x \in A \text{ είτε } x \in B\}.$$

Προφανώς έχουμε: $A \cup B = \emptyset \Rightarrow (A = \emptyset \text{ και } B = \emptyset)$.

Σημείωση. Έπενθυμίζουμε πώς τό «είτε» σημαίνει ότι ένα όποιοδήποτε στοιχείο x τής ένώσεως ανήκει ή μόνο στό A ή μόνο στό B ή ανήκει και στά δύο σύνολα A και B .

γ). Διαφορά δύο συνόλων (συνολοθεωρητική διαφορά). Σέ κάθε ζεύγος $(A, B) \in \mathcal{P}(\Omega) \times \mathcal{P}(\Omega)$ αντιστοιχεί ένα υποσύνολο του Ω , πού λέγεται **διαφορά του συνόλου B από τό σύνολο A** , συμβολίζεται μέ $A - B$ και όρίζεται ώς έξης:

$$A - B \stackrel{\text{ορσ}}{=} \{x \in \Omega: x \in A \text{ και } x \notin B\}$$

Είναί προφανές ότι γιά όποιοδήποτε σύνολο A έχουμε:

$$A - A = \emptyset, \quad A - \emptyset = A \quad \text{και} \quad \emptyset - A = \emptyset.$$

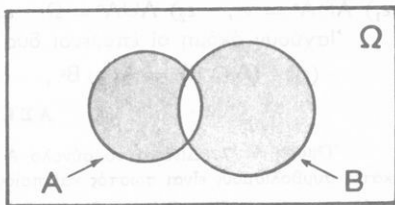
δ). Συμμετρική διαφορά δύο συνόλων. Σέ κάθε ζεύγος $(A, B) \in \mathcal{P}(\Omega) \times \mathcal{P}(\Omega)$ αντιστοιχεί ένα υποσύνολο του Ω , πού λέγεται **συμμετρική διαφορά τών A και B** , συμβολίζεται μέ $A + B$ και όρίζεται ώς έξης:

$$A + B \stackrel{\text{ορσ}}{=} \{x \in \Omega: (x \in A \text{ και } x \notin B) \text{ είτε } (x \in B \text{ και } x \notin A)\}.$$

Άπό τόν πίο πάνω όρισμό συνάγουμε ότι: $A + B = (A - B) \cup (B - A)$.

Στό διάγραμμα του Venn, πού βρίσκεται δεξιά, παριστάνεται ή συμμετρική διαφορά $A + B$ από τό σκιασμένο μέρος τών συνόλων A και B .

Είναί φανερό ότι: αν $A \cap B = \emptyset$, τότε ισχύει: $A + B = A \cup B$.



ε). Συμπλήρωμα συνόλου. Όνομάζουμε **συμπλήρωμα ενός συνόλου A ως πρós τό υπερόνολο Ω** και τό συμβολίζουμε μέ A^c ή A' , τό σύνολο πού όρίζεται ώς έξης:

$$A^c \stackrel{\text{ορσ}}{=} \{x \in \Omega: x \notin A\} = \Omega - A.$$

Άμεση συνέπεια του πίο πάνω όρισμού είναι οί ισότητες:

$$\emptyset^c = \Omega \quad \text{και} \quad \Omega^c = \emptyset.$$

Έπίσης γιά όποιοδήποτε σύνολο A ισχύουν οί συνεπαγωγές:

$$\forall x, x \in A \Rightarrow x \notin A^c \quad \text{και} \quad \forall x, x \in A^c \Rightarrow x \notin A.$$

§ 15. Ιδιότητες των πράξεων των συνόλων.—Μεταξύ των πράξεων των συνόλων ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες (ταυτότητες στο $\mathcal{P}(\Omega)$), που μᾶς είναι γνωστές και από τὰ μαθήματα των προηγούμενων τάξεων:

α) τῆς τομῆς:

$$\alpha_1) A \cap B = B \cap A$$

$$\alpha_2) A \cap (B \cap \Gamma) = (A \cap B) \cap \Gamma$$

$$\alpha_3) A \cap A = A$$

$$\alpha_4) A \cap B \subseteq A, A \cap B \subseteq B$$

$$\alpha_5) A \subseteq B \iff A \cap B = A$$

β) τῆς ἐνώσεως :

$$\beta_1) A \cup B = B \cup A$$

$$\beta_2) A \cup (B \cup \Gamma) = (A \cup B) \cup \Gamma$$

$$\beta_3) A \cup A = A$$

$$\beta_4) A \subseteq A \cup B, B \subseteq A \cup B$$

$$\beta_5) A \subseteq B \iff A \cup B = B.$$

Ισχύουν ἀκόμη οι ἐπόμενες δύο ἐπιμεριστικές ιδιότητες:

$$A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$$

$$A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma).$$

Παρατήρηση. Οι ιδιότητες $(\alpha_1), (\beta_1)$ είναι γνωστές ὡς νόμοι τῆς ἀντιμεταθέσεως, οι $(\alpha_2), (\beta_2)$ ὡς νόμοι τῆς προσεταιριστικότητος καὶ οι $(\alpha_3), (\beta_3)$ ὡς νόμοι τοῦ ἀδυνάμου των πράξεων $\cup$ καὶ $\cap$. Τέλος, ἀπὸ τίς ιδιότητες $(\alpha_4), (\beta_4)$ προκύπτει ὅτι καθένα ἀπὸ τὰ σύνολα A, B εἶναι ὑπερσύνολο τῆς τομῆς $A \cap B$ καὶ ὑποσύνολο τῆς ἐνώσεως $A \cup B$, δηλαδή:

$$A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B, \quad A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B.$$

γ) τῆς διαφορᾶς :

$$\gamma_1) A - B = A \cap B^c$$

$$\gamma_2) A - B = (A \cup B) - B = A - (A \cap B)$$

$$\gamma_3) (A - B) \cap B = \emptyset, (A - B) \cup B = A \cup B$$

$$\gamma_4) A \subseteq B \iff A - B = \emptyset$$

δ) τῆς συμμετρικῆς διαφορᾶς:

$$\delta_1) A \dot{+} B = B \dot{+} A$$

$$\delta_2) A \dot{+} (B \dot{+} \Gamma) = (A \dot{+} B) \dot{+} \Gamma$$

$$\delta_3) A \dot{+} B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

$$\delta_4) A \cap (B \dot{+} \Gamma) = (A \cap B) \dot{+} (A \cap \Gamma)$$

ε) τοῦ συμπληρώματος :

$$\epsilon_1) A \cap A^c = \emptyset, \quad \epsilon_2) A \cup A^c = \Omega, \quad \epsilon_3) (A^c)^c = A, \quad \epsilon_4) A \subseteq B \iff B^c \subseteq A^c.$$

Ισχύουν ἀκόμη οι ἐπόμενοι δύο τύποι (νόμοι τοῦ De Morgan):

$$(\epsilon_5) (A \cap B)^c = A^c \cup B^c,$$

$$(\epsilon_6) (A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ (*)

Ομάδα Α'. 7. Δίνεται τό σύνολο $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$. Νά βρεῖτε ποίος ἀπὸ τοὺς παρακάτω συμβολισμούς εἶναι σωστός καὶ ποίος λαμβασμένος καὶ γιατί;

$$1) \{\alpha\} \in A, \quad 2) \alpha \subset A, \quad 3) \{\gamma\} \subset A, \quad 4) \{\alpha, \beta\} \in A, \quad 5) \{\emptyset, A, \{\alpha, \beta\}\} \subset A.$$

8. Τό δυναμοσύνολο ἐνός συνόλου E ἔχει 32 στοιχεῖα. Πόσα στοιχεῖα ἔχει τό E ;

9. Ἄν $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}$, νά προσδιορίσετε τοὺς πραγμ. ἀριθμούς x, y , ὥστε νά ἰσχύει:

$$\{x^2 - y^2, x + y\} \subseteq \{\alpha, \beta\}.$$

10. Ἐστω $A = \{x \in \mathbb{R} : -3 < x < 3\}$ καὶ $B = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 2\}$. Νά πάρете ἓνα ὀρθοκανονικὸ σύστημα ἀξόνων xOy καὶ νά παραστήσετε στό ἐπίπεδο xOy τὰ καρτεσιανὰ γινόμενα $A \times B, B \times A$.

Σημ. Ὑπενθυμίζουμε ὅτι ἓνα σύστημα ἀξόνων λέγεται ὀρθοκανονικό, ἂν εἶναι ὀρθογώνιο καὶ ἂν οἱ μονάδες, πού ἔχουν ὀρίσθῃ πάνω στοὺς ἀξονες, ἔχουν ἴσα μήκη.

* Ἀπὸ τίς προτεινόμενες γιὰ λύση ἀσκήσεις αὐτοῦ τοῦ Κεφαλαίου νά δοθοῦν δσες κατὰ τὴν κρίση τοῦ διδάσκοντος ἀρκοῦν γιὰ τὴν ἐμπέδωση κάθε ἐνότητος.

‘Ομάδα Β’. 11. *Αν A, B, Γ είναι υποσύνολα ενός βασικού συνόλου Ω , νά δείξετε ότι :

- 1) $A \cap (A \cup B) = A = A \cup (A \cap B)$,
- 2) $A - (B \cup \Gamma) = (A - B) \cap (A - \Gamma)$
- 3) $(A - B) \cup (A - B^c) = A$,
- 4) $A \dot{\cup} B = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$
- 5) $(A - B) - (A - \Gamma) = A \cap \Gamma \cap B^c$,
- 6) $A - (B - \Gamma) = (A - B) \cup (B \cap \Gamma)$.

12. Νά δείξετε ότι για όποιαδήποτε σύνολα A, B, Γ , στοιχεία του $\mathcal{P}(\Omega)$, ισχύουν:

- 1) $(A \cap B) \cap (A \cap \Gamma)^c = A \cap B \cap \Gamma^c$,
- 2) $A \dot{\cup} (A \cap B) = A - B$
- 3) $(A - B) \cup \Gamma = (A \cup \Gamma) \cap (B^c \cup \Gamma)$,
- 4) $A - (A - B) = A \cap B$
- 5) $A \subseteq B \iff \Gamma - B \subseteq \Gamma - A$,
- 6) $A - (B \cap \Gamma) = (A - B) \cup (A - \Gamma)$.

13. *Αν A, B, Γ, Δ είναι στοιχεία του $\mathcal{P}(\Omega)$, νά δείξετε ότι ισχύουν οι τύποι:

- 1) $A \subseteq \Gamma \wedge B \subseteq \Delta \implies A \times B \subseteq \Gamma \times \Delta$,
- 2) $A \times (B \cap \Gamma) = (A \times B) \cap (A \times \Gamma)$
- 3) $(A \times B) \cap (\Gamma \times \Delta) = (A \cap \Gamma) \times (B \cap \Delta)$,
- 4) $A \times (B \cup \Gamma) = (A \times B) \cup (A \times \Gamma)$
- 5) $(A - B) \times (\Gamma - \Delta) = (A \cap \Gamma) \cap (B^c \times \Delta^c)$,
- 6) $(A - B) \times \Gamma = (A \times \Gamma) - (B \times \Gamma)$.

14. *Αν A, B είναι υποσύνολα ενός βασικού συνόλου Ω , νά δείξετε ότι:

- 1) $A \subseteq B \iff \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$,
- 2) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$,
- 3) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$.

15. Νά δείξετε, ότι για όποιαδήποτε σύνολα A, B, Γ, Δ ισχύουν οι παρακάτω τύποι:

- 1) $(\Gamma \times \Delta) - (A \times B) = [(\Gamma - A) \times \Delta] \cup [\Gamma \times (\Delta - B)]$
- 2) $(A \times B)^c = (A^c \times B^c) \cup (A^c \times B) \cup (A \times B^c)$.

16. *Αν A, B, X, Ψ είναι στοιχεία του $\mathcal{P}(\Omega)$, νά αποδείξετε τις συνεπαγωγές:

- 1) $B \subseteq X \subseteq B \cup A^c \implies A \cap X = A \cap B$,
- 2) $A^c \cap B \subseteq \Psi \subseteq B \implies A \cup \Psi = A \cup B$.

17. *Αν A, B, Γ είναι δεδομένα σύνολα, νά βρείτε την ικανή και αναγκαία συνθήκη, ώστε νά υπάρχουν σύνολα X για τά όποια θά είναι: $A \cap X = B$ καί $A \cup X = \Gamma$. Κατόπιν νά προσδιορίσετε αὐτά τά σύνολα X συναρτήσει τῶν A, B, Γ .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ

ΑΞΙΩΜΑΤΑ PEANO—ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ἢ ΤΕΛΕΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ

§ 16. Εισαγωγή.—Γιὰ τούς διαφόρους κλάδους τῶν Μαθηματικῶν ἔχουν κατασκευασθεῖ συστήματα ἀπὸ «*χαρακτηριστικές*» (θεμελιώδεις) ιδιότητες, στίς ὁποῖες στηρίζεται ὁλόκληρη ἡ θεωρία. Ἔτσι, γιὰ κάθε κλάδο δίνεται ἓνας ἐλάχιστος ἀριθμός χαρακτηριστικῶν ιδιοτήτων, ἀπὸ τίς ὁποῖες κατόπιν προκύπτει ὁποιαδήποτε ἄλλη ιδιότητα. Δηλαδή, ἂν θεωρήσουμε ἀληθεῖς αὐτές τίς (χαρακτηριστικές) ιδιότητες, μπορούμε νά ἀποδείξουμε, μέ αὐστηρό μαθηματικό τρόπο, ὁποιαδήποτε ἄλλη ιδιότητα. Αὐτές τίς «χαρακτηριστικές» ιδιότητες τίς ὀνομάζουμε **ἀξιώματα**.

Στά Μαθηματικά γιὰ νά εἶναι ἓνα τέτοιο σύστημα ἀξιωμάτων «*παραδεκτό*», πρέπει νά ἔχει τὰ ἑξῆς τρία γνωρίσματα:

α). Νά εἶναι **πλήρες**, δηλαδή πρέπει νά στηρίζει καί νά καλύπτει ὁλόκληρη τή θεωρία γιὰ τήν ὁποία ἔχει κατασκευασθεῖ.

β). Νά εἶναι **ἀνεξάρτητο**, δηλ. δέν πρέπει κανένα ἀπὸ τὰ ἀξιώματά του νά εἶναι συνέπεια ἄλλων ἀξιωμάτων τοῦ συστήματος, καί

γ). Νά εἶναι **ἐλεύθερο ἀντιφάσεων**, δηλ. ἂν μία πρόταση εἶναι συνέπεια τῶν ἀξιωμάτων τοῦ συστήματος, δέν πρέπει καί ἡ ἄρνησή της νά εἶναι συνέπεια ἐπίσης τῶν ἴδιων ἀξιωμάτων. Μέ ἄλλα λόγια, ὅταν τό σύστημα αὐτό δέν ὀδηγεῖ σέ μία ἀντίφαση τῆς μορφῆς: «*p εἶναι ἀληθές καί p εἶναι ψευδές*».

Ἔνα τέτοιο σύστημα ἀξιωμάτων, μέ τό ὁποῖο εἰσάγονται στά Μαθηματικά οἱ φυσικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι τό ἑξῆς:

§ 17. Ἀξιώματα τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν κατὰ Peano*. — Οἱ φυσικοὶ ἀριθμοί, πού τό σύνολό τους συμβολίζουμε μέ $\mathbb{N}$, ἔχουν τίς ἀκόλουθες «*χαρακτηριστικές*» ιδιότητες (**ἀξιώματα**):

P₁: Ὑπάρχει ἓνας τουλάχιστο φυσικός ἀριθμός, ὁ 1, δηλ. $1 \in \mathbb{N}$.

P₂: Κάθε φυσικός ἀριθμός n ἔχει ἓναν «ἐπόμενο» φυσικό ἀριθμό, πού τόν συμβολίζουμε μέ $n + 1$, δηλ. ἂν $n \in \mathbb{N}$, τότε καί $n + 1 \in \mathbb{N}$.

P₃: Δέν ὑπάρχει φυσικός ἀριθμός πού νά ἔχει ἐπόμενο τόν 1, δηλ. γιὰ κάθε $n \in \mathbb{N}$ εἶναι $n + 1 \neq 1$.

P₄: Δέν ὑπάρχουν διαφορετικοὶ μεταξύ τους φυσικοὶ ἀριθμοὶ πού νά ἔχουν

* G. Peano (1858 - 1932). Ἱταλός μαθηματικός καί φιλόσοφος.

τόν ίδιο επόμενο, δηλ. αν $\mu \in \mathbb{N}$, $\nu \in \mathbb{N}$ και $\mu + 1 = \nu + 1$, τότε είναι $\mu = \nu$.

P_5 : "Αν για ένα υποσύνολο S του $\mathbb{N}$, ισχύουν:

(i) $1 \in S$,

(ii) αν $v \in S$, τότε και $(v+1) \in S$,

τότε το σύνολο S συμπίπτει με το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών, δηλ. $S = \mathbb{N}$.

Οι παραπάνω πέντε ιδιότητες $P_1 - P_5$ του συνόλου $\mathbb{N}$ είναι γνωστές ως: **τά αξιώματα του Peano** για το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών.

Τό αξίωμα P_5 λέγεται: «**ή αρχή της τέλει**ς (ή **μαθηματικής**) **επαγωγής**» και διατυπώνεται συμβολικά ως εξής:

$$\left(\begin{array}{l} 1 \in S \\ v \in S \Rightarrow v + 1 \in S \end{array} \right) \Rightarrow S = \mathbb{N}.$$

Σ' αυτή την αρχή στηρίζεται, όπως θά δούμε παρακάτω, μία γενική μέθοδος αποδείξεως που χρησιμοποιείται στα Μαθηματικά προκειμένου να αποδειχθεί ότι ένας προτ. τύπος $p(v)$, που εκφράζεται με τη βοήθεια κάποιου φυσικού αριθμού v , έχει ισχύ για όλες γενικά τις τιμές του φυσικού αριθμού v . Η μέθοδος αυτή είναι γνωστή ως: **μέθοδος αποδείξεως με τέλεια ή μαθηματική επαγωγή** ή αλλιώς: **μέθοδος της επαγωγικής αποδείξεως**.

Σχόλια: 1). Τό αξίωμα P_1 μάς εξασφαλίζει ότι τό σύνολο $\mathbb{N}$ είναι διάφορο από τό κενό, περιέχει τό φυσικό αριθμό ένα (συμβολικά: 1).

2). Τό αξίωμα P_2 δίνει τη γενική μέθοδο της κατασκευής των φυσικών αριθμών. Έτσι με αφετηρία τό φυσικό αριθμό 1 , γιά τόν οποιο έγινε λόγος στό προηγούμενο αξίωμα, κατασκευάζεται κάθε άλλος φυσικός αριθμός. "Αν τόν επόμενο του 1 συμβολίσουμε με 2 , τόν επόμενο του 2 με 3 , τόν επόμενο του 3 με 4 κ.ο.κ. θά έχουμε ότι:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, v, v + 1, \dots\}$$

Πράγματι, αν καλέσουμε S τό σύνολο $\{1, 2, 3, \dots, v, v + 1, \dots\}$, έχουμε: $S \subseteq \mathbb{N}$. Έξάλλου $1 \in S$ και αν $k \in S$, τότε θά είναι και $k + 1 \in S$, επειδή έτσι κατασκευάσαμε τό σύνολο S . Τότε όμως, σύμφωνα με την αρχή της τέλεις επαγωγής, θά είναι $\mathbb{N} = S = \{1, 2, \dots, v, v + 1, \dots\}$.

3). Από τά αξιώματα P_2 και P_3 συνάγεται ότι οι φυσικοί αριθμοί v και $v + 1$ είναι διαδοχικοί, δηλ. μεταξύ τους δέν υπάρχει άλλος φυσικός αριθμός, άρα κάθε φυσικός αριθμός έχει άκριβως έναν «επόμενο» (γιατί;). Έξάλλου γιά τό φυσικό αριθμό 1 έχουμε: $1 \leq v$ γιά κάθε $v \in \mathbb{N}$, γι'αυτό και ό 1 λέγεται ό **ελάχιστος από τούς φυσικούς αριθμούς** (δηλ. **μικρότερος απ' όλους τούς φυσικούς αριθμούς**).

4). Μέ = συμβολίζουμε στό P_4 τη «**βασική ισότητα**» στό $\mathbb{N}$, δηλαδή την ισότητα που επιτρέπει νά διακρίνουμε τά στοιχεία του $\mathbb{N}$ μεταξύ τους.

§ 18. Η μέθοδος αποδείξεως με μαθηματική ή τέλεια επαγωγή.—Πρίν διατυπώσουμε τό θεώρημα από τό όποιο απορρέει ή μέθοδος αποδείξεως με τέλεια επαγωγή (**μέθοδος της τέλεις επαγωγής**) θά αναφερθοϋμε σ' ένα παράδειγμα:

Παράδειγμα: Νά αποδείξετε ότι γιά κάθε φυσικό αριθμό n ισχύει ό τύπος:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2v - 3) + (2v - 1) = v^2 \quad (\tau)$$

Πράγματι: για $n = 1$ ο προηγούμενος τύπος γράφεται: $1 = 1^2$, το οποίο είναι αληθές. *Ας δεχθούμε τώρα ότι ο τύπος αυτός ισχύει για $n = k$ ($k \in \mathbb{N}$), δηλ. ότι ισχύει:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k-3) + (2k-1) = k^2$$

τότε, αν προσθέσουμε και στά δύο μέλη της τό $2k + 1$, θά έχουμε:

$$[1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1)] + (2k+1) = k^2 + (2k+1).$$

*Αλλά: $[1 + 3 + \dots + (2k-1)] + (2k+1) = 1 + 3 + \dots + [2(k+1)-3] + 2(k+1) - 1$.

Εξάλλου: $k^2 + (2k+1) = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$
καί επομένως: $1 + 3 + 5 + \dots + [2(k+1)-3] + [2(k+1)-1] = (k+1)^2$.

*Ωστε αποδείξαμε ότι: υποθέτοντας ότι ο τύπος (τ) ισχύει για $n = k$, αποδεικνύεται ότι αυτός ισχύει και για $n = k + 1$. Επομένως, επειδή ήδη έχει διαπιστωθεί ότι ο τύπος (τ) ισχύει για $n = 1$, θά ισχύει για $n = 2$. Ομοίως αφού ισχύει για $n = 2$, θά ισχύει ο (τ) και για τον επόμενο του, δηλ. για $n = 3$ και διαδοχικά για $n = 4, n = 5, \dots$, δηλ. για κάθε φυσικό αριθμό n .

Τό ακόλουθο θεώρημα θεμελιώνει την αποδεικτική μέθοδο, πού ακολουθήσαμε στο προηγούμενο παράδειγμα.

§ 19. Θεώρημα (πρώτη μορφή της τέλει επαγωγής).—*Αν $p(n)$ είναι ένας προτασιακός τύπος με σύνολο αναφοράς τό σύνολο N τών φυσικών αριθμών, τέτοιος ώστε :

α) νά είναι αληθής ή πρόταση $p(1)$, και

β) νά είναι αληθής ή πρόταση: $\forall k \in N, p(k) \Rightarrow p(k+1)$,

τότε (δηλ. όταν συμβαίνουν τά α) και β)) ο προτασιακός τύπος $p(n)$ είναι αληθής (ισχύει) για κάθε $n \in N$.

*Απόδειξη. *Εστω S τό σύνολο, τό οποίο περιγράφει ο προτασιακός τύπος $p(n)$, δηλαδή: $S = \{n \in N : p(n)\}$.

Γιά την απόδειξη του θεωρήματος αρκεί νά αποδείξουμε ότι τό σύνολο S έχει τίς ιδιότητες (i) και (ii) του αξιώματος P_5 του Peano. Πράγματι,

(i) $1 \in S$, γιατί ή πρόταση $p(1)$ είναι από την υπόθεση (α) αληθής. *Επίσης για κάθε $k \in S \Rightarrow p(k) \Rightarrow$ (από τη β)) $p(k+1) \Rightarrow (k+1) \in S$, δηλαδή: (ii) αν $n \in S$, τότε και $(n+1) \in S$.

Τότε όμως, σύμφωνα μέ τό αξίωμα P_5 του Peano, θά είναι $S = N$, δηλ. τό σύνολο τιμών αλήθειας του προτασιακού τύπου $p(n)$ είναι τό N , πού σημαίνει ότι ο $p(n)$ για κάθε $n \in N$ είναι μία πρόταση αληθής.

Σημείωση. *Η εφαρμογή της μεθόδου της μαθηματικής ή τέλει επαγωγής γίνεται στήν πράξη σέ τρία στάδια, ως εξής:

α). *Επαλήθευση. *Αποδεικνύουμε ότι ή πρόταση $p(1)$ είναι αληθής.

β). Βήμα από τό k στό $k + 1$. Θεωρούμε έναν (οποιοδήποτε) φυσικό αριθμό k και μέ την υπόθεση ότι ή πρόταση $p(k)$ είναι αληθής, αποδεικνύουμε, τότε, ότι και ή πρόταση $p(k+1)$ είναι αληθής.

γ). Συμπέρασμα. Συνδυάζοντας τά α) και β) συμπεραίνουμε, σύμφωνα μέ τό παραπάνω θεώρημα της τέλει επαγωγής, ότι: $p(n)$ αληθής (ισχύει) για κάθε $n \in N$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1η: Νά αποδείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύει ο τύπος:

$$p(n): \quad 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (1)$$

*Απόδειξη α) Για $n=1$ ή (1) γίνεται: $1 = \frac{1(1+1)}{2}$, αληθής.

β) *Ας δεχθούμε ότι η (1) ισχύει για $n=k$ ($k \in \mathbb{N}$), δηλ. ότι:

$$1+2+3+\dots+k = \frac{k(k+1)}{2} \quad (2)$$

Θα αποδείξουμε τώρα ότι η (1) ισχύει και για $n=k+1$, δηλ. ότι:

$$1+2+3+\dots+k+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \quad (3)$$

Πράγματι, αν προσθέσουμε και στα δύο μέλη της (2) τό $(k+1)$ έχουμε:

$$(1+2+3+\dots+k) + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}, \text{ δηλαδή η } (3) \text{ ισχύει.}$$

γ) **Συμπέρασμα**: Στο α) αποδείξαμε ότι $p(1)$ είναι αληθής. Στο β) αποδείξαμε ότι: αν $p(k)$ είναι αληθής, τότε και η πρόταση $p(k+1)$ είναι αληθής*. Συνεπώς, σύμφωνα με το θεώρημα της τέλει επαγωγής, η (1) ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

2η: *Αν α είναι ένας πραγμ. αριθμός με $\alpha \geq -1$, τότε για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύει:

$$q(n): \quad (1+\alpha)^n \geq 1+n\alpha \quad (\text{ανισότητα του Bernoulli}).$$

*Απόδειξη. α) Για $n=1$, η παραπάνω σχέση ισχύει ως ισότητα.

β) *Εστω ότι ισχύει για $n=k$ ($k \in \mathbb{N}$), δηλ. ότι:

$$(1+\alpha)^k \geq 1+k\alpha \quad (1)$$

Θα αποδείξουμε ότι ο $q(n)$ ισχύει και για $n=k+1$, δηλ. ότι:

$$(1+\alpha)^{k+1} \geq 1+(k+1)\alpha. \quad (2)$$

Πράγματι, αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της (1) επί $1+\alpha$ (τό $1+\alpha$ είναι μη αρνητικός αριθμός, επειδή $\alpha \geq -1$) έχουμε:

$$(1+\alpha)^{k+1} \geq (1+\alpha)(1+k\alpha) = 1+k\alpha+\alpha+k\alpha^2 \geq 1+(k+1)\alpha, \text{ γιατί: } k\alpha^2 \geq 0.$$

*Άρα η (2) ισχύει. Συνεπώς, σύμφωνα με το θεώρημα της τέλει επαγωγής, η ανισότητα του Bernoulli ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό n , (με την υπόθεση φυσικά ότι $\alpha \geq -1$).

***Ασκήση**. Νά εξετάσετε για ποιές τιμές των α και n ο προτ. τύπος $q(n)$ ισχύει με τό ίσον;

3η: Νά προσδιορίσετε ένα φυσικό αριθμό n_0 , ώστε να αληθεύει η συνεπαγωγή:

$$n \geq n_0 \Rightarrow 3^n > 100 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Λύση. *Εφαρμόζοντας την ανισότητα του Bernoulli με $\alpha=2$ έχουμε:

$$3^n = (1+2)^n \geq 1+2n.$$

Για να είναι $3^n > 100$ αρκεί: $1+2n > 100 \Leftrightarrow 2n > 99$ και $n \geq n_0 = 50 \Rightarrow 3^n > 100$.

***Αξιολόγηση παρατήρηση**. Πολλές φορές συμβαίνει ένας προτασιακός τύπος $p(n)$ να έχει ως σύνολο αναφοράς ένα γνήσιο υποσύνολο του συνόλου $\mathbb{N}$. Στην περίπτωση αυτή το θεώρημα της τέλει επαγωγής ισχύει (προφανώς) με την εξής όμως διατύπωση:

*Αν $p(n)$ είναι ένας προτασιακός τύπος με σύνολο αναφοράς τό $N_{n_0} = \{n \in \mathbb{N}: n \geq n_0\}$, όπου $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιος ώστε:

* Είναι φανερό ότι στην απόδειξη δεν έπαιξε ρόλο ποιός ήταν ο k .

α) να είναι αληθής η πρόταση $p(v)$, και

β) να είναι αληθής η πρόταση: $\forall k \in N_{v_0}, p(k) \Rightarrow p(k+1)$,

τότε ο προτασιακός τύπος $p(v)$ ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό v με $v \geq v_0$.

Εφαρμογή. Νά δείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό $v \geq 3$ ισχύει: $3^v > (v+1)^3$ (1)

***Απόδειξη.** α) Για $v_0 = 3$ ή (1) γίνεται: $3^3 > (3+1)^3$, δηλ. $27 > 16$, αληθής.

β) Έστω ότι για $v = k$ ($k \in N, k \geq 3$) ή (1) ισχύει, δηλ. ότι: $3^k > (k+1)^3$ (2)

Θά δείξουμε ότι ή (1) ισχύει καί για $v = k+1$, δηλ. ότι: $3^{k+1} > (k+2)^3$ (3)

Πράγματι, έπειδή από τή (2) έχουμε:

$$3 \cdot 3^k > 3(k+1)^3, \text{ δηλ. } 3^{k+1} > 3(k+1)^3 \quad (4)$$

άρκει να δείξουμε ότι: $3(k+1)^3 > (k+2)^3 \Leftrightarrow 3k^2 + 6k + 1 > k^2 + 4k + 4$, δηλ.

άρκει να δείξουμε ότι: $2k^2 + 2k > 1 \Leftrightarrow 2k(k+1) > 1$.

Η τελευταία όμως ανισότητα ισχύει, γιατί $k \geq 3$.

*Αρα ή (3) ισχύει. Συνεπώς, σύμφωνα με τήν προηγούμενη παρατήρηση, ή (1) ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό $v \geq 3$.

Σχόλια: 1) Η έπαλήθευση μιās προτάσεως για διάφορες διαδοχικές τιμές του φυσικού αριθμού v , π.χ. για $v = 1, 2, 3, \dots, v_0$ δέν άρκει για να συμπεράνουμε ότι ή πρόταση ισχύει για κάθε $v \in N$ (άτελής έπαγωγή)..

***Αντιπαράδειγμα:** "Αν v φυσικός αριθμός, τότε ο αριθμός $(v^2 + v + 41)$ είναι πρώτος;

*Εδω παρατηρούμε ότι για τίς πρώτες τριάντα έννιά τιμές του v ή πρόταση άληθεύει, δηλ. για $v = 1, 2, 3, \dots, 39$ ο αριθμός $(v^2 + v + 41)$ είναι πρώτος (δηλ. δέν έχει άλλο διαιρέτη έκτός από τόν έαυτό του καί τή μονάδα). όμως για $v = 40$ ο αριθμός: $40^2 + 40 + 41 = 41^2$ δέν είναι πρώτος.

2) Η απόδειξη μιās προτάσεως για $v = k+1$, με τήν προϋπόθεση ότι αυτή ισχύει για $v = k$ ($k \in N$), δέν εξασφαλίζει πάντοτε τήν άληθεια τής προτάσεως $\forall v \in N$. Πρέπει όπωσδήποτε να κάνουμε τήν έπαλήθευση για $v = 1$ (ή, αν δέν έχει νόημα για $v = 1$, πρέπει να κάνουμε τήν έπαλήθευση για $v = v_0$, όπου v_0 ο έλάχιστος φυσικός αριθμός για τόν όποιο έχει νόημα ή πρόταση).

***Αντιπαράδειγμα:** "Ας υποθέσουμε ότι ή ισότητα: « $v = v + 17$ » ισχύει για $v = k$, χωρίς να έχουμε προηγούμενως εξακριβώσει αν αυτή ισχύει για $v = 1$, δηλ. έστω ότι: $k = k + 17$. Μπορούμε, τότε, εύκολα να δείξουμε ότι αυτή ή ισότητα ισχύει καί για $v = k + 1$.

Πράγματι, έχουμε:

$$k = k + 17 \Leftrightarrow k + 1 = (k + 17) + 1 \Leftrightarrow k + 1 = (k + 1) + 17.$$

Αυτό όμως δέν άρκει για να συμπεράνουμε ότι ή ισότητα: $v = v + 17$ ισχύει για κάθε $v \in N$ (στό παράδειγμά μας μάλιστα διαπιστώνουμε άμέσως πώς δέν υπάρχει καμιά τιμή του v για τήν όποια άληθεύει ή ισότητα).

§ 20. Δεύτερη μορφή τής τέλειās ή μαθηματικής έπαγωγής.— Μία άλλη μορφή άποδεικτικής μεθόδου που στηρίζεται έπίσης στήν άρχή τής μαθηματικής έπαγωγής θεμελιώνεται με τό έπόμενο:

Θεώρημα (δεύτερη μορφή τής τέλειās έπαγωγής).— "Αν $p(v)$ είναι ένας προτασιακός τύπος με σύνολο άναφοράς τό σύνολο N τών φυσικών αριθμών τέτοιος, ώστε:

α) να είναι άληθείς οί προτάσεις: $p(1), p(2)$, καί

β) για κάθε $k \in N$ με $k > 2$, $p(k-2) \wedge p(k-1) \Rightarrow p(k)$,

τότε ο προτασιακός τύπος $p(v)$ είναι αληθής (ισχύει) για κάθε $v \in N$.

Υπόδειξη. Νά πάρετε τό σύνολο $S = \{v \in \mathbb{N} : v=1 \text{ ή } (p(v-2) \wedge p(v-1))\}$ καί νά αποδείξετε ὅτι τό S ἔχει τίς ιδιότητες (i) καί (ii) τοῦ αξιώματος P_5 τοῦ Peano. *Αρα...

Θά δώσουμε καί μία ἄλλη ἀπόδειξη τοῦ παραπάνω θεωρήματος, στηριζόμενοι ὅμως στήν ἐξῆς πρόταση πού ἀποδεικνύεται στά Μαθηματικά:

Πρόταση (ἀρχή) τοῦ ἐλάχιστου φυσικοῦ ἀριθμοῦ. — *Αν S εἶναι ἕνα μῆ κενό ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{N}$, τότε τό S ἔχει ἕνα ἐλάχιστο στοιχεῖο, δηλ. τότε ὑπάρχει ἕνας (ἀκριβῶς) φυσικός ἀριθμός $v_0 \in S$ μέ τήν ιδιότητα : $v_0 \leq v$ γιά κάθε $v \in S$.

Ἀπόδειξη τοῦ θεωρήματος. *Εστω T τό σύνολο, τό ὁποῖο περιγράφει ὁ προτ. τύπος : $\sim p(v)$, δηλαδή: $T = \{v \in \mathbb{N} : \sim p(v)\}$. Εἶναι φανερό πώς γιά κάθε $v \in T$ ἡ ἀντίστοιχη πρόταση $p(v)$ δέν εἶναι ἀληθής. Προφανῶς $1 \notin T$ καθώς καί $2 \notin T$. *Ας δεχτοῦμε ὅτι τό T δέν εἶναι τό κενό σύνολο· τότε, σύμφωνα μέ τήν παραπάνω πρόταση, τό T ἔχει ἐλάχιστο στοιχεῖο, ἔστω τό $v_0 \in T$. Τότε ἔχουμε: $v_0 > 2$ καί ἡ πρόταση $p(v_0)$ δέν εἶναι ἀληθής, ἐνῶ γιά κάθε $v \in \mathbb{N}$ μέ $v < v_0$ ἡ ἀντίστοιχη πρόταση $p(v)$ εἶναι ἀληθής. Εἶναι ὅμως: $2 \leq v_0 - 1 < v_0$ καί $1 \leq v_0 - 2 < v_0$ καί συνεπῶς οἱ προτάσεις $p(v_0 - 2)$ καί $p(v_0 - 1)$ εἶναι ἀληθεῖς. Τότε ὅμως, σύμφωνα μέ τήν ὑπόθεση β) τοῦ θεωρήματος, θά εἶναι ἀληθής ἡ $p(v_0)$ · αὐτό ὅμως εἶναι ἄτοπο, γιὰτί $v_0 \in T$. Εἶναι λοιπόν $T = \emptyset$ καί συνεπῶς ὁ $p(v)$ εἶναι ἀληθής (ισχύει) γιά κάθε $v \in \mathbb{N}$.

Σημείωση. Γιά νά ἀποδείξουμε μία πρόταση τῆς μορφῆς $(\forall v \in \mathbb{N}, p(v))$ στηριζόμενοι στό προηγούμενο θεώρημα, ἐκτελούμε τά ἐξῆς τρία βήματα:

- Ἀποδεικνύουμε ὅτι καθεμία ἀπό τίς προτάσεις $p(1)$ καί $p(2)$ εἶναι ἀληθής.
- Θεωροῦμε ἕνα (ὁποιοδήποτε) φυσικό ἀριθμό k , ($k > 2$), καί μέ τήν ὑπόθεση ὅτι καθεμία ἀπό τίς προτάσεις $p(k-2)$ καί $p(k-1)$ εἶναι ἀληθής, ἀποδεικνύουμε ὅτι καί ἡ πρόταση $p(k)$ εἶναι ἀληθής.
- Συνδυάζοντας τά α) καί β) συμπεραίνουμε, σύμφωνα μέ τό παραπάνω θεώρημα, ὅτι: $p(v)$ ἀληθής (ισχύει) γιά κάθε $v \in \mathbb{N}$.

Ἐφαρμογή. Νά ἀποδείξετε ὅτι γιά κάθε φυσικό ἀριθμό n ισχύει :

$$p(n) : (3 + \sqrt{5})^n + (3 - \sqrt{5})^n = \text{πολ. } 2^n.$$

Ἀπόδειξη. Θέτουμε $S_n = (3 + \sqrt{5})^n + (3 - \sqrt{5})^n$. Γιά $n=1$ καί $n=2$ ἔχουμε ἀντιστοιχῶς:

$$S_1 = (3 + \sqrt{5}) + (3 - \sqrt{5}) = 6 = 3 \cdot 2^1 = \text{πολ. } 2^1$$

$$S_2 = (3 + \sqrt{5})^2 + (3 - \sqrt{5})^2 = 28 = 7 \cdot 2^2 = \text{πολ. } 2^2.$$

*Αρα καθεμία ἀπό τίς προτάσεις $p(1)$ καί $p(2)$ εἶναι ἀληθής.

*Εστω ὅτι καθεμία ἀπό τίς προτάσεις $p(k-2)$ καί $p(k-1)$, ὅπου $k \in \mathbb{N}$ μέ $k > 2$, εἶναι ἀληθής, δηλαδή ἔστω ὅτι:

$$S_{k-2} = (3 + \sqrt{5})^{k-2} + (3 - \sqrt{5})^{k-2} = \text{πολ. } 2^{k-2} \quad \text{καί} \quad (1)$$

$$S_{k-1} = (3 + \sqrt{5})^{k-1} + (3 - \sqrt{5})^{k-1} = \text{πολ. } 2^{k-1} \quad (2)$$

Θά ἀποδείξουμε ὅτι καί ἡ πρόταση $p(k)$ εἶναι ἀληθής. Πράγματι, ἄς σχηματίσουμε τήν ἐξίσωση β' βαθμοῦ πού ἔχει ρίζες τούς ἀριθμούς: $x_1 = 3 + \sqrt{5}$ καί $x_2 = 3 - \sqrt{5}$.

Αὕτη εἶναι ἡ :

$$x^2 - 6x + 4 = 0$$

*Ἐχουμε τότε :

$$(3 + \sqrt{5})^2 - 6(3 + \sqrt{5}) + 4 = 0 \quad (3)$$

$$(3 - \sqrt{5})^2 - 6(3 - \sqrt{5}) + 4 = 0 \quad (4)$$

*Από τις (3) και (4), αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη τους με $x_1^{k-2} = (3 + \sqrt{5})^{k-2}$, $x_2^{k-2} = (3 - \sqrt{5})^{k-2}$, αντιστοίχως, λαμβάνουμε:

$$(3 + \sqrt{5})^k - 6(3 + \sqrt{5})^{k-1} + 4(3 + \sqrt{5})^{k-2} = 0 \quad (3')$$

$$(3 - \sqrt{5})^k - 6(3 - \sqrt{5})^{k-1} + 4(3 - \sqrt{5})^{k-2} = 0 \quad (4')$$

*Αν προσθέσουμε τις (3') και (4') κατά μέλη και λάβουμε υπόψη και τις (1) και (2), βρίσκουμε ότι:

$$S_k - 6S_{k-1} + 4S_{k-2} = 0$$

$$\text{*Αρα:} \quad S_k = 6S_{k-1} - 4S_{k-2} \quad (5)$$

*Η (5), αν λάβουμε υπόψη τις (1) και (2), γίνεται:

$$S_k = 6 \cdot \text{πολ } 2^{k-1} - 4 \cdot \text{πολ } 2^{k-2} = 3 \cdot \text{πολ } 2^k - \text{πολ } 2^k = \text{πολ } 2^k,$$

δηλ. η $p(k)$ είναι αληθής. Συνεπώς, σύμφωνα με τό προηγούμενο θεώρημα, ό $p(v)$ ισχύει. για κάθε $v \in \mathbb{N}$.

Παρατήρηση. Μερικές φορές συμβαίνει ένας προτασιακός τύπος $p(v)$ νά έχει ως σύνολο αναφοράς ένα γνήσιο υποσύνολο του $\mathbb{N}$. Τότε ή δεύτερη μορφή τής τέλειας έπαγωγής εφαρμόζεται ως εξής:

α). 'Αποδεικνύουμε τήν αλήθεια τών προτάσεων $p(v_0)$, $p(v_0 + 1)$, όπου $v_0 \in \mathbb{N}$.

β). 'Αποδεικνύουμε ότι ή αλήθεια τών $p(k)$ και $p(k + 1)$ συνεπάγεται τήν αλήθεια τής $p(k + 2)$, όπου k ό όποιοσδήποτε φυσικός αριθμός $\geq v_0$.

γ). 'Από τά (α) και (β) προκύπτει, τότε, ή αλήθεια τής $p(v)$ για κάθε φυσικό αριθμό $v \geq v_0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Όμάδα Α'. 18. Μέ τή μέθοδο τής μαθηματικής έπαγωγής νά αποδείξετε ότι για κάθε $v \in \mathbb{N}$ ισχύει:

α) $2 + 4 + 6 + \dots + 2v = v(v + 1)$

β) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + v^2 = \frac{1}{6} v(v + 1)(2v + 1)$

γ) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + v^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + v)^2 = \frac{1}{4} v^2(v + 1)^2$

δ) $2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + (2v)^3 = 2v^2(v + 1)^2$

ε) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + v(v + 1) = \frac{1}{3} v(v + 1)(v + 2)$

19. *Αν $0 < \alpha_i \neq 1$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$, νά αποδείξετε με έπαγωγή ότι:

$$(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \dots (1 + \alpha_n) > 2^n \cdot \sqrt[n]{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

20. Νά αποδείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό $v \geq 4$ ισχύει:

$$(i) \left(\frac{3}{2}\right)^v > v + 1, \quad (ii) 3^{v-1} > v^2, \quad (iii) \sqrt[3]{3} > \sqrt[v]{v}.$$

21. Μέ τή μέθοδο τής τέλειας έπαγωγής νά αποδείξετε ότι: αν $\alpha \in \mathbb{R}$ με $0 \leq \alpha \leq 1$, τότε για κάθε φυσικό αριθμό v ισχύει:

$$1) (1 - \alpha)^v \geq 1 - v\alpha,$$

$$2) (1 - \alpha)^v \leq \frac{1}{1 + v\alpha}.$$

22. *Αν $\alpha > 1$, νά αποδείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό $v \geq 2$ ισχύει:

$$0 < \sqrt[v]{\alpha} - 1 < \frac{1}{v} (\alpha - 1).$$

23. *Αν $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}^+$ και $\sigma_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$, νά αποδείξετε ότι:

$$(1) \quad (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \cdots (1 + \alpha_n) \geq 1 + \sigma_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(2) \quad (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \dots + \frac{1}{\alpha_n} \right) \geq n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

*Ομάδα Β'. 24. Νά αποδείξετε, εφαρμόζοντας την αρχή της τέλει επαγωγής, ότι: αν για ένα υποσύνολο K του συνόλου $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών ισχύουν:

(i) $1 \notin K$ και (ii) αν $n \notin K$, τότε και $(n+1) \notin K$,
τότε το K είναι το κενό σύνολο (δηλ. $K = \emptyset$).

25. Νά αποδείξετε ότι ο προτ. τύπος $p(n): 2 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1}$ δεν είναι αληθής, αν και από την αλήθεια της $p(k)$ συνεπάγεται η αλήθεια της $p(k+1)$. Κατόπιν νά αποδείξετε ότι η άρνηση του προτ. τύπου $p(n)$ είναι πρόταση αληθής για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

26. *Αν $\theta \in \mathbb{R}$ με $\theta \geq 1$, τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, νά αποδείξετε ότι ισχύει:

$$(i) \quad \theta^n \geq n(\theta-1), \quad (ii) \quad \theta^{n+1} \geq (n+1)\theta - n.$$

27. Μέ τη μέθοδο της τέλει επαγωγής νά αποδείξετε ότι ο αριθμός:

$$\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

είναι φυσικός για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

28. *Αν $\alpha^2 - \beta^2 \cdot \gamma = \text{πολ.4}$, όπου $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$ με $\gamma \geq 0$, τότε νά αποδείξετε, εφαρμόζοντας τη δεύτερη μορφή της τέλει επαγωγής, ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει:

$$S_n \equiv (\alpha + \beta\sqrt{\gamma})^n + (\alpha - \beta\sqrt{\gamma})^n = \text{πολ. } 2^n.$$

$$S_n = (\alpha + \beta\sqrt{\gamma})^n + (\alpha - \beta\sqrt{\gamma})^n$$

$$S_n = (\alpha + \beta\sqrt{\gamma})^n + (\alpha - \beta\sqrt{\gamma})^n$$

$$S_n = (\alpha + \beta\sqrt{\gamma})^n + (\alpha - \beta\sqrt{\gamma})^n$$

$$S_n = (\alpha + \beta\sqrt{\gamma})^n + (\alpha - \beta\sqrt{\gamma})^n$$

$$S_n = (\alpha + \beta\sqrt{\gamma})^n + (\alpha - \beta\sqrt{\gamma})^n$$

$$S_n = (\alpha + \beta\sqrt{\gamma})^n + (\alpha - \beta\sqrt{\gamma})^n$$

$$S_n = (\alpha + \beta\sqrt{\gamma})^n + (\alpha - \beta\sqrt{\gamma})^n$$

$$S_n = (\alpha + \beta\sqrt{\gamma})^n + (\alpha - \beta\sqrt{\gamma})^n$$

$$S_n = (\alpha + \beta\sqrt{\gamma})^n + (\alpha - \beta\sqrt{\gamma})^n$$

$$S_n = (\alpha + \beta\sqrt{\gamma})^n + (\alpha - \beta\sqrt{\gamma})^n$$

$$S_n = (\alpha + \beta\sqrt{\gamma})^n + (\alpha - \beta\sqrt{\gamma})^n$$

$$S_n = (\alpha + \beta\sqrt{\gamma})^n + (\alpha - \beta\sqrt{\gamma})^n$$

$$S_n = (\alpha + \beta\sqrt{\gamma})^n + (\alpha - \beta\sqrt{\gamma})^n$$



ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο Ι Ι Ι

ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΚΑΙ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Ι. ΟΡΙΣΜΟΙ – ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

§ 21. Ἀπόλυτη τιμὴ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ.— Ἡ ἔννοια τῆς ἀπόλυτης τιμῆς πραγματικοῦ ἀριθμοῦ μᾶς εἶναι γνωστὴ ἀπὸ τὴν προηγούμενη τάξη. Ἐκεῖ μάθαμε ὅτι: *ἀπόλυτη τιμὴ (ἢ μέτρο) ἑνὸς πραγματικοῦ ἀριθμοῦ a , πού τὴν εἶχαμε συμβολίσαι μὲ $|a|$, εἶναι ὁ ἴδιος ὁ ἀριθμὸς a , ἂν εἶναι θετικὸς ἢ μηδέν καὶ ὁ ἀντίθετός του $-a$, ἂν ὁ ἀριθμὸς εἶναι ἀρνητικὸς.*

Ὡστε:

$$|a| \stackrel{\text{ορσ}}{=} \begin{cases} a, & \text{ἂν } a \geq 0 \\ -a, & \text{ἂν } a < 0 \end{cases}$$

Παραδείγματα: $|+8|=8$, $|-4|=-(-4)=4$, $|\frac{-3}{4}|=-(-\frac{3}{4})=\frac{3}{4}$.

Ἀπὸ τὸν προηγούμενο ὀρισμὸ συμπεραίνουμε ὅτι ἡ παράσταση $|a|$ δὲ γίνεται ποτὲ ἀρνητικὴ· εἶναι, ὅπως λέμε, ἕνας **μὴ ἀρνητικὸς ἀριθμὸς** καὶ μάλιστα:

$$|a| > 0 \iff a \neq 0 \quad \text{καὶ} \quad |a| = 0 \iff a = 0.$$

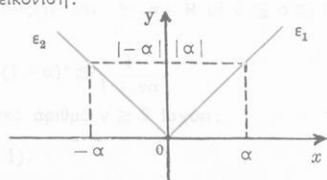
Ἀμεσες συνέπειες τοῦ πρὶν πάνω ὀρισμοῦ, πού τίς ξέρουμε καὶ ἀπὸ τὴν προηγούμενη τάξη, εἶναι καὶ οἱ ἑξῆς:

1. $|a| = a \iff a \geq 0$, 2. $|a| = -a \iff a \leq 0$, 3. $|-a| = |a|$ (βλ. καὶ σχ. 1),
4. $|a-b| = |b-a|$ γιὰ κάθε $a, b \in \mathbb{R}$, 5. $|a| = |b| \iff a=b \vee a=-b (a, b \in \mathbb{R})$.

Παρατήρηση: Ἀπὸ τὸν τρόπο πού ὀρίσαμε τὴν ἀπόλυτη τιμὴ ἑνὸς πραγματικοῦ ἀριθμοῦ x , γίνεται φανερό ὅτι αὐτὴ (δηλ. ἡ ἀπόλυτη τιμὴ) δὲν εἶναι παρὰ μία μονοσήμαντη ἀπεικόνιση τοῦ $\mathbb{R}$ ἐπάνω στό $\mathbb{R}_0^+$, ἀκριβέστερα ἡ ἀπεικόνιση:

$$| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+ : x \rightarrow |x| \stackrel{\text{ορσ}}{=} \begin{cases} x, & \text{ἂν } x > 0 \\ 0, & \text{ἂν } x = 0 \\ -x, & \text{ἂν } x < 0 \end{cases}$$

Ἡ γραφικὴ παράσταση τῆς $y = |x|$ ἀποδίδεται μὲ τίς δύο ἡμιευθεῖες ϵ_1 καὶ ϵ_2 πού διχοτομοῦν τίς γωνίες τῶν ἀξόνων (βλ. σχ. 1).



Σχ. 1

§ 22. Ίδιότητα I.— Γιά κάθε πραγματικό αριθμό a έχουμε :

$$-|a| \leq a \leq |a|.$$

Ἀπόδειξη. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις :

(i) $a \geq 0 \Rightarrow |a| = a$ καί ἐπομένως : $-|a| \leq a = |a|$.

Ἄρα καί : $-|a| \leq a \leq |a|$.

(ii) $a < 0 \Rightarrow |a| = -a$ καί ἐπομένως : $-|a| = a < |a|$.

Ἄρα καί : $-|a| \leq a \leq |a|$.

Ὡστε :

$$\forall a \in \mathbb{R}, -|a| \leq a \leq |a|$$

Παρατήρηση : Ἀπό τήν πιό πάνω ιδιότητα έχουμε :

$$\text{Γιά κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ εἶναι : } |x| + x \geq 0 \text{ καί } |x| - x \geq 0.$$

Ποτέ ὁμως δέν έχουμε ταυτόχρονα τή διπλή ἀνισότητα : $-|x| < x < |x|$.

§ 23. Ίδιότητα II.— Γιά κάθε πραγματικό αριθμό a έχουμε : $|a|^2 = a^2$.

Ἀπόδειξη. Ἄν $a \geq 0$, τότε $|a| = a$ καί ἄρα $|a|^2 = a^2$. Ἄν $a < 0$, τότε $|a| = -a$ καί συνεπῶς $|a|^2 = (-a)^2 = a^2$.

Ὡστε :

$$\forall a \in \mathbb{R}, |a|^2 = a^2$$

Ἀξιόλογη παρατήρηση. Ἄν $a \notin \mathbb{R}$, τότε $|a|^2 \neq a^2$, ὅπως θά δοῦμε ἀργότερα. Ἐπομένως ἡ ἰσότητα $|a|^2 = a^2$ συνάγεται ὅτι $a \in \mathbb{R}$.

Στήν προηγούμενη τάξη ἀποδείξαμε τήν ἐπόμενη πιό γενική πρόταση :

§ 24. Ίδιότητα III.— Γιά κάθε $a \in \mathbb{R}$ καί κάθε $n \in \mathbb{N}$ ἰσχύουν :

$$(i) |a|^{2n} = a^{2n}, \quad (ii) |a|^{2n+1} = \begin{cases} a^{2n+1}, & \text{ἂν } a \geq 0 \\ -a^{2n+1}, & \text{ἂν } a < 0. \end{cases}$$

Πόρισμα.— Γιά κάθε $a \in \mathbb{R}$ καί $n \in \mathbb{N}$ ἰσχύει : $\sqrt[n]{a^{2n}} = |a|$.

Ἔτσι στήν ειδική περίπτωση γιά $n = 1$ θά γράφουμε : $\sqrt{a^2} = |a|$.

§ 25. Ίδιότητα IV.— Γιά πραγματικούς αριθμούς x , ε μέ $\varepsilon > 0$ ἰσχύουν οἱ λογικές ἰσοδυναμίες :

$$|x| \leq \varepsilon \iff -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon \iff x^2 \leq \varepsilon^2$$

Ἀπόδειξη. Ἐχουμε τήν ἰσοδυναμία :

$$|x| \leq \varepsilon \iff -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon \quad (\text{γιατί : } -\varepsilon < 0)$$

Ἀλλά : $-\varepsilon \leq |x| \leq \varepsilon \iff -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon \quad \text{ἢ} \quad -\varepsilon \leq -x \leq \varepsilon,$

δηλαδή : $-\varepsilon \leq |x| \leq \varepsilon \iff -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon.$

Ὡστε : $|x| \leq \varepsilon \iff -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon.$

"Εχουμε επίσης την ισοδυναμία: $|x| \leq \varepsilon \iff |x|^2 \leq \varepsilon^2 \iff x^2 \leq \varepsilon^2$.

"Ωστε: $\forall x \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon > 0$ ισχύει: $|x| \leq \varepsilon \iff -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon \iff x^2 \leq \varepsilon^2$.

Σημείωση. 'Ισχύει: $|x| \leq \varepsilon \iff x \in [-\varepsilon, +\varepsilon]$ (βλ. και § 7, β).

Πόρισμα. — "Αν $\varepsilon > 0$ και $a \in \mathbb{R}$, τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε τις ισοδυναμίες:

$$|x - a| \leq \varepsilon \iff a - \varepsilon \leq x \leq a + \varepsilon \iff x \in [a - \varepsilon, a + \varepsilon].$$

Παρατήρηση. Μέ τον ίδιο τρόπο αποδεικνύονται οι (λογικές) ισοδυναμίες:

$$1\eta: \quad |x| < \varepsilon \iff -\varepsilon < x < \varepsilon \iff x \in (-\varepsilon, +\varepsilon) \quad (\varepsilon > 0)$$

$$2\eta: \quad |x| > \varepsilon \iff (x > \varepsilon \vee x < -\varepsilon).$$

"Εφαρμογές: 1η: Νά αποδείξετε την ισοδυναμία:

$$2 \leq x \leq 8 \iff |x - 5| \leq 3.$$

"Εχουμε: $2 \leq x \leq 8 \iff 2 - 5 \leq x - 5 \leq 8 - 5 \iff -3 \leq x - 5 \leq 3 \iff |x - 5| \leq 3$.

2η: "Αν $\alpha < x < \beta$, νά αποδείξετε ότι η παράσταση:

$$y = |a - x| + |\beta - x|$$

δέν εξαρτάται από το x .

"Απόδειξη. "Επειδή $\alpha < x < \beta$ έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha - x < 0 \\ \beta - x > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} |\alpha - x| = x - \alpha \\ |\beta - x| = \beta - x \end{array} \right\} \Rightarrow y = |x - \alpha| + |\beta - x| = |\beta - \alpha| = \beta - \alpha.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

"Ομάδα Α'. 29. Νά βρείτε τις ακέραιες τιμές του x , για τις οποίες είναι:

$$1) |x| < 3,2, \quad 2) |x| > 1,8 \quad \text{και} \quad |x| \leq 5, \quad 3) \left| x - \frac{1}{2} \right| < 3.$$

30. Νά αποδείξετε ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει: $|x^2 - 3y + 1| = |3y - x^2 - 1|$.

31. "Αν $x \in \mathbb{R}$ και $|2x + 9| = 3|x + 2|$ νά αποδείξετε ότι: $|x| = 3$.

32. "Αν $x, y \in \mathbb{R}$ και $y\sqrt{x^2} - x\sqrt{y^2} + x|x| - y|y| = 0$, νά αποδείξετε ότι: $|x| = |y|$.

33. "Αν $\alpha < \beta < \gamma < \delta$, νά βρείτε τις εκφράσεις της παραστάσεως:

$$y = |\alpha - x| + |\beta - x| + |\gamma - x| + |\delta - x|$$

χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής, για τις διάφορες πραγματικές τιμές του x . "Υπάρχουν διαστήματα που παίρνει τιμές το x , στα όποια η παράσταση y δέν εξαρτάται από το x ;

34. Νά κάνετε το ίδιο για την: $y = |x - 5| + |3x + 1| + |2x - 3|$.

"Ομάδα Β'. 35. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \frac{|x + 1| - |x - 1|}{|x + 1| + |x - 1|}$.

Νά αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } |x| < 1 \\ \frac{1}{x}, & \text{αν } |x| > 1. \end{cases}$$

36. "Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$, νά γράψετε με την πιο απλή δυνατή μορφή τον τύπο της απεικονίσεως $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, όπου:

$$f(x) = ||x - \alpha| - |x - \beta||.$$

37. Για ποιές πραγματικές τιμές του x έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παράσταση:

$$y = \sqrt{\frac{x}{|x|} - \frac{\sqrt{x^2}}{x}} + \sqrt[2v]{2 - |x| + 2x^2 - |x|^3}, \quad (v \in \mathbb{N} - \{1\})$$

38. *Αν μᾶς δοθοῦν οἱ πραγμ. ἀριθμοὶ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, τότε ὁ πιοὺς μεγάλος ἀπ' αὐτοὺς συμβολίζεται μέ: $\max(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ *) καὶ ὁ πιοὺς μικρὸς μέ: $\min(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ *). *Εἴς, π.χ., ἂν α καὶ β εἶναι δύο ὅποιοιδήποτε πραγματικοὶ ἀριθμοί, θὰ εἶναι:

$$\max(\alpha, \beta) \underset{\text{ορσ}}{=} \begin{cases} \alpha, & \text{ἂν } \alpha \geq \beta \\ \beta, & \text{ἂν } \beta > \alpha \end{cases} \quad \text{καὶ} \quad \min(\alpha, \beta) \underset{\text{ορσ}}{=} \begin{cases} \alpha, & \text{ἂν } \alpha < \beta \\ \beta, & \text{ἂν } \beta \leq \alpha. \end{cases}$$

Νὰ ἀποδείξετε τώρα ὅτι:

$$1) \max(\alpha, \beta) = \frac{\alpha + \beta + |\beta - \alpha|}{2}, \quad 2) |\alpha| = \max(\alpha, -\alpha), \quad 3) \min(\alpha, \beta) = \frac{\alpha + \beta - |\beta - \alpha|}{2}$$

$$4) |\alpha - \beta| = \max(\alpha, \beta) - \min(\alpha, \beta), \quad 5) \max(0, 2x) - \min(0, 2x) = 2|x|.$$

39. *Αφοῦ λάβετε ὑπόψη τὴν προηγούμενη ἄσκηση, νὰ ἀποδείξετε ὅτι ἡ παράσταση:
 $y = 2|\beta - \gamma| + |2\alpha - \beta - \gamma| + |\beta - \gamma| + |2\alpha - \beta - \gamma| + |\beta - \gamma|$, ὅπου $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, εἶναι ἴση μέ:

$$4 \cdot [\max(\alpha, \beta, \gamma) - \min(\alpha, \beta, \gamma)].$$

ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ – ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ – ΠΗΛΙΚΟΥ ΠΡΑΓΜ. ΑΡΙΘΜΩΝ

§ 26. *Ιδιότητα V.— *Ἡ ἀπόλυτη τιμὴ τοῦ ἁθροίσματος δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι μικρότερη ἢ ἴση μέ τὸ ἅθροισμα τῶν ἀπόλυτων τιμῶν τῶν προσθετέων.

Δηλαδή:

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta| \quad (\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}) \quad (1)$$

*Απόδειξη. *Αν λάβουμε ὑπόψη τίς ιδιότητες I καὶ IV, ἔχουμε τίς συνεπαγωγές:

$$\left. \begin{aligned} -|\alpha| &\leq \alpha \leq |\alpha| \\ -|\beta| &\leq \beta \leq |\beta| \end{aligned} \right\} \Rightarrow -(|\alpha| + |\beta|) \leq \alpha + \beta \leq (|\alpha| + |\beta|) \Rightarrow |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|.$$

Σημείωση: *Ἡ σχέση: $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ λέγεται καὶ **τριγωνικὴ ἀνισότητα**.

Πόρισμα 1ο.— *Ἡ ἀπόλυτη τιμὴ τῆς διαφορᾶς δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι μικρότερη ἢ ἴση μέ τὸ ἅθροισμα τῶν ἀπόλυτων τιμῶν τους.

Δηλαδή:

$$|\alpha - \beta| \leq |\alpha| + |\beta| \quad (\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}) \quad (2)$$

Πράγματι, ἔχουμε:

$$|\alpha - \beta| = |\alpha + (-\beta)| \leq |\alpha| + |-\beta| = |\alpha| + |\beta|.$$

Πόρισμα 2ο.— *Αν $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, τότε γιὰ κάθε $n \in \mathbb{N}$ μέ $n \geq 2$ ἰσχύει:

$$|\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n| \leq |\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha_n| \quad (3)$$

*Ἡ ἀπόδειξη γίνεται εὐκόλα μέ τὴ μέθοδο τῆς τέλειαις ἐπαγωγῆς, ἀφοῦ εἶναι γνωστὸ ὅτι γιὰ $n = 2$, ἰσχύει, σύμφωνα μέ τὴν προηγούμενη ιδιότητα.

Σημείωση: Γιὰ τὴν πιοὺς σύντομη γραφὴ ἑνὸς ἁθροίσματος χρησιμοποιεῖται διεθνῶς τὸ ἑλληνικὸ γράμμα Σ. *Εἴς γράφουμε: $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k$ (διαβάζουμε: «ἅθροισμα ἀπὸ $k=1$ μέχρι n τῶν α_k »). Μ' αὐτὸ τὸ συμβολισμό ἡ σχέση (3) γράφεται πιοὺς σύντομα ὡς ἑξῆς:

* $\max$, $\min$ εἶναι, ἀντίστοιχα, συντομογραφία τῶν λέξεων: maximum (= μέγιστο), minimum (= ἐλάχιστο).

$$\left| \sum_{k=1}^n \alpha_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |\alpha_k| \quad (3').$$

§ 27. Ίδιότητα VI.— Για κάθε α και β του $\mathbb{R}$ έχουμε την ανισότητα :

$$||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha \pm \beta| \quad (\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}) \quad (4)$$

Απόδειξη: Πρώτα-πρώτα βλέπουμε ότι η σχέση αυτή παραμένει αμετάβλητη, αν αντιμεταθέσουμε τὰ α και β . Μπορούμε λοιπόν νά υποθέσουμε ότι $|\alpha| \geq |\beta|$, τότε $|\alpha| - |\beta| \geq 0$. Θέτουμε $\alpha \pm \beta = \gamma$, τότε:

$$\alpha = \gamma \mp \beta \Rightarrow |\alpha| = |\gamma \mp \beta| \leq |\gamma| + |\beta| \Rightarrow |\alpha| - |\beta| \leq |\gamma|$$

και έπειδή $|\alpha| - |\beta| \geq 0$, η τελευταία ανισότητα γίνεται:

$$||\alpha| - |\beta|| \leq |\gamma| = |\alpha \pm \beta|.$$

Οι σχέσεις (1), (2) και (4) περιέχονται στήν:

$$||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha \pm \beta| \leq |\alpha| + |\beta| \quad (\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}) \quad (5)$$

Αξιόλογη παρατήρηση. Για τό πότε ισχύει η (5) μέ τό «ίσον» διατυπώνουμε τόν εξής μνημονικό κανόνα: «Όποιαδήποτε από τίς σχέσεις τής (5) πού έχει τὰ ίδια (αντιστ. διαφορετικά) πρόσημα ισχύει μέ τό ίσον, τότε και μόνο τότε, αν: $\alpha\beta \geq 0$ (αντιστ. $\alpha\beta \leq 0$). (Βλ. σχετική απόδειξη στό πρώτο παράδειγμα τής σελίδας 33).

Έχοντας τώρα υπόψη και τήν ιδιότητα I, γράφουμε τήν (5) πιό γενικά:

$$|\alpha| - |\beta| \leq ||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha \pm \beta| \leq |\alpha| + |\beta| \quad (\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}) \quad (6)$$

§ 28. Ίδιότητα VII.— Η απόλυτη τιμή του γινομένου δύο πραγματικών αριθμών είναι ίση μέ τό γινόμενο των απόλυτων τιμών των παραγόντων.

Δηλαδή: $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta| \quad (\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}) \quad (7)$

Απόδειξη. Είναι γνωστό (§ 24, πόρισμα) ότι ισχύει: $\sqrt{x^2} = |x|$. Άρα:

$$|\alpha\beta| = \sqrt{(\alpha\beta)^2} = \sqrt{\alpha^2 \cdot \beta^2} = \sqrt{\alpha^2} \cdot \sqrt{\beta^2} = |\alpha| \cdot |\beta|.$$

Πόρισμα 1ο.— Αν $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μέ $n \geq 2$ ισχύει:

$$|\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdots \alpha_{n-1} \cdot \alpha_n| = |\alpha_1| \cdot |\alpha_2| \cdot |\alpha_3| \cdots |\alpha_{n-1}| \cdot |\alpha_n| \quad (8)$$

Η απόδειξη γίνεται εύκολα μέ τή μέθοδο τής τέλειας έπαγωγής, αφού είναι γνωστό ότι η (8) ισχύει για $n=2$, σύμφωνα μέ τήν παραπάνω ιδιότητα.

Σημείωση: Για νά παραστήσουμε πιό σύντομα ένα γινόμενο χρησιμοποιούμε τό κεφαλαίο γράμμα Π. Έτσι γράφουμε: $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdots \alpha_n = \prod_{k=1}^n \alpha_k$ (διαβάζουμε: «τό γινόμενο από $k=1$ μέχρι n των α_k »). Μ' αυτό τό συμβολισμό ή σχέση (8) γράφεται πιό σύντομα ως εξής:

$$\left| \prod_{k=1}^n \alpha_k \right| = \prod_{k=1}^n |\alpha_k| \quad (8')$$

Πόρισμα 2ο.— Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει: $|\alpha^n| = |\alpha|^n$.

Αυτό προκύπτει άμέσως, αν στην (8) θέσουμε: $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \alpha$.

§ 29. Ίδιότητα VIII.— Η απόλυτη τιμή του πηλίκου δύο πραγματικών αριθμών είναι ίση με τό πηλίκο τών απόλυτων τιμών τους.

Δηλαδή:

$$\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|} \quad (\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0) \quad (9)$$

Απόδειξη. Μέ $\beta \neq 0$ έχουμε:

$$|\alpha| = \left| \frac{\alpha}{\beta} \cdot \beta \right| = \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| \cdot |\beta| \Rightarrow \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}.$$

Σημείωση: Η απόδειξη της παραπάνω ιδιότητας μπορεί νά γίνει και ως εξής:

$$\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \sqrt{\left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2} = \sqrt{\frac{\alpha^2}{\beta^2}} = \frac{\sqrt{\alpha^2}}{\sqrt{\beta^2}} = \frac{|\alpha|}{|\beta|}, \quad (\beta \neq 0).$$

Πόρισμα.— Γιά κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ μέ $\alpha \neq 0$ καί $k \in \mathbb{Z}$ ισχύει: $|\alpha^k| = |\alpha|^k$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Παράδειγμα 1ο: *Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, νά αποδείξετε ότι:

$$||\alpha| - |\beta|| = |\alpha + \beta| \iff \alpha\beta \leq 0.$$

Απόδειξη. Έχουμε:

$$\begin{aligned} ||\alpha| - |\beta|| = |\alpha + \beta| &\iff ||\alpha| - |\beta||^2 = |\alpha + \beta|^2 \iff (|\alpha| - |\beta|)^2 = (\alpha + \beta)^2 \iff \\ &\iff |\alpha|^2 - 2|\alpha| \cdot |\beta| + |\beta|^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \\ &\iff \alpha^2 - 2|\alpha\beta| + \beta^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \iff |\alpha\beta| = -\alpha\beta \iff \alpha\beta \leq 0. \end{aligned}$$

Σημείωση. *Αν εργαστούμε μέ τόν ίδιο τρόπο, βρίσκουμε τίς Ισοδυναμίες:

$$1. \quad |\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta| \iff \alpha\beta \geq 0, \quad 2. \quad |\alpha - \beta| = |\alpha| + |\beta| \iff \alpha\beta \leq 0.$$

Παράδειγμα 2ο: Νά αποδείξετε ότι: $|x^2 + 4x - 2| \leq 23$ γιά $x \in \mathbb{R}$ μέ: $-2 \leq x \leq 3$.

Απόδειξη. Γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε (βλ. Πόρ. 2ο, § 26):

$$|x^2 + 4x - 2| \leq |x^2| + 4|x| + 2 = x^2 + 4|x| + 2.$$

Έξάλλου έχουμε:

$$-2 \leq x \leq 3 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3 \Rightarrow |x| \leq 3 \text{ καί } x^2 \leq 9.$$

Συνεπώς: $|x^2 + 4x - 2| \leq x^2 + 4|x| + 2 \leq 9 + 12 + 2 = 23.$

Παράδειγμα 3ο: *Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ μέ $\beta(\alpha + 2\beta) \neq 0$, νά αποδείξετε ότι καθεμιά από τίς επόμενες ανισότητες:

$$\frac{2\alpha + \beta}{\alpha + 2\beta} < 1 \quad (1),$$

$$\frac{\alpha}{\beta} < 1 \quad (2),$$

$$\frac{\alpha\beta + 2\alpha^2}{\alpha\beta + 2\beta^2} < 1 \quad (3)$$

συνεπάγεται τίς άλλες δύο.

Απόδειξη. Έχουμε:

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{2\alpha + \beta}{\alpha + 2\beta} < 1 &\iff |2\alpha + \beta| < |\alpha + 2\beta| \iff (2\alpha + \beta)^2 < (\alpha + 2\beta)^2 \iff \\ &\iff 4\alpha^2 + 4\alpha\beta + \beta^2 < \alpha^2 + 4\alpha\beta + 4\beta^2 \iff 3\alpha^2 < 3\beta^2 \\ &\iff |\alpha| < |\beta| \iff \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| < 1 \quad (2) \quad (\text{επειδή } |\beta| > 0). \end{aligned}$$

"Ωστε:

$$(1) \iff (2)$$

"Επίσης έχουμε:

$$\begin{aligned} (3) \left| \frac{\alpha\beta + 2\alpha^2}{\alpha\beta + 2\beta^2} \right| < 1 &\iff |\alpha\beta + 2\alpha^2| < |\alpha\beta + 2\beta^2| \iff (\alpha\beta + 2\alpha^2)^2 < (\alpha\beta + 2\beta^2)^2 \iff \\ &\iff \alpha^2\beta^2 + 4\alpha^3\beta + 4\alpha^4 < \alpha^2\beta^2 + 4\alpha\beta^3 + 4\beta^4 \\ &\iff \alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2) + (\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 + \beta^2) < 0 \iff (\alpha^2 - \beta^2)(\alpha\beta + \alpha^2 + \beta^2) < 0 \\ &\iff \alpha^2 - \beta^2 < 0 \text{ (επειδή } \alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + (\alpha + \beta)^2}{2} > 0, \text{ αφού } \beta^2 > 0) \\ &\iff \alpha^2 < \beta^2 \iff |\alpha| < |\beta| \iff \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| < 1 \end{aligned} \quad (2)$$

"Ωστε: (3) $\iff$ (2) και επειδή (2) $\iff$ (1) έχουμε: (1) $\iff$ (2) $\iff$ (3).

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

"Ομάδα Α'. 40. "Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ νά αποδείξετε τις ισοδυναμίες:

$$1. \quad ||\alpha| - |\beta|| = |\alpha - \beta| \iff \alpha\beta \geq 0$$

$$2. \quad |\alpha|\beta - \beta|\alpha| = 0 \iff |\alpha + \beta| \geq |\alpha - \beta|.$$

41. Νά αποδείξετε ότι: Αν $x \in \mathbb{R}$ και $|x| \leq 1$, τότε $|2x^3 + 5x^2 - 7| \leq 14$.

42. "Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $|\alpha| > 1$, νά αποδείξετε ότι η ισότητα: $\beta = \frac{\alpha}{1 - |\alpha|}$ συνεπάγεται τις σχέσεις: $|\beta| > 1$ και $\alpha = \frac{\beta}{1 - |\beta|}$.

43. "Αν $\alpha\beta \neq 0$ και $\alpha^2 < 16\beta^2$, νά αποδείξετε ότι: $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| - \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| < \frac{15}{4}$.

44. "Αν $x, y \in \mathbb{R}$ με $xy \neq 0$, νά αποδείξετε ότι ισχύει:

$$\frac{\sqrt{x^2 y^2}}{xy} + \frac{\sqrt{(x-y)^2}}{x-y} \left[\frac{\sqrt{x^2}}{x} - \frac{\sqrt{y^2}}{y} \right] = 1.$$

"Υπόδειξη. Νά διακρίνετε τις περιπτώσεις: **i)** x και y ομόσημοι, **ii)** x και y ετερόσημοι.

45. "Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, όπου $\mathbb{R}$ τό σύνολο τών πραγματικών αριθμών, ορίζεται για κάθε x από τόν τύπο: $f(x) = |x + 1| \cdot |x - 2|$.

α) Νά γράψετε τόν τύπο της σέ όλες τις δυνατές μορφές (χωρίς τό σύμβολο της απόλυτης τιμής), πού καθορίζονται από τή θέση του αριθμού x ως προς τούς: $-1, 2$.

β) Νά εξετάσετε πώς μεταβάλλεται η f για τις διάφορες πραγμ. τιμές του x .

γ) Νά παραστήσετε γραφικά τήν f , παίρνοντας ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων xOy .

"Υπόδειξη. "Υπενθυμίζουμε πρώτα-πρώτα ότι ένα σύστημα αξόνων λέγεται **ορθοκανονικό**, αν είναι ορθογώνιο και οι μονάδες, πού έχουν οριστεί πάνω στους άξονες, έχουν ίσα μήκη.

Γιά νά παραστήσουμε τώρα γραφικά μία συνάρτηση της μορφής $y = |\varphi(x)|$, αρκεί νά χαράξουμε τή γραφική παράσταση της $y = \varphi(x)$ και κατόπιν τά μέρη της γραμμής (πού θά προκύψει), τά όποια βρίσκονται κάτω από τόν άξονα Ox , τά φέρουμε από πάνω, παίρνοντας τά συμμετρικά τους ως προς τόν άξονα Ox .

46. "Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ νά αποδείξετε ότι:

$$2\beta(1 + |\alpha|) = 1 + \alpha + |\alpha| \iff \begin{cases} |2\beta - 1| < 1 \\ \alpha(1 - |2\beta - 1|) = 2\beta - 1. \end{cases}$$

47. "Αν $\alpha, \beta, x, y \in \mathbb{R}$ με $\alpha\beta \neq 0$ και ισχύουν οι σχέσεις:

$$x = \alpha(|\alpha| + |\beta|) \quad \text{καί} \quad y = \beta(|\alpha| + |\beta|),$$

τότε θα ισχύουν και οι σχέσεις:

$$\alpha = \frac{x}{\sqrt{|x| + |y|}}, \quad \beta = \frac{y}{\sqrt{|x| + |y|}}$$

και αντίστροφως, οι δύο τελευταίες σχέσεις συνεπάγονται τις δύο πρώτες.

* Όμάδα Β'. 48. "Αν $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ με $\alpha^2 \neq \beta^2$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{|\alpha| - |\beta|}{|\alpha| + |\beta|} + \frac{||\alpha| - |\beta||}{|\alpha - \beta|} + \frac{|\alpha + \beta|}{|\alpha| + |\beta|} \leq 3.$$

49. "Αν $x, y \in \mathbf{R}$ με $2x + y + 4 = 0$, να αποδείξετε ότι: $|x| + |y| \geq 2$.

50. Να προσδιορίσετε τους θετικούς αριθμούς θ και ε , ώστε να ισχύει:

$$\theta \leq \left| \frac{x+2}{x-5} \right| \leq \varepsilon$$

για όλα τα x που ικανοποιούν την ανίσότητα: $|x-2| \leq 1$.

51. "Αν $\eta > 1$ και $|\xi| \geq 2\eta$, να αποδείξετε ότι οι ρίζες x_1 και x_2 της εξίσωσης:

$$x^2 + \xi x + \eta = 0 \quad \text{ικανοποιούν τη σχέση:} \quad \frac{1}{|x_1|} + \frac{1}{|x_2|} \geq 2.$$

52. "Αν $x, y \in \mathbf{R}$ με $x(3x + 2y) \neq 0$, να αποδείξετε ότι καθεμιά από τις επόμενες σχέσεις:

$$\left| \frac{2x+3y}{3x+2y} \right| < 1, \quad \left| \frac{y}{x} \right| < 1, \quad \left| \frac{2xy+3y^2}{3x^2+2xy} \right| < 1$$

συνεπάγεται τις άλλες δύο.

53. "Αν $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{|\alpha + \beta|}{1 + |\alpha + \beta|} \leq \frac{|\alpha|}{1 + |\alpha|} + \frac{|\beta|}{1 + |\beta|}.$$

Πότε η σχέση αυτή ισχύει με τό ισον;

54. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 2\alpha x + \beta = 0$ με $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ και ρίζες ρ_1, ρ_2 . "Αν $|\rho_2| \leq |\rho_1|$

να αποδείξετε ότι: $|\alpha| + \sqrt{\alpha^2 + |\beta|} \leq (1 + \sqrt{2}) |\rho_1|$.

55. Να βρείτε τα ζεύγη των άκεραίων x, y που επαληθεύουν τις σχέσεις:

$$y - |x^2 - 2x| + \frac{1}{2} > 0 \quad \text{και} \quad y + |x - 1| < 2.$$

56. Να βρείτε τα διαστήματα μεταβολής του x και τις αντίστοιχες τιμές του λ , για να είναι ανεξάρτητη από το x η παράσταση:

$$y = |\lambda^2 x + 1| + |2\lambda x + 3|.$$

57. "Εστω ότι οι συντελεστές του τριωνύμου: $x^2 - 2\alpha x + \beta$ είναι αριθμοί πραγματικοί με $\beta \neq 0$ και $|\rho_1| \neq |\rho_2|$, όπου ρ_1, ρ_2 είναι οι ρίζες του. "Ονομάζουμε:

$$M \equiv \max\left(\left|\frac{\rho_1}{\rho_2}\right|, \left|\frac{\rho_2}{\rho_1}\right|\right), \quad m \equiv \min\left(\left|\frac{\rho_1}{\rho_2}\right|, \left|\frac{\rho_2}{\rho_1}\right|\right) \quad \text{και} \quad \lambda = 2\left|\frac{2\alpha^2 - \beta}{\beta}\right|.$$

Να αποδείξετε ότι:

α) Οι ρίζες του τριωνύμου είναι αριθμοί πραγματικοί και άνισοι.

β) "Ισχύουν οι σχέσεις: 1) $\lambda - 1 < M < \lambda$, 2) $\lambda > 2$, 3) $\frac{1}{\lambda} < m < \frac{1}{\lambda - 1}$.

58. "Αν οι ρίζες της εξίσωσης: $x^2 + \xi x + \eta = 0$ είναι πραγματικές και οι συντελεστές ξ και η ικανοποιούν τη σχέση: $\xi^2 - 2\eta^2 < \xi|\eta|$, να αποδείξετε ότι οι ρίζες ρ_1, ρ_2 της εξίσωσης: $\eta x^2 + \xi x + 1 = 0$ επαληθεύουν την: $|\rho_1| - |\rho_2| < 2$.

*** § 30. Ἀπόλυτη τιμὴ ἢ μέτρο μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ.**—Ἡ ἔννοια τῆς ἀπόλυτης τιμῆς μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ μᾶς εἶναι ἐπίσης γνωστή ἀπὸ τὴν προηγούμενη τάξη. Ἐκεῖ μάθαμε ὅτι: *ονομάζεται ἀπόλυτη τιμὴ ἢ μέτρο* *ἑνός μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ* $z = \alpha + \beta i$, ($\alpha, \beta \in \mathbf{R}$) καὶ συμβολίζεται μὲ $|z| = |\alpha + \beta i|$, *ὁ μὴ ἀρρητικός (πραγματικός) ἀριθμός*: $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.

Ὡστε:

$$|z| = |\alpha + \beta i| \stackrel{\text{ορσ}}{=} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \quad (1)$$

Ὅρίζεται ἔτσι μία ἀπεικόνιση $|\cdot|: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{R}_0^+ : z \rightarrow |z| \stackrel{\text{ορσ}}{=} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.

Παραδείγματα:

$$|3 + 4i| = \sqrt{9 + 16} = 5, \quad |1 - i| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}, \quad |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1 + 3} = 2.$$

Ἀμεσες συνέπειες τοῦ πρὶς πάνω ὁρισμοῦ, πού τίς ξέρουμε καὶ ἀπὸ τὴν προηγούμενη τάξη, εἶναι:

$$1. |z| \geq 0 \quad \forall z \in \mathbf{C} \quad \text{καὶ} \quad |z| = 0 \iff z = 0, \quad 2. |\bar{z}| = |z| = |-z| = |-\bar{z}|.$$

Παρατηροῦμε ὅτι: ἂν $z \in \mathbf{R}$, ὁπότε $\beta = 0$, τότε: $|z| = |\alpha + 0i| = \sqrt{\alpha^2 + 0^2} = |\alpha|$. Δηλαδή, ἂν $z \in \mathbf{R}$, τότε ὁ παραπάνω ὁρισμός τῆς ἀπόλυτης τιμῆς μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ περιέχει ὡς εἰδικὴ περίπτωση τὸν ὁρισμό τῆς ἀπόλυτης τιμῆς πραγματικοῦ ἀριθμοῦ πού δώσαμε στὴν ἀρχὴ αὐτοῦ τοῦ Κεφαλαίου.

Ἐξάλλου, ἂν $z = \alpha + \beta i$, τότε $\bar{z} = \alpha - \beta i$ καὶ συνεπῶς $z\bar{z} = \alpha^2 + \beta^2$. Αὐτό μᾶς ἐπιτρέπει συχνά στὰ ἐπόμενα νὰ γράφουμε:

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} \iff |z|^2 = z\bar{z} \quad (2)$$

Ἐστω τώρα ὁ μιγαδικὸς ἀριθμὸς $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbf{R}$). Ὁ πραγμ. ἀριθμὸς x λέγεται, ὅπως ξέρουμε, *τὸ πραγματικὸ μέρος* τοῦ z καὶ συμβολίζεται μὲ: $\text{Re}(z)$ καὶ ὁ ἀριθμὸς y λέγεται *τὸ φανταστικὸ μέρος* τοῦ z καὶ συμβολίζεται μὲ: $\text{Im}(z)$ *. Ἡ εἰσαγωγή τῆς ἔννοιᾶς τοῦ συζυγοῦς μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ z μᾶς ἐπιτρέπει νὰ ἐκφράσουμε τὸ $\text{Re}(z)$ καὶ $\text{Im}(z)$ μὲ τοὺς τύπους:

$$x = \text{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$$

καὶ

$$y = \text{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i} \quad (3)$$

Εὐκόλα τώρα ἀπὸ τοὺς προηγούμενους τύπους ἔχουμε:

$$1. z = \bar{z} \iff z \in \mathbf{R}, \quad 2. z + \bar{z} = 0 \iff (z \text{ φανταστικός ἀριθμός}).$$

$$\text{Ἐφόσον } |z|^2 = |\text{Re}(z)|^2 + |\text{Im}(z)|^2 \Rightarrow \begin{cases} \text{Re}(z) \leq |\text{Re}(z)| \leq |z| \\ \text{Im}(z) \leq |\text{Im}(z)| \leq |z| \end{cases} \quad (4)$$

* Ὁ συμβολισμὸς αὐτὸς προέρχεται ἀπὸ συντομογραφία τῶν λέξεων Réel = πραγματικός καὶ Imaginaire = φανταστικός. Μὲ τὸ πρῶτο γράμμα τῆς λέξεως imaginaire παρίστανουμε τὸ σύμβολο: $\sqrt{-1}$ ($= i$).

Οι ιδιότητες που αναφέραμε στις παραγράφους 22 και 25 αυτού του κεφαλαίου δεν διατυπώνονται για μιγαδικούς αριθμούς, επειδή καμία σχέση διατάξεως δεν έχει οριστεί στο σύνολο $\mathbf{C}$ των μιγαδικών αριθμών.

Επίσης η ιδιότητα II της § 23 δεν ισχύει αν $z \notin \mathbf{R}$. Ακριβέστερα έχουμε :

$$|z|^2 = z^2 \iff z \in \mathbf{R} \text{ και συνεπώς } |z|^2 \neq z^2 \iff z \in \mathbf{C} \text{ με } \operatorname{Im}(z) \neq 0.$$

$$\text{Πράγματι: } |z|^2 = z^2 \iff z \cdot \bar{z} = z^2 \iff z(\bar{z} - z) = 0 \iff z = 0 \vee \bar{z} = z \iff z \in \mathbf{R}.$$

Αντίθετα η απόλυτη τιμή μιγαδικού αριθμού έχει ιδιότητες τελείως ανάλογες με εκείνες της απόλυτης τιμής πραγματικού αριθμού που αποδείξαμε στις παραγράφους 26 έως 29.

Διατυπώνουμε παρακάτω τις σπουδαιότερες απ' αυτές τις ιδιότητες:

*** § 31.** Αν $z_1, z_2, \dots, z_n$ είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύουν οι επόμενες σχέσεις :

$$1. \quad |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad 2. \quad |z_1 \cdot z_2 \cdots z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdots |z_n|,$$

$$3. \quad |z^n| = |z|^n \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad 4. \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \text{ με } z_2 \neq 0,$$

$$5. \quad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \quad 6. \quad \left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|,$$

$$7. \quad \left| |z_1| - |z_2| \right| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

$$\text{*Απόδειξη. 1) Έχουμε: } |z_1 \cdot z_2|^2 = (z_1 z_2) \cdot \overline{(z_1 z_2)} = (z_1 z_2) (\bar{z}_1 \bar{z}_2) = (z_1 \bar{z}_1) (z_2 \bar{z}_2) = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 \implies |z_1 \cdot z_2|^2 = (|z_1| \cdot |z_2|)^2 \implies |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|.$$

2) Η απόδειξη είναι εύκολη με τη μέθοδο της Μαθηματικής επαγωγής.

3) Για $z_1 = z_2 = \dots = z_n = z$ ή 2) δίνει: $|z^n| = |z|^n \quad \forall n \in \mathbf{N}$.

$$4) \text{ Μέ } z_2 \neq 0 \text{ έχουμε: } z_1 = \frac{z_1}{z_2} \cdot z_2 \implies |z_1| = \left| \frac{z_1}{z_2} \cdot z_2 \right| = \left| \frac{z_1}{z_2} \right| \cdot |z_2| \implies \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

$$\begin{aligned} 5) \text{ Έχουμε: } |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2) \overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2) (\bar{z}_1 + \bar{z}_2) \\ &= z_1 \bar{z}_1 + z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 + \bar{z}_2 z_2 \\ &= |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) + |z_2|^2 \quad [\text{από την (3) της § 30}] \\ &\leq |z_1|^2 + 2|z_1 \bar{z}_2| + |z_2|^2 \quad [\text{από την (4) της § 30}] \\ &= |z_1|^2 + 2|z_1| \cdot |z_2| + |z_2|^2 \\ &= (|z_1| + |z_2|)^2. \end{aligned}$$

$$\text{*Αρα: } |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

6) Η απόδειξη είναι εύκολη με τη μέθοδο της Μαθηματικής επαγωγής.

7) Θα δείξουμε πρώτα ότι ισχύει: $\left| |z_1| - |z_2| \right| \leq |z_1 - z_2|.$

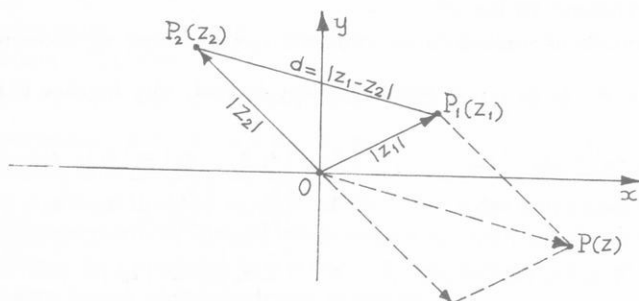
$$\begin{aligned}
 \text{Πράγματι, έχουμε: } |z_1 - z_2|^2 &= (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) = (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) \\
 &= z_1\overline{z_1} - (z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}) + z_2\overline{z_2} \\
 &= |z_1|^2 - 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2 \\
 &\geq |z_1|^2 - 2|z_1z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| - |z_2|)^2.
 \end{aligned}$$

Άρα: $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$.

Τότε: $|z_1 + z_2| = |z_1 - (-z_2)| \geq ||z_1| - |-z_2|| = ||z_1| - |z_2||$

Εξάλλου: $|z_1 - z_2| = |z_1 + (-z_2)| \leq |z_1| + |-z_2| = |z_1| + |z_2|$.

Αξιοσημείωτη παρατήρηση. Ὡς θεωρήσουμε δύο μιγαδικούς ἀριθμούς



Σχ. 2

z_1, z_2 με αντίστοιχες εἰκόνες P_1, P_2 στό μιγαδικό ἐπίπεδο (βλ. σχ. 2). Τότε ἡ εἰκόνα τοῦ $z = z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$ εἶναι τό πέρασ (ἄκρο) P τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{OP}$. Ἀπό τό παραλληλόγραμμο OPP_1P_2 τοῦ σχήματος ἔχουμε:

$$|\overrightarrow{P_1P_2}| = |\overrightarrow{OP}| = |z_1 - z_2|.$$

Δηλαδή: ἡ ἀπόλυτη τιμή τῆς διαφορᾶς δύο μιγαδικῶν ἀριθμῶν ἐκφράζει γεωμετρικά τήν ἀπόσταση d τῶν εἰκόνων τῶν δύο ἀριθμῶν. Ὡστε:

$$d(P_1, P_2) \equiv d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$$

Ἐπειδὴ $|z| = |z - 0|$, ἔπεται ὅτι ἡ $|z|$ ἐκφράζει τήν ἀπόσταση τοῦ σημείου P ἀπὸ τήν ἀρχή O τῶν ἀξόνων. Δηλαδή:

$$|z| = |z - 0| = d(z, 0) \equiv d(P, O) = |\overrightarrow{OP}|.$$

Ἐχοντας τώρα ὑπόψη τήν παραπάνω παρατήρηση, ἀντιλαμβανόμαστε ὅτι ἡ σχέση:

$$||z_1| - |z_2|| < |z_1 - z_2| < |z_1| + |z_2|$$

ἐκφράζει τή γνωστή ἀπὸ τή γεωμετρία πρόταση: Κάθε πλευρά τριγώνου

είναι μικρότερη από τό άθροισμα των δύο άλλων και μεγαλύτερη από τή διαφο-
ρά τους (βλ. σχ. 2).

*Αν τά z_1, z_2 είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε οί αντίστοιχες εικόνες τους
είναι σημεία του άξονα των x , όποτε ή $|z_1 - z_2|$ παριστάνει τήν απόσταση του
πραγματικού αριθμού z_1 από τόν πραγματικό αριθμό z_2 . Είναι φανερό όμως ότι
 $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$, γι' αυτό ή $d(z_1, z_2) \stackrel{\text{ορισμ}}{=} |z_1 - z_2|$ λέγεται και απόσταση
των z_1, z_2 .

Σημείωση. Σύμφωνα μέ τόν προηγούμενο όρισμό τής απόστάσεως δύο μιγαδικών
αριθμών, αν $z_0 \in \mathbb{C}$ και $\rho \in \mathbb{R}$ μέ $\rho > 0$, τό σημειοσύνολο: $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = \rho\}$ αποτελείται
από τά σημεία $P(z)$ πού έχουν τή χαρακτηριστική ιδιότητα: απέχουν από τό σταθερό ση-
μείο $K(z_0)$ σταθερή απόσταση ίση μέ ρ . Τά σημεία όμως αυτά, όπως ξέρουμε, βρίσκονται
πάνω στόν κύκλο πού έχει κέντρο τό $K(z_0)$ και ακτίνα ρ . Στήν ειδική περίπτωση πού ο κύ-
κλος έχει κέντρο τήν αρχή O και ακτίνα $\rho = 1$, δηλαδή τό σημειοσύνολο: $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$,
λέγεται μοναδιαίος κύκλος. Είναι φανερό τώρα ότι τό σημειοσύνολο: $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \rho, \rho > 0\}$,
παριστάνει τό (εσωτερικό) του κύκλου $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = \rho, \rho > 0\}$.

Σχόλιο. Αξίζει έδώ νά τονίσουμε τή διαφορά πού υπάρχει στή σχέση $|z| = \rho$, αν
 $z \in \mathbb{R}$ και $|z| = \rho$, αν $z \in \mathbb{C}$. Έτσι στήν πρώτη περίπτωση έχουμε: $\{z \in \mathbb{R} : |z| = \rho, \rho > 0\} =$
 $= \{\rho, -\rho\}$, ενώ στή δεύτερη περίπτωση τό σημειοσύνολο $\{z \in \mathbb{C} : |z| = \rho, \rho > 0\}$ δέν είναι
διμελές, αλλά άπειροσύνολο, ακριβέστερα αποτελείται από όλους εκείνους τούς μιγαδικούς αριθ-
μούς, πού οί εικόνες τους βρίσκονται πάνω στόν κύκλο πού έχει κέντρο τήν αρχή O και ακ-
τίνα ρ . Συνεπώς ή γνωστή ιδιότητα πού ισχύει γιά πραγματικούς αριθμούς, σύμφωνα μέ τήν
όποια: $|\alpha| = |\beta| \Rightarrow \alpha = \beta$ είτε $\alpha = -\beta$, δέν ισχύει αν $\alpha \in \mathbb{C}$ είτε $\beta \in \mathbb{C}$, όπως φαίνεται
εξάλλου και από τό παράδειγμα πού δίνουμε άμέσως παρακάτω.

Παράδειγμα: Οί αριθμοί: $4 + 3i, 4 - 3i, 3 + 4i, 3 - 4i, -5$ έχουν όλοι τήν ίδια από-
λυτη τιμή, 5, και όμως αν ληφθούν ανά δύο, δέν είναι ούτε ίσοι ούτε αντίθετοι μεταξύ τους.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1η: Νά αποδείξετε ότι γιά κάθε $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ισχύουν οί ισότητες:

$$\alpha) \quad |z_1 \pm z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2\operatorname{Re}(z_1 \cdot \bar{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2\operatorname{Re}(\bar{z}_1 \cdot z_2).$$

$$\beta) \quad |z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

*Απόδειξη:

$$\begin{aligned} \alpha) \text{ Έχουμε: } |z_1 \pm z_2|^2 &= (z_1 \pm z_2)(\bar{z}_1 \pm \bar{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm (z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2) = \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm (z_1\bar{z}_2 + \overline{z_1\bar{z}_2}) = \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) \quad (\text{καί έπειδή } \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(\bar{z}) = x) \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2\operatorname{Re}(\bar{z}_1z_2), \text{ γιατί } \bar{z}_1z_2 = \overline{z_1\bar{z}_2}. \end{aligned}$$

$$\beta) \text{ Έχουμε: } |z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)$$

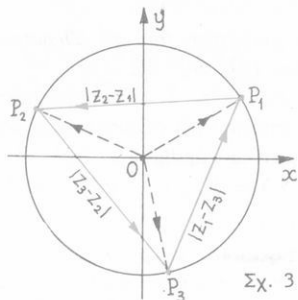
$$\text{καί} \quad |z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)$$

$$\text{Όπότε: } |z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

*Ασκηση: Ποιό γεωμετρικό θεώρημα εκφράζει ή τελευταία σχέση;

2η: Αν $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ μέ $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ και $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, νά αποδείξετε ότι
τά σημεία $P_1(z_1), P_2(z_2), P_3(z_3)$ είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου έγγεγραμμένου στό μονα-
διαίο κύκλο.

*Απόδειξη. Έστω $z_k = \overrightarrow{OP_k}, k = 1, 2, 3$. Αφού $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ έπεται $|\overrightarrow{OP_1}| =$
 $= |\overrightarrow{OP_2}| = |\overrightarrow{OP_3}| = 1$, δηλ. τά σημεία $P_1(z_1), P_2(z_2), P_3(z_3)$ βρίσκονται πάνω στόν κύκλο
πού έχει κέντρο τό O και ακτίνα 1 (βλ. σχ. 3). Στό τρίγωνο $P_1P_2P_3$ έχουμε: $\overrightarrow{P_1P_2} = z_2 - z_1$,



Σχ. 3

$\vec{P_2P_3} = z_3 - z_2$, $\vec{P_3P_1} = z_1 - z_3$. Θά αποδείξουμε
 τώρα ότι: $|z_2 - z_1| = |z_3 - z_2| = |z_1 - z_3|$.

*Ας επαληθεύσουμε πρώτα τήν:

$$|z_2 - z_1| = |z_1 - z_3|.$$

Πράγματι, από την $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ έπεται $z_1 = -(z_2 + z_3)$, όποτε ή $|z_2 - z_1| = |z_1 - z_3|$

είναι Ισοδύναμη με την: $|2z_2 + z_3| = |2z_3 + z_2|$

$$\Longleftrightarrow (2z_2 + z_3)(2\bar{z}_2 + \bar{z}_3) = (2z_3 + z_2)(2\bar{z}_3 + \bar{z}_2)$$

$$\Leftrightarrow z_2 \bar{z}_2 = z_3 \bar{z}_3 \Leftrightarrow |z_2|^2 = |z_3|^2 \Leftrightarrow |z_2| = |z_3|.$$

Τό τελευταῖο ὁμως ἰσχύει, ἐπειδή $|z_2| = |z_3| = 1$.

Εργαζόμενοι με τόν ίδιο τρόπο, αποδεικνύουμε ότι: $|z_2 - z_1| = |z_3 - z_2|$.

*Αρα τό τρίγωνο $P_1P_2P_3$ είναι ισόπλευρο.

***Ανακεφαλαίωση.** Οί όρισμοί καί οί κυριότερες ιδιότητες τῆς ἀπόλυτης τιμῆς πραγματικῶν καί μιγαδικῶν ἀριθμῶν πού ἀπορρέουν ἀπό τίς προηγούμενες παραγράφους συνοψίζονται στόν ἐπόμενο πίνακα:

ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜ.	ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ
α) *Ορισμός : $ x \stackrel{\text{ορσ}}{=} \begin{cases} x, & \text{αν } x \geq 0 \\ -x, & \text{αν } x \leq 0. \end{cases}$ *Ορίζεται έτσι η ακόλουθη άπεικόνιση: $: \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}_0^+ : x \longrightarrow x \in \mathbf{R}_0^+$ β) *Ιδιότητες : $x \geq 0$ και $x = 0 \iff x = 0$ $-x = x$ $x = y \iff x = y \vee x = -y$ $- x \leq x \leq x$ $x \leq \varepsilon \iff -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon \iff x^2 \leq \varepsilon^2$ $x ^2 = x^2$ $x = \sqrt{x^2}$ $x - y \leq x \pm y \leq x + y$ $x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq x_1 + \dots + x_n$ $x \cdot y = x \cdot y$ $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$ $\left \frac{x}{y} \right = \frac{ x }{ y }$ μέ $y \neq 0$ $x^k = x ^k$ μέ $x \neq 0$ και $k \in \mathbf{Z}$ $x \pm y ^2 = x^2 + y^2 \pm 2xy$ γ) *Απόσταση τών x, y : $d(x, y) \stackrel{\text{ορσ}}{=} x - y $ *Ορίζεται έτσι η ακόλουθη άπεικόνιση: $d : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}_0^+ : (x, y) \rightarrow d(x, y) = x - y .$	α') *Ορισμός : $ z = \alpha + \beta i \stackrel{\text{ορσ}}{=} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ *Ορίζεται έτσι η ακόλουθη άπεικόνιση: $: \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{R}_0^+ : z \longrightarrow z = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.$ β') *Ιδιότητες : $z \geq 0$ και $z = 0 \iff z = 0$ $-z = z = \bar{z} = -\bar{z}$ Προσέξτε! ΔΕΝ ισχύει ανάλ. ιδ. στο C » » » » » » » » » » » » » » » » Προσέξτε! $z ^2 = z \cdot \bar{z}$ $z = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{z\bar{z}}$ $z_1 - z_2 \leq z_1 \pm z_2 \leq z_1 + z_2$ $z_1 + z_2 + \dots + z_n \leq z_1 + \dots + z_n$ $z_1 \cdot z_2 = z_1 \cdot z_2$ $z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n = z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n$ $\left \frac{z_1}{z_2} \right = \frac{ z_1 }{ z_2 }$ μέ $z_2 \neq 0$ $z^k = z ^k$ μέ $z \neq 0$ και $k \in \mathbf{Z}$ $z_1 \pm z_2 ^2 = z_1 ^2 + z_2 ^2 \pm 2\text{Re}(z_1\bar{z}_2)$ γ') *Απόσταση τών z_1, z_2 : $d(z_1, z_2) \stackrel{\text{ορσ}}{=} z_1 - z_2 $ *Ορίζεται έτσι η ακόλουθη άπεικόνιση: $d : \mathbf{C}^2 \rightarrow \mathbf{R}_0^+ : (z_1, z_2) \rightarrow d(z_1, z_2) = z_1 - z_2 .$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ομάδα Α'. 59. Νά βρείτε τά: $\bar{z}$, $\operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(z)$ καί $|z|$ αν:

α) $z = 3 + 2i$, β) $z = -3i$, γ) $z = 2(1 - i) + 3(2 + i)$.

60. Τί παριστάνουν γεωμετρικά τά παρακάτω υποσύνολα του $\mathbb{C}$:

α) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1| \leq 2\}$, β) $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| > \rho, \text{ με } \rho > 0 \text{ καί } z_0 \in \mathbb{C}\}$.

61. Νά παραστήσετε γεωμετρικά τά σημεία του μιγαδικού επιπέδου για τα οποία έχουμε:

α) $|z| < 1$ καί $|z - i| < 1$, β) $|z - 1| < 1$ καί $|z - i| > 1$.

62. Έστω μία απεικόνιση $d: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τις ακόλουθες τρεις ιδιότητες:

$$d_1: d(x, y) \geq 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ καί } d(x, y) = 0 \iff x = y$$

$$d_2: d(x, y) = d(y, x) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$d_3: d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

1) Νά δώσετε ένα παράδειγμα μιάς τέτοιας απεικονίσεως.

2) Θέτουμε: $d^*(x, y) = \frac{d(x, y)}{\max\{1, d(x, y)\}}$ για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Ορίζεται τότε η απεικόνιση: $d^*: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Νά αποδείξετε ότι η d^* έχει επίσης τις ιδιότητες d_1, d_2, d_3 .

63. Νά απεικονίσετε στο μιγαδικό επίπεδο τά παρακάτω υποσύνολα του $\mathbb{C}$:

$$A = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| = 1\}, \quad B = \{w \in \mathbb{C} : |w - 7| = 4\}$$

καί κατόπιν νά βρείτε την ελάχιστη καί τη μέγιστη απόσταση των αντίστοιχων σημειοσυνόλων

*** Ομάδα Β'. 64.** Έστω ότι: $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \alpha\gamma \neq 0$ καί $|p_1| \neq |p_2|$, όπου p_1, p_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$. Θέτουμε $M = \max\left\{\left|\frac{p_1}{p_2}\right|, \left|\frac{p_2}{p_1}\right|\right\}$. Νά αποδείξετε ότι:

i) $2 \left|1 - \frac{\beta^2}{2\alpha\gamma}\right| - 1 < M < 2 \left|1 - \frac{\beta^2}{2\alpha\gamma}\right|$

ii) $1 < \left|1 - \frac{\beta^2}{2\alpha\gamma}\right|$

iii) Είναι δυνατό με τις υποθέσεις που κάναμε νά είναι $\beta = 0$;

65. Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ νά αποδείξετε ότι:

$$|z_1 - z_2|^2 \leq (1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2).$$

66. Αν $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ με $|z_1| = |z_2| = \dots = |z_n| = 1$ νά αποδείξετε ότι:

$$|z_1 + z_2 + \dots + z_n| = \left| \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \dots + \frac{1}{z_n} \right|.$$

67. Νά αποδείξετε ότι για κάθε $z \in \mathbb{C}$ ισχύει: $|\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)| \leq \sqrt{2} \cdot |z|$.

68. Αν $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ νά αποδείξετε τις συνεπαγωγές:

α) $(z_1 + z_2 + z_3 = 0 \wedge z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0) \implies |z_1| = |z_2| = |z_3|$

β) $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 \implies |z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$.

II. ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΤΟ $\mathbb{R}$ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ ΤΟΥ ΑΓΝΩΣΤΟΥ

Στις επόμενες παραγράφους θά εκθέσουμε σέ γενικές γραμμές τόν τρόπο μέ τόν όποιο επιλύονται, μέσα στό $\mathbb{R}$, μερικές απλές μορφές εξισώσεων, στίς όποιες ό άγνωστος εμφανίζεται μέσα στό σύμβολο τής απόλυτης τιμής.

§ 32. 'Επίλυση εξισώσεων τῆς μορφῆς: $\alpha|x| + \beta = 0$ μέ $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ καί $\alpha \neq 0$.—'Αν ὑπάρχει κάποιος λύση, ἔστω $x \in \mathbf{R}$, τῆς $\alpha|x| + \beta = 0$ (1), τότε γι' αὐτή θά ἰσχύει: ἢ $x \geq 0$ ἢ $x < 0$.

Εἰδικά γιὰ νά εἶναι τό μηδέν λύση τῆς (1) θά πρέπει: $\beta = 0$. 'Εξάλλου παρατηροῦμε ὅτι: ἂν ὁ x_0 εἶναι λύση τῆς (1), τότε καί ὁ $-x_0$ εἶναι ἐπίσης λύση τῆς, γιατί ἔχουμε: $\alpha|-x_0| + \beta = \alpha|x_0| + \beta = 0$.

'Εστω $x \in \mathbf{R}$ λύση τῆς (1), τότε ἔχουμε:

$$\alpha|x| + \beta = 0 \iff |x| = -\frac{\beta}{\alpha} \quad (2)$$

Διακρίνουμε τώρα δύο περιπτώσεις:

i) ἂν: $-\frac{\beta}{\alpha} \geq 0 \iff \alpha\beta \leq 0$, τότε ἀπό τή (2) παίρνουμε: $x = \pm \frac{\beta}{\alpha}$.

ii) ἂν: $-\frac{\beta}{\alpha} < 0 \iff \alpha\beta > 0$, τότε ἀπό τή (2) παίρνουμε: $|x| < 0$,

πράγμα ἀδύνατο, ἀφοῦ γιὰ κάθε $x \in \mathbf{R}$ ἔχουμε πάντοτε: $|x| \geq 0$. Στήν περίπτωση αὐτή λοιπόν ἡ ἐξίσωση (1) δέν ἔχει λύση στό $\mathbf{R}$ · εἶναι, ὅπως ἀλλιῶς λέμε, ἀδύνατη.

Συνοψίζουμε τώρα τά προηγούμενα συμπεράσματα στόν ἀκόλουθο πίνακα:

Πίνακας διερευνήσεως τῆς: $\alpha x + \beta = 0$, $\alpha \neq 0$	
$\beta = 0$	$\alpha x + \beta = 0 \Rightarrow x = 0$
$\alpha\beta < 0$	$\alpha x + \beta = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{\beta}{\alpha}$
$\alpha\beta > 0$	$\alpha x + \beta = 0$ ἀδύνατη

'Εφαρμογές. 1η: Νά ἐπιλυθεῖ στό $\mathbf{R}$ ἡ ἐξίσωση: $2|x| - 3 = 0$.

Λύση. 'Εχουμε: $2|x| - 3 = 0 \iff 2|x| = 3 \iff |x| = \frac{3}{2} \iff x = \pm \frac{3}{2}$.

2η: Νά ἐπιλυθεῖ στό $\mathbf{R}$ ἡ ἐξίσωση: $4|x| + 7 = 0$.

Λύση. 'Εχουμε: $4|x| + 7 = 0 \iff 4|x| = -7 \iff |x| = -\frac{7}{4}$. 'Αλλά $|x| \geq 0$ γιὰ

κάθε $x \in \mathbf{R}$, ἐνῶ $-\frac{7}{4} < 0$. 'Η ἐξίσωση λοιπόν $|x| = -\frac{7}{4}$, συνεπῶς καί ἡ ἀρχική $4|x| + 7 = 0$, εἶναι ἀδύνατη, δέν ἔχει λύση στό $\mathbf{R}$.

§ 33. 'Επίλυση ἐξισώσεων τῆς μορφῆς: $\alpha|x| + \beta x + \gamma = 0$ μέ $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ καί $\alpha \neq 0$.—Παρατηροῦμε, πρῶτα-πρῶτα, ὅτι: ἂν $\beta = 0$, τότε ἔχουμε τή μορφή $\alpha|x| + \gamma = 0$, πού μελετήσαμε στήν προηγούμενη παράγραφο.

*Αν λοιπόν υπάρχει κάποια λύση, έστω $x \in \mathbf{R}$, τής $\alpha|x| + \beta x + \gamma = 0$ (ε) τότε γι' αυτή θα ισχύει: ή $x \geq 0$ ή $x < 0$.

Ειδικά για να είναι τό μηδέν λύση τής (ε), θα πρέπει: $\gamma = 0$.

Γιά τήν επίλυση έπομένως τής (ε) διακρίνουμε τίς έξής περιπτώσεις:

A) Αναζητούμε τίς μή άρνητικές λύσεις τής (ε), δηλαδή $x \geq 0$.

Σ' αυτή τήν περίπτωση έχουμε τότε να επιλύσουμε τό σύστημα:

$$(\Sigma_1): \begin{cases} \alpha|x| + \beta x + \gamma = 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (\alpha + \beta)x = -\gamma \\ x \geq 0 \end{cases}$$

a₁) *Αν $\alpha + \beta \neq 0$, τότε από τήν εξίσωση του συστήματος έχουμε:

$x = -\frac{\gamma}{\alpha + \beta}$ (1). 'Η λύση αυτή θα είναι λύση του συστήματος, έπομένως καί τής (ε), άν:

$$-\frac{\gamma}{\alpha + \beta} \geq 0 \iff \frac{\gamma}{\alpha + \beta} \leq 0 \iff \gamma(\alpha + \beta) \leq 0,$$

ένω άν:

$$-\frac{\gamma}{\alpha + \beta} < 0 \iff \frac{\gamma}{\alpha + \beta} > 0 \iff \gamma(\alpha + \beta) > 0$$

ή (1) δέν είναι δεκτή για τήν (ε), δηλαδή ή (ε) δέν έχει λύση στό $\mathbf{R}_0^+$.

a₂) *Αν $\alpha + \beta = 0$, τότε έχουμε: $0x = -\gamma$ καί έπομένως:

άν $\gamma \neq 0$, ή εξίσωση (ε) είναι αδύνατη στό $\mathbf{R}_0^+$, ένω

άν $\gamma = 0$, ή εξίσωση (ε) είναι άόριστη (ταυτότητα) στό $\mathbf{R}_0^+$.

B) Αναζητούμε τίς άρνητικές λύσεις τής (ε), δηλαδή $x < 0$.

Τότε έχουμε να επιλύσουμε τό σύστημα:

$$(\Sigma_2): \begin{cases} \alpha|x| + \beta x + \gamma = 0 \\ x < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -\alpha x + \beta x = -\gamma \\ x < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (\alpha - \beta)x = \gamma \\ x < 0 \end{cases}$$

b₁) *Αν $\alpha - \beta \neq 0$, τότε από τήν εξίσωση του συστήματος έχουμε:

$$x = \frac{\gamma}{\alpha - \beta} \quad (2)$$

'Η λύση αυτή θα είναι λύση του συστήματος (Σ_2), έπομένως καί τής (ε),

άν:

$$\frac{\gamma}{\alpha - \beta} < 0 \iff \gamma(\alpha - \beta) < 0,$$

ένω άν:

$$\frac{\gamma}{\alpha - \beta} \geq 0 \iff \gamma(\alpha - \beta) \geq 0$$

ή (2) δέν είναι λύση του συστήματος (Σ_2), άρα τότε ή (ε) δέν έχει λύση στό $\mathbf{R}^-$.

b₂) *Αν $\alpha - \beta = 0$, τότε ή εξίσωση του συστήματος γίνεται: $0x = \gamma$ καί

έπομένως: άν $\gamma \neq 0$, τότε τό σύστημα [άρα καί ή (ε)] είναι αδύνατο στό $\mathbf{R}^-$,

ένω άν $\gamma = 0$, ή εξίσωση (ε) είναι άόριστη (ταυτότητα) στό $\mathbf{R}^-$.

Παρατήρηση. Ειδική μορφή τής (ε) είναι ή εξίσωση: $|x| = x + k$, όπου $k \in \mathbf{R}$. 'Η επίλυσή της γίνεται καί μέ τόν έξής τρόπο:

Ἡ ἐξίσωση $|x| = x + k$ εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν: $|x| - x = k$. Ἀρα $k \geq 0$ (§ 22).

i) Γιά $k = 0$ ἔχουμε: $|x| - x = 0 \iff |x| = x$ καί ἀληθεύει γιά κάθε $x \in \mathbb{R}_0^+$.

ii) Γιά $k > 0$ πρέπει: $|x| > x$ καί ἄρα $x < 0$. Τότε ὁμως ἡ ἐξίσωση γίνεται:

$$-2x = k \Rightarrow x = -\frac{k}{2}.$$

Ἐφαρμογή: Νά ἐπιλυθεῖ στό $\mathbb{R}$ ἡ ἐξίσωση: $3|x| + 2x - 4 = 0$.

Λύση. Παρατηροῦμε ἀμέσως ὅτι τό μηδέν δέν εἶναι λύση τῆς $3|x| + 2x - 4 = 0$ (1)
Ἐπομένως, ἂν ὑπάρχει κάποια λύση, ἔστω $x \in \mathbb{R}$, τῆς (1), τότε γι' αὐτή θά ἰσχύει:

$$\text{ἢ } x > 0 \quad \text{ἢ } x < 0$$

(α) Στήν πρώτη περίπτωση ἔχουμε νά λύσουμε τό σύστημα:

$$(\Sigma_1) \quad \left. \begin{array}{l} 3|x| + 2x - 4 = 0 \\ x > 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} 5x = 4 \\ x > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x = \frac{4}{5}$$

Αὐτή ἡ λύση τοῦ συστήματος εἶναι καί λύση τῆς ἐξισώσεως (1).

(β) Στή δεύτερη περίπτωση ἔχουμε νά λύσουμε τό σύστημα:

$$(\Sigma_2) \quad \left. \begin{array}{l} 3|x| + 2x - 4 = 0 \\ x < 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} -3x + 2x - 4 = 0 \\ x < 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} x = -4 \\ x < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x = -4.$$

Αὐτή ἡ λύση τοῦ συστήματος (Σ_2) εἶναι καί λύση τῆς (1).

Ἀρα ἡ (1) ἔχει λύσεις τίς: $x_1 = \frac{4}{5}$, $x_2 = -4$ καί μόνο αὐτές.

§ 34. Ἐπίλυση ἐξισώσεων τῆς μορφῆς: $ax^2 + \beta|x| + \gamma = 0$ (1)
μέ $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ καί $a \neq 0$.— Ἐπειδὴ γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$ εἶναι: $x^2 = |x|^2$, ἡ (1) γράφεται: $\alpha|x|^2 + \beta|x| + \gamma = 0$.

Θέτουμε τώρα $|x| = y$, $y \geq 0$, καί ἡ ἐξίσωση (1) εἶναι ἰσοδύναμη μέ τό σύστημα:

$$(\Sigma): \quad \left. \begin{array}{l} \alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Ἐπομένως γιά νά λύσουμε τήν (1) ἀρκεῖ νά βροῦμε τίς **μὴ ἀρνητικές** ρίζες τῆς:

$$\alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0 \quad (2)$$

Ἀσκησι. Ἀφοῦ ἐξετάσετε τό πρόσημο τῶν ριζῶν τῆς (2), νά βρεῖτε τό πλῆθος τῶν πραγματικῶν ριζῶν τῆς (1).

Ἐφαρμογή. Νά ἐπιλυθεῖ στό $\mathbb{R}$ ἡ ἐξίσωση: $x^2 - 5|x| + 6 = 0$. (1)

Λύση. Ἡ (1) γράφεται: $|x|^2 - 5|x| + 6 = 0$. Θέτουμε $|x| = y \geq 0$ καί ἡ (1) εἶναι ἰσοδύναμη μέ τό σύστημα:

$$(\Sigma) \quad \left. \begin{array}{l} y^2 - 5y + 6 = 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y_1 = 2 \\ y_2 = 3 \end{array} \right.$$

Τότε ἔχουμε: $|x| = 2$ καί $|x| = 3$, ἀπό τίς ὁποῖες βρίσκουμε: $x = \pm 2$ καί $x = \pm 3$.

Ἀρα ἡ (1) ἔχει λύσεις τίς: $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3$, $x_4 = -3$ καί μόνο αὐτές.

Παρατήρηση. Γενικότερη μορφή τῆς (1) εἶναι οἱ ἐξισώσεις τῆς μορφῆς:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma|x| + \delta = 0, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \text{ μέ } \alpha\beta \neq 0.$$

Παράδειγμα. Νά επιλυθεί στο $\mathbb{R}$ η εξίσωση: $x^2 - 3x + 2|x| - 6 = 0$ (1)

Λύση. Τό μηδέν δέν είναι λύση τής (1). "Αρα αν υπάρχει κάποια λύση, έστω $x \in \mathbb{R}$, τής (1), τότε γι' αυτή θά ισχύει: ή $x > 0$ ή $x < 0$.

(α) Στην πρώτη περίπτωση έχουμε νά λύσουμε τό σύστημα:

$$(\Sigma_1) \quad \left. \begin{array}{l} x^2 - 3x + 2|x| - 6 = 0 \\ x > 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} x^2 - x - 6 = 0 \\ x > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 3.$$

Η άλλη ρίζα $x = -2$ τής εξισώσεως του συστήματος (Σ_1) , δέν αποτελεί λύση του συστήματος [άρα και τής (1)], γιατί είναι: $-2 < 0$.

(β) Στη δεύτερη περίπτωση έχουμε νά λύσουμε τό σύστημα:

$$(\Sigma_2) \quad \left. \begin{array}{l} x^2 - 3x + 2|x| - 6 = 0 \\ x < 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} x^2 - 5x - 6 = 0 \\ x < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x = -1.$$

"Αρα η (1) έχει πραγματικές λύσεις τής: $x_1 = 3$, $x_2 = -1$ και μόνο αυτές.

§ 35. Επίλυση εξισώσεων τής μορφής: $|A(x)| + |B(x)| + \dots + |P(x)| + Q(x) = 0$ (1), όπου $A(x)$, $B(x)$, $\dots$, $P(x)$, $Q(x)$ **άκέραια πολυώνυμα του x με πραγματικούς συντελεστές.**—Γιά νά βρούμε τς πραγματικές λύσεις τής (1) εξετάζουμε τά πρόσημα τών $A(x)$, $B(x)$, $\dots$, $P(x)$, δηλαδή τών πολυωνύμων πού βρίσκονται **μέσα** στό σύμβολο τής απόλυτης τιμής, γιά τς διάφορες πραγματικές τιμές του x . Κατόπιν, μέ βάση αυτά τά πρόσημα, εξαλείφουμε τά απόλυτα και έτσι βρίσκουμε σέ κάθε διάστημα μεταβολής του x και μία ισοδύναμη εξίσωση μέ τήν (1) χωρίς απόλυτες τιμές. Οί λύσεις τών εξισώσεων πού προκύπτουν, εφόσον βρίσκονται κάθε φορά στό αντίστοιχο διάστημα μεταβολής του x , είναι και λύσεις τής (1). Άλλιώς απορρίπτονται.

Παράδειγμα. Νά επιλυθεί η εξίσωση: $-2x + |x| - 3|x - 2| + 5|x + 1| = -5$ (1)

Λύση. Η (1) γράφεται: $|x| - 3|x - 2| + 5|x + 1| - 2x + 5 = 0$ (2)

Βρίσκουμε τς ρίζες τών εξισώσεων: $x = 0$, $x - 2 = 0$, $x + 1 = 0$, τς όποιες αν τς διατάξουμε στον πραγματικό άξονα, θά έχουμε:



Τώρα κάνουμε τήν εξής σκέψη: αν υπάρχει κάποια λύση, έστω $x \in \mathbb{R}$, τής (2), τότε γι' αυτή θά ισχύει:

$$\eta \ x < -1 \quad \eta \ -1 \leq x < 0 \quad \eta \ 0 \leq x < 2 \quad \eta \ 2 \leq x.$$

"Ετσι έχουμε νά λύσουμε τά επόμενα τέσσερα συστήματα:

$$\Sigma_1: \left\{ \begin{array}{l} |x| - 3|x - 2| + 5|x + 1| - 2x + 5 = 0 \\ x < -1 \end{array} \right\}, \quad \Sigma_2: \left\{ \begin{array}{l} |x| - 3|x - 2| + 5|x + 1| - 2x + 5 = 0 \\ -1 \leq x < 0 \end{array} \right\}$$

$$\Sigma_3: \left\{ \begin{array}{l} |x| - 3|x - 2| + 5|x + 1| - 2x + 5 = 0 \\ 0 \leq x < 2 \end{array} \right\}, \quad \Sigma_4: \left\{ \begin{array}{l} |x| - 3|x - 2| + 5|x + 1| - 2x + 5 = 0 \\ x \geq 2 \end{array} \right\}$$

Η επίλυση τών συστημάτων αυτών γίνεται συντομότερα, αν καταρτίσουμε τόν ακόλουθο πίνακα:

x	x-2	x	x+1	$ x -3 x-2 +5 x+1 -2x+5=0$	Συμπεράσματα
$-\infty$	-	-	-	$-x+3(x-2)-5(x+1)-2x+5=0$	$\Rightarrow x = -\frac{6}{5} \in (-\infty, -1)$, δεκτή.
-1	-	-	0	$-x+3(x-2)+5(x+1)-2x+5=0$	$\Rightarrow x = -\frac{4}{5} \in [-1, 0)$, δεκτή.
0	-	0	+	$-x+3(x-2)+5(x+1)-2x+5=0$	$\Rightarrow x = -\frac{4}{5} \notin [0, 2)$, απορρίπτ.
2	+	+	+	$+x+3(x-2)+5(x+1)-2x+5=0$	$\Rightarrow x = -\frac{4}{5} \notin [0, 2)$, απορρίπτ.
$+\infty$	+	+	+	$x-3(x-2)+5(x+1)-2x+5=0$	$\Rightarrow x = -16 \notin [2, +\infty)$, απορρ.

Από τον πίνακα βλέπουμε πώς η (1) έχει δύο λύσεις, τις: $x_1 = -\frac{6}{5}$, $x_2 = -\frac{4}{5}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ομάδα Α. 69. Να επιλύσετε στο $\mathbb{R}$ τις εξισώσεις:

- $3|x| - 5 = 0$,
- $|3x| - 2 = |x| + 8$,
- $-6|x| + 5 = 0$,
- $-2|x| + x + 1 = 0$,
- $\frac{2}{3}|x| - 2x = 7$,
- $2|x| + 7x - 3 = 0$,
- $x^2 - 7|x| + 12 = 0$,
- $x^2 - 10|x| - 24 = 0$,
- $x^2 - 3|x| + 2x - 6 = 0$
- $x^2 - 8|x| + 7 = 0$,
- $x^2 + 10|x| + 24 = 0$,
- $x^2 - 4x + 2|x| - 3 = 0$

70. Να επιλύσετε τις παρακάτω εξισώσεις για διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$:

- $2x + 3|x| = \lambda x + 2$,
- $\lambda|x| + 3x = -1$.

* Ομάδα Β. 71. Να επιλύσετε στο $\mathbb{R}$ τις εξισώσεις:

- $|x|^3 - 5x^2 - 17|x| + 21 = 0$,
- $|2x - 1| - 3|x - 1| = 1$,
- $|x^2 - 3x + 2| + |x - 4| - 13 = 0$,
- $|x^2 - 5x + 6| - 2|x - 1| + 2x - 3 = 0$,
- $\frac{1}{|x-1|} - \frac{2}{|x-2|} + \frac{1}{|x-3|} = 0$.

72. Να επιλύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις για διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$:

- $|2x - |2x - 1|| = -\lambda^2 x$,
- $|x - 3| - \lambda|x - 1| = 2$,
- $|\lambda - 1|x + (\lambda - 1)|x| = \lambda^2 - 1$.

73. Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τους συντελεστές της εξίσωσης:

$$\alpha|x|^3 + \beta x^2 + \beta|x| + \alpha = 0$$

ώστε αυτή να έχει τό μέγιστο δυνατό πλήθος πραγματικών ριζών.

74. Έστω η εξίσωση: $x^2 + x + \lambda|x| + 1 = 0$. Να βρείτε τό λ , ώστε αυτή να έχει τέσσερις ρίζες πραγματικές καί άνισες.

* III. ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ ΤΟΥ ΑΓΝΩΣΤΟΥ

§ 36. Για νά επιλύσουμε άνισώσεις μέ απόλυτες τιμές του άγνωστου, εργαζόμαστε κάθε φορά μέ τρόπο ανάλογο μ' έκεινο που ακολουθήσαμε για την επίλυση εξισώσεων της αντίστοιχης μορφής.

Όπως στίς εξισώσεις μέ απόλυτες τιμές του άγνωστου, έτσι καί στίς άνισώσεις, βρίσκουμε σέ κάθε διάστημα μεταβολής του άγνωστου καί μία άνίσωση χωρίς απόλυτες τιμές που είναι ισοδύναμη μ' εκείνη που μάς έχει δοθεί.

Για να γίνουν κατανοητά τα παραπάνω θα δώσουμε δύο παραδείγματα επιλύσεως ανισώσεων διαφόρων μορφών.

Λύση. Έχουμε: α) αν $x \geq 0$, τότε $|x| = x$, οπότε η (1) είναι ισοδύναμη με το σύστημα :

β) Αν $x < 0$, τότε $|x| = -x$, οπότε η (1) είναι ισοδύναμη με το σύστημα:

Από τις (2) και (3) συμπεραίνουμε ότι η (1) επαληθεύεται από κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση. Οι τιμές του x που μηδενίζουν τις παραστάσεις που βρίσκονται μέσα στο σύμ-
της απόλυτης τιμής είναι με τη σειρά: $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$.

*Αν ἐργαστοῦμε τώρα ὅπως καί στό παράδειγμα τῆς § 35 καταρτίζουμε τόν ἀκό-
ο πίνακα:

από τον οποίο βλέπουμε πώς η (1) αληθεύει, όταν $x < -2$ και $-\frac{3}{4} < x < \frac{1}{2}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ομάδα Α'. 75. Νά επιλύσετε τις επόμενες ανισώσεις:

1. $|3x| - 2 > |x| + 8$, 2. $2|x| + x > 10$, 3. $\frac{3|x| + 1}{4} - \frac{4-x}{3} > 1$,
 4. $|x|^3 - 4x^2 + |x| + 6 > 0$, 5. $3|x| + 4|x-1| > 5$, 6. $|2x+1| + |6x| > 9$.

76. Νά αποδείξετε ότι για κάθε πραγματική τιμή του x ισχύει η σχέση:

$$|x-2| + |2x-1| \geq \frac{3}{2}$$

Πότε η σχέση αυτή ισχύει με τό «ίσον»;

77. Νά επιλύσετε τις ανισώσεις:

1. $|2x+1| - 4|x-3| - |x-4| > 3$, 2. $||x| + x| - ||x| - x| < |x-2|$
 3. $|x-1| + |x-2| + |x-3| < x+1$, 4. $\frac{|2x^2-5|}{3|x|} > \frac{|x|+1}{2}$.

Ομάδα Β'. 78. Για ποιές πραγματικές τιμές του x έχει νόημα στο $\mathbf{R}$ καθεμία από τις επόμενες παραστάσεις:

$$A \equiv \sqrt{3x^2 - 10|x| + 3}, \quad B = \sqrt{|x^2 + 8x - 9| - 24}.$$

79. "Αν $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ και $|x| = \alpha x + \beta x + 1$, νά βρείτε για ποιές τιμές του x είναι: $|\alpha + \beta| < 1$.

80. "Εστω η συνάρτηση $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \left| x + \frac{3}{2} \right| + \left| x - \frac{1}{2} \right| + |x-2|.$$

α) Νά βρείτε τις εκφράσεις της χωρίς τό σύμβολο της απόλυτης τιμής για $x \in \mathbf{R}$.

β) Πώς μεταβάλλεται η f στο πεδίο ορισμού της;

γ) Νά δώσετε τή γραφική παράσταση της συναρτήσεως, όταν: $-\infty < x < +\infty$.

δ) Νά αποδείξετε ότι: $f(x) \geq \frac{7}{2} \forall x \in \mathbf{R}$. Για ποιές τιμές του x ισχύει τό ίσον;

81. "Εστω η απεικόνιση $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ με τύπο:

$$f(x) = |x-2| + |2x-1|.$$

Νά δικαιολογήσετε γιατί η f δέν είναι μία άμφιμονοσήμαντη απεικόνιση του $\mathbf{R}$ πάνω στο $\mathbf{R}$ καί κατόπιν νά αποδείξετε ότι: αν $x_1 \geq 2$ καί $x_1 + x_2 = 2$, τότε θά είναι: $f(x_1) = f(x_2)$.

Τέλος νά δώσετε τή γραφική παράσταση της f , όταν: $-\infty < x < +\infty$ καί από τή γραφική της παράσταση νά συμπεράνετε ότι: $\min f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right)$.

* IV. ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΤΟ $\mathbf{R}$ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ ΤΩΝ ΑΓΝΩΣΤΩΝ

§ 37. "Επίλυση συστημάτων της μορφής: $\begin{cases} \alpha|x| + \beta|y| = \gamma \\ \alpha'|x| + \beta'|y| = \gamma' \end{cases} \quad (1)$

όπου $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ είναι πραγμ. αριθμοί ανεξάρτητοι από τά x, y .

Θέτουμε: $|x| = x_1, |y| = y_1$ καί τό σύστημα (1) παίρνει τή μορφή:

$$\begin{cases} \alpha x_1 + \beta y_1 = \gamma \\ \alpha' x_1 + \beta' y_1 = \gamma' \end{cases} \quad (2)$$

Τό σύστημα (2), όπως μᾶς εἶναι γνωστό ἀπό τήν προηγούμενη τάξη, ἔχει τή λύση:

$$x_1 = \frac{\gamma\beta' - \gamma'\beta}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}, \quad y_1 = \frac{\alpha\gamma' - \alpha'\gamma}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}, \quad (\alpha\beta' - \alpha'\beta \neq 0).$$

Ἐπειδὴ γιὰ ὁποιοδήποτε τιμή τῶν x καί y εἶναι: $|x| \geq 0$, $|y| \geq 0$, τό σύστημα (1) θά ἔχει λύση, ὅταν καί μόνο, ὅταν:

$$\frac{\gamma\beta' - \gamma'\beta}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} \geq 0, \quad \frac{\alpha\gamma' - \alpha'\gamma}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} \geq 0.$$

Μ' αὐτή τήν προϋπόθεση λαμβάνουμε ὡς λύσεις τοῦ συστήματος (1), τίς λύσεις τοῦ ζεύγους τῶν ἐξισώσεων:

$$|x| = \frac{\gamma\beta' - \gamma'\beta}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}, \quad |y| = \frac{\alpha\gamma' - \alpha'\gamma}{\alpha\beta' - \alpha'\beta},$$

τίς ὁποῖες βρίσκουμε σύμφωνα μέ ὅσα εἴπαμε στήν § 32.

Ἐφαρμογή. Νά ἐπιλυθεῖ στό $\mathbb{R}$ τό σύστημα:

$$\begin{aligned} (\Sigma): \quad & 3|x| - 2|y| = 10 \\ & 5|x| + 3|y| = 23 \end{aligned} \quad (1)$$

Λύση. Θέτουμε $|x| = x_1$, $|y| = y_1$ καί τό σύστημα (1) παίρνει τή μορφή:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2y_1 = 10 \\ 5x_1 + 3y_1 = 23 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = 1 \end{cases} \quad (2)$$

Τότε οἱ λύσεις τοῦ συστήματος (1) εἶναι οἱ λύσεις τοῦ ζεύγους τῶν ἐξισώσεων:

$$\begin{cases} |x| = 4 \\ |y| = 1 \end{cases}, \quad \text{ἀπό τίς ὁποῖες βρίσκουμε: } x = \pm 4 \text{ καί } y = \pm 1.$$

*Ἀρα οἱ λύσεις τοῦ συστήματος (1) εἶναι τά τέσσερα ζεύγη:

$$(x=4, y=1), (x=4, y=-1), (x=-4, y=1), (x=-4, y=-1).$$

§ 38. Ἐπίλυση συστημάτων τῆς μορφῆς: $\begin{cases} \alpha|x| + \beta|y| + \gamma x + \delta y = k \\ \alpha'|x| + \beta'|y| + \gamma' x + \delta' y = k' \end{cases} \quad (1)$

ὅπου οἱ συντελεστές τῶν ἀγνώστων καί οἱ σταθεροί ὅροι εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί πού δέν ἐξαρτῶνται ἀπό τά x, y .

Γιά τήν ἐπίλυση τοῦ συστήματος (1) διακρίνουμε τίς ἑξῆς τέσσερις περιπτώσεις:

α) $x \geq 0, y \geq 0$, ὁπότε $|x| = x, |y| = y$ καί τό σύστημα (1) παίρνει τή μορφή:

$$\begin{cases} (\alpha + \gamma)x + (\beta + \delta)y = k \\ (\alpha' + \gamma')x + (\beta' + \delta')y = k' \end{cases} \quad (2)$$

Τότε οἱ μή ἀρνητικές λύσεις τοῦ (2) εἶναι λύσεις τοῦ συστήματος (1).

Συνεχίζουμε τήν ἐπίλυση μέ τίς ἀκόλουθες, ἀκόμη, περιπτώσεις:

$$\beta) x \geq 0, y < 0, \quad \gamma) x < 0, y \geq 0, \quad \delta) x < 0, y < 0.$$

Ἐφαρμογή. Νά ἐπιλυθεῖ στό $\mathbb{R}$ τό σύστημα: $\begin{cases} |x| - 2y = 3 \\ x + |y| = 6 \end{cases} \quad (\Sigma)$

Λύση. *Αν υπάρχει λύση του (Σ) , έστω $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, τότε γι' αυτή θα ισχύει: ή
 α) $x \geq 0, y \geq 0$, όπότε $|x| = x, |y| = y$ και τό σύστημα γράφεται:

$$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ x + y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases}$$

Τό ζευγος $(x = 5, y = 1)$ είναι λύση του (Σ) , άφοϋ $x = 5 \geq 0, y = 1 \geq 0$.

β) $x \geq 0, y < 0$, όπότε $|x| = x, |y| = -y$ και τό σύστημα γράφεται:

$$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ x - y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = 3 \end{cases}$$

Τό ζευγος όμως $(x = 9, y = 3)$ δέν είναι λύση του (Σ) , γιατί: $y = 3 > 0$.

γ) $x < 0, y \geq 0$, όπότε $|x| = -x, |y| = y$ και τό σύστημα γράφεται:

$$\begin{cases} -x - 2y = 3 \\ x + y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 15 \\ y = -9 \end{cases}$$

Πάλι όμως τό ζευγος $(x = 15, y = -9)$ δέν είναι λύση του (Σ) , γιατί $x = 15 > 0, y = -9 < 0$.

δ) $x < 0, y < 0$, όπότε $|x| = -x, |y| = -y$ και τό σύστημα γράφεται:

$$\begin{cases} -x - 2y = 3 \\ x - y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -3 \end{cases}$$

Τό ζευγος όμως $(x = 3, y = -3)$ δέν είναι λύση του (Σ) , γιατί $x = 3 > 0$.

*Αρα ή μοναδική λύση του συστήματος είναι τό ζευγος: $(x = 5, y = 1)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Όμάδα Α'. 82. Νά επιλύσετε στό $\mathbb{R}$ τά έπόμενα συστήματα:

1. $\begin{cases} 2|x| + 3|y| = 11 \\ 3|x| - 5|y| = 7 \end{cases}$

2. $\begin{cases} |x| + |y| = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x - 5|y| = 1 \\ x|y| + y|x| = 4 \end{cases}$

4. $\begin{cases} |2x - 3y| = 12 \\ 3x + y = 7 \end{cases}$

5. $\begin{cases} |x| - |y| = -2 \\ y + y|x| = 6 \end{cases}$

6. $\begin{cases} |x| + |y| = \alpha \\ \alpha y = x^2 \end{cases} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$

83. Τό ίδιο νά κάνετε γιά τά συστήματα:

1. $\begin{cases} 4|x - 2| + |y - 1| = 5 \\ 4x - 3y = 6 \end{cases}$

2. $\begin{cases} |x - 2y| + |x + y - 1| = 2 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} |x| + |y - 1| = 3 \\ |x| + |y - 2| = 4 \end{cases}$

Όμάδα Β'. 84. Νά επιλύσετε τά παρακάτω συστήματα γιά τίς διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$:

(i) $\begin{cases} |\alpha x + y| = 2x \\ 3x + 5y = 2 \end{cases}$

(ii) $\begin{cases} |x| + |y| = \alpha \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

85. Νά βρείτε τίς άκέραιες λύσεις του συστήματος:

$$x^2 = yz \quad \wedge \quad |y + z| > x^2 + 1,$$

όταν οί z, y έχουν τίς ελάχιστες άπόλυτες τιμές.

86. Νά επιλύσετε στό $\mathbb{R}$ τό σύστημα:

$$x^2 = \frac{z^2}{2|yz| - y^2} \quad (1) \quad , \quad 0 < x \leq \frac{3}{3 + |y + 2|} \quad (2)$$

87. Νά βρείτε τίς άκέραιες λύσεις του συστήματος:

$$\left\{ (x^2 + 4y^2)(z^2 + 4) = (xz + 4y)^2 \wedge 16z^2 - 56\left|\frac{x}{y}\right| + 45 < 0 \wedge x^2 + y^2 + |xy| < 64 \right\}.$$

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο Ι V

ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

I. ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ — ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

§ 39. Ἡ ἔννοια τῆς ἀκολουθίας.— Στὴν Γ' τάξη τοῦ Γυμνασίου μάθαμε

ὅτι: *κάθε συνάρτηση* $\alpha: \mathbf{N} \rightarrow E: v \xrightarrow{\alpha} \alpha(v) \in E$ *μέ πεδίο ὀρισμοῦ τό σύνολο* $\mathbf{N}$ *τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν καί τιμές σ' ἓνα μὴ κενό σύνολο* E , *δηλαδή ἡ ἀπεικόνιση, πού ὀρίζεται ἀπό τήν ἀντιστοιχία:*

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & , & 2 & , & 3 & , & \dots , v, \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \alpha(1) & , & \alpha(2) & , & \alpha(3) & , & \dots , \alpha(v), \dots \end{array} \quad (1)$$

λέγεται ἀκολουθία στοιχείων τοῦ συνόλου E .

Στὴν παραπάνω ἀντιστοιχία τὰ πρότυπα (ἀρχέτυπα), δηλ. οἱ φυσικοὶ ἀριθμοί, λέγονται καί *δείκτες*, ἐνῶ οἱ εἰκόνες τους, δηλ. οἱ τιμές τῆς ἀκολουθίας $\alpha: \mathbf{N} \ni v \rightarrow \alpha(v) \in E$, λέγονται καί *ὄροι* τῆς ἀκολουθίας. Ἡ ἔκφραση $\alpha(v)$ συμβολίζεται συνήθως μέ α_v καί λέγεται *ὁ νιοστός ἢ ὁ γενικός ὄρος* τῆς ἀκολουθίας. Ἔτσι ἔχουμε:

$$\alpha_v \underset{\text{ὄρος}}{=} \alpha(v) \quad , \quad \forall v \in \mathbf{N}$$

Στὴν ἀντιστοιχία (1) συνήθως παραλείπεται ἡ πρώτη γραμμὴ καί γράφονται μόνο οἱ εἰκόνες. Γράφουμε δηλαδή: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_v, \dots$ (2)

Εἰδικὰ ὁ α_1 λέγεται *π ρ ὦ τ ο ς ὄ ρ ο ς* τῆς ἀκολουθίας (2), ὁ α_2 *δ ε ὑ τ ε ρ ο ς ὄ ρ ο ς* κ.ο.κ.

Συντομότερα τὴν ἀκολουθία (2) θά τὴ συμβόλιζουμε ὡς ἐξῆς: $\alpha_v, v \in \mathbf{N}$, ἢ $\alpha_v, v = 1, 2, \dots$, ἀκόμη μέ: $(\alpha_v), v \in \mathbf{N}$ καί ἀκόμη πτό σύντομα μέ: (α_v) .

Στὴν εἰδικὴ περίπτωσι πού τό $E \subset \mathbf{R}$, ἡ ἀκολουθία $\alpha: \mathbf{N} \rightarrow E$ λέγεται *ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν*. Ὡστε:

Ὅρισμός. Ὀνομάζουμε *ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν* *κάθε* (μονοσήμαντὴ) *ἀπεικόνιση τοῦ συνόλου* $\mathbf{N}$ *τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν στό σύνολο* $\mathbf{R}$ *τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν*.

Στά ἐπόμενα θά ἀσχοληθοῦμε **μόνο** μέ ἀκολουθίες πραγματικῶν ἀριθμῶν.

*Ετσι στο έξης μέ τόν ὄρο: «ἀκολουθία» θά ἐννοοῦμε: «ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν», δηλαδή: $\alpha: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}: v \rightarrow \alpha_v \in \mathbf{R}$.

Παραδείγματα: 1. Ἡ ἀκολουθία τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, δηλ. ἡ ἀκολουθία: 1, 2, 3, ..., v , ... τῆς ὁποίας ὁ γενικός (νιοστός) ὄρος εἶναι ὁ ἀριθμός v , δηλ. $\alpha_v = v$.

2. Ἡ ἀκολουθία: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{v}, \dots$ μέ γενικό ὄρο: $\alpha_v = \frac{1}{v}$.

3. Ἡ ἀκολουθία: $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \dots, (-1)^v \frac{1}{v}, \dots$ μέ γενικό ὄρο: $\alpha_v = (-1)^v \frac{1}{v}$.

4. *Αν ἀπεικονίσουμε τοὺς περιττοὺς φυσικοὺς ἀριθμούς στόν ἀριθμό 0 καί τοὺς ἄρτιους φυσικοὺς στόν ἀριθμό 1, θά πάρουμε τήν ἀκολουθία: 0, 1, 0, 1, ..., 0, 1, ...

Ἡ ἀκολουθία αὕτη συνήθως συμβολίζεται ὡς ἐξῆς:

$$\mathbf{N} \ni v \rightarrow \alpha_v = \begin{cases} 0, & \text{ἂν } v \text{ περιττός} \\ 1, & \text{ἂν } v \text{ ἄρτιος.} \end{cases}$$

5. Ἡ ἀκολουθία μέ γενικό ὄρο $\alpha_v = 1 + (-1)^v$, δηλαδή ἡ ἀκολουθία:

$$0, 2, 0, 2, \dots, 0, 2, \dots$$

Αὕτη ἡ ἀκολουθία μέ ἀκριβέστερη διατύπωση γράφεται:

$$\alpha_v = \begin{cases} 2, & \text{ἂν } v = 2k \text{ (} k \text{ φυσικός).} \\ 0, & \text{ἂν } v = 2k+1 \text{ (} k \text{ ἄκεραίος } \geq 0 \text{).} \end{cases}$$

6. Θεωροῦμε τήν ἀκολουθία $\alpha_v = \frac{2v}{v+3}$, $v = 1, 2, \dots$. Ὅρίζεται ἔτσι μία ἀπεικόνιση:

$$\alpha: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}: v \rightarrow \alpha_v \in \mathbf{R}.$$

Δίνοντας στό v διαδοχικά τίς θετικές ἄκεραίες τιμές, παίρνουμε τοὺς ὄρους τῆς. Πιο ἀναλυτικά ἡ παραπάνω ἀκολουθία συμβολίζεται μέ τίς διαδοχικές τιμές τῆς:

$$\frac{2}{4}, \frac{4}{5}, \frac{6}{6}, \frac{8}{7}, \dots, \frac{2v}{v+3}, \dots$$

* Παρατηρήσεις. 1) Ἀπό τά προηγούμενα παραδείγματα βλέπουμε ὅτι μία ἀκολουθία α_v , $v \in \mathbf{N}$ εἶναι *τελείως ὁρισμένη*, ὅταν ἔχουμε μία συνάρτηση $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$, πού ἐκφράζει ρητά τό γενικό ὄρο α_v τῆς ἀκολουθίας, δηλ. ὅταν διαθέτουμε τόν τύπο: $\alpha_v = f(v)$, ὅπου f ἡ γνωστή συνάρτηση τοῦ v .

2) Μία ἀκολουθία εἶναι ἐπίσης γνωστή, ὅταν δίνονται *ἐπαρκεῖς* πρῶτοι ὄροι τῆς ἀκολουθίας καί ἓνας *ἀναγωγικός τύπος (ἀναδρομική σχέση)* πού ἐπιτρέπει νά βρῖσκουμε τόν ἐπόμενο ὄρο α_{v+1} κάθε ὄρου α_v ἀπό τόν προηγούμενό του ἢ γενικότερα ἀπό ὁρισμένους ἀπό τοὺς προηγούμενους του. *Ετσι ἔχουμε ἀκολουθίες τῆς μορφῆς $\alpha_1 = \alpha$ καί $\alpha_{v+1} = f(\alpha_v)$, ἢ γενικότερα τῆς μορφῆς: $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \beta$ καί $\alpha_{v+1} = f(\alpha_v, \alpha_{v-1})$.

*Ἀξίζει ὁμως ἐδῶ νά τονίσουμε τά ἐξῆς: *Γιά νά ὁρίσουμε πλήρως μία ἀκολουθία α_v , $v \in \mathbf{N}$ μέ μία ἀναδρομική σχέση δέν ἀρκεῖ μόνο ὁ ἀναγωγικός τύπος, ἀλλά εἶναι ἀπαραίτητο νά ξέρομε καί ἰκανό ἀριθμό πρῶτων ὄρων τῆς*. Γιατί ἂν οἱ τιμές αὐτῶν τῶν πρῶτων ὄρων τῆς ἀκολουθίας ἀλλάξουν, τότε ἀλλάζει καί ἡ ἀκολουθία, ἂν καί ὁ ἀναγωγικός τῆς τύπος παραμένει ὁ ἴδιος. *Επίσης πολλές φορές δέν εἶναι ἀρκετό νά ὁρίσουμε ἀπλῶς ἰκανό ἀριθμό ἀπό πρῶτους ὄρους μιᾶς ἀκολουθίας. Εἶναι ἀναγκαῖο νά θέσουμε καί τίς συνθήκες ἐκεῖνες πού θά μᾶς ἐπιτρέπουν νά βρῖσκουμε, μέ τήν ἀναδρομική σχέση καί τίς «ἀρχικές» συνθήκες, ὅσους ὄρους τῆς ἀκολουθίας α_v , $v \in \mathbf{N}$ θέλουμε (βλ. σχετικά καί ἀσκηση 89).

3) Μερικές φορές τῷ δείκτη v τοῦ α_v τόν παίρνουμε ἔτσι, ὥστε νά δέχεται τίς τιμές: 0, 1, 2, ..., ὁπότε ἡ ἀκολουθία γράφεται: $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{v-1}, \dots$. Σ' αὕτη τήν περίπτωσι δ νιοστός ὄρος τῆς ἀκολουθίας εἶναι ὁ α_{v-1} .

4) Τό πλήθος τῶν ὄρων μιᾶς ἀκολουθίας α_n , $n \in \mathbf{N}$ δέν εἶναι πεπερασμένο, ἐνῶ τό σύνολο τῶν ὄρων της εἶναι δυνατό νά εἶναι πεπερασμένο. Τό σύνολο αὐτό τό συμβολίζουμε μέ $\alpha(\mathbf{N})$ καί τό ὀρίζουμε ὡς τό σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν x , οἱ ὁποῖοι εἶναι ἴσοι μέ κάποιο ὄρο της ἀκολουθίας, δηλαδή $\alpha(\mathbf{N}) \underset{\text{ορσ}}{=} \{x \in \mathbf{R} : \text{ὑπάρχει } n \in \mathbf{N} \text{ μέ } \alpha_n = x\}$.

Στό παράδειγμα 4 τῆς §39, π.χ., τό σύνολο τῶν ὄρων τῆς ἀκολουθίας εἶναι $\alpha(\mathbf{N}) = \{0, 1\}$, ἐνῶ τό πλήθος τῶν ὄρων της εἶναι ἄπειρο.

Ἐπίσης στό παράδειγμα 5 εἶναι $\alpha(\mathbf{N}) = \{0, 2\}$, ἐνῶ τό πλήθος τῶν ὄρων της εἶναι ἄπειρο.

Σημαντική παρατήρηση. Ὅπως ξέρουμε ἀπό τίς προηγούμενες τάξεις, τό σύνολο τῶν ρητῶν (σύμμετρων) καί ἄρρητων (ἀσύμμετρων) ἀριθμῶν λέγεται σύνολο $\mathbf{R}$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Τό σύνολο αὐτό λέγεται καί εὐθεία τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, ἄν θέλουμε νά ἐκφραστοῦμε μέ τή «γλώσσα» τῆς Γεωμετρίας· οἱ πραγμ. ἀριθμοί θεωροῦνται τότε ὡς σημεῖα τῆς εὐθείας, γι' αὐτό γιά τά σημεῖα χρησιμοποιοῦμε τά ἴδια σύμβολα μέ αὐτά πού χρησιμοποιοῦμε γιά νά παραστήσουμε τοὺς πραγμ. ἀριθμούς. Αὕτή ἡ ταυτοποίηση τῶν πραγμ. ἀριθμῶν μέ τά σημεῖα ἑνός ἄξονα βασιζέται σ' ἕνα ἀξίωμα, σύμφωνα μέ τό ὁποῖο: *μεταξύ τῶν πραγμ. ἀριθμῶν καί τῶν σημείων ἑνός ἄξονα ὑπάρχει μία ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία.* Δηλαδή σέ κάθε πραγματικό ἀριθμό ἀντιστοιχεῖ ἕνα καί μόνο σημεῖο τοῦ ἄξονα καί ἀντιστρόφως. Ἡ ἀμφιμονοσήμαντη αὕτή ἀντιστοιχία τοῦ $\mathbf{R}$ μέ τά σημεῖα ἑνός ἄξονα, μᾶς ἐπιτρέπει νά θεωροῦμε τοὺς ὄρους μιᾶς ἀκολουθίας ὡς τετμημένες τῶν σημείων ἑνός ἄξονα (βλ. ἑναντι σχῆμα) καί νά ἀντιμετωπίζουμε ἔτσι τίς ἀκολουθίες πραγμ. ἀριθμῶν ὡς ἀκολουθίες σημείων τοῦ ἄξονα. Ἡ γεωμετρική αὕτή ἐποπτεία θά μᾶς διευκολύνει πολύ παρακάτω γιά νά κατανοήσουμε μερικές καινούργιες ἔννοιες καί ἀποδείξεις ὀρισμένων προτάσεων πού θά διατυπώσουμε.



§ 40. Πράξεις μεταξύ ἀκολουθιῶν.—Ἐστω $\mathcal{A}$ τό σύνολο ὅλων τῶν ἀκολουθιῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Ἡ *βασική ἰσότητα* στό $\mathcal{A}$ ὀρίζεται ὡς ἑξῆς:

$$\forall (\alpha_n), (\beta_n) \in \mathcal{A}, (\alpha_n) \underset{\text{ορσ}}{\longleftrightarrow} (\beta_n) \text{ γιά κάθε } n \in \mathbf{N}.$$

Μεταξύ τῶν στοιχείων τοῦ $\mathcal{A}$ μποροῦμε νά ὀρίσουμε τό *ἄθροισμα*, τή *διαφορά*, τό *γινόμενο* καί τό *πηλίκιο*, ὡς μία ἐπίσης ἀκολουθία πραγμ. ἀριθμῶν, δηλ. ὡς ἕνα στοιχεῖο τοῦ $\mathcal{A}$. Ἐτσι ἄν (α_n) καί (β_n) εἶναι δύο ἀκολουθίες, τότε:

Ὀνομάζουμε *ἄθροισμα* τῶν (α_n) καί (β_n) τήν ἀκολουθία $(\alpha_n + \beta_n)$,

δηλαδή τήν: $\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n, \dots$

Ὡστε: $(\alpha_n) + (\beta_n) = (\alpha_n + \beta_n), n \in \mathbf{N}.$

Ὀνομάζουμε *διαφορά* τῆς (α_n) μείον τή (β_n) τήν ἀκολουθία $(\alpha_n - \beta_n)$,

δηλαδή τήν: $\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2, \dots, \alpha_n - \beta_n, \dots$

Ὡστε: $(\alpha_n) - (\beta_n) = (\alpha_n - \beta_n), n \in \mathbf{N}.$

Ὀνομάζουμε *γινόμενο* ἑνός πραγμ. ἀριθμοῦ λ ἐπὶ τήν (α_n) τήν ἀκολουθία

(λ_{α_v}) , δηλ. τήν: $\lambda_{\alpha_1}, \lambda_{\alpha_2}, \dots, \lambda_{\alpha_v}, \dots$

"Ωστε: $\lambda(\alpha_v) = (\lambda_{\alpha_v}), v \in \mathbb{N}$.

"Ονομάζουμε **γινόμενο** τῶν (α_v) καί (β_v) τήν ἀκολουθία $(\alpha_v \cdot \beta_v)$, δηλαδή τήν: $\alpha_1 \beta_1, \alpha_2 \beta_2, \dots, \alpha_v \beta_v, \dots$

"Ωστε: $(\alpha_v) \cdot (\beta_v) = (\alpha_v \cdot \beta_v), v \in \mathbb{N}$.

"Ονομάζουμε **πηλίκιο** τῆς (α_v) διά τῆς (β_v) μέ $\beta_v \neq 0 \forall v \in \mathbb{N}$, τήν ἀκολ.

$\left(\frac{\alpha_v}{\beta_v}\right)$, δηλ. τήν: $\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \dots, \frac{\alpha_v}{\beta_v}, \dots$

"Ωστε: $(\alpha_v) : (\beta_v) = (\alpha_v : \beta_v), v \in \mathbb{N}$.

"Ονομάζουμε **ἀπόλυτη τιμή** τῆς (α_v) τήν ἀκολουθία $(|\alpha_v|)$, δηλαδή

τήν: $|\alpha_1|, |\alpha_2|, \dots, |\alpha_v|, \dots$

"Ωστε: $|(\alpha_v)| = (|\alpha_v|), v \in \mathbb{N}$.

"Ονομάζουμε **τετραγωνική ρίζα** μιᾶς ἀκολουθίας (α_v) μέ $\alpha_v \geq 0 \forall v \in \mathbb{N}$, τήν ἀκολ. $(\sqrt{\alpha_v})$, δηλ. τήν:

$$\sqrt{\alpha_1}, \sqrt{\alpha_2}, \dots, \sqrt{\alpha_v}, \dots$$

"Ωστε: $\sqrt{(\alpha_v)} = (\sqrt{\alpha_v}), v \in \mathbb{N}$.

"Ανάλογα ὀρίζουμε τή ρίζα k -τάξεως ($k > 2$) μιᾶς ἀκολουθίας. "Ετσι

ἔχουμε: $\sqrt[k]{(\alpha_v)} = (\sqrt[k]{\alpha_v}), v \in \mathbb{N} \quad (k > 2)$.

Παρατήρηση. Οἱ παραπάνω ὁρίσμοι μποροῦν νά γενικευθοῦν καί γιά τίς περιπτώσεις, καί μόνο γι' αὐτές, πού ἔχουμε πεπερασμένο πλῆθος ἀκολουθιῶν.

§ 41. Ἡ ἔννοια τῆς φραγμένης ἀκολουθίας.— "Εστω $\alpha_v, v \in \mathbb{N}$ μία ἀ-
κολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν. Δίνουμε τοὺς ἐπόμενους ὁρισμούς:

"Ορισμός 1. *Θά λέμε ὅτι ἡ ἀκολουθία $\alpha_v, v \in \mathbb{N}$ εἶναι ἄνω φραγμένη, τότε καί μόνο τότε, ἂν ὑπάρχει πραγματικός ἀριθμός s τέτοιος, ὥστε: $\alpha_v \leq s$ γιά κάθε $v \in \mathbb{N}$.*

"Ο ἀριθμός s , καθὼς καί κάθε ἄλλος πραγμ. ἀριθμός πού εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸ s , λέγεται τότε **ἓνα ἄνω φράγμα** τῆς ἀκολουθίας $\alpha_v, v \in \mathbb{N}$.

"Ορισμός 2. *Θά λέμε ὅτι ἡ ἀκολουθία $\alpha_v, v \in \mathbb{N}$ εἶναι κάτω φραγμένη, τότε καί μόνο τότε, ἂν ὑπάρχει πραγματικός ἀριθμός σ τέτοιος, ὥστε: $\sigma \leq \alpha_v$ γιά κάθε $v \in \mathbb{N}$.*

"Ο ἀριθμός σ , καθὼς καί κάθε ἄλλος πραγμ. ἀριθμός πού εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὸ σ , λέγεται τότε **ἓνα κάτω φράγμα** τῆς ἀκολουθίας $\alpha_v, v \in \mathbb{N}$.

"Ορισμός 3. *Θά λέμε ὅτι ἡ ἀκολουθία $\alpha_v, v \in \mathbb{N}$ εἶναι φραγμένη, τότε καί μόνο τότε, ἂν εἶναι ἄνω καί κάτω φραγμένη, δηλαδή ἂν ὑπάρχουν πραγμ. ἀριθμοί σ, s ($\sigma \leq s$) τέτοιοι, ὥστε: $\sigma \leq \alpha_v \leq s$ γιά κάθε $v \in \mathbb{N}$.*

Δηλ. μία ἀκολουθία $\alpha_v, v \in \mathbb{N}$ εἶναι φραγμένη, τότε καί μόνο τότε, ἂν

Υπάρχει κλειστό διάστημα $[s, s]$ στο οποίο ανήκουν όλοι οι όροι της. Έτσι, π.χ. η ακολουθία $\alpha_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ είναι φραγμένη, έπειδή ισχύει:

$$0 \leq \alpha_n = \frac{1}{n} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$


δηλαδή όλοι οι όροι της ανήκουν στο κλειστό διάστημα $[0, 1]$.

Όρισμός 4. Θα λέμε ότι η ακολουθία α_n , $n \in \mathbb{N}$ είναι **απολύτως φραγμένη**, τότε και μόνο τότε, αν υπάρχει (θετικός) πραγματικός αριθμός θ τέτοιος, ώστε:

$$|\alpha_n| \leq \theta \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Τό θ λέγεται τότε **ένα απόλυτο φράγμα** της α_n , $n \in \mathbb{N}$. Είναι φανερό ότι, αν θ είναι ένα απόλυτο φράγμα, τότε και κάθε άλλος θετικός αριθμός $\varphi > \theta$ είναι επίσης ένα απόλυτο φράγμα της α_n , $n \in \mathbb{N}$.

Συνοψίζοντας τά παραπάνω έχουμε:

1. (α_n) άνω φραγμένη $\iff_{\text{ορσ}} (\exists s \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n \leq s)$
2. (α_n) κάτω φραγμένη $\iff_{\text{ορσ}} (\exists \sigma \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \sigma \leq \alpha_n)$
3. (α_n) φραγμένη $\iff_{\text{ορσ}} (\exists \sigma \in \mathbb{R}, \exists s \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \sigma \leq \alpha_n \leq s)$
4. (α_n) άπολ. φραγμένη $\iff_{\text{ορσ}} (\exists \theta \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}, |\alpha_n| \leq \theta).$

Ισχύει ή εξής ισοδυναμία:

$$(\alpha_n) \text{ φραγμένη} \iff (\alpha_n) \text{ απόλυτως φραγμένη}.$$

Πράγματι, αρκεί νά λάβουμε: $\theta = \max(|\sigma|, |s|).$

Παρατήρηση: Έξαιτίας της πίο πάνω ισοδυναμίας στά επόμενα οι όροι **φραγμένη** και **απόλυτως φραγμένη** θά χρησιμοποιούνται μέ τήν ίδια σημασία, χωρίς διάκριση:

Παραδείγματα: 1. 'Η ακολουθία $\alpha_n = \frac{\eta \mu \nu}{n}$, $n=1, 2, \dots$ είναι φραγμένη, έπειδή:

$$|\alpha_n| = \left| \frac{\eta \mu \nu}{n} \right| \leq \frac{1}{n} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

2. 'Η ακολουθία $\alpha_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$ είναι φραγμένη, έπειδή $|\alpha_n| = \frac{1}{n^2} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

3. 'Η ακολουθία $\alpha_n = \frac{n \sin n}{n+1}$, $n=1, 2, \dots$ είναι φραγμένη, έπειδή:

$$|\alpha_n| = \left| \frac{n \sin n}{n+1} \right| \leq \frac{n}{n+1} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

4. 'Η ακολουθία $\alpha_n = \frac{n^2 \sin(3n) + \sqrt{n} \cdot \eta \mu \nu}{5n^2 + 1}$, $n=1, 2, \dots$ είναι φραγμένη.

Άρκεί νά αποδείξουμε ότι ή α_n , $n=1, 2, \dots$ είναι απόλυτως φραγμένη. Πράγματι, γιά κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε:

$$|\alpha_n| = \left| \frac{n^2 \sin(3n) + \sqrt{n} \cdot \eta \mu \nu}{5n^2 + 1} \right| \leq \frac{|n^2 \sin(3n)| + |\sqrt{n} \cdot \eta \mu \nu|}{5n^2 + 1} \leq \frac{n^2 + \sqrt{n}}{5n^2 + 1} \leq \frac{n^2 + n^2}{5n^2 + 1} < \frac{2n^2}{5n^2} = \frac{2}{5}$$

δηλαδή: $|\alpha_n| < \frac{2}{5} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

§ 42. Ἡ ἔννοια τῆς μονότονης ἀκολουθίας.— Ἐστω $\alpha_n, n \in \mathbb{N}$ μία ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν. Δίνουμε τοὺς ἐπόμενους ὁρισμούς:

Ὁρισμός 1. Θά λέμε ὅτι ἡ ἀκολουθία $\alpha_n, n \in \mathbb{N}$ εἶναι **αὐξοῦσα**, συμβολ. $(\alpha_n) \uparrow$, τότε καὶ μόνο τότε, ἂν ἰσχύει: $\alpha_n \leq \alpha_{n+1}$ γιὰ κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Ὁρισμός 2. Θά λέμε ὅτι ἡ ἀκολουθία $\alpha_n, n \in \mathbb{N}$ εἶναι **γνησίως αὐξοῦσα**, συμβολ. $(\alpha_n) \uparrow$, τότε καὶ μόνο τότε, ἂν ἰσχύει: $\alpha_n < \alpha_{n+1}$ γιὰ κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Ὁρισμός 3. Θά λέμε ὅτι ἡ ἀκολουθία $\alpha_n, n \in \mathbb{N}$ εἶναι **φθίνουσα**, συμβολ. $(\alpha_n) \downarrow$, τότε καὶ μόνο τότε, ἂν ἰσχύει: $\alpha_n \geq \alpha_{n+1}$ γιὰ κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Ὁρισμός 4. Θά λέμε ὅτι ἡ ἀκολουθία $\alpha_n, n \in \mathbb{N}$ εἶναι **γνησίως φθίνουσα**, συμβολ. $(\alpha_n) \downarrow$, τότε καὶ μόνο τότε, ἂν ἰσχύει: $\alpha_n > \alpha_{n+1}$ γιὰ κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Ὁρισμός 5. Θά λέμε ὅτι ἡ ἀκολουθία $\alpha_n, n \in \mathbb{N}$ εἶναι **σταθερή**, τότε καὶ μόνο τότε, ἂν ἰσχύει: $\alpha_{n+1} = \alpha_n$ γιὰ κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Μία ἀκολουθία $\alpha_n, n \in \mathbb{N}$ ποὺ ἀνήκει σέ μία ἀπὸ τὶς παραπάνω κατηγορίες λέγεται **μονότονη ἀκολουθία**. Εἰδικότερα, ἂν ἡ ἀκολουθία εἶναι γνησίως αὐξοῦσα ἢ γνησίως φθίνουσα, τότε λέγεται **γνησίως μονότονη ἀκολουθία**.

Παρατηρήσεις. 1. Κάθε γνησίως μονότονη ἀκολουθία εἶναι καὶ μονότονη, δὲν ἰσχύει ὅμως καὶ τὸ ἀντίστροφο (γιατί;).

2. Ἄν $(\alpha_n) \uparrow$, τότε $\alpha_n \geq \alpha_1$ γιὰ κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλ. τότε ἡ ἀκολουθία (α_n) εἶναι κάτω φραγμένη μὲ ἕνα κάτω φράγμα τὸν πρῶτο ὅρο τῆς. Ὁμοίως, ἂν $(\alpha_n) \downarrow$, τότε $\alpha_n \leq \alpha_1$ γιὰ κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλ. τότε ἡ (α_n) εἶναι ἄνω φραγμένη μὲ ἕνα ἄνω φράγμα τὸν πρῶτο ὅρο τῆς.

3. Γιὰ νὰ καθορίσουμε τὸ εἶδος μονοτονίας μιᾶς ἀκολουθίας (α_n) , τὶς πιὸ πολλές φορές, ἐργαζόμαστε μὲ μία ἀπὸ τὶς ἐπόμενες μεθόδους:

(α) Ἐξετάζουμε τὸ πρόσημο τῆς διαφορᾶς: $\Delta_n = \alpha_{n+1} - \alpha_n$.

(β) Ἄν οἱ ὅροι τῆς (α_n) διατηροῦν πρόσημο, τότε, συνήθως, συγκρίνουμε τὸ λόγο $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$ μὲ τὴ μονάδα. Ἀπὸ τὴ σύγκριση αὕτη ἐξαγωγήμε συμπεράσματα γιὰ τὴ μονοτονία τῆς ἀκολουθίας.

(γ) Βρίσκουμε μεταξὺ δύο ἢ τριῶν πρώτων ὁρῶν τῆς ἀκολουθίας τὴ σχέση, ἀπὸ τὴν ὁποία ἔχουμε μιὰ ἐνδειξη μονοτονίας καὶ ἔπειτα, μὲ τὴ μέθοδο τῆς τέλεις ἐπαγωγῆς, ἀποδεικνύουμε τὴν ἀνισοτική σχέση, ἡ ὁποία θὰ καθορίσει τελικὰ τὸ εἶδος τῆς μονοτονίας τῆς (α_n) .

Παραδείγματα: 1. Ἡ ἀκολουθία $\alpha_n = \frac{1}{n}, n = 1, 2, \dots$ εἶναι γνησίως φθίνουσα, ἐπειδὴ:

$$\alpha_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = \alpha_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

2. Ἡ ἀκολουθία $\alpha_n = n^2, n = 1, 2, \dots$ εἶναι γνησίως αὐξοῦσα, ἐπειδὴ:

$$\alpha_{n+1} = (n+1)^2 > n^2 = \alpha_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

3. Ἡ ἀκολουθία $\alpha_n = \frac{n}{n+1}, n = 1, 2, \dots$ εἶναι γνησίως αὐξοῦσα, ἐπειδὴ ἂν σχηματίσουμε τὴν διαφορά $\Delta_n = \alpha_{n+1} - \alpha_n$ ἔχουμε:

$$\Delta_n = \alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

δηλαδή: $\alpha_{n+1} > \alpha_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

* 4. Νὰ ἐξετάσετε ὡς πρὸς τὴ μονοτονία τὴν ἀκολουθία ποὺ ὀρίζεται ἀπὸ τὴν ἀναδρομικὴ σχέση:

$$\alpha_{n+1} = \alpha + \alpha_n^2 \quad \text{καὶ} \quad \alpha_1 = \alpha > 0.$$

Λύση: Πρώτα—πρώτα μέ επαγωγή αποδεικνύουμε ότι: $\alpha_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Έξάλλου άμέσως βλέπουμε ότι: $\alpha_1 = \alpha < \alpha + \alpha_1^2$, δηλ. $\alpha_1 < \alpha_2$. Άρα, αν ή ακολουθία (α_n) είναι μονότονη, θά πρέπει νά είναι γνησίως αύξουσα. Έστω λοιπόν ότι: $\alpha_k < \alpha_{k+1}$, τότε $\alpha_k^2 < \alpha_{k+1}^2$, όποτε $\alpha + \alpha_k^2 < \alpha + \alpha_{k+1}^2$, δηλαδή $\alpha_{k+1} < \alpha_{k+2}$. Άρα $(\alpha_n) \uparrow$

Γιά τής μονότονες ακολουθίες φυσικών αριθμών ισχύει ή έξής χρήσιμη πρόταση:

★ Πρόταση. Αν $k_n, n \in \mathbb{N}$ είναι μία γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών, τότε ισχύει: $k_n \geq n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη. (Μέ επαγωγή). Για $n = 1$ ισχύει, έπειδή $k_1 \in \mathbb{N}$, άρα $k_1 \geq 1$. Έστω ότι ισχύει για $n = \mu$ ($\mu \in \mathbb{N}$), δηλ. ότι: $k_\mu \geq \mu$. Τότε $k_{\mu+1} > k_\mu \geq \mu$, άρα $k_{\mu+1} > \mu$. Από τήν τελευταία άνισότητα, έπειδή οι $k_{\mu+1}$ και μ είναι φυσικοί αριθμοί, έπεται ότι: $k_{\mu+1} \geq \mu + 1$.

Ωστε: $k_\mu \geq \mu \Rightarrow k_{\mu+1} \geq \mu + 1$. Άρα $k_n \geq n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

*** § 43. Η έννοια τής ύπακολουθίας.**— Έστω $\alpha_n, n \in \mathbb{N}$ μία ακολουθία πραγμ. αριθμών. Έστω άκόμη μία γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών (k_n) , δηλαδή:

$$k_1 < k_2 < \dots < k_n < k_{n+1} < \dots$$

Τότε όρίζεται μία ακολουθία (β_n) μέ τύπο: $\beta_n = \alpha_{k_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, δηλαδή ή ακολουθία:

$$\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}, \dots, \alpha_{k_n}, \dots \quad (1)$$

Η ακολουθία (1) λέγεται **ύπακολουθία** τής (α_n) .

Παραδείγματα: Έστω ή ακολουθία $\alpha_n, n = 1, 2, \dots$ και ή γνησίως αύξουσα ακολουθία τών άρτιων φυσικών αριθμών $k_n = 2n, n = 1, 2, \dots$. Τότε όρίζεται ή ακολουθία $\alpha_{k_n} = \alpha_{2n}, n = 1, 2, \dots$, δηλ. ή ακολουθία: $\alpha_2, \alpha_4, \alpha_6, \dots, \alpha_{2n}, \dots$, ή όποια άποτελείται από έκείνους τούς όρους τής $\alpha_n, n = 1, 2, \dots$ που έχουν άρτιο δείκτη. Η ακολουθία αυτή είναι μία ύπακολουθία τής (α_n) και λέγεται **ύπακολουθία τών άρτιων δεικτών**. Όμοια όρίζεται και ή **ύπακολουθία τών περιττών δεικτών** τής $\alpha_n, n = 1, 2, \dots$, δηλαδή ή ακολουθία:

$$\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_{2n-1}, \dots$$

Έτσι, π.χ. αν $\alpha_n = (-1)^n \frac{1}{n}, n = 1, 2, \dots$, τότε ή ύπακολουθία τών άρτιων δεικτών είναι ή:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots, \frac{1}{2n}, \dots$$

και τών περιττών δεικτών είναι ή: $-1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{5}, \dots, -\frac{1}{2n-1}, \dots$

Επίσης μία άλλη ύπακολουθία τής $\alpha_n = (-1)^n \frac{1}{n}, n = 1, 2, \dots$ είναι ή ακολουθία:

$$\alpha_{k_n} = \alpha_{2n} = \frac{1}{2n}, n = 1, 2, \dots \text{ δηλ. ή } \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$$

Προφανώς μία ακολουθία έχει, γενικά, άπειρες ύπακολουθίες.

Αξιόλογη παρατήρηση. Έπειδή, σύμφωνα μέ τήν παραπάνω πρόταση, ισχύει: $k_n \geq n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ θά έχουμε: $n > n_0 \Rightarrow k_n > n_0$.

*** § 44. Η έννοια: άκέραιο μέρος πραγματικού αριθμού.**— Έστω x ένας πραγματικός αριθμός. Δίνουμε τόν έξής όρισμό:

Όρισμός. Ονομάζουμε **άκέραιο μέρος** του x και το συμβολίζουμε με $[x]$, τον πιο μεγάλο άκέραιο αριθμό που δεν υπερβαίνει το x .

Έτσι έχουμε:

$$[3,95] = 3, [-2] = -2, [0,14] = 0, [-3,2] = -4, [\sqrt{3}] = 1, \left[\frac{5}{2}\right] = 2.$$

Τό άκέραιο μέρος ενός πραγμ. αριθμού x αποδεικνύεται ότι είναι μοναδικό.

Άκριβέστερα αποδεικνύεται στα Μαθηματικά ή εξής:

Πρόταση. (Θεώρημα του άκέραιου μέρους).—Γιά κάθε πραγματικό αριθμό x υπάρχει ένας και μόνο ένας άκέραιος a με: $a \leq x < a + 1$.

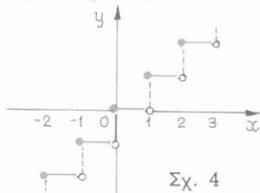
Η παραπάνω πρόταση μάς λέγει ότι: γιά κάθε x από τό $\mathbf{R}$ υπάρχει ένα και μόνο ένα διάστημα της μορφής $[a, a + 1)$ με a άκέραιο αριθμό, στο οποίο ανήκει ό x .

Ορίζεται συνεπώς ή απεικόνιση:

$$[] : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{Z} : x \xrightarrow{[]} [x] = \begin{cases} v, & \text{αν } v \leq x < v + 1 \\ -v, & \text{αν } -v \leq x < -v + 1, \end{cases}$$

όπου v φυσικός αριθμός ή τό μηδέν (βλ. σχ. 4).

Από τά προηγούμενα έχουμε, λοιπόν, ότι:



Σχ. 4

$$\forall x \in \mathbf{R}, [x] \leq x < [x] + 1$$

(1)

*Άμεσες συνέπειες τής (1) είναι οί εξής ιδιότητες του άκέραιου μέρους:

α) $x = [x] + \theta$, $\forall x \in \mathbf{R}$ και $0 \leq \theta < 1$. **β)** $[x+k] = [x] + k$, $\forall x \in \mathbf{R}$, $\forall k \in \mathbf{Z}$.

Πράγματι, από τήν (1) έχουμε: $0 \leq x - [x] < 1$ και αν θέσουμε $x - [x] = \theta$, τότε είναι: $x = [x] + \theta$ με $0 \leq \theta < 1$. Γιά νά αποδείξουμε τή β) παρατηρούμε ότι: έπειδή $x = [x] + \theta$, $0 \leq \theta < 1$ έχουμε: $x + k = [x] + k + \theta$, $0 \leq \theta < 1$ και συνεπώς $[x + k] = ([x] + k) + \theta = [x] + k$, αφού τό $([x] + k) \in \mathbf{Z}$.

Σημείωση. Από τήν (1) έχουμε: $\forall x \in \mathbf{R}$, $x - 1 < [x] \leq x$.

§ 45. Η έννοια: ή συνθήκη $p(v)$, $v \in \mathbf{N}$ ισχύει τελικά γιά κάθε $v \in \mathbf{N}$.—

Έστω $p(v)$ μία συνθήκη στό $\mathbf{N}$ (βλ. σχετ. Κεφ. I, § 9). Συμφωνούμε νά λέμε στό επόμενο ότι:

Η συνθήκη $p(v)$, $v \in \mathbf{N}$ ισχύει τελικά γιά κάθε $v \in \mathbf{N}$, τότε και μόνο τότε, αν υπάρχει δείκτης $v_0 \in \mathbf{N}$, δηλ. αν υπάρχει ένας φυσικός αριθμός v_0 τέτοιος, ώστε ή συνθήκη $p(v)$ είναι μία ταυτότητα στό σύνολο: $\mathbf{N}_{v_0} = \{v \in \mathbf{N} : v \geq v_0\}$. Πιο σύντομα: αν γιά κάθε $v \geq v_0$ ή συνθήκη $p(v)$ είναι μία αληθής πρόταση.

Ειδικότερα θά λέμε ότι ή συνθήκη ή ή ιδιότητα p που αναφέρεται σέ μία ακολουθία (a_n) , ισχύει τελικά γιά όλους τούς δείκτες, ισοδύναμα: τελικά όλοι οί όροι τής ακολουθίας (a_n) πληρούν τή συνθήκη p , τότε και μόνο τότε, α υπάρχει ένας φυσικός αριθμός v_0 τέτοιος, ώστε ή ακολουθία a_{v_0+v} , $v = 0, 1, 2, \dots$,

δηλαδή ή: $\alpha_{v_0}, \alpha_{v_0+1}, \dots, \alpha_{v_0+v}, \dots$ νά έχει τήν ιδιότητα p . Έτσι, αν π.χ. $\alpha_v = \frac{1}{v}, v = 1, 2, \dots$ είναι μία ακολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν καί $p(v)$

ή συνθήκη: $\alpha_v < \frac{2}{10^3}$, τότε διαπιστώνουμε ἀμέσως ὅτι ἡ συνθήκη $p(v)$ ἰσχύει τελικά γιά ὅλους τοὺς δείκτες, δηλαδή τελικά ὅλοι οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας $\alpha_v = \frac{1}{v}, v = 1, 2, \dots$ πληροῦν τή συνθήκη: $\alpha_v < \frac{2}{10^3}$. Πράγματι, ἀρκεῖ νά λάβουμε

ὡς $v_0 = 501$ (γιατί;), ὁπότε ἔχουμε: γιά κάθε $v \in \mathbb{N}$ μέ $v \geq v_0 = 501$: $\alpha_v = \frac{1}{v} \leq \frac{1}{v_0} = \frac{1}{501} < \frac{1}{500} = \frac{2}{1000} = \frac{2}{10^3}$. Ἡ ἀκολουθία λοιπόν $\alpha_{501+v}, v = 0, 1, 2, \dots$

ἔχει τήν ιδιότητα: ὅλοι οἱ ὅροι της εἶναι μικρότεροι ἀπό τό $\frac{2}{10^3}$. Συνεπῶς

ἡ ἀκολουθία $\alpha_v = \frac{1}{v}, v = 1, 2, \dots$ ἔχει τελικά ὅλους τοὺς ὅρους της μικρότερους ἀπό τό $\frac{2}{10^3}$. Αὐτό μέ ἀπλά λόγια σημαίνει ὅτι: ἂν ἐξαίρεσουμε ἓνα πεπε-

ρασμένο πλήθος ὅρων τῆς ἀκολουθίας $\alpha_v = \frac{1}{v}, v = 1, 2, \dots$ ἀπό τήν ἀρχή, δηλαδή

τοὺς: $a_1, a_2, \dots, a_{500}$ ἀπό ἐκεῖ καί πέρα ὅλοι οἱ ὅροι της εἶναι μικρότεροι ἀπό τό $\frac{2}{10^3}$.

Ἀξιοσημείωτες παρατηρήσεις. 1) Ἐάν μία συνθήκη $p(v), v \in \mathbb{N}$ ἰσχύει τελικά γιά κάθε $v \in \mathbb{N}$, τότε ὑπάρχει ἓνα πεπερασμένο σύνολο δεικτῶν, στό ὁποῖο ἡ $p(v), v \in \mathbb{N}$ δέν ἰσχύει. Ἐτσι στό προηγούμενο παράδειγμα, ἂν $v \in \{1, 2, 3, \dots, 500\}$, τότε ἡ :

$$p(v) : \alpha_v = \frac{1}{v} < \frac{2}{10^3} \text{ δέν ἰσχύει.}$$

2) Ἐάν μία συνθήκη $p(v), v \in \mathbb{N}$ εἶναι ταυτότητα στό $\mathbb{N}$, δηλ. ἰσχύει γιά κάθε $v \in \mathbb{N}$, τότε, προφανῶς, ἰσχύει καί τελικά γιά κάθε $v \in \mathbb{N}$. τό ἀντίστροφο ὁμως δέν εἶναι ἀληθές.

§ 46. Ἡ ἔννοια τῆς περιοχῆς ἢ γειτονιάς σημείου τοῦ $\mathbb{R}$. — Ἐστω ἓνας πραγματικός ἀριθμός α ($\alpha \in \mathbb{R}$) καί ἓνας θετικός ἀριθμός ε ($\varepsilon > 0$). τότε ὀρίζεται τό ἀνοικτό διάστημα * τῆς μορφῆς : $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$, τό ὁποῖο λέγεται **περιοχή ἢ γειτονιά τοῦ σημείου α μέ κέντρο τό α καί ἀκτίνα ε** (βλ. ἀμέσως παρκάτω σχῆμα):



Γενικότερα: **περιοχή ἢ γειτονιά ἑνός σημείου α** ὀνομάζεται κάθε ἀνοικτό διά-

* Ὑπενθυμίζουμε (βλ. Κεφ. I, § 7) ὅτι **ἀνοικτό διάστημα** (α, β) τῆς εὐθείας τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι τό σύνολο: $(\alpha, \beta) = \{x \in \mathbb{R} : \alpha < x < \beta\}$.

σημα (γ, δ), τό οποίο περιέχει τό σημείο α, δηλαδή α ∈ (γ, δ). Έτσι π.χ. τό διάστημα (1, 2) είναι περιοχή τοῦ $\sqrt{2}$, ἐπειδὴ $\sqrt{2} \in (1, 2)$.

Ἡ περιοχή μέ κέντρο τό σημείο α καί μέ ἀκτίνα ε θά συμβολίζεται μέ $\pi(\alpha, \varepsilon)$.

Ὡστε: $\pi(\alpha, \varepsilon) \equiv (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) = \{x \in \mathbf{R} : \alpha - \varepsilon < x < \alpha + \varepsilon\}$.

Ἄν $\alpha = 0$, τότε $\pi(0, \varepsilon) \equiv (-\varepsilon, +\varepsilon) = \{x \in \mathbf{R} : -\varepsilon < x < \varepsilon\}$ καί λέγεται **περιοχή ἢ γειτονιά τοῦ μηδενός**.

Μία πολύ χρήσιμη πρόταση εἶναι ἡ ἑξῆς: $(\forall x) x \in \pi(\alpha, \varepsilon) \iff |x - \alpha| < \varepsilon$.

Πράγματι:

$$(\forall x) x \in \pi(\alpha, \varepsilon) \iff x \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \iff \alpha - \varepsilon < x < \alpha + \varepsilon \iff |x - \alpha| < \varepsilon.$$

Σημ. Κάνετε ἀπολύτως κτῆμα σας τίς παραπάνω ἰσοδυναμίες. Θά τίς χρησιμοποιοῦμε πολύ συχνά ἀπό ἐδῶ καί πέρα. Γιά νά βεβαιωθεῖτε προσέξτε καί τήν ἐπόμενη παράσταση:



Εἰδικά γιά $\alpha = 0$ ἔχουμε: $(\forall x) x \in \pi(0, \varepsilon) \iff x \in (-\varepsilon, +\varepsilon) \iff -\varepsilon < x < \varepsilon \iff |x| < \varepsilon$.

Σημαντική παρατήρηση. Ἐχοντας τώρα ὑπόψη καί τήν προηγούμενη παράγραφο, θά λέμε ὅτι: **τελικά ὅλοι οἱ ὄροι μιᾶς ἀκολουθίας $a_n, n = 1, 2, \dots$ βρίσκονται στήν περιοχή $\pi(\alpha, \varepsilon)$ ἐνός σημείου α, τότε καί μόνο τότε, ἂν ὑπάρχει δείκτης $n_0 \in \mathbf{N}$ τέτοιος, ὥστε: γιά κάθε $n \geq n_0$ ἰσχύει: $a_n \in \pi(\alpha, \varepsilon)$, δηλ. $|a_n - \alpha| < \varepsilon$.** Αὐτό, σύμφωνα μέ τήν πρώτη παρατήρηση τῆς § 45, εἶναι πάλι ἰσοδύναμο μέ: **ὑπάρχει ἓνα πεπερασμένο πλήθος ὀρων τῆς ἀκολουθίας $a_n, n = 1, 2, \dots$ πού βρίσκονται ἐκτός τῆς περιοχῆς $\pi(\alpha, \varepsilon)$, δηλ. ἐκτός τοῦ διαστήματος $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$.**

* **Σημείωση.** Ὅπως μάθαμε καί στό προηγούμενο Κεφάλαιο, ἂν $x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}$, τότε ἡ $|x - y|$ παριστάνει **τὴν ἀπόσταση** d τοῦ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ x ἀπό τόν πραγμ. ἀριθμό y. Ὁρίζεται ἔτσι ἡ ἀκόλουθη ἀπεικόνιση:

$$d: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}: (x, y) \xrightarrow{d} d(x, y) \stackrel{\text{ορισ}}{=} |x - y|$$

μέ τίς παρακάτω ἰδιότητες:

d₁ : $d(x, y) \geq 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$ καί $d(x, y) = 0 \iff x = y$ (δηλ. ἡ ἀπόσταση στό $\mathbf{R}$ εἶναι μὴ ἀρνητική).

d₂ : $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$ (δηλ. ἡ ἀπόσταση στό $\mathbf{R}$ εἶναι συμμετρική).

d₃ : $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in \mathbf{R}$ (δηλ. ἡ ἀπόσταση στό $\mathbf{R}$ ἔχει τὴν τριγωνική ἰδιότητα).

Τό ὅτι ἡ ἀπεικόνιση $d: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ μέ τύπο $d(x, y) = |x - y|$ ἔχει τίς τρεῖς ἰδιότητες d_1, d_2, d_3 τῆς ἀποστάσεως εἶναι ἀμέσως φανερό, ἀρκεῖ νά ξαναθυμηθοῦμε τίς γνωστές ἰδιότητες τῆς ἀπόλυτης τιμῆς. Ἐτσι, π.χ., γιά τήν d_3 ἔχουμε:

$$d(x, y) = |x - y| = |(x - z) + (z - y)| \leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y).$$

Ἐχοντας τώρα ὑπόψη τήν παραπάνω σημείωση καί τήν προηγούμενη παρατήρηση διατυπώνουμε τὴν ἑξῆς χρήσιμη πρόταση:

Πρόταση. $a_n \in \pi(a, \varepsilon) \iff d(a_n, a) < \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq n_0$.

Η παραπάνω πρόταση με λόγια διατυπώνεται ως εξής: τελικά όλοι οι όροι μιᾶς ακολουθίας $a_n, n \in \mathbb{N}$ βρίσκονται στήν περιοχή $\pi(a, \varepsilon)$ ενός σημείου a , τότε και μόνο τότε, αν οι όροι της που έχουν δείκτη $n \geq n_0$ απέχουν από τό κέντρο a απόσταση μικρότερη από τήν ακτίνα ε .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ομάδα Α'. 88. Νά γράψετε τούς πέντε πρώτους όρους τῶν ακολουθιῶν:

- α) $1 + \frac{1}{v}, v = 1, 2, \dots$ β) $\frac{2v+1}{v^2}, v = 1, 2, \dots$ γ) $\frac{v}{\sqrt{1+v^2}}, v = 1, 2, \dots$,
 δ) $\alpha + (v-1)\omega, v = 1, 2, \dots$ ε) $\alpha \cdot \omega^{v-1}, v = 1, 2, \dots$ στ) $\frac{(-1)^v}{v} + \frac{v}{2v+1}, v = 1, 2, \dots$
 ζ) $(-1)^v \cdot \frac{v+1}{v}, v = 1, 2, \dots$ η) $\frac{(-1)^{v-1}}{2v-1}, v = 1, 2, \dots$

89. Νά γράψετε τούς δέκα πρώτους όρους τῆς ακολουθίας πού ὀρίζεται ἀπό τήν ἀναδρομική σχέση:

$$a_{v+1} = 1 + \frac{1}{a_v} \quad \text{καί} \quad a_1 = -\frac{13}{21}.$$

Τί παρατηρεῖτε;

90. Νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ ἀκολουθίες $a_n, n = 1, 2, \dots$, πού ὀρίζονται ἀπό τούς παρακάτω τύπους, εἶναι μονότονες καί φραγμένες:

$$1) \quad a_n = \frac{1}{v^2}, \quad 2) \quad a_n = \frac{v+1}{v}, \quad 3) \quad a_n = \frac{2v}{v^2+1}, \quad 4) \quad a_n = \frac{2v-1}{v+1}.$$

*** Ομάδα Β. 91.** Ποιές ἀπό τίς ἐπόμενες ἀκολουθίες $a_n, n = 1, 2, \dots$, πού ὀρίζονται ἀπό τούς παρακάτω τύπους, εἶναι φραγμένες καί ποιές δέν εἶναι:

$$1) \quad a_n = \frac{v \cdot \eta \mu 3v}{v^2+1}, \quad 2) \quad a_n = \frac{1}{v} \cdot \eta \mu \frac{\pi v}{2}, \quad 3) \quad a_n = \frac{v^2+1}{2v}, \quad 4) \quad a_n = v \cdot 3^{-v},$$

$$5) \quad a_n = \frac{2v+5}{3^v}, \quad 6) \quad a_n = \frac{v^2}{v + \sin^2 v}, \quad 7) \quad a_n = \frac{\eta \mu v + \sin^3 5v}{v^3 \cdot \sqrt{v}}.$$

92. Στήν προηγούμενη άσκηση ποιές ἀκολουθίες εἶναι μονότονες καί ποιές δέν εἶναι. Γιά τίς μονότονες νά καθορίσετε τό εἶδος τῆς μονοτονίας τους.

93. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ ἀκολουθία $a_n = \left(1 + \frac{1}{v}\right)^v, v = 1, 2, \dots$ εἶναι γνησίως αὐξουσα, ἐνῶ ἡ ἀκολουθία $\beta_n = \left(1 + \frac{1}{v}\right)^{v+1}, v = 1, 2, \dots$ εἶναι γνησίως φθίνουσα.

Υπόδειξη. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἰσχύει $a_n > a_{n-1}$ (ἀντίστοιχα: $\beta_{n-1} > \beta_n$) γιά κάθε $n = 2, 3, \dots$, ἀφοῦ ἐφαρμόσετε κατάλληλα καί τή γνωστή ἀνισότητα τοῦ Bernoulli (βλ. ἐφαρμογές, Κεφ. 11).

94. "Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ μέ $\alpha\beta = -1$ καί $x_n = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2v} + \frac{\beta\sqrt{3}}{2(v-1)}, v = 2, 3, \dots$ νά ἀποδείξετε ὅτι ἰσχύει:

$$|x_n| \leq \frac{\sqrt{3}}{40} \quad \text{για κάθε } n \geq 5,$$

δηλαδή ἡ ἀκολουθία $x_n, n = 2, 3, \dots$ εἶναι τελικά φραγμένη.

II. ΣΥΓΚΛΙΝΟΥΣΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ — Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ

§ 47. **Η έννοια του ορίου ακολουθίας.**— Άς θεωρήσουμε την ακολουθία α_n , $n = 1, 2, \dots$ με γενικό όρο: $\alpha_n = \frac{n+1}{n}$, δηλαδή την ακολουθία:

$$2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots, \frac{n+1}{n}, \dots \quad (1)$$

Για την ακολουθία αυτή παρατηρούμε ότι ισχύει τό εξής:

“Αν μᾶς δοθεῖ ἓνας θετικός ἀριθμός, π.χ. ὁ $0,2 \left(= \frac{2}{10} \right)$ καί θεωρήσουμε τήν ἀπόσταση τοῦ α_n ἀπό τό 1, δηλ. τήν $|\alpha_n - 1| = \left| \frac{n+1}{n} - 1 \right| = \frac{1}{n}$, τότε ἔχουμε:

$$|\alpha_n - 1| < 0,2 \iff \frac{1}{n} < \frac{2}{10} \iff n > 5,$$

δηλαδή: ἡ ἀπόσταση $d(\alpha_n, 1) \equiv |\alpha_n - 1| < 0,2$ γιά κάθε $n = 6, 7, 8, \dots$

ἢ ἄλλιῶς: $\alpha_n \in \left(1 - \frac{2}{10}, 1 + \frac{2}{10} \right)$ γιά κάθε $n \geq 6$,

εἴτε ἀκόμη: $1 - \frac{2}{10} < \alpha_n < 1 + \frac{2}{10}$ γιά κάθε $n \geq 6$.

“Αν τώρα μᾶς δοθεῖ ἓνας ἄλλος θετικός ἀριθμός, π.χ. ὁ $0,05 \left(= \frac{5}{100} \right)$ καί θεωρήσουμε καί πάλι τήν ἀπόσταση τοῦ α_n ἀπό τό 1, θά ἔχουμε:

$$|\alpha_n - 1| < 0,05 \iff \frac{1}{n} < \frac{5}{100} \iff n > 20$$

δηλαδή: $1 - \frac{5}{100} < \alpha_n < 1 + \frac{5}{100}$ γιά κάθε $n \geq 21$.

Σέ ἀνάλογο συμπέρασμα θά καταλήξουμε ἂν λάβουμε, π.χ. 0,75, ἢ 2,25 καί γενικά ἓναν ὅποιοδήποτε θετικό ἀριθμό. Ἀκριβέστερα: ἂν ἀντί τοῦ 0,2 ἢ τοῦ 0,05 κτλ. πάρουμε ἓναν ὅποιοδήποτε ἀριθμό $\varepsilon > 0$, τότε θά καταλήξουμε σέ ἀνάλογο συμπέρασμα, δηλ. ἰσχύει τό εξής: *υὑπάρχει δείκτης n_0 τέτοιος, ὥστε νά ἰσχύει: $|\alpha_n - 1| < \varepsilon$ γιά κάθε $n \geq n_0$.*

Πράγματι, ἔχουμε: $|\alpha_n - 1| = \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Ἀρκεῖ λοιπόν ὥς n_0 νά λάβουμε ἓναν ὅποιοδήποτε φυσικό ἀριθμό μεγαλύτερο ἀπό τόν $\frac{1}{\varepsilon}$ (τέτοιιοι φυσικοὶ ἀριθμοὶ ὑπάρχουν,

π.χ. ὁ $\left[\frac{1}{\varepsilon} \right]^* + 1$, $\left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 2$, $\left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 3$, κτλ.).

* Ὑπενθυμίζουμε ὅτι $[x]$ παριστάνει τό ἀκέραιο μέρος τοῦ x . Ἰσχύει: $[x] \leq x < [x] + 1$.

Παρατηρούμε τώρα ότι σε κάθε έκλογη του θετικού αριθμού ε , ο δείκτης v_0 , από τον οποίο και μετά οι όροι της ακολουθίας (1) πληρούν την $|\alpha_v - 1| < \varepsilon$ ή ισοδύναμα την: $1 - \varepsilon < \alpha_v < 1 + \varepsilon$, εξαρτάται γενικά από το ε , γι' αυτό στα επόμενα συχνά θα γράφουμε $v_0 = v_0(\varepsilon)$. Έτσι, για $\varepsilon = 0,2$ έχουμε, όπως είδαμε παραπάνω $v_0 = v_0(\varepsilon) = 6$, ενώ για $\varepsilon = 0,05$ έχουμε: $v_0 = v_0(\varepsilon) = 21$.

Από τα προηγούμενα βλέπουμε πώς η ακολουθία (1) έχει την ιδιότητα: Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει δείκτης $v_0 = v_0(\varepsilon)$ (δηλ. που εξαρτάται από τον ε) τέτοιος, ώστε: η απόσταση $|\alpha_v - 1|$ του όρου α_v από τον αριθμό 1 είναι μικρότερη από το ε για κάθε δείκτη $v \geq v_0 = v_0(\varepsilon)$, δηλαδή *τελικά όλοι οι όροι της ακολουθίας $\alpha_v = \frac{v+1}{v}$, $v = 1, 2, \dots$ βρίσκονται σε κάθε περιοχή του 1.*

Την ακολουθία (1) που έχει την παραπάνω ιδιότητα τη λέμε **συγκλίνουσα ακολουθία** και τον αριθμό 1 στον οποίο αυτή συγκλίνει το λέμε **όριο** ή **οριακή τιμή** της ακολουθίας $\alpha_v = \frac{v+1}{v}$, $v = 1, 2, \dots$

Από τα προηγούμενα οδηγούμαστε τώρα στο να δώσουμε τον εξής γενικό ορισμό:

Ορισμός. Θά λέμε ότι η ακολουθία α_v , $v = 1, 2, \dots$ **συγκλίνει** στον πραγματικό αριθμό α ή ότι **τείνει** στον πραγμ. αριθμό α ή ότι **τό όριο** της ακολουθίας (α_v) **είναι** ο πραγμ. αριθμός α και αυτό θά τό συμβολίζουμε με $\alpha_v \rightarrow \alpha$ ή $\lim \alpha_v = \alpha$, τότε και μόνο τότε, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει δείκτης $v_0 = v_0(\varepsilon)$ (που εξαρτάται, γενικά, από το ε) τέτοιος, ώστε να ισχύει:

$$|\alpha_v - \alpha| < \varepsilon \quad \text{για κάθε } v \geq v_0(\varepsilon).$$

Συμβολικά ο παραπάνω ορισμός διατυπώνεται ως εξής:

$$\alpha_v \rightarrow \alpha \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists v_0 = v_0(\varepsilon) : |\alpha_v - \alpha| < \varepsilon \quad \forall v \geq v_0 \quad (1)$$

Ο αριθμός α , όπως είπαμε και παραπάνω, λέγεται **όριο** ή **οριακή τιμή** της ακολουθίας α_v , $v = 1, 2, \dots$ Σημειώνουμε: **ορα** $\alpha_v = \alpha$ ή πιο συχνά: **lim** $\alpha_v = \alpha$ ή απλούστερα $\alpha_v \rightarrow \alpha$ και διαβάζουμε αντίστοιχα: **όριο** α_v **ίσο** με α ή α_v **τείνει** (συγκλίνει) στο α .

Στήν ειδική περίπτωση που είναι $\alpha = 0$, δηλ. **lim** $\alpha_v = 0$, η ακολουθία α_v , $v = 1, 2, \dots$ ονομάζεται **μηδενική**. Τότε ο παραπάνω ορισμός διατυπώνεται σύντομα ως εξής:

$$\alpha_v \rightarrow 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists v_0 = v_0(\varepsilon) : |\alpha_v| < \varepsilon \quad \forall v \geq v_0 \quad (2)$$

Έτσι, π.χ. η ακολουθία $\alpha_v = \frac{1}{v}$, $v = 1, 2, \dots$ είναι **μηδενική**, γιατί αν ε

* Το σύμβολο «lim» είναι συντομογραφία της Λατινικής λέξεως: limes (= όριο) και χρησιμοποιείται διεθνώς στα Μαθηματικά.

Είναι ένας οποιοσδήποτε θετικός αριθμός, τότε αν συμβολίσουμε με v_0 το μικρότερο από τους φυσικούς (θετικούς άκεραίους) αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι από το $\frac{1}{\varepsilon}$, δηλ. αν $v_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1 \equiv v_0(\varepsilon)$ έχουμε:

για κάθε $v \geq v_0 \Rightarrow v > \frac{1}{\varepsilon} \iff \frac{1}{v} < \varepsilon$, δηλ. $|\alpha_v| = \left| \frac{1}{v} \right| < \varepsilon$.

Άρα: $\alpha_v = \frac{1}{v} \rightarrow 0$.

Σημ. Η ακολουθία $\alpha_v = \frac{1}{v}$, $v = 1, 2, \dots$ θυμίζει τις άναπηθήσεις που κάνει μία ελαστική σφαίρα (τόπι) πάνω σ' ένα επίπεδο. Το ύψος στο οποίο φθάνει η σφαίρα κάθε φορά που άναπηδά είναι μικρότερο από τα προηγούμενα και τελικά η σφαίρα ίσορροπεί πάνω στο επίπεδο (ύψος άναπηθήσεως μηδέν).

Όμοίως η ακολουθία $\alpha_v = (-1)^v \frac{1}{v}$, $v = 1, 2, \dots$ είναι μηδενική.

Πράγματι: $|\alpha_v| = \left| (-1)^v \cdot \frac{1}{v} \right| = \frac{1}{v} < \varepsilon \iff v > \frac{1}{\varepsilon}$.

Άρα:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists v_0 = v_0(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1: |\alpha_v| < \varepsilon \forall v \geq v_0(\varepsilon).$$

Συνεπώς: $\alpha_v \rightarrow 0$.

Σημ. Η ακολουθία $\alpha_v = (-1)^v \frac{1}{v}$, $v = 1, 2, \dots$, άναλυτικά ή: $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

θυμίζει τις αιώρήσεις ενός έκκρεμους, των οποίων το πλάτος συνεχώς ελαττώνεται μέχρι να μηδενισθεί.

Επίσης η ακολουθία $\alpha_v = \frac{1}{\sqrt{v}}$, $v = 1, 2, \dots$ είναι μηδενική.

Πράγματι: $|\alpha_v| = \frac{1}{\sqrt{v}} < \varepsilon \iff v > \frac{1}{\varepsilon^2}$.

Άρα: $\forall \varepsilon > 0 \exists v_0 = v_0(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon^2} \right\rceil + 1: \forall v \geq v_0 > \frac{1}{\varepsilon^2}$ ισχύει:

$$|\alpha_v| = \frac{1}{\sqrt{v}} \leq \frac{1}{\sqrt{v_0}} < \varepsilon.$$

Όστε: $\alpha_v = \frac{1}{\sqrt{v}} \rightarrow 0$.

Παρατηρούμε τώρα ότι: αν $\lim \alpha_v = \alpha$, τότε από τη σύγκριση των όρισμών (1) και (2) προκύπτει ότι: η ακολουθία $\delta_v = (\alpha_v - \alpha)$, $v = 1, 2, \dots$ είναι μηδενική και άντιστρόφως. Όστε:

$$\lim \alpha_v = \alpha \iff \lim (\alpha_v - \alpha) = 0$$

(3)

*Έτσι, π.χ. έχουμε: $\lim_{\nu} \frac{3\nu + 1}{\nu} = 3$, επειδή $\lim_{\nu} \left(\frac{3\nu + 1}{\nu} - 3 \right) = \lim_{\nu} \frac{1}{\nu} = 0$.

Από την (3) έπεται ότι ο γενικός όρος μιās ακολουθίας (α_{ν}) , ή οποία συγκλίνει προς τον αριθμό α μπορεί πάντοτε νά γραφεί ως εξής: $\alpha_{\nu} = \alpha + \delta_{\nu}$, όπου δ_{ν} ο γενικός όρος μιās μηδενικής ακολουθίας.

Παρατηρήσεις. α). *Αν για μία ακολουθία (α_{ν}) ισχύει: $\alpha_{\nu} = \alpha$, για κάθε $\nu \geq \nu_0 \in \mathbb{N}$, δηλ. ή (α_{ν}) είναι **τελικά σταθερή**, τότε ή (α_{ν}) συγκλίνει καί έχει όριο τόν α . Προφανώς, αν $\alpha_{\nu} = \alpha$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$, τότε: $\lim_{\nu} \alpha_{\nu} = \alpha$.

Ειδικότερα ή σταθερή ακολουθία $\alpha_{\nu} = 0 \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$ είναι μηδενική ακολουθία.

Προσέξτε! *Αν (α_{ν}) είναι μηδενική ακολουθία, δέ σημαίνει ότι οί όροι της είναι ίσοι μέ μηδέν. Μάλιστα πολλές φορές συμβαίνει: $\alpha_{\nu} \rightarrow 0$ καί όμως $\alpha_{\nu} \neq 0 \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$. Π.χ., ή ακολουθία $\alpha_{\nu} = \frac{1}{\nu}$, $\nu = 1, 2, \dots$

β). Ξεκινώντας από τίς Ισοδυναμίες:

$$|\alpha_{\nu} - \alpha| < \epsilon \iff \alpha - \epsilon < \alpha_{\nu} < \alpha + \epsilon \iff \alpha_{\nu} \in (\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon) \equiv \pi(\alpha, \epsilon)$$

καί έχοντας υπόψη την παρατήρηση της § 46 συμπεραίνουμε από την (1) ότι: **σέ κάθε περιοχή του όριου α μιās συγκλίνουσας ακολουθίας (α_{ν}) βρίσκονται τελικά όλοι οί όροι της, ενώ πεπερασμένου πλήθους όροι της, ένδεχομένως καί κανένas, βρίσκονται εκτός της περιοχής $\pi(\alpha, \epsilon)$.** Έπομένως: **αν ή ακολουθία (α_{ν}) συγκλίνει στόν πραγματικό αριθμό $\alpha \neq 0$, τότε από κάποιο δείκτη καί πέρα όλοι οί όροι της (α_{ν}) είναι διάφοροι του μηδενός (γιατί;).**

γ). Όπως είπαμε καί στήν αρχή αυτού του Κεφαλαίου κατά τή θεώρηση μιās ακολουθίας πολλές φορές έπικαλούμαστε τή γεωμετρική έποπτεία. Έτσι μέχρι τώρα πολλές φορές θεωρούσαμε τούς όρους μιās ακολουθίας ως τετμημένες τών σημείων ενός άξονα καί μέ αυτό τόν τρόπο αντιμετωπίζαμε τίς ακολουθίες πραγματικών αριθμών ως ακολουθίες σημείων του άξονα. Έπειδή όμως ένας πραγμ. αριθμός ένδέχεται νά παρουσιάζεται περισσότερες από μία φορές ως όρος μιās ακολουθίας, έπεται ότι ένα σημείο του άξονα ένδέχεται νά παρουσιάζεται περισσότερες από μία φορές. Γι' αυτό τό λόγο, πολλές φορές παρακάτω για τή γεωμετρική παράσταση της ακολουθίας (α_{ν}) , χρησιμοποιούμε έναν άλλο τρόπο άπεικόνισης: **άπεικονίζουμε, στό καρτεσιανό επίπεδο $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, τόν όρο της α_{ν} στό σημείο $M_{\nu}(\nu, \alpha_{\nu})$.**

Η γεωμετρική παράσταση της ακολουθίας είναι τότε ένα σύνολο από «μεμονωμένα» σημεία του επιπέδου (βλ. σχ. 5).

δ). Έστω μία μηδενική ακολουθία α_{ν} , $\nu = 1, 2, \dots$. Π.χ. ή ακολουθία που όρίζεται από την άπεικόνιση:

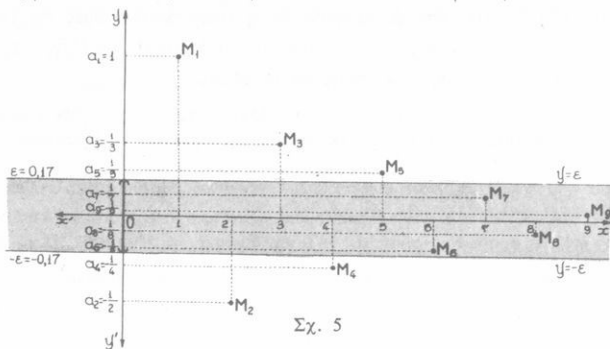
$$\alpha: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}: \nu \rightarrow \alpha_{\nu} = (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{1}{\nu}.$$

$$\text{Παρατηρούμε ότι: } \alpha(\mathbb{N}) = \left\{ 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots, (-1)^{\nu-1} \frac{1}{\nu}, \dots \right\}.$$

Έχοντας τώρα υπόψη την προηγούμενη παρατήρηση ή γεωμετρική παράσταση αυτής της ακολουθίας αποτελείται από «μεμονωμένα» σημεία του επιπέδου, όπως φαίνεται στό σχήμα 5 της έπομένης σελίδας.

Ο όρισμός (2) που δώσαμε για τή μηδενική ακολουθία επιδέχεται τώρα την εξής γεωμετρική έρμηνεία: *Ας πάρουμε ένα **θετικό αριθμό ϵ** , π.χ. τόν $\epsilon = 0,17$ καί τίς ευθείες μέ εξισώσεις $y = \epsilon = 0,17$ καί $y = -\epsilon = -0,17$ που είναι παράλληλες μέ τόν άξονα τών x καί όρίζουν στό επίπεδο μία «ταινία» (βλ. Σχ. 5).

Παρατηρούμε στο παρακάτω σχήμα ότι τα σημεία M_1, M_2, M_3, M_4 και M_5 βρίσκονται έξω από την ταινία, ενώ τα σημεία που έχουν δείκτη $n \geq v_0 = 6$, δηλ. τα σημεία $M_6, M_7, M_8, M_9, \dots$ βρίσκονται όλα μέσα στην ταινία των δύο παραλλήλων. Αυτό σημαίνει πώς



Σχ. 5

οι τεταγμένες των σημείων αυτών, δηλ. οι όροι: $\alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9, \dots$ της ακολουθίας που πήραμε βρίσκονται στο άνοικτο διάστημα $(-\epsilon, +\epsilon)$, δηλ. σε μία περιοχή του μηδενός. Ωστε:

$$-\epsilon < \alpha_n < +\epsilon \iff |\alpha_n| < \epsilon \quad \forall \quad n \geq v_0 = 6 \quad (\epsilon = 0,17).$$

Αν τώρα πάρουμε έναν άλλο θετικό αριθμό ϵ πιο μικρό από τον προηγούμενο π.χ. τον $\epsilon = 0,09$ και επαναλάβουμε τα παραπάνω, τότε βλέπουμε πώς τα σημεία $M_{12}, M_{13}, \dots, M_v, \dots$ βρίσκονται μέσα στην ταινία που ορίζουν οι ευθείες $y = \epsilon = 0,09$ και $y = -\epsilon = -0,09$ και αυτό σημαίνει πάλι ότι οι τεταγμένες των σημείων αυτών, δηλαδή οι όροι $\alpha_{12}, \alpha_{13}, \dots, \alpha_v, \dots$ της ακολουθίας που πήραμε βρίσκονται **όλοι** στο διάστημα $(-\epsilon, +\epsilon)$. Άρα ισχύει:

$$-\epsilon < \alpha_n < +\epsilon \iff |\alpha_n| < \epsilon \quad \forall \quad n \geq v_0 = 12 \quad (\epsilon = 0,09).$$

Στό ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε και αν πάρουμε ως ϵ οποιοδήποτε θετικό αριθμό, μόνο που για κάθε ϵ αλλάζει ο δείκτης v_0 (παραπάνω είδαμε ότι για $\epsilon = 0,17$ έχουμε ως v_0 το 6, ενώ για $\epsilon = 0,09$, το 12).

Ωστε: *σε κάθε εκλογή του θετικού αριθμού ϵ υπάρχει ένας δείκτης v_0 , ο οποίος εξαρτάται από τον ϵ , δηλαδή $v_0 = v_0(\epsilon)$.*

Στό παραπάνω σχήμα 5, παρατηρούμε ακόμη ότι: καθώς το n (αυξάνει απεριόριστα) το διάγραμμα των σημείων $M_1(1, 1), M_2(2, -\frac{1}{2}), M_3(3, \frac{1}{3}), \dots$ όλο και περισσότερο «πλησιάζει» και τελικά «τείνει να πέσει πάνω στον άξονα Ox ». Γι' αυτό την ακολουθία αυτή $\alpha_n, n = 1, 2, \dots$ με $\alpha_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}$ που ικανοποιεί τα παραπάνω, τη χαρακτηρίζουμε ως **μηδενική ακολουθία**.

Α σ κ η σ η. Νά δώσετε αντίστοιχη γεωμετρική έρμηνεία του όρισμού (1) για τη συγκλίνουσα ακολουθία: $\alpha_n = \frac{n+1}{n}, n = 1, 2, \dots$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

10. Νά αποδείξετε ότι η ακολουθία $\alpha_n = \frac{n}{n+1}, n = 1, 2, \dots$ έχει όριο τη μονάδα.

Λύση. Πράγματι, για κάθε $\epsilon > 0$ έχουμε:

$$|\alpha_n - 1| = \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \epsilon \iff n > \frac{1}{\epsilon}.$$

*Αρα:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists v_0 = v_0(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1 : \forall v \geq v_0 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow |\alpha_v - 1| < \varepsilon, \text{ συνεπώς } \alpha_v \rightarrow 1.$$

20. Έστω $\alpha_v = \frac{2v-1}{3v}$, $v = 1, 2, \dots$. Νά αποδείξετε ότι: $\lim \alpha_v = \frac{2}{3}$.

Λύση. Πράγματι:

$$\left| \alpha_v - \frac{2}{3} \right| = \left| \frac{2v-1}{3v} - \frac{2}{3} \right| = \left| -\frac{1}{3v} \right| = \frac{1}{3v} < \varepsilon \iff v > \frac{1}{3\varepsilon}.$$

*Αρα:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists v_0 = v_0(\varepsilon) = \left[\frac{1}{3\varepsilon} \right] + 1 : \left| \alpha_v - \frac{2}{3} \right| < \varepsilon \quad \forall v \geq v_0(\varepsilon), \text{ συνεπώς } \lim \alpha_v = \frac{2}{3}.$$

30. Έστω $\alpha_v = \frac{v^2-v}{v^2+1}$, $v = 1, 2, \dots$. Νά αποδείξετε ότι: $\lim \alpha_v = 1$.

Λύση. Πράγματι: $|\alpha_v - 1| = \left| \frac{v^2-v}{v^2+1} - 1 \right| = \frac{v+1}{v^2+1} < \frac{2v}{v^2} = \frac{2}{v} < \varepsilon \iff v > \frac{2}{\varepsilon}.$

Δηλαδή για οποιοδήποτε θετικό αριθμό ε υπάρχει δείκτης $v_0 = v_0(\varepsilon)$ (άρκει ως v_0 να λάβουμε οποιοδήποτε φυσικό αριθμό μεγαλύτερο από το $\frac{2}{\varepsilon}$ και τέτοιοι φυσικοί αριθμοί υπάρχουν, π.χ., ό $\left[\frac{2}{\varepsilon} \right] + 1, \left[\frac{2}{\varepsilon} \right] + 2, \left[\frac{2}{\varepsilon} \right] + 3$, κτλ.) τέτοιος, ώστε για κάθε $v \geq v_0(\varepsilon) > \frac{2}{\varepsilon}$ ισχύει: $|\alpha_v - 1| < \varepsilon$, συνεπώς $\lim \alpha_v = 1$.

40. Νά αποδείξετε ότι η ακολουθία $\alpha_v = (\sqrt{v+1} - \sqrt{v})$, $v = 1, 2, \dots$ είναι μηδενική.

Λύση. Πράγματι:

$$\begin{aligned} |\alpha_v - 0| &= |\alpha_v| = |\sqrt{v+1} - \sqrt{v}| = \frac{(\sqrt{v+1} - \sqrt{v})(\sqrt{v+1} + \sqrt{v})}{(\sqrt{v+1} + \sqrt{v})} = \\ &= \frac{(v+1) - v}{\sqrt{v+1} + \sqrt{v}} = \frac{1}{\sqrt{v+1} + \sqrt{v}} < \frac{1}{\sqrt{v}} < \varepsilon \iff v > \frac{1}{\varepsilon^2}. \end{aligned}$$

*Αρα:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists v_0 = v_0(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon^2} \right] + 1 : |\alpha_v| < \varepsilon \quad \forall v \geq v_0 > \frac{1}{\varepsilon^2}. \text{ Ωστε } \alpha_v \rightarrow 0.$$

Θά δώσουμε τώρα και ένα παράδειγμα ακολουθίας που δέ συγκλίνει στο $\mathbf{R}$.

50. Νά αποδείξετε ότι η ακολουθία $\alpha_v = (-1)^v$, $v = 1, 2, \dots$ δέ συγκλίνει στο $\mathbf{R}$.

*Απόδειξη. *Ας υποθέσουμε (άτοπος άπαγωγή) ότι η ακολουθία (α_v) συγκλίνει σε κάποιο πραγματικό αριθμό x . Δηλαδή έστω ότι: $\lim \alpha_v = x$ ($x \in \mathbf{R}$). Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$, άρα και για $\varepsilon = 1/2$, υπάρχει δείκτης $v_0 \in \mathbf{N}$ τέτοιος, ώστε να ισχύει:

$$|(-1)^v - x| < \frac{1}{2} \quad \forall v \geq v_0.$$

Ειδικά:

$$|(-1)^{v_0} - x| < \frac{1}{2} \quad \text{καί} \quad |(-1)^{v_0+1} - x| < \frac{1}{2},$$

έπειδή $v_0 \geq v_0$ και $v_0 + 1 \geq v_0$. Τότε όμως έχουμε:

$$|(-1)^{v_0} - (-1)^{v_0+1}| = |(-1)^{v_0} - x + x - (-1)^{v_0+1}| \leq |(-1)^{v_0} - x| + |x - (-1)^{v_0+1}| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Δηλαδή: $|(-1)^{v_0} - (-1)^{v_0+1}| < 1$ (1)

*Αλλά: $|(-1)^{v_0} - (-1)^{v_0+1}| = 2$ (2)

Από τις (1) και (2) λαμβάνουμε ότι $2 < 1$, πράγμα που είναι άτοπο. Ωστε η υπόθεση που κάναμε για την ακολουθία $\alpha_n = (-1)^n$, $n = 1, 2, \dots$ ότι συγκλίνει σε κάποιο πραγματικό αριθμό οδηγεί σε άτοπο. Άρα η ακολουθία $(-1)^n$, $n = 1, 2, \dots$ δε συγκλίνει στο $\mathbf{R}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ομάδα Α'. 95. Για $\varepsilon > 0$ να προσδιορίσετε δείκτη $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$, ώστε για $n \geq \nu_0(\varepsilon)$ να είναι: $|\alpha_n| < \varepsilon$, όπου α_n , $n = 1, 2, \dots$ είναι:

$$1) \alpha_n = \frac{2}{n^2 + n}, \quad 2) \alpha_n = \frac{3}{4n^2 - 2n}, \quad 3) \alpha_n = \frac{\eta\mu n + \sigma\upsilon\nu^3 n}{\sqrt{n}}, \quad 4) \alpha_n = \frac{3}{\sqrt{n^2 + 2}}.$$

$$96. \text{ Έστω } \alpha_n = \frac{3n-5}{4n}, n = 1, 2, \dots \text{ Να αποδείξετε ότι: } \lim \alpha_n = \frac{3}{4}.$$

97. Για $\varepsilon > 0$ να προσδιορίσετε δείκτη $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$, ώστε για $n \geq \nu_0(\varepsilon)$ να είναι:

$$\left| \frac{n^2 + 1}{n^2 - 1} - 1 \right| < \varepsilon.$$

98. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία: $\alpha_n = \sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{n^2 + 1}$, $n = 1, 2, \dots$ είναι μη-δενική.

Ομάδα Β'. 99. Για $\varepsilon > 0$, να προσδιορίσετε δείκτη $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$, ώστε για $n \geq \nu_0(\varepsilon)$ να είναι:

$$|\alpha_n| < \varepsilon,$$

όπου α_n , $n = 1, 2, \dots$ είναι:

$$1) \alpha_n = \frac{1}{2n+1}, \quad 2) \alpha_n = \frac{n-1}{n^2+1}, \quad 3) \alpha_n = \frac{\eta\mu n + 2\sigma\upsilon\nu 5n}{\sqrt{n}}, \quad 4) \alpha_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 + n + 2}$$

Εφαρμογή για $\varepsilon = 10^{-6}$.

100. Για $\varepsilon > 0$ να προσδιορίσετε δείκτη $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$, ώστε για $n \geq \nu_0(\varepsilon)$ να είναι:

$$\left| \alpha_n - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon,$$

όπου

$$\alpha_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}), n = 1, 2, \dots$$

101. Να αποδείξετε ότι: αν η ακολουθία α_n , $n = 1, 2, \dots$ είναι μηδενική, τότε θα είναι μηδενική και η ακολουθία: $\beta_n = \frac{1}{\sqrt[n]{\alpha_n}}, n = 1, 2, \dots$

III. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΓΙΑ ΤΙΣ ΣΥΓΚΛΙΝΟΥΣΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

Σε όλες τις παρακάτω ιδιότητες οι ακολουθίες θεωρούνται πραγματικές και τα όριά τους αριθμοί πραγματικοί, κι όταν ακόμη δέν τό τονίζουμε ιδιαίτερα.

§ 48. Ιδιότητα I. (Τό μονοσήμαντο του όρίου).—Τό όριο συγκλίνουσας ακολουθίας α_n , $n = 1, 2, \dots$ είναι μονοσημάντως όρισμένο.

Δηλαδή :

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_n \rightarrow \alpha \\ \alpha_n \rightarrow \alpha' \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha = \alpha'$$

Απόδειξη. Έστω (άπαγωγή σε άτοπο) ότι $\alpha_n \rightarrow \alpha$ και $\alpha_n \rightarrow \alpha'$, όπου α και α' αριθμοί πραγματικοί μέ $\alpha \neq \alpha'$. Τότε $-\frac{|\alpha - \alpha'|}{2} > 0$. Άρα για

$\varepsilon = \frac{|\alpha - \alpha'|}{2} > 0$ υπάρχουν δείκτες ν_0', ν_0'' τέτοιοι, ώστε:

$$|\alpha_v - \alpha| < \frac{|\alpha - \alpha'|}{2}, \quad \forall v \geq v_0' \quad (1)$$

$$|\alpha_v - \alpha'| < \frac{|\alpha - \alpha'|}{2}, \quad \forall v \geq v_0'' \quad (2)$$

Τότε όμως για κάθε $v \geq v_0 = \max\{v_0', v_0''\}$ ισχύουν συγχρόνως οι (1), (2) και συνεπώς, προσθέτοντας κατά μέλη, λαμβάνουμε:

$$|\alpha_v - \alpha| + |\alpha_v - \alpha'| < |\alpha - \alpha'|.$$

Ωστε για κάθε $v \geq v_0$ έχουμε:

$$|\alpha - \alpha'| = |(\alpha_v - \alpha) - (\alpha_v - \alpha')| \leq |\alpha_v - \alpha| + |\alpha_v - \alpha'| < |\alpha - \alpha'|.$$

Αυτό όμως είναι άτοπο, έπειδή δεν μπορεί νά είναι $|\alpha - \alpha'| < |\alpha - \alpha'|$.

* § 49. **Ιδιότητα II.**— Κάθε υπακολουθία συγκλίνουσας ακολουθίας έχει τό ίδιο μ' αυτή όριο.

Δηλαδή :

$$\alpha_v \rightarrow \alpha \implies \alpha_{k_v} \rightarrow \alpha$$

Απόδειξη. Έστω μία ακολουθία (α_v) πού συγκλίνει στον πραγματικό αριθμό α και (α_{k_v}) μία υπακολουθία της. Τότε έχουμε: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει δείκτης $v_0 = v_0(\varepsilon)$ τέτοιος, ώστε νά ισχύει: $|\alpha_v - \alpha| < \varepsilon \quad \forall v \geq v_0$ (1)

Έστω τώρα ένας φυσικός αριθμός $v \geq v_0$, τότε, σύμφωνα μέ την πρόταση της § 42, έχουμε $k_v \geq v$, όπου $k_v, v = 1, 2, \dots$ είναι μία γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών και συνεπώς $k_v \geq v_0$ (βλ. και παρατήρ. της § 43).

Τότε όμως από την (1) παίρνουμε: $|\alpha_{k_v} - \alpha| < \varepsilon, \quad \forall v \geq v_0$. Ωστε ισχύει: $\forall \varepsilon > 0 \exists v_0 = v_0(\varepsilon): |\alpha_{k_v} - \alpha| < \varepsilon \quad \forall v \geq v_0$ και για κάθε ακολουθία $(k_v) \uparrow$ φυσικών αριθμών. Συνεπώς $\alpha_{k_v} \rightarrow \alpha$.

Παρατηρήσεις. α) Τό αντίστροφο της παραπάνω προτάσεως δεν ισχύει πάντοτε, δηλ. αν $\alpha_{k_v} \rightarrow \alpha$, δεν έπεται κατ' ανάγκη ότι και $\alpha_v \rightarrow \alpha$, όπως εξάλλου φαίνεται στο παράδειγμα: $\alpha_v = (-1)^v, v = 1, 2, \dots, \alpha_{2v} = (-1)^{2v} = 1 \rightarrow 1$ και όμως ή ακολουθία $\alpha_v = (-1)^v, v = 1, 2, \dots$ δέ συγκλίνει (βλ. παρδ. 5, σελ. 67).

β) Αν μία υπακολουθία μιās ακολουθίας $\alpha_v, v = 1, 2, \dots$ δέ συγκλίνει, τότε και ή ακολουθία $\alpha_v, v = 1, 2, \dots$ δέ συγκλίνει (γιατί;).

γ) Αν υπάρχουν δυό υπακολουθίες μιās ακολουθίας $\alpha_v, v = 1, 2, \dots$ πού συγκλίνουν, αλλά σέ διαφορετικά όρια, τότε ή (α_v) δέ συγκλίνει (γιατί;). Έτσι, π.χ., ή ακολουθία $\alpha_v = (-1)^v, v = 1, 2, \dots$ δέ συγκλίνει, γιατί ή υπακολουθία των όρων της μέ άρτιο δείκτη είναι: $\alpha_{2v} = 1 \rightarrow 1$ και ή υπακολουθία των όρων της μέ περιττό δείκτη είναι: $\alpha_{2v+1} = -1 \rightarrow -1$.

* § 50. **Ιδιότητα III.**— Αν $p \in \mathbb{N}$ και $\alpha \in \mathbb{R}$, τότε ισχύει :

$$\alpha_v \rightarrow \alpha \iff \alpha_{v+p} \rightarrow \alpha$$

Απόδειξη. Η ακολουθία (α_{v+p}) είναι υπακολουθία της (α_v) . Άρα

$$\alpha_v \rightarrow \alpha \implies \alpha_{v+p} \rightarrow \alpha.$$

Θά άποδείξουμε τώρα ότι: αν $\alpha_{v+p} \rightarrow \alpha$, τότε $\alpha_v \rightarrow \alpha$.

Πράγματι, αφού $\alpha_{v+p} \rightarrow \alpha$ για $\varepsilon > 0$ υπάρχει δείκτης v_1 : $|\alpha_{v+p} - \alpha| < \varepsilon$, $\forall v \geq v_1$ (1). Θέτουμε: $v_0 = p + v_1$. Τότε για κάθε φυσικό αριθμό $v \geq v_0 = p + v_1$ έχουμε: $v - p \geq v_1$ και συνεπώς από την (1) παίρνουμε: $|\alpha_{(v-p)+p} - \alpha| < \varepsilon$, δηλαδή $|\alpha_v - \alpha| < \varepsilon$ για κάθε $v \geq v_0$. Άρα: $\alpha_v \rightarrow \alpha$.

Σημείωση. Η ιδιότητα III διατυπώνεται με λόγια πιο γενικά ως εξής: 'Η «διαγραφή» ή η «προσθήκη» όρων που αντιστοιχούν σε πεπερασμένο πλήθος δεικτών δεν επηρεάζει τη σύγκλιση μιάς ακολουθίας. Αυτό συμβαίνει, γιατί η ιδιότητα της συγκλίσεως μιάς ακολουθίας ανήκει στις ιδιότητες που ισχύουν «τελικά». Εύκολα κανείς μπορεί να διαπιστώσει ότι από μία τάξη και μετά, για την πρώτη ακολουθία, οι όροι των ακολουθιών (α_v) και (α_{v+p}) θα συμπίπτουν.

§ 51. Ιδιότητα IV.—Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη.

Δηλαδή:

$$\alpha_v \rightarrow \alpha \implies \alpha_v, v=1,2,\dots \text{ φραγμένη}$$

Απόδειξη. Έστω μία ακολουθία (α_v) με $\alpha_v \rightarrow \alpha$ και ένας $\varepsilon = \varepsilon_0 > 0$. Τότε ισχύει: $|\alpha_v - \alpha| < \varepsilon_0$ για κάθε $v \geq v_0 = v_0(\varepsilon_0)$ και συνεπώς:

$$|\alpha_v| = |\alpha_v - \alpha + \alpha| \leq |\alpha_v - \alpha| + |\alpha| < \varepsilon_0 + |\alpha|, \forall v \geq v_0 \quad (1)$$

Διακρίνουμε τώρα τις περιπτώσεις:

(i) Αν είναι $v_0 = 1$, τότε $|\alpha_v| < |\alpha| + \varepsilon_0 \equiv \varphi, \forall v \in \mathbb{N}$ και συνεπώς ή (α_v) είναι απολύτως φραγμένη, άρα και φραγμένη.

(ii) Αν $v_0 > 1$, τότε θεωρούμε τους όρους: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{v_0-1}$ και θέτουμε:

$$\varphi \equiv \max \{ |\alpha_1|, |\alpha_2|, \dots, |\alpha_{v_0-1}|, \varepsilon_0 + |\alpha| \} \quad (2)$$

Τότε από τις (1) και (2) λαμβάνουμε:

$$|\alpha_v| \leq \varphi, \forall v \in \mathbb{N}.$$

Άρα ή ακολουθία $\alpha_v, v = 1, 2, \dots$ είναι πάλι φραγμένη.

Σχόλιο. Μία πιο άπλη και σύντομη απόδειξη είναι και η εξής: 'Αφού $\alpha_v \rightarrow \alpha$, έπεται ότι: για $\varepsilon = 1 > 0$ υπάρχει $v_0 = v_0(1)$: $|\alpha_v - \alpha| < 1, \forall v \geq v_0$.

Οπότε: $|\alpha_v| = |\alpha_v - \alpha + \alpha| \leq |\alpha_v - \alpha| + |\alpha| < 1 + |\alpha|, \forall v \geq v_0$.

Έστω: $\theta = |\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha_{v_0-1}| + (1 + |\alpha|)$.

Τότε: $|\alpha_v| \leq \theta, \forall v \in \mathbb{N}$. Άρα $\alpha_v, v = 1, 2, \dots$ είναι φραγμένη.

Παρατήρηση. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντοτε, δηλαδή υπάρχουν φραγμένες ακολουθίες που δε συγκλίνουν. Π.χ. ή ακολουθία $\alpha_v = (-1)^v, v = 1, 2, \dots$, αν και είναι φραγμένη, αφού $|\alpha_v| = |(-1)^v| = 1 \leq 1, \forall v \in \mathbb{N}$, δε συγκλίνει (βλ. πρδ. 5, § 47).

Είναι επίσης φανερό ότι: 'Αν μία ακολουθία (α_v) δεν είναι φραγμένη, τότε ή (α_v) δε συγκλίνει (γιατί;).

§ 52. Ιδιότητα V.—Τό γινόμενο μηδενικής ακολουθίας επί φραγμένη είναι μηδενική ακολουθία.

Δηλαδή:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_v \rightarrow 0 \\ (\beta_v) \text{ φραγμένη} \end{array} \right\} \implies \alpha_v \beta_v \rightarrow 0$$

Απόδειξη. Αφού ή (β_v) είναι φραγμένη, έπεται ότι είναι και απολύτως

φραγμένη και συνεπώς υπάρχει $\theta > 0$: $|\beta_v| \leq \theta$, $\forall v \in \mathbb{N}$. (1)

Εξάλλου, αφού ή $\alpha_v \rightarrow 0$, έπεται ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, άρα και για $\frac{\varepsilon}{\theta} > 0$, υπάρχει δείκτης $v_0 = v_0 \left(\frac{\varepsilon}{\theta} \right)$ τέτοιος, ώστε να ισχύει:

$$|\alpha_v| < \frac{\varepsilon}{\theta}, \forall v \geq v_0. \quad (2)$$

Τότε όμως, για κάθε $v \geq v_0$ από τις (1) και (2) λαμβάνουμε:

$$|\alpha_v \beta_v| = |\alpha_v| |\beta_v| < \frac{\varepsilon}{\theta} \cdot \theta = \varepsilon.$$

Άρα:

$$\alpha_v \beta_v \rightarrow 0.$$

Πόρισμα 1ο:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_v \rightarrow 0 \\ k \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow k \alpha_v \rightarrow 0$$

Πόρισμα 2ο:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_v \rightarrow a \\ k \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow k \alpha_v \rightarrow ka$$

Τό πρώτο πόρισμα είναι άμεση συνέπεια τής προηγούμενης ιδιότητας, αν θεωρήσουμε ως (β_v) τή σταθερή ακολουθία $\beta_v = k$, $\forall v \in \mathbb{N}$.

Τό πόρισμα 2 είναι άμεση συνέπεια του πορίσματος 1, αφού $(\alpha_v - a) \rightarrow 0$.

Παρατηρήσεις. 1) Από τό πόρισμα 2 για $k=-1$ έχουμε: $\alpha_v \rightarrow a \Rightarrow -\alpha_v \rightarrow -a$.

2) Από τό συμπέρασμα του πορίσματος 2 συνάγεται ότι: $\lim(k\alpha_v) = k \cdot \lim \alpha_v$, $\forall k \in \mathbb{R}$

§ 53. Ιδιότητα VI.—“Αν ή (β_v) είναι μηδενική ακολουθία και ή (α_v) ακολουθία τέτοια, ώστε: για κάθε $v \geq v_1 \in \mathbb{N}$ να ισχύει:

$$|\alpha_v| \leq k \cdot |\beta_v|, \quad (k > 0)$$

τότε ή (α_v) είναι επίσης μηδενική ακολουθία.

Δηλαδή:

$$\left. \begin{array}{l} |\alpha_v| \leq k \cdot |\beta_v|, \forall v \geq v_1 \\ k > 0, \beta_v \rightarrow 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha_v \rightarrow 0$$

Απόδειξη. Αφού $\beta_v \rightarrow 0$ έπεται: για κάθε $\varepsilon > 0$, άρα και για $\frac{\varepsilon}{k} > 0$,

υπάρχει δείκτης $v_2 = v_2 \left(\frac{\varepsilon}{k} \right)$ τέτοιος, ώστε να ισχύει: $|\beta_v| < \frac{\varepsilon}{k}$ για κάθε $v \geq v_2$.

Τότε όμως για κάθε $v \geq v_0 = \max\{v_1, v_2\}$ θά ισχύουν συγχρόνως οί:

$$|\alpha_v| \leq k \cdot |\beta_v| \quad \text{και} \quad |\beta_v| < \frac{\varepsilon}{k}$$

και συνεπώς:

$$|\alpha_v| \leq k \cdot |\beta_v| < k \cdot \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon \quad \forall v \geq v_0.$$

Άρα:

$$\alpha_v \rightarrow 0.$$

Πόρισμα.—
$$\left. \begin{array}{l} |\alpha_v| \leq |\beta_v|, \forall v \in \mathbb{N} \\ \beta_v \rightarrow 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha_v \rightarrow 0.$$

Εφαρμογή. Νά αποδείξετε ότι: $\alpha_v = \frac{\eta\mu 3v}{v^2+v+1} \rightarrow 0.$

Λύση. Έχουμε :

$$|\alpha_v| = \left| \frac{\eta\mu 3v}{v^2+v+1} \right| \leq \frac{1}{v^2+v+1} < \frac{1}{v^2+v} < \frac{1}{v} \rightarrow 0. \text{ Άρα } \alpha_v \rightarrow 0.$$

§ 54. Ίδιότητα VII. (Ίδιότητα των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών).—Ίσχύει:

$$\left. \begin{array}{l} \beta_v \leq \alpha_v \leq \gamma_v, \forall v \geq v_1 \\ \beta_v \rightarrow a \text{ και } \gamma_v \rightarrow a \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha_v \rightarrow a$$

Απόδειξη. Αφοῦ $\beta_v \rightarrow a$ έπεται: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει δείκτης $v_2 = v_2(\varepsilon)$ τέτοιος, ώστε να ισχύει:

$$|\beta_v - a| < \varepsilon \iff \alpha - \varepsilon < \beta_v < \alpha + \varepsilon, \forall v \geq v_2(\varepsilon) \quad (1)$$

Επίσης, αφοῦ $\gamma_v \rightarrow a$ έπεται ότι υπάρχει δείκτης $v_3 = v_3(\varepsilon)$ τέτοιος, ώστε:

$$|\gamma_v - a| < \varepsilon \iff \alpha - \varepsilon < \gamma_v < \alpha + \varepsilon, \forall v \geq v_3(\varepsilon) \quad (2)$$

Έτσι, για κάθε $v \geq v_0 = \max\{v_1, v_2, v_3\}$ θα έχουμε:

$$\alpha - \varepsilon < \beta_v \leq \alpha_v \leq \gamma_v < \alpha + \varepsilon$$

δηλαδή: $\alpha - \varepsilon < \alpha_v < \alpha + \varepsilon \iff |\alpha_v - \alpha| < \varepsilon, \forall v \geq v_0.$

Άρα: $\alpha_v \rightarrow a.$

Παρατήρηση. Μία ειδική περίπτωση τής παραπάνω ιδιότητας που τή συναντούμε συχνά είναι ή έξης:

αν $\beta_v \rightarrow 0$ και $|\alpha_v| \leq \beta_v$, τότε $\alpha_v \rightarrow 0$ (βλ. και Πορίσμα, § 53).

Πράγματι: $|\alpha_v| \leq \beta_v \iff -\beta_v \leq \alpha_v \leq \beta_v$ και αφοῦ $\beta_v \rightarrow 0 \implies -\beta_v \rightarrow 0.$

Άρα: $\alpha_v \rightarrow 0.$

§ 55. Ίδιότητα VIII.—Αν δύο ακολουθίες (α_v) και (β_v) συγκλίνουν και ισχύει $\alpha_v < \beta_v, \forall v \in \mathbb{N}$, τότε θα έχουμε: $\lim \alpha_v \leq \lim \beta_v.$

Δηλαδή:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_v \rightarrow a, \beta_v \rightarrow \beta \\ \alpha_v < \beta_v, \forall v \in \mathbb{N} \end{array} \right\} \Rightarrow a \leq \beta$$

Απόδειξη. Τήν ιδιότητα αυτή τή δείχνουμε μέ τή μέθοδο τής «εις άτοπον» άπαγωγής. Έστω ότι είναι $\alpha > \beta$. Τότε $\frac{\alpha - \beta}{2} > 0$ και έπειδή $\alpha_v \rightarrow \alpha, \beta_v \rightarrow \beta$ υπάρχουν $v_1, v_2 \in \mathbb{N}$ μέ:

$$|\alpha_v - \alpha| < \frac{\alpha - \beta}{2}, \forall v \geq v_1 \quad \text{και} \quad (1)$$

$$|\beta_v - \beta| < \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad \forall v \geq v_2 \quad (2)$$

*Αρα, για κάθε $v \geq v_0 = \max\{v_1, v_2\}$ θα ισχύουν συγχρόνως οι (1) και (2) και συνεπώς προσθέτοντας κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$|\alpha_v - \alpha| + |\beta_v - \beta| < \alpha - \beta \quad (3)$$

$$\text{*Αλλά: } \beta_v - \beta - \alpha_v + \alpha \leq |\beta_v - \beta - \alpha_v + \alpha| \leq |\beta_v - \beta| + |\alpha_v - \alpha| \quad (4)$$

*Ετσι, για κάθε $v \geq v_0$ από τις (3) και (4) παίρνουμε:

$$\beta_v - \beta - \alpha_v + \alpha < \alpha - \beta, \quad \text{δηλαδή: } \beta_v < \alpha_v, \quad \forall v \geq v_0.$$

Αυτό όμως είναι άτοπο, γιατί $\beta_v > \alpha_v, \forall v \in \mathbb{N}$.

*Αρα: $\alpha \leq \beta$.

$$\text{Πόρισμα 1ο: } \left. \begin{array}{l} \alpha_v \rightarrow \alpha \\ \alpha_v < s, \quad \forall v \in \mathbb{N} \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \leq s$$

$$\text{Πόρισμα 2ο: } \left. \begin{array}{l} \beta_v \rightarrow \beta \\ \sigma < \beta_v, \quad \forall v \in \mathbb{N} \end{array} \right\} \Rightarrow \sigma \leq \beta$$

***Απόδειξη.** Άμεσες συνέπειες της προηγούμενης ιδιότητας, αρκεί νά πάρουμε τή σταθερή ακολουθία (β_v) μέ $\beta_v = s$, αντίστοιχα τή σταθερή ακολουθία (α_v) μέ $\alpha_v = \sigma$.

Σημείωση. Προσέξτε ιδιαίτερα τις περιπτώσεις $s = 0$ και $\sigma = 0$.

*** § 56. Ίδιότητα ΙΧ.—**Γιά κάθε ακολουθία πραγμ. αριθμῶν (α_v) ισχύει :

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_{2v} \rightarrow \alpha \\ \alpha_{2v-1} \rightarrow \alpha \end{array} \right\} \iff \alpha_v \rightarrow \alpha$$

***Απόδειξη.** *Εστω ὅτι $\alpha_{2v} \rightarrow \alpha$ καί $\alpha_{2v-1} \rightarrow \alpha$. Τότε $\forall \varepsilon > 0$ ὑπάρχουν δείκτες $v_1, v_2 \in \mathbb{N}$ μέ:

$$|\alpha_{2v} - \alpha| < \varepsilon, \quad \forall v \geq v_1 \quad \text{καί} \quad |\alpha_{2v-1} - \alpha| < \varepsilon, \quad \forall v \geq v_2.$$

Θέτουμε: $v_0 = \max\{2v_1, 2v_2 - 1\}$ καί παρατηροῦμε ὅτι: κάθε φυσικός ἀριθμός v θά εἶναι $v = 2k$ (ἄρτιος) ἢ $v = 2k - 1$ (περιττός). *Οπότε:

(i) ἂν v εἶναι ἄρτιος ($v = 2k$), τότε γιά $v \geq v_0$ ἔχουμε: $2k \geq 2v_1 \Rightarrow k \geq v_1 \Rightarrow |\alpha_{2k} - \alpha| < \varepsilon$,

δηλαδή: $|\alpha_v - \alpha| < \varepsilon$

(ii) ἂν v εἶναι περιττός ($v = 2k - 1$), τότε γιά $v \geq v_0$ ἔχουμε: $2k - 1 \geq 2v_2 - 1 \Rightarrow k \geq v_2$

$\Rightarrow |\alpha_{2k-1} - \alpha| < \varepsilon$, δηλαδή: $|\alpha_v - \alpha| < \varepsilon$.

*Ωστε: $\forall v \geq v_0$ ἔπεται ὅτι: $|\alpha_v - \alpha| < \varepsilon$ καί συνεπῶς $\alpha_v \rightarrow \alpha$.

Τό ἀντίστροφο εἶναι ἀμέσως φανερό ἀπό τήν ιδιότητα II τῆς § 49.

IV. ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΣΥΓΚΛΙΝΟΥΣΩΝ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ Η ΑΛΓΕΒΡΑ ΤΩΝ ΟΡΙΩΝ

*Αν (α_v) καί (β_v) εἶναι ἀκολουθίες πραγματικῶν ἀριθμῶν, τότε, ὅπως μάθαμε καί στήν ἀρχή αὐτοῦ τοῦ Κεφαλαίου, τό ἄθροισμα, ἡ διαφορά, τό γινόμενο καί τό πηλίκο τους εἶναι ἀντιστοίχως οἱ ἀκολουθίες:

$$(\alpha_n + \beta_n), (\alpha_n - \beta_n), (\alpha_n \beta_n) \text{ και } \left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)$$

όπου στην τελευταία περίπτωση υποτίθεται ότι: $\beta_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Η σύγκλιση των τελευταίων ακολουθιών και τα όριά τους εξαρτώνται από τη σύγκλιση και τα όρια των ακολουθιών (α_n) και (β_n) .

*Ακριβέστερα ισχύουν οι επόμενες προτάσεις:

§ 57. Ίδιότητα X. (όριο άθροίσματος).— Αν $\lim \alpha_n = \alpha$ και $\lim \beta_n = \beta$, τότε υπάρχει το $\lim (\alpha_n + \beta_n)$ και ισούται με $\alpha + \beta$.

Δηλαδή:

$$\lim (\alpha_n + \beta_n) = \lim \alpha_n + \lim \beta_n$$

*Απόδειξη. Αφοῦ $\lim \alpha_n = \alpha$ έπεται ότι: για κάθε $\varepsilon > 0$, ἄρα και για $\frac{\varepsilon}{2} > 0$,

υπάρχει δείκτης $n_1 = n_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \equiv n_1(\varepsilon)$ τέτοιος, ώστε να ισχύει:

$$|\alpha_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n \geq n_1 \quad (1)$$

Επίσης, αφοῦ $\lim \beta_n = \beta$, υπάρχει δείκτης $n_2 = n_2(\varepsilon)$ ώστε να ισχύει:

$$|\beta_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq n_2 \quad (2)$$

Τότε όμως, για κάθε $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ θα ισχύουν συγχρόνως οι (1) και (2) και συνεπώς θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \text{ και } \forall n \geq n_0 &\Rightarrow |(\alpha_n + \beta_n) - (\alpha + \beta)| = |(\alpha_n - \alpha) + (\beta_n - \beta)| \leq \\ &\leq |\alpha_n - \alpha| + |\beta_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

δηλαδή: $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon): |(\alpha_n + \beta_n) - (\alpha + \beta)| < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0$.

Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει το $\lim(\alpha_n + \beta_n)$ και ότι ισχύει:

$$\lim(\alpha_n + \beta_n) = \alpha + \beta = \lim \alpha_n + \lim \beta_n.$$

Σημείωση. Μπορούμε να διατυπώσουμε και με λόγια την παραπάνω ιδιότητα ως εξής:

Τό όριο τοῦ ἄθροίσματος δύο συγκλινουσῶν ἀκολουθιῶν εἶναι ἴσο μέ τό ἄθροισμα τῶν ὁρίων τους.

Παρατηρήσεις. 1) Η παραπάνω ιδιότητα επεκτείνεται και στην περίπτωση ενός πεπερασμένου πλήθους συγκλινουσών ακολουθιών. Δηλαδή τότε ισχύει:

$$\lim(\alpha_n + \beta_n + \dots + x_n) = \lim \alpha_n + \lim \beta_n + \dots + \lim x_n \quad (1)$$

2) Προσέξτε! Η (1) δέν ισχύει αν τό πλήθος τῶν προσθετέων δέν εἶναι πεπερασμένο. Αυτό φαίνεται και από τό ακόλουθο ἀντιπαράδειγμα*: "Έστω ἕνα εὐθύγραμμο τμήμα AB μέ μήκος ἴσο μέ τή μονάδα, τό ὁποῖο διαιρούμε σέ n ἴσα μέρη ($n \in \mathbb{N}$). Τότε έχουμε:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} = 1 \quad (2)$$

*Αν ἀλήθευε ἡ (1) για ὁποιοδήποτε πλήθος προσθετέων θά παίρναμε ἀπό τή (2):

$$1 = \lim \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} \right) = \lim \frac{1}{n} + \lim \frac{1}{n} + \dots + \lim \frac{1}{n} = 0 \text{ (ψευδές).}$$

* Ένα παράδειγμα μέ τό ὁποῖο ἀποδεικνύεται ὅτι μία πρόταση p εἶναι ψευδής, ὀνομάζεται **ἀντιπαράδειγμα** τῆς p .

3) Τό αντίστροφο τῆς ιδιότητος X δέν ἀληθεύει πάντοτε, δηλαδή ἂν τό ἄθροισμα δυό ἀκολουθιῶν εἶναι συγκλίνουσα ἀκολουθία, αὐτό δέ συνεπάγεται κατ' ἀνάγκη ὅτι καθεμιά ἀπ' αὐτές εἶναι συγκλίνουσα ἀκολουθία. Εἶναι δυνατό μάλιστα νά μή συγκλίνει οὔτε ἡ μία οὔτε ἡ ἄλλη. Π.χ. γιά τίς ἀκολουθίες: $\alpha_n = (-1)^n$, $n = 1, 2, \dots$ καί $\beta_n = (-1)^{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$ ἰσχύει:

$$\alpha_n + \beta_n = (-1)^n + (-1)^{n+1} = (-1)^n [1 + (-1)] = 0 \rightarrow 0 \text{ καί ὁμοῦ καμία δέ συγκλίνει.}$$

Ἐχοντας τώρα ὑπόψη καί τήν παρατήρηση 1 τῆς § 52 ἰσχύει:

§ 58. Ἰδιότητα XI. (*ὄριο διαφορᾶς*).—Ἄν $\lim \alpha_n = \alpha$ καί $\lim \beta_n = \beta$, τότε ὑπάρχει τό $\lim (\alpha_n - \beta_n)$ καί ἰσοῦται μέ $\alpha - \beta$.

Δηλαδή:

$$\lim (\alpha_n - \beta_n) = \lim \alpha_n - \lim \beta_n$$

Ἀπόδειξη. Ἐχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_n \rightarrow \alpha \\ \beta_n \rightarrow \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \alpha_n \rightarrow \alpha \\ -\beta_n \rightarrow -\beta \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha_n + (-\beta_n) \rightarrow \alpha + (-\beta), \text{ δηλ. } \alpha_n - \beta_n \rightarrow \alpha - \beta.$$

§ 59. Πόρισμα.—Γιά κάθε $\xi, \eta \in \mathbf{R}$ ἰσχύει:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_n \rightarrow \alpha \\ \beta_n \rightarrow \beta \end{array} \right\} \Rightarrow (\xi \alpha_n + \eta \beta_n) \rightarrow \xi \alpha + \eta \beta.$$

Ἡ ἀπόδειξη εἶναι ἄμεση συνέπεια τῆς ιδιότητος X καί τοῦ πορίσματος 2 τῆς § 52. Εἰδικά γιά $\xi = 1$ καί $\eta = -1$ παίρνουμε τήν ιδιότητα XI.

§ 60. Ἰδιότητα XII. (*ὄριο γινομένου*).—Ἄν $\lim \alpha_n = \alpha$ καί $\lim \beta_n = \beta$, τότε ὑπάρχει τό $\lim (\alpha_n \cdot \beta_n)$ καί ἰσοῦται μέ $\alpha \beta$.

Δηλαδή:

$$\lim (\alpha_n \cdot \beta_n) = (\lim \alpha_n) \cdot (\lim \beta_n).$$

Ἀπόδειξη. Ἐχουμε:

$$\alpha_n \beta_n - \alpha \beta = \alpha_n \beta_n - \alpha_n \beta + \alpha_n \beta - \alpha \beta = \alpha_n (\beta_n - \beta) + \beta (\alpha_n - \alpha). \quad (1)$$

Οἱ ἀκολουθίες $(\beta_n - \beta)$ καί $(\alpha_n - \alpha)$ εἶναι μηδενικές καί ἡ (α_n) εἶναι φραγμένη (γιατί εἶναι συγκλίνουσα). Τότε ὁμοῦ ἔχουμε:

$$(\S 52, \text{ Ἰδ. V}): \left. \begin{array}{l} \beta_n - \beta \rightarrow 0 \\ (\alpha_n) \text{ φραγμένη} \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha_n (\beta_n - \beta) \rightarrow 0$$

$$(\S 52, \text{ Πόρ. 1}): \left. \begin{array}{l} \alpha_n - \alpha \rightarrow 0 \\ \beta \in \mathbf{R} \end{array} \right\} \Rightarrow \beta \cdot (\alpha_n - \alpha) \rightarrow 0.$$

Ἀρα, ἀπό τήν ιδιότητα X: $\alpha_n (\beta_n - \beta) + \beta (\alpha_n - \alpha) \rightarrow 0$. Δηλ. $\alpha_n \beta_n - \alpha \beta \rightarrow 0$ καί συνεπῶς:

$$\alpha_n \beta_n \rightarrow \alpha \beta.$$

Ὡστε: $\lim (\alpha_n \cdot \beta_n) = \alpha \cdot \beta = (\lim \alpha_n) \cdot (\lim \beta_n).$

Σημείωση: Μέ λόγια ἡ παραπάνω ιδιότητα διατυπώνεται ὡς ἑξῆς: Τό ὄριο τοῦ γινομένου δύο συγκλινουσῶν ἀκολουθιῶν εἶναι ἴσο μέ τό γινόμενο τῶν ὁρίων τους.

Παρατηρήσεις. 1) 'Η παραπάνω ιδιότητα επεκτείνεται και στην περίπτωση ενός πεπερασμένου πλήθους συγκλινουσών ακολουθιών. Δηλαδή τότε ισχύει:

$$\lim(\alpha_v \cdot \beta_v \cdot \gamma_v \dots x_v) = \lim \alpha_v \cdot \lim \beta_v \cdot \lim \gamma_v \dots \lim x_v \quad (1)$$

Ειδικότερα, αν k ακολουθίες είναι ίδες, τότε ισχύει:

$$\alpha_v \rightarrow \alpha \Rightarrow \lim(\alpha_v)^k = (\lim \alpha_v)^k = \alpha^k \quad (k \in \mathbb{N}). \quad (2)$$

2) Προσέξτε! ή (1) δεν ισχύει αν τό πλήθος τών παραγόντων δεν είναι πεπερασμένο. 'Επίσης τό αντίστροφο τής παραπάνω ιδιότητας γενικά δεν ισχύει (παράδειγμα;).

§ 61. 'Ιδιότητα XIII (όριο πηλίκων).—'Αν $\lim \alpha_v = \alpha$ και $\lim \beta_v = \beta \neq 0$ και άκόμη αν $\beta_v \neq 0, \forall v \in \mathbb{N}$, τότε υπάρχει τό $\lim \left(\frac{\alpha_v}{\beta_v} \right)$ και ισούται μέ $\frac{\alpha}{\beta}$.

Δηλαδή:

$$\lim \frac{\alpha_v}{\beta_v} = \frac{\lim \alpha_v}{\lim \beta_v}$$

'Απόδειξη. 'Εστω ότι $0 \neq \beta_v \rightarrow \beta \neq 0$. Παρατηρούμε πρώτα-πρώτα ότι : $\frac{\alpha_v}{\beta_v} = \alpha_v \cdot \frac{1}{\beta_v}$. 'Αρα άρκεϊ νά αποδείξουμε ότι : $\frac{1}{\beta_v} \rightarrow \frac{1}{\beta}$, δηλαδή ότι :

$$\frac{1}{\beta_v} - \frac{1}{\beta} \rightarrow 0.$$

Πράγματι, για κάθε $v \in \mathbb{N}$ έχουμε:

$$\left| \frac{1}{\beta_v} - \frac{1}{\beta} \right| = \frac{|\beta - \beta_v|}{|\beta_v| \cdot |\beta|} = \frac{|\beta_v - \beta|}{|\beta_v| \cdot |\beta|} = \frac{1}{|\beta_v| \cdot |\beta|} \cdot |\beta_v - \beta| \quad (1)$$

'Εξάλλου, αφού $\beta_v \rightarrow \beta \neq 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$, άρα και για $\varepsilon = \frac{|\beta|}{2} > 0$, υπάρχει δείκτης $v_0 = v_0(\varepsilon)$ τέτοιος, ώστε νά ισχύει: $|\beta_v - \beta| < \frac{|\beta|}{2}, \forall v \geq v_0$.

'Αλλά: $|\beta| - |\beta_v| \leq |\beta - \beta_v| = |\beta_v - \beta| \quad (\S 27)$

όπότε: $|\beta| - |\beta_v| < \frac{|\beta|}{2}$, δηλαδή: $|\beta_v| > |\beta| - \frac{|\beta|}{2} = \frac{|\beta|}{2}, \forall v \geq v_0$

και συνεπώς:

$$\frac{1}{|\beta_v|} < \frac{2}{|\beta|}, \forall v \geq v_0$$

'Αρα:

$$\frac{1}{|\beta_v| \cdot |\beta|} < \frac{2}{|\beta|^2} = \frac{2}{\beta^2}, \forall v \geq v_0 \quad (2)$$

'Επομένως, από τίς (1) και (2), τελικά είναι:

$$\left| \frac{1}{\beta_v} - \frac{1}{\beta} \right| < \frac{2}{\beta^2} \cdot |\beta_v - \beta|, \forall v \geq v_0 \quad (3)$$

'Αλλά $\beta_v - \beta \rightarrow 0$ (γιατί $\beta_v \rightarrow \beta$) και $\frac{2}{\beta^2} \equiv k > 0$. Συνεπώς (βλ. § 53)

$$\frac{1}{\beta_v} - \frac{1}{\beta} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{1}{\beta_v} \rightarrow \frac{1}{\beta}, \text{ δηλ. } \lim \frac{1}{\beta_v} = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\lim \beta_v}.$$

Τότε όμως έχουμε:

$$\lim \frac{\alpha_v}{\beta_v} = \lim \left(\alpha_v \cdot \frac{1}{\beta_v} \right) = (\lim \alpha_v) \cdot \left(\lim \frac{1}{\beta_v} \right) = (\lim \alpha_v) \cdot \frac{1}{\lim \beta_v} = \frac{\lim \alpha_v}{\lim \beta_v}.$$

Παρατηρήσεις. 1) Τό αντίστροφο της παραπάνω προτάσεως γενικά δέν ἀληθεύει.

Δηλαδή ἡ ὑπαρξη τοῦ $\lim \left(\frac{\alpha_v}{\beta_v} \right)$ δέ συνεπάγεται πάντοτε τήν ὑπαρξη καθενός ἀπό τά

$\lim \alpha_v, \lim \beta_v$. **Παράδειγμα:** Ὡς πάρουμε ὡς $\alpha_v = (-1)^v, v = 1, 2, \dots$ καί $\beta_v = (-1)^{v+1}, v = 1, 2, \dots$, τότε $\lim \left(\frac{\alpha_v}{\beta_v} \right) = -1$, ἐνῶ καμία ἀπ' αὐτές τίς ἀκολουθίες δέ συγκλίνει.

2) **Προσέξτε!** στίς ἐφαρμογές γιά νά κάνουμε χρήση τῆς παραπάνω ιδιότητος πρέπει προηγουμένως νά ἔχουμε ἐξασφαλίσαι τήν ὑπαρξη τῶν ὁρίων τῶν ἀκολουθιῶν τοῦ ἀριθμητῆ καί παρονομαστή καί ἀκόμη ὅτι τό ὅριο τῆς ἀκολουθίας τοῦ παρονομαστή εἶναι διάφορο ἀπό τό μηδέν (βλ. πρῶτο παράδειγμα στή σελίδα 78).

3) Γιά κάθε ἀκέραιο ἀριθμό k ἰσχύει:

$$0 \neq \beta_v \rightarrow \beta_v \neq 0 \Rightarrow \lim (\beta_v)^k = (\lim \beta_v)^k = \beta^k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Ἡ παραπάνω συνεπαγωγή ἀποτελεῖ γενίκευση τῆς (2) πού διατυπώνουμε στήν πρώτη παρατήρηση τῆς § 60.

§ 62. Ἰδιότητα XIV.— Ὡς $\lim \alpha_v = a$, τότε ὑπάρχει τό $\lim |\alpha_v|$ καί ἰσοῦται μέ $|a|$.

Δηλαδή:

$$\alpha_v \rightarrow a \Rightarrow |\alpha_v| \rightarrow |a|$$

Ἀπόδειξη. Ξέρομε ἀπό τό προηγούμενο Κεφάλαιο ὅτι: $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ἰσχύει:

$$||x| - |y|| \leq |x - y|, \text{ ὁπότε ἔχουμε:}$$

$$||\alpha_v| - |a|| \leq |\alpha_v - a|, \forall v \in \mathbb{N} \text{ καί } (\alpha_v - a) \rightarrow 0, \text{ ἀφοῦ } \alpha_v \rightarrow a.$$

Ἀρα (§ 53, Πόρισμα): $(|\alpha_v| - |a|) \rightarrow 0$ καί συνεπῶς $|\alpha_v| \rightarrow |a|$.

Ὡστε:

$$\lim |\alpha_v| = |a| = |\lim \alpha_v|.$$

Σημείωση. Μέ λόγια ἡ παραπάνω ιδιότητα διατυπώνεται ὡς ἐξῆς: Τό ὅριο τῆς ἀόλουθις τῆς μιάς ἀκολουθίας εἶναι ἴσο μέ τήν ἀπόλυτη τιμή τοῦ ὁρίου τῆς.

Παρατηρήσεις. 1) Τό αντίστροφο τῆς παραπάνω προτάσεως δέν ἰσχύει, ἐκτός ἂν $a = 0$, δηλαδή ἂν $\lim |\alpha_v| = |a| \neq 0$, δέν ἔπεται καί $\lim \alpha_v = a$, καί αὐτό γιατί εἶναι δυνατό μία ἀκολουθία νά συγκλίνει ἀπολύτως, χωρίς ὅμως ἡ ἴδια νά συγκλίνει, ὅπως ἀμέσως φαίνεται ἀπό τό ἀκόλουθο ἀντιπαράδειγμα: Ὡς $\alpha_v = (-1)^v, v = 1, 2, \dots$ ἔχουμε:

$$|\alpha_v| = |(-1)^v| = 1 \rightarrow 1 \text{ καί ὅμως ἡ } \alpha_v = (-1)^v, v = 1, 2, \dots \text{ δέ συγκλίνει.}$$

2) Εἰδικά γιά $a = 0$ ἰσχύει ἡ ἀκόλουθη ἰσοδυναμία:

$$\alpha_v \rightarrow 0 \iff -\alpha_v \rightarrow 0 \iff |\alpha_v| \rightarrow 0.$$

Ἡ ἀπόδειξί τῆς εἶναι ἀμέσως φανερή ἀρκεῖ νά θυμηθοῦμε ὅτι: $|\alpha_v| = |-\alpha_v| = ||\alpha_v||$.

§ 63. Ἰδιότητα XV (δουο ριζας).— Ὡς $\lim \alpha_v = a$, τότε ἰσχύει:

$$\lim \sqrt{|\alpha_v|} = \sqrt{|a|} = \sqrt{\lim \alpha_v}$$

Ἀπόδειξη. (i) Ὡς $a = 0$, ζητᾶμε νά δείξουμε ὅτι $\sqrt{|\alpha_v|} \rightarrow 0$. Πράγματι, ἀφοῦ $\alpha_v \rightarrow 0$ ἔπεται ὅτι: $\forall \varepsilon > 0$, ἄρα καί γιά $\varepsilon^2 > 0 \exists v_0 = v_0(\varepsilon): |\alpha_v| < \varepsilon^2$

$\forall v \geq v_0$. Από την: $|\alpha_v| < \varepsilon^2 \Rightarrow \sqrt{|\alpha_v|} < \varepsilon, \forall v \geq v_0$. Άρα $\sqrt{|\alpha_v|} \rightarrow 0$.

(ii) Έστω τώρα $\alpha \neq 0$. Αφοῦ $\alpha_v \rightarrow \alpha$ έχουμε: $|\alpha_v| \rightarrow |\alpha|$, τότε:
 $|\alpha_v| - |\alpha| \rightarrow 0$.

Εξάλλου ισχύει:

$$|\sqrt{|\alpha_v|} - \sqrt{|\alpha|}| = \frac{||\alpha_v| - |\alpha||}{\sqrt{|\alpha_v|} + \sqrt{|\alpha|}} < \frac{1}{\sqrt{|\alpha|}} \cdot (||\alpha_v| - |\alpha||) \rightarrow 0 \quad (\S 52)$$

Τότε όμως (§ 53) είναι: $\sqrt{|\alpha_v|} - \sqrt{|\alpha|} \rightarrow 0$ και συνεπώς $\sqrt{|\alpha_v|} \rightarrow \sqrt{|\alpha|}$.

Παρατηρήσεις. 1) Από την παραπάνω ιδιότητα συμπεραίνουμε ότι: τα σύμβολα $\lim$ και $\sqrt{}$ επιτρέπεται να εναλλάσσονται αριστερά από την ακολουθία $\alpha_v, v = 1, 2, \dots$

2) Πιο γενικά ισχύει: αν $\alpha_v \geq 0, \forall v \in \mathbb{N}$ και $\lim \alpha_v = \alpha$, τότε:

$$\lim \sqrt[k]{\alpha_v} = \sqrt[k]{\lim \alpha_v} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

● Οί ιδιότητες πού αποδείξαμε στίς προηγούμενες παραγράφους μᾶς επιτρέπουν νά βρίσκουμε τίς ὁριακές τιμές ὁρισμένων ἀκολουθιῶν ὄχι βάσει τοῦ ὁρισμοῦ, ἀλλά ὑπολογιστικά ἀναλύοντας τό γενικό τους ὄρο, ὅπως φαίνεται στά ἐπόμενα παραδείγματα:

Παράδειγμα 1ο. Νά ἀποδείξετε ὅτι: $\lim \frac{2v^2 + 4v - 7}{3v^2 + 1} = \frac{2}{3}$.

Λύση. Ἔχουμε:

$$\frac{2v^2 + 4v - 7}{3v^2 + 1} = \frac{v^2 \left(2 + \frac{4}{v} - \frac{7}{v^2} \right)}{v^2 \left(3 + \frac{1}{v^2} \right)} = \frac{2 + \frac{4}{v} - \frac{7}{v^2}}{3 + \frac{1}{v^2}}.$$

Οί ἀκολουθίες ὁμως $\frac{4}{v} = 4 \cdot \frac{1}{v}, v = 1, 2, \dots, \frac{1}{v^2} = \frac{1}{v} \cdot \frac{1}{v}, v = 1, 2, \dots$ καί $\frac{7}{v^2} = 7 \cdot \frac{1}{v^2}, v = 1, 2, \dots$ εἶναι ὅλες μηδενικές ἀκολουθίες. Συνεπῶς ἔχουμε:

$$\lim \left(2 + \frac{4}{v} - \frac{7}{v^2} \right) = 2 + 0 - 0 = 2 \text{ καί } \lim \left(3 + \frac{1}{v^2} \right) = 3 + 0 = 3 \neq 0.$$

Τότε ὁμως, σύμφωνα μέ τήν ιδιότητα XIII τῆς § 61, ἔχουμε:

$$\lim \frac{2v^2 + 4v - 7}{3v^2 + 1} = \lim \frac{2 + \frac{4}{v} - \frac{7}{v^2}}{3 + \frac{1}{v^2}} = \frac{\lim \left(2 + \frac{4}{v} - \frac{7}{v^2} \right)}{\lim \left(3 + \frac{1}{v^2} \right)} = \frac{2}{3}.$$

Τί παρατηρεῖτε;

Παράδειγμα 2ο. Νά ἀποδείξετε ὅτι: $\lim \frac{v^3 - v^2 + 1}{v^5 + 2v^4 - 3} = 0$.

Λύση. Ἔχουμε:

$$\frac{v^3 - v^2 + 1}{v^5 + 2v^4 - 3} = \frac{v^3 \left(1 - \frac{1}{v} + \frac{1}{v^3} \right)}{v^5 \left(1 + \frac{2}{v} - \frac{3}{v^5} \right)} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{v} + \frac{1}{v^3}}{1 + \frac{2}{v} - \frac{3}{v^5}}.$$

$$\text{Αλλά: } \lim_{v^2} \frac{1}{v^2} = 0 \text{ και } \lim \frac{1 - \frac{1}{v} + \frac{1}{v^3}}{1 + \frac{2}{v} - \frac{3}{v^5}} = \frac{1-0+0}{1+0-0} = \frac{1}{1} = 1.$$

$$\text{Αρα: } \lim_{v^5 + 2v^4 - 3} \frac{v^3 - v + 1}{v^5} = \lim_{v^2} \frac{1}{v^2} \cdot \lim \frac{1 - \frac{1}{v} + \frac{1}{v^3}}{1 + \frac{2}{v} - \frac{3}{v^5}} = 0 \cdot 1 = 0.$$

Σημείωση. Από τά δύο προηγούμενα παραδείγματα παρατηρούμε κάτι πού ισχύει γενικά στίς συγκλίνουσες ακολουθίες: "Όταν ό βαθμός τοῦ ἀριθμητή είναι ἴσος μέ τό βαθμό τοῦ παρονομαστή, τότε τό κλάσμα ἔχει ὄριο ἕναν ἀριθμό πού είναι ὁ λόγος τῶν συντελεστῶν τῶν μεγιστοβάθμιων ὄρων ἀριθμητή καί παρονομαστή, ἐνῶ ὅταν ὁ βαθμός τοῦ ἀριθμητή είναι μικρότερος ἀπό τό βαθμό τοῦ παρονομαστή, τότε τό κλάσμα ἔχει ὄριο τό μηδέν.

§ 64. Μερικές ἀξιοσημείωτες καί χρήσιμες ἐφαρμογές.—Σ' αὐτή τήν παράγραφο μελετᾶμε μερικές ἀκολουθίες πού θά μάς εἶναι πολύ χρήσιμες στά ἐπόμενα, γι' αὐτό συνιστοῦμε στόν ἀναγνώστη νά δώσει ἰδιαίτερη προσοχή.

1η. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ ἀκολουθία $a_v = \omega^v$, $v = 1, 2, \dots$, ὅπου ω ἀριθμός πραγματικός μέ $|\omega| < 1$, εἶναι μηδενική.

Δηλαδή:

$$|\omega| < 1 \Rightarrow a_v \equiv \omega^v \rightarrow 0$$

Απόδειξη. α) Ἄν $\omega = 0$, τότε $a_v = \omega^v = 0$, $\forall v \in \mathbb{N}$ καί συνεπῶς $a_v \rightarrow 0$.

β) Ἄν $\omega \neq 0$, τότε $0 < |\omega| < 1$, ὁπότε $\frac{1}{|\omega|} > 1$, δηλαδή $\frac{1}{|\omega|} - 1 > 0$. Θέτουμε:

$\frac{1}{|\omega|} - 1 = \theta$, ὅπου $\theta > 0$. Τότε, ἀπό τή γνωστή ἀνισότητα τοῦ Bernoulli, ἔχουμε:

$$\frac{1}{|\omega|} = 1 + \theta \Rightarrow \frac{1}{|\omega|^v} = (1 + \theta)^v \geq 1 + v\theta > v\theta \Rightarrow |\omega|^v = |\omega^v| < \frac{1}{v\theta} = \frac{1}{\theta} \cdot \frac{1}{v}$$

$$\text{Ὡστε: } |\alpha_v| = |\omega^v| < \frac{1}{\theta} \cdot \frac{1}{v}, \quad \forall v \in \mathbb{N}.$$

Ἀρα, ἐπειδὴ $\frac{1}{v} \rightarrow 0$, ἀπό τήν ἰδιότητα VI προκύπτει ὅτι καί ἡ ἀκολουθία $a_v = \omega^v$, $v = 1, 2, \dots$ ($0 < |\omega| < 1$) εἶναι μηδενική.

Ὡστε: $\forall \omega \in \mathbb{R}$ μέ $-1 < \omega < 1$ ισχύει: $\lim \omega^v = 0$.

*** 2η.** Ἐστω μία ἀκολουθία a_v , $v = 1, 2, \dots$ μέ $a_v \neq 0 \quad \forall v \in \mathbb{N}$. Νά ἀποδείξετε ὅτι:

$$\lim \left| \frac{a_{v+1}}{a_v} \right| = k < 1 \Rightarrow a \rightarrow 0$$

Απόδειξη. Ἀφοῦ $\left| \frac{a_{v+1}}{a_v} \right| \rightarrow k$, ($0 \leq k < 1$) ἔπεται ὅτι: $\forall \varepsilon > 0$, ἄρα καί γιά $0 < \varepsilon < 1-k$,

ὑπάρχει δείκτης $v_0 = v_0(\varepsilon)$: $\left| \frac{a_{v+1}}{a_v} - k \right| < \varepsilon \quad \forall v \geq v_0$.

Ἔτσι γιά κάθε $v \geq v_0$ ἔχουμε:

$$\left| \frac{a_{v+1}}{a_v} \right| = \left| \frac{a_{v+1}}{a_v} - k + k \right| \leq \left| \frac{a_{v+1}}{a_v} - k \right| + k < \varepsilon + k \equiv \omega, \quad \text{ὅπου } 0 < \omega < 1$$

Ἀρα: $|a_{v+1}| \leq \omega \cdot |a_v|, \quad \forall v \geq v_0 \quad (0 < \omega < 1).$

*Αν τώρα στην τελευταία σχέση θέσουμε $v = v_0, v_0+1, \dots, v_0+p-1, p \in \mathbb{N}$ και πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη τις σχέσεις που θα προκύψουν, βρίσκουμε, ύστερα από τις σχετικές άπλοποιήσεις, ότι:

$$|\alpha_{v_0+p}| \leq \omega^p \cdot |\alpha_{v_0}| \quad (p \in \mathbb{N})$$

*Επειδή $0 < \omega < 1$, είναι $\omega^p \rightarrow 0$ (σύμφωνα με την εφαρμογή 1) και συνεπώς: $\lim_{p \rightarrow \infty} |\alpha_{v_0+p}| = 0$. Τότε όμως θα είναι και $\alpha_{v_0+p} \rightarrow 0 \Rightarrow \alpha_v \rightarrow 0$ (βλ. § 50).

* 3η. **Νά αποδείξετε ότι:** αν $\omega \in \mathbb{R}$ και $|\omega| < 1$, τότε: $\alpha_v = v^k \cdot \omega^v \rightarrow 0, (k \in \mathbb{Z})$.

*Απόδειξη. *Αν $\omega = 0$, τότε $v^k \cdot \omega^v = 0 \rightarrow 0$. *Εστω ότι $\omega \neq 0$, τότε $\alpha_v \neq 0 \quad \forall v \in \mathbb{N}$.

*Εφαρμόζοντας τώρα τη 2 έχουμε:

$$\left| \frac{\alpha_{v+1}}{\alpha_v} \right| = \left| \frac{(v+1)^k \cdot \omega^{v+1}}{v^k \cdot \omega^v} \right| = \left(\frac{v+1}{v} \right)^k \cdot |\omega| = \left(1 + \frac{1}{v} \right)^k \cdot |\omega| \rightarrow 1 \cdot |\omega| = |\omega| < 1.$$

*Αρα $\alpha_v \rightarrow 0$, δηλαδή: $v^k \cdot \omega^v \rightarrow 0$.

Σημείωση. Για $k = 0$ έχουμε: $\alpha_v = \omega^v \rightarrow 0$ (βλ. Έφαρμογή 1).

* 4η. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ νά αποδείξετε ότι: $\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{x^v}{v!} = 0$.

Σημείωση. Το σύμβολο $v!$ διαβάζεται *v παραγοντικό* και ορίζεται ως εξής:

$1! = 1$ και $v! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots v$ (για $v > 1$). Προφανώς $(v+1)! = v!(v+1)$.

*Απόδειξη. *Αν $x=0$, τότε $\frac{x^v}{v!} = 0 \rightarrow 0$. *Εστω ότι $x \neq 0$. Θέτουμε $\alpha_v = \frac{x^v}{v!}$ και έχουμε:

$$\left| \frac{\alpha_{v+1}}{\alpha_v} \right| = \frac{|x|^{v+1}}{(v+1)!} : \frac{|x|^v}{v!} = \frac{|x|^{v+1} \cdot v!}{|x|^v \cdot (v+1)!} = \frac{|x|}{v+1} \rightarrow 0 < 1.$$

*Αρα: $\alpha_v \rightarrow 0$, δηλαδή $\frac{x^v}{v!} \rightarrow 0$.

* 5η. **Νά αποδείξετε ότι:** αν $a \in \mathbb{R}^+$, τότε $\alpha_v = \sqrt[v]{a} \rightarrow 1$.

*Απόδειξη. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις: (i) $\alpha = 1$, (ii) $\alpha > 1$ και (iii) $0 < \alpha < 1$

(i) $\alpha = 1$, τότε $\alpha_v = \sqrt[v]{1} = 1 \rightarrow 1$.

(ii) $\alpha > 1$, τότε $\alpha_v = \sqrt[v]{\alpha} > 1, \quad \forall v \in \mathbb{N}$. Θέτουμε $\alpha_v = \sqrt[v]{\alpha} = 1 + \delta_v$, όπου $\delta_v > 0, \quad \forall v \in \mathbb{N}$.

*Αρκεί λοιπόν νά αποδείξουμε ότι: $\delta_v \rightarrow 0$, οπότε $\alpha_v = \sqrt[v]{\alpha} \rightarrow 1$.

Πράγματι, έχουμε:

$$\sqrt[v]{\alpha} = 1 + \delta_v \Rightarrow \alpha = (1 + \delta_v)^v \geq 1 + v \cdot \delta_v > v \cdot \delta_v \Rightarrow \delta_v < \alpha \cdot \frac{1}{v}, \quad \forall v \in \mathbb{N}.$$

*Ωστε: $0 < \delta_v < \alpha \cdot \frac{1}{v}, \quad \forall v \in \mathbb{N}$ και έπειδή $\alpha \cdot \frac{1}{v} \rightarrow 0$, έπεται: $\delta_v \rightarrow 0$.

(iii) $0 < \alpha < 1$, τότε $\frac{1}{\alpha} > 1$ και σύμφωνα με την (ii) έχουμε:

$$\sqrt[v]{\frac{1}{\alpha}} \rightarrow 1, \text{ δηλαδή } \frac{1}{\sqrt[v]{\alpha}} \rightarrow 1, \text{ οπότε και } \sqrt[v]{\alpha} \rightarrow 1.$$

*Ωστε:

$$\alpha_v = \sqrt[v]{a} \rightarrow 1, \quad \forall a > 0$$

★ 6η. Νά αποδείξετε ότι: $\lim_{v \rightarrow \infty} \sqrt[v]{v} = 1$.

*Απόδειξη. Για κάθε $v \in \mathbb{N}$ έχουμε: $v \geq 1 \Rightarrow \sqrt[v]{v} \geq 1$, άρα $\sqrt[v]{v} - 1 \geq 0$.

Θέτουμε: $\delta_v = \sqrt[v]{v} - 1$, $v = 1, 2, \dots$, τότε $\delta_v \geq 0$, $\forall v \in \mathbb{N}$ και
 $\sqrt[v]{v} = 1 + \delta_v \Rightarrow \sqrt[v]{v} = (1 + \delta_v)^v \geq 1 + v \cdot \delta_v > v \cdot \delta_v \Rightarrow \delta_v < \frac{\sqrt[v]{v}}{v} = \frac{1}{\sqrt[v]{v}}, \forall v \in \mathbb{N}$.

*Ωστε: $0 \leq \delta_v < \frac{1}{\sqrt[v]{v}}$, $\forall v \in \mathbb{N}$ και έπειδή $\frac{1}{\sqrt[v]{v}} \rightarrow 0$, έπεται: $\delta_v \rightarrow 0$.

*Έχουμε όμως: $\sqrt[v]{v} = 1 + \delta_v \Rightarrow \sqrt[v]{v} = (1 + \delta_v)^2$.

*Άρα: $\sqrt[v]{v} = (1 + \delta_v)^2 \rightarrow (1 + 0)^2 = 1$.

*Ωστε: $\lim_{v \rightarrow \infty} \sqrt[v]{v} = 1$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

*Ομάδα Α'. 102. Νά αποδείξετε ότι οι έπόμενες ακολουθίες είναι μηδενικές:

$$1) \frac{v}{v^3 + v + 1}, \quad 2) \frac{(-1)^v}{(v+1)^2}, \quad 3) \frac{1 + \sqrt{v}}{v^3}, \quad 4) \sqrt{v^2 + 3} - \sqrt{v^2 + 1}.$$

103. Νά βρείτε, αν υπάρχουν, τά όρια τών ακολουθιών μέ γενικό όρο:

$$1) \alpha_v = \frac{v^2 + 3}{2v^2 - 5v + 7}, \quad 2) \alpha_v = \sqrt{1 + \frac{4}{v}}, \quad 3) \alpha_v = \frac{v}{v^2 + 3},$$

$$4) \alpha_v = \left(2 + \frac{1}{v}\right)^2, \quad 5) \alpha_v = \frac{2v^3 - 3v + 2}{5v^3 + 7}, \quad 6) \alpha_v = \sqrt[3]{\frac{8v^2 + 5}{64v^2 + v + 1}}.$$

104. Νά αποδείξετε ότι:

$$1) \lim_{v \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{9v^2}{v^2 + 3}} = 3, \quad 2) \lim_{v \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{v^2 + v - 1}{27v^2 - 4}} = \frac{1}{3}, \quad 3) \lim_{v \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{3v^2 + 2}{4v^2 + v + 1}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

105. Νά αποδείξετε ότι: αν ή ακολουθία α_v , $v = 1, 2, \dots$ είναι φραγμένη, τότε καί ή ακολουθία $\beta_v = \frac{1}{v} \cdot \alpha_v$, $v = 1, 2, \dots$ είναι φραγμένη καί ισχύει:

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \beta_v = \lim_{v \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{v} \cdot \alpha_v \right) = 0.$$

106. Νά αποδείξετε ότι: $\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{v^4 - 4v^3 + v + 6}{2v^4 + 7v^2 + 2v - 1} = \frac{1}{2}$.

107. Νά αποδείξετε ότι οι ακολουθίες μέ γενικούς όρους:

$$\alpha_v = \frac{2v^2 - 1}{3v^2 + 2}, \quad \beta_v = \frac{2v + 3}{3v - 2}, \quad \gamma_v = \sqrt{\frac{4v - 3}{9v + 5}},$$

έχουν τό ίδιο όριο, τό όποιο καί θά βρείτε.

108. Νά βρείτε ποϋ μεταβάλλεται ό πραγματικός αριθμός x , αν:

$$\left| \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{v^2 + 3}{2v^2 - 1} + x \right| < \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

109. "Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, νά αποδείξετε ότι:

$$\lim(\sqrt[n]{(v+\alpha)(v+\beta)} - v) = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

110. "Αν $x \in \mathbb{R}$, $x \neq -1$ νά μελετήσετε ως προς τη σύγκλιση τήν ακολουθία $\alpha_n = \frac{x^n - 1}{x^n + 1}$, $n = 1, 2, \dots$ καί κατόπιν νά κάνετε τή γραφική παράσταση τής συναρτήσεως f με τύπο :

$$f(x) = \lim \alpha_n \equiv \lim \frac{x^n - 1}{x^n + 1}$$

"Υπόδειξη. Νά διακρίνετε τīs περιπτώσεις: (i) $|x| < 1$, (ii) $x = 1$ καί (iii) $|x| > 1$.

* Όμάδα Β'. 111. Νά αποδείξετε ότι οί ακολουθίες, με τούς επόμενους γενικούς όρους, είναι μηδενικές:

$$1) \frac{\eta\mu v + \sigma\upsilon\nu^5 v}{\sqrt{v}}, \quad 2) v^{3/2} \cdot (\sqrt{v^4 + 4} - v^2), \quad 3) \sqrt[3]{v+1} - \sqrt[3]{v}, \quad 4) v \cdot (\sqrt{v^4 + 4} - v^2).$$

112. Νά υπολογίσετε τά όρια τών ακολουθιών με τούς επόμενους γενικούς όρους:

$$1) \alpha_n = \frac{1 + 2 + \dots + v}{v^2}, \quad 2) \beta_n = \frac{1^2 + 2^2 + \dots + v^2}{v^3}, \quad 3) \gamma_n = \frac{1^3 + 2^3 + \dots + v^3}{v^4}.$$

"Υπόδειξη. "Υπενθυμίζουμε τούς τύπους: $1 + 2 + \dots + v = \frac{v(v+1)}{2}$,

$$1^2 + 2^2 + \dots + v^2 = \frac{v(v+1)(2v+1)}{6}, \quad 1^3 + 2^3 + \dots + v^3 = \frac{v^2(v+1)^2}{4}.$$

113. Νά υπολογίσετε τά όρια τών ακολουθιών με τούς επόμενους γενικούς όρους:

$$1) \alpha_n = \frac{2v^2 + 3v - 1}{5v^3 - v + 7}, \quad 2) \alpha_n = \frac{v^4 + 2}{v^2 - 4} - \frac{2v^5 - 3v^3}{2v^3 + 1}, \quad 3) \alpha_n = \sqrt{(v+2)(v+3)} - v$$

$$4) \alpha_n = (\sqrt[3]{v+1} - \sqrt{v}) \cdot \sqrt{v + \frac{1}{2}}, \quad 5) \alpha_n = \sqrt{v + \sqrt{v}} - \sqrt{v - \sqrt{v}}.$$

"Υπόδειξη. Στīs 3, 4 καί 5 πολλαπλασιάζουμε καί διαιρούμε καθένα άπ' αυτούς τούς γενικούς όρους με κατάλληλη παράσταση.

114. Νά αποδείξετε ότι:

$$\lim \left[\frac{1}{\sqrt{v^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{v^2 + 2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{v^2 + v}} \right] = 1.$$

"Υπόδειξη. Νά προσθέσετε κατά μέλη τīs προφανείς άνισότητες:

$$\frac{1}{\sqrt{v^2 + v}} \leq \frac{1}{\sqrt{v^2 + k}} \leq \frac{1}{\sqrt{v^2 + 1}}, \quad k = 1, 2, \dots, v$$

καί νά εφαρμόσετε τήν ιδιότητα VII, § 54.

115. Νά αποδείξετε ότι οί ακολουθίες, με τούς επόμενους γενικούς όρους, είναι μηδενικές:

$$1) \alpha_n = \frac{2^n}{v!}, \quad 2) \alpha_n = \frac{v!}{v^n}, \quad 3) \alpha_n = \frac{2^n \cdot v!}{(3v)^v},$$

όπου τό σύμβολο $v!$ (v παραγοντικό) παριστάνει τό γινόμενο: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot v \equiv v!$

"Υπόδειξη. Μπορείτε νά στηριχτείτε καί στή 2η εφαρμογή τής § 64.

116. "Αν θεωρηθεί γνωστό ότι $\lim \left(1 + \frac{1}{v}\right)^v = e$, νά υπολογίσετε τά όρια τών ακολουθιών με τούς επόμενους γενικούς όρους:

$$1) \alpha_v = \left(1 + \frac{1}{2v}\right)^v, \quad 2) \alpha_v = \left(1 + \frac{2}{v}\right)^v, \quad 3) \alpha_v = \left(1 - \frac{1}{v}\right)^v, \quad 4) \alpha_v = \left(\frac{2v+1}{2v-1}\right)^v$$

† 117. Νά αποδείξετε ότι: $\lim \sqrt[v]{v^2 + v} = 1.$

*Υπόδειξη. Βλ. § 64, 5η και 6η εφαρμογή και επιπλέον μπορεί νά χρησιμεύσει καί ἡ ιδιότητα VII τῆς § 54.

118. Ἐν γιά μία ἀκολουθία $\alpha_v, v = 1, 2, \dots$ ἰσχύει $\lim \alpha_v = \alpha$, τότε νά ἀποδείξετε ὅτι:

$$\lim \beta_v = \alpha, \quad \text{ὅπου} \quad \beta_v = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_v}{v}, \quad v = 1, 2, \dots$$

Ἰσχύει τό ἀντίστροφο;

*Υπόδειξη. Ἔχουμε $\alpha_v \rightarrow \alpha \iff \forall \varepsilon > 0 \exists v_0 = v_0(\varepsilon): |\alpha_v - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall v \geq v_0.$

Κατόπιν νά σχηματίσετε τή διαφορά: $\beta_v - \alpha$ καί νά ἀποδείξετε ὅτι τελικά ἰσχύει:

$$|\beta_v - \alpha| < \frac{A}{v} + \frac{v - v_0 + 1}{v} \cdot \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{ὅπου} \quad A \equiv |(\alpha_1 - \alpha) + (\alpha_2 - \alpha) + \dots + (\alpha_{v_0-1} - \alpha)|. \quad \text{Ἄρα...}$$

Γιά νά ἐξετάσετε ἂν ἰσχύει τό ἀντίστροφο νά πάρετε ὡς $\alpha_v = (-1)^v, v = 1, 2, \dots$

119. Νά ἀποδείξετε ὅτι: ἂν $\lim(\alpha_v - \alpha_{v-1}) = \alpha$, τότε $\lim \frac{\alpha_v}{v} = \alpha.$

*Υπόδειξη. Νά ἐφαρμόσετε τό συμπέρασμα τῆς προηγούμενης ἀσκήσεως.

V. MONOTONES ΚΑΙ ΦΡΑΓΜΕΝΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

§ 65. Τό μονότονο καί ἡ σύγκλιση ἀκολουθίας.—Στήν ἀρχή αὐτοῦ τοῦ Κεφαλαίου (§ 42) ὀρίσαμε τήν ἔννοια τῆς μονότονης ἀκολουθίας. Ἐπαναλαμβάνοντας μέ συντομία τά ὅσα ἀναπτύξαμε στήν § 42 γιά τίς μονότονες ἀκολουθίες ἔχουμε:

1. $(\alpha_v) \uparrow$ (αὐξουσα) $\iff (\forall v \in \mathbb{N}, \alpha_v \leq \alpha_{v+1})$
 $\iff (\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_v \leq \alpha_{v+1} \leq \dots)$
2. $(\alpha_v) \uparrow$ (γνησίως αὐξουσα) $\iff (\forall v \in \mathbb{N}, \alpha_v < \alpha_{v+1})$
 $\iff (\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_v < \alpha_{v+1} < \dots)$
3. $(\alpha_v) \downarrow$ (φθίνουσα) $\iff (\forall v \in \mathbb{N}, \alpha_v \geq \alpha_{v+1})$
 $\iff (\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_v \geq \alpha_{v+1} \geq \dots)$
4. $(\alpha_v) \downarrow$ (γνησίως φθίνουσα) $\iff (\forall v \in \mathbb{N}, \alpha_v > \alpha_{v+1})$
 $\iff (\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_v > \alpha_{v+1} > \dots).$

Ὑπενθυμίζουμε (βλ. παρατήρηση 2 τῆς § 42) ὅτι γιά μία αὐξουσα ἢ γνησίως αὐξουσα ἀκολουθία οἱ ἐκφράσεις: «ἡ ἀκολουθία εἶναι φραγμένη» καί «ἡ ἀκολουθία εἶναι φραγμένη ἀνω» εἶναι ἰσοδύναμες· γιατί βέβαια, ἀφοῦ εἶναι αὐξουσα ἢ γνησίως αὐξουσα εἶναι κάτω φραγμένη. Ἐνα κάτω φράγμα τῆς εἶναι ὁ πρῶτος ὅρος τῆς. Ἀνάλογα ἔχουμε ὅτι γιά μία φθίνουσα ἢ γνησίως φθίνουσα ἀκολουθία οἱ ἐκφράσεις: «ἡ ἀκολουθία εἶναι φραγμένη» καί «ἡ ἀκολουθία εἶναι φραγμένη κάτω» εἶναι ἰσοδύναμες.

*Εστω τώρα ή ακολουθία $\alpha_n = n^2$, $n = 1, 2, \dots$, δηλαδή ή: $1, 4, 9, \dots$, $n^2, \dots$. Επίσης έστω ή ακολουθία $\beta_n = \frac{n}{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$, δηλαδή ή: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$. Παρατηρούμε ότι καί οί δύο είναι αύξουσες καί μάλιστα γνησίως αύξουσες ακολουθίες. 'Απ' αυτές ή πρώτη δέν είναι φραγμένη ούτε καί συγκλίνει σέ πραγματικό αριθμό (βλ. παρατήρ. τής § 51). 'Αντίθετα ή δεύτερη είναι φραγμένη, αφού $|\beta_n| = \left| \frac{n}{n+1} \right| = \frac{n}{n+1} \leq 1$ γιά κάθε $n \in \mathbb{N}$. 'Ακόμη παρατηρούμε ότι ή ακολουθία β_n , $n = 1, 2, \dots$ συγκλίνει καί μάλιστα είναι $\lim \beta_n = \lim \frac{n}{n+1} = 1$.

Τό γεγονός ότι ή αύξουσα καί φραγμένη ακολουθία $\beta_n = \frac{n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ συγκλίνει σέ πραγματικό αριθμό τό δεχόμαστε ότι ίσχύει γενικότερα γιά κάθε αύξουσα καί φραγμένη ακολουθία.

'Ακριβέστερα δεχόμαστε τό ακόλουθο αξίωμα:

§ 66. 'Αξίωμα.—Κάθε μονότονη καί φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών συγκλίνει σέ κάποιο πραγματικό αριθμό.

Σημείωση. Τό παραπάνω αξίωμα τό συναντάμε στά 'Ανώτερα Μαθηματικά ως θεώρημα. 'Η απόδειξή του όμως εκεί στηρίζεται σέ κάποιο άλλο αξίωμα.

Σχόλια: α). Τό παραπάνω αξίωμα, άν καί άφορά μόνο τίς μονότονες ακολουθίες, δίνει μία **ικανή** συνθήκη «*ύπόθεως*» όρίου ακολουθίας. Φυσικά, πληροφορίες γιά τή σύγκλιση ακολουθίας καί γιά τό όριό της, άν ύπάρχει, μς δίνουν πολλές άπό τίς προτάσεις πού άποδείξαμε στίς προηγούμενες παραγράφους καί κυρίως οί προτάσεις πού αναφέρονται στήν ένότητα: «*Άλγεβρα των όριων*». Παρατηρούμε ότι τό αξίωμα αυτό εξασφαλίζει τήν ύπαρξη στό **R** του όριου μιάς ακολουθίας μέ όρισμένες ύποθέσεις, αλλά δέ μς δίνει καμιά ένδειξη γιά τό πώς βρίσκουμε τό όριο· όποσδήποτε όμως είναι σημαντικό νά ξέρούμε ότι μία ακολουθία συγκλίνει στό **R**, γιατί τότε δέν αποκλείεται ή «*ύπαρξη*» τής όριακής της τιμής νά οδηγήσει καί στήν «*εύρεσή*» της. Αυτό φαίνεται καλύτερα στίς εφαρμογές πού διαπραγματευόμαστε στήν έπόμενη παράγραφο.

β). 'Εχοντας ύπόψη τό παραπάνω αξίωμα καί τίς προτάσεις πού άποδείξαμε στίς προηγούμενες παραγράφους, συμπεραίνουμε άμέσως ότι:

$\text{Αν } M = \{(\alpha_n): (\alpha_n) \text{ μονότονη ακολουθία}\}, \quad \Phi = \{(\alpha_n): (\alpha_n) \text{ φραγμένη ακολουθία}\}$
 $\Sigma = \{(\alpha_n): (\alpha_n) \text{ συγκλίνουσα ακολουθία}\} \quad \text{καί} \quad \Sigma_0 = \{(\alpha_n): (\alpha_n) \text{ μηδενική ακολουθία}\},$
 τότε ισχύουν οί έξής σχέσεις έγκλεισμού:

$$\text{i) } \Sigma_0 \subset \Sigma \subset \Phi, \quad \text{ii) } M \cap \Phi \subset \Sigma.$$

● 'Αμεσες τώρα συνέπειες του παραπάνω αξιώματος καί των πορισμάτων 1 καί 2 τής § 55 είναι οί έπόμενες δύο προτάσεις:

α). *Αν μία ακολουθία α_n , $n=1,2,\dots$ είναι αύξουσα καί έχει ως ένα άνω φράγμα τόν αριθμό s , τότε είναι συγκλίνουσα καί ισχύει: $\lim \alpha_n \leq s$.*

Δηλαδή:

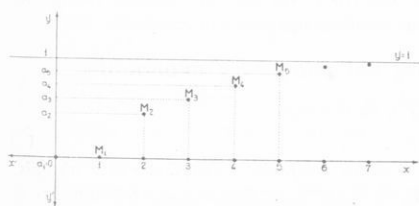
$$\left. \begin{array}{l} (a_n) \uparrow \\ a_n < s \end{array} \right\} \Rightarrow a_n \rightarrow a \leq s$$

β). "Αν μία ακολουθία $a_n, n=1, 2, \dots$ είναι φθίνουσα και έχει ως ένα κάτω φράγμα τόν αριθμό σ , τότε είναι συγκλίνουσα και ισχύει: $\sigma \leq \lim a_n$.

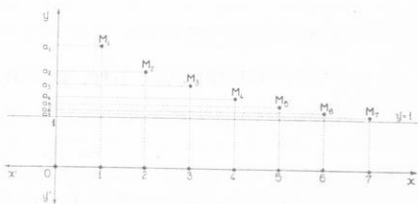
Δηλαδή:

$$\left. \begin{array}{l} (a_n) \downarrow \\ a_n > \sigma \end{array} \right\} \Rightarrow a_n \rightarrow a \geq \sigma$$

Έτσι, π.χ., η ακολουθία $a_n = \frac{n-1}{n}, n=1, 2, \dots$ ή όποια, όπως εύκολα διαπιστώνουμε, είναι αύξουσα και έχει ως ένα άνω φράγμα τόν αριθμό 1 (γιατί: $a_n = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n} < 1, \forall n \in \mathbb{N}$) συγκλίνει σ'έναν αριθμό πού είναι μικρότερος ή ίσος μέ τό 1. Στο παρακάτω σχήμα δίνουμε τούς πέντε πρώτους όρους τής ακολουθίας $a_n = \frac{n-1}{n}, n=1, 2, \dots$



Σχ. 6



Σχ. 7

Επίσης η ακολουθία: $1 + \frac{1}{n}, n=1, 2, \dots$ ή όποια είναι φθίνουσα και φραγμένη μέ ένα κάτω φράγμα τόν αριθμό 1 (γιατί: $1 < 1 + \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$) συγκλίνει σ'έναν αριθμό πού είναι μεγαλύτερος ή ίσος μέ τό 1. Στο σχήμα 7 δίνουμε τούς έφτά πρώτους όρους τής ακολουθίας $a_n = 1 + \frac{1}{n}, n=1, 2, \dots$

Σημαντική παρατήρηση. Ξέρουμε (βλ. παρατήρηση τής § 51) ότι μία ακολουθία $a_n, n=1, 2, \dots$ πού δέν είναι φραγμένη, δέ συγκλίνει σέ πραγματικό αριθμό, γιατί άλλιώς, δηλαδή αν αυτή συνέκλινε σέ πραγματικό αριθμό, τότε, σύμφωνα μέ τήν ιδιότητα IV τών συγκλινουσών ακολουθιών, θά ήταν φραγμένη, πράγμα πού είναι άτοπο. Στην περίπτωση, όπου η μή φραγμένη ακολουθία $a_n, n=1, 2, \dots$ είναι καί αύξουσα, όπως π.χ. ή $n^2, n=1, 2, \dots$ λέμε ότι αυτή «*άπειρίζεται θετικά*» ή άλλιώς «*συγκλίνει στό $+\infty$* » ή ακόμη «*τείνει στό $+\infty$* » (τό σύμβολο $+\infty$ τό διαβάζουμε «*σύν άπειρο*»). Γράφουμε συμ-

βολικά: $\lim a_n = +\infty$ ή πιο απλά $a_n \rightarrow +\infty$ και διαβάζουμε: όριο a_n ίσο μέ $+\infty$ ή a_n τείνει στο $+\infty$.

Στήν περίπτωση, όπου ή μή φραγμένη ακολουθία a_n , $n = 1, 2, \dots$ είναι και φθίνουσα, όπως π.χ. ή ακολουθία: $-n^2$, $n = 1, 2, \dots$ λέμε ότι αυτή «*απειρίζεται αρνητικά*» ή αλλιώς «*συγκλίνει στο $-\infty$* » ή ακόμη «*τείνει στο $-\infty$* » και γράφουμε συμβολικά: $\lim a_n = -\infty$ ή πιο απλά $a_n \rightarrow -\infty$ (τό σύμβολο $-\infty$ τό διαβάζουμε «*πλήν άπειρο*»).

Ή αξίζει νά παρατηρήσουμε έδώ ότι ή αντίθετη ακολουθία τής $a_n = -n^2$, $n = 1, 2, \dots$ δηλαδή ή: $-(-n^2) = n^2$, $n = 1, 2, \dots$ άπειρίζεται θετικά. Αυτό όμως ίσχύει γιά κάθε ακολουθία πού άπειρίζεται θετικά ή άρνητικά. Άκριβέστερα ίσχύει ή ίσοδυναμία:

$$\lim a_n = -\infty \iff \lim (-a_n) = +\infty$$

Σημείωση. Όταν μία ακολουθία άπειρίζεται θετικά ή άρνητικά δέ λέγεται συγκλίνουσα. **Προσέξτε!** μόνο όταν τό όριο της είναι άριθμός πραγματικός, τότε ή ακολουθία λέγεται συγκλίνουσα.

Στήν άλλη τάξη θά μάθουμε πώς και άλλες ακολουθίες, έκτός από τίς μονότονες και μή φραγμένες, άπειρίζονται θετικά αντίστοιχως άρνητικά και έκει θά δώσουμε ένα γενικό όρισμό συγκλίσεως πρós τό $+\infty$ ή $-\infty$ μις ακολουθίας πραγματικών άριθμών.

§ 67. Έφαρμογές στίς μονότονες και φραγμένες ακολουθίες.

Έφαρμογή 1η: (*Έμβασόν κύκλου*). Έστω ή ακολουθία:

$$E_3, E_4, E_5, \dots, E_n, \dots \quad (1)$$

όπου E_n είναι τό έμβασόν του έγγεγραμμένου σέ κύκλο κανονικού πολυγώνου μέ n πλευρές.

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι: $E_3 < E_4 < E_5 < \dots < E_n < E_{n+1} < \dots$, δηλαδή ότι ή ακολουθία E_n , $n = 3, 4, \dots$ είναι αύξουσα (και μάλιστα γνησίως).

Έξάλλου ή ακολουθία αυτή είναι και πρós τά άνω φραγμένη. Ένα άνω φράγμα της είναι ό άριθμός πού παριστάνει τό έμβασόν ενός όποιοδήποτε περιγεγραμμένου στον κύκλο κυρτού πολυγώνου. Η ακολουθία λοιπόν E_n , $n = 3, 4, \dots$ είναι (γνησίως) αύξουσα και φραγμένη, επομένως (§ 66) ή ακολουθία (1) συγκλίνει σ' έναν πραγματικό άριθμό. Όπως είναι γνωστό από τή Γεωμετρία αυτόν τόν πραγματικό άριθμό—δηλαδή τό όριο τής ακολουθίας E_n , $n = 3, 4, \dots$ —τό λέμε έμβασόν του κύκλου.

Έφαρμογή 2η: Έστω ή ακολουθία a_n , $n = 1, 2, \dots$ γιά τήν όποία έχουμε:

$$a_1 = \sqrt{2} \text{ και } a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \text{ γιά κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Νά αποδείξετε ότι ή (a_n) είναι μονότονη και φραγμένη και ότι $\lim a_n = 2$.

Άποδείξη. Πρώτα-πρώτα γεννάται τό έρώτημα, άν ή ακολουθία πού μάς δόθηκε όρίστηκε καλά, δηλαδή άν γιά κάθε φυσικό άριθμό n είναι $2 + a_n \geq 0$. Αυτό όμως συμβαίνει, γιατί, όπως πολύ εύκολα προκύπτει μέ τέλεια έπαγωγή, ίσχύει: $a_n > 0$ γιά κάθε $n \in \mathbb{N}$. Πράγματι $a_1 = \sqrt{2} > 0$ και άν γιά κάποιο φυσικό άριθμό n είναι $a_n > 0$, τότε και $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} > \sqrt{2} > 0$.

Έξετάζουμε τώρα τήν (a_n) ως πρós τό μονότονο. Παρατηρούμε ότι: $a_1 < a_2$. Άρα, άν ή ακολουθία (a_n) είναι μονότονη, θά πρέπει νά είναι γνησίως αύξουσα. Έστω λοιπόν ότι: $a_k < a_{k+1}$, τότε $2 + a_k < 2 + a_{k+1}$, όπότε $\sqrt{2 + a_k} < \sqrt{2 + a_{k+1}}$, δηλαδή $a_{k+1} < a_{k+2}$.

*Αρα, σύμφωνα με τό θεώρημα τής τέλεις έπαγωγής, θά έχουµε: $\alpha_n < \alpha_{n+1}$ γιά κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή ή άκολουθία (α_n) είναι αύξουσα καί µάλιστα γνησίως.

Θά δείξουµε τώρα ότι ή (α_n) είναι φραγµένη. *Αρκεί βεβαίως νά δείξουµε ότι ή άκολουθία (α_n) είναι φραγµένη άνω, µιά καί όπως δείξαµε παραπάνω ή (α_n) είναι γνησίως αύξουσα. Γιά νά προσδιορίσουµε ένα άνω φράγμα τής άκολουθίας (α_n) κάνουµε τήν έξής σκέψη: Δέν ξέρουµε άπό τήν άρχή άν ή (α_n) είναι συγκλίνουσα, άν όμως είναι καί καλέσουµε α τό όριο τής, τότε άπό τήν ισότητα $\alpha_{n+1} = \sqrt{2 + \alpha_n}$ µέ έφαρµογή τών ιδιοτήτων τών όρίων, παίρνουµε: $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2 + \alpha_n} = \sqrt{2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n}$. *Αλλά $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha$ (§ 50). *Αρα: $\alpha = \sqrt{2 + \alpha}$ καί συνεπώς $\alpha^2 - \alpha - 2 = 0$ ή $(\alpha - 2)(\alpha + 1) = 0$. *Επειδή όμως όλα τά $\alpha_n > 0$, άποκλείεται νά είναι άρνητικό τό α. *Αρα $\alpha = 2$. Τότε όμως τό 2, όπως καί κάθε αριθµός µεγαλύτερός του, θά είναι ένα πιθανό άνω φράγμα τής άκολουθίας (α_n) . *Ελέγχουµε τώρα άν ισχύει $\alpha_n < 2$ γιά κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αυτό όμως συμβαίνει, γιατί, όπως πολύ εύκολα προκύπτει µέ τέλεια έπαγωγή, έχουµε: $\alpha_1 = \sqrt{2} < 2$ καί άν γιά κάποιο φυσικό αριθµό ν είναι $\alpha_n < 2$, τότε καί $\alpha_{n+1} = \sqrt{2 + \alpha_n} < \sqrt{4} = 2$.

*Η άκολουθία λοιπόν (α_n) είναι (γνησίως) αύξουσα καί άνω φραγµένη. *Αρα είναι συγκλίνουσα καί όπως είδαµε παραπάνω είναι: $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 2$.

*Εφαρµογή 3η: *Εστω ή άκολουθία $\alpha_n, n = 1, 2, \dots$ µέ $\alpha_1 = 0$ καί

$$\alpha_{n+1} = \frac{2\alpha_n + 4}{3} \text{ γιά κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Νά άποδείξετε ότι ή άκολουθία (α_n) είναι συγκλίνουσα καί νά βρείτε τό όριο τής.

*Απόδειξη. *Εξετάζουµε μήπως ή (α_n) είναι µονότονη. Παρατηρούµε ότι: $\alpha_1 < \alpha_2$ (γιατί: $\alpha_1 = 0 < \frac{2\alpha_1 + 4}{3} = \frac{4}{3} = \alpha_2$). *Αρα, άν ή (α_n) είναι µονότονη, θά πρέπει νά είναι γνησίως αύξουσα. *Εστω λοιπόν ότι: $\alpha_k < \alpha_{k+1}$, δηλαδή $\alpha_{k+1} - \alpha_k > 0$, τότε είναι καί $\alpha_{k+1} < \alpha_{k+2}$, γιατί άν σχηµατίσουμε τή διαφορά $\alpha_{k+2} - \alpha_{k+1}$ έχουµε:

$$\alpha_{k+2} - \alpha_{k+1} = \frac{2\alpha_{k+1} + 4}{3} - \frac{2\alpha_k + 4}{3} = \frac{2(\alpha_{k+1} - \alpha_k)}{3} > 0.$$

*Αρα $\alpha_n < \alpha_{n+1}$ γιά κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή ή άκολουθία (α_n) είναι αύξουσα καί µάλιστα γνησίως.

Θά δείξουµε τώρα ότι ή (α_n) είναι άνω φραγµένη. *Ενα πιθανό άνω φράγμα τής (α_n) είναι κάθε αριθµός µεγαλύτερος ή ίσος µέ τό 4 (τό 4 είναι ρίζα τής εξίσώσεως: $x = \frac{2x+4}{3}$,

στήν όποία καταλήξαµε κάνοντας συλλογισµό άνάλογο µέ αυτόν πού κάναµε στήν προηγούμενη έφαρµογή), π.χ. ό 5. *Ελέγχουµε τώρα άν ισχύει: $|\alpha_n| < 5$ γιά κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αυτό όμως συμβαίνει, γιατί, όπως πολύ εύκολα προκύπτει µέ τέλεια έπαγωγή, έχουµε:

$|\alpha_1| = 0 < 5$ καί άν γιά κάποιο φυσικό αριθµό ν είναι $|\alpha_n| < 5$, τότε:

$$|\alpha_{n+1}| = \left| \frac{2\alpha_n + 4}{3} \right| \leq \frac{2|\alpha_n| + 4}{3} < \frac{2 \cdot 5 + 4}{3} = \frac{14}{3} < 5.$$

*Η άκολουθία λοιπόν (α_n) είναι (γνησίως) αύξουσα καί άνω φραγµένη. *Αρα, σύμφωνα µέ τό άξίωμα τής § 66, ή άκολουθία (α_n) συγκλίνει σέ έναν πραγµατικό αριθµό, έστω α. Θά ισχύει έποµένως $\alpha_n \rightarrow \alpha$ καί $\alpha_{n+1} \rightarrow \alpha$. Τότε άπό τήν ισότητα $\alpha_{n+1} = \frac{2\alpha_n + 4}{3}$ προκύπτει,

άν µεταβούµε στό όριο, $\alpha = \frac{2\alpha + 4}{3}$ ή $3\alpha = 2\alpha + 4$, δηλαδή $\alpha = 4$.

*Αρα:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 4.$$

Παρατήρηση. Σ' αυτή τήν έφαρµογή µπορούµε νά έργαστοϋµε καί ως έξής: Δέν ξέρουµε άν ή (α_n) συγκλίνει σέ πραγµατικό αριθµό, άν όμως αυτό συμβαίνει καί καλέσουµε α

τό όριο της, τότε από τήν ισότητα: $\alpha_{v+1} = \frac{2\alpha_v + 4}{3}$ προκύπτει, άν μεταβοϋμε στό όριο,
 $\alpha = \frac{2\alpha + 4}{3}$, δηλαδή $\alpha = 4$.

Σχηματίζουμε τώρα τή διαφορά:

$$\alpha_{v+1} - 4 = \frac{2\alpha_v + 4}{3} - 4 = \frac{2\alpha_v - 8}{3} = \frac{2}{3} (\alpha_v - 4) \quad (1)$$

*Αν στήν (1) θέσουμε $v = 1, 2, \dots, v$ καί πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη τίς ισότητες πού θά προκύψουν, βρίσκουμε, ύστερα από τίς σχετικές άπλοποιήσεις, ότι:

$$\alpha_{v+1} - 4 = \left(\frac{2}{3}\right)^v \cdot (\alpha_1 - 4) = -4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^v.$$

*Αλλά $\left(\frac{2}{3}\right)^v \rightarrow 0$ (βλ. § 64, 1η έφαρμογή). *Αρα $\alpha_{v+1} \rightarrow 4$ καί συνεπώς $\alpha_v \rightarrow 4$.

Σημείωση. *Από τή σχέση: $\alpha_{v+1} - 4 = -4 \left(\frac{2}{3}\right)^v$ λαμβάνουμε:

$$\alpha_{v+1} = 4 - 4 \left(\frac{2}{3}\right)^v = 4 \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^v\right] \text{ καί συνεπώς } \alpha_v = 4 \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{v-1}\right] \text{ γιά } v = 2, 3, \dots$$

(Ισχύει καί γιά $v = 1$). Παρατηροϋμε ότι στήν τελευταία σχέση έχουμε τήν έκφραση τοϋ γενικοϋ όρου τής άκολουθίας πού μās δόθηκε συναρτήσει τοϋ v .

*Εφαρμογή 4η: **Νά μελετήσετε ως πρός τό μονότονο καί τή σύγκλιση τήν άκολουθία (α_v) γιά τήν όποία είναι:**

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \left(\theta + \frac{3}{\theta}\right), \text{ όπου } \theta > 0, \text{ καί}$$

$$\alpha_{v+1} = \frac{1}{2} \left(\alpha_v + \frac{3}{\alpha_v}\right) \text{ γιά κάθε } v \in \mathbb{N}.$$

Στή συνέχεια νά βρείτε, άν ύπάρχει, τό όριο της.

Λύση: Πρώτα-πρώτα πρέπει νά βεβαιωθοϋμε ότι γιά όλους τούς φυσικούς άριθμούς v είναι $\alpha_v \neq 0$. Πράγματι, αυτό συμβαίνει γιατί, όπως πολϋ εύκολα προκύπτει μέ τέλεια έπαγωγή είναι: $\alpha_v > 0$ γιά κάθε $v \in \mathbb{N}$.

*Εξάλλου, σύμφωνα μέ τή γνωστή άνισότητα: $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$, όπου $x, y > 0$, έχουμε:

$$\alpha_v = \frac{1}{2} \left(\alpha_{v-1} + \frac{3}{\alpha_{v-1}}\right) \geq \sqrt{\alpha_{v-1} \frac{3}{\alpha_{v-1}}} = \sqrt{3}, \text{ δηλαδή } \alpha_v \geq \sqrt{3}, \quad \forall v \in \mathbb{N}.$$

*Εξετάζουμε τώρα μήπως ή άκολουθία (α_v) είναι μονότονη. *Έχουμε γιά κάθε $v \in \mathbb{N}$:

$$\alpha_{v+1} - \alpha_v = \frac{1}{2} \left(\alpha_v + \frac{3}{\alpha_v}\right) - \alpha_v = \frac{3 - \alpha_v^2}{2\alpha_v} \leq 0 \text{ (γιατί: } \alpha_v^2 \geq 3 \iff 3 - \alpha_v^2 \leq 0 \text{)}.$$

*Αρα: $\alpha_{v+1} \leq \alpha_v$ γιά κάθε $v \in \mathbb{N}$, δηλαδή ή άκολουθία (α_v) είναι φθίνουσα καί έπειδή $\alpha_v \geq \sqrt{3}$ γιά κάθε $v \in \mathbb{N}$, ή άκολουθία (α_v) φράσσεται κάτω καί τό $\sqrt{3}$ είναι ένα κάτω φράγμα της.

*Ωστε ή άκολουθία (α_v) είναι φθίνουσα καί φραγμένη κάτω. *Αρα είναι συγκλίνουσα. *Έστω x τό όριο της. Τότε $\alpha_v \rightarrow x$ καί $\alpha_{v+1} \rightarrow x$ (βλ. § 50, ιδ. III). Θά είναι $x \neq 0$, γιατί όλα τά α_v είναι $\geq \sqrt{3}$, έπομένως $x \geq \sqrt{3} > 0$. Τότε από τήν ισότητα:

$$\alpha_{v+1} = \frac{1}{2} \left(\alpha_v + \frac{3}{\alpha_v}\right) \text{ συνάγεται ότι:}$$

$$x = \lim \alpha_{v+1} = \frac{1}{2} \left(\lim \alpha_v + \frac{3}{\lim \alpha_v}\right) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{3}{x}\right)$$

δηλαδή: $x^2 = 3$. 'Επειδή όμως όλα τα $\alpha_n > 0$, αποκλείεται να είναι αρνητικό το όριο. Άρα $x = \sqrt{3}$. Συνεπώς: $\lim \alpha_n = \sqrt{3}$.

Έφαρμογή 5η: Νά αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύει:

$$\lim x^n = \begin{cases} 0, & \text{αν } |x| < 1 \\ +\infty, & \text{αν } x > 1 \\ 1, & \text{αν } x = 1 \\ \neq, & \text{αν } x \leq -1. \end{cases}$$

Απόδειξη. α). 'Αν $|x| < 1$, τότε $\lim x^n = 0$ (βλ. § 64, εφαρμογή 1η). 'Εδώ μπορούμε να εργαστούμε και ως εξής: 'Επειδή $|x| < 1$ έχουμε: $|x|^{n+1} = |x| \cdot |x|^n \leq |x|^n$, δηλ. ή ακολουθία $(|x|^n)$ είναι φθίνουσα και προφανώς φραγμένη. Άρα είναι συγκλίνουσα. 'Εστω α το όριο της. Τότε έχουμε: $\lim |x|^{n+1} = |x| \cdot \lim |x|^n$, δηλ. $\alpha = |x| \cdot \alpha$ ή $\alpha(1 - |x|) = 0$ και επειδή $1 - |x| \neq 0$ είναι: $\alpha = 0$.

Ωστε: $\lim |x|^n = 0$, οπότε και $\lim x^n = 0$ (βλ. § 62, παρατήρηση 2).

β). 'Αν $x > 1$, τότε $x^{n+1} > x^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, δηλαδή ή ακολουθία (x^n) είναι γνησίως αύξουσα. 'Εάν ήταν και φραγμένη, τότε θά υπήρχε το $\lim x^n$, έστω α ($\alpha \geq 1$). Τότε όμως θά είχαμε: $\lim x^{n+1} = x \cdot \lim x^n$, δηλ. $\alpha = x \cdot \alpha$ ή $\alpha(1 - x) = 0$, οπότε $\alpha = 0$ (γιατί: $x > 1$). Αυτό όμως είναι άτοπο, γιατί $\alpha \geq 1$. Άρα ή ακολουθία (x^n) είναι (γνησίως) αύξουσα και μη φραγμένη, οπότε, σύμφωνα με την παρατήρηση της προηγούμενης παραγράφου, ισχύει:

$$\lim x^n = +\infty.$$

γ). 'Αν $x = 1$, τότε $x^n = 1 \rightarrow 1$.

δ). Για $x = -1$, έχουμε την ακολουθία: $x^n = (-1)^n$, $n = 1, 2, \dots$, ή όποια, όπως ξέρουμε (βλ. παραδ. 5, σελ. 67) δέ συγκλίνει.

ε). 'Αν $x < -1$ πάλι ή ακολουθία x^n , $n \in \mathbb{N}$ δέ συγκλίνει. Πράγματι, αφού $x < -1$ έχουμε $|x| > 1$ και $x = -|x|$. Θέτουμε $\alpha_n = x^n$, $n = 1, 2, \dots$, τότε έχουμε:

$\alpha_n = x^n = (-1)^n \cdot |x|^n$. 'Επειδή $|x| > 1$, σύμφωνα με την περίπτωση (β), ισχύει: $|x|^n \rightarrow +\infty$ και συνεπώς: $|x|^{2n} \rightarrow +\infty$ και $|x|^{2n-1} \rightarrow +\infty$. Παρατηρούμε τώρα ότι:

$$\alpha_{2n} = (-1)^{2n} \cdot |x|^{2n} = |x|^{2n} \rightarrow +\infty \text{ και } \alpha_{2n-1} = (-1)^{2n-1} \cdot |x|^{2n-1} = -|x|^{2n-1} \rightarrow -\infty.$$

Συνεπώς ή ακολουθία $\alpha_n = x^n$, $n = 1, 2, \dots$ δέ συγκλίνει.

Ωστε: αν $x \leq -1$, τότε το $\lim x^n$ δέν υπάρχει.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ομάδα Α'. 120. 'Εστω ή ακολουθία α_n , $n = 1, 2, \dots$ μέ:

$$\alpha_1 = 1 \text{ και } \alpha_{n+1} = \sqrt{1 + \alpha_n} \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Νά αποδείξετε ότι ή (α_n) είναι γνησίως αύξουσα, φραγμένη και ότι: $\lim \alpha_n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

121. Νά μελετήσετε ως πρὸς τὸ μονότονο καὶ τὴ σύγκλιση τὴν ἀκολουθία (α_n) γιὰ τὴν ὁποία εἶναι: $\alpha_1 = 1$ καὶ $\alpha_{n+1} = \sqrt{2\alpha_n}$, γιὰ κάθε $n \in \mathbb{N}$. Στὴ συνέχεια νά βρεῖτε, ἂν ὑπάρχει, τὸ ὅριο τῆς.

Υπόδειξη. Όμοια εργασία μ' αὐτὴ πού ἀκολουθήσαμε στὴν ἐφαρμογὴ 2 τῆς § 67.

122. Νά μελετήσετε ως πρὸς τὸ μονότονο καὶ τὴ σύγκλιση τὴν ἀκολουθία (α_n) γιὰ τὴν ὁποία εἶναι: $\alpha_1 = 5$ καὶ $\alpha_{n+1} = \sqrt{4\alpha_n + 3}$. Ὑστερα νά βρεῖτε, ἂν ὑπάρχει, τὸ ὅριο τῆς.

Υπόδειξη. Εργαζόμαστε ὅπως στὴν προηγούμενη ἀσκηση. Ἰσως παρουσιαστῇ ή ἀνάγκη νά διαπιστώσουμε ὅτι: $\alpha_n > \sqrt{3}$ γιὰ κάθε $n \in \mathbb{N}$.

123. 'Εστω ή ακολουθία α_n , $n = 1, 2, \dots$ μέ $\alpha_1 = 0$ καί

$$\alpha_{n+1} = \frac{3\alpha_n + 1}{4} \text{ γιὰ κάθε } n \in \mathbb{N}$$

Νά αποδείξετε ότι ή άκολουθία (α_n) είναι συγκλίνουσα και νά βρείτε τό όριο της. Στή συνέχεια νά έκφράσετε τό νιοστό όρο της α_n συναρτήσει του n .

Υπόδειξη. Όμοια έργασία μ' αυτή πού άκολουθήσαμε στήν έφαρμογή 3 τής § 67.

Όμάδα Β'. 124. Έστω ή άκολουθία $\alpha_n, n = 1, 2, \dots$ μέ $\alpha_1 = \theta > 0$ και

$$\alpha_{n+1} = \frac{1}{2} \left(\alpha_n + \frac{\lambda^2}{\alpha_n} \right), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \text{ όπου } 0 < \lambda < \theta.$$

Νά αποδείξετε ότι ή άκολουθία (α_n) είναι συγκλίνουσα και νά βρείτε τό όριο της.

Υπόδειξη. Όμοια έργασία μ' αυτή πού άκολουθήσαμε στήν έφαρμογή 4 τής § 67.

125. Νά μελετήσετε ώς πρós τό μονότονο και τή σύγκλιση τήν άκολουθία (α_n) για τήν όποία είναι: $\alpha_1 = -3$ και $\alpha_{n+1} = \frac{3\alpha_n - 4}{5}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Στή συνέχεια νά βρείτε, άν υπάρχει, τό όριο της.

Υπόδειξη. Αφού πρώτα δείξετε ότι ή (α_n) είναι αύξουσα, ύστερα νά βρείτε τό όριο πού θά έχει, άν συμβαίνει νά είναι συγκλίνουσα και στή συνέχεια νά αποδείξετε ότι ό άριθμός πού βρέθηκε σάν πιθανό όριο της είναι άνω φράγμα της. Άρα ... κτλ.

126. Έστω ή άκολουθία $\alpha_n, n = 1, 2, \dots$ μέ γενικό όρο:

$$\alpha_n = \sqrt{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$$

Νά αποδείξετε ότι ή (α_n) είναι γνησίως αύξουσα, φραγμένη και ότι: $\lim \alpha_n = \frac{1}{2}$.

Υπόδειξη. Πρώτα άπ' όλα νά αποδείξετε ότι: $\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}$.

127. Νά αποδείξετε ότι ή άκολουθία $\alpha_n, n = 1, 2, \dots$ για τήν όποία είναι:

$$\alpha_{n+1} = \alpha + \alpha_n^2 \text{ και } \alpha_1 = \alpha, \text{ όπου } 0 < \alpha \leq \frac{1}{4},$$

είναι γνησίως αύξουσα και ότι συγκλίνει στή μικρότερη ρίζα τής εξίσωσης: $t^2 - t + \alpha = 0$.

Υπόδειξη. Εργαζόμαστε όπως και στήν άσκηση 125 μόνο πού για νά αποδείξουμε ότι ή (α_n) είναι άνω φραγμένη, θά παρουσιάσει ίσως ή ανάγκη νά διαπιστώσουμε, μέ έπαγωγή, ότι όλα τά α_n είναι $\leq \frac{1}{2}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ V

ΕΙΔΙΚΕΣ ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ

(ΠΡΟΟΔΟΙ - ΣΕΙΡΕΣ)

§ 68. Εισαγωγή.— Στο προηγούμενο κεφάλαιο όρισαμε την έννοια της ακολουθίας και αποδείξαμε τις κυριότερες ιδιότητες των ακολουθιών. Σ' αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε τέσσερις ειδικές κατηγορίες ακολουθιών που παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον στα Μαθηματικά. Σέ καθεμιά από τις κατηγορίες αυτές ανήκουν ακολουθίες που δύο διαδοχικοί τους όροι συνδέονται μεταξύ τους με μία αναδρομική σχέση, ή όποία περιγράφει τή χαρακτηριστική ιδιότητα που έχουν οι όροι τους. 'Ανάλογα με τή χαρακτηριστική αυτή ιδιότητα διακρίνουμε τις ακολουθίες που ανήκουν στις κατηγορίες αυτές σέ: *αριθμητικές, άρμονικές, γεωμετρικές προόδους* και *στις σειρές*.

I. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΠΡΟΟΔΟΙ

§ 69. 'Ορισμοί.— 'Ας θεωρήσουμε τήν ακολουθία:

$$3, 7, 11, 15, 19, \dots$$

Παρατηρούμε ότι κάθε όρος της, από τό δεύτερο και μετά, προκύπτει άν προσθέσουμε στόν προηγούμενό του ένα σταθερό αριθμό, που στην προκειμένη περίπτωση είναι ό αριθμός 4.

'Επίσης, άν θεωρήσουμε τήν ακολουθία:

$$10, 7, 4, 1, -2, -5, \dots$$

παρατηρούμε πάλι πώς κάθε όρος της —έκτός φυσικά από τόν πρώτο— προκύπτει άν προσθέσουμε στόν προηγούμενό του τόν αριθμό: -3.

Βλέπουμε λοιπόν πώς υπάρχουν ακολουθίες μέ τήν ιδιότητα: Κάθε όρος τους, από τό δεύτερο και μετά, προκύπτει άν προσθέσουμε στόν προηγούμενό του ένα σταθερό αριθμό που τόν λέμε **λόγο** και τόν συμβολίζουμε συνήθως μέ τό γράμμα ω . Τίς ακολουθίες μέ αυτή τήν ιδιότητα τίς ονομάζουμε **αριθμητικές προόδους**. Πιο γενικά μπορούμε νά πούμε τώρα ότι: *Μία ακολουθία:*

$$a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots$$

(1)

θά λέμε ότι είναι μία **αριθμητική πρόοδος**, τότε και μόνο τότε, άν υπάρχει αριθμός ω τέτοιος, ώστε νά ισχύει:

$$a_{n+1} = a_n + \omega, \text{ για κάθε } n = 1, 2, \dots$$

(2)

Οι όροι της ακολουθίας (1) λέγονται διαδοχικοί όροι της αριθμητικής πρόοδου και ο a_n λέγεται νιοστός όρος ή όρος ν-τάξεως της πρόοδου.

Μία αριθμητική πρόοδος λέγεται επίσης και πρόοδος κατά διαφορά, γιατί από τη (2) έχουμε:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \dots = a_{n+1} - a_n = \dots = \omega \text{ (σταθερό)} \quad (3)$$

Η (3) μās οδηγεί νά δώσουμε γιά τήν αριθμητική πρόοδο και τόν εξής ισοδύναμο όρισμό:

Αριθμητική πρόοδος (ή **πρόοδος κατά διαφορά**) είναι μία ακολουθία αριθμών, που δυό οποιοδήποτε διαδοχικοί της όροι διαφέρουν κατά τόν ίδιο αριθμό ω , ο οποίος λέγεται λόγος της αριθμ. προόδου.

Από τόν παραπάνω όρισμό συμπεραίνουμε τώρα τά εξής:

α). Αν $\omega > 0$, τότε $a_{n+1} - a_n > 0$, δηλ. $a_{n+1} > a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς, αν $\omega > 0$ ή αριθμ. πρόοδος (1) είναι γνησίως αύξουσα (άρα και αύξουσα).

β). Αν $\omega < 0$, τότε $a_{n+1} - a_n < 0$, δηλ. $a_{n+1} < a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ και συνεπώς ή (1) είναι γνησίως φθίνουσα (άρα και φθίνουσα).

γ). Αν $\omega = 0$, τότε $a_{n+1} = a_n$ γιά κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή ή αριθμητική πρόοδος είναι μία σταθερή ακολουθία και συνεπώς ή (1) είναι τότε συγχρόνως και αύξουσα και φθίνουσα.

Έτσι, π.χ., ή πρόοδος: 3, 7, 11, 15, 19, ... είναι γνησίως αύξουσα, έπειδή $\omega = 4 > 0$, ένω ή πρόοδος: 10, 7, 4, 1, -2, -5, ... είναι γνησίως φθίνουσα, γιατί έδω είναι: $\omega = -3 < 0$.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΠΡΟΟΔΟΥ

§ 70. Ίδιότητα Ι.—Ο νιοστός όρος a_n σέ μία αριθμητική πρόοδο, που έχει πρώτο όρο τό a_1 και λόγο ω , βρίσκεται αν στόν πρώτο της όρο προσθέσουμε τό γινόμενο του λόγου επί τόν αριθμό, ο οποίος εκφράζει τό πλήθος των προηγούμενων του όρων.

Δηλαδή:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = a_1 + (n - 1)\omega \quad (1)$$

Απόδειξη. Από τήν αναδρομική σχέση (2) γιά $n = 2, 3, \dots, (n - 1)$ λαμβάνουμε: $a_2 = a_1 + \omega$, $a_3 = a_2 + \omega$, $a_4 = a_3 + \omega$, ..., $a_n = a_{n-1} + \omega$.

Αν τώρα τίς σχέσεις αυτές τίς προσθέσουμε κατά μέλη και διαγράψουμε τούς κοινούς όρους που εμφανίζονται στά δύο μέλη προκύπτει ή (1).

Σημείωση. Μία πιό αυστηρή απόδειξη γίνεται μέ τή μέθοδο της τέλεις έπαγωγής, ως εξής: Γιά $n = 1$ ή (1) προφανώς ισχύει. Έστω ότι ισχύει ή (1) γιά $n = k$, δηλ. έστω ότι ισχύει:

$$a_k = a_1 + (k - 1)\omega$$

Προσθέτουμε και στά δύο μέλη της τελευταίας σχέσεως τό ω και έχουμε:

$$a_k + \omega = a_1 + (k - 1)\omega + \omega$$

Αλλά:

$$a_k + \omega = a_{k+1}$$

όπότε έχουμε:

$$a_{k+1} = a_1 + k\omega = a_1 + [(k + 1) - 1]\omega$$

δηλ. ή (1) ισχύει καί γιά $v = k + 1$. Άρα, σύμφωνα μέ τό θεώρημα τής τέλειαις επαγωγής, ή (1) ισχύει γιά κάθε $v \in \mathbb{N}$.

Έφαρμογή. Νά βρεΐτε τό 15ο όρο τής άριθμ. προόδου: 7, 15, 23, 31, ...

Λύση. Έχουμε: $\alpha_1 = 7$, $\omega = 15 - 7 = 23 - 15 = 31 - 23 = 8$, $v = 15$, $\alpha_{15} =$;

Έφαρμόζοντας τόν τύπο (1) βρίσκουμε:

$$\alpha_{15} = 7 + (15 - 1) \cdot 8 = 7 + 14 \cdot 8 = 119.$$

Παρατηρήσεις. 1) Από τήν ιδιότητα I συμπεραΐνουμε ότι: μία άριθμ. πρόοδος είναι τελείως όρισμένη, όταν δίνονται ό πρώτος όρος της $\alpha_1 = \alpha$ καί ό λόγος της ω , γιατί τότε οι όροι της θά είναι:

$$\begin{array}{cccccc} \text{1ος όρος,} & \text{2ος όρος,} & \text{3ος όρος,} & \text{4ος όρος,} & \text{5ος όρος,} & \dots \\ \alpha & \alpha + \omega & \alpha + 2\omega & \alpha + 3\omega & \alpha + 4\omega & \dots \end{array}$$

2) Από τόν τύπο: $\alpha_v = \alpha_1 + (v - 1)\omega$ συνάγεται ότι: άν γνωρίζουμε τούς τρεις από τούς άριθμούς α_v , α_1 , v καί ω μπορούμε νά προσδιορίσουμε καί τόν τέταρτο, άρκεί νά επιλύσουμε μίαν εξίσωση πρώτου βαθμού. Έτσι έχουμε τόν παρακάτω πίνακα:

α_1, v, ω	α_v, v, ω	α_v, α_1, v	$\alpha_v, \alpha_1, \omega$
$\alpha_v = \alpha_1 + (v - 1)\omega$	$\alpha_1 = \alpha_v - (v - 1)\omega$	$\omega = \frac{\alpha_v - \alpha_1}{v - 1}$	$v = \frac{\alpha_v - \alpha_1 + \omega}{\omega}$

3) Άν γιά μία άκολουθία α_v , $v = 1, 2, \dots$ ισχύει: $\alpha_v = \alpha_1 + (v - 1)\omega$, $\forall v \in \mathbb{N}$, τότε ή (α_v) είναι μία άριθμητική πρόοδος. Πράγματι, τότε θά έχουμε:

$$\forall v \in \mathbb{N}, \alpha_v = \alpha_1 + (v - 1)\omega \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall v \in \mathbb{N}, \alpha_{v+1} = \alpha_1 + v\omega \\ \forall v \in \mathbb{N}, \alpha_v + \omega = \alpha_1 + v\omega \end{array} \right\} \Rightarrow \forall v \in \mathbb{N}, \alpha_{v+1} = \alpha_v + \omega.$$

4) Έχοντας ύπόψη τήν παρατήρηση 3, ή ιδιότητα I διατυπώνεται πιό γενικά ώς εξής: **Άναγκαία καί ίκανή συνθήκη γιά νά είναι άριθμητική πρόοδος μέ λόγο ω μία άκολουθία α_v , $v = 1, 2, \dots$, είναι ή:** $\alpha_v = \alpha_1 + (v - 1)\omega$, $\forall v \in \mathbb{N}$.

*** § 71. Πόρισμα.**—Άν μία άκολουθία α_v , $v = 1, 2, \dots$ είναι άριθμητική πρόοδος μέ λόγο ω , τότε γιά κάθε $v, \mu \in \mathbb{N}$ μέ $\mu < v$ ισχύουν:

$$\text{i) } \alpha_{1+\mu} = \alpha_1 + \mu\omega$$

$$\text{ii) } \alpha_v = \alpha_{v-\mu} + \mu\omega$$

$$\text{iii) } \alpha_{v-\mu} = \alpha_v - \mu\omega.$$

Η άπόδειξη τής (i) προκύπτει άμέσως από τή σχέση $\alpha_v = \alpha_1 + (v - 1)\omega$, άρκεί νά θέσουμε $v = 1 + \mu$. Γιά νά άποδείξουμε τίς (ii) καί (iii) παρατηρούμε ότι: $\alpha_{v-\mu} = \alpha_1 + (v - \mu - 1)\omega = \alpha_1 + (v - 1)\omega - \mu\omega = \alpha_v - \mu\omega$, δηλαδή ή (iii), καί συνεπώς: $\alpha_v = \alpha_{v-\mu} + \mu\omega$, δηλαδή ή (ii).

§ 72. Ίδιότητα II.—Άν μία άκολουθία α_v , $v = 1, 2, \dots$ είναι άριθμητική πρόοδος μέ λόγο ω , τότε γιά κάθε $v, \mu \in \mathbb{N}$ μέ $\mu < v$ ισχύει:

$$\alpha_{1+\mu} + \alpha_{v-\mu} = \alpha_1 + \alpha_v$$

Άπόδειξη. Άμεση συνέπεια τών (i) καί (iii) τοῦ παραπάνω πορίσματος.

Παρατήρηση. Η παραπάνω ιδιότητα διατυπώνεται συχνά ως εξής: *Σέ πεπερασμένο πλήθος διαδοχικών όρων μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου, τό ἄθροισμα δύο όρων πού «ισαπέχουν» από τούς «ἄκρους» όρους εἶναι ἴσο μέ τό ἄθροισμα τῶν «ἄκρων» όρων.*

Πραγματικά, ἂν πάρουμε τούς n πρώτους όρους: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\mu, \alpha_{\mu+1}, \dots, \alpha_x, \dots, \alpha_{n-2}, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ τῆς ἀριθμητικῆς προόδου (α_n) πού ἔχει λόγο ω , τότε οἱ όροι α_1 καί α_n εἶναι οἱ «ἄκροι» όροι, ἐνῶ οἱ όροι $\alpha_{1+\mu} \equiv \alpha_{\mu+1}$ καί $\alpha_{n-\mu}$, γιά κάθε $\mu = 1, 2, \dots, n-2$ εἶναι αὐτοί πού «ισαπέχουν» από τούς «ἄκρους» όρους. Αὐτό συμβαίνει, γιατί ἂν ὀνομάσουμε $\alpha_{1+\mu}$ καί α_x τούς όρους τῆς προόδου (α_n) πού «ισαπέχουν» από τούς «ἄκρους» όρους α_1 καί α_n ἀντιστοίχως, τότε τό πλήθος τῶν όρων πού εἶναι μετά από τόν δ ρο α_x εἶναι: $n-x$, ἐνῶ τό πλήθος τῶν όρων πού προηγείται από τόν δ ρο $\alpha_{1+\mu}$ εἶναι: μ . Ἀρα θά πρέπει: $n-x = \mu$ καί συνεπῶς $x = n-\mu$. Ὡστε οἱ όροι πού ἱσαπέχουν από τούς ἄκρους όρους α_1 καί α_n εἶναι ἀντιστοίχως οἱ: $\alpha_{1+\mu}$ καί $\alpha_{n-\mu}$. Ἐτσι, π.χ. οἱ όροι α_2 καί α_{n-1} ἱσαπέχουν από τούς α_1 καί α_n ἀντιστοίχως. Ἐπίσης οἱ: α_3 καί α_{n-2} , α_4 καί α_{n-3} κ.ο.κ. Ἰσχύει λοιπόν:

$$\alpha_2 + \alpha_{n-1} = \alpha_3 + \alpha_{n-2} = \alpha_4 + \alpha_{n-3} = \dots = \alpha_1 + \alpha_n.$$

Προσέξτε! Τό ἀντίστροφο τῆς ιδιότητας II δέν ἱσχύει πάντοτε. Ἐτσι, ἐνῶ γιά τή διαδοχή 2, 7, 5, 10 ἱσχύει: $7 + 5 = 2 + 10$, ὁμως οἱ ἀριθμοί: 2, 7, 5, 10 δέν εἶναι όροι ἀριθμητικῆς προόδου.

Σημείωση. Ἀν τό πλήθος τῶν n πρώτων όρων τῆς ἀριθμητικῆς προόδου εἶναι περιττό, τότε ὑπάρχει «μεσαῖος όρος», δηλαδή όρος από τόν ὁποῖο προηγείται καί ἔπεται τό ἴδιο πλήθος όρων. Σ' αὐτή τήν περίπτωση τό ἄθροισμα τῶν ἄκρων όρων ἰσοῦται μέ τό διπλάσιο τοῦ μεσαίου όρου. Ἐτσι, ἂν θεωρήσουμε τούς πέντε όρους 3, 5, 7, 9, 11 μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου, ἔχουμε: $3 + 11 = 5 + 9 = 2 \cdot 7$.

§ 73. Ἰδιότητα III.—Ἀναγκαῖα καί ἰκανή συνθήκη γιά νά εἶναι μία ἀκολουθία α_n , $n = 1, 2, \dots$ ἀριθμητική πρόοδος εἶναι ἡ:

$$2\alpha_n = \alpha_{n-1} + \alpha_{n+1} \quad (n=2, 3, \dots)$$

Ἀπόδειξη. Ἐστω ὅτι ἡ ἀκολουθία (α_n) εἶναι μία ἀριθμητική πρόοδος μέ λόγο ω , τότε, σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό πού δώσαμε στήν § 69, γιά κάθε $n \geq 2$ θά ἔχουμε:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{n+1} - \alpha_n &= \omega \\ \alpha_n - \alpha_{n-1} &= \omega \end{aligned} \right\} \Rightarrow \alpha_{n+1} - \alpha_n = \alpha_n - \alpha_{n-1} \Rightarrow 2\alpha_n = \alpha_{n-1} + \alpha_{n+1} \quad (1)$$

Ἀντίστροφα, ἔστω ὅτι ἱσχύει ἡ (1), θά ἀποδείξουμε ὅτι ἡ ἀκολουθία (α_n) εἶναι μία ἀριθμητική πρόοδος. Πράγματι, από τήν (1) ἔχουμε:

$$\alpha_n - \alpha_{n-1} = \alpha_{n+1} - \alpha_n \quad \text{γιά κάθε } n = 2, 3, \dots$$

Τότε ὁμως, σύμφωνα μέ τό δεύτερο ὅρισμό πού δώσαμε γιά τήν ἀριθμητική πρόοδο, ἡ ἀκολουθία (α_n) εἶναι ἀριθμητική πρόοδος.

Ἄμεση συνέπεια τῆς παραπάνω προτάσεως εἶναι τό ἐπόμενο πόρισμα:

§ 74. Πόρισμα.—Ἀναγκαῖα καί ἰκανή συνθήκη, γιά νά εἶναι τρεῖς ἀριθμοί α, β, γ διαδοχικοί όροι μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου εἶναι ἡ:

$$2\beta = \alpha + \gamma \quad (1)$$

Σ' αὐτή τήν περίπτωση ὁ $\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$ λέγεται ἀριθμητικός μέσος τῶν α καί γ .

Πιο γενικά: αν έχουμε n αριθμούς $a_1, a_2, \dots, a_n$ ονομάζουμε **αριθμητικό μέσο** των n αυτών αριθμών, και τότε παριστάνουμε με M_A , τον πραγματικό αριθμό :

$$M_A = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \quad (2)$$

Εφαρμογή. Νά προσδιορίσετε τον αριθμό k , ώστε οι τρεις αριθμοί :

$$3k - 7, k + 2, 12 - 2k$$

νά είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

Λύση. Σύμφωνα με το παραπάνω πόρισμα πρέπει να ισχύει :

$$2(k + 2) = (3k - 7) + (12 - 2k) \text{ από την οποία βρίσκουμε: } k = 1.$$

Για $k = 1$ βρίσκουμε ότι τρεις όροι της προόδου είναι: $-4, 3, 10$.

§ 75. Ιδιότητα IV.—Τό άθροισμα $\Sigma_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ των n πρώτων όρων μιας αριθμητικής προόδου μάς τό δίνει ό τύπος :

$$\Sigma_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \quad (1)$$

Απόδειξη. Για να αποδείξουμε την ιδιότητα αυτή, θά στηριχτούμε στην ιδιότητα II (§ 72, παρατήρηση).

Γράφουμε πρώτα: $\Sigma_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$
καί έπειτα: $\Sigma_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1$.

Προσθέτοντας τις δύο αυτές ισότητες κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$2\Sigma_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \dots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

ή έπειδή $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \dots = a_{n-1} + a_2 = a_n + a_1$ (σύμφωνα με την ιδιότη. II) καί οι παρενθέσεις είναι n , θά έχουμε:

$$2\Sigma_n = (a_1 + a_n) \cdot n \Rightarrow \Sigma_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}.$$

Άσκηση. Νά αποδείξετε τον παραπάνω τύπο (1) με τη μέθοδο της τέλεις επαγωγής.

Πόρισμα.—Τό άθροισμα Σ_n των n πρώτων όρων μιας αριθμητικής προόδου συναρτήσει του πρώτου όρου $a_1 = a$, του λόγου ω καί του πλήθους n των όρων, μάς τό δίνει ό τύπος :

$$\Sigma_n = \frac{[2a + (n - 1)\omega] \cdot n}{2} \quad (2)$$

Παρατήρηση. Οι δύο τύποι:

$$a_n = a_1 + (n - 1)\omega \quad \text{καί} \quad \Sigma_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

περιέχουν πέντε άγνώστους, τούς: $a_1, a_n, \omega, n, \Sigma_n$.

Αν, λοιπόν, μάς δοθούν οι τρεις άπ' αυτούς τούς αριθμούς, τότε οι δύο παραπάνω τύποι αποτελούν σύστημα δύο εξισώσεων με δύο άγνώστους. Λύνοντας αυτό τό σύστημα βρίσκουμε τούς άλλους δύο αριθμούς.

Έφαρμογή. Ο πρώτος όρος μιās αριθμητικής προόδου είναι 2 και ό ενδέκατος 92. Νά βρεθεί ή πρόοδος αυτή και τό άθροισμα τών 20 πρώτων όρων της.

Λύση. Έχουμε: $\alpha_1 = 2$, $\alpha_{11} = 92$, $\omega = ;$, $\Sigma_{20} = ;$

Από τόν τύπο $\alpha_n = \alpha_1 + (n-1)\omega$ έχουμε γιά $n=11$, $92=2+10\cdot\omega$, από τό όποιο: $\omega=9$.

Άρα ή πρόοδος είναι: 2, 11, 20, 29, 38, ...

Έξάλλου από τόν τύπο: $\Sigma_n = \frac{[2\alpha + (n-1)\omega] \cdot n}{2}$ γιά $n=20$ λαμβάνουμε:

$$\Sigma_{20} = \frac{(4 + 19 \cdot 9) \cdot 20}{2} = 1750.$$

§ 76. Παρεμβολή αριθμητικῶν ενδιαμέσων. — α) **Όρισμοί.** Δίνονται δύο αριθμοί α και β . Οί μ αριθμοί $x_1, x_2, \dots, x_\mu$ λέγονται **αριθμητικοί ενδιαμέσοι τών α και β** , τότε και μόνο τότε, άν οί αριθμοί:

$$\alpha, x_1, x_2, \dots, x_\mu, \beta$$

είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

Παρεμβολή μ αριθμητικῶν ενδιαμέσων μεταξύ τών αριθμῶν α και β όνομάζουμε τήν εύρεση μ αριθμῶν: $x_1, x_2, \dots, x_\mu$ τέτοιων, ώστε οί: $\alpha, x_1, x_2, \dots, x_\mu, \beta$ νά είναι διαδοχικοί όροι αριθμ. προόδου.

β) Τό πρόβλημα τής αριθμητικής παρεμβολής. Νά παρεμβληθοῦν μ αριθμητικοί ενδιαμέσοι μεταξύ τών αριθμῶν α και β .

Επίλυση. Γιά νά βροῦμε τούς μ αριθμητικούς ενδιαμέσους είναι φανερό ότι άρκει νά ύπολογίσουμε τό λόγο ω' τής αριθμ. προόδου, στην όποία άνήκουν οί αριθμοί: $\alpha, x_1, x_2, \dots, x_\mu, \beta$.

Ο β κατέχει τήν τάξη $n = \mu + 2$ και συνεπῶς (§ 70) θά έχουμε:

$$\beta = \alpha + (\mu + 2 - 1)\omega' = \alpha + (\mu + 1)\omega' \Rightarrow \omega' = \frac{\beta - \alpha}{\mu + 1} \quad (1)$$

Ο τύπος (1) όνομάζεται **τύπος παρεμβολής αριθμητικῶν ενδιαμέσων** ή **πιό σύντομα τύπος τής αριθμητικής παρεμβολής.**

Άφου, από τόν τύπο (1), όρίσαμε τό «λόγο παρεμβολής» ω' , οί αριθμοί πού ζητάμε είναι:

$$x_1 = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{\mu + 1}, \quad x_2 = \alpha + 2 \frac{\beta - \alpha}{\mu + 1}, \quad \dots, \quad x_\mu = \alpha + \mu \frac{\beta - \alpha}{\mu + 1}.$$

Έφαρμογή. Νά παρεμβάλετε 7 αριθμητικούς ενδιαμέσους μεταξύ τών αριθμῶν 9 και 41.

Λύση. Ο τύπος (1) τής § 76 μέ $\beta = 41$, $\alpha = 9$, $\mu = 7$ δίνει:

$$\omega' = \frac{41 - 9}{7 + 1} = 4$$

και έτσι οί αριθμοί: 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, 41 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

§ 77. Συμμετρική παράσταση ενός πεπερασμένου πλήθους όρων μιās αριθμητικής προόδου.—Γιά νά περιορίσουμε τούς άγνώστους πού εμφανίζονται σε διάφορα προβλήματα αριθμητικῶν προόδων, ιδιαίτερα όταν μάς δίνεται τό άθροισμα τών

αριθμών που είναι διαδοχικοί όροι μιάς αριθμητικής προόδου, είναι σκόπιμο νά έχουμε υπόψη τις εξής δύο περιπτώσεις:

Περίπτωση 1η: Τό πλήθος τῶν ἄγνωστων ὁρῶν εἶναι περιττό.

Όταν ζητείται νά βροῦμε ἕνα περιττό πλήθος ἀριθμῶν, ἔστω $2ν + 1$, ($ν \in \mathbb{N}$) πού νά εἶναι διαδοχικοί ὁροι ἀριθμητικής προόδου, τότε συμφέρει νά τοὺς συμβολίσουμε ὡς εξής:

$$x - \omega, \dots, x - 2\omega, x - \omega, x, x + \omega, x + 2\omega, \dots, x + \nu\omega,$$

ὅπου x εἶναι ὁ «μεσαῖος» καί ω ὁ λόγος τῆς ἀριθμ. προόδου.

Περίπτωση 2η: Τό πλήθος τῶν ἄγνωστων ὁρῶν εἶναι ἄρτιο.

Όταν ζητεῖται νά βροῦμε ἕνα ἄρτιο πλήθος ἀριθμῶν, ἔστω $2ν$, ($ν \in \mathbb{N}$) πού νά εἶναι διαδοχικοί ὁροι ἀριθμητικής προόδου, τότε, ἐπειδὴ ὑπάρχουν δύο «μεσαῖοι» ὁροι τοὺς ὁποῖους παριστάνουμε μέ: $x - \lambda$ καί $x + \lambda$, ὅποτε ὁ λόγος ω τῆς προόδου εἶναι: $\omega = (x + \lambda) - (x - \lambda) = 2\lambda$, συμβολίζουμε τοὺς ἀριθμούς ὡς εξής:

$$x - (2ν - 1)\lambda, \dots, x - 3\lambda, x - \lambda, x + \lambda, x + 3\lambda, \dots, x + (2ν - 1)\lambda.$$

Προσέξτε! Σ' αὐτὴ τὴν περίπτωση ὁ x δέν εἶναι ὁρος τῆς ἀριθμητικῆς προόδου.

Ἐφαρμογή: Νά βρεῖτε τρεῖς ἀριθμούς πού νά εἶναι διαδοχικοί ὁροι ἀριθμητικῆς προόδου, ἂν τὸ ἄθροισμά τους εἶναι 33 καί τὸ γινόμενό τους εἶναι 1287.

Λύση. Ἄν παραστήσουμε μέ x τὸ μεσαῖο ἀριθμό καί μέ ω τὸ λόγος τῆς προόδου, τότε οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ θά εἶναι: $x - \omega, x, x + \omega$. Συνεπῶς θά ἔχουμε:

$$\left. \begin{aligned} (x - \omega) + x + (x + \omega) &= 33 \\ (x - \omega) \cdot x \cdot (x + \omega) &= 1287 \end{aligned} \right\} \iff \left\{ \begin{aligned} 3x &= 33 \\ x(x^2 - \omega^2) &= 1287 \end{aligned} \right. \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Ἡ (1) δίνει ἀμέσως $x = 11$. Τότε, λύνοντας τὴ (2) ὡς πρὸς ω , ἔχουμε: $\omega = \pm 2$.

Ἄρα οἱ ἀριθμοὶ πού ζητᾶμε εἶναι: 9, 11, 13 ἢ 13, 11, 9.

§ 78. Μερικά ἀξιοσημεῖωτα καί χρήσιμα ἄθροίσματα.—Σ' αὐτὴ τὴν

παράγραφο ὑπολογίζουμε μερικά ἀξιοσημεῖωτα ἄθροίσματα καί συγκεκριμένα τὸ ἄθροισμα τῶν k δυνάμεων ($k \in \mathbb{N}$) τῶν n πρώτων φυσικῶν ἀριθμῶν. Τὰ ἄθροίσματα αὐτὰ θά μᾶς εἶναι πολὺ χρήσιμα στὰ ἐπόμενα, γι' αὐτὸ συνιστοῦμε στὸν ἀναγνώστη νά δώσει ἰδιαίτερη προσοχή.

Θέτουμε:

$$\boxed{\sum_{k=1}^n k = 1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Νά ὑπολογισθοῦν τὰ $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$.

α). Ὑπολογισμός τοῦ Σ_1 . Εἶναι: $\Sigma_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + n$. Παρατηροῦμε ἀμέσως ὅτι τὸ Σ_1 εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν n πρώτων ὁρῶν τῆς ἀριθμ. προόδου μέ $\alpha_1 = 1$, $\omega = 1$ καί $\alpha_n = n$.

$$* \text{ Ἀρα: } \Sigma_1 = \frac{(\alpha_1 + \alpha_n)n}{2} = \frac{(1 + n)n}{2} = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

* Ὡστε:

$$\boxed{\Sigma_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}} \quad (1)$$

β). Ὑπολογισμός τοῦ Σ_2 . Εἶναι: $\Sigma_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$. Θεωροῦμε τὴν ταυτότητα:

$$\left. \begin{aligned} (x + 1)^3 &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1, \text{ ἀπὸ τὴν ὁποία γιὰ } x = 1, 2, 3, \dots, n \text{ παίρνουμε:} \\ 2^3 &= 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 \\ 3^3 &= 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1 \\ 4^3 &= 3^3 + 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1 \\ &\vdots \\ (n + 1)^3 &= n^3 + 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{Ἄν προσθέσουμε τίς ἰσότητες αὐτές κατὰ μέλη καὶ δια-} \\ &\text{γράψουμε τοὺς κοινούς ὁρους πού ἐμφανίζονται στὰ δύο} \\ &\text{μέλη, βρίσκουμε: } (n + 1)^3 = 3(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + 3(1 + 2 + \dots + n) + (n + 1), \text{ ὅποτε: } (n + 1)^3 - (n + 1) = 3 \cdot \Sigma_2 + 3 \cdot \Sigma_1. \end{aligned}$$

135. Νά αποδείξετε ότι: αν οι αριθμοί $\frac{1}{\alpha+\beta}$, $\frac{1}{\beta+\gamma}$, $\frac{1}{\gamma+\alpha}$ είναι διαδοχικοί όροι μιᾶς αριθμητικῆς προόδου, τότε τό ἴδιο συμβαίνει καί γιά τοὺς ἀριθμούς: $\beta^2, \alpha^2, \gamma^2$.

136. Ἀνάμεσα στοὺς ἀριθμούς 9 καί 34 νά παρεμβάλετε ἄλλους ἀριθμούς ὥστε νά προκύψουν 11 διαδοχικοί ὅροι μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου.

137. Σέ μία ἀριθμητικὴ πρόοδο (α_n) ὁ 2ος καί ὁ 8ος ὅρος τῆς διαφέρουν κατὰ 24, ἐνῶ τό ἄθροισμα τοῦ 4ου καί τοῦ 12ου ὅρου τῆς εἶναι 70. Νά βρεῖτε τὴν πρόοδο (α_n) , ἀν: (i) (α_n) - αὐξουσα, (ii) (α_n) - φθίνουσα. Ὑστερα νά ὑπολογίσετε τό ἄθροισμα τῶν ὁρῶν τῆς ποὺ βρίσκονται ἀνάμεσα σὸν ὀγδοο καί εἰκοστό πέμπτο ὅρο τῆς.

138. Ἄν ὁ ὅρος ποὺ κατέχει τὴν k τάξη σέ μία ἀριθμ. πρόοδο εἶναι α , αὐτός ποὺ κατέχει τὴ λ τάξη εἶναι β καί αὐτός ποὺ κατέχει τὴ μ τάξη εἶναι γ , νά αποδείξετε ὅτι:

$$\alpha(\lambda - \mu) + \beta(\mu - k) + \gamma(k - \lambda) = 0.$$

139. Σέ μία ἀριθμ. πρόοδο τό ἄθροισμα τῶν n πρώτων ὁρῶν τῆς εἶναι A , τῶν $2n$ πρώτων ὁρῶν τῆς εἶναι B καί τῶν $3n$ πρώτων ὁρῶν τῆς εἶναι Γ . Νά αποδείξετε ὅτι ἰσχύει:

$$3A - 3B + \Gamma = 0.$$

140. Τά ψηφία ἐνός τετραψήφιου ἀριθμοῦ εἶναι διαδοχικοί ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου. Ἄν τό τελευταῖο ψηφίο εἶναι τετραπλάσιο τοῦ πρώτου, νά βρεθεῖ ὁ ἀριθμός.

141. Νά βρεθοῦν τέσσερις ἀριθμοὶ ποὺ νά εἶναι διαδοχικοί ὅροι μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου καί συγχρόνως τό ἄθροισμά τους νά εἶναι 26 καί τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τους νά εἶναι 214.

142. Νά βρεθεῖ ἡ ἀριθμ. πρόδος τῆς ὁποίας ὁ τέταρτος καί ὁ ὀγδοὸς ὅρος ἔχουν ἄθροισμα 18, ἐνῶ οἱ κύβοι τους ἔχουν ἄθροισμα 3402.

143. Νά βρεῖτε πέντε ἀριθμούς ποὺ νά εἶναι διαδοχικοί ὅροι μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου καί συγχρόνως τό ἄθροισμά τους νά εἶναι 30 καί τό ἄθροισμα τῶν ἀντιστροφῶν τους νά εἶναι $\frac{137}{120}$.

144. Πόσους ἀριθμ. ἐνδιαμέσους πρέπει νά παρεμβάλουμε ἀνάμεσα στοὺς ἀριθμούς 1 καί 19, ὥστε ὁ λόγος τοῦ δευτέρου ἐνδιάμεσου πρὸς τὸν τελευταῖο ἐνδιάμεσο νά εἶναι ἴσος μέ $\frac{1}{6}$.

145. Νά ὑπολογίσετε τό παρακάτω ἄθροισμα:

$$\Sigma = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)(n+2).$$

Ὑπόδειξη. Νά παρατηρήσετε ὅτι: $n(n+1)(n+2) = n^3 + 3n^2 + 2n$ κ.τ.λ.

* Ὁμάδα Β'. 146. Γιά ποιές τιμές τῶν α καί β οἱ ἀριθμοί: $\alpha\beta - \frac{1}{\alpha\beta}$, $\beta - \frac{1}{\beta}$, $\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta}$ ἀποτελοῦν διαδοχικούς ὅρους ἀριθμητικῆς προόδου; Ποιὸς ὁ λόγος τῆς προόδου σέ κάθε περίπτωση;

147. Τό ἄθροισμα τῶν n πρώτων ὁρῶν μιᾶς ἀκολουθίας (α_n) εἶναι: $3n^2 + n$. Νά βρεῖτε τό νιοστό ὅρο τῆς καί νά αποδείξετε ὅτι ἡ ἀκολουθία (α_n) εἶναι ἀριθμητικὴ πρόοδος. Ὑστερα νά βρεῖτε τὴν τάξη τοῦ ὅρου, ποὺ εἶναι ἴσος μέ 100.

148. Νά αποδείξετε ὅτι σέ κάθε ἀριθμ. πρόοδο ἰσχύει: $\Sigma_n = \Sigma_v \Rightarrow \Sigma_{n-v} = 0$, ($\mu \neq v$).

149. Ἐστω μία ἀριθμ. πρόοδος μέ πρῶτο ὅρο τό α καί λόγο τό ω . Ἄν τό ἄθροισμα Σ_p τῶν p πρώτων ὁρῶν τῆς ἰσοῦται μέ q καί τό ἄθροισμα Σ_q τῶν q πρώτων ὁρῶν τῆς ἰσοῦται μέ p , νά αποδείξετε ὅτι:

$$(i) \quad \Sigma_{p+q} = -(p+q) \quad , \quad (ii) \quad \Sigma_{p-q} = (p-q) \left(1 + \frac{2q}{p}\right)$$

150. Νά αποδείξετε ότι τρεις αριθμοί α, β, γ γιά νά είναι ὅροι μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου (χωρίς ἀπαραίτητα νά είναι καί διαδοχικοί), πρέπει καί ἀρκεῖ ἡ ἐξίσωση:

$$\frac{\beta - \alpha}{x + 1} = \frac{\gamma - \beta}{y + 1}$$

νά ἔχει ἀκέραιη καί θετική λύση ὡς πρός x, y , ὅπου x εἶναι τὸ πλῆθος τῶν ὁρῶν τῆς ἀριθμητικῆς προόδου, οἱ ὅποιοι βρίσκονται ἀνάμεσα στά α καί β , καί y εἶναι τὸ πλῆθος τῶν ὁρῶν πού βρίσκονται ἀνάμεσα στά β καί γ .

151. Νά ἐξετάσετε ἂν οἱ ἀριθμοί: $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$ ἀποτελοῦν ὁρους ὁποιασδήποτε τάξεως μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου.

152. Νά ὑπολογίσετε τὸ ἄθροισμα τῶν μ ἀριθμητικῶν ἐνδιαμέσων πού παρεμβάλλονται ἀνάμεσα στοὺς ἀριθμούς 1 καί μ^2 .

153. Ἄν οἱ ὅροι πού κατέχουν τίς τάξεις p, q, r σέ μία ἀριθμητικὴ πρόοδος εἶναι ἀντιστοιχῶς ἴσοι μέ r, p, q , νά αποδείξετε ὅτι: $p^3 + q^3 + r^3 = 3pqr$.

154. Νά ἀποδείξετε ὅτι: ἂν τὰ μήκη τῶν πλευρῶν ἐνὸς ὀρθογώνιου τριγώνου εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι μιᾶς ἀριθμ. προόδου, τότε ὁ λόγος τῆς προόδου ἰσοῦται μέ τὴν ἀκτίνα τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

155. Δίνεται ἡ ἐξίσωση: $x^2 - \alpha x + \beta = 0$ μέ ρίζες p_1, p_2 καί ἡ: $x^2 - (5\alpha - 4)x + \beta = 0$ μέ ρίζες p_3, p_4 . Νά προσδιορίσετε τὰ α καί β ἔτσι, ὥστε οἱ ρίζες p_1, p_2, p_3, p_4 , μ' αὐτὴ τὴ σειρά, νά εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι μιᾶς ἀριθμ. προόδου.

156. Τὴν ἀκολουθία τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν τὴ χωρίζουμε σέ ὁμάδες ὡς ἑξῆς:

(1), (2, 3, 4, 5), (6, 7, 8, ..., 12), (13, 14, ..., 22), (23, 24, ...), ...

Νά βρεῖτε τὸν πρῶτο ὅρο τῆς νιοστῆς ὁμάδας καί νά ἀποδείξετε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν πού περιλαμβάνονται στὴ νιοστὴ ὁμάδα εἶναι:

$$(3n - 2) \cdot \left[(n - 1)^2 + \frac{n^2 + 1}{2} \right].$$

157. Χωρίζουμε 4200 ἀντικείμενα σέ $(n + 1)$ ὁμάδες ἔτσι, ὥστε ἡ πρώτη ὁμάδα νά περιλαμβάνει 5 ἀντικείμενα, ἡ δευτέρα 8, ἡ τρίτη 11, κ.ο.κ. Νά βρεῖτε τὸ μέγιστο πλῆθος τῶν ὁμάδων πού μπορούμε νά σχηματίσουμε καί τὸ πλῆθος τῶν ἀντικειμένων πού ἴσως θά θέλαμε γιά νά σχηματίσουμε μία ἀκόμη ὁμάδα.

158. Ἄν S εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν n πρώτων ὁρῶν μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου μέ λόγο ω καί Σ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν n πρώτων ὁρῶν τῆς, νά ἀποδείξετε ὅτι ἰσχύει:

$$\Sigma = \frac{S^2}{n} + \frac{1}{12} n(n^2 - 1)\omega^2.$$

II. ΑΡΜΟΝΙΚΕΣ ΠΡΟΟΔΟΙ

§ 79. Ὅρισμοί.— Ἄς θεωρήσουμε τὴν ἀκολουθία:

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \dots, \frac{1}{2n+1}, \dots$$

Γι' αὐτὴ τὴν ἀκολουθία παρατηροῦμε τὸ ἑξῆς: ἂν πάρουμε, μέ τὴν ἴδια τάξη, τοὺς ἀντίστροφους τῶν ὁρῶν τῆς, θά ἔχουμε τὴν ἀκολουθία:

$$3, 5, 7, 9, \dots, (2n+1), \dots$$

ἡ ὁποία εἶναι μία ἀριθμητικὴ πρόοδος (μέ λόγο $\omega = 2$).

Ἐπίσης, ἂν θεωρήσουμε τὴν ἀκολουθία: $6, 3, 2, \dots$ παρατηροῦμε πάλι

πώς ή ακολουθία: $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \dots$ είναι μία αριθμητική πρόοδος (μέω = $\frac{1}{6}$).

Βλέπουμε λοιπόν ότι υπάρχουν ακολουθίες αριθμών με την ιδιότητα: "Αν πάρουμε τούς αντίστροφους τών όρων τους, με την ίδια βέβαια τάξη, προκύπτει μία νέα ακολουθία, ή οποία είναι αριθμητική πρόοδος. Τίς ακολουθίες με αυτή την ιδιότητα τίς ονομάζουμε **άρμονικες προόδους**. Πιό αυστηρά μπορούμε νά ποῦμε τώρα ότι : *Μία ακολουθία αριθμών :*

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \quad (1)$$

θά λέμε ότι είναι μία **άρμονική πρόοδος**, τότε καί μόνο τότε, αν ισχύει:
 $a_n \neq 0 \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}$ καί ή ακολουθία:

$$\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}, \dots \quad (2)$$

είναι αριθμητική πρόοδος, δηλαδή αν υπάρχει αριθμός ω τέτοιος, ώστε νά ισχύει:

$$\boxed{\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \omega, \text{ για κάθε } n = 1, 2, \dots} \quad (3)$$

Οί όροι τής ακολουθίας (1) λέγονται *διαδοχικοί όροι* τής άρμονικής προόδου καί ό a_n λέγεται *νιστός όρος* ή *όρος ν-τάξεως* τής προόδου. 'Η ακολουθία (2) λέγεται ή *αντίστοιχη αριθμητική πρόοδος* τής άρμονικής προόδου (1).

Από τόν παραπάνω όρισμό τής άρμονικής προόδου συμπεραίνουμε ότι ζητήματα πού άφορούν μία άρμονική πρόοδο ανάγονται σέ επίλυση ζητημάτων πού άφορούν τήν αντίστοιχη αριθμητική πρόοδο. Για τό λόγο αυτό θά μελετήσουμε στά έπόμενα τίς κυριότερες ιδιότητες τών άρμονικών προόδων ως εφαρμογές τών ιδιοτήτων τών αριθμητικών προόδων.

§ 80. Εύρεση τοῦ νιστοῦ όρου μιᾶς άρμονικής προόδου.— "Εστω ή άρμονική πρόοδος: $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$. "Αν ω είναι ό λόγος τής αντίστοιχης αριθμητικής προόδου: $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}, \dots$, τότε, σύμφωνα μέ τόν τύπο (1) τής § 70, θά έχουμε:

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} + (n-1)\omega \Rightarrow \boxed{a_n = \frac{a_1}{1 + (n-1)\omega a_1}} \quad (1)$$

Σημείωση. "Αν δύο πρώτοι όροι μιᾶς άρμονικής προόδου είναι γνωστοί, τότε ό λόγος $\omega = \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1}$ καί συνεπώς ό νιστός όρος τής άρμονικής προόδου είναι ό:

$$\boxed{a_n = \frac{a_1 a_2}{a_1(n-1) - a_2(n-2)}} \quad (1')$$

Σχόλιο. Δέν υπάρχει τύπος πού νά δίνει τό άθροισμα S_n τών n πρώτων όρων άρμονικής προόδου.

§ 81. Συνθήκη για να είναι διαδοχικοί όροι μιᾶς ἀρμονικῆς προόδου οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ .— Ἀφοῦ οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ εἶναι, μέ τῇ σειρά πού δίνονται, διαδοχικοὶ ὅροι ἀρμονικῆς προόδου, οἱ ἀντίστροφοί τους: $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου καί συνεπῶς (§ 74):

$$2 \cdot \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma} \Rightarrow \beta = \frac{2}{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma}} \Rightarrow \boxed{\beta = \frac{2\alpha\gamma}{\alpha + \gamma}} \quad (1)$$

Ἀντιστρόφως, ἂν ἰσχύει ἡ (1), τότε $\beta = \frac{2\alpha\gamma}{\alpha + \gamma}$ καί συνεπῶς $\frac{2}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma}$, δηλαδή οἱ $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι ἀριθμ. προόδου, ὁπότε οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι ἀρμονικῆς προόδου.

Ὡστε: Ἀναγκαῖα καί ἱκανή συνθήκη γιὰ νά εἶναι τρεῖς ἀριθμοὶ α, β, γ ($\neq 0$) διαδοχικοὶ ὅροι ἀρμονικῆς προόδου εἶναι ἡ ἰσότητα (1).

Σ' αὐτή τὴν περίπτωση ὁ ἀριθμὸς β λέγεται **ἀρμονικὸς μέσος** τῶν α καί γ .

Γενικότερα: ἂν ἔχουμε n ἀριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, διάφορους τοῦ μηδενός, ὁνομάζουμε **ἀρμονικὸ μέσο** αὐτῶν, καί τὸν συμβολίζουμε μέ M_H , τὸν ἀριθμὸ:

$$\boxed{M_H = \frac{n}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \dots + \frac{1}{\alpha_n}}} \quad (2)$$

Παρατηρήσεις. α) Ἡ (1) γράφεται: $\frac{2}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma} \Leftrightarrow \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\beta}$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha - \beta}{\alpha\beta} = \frac{\beta - \gamma}{\beta\gamma} \Leftrightarrow \frac{\alpha\beta}{\beta\gamma} = \frac{\alpha - \beta}{\beta - \gamma} \Leftrightarrow \boxed{\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\alpha - \beta}{\beta - \gamma}} \quad (3)$$

Ἡ ἰσότητα (3) λέγεται **ἀρμονικὴ ἀναλογία**.

Ἀπὸ τὴν (3) συμπεραίνουμε ὅτι: Γιὰ νά εἶναι οἱ διάφοροι μεταξὺ τους ἀριθμοὶ α, β, γ μέ τῇ σειρά πού δίνονται, διαδοχικοὶ ὅροι ἀρμονικῆς προόδου πρέπει καί ἀρκεῖ οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ νά εἶναι διάφοροι τοῦ μηδενός καί νά βρῶσκονται σέ ἀρμονικὴ ἀναλογία.

β) Ἐχοντας ὑπόψη τὴν ιδιότητα III (§ 73) τῶν ἀριθμητικῶν προόδων, ἡ προηγουμένη συνθήκη (1) διατυπώνεται πιὸ γενικά ὡς ἑξῆς: Ἀναγκαῖα καί ἱκανή συνθήκη γιὰ νά εἶναι μία ἀκολουθία $\alpha_n, n = 1, 2, \dots$ ($\alpha_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$) ἀρμονικὴ πρόοδος εἶναι ἡ:

$$\boxed{\frac{2}{\alpha_n} = \frac{1}{\alpha_{n-1}} + \frac{1}{\alpha_{n+1}}} \quad (n = 2, 3, \dots) \quad (4)$$

Νά συγκρίνετε τὴν παραπάνω σχέση (4) μέ τῇ γνωστῇ ἀπὸ τὴ Γεωμετρία σχέση τοῦ μέσου ἀρμονικοῦ:

$$\frac{2}{AB} = \frac{1}{AG} + \frac{1}{AD}.$$

* § 82. Παρεμβολή αρμονικῶν ἐνδιαμέσων.—α) Ὑποθέσεις. Δίνονται δύο ἀριθμοὶ α καὶ β ($\alpha, \beta \neq 0$). Οἱ μ ἀριθμοὶ $x_1, x_2, \dots, x_\mu$ λέγονται **ἀρμονικοὶ ἐνδιάμεσοι** τῶν α καὶ β , τότε καὶ μόνο τότε, ἂν οἱ ἀριθμοὶ: $\alpha, x_1, x_2, \dots, x_\mu, \beta$ εἶναι διαδοχικοὶ ὄροι ἀρμονικῆς προόδου.

Παρεμβολὴ μ ἀρμονικῶν ἐνδιαμέσων μεταξύ τῶν ἀριθμῶν α καὶ β ὀνομάζουμε τὴν εὕρεση μ ἀριθμῶν: $x_1, x_2, \dots, x_\mu$ τέτοιων, ὥστε: οἱ $\alpha, x_1, x_2, \dots, x_\mu, \beta$ νὰ εἶναι διαδοχικοὶ ὄροι ἀρμονικῆς προόδου.

β) Τὸ πρόβλημα τῆς ἀρμονικῆς παρεμβολῆς. Νὰ παρεμβληθοῦν μ ἀρμονικοὶ ἐνδιάμεσοι μεταξύ τῶν ἀριθμῶν α καὶ β .

Ἑπίλυση. Ἀρκεῖ νὰ παρεμβάλουμε μ ἀριθμητικούς ἐνδιάμεσους μεταξύ τῶν ἀριθμῶν $\frac{1}{\alpha}$ καὶ $\frac{1}{\beta}$, ὅποτε οἱ ἀντίστροφοί τους θὰ εἶναι οἱ μ ἀρμονικοὶ ἐνδιάμεσοι τῶν α καὶ β . Ἀπὸ τὸν τύπο τῆς ἀριθμητικῆς παρεμβολῆς (§ 76) ἔχουμε :

$$\omega' = \frac{\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}}{\mu + 1} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha\beta(\mu + 1)}, \quad \text{δηλαδή:} \quad \boxed{\omega' = \frac{\alpha - \beta}{(\mu + 1)\alpha\beta}} \quad (1)$$

Ὁ τύπος (1) λέγεται **τύπος τῆς ἀρμονικῆς παρεμβολῆς**.

Ἐφαρμογή. Μεταξύ τῶν ἀριθμῶν $\frac{5}{2}$ καὶ $\frac{5}{11}$ νὰ παρεμβάλετε 5 ἀρμονικοὺς ἐνδιάμεσους.

Λύση. Ἀρκεῖ νὰ παρεμβάλουμε 5 ἀριθμητικούς ἐνδιάμεσους μεταξύ τῶν ἀριθμῶν $\frac{2}{5}$ καὶ $\frac{11}{5}$. Ὁ τύπος (1) γιὰ $\beta = \frac{5}{11}$, $\alpha = \frac{5}{2}$, $\mu = 5$ δίνει: $\omega' = \frac{3}{10}$. Τότε οἱ 5 ἀριθμητικοὶ ἐνδιάμεσοι τῶν ἀριθμῶν $\frac{2}{5}$ καὶ $\frac{11}{5}$ εἶναι οἱ: $\frac{7}{10}$, 1 , $\frac{13}{10}$, $\frac{8}{5}$, $\frac{19}{10}$, ὅποτε οἱ ἀντίστροφοί τους θὰ εἶναι οἱ 5 ἀρμονικοὶ ἐνδιάμεσοι τῶν ἀριθμῶν $\frac{5}{2}$ καὶ $\frac{5}{11}$ ποὺ ζητᾶμε. Ἐπὶ τοῦ ἐξοῦς:

$$x_1 = \frac{10}{7}, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = \frac{10}{13}, \quad x_4 = \frac{5}{8}, \quad x_5 = \frac{10}{19}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α'. 159. Νὰ βρεῖτε τὸν 31ο ὄρο τῆς ἀρμονικῆς προόδου: $\frac{1}{25}, \frac{1}{33}, \frac{1}{41}, \dots$ καὶ τὸν 80ο ὄρο τῆς προόδου: $1, \frac{3}{8}, \frac{3}{13}, \dots$

160. Νὰ βρεῖτε τὸ 12ο ὄρο μιᾶς ἀρμονικῆς προόδου, τῆς ὁποίας ὁ τρίτος ὄρος εἶναι ὁ ἀριθμὸς $\frac{1}{4}$ καὶ ὁ 80ος ὄρος τῆς εἶναι ὁ ἀριθμὸς $\frac{3}{8}$.

161. Νὰ προσδιορίσετε τὸν ἀριθμὸ k , ὥστε οἱ ἀριθμοὶ: $1 + k, 3 + k, 9 + k$ νὰ εἶναι διαδοχικοὶ ὄροι ἀρμονικῆς προόδου.

162. Δίνονται τρεῖς ἀριθμοὶ α, β, γ . Νὰ βρεθῇ ὁ ἀριθμὸς x , ὥστε οἱ ἀριθμοὶ $\alpha + x,$

$\beta + x, \gamma + x$ να είναι διαδοχικοί όροι άρμονικής προόδου. Τί συμβαίνει αν οι α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι άριθμητικής προόδου;

163. Νά προσδιορίσετε τούς άριθμούς α καί β , αν είναι γνωστό ότι οι άριθμοί: $\alpha, 12, 3, 1, \frac{5}{7}, \beta$ είναι διαδοχικοί όροι άρμονικής προόδου.

164. *Αν οι α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι μις άρμονικής προόδου, νά άποδείξετε ότι:

$$\text{i)} \quad \frac{\beta + \alpha}{\beta - \alpha} + \frac{\beta + \gamma}{\beta - \gamma} = 2, \quad \text{(ii)} \quad \frac{2}{\beta} = \frac{1}{\beta - \alpha} + \frac{1}{\beta - \gamma}.$$

165. Τό άθροισμα τριών διαδοχικών όρων μις άρμονικής προόδου είναι $\frac{33}{40}$, ενώ τό άθροισμα των αντιστρόφων τους είναι 15. Νά βρείτε αυτούς τούς όρους.

166. Νά άποδείξετε ότι: αν οι άριθμοί: $\frac{\alpha + \beta}{1 - \alpha\beta}, \beta, \frac{\beta + \gamma}{1 - \beta\gamma}$ είναι διαδοχικοί όροι άριθμ. προόδου, τότε οι άριθμοί: $\alpha, \frac{1}{\beta}, \gamma$ είναι διαδοχικοί όροι άρμονικής προόδου.

167. Μεταξύ των άριθμών 0,25 καί 0,025 νά παρεμβληθούν 18 άριθμοί έτσι, ώστε μαζί μέ τούς άριθμούς 0,25 καί 0,025 νά άποτελούν διαδοχικούς όρους άρμονικής προόδου.

168. *Αν οι άριθμοί α, β, γ είναι όροι μις άρμονικής προόδου τάξεων λ, μ, ν αντίστοιχως, νά άποδείξετε ότι:

$$(\mu - \nu)\beta\gamma + (\nu - \lambda)\gamma\alpha + (\lambda - \mu)\alpha\beta = 0.$$

★ *Ομάδα Β'. 169. *Αν οι άριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι μις άρμονικής προόδου, τότε τό ίδιο συμβαίνει καί γιά τούς άριθμούς:

$$\frac{\alpha}{\beta + \gamma - \alpha}, \quad \frac{\beta}{\gamma + \alpha - \beta}, \quad \frac{\gamma}{\alpha + \beta - \gamma}.$$

170. *Αν οι όμοσημοί άριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι μις άρμονικής προόδου νά άποδείξετε ότι:

$$\text{i)} \quad \frac{\alpha + \beta}{2\alpha - \beta} + \frac{\gamma + \beta}{2\gamma - \beta} > 4, \quad \text{(ii)} \quad \beta^2(\alpha - \gamma)^2 = 2[\gamma^2(\beta - \alpha)^2 + \alpha^2(\gamma - \beta)^2].$$

171. *Αν οι διάφοροι μεταξύ τους ανά δύο άριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ είναι διαδοχικοί όροι μις άρμονικής προόδου, νά άποδείξετε ότι γιά κάθε $n \in \mathbb{N}$ μέ $n \geq 2$ ισχύει:

$$(n - 1)\alpha_1\alpha_n = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \dots + \alpha_{n-1}\alpha_n.$$

172. *Ανάμεσα στους άριθμούς 2 καί 3 νά παρεμβάλετε 19 άριθμητικούς ενδιάμεσους καί 19 άρμονικούς ενδιάμεσους. *Αν ξ είναι ένας άριθμ. ενδιάμεσος καί η ό αντίστοιχος άρμονικός, νά άποδείξετε ότι: $\xi + \frac{6}{\eta} = 5$.

173. Νά βρείτε δύο άριθμούς x καί y , αν είναι γνωστό ότι διαφέρουν κατά 3 καί ότι: $M_A - M_H = \frac{3}{14}$.

174. *Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ είναι διαδοχικοί όροι μις άρμονικής προόδου, νά άποδείξετε ότι:

$$\frac{5\alpha - 3\beta}{\alpha\beta} = \frac{\gamma + \delta}{\gamma\delta}.$$

175. Νά άποδείξετε ότι: αν τά μήκη α, β, γ των πλευρών ενός τριγώνου είναι διαδοχικοί όροι μις άριθμητικής προόδου, τότε οι άκτίνες ρ_1, ρ_2, ρ_3 των αντίστοιχων παρεγγεγραμμένων στό τρίγωνο κύκλων είναι διαδοχικοί όροι άρμονικής προόδου.

176. Νά βρείτε τή συνθήκη γιά νά είναι τρεις άριθμοί α, β, γ όροι άρμονικής προόδου, όχι άπαραίτητα διαδοχικοί. Κατόπιν μέ βάση τή συνθήκη πού βρήκατε νά εξετάσετε αν οι άριθμοί: $\frac{1}{2}, \frac{1}{15}, \frac{1}{32}$ είναι όροι άρμονικής προόδου καί ποις;

III. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΠΡΟΟΔΟΙ

§ 83. Όρισμοί.— “Ας θεωρήσουμε την ακολουθία:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$$

Παρατηρούμε ότι κάθε όρος της, από τό δεύτερο καί μετά, προκύπτει ἄν πολλαπλασιάσουμε τόν προηγούμενό του μέ ἓνα σταθερό ἀριθμό, πού στήν προκειμένη περίπτωση εἶναι ὁ ἀριθμός $\frac{1}{2}$.

Ἐπίσης, ἄν θεωρήσουμε τήν ακολουθία: 2, -4, 8, -16, 32, -64, ..., βλέπουμε πάλι πώς κάθε ὅρος της —ἐκτός φυσικά ἀπό τόν πρῶτο— προκύπτει ἄν πολλαπλασιάσουμε τόν προηγούμενό του μέ τό -2.

Παρατηροῦμε λοιπόν πώς ὑπάρχουν ἀκολουθίες μέ τήν ιδιότητα: κάθε ὅρος τους, ἀπό τό δεύτερο καί μετά, προκύπτει ἄν πολλαπλασιάσουμε τόν προηγούμενό του ἐπὶ ἓνα σταθερό ἀριθμό πού τόν λέμε **λόγο** καί τόν συμβολίζουμε συνήθως καί ἐδῶ μέ τό γράμμα ω . Τίς ἀκολουθίες μέ αὐτή τήν ιδιότητα τίς ὀνομάζουμε **γεωμετρικές πρόοδους**. Πιο γενικά μπορούμε νά ποῦμε τώρα ὅτι: *Μία ἀκολουθία ἀριθμῶν:*

$$a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots \quad (1)$$

θά λέμε ὅτι εἶναι **μία γεωμετρική πρόοδος**, τότε καί μόνο τότε, ἄν ὑπάρχει ἀριθμός ω τέτοιος, ὥστε νά ἰσχύει:

$$a_{n+1} = a_n \cdot \omega, \text{ γιά κάθε } n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας (1) λέγονται *διαδοχικοί ὅροι* τῆς γεωμετρικῆς προόδου καί ὁ a_n λέγεται *νιοστός ὅρος* ἢ *ὅρος ν-τάξεως* τῆς προόδου.

Μία γεωμετρική πρόοδος μέ ὅρους διαφορετικούς ἀπό τό μηδέν λέγεται ἐπίσης καί **πρόοδος κατὰ πηλίκο**, γιατί ἀπό τή (2) ἔχουμε:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \dots = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \dots = \omega \text{ (σταθ.)} \quad (3)$$

Ἡ (3) μᾶς ὁδηγεῖ νά δώσουμε γιά τή γεωμετρική πρόοδο καί τόν ἐξῆς ὀρισμό:

Γεωμετρική πρόοδος (ἢ **πρόοδος κατὰ πηλίκο**) εἶναι *μία ἀκολουθία ἀριθμῶν, διαφόρων τοῦ μηδενός, τῆς ὁποίας τό πηλίκο $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ δύο ὁποιοιδήποτε διαδοχικῶν ὀρων τῆς εἶναι σταθερό*. Τό σταθερό αὐτό πηλίκο εἶναι ὁ **λόγος** τῆς γεωμετρικῆς προόδου.

Δίνουμε τώρα καί τόν ἐξῆς ὀρισμό:

Μία γεωμετρική πρόοδος καί γενικότερα μία ἀκολουθία $a_n, n = 1, 2, \dots$ λέγεται **ἀπολύτως αὔξουσα**, ἄν ἡ ἀκολουθία $|a_n|, n = 1, 2, \dots$ εἶναι αὔξουσα, δηλ. ἄν ἰσχύει:

$$|a_{n+1}| > |a_n|, \forall n \in \mathbb{N}$$

καί **ἀπολύτως φθίνουσα**, ἄν ἰσχύει: $|a_{n+1}| < |a_n| \forall n \in \mathbb{N}$.

‘Από τόν παραπάνω όρισμό καί τήν (3) έχουμε ότι:

α). ‘Αν $|\omega| > 1$, τότε ή γεωμ. πρόοδος (1) είναι άπολύτως αύξουσα.

β). ‘Αν $0 < |\omega| < 1$, τότε ή γεωμ. πρόοδος (1) είναι άπολύτως φθίνουσα.

‘Ετσι, π.χ. ή πρόοδος: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ είναι άπολύτως φθίνουσα, έ-

πειδή $|\omega| = \frac{1}{2} < 1$, ένώ ή γεωμ. πρόοδος: $2, -4, 8, -16, \dots$ είναι άπολύτως αύξουσα, έπειδή: $|\omega| = |-2| = 2 > 1$.

Παρατήρηση. ‘Αν $|\omega| = 1$, δηλαδή $\omega = \pm 1$ έχουμε:

(i). Γιά $\omega = 1$ ή γεωμ. πρόοδος είναι μία σταθερή άκολουθία, έπειδή τότε θά έχουμε: $\alpha_{v+1} = \alpha_v$ γιά κάθε $v = 1, 2, \dots$ ‘Ως σταθερή άκολουθία ή γεωμ. πρόοδος (1) είναι τότε συγχρόνως καί αύξουσα καί φθίνουσα.

(ii). Γιά $\omega = -1$ ή γεωμ. πρόοδος είναι άπολύτως σταθερή, έπειδή τότε θά έχουμε: $|\alpha_{v+1}| = |\alpha_v \cdot \omega| = |\alpha_v| \cdot |\omega| = |\alpha_v| \cdot |-1| = |\alpha_v| = |\alpha_1|$, γιά κάθε $v \in \mathbb{N}$. Σ’ αὐτή τήν περίπτωση, δηλ. αν $\omega = -1$, ή γεωμ. πρόοδος είναι συγχρόνως καί άπολύτως αύξουσα καί άπολύτως φθίνουσα.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΠΡΟΟΔΟΥ

§ 84. ‘Ιδιότητα I.— ‘Ο νιοστός όρος α_v σέ μία γεωμετρική πρόοδο πού έχει πρώτο όρο τό α_1 καί λόγο τό $\omega \neq 0$, βρίσκεται αν πολλαπλασιάσουμε τόν πρώτο της όρο (α_1) μέ δύναμη τοῦ λόγου ω , ή όποία έχει εκθέτη τόν αριθμό πού φανερώνει τό πλήθος τῶν όρων πού προηγούνται τοῦ α_v .

Δηλαδή :

$$\forall v \in \mathbb{N}, \quad \alpha_v = \alpha_1 \cdot \omega^{v-1} \quad (1)$$

‘Απόδειξη. ‘Από τήν αναδρομική σχέση (2) τῆς § 83 γιά $v = 1, 2, \dots, v-1$, λαμβάνουμε: $\alpha_2 = \alpha_1 \omega, \alpha_3 = \alpha_2 \omega, \alpha_4 = \alpha_3 \omega, \dots, \alpha_v = \alpha_{v-1} \omega$.

‘Αν τώρα τίς σχέσεις αὐτές τίς πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη καί άπλοποιήσουμε μέ τούς κοινούς παράγοντες πού έμφανίζονται στά δύο μέλη προκύπτει ή (1).

Σημείωση. Μία πιο άυστηρή άπόδειξη γίνεται μέ τή μέθοδο τῆς τέλειαις έπαγωγῆς ως έξης:

Γιά $v = 1$ ή (1) προφανώς ισχύει.

‘Εστω ότι ισχύει ή (1) γιά $v = k$ ($k \in \mathbb{N}$), δηλ. έστω ότι ισχύει: $\alpha_k = \alpha_1 \omega^{k-1}$.

‘Από τήν τελευταία προκύπτει: $\alpha_k \cdot \omega = \alpha_1 \cdot \omega^{k-1} \cdot \omega = \alpha_1 \omega^k$. ‘Αλλά $\alpha_k \cdot \omega = \alpha_{k+1}$, όπότε έχουμε:

$$\alpha_{k+1} = \alpha_1 \cdot \omega^k = \alpha_1 \cdot \omega^{(k+1)-1}$$

δηλ. ή (1) ισχύει καί γιά $v = k + 1$. Συνεπώς, σύμφωνα μέ τό θεώρημα τῆς τέλειαις έπαγωγῆς, ή (1) ισχύει γιά κάθε $v \in \mathbb{N}$.

‘Εφαρμογές. 1η: Νά βρείτε τόν 7ο όρο τῆς γεωμ. προόδου: $\frac{1}{2}, 1, 2, 4, \dots$

Λύση. ‘Εχουμε: $\alpha_1 = \frac{1}{2}, \omega = 2, v = 7, \alpha_7 = ;$

‘Εφαρμόζοντας τόν τύπο (1) γι’ αὐτές τίς τιμές τῶν α_1, ω καί v βρίσκουμε:

$$\alpha_7 = \alpha_1 \cdot \omega^6 = \frac{1}{2} \cdot 2^6 = 2^5 = 32.$$

2η: Σέ μία γεωμετρική πρόοδο είναι $\alpha_1 = 6$, $\omega = 2$ και $\alpha_n = 3072$. Νά βρείτε τό n .

Λύση. Έχουμε: $\alpha_1 = 6$, $\omega = 2$, $\alpha_n = 3072$, $n =$;

Έφαρμόζοντας τόν τύπο (1) γι' αὐτές τίς τιμές τῶν α_1 , ω καί α_n βρίσκουμε:

$$3072 = 6 \cdot 2^{n-1}, \text{ δηλαδή: } 2^{n-1} = 512.$$

Ἀλλά $512 = 2^9$, ὁπότε ἡ τελευταία σχέση γράφεται:

$$2^{n-1} = 2^9. \text{ Ἄρα } n-1 = 9 \text{ καί συνεπῶς } n = 10.$$

Παρατηρήσεις. 1) Ἀπό τήν παραπάνω ιδιότητα συμπεραίνουμε ὅτι: μία γεωμ. πρόοδος εἶναι τελείως ὁρισμένη, ὅταν δίνονται ὁ πρῶτος τῆς ὁρος $\alpha_1 = \alpha$ καί ὁ λόγος τῆς ω . Τότε οἱ ὅροι τῆς προόδου θά εἶναι:

$$\begin{array}{cccccc} \text{1ος ὁρος,} & \text{2ος ὁρος,} & \text{3ος ὁρος,} & \text{4ος ὁρος,} & \text{5ος ὁρος,} & \dots \\ \alpha & \alpha\omega & \alpha\omega^2 & \alpha\omega^3 & \alpha\omega^4 & \dots \end{array}$$

2) Ἀπό τόν τύπο: $\alpha_n = \alpha_1 \cdot \omega^{n-1}$ συνάγεται ὅτι: ἂν ξέρομε τοὺς τρεῖς ἀπὸ τοὺς ἀριθμούς α_n , α_1 , ω καί n μποροῦμε νά προσδιορίσουμε καί τόν τέταρτο.

3) Ἄν γιὰ μία ἀκολουθία α_n , $n = 1, 2, \dots$ ἰσχύει: $\alpha_n = \alpha_1 \cdot \omega^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, τότε ἡ ἀκολουθία (α_n) εἶναι μία γεωμετρική πρόοδος. Πράγματι, τότε θά ἔχουμε:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n = \alpha_1 \omega^{n-1} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, \alpha_{n+1} = \alpha_1 \omega^n \\ \forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n \cdot \omega = \alpha_1 \omega^n \end{array} \right\} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \alpha_{n+1} = \alpha_n \cdot \omega.$$

4) Ἐχοντας ὑπόψη τήν παρατήρηση 3 ἡ ιδιότητα I διατυπώνεται πιό γενικά ὡς ἑξῆς: Ἀναγκαῖα καί ἱκανή συνθήκη γιὰ νά εἶναι γεωμετρική πρόοδος μέ λόγο ω μία ἀκολουθία α_n , $n=1, 2, \dots$ εἶναι ἡ: $\alpha_n = \alpha_1 \cdot \omega^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

* § 85. **Πόρισμα.**—Ἄν μία ἀκολουθία α_n , $n=1, 2, \dots$ εἶναι γεωμετρική πρόοδος μέ λόγο $\omega (\neq 0)$, τότε γιὰ κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ μέ $m < n$ ἰσχύουν:

$$\text{i)} \quad \alpha_{1+m} = \alpha_1 \cdot \omega^m$$

$$\text{ii)} \quad \alpha_n = \alpha_{n-m} \cdot \omega^m$$

$$\text{iii)} \quad \alpha_{n-m} = \alpha_n \cdot \omega^{-m}.$$

Ἡ ἀπόδειξη τῆς (i) προκύπτει ἀμέσως ἀπὸ τήν σχέση $\alpha_n = \alpha_1 \cdot \omega^{n-1}$, ἄρκει νά θέσουμε $n = 1 + m$. Γιά νά ἀποδείξουμε τίς (ii) καί (iii) παρατηροῦμε ὅτι:

$$\alpha_{n-m} = \alpha_1 \cdot \omega^{n-m-1} = \alpha_1 \cdot \omega^{n-1} \cdot \omega^{-m} = \alpha_n \cdot \omega^{-m},$$

δηλαδή ἡ (iii), καί συνεπῶς:

$$\alpha_n = \alpha_{n-m} \cdot \omega^m, \text{ δηλαδή ἡ (ii).}$$

* § 86. **Ἰδιότητα II.**—Ἄν μία ἀκολουθία α_n , $n = 1, 2, \dots$ εἶναι γεωμετρική πρόοδος μέ λόγο $\omega \neq 0$, τότε γιὰ κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ μέ $m < n$ ἰσχύει:

$$\boxed{\alpha_{1+m} \cdot \alpha_{n-m} = \alpha_1 \cdot \alpha_n} \quad (2)$$

Ἡ ἀπόδειξη τῆς (2) εἶναι ἄμεση συνέπεια τῶν (i) καί (iii) τοῦ προηγούμενου πορίσματος.

Παρατήρηση. Ἡ παραπάνω ιδιότητα διατυπώνεται συχνά ὡς ἑξῆς: Σέ πεπερασμένο

πλήθος διαδοχικών όρων μίας γεωμετρικής προόδου, τό γινόμενο δύο όρων πού «**ισαπέχουν**» από τούς «**άκρους**» όρους είναι ίσο μέ τό γινόμενο τών «**άκρων**» όρων. Έτσι έχουμε:

$$\alpha_2 \cdot \alpha_{n-1} = (\alpha_1 \cdot \omega) \left(\frac{\alpha_n}{\omega} \right) = \alpha_1 \alpha_n$$

$$\alpha_3 \cdot \alpha_{n-2} = (\alpha_1 \omega^2) \left(\frac{\alpha_n}{\omega^2} \right) = \alpha_1 \alpha_n \quad \text{κ.ο.κ.}$$

Ειδικότερα στήν περίπτωση πού τό πλήθος τών όρων είναι περιττό, όποτε υπάρχει «**μεσαίος**» όρος, τότε ό όρος αυτός είναι μέσος ανάλογος τών άκρων όρων (γιατί;).

Άμεση συνέπεια τής ιδιότητας II είναι τό έπόμενο πόρισμα:

*** § 87. Πόρισμα.**— Τό γινόμενο $\Pi_n = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n$ τών n πρώτων όρων μιάς γεωμετρικής προόδου μάζ τό δίνει ό τύπος:

$$\Pi_n^2 = (\alpha_1 \cdot \alpha_n)^n \quad (1)$$

Σημείωση. Τόν τύπο (1) μπορούμε νά τόν γράψουμε καί ώς εξής:

$$\Pi_n = \alpha_1^n \cdot \omega^{\frac{n(n-1)}{2}}, \text{ όπου } \omega \text{ είναι ό λόγος τής προόδου (γιατί;).} \quad (2)$$

*** § 88. Ίδιότητα III.**— Άναγκαία καί ικανή συνθήκη γιά νά είναι μία άκολουθία (α_n) μέ $\alpha_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ γεωμετρική πρόοδος είναι ή:

$$\alpha_n^2 = \alpha_{n-1} \cdot \alpha_{n+1} \quad (n = 2, 3, \dots)$$

Άπόδειξη. Έστω ότi ή άκολουθία (α_n) είναι μία γεωμετρική πρόοδος μέ λόγο $\omega \neq 0$, τότε σύμφωνα μέ τόν όρισμό πού δώσαμε στήν § 83, γιά κάθε $n \geq 2$ θά έχουμε:

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \omega = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}}, \text{ όποτε: } \alpha_n^2 = \alpha_{n-1} \cdot \alpha_{n+1} \quad (1)$$

Άντίστροφα, έστω ότi ίσχύει ή (1) καί ότi $\alpha_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Τότε θά έχουμε:

$$\frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} = \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \text{ γιά κάθε } n = 2, 3, \dots$$

καί σύμφωνα μέ τό δεύτερο όρισμό πού δώσαμε γιά τή γεωμετρική πρόοδο, ή άκολουθία (α_n) είναι γεωμετρική πρόοδος.

Άμεση συνέπεια τής παραπάνω προτάσεως είναι τό έπόμενο πόρισμα

§ 89. Πόρισμα.— Άναγκαία καί ικανή συνθήκη, γιά νά είναι τρεις αριθμοί α, β, γ , διαδοχικοί όροι μιάς γεωμετρικής προόδου, είναι:

$$\beta^2 = \alpha \gamma \quad (1)$$

Σ' αυτή τήν περίπτωση ό β λέγεται γεωμετρικός μέσος ή μέσος ανάλογος τών α καί γ .

Πió γενικά: Άν έχουμε n αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, ονομάζουμε γεωμετρικό μέσο αυτών τών n αριθμών, καί τόν συμβολίζουμε μέ M_G , τόν αριθμό:

$$M_T = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \quad (2)$$

§ 90. **Ιδιότητα IV.**— Τό άθροισμα $\Sigma_v = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ τών n πρώτων ὤρων μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου μέ λόγο $\omega \neq 1$ μᾶς τό δίνει ὁ τύπος :

$$\Sigma_v = \frac{a_n \omega - a_1}{\omega - 1} \quad (1)$$

***Απόδειξη.** Πολλαπλασιάζουμε καί τά δύο μέλη τῆς ἰσότητος:

$$\Sigma_v = a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad (2)$$

ἐπί τό λόγο ω , ὁπότε ἔχουμε:

$$\omega \Sigma_v = a_1 \omega + a_2 \omega + \dots + a_n \omega \quad (3)$$

*Αν τώρα ἀφαιρέσουμε κατά μέλη ἀπό τήν (3) τή (2) καί λάβουμε ὑπόψη ὅτι: $a_1 \omega = a_2$, $a_2 \omega = a_3$, ..., $a_{n-1} \omega = a_n$, μετὰ τήν ἀναγωγή τῶν ὁμοίων ὤρων βρίσκουμε:

$$\omega \Sigma_v - \Sigma_v = a_n \omega - a_1 \Rightarrow (\omega - 1) \Sigma_v = a_n \omega - a_1 \Rightarrow \Sigma_v = \frac{a_n \omega - a_1}{\omega - 1}, (\omega \neq 1).$$

***Άσκηση.** Νά ἀποδείξετε τόν τύπο (1) καί μέ τή μέθοδο τῆς τέλειαις ἐπαγωγῆς.

§ 91. **Πόρισμα.**—Τό άθροισμα $\Sigma_v \equiv a_1 + a_2 + \dots + a_n$ τών n πρώτων ὤρων μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου μέ λόγο $\omega \neq 1$ δίνεται, συναρτήσῃ τοῦ πρώτου ὤρου a_1 , τοῦ λόγου ω καί τοῦ πλήθους n τῶν ὤρων του, ἀπό τόν τύπο :

$$\Sigma_v = \frac{a_1(\omega^n - 1)}{\omega - 1} \quad (1)$$

Ὁ τύπος (1) δίνει τό άθροισμα τῶν n πρώτων ὤρων τῆς γεώμ. προόδου, χωρίς νά εἶναι ἀνάγκη νά βροῦμε τό νιοστό της ὤρο.

***Εφαρμογή.** Νά ὑπολογίσετε τό άθροισμα τῶν ὀκτώ πρώτων ὤρων τῆς προόδου :

$$2, 6, 18, 54, \dots$$

Λύση. Στόν τύπο (1) (§ 91) θέτοντας $a_1 = 2$, $\omega = 3$, $n = 8$ ἔχουμε:

$$\Sigma_8 = \frac{2(3^8 - 1)}{3 - 1} = \frac{2(6561 - 1)}{2} = 6560.$$

Παρατηρήσεις: α'). *Αν σέ μία γεωμετρική πρόοδο εἶναι $\omega = 1$, οἱ τύποι (1) τῶν § 90 καί 91 γιά τό Σ_v δέν μποροῦν νά ἐφαρμοστοῦν (γιατί;). Σ' αὐτή τήν εἰδική περίπτωση, δηλ. ἂν $\omega = 1$, ἡ πρόδος ἔχει ὅλους τοὺς ὄρους ἴσους μέ τόν πρῶτο ὄρο της καί συνεπῶς τό άθροισμα τῶν n πρώτων ὤρων της ἰσοῦται μέ:

$$\Sigma_v = a_1 + a_1 + \dots + a_1 = n \cdot a_1, \text{ δηλαδή } \Sigma_v = n a_1.$$

β'). Οἱ δύο τύποι:

$$a_n = a_1 \omega^{n-1} \quad (1) \quad \text{καί} \quad \Sigma_v = \frac{a_n \omega - a_1}{\omega - 1} \quad (2)$$

περιέχουν πέντε ἀγνώστους (ἀριθμούς), τοὺς: a_1 , a_n , ω , n , Σ_v . *Αν, λοιπόν, μᾶς δοθοῦν οἱ

τρεις απ' αυτους τους αριθμους, τότε μπορουμε να βρουμε τους υπολοιπους δυο επιλυοντας το συστημα των εξισωσεων (1) και (2). Η επιλυση αυτου του συστηματος δεν ειναι παντοτε δυνατη. Μερικα απο τα προβληματα που παρουσιάζονται επιλυονται με τη βοηθεια των λογαριθμων, για τους οποιους θα κανουμε λογο σ' ενα απο τα επόμενα κεφάλαια.

Εφαρμογές: 1η. Ο 8γδοος ὁρος μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου ἰσοῦται με 384 καὶ ὁ λόγος τῆς με 2. Νά βρεῖτε τὸν πρώτο ὅρο τῆς καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ὀκτὼ πρώτων ὁρων τῆς.

Λύση. Ἐστω ὅτι εἶναι α_1 ὁ πρώτος ὁρος, ω ὁ λόγος καὶ α_n ὁ νιοστός ὁρος τῆς γεωμ. προόδου. Ἀπὸ τοὺς τύπους $\alpha_n = \alpha_1 \omega^{n-1}$ καὶ $\Sigma_n = \frac{\alpha_n \omega - \alpha_1}{\omega - 1}$ γιὰ $\omega = 2$, $n = 8$, $\alpha_n = 384$ ἔχουμε:

$$384 = \alpha_1 \cdot 2^7 \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad \Sigma_8 = \frac{384 \cdot 2 - \alpha_1}{2 - 1} \quad (2)$$

Ἀπὸ τὴν (1) βρίσκουμε $\alpha_1 = 3$.

Ἄν ἀντικαταστήσουμε στὴ (2) τὸ α_1 με τὸ ἴσο του βρίσκουμε: $\Sigma_8 = \frac{384 \cdot 2 - 3}{2 - 1} = 765$.

2η. Σὲ μία γεωμετρικὴ πρόοδο με πρώτο ὅρο τὸ 5 ὁ ἕβδομος ὁρος τῆς ἰσοῦται με 3645. Νά βρεῖτε τὴν πρόοδο καὶ νά ὑπολογίσετε τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπτά πρώτων ὁρων τῆς.

Λύση. Ἀπὸ τοὺς τύπους $\alpha_n = \alpha_1 \omega^{n-1}$ καὶ $\Sigma_n = \frac{\alpha_n \omega - \alpha_1}{\omega - 1}$, με $\alpha_1 = 5$, $n = 7$ καὶ $\alpha_n = 3645$ λαμβάνουμε ἀντιστοίχως:

$$3645 = 5 \cdot \omega^6 \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad \Sigma_7 = \frac{3645 \cdot \omega - 5}{\omega - 1} \quad (2)$$

Ἀπὸ τὴν (1) ἔχουμε: $\omega^6 = 729$, απ' ὅπου γιὰ $\omega \in \mathbb{R}$ βρίσκουμε: $\omega = \pm 3$.

Γιὰ $\omega = 3$ ἡ πρόοδος εἶναι: 5, 15, 45, 135, ... (3)

Γιὰ $\omega = -3$ ἡ πρόοδος εἶναι: 5, -15, 45, -135, ... (4)

Ἡ πρώτη εἶναι γνησίως αὐξουσα, ἐνῶ ἡ δευτέρη δὲν εἶναι οὔτε αὐξουσα οὔτε φθίνουσα, εἶναι ὁμως ἀπολύτως αὐξουσα καὶ μάλιστα γνησίως.

Ἀπὸ τὴ (2) με ἀντικατάσταση τοῦ ω με τίς τιμές του +3 καὶ -3 βρίσκουμε ἀντιστοίχως:

$$\Sigma_7 = \frac{3645 \cdot 3 - 5}{3 - 1} = 5465, \quad \Sigma_7 = \frac{3645(-3) - 5}{-3 - 1} = 2735.$$

Τὸ πρώτο ἄθροισμα ἀναφέρεται στὴν πρόοδο (3) καὶ τὸ δεύτερο στὴν πρόοδο (4).

§ 92. Παρεμβολὴ γεωμετρικῶν ἐνδιαμέσων. — α). Ὅρισμοί. Δίνονται δύο ἀριθμοὶ α καὶ β ($\alpha, \beta \neq 0$). Οἱ διαφορετικοὶ τοῦ μηδενὸς ἀριθμοὶ $x_1, x_2, \dots, x_m$ λέγονται γεωμετρικοὶ ἐνδιάμεσοι τῶν α καὶ β , τότε καὶ μόνο τότε, ἂν οἱ ἀριθμοὶ:

$$\alpha, x_1, x_2, \dots, x_m, \beta$$

εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι γεωμετρικῆς προόδου.

Παρεμβολὴ μ γεωμετρικῶν ἐνδιαμέσων μεταξύ τῶν ἀριθμῶν α καὶ β ὀνομάζουμε τὴν εὑρεση μ ἀριθμῶν: $x_1, x_2, \dots, x_\mu$, διαφορετικῶν ἀπὸ τὸ μηδέν, τέτοιων, ὥστε οἱ: $\alpha, x_1, x_2, \dots, x_\mu, \beta$ νά εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι γεωμετρικῆς προόδου.

β). Τὸ πρόβλημα τῆς γεωμετρικῆς παρεμβολῆς. Νά παρεμβληθοῦν μ γεωμετρικοὶ ἐνδιάμεσοι μεταξύ τῶν ἀριθμῶν α καὶ β .

Ἐπίλυση. Γιὰ νά βροῦμε τοὺς μ γεωμετρικοὺς ἐνδιαμέσους εἶναι φανερό ὅτι ἀρκεῖ νά ὑπολογίσουμε τὸ λογο ω τῆς γεωμ. προόδου, στὴν ὁποία ἀνή-

κουν οι αριθμοί: $\alpha, x_1, x_2, \dots, x_\mu, \beta$. Ο β κατέχει την τάξη $\nu = \mu + 2$ και συνεπώς (§ 84) θα έχουμε:

$$\beta = \alpha \cdot \omega^{(\mu+2)-1} = \alpha \cdot \omega^{\mu+1}, \text{ δηλαδή: } \alpha \cdot \omega^{\mu+1} - \beta = 0 \quad (1)$$

Ωστε για να προσδιορίσουμε το «λόγο παρεμβολής» ω αρκεί να επιλύσουμε τη διώνυμη εξίσωση (1). Η επίλυση της (1) γίνεται με τη βοήθεια του τύπου του De Moivre, για τον οποίο κάνουμε λόγο στο επόμενο κεφάλαιο.

Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$ και ζητάμε μόνο τις πραγματικές λύσεις της (1), δηλαδή $\omega \in \mathbb{R}$, τότε:

i). Αν μ **ἄρτιος** φυσικός αριθμός (όποτε $\mu + 1$ περιττός), ή (1) δέχεται μία μόνο πραγματική λύση, την:

$$\omega = \sqrt[\mu+1]{\frac{\beta}{\alpha}} \quad (2)$$

καί εἶναι: $\omega > 0$, ἂν $\alpha\beta > 0$ καί $\omega < 0$, ἂν $\alpha\beta < 0$.

ii). Αν μ **περιττός** φυσικός αριθμός (όποτε $\mu + 1$ ἄρτιος) καί $\alpha\beta > 0$, ή (1) δέχεται δύο πραγματικές λύσεις, τις:

$$\omega = \sqrt[\mu+1]{\frac{\beta}{\alpha}} \quad \text{καί} \quad \omega = -\sqrt[\mu+1]{\frac{\beta}{\alpha}} \quad (3)$$

iii). Αν μ **περιττός** καί $\alpha\beta < 0$, δέν ὀρίζονται ἀπό τήν (1) $\omega \in \mathbb{R}$.

Οἱ παραπάνω τύποι (2) καί (3) συνοψίζονται στόν ἐπόμενο τύπο:

$$\omega = \varepsilon \cdot \sqrt[\mu+1]{\frac{\beta}{\alpha}} \quad (4)$$

ὅπου $\varepsilon = 1$, ὅταν μ ἄρτιος καί $\varepsilon = \pm 1$, ὅταν μ περιττός, γιά $\omega \in \mathbb{R}$.

Ο τύπος (4) ὀνομάζεται **τύπος παρεμβολῆς γεωμετρικῶν ἐνδιαμέσων** ἢ ἀλλιῶς **τύπος τῆς γεωμετρικῆς παρεμβολῆς**.

Ἀφοῦ ἀπό τόν τύπο (4) ὀρίσαμε τό λόγο ω , οἱ ἀριθμοί ποῦ ζητούσαμε εἶναι:

$$x_1 = \alpha\omega, \quad x_2 = \alpha\omega^2, \quad \dots, \quad x_\mu = \alpha\omega^\mu.$$

Ἐφαρμογή. Νά παρεμβάλετε τρεῖς πραγματικούς γεωμ. ἐνδιάμεσους μεταξύ τῶν ἀριθμῶν 3 καί 48.

Λύση. Ἀπό τόν τύπο (4) γιά $\alpha = 3, \beta = 48$ καί $\mu = 3$ λαμβάνουμε:

$$\omega = \pm \sqrt[4]{\frac{48}{3}} = \pm \sqrt[4]{16}, \text{ δηλαδή: } \omega = \pm 2.$$

Ἄρα: $x_1 = 6, x_2 = 12, x_3 = 24$ καί $x'_1 = -6, x'_2 = 12, x'_3 = -24$.

§ 93. Συμμετρική παράσταση ἑνός πεπερασμένου πλήθους ὀρων μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου.—Γιά νά περιορίσουμε τοὺς ἀγνώστους ποῦ ἐμφανίζονται σέ διάφορα προβλήματα γεωμετρικῶν προόδων, ἰδιαίτερα ὅταν ξέρομε τό γινόμενο ἀριθμῶν

οί όποιοί είναι διαδοχικοί όροι μιās γεωμετρικής προόδου, είναι σκόπιμο νά παραστήσουμε τούς άριθμούς αύτούς ώς εξής:

Περίπτωση 1η: Τό πλήθος τών άγνωστων όρων είναι περιττό.

"Αν τό πλήθος τών άγνωστων όρων είναι περιττό, έστω $2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, τότε ύπάρχει «μεσαίος» όρος, τόν όποίο «συμφέρει» νά τόν συμβολίσουμε μέ x , όπότε, άν ό λόγος τής προόδου είναι $\omega \neq 0$, γράφουμε τούς όρους πού ζητάμε ώς εξής:

$$\frac{x}{\omega^k}, \dots, \frac{x}{\omega^2}, \frac{x}{\omega}, x, x\omega, x\omega^2, \dots, x\omega^k \quad (1)$$

Περίπτωση 2η: Τό πλήθος τών άγνωστων όρων είναι άρτιο.

"Αν τό πλήθος τών άγνωστων όρων είναι άρτιο, έστω $2k$, $k \in \mathbb{N}$, τότε ύπάρχουν δύο «μεσαίοι» όροι καί τό γινόμενό τους είναι ίσο μέ τό γινόμενο τών άκρων όρων. Στήν περίπτωση αύτή γιά νά παραστήσουμε τούς όρους πού ζητάμε διακρίνουμε τίς εξής δύο ύποπεριπτώσεις:

2α). 'Αναζητάμε άν ύπάρχουν γεωμ. πρόοδοι μέ λόγο θετικό, στis όποies ανήκουν οι $2k$ τό πλήθος άριθμοί. Τότε «συμφέρει» νά συμβολίσουμε τούς δύο «μεσαίους» όρους μέ:

$\frac{x}{\lambda}$ καί $x\lambda$, όπότε ό λόγος ω τής γεωμ. προόδου είναι: $\omega = x\lambda: \frac{x}{\lambda} = \lambda^2$ καί συνεπώς έχουμε:

$$\dots, \frac{x}{\lambda^5}, \frac{x}{\lambda^3}, \frac{x}{\lambda}, x\lambda, x\lambda^3, x\lambda^5, \dots \quad (2\alpha)$$

2β). 'Αναζητάμε άν ύπάρχουν γεωμ. πρόοδοι μέ λόγο άρνητικό, στis όποies ανήκουν οι $2k$ τό πλήθος άριθμοί. Τότε «συμφέρει» νά συμβολίσουμε τούς δύο «μεσαίους» όρους μέ:

$\frac{x}{\lambda}$ καί $-x\lambda$, όπότε ό λόγος ω τής γεωμ. προόδου είναι: $\omega = (-x\lambda): \frac{x}{\lambda} = -\lambda^2$ καί συνεπώς έχουμε:

$$\dots, \frac{x}{\lambda^5}, -\frac{x}{\lambda^3}, \frac{x}{\lambda}, -x\lambda, x\lambda^3, -x\lambda^5, \dots \quad (2\beta)$$

Σχόλιο. "Όταν παριστάνουμε τούς όρους μιās γεωμ. προόδου μέ τούς συμβολισμούς (1), (2α) καί (2β) είναι φανερό ότι σιωπηρά έχουμε ύποθέσει ότι ό λόγος ω τής προόδου είναι διάφορος από τό μηδέν. "Αν τό αντίστοιχο πρόβλημα έχει καί λύση μέ $\omega = 0$, τότε είναι φανερό ότι τή λύση αύτή θά πρέπει νά τήν αναζητήσουμε ιδιαιτέρως, καθόσον ή γεωμ. πρόοδος τότε είναι: $\alpha, 0, 0, \dots$

Εφαρμογές. 1η: Νά βρείτε τέσσερις πραγματικούς άριθμούς πού νά είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, άν είναι γνωστό ότι: τό γινόμενό τους ίσούται μέ 729 καί ό τέταρτος ίσούται μέ τό γινόμενο τών δύο μεσαίων.

Λύση. Πρώτα άπ' όλα παρατηρούμε ότι δέν ύπάρχει λύση μέ λόγο τής προόδου τό μηδέν. Διακρίνουμε τώρα δύο περιπτώσεις:

i). 'Αναζητάμε άν ύπάρχουν γεωμ. πρόοδοι μέ λόγο $\omega > 0$. Τότε, σύμφωνα μέ τήν (2α), παριστάνουμε τούς τέσσερις άριθμούς ώς εξής:

$$\frac{x}{\lambda^3}, \frac{x}{\lambda}, x\lambda, x\lambda^3 \quad (x, \lambda \in \mathbb{R}).$$

"Εχουμε τό σύστημα:

$$\left. \begin{matrix} x^4 = 729 \\ x\lambda^3 = x^2 \end{matrix} \right\} \iff \left. \begin{matrix} x^2 = 27 \\ \lambda^3 = x \end{matrix} \right\} \iff \left. \begin{matrix} x = \pm 3\sqrt{3} \\ \lambda^3 = x \end{matrix} \right\} \iff \left. \begin{matrix} x = \pm 3\sqrt{3} \\ \lambda^3 = \pm 3\sqrt{3} \end{matrix} \right\} \iff \left. \begin{matrix} x = \pm 3\sqrt{3} \\ \lambda = \pm \sqrt{3} \end{matrix} \right\}$$

Γιά $x = 3\sqrt{3}$ καί $\lambda = \sqrt{3}$ οι άριθμοί πού ζητάμε είναι: 1, 3, 9, 27.

Για $x = -3\sqrt{3}$ και $\lambda = -\sqrt{3}$ βρίσκουμε πάλι τούς ίδιους αριθμούς.

ii). Αναζητάμε τώρα αν υπάρχουν γεωμ. πρόοδοι με λόγο $\omega < 0$. Τότε, σύμφωνα με την (2β), παριστάνουμε τούς τέσσερις αριθμούς ως εξής:

$$-\frac{x}{\lambda^3}, \quad \frac{x}{\lambda}, \quad -x\lambda, \quad x\lambda^3 \quad (x, \lambda \in \mathbb{R})$$

*Εχουμε τότε τό σύστημα:

$$\left. \begin{matrix} x^4 = 729 \\ x\lambda^3 = -x^2 \end{matrix} \right\} \iff \left. \begin{matrix} x^2 = 27 \\ \lambda^3 = -x \end{matrix} \right\} \iff \left. \begin{matrix} x = \pm 3\sqrt{3} \\ \lambda^3 = -x \end{matrix} \right\} \iff \left. \begin{matrix} x = \pm 3\sqrt{3} \\ \lambda^3 = \mp 3\sqrt{3} \end{matrix} \right\} \iff \left. \begin{matrix} x = \pm \sqrt{3} \\ \lambda = \mp \sqrt{3} \end{matrix} \right\}$$

Για $x = 3\sqrt{3}$ και $\lambda = -\sqrt{3}$ οι αριθμοί που ζητάμε είναι: 1, -3, 9, -27.

Για $x = -3\sqrt{3}$ και $\lambda = \sqrt{3}$ βρίσκουμε πάλι τούς αριθμούς: 1, -3, 9, -27.

*Αρα οι αριθμοί που ζητάμε είναι οι: 1, 3, 9, 27 και 1, -3, 9, -27.

2η. Νά βρείτε γεωμετρική πρόοδο που νά έχει την ιδιότητα: τό άθροισμα τών τριών πρώτων όρων της νά ισούται μέ 1 και τό διπλάσιο τοῦ δεύτερου όρου της σύν ένα νά ισούται μέ τόν πρώτο όρο της.

Λύση. Σύμφωνα με την πρώτη περίπτωση παριστάνουμε τούς τρεις πρώτους όρους τῆς γεωμ. πρόοδου ως εξής: $\frac{x}{\omega}$, x , $x\omega$, όπου υποθέτουμε ότι $\omega \neq 0$.

*Εχουμε τότε τό σύστημα:

$$\left. \begin{matrix} \frac{x}{\omega} + x + x\omega = 1 \\ 2x + 1 = \frac{x}{\omega} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{matrix} x = -\frac{3}{7} \\ \omega = -3. \end{matrix}$$

*Αρα μία λύση τοῦ προβλήματος είναι ή γεωμετρική πρόοδος:

$$\frac{1}{7}, \quad -\frac{3}{7}, \quad \frac{9}{7}, \quad \dots, \quad \frac{1}{7} (-3)^{n-1}, \dots$$

*Εξετάζουμε τώρα μήπως τό πρόβλημα έχει και λύση με $\omega = 0$. Τότε μία τέτοια γεωμ. πρόοδος θα ήταν τῆς μορφῆς: $\alpha, 0, \dots$, όπου α ο πρώτος όρος της. Αμέσως βρίσκουμε ότι μία τέτοια πρόοδος είναι ή: 1, 0, 0, ..., ή όποια αποτελεί μία δεύτερη λύση τοῦ προβλήματος. Άλλη λύση δέν υπάρχει (γιατί;).

§ 94. Τό άθροισμα τών άπειρων όρων άπολύτως φθίνουσας γεωμετρικής πρόοδου.— Έστω ή γεωμετρική πρόοδος:

$$\alpha_n = \alpha\omega^{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

μέ πρώτο όρο τόν $\alpha \neq 0$ και λόγο ω με: $0 < |\omega| < 1$.

*Όπως είδαμε και στην § 83 ή (1) είναι τότε μία άπολύτως φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος, καθόσον είναι: $|\alpha_{n+1}| < |\alpha_n|$ για κάθε $n = 1, 2, \dots$, όταν: $0 < |\omega| < 1$.

*Ας συμβολίσουμε με Σ_n τό άθροισμα τών n πρώτων όρων τῆς (1), τό όποιο, όπως είναι γνωστό, μᾶς τό δίνει ο τύπος:

$$\Sigma_n = \frac{\alpha(\omega^n - 1)}{\omega - 1} \quad (2)$$

Ο τύπος (2) γράφεται: $\Sigma_n = \frac{\alpha\omega^n - \alpha}{\omega - 1} = \frac{\alpha}{1 - \omega} - \frac{\alpha}{1 - \omega} \cdot \omega^n$.

*Επειδή $|\omega| < 1$ έπεται ότι: $\lim \omega^n = 0$ (βλ. § 64, έφαρμ. 1) και συνεπώς:

$$\lim \Sigma_v = \lim \left[\frac{\alpha}{1-\omega} - \frac{\alpha}{1-\omega} \cdot \omega^v \right] = \frac{\alpha}{1-\omega} - \frac{\alpha}{1-\omega} \cdot \lim \omega^v = \frac{\alpha}{1-\omega}.$$

Ωστε:
$$\lim \Sigma_v = \frac{\alpha}{1-\omega} \quad (3)$$

Τό παραπάνω όριο, δηλαδή τόν πραγματικό αριθμό $\frac{\alpha}{1-\omega}$ στόν οποίο συγκλίνει τό άθροισμα Σ_v τών v πρώτων όρων μιās άπολύτως φθίνουσας γεωμ. προόδου (α_v), δηλαδή γεωμετρικής προόδου μέ λόγο ω : $0 < |\omega| < 1$, τό ονομάζουμε: «άθροισμα τών άπειρων όρων τής άπολύτως φθίνουσας γεωμετρικής προόδου (1)».

Τό άθροισμα αυτό τό συμβολίζουμε μέ Σ_∞ ή πιό άπλά μέ Σ . Έτσι έχουμε:

$$\Sigma_\infty \equiv \Sigma = \alpha + \alpha\omega + \alpha\omega^2 + \dots + \alpha\omega^{v-1} + \dots \stackrel{\text{ορσ}}{=} \lim \Sigma_v = \frac{\alpha}{1-\omega} \quad (4)$$

Ωστε: τό άθροισμα Σ τών άπειρων όρων μιās γεωμετρικής προόδου μέ πρώτο όρο τόν α καί λόγο ω τέτοιο, ώστε $0 < |\omega| < 1$ ισούται μέ: $\frac{\alpha}{1-\omega}$.

Σημ. Άν $\alpha = 1$, τότε: $\Sigma = 1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{v-1} + \dots = \frac{1}{1-\omega}$.

Π.χ.
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^v} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

Παρατήρηση. Ό τύπος (4) ισχύει καί γιά $\omega = 0$, γιατί τότε τό άθροισμα Σ θά είναι ίσο μέ α καί όταν $v \rightarrow +\infty$. Επίσης ό τύπος (4) ισχύει καί γιά $\alpha = 0$.

Έφαρμογή 1η: Νά υπολογίσετε τό άθροισμα: $4 + \frac{4}{3} + \frac{4}{3^2} + \dots + \frac{4}{3^v} + \dots$.

Λύση: Οί άπειροι προσθετέοι: $4, \frac{4}{3}, \frac{4}{3^2}, \dots, \frac{4}{3^v}, \dots$ είναι διαδοχικοί όροι μιās γεωμετρικής προόδου πού έχει πρώτο όρο $\alpha=4$ καί λόγο $\omega = \frac{1}{3}$. Έπομένως τό άθροισμα πού ζητάμε μάς τό δίνει ό τύπος (4), δηλαδή:

$$4 + \frac{4}{3} + \frac{4}{3^2} + \dots + \frac{4}{3^v} + \dots = \frac{4}{1 - \frac{1}{3}} = 6.$$

Έφαρμογή 2η. Νά βρείτε τό κοινό κλάσμα, από τό όποιο παράγεται τό δεκαδικό περιοδικό κλάσμα: 4,513513...

Λύση. Τό δεκαδικό περιοδικό κλάσμα 4,513513... γράφεται:

$$4 + \frac{513}{1000} + \frac{513}{1000^2} + \dots$$

Άλλά:
$$\frac{513}{1000} + \frac{513}{1000^2} + \frac{513}{1000^3} + \dots = \frac{\frac{513}{1000}}{1 - \frac{1}{1000}} = \frac{513}{999}.$$

*Αρα: $4,513513... = 4 + \frac{513}{999} = \frac{4509}{999}$.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι ο δεκαδικός αριθμός $4,513513...$, όταν το πλήθος των δεκαδικών του ψηφίων αυξάνει απεριόριστα, τείνει στο ρητό αριθμό $\frac{4509}{999}$.

***Ανακεφαλαιώση.** Οι ιδιότητες των αριθμητικών και γεωμετρικών προόδων που απορρέουν από τις προηγούμενες παραγράφους συνσφίζονται στον επόμενο πίνακα:

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

*Εστω μία αριθμητική πρόοδος:

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{v-2}, \alpha_{v-1}, \alpha_v, \alpha_{v+1}, \dots \quad (1)$$

μέ πρώτο όρο α_1 και λόγο ω . Τότε:

1. Ο νιοστός όρος α_v της (1) δίνεται από τον τύπο:

$$\alpha_v = \alpha_1 + (v-1)\omega$$

2. *Αν είναι $\omega \neq 0$, τότε το άθροισμα Σ_v των v πρώτων όρων της (1) δίνεται από τους τύπους:

$$(i): \quad \Sigma_v = \frac{(\alpha_v + \alpha_1)v}{2}$$

$$(ii) \quad \Sigma_v = \frac{[2\alpha_1 + (v-1)\omega]v}{2}$$

Σημ. *Αν είναι $\omega = 0$, τότε: $\Sigma_v = v\alpha_1$.

3. *Ισχύει:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_v &= \alpha_2 + \alpha_{v-1} = \alpha_3 + \alpha_{v-2} = \dots \\ &= \alpha_{1+\mu} + \alpha_{v-\mu}, \quad (\mu < v) \end{aligned}$$

$$\text{Ειδικά: } \alpha_1 + \alpha_3 = 2\alpha_2, \alpha_2 + \alpha_4 = 2\alpha_3,$$

$$\alpha_3 + \alpha_5 = 2\alpha_4, \dots, \alpha_v + \alpha_{v+2} = 2\alpha_{v+1}$$

Συνέπεια: αν α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμ. προόδου, τότε ισχύει:

$$2\beta = \alpha + \gamma$$

4. Μέσος αριθμητικός:

$$M_A = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_v}{v}$$

5. Τύπος της αριθμητικής παρεμβολής:

$$\omega' = \frac{\beta - \alpha}{\mu + 1}$$

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

*Εστω, μία γεωμετρική πρόοδος:

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{v-2}, \alpha_{v-1}, \alpha_v, \alpha_{v+1}, \dots \quad (1')$$

μέ πρώτο όρο α_1 και λόγο ω . Τότε:

1'. Ο νιοστός όρος α_v της (1') δίνεται από τον τύπο:

$$\alpha_v = \alpha_1 \cdot \omega^{v-1}$$

2'. *Αν είναι $\omega \neq 1$, τότε το άθροισμα Σ_v των v πρώτων όρων της (1') δίνεται από τους τύπους:

$$(i) \quad \Sigma_v = \frac{\alpha_v \omega - \alpha_1}{\omega - 1}, \quad (\omega \neq 1)$$

$$(ii) \quad \Sigma_v = \frac{\alpha_1(\omega^v - 1)}{\omega - 1}, \quad (\omega \neq 1)$$

Σημ. *Αν είναι $\omega = 1$, τότε: $\Sigma_v = v\alpha_1$.

3'. *Ισχύει:

$$\begin{aligned} \alpha_1 \cdot \alpha_v &= \alpha_2 \cdot \alpha_{v-1} = \alpha_3 \cdot \alpha_{v-2} = \dots \\ &= \alpha_{1+\mu} \cdot \alpha_{v-\mu}, \quad (\mu < v) \end{aligned}$$

$$\text{Ειδικά: } \alpha_1 \alpha_3 = \alpha_2^2, \alpha_2 \alpha_4 = \alpha_3^2$$

$$\alpha_3 \cdot \alpha_5 = \alpha_4^2, \dots, \alpha_v \alpha_{v+2} = \alpha_{v+1}^2$$

Συνέπεια: αν α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμ. προόδου, τότε ισχύει:

$$\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$$

4'. Μέσος γεωμετρικός:

$$M_G = \sqrt[v]{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_v}$$

5'. Τύπος της γεωμετρικής παρεμβολής:

$$\omega' = \varepsilon \cdot \sqrt[\mu+1]{\frac{\beta}{\alpha}}, \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

*Ομάδα Α'. 177. Να εξετάσετε αν είναι μονότονες οι επόμενες γεωμετρικές πρόοδοι και να καθορίσετε το είδος μονοτονίας για τις μονότονες απ' αυτές:

α) 12, 6, 3, ..., β) $\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, 3, \dots$, γ) 3, -6, 12, ..., δ) $-4, \frac{8}{3}, -\frac{16}{9}, \dots$

178. Δίνεται η γεωμ. πρόοδος: 1, 3, 9, 27, 81, Νά αποδείξετε ότι οι διαφορές των διαδοχικών όρων της σχηματίζουν μία νέα γεωμ. πρόοδο. Μήπως αυτή η ιδιότητα ισχύει γενικά για κάθε γεωμ. πρόοδο;

179. Νά προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό x , όταν είναι γνωστό ότι οι παρακάτω αριθμοί είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου:

α) $x - 2, 2x, 7x + 4,$

β) $2x - 2, 3x + 6, 12x + 6.$

180. Νά προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό x , ώστε οι αριθμοί: $\alpha + x, \beta + x, \gamma + x$ νά είναι διαδοχικοί όροι γεωμ. προόδου. Τί συμβαίνει αν οι α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου;

181. Νά βρείτε το πλήθος n των όρων που πρέπει νά πάρουμε από μία γεωμ. πρόοδο, αν ξέρουμε ότι:

α) $\alpha_1 = 4, \omega = 4, \Sigma_n = 5460,$

β) $\alpha_4 = 13, \alpha_8 = 117, \alpha_n = 9477,$

γ) $\alpha_1 = 4, \alpha_n = 972, \Sigma_n = 1456,$

δ) $\alpha_n = 81, \omega = \frac{3}{4}, \Sigma_n = 781.$

182. "Αν οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμ. προόδου, νά αποδείξετε ότι:

$$\alpha^2\beta\gamma^2 \left(\frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\beta^3} + \frac{1}{\gamma^3} \right) = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3.$$

183. "Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ είναι διαδοχικοί όροι μιᾶς γεωμ. προόδου, νά αποδείξετε ότι:

1) $(\alpha + \delta) \cdot (\beta + \gamma) - (\alpha + \gamma) \cdot (\beta + \delta) = (\beta - \gamma)^2$

2) $(\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2 + (\delta - \beta)^2 = (\alpha - \delta)^2.$

184. "Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ και M_A, M_Γ, M_H είναι αντίστοιχως ὁ μέσος αριθμητικός, μέσος γεωμετρικός και μέσος αρμονικός των α και β , νά αποδείξετε ότι:

1) $M_\Gamma^2 = M_A \cdot M_H$

και 2) $M_A \geq M_\Gamma \geq M_H.$

185. Νά σχηματίσετε μία γεωμ. πρόοδο, ἡ ὁποία ἔχει ὡς πρῶτο ὄρο της τὴ μικρότερη ρίζα τῆς ἐξίσωσης: $x^3 - 2x^2 - 25x + 50 = 0$ καὶ ὡς λόγο τῆ μεγαλύτερη ρίζα. Ὑστερα νά βρεῖτε τὸ ἄθροισμα τῶν n πρώτων ὄρων της, ἂν ὡς n πάρουμε τὸ τριπλάσιο τῆς τρίτης ρίζας τῆς παραπάνω ἐξίσωσης.

186. Νά βρεῖτε τὸν πρῶτο ὄρο καὶ τὸ λόγο μιᾶς γεωμ. προόδου ἂν εἶναι γνωστὸ ὅτι: τὸ ἄθροισμα τῶν 4 πρώτων ὄρων της εἶναι 40, ἐνῶ τὸ ἄθροισμα τῶν 8 πρώτων ὄρων της εἶναι 3280.

187. Νά βρεῖτε τὶς διαστάσεις ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἂν εἶναι γνωστὸ ὅτι αὐτὲς εἶναι διαδοχικοὶ ὄροι γεωμ. προόδου καὶ ὅτι τὸ ἄθροισμα ὀλων τῶν ἀκμῶν του εἶναι 168 καὶ ὁ ὄγκος του εἶναι: 512.

188. Τρεῖς ἀριθμοὶ x, y, z ἔχουν ἄθροισμα 147. "Αν οἱ x, y, z εἶναι διαδοχικοὶ ὄροι ἀριθμ. προόδου καὶ οἱ x, z, y γεωμ. προόδου, νά βρεῖτε αὐτοὺς τοὺς ἀριθμοὺς.

189. "Αν οἱ διάφοροι τοῦ μηδενὸς ἀριθμοὶ α, β, γ εἶναι ὄροι μιᾶς γεωμ. προόδου τάξεως λ, μ καὶ n ἀντιστοίχως, νά αποδείξετε ὅτι ἰσχύει:

$$\alpha^{n-\nu} \cdot \beta^{\nu-\lambda} \cdot \gamma^{\lambda-\mu} = 1.$$

190. Ἀνάμεσα στὶς ρίζες τῆς ἐξίσωσης: $2x^2 - 5x - 3 = 0$ νά παρεμβάλετε 4 γεωμετρικούς ἐνδιάμεσους.

191. Σὲ μία ἀπολύτως φθίνουσα γεωμ. πρόοδο ὁ πρῶτος ὄρος της εἶναι τὸ μισό τοῦ ἄθροίσματος τῶν ἄπειρων ὄρων, ἐνῶ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων ὄρων της εἶναι 20. Νά βρεῖτε τὴν πρόοδο.

192. Τό άθροισμα τών 4 πρώτων όρων μιās απολύτως φθίνουσας γεωμ. προόδου είναι 65 και τό άθροισμα τών άπειρων όρων της είναι 81. Νά βρείτε τήν πρόοδο.

193. Νά υπολογίσετε τά παρακάτω «άθροίσματα»:

$$\alpha) \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{2-\sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \dots, \quad \beta) 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots$$

$$\gamma) \alpha + \beta + \frac{\beta^2}{\alpha} + \frac{\beta^3}{\alpha^2} + \dots \quad (\alpha > \beta > 0).$$

194. "Αν $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ είναι αντίστοιχως τά άθροίσματα τών άπειρων όρων τών γεωμ. προόδων, καθεμιά από τίς όποιες έχει ως πρώτο όρο αντίστοιχως τόν: 1, 2, 3, ..., n και λόγο αντίστοιχως τόν: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n+1}$, νά αποδείξετε ότι:

$$S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n = \frac{n(n+3)}{2}.$$

* Όμάδα Β'. 195. "Αν $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ και M_A, M_G, M_H είναι αντίστοιχως ό άριθμητικός, γεωμετρικός και άρμονικός μέσος τους, νά αποδείξετε ότι ισχύει:

$$M_A \geq M_G \geq M_H \quad (\text{άνισότητα του Cauchy})$$

196. "Αν $x \geq 0, y \geq 0$, νά αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y \geq x^{1/3} \cdot y^{2/3}$$

Πότε ή σχέση αυτή ισχύει μέ τό ίσον;

197. "Αν οί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι μιās γεωμ. προόδου και ισχύει ή σχέση:

$$\alpha^p = \beta^p = \gamma^p,$$

νά αποδείξετε ότι οί άριθμοί ρ, σ, τ είναι διαδοχικοί όροι μιās άρμονικής προόδου.

198. Νά αποδείξετε ότι: άν οί πλευρές ενός τριγώνου είναι διαδοχικοί όροι μιās γεωμ.

προόδου μέ λόγο ω , τότε ισχύει: $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < \omega < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

199. "Αν $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 0$ και $\alpha^3 + \beta^3 = \gamma^3$, νά αποδείξετε ότι οί άριθμοί: $\alpha, \gamma, \beta \sqrt[3]{4}$ είναι διαδοχικοί όροι μιās γεωμετρικής προόδου.

200. Νά βρείτε τό νιοστό όρο και τό άθροισμα τών n πρώτων όρων τής άκολουθίας: 2, 3, 5, 9, 17, ...

Υπόδειξη. Νά πάρετε τίς διαφορές: 3-2, 5-3, 9-5, 17-9, ... Τί παρατηρείτε;

201. "Αν οί $\alpha, \beta, \gamma, x, y, z$ είναι θετικοί άριθμοί και ό α είναι μέσος άριθμητικός τών β και γ , ένω ό x είναι μέσος άρμονικός τών y και z , νά αποδείξετε ότι: ό αx είναι μέσος γεωμετρικός τών βy και γz , τότε και μόνο τότε, άν:

$$\frac{y}{z} + \frac{z}{y} = \frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta}.$$

202. Νά ξετάσετε άν οί άριθμοί: $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$ είναι όροι (όχι άναγκαστικά διαδοχικοί) μιās γεωμετρικής προόδου.

203. Τό άθροισμα τών άπειρων όρων μιās απολύτως φθίνουσας γεωμ. προόδου είναι 12 και τό άθροισμα τών τετραγώνων τών άπειρων όρων της είναι 48. Νά βρείτε τήν πρόοδο.

204. "Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ μέ $|\alpha| < 1$ και $|\beta| < 1$ και όνομάσουμε:

$$A = 1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^n + \dots \quad \text{και} \quad B = 1 + \beta + \beta^2 + \dots + \beta^n + \dots,$$

νά αποδείξετε ότι:

$$\Sigma = 1 + \alpha\beta + \alpha^2\beta^2 + \dots + \alpha^n\beta^n + \dots = \frac{AB}{A+B-1}.$$

205. Δίνεται ισοπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρά α . Συνδέουμε τά μέσα τών πλευρών του A_1, B_1, Γ_1 και σχηματίζουμε ένα νέο ισοπλευρο τρίγωνο. Τά μέσα τών πλευρών του $A_1B_1\Gamma_1$ τά συνδέουμε και παίρνουμε ένα νέο ισοπλευρο τρίγωνο. 'Επαναλαμβάνουμε ἐπ' ἄπειρο τήν ἐργασία αὐτή. Νά ὑπολογίσετε τό ἄθροισμα τών περιμέτρων καί τό ἄθροισμα τών ἐμβαδῶν τών ἄπειρων ισοπλευρῶν τριγώνων πού σχηματίζονται.

206. Ἐστω ἡ ἀκολουθία (α_n) μέ $\alpha_1 = \frac{3}{2}$ καί $\alpha_{n+1} = \frac{3\alpha_n + 4}{5} \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ ἀκολουθία (β_n) μέ γενικό ὄρο: $\beta_n = \alpha_n - 2$ εἶναι μία γεωμ. πρόοδος μέ λόγο $\omega = \frac{3}{5}$. Ὑστερα νά βρεῖτε τούς νιοστούς ὄρους β_n καί α_n τών ἀκολουθιῶν (β_n) καί (α_n) ἀντιστοίχως συναρτήσῃ τοῦ n , καθὼς καί τό ὄριο τῆς ἀκολουθίας (α_n) .

207. Ἐστω ἡ ἀκολουθία $\alpha_n, n = 1, 2, \dots$ μέ:

$$\alpha_n = \frac{1}{2} (\alpha_{n-1} + \alpha_{n-2}) \text{ καί } \alpha_1 = \alpha, \alpha_2 = \beta.$$

Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ ἀκολουθία $\beta_n, n = 1, 2, \dots$ μέ γενικό ὄρο: $\beta_n = \alpha_n - \alpha_{n-1}$ εἶναι μία γεωμ. πρόοδος μέ λόγο $\omega = -\frac{1}{2}$. Στή συνέχεια νά ἐκφράσετε τό α_n συναρτήσῃ τῶν α, β καί n . Ποιό εἶναι τό $\lim \alpha_n$;

208. Ἐστω ἡ ἀκολουθία: $\alpha_n, n = 1, 2, \dots$ γιά τήν ὁποία εἶναι:

$$\alpha_{n+2} = \xi \alpha_{n+1} + \eta \alpha_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (\xi, \eta \in \mathbb{R}).$$

Νά ἀποδείξετε ὅτι:

Ἐάν ὁ λόγος $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$, ὅπου $\alpha_1 \neq 0$, εἶναι ρίζα τῆς ἐξίσωσως:

$$x^2 - \xi x - \eta = 0,$$

τότε ἡ ἀκολουθία α_n εἶναι μία γεωμετρική πρόοδος.

209. Ἐάν S_n εἶναι τό ἄθροισμα τῶν n πρώτων ὀρων γεωμετρικῆς προόδου, τῆς ὁποίας ὁ πρῶτος ὄρος εἶναι $\alpha = -5$ καί ὁ λόγος $\omega = -3/4$, νά ἀποδείξετε ὅτι:

$$\left(\forall \varepsilon > 0 \text{ καί } \forall n \in \mathbb{N} \text{ μέ } n > 3 \left(\frac{20}{7\varepsilon} - 1 \right) \right) \Rightarrow \left| -\frac{20}{7} - S_n \right| < \varepsilon.$$

Ποιό εἶναι τό $\lim S_n$;

* IV. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΠΟ ΤΙΣ ΣΕΙΡΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

§ 95. Προκαταρκτικά-Συμβολισμός ἄθροισμάτων.—Στό Κεφάλαιο III (§ 26, σημ.) μάθαμε ὅτι ἕνα ἄθροισμα τῆς μορφῆς: $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ παριστάνεται γιά συντομία μέ $\sum_{k=1}^n \alpha_k$ καί διαβάζεται: «ἄθροισμα τῶν (ἀριθμῶν) α_k ἀπό $k=1$ μέχρι n ». Ἀκριβέστερα ὀρίζουμε:

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \stackrel{\text{ορσ}}{=} \begin{cases} \alpha_1, & \text{ἂν } n = 1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n, & \text{ἂν } n \geq 2. \end{cases} \quad (1)$$

Τό σύμβολο Σ σημαίνει ὅτι πρέπει νά προσθέσουμε ὅλους τοὺς ἀριθμούς πού θά πάρουμε ἂν δώσουμε στό δείκτη k τοῦ α_k διαδοχικά τίς τιμές: $1, 2, 3, \dots, n$. Εἶναι φανερό ὅτι ὁ δείκτης k μπορεῖ νά ἀντικατασταθεῖ μέ ὁποιοδήποτε ἄλλο γράμμα. Ἐτσι, π.χ. τό παραπάνω ἄθροισμα γράφεται:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_v = \sum_{k=1}^v \alpha_k = \sum_{\lambda=1}^v \alpha_\lambda = \sum_{\rho=1}^v \alpha_\rho = \sum_{v=1}^v \alpha_v = \dots \quad (2)$$

Είναι επίσης εύκολο νά δοῦμε ὅτι ἰσχύει:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_v = \sum_{k=1}^v \alpha_k = \sum_{k=0}^{v-1} \alpha_{k+1} = \sum_{k=2}^{v+1} \alpha_{k-1} = \sum_{k=4}^{v+3} \alpha_{k-3} = \dots \quad (3)$$

*Έχοντας τώρα ὑπόψη τὸ συμβολισμό (1) τὰ ἀξιοσημείωτα ἀθροίσματα $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ τῆς § 78 γράφονται ὡς ἑξῆς:

$$\Sigma_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + v \equiv \sum_{k=1}^v k = \frac{v(v+1)}{2}$$

$$\Sigma_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + v^2 \equiv \sum_{k=1}^v k^2 = \frac{v(v+1)(2v+1)}{6}$$

$$\Sigma_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + v^3 \equiv \sum_{k=1}^v k^3 = \frac{v^2(v+1)^2}{4} = \left(\sum_{k=1}^v k \right)^2.$$

Μία γενίκευση τῆς προσεταιριστικῆς ιδιότητος πού ξέρουμε εἶναι:

$$\sum_{k=1}^v \alpha_k = \sum_{k=1}^p \alpha_k + \sum_{k=p+1}^v \alpha_k \quad (4)$$

γιά κάθε $p = 1, 2, \dots, v-1$, ἐνῶ μία γενίκευση τῆς ἐπιμεριστικῆς ιδιότητος εἶναι:

$$\sum_{k=1}^v (\xi \alpha_k + \eta \beta_k) = \xi \cdot \sum_{k=1}^v \alpha_k + \eta \cdot \sum_{k=1}^v \beta_k \quad (5)$$

ὅπου ξ καὶ η εἶναι πραγματικοὶ ἀριθμοί.

Ἀπὸ τὴν (5) γιά $\xi = \eta = 1$ ἔχουμε:

$$\sum_{k=1}^v (\alpha_k + \beta_k) = \sum_{k=1}^v \alpha_k + \sum_{k=1}^v \beta_k, \quad (6)$$

ἐνῶ γιά $\xi = 1, \eta = -1$ ἔχουμε:

$$\sum_{k=1}^v (\alpha_k - \beta_k) = \sum_{k=1}^v \alpha_k - \sum_{k=1}^v \beta_k \quad (7)$$

Τέλος, ἀπὸ τὴν (5) γιά $\eta = 0$ λαμβάνουμε:

$$\sum_{k=1}^v \xi \alpha_k = \xi \cdot \sum_{k=1}^v \alpha_k \quad (8)$$

Ἡ (8) ἀποτελεῖ γενίκευση τῆς ιδιότητος: $\xi \cdot (\alpha_1 + \alpha_2) = \xi \alpha_1 + \xi \alpha_2$.

Οἱ ἀποδείξεις τῶν παραπάνω ιδιοτήτων εἶναι πολὺ ἀπλές. Ἡ (6), π.χ., ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς:

$$\sum_{k=1}^v (\alpha_k + \beta_k) = (\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_2 + \beta_2) + \dots + (\alpha_v + \beta_v) =$$

$$= (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_v) + (\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_v) = \sum_{k=1}^v \alpha_k + \sum_{k=1}^v \beta_k.$$

Είναι φανερές ακόμη και οι επόμενες ιδιότητες:

$$i) \text{ Αν } \alpha_k = \alpha, \text{ τότε ισχύει: } \sum_{k=1}^v \alpha_k = v\alpha. \text{ Ειδικά για } \alpha = 1 \text{ είναι: } \sum_{k=1}^v \alpha_k = v \quad (9)$$

$$ii) \sum_{k=1}^v (\alpha + \alpha_k) = v\alpha + \sum_{k=1}^v \alpha_k, \quad iii) \sum_{k=1}^v (\alpha_k - \alpha_{k+1}) = \alpha_1 - \alpha_{v+1} \quad (10)$$

Εφαρμογή. Νά υπολογίσετε το άθροισμα των v πρώτων περιττών αριθμών.

Λύση. Ξέρουμε ότι κάθε περιττός αριθμός είναι της μορφής: $\alpha_k = 2k - 1, k = 1, 2, \dots$, οπότε έχουμε:

$$\sum_{k=1}^v \alpha_k = \sum_{k=1}^v (2k - 1) = \sum_{k=1}^v 2k - \sum_{k=1}^v 1 = 2 \sum_{k=1}^v k - \sum_{k=1}^v 1 = 2 \cdot \frac{v(v+1)}{2} - v = v^2.$$

§ 96. Η έννοια της σειράς - Έννοιες συναφείς με αυτή. — Έστω

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_v, \dots \quad (1)$$

μία ακολουθία πραγματικών αριθμών. Από την ακολουθία (1) σχηματίζουμε μία καινούργια ακολουθία $\sigma_v, v = 1, 2, \dots$ με τον ακόλουθο τρόπο:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \alpha_1 \\ \sigma_2 &= \sigma_1 + \alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ \sigma_3 &= \sigma_2 + \alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ &\dots \dots \dots \\ \sigma_v &= \sigma_{v-1} + \alpha_v = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_v = \sum_{k=1}^v \alpha_k \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Την ακολουθία αυτή, δηλαδή την ακολουθία (σ_v) , της οποίας ο γενικός όρος δίνεται από τον τύπο:

$$\sigma_v = \sum_{k=1}^v \alpha_k \quad (3)$$

(υπενθυμίζουμε ότι: $\sum_{k=1}^1 \alpha_k \equiv \alpha_1$), την ονομάζουμε **ακολουθία των μερικών άθροισμάτων** της ακολουθίας (α_v) .

Παρατηρούμε ότι η ακολουθία (σ_v) είναι τελείως καθορισμένη από την ακολουθία (α_v) . Άλλά και αντιστρόφως, αν θέσουμε:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \sigma_1 \\ \alpha_2 &= \sigma_2 - \sigma_1 \\ \alpha_3 &= \sigma_3 - \sigma_2 \\ &\dots \dots \dots \\ \alpha_v &= \sigma_v - \sigma_{v-1} \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

η ακολουθία (α_v) είναι τελείως καθορισμένη από την ακολουθία (σ_v) .

Ώστε: αν μᾶς δοθεῖ ἡ μία ἀπὸ τὶς δύο ἀκολουθίες (α_v) , (σ_v) , τότε ὀρίζουμε πάντοτε καὶ τὴν ἄλλη. Λέμε τότε ὅτι οἱ δύο ἀκολουθίες (α_v) , (σ_v) σχηματίζουν μία *σειρά πραγματικῶν ἀριθμῶν*. Πιὸ αὐστηρὰ δίνουμε τὸν ἐπόμενο ὀρισμό.

Ὅρισμός. Ὀνομάζουμε *σειρά πραγματικῶν ἀριθμῶν* καὶ τὴ συμβολίζουμε μέ: $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_v + \dots$ ἢ $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots$ ἢ ἀκόμη πιὸ σύντομα μέ:

$\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ καὶ διαβάζουμε: ἄθροισμα τῶν α_v ἀπὸ v ἴσον ἕνα ἕως ἄπειρο, *τό διατεταγμένο ζεύγος* $((\alpha_v), (\sigma_v))$, ὅπου (α_v) ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ $\sigma_v = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_v, v = 1, 2, \dots$

Ἀπὸ τὸν παραπάνω ὀρισμό συνάγουμε τώρα ὅτι ἡ σειρά πραγματικῶν ἀριθμῶν: $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ εἶναι τὸ ζεύγος τῶν δύο ἀπεικονίσεων:

$$\alpha: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}: v \rightarrow \alpha_v \quad (5)$$

$$\sigma: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}: v \rightarrow \sigma_v = \sum_{k=1}^v \alpha_k \quad (6)$$

Κάθε ὅρος τῆς ἀκολουθίας (α_v) λέγεται **ὅρος** τῆς σειρᾶς, ἐνῶ κάθε ὅρος τῆς ἀκολουθίας (σ_v) λέγεται **μερικό ἄθροισμα** ἢ **τμήμα** τῆς σειρᾶς: $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$. Εἰδικότερα ὁ ὅρος α_v , τάξεως v , τῆς ἀκολουθίας (α_v) λέγεται **νιοστός** ἢ **γενικός ὅρος** τῆς σειρᾶς $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$, ἐνῶ ὁ ὅρος σ_v , τάξεως v , τῆς ἀκολουθίας (σ_v) λέγεται **νιοστό μερικό ἄθροισμα** τῆς σειρᾶς.

Στὰ ἐπόμενα θὰ ἀσχοληθοῦμε **μόνο** μέ σειρές πραγμ. ἀριθμῶν. Ἔτσι στὸ ἐξῆς μέ τὸν ὅρο: «σειρά» θὰ ἐννοοῦμε: «σειρά πραγματικῶν ἀριθμῶν».

Σημείωση. Ὄταν σέ μία σειρά $((\alpha_v), (\sigma_v))$ ξεκινᾶμε ἀπὸ μία ἀκολουθία (α_v) στὴν ὁποία λαμβάνεται ὡς δείκτης καὶ τὸ 0, τότε ἡ σειρά αὐτὴ συμβολίζεται μέ $\sum_{v=0}^{\infty} \alpha_v$. Ὄστε:

$\sum_{v=0}^{\infty} \alpha_v \equiv \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots$. Γενικότερα, ἂν ξεκινᾶμε ἀπὸ μία ἀκολουθία (α_v) μέ δείκτες $v \geq$ ἐνός δείκτη v_0 , τότε ἡ ἀντίστοιχη σειρά συμβολίζεται μέ $\sum_{v=v_0}^{\infty} \alpha_v$ καὶ ἔχει νιοστό μερικό ἄθροισμα τό:

$$\sigma_v = \sum_{k=v_0}^v \alpha_k.$$

Παραδείγματα. 1. Ἡ σειρά τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν: Τὸ ζεύγος τῶν δύο ἀκολουθιῶν:

$$(\alpha_v): 1, 2, 3, \dots, v, \dots$$

$$(\sigma_v): 1, 3, 6, \dots, \frac{v(v+1)}{2}, \dots$$

εἶναι μία σειρά, ἡ ὁποία παριστάνεται μέ $\sum_{v=1}^{\infty} v \equiv 1 + 2 + 3 + \dots + v + \dots$ καὶ λέγεται **σειρά τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν**. Τὸ νιοστό μερικό ἄθροισμα αὐτῆς τῆς σειρᾶς εἶναι:

$$\sigma_v = 1 + 2 + 3 + \dots + v = \sum_{k=1}^v k = \frac{v(v+1)}{2}.$$

2. *Η γεωμετρική σειρά.* Έστω μία σειρά της οποίας οι όροι αποτελούν γεωμετρική πρόοδο με πρώτο όρο α και λόγο ω , δηλαδή έστω η σειρά:

$$\sum_{v=0}^{\infty} \alpha \omega^v \equiv \alpha + \alpha\omega + \alpha\omega^2 + \dots$$

Η παραπάνω σειρά λέγεται **γεωμετρική σειρά** και τό νιοστό μερικό άθροισμά της είναι:

$$\sigma_v = \alpha + \alpha\omega + \alpha\omega^2 + \dots + \alpha\omega^v = \frac{\alpha(\omega^{v+1} - 1)}{\omega - 1}, \quad (\omega \neq 1)$$

Έτσι, π.χ., η σειρά $\sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{2^v} \equiv 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$ είναι μία γεωμετρική σειρά με γενικό όρο $\alpha_v = \frac{1}{2^v}$ και νιοστό μερικό άθροισμα: $\sigma_v = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^v} = 2 - \frac{1}{2^v}$ (γιατί;).

3. *Η αριθμητική σειρά.* Έστω μία σειρά της οποίας οι όροι αποτελούν αριθμητική πρόοδο με πρώτο όρο α και λόγο ω , δηλαδή έστω η σειρά:

$$\sum_{v=1}^{\infty} [\alpha + (v-1) \cdot \omega] \equiv \alpha + (\alpha + \omega) + (\alpha + 2\omega) + \dots$$

Η παραπάνω σειρά λέγεται **αριθμητική σειρά** και τό νιοστό μερικό άθροισμά της είναι:

$$\sigma_v \equiv \alpha + (\alpha + \omega) + (\alpha + 2\omega) + \dots + [\alpha + (v-1)\omega] = \frac{2\alpha + (v-1)\omega}{2} \cdot v.$$

4. *Η άρμονική σειρά.* Θεωρούμε τή σειρά με γενικό όρο: $\alpha_v = \frac{1}{v}$, δηλαδή τή σειρά:

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v} \equiv 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{v} + \dots$$

Η παραπάνω σειρά λέγεται **άρμονική σειρά**, γιατί κάθε όρος της (έκτός από τόν πρώτο), δηλαδή κάθε όρος της ακολουθίας (α_v) είναι μέσος άρμονικός του όρου πού προηγείται και του όρου πού έπεται· πράγματι, ισχύει: $\frac{2}{\alpha_v} = \frac{1}{\alpha_{v-1}} + \frac{1}{\alpha_{v+1}}$ για κάθε $v \geq 2$ (βλ. παρατ. β' της § 81), καθόσον έχουμε: $2v = (v-1) + (v+1)$.

Τά μερικά άθροίσματα της άρμονικής σειράς είναι:

$$\sigma_1 = 1, \quad \sigma_2 = 1 + \frac{1}{2}, \quad \sigma_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \dots, \quad \sigma_v = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{v}, \dots$$

Σύμφωνα λοιπόν με τόν όρισμό πού δώσαμε για τίς σειρές, τό ζεύγος τών ακολουθιών:

$$(\alpha_v): 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{v}, \dots$$

$$(\sigma_v): 1, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \dots, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{v}, \dots$$

είναι η άρμονική σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v}$.

5 Θεωρούμε τή σειρά: $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v(v+1)} \equiv \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{v(v+1)} + \dots$

Οί όροι της είναι: $\alpha_1 = \frac{1}{1 \cdot 2}, \alpha_2 = \frac{1}{2 \cdot 3}, \alpha_3 = \frac{1}{3 \cdot 4}, \dots$

Ο γενικός της όρος είναι: $\alpha_v = \frac{1}{v(v+1)} \equiv \frac{(v+1) - v}{v(v+1)} = \frac{1}{v} - \frac{1}{v+1}$.

Τό νιοστό μερικό άθροισμά της είναι:

$$\sigma_v = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v+1}\right) = 1 - \frac{1}{v+1}.$$

§ 97. Σύγκλιση μιᾶς σειράς.— Ἐς θεωρήσουμε τή σειρά τοῦ παραδείγματος 2 τῆς προηγούμενης παραγράφου, δηλαδή τή σειρά:

$$\sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{2^v} \equiv 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^v} + \dots \quad (1)$$

ἡ ὁποία, ὅπως εἶδαμε, ἔχει νιοστό μερικό άθροισμα: $\sigma_v = 2 - \frac{1}{2^v}$.

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι ἡ ἀκολουθία: $2 - \frac{1}{2^v}$, $v = 1, 2, \dots$ ἔχει ὄριο τόν ἀριθμό 2, γιατί $\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{1}{2^v} = 0$ (βλ. πρδ. 1, § 64), καί συνεπῶς ἡ ἀκολουθία (σ_v) συγκλίνει στόν ἀριθμό 2. Ὡστε: $\lim \sigma_v = 2$.

Ἀλλά τί θά μποροῦσε νά σημαίνει ἡ ἔκφραση:

$$\lim \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^v} \right)$$

ἀπό τήν ἀποψη τῆς ἔννοιας τοῦ άθροίσματος, καθόσον ὅταν λέμε στήν ἙΑλγεβρα «άθροισμα» ἔννοοῦμε ὅτι ἔχουμε ἕνα πεπερασμένο πλήθος προσθετέων, ἐνῶ ἀπό τόν τρόπο πού κατασκευάζεται ἡ ἀκολουθία (σ_v) γίνεται φανερό ὅτι: καθώς τό v «αὐξάνει ἀπεριόριστα» τόσο καί «πιο πολλοί» ὅροι τῆς ἀκολουθίας $\left(\frac{1}{2^v}\right)$

προσθέτονται. Παρατηροῦμε λοιπόν ὅτι στήν παραπάνω ἔκφραση ὑποκρύπτεται κάποια ἔννοια «ἀπειροσθροίσματος» ἥ ὅπως λέμε συνήθως «άθροίσματος μέ ἀπειρους ὅρους». Ἐξάλλου ἡ ἔννοια αὐτή ἔχει κιόλας χρησιμοποιηθεῖ στήν § 94 ὅπου ὀρίσαμε τό άθροισμα τῶν ἀπειρων ὄρων μιᾶς ἀπολύτως φθίνουσας γεωμετρικῆς προόδου. Ἐς ἐφαρμόζουμε τώρα καί τόν τύπο (4) τῆς § 94 γιά νά βροῦμε τό «άθροισμα»: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^v} + \dots$. Ἐχουμε:

$$\sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{2^v} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^v} + \dots = \frac{\alpha}{1-\omega} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 = \lim \sigma_v \quad (2)$$

Ἐτσι ἀπό τίς (1) καί (2) μποροῦμε νά γράψουμε:

$$\sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{2^v} = 2 = \lim \sigma_v \equiv \lim \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^v} \right) \quad (3)$$

Ἐστερα ἀπό τά παραπάνω εἶναι πιά φυσικό νά δώσουμε τόν ἐξῆς γενικό ὀρισμό γιά τή σύγκλιση σειράς πραγματικῶν ἀριθμῶν:

Ὑρισμός. Θά λέμε ὅτι μία σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ συγκλίνει στόν πραγματικό ἀριθμό

σ και θά γράφουμε $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v = \sigma$, τότε και μόνο τότε, αν η ακολουθία (σ_v) συγκλίνει στον πραγματικό αριθμό σ .

Για συντομία:

$$\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v = \sigma \iff \lim_{\sigma\sigma} \sigma_v = \lim (a_1 + a_2 + \dots + a_v) \equiv \lim_{k=1}^v \sum \alpha_k = \sigma$$

Ο πραγματικός αριθμός σ λέγεται τότε **άθροισμα** της σειράς $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$.

"Ωστε: **άθροισμα** μιās συγκλίνουσας σειράς $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ ονομάζεται ο αριθμός στον οποίο τείνει τό νιοστό μερικό άθροισμά της: $\sigma_v = a_1 + a_2 + \dots + a_v$.

"Ετσι, π.χ., τό άθροισμα της σειράς του παραδείγματος 5 της προηγούμενης παραγράφου είναι ο αριθμός 1, γιατί $\lim \sigma_v = 1 - \lim \frac{1}{v+1} = 1 - 0 = 1$,

και συνεπώς γράφουμε: $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v(v+1)} = 1$.

"Από τά παραπάνω συμπεραίνουμε τώρα ότι: όταν γράφουμε: $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v = \sigma$, έννοούμε ότι ή σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ είναι συγκλίνουσα και ότι τό άθροισμά της είναι ο πραγματικός αριθμός σ .

"Ας θεωρήσουμε τώρα τή γεωμετρική σειρά:

$$\sum_{v=0}^{\infty} 2^v = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^v + \dots$$

Τό νιοστό μερικό άθροισμα αυτής της σειράς είναι:

$$\sigma_v = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^v = 2^{v+1} - 1$$

Παρατηρούμε ότι: $\lim \sigma_v = +\infty$, καθόσον ή ακολουθία (σ_v) είναι αύξουσα και μή φραγμένη. Σ' αυτή τήν περίπτωση λέμε ότι «ή σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ άπειρίζεται

θετικά» και γράφουμε συμβολικά: $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v = +\infty$.

"Ωστε:

$$\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v = +\infty \iff \lim_{\sigma\sigma} \sigma_v = \lim (a_1 + a_2 + \dots + a_v) = \lim_{k=1}^v \sum \alpha_k = +\infty$$

Μέ ανάλογο τρόπο ορίζουμε:

$$\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v = -\infty \iff \lim_{\sigma\sigma} \sigma_v = \lim (a_1 + a_2 + \dots + a_v) = \lim_{k=1}^v \sum \alpha_k = -\infty$$

Στίς δύο τελευταίες περιπτώσεις λέμε ότι «*η σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ συγκλίνει κατ' έκδοχή*».

Τέλος, υπάρχουν σειρές που δέ συγκλίνουν σέ πραγματικό ἀριθμό, οὔτε ὅμως καί κατ' έκδοχή (δηλαδή σ' ἓνα ἀπό τά σύμβολα $+\infty$ ἢ $-\infty$). Στήν περίπτωση αὐτή λέμε ὅτι ἡ σειρά **ἀποκλίνει** ἢ **κυμαίνεται** (ταλαντεύεται).

Ἔτσι, π.χ., ἡ σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} (-1)^{v+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ ἀποκλίνει, γιατί ἡ ἀκολουθία:

$$\sigma_v = (-1)^2 + (-1)^3 + \dots + (-1)^{v+1} = \begin{cases} 1, & \text{ἂν } v \text{ περιττός} \\ 0, & \text{ἂν } v \text{ ἄρτιος} \end{cases}$$

δέ συγκλίνει σέ πραγματικό ἀριθμό (ἀφοῦ $\sigma_{2v} \rightarrow 0$ καί $\sigma_{2v-1} \rightarrow 1$) οὔτε ὅμως καί κατ' έκδοχή.

Ἀπό τά παραπάνω συμπεραίνουμε τώρα ὅτι:

Γιά οποιαδήποτε σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ πραγματικῶν ἀριθμῶν ἰσχύει μία καί μόνο μία ἀπό τίς ἐπόμενες περιπτώσεις:

- α) Ἡ σειρά ἔχει ἄθροισμα (δηλ. συγκλίνει σέ πραγματικό ἀριθμό)
- β) Ἡ σειρά συγκλίνει κατ' έκδοχή (ἀπειρίζεται θετικά ἢ ἀρνητικά)
- γ) Ἡ σειρά ἀποκλίνει.

Ἀξιόλογη παρατήρηση. Ἄν $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v = \sigma$, τότε $\lim \alpha_v = 0$, γιατί $\alpha_v = \sigma_v - \sigma_{v-1}$ καί $\lim \sigma_v = \lim \sigma_{v-1} = \sigma$ (§ 50).

Πιο γενικά, ἂν θεωρήσουμε τήν ἀκολουθία (δ_v) μέ:

$$\delta_v = \sigma_{2v} - \sigma_v = \alpha_{v+1} + \alpha_{v+2} + \dots + \alpha_{2v}$$

καί ἡ σειρά $((\alpha_v), (\sigma_v))$ συγκλίνει στόν πραγματικό ἀριθμό σ , τότε ἰσχύει: $\lim \delta_v = \sigma - \sigma = 0$, γιατί ἡ (σ_{2v}) εἶναι μία ὑπακολουθία τῆς (σ_v) .

Αὕτῃ ἡ παρατήρηση μᾶς δίνει μία **ἀναγκαία** συνθήκη γιά νά συγκλίνει μία σειρά.

Σχόλια. 1. Ἀπό τά προηγούμενα γίνεται φανερό ὅτι ἡ ἔννοια: *σειρά πραγματικῶν ἀριθμῶν* ἀποτελεῖ γενίκευση τῆς ἀλγεβρικής ἔννοιας: *ἄθροισμα πραγματικῶν ἀριθμῶν* (μέ δύο, τρεῖς κτλ. ὅρους). Γι' αὐτό ἡ σειρά λέγεται πολλές φορές καί «*ἄθροισμα μέ ἀπειρους ὁρους*». Δέν πρέπει ὅμως νά συγχέουμε τήν ἔννοια τῆς σειρᾶς μέ τήν ἀλγεβρική ἔννοια τοῦ ἄθροίσματος δύο ἢ περισσοτέρων πραγματικῶν ἀριθμῶν καί αὐτό γιατί τό ἄθροισμα ἑνός (πεπερασμένου) πλήθους πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἕνας **μονοσημάντως** ὁρισμένος πραγματικός ἀριθμός, ἐνῶ γιά μία σειρά τό «*ἄθροισμα*» δέν ὑπάρχει πάντοτε, καθόσον ἡ σειρά μπορεῖ νά συγκλίνει κατ' έκδοχή ἢ νά ἀποκλίνει. Ἀλλά κι ἂν ἀκόμα ἡ σειρά συγκλίνει, τό ἄθροισμά της δέ βρίσκεται ἀλγεβρικῶς, ἀλλά μέ τή βοήθεια μιᾶς «*ἐξωαλγεβρικής*» ἔννοιας, τῆς ἔννοιας τῆς συγκλίσεως ἀκολουθίας. Ὡστε ὁ ὅρος «*ἄθροισμα*» ἔχει γιά τίς σειρές μία πολύ εἰδική σημασία.

2. Ἐάν μία σειρά $((\alpha_v), (\sigma_v))$ συγκλίνει στόν πραγματικό ἀριθμό σ , τότε μέ τό σύμβολο $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ παριστάνουμε καί τή σειρά καί τό ἄθροισμά της. Δέν πρέπει ὅμως νά συγχέουμε

αυτές τις δύο έννοιες, γιατί με τον όρο «σειρά» έννοούμε τό ζεύγος τών ακολουθιών: $(\alpha_n), (\sigma_n)$, ενώ με τον όρο «άθροισμα σειράς» έννοούμε τό όριο τής ακολουθίας (σ_n) , άν φυσικά τό όριο αυτό ύπάρχει. Ωστε ό ρόλος του συμβόλου $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ είναι διπλός γιά μία συγκλίνουσα σειρά.

*Έτσι, π.χ. άν με τό σύμβολο $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ έννοούμε «σειρά» έχουμε: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$, έγω, άν έννοούμε «άθροισμα», έχουμε: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$.

Τονίσαμε παραπάνω τή διπλή σημασία του συμβόλου $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$, γιατί άν δέν προσέξουμε μπορούμε εύκολα νά φθάσουμε σέ έσφαλμένα συμπεράσματα, όπως εξάλλου φαίνεται καί από τό ακόλουθο παράδειγμα:

*Ας θεωρήσουμε τή σειρά: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$. *Αν είχαμε τό δικαίωμα νά θεωρήσουμε τό «άθροισμα» σ αυτής τής σειράς, τότε:

$$\begin{aligned} \sigma &= 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \\ \eta \quad \sigma &= 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \dots) \end{aligned}$$

δηλαδή $\sigma = 1 - \sigma$, όποτε $2\sigma = 1$ καί συνεπώς $\sigma = \frac{1}{2}$. Αυτό όμως δέν είναι άληθές, γιατί

όπως άποδείξαμε παραπάνω ή σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ άποκλίνει.

§ 98. Μελέτη μερικών χαρακτηριστικών καί χρήσιμων σειρών.— Σ' αυτή τήν παράγραφο μελετάμε ως πρός τή σύγκλιση μερικές χαρακτηριστικές σειρές, πού θά μάς είναι πολύ χρήσιμες στά έπόμενα.

1η. *Αριθμητική σειρά.* Νά μελετήσετε ως πρός τή σύγκλιση τή σειρά:

$$\alpha + (\alpha + \omega) + (\alpha + 2\omega) + \dots + [\alpha + (n-1)\omega] + \dots \quad (\omega \neq 0)$$

γιά τίς διάφορες πραγματικές τιμές του ω .

Λύση. Έχουμε:

$$\sigma_n = \frac{[2\alpha + (n-1)\omega]n}{2} = \frac{1}{2} n^2 \left[\omega \cdot \frac{\omega}{n} + \frac{2\alpha}{n} \right] \Rightarrow \lim \sigma_n = \begin{cases} +\infty, & \text{άν } \omega > 0 \\ -\infty, & \text{άν } \omega < 0 \end{cases}$$

"Ωστε: ή σειρά τής οποίας οί όροι αποτελούν αριθμητική πρόοδο συγκλίνει κατ' έκδοχή, άκριβέστερα άπειρίζεται θετικά, άν ή αντίστοιχη πρόοδος είναι αύξουσα ($\omega > 0$) καί άρνητικά άν ή πρόοδος είναι φθίνουσα ($\omega < 0$).

2η. *Γεωμετρική σειρά.* Νά μελετήσετε ως πρός τή σύγκλιση τή σειρά:

$$\alpha + \alpha\omega + \alpha\omega^2 + \dots + \alpha\omega^{n-1} + \dots \quad (\alpha \neq 0).$$

γιά τίς διάφορες πραγματικές τιμές του ω .

Λύση. Γιά τό άθροισμα τών n πρώτων όρων τής σειράς αυτής έχουμε:

$$\sigma_n = \alpha + \alpha\omega + \dots + \alpha\omega^{n-1} = \begin{cases} n\alpha, & \text{άν } \omega = 1 \\ \alpha \cdot \frac{\omega^n - 1}{\omega - 1}, & \text{άν } \omega \neq 1. \end{cases}$$

Διακρίνουμε τώρα τίς παρακάτω περιπτώσεις:

α') *Αν $|\omega| < 1$, δηλαδή: $-1 < \omega < 1$, τότε $\omega^n \rightarrow 0$ καί συνεπώς $\lim \sigma_n = \frac{\alpha}{1-\omega}$.

*Ωστε: *ή γεωμετρική σειρά της οποίας οι όροι αποτελούν απολύτως φθίνουσα γεωμετρική πρόοδο συγκλίνει στον πραγματικό αριθμό $\frac{a}{1-\omega}$.*

β') *Αν $\omega > 1$, τότε επειδή $\omega^n \rightarrow +\infty$ (βλ. πρδ. 5, § 67) και $\omega - 1 > 0$ έχουμε :

$$\lim \sigma_n = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } \alpha > 0 \\ -\infty, & \text{αν } \alpha < 0 \end{cases}$$

γ') *Αν $\omega = 1$, τότε $\sigma_n = n\alpha$, οπότε $\lim \sigma_n = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } \alpha > 0 \\ -\infty, & \text{αν } \alpha < 0 \end{cases}$

δ') *Αν $\omega \leq -1$, τότε δεν υπάρχει τό $\lim \omega^n$ (βλ. πρδ. 5, § 67), οπότε δεν υπάρχει και τό $\lim \sigma_n$ και συνεπώς ή γεωμ. σειρά αποκλίνει.

Συνοψίζοντας τά παραπάνω έχουμε:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a\omega^{n-1} \equiv a + a\omega + a\omega^2 + \dots + a\omega^{n-1} + \dots = \begin{cases} \frac{a}{1-\omega}, & \text{αν } |\omega| < 1 \\ +\infty, & \text{αν } \omega \geq 1 \text{ και } a > 0 \\ -\infty, & \text{αν } \omega \geq 1 \text{ και } a < 0 \\ \text{αποκλίνει, αν } \omega \leq -1. \end{cases}$$

*Ετσι ή σειρά: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \equiv \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$, συγκλίνει στον πραγματικό αριθμό:

$$\frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}, \text{ επειδή } |\omega| = \frac{1}{3} < 1.$$

*Αντιθέτως ή σειρά:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots, \text{ αποκλίνει, επειδή } \omega = -1.$$

3η. *Αρμονική σειρά. Νά αποδείξετε ότι ή άρμονική σειρά :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \equiv 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

δέ συγκλίνει μέσα στό R.

*Απόδειξη. *Εστω ότι ή άρμονική σειρά συγκλίνει σέ πραγματικό αριθμό, τότε, σύμφωνα μέ τήν παρατήρηση τής προηγούμενης παραγράφου, θά έχουμε: $\lim \delta_n = 0$, όπου $\delta_n = \sigma_{2n} - \sigma_n$ και $\sigma_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$.

*Αλλά:

$$\delta_n = \sigma_{2n} - \sigma_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

και συνεπώς: $\lim \delta_n = 0 \geq \frac{1}{2}$. Αυτό όμως δεν είναι άληθές.

*Αρα ή άρμονική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ δέ συγκλίνει σέ πραγματικό αριθμό.

Σημείωση. Για τήν άρμονική σειρά ισχύει: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$. Πράγματι, ή άκολουθία:

$\sigma_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$ είναι μία γνησίως αύξουσα άκολουθία θετικών

δρων, καθόσον: $\sigma_{v+1} - \sigma_v = \frac{1}{v+1} > 0, \forall v \in \mathbf{N}$, 'Εξάλλου ή (σ_v) δέν είναι φραγμένη άνω, γιατί άλλιώς ή (σ_v) ως μονότονη (γνησίως αύξουσα) καί φραγμένη, σύμφωνα μέ τό γνωστό άξίωμα (§ 66), θά ήταν συγκλίνουσα στό $\mathbf{R}$, όποτε καί ή σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v}$ θά έπρεπε νά συγκλίνει μέσα στό $\mathbf{R}$, πράγμα όμως πού δέν άληθεύει, όπως άποδείξαμε παραπάνω. Άρα ή (σ_v) δέν είναι φραγμένη πρós τά άνω καί έπειδή είναι καί (γνησίως) αύξουσα, έπεται ότι: $\sigma_v \rightarrow +\infty$.

*Άρα:
$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v} = \lim \sigma_v = \lim \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{v} \right) = +\infty.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

*Ομάδα Α'. 210. Νά εκφράσετε συναρτήσει τοῦ v τά παρακάτω άθροίσματα:

$$\alpha) \sum_{k=1}^v k(k+1), \quad \beta) \sum_{k=1}^v (k^2 + 5k + 3), \quad \gamma) \sum_{k=1}^v k(k+2)(k+4).$$

211. Νά άποδείξετε ότι: $\sum_{k=1}^v k^3 = \frac{v^4}{4} + \frac{v^3}{2} + \frac{v^2}{4}.$

212. Νά γράψετε τούς έπτά πρώτους όρους τών παρακάτω σειρών:

$$\alpha) \sum_{v=1}^{\infty} \frac{v}{v^2+1}, \quad \beta) \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{v}}, \quad \gamma) \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1+v}{1+v^2}, \quad \delta) \sum_{v=1}^{\infty} (-1)^v \cdot \frac{v}{v(v+1)}$$

213. Νά βρείτε τό άθροισμα τών έπόμενων σειρών:

$$\alpha) \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{3^v}, \quad \beta) \sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^v, \quad \gamma) \sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^v, \quad \delta) \sum_{v=1}^{\infty} \frac{3}{10^v}.$$

214. Νά προσδιορίσετε τή σειρά τής όποιás ή άκολουθία τών μερικών άθροισμάτων είναι:

$$\alpha) \left(1 - \frac{1}{2^v} \right), v = 1, 2, \dots, \quad \beta) \frac{v}{v+1}, v = 1, 2, \dots$$

215. Έχοντας ύπόψη τήν ταυτότητα: $\frac{1}{v(v-1)} \equiv \frac{1}{v-1} - \frac{1}{v}, \forall v \geq 2$ νά βρείτε τό άθροισμα τής σειράς $\sum_{v=2}^{\infty} \frac{1}{v(v-1)}.$

*Ομάδα Β'. 216. Άν $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_v$ καί $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_v$ είναι πραγματικοί αριθμοί, νά άποδείξετε τήν άνισότητα τών Cauchy-Schwarz:

$$\left(\sum_{k=1}^v \alpha_k \beta_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^v \alpha_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^v \beta_k^2 \right).$$

217. Άν $v \in \mathbf{N}$, νά άποδείξετε ότι:

$$\left[\sum_{k=1}^v \frac{1}{k} \right]^2 \leq v \left(2 - \frac{1}{v} \right).$$

218. Έχοντας ύπόψη τήν ταυτότητα: $\frac{1}{4v^2-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2v-1} - \frac{1}{2v+1} \right)$ νά άποδείξετε ότι: $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{4v^2-1} = \frac{1}{2}.$

219. Άν (α_v) καί (β_v) είναι δύο άκολουθίες τέτοιες, ώστε: $\alpha_v = \beta_v - \beta_{v+1}, \forall v \in \mathbf{N}$, νά άποδείξετε ότι: ή σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ συγκλίνει, τότε καί μόνο τότε, άν ή άκολουθία (β_v) συγκλίνει. Άν μάλιστα $\lim \beta_v = l$, τότε $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v = \beta_1 - l.$

220. Νά μελετήσετε ως πρὸς τὸ μονότονο καὶ τὴ σύγκλιση τὴν ἀκολουθία (α_n) με γε-
νικὸ ὅρο:

$$\alpha_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + k}.$$

Στὴ συνέχεια νά βρεῖτε, ἂν ὑπάρχει, τὸ ὅριό της. Τέλος, νά βρεῖτε ἓνα $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο,
ὥστε γιὰ κάθε $n \geq n_0$ νά ἰσχύει: $|\alpha_n - 1| < 0,01$.

Ὑπόδειξη. Νά παρατηρήσετε ὅτι: $\frac{1}{k^2 + k} = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{(k+1)-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΣΕΙΡΩΝ ΠΡΑΓΜ. ΑΡΙΘΜΩΝ

Ἀπὸ ὅσα ἀναπτύξαμε στὶς προηγούμενες παραγράφους γιὰ τὶς σειρές, γί-
νεται φανερό ὅτι ἡ σύγκλιση μιᾶς σειρᾶς $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ ἀνάγεται στὴ σύγκλιση τῆς ἀκο-
λουθίας $\sigma_v = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_v$, $v = 1, 2, \dots$. Συνεπῶς ἀπὸ ιδιότητες πού
ἀναφέρονται στὴ σύγκλιση ἀκολουθιῶν θά προκύπτουν ιδιότητες γιὰ τὶς σει-
ρές. Ἔτσι σ' αὐτὴ τὴν ἐνότητα διατυπώνουμε καὶ ἀποδεικνύουμε προτάσεις
πού οἱ πιὸ πολλές εἶναι ἄμεσες συνέπειες τῶν γνωστῶν ιδιοτήτων πού ξέρουμε
γιὰ τὶς συγκλίνουσες ἀκολουθίες, γι' αὐτὸ οἱ πιὸ πολλές ἀποδείξεις δίνονται μέ
κάποια συντομία.

§ 99. Ἰδιότητα I.—Ἐστω $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ μία σειρά πραγματικῶν ἀριθμῶν, τότε :

α') ἂν ἡ σειρά συγκλίνει, τότε $\lim \alpha_v = 0$,

β') ἂν $\lim \alpha_v \neq 0$, τότε ἡ σειρά δὲ συγκλίνει στό $\mathbb{R}$,

γ') ἂν ἡ σειρά συγκλίνει, τότε ἡ ἀκολουθία $\sigma_v = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_v$,
 $v = 1, 2, \dots$ τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων εἶναι φραγμένη.

Ἀπόδειξη.

α') Ἐστω $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v = \alpha$, τότε $\lim \sigma_v = \alpha$ καὶ $\alpha_v = \sigma_v - \sigma_{v-1}$, $v = 2, 3, \dots$

Ὅποτε: $\lim \alpha_v = \lim(\sigma_v - \sigma_{v-1}) = \lim \sigma_v - \lim \sigma_{v-1} = \alpha - \alpha = 0$.

β') Ἐστω ὅτι $\lim \alpha_v \neq 0$ καὶ ὅτι ἡ σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ συγκλίνει, τότε, σύμφωνα
μέ τὴν α') θά εἶχαμε: $\lim \alpha_v = 0$. Αὐτὸ ὅμως εἶναι ἄτοπο.

γ') Ἀν ἡ σειρά συγκλίνει, τότε ἡ ἀκολουθία (σ_v) ὡς συγκλίνουσα εἶναι
φραγμένη (§ 51).

Παρατήρηση. Οἱ συνθήκες α') καὶ γ') τῆς παραπάνω ιδιότητος εἶναι ἀναγκαῖες, ὅχι
ὁμως καὶ ἰκανές. Ἐτσι ὑπάρχουν σειρές πού δὲ συγκλίνουν στό $\mathbb{R}$, γιὰ τὶς ὁποῖες ἡ α') ἢ
ἡ γ') ἰσχύει. Π.χ. $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v} = +\infty$, ἂν καὶ $\lim \alpha_v = \lim \frac{1}{v} = 0$. Ἐπίσης ἡ σειρά

$\sum_{v=1}^{\infty} (-1)^{v+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ ἀποκλίνει, ἂν καὶ ἡ ἀκολουθία (σ_v) τῶν μερικῶν
ἀθροισμάτων της εἶναι φραγμένη, καθόσον $|\sigma_v| \leq 1$, $\forall v \in \mathbb{N}$.

Προσέξτε! ἂν $\lim \alpha_v \neq 0$, τότε αὐτὴ εἶναι μία ἰκανὴ συνθήκη γιὰ νά μὴ συγκλίνει στό $\mathbb{R}$.

ή σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$. Έπομένως θα προχωρήσουμε στην μελέτη ως προς τη σύγκλιση μιας σειράς μόνο εφόσον ο γενικός της όρος συγκλίνει στο μηδέν. Έτσι, π.χ. διακρίνουμε άμέσως ότι η σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{2v+1}{3v+5}$ δέ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό, επειδή

$$\lim \alpha_v = \lim \frac{2v+1}{3v+5} = \frac{2}{3} \neq 0.$$

Σχόλιο. Η πρόταση: $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ συγκλίνει στο $\mathbf{R} \implies \alpha_v \rightarrow 0$ θα μᾶς είναι πολλές φορές

χρήσιμη προκειμένου να αποδείξουμε ότι μία ακολουθία (α_v) είναι μηδενική. Για τὸ σκοπὸ αὐτό, δηλαδή για να αποδείξουμε ότι $\alpha_v \rightarrow 0$, ἀρκεί να αποδείξουμε ότι ἡ σειρά μὲ γενικό ὄρο τὸ γενικό ὄρο τῆς ἀκολουθίας (α_v) συγκλίνει στο $\mathbf{R}$, ὁπότε, σύμφωνα μὲ τὴν ιδιότητα I, περίπτωση α'), θα εἶναι: $\lim \alpha_v = 0$.

§ 100. 'Ιδιότητα II.—'Αν $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v = \alpha$ καὶ $\sum_{v=1}^{\infty} \beta_v = \beta$, ὅπου $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, τότε ἰσχύει:

$$\sum_{v=1}^{\infty} (\xi \alpha_v + \eta \beta_v) = \xi \alpha + \eta \beta$$

γιά ὅποιουσδήποτε πραγματικούς ἀριθμούς ξ καὶ η .

Ἀπόδειξη. Ἡ ἀπόδειξη τῆς παραπάνω ιδιότητας εἶναι ἄμεση συνέπεια τοῦ πορίσματος τῆς § 59 καὶ τῆς σχέσεως (5) τῆς § 95. Πράγματι, ἂν θέσουμε:

$$\sigma_v = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_v = \sum_{k=1}^v \alpha_k, \quad \tau_v = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_v = \sum_{k=1}^v \beta_k \quad \text{καὶ}$$

$$s_v = (\xi \alpha_1 + \eta \beta_1) + (\xi \alpha_2 + \eta \beta_2) + \cdots + (\xi \alpha_v + \eta \beta_v) = \sum_{k=1}^v (\xi \alpha_k + \eta \beta_k), \quad \text{ἔχουμε:}$$

$$s_v = \sum_{k=1}^v (\xi \alpha_k + \eta \beta_k) = \xi \sum_{k=1}^v \alpha_k + \eta \sum_{k=1}^v \beta_k = \xi \cdot \sigma_v + \eta \cdot \tau_v \quad \text{καὶ συνεπῶς:}$$

$$s_v \rightarrow \xi \alpha + \eta \beta, \quad \text{ἀφοῦ } \sigma_v \rightarrow \alpha \text{ καὶ } \tau_v \rightarrow \beta \implies \xi \sigma_v + \eta \tau_v \rightarrow \xi \alpha + \eta \beta.$$

Ἀπὸ τὴν παραπάνω πρόταση παίρνουμε τὶς ἐπόμενες *ειδικές περιπτώσεις*:

(i) Γιά $\xi \in \mathbf{R}$ καὶ $\eta = 0$ ἰσχύει ἡ πρόταση:

$$\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v = \alpha \implies \sum_{v=1}^{\infty} \xi \alpha_v = \xi \alpha = \xi \sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v \quad (1)$$

(ii) Γιά $\xi = \eta = 1$ ἰσχύει ἡ πρόταση:

$$\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v = \alpha \wedge \sum_{v=1}^{\infty} \beta_v = \beta \implies \sum_{v=1}^{\infty} (\alpha_v + \beta_v) = \alpha + \beta = \sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v + \sum_{v=1}^{\infty} \beta_v \quad (2)$$

(iii) Γιά $\xi = 1$ καὶ $\eta = -1$ ἰσχύει ἡ πρόταση:

$$\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v = \alpha \wedge \sum_{v=1}^{\infty} \beta_v = \beta \implies \sum_{v=1}^{\infty} (\alpha_v - \beta_v) = \alpha - \beta = \sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v - \sum_{v=1}^{\infty} \beta_v \quad (3)$$

Σημείωση. Οἱ σειρές: $\sum_{v=1}^{\infty} (\alpha_v + \beta_v)$ καὶ $\sum_{v=1}^{\infty} (\alpha_v - \beta_v)$ ὀνομάζονται ἀντιστοίχως **ἄθροισμα** καὶ **διαφορά** τῶν δύο σειρῶν $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ καὶ $\sum_{v=1}^{\infty} \beta_v$.

Σχόλιο. Από τις ειδικές περιπτώσεις (i), (ii) και (iii) βλέπουμε ότι οι συγκλίνουσες σειρές συμπεριφέρονται όπως και τα πεπερασμένα άθροισματά. Έτσι οι (1), (2) και (3) απο-τελούν γενικεύσεις των (8), (6) και (7) αντίστοιχως της § 95.

Παρατήρηση. Το αντίστροφο της ιδιότητας II, όπως και στις ακολουθίες (βλ. παρατ. 3, § 57) δεν αληθεύει πάντοτε, δηλαδή αν το άθροισμα δύο σειρών είναι συγκλίνουσα σειρά, αυτό δε συνεπάγεται κατ' ανάγκη ότι καθεμία απ' αυτές είναι συγκλίνουσα σειρά. Είναι δυνατό μάλιστα να μη συγκλίνει ούτε η μία ούτε η άλλη. Π.χ., αν πάρουμε τις σειρές:

$$\sum_{v=1}^{\infty} (-1)^v \text{ και } \sum_{v=1}^{\infty} (-1)^{v-1} \text{ έχουμε: } \sum_{v=1}^{\infty} [(-1)^v + (-1)^{v-1}] = 0$$

και όμως καμία απ' αυτές δε συγκλίνει.

§ 101. Ίδιότητα III.—“Αν η σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$ συγκλίνει στο R και η $\sum_{v=1}^{\infty} b_v$ δε συγκλίνει στο R , τότε η σειρά: $\sum_{v=1}^{\infty} (a_v + b_v)$ δε συγκλίνει στο R .

Υπόδειξη. Η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια της ειδικής περιπτώσεως (iii) της προηγούμενης παραγράφου, αρκεί να υποτεθεί ότι η σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} (a_v + b_v)$ συγκλίνει στο R και να ληφθεί υπόψη ότι: $b_v = (a_v + b_v) - a_v$.

Παράδειγμα. Η σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{1}{v} + \frac{1}{2^v} \right)$ δε συγκλίνει στο R , έπειδή η σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v}$ άπειρίζεται θετικά και η σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{2^v}$ συγκλίνει.

Παρατήρηση. “Αν οι σειρές $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$ και $\sum_{v=1}^{\infty} b_v$ δε συγκλίνουν στο R , αυτό δε συνεπάγεται κατ' ανάγκη ότι και η σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} (a_v + b_v)$ δε συγκλίνει στο R . Αυτό φαίνεται εξάλλου και από τό παράδειγμα της παρατηρήσεως της § 100.

§ 102. Ίδιότητα IV.—“Αν μία σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$ συγκλίνει και έχει άθροισμα a , τότε και η σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} a_{v+p} \equiv a_{p+1} + a_{p+2} + a_{p+3} + \dots$, ή όποια προκύπτει από την $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$ αν παραλείψουμε τούς p πρώτους όρους της, συγκλίνει αλλά τό άθροισμά της είναι ό αριθμός: $a - (a_1 + a_2 + \dots + a_p)$.

Απόδειξη. Έστω ότι είναι σ_v και τ_v τά νιοστά μερικά άθροισματά των σειρών $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$ και $\sum_{v=1}^{\infty} a_{v+p}$ αντίστοιχως. Για κάθε $v \in \mathbb{N}$ έχουμε:

$$\sigma_v = a_1 + a_2 + \dots + a_v \text{ και } \tau_v = a_{p+1} + a_{p+2} + \dots + a_{p+v} \quad (1)$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\sigma_{v+p} = (a_1 + a_2 + \dots + a_p) + (a_{p+1} + a_{p+2} + \dots + a_{p+v}) = s + \tau_v \quad (2)$$

όπου s έχουμε ονομάσει τό (πεπερασμένο) άθροισμα: $a_1 + a_2 + \dots + a_p \equiv s$.

Ἀπό τή (2), γιά κάθε $v \in \mathbb{N}$, ἔχουμε: $\tau_v = \sigma_{v+p} - s$ (3)

Ἀπό τήν ὑπόθεση ἔχουμε ὅτι: $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v = \alpha$, ὁπότε $\lim \sigma_v = \alpha$ καί συνεπῶς (§50)

$\lim \sigma_{v+p} = \alpha$. Τότε ὅμως ἀπό τήν (3) λαμβάνουμε:

$$\lim \tau_v = \lim (\sigma_{v+p} - s) = \lim \sigma_{v+p} - s = \alpha - s$$

δηλαδή: $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_{v+p} = \alpha - s$, ὅπου $s = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p$.

Παρατηρήσεις. α). Ἐχοντας ὑπόψη τήν ἰσοδυναμία (§ 50): $\sigma_v \rightarrow \alpha \iff \sigma_{v+p} \rightarrow \alpha$ καί τή (2) ἀποδεικνύουμε ἀμέσως τό ἀντίστροφο τῆς παραπάνω ιδιότητας, δηλαδή: ἂν ἡ σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_{v+p}$ συγκλίνει στό R καί προσθέσουμε στήν ἀρχή της ἓνα πεπερασμένο πλῆθος ὀρων, τότε ἡ σειρά πού θά προκύψει θά συγκλίνει ἐπίσης στό R (τό ἄθροισμα θά εἶναι βέβαια διαφορετικό).

Πιο γενικά ἰσχύει ἡ πρόταση:

Ἄν μία σειρά συγκλίνει στό R , τότε καί ἡ σειρά πού προκύπτει ἀπ' αὐτή ἂν διαγράψουμε ἢ ἐπισυνάψουμε ἓνα πεπερασμένο πλῆθος ὀρων (ὅποιοιδήποτε) συγκλίνει ἐπίσης στό R .

Πράγματι, ἂν ἀπό τή συγκλίνουσα σειρά: $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_v + \dots$ διαγράψουμε k ὅποιοιδήποτε ὀρους, οἱ ὅροι τῆς σειρᾶς αὐτῆς ἀπό κάποιο δείκτη p καί μετὰ θά παραμείνουν ἀμετάβλητοι καί συνεπῶς ἡ σειρά: $\alpha_p + \alpha_{p+1} + \dots$ θά συγκλίνει στό R . Ἄν τώρα στήν τελευταία σειρά προσθέσουμε πρὶν ἀπὸ τό α_p ὅσους ὀρους ἔμειναν μετὰ ἀπὸ τή διαγραφή τῶν k ὀρων, θά προκύψει μία σειρά, ἡ ὁποία, σύμφωνα μέ τὰ παραπάνω, θά συγκλίνει στό R .

β). Ἀποδεικνύεται ὅτι: ἂν μία ἀπὸ τίς δύο σειρές $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ καί $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_{v+p}$ συγκλίνει κατ' ἐκδοχή ἢ ἀποκλίνει, τότε τό ἴδιο συμβαίνει καί γιά τήν ἄλλη. Ἔτσι, π.χ. ἡ σειρά $\sum_{v=11}^{\infty} \frac{1}{v} = \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \dots$, ἡ ὁποία προκύπτει ἀπὸ τήν ἁρμονική σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v}$ ἂν παραλείψουμε τοὺς δέκα πρώτους ὀρους της, ἀπειρίζεται θετικά.

§ 103. Σειρές μέ ὀρους μὴ ἀρνητικούς.—Στὶς ἐπόμενες παραγράφους αὐτοῦ τοῦ κεφαλαίου θά ἀσχοληθοῦμε εἰδικότερα μέ τή μελέτη σειρῶν, οἱ ὁποῖες προκύπτουν ἀπὸ ἀκολουθίες (α_v) γιά τίς ὁποῖες ἰσχύει: $\alpha_v \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{N}$.

Σέ μιά τέτοια σειρά:

$$\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_v + \dots$$

ἡ ἀκολουθία (σ_v) τῶν μερικῶν ἄθροισμάτων εἶναι πάντοτε αὐξουσα, γιατί: $\sigma_{v+1} - \sigma_v = (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_v + \alpha_{v+1}) - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_v) = \alpha_{v+1} \geq 0, \quad \forall v \in \mathbb{N}$.

Γιά τίς σειρές μέ ὀρους μὴ ἀρνητικούς ἰσχύουν οἱ ἐπόμενες προτάσεις:

§ 104. Πρόταση.—Ἐστω $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ μία σειρά μέ ὀρους μὴ ἀρνητικούς, τότε

α) $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ συγκλίνει στό $R \iff (\sigma_v)$ εἶναι φραγμένη στό R

β) $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ άπειρίζεται θετικά $\iff (\sigma_v)$ δέν είναι φραγμένη στό $\mathbf{R}$.

Ἀπόδειξη. α) Ἄν ἡ σειρά συγκλίνει, τότε ἡ ἀκολουθία (σ_v) εἶναι φραγμένη (§ 99, γ'). Ἔστω ὅτι ἡ ἀκολουθία (σ_v) τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων εἶναι φραγμένη στό $\mathbf{R}$, τότε, ἐπειδή ἡ (σ_v) εἶναι καί αὐξουσα, σύμφωνα μέ τό γνωστό ἀξίωμα (§ 66) ἡ (σ_v) θά συγκλίνει σέ κάποιον πραγματικό ἀριθμό, ὁπότε καί ἡ σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ συγκλίνει στό $\mathbf{R}$.

β) Ἄν $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v = +\infty$ καί ὑποθέσουμε ὅτι ἡ (σ_v) εἶναι φραγμένη στό $\mathbf{R}$, τότε, σύμφωνα μέ τό προηγούμενο θά ἔπρεπε ἡ $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ νά ἦταν συγκλίνουσα στό $\mathbf{R}$. Αὐτό ὅμως εἶναι ἄτοπο.

Ἀντιστρόφως, ἂν ἡ (σ_v) δέν εἶναι φραγμένη στό $\mathbf{R}$, τότε ἐπειδή αὐτή εἶναι καί αὐξουσα, σύμφωνα μέ τήν παρατήρηση τῆς § 66 θά ἀπειρίζεται θετικά, ὁπότε καί ἡ $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ θά ἀπειρίζεται θετικά.

Ἀξιόλογη παρατήρηση. Ἀπό τήν παραπάνω πρόταση συμπεραίνουμε ὅτι: κάθε σειρά μέ ὅρους μὴ ἀρνητικούς ἢ θά συγκλίνει στό $\mathbf{R}$ (ἀκριβέστερα στό $\mathbf{R}_0^+$) ἢ θά ἀπειρίζεται θετικά. Ἄν τώρα γιά μία σειρά ἰσχύει: $\alpha_v \geq 0$ **τελικά** γιά ὅλους τοὺς δείκτες, τότε θά ὑπάρχει δείκτης ρ , ὥστε νά ἰσχύει $\alpha_{v+\rho} \geq 0 \quad \forall v \in \mathbf{N}$, ὁπότε ἂν ἡ σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_{v+\rho} = +\infty$, τότε (βλ. παρατ. β', § 102) καί ἡ σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v = +\infty$. Ἄν ὅμως $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_{v+\rho} = \alpha$, ὅπου $\alpha \in \mathbf{R}$, τότε τό

ἀθροισμά της $\alpha \geq 0$, ἐνῶ τό ἀθροισμα τῆς $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v = \alpha + s$, ὅπου $s = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_\rho$, μπορεῖ νά εἶναι καί ἀρνητικός ἀριθμός (γιατί;).

Προσέξτε τή διαφορά: ἂν $\alpha_v \geq 0$ **τελικά** γιά ὅλους τοὺς δείκτες καί ὑπάρχει τό $\lim \alpha_v$, τότε ἰσχύει: $\lim \alpha_v \geq 0$, ἐνῶ ἂν μία σειρά ἔχει, **τελικά**, τοὺς ὅρους της ≥ 0 , τότε τό ἀθροισμά της δέν εἶναι ἀναγκαστικά ≥ 0 .

Ἀποδεικνύουμε ἀμέσως πιο κάτω μία βασική πρόταση, μέ τή βοήθεια τῆς ὁποίας μπορούμε νά ἐξακριβώνουμε σέ πολλές περιπτώσεις, ἂν μία σειρά μέ ὅρους μὴ ἀρνητικούς συγκλίνει ἢ ἀπειρίζεται θετικά **συγκρίνοντάς** την μέ ἄλλη, γνωστῆς φύσεως, σειρά.

§ 105. Πρόταση. (Κριτήριο συγκρίσεως σειρῶν).— Ἄν $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ καί $\sum_{v=1}^{\infty} \beta_v$ εἶναι δύο σειρές τέτοιες, ὥστε: $0 \leq \alpha_v \leq \beta_v$, γιά κάθε $v \in \mathbf{N}$, τότε:

α) $\sum_{v=1}^{\infty} \beta_v$ συγκλίνει στό $\mathbf{R} \implies \sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ συγκλίνει στό $\mathbf{R}$

β) $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v = +\infty \implies \sum_{v=1}^{\infty} \beta_v = +\infty$.

***Απόδειξη.** Έστω ότι είναι σ_n και τ_n τὰ νιοστά μερικά άθροίσματα τῶν
σειρῶν $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ καί $\sum_{v=1}^{\infty} \beta_v$ αντιστοίχως. Ἐπειδή $\alpha_v \leq \beta_v \quad \forall \quad v \in \mathbb{N}$, ἔχουμε ὅτι:

$$\sigma_v = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_v \leq \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_v = \tau_v, \quad \forall \quad v \in \mathbb{N} \quad (1)$$

α) Ἐστω ὅτι $\sum_{v=1}^{\infty} \beta_v = \beta \in \mathbb{R}$, τότε, σύμφωνα μέ τήν πρόταση α) τῆς προη-
γούμενης παραγράφου, ἡ ἀκολουθία (τ_v) εἶναι φραγμένη στό $\mathbb{R}$: τότε, ὅμως,
ἐπειδή $\sigma_v \leq \tau_v, \quad \forall \quad v \in \mathbb{N}$, ἔπεται ὅτι καί ἡ (σ_v) εἶναι φραγμένη στό $\mathbb{R}$ καί ἐπειδή
 $\alpha_v \geq 0, \quad \forall \quad v \in \mathbb{N}$, σύμφωνα πάλι μέ τήν προηγούμενη πρόταση, ἡ σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$
συγκλίνει στό $\mathbb{R}$.

β) Ἄν $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v = +\infty$ καί ὑποθέσουμε ὅτι ἡ $\sum_{v=1}^{\infty} \beta_v$ συγκλίνει στό $\mathbb{R}$, τότε,
σύμφωνα μέ τό προηγούμενο, θά ἔπρεπε ἡ $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ νά ἦταν συγκλίνουσα στό $\mathbb{R}$.
Αὐτό ὅμως εἶναι ἄτοπο. Ἡ $\sum_{v=1}^{\infty} \beta_v$, λοιπόν, ὡς σειρά μέ ὅρους μὴ ἀρνητικούς,
ἀφοῦ δέ συγκλίνει στό $\mathbb{R}$, θά ἀπειρίζεται θετικά.

Παρατηρήσεις. 1) Στήν περίπτωση α) τῆς παραπάνω προτάσεως ὄχι μόνο ἡ $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$
συγκλίνει στό $\mathbb{R}$, ἀλλά καί ἰσχύει: $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v \leq \sum_{v=1}^{\infty} \beta_v$ (γιατί;).

2) Ἡ παραπάνω πρόταση ἰσχύει καί στήν περίπτωση πού οἱ σχέσεις: $0 \leq \alpha_v \leq \beta_v$
ἰσχύουν (ὄχι γιά κάθε $v \in \mathbb{N}$, ἀλλά) **τελικά** γιά κάθε $v \in \mathbb{N}$.

§ 106. Πόρισμα. (ὀριζήκ κριτήριο συγκρίσεως).— Ἄν $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ καί $\sum_{v=1}^{\infty} \beta_v$ εἶναι

δύο σειρές μέ θετικούς ὅρους καί $\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\alpha_v}{\beta_v} = l$, ὅπου $0 < l < +\infty$, τότε:

α) $\sum_{v=1}^{\infty} \beta_v$ συγκλίνει στό $\mathbb{R} \iff \sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ συγκλίνει στό $\mathbb{R}$

β) $\sum_{v=1}^{\infty} \beta_v = +\infty \iff \sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v = +\infty$.

***Απόδειξη.** Ἐχουμε: $\frac{\alpha_v}{\beta_v} \rightarrow l, (0 < l < +\infty)$, ὁπότε: γιά $\varepsilon = \frac{1}{2} l > 0$,
υπάρχει δείκτης $v_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος, ὥστε: γιά κάθε $v \geq v_0$ ἰσχύει:

$$\left| \frac{\alpha_v}{\beta_v} - l \right| < \frac{l}{2} \Rightarrow 0 < l - \frac{l}{2} < \frac{\alpha_v}{\beta_v} < l + \frac{l}{2} \Rightarrow 0 < \frac{1}{2} l < \frac{\alpha_v}{\beta_v} < \frac{3}{2} l \quad (1)$$

Ἀπό τήν (1), ἐπειδή $\beta_v > 0 \quad \forall \quad v \in \mathbb{N}$, ἔχουμε **τελικά** γιά κάθε $v \in \mathbb{N}$:

$$0 < \frac{1}{2} l \cdot \beta_v < \alpha_v < \frac{3}{2} l \cdot \beta_v \quad (2)$$

‘Από τη (2), με εφαρμογή του κριτηρίου συγκρίσεως και έχοντας υπόψη την παρατήρηση 2 της § 105 και τις παρατηρήσεις της § 102, αποδεικνύουμε άμέσως τις προτάσεις α) και β).

‘Εφαρμογές. 1η : ‘Η σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{v}{2^{v(v+1)}}$ συγκλίνει, έπειδή: $\frac{v}{2^{v(v+1)}} < \frac{1}{2^v}, v = 1, 2, \dots$

καί ή $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{2^v}$ συγκλίνει ως γεωμετρική σειρά μέ λόγο $\omega = \frac{1}{2} < 1$.

2η : ‘Εστω μία άκολουθία (α_v) μέ $\alpha_v > 0 \quad \forall v \in \mathbb{N}$. Νά αποδείξετε ότι : αν μία από τις δύο σειρές $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ καί $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{\alpha_v}{1+\alpha_v}$ συγκλίνει στό $\mathbb{R}$ (άντιστοίχως άπειρίζεται θετικά), τότε τό ίδιο συμβαίνει καί γιά τήν άλλη.

‘Απόδειξη. Πρώτα-πρώτα παρατηρούμε ότι οι: $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ καί $\sum_{v=1}^{\infty} \beta_v$, όπου $\beta_v \equiv \frac{\alpha_v}{1+\alpha_v}$

είναι σειρές μέ θετικούς όρους. ‘Εξάλλου ισχύει: $0 < \beta_v = \frac{\alpha_v}{1+\alpha_v} < \alpha_v, \quad \forall v \in \mathbb{N}$.

α) ‘Εστω ότι ή σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ συγκλίνει στό $\mathbb{R}$, τότε, σύμφωνα μέ τό κριτήριο συγκρίσεως σειρών, καί ή σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} \beta_v$ θά συγκλίνει στό $\mathbb{R}$, γιατί $0 < \beta_v < \alpha_v \quad \forall v \in \mathbb{N}$.

β) ‘Εστω ότι ή σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} \beta_v$ συγκλίνει στό $\mathbb{R}$, τότε:

$$\beta_v \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{\alpha_v}{1+\alpha_v} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{1+\alpha_v-1}{1+\alpha_v} \rightarrow 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{1+\alpha_v} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{1}{1+\alpha_v} \rightarrow 1,$$

όπότε: $\lim (1 + \alpha_v) = 1$.

Παρατηρούμε τώρα ότι: $\lim \frac{\alpha_v}{\beta_v} = \lim (1 + \alpha_v) = 1$, όπότε, σύμφωνα μέ τό όριακό κριτήριο συγκρίσεως (§ 106), καί έπειδή ή $\sum_{v=1}^{\infty} \beta_v$ συγκλίνει στό $\mathbb{R}$, έπεται ότι καί ή σειρά

$\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ θά συγκλίνει έπίσης στό $\mathbb{R}$.

γ) ‘Εστω ότι $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v = +\infty$ καί ότι $\sum_{v=1}^{\infty} \beta_v$ συγκλίνει στό $\mathbb{R}$, τότε, σύμφωνα μέ τό προηγούμενο θά έπρεπε ή σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ νά συγκλίνει στό $\mathbb{R}$. Αυτό όμως είναι άτοπο.

δ) ‘Εστω ότι $\sum_{v=1}^{\infty} \beta_v = +\infty$, τότε καί $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v = +\infty$, γιατί $0 < \beta_v < \alpha_v \quad \forall v \in \mathbb{N}$.

§ 107. Σειρές άπολύτως συγκλίνουσες.—‘Εστω $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ μία σειρά πραγματικών αριθμών μέ όρους όχι ύποχρεωτικά μή άρνητικούς. Είναι φανερό ότι ή σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} |\alpha_v|$ έχει όλους τούς όρους της ≥ 0 καί συνεπώς αν συμβαίνει:

$|\alpha_v| \leq \beta_v$ γιά κάθε $v \in \mathbb{N}$ καί επιπλέον ή σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} \beta_v$ συγκλίνει στό $\mathbb{R}$, τότε,

σύμφωνα μέ τό κριτήριό συγκρίσεως (§ 105), καί ή $\sum_{v=1}^{\infty} |\alpha_v|$ θά συγκλίνει στό $\mathbf{R}$.

Γεννάται ὅμως τώρα τό ἐρώτημα: ἀπό τή σύγκλιση τῆς $\sum_{v=1}^{\infty} |\alpha_v|$ μπορούμε νά

συμπεράνουμε ὅτι καί ή σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ συγκλίνει; Τήν ἀπάντηση στό ἐρώτημα αὐτό μάς τή δίνει ή παρακάτω βασική πρόταση.

Δίνουμε προηγουμένως ἕναν ὅρισμό.

Ὁρισμός. *Θά λέμε ὅτι μία σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ συγκλίνει*

ἀπολύτως στό $\mathbf{R}$, τότε καί μόνο τότε, ἂν ή σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} |\alpha_v| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots$

συγκλίνει στό $\mathbf{R}$.

Γιά συντομία:

$$\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v \text{ συγκλίνει ἀπολύτως} \iff \sum_{v=1}^{\infty} |\alpha_v| = a \in \mathbf{R}$$

Ἔτσι, π.χ., ή σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} (-1)^{v+1} \cdot \frac{1}{2^v}$ συγκλίνει ἀπολύτως στό $\mathbf{R}$, ἐπειδή

ή σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} \left| (-1)^{v+1} \cdot \frac{1}{2^v} \right| = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{2^v}$ συγκλίνει, ὡς γεωμετρική σειρά μέ λόγο

$\omega = \frac{1}{2} < 1$. Ἀντίθετα ή σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} (-1)^{v+1} \cdot \frac{1}{v}$ δέ συγκλίνει ἀπολύτως στό

$\mathbf{R}$, γιατί ή σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} \left| (-1)^{v+1} \cdot \frac{1}{v} \right| = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v}$ δέ συγκλίνει στό $\mathbf{R}$.

Εἶναι φανερό ὅτι: ἂν $\alpha_v \geq 0$ γιά κάθε $v \in \mathbf{N}$, τότε $|\alpha_v| = \alpha_v$ καί συνεπῶς:

$\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ συγκλίνει στό $\mathbf{R}$, τότε καί μόνο τότε, ἂν $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ συγκλίνει ἀπολύτως, δηλαδή

στis σειρές μέ ὅρους μή ἀρνητικούς ή ἀπλή σύγκλιση μιᾶς σειρᾶς καί ή ἀπόλυτη σύγκλιση ταυτίζονται. Ἄν ὅμως μία σειρά δέν ἔχει ὅλους τούς ὅρους της μή ἀρνητικούς, τότε οἱ ἔννοιες: *ἀπλή σύγκλιση* σειρᾶς καί *ἀπόλυτη σύγκλιση* εἶναι δύο ἔννοιες τελείως διαφορετικές.

Σχετικά ἰσχύει ή ἐπόμενη βασική πρόταση, ἀπό τήν ὁποία φαίνεται ὅτι ή ἔννοια τῆς ἀπόλυτης συγκρίσεως μιᾶς σειρᾶς εἶναι «*ἰσχυρότερη*» ἀπό τήν ἔννοια τῆς ἀπλῆς συγκρίσεως.

§ 108. Πρόταση.—Ἄν μία σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ εἶναι ἀπολύτως συγκλίνουσα στό $\mathbf{R}$, εἶναι καί ἀπλῶς συγκλίνουσα. Τό ἀντίστροφο δέν ἀληθεύει πάντοτε.

Δηλαδή :

$$\left(\sum_{v=1}^{\infty} |\alpha_v| \text{ συγκλίνει στό } \mathbf{R} \right) \Rightarrow \left(\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v \text{ συγκλίνει στό } \mathbf{R} \right)$$

Ἀπόδειξη. Ἐστω ὅτι ἡ $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ συγκλίνει ἀπολύτως, τότε $\sum_{v=1}^{\infty} |\alpha_v| = s \in \mathbf{R}$.

Θεωροῦμε τὴ σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} \beta_v$ μὲ γενικό ὄρο $\beta_v = |\alpha_v| - \alpha_v$. Ἐχουμε γιὰ κάθε $v \in \mathbf{N}$:

$$0 \leq \beta_v = |\alpha_v| - \alpha_v \leq |\alpha_v| + |\alpha_v| \leq 2|\alpha_v| \quad (1)$$

Ἀπὸ τὴν (1), σύμφωνα μὲ τὸ κριτήριο συγκρίσεως, προκύπτει ὅτι ἡ σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} \beta_v$ συγκλίνει στό $\mathbf{R}$, γιατί ἡ $\sum_{v=1}^{\infty} |\alpha_v|$, ἄρα καὶ ἡ $\sum_{v=1}^{\infty} 2|\alpha_v|$, συγκλίνει στό $\mathbf{R}$.

Τότε ὁμως καὶ ἡ σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ συγκλίνει στό $\mathbf{R}$, γιατί ἀπὸ τὴ $\beta_v = |\alpha_v| - \alpha_v$ ἔχουμε: $\alpha_v = |\alpha_v| - \beta_v$, γιὰ κάθε $v \in \mathbf{N}$ καὶ οἱ σειρές $\sum_{v=1}^{\infty} |\alpha_v|$, $\sum_{v=1}^{\infty} \beta_v$ συγκλίνουν.

Τὸ ἀντίστροφο τῆς παραπάνω προτάσεως δὲν ἀληθεύει πάντοτε. Δηλαδή, ἂν μία σειρά συγκλίνει στό $\mathbf{R}$, δὲν ἔπεται ὅτι θὰ συγκλίνει καὶ ἀπολύτως στό $\mathbf{R}$.

Ὡστε: ἡ σύγκλιση στό $\mathbf{R}$ τῆς $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ δὲ συνεπάγεται πάντοτε καὶ τὴ σύγκλιση στό $\mathbf{R}$ τῆς $\sum_{v=1}^{\infty} |\alpha_v|$. Αὐτὸ φαίνεται καὶ ἀπὸ τὸ ἐξῆς παράδειγμα: Ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ σειρά:

$$\sum_{v=1}^{\infty} (-1)^{v+1} \cdot \frac{1}{v} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{v+1} \frac{1}{v} + \dots$$

συγκλίνει στό $\mathbf{R}$, ἐνῶ ἡ σειρά: $\sum_{v=1}^{\infty} \left| (-1)^{v+1} \frac{1}{v} \right| = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v} = +\infty$.

Ἀπὸ τὸ παραπάνω παράδειγμα συμπεραίνουμε ἀκόμη πῶς ἀπὸ τὴ μὴ σύγκλιση στό $\mathbf{R}$ τῆς σειράς $\sum_{v=1}^{\infty} |\alpha_v|$ δὲν ἔπεται ὅτι καὶ ἡ $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ δὲ συγκλίνει στό $\mathbf{R}$.

Παρατηρήσεις. 1) Ἄν ἡ σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ συγκλίνει ἀπολύτως στό $\mathbf{R}$, τότε ἰσχύει:

$$\left| \sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v \right| \leq \sum_{v=1}^{\infty} |\alpha_v| \quad (\text{γιατί;})$$

Ἡ τελευταία σχέση ἀποτελεῖ γενίκευση τῆς: $\left| \sum_{k=1}^v \alpha_k \right| \leq \sum_{k=1}^v |\alpha_k|$ (βλ. § 26, σημ.)

2) Ἀπὸ τὴν παραπάνω πρόταση προκύπτει ἀκόμη ὅτι: ἂν μία σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ δὲ συγκλίνει στό $\mathbf{R}$, τότε καὶ ἡ σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} |\alpha_v|$ δὲ συγκλίνει στό $\mathbf{R}$, καὶ ἡ τελευταία ὡς σειρά μὲ ὄρους μὴ ἀρνητικούς ἀπειρίζεται θετικά. Ὡστε:

$$\left(\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v \text{ δὲ συγκλίνει στό } \mathbf{R} \right) \Rightarrow \left(\sum_{v=1}^{\infty} |\alpha_v| = +\infty \right)$$

Ἐφαρμογή. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{\eta \mu v}{2^v}$ συγκλίνει στό $\mathbf{R}$.

Ἀπόδειξη. Πράγματι, ἡ σειρά πού μᾶς δόθηκε εἶναι ἀπολύτως συγκλίνουσα, γιατί

$$0 \leq \left| \frac{\eta_{n\nu}}{2^\nu} \right| \leq \frac{1}{2^\nu} \text{ γιά κάθε } \nu \in \mathbf{N}$$

καί ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^\nu}$ συγκλίνει, ὡς γεωμετρική μέ λόγο $\omega = \frac{1}{2} < 1$. Τότε ὁμως, σύμφωνα μέ τήν παραπάνω πρόταση, ἡ σειρά εἶναι καί ἀπλῶς συγκλίνουσα στό $\mathbf{R}$.

§ 109. Μία ἀξιοσημείωτη καί χρήσιμη ἐφαρμογή τοῦ κριτηρίου συγκρίσεως σειρῶν. (Ἀρμονική σειρά ρ -τάξεως). — Σ' αὐτή τήν παράγραφο μελετᾶμε ὡς πρὸς τή σύγκλιση τῆ σειράς:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^\rho} = 1 + \frac{1}{2^\rho} + \frac{1}{3^\rho} + \cdots + \frac{1}{\nu^\rho} + \cdots \quad (1)$$

ὅπου ρ εἶναι ἕνας ὁρισμένος ρητός ἀριθμός.

Ἡ σειρά (1) μαζί μέ τή γεωμετρική σειρά, τήν ὁποία μελετήσαμε ὡς πρὸς τή σύγκλιση στήν § 96, προσφέρονται συχνά στίς ἐφαρμογές τοῦ κριτηρίου συγκρίσεως, γι' αὐτό συνιστοῦμε στόν ἀναγνώστη νά θυμᾶται πότε αὐτές συγκλίνουν στό $\mathbf{R}$ καί πότε ἀπειρίζονται θετικά.

Ἐπειδή ἡ (1) εἶναι μία σειρά μέ θετικούς ὅρους, θά εἶναι: $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^\rho} = \sigma$, ὅπου $0 < \sigma \leq +\infty$. Ἀκριβέστερα ἰσχύει ἡ ἐπόμενη πρόταση:

Πρόταση.—Γιά τήν ἀρμονική σειρά ρ -τάξεως ἰσχύει:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^\rho} = \begin{cases} +\infty, & \text{ἂν } \rho \leq 1 \\ \text{συγκλίνει στό } \mathbf{R}, & \text{ἂν } \rho > 1 \end{cases} \quad (\rho \in \mathbf{Q})$$

Ἀπόδειξη. α) Ἐστω ὅτι εἶναι: $\rho \leq 1$. Εἰδικά γιά $\rho = 1$ ἡ πρόταση ἰσχύει (§ 98, ἐφ. 3).

Ἄν $\rho < 1$, τότε γιά κάθε $\nu \in \mathbf{N}$ ἔχουμε: $\frac{1}{\nu} \leq \frac{1}{\nu^\rho}$ καί ἐπειδή $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} = +\infty$ ἀπό τό κριτήριο συγκρίσεως συμπεραίνουμε ὅτι: $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^\rho} = +\infty$.

β) Ἐστω τώρα ὅτι $\rho > 1$. Χωρίζουμε τοὺς ὅρους τῆς σειρᾶς (1) σέ ὁμάδες ὡς ἑξῆς:

$$\underbrace{\frac{1}{1^\rho}}_{\beta_1} + \underbrace{\left(\frac{1}{2^\rho} + \frac{1}{3^\rho} \right)}_{\beta_2} + \underbrace{\left(\frac{1}{4^\rho} + \frac{1}{5^\rho} + \frac{1}{6^\rho} + \frac{1}{7^\rho} \right)}_{\beta_3} + \underbrace{\left(\frac{1}{8^\rho} + \frac{1}{9^\rho} + \cdots + \frac{1}{15^\rho} \right)}_{\beta_4} + \cdots \quad (2)$$

δηλαδή κάθε ὁμάδα περιλαμβάνει ἕνα πλῆθος ὁρῶν τῆς σειρᾶς (1) πού εἶναι διπλάσιο ἀπό τό πλῆθος τῶν ὁρῶν τῆς προηγούμενης.

Ἐπειδή ἐξάλλου εἶναι:

$$\frac{1}{2^\rho} + \frac{1}{3^\rho} < \frac{1}{2^\rho} + \frac{1}{2^\rho} = \frac{2}{2^\rho} = \frac{1}{2^{\rho-1}},$$

$$\frac{1}{4^\rho} + \frac{1}{5^\rho} + \frac{1}{6^\rho} + \frac{1}{7^\rho} < \frac{1}{4^\rho} + \frac{1}{4^\rho} + \frac{1}{4^\rho} + \frac{1}{4^\rho} = \frac{4}{4^\rho} = \frac{1}{4^{\rho-1}} = \frac{1}{2^{2\rho-2}},$$

$$\frac{1}{8^\rho} + \frac{1}{9^\rho} + \cdots + \frac{1}{15^\rho} < \frac{1}{8^\rho} + \frac{1}{8^\rho} + \cdots + \frac{1}{8^\rho} = \frac{8}{8^\rho} = \frac{1}{8^{\rho-1}} = \frac{1}{2^{3\rho-3}}, \dots, \text{ κ.ο.κ.}$$

συμπεραίνουμε ὅτι ἡ νέα σειρά: $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots$ ἔχει ὅρους θετικούς καί μικρότερους (ἐκτός ἀπό τόν πρῶτο) ἀπό τοὺς ἀντίστοιχους ὅρους τῆς σειρᾶς:

$$1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{2^{2p-2}} + \frac{1}{2^{3p-3}} + \dots \quad (3)$$

Ἡ σειρά (3), ἐπειδὴ εἶναι $\frac{1}{2^{p-1}} < 1$, συγκλίνει (γιατί;) Τότε ὁμως, σύμφωνα μέ τό πρώτο συμπέρασμα τοῦ κριτηρίου συγκρίσεως, θά συγκλίνει καί ἡ (2).

Ὡστε, γιά $p \in \mathbf{Q}$, $p > 1$ ἡ σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v^p}$ συγκλίνει στό $\mathbf{R}$.

Σχόλιο. Κατά τήν ἀπόδειξη τοῦ β' μέρους τῆς παραπάνω προτάσεως δεχθήκαμε σιωπηρά τήν ἐξῆς πρόταση: ἂν χωρίσουμε τοὺς διαδοχικούς ὅρους μιᾶς συγκλίνουσας σειρᾶς σέ διαδοχικές ομάδες, τότε σχηματίζουμε μία καινούργια σειρά, ἡ ὁποία εἶναι ἐπίσης συγκλίνουσα καί ἀντιστρόφως.

Σημείωση. Σ' ἓνα ἀπό τά ἐπόμενα κεφάλαια θά ὀρίσουμε τή δύναμη μέ ἐκθέτη πραγματικό ἀριθμό. Σ' αὐτή τήν περίπτωση πάλι ἡ σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v^p}$, ὅπου ὁμως τώρα $p \in \mathbf{R}$, ὀνομάζεται **ἁρμονική σειρά p -τάξεως** καί ἀποδεικνύεται ὅτι καί στήν περίπτωση αὐτή ἡ προηγούμενη πρόταση ἰσχύει. Δηλαδή μέ $p \in \mathbf{R}$ ἰσχύει:

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v^p} = \begin{cases} +\infty, & \text{ἂν } p \leq 1 \\ \text{συγκλίνει,} & \text{ἂν } p > 1 \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α'. 221. Νά βρεῖτε ποιές ἀπό τίς ἐπόμενες σειρές συγκλίνουν στό $\mathbf{R}$ καί ποιές δέ συγκλίνουν:

$$1. \sum_{v=1}^{\infty} \frac{v^2 + 1}{v^4},$$

$$2. \sum_{v=1}^{\infty} \frac{v+1}{2v},$$

$$3. \sum_{v=1}^{\infty} \frac{v^2 - 3v + 2}{v^4}$$

$$4. \sum_{v=1}^{\infty} \frac{v-1}{v^2},$$

$$5. \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\sqrt{v}+1}{v^3},$$

$$6. \sum_{v=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{v}}$$

222. Νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ παρακάτω σειρές:

$$\alpha) \sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^v} - \frac{1}{3^v} \right),$$

$$\beta) \sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{5}{2^v} + \frac{7}{3^v} \right),$$

$$\gamma) \sum_{v=1}^{\infty} \frac{3^v + 2^v}{6^v}$$

συγκλίνουν στό $\mathbf{R}$ καί νά βρεῖτε τά ἀθροίσματά τους.

223. Ἄν $\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\alpha_v - 1}{\alpha_v + 1} = 0$, νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ δέ συγκλίνει στό $\mathbf{R}$.

224. Μέ τή βοήθεια τοῦ ὀριακοῦ κριτηρίου συγκρίσεως σειρῶν (§ 106) νά μελετήσετε ὡς πρός τή σύγκλιση τίς ἐπόμενες σειρές:

$$1) \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v^2 - 2v - 1} \quad (\text{Ὑπόδειξη. Νά πάρετε ὡς } \beta_v = \frac{1}{v^2})$$

$$2) \sum_{v=1}^{\infty} \frac{v+3}{2v^2-1}, \quad 3) \sum_{v=1}^{\infty} \frac{2v+2}{2v^3+v^2-1}, \quad 4) \sum_{v=1}^{\infty} \frac{3v-1}{v^4+1}.$$

225. Νά ἀποδείξετε ὅτι: ἂν μία σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ μέ ὅρους μὴ ἄρνητικούς συγκλίνει στό $\mathbf{R}$,

τότε καί ἡ σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\alpha_v}}{v}$ συγκλίνει ἐπίσης στό $\mathbf{R}$.

Υπόδειξη. Έπειδή $\alpha_n \geq 0 \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}$ θα ισχύει: $\alpha_n + \frac{1}{n^2} \geq 2\sqrt{\alpha_n \cdot \frac{1}{n^2}}$, κτλ

226. Νά αποδείξετε ότι: αν μία σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ συγκλίνει στο $\mathbb{R}$, τότε συγκλίνει στο $\mathbb{R}$ και η σειρά: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\sqrt{n^3}}$.

Υπόδειξη. Η (α_n) ως μηδενική ακολουθία είναι φραγμένη. Στή συνέχεια να εφαρμόσετε το κριτήριο συγκρίσεως σειρών.

227. Νά βρείτε ποιές από τις επόμενες σειρές συγκλίνουν απολύτως στο $\mathbb{R}$:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n-2}{n^3+1}$, 2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{(2n)^2}$, 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{1+n^2}$,
4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{3n-1}$, 5. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n}{n+1}$, 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$.

Ομάδα Β'. 228. Νά αποδείξετε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{n+2}}$ συγκλίνει στο $\mathbb{R}$, ενώ δε συμβαίνει το ίδιο και για τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}$.

229. Νά αποδείξετε ότι: αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$ συγκλίνει στο $\mathbb{R}$, τότε συγκλίνει στο $\mathbb{R}$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$. Το αντίστροφο δεν αληθεύει πάντοτε (παράδειγμα;).

230. "Αν $\alpha_n > 0 \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 = \beta$, νά αποδείξετε ότι: $\alpha^2 > \beta$.

231. "Αν $\alpha_n > 0 \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), νά αποδείξετε ότι καθεμία από τις σειρές: $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n + \alpha_{n+1})$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\alpha_n \alpha_{n+1}}$ συγκλίνει στο $\mathbb{R}$. "Υστερα νά βρείτε το άθροισμα της σειράς με γενικό όρο: $\beta_n = \frac{1}{2}(\alpha_n + \alpha_{n+1})$.

Υπόδειξη. Νά εφαρμόσετε την ιδιότητα IV (§ 102) και νά λάβετε υπόψη σας ότι:

$$\sqrt{\alpha_n \alpha_{n+1}} \leq \frac{1}{2}(\alpha_n + \alpha_{n+1}), \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}.$$

232. Νά αποδείξετε ότι η σειρά: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n\sqrt{n}}$, όπου $\alpha_1 = \sqrt{2}$ και $\alpha_{n+1} = \sqrt{2 + \alpha_n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, συγκλίνει στο $\mathbb{R}$. (**Υπόδειξη.** Νά λάβετε υπόψη σας την εφαρμογή 2 της §67).

233. Έστω η ακολουθία (α_n) με $\alpha_1 = 5$ και $\alpha_{n+1} = \sqrt{4\alpha_n + 3}$, $\forall \quad n \in \mathbb{N}$. Νά αποδείξετε ότι η σειρά με γενικό όρο: $\beta_n = n^{-3/5} \cdot \alpha_n$ απειρίζεται θετικά.

Υπόδειξη. Νά λάβετε υπόψη σας την άσκηση 122.

* Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο V I

ΑΚΕΡΑΙΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Ι. ΒΑΣΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

§ 110. Ἡ ἔννοια τοῦ ἀκέραιου πολυωνύμου — Ἐννοιες συναφεῖς μέ αὐτή.— α) **Εἰσαγωγή.** Ἡ ἔννοια τοῦ ἀκέραιου πολυωνύμου μέ πραγματικούς συντελεστές μᾶς εἶναι γνωστή ἀπό τὰ μαθήματα τῆς Γ' τάξεως τοῦ Γυμνασίου. Ἐκεῖ ὁμως θεωρήσαμε τὰ ἀκέραια πολυώνυμα ὡς συναρτήσεις τῆς μεταβλητῆς $* x$, ἡ ὁποία ἔπαιρνε τιμές ἀπό ἕνα δοσμένο σύνολο $\Sigma \subseteq \mathbf{R}$. Σ' αὐτή τήν παράγραφο θά ὀρίσουμε πιό γενικά, ἀλλά καί πιό αὐστηρά — ἀπό Μαθηματική ἄποψη — τήν ἔννοια τοῦ ἀκέραιου πολυωνύμου μιᾶς μεταβλητῆς, μέ τέτοιο ὁμως τρόπο, ὥστε οἱ σχέσεις πού θά προκύψουν παρακάτω νά ἰσχύουν καί ὅταν στό x δίνουμε τιμές ἀπό ἕνα σύνολο ἀριθμῶν, δηλαδή ὅταν θεωροῦμε τὰ πολυώνυμα ὡς συναρτήσεις τοῦ x ἀφοῦ, ὅπως θά δοῦμε ἀμέσως παρακάτω, οἱ πράξεις ἐπὶ τῶν πολυωνύμων θά ὀρισθοῦν κατὰ τέτοιο τρόπο σάν νά ἦταν τό x στοιχεῖο τοῦ ἐν λόγω συνόλου.

β) Ἐννοια ἀκέραιου πολυωνύμου. Ἐστω C τό σύνολο τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν καί ἕνα σύμβολο x πού τό λέμε : ἡ «**μεταβλητή**» ἡ ὁ «ἀπροσδιόριστος» καί πού εἶναι στήν πραγματικότητα τό ἀρχικό πολυώνυμο πού σχηματίζουμε. Τό x , βέβαια, δέν παριστάνει κανένα πραγματικό ἢ γενικότερα μιγαδικό ἀριθμό, πλὴν ὁμως μπορούμε νά σημειώνουμε πράξεις τῶν στοιχείων τοῦ C , σάν νά ἦταν καί τό x ἕνας πραγματικός ἢ γενικότερα ἕνας μιγαδικός ἀριθμός. Ἐτσι ἡ ἔκφραση x^k , ὅπου k εἶναι φυσικός ἀριθμός, θά συμβολίζει ἀπλῶς μία μορφή γινομένου $x \cdot x \cdot \dots \cdot x$, ὅπου τό x θά λαμβάνεται ὡς παράγοντας γινομένου k φορές. Ὁμοίως ἡ ἔκφραση: αx^k , ὅπου $\alpha \in C$ καί $k \in \mathbf{N}$ θά συμβολίζει μία μορφή γινομένου τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ α ἐπὶ τό σύμβολο x^k . Ὅρίζουμε ἀκόμη ὅτι $x^0 = 1$, ὁπότε $\alpha x^0 = \alpha$ γιά κάθε $\alpha \in C$.

Δίνουμε τώρα τόν ἀκόλουθο ὀρισμό:

* Μέ τόν ὅρο «**μεταβλητή**» x ἐννοοῦμε ἕνα σύμβολο x , τό ὁποῖο μπορεῖ νά ἀντιπροσωπεύει τό ὁποιοδήποτε στοιχεῖο ἑνός συνόλου ἀριθμῶν. Ὑπάρχει διαφορά ἀνάμεσα στή μεταβλητή x καί στόν ἄγνωστο x πού συναντᾶμε στίς ἐξισώσεις· καί τοῦτο γιατί ἡ μεταβλητή εἶναι ἀπλῶς ἕνα σύμβολο καί συνεπῶς ἔχει ἀπροσδιόριστη τιμή, ἐνῶ ὁ ἄγνωστος x ἔχει τιμή πού προσδιορίζεται.

Όρισμός. Ονομάζουμε **άκέραιο πολυώνυμο του x** κάθε έκφραση της μορφής:

$$a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (1)$$

όπου $a_v, a_{v-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$, $v \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ και $+$, x σύμβολα ακαθόριστα.

Οι αριθμοί $a_0, a_1, \dots, a_v$ ονομάζονται **συντελεστές *** του πολυωνύμου (1). Τό a_0 θεωρείται ως συντελεστής του x^0 και λέγεται σταθερός όρος του πολυωνύμου. Οι εκφράσεις της μορφής: $a_k x^k$, όπου k άκέραιος ≥ 0 , ονομάζονται **άκέραια μονώνυμα** του x και αποτελούν τους όρους του πολυωνύμου. Ειδικά ο όρος $a_v x^v$ (αν $a_v \neq 0$) ονομάζεται πρώτος όρος και ο a_v πρώτος συντελεστής του πολυωνύμου.

Γιά να παραστήσουμε ένα άκέραιο πολυώνυμο της μορφής (1) χρησιμοποιούμε, συνήθως, τους συμβολισμούς: $f(x), \varphi(x), g(x), \pi(x), \upsilon(x)$, κλπ., όπου γιά τό $f(x)$, π.χ., διαβάζουμε «*f του x*» θέλοντας μέ αυτό τόν τρόπο νά τονίσουμε τήν εξάρτηση του πολυωνύμου f από τό βασικό πολυώνυμο x . *Ετσι γιά συντομία γράφουμε:

$$f(x) \equiv a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (2)$$

όπου τό σύμβολο: $\equiv$ σημαίνει έδω ότι: μέ τό $f(x)$ παριστάνουμε τό πολυώνυμο, τό όποιο αναγράφεται στό β' μέλος, ισοδύναμα σημαίνει ότι: συντόμως συμβολίζουμε τό πολυώνυμο (1) μέ τό $f(x)$.

Τό σύνολο τών άκέραιων πολυωνύμων του x μέ μιγαδικούς συντελεστές θά τό παριστάνουμε μέ $\mathbb{C}[x]$. Τά στοιχεία του $\mathbb{C}[x]$, δηλαδή τά άκέραια πολυώνυμα του x , τά συμβολίζουμε, όπως είπαμε καί προηγουμένως, μέ: $f(x), \varphi(x), g(x), \pi(x), \upsilon(x) \dots$ κλπ.

Θά έχουμε λοιπόν τήν ισοδυναμία:

$$f(x) \in \mathbb{C}[x] \iff f(x) \text{ άκέραιο πολυώνυμο του } x \text{ μέ μιγαδ. συντελεστές.}$$

Όπως ξέρουμε οί άκέραιοι αριθμοί, οί ρητοί, αλλά καί πίο γενικά οί πραγματικοί αριθμοί είναι στοιχεία του συνόλου $\mathbb{C}$ τών μιγαδικών αριθμών καί μάλιστα ισχύουν οί παρακάτω σχέσεις έγκλεισμού:

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}. \quad (3)$$

Τό σύνολο λοιπόν $\mathbb{C}[x]$ αποτελεί τήν ευρύτερη κατηγορία πού περιλαμβάνει όλα τά άκέραια πολυώνυμα του x , οτιδήποτε αριθμοί καί αν είναι οί συντελεστές τους.

Ειδικότερα όμως θά παριστάνουμε μέ:

$\mathbb{R}[x]$: τό σύνολο τών άκέραιων πολυωνύμων μέ πραγματικούς συντελεστές

$\mathbb{Q}[x]$: τό σύνολο τών άκέραιων πολυωνύμων μέ ρητούς συντελεστές

$\mathbb{Z}[x]$: τό σύνολο τών άκέραιων πολυωνύμων μέ άκέραιους συντελεστές.

Είναι φανερό τώρα ότι ισχύει:

$$\mathbb{Z}[x] \subset \mathbb{Q}[x] \subset \mathbb{R}[x] \subset \mathbb{C}[x]. \quad (4)$$

* Γενικότερα οί συντελεστές μπορεί νά είναι παραστάσεις πού δέν περιέχουν τό x .

Όπως ξέρουμε (§ 6) η έννοια του συνόλου συνδέεται στενά με την έννοια μίας σχέσεως *βασικής ισότητας*, πού τή συμβολίζουμε με $\equiv$. Η βασική ισότητα ορίζεται στο $C[x]$ ως εξής:

Αν $f(x), \varphi(x) \in C[x]$ και είναι:

$$f(x) \equiv \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

$$\varphi(x) \equiv \beta_n x^n + \beta_{n-1} x^{n-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0,$$

τότε θά λέμε ότι: **τά πολυώνυμα $f(x), \varphi(x)$ είναι ίσα** και θά γράψουμε $f(x) = \varphi(x)$, **τότε και μόνο τότε, αν οι συντελεστές των ίσων «δυνάμεων» του x είναι ίσοι.** Ώστε:

$$f(x) = \varphi(x) \iff \alpha_k = \beta_k \text{ για κάθε } k = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (5)$$

Από την παραπάνω ισοδυναμία συμπεραίνουμε ότι η συνθήκη $f(x) = \varphi(x)$ της ισότητας δύο άκέραιων πολυωνύμων εκφράζεται με την ισοδύναμη συνθήκη της ισότητας των αντίστοιχων συντελεστών των δύο πολυωνύμων. Αυτό έχει σαν συνέπεια, όπως θά δούμε παρακάτω (βλ. § 114, μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών), νά ανάγει ένα πρόβλημα πολυωνύμων σε ισοδύναμο πρόβλημα πού αναφέρεται στους συντελεστές του.

Παραδείγματα άκέραιων πολυωνύμων: Οί παρακάτω εκφράσεις:

$$f(x) \equiv x^4 - 2x^3 + 5x^2 - (3 + 2i)x + 10i$$

$$\varphi(x) \equiv (2 + 3i)x^3 - \frac{4}{3}x^2 + (5 - \sqrt{3})x + 2$$

$$g(x) \equiv x^3 + 3\alpha x^2 + 3\beta x + \gamma, \text{ όπου } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \text{ ή } \mathbb{C}$$

είναι όλες άκέραια πολυώνυμα του x . Απεναντίας οί εκφράσεις:

$$2x^3 - 5x^{-2} + 4x^{3/4} - 3x^{-1}, \quad 3x^{-2} - 2x^{-1} + 7, \quad 5x^2 + x + 4x^{2/3} + 1$$

δέν είναι άκέραια πολυώνυμα της μεταβλητής x .

Σχόλια: α) Από τά παραπάνω παραδείγματα και από τόν όρισμό πού δώσαμε για τό άκέραιο πολυώνυμο συμπεραίνουμε ότι ό χαρακτηρισμός ενός πολυωνύμου ως «*άκέραιο*» δέν έχει καμιά απολύτως σχέση μέ τό αν είναι ή δέν είναι οί συντελεστές του πολυωνύμου άκέραιοι αριθμοί. Η απόδοση του επιθέτου «*άκέραιο*» στόν όρο «*πολυώνυμο*» όφείλεται στό εξής: όπως θά δούμε στίς άμέσως επόμενες παραγράφους, τό σύνολο $C[x]$ των άκέραιων πολυωνύμων του x έχει πολλές ιδιότητες τελείως άνάλογες μέ εκείνες πού έχουμε συναντήσει στό σύνολο $\mathbb{Z}$ των άκέραιων αριθμών. Έτσι, π.χ. στό σύνολο $C[x]$ ισχύει ή ιδιότητα της διαγραφής, επίσης ορίζεται στό σύνολο $C[x]$ τέλεια διαίρεση, αλγοριθμική διαίρεση κλπ, μέ ιδιότητες άνάλογες μέ εκείνες πού έχουμε μάθει στην Α' τάξη του Γυμνασίου για τούς άκέραιους αριθμούς.

β) Η έκφραση (1), δηλαδή ή: $\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ δέ σημαίνει πρόσθεση ούτε κάποια άλλη πράξη μεταξύ των μιγαδικών αριθμών α_k ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) και της μεταβλητής x , αλλά είναι ένα νέο σύμβολο μέ τό x και τό $+$ άκαθόριστα σύμβολα. Η σημασία της παραστάσεως (1), δηλαδή του άκέραιου πολυωνύμου μίας μεταβλητής x , θά προκύψει παρακάτω κατόπιν όρισμένων ιδιοτήτων, καθεμία από τίς όποιες θά όρισθι έπ' αυτού.

Γενική παρατήρηση. Σ' αυτό τό βιβλίο πολλές φορές αντί νά λέμε «*άκέραιο πολυώνυμο*» θά λέμε, για συντομία, άπλώς «*πολυώνυμο*» και θά έννοούμε πάντοτε «*άκέραιο πολυώνυμο μίας μεταβλητής*».

γ) **Τό μηδενικό πολυώνυμο.** "Αν σ' ένα πολυώνυμο όλοι οί συντελεστές του είναι μηδέν, δηλαδή μία έκφραση τής μορφής:

$$0x^v + 0x^{v-1} + \dots + 0x + 0$$

ονομάζεται **μηδενικό πολυώνυμο του x** και συμβολίζεται μέ **$0(x)$** ή πιό άπλά μέ **0** , αν δέν ύπάρχει κίνδυνος γιά παρερμηνεία. "Ωστε:

$$0(x) \equiv 0x^v + 0x^{v-1} + \dots + 0x + 0 \quad (6)$$

"Αμεση συνέπεια τής ισότητας δύο πολυωνύμων είναι ή ακόλουθη βασική πρόταση:

"Ενα πολυώνυμο $f(x) = a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_1 x + a_0$ είναι ίσο μέ τό μηδενικό πολυώνυμο, τότε καί μόνο τότε, αν: $a_v = a_{v-1} = \dots = a_1 = a_0 = 0$.

"Ωστε:

$$f(x) = 0(x) \iff a_v = a_{v-1} = \dots = a_1 = a_0 = 0 \quad (7)$$

Προσέξτε! στην παραπάνω ισοδυναμία τό = του άριστερου μέλους παριστάνει τή βασική ισότητα στό σύνολο $C[x]$, ένω τό = του δεξιού μέλους παριστάνει τή βασική ισότητα στό σύνολο C τών μιγαδικών αριθμών.

Γιά νά δηλώσουμε ότι τό πολυώνυμο $f(x)$ δέν είναι τό μηδενικό πολυώνυμο γράφουμε: $f(x) \neq 0(x)$ ή πιό άπλά: $f(x) \neq 0$.

"Από τήν (7) συμπεραίνουμε άμέσως ότι: $f(x) \neq 0(x)$, τότε καί μόνο τότε, αν ένας (τουλάχιστο) από τούς συντελεστές του $f(x)$ είναι διάφορος από τό μηδέν.

δ) Βαθμός ενός μή μηδενικού πολυωνύμου. "Ονομάζουμε **βαθμό** ενός άκέραιου πολυωνύμου $f(x) \neq 0$ τό μεγαλύτερο εκθέτη τής μεταβλητής x , τής οποίας ο συντελεστής είναι διάφορος του μηδενός.

Γιά νά δηλώσουμε τό βαθμό ενός πόλυωνύμου $f(x)$ θά γράφουμε: **βαθμ. $f(x)$** .

"Ετσι, αν $f(x) \equiv a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_1 x + a_0$, έχουμε τήν ισοδυναμία:

$$\text{βαθμ. } f(x) = v \iff a_v \neq 0 \quad (8)$$

όπου v μή άρνητικός άκέραιος, δηλαδή $v \in N_0$.

"Ετσι, π.χ. του πολυωνύμου $f(x) \equiv 5x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ ο βαθμός είναι 3, ένω του πολυωνύμου $\varphi(x) \equiv 0x^4 + 0x^3 - 5x^2 + \sqrt{3}x + 10i$ ο βαθμός είναι 2.

"Η ισοδυναμία (8) μάς οδηγεί νά δώσουμε γιά τό βαθμό ενός μή μηδενικού πολυωνύμου καί τόν έξής ισοδύναμο όρισμό:

Βαθμός ενός μή μηδενικού πολυωνύμου $f(x)$ ονομάζεται ο δείκτης v του πρώτου συντελεστή a_v ($a_v \neq 0$) του πολυωνύμου.

Στό μηδενικό πολυώνυμο $0(x) \equiv 0x^v + 0x^{v-1} + \dots + 0x + 0$ δέν έπι-συνάπτουμε βαθμό. "Εξάλλου από τήν ισοδυναμία (8) συμπεραίνουμε ότι πο-

λυώνυμα μηδενικού βαθμού είναι τὰ σταθερά πολυώνυμα $f(x) \equiv \alpha_0$ με $\alpha_0 \neq 0$.
 *Έτσι π.χ. τό (μοναδιαίο) πολυώνυμο $f(x) \equiv 1$ είναι μηδενικού βαθμού.
Προσέξτε! όλα τὰ σταθερά πολυώνυμα δέν έχουν βαθμό, καθόσον σ' αὐτά
 ὑπάγεται καί τό μηδενικό πολυώνυμο, στό ὁποῖο, ὅπως εἴπαμε, δέν ἀποδί-
 δουμε βαθμό.

Ὡστε: βαθμό ἔχουν ὅλα τὰ μή μηδενικά πολυώνυμα καί μόνο αὐτά.

Σημείωση. Δέν πρέπει νά συγχέουμε τίς ἔννοιες : **μηδενικό πολυώνυμο** καί **πολυώνυμο μηδενικοῦ βαθμοῦ**. Ἐπίσης τίς ἔννοιες : **σταθερά** α_0 ($\alpha_0 \in \mathbb{C}$) καί **σταθερό πολυώνυμο** $\alpha_0 = \alpha_0 x^0$, καθόσον τό τελευταῖο εἶναι στοιχείο τοῦ $\mathbb{C}[x]$.

Μετά τήν εἰσαγωγή τῆς ἔννοιος τοῦ βαθμοῦ ἑνός πολυωνύμου, ὁ ὁρισμός τῆς ἰσότητος δύο πολυωνύμων διατυπώνεται πιό γενικά ὡς ἑξῆς:

Ὁρισμός. Δύο ἀκέραια πολυώνυμα:

$$f(x) \equiv \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

$$\varphi(x) \equiv \beta_\mu x^\mu + \beta_{\mu-1} x^{\mu-1} + \cdots + \beta_1 x + \beta_0$$

θά λέμε ὅτι εἶναι ἴσα καί θά γράφουμε : $f(x) = \varphi(x)$, τότε καί μόνο τότε, ἂν εἶναι καί τὰ δύο τό **μηδενικό πολυώνυμο** $0(x)$ ἢ

βαθμ. $f(x) = \text{βαθμ. } \varphi(x)$, δηλ. $n = \mu$ καί $\alpha_k = \beta_k$ γιά κάθε $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

*Αν ὅλοι οἱ συντελεστές ἑνός πολυωνύμου:

$$f(x) \equiv \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0, \quad (\alpha_n \neq 0) \quad (9)$$

εἶναι διάφοροι ἀπό τό μηδέν, τότε τό $f(x)$, ὅπως ξέρομε, ὀνομάζεται «**πλήρης**» ἐνῶ ἂν ἕνας τουλάχιστο συντελεστής, διάφορος ἀπό τό α_n , εἶναι μηδέν, τότε τό $f(x)$ ὀνομάζεται «**ἐλλιπές**». Ἐτσι, π.χ. τό πολυώνυμο $f(x) \equiv 5x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ εἶναι πλήρες, ἐνῶ τό $\varphi(x) \equiv 3x^5 - 2x^3 + x^2 - 4$ εἶναι ἐλλιπές.

Τό πολυώνυμο (9) μπορεῖ ἐπίσης νά γραφεῖ καί ὡς ἑξῆς:

$$f(x) \equiv \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \alpha_n x^n, \quad (\alpha_n \neq 0) \quad (10)$$

δηλ. κατὰ τίς ἀνιούσες δυνάμεις τοῦ x .

Καθεμία ἀπό τίς ἐκφράσεις (9) καί (10) ὀνομάζεται *συνήθης μορφή* τοῦ $f(x)$ διατεταγμένου κατὰ τίς κατιούσες δυνάμεις τοῦ x (στήν (9)) ἢ κατὰ τίς ἀνιούσες δυνάμεις τοῦ x (στή (10)).

Κάθε πολυώνυμο μπορεῖ νά ἐπεκταθεῖ καί πέρα ἀπό τό βαθμό του, ἀρκεῖ γιά τό σκοπό αὐτό νά ἐπισυνάψουμε ὅρους πού ἔχουν συντελεστή τό μηδέν.
 *Έτσι τό πολυώνυμο (10), βαθμοῦ n , μπορεῖ νά γραφεῖ:

$$f(x) \equiv \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n + 0x^{n+1} + 0x^{n+2} + \cdots \quad (11)$$

Ἡ (11) μᾶς ὁδηγεῖ νά θεωρήσουμε, πιό γενικά, τὰ πολυώνυμα σάν ἐκφράσεις τῆς μορφῆς: $f(x) \equiv \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n + \cdots$ με $\chi_k \in \mathbb{C}$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ καί $n \in \mathbb{N}_0$, ὅπου ἕνα πεπερασμένο πλήθος μόνο ἀπό τοὺς συντελεστές $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots$ εἶναι διάφοροι ἀπό τό μηδέν.

Σημείωση Ἀπό τὰ παραπάνω συμπεραίνουμε τώρα ὅτι: μπορούμε νά γράφουμε πάντοτε δύο πολυώνυμα μέ τό ἴδιο πλήθος ὄρων, ἐπισυνάπτοντας στό πολυώνυμο πού ἔχει τό μικρότερο βαθμό ὄρους μέ συντελεστή τό μηδέν.

*Ας θεωρήσουμε τώρα ένα πολυώνυμο $f(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Αυτό ανάλογα με το βαθμό του, μπορεί να είναι:

- i) δευτέρου βαθμοῦ, ἂν $\alpha \neq 0$. Εἰδικὰ τὸ $f(x)$ εἶναι τριώνυμο, ἂν: $\alpha\beta\gamma \neq 0$.
- ii) πρώτου βαθμοῦ, ἂν $\alpha = 0$ καὶ $\beta \neq 0$.
- iii) μηδενικοῦ βαθμοῦ, ἂν $\alpha = \beta = 0$ καὶ $\gamma \neq 0$.
- iv) τὸ μηδενικὸ πολυώνυμο, ἂν $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Στὰ ἐπόμενα, ἀντὶ νὰ γράφουμε τίς περιπτώσεις (i) - (iv) θὰ λέμε, γιὰ συντομία, ὅτι τὸ $f(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ εἶναι *πολυώνυμο βαθμοῦ τὸ πολὺ δύο*.

Πιό γενικὰ: *Θὰ ὀνομάζουμε ἄκέραιο πολυώνυμο βαθμοῦ τὸ πολὺ n ($n \in \mathbb{N}_0$) κάθε ἔκφραση τῆς μορφῆς:*

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots \quad (12)$$

στὴν ὁποία εἶναι: $a_{n+1} = a_{n+2} = \dots = 0$.

Συνήθως σ' ἓνα τέτοιο πολυώνυμο οἱ ὅροι $a_{n+1}x^{n+1}, a_{n+2}x^{n+2}, \dots$ παραλείπονται, ὁπότε ἡ γενικὴ μορφή ἑνὸς ἄκέραιου πολυωνύμου $f(x)$ βαθμοῦ τὸ πολὺ n εἶναι:

$$f(x) \equiv a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (13)$$

ἡ ἰσοδύναμα:

$$f(x) \equiv a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 \quad (14)$$

§ 111. "Αλγεβρα (λογισμός) τῶν πολυωνύμων.— "Ἐστω $C[x]$ τὸ σύνολο τῶν ἄκέραιων πολυωνύμων τοῦ x μέ συντελεστές μιγαδικούς ἀριθμούς.

Μεταξύ τῶν στοιχείων τοῦ $C[x]$, δηλαδή μεταξύ τῶν ἄκέραιων πολυωνύμων, ἐκτελοῦνται πράξεις μέ ἐντελῶς ὅμοιες ιδιότητες μέ ἐκεῖνες πού ξέρουμε γιὰ τὴν πρόσθεση, τὴν ἀφαίρεση καὶ τὸν πολλαπλασιασμό τῶν ἀριθμῶν. Γι' αὐτὸ καὶ τίς πράξεις στό $C[x]$ τίς ὀνομάζουμε: *πρόσθεση, ἀφαίρεση καὶ πολλαπλασιασμό* καὶ τίς παριστάνουμε ἀντίστοιχα μέ τὰ ἴδια σύμβολα $+$, $-$, $\cdot$. "Ἐτσι μεταξύ τῶν στοιχείων τοῦ $C[x]$ μπορούμε νὰ ὀρίσουμε τὸ *ἄθροισμα* $*$, τὴ *διαφορὰ* καὶ τὸ *γινόμενο* δύο ἄκέραιων πολυωνύμων τοῦ x , ὡς ἓνα ἐπίσης ἄκέραιο πολυώνυμο τοῦ x , δηλ. ὡς ἓνα στοιχεῖο τοῦ $C[x]$. "Ακριβέστερα, ἂν $f(x), \varphi(x)$ εἶναι δύο ὁποιαδήποτε στοιχεῖα τοῦ $C[x]$, δηλ. δύο ἄκέραια πολυωνύμα τοῦ x , τότε $**$:

a) Ὀνομάζουμε *ἄθροισμα* τῶν πολυωνύμων:

$$f(x) \equiv a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 \quad (1)$$

* Δέν πρέπει νὰ συγχέουμε τίς ἔννοιες: *πρόσθεση, ἀφαίρεση, πολλαπλασιασμός* μέ τίς ἔννοιες: *ἄθροισμα, διαφορὰ, γινόμενο*. Οἱ πρώτες εἶναι *πράξεις*, ἐνῶ οἱ δευτέρες εἶναι τὸ *ἀποτέλεσμα* τῶν ἀντίστοιχων πράξεων (πολυώνυμο).

** Δεχόμαστε, χωρὶς αὐτὸ νὰ περιορίζει τὴ γενικότητα, ὅτι τὰ πολυώνυμα $f(x)$ καὶ $\varphi(x)$ ἔχουν τὸ ἴδιο πλῆθος ὄρων. "Αν τὰ $f(x), \varphi(x)$ δέν ἔχουν τὸ ἴδιο πλῆθος ὄρων, τότε ἐπισυνάπτουμε στό πολυώνυμο μέ τὸ μικρότερο βαθμὸ ὄρους μέ συντελεστή μηδέν, ὥστε τὰ δύο πολυώνυμα νὰ ἔχουν τὸ ἴδιο πλῆθος ὄρων (βλ. καὶ Σημείωση § 110).

$$\varphi(x) \equiv \beta_v x^v + \beta_{v-1} x^{v-1} + \cdots + \beta_1 x + \beta_0 \quad (2)$$

καί τό συμβολίζουμε μέ: $f(x) + \varphi(x)$, τό πολυώνυμο:

$$(\alpha_v + \beta_v)x^v + (\alpha_{v-1} + \beta_{v-1})x^{v-1} + \cdots + (\alpha_1 + \beta_1)x + (\alpha_0 + \beta_0) \quad (3)$$

δηλαδή τό άθροισμα δύο πολυωνύμων είναι τό πολυώνυμο πού έχει συντελεστή τοῦ x^k ($k = 0, 1, \dots, v$) τό άθροισμα τῶν συντελεστῶν τοῦ x^k στά δύο πολυώνυμα.

β) Ὀνομάζουμε **ἀντίθετο** τοῦ πολυωνύμου $\varphi(x)$ καί τό συμβολίζουμε μέ: $-\varphi(x)$, τό πολυώνυμο πού έχει συντελεστές τοὺς ἀντίθετους τῶν συντελεστῶν τοῦ $\varphi(x)$. Ὡστε:

$$-\varphi(x) \equiv -\beta_v x^v - \beta_{v-1} x^{v-1} - \cdots - \beta_1 x - \beta_0 \quad (4)$$

γ) Ὀνομάζουμε **διαφορά** τοῦ πολυωνύμου $\varphi(x)$ ἀπό τό πολυώνυμο $f(x)$ καί τή συμβολίζουμε μέ: $f(x) - \varphi(x)$, τό πολυώνυμο: $f(x) + [-\varphi(x)]$. Ὡστε:

$$f(x) - \varphi(x) \equiv (\alpha_v - \beta_v)x^v + (\alpha_{v-1} - \beta_{v-1})x^{v-1} + \cdots + (\alpha_1 - \beta_1)x + (\alpha_0 - \beta_0) \quad (5)$$

Ἀπό τόν παραπάνω ὀρισμό καί τήν ἰσοδυναμία (7) τῆς προηγούμενης παραγράφου συμπεραίνουμε ἀμέσως ὅτι:

$$f(x) = \varphi(x) \iff f(x) - \varphi(x) = 0(x) \quad (6)$$

δ) Ὀνομάζουμε **γινόμενο ἑνός ἀριθμοῦ** (πραγμ. ἢ μιγαδικοῦ) λ ἐπὶ τό πολυώνυμο $f(x)$ καί τό συμβολίζουμε μέ: $\lambda f(x)$, τό πολυώνυμο:

$$\lambda f(x) \equiv (\lambda \alpha_v)x^v + (\lambda \alpha_{v-1})x^{v-1} + \cdots + (\lambda \alpha_1)x + (\lambda \alpha_0) \quad (7)$$

ε) Ὀνομάζουμε **γινόμενο** τοῦ πολυωνύμου $f(x)$ ἐπὶ τό πολυώνυμο $\varphi(x)$ καί τό συμβολίζουμε μέ: $f(x) \cdot \varphi(x)$, τό ἀκέραιο πολυώνυμο τοῦ x πού έχει συντελεστή τοῦ x^k ($k = 0, 1, \dots, 2v$) τό άθροισμα τῶν γινομένων τῶν συντελεστῶν τοὺς μέ άθροισμα δεικτῶν ἴσο μέ k . Δηλαδή:

$$f(x) \cdot \varphi(x) \equiv \alpha_0 \beta_0 + (\alpha_0 \beta_1 + \alpha_1 \beta_0)x + (\alpha_0 \beta_2 + \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_0)x^2 + \cdots + \alpha_0 \beta_v + \alpha_1 \beta_{v-1} + \cdots + \alpha_{v-1} \beta_1 + \alpha_v \beta_0 x^v + \cdots + \alpha_v \beta_v x^{2v} \quad (8)$$

Ἀξιόλογη παρατήρηση. Ἐπειδὴ τὰ ἀκέραια μονώνυμα τοῦ x (βλ. § 110) εἶναι καί αὐτὰ ἐπίσης στοιχεῖα τοῦ $C[x]$, δηλαδή ἀκέραια πολυώνυμα τοῦ x , συμπεραίνουμε, ὥστε ἀπό τοὺς παραπάνω ὀρισμούς, ὅτι: *κάθε πολυώνυμο εἶναι «άθροισμα» τῶν ὁρῶν του καί κάθε ὁρος του εἶναι «γινόμενο» τοῦ συντελεστῆ του ἐπὶ παράγοντες ἴσους μέ x .*

Γιά τίς πράξεις τῆς προσθέσεως καί τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, πού ὀρίσαμε παραπάνω, ἰσχύουν, ὅπως εὐκόλα διαπιστώνει κανεῖς, ὁ ἀντιμεταθετικός, προσεταιριστικός καί ἐπιμεριστικός νόμος. Ἐπιπλέον ὑπάρχει οὐδέτερο στοιχείο γιά τήν πρόσθεση καί αὐτό εἶναι τό μηδενικό πολυώνυμο $0(x) \equiv 0$, καθὼς ἐπίσης ὑπάρχει οὐδέτερο στοιχείο γιά τόν πολλαπλασιασμό καί μάλιστα αὐτό εἶναι τό σταθερό πολυώνυμο 1. Τέλος, ὁ πολλαπλασιασμός $(\cdot)$ εἶναι μέσα στό $C[x]$ πράξη ἐπιμεριστική καί ὡς πρὸς τήν ἀφαίρεση. Ἐτσι ἔχουμε:

$$f(x)[\varphi(x) - g(x)] = f(x) \cdot \varphi(x) - f(x) \cdot g(x).$$

στ) 'Ονομάζουμε ***n*-οστή δύναμη** ενός πολυωνύμου $f(x) \neq 0(x)$ και τή συμβολίζουμε με $[f(x)]^n$, τό πολυώνυμο:

$$[f(x)]^n \stackrel{\text{ορισ}}{=} f(x) \cdot f(x) \cdot \dots \cdot f(x), \quad (9)$$

όπου οί παράγοντες του δεύτερου μέλους είναι n .

Από τόν παραπάνω όρισμό προκύπτει τώρα ότι:

1. $[f(x)]^n \cdot [f(x)]^m = [f(x)]^{n+m}$
2. $[[f(x)]^m]^n = [f(x)]^{m \cdot n}$
3. $[f(x) \cdot g(x)]^n = [f(x)]^n \cdot [g(x)]^n$.

Σχόλιο. Συνοψίζοντας τά παραπάνω υπογραμμίζουμε τά βασικότερα σημεία:

i) 'Η πρόσθεση, ή αφαίρεση και ό πολλαπλασιασμός πολυωνύμων είναι πράξεις «κλειστές» στό σύνολο $C[x]$, καθόσον τό άθροισμα, ή διαφορά και τό γινόμενο δύο άκέραιων πολυωνύμων είναι επίσης άκέραιο πολυώνυμο.

ii) Τό ούδέτερο στοιχείο τής προσθέσεως, δηλαδή τό μηδενικό πολυώνυμο, καθώς επίσης και τό ούδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού, δηλαδή τό σταθερό πολυώνυμο 1, είναι άκέραια πολυώνυμα, δηλαδή $0(x) \in C[x]$ και $1 \in C[x]$. Επίσης τό αντίθετο πολυώνυμο: $-f(x)$ ενός πολυωνύμου $f(x)$ είναι και αυτό άκέραιο πολυώνυμο του x .

iii) Οί πράξεις $(+)$ και $(\cdot)$ είναι μέσα στό $C[x]$ αντιμεταθετικές και προσεταιριστικές. 'Επιπλέον ή πράξη $(\cdot)$ είναι έπιμεριστική ως προς τίς πράξεις $+$ και $-$.

"Όλα τά παραπάνω χαρακτηρίζουν τό σύνολο $C[x]$ των άκέραιων πολυωνύμων ως ένα «δακτύλιο μέ μοναδιαίο στοιχείο». 'Ο δακτύλιος αυτός όνομάζεται: **ό δακτύλιος των πολυωνύμων έπάνω στό C** και συμβολίζεται μέ $C[x]$.

Γιά τό βαθμό του άθροίσματος, τής διαφορής και του γινομένου δύο άκέραιων πολυωνύμων $f(x)$ και $\varphi(x)$, όπως εύκολα διαπιστώνει κανείς, ισχύουν:

$$\alpha) \text{βαθμ.}[f(x) \pm \varphi(x)] \leq \max \{ \text{βαθμ. } f(x), \text{βαθμ. } \varphi(x) \} \quad (10)$$

$$\beta) \text{βαθμ.}[\lambda f(x)] = \text{βαθμ. } f(x), \text{ για κάθε } \lambda \in C \text{ με } \lambda \neq 0 \quad (11)$$

$$\gamma) \text{βαθμ.}[f(x) \cdot \varphi(x)] = \text{βαθμ. } f(x) + \text{βαθμ. } \varphi(x). \quad (12)$$

Είναι φανερό ότι οί παραπάνω σχέσεις: (10), (11) και (12) ισχύουν μέ τήν προϋπόθεση ότι: $f(x), \varphi(x), f(x) \pm \varphi(x)$, είναι όλα μή μηδενικά πολυώνυμα του x .

Άσκηση. Νά εξετάσετε πότε ή (10) ισχύει μέ τό ίσον;

'Η γνωστή ιδιότητα που ξέρουμε για τους άκέραιους, αλλά και πιο γενικά για τους πραγματικούς και μιγαδικούς αριθμούς, σύμφωνα μέ τήν όποία: $\alpha \cdot \beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ είτε $\beta = 0$, ισχύει και για άκέραια πολυώνυμα. Άκριβέστερα ισχύει ή πρόταση:

Πρόταση. "Αν $f(x), \varphi(x)$ άκέραια πολυώνυμα και $f(x) \cdot \varphi(x) = 0$, τότε ένα τουλάχιστο άπ' αυτά θά είναι τό μηδενικό πολυώνυμο.

'Η άπόδειξη τής παραπάνω προτάσεως είναι άπλή, άρκει νά εφαρμόσουμε τή μέθοδο τής «εις άτοπον» άπαγωγής και νά παρατηρήσουμε ότι ό πρώτος συντελεστής του γινομένου $f(x) \cdot \varphi(x)$ είναι τότε διάφορος άπό τό μηδέν. Άρα $f(x) \cdot \varphi(x) \neq 0$ (άτοπο).

Άμεσες συνέπειες τής παραπάνω προτάσεως είναι τά πορίσματα:

Πόρισμα 1ο.—Τό γινόμενο δύο μή μηδενικῶν πολυωνύμων ποτέ δέ μπορεί νά γίνει τό μηδενικό πολυώνυμο.

$$\text{Δηλαδή: } \boxed{f(x) \neq 0 \wedge g(x) \neq 0 \Rightarrow f(x) \cdot g(x) \neq 0} \quad (13)$$

Πράγματι· ἂν ἦταν $f(x) \cdot g(x) = 0$, τότε $f(x) = 0 \vee g(x) = 0$ (ἄτοπο).

Πόρισμα 2ο. (Νόμος τῆς ἀπλοποιήσεως ἢ διαγραφῆς).— Ἐάν $f(x)$, $g(x)$ καί $\varphi(x) \in C[x]$, τότε ἰσχύει ἡ συνεπαγωγή :

$$\boxed{\varphi(x) \neq 0 \wedge f(x) \cdot \varphi(x) = g(x) \cdot \varphi(x) \Rightarrow f(x) = g(x)} \quad (14)$$

Ἀπόδειξη. Διαδοχικά ἔχουμε:

$f(x) \cdot \varphi(x) = g(x) \cdot \varphi(x) \Rightarrow f(x) \varphi(x) - g(x) \cdot \varphi(x) = 0 \Rightarrow \varphi(x) \cdot [f(x) - g(x)] = 0$
καί ἐπειδὴ $\varphi(x) \neq 0$, σύμφωνα μέ τήν προηγούμενη πρόταση, θά ἔχουμε:

$$f(x) - g(x) = 0(x) \text{ καί συνεπῶς } f(x) = g(x).$$

* Σχόλιο. Ὅπως θά δοῦμε σ' ἕνα ἀπό τά ἐπόμενα κεφάλαια (βλ. Κεφ. IX, § 188, παράληψη) υπάρχουν σύνολα στά ὁποῖα ἡ γνωστή ιδιότητα: $\alpha\beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \vee \beta = 0$ δέν ἰσχύει. Πιό συγκεκριμένα: υπάρχουν σύνολα στά ὁποῖα τό γινόμενο δύο παραγόντων μπορεῖ νά εἶναι ἴσο μέ τό 0, ἂν καί οἱ δύο παράγοντες εἶναι διάφοροι τοῦ μηδενός.

Στοιχεῖα $\alpha \neq 0$ καί $\beta \neq 0$ μέ τήν ιδιότητα $\alpha\beta = 0$ ὀνομάζονται **διαιρέτες τοῦ μηδενός** ἢ μέ μιά λέξη **μηδενοδιαιρέτες**.

Ἐχοντας τώρα ὑπόψη τήν προηγούμενη πρόταση καί κυρίως τό πόρισμα 1 συμπεραίνουμε ὅτι τό σύνολο $C[x]$ τῶν ἀκέραιων πολυωνύμων τοῦ x δέν ἔχει μηδενοδιαιρέτες. Ἐξάλλου, ὅπως εἴπαμε καί στό προηγούμενο σχόλιο, τό $C[x]$ εἶναι ἕνας ἀντιμεταθετικός δακτύλιος μέ μοναδιαῖο στοιχεῖο τό ἀκέραιο πολυώνυμο $f(x) = 1 = 1x^0$.

Ὅλα τά παραπάνω χαρακτηρίζουν τό σύνολο $C[x]$ τῶν ἀκέραιων πολυωνύμων ὡς μιά «**ἀκέραια περιοχή**». Ἡ ἔννοια τοῦ δακτύλιου καί τῆς ἀκέραιας περιοχῆς ἀποτελοῦν δύο θεμελιώδεις ἔννοιες τῆς μοντέρνας (σύγχρονης) Ἀλγεβρας.

§ 112. Πολυωνυμική συνάρτηση — Ἀριθμητική τιμή καί ρίζα ἀκέραιου πολυωνύμου.— α) Ὅπως εἴπαμε καί στήν ἀρχή αὐτοῦ τοῦ Κεφαλαίου, μπορούμε νά θεωροῦμε τήν ἔκφραση ἑνός ἀκέραιου πολυωνύμου

$f(x) \equiv \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ σάν τύπο συναρτήσεως μέ ἀνεξάρτητη μεταβλητή τό x . Θεωροῦμε δηλαδή τή συνάρτηση:

$$\widehat{f}: A \rightarrow C, \text{ ὅπου } A \subset C, \text{ μέ τύπο: } f(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0.$$

Ἀκριβέστερα θεωροῦμε τή (μονοσήμαντη) ἀπεικόνιση:

$$\widehat{f}: A \rightarrow C: x \mapsto \widehat{f}(x) = f(x) \equiv \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 \quad (1)$$

ὅπου $A \subset C$ καί $f(x) \in C[x]$.

Οἱ συναρτήσεις τῆς μορφῆς (1) ὀνομάζονται **πολυωνυμικές συναρτήσεις τοῦ x** καί θά τίς παριστάνουμε στά ἐπόμενα μέ $f(x)$ ἀντί $\widehat{f}(x)$.

β) Ὅς θεωρήσουμε τώρα ἕνα ὁποιοδήποτε, ἀλλά σταθερό στοιχεῖο τοῦ A , π.χ. τό ξ . Ἡ εἰκόνα $f(\xi)$ τοῦ ξ κατά τήν ἀπεικόνιση (1), δηλαδή τό στοιχεῖο: $\alpha_n \xi^n + \alpha_{n-1} \xi^{n-1} + \dots + \alpha_1 \xi + \alpha_0$ τοῦ C ὀνομάζεται **ἀριθμητική τιμή τῆς πο-**

λυνωνμικής συναρτήσεως (1) για $x = \xi$. Συχνά όμως στά επόμενα για συντομία θα λέμε ότι : *ή $f(\xi)$ είναι ή αριθμητική τιμή του πολωνύμου $f(x) \equiv \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ για $x = \xi$ και θα γράφουμε:*

$$f(\xi) = \alpha_n \xi^n + \alpha_{n-1} \xi^{n-1} + \dots + \alpha_1 \xi + \alpha_0.$$

Προσέξτε! ή τιμή $f(\xi)$ δέν προκύπτει από τό πολωνύμο για $x = \xi$, αλλά μέ αντικατάσταση του x από τό ξ και έκτέλεση τών αντίστοιχων αριθμητικῶν πιά πράξεων και ὄχι πράξεων μεταξύ πολωνύμων.

Εἶναι τώρα ἀμέσως φανερό ὅτι: ή αριθμητική τιμή του ἄθροίσματος (ἀντ. του γινομένου) δύο πολωνύμων ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα (ἀντ. τό γινόμενο) τῶν αριθμητικῶν τιμῶν τῶν πολωνύμων.

Ἐπίσης ή αριθμητική τιμή του μηδενικοῦ πολωνύμου εἶναι σταθερή καί ἴση μέ 0 για κάθε τιμή τῆς μεταβλητῆς x , δηλ. $0(x) = 0, \forall x \in \mathbb{C}$.

Τέλος, ἀπό τόν ὀρισμό τῆς ἰσότητος δύο πολωνύμων καταλαβαίνουμε ἀμέσως ὅτι : *δύο πολωνύμα ἴσα ἔχουν ἴσες αριθμητικές τιμές, δηλαδή, ἂν $f(x) = \varphi(x)$, τότε ἰσχύει ή πρόταση:*

$$\forall x \in \mathbb{C}, f(x) = \varphi(x) \quad (2)$$

Στήν περίπτωση πού ή πρόταση (2) εἶναι ἀληθής, λέμε ἀκόμη ὅτι *τά πολωνύμα $f(x)$ καί $\varphi(x)$ εἶναι «ἐκ ταυτότητος ἴσα»*, γράφουμε συμβολικά: $f(x) \equiv \varphi(x)$ καί διαβάζουμε: *$f(x)$ ἐκ ταυτότητος ἴσο μ' τό $\varphi(x)$.*

Στήν περίπτωση πού $f(x) = 0(x)$, ἰσχύει ή πρόταση:

$$\forall x \in \mathbb{C}, f(x) = 0 \quad (3)$$

Ὄταν ή πρόταση (3) εἶναι ἀληθής, λέμε ὅτι τό $f(x)$ *«μηδενίζεται ἐκ ταυτότητος»* ή ἄλλιῶς τό $f(x)$ εἶναι *«ἐκ ταυτότητος ἴσο μέ τό μηδέν»*, γράφουμε συμβολικά: $f(x) \equiv 0$ καί διαβάζουμε: *$f(x)$ ἐκ ταυτότητος μηδέν.*

Γιά τά «ἐκ ταυτότητος μηδέν» καί τά «ἐκ ταυτότητος ἴσα» πολωνύμα ἰσχύει ή ἐπόμενη βασική πρόταση:

Πρόταση. Μέ $f(x) \in \mathbb{C}[x], \varphi(x) \in \mathbb{C}[x]$ εἶναι ἀληθής καθεμία ἀπό τίς προτάσεις:

α). $f(x) = 0(x) \iff f(x) \equiv 0 \quad (4)$

β). $f(x) = \varphi(x) \iff f(x) \equiv \varphi(x) \quad (5)$

Ἀπόδειξη τῆς α : (i) Ἐστω $f(x) = 0(x)$, τότε: $\forall x \in \mathbb{C}, f(x) = 0$, ἐπειδή ὅλοι οἱ συντελεστές του $f(x)$ εἶναι μηδέν. Ἀρα $f(x) \equiv 0$.

(ii) Ἐστω $f(x) \equiv 0$, δηλαδή: $\forall x \in \mathbb{C}, f(x) = 0$, τότε $f(x) = 0(x)$, γιατί ἄλλιῶς θά ὑπῆρχε ἓνας τουλάχιστο συντελεστής του $f(x)$, ἔστω ὁ α_k , πού θά ἦταν διάφορος ἀπό τό μηδέν. Τότε ὅμως μέ $x = \xi \neq 0$ θά εἶχαμε: $f(\xi) \neq 0$. Αὐτό ὅμως εἶναι ἄτοπο, ἐπειδή $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{C}$.

Ἀπόδειξη τῆς β : (i) Ἐστω $f(x) = \varphi(x)$, τότε: $\forall x \in \mathbb{C}, f(x) = \varphi(x)$, δηλ.

* Ὁ συμβολισμός: $x = \xi$ δέ σημαίνει ἰσότητα, καθόσον τό πολωνύμο x δέν εἶναι σταθερό πολωνύμο, ἄρα μέ καμιά σταθερά δέν μπορεῖ νά ἰσοῦται, ἀλλά ἀπλῶς σημαίνει τήν αντικατάσταση του x μέ τή σταθερά ξ του $A \subset \mathbb{C}$.

$f(x) \equiv \varphi(x)$. (ii) Έστω τώρα $f(x) \equiv \varphi(x)$ δηλαδή: $\forall x \in C, f(x) = \varphi(x)$, τότε: $\forall x \in C, f(x) - \varphi(x) = 0$, δηλαδή: $f(x) - \varphi(x) \equiv 0$ και σύμφωνα με την (α): $f(x) - \varphi(x) = 0(x)$, οπότε: $f(x) = \varphi(x)$.

Γενική παρατήρηση. Έπειδή, όπως είδαμε στην παραπάνω πρόταση οι ισοδυναμίες (4) και (5) είναι ταυτολογίες (βλ. Κεφ. I, § 5), οι: $f(x) = 0(x)$ και $f(x) \equiv 0$ είναι ταυτολογικά ισοδύναμες (βλ. Κεφ. I, § 5), γι' αυτό στα επόμενα οι όροι: **μηδενικό πολυώνυμο** και **πολυώνυμο εκ ταυτότητος μηδέν** θα χρησιμοποιούνται με την ίδια σημασία, χωρίς διάκριση. Τό ίδιο θα ισχύει, λόγω της ισοδυναμίας (5), και για τους: **πολυώνυμα ίσα** και **πολυώνυμα εκ ταυτότητος ίσα**.

Σημείωση. Για να δηλώσουμε ότι το $f(x)$ δεν είναι το μηδενικό πολυώνυμο στα επόμενα συχνά θα γράφουμε: $f(x) \neq 0$.

γ) Έννοια της ρίζας ενός άκεραιου πολυωνύμου. Ένας αριθμός πραγματικός ή μιγαδικός, δηλ. ένα στοιχείο ρ του C ονομάζεται **ρίζα** ενός άκεραιου πολυωνύμου $f(x) \in C[x]$, τότε και μόνο τότε, αν η αριθμητική τιμή του πολυωνύμου για $x = \rho$ είναι μηδέν, δηλ. αν: $f(\rho) = 0$.

Ώστε:

$$\text{Ο } \rho \text{ είναι ρίζα του } f(x) \iff f(\rho) = 0.$$

(6)

Έτσι, π.χ. του πολυωνύμου: $f(x) \equiv x^3 + 4x^2 + x - 6$ ρίζες είναι οι αριθμοί: 1, -2, -3, καθόσον ισχύει: $f(1) = 0, f(-2) = 0, f(-3) = 0$. Επίσης του πολυωνύμου: $\varphi(x) \equiv x^3 + 1$ ρίζες είναι οι αριθμοί:

$$-1, \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Από τον παραπάνω ορισμό της ρίζας ενός πολυωνύμου καταλαβαίνουμε άμέσως ότι το μηδενικό πολυώνυμο δέχεται σάν ρίζες όλους τους μιγαδικούς αριθμούς. Απεναντίας ένα σταθερό μη μηδενικό πολυώνυμο $f(x) \equiv a (\neq 0)$, δηλ. ένα άκεραιο πολυώνυμο μηδενικού βαθμού· δέ δέχεται κανένα μιγαδικό αριθμό σάν ρίζα του.

Τό σύνολο των ριζών ενός πολυωνύμου $f(x) \in C[x]$ ονομάζεται **σύνολο αλήθειας** του πολυωνύμου $f(x)$. Έτσι, αν με P συμβολίσουμε τό σύνολο αλήθειας του $f(x)$, θά έχουμε: $P = \{z \in C: f(z) = 0\}$ και συνεπώς: $\rho \in P \iff f(\rho) = 0$.

Είναι φανερό τώρα ότι: αν τό $f(x)$ είναι τό μηδενικό πολυώνυμο, τότε $P = C$, ενώ αν βαθμ. $f(x) = 0$, τότε $P = \emptyset$.

Μία εξίσωση της μορφής: $f(x) = 0$, όπου $f(x)$ άκεραιο πολυώνυμο του $C[x]$, ονομάζεται **άλγεβρική εξίσωση**.

Ο βαθμός του πολυωνύμου $f(x)$ ονομάζεται και **βαθμός** της άλγεβρικής εξισώσεως. **Ρίζα** ή **λύση** μιās άλγεβρικής εξισώσεως λέγεται κάθε στοιχείο του συνόλου αλήθειας του $f(x)$, δηλαδή κάθε ρίζα του πολυωνύμου $f(x)$.

Μία άλγεβρική εξίσωση: $f(x) = 0$ λέγεται **άοριστη**, τότε και μόνο τότε, αν τό $f(x)$ είναι τό μηδενικό πολυώνυμο και **άδύνατη**, τότε και μόνο τότε, αν

τό $f(x)$ είναι ένα σταθερό μή μηδενικό πολυώνυμο, δηλαδή αν βαθμ. $f(x) = 0$.

Η ρίζα άλγεβρικής εξίσωσεως μέ ρητούς συντελεστές ονομάζεται **άλγεβρικός αριθμός**. "Ωστε :

"Ενας αριθμός $\zeta \in \mathbb{C}$ ονομάζεται **άλγεβρικός**, τότε και μόνο τότε, αν υπάρχει άκέραιο πολυώνυμο $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$, $f(x) \not\equiv 0$ μέ $f(\zeta) = 0$.

"Ετσι, π.χ. οί αριθμοί: 3, i, $\sqrt{2}$ είναι άλγεβρικοί, γιατί ίκανοποιούν αντίστοιχα τίς άλγεβρικές εξίσώσεις μέ ρητούς συντελεστές: $x - 3 = 0$, $x^2 + 1 = 0$, $x^2 - 2 = 0$.

"Υπάρχουν βέβαια και αριθμοί πού δέν είναι άλγεβρικοί. "Ενας μή άλγεβρικός αριθμός ονομάζεται **ύπερβατικός**. "Ενας τέτοιος, λ.χ., είναι ό γνωστός μας από τή Γεωμετρία αριθμός $\pi = 3,14159 \dots$ (λόγος μιάς περιφέρειας πρós τή διάμετρό της). "Ο π είναι πραγματικός, αλλά δέν είναι άλγεβρικός αριθμός. "Υπερβατικός επίσης είναι ό αριθμός $e = 2,7182 \dots$ γιά τόν όποιο κάνουμε λόγο στό έπόμενο κεφάλαιο.

Σημείωση. Δέν πρέπει νά συγχέουμε τίς έννοιες : πολυώνυμο εκ ταυτότητος μηδέν [$f(x) \equiv 0$] και **άλγεβρική εξίσωση** [$f(x) = 0$]: και τούτο γιατί: $f(x) \equiv 0 \iff \forall x \in \mathbb{C}, f(x) = 0$, ενώ στήν άλγεβρική εξίσωση: $f(x) = 0$ ζητάμε νά βρούμε τά στοιχεία εκείνα του $\mathbb{C}$ γιά τά όποια μηδενίζεται τό πολυώνυμο $f(x)$.

Σχετικά μέ τίς ρίζες τών πολυωνύμων υπάρχει τό παρακάτω βασικό θεώρημα πού άποδεικνύεται στήν "Ανώτερη "Άλγεβρα και τή Θεωρία τών Μιγαδικών Συναρτήσεων και πού είναι γνωστό στή διεθνή βιβλιογραφία ώς *θεμελιώδες θεώρημα τής "Άλγεβρας* ή *θεώρημα του D' Alembert **, έπειδή αυτός πρώτος προσπάθησε, τό 1746, νά τό άποδείξει. "Η πρώτη όμως άυστηρή άπόδειξη όφείλεται στόν Gauss** (1799).

§ 113. Θεώρημα του D' Alembert. (*Θεμελιώδες θεώρημα τής "Άλγεβρας*).— Κάθε άκέραιο πολυώνυμο, μέ πραγματικούς ή πιό γενικά μέ μιγαδικούς συντελεστές, βαθμού $n \geq 1$, έχει μία τουλάχιστο μιγαδική ρίζα.

Δηλαδή :

$$\forall f(x) \in \mathbb{C}[x] \text{ μέ βαθμ. } f(x) \geq 1 \exists \rho \in \mathbb{C} : f(\rho) = 0$$

Μία ίσοδύναμη διατύπωση του θεμελιώδους θεωρήματος τής "Άλγεβρας είναι και ή έξής : *Τό σύνολο αλήθειας ενός άκέραιου πολυωνύμου $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ βαθμού $n \geq 1$, είναι $\neq \emptyset$.*

Παρατηρούμε ότι τό παραπάνω θεώρημα μάς εξασφαλίζει μέν τήν ύπαρξη ρίζας (πραγματικής ή μιγαδικής) γιά κάθε πολυώνυμο βαθμού $n \geq 1$, δέ μάς λείπει όμως τίποτε σχετικό ούτε γιά τόν τρόπο πού θά τή βρούμε, ούτε γιά τό πλήθος τών ριζών του πολυωνύμου.

Μέ άλλα λόγια τό πιό πάνω θεώρημα μάς εξασφαλίζει τήν ύπαρξη μιάς τουλάχιστο λύσεως τής άλγεβρικής εξίσωσεως:

* Jean D' Alembert (1717 - 1783). Γάλλος μαθηματικός και φιλόσοφος.

** Karl Fr. Gauss (1777 - 1855). Πολύ μεγάλος Γερμανός μαθηματικός.

$$\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0 \quad (1)$$

γιά οποιοδήποτε φυσικό αριθμό n ($n \in \mathbb{N}$).

Σημείωση. Αποδεικνύεται ότι για $n = 2, 3, 4$ μπορούμε να υπολογίσουμε τις λύσεις της εξίσωσης (1) με τη βοήθεια κατάλληλου τύπου. Ο Abel απόδειξε ότι δεν είναι δυνατό να βρεθούν γενικοί τύποι που να δίνουν τις λύσεις μιας εξίσωσης της μορφής (1) για $n \geq 5$.

§ 114. Έφαρμογές στα έκ ταυτότητας ίσα πολυώνυμα – Μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών.—Όπως είπαμε και στην § 110 η συνθήκη $f(x) = \varphi(x)$ της ισότητας δύο άκεραιων πολυωνύμων εκφράζεται με την ισοδύναμη συνθήκη της ισότητας των συντελεστών των ίσων δυνάμεων του x αυτών των δύο πολυωνύμων. Η συνθήκη αυτή μας παρέχει τη δυνατότητα να μπορούμε να προσδιορίζουμε τους συντελεστές ενός πολυωνύμου, ερα και τό πολυώνυμο όταν γνωρίζουμε τό βαθμό του, ώστε τοῦτο να ίκανοποιεί όρισμένες συνθήκες. Αὐτή ή μέθοδος είναι γνωστή ως *μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών*. Για τήν εφαρμογή αὐτῆς τῆς μεθόδου τά πολυώνυμα τοῦ προβλήματος εκφράζονται με τή μορφή (9) ή (10) τῆς § 110, δηλαδή με τή *συνθήκη*, όπως λέμε, *μορφῇ* τους.

Ἐς δοῦμε τώρα πῶς αὐτή ή μέθοδος εφαρμόζεται σέ συγκεκριμένα παραδείγματα:

Ἐφαρμογή 1η: Δίνονται τά πολυώνυμα:

$$f(x) \equiv 2x^3 + \alpha x^2 - 13x + \beta, \quad \varphi(x) \equiv 2x^3 + (\gamma - 2)x^2 - (\gamma + 12)x - 6\gamma.$$

Νά προσδιορίσετε τοὺς συντελεστές α, β, γ , ώστε νά ἔχουμε: $f(x) \equiv \varphi(x)$.

Λύση. Ὅπως ξέρουμε (§ 112): $f(x) \equiv \varphi(x) \iff f(x) = \varphi(x)$ καί ὅπως είπαμε παραπάνω ή συνθήκη τῆς ισότητας δύο πολυωνύμων είναι ισοδύναμη με τή συνθήκη τῆς ισότητας των συντελεστών των ίσων δυνάμεων του x των πολυωνύμων $f(x)$ καί $\varphi(x)$. Ἐτσι παίρνουμε τό παρακάτω (γραμμικό) σύστημα:

$$\left. \begin{array}{l} \gamma - 2 = \alpha \\ -(\gamma + 12) = -13 \\ -6\gamma = \beta \end{array} \right\} \iff \left. \begin{array}{l} \gamma - 2 = \alpha \\ \gamma + 12 = 13 \\ 6\gamma = -\beta \end{array} \right\}$$

Ἀπό τήν ἐπίλυση τοῦ τελευταίου. συστήματος βρίσκουμε:

$$\alpha = -1, \quad \beta = -6, \quad \gamma = 1.$$

Ἐφαρμογή 2η: Νά βρεῖτε άκέραιο πολυώνυμο τρίτου βαθμοῦ $f(x) \in C[x]$, τέτοιο, ώστε: νά δέχεται ως ρίζα τόν αριθμό μηδέν καί νά ίκανοποιεί τήν ταυτότητα: $f(x) - f(x-1) \equiv x^2$.

Στή συνέχεια νά βρεῖτε τό νιοστό μερικό άθροισμα σ_n τῆς σειράς $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ με $\alpha_v = v^2$.

Λύση. Τό πολυώνυμο πού ζητᾶμε θά είναι τῆς μορφῆς:

$$f(x) \equiv \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$$

όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ συντελεστές πού πρέπει νά προσδιοριστοῦν. Ἐπειδή $f(0) = 0$ θά πρέπει $\delta = 0$ καί τό πολυώνυμο γίνεται: $f(x) \equiv \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x$.

Ἀπό τήν ὑπόθεση ἔχουμε:

$$\begin{aligned} f(x) - f(x-1) &\equiv \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x - \alpha(x-1)^3 - \beta(x-1)^2 - \gamma(x-1) \equiv \\ &\equiv 3\alpha x^2 - (3\alpha - 2\beta)x + (\alpha - \beta + \gamma) \equiv x^2. \end{aligned}$$

*Από την τελευταία σχέση, σύμφωνα με τον όρισμό της Ισότητας δύο πολυωνύμων, λαμβάνουμε τό (γραμμικό) σύστημα:

$$\{3\alpha = 1 \wedge 3\alpha - 2\beta = 0 \wedge \alpha - \beta + \gamma = 0\}$$

τό οποίο έχει τή μοναδική λύση: $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = \frac{1}{6}$.

*Αρα:
$$f(x) \equiv \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x. \quad (1)$$

Τό νιοστό μερικό άθροισμα σ_n τής σειράς $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ με $\alpha_v = v^2$ είναι:

$$\sigma_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 \quad (2)$$

*Από τήν ταυτότητα: $f(x) - f(x-1) \equiv x^2$ γιά $x = 1, 2, \dots, n$ βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} f(1) - f(0) &= 1^2 \\ f(2) - f(1) &= 2^2 \\ f(3) - f(2) &= 3^2 \\ &\dots\dots\dots \\ f(n) - f(n-1) &= n^2. \end{aligned}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη αυτές τίσ ισότητες καί έχοντας υπόψη τίσ (1), (2) καί ακόμη ότι $f(0) = 0$ τελικά βρίσκουμε:

$$\sigma_n \equiv 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = f(n) = \frac{1}{3} n^3 + \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{6} n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

*Εφαρμογή 3η: Νά προσδιορίσετε τούς συντελεστές $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ενός άκέραιου πολυωνόμου:

$f(x) \equiv \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$, ώστε νά ισχύει:

$$f(1) + f(2) + \dots + f(n) \equiv n^4$$

Λύση. *Από τή μορφή του $f(x)$ γιά $x = 1, 2, \dots, n$ βρίσκουμε:

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= \alpha \cdot 1^3 + \beta \cdot 1^2 + \gamma \cdot 1 + \delta \\ f(2) &= \alpha \cdot 2^3 + \beta \cdot 2^2 + \gamma \cdot 2 + \delta \\ &\dots\dots\dots \\ f(n) &= \alpha \cdot n^3 + \beta \cdot n^2 + \gamma \cdot n + \delta \end{aligned} \right\}$$

Προσθέτοντας τώρα κατά μέλη αυτές τίσ ισότητες καί λαμβάνοντας υπόψη τούς τύπους (1), (2) καί (3) τής § 78 έχουμε:

$$\alpha \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \beta \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \gamma \frac{n(n+1)}{2} + n \cdot \delta \equiv n^4$$

$$\eta \quad \frac{\alpha}{4} n^4 + \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{3}\right) n^3 + \left(\frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}\right) n^2 + \left(\frac{\beta}{6} + \frac{\gamma}{2} + \delta\right) n \equiv n^4.$$

Γιά νά είναι δύο πολυώνυμα ως πρός n «εκ ταυτότητας ίσα» θά πρέπει νά ισχύει:

$$\left\{ \frac{\alpha}{4} = 1 \wedge \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{3} = 0 \wedge \frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 0 \wedge \frac{\beta}{6} + \frac{\gamma}{2} + \delta = 0 \right\}.$$

*Από τήν επίλυση του παραπάνω συστήματος βρίσκουμε:

$$\alpha = 4, \quad \beta = -6, \quad \gamma = 4, \quad \delta = -1.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

*Ομάδα Α'. 234. Νά προσδιορίσετε τούς συντελεστές α, β, γ ώστε τό:

$$f(x) \equiv (2\alpha + 1)x^2 + (3\beta - 1)x + (2\gamma + \beta - \alpha)$$

νά είναι τό μηδενικό πολυώνυμο.

235. Νά εξετάσετε αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί α και β , ώστε τό:

$$f(x) \equiv (\alpha - 1)x^2 + (2\beta + 2)x + (\alpha + \beta - 3)$$

νά είναι τό μηδενικό πολυώνυμο.

236. "Αν είναι $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$ και $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, όπου $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, νά αποδείξετε ότι τό: $f(x) \equiv (\alpha - \beta)x^2 + (\beta - \gamma)x + (\gamma - \alpha)$ είναι τό μηδενικό πολυώνυμο.

237. Νά προσδιορίσετε τούς πραγματικούς αριθμούς α, β, γ αν ξέρουμε ότι αὐτοί ικανοποιούν τήν Ισότητα: $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$ και ότι τό πολυώνυμο:

$$f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma \text{ ἔχει ἀριθμητική τιμή 7 γιά } x = 1.$$

238. Νά προσδιορίσετε τούς πραγματικούς αριθμούς α, β, γ , ώστε τό πολυώνυμο: $f(x) \equiv x^4 - 2x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 4$ νά είναι τό τετράγωνο τοῦ τριωνύμου: $x^2 - x + \gamma$.

239. Νά βρεῖτε τήν ἀναγκαῖα καί ικανή συνθήκη ὥστε τό πολυώνυμο $f(x) \equiv x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ νά είναι τετράγωνο ἄλλου πολυωνύμου.

240. Λέμε πὼς ἓνα πολυώνυμο $f(x) \equiv \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ είναι τέλειος κύβος, τότε καί μόνο τότε, αν μπορεῖ νά πάρει τή μορφή: $\alpha(x + k)^3$, $k \in \mathbb{R}$. Νά ἀποδείξετε τώρα ότι: τό $f(x)$ είναι τέλειος κύβος, τότε καί μόνο τότε, αν: $\beta^3 = 27\alpha^2\delta \wedge \beta^2 = 3\alpha\gamma$. Στή συνέχεια, χρησιμοποιώντας τό προηγούμενο ἀποτέλεσμα, νά ἀποδείξετε ότι τό πολυώνυμο:

$$8x^3 + 36x^2 + 54x + 27 \text{ είναι τέλειος κύβος.}$$

241. "Αν είναι $\alpha + \beta + \gamma = 30$, νά προσδιορίσετε τούς πραγματικούς αριθμούς α, β, γ , ὥστε ἡ συνάρτηση f μέ τύπο:

$$f(x) = \frac{(\alpha - 2)x^2 + (\beta - 4)x + \gamma - 6}{x^2 + 2x + 3}$$

νά είναι σταθερή γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Ὁμάδα Β'. 242. Δίνονται τά πολυώνυμα:

$$f(x) \equiv \alpha x^3 + 4x^2 + \gamma x + \delta, \quad \varphi(x) \equiv 2x^3 + \beta x^2 + 3x + 1.$$

Ποιές τιμές πρέπει νά πάρουν οἱ πραγματικοί αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ὥστε τό πολυώνυμο:

$$F(x) \equiv f(x) + \varphi(x) \text{ νά είναι:}$$

i) βαθμοῦ 3, ii) βαθμοῦ τό πολύ 3, iii) μηδενικοῦ βαθμοῦ, iv) μηδενικό πολυώνυμο.

243. Νά βρεῖτε ὅλα τά πολυώνυμα δεύτερου βαθμοῦ (τριώνυμα) πού ικανοποιούν τή συνθήκη:

$$\alpha) \forall x \in \mathbb{R}, f(x + 1) = f(-x), \quad \beta) \forall x \in \mathbb{R}, x^2 \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x).$$

244. Νά προσδιορίσετε ἀκέραιο πολυώνυμο τέταρτου βαθμοῦ $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ τέτοιο, ὥστε: νά δέχεται ὡς ρίζα τόν ἀριθμό μηδέν καί νά ικανοποιεῖ τή συνθήκη:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - f(x - 1) = x^3.$$

Στή συνέχεια νά ὑπολογίσετε μέ τή βοήθεια αὐτοῦ τοῦ πολυωνύμου τό ἄθροισμα:

$$\sum_{n=1}^3 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3, \quad (n \in \mathbb{N}).$$

245. Νά προσδιορίσετε ἀκέραιο πολυώνυμο τρίτου βαθμοῦ $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ τέτοιο, ὥστε:

$$(i) f(0) = 0 \text{ καί } (ii) f(x + 1) - f(x) \equiv x(x + 1).$$

Στή συνέχεια νά βρεῖτε, μέ τή βοήθεια αὐτοῦ τοῦ πολυωνύμου, τό νιοστό μερικό ἄθροισμα τῆς σειρᾶς $\sum_{n=1}^{\infty} n(n + 1)$.

246. Νά προσδιορίσετε τούς πραγματικούς αριθμούς α καί β ἔτσι, ὥστε ἡ ἐξίσωση:

$$x^3 - 24x - 72 = 0 \text{ νά μπορεῖ νά πάρει τή μορφή: } \left(\frac{x - \alpha}{x - \beta}\right)^3 = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Κατόπιν νά βρείτε τό σύνολο ἀλήθειας τοῦ πολυωνύμου $f(x) \equiv x^3 - 24x - 72$.

247. Ἔστω ὅτι εἶναι $f(x), \varphi(x) \in \mathbb{R}[x]$ μέ σύνολα ἀλήθειας S, T ἀντιστοίχως. Ἄν A , καί Γ εἶναι ἀντιστοίχως τά σύνολα ἀλήθειας τῶν πολυωνύμων: $F(x) \equiv f(x) + \varphi(x)$ καί $G(x) \equiv f(x) \cdot \varphi(x)$, νά ἀποδείξετε ὅτι:

$$(i) \Gamma = S \cup T, \quad (ii) S \cap T = \emptyset \Rightarrow A \cap \Gamma = \emptyset.$$

Ἐπιπλέον: ἂν Π, P καί Σ εἶναι ἀντιστοίχως τά σύνολα τῶν πραγματικῶν ριζῶν τῶν πολυωνύμων: $f(x), \varphi(x)$ καί $\sigma(x) \equiv f^2(x) + \varphi^2(x)$, νά ἀποδείξετε ὅτι: $\Sigma = \Pi \cap P$.

Τέλος, νά ἐξετάσετε ἂν μπορεῖ νά ἰσχύει: $\Sigma = \Pi \cap P$ καί στήν περίπτωση πού τά Π, P καί Σ παριστάνουν τά σύνολα τῶν γνήσιων μιγαδικῶν ριζῶν τῶν πολυωνύμων $f(x), \varphi(x)$ καί $\sigma(x) \equiv f^2(x) + \varphi^2(x)$ ἀντιστοίχως.

248. Ἔστω τό πολυώνυμο:

$$f(x) \equiv ax^3 + bx^2 + \gamma x + \delta$$

i) Νά προσδιορίσετε τοὺς συντελεστῆς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ὥστε νά ἰσχύει:

$$p: \quad \forall n \in \mathbb{N}, f(1) + f(2) + \dots + f(n) = n^2(n^2 + 1).$$

ii) Ἀφοῦ προσδιορίσετε τοὺς συντελεστῆς τοῦ $f(x)$ νά ἀποδείξετε στή συνέχεια μέ τή μέθοδο τῆς τέλεις ἐπαγωγῆς τήν πρόταση p .

ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΑ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

§ 115. Τέλεια διαίρεση.— Ἔστω ὅτι $f(x)$ καί $\varphi(x)$ εἶναι δύο ἀκέραια πολυώνυμα τοῦ $\mathbb{C}[x]$. Δίνουμε τοὺς ἐπόμενους ὁρισμούς:

Ὁρισμός 1. *Θά λέμε ὅτι τό $\varphi(x)$ διαιρεῖ τό πολυώνυμο $f(x)$ καί συμβολίζουμε τοῦτο μέ $\varphi(x) | f(x)$, τότε καί μόνο τότε, ἂν $\varphi(x) \neq 0$ καί ὑπάρχει ἀκέραιο πολυώνυμο $\pi(x) \in \mathbb{C}[x]$ τέτοιο, ὥστε νά ἰσχύει: $f(x) \equiv \varphi(x)\pi(x)$.*

Γιά συντομία λοιπόν γράφουμε:

$$\varphi(x) | f(x) \iff \varphi(x) \neq 0 \wedge \exists \pi(x) \in \mathbb{C}[x] : f(x) \equiv \varphi(x)\pi(x) \quad (1)$$

Σ' αὐτή τήν περίπτωση λέμε ἐπίσης ὅτι: τό $f(x)$ διαιρεῖται ἢ εἶναι διαιρετό ἀπό τό $\varphi(x)$, ἢ τό $f(x)$ εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ $\varphi(x)$ ἢ ἀκόμη τό $\varphi(x)$ εἶναι διαιρέτης τοῦ $f(x)$.

Ἡ πράξη μέ τήν ὁποία βρίσκεται τό $\pi(x)$ λέγεται, ὅπως ξέρουμε, *τέλεια διαίρεση* τοῦ $f(x)$ διά τοῦ $\varphi(x) \neq 0$ καί συμβολίζεται μέ $f(x) : \varphi(x)$.

Σέ μία τέλεια διαίρεση τά πολυώνυμα $f(x), \varphi(x)$ καί $\pi(x)$ ὀνομάζονται ἀντιστοίχως *διαιρετέος, διαιρέτης* καί *πηλίκο* τῆς $f(x) : \varphi(x)$.

Γιά νά δηλώσουμε ὅτι τό πολυώνυμο $\varphi(x) \neq 0$ δέ διαιρεῖ τό $f(x)$ γράφουμε: $\varphi(x) \nmid f(x)$ καί διαβάζουμε: τό $\varphi(x)$ δέ διαιρεῖ τό (δέν εἶναι διαιρέτης τοῦ) $f(x)$.

Ἀπό τήν (1) συμπεραίνουμε ὅτι: ἂν $f(x) \equiv 0$ καί $\varphi(x) \neq 0$, τότε $\varphi(x) | f(x)$ μέ $\pi(x) \equiv 0$. Δηλαδή: τό μηδενικό πολυώνυμο διαιρεῖται ἀπό κάθε μή μηδενικό πολυώνυμο $\varphi(x)$ καί δίνει πηλίκο μηδέν.

Προσέξτε! τό μηδενικό πολυώνυμο δέ διαιρεῖ κανένα πολυώνυμο.

Ἀμεσες συνέπειες τοῦ ὁρισμοῦ 1 εἶναι καθεμία ἀπό τίς ἐπόμενες ἀληθεῖς προτάσεις:

α) Κάθε πολυώνυμο $f(x)$ διαιρείται από κάθε σταθερό αλλά μή μηδενικό πολυώνυμο $\varphi(x) = c$ ($c \neq 0$)*.

Πράγματι, αν $f(x) \equiv \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$, έχουμε την ταυτότητα:

$$\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 \equiv c \cdot \left\{ \frac{\alpha_n}{c} x^n + \frac{\alpha_{n-1}}{c} x^{n-1} + \dots + \frac{\alpha_1}{c} x + \frac{\alpha_0}{c} \right\},$$

όπου το άκραιο πολυώνυμο μέσα στα άγκιστρα είναι το πηλίκο.

β) Κάθε πολυώνυμο $f(x) \not\equiv 0$ είναι διαιρέτης του έαυτού του.

γ) Ο βαθμός του πηλίκου ισούται με τη διαφορά των βαθμών διαιρετέου και διαιρέτη. Πράγματι, αν $\varphi(x)/f(x)$ και είναι $f(x) \not\equiv 0$, τότε από την (1) έχουμε: $f(x) \equiv \varphi(x) \cdot \pi(x)$ και $\pi(x) \not\equiv 0$. Τότε όμως, σύμφωνα με τη (12) της § 111, θα έχουμε: $\text{βαθμ.}f(x) = \text{βαθμ.}\varphi(x) + \text{βαθμ.}\pi(x)$ και συνεπώς:

$$\boxed{\text{βαθμ.}\pi(x) = \text{βαθμ.}f(x) - \text{βαθμ.}\varphi(x)} \quad (2)$$

Σχόλιο. Από τη (2) και επειδή $\pi(x) \not\equiv 0$, τότε $\text{βαθμ.}\pi(x) \geq 0$, λαμβάνουμε: $\text{βαθμ.}f(x) \geq \text{βαθμ.}\varphi(x)$. Αν πάλι είναι $\pi(x) \equiv 0$, τότε και $f(x) \equiv 0$.

Προσέξτε! η μοναδική περίπτωση να έχει ένα πολυώνυμο $f(x)$, βαθμού τό πολύ n , διαιρέτη με βαθμό μεγαλύτερο του n , είναι όταν $f(x) \equiv 0$.

δ) Αν $\varphi(x)/f(x)$, τότε $f(x) \equiv 0(x)$ ή $\text{βαθμ.}f(x) \geq \text{βαθμ.}\varphi(x)$.

Αυτό προκύπτει άμέσως αν λάβουμε υπόψη τό παραπάνω σχόλιο.

ε) Τό πηλίκο $\pi(x)$ της τέλειαι διαιρέσεως $f(x) : \varphi(x)$ είναι μοναδικό.

Πράγματι, αν υπήρχε και άλλο πηλίκο $\pi_1(x) \in C[x]$ της τέλειαι διαιρέσεως $f(x) : \varphi(x)$ θα είχαμε: $f(x) \equiv \varphi(x) \pi(x) \wedge f(x) \equiv \varphi(x) \pi_1(x)$. Από αυτή τη σύζευξη βρίσκουμε: $\varphi(x) \pi_1(x) \equiv \varphi(x) \pi(x)$ και επειδή $\varphi(x) \not\equiv 0$ θα είναι $\pi_1(x) \equiv \pi(x)$ (βλ. Πρόρισμα 2, § 111).

στ) Η σχέση της διαιρετότητας δύο πολυωνύμων είναι μεταβατική.

Δηλαδή: αν $\varphi(x)/f(x)$ και $f(x)/g(x)$, τότε $\varphi(x)/g(x)$.

Πράγματι, από τη σύζευξη: $f(x) \equiv \varphi(x) \pi_1(x) \wedge g(x) \equiv f(x) \pi_2(x)$ έπεται: $g(x) \equiv \varphi(x) [\pi_1(x) \cdot \pi_2(x)]$.

ζ) Για $\sigma(x) \not\equiv 0$ ισχύει: $\varphi(x)/f(x) \iff \varphi(x)\sigma(x)/f(x)\sigma(x)$.

Η απόδειξη είναι άπλή και γι' αυτό την παραλείπουμε.

Προσέξτε ιδιαίτερα την περίπτωση: $\sigma(x) \equiv c \neq 0$.

η) Αν $\varphi(x)/f(x)$, τότε $\varphi(x)/f(x) \cdot \sigma(x) \nmid \sigma(x) \in C[x]$.

Πράγματι, από την: $f(x) \equiv \varphi(x) \pi(x)$, έπεται: $f(x)\sigma(x) \equiv \varphi(x)[\pi(x)\sigma(x)]$.

Παρατήρηση. Για $\sigma(x) \equiv c$ ισχύει: $\varphi(x)/f(x) \implies c\varphi(x)/c \cdot f(x)$, $c \in C$. Εξάλλου για $\sigma(x) \equiv c \neq 0$ ισχύει: $\varphi(x)/f(x) \implies c \cdot \varphi(x)/f(x)$.

θ) Αν $\varphi(x)/f_1(x)$ και $\varphi(x)/f_2(x)$, τότε: $\varphi(x)/f_1(x) \pm f_2(x)$.

* Τό γράμμα c είναι τό πρώτο γράμμα της λέξεως constant = σταθερά και δέν πρέπει να συγχέεται με τό σύμβολο C πού παριστάνει τό σύνολο τών μιγαδικών αριθμών (Complex numbers).

Πράγματι, από τη σύζευξη: $f_1(x) \equiv \varphi(x)\pi_1(x) \wedge f_2(x) \equiv \varphi(x)\pi_2(x)$ έπεται: $f_1(x) \pm f_2(x) \equiv \varphi(x) \cdot [\pi_1(x) \pm \pi_2(x)]$ και έπειδή $\varphi(x) \not\equiv 0$ είναι: $\varphi(x)/f_1(x) \pm f_2(x)$.

Μέ τον ίδιο ακριβώς τρόπο αποδεικνύεται και ή πρόταση:

ι) "Αν $\varphi_1(x)/f_1(x)$ και $\varphi_2(x)/f_2(x)$, τότε: $\varphi_1(x)\varphi_2(x)/f_1(x)f_2(x)$.

"Άμεσες τώρα συνέπειες τών παραπάνω προτάσεων είναι οί έξής:

ια) "Αν τό $\varphi(x)$ διαιρεί καθένα από τά πολυώνυμα: $f_1(x), f_2(x), \dots, f_v(x)$, τότε $\varphi(x)/c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \dots + c_vf_v(x)$, όπου $c_1, c_2, \dots, c_v \in \mathbb{C}$.

ιβ) "Αν $\varphi(x)/f_1(x) \pm f_2(x)$ και $\varphi(x)/f_1(x)$, τότε $\varphi(x)/f_2(x)$.

ιγ) "Αν $\varphi(x)/f_1(x)$ και $\varphi(x)/f_2(x)$, τότε $\varphi(x)/f_1(x)\sigma_1(x) \pm f_2(x)\sigma_2(x)$, $\forall \sigma_1(x), \sigma_2(x) \in \mathbb{C}[x]$.

ιδ) $\varphi(x)/f_1(x) \vee \varphi(x)/f_2(x) \vee \dots \vee \varphi(x)/f_v(x) \Rightarrow \varphi(x)/f_1(x)f_2(x) \dots f_v(x)$.

ιε) "Αν $\varphi(x)/f(x)$, τότε $\varphi(x)/[f(x)]^n \forall n \in \mathbb{N}$.

Μία αξιόλογη πρόταση πάνω στή διαιρετότητα τών πολυωνύμων είναι ή έξής:

ιστ) "Αν $\varphi(x)/f(x)$ και $f(x)/\varphi(x)$, τότε $f(x) \equiv c \cdot \varphi(x)$, όπου c κατάλληλη σταθερά διάφορη του μηδενός.

"Απόδειξη. Πράγματι, από τή σύζευξη: $f(x) \equiv \varphi(x)\pi_1(x) \wedge \varphi(x) \equiv f(x)\pi_2(x)$ λαμβάνουμε: $f(x) \equiv f(x) \cdot \pi_1(x)\pi_2(x)$ και έπειδή $f(x) \not\equiv 0$ είναι: $\pi_1(x)\pi_2(x) \equiv 1$. Τότε όμως: βαθμ. $\pi_1(x) +$ βαθμ. $\pi_2(x) =$ βαθμ. $1 = 0$. Άλλά βαθμ. $\pi_1(x) \geq 0$, βαθμ. $\pi_2(x) \geq 0$. Άρα βαθμ. $\pi_1(x) =$ βαθμ. $\pi_2(x) = 0$ και συνεπώς: $\pi_1(x) = c_1$ και $\pi_2(x) = c_2$, όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{C} - \{0\}$. Τότε όμως έχουμε:

$$f(x) \equiv c_1 \cdot \varphi(x) \quad \text{και} \quad \varphi(x) \equiv c_2 \cdot f(x) \iff f(x) \equiv \frac{1}{c_2} \varphi(x).$$

Δηλαδή:

$$f(x) \equiv c \cdot \varphi(x).$$

"Από τίς παραπάνω προτάσεις συμπεραίνουμε τώρα ότι: διαιρέτες ενός όποιουδήποτε άκέραιου πολυωνύμου $f(x)$ είναι τά πολυώνυμα μηδενικού βαθμού, δηλ. τά $\neq 0$ στοιχειά του $\mathbb{C}$, έπίσης τό ίδιο τό $f(x)$, αν $f(x) \not\equiv 0$ καθώς και όλα τά πολυώνυμα τής μορφής: $cf(x)$, ($c \neq 0$). Οί διαιρέτες αυτοί ονομάζονται **προφανείς διαιρέτες** του $f(x)$. Κάθε άλλος διαιρέτης του $f(x)$ ονομάζεται **γνήσιος διαιρέτης** του πολυωνύμου $f(x)$.

Τελειώνοντας αυτή τήν παράγραφο δίνουμε και τούς έπόμενους όρισμούς:

"Ορισμός 2. "Ενα πολυώνυμο $f(x) \in \mathbb{C}[x]$, βαθμού $n > 0$, ονομάζεται **ανάγωγο**, τότε και μόνο τότε, αν έχει μόνο προφανείς διαιρέτες.

Γιά τήν "Άλγεβρα τά ανάγωγα πολυώνυμα είναι ότι οί πρώτοι αριθμοί στήν "Αριθμητική. Στο σύνολο $\mathbb{C}[x]$ τά μόνα ανάγωγα πολυώνυμα είναι τά πολυώνυμα πρώτου βαθμού: $\alpha x + \beta$, $\alpha \neq 0$, ενώ στο σύνολο $\mathbb{R}[x]$ ανάγωγα πολυώνυμα είναι τά: $\alpha x + \beta$, μέ $\alpha \neq 0$ καθώς και τά πολυώνυμα δεύτερου βαθμού (τριώνυμα) μέ μιγαδικές ρίζες.

"Ορισμός 3. "Ενα πολυώνυμο $\sigma(x) \in \mathbb{C}[x]$ ονομάζεται **κοινός διαιρέτης** τών πολυωνύμων $f(x), g(x)$, τότε και μόνο τότε, αν διαιρεί και τά δύο πολυώνυμα $f(x), g(x)$.

Όρισμός 4. Ένα πολυώνυμο $\delta(x) \in \mathbb{C}[x]$ ονομάζεται **μέγιστος κοινός διαιρέτης** (συντομ. ΜΚΔ) δύο μὴ μηδενικῶν πολυωνύμων $f(x), g(x) \in \mathbb{C}[x]$, τότε καὶ μόνο τότε, ἂν:

- (i) εἶναι κοινός διαιρέτης τῶν $f(x), g(x)$
- (ii) τὸ $\delta(x)$ διαιρεῖται ἀπὸ κάθε ἄλλο κοινὸ διαιρέτη τῶν $f(x), g(x)$
- (iii) ὁ πρώτος συντελεστής του εἶναι τὸ 1.

Εὐκόλα τώρα μπορεῖ νὰ ἀποδείξει κανεὶς ὅτι: ὁ μέγιστος κοινός διαιρέτης δύο πολυωνύμων, ἂν ὑπάρχει, εἶναι μοναδικός.

Ἀπὸ τὴ συνθήκη (ii) τοῦ παραπάνω ὁρισμοῦ συμπεραίνουμε ὅτι ὁ βαθμὸς τοῦ $\delta(x)$ εἶναι ὁ πιὸ μεγάλος (μέγιστος) ἀνάμεσα στοὺς βαθμοὺς ὄλων τῶν κοινῶν διαιρετῶν τῶν πολυωνύμων $f(x), g(x)$. Σ' αὐτὸ ἀκριβῶς τὸ γεγονός ὀφείλεται καὶ ἡ ὀνομασία του: ΜΚΔ.

Τὸ μέγιστο κοινὸ διαιρέτη $\delta(x)$ δύο πολυωνύμων $f(x), g(x)$ τὸν παριστάνουμε συνήθως ὡς ἑξῆς: $[f(x), g(x)]$.

Όρισμός 5. Δύο μὴ μηδενικά πολυώνυμα $f(x), g(x)$ ονομάζονται «**πρῶτα μεταξύ τους**», τότε καὶ μόνο τότε, ἂν ὁ ΜΚΔ τους $\delta(x)$ εἶναι ἴσος μὲ τὸ 1.

Ὡστε:

$$f(x), g(x) \text{ πρῶτα μεταξύ τους} \iff [f(x), g(x)] = 1$$

§ 116. Ἡ ταυτότητα τῆς ἀλγοριθμικῆς διαιρέσεως.—Γενικά ἡ διαίρεση δύο ἀκέραιων πολυωνύμων δὲν εἶναι τέλεια. Ἐνας τρόπος γιὰ νὰ ἐλέγχουμε, ἂν ἓνα πολυώνυμο διαιρεῖ ἓνα ἄλλο, εἶναι ὁ ἀκόλουθος:

Ἐστω, π.χ., τὰ πολυώνυμα $2x^2 - 7x + 6$ καὶ $3x + 1$. Γιὰ νὰ διαιρεῖ τὸ δεύτερο πολυώνυμο τὸ πρῶτο, πρέπει νὰ ὑπάρχει ἀκέραιο πολυώνυμο $\pi(x)$ τέτοιο, ὥστε:

$$2x^2 - 7x + 6 \equiv (3x + 1) \cdot \pi(x) \quad (1)$$

Ἐπειδὴ, ὅπως εἶπαμε (§ 115), ὁ βαθμὸς τοῦ πηλίκου ἰσοῦται μὲ τὴ διαφορά τῶν βαθμῶν διαιρετέου καὶ διαιρέτη, συμπεραίνουμε ὅτι τὸ $\pi(x)$ πρέπει νὰ εἶναι πρώτου βαθμοῦ, δηλαδὴ νὰ ἔχει τὴ μορφή: $\alpha x + \beta$. Τότε ἡ (1) γίνεταί:

$$2x^2 - 7x + 6 \equiv (3x + 1)(\alpha x + \beta) \equiv 3\alpha x^2 + (\alpha + 3\beta)x + \beta,$$

ὁπότε, σύμφωνα μὲ τὸν ὁρισμὸ τῆς ἰσότητος δύο πολυωνύμων, θὰ ἔχουμε:

$$\begin{array}{l|l} 3\alpha = 2 & \text{'Η πρώτη ἀπ' αὐτές δίνει } \alpha = \frac{2}{3}. \text{ Γιὰ } \alpha = \frac{2}{3} \text{ καὶ } \beta = 6 \\ \alpha + 3\beta = -7 & \text{ἡ δεύτερη δὲν ἀληθεύει, ἐπειδὴ:} \\ \beta = 6. & \frac{2}{3} + 3 \cdot 6 = \frac{2}{3} + 18 = 18 \frac{2}{3} \neq -7. \end{array}$$

Παρατηροῦμε λοιπὸν ὅτι οἱ ἐξισώσεις τοῦ συστήματος δὲν εἶναι συμβιβαστές καὶ συνεπῶς δὲν ὑπάρχει ἀκέραιο πολυώνυμο $\pi(x)$ ποὺ νὰ ἱκανοποιεῖ τὴν (1). Ἀρα τὸ $3x + 1$ δὲ διαιρεῖ τὸ $2x^2 - 7x + 6$.

Ἀπὸ τὸ παραπάνω παράδειγμα καταλαβαίνουμε ὅτι ἡ διαίρεση δύο ἀκέραιων πολυωνύμων γενικά δὲν εἶναι τέλεια.

Ἔτσι, στὴ γενικὴ περίπτωση, ἀντὶ γιὰ τὴν ταυτότητα (1) τῆς § 115,

ισχύει ή ταυτότητα της αλγοριθμικής διαιρέσεως, της οποίας ή μορφή δίνεται από τό παρακάτω σπουδαίο θεώρημα, πού ή διατύπωσή του μάς είναι γνωστή από τά μαθήματα της Γ' τάξως του Γυμνασίου. Έδώ τώρα θά μάθουμε καί νά τό αποδεικνύουμε.

Θεώρημα (της αλγοριθμικής διαιρέσεως).— "Αν μάς δοθοῦν δύο άκέραια πολυώνυμα $f(x)$, $\varphi(x)$ του $C[x]$ μέ $\varphi(x) \neq 0$, τότε μπορούμε πάντοτε νά βρούμε δύο μονοσημάντως* όρισμένα πολυώνυμα $\pi(x)$, $\nu(x) \in C[x]$ τέτοια, ώστε :

$$f(x) \equiv \varphi(x) \cdot \pi(x) + \nu(x) \quad (\tau)$$

όπου $\nu(x) \equiv 0$ ή $\text{βαθμ.}\nu(x) < \text{βαθμ.}\varphi(x)$.

*Αποδείξη. Έστω ότι είναι:

$$f(x) \equiv \alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

$$\varphi(x) \equiv \beta_\mu x^\mu + \beta_{\mu-1} x^{\mu-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0 \quad \text{μέ} \quad \beta_\mu \neq 0.$$

Θά αποδείξουμε: α) Τήν ύπαρξη των $\pi(x)$ καί $\nu(x)$ καί β) τό μονοσήμαντο (τή μοναδικότητα) των πολυωνύμων $\pi(x)$ καί $\nu(x)$, τά όποία ικανοποιούν τήν (τ).

α) "Υπαρξη των $\pi(x)$ καί $\nu(x)$. Διακρίνουμε τίς περιπτώσεις:

α_1 : Έστω ότι: $f(x) \equiv 0$ ή $\text{βαθμ.}f(x) < \text{βαθμ.}\varphi(x)$. Σ' αυτή τήν περίπτωση τό θεώρημα ισχύει μέ $\pi(x) \equiv 0$ καί $\nu(x) \equiv f(x)$, καθόσον έχουμε:

$$f(x) \equiv 0 \cdot \varphi(x) + f(x).$$

α_2 : Έστω ότι: $\text{βαθμ.}f(x) = v \geq \mu = \text{βαθμ.}\varphi(x)$, τότε διαιρώντας τόν πρώτο όρο $\alpha_v x^v$ του $f(x)$ μέ τόν πρώτο όρο $\beta_\mu x^\mu$ του $\varphi(x)$ λαμβάνουμε ώς πηλίκο τό άκέραιο μονώνυμο $\frac{\alpha_v}{\beta_\mu} x^{v-\mu}$, πού τό όνομάζουμε $\pi_1(x)$, δηλαδή:

$$\pi_1(x) \equiv \frac{\alpha_v}{\beta_\mu} x^{v-\mu}.$$

Πολλαπλασιάζοντας τώρα τό $\varphi(x)$ επί τό $\pi_1(x)$ λαμβάνουμε ώς γινόμενο τό πολυώνυμο:

$$\varphi(x) \pi_1(x) \equiv \alpha_v x^v + \frac{\alpha_v}{\beta_\mu} \beta_{\mu-1} x^{v-1} + \frac{\alpha_v}{\beta_\mu} \beta_{\mu-2} x^{v-2} + \dots + \frac{\alpha_v}{\beta_\mu} \beta_0 x^{v-\mu},$$

τό όποιο έχει μέ τό $f(x)$ κοινό τόν πρώτο όρο $\alpha_v x^v$.

Σχηματίζουμε τή διαφορά:

$$f(x) - \varphi(x) \cdot \pi_1(x) \equiv \left(\alpha_{v-1} - \frac{\alpha_v}{\beta_\mu} \beta_{\mu-1} \right) x^{v-1} + \left(\alpha_{v-2} - \frac{\alpha_v}{\beta_\mu} \beta_{\mu-2} \right) x^{v-2} + \dots \quad (1)$$

*Αν όνομάσουμε $\nu_1(x)$ τό πολυώνυμο του δεύτερου μέλους της (1), έχουμε:

$$f(x) - \varphi(x) \pi_1(x) \equiv \nu_1(x)$$

ή $f(x) \equiv \varphi(x) \pi_1(x) + \nu_1(x)$, μέ $\nu_1(x) \equiv 0$ ή $\text{βαθμ.}\nu_1(x) \leq v-1$. (2)

Τότε: (i) "Αν $\nu_1(x) \equiv 0$ ή $\text{βαθμ.}\nu_1(x) \leq v-1 < \mu$, τότε ή (2) αποδεικνύει τό θεώρημα.

(ii) "Αν $\text{βαθμ.}\nu_1(x) \geq \text{βαθμ.}\varphi(x)$, όπότε από τήν (2) $v-1 \geq \mu$, τότε εργαζόμενοι όπως καί προηγουμένως (περίπτωση α_2), μέ τά πολυώνυμα $\nu_1(x)$ καί $\varphi(x)$ βρίσκουμε ότι ύπάρχει ζεύγος πολυωνύμων $\pi_2(x)$, $\nu_2(x)$, ώστε:

$$\nu_1(x) \equiv \varphi(x) \cdot \pi_2(x) + \nu_2(x), \quad \text{μέ} \quad \nu_2(x) \equiv 0 \quad \text{ή} \quad \text{βαθμ.}\nu_2(x) < \text{βαθμ.}\nu_1(x). \quad (3)$$

* δηλαδή ύπάρχει ένα καί μόνο ένα ζεύγος πολυωνύμων $\pi(x)$, $\nu(x) \in C[x]$.

Τότε: (i) αν $u_2(x) \equiv 0$ ή $\text{βαθμ.}u_2(x) < \text{βαθμ.}\varphi(x)$ τό θεώρημα ισχύει, καθόσον αν προσθέσουμε κατά μέλη τις (2) και (3) λαμβάνουμε:

$$f(x) \equiv \varphi(x) \cdot \{\pi_1(x) + \pi_2(x)\} + u_2(x) \quad (3')$$

μέ $u_2(x) \equiv 0$ ή $\text{βαθμ.}u_2(x) < \text{βαθμ.}\varphi(x)$.

(ii) "Αν $\text{βαθμ.}u_2(x) \geq \mu$ ($= \text{βαθμ.}\varphi(x)$), τότε συνεχίζοντας την ίδια εργασία στά $u_2(x)$ και $\varphi(x)$, θά καταλήξουμε σέ μία ταυτότητα της μορφής:

$$u_2(x) \equiv \varphi(x) \cdot \pi_3(x) + u_3(x), \text{ μέ } u_3(x) \equiv 0 \text{ ή } \text{βαθμ.}u_3(x) < \text{βαθμ.}\varphi(x).$$

Οί βαθμοί τών $u_1(x), u_2(x), u_3(x)$, αν δέν είναι μηδενικά πολυώνυμα, ελαττώνονται διαδοχικά, άρα θά φθάσουμε τελικά σ' ένα πολυώνυμο μέ βαθμό μικρότερο από τό βαθμό μ του $\varphi(x)$, όποτε και θά σταματήσει ή εργασία αύτή. "Ετσι θά έχουμε τις ισότητες:

$$\begin{aligned} f(x) &\equiv \varphi(x)\pi_1(x) + u_1(x) \\ u_1(x) &\equiv \varphi(x)\pi_2(x) + u_2(x) \\ u_2(x) &\equiv \varphi(x)\pi_3(x) + u_3(x) \\ &\dots\dots\dots \\ u_k(x) &\equiv \varphi(x)\pi_{k+1}(x) + u_{k+1}(x), \end{aligned} \quad (4)$$

όπου τό $u_{k+1}(x)$ είναι τό μηδενικό πολυώνυμο ή πολυώνυμο μέ βαθμό μικρότερο από τό βαθμό μ του $\varphi(x)$.

Άθροίζοντας τις ισότητες (4) κατά μέλη λαμβάνουμε μετά τις άπλοποιήσεις:

$$f(x) \equiv \varphi(x) \{ \pi_1(x) + \pi_2(x) + \dots + \pi_{k+1}(x) \} + u_{k+1}(x).$$

Θέτοντας: $\pi_1(x) + \pi_2(x) + \dots + \pi_{k+1}(x) \equiv \pi(x)$ και $u_{k+1}(x) = u(x)$, φθάνουμε στην ταυτότητα πού θέλαμε νά άποδείξουμε:

$$f(x) \equiv \varphi(x)\pi(x) + u(x), \text{ μέ } u(x) \equiv 0 \text{ ή } \text{βαθμ.}u(x) < \mu (\equiv \text{βαθμ.}\varphi(x)).$$

β) Τό μονοσήμαντο τών $\pi(x)$ και $u(x)$ στη (2)

Τό ζεύγος τών πολυωνύμων $\pi(x)$ και $u(x)$ είναι τό μόνο γιά τό όποιο ισχύει ή (τ), γιατί, αν είναι και:

$$f(x) \equiv \varphi(x) \cdot \pi'(x) + u'(x), \text{ μέ } u'(x) \equiv 0 \text{ ή } \text{βαθμ.}u'(x) < \text{βαθμ.}\varphi(x)$$

τότε: $\pi'(x) \equiv \pi(x)$ και $u'(x) \equiv u(x)$.

Πράγματι, έπειδή:

$$\varphi(x) \cdot \pi(x) + u(x) \equiv \varphi(x) \cdot \pi'(x) + u'(x),$$

έχουμε:

$$[\pi(x) - \pi'(x)]\varphi(x) \equiv u'(x) - u(x). \quad (5)$$

Τά πολυώνυμα τών δύο μελών της (5) δέν μπορεί νά είναι έκ ταυτότητας ίσα παρά μόνο αν: $\pi(x) - \pi'(x) \equiv 0$, όπότε: $u'(x) - u(x) \equiv 0$, δηλαδή: $\pi(x) \equiv \pi'(x)$ και $u(x) \equiv u'(x)$, γιατί άλλως, δηλαδή αν $\pi(x) \not\equiv \pi'(x)$, τότε έπειδή είναι $\varphi(x) \not\equiv 0$ ό βαθμός του πολυωνύμου του πρώτου μέλους της (5) είναι $\geq \text{βαθμ.}\varphi(x) = \mu$, ενώ τό πολυώνυμο του δεύτερου μέλους της (5) είναι βαθμού τό πολύ $(\mu - 1)$. Αυτό όμως, σύμφωνα μέ τό γενικό όρισμό της ισότητας δύο πολυωνύμων (§ 110), είναι άδύνατο (βλ. και σχόλιο της § 115). Άρα $\pi(x) \equiv \pi'(x)$ και συνεπώς $u(x) \equiv u'(x)$.

Άξιόλογες παρατηρήσεις. 1) 'Ο τρόπος άποδείξεως του πρώτου μέρους του θεωρήματος πού άφορούσε την ύπαρξη τών $\pi(x)$ και $u(x)$ μάς δείχνει ταυτόχρονα και τόν τρόπο μέ τόν όποιο μπορούμε νά βρούμε τά (μοναδικά) πολυώνυμα $\pi(x)$ και $u(x)$.

2) 'Η εύρεση τών $\pi(x)$ και $u(x)$ ονομάζεται **άλγοριθμική ή Ευκλείδεια διαίρεση** του $f(x)$ διά του $\varphi(x)$ [συμβ. $f(x) : \varphi(x)$]. Τά πολυώνυμα: $f(x), \varphi(x), \pi(x)$ και $u(x)$ γιά τά όποια ισχύει ή (τ), ή όποια ονομάζεται **ταυτότητα της (άλγοριθμικής) διαιρέσεως** $f(x) : \varphi(x)$, ονομάζονται αντίστοιχα: **διαιρετέος, διαιρέτης, άλγοριθμικό ή άκέραιο πηλίκο** (σύντομα: πηλίκο) και **ύπόλοιπο** της διαιρέσεως $f(x) : \varphi(x)$.

Προσέξτε! σέ μία αλγοριθμική διαίρεση $f(x) : \varphi(x)$ τό $\varphi(x)$ όνομάζεται, όπως είπαμε, διαιρέτης τής διαιρέσεως καί όχι διαιρέτης τοῦ $f(x)$.

3) Ἄν $u(x) \equiv 0$, τότε καί μόνο τότε ἡ διαίρεση $f(x) : \varphi(x)$ λέγεται *τέλεια* (§ 115).

4) Ὁ βαθμός τοῦ ἀκέραιου πηλίκου τής διαιρέσεως $f(x) : \varphi(x)$ δύο μὴ μηδενικῶν πολυωνύμων ἰσοῦται μέ τή διαφορά τῶν βαθμῶν διαιρετέου καί διαιρέτη, δηλαδή $\text{βαθμ.}\pi(x) = \text{βαθμ.}f(x) - \text{βαθμ.}\varphi(x)$.

5) Ἀπό τήν (τ) προκύπτει: $\varphi(x) | f(x) - u(x)$.

6) Ἀπό τόν τρόπο ἀποδείξεως τοῦ παραπάνω θεωρήματος καί κυρίως ἀπό τίς σχέσεις (2) καί (3') καταλαβαίνουμε ὅτι: γιά νά συμπεράνουμε ἀπό τήν ταυτότητα: $f(x) \equiv \varphi(x) \cdot \pi(x) + u(x)$ ὅτι τά $\pi(x)$ καί $u(x)$ εἶναι ἀντιστοίχως τό πηλίκο καί τό ὑπόλοιπο τής $f(x) : \varphi(x)$ πρέπει ἀκόμη νά ξέσουμε ὅτι: $u(x) \equiv 0$ ἢ $\text{βαθμ.}u(x) < \text{βαθμ.}\varphi(x)$.

7) Τά πολυώνυμα $\pi_1(x), \pi_2(x), \dots, \pi_{k+1}(x)$ ποῦ παρουσιάζονται στίς σχέσεις (4) τοῦ παραπάνω θεωρήματος ὀνομάζονται **μερικά πηλικά** καί τά $u_1(x), u_2(x), \dots, u_k(x)$ ὀνομάζονται **μερικά ὑπόλοιπα** τής διαιρέσεως $f(x) : \varphi(x)$.

8) Ἄν τά $f(x), \varphi(x) \in R[x]$ ἀντίστοιχα $Q[x]$, τότε καί τά $\pi(x), u(x) \in R[x]$ ἀντίστοιχα $Q(x)$, ἐνῶ ἂν τά $f(x), \varphi(x) \in Z[x]$ καί εἶναι $\beta_u = \pm 1$, τότε καί τά $\pi(x), u(x) \in Z[x]$.

Ἄμεσες συνέπειες τοῦ θεωρήματος τής αλγοριθμικῆς διαιρέσεως εἶναι οἱ ἐπόμενες ἀληθεῖς προτάσεις:

Πόρισμα 1ο: Τό ὑπόλοιπο τής διαιρέσεως ἑνός ἀκέραιου πολυωνύμου $f(x) \in C[x]$ διά τοῦ διωνύμου $x - a$, $a \in C$ εἶναι $f(a)$ καί συνεπῶς ἔχουμε τήν ταυτότητα:

$$f(x) \equiv (x - a) \pi(x) + f(a) \quad (1)$$

Ἀπόδειξη. Ἔχουμε: $f(x) \equiv (x - a) \pi(x) + u(x)$ μέ $u(x) \equiv 0$ ἢ $\text{βαθμ.}u(x) < \text{βαθμ.}(x - a) = 1$. Ἄρα $u(x) = c$. Ἔχουμε συνεπῶς:

$\forall x \in C, f(x) = (x - a) \pi(x) + c$. Ἀπ' αὐτή γιά $x = a$ λαμβάνουμε: $c \doteq f(a)$.

Ἄρα: $f(x) \equiv (x - a) \pi(x) + f(a)$.

Σημείωση. Ἀπό τήν (1) ἔχουμε: $f(x) - f(a) = (x - a) \pi(x)$.

Μέ τόν ἴδιο τρόπο ἀποδεικνύεται καί ἡ ἐπόμενη, πιο γενική, πρόταση:

Πόρισμα 2ο: Τό ὑπόλοιπο τής διαιρέσεως $f(x) : ax + \beta$, μέ $a \neq 0$ εἶναι:

$$v = f\left(-\frac{\beta}{a}\right) \quad (2)$$

Ἔχοντας τώρα ὑπόψη τόν ὀρισμό τής ρίζας ἑνός ἀκέραιου πολυωνύμου καί τό πιο πάνω πόρισμα 1 συμπεραίνουμε ἀμέσως τό ἐπόμενο πόρισμα:

Πόρισμα 3ο: Ἐνα πολώνυμο $f(x) \in C[x]$ διαιρεῖται διά τοῦ διωνύμου $x - \rho$, $\rho \in C$, τότε καί μόνο τότε, ἂν τό ρ εἶναι ρίζα τοῦ $f(x)$.

Δηλαδή:

$$x - \rho | f(x) \iff f(\rho) = 0 \quad (3)$$

Παρατήρηση. Ἔχοντας ὑπόψη καί τόν ὀρισμό 1 τής § 115 ἡ (3) γράφεται πιο γενικά ὡς ἑξῆς:

$$f(\rho) = 0 \iff x - \rho/f(x) \iff f(x) \equiv (x - \rho)\pi(x)$$

(3')

όπου $\pi(x)$ άκέραιο πολυώνυμο του $C[x]$.

Αποδεικνύουμε παρακάτω δύο χαρακτηριστικές προτάσεις που είναι άμεσες συνέπειες του θεωρήματος της αλγοριθμικής διαιρέσεως και του τελευταίου πορίσματος:

§ 117. Πρόταση I.—Αν $v_1(x)$ και $v_2(x)$ είναι τά υπόλοιπα των διαιρέσεων $f_1(x) : \delta(x)$ και $f_2(x) : \delta(x)$, $\delta(x) \neq 0$, αντιστοίχως, τότε ισχύει:

$$\delta(x)/f_1(x) - f_2(x) \iff v_1(x) \equiv v_2(x)$$

Απόδειξη. Αν $\pi_1(x)$, $\pi_2(x)$ είναι αντιστοίχως τά πηλικά των διαιρέσεων $f_1(x) : \delta(x)$ και $f_2(x) : \delta(x)$ θά έχουμε, σύμφωνα με τό προηγούμενο θεώρημα:

$$f_1(x) \equiv \delta(x)\pi_1(x) + v_1(x), \text{ με } v_1(x) \equiv 0 \text{ ή βαθμ.} v_1(x) < \text{βαθμ.} \delta(x) \quad (1)$$

$$f_2(x) \equiv \delta(x)\pi_2(x) + v_2(x), \text{ με } v_2(x) \equiv 0 \text{ ή βαθμ.} v_2(x) < \text{βαθμ.} \delta(x) \quad (2)$$

Από τίς (1) και (2) λαμβάνουμε:

$$f_1(x) - f_2(x) \equiv \delta(x)[\pi_1(x) - \pi_2(x)] + v_1(x) - v_2(x) \quad (3)$$

(i) Έστω τώρα ότι $\delta(x) \mid f_1(x) - f_2(x)$. Τότε (§ 115): $f_1(x) - f_2(x) \equiv \delta(x)\pi(x)$, (4) όπου $\pi(x) \in C[x]$. Από τήν (4) καταλαβαίνουμε ότι ή διαιρέση: $f_1(x) - f_2(x) : \delta(x)$ είναι τέλεια και συνεπώς (§ 116, παρατήρηση 3) $v_1(x) - v_2(x) \equiv 0$, όπότε: $v_1(x) \equiv v_2(x)$.

(ii) Έστω ότι $v_1(x) \equiv v_2(x)$, τότε από τήν (3) έχουμε:

$$f_1(x) - f_2(x) \equiv \delta(x) \cdot [\pi_1(x) - \pi_2(x)] \text{ και συνεπώς (§ 115): } \delta(x) \mid f_1(x) - f_2(x).$$

Πόρισμα.—Σέ κάθε αλγοριθμική διαιρέση $f(x) : \varphi(x)$ ό διαιρετέος $f(x)$ και τό υπόλοιπο $v(x)$ όταν διαιρεθούν με τό διαιρέτη $\varphi(x)$ αφήνουν τό ίδιο υπόλοιπο.

Αυτό είναι άμεση συνέπεια της παραπάνω προτάσεως και του γεγονότος ότι ισχύει:

$$f(x) \equiv \varphi(x) \cdot \pi(x) + v(x) \iff f(x) - v(x) \equiv \varphi(x)\pi(x) \iff \varphi(x)/f(x) - v(x).$$

§ 118. Πρόταση II.—Ακέραιο πολυώνυμο $f(x)$, βαθμού $\geq v$, $v \in \mathbb{N}$ διαιρείται διά του $(x - \alpha)^v$, τότε και μόνο τότε, αν:

$$f(\alpha) = 0, \quad f_1(\alpha) = 0, \quad f_2(\alpha) = 0, \quad \dots, \quad f_{v-1}(\alpha) = 0,$$

όπου $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_{v-1}(x)$ είναι αντιστοίχως τά πηλικά των διαιρέσεων:

$$f(x) : (x - \alpha), \quad f_1(x) : (x - \alpha), \quad \dots, \quad f_{v-2}(x) : (x - \alpha).$$

Απόδειξη. Έστω $\varphi(x)$ τό πηλίκό της διαιρέσεως του $f(x)$ διά του $(x - \alpha)^v$. Τότε έχουμε:

$$f(x) \equiv (x - \alpha)^v \cdot \varphi(x) \quad (1)$$

Γιά $x = \alpha$ ή (1) δίνει $f(\alpha) = 0$, και συνεπώς (§ 116, Πόρισμα 3) τό $f(x)$ διαιρείται διά $x - \alpha$. Αν $f_1(x)$ είναι τό πηλίκό της διαιρέσεως του $f(x)$ διά $x - \alpha$, τότε, διαιρώντας τά δύο μέλη της (1) διά $x - \alpha$, λαμβάνουμε τήν ταυτότητα:

$$f_1(x) \equiv (x - \alpha)^{v-1} \cdot \varphi(x) \quad (2)$$

Γιά $x = \alpha$ ή (2) δίνει $f_1(\alpha) = 0$, που σημαίνει ότι τό $f_1(x)$ διαιρείται διά $x - \alpha$. Αν $f_2(x)$ είναι τό πηλίκό της διαιρέσεως $f_1(x) : x - \alpha$, τότε, διαιρώντας τά δύο μέλη της (2) διά $x - \alpha$, λαμβάνουμε τήν ταυτότητα: $f_2(x) \equiv (x - \alpha)^{v-2} \cdot \varphi(x)$ (3)

Γιά $x = \alpha$ ή (3) δίνει $f_2(\alpha) = 0$, πού σημαίνει ότι τό $f_2(x)$ διαιρείται διά $x - \alpha$.

Αν προχωρήσουμε μέ τόν ίδιο τρόπο, βρίσκουμε ότι τό πηλίκο τῆς $v - 1$ τάξεως είναι:

$$f_{v-1}(x) \equiv (x - \alpha) \cdot \varphi(x) \quad (v)$$

Γιά $x = \alpha$ ή (v) γίνεται $f_{v-1}(\alpha) = 0$, δηλαδή τό πολυώνυμο $f_{v-1}(x)$ διαιρείται διά $x - \alpha$.

Αντιστρόφως: Ἐπειδή $f(\alpha) = 0$, $f_1(\alpha) = 0$, ..., $f_{v-1}(\alpha) = 0$, σύμφωνα μέ τό πόρισμα 3 τῆς § 116 θά ἔχουμε:

$$\begin{aligned} f(x) &\equiv (x - \alpha)f_1(x) \\ f_1(x) &\equiv (x - \alpha)f_2(x) \\ f_2(x) &\equiv (x - \alpha)f_3(x) \\ &\dots\dots\dots \\ f_{v-1}(x) &\equiv (x - \alpha)f_v(x) \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας τίς σχέσεις αὐτές κατά μέλη, λαμβάνουμε τήν ταυτότητα:

$$f(x) \equiv (x - \alpha)^v f_v(x),$$

πού φανερώνει ότι τό πολυώνυμο $f(x)$ διαιρείται διά $(x - \alpha)^v$.

Εφαρμογή. Αν v είναι φυσικός ἀριθμός, νά ἀποδείξετε ότι τό πολυώνυμο:

$$f(x) = vx^{v+1} - (v+1)x^v + 1$$

διαιρείται διά τοῦ $(x - 1)^2$.

Λύση. Γιά $x = 1$ ἔχουμε: $f(1) = v - (v+1) + 1 = 0$. Ἀρα τό $f(x)$ διαιρείται διά τοῦ $(x - 1)$. Κάνοντας τή διαίρεση $f(x) : (x - 1)$ βρίσκουμε πηλίκο: $f_1(x) \equiv vx^v - (x^{v-1} + \dots + x + 1)$ καί συνεπῶς ἔχουμε τήν ταυτότητα:

$$f(x) \equiv (x - 1) \cdot f_1(x) \quad (1)$$

Παρατηροῦμε τώρα ότι: $f_1(1) = v - (1 + 1 + \dots + 1 + 1) = v - v = 0$. Ἀρα τό $f_1(x)$ διαιρείται διά τοῦ $(x - 1)$ καί συνεπῶς, ἂν $\pi(x)$ εἶναι τό πηλίκο τῆς τέλειαις διαιρέσεως $f_1(x) : (x - 1)$, θά ἔχουμε τήν ταυτότητα:

$$f_1(x) \equiv (x - 1)\pi(x) \quad (2)$$

Ἡ (1), λόγω τῆς (2), γίνεται: $f(x) \equiv (x - 1)^2 \pi(x)$ πού φανερώνει ότι τό πολυώνυμο $f(x)$ πού μᾶς δόθηκε διαιρεῖται διά τοῦ $(x - 1)^2$.

Σημείωση. Οἱ συνθήκες: $f(1) = 0 \wedge f_1(1) = 0$ ἐξασφαλίζουν ἐπίσης, σύμφωνα μέ τήν παραπάνω πρόταση (§ 118), ότι: $(x - 1)^2 / f(x)$.

Παρατήρηση. Γιά νά ἀποδείξουμε ότι τό ἀκέραιο πολυώνυμο διαιρείται διά μιᾶς δυνάμεως τοῦ $x - \alpha$, πολλές φορές ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

Μέθοδος τῆς ἀντικαταστάσεως. Ἐστω ότι τό πολυώνυμο $f(x)$ διαιρεῖται διά $(x - \alpha)^2$. Τότε θά ἔχουμε τήν ταυτότητα:

$$f(x) \equiv (x - \alpha)^2 \cdot \varphi(x) \quad (1)$$

Θεωροῦμε τό μετασχηματισμό:

$$x - \alpha = y \iff x = y + \alpha \quad (2)$$

καί ἡ (1) γίνεται:

$$f(y + \alpha) \equiv y^2 \cdot \varphi(y + \alpha), \quad (3)$$

δπου $f(y + \alpha)$ καί $\varphi(y + \alpha)$ ἀκέραια πολυώνυμα τοῦ y .

Ἀπό τήν (3) προκύπτει ότι τό $f(y + \alpha)$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διά τοῦ y^2 . Γιά νά συμβαίνει ὅμως αὐτό ἀρκεῖ τό $f(y + \alpha)$ νά μὴν ἔχει σταθερό καί πρωτοβάθμιο ὄρο, δηλ. νά εἶναι τῆς μορφῆς:

$$f(y + \alpha) \equiv \alpha_v y^v + \alpha_{v-1} y^{v-1} + \dots + \alpha_3 y^3 + \alpha_2 y^2.$$

Ὅμοιως, γιά νά διαιρεῖται τό $f(x)$ διά $(x - \alpha)^3$, πρέπει καί ἀρκεῖ τό $f(y + \alpha)$ νά διαιρεῖται διά y^3 , δηλ. νά εἶναι τῆς μορφῆς: $f(y + \alpha) \equiv \alpha_v y^v + \alpha_{v-1} y^{v-1} + \dots + \alpha_4 y^4 + \alpha_3 y^3$, ἔπειδή μέ τό μετασχηματισμό (2) προκύπτει ότι:

$$f(x) \equiv (x - \alpha)^3 \cdot \pi(x) \iff f(y + \alpha) \equiv y^3 \cdot \pi(y + \alpha).$$

Εφαρμογή: **Νά αποδείξετε ότι το πολυώνυμο:**

$$f(x) = x^4 - 9x^3 + 25x^2 - 24x + 4$$

διαιρείται διά του $(x - 2)^2$.

Απόδειξη: Κάνουμε την αντικατάσταση: $x - 2 = y \iff x = y + 2$ και έχουμε:

$$f(y + 2) = (y + 2)^4 - 9(y + 2)^3 + 25(y + 2)^2 - 24(y + 2) + 4.$$

Εκτελώντας τώρα τις πράξεις βρίσκουμε:

$$f(y + 2) \equiv y^4 - y^3 - 5y^2 = y^2(y^2 - y - 5)$$

ή με την αντικατάσταση $y = x - 2$ έχουμε:

$$f(x) \equiv (x - 2)^2 \cdot [(x - 2)^2 - (x - 2) - 5],$$

ή όποια φανερώσει ότι το $f(x)$ διαιρείται διά του $(x - 2)^2$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ομάδα Α'. 249. Νά αποδείξετε ότι: αν τό ακέραιο πολυώνυμο $f(x)$ διαιρείται διά του $x - 3$, τότε τό πολυώνυμο $f(4x - 5)$ διαιρείται διά του $x - 2$.

250. Νά βρείτε τό υπόλοιπο της διαιρέσεως $f(x) : (x - 2)(x - 3)$, αν είναι γνωστό ότι τό πολυώνυμο $f(x)$ όταν διαιρείται μέ τό $x - 2$ αφήνει υπόλοιπο 12 και όταν διαιρείται μέ τό $x - 3$ αφήνει υπόλοιπο 17.

251. Αν τό υπόλοιπο της διαιρέσεως του πολυωνύμου $f(x) \equiv ax^4 + bx^3 - 18x^2 + 15x - 5$ διά του $\varphi(x) \equiv x^2 - 3x + 2$ είναι $v(x) \equiv 4x - 7$, νά βρείτε τούς αριθμούς α, β .

252. Νά αποδείξετε ότι τό υπόλοιπο της διαιρέσεως του πολυωνύμου $f(x)$ διά του $x^2 - \alpha^2$ είναι:

$$v(x) \equiv \frac{f(\alpha) - f(-\alpha)}{2\alpha} x + \frac{f(\alpha) + f(-\alpha)}{2}.$$

253. Νά αποδείξετε ότι τό πολυώνυμο: $f(x) \equiv x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 7x + 6$ διαιρείται διά του $(x - 1)^2$.

Ομάδα Β'. 254. Νά αποδείξετε ότι: αν τό πολυώνυμο $x^3 + \alpha x + \beta$ είναι διαιρετό διά του $(x - k)^2$, τότε οί συντελεστές α, β ικανοποιούν την:

$$\left(\frac{\alpha}{3}\right)^3 + \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 = 0.$$

255. Νά αποδείξετε ότι: αν $\alpha \neq \beta$, τότε τό υπόλοιπο της διαιρέσεως του πολυωνύμου $f(x)$, βαθμ. $f(x) \geq 2$, διά του $\varphi(x) \equiv (x - \alpha)(x - \beta)$ είναι:

$$v(x) \equiv \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta} x + \frac{\beta f(\alpha) - \alpha f(\beta)}{\beta - \alpha}.$$

Ποιό είναι τό υπόλοιπο της πιό πάνω διαιρέσεως, όταν $\alpha = \beta$;

256. Νά αποδείξετε ότι δέν μπορεί νά υπάρχουν τρία μη μηδενικά πολυώνυμα $\varphi(x), \sigma(x)$ και $\tau(x)$, βαθμού n , τά όποια ικανοποιούν την ταυτότητα.

$$\varphi(x)f^2(x) + \sigma(x)f(x) + \tau(x) \equiv 0,$$

όπου $f(x)$ μή μηδενικό πολυώνυμο μέ βαθμ. $f(x) > n$.

Υπόδειξη. Νά μελετήσετε ξανά τό σχόλιο της § 115.

257. Νά βρείτε, συναρτήσει του n , τούς συντελεστές α, β του πολυωνύμου $f(x) \equiv x^{n+1} + \alpha x + \beta$, αν ξέρουμε ότι ή διαίρεση $f(x) : (x - 1)^2$ είναι τέλεια. Στή συνέχεια νά βρείτε τό αντίστοιχο ηηλίο.

258. Νά προσδιορίσετε τούς πραγματικούς αριθμούς α, β ώστε τό πολυώνυμο: $f(x) \equiv \alpha x^{n+1} + \beta x^n + 1$ νά διαιρείται διά του $(x - 1)^2$ και κατόπιν νά βρείτε τό αντίστοιχο ηηλίο.

Σ' αυτή την ένότητα θά αναφέρουμε προτάσεις (ιδιότητες) πού ισχύουν για τα πολυώνυμα μέ μιγαδικούς συντελεστές, δηλαδή για όλα τά πολυώνυμα. Στίς επόμενες ένότητες μέ τίτλους: *ακέραια πολυώνυμα μέ πραγματικούς*, *αντίστοιχα ρητούς*, *άντίστ.* *ακέραιους συντελεστές*, θά αναφέρουμε εκείνες τίς προτάσεις (ιδιότητες) πού δέν ισχύουν για κάθε ακέραιο πολυώνυμο, αλλά μόνο όταν τό πολυώνυμο άνήκει στό $\mathbf{R}[x]$, *άντίστ.* στό $\mathbf{Q}[x]$, *άντίστ.* στό $\mathbf{Z}[x]$.

§ 119. Ίδιότητα I.— "Αν ένα ακέραιο πολυώνυμο $f(x)$, $f(x) \in C[x]$, διαιρείται μέ καθένα από τά διωνύμια: $(x - \rho_1), (x - \rho_2), \dots, (x - \rho_n)$, όπου $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ αριθμοί διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο, τότε τό $f(x)$ θά διαιρείται καί μέ τό γινόμενο:

$$(x - \rho_1)(x - \rho_2) \cdots (x - \rho_n)$$

καί αντίστροφως.

Άποδείξη: Άπό τό πόρισμα 3 τής § 116 καί από την ύπόθεση, λαμβάνουμε:

$$f(\rho_1) = 0, f(\rho_2) = 0, \dots, f(\rho_n) = 0 \quad (1)$$

Έξάλλου, έπειδή $(x - \rho_1)/f(x)$, θά είναι:

$$f(x) \equiv (x - \rho_1) \cdot f_1(x) \quad (2)$$

Ή (2) για $x = \rho_2$ γίνεται: $f(\rho_2) = (\rho_2 - \rho_1) \cdot f_1(\rho_2)$. Άλλά $f(\rho_2) = 0$ καί $\rho_1 \neq \rho_2$, όπότε $f_1(\rho_2) = 0$. Τότε όμως, σύμφωνα μέ τό (ίδιο) πόρισμα 3 τής § 116, έχουμε $f_1(x) \equiv (x - \rho_2) \cdot f_2(x)$, όπότε ή (2) γίνεται:

$$f(x) \equiv (x - \rho_1)(x - \rho_2) \cdot f_2(x) \quad (3)$$

Μέ τόν ίδιο τρόπο, ή (3) για $x = \rho_3$ γίνεται:

$$f(\rho_3) = (\rho_3 - \rho_1) \cdot (\rho_3 - \rho_2) \cdot f_2(\rho_3).$$

Άλλά $f(\rho_3) = 0$ καί $\rho_3 \neq \rho_1, \rho_3 \neq \rho_2$, όπότε $f_2(\rho_3) = 0$.

Άρα: $f_2(x) \equiv (x - \rho_3) \cdot f_3(x)$ καί συνεπώς ή (3) γίνεται:

$$f(x) \equiv (x - \rho_1)(x - \rho_2)(x - \rho_3)f_3(x).$$

"Αν έργαστοϋμε μέ όμοιο τρόπο καί μετά $n - 3$ βήματα, τελικά λαμβάνουμε:

$$f(x) \equiv (x - \rho_1)(x - \rho_2) \cdots (x - \rho_n)f_n(x) \quad (v)$$

Άπό την τελευταία ταυτότητα συμπεραίνουμε (§ 115) ότι:

$$(x - \rho_1)(x - \rho_2) \cdots (x - \rho_n)/f(x), \text{ όπου } \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$$

αριθμοί διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο.

Τό αντίστροφο είναι προφανές.

Άσκηση: Νά αποδείξετε την παραπάνω ιδιότητα καί μέ τή μέθοδο τής τέλειαις έπαγωγής.

Παρατήρηση. Μέ τή μέθοδο τής τέλειαις έπαγωγής αποδεικνύεται ή επόμενη πιό γενική πρόταση: "Αν ένα ακέραιο πολυώνυμο $f(x)$ διαιρείται μέ καθένα από τά πολυώνυμα: $(x - \rho_1)^{\lambda_1}, (x - \rho_2)^{\lambda_2}, \dots, (x - \rho_n)^{\lambda_n}$, όπου $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbf{N}$ καί $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ αριθμοί διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο, τότε τό $f(x)$ θά διαιρείται καί μέ τό γινόμενό τους.

Γιά $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 1$ παίρνουμε την ιδιότητα I.

*Άμεση συνέπεια της προηγούμενης ιδιότητας είναι η εξής:

§ 120. Ιδιότητα II. (τύπος παραγοντοποιήσεως).— Αν τό άκέραιο πολυ-
ώνυμο :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

βαθμού $n \geq 1$, δέχεται ως ρίζες τούς n διαφορετικούς μεταξύ τους ανά δύο άρι-
θμούς : $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$, τότε ισχύει ή ταυτότητα :

$$f(x) = a_n (x - \rho_1) (x - \rho_2) \dots (x - \rho_n) \quad (1)$$

*Απόδειξη. *Επειδή $f(\rho_1) = f(\rho_2) = \dots = f(\rho_{n-1}) = f(\rho_n) = 0$, τό πολυώ-
νυμο $f(x)$, σύμφωνα μέ τό πόρισμα 3 τής § 116, θά διαιρείται μέ καθένα από τά
διώνυμα :

$$(x - \rho_1), (x - \rho_2), \dots, (x - \rho_{n-1}), (x - \rho_n).$$

*Επειδή

$$\rho_1 \neq \rho_2 \neq \dots \neq \rho_{n-1} \neq \rho_n \neq \rho_1,$$

τό $f(x)$ θά διαιρείται τότε, σύμφωνα μέ την ιδιότητα I, καί μέ τό γινόμενο :

$$(x - \rho_1) (x - \rho_2) \dots (x - \rho_n).$$

*Ετσι θά έχουμε (§ 115) την ταυτότητα :

$$f(x) \equiv (x - \rho_1) (x - \rho_2) \dots (x - \rho_n) \cdot \pi(x) \quad (2)$$

όπου $\pi(x)$ τό πηλίκο τής διαιρέσεως $f(x) : (x - \rho_1) (x - \rho_2) \dots (x - \rho_n)$.

*Επειδή ό διαιρέτέος καί ό διαιρέτης είναι βαθμού n , τό πηλίκο $\pi(x)$ είναι
βαθμού 0 (γιατί;). Τό $\pi(x)$ λοιπόν δέν έχει ρίζα, είναι άπλώς ένα σταθερό
μή μηδενικό πολυώνυμο. *Εστω λοιπόν ότι : $\pi(x) \equiv c$. Τότε ή (2) γίνεται :

$$f(x) \equiv c(x - \rho_1) (x - \rho_2) + \dots (x - \rho_n) \quad (3)$$

*Αλλά :

$$f(x) \equiv a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (4)$$

*Από την (3) καί (4) αν εξισώσουμε τούς συντελεστές του x^n βρίσκουμε
 $c = a_n$.

*Αρα :

$$f(x) \equiv a_n (x - \rho_1) (x - \rho_2) \dots (x - \rho_n).$$

Παρατήρηση. Τό $f(x)$ γράφεται μέ τή μορφή (1) κατά ένα καί μόνο ένα τρόπο. Γιατί
διαφορετικά, αν τό $f(x)$ γραφόταν καί μέ τή μορφή :

$$f(x) \equiv a_n (x - \xi_1) (x - \xi_2) \dots (x - \xi_n)$$

όπου οί άριθμοί $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο, τότε θά ύπήρχε ένας
(τουλάχιστο) άριθμός $\xi_k, k = 1, 2, \dots, n$, διαφορετικός από όλους τούς άριθμούς : $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$. Τότε όμως θά είχαμε ταυτόχρονα : $f(\xi_k) \neq 0$ καί $f(\xi_k) = 0$. Αυτό όμως άποκλείεται
νά συμβαίνει (βλ. Σημ. § 5).

*Από την ιδιότητα II προκύπτει άμέσως μέ άτοπο άπαγωγή τό παρακάτω

Πόρισμα.— Κάθε άκέραιο πολυώνυμο $f(x) \in \mathbb{C}[x]$, βαθμού $n \geq 2$, έχει n τό
πολύ διαφορετικές (διακεκριμένες) ρίζες.

§ 121. Βαθμός πολλαπλότητας ρίζας πολυωνύμου. — *Από τό πό-
ρισμα 3 τής § 116 έχουμε ότι : αν ό άριθμός $\rho \in \mathbb{C}$ είναι ρίζα του πολυωνύμου
 $f(x)$, τότε $x - \rho / f(x)$ καί συνεπώς : $f(x) \equiv (x - \rho) \pi_1(x)$, όπου $\pi_1(x) \in \mathbb{C}[x]$.

Ἐνδέχεται τώρα ὁ ἀριθμὸς ρ νὰ εἶναι καὶ ρίζα τοῦ $\pi_1(x)$, ὁπότε $\pi_1(x) \equiv (x - \rho)\pi_2(x)$ καὶ συνεπῶς $f(x) \equiv (x - \rho)^2\pi_2(x)$. Ἄν καὶ $\pi_2(\rho) = 0$, τότε συνεχίζοντας θὰ καταλήξουμε στὴ σχέση: $f(x) \equiv (x - \rho)^k \cdot \pi_k(x)$ μὲ $\pi_k(\rho) \neq 0$. Λέμε τότε ὅτι ὁ ἀριθμὸς $\rho \in C$ εἶναι ρίζα τοῦ πολυωνύμου $f(x)$ **βαθμοῦ** **πολλαπλότητας** **k** ($k \geq 1$).

Ἀκριβέστερα δίνουμε τὸν ἐπόμενο ὁρισμό:

Ὁρισμός 1. *Θὰ λέμε ὅτι ὁ ἀριθμὸς $\rho \in C$ εἶναι ρίζα βαθμοῦ k ($k \geq 1$) τοῦ πολυωνύμου $f(x)$, τότε καὶ μόνο τότε, ἂν ὑπάρχει ἀκέραιο πολυώνυμο $\varphi(x)$ τέτοιο, ὥστε:*

$$f(x) \equiv (x - \rho)^k \varphi(x) \wedge \varphi(\rho) \neq 0 \quad (1)$$

Γιὰ τίς πολλαπλές ρίζες δίνουμε καὶ τὸν ἐξῆς ὁρισμό:

Ὁρισμός 2. *Θὰ λέμε ὅτι ὁ ἀριθμὸς $\rho \in C$ εἶναι ρίζα βαθμοῦ k ($k \geq 1$) τοῦ πολυωνύμου $f(x)$, τότε καὶ μόνο τότε, ἂν:*

$$(x - \rho)^k / f(x) \wedge (x - \rho)^{k+1} \nmid f(x) \quad (2)$$

Οἱ ὁρισμοὶ 1 καὶ 2 εἶναι ἰσοδύναμοι:

Ἀπόδειξη. (1) $\Rightarrow$ (2): Πράγματι· ἂν ἡ (1) ἰσχύει, τότε: $(x - \rho)^k / f(x)$.

Ἐξάλλου $(x - \rho)^{k+1} \nmid f(x)$, γιὰτί ἂν εἶχαμε καὶ $(x - \rho)^{k+1} / f(x)$, τότε:

$$f(x) \equiv (x - \rho)^{k+1} \cdot g(x) \equiv (x - \rho)^k \cdot [(x - \rho) g(x)] \quad (3)$$

Συγκρίνοντας τίς (1), (3) ἔχουμε: $\varphi(x) \equiv (x - \rho) g(x)$ (4)

Ἀλλά: $\varphi(\rho) = (\rho - \rho)g(\rho) = 0$. Αὐτό ἔμωσ, λόγῳ τῆς (1), εἶναι ἄτοπο.

(2) $\Rightarrow$ (1): Πράγματι· ἂν ἡ (2) εἶναι ἀληθής, τότε: $f(x) \equiv (x - \rho)^k \cdot \varphi(x)$. Ἐξάλλου $\varphi(\rho) \neq 0$, γιὰτί ἀλλιῶς, δηλ. ἂν $\varphi(\rho) = 0$, τότε, σύμφωνα μὲ τὸ πόρισμα 3 τῆς § 116, θὰ εἶχαμε: $\varphi(x) \equiv (x - \rho)\pi(x)$, ὁπότε: $f(x) \equiv (x - \rho)^{k+1} \cdot \pi(x)$ καὶ συνεπῶς: $(x - \rho)^{k+1} / f(x)$, ἀλλ' αὐτό εἶναι ἄτοπο, λόγῳ τῆς (2).

Σημείωση. Ἄν $k = 1$, τότε ἡ ρίζα ρ λέγεται **ἀπλή**, ἂν $k = 2$, **διπλή** κ.ο.κ. Γενικά μία ρίζα ρ ἐνὸς πολυωνύμου $f(x)$ βαθμοῦ **πολλαπλότητας** $k \geq 2$ ὀνομάζεται **πολλαπλή** ρίζα τοῦ $f(x)$. Μία τέτοια ρίζα εἶναι τουλάχιστο διπλή.

Παρατηρήσεις. α) Ἄν ἓνα πολυώνυμο $f(x)$ ἔχει μία ρίζα πολλαπλή μὲ βαθμὸ πολλαπλότητας k , τότε: $\text{βαθμ.}f(x) \geq k$.

β) Ἄν ξέροουμε μόνο ὅτι: $f(x) \equiv \text{πολ.}(x - \rho)^k$, δηλαδή ἂν ἰσχύει μόνο ἡ πρώτη συνθήκη τῆς (2), συμπεραίνουμε ὅτι ὁ ἀριθμὸς ρ εἶναι ρίζα τοῦ $f(x)$ μὲ βαθμὸ πολλαπλότητας τουλάχιστο k .

γ) Ἀπὸ τοὺς παραπάνω ἰσοδύναμους ὁρισμοὺς συμπεραίνουμε ὅτι: σὲ κάθε ρίζα ἐνὸς ἀκέραιου πολυωνύμου $f(x)$ ἀντιστοιχεῖ ἀκριβῶς ἓνας μέγιστος ἀκέραιος ἀριθμὸς $k \geq 1$, πού ὅπως εἶδαμε ὀνομάζεται **βαθμὸς πολλαπλότητας** τῆς ρίζας.

Σχόλιο. Στὴν ἐπόμενη τάξη θὰ ὀρίσουμε τὴν ἔννοια τῆς παραγώγου ἐνὸς πολυωνύμου, ἀκριβέστερα τῆς παραγώγου μιᾶς πολυωνυμικῆς συναρτήσεως καὶ τότε εὐκόλα κανεῖς,στηριζόμενος στοὺς παραπάνω ὁρισμοὺς, μπορεῖ νὰ ἀποδείξει τὴν πρόταση: **Ρίζα βαθμοῦ πολλαπλότητας $k > 1$ γιὰ ἓνα πολυώνυμο, εἶναι ρίζα βαθμοῦ πολλαπλότητας $k - 1$ γιὰ τὴν παράγωγό του.**

§ 122. Ἰδιότητα III.— Κάθε ἀκέραιο πολυώνυμο $f(x) \in C[x]$, βαθμοῦ $n \geq 1$, ἔχει n ἀκριβῶς ρίζες (ἴσες ἢ διαφορετικὲς) μέσα στοῦ σύνολο C τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν.

***Απόδειξη.** Έστω $f(x) \equiv \alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ ένα άκέραιο πολυώνυμο με μιγαδικούς συντελεστές, βαθμού $v \geq 1$, τότε (§ 110) $\alpha_v \neq 0$.

Σύμφωνα με τό θεμελιώδες θεώρημα τής "Αλγεβρας (§ 113) τό $f(x)$ έχει μία τουλάχιστο ρίζα στό σύνολο C . Έστω ότι είναι: $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k$ όλες οι διαφορετικές μεταξύ τους ανά δύο ρίζες του $f(x)$ στό C μέ βαθμό πολλαπλότητας: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ αντίστοιχως. Τότε έχουμε:

$$(x - \rho_1)^{\lambda_1} / f(x) \wedge (x - \rho_2)^{\lambda_2} / f(x) \wedge \dots \wedge (x - \rho_k)^{\lambda_k} / f(x)$$

όποτε (βλ. παρατήρηση τής § 119) καί: $(x - \rho_1)^{\lambda_1} \cdot (x - \rho_2)^{\lambda_2} \cdot \dots \cdot (x - \rho_k)^{\lambda_k} / f(x)$.

$$^* \text{Αρα:} \quad f(x) \equiv (x - \rho_1)^{\lambda_1} \cdot (x - \rho_2)^{\lambda_2} \cdot \dots \cdot (x - \rho_k)^{\lambda_k} \pi(x) \quad (1)$$

όπου $\pi(x) \in C[x]$ μέ $\pi(\rho_1) \neq 0 \wedge \pi(\rho_2) \neq 0 \wedge \dots \wedge \pi(\rho_k) \neq 0$.

Τό $\pi(x)$ δέν έχει ρίζα στό C , γιατί αλλιώς, δηλαδή αν τό $\pi(x)$ είχε ρίζα στό C , τότε αυτή θά ήταν ρίζα καί του $f(x)$ καί έπειδή οι αριθμοί: $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k$ είναι όλες οι διακεκριμένες ρίζες του $f(x)$ στό C , τότε θά υπήρχε ένας άπ' αυτούς τούς αριθμούς, έστω ό ρ_λ , γιά τόν όποιο θά είχαμε ταυτόχρονα: $\pi(\rho_\lambda) = 0$ καί $\pi(\rho_\lambda) \neq 0$. Αυτό όμως είναι άτοπο.

Γιά τό $\pi(x)$ συνεπώς δέν είναι δυνατό νά ισχύει: $\text{βαθμ.}\pi(x) \geq 1$ (γιατί;) Θά είναι λοιπόν $\text{βαθμ.}\pi(x) = 0$, δηλαδή $\pi(x) \equiv c$, όπου $c \in C$ μέ $c \neq 0$.

Τότε ή (1) γράφεται:

$$f(x) \equiv c \cdot (x - \rho_1)^{\lambda_1} (x - \rho_2)^{\lambda_2} \cdot \dots \cdot (x - \rho_k)^{\lambda_k} \quad (2)$$

*Από τή (2) έχουμε τώρα, αν λάβουμε υπόψη καί τή (12) τής § 111:

$$\text{βαθμ.}f(x) = \text{βαθμ.}c + \text{βαθμ.}(x - \rho_1)^{\lambda_1} + \dots + \text{βαθμ.}(x - \rho_k)^{\lambda_k}$$

δηλαδή: $v = 0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k$.

$$^* \text{Ωστε:} \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = v \quad (3)$$

*Η (3) άποδεικνύει τήν παραπάνω ιδιότητα.

*Έχοντας τώρα υπόψη τή (2) καί ότι:

$$f(x) \equiv \alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0,$$

βρίσκουμε, αν εξισώσουμε τούς συντελεστές του x^v , ότι: $c = \alpha_v$, όποτε:

$$f(x) \equiv \alpha_v (x - \rho_1)^{\lambda_1} \cdot (x - \rho_2)^{\lambda_2} \cdot \dots \cdot (x - \rho_k)^{\lambda_k} \quad (4)$$

όπου είναι: $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = v$ ($k \leq v$).

*Αποδείξαμε λοιπόν συγχρόνως καί τήν εξής:

§ 123. 'Ιδιότητα IV.— "Αν τό άκέραιο πολυώνυμο :

$$f(x) \equiv \alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

βαθμού $v \geq 1$, έχει μέσα στό C ρίζες τούς αριθμούς: $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k$ μέ βαθμούς πολλαπλότητας: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ αντίστοιχως, τότε ισχύει ή ταυτότητα :

$$f(x) \equiv \alpha_v (x - \rho_1)^{\lambda_1} (x - \rho_2)^{\lambda_2} \cdot \dots \cdot (x - \rho_k)^{\lambda_k} \quad (1)$$

όπου είναι: $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = v$ ($k \leq v$).

Παρατηρήσεις. α) Γιά $k = v$ καί $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_v = 1$ παίρνουμε τόν τύπο (1) τής § 120.

β) Τό $f(x)$ γράφεται μέ τή μορφή (1) κατά ένα καί μόνο ένα τρόπο. 'Η παράσταση (1) πού όπως είπαμε είναι μονοσημάντως όρισμένη γιά κάθε πολυώνυμο $f(x)$, αν δέ λαμβάνεται υπόψη ή θέση τών παραγόντων σ' αυτή, ονομάζεται *"ανάλυση του πολυωνύμου $f(x)$ σε γινόμενο πρώτων παραγόντων"*.

γ) "Αν θέσουμε: $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_{\lambda_1} = \rho_1$, $\xi_{\lambda_1+1} = \dots = \xi_{\lambda_1+\lambda_2} = \rho_2$, κ.ο.κ. συμπεραίνουμε ότι: Κάθε άκέραιο πολυώνυμο $f(x) \equiv \alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$, μέ $\alpha_v \neq 0$ μπορεί νά λάβει τή μορφή:

$$f(x) \equiv \alpha_n(x - \xi_1)(x - \xi_2) \cdots (x - \xi_n) \quad (2)$$

όπου $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ οι ρίζες (πραγματικές ή μιγαδικές) του $f(x)$, όχι υποχρεωτικά διαφορετικές μεταξύ τους ανά δύο, όπως είχαμε υποθέσει στην ιδιότητα II της § 120.

δ) Στη μορφή (2) θά μπορούσαμε, άνεξάρτητα από την ιδιότητα IV, να φθάσουμε και ως εξής: Μέ $n \geq 1$, σύμφωνα με το θεώρημα του D' Alembert το $f(x)$ έχει μία (τουλάχιστο) ρίζα $\xi_1 \in \mathbb{C}$. Άρα: $f(x) \equiv (x - \xi_1)f_1(x)$ με βαθμ. $f_1(x) = n - 1$.

Μέ $n - 1 \geq 1$, το $f_1(x)$ έχει, σύμφωνα με το ίδιο θεώρημα (§ 113), μία ρίζα $\xi_2 \in \mathbb{C}$ και επομένως: $f_1(x) \equiv (x - \xi_2)f_2(x)$ με βαθμ. $f_2(x) = n - 2$.

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο λαμβάνουμε μετά από $n - 2$ βήματα:

$$f_{n-1}(x) \equiv (x - \xi_n) \cdot f_n \text{ με βαθμ. } f_n = n - n = 0, \text{ δηλ. } f_n \equiv c, c \neq 0.$$

Πολλαπλασιάζοντας αυτές τις ιδιότητες κατά μέλη και εξισώνοντας τους συντελεστές του x^n βρίσκουμε, μετά από σχετικές απλοποιήσεις, τη (2).

*Εφαρμογή: Το πολυώνυμο: $f(x) \equiv x^6 + 3x^5 - 4x^4 - 6x^3 + x^2 + 3x + 2$ αναλύεται σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ως εξής:

$$f(x) \equiv (x - 1)^2 (x + 1)^3 (x + 2),$$

δηλαδή έχει ως ρίζες τους αριθμούς: 1, -1, -2 με βαθμούς πολλαπλότητας: 2, 3, 1 αντίστοιχως.

*Η επόμενη πρόταση μᾶς δίνει μία συνθήκη για να είναι ένα πολυώνυμο μηδενικό:

§ 124. 'Ιδιότητα V.— *Αν ένα άκέραιο πολυώνυμο $f(x)$, βαθμού τό πολύ n , μηδενίζεται για $n+1$ διαφορετικές μεταξύ τους ανά δύο τιμές του x , τότε τό $f(x)$ είναι τό μηδενικό πολυώνυμο.

*Απόδειξη. *Εστω ότι τό άκέραιο πολυώνυμο $f(x)$ είναι:

$$f(x) \equiv \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

μέ βαθμ. $f(x) \leq n$ ή $f(x) \equiv 0$.

*Εστω ακόμη ότι: $f(\rho_1) = f(\rho_2) = \cdots = f(\rho_n) = f(\rho_{n+1}) = 0$, όπου $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n, \rho_{n+1}$ αριθμοί διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο.

*Εστω ότι τό $f(x) \neq 0$, τότε υπάρχει ένας τουλάχιστο συντελεστής, εστω α_k , μέ $\alpha_k \neq 0$. Τότε τό $f(x)$ θά ήταν βαθμού k ($1 \leq k \leq n$) και σύμφωνα μέ την ιδιότητα II της § 120 θά είχαμε την ταυτότητα:

$$f(x) \equiv \alpha_k (x - \rho_1)(x - \rho_2) \cdots (x - \rho_k) \quad (1)$$

*Η (1) για $x = \rho_{k+1}$ γίνεται:

$$f(\rho_{k+1}) = \alpha_k (\rho_{k+1} - \rho_1)(\rho_{k+1} - \rho_2) \cdots (\rho_{k+1} - \rho_k) = 0 \quad (2)$$

*Αλλά: $(\rho_{k+1} - \rho_1)(\rho_{k+1} - \rho_2) \cdots (\rho_{k+1} - \rho_k) \neq 0$, όποτε από τη (2) έπεται ότι $\alpha_k = 0$, γεγονός που μᾶς οδηγεί στην αντίφαση: $\alpha_k \neq 0$ και $\alpha_k = 0$.

Θά είναι λοιπόν $\alpha_k = 0 \quad \forall \quad k = 1, 2, \dots, n$.

Τότε τό πολυώνυμο $f(x)$ παίρνει τη μορφή: $f(x) \equiv \alpha_0$. Είναι όμως και $\alpha_0 = 0$, γιατί άλλίως τό $f(x)$ δέ θά μηδενιζότανε για καμία τιμή του x , πράγμα που άποκλείεται από την υπόθεση.

*Ετσι άποδείξαμε λοιπόν ότι: $\alpha_n = \alpha_{n-1} = \cdots = \alpha_1 = \alpha_0 = 0$ (4)

*Η (4) άποδεικνύει την παραπάνω ιδιότητα.

Σημείωση. *Η άπόδειξη της παραπάνω ιδιότητας μπορεί να γίνει, πιό σύντομα, ως εξής: *Επειδή $f(\rho_1) = f(\rho_2) = \cdots = f(\rho_n) = f(\rho_{n+1}) = 0$, θά ισχύει:

$$(x - \rho_1)(x - \rho_2) \cdots (x - \rho_n)(x - \rho_{n+1})/f(x).$$

Παρατηρούμε τώρα ότι: το πολυώνυμο $f(x)$, βαθμού το πολύ n , διαιρείται από ένα πολυώνυμο βαθμού $n + 1$. Άρα (βλ. σχόλιο της § 115) πρέπει $f(x) \equiv 0$.

Έφαρμογή: Άν $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$, νά αποδείξετε ότι τό:

$$f(x) \equiv (x - \alpha)^2(\beta - \gamma) + (x - \beta)^2(\gamma - \alpha) + (x - \gamma)^2(\alpha - \beta) + (\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)$$

είναι τό μηδενικό πολυώνυμο.

Λύση: Εύκολα διαπιστώνουμε ότι: $f(\alpha) = f(\beta) = f(\gamma) = 0$. Έπειδή τό $f(x)$ είναι τό πολύ δεύτερου βαθμού καί μηδενίζεται γιά 3 διαφορετικές μεταξύ τους ανά δύο τιμές του x , έπεται ότι τό $f(x)$ είναι τό μηδενικό πολυώνυμο.

Άμεσες συνέπειες της πρίό πάνω ιδιότητας είναι τά έπόμενα πορίσματα:

Πόρισμα I.— Άν δύο άκέραια πολυώνυμα $f(x)$, $\varphi(x)$ είναι καί τά δύο βαθμού τό πολύ n καί παίρνουν ίσες τιμές γιά $n + 1$ διαφορετικές τιμές του x , τότε $f(x) = \varphi(x) \forall x \in C$, δηλαδή: $f(x) \equiv \varphi(x)$.

Υπόδειξη. Νά θεωρήσετε τό πολυώνυμο $F(x) \equiv f(x) - \varphi(x)$ καί νά διαπιστώσετε ότι τό $F(x)$ ίκανοποιεί τίς υποθέσεις της ιδιότητας V. Άρα ... κτλ.

Πόρισμα II.— Άν ένα άκέραιο πολυώνυμο $f(x)$, βαθμού τό πολύ n , λαμβάνει την ίδια αριθμητική τιμή λ γιά $n + 1$ (τουλάχιστο) διαφορετικές μεταξύ τους τιμές του x , τότε τό $f(x)$ είναι τό σταθερό πολυώνυμο λ , δηλ. $f(x) = \lambda$.

Υπόδειξη. Νά εφαρμόσετε την ιδιότητα V στό πολυώνυμο $F(x) \equiv f(x) - \lambda$.

Πόρισμα III.— Άν γιά άπειρες, αλλά διαφορετικές μεταξύ τους, τιμές του x , ένα πολυώνυμο $f(x)$ λαμβάνει την ίδια αριθμητική τιμή λ , τότε αυτό είναι τό σταθερό πολυώνυμο λ , δηλαδή $f(x) \equiv \lambda$. Ειδικά, αν $\lambda = 0$, τότε τό $f(x)$ είναι τό μηδενικό πολυώνυμο.

Σχόλιο: Τά δύο τελευταία πορίσματα, αν θέλουμε νά έκφραστούμε μέ τή «γλώσσα» της Γεωμετρίας μάς λένε ότι: Άν τό γράφημα ενός πολυωνύμου $f(x)$, βαθμού τό πολύ n (άντ. όποιουδήποτε βαθμού) έχει $n + 1$ (άντίστοιχα άπειρα) κοινά σημεία μέ τήν ευθεία $y = \lambda$, ή όποία είναι παράλληλη μέ τόν άξονα τών x , τότε τά δύο σημειοσύνολα ταυτίζονται, δηλαδή τό γράφημα του πολυωνύμου $f(x)$ είναι, τότε, ή ευθεία $y = \lambda$.

Έφαρμογή. Θεωρούμε τό πολυώνυμο $f(x)$ μέ την ιδιότητα: γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$ καί γιά κάθε φυσικό άριθμό n ισχύει:

$$f(x) = f\left(vx - \frac{1}{v}\right) \quad (1)$$

Νά αποδείξετε ότι τό $f(x)$ είναι ένα σταθερό πολυώνυμο.

Λύση. Γιά $v = 1$ καί γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(x) = f(x - 1) \quad (2)$$

Άπό τή (2) γιά $x = 1, 2, 3, \dots$ λαμβάνουμε:

$$f(1) = f(0), f(2) = f(1), f(3) = f(2), \dots, f(v) = f(v - 1), \dots$$

Άρα: $f(1) = f(2) = f(3) = \dots = f(v) = \dots = \lambda$, όπου $\lambda = f(0)$ (3)

δηλαδή γιά κάθε φυσικό άριθμό τό πολυώνυμο $f(x)$ έχει σταθερή τιμή.

Άπό τήν (3) βλέπουμε πώς τό πολυώνυμο $f(x)$ πού πήραμε λαμβάνει την ίδια αριθμητική τιμή $\lambda = f(0)$ γιά άπειρες τιμές του x , συνεπώς, σύμφωνα μέ τό τελευταίο πόρισμα, τό $f(x)$ είναι ένα σταθερό πολυώνυμο.

$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = -\frac{\beta}{\alpha}, \quad \rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_3 + \rho_2\rho_3 = \frac{\gamma}{\alpha}, \quad \rho_1\rho_2\rho_3 = -\frac{\delta}{\alpha}.$$

Εφαρμογή. Νά βρείτε το άθροισμα τών τετραγώνων καί τών κύβων τών ριζών τής εξισώσεως : $2x^3 - 3x^2 + 4x - 8 = 0$. (1)

Λύση. *Αν ρ_1, ρ_2, ρ_3 είναι οι ρίζες τής εξισώσεως (1) έχουμε:

$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = -\frac{3}{2}, \quad \rho_1\rho_2 + \rho_2\rho_3 + \rho_3\rho_1 = 2, \quad \rho_1\rho_2\rho_3 = 4.$$

Εξάλλου ισχύει ή ταυτότητα:

$$\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 = (\rho_1 + \rho_2 + \rho_3)^2 - 2(\rho_1\rho_2 + \rho_2\rho_3 + \rho_3\rho_1) = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 2 \cdot 2 = -\frac{7}{4}.$$

Επειδή ρ_1, ρ_2, ρ_3 είναι ρίζες τής (1) έχουμε:

$$\left. \begin{aligned} 2\rho_1^3 - 3\rho_1^2 + 4\rho_1 - 8 &= 0 \\ 2\rho_2^3 - 3\rho_2^2 + 4\rho_2 - 8 &= 0 \\ 2\rho_3^3 - 3\rho_3^2 + 4\rho_3 - 8 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2(\rho_1^3 + \rho_2^3 + \rho_3^3) - 3(\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2) + 4(\rho_1 + \rho_2 + \rho_3) - 24 = 0$$

όποτε: $2(\rho_1^3 + \rho_2^3 + \rho_3^3) - 3 \cdot \left(-\frac{7}{4}\right) + 4 \cdot 2 - 24 = 0$

καί μετά από πράξεις βρίσκουμε: $\rho_1^3 + \rho_2^3 + \rho_3^3 = \frac{43}{8}.$

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ ΜΕ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ

*Όπως έχουμε αναφέρει στην πρώτη παράγραφο αυτού του κεφαλαίου τό σύνολο τών άκέραιων πολυωνύμων του x μέ συντελεστές πραγματικούς αριθμούς τό παριστάνουμε μέ $R[x]$.

Σχετικά μέ τό $R[x]$ έχουμε τά έξής: αν $f(x), q(x) \in R[x]$ τότε καί τά πολώνυμα: $f(x) \pm q(x), f(x)q(x)$ καθώς τό πηλίκο καί τό υπόλοιπο τής αλγοριθμικής διαιρέσεως $f(x) : q(x)$ είναι επίσης άκέραια πολώνυμα μέ συντελεστές πραγματικούς αριθμούς.

*Αποδεικνύουμε άμέσως παρακάτω μία χαρακτηριστική ιδιότητα πού έχουν τά άκέραια πολυώνυμα μέ συντελεστές πραγματικούς αριθμούς καί ή όποια άποτελεί γενίκευση άντίστοιχης ιδιότητας του τριωνύμου β' βαθμού.

§ 126. Ίδιότητα VI.— Έστω τό άκέραιο πολώνυμο $f(x)$ μέ πραγματικούς συντελεστές, δηλ. $f(x) \in R[x]$, βαθμού $n \geq 2$. *Αν τό $f(x)$ δέχεται ως ρίζα τό μιγαδικό αριθμό $\alpha + i\beta$ ($\alpha, \beta \in R \wedge \beta \neq 0$), τότε αυτό θά δέχεται ως ρίζα καί τό συζυγή του: $\alpha - i\beta$.

*Απόδειξη. Έστω $\varphi(x)$ τό πολώνυμο δεύτερου βαθμού, τό όποιο έχει ως ρίζες τούς αριθμούς $\alpha + i\beta$ καί $\alpha - i\beta$, δηλαδή:

$$\varphi(x) \equiv [x - (\alpha + i\beta)][x - (\alpha - i\beta)] \equiv x^2 - 2\alpha x + (\alpha^2 + \beta^2).$$

*Αν τό $f(x)$ διαιρεθεί μέ τό $\varphi(x)$, θά έχουμε τήν ταυτότητα:

$$f(x) \equiv \varphi(x) \cdot \pi(x) + (\gamma x + \delta) \quad (1)$$

Ἐπειδὴ $f(\alpha + i\beta) = 0$ καὶ $\varphi(\alpha + i\beta) = 0$, ἀπὸ τὴν (1) ἔχουμε:

$$\gamma(\alpha + i\beta) + \delta = 0 \iff (\alpha\gamma + \delta) + i\beta\gamma = 0 \iff \begin{cases} \alpha\gamma + \delta = 0 \\ \beta\gamma = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Ἐπειδὴ ὅμως $\beta \neq 0$, ἀπὸ τὴν δεύτερη σχέση τῆς (2), ἔπεται $\gamma = 0$. Τότε ἀπὸ τὴν πρώτη τῆς (2), προκύπτει $\delta = 0$.

Γιὰ $\gamma = \delta = 0$ ἡ (1) γίνεται: $f(x) \equiv \varphi(x) \cdot \pi(x)$ (3)

Ἀπὸ τὴν (3) προκύπτει:

$$f(\alpha - i\beta) \equiv \varphi(\alpha - i\beta) \pi(\alpha - i\beta)$$

καὶ ἔπειδὴ $\varphi(\alpha - i\beta) = 0$ θὰ εἶναι: $f(\alpha - i\beta) = 0$, δηλαδή τὸ $f(x)$ δέχεται ὡς ρίζα καὶ τὸ μιγαδικὸ ἀριθμὸ $\alpha - i\beta$.

Σημ. Προσέξτε! ἡ παραπάνω πρόταση (ιδιότητα VI) δὲν ἰσχύει στὴν περίπτωση κατὰ τὴν ὁποία οἱ συντελεστὲς τοῦ πολυωνύμου $f(x)$ εἶναι μιγαδικοὶ ἀριθμοί.

Πιο γενικὰ ἰσχύει ἡ ἐπόμενη πρόταση.

§ 127. Ἰδιότητα VII.— Ἄν ἓνα ἀκέραιο πολυώνυμο $f(x)$ μὲ πραγματικούς συντελεστὲς, βαθμοῦ $n \geq 2k$, ($k \in \mathbb{N}$) δέχεται ὡς πολλαπλὴ ρίζα τὸ μιγαδικὸ ἀριθμὸ: $\alpha + i\beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R} \wedge \beta \neq 0$) μὲ βαθμὸ πολλαπλότητας k ($k \geq 2$), τότε αὐτὸ θὰ δέχεται ὡς πολλαπλὴ ρίζα καὶ τὸ συζυγὴ του: $\alpha - i\beta$ καὶ μάλιστα μὲ τὸν ἴδιο βαθμὸ πολλαπλότητας k .

Ἀπόδειξη. Ἐπειδὴ τὸ $f(x)$ δέχεται ὡς ρίζα τὸν ἀριθμὸ $\alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$ θὰ δέχεται, σύμφωνα μὲ τὴν προηγούμενη ιδιότητα, ὡς ρίζα καὶ τὸ συζυγὴ του: $\alpha - i\beta$, $\beta \neq 0$. Ἐστω ὅτι ὁ $\alpha - i\beta$ εἶναι ρίζα τοῦ $f(x)$ μὲ βαθμὸ πολλαπλότητας λ , $\lambda \in \mathbb{N}$. Θὰ ἀποδείξουμε ὅτι $\lambda = k$.

Πρῶτα-πρῶτα ἔχουμε τότε τὴν ταυτότητα:

$$f(x) \equiv [x - (\alpha + i\beta)]^k \cdot [x - (\alpha - i\beta)]^\lambda \pi(x) \quad (1)$$

ὅπου $\pi(x) \in \mathbb{C}[x]$ μὲ $\pi(\alpha + i\beta) \neq 0$ καὶ $\pi(\alpha - i\beta) \neq 0$.

Ἐστω ὅτι $k > \lambda$, τότε $k - \lambda = \mu$, $\mu \in \mathbb{N}$ καὶ συνεπῶς $k = \lambda + \mu$.

Τότε ἡ (1) γίνεται:

$$f(x) \equiv [x - (\alpha + i\beta)]^{\lambda+\mu} [x - (\alpha - i\beta)]^\lambda \pi(x) \equiv [(x - \alpha)^2 + \beta^2]^\mu \cdot [x - (\alpha + i\beta)]^\lambda \cdot \pi(x)$$

Θέτουμε: $\varphi(x) \equiv [x - (\alpha + i\beta)]^\mu \cdot \pi(x)$. Παρατηροῦμε ὅτι τὸ πολυώνυμο $\varphi(x)$, ὡς πηλίκο τῆς διαιρέσεως $f(x) : [(x - \alpha)^2 + \beta^2]$ δύο πολυωνύμων μὲ πραγματικούς συντελεστὲς, ἔχει πραγματικούς συντελεστὲς καὶ ἐπιπλέον δέχεται ὡς ρίζα τὸν ἀριθμὸ: $\alpha + i\beta$. Ἄρα, σύμφωνα μὲ τὴν προηγούμενη ιδιότητα, θὰ δέχεται ὡς ρίζα καὶ τὸν ἀριθμὸ: $\alpha - i\beta$, ὁπότε: $\varphi(\alpha - i\beta) = (-2\beta i)^\mu \pi(\alpha - i\beta) = 0$. Αὐτὸ ὅμως εἶναι ἄτοπο, γιατί $\beta \neq 0 \wedge \pi(\alpha - i\beta) \neq 0$.

Δὲν εἶναι λοιπὸν δυνατό νὰ ἰσχύει $k > \lambda$. Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο ἀποδεικνύεται ὅτι δὲν μπορεῖ νὰ εἶναι $k < \lambda$. Ἄρα ἡ μοναδικὴ περίπτωση πού ἀπομένει εἶναι $k = \lambda$.

Ἀμεση συνέπεια τῶν παραπάνω ιδιοτήτων εἶναι τὰ ἐπόμενα πορίσματα:

Πόρισμα I.— Ἄν ἓνα ἀκέραιο πολυώνυμο $f(x)$ μὲ πραγματικούς συντελεστὲς ἔχει μιγαδικὲς ρίζες, τότε τὸ πλῆθος τῶν μιγαδικῶν ριζῶν εἶναι ἄρτιος ἀριθμὸς.

Πόρισμα II.— Κάθε πολυώνυμο περιττοῦ βαθμοῦ μὲ πραγματικούς συντελεστὲς ἔχει ὅπωςδήποτε μία (τουλάχιστο) πραγματικὴ ρίζα.

Πόρισμα III.— Ένα πολυώνυμο ἄρτιου βαθμοῦ μέ πραγματικούς συντελεστές μπορεί νά ἔχει καμιά ἢ ἄρτιο πλῆθος ἢ καί ὅλες τίς ρίζες του μιγαδικές.

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ ΜΕ ΡΗΤΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ

Τό σύνολο τῶν ἀκέραιων πολυωνύμων τοῦ x μέ συντελεστές ρητούς ἀριθμούς τό παριστάνουμε μέ $\mathbb{Q}[x]$.

Σχετικά μέ τό $\mathbb{Q}[x]$ ἔχουμε τά ἑξῆς: ἂν $f(x), \varphi(x) \in \mathbb{Q}[x]$, τότε καί τά πολυώνυμα: $f(x) \pm \varphi(x), f(x)\varphi(x)$ καθώς τό πηλίκο καί τό ὑπόλοιπο τῆς ἀλγοριθμικῆς διαιρέσεως $f(x) : \varphi(x)$ εἶναι ἐπίσης ἀκέραια πολυώνυμα μέ συντελεστές ρητούς ἀριθμούς.

Θά ἀποδείξουμε ἀμέσως παρακάτω μία χαρακτηριστική ιδιότητα ποῦ ἔχουν τά ἀκέραια πολυώνυμα μέ συντελεστές ρητούς ἀριθμούς, τά ὁποῖα δέχονται μία ρίζα τῆς μορφῆς $\alpha + \sqrt{\beta}$ μέ $\alpha \in \mathbb{Q}$ καί $\sqrt{\beta} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Ἀκριβέστερα ἰσχύει ἡ παρακάτω πρόταση:

§ 128. Ἰδιότητα VIII.— Ἄν ἕνα ἀκέραιο πολυώνυμο $f(x)$ μέ ρητούς συντελεστές, δηλ. $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$, δέχεται ὡς ρίζα τόν ἀριθμό $\alpha + \sqrt{\beta}$, ($\alpha \in \mathbb{Q}$, $\beta \in \mathbb{Q}^+$, $\beta \neq \theta^2$, ὅπου $\theta \in \mathbb{Q}$), τότε αὐτό θά δέχεται ὡς ρίζα καί τόν ἀριθμό $\alpha - \sqrt{\beta}$ καί μάλιστα μέ τόν ἴδιο βαθμό πολλαπλότητας.

Ἀπόδειξη. Ἐστω $\varphi(x)$ τό πολυώνυμο β' βαθμοῦ, τό ὁποῖο ἔχει γιά ρίζες του τοῦς ἀριθμούς: $\alpha + \sqrt{\beta}$ καί $\alpha - \sqrt{\beta}$. Αὐτό εἶναι:

$$\varphi(x) \equiv [x - (\alpha + \sqrt{\beta})][x - (\alpha - \sqrt{\beta})] = (x - \alpha)^2 - \beta = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 - \beta.$$

Ἄν τό $f(x)$ διαιρεθεῖ μέ τό $\varphi(x)$, θά ἔχουμε τήν ταυτότητα:

$$f(x) \equiv \varphi(x) \cdot \pi(x) + (\gamma x + \delta) \quad (1)$$

ὅπου $\gamma, \delta \in \mathbb{Q}$, $\pi(x) \in \mathbb{Q}[x]$, γιατί $f(x), \varphi(x) \in \mathbb{Q}[x]$.

Ἐπειδὴ $f(\alpha + \sqrt{\beta}) = 0$ καί $\varphi(\alpha + \sqrt{\beta}) = 0$, ἀπό τήν (1) θά ἔχουμε:

$$\gamma(\alpha + \sqrt{\beta}) + \delta = 0 \iff (\alpha\gamma + \delta) + \gamma\sqrt{\beta} = 0.$$

Εἶναι ὁμως $\alpha\gamma + \delta \in \mathbb{Q}$ καί $\gamma \in \mathbb{Q}$ καί $\beta \neq 0$.

Ἄρα $\gamma = 0$ καί συνεπῶς καί $\delta = 0$.

Ἡ (1) τότε γίνεται: $f(x) \equiv \varphi(x) \cdot \pi(x) \quad (2)$

Ἀπό τή (2) προκύπτει: $f(\alpha - \sqrt{\beta}) = \varphi(\alpha - \sqrt{\beta}) \cdot \pi(\alpha - \sqrt{\beta}) = 0$, ἐπειδὴ $\varphi(\alpha - \sqrt{\beta}) = 0$.

Ἄρα τό $f(x)$ δέχεται ὡς ρίζα καί τόν ἀριθμό: $\alpha - \sqrt{\beta}$.

Ἡ ἀπόδειξη τοῦ δεύτερου μέρους τῆς ιδιότητος αὐτῆς, τό ὁποῖο ἀναφέρεται στό βαθμό πολλαπλότητας τῆς ρίζας, εἶναι τελείως ἀνάλογη μέ αὐτή πού δώσαμε κατὰ τήν ἀπόδειξη τῆς ιδιότητος VII (§ 127).

Μέ τόν ἴδιο ἀκριβῶς τρόπο ἀποδεικνύεται καί ἡ ἐπόμενη πιό γενική:

Πρόταση.— Ἄν ἕνα ἀκέραιο πολυώνυμο $f(x)$ μέ ρητούς συντελεστές δέχεται ὡς ρίζα τόν ἄρρητο ἀριθμό: $\alpha + \beta\sqrt{\gamma}$, ὅπου $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{\gamma} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ καί $\beta \neq 0$, τότε αὐτό δέχεται ὡς ρίζα καί τόν ἀριθμό: $\alpha - \beta\sqrt{\gamma}$ καί μάλιστα μέ τόν ἴδιο βαθμό πολλαπλότητας.

Τό σύνολο τῶν ἀκέραιων πολυωνύμων τοῦ x μέ συντελεστές ἀκέραιους ἀριθμούς τό παριστάνουμε μέ $\mathbf{Z}[x]$.

Βασική ιδιότητα τοῦ $\mathbf{Z}[x]$ εἶναι ὅτι: τό ἄθροισμα, ἡ διαφορά καί τό γινόμενο δύο ἀκέραιων πολυωνύμων τοῦ $\mathbf{Z}[x]$ εἶναι ἐπίσης πολυώνυμο μέ συντελεστές ἀκέραιους ἀριθμούς. Ἄν ἐπιπλέον ὁ πρῶτος συντελεστής τοῦ $q(x)$ εἶναι ἴσος μέ ± 1 , τότε τό πηλίκο καθὼς καί τό ὑπόλοιπο τῆς ἀλγοριθμικῆς διαιρέσεως $f(x) : q(x)$ εἶναι πολυώνυμα ἐπίσης μέ ἀκέραιους συντελεστές (βλ. παρατηρήσεις τῆς § 116).

Ἀποδεικνύουμε ἀμέσως παρακάτω δύο χαρακτηριστικές ιδιότητες οἱ ὁποῖες μᾶς δίνουν τίς ἀναγκαῖες συνθήκες γιά νά δέχεται ἓνα πολυώνυμο μέ ἀκέραιους συντελεστές ρίζα ἀκέραιο ἀριθμό ἀντίστοιχα ρίζα ρητό ἀριθμό.

§ 129. Ἰδιότητα IX.— Ἄν τό μέ ἀκέραιους συντελεστές πολυώνυμο :

$$f(x) \equiv a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

δέχεται ὡς ρίζα τόν ἀκέραιο ἀριθμό $\rho \neq 0$, τότε ὁ ρ θά εἶναι διαιρέτης τοῦ σταθεροῦ ὅρου a_0 τοῦ πολυωνύμου, δηλαδή ρ/a_0 .

Ἀπόδειξη. Ἐχομε $f(\rho) = a_v \rho^v + a_{v-1} \rho^{v-1} + \cdots + a_1 \rho + a_0 = 0$, ὁπότε:

$$\rho(a_v \rho^{v-1} + a_{v-1} \rho^{v-2} + \cdots + a_1) = -a_0 \quad (1)$$

Ἀλλά: $a_v \rho^{v-1} + a_{v-1} \rho^{v-2} + \cdots + a_1$ εἶναι ἓνας ἀκέραιος ἀριθμός, ἐπειδή $\rho, a_v, a_{v-1}, \dots, a_1 \in \mathbf{Z}$, τόν ὁποῖο ἄς τόν ὀνομάσουμε λ , τότε ἡ (1) γράφεται:

$$\rho \cdot \lambda = -a_0 \quad (2)$$

Ἀπό τή (2) λαμβάνουμε: ρ/a_0 .

Παρατηρήσεις. α) Οἱ ἀκέραιες ρίζες ἑνός πολυωνύμου $f(x)$, ἐφόσον ὑπάρχουν, πρέπει νά ἀναζητηθοῦν ἀνάμεσα στούς διαιρέτες τοῦ σταθεροῦ ὅρου a_0 .

β) Τό ἀντίστροφο τῆς παραπάνω προτάσεως δέν ἰσχύει πάντοτε.

γ) Ἄν κανένας ἀπό τούς διαιρέτες τοῦ σταθεροῦ ὅρου a_0 τοῦ πολυωνύμου $f(x)$ δέ μηδενίζει τό $f(x)$, τότε τό πολυώνυμο αὐτό δέν ἔχει ἀκέραιες ρίζες.

§ 130. Ἰδιότητα X.— Ἄν τό μέ ἀκέραιους συντελεστές πολυώνυμο :

$$f(x) \equiv a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

δέχεται ὡς ρίζα τό ρητό ἀριθμό $\frac{k}{\lambda}$, ὅπου k, λ ἀκέραιοι, πρῶτοι μεταξύ τους καί $\lambda \neq 0$, τότε ὁ k θά εἶναι διαιρέτης τοῦ σταθεροῦ ὅρου καί ὁ λ διαιρέτης τοῦ πρώτου συντελεστῆ τοῦ πολυωνύμου, δηλ. $k/a_0 \wedge \lambda/a_v$.

Ἀπόδειξη. Ἐπειδή $f\left(\frac{k}{\lambda}\right) = 0$ ἔχομε:

$$a_v \frac{k^v}{\lambda^v} + a_{v-1} \frac{k^{v-1}}{\lambda^{v-1}} + \cdots + a_1 \frac{k}{\lambda} + a_0 = 0 \quad \text{καί συνεπῶς}$$

$$a_v k^v + a_{v-1} k^{v-1} \lambda + \cdots + a_1 k \lambda^{v-1} + a_0 \lambda^v = 0 \quad (1)$$

Από την τελευταία εξίσωση λαμβάνουμε:

$$\alpha_n k^n = -\lambda(\alpha_{n-1} k^{n-1} + \dots + \alpha_1 k \lambda^{n-2} + \alpha_0 \lambda^{n-1}) = \text{πολ.}\lambda \quad (2)$$

$$\alpha_0 \lambda^n = -k(\alpha_n k^{n-1} + \alpha_{n-1} k^{n-2} \lambda + \dots + \alpha_1 \lambda^{n-1}) = \text{πολ.}k \quad (3)$$

Από τη (2) έχουμε ότι: $\lambda/\alpha_n k^n$ και έπειδή ο λ είναι πρώτος με τον k , άρα και με τον k^n , θά έχουμε ότι: λ/α_n .

Όμοίως από την (3) έχουμε: $k/\alpha_0 \lambda^n$ και έπειδή ο k είναι πρώτος με το λ , άρα και με το λ^n , θά έχουμε: k/α_0 .

Παρατήρηση. Το αντίστροφο της παραπάνω ιδιότητας δεν ισχύει πάντοτε.

§ 131. Έφαρμογές στις ιδιότητες των άκεραιων πολυωνύμων.—

Έφαρμογή 1η: Νά προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α, β για νά διαιρείται τό πολυώνυμο $f(x) \equiv x^3 - 2\alpha x^2 + \beta x + 6$ διά του γινομένου $(x-2)(x-3)$.

Λύση. Έπειδή θέλουμε τό πολυώνυμο $f(x) \equiv x^3 - 2\alpha x^2 + \beta x + 6$ νά διαιρείται (άκριβώς) διά του γινομένου $(x-2)(x-3)$, άρκει νά διαιρείται άκριβώς διά $x-2$ και διά $x-3$. Γι' αυτό πρέπει και άρκει:

$$\left. \begin{aligned} f(2) &= -8\alpha + 2\beta + 14 = 0 \\ f(3) &= -18\alpha + 3\beta + 33 = 0 \end{aligned} \right\} \iff \left. \begin{aligned} 4\alpha - \beta &= 7 \\ 6\alpha - \beta &= 11 \end{aligned} \right\} \iff \begin{aligned} \alpha &= 2 \\ \beta &= 1. \end{aligned}$$

Σημείωση. Τους πραγματικούς αριθμούς α και β της παραπάνω εφαρμογής μπορούμε νά τους προσδιορίσουμε και με άλλους τρόπους. Νά εφαρμόσετε ένα από αυτούς, για νά βρείτε τά α και β .

Έφαρμογή 2η: Έστω ότι $f(x)$ είναι άκεραίο πολυώνυμο πού όταν διαιρείται διά $x+1$ δίνει υπόλοιπο 2, όταν διαιρείται διά $x-2$ δίνει υπόλοιπο 11 και διά $x+3$ δίνει υπόλοιπο 6. Νά βρείτε τό υπόλοιπο της διαιρέσεως του $f(x)$ διά του γινομένου:

$$(x+1)(x-2)(x+3)$$

Λύση. Από την υπόθεση έχουμε:

$$f(-1) = 2, \quad f(2) = 11, \quad f(-3) = 6 \quad (1)$$

Τό πολυώνυμο $f(x)$ όταν διαιρείται διά του γινομένου: $(x+1)(x-2)(x+3)$, τό όποιο είναι τρίτου βαθμού, δίνει ένα πηλίκο $\pi(x)$ και ένα υπόλοιπο τό πολύ δεύτερου βαθμού, έστω τό: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$.

Σύμφωνα με την ταυτότητα της άλγοριθμικής διαιρέσεως θά έχουμε:

$$f(x) \equiv (x+1)(x-2)(x+3) \cdot \pi(x) + \alpha x^2 + \beta x + \gamma \quad (2)$$

Θέτοντας στή (2) διαδοχικά $x = -1, x = 2, x = -3$ και έχοντας υπόψη τίς (1), λαμβάνουμε τό σύστημα:

$$\Sigma: \quad \begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = 2 \\ 4\alpha + 2\beta + \gamma = 11 \\ 9\alpha - 3\beta + \gamma = 6 \end{cases}$$

Λύνοντας τό σύστημα (Σ) βρίσκουμε: $\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 3$.

Άρα τό υπόλοιπο πού ζητάμε είναι τό: $x^2 + 2x + 3$.

Έφαρμογή 3η: Νά βρείτε ένα πολυώνυμο τρίτου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές του όποίου δύο ρίζες είναι οί αριθμοί $p_1 = 5$ και $p_2 = i$.

Λύση. Έστω $\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta, \alpha \neq 0$ τό με πραγματικούς συντελεστές πολυώνυμο τρίτου βαθμού πού ζητάμε νά προσδιορίσουμε.

Προφανώς ή τρίτη ρίζα του πολυωνύμου είναι: $p_3 = -i$ (γιατί;).

Τότε, σύμφωνα με τίς σχέσεις του Vieta, θά έχουμε:

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 &= -\frac{\beta}{\alpha} & , & & \text{δηλ.} & & 5 &= -\frac{\beta}{\alpha} \\ \rho_1 \rho_2 + \rho_1 \rho_3 + \rho_2 \rho_3 &= \frac{\gamma}{\alpha} & , & & \text{δηλ.} & & 1 &= \frac{\gamma}{\alpha} \\ \rho_1 \rho_2 \rho_3 &= -\frac{\delta}{\alpha} & , & & \text{δηλ.} & & 5 &= -\frac{\delta}{\alpha} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \beta &= -5\alpha \\ \gamma &= \alpha \\ \delta &= -5\alpha \end{aligned}$$

*Αρα τó πολυώνυμο πού ζητάμε είναι:

$$f(x) \equiv \alpha(x^3 - 5x^2 + x - 5), \alpha \in \mathbf{R}, \alpha \neq 0.$$

Έφαρμογή 4η: Νά βρείτε ένα πολυώνυμο τέταρτου βαθμού με άκραίους συντελεστές, τó όποιο νά διαιρείται μέ τό: $x^2 - (\sqrt{2} + i)x + i\sqrt{2}$.

Λύση. Παρατηρούμε ότι: $x^2 - (\sqrt{2} + i)x + i\sqrt{2} \equiv (x - \sqrt{2}) \cdot (x - i)$.

*Αν $f(x)$ είναι τó πολυώνυμο πού ζητάμε, τότε, έπειδή αυτό διαιρείται μέ τό $x - \sqrt{2}$, σύμφωνα μέ τήν ιδιότητα VIII (§ 128) θά διαιρείται καί μέ τό $x + \sqrt{2}$. έπίσης, έπειδή τό $f(x)$ διαιρείται μέ τό $x - i$, σύμφωνα μέ τήν ιδιότητα VI (§ 126), θά διαιρείται καί μέ τό $x + i$. Τó πολυώνυμο $f(x)$ θά διαιρείται τότε, σύμφωνα μέ τήν ιδιότητα I (§ 119) καί μέ τό γινόμένο τους. Συνεπώς θά έχουμε:

$$f(x) \equiv (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x - i)(x + i) \equiv (x^2 - 2)(x^2 + 1) \equiv x^4 - x^2 - 2.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Όμάδα Α'. 259. Δίνεται τó πολυώνυμο:

$$f(x) \equiv 2x^3 + \alpha x^2 - 13x + \beta$$

α) Νά προσδιορίσετε τούς συντελεστές α, β αν ξέρουμε ότι τó $f(x)$ διαιρείται (άκριβώς) μέ τό: $(x - 3)(x + 2)$.

β) *Αν $\pi(x)$ είναι τó πηλίκο τής διαιρέσεως $f(x) : (x - 3)(x + 2)$, μέ τιμές τών α καί β αυτές πού βρήκατε προηγουμένως, νά άποδείξετε ότι:

$$(\tau): \quad \pi(1) + \pi(2) + \dots + \pi(v) \equiv v(v + 2).$$

γ) *Αφού προσδιορίσετε τούς συντελεστές καί τó πολυώνυμο $\pi(x)$, νά άποδείξετε, μέ τή μέθοδο τής τέλειās έπαγωγής, τήν ταυτότητα (τ).

260. Για ποιές τιμές τών $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ τó πολυώνυμο $f(x) \equiv 3x^4 - \alpha x^3 + 5x^2 - 9x + \beta$ διαιρείται: (i) μέ τό $x^2 - 1$, (ii) μέ τό $x^2 + 1$.

*Αν $\Pi(x)$ είναι τó πηλίκο τής διαιρέσεως $f(x) : x^2 - 1$ καί $P(x)$ είναι τó πηλίκο τής διαιρέσεως $f(x) : x^2 + 1$ (μέ τίς παραπάνω τιμές τών α καί β), τότε νά υπολογίσετε τά άθροίσματα:

$$1) \Sigma_1 = \Pi(1) + \Pi(2) + \dots + \Pi(v) \quad \text{καί} \quad 2) \Sigma_2 = P(1) + P(2) + \dots + P(v).$$

Υπόδειξη. Ισχύει $x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$.

261. Νά άποδείξετε ότι τó πολυώνυμο $f(x) \equiv (x + 1)^{2^v} - x^{2^v} - 2x - 1$, $v \in \mathbf{N}$, είναι διαιρέτó διά τοῦ πολυώνυμου: $2x^3 + 3x^2 + x$.

262. *Αν γιά τρείς διαφορετικές τιμές τοῦ x τά πολυώνυμα:

$$f(x) \equiv (\alpha - 2)x^2 + (2\beta - 1)x + \gamma, \quad \varphi(x) \equiv x^2 + 5x + \alpha + 1$$

έχουν ίσες αριθμητικές τιμές, νά προσδιορίσετε τούς αριθμούς α, β, γ .

263. *Αν οί συντελεστές τοῦ $f(x) \equiv \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ είναι πραγματικοί αριθμοί καί ισχύει $x - i/f(x)$, τότε νά άποδείξετε ότι θά ισχύει καί: $x^2 + 1/f(x)$. Στή συνέχεια νά βρείτε τó πολυώνυμο $f(x)$ αν επιπλέον ξέρουμε ότι: $f(0) = 1$ καί $f(1) = 10$.

264. *Αν -4 καί -164 είναι τά ύπόλοιπα τών διαιρέσεων $f(x) : (x + 1)$ καί $f(x) : (x - 3)$

αντιστοίχως, τότε νά βρεῖτε τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως $f(x):(x^2-2x-3)$. *Αν τώρα τό πολυώνυμο $f(x)$ εἶναι τέταρτου βαθμοῦ καί ἔχει ὡς ρίζες τούς ἀριθμούς: 0, 2, -2, νά βρεῖτε τήν ἄλλη ρίζα τοῦ πολυωνύμου.

265. Νά βρεῖτε τή σχέση πού συνδέει τούς ἀριθμούς α, β, γ ἄν ξέρομε ὅτι οἱ ρίζες τῆς ἐξίσωσης: $\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$ εἶναι διαδοχικοί ὅροι σέ μία ἀριθμητική πρόοδος. Κατόπιν μέ τή βοήθεια τῆς σχέσεως πού βρήκατε νά προσδιορίσετε τήν παράμετρο λ , ὥστε οἱ ρίζες τοῦ πολυωνύμου $f(x) \equiv x^4 - (2\lambda + 1)x^2 + \lambda^2$ νά εἶναι διαδοχικοί ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου.

266. Δίνεται ἡ ἐξίσωση: $x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$. Νά βρεῖτε σχέση μεταξύ τῶν συντελεστῶν α, β, γ ἔτσι, ὥστε οἱ ρίζες τῆς παραπάνω ἐξίσώσεως νά εἶναι διαδοχικοί ὅροι:

(i) Ἀριθμητικῆς προόδου, (ii) Γεωμετρικῆς προόδου, (iii) Ἀρμονικῆς προόδου.

Στή συνέχεια νά προσδιορίσετε τό συντελεστή k ἔτσι, ὥστε οἱ ρίζες τῆς ἐξίσώσεως: $x^3 - 8x^2 - 6x - k = 0$ νά εἶναι διαδοχικοί ὅροι μιᾶς ἀριθμητικῆς (ἀντ. γεωμετρικῆς) προόδου. *Υστερα νά βρεῖτε τίς ρίζες τῆς ἐξίσώσεως: $x^2 - 8x^2 - 6x - k = 0$ μέ τίς παραπάνω τιμές τοῦ k .

267. *Αν οἱ ρίζες ρ_1, ρ_2, ρ_3 τῆς ἐξίσώσεως: $x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$, εἶναι πραγματικές καί ἱκανοποιοῦν τή σχέση: $\rho_1^3 + \rho_2^3 + \rho_3^3 = -3\gamma$, νά ἀποδείξετε ὅτι τό πολυώνυμο $f(x) \equiv x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ἔχει πολλαπλή ρίζα καί μάλιστα τριπλή.

268. *Αν οἱ ρίζες ρ_1, ρ_2, ρ_3 τοῦ πολυωνύμου $f(x) \equiv x^3 + 3\alpha x^2 + 3\beta x + \gamma$ εἶναι διαδοχικοί ὅροι ἀρμονικῆς προόδου, νά ἀποδείξετε ὅτι: $2\beta^3 - 3\alpha\beta\gamma + \gamma^2 = 0$.

269. Δίνεται πολυώνυμο $f(x)$ μέ ἀκέραιους συντελεστές τέτοιο, ὥστε:

$$f(1) = 1 \wedge f(x) \equiv f(1-x).$$

Νά ἀποδείξετε ὅτι ὑπάρχει πολυώνυμο $\varphi(x)$ μέ ἀκέραιους ἐπίσης συντελεστές καί τέτοιο, ὥστε νά ἰσχύει: $f(x) \equiv x(x-1)\varphi(x) + 1$.

270. Νά ἀποδείξετε ὅτι: ἄν ἓνα πολυώνυμο $f(x)$, $f(x) \in \mathbb{C}[x]$, ἔχει μία ἀπό τίς παρακάτω ιδιότητες:

$$f(x) \equiv f(x+1) \quad \eta \quad f(x) \equiv f(2x)$$

τότε τό $f(x)$ εἶναι ἓνα σταθερό πολυώνυμο.

Υπόδειξη. Ἀφοῦ ἀποδείξετε ὅτι ἰσχύει: $f(v) = f(0)$, ἀντ. $f(2^v) = f(1)$, $\forall v \in \mathbb{N}$ νά πάρετε τά πολυώνυμα: $f(x) - f(0)$, ἀντ. $f(x) - f(1)$ καί νά ἀποδείξετε ὅτι τό καθένα ἀπό αὐτά εἶναι τό μηδενικό πολυώνυμο (βλ. § 124).

Ὁμάδα Β'. 271. *Ἐνα ἀκέραιο πολυώνυμο $f(x)$ ὅταν διαιρεῖται μέ τό $x^2 + x + 1$ δίνει ὑπόλοιπο $x - 1$ καί ὅταν διαιρεῖται μέ τό $x^2 - x + 1$ δίνει ὑπόλοιπο $2x + 1$. Νά βρεῖτε τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως $f(x): x^4 + x^2 + 1$.

Υπόδειξη. Ἀφοῦ διαπιστώσετε ὅτι ἰσχύει: $x^4 + x^2 + 1 \equiv (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$ νά λάβετε στή συνέχεια ὑπόψη καί τό πόρισμα τῆς § 117.

272. Νά προσδιορίσετε τούς πραγματικούς ἀριθμούς α, β ἔτσι, ὥστε τό πολυώνυμο: $f(x) \equiv x^4 + (\alpha - \beta)x^3 + 2\alpha x^2 - 5x + 4$ νά διαιρεῖται μέ τή μεγαλύτερη δυνατή δύναμη τοῦ $(x - 1)$; Ποίος εἶναι τότε ὁ ἐκθέτης τοῦ $(x - 1)$;

273. Νά ἀποδείξετε ὅτι γιά κάθε ρίζα ρ τοῦ πολυωνύμου $f(x) \equiv \alpha x^{v-1} + x^{v-2} + \dots + x + 1$, βαθμοῦ $(v - 1)$, ἰσχύει: $|\rho| < 1 + \frac{1}{|\alpha|}$.

274. *Αν τά πολυώνυμα $f(x) \equiv x^3 + \alpha x - \beta$ καί $\varphi(x) \equiv \beta x^3 - \alpha x - 1$ μέ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ ἔχουν κοινή μία πραγματική ρίζα, νά ἀποδείξετε ὅτι ἰσχύουν οἱ σχέσεις:

$$(i) \quad \rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 = -2\alpha, \quad (ii) \quad |\rho_1| + |\rho_2| + |\rho_3| > \frac{3}{2},$$

ὅπου ρ_1, ρ_2, ρ_3 εἶναι οἱ ρίζες τοῦ $f(x)$.

275. "Αν όλες οι ρίζες του πολυωνύμου $f(x) \equiv x^3 - x^2 + 9kx - k$ είναι θετικές να προσδιορίσετε τους συντελεστές και τις ρίζες του πολυωνύμου $f(x)$.

276. Νά αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαιρέσεως του άκεραιου πολυωνύμου $f(x)$ διά του $x^2 - 2px + p^2$ είναι τό: $p(p)x + f(p) - p(p)$, όπου $p(x)$ είναι τό πηλίκο της διαιρέσεως $[f(x) - f(p)]:(x - p)$.

277. "Αν τό μέ πραγματικούς συντελεστές πολυώνυμο $f(x) \equiv x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ έχει ως διπλή ρίζα τόν αριθμό p και είναι $p \leq 0$ ή $p \geq 1 + \sqrt{2}$, νά αποδείξετε ότι ισχύει:

$$|\alpha| + |\beta| + |\gamma| \geq p^2 + 2p.$$

278. Μέ τή βοήθεια της θεωρίας τών άκεραιων πολυωνύμων, νά επιλύσετε τό σύστημα:

$$\{x + y + z = 2 \wedge x^2 + y^2 + z^2 = 8 \wedge x^3 + y^3 + z^3 = 17\}.$$

'Υπόδειξη. "Αφού βρείτε μέ τί ισοῦται τό xyz , νά θεωρήσετε τά x, y, z ως ρίζες μιᾶς τριτοβάθμιας εξισώσεως τήν όποία και θά επιλύσετε.

279. Δίνεται μία πολυωνυμική συνάρτηση $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ τέτοια, ώστε γιά κάθε $x \in \mathbf{R}$ και κάθε φυσικό αριθμό k ισχύει:

$$f(kx) = f(x)$$

Νά αποδείξετε ότι γιά κάθε φυσικό αριθμό n ισχύει: $f(k^n) = f(1)$ και από αυτό νά συμπεράνετε ότι ή f είναι σταθερή.

280. Νά αποδείξετε ότι: αν ένα πολυώνυμο $f(x)$, $f(x) \in \mathbf{C}[x]$, έχει μία από τίς παρακάτω ιδιότητες:

$$(i) \quad f(x) \equiv f(x + \omega), \text{ όπου } \omega \neq 0, \quad (ii) \quad f(x + 1) \equiv f(x - 1),$$

τότε τό $f(x)$ είναι ένα σταθερό πολυώνυμο.

281. Δίνεται μία πολυωνυμική συνάρτηση: $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ τέτοια, ώστε γιά κάθε πραγματικό αριθμό x νά ισχύει: $f(2x) = f(x)$.

Νά αποδείξετε ότι γιά κάθε πραγματικό αριθμό x και κάθε φυσικό αριθμό n ισχύει: $f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$. "Από αυτό νά συμπεράνετε ότι ή f είναι σταθερή.

282. Δίνεται τό πολυώνυμο $f(x) \equiv x^3 - x^2 - 4x - 4$. Νά καθορίσετε τό είδος τών ριζών του. Στή συνέχεια νά αποδείξετε ότι κάθε πραγματική ρίζα του $f(x)$ βρίσκεται στό (άνοιχτό) διάστημα: $(2, 3)$.

283. Νά αποδείξετε ότι: αν τό πολυώνυμο $f(x) \equiv x^3 - \alpha^2 x + \alpha^2 \beta$, όπου α, β πραγματικοί αριθμοί μέ $\beta < 0$, έχει τρείς πραγματικές και διακεκριμένες ρίζες, τότε θά ισχύει:

$$|\alpha| + \frac{3\sqrt{3}}{2}\beta > 0.$$

284. "Αν ένα πολυώνυμο $f(x)$ έχει άκεραίους συντελεστές και οι αριθμοί $f(0), f(1)$ είναι περιττοί, νά αποδείξετε ότι τό $f(x)$ δέν έχει άκεραιή ρίζα.

285. Δίνεται τό πολυώνυμο $f(x) \equiv x^n + 2\alpha x + 2$, όπου $\alpha \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$. Νά αποδείξετε ότι τό $f(x)$ δέ δέχεται ρητό αριθμό ως ρίζα του.

'Υπόδειξη. "Εστω ότι ό ρητός αριθμός $\frac{k}{\lambda}$, όπου $k, \lambda \in \mathbf{Z}$, $\lambda \neq 0$ και $(k, \lambda) = 1$, είναι ρίζα του $f(x)$, τότε (§ 130) $k/2$, όποτε $k = \pm 1, \pm 2$ και $\lambda/1$, όποτε $\lambda = \pm 1$. Στή συνέχεια νά διακρίνετε περιπτώσεις.

II. ΑΝΑΛΥΣΗ ΡΗΤΟΥ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ ΣΕ ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΑΠΛΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

§ 132. Όρισμός.—**Ρητό κλάσμα** ως προς x ονομάζουμε τό πηλίκο δύο ἀκέραιων πολυωνύμων τοῦ x , δηλαδή κάθε παράσταση τῆς μορφῆς:

$$k(x) \equiv \frac{f(x)}{\varphi(x)} \equiv \frac{\alpha_\mu x^\mu + \alpha_{\mu-1} x^{\mu-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0}{\beta_\nu x^\nu + \beta_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0}, \quad (1)$$

ὅπου $\alpha_i, \beta_j, i = 0, 1, \dots, \mu, j = 0, 1, \dots, \nu$, πραγματικοί ἀριθμοί, μ καὶ ν ἀκέραιοι θετικοί* καὶ $\alpha_\mu \neq 0, \beta_\nu \neq 0$.

Στηριζόμενοι στή θεωρία τῶν ἀκέραιων πολυωνύμων μπορούμε νά ἀναλύσουμε τό ρητό κλάσμα (1) σέ ἄθροισμα ἄλλων ἀπλῶν κλασμάτων.

Γιά νά μπορούμε ὅμως νά κάνουμε αὐτή τήν ἀνάλυση, πρέπει ὁ ἀριθμητής τῆς (1), δηλαδή τό πολυώνυμο $f(x)$, νά ἔχει βαθμό μικρότερο ἀπό τό βαθμό τοῦ παρονομαστή. Διαφορετικά, δηλαδή ἂν $\mu \geq \nu$, κάνουμε τή διαίρεση $f(x) : \varphi(x)$ καί, ἂν εἶναι $\pi(x)$ τό πηλίκο καί $\upsilon(x)$ τό ὑπόλοιπο, θά ἔχουμε :

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} \equiv \pi(x) + \frac{\upsilon(x)}{\varphi(x)} \quad (2)$$

ὅπου ὁ βαθμός τοῦ $\upsilon(x)$ εἶναι μικρότερος ἀπό τό βαθμό τοῦ $\varphi(x)$.

Ἀπό τή σχέση (2) φαίνεται ὅτι ἡ ἀνάλυση τοῦ κλάσματος $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ ἀνάγεται στήν ἀνάλυση τοῦ κλάσματος $\frac{\upsilon(x)}{\varphi(x)}$, τοῦ ὁποῖου ὁ βαθμός τοῦ ἀριθμητῆ εἶναι μικρότερος ἀπό τό βαθμό τοῦ παρονομαστή.

§ 133. Ἀνάλυση τοῦ κλάσματος $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ σέ ἄθροισμα ἀπλῶν κλασμάτων, ὅπου ὁ βαθμός τοῦ $f(x)$ εἶναι μικρότερος ἀπό τό βαθμό τοῦ $\varphi(x)$.—

Διακρίνουμε τίς ἐπόμενες τέσσερις περιπτώσεις:

Περίπτωση I. Ἄν τό $\varphi(x)$ ἔχει μόνο ἀπλές πραγματικές ρίζες $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_\nu$, δηλαδή ἂν εἶναι τῆς μορφῆς: $\varphi(x) \equiv (x - \rho_1)(x - \rho_2) \dots (x - \rho_\nu)$ **, τότε μπορούμε νά προσδιορίσουμε ν πραγματικούς ἀριθμούς $A_1, A_2, \dots, A_\nu$, τέτοιους ὥστε νά ἀληθεύει ἡ ταυτότητα:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} \equiv \frac{f(x)}{(x - \rho_1)(x - \rho_2) \dots (x - \rho_\nu)} \equiv \frac{A_1}{x - \rho_1} + \frac{A_2}{x - \rho_2} + \dots + \frac{A_\nu}{x - \rho_\nu} \quad (3)$$

* Ἄν $\mu = \nu = 0$ τό $k(x)$ γίνεται $\frac{\alpha_0}{\beta_0}$, δηλαδή εἶναι μία σταθερά, ἐνῶ ἂν $\nu = 0, \mu \geq 1$ τό $k(x)$ γίνεται ἕνα (ἀκέραιο) πολυώνυμο τοῦ x .

** Δεχόμαστε, γιά εὐκολία μας καί χωρίς αὐτό νά περιορίζει τή γενικότητα, ὅτι ὁ συντελεστής β_ν τοῦ $\varphi(x)$ εἶναι ἴσος μέ τή μονάδα. Ἄν ὁ συντελεστής τοῦ x^ν δέν εἶναι ἡ μονάδα, τότε μπορούμε νά διαιρέσουμε μέ τό β_ν ($\beta_\nu \neq 0$) τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος, χωρίς τό κλάσμα νά μεταβληθεῖ, ὁπότε ὁ συντελεστής τοῦ x^ν γίνεται ἴσος μέ τή μονάδα.

από τήν όποία, άν κάνουμε άπαλοιφή παρονομαστών, έχουμε:

$$f(x) \equiv A_1(x - \rho_2)(x - \rho_3) \cdots (x - \rho_v) + \cdots + A_v(x - \rho_1)(x - \rho_2) \cdots (x - \rho_{v-1}) \quad (4)$$

*Αν τώρα θέσουμε * στην (4) $x = \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_v$ παίρνουμε άντιστοίχως:

$$f(\rho_1) = A_1(\rho_1 - \rho_2)(\rho_1 - \rho_3) \cdots (\rho_1 - \rho_v) \Rightarrow A_1 = \frac{f(\rho_1)}{(\rho_1 - \rho_2)(\rho_1 - \rho_3) \cdots (\rho_1 - \rho_v)}$$

$$f(\rho_v) = A_v(\rho_v - \rho_1)(\rho_v - \rho_2) \cdots (\rho_v - \rho_{v-1}) \Rightarrow A_v = \frac{f(\rho_v)}{(\rho_v - \rho_1)(\rho_v - \rho_2) \cdots (\rho_v - \rho_{v-1})}$$

Παρατήρηση. Τά $A_1, A_2, \dots, A_v$ προσδιορίζονται καί από τήν ταυτότητα (4), άρκεί νά έκτελεστούν οί πράξεις στό δεύτερο μέλος της, νά έξισωθοϋν οί συντελεστές τών όμοιοβάρθμιων όρων τών δύο μελών της καί, τέλος, νά λυθεί τό σύστημα πού θά προκύψει.

Εφαρμογή. Νά αναλυθεί τό κλάσμα: $\frac{f(x)}{\varphi(x)} \equiv \frac{x^2 + x + 1}{(x - 1)(x - 2)(x - 3)}$ σέ άθροισμα

άπλών κλασμάτων.

Λύση. Σύμφωνα μέ τά παραπάνω έχουμε:

$$\frac{x^2 + x + 1}{(x - 1)(x - 2)(x - 3)} \equiv \frac{A_1}{x - 1} + \frac{A_2}{x - 2} + \frac{A_3}{x - 3} \quad (1)$$

Από τήν (1) παίρνουμε:

$$x^2 + x + 1 \equiv A_1(x - 2)(x - 3) + A_2(x - 1)(x - 3) + A_3(x - 1)(x - 2) \quad (2)$$

Η ταυτότητα (2) γιά $x = 1, 2, 3$ δίνει άντιστοίχως: $A_1 = \frac{3}{2}, A_2 = -7, A_3 = \frac{13}{2}$.

Όπότε: $\frac{x^2 + x + 1}{(x - 1)(x - 2)(x - 3)} \equiv \frac{3}{2(x - 1)} - \frac{7}{(x - 2)} + \frac{13}{2(x - 3)}$.

Περίπτωση II.—Αν τό $\varphi(x)$ έχει άπλές καί πολλαπλές πραγματικές ρίζες, δηλαδή άν είναι, π.χ., τής μορφής:

$$\varphi(x) \equiv (x - \rho_1)(x - \rho_2)(x - \rho_3)^k \cdots (x - \rho_\mu)^\lambda, \text{ μέ } 1 + 1 + k + \cdots + \lambda = v,$$

τότε τό κλάσμα $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ μπορεί νά γραφεί κατά ένα μοναδικό τρόπο μέ τή μορφή:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} \equiv \frac{A_1}{x - \rho_1} + \frac{A_2}{x - \rho_2} + \frac{B_1}{x - \rho_3} + \frac{B_2}{(x - \rho_3)^2} + \cdots + \frac{B_k}{(x - \rho_3)^k} + \cdots + \frac{M_1}{x - \rho_\mu} + \frac{M_2}{(x - \rho_\mu)^2} + \cdots + \frac{M_\lambda}{(x - \rho_\mu)^\lambda},$$

όπου $A_1, A_2, B_1, B_2, \dots, B_k, \dots, M_1, M_2, \dots, M_\lambda$ πραγματικοί άριθμοί πού προσδιορίζονται εύκολα.

* Αϋτή ή σχέση βρέθηκε μέ τήν ύπόθεση ότι $x \neq \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_v$. *Αρα τό πολυώνυμο τής διαφοράς τών δύο μελών τής (4) μηδενίζεται γιά όλες τίς άλλες τιμές τοϋ x . Έπομένως έχει άπειρες ρίζες, δηλαδή περισσότερες άπό τό βαθμό του. *Αρα πρόκειται γιά τό μηδενικό πολυώνυμο. Συνεπώς μηδενίζεται καί γιά $x = \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_v$, πού σημαίνει ότι ή (4) άληθεύει καί γιά $x = \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_v$.

Παραδείγματα: 1ο: Νά αναλυθεί τό κλάσμα $\frac{f(x)}{\varphi(x)} \equiv \frac{x^2 + 4x + 7}{(x+2)(x+3)^2}$ σέ ἄθροισμα ἀπλῶν κλασμάτων.

Λύση. Σύμφωνα μέ τά παραπάνω ἔχουμε:

$$\frac{x^2 + 4x + 7}{(x+2)(x+3)^2} \equiv \frac{A}{x+2} + \frac{B_1}{(x+3)} + \frac{B_2}{(x+3)^2} \quad (1)$$

Μετά τήν ἀπαλοιφή τῶν παρονομαστῶν ἔχουμε:

$$x^2 + 4x + 7 \equiv A(x+3)^2 + B_1(x+2)(x+3) + B_2(x+2) \quad (2)$$

καί μετά τίς πράξεις:

$$x^2 + 4x + 7 \equiv (A + B_1)x^2 + (6A + 5B_1 + B_2)x + (9A + 6B_1 + 2B_2) \quad (3)$$

Ἐξισώνουμε τούς συντελεστές τῶν ὁμοιοβάθμιων ὀρων τῶν δύο μελῶν τῆς (3) καί ἔχουμε τό σύστημα:

$$A + B_1 = 1, \quad 6A + 5B_1 + B_2 = 4, \quad 9A + 6B_1 + 2B_2 = 7.$$

*Αν λύσουμε τό σύστημα, ἔχουμε:

$$A = 3, \quad B_1 = -2, \quad B_2 = -4.$$

Ὄποτε:

$$\frac{x^2 + 4x + 7}{(x+2)(x+3)^2} = \frac{3}{x+2} - \frac{2}{(x+3)} - \frac{4}{(x+3)^2}.$$

2ο: Νά αναλυθεί τό κλάσμα: $\frac{f(x)}{\varphi(x)} \equiv \frac{3x^4 - 9x^3 + 4x^2 - 34x + 1}{(x-2)^3(x+3)^2}$ σέ ἄθροισμα ἀπλῶν κλασμάτων.

Λύση. Ἡ ἀνάλυση προκύπτει ἀπό τόν τύπο:

$$\frac{3x^4 - 9x^3 + 4x^2 - 34x + 1}{(x-2)^3(x+3)^2} \equiv \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2} + \frac{A_3}{(x-2)^3} + \frac{B_1}{x+3} + \frac{B_2}{(x+3)^2}.$$

*Εργαζόμενοι ὅπως καί στό προηγούμενο παράδειγμα, βρίσκουμε:

$$A_1 = 1, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = -3, \quad B_1 = 2, \quad B_2 = -5,$$

καί ἐπομένως ἡ ἀνάλυση πού ζητᾶμε εἶναι:

$$\frac{3x^4 - 9x^3 + 4x^2 - 34x + 1}{(x-2)^3(x+3)^2} \equiv \frac{1}{x-2} - \frac{3}{(x-2)^3} + \frac{2}{x+3} - \frac{5}{(x+3)^2}.$$

Περίπτωση III. *Αν τό ρητό κλάσμα εἶναι τῆς μορφῆς:

$$\frac{f(x)}{(x^2 + \beta x + \gamma)^v},$$

ὅπου ὁ βαθμός τοῦ $f(x)$ εἶναι μικρότερος ἀπό τό $2v$, v ἀκέραιος ≥ 1 καί β, γ πραγματικοί ἀριθμοί μέ $\beta^2 - 4\gamma < 0$, τότε ὑπάρχουν πραγματικοί ἀριθμοί $A_1, B_1, A_2, B_2, \dots, A_v, B_v$ τέτοιои, ὥστε νά ἰσχύει:

$$\frac{f(x)}{(x^2 + \beta x + \gamma)^v} \equiv \frac{A_1x + B_1}{x^2 + \beta x + \gamma} + \frac{A_2x + B_2}{(x^2 + \beta x + \gamma)^2} + \dots + \frac{A_vx + B_v}{(x^2 + \beta x + \gamma)^v}.$$

Παράδειγμα. Νά αναλυθεί τό κλάσμα $\frac{f(x)}{\varphi(x)} \equiv \frac{x^5 + 1}{(x^2 - x + 1)^3}$ σέ ἄθροισμα ἀπλῶν κλασμάτων.

Λύση. Παρατηροῦμε ὅτι τό $x^2 - x + 1$ ἔχει μιγαδικές ρίζες καί ὅτι τό κλάσμα $\frac{x^5 + 1}{(x^2 - x + 1)^3}$ ἔχει ὅλες τίς προϋποθέσεις πού ἀναφέραμε. *Αρα θά ἔχουμε τήν ἀνάλυση:

$$\frac{x^5 + 1}{(x^2 - x + 1)^3} = \frac{A_1x + B_1}{x^2 - x + 1} + \frac{A_2x + B_2}{(x^2 - x + 1)^2} + \frac{A_3x + B_3}{(x^2 - x + 1)^3} \quad (1)$$

καί μετά τήν απαλοιφή παρονομαστών:

$$x^5 + 1 \equiv (A_1x + B_1)(x^2 - x + 1)^2 + (A_2x + B_2)(x^2 - x + 1) + A_3x + B_3.$$

*Αν ἐκτελέσουμε τίς πράξεις καί ἐξισώσουμε τούς συντελεστές τῶν ἴσων δυνάμεων τοῦ x στά δύο μέλη, θά βροῦμε ἓνα πρωτοβάθμιο σύστημα μέ ἀγνώστους τά $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$, ἀπό τή λύση τοῦ ὁποίου ἔχουμε:

$$A_1 = 1, B_1 = 2, A_2 = 1, B_2 = -3, A_3 = -1, B_3 = 2.$$

*Αν ἀντικαταστήσουμε στήν (1) αὐτές τίς τιμές, ἔχουμε:

$$\frac{x^5 + 1}{(x^2 - x + 1)^3} = \frac{x + 2}{x^2 - x + 1} + \frac{x - 3}{(x^2 - x + 1)^2} - \frac{x - 2}{(x^2 - x + 1)^3}.$$

Περίπτωση IV. *Αν τό $\varphi(x)$ ἔχει **ρίζες πραγματικές καί μιγαδικές ἀπλές ἢ πολλαπλές**, τότε ἰσχύουν ταυτόχρονα οἱ προηγούμενες περιπτώσεις.

Παράδειγμα. Νά ἀναλυθεῖ τό κλάσμα $\frac{2x + 1}{(x + 1)(x^2 + x + 1)}$ σέ ἄθροισμα ἀπλῶν κλασμάτων.

Λύση. Παρατηροῦμε ὅτι ἡ διακρίνουσα τοῦ τριωνύμου $x^2 + x + 1$ εἶναι ἀρνητική καί ἐπομένως ὁ παρονομαστής τοῦ κλάσματος ἔχει ρίζες πραγματικές καί μιγαδικές (ἀπλές). Τότε, σύμφωνα μέ τίς περιπτώσεις I καί III, τό κλάσμα δέχεται τήν ἀνάλυση:

$$\frac{2x + 1}{(x + 1)(x^2 + x + 1)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{Bx + \Gamma}{x^2 + x + 1}. \quad (1)$$

*Από τήν (1) λαμβάνουμε:

$$2x + 1 \equiv A(x^2 + x + 1) + (Bx + \Gamma)(x + 1) \quad (2)$$

$$\eta \quad 2x + 1 \equiv (A + B)x^2 + (A + B + \Gamma)x + (A + \Gamma) \quad (3)$$

$$\text{συνεπῶς:} \quad A + B = 0, \quad A + B + \Gamma = 2, \quad A + \Gamma = 1.$$

*Από τήν ἐπίλυση τοῦ προηγούμενου συστήματος βρίσκουμε: $A = -1, B = 1, \Gamma = 2$.

$$\text{*Οπότε:} \quad \frac{2x + 1}{(x + 1)(x^2 + x + 1)} = -\frac{1}{x + 1} + \frac{x + 2}{x^2 + x + 1}.$$

Σημείωση: Σύντομος ὑπολογισμός τῶν A, B, Γ .

*Από τήν ταυτότητα (2) γιά $x = -1$ λαμβάνουμε: $A = -1$.

*Από τήν ταυτότητα (3) γιά $x = 0$ λαμβάνουμε: $A + \Gamma = 1$ καί συνεπῶς $\Gamma = 2$.

*Εξισώνοντας τούς συντελεστές τοῦ x^2 στά δύο μέλη τῆς (3) βρίσκουμε:

$$0 = A + B \text{ καί ἐπειδὴ } A = -1 \text{ λαμβάνουμε: } B = 1.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

286. Νά ἀναλυθοῦν σέ ἄθροισμα ἀπλῶν κλασμάτων τά ἐπόμενα ρητά κλάσματα:

$$1) \frac{1}{(x^2 - 4)(x + 1)}, \quad 2) \frac{3x - 1}{x^2 - 5x + 6}, \quad 3) \frac{8x^2 - 19x + 2}{(x + 2)(x - 1)(x - 4)}, \quad 4) \frac{1}{(1 + x^2)^2 \cdot (1 + x)}$$

$$5) \frac{x + 2}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)^2}, \quad 6) \frac{x^2 - x + 1}{(x^2 + 1)(x - 1)^2}, \quad 7) \frac{3x^2 + 7x + 2}{(x + 1)(x^2 + 2x + 5)}, \quad 8) \frac{10x^2 + 32}{x^3 \cdot (x - 4)^2}.$$

287. *Επίσης:

$$1) \frac{3x + 4}{x^2 - 9x + 14}, \quad 2) \frac{3x^2 - 5x - 6}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}, \quad 3) \frac{x + 2}{(x^4 - 1)(x^2 + 1)^2}, \quad 4) \frac{x^2}{(x^2 - 2x + 5)^2},$$

$$5) \frac{2x^3 + 7x^2 - 2x - 2}{2x^2 + x - 6}, \quad 6) \frac{5x^2 - 4}{x^4 - 5x^2 + 4}, \quad 7) \frac{x^3}{x^3 - 3x + 2}, \quad 8) \frac{7x - 10}{(3x - 4)(x - 1)^2}.$$

§ 134. Μέθοδοι εύρεσεως τοῦ ἁθροίσματος τῶν n πρώτων ὁρων σειρᾶς.—Ῥπάρχουν διάφοροι μέθοδοι γιὰ νά βροῦμε τό ἅθροισμα τῶν n πρώτων ὁρων μιᾶς σειρᾶς ἀνάλογα μέ τή μορφή τοῦ γενικοῦ ὁρου τῆς. Ῥπάρχουν ὁμως καί σειρές, στίς ὁποῖες δέν μποροῦμε νά βροῦμε τό ἅθροισμα τῶν n πρώτων ὁρων, ὅπως π.χ. εἶναι ἡ ἀρμονική σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v}$. Δέν ὑπάρχει γενική μέθοδος

γιὰ τόν ὑπολογισμό τοῦ ἁθροίσματος σ_n τῶν n πρώτων ὁρων ὁποιασδήποτε σειρᾶς. Σ' αὐτή τήν παράγραφο θά μελετήσουμε μόνο ὀρισμένες περιπτώσεις πού μποροῦμε νά βροῦμε τό ἅθροισμα σ_n τῶν n πρώτων ὁρων μιᾶς σειρᾶς μέ γενικό ὁρο α_v πού εἶναι εἰδικῆς μορφῆς.

Π ε ρ ῖ π τ ω σ η - I. Ὄταν ὁ γενικός ὁρος α_v τῆς σειρᾶς $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ μπορεῖ νά γραφεῖ μέ τή μορφή :

$$\alpha_v = \varphi(v) - \varphi(v+1) \quad (1)$$

γιὰ κάθε $v = 1, 2, 3, \dots$, ὅπου $\varphi(v)$ συνάρτηση τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ v (ἀκολουθία), τό τε τό ἅθροισμα σ_v τῶν n πρώτων ὁρων τῆς σειρᾶς, δίνεται ἀπό τόν τύπο :

$$\sigma_v = \varphi(1) - \varphi(v+1) \quad (2)$$

Πράγματι, ἀπό τήν $\alpha_v = \varphi(v) - \varphi(v+1)$ γιὰ $v = 1, 2, 3, \dots, v$ λαμβά-
νομε :

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1 = \varphi(1) - \varphi(2) \\ \alpha_2 = \varphi(2) - \varphi(3) \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_v = \varphi(v) - \varphi(v+1) \end{array} \right\} \Rightarrow \sigma_v = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_v = \varphi(1) - \varphi(v+1).$$

Παρατηρήσεις. 1η. Ὄταν ὁ γενικός ὁρος α_v τῆς $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ ἀναλύεται στή διαφορά :

$\alpha_v = \varphi(v+1) - \varphi(v)$, τότε τό σ_v δίνεται ἀπό τόν τύπο: $\sigma_v = \varphi(v+1) - \varphi(1)$.

2η: Ἀν ὑπάρχει τό $\lim \varphi(v)$ καί εἶναι k , τότε ἀπό τή (2) ἔχουμε:

$$\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v = \lim \sigma_v = \varphi(1) - k.$$

Ἐφαρμογές: 1η. Νά ἀποδείξετε ὅτι: $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{2v+1}{v^2(v+1)^2} = 1$.

Λύση. Ὁ γενικός ὁρος $\alpha_v = \frac{2v+1}{v^2(v+1)^2}$ τῆς σειρᾶς γράφεται:

$$\alpha_v = \frac{2v+1}{v^2(v+1)^2} = \frac{v^2+2v+1-v^2}{v^2(v+1)^2} = \frac{(v+1)^2-v^2}{v^2(v+1)^2} = \frac{1}{v^2} - \frac{1}{(v+1)^2} = \varphi(v) - \varphi(v+1),$$

ὅπου $\varphi(v) = \frac{1}{v^2}$. Ἀρα $\sigma_v = \varphi(1) - \varphi(v+1) = 1 - \frac{1}{(v+1)^2}$ καί συνεπῶς:

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{2v+1}{v^2(v+1)^2} = \lim \sigma_v = 1, \text{ γιατί } \lim \frac{1}{(v+1)^2} = 0.$$

2η. Νά βρείτε τό ἄθροισμα τῆς σειρᾶς :

$$\frac{4}{1 \cdot 2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{5}{2 \cdot 3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{6}{3 \cdot 4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \cdots + \frac{v+3}{v(v+1)} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^v + \cdots \quad (\Sigma)$$

Λύση: Ὁ γενικός ὅρος τῆς σειρᾶς (Σ) εἶναι: $\alpha_v = \frac{v+3}{v(v+1)} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^v$.

Γι' αὐτό μετασχηματίζουμε τό γενικό ὅρο, ἀναλύουμε πρῶτα-πρῶτα τό κλάσμα $\frac{v+3}{v(v+1)}$ σέ ἄθροισμα δύο ἀπλῶν κλασμάτων. Γι' αὐτό θέτουμε:

$$\frac{v+3}{v(v+1)} \equiv \frac{A}{v} + \frac{B}{v+1}.$$

Ἀπό αὐτή, βρίσκουμε $A=3, B=-2$, ὁπότε ἔχουμε:

$$\frac{v+3}{v(v+1)} \equiv \frac{3}{v} - \frac{2}{v+1}.$$

Τότε ὁ γενικός ὅρος τῆς σειρᾶς γίνεται:

$$\alpha_v = \frac{v+3}{v(v+1)} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^v = \frac{3}{v} \cdot \frac{2^v}{3^v} - \frac{2}{v+1} \cdot \frac{2^v}{3^v} = \frac{2^v}{v \cdot 3^{v-1}} - \frac{2^{v+1}}{(v+1) \cdot 3^v},$$

δηλαδή ὁ α_v γράφτηκε μέ τή μορφή $\alpha_v = \varphi(v) - \varphi(v+1)$, ὅπου $\varphi(v) = \frac{2^v}{v \cdot 3^{v-1}}$.

Τότε, σύμφωνα μέ τόν τύπο (2), θά εἶναι:

$$\sigma_v = \varphi(1) - \varphi(v+1) = 2 - \frac{2^{v+1}}{(v+1) \cdot 3^v}, \text{ γιατί } \varphi(1) = 2.$$

$$\text{Ἄρα } \lim \sigma_v = 2 - \lim \frac{2^{v+1}}{(v+1) \cdot 3^v} = 2 - \lim \frac{2}{v+1} \cdot \lim \left(\frac{2}{3}\right)^v = 2 - 0 = 2.$$

Δηλαδή ἡ σειρά (Σ) συγκλίνει στόν ἀριθμό 2.

Περίπτωση II. Ὁ γενικός ὅρος α_v τῆς $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ ἀναλύεται σέ ἀλγεβρικό ἄθροισμα νιοστών ὁρων γνωστών σειρῶν, δηλαδή, ἂν π.χ. ὁ α_v εἶναι τῆς μορφῆς:

$$\alpha_v = \varphi'(v) + \varphi''(v) + \varphi'''(v) \quad (1)$$

ὅπου $\varphi'(v), \varphi''(v), \varphi'''(v)$ εἶναι οἱ γενικοί ὅροι σειρῶν, μέ μερικά ἄθροίσματα $\sigma_v', \sigma_v'', \sigma_v'''$ ἀντίστοιχα. Τότε τό ἄθροισμα σ_v τῶν v πρώτων ὁρων τῆς σειρᾶς $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ εἶναι:

$$\sigma_v = \sigma_v' + \sigma_v'' + \sigma_v''' \quad (2)$$

Πράγματι, ἀπό τήν (1) γιά $v=1, 2, \dots, v$ λαμβάνουμε:

$$\sigma_v = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_v = \{\varphi'(1) + \varphi'(2) + \cdots + \varphi'(v)\} + \{\varphi''(1) + \varphi''(2) + \cdots + \varphi''(v)\} + \{\varphi'''(1) + \varphi'''(2) + \cdots + \varphi'''(v)\} = \sigma_v' + \sigma_v'' + \sigma_v'''.$$

Ἐφαρμογή. Νά βρεῖτε τό ἄθροισμα τῶν v πρώτων ὁρων τῆς σειρᾶς μέ γενικό ὅρο $\alpha_v = \frac{2^v - 1}{2^{2v-2}}$, καθώς καί τό ἄθροισμά της ($\equiv$ ἄθροισμα ἁπειρῶν ὁρων τῆς).

Λύση. 'Ο γενικός όρος $\alpha_v = \frac{2^v - 1}{2^{2v-2}} = \frac{2^v}{2^{2v-2}} - \frac{1}{2^{2v-2}} = \frac{4}{2^v} - \frac{4}{4^v}$, αναλύεται σε

άλγεβρικό άθροισμα της μορφής: $\varphi'(v) + \varphi''(v)$, όπου $\varphi'(v) = \frac{4}{2^v}$ και $\varphi''(v) = -\frac{4}{4^v}$. Παρατηρούμε ότι καθένας από τούς $\varphi'(v)$, $\varphi''(v)$ είναι ό γενικός όρος φθίνουσας γεωμ. προόδου. Έτσι έχουμε:

$$\sigma_v' = \varphi'(1) + \dots + \varphi'(v) = 4 \left(\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^v} \right) = 4 \frac{\frac{1}{2^{v+1}} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - 1} = 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^v} \right)$$

$$\sigma_v'' = \varphi''(1) + \dots + \varphi''(v) = -4 \left(\frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4^v} \right) = -\frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{4^v} \right)$$

και συνεπώς (τύπος (2)) είναι:

$$\sigma_v = \sigma_v' + \sigma_v'' = 4 \left(1 - \frac{1}{2^v} \right) - \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{4^v} \right) = \frac{8}{3} - \frac{1}{2^{v-1}} + \frac{1}{3 \cdot 4^{v-1}}.$$

Παρατηρούμε τώρα ότι: $\lim \sigma_v = \frac{8}{3}$ (γιατί;).

*Αρα:
$$\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v = \lim \sigma_v = \frac{8}{3}.$$

Π ε ρ ί π τ ω σ η Ι Ι Ι. *Αν ό γενικός όρος α_v της σειράς $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ είναι της μορφής:

$$\alpha_v = f(v) \cdot x^v$$

όπου $f(v)$ άκέραιο πολυώνυμο τού v , τότε πάλι τό άθροισμα σ_v τών v πρώτων όρων της ύπολογίζεται.

Παράδειγμα 1ο. Νά ύπολογίσετε τό άθροισμα τών v πρώτων όρων της σειράς:

$$\sum_{v=1}^{\infty} vx^{v-1} \equiv 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + vx^{v-1} + \dots$$

Λύση. *Εστω:

$$\sigma_v \equiv 1 + 2x + 3x^2 + \dots + vx^{v-1}. \quad (1)$$

Πολλαπλασιάζοντας τά μέλη της (1) επί x λαμβάνουμε:

$$x\sigma_v = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + vx^v. \quad (2)$$

*Αφαιρώντας από την (1) τη (2) βρίσκουμε:

$$(1-x)\sigma_v = 1 + x + x^2 + \dots + x^{v-1} - vx^v. \quad (3)$$

*Αλλά: $1 + x + x^2 + \dots + x^{v-1} = \frac{x^v - 1}{x - 1}, \quad (x \neq 1),$

και έπομένως ή (3) γίνεται:

$$(1-x) \cdot \sigma_v = \frac{x^v - 1}{x - 1} - vx^v$$

από την όποία για $x \neq 1$ βρίσκουμε: $\sigma_v = \frac{1 - x^v}{(1-x)^2} - \frac{vx^v}{1-x}.$

Παράδειγμα 2ο. Νά αποδείξετε ότι το άθροισμα των n πρώτων όρων της σειράς :

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \dots + \frac{n+1}{3^n} + \dots \quad (1)$$

είναι :

$$\frac{5}{4} - \frac{2n+5}{4 \cdot 3^n}.$$

Λύση. Ο γενικός όρος της (1), δηλ. ο $\frac{n+1}{3^n}$ είναι γινόμενο του νιοστού όρου μιᾶς αριθμητικής προόδου (τῆς: 2, 3, ..., n , $n+1$, ...) καί τοῦ νιοστού όρου μιᾶς γεωμετρικῆς (τῆς : $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3^2}$, ..., $\frac{1}{3^n}$, ...) , δηλαδή είναι ὁ νιοστός όρος μιᾶς **μικτῆς προόδου** *.

Θέτουμε:

$$\sigma_n = \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \dots + \frac{n+1}{3^n}. \quad (2)$$

Πολλαπλασιάζοντας τά μέλη τῆς (2) ἐπὶ τὸ λόγο τῆς γεωμετρικῆς προόδου λαμβάνουμε:

$$\frac{1}{3} \sigma_n = \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{n+1}{3^{n+1}} \quad (3)$$

*Αφαιρώντας ἀπὸ τή (2) τήν (3) βρίσκουμε:

$$\frac{2}{3} \sigma_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^n} - \frac{n+1}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} + \frac{\frac{1}{3^n} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} - 1} - \frac{n+1}{3^{n+1}}$$

καί τελικά:

$$\sigma_n = \frac{5}{4} - \frac{2n+5}{4 \cdot 3^n}$$

Π ε ρ ί π τ ω σ η IV. *Αν ὁ γενικός όρος a_n τῆς σειράς $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$ είναι τῆς μορφῆς:

$$a_v = f(v)$$

όπου $f(v)$ ἀκέραιη ρητὴ συνάρτηση τοῦ n , τότε πάλι τὸ άθροισμα σ_n τῶν n πρώτων όρων τῆς σειράς ὑπολογίζεται.

Παράδειγμα 1ο. Νά βρεῖτε τὸ άθροισμα τῶν n πρώτων όρων τῆς σειράς, τῆς ὁποίας ὁ γενικός όρος είναι : $a_v = 12v^2 - 6v + 1$.

Λύση: *Εστω $\sigma_n \equiv a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{v=1}^n a_v = \sum_{v=1}^n (12v^2 - 6v + 1)$.

*Αλλά: $\sum_{v=1}^n (12v^2 - 6v + 1) = \sum_{v=1}^n 12v^2 - \sum_{v=1}^n 6v + \sum_{v=1}^n 1$.

*Αρα:

$$\sigma_n = 12 \sum_{v=1}^n v^2 - 6 \sum_{v=1}^n v + \sum_{v=1}^n 1 = 12 \cdot \frac{v(v+1)(2v+1)}{6} - 6 \frac{v(v+1)}{2} + v = v^2(4v+3).$$

* Μικτὴ πρόοδος ὀνομάζεται μία ἀκολουθία ἀριθμῶν, τῆς ὁποίας κάθε όρος προκύπτει ἀπὸ τὸν πολλαπλασιασμό τῶν ἀντίστοιχων (ὁμοτάξιων) όρων δύο προόδων, μιᾶς ἀριθμητικῆς καί μιᾶς γεωμετρικῆς.

Παράδειγμα 2ο. Νά βρείτε τό άθροισμα τών n πρώτων όρων τής σειράς :

$$1 \cdot 3 \cdot 5 + 3 \cdot 5 \cdot 7 + 5 \cdot 7 \cdot 9 + \dots$$

(Σ)

Λύση. Πρώτα-πρώτα βρίσκουμε τό γενικό όρο τής σειράς (Σ).

Παρατηρούμε ότι οί πρώτοι παράγοντες (1, 3, 5, ...) τών όρων τής σειράς (Σ) άπο-τελούν άριθμητική πρόοδο μέ λόγο 2, συνεπώς ό πρώτος όρος τοῦ γινόμενου τοῦ γενικού όρου τής σειράς θά είναι ό: $1 + (n-1) \cdot 2 = 2n-1$.

Έπίσης ό γενικός όρος τής άριθμητικής προόδου 3, 5, 7, ... είναι ό: $2n+1$

καί » » » » » » 5, 7, 9, ... » : $2n+3$.

*Άρα ό γενικός όρος α_n τής σειράς (Σ) είναι ό: $(2n-1)(2n+1)(2n+3)$ καί συνεπώς τό άθροισμα σ_n τών n πρώτων όρων τής (Σ) είναι:

$$\begin{aligned}\sigma_n &\equiv 1 \cdot 3 \cdot 5 + 3 \cdot 5 \cdot 7 + \dots + (2n-1)(2n+1)(2n+3) = \sum_{v=1}^n (2v-1)(2v+1)(2v+3) = \\ &= \sum_{v=1}^n (8v^3 + 12v^2 - 2v - 3) = 8 \sum_{v=1}^n v^3 + 12 \sum_{v=1}^n v^2 - 2 \sum_{v=1}^n v - 3 \sum_{v=1}^n 1 = \\ &= 8 \cdot \frac{v^2(v+1)^2}{4} + 12 \frac{v(v+1)(2v+1)}{6} - 2 \frac{v(v+1)}{2} - 3v\end{aligned}$$

καί τελικά:

$$\sigma_n = n(2n^3 + 8n^2 + 7n - 2).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Όμάδα Α'. 288. Νά βρείτε τό άθροισμα σ_n τών n πρώτων όρων τών παρακάτω σειρών:

α) $\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots$

β) $\frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \dots + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} + \dots$

γ) $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots$

δ) $1 + \frac{4}{5} + \frac{7}{5^2} + \frac{10}{5^3} + \dots$

289. Νά βρείτε τό άθροισμα τών n πρώτων όρων τής σειράς μέ γενικό όρο:

i) $\alpha_n = \frac{n+2}{n(n+1)} \left(\frac{1}{2} \right)^n$, ii) $\alpha_n = \frac{2^n-1}{3^{n+1}}$,

καθώς καί τό άθροισμά της.

290. Νά βρείτε τό άθροισμα τών n πρώτων όρων τών σειρών, τών όποίων οί γενικοί όροι είναι:

α) $3n^2 - n$, β) $8n^3 - 1$, γ) $n(n+1)(n+3)$, δ) $(n+3)\alpha^n$.

291. Νά βρείτε τούς γενικούς όρους α_n τών παρακάτω σειρών καί κατόπιν τό άθροισμα τών n πρώτων όρων τους:

α) $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots$, β) $1 \cdot 4 \cdot 7 + 2 \cdot 5 \cdot 8 + \dots$, γ) $1 + \frac{3}{2} + \frac{5}{4} + \frac{7}{8} + \dots$

292. Νά βρείτε τό άθροισμα τής σειράς $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ όταν:

1) $\alpha_n = \frac{1}{n(n+2)}$, 2) $\alpha_n = \frac{1}{4n^2-1}$, 3) $\alpha_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$, 4) $\alpha_n = \frac{1}{9n^2-3n-2}$.

Ομάδα Β'. 293. Νά μελετήσετε ως προς τό μονότονο καί τή σύγκλιση τήν ακολουθία (α_n) μέ γενικό ὄρο:

$$\alpha_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + 3k + 2}.$$

Στή συνέχεια νά βρεῖτε, ἂν ὑπάρχει, τό ὄριό της. Τέλος, νά βρεῖτε τό πλῆθος τῶν ὀρων της, οἱ ὁποῖοι βρίσκονται ἐκτός τοῦ διαστήματος $\left(\frac{5}{14}, \frac{3}{4}\right)$.

Ἑπόδειξη. Νά ἀναλύσετε τό κλάσμα τοῦ β' μέλους σέ ἄθροισμα δύο ἀπλῶν κλασμάτων.

294. Νά ἀποδείξετε ὅτι:

$$1 + 2\left(1 + \frac{1}{v}\right) + 3\left(1 + \frac{1}{v}\right)^2 + \dots + v\left(1 + \frac{1}{v}\right)^{v-1} = v^2$$

295. Νά ἀποδείξετε ὅτι: ἂν ὁ γενικός ὄρος α_n μιᾶς σειρᾶς $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ μπορεῖ νά γραφεῖ μέ τή μορφή: $\alpha_n = A\varphi(n) + B\varphi(n+1) + \Gamma\varphi(n+2)$, ὅπου $A + B + \Gamma = 0$, τότε τό ἄθροισμα σ_n τῶν n πρώτων ὀρων της μᾶς τό δίνει ὁ τύπος:

$$\sigma_n = A\varphi(1) - \Gamma\varphi(2) - A\varphi(n+1) + \Gamma\varphi(n+2).$$

296. Νά βρεῖτε τό ἄθροισμα τῶν n πρώτων ὀρων τῆς σειρᾶς:

$$\frac{5}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{8}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{3n+2}{n(n+1)(n+2)} + \dots$$

Ἑπόδειξη. Νά ἀναλύσετε τό γενικό ὄρο τῆς σειρᾶς σέ ἄθροισμα τριῶν ἀπλῶν κλασμάτων καί νά λάβετε ὑπόψη σας τήν προηγούμενη ἄσκηση.

III. ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ DE MOIVRE ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ

§ 135. Ὅρισμα μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ $z \neq 0$.—Ἐστω ὁ μιγαδικός ἀριθμός $z = x + iy$ μέ $z \neq 0$ καί $x, y \in \mathbf{R}$. τότε ἔχουν ἔννοια στό $\mathbf{R}$ οἱ παραστάσεις:

$\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ καί ἔτσι ὁ z μπορεῖ νά γραφεῖ μέ τή μορφή:

$$z = x + iy = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \quad (1)$$

Ἐπειδή: $-1 \leq \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq 1, -1 \leq \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq 1$

καί $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2 = 1,$

τά $\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ μποροῦν νά εἶναι, ἀντιστοίχως, τό συνημίτονο καί τό ἡμίτονο μιᾶς κατάλληλης γωνίας φ , δηλαδή:

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (2)$$

Εἶναι γνωστό ὅτι ὑπάρχουν ἄπειρες γωνίες πού τά μέτρα τους (σέ ἀκτί-

νια) διαφέρουν κατά άκέραιο πολλαπλάσιο του 2π και επαληθεύουν τις σχέσεις (2). Από αυτές, υπάρχει μί α μόν ο που ικανοποιεί τις (2) και συγχρόνως τη συνθήκη $-\pi < \varphi \leq \pi$. Αυτή τη γωνία φ θά τη λέμε: **τό βασικό (πρωτεύον) όρισμα του μιγαδικού αριθμού** $z = x + iy$ ($\neq 0$) και θά τη συμβολίζουμε: μέ: **Argz** (Argument = όρισμα), δηλαδή έχουμε:

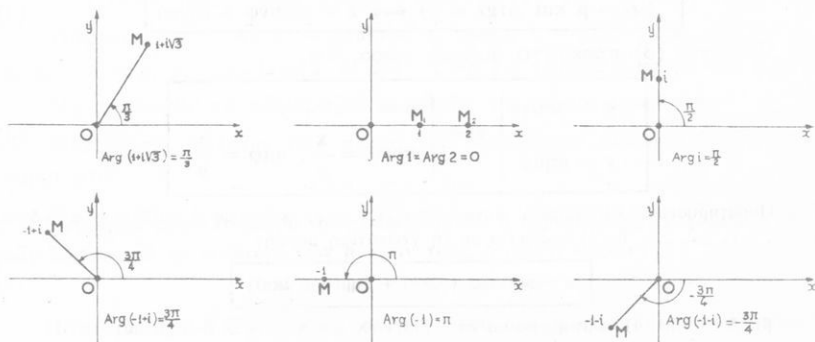
$$\text{Arg}z = \varphi \wedge -\pi < \varphi \leq \pi$$

Παράδειγμα. Για τό μιγαδικό αριθμό $z = 1 + i\sqrt{3}$ έχουμε τό σύστημα:

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}, \quad \eta\mu\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad -\pi < \varphi \leq \pi,$$

άπό τό όποιο: $\varphi = \frac{\pi}{3}$, ώστε: $\text{Arg}(1 + i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$.

Γεωμετρικά τό όρισμα μιγαδικού αριθμού z παριστάνει τήν κυρτή γωνία που σχηματίζει ό θετικός ήμιάξονας Ox μέ τή διανυσματική άκτίνα OM (τής όποιας τό άκρο M είναι ή εικόνα του μιγαδικού αριθμού z), όπως φαίνεται στις διάφορες περιπτώσεις τών παρακάτω σχημάτων (βλ. Σχ. 8).



Σχ. 8

§ 136. Η τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού αριθμού.— Έστω ένας μιγαδικός αριθμός $z = x + iy \neq 0$. Τότε* όρίζεται τό όρισμά του: $\text{Arg}z = \varphi$ και τό μέτρο του: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho$ και, όπως είδαμε παραπάνω, Ισχύουν :

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\rho}, \quad \eta\mu\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{\rho}. \quad (1)$$

Από τις (1) έχουμε: $x = \rho \cos\varphi$, $y = \rho \eta\mu\varphi$, $\rho^2 = x^2 + y^2$ και συνεπώς:

$$z = x + iy = \rho(\cos\varphi + i\eta\mu\varphi)$$

Η έκφραση:

$$z = \rho(\cos\varphi + i\eta\mu\varphi), \quad \rho = |z| \wedge \varphi = \text{Arg}z$$

(2)

* Αν $z = 0$, τότε $\rho = |z| = 0$. Όρισμα του 0 δέν όρίζεται.

είναι γνωστή, από την προηγούμενη τάξη, ως **τριγωνομετρική μορφή του μιγαδικού αριθμού** $z = x + iy$.

Έτσι, π.χ., είναι:

$$1 = 1(\sin 0 + i \eta \mu 0),$$

$$-1 = 1(\sin \pi + i \eta \mu \pi),$$

$$i = 1\left(\sin \frac{\pi}{2} + i \eta \mu \frac{\pi}{2}\right),$$

$$-i = 1\left(\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \eta \mu\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right),$$

$$1 + i\sqrt{3} = 2\left(\sin \frac{\pi}{3} + i \eta \mu \frac{\pi}{3}\right),$$

$$-1 - i = \sqrt{2}\left(\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i \eta \mu\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right).$$

Από τα προηγούμενα συνάγουμε τώρα ότι: *κάθε μιγαδικός αριθμός* $z = x + iy \neq 0$ *έχει ακριβώς μία τριγωνομετρική παράσταση* $z = \rho(\sin \varphi + i \eta \mu \varphi)$, *όπου* ρ *είναι το μέτρο του* z *και* φ *το βασικό όρισμά του* ($-\pi < \varphi \leq \pi$).

Αντιστρόφως: *Γιά κάθε διατεταγμένο ζεύγος* (ρ, φ) *μέ* $\rho > 0$ *και* $-\pi < \varphi \leq \pi$ *υπάρχει ακριβώς ένας μιγαδικός αριθμός* $z = x + iy \neq 0$ *μέ τριγωνομετρική μορφή:* $\rho(\sin \varphi + i \eta \mu \varphi)$. *αυτός είναι ο μιγαδικός αριθμός* $z = x + iy$ *μέ* $x = \rho \sin \varphi$ *και* $y = \rho \eta \mu \varphi$.

Υστερα από αυτά έχουμε τη λογική ισοδυναμία:

$$(|z| = \rho \text{ και } \text{Arg} z = \varphi) \iff z = \rho(\sin \varphi + i \eta \mu \varphi) \quad (3)$$

Από την (3) προκύπτει άμέσως, τώρα, ότι:

$$\left. \begin{array}{l} x = \rho \sin \varphi \\ y = \rho \eta \mu \varphi \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \sin \varphi = \frac{x}{\rho}, \eta \mu \varphi = \frac{y}{\rho} \end{array} \right. \quad (4)$$

Παρατηρήσεις: α) Έπειδή $\sin \varphi = \sin(2k\pi + \varphi)$ και $\eta \mu \varphi = \eta \mu(2k\pi + \varphi)$, όπου $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, ή (2) γράφεται με τη γενικότερη μορφή:

$$z = \rho[\sin(\varphi + 2k\pi) + i \eta \mu(\varphi + 2k\pi)] \quad (5)$$

β) Από την (4) συμπεραίνουμε ότι: *Γιά κάθε* $z = x + iy \neq 0$ *ισχύουν:*

$$\eta \mu(\text{Arg} z) = \frac{y}{|z|}$$

και

$$\sin(\text{Arg} z) = \frac{x}{|z|}$$

και συνεπώς: $z = x + iy = |z| \{ \sin(\text{Arg} z) + i \eta \mu(\text{Arg} z) \}$,

Εύκολα αποδεικνύονται τώρα τα επόμενα θεωρήματα:

§ 137. Θεώρημα.— *Δύο μιγαδικοί αριθμοί γραμμένοι με τριγωνομετρική μορφή είναι ίσοι, τότε και μόνο τότε, αν έχουν ίσα μέτρα και τα όρίσματά τους διαφέρουν κατά άκέραιο πολλαπλάσιο περιφέρειας.*

Απόδειξη: Πράγματι, αν έχουμε:

$$\rho_1(\sin \varphi_1 + i \eta \mu \varphi_1) = \rho_2(\sin \varphi_2 + i \eta \mu \varphi_2),$$

θα είναι:

$$\left. \begin{array}{l} \rho_1 \sin \varphi_1 = \rho_2 \sin \varphi_2 \Rightarrow \rho_1^2 \sin^2 \varphi_1 = \rho_2^2 \sin^2 \varphi_2 \\ \rho_1 \eta \mu \varphi_1 = \rho_2 \eta \mu \varphi_2 \Rightarrow \rho_1^2 \eta \mu^2 \varphi_1 = \rho_2^2 \eta \mu^2 \varphi_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \rho_1^2 (\sin^2 \varphi_1 + \eta \mu^2 \varphi_1) = \\ \rho_2^2 (\sin^2 \varphi_2 + \eta \mu^2 \varphi_2) \end{array} \right\}$$

ἀπό τό ὁποῖο: $\rho_1^2 = \rho_2^2$ καί ἐπειδὴ $\rho_1 > 0, \rho_2 > 0$, ἔπεται: $\rho_1 = \rho_2$,

ὁπότε θά εἶναι:

$$\left. \begin{aligned} \text{συν}\varphi_1 &= \text{συν}\varphi_2 \\ \eta\mu\varphi_1 &= \eta\mu\varphi_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi \Rightarrow \varphi_1 - \varphi_2 = 2k\pi.$$

Ἀντιστροφῶς. Ἐάν $\rho_1 = \rho_2$ καί $\varphi_1 - \varphi_2 = 2k\pi$, θά ἔχουμε:

$$\text{συν}\varphi_1 = \text{συν}\varphi_2, \eta\mu\varphi_1 = \eta\mu\varphi_2$$

ὁπότε: $\rho_1(\text{συν}\varphi_1 + i\eta\mu\varphi_1) = \rho_2(\text{συν}\varphi_2 + i\eta\mu\varphi_2)$.

§ 138. Θεώρημα.— Τό γινόμενο δύο μιγαδικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἕνας μιγαδικός ἀριθμός πού ἔχει μέτρο τό γινόμενο τῶν μέτρων τῶν μιγάδων καί ὄρισμα τό ἄθροισμα τῶν ὀρισμάτων τους. Δηλαδή:

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= \rho_1(\text{συν}\varphi_1 + i\eta\mu\varphi_1) \\ z_2 &= \rho_2(\text{συν}\varphi_2 + i\eta\mu\varphi_2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 [\text{συν}(\varphi_1 + \varphi_2) + i\eta\mu(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Ἀπόδειξη: Ἐχουμε:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \rho_1 \rho_2 (\text{συν}\varphi_1 + i\eta\mu\varphi_1) (\text{συν}\varphi_2 + i\eta\mu\varphi_2) = \rho_1 \rho_2 [(\text{συν}\varphi_1 \text{συν}\varphi_2 - \eta\mu\varphi_1 \eta\mu\varphi_2) + \\ &+ i(\text{συν}\varphi_1 \eta\mu\varphi_2 + \eta\mu\varphi_1 \text{συν}\varphi_2)] = \rho_1 \rho_2 [\text{συν}(\varphi_1 + \varphi_2) + i\eta\mu(\varphi_1 + \varphi_2)]. \end{aligned}$$

Πόρισμα 1ο.— Ἐάν $z_k = \rho_k(\text{συν}\varphi_k + i\eta\mu\varphi_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$, τότε:

$$z_1 \cdot z_2 \cdots z_n = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdots \rho_n [\text{συν}(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n) + i\eta\mu(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n)] \quad (1)$$

Νά ἀποδειχθεῖ τό πόρισμα μέ τή μέθοδο τῆς τέλειαις ἐπαγωγῆς.

Μία ἄμεση συνέπεια τῶν παραπάνω προτάσεων εἶναι τά ἐπόμενα δύο πορίσματα:

Πόρισμα 2ο.— Τό μέτρο τοῦ γινομένου δύο ἢ περισσότερων μιγαδικῶν ἀριθμῶν ἰσοῦται μέ τό γινόμενο τῶν μέτρων τους, δηλαδή ἰσχύει:

$$|z_1 \cdot z_2 \cdots z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdots |z_n|.$$

Πόρισμα 3ο.— Τό ὄρισμα τοῦ γινομένου δύο ἢ περισσότερων μιγαδικῶν ἀριθμῶν ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῶν ὀρισμάτων τους, δηλαδή ἰσχύει:

$$2k\pi + \text{Arg}(z_1 \cdot z_2 \cdots z_n) = \text{Arg}z_1 + \text{Arg}z_2 + \cdots + \text{Arg}z_n, (1), k \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

§ 139. Θεώρημα.— Ὁ ἀντίστροφος ἑνός μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ $z (\neq 0)$ ἔχει μέτρο τό ἀντίστροφο τοῦ μέτρου του καί ὄρισμα τό ἀντίθετο τοῦ ὀρισματός του.

Ἀπόδειξη. Πράγματι, ἂν $z = \rho(\text{συν}\varphi + i\eta\mu\varphi)$ θά ἔχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} [\rho(\text{συν}\varphi + i\eta\mu\varphi)]^{-1} &= \frac{1}{\rho(\text{συν}\varphi + i\eta\mu\varphi)} = \frac{1(\text{συν}\varphi - i\eta\mu\varphi)}{\rho(\text{συν}\varphi + i\eta\mu\varphi)(\text{συν}\varphi - i\eta\mu\varphi)} = \\ &= \frac{\text{συν}\varphi - i\eta\mu\varphi}{\rho(\text{συν}^2\varphi + \eta\mu^2\varphi)} = \frac{1}{\rho}(\text{συν}\varphi - i\eta\mu\varphi) = \frac{1}{\rho}[\text{συν}(-\varphi) + i\eta\mu(-\varphi)]. \end{aligned}$$

1. Γράφουμε $2k\pi + \text{Arg}(z_1 \cdot z_2 \cdots z_n)$, γιατί εἶναι φανερό ὅτι τό ἄθροισμα στό β' μέλος τῆς (2) μπορεῖ νά μήν ἀνήκει στό $(-\pi, \pi]$.

“Ωστε : $\forall z \in \mathbb{C}, z \neq 0, \left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$ και $\text{Arg} \frac{1}{z} = -\text{Arg} z$

§ 140. Θεώρημα.— Τό πηλίκο δύο μιγαδικών αριθμών είναι ένας μιγαδικός αριθμός που έχει μέτρο τό λόγο των μέτρων τους και όρισμα τή διαφορά των όρισμάτων τους. Δηλαδή :

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= \rho_1(\sin \varphi_1 + i \eta \mu \varphi_1) \\ z_2 &= \rho_2(\sin \varphi_2 + i \eta \mu \varphi_2) \neq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} [\sin(\varphi_1 - \varphi_2) + i \eta \mu(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

*Υπόδειξη. Έχουμε: $\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1}$ κτλ.

Πόρισμα.— Γιά κάθε ζεύγος μιγαδικών αριθμών z_1, z_2 μέ $z_1 \cdot z_2 \neq 0$ ισχύει :

$$\text{i)} \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \text{και} \quad \text{ii)} \quad \text{Arg} \frac{z_1}{z_2} = \text{Arg} z_1 - \text{Arg} z_2.$$

§ 141. Θεώρημα (De Moivre).— Η νιοστή δύναμη ενός μιγαδικού αριθμού z είναι ένας μιγαδικός αριθμός, ό οποίος έχει ως μέτρο τή νιοστή δύναμη του μέτρου του z και ως όρισμα τό ν-πλάσιο του όρισματος του z . Δηλαδή :

$$z = \rho(\sin \varphi + i \eta \mu \varphi) \Rightarrow z^v = \rho^v [\sin(v\varphi) + i \eta \mu(v\varphi)]$$

$$\eta \quad \boxed{[\rho(\sin \varphi + i \eta \mu \varphi)]^v = \rho^v [\sin(v\varphi) + i \eta \mu(v\varphi)]} \quad (\tau)$$

Ο τύπος (τ), ό οποίος δίνει τή νιοστή δύναμη ενός μιγαδικού αριθμού, είναι γνωστός μέ τό όνομα: **τύπος του De Moivre***.

*Απόδειξη. Αν στόν τύπο (1) του πορίσματος τής § 138 θέσουμε: $z_1 = z_2 = \dots = z_v = \rho(\sin \varphi + i \eta \mu \varphi)$, τότε προκύπτει ό τύπος (τ).

Πόρισμα.— Γιά κάθε $v \in \mathbb{N}$ και κάθε $z \in \mathbb{C}$ ισχύει :

$$\text{(i)} \quad |z^v| = |z|^v \quad \text{και} \quad \text{ii)} \quad \text{Arg} z^v = v \text{Arg} z.$$

*Άσκηση. Νά αποδείξετε τό θεώρημα του De Moivre μέ τή μέθοδο τής τέλειας έπαγωγής (Τό θεώρημα ισχύει γιά $v = 1, 2$. Έστω ... κτλ.).

Παρατήρηση. Ο τύπος του De Moivre ισχύει και στην περίπτωση που ό έκθέτης είναι άκέραιος άρνητικός, έστω $v = -k$ ($k \in \mathbb{N}$). Πράγματι, έχουμε :

$$\begin{aligned} [\rho(\sin \varphi + i \eta \mu \varphi)]^{-k} &= \{[\rho(\sin \varphi + i \eta \mu \varphi)]^{-1}\}^k = \{\rho^{-1} \cdot [\sin(-\varphi) + i \eta \mu(-\varphi)]\}^k = \\ &= \rho^{-k} [\sin(-k\varphi) + i \eta \mu(-k\varphi)]. \end{aligned}$$

Εφαρμογές: 1η. Γράψτε τό μιγαδικό αριθμό $z = \sqrt{3} + i$ σέ τριγωνομετρική μορφή.

Λύση: Είναι $\alpha = \sqrt{3}$, $\beta = 1$ και άρα $\rho = \sqrt{3+1} = 2$.

Επίσης είναι : $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\eta \mu \theta = \frac{1}{2}$ από τίς όποιες παίρνουμε : $\theta = \frac{\pi}{6}$.

Έτσι είναι: $\sqrt{3} + i = 2 \left(\sin \frac{\pi}{6} + i \eta \mu \frac{\pi}{6} \right)$.

* De Moivre (1667 - 1754), Γάλλος μαθηματικός.

2η. Νά υπολογιστεί ή παράσταση $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^7$.

Λύση: Γράφουμε τό μιγαδικό αριθμό $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}$ σέ τριγωνομετρική μορφή.

Είναι $\rho = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{6}{4}} = \sqrt{2}$ καί, άφού τό σημείο $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ άνήκει στό (I) τεταρτημόριο, ή συνθ = $\frac{1}{2}$ δίνει $\theta = \frac{\pi}{3}$ (πρωτεύον όρισμα). Άρα:

$\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$. Από τό Θεώρημα De Moivre βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^7 &= \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)\right]^7 = (\sqrt{2})^7 \cdot \left(\cos 7 \cdot \frac{\pi}{3} + i \sin 7 \cdot \frac{\pi}{3}\right) = \\ &= 8\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) = 8\sqrt{2} \left(\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4\sqrt{2} + 4i\sqrt{6}. \end{aligned}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΤΥΠΟΥ ΤΟΥ DE MOIVRE ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΤΗΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

§ 142. Υπολογισμός τών νιοστών ριζών μιγαδικού αριθμού. α) Όρισμός.—Όνομάζουμε νιοστή ρίζα ενός μιγαδικού αριθμού $a \neq (0, 0)$ καί τή συμβολίζουμε μέ $\sqrt[n]{a}$, κάθε μιγαδικό αριθμό z τέτοιο, ώστε νά ισχύει: $z^n = a$.

Ώστε:

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = z \iff z^n = a} \quad (1)$$

Θά άποδείξουμε τώρα ότι υπάρχει ένας τουλάχιστο μιγαδικός αριθμός z πού ίκανοποιεί τήν (1).

Άκριβέστερα θά άποδείξουμε τό έπόμενο :

Θεώρημα. (ύπόθεσις νιοστής ρίζας ενός μιγαδικού αριθμού).—Αν $a = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$, $a \neq 0$, είναι όποιοσδήποτε μιγαδικός αριθμός, τότε υπάρχουν n άκριβώς διαφορετικές μεταξύ τους ρίζες, δηλαδή ή εξίσωση :

$$z^n = a \quad (1)$$

έχει n διαφορετικές μεταξύ τους ρίζες πού δίνονται από τόν τύπο :

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} \left[\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right], \quad (2)$$

όπου $k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$.

Άπόδειξη. Έστω ότι ό μιγαδικός αριθμός: $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$

έπαληθεύει τήν εξίσωση (1). Τότε, σύμφωνα μέ τόν τύπο του De Moivre, έχουμε:

$$r^n |\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)| = \rho (\cos \theta + i \sin \theta). \quad (2)$$

Ή (2) όμως άληθεύει τότε καί μόνο τότε, άν:

$$r^n = \rho \quad \text{καί} \quad n\varphi = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Άπό αυτές λαμβάνουμε: $r = \sqrt[n]{\rho}$ *) καί $\varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}.$

* $\sqrt[n]{\rho}$ είναι ή θετική νιοστή ρίζα του θετικού αριθμού ρ .

*Ωστε:

$$z = \sqrt[n]{\rho} \cdot \left[\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right], \quad k \in \mathbb{Z} \quad (3)$$

*Αποδείξαμε λοιπόν ότι υπάρχουν μιγαδικοί αριθμοί που ορίζονται από την (3) για τις διάφορες άκεραιες τιμές του k που ικανοποιούν την (1).

Θά αποδείξουμε, τώρα, ότι n μόνο από αυτούς είναι διαφορετικοί μεταξύ τους για τις διάφορες άκεραιες τιμές του k . Ακριβέστερα θά αποδείξουμε ότι: "Αν ο άκεραιος k λάβει τις τιμές $0, 1, 2, \dots, \lambda, \dots, \mu, \dots, n-1$, τότε από την (3) προκύπτουν, αντιστοίχως, n αριθμοί: $z_0, z_1, z_2, \dots, z_\lambda, \dots, z_\mu, \dots, z_{n-1}$ που είναι διαφορετικοί μεταξύ τους. Ακόμη θά αποδείξουμε, ότι, αν ο k πάρει τιμή διαφορετική από τις: $0, 1, 2, \dots, n-1$, δηλαδή αν $k \geq n$ ή $k < 0$, τότε ο μιγαδικός αριθμός z που προκύπτει από την (3) θά συμπίπτει με έναν από τους: $z_0, z_1, z_2, \dots, z_\lambda, \dots, z_\mu, \dots, z_{n-1}$.

Πράγματι, πρώτα-πρώτα ας δώσουμε στο k τις n διαδοχικές τιμές: $0, 1, 2, \dots, (n-1)$. τότε από την (3) λαμβάνουμε n αριθμούς: $z_0, z_1, z_2, \dots, z_\lambda, \dots, z_\mu, \dots, z_{n-1}$ που έχουν τό

ίδιο μέτρο $\sqrt[n]{\rho}$ και όρίσματα, αντιστοίχως, τά:

$$\frac{\theta}{n}, \frac{\theta + 2\pi}{n}, \frac{\theta + 4\pi}{n}, \dots, \frac{\theta + 2\lambda\pi}{n}, \dots, \frac{\theta + 2\mu\pi}{n}, \dots, \frac{\theta + 2(n-1)\pi}{n}.$$

Αυτοί οι n αριθμοί: $z_0, z_1, z_2, \dots, z_\lambda, \dots, z_\mu, \dots, z_{n-1}$ είναι διαφορετικοί μεταξύ τους, γιατί αν δύο από αυτούς ήταν ίσοι, έστω οι z_λ και z_μ , όπου $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$, $\lambda \neq \mu$ και $0 \leq \lambda, \mu < n$, θά έπρεπε:

$$\frac{\theta + 2\lambda\pi}{n} - \frac{\theta + 2\mu\pi}{n} = 2k'\pi, \quad k' \in \mathbb{Z}.$$

Δηλαδή: $\lambda - \mu = k'n, \quad k' \in \mathbb{Z}.$

Είναι όμως $0 < |\lambda - \mu| < n$ και συνεπώς $0 < |k'n| < n$, δηλ. $0 < |k'| < 1$, αλλά αυτό είναι άτοπο, έπειδή δεν υπάρχει $k' \in \mathbb{Z}$ με $0 < |k'| < 1$.

*Ωστε: $z_\lambda \neq z_\mu \quad \forall \lambda, \mu \in [0, n-1], \lambda \neq \mu$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}.$

*Ας δοϋμε τώρα τί συμβαίνει, αν ο k πάρει άκεραιες τιμές έξω από τό διάστημα $[0, n-1]$, δηλ. τί συμβαίνει για $k \geq n$ ή $k < 0$.

Έφ'όσον $k \notin [0, n-1]$, αν ονομάσουμε λ τό πηλίκο και k_1 τό υπόλοιπο τής διαιρέσεως $k : n$ θά είναι: $k = \lambda n + k_1$, όπου λ και k_1 είναι άκεραίοι με $0 \leq k_1 < n$, δηλ. $k_1 \in [0, n-1]$.

*Έχουμε τότε:

$$\begin{aligned} z_k &= \sqrt[n]{\rho} \cdot \left[\cos \frac{\theta + 2(\lambda n + k_1)\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2(\lambda n + k_1)\pi}{n} \right] = \\ &= \sqrt[n]{\rho} \cdot \left[\cos \left(\frac{\theta + 2k_1\pi}{n} + 2\lambda\pi \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 2k_1\pi}{n} + 2\lambda\pi \right) \right] = \\ &= \sqrt[n]{\rho} \cdot \left[\cos \left(\frac{\theta + 2k_1\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 2k_1\pi}{n} \right) \right] = z_{k_1}, \quad k_1 = 0, 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Δηλαδή, αν $k \neq 0, 1, 2, \dots, n-1$ (με άλλα λόγια αν $k \geq n$ ή $k < 0$), τότε ο μιγαδικός αριθμός z που προκύπτει από την (3) συμπίπτει με έναν από τους: $z_0, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$.

*Ωστε, πράγματι, υπάρχουν ακριβώς n διαφορετικοί μεταξύ τους αριθμοί, που έπαληθεύουν την εξίσωση:

$$z^n = a = \rho(\cos \theta + i \sin \theta),$$

καί δίνονται από τόν τύπο:

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} \cdot \left[\sigmaυν\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \etaμ\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right] \quad (4)$$

όπου $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Σημείωση. Στήν ειδική περίπτωση πού ό a είναι θετικός αριθμός όπότε $\theta = 0$, τότε ό n (διαφορετικές) λύσεις τής εξίσώσεως $x^n = a$ δίνονται από τόν τύπο:

$$z_k = \sqrt[n]{|a|} \cdot \left[\sigmaυν \frac{2k\pi}{n} + i \etaμ \frac{2k\pi}{n} \right] \quad (4')$$

όπου $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Παρατήρηση. Από τό παραπάνω θεώρημα προκύπτει ότι κάθε μιγαδικός αριθμός $a \neq 0$ έχει n νιοστές ρίζες· μέ άλλα λόγια: στους μιγαδικούς αριθμούς τό σύμβολο $\sqrt[n]{a}$ είναι n -σήμαντο.

Προσέξτε! στό $\mathbf{R}$ ή νιοστή ρίζα πραγματικού αριθμού μπορεί καί νά μήν ύπάρχει.

Πόρισμα.— Γιά κάθε $z \in \mathbf{C}$ ισχύει :

$$\left| \sqrt[n]{z} \right| = \sqrt[n]{|z|}.$$

Εφαρμογές: 1η. Νά βρεθοῦν οἱ $\sqrt[3]{8i}$.

Λύση: Έχουμε: $8i = 8 \left(\sigmaυν \frac{\pi}{2} + i \etaμ \frac{\pi}{2} \right)$ καί ό τύπος (4) τής § 142 δίνει:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{8i} &= \sqrt[3]{8 \left(\sigmaυν \frac{\pi}{2} + i \etaμ \frac{\pi}{2} \right)} = \sqrt[3]{8} \left(\sigmaυν \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i \etaμ \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} \right) = \\ &= 2 \left[\sigmaυν \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \right) + i \etaμ \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \right) \right], \quad k = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

$$\text{Γιά } k = 0: \quad 2 \left(\sigmaυν \frac{\pi}{6} + i \etaμ \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3} + i.$$

$$\text{Γιά } k = 1: \quad 2 \left(\sigmaυν \frac{5\pi}{6} + i \etaμ \frac{5\pi}{6} \right) = -\sqrt{3} + i$$

$$\text{Γιά } k = 2: \quad 2 \left(\sigmaυν \frac{3\pi}{2} + i \etaμ \frac{3\pi}{2} \right) = 0 - 2i = -2i.$$

2η. Νά βρεθοῦν οἱ $\sqrt[4]{2 + 2i\sqrt{3}}$

Λύση. Έχουμε $2 + 2i\sqrt{3} = 4 \left(\sigmaυν \frac{\pi}{3} + i \etaμ \frac{\pi}{3} \right)$ καί ό τύπος (4) τής § 142 γιά $n = 4$,

$\rho = 4$, $\theta = \frac{\pi}{3}$ δίνει :

$$\begin{aligned} z_k &= \sqrt[4]{4 \left(\sigmaυν \frac{\pi}{3} + i \etaμ \frac{\pi}{3} \right)} = \sqrt[4]{4} \cdot \left[\sigmaυν \left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{4} \right) + i \etaμ \left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{4} \right) \right] = \\ &= \sqrt{2} \cdot \left[\sigmaυν \left(\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \right) + i \etaμ \left(\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Για $k = 0, 1, 2, 3$ βρίσκουμε αντίστοιχως:

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt{2} \left(\sin \frac{\pi}{12} + i \eta \mu \frac{\pi}{12} \right), & z_1 &= \sqrt{2} \left(\sin \frac{7\pi}{12} + i \eta \mu \frac{7\pi}{12} \right), \\ z_2 &= \sqrt{2} \left(\sin \frac{13\pi}{12} + i \eta \mu \frac{13\pi}{12} \right), & z_3 &= \sqrt{2} \left(\sin \frac{19\pi}{12} + i \eta \mu \frac{19\pi}{12} \right). \end{aligned}$$

§ 143. Γεωμετρική παράσταση τῶν νιοστῶν ριζῶν ἑνός μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ.— Ἐστω ὁ μιγαδικὸς ἀριθμὸς $a = \rho(\sin \theta + i \eta \mu \theta)$, μέ νιοστές ρίζες:

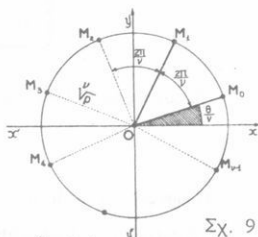
$$z_0 = \sqrt[\nu]{\rho} \left[\sin \frac{\theta}{\nu} + i \eta \mu \frac{\theta}{\nu} \right]$$

$$z_1 = \sqrt[\nu]{\rho} \left[\sin \left(\frac{\theta}{\nu} + \frac{2\pi}{\nu} \right) + i \eta \mu \left(\frac{\theta}{\nu} + \frac{2\pi}{\nu} \right) \right]$$

$$z_2 = \sqrt[\nu]{\rho} \left[\sin \left(\frac{\theta}{\nu} + \frac{4\pi}{\nu} \right) + i \eta \mu \left(\frac{\theta}{\nu} + \frac{4\pi}{\nu} \right) \right]$$

.....

$$z_{\nu-1} = \sqrt[\nu]{\rho} \left[\sin \left(\frac{\theta}{\nu} + (\nu-1) \frac{2\pi}{\nu} \right) + i \eta \mu \left(\frac{\theta}{\nu} + (\nu-1) \frac{2\pi}{\nu} \right) \right].$$



Σχ. 9

Παρατηροῦμε ὅτι ὅλες οἱ νιοστές ρίζες τοῦ a ἔχουν τό ἴδιο μέτρο, δηλαδή $|z_k| = \sqrt[\nu]{\rho}$, $k = 0, 1, \dots, (\nu-1)$, καί ὄρισμα τέτοιο ὥστε ἀπὸ κάποια ἀρχική τιμή $\frac{\theta}{\nu}$ νά αὐξάνει ἀδιάκοπα κατὰ $\frac{2\pi}{\nu}$. Τοῦτο σημαίνει ὅτι, ἂν πάρουμε τίς εἰκόνες $M_0, M_1, M_2, \dots, M_{\nu-1}$ τῶν ριζῶν στό μιγαδικό ἐπίπεδο, αὐτές θά βρίσκονται πάνω σ' ἕναν κύκλο μέ κέντρο O καί ἀκτίνα $\sqrt[\nu]{\rho}$, καί θά εἶναι μάλιστα κορυφές κανονικοῦ πολυγώνου μέ ν πλευρές ἐγγεγραμμένου στόν κύκλο αὐτό.

§ 144. Ἐφαρμογή τοῦ τύπου τοῦ De Moivre στήν ἐπίλυση διώνυμων ἐξισώσεων.— Κάθε ἐξίσωση τῆς μορφῆς:

$$z^\nu - a = 0 \quad (8)$$

ὅπου $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ καί ν φυσικὸς ἀριθμὸς μεγαλύτερος ἀπὸ τό 1 ($\nu > 1$) ὀνομάζεται διώνυμη ἐξίσωση.

Οἱ λύσεις τῆς (8) δίνονται ἀπὸ τὸν τύπο (4) τῆς σελίδας 197.

Τό θεώρημα τῆς §142 ἐκφράζει ἰσοδύναμα ὅτι: μέσα στό σύνολο $\mathbb{C}$ ἡ διώνυμη ἐξίσωση (8) ἔχει ν διακεκομμένες ρίζες.

Ἐφαρμογές: 1η. Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση: $z^\nu - 1 = 0$ (1)

Λύση. Αὐτὴ γράφεται $z^\nu = 1$. Ἐπειδὴ $1 = 1 (\sin 0 + i \eta \mu 0)$, ὁ τύπος (4) τῆς σελίδας 197 (βλ. καί σημείωση τῆς § 142) δίνει ἀμέσως γιὰ $\nu = \nu$, $\alpha = 1$, $\theta = 0$:

$$z_k = \sin \frac{2k\pi}{\nu} + i \eta \mu \frac{2k\pi}{\nu}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \nu-1 \quad (2)$$

Για καθένα από τις τιμές του k , προκύπτει από τη (2) και μία ρίζα της εξίσωσης (1).

Άρα η εξίσωση (1) έχει v ρίζες που τις λέμε **νιοστές ρίζες της μονάδας**.

Για $k=0$ έχουμε από τη (2) τη ρίζα $z_0=1$. Και έπειτα, σύμφωνα με τον τύπο του De Moivre, είναι:

$$\text{συν}\frac{2k\pi}{v} + i\eta\mu\frac{2k\pi}{v} = \left(\text{συν}\frac{2\pi}{v} + i\eta\mu\frac{2\pi}{v}\right)^k, \quad k \in \mathbb{N},$$

οι νιοστές ρίζες της μονάδας είναι οι δυνάμεις:

$$1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{v-1},$$

$$\text{όπου:} \quad \omega = \text{συν}\frac{2\pi}{v} + i\eta\mu\frac{2\pi}{v}.$$

Σημ. Κάθε ρίζα z_k της μονάδας, η οποία έχει την ιδιότητα να δίνει τις άλλες ρίζες ως δυνάμεις της, τη λέμε **αρχική ν-οστή ρίζα της μονάδας**. Π.χ. η $z_1 = \text{συν}\frac{2\pi}{v} + i\eta\mu\frac{2\pi}{v} \equiv \omega$ είναι αρχική ν-οστή ρίζα της μονάδας, επειδή:

$$z_1^0 = z_0, \quad z_1^1 = z_1, \quad z_1^2 = z_2, \quad z_1^3 = z_3, \dots, z_1^{v-1} = z_{v-1}.$$

Ειδικές περιπτώσεις: 1) Για $v=2$ έχουμε τη διώνυμη εξίσωση $z^2-1=0$, της οποίας ρίζες είναι οι αριθμοί: 1 και -1.

2) Για $v=3$ έχουμε τη διώνυμη εξίσωση: $z^3-1=0$. Οι λύσεις της εξίσωσης αυτής είναι οι **κυβικές ρίζες της μονάδας**.

*Αν ω_k είναι μία κυβική ρίζα της μονάδας, έχουμε από τον τύπο (4') της Σημ. της § 142:

$$\omega_k = 1 \cdot \left[\text{συν}\frac{2k\pi}{3} + i\eta\mu\frac{2k\pi}{3} \right], \quad 0 \leq k \leq 2.$$

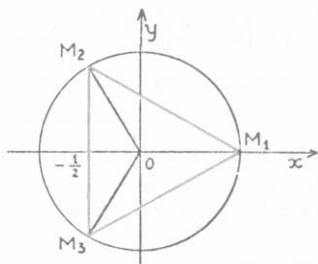
*Από τον παραπάνω τύπο για $k=0, 1, 2$ λαμβάνουμε:

$$\omega_0 = 1(\text{συν}0 + i\eta\mu0) = 1$$

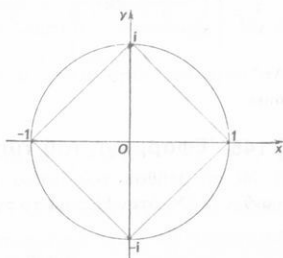
$$\omega_1 = 1\left(\text{συν}\frac{2\pi}{3} + i\eta\mu\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\omega_2 = 1\left(\text{συν}\frac{4\pi}{3} + i\eta\mu\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου εγγεγραμμένου στο μοναδιαίο κύκλο (βλ. Σχ. 10).



Σχ. 10



Σχ. 11

Οι κυβικές ρίζες της μονάδας έχουν τις πιο κάτω χαρακτηριστικές ιδιότητες:

- α) $\omega_0 + \omega_1 + \omega_2 = 0$, β) $\omega_1\omega_2 = 1 \wedge \omega_1 + \omega_2 = -1$, γ) $\omega_0^3 = \omega_1^3 = \omega_2^3 = 1$
 δ) $\omega_1^2 = \omega_2 \wedge \omega_2^2 = \omega_1$, ε) $\omega_1^2 + \omega_1 + 1 = 0$, στ) $\omega_2^2 + \omega_2 + 1 = 0$.

Από τις δύο τελευταίες ιδιότητες βλέπουμε ότι οι μιγαδικές κυβικές ρίζες ω_1, ω_2 της μονάδας είναι ρίζες του τριωνύμου: $x^2 + x + 1$ και γι' αυτό οι παραπάνω ιδιότητες των κυβικών ριζών της μονάδας είναι πολύ χρήσιμες στη διαιρετότητα των πολυωνύμων και κυρίως όταν έχουμε διαιρετή τό: $x^2 + x + 1$.

3) Για $n = 4$ έχουμε τη διώνυμη εξίσωση: $z^4 - 1 = 0$, η οποία έχει ως ρίζες τους άρithmeticούς: $1, i, -1, -i$. Οι εικόνες των ριζών αυτών στο μιγαδικό επίπεδο είναι οι 4 κορυφές του τετραγώνου του σχήματος 11 της σελίδας 199, που είναι εγγεγραμμένο στο μοναδιαίο κύκλο.

2η. Νά επιλυθεί η εξίσωση: $z^6 + 64i = 0$.

Λύση. Έχουμε:

$$z^6 = -64i = 64(-i) = 64 \left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right].$$

Ο τύπος (4) της σελίδας 197 για $n = 6$, $\rho = 64$ και $\theta = -\frac{\pi}{2}$ γράφεται:

$$z_k = \sqrt[6]{64} \left[\cos\left(\frac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{6}\right) \right], \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Για $k = 0$ είναι: $z_0 = 2 \left(\cos\frac{\pi}{12} - i \sin\frac{\pi}{12} \right) = \sqrt{2} + \sqrt{3} - i\sqrt{2} - \sqrt{3}.$

Για $k = 1$ είναι: $z_1 = 2 \left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2}(1 + i).$ κτλ.

3η. Νά επιλυθεί η εξίσωση: $z^3 = 1 + i\sqrt{3}.$

Λύση. Θέτουμε πρώτα-πρώτα τό $1 + i\sqrt{3}$ σε τριγωνομετρική μορφή. Σ' αυτή την περίπτωση θά έχουμε:

$$\rho = \sqrt{1^2 + 3} = 2 \quad \text{και} \quad \theta = \text{Arg}(1 + i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3},$$

Άρα: $1 + i\sqrt{3} = \rho(\cos\theta + i \sin\theta) = 2 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3} \right).$

Συνεπώς ο τύπος (4) της § 142 για $n = 3$, $\rho = 2$, $\theta = \frac{\pi}{3}$ δίνει:

$$z_k = \sqrt[3]{2} \left[\cos\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{3} + i \sin\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{3} \right] = \sqrt[3]{2} \cdot \left[\cos\frac{(6k+1)\pi}{9} + i \sin\frac{(6k+1)\pi}{9} \right].$$

Απ' αυτό τον τύπο με $k = 0, 1, 2$ βρίσκουμε τις ρίζες της διώνυμης εξισώσεως που μας δόθηκε.

§ 145. Έφαρμογή του τύπου του De Moivre στην τριγωνομετρία. —

α). Με τη βοήθεια του τύπου του De Moivre μπορούμε νά υπολογίσουμε τό συνθ και τό ημθ $\forall n \in \mathbb{N}$, όταν ξέρουμε τό συνθ και τό ημθ. Πράγματι, από τον τύπο του De Moivre έχουμε:

$$\cos n\theta + i \sin n\theta = (\cos\theta + i \sin\theta)^n$$

Αν τώρα στον παραπάνω τύπο αναπτύξουμε τό δεύτερο μέλος του, σύμφωνα με τον τύπο του διώνυμου του Νεύτωνα (Newton), και κατόπιν εξισώσουμε τά πραγματικά τους μέρη και τους συντελεστές των φανταστικών μερών τους βρίσκουμε τύπους που δίνουν τά συνθ και ημθ.

Έτσι για $n = 2$ ο τύπος του De Moivre:

$$\sin 2\theta + i \eta \mu 2\theta = (\sin \theta + i \eta \mu \theta)^2$$

δίνει, αν αναπτύξουμε και τό δεύτερο μέλος του:

$$\sin 2\theta + i \eta \mu 2\theta = \sin^2 \theta - \eta \mu^2 \theta + i 2 \sin \theta \eta \mu \theta$$

όποτε έχουμε:

$$\begin{cases} \sin 2\theta = \sin^2 \theta - \eta \mu^2 \theta \\ \eta \mu 2\theta = 2 \eta \mu \theta \cdot \sin \theta \end{cases} \quad (1)$$

Επίσης για $n = 3$ ο τύπος του De Moivre:

$$\sin 3\theta + i \eta \mu 3\theta = (\sin \theta + i \eta \mu \theta)^3$$

δίνει, αφού αναπτύξουμε και τό δεύτερο μέλος:

$$\sin 3\theta + i \eta \mu 3\theta = \sin^3 \theta + 3i \sin^2 \theta \eta \mu \theta - 3 \sin \theta \eta \mu^2 \theta - i \eta \mu^3 \theta$$

και συνεπώς:

$$\begin{cases} \sin 3\theta = \sin^3 \theta - 3 \sin \theta \eta \mu^2 \theta = 4 \sin^3 \theta - 3 \sin \theta \\ \eta \mu 3\theta = 3 \sin^2 \theta \eta \mu \theta - \eta \mu^3 \theta = 3 \eta \mu \theta - 4 \eta \mu^3 \theta. \end{cases} \quad (2)$$

β). Οί παραπάνω τύποι (1) και (2) μᾶς επιτρέπουν, ἀντιστρόφως, νά ἐκφράσουμε τό $\sin \theta$ και $\eta \mu \theta$ (για $n = 2, 3$) συναρτήσει τῶν $\sin 2\theta$, $\eta \mu 2\theta$ και $\sin 3\theta$ ἢ $\eta \mu 3\theta$.

Εἴτσι, ἀπό τούς τύπους τῆς ομάδας (1) λαμβάνουμε:

$$\begin{cases} \sin^2 \theta = \frac{1 + \sin 2\theta}{2} \\ \eta \mu^2 \theta = \frac{1 - \sin 2\theta}{2}. \end{cases} \quad (3)$$

Από τούς τύπους τῆς ομάδας (2) λαμβάνουμε:

$$\begin{cases} \sin^3 \theta = \frac{3}{4} \sin \theta + \frac{1}{4} \sin 3\theta \\ \eta \mu^3 \theta = \frac{3}{4} \eta \mu \theta - \frac{1}{4} \eta \mu 3\theta. \end{cases} \quad (4)$$

Μποροῦμε ἐπίσης νά ἐκφράσουμε τό $\sin^4 \theta$ και $\eta \mu^4 \theta$ συναρτήσει τοῦ $\sin 2\theta$ και $\sin 4\theta$. Πράγματι, ἂν ὑψώσουμε στό τετράγωνο τήν πρώτη σχέση τῆς ομάδας (3) ἔχουμε:

$$\begin{aligned} \sin^4 \theta &= \left(\frac{1 + \sin 2\theta}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sin 2\theta + \frac{1}{4} \left(\frac{1 + \sin 4\theta}{2} \right) \\ &= \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \sin 2\theta + \frac{1}{8} \sin 4\theta. \end{aligned} \quad (5)$$

Ομοίως βρίσκουμε:

$$\eta \mu^4 \theta = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \sin 2\theta + \frac{1}{8} \sin 4\theta. \quad (6)$$

Ανακεφαλαίωση. Οί ὁρίσμοι και οί κυριότερες ιδιότητες τοῦ μέτρου και τοῦ ὁρίσματος ἑνός μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ ποῦ ἀπορρέουν ἀπό τίς προτάσεις ποῦ ἀναφέραμε στίς προηγούμενες παραγράφους συνοψίζονται στόν ἐπόμενο πίνακα, ἂν χρησιμοποιήσουμε γιά συντομία και τό συμβολισμό $z \equiv (\rho, \theta)$ ἢ $z \equiv [\rho, \theta]$ ὅπου ρ τό μέτρο και θ τό ὅρισμα τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ $z \neq 0$.

Υστερα ἀπ' αὐτό ἔχουμε :

$$z = x + iy = \rho(\sin \theta + i \eta \mu \theta) \equiv (\rho, \theta).$$

ΜΕΤΡΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ $z = x + iy = \rho(\cos\theta + i\eta\mu\theta) \equiv (\rho, \theta)$	ΟΡΙΣΜΑ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ $z = x + iy = \rho(\cos\theta + i\eta\mu\theta) \equiv (\rho, \theta)$
α). Όρισμός: $ z = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$	α'). Όρισμός: $\text{Arg}z = \theta, \quad \cos\theta = \frac{x}{\rho}, \quad \eta\mu\theta = \frac{y}{\rho}$
β). Ιδιότητες: 1. $ z_1 z_2 = z_1 \cdot z_2 $ 2. $\left \frac{z_1}{z_2} \right = \frac{ z_1 }{ z_2 }$ 3. $\left \frac{1}{z} \right = \frac{1}{ z }$ 4. $ z^v = z ^v$ 5. $\left \prod_{k=1}^v z_k \right = \prod_{k=1}^v z_k $ 6. $ \bar{z} = x - iy = \rho$	β'). Ιδιότητες: 1'. $\text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg}z_1 + \text{Arg}z_2$ 2'. $\text{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \text{Arg}z_1 - \text{Arg}z_2$ 3'. $\text{Arg} \frac{1}{z} = -\text{Arg}z$ 4'. $\text{Arg}z^v = v \cdot \text{Arg}z$ 5'. $\text{Arg} \prod_{k=1}^v z_k = \sum_{k=1}^v \text{Arg}z_k$ 6'. $\text{Arg}\bar{z} = -\theta$

γ). Πράξεις

$$z_1 z_2 = (\rho_1, \theta_1) \cdot (\rho_2, \theta_2) = [\rho_1 \rho_2, \theta_1 + \theta_2]$$

$$z_1 : z_2 = (\rho_1, \theta_1) : (\rho_2, \theta_2) = \left[\frac{\rho_1}{\rho_2}, \theta_1 - \theta_2 \right]$$

$$z^v = (\rho, \theta)^v = [\rho^v, v\theta], \quad v \in \mathbb{N}$$

$$z^{-1} = (\rho, \theta)^{-1} = \left[\frac{1}{\rho}, -\theta \right]$$

$$z = (\rho, \theta) \Rightarrow \bar{z} = (\rho, -\theta)$$

δ). Διωνυμικές εξισώσεις:

$$z^v = a = r(\cos\varphi + i\eta\mu\varphi) \equiv (r, \varphi)$$

$$\text{Έχει } v \text{ ρίζες: } z_k = \sqrt[v]{r} \left[\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{v} + i\eta\mu\frac{\varphi + 2k\pi}{v} \right] \equiv \left[\sqrt[v]{r}, \frac{\varphi + 2k\pi}{v} \right],$$

όπου $k = 0, 1, 2, \dots, v-1$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Όμάδα Α'. 297. Νά γραφούν με τριγωνομετρική μορφή οι μιγαδικοί αριθμοί:

α) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, β) $-3 + 4i$, γ) $\sqrt{3} - 3i$, δ) $2 + 2\sqrt{3}i$, ε) $3\sqrt{3} + 3i$,

στ) $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$, ζ) $-\sqrt{3} + i$, η) $\frac{1+i\sqrt{3}}{-\sqrt{3}+i}$, θ) $1 + \cos t + i\eta\mu t$.

298. Νά βρεθεί τό μέτρο καί τό ὄρισμα τοῦ:

$$\left[\frac{1+i+\sqrt{3}(1-i)}{1+i} \right]^3$$

299. Νά βρεῖτε τό μέτρο καί τό ὄρισμα καθενός ἀπό τούς παρακάτω ἀριθμούς:

i) $(1 + \sin\theta + i\eta\mu\theta)^2$, ii) $1 - \sin\theta + i\eta\mu\theta$.

300. Ἐάν v φυσικός ἀριθμός, νά ἀποδείξετε ὅτι:

(α). $(\sin\theta - i\eta\mu\theta)^v = \sin(v\theta) - i\eta\mu(v\theta)$

(β). $(\sin\theta + i\eta\mu\theta)^{-v} = \sin(-v\theta) + i\eta\mu(-v\theta)$.

301. Ἐάν $z = \sin\theta + i\eta\mu\theta$ καί $v \in \mathbb{N}$, νά ἀποδείξετε ὅτι:

$$z^v + z^{-v} = 2 \sin(v\theta)$$

$$z^v - z^{-v} = 2i \eta\mu(v\theta).$$

302. Νά ἀποδείξετε ὅτι:

α) $(1+i)^{12} = -64$, β) $(1+i)^{-6} = (2i)^{-3}$, γ) $(1+i)^{10} = 32i$,

δ) $(\sqrt{3}+i)^{150} = -2^{150}$, ε) $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{13} = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$, στ) $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{3k} = 1 \forall k \in \mathbb{Z}$.

303. Νά ἀποδείξετε ὅτι:

α) $(1+i)^v + (1-i)^v = 2^{\frac{v+2}{2}} \cdot \sin \frac{v\pi}{4}, \quad v \in \mathbb{N},$

β) $(1+i)^v - (1-i)^v = i2^{\frac{v+2}{2}} \cdot \eta\mu \frac{v\pi}{4}, \quad v \in \mathbb{N}.$

304. Νά ἐπιλυθοῦν οἱ ἐπόμενες ἐξισώσεις:

α) $z^3 = 1 - i\sqrt{3}$, β) $z^6 \pm 64 = 0$, γ) $4z^7 + 1 = 0$, δ) $z^3 + 8i = 0$,

ε) $z^{12} + 1 = 0$, στ) $z^4 = -8 - 8\sqrt{3}i$, ζ) $z^5 = -\sqrt{3} + i$, η) $3x^5 + 24x^2 = 0$.

305. Ἐάν ω_1, ω_2 εἶναι οἱ μιγαδικές κυβικές ρίζες τῆς μονάδας, νά ἀποδείξετε ὅτι:

1) $(1 + \omega_2)^4 = \omega_1$,

2) $(1 + \omega_1 - \omega_2)^3 - (1 - \omega_1 + \omega_2)^3 = 0$,

3) $(1 + 2\omega_1 + 3\omega_2)(1 + 3\omega_1 + 2\omega_2) = 3$, 4) $(1 - \omega_1 + \omega_2)(1 + \omega_1 - \omega_2) = 4$.

306. Ἐστω ὁ μιγαδικός ἀριθμός:

$$z = \sin \frac{2\pi}{7} + i\eta\mu \frac{2\pi}{7}.$$

Θέτουμε: $A = z + z^2 + z^4$ καί $B = z^3 + z^5 + z^6$.

Νά σχηματίσετε ἐξίσωση β' βαθμοῦ, τῆς ὁποίας ρίζες εἶναι οἱ: A, B .

Ὁμάδα Β'. 307. Νά ἀποδείξετε ὅτι ὁ μιγαδικός ἀριθμός $z = \sin\theta + i\eta\mu\theta \neq -1$

μπορεῖ νά πάρει τή μορφή: $z = \frac{1+i\lambda}{1-i\lambda}$, ὅπου λ κατάλληλος πραγματικός ἀριθμός.

308. Νά βρεῖτε τό μέτρο καί τό ὄρισμα τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν $z = x + iy$, ($x, y \in \mathbb{R}$), πού ἰκανοποιοῦν καθεμία ἀπό τίς παρακάτω ἰσότητες:

i). $|z|^2 - 2iz + 2\alpha(1+i) = 0$, ii). $z^3 - 3|z| + \alpha^2 = 0$,

ὅπου α θετικός πραγματικός ἀριθμός.

309. Μὲ ἐφαρμογή τοῦ τύπου τοῦ De Moivre νά λύσετε τήν ἐξίσωση $z^6 + 64 = 0$. Νά σημειώσετε τὰ ὁρίσματα τῶν 6 ριζῶν. Πῶς παριστάνονται γεωμετρικά οἱ ρίζες αὐτές;

310. Νά υπολογίσετε τὰ λ καὶ μ , ὥστε ὁ μιγαδικὸς ἀριθμὸς: $\sqrt{2}(\sin 45^\circ + i \eta \mu 45^\circ)$ νά εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως:

$$x^4 + 2x^3 + 3x^2 + \lambda x + \mu = 0.$$

Ποιές εἶναι οἱ ἄλλες ρίζες;

311. Δίνεται τὸ πολυώνυμο:

$$\varphi(x) \equiv 6x^4 + (6\lambda - 5)x^3 + (6\mu - 5\lambda + 1)x^2 + (\lambda - 5\mu)x + \mu.$$

*Αν εἶναι γνωστὸ ὅτι τὸ $\varphi(x)$ δέχεται ὡς ρίζα τὸ μιγαδικὸ ἀριθμὸ $1 + i$, νά υπολογίσετε τὰ λ , μ καὶ νά βρεῖτε τὶς ἄλλες ρίζες τοῦ πολυωνύμου $\varphi(x)$.

312. Δίνεται κανονικὸ πολύγωνο μέ n πλευρές ἐγγεγραμμένο στό μοναδιαῖο κύκλο. Νά ἀποδείξετε ὅτι τὸ γινόμενο P τῶν ἀποστάσεων μιᾶς κορυφῆς του ἀπὸ τὶς ὑπόλοιπες $(n - 1)$ κορυφές του εἶναι ἴσο μέ n , δηλαδή: $P = n$.

313. Νά βρεῖτε τὶς ρίζες τῆς ἐξισώσεως:

$$\left(\frac{1+x}{1-x} \right)^v - 1 = 0$$

314. Νά ἀποδείξετε ὅτι τὶς ρίζες τῆς ἐξισώσεως:

$$(1+z)^{2v} + (1-z)^{2v} = 0$$

μᾶς τὶς δίνει ὁ τύπος :

$$z = i \epsilon \varphi \frac{2k+1}{4v} \pi,$$

ὅπου $k = 0, 1, 2, \dots, 2v-1$.

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο VII

ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ – ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

I. ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ. ΟΡΙΣΜΟΙ – ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

***§ 146. Εισαγωγικές έννοιες.**— Στην προηγούμενη τάξη μάθαμε για τις δυνάμεις με βάση οποιοδήποτε θετικό αριθμό και εκθέτη ρητό αριθμό και αποδείξαμε τις κυριότερες ιδιότητές τους.

Ύπενθυμίζουμε εδώ με συντομία τις ιδιότητες αυτές:

Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ και $x, y \in \mathbb{Q}$ ($\mathbb{Q}$: το σύνολο των ρητών αριθμών) ισχύουν:

- | | |
|--|--|
| 1). $\alpha^x \alpha^y = \alpha^{x+y}$ | 2). $(\alpha \cdot \beta)^x = \alpha^x \cdot \beta^x$ |
| 3). $\alpha^x: \alpha^y = \alpha^{x-y}$ | 4). $(\alpha^x)^y = \alpha^{xy}$ |
| 5). $\alpha^x = 1 \iff x = 0 \ (\alpha \neq 1)$ | 6). $\alpha^x = \alpha^y \iff x = y \ (\alpha \neq 1)$ |
| 7). $\alpha > \beta \implies \begin{cases} \alpha^x > \beta^x, & \text{αν } x > 0 \\ \alpha^x < \beta^x, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$ | |
| 8). $x > y \iff \begin{cases} \alpha^x > \alpha^y, & \text{αν } \alpha > 1 \\ \alpha^x < \alpha^y, & \text{αν } 0 < \alpha < 1. \end{cases}$ | |

Ειδικά για $\alpha = 1$ ισχύει: $\alpha = 1 \wedge x \neq y \implies \alpha^x = \alpha^y = 1$.

Όστε: για $\alpha > 0$ ή δύναμη α^x είναι τελείως ορισμένη στην περίπτωση που ο εκθέτης x είναι ένας οποιοσδήποτε ρητός αριθμός.

Γεννιέται όμως το ερώτημα: τί έννοούμε όταν γράφουμε α^x , $\alpha \in \mathbb{R}^+$ και πιο γενικά α^x , στην περίπτωση που ο εκθέτης x είναι άρρητος αριθμός; Δηλαδή πώς ορίζεται γενικά η έννοια: «δύναμη με βάση (οποιοδήποτε) θετικό αριθμό α και εκθέτη (οποιοδήποτε) πραγματικό αριθμό x »; Θα ορίσουμε ακριβώς τώρα την έννοια αυτή.

Αποδεικνύεται * στα Μαθηματικά ή έξης πρόταση:

Πρόταση.—Για κάθε $\alpha > 0$ και κάθε ακολουθία ρ_n , $n = 1, 2, \dots$ ρητών αριθμών με $\rho_n \rightarrow x^{**}$, $x \in \mathbb{R}$, ή ακολουθία α^{ρ_n} , $n = 1, 2, \dots$ συγκλίνει σ' ένα θετικό αριθμό, ο οποίος δεν εξαρτάται από την ακολουθία (ρ_n) (άρκει μόνο $\rho_n \rightarrow x$).

Δίνεται τώρα ο επόμενος ορισμός:

Ορισμός. Ο πραγματικός αριθμός, ακριβέστερα ο θετικός αριθμός, που ορί-

* Η απόδειξη θα δοθεί στην άλλη τάξη.

** Υπάρχει τέτοια ακολουθία, γιατί αποδεικνύεται ότι: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta \exists \rho \in \mathbb{Q} : \alpha < \rho < \beta$.

ζεται μονοσήμαντα, σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση, και πού είναι η όρια-
κή τιμή της ακολουθίας (α^n), όπου (ρ_n) οποιαδήποτε ακολουθία ρητών αριθμών με
 $\rho_n \rightarrow x$, ονομάζεται: δύναμη με βάση το θετικό αριθμό α και εκθέτη τον πραγ-
ματικό αριθμό x και συμβολίζεται με: α^x .

Ωστε:

$$\alpha^x \equiv \lim_{\rho \rightarrow x} \alpha^{\rho}$$

Είναι φανερό πώς ο πιο πάνω όρισμός περικλείει το γνωστό σε μας από
τήν προηγούμενη τάξη όρισμό της δυνάμεως με ρητό εκθέτη. Έτσι εξάλλου
δικαιολογείται και ο συμβολισμός του $\lim \alpha^{\rho_n}$ με το α^x , επειδή αν $x \in \mathbb{Q}$, τότε
μία ακολουθία ρητών αριθμών συγκλίνουσα στο x είναι ή σταθερή ακολουθία
 $\rho_n = x$, για κάθε $n = 1, 2, \dots$. Τότε όμως έχουμε:

$$\alpha^{\rho_n} = \alpha^x \rightarrow \alpha^x.$$

Σύμφωνα όμως με την προηγούμενη πρόταση για κάθε ακολουθία ρ_n ,
 $n = 1, 2, \dots$ ρητών αριθμών με $\rho_n \rightarrow x$ ή ακολουθία α^{ρ_n} , $n = 1, 2, \dots$ συγ-
κλίνει σ' ένα θετικό αριθμό πού δεν εξαρτάται από την ακολουθία (ρ_n) και έπο-
μένως πάλι θά ισχύει:

$$\alpha^{\rho_n} \rightarrow \alpha^x.$$

Συνοψίζοντας λοιπόν τά προηγούμενα συμφωνούμε ότι:

$$\alpha^x = \lim \alpha^{\rho_n}$$

όπου ρ_n , $n = 1, 2, \dots$ ακολουθία ρητών αριθμών με $\rho_n \rightarrow x$, ανεξάρτητα αν
ό x είναι ρητός ή άρρητος αριθμός, δηλαδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Οί γνωστές ιδιότητες των δυνάμεων με ρητούς εκθέτες, τίς όποιες αναφέ-
ραμε στην αρχή αυτής της παραγράφου, αποδεικνύεται ότι ισχύουν και στην
περίπτωση δυνάμεων με εκθέτες άρρητους αριθμούς και συνεπώς με εκθέτες
(όποιουσδήποτε) πραγματικούς αριθμούς.

Σημείωση. Από τον όρισμό της δυνάμεως α^x με $\alpha > 0$ και $x \in \mathbb{R}$ προκύπτει ότι όρίζε-
ται μία συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ με τύπο: $f(x) = \alpha^x$.

Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται εκθετική συνάρτηση με βάση το α .

Ειδικά την εκθετική συνάρτηση πού έχει βάση τον αριθμό $e \equiv \lim_{\rho \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\rho}\right)^\rho = 2,7182\dots$,

δηλ. τή συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = e^x$, τή λέμε απλώς εκθετική συνάρτηση.

§ 147. Η έννοια του λογαρίθμου θετικού αριθμού.— Είδαμε στην
προηγούμενη παράγραφο ότι: αν $\alpha > 0$, τότε $\alpha^x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δηλαδή
ή δύναμη α^x ισούται με θετικό αριθμό, όταν $\alpha > 0$, ανεξάρτητα από τό αν
ό εκθέτης x είναι θετικός, άρνητικός ή μηδέν. Ειδικά για $\alpha = 1$ οί δυνάμεις 1^x
είναι ίσες με 1 για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Οί δυνάμεις όμως α^x , όπου $0 < \alpha \neq 1$ και $x \in \mathbb{R}$ όχι μόνο είναι θετικές για
κάθε $x \in \mathbb{R}$, αλλά όταν τό x μεταβάλλεται στο διάστημα: $-\infty < x < +\infty$, τότε
ή συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \alpha^x$ παίρνει ως τιμές όλους τούς θετικούς αριθ-
μούς. Ακριβέστερα, αποδεικνύεται σ'τά Μαθηματικά ή έξης πρόταση:

Πρόταση.— Για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό a διάφορο της μονάδας, δηλ. για κάθε $a \in \mathbf{R}$ με $0 < a \neq 1$, και κάθε πραγματικό αριθμό $\theta > 0$ υπάρχει ακριβώς ένας πραγματικός αριθμός x (ρητός ή άρρητος) με την ιδιότητα:

$$a^x = \theta \quad (1)$$

Από την παραπάνω πρόταση οδηγούμαστε τώρα στο να δώσουμε τον εξής ορισμό:

Ορισμός. Τό μοναδικό, σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση, πραγματικό αριθμό x , για τον οποίο ισχύει η σχέση:

$$a^x = \theta, \text{ όπου } a > 0, a \neq 1 \text{ και } \theta > 0$$

τον ονομάζουμε **λογάριθμο** του θ ως προς βάση a και τον παριστάνουμε με **λογ_aθ**.

$$\text{"Ωστε: } x = \log_a \theta \quad (2)$$

Ειδικά για $a=10$ γράφουμε: $\log \theta$ αντί $\log_{10} \theta$ και τον ονομάζουμε **δεκαδικό λογάριθμο**.

Άμεση συνέπεια του πιο πάνω ορισμού είναι η (λογική) ισοδυναμία:

$$\log_a \theta = x \iff a^x = \theta \quad (3)$$

Από την (3) συνάγεται τώρα ο εξής κανόνας:

Αν ξέρουμε το λογάριθμο ενός θετικού αριθμού θ , τότε ο αριθμός αυτός είναι ίσος με δύναμη που έχει ως βάση τη βάση a των λογαρίθμων και εκθέτη το λογάριθμο του αριθμού αυτού.

Επειδή $x = \log_a \theta$, η σχέση (1) γράφεται:

$$a^{\log_a \theta} = \theta \quad \text{και λέγε-}$$

ται **βασική λογαριθμική ταυτότητα**.

Ετσι έχουμε τις ισοδυναμίες:

$$\log_a \theta = x \iff a^x = \theta \iff a^{\log_a \theta} = \theta \quad (0 < a \neq 1, \theta > 0).$$

Παραδείγματα:

1) $\log_{10} 100 = 2$,	επειδή $10^2 = 100$	5) $\log_{10} 0,001 = -3$,	επειδή $10^{-3} = 0,001$
2) $\log_2 8 = 3$,	» $2^3 = 8$	6) $\log_{1/2} \left(\frac{1}{16}\right) = 4$,	» $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$
3) $\log_2 \sqrt[3]{2} = \frac{1}{3}$	» $2^{1/3} = \sqrt[3]{2}$	7) $\log_{1/\sqrt{2}} 1 = 0$,	» $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^0 = 1$
4) $\log_{1/3} 9 = -2$,	» $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9$	8) $\log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}$,	» $(3)^{1/2} = \sqrt{3}$

Γενική παρατήρηση. Παντού, στα επόμενα, θα υπολογίζουμε **μόνο** λογάριθμους θετικών αριθμών. Λογάριθμους αρνητικών αριθμών, ακριβέστερα μη θετικών αριθμών ούτε ορίζουμε ούτε μεταχειριζόμαστε. Ύστερα από αυτά ο $\log_a x$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού, τότε και μόνο τότε, αν:

$$x > 0 \quad \text{και} \quad 0 < a \neq 1$$

*Έτσι, π.χ., ο $\log_e(3x-2)$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού, αν: $3x-2 > 0$ και $0 < x \neq 1$. Δηλαδή αν: $x \in \left(\frac{2}{3}, 1\right) \cup (1, +\infty)$.

§ 148. Βάση λογαρίθμων – Λογαριθμικά συστήματα.— 'Ο πραγματικός αριθμός α , πού είναι θετικός και διάφορος της μονάδας, δηλ. $0 < \alpha \neq 1$, λέγεται **βάση** τών λογαρίθμων. Από τόν όρισμό του λογαρίθμου θετικού αριθμού προκύπτει ότι μπορούμε νά σχηματίσουμε άπειρα συστήματα λογαρίθμων, αφού ως βάση μπορούμε νά λάβουμε τόν οποιοδήποτε θετικό πραγματικό αριθμό πού είναι διάφορος της μονάδας. Στά Μαθηματικά κυρίως χρησιμοποιούμε τά εξής δύο λογαριθμικά συστήματα:

1ο: Τό δεκαδικό λογαριθμικό σύστημα. Σ' αυτό παίρνουμε ως βάση α τόν αριθμό 10. 'Ο λογάριθμος ενός (θετικού) αριθμού θ στό σύστημα αυτό ονομάζεται, όπως είπαμε και πιο πάνω, **δεκαδικός λογάριθμος** και συμβολίζεται άπλως μέ: $\log \theta$ αντί $\log_{10} \theta$. Έτσι έχουμε: $\log \theta = x \iff 10^x = \theta$.

Οί δεκαδικοί λογάριθμοι λέγονται και «*κοινοί λογάριθμοι*» και χρησιμοποιούνται εύρύτατα στά στοιχειώδη μαθηματικά γιά πρακτικούς κυρίως σκοπούς.

2ο: Τό Νεπέρειο λογαριθμικό σύστημα. Σ' αυτό τό σύστημα παίρνουμε ως βάση τόν αριθμό $e = 2,7182\dots$, ό όποιος όρίζεται ως τό όριο της ακολουθίας $\left(1 + \frac{1}{v}\right)^v$, $v = 1, 2, \dots$. Η ακολουθία αυτή άποδεικνύεται ότι είναι αύξουσα (βλ. άσκ. 93) και άνω φραγμένη, έπομένως (§ 66) συγκλίνει στό **R**. 'Ονομάζουμε $e = \lim \left(1 + \frac{1}{v}\right)^v$. 'Ο αριθμός e παίζει σπουδαίο ρόλο στην 'Ανάλυση και γενικά στά Μαθηματικά, άνήκει στό διάστημα: $(2, 3)$, δηλ. $2 < e < 3$, δέν είναι λοιπόν ό αριθμός e άκέραιος, δέν είναι όμως ούτε και ρητός, άκόμη ούτε άλγεβρικός (§ 112). Είναι ένας ύπερβατικός αριθμός (§ 112). Μία προσέγγιση του e μέ 20 δεκαδικά ψηφία είναι: $e \simeq 2,71828182845904523536$. 'Ο λογάριθμος ενός αριθμού θ στό σύστημα αυτό λέγεται **νεπέρειος λογάριθμος*** του θ και συμβολίζεται μέ $\log \theta$ ή $\ln \theta$ (άντί: $\log_e \theta$). Έτσι έχουμε:

$$\log \theta = x \iff e^x = \theta. \quad (\ln \theta = x \iff e^x = \theta).$$

Οί νεπέρειοι λογάριθμοι λέγονται και «*φυσικοί λογάριθμοι*» και συναντώνται κυρίως στά 'Ανώτερα Μαθηματικά.

* Άξιοσημείωτες παρατηρήσεις. 1) Από τόν όρισμό του $\log_e x$ πού όρίζεται γιά κάθε $x > 0$ προκύπτει ότι γιά κάθε $0 < \alpha \neq 1$ όρίζεται μία συνάρτηση $f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ μέ τύπο: $f(x) = \log_\alpha(x) \equiv \log_e x$. Δηλαδή όρίζεται ή συνάρτηση:

$$f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}: x \rightarrow f(x) = \log_\alpha x \quad (0 < \alpha \neq 1)$$

* Πρός τιμή του Άγγλου Μαθηματικού John Napier (1550 - 1617) πρώτου έπινοητή τών λογαρίθμων. Πρώτος ό Napier έλαβε ως βάση τόν αριθμό $e = 2,7182\dots$. 'Ο συμβολισμός «ln» προέρχεται από τό άρχικό γράμμα (l) της λέξεως: logarithm και τό μικρό γράμμα (n) του άρχικού της λέξεως Napier.

Αυτή η συνάρτηση ονομάζεται **λογαριθμική συνάρτηση με βάση a** .

Από τον ορισμό αυτής της συναρτήσεως προκύπτει άμεσα ότι:

$$y = \log_a x \iff a^y = x \quad (x \in \mathbb{R}^+)$$

και συνεπώς:

$$y = \log x \iff e^y = x \quad (x \in \mathbb{R}^+)$$

2) Σύμφωνα με τη βασική λογαριθμική ταυτότητα ισχύει:

$$a^{\log_a x} = x \quad \forall a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$$

και ειδικά για $a = e$ ισχύει:

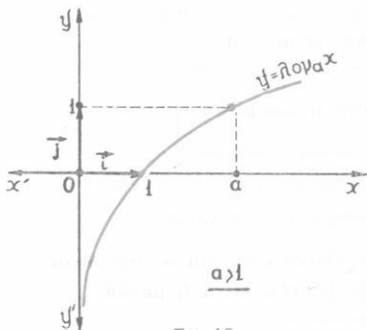
$$e^{\log x} = x$$

όποτε συνάγουμε ότι:

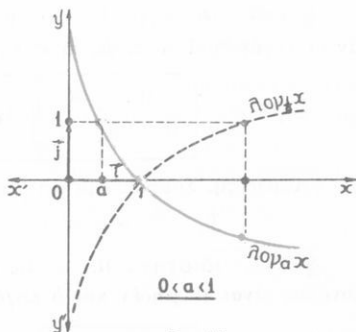
$$a^x = (e^{\log a})^x = e^{x \log a}, \text{ δηλαδή } \boxed{a^x = e^{x \log a}}$$

3) Η λογαριθμική συνάρτηση, που όπως είδαμε πιο πάνω έχει πεδίο ορισμού τό $(0, +\infty)$ και πεδίο τιμών τό $\mathbb{R}$, είναι, όπως θα μάθουμε στην άλλη τάξη, *ή αντίστροφη συνάρτηση της εκθετικής συναρτήσεως $x = a^y$* (βλ. σημείωση § 146).

Σ' ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων ή γραφική παράσταση της λογαριθμικής συναρτήσεως: $y = \log_a x$ δίνεται, με πρόχειρη σχεδίαση, από τὰ άμεσα επόμενα σχήματα:



Σχ. 12



Σχ. 13

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ομάδα Α'. 315. Νά προσδιορίσετε τόν x από τίς παρακάτω ισότητες:

- 1) $\log_4 x = 3$, 2) $\log x = -3$, 3) $\log_2 \left(\frac{1}{2} \right) = x$, 4) $\log_{\sqrt{3}} (9\sqrt{3}) = x$,
 5) $\log_{4/9} \frac{27}{8} = x$, 6) $\log_8 x = -\frac{7}{3}$, 7) $\log_{25} \sqrt{2} = x$, 8) $\log_2 \left(\frac{1}{\sqrt{32}} \right) = x$.

316. Νά βρείτε τήν άγνωστη βάση $x \in \mathbb{R}^+$, $x \neq 1$, από τίς παρακάτω ισότητες:

- 1) $\log_x 25 = 2$, 2) $\log_x 16 = \frac{2}{3}$, 3) $\log_x 5 = \frac{1}{3}$, 4) $\log_x \left(\frac{81}{16} \right) = 4$.

317. Νά υπολογίσετε τούς λογαρίθμους τών αριθμών:

$$81, \quad 64, \quad \frac{1}{32}, \quad \sqrt{2}, \quad \frac{1}{125}, \quad 27, \quad 4\sqrt{2}, \quad 1000$$

μέ βάση αντίστοιχως τούς αριθμούς:

$$3, \quad \frac{1}{2}, \quad 2, \quad 4, \quad 5, \quad 3, \quad 2, \quad 0,01.$$

318. Γιά ποιές τιμές του $x \in \mathbb{R}$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού καθεμιά από τις επόμενες εκφράσεις:

$$1) \log(1 - |x|), \quad 2) \log_x(3 - 2x), \quad 3) \log_{2x}(x^2 - x + 1).$$

* Όμάδα Β'. 319. *Αν $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $\alpha \neq 1$ και ονομάσουμε: $x = \log_{\sqrt{\alpha}} \alpha$, $y = \log_{\alpha} \alpha^2$, $z = \log_{\alpha^2} \alpha^4$, νά αποδείξετε ότι ισχύει: $xyz = x + y + z + 2$.

320. Νά αποδείξετε ότι: για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ και $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$1) \alpha^x \cdot \alpha^y = \alpha^{x+y}, \quad 2) \alpha^x : \alpha^y = \alpha^{x-y}, \quad 3) (\alpha \cdot \beta)^x = \alpha^x \cdot \beta^x$$

*Υπόδειξη. *Εστω ότι είναι $(\rho_v), (r_v)$ δύο όποιοσδήποτε ακολουθίες με ρητούς όρους τέτοιες, ώστε: $\rho_v \rightarrow x, r_v \rightarrow y$. Τότε, σύμφωνα με την πρόταση της § 146, θά έχουμε: $\alpha^{\rho_v} \rightarrow \alpha^x$ και $\alpha^{r_v} \rightarrow \alpha^y$, οπότε κτλ.

321. *Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ και ονομάσουμε: $x = \log_{\alpha}(\beta\gamma)$, $y = \log_{\beta}(\gamma\alpha)$, $z = \log_{\gamma}(\alpha\beta)$, νά αποδείξετε ότι: $x + y + z + 2 = xyz$ και $\alpha^{x-2} \cdot \beta^{y-2} \cdot \gamma^{z-2} = 1$.

322. Νά αποδείξετε ότι ο $\log 3$ είναι άρρητος (= ασύμμετρος) αριθμός.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ *

§ 149. *Ιδιότητα I.— Δύο θετικοί αριθμοί είναι ίσοι, τότε και μόνο τότε, αν οι λογάριθμοί τους, ως προς την ίδια βάση, είναι ίσοι.

Δηλαδή: $\forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}^+$ $0 < a \neq 1$	$\log_a \theta_1 = \log_a \theta_2 \iff \theta_1 = \theta_2$
---	--

*Απόδειξη. Σύμφωνα με τη βασική λογαριθμική ταυτότητα έχουμε:

$$\theta_1 = \theta_2 \iff \alpha^{\log_a \theta_1} = \alpha^{\log_a \theta_2} \iff \log_a \theta_1 = \log_a \theta_2.$$

§ 150. *Ιδιότητα II. — Σέ κάθε λογαριθμικό σύστημα ο λογάριθμος της μονάδας είναι τό μηδέν και ο λογάριθμος της βάσεως είναι ή μονάδα.

Δηλαδή: $\log_a 1 = 0$	και $\log_a a = 1$	$\forall \alpha \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$.
------------------------	--------------------	---

*Απόδειξη. *Όπως είδαμε παραπάνω (§ 147) ισχύει: $\log_a \theta = x \iff \alpha^x = \theta$,
 οπότε: $\log_a 1 = x \iff \alpha^x = 1 \iff x = 0$ } $\forall \alpha \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$.
 και $\log_a a = y \iff \alpha^y = a \iff y = 1$ }

§ 151. *Ιδιότητα III. — *Ο λογάριθμος του γινομένου δύο θετικών αριθμών, ως προς βάση a ($0 < a \neq 1$), ισούται με τό άθροισμα των λογαρίθμων αυτών των αριθμών (οί λογάριθμοι λαμβάνονται ως προς την ίδια βάση a).

Δηλαδή: $\forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}^+$ $0 < a \neq 1$	$\log_a(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2$
---	---

*Απόδειξη. *Ας ονομάσουμε $x = \log_a \theta_1$ και $y = \log_a \theta_2$. Τότε $\alpha^x = \theta_1$ και $\alpha^y = \theta_2$,

* ακριβέστερα ιδιότητες της λογαριθμικής συναρτήσεως $\log_a$ ($0 < a \neq 1$).

όπότε: $\alpha^x \cdot \alpha^y = \alpha^x \cdot \alpha^y = \theta_1 \cdot \theta_2 \iff \log_a(\theta_1 \cdot \theta_2) = x + y = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2$.

Σημείωση. Η παραπάνω ιδιότητα αποδεικνύεται και ως εξής:

$$\alpha^{\log_a(\theta_1 \cdot \theta_2)} = \theta_1 \cdot \theta_2 = \alpha^{\log_a \theta_1} \cdot \alpha^{\log_a \theta_2} = \alpha^{\log_a \theta_1 + \log_a \theta_2} \Rightarrow \log_a(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2.$$

Παρατήρηση. "Αν x, y είναι όμοσημοι πραγματικοί αριθμοί, τότε ισχύει:

$$\log_a(xy) = \log_a |x| + \log_a |y| \quad \forall \alpha \in (0, 1) \cup (1, +\infty).$$

Πράγματι, τότε έχουμε: $xy > 0 \Rightarrow xy = |xy| = |x| \cdot |y|$. "Αρα ...

Πόρισμα.—"Αν $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ ($n \geq 2$) είναι θετικοί αριθμοί, τότε ισχύει:

$$\log_a(\theta_1 \cdot \theta_2 \cdot \dots \cdot \theta_n) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2 + \dots + \log_a \theta_n$$

Για συντομία γράφουμε:

$$\log_a \left(\prod_{k=1}^n \theta_k \right) = \sum_{k=1}^n \log_a \theta_k$$

Η απόδειξη γίνεται εύκολα με τη μέθοδο της τέλειας επαγωγής, αφού είναι γνωστό ότι για $n=2$ ισχύει, σύμφωνα με την προηγούμενη ιδιότητα.

"Αμεση συνέπεια της προηγούμενης ιδιότητας είναι και η εξής:

§ 152. Ίδιότητα IV.—Ο λογάριθμος του ηλίκου δύο θετικών αριθμών, ως προς βάση a ($0 < a \neq 1$), ισούται με το λογάριθμο του διαιρετέου μείον το λογάριθμο του διαιρέτη (οί λογάριθμοι λαμβάνονται ως προς την ίδια βάση a).

Δηλαδή:

$$\forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}^+ \quad \left| \quad \log_a \left(\frac{\theta_1}{\theta_2} \right) = \log_a \theta_1 - \log_a \theta_2 \right.$$

"Απόδειξη. Σύμφωνα με την προηγούμενη ιδιότητα έχουμε:

$$\log_a \theta_1 = \log_a \left(\frac{\theta_1}{\theta_2} \cdot \theta_2 \right) = \log_a \frac{\theta_1}{\theta_2} + \log_a \theta_2$$

και συνεπώς:

$$\log_a \frac{\theta_1}{\theta_2} = \log_a \theta_1 - \log_a \theta_2.$$

Παρατήρηση. "Αν x, y είναι όμοσημοι πραγματικοί αριθμοί, τότε ισχύει:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a |x| - \log_a |y| \quad (\text{γιατί;})$$

Πόρισμα.—Οί αντίστροφοι θετικοί αριθμοί έχουν αντίθετους λογαρίθμους.

Πράγματι: από τις ιδιότητες IV και II έχουμε:

$$\log_a \left(\frac{1}{\theta} \right) = \log_a 1 - \log_a \theta = 0 - \log_a \theta = -\log_a \theta.$$

"Αξιόλογη παρατήρηση. Πρέπει νά έχουμε πάντοτε υπόψη μας ότι:

$$\log_a(\theta_1 + \theta_2) \neq \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2$$

$$\begin{aligned}\log_a(\theta_1 - \theta_2) &\neq \log_a \theta_1 - \log_a \theta_2 \\ \log_a \theta_1 \cdot \log_a \theta_2 &\neq \log_a(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2 \\ \log_a \theta_1 : \log_a \theta_2 &\neq \log_a \left(\frac{\theta_1}{\theta_2} \right) = \log_a \theta_1 - \log_a \theta_2.\end{aligned}$$

§ 153. Ίδιότητα V.—Ο λογάριθμος οποιασδήποτε δυνάμεως ενός θετικού αριθμού ως προς βάση a ($0 < a \neq 1$) ισούται με τό γινόμενο του εκθέτη της δυνάμεως επί τό λογάριθμο της βάσεως της δυνάμεως (οί λογάριθμοι λαμβάνονται ως προς την ίδια βάση a).

Δηλαδή:	$\begin{aligned}\forall \theta \in \mathbf{R}^+, \beta \in \mathbf{R} \\ 0 < a \neq 1\end{aligned}$	$\log_a \theta^\beta = \beta \cdot \log_a \theta$
---------	---	---

Ἀπόδειξη. Ἀς ὀνομάσουμε $x = \log_a \theta^\beta$ ($\beta \in \mathbf{R}$) καί $y = \log_a \theta$. Τότε ἔχουμε: $\alpha^x = \theta^\beta$ (1) καί $\alpha^y = \theta$ (2). Ἡ (1), μέ βάση τή (2), γράφεται: $\alpha^x = (\alpha^y)^\beta$ καί ἐπειδή, ὅπως εἶπαμε στήν ἀρχή αὐτοῦ τοῦ κεφαλαίου, οἱ ἰδιότητες τῶν δυνάμεων μέ πραγματικούς ἐκθέτες εἶναι ἀνάλογες τῶν ἀντίστοιχων ἰδιοτήτων μέ ἐκθέτες ρητούς ἀριθμούς, θά ἔχουμε: $\alpha^x = \alpha^{\beta y}$. Ἡ τελευταία ἰσότητα, ἐπειδή $0 < a \neq 1$, ἰσοδυναμεῖ μέ τήν: $x = \beta y$, δηλαδή:

$$\log_a \theta^\beta = \beta \cdot \log_a \theta \quad \forall \beta \in \mathbf{R}.$$

Σημείωση. Ἡ παραπάνω ἰδιότητα ἀποδεικνύεται πιό σύντομα ὡς ἑξῆς:

$$\alpha^{\log_a \theta^\beta} = \theta^\beta = [\alpha^{\log_a \theta}]^\beta = \alpha^{\beta \cdot \log_a \theta} \implies \log_a \theta^\beta = \beta \cdot \log_a \theta, \quad (0 < a \neq 1)$$

Παρατήρηση. Ἄν x εἶναι ἓνας ὁποιοσδήποτε πραγματικός ἀριθμός ($x \neq 0$) καί k ὁποιοσδήποτε ἀκέραιος ἀριθμός, τότε ἰσχύει:

$$\log_a x^{2k} = 2k \cdot \log_a |x| \quad (\text{γιατί;})$$

Προσέξτε! θά εἶναι σφάλμα νά γράψουμε: $\log_a x^{2k} = 2k \cdot \log_a x$, πρῶτα γιατί γιά $x < 0$ ὁ λογάριθμος τοῦ β' μέρους αὐτῆς τῆς ἰσότητας δέν ὀρίζεται καί ἔπειτα γιατί κατὰ τή λύση «λογαριθμικῶν» ἐξισώσεων, γιά τίς ὁποῖες κάνουμε λόγο παρακάτω, βρίσκουμε ἑλλιπείς λύσεις, ὅπως φαίνεται καί ἀπό τό ἐπόμενο παράδειγμα:

$$\text{Νά βρεῖτε τὰ } x \in \mathbf{R} - \{0\} \text{ ὥστε: } \log_x^2 = 2 \quad (1)$$

Λύση. Ἡ (1) εἶναι ἰσοδύναμη μέ: $2 \cdot \log |x| = 2 \iff \log |x| = 1 \iff |x| = 10 \iff x = \pm 10$.

Ἄν ὁμως γράψουμε (ἐσφαλμένα βέβαια) τήν (1) ὡς: $2 \log x = 2 \iff \log x = 1 \iff x = 10$, τότε χάνουμε τή ρίζα $x = -10$.

Εἰδικές περιπτώσεις τῆς ἰδιότητας V εἶναι τὰ ἐπόμενα πορίσματα:

Πόρισμα 1ο.—Ο λογάριθμος οποιασδήποτε ρίζας μέ θετικό ὑπορρίζο βρίσκεται ἂν διαιρέσουμε τό λογάριθμο τοῦ ὑπορρίζου μέ τό δείκτη τῆς ρίζας (οἱ λογάριθμοι λαμβάνονται ὡς πρὸς τήν ἴδια βάση a , $0 < a \neq 1$).

Δηλαδή:	$\begin{aligned}\forall \theta \in \mathbf{R}^+, v \in \mathbf{N} \\ 0 < a \neq 1\end{aligned}$	$\log_a \sqrt[v]{\theta} = \frac{1}{v} \cdot \log_a \theta$
---------	---	---

Ἡ ἀπόδειξη εἶναι ἄμεση συνέπεια τῆς προηγούμενης ἰδιότητας, ἀρκεῖ νά

παρατηρήσουμε ότι: $\log_a \sqrt[n]{\theta} = \log_a \theta^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \log_a \theta$ (δηλαδή: $\beta = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$)

Πόρισμα 2ο.—Γιά κάθε $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ και $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $\log_a a^x = x$.

Πράγματι, έχουμε: $\log_a a^x = x \cdot \log_a a = x \cdot 1 = x$.

Άμεση συνέπεια της προηγούμενης ιδιότητας είναι και η εξής:

§ 154. Ίδιότητα VI. (άλλαγή βάσεως λογαριθμίων).—“Αν οι αριθμοί a, β, θ είναι θετικοί και οι a και β είναι διάφοροι του 1, τότε ισχύει:

$$\log_{\beta} \theta = \frac{\log_a \theta}{\log_a \beta} \quad (\text{τύπος αλλαγής βάσεως}) \quad (\tau)$$

Απόδειξη. Από τη βασική λογαριθμική ταυτότητα έχουμε: $\beta^{\log_{\beta} \theta} = \theta$ (1)

“Αν τώρα πάρουμε τους λογαριθμούς ως προς βάση a και των δύο μελών της (1), σύμφωνα με την ιδιότητα I, θά έχουμε: $\log_a (\beta^{\log_{\beta} \theta}) = \log_a \theta$ και αν λάβουμε υπόψη και την προηγούμενη ιδιότητα βρίσκουμε:

$$\log_{\beta} \theta \cdot \log_a \beta = \log_a \theta, \text{ \acute{o}ποτε: } \log_{\beta} \theta = \frac{\log_a \theta}{\log_a \beta} \quad (\acute{\alpha}\phi\omicron\upsilon \log_a \beta \neq 0).$$

Ειδικές περιπτώσεις της παραπάνω ιδιότητας είναι τὰ πορίσματα:

Πόρισμα 1ο.—Γιά κάθε $a, \beta \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ ισχύει :

$$\log_a \beta \times \log_{\beta} a = 1$$

Πράγματι, από τον τύπο αλλαγής βάσεως για $\theta = a$ βρίσκουμε:

$$\log_{\beta} a = \frac{\log_a a}{\log_a \beta} = \frac{1}{\log_a \beta} \quad (1) \text{ και συνεπ\acute{o}ς: } \log_a \beta \cdot \log_{\beta} a = 1.$$

*Παρατήρηση. Έχοντας υπόψη τη σχέση (1) του παραπάνω πορίσματος, ο τύπος (τ) γράφεται:

$$\log_{\beta} \theta = \log_{\beta} a \cdot \log_a \theta \quad (\tau')$$

“Ο αριθμός $M = \log_{\beta} a$ επί τον οποίο αν πολλαπλασιαστεί ο $\log_a \theta$ μᾶς δίνει τό λογάριθμο του αριθμού θ ως προς τή *ἀνέαν* βάση β ονομάζεται: **σταθερά της αλλαγής βάσεως** ή **πολλαπλασιαστής** του συστήματος βάσεως a ως προς τό σύστημα βάσεως β .

“Ο τύπος (τ') για $\beta = 10$ και $a = e$ (e : βάση των νεπέρειων λογαριθμίων) γράφεται:

$$\log_{10} \theta = \log_{10} e \cdot \log_e \theta, \text{ ή ακριβέστερα: } \log \theta = \log_e \cdot \log \theta \quad (1)$$

“Η τελευταία ισότητα μᾶς δίνει τή **σχέση μεταξύ δεκαδικῶν καί νεπέρειων λογαριθμίων**. “Ετσι έχουμε, σύμφωνα καί μέ τό προηγούμενο πόρισμα:

$$\log \theta = \frac{1}{\log_{10} e} \cdot \log \theta \quad \text{καί} \quad \log \theta = \frac{1}{\log_e} \cdot \log \theta \quad (2)$$

“Η σταθερά της αλλαγής βάσεως είναι: $M = \log_e = \log 2,7182 \dots = 0,43429 \dots$, ὁπότε ἀπό τή δεύτερη ισότητα της (2) έχουμε:

$$\log \theta = \frac{1}{M} \cdot \log \theta \simeq \frac{1}{0,43429} \cdot \log \theta \simeq 2,30258 \cdot \log \theta$$

*Ωστε: για κάθε $\theta > 0$ ισχύει:

$$\log \theta \simeq 2,30258 \cdot \log \theta$$

και

$$\log \theta \simeq 0,43429 \cdot \log \theta$$

*Από τον πρώτο τύπο βρίσκουμε το νεπερίο λογάριθμο ενός αριθμού $\theta > 0$, αν ξέρουμε το δεκαδικό του λογάριθμο και από το δεύτερο τύπο βρίσκουμε το δεκαδικό λογάριθμο ενός αριθμού, αν ξέρουμε το νεπερίο λογάριθμο αυτού του αριθμού.

*Εφαρμογή: *Αν $\log 3 = 0,47712$, τότε $\log 3 \simeq 2,30258 \cdot 0,47712 = 1,09861$.

Πόρισμα. 2ο.— Για κάθε $a, \beta \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$ και $\rho \in \mathbb{R} - \{0\}$ ισχύει :

$$\log_{a^\rho} \beta = \frac{1}{\rho} \log_a \beta$$

Πράγματι, από τον τύπο αλλαγής βάσεως για $\theta = \beta$ και $\beta = a^\rho$ έχουμε:

$$\log_{a^\rho} \beta = \frac{\log_a \beta}{\log_a a^\rho} = \frac{\log_a \beta}{\rho \cdot \log_a a} = \frac{1}{\rho} \cdot \log_a \beta.$$

Σημείωση. Για $\rho = -1$ έχουμε: $\log_{1/a} \beta = -\log_a \beta$, δηλαδή: $\log_{a^{-1}} = -\log_a$ (βλ. και Σχ. 13).

*Εφαρμογή. Νά αποδείξετε ότι: αν $a, x \in \mathbb{R}^+$ και $a \neq 1$, τότε ισχύει :

$$\log_a x \cdot \log_{a^2} x = \frac{1}{2} (\log_a x)^2$$

*Απόδειξη. Σύμφωνα με το παραπάνω πόρισμα έχουμε:

$$\log_a x \cdot \log_{a^2} x = \log_a x \cdot \frac{1}{2} \log_a x = \frac{1}{2} (\log_a x)^2.$$

● Θά συμπληρώσουμε τα συμπεράσματα των προηγούμενων παραγράφων με μερικές ακόμη αξιοσημείωτες και χρήσιμες ιδιότητες που έχουν οι λογάριθμοι.

*Ας θεωρήσουμε την ανισότητα: $\log_a \theta_1 > \log_a \theta_2$, όπου θ_1, θ_2 αριθμοί θετικοί και $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$. *Ας ονομάσουμε $x = \log_a \theta_1$ και $y = \log_a \theta_2$. Τότε $a^x = \theta_1$ και $a^y = \theta_2$. Συγκρίνοντας τώρα τις δυνάμεις a^x και a^y και έχοντας υπόψη την ιδιότητα 8 της § 146, η όποια ισχύει και για $x, y \in \mathbb{R}$, παρατηρούμε ότι: για $a > 1$ είναι $a^x > a^y$ (επειδή $x > y$) και για $0 < a < 1$ είναι $a^x < a^y$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η ανισότητα $\log_a \theta_1 > \log_a \theta_2$ συνεπάγεται την $\theta_1 > \theta_2$ για $a > 1$ και την $\theta_1 < \theta_2$ για $0 < a < 1$ και αντίστροφα.

*Από τα παραπάνω οδηγούμαστε τώρα στο να διατυπώσουμε την εξής ιδιότητα:

§ 155. Ιδιότητα VII.— *Αν $a, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}^+$ με $a \neq 1$, τότε ισχύει :

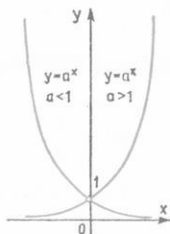
(i) Για $a > 1$ είναι: $\log_a \theta_1 > \log_a \theta_2 \iff \theta_1 > \theta_2$

(ii) Για $a < 1$ είναι: $\log_a \theta_1 > \log_a \theta_2 \iff \theta_1 < \theta_2$.

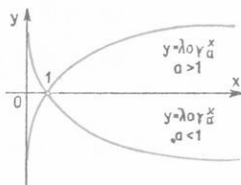
Σχόλιο. *Όπως θά μάθουμε και στην άλλη τάξη μία συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ με $A \subseteq \mathbb{R}$ που διατηρεί τη φυσική διάταξη των πραγματικών αριθμών, δηλαδή για την όποια ισχύει: $x_1 > x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$ την ονομάζουμε **γνησίως αύξουσα**, ενώ αν συμβαίνει:

$$(\forall x_1, x_2 \in A): x_1 > x_2 \implies f(x_1) < f(x_2),$$

την ονομάζουμε **γνησίως φθίνουσα**. *Έτσι π.χ. η έκθετική συνάρτηση $y = a^x$, $x \in \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα για $a > 1$ και γνησίως φθίνουσα για $0 < a < 1$ (βλ. Σχ. 14).



Σχ. 14



Σχ. 15

Επίσης έχοντας υπόψη τους παραπάνω ορισμούς και την προηγούμενη ιδιότητα συμπεραίνουμε ότι: η λογαριθμική συνάρτηση $y = \log_a x$, $x \in \mathbb{R}^+$ είναι γνησίως αύξουσα για $a > 1$ και γνησίως φθίνουσα για $0 < a < 1$ (βλ. Σχ. 15).

Ειδικά, επειδή $e > 1$, η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \log x$ είναι γνησίως αύξουσα. Μία άμεση συνέπεια της ιδιότητας VII είναι το επόμενο πόρισμα:

Πόρισμα.—Αν $a, \theta \in \mathbb{R}^+$ με $a \neq 1$, τότε ισχύει :

$$(i) \text{ Για } a > 1 \text{ είναι : } \begin{cases} \log_a \theta > 0, & \text{αν } \theta > 1 \\ \log_a \theta < 0, & \text{αν } \theta < 1 \end{cases}$$

$$(ii) \text{ Για } a < 1 \text{ είναι : } \begin{cases} \log_a \theta < 0, & \text{αν } \theta > 1 \\ \log_a \theta > 0, & \text{αν } \theta < 1. \end{cases}$$

Εφαρμογές στις ιδιότητες των λογαρίθμων.

1η. Αν $\log 2 = 0,301$ και $\log 5 = 0,698$, νά βρείτε τό $\log 250$ και τό $\log_2 250$.

Λύση. α) $\log 250 = \log(2 \cdot 5^3) = \log 2 + 3 \log 5 = 0,301 + 3 \cdot 0,698 = 0,301 + 2,094 = 2,395$.

$$\beta) \log_2 250 = \frac{\log 250}{\log 2} = \frac{2,395}{0,301} = 7,956.$$

2η. Αν $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^+$, νά εκφράσετε με μορφή αλγεβρικού άθροίσματος λογαρίθμων τό :

$$\log_3 \left(\frac{3a^2}{5\beta \sqrt{\gamma}} \right)$$

Λύση. Έχουμε:

$$\begin{aligned} \log_3 \left(\frac{3a^2}{5\beta \sqrt{\gamma}} \right) &= \log_3(3a^2) - \log_3(5\beta \cdot \sqrt[4]{\gamma}) = \log_3 3 + \log_3 a^2 - (\log_3 5 + \log_3 \beta + \\ &+ \log_3 \sqrt[4]{\gamma}) = 1 + 2\log_3 a - \log_3 5 - \log_3 \beta - \frac{1}{4}\log_3 \gamma. \end{aligned}$$

3η. Νά εφαρμόσετε όλες τις δυνατές ιδιότητες των λογαρίθμων στο :

$$\log \frac{3a^3 \cdot \sqrt[4]{\beta^2 \cdot \gamma}}{5\beta^2 \cdot \sqrt{a^2 \cdot \beta} \cdot \gamma^2}, \text{ όπου } a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^+.$$

Λύση. Έχουμε:

$$\log \frac{3\alpha^3 \cdot \sqrt[4]{\beta^2 \cdot \gamma}}{5\beta^2 \cdot \sqrt{\alpha^2 \cdot \beta \cdot \gamma^2}} = \log(3\alpha^3 \cdot \sqrt[4]{\beta^2 \cdot \gamma}) - \log(5\beta^2 \cdot \sqrt{\alpha^2 \cdot \beta \cdot \gamma^2}) =$$

$$= \left[\log 3 + 3\log \alpha + \frac{1}{4}(2\log \beta + \log \gamma) \right] - \left[\log 5 + 2\log \beta + \frac{1}{3}(2\log \alpha + \log \beta + 2\log \gamma) \right]$$

$$= \log 3 - \log 5 + \frac{7}{3}\log \alpha - \frac{11}{6}\log \beta - \frac{5}{12}\log \gamma.$$

4η. "Αν $\log e i = -\frac{Rt}{L} + \log e I$, τότε $i = I \cdot e^{-\frac{Rt}{L}}$.

Λύση. 'Η σχέση που μᾶς δόθηκε γράφεται:

$$\log e i - \log e I = -\frac{Rt}{L} \quad \eta \quad \log e \frac{i}{I} = -\frac{Rt}{L}.$$

Σύμφωνα με τὸν ὅρισμό τοῦ λογαρίθμου ἔχουμε ἀπὸ τὴν τελευταία ἰσότητα:

$$e^{-\frac{Rt}{L}} = \frac{i}{I} \quad \text{καὶ συνεπῶς: } i = I \cdot e^{-\frac{Rt}{L}}$$

5η. "Αν $\alpha > \beta > 0$ καὶ $\alpha^2 + \beta^2 = 11\alpha\beta$, νά ἀποδείξετε ὅτι:

$$\log \frac{\alpha - \beta}{3} = \frac{1}{2}(\log \alpha + \log \beta).$$

'Απόδειξη. "Εχουμε:

$$\alpha^2 + \beta^2 = 11\alpha\beta \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta = 9\alpha\beta \Rightarrow \left(\frac{\alpha - \beta}{3}\right)^2 = \alpha\beta \Rightarrow \frac{\alpha - \beta}{3} = \sqrt{\alpha\beta},$$

ἐπειδὴ $\alpha - \beta > 0$.

Τότε ὁμως θά ἔχουμε καί:

$$\log \left(\frac{\alpha - \beta}{3} \right) = \log \sqrt{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\log \alpha + \log \beta).$$

6η. Νά ὑπολογίσετε τὴν ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς παραστάσεως:

$$k = \frac{(\log_2 5 + \log_3 5) \cdot \log_5 5}{\log_2 5 \log_3 5}.$$

Λύση. Σύμφωνα με τὸ πόρισμα 1 τῆς § 154 ἔχουμε:

$$k = \frac{\left(\frac{1}{\log_2 5} + \frac{1}{\log_3 5} \right) \cdot \frac{1}{\log_5 5}}{\frac{1}{\log_2 5 \cdot \log_3 5}} = \frac{\log_5 2 + \log_5 3}{\log_5 6} = \frac{\log_5 (2 \cdot 3)}{\log_5 6} = 1.$$

7η. "Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha\beta > 0$ καὶ $\alpha^3 + \beta^3 = 6\alpha\beta(\alpha + \beta)$, νά ἀποδείξετε ὅτι:

$$\log \frac{|\alpha + \beta|}{3} = \frac{1}{2}(\log |\alpha| + \log |\beta|).$$

'Απόδειξη. 'Επειδὴ: $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$ ἔχουμε:

$$(\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 6\alpha\beta(\alpha + \beta) \Rightarrow (\alpha + \beta)^2 = 9\alpha\beta.$$

Τότε ὁμως, σύμφωνα καί με τὶς παρατηρήσεις τῶν παραγράφων 153 καὶ 151, θά ἔχουμε:

$$2 \cdot \log |\alpha + \beta| = \log(9\alpha\beta) = \log 9 + \log(\alpha\beta) = \log 3^2 + \log |\alpha| + \log |\beta|, \quad \text{ὁπότε:}$$

$$2\log |\alpha + \beta| - 2\log 3 = \log |\alpha| + \log |\beta| \Rightarrow \log |\alpha + \beta| - \log 3 = \frac{1}{2}(\log |\alpha| + \log |\beta|)$$

καὶ συνεπῶς:

$$\log \frac{|\alpha + \beta|}{3} = -\frac{1}{2} (\log |\alpha| + \log |\beta|).$$

8η. Νά αποδείξετε την αλήθεια της ισότητας :

$$\frac{7}{16} \log(3 + 2\sqrt{2}) - 4\log(\sqrt{2} + 1) = \frac{25}{8} \log(\sqrt{2} - 1).$$

Λύση. Παρατηρούμε ότι : $3 + 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} + 1)^2$.

$$\begin{aligned} \text{Άρα: } \frac{7}{16} \log(3 + 2\sqrt{2}) - 4\log(\sqrt{2} + 1) &= \frac{7}{16} \log(\sqrt{2} + 1)^2 - 4\log(\sqrt{2} + 1) = \\ &= \frac{7}{8} \log(\sqrt{2} + 1) - 4\log(\sqrt{2} + 1) = -\frac{25}{8} \log(\sqrt{2} + 1) \end{aligned} \quad (1)$$

Άλλά, σύμφωνα με τό πόρισμα της § 152, έχουμε:

$$-\log(\sqrt{2} + 1) = \log\left(\frac{1}{\sqrt{2} + 1}\right) = \log(\sqrt{2} - 1) \quad (2)$$

Ή (1), λόγω της (2), γίνεται:

$$\frac{7}{16} \log(3 + 2\sqrt{2}) - 4\log(\sqrt{2} + 1) = \frac{25}{8} \log(\sqrt{2} - 1).$$

***§ 156. Συλλογάριθμος ενός αριθμοῦ.**—**Συλλογάριθμο** *ένος θετικοῦ ἀριθμοῦ* θ *ὡς* *πρός* *βάση* a (συμβολισμός: $\log_a \theta$), *ονομάζουμε* *τό λογάριθμο* *τοῦ ἀντίστροφου* *τοῦ* θ , δηλ. τοῦ $\frac{1}{\theta}$, *ὡς* *πρός* *τήν ἴδια* *βάση*.

Ὡστε:

$$\log_a \theta \equiv_{\text{ορσ}} \log_a \frac{1}{\theta} \quad (1)$$

$$\text{Άλλά: } \log_a \left(\frac{1}{\theta}\right) = \log_a 1 - \log_a \theta = 0 - \log_a \theta = -\log_a \theta.$$

Άρα:

$$\log_a \theta = -\log_a \frac{1}{\theta} = -\log_a \theta \quad (2)$$

Ή εισαγωγή τῶν συλλογαρίθμων μᾶς ἐπιτρέπει νά ἀντικαθιστοῦμε μία διαφορά λογαρίθμων μέ τό ἄθροισμά τους. Ἐτσι ἔχουμε:

$$\log_a \frac{\theta_1}{\theta_2} = \log_a \theta_1 - \log_a \theta_2 = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2.$$

Σημείωση. Ἀπό τή (2) ἔχουμε ὅτι:

$$\log_a \theta + \log_a \theta = 0 \quad (3)$$

*** § 157. Μερικές ἀξιοσημείωτες καί χρήσιμες ἐφαρμογές.**—Σ' αὐτή τήν παράγραφο θά συμπληρώσουμε τά συμπεράσματα τῶν προηγούμενων παραγράφων μέ τίς παρακάτω ἀξιοσημείωτες ιδιότητες τῆς ἐκθετικῆς καί λογαριθμικῆς συναρτήσεως:

1η. Ἄν θεωρηθεῖ γνωστό ὅτι : $\lim \left(1 + \frac{a}{v}\right)^v = e^a$ γιά κάθε $a \in \mathbb{R}$, νά ἀποδείξετε ὅτι ἰσχύει :

$$(i). \quad e^a \geq 1 + a \quad \text{για κάθε } a \in \mathbb{R}$$

$$(ii). \quad 1 - \frac{1}{a} \leq \log a \leq a - 1 \quad \text{για κάθε } a > 0.$$

***Απόδειξη.** (i) Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ ισχύει: $\frac{a}{v} \rightarrow 0$, οπότε για $\varepsilon = 1$ υπάρχει δείκτης $v_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος, ώστε: $\left| \frac{a}{v} \right| < 1$, δηλαδή: $-1 < \frac{a}{v} < 1$ για κάθε $v \geq v_0$.

Ωστε για κάθε $a \in \mathbb{R}$ τελικά ισχύει: $1 + \frac{a}{v} > 0$, οπότε, σύμφωνα με την ανισότητα του Bernoulli (βλ. Κεφ. II, σελ. 23) έχουμε:

$$\left(1 + \frac{a}{v}\right)^v \geq 1 + v \frac{a}{v} = 1 + a$$

καί συνεπώς (πόρισμα 2ο, § 55): $\lim \left(1 + \frac{a}{v}\right)^v = e^a \geq 1 + a, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$

(ii) Έστω $a > 0$, τότε ορίζεται ο νεπέριος λογάριθμος $\log a$ και όπως ξέρουμε (βλ. παρατήρηση 2, § 148) ισχύει: $e^{\log a} = a$. Η ανισότητα $e^a \geq 1 + a$ που αποδείξαμε προηγούμενως ισχύει για κάθε $a \in \mathbb{R}$, άρα θα ισχύει και αν στη θέση του a θέσουμε τον πραγματικό αριθμό $\log a$, οπότε θα έχουμε: $e^{\log a} = a \geq 1 + \log a$. Άρα: $\log a \leq a - 1$ (1)

Από την (1), επειδή για $a > 0$ είναι και $\frac{1}{a} > 0$, λαμβάνουμε:

$$\log \frac{1}{a} \leq \frac{1}{a} - 1 \iff -\log a \leq \frac{1}{a} - 1 \iff \log a \geq 1 - \frac{1}{a} \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) τελικά έχουμε ότι:

$\forall a > 0$	$1 - \frac{1}{a} \leq \log a \leq a - 1$
-----------------	--

(3)

2η. Νά αποδείξετε ότι: για κάθε ακολουθία (a_n) θετικών όρων με $a_n \rightarrow a$, όπου $a > 0$, ισχύει:

$$\log a_n \rightarrow \log a.$$

***Απόδειξη.** Από την ανισότητα (3) της προηγούμενης εφαρμογής έχουμε:

$$1 - \frac{a}{a_n} \leq \log \frac{a_n}{a} \leq \frac{a_n}{a} - 1$$

Αλλά $\frac{a_n}{a} \rightarrow 1$, $\frac{a}{a_n} \rightarrow 1$, οπότε, σύμφωνα με την ιδιότητα των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών (§ 54), θα έχουμε: $\log \frac{a_n}{a} \rightarrow 0$.

Άλλά: $\log \frac{a_n}{a} = \log a_n - \log a$. Άρα:

$$\log \frac{a_n}{a} \rightarrow 0 \iff \log a_n - \log a \rightarrow 0 \iff \log a_n \rightarrow \log a.$$

***Ανακεφαλαίωση.** Οί όρισμοί και οί κυριότερες ιδιότητες των λογαρίθμων που απορρέουν από τις προηγούμενες παραγράφους συνοψίζονται στον επόμενο πίνακα:

ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ ΩΣ ΠΡΟΣ ΒΑΣΗ α ($0 < \alpha \neq 1$)	ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ
α) ὁρισμός: $\forall \theta \in \mathbf{R}^+ \text{ ἰσχύει:}$ $\log_{\alpha} \theta = x \iff \alpha^x = \theta$ ὁρίζεται ἔτσι ἡ ἀκόλουθη συνάρτηση: $\log_{\alpha}: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}: x \rightarrow \log_{\alpha} x$ ἡ ὁποία εἶναι γνησίως αὐξουσα γιὰ $\alpha > 1$ καὶ γνησίως φθίνουσα γιὰ $0 < \alpha < 1$. β) Ἰδιότητες: $\forall \theta, \theta_1, \theta_2 \in \mathbf{R}^+ \text{ ἰσχύει:}$ $\alpha^{\log_{\alpha} \theta} = \theta$ $\log_{\alpha} \theta_1 = \log_{\alpha} \theta_2 \iff \theta_1 = \theta_2$ $\log_{\alpha} 1 = 0, \log_{\alpha} \alpha = 1$ $\log_{\alpha} (\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_{\alpha} \theta_1 + \log_{\alpha} \theta_2$ $\log_{\alpha} \left(\frac{\theta_1}{\theta_2} \right) = \log_{\alpha} \theta_1 - \log_{\alpha} \theta_2$ $\log_{\alpha} \theta^{\beta} = \beta \cdot \log_{\alpha} \theta \quad (\beta \in \mathbf{R})$ $\log_{\alpha} \sqrt[n]{\theta} = \frac{1}{n} \log_{\alpha} \theta \quad (n \in \mathbf{N})$ $\log_{\alpha} \theta_1 > \log_{\alpha} \theta_2 \iff \theta_1 > \theta_2 \text{ γιὰ } \alpha > 1$ $\log_{\alpha} \theta_1 > \log_{\alpha} \theta_2 \iff \theta_1 < \theta_2, 0 < \alpha < 1$ γ) Τύπος ἀλλαγῆς βάσεως: $\log_{\beta} \theta = \frac{\log_{\alpha} \theta}{\log_{\alpha} \beta}$ δ) Συνέπειες τῶν ιδιοτήτων 4, 5, 6: Ἐὰν $xy > 0$, τότε: $\log_{\alpha} (xy) = \log_{\alpha} x + \log_{\alpha} y$ $\log_{\alpha} (x:y) = \log_{\alpha} x - \log_{\alpha} y$ $\log_{\alpha} x^{2k} = 2k \cdot \log_{\alpha} x , \quad (k \in \mathbf{Z})$	α') Ὅρισμός: $\forall \theta \in \mathbf{R}^+ \text{ ἰσχύει:}$ $\log \theta = x \iff 10^x = \theta$ ὁρίζεται ἔτσι ἡ ἀκόλουθη συνάρτηση: $\log: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}: x \rightarrow \log x.$ ἡ ὁποία εἶναι πάντοτε γνησίως αὐξουσα. β') Ἰδιότητες: $\forall \theta, \theta_1, \theta_2 \in \mathbf{R}^+ \text{ ἰσχύει:}$ $10^{\log \theta} = \theta$ $\log \theta_1 = \log \theta_2 \iff \theta_1 = \theta_2$ $\log 1 = 0, \log 10 = 1$ $\log (\theta_1 \cdot \theta_2) = \log \theta_1 + \log \theta_2$ $\log \left(\frac{\theta_1}{\theta_2} \right) = \log \theta_1 - \log \theta_2$ $\log \theta^{\beta} = \beta \cdot \log \theta \quad (\beta \in \mathbf{R})$ $\log \sqrt[n]{\theta} = \frac{1}{n} \log \theta \quad (n \in \mathbf{N})$ 8'). Προσέξτε! ἐπειδὴ $\alpha = 10 > 1$ ἰσχύει: $\log \theta_1 > \log \theta_2 \iff \theta_1 > \theta_2$ γ') Τύπος ἀλλαγῆς βάσεως: $\log_{\beta} \theta = \frac{\log \theta}{\log_{\alpha} \beta}$ δ') Συνέπειες τῶν ιδιοτήτων 4', 5', 6': Ἐὰν $xy > 0$, τότε: $\log (xy) = \log x + \log y$ $\log (x:y) = \log x - \log y$ $\log x^{2k} = 2k \cdot \log x \quad (k \in \mathbf{Z}).$

Σημείωση. Εἰδικὰ γιὰ $\alpha = e = 2,718 \dots > 1$, ἡ πρώτη στήλη τοῦ παραπάνω πίνακα μᾶς δίνει τίς ιδιότητες τῶν νεπερίων λογαρίθμων. Ὁ νεπερίος λογάριθμος τοῦ θ ($\theta > 0$) συνδέεται μέ τό δεκαδικό λογάριθμο τοῦ θ μέ τή σχέση:

$$\log \theta \simeq 2,30258 \cdot \log_{\alpha} \theta.$$

Ἐπίσης γιὰ τό νεπερίο λογάριθμο ἑνός ἀριθμοῦ $\theta > 0$ ἰσχύει καί ὁ τύπος:

$$1 - \frac{1}{\theta} \leq \log \theta \leq \theta - 1 < \theta$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

'Ομάδα Α'. 323. Νά αποδείξετε ότι είναι αληθείς οι παρακάτω ισότητες:

$$\begin{aligned} \alpha) \log 21 &= \log 3 + \log 7, & \beta) \log 2 \frac{1}{3} &= \log 7 - \log 3, & \gamma) \log 81 &= 4 \cdot \log 3, \\ \delta) \log 3 + 2 \cdot \log 4 - \log 12 &= 2 \log 2, & \epsilon) 3 \log 2 + \log 5 - \log 4 &= 1, \\ \sigma\tau) \frac{1}{2} \log 25 + \frac{1}{3} \log 8 + \frac{1}{5} \log 32 &= 1 + \log 2. \end{aligned}$$

324. "Αν $x, y, z \in \mathbf{R}^+$ νά εφαρμόσετε όλες τις δυνατές ιδιότητες τῶν λογαρίθμων στους:

$$\begin{aligned} 1) \log_3 3x \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{2x}}, & \quad 2) \log \frac{x^3 \sqrt{y}}{4 \sqrt{x} \cdot y^3}, & \quad 3) \log \frac{\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[10]{2}}{\sqrt[3]{18 \sqrt{2}}}, & \quad 4) \log \frac{5x^3 \sqrt[4]{y^2 z}}{7y^2 \cdot \sqrt{x^2 y z^2}}. \end{aligned}$$

325. "Αν $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^+$, νά αποδείξετε ότι: $\alpha^{\log \beta} = \beta^{\log \alpha}$.

326. Σέ ποίο λογαριθμικό σύστημα μέ βάση μεγαλύτερη από τό 1 ισχύει:

$$\alpha) 2(\log_x 8)^2 + \log_x 64 + \log_x 8 = 9, \quad \beta) \log_x \sqrt[3]{625} - \log_x \sqrt{125} + \frac{1}{6} = 0.$$

327. Νά αποδείξετε ότι: γιά κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}^+ - \{1\}$ ισχύει: $\log_\alpha \beta \cdot \log_\beta \gamma \cdot \log_\gamma \alpha = 1$.

328. "Αν $\alpha > 1, \beta > 1$ καί $\alpha^2 + \beta^2 = 7\alpha\beta$, νά αποδείξετε ότι:

$$\log \frac{\alpha + \beta}{3} = \frac{1}{2} (\log \alpha + \log \beta) \geq \sqrt{\log \alpha \cdot \log \beta}.$$

329. "Αν $\log(x^2 y^3) = \alpha$ καί $\log x - \log y = \beta$ νά εκφράσετε τό $\log x$ καί $\log y$ συναρτήσει τῶν α καί β .

330. "Αν $\log 2 \cdot \log 5 = \theta$, νά εκφράσετε τό $\log 2$ καί τό $\log 5$ συναρτήσει του θ . Γιά ποιές τιμές του θ τό πρόβλημα έχει λύση;

331. "Αν $\alpha > 1, \beta > 1$ νά υπολογιστεί ή τιμή τῆς παραστάσεως:

$$y = \log(\alpha^2 - 1) + \log(\beta^2 - 1) - \log[(\alpha\beta + 1)^2 - (\alpha + \beta)^2].$$

332. "Αν $\log 2 = 0,30103$, νά υπολογίσετε τήν τιμή τῆς παραστάσεως:

$$y = \frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{2} \log(2 + \sqrt{2}) + \frac{1}{2} \log(2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}) + \frac{1}{2} \log(2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}).$$

333. "Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}^+$ μέ $\beta \neq 1$ καί $\alpha\beta \neq 1$, νά αποδείξετε ότι: $\log_{\alpha\beta} \gamma = \frac{\log_\beta \gamma}{1 + \log_\beta \alpha}$.

334. Νά αποδείξετε ότι: $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdots \log_7 8 = 3$.

335. "Αν $\alpha, \beta, \gamma, \theta \in \mathbf{R}^+ - \{1\}$ καί οί α, β, γ είναι διαδοχικοί ὅροι γεωμετρικῆς προόδου, νά αποδείξετε ότι οί ἀριθμοί: $\log_\alpha \theta, \log_\beta \theta, \log_\gamma \theta$ είναι διαδοχικοί ὅροι ἀρμονικῆς προόδου.

336. "Αν γιά τούς διαφορετικούς μεταξύ τους θετικούς ἀριθμούς α, β, γ ισχύει:

$$\frac{\log \alpha}{\beta - \gamma} = \frac{\log \beta}{\gamma - \alpha} = \frac{\log \gamma}{\alpha - \beta}, \quad \text{νά αποδείξετε ότι: } \alpha^\alpha \cdot \beta^\beta \cdot \gamma^\gamma = 1.$$

337. "Αν $\varphi(x) = \log \frac{1-x}{1+x}$, τότε ισχύει: $\varphi(\alpha) + \varphi(\beta) = \varphi\left(\frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha\beta}\right)$

338. "Αν $0 < \alpha \neq 1$ καί $\beta = \frac{1}{2}(\alpha^x - \alpha^{-x})$, νά αποδείξετε ότι: $x = \log_\alpha(\beta + \sqrt{\beta^2 + 1})$.

339. "Αν $\alpha, \beta, x \in \mathbf{R}^+$ με $\alpha \neq 1, \beta \neq 1$ και $\alpha\beta \neq 1$, νά αποδείξετε ότι:

$$\log_{\alpha} x + \log_{\beta} x = \log_{\alpha\beta} (1 + \log_{\beta} \alpha)^2 \cdot \log_{\alpha\beta} x.$$

340. Νά αποδείξετε ότι: τó άθροισμα Σ_n τών n πρώτων όρων μις άριθμητικής προόδου μέ πρώτο όρο τό λογα και δεύτερο όρο τό λογβ είναι:

$$\Sigma_n = \frac{1}{2} \cdot \log \frac{\beta^{n(n-1)}}{\alpha^{n(n-3)}}.$$

341. "Αν οί διαφορετικοί μεταξύ τους θετικοί άριθμοί α, β, γ κατέχουν άντιστοίχως τίς τάξεις μ, ν, ρ σέ μία γεωμετρική και σέ μία άρμονική πρόοδο, νά αποδείξετε ότι:

$$\alpha(\beta - \gamma)\log \alpha + \beta(\gamma - \alpha)\log \beta + \gamma(\alpha - \beta)\log \gamma = 0.$$

* Όμάδα Β'. 342. "Εστω ή συνάρτηση f μέ τύπο: $f(x) = \log | \log x |$.

Νά βρείτε: (i) Γιά ποιές τιμές τοῦ x ή συνάρτηση είναι όρισμένη.

(ii) Γιά ποιές τιμές τοῦ x ή συνάρτηση μηδενίζεται.

(iii) Τόν πληθικό άριθμό $\nu(A)$ τοῦ συνόλου $A = \{x \in \mathbf{Z}: f(x) < 0\}$.

343. Νά βρείτε τό άθροισμα τών n πρώτων όρων τής σειράς $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$, άν $\alpha_v = \log 3^v$.

344. "Αν $x, y \in \mathbf{R}^+$, $0 < \alpha \neq 1, 0 < \beta \neq 1$ και $\alpha^x = \beta^y, x^b = y^a$, νά αποδείξετε ότι:

$$\left(\frac{x}{\log_{\alpha} \beta} \right)^a = \left(\frac{y}{\log_{\beta} \alpha} \right)^b$$

345. "Εχοντας υπόψη ότι: $\pi^2 = (3,14\dots)^2 < 10$, νά αποδείξετε ότι ισχύει:

$$\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi} > 2.$$

346. "Αν $\alpha, \beta \in \mathbf{R}, \alpha \neq \beta$, νά αποδείξετε ότι: $\frac{e^{\alpha} + e^{\beta}}{2} > e^{\frac{\alpha+\beta}{2}}$.

347. "Αν $0 < \alpha < \beta$, νά αποδείξετε ότι: $\frac{2}{\sqrt{\beta}} \leq \frac{\log \beta - \log \alpha}{\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}} \leq \frac{2}{\sqrt{\alpha}}$. "Από αυτό κα-

τόπιν νά συμπεράνετε ότι: $\frac{2}{3} < \log 2,25 < 1$.

* Υπόδειξη. Ξέρουμε ότι: γιά κάθε $\theta > 0$ ισχύει: $1 - \frac{1}{\theta} \leq \log \theta \leq \theta - 1 < \theta$.

348. "Αν θεωρηθεί ως γνωστό ότι: $\lim \left(1 + \frac{1}{v} \right)^v = e$, νά αποδείξετε ότι ή σειρά

$\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$, μέ γενικό όρο $\alpha_v = v \{ \log(v+1) - \log v \}$ δέ συγκλίνει στό $\mathbf{R}$.

* Υπόδειξη. Νά λάβετε υπόψη τή 2η εφαρμογή τής § 157 και τήν § 99.

349. Νά αποδείξετε ότι οί σειρές $\sum_{v=2}^{\infty} \alpha_v$ και $\sum_{v=2}^{\infty} \beta_v$ μέ γενικούς όρους άντιστοίχως:

$$\alpha_v = \sqrt[v]{\log v}, \quad \beta_v = \frac{1}{\log v}$$

* Υπόδειξη. Νά αποδείξετε ότι: $\sqrt[v]{\log v} \rightarrow 1$ (βλ. και άσκ. 117). "Επίσης είναι: $\log v < v$.

350. "Εστω οί σειρές μέ θετικούς όρους: $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$ και $\sum_{v=1}^{\infty} \log(1 + \alpha_v)$. Νά αποδείξετε ότι:

άν ή μία από αυτές συγκλίνει (άντ. άπειρίζεται θετικά), τότε και ή άλλη συγκλίνει (άντ. άπειρίζεται θετικά). **Έφαρμογή:** $\alpha_v = \frac{1}{v}$.

Υπόδειξη. Για $x > -1$ ισχύει: $\frac{x}{1+x} \leq \log(1+x) \leq x$ (γιατί;). Κατόπιν νά λάβετε υπόψη τή δεύτερη έφαρμογή τής § 103.

351. Έχοντας υπόψη τήν ανισότητα (3) τής § 157 νά αποδείξετε ότι για κάθε φυσικό άριθμό n ισχύει:

$$\frac{1}{v+1} < \log(v+1) - \log v < \frac{1}{v}$$

Στή συνέχεια νά συμπεράνετε ότι ή άκολουθία (α_v) μέ γενικό όρο:

$$\alpha_v = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{v}$$

άπειρίζεται θετικά.

Υπόδειξη. Νά λάβετε υπόψη και τήν προηγούμενη άσκηση.

352. "Αν $\alpha, \beta, x \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ και ισχύει: $\log_\rho \alpha \cdot \log_\lambda \beta = \frac{1}{4}$, όπου $\rho = \beta^2$, $\lambda = x^2$, νά αποδείξετε ότι ό x δέν εξαρτάται από τό β .

Υπόδειξη. Νά λάβετε υπόψη τό πόρισμα 2ο τής § 154.

353. "Αν $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ και είναι διάφοροι από τόν α , όπου $0 < \alpha \neq 1$, νά αποδείξετε ότι:

$$\left(y = \alpha^{\frac{1}{1-\log_\alpha x}} \wedge z = \alpha^{\frac{1}{1-\log_\alpha y}} \right) \Rightarrow x = \alpha^{\frac{1}{1-\log_\alpha z}}$$

354. "Αν $\alpha, x, y \in \mathbb{R}^+$ και $y < x$, νά αποδείξετε ότι: $\frac{1}{x} \log(1+\alpha^x) < \frac{1}{y} \log(1+\alpha^y)$.

Υπόδειξη. Νά διακρίνετε τίσ περιπτώσεις: (i) $\alpha = 1$, (ii) $0 < \alpha < 1$, (iii) $\alpha > 1$.

355. Νά αποδείξετε ότι: για κάθε $\alpha > 0$ ή άκολουθία (γ_v) μέ γενικό όρο:

$$\gamma_v = (1+\alpha)(1+\alpha^2) \dots (1+\alpha^v)$$

είναι γνησίως αύξουσα και ίκανοποιεί τή σχέση: $0 < \gamma_v < e^{\frac{1-\alpha^v}{1-\alpha}} \forall v \in \mathbb{N}$.

Είδικά για $0 < \alpha < 1$, νά αποδείξετε ότι υπάρχουν άριθμοί M πού εξαρτώνται από τό α , ώστε νά ισχύει: $\gamma_v < M \forall v \in \mathbb{N}$. Τέλος, νά αποδείξετε ότι: για $0 < \alpha < 1$ ισχύει:

$$\frac{1}{1-\alpha} \leq \lim \gamma_v \leq e^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}.$$

Υπόδειξη. Για κάθε $x > 0$ ισχύει $e^x > 1+x$ (βλ. 1η έφαρμογή, § 157). Έπίσης νά λάβετε υπόψη και τήν άσκηση 23 (1) τής σελίδας 27.

II. ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

§ 158. Όρισμοί - Ιδιότητες. — Όπως μάθαμε και στην § 147 οί λογάριθμοι ως πρós βάση 10 όνομάζονται **δεκαδικοί λογάριθμοι** και παριστάνονται μέ λογ αντί $\log_{10}$. Έτσι έχουμε:

$$\log \theta = x \iff 10^x = \theta$$

(1)

Από τήν παραπάνω ίσοδυναμία συμπεραίνουμε ότι:

Δεκαδικός λογάριθμος ενός θετικού αριθμού θ είναι ο πραγματικός αριθμός x στον οποίο πρέπει να υψωθεί η βάση 10 για να δώσει τον αριθμό θ .

Έτσι, π.χ., έχουμε:

$$\log 100 = 2, \text{ επειδή } 10^2 = 100 \quad \parallel \quad \log 1000 = 3, \text{ επειδή } 10^3 = 1000$$

$$\log 0,01 = -2, \text{ επειδή } 10^{-2} = 0,01 \quad \parallel \quad \log \sqrt[5]{10^3} = \frac{3}{5}, \text{ επειδή } 10^{3/5} = \sqrt[5]{10^3}.$$

Στά επόμενα θα ασχοληθούμε **μόνο** με δεκαδικούς λογαρίθμους. Έτσι στο εξής με τον όρο: «**λογάριθμος**» θα εννοούμε: «**δεκαδικό λογάριθμο**».

Οι ιδιότητες των δεκαδικών λογαρίθμων έχουν καταγραφεί στη δεύτερη στήλη του πίνακα της σελίδας 219. Επιπλέον, σύμφωνα και με τό πόρισμα της § 155, έχουμε:

$$\theta > 1 \iff \log \theta > 0 \quad \text{καί} \quad 0 < \theta < 1 \iff \log \theta < 0.$$

Επίσης είναι:

$$\log \theta \equiv \log_{10} \theta = \frac{\log \theta}{\log 10} = M \cdot \log \theta, \text{ όπου } M = \frac{1}{\log 10} = \frac{\log e}{\log 10} = \log e = 0,43429 \dots$$

Ειδικότερα για τους δεκαδικούς λογαρίθμους ισχύουν:

α) Ο **λογάριθμος** μιας δυνάμεως του 10 με εκθέτη **ρητό** αριθμό είναι **ίσος** με τό **ρητό** εκθέτη.

Δηλαδή: αν $\rho \in \mathbb{Q}$, τότε $\log 10^\rho = \rho$.

Στήν ειδική περίπτωση πού $\rho \in \mathbb{Z}$, ο λογάριθμος του 10^ρ είναι ο ακέραιος αριθμός ρ . Έτσι π.χ. $\log 100 = \log 10^2 = 2$, $\log 0,01 = \log 10^{-2} = -2$.

Είναι χρήσιμο να ξέρουμε από μνήμης τους λογαρίθμους μερικών αριθμών:

x	...	0,0001	0,001	0,01	0,1	1	10	100	1000	10000	...
log x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...

β) Οι **λογάριθμοι** των αριθμών πού δέν είναι δυνάμεις του 10 με εκθέτη **ρητό** αριθμό είναι **αρρητοι** αριθμοί.

Πράγματι, ας θεωρήσουμε έναν (θετικό) αριθμό θ με $\theta \neq 10^\rho$, όπου $\rho \in \mathbb{Q}$, και ας υποθέσουμε ότι $\log \theta = \frac{\mu}{\nu}$, όπου $\mu \in \mathbb{Z}$ και $\nu \in \mathbb{N}$. Τότε, σύμφωνα με τήν **ισοδυναμία** (1), θα έχουμε: $\theta = 10^{\frac{\mu}{\nu}} \equiv 10^\rho$, όπου $\rho \in \mathbb{Q}$. Αυτό όμως είναι άτοπο, λόγω της υποθέσεως πού κάναμε για τό θ .

Από τά παραπάνω συμπεραίνουμε ότι: Οι **λογάριθμοι όλων των θετικών αριθμών**, εκτός από τίς δυνάμεις του 10 με **ρητό** εκθέτη, είναι **αρρητοι** αριθμοί και κατά συνέπεια δέν υπολογίζονται ακριβώς, αλλά κατά προσέγγιση μιας **δεκαδικής μονάδας** (συνήθως υπολογίζονται κατά προσέγγιση 0,00001).

γ) Αν οί **θετικοί** αριθμοί θ_1 και θ_2 έχουν **πηλίκο** **ακέραιη δύναμη** του 10, τότε ο $(\log \theta_1 - \log \theta_2)$ είναι **ακέραιος** αριθμός.

Πράγματι, επειδή $\theta_1 = 10^k \cdot \theta_2$, μέ $k \in \mathbb{Z}$, έχουμε: $\log \theta_1 = \log 10^k + \log \theta_2 = k + \log \theta_2$. Άρα: $\log \theta_1 - \log \theta_2 = k \quad (k \in \mathbb{Z})$.

§ 159. Χαρακτηριστικό και δεκαδικό μέρος ενός λογαρίθμου.—

*Εστω ότι θέλουμε να βρούμε τό $\log 557$.

*Επειδή $10^2 < 557 < 10^3$, λογαριθμίζοντας και τὰ τρία μέλη θά έχουμε:

$$2 < \log 557 < 3.$$

*Άρα: $\log 557 = 2, \dots$

*Επομένως: $\log 557 = 2 + d$, όπου d είναι ένας θετικός αριθμός μικρότερος από τή μονάδα.

Τό άκέραιο μέρος του λογαρίθμου (στό παραπάνω παράδειγμα ο αριθμός 2) λέγεται «**χαρακτηριστικό**» του λογαρίθμου και ο θετικός και μικρότερος από τή μονάδα δεκαδικός αριθμός d λέγεται «**δεκαδικό μέρος**» του λογαρίθμου. Τό χαρακτηριστικό του λογαρίθμου ενός αριθμού θ , ($\theta > 0$) τό παριστάνουμε μέ $[\log \theta]$.

*Από τό παραπάνω παράδειγμα και τόν όρισμό του χαρακτηριστικού ενός λογαρίθμου παρατηρούμε ότι ως χαρακτηριστικό ενός λογαρίθμου όρίζουμε τό μικρότερο από δύο διαδοχικούς άκεραίους μεταξύ των οποίων βρίσκεται ο λογάριθμος αυτός. Έτσι έχουμε:

*Αν $\log \alpha = 5,03426$, τότε $[\log \alpha] = 5$ και $d = 0,03426$.

*Αν $\log \gamma = -2,32715$, τότε $[\log \gamma] = -3$, επειδή $-3 < -2,32715 < -2$.

Τό δεκαδικό μέρος του λογαρίθμου είναι μηδέν μόνο για τις άκέραιες δυνάμεις του 10 και θετικό σε κάθε άλλη περίπτωση.

*Όστε: Τό δεκαδικό μέρος ενός λογαρίθμου είναι μή άρνητικός αριθμός.

*Αν d είναι τό δεκαδικό μέρος του $\log \theta$ και $[\log \theta]$ τό χαρακτηριστικό του, τότε από τή σχέση: $\log \theta = [\log \theta] + d$ προκύπτει: $d = \log \theta - [\log \theta]$

*Έτσι έχουμε: αν $\log \theta = -3,45217$, τότε $[\log \theta] = -4$ και $d = -3,45217 - (-4) = 0,54783$.

* Παρατηρήσεις: α) Πιο γενικά: ως χαρακτηριστικό του $\log_a \theta$ μέ $a, \theta \in \mathbb{R}^+$ και $a \neq 1$ ονομάζουμε τό άκέραιο μέρος (§ 44) του πραγματικού αριθμού $\log_a \theta$, δηλαδή τό μεγαλύτερο άκέραιο αριθμό k για τόν οποίο ισχύει:

$$k \leq \log_a \theta < k + 1 \quad (1)$$

*Από τόν παραπάνω όρισμό συμπεραίνουμε ότι τό χαρακτηριστικό του $\log_a \theta$ είναι πάντοτε ένας άκέραιος αριθμός (θετικός, άρνητικός ή τό μηδέν). Έξάλλου, επειδή $\log_a a = 1$, ή (1) γράφεται:

$$k \cdot \log_a a \leq \log_a \theta < (k + 1) \log_a a \Rightarrow \log_a (a^k) \leq \log_a \theta < \log_a (a^{k+1}) \quad (2)$$

Διακρίνουμε τώρα τις περιπτώσεις:

$$(i) \text{ *Αν } a > 1, \text{ τότε από τή (2) έχουμε: } a^k \leq \theta < a^{k+1} \quad (3)$$

δηλαδή οι αριθμοί θ που ανήκουν στο διάστημα $[a^k, a^{k+1})$, και μόνο αυτοί, έχουν λογαρίθμους ως προς βάση a με χαρακτηριστικό τόν άκέραιο αριθμό k .

Στήν ειδική περίπτωση που είναι $\alpha = 10$, ή (3) γράφεται: $10^k \leq \theta < 10^{k+1}$ (4)

Από την (4) συμπεραίνουμε τώρα ότι: *οι θετικοί αριθμοί θ που έχουν δεκαδικούς λογαριθμούς με χαρακτηριστικό k είναι αυτοί που έχουν $k + 1$ άκεραια ψηφία ($k \in \mathbb{N}_0$)*. Έπίσης από την (4) συμπεραίνουμε ότι: *το χαρακτηριστικό του δεκαδικού λογαρίθμου ενός θετικού αριθμού θ είναι ο εκθέτης της μεγαλύτερης άκεραιης δυνάμεως του 10, ή οποία δεν υπερβαίνει τον αριθμό αυτό*.

(ii) *Αν $0 < \alpha < 1$, τότε από τη (2) έχουμε: $\alpha^k \geq \theta > \alpha^{k+1}$ (5)
δηλαδή οι αριθμοί που ανήκουν στο διάστημα $(\alpha^{k+1}, \alpha^k]$ έχουν λογαρίθμους με χαρακτηριστικό k .

β). Είδαμε προηγουμένως ότι: αν $[\log \theta] = k$, $k \in \mathbb{Z}$, τότε ισχύει:

$$10^k \leq \theta < 10^{k+1} \quad (6)$$

*Αντιστρόφως, αν ισχύει η (6), τότε $[\log \theta] = k$. Πράγματι, από την (6) έχουμε: $\log 10^k \leq \log \theta < \log 10^{k+1}$, δηλ. $k \leq \log \theta < k + 1$. Άρα $[\log \theta] = k$, επειδή ο k είναι ο μεγαλύτερος άκεραιος που δεν υπερβαίνει το $\log \theta$.

γ) Όπως ξέρουμε (§ 44, α) για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $x = [x] + d$, όπου $0 \leq d < 1$. Άρα: $\log \theta = [\log \theta] + d$ με $0 \leq d < 1$. Αυτόν το μη άρνητικό αριθμό d τον ονομάζουμε *δεκαδικό μέρος* του $\log \theta$.

§ 160. Τροπή άρνητικού λογαρίθμου σέ ήμιαρνητικό.—Είπαμε παραπάνω ότι το δεκαδικό μέρος ενός λογαρίθμου είναι μη άρνητικός αριθμός· επειδή όμως οι λογάριθμοι των θετικών αριθμών που είναι μικρότεροι από τη μονάδα είναι άρνητικοί, και τέτοιοι λογάριθμοι δεν είναι εύκολοι στη χρήση γι' αυτό τους άρνητικούς λογαρίθμους τους μετατρέπουμε σέ «*ήμιαρνητικούς*», δηλαδή σέ λογαρίθμους που έχουν *μόνο* το άκεραίο μέρος τους (χαρακτηριστικό) άρνητικό, ενώ το δεκαδικό τους μέρος είναι θετικό.

Η μετατροπή αυτή γίνεται ως εξής:

*Εστω $-2,54327$ ή $-2 - 0,54327$ ο λογάριθμος κάποιου αριθμού· αν σ' αυτό προσθέσουμε τό -1 και $+1$ (και έτσι ο αριθμός δεν αλλάξει) λαμβάνουμε:

$$-2 - 1 + 1 - 0,54327 = -3 + (1 - 0,54327) = -3 + 0,45673.$$

*Ωστε είναι:

$$-2,54327 = -3 + 0,45673.$$

Συμφωνούμε νά γράφουμε τόν αριθμό $-3 + 0,45673$ ως εξής: $\bar{3},45673$ · δηλαδή γράφουμε τό $-$ πάνω από τό άκεραίο μέρος γιά νά δείξουμε ότι *μόνο* αυτό είναι άρνητικό. *Ετσι φαίνεται, ότι τό χαρακτηριστικό του λογαρίθμου είναι τό άκεραίο μέρος -3 , επειδή $-3 < -2,54327 < -2$, και δεκαδικό μέρος του λογαρίθμου είναι τό δεκαδικό μέρος που είναι γραμμένο, επειδή αυτό είναι ή διαφορά που προκύπτει αν από τό λογάριθμο $-3 + 0,45673$ αφαιρέσουμε τό χαρακτηριστικό του -3 .

*Από τά παραπάνω έχουμε τόν εξής πρακτικό κανόνα:

Κανόνας: Γιά νά μετατρέψουμε έναν άρνητικό λογάριθμο σέ ήμιαρνητικό, αυξάνουμε τήν απόλυτη τιμή του άκεραίου κατά 1, στόν αριθμό που προκύπτει γράφουμε από πάνω τό $-$, και δεξιά απ' αυτόν γράφουμε ως δεκαδικά ψηφία τούς αριθμούς που βρίσκουμε, αν αφαιρέσουμε κάθε ψηφίο του δεκαδικού μέρους του λογαρίθμου που μās δόθηκε από τό 9 και του τελευταίου από τό 10.

*Ετσι, π.χ.: *Αν $\log \theta = -3,85732$, θά έχουμε: $\log \theta = \bar{4},14268$.

*Αν $\log \theta = -2,35724$, θά έχουμε: $\log \theta = \bar{3},64276$.

§ 161. 'Ιδιότητες τῶν δεκαδικῶν λογαρίθμων.— α) Τό χαρακτηριστικό τοῦ λογαρίθμου ἑνός ἀριθμοῦ θ εἶναι ὁ ἐκθέτης τῆς μεγαλύτερης ἀκέραιης δυνάμεως τοῦ 10, ἡ ὁποία δέν ὑπερβαίνει τόν ἀριθμό αὐτό.

*Απόδειξη. Ὡς πάρουμε ἕνα ἀριθμητικό παράδειγμα. Ὡς τῶ ὅτι θέλουμε νά βροῦμε τό χαρακτηριστικό τοῦ: $\log 257$.

Ἐπειδή: $10^2 = 100 < 257 < 1000 = 10^3$ (1)

ἂν λάβουμε τούς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν πού βρίσκονται στά τρία μέλη τῆς (1), θά ἔχουμε: $2 < \log 257 < 3$.

Δηλαδή: $\log 257 = 2 + d$, ὅπου $0 < d < 1$, καί συνεπῶς $[\log 257] = 2$.

*Ἐστῶ τώρα ὅτι θέλουμε νά βροῦμε τό $[\log \theta]$. Ἄν 10^k εἶναι ἡ μεγαλύτερη ἀκέραιη δύναμη τοῦ 10 πού δέν ὑπερβαίνει τό (θετικό) ἀριθμό θ , τότε θά ἔχουμε:

$$10^k \leq \theta < 10^{k+1}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

ὁπότε: $k \leq \log \theta < k + 1$.

Τότε ὅμως ὁ $\log \theta$ θά εἶναι ἴσος ἢ μέ k ἢ μέ $k + d$, ὅπου $0 < d < 1$.

*Ἀρα τό χαρακτηριστικό τοῦ $\log \theta$ εἶναι ἴσο μέ k .

β) Τό χαρακτηριστικό τοῦ λογαρίθμου ἑνός ἀριθμοῦ $\theta > 1$ εἶναι μικρότερο κατά μία μονάδα ἀπό τό πλῆθος τῶν ψηφίων τοῦ ἀκέραιου μέρους τοῦ θ .

Δηλαδή: ἂν k εἶναι τό πλῆθος τῶν ψηφίων τοῦ ἀκέραιου μέρους τοῦ θ , τότε τό χαρακτηριστικό τοῦ $\log \theta$ θά εἶναι $(k - 1)$.

*Απόδειξη. Ὡς πάρουμε πάλι ἕνα ἀριθμητικό παράδειγμα. Ὡς τῶ $\theta = 23,5$.

Ἐπειδή $10 < 23,5 < 100$, δηλ. $10^1 < 23,5 < 10^2$,

δηλ. $10^{2-1} < 23,5 < 10^2$,

θά ἔχουμε: $(2 - 1) < \log 23,5 < 2$.

*Ἀρα: $[\log 23,5] = 1 = 2 - 1$.

*Ἐστῶ τώρα ὅτι θέλουμε νά βροῦμε τό $[\log \theta]$, ὅπου $\theta > 1$. Ἄν τό ἀκέραιο μέρος τοῦ θ ἔχει k ψηφία, τότε ὁ θ θά περιέχεται μεταξύ τῶν 10^{k-1} καί 10^k , δηλ. θά ἔχουμε:

$$10^{k-1} \leq \theta < 10^k \Rightarrow (k - 1) \leq \log \theta < k.$$

*Ἀρα τό χαρακτηριστικό τοῦ $\log \theta$ εἶναι ἴσο μέ $(k - 1)$.

*Ἐτσι, π.χ. ἔχουμε: $\log 5378,4 = 3, \dots, \log 3,748 = 0, \dots$

γ) Τό χαρακτηριστικό τοῦ λογαρίθμου ἑνός θετικοῦ ἀριθμοῦ $\theta < 1$, ὁ ὁποῖος εἶναι γραμμένος μέ δεκαδική μορφή, ἔχει τόσες ἀρνητικές μονάδες ὅση εἶναι ἡ τάξη τοῦ πρώτου σημαντικοῦ ψηφίου του μετά τήν ὑποδιαστολή.

*Απόδειξη. Ὡς τῶ, π.χ. ὅτι $\theta = 0,025$, τότε: $10^{-2} < \theta = 0,025 < 10^{-1}$

(γιατί: $\frac{1}{100} < \frac{25}{1000} < \frac{1}{10} \iff \frac{1}{100} < \frac{1}{40} < \frac{1}{10} \iff 10 < 40 < 100$)

ὁπότε: $\log 10^{-2} < \log 0,025 < \log 10^{-1}$

ἢ $-2 < \log 0,025 < -1$,

ἄρα: $[\log 0,025] = -2$.

Έστω τώρα ότι θέλουμε να βρούμε τό $[\log \theta]$, όπου $0 < \theta < 1$. Αν k είναι ή τάξη του πρώτου σημαντικού ψηφίου μετά την υποδιαστολή στή δεκαδική μορφή του θ , θά είναι:

$$10^{-k} \leq \theta < 10^{-k+1},$$

όπότε: $\log 10^{-k} \leq \log \theta < \log 10^{-k+1}$,

δηλ. $-k \leq \log \theta < -k + 1$.

Άρα: $[\log \theta] = -k$.

Έτσι, π.χ. έχουμε: $\log 0,00729 = \bar{3}$, ..., $\log 0,27508 = \bar{1}$, ...

Παρατήρηση. Έφαρμόζοντας τις παραπάνω ιδιότητες μπορούμε να βρίσκουμε από μνήμης τό χαρακτηριστικό του λογαρίθμου ενός αριθμού.

Αντιστρόφως: από τις ιδιότητες β και γ έχουμε:

δ) Αν τό χαρακτηριστικό του λογαρίθμου ενός αριθμού (θετικού) x είναι αριθμός θετικός ή μηδέν, τότε ό αριθμός x έχει τόσα άκέραια ψηφία, όσες μονάδες έχει τό χαρακτηριστικό και ένα ακόμη. Αν ό λογάριθμος του x είναι ήμισυ αρνητικός, τότε τό άκέραιο μέρος του x είναι τό μηδέν, και τό πρώτο σημαντικό ψηφίο του x μετά την υποδιαστολή κατέχει τάξη ίση μέ τό πλήθος των μονάδων της απόλυτης τιμής του χαρακτηριστικού.

Έτσι, αν τό χαρακτηριστικό του λογαρίθμου ενός αριθμού είναι 3, τό άκέραιο μέρος αυτού του αριθμού έχει τέσσερα ψηφία: αν τό χαρακτηριστικό είναι 0, τό άκέραιο μέρος του αριθμού έχει ένα ψηφίο: αν τό χαρακτηριστικό είναι $\bar{2}$, ό αριθμός είναι δεκαδικός τής μορφής $0,0y_1y_2y_3y_4 \dots$, όπου $1 \leq y_i \leq 9$.

ε) Αν πολλαπλασιάσουμε (ή διαιρέσουμε) έναν αριθμό μέ 10^v , $v \in \mathbb{N}$, τό δεκαδικό μέρος του λογαρίθμου δέ μεταβάλλεται, τό χαρακτηριστικό όμως αυξάνεται (ή ελαττώνεται) κατά v μονάδες.

Απόδειξη. Έστω ό θετικός αριθμός θ μέ $\log \theta = y_0, y_1y_2y_3 \dots$

Πολλαπλασιάζοντας τόν αριθμό θ μέ 10^v , $v \in \mathbb{N}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \log(10^v \cdot \theta) &= \log 10^v + \log \theta = v + \log \theta = v + y_0, y_1y_2y_3 \dots = \\ &= (y_0 + v), y_1y_2y_3 \dots \end{aligned} \quad (1)$$

Επίσης αν διαιρέσουμε τό θ μέ 10^v , $v \in \mathbb{N}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{\theta}{10^v}\right) &= \log \theta - \log 10^v = -v + \log \theta = -v + y_0, y_1y_2y_3 \dots = \\ &= (y_0 - v), y_1y_2y_3 \dots \end{aligned} \quad (2)$$

Οί ισότητες (1) και (2) δείχνουν ότι ενώ τό δεκαδικό μέρος του $\log(\theta \cdot 10^k)$, $k \in \mathbb{Z}$, είναι τό ίδιο μέ τό δεκαδικό μέρος του $\log \theta$, τό χαρακτηριστικό όμως του $\log(\theta \cdot 10^k)$ αυξάνεται σέ σχέση μέ τό χαρακτηριστικό του $\log \theta$ κατά k άκέραιες μονάδες, αν k είναι μή άρνητικός άκέραιος ή ελαττώνεται κατά k άκέραιες μονάδες, αν k είναι άρνητικός άκέραιος αριθμός.

Σύμφωνα μέ την πιό πάνω ιδιότητα οί αριθμοί, π.χ., 5, 50, 500, 5000, ... έχουν τό ίδιο δεκαδικό μέρος στό λογάριθμό τους. Επίσης οί αριθμοί: 0,5, 0,05, 0,005, 0,0005, ...

Πόρισμα.— "Αν δύο αριθμοί γραμμένοι σε δεκαδική μορφή έχουν τα ίδια ψηφία και με την ίδια τάξη διαφέρουν όμως ως προς τη θέση της υποδιαστολής, οι λογάριθμοί τους θα διαφέρουν μόνο ως προς το χαρακτηριστικό τους.

"Αν είναι, π.χ., $\log 312,865 = 2,49536$, τότε θα είναι:

$$\log 31,2865 = 1,49536$$

$$\log 31286,5 = 4,49536$$

$$\log 0,312865 = \bar{1},49536$$

$$\log 3,12865 = 0,49536.$$

§ 162. Πράξεις στους δεκαδικούς λογαρίθμους.—Οι πράξεις στους δεκαδικούς λογαρίθμους γίνονται όπως και στους δεκαδικούς αριθμούς, με μερικές παραλλαγές, όταν οι λογάριθμοι έχουν αρνητικό χαρακτηριστικό. Έχουμε τις εξής πράξεις:

α') Πρόσθεση λογαρίθμων. Για να προσθέσουμε δεκαδικούς λογαρίθμους προσθέτουμε τα δεκαδικά μέρη (πού είναι όλα θετικά) και το άκεραιο μέρος του άθροισματός τους το προσθέτουμε αλγεβρικά στο (άλγεβρικό) άθροισμα των άκεραιων μερών των λογαρίθμων.

Π.χ. Νά γίνει η πρόσθεση: $\bar{2},85643 + 2,24482 + \bar{3},42105 + \bar{1},24207$. Έχουμε:

$$\bar{2},85643$$

$$2,24482$$

$$\bar{3},42105$$

$$\bar{1},24207$$

$$\hline \bar{3},76437$$

Έδω το άθροισμα των δεκαδικών μερών έχει μία άκεραιη μονάδα και συνεπώς το άκεραιο μέρος του άθροισματος είναι:

$$1 + (-1) + (-3) + 2 + (-2) = -3 = \bar{3}.$$

β') Αφαίρεση λογαρίθμων. Για να αφαιρέσουμε δεκαδικούς λογαρίθμους αφαιρούμε τα δεκαδικά μέρη· αν από αυτή την αφαίρεση προκύψει τελικά κρατούμενο (αυτό είναι θετικό), το προσθέτουμε (άλγεβρικά) στο χαρακτηριστικό του αφαιρετέου και το άθροισμα πού προκύπτει το αφαιρούμε από το χαρακτηριστικό του μειωτέου.

Π.χ. 1) Νά γίνει η αφαίρεση: $\bar{2},83754 - \bar{5},32452$. Έχουμε:

$$\bar{2},83754$$

$$\bar{5},32452$$

$$\hline 3,51302$$

Έδω δέν υπάρχει κρατούμενο και το χαρακτηριστικό ίσούται με:

$$-2 - (-5) = 3.$$

2) Νά γίνει η αφαίρεση: $\bar{3},48765 - \bar{2},75603$. Έχουμε:

$$\bar{3},48765$$

$$\bar{2},75603$$

$$\hline \bar{2},73162$$

Έδω το τελικό κρατούμενο είναι 1 και το χαρακτηριστικό ίσούται

$$\text{μέ: } -3 - (-2 + 1) = -3 - (-1) = -2 = \bar{2}.$$

Παρατήρηση: Είναι γνωστό (§ 156) ότι: $\log \alpha - \log \beta = \log \alpha + \text{συλλογβ}$, δηλαδή η αφαίρεση ενός λογαρίθμου ανάγεται στην πρόσθεση του συλλογαρίθμου του.

Για να υπολογίσουμε το συλλογαρίθμο ενός (θετικού) αριθμού, όταν είναι γνωστός ο λογάριθμός του, προσθέτουμε στο χαρακτηριστικό του λογαρίθμου τό + 1 και αλλάζουμε το σημείο στο άθροισμα, και στη συνέχεια το δεκαδικό μέρος του λογαρίθμου τό αφαιρούμε από τη μονάδα.

Π.χ. 1) "Αν $\log \beta = 2,54675$. Τότε θα έχουμε: $\text{συλλογβ} = -\log \beta = -2,54675$ (1)

"Επειδή (§ 160) $-2,54675 = \bar{3},45325$, ή (1) γίνεται: $\text{συλλογβ} = \bar{3},45325$.

2) "Αν $\log \alpha = \bar{1},37260$, τότε $\text{συλλογ} \alpha = 0,62740$.

3) "Αν $\log 0,06543 = \bar{2},81578$, τότε $\text{συλλογ } 0,06543 = 1,18422$.

γ') Πολλαπλασιασμός ενός λογαρίθμου με άκერαιο αριθμό.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

i) "Αν ο άκεραιος είναι θετικός, τότε πολλαπλασιάζουμε το δεκαδικό μέρος του λογαρίθμου επί το θετικό άκერαιο και γράφουμε μόνο τα δεκαδικά ψηφία του γινομένου· το άκერαιο μέρος αυτού του γινομένου το προσθέτουμε αλγεβρικά στο γινόμενο· του χαρακτηριστικού επί το θετικό αριθμό.

Π.χ. Νά γίνει ο πολλαπλασιασμός: $\bar{2},65843 \times 4$. Έχουμε:

$$\bar{2},65843$$

Έδω το τελικό κρατούμενο είναι 2 και το χαρακτηριστικό του γινομένου ισούται με:

$$\begin{array}{r} 4 \\ \bar{2},65843 \\ \hline \end{array}$$

$$(-2) \cdot 4 + 2 = -6 = \bar{6}.$$

ii) "Αν ο άκεραιος είναι άρνητικός, τότε πολλαπλασιάζουμε το συλλογάρημο του αριθμού επί τον αντίθετο του άκεραίου. Άλλά τότε αναγόμεσθε στην πρώτη περίπτωση.

Π.χ. Νά γίνει ο πολλαπλασιασμός: $\bar{3},67942 \times (-4)$.

"Εστω $\log x = \bar{3},67942$, τότε $\text{συλλογ} x = 2,32058$

και συνεπώς: $\bar{3},67942 \times (-4) = 2,32058 \times 4 = 9,28232$.

δ') Διάρθρωση ενός λογαρίθμου με άκერαιο αριθμό.

1) Για να διαιρέσουμε το $\log \theta$ με θετικό άκერαιο (φυσικό) αριθμό k , εφόσον $\log \theta > 0$ εργαζόμαστε όπως και στους δεκαδικούς αριθμούς· αν όμως ο $\log \theta$ είναι ήμιαρνητικός, εργαζόμαστε ως εξής:

1α) "Αν ο k διαιρεί (άκριβώς) το χαρακτηριστικό του $\log \theta$, τότε διαιρούμε χωριστά το δεκαδικό μέρος και χωριστά το χαρακτηριστικό και προσθέτουμε τα πηλικά.

1β) "Αν ο k δέ διαιρεί το χαρακτηριστικό, τότε σ' αυτό το χαρακτηριστικό προσθέτουμε το μικρότερο άρνητικό άκერαιο $-m$ έτσι, ώστε: ο αριθμός που θα προκύψει να είναι διαιρετός διά του k . Μετά προσθέτουμε τό $+m$ στο δεκαδικό μέρος του λογαρίθμου και βρίσκουμε, χωριστά, τα πηλικά των δύο αυτών μερών (διά του k) και τελικά τα προσθέτουμε.

Π.χ. Νά γίνουν οι διαιρέσεις: 1) $(\bar{6},54782) : 3$ και 2) $(\bar{5},62891) : 3$

$\begin{array}{r l} 1) & \bar{6},54782 \\ \hline \bar{6} & \\ \hline 0 + 0,54782 & \\ \hline & 24 \\ & 07 \\ & 18 \\ & 02 \end{array}$	$\begin{array}{r l} & 3 \\ \hline & \bar{2} + 0,18260 = \\ \hline & = 2,18260 \end{array}$	$\begin{array}{r l} 2) & \bar{5},62891 \\ \hline \bar{5} + \bar{1} + \frac{1}{3} + 0,62891 & \\ \hline & \bar{6} + 1,62891 \\ \hline & \bar{6} \\ \hline 0 + 1,62891 & \\ \hline & 12 \\ & 08 \\ & 29 \\ & 21 \\ & 0 \end{array}$
$\begin{array}{r l} & 3 \\ \hline & \bar{2} + 0,54297 = \\ \hline & = \bar{2},54297 \end{array}$		

2) Για να διαιρέσουμε το $\log \theta$ διά του άρνητικού άκεραίου k , διαιρούμε το $\text{συλλογ} \theta$ διά του $-k > 0$.

Π.χ. **Νά γίνει η διαίρεση : (5,92158) : (-2).** Έχουμε:

"Αν $\log x = 5,92158$, τότε $\text{συλλογ} x = \overline{6},07842$, οπότε:

$$(5,92158) : (-2) = (\overline{6},07842) : 2 = \overline{3},03921.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ομάδα Α'. 356. **Νά γίνουν ημιαρνητικοί οι λογάριθμοι:**

- | | | | |
|-------------|-------------|-------------|--------------|
| 1) -2,32254 | 2) -0,69834 | 3) -1,27218 | 4) -3,54642 |
| 5) -0,41203 | 6) -5,78952 | 7) -0,00208 | 8) -2,05024. |

357. **Νά γράψετε το χαρακτηριστικό των λογαρίθμων των αριθμών:**

- | | | | | |
|---------|-------------------|----------|----------|-------------|
| 1) 135 | 2) 2050 | 3) 9,5 | 4) 0,003 | 5) 382,27 |
| 6) 47,5 | 7) $\frac{17}{3}$ | 8) 12,25 | 9) 0,56 | 10) 3041,7. |

358. **Πόσα άκέραια ψηφία έχει ένας αριθμός, του οποίου ο λογάριθμος έχει χαρακτηριστικό:**
3, 5, 0, 1, 7, 4, 2;

359. **Ο λογάριθμος ενός αριθμού έχει χαρακτηριστικό:** -1, -2, -3, -4, -5, -7.

Ποιά είναι η τάξη του πρώτου σημαντικού ψηφίου του αριθμού μετά την υποδιαστολή;

360. **Αν $\log \alpha = \overline{1},63819$ και $\log 4347 = 3,63819$, τότε νά υπολογίσετε τό α.**

361. **Αν είναι $\log 7283 = 3,86231$, νά υπολογίσετε τους λογαρίθμους των αριθμών:**
0,7283, 7,283, 0,007283, 728300, 728,3.

362. **Νά βρεθούν τά εξαγόμενα:**

$$\log 724 - \log 7,24, \quad \log 0,65 - \log 6,5, \quad \log 17,62 - \log 1,762.$$

363. **Αν $\log \alpha = \overline{2},29814$ και $\log \beta = \overline{2},84212$, νά υπολογίσετε τά:**

- | | | |
|---|---|----------------------------------|
| 1. $\log \alpha + \log \beta,$ | 2. $\log \alpha - \log \beta,$ | 3. $3\log \alpha + 5\log \beta,$ |
| 4. $2\log \beta - \frac{3}{4} \log \alpha,$ | 5. $\frac{7}{5} (\log \alpha + \log \beta) - \frac{3}{4} (\log \alpha - \log \beta).$ | |

364. **Νά υπολογίσετε τά άθροίσματα:**

- | |
|---|
| 1. $\overline{5},27124 + 3,4751 + \overline{1},81523 + 0,47214$ |
| 2. $4,67471 + \overline{2},14523 + 0,67215 + \overline{3},04703.$ |

365. **Νά εκτελέσετε τίς πράξεις:**

- | |
|--|
| 1. $\overline{3},24518 + 1,41307 - \overline{2},47503$ |
| 2. $0,03182 - \overline{4},27512 + \overline{3},82504 - \overline{1},08507.$ |

366. **Νά υπολογίσετε τά γινόμενα:**

- | | | |
|-----------------------------------|---------------------------|-----------------------------------|
| 1. $\overline{3},82307 \times 5,$ | 2. $0,24507 \times (-2),$ | 3. $\overline{1},24513 \times 4.$ |
|-----------------------------------|---------------------------|-----------------------------------|

367. **Νά εκτελέσετε τίς διαιρέσεις:**

- | | | |
|------------------------------|---------------------------------|--|
| 1. $\overline{4},89524 : 3,$ | 2. $\overline{5},60106 : (-3),$ | 3. $\overline{4},57424 : \left(-\frac{3}{7}\right),$ |
| 4. $\overline{1},42118 : 4,$ | 5. $\overline{6},27508 : (-2),$ | 6. $\overline{8},32403 : 4.$ |

*Ομάδα Β'. 368. **Νά βρείτε όλους τους φυσικούς αριθμούς ν για τους οποίους ο $\log_3 \left(\frac{1}{v}\right)$ έχει χαρακτηριστικό: -2.**

369. **Νά αποδείξετε ότι: αν ξέρουμε τους λογαρίθμους ως προς βάση α, $\alpha > 1$, όλων των αριθμών που περιέχονται μεταξύ του 1 και του α, τότε μπορούμε νά βρούμε τό λογάριθμο του όποιουδήποτε θετικού αριθμού θ ως προς βάση α.**

370. *Αν K είναι τό πλήθος τῶν ἀκέραιων ἀριθμῶν πού οἱ λογάριθμοί τους ἔχουν χαρακτηριστικό k καί ἂν Λ εἶναι τό πλήθος τῶν ἀκεραίων πού οἱ ἀντίστροφοί τους ἔχουν λογάριθμους μέ χαρακτηριστικό $-\lambda$ ($\lambda > 0$), νά ἀποδείξετε ὅτι: $\log K - \log \Lambda = k - \lambda + 1$.

Λογαριθμικοί Πίνακες

*Ὅπως εἶδαμε, ἐκτός ἀπό τίς ρητές δυνάμεις τοῦ 10, ὅλοι οἱ ἄλλοι (θετικοί) ἀριθμοί ἔχουν λογαριθμούς ἀρρητους ἀριθμούς (γι' αὐτό ἔχουν ἄπειρα δεκαδικά ψηφία μὴ περιοδικά). Γι' αὐτό, τοὺς λογαριθμούς αὐτοὺς τοὺς βρίσκουμε κατὰ προσέγγιση (συνήθως 0,00001).

*Εἰκόνη, ἐπειδὴ $\log \frac{1}{\alpha} = -\log \alpha$, ὅταν ξέρουμε τοὺς λογαριθμούς τῶν ἀριθμῶν $\tau\omega\nu > 1$, μποροῦμε νά ὑπολογίσουμε τοὺς λογαριθμούς τῶν (θετικῶν) ἀριθμῶν πού εἶναι < 1 .

*Εἰκόνη, ὅτι ὁ λογάριθμος ἑνὸς ἀριθμοῦ ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο μέρη: ἀπὸ τό **χαρακτηριστικό** του καί ἀπὸ τό **δεκαδικό** του μέρος.

Στὴν § 161 δείξαμε πῶς τό χαρακτηριστικό του ὑπολογίζεται ἀπὸ μνήμη.

Τό δεκαδικό του μέρος ὑπολογίζεται κατὰ προσέγγιση μέ μεθόδους πού ἀναπτύσσονται στὰ Ἀνώτερα Μαθηματικά. Μέ τίς μεθόδους αὐτές ὑπολογίστηκε τό δεκαδικό μέρος (μέ 5 ἢ 7 ἢ 11 ἢ 15 δεκαδικά ψηφία) ὅλων τῶν ἀκέραιων ἀριθμῶν ἀπὸ τό 1 μέχρι τό 10.000 καί εἶναι γραμμένο σέ πίνακες πού λέγονται **λογαριθμικοί πίνακες** ἢ «**πίνακες τοῦ δεκαδικοῦ μέρους**». Συνήθως γιὰ τίς ἐφαρμογές χρησιμοποιοῦμε τόν 5-ψήφιο πίνακα κατὰ τό σύστημα Dupuis, γιὰ τόν ὅποιο ὑπάρχουν καί ἐκδόσεις ἐλληνικές· στὰ ἐπόμενα θά περιγράψουμε μέ συντομία τόν πίνακα αὐτό καί θά ἐκθέσουμε τόν τρόπο χρήσεώς του.

§ 163. Περιγραφή τῶν λογαριθμικῶν πινάκων Dupuis. — Οἱ λογαριθμικοί πίνακες Dupuis περιέχουν τό δεκαδικό μέρος τῶν λογαριθμῶν τῶν ἀκέραιων ἀριθμῶν ἀπὸ 1 μέχρι 10.000. Ὁ παρακάτω «πίνακας» εἶναι ἕνα τμῆμα ἀπὸ τοὺς λογαριθμικούς πίνακες τῆς γαλλικῆς ἐκδόσεως τοῦ J. Dupuis.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
500	69897	906	914	923	932	940	949	958	966	975
1	984	992	*001	*010	*018	*027	*036	*044	*053	*062
2	70070	079	088	096	105	114	122	131	140	148
3	157	165	174	183	191	200	209	217	226	236
4	243	252	260	269	278	286	295	303	312	321
5	329	338	346	355	364	372	381	389	398	406
6	415	424	432	441	449	458	467	* 475	484	492
7	501	509	518	526	535	544	552	561	569	578
8	586	595	603	612	621	629	638	646	655	663
9	672	680	689	697	706	714	723	731	740	749
510	757	766	774	783	791	800	808	817	825	834
1	842	851	859	868	876	885	893	902	910	919
2	927	935	944	952	961	969	978	986	995	*003
...		...	...	...	...	...	...	...	...	...
...		...	...	...	...	...	...	...	...	...
549	73957	965	973	981	989	997	*005	*013	*020	*028
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Στὴν ἀριστερὴ στήλη — ὅπου στὴν κορυφή ὑπάρχει τό γράμμα N (Nombres = ἀριθμοί), στίς ἑλληνικές ἐκδόσεις τό γράμμα A (ἀριθμοί)— εἶναι γραμμένες κατακόρυφα οἱ δεκάδες τῶν ἀριθμῶν καί στὴν ἴδια ὀριζόντια γραμμὴ μέ τό N, οἱ μονάδες τους. Στίς ἄλλες στή-

λες είναι γραμμένα τὰ δεκαδικὰ μέρη τῶν λογαρίθμων. Τὰ δύο πρῶτα ψηφία πού ἐξέχουν στή δευτέρα στήλη, ἐννοεῖται ὅτι ἐπαναλαμβάνονται τὰ ἴδια μέχρι ν' ἀλλάξουν· καί τοῦτο, γιατί πολλοί ἐφεξῆς λογάριθμοι ἔχουν ἴδια τὰ δύο πρῶτα ψηφία.

Ὁ λογάριθμος κάθε ἀριθμοῦ βρίσκεται ἐκεῖ πού διασταυρώνεται ἡ κατακόρυφη στήλη τῶν μονάδων μέ τήν ὀριζόντια στήλη τῶν δεκάδων τοῦ ἀριθμοῦ.

Ὁ ἀστερίσκος (*) πού τόν βλέπουμε μπροστά στά τρία τελευταῖα δεκαδικὰ ψηφία μερικῶν λογαρίθμων δείχνει ὅτι τὰ δύο πρῶτα ψηφία πού παραλείπονται ἔλλαξαν καί πρέπει νά πάρουμε τὰ ἀμέσως ἐπόμενα.

Σύμφωνα μέ τὰ παραπάνω καί μέ βάση τόν «πίνακα» τῆς σελίδας 231 ἔχουμε ὅτι:

$$\begin{array}{lll} \log 500 = 2,69897, & \log 5047 = 3,70303, & \log 5084 = 3,70621 \\ \log 503 = 2,70157, & \log 5128 = 3,70995, & \log 5017 = 3,70044. \end{array}$$

§ 164. Χρήση τῶν λογαριθμικῶν πινάκων.— Τούς λογαριθμικούς πίνακες τούς χρησιμοποιοῦμε:

- 1) γιά νά βροῖσκουμε τό λογάριθμο ἑνός ἀριθμοῦ,
- καί 2) γιά νά βροῖσκουμε τόν ἀριθμό, ὅταν ξέροουμε τό λογάριθμό του.

§ 165. Πρόβλημα I.— Νά βρεθεῖ ὁ λογάριθμος ἑνός ἀριθμοῦ.

Γιά νά λύσουμε αὐτό τό πρόβλημα ὑποθέτουμε ὅτι ὁ ἀριθμός πού μᾶς δόθηκε εἶναι πάντοτε γραμμένος μέ δεκαδική μορφή καί ὅτι χρησιμοποιοῦμε πενταψήφιους πίνακες. Τό χαρακτηριστικό τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ θά τό βροῦμε ἀπό μνήμης (§ 161), ἐνῶ τό δεκαδικό του μέρος ἀπό τούς πίνακες· γιά νά βροῦμε τό δεκαδικό μέρος, πρέπει νά ἔχουμε ὑπόψη ὅτι:

Τό δεκαδικό μέρος τοῦ λογαρίθμου ἑνός ἀριθμοῦ ἐξαρτᾶται μόνο ἀπό τήν ἀκολουθία τῶν σημαντικῶν του ψηφίων πού προκύπτει ἂν παραλείψουμε τήν ὑποδιαστολή καί τὰ μηδενικά πού τυχόν μπορεῖ νά ὑπάρχουν στήν ἀρχή ἢ στό τέλος τοῦ ἀριθμοῦ. Αὐτό, ὅπως εἶδαμε (§ 161, ε) δέ μεταβάλλει τό ζητούμενο δεκαδικό μέρος. Π.χ. οἱ ἀριθμοί:

$$50,87 \quad 0,05087 \quad 508,70 \quad 5087000 \quad 5,0870$$

ἔχουν τό ἴδιο δεκαδικό μέρος μέ τόν ἀριθμό 5087.

Γιά νά λύσουμε τό πρόβλημα διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Περίπτωση α'.— Ὁ ἀριθμός ἔχει ὡς 4 σημαντικά ψηφία (δηλαδή περιέχεται στούς πίνακες).

Σ' αὐτή τήν περίπτωση βροῖσκουμε πρῶτα τό χαρακτηριστικό τοῦ λογαρίθμου (ἀπό μνήμης) καί μετά τό δεκαδικό του μέρος ἀπό τούς πίνακες, ὅπως εἴπαμε σέ προηγούμενη παράγραφο (§ 163).

Παράδειγμα: Νά βρεθεῖ ὁ λογάριθμος τοῦ 56,82.

Λύση. Τό χαρακτηριστικό τοῦ λογαρίθμου εἶναι 1, καί τό δεκαδικό του μέρος τό ἴδιο (§161, ε) μέ τό δεκαδικό μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ 5682 πού εἶναι (ἀπό τούς πίνακες) 75450.

*Αρα: $\log 56,82 = 1,75450$.

Ὁμοίως βροῖσκουμε ὅτι: $\log 568,2 = 2,75450$, $\log 0,8703 = \bar{1},93967$.

Περίπτωση β'.— Ὁ ἀριθμός ἔχει περισσότερα ἀπό 4 σημαντικά ψηφία (δηλαδή δέν περιέχεται στούς πίνακες).

Τό χαρακτηριστικό τοῦ λογαρίθμου τό βροῖσκουμε ὅπως καί στήν πρώτη περίπτωση. Γιά νά βροῦμε τό δεκαδικό του μέρος, χωρίζουμε τὰ 4 πρῶτα ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ μέ ὑποδιαστολή, καί ἔτσι ὅπως εἶναι γραμμένος ὁ ἀριθμός

βρίσκεται μεταξύ δύο διαδοχικών άκεραίων μέ 4 ψηφία. Για νά βροῦμε τώρα τό δεκαδικό του μέρος, πρέπει νά ἔχουμε ὑπόψη μας τήν ιδιότητα:

$$a < b < \gamma \iff \log a < \log b < \log \gamma, \text{ γιά κάθε } a, b, \gamma \in \mathbb{R}^+$$

καί νά δεχτοῦμε ὅτι:

Γιά μικρές μεταβολές τῶν ἀριθμῶν, οἱ μεταβολές τοῦ δεκαδικοῦ μέρους τῶν λογαριθμῶν τους εἶναι, κατά προσέγγιση, ἀνάλογες μέ τίς μεταβολές τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν, ὅταν οἱ μεταβολές τῶν ἀριθμῶν εἶναι μικρότερες ἀπό τή μονάδα καί ἀντιστρόφως.

Ἡ παραπάνω παραδοχή δέν εἶναι «τελείως» ἀληθής, δηλαδή οἱ μεταβολές τῶν λογαριθμῶν δέν εἶναι ἀνάλογες μέ τίς μεταβολές τῶν ἀριθμῶν.

Πράγματι, ἄς θεωρήσουμε δύο διαδοχικούς άκεραίους α καί $\alpha + 1$, $\alpha > 0$ καί ἄς ὀνομάσουμε δ τή διαφορά: $\log(\alpha + 1) - \log \alpha$, δηλαδή:

$$\delta = \log(\alpha + 1) - \log \alpha \Rightarrow \delta = \log \frac{\alpha + 1}{\alpha} \Rightarrow \delta = \log \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right).$$

Παρατηροῦμε ὅτι: γιά $\alpha \rightarrow +\infty$, ὁπότε $\frac{1}{\alpha} \rightarrow 0$, ἔχουμε:

$$\log \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) \rightarrow 0, \text{ δηλαδή } \delta \rightarrow 0.$$

Ὡστε ἡ διαφορά τῶν λογαριθμῶν δύο διαδοχικῶν άκεραίων δέ μένει πάντοτε ἡ ἴδια, ἀλλά ἐλαττώνεται καθόσον οἱ ἀριθμοί αὐξάνουν καί συνεπῶς δέν ἀληθεύει ὅτι ἡ αὐξηση τῶν λογαριθμῶν εἶναι ἀνάλογη μέ τήν αὐξηση τῶν ἀριθμῶν.

Ἐπειδή ὁμως ἡ διαφορά αὐτή μένει γιά πολλούς ἀριθμούς ἀμετάβλητη, μποροῦμε, κατά προσέγγιση, νά θεωρήσουμε τήν αὐξηση τῶν λογαριθμῶν ἀνάλογη μέ τήν αὐξηση τῶν ἀριθμῶν.

Ὡστερα ἀπό αὐτά, γιά νά βροῦμε τό δεκαδικό μέρος τοῦ λογαριθμοῦ, ἐργαζόμαστε ὅπως (φαίνεται) στά παρακάτω παραδείγματα:

Παράδειγμα 1ο: Νά βρεθεῖ ὁ λογάριθμος τοῦ 17424.

Λύση. Τό χαρακτηριστικό τοῦ λογαριθμοῦ εἶναι 4. Χωρίζουμε τά 4 πρῶτα ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ μέ ὑποδιαστολή καί ἔτσι ἔχουμε τόν ἀριθμό 1742,4, τοῦ ὁποίου ἀρκεῖ νά βροῦμε τό δεκαδικό μέρος τοῦ λογαριθμοῦ του.

Ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς: Ἐπειδή $1742 < 1742,4 < 1743$,
ἐπεταί ὅτι: $\log 1742 < \log 1742,4 < \log 1743$.

Ἀπό τοὺς πίνακες εἶναι: $\log 1742 = 3,24105$ καί $\log 1743 = 3,24130$.

Ἀρα: $3,24105 < \log 1742,4 < 3,24130$,

πού σημαίνει ὅτι ὁ λογάριθμος πού ζητᾶμε βρίσκεται μεταξύ τῶν ἀριθμῶν 3,24105 καί 3,24130, πού διαφέρουν κατά 25 μονάδες πέμπτης δεκαδικῆς τάξεως (μ.ε'.δ.τ.).

Ἀπό τοὺς πίνακες βλέπουμε ἐπίσης ὅτι, ὅταν ὁ ἀριθμός αὐξάνεται κατά 2, 3, 4, 5, ... άκέραιες μονάδες, τότε ὁ λογάριθμός του αὐξάνεται ἀντιστοίχως κατά 50, 75, 99, 125, ... μ.ε'.δ.τ. Ὑπολογίζουμε τώρα πόσο πρέπει νά αὐξηθεῖ ὁ $\log 1742 = 3,24105$ γιά νά προκύψει ὁ $\log 1742,4$ καί ἀπό αὐτόν ὁ $\log 17424$. Ὁ ὑπολογισμός γίνεται ὡς ἑξῆς:

Σε αύξηση του αριθμού κατά 1 αντιστοιχεί αύξ. του λογ. κατά 25 μ.ε'.δ.τ.

» » » » 0,4 » » » » x; »

Άρα: $x = 25 \cdot 0,4 = 10$ μ.ε'.δ.τ.

Τότε έχουμε: $\log 1742,4 = 3,24105 + 0,00010 = 3,24115$

καί συνεπώς: $\log 17424 = 4,24115$.

Οί παραπάνω πράξεις διατάσσονται ως εξής:

$\log 1742 = 3,24105$ $\log 1743 = 3,24130$ $\Delta = 25$	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-bottom: 1px solid black; width: 10%;">Αύξηση αριθμών</td> <td style="border-bottom: 1px solid black; width: 10%;">1</td> <td style="border-bottom: 1px solid black; width: 10%;">αύξηση λογαρίθμων</td> <td style="border-bottom: 1px solid black; width: 10%;">25 μ.ε'.δ.τ.</td> <td style="border-bottom: 1px solid black; width: 10%;"></td> <td style="border-bottom: 1px solid black; width: 10%;"></td> <td style="border-bottom: 1px solid black; width: 10%;"></td> <td style="border-bottom: 1px solid black; width: 10%;"></td> <td style="border-bottom: 1px solid black; width: 10%;"></td> <td style="border-bottom: 1px solid black; width: 10%;"></td> </tr> <tr> <td>»</td> <td>»</td> <td>0,4</td> <td>»</td> <td>»</td> <td>x;</td> <td>»</td> <td>»</td> <td>»</td> <td>»</td> </tr> <tr> <td colspan="10" style="border-top: 1px solid black; padding-top: 5px;"> $x = 25 \cdot 0,4 = 10$ μ.ε'.δ.τ. </td> </tr> </table>	Αύξηση αριθμών	1	αύξηση λογαρίθμων	25 μ.ε'.δ.τ.							»	»	0,4	»	»	x;	»	»	»	»	$x = 25 \cdot 0,4 = 10$ μ.ε'.δ.τ.									
Αύξηση αριθμών	1	αύξηση λογαρίθμων	25 μ.ε'.δ.τ.																												
»	»	0,4	»	»	x;	»	»	»	»																						
$x = 25 \cdot 0,4 = 10$ μ.ε'.δ.τ.																															

Άρα: $\log 17424 = 4,24105 + 0,00010 = 4,24115$.

Άφού $\log 17424 = 4,24115$ έχουμε:

$\log 17,424 = 1,24115$, $\log 0,0017424 = \bar{3},24115$,

$\log 1,7424 = 0,24115$, $\log 174,24 = 2,24115$.

Παράδειγμα 2ο: Νά βρεθεί ο λογάριθμος του αριθμού 24,3527.

Λύση. Το χαρακτηριστικό του λογαρίθμου που ζητάμε είναι 1. Αν πολλαπλασιάσουμε τον αριθμό επί 100, το δεκαδικό μέρος του λογαρίθμου δεν αλλάζει. Άρκει λοιπόν να βρούμε το δεκαδικό μέρος του λογαρίθμου του αριθμού 2435,27.

Εργαζόμαστε όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα:

$\log 2435 = 3,38650$ $\log 2436 = 3,38668$ $\Delta = 18$	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-bottom: 1px solid black; width: 10%;">Αύξηση αριθμών</td> <td style="border-bottom: 1px solid black; width: 10%;">1</td> <td style="border-bottom: 1px solid black; width: 10%;">αύξηση λογαρίθμων</td> <td style="border-bottom: 1px solid black; width: 10%;">18 μ.ε'.δ.τ.</td> <td style="border-bottom: 1px solid black; width: 10%;"></td> <td style="border-bottom: 1px solid black; width: 10%;"></td> <td style="border-bottom: 1px solid black; width: 10%;"></td> <td style="border-bottom: 1px solid black; width: 10%;"></td> <td style="border-bottom: 1px solid black; width: 10%;"></td> <td style="border-bottom: 1px solid black; width: 10%;"></td> </tr> <tr> <td>»</td> <td>»</td> <td>0,27</td> <td>»</td> <td>»</td> <td>x;</td> <td>»</td> <td>»</td> <td>»</td> <td>»</td> </tr> <tr> <td colspan="10" style="border-top: 1px solid black; padding-top: 5px;"> $x = 18 \cdot 0,27 = 4,86 \simeq 5$ μ.ε'.δ.τ. </td> </tr> </table>	Αύξηση αριθμών	1	αύξηση λογαρίθμων	18 μ.ε'.δ.τ.							»	»	0,27	»	»	x;	»	»	»	»	$x = 18 \cdot 0,27 = 4,86 \simeq 5$ μ.ε'.δ.τ.									
Αύξηση αριθμών	1	αύξηση λογαρίθμων	18 μ.ε'.δ.τ.																												
»	»	0,27	»	»	x;	»	»	»	»																						
$x = 18 \cdot 0,27 = 4,86 \simeq 5$ μ.ε'.δ.τ.																															

Άρα: $\log 24,3527 = 1,38650 + 0,00005 = 1,38655$.

Σημείωση. Στους λογαριθμικούς πίνακες και έξω από τα πλαίσια υπάρχουν πινακίδια με έπικεφαλίδα τη διαφορά των λογαρίθμων δύο διαδοχικών αριθμών. Τα πινακίδια αυτά έχουν δύο στήλες: η πρώτη στήλη έχει τους φυσικούς αριθμούς 1, 2, ..., 9, που δείχνουν δέκατα της άκείρας μονάδας και η άλλη στήλη έχει τις αυξήσεις των λογαρίθμων σε μονάδες της τελευταίας δεκαδικής τάξεως.

Αν ονομάσουμε Δ τις διαφορές των αριθμών, τότε τα πινακίδια δίνουν τις τιμές:

$$\frac{\Delta \times 1}{10}, \frac{\Delta \times 2}{10}, \dots, \frac{\Delta \times 9}{10}.$$

Έτσι ο ύπολογισμός του λογαρίθμου του παραδείγματος 2 γίνεται με τη βοήθεια του πινακιδίου, που έχει έπικεφαλίδα τη διαφορά $\Delta = 18$.

Στό πινακίδιο αυτό απέναντι από το 2 (στήλη α') είναι 3,6 και απέναντι από το 7 είναι 12,6· αλλά επειδή το ψηφίο 7 παριστάνει εκατοστά στον αριθμό 2435,27, δηλ. μονάδες 10 φορές μικρότερες, πρέπει να πάρουμε 1,26. Όστε σε αύξηση του αριθμού κατά 0,27 μονάδες αντιστοιχεί αύξηση του λογαρίθμου κατά $3,6 + 1,26 = 4,86 \simeq 5$ μ.ε'.δ.τ.

Διάταξη των πράξεων.

λογ 2435	$= 3,38650$	$\Delta = 18$
Σε αύξηση 0,2	αύξηση λογ 3,6	
» » 0,07	» » 1,26	
άρα λογ 2435,27	$= 3,3865486$	

καί επειδή το 6ο ψηφίο του δεκ. μέρους είναι μεγαλύτερο από το 5, αυξάνουμε κατά μία μονάδα το 5ο ψηφίο. Άρα θα είναι $\log 2435,27 = 3,38655$ και συνεπώς $\log 24,3527 = 1,38655$.

18	
1	1,8
2	3,6
3	5,4
4	7,2
5	9,0
6	10,8
7	12,6
8	14,4
9	16,2

§ 166. Πρόβλημα II. (αντίστροφο).—Νά βρεθεί ὁ ἀριθμὸς ποὺ ἀντιστοιχεῖ σὲ ὀρισμένο λογάριθμο.

Γιὰ νά λύσουμε αὐτὸ τὸ πρόβλημα ἀναζητοῦμε τὸ δεκαδικὸ μέρος τοῦ λογαρίθμου ποὺ μᾶς δόθηκε στοὺς λογαριθμικοὺς πίνακες. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις καθόσον τὸ δεκαδικὸ αὐτὸ μέρος γράφεται ἢ ὄχι στοὺς λογαριθμικοὺς πίνακες. Τὸ χαρακτηριστικὸ τοῦ λογαρίθμου μᾶς ἐπιτρέπει νά καθορίσουμε, σύμφωνα μέ τὴν ιδιότητα δ τῆς § 161, τὸ πλῆθος τῶν ψηφίων τοῦ ἀκέραιου μέρους τοῦ ζητούμενου ἀριθμοῦ.

Ἀκριβέστερα ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

Περίπτωση α'.— Τὸ δεκαδικὸ μέρος τοῦ λογαρίθμου βρίσκεται στοὺς πίνακες.

Ἐστω ὅτι θέλουμε νά βροῦμε τὸ θετικὸ ἀριθμὸ x , γιὰ τὸν ὁποῖο εἶναι:

$$\log x = 2,62716.$$

Λύση. Χωρὶς νά λάβουμε ὑπόψη μας τὸ χαρακτηριστικὸ 2, ἀναζητᾶμε στὴ στήλη 0 τῶν λογαριθμικῶν πινάκων τὸν ἀριθμὸ 62, ποὺ ἀποτελοῦν τὰ δύο πρῶτα ψηφία τοῦ δεκαδικοῦ μέρους τοῦ λογαρίθμου καὶ κατόπιν ἀναζητᾶμε στὸν πίνακα τὰ ἄλλα τρία ψηφία 716 τοῦ δεκαδικοῦ μέρους. Βλέπουμε ὅτι αὐτὰ ἀνήκουν στὴν 423ῃ ὀριζόντια γραμμὴ καὶ στὴν 8ῃ στήλῃ· ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς ἔχει, στὴ σειρά, τὰ σημαντικὰ ψηφία 4, 2, 3, 8, δηλαδή ἔχει 423 δεκάδες καὶ 8 μονάδες. Ἐπειδὴ ὁ λογάριθμὸς του ἔχει χαρακτηριστικὸ 2, ὁ ἀριθμὸς θά ἔχει τρία ἀκέραια ψηφία, καὶ θά εἶναι:

$$x = 423,8.$$

Σημείωση. Ἄν θέλουμε νά βροῦμε τὸν ἀριθμὸ x γιὰ τὸν ὁποῖο εἶναι $\log x = 2,63022$ · ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

Παρατηροῦμε ὅτι στὶς σειρὲς τοῦ 63 δέν ὑπάρχει τὸ 022, ἀλλὰ τὸ ἀναζητοῦμε καὶ τὸ βρίσκουμε στὶς σειρὲς τοῦ 62 μέ ἓναν ἀστερίσκο (*) μπροστὰ του. Αὐτὸ συμβαίνει, γιὰτὶ τὸ 022 μέ ἀστερίσκο (*) βρίσκεται στὴν τελευταία σειρὰ τοῦ 62. Συνεπῶς ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς x εἶναι ὁ 426,8.

Περίπτωση β'.— Τὸ δεκαδικὸ μέρος τοῦ λογαρίθμου δέ βρίσκεται στοὺς πίνακες.

1ο: Ἐστω ὅτι θέλουμε νά βροῦμε τὸ θετικὸ ἀριθμὸ x , γιὰ τὸν ὁποῖο εἶναι:

$$\log x = 1,25357.$$

Λύση. Παρατηροῦμε ὅτι τὸ δεκαδικὸ μέρος τοῦ λογαρίθμου βρίσκεται στοὺς πίνακες μεταξύ τῶν 0,25334 καὶ 0,25358, στοὺς ὁποίους ἀντιστοιχοῦν οἱ ἀριθμοὶ 1792 καὶ 1793 ἀντιστοίχως. Δηλαδή ἔχουμε: $1,25334 < 1,25357 < 1,25358$
καὶ συνεπῶς: $17,92 < x < 17,93$.

Παρατηροῦμε τῶρα ὅτι:

$$\Delta = 1,25358 - 1,25334 = 24 \text{ μ.ε'.δ.τ.}$$

$$\delta = 1,25357 - 1,25334 = 23 \text{ μ.ε'.δ.τ.}$$

Ἐχοντας ὑπόψη τὴν παραδοχὴ ποὺ κάναμε στὴν § 165, σύμφωνα μέ τὴν ὁποία ἡ αὔξηση (μεταβολή) τῶν λογαρίθμων εἶναι, κατὰ προσέγγιση, ἀνάλογη πρὸς τὴν αὔξηση τῶν ἀριθμῶν, καταρτίζουμε τὴν ἀκόλουθη διάταξη:

Αὔξηση λογαρίθμου κατὰ 24 μ.ε'.δ.τ. φέρνει αὔξηση τοῦ ἀριθμοῦ κατὰ 1

» » » 23 » » » » » » » » y ;

$$y = 1 \cdot \frac{23}{24} = \frac{23}{24} = 0,958.$$

Προσθέτοντας τώρα τό 0,958 στον αριθμό 1792 βρίσκουμε 1792,958. 'Ο αριθμός όμως αυτός έχει προφανώς τά ίδια ψηφία μέ τόν x καί μέ τήν ίδια σειρά, πλὴν ὅμως ἡ θέση τῆς ὑποδιαστολῆς στό x κανονίζεται ἀπὸ τό χαρακτηριστικό τοῦ $\log x$, πού ἐδῶ εἶναι 1.

Θά εἶναι λοιπόν: $x = 17,92958$.

Σημείωση. Ἡ διαφορά Δ τῶν ἀκραίων λογαρίθμων, ἀνάμεσα στοὺς ὁποίους περιέχεται ὁ $\log x$, ὀνομάζεται «**μεγάλῃ**» **διαφορά**, ἐνῶ ἡ διαφορά δ τοῦ μικρότερου λογαρίθμου ἀπὸ τό $\log x$ ὀνομάζεται «**μικρὴ**» **διαφορά**.

2ο: **Νά βρεῖτε τό x , ἂν $\log x = \bar{3},47647$.**

Λύση. Ἀπὸ τοὺς λογαριθμικούς πίνακες ἔχουμε:

$$\bar{3},47640 < \bar{3},47647 < \bar{3},47654$$

καί ἔρα

$$0,002995 < x < 0,002996.$$

*Ἄν ἐργαστοῦμε, ὅπως στό προηγούμενο παράδειγμα, ἔχουμε τήν ἀκόλουθη σύντομη διάταξη:

$\bar{3},47647$	$\bar{3},47654$	ἀντιστοιχεῖ ὁ: 2996	14	1
$\bar{3},47640$	$\bar{3},47640$	» : 2995	7	y ;
Διαφορές: $\delta = 7$	$\Delta = 14$	1		$y = 1 \times \frac{7}{14} = 0,5.$

*Ἐτσι τά σημαντικά ψηφία τοῦ x κατὰ σειρά εἶναι: 2, 9, 9, 5, 5. *Ἀρα ὁ ζητούμενος ἀριθμός x εἶναι ὁ 0,0029955, γιατί τό χαρακτηριστικό τοῦ λογαρίθμου του εἶναι $\bar{3}$.

Ἐφαρμογές τῶν δεκαδικῶν λογαρίθμων

§ 167. Ἐφαρμόζοντας τίς ιδιότητες τῶν λογαρίθμων καί χρησιμοποιώντας τοὺς λογαριθμικούς πίνακες μπορούμε νά ἀπλουστεύσουμε πολλοὺς ἀριθμητικούς ὑπολογισμούς καί νά κάνουμε ἄλλους ὑπολογισμούς πού θά ἦταν πάρα πολύ δύσκολοι χωρὶς τοὺς λογαρίθμους. Τά παρακάτω παραδείγματα καί ἰδιαίτερα τό δεύτερο, θά μᾶς πείσουν γιά τή σημασία τῶν λογαρίθμων στὶς πρακτικές ἐφαρμογές.

Παράδειγμα 1ο: **Νά βρεῖτε τό x , ἂν εἶναι:** $x = \frac{7,56 \times 4667 \times 567}{899,1 \times 0,00337 \times 23435}$ (1)

Λύση. Λογαριθμίζοντας τήν (1) ἔχουμε:

$$\log x = \log 7,56 + \log 4667 + \log 567 - (\log 899,1 + \log 0,00337 + \log 23435).$$

*Ἀπὸ τοὺς πίνακες βρίσκουμε:

$\log 7,56 = 0,87852$	$\log 899,1 = 2,95381$
$\log 4667 = 3,66904$	$\log 0,00337 = \bar{3},52763$
$\log 567 = 2,75358$	$\log 23435 = 4,36986$
7,30114	4,85130.

Μετά τήν ἀφαίρεση προκύπτει:

$$\log x = 2,44984$$

*Ἀρα: $x = 281,73.$

Παράδειγμα 2ο: **Νά ὑπολογίσετε, κατὰ προσέγγιση, τὴν ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς παραστάσεως :**

$$x = \frac{27,32 \times (1,04)^{20} \times \sqrt[5]{0,003}}{\sqrt[4]{0,0042} \times (345,6)^2} \quad (2)$$

Λύση. Λαμβάνοντας τους λογαρίθμους τῶν μελῶν τῆς (2) ἔχουμε:

$$\log x = (\log 27,32 + 20 \cdot \log 1,04 + \frac{1}{5} \log 0,003) - \left(\frac{1}{4} \cdot \log 0,0042 + 2 \log 345,6 \right).$$

Ἀπό τοὺς πίνακες βρίσκουμε τοὺς λογαρίθμους καὶ ἐκτελοῦμε τὶς πράξεις σύμφωνα με τὴν ἐπόμενη διάταξη:

Βοηθητικές πράξεις

$$\log (1,04) = 0,01703$$

$$20$$

$$\hline 0,34060$$

$$\log 0,003 = \bar{3},47712$$

$$\frac{1}{5} \log 0,003 = \frac{\bar{3},47712}{5} = \frac{\bar{5} + 2,47712}{5} =$$

$$= \bar{1} + 0,49542 = \bar{1},49542$$

$$\log 0,0042 = \bar{3},62325$$

$$\frac{1}{4} \log 0,0042 = \frac{\bar{3},62325}{4} = \frac{\bar{4} + 1,62325}{4} =$$

$$= \bar{1} + 0,40581 = \bar{1},40581$$

$$\log 345,6 = 2,53857$$

$$2$$

$$\hline 5,07714$$

Ἀπό τοὺς πίνακες βρίσκουμε:

$$x = 0,000615957.$$

Τελικές πράξεις

$$\log 27,32 = 1,43648$$

$$20 \cdot \log (1,04) = 0,34060$$

$$\frac{1}{5} \cdot \log (0,003) = \bar{1},49542$$

$$\hline \text{Ἀθροισμα} = 1,27250$$

$$\frac{1}{4} \log (0,0042) = \bar{1},40581$$

$$2 \cdot \log 345,6 = 5,07714$$

$$\hline \text{Ἀθροισμα} = 4,48295$$

Ὡστε εἶναι:

$$\log x = 1,27250 - 4,48295 = -3,21045 = \bar{4},78955.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α'. 371. Νά βρεθῇ ὁ λογάριθμος τῶν ἀριθμῶν:

$$1. 0,2507$$

$$5. 6,8372$$

$$9. 85,007$$

$$2. 45,72$$

$$6. 5278,37$$

$$10. 0,0004124$$

$$3. 0,003817$$

$$7. 63,347$$

$$11. 326,537$$

$$4. 107,3$$

$$8. 25234$$

$$12. 14,1606$$

372. Νά βρεθῇ ὁ θετικὸς ἀριθμὸς x , ἂν:

$$1. \log x = 2,48001$$

$$5. \log x = 4,87622$$

$$9. \log x = 0,70020$$

$$2. \log x = \bar{1},96895$$

$$6. \log x = 2,99348$$

$$10. \log x = 1,66325$$

$$3. \log x = 4,97534$$

$$7. \log x = \bar{1},79100$$

$$11. \log x = \bar{4},15050$$

$$4. \log x = \bar{3},69636$$

$$8. \log x = \bar{2},78000$$

$$12. \log x = 5,25865.$$

373. Νά βρεῖτε τὸ y , ἂν: $y = \frac{1}{2} \log(4 + \sqrt{7}) + \frac{1}{2} \log(4 - \sqrt{7})$.

374. Χρησιμοποιώντας τὸν τύπο:

$$E = \sqrt{\tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}$$

νά υπολογίσετε τὸ ἔμβαδὸν E ἑνὸς τριγώνου ποὺ ἔχει πλευρὲς:

$$\alpha = 202,5 \text{ m}, \quad \beta = 180,2 \text{ m} \quad \text{καὶ} \quad \gamma = 75,3 \text{ m} \quad \left(\tau = \frac{1}{2} \text{ περιμέτρου} \right).$$

375. Νά υπολογίσετε τὴν ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ x ποὺ ὀρίζεται ἀπὸ τὴ σχέση:

$$\frac{x^2}{a^2} = \sqrt{\frac{\beta}{\gamma}},$$

δπου

$$\alpha = 0,27355,$$

$$\beta = 29,534,$$

$$\gamma = 44,340.$$

376. Νά προσδιορίσετε τό y , αν ξέρουμε ότι:

$$\log y = \log(7 + 5\sqrt{2}) + 8\log(\sqrt{2} + 1) + 7\log(\sqrt{2} - 1) + 2\log(3 - 2\sqrt{2}).$$

377. Τρεῖς ἀριθμοί α, x, y συνδέονται μέ τή σχέση:

$$\alpha xy^2 = \sqrt[3]{x}.$$

1ο) Νά ὑπολογίσετε τό y , αν εἶναι $\alpha = 0,3$ καί $x = 1,8215$.

2ο) Νά ὑπολογίσετε τό x , αν εἶναι $\alpha = 10$ καί $y = 0,5242$.

378. Σέ μία γεωμετρική πρόοδο εἶναι: $\alpha_1 = 3$, $\omega = 8$ καί $n = 13$. Νά βρεθεῖ ὁ 13ος ὅρος καί τό ἄθροισμα τῶν 13 πρώτων ὁρων τῆς.

379. Νά ἐπαληθεύσετε τίς ἰσότητες (χρησιμοποιώντας λογαριθμικούς πίνακες):

$$1. \sqrt{\frac{577,8 \times 69}{0,75 \times 3,107}} = 6,431,$$

$$2. \sqrt[3]{8,5273 \times \sqrt[3]{51,3388}} = 5,62962$$

$$3. \sqrt[3]{\frac{4,632 \times (2,96)^2}{81,3 \times 32,41}} = 0,225855, \quad 4. \frac{312,415 \times \sqrt[3]{3,5781^2}}{17,1826^2 \times \sqrt[10]{0,002987^8}} = 14,1606.$$

III. ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

§ 168. Ὅρισμοί.—Ἐκθετική ἐξίσωση ὀνομάζουμε κάθε ἐξίσωση τῆς μορφῆς:

$$E(x) = F(x) \quad (1)$$

ὅπου $E(x)$, $F(x)$ εἶναι συναρτήσεις τοῦ x , ὅταν σ' ἕνα τουλάχιστο ἀπό τά μέλη τῆς ἐμφανίζεται ὁ ἄγνωστος x εἴτε κάποια συνάρτηση τοῦ ἀγνώστου σέ ἐκθέτη δυνάμεως μέ βάση θετικό ἀριθμό.

Ἔτσι, π.χ. οἱ ἐξισώσεις:

$$3^x = 81, \quad 5^{x^2-3x} = 625, \quad 7^{2-3|x|} = 1, \quad x^{x^2-7x+12} = 1 \quad (x > 0)$$

$$x^x - x^{-x} = 3 + 3x^{-x} \quad (x > 0), \quad (3x + 1)^{2x-3} = 1 \quad \text{μέ: } x > -\frac{1}{3}$$

εἶναι ἐκθετικές.

Ἐπίλυση τῆς ἐκθετικῆς ἐξισώσεως (1) λέγεται ἡ εὕρεση τοῦ συνόλου τῶν λύσεων αὐτῆς, δηλαδή τοῦ συνόλου τῶν τιμῶν τοῦ ἀγνώστου τῆς πού τήν ἱκανοποιῶν.

Οἱ πιό συνηθισμένες ἐκθετικές ἐξισώσεις ἔχουν ἢμποροῦν νά πάρουν μία ἀπό τίς ἐπόμενες μορφές:

α) Ἐκθετικές ἐξισώσεις τῆς μορφῆς:

$$\alpha^x = \beta \quad (\alpha)$$

ὅπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ καί $\alpha \neq 1$.

Γιά νά ἐπιλύσουμε αὐτή τήν ἐκθετική ἐξίσωση διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Περίπτωση I—Ὁ β εἶναι δύναμη τοῦ α ἢμπορεῖ νά μετατραπῇ σέ δύναμη τοῦ α .

Τότε, αν $\beta = \alpha^k$ θά έχουμε: $\alpha^x = \alpha^k$ και συνεπώς $x = k$.

Παράδειγμα: Νά επιλυθεί η εξίσωση: $3^x = 729$.

Λύση. Έπειδή $729 = 3^6$, η εξίσωση γράφεται: $3^x = 3^6$ και δίνει $x = 6$.

Περίπτωση II.— 'Ο β δεν μπορεί νά μετατραπεί σέ δύναμη του α .

Σ' αυτή την περίπτωση λαμβάνοντας τούς λογαρίθμους και τών δύο μελών της (α) έχουμε:

$$x \cdot \log \alpha = \log \beta \text{ και συνεπώς θα είναι } x = \frac{\log \beta}{\log \alpha}.$$

Παράδειγμα: Νά επιλυθεί η εξίσωση: $2^x = \frac{5}{6}$.

Λύση. Λαμβάνουμε τούς λογαρίθμους και τών δύο μελών της εξισώσεως και έχουμε:

$$x \cdot \log 2 = \log 5 - \log 6 \text{ ή } x = \frac{\log 5 - \log 6}{\log 2} = \frac{-0,07918}{0,30103} = -0,26303.$$

β') Έκθετικές εξισώσεις της μορφής:

$$\alpha^{f(x)} = \beta$$

(β)

όπου $f(x)$ είναι πραγμ. συνάρτηση του άγνωστου και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ με $\alpha \neq 1$.

Προφανώς για $f(x) = x$ έχουμε έκθετική εξίσωση της προηγούμενης μορφής.

Γιά νά επιλύσουμε εξισώσεις της μορφής (β) διακρίνουμε και πάλι δύο περιπτώσεις, αφού οι αριθμοί α και β μπορεί νά είναι ή νά μήν είναι δυνάμεις του ίδιου αριθμού.

Παράδειγμα 1ο: Νά επιλυθεί η εξίσωση: $3^{x^2-5x+11} = 243$. (1)

Λύση. Έπειδή $243 = 3^5$, η εξίσωση (1) γράφεται:

$$3^{x^2-5x+11} = 3^5 \iff x^2 - 5x + 11 = 5 \iff x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Οι ρίζες της τελευταίας εξισώσεως είναι $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, οι όποιες είναι και ρίζες της εξισώσεως (1)

Παράδειγμα 2ο: Νά επιλυθεί η εξίσωση: $7^{2-13x} = 1$.

Λύση. Έχουμε:

$$7^{2-13x} = 1 = 7^0 \iff 2 - 13x = 0 \iff |x| = \frac{2}{13} \iff x = \pm \frac{2}{13}.$$

Παράδειγμα 3ο: Νά επιλυθεί η εξίσωση: $5^{3x-2} = 437$. (1)

Λύση. Παίρνοντας τούς λογαρίθμους και τών δύο μελών της εξισώσεως (1) έχουμε:

$$(3x-2) \cdot \log 5 = \log 437 \text{ ή } 3x-2 = \frac{\log 437}{\log 5} \text{ ή } 3x-2 = \frac{2,64048}{0,69897}$$

ή $3x-2 = 3,77767$ και από αυτή: $x = 1,92589$.

Παράδειγμα 4ο: Νά επιλυθεί η εξίσωση: $\alpha^{\beta x} = \gamma$, (1)

όπου $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^+$ και $\alpha \neq 1$, $\beta \neq 1$.

Λύση. Λαμβάνοντας τούς λογαρίθμους και τών δύο μελών της (1) έχουμε:

$$\beta x \cdot \log \alpha = \log \gamma \text{ ή } \beta x = \left(\frac{\log \gamma}{\log \alpha} \right) \quad (2)$$

Από τη (2) λογαριθμίζοντας βρίσκουμε:

$$x \cdot \log \beta = \log \left(\frac{\log \gamma}{\log \alpha} \right)$$

η

$$x = \frac{1}{\log \beta} \cdot \log \left(\frac{\log \gamma}{\log \alpha} \right) \quad (3)$$

Γιά να έχει νόημα το δεύτερο μέλος της (3) πρέπει να είναι $\frac{\log \gamma}{\log \alpha} > 0$. Αυτό όμως ισχύει όταν οι $\log \gamma$ και $\log \alpha$ είναι **ομόσημοι**, δηλ. όταν οι αριθμοί α και γ είναι > 1 ή όταν και οι δύο τους είναι < 1 .

γ') Έκθετικές εξισώσεις της μορφής:

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \quad (γ)$$

όπου $f(x), g(x)$ είναι (πραγματικές) συναρτήσεις του x και $a \in \mathbb{R}^+$ με $a \neq 1$.

Η έκθετική εξίσωση (γ) είναι ισοδύναμη με την: $f(x) = g(x)$. Πράγματι, αν x_0 είναι μία ρίζα της (γ), τότε, για $0 < a \neq 1$, έχουμε:

$$a^{f(x_0)} = a^{g(x_0)} \iff f(x_0) \cdot \log a = g(x_0) \cdot \log a \iff f(x_0) = g(x_0).$$

Παράδειγμα: Να επιλυθεί η εξίσωση: $100 \cdot 10^x = 100^{\frac{5}{x}}$ (1)

Λύση. Έπειδή $100 = 10^2$ η εξίσωση (1) γράφεται: $10^{2+x} = 10^{\frac{10}{x}}$. Η τελευταία εξίσωση είναι ισοδύναμη με την: $2 + x = \frac{10}{x} \iff x^2 + 2x - 10 = 0$. Οι ρίζες της τελευταίας εξίσωσης είναι: $x_1 = 3, x_2 = -5$, οι οποίες είναι και ρίζες της (1).

δ') Έκθετικές εξισώσεις της μορφής:

$$a^{f(x)} = b^{g(x)} \quad (δ)$$

όπου $f(x), g(x)$ είναι (πραγματικές) συναρτήσεις του x και $a, b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$.

Παρατηρούμε ότι για $g(x) = 1$ έχουμε έκθετική εξίσωση της μορφής (β), ενώ αν ο β είναι άκεραι δύναμη του α , τότε έχουμε έκθετική εξίσωση της προηγούμενης μορφής. Έστω, λοιπόν, τώρα ότι ο β δεν είναι άκεραι δύναμη του α , τότε η έκθετική εξίσωση (δ) είναι ισοδύναμη με την: $f(x) = g(x) \cdot \log_a \beta$.

Πράγματι, αν x_0 είναι μία ρίζα της (δ), τότε για $a, \beta \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ έχουμε:

$$a^{f(x_0)} = b^{g(x_0)} \iff f(x_0) \cdot \log_a a = g(x_0) \cdot \log_a \beta \iff f(x_0) = g(x_0) \cdot \log_a \beta.$$

Παράδειγμα: Να επιλυθεί η εξίσωση: $2^{x^2-5} = 3^{2x}$ (1)

Λύση. Παίρνοντας τους λογαρίθμους ως προς βάση 2 και των δύο μελών της (1) έχουμε:

$$\log_2(2^{x^2-5}) = \log_2(3^{2x}) \implies x^2 - 5 = 2x \log_2 3 \implies x^2 - (2 \log_2 3)x - 5 = 0 \text{ και συνεπώς:}$$

$$x_{1,2} = \log_2 3 \pm \sqrt{(\log_2 3)^2 + 5}.$$

ε') Έκθετικές εξισώσεις της μορφής:

$$f(a^x) = g(a^x) \quad (ε)$$

όπου $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$.

Ειδικά θα μελετήσουμε παρακάτω εξισώσεις τών μορφών:

$$\varepsilon_1: A\alpha^{2x} + B\alpha^x + \Gamma = 0,$$

$$\varepsilon_2: A_1\alpha^{\mu_1 x + \nu_1} + A_2\alpha^{\mu_2 x + \nu_2} + \dots + A_k\alpha^{\mu_k x + \nu_k} = 0,$$

όπου $\mu_i, \nu_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, 2, \dots, k$.

Οι εξισώσεις αυτές ανάγονται στη μορφή (α) μέ την αντικατάσταση:

$$\alpha^x = y$$

Παράδειγμα 1ο: Νά επιλυθεί η εξίσωση: $4^x - 7 \cdot 2^x - 8 = 0$. (1)

Λύση. 'Η εξίσωση (1) γράφεται: $2^{2x} - 7 \cdot 2^x - 8 = 0$ και αν τεθεί: $2^x = y$, έχουμε:

$$y^2 - 7y - 8 = 0$$

Οι ρίζες αυτής της εξισώσεως είναι: $y_1 = 8$ και $y_2 = -1$.

Άρα θά είναι:

$$2^x = 8 \quad (2) \quad \text{και} \quad 2^x = -1 \quad (3).$$

'Η εξίσωση (2) γράφεται $2^x = 2^3$ και δίνει: $x = 3$.

'Η εξίσωση (3) είναι αδύνατη, επειδή $2^x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

'Η (1) λοιπόν έχει μία μοναδική λύση, τή: $x = 3$.

Παράδειγμα 2ο: Νά επιλυθεί η εξίσωση: $3^{x+2} + 5 \cdot 3^x + 3^{x-1} - 3^{x-2} = 128$. (1)

Λύση. 'Η (1) γράφεται: $3^x \cdot 3^2 + 5 \cdot 3^x + \frac{3^x}{3} - \frac{3^x}{9} = 128$.

Θέτουμε $3^x = y$ και έχουμε την εξίσωση:

$$9y + 5y + \frac{y}{3} - \frac{y}{9} = 128 \Rightarrow 128y = 1152 \Rightarrow y = 9.$$

Τότε έχουμε:

$$3^x = 9 = 3^2 \Rightarrow x = 2.$$

Παράδειγμα 3ο: Νά επιλυθεί η εξίσωση: $5^{2x-1} + 3 \cdot 5^{x+1} = 80$. (1)

Λύση. 'Η (1) γράφεται:

$$\frac{(5^x)^2}{5} + 3 \cdot 5^x \cdot 5 - 80 = 0$$

ή $(5^x)^2 + 75 \cdot 5^x - 400 = 0$. (2)

Θέτουμε $5^x = y$ και έχουμε την εξίσωση:

$$y^2 + 75 \cdot y - 400 = 0 \Rightarrow y_1 = 5, y_2 = -80.$$

Άρα η (2) διασπάζεται στις εξισώσεις:

$$5^x = 5, \quad 5^x = -80.$$

'Η πρώτη δίνει: $x = 1$.

'Η δεύτερη είναι αδύνατη, επειδή $5^x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ζ') Έκθετικές εξισώσεις της μορφής:

$$f(a^x) = g(b^x) \quad (5)$$

όπου $a, b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ και $a \neq b$.

Συνήθεις περιπτώσεις της παραπάνω μορφής είναι οι έξης:

$$\zeta_1: A \cdot \alpha^x = B \cdot \beta^x \quad (A \neq 0)$$

$$\zeta_2: A \cdot \alpha^{2x} + B \cdot \alpha^x \cdot \beta^x + \Gamma \cdot \beta^{2x} = 0. \quad (A \neq 0)$$

Οι εξισώσεις αυτές ανάγονται στη μορφή (α) με την αντικατάσταση:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x = y \quad (1)$$

Πράγματι, η ζ_1 με την παραπάνω αντικατάσταση ανάγεται στην εξίσωση:
 $y = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x = \frac{B}{A}$, ενώ η ζ_2 , αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη της με τό β^{2x} , γίνε-
 ται

$$\zeta_2: A \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{2x} + B \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x + \Gamma = 0$$

και με την αντικατάσταση $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x = y$ ανάγεται στην εξίσωση: $Ay^2 + By + \Gamma = 0$.

*Αν τώρα $B^2 - 4A\Gamma \geq 0$, η τελευταία εξίσωση δίνει δύο πραγματικές ρί-
 ζες y_1, y_2 . Για τις τιμές $y = y_1, y = y_2$ η (1) δίνει τις έκθετικές εξισώσεις:
 $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x = y_1, \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x = y_2$, οι οποίες λύνονται κατά τα γνωστά.

Παράδειγμα 1ο: Νά επιλυθεί η εξίσωση:

$$3 \cdot 2^{x-4} - 2^{x-1} = 5^{x-2} - 6 \cdot 5^{x-3} \quad (1)$$

Λύση. Η εξίσωση (1) γράφεται:

$$3 \cdot \frac{2^x}{2^4} - \frac{2^x}{2} = \frac{5^x}{5^2} - 6 \cdot \frac{5^x}{5^3}$$

$$\eta \quad 2^x \cdot \left(\frac{3}{16} - \frac{1}{2}\right) = 5^x \cdot \left(\frac{1}{25} - \frac{6}{125}\right)$$

$$\eta \quad \left(\frac{2}{5}\right)^x = \frac{16}{625}$$

$$\eta \quad \left(\frac{2}{5}\right)^x = \left(\frac{2}{5}\right)^4$$

$$* \text{Αρα είναι:} \quad x = 4.$$

Παράδειγμα 2ο: Νά επιλυθεί η εξίσωση: $3 \cdot 9^x - 5 \cdot 6^x + 2^{2x+1} = 0$. (1)

Λύση. Η εξίσωση (1) γράφεται: $2 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 2^x \cdot 3^x + 3 \cdot 3^{2x} = 0$.

Διαιρώντας και τα δύο μέλη διά 3^{2x} , λαμβάνουμε την ισοδύναμη εξίσωση:

$$2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 5 \left(\frac{2}{3}\right)^x + 3 = 0 \quad (2)$$

$$* \text{Αν τώρα θέσουμε:} \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x = y, \text{ τότε η (2) γράφεται: } 2y^2 - 5y + 3 = 0 \quad (3)$$

Η (3) έχει ρίζες: $y_1 = \frac{3}{2}, y_2 = 1$. *Αρα η (2), συνεπώς και η (1), διασπάζεται στις εξισώσεις της μορφής (α):

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{3}{2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}, \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x = 1 = \left(\frac{2}{3}\right)^0$$

*Ωστε τό σύνολο τών ριζών της (1) είναι: $\{-1, 0\}$.

* η) 'Εκθετικές εξισώσεις της μορφής :

$$A \cdot \alpha^x + B \cdot \beta^x = \Gamma \quad (\eta)$$

όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ με $\alpha\beta = 1$.

Οι εξισώσεις αυτές με την αντικατάσταση: $\alpha^x = y$ ανάγονται στη μορφή (α).

Πράγματι, έπειδή $\alpha\beta = 1$ έχουμε: $\alpha^x \beta^x = 1$ και συνεπώς $\beta^x = \frac{1}{\alpha^x} = \frac{1}{y}$, όποτε

ή (η) γράφεται:

$$Ay + \frac{B}{y} = \Gamma \Rightarrow Ay^2 - \Gamma y + B = 0 \quad (\eta')$$

*Αν τώρα $\Gamma^2 - 4AB \geq 0$ ή τελευταία εξίσωση δίνει δύο πραγματικές ρίζες y_1, y_2 , όποτε ή (η') διασπάζεται στις εξισώσεις της μορφής (α):

$$\alpha^x = y_1, \quad \alpha^x = y_2.$$

Παράδειγμα: Νά επιλυθεί ή εξίσωση: $3\left(\frac{3}{2}\right)^x + 2\left(\frac{2}{3}\right)^x = 5$. (1)

Λύση. Θέτουμε $\left(\frac{3}{2}\right)^x = y$ και ή (1) γράφεται: $3y + \frac{2}{y} = 5$ (2)

Η (2) έχει ρίζες: $y_1 = \frac{2}{3}, y_2 = 1$ και συνεπώς έχουμε:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{2}{3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}, \quad \left(\frac{3}{2}\right)^x = 1 = \left(\frac{3}{2}\right)^0$$

*Αρα τό σύνολο λύσεων της εξισώσεως (1) είναι: $\{-1, 0\}$.

Σημείωση. Μία πιό γενική μορφή της (η) είναι ή έκθετική εξίσωση της μορφής:

$$A \cdot \alpha^x + B \cdot \beta^x = \Gamma \cdot \gamma^x \text{ με } \alpha\beta = \gamma^2 \text{ και } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^+, \text{ αλλά } \alpha, \beta \neq 1.$$

Γιά $\gamma = 1$ παίρνουμε την έκθετική εξίσωση (η). Γιά $\gamma \neq 1$ ή εξίσωση $A \cdot \alpha^x + B \cdot \beta^x = \Gamma \cdot \gamma^x$ γράφεται: $A\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^x + B\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^x = \Gamma$ και λύνεται κατά τά γνωστά.

* θ) 'Εκθετικές εξισώσεις της μορφής :

$$\{f(x)\}^{g(x)} = 1 \quad (\theta)$$

όπου $f(x), g(x)$ είναι συναρτήσεις του x με τόν περιορισμό: $f(x) > 0$.

Οι εξισώσεις της μορφής αυτής έχουν προφανώς λύσεις τίς λύσεις τών εξισώσεων:

$$(i) \quad f(x) = 1$$

$$(ii) \quad g(x) = 0 \wedge f(x) \neq 0 \text{ (άκριβέστερα } f(x) > 0).$$

Παράδειγμα: Νά λυθεί ή εξίσωση: $(x^2 - 3x + 2)^{x^2 - 2x} = 1$. (1)

Λύση. Έδω έχουμε $f(x) = x^2 - 3x + 2 = (x - 1) \cdot (x - 2)$ και τό σύνολο λύσεων της $f(x) > 0$ είναι: $\{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < 1, \quad 2 < x < +\infty\}$.

*Υστερα από αυτό έχουμε:

$$(i) \text{ Οι ρίζες της } x^2 - 3x + 2 = 1 \iff x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

είναι προφανώς λύσεις της (1).

(ii) Οι λύσεις του συστήματος:

$$\left. \begin{array}{l} x^2 - 2x = 0 \\ x^2 - 3x + 2 > 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} x(x-2) = 0 \\ (x-1)(x-2) > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 0$$

είναι επίσης λύση της (1).

*Αρα το σύνολο λύσεων της εξισώσεως (1) είναι: $\left\{ 0, \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right\}$.

Σχόλιο. Περιπτώσεις σαν τήν: $x^2 - 3x + 2 = -1 \wedge x^2 - 2x = 2k, k \in \mathbb{Z}$ δέν ξετάζουμε εδώ (βλ. σχετικώς όρισμό έκθετικής εξισώσεως § 168).

Παρατήρηση. Ή εξίσωση $\{f(x)\}^{f(x)} = \beta$, όπου $f(x)$ είναι γνωστή συνάρτηση του x με $f(x) > 0$ λύνεται αν τό β έχει ή μπορεί νά πάρει τή μορφή: $\beta = \alpha^a$, ($\alpha > 0$). Τότε θά έχουμε: $\{f(x)\}^{f(x)} = \alpha^a$ καί συνεπώς θά είναι $f(x) = \alpha$.

Παραδείγματα: Νά επιλυθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha) x^x = 4, \quad \beta) (x^2 - 7x + 15)^{x^2 - 7x + 15} = 27.$$

Λύση. α) Έχουμε: $x^x = 4 = 2^2$ καί συνεπώς $x = 2$.

β) Έχουμε:

$$(x^2 - 7x + 15)^{x^2 - 7x + 15} = 27 = 3^3 \iff x^2 - 7x + 15 = 3 \iff x^2 - 7x + 12 = 0 \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = 4.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ομάδα Α'. 380. Νά επιλύσετε τις εξισώσεις:

$$\begin{array}{lll} 1. & 5^{\sqrt{x}} = 625, & 2. & 3^{x^2 - 9x + 11} = 27, & 3. & 2^{x^2 - 2x} = 8^{x-2} \\ 4. & 3^x = 81^{2-|x|}, & 5. & 27^{\frac{x+1}{x-2}} = 3^{2x-4}, & 6. & \left(\frac{3}{4}\right)^{3x-7} = \left(\frac{4}{3}\right)^{7x-3} \end{array}$$

381. Νά επιλύσετε τις ακόλουθες έκθετικές εξισώσεις:

$$\begin{array}{lll} 1. & 2 \cdot 9^x - 7 \cdot 3^x + 3 = 0, & 2. & 3^x - 4\sqrt{3^x} + 3 = 0, & 3. & 2^x + \frac{6}{2^x} = 5, \\ 4. & 2 \cdot 4^x + 3 \cdot 9^x = 5 \cdot 6^x, & 5. & 9^x + 6^x = 4^x, & 6. & x^x = x. \end{array}$$

382. Τό ίδιο νά κάνετε για τις εξισώσεις:

$$\begin{array}{lll} 1. & 3^{x+1} - 2^x = 3^{x-1} + 2^{x+3}, & 2. & 7^{3x+2} + 4^{x+2} = 7^{3x+4} + 4^{x+3}, & 3. & 2^{2x} = 3^{x+1}, \\ 4. & 5^{x-2} - 3 \cdot 2^{x-3} = 12 \cdot 5^{x-3} - 2^x, & 5. & (x^2 - 5x + 6)^{x^2 - 2x} = 1, & 6. & x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x \end{array}$$

***Ομάδα Β'. 383.** Νά επιλύσετε τις εξισώσεις:

$$\begin{array}{lll} 1. & 2^{3^x} = 512, & 2. & 18^{8-4x} = (54\sqrt{2})^{3x-2}, & 3. & (x^2 - 1)e^{\log(x-2)} = \log e^{x+1}, \\ 4. & 5^{x^2-3x} = 625 & 5. & e^x - e^{-x} = \frac{8}{3}, & 6. & 3^{x+2} + 9^{x-1} = 1458. \end{array}$$

384. Νά επιλύσετε τις ακόλουθες έκθετικές εξισώσεις:

$$\begin{array}{ll} 1. & 4^x - 3^{x - \frac{1}{2}} = 3^{x + \frac{1}{2}} - 2^{2x-1}, & 2. & 7^{x + \frac{4}{3}} - 5^{3x} = 2 \left(7^{x + \frac{1}{3}} + 5^{3x-1} \right) \\ 3. & e^{2x} - 3e^x + 2 = 0, & 4. & 2^{2x-1} + 3^x + 4^{x + \frac{1}{2}} - 9^{\frac{x}{2}+1} = 0. \end{array}$$

385. Τό ίδιο νά κάνετε για τις εξισώσεις:

$$1. \quad x^x - x^{-x} = 3(1 + x^{-x}), \quad 2. \quad 3^{x-1} - \frac{15}{3^{x+1}} + 3^x - \frac{21}{3^{x+1}} = 0,$$

$$3. \sqrt{2^{6x-13}} - 3^{2(x-2)} = \sqrt{8^{2x-3}} - 3^{2x-3}, \quad 4. \quad x^2 \cdot 2^{x+1} + 2^{(x-3)+2} = x^2 \cdot 2^{(x-3)+4} + 2^{x-1}.$$

Υπόδειξη. Στην (4) να διακρίνετε τις περιπτώσεις: (i) $x \geq 3$, (ii) $x < 3$.

386. "Αν α, β, γ είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογώνιου τριγώνου $AB\Gamma$ ($A = 90^\circ$), να αποδείξετε ότι η έκθετική εξίσωση:

$$\beta^x + \gamma^x = \alpha^x$$

έχει ακριβώς μία λύση στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Εφαρμογή: $\beta = 3, \quad \gamma = 4, \quad \alpha = 5$.

Υπόδειξη. Αφού βρείτε την (προφανή) λύση $x_0 (= ;)$ να συνεχίσετε με τη μέθοδο της «εξ αποτοπής» απαγωγής παίρνοντας τις περιπτώσεις: (i) $x > x_0$, και (ii) $x < x_0$.

387. "Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ τέτοιοι, ώστε $(\alpha - \beta)(\alpha - 1)(2\alpha - 1) \neq 0$ και δ β είναι ρίζα της εξίσωσης: $x^2 - \alpha x - \alpha\beta = 0$, να προσδιορίσετε τα α, β και x αν ξέρουμε ότι ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\alpha^{x^2 - \alpha x - \alpha\beta} = \beta^{x^2 + \beta x + \alpha^2}, \quad x + \beta + 2\alpha = 0.$$

IV. ΕΚΘΕΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

* § 169. Όρισμοί.—Ονομάζουμε σύστημα έκθετικών εξισώσεων με δύο ή περισσότερους άγνωστους, κάθε σύστημα εξισώσεων, από τις οποίες ή μία τουλάχιστο είναι έκθετική.

Οι τιμές των άγνωστων, για τις οποίες συναληθεύουν οι εξισώσεις του συστήματος, λέμε ότι αποτελούν τη λύση του συστήματος.

Η επίλυση των έκθετικών συστημάτων στηρίζεται στις ιδιότητες των δυνάμεων και στις ιδιότητες των λογαρίθμων.

Παραδείγματα: 1ο. Νά επιλυθεί το σύστημα:

$$4^x \cdot 2^{y-2} = 32 \quad (1)$$

$$3^{x+2} \cdot 3^{y-4} = 27. \quad (2)$$

Λύση. Οι (1) και (2) γράφονται:

$$\left. \begin{array}{l} 2^{2x} \cdot 2^{y-2} = 2^5 \\ 3^{x+2} \cdot 3^{y-4} = 3^3 \end{array} \right\} \iff \left. \begin{array}{l} 2^{2x+y-2} = 2^5 \\ 3^{x+y-2} = 3^3 \end{array} \right\} \iff \left. \begin{array}{l} 2x + y = 7 \\ x + y = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow (x, y) = (2, 3).$$

"Αρα τό σύνολο λύσεων: (x, y) του συστήματος είναι τό μονοσύνολο: $\{(2, 3)\}$.

2ο. Νά επιλυθεί το σύστημα:

$$3^x \cdot 4^y = 3981312 \quad (1)$$

$$2^x \cdot 5^x = 400000. \quad (2)$$

Λύση. Λογαριθμίζοντας και τα δύο μέλη των εξισώσεων (1) και (2) βρίσκουμε τό ισόδυναμο σύστημα:

$$x \cdot \log 3 + y \cdot \log 4 = \log 3981312 \quad (1')$$

$$y \cdot \log 2 + x \cdot \log 5 = \log 4000000 \quad (2')$$

Θέτοντας $\log 4 = \log 2^2 = 2\log 2$ και πολλαπλασιάζοντας τά μέλη της (2') επί 2, βρίσκουμε:

$$x \log 3 + 2y \cdot \log 2 = \log 3981312 \quad (1'')$$

$$2x \log 5 + 2y \cdot \log 2 = 2\log 4000000 \quad (2'')$$

Λύνοντας τό σύστημα των εξισώσεων (1'') και (2'') βρίσκουμε:

$$x = \frac{2\log 4000000 - \log 3981312}{2\log 5 - \log 3} = \frac{2 \cdot \log(2^5 \cdot 10^5) - \log(2^{14} \cdot 3^5)}{2\log 5 - \log 3} =$$

$$= \frac{10 - 10\log 2 - 5\log 3}{2 - 2\log 2 - \log 3} = 5.$$

Αντικαθιστώντας την τιμή αυτή του x στη (2) βρίσκουμε:

$$2^y = \frac{400000}{5^5} = \frac{4 \cdot 10^5}{5^5} = \frac{2^3 \cdot 2^5 \cdot 2^5}{5^5} = 2^7,$$

από την οποία έχουμε: $y = 7$.

Άρα το σύνολο λύσεων: (x, y) του συστήματος που μας δόθηκε είναι τό: $\{(5, 7)\}$.

30. Νά επιλυθεί το σύστημα:

$$x^y = y^x \quad (1)$$

$$x^3 = y^2 \quad (2)$$

Λύση. Μία προφανής λύση του συστήματος είναι το ζεύγος: $(x, y) = (1, 1)$. Υποθέτοντας τώρα ότι: $x > 0, y > 0$ με $x \neq 1$ και $y \neq 1$ και λογαριθμίζοντας * και τα δύο μέλη των εξισώσεων (1) και (2) βρίσκουμε το ισοδύναμο σύστημα:

$$y \cdot \log x = x \cdot \log y \quad (1')$$

$$3 \cdot \log x = 2 \cdot \log y. \quad (2')$$

$$\text{Διαιρώντας κατά μέλη τις (1') και (2')} \text{ έχουμε: } \frac{y}{3} = \frac{x}{2} \Rightarrow y = \frac{3x}{2} \quad (3)$$

Θέτοντας την τιμή αυτή του y στη (2) έχουμε:

$$x^3 = \left(\frac{3x}{2}\right)^2 \quad \text{ή} \quad x^3 = \frac{9}{4} x^2$$

$$\text{ή} \quad x^2 \left[x - \frac{9}{4} \right] = 0, \text{ και επειδή υποθέσαμε } x > 0 \text{ έπεται: } x = \frac{9}{4}.$$

Θέτοντας την τιμή αυτή του x στην (3) λαμβάνουμε:

$$y = \frac{3}{2} \cdot \frac{9}{4} = \frac{27}{8}.$$

Επομένως οι ρίζες του συστήματος είναι τα ζεύγη:

$$(x = 1, y = 1), \quad \left(x = \frac{9}{4}, y = \frac{27}{8}\right).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

*Ομάδα Α'. 388. Νά επιλύσετε τα ακόλουθα συστήματα:

$$1. \begin{cases} 2^{3x+y} = 32 \\ 3^{2x-y} = 1 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2^x = 3y \\ 3^x = 2y \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 3^x - 2^{y+3} = 15 \\ 2^y - 3^{x-3} = 3 \end{cases}$$

389. Νά προσδιορίσετε τα $x, y \in \mathbb{R}^+$ για τα οποία ισχύουν:

$$1. \begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 54 \\ 3^x \cdot 2^y = 24 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 3^{x^y-y^x} = 1 \\ y^2 - x = 0 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x^y = y^x \\ y = \alpha x, (0 < \alpha \neq 1) \end{cases}$$

*Ομάδα Β'. 390. Νά επιλύσετε τα ακόλουθα συστήματα:

$$1. \begin{cases} 3^{\frac{x-y}{2}} - 3^{\frac{x-y}{4}} = 6 \\ 2^{\frac{x+y}{3}} - 2^{\frac{x+y}{6}} = 2 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x^{x+y} = y^x \\ y^{x+y} = x^3 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x^{x+y} = y^v \\ y^{x+y} = x^{2^v} \cdot y^v \end{cases}, v \in \mathbb{N},$$

* Η λογαριθμική επιτρέπεται, επειδή $x \neq 1$ και $y \neq 1$, γιατί αλλιώς το σύστημα που θα προκύψει δεν είναι ισοδύναμο με το αρχικό.

391. Νά επιλύσετε καί νά διερευνήσετε τά παρακάτω συστήματα:

$$\begin{array}{lll} 1. \begin{array}{l} \alpha^x = \beta^y \\ x^y = y^x \end{array} & 2. \begin{array}{l} \alpha^x = \beta^y \\ x^\alpha = y^\beta \end{array} & 3. \begin{array}{l} x^\alpha = y^\beta \\ x^y = y^x \end{array} \end{array}$$

392. Νά βρεθοῦν οἱ ἀκέραιες καί θετικές λύσεις τοῦ συστήματος:

$$\{x^y = y^x \wedge x^x = y^{x+2y}\}.$$

393. Νά βρεθοῦν οἱ πραγματικές λύσεις τοῦ συστήματος:

$$\{z^x = y^{2x} \wedge 2^{x-1} = 4^x \wedge x + y + z = 16\}.$$

V. ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

§ 170. Ὅρισμοί.—α') Λογαριθμική ἐξίσωση ονομάζουμε κάθε ἐξίσωση τῆς μορφῆς:

$$E(x) = F(x) \quad (1)$$

ὅπου $E(x)$, $F(x)$ εἶναι (πραγματικές) συναρτήσεις τοῦ x , ὅταν σ' ἕνα τουλάχιστο ἀπό τά μέλη τῆς ἐμφανίζεται ὁ λογάριθμος τοῦ ἀγνώστου εἴτε ὁ λογάριθμος συναρτήσεων τοῦ ἀγνώστου.

Ἔτσι, π.χ. οἱ ἐξισώσεις:

$$3\log x - \frac{1}{2} \log(2x+1) = \log \sqrt{2x-1} + 2, \quad x^{\log \sqrt{x}} = 100, \quad \log_3 x \cdot \log_9 x = 2,$$

εἶναι λογαριθμικές.

Ἐπίλυση μιᾶς λογαριθμικῆς ἐξισώσεως λέγεται ἡ εὕρεση τοῦ συνόλου τῶν λύσεων αὐτῆς, δηλαδή τοῦ συνόλου τῶν τιμῶν τοῦ ἀγνώστου τῆς, οἱ ὁποῖες τήν ἱκανοποιοῦν.

Ἡ ἐπίλυση τῶν λογαριθμικῶν ἐξισώσεων στηρίζεται στίς ιδιότητες τῶν λογαριθμῶν, γι' αὐτό συνιστοῦμε στόν ἀναγνώστη νά ἀνατρέξει γιά μιᾶ ἀκόμη φορά στόν πίνακα τῆς σελίδας 219.

Στίς περισσότερες φορές ἡ ἐπίλυση μιᾶς λογαριθμικῆς ἐξισώσεως ἀνάγεται σέ ἐπίλυση ἐξισώσεων πού ἔχουν τίς ἀκόλουθες μορφές:

$$\begin{array}{lll} \text{(i)} \log x = \gamma, & \text{(ii)} \log x = \log \alpha, & \text{(iii)} \log f(x) = \log \alpha, \\ & \text{(iv)} \log_\beta f(x) = \log_\beta g(x), \end{array}$$

ὅπου α εἶναι γνωστός θετικός ἀριθμός, $f(x)$ καί $g(x)$ γνωστές συναρτήσεις τοῦ ἀγνώστου μέ τόν περιορισμό $f(x), g(x) > 0$ καί β εἶναι ἡ βάση τοῦ λογαριθμικοῦ συστήματος ($0 < \beta \neq 1$).

Ἀπό τόν ὅρισμό τοῦ λογαρίθμου καί ἀπό τήν πρώτη ιδιότητα τῶν λογαρίθμων προκύπτει τώρα ὅτι:

$$\begin{array}{llll} \text{(i)} & \text{Ἡ ἐξίσωση } \log x = \gamma & \text{εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν: } & x = 10^\gamma \\ \text{(ii)} & \text{Ἡ } & \log x = \log \alpha & \text{» μέ τό σύστημα: } x = \alpha, \alpha > 0 \\ \text{(iii)} & \text{Ἡ } & \log f(x) = \log \alpha & \text{» » » : } f(x) = \alpha, \alpha > 0 \\ \text{(iv)} & \text{Ἡ } & \log_\beta f(x) = \log_\beta g(x) & \text{» » » : } f(x) = g(x), g(x) > 0. \end{array}$$

Σημείωση. Ἄν σέ μιᾶ λογαριθμική ἐξίσωση οἱ λογάριθμοι εἶναι μέ διαφορετικές βάσεις, πρέπει νά τοὺς μετατρέπουμε, ὥστε ὅλοι νά εἶναι μέ τήν ἴδια βάση.

Παραδείγματα : 1ο. Νά επιλυθεί η λογαριθμική εξίσωση :

$$\log(4x-1) = 2\log 2 + \log(x^2-1) \quad (1)$$

Λύση. 'Η (1) είναι ισοδύναμη με τό σύστημα:

$$\{4x-1 > 0 \wedge x^2-1 > 0 \wedge \log(4x-1) = \log 4(x^2-1)\} \quad (2)$$

'Η εξίσωση του συστήματος (2) είναι ισοδύναμη με την:

$$4x-1 = 4(x^2-1) \iff 4x^2-4x-3=0 \implies x_1 = \frac{3}{2}, \quad x_2 = -\frac{1}{2}.$$

'Απ' αυτές μόνο η πρώτη ικανοποιεί και τις δύο ανισώσεις του συστήματος (2).

*Αρα η εξίσωση (1) έχει μία μόνο ρίζα, την: $x = \frac{3}{2}$.

2ο. Νά επιλυθεί η λογαριθμική εξίσωση :

$$\frac{1}{2} \log(x+2) + \log \sqrt{x-3} = 1 + \log \sqrt{3} \quad (1)$$

Λύση. 'Επειδή $\frac{1}{2} \log(x+2) = \log \sqrt{x+2}$ και $1 = \log 10$ ή (1) είναι ισοδύναμη με τό σύστημα:

$$\{x+2 > 0 \wedge x-3 > 0 \wedge \log(\sqrt{x+2} \cdot \sqrt{x-3}) = \log(10 \cdot \sqrt{3})\} \quad (2)$$

Οι δύο πρώτες σχέσεις του (2) συναληθεύουν για: $x > 3$ (3)

'Η εξίσωση του συστήματος είναι ισοδύναμη με την:

$$\sqrt{(x+2) \cdot (x-3)} = 10 \cdot \sqrt{3} \iff (x+2)(x-3) = 300 \iff x^2 - x - 306 = 0.$$

'Από την τελευταία εξίσωση βρίσκουμε: $x_1 = 18, x_2 = -17$.

'Απ' αυτές μόνο η πρώτη ικανοποιεί την (3).

Συνεπώς η (1) έχει ως (μοναδική) λύση την: $x = 18$.

3ο. Νά επιλυθεί η εξίσωση: $\sqrt{x^{\log \sqrt{x}}} = 10$. (1)

Λύση. 'Η (1) είναι ισοδύναμη με τό σύστημα:

$$\{x > 0 \wedge x^{\log \sqrt{x}} = 100\} \quad (2)$$

'Η εξίσωση του συστήματος (2) είναι ισοδύναμη με την:

$$\log \sqrt{x} \cdot \log x = \log 100 \iff \frac{1}{2} (\log x)^2 = 2 \iff (\log x)^2 = 4.$$

*Αρα τό σύστημα (2) διασπάζεται στα συστήματα:

$$\{x > 0 \wedge \log x = 2\} \quad \text{και} \quad \{x > 0 \wedge \log x = -2\}.$$

'Από την εξίσωση $\log x = 2$ έχουμε: $\log x = 2 = \log 100$, άρα $x = 100$.

'Από την εξίσωση $\log x = -2$ έχουμε: $\log x = -2 = \log 0,01$, άρα $x = 0,01$.

*Ωστε τό σύνολο λύσεων της εξίσώσεως (1) είναι: $\{10^{-2}, 10^2\}$.

4ο. Νά επιλυθεί η εξίσωση: $\log_3 x \cdot \log_9 x = 2$ (1)

Λύση. 'Επειδή $\log_9 x = \log_{3^2} x = \frac{1}{2} \log_3 x$, ή (1) είναι ισοδύναμη με τό σύστημα:

$$\{x > 0 \wedge \frac{1}{2} (\log_3 x)^2 = 2\} \quad (2)$$

'Η εξίσωση του συστήματος (2) είναι ισοδύναμη με την: $(\log_3 x)^2 = 4$.

*Αρα τό σύστημα (2) διασπάζεται στα συστήματα:

$$\{x > 0 \wedge \log_3 x = 2\} \quad \text{καί} \quad \{x > 0 \wedge \log_3 x = -2\}.$$

Ἐπιλύνοντας τὰ παραπάνω συστήματα, ὅπως καί στό προηγούμενο παράδειγμα, βρίσκουμε ὅτι τό σύνολο λύσεων τῆς (1) εἶναι: $\{3^{-2}, 3^2\}$.

* β') **Λογαριθμικό σύστημα** ονομάζουμε κάθε σύστημα τοῦ ὁποῖου μία τουλάχιστο ἀπό τίς ἐξισώσεις του εἶναι λογαριθμική.

*Ἐτσι, π.χ. τὰ συστήματα:

$$\left. \begin{array}{l} \log x + \log y = \log 14 \\ 3x - y = 1 \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} \log_y x + \log_x y = 2 \\ x^2 + y = 12 \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} x^{\log y + 1} = y^{\log x + 2} \\ y^{\sqrt{x+2}} = x^{y-2} \end{array} \right\}$$

εἶναι λογαριθμικά.

Ἐπίλυση ἑνός λογαριθμικοῦ συστήματος λέγεται ἡ εὕρεση τοῦ συνόλου τῶν λύσεων αὐτοῦ, δηλαδή τοῦ συνόλου τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων του, οἱ ὁποῖες ικανοποιοῦν ὅλες τίς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος.

Ἡ ἐπίλυση τῶν λογαριθμικῶν συστημάτων στηρίζεται στίς ιδιότητες τῶν λογαρίθμων καί στή θεωρία ἐπιλύσεως λογαριθμικῶν ἐξισώσεων ποῦ ἐκθέσαμε παραπάνω.

Παραδείγματα: 1ο. Νά ἐπιλυθεῖ τό σύστημα:

$$\{\log x + \log y = \log 14, \quad 3x - y = 1\} \quad (1)$$

Λύση. Πρῶτα-πρῶτα οἱ x καί y ὀφείλουν νά εἶναι θετικοί. Ἡ πρώτη ἐξίσωση τοῦ συστήματος γράφεται: $\log(x \cdot y) = \log 14 \iff x \cdot y = 14$, ὁπότε τό (1) ἰσοδυναμεῖ μέ τό σύστημα:

$$\{3x - y = 1 \wedge xy = 14\} \quad (2)$$

Λύνουμε τό σύστημα (2) καί, ἐπειδή πρέπει $x > 0, y > 0$, βρίσκουμε: $(x, y) = \left(\frac{7}{3}, 6\right)$.

*Ἀρα τό σύνολο λύσεων (x, y) τοῦ (1) εἶναι τό μονοσύνολο:

$$\left\{\left(\frac{7}{3}, 6\right)\right\}.$$

2ο. Νά ἐπιλυθεῖ τό σύστημα:

$$\{\log_x x + \log_y y = 2 \wedge x^2 + y = 12\}. \quad (1)$$

Λύση. Πρῶτα-πρῶτα οἱ x καί y ὀφείλουν νά εἶναι θετικοί καί διάφοροι ἀπό τό 1.

*Ὡστε: $0 < x, y \neq 1$.

*Ἐπειδή $\log_x x = \frac{1}{\log_y x}$ (βλ. Πόρισμα 1, § 154), ἡ πρώτη ἐξίσωση τοῦ συστήματος γράφεται:

$$\log_y x + \frac{1}{\log_y x} = 2 \iff \log_y^2 x - 2\log_y x + 1 = 0 \iff (\log_y x - 1)^2 = 0$$

*Από τήν τελευταία ἐξίσωση ἔχουμε: $\log_y x = 1$, ὁπότε: $x = y$ (2)

*Ἐτσι ἔχουμε τώρα νά ἐπιλύσουμε τό ἰσοδύναμο σύστημα:

$$\{x^2 + y = 12 \wedge x = y\} \quad (3)$$

Λύνουμε τό σύστημα (3) καί ἐπειδή πρέπει $x > 0, y > 0$, βρίσκουμε: $(x, y) = (3, 3)$.

*Ἀρα τό (1) ἔχει, ὡς (μοναδική) λύση, τήν: $(x, y) = (3, 3)$.

30. Νά επιλυθεί το σύστημα :

$$x^{\log y + 1} = y^{\log x + 2} \quad (1)$$

$$y^{\sqrt{x+2}} = x^{y-2} \quad (2)$$

Λύση. Πρώτα-πρώτα οι x και y όφειλουν να είναι θετικοί (γιατί;). Μία προφανής λύση του συστήματος είναι ή: $(x, y) = (1, 1)$. Έστω λοιπόν ότι $x \neq 1$ και $y \neq 1$.

Από την (1) λογαριθμίζοντας λαμβάνουμε:

$$(\log y + 1) \cdot \log x = (\log x + 2) \cdot \log y$$

$$\log x \log y + \log x = \log x \log y + 2 \log y$$

$$\log x = \log y^2$$

$$x = y^2.$$

και συνεπώς:

(3)

Εξαιτίας της (3) η δεύτερη εξίσωση του συστήματος γράφεται: $y^{\sqrt{y^2+2}} = y^{2(y-2)}$.

Από την τελευταία εξίσωση, επειδή $y \neq 1$, παίρνουμε: $\sqrt{y^2+2} = 2(y-2)$.

Λύνουμε την τελευταία εξίσωση και, επειδή πρέπει $y > 2$, βρίσκουμε: $y = \frac{8 + \sqrt{22}}{3}$,

οπότε η (3) δίνει: $x = \frac{86 + 16\sqrt{22}}{9}$.

Έτσι το σύστημα που μās δόθηκε έχει τις λύσεις:

$$(x = 1, y = 1), \quad \left(x = \frac{86 + 16\sqrt{22}}{9}, y = \frac{8 + \sqrt{22}}{3} \right).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ομάδα Α'. 394. Νά επιλύσετε τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$1. \log(x-2) + \log(x-1) = \log(2x+8), \quad 2. \log(x+1) + 2 \cdot \log \sqrt{5x} = 2,$$

$$3. \frac{1}{2} \log(3x-1) + \frac{1}{2} \log(8x-2) = \log(4x-1), \quad 4. \frac{1}{3} \log(x-1) = \log x - \log 2$$

$$5. \log(2x-5) + \log(3x+7) = 4 \cdot \log 2, \quad 6. 2 \cdot \log x = \log \left(x + \frac{11}{10} \right) + 1.$$

395. Νά επιλύσετε τις ακόλουθες λογαριθμικές εξισώσεις:

$$1. \log[\log(2x^2 + x - 11)] = 0, \quad 2. \log(x+1) - \log 3 = \log(2x-3) + \log 7,$$

$$3. 2^{\log x} + 2^{5-\log x} = 12, \quad 4. \log \frac{2x}{3} + \log \left(\frac{5x}{4} + 2 \right) = 2 \log(x-1),$$

$$5. (4x)^{\log 2 + \log \sqrt{x}} = 100, \quad 6. 2 \log(2x-1) - \log(3x-2x^2) = \log(4x-3) - \log x$$

396. Τό ίδιο νά κάνετε γιά τις εξισώσεις:

$$1. \log(3^x + 2) = 2x \log 3, \quad 2. \log(2^x + 2 \cdot 3^x) + \log 81 = x \cdot \log 3 + \log 178,$$

$$3. x^{\log x} = \frac{1}{10} \cdot x^2 \sqrt{x}, \quad 4. \log_{\sqrt{2}} x \cdot \log_2 x \cdot \log_{2\sqrt{2}} x \cdot \log_4 x = 54,$$

$$5. \varphi(x) + \varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{10}{3}, \text{ όπου } \varphi(x) = \frac{2 \log x + 1}{2 \log x - 1}.$$

397. Γιά ποιές τιμές του θ ή εξίσωση: $x^2 - x \log \theta + 3 \log \theta - 8 = 0$ έχει ρίζες πραγματικές και ίσες; Κατόπιν νά προσδιορίσετε τήν τιμή της παραμέτρου θ , ώστε ή παραπάνω εξίσωση νά έχει μία διπλή ρίζα στό διάστημα $(0, 4)$.

398. Νά επιλύσετε τὰ ακόλουθα λογαριθμικά συστήματα:

$$x + y = 65 \quad \log x + \log y = \frac{3}{2} \quad x^2 + y^2 = 425$$

$$1. \log x + \log y = 3 \quad 2. \log x - \log y = \frac{1}{2} \quad 3. \log x + \log y = 2.$$

399. Νά επιλύσετε τὰ ακόλουθα συστήματα:

$$\log^2 x + \log^2 y = 10 \quad x \log y + y \log x = 20 \quad 2^x + 2^y = 12$$

$$1. \log x - \log y = 2 \quad 2. \log \sqrt{xy} = 1 \quad 3. \log(2x+2) - \log(3+y) = 0.$$

400. Τό ίδιο νά κάνετε γιά τὰ συστήματα:

$$4(\log_x y + \log_y x) = 17 \quad 2. (3x)^{\log 3} = (5y)^{\log 5} \quad 3. xy = \alpha^2 \quad (\alpha \in \mathbb{R}^+)$$

$$1. xy = 243 \quad 5 \log x = 3 \log y \quad 3. \log^2 x + \log^2 y = \frac{5}{2} \log^2 \alpha$$

★ Ομάδα Β'. 401. Νά επιλύσετε τίς εξισώσεις:

$$1. \log_x 10 + 6 \cdot \log_{10x} 10 - 8,4 \cdot \log_{100x} 10 = 0, \quad 2. x^{\log \frac{3x}{10}} = 9 \cdot (3x)^{\log 9x^2},$$

$$3. \log_{\sqrt{2}} (2 \cdot \log_4 x \cdot \log_2 x + \log_{\sqrt{2}} x) = 6, \quad 4. \log_2 (\log_2 x) = \log_4 (\log_4 x),$$

$$5. [\log_x (16x - 5 - x^2) + \log_x 2] \cdot \log_{x+5} x \cdot \log_x x = 2.$$

402. Έστω τό πολυώνυμο: $f(x) = x^2 - 2(1 + \log_a \lambda)x + 5 - \log_a^2 \lambda$, όπου λ είναι μία (πραγματική) θετική παράμετρος καί $0 < \alpha < 1$.

(i) Νά βρείτε γιά ποιές (πραγματικές) τιμές τῆς παράμετρου λ :

- α) ἡ ἐξίσωση $f(x) = 0$ ἔχει ρίζες πραγματικές καί ἀνισες,
 β) τό $f(x)$ εἶναι θετικό γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$,
 γ) ἡ ἐξίσωση $f(x) = 0$ ἔχει μία διπλή ρίζα στό διάστημα $(-2, 2)$.

(ii) Ἄν x_1, x_2 εἶναι οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως $f(x) = 0$, νά σχηματίσετε ἐξίσωση β' βαθμοῦ, τῆς ὁποίας ρίζες εἶναι οἱ: $\rho_1 = x_1 + 3x_2, \rho_2 = 3x_1 + x_2$.

(iii) Νά βρείτε τή μέγιστη καί τήν ἐλάχιστη δυνατή τιμή καθεμιᾶς ἀπό τίς παραστάσεις:

$$y_1 = x_1^2 + x_2^2 + 6x_1x_2, \quad y_2 = x_1^2 + x_2^2.$$

ὅταν μεταβάλλεται τό λ καί $x_1, x_2 \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$.

403. Νά προσδιορίσετε τὰ $x, y \in (0, +\infty)$ γιά τὰ ὁποῖα ἰσχύουν:

$$y^x(1 + y^x) = 10100 \quad x \log y + y \log x = 200 \quad (2x) \log y + y \log(2x) = 8x^2$$

$$1. \log \sqrt{xy} - \log \sqrt{\frac{x}{y}} = 3 \quad 2. \{(\log x) \cdot (\log y)^y\}^{\frac{1}{x}} = 1024 \quad 3. y = 4x^2 \cdot y \log(2x).$$

404. Νά επιλύσετε τὰ ακόλουθα συστήματα:

$$\log_\alpha x - \log_\beta (x + y) = -1 \quad \log_\alpha x \cdot \log_\beta y = \log_\alpha \beta \quad (0 < \alpha, \beta \neq 1).$$

$$1. \log_3 x - \log_9 (y - x) = 0, \quad 2. \alpha^{\log_\alpha 2y} = \sqrt{x}$$

405. Γιά ποιές τιμές τοῦ $\theta, \theta \in \mathbb{R}^+$, οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως:

$$\log[\log(x^2 + x \log \theta + 110)] = 0$$

ἀποτελοῦν λύση τοῦ συστήματος:

$$\{y^{\log yz} + z^{\log yz} = 20 \wedge \log \sqrt{yz} = 1\}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VIII

ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΣ-ΙΣΕΣ ΚΑΤΑΘΕΣΕΙΣ-ΧΡΕΩΛΥΣΙΑ

I. ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΣ

§ 171. Εισαγωγικές έννοιες-Όρισμοί.— Γνωρίζουμε από την αριθμητική, ότι **τόκος** (τίκτω) είναι τό επιπλέον ποσό πού παίρνουμε από κάποιον, όταν του δανείζουμε χρήματα για ένα χρονικό διάστημα. Τό ποσό πού δανείζουμε λέγεται **κεφάλαιο**. Στα οικονομικά μαθηματικά και γενικότερα στην οικονομία, ονομάζουμε **κεφάλαιο** κάθε ποσό πού έχει παραγωγική ικανότητα. Τό αποτέλεσμα της παραγωγικότητας του κεφαλαίου τό λέμε **τόκο** και τή διάρκεια της παραγωγικότητας του κεφαλαίου τή λέμε **χρόνο**. Ός χρονική μονάδα λαμβάνουμε συνήθως τό έτος, τό εξάμηνο, τό τρίμηνο, τό μήνα, τήν ημέρα.

Αν τό κεφάλαιο μένει σταθερό σ' όλη τή διάρκεια του δανεισμού, τότε ό τόκος λέγεται **άπλός**. Αν όμως στό τέλος κάθε χρονικής μονάδας ό τόκος ένσωματώνεται στό κεφάλαιο και άποτελεί έτσι τό νέο κεφάλαιο για τήν επόμενη χρονική μονάδα, τότε ό τόκος λέγεται **σύνθετος**. Αύτή ή ένσωμάτωση του τόκου στό κεφάλαιο, δηλαδή ή **κεφαλαιοποίηση του τόκου**, λέγεται **άνατοκισμός**.

Στήν περίπτωση του άπλου τόκου, ό τόκος των 100 δραχμών σε μία χρονική μονάδα (συνήθως ένα έτος ή ένα εξάμηνο) λέγεται **έπιτόκιο** (ϵ) και γράφεται: $\epsilon\%$. Στόν άνατοκισμό «έπιτόκιο» είναι ό τόκος της 1 δραχμής σε μία χρονική μονάδα. Συνεπώς τό έπιτόκιο στόν άνατοκισμό είναι ίσο μέ τό $1/100$ του έπιτοκίου πού έχουμε στόν άπλό τόκο. Αυτό τό παριστάνουμε μέ τό τ , όποτε έχουμε: $\tau = \epsilon/100 = 0,01\epsilon$.

Στόν άνατοκισμό διακρίνουμε τό **άρχικό** από τό **τελικό** (ή **σύνθετο**) **κεφάλαιο**.

Τελικό λέμε τό άρχικό κεφάλαιο μαζί μέ τούς τόκους ως τό τέλος του χρόνου, για τόν όποιο τοκίζεται τό άρχικό κεφάλαιο.

Τά προβλήματα του άνατοκισμού τά λύνουμε μέ τύπους, τούς όποιους βρίσκουμε από τήν επίλυση του επόμενου γενικού προβλήματος.

§ 172. Πρόβλημα.— Αρχικό κεφάλαιο k_0 δραχμές άνατοκίζεται για n έτη μέ έπιτόκιο τ . Νά βρεθεί τό τελικό κεφάλαιο k_n .

Λύση. Για τή λύση αυτού του προβλήματος παρατηρούμε ότι: άφου ή

1 δραχμή στο τέλος του έτους φέρνει τόκο τ , οι k_0 δραχμές θα φέρουν, στο τέλος του πρώτου έτους, τόκο $k_0 \cdot \tau$ δρχ. Έτσι στο τέλος του πρώτου έτους το κεφάλαιο με τους τόκους θα είναι: $k_0 + k_0\tau = k_0(1 + \tau)$.

Δηλαδή: το αρχικό κεφάλαιο k_0 πολλαπλασιάζεται με τό (σταθερό) συντελεστή $(1 + \tau)$ για να δώσει τό (τελικό) κεφάλαιο στο τέλος της πρώτης χρονικής περιόδου.

Στην αρχή της δεύτερης χρονικής περιόδου το αρχικό κεφάλαιο είναι τώρα τό: $k_0(1 + \tau)$, το οποίο πάλι μετά από ένα έτος, δηλ. στο τέλος της δεύτερης χρονικής περιόδου, θα γίνει με τους τόκους του:

$$[k_0(1 + \tau)](1 + \tau) = k_0(1 + \tau)^2$$

Όμοια, στο τέλος της τρίτης χρονικής περιόδου θα γίνει: $k_0(1 + \tau)^3$.

Τελικά, συνεχίζοντας με τον ίδιο συλλογισμό, βρίσκουμε ότι οι k_0 δρχ. στο τέλος του νιοστού έτους θα γίνουν: $k_0(1 + \tau)^v$.

Ωστε το τελικό κεφάλαιο k_v μάς τό δίνει ο τύπος:

$$k_v = k_0 \cdot (1 + \tau)^v \quad (1)$$

Ο τύπος (1) λέγεται **τύπος του ανατοκισμού** και συνδέει τους τέσσερις αριθμούς: k_0 , τ , v , k_v . Αν μάς δώσουν τους τρεις απ' αυτούς, απαραίτητα όμως τό v , μπορούμε να προσδιορίσουμε, με τη βοήθεια των λογαρίθμων (ακριβώς ή κατά προσέγγιση), και τον τέταρτο. Αν όμως μάς δώσουν τά: k_0 , k_v και τ και ζητείται ή χρονική διάρκεια v κατά την οποία τό κεφάλαιο k_0 ανατοκιζόμενο γίνεται k_v , τότε αντί για τον τύπο (1) εφαρμόζουμε τον τύπο (2) που θα βρούμε παρακάτω.

Έστω ότι ο ανατοκισμός γίνεται για v έτη και η ημέρες ($\eta < 360$). Τότε για να υπολογίσουμε τό τελικό κεφάλαιο k σκεπτόμαστε ως εξής: Ύστερα από v έτη οι k_0 δραχμές θα γίνουν: $k_0(1 + \tau)^v$. Τό ποσό αυτό ξμεινε ακόμη η ημέρες, άρα πρέπει σ' αυτό να προστεθούν και οι τόκοι για η ημέρες. Έπειδή στον άπλό τόκο τό επιτόκιο είναι $\epsilon = 100\tau$, έπεται ότι οι $k_0(1 + \tau)^v$ δραχμές σέ η ημέρες θα φέρουν τόκο:

$$\frac{k_0(1 + \tau)^v \cdot 100\tau \cdot \eta}{36000} = \frac{k_0(1 + \tau)^v \cdot \tau \cdot \eta}{360}$$

Έπομένως τό τελικό κεφάλαιο μετά από v έτη και η ημέρες θα γίνει:

$$k = k_0(1 + \tau)^v + \frac{k_0(1 + \tau)^v \cdot \tau \cdot \eta}{360}$$

Ωστε :

$$k = k_0(1 + \tau)^v \cdot \left(1 + \frac{\tau\eta}{360}\right) \quad (\eta < 360) \quad (2)$$

Σημ. Στην πράξη αντί για τον τύπο (2) χρησιμοποιούμε (συνήθως) τον τύπο:

$$k = k_0(1 + \tau)^{v + \frac{\eta}{360}} \quad (2')$$

‘Ο τύπος (2') δίνει σχεδόν τό ίδιο εξαγόμενο μέ τόν τύπο (2) καί είναι πιό εύκολος στους υπολογισμούς.

Παρατήρηση. Είναι φανερό ότι, για να υπολογίσουμε από τούς πιό πάνω τύπους (1) καί (2) τά ποσά k_0 , τ , k , καί v , είναι απαραίτητη πρώτα ή λογαρίθμηση τών μελῶν τών (1) καί (2) καί έπειτα ή χρήση τών λογαριθμικῶν πινάκων. Στήν πράξη όμως υπάρχουν ειδικοί πίνακες, οί όποιοι δίνουν τίς τιμές τών διαφόρων παραστάσεων, όπως π.χ. τών $(1 + \tau)^n$, $(1 + \tau)^{\frac{n}{360}}$ κ.τ.λ., για διάφορες τιμές έπιτοκίου καί χρόνου.

* § 173. **Ίσοδύναμα έπιτόκια.**— Δύο έπιτόκια λέμε ότι είναι **ισοδύναμα** αν αντιστοιχούν σε διαφορετικές χρονικές περιόδους καί αν μέ αυτά ένα αρχικό κεφάλαιο k_0 ανατοκίζόμενο στον ίδιο συνολικά χρόνο λαμβάνει τήν ίδια τελική αξία. Έτσι, αν ο ανατοκισμός γίνεται κάθε έξάμηνο ή τρίμηνο, τό ισοδύναμο του τ έξαμηνιαίο ή τριμηνιαίο έπιτόκιο δεν είναι τό μισό ή τό τέταρτο αντιστοίχως του τ , αλλά διαφορετικό, πού υπολογίζεται ως εξής:

Αν τ_1 είναι τό ισοδύναμο έξαμηνιαίο έπιτόκιο, τότε ή 1 δραχμή στό τέλος του πρώτου έξαμήνου θά γίνει $(1 + \tau_1)$ καί στό τέλος του δεύτερου έξαμήνου θά γίνει $(1 + \tau_1)^2$. Έπίσης ή μία δραχμή στό τέλος του έτους, ανατοκίζόμενη μέ έπιτόκιο τ , θά γίνει $(1 + \tau)$. Έπειδή ή μία δραχμή, όπως καί να τοκιστεί, πρέπει να δίνει στό τέλος του έτους τό ίδιο ποσό, έχουμε:

$$(1 + \tau_1)^2 = (1 + \tau) \text{ καί συνεπώς είναι:}$$

$$\tau_1 = \sqrt{1 + \tau} - 1 \quad (3)$$

‘Ο τύπος (3) συνδέει τό **έξαμηνιαίο** καί τό **έτήσιο** έπιτόκιο.

Έπίσης, αν τ_2 είναι τό ισοδύναμο τριμηνιαίο έπιτόκιο του τ , επειδή τό έτος έχει 4 τριμηνίες, μέ ανάλογο συλλογισμό καταλήγουμε στή σχέση:

$$(1 + \tau_2)^4 = 1 + \tau \text{ καί συνεπώς θά είναι:}$$

$$\tau_2 = \sqrt[4]{1 + \tau} - 1 \quad (4)$$

‘Ο τύπος (4) συνδέει τό **τριμηνιαίο** καί τό **έτήσιο** έπιτόκιο.

Σημ. Στήν πράξη πολλές φορές εφαρμόζεται αναλογία μεταξύ περιόδων καί έπιτοκίων, δηλαδή αν τό έτήσιο έπιτόκιο είναι 8%, τό έξαμηνιαίο είναι 4% καί τό τριμηνιαίο είναι 2%. Τά έπιτόκια αυτά λέγονται τότε **ανάλογα**.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1η: Δανείζουμε 5.000 δρχ. μέ ανατοκισμό πρόσ 6% έτησίως. Πόσες δραχμές θά πάρουμε ύστερα από 8 έτη;

Λύση. Έχουμε: $k_0 = 5000$, $\tau = 0,06$, $v = 8$, $1 + \tau = 1,06$.

‘Οπότε ο τύπος (1) της § 172 μάς δίνει: $k_8 = 5000 \cdot (1,06)^8$.

Αν λογαριθμίσουμε τήν τελευταία σχέση παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \log k_8 &= \log 5000 + 8 \cdot \log (1,06) \\ &= 3,69897 + 8 \cdot 0,02531 = 3,90145. \end{aligned}$$

‘Οπότε: $k_8 = 7969,83$.

Σημείωση. *Από τούς πίνακες τών δυνάμεων του 1,06 βρίσκουμε άμέσως ότι:

$$(1,06)^8 = 1,593848, \text{ όπότε: } k_8 = 5000 \cdot 1,593848 = 7969,24.$$

*Η μικρή διαφορά τών δύο αποτελεσμάτων όφειλεται στόν ύπολογισμό τών λογαρίθμων κατά προσέγγιση.

Παρατήρηση. *Αν ό άνατοκισμός γινόταν γιά 8 έτη καί μερικές ήμέρες, π.χ. γιά 8 έτη καί 72 ήμέρες, τότε στόν τύπο (2), τό μέν $k_0(1 + \tau)^v$ είναι 7969,83, τό δέ $1 + \frac{\tau\eta}{360}$ είναι:

$$1 + \frac{72 \times 0,06}{360} = 1,012 \text{ καί συνεπώς: } k = 7969,83 \times 1,012 = 8065,46.$$

2η: Πόσες δραχμές πρέπει νά καταθέσει ένας πατέρας τήν ήμέρα τής γεννήσεως τής κόρης του, μέ άνατοκισμό πρós 6% έτησίως γιά νά μπορέσει νά τής αγοράσει ένα αὐτοκίνητο αξίας 300.000 δρχ., όταν αὐτή θά συμπληρώσει τό 20ο έτος τής ήλικίας της;

Λύση. *Έχουμε $v = 20$, $k_v = 300.000$, $\tau = 0,06$, $1 + \tau = 1,06$.

*Από τόν τύπο (1) τοῦ άνατοκισμού έχουμε:

$$k_0 = \frac{k_v}{(1 + \tau)^v} \quad (\alpha)$$

$$\begin{aligned} \text{Λογαριθμίζοντας τήν } (\alpha) \text{ έχουμε: } \log k_0 &= \log k_v - v \cdot \log (1 + \tau) \\ &= \log 300000 - 20 \cdot \log (1,06) \\ &= 5,47712 - 20 \cdot 0,02531 = 4,97092 \end{aligned}$$

*Από αὐτό βρίσκουμε: $k_0 = 93524$.

3η: *Άνατοκίζει κάποιος 80.000 δραχμές πρós 6% έτησίως. Πόσα χρήματα θά πάρει ύστερα από 9 έτη, αν ό άνατοκισμός γίνεται κάθε έξαμηνία;

Λύση. Τό ίσοδύναμο έξαμηνιαίο έπιτόκιο τ_1 δίνεται από τόν τύπο (3) καί είναι:

$$\tau_1 = \sqrt{1 + \tau} - 1 = \sqrt{1,06} - 1 = 0,0295$$

*Εξάλλου έχουμε: $k_0 = 80.000$, $v = 9 \times 2 = 18$,

όπότε ό τύπος (1) μās δίνει: $k_{18} = 80000 (1,0295)^{18}$.

*Από τήν τελευταία σχέση, αν εργαζοῦμε όπως καί στήν πρώτη εφαρμογή, έχουμε:

$$k_{18} = 135140,6.$$

Στά προβλήματα τοῦ άνατοκισμού υπάγονται καί τά προβλήματα πού έχουν σχέση μέ τήν αύξηση ή ελάττωση τοῦ πληθυσμοῦ μίας πόλεως ή χώρας, όπως π.χ. τό πιο κάτω:

4η: Πρόβλημα. *Ο πληθυσμός μίας πόλεως είναι Π κάτοικοι καί αυξάνει κάθε χρόνο κατά τό $\frac{1}{\mu}$ τοῦ πληθυσμοῦ τοῦ προηγούμενου έτους. Πόσος θά είναι ό πληθυσμός της μετά ν έτη;

Λύση. Στο τέλος τοῦ πρώτου έτους ό πληθυσμός θά είναι:

$$P + P \cdot \frac{1}{\mu} \text{ ή } P \cdot \left(1 + \frac{1}{\mu}\right).$$

Μετά από ένα ακόμη έτος, δηλ. στό τέλος τοῦ δεύτερου έτους θά είναι:

$$P \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) + P \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) \cdot \frac{1}{\mu} \text{ δηλ. } P \cdot \left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^2$$

καί στό τέλος τοῦ νιοστοῦ έτους ό πληθυσμός τής πόλεως θά είναι:

$$P_v = P \cdot \left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^v$$

Σημείωση: *Αν ό πληθυσμός Π ελαττώνεται κατά τό $\frac{1}{\mu}$ τοῦ πληθυσμοῦ τοῦ προηγούμενου έτους, τότε ύστερα από ν έτη θά γίνει:

$$\Pi_v = \Pi \cdot \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)^v$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ομάδα Α'. 406. Δανείζουμε 150.000 δρχ. με άνατοκισμό πρὸς 4% ἐτησίως. Πόσες δραχμές θά πάρουμε ὕστερα ἀπὸ 6 ἔτη;

407. Τί ποσό πρέπει νά τοκίσουμε με άνατοκισμό πρὸς 4% τήν ἐξαμηνία, ὥστε νά γίνει μετὰ 18 ἔτη 200.000 δρχ.

408. Μὲ ποιο ἐτήσιο ἐπιτόκιο οἱ 24850 δρχ. μετὰ 12 ἔτη καί με άνατοκισμό γίνονται 50.000 δρχ.;

409. Νά ἐξετάσετε τί συμφέρεi σέ κάποιον: νά τοκίσει με άνατοκισμό 60.000 δρχ. πρὸς 5% γιὰ 10 χρόνια ἢ νά τὰ δώσει με άπλό τόκο πρὸς 7% γιὰ τό ἴδιο χρονικό διάστημα;

410. Νά βρεῖτε τό ἰσοδύναμο τριμηνιαῖο ἐπιτόκιο, ἂν τό ἀντίστοιχο ἐτήσιο εἶναι 8%.

411. Νά βρεῖτε τό ἰσοδύναμο ἐτήσιο ἐπιτόκιο, ἂν τό ἀντίστοιχο ἐξαμηνιαῖο εἶναι 2%.

412. Μετὰ πόσο χρόνο οἱ 12589 δρχ., ἂν ἀνατοκιστοῦν πρὸς 5% ἐτησίως θά γίνουν 45818 δρχ.;

413. Ὁ πληθυσμός ἑνὸς κράτους αὐξάνει κάθε χρόνο κατὰ τό $\frac{1}{80}$ τοῦ πληθυσμοῦ τοῦ προηγούμενου ἔτους. Μετὰ πόσα ἔτη θά διπλασιαστεῖ ἢ θά τριπλασιαστεῖ;

Ομάδα Β'. 414. Κάποιος καταθέτει στό Ταχ. Ταμιευτήριο 7200 δρχ. με άνατοκισμό κάθε ἐξαμηνία πρὸς 4,5% ἐτησίως. Πόσα χρήματα θά πάρει μετὰ 15 ἔτη;

415. Κάποιος κατέθεσε στό Ταχ. Ταμιευτήριο κάποιο ποσό πού, ἀνατοκιζόμενο κάθε ἐξαμηνία πρὸς 6% τό χρόνο, μετὰ 5 ἔτη ἔγινε 26.000 δρχ. Τί ποσό κατέθεσε;

416. Ἐνα κεφάλαιο ἀνατοκιζόμενο γίνεται μετὰ 3 ἔτη 5625 δρχ. καί μετὰ ἄλλα δύο ἔτη 6084 δρχ. Μὲ ποιο ἐπιτόκιο ἔγινε ὁ ἀνατοκισμός;

417. Ἐνα κεφάλαιο, πού ἀνατοκίζεται κάθε ἐξαμηνία πρὸς 6% ἐτησίως, μετὰ πόσο χρόνο θά τριπλασιαστεῖ;

418. Ἐνα κεφάλαιο 5.000 δρχ. ἀνατοκίζεται πρὸς 5% ἐτησίως καί ἄλλο 8.000 δρχ. πρὸς 3% ἐτησίως. Μετὰ πόσο χρόνο τὰ δύο σύνθετα κεφάλαια θά ἐξισωθοῦν;

419. Μία πόλη πού ἔχει πληθυσμό 8.000 κατοίκους ἐλαττώθηκε στόν πρῶτο χρόνο κατὰ 160 ἄτομα. Ἐν ἐξακολουθήσει ἡ ἐλάττωση με τήν ἴδια ἀναλογία, μετὰ πόσα ἔτη ἡ πόλη θά ἔχει 5.000 κατοίκους;

420. Σέ μία πόλη ἡ θνησιμότητα τῶν κατοίκων εἶναι τό $\frac{1}{42}$ τοῦ πληθυσμοῦ καί ἡ γεννητικότητα εἶναι τό $\frac{1}{35}$ τοῦ πληθυσμοῦ. Ἐν δεχτοῦμε ὅτι ἡ πιὸ πάνω ἀναλογία θά παραμείνει ἡ ἴδια καί γιὰ τὰ ἐπόμενα ἔτη, μετὰ ἀπὸ πόσο χρόνο ὁ πληθυσμός τῆς πόλεως θά διπλασιαστεῖ;

II. ΙΣΕΣ ΚΑΤΑΘΕΣΕΙΣ

Συχνά οἱ ἄνθρωποι ἀπὸ τίς οἰκονομίες τους καταθέτουν ἕνα ὀρισμένο χρηματικό ποσό εἴτε στήν ἀρχή κάθε ἔτους (ἢ μιᾶς ὀρισμένης χρονικῆς μονάδας) με σκοπό νά σχηματίσουν ἕνα κεφάλαιο, εἴτε στό τέλος κάθε ἔτους (ἢ μιᾶς χρονικῆς μονάδας πού ἔχουν συμφωνήσει) με σκοπό νά ἐξοφλήσουν κάποιο χρέος τους. Τό χρηματικό αὐτό ποσό τό λέμε **κατάθεση**.

Οί ίσες καταθέσεις γίνονται, συνήθως, κάθε έτος, έξάμηνο, ή καί τρίμηνο καί γιά έναν όρισμένο χρόνο.

Στά ζητήματα ίσων καταθέσεων διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

α') οί καταθέσεις γίνονται στήν άρχή κάθε έτους, καί

β') οί καταθέσεις γίνονται στό τέλος κάθε έτους.

Οί καταθέσεις τής β' περίπτωσης, έπειδή όπως είπαμε γίνονται γιά νά έξοφλήσουμε κάποιο χρέος, λέγονται καί **χρεωλυτικές καταθέσεις**.

Στίς ίσες, λοιπόν, καταθέσεις έχουμε τα έπόμενα δύο προβλήματα:

§ 174. Πρόβλημα I.—Καταθέτουμε στήν άρχή κάθε έτους α δρχ. μέ ανατοκισμό καί μέ έτήσιο τόκο τ γιά κάθε δραχμή. Τί ποσό θά πάρουμε μετά ν έτη;

Λύση. 'Η πρώτη κατάθεση θά μείνει ν έτη στόν ανατοκισμό καί έπομένως θά γίνει ίση μέ: $\alpha(1 + \tau)^n$. 'Η δεύτερη κατάθεση θά μείνει $(n - 1)$ έτη στόν ανατοκισμό καί συνεπώς θά γίνει: $\alpha(1 + \tau)^{n-1}$, ή τρίτη θά γίνει: $\alpha(1 + \tau)^{n-2}$ κ.ο.κ. 'Η τελευταία κατάθεση θά μείνει μόνο ένα χρόνο στόν ανατοκισμό, άρα θά γίνει ίση μέ: $\alpha(1 + \tau)$.

Είναι φανερό τώρα ότι τό κεφάλαιο Σ πού θά σχηματιστεί άπ' αυτές τίς καταθέσεις είναι ίσο μέ: $\alpha(1 + \tau)^n + \alpha(1 + \tau)^{n-1} + \dots + \alpha(1 + \tau)$. "Ωστε:

$$\Sigma = \alpha(1 + \tau) + \alpha(1 + \tau)^2 + \dots + \alpha(1 + \tau)^{n-1} + \alpha(1 + \tau)^n.$$

'Αλλά τό δεύτερο μέλος τής πιά πάνω ισότητας είναι τό άθροισμα τών ν πρώτων όρων μις γεωμετρικής προόδου, ή όποία έχει πρώτο όρο τό $\alpha(1 + \tau)$ καί λόγο $(1 + \tau)$. "Αρα, σύμφωνα μέ τόν τύπο (1) τής § 91, θά έχουμε:

$$\Sigma = \alpha \cdot (1 + \tau) \cdot \frac{(1 + \tau)^n - 1}{\tau} \quad (1)$$

'Η σχέση (1) λέγεται καί **τύπος τών ίσων καταθέσεων**.

Σημ. Οί δυνάμεις $(1 + \tau)^n$ γιά $\tau = 0,03, 0,04, 0,045, \dots, 0,06$ καί γιά $n = 1, 2, \dots, 50$ δίνονται άπό ειδικούς πίνακες καί έτσι βρίσκουμε εύκολα τό Σ άπό τόν τύπο (1).

Παράδειγμα. Στήν άρχή κάθε χρόνου καταθέτει κάποιος στήν τράπεζα μέ ανατοκισμό 2.500 δρχ. καί μέ έτήσιο επιτόκιο 5%. Πόσα χρήματα θά λάβει μετά 10 έτη;

Λύση. "Εχουμε: $\alpha = 2500, \tau = 0,05, n = 10$, όπότε άπό τόν τύπο (1) λαμβάνουμε:

$$\Sigma = 2500 \times 1,05 \times \frac{(1,05)^{10} - 1}{0,05}.$$

'Από τούς πίνακες ή μέ λογαρίθμους βρίσκουμε: $(1,05)^{10} = 1,628$.

"Αρα $(1,05)^{10} - 1 = 0,628$ καί έπομένως:

$$\Sigma = 2500 \times 1,05 \times \frac{0,628}{0,05} = 32.970 \text{ δρχ.}$$

§ 175. Πρόβλημα II.—Καταθέτουμε στό τέλος κάθε χρόνο α δρχ. μέ ανατοκισμό καί μέ έτήσιο τόκο τ γιά κάθε δραχμή. Τί ποσό θά έχουμε σχηματίσει στό τέλος τοῦ νιοστοῦ έτους, δηλαδή μέ τή νιοστή κατάθεση;

Λύση. Οί α δρχ. πού καταθέτουμε στό τέλος τοῦ πρώτου έτους θά μείνουν

στόν άνατοκισμό $v-1$ έτη και συνεπώς θά γίνουν: $\alpha(1+\tau)^{v-1}$. Οί α δρχ. πού καταθέτουμε στό τέλος τοῦ δεύτερου έτους θά μείνουν στόν άνατοκισμό $v-2$ έτη και συνεπώς θά γίνουν: $\alpha(1+\tau)^{v-2}$, κ.ο.κ. Ἡ προτελευταία κατάθεση θά μείνει μόνο ένα έτος και έπομένως θά γίνει: $\alpha(1+\tau)$. Ἡ τελευταία κατάθεση, άφου γίνεται στό τέλος τοῦ νιοστοῦ έτους, δέ μένει καθόλου γιά τόκο (δέν τοκίζεται) και έπομένως θά εἶναι μόνο α .

Ἔτσι στό τέλος τοῦ νιοστοῦ έτους, δηλαδή μέ τή νιοστή κατάθεση, θά έχουμε σχηματίσει τό ποσό:

$$\Sigma = \alpha(1+\tau)^{v-1} + \alpha(1+\tau)^{v-2} + \dots + \alpha(1+\tau) + \alpha$$

ή (§ 91, τύπος 1):

$$\Sigma = \alpha \cdot \frac{(1+\tau)^v - 1}{\tau} \quad (2)$$

Ὁ τύπος (2) ονομάζεται τύπος τῶν χρεωλυτικῶν καταθέσεων και συνδέει τά τέσσερα ποσά Σ , α , τ , v .

Παράδειγμα. Ἐνας καπνιστής ξοδεύει γιά τσιγάρα 18 δρχ. τήν ήμέρα κατά μέσο ὄρο. Ἄν άρχισε νά καπνίζει από τά 20 του χρόνια, νά ύπολογίσετε πόσα χρήματα θά έπαιρνε όταν γινόταν 60 έτων, άν τά χρήματα πού ξοδεύει γιά τσιγάρα, τά κατέθετε στό τέλος κάθε έτους, σέ μιá Τράπεζα μέ άνατοκισμό πρὸς 6% ετησίως.

Λύση. Ὁ καπνιστής ξοδεύει γιά τσιγάρα τό χρόνο: $365 \cdot 18 = 6570$ δρχ.

Ἄρα έχουμε: $\alpha = 6570$, $\tau = 0,06$, $v = 40$.

Τότε ὁ τύπος (2) γράφεται:

$$\Sigma = 6570 \cdot \frac{(1,06)^{40} - 1}{0,06}$$

Ἀπό τοὺς πίνακες ή μέ λογαρίθμους βρίσκουμε: $(1,06)^{40} = 10,2895$.

Ἄρα: $(1,06)^{40} - 1 = 9,2895$ και συνεπώς:

$$\Sigma = 6570 \cdot \frac{9,2895}{0,06} = 1.017.200,25.$$

Ὡστε ὁ καπνιστής θά έπαιρνε: **1.017.200,25 δραχμές (!).**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α'. 421. Ἐνας καταθέτει μέ άνατοκισμό 8.050 δραχμές πρὸς 4,5 % στήν άρχή κάθε έτους. Πόσα χρήματα θά πάρει ύστερα από 18 έτη;

422. Ποιό ποσό πρέπει νά καταθέτει κάποιος μέ άνατοκισμό πρὸς 6% στήν άρχή κάθε έτους σέ μιá Τράπεζα, ὥστε αὐτό ύστερα από 20 έτη νά γίνει 250.000 δραχμές;

423. Κάποιος καταθέτει στήν άρχή κάθε έτους 10.000 δρχ. μέ άνατοκισμό πρὸς 5%. Μετά πόσα έτη θά πάρει 150.000 δραχμές;

424. Ἐνας πατέρας καταθέτει σέ κάθε γενέθλια τής κόρης του στό Ταχ. Ταμειυτήριο 5.000 δρχ. μέ άνατοκισμό πρὸς 7,5%. Τί ποσό θά σχηματιστεῖ, όταν ή κόρη του γιορτάσει τήν 21ή επέτειο τῶν γενεθλίων της;

Ὁμάδα Β'. 425. Κάποιος καταθέτει μέ άνατοκισμό στήν άρχή κάθε έτους 2050 δρχ. πρὸς 4,5%. Ὑστερα από 15 χρόνια έπαψε νά καταθέτει, αλλά τό ποσό πού σχηματίστηκε τό άφησε μέ άνατοκισμό πρὸς 5%. Τί κεφάλαιο θά έχει σχηματίσει 24 χρόνια μετά τήν πρώτη κατάθεση;

426. Νά αποδείξετε ότι: ἂν τὶς ἴσες καταθέσεις πού γίνονται στό τέλος κάθε ἔτους, τὶς ἀνατοκίσουμε γιὰ ἕνα ἀκόμη ἔτος, τότε βρίσκουμε τὶς ἴσες καταθέσεις πού γίνονται στήν ἀρχή κάθε ἔτους.

427. Ἀσφαλίζει κάποιος τή ζωή του γιὰ διάστημα 35 ἐτῶν πρὸς 6% καὶ πληρώνει ἀσφάλιστρα στήν ἀρχή κάθε ἔτους 8.400 δραχμές. Πόσα χρήματα πρέπει νά τοῦ δώσει ἡ ἀσφαλιστική ἐταιρεία ὕστερα ἀπὸ 35 ἔτη;

III. ΧΡΕΩΛΥΣΙΑ

§ 176. Ὅρισμοί.— **Χρεωλύσια** λέμε τήν ἀπόσβεση ἑνὸς χρέους μέ ἴσες δόσεις, οἱ ὁποῖες καταβάλλονται σέ ἴσα χρονικά διαστήματα, π.χ. στό τέλος τοῦ ἔτους ἢ τοῦ ἐξαμήνου κ.τ.λ. Τό ποσό καθεμιᾶς ἀπὸ τὶς ἴσες δόσεις πού καταβάλλεται στό τέλος τοῦ χρονικοῦ διαστήματος λέγεται **χρεωλύσιο** καὶ χρησιμεύει ἕνα μέρος του γιὰ τήν πληρωμή τῶν τόκων τοῦ χρέους καὶ τό ὑπόλοιπο γιὰ τή βαθμιαία ἀπόσβεση τοῦ χρέους.

Εἶναι φανερό ὅτι ἕνα χρέος ἐξοφλεῖται, ὅταν τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν χρεωλύσιων μαζί μέ τοὺς σύνθετους τόκους τους γίνει ἴσο μέ τήν τελικὴ ἀξία τοῦ ἀνατοκίζομένου ἀρχικοῦ κεφαλαίου (**χρέους**).

Στὴ χρεωλύσια ἔχουμε, συνεπῶς, νά λύσουμε τὸ παρακάτω πρόβλημα:

§ 177. Πρόβλημα.— "Ενας δανείστηκε a δραχμές μέ ἀνατοκισμό μέ τήν ὑποχρέωση νά τὶς ἐξοφλήσει μέ n ἴσες δόσεις, τὶς ὁποῖες θά πληρώνει στό τέλος κάθε ἔτους. Νά βρεθεῖ τὸ ποσό κάθε δόσεως (**χρεωλύσιο**), ἂν ὁ ἐτήσιος τόκος γιὰ κάθε δραχμὴ εἶναι τ .

Λύση. Ὁ ὀφειλέτης πρέπει μετὰ ἀπὸ n ἔτη νά πληρώσει τὸ ποσό: $a(1+\tau)^n$, γιατί οἱ a δραχμές πού δανείστηκε ἀνατοκίστηκαν γιὰ n ἔτη.

"Εστω x δρχ. τὸ ποσό κάθε δόσεως (**χρεωλύσιο**) πού πληρώνει στό τέλος κάθε ἔτους, τότε ὁ ὀφειλέτης θά καταβάλει στό δανειστή του συνολικά n δόσεις ἴσες μέ x δραχμές ἢ καθεμιά. Ἡ συνολικὴ ἀξία αὐτῶν τῶν δόσεων (μέ τοὺς τόκους των) θά εἶναι, σύμφωνα μέ τὸν τύπο τῶν χρεωλυτικῶν καταθέσεων, ἴση πρὸς:

$$x \cdot \frac{(1+\tau)^n - 1}{\tau}.$$

Τότε ὅμως, σύμφωνα μέ τὰ πρὶν πάνω, θά ἔχουμε:

$$x \cdot \frac{(1+\tau)^n - 1}{\tau} = a(1+\tau)^n \quad (1)$$

Ἡ (1) λέγεται **ἐξίσωση τῆς χρεωλύσιας**. Ἀπὸ τήν (1) βρίσκουμε τὸ ζητούμενο χρεωλύσιο. Ἄν λύσουμε τήν (1) ὡς πρὸς x ἢ a παίρνουμε ἀντίστοιχα τοὺς τύπους:

$$x = \frac{a\tau(1+\tau)^n}{(1+\tau)^n - 1} \quad (1') \quad \text{καὶ} \quad a = \frac{x \cdot [(1+\tau)^n - 1]}{\tau(1+\tau)^n} \quad (1'')$$

Στους πρακτικούς υπολογισμούς οι εκφράσεις $(1 + \tau)^v$ και $[(1 + \tau)^v - 1] : \tau$ δίνονται από ειδικούς πίνακες και έτσι βρίσκουμε εύκολα τά ποσά x και α από τους τύπους (1') και (1'').

Σημ. Μερικές φορές η καταβολή της πρώτης δόσεως (χρεωλυσίου) γίνεται μετά μ έτη από τότε που συμφωνήθηκε τό δάνειο. Τότε η εξίσωση της χρεωλυσίας είναι:

$$x \cdot \frac{(1 + \tau)^{v-\mu+1} - 1}{\tau} = \alpha(1 + \tau)^v \quad (\text{γιατί ;})$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1η: Μία κοινότητα δανείστηκε 300.000 δρχ. με άνατοκισμό 5% και θέλει να εξοφλήσει τό χρέος με ετήσιες χρεωλυτικές δόσεις σέ 50 χρόνια. Νά βρεθεί τό ποσό κάθε δόσεως (χρεωλύσιο).

Λύση. 'Ο τύπος (1') δίνει:

$$x = \frac{300000 \cdot (0,05) \cdot (1,05)^{50}}{(1,05)^{50} - 1}.$$

'Από τούς πίνακες ή μέ λογαρίθμους βρίσκουμε: $(1,05)^{50} = 11,4674$.

*Αρα: $(1,05)^{50} - 1 = 10,4674$ και συνεπώς:

$$x = \frac{300000 \times 0,05 \times 11,4674}{10,4674} = 16.433,02 \text{ δρχ.}$$

2η: Ένας υπάλληλος μπορεί νά διαθέσει γιά ετήσιο χρεωλύσιο 5.000 δρχ. Τί ποσό μπορεί νά δανειστεί μέ επιτόκιο 4%, ώστε νά τό εξοφλήσει σέ 20 ετήσιες δόσεις;

Λύση. Έχουμε: $x = 5000$, $\tau = 0,04$, $v = 20$ και ή (1'') γίνεταί:

$$\alpha = \frac{5000[(1,04)^{20} - 1]}{0,04 \cdot (1,04)^{20}}.$$

'Από τήν πιό πάνω σχέση μέ πίνακες ή μέ λογαρίθμους βρίσκουμε: $\alpha = 67953$ δραχμές.

3η. Ένας δανείζεται 120.000 δρχ. μέ άνατοκισμό πρós 8%. Πόσες ετήσιες χρεωλυτικές δόσεις τών 15.000 δρχ. πρέπει νά πληρώσει γιά νά εξοφλήσει τό χρέος;

Λύση. 'Από τήν εξίσωση (1) έχουμε:

$$x(1 + \tau)^v - x = \alpha\tau(1 + \tau)^v,$$

οπότε:

$$(1 + \tau)^v = \frac{x}{x - \alpha\tau}. \quad (2)$$

Τότε όμως είναι: $v \cdot \log(1 + \tau) = \log x - \log(x - \alpha\tau)$

$$* \text{Αρα: } v = \frac{\log x - \log(x - \alpha\tau)}{\log(1 + \tau)} \quad (3)$$

'Επειδή είναι $x = 15000$, $\alpha = 120000$, $\tau = 0,08$ και συνεπώς $x - \alpha\tau = 5400$, ό τύπος (3) δίνει:

$$v = \frac{\log 15000 - \log 5400}{\log 1,08}.$$

'Από τήν τελευταία, επειδή $\log 15000 = 4,17609$, $\log 5400 = 3,73239$ και $\log 1,08 = 0,03342$, λαμβάνουμε: $v = \frac{0,44370}{0,03342} = 13,276481$ έτη, δηλαδή $13 < v < 14$.

Τό εξαγόμενο σημαίνει πώς πρέπει νά πληρωθούν 13 ετήσιες δόσεις τών 15000 δρχ.

καί μία μικρότερη δόση: $0,276481 \times 15000 = 4.147,215$ δρχ. σέ (συντομότερο) διάστημα: $0,276481 \times 360 = 99,53316 \approx 100$ ημερών μετά τή 13η δόση.

Σημ. Γιά νά βρούμε τή 14η δόση πού είναι μικρότερη τῶν 15.000 δρχ. μπορούμε νά ἐργαστοῦμε καί ὡς ἐξῆς: Βρίσκουμε πόσο γίνεται τό χρέος τῶν 120.000 δρχ. σέ 14 ἔτη, δηλαδή τό: $K = 120.000 (1,08)^{14}$. Κατόπιν βρίσκουμε ὅτι οἱ δόσεις τῶν 15.000 δρχ. ἡ καθεμία στό τέλος τοῦ 14ου ἔτους γίνονται:

$$\Sigma = \frac{15000[(1,08)^{14} - 1]}{0,08} \cdot 1,08$$

Ἡ διαφορά $K - \Sigma$ δίνει τήν τελευταία δόση.

Σχόλιο. Σύμφωνα μέ τήν ἐξίσωση (2) τῆς τελευταίας ἐφαρμογῆς γιά νά ἔχει τό πρόβλημα λύση πρέπει νά είναι $x > \alpha$ τ, δηλαδή πρέπει τό χρεωλύσιο νά είναι μεγαλύτερο ἀπό τόν ἐτήσιο τόκο τοῦ ἀρχικοῦ κεφαλαίου, γιατί διαφορετικά ποτέ δέν πρόκειται νά ἐξοφληθεῖ τό χρέος. Ἄν είναι $x = \alpha$ τ, τότε ἡ ἐξίσωση (2) δέν ἔχει λύση, γιατί ὁ παρονομαστής μηδενίζεται, πού σημαίνει πῶς τό v τείνει στό ἀπείρο. Σ' αὕτῃ τήν περίπτωση λέμε πῶς τό δάνειο γίνεται πάγιο, γιατί ποτέ δέν ἐξοφλεῖται καί τό καταβαλλόμενο ποσό x χρησιμεύει γιά νά πληρώνονται μόνο οἱ ἐτήσιοι τόκοι τοῦ ἀρχικοῦ κεφαλαίου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α. 428. Μία κοινότητα δανείστηκε 120.000 δρχ. μέ ἀνατοκισμό πρὸς 6% καί θέλει νά ἐξοφλήσει τό χρέος μέ ἐτήσιες χρεωλυτικές δόσεις σέ 25 χρόνια. Νά βρεῖτε τό χρεωλύσιο πού θά πληρώνει.

429. Ἐνας ἔμπορος ὑπολογίζει πῶς μπορεῖ νά πληρώνει ἐτήσιο χρεωλύσιο 8.650 δρχ. γιά 20 χρόνια. Τί ποσό μπορεῖ νά δανειστεῖ μέ ἐπιτόκιο 6% ἐτησίως;

430. Μέ πόσες ἐτήσιες χρεωλυτικές δόσεις τῶν 3.000 δρχ. μπορούμε νά ἐξοφλήσουμε δάνειο 25.000 δρχ., ὅταν τό ἐπιτόκιο εἶναι 6% ἐτησίως;

431. Μία ἐταιρεία μπορεῖ νά διαθέτει ἀπό τά κέρδη της 100.000 δρχ. γιά ἐτήσιο χρεωλύσιο. Τί ποσό μπορεῖ νά δανειστεῖ μέ ἐπιτόκιο 5%, ὥστε νά τό ἐξοφλήσει σέ 20 ἐτήσιες δόσεις;

Ὁμάδα Β. 432. Κάποιος δανείστηκε 250.000 δρχ. πρὸς 7% μέ τήν ὑποχρέωση νά τό ἐξοφλήσει μέ 8 ἐτήσιες χρεωλυτικές δόσεις. Τρεῖς ὁμως μῆνες μετά τήν κατάθεση τῆς 5ης δόσεως θέλει νά ἐξοφλήσει ὅλο τό ποσό. Πόσα πρέπει νά καταβάλει;

433. Κάποιος δανείζεται α δρχ. μέ ἀνατοκισμό καί μέ ἐτήσιο τόκο τ τῆς μιᾶς δραχμῆς. Νά βρεῖτε τό ἐτήσιο χρεωλύσιο πού πρέπει νά πληρώνει, ὥστε μετά v ἔτη. τό χρέος νά μείνει τό μισό.

(Ἐφαρμογή: $\alpha = 40000$, $\tau = 0,05$, $v = 12$).

434. Μέ πόσες ἐξαμηνιαῖες χρεωλυτικές δόσεις μία ἐταιρεία θά ἐξοφλήσει δάνειο 2.000.000 δρχ., ἂν ὁ ἀνατοκισμός γίνεται πρὸς 3% κάθε ἐξαμηνία καί τό χρεωλύσιο εἶναι 130.000 δραχμές;

435. Ἡ ἐξόφληση ενός χρέους πρέπει νά γίνει σέ 20 ἔτη χρεωλυτικῶς. Κάθε ἐτήσια δόση εἶναι 46.130 δρχ. καί ἀρχίζει ἡ καταβολή μετά τό 5ο ἔτος τοῦ δανείου. Ἄν τό ἐπιτόκιο εἶναι 4,5%, νά βρεῖτε πόσο εἶναι τό ἀρχικό ποσό;

436. Κάποιος συμφωνεῖ νά πληρώσει σέ ἕναν ἀσφαλιστικό Ὁργανισμό v ἐτήσιες δόσεις τῶν α δρχ. τήν καθεμία, μέ τήν ὑποχρέωση ὁ Ὁργανισμός νά τοῦ ἐξασφαλίζει γιά τά ἐπόμενα $2v$ ἔτη, ἐτήσιο εἰσόδημα πού νά ἀνέρχεται σέ β δραχμές. Ὁ Ὁργανισμός θά καταβάλει γιά πρώτη φορά τό ποσό τῶν β δρχ., μετά ἀπό τήν τελευταία κατάθεση τοῦ ἀσφαλισμένου. Οἱ τόκοι εἶναι σύνθετοι καί τό ἐτήσιο ἐπιτόκιο τῆς μιᾶς δραχμῆς εἶναι τ . 1) Νά ὑπολογίσετε τό λόγο $\frac{\alpha}{\beta}$ καί 2) νά βρεῖτε τήν τιμὴ τοῦ v , ἂν εἶναι $\beta = 2\alpha$ καί $\tau = 0,05$.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ I

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΠΟ ΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ ΚΑΙ ΤΑ ΣΥΝΟΛΑ

Σελίδα

1. Προτασιακοί τύποι — Προτάσεις — Ποσοδείκτες — Λογικοί σύνδεσμοι — Συνθετες προτάσεις — Πράξεις μεταξύ λογικών προτάσεων — Ταυτολογίες — Ταυτολογικές ισοδυναμίες και αντιλογίες — 'Η έννοια του συνόλου — Βασική ιδιότητα συνόλου — Τρόποι παραστάσεως ενός συνόλου — Τό κενό σύνολο — Συνθήκη και ταυτότητα σε σύνολο — 'Η έννοια του υποσυνόλου — 'Ισότητα δύο συνόλων — Δυναμοσύνολο ενός συνόλου — Βασικό σύνολο — Δεύτερη μορφή της ισότητας — Πράξεις μεταξύ συνόλων — 'Ιδιότητες των πράξεων των συνόλων — 'Ασκήσεις

5 - 19

ΚΕΦΑΛΑΙΟ II

ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΤΟΥ ΡΕΑΝΟ — ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ η ΤΕΛΕΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ

2. 'Αξιώματα των φυσικών αριθμών κατά Ρεανο — 'Η μέθοδος της τέλει επαγωγής — Πρώτη μορφή της τέλει επαγωγής — 'Εφαρμογές (άνισότητα του Bernoulli) — 'Αρχή του ελάχιστου φυσικού αριθμού — Δεύτερη μορφή της τέλει επαγωγής — 'Εφαρμογές — 'Ασκήσεις

20 - 27

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ III

ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΚΑΙ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

3. 'Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού — 'Ιδιότητες των απόλυτων τιμών πραγματικών αριθμών — 'Εφαρμογές — 'Απόλυτη τιμή η μέτρο μιγαδικού αριθμού — 'Ιδιότητες των απόλυτων τιμών μιγαδικών αριθμών — 'Εφαρμογές — 'Ασκήσεις — 'Εξισώσεις με απόλυτες τιμές του άγνωστου — 'Ανισώσεις με απόλυτες τιμές του άγνωστου — 'Επίλυση στο $\mathbb{R}$ συστημάτων με απόλυτες τιμές των άγνωστων — 'Ασκήσεις

28 - 50

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV

ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

4. 'Η έννοια της ακολουθίας — Πράξεις μεταξύ ακολουθιών — 'Η έννοια της φραγμένης και της μονότονης ακολουθίας — 'Η έννοια της ύπακολουθίας — 'Ακέραιο μέρος πραγματικού αριθμού — 'Η έννοια της περιοχής ή γειτονιάς σημείου του $\mathbb{R}$ — 'Η έννοια του όριου ακολουθίας — 'Ιδιότητες συγκλινουσών ακολουθιών — 'Η άλγεβρα των όριων — Μερικές αξιοσημείωτες και χρήσιμες εφαρμογές — Μονότονες και φραγμένες ακολουθίες — 'Εφαρμογές — 'Ασκήσεις ..

51 - 90

ΚΕΦΑΛΑΙΟ V

ΠΡΟΟΔΟΙ — ΣΕΙΡΕΣ

5. 'Αριθμητικές πρόοδοι — 'Αρμονικές πρόοδοι — Γεωμετρικές πρόοδοι — Στοιχεία από τις σειρές πραγματικών αριθμών — 'Εφαρμογές — 'Ασκήσεις

91 - 140

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VI

ΑΚΕΡΑΙΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΑΝΤΗΣ

6. 'Η έννοια του άκέραιου πολυωνύμου — Τό μηδενικό πολυώνυμο — Βαθμός ενός μη μηδενικού πολυωνύμου — 'Αλγεβρα (λογισμός) των πολυωνύμων — Πολυωνυμική συνάρτηση — 'Αριθμητική τιμή και ρίζα πολυωνύμου — Μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών — Διαιρετότητα άκέραιων πολυωνύμων — 'Η ταυτότητα της αλγοριθμικής διαιρέσεως — 'Ιδιότητες των άκέραιων πολυωνύμων — Βαθμός πολλαπλότητας ρίζας πολυωνύμου — Πολυώνυμα με πραγματικούς συντελεστές — Πολυώνυμα με ρητούς συντελεστές — Πολυώνυμα με άκέραιους συντελεστές — 'Εφαρμογές — 'Ασκήσεις

141 - 180

Ἀνάλυση ρητοῦ κλάσματος σέ ἄθροισμα ἀπλῶν κλασμάτων — Μέθοδοι εὐρέσεως τοῦ ἄθροίσματος τῶν ν πρώτων ὀρων σειρᾶς — Τύπος τοῦ De Moivre καί ἐφαρμογές του στήν Ἀλγεβρα καί Τριγωνομετρία — Ἐφαρμογές — Ἀσκήσεις	Σελίδα 181 - 204
---	---------------------

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VII

ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ — ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

7. Λογάριθμοι. Ὅρισμοί — Ἰδιότητες — Μερικές ἀξιοσημειώτες καί χρήσιμες ἐφαρμογές — Δεκαδικοί λογάριθμοι — Λογαριθμικοί πίνακες — Χρήση λογαριθμικῶν πινάκων — Ἐκθετικές ἐξισώσεις καί συστήματα — Λογαριθμικές ἐξισώσεις καί συστήματα — Ἐφαρμογές — Ἀσκήσεις	205 - 251
--	-----------

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VIII

ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΣ — ΙΣΕΣ ΚΑΤΑΘΕΣΕΙΣ — ΧΡΕΩΛΥΣΙΑ

8. Ἀνατοκισμός — Ἰσοδύναμα ἐπιτόκια — Ἐφαρμογές — Ἴσες καταθέσεις — Χρεωλυσία — Ἀσκήσεις	252 - 261
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ	262 - 263

ΕΚΔΟΣΗ Ι' 1979 (VI) Άντίτυπα 115.000 - Σύμβαση: 3214/27-4-79

ΕΚΤΥΠΩΣΗ - ΒΙΒΛΙΟΔΕΣΙΑ: Μ. Α. ΜΟΑΤΣΟΣ Α.Β.Ε.Ε.

