ΙΩΑΝΝΟΥ Φ. ΠΑΝΑΚΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ

ΛΥΣΕΙΣ
ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ
ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Ε΄. ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ
(ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΕΩΣ)

ΤΟΜΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΣ
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
ΤΟΥ ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΤΟΥ Ο.Ε.Δ.Β.

Β

ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΠΩΛΗΣΙΣ
ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΝΙΚΟΛΑΟΥ ΚΟΚΟΤΣΑΚΗ
Ὁδὸς ΙΠΠΟΚΡΑΤΟΥΣ—Ἀριθ.
ΑΘΗΝΑΙ

$2\sigma\upsilon\nu x = 3\sigma\varphi x$

$2\sigma\upsilon\nu x = \frac{3\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$

$2\sigma\upsilon\nu^2 x = 3\eta\mu x$

$2(1-\eta\mu^2 x) = \eta\mu x$

$2 - 2\eta\mu^2 x - 3\eta\mu x = 0$

$2\eta\mu^2 x - 3\eta\mu x + 2 = 0$

$\eta\mu = \frac{1}{2} =$

$-2\ \ 2\sigma\upsilon$

$\eta\mu\ \frac{1}{2}$

$\eta\mu x = \eta\mu 30$

$x = 2k\pi + 30$

$3\eta\mu x = 4\sigma\varphi x$

$3\eta\mu x = 4\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$

$3\eta\mu^2 x = 4\sigma\upsilon\nu x$

$3(1-\sigma\upsilon\nu^2 x) = 4\sigma\upsilon\nu x$

$3 - 3\sigma\upsilon\nu^2 x - 4\sigma\upsilon\nu x = 0$

$3\sigma\upsilon\nu^2 x + 4\sigma\upsilon\nu x + 3 = 0$

$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\omega$

$x = 2k\pi \pm \omega$

$2k\omega \pm 2\upsilon$

$\sqrt{3}\sigma\varphi x = 2\sigma\upsilon\nu x$

$\sqrt{3}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} = \frac{2\sigma\upsilon\nu x}{1}$

$\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x = 2\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x$

$\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x - 2\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x$

$\sigma\upsilon\nu x(\sqrt{3} - 2\eta\mu x) = 0$

$\sigma\upsilon\nu x = 0$

$\sqrt{3} - 2\eta\mu x = 0$

$\sigma\upsilon\nu x = 0$

$\sqrt{3} - 2\eta\mu x = 0$

$\eta\mu x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\eta\mu x = \eta\mu 60$

$\varepsilon\varphi x + \sqrt{3}\sigma\varphi x = 1 + \sqrt{3}$

$\varepsilon\varphi x + \sqrt{3}\frac{1}{\eta\mu x} = 1 + \sqrt{3}$

$\varepsilon\varphi x^2$

$\varepsilon\varphi x + \sqrt{3}\sigma\varphi x$ $\sigma\varphi$

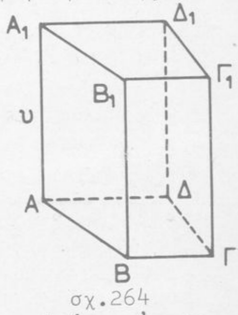
Μ Ε Ρ Ο Σ   Δ Ε Υ Τ Ε Ρ Ο Ν

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο Ν   VII

Π Ο Λ Υ Ε Δ Ρ Α

339. Τό ἐμβαδόν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας ὀρθοῦ πρίσματος ἰσοῦται πρός τό γινόμενον τῆς περιμέτρου τῆς βάσεως ἐπί τό ὕφος αὐτοῦ.



σχ.264

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Ἔστω ὀρθόν πρῖσμα $ΑΒΓΔΑ_1Β_1Γ_1Δ_1$. Θά εἶναι:

$$E=(ABB_1A_1)+(B\Gamma\Gamma_1B_1)+(\Gamma\Delta\Delta_1\Gamma_1)+(\Delta AA_1\Delta_1)$$
$$=AB.\upsilon+B\Gamma.\upsilon+\Gamma\Delta+\Delta A.\upsilon$$
$$=(AB+B\Gamma+\Gamma\Delta+\Delta A).\upsilon=\varpi.\upsilon$$

Ὥστε: $E=\varpi.\upsilon$

ἔνθα ϖ ἡ περίμετρος τῆς βάσεως ΑΒΓΔ.

340. Νά ὑπολογισθῇ τό ἐμβαδόν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας ὀρθοῦ πρίσματος ὕψους 3α καί ἡ βάσις εἶναι ἰσόπλευρον τρίγωνον ἤ τετράγωνον ἤ κανονικόν ἑξάγωνον πλευρᾶς α.

Λ ύ σ ι ς: 1) Ἡ περίμετρος τῆς βάσεως τοῦ ὀρθοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος εἶναι:

$\varpi=3\alpha$ καί ἄρα $E=\varpi.\upsilon=3\alpha.3\alpha=9\alpha^2$ $\boxed{E=9\alpha^2}$

2) Ἡ περίμετρος τοῦ τετραγώνου εἶναι $\varpi=4\alpha$ καί ἄρα:

$E=\varpi.\upsilon=4\alpha.3\alpha=12\alpha^2$ $\boxed{E=12\alpha^2}$

3) Ἡ περίμετρος τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου εἶναι $2\tau=6\alpha$ καί ἄρα:

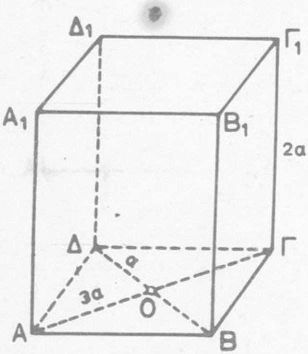
$$E=2\tau.\upsilon=6\alpha.3\alpha=18\alpha^2 \qquad \boxed{E=18\alpha^2}$$

341. Νά ὑπολογισθῇ τό ἐμβαδόν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας ὀρθοῦ πρίσματος ὕψους 2α, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι ρόμβος διαγωνίων α καί 3α.

Λ ύ σ ι ς: Ἡ πλευρά ΑΒ τῆς βάσεως εἶναι:

$$AB^2=OA^2+OB^2=\left(\frac{3\alpha}{2}\right)^2+\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2=\frac{10\alpha^2}{4}$$

ἐξ οὗ: $$AB=\frac{\alpha\sqrt{10}}{2} \qquad (1)$$



σχ.265

Ἡ περίμετρος τῆς βάσεως εἶναι: $2\tau=4.AB=4.\frac{\alpha\sqrt{10}}{2}=2\alpha\sqrt{10}$ (2)

Τό ἐμβαδόν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας εἶναι:

$$E=2\tau.\upsilon=2\alpha.\sqrt{10}.2\alpha=4\alpha^2\sqrt{10} \qquad (3)$$

Τό ἐμβαδόν τῆς βάσεως εἶναι:

$$(B)=\frac{1}{2}.3\alpha.\alpha=\frac{3\alpha^2}{2} \qquad (4)$$

Τό ἐμβαδόν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος εἶναι:

$$E_{o\lambda}=E_{\pi}+2.(B)=4\alpha^2\sqrt{10}+2.\frac{3\alpha^2}{2}=\alpha^2(3+4\sqrt{10})$$

Ὥστε: $$E_{o\lambda}=\alpha^2(3+4\sqrt{10}).$$

---

342. Ὀρθόν πρῖσμα ἔχει βάσιν τετράγωνον ΑΒΓΔ πλευρᾶς α. Ἐπί τῶν ἀκμῶν, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπό τάς κορυφάς Α, Β, Γ λαμβάνομεν τά σημεῖα M, N, P, τοιαῦτα ὥστε: $AM=4\alpha$, $BN=3\alpha$, $\Gamma P=2\alpha$. Τό ἐπίπεδον MNP τέμνει εἰς τό σημεῖον K τήν ἀκμήν τήν ἀγομένην ἐκ τοῦ Δ.

1ον: Νά εὑρεθῇ τό εἶδος τοῦ τετραπλεύρου MNPK.
2ον: Νά ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραί τοῦ MNPK.
3ον: Νά ὑπολογισθῇ τό τμῆμα ΔΚ.
4ον: Νά ὑπολογισθῇ τό ἐμβαδόν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας καί τό ὁλικόν ἐμβαδόν τοῦ ἑνός κολοβοῦ πρίσματος.
5ον: Νά γίνῃ τό ἀνάπτυγμα τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας καθώς καί τῆς ὁλικῆς τοιαύτης τοῦ κολοβοῦ πρίσματος.

Λ ύ σ ι ς: 1) Τό τετράπλευρον MNPK εἶναι παραλληλόγραμμον, ὡς τομή πρίσματος ὑπό ἐπιπέδου.

2) Ἄγομεν τήν $NZ \perp AM$ καί $PH \perp BN$. Θά εἶναι: $ZM=4\alpha-3\alpha=\alpha$ καί $HN=3\alpha-2\alpha=\alpha$. Ἐπίσης $NZ=BA=\alpha$ καί $PH=\Gamma B=\alpha$. Ἄρα:

$$NM=\sqrt{NZ^2+ZM^2}=\sqrt{\alpha^2+\alpha^2}=\alpha\sqrt{2}$$

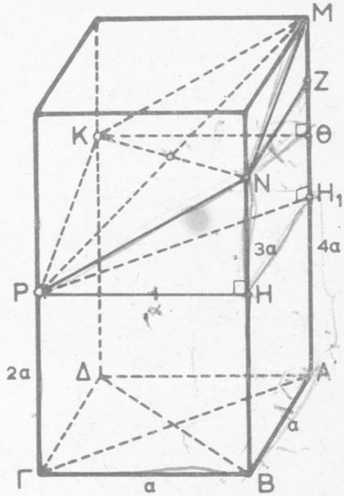
καί $PN=\sqrt{PH^2+HN^2}=\sqrt{\alpha^2+\alpha^2}=\alpha\sqrt{2}$.

Ἄρα τό τετράπλευρον MNPK εἶναι ρόμβος.

3) Ἄγομεν τήν $K\Theta \perp AM$. Θά εἶναι: $K\Theta=\Delta A=\alpha$. Ἐκ τοῦ ὀρθογ. τριγώνου $K\Theta M$ ἔχομεν:

$$\Theta M^2=KM^2-K\Theta^2=(\alpha\sqrt{2})^2-\alpha^2=2\alpha^2-\alpha^2=$$
$$=\alpha^2 \Longrightarrow \Theta M=\alpha.$$ Ἄρα $\Theta \equiv Z$ καί $AZ=A\Theta=BN=3\alpha$ καί $\Delta K=A\Theta=3\alpha$.

4) Τό ἐμβαδόν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ κολοβοῦ πρίσματος ΑΒΓΔMNPK εἶναι:



σχ.266

$$E_1=(ABNM)+(B\Gamma PN)+(\Gamma\Delta KP)+(\Delta AMK)$$
$$=\frac{1}{2}(4\alpha+3\alpha).\alpha+\frac{1}{2}(2\alpha+3\alpha).\alpha+\frac{1}{2}(2\alpha+3\alpha).\alpha+\frac{1}{2}(4\alpha+3\alpha)\alpha=12\alpha^2.$$

Τό ἐμβαδόν τῆς βάσεως $(AB\Gamma\Delta)=\alpha^2$.

Εἶναι δέ καί $\Gamma A=\alpha\sqrt{2}$ καί $B\Delta=\alpha\sqrt{2}$. Ἄρα $KN=\Delta B=\alpha\sqrt{2}$.
Ἄγομεν τήν $PH_1 \perp AM$. Θά εἶναι $H_1M=4\alpha-2\alpha=2\alpha$ καί $PH_1=\Gamma A=\alpha\sqrt{2}$.

$$\text{Ἄρα}\quad (MNPK)=\frac{1}{2}KN.PM=\frac{1}{2}\alpha\sqrt{2}.\sqrt{PH_1^2+HM^2}=\frac{1}{2}\alpha\sqrt{2}\sqrt{2\alpha^2+4\alpha^2}=\frac{1}{2}\alpha^2\sqrt{12}=$$
$$=\alpha^2\sqrt{3}.$$

Ἄρα: $E_{o\lambda}=\alpha^2+12\alpha^2+\alpha^2\sqrt{3}=\alpha^2(13+\sqrt{3})$.

5) Τό ἀνάπτυγμα τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας γίνεται κατά τά γνωστά.

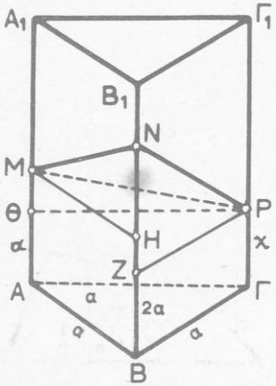
---

343. Ὀρθόν πρῖσμα ἔχει βάσιν ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ πλευρᾶς α. Ἐπί τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν λαμβάνομεν τά τμήματα $AM=\alpha$, $BN=2\alpha$ καί $\Gamma P=x$.

1ον: Νά ὑπολογισθῇ ὁ x, ὥστε τό τρίγωνον MNP νά εἶναι ὀρθογώνιον.
2ον: Τοῦ x ὁρισθέντος, νά ὑπολογισθῇ τό ἐμβαδόν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ κολοβοῦ πρίσματος ΑΒΓMNP.
3ον: Νά γίνῃ τό ἀνάπτυγμα τῆς ἐπιφανείας τούτου.

Λ ύ σ ι ς: 1) Ἄγομεν τήν $MH \perp BB_1$ καί $PZ \perp BB_1$. Θά εἶναι:

$MH=\alpha$, $PZ=\alpha$, $HN=2\alpha-\alpha=\alpha$.



σχ.267

Ἄρα: $MN^2=MH^2+HN^2=\alpha^2+\alpha^2=2\alpha^2$ (1)

Ἐπειδή $ZN=|2\alpha-x|$, ἕπεται ὅτι:

$PN^2=ZN^2+ZP^2=(2\alpha-x)^2+\alpha^2$ (2)

Ἄγομεν τήν $P\Theta \perp AM$. Θά εἶναι: $P\Theta=A\Gamma=\alpha$ καί $\Theta M=AM-M\Theta=|\alpha-x|$.

Ἄρα: $MP^2=\Theta P^2+\Theta M^2=\alpha^2+(\alpha-x)^2$ (3)

Τούτων τεθέντων, διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις:

α´) Τό τρίγωνον MNP εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τό N. Τότε:

$MP^2=MN^2+NP^2$ ἤ

$\alpha^2+(\alpha-x)^2=2\alpha^2+(2\alpha-x)^2+\alpha^2 \Leftrightarrow \boxed{x=\frac{5\alpha}{2}}$.

β´) Τό MNP εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τό P. Τότε: $MN^2=PN^2+PM^2$ ἤ $2\alpha^2=(2\alpha-x)^2+\alpha^2+\alpha^2+(\alpha-x)^2 \Leftrightarrow (\alpha-x)^2+(2\alpha-x)^2=0$, ἡ ὁποία ἐξίσωσις εἶναι ἀδύνατος. Ἄρα τό MNP δέν δύναται νά εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τό P.

γ´) Τό MNP εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τό M. Τότε: $PN^2=MP^2+MN^2$ ἤ $(2\alpha-x)^2+\alpha^2=\alpha^2+(\alpha-x)^2+2\alpha^2 \Leftrightarrow \boxed{x=\frac{\alpha}{2}}$.

2) Διά $x=\frac{5\alpha}{2}$. Τό ἐμβαδόν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας διά $x=\frac{5\alpha}{2}$ εἶναι:

$$E_\pi=(ABMN)+(B\Gamma PN)+(A\Gamma PM)=\frac{1}{2}(2\alpha+\alpha)\alpha+\frac{1}{2}\left(2\alpha+\frac{5\alpha}{2}\right)\alpha+\frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{5\alpha}{2}\right)\alpha=$$

$$=\frac{3\alpha^2}{2}+\frac{9\alpha^2}{4}+\frac{7\alpha^2}{2}=\frac{29\alpha^2}{4}.$$

Ἐπίσης: $(MNP)=\frac{1}{2}.MP.MN=\frac{1}{2}.\frac{\alpha\sqrt{6}}{2}.\alpha\sqrt{2}=\frac{\alpha^2\sqrt{12}}{4}=\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{2}$

καί κατ'ἀκολουθίαν:

$$E_{o\lambda}=(AB\Gamma)+(MNP)+E_\pi=\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}+\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{2}+\frac{29\alpha^2}{4}=\frac{\alpha^2}{4}(29+3\sqrt{3})$$

Διά $x=\frac{\alpha}{2}$, εἶναι: $MP^2=\alpha^2+\left(\alpha-\frac{\alpha}{2}\right)^2=\frac{5\alpha^2}{4} \Leftrightarrow MP=\frac{\alpha\sqrt{5}}{2}$

καί $PN^2=\left(2\alpha-\frac{\alpha}{2}\right)^2+\alpha^2=\frac{13\alpha^2}{4} \Leftrightarrow PN=\frac{\alpha\sqrt{13}}{2}$. Ἄρα:

$$(MNP)=\frac{1}{2}.MN.MP=\frac{1}{2}.\alpha\sqrt{2}.\frac{\alpha\sqrt{5}}{2}=\frac{\alpha^2\sqrt{10}}{4}$$

καί κατ'ἀκολουθίαν:

$$E_{ολ}=(ΑΒΓ)+(MNP)+E_{π}=\frac{α^2\sqrt{3}}{4}+\frac{α^2\sqrt{10}}{4}+\frac{29α^2}{4}=\frac{α^2}{4}(\sqrt{3}+\sqrt{10}+29).$$

3) Τό ἀνάπτυγμα τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας γίνεται κατά τά γνωστά.

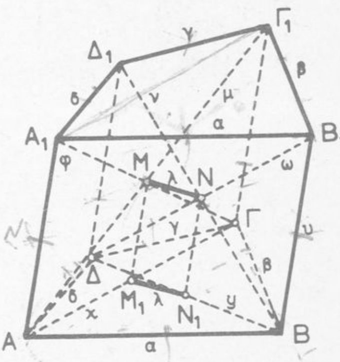
344. Εἰς πρῖσμα, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι κυρτόν τετράπλευρον, νά ἀποδειχθῇ ὅτι τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δώδεκα ἀκμῶν του ἰσοῦται πρός τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων διαγωνίων του, ηὐξημένον κατά τό ὀκταπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς ἀποστάσεως τῶν μέσων τῶν διαγωνίων.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Θέτομεν $ΑΒ=Α_1Β_1=α$, $ΒΓ=Β_1Γ_1=β$, $ΓΔ=Γ_1Δ_1=γ$, $ΔΑ=Δ_1Α_1=δ$.

Αἱ διαγώνιοι $ΑΓ_1$ καί $Α_1Γ$ διχοτομοῦνται εἰς τό Μ, διότι τό $ΑΓΓ_1Α_1$ εἶναι παραλληλόγραμμον. Ὁμοίως αἱ $ΒΔ_1$ καί $Β_1Δ$ διχοτομοῦνται εἰς τό Ν.

Θέτομεν: $ΑΓ_1=μ$, $Α_1Γ=φ$, $ΒΔ_1=ν$, $Β_1Δ=ω$ καί $ΜΝ=λ$ καί $ΒΒ_1=υ$.

Αἱ παράλληλοι πρός τήν $ΑΑ_1$ ἐκ τῶν Μ καί Ν διέρχονται διά τῶν μέσων $Μ_1$, $Ν_1$ τῶν ΑΓ, ΒΔ ἀντιστοίχως. Ἄρα $Μ_1Ν_1=ΜΝ=λ$.



σχ.268

Κατά τό θεώρημα τοῦ EULER, ἐκ τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, ἔχομεν:

$$α^2+β^2+γ^2+δ^2=x^2+y^2+4λ^2 . \qquad (1)$$

Βάσει τοῦ θεωρήματος τῶν διαμέσων, ἐκ τῶν τριγώνων $ΑΓΑ_1$ καί $ΒΔΒ_1$, ἔχομεν:

$$x^2+υ^2=\frac{1}{2}(φ^2+μ^2) \quad καί \quad y^2+υ^2=\frac{1}{2}(ω^2+ν^2),$$

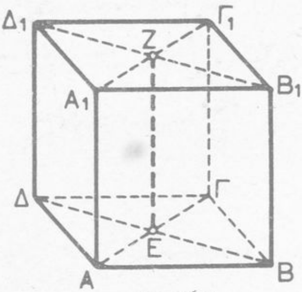
ὁπότε ἡ (1) γίνεται:

$$α^2+β^2+γ^2+δ^2=\frac{1}{2}(φ^2+μ^2+ω^2+ν^2)-2υ^2+4λ^2$$

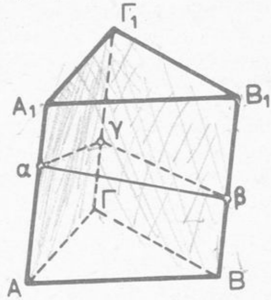
ἐξ οὗ: $$4υ^2+2(α^2+β^2+γ^2+δ^2)=φ^2+μ^2+ω^2+ν^2+8λ^2.$$

345. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι: Ἄν δύο διαγώνια ἐπίπεδα ὀρθοῦ πρίσματος τέμνωνται, ἡ τομή αὐτῶν εἶναι κάθετος πρός τάς βάσεις του.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Τά διαγώνια ἐπίπεδα (σχ. 269) $ΑΓΓ_1Α_1$ καί $ΒΔΔ_1Β_1$ εἶναι κάθετα πρός τό ἐπίπεδον ΑΒΓΔ, ὡς διερχόμενα διά τῶν εὐθειῶν AA_1 καί $\Delta\Delta_1$, αἵτινες εἶναι κάθετοι πρός τό ἐπίπεδον ΑΒΓΔ. Ἄρα ἡ τομή αὐτῶν ΕΖ θά εἶναι κάθετος πρός τάς βάσεις ΑΒΓΔ καί $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$ τοῦ ὀρθοῦ πρίσματος.



σχ.269



σχ.270

346. Εἰς ἕν τριγωνικόν πρῖσμα νά ἀποδειχθῇ ὅτι: Ἄν δύο παράπλευροι ἕδραι εἶναι ἴσαι, αἱ ἀπέναντι αὐτῶν δίεδροι γωνίαι εἶναι ἴσαι.

347. Ὁμοίως, ἄν δύο ἕδραι εἶναι ἄνισοι, αἱ ἀπέναντι αὐτῶν δίεδροι γωνίαι εἶναι ὁμοίως ἄνισοι.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: 1) Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι: $ABB_1A_1 = B\Gamma\Gamma_1B_1$ (1). Ἄγομεν τυχοῦσαν κάθετον τομήν αβγ τοῦ πρίσματος. Θά εἶναι:

$$(ABB_1A_1) = (BB_1).(\alpha\beta) \text{ καί } (B\Gamma\Gamma_1B_1) = (BB_1)(\beta\gamma)$$

καί λόγῳ τῆς (1) θά εἶναι:

$$(BB_1)(\alpha\beta) = (BB_1)(\beta\gamma) \longleftrightarrow \boxed{\beta\alpha = \beta\gamma}$$

Οὕτω, τό τρίγωνον βαγ θά εἶναι ἰσοσκελές καί ἄρα:

$$\sphericalangle \beta\alpha\gamma = \sphericalangle \beta\gamma\alpha,$$

αἵτινες εἶναι αἱ ἀντίστοιχοι τῶν διέδρων AA_1 καί $\Gamma\Gamma_1$. Ἄρα:

$$\delta(AA_1) = \delta(\Gamma\Gamma_1).$$

2) Ἐάν $ABB_1A_1 > B\Gamma\Gamma_1B_1 \Longrightarrow (BB_1)(\beta\alpha) > (BB_1)(\beta\gamma) \rightarrow \beta\alpha > \beta\gamma$ καί κατ'ἀκολουθίαν $\sphericalangle \beta\gamma\alpha > \sphericalangle \beta\alpha\gamma$ καί ἄρα:

$$\delta(\Gamma\Gamma_1) > \delta(AA_1).$$

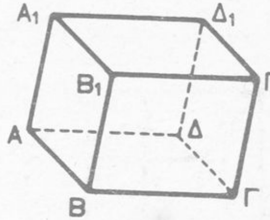
Ἰσχύουν τά ἀντίστροφα τῶν ἀνωτέρω;

348. Πᾶν πρῖσμα ἔχον βάσιν τετράπλευρον καί τάς ἀπέναντι παραπλεύρους ἕδρας παραλλήλους, εἶναι παραλληλεπίπεδον.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Ἀφοῦ αἱ παράπλευροι ἕδραι $B\Gamma\Gamma_1B_1$

καί $ΑΔΔ_1Α_1$ εἶναι παράλληλοι καί τέμνονται ὑπό τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓΔ, ἕπεται ὅτι: ΒΓ//ΑΔ.

Ὁμοίως, ἀφοῦ αἱ ἕδραι $ΑΒΒ_1Α_1$ καί $ΔΓΓ_1Δ_1$ εἶναι παράλληλοι καί τέμνονται ὑπό τρίτου ἐπιπέδου ΑΒΓΔ, ἕπεται ὅτι ΑΒ//ΔΓ. Κατ'ἀκολουθίαν τό τετράπλευρον ΑΒΓΔ θά εἶναι παραλληλόγραμμον. Ἄρα τό πρῖσμα $ΑΒΓΔΑ_1Β_1Γ_1Δ_1$ θά εἶναι παραλληλεπίπεδον.



σχ.271

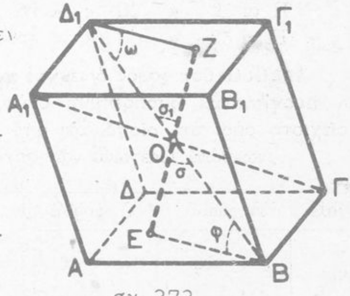
349. Ἡ βάσις πρίσματος εἶναι τετράπλευρον, αἱ δέ δύο ἕδραι εἶναι ἴσαι καί παράλληλοι. Νά δειχθῇ ὅτι τό πρῖσμα τοῦτο εἶναι παραλληλεπίπεδον.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Ἐκ τοῦ σχήματος τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως $ΑΒΒ_1Α_1 = ΔΓΓ_1Δ_1$ καί $ΑΒΒ_1Α_1 \,//\, ΔΓΓ_1Δ_1$. Ἄρα θά εἶναι καί ΑΒ//=ΔΓ. Κατ'ἀκολουθίαν τό τετράπλευρον ΑΒΓΔ θά εἶναι παραλληλόγραμμον καί τό πρῖσμα $ΑΒΓΔΑ_1Β_1Γ_1Δ_1$ θά εἶναι παραλληλεπίπεδον.

350. Πᾶν εὐθύγραμμον τμῆμα ἔχον τά ἄκρα του ἐπί τῶν δύο ἀπέναντι ἑδρῶν παραλληλεπιπέδου καί διερχόμενον διά τοῦ κέντρου, διχοτομεῖται ὑπό τοῦ κέντρου.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Γνωρίζομεν ὅτι αἱ διαγώνιοι παραλληλεπιπέδου διχοτομοῦνται. Ἄρα $ΒΟ=ΟΔ_1$.

Ἐπειδή τά ἐπίπεδα ΑΒΓΔ καί $Α_1Β_1Γ_1Δ_1$ εἶναι παράλληλα καί τέμνονται ὑπό τρίτου $ΒΕΖΔ$, ἕπεται ὅτι $ΒΕ \,//\, ΖΔ_1$. Οὕτω, τά τρίγωνα ΟΕΒ καί $ΟΖΔ_1$ ἔχουν $ΟΒ=ΟΔ_1$, φ=ω καί $σ=σ_1$. Ἄρα εἶναι ἴσα, ὁπότε θά εἶναι καί ΟΕ=ΟΖ.



σχ.272

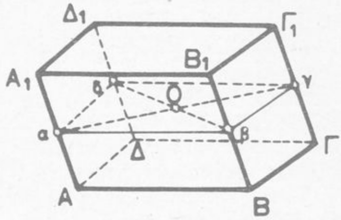
351. Τά εὐθύγραμμα τμήματα, τά ὁποῖα ὁρίζονται ὑπό τῶν μέσων τῶν ἀπέναντι παραλλήλων ἀκμῶν παραλληλεπιπέδου διχοτομοῦνται.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Ἐπειδή $δΔ_1=δΔ$ καί $γΓ_1=γΓ$, ἕπεται ὅτι: δγ=//ΔΓ=//ΑΒ (1).

Ἐπειδή $αΑ_1=αΑ$ καί $βΒ_1=βΒ$, ἕπεται ὅτι:

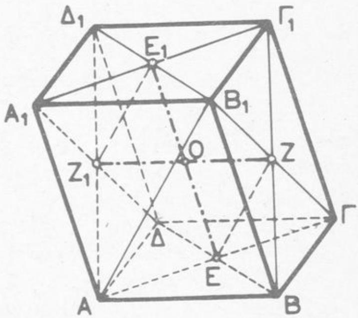
αβ=//ΑΒ (2)

'Εκ τῶν (1) καί (2) ἕπεται ὅτι: $\alpha\beta = /\!/ \delta\gamma$ καί τό αβγδ θά εἶναι παραλληλόγραμμον. Συνεπῶς αἱ διαγώνιοί του αγ καί βδ διχοτομοῦνται εἰς τό O.



σχ.273

352. Τά εὐθύγραμμα τμήματα, τά ὁριζόμενα ὑπό τῶν κέντρων τῶν ἀπέναντι ἑδρῶν παραλληλεπιπέδου διχοτομοῦνται.



σχ.274

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς: Ἄγομεν τά τμήματα E_1Z_1, EZ καί AB_1. 'Επειδή

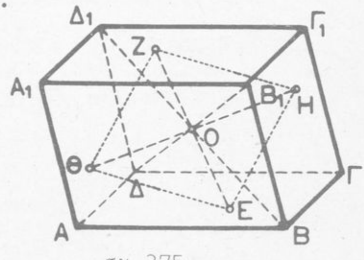
$AE = E\Gamma$ καί $\Gamma Z = ZB_1 \Longrightarrow EZ /\!/ = \frac{1}{2} AB_1$ (1)

'Ομοίως, ἐπειδή $Z_1A = Z_1\Delta_1$ καί $E_1B = E_1\Delta_1$, ἕπεται ὅτι:

$$E_1Z_1 = /\!/ \tfrac{1}{2} AB \qquad (2).$$

'Εκ τῶν (1) καί (2) ἕπεται ὅτι: $EZ = /\!/ Z_1E_1$, καί κατ' ἀκολουθίαν τό τετράπλευρον E_1Z_1EZ θά εἶναι παραλληλόγραμμον καί αἱ διαγώνιοί του θά διχοτομοῦνται, ἤτοι: $OE = OE_1$ καί $OZ = OZ_1$.

353. Δύο κάθετα εὐθύγραμμα τμήματα, ἀγόμενα ἐκ τοῦ κέντρου παραλληλεπιπέδου καί περατούμενα εἰς τάς ἀπέναντι ἕδρας αὐτοῦ, εἶναι κορυφαί ρόμβου.



σχ.275

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς: Κατά τήν ἄσκησιν 350 θά εἶναι:

$$OE = OZ \text{ καί } OH = O\Theta.$$

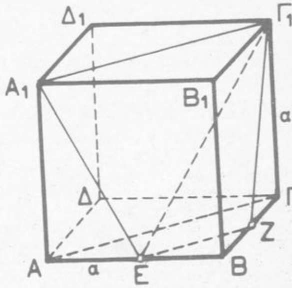
Ἄρα τό τετράπλευρον ΖΗΕΘ θά εἶναι παραλληλόγραμμον. 'Επειδή δέ αἱ διαγώνιοί του ΕΖ καί ΘΗ εἶναι καί κάθετοι, ἕπεται ὅτι τό ΖΗΕΘ θά εἶναι ρόμβος.

354. 'Επίπεδον διέρχεται ἀπό μίαν διαγώνιον μιᾶς ἕδρας κύβου καί διά τοῦ μέσου τῆς ἀπέναντι παραλλήλου ἀκμῆς αὐτοῦ. Νά εὑρεθῇ τό εἶδος τῆς τομῆς τοῦ κύβου ὑπό τοῦ ἐπιπέδου τούτου.

Λ ύ σ ι ς: Ἔστω Ε τό μέσον τῆς ἀκμῆς ΑΒ καί $A_1Γ_1$ ἡ διαγώνιος τῆς ἕδρας $A_1B_1Γ_1Δ$ τοῦ δοθέντος κύβου. Τό Ε καί ἡ $A_1Γ_1$ ὁρίζουν τό ἐπίπεδον $EA_1Γ_1$.

Ἐάν Ζ εἶναι τό μέσον τῆς ἀκμῆς ΒΓ τοῦ κύβου, τότε ΕΖ//ΑΓ. Ἀλλά ΑΓ//=$A_1Γ_1$. Ἄρα ΕΖ//$A_1Γ_1$. Συνεπῶς τό ἐπίπεδον $A_1Γ_1E$ διέρχεται καί ἀπό τό μέσον Ζ τῆς ἀκμῆς ΒΓ.

Ὥστε τό τετράπλευρον $EZΓ_1A_1$ εἶναι τραπέζιον.



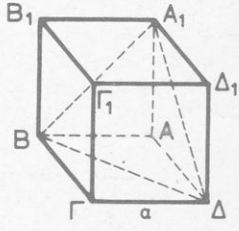
σχ.276

Ἐπειδή δέ $EA_1 = \sqrt{AE^2 + AA_1^2} = \sqrt{\frac{α^2}{4} + α^2} = \frac{α\sqrt{5}}{2}$

καί $ZΓ_1 = \sqrt{ZΓ^2 + ΓΓ_1^2} = \sqrt{\frac{α^2}{4} + α^2} = \frac{α\sqrt{5}}{2}$,

ἕπεται ὅτι $EA_1 = ZΓ_1$ καί τό τραπέζιον $EZΓ_1A_1$ θά εἶναι ἰσοσκελές.

355. Νά εὑρεθῇ τό εἶδος τῆς τομῆς κύβου ὑπό ἐπιπέδου ὁριζομένου ὑπό τῶν ἄκρων τριῶν ἀκμῶν αὐτοῦ, ἀγομένων ἐκ τῆς αὐτῆς κορυφῆς.



σχ.277

Λ ύ σ ι ς: Ἐκ τῶν τετραγώνων ΑΒΓΔ, ABB_1A_1 καί $AΔA_1A_1$ ἔχομεν ἀντιστοίχως:

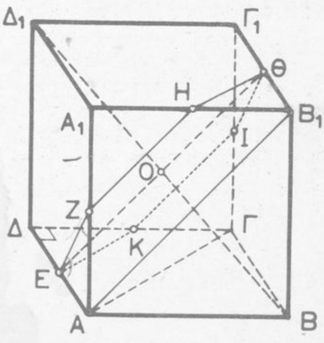
$BΔ = α\sqrt{2}$, $BA_1 = α\sqrt{2}$, $ΔA_1 = α\sqrt{2}$,

καί κατ' ἀκολουθίαν:

$BΔ = ΔA_1 = A_1B$,

καί ἡ τομή $ΔBA_1$ θά εἶναι ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς $α\sqrt{2}$.

356. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ τομή κύβου ὑπό ἐπιπέδου καθέτου εἰς τό μέσον μιᾶς διαγωνίου του εἶναι κανονικόν ἑξάγωνον.



σχ. 278

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Ἔστωσαν Ε,Ζ,Η,Θ,Ι,Κ τά μέσα τῶν ἀκμῶν ΑΔ, AA_1, A_1B_1, $B_1Γ_1$, $ΓΓ_1$ καί ΓΔ ἀντιστοίχως.

Ἡ AB_1 εἶναι ὀρθογώνιος πρός τήν διαγώνιον $BΔ_1$ τοῦ κύβου.

Ἀλλά ἡ ΕΘ καί ἡ ΖΗ εἶναι προφανῶς παράλληλοι. Ἄρα ἡ ΖΗ εἶναι ὀρθογώνιος πρός τήν $BΔ_1$.

Ὁμοίως καί ἡ ΚΙ εἶναι ὀρθογώνιος πρός τήν $ΒΔ_1$. Οὕτω, τό ἐπίπεδον ΖΗΚΙ εἶναι κάθετον πρός τήν $ΒΔ_1$, καί εἰς τό σημεῖον Ο, μέσον τῆς διαγωνίου $ΒΔ_1$.

Τοῦτο, προφανῶς, περιέχει καί τάς ΕΖ, ΕΚ, ΘΗ, ΘΙ.

Ἐπειδή $ΕΚ=\frac{1}{2}.ΑΓ=\frac{1}{2}.α\sqrt{2}$ καί $ΕΖ=\frac{1}{2}.ΔΑ_1=\frac{1}{2}.α\sqrt{2},\ldots$

$$=ΗΘ=\frac{1}{2}.Α_1Γ_1=\frac{1}{2}.α\sqrt{2},\quad ΚΙ=\frac{1}{2}.α\sqrt{2},$$

τό ἑξάγωνον ΕΖΗΘΙΚ ἔχει ὅλας τάς πλευράς του ἴσας.

Ἐπειδή δέ $\sphericalangle ΑΕΖ=\sphericalangle ΑΖΕ=45^\circ$ καί $δ(ΑΕ)=δ(ΑΖ)=90^\circ$ καί $\sphericalangle ΑΕΚ=\sphericalangle ΑΖΗ=135^\circ$, ἕπεται ὅτι αἱ τρίεδροι Ε-ΑΚΖ καί Ε-ΑΖΗ εἶναι ἴσαι καί κατ' ἀκολουθίαν $\sphericalangle ΕΖΗ=\sphericalangle ΖΕΚ$, κ.λπ.

Ἄρα τό ἑξάγωνον ΕΖΗΘΙΚ εἶναι κανονικόν.

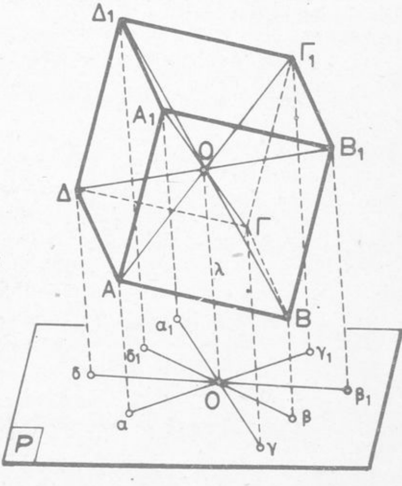
357. Τό ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τῶν κορυφῶν παραλληλεπιπέδου ἀπό ἐπίπεδον μή τέμνον αὐτό, ἰσοῦται πρός τό ὀκταπλάσιον τῆς ἀποστάσεως τοῦ κέντρου του ἀπό τό αὐτό ἐπίπεδον.

Λ ύ σ ι ς: Ἡ $ΟΟ_1=λ$ εἶναι διάμεσος τῶν τραπεζίων $ΔΒ_1β_1δ$, $ΑΓ_1γ_1α$, $ΒΔ_1βδ_1$ καί $ΓΑ_1γα_1$ ἀντιστοίχως. Κατ' ἀκολουθίαν:

$$\left.\begin{matrix} Δδ+Β_1β_1=2λ \\ Αα+Γ_1γ_1=2λ \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} Ββ+Δ_1δ_1=2λ \\ Γγ+Α_1α_1=2λ \end{matrix}\right\}$$

καί διά προσθέσεως κατά μέλη τούτων εὑρίσκομεν:

$$Αα+Ββ+Γγ+Δδ+Α_1α_1+Β_1β_1+Γ_1γ_1+Δ_1δ_1==8λ.$$



σχ.279

358. Νά σπουδασθῆ τό πολύεδρον, τό ὁποῖον ἔχει κορυφάς τά κέντρα τῶν ἑδρῶν κύβου ἀκμῆς α.

Λ ύ σ ι ς: 1) Αἱ ἀκμαί τοῦ πολυέδρου ΕΖΗΘΙΚ (σχ.280) εἶναι, προφανῶς, τά ἡμίση τῶν διαγωνίων τῶν ἑδρῶν τοῦ κύβου. Ἐπειδή ἡ διαγώνιος δ τῶν ἑδρῶν τοῦ κύβου εἶναι $δ=α\sqrt{2}$, ἕπεται ὅτι:

$$ΕΖ=ΕΙ=ΕΗ=ΕΘ=ΚΘ=ΚΗ=ΚΖ=ΚΙ=\frac{α\sqrt{2}}{2}. \qquad (1)$$

2) Εἶναι $ΙΖ=ΖΗ=ΗΘ=ΘΙ=\frac{α\sqrt{2}}{2}$ (2) καί κατ' ἀκολουθίαν ἐκ τῶν (1) καί (2) ἕπεται ὅτι αἱ ἕδραι τοῦ ὀκταέδρου ΕΖΗΘΙΚ

εἶναι πᾶσαι ἰσόπλευρα τρίγωνα πλευρᾶς $EZ=\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$.

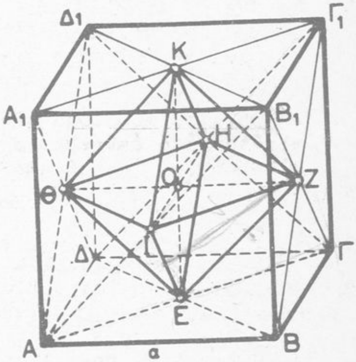
3) Εἶναι $(EZI)=\frac{\left(\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}\right)^2\sqrt{3}}{4}=\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{8}$ καί κατ'ἀκολουθίαν ἡ ὁλική ἐπιφάνεια τοῦ κανονικοῦ τούτου ὀκταέδρου εἶναι:

$$E_{o\lambda}=8.(EZI)=8.\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{8}=\alpha^2\sqrt{3}.$$

4) Τό τετράπλευρον ΙΖΗΘ εἶναι, προφανῶς, τετράγωνον, τοῦ ὁποίου

$$(I Z H \Theta)=IZ^2=\left(\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{2\alpha^2}{4}=\frac{\alpha^2}{2}$$

5) Αἱ ΚΕ, ΘΖ, ΙΗ τέμνονται, ἀνά δύο, καθέτως εἰς τό σημεῖον Ο, τό ὁποῖον εἶναι τό κέντρον τοῦ κύβου, ἔχουν δέ μῆκος ἴσον πρός τήν ἀκμήν τοῦ κύβου. Πλήν τῶν ἰδιοτήτων τούτων θά γνωρίσωμεν καί ἄλλας ἰδιότητας εἰς τό περί συμμετρίας κεφάλαιον.



σχ.280

359. Ἡ διαγώνιος κύβου εἶναι $8\sqrt{3}$ m. Νά ὑπολογισθῇ τό ἐμβαδόν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας του.

Λ ύ σ ι ς: Γνωρίζομεν ὅτι ἡ διαγώνιος κύβου ἀκμῆς α εἶναι $\delta=\alpha\sqrt{3}$. Ἄρα $8\sqrt{3}=\alpha\sqrt{3}$, ἐξ οὗ: $\alpha=8$ m.

Τό ἐμβαδόν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ κύβου εἶναι:

$$E_{o\lambda}=6\alpha^2=6.8^2=6.64=384 \text{ m}^2 \qquad \boxed{E_{o\lambda}=384 \text{ m}^2}.$$

360. Τό ἐμβαδόν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας κύβου εἶναι $150 m^2$. Νά ὑπολογισθῇ ἡ διαγώνιος αὐτοῦ.

Λ ύ σ ι ς: Ἐκ τοῦ τύπου, τοῦ δίδοντος τήν ὁλικήν ἐπιφάνειαν ἑνός κύβου ἀκμῆς α, ἔχομεν:

$$E_{o\lambda}=6\alpha^2 \quad ἤ \quad 150 \text{ m}^2=6\alpha^2 \Rightarrow 25 \text{ m}^2=\alpha^2 \rightarrow \boxed{\alpha=5 \text{ m}}.$$

Κατ'ἀκολουθίαν: $\delta=\alpha\sqrt{3}=5\sqrt{3}$ m.

Ὥστε: $\delta=5\sqrt{3}$ m.

361. Αἱ διαστάσεις ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι $\alpha=7$ cm, $\beta=24$ cm καί $\gamma=60$ cm. Νά ὑπολογισθῇ ἡ διαγώνιος δ καί ἡ ὁλική ἐπιφάνειά του.

Λ ύ σ ι ς: Γνωρίζομεν ὅτι τό μῆκος τῆς διαγωνίου τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι:

$$\delta=\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}=\sqrt{7^2+24^2+60^2}=\sqrt{49+576+3600}=\sqrt{4225}=65\,cm.$$

Ἡ ὁλική ἐπιφάνειά του εἶναι:

$$E_{o\lambda}=2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=2.(7.24+24.60+60.7)=$$

$$=2.(168+1440+420)=2.2028=4056\ cm^2.$$

Ὥστε: $\delta=65\ cm$ καί $E_{o\lambda}=4056\ cm^2$.

362. Εἰς ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον εἶναι $\alpha=15\,m$, $\beta=20\,m$ καί $\delta=313\,m$. Νά ὑπολογισθῇ ἡ ὁλική του ἐπιφάνεια.

Λ ύ σ ι ς: Ἐκ τοῦ τύπου $\delta^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ ἔχομεν:

$$313^2=15^2+20^2+\gamma^2 \quad ἤ \quad \gamma^2=97344 \longrightarrow \gamma=312\,m.$$

Ἐπομένως ἡ ὁλική ἐπιφάνειά του θά εἶναι:

$$E=2.(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=2.(15.20+20.312+312.15)=$$

$$=2.(300+6240+4680)=2.11220=22440\ m^2.$$

363. Νά ὑπολογισθοῦν αἱ διαστάσεις ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, γνωστοῦ ὄντος ὅτι εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀριθμῶν 4, 5,6 καί ὅτι τό ὁλικόν ἐμβαδόν του εἶναι 1332 m^2.

Λ ύ σ ι ς: Ἔστωσαν α,β,γ αἱ διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Θά ἔχωμεν:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\alpha}{4}=\dfrac{\beta}{5}=\dfrac{\gamma}{6} \\ 2.(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=1332\end{array}\right\}\begin{array}{l}(1)\\(2)\end{array}$$

Θέτομεν $\dfrac{\alpha}{4}=\dfrac{\beta}{5}=\dfrac{\gamma}{6}=\lambda$, ὅτε

$$\alpha=4\lambda,\ \beta=5\lambda,\ \gamma=6\lambda \qquad (3)$$

ὁπότε ἡ (2) γίνεται:

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=666 \quad ἤ \quad 4\lambda.5\lambda+5\lambda.6\lambda+6\lambda.4\lambda=666 \quad ἤ$$

$$20\lambda^2+30\lambda^2+24\lambda^2=666 \ ἤ \ 74\lambda^2=666 \ ἤ \ \lambda^2=9 \Longrightarrow \boxed{\lambda=3} \qquad (4)$$

Ἐκ ταύτης καί τῶν (3) λαμβάνομεν:

$$\alpha=4.3=12\,m,\quad \beta=5.3=15\,m,\quad \gamma=6.3=18\,m.$$

Ὥστε: $\alpha=12\,m$, $\beta=15\,m$, $\gamma=18\,m$.

364. Τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων παραλληλεπιπέδου ἰσοῦται πρός τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δώδεκα ἀκμῶν του.

Λ ύ σ ι ς: Ἄγομεν τάς διαγωνίους $B\Gamma_1$, ΓB_1, ΔA_1, $A\Delta_1$ τῶν ἑδρῶν $B\Gamma\Gamma_1 B$ καί $A\Delta\Delta_1 A_1$ (σχ.281)

'Εκ τῶν παραλληλογράμμων $ΑΒΓ_1Δ_1$ καί $ΔΓΒ_1Α_1$ ἔχομεν ἀντιστοίχως:

$$ΑΓ_1^2+ΒΔ_1^2=2α^2+ΒΓ_1^2+ΑΔ_1^2, \qquad (1)$$

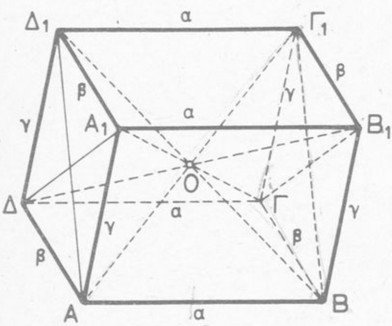
$$ΔΒ_1^2+ΓΑ^2=2α^2+ΓΒ_1^2+ΔΑ_1^2. \qquad (2)$$

'Εκ τῶν (1) καί (2) λαμβάνομεν:

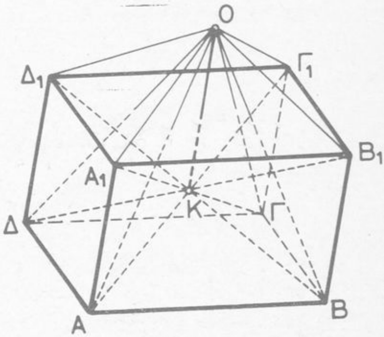
$$ΑΓ_1^2+ΒΔ_1^2+ΔΒ_1^2+ΓΑ_1^2=4α^2+(ΒΓ_1^2+ΓΒ_1^2)+(ΔΑ_1^2+ΑΔ_1^2)=$$

$$=4α^2+(2β^2+2γ^2)+(2β^2+2γ^2)=4(α^2+β^2+$$

"Ωστε: $$ΑΓ_1^2+ΒΔ_1^2+ΔΒ_1^2+ΓΑ_1^2=4(α^2+β^2+γ^2).$$



σχ.281



σχ.282

365. Τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων σημείου ἀπό τάς κορυφάς παραλληλεπιπέδου ἰσοῦται πρός τό ὀκταπλάσιον τετράγωνον τῆς ἀποστάσεως τοῦ σημείου τούτου ἀπό τό κέντρον τοῦ παραλληλεπιπέδου,ηὐξημένον κατά τό ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων του.

Λ ύ σ ι ς: Βάσει τοῦ θεωρήματος τῶν διαμέσων τριγώνου, ἐκ τῶν τριγώνων $ΟΑΓ_1$, $ΟΔΒ_1$, $ΟΒΔ_1$ καί $ΟΓΑ_1$ θά ἔχωμεν ἀντιστοίχως:

$$ΟΑ^2+ΟΓ_1^2=2.ΟΚ^2+\frac{1}{2}.ΑΓ_1^2, \qquad (1)$$

$$ΟΔ^2+ΟΒ_1^2=2.ΟΚ^2+\frac{1}{2}.ΔΒ_1^2, \qquad (2)$$

$$ΟΒ^2+ΟΔ_1^2=2.ΟΚ^2+\frac{1}{2}.ΒΔ_1^2, \qquad (3)$$

$$ΟΓ^2+ΟΑ_1^2=2.ΟΚ^2+\frac{1}{2}.ΓΑ_1^2. \qquad (4)$$

Διά προσθέσεως κατά μέλη τῶν (1),(2),(3),(4) λαμβάνομεν: $ΟΑ^2+ΟΒ^2+ΟΓ^2+ΟΔ^2+ΟΑ_1^2+ΟΒ_1^2+ΟΓ_1^2+ΟΔ_1^2=$

$$=8ΟΚ^2+\frac{1}{2}(ΑΓ_1^2+ΒΔ_1^2+ΓΑ_1^2+ΔΒ_1^2).$$

366. Τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἕξ διαγωνίων ἐπιπέδων τομῶν παραλληλεπιπέδου εἶναι διπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἑδρῶν του.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Θέτομεν $(ΑΒΓΔ)=(Α_1Β_1Γ_1Δ_1)=ε_1$, $(ΑΒΒ_1Α_1)=(ΓΔΔ_1Γ_1)=ε_2$, $(ΑΔΔ_1Α_1)=(ΒΓΓ_1Β_1)=ε_3$, καί $(ΓΔΑ_1Β_1)=x$, $(ΑΒΓ_1Δ_1)=y$, καί ἄγομεν τυχοῦσαν κάθετον τομήν $Α_2Β_2Γ_2Δ_2$, ἥτις, προφανῶς, εἶναι παραλληλόγραμμον. Θά εἶναι: $Β_2Δ_2^2+Α_2Γ_2^2=2(Α_2Β_2^2+Α_2Δ_2^2)$ (1)

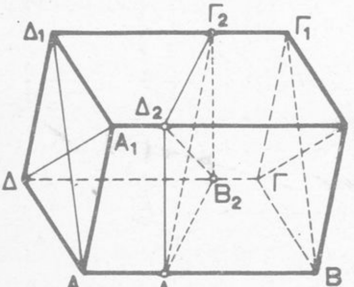
Πολ/ζοντες ἀμφότερα τά μέλη τῆς (1) ἐπί $Α_1Β_1^2$, λαμβάνομεν: $Β_2Δ_2^2.Α_1Β_1^2+Α_2Γ_2^2.Α_1Β_1^2=2(Α_2Β_2^2.Α_1Β_1^2+Α_2Δ_2^2.Α_1Β_1^2)$

ἤ $x^2+y^2=2(ε_1^2+ε_2^2)$ (2)

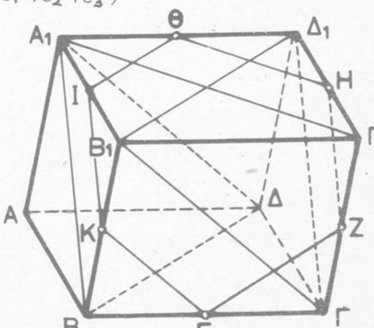
Ἐάν z, t, ω, φ εἶναι τά ἐμβαδά τῶν τεσσάρων ἄλλων διαγωνίων ἐπιπέδων, θά ἔχωμεν:

(3) $z^2+t^2=2(ε_2^2+ε_3^2)$ καί $ω^2+φ^2=2(ε_3^2+ε_1^2)$. (4)

Διά προσθέσεως κατά μέλη τῶν (2),(3) καί (4), λαμβάνομεν: $x^2+y^2+z^2+t^2=4(ε_1^2+ε_2^2+ε_3^2)$



σχ.283



σχ.284

367. Διά τοῦ μέσου τῆς ἀκμῆς ΒΓ παραλληλεπιπέδου $ΑΒΓΔΑ_1Β_1Γ_1Δ_1$ ἄγομεν ἐπίπεδον παράλληλον πρός τό $ΒΔΑ_1$. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι ἡ τομή εἶναι ἑξάγωνον καί νά σπουδασθοῦν αἱ ἰδιότητες τῆς τομῆς.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Ἐπειδή (σχ.284) τό ἐπίπεδον ΕΚΙΘΗΖ θά εἶναι παράλληλον πρός τό $ΒΔΑ_1$, ἕπεται ὅτι θά εἶναι παράλληλον πρός τάς πλευράς $ΒΑ_1$, ΒΔ, $ΔΑ_1$ τοῦ τριγώνου $ΒΔΑ_1$, ἄρα καί πρός τάς $ΓΔ_1$, $Β_1Δ_1$, $ΓΒ_1$ ἀντιστοίχως. Κατ' ἀκολουθίαν θά διέρχεται ἀπό τά μέσα Κ,Ι,Θ,Η,Ζ τῶν ἀκμῶν BB_1, B_1A_1, $A_1\Delta_1$, $\Delta_1\Gamma_1$, $\Gamma_1\Gamma$ ἀντιστοίχως. Θά εἶναι δέ καί:

$$EK=\frac{1}{2}.\Gamma B_1,\qquad KI=\frac{1}{2}.BA_1=\frac{1}{2}.\Gamma\Delta_1=HZ,$$

$$\Theta I=\frac{1}{2}.B_1\Delta_1,\quad EZ=\frac{1}{2}.B\Gamma_1,\quad \Theta H=\frac{1}{2}.A_1\Gamma_1.$$

Αἱ ΙΚ καί ΗΖ εἶναι παράλληλοι, ὡς παράλληλοι ἀντιστοίχως πρός τάς παραλλήλους διαγωνίους BA_1 καί $\Gamma\Delta_1$.

Ὁμοίως $I\Theta /\!/ B_1\Delta_1 /\!/ B\Delta /\!/ EZ$.

368. Δίδεται κύβος $AB\Gamma\Delta A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$ ἀκμῆς α. 1) Νά ὑπολογισθῆ ἡ προβολή τῆς ΑΒ ἐπί τήν διαγώνιον $A\Gamma_1$. 2) Νά ἀποδειχθῆ ὅτι τό τρίγωνον $B\Delta A_1$ εἶναι ἰσόπλευρον. 3) Ὅτι τό ἐπίπεδον $B\Delta A_1$ εἶναι κάθετον πρός τήν $A\Gamma_1$ καί 4) Ὅτι ἡ προβολή τοῦ κύβου ἐπί ἐπίπεδον κάθετον πρός τήν $A\Gamma_1$ εἶναι κανονικόν ἑξάγωνον.

Λ ύ σ ι ς: 1) Ἐπειδή ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος πρός τό ἐπίπεδον $B\Gamma\Gamma_1B_1$, θά εἶναι κάθετος καί πρός τήν $B\Gamma_1$. Ἄρα τό τρίγωνον $AB\Gamma_1$ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τό Β.

Εἶναι δέ $A\Gamma_1=\alpha\sqrt{3}$ καί

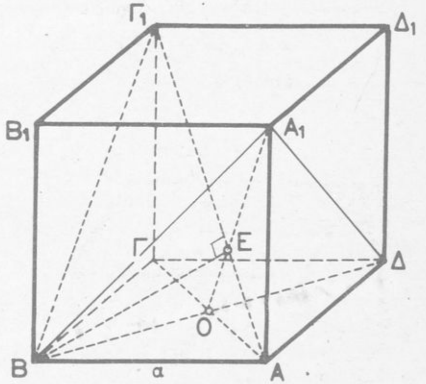
$AB^2=A\Gamma_1.AE$ ἤ

$\alpha^2=\alpha\sqrt{3}.AE \Rightarrow AE=\frac{\alpha\sqrt{3}}{3}$.

2) Εἶναι $B\Delta=\alpha\sqrt{2}$,

$\Delta A_1=\alpha\sqrt{2}$, $BA_1=\alpha\sqrt{2}$, ὁπότε:

$B\Delta=\Delta A_1=BA_1$ καί τό τρίγωνον $B\Delta A_1$ εἶναι ἰσόπλευρον.



σχ.285

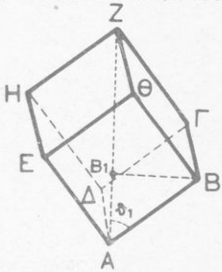
3) Τό ἐπίπεδον $A\Gamma\Gamma_1A_1$ εἶναι κάθετον πρός τό ἐπίπεδον ΑΒΓΔ. Ἡ ΒΔ εἶναι κάθετος πρός τήν ΑΓ. Ἡ A_1O εἶναι κάθετος πρός τήν ΒΔ. Ἄρα τό ἐπίπεδον $B\Delta A_1$ θά εἶναι κάθετον πρός τήν ΑΓ καί κατ'ἀκολουθίαν ἡ $A\Gamma_1$ εἶναι ὀρθογώνιος πρός τήν ΒΔ καί κατ'ἀκολουθίαν τό ἐπίπεδον $B\Delta A_1$ εἶναι κάθετον πρός τήν $A\Gamma_1$.

4) Ἐπί ἐπιπέδου (Ρ), καθέτου πρός τήν διαγώνιον ΑΖ, προβάλλομεν τόν δοθέντα κύβον (ΘΒ). Αἱ κορυφαί Α καί Ζ προβάλλονται εἰς τό αὐτό σημεῖον α,ζ. Ἐπειδή αἱ ἀκμαί τοῦ κύβου εἶναι ἰσοκλινεῖς πρός τήν ΑΖ, θά εἶναι καί ἰσοκλινεῖς πρός τό (Ρ).

Ἄρα αἱ προβολαί τῶν ἀκμῶν ἐπί τό (Ρ) θά εἶναι ἴσαι.

Τά Α,Β,Γ,Ζ καί Α,Β,Θ,Ζ θά προβάλλωνται κατά τά ἰσόπλευρα τρίγωνα αβγζ καί αβθζ.

Ἐπειδή τά Δ,Ε,Η εἶναι συμμετρικά τῶν Θ,Γ,Β ὡς πρός τό μέσον Ο τῆς ΑΖ, αἱ προβολαί των δ,ε,η εἶναι συμμετρικαί τῶν θ,γ,β ὡς πρός τό α.



Ἄρα αἱ ἀκμαί τοῦ κύβου προβάλλονται κατά τά ἡμίση τῶν διαγωνίων τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου βγδηεθ.

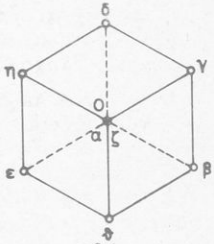
Ἄγομεν τήν $BB_1 \perp AZ$. Γνωρίζομεν ὅτι:

$$AB_1 = \frac{AZ}{3} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{3} \quad \text{καί}$$

$$BB_1^2 = AB^2 - AB_1^2 = \alpha^2 - \frac{3\alpha^2}{9} = \frac{6\alpha^2}{9}, \text{ ἐξ οὗ:}$$

$BB_1 = \frac{\alpha\sqrt{6}}{3}$. Ἀλλά ἡ $BB_1 /\!/ (P)$. Ἄρα

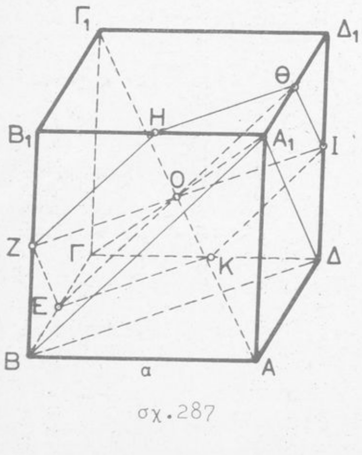
$$\alpha\beta = B_1B = \frac{\alpha\sqrt{6}}{3}.$$



σχ.286

369. Δίδεται κύβος $ΑΒΓΔΑ_1Β_1Γ_1Δ_1$ ἀκμῆς α. Τέμνομεν τόν κύβον ὑπό ἐπιπέδου παραλλήλου πρός τό ἐπίπεδον $ΒΔΑ_1$ καί διερχομένου διά τοῦ μέσου τῆς ΒΓ. 1) Νά δειχθῇ ὅτι ἡ τομή εἶναι κανονικόν ἑξάγωνον. 2) Ὅτι ἡ $ΑΓ_1$ εἶναι κάθετος πρός τό ἐπίπεδον τοῦ ἑξαγώνου τούτου καί 3) Νά ὑπολογισθῇ τό ἐμβαδόν τοῦ ἑξαγώνου τούτου συναρτήσει τοῦ α.

Λ ύ σ ι ς: 1) Ἔστω ΕΖΗΘΙΚ τό παράλληλον ἐπίπεδον πρός τό ἐπίπεδον $ΒΔΑ_1$. Ἄρα τοῦτο θά εἶναι παράλληλον πρός τάς πλευράς τοῦ τριγώνου $ΒΔΑ_1$. Κατ' ἀκολουθίαν $ΕΚ /\!/ ΒΔ$ καί $ΕΚ = \frac{1}{2} \cdot ΒΔ = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$



σχ.287

Ἡ ΕΖ ὡς παράλληλος πρός τήν $ΔΑ_1$ θά εἶναι παράλληλος καί πρός τήν $ΓΒ_1$ καί $ΕΖ = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$.

Ὁμοίως $ΖΗ = ΗΘ = ΘΙ = ΙΚ = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$.

Αἱ ΕΘ, ΖΙ, ΓΑ τέμνονται εἰς τό κέντρον τοῦ κύβου. Τό ὅτι τό ΕΖΗΘΙΚ εἶναι κανονικόν ἑξάγωνον ἀποδεικνύεται εὐκόλως, ὡς εἰς τήν ἄσκησιν 356.

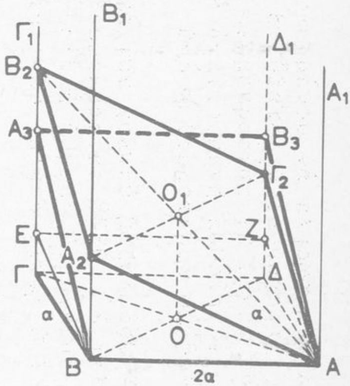
2) Εἰς τήν ἄσκησιν 368 ἀπε-

δείξαμεν ὅτι ἡ $A\Gamma_1$ εἶναι κάθετος πρός τό ἐπίπεδον $B\Delta A_1$. Ἄρα ἡ $A\Gamma_1$ θά εἶναι κάθετος καί πρός τό ἐπίπεδον τοῦ ἑξαγώνου, ἐπειδή τοῦτο εἶναι παράλληλον πρός τό $B\Delta A_1$.

370. Δίδεται ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ, εἰς τό ὁποῖον ΑΒ=2α, ΒΓ=α καί ὑψοῦμεν τάς καθέτους AA_1, BB_1, $\Gamma\Gamma_1$ καί $\Delta\Delta_1$ πρός τό ἐπίπεδον τοῦ ὀρθογωνίου. Διά τοῦ Α ἄγομεν ἐπίπεδον τέμνον τήν σχηματισθεῖσαν πρισματικήν ἐπιφάνειαν. Ὑπό ποίας συνθήκας ἡ τομή εἶναι 1) ὀρθογώνιον, 2) ρόμβος καί 3) τετράγωνον;

Λ ύ σ ι ς: 1) Ἐκ τυχόντος σημείου Ε τῆς $\Gamma\Gamma_1$ ἄγομεν τήν ΕΖ παράλληλον πρός τήν ΓΔ. Ἐπειδή ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος πρός τάς ἕδρας $B\Gamma\Gamma_1 B_1$ καί $A\Delta\Delta_1 A_1$, ἕπεται ὅτι τό τετράπλευρον ΑΒΕΖ εἶναι ὀρθογώνιον.

Ἄρα ὑπάρχουν ἄπειροι λύσεις.



σχ.288

2) Ἔστω $AA_2B_2\Gamma_2$ ἐπίπεδος τομή τῆς πρισματικῆς ἐπιφανείας, ὥστε τό τετράπλευρον τοῦτο νά εἶναι ρόμβος. Ἄρα αἱ διαγώνιοί του AB_2 καί $A_2\Gamma_2$ θά τέμνωνται δίχα καί καθέτως. Ἐπειδή ἡ γωνία ΑΟΔ εἶναι ἡ ὀρθή προβολή τῆς $AO_1\Gamma_2$ καί εἶναι ἀμφότεραι ὀρθαί, ἕπεται ὅτι ἡ $A_2\Gamma_2$ θά εἶναι παράλληλος πρός τό ἐπίπεδον ΑΒΓΔ, ἄρα παράλληλος πρός τήν ΒΔ. Ὥστε $BA_2=\Delta\Gamma_2$. Ἄρα, ἄν ληφθῇ αὐθαιρέτως τό τμῆμα BA_2 καί ἐκ τοῦ A_2 ἀχθῇ ἡ $A_2\Gamma_2$ παράλληλος πρός τήν ΒΔ, τότε τό ἐπίπεδον $AA_2\Gamma_2$ θά τέμνῃ τήν $\Gamma\Gamma_1$ εἰς τό B_2 καί τό τετράπλευρον $AA_2B_2\Gamma_2$ θά εἶναι ρόμβος.

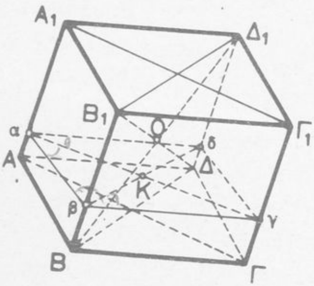
3) Ἔστω ὅτι τό τετράπλευρον ABA_3B_3 εἶναι τετράγωνον, τότε $AB_3=AB=2\alpha$ καί κατ' ἀκολουθίαν:

$$\Delta B_3^2=AB_3^2-A\Delta^2=AB^2-A\Delta^2=4\alpha^2-\alpha^2=3\alpha^2 \implies \Delta B_3=\alpha\sqrt{3}.$$

Ἐάν καί τό $AA_2B_2\Gamma_2$ ἦτο τετράγωνον, ἡ γωνία AA_2B_2 θά ἦτο ὀρθή. Ἀφοῦ ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι ὀρθή καί εἶναι ὀρθή προβολή τῆς AA_2B_2, ἕπεται ὅτι ἡ AA_2 ἤ ἡ A_2B_2 θά εἶναι παράλληλος πρός τό ἐπίπεδον ΑΒΓΔ. Ἐάν ἦτο ἡ A_2B_2 παράλληλος πρός τό ΑΒΓΔ, τότε $A_2B_2=B\Gamma=\alpha$ καί θά ἔπρεπε $A_2B_2=A_2A=\alpha$, ὅπερ ἄτοπον, διότι $AA_2>AB=2\alpha$. Ἄρα ἡ AA_2 συμπίπτει μέ τήν ΑΒ καί τό ζητούμενον τετράγωνον εἶναι τό ABA_3B_3 μέ $\Delta B_3=\alpha\sqrt{3}$.

371. Παραλληλεπιπέδου $ΑΒΓΔΑ_1Β_1Γ_1Δ_1$ αἱ ἕδραι $ΑΒΒ_1Α_1$ καί $ΑΔΔ_1Α_1$ εἶναι ἰσοδύναμοι. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι 1) Ἡ κάθετος τομή αὐτοῦ, κάθετος ἐπί τήν ἀκμήν $ΑΑ_1$ εἶναι ρόμβος. 2) Τά διαγώνια ἐπίπεδα τά διερχόμενα διά τῶν $ΑΑ_1$ καί $ΒΒ_1$ εἶναι κάθετα πρός τά διχοτομοῦντα ἐπίπεδα τῶν διέδρων $ΑΑ_1$ καί $ΒΒ_1$. 3) Τό κέντρον τοῦ παραλληλεπιπέδου ἀπέχει ἰσάκις τῶν τεσσάρων ἑδρῶν, τῶν περιεχουσῶν τήν $ΑΑ_1$ ἤ παραλλήλων πρός τήν $ΑΑ_1$.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: 1) Ἔστω αβγδ τυχοῦσα κάθετος τομή τοῦ παραλληλεπιπέδου, κάθετος ἐπί τήν $ΑΑ_1$. Ἐπειδή $(ΑΒΒ_1Α_1)=(ΑΔΔ_1Α_1)$, ἕπεται ὅτι: $(ΑΑ_1).(αβ)=(ΑΑ_1).(αδ) \Rightarrow αβ=αδ$ καί τό παραλληλόγραμμον αβγδ εἶναι ρόμβος.



σχ.289

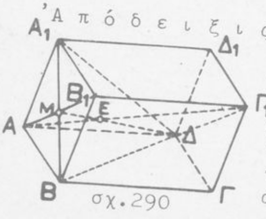
2) Τά διαγώνια ἐπίπεδα $ΑΑ_1Γ_1Γ$ καί $ΒΒ_1Δ_1Δ$ περιέχουν τάς διαγωνίους αγ καί βδ τοῦ ρόμβου αβγδ, αἱ ὁποῖαι εἶναι ὡς γνωστόν κάθετοι.

Ἐπειδή $\sphericalangle δαΚ = \sphericalangle Καβ$ καί $\sphericalangle αβΚ = \sphericalangle Κβγ$, εἶναι δέ καί αἱ ἀντίστοιχοι ἐπίπεδαι τῶν διέδρων $βαΑ_1γ$, $δαΑ_1γ$ καί $αβΒ_1Δ_1$, $δβΒ_1Δ$. Τά ἐπίπεδα $ΑΑ_1Γ_1Γ$ καί $ΒΒ_1Δ_1Δ$ εἶναι κάθετα.

3) Τά ἐπίπεδα $ΑΑ_1Γ_1Γ$ καί $ΒΒ_1Δ_1Δ$ περιέχουν τό κέντρον Ο τοῦ παραλληλεπιπέδου καί κατ' ἀκολουθίαν τοῦτο θά ἀπέχῃ ἴσον τῶν ἑδρῶν $ΑΑ_1Δ_1Δ$, $ΑΒΒ_1Α_1$, $ΒΒ_1Γ_1Γ$ καί $ΓΓ_1Δ_1Δ$.

372. Δίδεται παραλληλεπίπεδον $ΑΒΓΔΑ_1Β_1Γ_1Δ_1$. Διά τῶν σημείων $Β, Δ, Α_1$ ἄγομεν ἐπίπεδον τέμνον τό παραλληλεπίπεδον κατά τό τρίγωνον $ΒΔΑ_1$. 1) Νά ἀποδειχθῇ ὅτι τό ἐπίπεδον $ΑΔΓ_1$ τέμνει τό $ΒΔΑ_1$ κατά τήν διάμεσον τοῦ τριγώνου $ΒΔΑ_1$. 2) Ὅτι ἡ $ΑΓ_1$ τέμνει τό ἐπίπεδον $ΒΔΑ_1$ κατά τό κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου $ΒΔΑ_1$.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: 1) Ἡ εὐθεῖα $Γ_1Β_1$ κεῖται εἰς τό ἐπίπεδον $ΑΔΓ_1$, διότι εἶναι παράλληλος πρός τήν ΑΔ καί διέρχεται διά τοῦ σημείου $Γ_1$. Τό $Β_1$ εἶναι ἡ τομή τοῦ ἐπιπέδου $ΑΔΓ_1$ καί τῆς ἕδρας $ΑΒΒ_1Α_1$. Ἡ τομή αὕτη εἶναι ἡ εὐθεῖα $ΑΒ_1$. Αὕτη τέμνει τήν $Α_1Β$ εἰς τό μέσον Μ αὐτῆς. Ἀλλά ἡ $Α_1Β$ εἶναι εὐθεῖα καί



σχ.290

τοῦ ἐπιπέδου $BΔA_1$.Τό M εἶναι ἡ τομή τῶν ἐπιπέδων $BΔA_1$ καί $AΔΓ_1$.Ἡ τομή αὕτη εἶναι ἡ εὐθεῖα ΔΜ.Δηλαδή ἡ διάμεσος τοῦ τριγώνου $BΔA_1$.

2) Ἔστω Ε ἡ τομή τῆς $AΓ_1$ καί τοῦ ἐπιπέδου $BA_1Δ$.Ἡ $AΓ_1$ κεῖται εἰς τό ἐπίπεδον $AΔΓ_1$,τέμνει τήν εὐθεῖαν ΔΜ,ἡ ὁποία κεῖται εἰς τό ἐπίπεδον τοῦτο.Ἄρα τό Ε κεῖται ἐπί τῆς ΔΜ.

Αἱ εὐθεῖαι ΑΜ καί $ΔΓ_1$ εἶναι παράλληλοι.Τά τρίγωνα ΑΜΕ καί $Γ_1ΔE$ εἶναι ὅμοια καί θά ἔχωμεν:

$$\frac{ΔE}{EM} = \frac{ΔΓ_1}{AM} = 2,$$

ἡ ὁποία σχέσις δεικνύει ὅτι τό Ε εἶναι τό κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου $ΔBA_1$.

373. Νά ὑπολογισθῇ τό ἐμβαδόν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας κανονικοῦ τετραέδρου ἀκμῆς α.

Λ ύ σ ι ς:Ἑκάστη ἕδρα τοῦ κανονικοῦ τετραέδρου εἶναι ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς α.Ἐάν $(ε_1)$ εἶναι τό ἐμβαδόν μιᾶς ἕδρας,τότε: $(ε_1)=\frac{α^2\sqrt{3}}{4}$ καί κατ'ἀκολουθίαν

$$(E)=4(ε_1)=4.\frac{α^2\sqrt{3}}{4}=α^2\sqrt{3} \qquad \boxed{(E)=α^2\sqrt{3}}$$

374.Πυραμίς ΟΑΒΓΔ ἔχει βάσιν τετράγωνον ΑΒΓΔ πλευρᾶς α. Ἡ ἀκμή ΟΑ εἶναι κάθετος πρός τήν βάσιν καί ἔχει μῆκος 3α. Νά ὑπολογισθῇ τό ἐμβαδόν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τῆς πυραμίδος ταύτης.

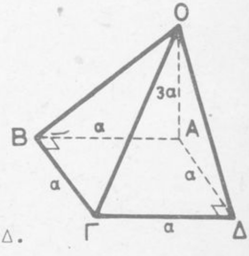
Λ ύ σ ι ς: Εἶναι: $(ΑΒΓΔ)=α^2,(OAB)=\frac{1}{2}.AB.OA=\frac{1}{2}α.3α=\frac{3α^2}{2}$,

$(OAΔ)=\frac{1}{2}.AΔ.OA=\frac{1}{2}α.3α=\frac{3α^2}{2}$.

$OB^2=OA^2+AB^2=9α^2+α^2=10α^2 \Rightarrow OB=α\sqrt{10}$,

$OΔ^2=OA^2+AΔ^2=9α^2+α^2=10α^2 \Rightarrow OΔ=α\sqrt{10}$.

Ἐπειδή $OA\perp ΑΒΓΔ$ καί $AB\perp BΓ \Rightarrow OB\perp BΓ$ καί κατ'ἀκολουθίαν:



σχ.291

$(OBΓ)=\frac{1}{2}.BΓ.OB=\frac{1}{2}.α.α\sqrt{10}=\frac{α^2\sqrt{10}}{2}$

Ἐπειδή δέ $OA\perp ΑΒΓΔ$ καί $AB\perp ΓΔ \Rightarrow OΔ\perp ΓΔ$.

Ἄρα:

$(OΓΔ)=\frac{1}{2}.ΓΔ.OΔ=\frac{1}{2}.α.α\sqrt{10}=\frac{α^2\sqrt{10}}{2}$

Κατ'ἀκολουθίαν:

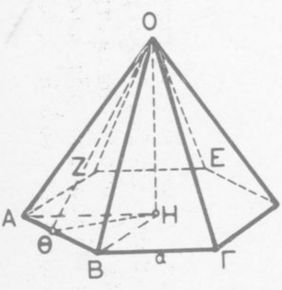
$$E_{ολ}=(ΑΒΓΔ)+2(ΟΑΒ)+2(ΟΒΓ)=α^2+2.\frac{3α^2}{2}+2.\frac{α^2\sqrt{10}}{2}=α^2(4+\sqrt{10}).$$

Ὥστε: $$E_{ολ}=α^2(4+\sqrt{10}).$$

375. Κανονική πυραμίς ἔχει βάσιν κανονικόν ἑξάγωνον πλευρᾶς α καί ὕψος 3α. Νά ὑπολογισθῇ τό ἐμβαδόν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας της.

Λ ύ σ ι ς: Τό ἐμβαδόν τῆς βάσεως εἶναι:

$$(B)=6.(HAB)=6.\frac{α^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3α^2\sqrt{3}}{2} \quad (1)$$



σχ.292

Εἶναι $HΘ=\frac{α\sqrt{3}}{2}$ καί τό παράπλευρον ὕψος ΟΘ εἶναι:

$$OΘ^2=OH^2+HΘ^2=9α^2+\frac{3α^2}{4}=\frac{39α^2}{4}$$

ἐξ οὗ: $$OΘ=\frac{α\sqrt{39}}{2}$$

Τό ἐμβαδόν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας εἶναι:

$$(E)=6.(OAB)=6.\frac{1}{2}.AB.OΘ=3.α.\frac{α\sqrt{39}}{2}=\frac{3α^2\sqrt{39}}{2}$$

Ἄρα τό ἐμβαδόν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας θά εἶναι:

$$E_{ολ}=(B)+E_π=\frac{3α^2\sqrt{3}}{2}+\frac{3α^2\sqrt{39}}{2}=\frac{3α^2}{2}(\sqrt{3}+\sqrt{39})=\frac{3\sqrt{3}.α^2(1+\sqrt{13})}{2}$$

Ὥστε: $$E_{ολ}=\frac{3\sqrt{3}.α^2}{2}(1+\sqrt{13}).$$

376. Κανονική πυραμίς ἔχει βάσιν τετράγωνον πλευρᾶς α καί αἱ παράπλευροι ἕδραι ἔχουν κλίσιν πρός τήν βάσιν ἴσην πρός 60° ἤ 30° ἤ 45°. Νά ὑπολογισθῇ τό ἐμβαδόν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας αὐτῆς.

Λ ύ σ ι ς: 1) Ἐπειδή $\sphericalangle HΘO=60^\circ$, ἕπεται ὅτι $\sphericalangle HOΘ=30^\circ$,

ἄρα $OΘ=2.HΘ=2.\frac{α}{2}=α$, καί κατ'ἀκολουθίαν:

$$υ^2=OΘ^2-HΘ^2=α^2-\frac{α^2}{4}=\frac{3α^2}{4},$$

$\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$

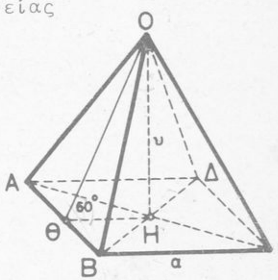
ἐξ οὗ: $\upsilon=\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$

Τό ἐμβαδόν τῆς βάσεως εἶναι: $(B)=(AB\Gamma\Delta)=\alpha^2$.

Τό ἐμβαδόν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας εἶναι: $E_{\varpi}=\frac{1}{2}.4.AB.O\Theta=2.\alpha.\alpha=2\alpha^2$

καί κατ'ἀκολουθίαν τό ἐμβαδόν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας εἶναι:

$$E_{o\lambda}=(B)+E_{\varpi}=\alpha^2+2\alpha^2=3\alpha^2.$$



σχ.293

2) 'Εάν $\omega=30^{\circ}$, τότε $O\Theta=2\upsilon$ καί ἐπειδή $\Theta H=\frac{\alpha}{2}$, θά ἔχωμεν:

$$O\Theta^2-\upsilon^2=\Theta H^2 \text{ ἤ } 4\upsilon^2-\upsilon^2=\frac{\alpha^2}{4} \Rightarrow 3\upsilon^2=\frac{\alpha^2}{4}$$

$$\upsilon=\frac{\alpha}{\sqrt{12}}=\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}, \text{ καί ἄρα: } O\Theta=2\upsilon=\alpha\sqrt{3}.$$

$$E_{\varpi}=\frac{1}{2}.4.AB.O\Theta=2.\alpha.\alpha\sqrt{3}=2\alpha^2\sqrt{3},$$

$$E_{o\lambda}=\alpha^2+2\alpha^2\sqrt{3}=\alpha^2(1+2\sqrt{3}).$$

3) 'Εάν $\omega=45^{\circ}$, τότε $\upsilon=H\Theta=\frac{\alpha}{2}$ καί

$$O\Theta^2=\upsilon^2+H\Theta^2=\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\alpha^2}{4}=\frac{2\alpha^2}{4} \Longrightarrow O\Theta=\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$$

καί $$E_{\varpi}=\frac{1}{2}.4.AB.O\Theta=2.\alpha.\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}=\alpha^2\sqrt{2}.$$

καί $$E_{o\lambda}=\alpha^2+\alpha^2\sqrt{2}=\alpha^2(1+\sqrt{2}).$$

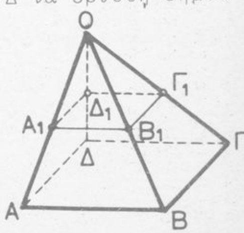
377. Τά κέντρα τῶν ἑδρῶν κύβου εἶναι κορυφαί ἑνός πολυέδρου. Νά ὑπολογισθῆ τό ἐμβαδόν τῆς ἐπιφανείας τοῦ πολυέδρου (ὀκταέδρου) τούτου, ἄν ἡ ἀκμή τοῦ κύβου εἶναι α.

Λ ύ σ ι ς: Τό ἐμβαδόν τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὀκταέδρου τούτου ὑπελογίσθη εἰς τήν ἄσκησιν 358 καί εἶναι:

$$(E)=\alpha^2\sqrt{3}.$$

378. 'Επί τῆς ἀκμῆς ΟΑ πυραμίδος ΟΑΒΓΔ νά ὁρισθῆ σημεῖον A_1, τοιοῦτον ὥστε ἡ δι'αὐτοῦ διερχομένη παράλληλος πρός τήν βάσιν τομή τῆς πυραμίδος νά εἶναι τό ἥμισυ ἤ τό τέταρτον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεως.

Λ ύ σ ι ς: Γνωρίζομεν ὅτι πρέπει νά ἀληθεύῃ ἡ ἰσότης:



σχ.294

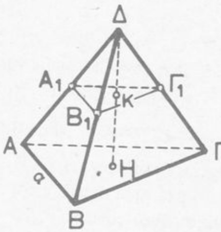
$$\frac{(A_1B_1\Gamma_1\Delta_1)}{(AB\Gamma\Delta)}=\frac{1}{2} \quad \text{ἤ} \quad \frac{OA_1^2}{OA^2}=\frac{1}{2} \Rightarrow OA_1=OA.\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Τό τμῆμα ὅμως $OA_1=OA.\frac{\sqrt{2}}{2}$ κατασκευάζεται ἐπί τῆς ἀκμῆς ΟΑ τῆς ἕδρας ΟΑΒ καί ἐκ τοῦ A_1 ἄγεται τό ζητούμενον ἐπίπεδον $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$ παράλληλον πρός τήν ἕδραν ΑΒΓΔ.

Ὁμοίως: $\frac{OA_1^2}{OA^2}=\frac{1}{4} \Longrightarrow OA_1=\frac{1}{2}.OA$

διά τήν δευτέραν περίπτωσιν.

379. Ἡ ἀκμή κανονικοῦ τετραέδρου εἶναι α. Νά ὑπολογισθῇ τό ἐμβαδόν τῆς τομῆς αὐτοῦ ὑπό ἐπιπέδου καθέτου εἰς τό μέσον τοῦ ὕψους του.



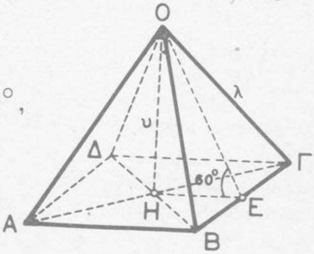
σχ.295

Λ ύ σ ι ς: Εἶναι: $(AB\Gamma)=\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$

Ἀλλά $\frac{(A_1B_1\Gamma_1)}{(AB\Gamma)}=\frac{(AK)^2}{(AH)^2}=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$,

ἐξ οὗ: $(A_1B_1\Gamma_1)=\frac{1}{4}.(AB\Gamma)=\frac{1}{4}.\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}=\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{16}$

380. Κανονικῆς πυραμίδος ἡ βάσις εἶναι τετράγωνον πλευρᾶς α καί ἑκάστη παράπλευρος ἕδρα ἔχει κλίσιν πρός τήν βάσιν 60°. Νά ὑπολογισθοῦν αἱ παράπλευροι ἀκμαί καί τό ὕψος τῆς πυραμίδος.



σχ.296

Λ ύ σ ι ς: Εἶναι $HE\perp B\Gamma$ καί $HE=\frac{\alpha}{2}$.

Ἐπειδή $\measuredangle HEO=60^\circ$, ἕπεται $\measuredangle HOE=30^\circ$, καί ἄρα $OE=2.HE=2.\frac{\alpha}{2}=\alpha$ καί

$\upsilon^2=OE^2-HE^2=\alpha^2-\frac{\alpha^2}{4} \Rightarrow \upsilon=\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$ (1)

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΕΓ ἔχομεν:

$$\lambda^2=O\Gamma^2=OE^2+E\Gamma^2=\alpha^2+\frac{\alpha^2}{4}=\frac{5\alpha^2}{4} \Rightarrow \lambda=\frac{\alpha\sqrt{5}}{2}.$$

Ὥστε: $\upsilon=\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$ καί $O\Gamma=OB=OA=O\Delta=\frac{\alpha\sqrt{5}}{2}$.

381. Κανονική πυραμίς ΣΑΒΓΔ ἔχει βάσιν τετράγωνον ΑΒΓΔ πλευρᾶς α καί ὕψος ΣΗ=2α. 1ον) Νά ὑπολογισθοῦν αἱ παράπλευροι ἀκμαί

καί τό παράπλευρον ὕψος τῆς πυραμίδος. 2ον)'Εάν Μ εἶναι τό μέσον τῆς ΣΑ καί Ν ἡ τομή ΣΒ ὑπό τοῦ ἐπιπέδου ΓΔΜ, νά ἀποδειχθῇ ὅτι τό τετράπλευρον ΓΔΜΝ εἶναι ἰσοσκελές τραπέζιον, τοῦ ὁποίου ζητεῖται τό ἐμβαδόν συναρτήσει τῆς α.

Λ ύ σ ι ς: 1)"Αγομεν τήν $H\Theta \perp A\Delta$. Θά εἶναι $H\Theta = \frac{\alpha}{2}$. 'Εκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΣΗΘ ἔχομεν:

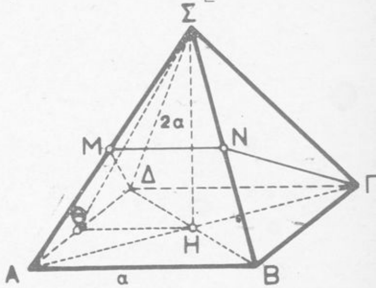
$$\Sigma\Theta^2 = \Sigma H^2 + H\Theta^2 = 4\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{4} = \frac{17\alpha^2}{4},$$

ἐξ οὗ: $\Sigma\Theta = \frac{\alpha\sqrt{17}}{2}$ (1)

'Εκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΣΘΑ ἔχομεν:

$$\Sigma A^2 = \Sigma\Theta^2 + \Theta A^2 = \frac{17\alpha^2}{4} + \frac{\alpha^2}{4} = \frac{18\alpha^2}{4},$$

ἐξ οὗ: $\Sigma A = \frac{3\alpha\sqrt{2}}{2}$, καί ἄρα



σχ.297

$\Sigma M = MA = \frac{3\alpha\sqrt{2}}{4}$. Θά εἶναι: $\Sigma B = \Sigma\Gamma = \Sigma\Delta = \Sigma A = \frac{3\alpha\sqrt{2}}{2}$.

'Επειδή ἡ ΓΔ εἶναι παράλληλος πρός τό ἐπίπεδον ΣΑΒ, πᾶν ἐπίπεδον ΓΔΜΝ διά τῆς ΓΔ διερχόμενον, τέμνει τό ΣΑΒ κατά εὐθεῖαν $MN /\!/ AB$.

"Αρα τό τετράπλευρον ΓΔΜΝ εἶναι τραπέζιον καί τό Ν θά εἶναι τό μέσον τῆς ΣΒ.

"Ωστε: $\Sigma N = NB = \frac{1}{2}.\Sigma B = \frac{3\alpha\sqrt{2}}{4}$.

Βάσει τοῦ θεωρήματος τῶν διαμέσων, ἐκ τῶν τριγώνων ΣΔΑ καί ΓΣΒ θά ἔχωμεν ἀντιστοίχως:

$$\Sigma\Delta^2 + \Delta A^2 = 2.\Delta M^2 + \frac{\Sigma A^2}{2} \text{ ἤ } \frac{18\alpha^2}{4} + \alpha^2 = 2.\Delta M^2 + \frac{18\alpha^2}{8}$$

ἤ $2.\Delta M^2 = \frac{18\alpha^2}{8} + \alpha^2 = \frac{26\alpha^2}{8} = \frac{52\alpha^2}{16} \Rightarrow \Delta M = \frac{\alpha\sqrt{26}}{4} = \Gamma N$, διότι τά τρίγωνα ΔΑΣ καί ΓΒΣ εἶναι ἴσα.

"Αρα τό τραπέζιον ΓΔΜΝ εἶναι ἰσοσκελές.

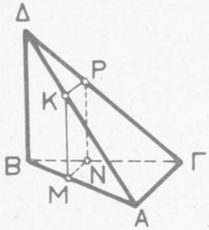
'Επί πλέον εἶναι $MN = \frac{1}{2}$, $AB = \frac{\alpha}{2}$, καί $\Gamma\Delta = \alpha$.

Τοῦ ἰσοσκελοῦς τούτου τραπεζίου γνωρίζομεν τάς τέσσαρας πλευράς. Εὐκόλως ἤδη εὑρίσκομεν τό ἐμβαδόν του. 'Η ἐργασία αὕτη νά γίνῃ ὑπό τῶν μαθητῶν.

382. Πυραμίδος ΔΑΒΓ ἡ βάσις ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον τρίγωνον εἰς τό Α. 'Η ἀκμή ΔΒ εἶναι κάθετος πρός τήν βάσιν. Διά τυχόντος σημείου Μ τῆς ΑΒ ἄγομεν ἐπίπεδον κάθετον πρός τήν ΑΒ. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ τομή τῆς πυραμίδος ὑπό τοῦ ἐ-

πιπέδου τούτου εἶναι ὀρθογώνιον.

Λ ύ σ ι ς:Αἱ εὐθεῖαι ΒΔ καί ΑΓ εἶναι κάθετοι πρός τήν ΑΒ,ἄρα παράλληλοι πρός τό ἐπίπεδον ΜΝΡΚ.῎Αρα τό ἐπίπεδον ΜΝΡΚ θά εἶναι παράλληλον πρός δύο ἀπέναντι ἀκμάς τοῦ τετραέδρου ΔΒΑΓ.Τέμνει τάς ἕδρας ΑΒΓ καί ΑΔΓ κατά δύο εὐθείας ΜΝ καί ΚΡ παραλλήλους πρός τήν ΑΓ καί τάς δύο ἕδρας ΑΒΔ καί ΒΓΔ κατά δύο εὐθείας ΜΚ καί ΝΡ παραλλήλους πρός τήν ΒΔ.

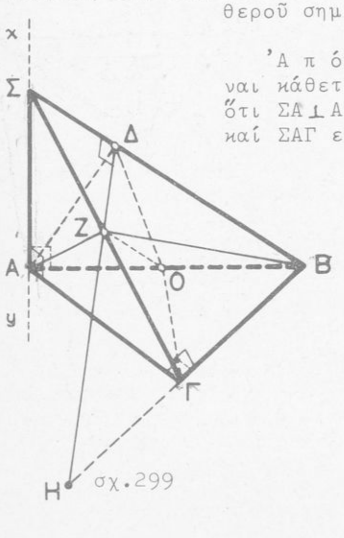


σχ.298

Τό ΜΝΡΚ εἶναι λοιπόν παραλ/μον.

᾿Αλλά ἡ ΒΔ εἶναι κάθετος πρός τό ΑΒΓ καί ὀρθογώνιος πρός τήν ΑΓ. ῎Αρα αἱ ΜΝ καί ΜΚ εἶναι κάθετοι καί τό ΜΝΡΚ θά εἶναι ὀρθογώνιον.

383. Πυραμίδος ἡ βάσις ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον τρίγωνον εἰς τό Γ καί ἡ κορυφή Σ κινεῖται ἐπί εὐθείας καθέτου εἰς τό Α ἐπί τό ἐπίπεδον ΑΒΓ. 1ον) Νά δειχθῇ ὅτι αἱ ἕδραι τῆς πυραμίδος εἶναι ὀρθογώνια τρίγωνα. 2ον) ῎Αγομεν τό ὕψος ΑΔ τοῦ τριγώνου ΣΑΒ καί τό ὕψος ΑΖ τοῦ τριγώνου ΣΑΓ.Νά εὑρεθῇ ὁ γεωμ.τόπος τῶν σημείων Δ καί Ζ. 3ον) Νά δειχθῇ ὅτι ἡ ΑΖ εἶναι κάθετος πρός τό ἐπίπεδον ΣΒΓ. 4ον) Τά σημεῖα Α, Β,Γ,Δ,Ζ ἀπέχουν ἴσον ἀπό ἕν σημεῖον Ο. 5ον)῾Η ΔΖ εἶναι κάθετος ἐπί τάς ΣΒ καί ΑΖ καί 6ον)῾Η ΔΖ διέρχεται διά σταθεροῦ σημείου τῆς ΒΓ.



σχ.299

᾿Α π ό δ ε ι ξ ι ς: 1)᾿Επειδή ἡ ΣΑ εἶναι κάθετος πρός τό ἐπίπεδον ΑΒΓ,ἕπεται ὅτι ΣΑ⊥ΑΒ,ΣΑ⊥ΑΓ καί ἄρα τά τρίγωνα ΣΑΒ καί ΣΑΓ εἶναι ὀρθογώνια εἰς τό Α.

Τό τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τό Γ εξ ὑποθέσεως.

᾿Επειδή ἡ ΑΣ εἶναι κάθετος πρός τό ἐπίπεδον ΑΓΒ,καί ΑΓ⊥ΒΓ, ἕπεται,κατά τό θεώρημα τῶν τριῶν καθέτων,ὅτι ΣΓ⊥ΓΒ.

2) ᾿Επειδή ∢ ΑΔΒ= ∢ ΑΖΓ=90^{o}, ἕπεται ὅτι τά Δ καί Ζ κεῖνται ἀντιστοίχως ἐπί κύκλων διαμέτρου ΑΒ καί ΑΓ,κειμένων ἐπί τῶν ἑδρῶν ΣΑΒ καί ΣΑΓ ἀντιστοίχως.

3) ᾿Επειδή ΒΓ⊥ΣΓ καί ΒΓ⊥ΓΑ,

ἕπεται ὅτι ἡ ΒΓ εἶναι κάθετος ἐπί τό ἐπίπεδον ΣΓΑ. Ἄρα τά ἐπίπεδα ΣΒΓ καί ΣΓΑ εἶναι κάθετα. Ἐπειδή δέ ἡ εὐθεῖα ΑΖ κεῖται εἰς τό ΣΑΓ καί εἶναι κάθετος πρός τήν ΣΓ, ἕπεται ὅτι ἡ ΑΖ θά εἶναι κάθετος πρός τό ἐπίπεδον ΣΓΒ.

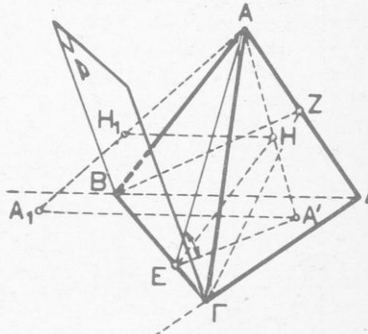
4) Ἐάν Ο εἶναι τό μέσον τῆς ἀκμῆς ΑΒ, ἐπειδή αἱ ΟΔ, ΟΖ, ΟΓ εἶναι διάμεσοι τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΑΔΒ, ΑΖΒ, ΒΑΓ, ἕπεται ὅτι: ΟΔ=ΟΖ=ΟΓ=ΟΑ=ΟΒ.
Ἄρα τά Α, Β, Γ, Δ, Ζ ἀπέχουν ἰσάκις τοῦ μέσου Ο τῆς ἀκμῆς ΑΒ.

5) Ἐπειδή ΑΖ ⊥ ΣΓΒ, ἕπεται ὅτι ΑΖ ⊥ ΖΔ. Ἐπειδή ΑΖ ⊥ ΣΓΒ, καί ΑΔ ⊥ ΣΒ, ἕπεται (θεώρ. τριῶν καθέτων) ὅτι ΖΔ ⊥ ΣΒ.

6) Τό ἐρώτημα τοῦτο νά ἀποδειχθῇ ὑπό τῶν μαθητῶν (τό ΒΕΖΔ ἐγγράψιμον κ.λ.π.).

384. Εἰς τετράεδρον ΑΒΓΔ αἱ προβολαί τῆς κορυφῆς Α ἐπί τά διχοτομοῦντα ἐπίπεδα τάς ἐσωτερικάς καί ἐξωτερικάς διέδρους γωνίας ΒΓ, ΓΔ, ΔΒ κεῖνται ἐπί τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Ἔστω Η ἡ προβολή τῆς κορυφῆς Α τοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ ἐπί τό διχοτομοῦν τήν δίεδρον ΒΓ ἐπίπεδον ΒΓΖ. Ἡ ΑΗ τέμνει τήν ἕδραν ΒΓΔ εἰς τό σημεῖον Α′.
Ἐκ τοῦ Η ἄγομεν τήν κάθετον ΗΕ πρός τήν ΒΓ, τότε (θέωρ. τριῶν καθέτων) ἡ ΑΕ ⊥ ΒΓ, καί ἐπειδή ἡ ΕΗ διχοτομεῖ τήν ἀντίστοιχον ἐπίπεδον ΑΕΑ′ τῆς διέδρου ΒΓ, ἕπεται ὅτι τό τρίγωνον ΑΕΑ′ θά εἶναι ἰσοσκελές, καί κατ᾽ἀκολουθίαν ΑΗ=ΗΑ′.



σχ.300

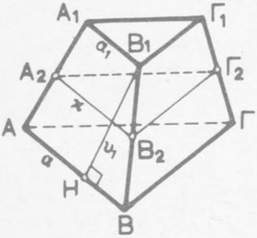
Ὁμοίως, ἄν AH_1 εἶναι κάθετος ἐπί τό διχοτομοῦν ἐπίπεδον (Ρ) τήν ἐξωτερικήν δίεδρον γωνίαν ΒΓ, καί A_1 ἡ τομή τῆς AH_1 μετά τοῦ ἐπιπέδου ΒΓΔ, τότε $AH_1=H_1A_1$, ὁπότε ἡ HH_1 θά εἶναι παράλληλος πρός τήν $A'A_1$, ἄρα καί πρός τό ἐπίπεδον ΒΓΔ.

Ὁμοίως ἐργαζόμεθα καί διά τάς ἄλλας προβολάς ~~τοῦ~~ τοῦ Α ἐπί τά διχοτομοῦντα ἐπίπεδα τῶν διέδρων ΓΔ, ΔΒ, καί αἱ προβολαί τοῦ Α ἐπί ταῦτα θά κεῖνται ἐπί τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, τό ὁποῖον, προφανῶς, διέρχεται ἀπό τά μέσα τῶν ἀκμῶν ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ.

-8B-

385. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι τό ἐμβαδόν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας κολούρου κανονικῆς πυραμίδος ἰσοῦται πρός τό γινόμενον τῆς περιμέτρου τῆς μέσης βάσεως ἐπί τό παράπλευρον ὕψος αὐτῆς.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Ἔστω $ΑΒΓΑ_1Β_1Γ_1$ κανονική κόλουρος τριγωνική πυραμίς, τῆς ὁποίας αἱ πλευραί τῶν βάσεων εἶναι $α$ καί $α_1$, $υ_1$ δέ τό παράπλευρον ὕψος, τότε:



σχ.301

$$E_{π}=3.(ΑΒΒ_1Α_1)=3.\frac{1}{2}(α+α_1)υ_1=$$

$$=\frac{1}{2}(3α+3α_1).υ_1=\frac{1}{2}(Π+Π_1).υ_1$$

ἤτοι: $$E_{π}=\frac{1}{2}(Π+Π_1).υ_1. \qquad (1)$$

Ἐάν ν εἶναι ὁ ἀριθμός τῶν πλευρῶν ἑκάστης βάσεως κανονικῆς κολούρου πυραμίδος, τότε:

$$E_{π}=ν.(ΑΒΒ_1Α_1)=ν.\frac{1}{2}(α+α_1)υ_1, \qquad (2)$$

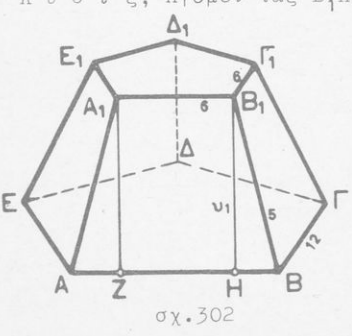
καί ἄν $Α_2Β_2$ εἶναι ἡ μέση βάσις τῆς ἕδρας $ΑΒΒ_1Α_1$, τότε $α+α_1=2Α_2Β_2=2x$ καί ἡ (2) γίνεται:

$$E=ν.\frac{1}{2}.2x.υ_1=(νx).υ_1 \qquad (3)$$

Ἐπειδή δέ $νx$ εἶναι ἡ περίμετρος $Π_μ$ τῆς μέσης βάσεως, ἡ (3) γίνεται: $\boxed{E_{π}=π_μ.υ_1}$

386. Κανονικῆς κολούρου πυραμίδος ἡ πλευρά τῆς μεγάλης βάσεως εἶναι 12m. καί τῆς μικρᾶς 6m. Ἡ παράπλευρος ἀκμή εἶναι 5m. Ἐάν αἱ βάσεις εἶναι κανονικά πεντάγωνα, νά ὑπολογισθῇ τό ἐμβαδόν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τῆς πυραμίδος.

Λ ύ σ ι ς; Ἄγομεν τάς $Β_1Η$, $Α_1Ζ$ καθέτους πρός τήν ΑΒ. Θά εἶναι ΑΖ=ΗΒ καί



σχ.302

$$2ΒΗ+ΖΗ=2ΒΗ+6=12 \Rightarrow ΗΒ=3m.$$

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου $Β_1ΗΒ$ ἔχομεν:

$$υ_1^2=Β_1Β^2-ΗΒ^2=5^2-3^2=25-9=16,$$

$$\Rightarrow υ_1=4.$$

Τό ἐμβαδόν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας εἶναι:

$$E_{π}=\frac{1}{2}(Π+Π_1)υ_1=\frac{1}{2}(5.12+5.6).4=$$

$$=180\ m^2.$$

Τό ἐμβαδόν κανονικοῦ πενταγώνου συναρτήσει τῆς πλευρᾶς του α εἶναι:

$$(E)=\frac{1}{4}\cdot\alpha^2\sqrt{25+10\sqrt{5}} \Longrightarrow (E)=\frac{1}{4}\cdot 12^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}=36\sqrt{25+10\sqrt{5}}\ m^2$$

τῆς μεγάλης βάσεως, καί τῆς μικρᾶς βάσεως θά εἶναι:

$$(E_1)=\frac{1}{4}\cdot 6^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}=9\sqrt{25+10\sqrt{5}}\ m^2.$$

Ἄρα τό ὁλ. ἐμβαδόν θά εἶναι:

$$E_{o\lambda}=E_{\pi}+(E)+(E_1)=180+36\sqrt{25+10\sqrt{5}}+9\sqrt{25+10\sqrt{5}}=$$
$$=180+45\sqrt{25+10\sqrt{5}}=45(4+\sqrt{25+10\sqrt{5}})\ m^2.$$

387. Κόλουρος κανονική πυραμίς ἔχει μεγάλην βάσιν ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς α. Ἡ παράπλευρος ἀκμή εἶναι 2α καί αἱ παράπλευροι ἕδραι ἔχουν κλίσιν πρός τήν βάσιν ἴσην πρός 60°. Νά ὑπολογισθῇ τό ὁλικόν ἐμβαδόν αὐτῆς καί νά γίνῃ ἐφαρμογή διά α=10 cm.

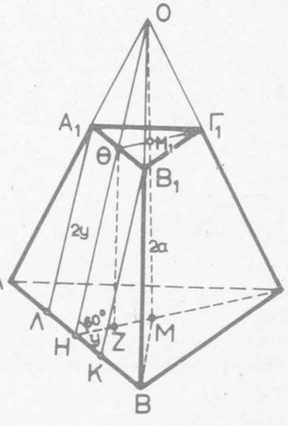
Λ ύ σ ι ς: Αἱ παράπλευροι ἀκμαί AA_1, BB_1, $\Gamma\Gamma_1$ τέμνονται εἰς τό Ο. Ἄγομεν τό ὕψος ΟΜ. Ἡ ΓΜΗ θά εἶναι κάθετος πρός τήν ΑΒ καί $\Gamma H=\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$ καί $HM=\frac{1}{3}\cdot\Gamma H=\frac{1}{3}\cdot\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}=\frac{\alpha\sqrt{3}}{6}$.

Ἐπειδή δέ

$\sphericalangle MHO=60^o \longrightarrow \sphericalangle HOM=30^o$ καί κατ'ἀκολουθίαν $OH=2HM=\frac{\alpha\sqrt{3}}{3}$. Ὅθεν

$$OM^2=OH^2-HM^2=\left(\frac{\alpha\sqrt{3}}{3}\right)^2-\left(\frac{\alpha\sqrt{3}}{6}\right)^2=$$
$$=\frac{3\alpha^2}{9}-\frac{3\alpha^2}{36}=\frac{9\alpha^2}{36}=\frac{\alpha^2}{4},$$

ἐξ οὗ: $OM=\frac{\alpha}{2}$



σχ.303

Εἶναι δέ $M\Gamma=\frac{2}{3}\cdot\Gamma H=\frac{2}{3}\cdot\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}=\frac{\alpha\sqrt{3}}{3}$, καί ἄρα:

$$O\Gamma^2=OM^2+M\Gamma^2=\frac{\alpha^2}{4}+\frac{3\alpha^2}{9}=\frac{21\alpha^2}{36} \Longrightarrow O\Gamma=\frac{\alpha\sqrt{21}}{6}$$

καί κατ'ἀκολουθίαν:

$$OB_1=OB-BB_1=O\Gamma-BB_1=\frac{\alpha\sqrt{21}}{6}-2\alpha=\frac{\alpha(\sqrt{21}-12)}{6}<0$$

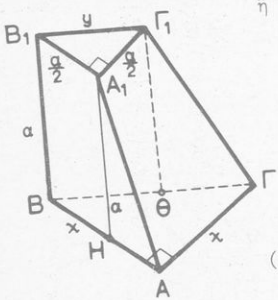
Ἄρα τό πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον.

388. Κόλουρος πυραμίς ἔχει μεγάλην βάσιν ὀρθογώνιον καί

ἰσοσκελὲς τρίγωνον, ὑποτεινούσης α. Ἡ μία τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν εἶναι κάθετος πρός τήν βάσιν καί ἰσοῦται πρός α. Ἡ μία τῶν ἴσων πλευρῶν τῆς μικρᾶς βάσεως εἶναι $\frac{\alpha}{2}$. Νά ὑπολογισθῇ τό ἐμβαδόν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας αὐτῆς.

Λ ύ σ ι ς: Ἔστω ΒΓ=α καί ΑΒ=ΑΓ=x. Θά εἶναι $x^2+x^2=\alpha^2$ ἤ

ἤ $2x^2=\alpha^2$, ἐξ οὗ: $x=\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$ (1)



σχ. 304

Ἐάν τεθῇ $B_1\Gamma_1=y$, θά ἔχωμεν:

$$y^2=\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\alpha^2}{4}=\frac{2\alpha^2}{4} \Longrightarrow y=\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$$

$$(AB\Gamma)=\frac{1}{2}x.x=\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha^2}{2}=\frac{\alpha^2}{4}, \quad (2)$$

$$(A_1B_1\Gamma_1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\alpha}{2}=\frac{\alpha^2}{8}, \quad (3)$$

$$(ABB_1A_1)=\frac{1}{2}(BA+B_1A_1).BB_1=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}+\frac{\alpha}{2}\right).\alpha=\frac{\alpha^2}{4}(\sqrt{2}+1), \quad (4)$$

$$(B\Gamma\Gamma_1B_1)=\frac{1}{2}(B\Gamma+B_1\Gamma_1).BB_1=\frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}\right)\alpha=\frac{\alpha^2}{4}(2+\sqrt{2}). \quad (5)$$

Ἄγομεν τάς A_1H καί $\Gamma_1\Theta$ καθέτους πρός τάς ΒΑ καί ΒΓ ἀντιστοίχως.

Θά εἶναι: $A_1H=B_1B=\alpha$, $HA=BA-BH=\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}-\frac{\alpha}{2}=\frac{\alpha}{2}(\sqrt{2}-1)$,

καί κατ' ἀκολουθίαν:

$$A_1A^2=A_1H^2+HA^2=\alpha^2+\left[\frac{\alpha}{2}(\sqrt{2}-1)\right]^2=\alpha^2+\frac{\alpha^2}{4}(3-2\sqrt{2})=\frac{\alpha^2}{4}(7-2\sqrt{2}),$$

ἐξ οὗ: $A_1A=\frac{\alpha}{2}\sqrt{7-2\sqrt{2}}$ (6)

Ἐπίσης εἶναι: $\Gamma_1\Theta=B_1B=\alpha$, $\Theta\Gamma=B\Gamma-B\Theta=\alpha-\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}=\frac{\alpha}{2}(2-\sqrt{2})$,

καί κατ' ἀκολουθίαν:

$$\Gamma_1\Gamma^2=\Gamma_1\Theta^2+\Theta\Gamma^2=\alpha^2+\left[\frac{\alpha}{2}(2-\sqrt{2})\right]^2=\alpha^2+\frac{\alpha^2}{4}(6-4\sqrt{2})=\frac{\alpha^2}{4}(10-4\sqrt{2}),$$

ἐξ οὗ: $\Gamma_1\Gamma=\frac{\alpha}{2}\sqrt{10-4\sqrt{2}}$ (7)

Τοῦ τραπεζίου $A_1A\Gamma\Gamma_1$ γνωρίζομεν τάς πλευράς. Ἄρα ὑπολογίζεται εὐκόλως τό ἐμβαδόν του καί ἀκολούθως τό ἐμβαδόν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τῆς κολ. πυραμίδος.

389. Εἰς πᾶν τετράεδρον τά ὕψη εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα πρός τά ἐμβαδά τῶν ἀντιστοίχων βάσεων.

Λ ύ σ ι ς:Ἔστωσαν $υ_1, υ_2, υ_3, υ_4$ τά ὕψη τοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ, τά ἀγόμενα ἐκ τῶν κορυφῶν Α,Β,Γ,Δ ἀντιστοίχως.

Εἰς τήν παράγραφον 106α τοῦ βιβλίου εὕρομεν ὅτι:

$$(ΒΓΔ).υ_1=(ΑΓΔ).υ_2=(ΑΔΒ).υ_3=(ΑΒΓ).υ_4$$

ἐξ οὗ:

$$\frac{υ_1}{\frac{1}{(ΒΓΔ)}}=\frac{υ_2}{\frac{1}{(ΑΓΔ)}}=\frac{υ_3}{\frac{1}{(ΑΔΒ)}}=\frac{υ_4}{\frac{1}{(ΑΒΓ)}}.$$

390. Νά ὑπολογισθῆ ὁ ὄγκος κανονικοῦ τετραέδρου συναρτήσει τῆς ἀκμῆς του α. Ἐφαρμογή διά α=8 m.

Λ ύ σ ι ς:Γνωρίζομεν (§ 99) ὅτι τό ὕψος τοῦ κανονικοῦ τετραέδρου εἶναι: $υ=\frac{α\sqrt{6}}{3}$.

Τό ἐμβαδόν τῆς βάσεώς του εἶναι $(Β)=\frac{α^2\sqrt{3}}{4}$

Ἄρα ὁ ὄγκος του εἶναι:

$$V=\frac{1}{3}.(Β).υ=\frac{1}{3}.\frac{α^2\sqrt{3}}{4}.\frac{α\sqrt{6}}{3}=\frac{α^3\sqrt{18}}{36}=\frac{3α^3\sqrt{2}}{36}=\frac{α^3\sqrt{2}}{12}.$$

Ὥστε: $\boxed{υ=\frac{α\sqrt{6}}{3}}$ καί $\boxed{V=\frac{α^3\sqrt{2}}{12}}$

391. Νά ὑπολογισθῆ ὁ ὄγκος κανονικῆς ἑξαγωνικῆς πυραμίδος, τῆς ὁποίας ἡ παράπλευρος ἀκμή εἶναι ἴση πρός τό διπλάσιον τῆς πλευρᾶς α τῆς βάσεως. Ἐφαρμογή διά α=12 m.

Λ ύ σ ι ς:Ἔστω ΟΗ τό ὕψος τῆς πυραμίδος. Ἐπειδή ΗΑ=α=ΑΒ καί ΟΒ=2α, θά εἶναι:

$$υ^2=ΟΗ^2=ΟΑ^2-ΗΑ^2=4α^2-α^2=3α^2,$$

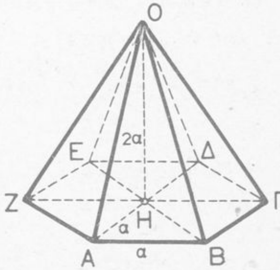
ἐξ οὗ: $υ=α\sqrt{3}$. (1)

Τό ἐμβαδόν τῆς βάσεως εἶναι:

$$(Β)=6.(ΗΑΒ)=6.\frac{α^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3α^2\sqrt{3}}{2} \quad (2).$$

Ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος εἶναι:

$$V=\frac{1}{3}(Β).υ=\frac{1}{3}.\frac{3α^2\sqrt{3}}{2}.α\sqrt{3}=\frac{3α^3}{2}.$$



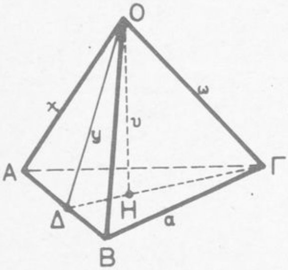
σχ.305

Ὥστε: $V=\frac{3α^3}{2}=\frac{3.12^3}{2}=3.12^2.6=18.144=2592\ m^3$.

392. Πυραμίδος ΟΑΒΓ ἡ βάσις ΑΒΓ εἶναι ἰσόπλευρον τρί-

γωνον πλευρᾶς α. Ἡ τρίεδρος Ο εἶναι τρισορθογώνιος. Νά ὑπολογισθῇ τό ὕψος ΟΗ τῆς πυραμίδος καί ὁ ὄγκος της.

Λ ύ σ ι ς: Ἐάν ΟΑ=x, ΟΒ=y, ΟΓ=ω, τότε ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΟΑΒ, ΟΒΓ, ΟΓΑ θά ἔχωμεν ἀντιστοίχως:



σχ.306

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=\alpha^2 \\ y^2+\omega^2=\alpha^2 \\ \omega^2+x^2=\alpha^2 \end{array}\right\} \Rightarrow x=y=\omega=\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}.$$

Ἄρα ἡ πυραμίς ΟΑΒΓ εἶναι κανονική. Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΔΟΓ καί ΑΒΓ θά ἔχωμεν διαδοχικῶς:

$$\frac{1}{\upsilon^2}=\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{O\Delta^2}=\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{3}{x^2}=\frac{6}{\alpha^2},$$

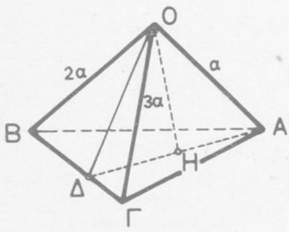
ἐξ οὗ: $\upsilon=\frac{\alpha\sqrt{6}}{6}$ καί ἄρα ὁ ὄγκος V θά εἶναι:

$$V=\frac{1}{3}(AB\Gamma).\upsilon=\frac{1}{3}.\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}.\frac{\alpha\sqrt{6}}{6}=\frac{\alpha^3\sqrt{18}}{72}=\frac{3\alpha^3\sqrt{2}}{72}=\frac{\alpha^3\sqrt{2}}{24}.$$

393. Ἐπί τῶν ἀκμῶν τρισορθογωνίου τριέδρου γωνίας Ο λαμβάνομεν τμήματα ΟΑ=α, ΟΒ=2α καί ΟΓ=3α. Νά ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος ΟΑΒΓ καί τό ὕψος ΟΗ αὐτῆς.

Λ ύ σ ι ς: Ἐπειδή ἡ ΟΑ εἶναι κάθετος πρός τό ἐπίπεδον ΟΒΓ, ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος ΟΑΒΓ θά εἶναι: $V=\frac{1}{3}.(OB\Gamma).OA=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}.OB.O\Gamma.OA=$

$$=\frac{1}{6}.OA.OB.O\Gamma=\frac{1}{6}.\alpha.2\alpha.3\alpha=\alpha^3$$



σχ.307

Ὥστε: $\boxed{V=\alpha^3}$.

Θά ἔχωμεν:

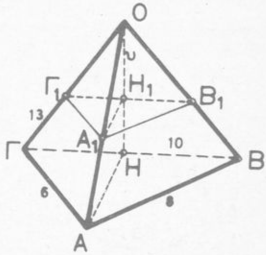
$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{O\Delta^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{O\Gamma^2}=$$

$$=\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{4\alpha^2}+\frac{1}{9\alpha^2}=\frac{36+9+4}{36\alpha^2}=\frac{49}{36\alpha^2},$$

ἐξ οὗ: $OH^2=\frac{36\alpha^2}{49} \Rightarrow \boxed{OH=\frac{6\alpha}{7}}$

394. Πυραμίς ἔχει βάσιν τρίγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραί εἶναι 6m, 10m καί 8m. Αἱ παράπλευροι ἀκμαί εἶναι πᾶσαι ἴσαι

πρός 13 m. 1ον) Νά ὑπολογισθῇ τό ὕψος καί ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος ταύτης. 2ον) Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπό τῆς κορυφῆς πρέπει νά φέρωμεν ἐπίπεδον παραάλληλον πρός τήν βάσιν, ἵνα ἡ πυραμίς διαιρεθῇ εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη;



σχ.308

Λ ύ σ ι ς: 1) Ἔστω ΑΓ=6 m, ΒΓ=10 m, ΑΒ=8 m. Ἐπειδή

$$10^2=6^2+8^2=36+64=100,$$

ἕπεται ὅτι τό τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τό Α.

Ἄρα $(ΑΒΓ)=\frac{1}{2}.ΑΒ.ΑΓ=\frac{1}{2}\cdot 8.6=24\ m^2$.

Ἐπειδή δέ ΟΑ=ΟΒ=ΟΓ=13 m, ἕπεται ὅτι τό ὕψος ΟΗ τέμνει τήν βάσιν ΑΒΓ εἰς τό κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου περί τό τρίγωνον ΑΒΓ, δηλαδή εἰς τό μέσον Η τῆς ΒΓ. Ἄρα ΗΓ=5 m καί

$$υ^2=ΟΓ^2-ΓΗ^2=13^2-5^2=169-25=144 \Longrightarrow \boxed{υ=12m}$$

Ἄρα ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος θά εἶναι:

$$V=\frac{1}{3}.(ΑΒΓ).υ=\frac{1}{3}.24.12=8.12=96\ m^3.$$

2) Ἄν ἀχθῇ ἡ ΑΗ, τότε $ΑΗ=\frac{1}{2}.ΒΓ=5$. Ἡ ΟΗ θά τέμνῃ τήν $Β_1Γ_1$ εἰς τό μέσον αὐτῆς $Η_1$ καί θά εἶναι $Α_1Η_1 \perp ΟΓ_1Β_1$.
Ἄρα:

$$\frac{(Α_1Β_1Γ_1Ο)}{(ΑΒΓΟ)}=\frac{\frac{1}{3}(ΟΒ_1Γ_1).Α_1Η_1}{\frac{1}{3}(ΟΒΓ).ΑΗ}=\frac{(ΟΒ_1Γ_1)}{(ΟΒΓ)}=\frac{ΟΒ_1.ΟΓ_1}{ΟΒ.ΟΓ}\cdot\frac{Α_1Η_1}{ΑΗ}=\frac{ΟΒ_1.ΟΓ_1}{ΟΒ.ΟΓ}\cdot\frac{ΟΑ_1}{ΟΑ}=$$

$$=\frac{ΟΗ_1}{ΟΗ}\cdot\frac{ΟΗ_1}{ΟΗ}\cdot\frac{ΟΗ_1}{ΟΗ}=\left(\frac{ΟΗ_1}{ΟΗ}\right)^3=\frac{ΟΗ_1^3}{12^3} \qquad (1)$$

Ἀλλά $$\frac{(Α_1Β_1Γ_1Ο)}{(ΑΒΓΟ)}=\frac{(ΟΑ_1Β_1Γ_1)}{(ΟΑΒΓ)}=\frac{1}{2} \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν (1) καί (2) ἕπεται ὅτι: $\frac{ΟΗ_1^3}{12^3}=\frac{1}{2} \Longrightarrow ΟΗ_1^3=\frac{12.12^2}{2}=6.144,$

ἐξ οὗ: $ΟΗ=\sqrt[3]{6.144}=6\sqrt[3]{4}\ m.$

395. Νά ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ πολυέδρου, ὅπερ ἔχει κορυφάς τά κέντρα τῶν ἑδρῶν κύβου ἀκμῆς α.

Λ ύ σ ι ς: Ἐκ τοῦ σχήματος τῆς ἀσκήσεως 358 εἶναι:

$$(ΙΖΗΘ)=\frac{1}{2}(ΑΒΓΔ)=\frac{1}{2}α^2, \text{ καί } ΟΚ=\frac{1}{2}α.$$

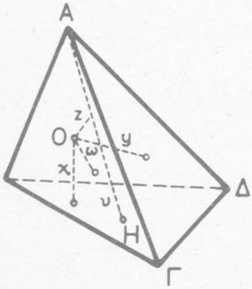
Κατ' ἀκολουθίαν:

$$V=2.(KI\Theta HZ)=2.\frac{1}{3}.(I\Theta HZ).\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}\alpha^2.\alpha=\frac{\alpha^3}{6}.$$

Ἤτοι $V=\frac{\alpha^3}{6}$ εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ κανονικοῦ ὀκταέδρου,ὅπερ ἔχει κορυφάς τά κέντρα τῶν ἑδρῶν κύβου ἀκμῆς α.

396. Δίδεται κανονικόν τετράεδρον ἀκμῆς α καί σημεῖον Ο ἐσωτερικόν αὐτοῦ.Νά ἀποδειχθῇ ὅτι τό ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τοῦ Ο ἀπό τάς ἕδρας τοῦ τετραέδρου εἶναι σταθερόν (ἴσον πρός τό ὕψος τοῦ τετραέδρου).Πῶς τροποποιεῖται τό ἄθροισμα τοῦτο,ὅταν τό Ο εἶναι ἐξωτερικόν σημεῖον τοῦ τετραέδρου;

Λ ύ σ ι ς:Ἄν x,y,z,ω εἶναι αἱ ἀποστάσεις τοῦ Ο ἀπό τάς ἕδρας τοῦ κανονικοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ καί ἀχθοῦν τό ὕψος υ αὐτοῦ,καθώς καί αἱ ΟΑ,ΟΒ,ΟΓ,ΟΔ,τό τετράεδρον ΑΒΓΔ χωρίζεται εἰς τέσσαρα τετράεδρα,καί θά εἶναι:



σχ.309

$$V(AB\Gamma\Delta)=$$
$$=V(OB\Gamma\Delta)+V(O\Gamma\Delta A)+V(O\Delta AB)+V(OAB\Gamma)$$
ἤ
$$\frac{\alpha^3\sqrt{2}}{12}=$$
$$=\frac{1}{3}.\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}.x+\frac{1}{3}.\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}.y+\frac{1}{3}.\alpha^2\frac{\sqrt{3}}{4}.\omega+\frac{1}{3}.\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}z$$
$$=\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{12}(x+y+z+\omega)$$

ἤ $x+y+z+\omega=\frac{\alpha\sqrt{6}}{3}=\upsilon$, ἤτοι: $\boxed{x+y+z+\omega=\upsilon}$

Ἐάν τό Ο κεῖται ἐκτός τοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ καί εἰς τό ἐσωτερικόν τῆς τριέδρου Α,τότε: $y+z+\omega-x=\upsilon$.

Ἡ ἀπόδειξις ὁμοία μέ τήν προηγουμένην.

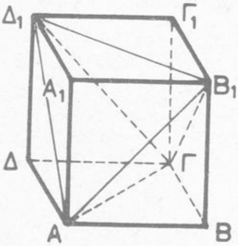
Ὁμοίως ἐργαζόμεθα καί διά τάς λοιπάς θέσεις τοῦ Ο.

397. Εἰς κύβον ἀκμῆς α ἄγομεν τάς διαγωνίους τῶν ἑδρῶν αὐτοῦ.Νά ἀποδειχθῇ ὅτι σχηματίζονται ὑπό τούτων δύο κανονικά τετράεδρα καί ἀκολούθως νά συγκριθοῦν οἱ ὄγκοι τῶν τετραέδρων τούτων.

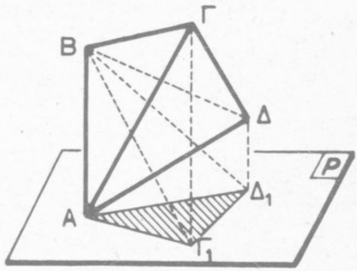
Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς:Ἐάν α εἶναι ἡ ἀκμή τοῦ κύβου,τότε θά εἶναι (σχ.310): $B_1\Delta_1=\Delta_1A=\Delta_1\Gamma=\Gamma B_1=AB_1=A\Gamma=\alpha\sqrt{2}$ καί τό τετράεδρον $A\Gamma B_1\Delta_1$ θά εἶναι κανονικόν.Ἄρα ὁ ὄγκος του θά εἶναι: $V=\frac{A\Gamma^3\sqrt{2}}{12}=\frac{(\alpha\sqrt{2})^3\sqrt{2}}{12}=\frac{\alpha^3}{3}$

Δηλαδή ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου τούτου εἶναι τό τρίτον τοῦ ὄγκου τοῦ κύβου.

Ἄν φέρωμεν τάς ἄλλας διαγωνίους τῶν ἑδρῶν τοῦ κύβου θά σχηματισθῇ ἕτερον κανονικόν τετράεδρον ἀκμῆς $\alpha\sqrt{2}$. Ἄρα τοῦ αὐτοῦ ὄγκου μέ τό προηγούμενον.



σχ.310



σχ.311

398. Ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου ἰσοῦται πρός τό $\frac{1}{3}$ τοῦ γινομένου μιᾶς ἀκμῆς του ἐπί τό ἐμβαδόν τῆς προβολῆς αὐτοῦ ἐπί ἐπίπεδον κάθετον πρός τήν ἐν λόγῳ ἀκμήν.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Ἔστω $A\Gamma_1\Delta_1$ ἡ ὀρθή προβολή τοῦ τετρέδρου ΑΒΓΔ ἐπί ἐπίπεδον (P) κάθετον πρός τήν ἀκμήν ΑΒ αὐτοῦ καί εἰς τό σημεῖον Α αὐτοῦ. (σχ.311).

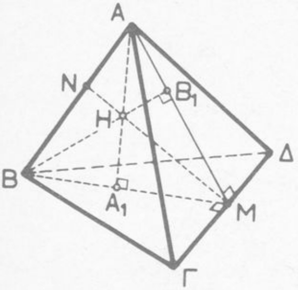
Ἐπειδή ἡ $\Gamma\Gamma_1$ εἶναι παράλληλος πρός τήν ΑΒ, δηλαδή παράλληλος πρός τήν ἕδραν ΑΒΔ, τά τετράεδρα ΑΒΓΔ καί $AB\Gamma_1\Delta$ θά εἶναι ἰσοδύναμα, ὡς ἔχοντα τήν αὐτήν βάσιν ΑΒΔ καί ὕψη ἴσα.

Ὁμοίως, ἐπειδή ἡ $\Delta\Delta_1$ εἶναι παράλληλος πρός τήν ΑΒ, δηλαδή πρός τό ἐπίπεδον $AB\Gamma_1$, τά τετράεδρα $AB\Gamma_1\Delta$ καί $AB\Gamma_1\Delta_1$ θά εἶναι ἰσοδύναμα, ὡς ἔχοντα τήν αὐτήν βάσιν $AB\Gamma_1$ καί ὕψη ἴσα. Ἄρα τά ΑΒΓΔ καί $AB\Gamma_1\Delta_1$ εἶναι ἰσοδύναμα. Ὥστε:

$$V(AB\Gamma\Delta)=V(AB\Gamma_1\Delta_1)=\frac{1}{3}.(A\Gamma_1\Delta_1).(AB).$$

399. Ὁ ὄγκος ὀρθογωνικοῦ τετραέδρου (ἀπέναντι ἀκμαί του ὀρθογώνιοι εὐθεῖαι) ἰσοῦται πρός τό $\frac{1}{6}$ τοῦ γινομένου δύο ἀπέναντι ἀκμῶν του ἐπί τό μῆκος τῆς κοινῆς καθέτου αὐτῶν.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Ἔστω ΑΒΓΔ τετράεδρον, τοῦ ὁποίου αἱ ἀπέναντι ἀκμαί ΑΒ καί ΓΔ εἶναι ὀρθογώνιοι εὐθεῖαι. Ἄρα ὑπάρχει ἐπίπεδον διερχόμενον διά τῆς ΑΒ καί κάθετον πρός



τήν ΓΔ, ἔστω εἰς τό σημεῖον Μ. Ἔστω Η τό ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου ΑΜΒ. Τότε θά εἶναι, ἀφ' ἑνός μέν ἡ AA_1 κάθετος πρός τήν ΒΜ, ἀφ' ἑτέρου δέ ἡ AA_1 ὀρθογώνιος πρός τήν ΓΔ. Κατ' ἀκολουθίαν ἡ AA_1 θά εἶναι κάθετος ἐπί τήν ἕδραν ΒΓΔ. Ὁμοίως καί ἡ BB_1 θά εἶναι κάθετος ἐπί τήν ἕδραν ΑΓΔ. Ἄρα τά ὕψη AA_1 καί BB_1 τοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ τέμνονται.

Ἐπειδή τό Η εἶναι τό ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου ΜΑΒ, ἡ εὐθεῖα ΜΗΝ θά εἶναι κάθετος πρός τήν ΑΒ. Ἄρα ἡ ΜΝ εἶναι ἡ κοινή κάθετος

σχ.312

τῶν ΑΒ καί ΓΔ. Θά ἔχωμεν:

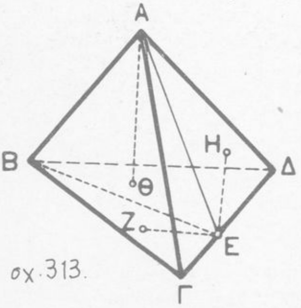
$$V_{(AB\Gamma\Delta)}=\frac{1}{3}.(B\Gamma\Delta).(AA_1)=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}.\Gamma\Delta.BM.AA_1=\frac{1}{6}.\Gamma\Delta.(MB.AA_1)=$$

$$=\frac{1}{6}.\Gamma\Delta.(AB.MN)=\frac{1}{6}.(AB.\Gamma\Delta).MN.$$

Ὥστε: $\quad AB\perp\Gamma\Delta \quad\Longrightarrow\quad V_{(AB\Gamma\Delta)}=\frac{1}{6}.(AB.\Gamma\Delta)(MN).$

400. Τό διχοτομοῦν ἐπίπεδον μιᾶς διέδρου τετραέδρου διαιρεῖ ἑκάστην τῶν ἑδρῶν τῶν διερχομένων διά τῆς ἀπέναντι ἀκμῆς εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἑδρῶν τῆς ἐν λόγῳ διέδρου.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Ἔστω Ε ἡ τομή τῆς ΓΔ ὑπό τοῦ διχοτομοῦντος τήν δίεδρον ΑΒ ἐπιπέδου ΑΒΕ. Ἐκ τοῦ Ε ἄγομεν τάς καθέτους ΕΖ καί ΕΗ ἐπί τάς ἕδρας ΑΒΓ καί ΑΒΔ. Θά εἶναι ΕΖ=ΕΗ. Ἄρα:



$$\frac{V_{(AB\Gamma\Delta)}}{V_{(AB\Delta E)}}=\frac{(AB\Gamma)}{(AB\Delta)} \quad (1), \text{ὕψη } EZ=EH.$$

Ἀλλ' εἶναι καί $\dfrac{V_{(AB\Gamma E)}}{V_{(AB\Delta E)}}=\dfrac{(B\Gamma E)}{(B\Delta E)}=\dfrac{\Gamma E}{E\Delta}$ (2).

Ἐκ τῶν (1) καί (2) ἕπεται:

$$\frac{(AB\Gamma)}{(AB\Delta)}=\frac{\Gamma E}{E\Delta} \quad (3)$$

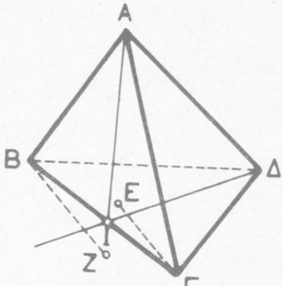
σχ.313.

Ἀλλά καί $\dfrac{(A\Gamma E)}{(A\Delta E)}=\dfrac{\Gamma E}{\Delta E}$ (4). Ἐκ τῶν (2), (3) καί (4) προκύπτει:

$$\frac{(B\Gamma E)}{(B\Delta E)}=\frac{(A\Gamma E)}{(A\Delta E)}=\frac{(AB\Gamma)}{(AB\Delta)}=\frac{\Gamma E}{\Delta E} \quad (5)$$

401. Πᾶν ἐπίπεδον διερχόμενον διά μιᾶς ἀκμῆς τετραέδρου καί τοῦ μέσου τῆς ἀπέναντι ἀκμῆς, διαιρεῖ αὐτό εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Ἐάν Ι εἶναι τό μέσον τῆς ἀκμῆς ΒΓ, τό ἐπίπεδον ΑΔΙ διαιρεῖ τό τετράεδρον ΑΒΓΔ εἰς δύο τετράεδρα ΙΑΒΔ καί ΙΑΓΔ, τά ὁποῖα ἔχουν κοινήν ἕδραν τήν ΑΙΔ. Ἐπειδή τά ἀντίστοιχα ὕψη ΒΖ καί ΓΕ εἶναι ἴσα, καθόσον τό Ι εἶναι μέσον τῆς ἀκμῆς ΒΓ. Οὕτω, τά τετράεδρα ΙΑΒΔ καί ΙΑΔΓ εἶναι ἰσοδύναμα, ὡς ἔχοντα τήν αὐτήν βάσιν καί ἴσα ὕψη.



σχ.314

Ἄλλη ἀπόδειξις: Τά τετράεδρα ΙΑΒΔ καί ΙΑΔΓ ἔχουν βάσεις ΙΒΔ καί ΙΓΔ ἰσοδυνάμους καί τό αὐτό ὕψος, τό ἀγόμενον ἐκ τοῦ Α. Ἄρα εἶναι ἰσοδύναμα.

402. Νά ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου, ὅπερ ἔχει κορυφάς τά κέντρα τῶν ἑδρῶν κανονικοῦ τετραέδρου ἀκμῆς α.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Ἔστωσαν $A_1, B_1, \Gamma_1, \Delta_1$ τά κέντρα τῶν ἑδρῶν ΒΓΔ, ΑΓΔ, ΑΔΒ, ΑΒΓ τοῦ κανονικοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ.

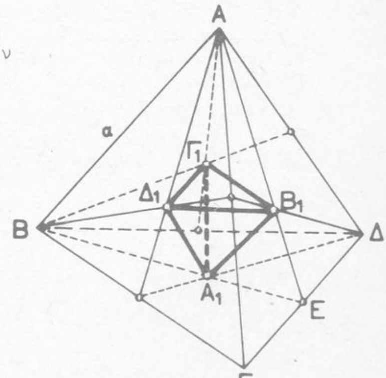
Ταῦτα θά εἶναι αἱ τομαί τῶν διαμέσων αὐτῶν.

Ἐπειδή $A_1E = B_1E$ καί $BA_1 = AB_1$ ἕπεται: $\frac{A_1E}{BA_1} = \frac{B_1E}{AB_1} = \frac{1}{2}$, καί κατ' ἀκολουθίαν $A_1B_1 // AB$ καί $A_1B_1 = \frac{\alpha}{3}$.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι:

$B_1\Gamma_1 = \Gamma_1\Delta_1 = A_1\Delta_1 = A_1\Gamma_1 = A_1B_1 = \frac{\alpha}{3}$,

καί τό τετράεδρον $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$ θά εἶναι κανονικόν, ὁπότε ὁ ὄγκος του θά εἶναι:



σχ.315

$$V_{(A_1B_1\Gamma_1\Delta_1)} = \frac{A_1B_1^3\sqrt{2}}{12} = \frac{\frac{\alpha^3}{9}\sqrt{2}}{12} = \frac{\alpha^3\sqrt{2}}{108}.$$

403. Ἐπί τῆς βάσεως κανονικῆς πυραμίδος λαμβάνομεν τυχόν σημεῖον Μ. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι τό ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τοῦ Μ ἀπό τάς παραπλεύρους ἕδρας εἶναι σταθερόν.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Ἔστωσαν x,y,z,ω,φ αἱ ἀποστάσεις τυχόντος σημείου Κ (σχ.316) τῆς βάσεως ΑΒΓΔΖ τῆς κανονικῆς πυραμίδος ΟΑΒΓΔΖ ἀπό τάς παραπλεύρους ἕδρας ΟΑΒ,ΟΒΓ, ΟΓΔ,ΟΔΖ καί ΟΖΑ ἀντιστοίχως.

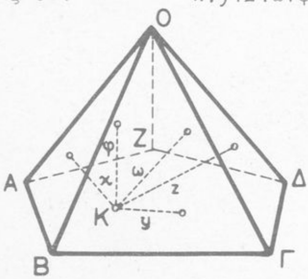
Ἄν ἀχθοῦν αἱ ΚΑ,ΚΒ,ΚΓ,ΚΔ,ΚΖ,ἡ πυραμίς χωρίζεται εἰς τά τετράεδρα ΚΑΒΟ,ΚΒΓΟ,ΚΓΔΟ,ΚΔΖΟ,ΚΖΑΟ καί θά ἔχωμεν:

$$V(ΟΑΒΓΔΖ)=V(ΚΑΒΟ)+V(ΚΒΓΟ)+\dots+V(ΚΖΑΟ)$$

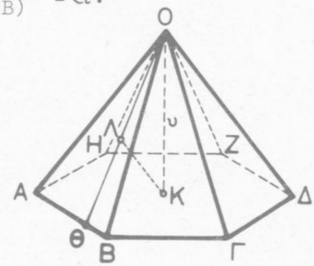
ἤ $\frac{1}{3}(ΑΒΓΔΖ).υ=\frac{1}{3}(ΟΑΒ).x+\frac{1}{3}(ΟΒΓ)y+\frac{1}{3}(ΟΓΔ).z+\frac{1}{3}(ΟΔΖ)ω+\frac{1}{3}(ΟΖΑ).φ$

$$=\frac{1}{3}(ΟΑΒ).(x+y+z+ω+φ),$$

ἐξ οὗ: $$x+y+z+ω+φ=\frac{(ΑΒΓΔΖ).υ}{(ΟΑΒ)}=ct.$$



σχ.316



σχ.317

404. Ὁ ὄγκος κανονικῆς πυραμίδος ἰσοῦται πρός τό γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας της ἐπί τό τρίτον τῆς ἀποστάσεως τοῦ κέντρου τῆς βάσεως ἀπό μίαν παράπλευρον ἕδραν αὐτῆς.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Ἔστω ΟΑΒΓΔΖΗ κανονική ἑξαγωνική πυραμίς (σχ.317), Κ τό κέντρον τῆς βάσεως καί ΚΛ ἡ ἀπόστασις τοῦ Κ ἀπό τήν ἕδραν ΟΑΒ. Ἄν ἀχθοῦν αἱ ΚΑ,ΚΒ,...,ΚΗ, ἡ πυραμίς χωρίζεται εἰς τά τετράεδρα ΚΟΑΒ,ΚΟΒΓ,...,ΚΟΗΑ, καί θά εἶναι:

$$V(ΟΒΓΔΖΗ)=6\cdot V(ΚΟΑΒ)=6.\frac{1}{3}(ΟΑΒ).ΚΛ=\frac{1}{3}(6.ΟΑΒ).ΚΛ=\frac{1}{3}E_{π}.ΚΛ$$

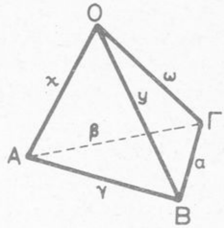
διότι αἱ ἀποστάσεις τοῦ Κ ἀπό τάς παραπλεύρους ἕδρας εἶναι ἴσαι.

Ὥστε: $$V=\frac{1}{3}.E_{π}.ΚΛ.$$

405. Αἱ πλευραί τῆς βάσεως ΑΒΓ τρισορθογωνίου τετραέδρου ΟΑΒΓ εἶναι α,β,γ.Νά ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου.

Λ ύ σ ι ς: Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΟΑΒ,ΟΒΓ,ΟΓΑ θά ἔχωμεν, ἄν ΟΑ=x, ΟΒ=y, ΟΓ=ω, ὅτι:

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2&=\gamma^2 \\ y^2+\omega^2&=\alpha^2 \\ \omega^2+x^2&=\beta^2 \end{aligned}\right\}.$$



σχ.318

Λύοντες τό σύστημα τοῦτο ὡς πρός x^2, y^2, ω^2, εὑρίσκομεν:

$$x^2=\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2},\quad y^2=\frac{\gamma^2+\alpha^2-\beta^2}{2},\quad \omega^2=\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2}$$

Ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου ΟΑΒΓ εἶναι:

$$V_{(AOB\Gamma)}=\frac{1}{3}\cdot(OB\Gamma)\cdot OA=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}y\omega\cdot x=\frac{1}{6}xy\omega,$$

ἤ
$$V_{(OAB\Gamma)}=\frac{1}{24}\sqrt{2(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)(\gamma^2+\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)}\,.$$

406. Ἐάν αἱ ἕδραι τετραέδρου εἶναι τρίγωνα ἰσοδύναμα, τό ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τυχόντος σημείου ἐσωτερικοῦ τοῦ τετραέδρου ἀπό τάς ἕδρας εἶναι σταθερόν.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Ἔστω ΑΒΓΔ ἕν τετράεδρον, τοιοῦτον ὥστε: (ΒΓΔ)=(ΑΒΓ)=(ΑΓΔ)=(ΑΔΒ)
καί Ο τυχόν σημεῖον ἐσωτερικόν τοῦ τετραέδρου, τοῦ ὁποίου αἱ ἀποστάσεις ἀπό τάς ἕδρας ταύτας εἶναι ἀντιστοίχως x, y, z, ω. Ἄν ἀχθοῦν αἱ ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ, τό τετράεδρον ΑΒΓΔ χωρίζεται εἰς τά προσθετικά τετράεδρα:

ΟΒΓΔ, ΟΑΒΓ, ΟΑΓΔ, ΟΑΔΒ,

καί θά ἔχωμεν:

$$V_{(AB\Gamma\Delta)}=V_{(OB\Gamma\Delta)}+V_{(OAB\Gamma)}+V_{(OA\Gamma\Delta)}+V_{(OA\Delta B)}$$

ἤ $\frac{1}{3}(B\Gamma\Delta)\cdot\upsilon_1=\frac{1}{3}(B\Gamma\Delta)(x+y+z+\omega) \Longrightarrow \boxed{x+y+z+\omega=\upsilon_1}$

407. Εἰς τό ἐσωτερικόν τετραέδρου νά εὑρεθῇ σημεῖον Ο, τοιοῦτον ὥστε, συνδεόμενον μέ τάς κορυφάς, νά σχηματίζωνται τέσσαρα τετράεδρα ἰσοδύναμα ἤ ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν κ, λ, μ, ν.

Λ ύ σ ι ς: 1) Ἔστω τό τετράεδρον ΑΒΓΔ καί τό ἐσωτερικόν σημεῖον αὐτοῦ Ο, τοιοῦτον ὥστε τά τετράεδρα ΟΒΓΔ, ΟΓΔΑ, ΟΔΑΒ καί ΟΑΒΓ νά εἶναι ἰσοδύναμα.

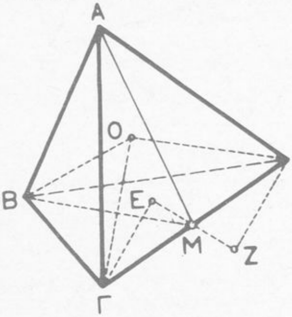
Τά τετράεδρα ΟΑΒΓ καί ΟΑΒΔ, ἐπειδή εἶναι ἰσοδύναμα καί ἔχουν τήν αὐτήν βάσιν ΟΑΒ, θά ἔχουν τό αὐτό ὕψος ΓΕ=ΔΖ.

Ἡ ΕΖ τέμνει τήν ΓΔ εἰς τό Μ καί τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΓΕΜ καί ΔΖΜ θά εἶναι ἴσα, ὁπότε ΜΓ=ΜΔ. (σχ.319).

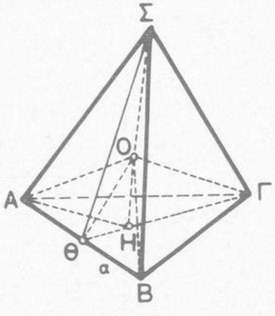
Ἄρα ἡ ΒΜ εἶναι διάμεσος τῆς ἕδρας ΒΓΔ. Τό ἐπίπεδον ΑΟΒ διέρχεται οὕτω διά τοῦ μέσου Μ τῆς ΓΔ.

Ἐργαζόμενοι ὁμοίως μέ τά ὑπόλοιπα τετράεδρα, ἀποδεικνύομεν εὐκόλως ὅτι τό Ο εἶναι κοινόν τῶν τεσσάρων ἐπιπέδων τῶν ἀγομένων ἐξ ἑκάστης ἀκμῆς τοῦ τετραέδρου καί τοῦ μέσου τῆς ἀπέναντι ἀκμῆς.

Ἄρα τό Ο εἶναι τό κέντρον βάρους τοῦ τετραέδρου.



σχ.319



σχ.320

Τό δεύτερον μέρος τῆς ἀσκήσεως νά ἀποδειχθῇ ὑπό τῶν μαθητῶν.

408. Εἰς τό ἐσωτερικόν κανονικῆς τριγωνικῆς πυραμίδος ΣΑΒΓ νά εὑρεθῇ σημεῖον, ἀπό τό ὁποῖον αἱ πλευραί τῆς βάσεως νά φαίνωνται ὑπό ὀρθήν γωνίαν, ἄν τό ὕψος εἶναι υ καί ἡ πλευρά τῆς βάσεως α.

Λ ύ σ ι ς: Ἔστω Ο τό ζητούμενον σημεῖον, τοιοῦτον ὥστε:

$$\sphericalangle AOB = \sphericalangle BO\Gamma = \sphericalangle \Gamma OA = 90^{\circ}.$$

Ἄγομεν τό ὕψος ΣΘ τῆς ἕδρας ΣΑΒ καί τήν ΗΘ καθώς καί τήν ΟΘ.

Θά εἶναι: $O\Theta = \frac{\alpha}{2}$

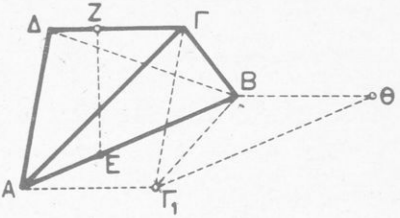
Ἐπειδή ἡ ΣΑΒΓ εἶναι κανονική, τό Η θά εἶναι τό κέντρον τῆς βάσεως καί $H\Theta = \frac{1}{3}\Theta\Gamma$. Ἐπειδή δέ $\Theta\Gamma = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} \Rightarrow H\Theta = \frac{1}{3}\cdot\frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{6}$

Κατ' ἀκολουθίαν:

$$OH^2 = O\Theta^2 - H\Theta^2 = \frac{\alpha^2}{4} - \frac{3\alpha^2}{36} = \frac{6\alpha^2}{36} \Rightarrow \boxed{OH = \frac{\alpha\sqrt{6}}{6}}$$

409. Ὁ ὄγκος τετραέδρου ἰσοῦται πρός $\frac{1}{6}$ τοῦ γινομένου τοῦ ἐμβαδοῦ, ἑνός παραλληλογράμμου κατασκευαζομένου μέ δύο ἀπέναντι ἀκμάς του, ἐπί τό μῆκος τῆς κοινῆς καθέτου τῶν ἀκμῶν τούτων.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Ἔστω ΕΖ ἡ κοινή κάθετος τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν ΑΒ καί ΓΔ τοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ.



σχ.321

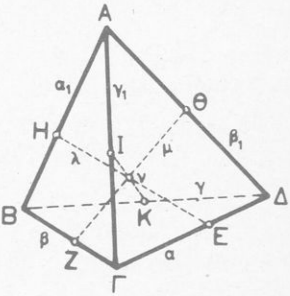
Ἄγομεν τήν $ΓΓ_1 // ΑΔ$ καί ἴσην πρός τήν ΑΔ καί συνδέομεν τό $Γ_1$ μέ τά Α καί Β.

Τά τετράεδρα ΑΒΓΔ καί $ΑΒΓ_1Δ$ εἶναι ἰσοδύναμα, ἔχοντα τήν αὐτήν βάσιν ΑΒΔ καί ὕψη ἴσα, καθόσον ἡ $ΓΓ_1$ εἶναι παράλληλος πρός τό ἐπίπεδον ΑΒΔ. Ἀλλά τό $ΑΔΓΓ_1$ εἶναι παραλληλόγραμμον καί ἡ ΔΓ εἶναι παράλληλος πρός τό ἐπίπεδον $ΑΒΓ_1$, ὁπότε ἡ ἀπόστασις τοῦ Δ ἀπό τό ἐπίπεδον $ΑΒΓ_1$ θά ἰσοῦται πρός τήν κοινήν κάθετον ΕΖ τῶν ΑΒ καί ΓΔ. Θά ἔχωμεν:

$V(ΑΒΓΔ)=V(ΑΒΓ_1Δ)=\frac{1}{3}.(ΑΒΓ_1).ΕΖ=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}(ΒΘΓ_1Α).(ΕΖ)=\frac{1}{6}(ΑΒΘΓ_1).ΕΖ$,

ἔνθα $Γ_1Θ // =ΑΒ$.

410. Εἰς ὀρθογωνικόν τετράεδρον τά γινόμενα τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα πρός τάς κοινάς καθέτους αὐτῶν ἀντιστοίχως.



σχ.322

Λ ύ σ ι ς: Ἐάν λ, μ, ν εἶναι αἱ κοιναί κάθετοι τῶν ΑΒ, ΓΔ καί ΒΓ, ΑΔ καί ΒΔ, ΑΓ, κατά τήν προηγουμένην ἄσκησιν θά εἶναι:

$V(ΑΒΓΔ)=\frac{1}{6}α.α_1.λ=\frac{1}{6}.β.β_1.μ=\frac{1}{6}.γ.γ_1.ν$,

ἐξ οὗ: $\frac{α.α_1}{\frac{1}{λ}}=\frac{β.β_1}{\frac{1}{μ}}=\frac{γ.γ_1}{\frac{1}{ν}}$.

411. Αἱ διαστάσεις ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι α=8, β=10, γ=15. Νά ὑπολογισθῇ ἡ διαγώνιος αὐτοῦ καί ὁ ὄγκος.

Λ ύ σ ι ς: Ἔχομεν $δ=\sqrt{α^2+β^2+γ^2}=\sqrt{64+100+225}=\sqrt{389}$ καί $V=αβγ=8.10.15=1200$.

412. Εἰς ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον εἶναι α=25, β=40, δ=57. Νά ὑπολογισθῇ τό ἐμβαδόν τῆς ἐπιφανείας του καί ὁ ὄγκος του.

Λ ύ σ ι ς: Ἔχομεν $δ^2=α^2+β^2+γ^2$ ἤ $57^2=25^2+40^2+γ^2$, ἐξ οὗ:

$\gamma^2=3249-625-1600=1024 \Longrightarrow \gamma=32.$

Τό ἐμβαδόν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας του εἶναι:

$$E_{o\lambda}=2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=2.(25.40+40.32+32.25)=6160$$

Ὁ ὄγκος του εἶναι:

$$V=\alpha\beta\gamma=25.40.32=32000.$$

413. Νά ὑπολογισθῆ ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια καί ὁ ὄγκος ὀρθοῦ πρίσματος ὕψους υ, καί τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι τετράγωνον ἤ ἰσόπλευρον τρίγωνον ἤ κανονικόν ἑξάγωνον πλευρᾶς α.

Λ ύ σ ι ς: 1) Ἡ βάσις εἶναι τετράγωνον: Ἡ περίμετρος τῆς βάσεως εἶναι 4α καί τό ἐμβαδόν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας $E_{\pi}=4\alpha.\upsilon$

καί τό ἐμβαδόν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας:

$$E_{o\lambda}=2\alpha^2+4\alpha\upsilon=2\alpha(\alpha+2\upsilon).$$

Ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος τούτου εἶναι: $V=\alpha^2.\upsilon$

2) Ἡ βάσις εἶναι ἰσόπλευρον τρίγωνον: Θά ἔχωμεν:

$$E_{\pi}=3\alpha.\upsilon \quad \text{καί} \quad V=\frac{\alpha^3\sqrt{3}}{4}.\upsilon.$$

3) Ἡ βάσις εἶναι καν. ἑξάγωνον: Θά ἔχωμεν:

$$E_{\pi}=6\alpha.\upsilon$$

καί $$V=(B).\upsilon=6.\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}.\upsilon=\frac{3\alpha^2.\upsilon\sqrt{3}}{2}.$$

414. Ὀρθοῦ πρίσματος ὕψους υ ἡ βάσις εἶναι τραπέζιον μέ βάσεις β,α καί ὕψους υ_1. Νά ὑπολογισθῆ ὁ ὄγκος του.

Λ ύ σ ι ς: Τό ἐμβαδόν τῆς βάσεως εἶναι:

$$(B)=\frac{1}{2}(\alpha+\beta).\upsilon_1.$$

Ὁ ὄγκος του εἶναι: $V=(B).\upsilon=\frac{1}{2}(\alpha+\beta).\upsilon.\upsilon_1.$

415. Τό ἐμβαδόν τῆς ἐπιφανείας κανονικοῦ ἑξαγωνικοῦ πρίσματος εἶναι 150 cm^2, τό δέ ὕψος ἰσοῦται πρός τήν διάμετρον τῆς βάσεως. Νά ὑπολογισθῆ ὁ ὄγκος του.

Λ ύ σ ι ς: Ἐάν x εἶναι ἡ πλευρά τῆς βάσεως, τότε τό ἐμβαδόν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας του εἶναι:

$$E_{o\lambda}=2B+E_{\pi}=2.6.\frac{x^2\sqrt{3}}{4}+6.x.2x=150$$

ἤ $3\sqrt{3}x^2+12x^2=150$ ἤ $x^2(4+\sqrt{3})=50 \Rightarrow x=\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{4+\sqrt{3}}}$ cm .

Ὁ ὄγκος του εἶναι:

$$V=(B).\upsilon=\frac{3x^2\sqrt{3}}{2}.2x=3x^3\sqrt{3}=3\sqrt{3}.\left(\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{4+\sqrt{3}}}\right)^3 \text{ cm}^3.$$

416. Νά ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος κύβου συναρτήσει τῆς διαγωνίου του.

Λ ύ σ ι ς: Ἡ διαγώνιος $\delta=\alpha\sqrt{3} \Longrightarrow \alpha=\frac{\delta\sqrt{3}}{3}$

Ὁ ὄγκος $V=\alpha^3=\left(\frac{\delta\sqrt{3}}{3}\right)^3=\frac{3\delta^3\sqrt{3}}{27}=\frac{\delta^3\sqrt{3}}{9}$.

---

417. Νά ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος πρίσματος μέ βάσιν τετράπλευρον ΑΒΓΔ, συναρτήσει τοῦ ὄγκου τοῦ παραλληλεπιπέδου, ὅπερ ἔχει κορυφάς τά μέσα τῶν πλευρῶν τῶν βάσεων τοῦ πρίσματος.

Λ ύ σ ι ς: Ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος, τό ὁποῖον ἔχει βάσεις τά πολύγωνα μέ κορυφάς τά μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ ΑΒΓΔ εἶναι: $V_1=(B_1).\upsilon$

Ἀλλά: $(B_1)=\frac{1}{2}(B)$. Ἄρα $V_1=\frac{1}{2}B.\upsilon=\frac{1}{2}.V \Longrightarrow \boxed{V=2V_1}$.

418. Πολυγωνικόν πρῖσμα νά μετασχηματισθῇ εἰς ἰσοδύναμον τριγωνικόν τοῦ αὐτοῦ ὕψους.

Λ ύ σ ι ς: Ἀρκεῖ νά μετασχηματίσωμεν τήν βάσιν τοῦ πολυγωνικοῦ εἰς ἰσοδύναμον τρίγωνον.
Τοῦτο εἶναι γνωστόν ἐκ τῆς προηγουμένης τάξεως.

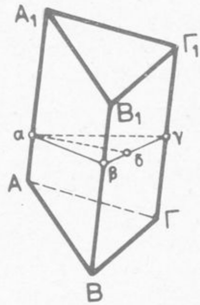
419. Τριγωνικόν πρῖσμα ὕψους υ, νά μετασχηματισθῇ εἰς ἄλλο ἰσοδύναμον μέ βάσιν τετράγωνον.

Λ ύ σ ι ς: Ἀρκεῖ νά μετασχηματίσωμεν τό τρίγωνον τῆς βάσεως εἰς ἰσοδύναμον τετράγωνον.
Τοῦτο γνωρίζομεν ἐκ τῆς προηγουμένης τάξεως.

420. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ ὄγκος τριγωνικοῦ πρίσματος ἰσοῦται πρός τό ἥμισυ τοῦ γινομένου τοῦ ἐμβαδοῦ μιᾶς παραπλεύρου ἕδρας ἐπί τήν ἀπόστασιν τῆς ἀπέναντι ἀκμῆς ἀπό

ταύτην.

Λ ύ σ ι ς: Γνωρίζομεν ὅτι πᾶν πρῖσμα πλάγιον εἶναι ἰσοδύναμον πρός ὀρθόν, ἔχον ὡς βάσιν μίαν κάθετον τομήν καί ὕφος τήν παράπλευρον ἀκμήν.



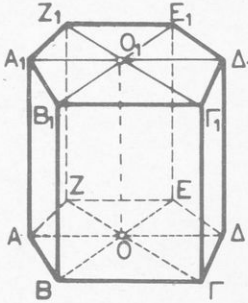
σχ.323

Κατ' ακολουθίαν:

$$V=(\alpha\beta\gamma).\Gamma\Gamma_1=\frac{1}{2}(\beta\gamma).(\alpha\delta).\Gamma\Gamma_1=\frac{1}{2}(B\Gamma\ \Gamma_1 B_1)(\alpha\delta)$$

Ἤτοι: $V=\frac{1}{2}(B\Gamma\Gamma_1 B_1)(\alpha\delta)$.

421. Ὁ ὄγκος κανονικοῦ πρίσματος ἰσοῦται πρός τό γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας του, ἐπί τό ἥμισυ τοῦ ἀποστήματος τῆς βάσεως.



σχ.324

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Ἔστω OO_1 ὁ ἄξων κανονικοῦ πολυγωνικοῦ πρίσματος $AB\Gamma\Delta EZA_1B_1\Gamma_1\Delta_1E_1Z_1$.

Ἄν ἀχθοῦν αἱ $OA, OB, \ldots, OZ$ καί $O_1A_1, O_1B_1, \ldots, O_1Z_1$, τό πρῖσμα χωρίζεται εἰς ὀρθογωνικά πρίσματα ἴσα, ὡς τό $OABO_1A_1B_1$.

Κατά τήν προηγουμένην ἄσκησιν θά εἶναι:

$$V(OABO_1A_1B_1)=\frac{1}{2}(ABB_1A_1).(OH)$$

καί κατ' ἀκολουθίαν:

$$V(BE_1)=\frac{1}{2}(ABB_1A_1)(OH)+\frac{1}{2}(B\Gamma\Gamma_1B_1).OH+\ldots+\frac{1}{2}(ZAA_1Z_1).OH=$$
$$=\frac{1}{2}.OH.(ABB_1A_1+B\Gamma\Gamma_1B_1+\ldots+ZAA_1Z_1)=\frac{1}{2}.OH.E_{\varpi}$$

Ὥστε: $\boxed{V=\frac{1}{2}.OH.E_{\varpi}}$.

422. Δίδεται πρῖσμα, τοῦ ὁποίου μία κάθετος τομή εἶναι ἰσόπλευρον πολύγωνον. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι τό ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων σημείου O ἐσωτερικοῦ τοῦ πρίσματος ἀπό τάς βάσεις καί τάς παραπλεύρους ἕδρας εἶναι σταθερόν.

Λ ύ σ ι ς: Ἔστω O τυχόν σημεῖον (σχ.325) ἐσωτερικόν τοῦ πλαγίου πρίσματος $AB\Gamma\Delta EA_1B_1\Gamma_1\Delta_1E_1$.

Διά τοῦ O ἄγομεν τάς καθέτους Oμ, Oν πρός τάς βάσεις τοῦ πρίσματος καί τάς καθέτους Oη, Oθ, Oι, Oκ, Oλ πρός τάς παραπλεύρους ἕδρας $ABB_1A_1, \ldots, EAA_1E$ ἀντιστοίχως.

Διά τοῦ O ἄγομεν μίαν κάθετον τομήν τοῦ πρίσματος αβγδε, ἡ ὁποία, προφανῶς, θά περιέχῃ τάς Οη, Οθ, ..., Ολ.

Ἐάν συνδέσωμεν τό Ο μέ τάς κορυφάς τῶν δύο βάσεων τοῦ πρίσματος θά ἔχωμεν, ἀφ' ἑνός μέν:

$$V=(B).(\mu\nu)=(B)(O\mu+O\nu) \Rightarrow O\mu+O\nu=\frac{V}{(B)}, \quad (1)$$

ἀφ' ἑτέρου δέ:

$$V=(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon).AA_1=\left[\frac{1}{2}(\alpha\beta).O\eta+\frac{1}{2}(\beta\gamma).O\theta+\ldots+\frac{1}{2}(\varepsilon\alpha).O\lambda\right].AA_1$$

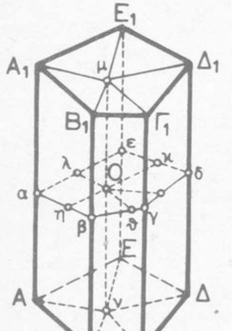
$$=\frac{1}{2}(\alpha\beta)(O\eta+O\theta+O\iota+O\varkappa+O\lambda).AA_1.$$

ἐξ οὗ: $\frac{2V}{(\alpha\beta).AA_1}=O\eta+O\theta+O\iota+O\varkappa+O\lambda$

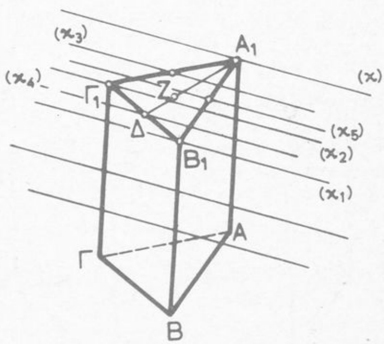
ἤ $\frac{2V}{(ABB_1A_1)}=O\eta+O\theta+O\iota+O\varkappa+O\lambda.$ (2)

Ἐκ τῶν (1) καί (2) λαμβάνομεν:

$$O\eta+O\theta+O\iota+O\varkappa+O\lambda+O\mu+O\nu=\frac{V}{(B)}+\frac{2V}{(ABB_1A_1)}=ct.$$



σχ.325



σχ.326

423. Τριγωνικοῦ πρίσματος $AB\Gamma A_1B_1\Gamma_1$ ἡ βάσις $AB\Gamma$ εἶναι σταθερά, ἡ δέ κορυφή A_1 διαγράφει εὐθεῖαν (x). Νά εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικός τόπος τῶν κορυφῶν B_1, Γ_1, τοῦ κέντρου βάρους τοῦ τριγώνου $A_1B_1\Gamma_1$ καί τῶν μέσων τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν του.

Λύσις: Ἡ A_1B_1 μένει διαρκῶς παράλληλος πρός τό ἐπίπεδον $AB\Gamma$. Τό τετράπλευρον ABB_1A_1 θά εἶναι πάντοτε παραλληλόγραμμον. Ἄρα τό B_1 θά γράφῃ εὐθεῖαν (x_1) παράλληλον πρός τήν (x).

Ὁμοίως τό Γ_1 θά γράφῃ εὐθεῖαν παράλληλον πρός τήν (x).

Κατ' ἀνάλογον τρόπον ἐργαζόμενοι, εὑρίσκομεν ὅτι καί τά μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ $A_1B_1Γ_1$, τό κέντρον βάρους αὐτοῦ Ζ καί τά μέσα τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν θά γράφουν εὐθείας, ἀντιστοίχως, παραλλήλους πρός τήν (x).

424. Ἐάν εἰς τετραγωνικόν πρῖσμα τρεῖς διαγώνιοι τέμνωνται, νά ἀποδειχθῆ ὅτι καί ἡ τετάρτη διαγώνιος διέρχεται διά τῆς τομῆς τῶν τριῶν πρώτων καί ὅτι τό πρῖσμα εἶναι παραλληλεπίπεδον.

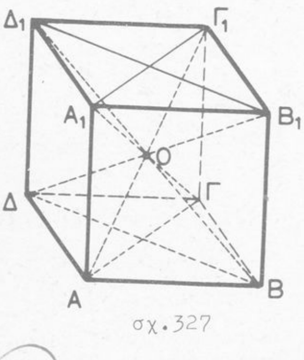
Λ ύ σ ι ς: Ἔστω $ΑΒΓΔΑ_1Β_1Γ_1Δ_1$ τετραγωνικόν πρῖσμα, τοῦ ὁποίου αἱ τρεῖς διαγώνιοι $ΑΓ_1$, $ΔΒ_1$ καί $ΓΑ_1$ τέμνονται εἰς τό σημεῖον Ο (σχ.327).

Ἄγομεν τάς διαγωνίους ΑΓ καί $Α_1Γ_1$ τῶν βάσεων. Ἐπειδή $ΑΑ_1 // ΒΒ_1 // ΓΓ_1$ καί ἴσαι, ἕπεται ὅτι τό τετράπλευρον $ΑΓΓ_1Α_1$ εἶναι παραλληλόγραμμον. Ἄρα $ΟΑ=ΟΓ_1$ καί $ΟΓ=ΟΑ_1$.

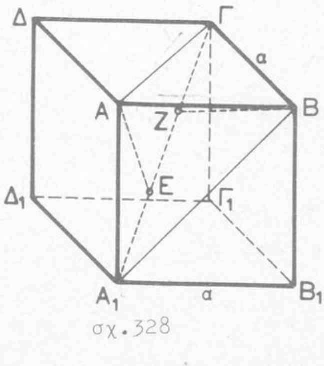
Ὁμοίως καί τό τετράπλευρον $ΒΒ_1Δ_1Δ$ εἶναι παραλληλόγραμμον. Ἄρα $ΘΔ=ΟΒ_1$ καί $ΟΔ_1=ΟΒ$.

Ἄρα καί ἡ τετάρτη διαγώνιος $ΒΔ_1$ διέρχεται ἀπό τό Ο.

Ἐντεῦθεν προκύπτει εὐκόλως ὅτι τό πρῖσμα εἶναι παραλληλεπίπεδον.



σχ.327



σχ.328

425. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι αἱ προβολαί τῶν ἀκμῶν κύβου ἐπί τυχοῦσαν διαγώνιόν του εἶναι ἴσαι πρός τό τρίτον τῆς διαγωνίου.

Λ ύ σ ι ς: Ἔστω ΕΖ ἡ προβολή τῆς ἀκμῆς ΑΒ ἐπί τήν διαγώνιον $Α_1Γ$. Ἄγομεν τάς διαγωνίους ΑΓ καί $Α_1Β$ τῶν ἑδρῶν ΑΒΓΔ καί $Α_1Β_1ΒΑ$. Εἶναι:

$ΑΓ=Α_1Β=α\sqrt{2}$ (1)

καί $Α_1Γ=α\sqrt{3}$. (2)

Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων $Α_1ΑΓ$ καί $Α_1ΒΓ$ θά ἔχωμεν ἀντιστοίχως:

$$Α_1Α^2=Α_1Γ.Α_1Ε \text{ ἤ } α^2=α\sqrt{3}.Α_1Ε \Longrightarrow Α_1Ε=\frac{α\sqrt{3}}{3} \qquad (3)$$

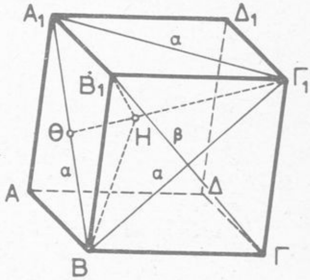
καί $B\Gamma^2=\Gamma A_1.\Gamma Z$ ἤ $\alpha^2=\alpha\sqrt{3}.\Gamma Z \Rightarrow \Gamma Z=\frac{\alpha\sqrt{3}}{3}$ (4)

Ἑπομένως:

$$EZ=A_1\Gamma-A_1E-\Gamma Z=\alpha\sqrt{3}-\frac{\alpha\sqrt{3}}{3}-\frac{\alpha\sqrt{3}}{3}=\frac{\alpha\sqrt{3}}{3} \quad (5)$$

Ὥστε: $A_1E=EZ=Z\Gamma$.

426. Παραλληλεπιπέδου αἱ ἕδραι εἶναι ρόμβοι ἴσοι, μέ διαγωνίους α καί β. Νά ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος αὐτοῦ συναρτήσει τῶν α καί β.



σχ.329

Λ ύ σ ι ς: Εἶναι προφανές ὅτι πᾶσαι αἱ ἀκμαί τοῦ παραλ/δου τούτου εἶναι ἴσαι. Ἔστωσαν α καί β αἱ διαγώνιοι ἑκάστης ἕδρας.

Τό τετράεδρον $B_1B\Gamma_1A_1$ ἔχει τάς ἀκμάς:

$$B_1B=B_1\Gamma_1=B_1A_1=\frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2+\beta^2},$$

καί τάς ἀκμάς $A_1B=B\Gamma_1=\Gamma_1A_1=\alpha$.

Ἐάν φέρωμεν τό ὕψος B_1H, τό H θά εἶναι τό κέντρον βάρους τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου $A_1B\Gamma_1$ καί ἐπί πλέον:

$$BH=H\Gamma_1=\frac{2}{3}\Gamma_1H\Theta=\frac{2}{3}.\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}=\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}, \quad (1)$$

καί ἄρα:

$$B_1H^2=BB_1^2-BH^2=\frac{\alpha^2+\beta^2}{4}-\frac{3\alpha^2}{9}=\frac{9\alpha^2+9\beta^2-12\alpha^2}{36}=\frac{9\beta^2-3\alpha^2}{36},$$

ἐξ οὗ:
$$B_1H=\frac{1}{6}\sqrt{9\beta^2-3\alpha^2}. \quad (2)$$

Τό ἐμβαδόν τοῦ $A_1B\Gamma_1$ εἶναι: $(A_1B\Gamma_1)=\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$ καί ἑπομένως ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου εἶναι:

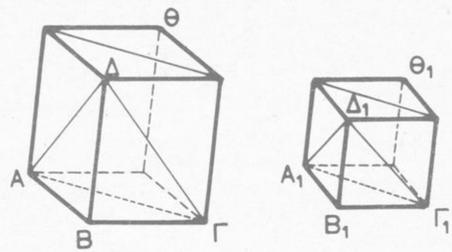
$$V(B_1A_1B\Gamma_1)=\frac{1}{3}.(A_1B\Gamma_1).B_1H=\frac{1}{3}.\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}.\frac{1}{6}\sqrt{9\beta^2-3\alpha^2}=\frac{\alpha^2}{24}\sqrt{3\beta^2-\alpha^2}.$$

Ἐπειδή δέ ὁ ὄγκος τοῦ παραλ/δου $(B\Delta_1)$ εἶναι ἑξαπλάσιος τοῦ ὄγκου τοῦ τετραέδρου $B_1A_1B\Gamma_1$, ἕπεται ὅτι:

$$V(AB\Gamma\Delta A_1B_1\Gamma_1\Delta_1)=6.\frac{\alpha^2}{24}\sqrt{3\beta^2-\alpha^2}=\frac{\alpha^2}{4}\sqrt{3\beta^2-\alpha^2}.$$

427. Ἐάν δύο παραλληλεπίπεδα ἔχουν μίαν τρίεδρον γωνίαν ἴσην, ὁ λόγος τῶν ὄγκων των ἰσοῦται πρός τόν λόγον τῶν γινομένων τῶν ἀκμῶν τῶν τριέδρων τούτων γωνιῶν.

Λ ύ σ ι ς: Ἔστω ὅτι τά παραλληλεπίπεδα (ΒΘ) καί ($Β_1Θ_1$) ἔχουν τήν τρίεδρον Β ἴσην πρός τήν τρίεδρον $Β_1$ καί τοῦ αὐτοῦ προσανατολισμοῦ.



σχ.330

Κατά τήν ἄσκησιν (394) θά εἶναι:

$$\frac{V(ΒΑΔΓ)}{V(Β_1Α_1Δ_1Γ_1)}=\frac{ΒΑ.ΒΓ.ΒΔ}{Β_1Α_1.Β_1Γ_1.Β_1Δ_1} \quad (1)$$

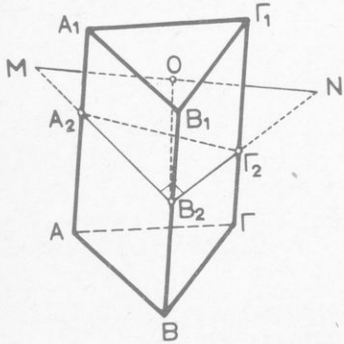
Ἀλλά $V(ΒΑΔΓ)=\frac{1}{6}V(ΒΘ)$

καί $V(Β_1Α_1Δ_1Γ_1)=\frac{1}{6}V(Β_1Θ_1)$, ὁπότε ἡ (1) γίνεται:

$$\frac{V(ΒΘ)}{V(Β_1Θ_1)}=\frac{ΒΑ.ΒΓ.ΒΔ}{Β_1Α_1.Β_1Γ_1.Β_1Δ_1} \quad (2)$$

428. Δίδεται πρῖσμα $ΑΒΓΑ_1Β_1Γ_1$ καί δύο σταθερά σημεῖα Μ καί Ν. Νά ἀχθῆ διά τῶν Μ,Ν ἐπίπεδον, τέμνον τό πρῖσμα κατά τρίγωνον ὀρθογώνιον.

Λ ύ σ ι ς: Ἔστω $ΜΒ_2Ν$ τό ζητούμενον ἐπίπεδον, τοιοῦτον ὥστε ἡ τομή $Α_2Β_2Γ_2$ νά εἶναι ὀρθογώνιον τρίγωνον. Ἐάν Ο εἶναι τό μέσον τοῦ τμήματος ΜΝ, τότε $ΟΒ_2=\frac{1}{2}ΜΝ$=ὡρισμένον.



σχ.331

Κατ' ἀκολουθίαν τό $Β_2$ εἶναι τομή τῆς ἀκμῆς $ΒΒ_1$ καί τοῦ κύκλου (Ο,$\frac{1}{2}$ΜΝ) τοῦ κειμένου εἰς τό ἐπίπεδον, τό ὁριζόμενον ὑπό τοῦ Ο καί τῆς ἀκμῆς $ΒΒ_1$. Ἐάν ὁ κύκλος οὗτος τέμνη τήν $ΒΒ_1$ εἰς δύο σημεῖα ἐσωτερικά τοῦ $ΒΒ_1$, ὑπάρχουν δύο λύσεις.

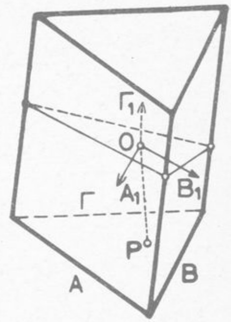
Ἐάν ἐφάπτεται τῆς $ΒΒ_1$, ὑπάρχει μία λύσις.

Ἐάν τό ἕν τῶν σημείων τομῆς εἶναι ἐσωτερικόν τοῦ $ΒΒ_1$ καί τό ἄλλο ἐξωτερικόν, ὑπάρχει μία λύσις.

Ἐάν καί τά δύο σημεῖα τομῆς εἶναι ἐξωτερικά τοῦ $ΒΒ_1$, δέν ὑπάρχει λύσις. Τά Μ,Ν ὑποτίθενται ἐπί τῶν ἑδρῶν $ΑΒΒ_1Α_1$, $ΒΓΓ_1Β_1$. Ἄλλως θεωροῦμεν τά σημεῖα τομῆς Ζ,Θ τῆς ΜΝ μετά τῶν ἑδρῶν τούτων. Ἡ αὐτή ἐργασία.

429. Τό ἄθροισμα τῶν διέδρων τῶν σχηματιζομένων ὑπό τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν τριγωνικοῦ πρίσματος μετά μιᾶς βά-

σεως αὐτοῦ, περιέχεται μεταξύ 2 ὀρθῶν καί 4 ὀρθῶν γωνιῶν.



Λ ύ σ ι ς: Ἔστω ἕν τριγωνικόν πρῖσμα. Παριστῶμεν διά τῶν Α,Β,Γ τάς διέδρους τάς σχηματιζομένας ὑπό τῶν παραπλεύρων ἕδρῶν μετά μιᾶς βάσεως (τῆς κάτω).

Ἄγομεν μίαν κάθετον τομήν καί εἰς τό ἐσωτερικόν αὐτῆς λαμβάνομεν σημεῖον Ο, καί ἐξ αὐτοῦ ἄγομεν τάς ἡμιευθείας OA_1, OB_1, $O\Gamma_1$, ΟΡ καθέτους πρός τάς πλευρᾶς τῆς τομῆς καί τῆς βάσεως καί φερομένας πρός τάς πλευράς τῆς τομῆς καί τῆς βάσεως.

Θέτομεν:

$\measuredangle B_1O\Gamma_1=\alpha$, $\measuredangle \Gamma_1OA_1=\beta$, $\measuredangle A_1OB_1=\gamma$, σχ.332

$\measuredangle POA_1=x$, $\measuredangle POB_1=y$, $\measuredangle \Gamma O\Gamma_1=\omega$.

Ἐκ τῶν τριέδρων γωνιῶν $O.PB_1\Gamma_1$, $O.P\Gamma_1A_1$, $O.PA_1B_1$ θά ἔχωμεν τάς σχέσεις:

$$\left.\begin{array}{l} y+\omega+\alpha<4 \text{ ὀρθ.} \\ \omega+x+\beta<4 \text{ ὀρθ.} \\ x+y+\gamma<4 \text{ ὀρθ.}\end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} y+\omega>\alpha \\ \omega+x>\beta \\ x+y>\gamma\end{array}$$

Διά προσθέσεως τούτων κατά μέλη, καί ἔχοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι $\alpha+\beta+\gamma=4$ ὀρθ., καθόσον αἱ OA_1, OB_1, $O\Gamma_1$ εἶναι κάθετοι πρός τάς παραπλεύρους ἕδρας, εὑρίσκομεν:

$$x+y+\omega<4 \text{ ὀρθ.} \quad \text{καί} \quad x+y+\omega>2 \text{ ὀρθ.}$$

Ἀλλά $x=2$ ὀρθ.$-A$, $y=2$ ὀρθ.$-B$, $\omega=2$ ὀρθ.$-\Gamma$ καί αἱ προηγούμεναι ἀνισότητες γίνονται:

$$A+B+\Gamma>2 \text{ ὀρθ.} \quad \text{καί} \quad A+B+\Gamma<4 \text{ ὀρθ.}$$

ἤτοι: $$2 \text{ ὀρθ.}<A+B+\Gamma<4 \text{ ὀρθ.}$$

430. Κόλουρος πυραμίς ἔχει ὕψος $υ=12$ cm. καί βάσεις ἰσόπλευρα τρίγωνα πλευρῶν 9cm. καί 4cm. Νά ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος αὐτῆς.

Λ ύ σ ι ς: Ἐκ τοῦ τύπου $V=\frac{1}{3}(B+\beta+\sqrt{B\beta}).υ$ ἔχομεν:

$$V=\frac{1}{3}\left(\frac{9^2\sqrt{3}}{4}+\frac{4^2\sqrt{3}}{4}+\sqrt{\frac{9^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{4^2\sqrt{3}}{4}}\right).12=(81\sqrt{3}+16\sqrt{3}+4.9\sqrt{3})=129\sqrt{3}\,\text{cm}^3$$

431. Κόλουρος πυραμίς ἔχει ὕψος 5α καί βάσεις ἰσόπλευρα τρίγωνα πλευρῶν 8α καί 2α. Νά ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος αὐτῆς.

Λ ύ σ ι ς: Εἶναι $(B)=\frac{(8\alpha)^2\sqrt{3}}{4}=\frac{64\alpha^2\sqrt{3}}{4}=16\alpha^2\sqrt{3}$

$(\beta)=\frac{(2\alpha)^2\sqrt{3}}{4}=\frac{4\alpha^2\sqrt{3}}{4}=\alpha^2\sqrt{3}$ καί $(B.\beta)=16\alpha^2\sqrt{3}.\alpha^2\sqrt{3}=48\alpha^4$

Κατ'ἀκολουθίαν:

$V=\frac{1}{3}(B+\beta+\sqrt{B\beta}).\upsilon=\frac{1}{3}(16\alpha^2\sqrt{3}+\alpha^2\sqrt{3}+4\alpha^2\sqrt{3}).5\alpha=35\alpha^3\sqrt{3}.$

432. Ὁμοίως μέ τά αὐτά δεδομένα καί αἱ βάσεις νά εἶναι κανονικά ἑξάγωνα.

Λ ύ σ ι ς: Εἶναι: $(B)=6.16.\alpha^2\sqrt{3}=96\alpha^2\sqrt{3}$,

$(\beta)=6.\alpha^2\sqrt{3}$ καί $(B.\beta)=6.96.\alpha^4.3=6^2.16.\alpha^4.3$

καί κατ'ἀκολουθίαν:

$V=\frac{1}{3}(B+\beta+\sqrt{B\beta}).\upsilon=\frac{1}{3}(96\alpha^2\sqrt{3}+6\alpha^2\sqrt{3}+24\alpha^2\sqrt{3}).5\alpha=210.\alpha^3\sqrt{3}.$

433. Κόλουρος κανονική πυραμίς ἔχει βάσεις τετράγωνα πλευρῶν 4α καί 9α, ὕφος δέ 6α. Νά ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος τῆς ὁποίας κορυφαί εἶναι τά μέσα τῶν πλευρῶν τῶν βάσεων τῆς δοθείσης.

Λ ύ σ ι ς: Εἶναι $(AB\Gamma\Delta)=(9\alpha)^2=81\alpha^2$,

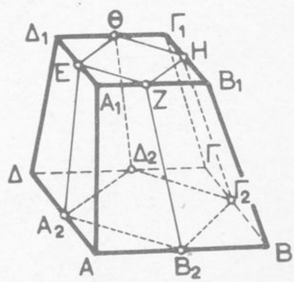
καί $(A_2B_2\Gamma_2\Delta_2)=\frac{1}{2}.81\alpha^2=40,5.\alpha^2$,

$(A_1B_1\Gamma_1\Delta_1)=\frac{1}{2}.16\alpha^2=8\alpha^2$.

Κατ'ἀκολουθίαν ὁ ὄγκος τῆς κολούρου πυραμίδος (A_2H) θά εἶναι:

$V=\frac{1}{3}(40,5\alpha^2+8\alpha^2+\sqrt{40,5\alpha^2.8\alpha^2}).6\alpha$

$=(48,5\alpha^2+18\alpha^2).3\alpha=199,5\alpha^3.$



σχ.333

434. Αἱ βάσεις κολούρου πυραμίδος εἶναι κανονικά ἑξάγωνα πλευρῶν 4α καί 9α. Νά ὑπολογισθῇ τό ἐμβαδόν τῆς μέσης τομῆς αὐτῆς καί ἀκολούθως ὁ ὄγκος της, ἄν τό ὕψος της εἶναι 6α.

Λ ύ σ ι ς: Τά ἐμβαδά τῶν βάσεων εἶναι:

$(B)=6.\frac{(9\alpha)^2\sqrt{3}}{4}=\frac{6.81\alpha^2\sqrt{3}}{4}=\frac{486\alpha^2\sqrt{3}}{4}=121,5\alpha^2\sqrt{3}$,

$(B')=6.\frac{(4\alpha)^2\sqrt{3}}{4}=\frac{6.16\alpha^2\sqrt{3}}{4}=24\alpha^2\sqrt{3}$.

Τό ἐμβαδόν τῆς μέσης τομῆς εἶναι:

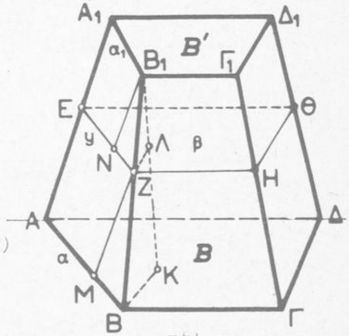
$(B'')=\frac{1}{4}(B+B'+2\sqrt{BB'})=\frac{1}{4}(121,5\alpha^2\sqrt{3}+24\alpha^2\sqrt{3}+2.54\alpha^2\sqrt{3})=63,375\alpha^2\sqrt{3}$

Ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος εἶναι:

$$V=\frac{1}{3}(B+B'+\sqrt{BB'})\upsilon=\frac{1}{3}(121,5\alpha^2\sqrt{3}+24\alpha^2\sqrt{3}+54\alpha^2\sqrt{3})6\alpha=399\alpha^2\sqrt{3}.$$

435. Κόλουρος πυραμίς νά τμηθῆ ὑπό ἐπιπέδου παραλλήλου πρός τάς βάσεις αὐτῆς, οὕτως ὥστε τό ἐμβαδόν τῆς τομῆς νά εἶναι ἀνάλογον τῶν ἐμβαδῶν τῶν βάσεων. Ἀκολούθως νά ὑπολογισθῆ ὁ λόγος τῶν ὄγκων τῶν δύο κολούρων πυραμίδων, εἰς ἅς χωρίζεται ἡ ἀρχική ὑπό τοῦ ἐν λόγῳ ἐπιπέδου, ἄν (B) καί (B΄) εἶναι τά ἐμβαδά τῶν βάσεων τῆς δοθείσης.

Λ ύ σ ι ς: Εἰς τήν (§ 105 σημ.II) τοῦ βιβλίου εἴδομεν ὅτι ὑπάρχει τομή παράλληλος πρός τάς βάσεις B΄ καί B κολούρου πυραμίδος, τῆς ὁποίας τό ἐμβαδόν εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο βάσεων τῆς κολούρου καί ὅτι $y=\sqrt{\alpha\alpha_1}$, εἶναι τό τμῆμα τό παράλληλον πρός τάς AB καί A_1B_1 καί τό ὁποῖον διαιρεῖ τήν ἕδραν ABB_1A_1 εἰς δύο ὅμοια τραπέζια.



σχ.334

Οἱ ὄγκοι τῶν κολούρων πυραμίδων εἶναι:

$$V_1=\frac{1}{3}(B+\beta+\sqrt{B\beta}).\Lambda K$$
$$=\frac{1}{3}(B+\sqrt{BB'}+\sqrt{B\sqrt{BB'}}).\Lambda K \qquad (1)$$

καί
$$V_2=\frac{1}{3}(\beta+B'+\sqrt{\beta B'}).B_1\Lambda$$
$$=\frac{1}{3}(\sqrt{BB'}+B'+\sqrt{B'\sqrt{BB'}}).B_1\Lambda \qquad (2)$$

Κατ᾽ἀκολουθίαν:

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{B+\sqrt{BB'}+\sqrt{B\sqrt{BB'}}}{B'+\sqrt{BB'}-\sqrt{B'\sqrt{BB'}}}\cdot\frac{\Lambda K}{B_1\Lambda} \qquad (3)$$

Ἄγομεν τάς B_1N καί ZM καθέτους πρός τάς EZ καί AB ἀντιστοίχως. Θά εἶναι: $NZ=y-\alpha_1=\sqrt{\alpha\alpha_1}-\alpha_1=\sqrt{\alpha_1}(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\alpha_1})$

καί $MB=\alpha-y=\alpha-\sqrt{\alpha\alpha_1}=\sqrt{\alpha}(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\alpha_1})$

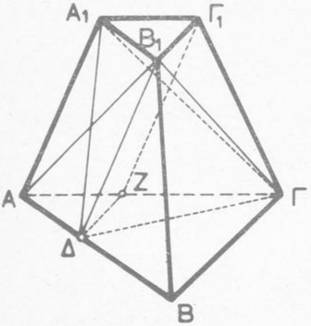
καί $\frac{\Lambda K}{B_1\Lambda}=\frac{ZB}{B_1Z}=\frac{MB}{NZ}=\frac{\sqrt{\alpha}(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\alpha_1})}{\sqrt{\alpha_1}(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\alpha_1})}=\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha_1}}=\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha_1}}=\sqrt{\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{B'}}}$,

ὁπότε ἡ (3) γίνεται:

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{(B+\sqrt{BB'}+\sqrt{B\sqrt{BB'}})\sqrt{\sqrt{B}}}{(B'+\sqrt{BB'}+\sqrt{B'\sqrt{BB'}})\sqrt{\sqrt{B'}}}=\sqrt[4]{\frac{B^3}{B'^3}}.$$

436. Νά κάμετε γεωμετρικήν ἀπόδειξιν εὑρέσεως τοῦ ὄγκου κολούρου τριγωνικῆς πυραμίδος.

Λ ύ σ ι ς: Ἔστω $ΑΒΓΑ_1Β_1Γ_1$ κόλουρος τριγωνική πυραμίς.



σχ.335

Ἄγομεν τάς $Β_1Α$ καί $Β_1Γ$, ὁπότε ἡ κόλουρος χωρίζεται εἰς δύο πυραμίδας, τήν τριγωνικήν $Β_1ΑΒΓ$ καί τήν τετραγωνικήν $Β_1ΑΓΓ_1Α_1$.

Ἡ τριγωνική ἔχει βάσιν ΑΒΓ καί ὕψος τό ὕψος τῆς κολούρου.

Ἐκ τῶν $Β_1$ καί $Γ_1$ ἄγομεν τάς παραλλήλους πρός τήν $Α_1Α$. Τότε, ἄν ἀχθῇ καί ἡ $ΓΑ_1$ ἡ τετραγωνική πυραμίς $Β_1ΑΓΓ_1Α_1$ χωρίζεται εἰς δύο τριγωνικάς πυραμίδας, τάς: $Β_1ΓΓ_1Α_1$ καί $Β_1ΑΓΑ_1$. Τούτων ἡ $Β_1ΓΓ_1Α_1$ ἔχει βάσιν τήν ἄνω βάσιν τῆς κολούρου καί ὕψος τό τῆς κολούρου.

Θά εἶναι δέ τώρα:

$$V(Β_1ΑΓΑ_1) = V(ΔΑΓΑ_1) = V(Α_1ΑΔΓ) \qquad (1)$$

Ἡ $Α_1ΑΔΓ$ ἔχει βάσιν ΑΔΓ καί ὕψος τό τῆς κολούρου.

Τά τρίγωνα ΑΔΓ καί ΑΔΖ ἔχουν τό αὐτό ὕψος, τό ἀγόμενον ἐκ τοῦ Δ. Ἄρα:

$$\frac{(ΑΔΓ)}{(ΑΔΖ)} = \frac{ΑΓ}{ΑΖ} = \frac{ΑΒ}{ΑΔ} = \frac{(ΑΒΓ)}{(ΑΔΓ)} \Longrightarrow (ΑΔΓ)^2 = (ΑΒΓ).(ΑΔΖ) \quad ἤ$$

$$(ΑΔΓ)^2 = Β.β \quad ἤ \quad (ΑΔΓ) = \sqrt{Ββ}.$$

Δηλαδή ἡ πυραμίς $Α_1ΑΔΓ$ ἔχει ὡς βάσιν τήν μέσην ἀνάλογον τῶν δύο βάσεων τῆς κολούρου καί ὕψος τό τῆς κολούρου.

Ἄρα: Πᾶσα κόλουρος τριγωνική πυραμίς χωρίζεται εἰς τρεῖς πυραμίδας τριγωνικάς τοῦ αὐτοῦ ὕψους μέ τό τῆς κολούρου καί ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία ἔχει βάσιν τήν κάτω βάσιν τῆς κολούρου, ἡ ἄλλη τήν ἄνω βάσιν καί ἡ τρίτη ἔχει ὡς βάσιν τήν μέσην ἀνάλογον τῶν δύο βάσεων.

437. Νά εὑρεθῇ ὄγκος κολούρου πυραμίδος διά χωρισμοῦ αὐτῆς εἰς κοινάς πυραμίδας μέ τήν βοήθειαν ἐσωτερικοῦ σημείου Ο τῆς μιᾶς βάσεως τῆς πυραμίδος αὐτῆς, συνδεομένου μέ ὅλας τάς ἄλλας κορυφάς αὐτῆς.

Λ ύ σ ι ς: Ἔστωσαν $β, β_1, υ, V$ τά ἐμβαδά τῶν βάσεων, τό ὕψος καί ὁ ὄγκος τῆς κολούρου πυραμίδος (σχ.336).

Ἔστω Ο ἐσωτερικόν σημεῖον τῆς βάσεως ΑΒΓΔ, τό ὁποῖον συνδέομεν μέ τάς κορυφάς τῆς πυραμίδος. Χωρίζεται οὕτως ἡ κόλουρος πυραμίς εἰς τήν πυραμίδα $Ο.Α_1Β_1Γ_1Δ_1$, τῆς ὁποίας ὁ ὄγκος εἶναι: $V_1 = \frac{1}{3}(β_1).υ$ (1).

Αἱ λοιπαί πυραμίδες ἔχουν κορυφήν τό Ο καί βάσεις τραπέζια (παράπλευρα).

Θεωροῦμεν μίαν τούτων, τήν $OABB_1A_1$. Ἄγομεν τήν διαγώνιον AB_1 καί λαμβάνομεν τάς τριγωνικάς πυραμίδας $OABB_1$ καί OAB_1A_1.

Ἡ πρώτη $OABB_1$ ἔχει ὕψος υ καί βάσιν OAB. Ἄρα ὁ ὄγκος της εἶναι: $V_2=\frac{1}{3}(OAB).\upsilon$ (2)

Θεωροῦντες τάς λοιπάς πυραμίδας εὑρίσκομεν τό ἄθροισμα τῶν ὄγκων αὐτῶν:

$$V=\frac{1}{3}(OAB+OB\Gamma+\ldots).\upsilon=\frac{1}{3}(\beta).\upsilon$$

Εἶναι δέ καί:

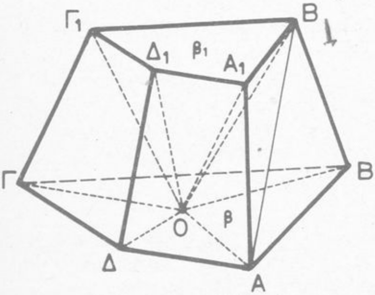
$$\frac{V(OAB_1A_1)}{V(OABB_1)}=\frac{(AB_1A_1)}{(ABB_1)}=\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{\sqrt{\beta_1}}{\sqrt{\beta}} \Longrightarrow V(OAB_1A_1)=\frac{\sqrt{\beta_1}}{\sqrt{\beta}}\cdot V(OABB_1)$$

Ἐκ τούτων προκύπτει ὅτι τό ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν τετραέδρων, ὡς τό OAB_1A_1, ἰσοῦται πρός τό γινόμενον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραέδρων, ὡς τό $OABB_1$, ἐπί τόν ἀριθμόν $\frac{\sqrt{\beta_1}}{\sqrt{\beta}}$, ἤτοι:

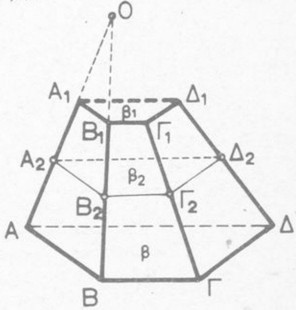
$$V(OABB_1+\ldots)=\frac{\beta.\upsilon}{3}\cdot\frac{\sqrt{\beta_1}}{\sqrt{\beta}}=\frac{\sqrt{\beta\beta_1}.\upsilon}{3}$$

Ἄρα ὁ ὄγκος τῆς κολούρου θά εἶναι:

$$V=\frac{1}{3}(\beta+\beta_1+\sqrt{\beta\beta_1}).\upsilon$$



σχ. 336



σχ. 337

438. Κόλουρος πυραμίς μέ βάσεις ἐμβαδῶν (B), (B΄) τέμνεται ὑπό ἐπιπέδου παραλλήλου πρός τάς βάσεις, καί τοῦ ὁποίου ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων ἀπό τάς βάσεις εἶναι $\frac{\mu}{\nu}$. Ποῖον εἶναι τό ἐμβαδόν τῆς τομῆς;

Λ ύ σ ι ς: Ἔστω κόλουρος πυραμίς (σχ. 337) μέ βάσεις παραλλήλους $AB\Gamma\Delta A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$ καί $A_2B_2\Gamma_2\Delta_2$ μία τομή παράλληλος πρός τάς βάσεις,καί τῆς ὁποίας ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων ἀπό τάς βάσεις εἶναι $\frac{\mu}{\nu}$.

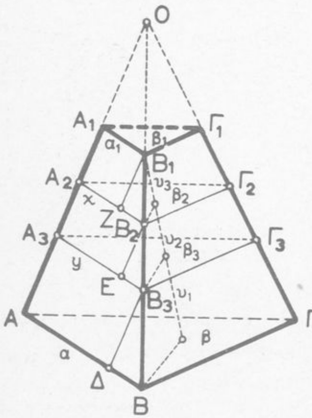
Ἔστωσαν $(\beta),(\beta_1),(\beta_2)$ τά ἐμβαδά τῶν βάσεων καί τῆς τομῆς.Τά τρία ταῦτα πολύγωνα εἶναι ὅμοια.Ἄν Ο εἶναι ἡ τομή τῶν AA_1 καί BB_1,θά εἶναι:

$$\frac{(\beta_2)}{OA_2^2}=\frac{(\beta)}{OA^2}=\frac{(\beta_1)}{OA_1^2} \Rightarrow \frac{\sqrt{\beta_2}}{OA_2}=\frac{\sqrt{\beta}}{OA}=\frac{\sqrt{\beta_1}}{OA_1} \text{ ἤ } \frac{\sqrt{\beta_2}-\sqrt{\beta_1}}{OA_2-OA_1}=\frac{\sqrt{\beta}-\sqrt{\beta_2}}{OA-OA_2} \text{ ἤ}$$

$$\frac{\sqrt{\beta_2}-\sqrt{\beta_1}}{\sqrt{\beta}-\sqrt{\beta_2}}=\frac{A_2A_1}{AA_2}=\frac{\nu}{\mu}, \text{ἐξ οὗ: } \sqrt{\beta_2}=\frac{\nu\sqrt{\beta}+\mu\sqrt{\beta_1}}{\mu+\nu} \Rightarrow (\beta_2)=\frac{\beta_1\mu^2+\beta\nu^2+2\mu\nu\sqrt{\beta\beta_1}}{(\mu+\nu)^2}$$

439. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ὑπάρχουν δύο ἐπίπεδα παράλληλα πρός τάς βάσεις κολούρου πυραμίδος μέ βάσεις παραλλήλους, διαιροῦντα αὐτήν εἰς τρία ἰσοδύναμα μέρη.

Λ ύ σ ι ς: Ἔστωσαν $\beta,\beta_1,\beta_2,\beta_3$ τά ἐμβαδα τῶν δύο βάσεων τῆς κολούρου πυραμίδος καί τῶν δύο παραλλήλων τομῶν. Ἔστω Ο ἡ τομή τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν καί $A_2B_2=x$, $A_3B_3=y$.



σχ.338

Τά πολύγωνα (βάσεις καί τομαί εἶναι ὅμοια. Ἄρα,ἄν $\upsilon_1,\upsilon_2,\upsilon_3$ εἶναι τά ὕψη τῶν τριῶν κολούρων κώνων (ἐκ τῶν κάτω πρός τά ἄνω), θά ἔχωμεν:

$$\upsilon_1(\beta+\beta_3+\sqrt{\beta\beta_3})=\upsilon_2(\beta_3+\beta_2+\sqrt{\beta_3\beta_2})=$$
$$=\upsilon_3(\beta_2+\beta_1+\sqrt{\beta_1\beta_2}). \quad (1)$$

Ἀλλά εἶναι καί:

$$\frac{\beta}{\alpha^2}=\frac{\beta_1}{\alpha_1^2}=\frac{\beta_2}{x^2}=\frac{\beta_3}{y^2} \qquad (2)$$

Ἄγομεν τήν $B_1Z\perp A_2B_2$, $B_2E\perp A_3B_3$, $B_3\Delta\perp AB$,ὁπότε:

$$\frac{B_3\beta}{\upsilon_1}=\frac{\beta_2B_3}{\upsilon_2}=\frac{B_1B_2}{\upsilon_3} \text{ ἤ } \frac{\Delta B}{\upsilon_1}=\frac{EB_3}{\upsilon_2}=\frac{ZB_2}{\upsilon_1} \text{ ἤ}$$

$$\frac{\alpha-y}{\upsilon_1}=\frac{y-x}{\upsilon_2}=\frac{x-\alpha_1}{\upsilon_1}. \qquad (3)$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων λαμβάνομεν τάς:

$$\alpha^3-y^3=y^3-x^3=x^3-\alpha_1^3$$

ἤ

$$\left.\begin{array}{l}2y^3-x^3=\alpha^3\\ x^3+y^3=\alpha^3+\alpha_1^3\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}3x^3=\alpha^3-2\alpha_1^3\\ 3y^3=2\alpha^3+\alpha_1^3\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}x=\sqrt[3]{\dfrac{\alpha^3-2\alpha_1^3}{3}}\\ y=\sqrt[3]{\dfrac{2\alpha^3+\alpha_1^3}{3}}\end{array}$$

Κατασκευάζονται τά x,y διά τοῦ κανόνος καί τοῦ διαβήτου καί διατί;

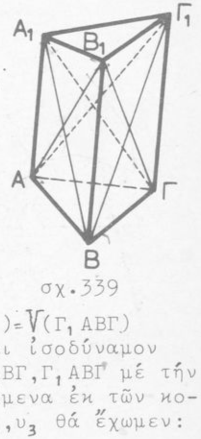
~~440.~~ 'Η βάσις ὀρθοῦ κολοβοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος ἔχει πλευράς 9 cm., 12 cm. καί 15 cm. Αἱ παράπλευροι ἀκμαί εἶναι 5 cm., 8 cm. καί 10 cm. Νά ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος αὐτοῦ.

Λ ύ σ ι ς: Ἐπειδή $15^2=9^2+12^2$ ἤ $225=81+144=225$, ἡ βάσις εἶναι ὀρθογώνιον τρίγωνον καί ἑπομένως τό ἐμβαδόν της εἶναι: $(B)=\frac{1}{2}.9.12=9.6=54\ cm^2$.

'Ο ὄγκος τοῦ κολοβοῦ τούτου πρίσματος εἶναι:

$V=\frac{1}{3}(B)(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{1}{3}.54(5+8+10)=18.23=414\ cm^3$.

441. 'Ο ὄγκος κολοβοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος ἰσοῦται πρός τό τρίτον τοῦ ἐμβαδοῦ μιᾶς βάσεως, ἐπί τό ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τῶν κορυφῶν τῆς ἄλλης βάσεως ἐπί τήν πρώτην.



σχ.339

Λ ύ σ ι ς: Ἔστω $ΑΒΓΑ_1Β_1Γ_1$ κολοβόν τριγωνικόν πρῖσμα. Τό ἐπίπεδον $ΑΒ_1Γ$ χωρίζει τό πρῖσμα εἰς δύο πυραμίδας, τήν τριγωνικήν $Β_1ΑΒΓ$ μέ βάσιν τήν ΑΒΓ καί κορυφήν $Β_1$, καί τήν τετραγωνικήν $ΒΑΓΓ_1Α_1$ μέ βάσιν $ΑΓΓ_1Α_1$ καί κορυφήν τό $Β_1$.

Τό ἐπίπεδον $Α_1Β_1Γ$ χωρίζει τήν τετραγωνικήν εἰς δύο τριγωνικάς, τάς $Β_1ΑΓΑ_1$ καί $Β_1ΓΓ_1Α_1$. Ἐάν ἀχθῇ ἡ $Α_1Β$, τότε:

$V(Β_1ΑΓΑ_1) = V(ΒΑΓΑ_1) = V(Α_1ΑΒΓ)$

καί $V(Β_1ΓΓ_1Α_1) = V(ΒΓΓ_1Α_1) = V(Α_1ΒΓΓ_1) = V(ΑΒΓΓ_1) = V(Γ_1ΑΒΓ)$

Ὥστε τό κολοβόν τριγωνικόν πρῖσμα εἶναι ἰσοδύναμον πρός τό ἄθροισμα τριῶν πυραμίδων $Β_1ΑΒΓ, Α_1ΑΒΓ, Γ_1ΑΒΓ$ μέ τήν αὐτήν βάσιν ΑΒΓ καί ὕψη ἀντιστοίχως τά ἀγόμενα ἐκ τῶν κορυφῶν $Β_1, Α_1$ καί $Γ_1$. Ἄν ταῦτα κληθοῦν $\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3$ θά ἔχωμεν:

$$V(ΑΒΓΑ_1Β_1Γ_1)=\frac{1}{3}(ΑΒΓ)(\upsilon_1+\upsilon_2+\upsilon_3).$$

442. 'Ο ὄγκος κολοβοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος ἰσοῦται πρός τό γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ μιᾶς τῶν βάσεών του ἐπί τήν ἀπόστασιν τοῦ κέντρου βάρους τῆς ἄλλης βάσεως ἀπό ταύτην.

Λ ύ σ ι ς: Ἔστω $ΑΒΓΑ_1Β_1Γ_1$ κολοβόν τριγωνικόν πρῖσμα καί $Α_2Β_2Γ_2$ μία κάθετος τομή αὐτοῦ καί $Ζ, Ζ_1$ τά κέντρα βάρους τῶν βάσεων αὐτοῦ (σχ.340). Ἐάν H καί H_1 εἶναι τά μέσα τῶν AZ καί A_1Z_1, τότε ἐκ τῶν τραπεζίων AZZ_1A_1, $H\Delta\Delta_1H_1$, $B\Gamma\Gamma_1B_1$ θά ἔχωμεν:

$$AA_1+ZZ_1=2HH_1 \Rightarrow HH_1=\frac{1}{2}(AA_1+ZZ_1) \qquad (1)$$

$$HH_1+\Delta\Delta_1=2ZZ_1 \Rightarrow ZZ_1=\frac{1}{2}(HH_1+\Delta\Delta_1) \qquad (2)$$

καί $BB_1+\Gamma\Gamma_1=2\Delta\Delta_1 \Rightarrow \Delta\Delta_1=\frac{1}{2}(BB_1+\Gamma\Gamma_1) \qquad (3)$

Ἀντικαθιστῶντες τά HH_1 καί $\Delta\Delta_1$ ἐκ τῶν (1) καί (3) εἰς τήν (2) εὑρίσκομεν:

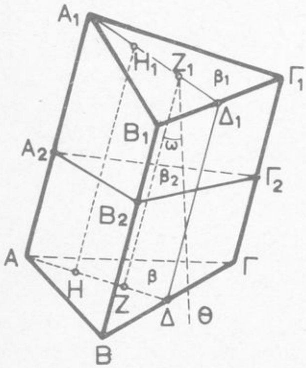
$$ZZ_1=\frac{1}{3}(AA_1+BB_1+\Gamma\Gamma_1) \qquad (4)$$

Ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος εἶναι:

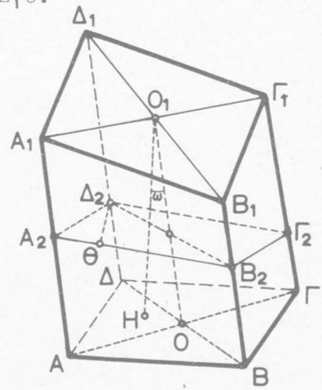
$$V=\frac{1}{3}(A_2B_2\Gamma_2)(AA_1+BB_1+\Gamma\Gamma_1)=(\beta_2).ZZ_1 \qquad (5)$$

Ἐκ τοῦ Z_1 ἄγομεν τήν κάθετον $Z_1\Theta$ πρός τήν ἕδραν $AB\Gamma$ καί ἔστω $\sphericalangle ZZ_1\Theta=\omega$. Ἐάν β, β_2 εἶναι τά ἐμβαδά τῆς βάσεως $AB\Gamma$ καί τῆς καθέτου τομῆς $A_2B_2\Gamma_2$, τότε $\beta_2=\beta.\sigma\upsilon\nu\omega$ καί $Z_1\Theta=ZZ_1\sigma\upsilon\nu\omega$. Μεταξύ τῶν σχέσεων τούτων ἀπαλείφοντες τό συνω λαμβάνομεν $(\beta_2).ZZ_1=(\beta).Z_1\Theta$ καί ἡ (5) γίνεται:

$$V=(\beta).Z_1\Theta.$$



σχ.340



σχ.341

443. Ὁ ὄγκος κολοβοῦ παραλληλεπιπέδου (αἱ βάσεις παραλληλόγραμμα μή παράλληλα) ἰσοῦται πρός τό γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ μιᾶς καθέτου τομῆς αὐτοῦ ἐπί τήν μέσην ἀριθμητικήν τῶν μηκῶν τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν του.

Λ ύ σ ι ς: Ἔστω $AB\Gamma\Delta A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$ κολοβόν παραλληλεπίπεδον καί O, O_1 τά κέντρα τῶν βάσεων.

Τό διαγώνιον ἐπίπεδον $ΒΔΔ_1Β_1$ χωρίζει τό κολοβόν παραλ/δον εἰς δύο κολοβά τριγωνικά πρίσματα $ΑΒΔΑ_1Β_1Δ_1$ καί $ΒΓΔΒ_1Γ_1Δ_1$. Θά ἔχωμεν:

$$V=V_1+V_2=\frac{1}{3}(Α_2Β_2Δ_2)(ΑΑ_1+ΒΒ_1+ΔΔ_1)+\frac{1}{3}(Β_2Γ_2Δ_2)(ΒΒ_1+ΓΓ_1+ΔΔ_2)$$

$$=\frac{1}{2}(Α_2Β_2Γ_2Δ_2).\frac{1}{3}(ΑΑ_1+ΒΒ_1+ΓΓ_1+ΔΔ_1+Β_1Β_1+ΔΔ_1) \quad (1)$$

Ἐκ τῶν τραπεζίων $ΑΑ_1Γ_1Γ$ καί $ΒΒ_1Δ_1Δ$ ἔχομεν:

$$ΑΑ_1+ΓΓ_1=2.ΟΟ_1 \quad καί \quad ΒΒ_1+ΔΔ_1=2.ΟΟ_1, \quad (2)$$

ἐξ ὧν λαμβάνομεν:

$$ΟΟ_1=\frac{1}{4}(ΑΑ_1+ΒΒ_1+ΓΓ_1+ΔΔ_1), \quad (3)$$

ὁπότε ἡ (1) γίνεται:

$$V=(Α_2Β_2Γ_2Δ_2).ΟΟ_1 \quad (4)$$

444. Ὁ ὄγκος κολοβοῦ παραλ/δου ἰσοῦται πρός τό γινόμενον τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο παραλλήλων ἑδρῶν αὐτοῦ ἐπί τό μῆκος τῆς ἀποστάσεως αὐτῶν.

Λ ύ σ ι ς: Εἰς τό σχῆμα τῆς ἀσκήσεως 443 ἄγομεν τήν $Δ_2Θ \perp Α_2Β_2$ ὁπότε ἡ $Δ_2Θ$ θά εἶναι κάθετος πρός τήν ἕδραν $ΑΒΒ_1Α_1$.

Ἀπεδείξαμεν (ἄσκ.443) ὅτι:

$$V=(Α_2Β_2Γ_2Δ_2).\frac{1}{4}(ΑΑ_1+ΒΒ_1+ΓΓ_1+ΔΔ_1) \quad (1)$$

Ἀλλά $(Α_2Β_2Γ_2Δ_2)=Α_2Β_2.Δ_2Θ-Γ_2Δ_2.Δ_2Θ$, καί ἡ (1) γίνεται:

$$V=\left(\frac{ΑΑ_1+ΒΒ_1}{4}.Α_2Β_2+\frac{ΓΓ_1+ΔΔ_1}{4}.Γ_2Δ_2\right).Δ_2Θ$$

ἤ

$$V=\frac{1}{2}(ΑΒΒ_1Α_1+ΓΔΔ_1Γ_1).Δ_2Θ. \quad (2)$$

445. Ὁ ὄγκος κολοβοῦ παραλ/δου ἰσοῦται πρός τό γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ μιᾶς τῶν βάσεών του ἐπί τό μῆκος τῆς ἀποστάσεως τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων τῆς ἄλλης βάσεως ἀπό ταύτην.

Λ ύ σ ι ς: Εἰς τήν ἄσκησιν 443 εὕρομεν ὅτι:

$$V=(Α_2Β_2Γ_2Δ_2).ΟΟ_1 \quad (1)$$

Ἔστω ω ἡ ὀξεῖα γωνία τῶν ἐπιπέδων ΑΒΓΔ καί $Α_2Β_2Γ_2Δ_2$.

Ἐπειδή τό $Α_2Β_2Γ_2Δ_2$ εἶναι ἡ προβολή τοῦ ΑΒΓΔ, θά ἔχωμεν:

$$(Α_2Β_2Γ_2Δ_2)=(ΑΒΓΔ).συνω \quad (2)$$

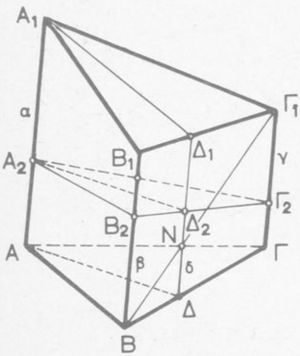
Ἐπειδή ὅμως εἶναι: $Ο_1Η=ΟΟ_1.συνω$, ἡ (1) γίνεται:

$$V=(ΑΒΓΔ).συνω.\frac{Ο_1Η}{συνω}=(ΑΒΓΔ).Ο_1Η \quad (3)$$

446. Διά μιᾶς τῶν ἀκμῶν κολοβοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος

νά ἀχθῇ ἐπίπεδον διαιροῦν αὐτό εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη.

Λ ύ σ ι ς: Ἔστω ΑΒΓ$A_1B_1\Gamma_1$ κολοβόν τριγωνικόν πρῖσμα.



σχ.342

Θέτομεν: $AA_1=\alpha$, $BB_1=\beta$, $\Gamma\Gamma_1=\gamma$, $\Delta\Delta_1=\delta$ καί $\frac{\Delta B}{\Delta\Gamma}=\frac{\mu}{\nu}$, (1)

ἔνθα Δ ἡ τομή τῆς ΒΓ ὑπό τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου $AA_1\Delta_1\Delta$.

Ἄγομεν μίαν κάθετον τομήν $A_2B_2\Gamma_2$ καί θά ἔχωμεν:

$$(A_2B_2\Delta_2)\cdot\frac{\alpha+\beta+\delta}{3}=(A_2\Gamma\Delta_2)\cdot\frac{\alpha+\gamma+\delta}{3}$$

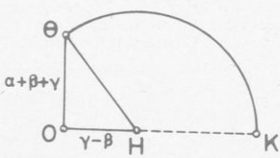
$$\Leftrightarrow \quad \frac{(A_2B_2\Delta_2)}{(A_2\Gamma_2\Delta_2)}=\frac{\alpha+\gamma+\delta}{\alpha+\beta+\delta} \qquad (2)$$

Ἀλλά: $\frac{(A_2B_2\Delta_2)}{(A_2\Gamma_2\Delta_2)}=\frac{B_2\Delta_2}{\Gamma_2\Delta_2}=\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}=\frac{\mu}{\nu}$ (3)

καί $\delta=\frac{\mu\gamma+\nu\beta}{\mu+\nu}$ (ἄν ἀχθῇ ἡ $B\Gamma_1$ τέμνουσα τήν δ εἰς τό Ν), ὁπότε ἡ (2) γίνεται:

$$\frac{\mu}{\nu}=\frac{(\alpha+2\gamma)\mu+(\alpha+\beta+\gamma)\nu}{(\alpha+\beta+\gamma)\mu+(\alpha+2\beta)\nu} \Rightarrow (\alpha+\beta+\gamma)\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2+2(\beta-\gamma)\frac{\mu}{\nu}-(\alpha+\beta+\gamma)=0,$$

ἐξ ἧς: $\frac{\mu}{\nu}=\frac{\gamma-\beta+\sqrt{(\gamma-\beta)^2+(\alpha+\beta+\gamma)^2}}{\alpha+\beta+\gamma}$



Ἐπί μιᾶς εὐθείας λαμβάνομεν τμῆμα $OH=\gamma-\beta$. Ἄγομεν τό $O\Theta=\alpha+\beta+\gamma$ κάθετον πρός τό ΟΗ. Θά εἶναι:

$H\Theta=\sqrt{(\gamma-\beta)^2+(\alpha+\beta+\gamma)^2}$ καί γράφομεν κύκλον (Η,ΗΟ), ὅστις τέμνει τήν ΟΗ εἰς τό Κ, ὁπότε

$OK=\gamma-\beta+\sqrt{(\gamma-\beta)^2+(\alpha+\beta+\gamma)^2}$ καί $\frac{\mu}{\nu}=\frac{OK}{O\Theta}$. Ἀρκεῖ, ἑπομένως, διά νά εὕρωμεν τό Δ, νά διαιρέσωμεν τήν ἀκμήν ΒΓ εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ΟΚ, ΟΘ.

447. Ὀρθόν κολοβόν πρῖσμα ἔχει βάσιν κανονικόν ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ πλευρᾶς γ. Αἱ παράπλευροι ἀκμαί AA_1, $\Gamma\Gamma_1$, EE_1 εἶναι ἀντιστοίχως α, 2α, 3α. Νά ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος αὐτοῦ.

Λ ύ σ ι ς: Τά τρία παράλληλα ἐπίπεδα $B\Gamma\Gamma_1B_1$, $A\Delta\Delta_1A_1$, ZEE_1Z_1 διαιροῦν εἰς μέρη ἀνάλογα τάς εὐθείας ΓΘΕ καί $\Gamma_1\Theta_1E_1$. Ἐπειδή δέ ΓΘ=ΘΕ, θά ἔχωμεν $\Gamma_1\Theta_1=\Theta_1E_1$.

Κατ' ἀκολουθίαν ἐκ τοῦ τραπεζίου $\Gamma\Gamma_1E_1E$ θά ἔχωμεν:

$$\Theta\Theta_1=\frac{1}{2}(\Gamma\Gamma_1+EE_1)$$

ή $\quad \Theta\Theta_1 = \frac{1}{2}(2\alpha+3\alpha) = \frac{5\alpha}{2}$

Είς τό έπίπεδον $AA_1\Delta_1\Delta$, ἄγομεν τήν $A_1H \perp \Delta\Delta_1$, ἡ ὁποία τέμνει τήν $\Theta\Theta_1$ είς τό K. Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων $A_1H\Delta_1$ καί $A_1K\Theta_1$, ἔχομεν:

$$\frac{H\Delta_1}{K\Theta_1} = \frac{AH}{AK} = \frac{A\Delta}{A\Theta} = \frac{2\gamma}{\frac{3\gamma}{2}} = \frac{4}{3},$$

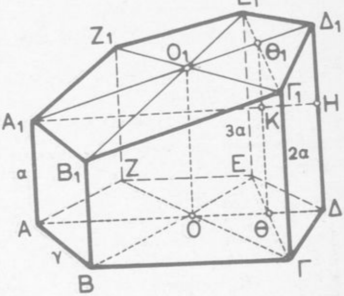
ἐξ οὗ: $H\Delta_1 = \frac{4}{3}K\Theta_1 = \frac{4}{3}\left(\frac{5\alpha}{2}-\alpha\right) = 2\alpha$

καί κατ'ἀκολουθίαν:

$\Delta\Delta_1 = \Delta H + H\Delta_1 = \alpha+2\alpha = 3\alpha.$

Είς τό τραπέζιον $AA_1\Delta_1\Delta$ θά ἔχωμεν:

$$OO_1 = \frac{1}{2}(AA_1 + \Delta\Delta_1) = \frac{\alpha+3\alpha}{2} = 2\alpha$$



σχ.343

Είς τά τραπέζια BB_1E_1E καί $\Gamma\Gamma_1Z_1Z$ θά ἔχωμεν:

$2.OO_1 = BB_1 + EE_1$ ἤ $BB_1 = 2.OO_1 - EE_1 = 4\alpha - 3\alpha = \alpha$

καί $\quad 2.OO_1 = \Gamma\Gamma_1 + ZZ_1$ ἤ $ZZ_1 = 2.OO_1 - \Gamma\Gamma_1 = 4\alpha - 2\alpha = 2\alpha.$

Οὕτω, γνωρίζομεν τάς ἕξ παραπλεύρους ἀκμάς τοῦ πρίσματος.

Τά διαγώνια ἐπίπεδα, τά ἀγόμενα διά τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν χωρίζουν τό πρῖσμα είς ἕξ κολοβά τριγωνικά πρίσματα, ἔχοντα τήν ἀκμήν OO_1 κοινήν καί βάσεις ἰσόπλευρα τρίγωνα πλευρᾶς γ καί κατ'ἀκολουθίαν ἐμβαδοῦ:

$$(\varepsilon) = \frac{\gamma^2\sqrt{3}}{4}$$

Ἄρα θά ἔχωμεν:

$$V(OO_1A_1ABB_1) = \frac{1}{3}(\varepsilon)(OO_1 + AA_1 + BB_1) = \frac{1}{3}(\varepsilon)(2\alpha+\alpha+\alpha) = \frac{4}{3}(\varepsilon).\alpha,$$

$$V(OO_1B_1B\Gamma\Gamma_1) = \frac{1}{3}(\varepsilon)(OO_1 + BB_1 + \Gamma\Gamma_1) = \frac{1}{3}(\varepsilon)(2\alpha+\alpha+2\alpha) = \frac{5}{3}(\varepsilon).\alpha,$$

$$V(OO_1\Gamma_1\Gamma\Delta\Delta_1) = \frac{1}{3}(\varepsilon)(OO_1 + \Gamma\Gamma_1 + \Delta\Delta_1) = \frac{1}{3}(\varepsilon)(2\alpha+2\alpha+3\alpha) = \frac{7}{3}(\varepsilon).\alpha,$$

$$V(OO_1\Delta_1\Delta EE_1) = \frac{1}{3}(\varepsilon)(OO_1 + \Delta\Delta_1 + EE_1) = \frac{1}{3}(\varepsilon)(2\alpha+3\alpha+3\alpha) = \frac{8}{3}(\varepsilon).\alpha,$$

$$V(OO_1E_1EZZ_1) = \frac{1}{3}(\varepsilon)(OO_1 + EE_1 + ZZ_1) = \frac{1}{3}(\varepsilon)(2\alpha+3\alpha+2\alpha) = \frac{7}{3}(\varepsilon).\alpha,$$

$$V(OO_1Z_1ZAA_1) = \frac{1}{3}(\varepsilon)(OO_1 + ZZ_1 + AA_1) = \frac{1}{3}(\varepsilon)(2\alpha+2\alpha+\alpha) = \frac{5}{3}(\varepsilon).\alpha.$$

Τό ἄθροισμα τούτων δίδει τόν ὄγκον τοῦ κολ. πρίσματος:

$$V = \frac{1}{3}.(\varepsilon).36\alpha = (\varepsilon).12\alpha = \frac{\gamma^2\sqrt{3}}{4}.12\alpha = 3\alpha\gamma^2\sqrt{3}.$$

Ώστε: $\boxed{V=3\alpha\gamma^2\sqrt{3}.}$

448. Ὀρθόν πρῖσμα ἔχει βάσιν ρόμβον ΑΒΓΔ μέ διαγωνίους ΑΓ=2α καί ΒΔ=α. Ἐπί τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν λαμβάνομεν κατά τήν αὐτήν φοράν τμήματα $AA_1=3\alpha$, $BB_1=4\alpha$ καί $\Gamma\Gamma_1=\alpha$. 1ον) Νά εὑρεθῆ τό εἶδος τοῦ τριγώνου $A_1B_1\Gamma_1$ καί νά δειχθῆ ὅτι τό ἐπίπεδον $A_1B_1\Gamma_1$ διέρχεται διά τοῦ Δ. 2ον) Νά ὑπολογισθῆ ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος, ὅπερ ἔχει βάσεις τά πολύγωνα ΑΒΓΔ καί $A_1B_1\Gamma_1\Delta$.

Λ ύ σ ι ς: Διά τῆς τομῆς Ο τῶν διαγωνίων τοῦ ΑΒΓΔ ἄγομεν τήν κάθετον πρός τό ἐπίπεδον τῆς βάσεως. Αὕτη τέμνει τήν $A_1\Gamma_1$ εἰς τό O_1 καί εἰς τό τραπέζιον $A\Gamma\Gamma_1A_1$ θά ἔχωμεν

$$OO_1=\frac{1}{2}(AA_1+\Gamma\Gamma_1)=2\alpha. \quad (1)$$

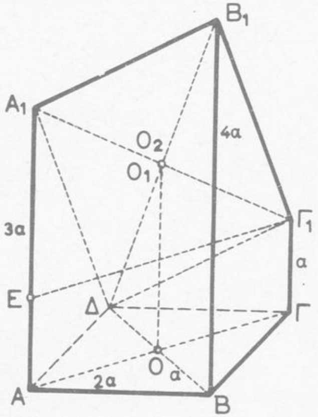
Ἐάν O_2 εἶναι ἡ τομή τῆς OO_1 καί τῆς ΔB_1, θά ἔχωμεν ἐπίσης:

$$OO_2=\frac{1}{2}BB_1=2\alpha. \text{ Ἄρα } O_1\equiv O_2.$$

Ἄρα ἡ B_1O_1 διέρχεται διά τοῦ Δ καί τό ἐπίπεδον $A_1B_1\Gamma_1$ περιέχει τό Δ. Ἄρα τό τετράπλευρον $\Delta\Gamma_1B_1A_1$ θά εἶναι παραλληλόγραμμον.

Ἄγομεν τήν $\Gamma_1E /\!/ \Gamma A$ ἄρα $\Gamma_1E \perp AA_1$.

Ἐκ τοῦ τριγώνου ΟΑΒ ἔχομεν:



σχ. 344

$$AB^2=OA^2+OB^2=\alpha^2+\frac{\alpha^2}{4}=\frac{5\alpha^2}{4} \text{ καί ἄρα } AB=\frac{\alpha\sqrt{5}}{2}.$$ Ἐπίσης θά εἶναι:

$$\left.\begin{aligned} A_1B_1^2&=\Delta\Gamma_1^2=\frac{5\alpha^2}{4}+\alpha^2=\frac{9\alpha^2}{4}\\ B_1\Gamma_1^2&=\Delta A_1^2=\frac{5\alpha^2}{4}+9\alpha^2=\frac{41\alpha^2}{4}\end{aligned}\right\} \quad A_1\Gamma_1^2=A_1E^2+E\Gamma_1^2=4\alpha^2+4\alpha^2=8\alpha^2$$

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι: $B_1\Gamma_1^2=A_1B_1^2+A_1\Gamma_1^2$ καί τό τρίγωνον $B_1A_1\Gamma_1$ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τό A_1.

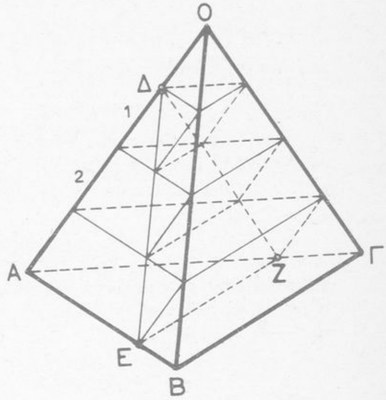
Ὁ ὄγκος τοῦ κολοβοῦ παραλ/δου $AB\Gamma\Delta A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$ εἶναι:

$$V=(AB\Gamma\Delta).\frac{1}{4}(AA_1+BB_1+\Gamma\Gamma_1)=\alpha^2.2\alpha=2\alpha^3$$

Ώστε: $\boxed{V=2\alpha^3}$.

449. Νά εὑρεθῆ ὁ ὄγκος τετραέδρου ΟΑΒΓ, θεωρούμενος ὡς ὅριον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὄγκων ἐγγεγραμμένων εἰς αὐτό πρισμάτων.

Λ ύ σ ι ς: Ἔστω ΟΑΒΓ τό δοθέν τετράεδρον. Ἐγγράφομεν εἰς αὐτό πρίσματα, ὡς δεικνύει τό ἔναντι σχῆμα, διαιροῦντες τήν ἀκμήν ΟΑ εἰς ν ἴσα τμήματα καί ἄγοντες ἐπίπεδα παράλληλα πρός τήν βάσιν ΑΒΓ. Τό ἄθροισμα τῶν πρισμάτων εἶναι μικρότερον τοῦ ὄγκου τῆς πυραμίδος καί ἡ διαφορά εἶναι μικροτέρα τοῦ ὄγκου τῆς κολούρου πυραμίδος ΟΒΓΔΕΖ. Ἐάν, συνεπῶς, $\nu \Rightarrow \infty$ ὁ ὄγκος ΟΒΓΔΕΖ τείνει πρός τό μηδέν. Ἄρα τό ἄθροισμα τῶν πρισμάτων ἔχει ὅριον, τόν ὄγκον τῆς πυραμίδος. Ἐάν υ εἶναι τό ὕφος τῆς πυραμίδος, τότε τό ὕφος ἑκάστου πρίσματος εἶναι: $\frac{\upsilon}{\nu}$.



σχ.345

Ἔστω (β) τό ἐμβαδόν τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος καί $(\beta_1), (\beta_2), \ldots, (\beta_{\nu-1})$ τά ἐμβαδά τῶν βάσεων τῶν πρισμάτων.

Γνωρίζομεν ὅτι:

$$\frac{(\beta_1)}{(\beta)} = \frac{\left(\frac{\upsilon}{\nu}\right)^2}{\upsilon^2} = \frac{1}{\nu^2}, \quad \frac{(\beta_2)}{(\beta)} = \frac{\left(\frac{2\upsilon}{\nu}\right)^2}{\upsilon^2} = \frac{2^2}{\nu^2}, \ldots, \quad \frac{(\beta_{\nu-1})}{(\beta)} = \frac{(\nu-1)^2}{\nu^2},$$

ἐξ ὧν: $(\beta_1) = \frac{(\beta)}{\nu^2}, \quad (\beta_2) = \frac{2^2 . \beta}{\nu^2}, \ldots, \quad (\beta_{\nu-1}) = \frac{(\nu-1)^2}{\nu^2} . (\beta)$.

Τό ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν πρισμάτων τούτων εἶναι:

$$V_1 = \frac{\beta\upsilon}{\nu^3}\left[1^2 + 2^2 + \ldots + (\nu-1)^2\right] \qquad (1)$$

Ἐπειδή δέ: $1^2 + 2^2 + \ldots + (\nu-1)^2 = \frac{(\nu-1).\nu(2\nu-1)}{6}$,

ἡ (1) γίνεται: $V_1 = \frac{\beta\upsilon}{\nu^3} . \frac{(\nu-1).\nu(2\nu-1)}{6} = \frac{\beta\upsilon}{6}\left(1 - \frac{1}{\nu}\right)\left(2 - \frac{1}{\nu}\right) \qquad (2)$

καί $\lim\limits_{\nu\to\infty} V_1 = \lim\limits_{\nu\to\infty}\left[\frac{\beta\upsilon}{6}\left(1-\frac{1}{\nu}\right)\left(2-\frac{1}{\nu}\right)\right] = \frac{\beta\upsilon}{3}$.

450. Ἐάν αἱ τρίεδροι γωνίαι τετραέδρου εἶναι πᾶσαι ἴσαι, αἱ ἀπέναντι ἀκμαί του εἶναι ἴσαι.

Λ ύ σ ι ς: Ἐπειδή (σχ.346) αἱ τρίεδροι τοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ εἶναι ἴσαι, κατά τό θεώρημα τῆς §137 θά ἔχωμεν:

$\alpha_1\beta_1\gamma_1=\alpha\beta\gamma_1=\alpha_1\beta\gamma=\alpha\beta_1\gamma$

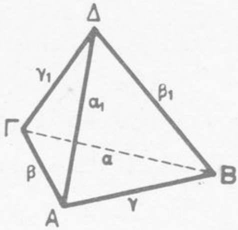
ή $\alpha_1\beta_1=\alpha\beta,\ \beta_1\gamma_1=\beta\gamma,\ \alpha_1\gamma_1=\alpha\gamma \quad (1)$

καί κατ'ἀκολουθίαν:

$\alpha_1^2\beta_1^2\gamma_1^2=\alpha^2\beta^2\gamma^2 \Leftrightarrow \alpha_1\beta_1\gamma_1=\alpha\beta\gamma \quad (2)$

Διαιροῦντες τήν (2) διά τῶν (1) κατά μέλη, λαμβάνομεν:

$\alpha_1=\alpha,\ \beta_1=\beta,\ \gamma_1=\gamma.$



σχ.346

451. Τά μέσα τῶν ἀκμῶν τετραέδρου εἶναι κορυφαί ὀκταέδρου, τοῦ ὁποίου ὁ ὄγκος ἰσοῦται πρός τό ἥμισυ τοῦ ὄγκου τοῦ τετραέδρου.

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς: Τά τετράεδρα ΔΚΘΙ καί ΔΑΒΓ ἔχουν τήν τρίεδρον Δ κοινήν. Κατ'ἀκολουθίαν: (σχ.347)

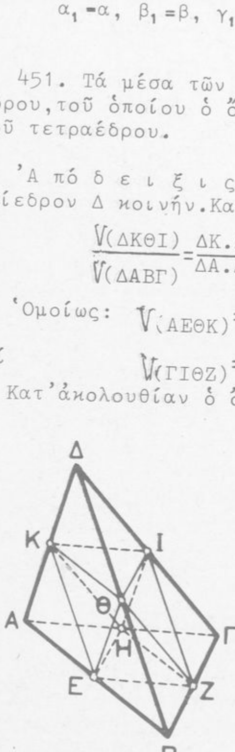
$$\frac{V(\Delta K\Theta I)}{V(\Delta AB\Gamma)}=\frac{\Delta K.\Delta\Theta.\Delta I}{\Delta A.\Delta B.\Delta\Gamma}=\frac{1}{8} \Rightarrow V(\Delta K\Theta I)=\frac{1}{8}V \quad (1)$$

'Ομοίως: $V(AE\Theta K)=\frac{1}{8}V \quad (2),\quad V(BEZH)=\frac{1}{8}V \quad (3)$

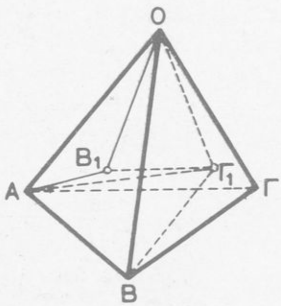
καί $V(\Gamma I\Theta Z)=\frac{1}{8}V \quad (4).$

Κατ'ἀκολουθίαν ὁ ὄγκος τοῦ ὀκταέδρου εἶναι:

$$V_8=V-\frac{4}{8}V=\frac{1}{2}V.$$



σχ.347



σχ.348

452 'Εάν δύο τετράεδρα ἔχουν μίαν ἀκμήν κοινήν, καί ἐάν αἱ δίεδροι αἱ ἀντίστοιχοι εἰς τήν ἀκμήν ταύτην εἶναι ἴσαι ὁ λόγος τῶν ὄγκων των ἰσοῦται πρός τό γινόμενον τῶν λόγων τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἑδρῶν, αἱ ὁποῖαι περιέχουν τάς διέδρους ταύτας.

Λ ύ σ ι ς: Έστωσαν τά τετράεδρα ΟΑΒΓ καί $ΟΑ_{} Β_1Γ_1$ (σχ. 348), τά όποία έχουν κοινήν τήν άκμήν ΟΑ καί τήν δίεδρον ΟΑ. Άγομεν $ΒΓ_1$, όπότε:

$$\frac{V(ΟΑΒ_1Γ_1)}{V(ΟΑΒΓ_1)}=\frac{(ΟΑΒ_1)}{(ΟΑΒ)} \quad (1) \quad καί \quad \frac{V(ΟΑΒΓ_1)}{V(ΟΑΒΓ)}=\frac{(ΟΑΓ_1)}{(ΟΑΓ)} \quad (2)$$

Διά πολ/σμοῦ τούτων κατά μέλη, λαμβάνομεν:

$$\frac{V(ΟΑΒ_1Γ_1)}{V(ΟΑΒΓ)}=\frac{(ΟΑ_1Β_1).(ΟΑΓ_1)}{(ΟΑΒ).(ΟΑΓ)} \quad (3)$$

453. Δίδεται τετράεδρον ΟΑΒΓ, είς τό όποῖον είναι ΟΑ=α, ΟΒ=β, ΟΓ=γ καί αί περί τό Ο έδραι είναι έκάστη 60°. Νά ύπολογισθῆ ό όγκος τοῦ τετραέδρου συναρτήσει τῶν α,β,γ.

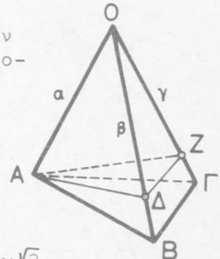
Λ ύ σ ι ς: Έστω ότι $α<γ<β$. Έπί τῶν άκμῶν ΟΓ καί ΟΒ θεωροῦμεν τά σημεῖα Ζ,Δ άντιστοίχως, τοιαῦτα ὥστε:

$$ΟΖ=ΟΔ=ΟΑ=α.$$

Τά τετράεδρα ΟΑΔΖ καί ΟΑΒΓ έχουν τήν τρίεδρον Ο κοινήν καί τό ΟΑΔΖ είναι, προφανῶς, κανονικόν.

Κατ'άκολουθίαν: $V(ΟΑΔΖ)=\frac{α^3\sqrt{2}}{12}$ (1)

καί $\frac{V(ΟΑΒΓ)}{V(ΟΑΔΖ)}=\frac{ΟΑ.ΟΒ.ΟΓ}{ΟΑ.ΟΔ.ΟΖ}=\frac{ΟΒ.ΟΓ}{ΟΔ.ΟΖ}=\frac{β.γ}{α.α}=\frac{β.γ}{α^2}$



σχ.349

έξ οὗ: $V(ΟΑΒΓ)=\frac{βγ}{α^2}\cdot V(ΟΑΔΖ)=\frac{βγ}{α^2}\cdot\frac{α^3\sqrt{2}}{12}=\frac{1}{12}αβγ\sqrt{2}$

454. Πᾶν έπίπεδον (Ρ) διερχόμενον διά τῶν μέσων Ε καί Ζ τῶν άπέναντι άκμῶν ΑΔ, ΒΓ τετραέδρου ΑΒΓΔ, διαιρεῖ τοῦτο είς δύο μέρη ίσοδύναμα.

Ά π ό δ ε ι ξ ι ς: Έστωσαν Μ,Ν τά μέσα τῶν άπέναντι άκμῶν ΑΒ καί ΓΔ τοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ καί ΜΡΝΚ έπίπεδος τομή τοῦ έν λόγῳ τετραέδρου, διερχομένη διά τῶν Μ καί Ν.

Τό πολύεδρον, τό άνωθεν τοῦ έπιπέδου ΜΡΝΚ άποτελεῖται άπό τήν τετραγωνικήν πυραμίδα Δ.ΜΡΝΚ καί άπό τό τετράεδρον ΑΜΚΔ (σχ.350).

Τό πολύεδρον, τό κάτωθεν τῆς τομῆς ΜΡΝΚ άποτελεῖται άπό τήν τετραγωνικήν πυραμίδα Γ.ΜΡΝΚ καί άπό τό τετράεδρον ΒΜΡΓ.

Αί τετραγωνικαί όμως πυραμίδες είναι ίσοδύναμοι, ὡς έχουσαι τήν αύτήν βάσιν ΜΡΝΚ καί τό αύτό ύψος (τά άγόμενα έκ τῶν Δ καί Γ). Άλλά:

$$\frac{V(AMK\Delta)}{V(AB\Gamma\Delta)}=\frac{AM.AK.A\Delta}{AB.A\Gamma.A\Delta}=\frac{AK}{2.A\Gamma} \quad (1)$$

καί
$$\frac{V(BMP\Gamma)}{V(BA\Delta\Gamma)}=\frac{BM.BP.B\Gamma}{BA.B\Delta.B\Gamma}=\frac{BP}{2.B\Delta} \quad (2)$$

Διά πολ/σμοῦ κατά μέλη τῶν (1) καί (2) λαμβάνομεν:

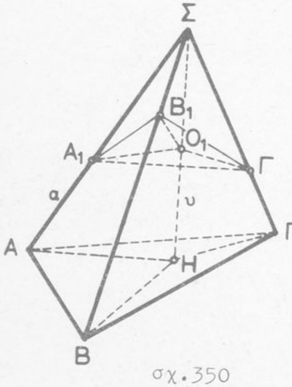
$$\frac{V(AMK\Delta)}{V(BMP\Gamma)}=\frac{AK.B\Delta}{A\Gamma.BP} \quad (3)$$

'Εκ τοῦ πλήρους τετραπλεύρου (άσκ.147 καί 156) εἶναι:

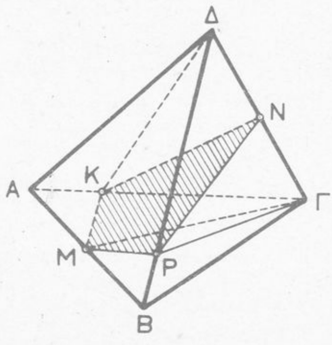
$$\frac{MA}{MB}\cdot\frac{PB}{P\Delta}\cdot\frac{N\Delta}{N\Gamma}\cdot\frac{K\Gamma}{KA}=1 \implies \frac{AK}{BP}=\frac{K\Gamma}{P\Delta} \quad \text{ἤ} \quad \frac{AK}{BP}=\frac{\Gamma K}{P\Delta}=\frac{A\Gamma}{B\Delta}$$

ἤ $AK.B\Delta=A\Gamma.BP$ καί ἡ (3) γίνεται:

$$V(AMK\Delta)=V(BMP\Gamma) \quad (4)$$



σχ.350



σχ.351

455. Δίδεται κανονική τριγωνική πυραμίς ΣΑΒΓ ὕψους ΣΗ. Διά τυχόντος σημείου O_1 τοῦ ὕψους ἤ τῆς προεκτάσεώς του ἄγομεν τυχόν ἐπίπεδον, τέμνον τάς παραπλεύρους ἀκμάς ΣΑ, ΣΒ, ΣΓ εἰς τά σημεῖα A_1, B_1, Γ_1. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι:

$$\frac{1}{\Sigma A_1}+\frac{1}{\Sigma B_1}+\frac{1}{\Sigma\Gamma_1}=ct.$$

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς: 'Εάν α, υ καί V εἶναι ἡ παράπλευρος ἀκμή ΣΑ, υ τό ὕψος ΣΗ καί V ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος ΣΑΒΓ, (σχ.350), ἀχθοῦν δέ αἱ ΗΑ, ΗΒ, ΗΓ, $O_1A_1, O_1B_1, O_1\Gamma_1$, αἱ πυραμίδες $\Sigma O_1AB, \Sigma O_1B\Gamma, \Sigma O_1\Gamma A$ ἔχουν ὄγκον ἴσον πρός $\frac{V}{3}$.

Θέτομεν $\Sigma O_1=\lambda$ καί θά ἔχωμεν:

$$\frac{V(\Sigma O_1A_1B_1)}{\frac{V}{3}}=\frac{\Sigma O_1.\Sigma A_1.\Sigma B_1}{\Sigma O.\Sigma A.\Sigma B} \quad ἤ \quad \frac{V(\Sigma O_1A_1B_1)}{\frac{V}{3}}=\frac{\lambda.\Sigma A_1.\Sigma B}{\upsilon\alpha^2} \qquad (1)$$

῾Ομοίως: $\frac{V(\Sigma O_1B_1\Gamma_1)}{\frac{V}{3}}=\frac{\lambda.\Sigma B_1.\Sigma\Gamma_1}{\upsilon\alpha^2}$ (2) καί

$$\frac{V(\Sigma O\Gamma_1A_1)}{\frac{V}{3}}=\frac{\lambda.\Sigma\Gamma_1.\Sigma A_1}{\upsilon\alpha^2} \qquad (3)$$

Διά προσθέσεως τῶν (1),(2),(3) κατά μέλη,εὑρίσκομεν:

$$3\frac{V(\Sigma A_1B_1\Gamma_1)}{V}=\frac{\lambda}{\upsilon\alpha^2}(\Sigma A_1.\Sigma B_1+\Sigma B_1.\Sigma\Gamma_1+\Sigma\Gamma_1.\Sigma A_1)$$

καί ἐπειδή $\frac{V(\Sigma A_1B_1\Gamma_1)}{V}=\frac{\Sigma A_1.\Sigma B_1.\Sigma\Gamma_1}{\alpha^3}$, ἕπεται ὅτι:

$$3.\Sigma A_1\Sigma B_1.\Sigma\Gamma_1=\frac{\alpha\lambda}{\upsilon}(\Sigma A_1.\Sigma B_1+\Sigma B_1.\Sigma\Gamma_1+\Sigma\Gamma_1.\Sigma A_1)$$

Διαιροῦντες ἀμφότερα τά μέλη ταύτης διά $\frac{\alpha\lambda}{\upsilon}\Sigma A_1.\Sigma B_1.\Sigma\Gamma_1$,

λαμβάνομεν: $\frac{1}{\Sigma A_1}+\frac{1}{\Sigma B_1}+\frac{1}{\Sigma\Gamma_1}=\frac{3\upsilon}{\alpha\lambda}=ct.$

456.Δίδεται κανονική τετραγωνική πυραμίς ΟΑΒΓΔ ὕψους ΟΗ=υ καί ἕν σημεῖον O_1 ἐπί τοῦ ΟΗ. ᾿Επίπεδον,διερχόμενον διά τοῦ O_1,τέμνει τάς παραπλεύρους ἀκμάς ΟΑ,ΟΒ,ΟΓ,ΟΔ εἰς τά σημεῖα A_1,B_1,Γ_1,Δ_1 ἀντιστοίχως.Νά ἀποδειχθῇ ὅτι:

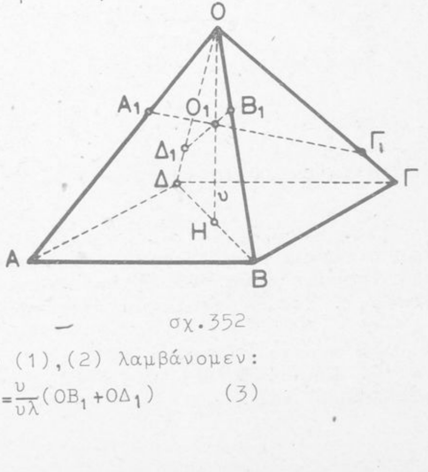
$$\frac{1}{OA_1}+\frac{1}{O\Gamma_1}=\frac{1}{OB_1}+\frac{1}{O\Delta_1}.$$

Λ ύ σ ι ς:᾿Εάν α,λ,υ εἶναι ἡ πλευρά τῆς βάσεως,ἡ παράπλευρος ἀκμή καί τό ὕψος τῆς πυραμίδος καί θέσωμεν $OO_1=\upsilon_1$, θά ἔχωμεν:

$$\frac{(O_1OB_1)}{(HOB)}=\frac{OO_1.OB_1}{OH.OB}=\frac{\upsilon}{\upsilon\lambda}.OB_1 \quad (1)$$

καί ὁμοίως:

$$\frac{(O_1O\Delta_1)}{(HO\Delta)}=\frac{\upsilon}{\upsilon\lambda}.O\Delta_1 \qquad (2)$$



᾿Επειδή δέ: $(HOB)=(HO\Delta)=\frac{1}{2}(BO\Delta)$, διά

σχ.352

προσθέσεως κατά μέλη τῶν (1),(2) λαμβάνομεν:

$$\frac{2(B_1O\Delta_1)}{(BO\Delta)}=\frac{\upsilon}{\upsilon\lambda}(OB_1+O\Delta_1) \qquad (3)$$

᾽Αλλά $\frac{(B_1 O\Delta_1)}{(BO\Delta)} = \frac{OB_1 . O\Delta_1}{OB . O\Delta} = \frac{OB_1 . O\Delta_1}{\lambda^2}$ καί κατ᾽ἀκολουθίαν:

$$2 . \frac{OB_1 . O\Delta_1}{\lambda^2} = \frac{\upsilon_1}{\upsilon\lambda}(OB_1 + O\Delta_1) \Rightarrow \frac{1}{OB_1} + \frac{1}{O\Delta_1} = \frac{2\upsilon}{\upsilon_1 . \lambda} \qquad (4)$$

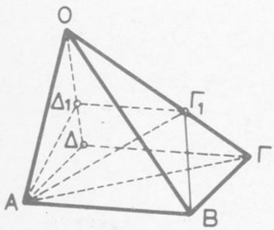
῾Ομοίως ἐργαζόμενοι εὑρίσκομεν ὅτι: $\frac{1}{OA_1} + \frac{1}{O\Gamma_1} = \frac{2\upsilon}{\upsilon_1 . \lambda}$ (5)

καί ἄρα: $\frac{1}{OA_1} + \frac{1}{O\Gamma_1} = \frac{1}{OB_1} + \frac{1}{O\Delta_1}$

457. Πυραμίς ἔχει βάσιν παραλληλόγραμμον. Νά διαιρεθῇ αὕτη εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη δι᾽ἐπιπέδου διερχομένου διά μιᾶς πλευρᾶς τῆς βάσεως.

᾽Α π ό δ ε ι ξ ι ς: ῎Εστω ΟΑΒΓΔ ἡ τετραγωνική πυραμίς μέ βάσιν ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον.

Τέμνομεν αὐτήν ὑπό ἐπιπέδου, διερχομένου διά τῆς ΑΒ. ῾Η τομή θά εἶναι τό τραπέζιον $AB\Gamma_1\Delta_1$. ῎Αγομεν τάς διαγωνίους ΑΓ καί $A\Gamma_1$.



σχ.353

Θά ἔχωμεν:

$$\frac{V(OAB\Gamma_1)}{V(OAB\Gamma)} = \frac{O\Gamma_1}{O\Gamma} \qquad (1)$$

καί $\frac{V(OA\Delta_1\Gamma_1)}{V(OA\Delta\Gamma)} = \frac{O\Delta_1 . O\Gamma_1}{O\Delta . O\Gamma} = \frac{O\Gamma_1^2}{O\Gamma^2}$

᾽Αλλά $V(OAB\Gamma) \equiv V(OA\Delta\Gamma)$, διότι ἔχουν βάσεις ἴσας καί τό αὐτό ὕψος, καί κατ᾽ἀκολουθίαν:

$$\frac{V(OAB\Gamma_1\Delta_1)}{V(OAB\Gamma)} = \frac{O\Gamma_1}{O\Gamma} + \frac{O\Gamma_1^2}{O\Gamma^2} = 1, \qquad (2)$$

καί ἄν τεθῇ $O\Gamma_1 = x$, $O\Gamma = \gamma$, ἡ (2) γίνεται

$$x^2 + \gamma x - \gamma^2 = 0 \ , \text{ ἐξ οὗ: } x = -\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 + \gamma^2} . \qquad (3)$$

Τό τμῆμα τοῦτο x κατασκευάζεται εὐκόλως.

458. ᾽Εάν δύο τετράεδρα ἔχουν μίαν ἀκμήν ΑΒ κοινήν καί τάς διέδρους των ΑΒ παραπληρωματικάς, ὁ λόγος τῶν ὄγκων των ἰσοῦται πρός τόν λόγον τῶν γινομένων τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἑδρῶν, αἱ ὁποῖαι περιέχουν τάς παραπληρωματικάς διέδρους.

Λ ύ σ ι ς: ῎Εστωσαν ΑΒΓΔ καί ΑΒΖΗ δύο τετράεδρα, ἔχοντα τήν ΑΒ κοινήν καί τάς διέδρους Γ-ΑΒ-Δ καί Η-ΑΒ-Ζ παραπληρωματικάς.

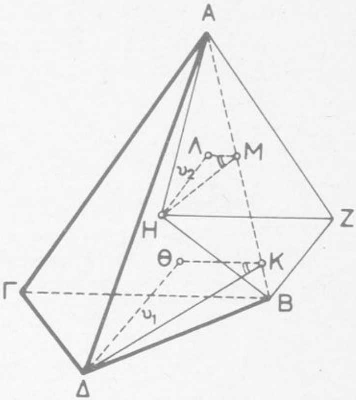
Ἐκ τῶν Δ καί Η ἄγομεν τά ὕψη $ΔΘ=υ_1$ καί $ΗΛ=υ_2$ τῶν τετραέδρων. Ἐκ τῶν Θ καί Λ ἄγομεν τάς καθέτους ΘΚ καί ΛΜ ἐπί τήν ΑΒ. Κατά τό θεώρ. τῶν τριῶν καθέτων θά εἶναι αἱ ΔΚ καί ΗΜ κάθετοι πρός τήν ΑΒ.

Τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΔΘΚ καί ΗΛΜ εἶναι ὅμοια.

Ἄρα: $\frac{υ_1}{υ_2}=\frac{ΔΚ}{ΗΜ}=\frac{(ΑΒΔ)}{(ΗΑΒ)}$ (1)

καί $\frac{V(ΔΑΒΓ)}{V(ΗΑΒΖ)}=\frac{\frac{1}{3}(ΑΒΓ).υ_1}{\frac{1}{3}(ΑΒΖ).υ_2}=$

$=\frac{(ΑΒΓ)}{(ΑΒΖ)}\cdot\frac{(ΑΒΔ)}{(ΑΒΗ)}=\frac{(ΑΒΓ)(ΑΒΔ)}{(ΑΒΖ)(ΑΒΗ)}$



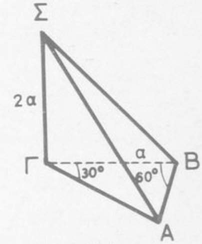
σχ.354

459. Πυραμίδος ΣΑΒΓ ἡ βάσις ΑΒΓ εἶναι τρίγωνον ὀρθογώνιον εἰς τό Α καί ἡ γων.Β=60°. Ἡ ΒΓ=α καί ἡ ΣΓ⊥ πρός τήν βάσιν καί ἔχει μῆκος 2α. 1ον) Δείξατε ὅτι αἱ ἕδραι τοῦ τετραέδρου εἶναι ὀρθογώνια τρίγωνα. 2ον) Ποῖος ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου.

Λ ύ σ ι ς: 1) Ἐπειδή $\sphericalangle ΓΒΑ=60^\circ$, ἕπεται $\sphericalangle ΑΓΒ=30^\circ$ καί ἄρα $ΑΒ=\frac{α}{2}$, ὁπότε:

$$ΑΓ^2=α^2-\frac{α^2}{4}=\frac{3α^2}{4} \implies ΑΓ=\frac{α\sqrt{3}}{2},$$

καί $(ΑΒΓ)=\frac{1}{2}.ΑΒ.ΑΓ=\frac{1}{2}.\frac{α}{2}.\frac{α\sqrt{3}}{2}=\frac{α^2\sqrt{3}}{8}$



σχ.355

Αἱ ἕδραι ΑΒΓ, ΣΓΑ, ΣΓΒ εἶναι ὀρθογώνιοι εἰς τά Α καί Γ ἀντιστοίχως.

Ἐπειδή ΣΓ⊥ΑΒΓ, ΓΑ⊥ΑΒ ⟹ ΣΑ⊥ΑΒ (θεώρ. τριῶν καθέτων).

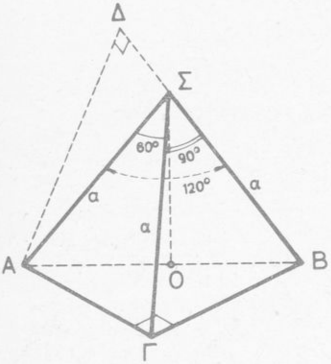
2) Ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου εἶναι:

$$V=\frac{1}{3}(ΑΒΓ).ΣΓ=\frac{1}{3}.\frac{α^2\sqrt{3}}{8}.2α=\frac{α^3\sqrt{3}}{12}$$

460. Αἱ ἕδραι τοῦ τετραέδρου ΣΑΒΓ εἶναι ΑΣΒ=120°, ΒΣΓ=90° καί ΑΣΓ=60° καί ΣΑ=ΣΒ=ΣΓ=α. 1ον) Νά εὑρεθῇ τό εἶδος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καί 2ον) Ποῖος ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου;.

Λ ύ σ ι ς: 1) Ἐπειδή $\sphericalangle ΑΣΓ=60^\circ$ καί ΣΑ=ΣΓ=α, ἕπεται:

ΑΓ=α (1). Ἐπειδή $\sphericalangle$ ΓΣΒ=90° καί ΣΓ=ΣΒ=α, ἕπεται: ΒΓ=$\alpha\sqrt{2}$ (2).



σχ.356

Ἐκ τοῦ Α ἄγομεν τήν κάθετον ΑΔ πρός τήν ΣΒ. Θά εἶναι $\sphericalangle$ ΑΣΔ=60° καί ἄρα $\sphericalangle$ ΣΑΔ=30°, ὁπότε $\Delta\Sigma=\frac{1}{2}.\Sigma A=\frac{\alpha}{2}$.

Κατ'ἀκολουθίαν:

$$AB^2=\Sigma A^2+\Sigma B^2+2.\Sigma B.\Delta\Sigma=$$
$$=\alpha^2+\alpha^2+2\alpha.\frac{\alpha}{2}=3\alpha^2$$

καί $AB=\alpha\sqrt{3}$.

Ἐπειδή:

$$A\Gamma^2+\Gamma B^2=\alpha^2+(\alpha\sqrt{2})^2=\alpha^2+2\alpha^2=$$
$$=3\alpha^2=(\alpha\sqrt{3})^2=AB^2,$$

ἕπεται ὅτι τό τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τό Γ.

Ἐπειδή δέ ΣΑ=ΣΒ=ΣΓ=α, ὁ πούς τοῦ ὕψους ΣΟ τοῦ τετραέδρου ΣΑΒΓ θά εἶναι τό μέσον Ο τῆς ΑΒ.

Ἄρα $OB=\frac{1}{2}AB=\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$ καί κατ'ἀκολουθίαν:

$$\Sigma O^2=\Sigma B^2-OB^2=\alpha^2-\left(\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}\right)^2=\alpha^2-\frac{3\alpha^2}{4}=\frac{\alpha^2}{4}\Longrightarrow\Sigma O=\frac{\alpha}{2}$$

Τό ἐμβαδόν τῆς βάσεως εἶναι:

$$(AB\Gamma)=\frac{1}{2}.A\Gamma.\Gamma B=\frac{1}{2}.\alpha.\alpha\sqrt{2}=\frac{\alpha^2\sqrt{2}}{2}$$

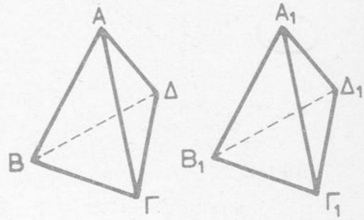
καί ὁ ὄγκος $V=\frac{1}{3}.(AB\Gamma).\Sigma O=\frac{1}{3}.\frac{\alpha^2\sqrt{2}}{2}.\frac{\alpha}{2}=\frac{\alpha^3\sqrt{2}}{12}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VIII

ΑΙ ΚΥΡΙΩΤΕΡΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΤΕΤΡΑΕΔΡΟΥ

ΕΙΔΗ ΤΕΤΡΑΕΔΡΩΝ

461. 'Εάν δύο τετράεδρα ἔχουν μίαν ἕδραν ἴσην καί τάς προσκειμένας διέδρους ἴσας, μίαν πρός μίαν, ταῦτα εἶναι ἴσα.



σχ.357

'Απόδειξις: Ἔστωσαν δύο τετράεδρα ΑΒΓΔ καί $A_1B_1Γ_1Δ_1$, τά ὁποῖα ἔχουν τάς ἕδρας ΑΒΓ καί $A_1B_1Γ_1$ ἴσας καί τάς προσκειμένας διέδρους ἴσας μίαν πρός μίαν καί τοῦ αὐτοῦ προσανατολισμοῦ.

Αἱ τρίεδροι Α καί A_1 (εἶναι ἴσαι), διότι ἔχουν μίαν ἕδραν ἴσην ($A=A_1$) καί τάς προσκειμένας διέδρους ἴσας μίαν πρός μίαν καί τοῦ αὐτοῦ προσανατολισμοῦ. 'Επειδή δέ $ΑΒΓ=A_1B_1Γ_1$ θά εἶναι $ΒΓ=B_1Γ_1$. 'Αλλά καί αἱ δίεδροι ΒΓ καί $B_1Γ_1$ εἶναι ἴσαι καί τοῦ αὐτοῦ προσανατολισμοῦ. Ἄρα αἱ ἕδραι $B_1Γ_1Δ_1$ καί ΒΓΔ εἶναι ἴσαι. Ἄρα τά τετράεδρα εἶναι ἴσα.

462. Τά τμήματα τά ὁριζόμενα ὑπό τῶν μέσων τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν τετραέδρου, διέρχονται διά τοῦ κέντρου βάρους αὐτοῦ καί διχοτομοῦνται ὑπό τούτου.

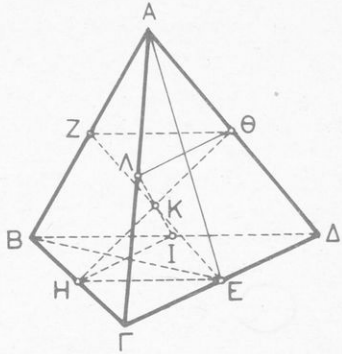
'Απόδειξις: Ἔστωσαν ΕΖ, ΗΘ, ΙΛ τά εὐθύγραμμα τμήματα, τά ὁριζόμενα ὑπό τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν ΑΒ καί ΓΔ, ΒΓ καί ΑΔ, ΒΔ καί ΑΓ. (σχ.358).

Εἶναι: $ΖΘ = /\!/ \frac{1}{2} \cdot ΒΔ /\!/ = ΗΕ \implies ΖΚ=ΚΕ$ καί $ΚΗ=ΚΘ$.

'Επειδή $ΛΘ = /\!/ \frac{1}{2} \cdot ΓΔ /\!/ = ΗΙ \implies ΙΚ=ΚΛ$ καί $ΗΚ=ΚΘ$.

Ὥστε τά ΕΖ, ΗΘ, ΙΛ διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου Κ.

Τό ἐπίπεδον ΑΕΒ περιέχει τό κέντρον βάρους τοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ. Ὁμοίως τά ἐπίπεδα ΑΗΔ, ΓΙΑ περιέχουν τό κέντρον βάρους. Ἄρα ταῦτα διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου Κ, τοῦ κέντρου βάρους.



463. Τά ἐπίπεδα τά ὁριζόμενα ὑπό μιᾶς ἀκμῆς τετραέδρου καί τοῦ μέσου τῆς ἀπέναντι ἀκμῆς, διέρχονται διά τοῦ κέντρου βάρους.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Τοῦτο ἀπεδείχθη εἰς τήν προηγουμένην ἄσκησιν.

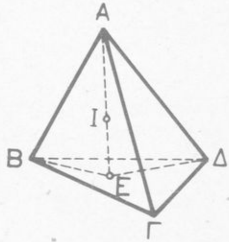
σχ.358

464. Τά διχοτομοῦντα ἐπίπεδα τάς ἕξ διέδρους γωνίας τετραέδρου, διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Τά διχοτομοῦντα ἐπίπεδα τῶν ἐσωτερικῶν διέδρων γωνιῶν ΑΒ καί ΑΔ τοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ τέμνονται κατά μίαν εὐθεῖαν ΑΕ, τῆς ὁποίας, πᾶν σημεῖον ἀπέχει ἰσάκις τῶν ἑδρῶν ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΒΔ.

Ἄρα ἡ ΑΕ θά κεῖται καί ἐπί τοῦ διχοτομοῦντος ἐπιπέδου τήν δίεδρον ΑΓ.

Τό διχοτομοῦν τήν ἐσωτερικήν δίεδρον ΒΓ τέμνει τήν ΑΕ εἰς ἕν σημεῖον Ι, τό ὁποῖον ἀπέχει ἰσάκις τῶν τεσσάρων ἑδρῶν τοῦ τετραέδρου.



Σ η μ. Ἐάν θεωρήσωμεν καί τά διχοτομοῦντα τάς ἐξωτερικάς διέδρους γωνίας τοῦ τετραέδρου, τότε εὑρίσκομεν ἄλλα τέσσαρα σημεῖα, τά ὁποῖα θά ἀπέχουν ἰσάκις τῶν ἑδρῶν τοῦ τετραέδρου.

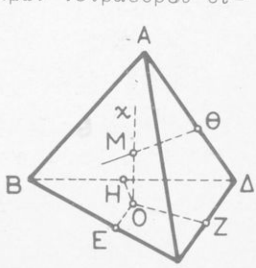
σχ.359

465. Τά μεσοκάθετα ἐπίπεδα τῶν ἕξ ἀκμῶν τετραέδρου διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Τά μεσοκάθετα ἐπίπεδα τῶν ἀκμῶν ΒΓ καί ΓΔ τέμνονται κατά μίαν εὐθεῖαν Οx, τῆς ὁποίας πᾶν σημεῖον ἀπέχει ἰσάκις τῶν σημείων Β, Γ καί Δ.

Ἄρα θά κεῖται καί ἐπί τοῦ μεσοκαθέτου ἐπιπέδου τῆς ἀκμῆς ΒΔ.

Ὥστε, τά μεσοκάθετα ἐπίπεδα τῶν ἀκμῶν ΒΓ, ΓΔ, ΔΒ διέρχονται διά τῆς αὐτῆς



σχ.360

εὐθείας Οx,ἡ ὁποία εἶναι κάθετος πρός τήν ἕδραν ΒΓΔ καί εἰς τό περίκεντρον αὐτῆς.

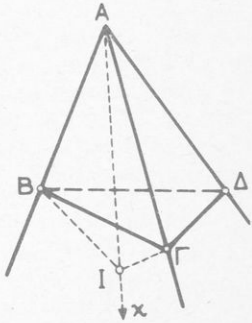
Τό μεσοκάθετον ἐπίπεδον τῆς ἀκμῆς ΑΔ τέμνει τήν Οx εἰς ἕν σημεῖον Μ,τό ὁποῖον ἰσαπέχει τῶν Α,Δ,Γ,Β.

Ἄρα τό Μ θά κεῖται καί ἐπί τῶν μεσοκαθέτων ἐπιπέδων τῶν ἀκμῶν ΑΒ καί ΑΓ.

466. Τά διχοτομοῦντα ἐπίπεδα τάς τρεῖς διέδρους γωνίας τετραέδρου καί τά διχοτομοῦντα τάς ἄλλας τρεῖς ἐξωτερικάς διέδρους γωνίας αὐτοῦ,διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Τά διχοτομοῦντα ἐπίπεδα τῶν διέδρων ΑΒ,ΑΓ,ΑΔ τῆς τριέδρου Α τοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ διέρχονται διά τῆς αὐτῆς εὐθείας Αx (διχοτόμος τριέδρου).

Τό διχοτομοῦν ἐπίπεδον τήν ἐξωτερικήν δίεδρον ΒΓ τοῦ τετραέδρου τέμνει τήν Αx εἰς ἕν σημεῖον Ι,τό ὁποῖον θά ἀπέχῃ ἰσάκις τῶν ἑδρῶν τοῦ τετραέδρου.Ἄρα θά κεῖται καί ἐπί τῶν διχοτομούντων ἐπιπέδων τῶν ἐξωρικῶν διέδρων ΓΔ,ΔΒ τοῦ τετραέδρου.



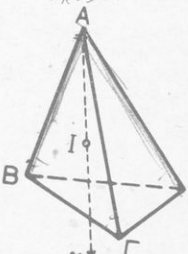
σχ.361

467. Τά διχοτομοῦντα ἐπίπεδα τάς τρεῖς διέδρους τριέδρου γωνίας τετραέδρου,διέρχονται διά τῆς αὐτῆς εὐθείας (διχοτόμος τριέδρου).

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Τά διχοτομοῦντα ἐπίπεδα τῶν διέδρων ΑΒ καί ΑΔ τοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ τέμνονται κατά τήν εὐθεῖαν Αx,τῆς ὁποίας πᾶν σημεῖον Ι ἀπέχει ἰσάκις τῶν ἑδρῶν ΑΒΓ,ΑΒΔ ἀφ'ἑνός καί ΑΒΔ,ΑΓΔ ἀφ'ἑτέρου.

Ἄρα τό Ι θά κεῖται καί ἐπί τοῦ διχοτομοῦντος ἐπιπέδου τήν δίεδρον ΑΓ.

Ἡ Αx καλεῖται διχοτόμος τῆς τριέδρου Α.



σχ.362

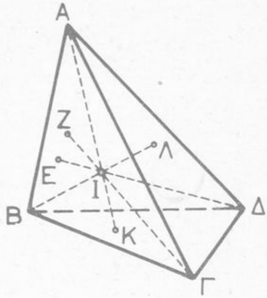
468. Αἱ διχοτόμοι τῶν τεσσάρων τριέδρων γωνιῶν τετραέδρου,διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Κατά τήν προηγουμένην ἄσκησιν τά διχοτομοῦντα τάς διέδρους ΑΒ,ΑΓ,ΑΔ τῆς τριέδρου Α διέρχονται διά τῆς αὐτῆς εὐθείας ΑΚ,τῆς ὁποίας ἕκαστον σημεῖον ἀπέχει ἰσάκις τῶν ἑδρῶν τῆς τριέδρου Α.

Ὁμοίως,τά διχοτομοῦντα ἐπίπεδα τῶν διέδρων γωνιῶν ΒΓ,ΒΑ,ΒΔ τῆς τριέδρου Β τέμνονται κατά τήν αὐτήν εὐθεῖαν ΒΛ.

Αἱ ΑΚ καί ΒΛ ἀνήκουν εἰς τό διχοτομοῦν ἐπίπεδον τήν κοινήν δίεδρον ΑΒ τῶν τριέδρων Α καί Β.Ἄρα τέμνονται εἰς ἕν σημεῖον Ι.

Δηλαδή,δύο ἐκ τῶν θεωρουμένων διχοτόμων τέμνονται.

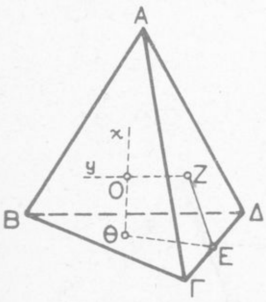


σχ.363

Ἀνά δύο πᾶσαι αἱ διχοτόμοι τέμνονται,καί ὡς μή κείμεναι ἐπί τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου,θά διέρχωνται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου.

469. Ἐπί τῶν ἑδρῶν τετραέδρου καί εἰς τά κέντρα τῶν περιγεγραμμένων κύκλων περί αὐτάς ἄγομεν τάς καθέτους ἐπί τάς ἕδρας ταύτας.Δείξατε ὅτι αὗται διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς:Ἔστωσαν Θ καί Ζ αἱ κάθετοι ἐπί τάς ἕδρας ΒΓΔ καί ΑΓΔ εἰς τά περίκεντρα αὐτῶν Θ καί Ζ.Ἄγομεν τάς καθέτους ΘΕ καί ΖΕ πρός τήν ΓΔ,αἵτινες θά τμήσουν τήν ΓΔ εἰς τό μέσον Ε αὐτῆς.Αἱ ΘΕ καί ΖΕ ὁρίζουν ἐπίπεδον ΘΕΖ,τό ὁποῖον περιέχει τάς εὐθείας Ζy καί Θx.Ἄρα αἱ Θx καί Ζy τέμνονται.



σχ.364

Ὁμοίως καί αἱ κάθετοι ἐπί τάς λοιπάς ἕδρας εἰς τά περίκεντρα αὐτῶν τέμνονται ἀνά δύο.

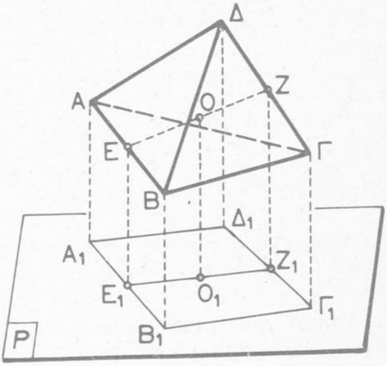
Ἐπειδή αἱ κάθετοι αὗται τέμνονται ἀνά δύο καί δέν ἀνήκουν εἰς τό αὐτό ἐπίπεδον,διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο,τό ὁποῖον,προφανῶς ἀπέχει ἰσάκις τῶν κορυφῶν τοῦ τετραέδρου.

470. Δύο τετράεδρα ἔχοντα μίαν δίεδρον ἴσην καί τάς περιεχούσας ἕδρας ἴσας,μίαν πρός μίαν,καί τοῦ αὐτοῦ προσανατολισμοῦ εἶναι ἴσα.

Λ ύ σ ι ς:Ἐργασία ἀνάλογος πρός τήν ἄσκησιν 461.

471. Τό ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τῶν κορυφῶν τετραέδρου ἀπό ἐπίπεδον μή τέμνον αὐτό, ἰσοῦται πρός τό τετραπλάσιον τῆς ἀποστάσεως τοῦ κέντρου βάρους αὐτοῦ ἀπό τό ἐπίπεδον τοῦτο.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Ἔστω ΑΒΓΔ ἕν τετράεδρον καί $Α_1Β_1Γ_1Δ_1$ ἡ ὀρθή προβολή αὐτοῦ ἐπί τό ἐπίπεδον (Ρ). Τά μέσα Ε καί Ζ τῶν ἀκμῶν ΑΒ καί ΓΔ προβάλλονται εἰς τά μέσα τῶν $Α_1Β_1$ καί $Γ_1Δ_1$ ἀντιστοίχως. Τό μέσον Ο τοῦ τμήματος ΕΖ ἔχει ὡς προβολήν τό μέσον $Ο_1$ τοῦ τμήματος $Ε_1Ζ_1$.



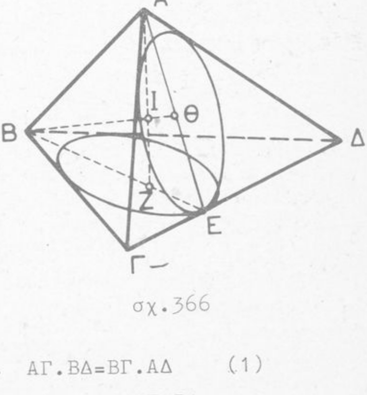
σχ.365

Ἐκ τῶν τραπεζίων $ΑΒΒ_1Α_1$, $ΓΔΔ_1Γ_1$ καί $ΕΖΖ_1Ε_1$ ἔχομεν ἀντιστοίχως:

$$\left.\begin{array}{l} ΑΑ_1+ΒΒ_1=2.ΕΕ_1 \\ ΓΓ_1+ΔΔ_1=2.ΖΖ_1 \end{array}\right\} \Longrightarrow ΑΑ_1+ΒΒ_1+ΓΓ_1+ΔΔ_1=2(ΕΕ_1+ΖΖ_1)=2.2.ΟΟ_1=4.ΟΟ_1.$$

472. Ἡ ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη, ἵνα αἱ εὐθεῖαι αἱ ὁριζόμεναι ἀπό τάς κορυφάς τετραέδρου καί τῶν κέντρων τῶν ἐγγεγραμμένων κύκλων εἰς τάς ἀπέναντι ἕδρας διέρχωνται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου, εἶναι τά γινόμενα τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν τοῦ τετραέδρου νά εἶναι ἴσα.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Ἔστω ΑΒΓΔ τό δοθέν τετράεδρον καί Ζ,Θ τά κέντρα τῶν ἐγγεγραμμένων κύκλων εἰς τάς ἕδρας ΒΓΔ καί ΑΓΔ αὐτοῦ.



σχ.366

Ἐάν αἱ ΑΖ καί ΒΘ τέμνωνται, αἱ εὐθεῖαι ΒΖ καί ΑΘ, αἱ ὁποῖαι εἶναι διχοτόμοι τῶν γωνιῶν Β καί Α καί τῶν ἑδρῶν ΒΓΔ καί ΓΑΔ, κεῖνται ἐπί τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, τό ὁποῖον τέμνει τήν ΓΔ εἰς τό σημεῖον Ε.

Θά ἔχωμεν:

$$\frac{ΕΓ}{ΕΔ}=\frac{ΒΓ}{ΒΔ} \text{ καί } \frac{ΕΓ}{ΕΔ}=\frac{ΑΓ}{ΑΔ} \Rightarrow \frac{ΒΓ}{ΒΔ}=\frac{ΑΓ}{ΑΔ} \Rightarrow ΑΓ.ΒΔ=ΒΓ.ΑΔ \qquad (1)$$

Ἀντιστρόφως, ἐάν $ΑΓ.ΒΔ=ΒΓ.ΑΔ \Rightarrow \frac{ΑΓ}{ΑΔ}=\frac{ΒΓ}{ΒΔ} \Rightarrow \frac{ΒΓ}{ΑΓ}=\frac{ΒΔ}{ΑΔ}$ (2)

Ἡ (2) δεικνύει ὅτι αἱ διχοτόμοι ΒΖ καί ΑΘ τέμνουν τήν ΓΔ εἰς τό αὐτό σημεῖον Ε. Ἄρα αἱ ΑΖ καί ΒΘ τέμνονται. Ὁμοίως ἐργαζόμενοι, εὑρίσκομεν ὅτι καί αἱ ἄλλαι εὐθεῖαι, ΓΖ ΔΘ, αἱ ἑνοῦσαι τάς κορυφάς Γ καί Δ μέ τά ἔνκεντρα τῶν ἀπέναντι ἑδρῶν τέμνονται. Οὕτως ἐάν αἱ ΑΖ, ΒΘ, $ΓΖ_1$, $ΔΘ_1$ τέμνωνται θά ἔχωμεν:

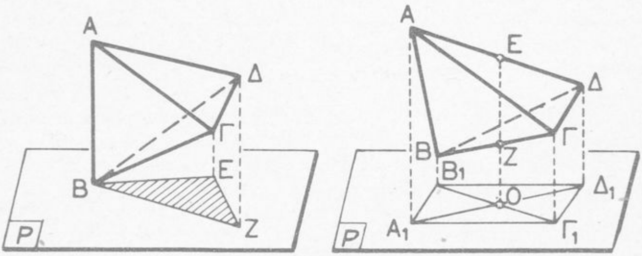
$$ΒΓ.ΑΔ=ΑΓ.ΒΔ=ΓΔ.ΑΒ,$$

καί ἐάν ἰσχύουν αἱ ἰσότητες αὗται, τότε αἱ ΑΖ, ΒΘ, $ΓΖ_1$, $ΒΘ_1$ τέμνονται ἀνά δύο καί κατ'ἀκολουθίαν διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου.

473. Τό αὐτό διά τά κέντρα τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων εἰς τάς ἀπέναντι ἕδρας τοῦ τετραέδρου.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Αὕτη εἶναι ἡ ἰδία μέ τήν ἀπόδειξιν τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως.

474. Τετράεδρον ΑΒΓΔ νά προβληθῇ ἐπί ἐπίπεδον κατά τρίγωνον ἤ παραλληλόγραμμον ἤ τετράγωνον.



σχ.367

Λ ύ σ ι ς: 1) Ἔστω ὅτι ἡ προβολή τοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ ἐπί ἐπιπέδου (Ρ) εἶναι τό τρίγωνον ΒΕΖ. Ἄρα αἱ προβολαί τῶν Α καί Β ἐπί τό (Ρ) συμπίπτουν. Κατ'ἀκολουθίαν ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος πρός τό ἐπίπεδον (Ρ). Ὥστε, ἵνα ἡ προβολή τετραέδρου ἐπί ἐπίπεδον (Ρ) εἶναι τρίγωνον, πρέπει καί ἀρκεῖ τό (Ρ) νά εἶναι κάθετον πρός μίαν ἀκμήν τοῦ τετραέδρου. (Πόσα ἐπίπεδα, ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει, ὑπάρχουν;)

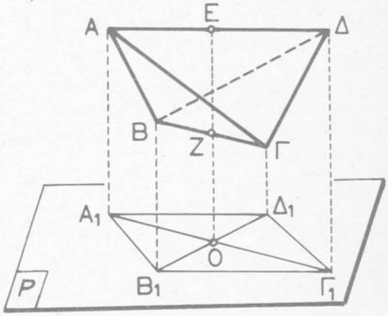
2) Ἔστω ὅτι ἡ προβολή τοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ ἐπί τό ἐπίπεδον (Ρ) εἶναι τό παραλληλόγραμμον $Α_1Β_1Δ_1Γ_1$. Ἐάν Ε καί Ζ εἶναι τά μέσα τῶν ἀκμῶν ΑΔ καί ΒΓ, τότε τό Ε θά προβάλλεται εἰς τό μέσον τῆς διαγωνίου $Β_1Γ_1$ τοῦ παραλ/μου $Α_1Β_1Δ_1Γ_1$. Ἄρα αἱ ἐν λόγῳ προβολαί θά συμπίπτουν μέ τό κέντρον Ο τοῦ παραλ/μου $Α_1Β_1Δ_1Γ_1$. Δηλαδή αἱ προβολαί τῶν Ε καί Ζ ταυτίζονται, ἄρα ἡ ΕΖ θά εἶναι κάθετος πρός τό ἐ-

πίπεδον (Ρ).

Ὥστε, ἵνα ἡ προβολή τετραέδρου ἐπί ἐπίπεδον Ρ εἶναι παραλ/μον, πρέπει καί ἀρκεῖ τό (Ρ) νά εἶναι κάθετον πρός τό τμῆμα τό ὁριζόμενον ἀπό τά μέσα δύο ἀπέναντι ἀκμῶν τοῦ τετραέδρου. (Πόσαι λύσεις ὑπάρχουν;)

3) Ἔστω ὅτι ἡ προβολή $Α_1Β_1Δ_1Γ_1$ τετραέδρου ΑΒΓ ἐπί τό ἐπίπεδον (Ρ) εἶναι τετράγωνον. Ἄρα αἱ διαγώνιοί του $Α_1Δ_1$ καί $Β_1Γ_1$ θά τέμνωνται δίχα καί καθέτως εἰς τό Ο.

Τό (Ρ) κατά τήν προηγουμένην περίπτωσιν θά εἶναι κάθετον πρός τήν εὐθεῖαν ΕΖΟ τήν ὁριζομένην ἀπό τά μέσα Ε, Ζ τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν ΑΔ καί ΒΓ, αἱ ὁποῖαι θά πρέπει νά εἶναι κάθετοι πρός τήν ΕΖ, ἄρα παράλληλοι πρός τό (Ρ) καί κατ' ἀκολουθίαν ἴσαι πρός τάς διαγωνίους $Α_1Δ_1$ καί $Β_1Γ_1$.



σχ.368

Ὥστε, ἄν αἱ ἀπέναντι ἀκμαί ΑΔ καί ΒΓ τοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ εἶναι ἴσαι καί κάθετοι πρός τό τμῆμα ΕΖ τό ὁριζόμενον ὑπό τῶν μέσων αὐτῶν, τότε ἡ προβολή τοῦ τετραέδρου ἐπί ἐπίπεδον (Ρ) κάθετον πρός τό τμῆμα ΕΖ εἶναι τετράγωνον.

Μήπως τό τετράεδρον ΑΒΓΔ πρέπει νά εἶναι κανονικόν; Ἐρευνήσατε τό θέμα.

475. Ἐάν α, α_1 καί β, β_1 καί γ, γ_1 εἶναι αἱ ἀπέναντι ἀκμαί τετραέδρου καί $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ αἱ διάμεσοί του $ΑΑ_1, ΒΒ_1, ΓΓ_1, ΔΔ_1$ ἀντιστοίχως, νά ἀποδειχθῇ ὅτι:

1ον: $\mu_1^2=\frac{1}{9}\left[3(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\right]$, $\mu_2=\ldots, \mu_3=\ldots, \mu_4=\ldots$

2ον: $\mu_1^2+\mu_2^2+\mu_3^2+\mu_4^2=\frac{4}{9}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)$,

3ον: Ἄν x, y, ω εἶναι τά τμήματα τά ὁριζόμενα ὑπό τῶν μέσων τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν του, νά ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2=4(x^2+y^2+\omega^2).$$

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: 1ον: Ἐκ τῶν τριγώνων ΒΓΔ καί ΑΓΕ ἔχομεν ἀντιστοίχως:

$$ΒΕ^2=\frac{1}{4}(2\beta^2+2\gamma^2-\alpha^2) \qquad (1)$$

$$ΑΕ^2=\frac{1}{4}(2\beta_1^2+2\gamma_1^2-\alpha^2) \qquad (2)$$

Βάσει τοῦ θεωρήματος τοῦ STEWART, ἐκ τοῦ τριγώνου ABE

ἔχομεν: $AB^2.A_1E+AE^2.BA_1=\mu_1^2.BE+BE.A_1E.BA_1$

ἤ $\quad AB^2.\frac{1}{3}BE+AE^2.\frac{2}{3}.BE=\mu_1^2.BE+BE.\frac{1}{3}.BE.\frac{2}{3}.BE,$

ἤ $\quad AB^2+2.AE^2=\mu_1^2+\frac{2}{3}.BE^2,$

ἤ $\quad \alpha_1^2+2.\frac{(2\beta_1^2+2\gamma_1^2-\alpha^2)}{4}=\mu_1^2+\frac{2}{3}.\frac{1}{4}(2\beta^2+2\gamma^2-\alpha^2),$

ἐξ οὗ: $\quad \mu_1^2=\frac{1}{9}\left[3(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\right].\qquad(1)$

Ὁμοίως: $\quad \mu_2^2=\frac{1}{9}\left[3(\beta^2+\gamma^2+\alpha_1^2)-(\alpha^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)\right],\qquad(2)$

$$\mu_3^2=\frac{1}{9}\left[3(\alpha^2+\beta^2+\gamma_1^2)-(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma^2)\right],\qquad(3)$$

$$\mu_4^2=\frac{1}{9}\left[3(\alpha^2+\gamma^2+\beta_1^2)-(\beta^2+\alpha_1^2+\gamma_1^2)\right].\qquad(4)$$

2ον: Διά προσθέσεως τῶν (1),(2),(3),(4) κατά μέλη προκύπτει: $\quad \mu_1^2+\mu_2^2+\mu_3^2+\mu_4^2=\frac{4}{9}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)$

3ον: Ἐκ τοῦ τριγώνου EAB ἔχομεν:

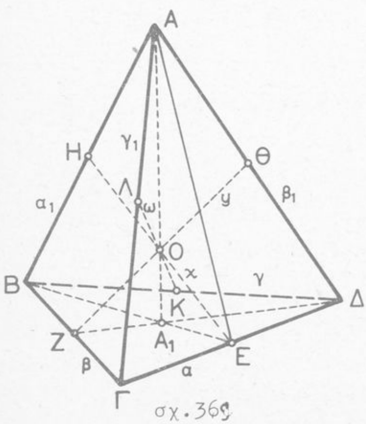
$AE^2+BE^2=2x^2+\frac{\alpha_1^2}{2}$ ἤ $\frac{1}{4}(2\beta_1^2+2\gamma_1^2-\alpha^2)+\frac{1}{4}(2\beta^2+2\gamma^2-\alpha^2)=2x^2+\frac{\alpha^2}{2}$

ἐξ οὗ: $4x^2=\beta^2+\gamma^2+\beta_1^2+\gamma_1^2-\alpha^2-\alpha_1^2$

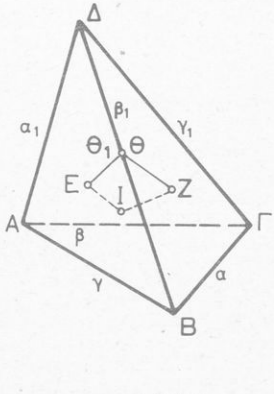
Ὁμοίως: $4y^2=\gamma^2+\alpha^2+\gamma_1^2+\alpha_1^2-\beta^2-\beta_1^2$

$4\omega^2=\alpha^2+\beta^2+\alpha_1^2+\beta_1^2-\gamma^2-\gamma_1^2$

$$\left.\begin{aligned}4x^2&=\beta^2+\gamma^2+\beta_1^2+\gamma_1^2-\alpha^2-\alpha_1^2\\4y^2&=\gamma^2+\alpha^2+\gamma_1^2+\alpha_1^2-\beta^2-\beta_1^2\\4\omega^2&=\alpha^2+\beta^2+\alpha_1^2+\beta_1^2-\gamma^2-\gamma_1^2\end{aligned}\right\}\Rightarrow\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2=4(\chi^2+y^2+\omega^2).$$



σχ.36ο



σχ.37ο

476. Ἐάν τά ἀθροίσματα τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν τετραέδρου εἶναι ἴσα, τότε αἱ κάθετοι ἐπί τάς ἕδρας τοῦ τετραέδρου εἰς τά ἔγκεντρα αὐτῶν διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου. Ἰσχύει τό ἀντίστροφον;

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Δίδεται τετράεδρον ΑΒΓΔ, εἰς τό ὁποῖον εἶναι: $\alpha+\alpha_1=\beta+\beta_1=\gamma+\gamma_1$ (1)

Ἔστωσαν Ζ καί Ε τά ἔγκεντρα τῶν ἑδρῶν ΔΒΓ καί ΔΑΒ ἀντιστοίχως. (σχ. 370).

Ἄγομεν τάς ΖΘ καί $Ε\Theta_1$ καθέτους πρός τήν ΔΒ. Τά Θ καί Θ_1 θά εἶναι σημεῖα ἐπαφῆς τῆς ΔΒ μετά τῶν ἐγγεγραμμένων κύκλων εἰς τά τρίγωνα ΔΒΓ καί ΔΑΒ ἀντιστοίχως. Ὡς γνωστόν, θά ἀληθεύουν αἱ σχέσεις:

$$\Delta\Theta=\frac{\beta_1+\gamma_1-\alpha}{2} \quad (2) \qquad \text{καί} \qquad \Delta\Theta_1=\frac{\alpha_1+\beta_1-\gamma}{2} \quad (3)$$

Ἐκ τῆς $\alpha+\alpha_1=\gamma+\gamma_1 \Rightarrow \alpha_1-\gamma=\gamma_1-\alpha$ ἤ $\alpha_1+\beta_1-\gamma=\beta_1+\gamma_1-\alpha$, ὁπότε αἱ (3) καί (4) δίδουν $\Delta\Theta=\Delta\Theta_1 \Longrightarrow \Theta\equiv\Theta_1$.

Ἄρα αἱ κάθετοι ΕΙ καί ΖΙ εἰς τά Ε καί Ζ ἐπί τάς ἕδρας ΔΑΒ καί ΔΒΓ τέμνονται εἰς ἕν σημεῖον Ι.

Ὥστε δύο ἐκ τῶν καθέτων τούτων τέμνονται.

Ἐκ τῆς $\alpha+\alpha_1=\gamma+\gamma_1 \Longrightarrow \frac{\alpha_1+\beta-\gamma_1}{2}=\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}$

Ἄρα οἱ ἐγγεγραμμένοι κύκλοι εἰς τά τρίγωνα ΔΑΒ καί ΑΒΓ ἐφάπτονται τῆς ΑΓ εἰς τό αὐτό σημεῖον.

Αἱ κάθετοι αὗται τέμνονται ἀνά δύο, καί ὡς μή κείμεναι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ τέμνονται εἰς τό αὐτό σημεῖον.

Ἀντιστρόφως: Ἔστω ὅτι αἱ κάθετοι ἐπί τάς ἕδρας ΔΑΒ, ΔΒΓ, ΔΓΑ εἰς τά ἔγκεντρα αὐτῶν ἀντιστοίχως τέμνονται εἰς τό αὐτό σημεῖον. Τότε θά εἶναι:

$$\alpha+\alpha_1=\gamma+\gamma_1 \quad \text{καί} \quad \beta+\beta_1=\gamma+\gamma_1 \Longrightarrow \alpha+\alpha_1=\beta+\beta_1=\gamma+\gamma_1 .$$

Ἡ πλήρης ἀπόδειξις τοῦ ἀντιστρόφου νά γίνῃ ὑπό τῶν μαθητῶν.

477. Τά ἐπίπεδα τά ἀγόμενα ἐκ τῶν μέσων τῶν ἀκμῶν τετραέδρου καθέτως πρός τάς ἀπέναντι ἀκμάς διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Ἔστω ΑΒΓΔ ἕν τετράεδρον (σχ. 371). Εἰς τήν ἄσκησιν 465 ἀπεδείξαμεν ὅτι τά μεσοκάθετα ἐπίπεδα τῶν ἀκμῶν τετραέδρου διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο, τό ὁποῖον ἀπέχει ἰσάκις τῶν κορυφῶν αὐτοῦ.

Ἐάν Ε, Ζ εἶναι τά μέσα τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν ΓΔ καί ΑΒ τοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ, τότε ἡ ΕΖ διέρχεται διά τοῦ κέντρου βάρους Κ τοῦ τετραέδρου καί διχοτομεῖται ὑπό τούτου (ἄσκ. 462).

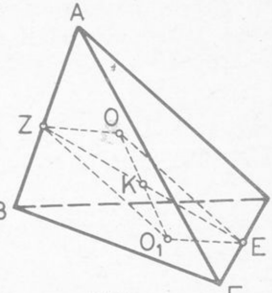
Ἐπί τῆς προεκτάσεως τοῦ ΟΚ θεωροῦμεν τό σημεῖον $Ο_1$, εἰς τρόπον ὥστε $ΚΟ_1=ΚΟ$. Ἄρα τό τετράπλευρον $ΟΖΟ_1Ε$ θά εἶναι παραλληλόγραμμον, ὁπότε $O_1Z // OE$.

Ἐπειδή ἡ OE εἶναι κάθετος πρός τήν ΓΔ, ἕπεται ὅτι καί $ΣO_1 \perp ΓΔ$.

Τό ἐπίπεδον, ὅπερ διέρχεται διά τοῦ Z, καθέτως πρός τήν ΓΔ, περιέχει τήν ZO_1 καί ἄρα θά περιέχῃ καί τό σημεῖον O_1, τό ὁποῖον εἶναι ὡρισμένον, συμμετρικόν τοῦ O ὡς πρός τό K.

Οὕτω, τό τυχόν τῶν θεωρουμένων ἐπιπέδων διέρχεται διά τοῦ O. Κατ' ἀκολουθίαν καί τά ὑπόλοιπα θά διέρχωνται διά τοῦ O_1.

Τό σημεῖον O_1 καλεῖται σημεῖον τοῦ CANTOR.



σχ.371

478. Δίδεται τετράεδρον ΑΒΓΔ, κέντρου βάρους K, καί M τυχόν σημεῖον τοῦ χώρου. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$MA^2+MB^2+MΓ^2+MΔ^2=4MK^2+KA^2+KB^2+KΓ^2+KΔ^2 \qquad \text{(LEIBNITZ)}$$

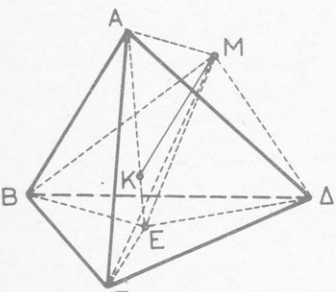
Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Ἔστω E τό κέντρον βάρους τῆς ἕδρας ΒΓΔ τοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ καί K τό κέντρον βάρους τοῦ τετραέδρου. Τό K κεῖται, ὡς γνωστόν, ἐπί τῆς AE καί εἶναι τοιοῦτον ὥστε:

$$KA=3.KE \qquad (1)$$

Κατά τό θεώρημα τοῦ LEIBNITZ (ἄσκ.214-8) ἀπό τά 4 σημεῖα M, B, Γ, Δ θά ἔχωμεν:

$$MB^2+MΓ^2+MΔ^2=3ME^2+EB^2+EΓ^2+EΔ^2 \qquad (2)$$

Κατά τό θεώρημα τοῦ STEWART ἀπό τά 4 σημεῖα M, A, K, E θά ἔχωμεν:



σχ.372

$$ME^2.AK+MA^2.KE=MK^2.AE+AE.KE.AK$$

ἤ $$ME^2.3.KE+MA^2.KE=MK^2.4.KE+4.KE.KE.3KE$$

ἤ $$3.ME^2+MA^2=4.MK^2+12.KE^2 \qquad (3)$$

Διά προσθέσεως τῶν (2) καί (3) κατά μέλη, λαμβάνομεν:

$$MA^2+MB^2+MΓ^2+MΔ^2=4.MK^2+EB^2+EΓ^2+EΔ^2+12.KE^2 \qquad (4)$$

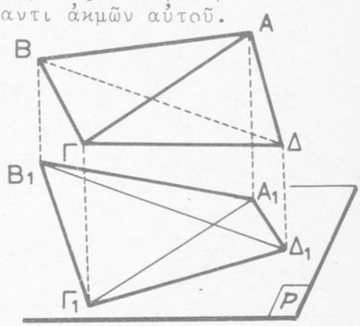
Ἀλλ' εἶναι:

$$EB^2+EΓ^2+EΔ^2+12KE^2=(EB^2+EΓ^2+EΔ^2+3KE^2)+9KE^2$$
$$=(KB^2+KΓ^2+KΔ^2)+KA^2,$$

ὁπότε ἡ (4) γίνεται:

$$MA^2+MB^2+MΓ^2+MΔ^2=4.MK^2+KA^2+KB^2+KΓ^2+KΔ^2$$

479. Εἰς πᾶν τετράεδρον τό γινόμενον δύο ἀπέναντι ἀκμῶν του εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν γινομένων τῶν δύο ζευγῶν τῶν δύο ἄλλων ἀπέναντι ἀκμῶν αὐτοῦ.



σχ.373

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς: Θεωροῦμεν ἐπίπεδον (P) παράλληλον πρός τάς ἀκμάς ΒΔ καί ΑΓ τοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ.

Προβάλλομεν ὀρθῶς τό τετράεδρον ΑΒΓΔ ἐπί τό (P) κατά τό τετράπλευρον $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$. Θά εἶναι:

$AA_1 = /\!/ \Gamma\Gamma_1$ καί $BB_1 = /\!/ \Delta\Delta_1$

καί κατ'ἀκολουθίαν:

$A\Gamma = A_1\Gamma_1$ καί $B\Delta = B_1\Delta_1$,

ἐξ ὧν: $A\Gamma . B\Delta = A_1\Gamma_1 . B_1\Delta_1$ (1)

Αἱ ἀκμαί ὅμως ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ,ΔΑ τέμνουν τό ἐπίπεδον(P). Ἄρα $A_1B_1 < AB$, $B_1\Gamma_1 < B\Gamma$, $\Gamma_1\Delta_1 < \Gamma\Delta$, $\Delta_1A_1 < \Delta A$.

Ἐκ τούτων προκύπτει ὅτι:

$$\left.\begin{array}{l} A_1B_1 . \Gamma_1\Delta_1 < AB . \Gamma\Delta \\ B_1\Gamma_1 . \Delta_1A_1 < B\Gamma . \Delta A \end{array}\right\} \Longrightarrow A_1B_1 . \Gamma_1\Delta_1 + B_1\Gamma_1 . \Delta_1A_1 < AB . \Gamma\Delta + B\Gamma . \Delta A \quad (2)$$

Ἐκ τοῦ τετραπλεύρου $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$, κατά τό θεώρημα τοῦ Πτολεμαίου θά ἔχωμεν:

$$A_1\Gamma_1 . B_1\Delta_1 \leqslant A_1B_1 . \Gamma_1\Delta_1 + B_1\Gamma_1 . \Delta_1A_1 \quad (3)$$

Ἐκ τῶν (2) καί (3) συνάγομεν ὅτι:

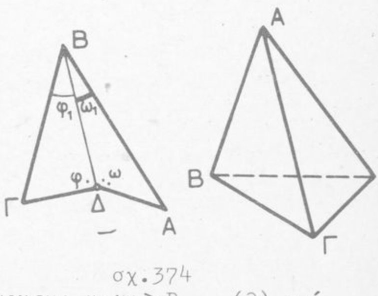
$$A_1\Gamma_1 . B_1\Delta_1 \leqslant A_1B_1 . \Gamma_1\Delta_1 + B_1\Gamma_1 . \Delta_1A_1 < AB . \Gamma\Delta + B\Gamma . \Delta A \quad (4)$$

Ἡ (4), βάσει τῆς (1) γίνεται:

$$A\Gamma . B\Delta < AB . \Gamma\Delta + B\Gamma . \Delta A \quad (5)$$

480. Τό ἄθροισμα τῶν διέδρων γωνιῶν τετραέδρου περιέχεται μεταξύ 4 ὀρθῶν καί 6 ὀρθῶν γωνιῶν.

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς: Ἐν πρώτοις ἀποδεικνύομεν ὅτι: Τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν στρεβλοῦ τετραπλεύρου εἶναι μικρότερον τῶν 4 ὀρθῶν γωνιῶν.



σχ.374

Ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΒΔ ἔχομεν:

$A + \omega_1 + \omega = 2$ ὀρθαί.

Ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΓΔ ἔχομεν:

$\Gamma + \varphi_1 + \varphi = 2$ ὀρθαί,

καί κατ'ἀκολουθίαν:

$A + \Gamma + (\omega_1 + \varphi_1) + (\omega + \varphi) = 4$ ὀρθαί (1)

Ἐκ τῆς τριέδρου ὅμως Β.ΑΔΓ ἔχομεν: $\omega_1 + \varphi_1 > B$ (2) καί $\omega + \varphi > \Delta$ (3). Ἐκ τῶν (1),(2) καί (3) λαμβάνομεν:

$$A + \Gamma + B + \Delta < 4 \text{ ὀρθῶν} \quad (4)$$

Ἔστω ΑΒΓΔ ἕν τετράεδρον. Θά ἔχωμεν τάς σχέσεις:

δ(ΑΒ)+δ(ΒΓ)+δ(ΓΔ)+δ(ΔΑ) < 4 ὀρθ. (5)
δ(ΒΓ)+δ(ΓΑ)+δ(ΑΔ)+δ(ΔΒ) < 4 ὀρθ. (6)
δ(ΑΒ)+δ(ΒΔ)+δ(ΔΓ)+δ(ΓΑ) < 4 ὀρθ. (7)

Διά προσθέσεως κατά μέλη τούτων λαμβάνομεν:

δ(ΑΒ)+δ(ΑΓ)+δ(ΑΔ)+δ(ΒΓ)+δ(ΓΔ)+δ(ΔΒ) < 6 ὀρθ. (8)

Ἀλλ' εἶναι γνωστόν ὅτι:

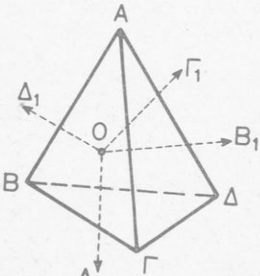
$$\left.\begin{array}{l} δ(ΑΒ)+δ(ΑΓ)+δ(ΑΔ) > 2 ὀρθ. \\ δ(ΒΑ)+δ(ΒΓ)+δ(ΒΔ) > 2 ὀρθ. \\ δ(ΓΒ)+δ(ΓΔ)+δ(ΓΑ) > 2 ὀρθ. \\ δ(ΔΓ)+δ(ΔΒ)+δ(ΔΑ) > 2 ὀρθ. \end{array}\right\} \Rightarrow δ(ΑΒ)+δ(ΑΓ)+δ(ΑΔ)+δ(ΒΓ)+δ(ΓΔ)+δ(ΔΒ) > 4 ὀρθ. \quad (9)$$

Ἐκ τῶν (8) καί (9) συνάγομεν ὅτι:

4 ὀρθ. < δ (ΑΒ)+δ(ΑΓ)+δ(ΑΔ)+δ(ΒΓ)+δ(ΓΔ)+δ(ΔΒ) 6 ὀρθ.

481. Εἰς πᾶν τετράεδρον τό ἐμβαδόν ἑκάστης ἕδρας εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριῶν ἄλλων ἑδρῶν.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Θεωροῦμεν τό σημεῖον Ο ἐσωτερικόν τοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ καί ἄγομεν τά εὐθύγραμμα τμήματα $ΟΑ_1$, $ΟΒ_1$, $ΟΓ_1$, $ΟΔ_1$ κάθετα πρός τάς ἕδρας ΒΓΔ, ΑΓΔ, ΑΒΔ, ΑΒΓ ἀντιστοίχως, καί τοιαῦτα ὥστε:



σχ.375

$$\left.\begin{array}{l} |\overrightarrow{ΟΑ_1}| = k\cdot(ΒΓΔ) \\ |\overrightarrow{ΟΒ_1}| = k\cdot(ΑΓΔ) \\ |\overrightarrow{ΟΓ_1}| = k\cdot(ΑΒΔ) \\ |\overrightarrow{ΟΔ_1}| = k\cdot(ΑΒΓ) \end{array}\right\}$$ καί φερόμενα πρός τά ἕδρας ταύτας καί μέ $k = 1$.

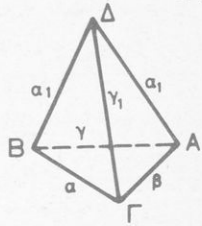
Ἀποδεικνύεται εὐκόλως ὅτι ταῦτα θά εἶναι πλευραί στρεβλοῦ τετραπλεύρου (τοῦ τετραέδρου).

Ἐπειδή κάθε πλευρά τοῦ τετραπλεύρου τούτου εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἄλλων, καί κατ' ἀκολουθίαν καί αἱ ἀνάλογοί των (μέ λόγον 1) ἕδραι τοῦ τετραέδρου θά ἱκανοποιοῦν τήν αὐτήν σχέσιν.

482. Ἐάν τετραέδρου αἱ ἀπέναντι δίεδροι εἶναι ἴσαι, τότε αἱ ἀπέναντι ἀκμαί του εἶναι ἴσαι.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Θεωροῦμεν τό τετράεδρον ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου αἱ ἀπέναντι δίεδροι ΒΓ καί ΑΔ, ΓΑ καί ΑΒ, ΓΔ καί ΑΒ εἶναι ἴσαι καί κατά τά τρία ζεύγη.

Αἱ τρίεδροι, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ὡς κορυφάς τάς τοῦ τετραέδρου, ἔχουν τάς τρεῖς διέδρους των ἴσας ἑκάστην ἑκάστη καί τοῦ αὐτοῦ προσανατολισμοῦ. Εἶναι ἄρα ἴσαι καί κατ'ἀκολουθίαν αἱ ὁμόλογοι ἕδραι των θά εἶναι ἴσαι.



Οὕτως, αἱ ἕδραι τοῦ τετραέδρου εἶναι ἴσαι, καθόσον ἔχουν μίαν πλευράν ἴσην καί δύο γωνίας ἴσας μίαν πρός μίαν.

σχ.376

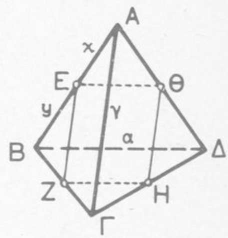
Ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων τούτων προκύπτει ἡ ἰσότης τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν τοῦ τετραέδρου.

483. Τετράεδρον ΑΒΓΔ νά τμηθῇ ὑπό ἐπιπέδου, οὕτως ὥστε ἡ τομή νά εἶναι παραλληλόγραμμον (τρεῖς περιπτώσεις).

Λ ύ σ ι ς: Θεωροῦμεν τό τετράεδρον ΑΒΓΔ καί ἔστω ΕΖΗΘ μία τομή αὐτοῦ, ἡ ὁποία εἶναι παραλληλόγραμμον.

Ἐπειδή ἡ ΕΘ εἶναι παράλληλος πρός τήν ΖΗ, θά εἶναι καί παράλληλος πρός τό ἐπίπεδον ΒΓΔ καί πρός τήν ΒΔ. Ὁμοίως ἡ ΕΖ εἶναι παράλληλος πρός τήν ΑΓ.

Οὕτω, τό ἐπίπεδον ΕΖΗΘ εἶναι παράλληλον πρός τάς ἀπέναντι ἀκμάς ΒΔ καί ΑΓ.



σχ.377

Ἀντιστρόφως, ἐάν τμήσωμεν τό τετράεδρον δι'ἐπιπέδου παραλλήλου πρός δύο ἀπέναντι ἀκμάς του, λαμβάνομεν ὡς τομήν ἕνα παραλ/μον.

Ὑπάρχουν τρεῖς σειραί ἐπιπέδων, ἱκανοποιοῦσαι τό πρόβλημα. Τά ἐπίπεδα τά παράλληλα πρός ἕκαστον ζεῦγος τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν.

Σ η μ ε ί ω σ ι ς: Ἐάν θέσωμεν $AE=x$ καί $EB=y$, $AB=\beta$, $A\Gamma=\gamma$, $B\Delta=\alpha$, θά ἔχωμεν:

$$\frac{E\Theta}{\alpha}=\frac{x}{\beta}\Longrightarrow \quad E\Theta=\frac{\alpha x}{\beta} \quad \text{καί} \quad \frac{EZ}{\gamma}=\frac{y}{\beta} \Rightarrow \quad EZ=\frac{\gamma y}{\beta}$$

Διά νά εἶναι ρόμβος τό ΕΖΗΘ, πρέπει:

$$E\Theta=EZ \quad \text{ἤ} \quad \frac{\alpha x}{\beta}=\frac{\gamma y}{\beta} \Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{\gamma}{\alpha} \qquad (1)$$

ἐκ ταύτης προσδιορίζεται τό σημεῖον Ε, ἄρα καί ὁ ρόμβος ΕΖΗΘ.

Ἐκ τῆς (1) ἕπεται: $\frac{x}{\gamma}=\frac{y}{\alpha}=\frac{x+y}{\gamma+\alpha}=\frac{\beta}{\alpha+\gamma} \Longrightarrow x=\frac{\beta\gamma}{\alpha+\beta}$,

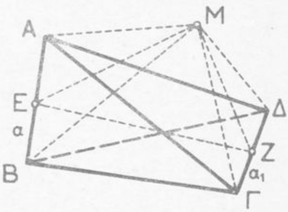
καί ἄρα $E\Theta=\frac{\alpha\gamma}{\alpha+\gamma}$ θά εἶναι ἡ πλευρά τοῦ ρόμβου.

484. Δοθέντος τετραέδρου ΑΒΓΔ, νά εὑρεθῆ ὁ γεωμετρικός τόπος τῶν σημείων Μ, διά τά ὁποῖα ἰσχύει ἡ ἰσότης:

$$MA^2+MB^2=M\Gamma^2+M\Delta^2.$$

Λ ύ σ ι ς: Ἔστω Μ τυχόν σημεῖον τοῦ τόπου, τοιοῦτον ὥστε: $MA^2+MB^2=M\Gamma^2+M\Delta^2$ (1)

Ἔστωσαν Ε καί Ζ τά μέσα τῶν ΑΒ καί ΓΔ. Θά εἶναι:



$$\left.\begin{aligned} MA^2+MB^2&=2.ME^2+\frac{\alpha^2}{2} \\ M\Gamma^2+M\Delta^2&=2.MZ^2+\frac{\alpha_1^2}{2} \end{aligned}\right\} (2)$$

Βάσει τῆς (1), ἐκ τῶν (2) ἔχομεν:

$$2.ME^2+\frac{\alpha^2}{2}=2.MZ^2+\frac{\alpha_1^2}{2} \Rightarrow ME^2-MZ^2=\frac{\alpha_1^2-\alpha^2}{4}, \quad (3)$$

σχ.378

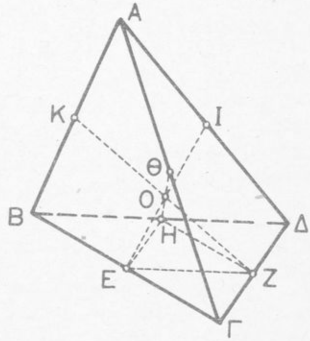
ἡ ὁποία φανερώνει ὅτι τό Μ θά κεῖται ἐπί γνωστοῦ γεωμετρικοῦ τόπου: ἐπί ἐπιπέδου καθέτου πρός τήν ΕΖ.

485. Νά κατασκευασθῆ τετράεδρον ἐκ τῶν ἀποστάσεων τῶν μέσων τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν καί τῶν γωνιῶν, τάς ὁποίας σχηματίζουν μεταξύ των.

Λ ύ σ ι ς: Ἔστω Ο ἡ τομή τῶν τμημάτων ΙΕ, ΗΘ, ΖΚ, τῶν ὁριζομένων ὑπό τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν τοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ. Κατά τήν ἄσκησιν 462 θά εἶναι: ΟΕ=ΟΙ, ΟΗ=ΟΘ, ΟΖ=ΟΚ.

Τό τετράεδρον ΟΕΗΖ κατασκευάζεται ἐκ τῶν ἀκμῶν ΟΕ, ΟΗ, ΟΖ καί τῶν γωνιῶν ΕΟΗ, ΕΟΖ καί ΖΟΗ.

Οὕτω προκύπτει τό τρίγωνον ΕΗΖ. Αἱ παράλληλοι ἐκ τῶν Η, Ε, Ζ πρός τάς ΕΖ, ΗΖ, ΗΕ ἀντιστοίχως προσδιορίζουν τήν ἕδραν ΒΓΔ τοῦ ζητουμένου τετραέδρου.



σχ.379

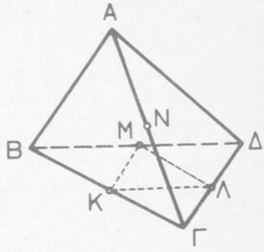
Ἐπί τῶν προεκτάσεων τῶν ΕΟ, ΗΟ, ΖΟ λαμβάνομεν ἀντιστοίχως τά τμήματα ΟΙ, ΟΘ, ΟΚ καί ὁρίζονται οὕτω τά μέσα τῶν ἀκμῶν ΑΔ, ΑΓ καί ΑΒ. Ἄρα καί αἱ ἀκμαί αὗται.

486. Ὁμοίως ἐκ τῶν μέσων Κ, Λ, Μ, Ν τεσσάρων ἀκμῶν του (δώδεκα λύσεις).

Λ ύ σ ι ς: Ἔστωσαν Κ, Λ, Μ, Ν τά μέσα τῶν ἀκμῶν ΒΓ, ΓΔ, ΒΔ, ΓΑ ἀντιστοίχως (σχ.380).

Τά σημεῖα Κ.Λ, Μ ὁρίζουν τό τρίγωνον ΚΛΜ, ἄρα καί τήν ἕδραν ΒΓΔ.Τό σημεῖον Ν ὁρίζει τό τμῆμα ΓΝ,ἥμισυ τῆς ἀκμῆς ΑΓ,ἄρα καί τήν ἀκμήν ΓΑ.'Εντεῦθεν καί τό τετράεδρον ΑΒΓΔ προκύπτει εὐκόλως.

'Υπάρχουν 12 λύσεις.Ποῖαι εἶναι αὗται;



σχ.380

487. 'Ομοίως ἐκ τῶν ἕξ ἀκμῶν του.

Λ ύ σ ι ς:"Εστω ΑΒΓΔ τό ζητούμενον τετράεδρον,τοῦ ὁποίου αἱ ἕξ ἀκμαί εἶναι δεδομένα εὐθ.τμήματα.

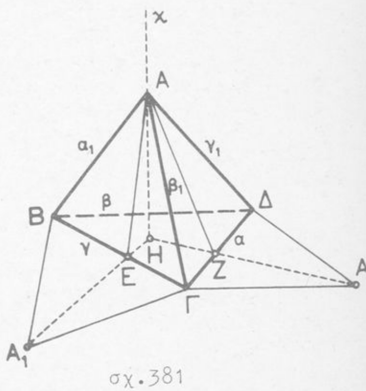
"Αγομεν τό ὕψος ΑΗ τοῦ τετραέδρου καί τάς ΗΕ,ΗΖ καθέτους πρός τάς ΒΓ καί ΓΔ ἀντιστοίχως.

"Αρα ΑΕ$\perp$ΒΓ καί ΑΖ$\perp$ΓΔ.

Εἰς τά ἐπίπεδα ΑΗΕ καί ΑΗΖ νοοῦμεν ὅτι γράφονται κύκλοι μέ κέντρα Ε καί Ζ καί ἀκτῖνας ἀντιστοίχως ΕΑ,ΖΑ, οἱ ὁποῖοι τέμνουν τάς ΗΕ καί ΗΖ ἀντιστοίχως εἰς τά σημεῖα A_1 καί A_2.Τά τρίγωνα A_1ΒΓ καί A_2ΓΔ θά εἶναι ἴσα ἀντιστοίχως πρός τά ΑΒΓ καί ΑΓΔ.

'Εντεῦθεν ἡ ἀκόλουθος κατασκευή.

Κατασκευάζομεν πρῶτον τήν ἕδραν ΒΓΔ μέ πλευράς α,β,γ δοθείσας.Κατόπιν μέ πλευράς γ,β_1,α_1 κατασκευάζομεν τό τρίγωνον A_1ΓΒ συνεπίπεδον μέ τό ΒΓΔ καί μέ πλευράς α,β_1,γ_1 κατασκευάζομεν τό τρίγωνον A_2ΓΔ συνεπίπεδον πρός τό ΒΓΔ.Τά ὕφη A_1Ε καί A_2Ζ τῶν A_1ΒΓ καί A_2ΓΔ τέμνονται εἰς τό Η.



σχ.381

Εἰς τό Η ὑψοῦμεν κάθετον Ηx πρός τό ἐπίπεδον ΒΓΔ.'Εν τῷ ἐπιπέδῳ A_1Ηx γράφομεν τόν κύκλον (Ε,ΕA_1),ὅστις τέμνει τήν Ηx εἰς τό Α.

Τό τετράεδρον ΑΒΓΔ εἶναι τό ζητούμενον.Διατί;

Μήπως ὑπάρχει καί ἄλλο;Διατί;

Διά νά ὑπάρχῃ λύσις,πρέπει νά κατασκευάζωνται τά τρίγωνα ΒΓΔ,ΒΓA_1,ΓΔA_2 καί ἐπί πλέον ΓΗ$<$ΓΑ=β_1.

488. Δίδεται τετράεδρον ΑΒΓΔ καί σημεῖον Ο ἐσωτερικόν τῆς ἕδρας ΑΒΓ.Αἱ ἐκ τοῦ Ο ἀγόμεναι παράλληλοι πρός τάς ἀκμάς ΔΑ,ΔΒ,ΔΓ τέμνουν τάς ἕδρας ΔΒΓ,ΔΓ~~Α~~,ΔΑΒ ἀντιστοίχως εἰς τά σημεῖα A_1,B_1,Γ_1, Τότε:

$$\frac{OA_1}{\Delta A} + \frac{OB_1}{\Delta B} + \frac{O\Gamma_1}{\Delta\Gamma} = 1$$

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Ἐπειδή αἱ OA_1 καί $A\Delta$ εἶναι παράλληλοι καί ἄρα ὁρίζουν ἐπίπεδον, τό ὁποῖον τέμνει τήν ΒΓ κατά τό σημεῖον A_2.

Ἐκ τοῦ τριγώνου $A_2A\Delta$ ἔχομεν

$$\frac{OA_1}{\Delta A}=\frac{OA_2}{AA_2}=\frac{(OB\Gamma)}{(AB\Gamma)} \qquad (1)$$

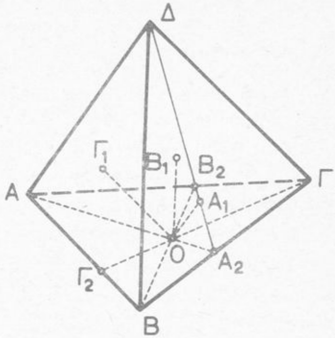
Ὁμοίως: $$\frac{OB_1}{\Delta B}=\frac{(O\Gamma A)}{(AB\Gamma)} \qquad (2)$$

καί $$\frac{O\Gamma_1}{\Delta\Gamma}=\frac{(OAB)}{(AB\Gamma)} \qquad (3)$$

Προσθέτοντες τάς (1),(2),(3) κατά μέλη εὑρίσκομεν:

$$\frac{OA_1}{\Delta A}+\frac{OB_1}{\Delta B}+\frac{O\Gamma_1}{\Delta\Gamma}=\frac{(OB\Gamma)+(O\Gamma A)+(OAB)}{(AB\Gamma)}=$$

$$=\frac{(AB\Gamma)}{(AB\Gamma)}=1.$$



σχ.382

489. Νά ἐξετασθῆ καί ἡ περίπτωσις, καθ'ἥν τό Ο εἶναι ἐξωτερικόν σημεῖον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Λ ύ σ ι ς: Ἐργασία ἀνάλογος πρός τήν τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως μέ τήν διαφοράν ὅτι τό ἀλγεβρικόν ἄθροισμα

$$\pm\frac{OA_1}{\Delta A}\pm\frac{OB_1}{\Delta B}\pm\frac{O\Gamma_1}{\Delta\Gamma}=1$$

ἀναλόγως τῆς θέσεως τοῦ Ο εἰς τό ἐξωτερικόν τοῦ τριγώνου.

490. Διά τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν τετραέδρου ἄγομεν ἐπίπεδα παράλληλα καί σχηματίζεται οὕτως ἕνα παραλληλεπίπεδον, περιγεγραμμένον περί τό τετράεδρον (τό τετράεδρον ἐγγεγραμμένον), τό ὁποῖον ἔχει τάς ἑξῆς ἰδιότητας:

1ον: Ἐάν δύο ἀπέναντι ἀκμαί τοῦ τετραέδρου εἶναι ἴσαι, τό παραλληλεπίπεδον ἔχει βάσεις ὀρθογώνια.

2ον: Ἐάν τό τετράεδρον ἔχῃ δύο ζεύγη ἀπέναντι ἀκμῶν ἴσα, τό παραλληλεπίπεδον εἶναι ὀρθόν.

3ον: Ἐάν δύο ἀπέναντι ἀκμαί τετραέδρου εἶναι ὀρθογώνιοι, τά ἀντίστοιχα παραλληλόγραμμα εἶναι ρόμβοι.

4ον: Ἐάν τό τετράεδρον ἔχῃ τρία ζεύγη ἀπέναντι ἀκμῶν ἴσα, τό παραλληλεπίπεδον εἶναι ὀρθογώνιον.

5ον: Ἐάν δύο ζεύγη ἀπέναντι ἀκμῶν τοῦ τετραέδρου εἶναι ὀρθογώνιοι εὐθεῖαι, τότε καί τό τρίτον ζεῦγος εἶναι ὀρθογώνιοι εὐθεῖαι, καί αἱ ἕδραι τοῦ παραλληλεπιπέδου εἶναι ρόμβοι (ρομβόεδρον).

6ον: Ἐάν δύο ἀπέναντι ἀκμαί τετραέδρου εἶναι ἴσαι καί ὀρθογώνιοι, αἱ ἀντίστοιχοι ἕδραι τοῦ παραλληλεπιπέδου εἶναι τετράγωνα.

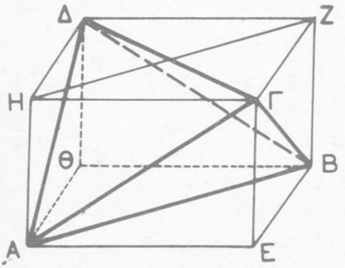
7ον:'Εάν τό τετράεδρον εἶναι κανονικόν,τό περιγεγραμμένον παραλληλεπίπεδον εἶναι κύβος καί ἀντιστρόφως.

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς: 1ον:"Εστω ὅτι αἱ ἀπέναντι ἀκμαί ΑΒ καί ΓΔ τοῦ τετραέδρου εἶναι ἴσαι: ΑΒ=ΓΔ. Αἱ διαγώνιοι τῶν δύο ἑδρῶν ΑΕΒΘ καί ΓΖΔΗ εἶναι ἴσαι."Αν ἀχθῇ ἡ ΗΖ,τότε ΗΖ=ΑΒ=ΓΔ."Αρα τό παραλ/μον ΓΖΗΔ εἶναι ὀρθογώνιον,ὁπότε καί τό ἴσον του ΑΕΒΘ θά εἶναι ὀρθογώνιον.

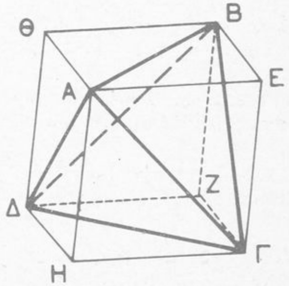
2ον:"Εστω ὅτι ΑΒ=ΓΔ καί ΑΓ=ΒΔ.Τότε αἱ ἕδραι ΑΕΒΘ καί ΓΖΗΘ θά εἶναι ὀρθογώνια,καθώς καί αἱ ἕδραι ΑΕΓΗ καί ΒΖΔΘ θά εἶναι ὀρθογώνια."Αρα τό παραλ/δον εἶναι ὀρθόν.

3ον:"Εστω ὅτι αἱ ἀπέναντι ἀκμαί ΑΒ καί ΓΔ εἶναι ὀρθογώνιοι εὐθεῖαι,ὁπότε αἱ ἕδραι ΑΕΒΘ καί ΓΖΔΗ θά εἶναι ρόμβοι,καθόσον αἱ διαγώνιοί των τέμνονται καθέτως.

4ον:"Εστω ΑΒ=ΓΔ, ΑΓ=ΒΔ καί ΑΔ=ΒΓ,τότε πᾶσαι αἱ ἕδραι τοῦ παραλ/δου εἶναι ὀρθογώνια."Αρα τό παραλ/δον εἶναι ὀρθογώνιον.



σχ.383



σχ.384

5ον:"Εστω ὅτι αἱ ἀκμαί ΑΒ,ΓΔ καί ΑΓ,ΒΔ εἶναι ὀρθογώνιοι τότε αἱ ἕδραι ΑΕΒΘ,ΓΖΔΗ καί ΑΕΓΗ,ΔΖΒΘ θά εἶναι ρόμβοι καί κατ'ἀκολουθίαν:

ΑΕ=ΕΒ=ΒΘ=ΘΑ,

καί ΑΕ=ΕΓ=ΓΗ=ΑΗ,

ὅθεν καί ΑΘ=ΑΗ."Αρα τό παραλληλόγραμμον ΑΘΔΗ εἶναι ρόμβος καί αἱ διαγώνιοί του θά τέμνωνται καθέτως.'Η ἀκμή ΒΓ,ἡ ὁποία εἶναι παράλληλος πρός τήν ΘΗ θά εἶναι ὀρθογώνιος πρός τήν ΑΔ.

Εἰς τήν περίπτωσιν ταύτην τό παραλ/δον καλεῖται ρομβόεδρον.

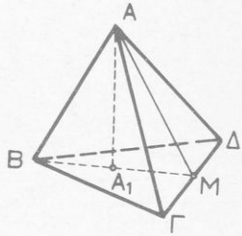
6ον:'Εάν ΑΒ=ΓΔ καί ὀρθογώνιοι,τότε αἱ ἕδραι ΑΕΒΘ καί ΓΖΔΗ εἶναι τετράγωνα.

7ον:'Εάν τό τετράεδρον εἶναι κανονικόν,δηλαδή ΑΔ=ΑΓ=ΑΒ=

$=\Delta\Gamma=B\Gamma=B\Delta$, τότε πᾶσαι αἱ ἕδραι τοῦ παρ/δου εἶναι τετράγωνα καί ἑπομένως τό παραλ/δον εἶναι κύβος.

Ἀντιστρόφως, ἑκάστη διαγώνιος ἕδρας κύβου εἶναι $\alpha\sqrt{2}$. Ἄρα τά ἐγγεγραμμένα τετράεδρα εἶναι κανονικά ἀκμῆς $\alpha\sqrt{2}$.

491. Τετραέδρου ΑΒΓΔ αἱ ἀκμαί ΑΒ καί ΓΔ εἶναι ὀρθογώνιοι. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι τό ὕφος AA_1 αὐτοῦ, ἔχει τόν πόδα του A_1 ἐπί τοῦ ὕφους ΒΜ τῆς ἕδρας ΒΓΔ.

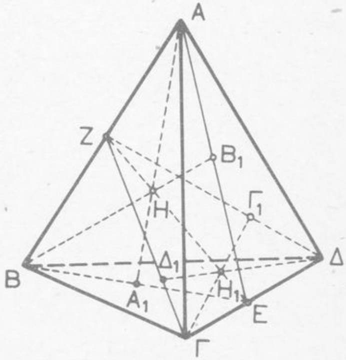


σχ.385

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Ἐπειδή τό ὕφος AA_1 εἶναι κάθετον πρός τήν ἕδραν ΒΓΔ, ἕπεται ὅτι ἡ AA_1 εἶναι ὀρθογώνιος πρός τήν ΓΔ. Ἀλλά ἡ ΓΔ εἶναι ὀρθογώνιος καί πρός τήν ΑΒ. Ἄρα ἡ ΓΔ εἶναι κάθετος πρός τό ἐπίπεδον ABA_1.

Τοῦτο τέμνει τήν ΓΔ κατά τό σημεῖον Μ. Ἡ ΓΔ ὡς κάθετος πρός τό ἐπίπεδον ΒΑΜ θά εἶναι κάθετος καί πρός τήν ΒΜ. Ἄρα τό A_1 κεῖται ἐπί τοῦ ὕφους ΒΜ τῆς ἕδρας ΒΓΔ.

492. Ἐάν δύο ὕφη τετραέδρου τέμνωνται, θά τέμνωνται καί τά ἄλλα δύο ὕφη αὐτοῦ, καί τό τετράεδρον θά ἔχῃ δύο ἀπέναντι ἀκμάς ὀρθογωνίους.



σχ.386

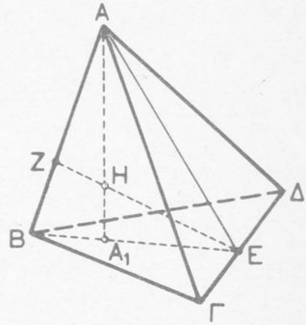
Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Ἔστω ὅτι τά ὕφη AA_1 καί BB_1 τοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ τέμνονται εἰς τό Η, τότε ἡ ΓΔ ὡς ὀρθογώνιος πρός τάς εὐθείας AA_1 καί BB_1 θά εἶναι κάθετος πρός τό ἐπίπεδον αὐτῶν ΒΕΑ καί κατ' ἀκολουθίαν ἡ ΓΔ θά εἶναι ὀρθογώνιος πρός τήν ΑΒ.

Ἀφοῦ αἱ ΓΔ καί ΑΒ εἶναι ὀρθογώνιοι εὐθεῖαι, διά τῆς ΓΔ δύναται νά ἀχθῇ ἐπίπεδον ΓΔΖ κάθετον πρός τήν ΑΒ. Τό ἐπίπεδον ΓΔΖ θά περιέχῃ τά ὕφη $\Gamma\Gamma_1$ καί $\Delta\Delta_1$ τοῦ τετραέδρου. Ταῦτα τέμνονται εἰς τό σημεῖον H_1.

Τά Η καί H_1 κεῖνται ἐπί τῆς ΕΖ, τομῆς τῶν ἐπιπέδων ΑΒΕ καί ΓΔΖ. Ἡ ΕΖ εἶναι κοινή κάθετος τῶν ΑΒ, ΓΔ.

493. Εἰς τετράεδρον ΑΒΓΔ ἡ κοινή κάθετος τῶν ΑΒ καί ΓΔ τέμνει τό ὕφος AA_1 αὐτοῦ. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ ἀκμαί ΑΒ καί ΓΔ εἶναι ὀρθογώνιοι.

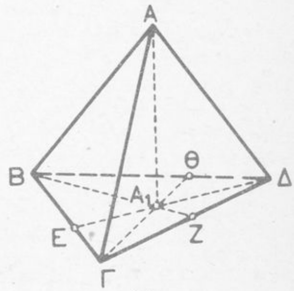
'Α π ό δ ε ι ξ ι ς:"Εστω ὅτι ἡ κοινή κάθετος ΕΖ τῶν ἀκμῶν ΑΒ καί ΓΔ τοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ τέμνει τό ὕψος $ΑΑ_1$ αὐτοῦ εἰς τό σημεῖον Η. Τά τμήματα $ΑΑ_1$ καί ΕΖ εἶναι ὕφη τοῦ τριγώνου ΑΒΕ. Ἀφοῦ ἡ $ΑΑ_1$ εἶναι κάθετος πρός τήν ἕδραν ΒΓΔ, ἕπεται ὅτι ἡ ΓΔ, εἶναι ὀρθογώνιός πρός τήν $ΑΑ_1$. Ἐπειδή δέ ἡ ΒΕ εἶναι καί κάθετος πρός τήν ΓΔ, ἕπεται ὅτι ἡ ΓΔ, ὡς κάθετος πρός τάς ΕΒ καί ΕΖ θά εἶναι κάθετος καί πρός τό ἐπίπεδον αὐτῶν ΒΕΖ, ἄρα ἡ ΓΔ θά εἶναι ὀρθογώνιος πρός τήν ΑΒ.



σχ.387

494. Εἰς ὀρθοκεντρικόν τετράεδρον ΑΒΓΔ ὁ πούς τοῦ ὕψους $ΑΑ_1$ συμπίπτει μέ τό ὀρθόκεντρον τῆς ἕδρας ΒΓΔ. Ὁμοίως καί οἱ πόδες τῶν ἄλλων ὑψῶν εἶναι τά ὀρθόκεντρα τῶν ἀντιστοίχων ἑδρῶν.

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς: Ἐπειδή ἡ ΓΔ εἶναι ὀρθογώνιος πρός τάς ΑΒ καί $ΑΑ_1$, ἕπεται ὅτι ἡ ΓΔ θά εἶναι κάθετος πρός τό ἐπίπεδον $ΑΒΑ_1$. Κατ' ἀκολουθίαν $ΓΔ \perp ΒΑ_1Ζ$. Ἄρα τό ΒΖ εἶναι ὕψος τοῦ τριγώνου ΒΓΔ. Ὁμοίως, ἐπειδή αἱ ΒΔ καί ΑΓ εἶναι ὀρθογώνιοι τό $Α_1$ θά κεῖται ἐπί τοῦ ὕψους ΓΘ τοῦ τριγώνου. Ἄρα τό $Α_1$ εἶναι τό ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου ΒΓΔ.



σχ.388

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι καί οἱ πόδες τῶν ἄλλων ὑψῶν τοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ εἶναι τά ὀρθόκεντρα τῶν ἀντιστοίχων ἑδρῶν.

495. Εἰς ὀρθοκεντρικόν τετράεδρον αἱ κοιναί κάθετοι τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν του διέρχονται διά τοῦ ὀρθοκέντρου τούτου.

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς: "Εστω ὅτι τό τετράεδρον ΑΒΓΔ εἶναι ὀρθοκεντρικόν (σχ.389).

Ἄρα διά τῆς ΑΒ δύναται νά ἀχθῇ ἐπίπεδον κάθετον πρός τήν ΓΔ, τό ΑΒΕ. Τά ὕφη $ΑΑ_1$ καί $ΒΒ_1$ εἶναι ὀρθογώνιοι εὐθεῖαι πρός τήν ΓΔ, θά κεῖνται ἐπί τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΕ καί ἄρα θά τέμνωνται.

Οὕτω, δύο τυχόντα ὕφη τέμνονται. Τό αὐτό θά συμβαίνῃ καί διά τά ὑπόλοιπα, ἀνά δύο τυχόντα. Ἐπειδή ταῦτα δέν κεῖνται ἐπί τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καί τέμνονται ἀνά δύο, ἕπεται ὅτι θά διέρχωνται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου, ἔστω τοῦ Η.

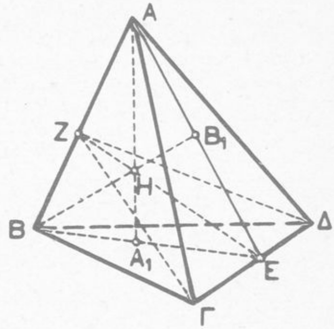
Τό Η καλεῖται ὀρθόκεντρον τοῦ τετραέδρου.

Ἡ ΕΗ θά εἶναι κάθετος πρός τήν ΑΒ, καθόσον εἶναι τό τρίτον ὕψος τοῦ τριγώνου ΑΒΕ.

Ἐπειδή τό ΑΒΕ εἶναι κάθετον πρός τήν ΔΓ ἕπεται ὅτι ΕΖ ⊥ ΓΔ.

Οὕτως, ἡ ΕΖ εἶναι κοινή κάθετος τῶν ΑΒ, ΓΔ καί διέρχεται διά τοῦ Η.

Τό αὐτό συμβαίνει καί διά τάς ἄλλας δύο κοινάς καθέτους τῶν ζευγῶν ΒΔ, ΑΓ καί ΒΓ, ΑΔ.

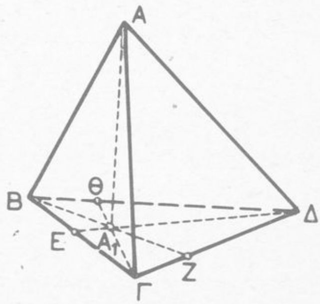


σχ.389

496. Ἐάν εἰς τό ὀρθόκεντρον A_1 τριγώνου ΒΓΔ ὑψώσωμεν κάθετον ἐπί τό ἐπίπεδον ΒΓΔ, τότε πᾶν σημεῖον Α τῆς καθέτου ταύτης δίδει ὀρθοκεντρικόν τετράεδρον ΑΒΓΔ.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Ἐπειδή ἡ AA_1 εἶναι κάθετος πρός τό ἐπίπεδον ΒΓΔ, ἕπεται ὅτι ἡ ΓΔ εἶναι ὀρθογώνιος πρός τήν AA_1. Ἀλλ' ἡ ΓΔ εἶναι κάθετος πρός τήν ΒΖ. Ἄρα ἡ ΓΔ θά εἶναι κάθετος πρός τό ἐπίπεδον AA_1B. Κατ' ἀκολουθίαν ἡ ΓΔ θά εἶναι ὀρθογώνιος πρός τήν ΑΒ.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ ΒΓ εἶναι ὀρθογώνιος πρός τήν ΑΔ καί ἡ ΒΔ ὀρθογώνιος πρός τήν ΑΓ. Ἄρα τό τετράεδρον ΑΒΓΔ εἶναι ὀρθοκεντρικόν.



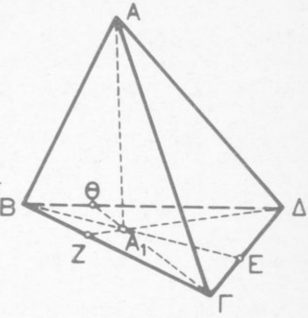
σχ.390

497. Ἐάν ὁ πούς A_1 τοῦ ὕψους AA_1 τετραέδρου ΑΒΓΔ εἶναι τό ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου ΒΓΔ, τότε τό ΑΒΓΔ εἶναι ὀρθοκεντρικόν.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Ἔστω ὅτι ὁ πούς A_1 τοῦ ὕψους AA_1 τοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ εἶναι τό ὀρθόκεντρον τῆς ἕδρας ΒΓΔ. (σχ.391).

Ἐπειδή ἡ BA_1 εἶναι κάθετος πρός τήν ΓΔ καί ἡ ΓΔ ὀρθογώνιος πρός τήν AA_1, ἕπεται ὅτι ἡ ΓΔ θά εἶναι κάθετος πρός τό ἐπίπεδον ABA_1 καί κατ'ἀκολουθίαν ἡ ΓΔ θά εἶναι ὀρθογώνιος πρός τήν ΑΒ.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι καί αἱ ΑΓ,ΔΒ καί ΒΓ,ΑΔ εἶναι ἀντιστοίχως ὀρθογώνιοι εὐθεῖαι.



σχ.391

498.'Εάν τρία ὕψη τετραέδρου διέρχωνται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου,τότε καί τό τέταρτον ὕψος διέρχεται διά τοῦ σημείου τούτου καί τό τετράεδρον εἶναι ὀρθοκεντρικόν.

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς:Εἰς τήν ἄσκησιν 492 ἀπεδείξαμεν ὅτι: ἐάν δύο ὕψη AA_1,BB_1 τετραέδρου τέμνωνται,τότε τό ἕν ζεῦγος ἀπέναντι ἀκμῶν ΑΒ,ΓΔ εἶναι ὀρθογώνιοι εὐθεῖαι.

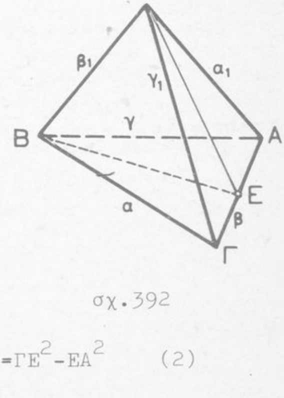
Κατ'ἀκολουθίαν,ἀφοῦ τρία ὕψη τοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ τέμνονται εἰς τό αὐτό σημεῖον,ἕπεται ὅτι τά τρία ζεύγη τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν τοῦ τετραέδρου τούτου εἶναι ὀρθογώνιοι εὐθεῖαι.Ἄρα τό τετράεδρον εἶναι ὀρθοκεντρικόν.

Εἰς τήν ἄσκησιν ὅμως 495 ἀπεδείξαμεν ὅτι τά ὕψη ὀρθοκεντρικοῦ τετραέδρου διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου Η (ὀρθοκέντρου).

Ἄρα καί τό τέταρτον ὕψος τοῦ ΑΒΓΔ διέρχεται διά τοῦ Η.

499. Εἰς ὀρθοκεντρικόν τετράεδρον τά ἀθροίσματα τῶν τετραγώνων τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν του εἶναι ἴσα.

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς:Ἔστω ὅτι τό τετράεδρον ΑΒΓΔ εἶναι ὀρθοκεντρικόν. Ὑπάρχει ἐπίπεδον ΔΒΕ,διερχόμενον διά τῆς ΒΔ καί κάθετον πρός τήν ΓΑ. Οὕτως,αἱ ΒΕ καί ΔΕ θά εἶναι κάθετοι πρός τήν ΓΑ.'Εκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΒΕΓ καί ΒΕΑ ἔχομεν:



$$\left.\begin{aligned}\alpha^2&=BE^2+\Gamma E^2\\ \gamma^2&=BE^2+EA^2\end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha^2-\gamma^2=\Gamma E^2-EA^2 \quad (1)$$

'Εκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΔΕΓ καί ΔΕΑ ἔχομεν:

σχ.392

$$\left.\begin{aligned}\gamma_1^2&=\Delta E^2+\Gamma E^2\\ \alpha_1^2&=\Delta E^2+EA^2\end{aligned}\right\} \Rightarrow \gamma_1^2-\alpha_1^2=\Gamma E^2-EA^2 \quad (2)$$

'Εκ τῶν (1) καί (2) ἕπεται: $\alpha^2-\gamma^2=\gamma_1^2-\alpha_1^2 \Longrightarrow \alpha^2+\alpha_1^2=\gamma^2+\gamma_1^2$ (3)

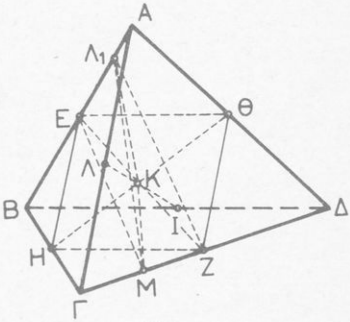
Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι: $\alpha^2+\alpha_1^2=\beta^2+\beta_1^2$ (4)

'Εκ τῶν (3) καί (4) λαμβάνομεν:

$$\alpha^2+\alpha_1^2=\beta^2+\beta_1^2=\gamma^2+\gamma_1^2 \quad (5)$$

500. Τά μέσα τῶν ἕξ ἀκμῶν ὀρθοκεντρικοῦ τετραέδρου καί τά ἄκρα τῶν κοινῶν καθέτων τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν αὐτοῦ ἀπέχουν ἴσον ἀπό τό κέντρον βάρους τοῦ τετραέδρου τούτου.

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς: Ἔστωσαν Ε,Ζ,Η,Θ τά μέσα τῶν ἀκμῶν ΑΒ, ΓΔ,ΒΓ,ΑΔ τοῦ ὀρθοκεντρικοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ. 'Επειδή $ΕΘ = /\!/ \frac{ΒΔ}{2} = /\!/ ΗΖ$, τό τετράπλευρον ΕΗΖΘ εἶναι παραλληλόγραμμον. 'Αλλ' ἡ ΒΔ εἶναι ὀρθογώνιος πρός τήν ΑΓ καί ἡ ΕΖ // ΑΓ. Ἄρα ΕΘ ⊥ ΕΗ καί τό ΕΗΖΘ θά εἶναι ὀρθογώνιον. Ἄρα ΗΘ=ΕΖ.



σχ.393

Ὁμοίως, ἄν Ι,Λ εἶναι τά μέσα τῶν ΑΓ καί ΒΔ, τότε ΙΛ=ΗΘ καί κατ' ἀκολουθίαν ΗΘ=ΕΖ=ΙΛ.

'Αλλ' αἱ ΗΘ,ΕΖ,ΙΛ διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου Κ (κέντρον βάρους τοῦ τετραέδρου ἄσκ.462) καί διχοτομοῦνται εἰς τοῦτο. Ἄρα: ΚΕ=ΚΖ=ΚΗ=ΚΘ=ΚΙ=ΚΛ (1).

Ἄγομεν τήν ΕΜ ⊥ ΓΔ καί $ΖΛ_1$ ⊥ ΑΒ. 'Αφοῦ ἡ ΓΔ εἶναι κάθετος πρός τήν ΜΕ καί ἡ ΓΔ ὀρθογώνιος πρός τήν ΑΒ, ἕπεται ὅτι ἡ ΓΔ θά εἶναι κάθετος πρός τό ἐπίπεδον ΑΒΜ καί κατ' ἀκολουθίαν ΓΔ ⊥ $ΜΛ_1$.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι καί ΑΒ ⊥ $ΜΛ_1$. Ἄρα ἡ $ΜΛ_1$ εἶναι ἡ κοινή κάθετος τῶν ΑΒ καί ΓΔ.

'Επειδή δέ $\measuredangle ΕΛ_1Ζ = \measuredangle ΕΜΖ = 90^\circ$, ἕπεται ὅτι:

$$ΚΛ_1=ΚΕ=ΚΖ=ΚΜ \quad (2)$$

'Εκ τῶν (1) καί (2) ἕπεται ὅτι:

$$ΚΕ=ΚΖ=ΚΗ=ΚΘ=ΚΙ=ΚΛ=ΚΜ=\ldots$$

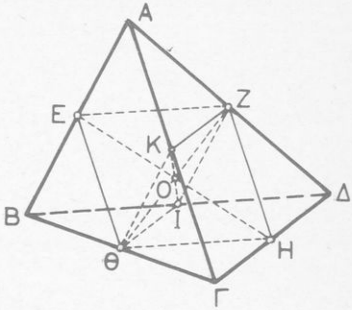
Ὥστε: Τό κέντρον βάρους Κ τοῦ ὀρθοκέντρικοῦ τετραέδρου ἀπέχει ἰσάκις τῶν μέσων τῶν ἀκμῶν καί τῶν ποδῶν τῶν κοινῶν καθέτων τῶν τριῶν ζευγῶν τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν αὐτοῦ.

501. Εἰς ὀρθοκεντρικόν τετράεδρον τά τμήματα τά ὁριζόμενα ὑπό τῶν μέσων τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν του εἶναι ἴσα.

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς: Γνωρίζομεν (ἄσκ.462) ὅτι τά τμήματα ΕΗ,ΖΘ,ΙΚ διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο καί διχοτομοῦνται εἰς τοῦτο.

'Επειδή ἡ ΒΔ εἶναι ὀρθογώνιος πρός τήν ΑΓ, ἕπεται ὅτι αἱ παράλληλοι πρός αὐτάς ΕΖ καί ΕΘ θά εἶναι κάθετοι. Ἄρα τό παραλληλόγραμμον ΕΖΗΘ εἶναι ὀρθογώνιον. Ὁμοίως καί τό παραλ/μον ΙΖΚΘ εἶναι ὀρθογώνιον καί κατ'ἀκολουθίαν:

ΙΚ=ΘΖ=ΕΗ



σχ.394

502. Εἰς ὀρθοκεντρικόν τετράεδρον τό περιγεγραμμένον παραλληλεπιπέδου εἶναι ρομβόεδρον.

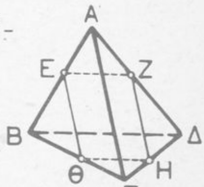
'Α π ό δ ε ι ξ ι ς: Εἰς τήν (ἄσκησιν 490-3ον) ἀπεδείξαμεν ὅτι, ἐάν δύο ἀπέναντι ἀκμαί τετραέδρου εἶναι ὀρθογώνιοι, τά ἀντίστοιχα παραλ/μα (περιγεγραμμένον παραλ/δον) εἶναι ρόμβοι.

'Αφοῦ τό τετράεδρον εἶναι ὀρθοκεντρικόν, ἕπεται ὅτι αἱ ἀπέναντι ἀκμαί, καί κατά τά τρία ζεύγη, θά εἶναι ὀρθογώνιοι εὐθεῖαι. Κατ'ἀκολουθίαν πᾶσαι αἱ ἕδραι τοῦ περιγεγραμμένου παραλ/δου εἶναι ρόμβοι.

503. Ἡ τομή ὀρθοκεντρικοῦ τετραέδρου ὑπό ἐπιπέδου παραλλήλου πρός δύο ἀπέναντι ἀκμάς του εἶναι ὀρθογώνιον.

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς: 'Αφοῦ ἡ τομή ΕΖΗΘ εἶναι παράλληλος πρός τάς ἀπέναντι ἀκμάς ΒΔ καί ΑΓ, ἕπεται ὅτι ἡ ΕΖ θά εἶναι παράλληλος πρός τήν ΒΔ καί ἡ ΕΘ θά εἶναι παράλληλος πρός τήν ΑΓ.

'Επειδή ὅμως αἱ ΑΓ καί ΒΔ εἶναι ὀρθογώνιοι εὐθεῖαι, ἕπεται ὅτι αἱ ΕΖ καί ΕΘ θά εἶναι κάθετοι. Ἄρα τό παραλ/μον ΕΖΗΘ εἶναι ὀρθογώνιον.



σχ.395

504. Αἱ κάθετοι ἐπί τάς ἕδρας ὀρθοκεντρικοῦ τετραέδρου εἰς τά κέντρα βάρους αὐτῶν, διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου.

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς: Ἔστω Κ τό κέντρον βάρους τῆς ἕδρας ΒΓΔ καί $ΑΑ_1$ τό ὕψος τοῦ τετραέδρου, Η δέ τό ὀρθόκεντρον τοῦ τετραέδρου καί Ο τό κέντρον βάρους αὐτοῦ. (σχ.396).

Ἡ ΗΟ τέμνει τήν εἰς τό Κ κάθετον ἐπί τήν ἕδραν ΒΓΔ εἰς τό σημεῖον Λ.

'Εκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΟΛΚ καί ΟΗΑ ἔχομεν:

$$\frac{ΟΛ}{ΟΗ} = \frac{ΟΚ}{ΟΑ} = \frac{1}{3} = \frac{ΚΛ}{ΑΗ} \qquad (\S\ 138 \text{ θεώρ.})$$

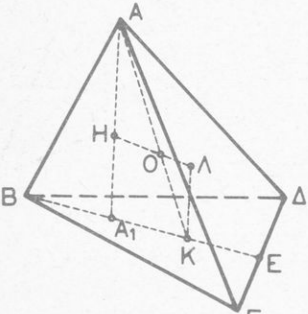
ἐξ οὗ:

$$ΟΛ = \frac{1}{3}.ΟΗ = ct. \qquad (1)$$

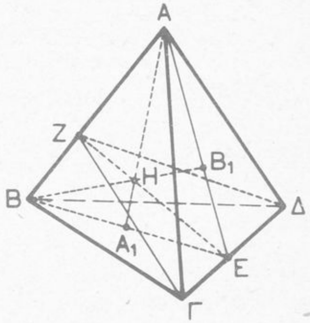
'Επειδή τά Ο καί Η εἶναι ὡρισμένα, ἕπεται ἐκ τῆς (1) ὅτι καί τό Λ εἶναι ὡρισμένον σημεῖον.

Οὕτως, ἡ τυχοῦσα ἐκ τῶν θεωρουμένων εὐθειῶν διέρχεται δι' ὡρισμένου σημείου Λ. Κατ' ἀκολουθίαν καί πᾶσαι θά διέρχωνται διά τοῦ Λ.

Εὐκόλως ἀποδεικνύεται καί τό ἀντίστροφον.



σχ.396



σχ.397

505. Οἱ πόδες τῶν κοινῶν καθέτων τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν ὀρθοκεντρικοῦ τετραέδρου συμπίπτουν μέ τούς πόδας τῶν ὑψῶν τοῦ τετραέδρου τούτου.

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς: Εἰς τήν (ἄσκ.495) ἀπεδείξαμεν ὅτι αἱ κοιναί κάθετοι τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν ὀρθοκεντρικοῦ τετραέδρου διέρχονται διά τοῦ ὀρθοκέντρου Η αὐτοῦ (σχ.397). Οὕτως, ἡ κοινή κάθετος ΕΖ τῶν ΓΔ καί ΑΒ τοῦ ὀρθοκεντρικοῦ τετραέδρου διέρχεται διά τοῦ ὀρθοκέντρου Η τοῦ τετραέδρου.

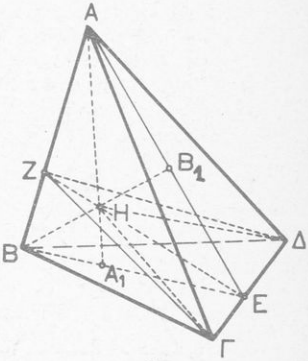
Τά ὕψη ὅμως $ΑΑ_1$ καί $ΒΒ_1$ τοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ διέρχονται διά τοῦ Η καί οἱ πόδες των $Α_1$ καί $Β_1$ εἶναι τά ὀρθόκεντρα τῶν ἑδρῶν ΒΓΔ καί ΑΓΔ ἀντιστοίχως (ἄσκ.494).

Ἄρα αἱ ΒΕ καί ΑΕ εἶναι ὕψη τῶν ἑδρῶν ΒΓΔ καί ΑΓΔ ἀντιστοίχως. Ἄρα τό Ε εἶναι ὁ πούς τοῦ ὕψους ΒΕ καί τοῦ ὕψους ΑΕ. Ὁμοίως καί τό Ζ εἶναι ὁ πούς τῶν ὑψῶν ΓΖ καί ΔΖ τῶν ἑδρῶν ΑΒΓ καί ΑΒΔ ἀντιστοίχως.

Τό αὐτό συμβαίνῃ καί διά τάς ἄλλας κοινάς καθέτους τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν τοῦ τετραέδρου.

506. Εἰς ὀρθοκεντρικόν τετράεδρον μία ἕδρα εἶναι ὀξυγώνιον τρίγωνον.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Ἔστω ΑΒΓΔ ὀρθοκεντρικόν τετράεδρον καί Η τό ὀρθόκεντρον αὐτοῦ.



σχ.398

Τά σημεῖα Α,Β,Γ,Δ,Η,ἀνά τέσσαρα,ὁρίζουν τετράεδρον,εἰς τά ὁποῖα τό πέμπτον εἶναι τό ὀρθόκεντρον τοῦ τετραέδρου τῶν τεσσάρων προηγουμένων.

Ἔστω τό τετράεδρον ΗΒΓΔ. Ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπί τήν ἕδραν ΗΓΔ αὐτοῦ. Ὁμοίως αἱ ΑΓ καί ΑΔ εἶναι τά ὕψη τοῦ τετραέδρου ΗΒΓΔ.

1ον: Ἐάν τό Η εἶναι ἐσωτερικόν τοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ,τότε ἡ ΑΗ τέμνει τήν βάσιν ΒΓΔ εἰς ἐσωτερικόν σημεῖον A_1 αὐτῆς καί τό A_1 εἶναι τό ὀρθόκεντρον τῆς ΒΓΔ ἕδρας. Ἄρα ἡ ἕδρα ΒΓΔ εἶναι ὀξυγώνιον τρίγωνον.

Τό αὐτό θά συμβαίνῃ καί διά τάς ἄλλας ἕδρας τοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ.

2ον: Ἐάν τό Η συμπίπτῃ μέ τήν κορυφήν Α τοῦ τετραέδρου τότε αἱ ΑΒ,ΑΓ,ΑΔ θά εἶναι κάθετοι ἀνά δύο εἰς τό σημεῖον Α.Τότε θά εἶναι:

$$\left.\begin{aligned} AB^2+A\Gamma^2&=B\Gamma^2\\ A\Gamma^2+A\Delta^2&=\Gamma\Delta^2\\ A\Delta^2+AB^2&=B\Delta^2\end{aligned}\right\}\Rightarrow \left.\begin{aligned} B\Gamma^2+\Gamma\Delta^2&=AB^2+A\Delta^2+2.A\Gamma^2\\ &=B\Delta^2+2.A\Gamma^2\end{aligned}\right\}\Rightarrow \begin{aligned} &B\Gamma^2+\Gamma\Delta^2>B\Delta^2\Rightarrow\\ &\sphericalangle B\Gamma\Delta<1 \text{ ὀρθ.}\end{aligned}$$

Ὁμοίως $\sphericalangle \Gamma B\Delta<1$ ὀρθ. καί $\sphericalangle \Gamma\Delta B<1$ ὀρθ.

Ἄρα τό τρίγωνον ΒΓΔ εἶναι ὀξυγώνιον.Αἱ λοιπαί ἕδραι ΑΒΓ,ΑΓΔ,ΑΔΒ εἶναι ὀρθογώνια τρίγωνα εἰς τό Α.

3ον: Τοῦ τετραέδρου ΗΒΓΔ ὀρθόκεντρον εἶναι τό Α. Ἄρα τό ὀρθόκεντρον τῆς ἕδρας ΗΓΔ θά εἶναι τό Ζ,τομή τῆς ἕδρας ΗΓΔ καί τῆς ΑΒ. Ἄρα τό ὀρθόκεντρον Ζ κεῖται ἐκτός τοῦ τριγώνου ΗΓΔ καί τό τρίγωνον ΗΓΔ θά εἶναι ἀμβλυγώνιον.

Ὁμοίως καί αἱ ἄλλαι ἕδραι ΗΒΔ,ΗΒΓ εἶναι ἀμβλυγώνια τρίγωνα,τό δέ τρίγωνον ΒΓΔ εἶναι ὀξυγώνιον. Ὥστε μία ἕδρα θά εἶναι ὀξυγώνιον τρίγωνον.Αἱ ἄλλαι ὀρθογώνια ἤ ἀμβλυγώνια τρίγωνα.

507. Ἐάν Μ καί Ν εἶναι οἱ πόδες τῆς κοινῆς καθέτου τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν ΓΔ καί ΑΒ ὀρθοκεντρικοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ,νά

ἀποδειχθῇ ὅτι: $ΜΓ.ΜΔ+ΝΑ.ΝΒ=ΜΝ^2$ καί ἀντιστρόφως.

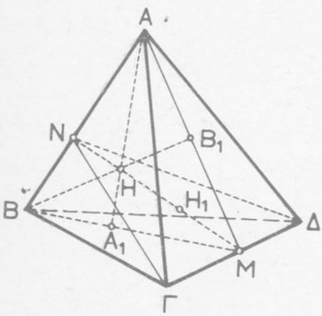
Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Εἰς τήν ἄσκ.495 ἀπεδείξαμεν ὅτι ἡ κοινή κάθετος τῶν ΑΒ καί ΓΔ ὀρθοκεντρικοῦ τετραέδρου διέρχεται διά τοῦ ὀρθοκέντρου Η τοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ. Τό Η εἶναι τό ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου ΑΜΒ. Ἄρα (ἄσκ.9-1ον) θά εἶναι:

$$ΝΑ.ΝΒ=ΜΝ.ΗΝ \qquad (1)$$

καί ἐκ τοῦ τριγώνου ΓΝΔ θά ἔχωμεν: $ΜΓ.ΜΔ=ΜΝ.ΗΜ \qquad (2)$

καί ἄρα:

$$ΝΑ.ΝΒ+ΜΓ.ΜΔ=ΜΝ.ΗΝ+ΜΝ.ΗΜ=$$
$$=ΜΝ.(ΗΝ+ΜΗ)=ΜΝ^2 \quad (3)$$



σχ.399

Ἀντιστρόφως: Ἐάν ΑΒ ὀρθογώνιος πρός τήν ΓΔ καί ἰσχύη ἡ (3), τότε, ἄν Η καί $Η_1$ εἶναι τά ὀρθόκεντρα τῶν τριγώνων ΜΑΒ καί ΝΓΔ, θά ἔχωμεν:

$$\left.\begin{array}{l} ΑΝ.ΝΒ=ΜΝ.ΝΗ \\ ΜΓ.ΜΔ=ΜΝ.Η_1Μ \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad ΑΝ.ΝΒ+ΜΓ.ΜΔ=ΜΝ(ΝΗ+Η_1Μ)$$

ἤ, λόγῳ τῆς (3), $\quad ΜΝ^2=ΜΝ(ΝΗ+Η_1Μ)$, ἐξ οὗ:

$$ΜΝ=ΝΗ+Η_1Μ$$

ἤ $\qquad ΝΗ=ΜΝ-Η_1Μ=ΝΗ_1 \Longrightarrow Η\equiv Η_1.$

508. Εἰς τήν προηγουμένην ἄσκησιν νά ἀποδειχθῇ ὅτι: $ΑΒ^2+ΓΔ^2=4.ΕΖ^2$, ἄν Ε, Ζ τά μέσα τῶν ΑΒ καί ΓΔ.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Εἰς τήν ἄσκησιν 501 ἀπεδείξαμεν ὅτι τά εὐθύγραμμα τμήματα, τά ὁριζόμενα ὑπό τῶν μέσων τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν αὐτοῦ εἶναι ἴσα καί διχοτομοῦνται εἰς τό αὐτό σημεῖον Ο καί τό ΕΗΖΘ εἶναι ὀρθογώνιον. Ἄρα:

$$ΕΗ^2+ΕΘ^2=ΘΗ^2=ΕΖ^2$$

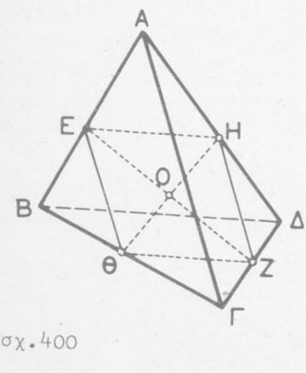
ἤ $\dfrac{ΒΔ^2}{4}+\dfrac{ΑΓ^2}{4}=ΕΖ^2 \Longrightarrow ΒΔ^2+ΑΓ^2=4ΕΖ^2 \quad (1)$

Ἀλλά κατά τήν ἄσκησιν 499 εἶναι:

$$ΒΔ^2+ΑΓ^2=ΑΒ^2+ΓΔ^2$$

καί ἡ (1) γίνεται:

$$ΑΒ^2+ΓΔ^2=4.ΕΖ^2.$$



σχ.400

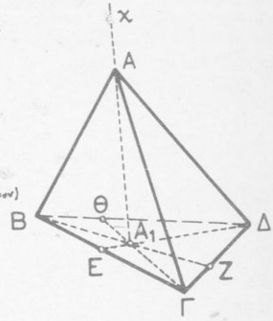
509. Νά κατασκευασθῆ ὀρθοκεντρικόν τετράεδρον ἐκ τῶν τεσσάρων ἀκμῶν του.

Λ ύ σ ι ς: Γνωρίζομεν (ἄσκ.494) καί ἀπεδείξαμεν ὅτι ὁ πούς A_1 τοῦ ὕψους AA_1 ὀρθοκεντρικοῦ τετραέδρου εἶναι τό ὀρθόκεντρον τῆς βάσεως ΒΓΔ αὐτοῦ.

Ἐντεῦθεν ἕπεται ἡ ἀκόλουθος κατασκευή:

Ἔστωσαν γνωσταί αἱ ἀκμαί ΒΓ,ΓΔ, ΔΒ,ΑΓ. Κατασκευάζομεν τό τρίγωνον (ὀξυγώνιον) ΒΓΔ καί εἰς τό ὀρθόκεντρον Α αὐτοῦ ὑψοῦμεν κάθετον A_1x πρός τό ἐπίπεδον ΒΓΔ.

Ἐν τῷ ἐπιπέδῳ $ΓA_1x$ γράφομεν τόν κύκλον (Γ,ΓΑ), ὅστις τέμνει τήν A_1x εἰς τό Α. Τό ΑΒΓΔ εἶναι τό ζητούμενον τετράεδρον.



σχ.401

Ἡ ἀπόδειξις εὔκολος.

Διά νά ὑπάρχῃ λύσις πρέπει:

$$|ΒΔ-ΓΔ| < ΒΓ < ΒΔ+ΓΔ \quad \text{καί} \quad ΓΑ > ΓA_1.$$

510. Εἰς ἕν ἰσοεδρικόν τετράεδρον:

1ον: Αἱ τέσσαρες τρίεδροι γωνίαι του εἶναι ἴσαι.

2ον: Τό ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν μιᾶς τριέδρου γωνίας αὐτοῦ εἶναι δύο ὀρθαί γωνίαι.

3ον: Αἱ ἕδραι του εἶναι πᾶσαι ὀξυγώνια τρίγωνα.

4ον: Αἱ δίεδροι αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων ἀκμῶν εἶναι ἴσαι, καί ἀντιστρόφως.

5ον: Ἑκάστη κορυφή του προβάλλεται ἐπί τῆς ἀπέναντι ἕδρας εἰς ἕν σημεῖον, συμμετρικόν τοῦ ὀρθοκέντρου τῆς ἕδρας ταύτης ὡς πρός τό κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου περί τήν ἕδραν ταύτην.

6ον: Αἱ ἕδραι του εἶναι ἰσοδύναμοι.

7ον: Τά ὕψη του εἶναι ἴσα, καί ἀντιστρόφως.

8ον: Τό περιγεγραμμένον παραλληλεπίπεδον εἶναι ὀρθογώνιον, καί ἀντιστρόφως.

9ον: Τό κέντρον βάρους ἀπέχει ἰσάκις τῶν κορυφῶν του.

10ον: Τό κέντρον βάρους ἀπέχει ἰσάκις τῶν ἑδρῶν του.

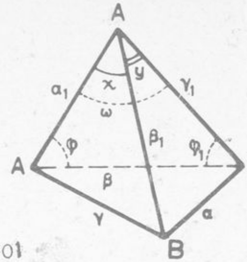
11ον: Τό ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τυχόντος σημείου Ο, ἐσωτερικοῦ τοῦ τετραέδρου, ἀπό τάς ἕδρας του εἶναι σταθερόν καί ἴσον πρός τό ὕψος του.

12ον: Παράλληλον ἐπίπεδον πρός δύο ἀπέναντι ἀκμάς του, τό τέμνει κατά παραλληλόγραμμον σταθερᾶς περιμέτρου.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: 1ον: Ἔστω τό τετράεδρον ΑΒΓΔ, εἰς τό ὁποῖον αἱ ἀπέναντι ἀκμαί εἶναι ἴσαι, ἤτοι: $\alpha=\alpha_1$, $\beta=\beta_1$ καί $\gamma=\gamma_1$.

Τά τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΑΒ, ΔΒΓ, ΔΓΑ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τάς πλευράς των ἀνά μίαν ἴσας.

Αἱ τρίεδροι Α, Β, Γ, Δ εἶναι ἴσαι ὡς ἔχουσαι τάς ἑδρικάς γωνίας αὐτῶν ἴσας μίαν πρός μίαν.



σχ.401

2ον: Ἐπειδή $\left.\begin{array}{l} \gamma=\gamma_1 \Rightarrow x=\varphi \\ \text{"} \quad \alpha=\alpha_1 \Rightarrow y=\varphi \end{array}\right\} \Rightarrow x+y+\omega=\varphi+\varphi_1+\omega=2$ ὀρθαί

Ὥστε, τό ἄθροισμα τῶν ἑδρικῶν γωνιῶν τῆς τριέδρου Δ εἶναι 2 ὀρθαί. Τό αὐτό θά συμβαίνῃ καί μέ τάς ἄλλας τριέδρους Α, Β, Γ τοῦ ἰσοεδρικοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ.

3ον: Εἰς τήν τρίεδρον Δ εἶναι: $x<y+\omega$, $y<\omega+x$, $\omega<x+y$ (1). Ἐπειδή δέ $x+y+\omega=2$ ὀρθαί ἕπεται ὅτι:

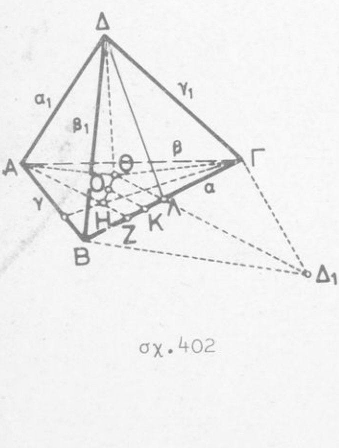
$$x<2 \text{ ὀρθ.}-x \Rightarrow 2x<2\text{ὀρθ.} \Rightarrow \quad x<1 \text{ ὀρθ.}$$
$$y<2 \text{ ὀρθ.}-y \Rightarrow 2y<2\text{ὀρθ.} \Rightarrow \quad y<1 \text{ ὀρθ.}$$
$$\omega<2 \text{ ὀρθ.}-\omega \Rightarrow 2\omega<2\text{ὀρθ.} \Rightarrow \quad \omega<1 \text{ ὀρθ.}$$

Τό αὐτό θά συμβαίνῃ καί διά τάς ἑδρικάς γωνίας τῶν ἄλλων τριέδρων Α, Β, Γ. Ἄρα αἱ ἕδραι ἰσοεδρικοῦ τετραέδρου εἶναι ὀξυγώνια τρίγωνα.

4ον: Ἐπειδή αἱ τρίεδροι Α, Β, Γ, Δ εἶναι ἴσαι, αἱ ἀπέναντι δίεδροι γωνίαι εἶναι ἴσαι καί κατά τά τρία ζεύγη.

5ον: Ἔστω ΑΒΓΔ τό ἰσοεδρικόν τετράεδρον, εἰς τό ὁποῖον εἶναι $\alpha=\alpha_1$, $\beta=\beta_1$, $\gamma=\gamma_1$. Ἄρα:

$$\alpha_1^2-\alpha^2=\beta_1^2-\beta^2=\gamma_1^2-\gamma^2 \qquad (1)$$



σχ.402

Ἄγομεν τό ὕψος ΔΘ τοῦ τετραέδρου καί ἔστω Η τό ὀρθόκεντρον τῆς ἕδρας ΑΒΓ καί Ο τό περίκεντρον αὐτῆς. Ἄγομεν τήν ΘΛ ⊥ ΒΓ καί ΟΚ ⊥ ΒΓ.

Κατά τό θεώρημα τῶν τριῶν καθέτων ἡ ΔΛ ⊥ ΒΓ. Εἰς τό ἐπίπεδον ΑΒΓ κατασκευάζομεν τό τρίγωνον Δ_1ΒΓ ἴσον πρός τό ΔΒΓ ἔχον πλευράς ΒΓ, $B\Delta_1=\beta_1$ καί $\Gamma\Delta_1=\gamma_1$. Ἄν ἀχθῇ τό ὕψος τούτου ἐκ τοῦ Δ_1, θά διέλθῃ διά τοῦ Λ. Ἄρα ἡ $\Theta\Lambda\Delta_1$ εἶναι εὐθεῖα.

Αἱ ΑΖ καί ΘΛ εἶναι παράλληλοι. Θά εἶναι δέ καί

$$\Delta_1B^2-\Delta_1\Gamma^2=\beta^2-\gamma^2 \text{ λόγῳ τῆς (1).}$$

'Εάν Ζ εἶναι ὁ πούς τοῦ ὕψους ΑΖ,τά Ζ καί Λ θά εἶναι συμμετρικά ὡς πρός τό μέσον Κ τῆς ΒΓ καί κατ'ἀκολουθίαν αἱ Δ,Θ καί ΑΖ θά εἶναι συμμετρικαί ὡς πρός πᾶν σημεῖον τῆς μεσοκαθέτου τῆς ΒΓ καί κατ'ἀκολουθίαν ὡς πρός τό Ο (περίκεντρον τοῦ ΑΒΓ).

"Αρα τό Θ εἶναι συμμετρικόν τοῦ Η ὡς πρός τό Ο.Τό αὐτό συμβαίνει καί διά τούς πόδας τῶν ἄλλων ὑψῶν τοῦ τετραέδρου.

6ον: 'Αφοῦ τό τετράεδρον εἶναι ἰσοεδρικόν,ἕπεται ὅτι αἱ ἕδραι του εἶναι ἰσοδύναμα τρίγωνα.*

7ον: Κατά τήν (§ 106α τοῦ βιβλίου),ἐάν $υ_1, υ_2, υ_3, υ_4$ εἶναι τά ὕψη τά ἀγόμενα ἐκ τῶν κορυφῶν Α,Β,Γ,Δ ἀντιστοίχως θά ἔχωμεν:

$$(ΒΓΔ).υ_1=(ΑΓΔ)υ_2=(ΑΒΔ).υ_3=(ΑΒΓ).υ_4 \qquad (2)$$

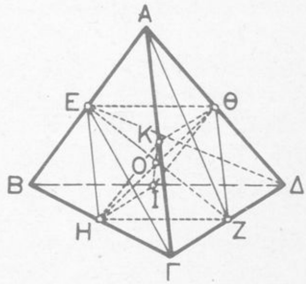
καί ἐπειδή $(ΒΓΔ)=(ΑΓΔ)=(ΑΒΔ)=(ΑΒΓ) \Longrightarrow υ_1=υ_2=υ_3=υ_4$

8ον: Τό ἐρώτημα τοῦτο ἀπεδείχθη εἰς τήν ἄσκησιν (490-4ον).

9ον: "Εστωσαν ΕΖ,ΗΘ,ΙΚ τά εὐθύγραμμα τμήματα,τά ὁριζόμενα ὑπό τῶν μέσων τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν ΑΒ καί ΓΔ,ΒΓ καί ΑΔ,ΒΔ καί ΑΓ.

'Η τομή αὐτῶν Ο θά εἶναι τό κέντρον βάρους τοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ.'Επειδή τά παραλληλόγραμμα ΕΘΖΗ καί ΚΗΙΘ εἶναι,προφανῶς,ρόμβοι,τά τμήματα ΕΖ,ΗΘ,ΙΚ θά εἶναι κάθετα,ἀνά δύο,εἰς τό Ο.

Αἱ ΒΖ καί ΑΖ εἶναι διάμεσοι τῶν ἴσων τριγώνων ΒΓΔ καί ΑΓΔ. "Αρα ΖΒ=ΖΑ καί κατ'ἀκολουθίαν ΖΕ ⊥ ΑΒ.'Ομοίως ΕΖ ⊥ ΓΔ, ΙΚ ⊥ ΒΔ,ΑΓ καί ΗΘ ⊥ ΒΓ,ΑΔ."Αρα: ΟΑ=ΟΒ=ΟΓ=ΟΔ.



σχ.403

10ον: 'Επειδή τό τετράεδρον ΑΒΓΔ εἶναι ἰσοεδρικόν ἕπεται ὅτι αἱ ἕδραι του εἶναι ἰσοδύναμα τρίγωνα καί κατ'ἀκολουθίαν:

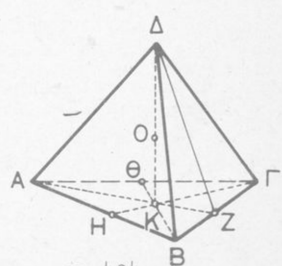
$$(ΔΑΒ)=(ΔΒΓ)=(ΔΓΑ)=(ΑΒΓ),$$

ἐξ οὗ: $\dfrac{(ΑΒΔ)}{(ΑΔΓ)}=1 \qquad (1)$

"Αν ἀχθοῦν αἱ διάμεσοι ΑΖ,ΒΘ,ΓΗ τῆς ἕδρας ΑΒΓ,τότε $\dfrac{ΒΖ}{ΓΖ}=1 \qquad (2)$

καί ἄρα: $\dfrac{(ΑΒΔ)}{(ΑΔΓ)}=\dfrac{ΒΖ}{ΓΖ} \qquad (3)$

'Η σχέσις (3) φανερώνει ὅτι τό ἐπίπεδον ΑΖΔ διχοτομεῖ τήν δίεδρον ΑΔ τοῦ τετραέδρου.'Ομοίως τά ἐπίπεδα ΒΔΘ καί ΔΓΗ διχοτομοῦν



σχ.404

τάς διέδρους ΔΒ καί ΔΓ ἀντιστοίχως.Συνεπῶς διέρχονται διά τῆς αὐτῆς εὐθείας ΔΚ.

Τό αὐτό συμβαίνει καί διά τά διχοτομοῦντα τάς διέδρους ΑΒ,ΒΓ,ΓΑ,τά ὁποῖα διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο, τό ὁποῖον θά ἀπέχῃ ἰσάκις τῶν ἑδρῶν τοῦ τετραέδρου.

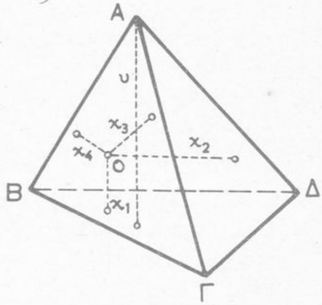
11ον:'Εάν x_1,x_2,x_3,x_4 εἶναι αἱ ἀποστάσεις τυχόντος σημείου Ο,ἐσωτερικοῦ τοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ,τότε:

$$V = V(ΟΒΓΔ) + V(ΟΑΓΔ) + V(ΟΑΔΒ) + V(ΟΑΒΓ)$$

ἤ $\frac{1}{3}(ΒΓΔ)υ=\frac{1}{3}(ΒΓΔ)x_1+\frac{1}{3}(ΑΓΔ)x_2+\frac{1}{3}(ΑΒΔ)x_3+\frac{1}{3}(ΑΒΓ)x_4$

καί ἐπειδή (ΒΓΔ)=(ΑΓΔ)=(ΑΒΔ)=(ΑΒΓ), ἕπεται ὅτι:

$$υ= x_1+x_2+x_3+x_4.$$



σχ.405

12ον:"Εστω ΕΖΗΘ τομή τοῦ ἰσοεδρικοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ παράλληλος πρός δύο ἀπέναντι ἀκμάς ΒΔ καί ΑΓ αὐτοῦ.

Θέτομεν ΑΒ=β,ΑΓ=ΒΔ=α,ΑΕ=x καί ΕΒ=y . Θά ἔχωμεν:

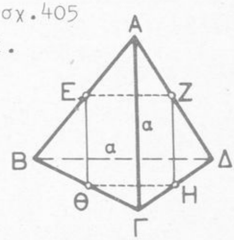
$$\frac{ΕΖ}{α}=\frac{ΕΑ}{ΑΒ}=\frac{x}{β} \Rightarrow ΕΖ=\frac{αx}{β} \quad (1)$$

καί $$\frac{ΕΘ}{α}=\frac{ΕΒ}{β}=\frac{y}{β} \Rightarrow ΕΘ=\frac{αy}{β} \quad (2)$$

'Εκ τῶν (1) καί (2) ἔχομεν:

$$2(ΕΖ+ΕΘ)=2\left(\frac{αx}{β}+\frac{αy}{β}\right)=\frac{2α}{β}(x+y)=\frac{2α}{β}β=2α=ct.$$

"Αρα ἡ περίμετρος τοῦ παραλ/μμου ΕΖΗΘ εἶναι ὡρισμένη.



σχ.406

511. 'Εάν ἡ τρίεδρος γωνία Ο τετραέδρου ΟΑΒΓ εἶναι τρισορθογώνιος:

1ον: Ἡ βάσις ΑΒΓ εἶναι ὀξυγώνιον τρίγωνον

2ον: Ὁ πούς τοῦ ὕψους ΟΗ εἶναι τό ὀρθόκεντρον τῆς βάσεως ΑΒΓ.

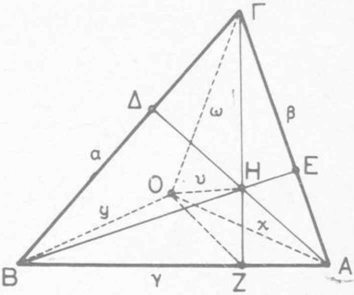
3ον: Μία παράπλευρος ἕδρα του,ἔστω ἡ ΟΑΒ,ἔχει ἐμβαδόν μέσον ἀνάλογον τῶν ἐμβαδῶν τῆς βάσεως καί τοῦ ΗΑΒ.

4ον: 'Ισχύει ἡ ἰσότης: $(ΑΒΓ)^2=(ΟΑΒ)^2+(ΟΒΓ)^2+(ΟΓΑ)^2$.

5ον: 'Εάν ΟΑ=α, ΟΒ=β, ΟΓ=γ καί ΟΗ=υ, τότε:

$$\frac{1}{υ^2}=\frac{1}{α^2}+\frac{1}{β^2}+\frac{1}{γ^2}$$

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς: 1ον: 'Εάν ΟΑ=x, ΟΒ=y, ΟΓ=ω καί ΒΓ=α, ΓΑ=β, ΑΒ=γ, θά ἔχωμεν:



σχ.407

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=\gamma^2 \\ y^2+\omega^2=\alpha^2 \\ \omega^2+x^2=\beta^2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}(1)\\(2)\\(3)\end{array}$$

Ἄρα: $\beta^2+\gamma^2=2x^2+y^2+\omega^2=2x^2+\alpha^2$

ἤ $\beta^2+\gamma^2-\alpha^2=2x^2>0$

ἤ $\beta^2+\gamma^2-\alpha^2>0$ ἤ $\alpha^2<\beta^2+\gamma^2$

Ἄρα ἡ γωνία Α εἶναι ὀξεῖα.

Ὁμοίως: $\gamma^2+\alpha^2 \quad =2y^2+x^2+\omega^2=$

$=2y^2+\beta^2$

ἤ $\gamma^2+\alpha^2-\beta^2=2y^2>0$, ἐξ οὗ: $\beta^2<\gamma^2+\alpha^2 \Leftrightarrow$ B=ὀξεῖα

καί $\alpha^2+\beta^2=2\omega^2+\chi^2+y^2=2\omega^2+\gamma^2$ ἤ $\alpha^2+\beta^2-\gamma^2=2\omega^2>0 \Leftrightarrow$ Γ=ὀξεῖα.

2ον: Τό ἐπίπεδον ΟΓΗ, ὡς περιέχον τήν ΟΗ, εἶναι κάθετον ἐπί τήν ἕδραν ΑΒΓ. Τό ἐπίπεδον ΟΗΓ, ὡς περιέχον τήν ΟΓ, εἶναι κάθετον ἐπί τό ΟΑΒ. Ἀφοῦ λοιπόν τά ἐπίπεδα ΑΒΓ καί ΟΑΒ εἶναι κάθετα ἐπί τό ΟΗΓ, ἕπεται ὅτι ἡ τομή αὐτῶν ΑΒ θά εἶναι κάθετος ἐπί τό ΟΗΓ. Κατ' ἀκολουθίαν ἡ ΑΒ θά εἶναι κάθετος ἐπί τήν ΟΖ καί ἐπί τήν ΗΖ. Ἄρα τό ΓΖ εἶναι ὕψος τοῦ ΑΒΓ. Ὁμοίως τό Η κεῖται καί ἐπί τῶν ἄλλων ὑψῶν ΑΔ καί ΒΕ τοῦ ΑΒΓ. Συνεπῶς εἶναι τό ὀρθόκεντρον τοῦ ΑΒΓ.

3ον: Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΓΖ ἔχομεν:

$OZ^2=\Gamma Z.ZH$ ἤ $\dfrac{OZ^2.AB^2}{4}=\dfrac{\Gamma Z.AB}{2}.\dfrac{ZH.AB}{2}$ ἤ $(OAB)^2=(AB\Gamma)(HAB)$.

Ὁμοίως: $(OB\Gamma)^2=(AB\Gamma).(HB\Gamma)$ καί $(O\Gamma A)^2=(AB\Gamma).(H\Gamma A)$.

4ον: Ἔχομεν διαδοχικῶς:

$(OAB)^2+(OB\Gamma)^2+(O\Gamma A)^2=(AB\Gamma)(HAB+HB\Gamma+H\Gamma A)=(AB\Gamma)(AB\Gamma)=(AB\Gamma)^2$.

5ον: Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΟΓΖ καί ΟΑΒ ἔχομεν:

$$\frac{1}{\upsilon^2}=\frac{1}{OZ^2}+\frac{1}{\omega^2}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{\omega^2}.$$

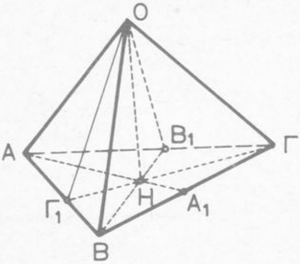
512. Ἵνα τό τετράεδρον ΟΑΒΓ εἶναι τρισορθογώνιον εἰς τήν κορυφήν Ο, πρέπει καί ἀρκεῖ ἡ κορυφή Ο νά προβάλλεται εἰς τό ὀρθόκεντρον Η τῆς βάσεως καί τό ὕψος ΟΗ νά εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν δύο τμημάτων, εἰς ἅ χωρίζεται τό ὕψος τῆς βάσεως ὑπό τοῦ ὀρθοκέντρου Η αὐτῆς.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Ἔστω ΟΑΒΓ τρισορθογώνιον τετράεδρον εἰς τήν κορυφήν Ο.

Ἐπειδή $O\Gamma \perp OA$, OB $\Rightarrow O\Gamma \perp O\Gamma_1$ καί κατ' ἀκολουθίαν:

$$OH^2=H\Gamma.H\Gamma_1 \qquad (1)$$

'Αντιστρόφως,ἐάν ΟΗ εἶναι κάθετος πρός τήν ἕδραν ΑΒΓ καί ἰσχύει ἡ (1),ἕπεται ὅτι τό τρίγωνον $ΟΓΓ_1$ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τό Ο.῎Αρα $ΟΓ \perp ΟΓ_1$.᾿Επειδή δέ εἶναι καί ΟΓ ὀρθογώνιος πρός τήν ΑΒ,ἕπεται ὅτι ἡ ΟΓ εἶναι κάθετος πρός τήν ἕδραν ΟΑΒ καί κατ' ἀκολουθίαν ∢ ΑΟΓ= ∢ ΒΟΓ=90ο (2)



σχ.408

'Εκ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἔχομεν:

$ΗΓ.ΗΓ_1=ΗΒ.ΗΒ_1$ ἤ $ΟΗ^2=ΗΒ.ΗΒ_1$, ἡ ὁποία σχέσις ἐκφράζει ὅτι τό τρίγωνον $ΟΒΒ_1$ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τό Ο.῎Αρα ἡ $ΟΒ \perp ΟΒ_1$.'Αλλά ἡ ΟΒ εἶναι ὀρθογώνιος πρός τήν ΑΓ. ῎Αρα ἡ ΟΒ εἶναι κάθετος πρός τό ἐπίπεδον ΟΑΓ καί κατ'ἀκολουθίαν ∢ ΑΟΒ= ∢ ΑΟΓ=90ο (3).

'Εκ τῶν (2) καί (3) ἕπεται ὅτι ἡ τρίεδρος Ο εἶναι τρισορθογώνιος.

513. Εἰς τρισορθογώνιον τετράεδρον ΟΑΒΓ,ἄν ἀχθῇ ἐντός αὐτοῦ ἡμιευθεῖα ΟΔ:

1ον: Τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν,τάς ὁποίας σχηματίζει αὕτη μετά τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν καί τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν ἰσοῦται πρός τρεῖς ὀρθάς γωνίας.

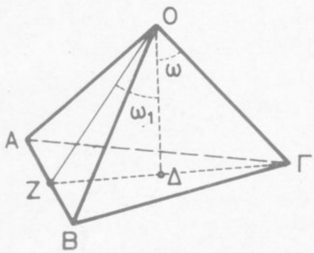
2ον: Τό ἄθροισμα τῶν τριῶν πρώτων γωνιῶν εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν δευτέρων.

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς: 1ον: Τό ἐπίπεδον ΓΟΔ,ὡς διερχόμενον διά τῆς ΟΓ,εἶναι κάθετον πρός τήν ἕδραν ΟΑΒ,ὁπότε

∢ $ΓΟΖ=90^\circ$ καί ἡ γωνία ω_1 εἶναι γωνία τῆς ΟΔ καί τῆς ἕδρας ΟΑΒ.

Θά εἶναι $\omega+\omega_1=90^\circ$.

'Ομοίως,ἐάν φ καί φ_1,σ καί σ_1 εἶναι αἱ γωνίαι τῆς ΟΔ μετά τῶν ἄλλων ἀκμῶν ΟΒ,ΟΑ καί τῶν ἄλλων παραπλεύρων ἑδρῶν ΟΑΓ καί ΟΒΓ ἀντιστοίχως,τότε:



σχ.409

$\varphi+\varphi_1=90^\circ$ καί $\sigma+\sigma_1=90^\circ$

Κατ'ἀκολουθίαν:

$$\omega+\omega_1+\varphi+\varphi_1+\sigma+\sigma_1=270^\circ \qquad (1)$$

2ον: 'Εκ τῆς τριέδρου ΟΔΒΓ ἔχομεν $\varphi+\omega >$ ∢ ΒΟΓ ἤ $\varphi+\omega>90^\circ$, καί ἐντελῶς ὁμοίως $\varphi+\sigma>90^\circ$, $\sigma+\varphi>90^\circ$.Κατ'ἀκολουθίαν:

$$2(\varphi+\omega+\sigma)>270^\circ \Rightarrow \varphi+\omega+\sigma>135^\circ \qquad (2)$$

'Η σχέσις (2), βάσει τῆς (1), γίνεται:

$$270^\circ-\omega_1-\varphi_1-\sigma_1>135^\circ \Rightarrow \omega_1+\varphi_1+\sigma_1<135^\circ \quad (3)$$

'Εκ τῶν (2) καί (3) ἕπεται ὅτι: $\varphi+\omega+\sigma>\varphi_1+\omega_1+\sigma_1$. (4)

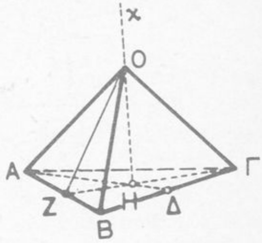
514. Νά κατασκευασθῆ τρισορθογώνιον τετράεδρον ΟΑΒΓ ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ τῆς βάσεως.

Λ ύ σ ι ς: 'Επειδή τό τετράεδρον ΟΑΒΓ θά εἶναι τρισορθογώνιον εἰς τήν κορυφήν Ο, ἕπεται ὅτι τό Ο θά προβάλλεται εἰς τό ὀρθόκεντρον Η τῆς βάσεως ΑΒΓ. Ἄρα ἡ κορυφή Ο θά κεῖται ἐπί τῆς εἰς τό Η καθέτου Ηx πρός τό ἐπίπεδον τῆς βάσεως ΑΒΓ.

'Επειδή δέ ΟΓ⊥ΟΖ, ἕπεται:

$$ZO^2=Z\Gamma.ZH=ct,$$

ἄρα τό Ο θά κεῖται καί ἐπί τοῦ κύκλου $(Z, ZO=\sqrt{Z\Gamma.ZH})$, κειμένου ἐπί τοῦ ἐπιπέδου ΖΗx.



σχ.410

'Εντεῦθεν ἕπεται εὐκόλως ἡ κατασκευή καί ἡ ἀπόδειξις. Νά γίνη ὑπό τῶν μαθητῶν αὕτη, ἀφοῦ ὑποθέσουν ὅτι τό ΑΒΓ εἶναι ὀξυγώνιον τρίγωνον.

515. Νά τμηθῆ τρισορθογώνιος τρίεδρος γωνία Ο ὑπό ἐπιπέδου, οὕτως ὥστε ἡ τομή νά εἶναι ἴση πρός δοθέν τρίγωνον ΔΕΖ.

Λ ύ σ ι ς: Ὑποθέτοντες τό τρίγωνον ΔΕΖ ὀξυγώνιον, δυνάμεθα κατά τήν προηγουμένην ἄσκησιν νά κατασκευάσωμεν τρισορθογώνιον τετράεδρον O_1ΔΕΖ.

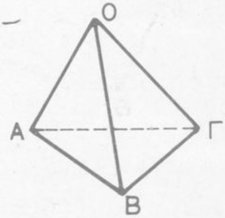
'Ακολούθως ἐπί τῶν ἀκμῶν τῆς δοθείσης τρισορθογωνίου τριέδρου Ο λαμβάνομεν τμήματα ΟΑ=O_1Δ, ΟΒ=O_1Ε, ΟΓ=O_1Ζ καί τό τρίγωνον ΑΒΓ, θά εἶναι, προφανῶς, ἴσον πρός τό τρίγωνον ΔΕΖ.

516. Τό τρισορθογώνιον τετράεδρον εἶναι καί ὀρθοκεντρικόν.

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς: Ἔστω τρισορθογώνιον τετράεδρον ΟΑΒΓ κατά τήν τρίεδρον Ο. 'Επειδή ΟΑ⊥ΟΒ,ΟΓ ⟹ ΟΑ ὀρθογώνιος πρός τήν ΒΓ.

'Επειδή ΟΒ⊥ΟΑ,ΟΓ ⟹ ΟΒ ὀρθογώνιος πρός τήν ΑΓ.

'Επειδή ΟΓ⊥ΟΑ,ΟΒ ⟹ ΟΓ ὀρθογώνιος πρός τήν ΑΒ. Ἄρα τό τετράεδρον ΟΑΒΓ εἶναι ὀρθοκεντρικόν.



σχ.411

517. 'Εάν Ο εἶναι κορυφή τῆς τρισορθογωνίου γωνίας τετραέδρου ΟΑΒΓ καί Δ, Ε, Ζ τά μέσα τῶν ἀκμῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ, τό τετράεδρον ΟΔΕΖ ἔχει τάς ἀπέναντι ἀκμάς του ἴσας καί ἀντιστρόφως.

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς: Εἶναι

$\Delta E=\frac{1}{2}AB=OZ$ καί $EZ=\frac{1}{2}B\Gamma=O\Delta, \Delta Z=\frac{1}{2}A\Gamma=OE$

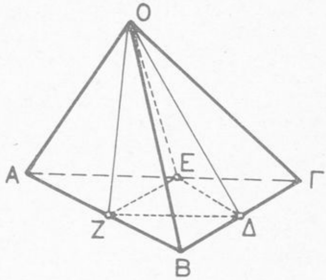
καί κατ'ἀκολουθίαν τό τετράεδρον ΟΔΕΖ ἔχει τάς ἀπέναντι ἀκμάς του ἴσας.

'Αντιστρόφως, ἔστω ΔΕ=ΟΖ. 'Αλλ' εἶναι $E\Delta=\frac{1}{2}AB$. Ἄρα $OZ=\frac{1}{2}AB$ καί κατ' ἀκολουθίαν $\sphericalangle AOB=90^{o}$.

'Ομοίως ἀποδεικνύεται ὅτι:

$\sphericalangle BO\Gamma= \sphericalangle \Gamma OA =90^{o}$

καί κατ'ἀκολουθίαν ἡ τρίεδρος Ο εἶναι τρισορθογώνιος.



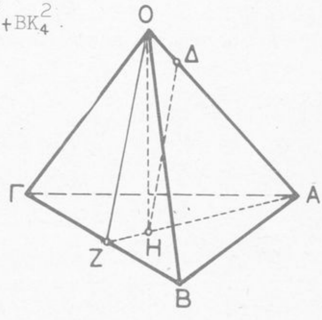
σχ.412

518. Δίδεται τρισορθογώνιον τετράεδρον ΟΑΒΓ εἰς τό Ο.
1ον: Δείξατε ὅτι αἱ προβολαί τοῦ ὕψους ΟΗ ἐπί τάς ἀκμάς ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ εἶναι ἀνάλογοι πρός τά ἐμβαδά τῶν ἑδρῶν ΟΒΓ, ΟΓΑ, ΟΑΒ ἀντιστοίχως.
2ον: 'Εάν K_1, K_2, K_3, K_4 εἶναι τά κέντρα βάρους τῶν ἑδρῶν ΑΒΓ, ΟΑΒ, ΟΒΓ, ΟΓΑ ἀντιστοίχως, δείξατε ὅτι:

$$11.OK_1^2=\Gamma K_2^2+AK_3^2+BK_4^2$$

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς: 1ον: Ἄγομεν τήν ΑΗ, ἡ ὁποία τέμνει καθέτως τήν ΒΓ εἰς τό Ζ, ὁπότε ἡ ΟΖ θά εἶναι κάθετος πρός τήν ΒΓ. 'Αλλά ἡ ΒΓ εἶναι ὀρθογώνιος πρός τήν ΟΑ. Ἄρα ἡ ΒΓ θά εἶναι κάθετος πρός τό ἐπίπεδον ΟΑΖ. Ἄρα αἱ ΑΖ καί ΟΖ θά εἶναι κάθετοι πρός τήν ΒΓ καί $\sphericalangle AOZ=90^{o}$.

Ἄγομεν τήν ΗΔ καθετον πρός τήν ΟΑ. Εἰς τό τρίγωνον ΟΑΖ, τό ὁποῖον εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τό Ο, εἶναι:



σχ.413

$\sphericalangle AOH= \sphericalangle HZO$. Ἄρα τά τρίγωνα ΟΔΗ καί ΑΟΖ εἶναι ὅμοια καί θά ἔχωμεν:

$$\frac{O\Delta}{OZ}=\frac{OH}{AZ} \implies O\Delta=OH.\frac{OZ}{AZ}=OH.\frac{(OB\Gamma)}{(AB\Gamma)}$$

ἐξ οὗ: $$\frac{O\Delta}{(OA\Gamma)}=\frac{OH}{(AB\Gamma)} \qquad (1)$$

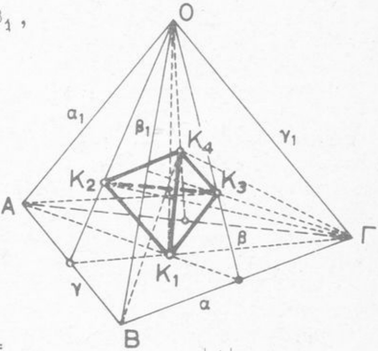
Ἔστω ὅτι ΟΘ, ΟΛ εἶναι αἱ προβολαί τῆς ΟΗ ἐπί τάς ΟΒ, ΟΓ, Καθ'ὅμοιον τρόπον ἐργαζόμενοι εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\frac{O\Theta}{(O\Gamma A)}=\frac{OH}{(AB\Gamma)} \quad (2) \text{ καί } \frac{OA}{(OAB)}=\frac{OH}{(AB\Gamma)} \quad (3)$$

Ἐκ τῶν (1),(2) καί (3) λαμβάνομεν:

$$\frac{ΟΔ}{(ΟΒΓ)}=\frac{ΟΘ}{(ΟΓΑ)}=\frac{ΟΛ}{(ΑΟΒ)}=\frac{ΟΗ}{(ΑΒΓ)} \qquad (4)$$

2ον: Ἐάν α καί α_1, β καί β_1, γ καί γ_1 εἶναι τά μήκη τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν τοῦ τρισορθογωνίου τετραέδρου ΟΑΒΓ, τότε κατά τήν (ἄσκ.475-1ον) θά ἔχωμεν:



σχ.414

(1) $AK_3^2=\frac{1}{9}\left[3(\gamma^2+\alpha_1^2+\beta^2)-(\alpha^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)\right]$

(2) $BK_4^2=\frac{1}{9}\left[3(\alpha^2+\gamma^2+\beta_1^2)-(\alpha_1^2+\beta^2+\gamma_1^2)\right]$

(3) $\Gamma K_2^2=\frac{1}{9}\left[3(\alpha^2+\beta^2+\gamma_1^2)-(\gamma^2+\alpha_1^2+\beta_1^2)\right]$

καί

$$OK_1^2=\frac{1}{9}\left[3(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\right]=$$

$$=\frac{1}{9}\left[3(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)-2(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)\right]=\frac{1}{9}(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)$$

Ἐκ τῶν (1),(2),(3) λαμβάνομεν:

$$\Gamma K_2^2+AK_3^2+BK_4^2=\frac{1}{9}\left[5(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)\right]=\frac{11}{9}(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)=$$

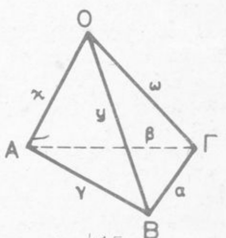
$$=\frac{11}{9}.9.OK_1^2=11.OK_1^2,$$

διότι $\alpha^2=\beta_1^2+\gamma_1^2$, $\beta^2=\gamma_1^2+\alpha_1^2$, $\gamma^2=\alpha_1^2+\beta_1^2 \implies \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=2(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)$

Ὥστε: $\Gamma K_2^2+AK_3^2+BK_4^2=11.OK_1^2$.

519. Νά ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τρισορθογωνίου τετραέδρου ΟΒΓΑ συναρτήσει τῶν πλευρῶν α,β,γ τῆς βάσεως ΑΒΓ αὐτοῦ.

Λ ύ σ ι ς: Ἔστω ΟΑΒΓ τρισορθογώνιον τετράεδρον εἰς τό Ο καί $OA=x$, $OB=y$, $O\Gamma=\omega$. Θά εἶναι:



σχ.415

$$\left.\begin{aligned} y^2+\omega^2&=\alpha^2\\ \omega^2+x^2&=\beta^2\\ x^2+y^2&=\gamma^2\end{aligned}\right\} \implies \begin{aligned} x&=\sqrt{\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2}}\\ y&=\sqrt{\frac{\gamma^2+\alpha^2-\beta^2}{2}}\\ \omega&=\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2}}\end{aligned}$$

Ὁ ὄγκος V τοῦ τετραέδρου εἶναι:

$$V=\frac{1}{3}(OAB).O\Gamma=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}.OA.OB.O\Gamma=\frac{1}{6}.OA.OB.O\Gamma=\frac{1}{6}xy\omega=$$

$$=\frac{1}{6}\sqrt{\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2}}.\sqrt{\frac{\gamma^2+\alpha^2-\beta^2}{2}}.\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2}}$$

ἐξ οὗ: $$V=\frac{1}{24}\sqrt{2(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)(\gamma^2+\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)}$$

520. Εἰς κανονικόν τετράεδρον ΑΒΓΔ:

1ον: Τά ὕψη του εἶναι ἴσα.

2ον: Αἱ ἀπέναντι ἀκμαί του εἶναι ὀρθογώνιοι εὐθεῖαι.

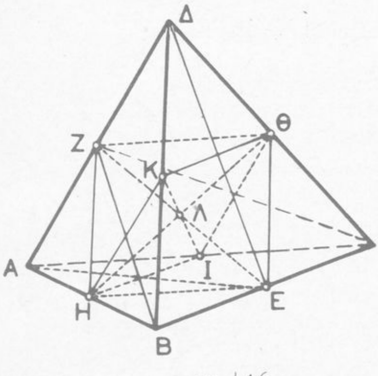
3ον: Τά τμήματα τά ὁριζόμενα ὑπό τῶν μέσων τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν του εἶναι κοιναί κάθετοι τῶν ἀντιστοίχων ζευγῶν καί ἀνά δύο κάθετα μεταξύ των.

4ον: Συναρτήσει τῆς ἀκμῆς α τοῦ τετραέδρου τούτου νά ὑπολογισθοῦν τά μήκη τῶν τμημάτων τούτων.

5ον: 'Εάν Ο εἶναι τό μέσον τοῦ ὕψους ΑΗ,τό τετράεδρον ΟΒΓΔ εἶναι τρισορθογώνιον εἰς τό σημεῖον Ο.

6ον: Τό περιγεγραμμένον παραλληλεπίπεδον εἶναι κύβος.

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς: 1ον:'Αφοῦ αἱ ἕδραι τοῦ καν.τετραέδρου εἶναι ἴσαι,ἕπεται ὅτι τά ὕψη του (ἄσκ.510-7ον)εἶναι ἴσα.'Αποδείξατε τοῦτο καί δι'ὑπολογισμοῦ τῶν ὑψῶν του,συναρτήσει τοῦ α.



σχ.416

2ον: Ἔστωσαν Ε καί Ζ,Η καί Θ,Ι καί Κ τά μέσα τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν τοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ.

'Επειδή $ΒΖ \perp ΑΔ$ καί $ΓΖ \perp ΑΔ$, ἕπεται ὅτι ἡ ΔΑ εἶναι κάθετος πρός τό ἐπίπεδον ΖΒΓ,ἄρα ὀρθογώνιος πρός τήν ΒΓ.

'Ομοίως ἀποδεικνύεται ὅτι αἱ ΑΒ καί ΔΓ εἶναι ὀρθογώνιοι καθώς καί αἱ ΑΓ καί ΒΔ εἶναι ὀρθογώνιοι.

3ον: 'Επειδή $ΑΕ=ΕΔ \Rightarrow ΕΖ \perp ΑΔ$,καί ἐπειδή $ΒΖ=ΖΓ \Rightarrow ΖΕ \perp ΒΓ$. Ὥστε τό ΕΖ εἶναι κοινή κάθετος τῶν ΑΔ καί ΒΓ.

'Ομοίως τά ΗΘ καί ΙΚ εἶναι κοιναί κάθετοι ἀντιστοίχως τῶν ζευγῶν ΑΒ καί ΔΓ,ΑΓ καί ΒΔ.

Εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι τά παραλ/μα ΖΘΕΗ καί ΚΗΙΘ εἶναι τετράγωνα ἴσα.Ἄρα αἱ διαγώνιοί των τέμνονται δίχα καί καθέτως καί εἶναι ἴσαι.Δηλαδή:

$$ΕΖ = ΗΘ = ΙΚ$$

4ον: 'Επειδή $ΑΕ^2=ΔΕ^2=\frac{3\alpha^2}{4}$, ἕπεται ὅτι:

$$ΕΑ^2+ΕΔ^2=2.ΕΖ^2+\frac{\alpha^2}{2} \text{ ἤ } \frac{3\alpha^2}{4}+\frac{3\alpha^2}{4}=2.ΕΖ^2+\frac{\alpha^2}{2} \Rightarrow ΕΖ=\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$$

καί ὁμοίως $Η\Theta=ΙΚ=\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$.

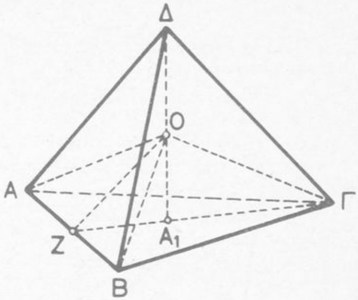
5ον: Γνωρίζομεν (§ 99)ὅτι τό ὕψος $ΔΑ_1$ τοῦ κανονικοῦ τετραέδρου εἶναι $ΔΑ_1=\frac{\alpha\sqrt{6}}{3}$.

'Εάν Ο εἶναι τό μέσον τοῦ $ΑΑ_1$, τότε:

$$ΟΑ_1=ΟΔ=\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha\sqrt{6}}{3}=\frac{\alpha\sqrt{6}}{6}.$$

'Η ΓΑ διέρχεται ἀπό τό μέσον τῆς ΑΒ καί θά εἶναι:

$$Α_1Ζ=\frac{1}{3}\cdot ΓΖ=\frac{1}{3}\cdot\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}=\frac{\alpha\sqrt{3}}{6}$$



σχ.417

καί κατ'ἀκολουθίαν: $ΟΖ^2=ΟΑ_1^2+Α_1Ζ^2=\left(\frac{\alpha\sqrt{6}}{6}\right)^2+\left(\frac{\alpha\sqrt{3}}{6}\right)^2=$

$$=\frac{6\alpha^2}{36}+\frac{3\alpha^2}{36}=\frac{\alpha^2}{4} \Longrightarrow ΟΖ=\frac{\alpha}{2},$$

καί κατ'ἀκολουθίαν: $\sphericalangle ΑΟΒ=90^\circ$.

'Ομοίως ἀποδεικνύεται ὅτι $\sphericalangle ΒΟΓ=\sphericalangle ΓΟΑ=90^\circ$ καί τό τετράεδρον ΟΑΒΓ θά εἶναι τρισορθογώνιον εἰς τό Ο.

6ον: Τοῦτο ἀπεδείχθη καί εἰς τήν ἄσκησιν 490-7ον.

521. 'Εάν πᾶσαι αἱ ἕδραι τετραέδρου ΑΒΓΔ εἶναι ὀρθογώνια τρίγωνα:

1ον: Ἡ ἀκμή ΒΔ εἶναι κοινή κάθετος τῶν ΑΔ καί ΒΓ.

2ον: Αἱ τιμαί τῶν γωνιῶν ΔΒΑ καί ΒΔΓ ἰσοῦνται ἀντιστοίχως πρός τάς τιμάς τῶν διέδρων ΒΓ καί ΔΑ ἀντιστοίχως.

3ον: Αἱ ἀκμαί ΑΔ καί ΒΓ εἶναι ὀρθογώνιοι εὐθεῖαι.

4ον: Τό μέσον τῆς ΑΓ ἀπέχει ἴσον τῶν κορυφῶν τοῦ τετραέδρου.

5ον: Τά μέσα τῶν ἀκμῶν ΔΓ,ΔΒ,ΑΒ καί ΑΓ εἶναι κορυφαί ὀρθογωνίου.

6ον: Πᾶσα τομή παράλληλος πρός τό ὀρθογώνιον τοῦτο εἶναι ὀρθογώνιον.

7ον: Αἱ διάμεσοι αἱ ἀγόμεναι ἐκ τῶν Δ καί Β εἶναι ἴσαι.

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς:"Εστω τετράεδρον ΑΒΓΔ,τοῦ ὁποίου αἱ ἕδραι ΑΒΓ,ΔΑΒ,ΔΒΓ,ΔΑΓ εἶναι ὀρθογώνια τρίγωνα κατά τάς κορυφάς Β,Δ,Δ,Β ἀντιστοίχως.

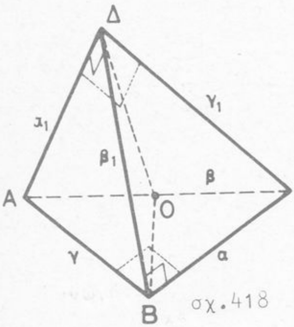
1ον: 'Η ΒΔ εἶναι κάθετος(κοινή)τῶν ἀκμῶν ΔΑ καί ΒΓ,διότι αἱ γωνίαι ΑΔΒ καί ΔΒΓ εἶναι ὀρθαί.

2ον: 'Επειδή $ΔΒ\perp ΒΓ$ καί $ΑΒ\perp ΒΓ$,ἕπεται ὅτι ἡ γωνία ΔΒΑ εἶναι ἡ ἀντίστοιχος τῆς διέδρου ΒΓ."Αρα:

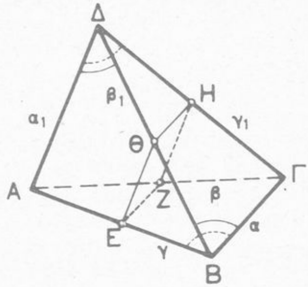
$$|\widehat{ΔΒΑ}|=|\delta(ΒΓ)|.$$

'Ομοίως, ἐπειδή $B\Delta \perp \Delta A$ καί $\Gamma\Delta \perp \Delta A$, ἕπεται ὅτι ἡ γωνία $B\Delta\Gamma$ εἶναι ἡ ἀντίστοιχος τῆς διέδρου ΔA, καί ἄρα:

$$|\widehat{B\Delta\Gamma}| = |\delta(\Delta A)| .$$



σχ.418



σχ.419

3ον: 'Επειδή ἡ $\Delta A \perp \Delta B, \Delta\Gamma$ ἕπεται ὅτι $\Delta A \perp$ πρός τό ἐπίπεδον $B\Delta\Gamma$. Ἄρα ἡ ΔA εἶναι ὀρθογώνιος πρός τήν $B\Gamma$.

4ον: 'Εάν O εἶναι τό μέσον τῆς $A\Gamma$, τότε:

$$O\Delta = OA = O\Gamma = OB.$$

5ον: 'Επειδή $EZ = /\!/ \frac{1}{2}.B\Gamma = /\!/ \Theta H$, τό τετράπλευρον $EZH\Theta$ εἶναι παραλληλόγραμμον. 'Αλλά $A\Delta \perp B\Delta\Gamma$. Ἄρα καί ἡ παράλληλος ZH τῆς $A\Delta$ θά εἶναι κάθετος πρός τό ἐπίπεδον $B\Gamma\Delta$ καί ἄρα κάθετος πρός τήν $H\Theta$.

Συνεπῶς τό $EZH\Theta$ εἶναι ὀρθογώνιον.

6ον: 'Η ἀπόδειξις προφανής.

7ον: Εἶναι: $\beta^2+\beta_1^2=\alpha_1^2+\gamma_1^2+\gamma^2-\alpha_1^2=\gamma^2+\gamma_1^2$ (1)

καί $\mu_\Delta^2=\frac{1}{9}\left[3(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\right]=\frac{1}{9}\left[3(\gamma^2+\gamma_1^2)-2\beta^2\right]$ (2)

καί $\mu_B^2=\frac{1}{9}\left[3(\alpha^2+\gamma^2+\beta_1^2)-(\beta^2+\alpha_1^2+\gamma_1^2)\right]=\frac{1}{9}\left[3(\beta^2+\beta_1^2)-2\beta^2\right]$ (3)

καί κατ'ἀκολουθίαν: $\mu_\Delta = \mu_B$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IX

Η ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΕΝ ΤΩ ΧΩΡΩ

522. Πᾶν παραλ/δον ἔχει ἕν κέντρον συμμετρίας.

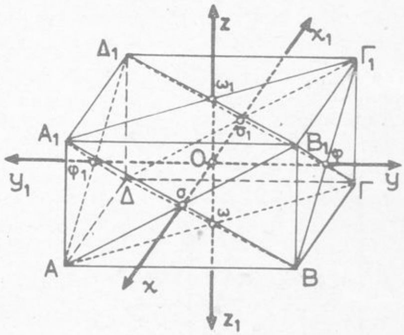
Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Γνωρίζομεν (§ 92) ὅτι αἱ διαγώνιοι παραλληλεπιπέδου διχοτομοῦνται εἰς τό αὐτό σημεῖον Ο. Ἄρα πᾶσαι αἱ κορυφαί του εἶναι συμμετρικαί ὡς πρός τό Ο. Ἀλλά κατά τήν ἄσκησιν 350, πᾶν εὐθύγραμμον τμῆμα ἔχον τά ἄκρα του ἐπί τῶν δύο ἀπέναντι ἑδρῶν παραλ/δου καί διερχόμενον διά τοῦ κέντρου Ο, διχοτομεῖται ὑπό τοῦ Ο. Ἄρα, πᾶν σημεῖον μιᾶς ἕδρας παραλ/δου ἔχει τό συμμετρικόν του ἐπί τῆς ἀπέναντι ἕδρας ὡς πρός τό Ο.

523. Τό ὀρθογώνιον παραλ/δον ἔχει τρεῖς ἄξονας συμμετρίας, ἀνά δύο καθέτους, ἀγομένους ἐκ τοῦ κέντρου αὐτοῦ, καί τρία ἐπίπεδα συμμετρίας.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Ἔστω $ΑΒΓΔΑ_1Β_1Γ_1Δ_1$ ἕνα ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον (σχ. 420). Τοῦτο, ὡς γνωστόν ἔχει ἕνα κέντρον συμμετρίας: τήν τομήν τῶν διαγωνίων του.

Τά διαγώνια ἐπίπεδα $ΑΑ_1Γ_1Γ$ καί $ΔΔ_1Β_1Β$ εἶναι κάθετα πρός τήν ἕδραν ΑΒΓΔ, ὡς διερχόμενα διά τῶν $ΓΓ_1$ καί $ΒΒ_1$.

Ἄρα ἡ τομή αὐτῶν $ωω_1$ θά εἶναι κάθετος ἐπί τήν ἕδραν ΑΒΓΔ. Τά ω καί $ω_1$ εἶναι τά κέντρα συμμετρίας τῶν ἑδρῶν ΑΒΓΔ καί $Α_1Β_1Γ_1Δ_1$ ἀντιστοίχως. Προφανῶς ἡ $ωω_1$ διέρχεται διά τοῦ κέντρου Ο τοῦ ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου ($ΑΓ_1$).



σχ. 420

Εἶναι λοιπόν ἡ εὐθεῖα ZOZ_1 ἄξων συμμετρίας τοῦ ($ΑΓ_1$).

Ὁμοίως, ἐάν $φ, φ_1$ καί $σ, σ_1$ εἶναι τά κέντρα τῶν ἑδρῶν $ΑΔΔ_1Α_1$, $ΒΓΓ_1Β_1$ καί $ΑΒΒ_1Α_1$, $ΓΓ_1Δ_1Δ$ ἀντιστοίχως, αἱ εὐθεῖαι yOy_1 καί xOx_1 θά εἶναι ἄξονες συμμετρίας τοῦ ὀρθ. παραλληλεπιπέδου. Ἐπειδή δέ $y_1y \parallel AB$, $xOx_1 \parallel ΒΓ$ καί $ZOZ_1 \parallel ΒΒ_1$, αἱ δέ $ΒΑ, ΒΓ, ΒΒ_1$ εἶναι, ἀνά δύο, κάθετοι, ἔπεται ὅτι οἱ ἄξονες xx_1, yy_1, zz_1 εἶναι ἀνά δύο κάθετοι εἰς τό κέντρον Ο τοῦ ὀρθ. παραλληλεπιπέδου.

Προφανῶς τά ἐπίπεδα yOz, xOy καί xOz εἶναι ἐπίπεδα συμμετρίας τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου $ΑΒΓΔΑ_1Β_1Γ_1Δ_1$.

῎Αρα τό ὀρθ.παραλληλεπιπέδου ἔχει τρεῖς ἄξονας συμμετρίας καί τρία ἐπίπεδα συμμετρίας.

524. Ὁ κύβος ἔχει: 1ον) ῞Εν κέντρον συμμετρίας,2ον)Τρεῖς ἄξονας συμμετρίας διερχομένους,ἀνά δύο,διά τῶν κέντρων τῶν ἀπέναντι ἑδρῶν του,3ον)Τέσσαρας ἄξονας συμμετρίας διερχομένους,ἀνά δύο,διά τῶν ἀπέναντι κορυφῶν του,4ον)῞Εξ ἄξονας συμμετρίας ὁριζομένους ἀπό τά μέσα τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν του, 5ον)Τρία ἐπίπεδα συμμετρίας κάθετα πρός τούς ἄξονας τούς διερχομένους διά τῶν κέντρων τῶν ἀπέναντι ἑδρῶν καί 6ον)῞Εξ ἐπίπεδα συμμετρίας κάθετα πρός τούς ἄξονας τούς διερχομένους διά τῶν μέσων τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: 1ον: Ἐπειδή ὁ κύβος εἶναι παραλληλεπίπεδον,ἔχει κέντρον συμμετρίας Ο,τήν τομήν τῶν διαγωνίων του.

2ον: Ἐπειδή ὁ κύβος εἶναι ὀρθ.παραλληλεπίπεδον,ἔχει τρεῖς ἄξονας συμμετρίας διερχομένους διά τῶν κέντρων τῶν ἀπέναντι ἑδρῶν του καί καθέτους ἀνά δύο καί διερχομένους διά τοῦ κέντρου Ο,καλοῦνται δέ AXES DE SYMÉTRIE QUATERNAIRES),διότι ὁ κύβος στρεφόμενος κατά 90ᵒ συμπίπτει μέ τόν ἑαυτόν του.

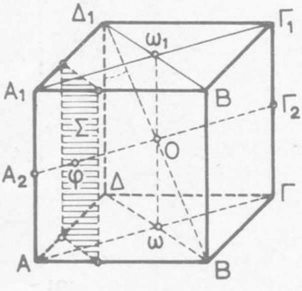
3ον: ῞Εστω κύβος $(ΑΓ_1)$ καί $Δ_1Β$ μία διαγώνιος αὐτοῦ.Ἡ διαγώνιος $Δ_1Β$ σχηματίζει μέ τάς ἀκμάς τοῦ κύβου,τάς διερχομένας διά τοῦ $Δ_1$ τρεῖς γωνίας ἴσας.Πράγματι εἶναι:

$$συν\widehat{ΔΔ_1Β}=\frac{ΔΔ_1}{Δ_1Β}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Ὁμοίως καί μέ τάς $Δ_1Γ_1$ καί $Δ_1Α_1$.

῎Αρα ἡ διαγώνιος $Δ_1Β$ εἶναι ἄξων συμμετρίας διά τήν τρισορθογώνιον γωνίαν $Δ_1$ τοῦ κύβου.

Μία στροφή κατά 120ᵒ ἄγει τήν $Δ_1Γ_1$ ἐπί τῆς $Δ_1Α_1$,τήν $Δ_1Α_1$ ἐπί τῆς $Δ_1Δ$ καί τήν $Δ_1Δ$ ἐπί τῆς $Δ_1Γ_1$.



σχ.421

Ἐπειδή αἱ ἀκμαί εἶναι ἴσαι,τά σημεῖα $Γ_1$ καί $Α_1$,$Α_1$ καί Δ, Δ καί $Γ_1$ συμπίπτουν.

Ἐπειδή ὑπάρχουν τέσσαρες διαγώνιοι,ὑπάρχουν τέσσαρες ἀκόμη ἄξονες συμμετρίας τοῦ κύβου,αἱ διαγώνιοι (καλούμενοι AXES TERNAIRES),διότι ὁ κύβος στρεφόμενος κατά 120ᵒ περί τήν $Δ_1Β$ συμπίπτει μέ τόν ἑαυτόν του.

4ον: ῞Εστω $Α_2Γ_2$ τό εὐθύγραμμον τμῆμα,ὅπερ ὁρίζεται ἀπό τά μέσα τῶν δύο ἀπέναντι καί παραλλήλων ἀκμῶν $ΑΑ_1$,$ΓΓ_1$ τοῦ κύβου ($ΑΓ_1$)(σχ.421).Ἕνα ἐπίπεδον Σ κάθετον πρός τήν $ΑΓ_1$ τέμνει τόν κύβον κατά ὀρθογώνιον,τοῦ ὁποίου τό κέντρον φ κεῖται ἐπί τῆς $Α_2Γ_2$.

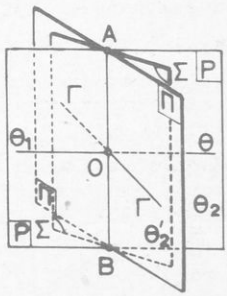
Τά σημεῖα τοῦ ὀρθογωνίου τούτου εἶναι ἀνά δύο συμμετρικά ὡς πρός τό κέντρον τοῦτο φ καί,κατ'ἀκολουθίαν,συμμετρικά ὡς πρός τήν $Α_2Γ_2$,καθόσον τό τμῆμα τό ὁποῖον τά συνδέει ὡς κάθετον ἐπί τήν $Α_2Γ_2$ διαιρεῖται εἰς δύο ἴσα μέρη.Εἶναι λοιπόν ἡ $Α_2Γ_2$ ἄξων συμμετρίας (AXES BINAIRE),διότι ὁ κύβος στρεφόμενος περί τήν $Α_2Γ_2$ κατά 180° συμπίπτει μέ τόν ἑαυτόν του.Ὑπάρχουν ἕξ τοιοῦτοι ἄξονες,ὡς ὁ $Α_2Γ_2$ καί ὅλοι διέρχονται διά τοῦ κέντρου Ο.

5ον: Ὁ κύβος ἔχει τρία ἐπίπεδα συμμετρίας,κάθετα πρός τούς ἄξονας τούς διερχομένους διά τῶν κέντρων τῶν ἀπέναντι ἑδρῶν τοῦ κύβου.Τά τρία ταῦτα ἐπίπεδα διέρχονται διά τοῦ κέντρου Ο τοῦ κύβου.

6ον: Ὁ κύβος ἔχει καί ἕξ ἐπίπεδα συμμετρίας,κάθετα πρός τούς ἄξονας,ὡς ὁ $Α_2Γ_2$.Ταῦτα εἶναι τά διαγώνια ἐπίπεδα τοῦ κύβου,διέρχονται δέ ἀπό τό κέντρον Ο τοῦ κύβου.

525. Πᾶσα δίεδρος γωνία ἔχει ἕνα ἄξονα συμμετρίας,τήν κοινήν ἀκμήν,καί ἕνα ἐπίπεδον συμμετρίας,ποῖον;

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς:Ἔστω δίεδρος γωνία Π-ΑΒ-Ρ καί ἡ ἀντικειμένη αὐτῆς $Π_1$-ΑΒ-$Ρ_1$.Κάθε σημεῖον Θ τῆς ἕδρας(Ρ) ἔχει τό συμμετρικόν του $Θ_1$ ἐπί τῆς ἀντιθέτου ἕδρας ($Ρ_1$) ὡς πρός ἄξονα τήν ἀκμήν ΑΒ τῆς διέδρου,καί κάθε σημεῖον Γ τῆς ἕδρας (Π) ἔχει τό συμμετρικόν του $Γ_1$ ἐπί τῆς ἀντιθέτου ἕδρας ($Π_1$) ὡς πρός ἄξονα τήν ἀκμήν ΑΒ καί ἀντιστρόφως.



σχ.422

Πᾶν σημεῖον $Θ_2$ τῆς ἕδρας (Ρ) ἔχει τό συμμετρικόν του $Θ_2'$ ἐπί τῆς ἕδρας (Π) ὡς πρός τό διχοτομοῦν ἐπίπεδον τήν δίεδρον ταύτην,ὡς εὐκόλως ἀποδεικνύεται.

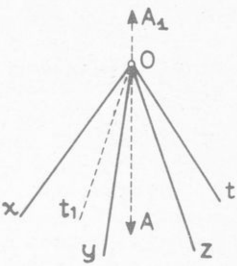
Ἄρα,πᾶσα δίεδρος γωνία ἔχει ἄξονα συμμετρίας,τήν κοινήν ἀκμήν,καί ἐπίπεδον συμμετρίας,τό διχοτομοῦν τήν δίεδρον ταύτην.

526. Ἐάν αἱ ἕδραι πολυέδρου γωνίας εἶναι ἴσαι, αὕτη ἔχει ἄξονα ἐπαναλήψεως.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς:Θεωροῦμεν τήν πολύεδρον γωνίαν $Oxyztt_1$

τῆς ὁποίας αἱ ἑδρικαί γωνίαι εἶναι πᾶσαι ἴσαι.

Τά διχοτομοῦντα ἐπίπεδα τῶν διέδρων τῆς πολυέδρου ταύτης γωνίας διέρχονται διά τῆς αὐτῆς εὐθείας AOA_1,τῆς ὁποίας πᾶν σημεῖον ἀπέχει ἰσάκις τῶν ἑδρῶν τῆς πολυέδρου γωνίας. Ἐάν ἡ πολύεδρος στραστραφῇ περί τήν ΟΑ κατά γωνίαν $\frac{2\pi}{\nu}$,ὅπου ν ὁ ἀριθμός τῶν ἀκμῶν τῆς πολυέδρου,τότε μία ἀκμή της συμπίπτει μέ τήν διαδοχικήν της κ.ο.κ.

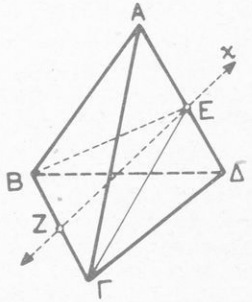


σχ.423

527. Εἰς κανονικόν τετράεδρον ΑΒΓΔ νά ἀποδειχθῇ ὅτι: 1) Τά ὕψη του εἶναι ἄξονες ἐπαναλήψεως.2) Τά τμήματα τά ὁριζόμενα ὑπό τῶν μέσων τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν του εἶναι ἄξονες συμμετρίας αὐτοῦ.3)Τά ἐπίπεδα τά ὁριζόμενα ὑπό ἑκάστου τῶν μέσων τῶν ἀκμῶν του καί τῆς ἀπέναντι ἀκμῆς εἶναι ἐπίπεδα συμμετρίας.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: 1ον:Εἰς τήν προηγουμένην ἄσκησιν εἴδομεν ὅτι ἡ κανονική πολύεδρος γωνία ἔχει ἄξονα ἐπαναλήψεως τάξεως $\frac{2\pi}{\nu}$. Ἄρα τό κανονικόν τετράεδρον ἔχει τέσσαρας ἄξονας ἐπαναλήψεως,τάξεως $\frac{2\pi}{3}$ δι'ἕκαστον.

2ον: Γνωρίζομεν ὅτι τό τμῆμα ΕΖ, τό ὁριζόμενον ὑπό τῶν μέσων τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν ΑΔ,ΒΓ κανονικοῦ τετραέδρου εἶναι κάθετον πρός τάς ἀκμάς ταύτας. Ἄρα τά σημεῖα Α καί Δ,Β καί Γ εἶναι συμμετρικά ὡς πρός τήν ΕΖ.



σχ.424

Ἤτοι ἡ ΕΖ εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ τετραέδρου.

Ὁμοίως,τά ἄλλα δύο τμήματα,τά ὁριζόμενα ὑπό τῶν δύο ἄλλων ζευγῶν τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν,εἶναι ἄξονες συμμετρίας.

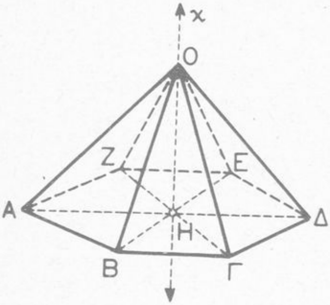
3ον:Τό διάμεσον ἐπίπεδον ΕΒΓ εἶναι,προφανῶς,ἐπίπεδον συμμετρίας.

Ἐπειδή ὅμως ὑπάρχουν ἕξ (6) διάμεσα ἐπίπεδα,θά ἔχωμεν καί ἕξ (6) ἐπίπεδα συμμετρίας διά τό κανονικόν τετράεδρον.

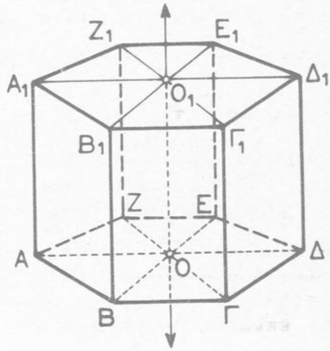
528. Πᾶσα κανονική πυραμίς ἔχει ἕνα ἄξονα ἐπαναλήψεως.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Ἔστω κανονική ἑξαγωνική πυραμίς Ο.ΑΒΓΔΕΖ.Τό ὕψος αὐτῆς ΟΗ εἶναι ἄξων ἐπαναλήψεως τάξεως $\frac{2\pi}{6}$

'Εάν ή κανονική πυραμίς έχη βάσιν μέ ν άριθμόν πλευρῶν, τότε τό ὕψος ΟΗ αὐτῆς θά εἶναι ἄξων ἐπαναλήψεως τάξεως $\frac{2\pi}{\nu}$ (σχ.425).



σχ.425



σχ.426

529. Ἡ εὐθεῖα ἡ ὁριζομένη ὑπό τῶν κέντρων τῶν βάσεων ὀρθοῦ κανονικοῦ πρίσματος, εἶναι ἄξων ἐπαναλήψεως αὐτοῦ.

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς: Ἔστω κανονικόν πρῖσμα ($Α\Delta_1$) μέ βάσιν ἑξάγωνον. Ἡ εὐθεῖα ἡ ὁριζομένη ὑπό τῶν κέντρων Ο καί O_1 τῶν βάσεων εἶναι ἄξων ἐπαναλήψεως τοῦ πρίσματος, τάξεως $\frac{2\pi}{6}$ (σχ.426).

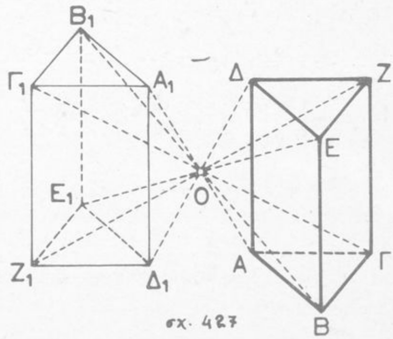
'Εάν ἡ βάσις εἶναι πολύγωνον κανονικόν μέ ν ἀριθμόν πλευρῶν, τότε ἡ OO_1 θά εἶναι ἄξων ἐπαναλήψεως, τάξεως $\frac{2\pi}{\nu}$.

530. Τό πρός σημεῖον ἤ ἐπίπεδον συμμετρικόν ὀρθοῦ πρίσματος εἶναι ἴσον πρός αὐτό.

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς: Ἔστω $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1E_1Z_1$ τό συμμετρικόν τοῦ ὀρθοῦ πρίσματος ΑΒΓΔΕΖ ὡς πρός κέντρον συμμετρίας τό σημεῖον Ο. (σχ.427)

Τό πρῖσμα $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1E_1Z_1$ εἶναι ἴσον πρός τό ΑΒΓΔΕΖ. Διατί;

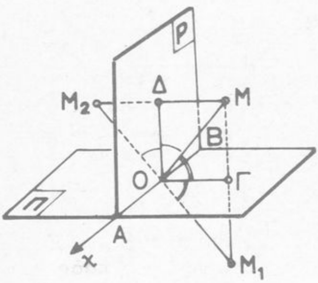
Κατ' ἀνάλογον τρόπον ἐργαζόμεθα καί διά τό συμμετρικόν ὀρθοῦ πρίσματος πρός ἐπίπεδον (Π).



σχ. 427

531. Ἐάν δύο ἐπίπεδα καθέτως τεμνόμενα εἶναι ἐπίπεδα συμμετρίας σχήματος, ἡ τομή των εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ σχήματος τούτου.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Ἔστω ὅτι τά κάθετα ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ) εἶναι ἐπίπεδα συμμετρίας τοῦ σχήματος (Σ). Ἔστω Μ τυχόν σημεῖον τοῦ σχήματος (Σ). Τά συμμετρικά M_1 καί M_2 τοῦ Μ ὡς πρός τά (Π) καί (Ρ) ἀντιστοίχως εἶναι σημεῖα τοῦ σχήματος (Σ) ἐξ ὑποθέσεως.



σχ.428

Αἱ MM_1 καί MM_2 ὁρίζουν ἐπίπεδον κάθετον πρός τά (Π) καί (Ρ), ἄρα κάθετον πρός τήν τομήν ΑΒ τῶν (Π) καί (Ρ) εἰς τό Ο. Ἐπειδή $OM_1=OM$ καί $OM_2=OM$, ἕπεται ὅτι $OM_1=OM_2$. Ἐπειδή δέ $\measuredangle$ ΔΟΜ+ΜΟΓ=1 ὀρθ., ἕπεται ὅτι $\measuredangle$ $M_2OM+MOM_1=2$ ὀρθαί καί ἡ M_1OM_2 εἶναι εὐθεῖα, κάθετος πρός τήν ΑΒ. Ἄρα τά M_1 καί M_2 εἶναι συμμετρικά ὡς πρός τήν τομήν ΑΒ τῶν (Π) καί (Ρ). Ἄρα ἡ ΑΒ εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ σχήματος (Σ).

532. Ἐάν σχῆμα ἔχῃ ἐπίπεδον συμμετρίας καί ἄξονα συμμετρίας ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ, θά ἔχῃ καί ἕτερον ἐπίπεδον συμμετριας.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Ἔστω ἐπίπεδον (Π) καί εὐθεῖα ΑΒ αὐτοῦ (σχ.ἀσκ.531). Ἔστω ὅτι ἕν σχῆμα (Σ) ἔχει ἐπίπεδον συμμετρίας τό (Π) καί ἄξονα συμμετρίας τήν ΑΒ. Ἔστωσαν Μ καί M_2 τά συμμετρικά τοῦ Μ τοῦ σχήματος Σ ὡς πρός τό (Π) καί τήν ΑΒ ἀντιστοίχως. Εὐκόλως τώρα ἕπεται ὅτι τά Μ καί M_2 εἶναι συμμετρικά ὡς πρός τό ἐπίπεδον (Ρ), τό διά τῆς ΑΒ κάθετον πρός τό (Π).

533. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι τό κανονικόν ὀκτάεδρον, ὅπερ ἔχει κορυφάς τά κέντρα τῶν ἑδρῶν κύβου, ἔχει τά αὐτά στοιχεῖα συμμετρίας, ἅτινα ἔχει ὁ κύβος οὗτος.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Ἀρκεῖ νά ἐπαναληφθοῦν καλῶς τά ὅσα ἐγράφησαν εἰς τήν ἄσκησιν 524.

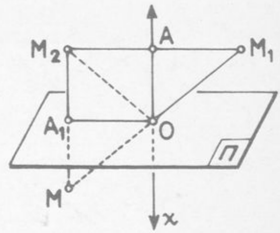
534. Ἐάν σχῆμα ἔχῃ ἐπίπεδον συμμετρίας καί κέντρον συμμετρίας, κείμενον ἐπί τοῦ ἐπιπέδου τούτου, θά ἔχῃ καί ἄ-

ξονα συμμετρίας.

᾿Α π ό δ ε ι ξ ι ς: Ἔστω Μ τυχόν σημεῖον τοῦ σχήματος Σ καί τά συμμετρικά M_1 καί M_2 αὐτοῦ ὡς πρός τό σημεῖον Ο τοῦ ἐπιπέδου (Π) καί ὡς πρός τό (Π) ἀντιστοίχως.

Τά σημεῖα M, M_1, M_2 εἶναι ἐξ ὑποθέσεως σημεῖα τοῦ σχήματος (Σ).

Ἐπειδή $OM_2 = OM$ καί $OM_1 = OM$, ἕπεται ὅτι $OM_1 = OM_2$.



σχ.429

Εἰς τό Ο ἄγομεν εὐθεῖαν (x) κάθετον πρός τό (Π), τέμνουσαν τήν M_1M_2 εἰς τό Α. Θά εἶναι $AM_1 = AM_2$. Ἄρα τά M_1 καί M_2 εἶναι συμμετρικά ὡς πρός τήν εὐθεῖαν (x). Ἄρα ἡ (x) εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ σχήματος (Σ).

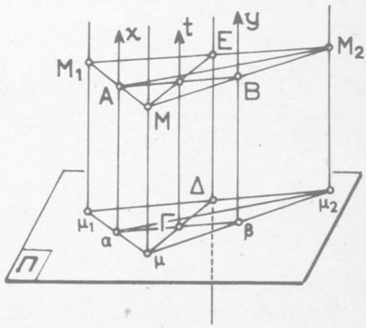
535. Σχήματα συμμετρικά τρίτου ὡς πρός δύο εὐθείας παραλλήλους, δύνανται νά εἶναι συμμετρικά καί ὡς πρός εὐθεῖαν;

᾿Α π ό δ ε ι ξ ι ς: Ἔστωσαν M_1 καί M_2 δύο σημεῖα συμμετρικά τοῦ αὐτοῦ σημείου Μ τρίτου σχήματος ὡς πρός τούς παραλλήλους ἄξονας (x) καί (y). Θεωροῦμεν ἐπίπεδον (Π) κάθετον πρός τούς (x) καί (y) καί τάς προβολάς τῶν M, M_1, M_2 ἐπί τοῦ (Π). Θά εἶναι:

$\alpha\mu = \alpha\mu_1$ καί $MM_1 = \mu\mu_1$. Ὁμοίως

$\mu\beta = \beta\mu_2$ καί $MM_2 = \mu\mu_2$. Ἄρα

$\alpha\beta = /\!/ \frac{1}{2}\mu_1\mu_2$. Ἐάν Γ εἶναι τό μέσον τοῦ αβ, τότε ἡ ΜΓ τέμνει τό $\mu_1\mu_2$ εἰς τό μέσον αὐτοῦ Δ καί θά εἶναι ΓΔ=Γμ=ὡρισμένον.



σχ.430

Εἰς τό Δ ὑψοῦμεν κάθετον πρός τό (Π), ἥτις τέμνει τό τμῆμα M_1M_2 εἰς τό μέσον Ε αὐτοῦ καί καθέτως. Ἄρα $EM_1 = EM_2$ καί τά M_1, M_2 προκύπτουν διά παραλλήλου μετατοπίσεως κατά τό 2.αβ=2.ΑΒ, ὅπου ΑΒ ἡ ἀπόστασις τῶν δύο παραλλήλων.

536. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι δύο σχήματα συμμετρικά τρίτου ὡς πρός ἐπίπεδον καί ὡς πρός ἄξονα κάθετον ἐπί τό ἐπίπεδον τοῦτο, εἶναι συμμετρικά καί ὡς πρός σημεῖον.

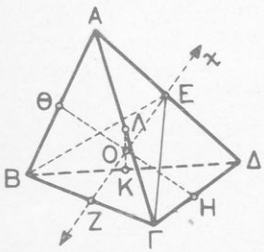
᾿Α π ό δ ε ι ξ ι ς: Αὕτη εἶναι σχεδόν ὁμοία μέ τήν ἀπόδειξιν τῆς ἀσκήσεως 534 καί διά τοῦ αὐτοῦ σχήματος.

537. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι δύο σχήματα συμμετρικά τρίτου ὡς πρός εὐθεῖαν καί σημεῖον κείμενον ἐπί τῆς εὐθείας ταύτης, εἶναι συμμετρικά καί ὡς πρός ἐπίπεδον.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Βλέπε σχῆμα ἀσκήσεως 544. Ἔστω ὅτι τό σημεῖον Ο καί ἡ εὐθεῖα (x) εἶναι ἀντιστοίχως κέντρον καί ἄξων συμμετρίας ἑνός σχήματος (Σ), τότε τό (Π) εἶναι ἐπίπεδον συμμετρίας τοῦ (Σ), κάθετον πρός τήν (x) εἰς τό σημειον Ο.

538. Ἐάν τετράεδρον ΑΒΓΔ δέχεται ἄξονα συμμετρίας, τότε αἱ ἀπέναντι ἀκμαί του εἶναι ἴσαι κατά δύο ζεύγη καί ἀντιστρόφως.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Ἔστω ὅτι ἡ εὐθεῖα (x) εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ. Ὁ ἄξων (x) δέν δύναται νά διέλθῃ διά τοῦ Α, οὔτε δι' ἄλλης κορυφῆς. Διότι, ἄν διήρχετο καί διά δευτέρας κορυφῆς, ἔστω τῆς Β, ὁπότε θά ἦτο ἀκμή, ὅπερ ἄτοπον, ἤ δέν θά διήρχετο, ὁπότε αἱ κορυφαί Β, Γ, Δ θά ἦσαν συμμετρικαί ἀνά δύο, ὡς πρός τήν (x), ὅπερ πάλιν ἀδύνατον.



σχ. 431

Ἄρα ἡ (x) δι' οὐδεμιᾶς κορυφῆς διέρχεται.

Κατ' ἀκολουθίαν ἡ κορυφή Α θά εἶχεν ὡς συμμετρικήν μίαν ἀπό τάς κορυφάς Β, Γ, Δ, ἔστω τήν Δ. Ἄρα ἡ (x) διέρχεται διά τοῦ μέσου Ε τῆς ΑΔ καί αἱ Β, Γ θά ἦσαν ὁμοίως συμμετρικαί ὡς πρός τήν (x). Ἑπομένως ἡ (x) θά διέρχεται διά τῶν μέσων Ε, Ζ τῶν ΑΔ καί ΒΓ ἀντιστοίχως καί θά εἶναι κάθετος πρός αὐτάς. Τότε θά εἶναι ΑΒ=ΓΔ καί ὁμοίως ΑΓ=ΒΔ.

Ἀντιστρόφως, ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ΑΒ=ΓΔ, ΑΓ=ΒΔ, ΑΕ=ΕΔ καί ΒΖ=ΖΓ. Τά τρίγωνα ΑΒΔ καί ΑΓΔ θά εἶναι ἴσα καί κατ' ἀκολουθίαν αἱ διάμεσοι ΕΒ=ΕΓ καί ἄρα ΕΖ $\perp$ ΒΓ.

Οὕτω, τά Α καί Δ, Β καί Γ εἶναι συμμετρικά ὡς πρός τήν ΕΖ. Ἄρα ἡ ΕΖ εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ.

539. Ἐάν τετράεδρον δέχεται δύο ἄξονας συμμετρίας, τότε αἱ ἀπέναντι ἀκμαί αὐτοῦ εἶναι ἴσαι καί κατά τά δύο ζεύγη καί δέχεται καί τρίτον ἄξονα συμμετρίας καί ἀντιστρόφως.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Θεωροῦμεν τό τετράεδρον ΑΒΓΔ τῆς ἀσκήσεως 538, τό ὁποῖον νά ἔχῃ δύο ἄξονας συμμετρίας, τούς

ΕΖ καί ΗΘ.

Κατά τήν προηγουμένην ἄσκησιν θά εἶναι ΑΕ=ΕΔ καί ΘΑ=ΘΒ ΒΖ=ΖΓ καί ΓΗ=ΗΔ. Ἐπίσης θά εἶναι ΑΒ=ΓΔ,ΑΓ=ΒΔ,ΒΔ=ΑΓ, ὁπότε αἱ ἀπέναντι ἀκμαί εἶναι ἴσαι: ΑΔ=ΒΓ,ΑΒ=ΓΔ κατά τό ἀντίστροφον τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως. Ἄρα τό τμημα ΚΛ,τό ὁριζόμενον υπό τῶν μέσων τῶν ἀκμῶν ΑΓ καί ΒΔ θά εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ τεραέδρου ΑΒΓΔ.

Ἐπειδή αἱ ἀπέναντι ἀκμαί εἶναι ἴσαι,τό παρ/μον ΖΗΕΘ θά εἶναι ρόμβος καί ἄρα ΘΗ ⊥ ΕΖ.

Οὕτως,οἱ αξονες συμμετρίας ΕΖ καί ΘΗ εἶναι οἱ συνδέοντες τά μέσα τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν τοῦ τετραέδρου,διέρχονται διά τοῦ κέντρου βάρους τοῦ τετραέδρου καί εἶναι κάθετοι.

Ἀντιστρόφως,ἄν αἱ ἀπέναντι ἀκμαί εἶναι ἴσαι,κατά τό ἀντίστροφον της ἀσκήσεως 538,αἱ εὐθεῖαι αἱ ὁριζόμεναι ὑπό τῶν μέσων τῶν ἀπέναντι ἀκμων εἶναι ἄξονες συμμετρίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Χ

ΟΜΟΙΑ ΠΟΛΥΕΔΡΑ

540. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τῶν ὁλικῶν ἐπιφανειῶν δύο ὁμοίων τετραέδρων ἰσοῦται πρός τόν λόγον τῶν τετραγώνων δύο ὁμολόγων ἀκμῶν αὐτῶν.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Ἔστωσαν ΑΒΓΔ καί $Α_1 Β_1 Γ_1 Δ_1$ δύο ὅμοια τετράεδρα καί ὅτι: $ΒΓΔ \approx Β_1 Γ_1 Δ_1$, $ΑΒΓ \approx Α_1 Β_1 Γ$, $ΑΓΔ \approx Α_1 Γ_1 Δ_1$, $ΑΔΒ \approx Α_1 Δ_1 Β_1$.

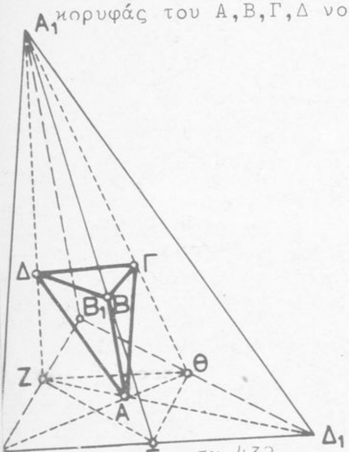
$$\text{Ἄρα: } \frac{(ΒΓΔ)}{(Β_1 Γ_1 Δ_1)}=\frac{ΒΓ^2}{Β_1 Γ_1^2},\quad \frac{(ΑΒΓ)}{(Α_1 Β_1 Γ_1)}=\frac{ΒΓ^2}{Β_1 Γ_1^2},\quad \frac{(ΑΓΔ)}{(Α_1 Γ_1 Δ_1)}=\frac{ΓΔ^2}{Γ_1 Δ_1^2},$$

$$\frac{(ΑΔΒ)}{(Α_1 Δ_1 Β_1)}=\frac{ΔΒ^2}{Δ_1 Β_1^2}$$

Ἐπειδή τά δεύτερα μέλη τῶν ἰσοτήτων εἶναι ἴσα,ἕπεται ότι: $\frac{(ΒΓΔ)+(ΑΒΓ)+(ΑΓΔ)+(ΑΔΒ)}{(Β_1Γ_1Δ_1)+(Α_1Β_1Γ_1)+(Α_1Γ_1Δ_1)+(Α_1Δ_1Β_1)}=\frac{ΒΓ^2}{Β_1Γ_1^2}$ ή $\frac{E_{ολ}}{E_{1ολ}}=\frac{ΒΓ^2}{Β_1Γ_1^2}$

541. 'Από τάς κορυφάς τετραέδρου ΑΒΓΔ φέρωμεν ἐπίπεδα παράλληλα πρός τάς ἀπέναντι ἕδρας, τά ὁποῖα τεμνόμενα, ἀνά δύο, ὁρίζουν νέον τετράεδρον $Α_1Β_1Γ_1Δ_1$. Νά ὑπολογισθῆ ὁ λόγος τῶν ὄγκων τῶν δύο τετραέδρων.

Λ ύ σ ι ς: Ἔστω ΑΒΓΔ τό δοθέν τετράεδρον καί ἀπό τάς κορυφάς του Α, Β, Γ, Δ νοοῦμεν τά παράλληλα πρός τάς ἀπέναντι ἕδρας, ἀντιστοίχως, τούτου.



σχ. 432

Τά κοινά σημεῖα τῶν ἐν λόγῳ ἐπιπέδων, ἀνά τρία, ὁρίζουν τάς κορυφάς $Α_1$, $Β_1$, $Γ_1$, $Δ_1$ ἑνός ἄλλου τετραέδρου $Α_1Β_1Γ_1Δ_1$.

Αἱ ΒΓ καί $Β_1Γ_1$ εἶναι παράλληλοι, ὡς τομαί παραλλήλων ἐπιπέδων ὑπό τρίτου. Αἱ $ΑΒ_1$, $ΑΓ_1$, $ΑΔ_1$ τέμνουν τάς $Γ_1Δ_1$, $Β_1Δ_1$, $Β_1Γ_1$ ἀντιστοίχως εἰς τά σημεῖα Ε, Θ, Ζ.

Ἡ ΒΓ εἶναι παράλληλος πρός τήν ΕΘ, ἄρα ΕΘ // $Γ_1Β_1$ καί ὁμοίως ΖΘ // $Γ_1Δ_1$, ΖΕ // $Β_1Δ_1$. Ἄρα τά Ε, Ζ, Θ εἶναι τά μέσα τῶν πλευρῶν $Γ_1Δ_1$, $Γ_1Β_1$ καί $Β_1Δ_1$ τοῦ τριγώνου $Β_1Γ_1Δ_1$ καί τό Α θά εἶναι τό κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου τούτου. Ὁμοίως τά Β, Γ, Δ θά εἶναι τά κέντρα βάρους ἀντιστοίχως τῶν τριγώνων $Α_1Γ_1Δ_1$, $Α_1Β_1Δ_1$ καί $Α_1Β_1Γ_1$.

Τά τετράεδρα ΑΒΓΔ καί $Α_1Β_1Γ_1Δ_1$ εἶναι ὅμοια.

'Αλλά 2.ΕΘ= $Β_1Γ_1$ καί 2.ΕΘ=3.ΒΓ, ἔπεται ὅτι: $Β_1Γ_1 : ΒΓ=3$

καί κατ'ἀκολουθίαν: $V(ΑΒΓΔ):V(Α_1Β_1Γ_1Δ_1)=1^3:3^3=1:27$

542. Νά ὑπολογισθῆ ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου, ὅπερ ἔχει κορυφάς τά κέντρα τῶν ἑδρῶν κανονικοῦ τετραέδρου, συναρτήσει τῆς ἀκμῆς α τοῦ δοθέντος τετραέδρου.

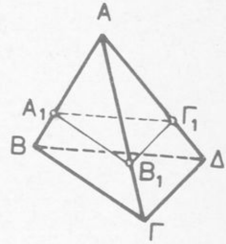
Λ ύ σ ι ς: 'Εάν **x** εἶναι ἡ ἀκμή τοῦ τετραέδρου, ὅπερ ἔχει κορυφάς τά κέντρα βάρους τῶν ἑδρῶν τοῦ κανονικοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ, ἀκμῆς α, ἐπειδή κατά τήν προηγουμένην ἄσκησιν ταῦτα εἶναι ὅμοια, ἔπεται: ὅτι:

$$\frac{V_x}{V_α}=\frac{x^3}{α^3}=\frac{1}{27},$$

ἐξ οὗ: $$V_x=\frac{1}{27}\cdot V_α=\frac{1}{27}\cdot\frac{α^3\sqrt{2}}{12}=\frac{α^3\sqrt{2}}{324}$$

543. 'Επί τῆς ἀκμῆς ΑΒ πυραμίδος ΑΒΓΔ νά ὁρισθῆ σημεῖον Α ,τοιοῦτον ὥστε τό ἐξ αὐτοῦ ἀγόμενον ἐπίπεδον,παραλλήλως πρός τήν βάσιν ΒΓΔ,νά διαιρῆ αὐτό εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη.

Λ ύ σ ι ς: Ἔστω ΑΒ=α, $AA_1=x$ καί $A_1B_1\Gamma_1$ τό ζητούμενον ἐπίπεδον.Τά τετράεδρα $AA_1B_1\Gamma_1$ καί ΑΒΓΔ εἶναι ὅμοια.



Ἄρα: $\frac{1}{2}=\frac{V(AA_1B_1\Gamma_1)}{V(AB\Gamma\Delta)}=\frac{AA_1^3}{AB^3}=\frac{x^3}{\alpha^3} \Longrightarrow 2x^3=\alpha^3,$

$\Rightarrow x\sqrt[3]{2}=\alpha \Rightarrow x=\frac{\alpha}{\sqrt[3]{2}}.$

Τό τμῆμα τοῦτο $AA_1=x$ δέν κατασκευάζεται διά τοῦ κανόνος καί τοῦ διαβήτου. Μόνον λογιστικῶς ἔχει λύσιν τό πρόβλημα.

σχ.433

544. 'Εάν πᾶσαι αἱ ἀκμαί τετραέδρου ΑΒΓΔ πολ/σθοῦν ἐπί λ,διατηρηθοῦν δέ αἱ τρίεδροι γωνίαι του,ποσάκις μεγαλύτερος γίνεται ὁ ὄγκος του;

Λ ύ σ ι ς:Ἔστω ΑΒΓΔ τό δοθέν τετράεδρον καί ΑΒ=α.'Εάν πᾶσαι αἱ ἀκμαί τοῦ ΑΒΓΔ πολλαπλασιασθοῦν ἐπί λ,τό προκύπτον τετράεδρον θά εἶναι ὅμοιον πρός τό δοθέν (ἀφοῦ θά διατηρηθοῦν αἱ τρίεδροι γωνίαι του),καί κατ'ἀκολουθίαν:

$$\frac{V\lambda(AB\Gamma\Delta)}{V(AB\Gamma\Delta)}=\frac{(\lambda\alpha)^3}{\alpha^3}=\frac{\lambda^3.\alpha^3}{\alpha^3}=\lambda^3 \longrightarrow V\lambda(AB\Gamma\Delta)=\lambda^3\cdot V(AB\Gamma\Delta).$$

Δηλαδή ὁ ὄγκος τοῦ δοθέντος πολλαπλασιάζεται ἐπί λ^3.

545. 'Εάν αἱ ἀκμαί κύβου πολλαπλασιασθοῦν ἐπί 5,διατηρηθῶσι δέ αἱ πολύεδροι γωνίαι αὐτοῦ,ποσάκις πολλαπλάσιος γίνεται ὁ κύβος οὗτος;

Λ ύ σ ι ς: 'Αφοῦ διατηροῦνται ἀμετάβλητοι αἱ πολύεδροι γωνίαι,ἕπεται ὅτι ὁ προκύπτων κύβος θά εἶναι ὅμοιος πρός τόν ἀρχικόν καί κατ'ἀκολουθίαν:

$$\frac{V_1}{V}=\frac{(5\alpha)^3}{\alpha^3}=\frac{125.\alpha^3}{\alpha^3}=125 \Longrightarrow V_1=125.V$$

546. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἐπιφανειῶν δύο ὁμοίων πολυέδρων ἰσοῦται πρός τόν λόγον τῶν τετραγώνων δύο ὁμολόγων ἀκμῶν.

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς: 'Εάν $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_\nu$ εἶναι τά ἐμβαδά τῶν ἑδρῶν τοῦ ἑνός πολυέδρου καί $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_\nu$ τά ἐμβαδά τῶν ὁμολόγων ἑδρῶν τοῦ ἄλλου ὁμοίου πρός αὐτό πολυέδρου, α καί α_1 τά μήκη δύο ὁμολόγων ἀκμῶν αὐτῶν, θά ἔχωμεν:

$$\frac{\alpha^2}{\alpha_1^2}=\frac{E_1}{E_1}=\frac{E_2}{\varepsilon_2}=\frac{E_3}{\varepsilon_3}=\ldots=\frac{E_\nu}{\varepsilon_\nu}=\frac{E_1+E_2+E_3+\ldots+E_\nu}{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\ldots+\varepsilon_\nu}=\frac{E}{\varepsilon}$$

ἤτοι:
$$\frac{E_{o\lambda}}{\varepsilon_{o\lambda}}=\frac{\alpha^2}{\alpha_1^2}$$

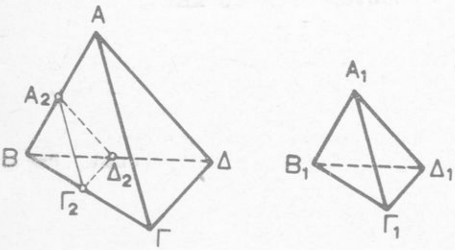
547. Δύο τετράεδρα εἶναι ὅμοια, ἐάν ἔχουν μίαν ἕδραν ὁμοίαν καί τάς τρεῖς προσκειμένας διέδρους ἴσας, μίαν πρός μίαν, καί τοῦ αὐτοῦ προσανατολισμοῦ.

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς: Ἔστωσαν δύο τετράεδρα τοῦ αὐτοῦ προσανατολισμοῦ, ἔχοντα τάς ὁμολόγους ἕδρας ΒΓΔ καί $B_1\Gamma_1\Delta_1$ ὁμοίας καί ὁμοίως προσανατολισμένας καί τάς προσκειμένας διέδρους $B\Gamma=B_1\Gamma_1$, $\Gamma\Delta=\Gamma_1\Delta_1$, $\Delta_1 B=\Delta_1 B_1$

'Επί τῆς ΒΓ λαμβάνομεν τμῆμα $B\Gamma_2=B_1\Gamma_1$ καί ἄγομεν τήν $\Gamma_2\Delta_2$ παράλληλον πρός τήν ΓΔ, ἄρα καί πρός τήν $\Gamma_1\Delta_1$.

'Εκ τοῦ Δ_2 ἄγομεν τήν παράλληλον $\Delta_2 A_2$ πρός τήν ΔΑ, ἄρα καί πρός τήν $\Delta_1 A_1$.

Εὐκόλως τώρα ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ $\Gamma_2 A_2$ εἶναι παράλληλος πρός τήν ΓΑ, ἄρα καί πρός τήν $\Gamma_1 A_1$, τά δέ τετράεδρα $B\Gamma_2\Delta_2 A_2$ καί $B_1\Gamma_1\Delta_1 A_1$ εἶναι ἴσα.



σχ.434

'Αλλά τό $B\Gamma_2\Delta_2 A_2$ εἶναι ὅμοιον πρός τό ΒΓΔΑ, ἄρα καί τό ἴσον του $B_1\Gamma_1\Delta_1 A_1$ εἶναι ὅμοιον πρός τό ΒΓΔΑ.

548. Δύο τετράεδρα εἶναι ὅμοια, ἐάν ἔχουν τρεῖς ἕδρας ὁμοίας καί τοῦ αὐτοῦ προσανατολισμοῦ.

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς: 'Αφοῦ ἔχουν τρεῖς ἕδρας ὁμοίας, θά ἔχουν καί τάς ὁμολόγους αὐτῶν ἀκμάς ἀναλόγους, ὡς πλευράς ὁμοίων τριγώνων.

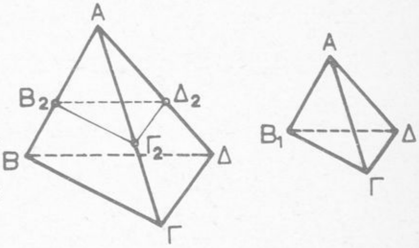
'Εντεῦθεν ἀποδεικνύεται εὐκόλως ὅτι τά τετράεδρα εἶναι ὅμοια.

549. Δύο τετράεδρα εἶναι ὅμοια, ὅταν ἔχουν πέντε διέδρους

ἴσας μίαν πρός μίαν καί τοῦ αὐτοῦ προσανατολισμοῦ.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Ἔστω ὅτι τά τετράεδρα ΑΒΓΔ καί $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$ ἔχουν ὅλας τάς διέδρους ἴσας, μίαν πρός μίαν, πλήν τῶν ΑΒ καί A_1B_1 καί εἶναι τοῦ αὐτοῦ προσανατολισμοῦ.

Ἐπί τῆς ΑΒ λαμβάνομεν τμῆμα $AB_2=A_1B_1$ καί φέρομεν τό ἐπίπεδον $B_2\Gamma_2\Delta_2$ παράλληλον πρός τό ΒΓΔ, ὁπότε τά τετράεδρα $AB_2\Gamma_2\Delta_2$ καί ΑΒΓΔ θά εἶναι ὅμοια.



Ἀλλά αἱ δίεδροι τοῦ

σχ.435

$AB_2\Gamma_2\Delta_2$ θά εἶναι ἴσαι πρός τάς ἀντιστοίχους τοῦ ΑΒΓΔ, ἄρα καί πρός τάς διέδρους τοῦ $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$, ὁπότε τό τετράεδρον $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$ θά εἶναι ἴσον πρός τό $AB_2\Gamma_2\Delta_2$.

Ἄρα τό $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$ θά εἶναι ὅμοιον πρός τό ΑΒΓΔ.

550. Τά τετράγωνα τῶν ὄγκων δύο ὁμοίων πολυέδρων εἶναι ἀνάλογα πρός τούς κύβους τῶν ἐμβαδῶν δύο ὁμολόγων ἑδρῶν.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Ἐάν α καί α_1 εἶναι αἱ ὁμόλογοι ἀκμαί δύο ὁμοίων ἑδρῶν ΑΒΓ, $A_1B_1\Gamma_1$ τῶν ὁμοίων πολυέδρων, θά ἔχωμεν:

$$\frac{V}{V_1}=\frac{\alpha^3}{\alpha_1^3} \quad ἤ \quad \frac{V^2}{V_1^2}=\frac{\alpha^6}{\alpha^6}=\left(\frac{\alpha^2}{\alpha_1^2}\right)^3=\frac{(AB\Gamma)^3}{(A_1B_1\Gamma_1)^3}$$

551. Τό τετράεδρον, ὅπερ ἔχει κορυφάς τά κέντρα βάρους τῶν ἑδρῶν τετραέδρου ΑΒΓΔ, εἶναι ὅμοιον πρός τό συμμετρικόν τοῦ τετραέδρου τούτου. Ποῖος ὁ λόγος τῶν ὄγκων τούτων τῶν τετραέδρων;

Λ ύ σ ι ς: Γνωρίζομεν ὅτι τό τετράεδρον, ὅπερ ἔχει κορυφάς τά κέντρα βάρους τῶν ἑδρῶν δοθέντος τετραέδρου εἶναι τό 1/27 αὐτοῦ.

Ἀλλά (§ 149-6ον) τό συμμετρικόν τετραέδρου ὡς πρός κέντρον Ο εἶναι ἴσον πρός τό κατακορυφήν τοῦ δοθέντος.

Ἐντεῦθεν προκύπτει εὐκόλως ὁ ζητούμενος λόγος. Ἡ εργασία νά γίνῃ ὑπό τῶν μαθητῶν.

552. Ὁ ὄγκος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι V, αἱ δέ διαστάσεις του εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀριθμῶν α, β, γ. Νά ὑπολογισθοῦν αἱ διαστάσεις αὐτοῦ.

Λ ύ σ ι ς: Ἔστω ὅτι αἱ διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι x, y, ω. Κατά τό πρόβλημα θά ἔχωμεν:

$$xy\omega=V \quad (1) \quad \text{καί} \quad \frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{\omega}{\gamma} \quad (2)$$

Θέτομεν: $\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{\omega}{\gamma}=\lambda$, ὅτε $x=\lambda\alpha$, $y=\lambda\beta$, $\omega=\lambda\gamma$ (3) καί ἡ (1) γίνεται:

$$\alpha\beta\gamma\lambda^3=V \Rightarrow \lambda=\sqrt[3]{\frac{V}{\alpha\beta\gamma}},$$

ὁπότε αἱ (3) δίδουν: $x=\sqrt[3]{\frac{\alpha^2V}{\beta\gamma}}$, $y=\sqrt[3]{\frac{\beta^2V}{\gamma\alpha}}$, $\omega=\sqrt[3]{\frac{\gamma^2V}{\alpha\beta}}$.

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο Ν XI

ΓΕΝΙΚΟΤΗΤΕΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΠΟΛΥΕΔΡΩΝ

553. Εἰς πᾶν κυρτόν πολύεδρον εἶναι: $2A \geqslant 3E$ καί $2A \geqslant 3K$.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Ἔστω ε_ν ὁ ἀριθμός τῶν ἑδρῶν πλήθους πλευρῶν ν καί κ_ν ὁ ἀριθμός τῶν κορυφῶν ἐξ ὧν ἄγονται ν ἀκμαί ἑνός κυρτοῦ πολυέδρου. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἑκάστη ἀκμή τοῦ πολυέδρου ἀνήκει εἰς δύο ἕδρας καί ὅτι ἑκάστη ἀκμή διέρχεται ἀπό δύο κορυφάς, θά ἔχωμεν τάς ἀκολούθους ἀριθμητικάς σχέσεις:

$$A=K+E-2 \quad (1)$$

$$E=\varepsilon_3+\varepsilon_4+\varepsilon_5+\varepsilon_6+\dots \quad (2)$$

$$2A=3\varepsilon_3+4\varepsilon_4+5\varepsilon_5+6\varepsilon_6+\dots \quad (3)$$

$$K=\kappa_3+\kappa_4+\kappa_5+\kappa_6+\dots \quad (4)$$

$$2A=3\kappa_3+4\kappa_4+5\kappa_5+6\kappa_6+\dots \quad (5)$$

'Εκ τῶν σχέσεων τούτων συνάγομεν τάς:

$$2A-3E=\varepsilon_4+2\varepsilon_5+3\varepsilon_6+\dots \geqslant 0$$

$$2A-3K=\varkappa_4+2\varkappa_5+3\varkappa_6+\dots \geqslant 0,$$

ἐξ ὧν λαμβάνομεν ἀντιστοίχως:

$$2A\geqslant 3E \quad \text{καί} \quad 2A\geqslant 3K,$$

ἀνισότητες προφανεῖς, διότι ἑκάστη ἕδρα ἔχει τό ὀλιγώτερον τρεῖς πλευράς, καί ἑκάστη πολύεδρος γωνία τοὐλάχιστον τρεῖς ἀκμάς.

554. 'Ομοίως ὅτι: $K\leqslant 2(E-2)$, $A\leqslant 3(E-2)$, $K\geqslant \frac{1}{2}E+2$ καί $A\geqslant \frac{3}{2}E$.

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς: Εἰς τήν προηγουμένην ἄσκησιν ἀπεδείξαμεν ὅτι: $2A\geqslant 3K$ (1)

'Επειδή $K+E=A+2 \Rightarrow K=A-E+2$ καί ἡ (1) γίνεται:

$$2A\geqslant 3(A-E+2) \Rightarrow A\leqslant 3(E-2) \quad (2)$$

'Εάν εἰς τήν (1) θέσωμεν $A=K+E-2$, ἔχομεν:

$$2(K+E-2)\geqslant 3K \Rightarrow K\leqslant 2(E-2)$$

Εἰς τήν προηγουμένην ἄσκησιν ἀπεδείξαμεν ὅτι:

$$2A\geqslant 3E \quad \text{ἤ} \quad 2(K+E-2)\geqslant 3E \Rightarrow K\geqslant \frac{1}{2}E+2$$

'Εκ τῆς $\qquad 2A\geqslant 3E \Rightarrow A\geqslant \frac{3}{2}E.$

555. 'Εάν αἱ ἕδραι κυρτοῦ πολυέδρου ἀποτελοῦνται ἀπό πολύγωνα περιττοῦ πλήθους πλευρῶν, τό πλῆθος τῶν ἑδρῶν εἶναι ἄρτιος ἀριθμός.

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς: Πράγματι, ἡ σχέσις (3) τῆς ἀσκήσεως 593 δεικνύει ὅτι ὁ ἀριθμός τῶν ἑδρῶν, αἱ ὁποῖαι ἔχουν περιττόν πλῆθος πλευρῶν (δηλαδή: $\varepsilon_3+\varepsilon_5+\varepsilon_7+\dots$) εἶναι ἄρτιος ἀριθμός.

556. 'Εάν αἱ πολύεδροι γωνίαι κυρτοῦ πολυέδρου περιέχουν περιττόν πλῆθος ἀκμῶν, τό πλῆθος τῶν πολυέδρων γωνιῶν του εἶναι ἄρτιος ἀριθμός.

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς: Πράγματι, ἡ σχέσις (5) τῆς ἀσκήσεως 553 δεικνύει ὅτι ὁ ἀριθμός τῶν πολυέδρων γωνιῶν του, αἱ ὁποῖαι ἔχουν περιττόν πλῆθος ἀκμῶν (δηλαδή: $\varkappa_3+\varkappa_5+\varkappa_7+\dots$) εἶναι ἄρτιος ἀριθμός.

Σ η μ ε ί ω σ ι ς: 'Εκ τῆς σχέσεως τοῦ EULER $A=K+E-2$, λαμβάνομεν τάς σχέσεις: $2K=4+2A-2E$ καί $2E=4+2A-2K$ αἵτινες, βάσει τῶν (2), (3), (4) καί (5) τοῦ (II) θεωρήματος, δίδουν:

$$2K=4+\varepsilon_3+2\varepsilon_4+3\varepsilon_5+4\varepsilon_6 \qquad (6)$$

$$2E=4+\kappa_3+2\kappa_4+3\kappa_5+4\kappa_6 \qquad (7)$$

557. Εἰς πᾶν πολύεδρον εἶναι $A<3K$, $A<3E$.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Ἀπεδείξαμεν ὅτι: $2A\geqslant 3E$ καί $E=A-K+2$ καί ἄρα $2A\geqslant 3(A-K+2) \Longrightarrow A\leqslant 3K-6 \Longrightarrow A<3K$.

Ἐπίσης ἀπεδείξαμεν ὅτι $2A\geqslant 3K$ καί $K=A-E+2$ καί ἄρα

$$2A\geqslant 3(A-E+2) \Longrightarrow A\leqslant 3E-6 \Longrightarrow A<3E.$$

558. Ὁμοίως ὅτι: $\frac{3}{2}K\leqslant A$.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Ἀπεδείξαμεν ὅτι $2A\geqslant 3K \Longrightarrow \frac{3}{2}K\leqslant 1$.

559. Δέν ὑπάρχει κανέν ἁπλοῦν πολύεδρον μέ ἑπτά ἀκμάς.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Ἀπεδείξαμεν ὅτι: $K+E=A+2$ καί

$$\left.\begin{array}{l} 2A\geqslant 3E \\ 2A\geqslant 3K \end{array}\right\} \Longrightarrow 4A\geqslant 3(E+K) \text{ ἤ } 4A\geqslant 3(A+2) \Longrightarrow A\geqslant 6 \qquad (1)$$

ἐκ τῆς (1) καί τῶν εὑρεθεισῶν σχέσεων τῆς ἀσκήσεως 554 ἀποδεικνύεται τό ζητούμενον.

Κατά ποῖον ἄλλον ἁπλούστερον τρόπον ἀποδεικνύεται τό ζητούμενον. Λάβετε ὡς παράδειγμα τό τετράεδρον καί προχωρήσατε.

560. Συναρτήσει τῆς ἀκμῆς α κανονικοῦ τινος πολυέδρου νά ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτίς του, τό ἀπόστημά του, τό ἐμβαδόν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας του καί ὁ ὄγκος (καί διά τά 5 κανονικά πολύεδρα).

Λ ύ σ ι ς: 1ον: Διά τό κανονικόν τετράεδρον. Περί τοῦ κανονικοῦ τετραέδρου ἐγένετο λόγος εἰς τήν §99 τοῦ βιβλίου, εἰς τήν ἄσκησιν 373 καί εἰς τήν ἄσκησιν 390.

Ἐνταῦθα ἐπαναλαμβάνομεν μερικάς ἐκείνων καί τάς ἀκολούθους:

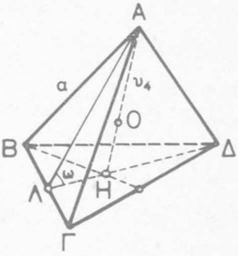
Γνωρίζομεν ὅτι: $AH=\upsilon_4=\frac{\alpha\sqrt{6}}{3}$, ἔνθα Η τό κέντρον τῆς βάσεως ΒΓΔ.

Τό ἐμβαδόν τῆς βάσεως ΒΓΔ εἶναι $(B\Gamma\Delta)=\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$

Ἄρα ὁ ὄγκος του V εἶναι:

$V=\frac{1}{3}(ΒΓΔ).υ_4=\frac{1}{3}.\frac{α^2\sqrt{3}}{4}.\frac{α\sqrt{6}}{3}=\frac{α^3\sqrt{2}}{12}$

$E_4=4.(ΒΓΔ)=4.\frac{α^2\sqrt{3}}{4}=α^2\sqrt{3}.$



σχ. 436

Ἐάν Ο εἶναι τό κέντρον τοῦ κανονικοῦ τετραέδρου θά ἔχωμεν:

$R=OA=\frac{3}{4}.υ_4=\frac{3}{4}.\frac{α\sqrt{6}}{3}=\frac{α\sqrt{6}}{4}$

$α=OH=\frac{1}{4}.AH=\frac{1}{4}.\frac{α\sqrt{6}}{3}=\frac{α\sqrt{6}}{12}$

Ἄν ΑΛ εἶναι τό παράπλευρον ὕψος, τότε ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΗΛ ἔχομεν:

$συνω=\frac{ΗΛ}{ΑΛ}=\frac{\frac{α\sqrt{3}}{6}}{\frac{α\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{3}$, ἐξ οὗ: $ω=70^\circ 31' 43'',6$.

σχ. 436

$υ_4=\frac{α\sqrt{6}}{3}$

$E_4=α^2\sqrt{3}$

$R=\frac{α\sqrt{6}}{4}$

$α_4=\frac{α\sqrt{6}}{12}$

$V_4=\frac{α^3\sqrt{2}}{12}$

Ἡ ω εἶναι ἡ δίεδρος γωνία τοῦ τετραέδρου.

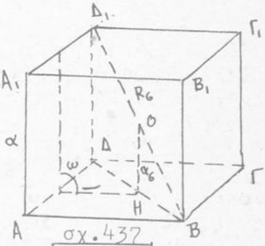
Τά κέντρα τῶν ἑδρῶν κανονικοῦ τετραέδρου εἶναι κορυφαί κανονικοῦ τετραέδρου. τό νέον τοῦτο κανονικόν τετράεδρον ὀνομάζεται συζυγές τοῦ ἀρχικοῦ.

Διά νά κατασκευάσωμεν κανονικόν τετράεδρον, ἀρκεῖ νά ἐγγράφωμεν εἰς κύβον ἀκμῆς $\frac{α\sqrt{2}}{2}$ τετράεδρον.

Κατά πόσους ἄλλους τρόπους δυνάμεθα νά κατασκευάσωμεν κανονικόν τετράεδρο;

2ον: Διά τό κανονικόν ἑξάεδρον. Τούτου αἱ δίεδροι καί ἑδρικαί γωνίαι εἶναι ὀρθαί (σχ.437).

Ἐπίσης εἶναι: $ω=90^\circ$, καί $R_6=OB=\frac{α\sqrt{3}}{2}$, $α_6=\frac{1}{2}ΔΔ_1=\frac{α}{2}$, $E_6=6α^2$ καί $V=α^3$.



σχ. 437

$R_6=\frac{α\sqrt{3}}{2}$

$α_6=\frac{α}{2}$

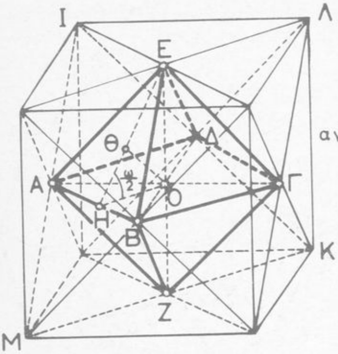
$E_6=6α^2$

$V=α^3$

Περί τῶν τομῶν τοῦ κύβου, τῆς προβολῆς αὐτοῦ ἐπί ἐπιπέδου, τῶν συμμετριῶν αὐτοῦ βλέπε εἰδικά προηγούμενα κεφάλαια.

Ἡ κατασκευή τοῦ κύβου ἀκμῆς α εἶναι προφανής.

3ον. Διά τό κανονικόν ὀκτάεδρον. Διά νά κατασκευάσωμεν κανονικόν ὀκτάεδρον, ἀρκεῖ νά κατασκευάσωμεν κύβον ἀκμῆς $\alpha\sqrt{2}$. Αἱ κορυφαί τοῦ κανονικοῦ ὀκταέδρου θά εἶναι τότε τά κέντρα τῶν ἑδρῶν τοῦ κύβου τούτου (σχ. 438).



σχ. 438

Πράγματι, ἐπειδή $IK^2=2\alpha^2+2\alpha^2=4\alpha^2$, ἕπεται $IK=2\alpha$. Ἄρα: $E\Gamma=\frac{1}{2}IK=\frac{1}{2}2\alpha=\alpha$.

Εἶναι $R_8=OE=\frac{1}{2}K\Lambda=\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$.

Ἄν ΕΗ τό ὕψος τῆς ἕδρας ΕΑΒ, θά εἶναι:

$EH=\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$ καί $OH=\frac{1}{2}.\Delta A=\frac{\alpha}{2}$. Ἄν δέ $O\Theta=\alpha_8$ εἶναι τό ἀπόστημα τοῦ καν. ὀκταέδρου, τότε ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΗΕ θά ἔχωμεν:

$$\frac{1}{\alpha_8^2}=\frac{1}{O\Theta^2}=\frac{1}{OH^2}+\frac{1}{OE^2}=\frac{1}{\frac{\alpha^2}{4}}+\frac{1}{\frac{2\alpha^2}{4}}=\frac{4}{\alpha^2}+\frac{4}{2\alpha^2}=\frac{6}{\alpha^2}$$

ἐξ οὗ: $\alpha_8=\frac{\alpha\sqrt{6}}{6}$, καί κατ' ἀκολουθίαν.

$$E_8=8.(EAB)=8.\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}=2\alpha^2\sqrt{3}.$$

Ἐπειδή τό τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι τετράγωνον καί $B\Gamma=\frac{1}{2}MK=\frac{1}{2}.2\alpha=\alpha$, ἕπεται ὅτι: $(AB\Gamma\Delta)=\alpha^2$.

Κατ' ἀκολουθίαν:

$$V_8=2V_{(EAB\Gamma\Delta)}=2.\frac{1}{3}(AB\Gamma\Delta).(OE)=\frac{2}{3}.\alpha^2.\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}=\frac{\alpha^3\sqrt{2}}{3}.$$

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΗΕ ἔχομεν:

$$\text{συν}\frac{\omega}{2}=\frac{OH}{EH}=\frac{\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3},\ \text{ἐξ οὗ}: \omega=109^\circ 28' 16'',4.$$

$$\boxed{\begin{array}{l} R_8=\frac{\alpha\sqrt{2}}{2} \\ \alpha_8=\frac{\alpha\sqrt{6}}{6} \\ E_8=2\alpha^2\sqrt{3} \\ V_8=\frac{\alpha^3\sqrt{2}}{3} \\ \omega=109^\circ 28' 16'',4 \end{array}}$$

Αἱ εὐθεῖαι ΕΖ, ΑΓ, ΒΔ εἶναι ἄξονες συμμετρίας τοῦ καν. ὀκταέδρου καί ὁρίζουν τρία ἐπίπεδα συμμετρίας αὐτοῦ, τά: ΑΒΓΔ, ΒΖΔΕ καί ΑΕΓΖ, τά ὁποῖα ἔχουν κοινόν κέντρον Ο.

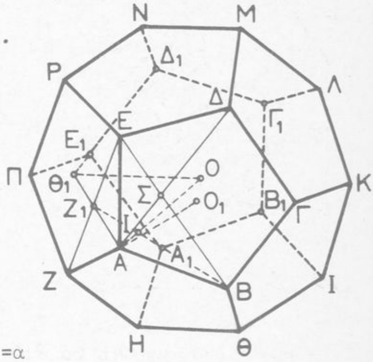
Τά κέντρα τῶν ἑδρῶν κανονικοῦ ὀκταέδρου εἶναι κορυφαί κανονικοῦ ἑξαέδρου. Τά κανονικά πολύεδρα: ἑξάεδρον (Ε=6, Κ=8) καί ὀκτάεδρον (Ε=8, Κ=6) ἔχουν τό αὐτό πλῆθος ἀκμῶν (Α=12) καί καλοῦνται σ υ ζ υ γ ῆ.

Διά πλείονας ἰδιότητας βλέπε (§ συμμετρία).

<u>4ον. Διά τό κανονικόν δωδεκάεδρον.</u>- Τοῦ πολυέδρου τούτου αἱ ἕδραι εἶναι κανονικά πεντάγωνα ἴσα, τά ὁποῖα, ἀνά τρία, ἔχουν κοινήν κορυφήν, ὡς τά ΑΒΓΔΕ, ΑΒΘΗΖ, ΑΕΡΠΖ (σχ.439).

Αἱ πολύεδροι γωνίαι αὐτοῦ εἶναι ἰσοεδρικαί τρίεδροι γωνίαι, τῶν ὁποίων ἡ ἑδρική γωνία εἶναι ἴση πρός τήν γωνίαν Α τοῦ κανονικοῦ πενταγώνου ΑΒΓΔΕ καί ἔχει μέτρον ἴσον πρός $\frac{6}{5}$ ὀρθῆς$=108^o$.

Ἔστω $O_1A=R'$ ἡ ἀκτίς τοῦ κανονικοῦ πενταγώνου ΑΒΓΔΕ καί ΑΔ=ΒΕ=δ ἡ διαγώνιος αὐτοῦ καί Σ ἡ τομή αὐτῶν.



σχ.439

Γνωρίζομεν ὅτι ἡ πλευρά ΑΒ=α τοῦ πενταγώνου ΑΒΓΔΕ εἶναι ἴση πρός τό τμῆμα ΒΣ τῆς ΒΕ καί ὅτι αἱ διαγώνιοι ΑΔ καί ΒΕ τέμνονται εἰς μέσον καί ἄκρον λόγον.

Ἄρα: $$\alpha=AB=BZ=\frac{\delta}{2}(\sqrt{5}-1) \qquad (1)$$

Ἄν ἀχθοῦν αἱ ΖΒ, ΖΕ σχηματίζεται ἡ κανονική τριγωνική πυραμίς ΑΒΕΖ, τῆς ὁποίας ἡ τρίεδρος γωνία Α εἶναι μία τῶν πολυέδρων γωνιῶν τοῦ δωδεκαέδρου.

Ἐκ τοῦ Α ἄγομεν τήν κάθετον ΑΙΟ ἐπί τό ἐπίπεδον ΖΒΕ. Ἡ ΒΙ τέμνει εἰς τό μέσον Z_1 τήν ΖΒ. Ἐπί τῆς AZ_1 λαμβάνομεν τμῆμα $A\Theta_1=O_1A=R'$ καί εἰς τό Θ_1 ἄγομεν τήν κάθετον Θ_1O ἐπί τήν ἕδραν ΑΕΖ, κειμένην ἐπί τοῦ ἐπιπέδου AIZ_1, ἡ ὁποία τέμνει τήν ΑΙ εἰς τό Ο. Τό Ο θά εἶναι τό κέντρον τοῦ καν. δωδεκαέδρου. Θά εἶναι: $OA_1=R_{12}$ καί $O\Theta_1=\alpha_{12}$.

Ἐκ τῶν ὁμοίων ὀρθογωνίων τριγώνων AIZ_1 καί $AO\Theta_1$ ἔχομεν:

$$\frac{AZ_1}{AO}=\frac{IZ_1}{O\Theta_1} \quad \text{ἤ} \quad \frac{AZ_1}{R_{12}}=\frac{IZ_1}{\alpha_{12}} \qquad (2)$$

Ἀλλά $$AZ_1=\sqrt{AZ^2-Z_1Z^2}=\sqrt{\alpha^2-\frac{\delta^2}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{4\alpha^2-\delta^2}$$

καί $IZ_1=\frac{1}{3}.BZ=\frac{1}{2}.\delta\sqrt{3}$, ὁπότε ἡ (2) γίνεται:

$$\frac{R_{12}}{\alpha_{12}}=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{4\alpha^2-\delta^2}}{\frac{1}{6}.\delta\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{4\alpha^2-\delta^2}}{\delta\sqrt{3}} \qquad (3)$$

Ἡ (3), βάσει τῆς (1), γίνεται:

$$\frac{R_{12}}{\alpha_{12}}=\sqrt{3(5-2\sqrt{5})} \qquad (4)$$

Ἐκ τοῦ τριγώνου $AO\Theta_1$ ἔχομεν:

$$AO^2-\Theta_1O^2=A\Theta_1^2 \quad \text{ἤ} \quad R_{12}^2-\alpha_{12}^2=R'^2 \qquad (5)$$

Ἐπειδή δέ, ὡς γνωστόν εἶναι:

$$R'=\frac{2\alpha}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}},$$

ἡ σχέσις (5), δυνάμει καί τῆς (4), γίνεται:

$$(14-6\sqrt{5})\cdot\alpha_{12}^2=\frac{2\alpha^2}{5-\sqrt{5}},$$

ἐξ οὗ: $\alpha_{12}=\frac{1}{2}\cdot\alpha\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}$,

ὁπότε: $R_{12}=\frac{1}{4}\cdot\alpha(\sqrt{15}+\sqrt{3})$.

$$\boxed{\begin{array}{l} R_{12}=\frac{1}{4}\cdot\alpha(\sqrt{15}+\sqrt{3}) \\ \alpha_{12}=\frac{1}{2}\cdot\alpha\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}} \\ E_{12}=3\alpha^2\sqrt{25+10\sqrt{5}} \\ V_{12}=\frac{3}{2}\cdot\alpha^3(65+29\sqrt{5}) \\ \omega=116^\circ35'54'',2 \end{array}}$$

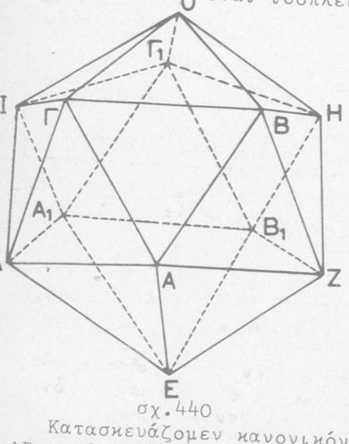
Ἡ ἀντίστοιχος ἐπίπεδος τῆς διέδρου γωνίας τοῦ καν. δωδεκαέδρου εὑρίσκεται ὅπως καί διά τό καν. ὀκτάεδρον καί ἰσοῦται μέ $\omega=116^\circ35'54'',2$.

Εὐκόλως δέ εὑρίσκεται τό ἐμβαδόν E_{12} καί ὁ ὄγκος V_{12} τοῦ καν. δωδεκαέδρου.

Εἶναι δέ ἀντιστοίχως:

$$E_{12}=3\alpha^2\cdot\sqrt{25+10\sqrt{5}} \quad \text{καί} \quad V_{12}=\frac{3}{2}\cdot\alpha^3(65+29\sqrt{5})$$

5ον. Διά τό κανονικόν εἰκοσάεδρον.- Τοῦ πολυέδρου τούτου αἱ ἕδραι εἶναι ἰσόπλευρα τρίγωνα.



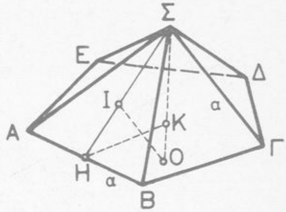
σχ. 440

Κορυφαί τούτου εἶναι τά κέντρα τῶν ἑδρῶν τοῦ κανονικοῦ δωδεκαέδρου. Τά τμήματα, τά ὁποῖα συνδέουν τό κέντρον μιᾶς ἕδρας (πενταγώνου) τοῦ δωδεκαέδρου μέ τά κέντρα τῶν πέντε προσκειμένων αὐτῆς πενταγώνων, ὁρίζουν μίαν πολύεδρον γωνίαν, ἔχουσαν πέντε ἕδρας καί ἡ ὁποία εἶναι μία πολύεδρος γωνία τοῦ κανονικοῦ εἰκοσαέδρου.

Τά κέντρα τριῶν πενταγωνικῶν ἑδρῶν τοῦ δωδεκαέδρου, αἵτινες ἔχουν μίαν κορυφήν κοινήν ὁρίζουν ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον, ὅπερ εἶναι μία ἕδρα τοῦ εἰκοσαέδρου.

Κατασκευάζομεν κανονικόν πεντάγωνον ΑΒΓΔΕ μέ πλευράν ΑΒ=α. Τό πολύγωνον τοῦτο θεωροῦμεν ὡς βάσιν κανονικῆς πυραμίδος μέ κορυφήν Σ καί ἀκμῆς ΣΓ=α.

Διά τοῦ κέντρου Ι τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΣΑΒ, ὑψοῦμεν κάθετον ἐπί τό ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου τούτου, τήν ΙΟ, ἡ ὁποία τέμνει τό ὕψος ΣΚ τῆς πυραμίδος ΣΑΒΓΔΕ εἰς τό σημεῖον Ο. Τό Ο θά εἶναι τό κέντρον τοῦ καν. εἰκοσαέδρου.



σχ.441

Τούτου τεθέντος, ἐάν ἀχθῇ τό ὕψος ΣΗ τῆς ἕδρας ΣΑΒ καί ἀκολούθως τό τμῆμα ΚΗ, ἐκ τῶν ὁμοίων ὀρθογωνίων τριγώνων ΣΙΟ καί ΣΚΗ, θά ἔχωμεν:

$$\frac{\Sigma O}{\Sigma H}=\frac{IO}{KH} \qquad (1)$$

Ἐπειδή δέ: $\Sigma O=R_{20}$, $IO=\alpha_{20}$, $\Sigma H=\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$ καί $KH=\frac{\alpha(\sqrt{5}+1)}{2\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$ ὡς ἀπόστημα τοῦ κανονικοῦ πενταγώνου ΑΒΓΔΕ πλευρᾶς α, ἡ (1) γίνεται:

$$\frac{R_{20}}{\alpha_{20}}=\frac{\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}=\sqrt{15-6\sqrt{5}} \qquad (2)$$

Ἀλλά

$$R_{20}^2-\alpha_{20}^2=OI^2=\frac{1}{3}.\alpha^2 \qquad (3)$$

Δι' ἐπιλύσεως τοῦ συστήματος τῶν ἐξισώσεων (2) καί (3) λαμβάνομεν: $R_{20}=\frac{1}{4}.\alpha\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ καί $\alpha_{20}=\frac{1}{12}.\alpha\sqrt{6(7+3\sqrt{5})}$.

Τό ἐμβαδόν E_{20} καί ὁ ὄγκος V_{20} τοῦ κανονικοῦ εἰκοσαέδρου εὑρίσκονται εὐκόλως καί εἶναι:

$E_{20}=5\alpha^2\sqrt{3}$ καί $V_{20}=\frac{5}{12}.\alpha^3\sqrt{14+6\sqrt{5}}$

Ἡ δίεδρος γωνία ω τοῦ εἰκοσαέδρου εὑρίσκεται εὐκόλως ὅτι εἶναι:

$$\omega=138^\circ 11' 22'',75$$

$$\boxed{\begin{array}{l} R_{20}=\frac{1}{4}.\alpha\sqrt{10+2\sqrt{5}} \\ \alpha_{20}=\frac{1}{12}.\alpha\sqrt{6(7+3\sqrt{5})} \\ E_{20}=5\alpha^2\sqrt{3} \\ V_{20}=\frac{5}{12}.\alpha^3\sqrt{14+6\sqrt{5}} \\ \omega=138^\circ 11' 22'',75 \end{array}}$$

Τά κέντρα τῶν ἑδρῶν κανονικοῦ εἰκοσαέδρου εἶναι κορυφαί κανονικοῦ δωδεκαέδρου.

Τά δύο ταῦτα πολύεδρα: δωδεκάεδρον (Ε=12, Κ=20) καί εἰκοσάεδρον (Ε=20, Κ=12), τά ὁποῖα ἔχουν τό αὐτό πλῆθος ἀκμῶν (Α=30) καλοῦνται σ υ ζ υ γ ῆ.

561. Πᾶσα τομή κανονικοῦ ὀκταέδρου ὑπό ἐπιπέδου διερχομένου διά δύο ἀξόνων του, εἶναι τετράγωνον.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Διά τήν ἀπόδειξιν παρατηρήσατε τό σχῆμα τῆς ἀσκήσεως 560, τό ἀναφερόμενον εἰς τό κανονικόν ἑξάεδρον καί ἐξαγάγετε ἀμέσως τό ζητούμενον.

562. Νά ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ κανονικοῦ ἑξαέδρου, ὅπερ

ἔχει κορυφάς τά κέντρα τῶν ἑδρῶν κανονικοῦ ὀκταέδρου ἀκμῆς α.

Λ ύ σ ι ς: Ἡ λύσις τοῦ προβλήματος τούτου νά γίνῃ ὑπό τῶν μαθητῶν.

563. Νά ὑπολογισθῇ ἡ ὁλική ἐπιφάνεια καί ὁ ὄγκος κανονικοῦ πολυέδρου (καί τῶν πέντε εἰδῶν) συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος R αὐτοῦ.

Λ ύ σ ι ς: Προτιθέμεθα νά ἐκφράσωμεν, συναρτήσει τῆς R, τήν ἀκμήν α τοῦ ἀντιστοίχου πολυέδρου. Ἔστω ε τό ἐμβαδόν μιᾶς ἕδρας καί E τό ἐμβαδόν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας καί V ὁ ὄγκος τοῦ πολυέδρου.

1) Διά τό καν.τετράεδρον: Εἶναι:

$$\varepsilon_3=\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}=R^2\sqrt{3} \Longrightarrow E_4=\frac{4}{3}.R^2\sqrt{3}$$

καί

$$V_4=\frac{4}{3}.R^2.\sqrt{3}.\frac{1}{9}.R=\frac{4}{27}.R^3\sqrt{3}.$$

2) Διά τό καν.ἑξάεδρον: Εἶναι:

$$\varepsilon_4=\alpha^2=\frac{4}{3}.R^2 \longrightarrow E_6=8R^2$$

καί

$$V_6=8R^2.\frac{R\sqrt{3}}{9}=\frac{8}{9}.R^3\sqrt{3}.$$

3) Διά τό κανον.ὀκτάεδρον: Εἶναι:

$$\varepsilon_8=\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{2}.R^2\sqrt{3} \longrightarrow E_8=4R^2\sqrt{3}$$

καί

$$V_8=4R^2\sqrt{3}.\frac{R\sqrt{3}}{9}=\frac{4}{3}.R^3.$$

4) Διά τό καν.δωδεκάεδρον: Εἶναι:

$$\varepsilon_{12}=\frac{5}{4}.\alpha^2.\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}=\frac{1}{6}.R^2\sqrt{10(5-\sqrt{5})} \Longrightarrow E_{12}=2R^2\sqrt{10(5-\sqrt{5})}$$

καί

$$V_{12}=2R^2\sqrt{10(5-\sqrt{5})}.\frac{1}{3}.R\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}=\frac{2}{9}.R^3\sqrt{30(3+\sqrt{5})}.$$

5) Διά τό καν.εἰκοσάεδρον: Εἶναι:

$$\varepsilon_{20}=\frac{1}{4}.\alpha^2\sqrt{3}=\frac{R^2}{10}(5\sqrt{3}-\sqrt{15}) \Longrightarrow E_{20}=2R^2(5\sqrt{3}-\sqrt{15})$$

καί

$$V_{20}=2.R^2(5\sqrt{3}-\sqrt{15}).\frac{1}{3}.R\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}=\frac{2}{3}.R^3\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XII

ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΑΙ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΙ-ΚΥΛΙΝΔΡΟΙ

564. Ἡ ἀκτίς τῆς βάσεως κυλίνδρου ἐκ περιστροφῆς εἶναι 8cm, καί τό ὕψος του 12cm. Νά ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος καί ἡ ἐπιφάνειά του.

Λ ύ σ ι ς: Τό ἐμβαδόν τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου εἶναι:

$$(B)=\pi R^2=\pi.8^2=64\pi\ cm^2.$$

Τό ἐμβαδόν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας του εἶναι:

$$E_{o\lambda}=2\pi R(\upsilon+R)=2\pi.8.(12+8)=320\pi\ cm^2.$$

Ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου εἶναι:

$$V=\pi R^2.\upsilon=\pi.8^2.12=768\pi\ cm^3.$$

565. Κυλινδρική στήλη ἔχει ὕψος 8m καί ἐμβαδόν κυρτῆς ἐπιφανείας $25,12m^2$. Ποῖος εἶναι ὁ ὄγκος της;

Λ ύ σ ι ς: Τό ἐμβαδόν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου εἶναι: $E_\kappa=2\pi R\upsilon$ ἤ $25,12=2\pi.R.8=16.3,14.R \Rightarrow R=0,5m$.

Ὁ ὄγκος τῆς στήλης εἶναι:

$$V=\pi R^2\upsilon=\pi.(0,5)^2.8=\pi.0,25.8=2\pi=2.3,14=6,28\ m^3.$$

566. Κυλινδρική δεξαμενή ἔχει βάθος 4 m καί ὄγκον $12,56m^3$. Νά ὑπολογισθῇ τό ἐμβαδόν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας της.

Λ ύ σ ι ς: Ἐκ τοῦ τύπου $V=\pi R^2.\upsilon$ ἔχομεν:

$$12,56=3,14.R^2.4=12,56.R^2 \Rightarrow R^2=1 \Rightarrow R=1\ m.$$

Ἄρα τό ἐμβαδόν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας της εἶναι:

$$E_\kappa=2\pi R.\upsilon=2.3,14.1.4=25,12\ m^2.$$

567. Σιδηρά κυλινδρική στήλη έχει όγκον 4,5216 m^3 καί ἐμβαδόν κυρτῆς ἐπιφανείας 15,072 m^2. Νά ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτίς τῆς βάσεως, τό ὕψος καί τό βάρος τούτου, ἄν τό είδ. βάρος τοῦ σιδήρου εἶναι 7,8.

Λ ύ σ ι ς: Ἐκ τῶν τύπων:

$$\left.\begin{array}{l} V=\pi R^2.\upsilon \\ E_\kappa=2\pi R.\upsilon \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4,5216=\pi R^2.\upsilon \\ 15,072=2\pi R.\upsilon \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{4,5216}{15,072}=\frac{R}{2} \Rightarrow R=0,6m.$$

καί κατ'ἀκολουθίαν:

$$\upsilon=\frac{E}{2\pi R}=\frac{15,072}{2.3,14.0,6}=\frac{15,072}{3,768}=4m.$$

$$\text{Βάρος}=V.\varepsilon=4,5216.7,8=35,26848 \text{ τόν.}$$

568. Τά ἐμβαδά τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν δύο κυλίνδρων, ἐχόντων ἴσας βάσεις, εἶναι ὡς τά ὕψη αὐτῶν.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Ἐπειδή $E_1=2\pi R.\upsilon_1$ καί $E_2=2\pi R.\upsilon_2$, ἕπεται ὅτι: $\frac{E_1}{E_2}=\frac{2\pi R.\upsilon_1}{2\pi R.\upsilon_2}=\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}$, καθόσον εἶναι: $R=R_1$.

569. Τά ἐμβαδά τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν δύο κυλίνδρων ἐκ περιστροφῆς ἐχόντων ἴσα ὕψη, εἶναι ὡς αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεων αὐτῶν.

Λ ύ σ ι ς: Ἐπειδή τά ὕψη εἶναι ἴσα, θά ἔχωμεν:

$$\left.\begin{array}{l} E_1=2\pi R_1.\upsilon \\ E_2=2\pi R_2.\upsilon \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{E_1}{E_2}=\frac{2\pi R_1.\upsilon}{2\pi R_2.\upsilon}=\frac{R_1}{R_2}.$$

570. Τό ἐμβαδόν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου ἐκ περιστροφῆς εἶναι Ε καί τό μῆκος τῆς βάσεώς του Γ. Νά ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος αὐτοῦ.

Λ ύ σ ι ς: Γνωρίζομεν ὅτι:

$$\left.\begin{array}{l} E_{o\lambda}=2\pi R(\upsilon+R) \\ \Gamma=2\pi R \end{array}\right\} \Rightarrow E_{o\lambda}=\Gamma.\left(\upsilon+\frac{\Gamma}{2\pi}\right)=\Gamma\upsilon+\frac{\Gamma^2}{2\pi} \Rightarrow \upsilon=\frac{E_{o\lambda}}{\Gamma}-\frac{\Gamma}{2\pi}=\frac{2\pi.E_{o\lambda}-\Gamma^2}{2\pi\Gamma}$$

καί $R=\frac{\Gamma}{2\pi}$. Κατ'ἀκολουθίαν:

$$V=\pi R^2.\upsilon=\pi.\frac{\Gamma^2}{4\pi^2}.\left(\frac{2\pi.E_{o\lambda}-\Gamma^2}{2\pi\Gamma}\right)=\frac{2\pi\Gamma.E_{o\lambda}-\Gamma^3}{8\pi^2}$$

571. Νά ὑπολογισθῇ τό ὕψος κυλίνδρου ἐκ περιστροφῆς, ἐκ

τοῦ ἐμβαδοῦ E τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του καί τοῦ ἐμβαδοῦ E_1 τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας του.

Λ ύ σ ι ς: Ἐάν R εἶναι ἡ ἀκτίς τοῦ κυλίνδρου καί υ τό ὕφος του θά ἔχωμεν:

$$\left.\begin{array}{l} E_\kappa = 2\pi R.\upsilon \\ E_{o\lambda} = 2\pi R(\upsilon+R) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} E_\kappa = 2\pi R.\upsilon \\ E_{o\lambda} = 2\pi R.\upsilon + 2\pi R^2 = E_\kappa + 2\pi R^2 \end{array}\right\} \Rightarrow R = \sqrt{\frac{E_{o\lambda} - E_\kappa}{2\pi}}$$

καί
$$\upsilon = \frac{E_\kappa}{2\pi R} = \frac{E_\kappa}{2\pi\sqrt{\dfrac{E_{o\lambda}-E_\kappa}{2\pi}}} = \frac{E_\kappa}{\sqrt{2\pi(E_{o\lambda}-E_\kappa)}}$$

572. Νά ὑπολογισθῇ τό ἐμβαδόν E τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου ἐκ περιστροφῆς ἐκ τοῦ ὄγκου του V καί τῆς ἀκτῖνος R τῆς βάσεως.

Λ ύ σ ι ς: Γνωρίζομεν ὅτι:

$$V = \pi R^2.\upsilon \Rightarrow \upsilon = \frac{V}{\pi R^2}$$

καί κατ'ἀκολουθίαν:

$$E_\kappa = 2\pi R.\upsilon = 2\pi R.\frac{V}{\pi R^2} = \frac{2V}{R}$$

573. Δύο κύλινδροι ἐκ περιστροφῆς ἔχουν ἰσοδυνάμους κυρτάς ἐπιφανείας. Ποῖος εἶναι ὁ λόγος τῶν ὄγκων των;

Λ ύ σ ι ς: Ἐάν R_1 καί υ_1, R_2 καί υ_2 εἶναι ἀντιστοίχως ἡ ἀκτίς καί τό ὕφος τῶν κυλίνδρων, θά ἔχωμεν:

$$\left.\begin{array}{l} E_1 = 2\pi R_1.\upsilon_1 \\ E_2 = 2\pi R_2.\upsilon_2 \\ E_1 = E_2 \end{array}\right\} \Rightarrow 2\pi R_1.\upsilon_1 = 2\pi R_2.\upsilon_2 \Rightarrow R_1.\upsilon_1 = R_2.\upsilon_2 \qquad (1)$$

Ἀλλά:
$$\left.\begin{array}{l} V_1 = \pi R_1^2.\upsilon_1 \\ V_2 = \pi R_2^2.\upsilon_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{R_1^2.\upsilon_1}{R_2^2.\upsilon_2} = \frac{R_1^2}{R_2^2}.\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \frac{R_1^2}{R_2^2}.\frac{R_2}{R_1} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{\upsilon_2}{\upsilon_1}$$

574. Δύο κύλινδροι ἐκ περιστροφῆς ἔχουν ἰσοδυνάμους ὄγκους. Ποῖος εἶναι ὁ λόγος τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν των;

Λ ύ σ ι ς: Ἔστωσαν R_1 καί υ_1, R_2 καί υ_2 αἱ ἀκτῖνες καί τό ὕφος τῶν κυλίνδρων ἀντιστοίχως. Θά ἔχωμεν:

$$\left.\begin{array}{l} V_1 = \pi R_1^2.\upsilon_1 \\ V_2 = \pi R_2^2.\upsilon_2 \\ V_1 = V_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \pi R_1^2.\upsilon_1 = \pi R_2^2.\upsilon_2 \Rightarrow R_1^2.\upsilon_1 = R_2^2.\upsilon_2 \qquad (1)$$

'Επειδή: $\left.\begin{array}{l} E_1=2\pi R_1 . \upsilon_1 \\ E_2=2\pi R\ . \upsilon_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{E_1}{E_2}=\frac{R_1 . \upsilon_1}{R_2 . \upsilon_2}=\frac{R_1}{R_2} . \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}=\frac{R_1}{R_2} . \frac{R_2^2}{R_1^2}=\frac{R_2}{R_1}=\sqrt{\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}}$.

575. Νά ὑπολογισθοῦν αἱ διαστάσεις ὀρθογωνίου,γνωστοῦ ὄντος ὅτι,ἄν στρέψωμεν αὐτό διαδοχικῶς περί τάς δύο διαδοχικάς πλευράς του,οἱ παραγόμενοι ὄγκοι εἶναι ἀντιστοίχως $V=108\ m^3$ καί $V_1=12\ m^3$.

Λ ύ σ ι ς:'Εάν α καί β εἶναι αἱ διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου,θά ἔχωμεν:

$$\left.\begin{array}{l} V=\pi\alpha^2\beta \\ V_1=\pi\beta^2\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 108=\pi\alpha^2\beta \\ 12=\pi\beta^2\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{108}{12}=\frac{\alpha}{\beta} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta}=9 \Rightarrow \alpha=9\beta,$$

καί κατ'ἀκολουθίαν:

$$12=\pi.\beta^2.\alpha=\pi.\beta^2.9\beta=9\pi.\beta^3 \Rightarrow \beta=\sqrt[3]{\frac{12}{9\pi}}=\sqrt[3]{\frac{4}{3\pi}}$$

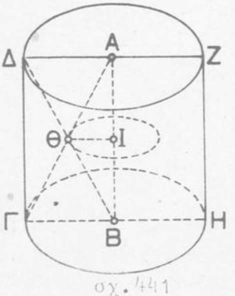
καί ἄρα: $\alpha=9\beta=9.\sqrt[3]{\frac{4}{3\pi}}$.

576. 'Ο ὄγκος κυλίνδρου ἐκ περιστροφῆς ἰσοῦται πρός τό γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ὀρθογωνίου ἐξ οὗ παράγεται,ἐπί τό μῆκος τοῦ κύκλου,ὅν γράφει τό κέντρον τοῦ ὀρθογωνίου.

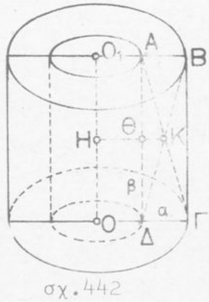
'Α π ό δ ε ι ξ ι ς:'Ο ὄγκος τοῦ κυλίνδρου εἶναι (σχ. 441):

$$V=\pi.B\Gamma^2.AB=\pi.B\Gamma.B\Gamma.A\Theta=\pi.B\Gamma.(AB\Gamma\Delta)=\pi.2.I\Theta.(AB\Gamma\Delta)$$

ἤ $\quad V=(AB\Gamma\Delta).(2\pi.I\Theta)$



σχ.441



σχ.442

577. 'Ο ὄγκος τοῦ σχήματος τοῦ παραγομένου ὑπό ὀρθογωνίου στρεφομένου περί ἄξονα τοῦ ἐπιπέδου του,παράλληλον πρός μίαν πλευράν αὐτοῦ,μή τέμνοντα αὐτό,ἰσοῦται πρός τό γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ὀρθογωνίου ἐπί τό μῆκος τοῦ κύκλου,ὅν γράφει τό κέντρον τοῦ ὀρθογωνίου τούτου.

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς: Ἔστωσαν ΓΔ=α καί ΔΑ=β αἱ διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ καί Κ τό κέντρον βάρους αὐτοῦ (σχ.442).
Ὁ ἄξων $OO_1 // ΔΑ$. Θά εἶναι:

$$V_{(ΑΒΓΔ)} = V_{(ΒΓΟΟ_1)} - V_{(ΑΔΟΟ_1)}$$
$$= π.ΟΓ^2.β - π.ΟΔ^2.β = πβ(ΟΓ^2 - ΟΔ^2) = πβ(ΟΓ+ΟΔ)(ΟΓ-ΟΔ)$$
$$= π.β.(ΟΓ+Ο_1Α)α = παβ.2.ΚΗ = (αβ).2π.ΚΗ.$$

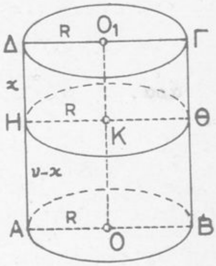
Ὥστε: $$V_{(ΑΒΓΔ)} = (ΑΒΓΔ).2π.ΚΗ.$$

578. Νά ἀχθῇ ἐπίπεδον παράλληλον πρός τάς βάσεις κυλίνδρου ἐκ περιστροφῆς, οὕτως ὥστε τό ἐμβαδόν τῆς τομῆς νά εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν τῶν δύο σχηματιζομένων κυλίνδρων.

Λ ύ σ ι ς: Ἔστω υ τό ὕψος καί R ἡ ἀκτίς ἑνός κυλίνδρου ΑΒΓΔ. Ἐάν τεθῇ ΔΗ=x, τότε ΗΑ=υ-x. Κατά τό πρόβλημα πρέπει νά ἔχωμεν (ἄν E_1 καί E_2 εἶναι τά ἐμβαδά τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν τῶν κυλίνδρων ΑΒΘΗ καί ΗΘΓΔ).

$$(π.R^2)^2 = E_1.E_2 = 2πR(υ-x).2πRx = 4π^2R^2x(υ-x)$$
ἤ $$π^2R^4 = 4π^2R^2x(υ-x) \Longrightarrow 4x^2 - 4υx + R^2 = 0$$
ἐξ οὗ: $$x = \frac{2υ \pm \sqrt{4υ^2-4R^2}}{4} = \frac{υ \pm \sqrt{υ^2-R^2}}{2}$$

Πόσαι λύσεις ὑπάρχουν;



σχ.443

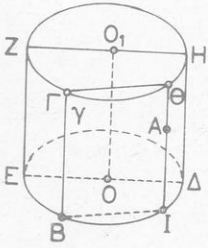
579. Ὁ ὄγκος κυλίνδρου ἐκ περιστροφῆς ἰσοῦται πρός τό γινόμενον τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του ἐπί τό ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος τῆς βάσεώς του.

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς: Γνωρίζομεν ὅτι:
$$V = πR^2.υ = \frac{1}{2}π.2.R^2.υ = 2π.R.υ.\frac{1}{2}R = E_κ\left(\frac{1}{2}.R\right)$$

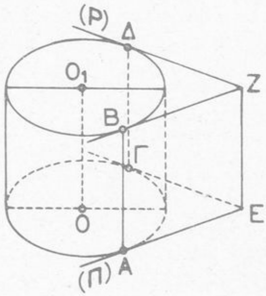
580. Ἐπίπεδον περιέχον μίαν γενέτειραν (γ) κυλίνδρου ἐκ περιστροφῆς καί ἕν σημεῖον Α τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας του, ἐπανατέμνει αὐτήν κατά μίαν γενέτειραν, διερχομένην διά τοῦ Α.

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς: Ἔστω ΕΖΗΘ ὁ κύλινδρος (σχ.444), Α σημεῖον τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ καί ΒΓ=(γ) μία γενέτειρα αὐτοῦ.

Τό ἐπίπεδον (Α,γ) τέμνει τήν κυλινδρικήν ἐπιφάνειαν κατά μίαν εὐθεῖαν ΕΑΙ,ἡ ὁποία εἶναι γενέτειρα τοῦ κυλίνδρου, διότι τό ἐπίπεδον (Α,γ) εἶναι παράλληλον πρός τόν ἄξονα $ΟΟ_1$ τοῦ κυλίνδρου καί καθόσον ὁ ἄξων $ΟΟ_1$ εἶναι παράλληλος πρός τήν (γ).Τό Α καί ὁ $ΟΟ_1$ ὁρίζουν ἐπίπεδον,τέμνον τό (Α,γ) κατά τήν εὐθεῖαν ΘΑΙ,ἡ ὁποία εἶναι γενέτειρα τοῦ κυλίνδρου.



σχ.444



σχ.445

581. Ἐάν δύο ἐπίπεδα ἐφάπτωνται μιᾶς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας ἐκ περιστροφῆς,ἡ τομή των εἶναι παράλληλος πρός τάς γενετείρας.

Λ ύ σι ς: Θεωροῦμεν δύο ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ),τά ὁποῖα ἐφάπτονται τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας κατά τάς γενετείρας ΑΒ καί ΓΔ (σχ.445).

Ἐάν τά σημεῖα Β καί Δ εἶναι ἀντιδιαμετρικά τοῦ κύκλου (Ο),τότε τά (Π) καί (Ρ) εἶναι παράλληλα καί δέν ὑπάρχει τομή αὐτῶν.

Ἐάν τά Β καί Δ δέν εἶναι ἀντιδιαμετρικά,τότε τά (Π) καί (Ρ) τέμνονται κατά τήν εὐθεῖαν ΕΖ.

Τά (Π) καί (Ρ),ὡς διερχόμενα διά τῶν γενετειρῶν ΑΒ καί ΓΔ,εἶναι κάθετα πρός τήν βάσιν (Ο) τοῦ κυλίνδρου.Ἄρα ἡ τομή αὐτῶν ΕΖ θά εἶναι κάθετος πρός τήν βάσιν (Ο) καί κατ' ἀκολουθίαν ἡ ΕΖ θά εἶναι παράλληλος πρός τήν $ΟΟ_1$. Ἄρα παράλληλος καί πρός τάς γενετείρας ΑΒ καί ΓΔ.

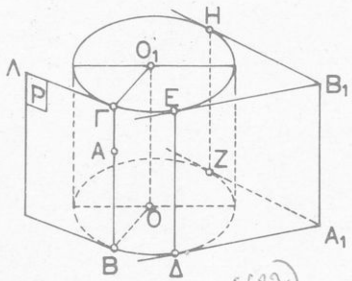
---

582. Διά σημείου Α νά ἀχθῆ ἐπίπεδον ἐφαπτόμενον μιᾶς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας ἐκ περιστροφῆς.

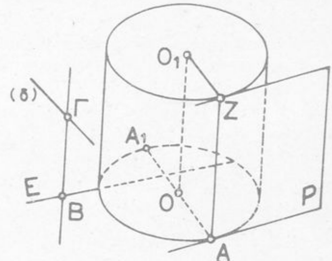
Λ ύ σ ι ς: Ἐάν τό σημεῖον Α κεῖται ἐπί τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας,ἄγομεν τήν διά τοῦ Α γενέτειραν αὐτῆς ΒΑΓ. Εἰς τό Γ ἄγομεν τήν κάθετον ΓΛ πρός τήν ἀκτῖνα $Ο_1Γ$. Ὁρίζεται οὕτω τό ἐπίπεδον (P), τό ὁποῖον εἶναι τό ἐφαπτόμενον τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας εἰς τό A (σχ.446).

Ἐάν τό A ἔχῃ τήν θέσιν A_1 (ἐκτός τοῦ κυλίνδρου), τότε ἄγομεν τήν διά τοῦ A_1 κάθετον τομήν τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας, ὅτε προκύπτει ὁ κύκλος (O).

Ἐκ τοῦ A_1 ἄγομεν τάς ἐφαπτομένας $A_1\Delta$ καί A_1Z τοῦ κύκλου τούτου καί τήν A_1B_1 κάθετον πρός τό ἐπίπεδον ΔA_1Z_1. Τά ἐπίπεδα ΔA_1B_1 καί ZA_1B_1 εἶναι τά ζητούμενα. Διατί;



σχ.446 (582)



σχ.447 (583)

583. Νά ἀχθῇ ἐπίπεδον ἐφαπτόμενον κυλινδρικῆς ἐπιφανείας ἐκ περιστροφῆς καί παράλληλον πρός δοθεῖσαν διεύθυνσιν (δ).

Ἀ ν ά λ υ σ ι ς: Ἔστω (P) τό ζητούμενον ἐπίπεδον (σχ. 447), παράλληλον πρός τήν δοθεῖσαν διεύθυνσιν (δ) καί ἐφαπτόμενον τοῦ κυλίνδρου κατά τήν γενέτειραν AZ. Ἐκ τινος σημείου Γ τῆς (δ) ἄγομεν τήν ΓB παράλληλον πρός τόν ἄξονα O_1O, ἥτις τέμνει τό ἐπίπεδον τοῦ ὁδηγοῦ κύκλου κατά τό σημεῖον B. Τό ἐπίπεδον τοῦ ὁδηγοῦ κύκλου τέμνει τά ἐπίπεδα (P) καί (δΓB) κατά τάς εὐθείας AΘ καί BE, αἵτινες θά εἶναι παράλληλοι.

Κ α τ α σ κ ε υ ή: Ἐκ τινος σημείου Γ τῆς (δ) ἄγομεν τήν $\Gamma B \parallel O_1O$. Τό ἐπίπεδον τοῦ ὁδηγοῦ κύκλου (O) τέμνει τό ἐπίπεδον (δΓB) κατά τήν εὐθεῖαν BE. Ἀκολούθως ἐκ τοῦ O ἄγομεν τήν κάθετον πρός τήν BE, ἥτις τέμνει τόν ὁδηγόν κύκλον εἰς τά σημεῖα A καί A_1. Ἐκ τοῦ A ἄγομεν τήν ἐφαπτομένην AΘ τοῦ ὁδηγοῦ κύκλου, ἥτις θά εἶναι παράλληλος πρός τήν BE. Ἡ γενέτειρα AZ καί ἡ AΘ ὁρίζουν τό ζητούμενον ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον.

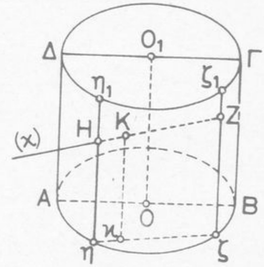
Τό πρόβλημα, προφανῶς, ἐπιδέχεται δύο λύσεις.

584. Μία εὐθεῖα, διάφορος μιᾶς γενετείρας κυλινδρικῆς

ἐπιφανείας ἐκ περιστροφῆς,δέν δύναται νά ἔχῃ κοινά σημεῖα περισσότερα τῶν δύο μετ'αὐτῆς.'Εάν ἔχῃ τρία,θά συμπίπτῃ μέ μίαν γενέτειραν.

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς: Εἶναι γνωστόν ὅτι ἐπί μιᾶς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας ὑπάρχουν μόνον αἱ γενέτειραι αὐτῆς ὡς εὐθεῖαι."Εστω ὅτι ἡ εὐθεῖα (x) εἶναι διάφορος τῶν γενετειρῶν τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας καί ὅτι ἔχει κοινά σημεῖα μετ' αὐτῆς τά Η καί Ζ.Ταῦτα θά κεῖνται ἐπί τῶν δι'αὐτῶν διερχομένων γενετειρῶν $ηη_1$ καί $ζζ_1$.

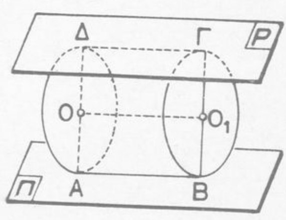
'Εάν ἡ (x) εἶχε καί τρίτον κοινόν σημεῖον μετά τῆς ἐκ περιστροφῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας,ἔστω τό Κ,τότε προβολή αὐτοῦ ἐπί τό ἐπίπεδον τῆς βάσεως (Ο) θά ἦτο ἐσωτερικόν σημεῖον τοῦ κύκλου (Ο),ἀλλά καί σημεῖον τοῦ τοῦ ὁδηγοῦ κύκλου,ὅπερ ἄτοπον.



σχ.448

585. Ποῖος ὁ γεωμ.τόπος τῶν ἀξόνων τῶν κυλίνδρων,τῶν ἐφαπτομένων δύο παραλλήλων ἐπιπέδων;

'Α ν ά λ υ σ ι ς: "Εστωσαν ΑΒ καί ΓΔ αἱ γενέτειραι κατά τάς ὁποίας ἐφάπτεται ὁ κύλινδρος (OO_1) τῶν δύο παραλλήλων ἐπιπέδων (Π) καί (Ρ).Προφανῶς,αἱ ΒΓ καί ΑΔ θά εἶναι κάθετοι πρός τά ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ).'Επειδή δέ $OA=O_1B$ καί συγχρόνως παράλληλοι,ἕπεται ὅτι ἡ OO_1 εἶναι παράλληλος πρός τά ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ).



σχ449

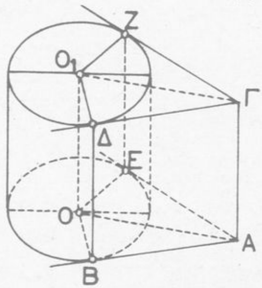
'Εντεῦθεν συνάγομεν ὅτι αἱ OO_1 θά κεῖνται ἐπί τοῦ μεσοπαραλλήλου ἐπιπέδου τῶν (Π) καί (Ρ).

586. 'Ομοίως τῶν ἐφαπτομένων δύο ἐπιπέδων.

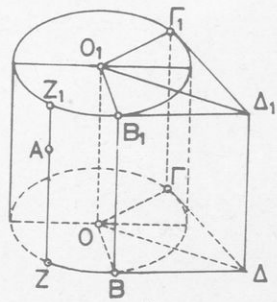
'Α ν ά λ υ σ ι ς:"Εστω ὅτι τά ἐπίπεδα τέμνονται κατά τήν εὐθεῖαν ΑΓ καί ὅτι ἐφάπτονται τῆς ἐκ περιστροφῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας κατά τάς γενετείρας ΒΔ καί ΕΖ (σχ. 450).

Αἱ ΟΒ καί ΟΕ θά εἶναι κάθετοι πρός τά ἐπίπεδα καί ἐπί πλέον ΟΒ=ΟΕ."Αρα ἡ ΟΑ θά εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΒΑΕ. 'Επομένως ὁ ἄξων OO_1 τοῦ κυλίνδρου θά κεῖται ἐπί τοῦ διχοτομοῦντος τήν δίεδρον γωνίαν τῶν δύο ἐπιπέδων καί θά εἶναι παράλληλος πρός τήν ΑΓ.

Ἄρα ὁ γεωμ.τόπος τῶν ἀξόνων τῶν κυλίνδρων τῶν ἐφαπτομένων δύο τεμνομένων ἐπιπέδων εἶναι τό διχοτομοῦν ἐπίπεδον τήν δίεδρον ΑΓ καί τό ἐπίπεδον τό διχοτομοῦν τήν παραπληρωματικήν ταύτης καθώς καί τάς κατακορυφήν τούτων.



σχ.450



σχ.451

587. Νά ὁρισθῇ κυλινδρική ἐπιφάνεια ἐκ περιστροφῆς, ἐφαπτομένη δύο δοθέντων ἐπιπέδων καί διερχομένη διά δοθέντος σημείου Α.

Ἀ ν ά λ υ σ ι ς: Ἔστω (OO_1) ἡ κυλινδρική ἐπιφάνεια ἡ διερχομένη διά τοῦ δοθέντος σημείου Α καί ἐφαπτομένη δύο τεμνομένων ἐπιπέδων κατά τήν εὐθεῖαν $\Delta\Delta_1$.

Τό ἐπίπεδον τοῦ ὁδηγοῦ κύκλου τέμνει τά δοθέντα ἐπίπεδα κατά τάς ἐφαπτομένας ΒΔ καί ΓΔ τοῦ ὁδηγοῦ κύκλου. Ἡ διά τοῦ Α γενέτειρα τοῦ κυλίνδρου τέμνει τήν βάσιν εἰς τό σημεῖον Ζ.

Οὕτω τό πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τό νά γραφῇ κύκλος, διερχόμενος διά δοθέντος σημείου Ζ καί ἐφαπτόμενος δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ΔΒ καί ΔΓ.

Ἐντεῦθεν ὁρίζεται ἡ κυλινδρική ἐκ περιστροφῆς ἐπιφάνεια.

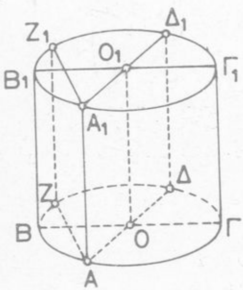
588. Ἐάν ἐπίπεδον τέμνῃ γενέτειραν κυλινδρικῆς ἐπιφανείας, θά τέμνῃ καί τάς ἄλλας.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Ἐπειδή αἱ γενέτειραι κυλινδρικῆς ἐπιφανείας εἶναι παράλληλοι μεταξύ των, ὡς παράλληλοι πρός τόν ἄξονα τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας, πᾶν ἐπίπεδον τέμνον μίαν τῶν γενετειρῶν θά τεμνῃ καί τάς ἄλλας.

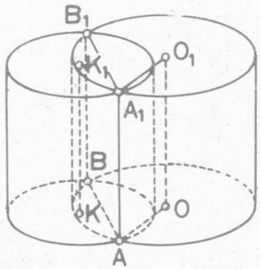
589. Πᾶν ἐπίπεδον (P) διερχόμενον διά μιᾶς γενετείρας κυλινδρικῆς ἐπιφανείας, τέμνει ταύτην κατά μίαν ἄλλην γενέτειραν ἤ ἐφάπτεται αὐτῆς.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Ἐάν τό ἐπίπεδον (P), τό διερχόμενον διά τῆς γενετείρας AA_1, (σχ.452), διέρχεται καί διά τοῦ ἄξονος OO_1, τότε θά τέμνῃ τήν κυλινδρικήν ἐπιφάνειαν καί κατά τήν γενέτειραν $\Delta\Delta_1$.

Ἐάν τό (P) δέν διέρχεται διά τοῦ ἄξονος, τότε ὡς κάθετον πρός τήν βάσιν, θά τέμνῃ τήν κυλινδρικήν ἐπιφάνειαν κατά τήν γενέτειραν ZZ_1 ἤ θά ἐφάπτεται τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας κατά τήν γενέτειραν AA_1, ἀπό τήν ὁποίαν διέρχεται.



σχ.452



σχ.453

590. Οἱ ἄξονες δύο κυλινδρικῶν ἐπιφανειῶν εἶναι παράλληλοι. Νά ὁρισθῇ ἡ τομή αὐτῶν καί τά κοινά ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα.

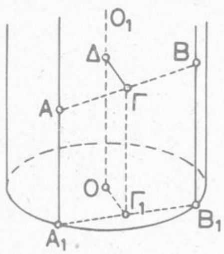
Λ ύ σ ι ς: Ἔστωσαν δύο κύλινδροι, τῶν ὁποίων οἱ ἄξονες OO_1 καί KK_1 εἶναι παράλληλοι. Ἄν αἱ βάσεις τῶν δύο κυλίνδρων τέμνωνται κατά τά σημεῖα A καί B, τότε αἱ γενέτειραι AA_1 καί BB_1 θά εἶναι κοιναί τῶν δύο κυλινδρικῶν ἐπιφανειῶν καί παράλληλοι μεταξύ των, ὡς παράλληλοι πρός τούς ἄξονας OO_1 καί KK_1 ἀντιστοίχως.

Διά νά ὁρίσωμεν τά κοινά ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα αὐτῶν, ἀρκεῖ νά φέρωμεν τάς κοινάς ἐφαπτομένας τῶν βάσεων τῶν κυλίνδρων.

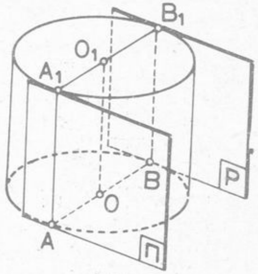
591. Δοθείσης κυλινδρικῆς ἐπιφανείας ἐκ περιστροφῆς, ἡ κοινή κάθετος τοῦ ἄξονος καί μιᾶς χορδῆς διέρχεται διά τοῦ μέσου τῆς χορδῆς.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Ἔστω AB (σχ.454), μία χορδή τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας καί ΓΔ ἡ κοινή κάθετος τοῦ ἄξονος OO_1

καί τῆς χορδῆς ΑΒ.Προβάλλομεν τάς δύο ταύτας εὐθείας ἐπί τήν βάσιν τῆς κυλινδρικῆς ἐκ περιστροφῆς ἐπιφανείας. Ἡ ΑΒ προβάλλεται κατά τήν χορδήν A_1B_1 τοῦ κύκλου (Ο). Ἐπειδή ἡ ΓΔ εἶναι κάθετος πρός τόν ἄξονα OO_1, θά εἶναι παράλληλος πρός τό ἐπίπεδον τοῦ κύκλου (Ο). Ἄρα ἡ γωνία ΑΓΔ, ἐπειδή εἶναι ὀρθή, θά προβληθῆ κατά τήν ὀρθήν γωνίαν $A_1\Gamma_1O$. Ἄρα ἡ $O\Gamma_1$ θά εἶναι κάθετος πρός τήν A_1B_1 καί θά τήν διχοτομῆ. Δηλαδή $A_1\Gamma_1=\Gamma_1B_1$. Ἄρα τό Γ θά εἶναι τό μέσον τῆς χορδῆς ΑΒ.



σχ.454



σχ.455

592. Εἰς κύλινδρον ἐκ περιστροφῆς ἄγομεν δύο ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα παράλληλα. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι ὑπάρχη μεσημβρινόν ἐπίπεδον κοινόν τῶν δύο τούτων ἐπιπέδων, κάθετον πρός αὐτά.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Ἔστωσαν (Π) καί (Ρ) δύο ἐπίπεδα παράλληλα καί ἐφαπτόμενα τῆς ἐκ περιστροφῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας κατά τάς γενετείρας AA_1 καί BB_1 ἀντιστοίχως, (σχ.455). Τά ἐπίπεδα OAA_1O_1 καί OBB_1O_1 διέρχονται διά τῆς αὐτῆς εὐθείας OO_1 καί εἶναι κάθετα πρός τά παράλληλα ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ). Ἄρα θά κεῖνται ἐπί τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, ὅπερ θά εἶναι τό μεσημβρινόν ἐπίπεδον ἑκατέρου τῶν (Π) καί (Ρ).

593. Ἔστωσαν Ο καί O_1 τά κέντρα τῶν βάσεων κυλίνδρου καί Μ σημεῖον ἐκτός αὐτοῦ. Διά τοῦ Μ ἄγονται τά ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα τοῦ κυλίνδρου ΜΑΒ καί ΜΓΔ. 1) Νά δειχθῆ ὅτι ΑΒ // ΓΔ. 2) Τό ἐπίπεδον OO_1M διχοτομεῖ τήν δίεδρον τῶν ἐφαπτομένων ἐπιπέδων. 3) Τό ἐπίπεδον OO_1M διχοτομεῖ τήν δίεδρον $AOO_1\Delta$. 4) Τό ἐπίπεδον ΑΒΓΔ εἶναι κάθετον πρός τό ἐπίπεδον OO_1M.

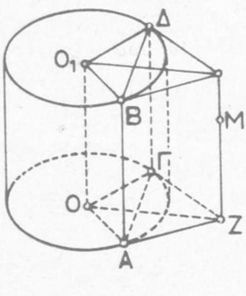
Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: 1) Αἱ ΑΒ καί ΓΔ εἶναι προφανῶς γενέτειραι τοῦ κυλίνδρου καί κατ' ἀκολουθίαν παράλληλοι.

2) Ἐάν Ζ εἶναι ἡ προβολή τοῦ Μ ἐπί τό ἐπίπεδον τῆς βά-

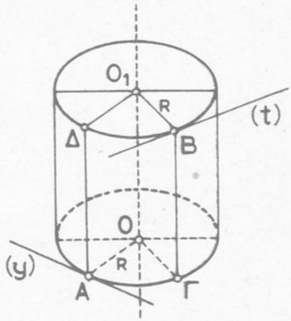
σεως (Ο) τοῦ κυλίνδρου,αἱ ΖΑ καί ΖΓ θά εἶναι ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου (Ο)."Αρα ἡ ΟΖ θά διχοτομῇ τήν γωνίαν ΑΖΓ καί κατ'ἀκολουθίαν τό ἐπίπεδον OO_1M διχοτομεῖ τήν δίεδρον ΖΜ τῶν ἐφαπτομένων ἐπιπέδων.

3) Ἡ ΟΖ διχοτομεῖ τήν γωνίαν ΑΟΓ."Αρα τό ἐπίπεδον MOO_1 θά διχοτομῇ καί τήν δίεδρον $AOO_1\Delta$.

4) Τό ἐπίπεδον ΑΒΓΔ,ὡς διερχόμενον διά τῆς ΑΓ,ἡ ὁποία εἶναι κάθετος πρός τό ἐπίπεδον OO_1M ,θά εἶναι κάθετον πρός τό ἐπίπεδον OO_1M. (σχ.456).



σχ.456



σχ.457

594. Θεωροῦμεν ὅλας τάς εὐθείας τάς ἀπεχούσας ἀπόστασιν R (δοθεῖσαν) ἀπό σταθεράν εὐθεῖαν (Χ).Νά ἀποδειχθῇ ὅτι πᾶσαι αἱ εὐθεῖαι αὗται ἐφάπτονται μιᾶς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας ἐκ περιστροφῆς.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς:"Εστωσαν (y) καί (t) δύο εὐθεῖαι τοῦ χώρου (σχ.457),ἀπέχουσαι ἀπόστασιν R ἀπό δοθεῖσαν εὐθεῖαν (x).Ἐπειδή αἱ ΟΑ=ΟΒ=R καί κάθετοι ἐπί τήν αὐτήν εὐθεῖαν (x),ἕπεται ὅτι θά κεῖνται ἐπί ἐπιπέδων παραλλήλων καί καθέτων πρός τήν (x).Τά σημεῖα Α καί Β θά κεῖνται ἐπί κύκλων,ἐχόντων τά κέντρα των ἐπί τῆς (x) καί μέ ἀκτῖνα R. Ἐπειδή τό Σύνολον τῶν κύκλων τούτων ἀποτελεῖ κυλινδρικήν ἐπιφάνειαν ἐκ περιστροφῆς,ἕπεται ὅτι αἱ (y),(t) θά ἐφάπτωνται τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας κατά τά σημεῖα Α καί Β ἀντιστοίχως.

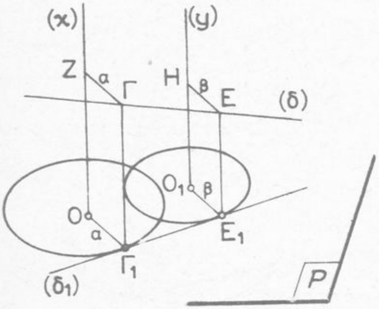
595. Ποῖος ὁ γεωμ.τόπος τῶν εὐθειῶν (δ),αἱ ὁποῖαι ἀπέχουν ἀποστάσεις α,β ἀπό δύο παραλλήλων εὐθειῶν (x) καί (y).

Ἀ ν ά λ υ σ ι ς:"Εστω εὐθεῖα (δ),τῆς ὁποίας αἱ ἐλάχισται ἀποστάσεις ἀπό τάς εὐθείας (x) καί (y) εἶναι ἀντιστοίχα καί β (σχ.458).

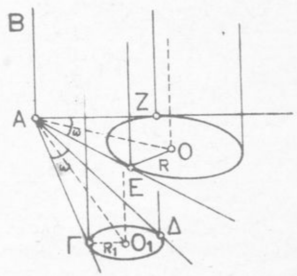
Τήν εὐθεῖαν ταύτην προβάλλομεν ἐπί ἐπίπεδον (P) κάθετον πρός τάς (x) καί (y) καί ἔστω (δ_1) ἡ προβολή αὐτῆς. Ἔστωσαν O καί O_1 αἱ τομαί τοῦ (P) ὑπό τῶν (x) καί (y) καί $O\Gamma_1$, O_1E_1 αἱ προβολαί τῶν ΓΖ=α καί ΕΗ=β ἐπί τό (P). Θά εἶναι $O\Gamma_1=Z\Gamma=\alpha$ καί $O_1E_1=HE=\beta$, καθόσον αἱ ΓΖ, ΕΗ εἶναι παράλληλοι πρός τό (P).

Ἄρα τά σημεῖα Γ_1 καί E_1 θά κεῖνται ἐπί κύκλων τῶν (O,α) καί (O_1,β) ἀντιστοίχως. Ἐπειδή τό (P) εἶναι τυχόν κάθετον πρός τάς (x) καί (y), ἕπεται ὅτι τά Γ_1 καί E_1 θά κεῖνται ἀντιστοίχως ἐπί κυλινδρικῶν ἐπιφανειῶν ἐκ περιστροφῆς, ἀξόνων (x) καί (y) ἀντιστοίχως. Ἡ (δ_1) εἶναι ἐφαπτομένη τῶν δύο κύκλων (O) καί (O_1). Ἄρα ἡ (δ) θά κεῖται ἐπί τοῦ κοινοῦ ἐφαπτομένου τῶν δύο κυλινδρικῶν ἐπιφανειῶν.

Πόσαι λύσεις ὑπάρχουν;



σχ.458



σχ.459

596. Νά εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων τοῦ χώρου, ἀπό τά ὁποῖα δύο κύλινδροι ἐκ περιστροφῆς, μέ παραλλήλους ἄξονας, φαίνονται ὑπό τήν αὐτήν δίεδρον γωνίαν.

Ἀ ν ά λ υ σ ι ς: Ὑποθέτομεν ὅτι αἱ βάσεις τῶν δύο κυλίνδρων κεῖνται ἐπί τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, καί ἔστω ὅτι αἱ κυλινδρικαί αὗται ἐπιφάνειαι φαίνονται ὑπό τήν αὐτήν δίεδρον γωνίαν ω (σχ.459). Τό ἐπίπεδον τῶν βάσεων τέμνει τήν κοινήν ἀκμήν AB τῶν δύο διέδρων κατά τό σημεῖον A. Θά εἶναι:

$$\sphericalangle ZAE=\sphericalangle \Delta A\Gamma \text{ ἤ } \sphericalangle OAE=\sphericalangle O_1A\Gamma$$

καί οὕτω τά ὀρθογώνια τρίγωνα OEA καί $O_1\Gamma A$ θά εἶναι ὅμοια, ὁπότε:

$$\frac{OA}{O_1A}=\frac{OE}{O_1\Gamma}=\frac{R}{R_1},$$

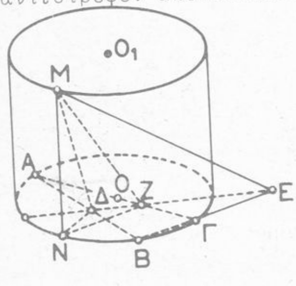
καί τό A θά κεῖται ἐπί τοῦ κύκλου τοῦ Ἀριστοτέλους (Ἀπολλωνίου). Κατ' ἀκολουθίαν ὁ ζητούμενος γεωμ. τόπος θά εἶναι ἡ κυλινδρική ἐπιφάνεια, τῆς ὁποίας ὁδηγός εἶναι ὁ κύοὗτος τοῦ Ἀριστοτέλους.

597. Νά εὑρεθῇ ὁ γεωμ.τόπος τῶν σημείων τοῦ χώρου,ὧν αἱ ὀρθαί προβολαί ἐπί τάς πλευράς δοθέντος τριγώνου κεῖνται ἐπ'εὐθείας.

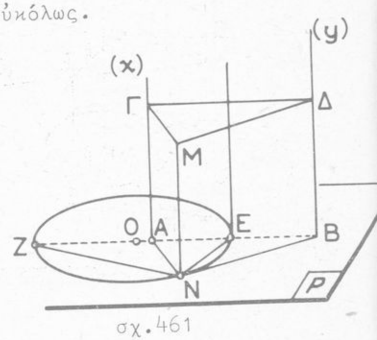
Ἀ ν ά λ υ σ ι ς: Ἔστω Μ τυχόν σημεῖον τοῦ χώρου,τοιοῦτον ὥστε αἱ προβολαί του Δ,Ε,Ζ ἐπί τάς πλευράς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ νά κεῖνται ἐπ'εὐθείας. Ἐκ τοῦ Μ ἄγομεν τήν κάθετον ΜΝ πρός τό ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.Κατά τό θεώρημα τῶν τριῶν καθέτων αἱ ΝΔ,ΝΕ,ΝΖ θά εἶναι κάθετοι ἀντιστοίχως πρός τάς ΑΒ,ΒΓ,ΓΑ. Ἐπειδή τά Δ,Ε,Ζ κεῖνται ἐπ'εὐθείας,τό Ν θά κεῖται ἐπί τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου περί τό τρίγωνον ΑΒΓ (σχ.460).

Κατ'ἀκολουθίαν τό Μ θά κεῖται ἐπί τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας ἐκ περιστροφῆς,ἡ ὁποία ἔχει ὡς ὁδηγόν τόν κύκλον ΑΒΓ.

Τό ἀντίστροφον ἀποδεικνύεται εὐκόλως.



σχ.460



σχ.461

598. Νά εὑρεθῇ ὁ γεωμ.τόπος τῶν σημείων τοῦ χώρου,ὧν ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων ἀπό δύο εὐθείας παραλλήλους εἶναι λ, ἤ τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων ἀπό τάς εὐθείας ταύτας εἶναι k^2.

Ἀ ν ά λ υ σ ι ς: 1)Ἔστωσαν (x) καί (y) δύο εὐθεῖαι παράλληλοι (σχ.461) καί Μ τυχόν σημεῖον τοῦ χώρου,τοιοῦτον ὥστε ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεών του ἀπό τάς (x) καί (y) νά εἶναι λ.Δηλαδή:

$$\frac{ΜΓ}{ΜΔ}=λ \qquad (1)$$

Ἄγομεν ἐπίπεδον (P) κάθετον πρός τάς (x) καί (y),τέμνον αὐτάς εἰς τά σημεῖα Α καί Β ἀντιστοίχως. Ἔστω Ν ἡ προβολή τοῦ Μ ἐπί τό ἐπίπεδον (P).Θά εἶναι:

$$ΑΝ=ΜΓ \text{ καί } ΝΒ=ΜΔ. \text{ Ἄρα } \frac{ΝΑ}{ΝΒ}=\frac{ΜΓ}{ΜΔ}=λ$$

καί τό Ν θά κεῖται ἐπί τοῦ κύκλου (Ο) τοῦ 'Αριστοτέλους, ἐπί τοῦ (Ρ) κειμένου,καί μέ διάμετρον Ε,Ζ,ἔνθα Ε,Ζ τά συζυγῆ ἁρμονικά τῶν Α καί Β καί μέ λόγον λ.

"Αρα τό Μ θά κεῖται ἐπί τῆς ἐκ περιστροφῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας μέ ὁδηγόν τόν ἐν λόγῳ κύκλον.

Τό ἀντίστροφον ἀποδεικνύεται εὐκόλως.

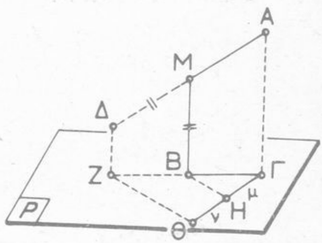
2) 'Εάν εἶναι $ΜΓ^2+ΜΔ^2=\ ^2$,τότε θά εἶναι καί $ΝΑ^2+ΝΒ^2=k^2$ καί κατ'ἀκολουθίαν τό Ν θά κεῖται ἐπί τοῦ γνωστοῦ γωμ.τόπου (ἄσκ.185-1).

"Αρα τό Μ θά κεῖται ἐπί τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας μέ ὁδηγόν τόν τόπον τοῦ Ν.

599. Νά εὑρεθῇ ὁ γεωμ.τόπος τῶν σημείων τοῦ χώρου,ὧν ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων ἀπό δοθέν ἐπίπεδον καί δοθέν σημεῖον εἶναι λ.

Λ ύ σ ι ς:"Εστω Μ σημεῖον τοῦ ζητουμένου τόπου τοιοῦτον ὥστε: $\frac{ΜΑ}{ΜΒ}=λ=\frac{μ}{ν}$, ἔνθα ΜΒ ⊥(Ρ) καί μ,ν δεδομένα εὐθ.τμήματα.

'Επί τῆς προεκτάσεως τοῦ ΑΜ θεωροῦμεν σημεῖον Δ,τοιοῦτον ὥστε ΜΔ=ΜΒ.Θά εἶναι:$\frac{μ}{ν}=λ=\frac{ΜΑ}{ΜΒ}=\frac{ΜΑ}{ΜΔ}=\frac{ΒΓ}{ΒΖ}$, ἔνθα ΖΒΓ προβολή τοῦ ΔΜΑ ἐπί τό



σχ.462

ἐπίπεδον (Ρ).Γράφομεν τυχόν τμῆμα ΓΗ=μ ἐπί τοῦ (Ρ) καί τό διαδοχικόν του ΗΘ=ν. Τότε θά εἶναι:

$$\frac{ΒΓ}{ΒΖ} = \frac{μ}{ν} = λ$$

Εἶναι δυνατόν ἐντεῦθεν νά ὁρισθοῦν τά Β καί Ζ,ἄρα καί ὁ τόπος τοῦ Μ. Διατί τό πρόβλημα δέν λύεται διά τοῦ κανόνος καί τοῦ διαβήτου; Ποῦ πρέπει νά κεῖται τό σημεῖον;

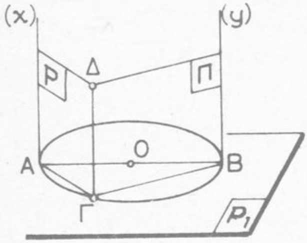
600. Διά δύο παραλλήλων εὐθειῶν ἄγομεν δύο ἐπίπεδα κάθετα.Ποῖος ὁ γεωμ.τόπος τῆς τομῆς αὐτῶν.

'Α ν ά λ υ σ ι ς:"Εστωσαν (Π) καί (Ρ) τά διά τῶν παραλλήλων εὐθειῶν (y) καί (x) ἀγόμενα ἐπίπεδα καί κάθετα μεταξύ των.Θεωροῦμεν ἐπίπεδον $(Ρ_1)$ κάθετον πρός τάς παραλλήλους (x) καί (y),ὅπερ τέμνει αὐτάς εἰς τά σημεῖα Α καί Β ἀντιστοίχως (σχ.463).

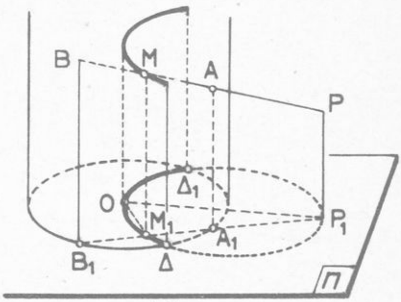
'Η τομή ΓΔ τῶν (Π) καί (Ρ) θά εἶναι κάθετος πρός τό $(Ρ_1)$ καί ἐπί πλέον ∢ ΑΓΒ=90°."Αρα τό Γ θά κεῖται ἐπί τοῦ κύκλου, ὅστις ἔχει διάμετρον τό τμῆμα ΑΒ.

'Εντεῦθεν προκύπτει ὅτι ἡ τομή ΓΔ τῶν ἐπιπέδων (Π) καί (Ρ) εἶναι ἡ γενέτειρα τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας,ἡ ὁποία ἔχει ὁδηγόν τόν κύκλον ΑΓΒ,διαμέτρου ΑΒ.

"Αρα ὁ γεωμ.τόπος τῆς τομῆς τῶν (Π) καί (Ρ) εἶναι ἡ κυλινδρική ἐπιφάνεια μέ ὁδηγόν τόν κύκλον ΑΓΒ διαμέτρου ΑΒ.



σχ.463



σχ.464

601. Δίδεται κύλινδρος ἐκ περιστροφῆς καί σημεῖον Ρ ἐκτός αὐτοῦ."Αγεται ἡ τέμνουσα ΡΑΒ αὐτοῦ.Νά εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τοῦ μέσου τῆς χορδῆς ΑΒ.

Λ ύ σ ι ς: Θεωροῦμεν ἐπίπεδον (Π) κάθετον ἐπί τόν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου.Τοῦτο τέμνει τήν κυλινδρικήν ἐπιφάνειαν κατά κύκλον ($Γ_1$) κέντρου Ο."Εστωσαν $Ρ_1$,$Α_1$ καί $Β_1$ αἱ προβολαί τῶν σημείων Ρ,Α,Β ἐπί τό ἐπίπεδον (Π).

Τά σημεῖα $Α_1$,$Β_1$ θά κεῖνται ἐπί τοῦ κύκλου ($Γ_1$) καί τό μέσον Μ τῆς χορδῆς ΑΒ προβάλλεται εἰς τό μέσον $Μ_1$ τῆς $Α_1Β_1$. Τό $Μ_1$ θά κεῖται ἐπί τοῦ τόξου $ΔΟΔ_1$ τοῦ κύκλου,ὅστις ἔχει διάμετρον $ΟΡ_1$,καί τό ὁποῖον κεῖται ἐντός τοῦ κύκλου ($Γ_1$). 'Επειδή ἡ $ΜΜ_1$ μένει διαρκῶς κάθετος ἐπί τό (Π),ἕπεται ὅτι τό Μ κεῖται ἐπί τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας,ἡ ὁποία ἔχει ὡς ὁδηγόν τό τόξον $ΔΟΔ_1$ καί ἡ ὁποία κεῖται ἐντός τοῦ δοθέντος κυλίνδρου.

Τό ἀντίστροφον ἀποδεικνύεται εὐκόλως.

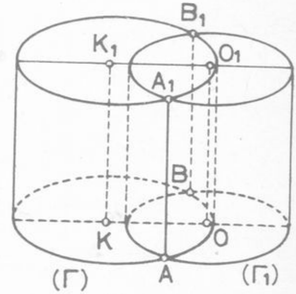
602. Νά εὑρεθῇ τό συμμετρικόν κυλίνδρου ὡς πρός ἄξονα καί ὡς πρός ἐπίπεδον.

'Η λύσις νά γίνῃ ὑπό τῶν μαθητῶν.

603. Τό ὁμοιόθετον κυλίνδρου ὡς πρός κέντρον εἶναι κύλινδρος;

Καί ή ἐργασία αὕτη νά γίνῃ ὑπό τῶν μαθητῶν.

604. Δύο κύλινδροι ἐκ περιστροφῆς ἔχουν τούς ἄξονάς των παραλλήλους. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ή τομή των εἶναι τοὐλάχιστον δύο γενέτειραι.



σχ.463

Λ ύ σ ι ς: Ὑποθέτομεν ὅτι αἱ βάσεις τῶν δύο κυλίνδρων κεῖνται ἐπί τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Ἐάν οἱ ὁδηγοί κύκλοι τῶν δύο κυλίνδρων τέμνωνται εἰς τά σημεῖα Α καί Β, τότε αἱ κυλινδρικαί ἐπιφάνειαι τέμνονται κατά δύο γενετείρας AA_1 καί BB_1.

Ἐάν οἱ ὁδηγοί κύκλοι ἐφάπτωνται, τότε αἱ κυλινδρικαί ἐπιφάνειαι ἔχουν μίαν μόνον κοινήν γενέτειραν. Ἐάν οἱ ὁδηγοί κύκλοι δέν ἔχουν κοινόν σημεῖον, τότε αἱ κυλινδρικαί ἐπιφάνειαι οὐδέν κοινόν σημεῖον ἔχουν.

605. Κύλινδρος ἐκ περιστροφῆς ἔχει ἀκτῖνα βάσεως R=4 καί ὕψος υ=3. Νά δειχθῇ ὅτι ὑπάρχει ἐκ περιστροφῆς κύλινδρος ἔχων τό αὐτό ἐμβαδόν ὁλικῆς ἐπιφανείας καί τό αὐτόν ὄγκον. Ποῖαι αἱ διαστάσεις τοῦ δευτέρου κυλίνδρου.

Λ ύ σ ι ς: Ὁ δοθείς κύλινδρος ἔχει ἐμβαδόν ὁλικῆς ἐπιφανείας $E_{ολ}=2\pi R(R+υ)=2.\pi.4(4+3)=56\pi$ (1)

καί ὄγκον $V=\pi.R^2.υ=\pi.4^2.3=48\pi$ (2)

Ἐάν x καί y εἶναι ή ἀκτίς καί τό ὕψος τοῦ ζητουμένου κυλίνδρου, τότε θά πρέπει:

$$2\pi.x(x+y)=56\pi \iff x(x+y)=28 \quad (3)$$

καί

$$\pi x^2y=48\pi \iff x^2y=48 \quad (4)$$

Ἐπιλύοντες τό σύστημα τῶν ἐξισώσεων (3) καί (4) εὑρίσκομεν:

$$\left.\begin{matrix} x=2 \\ y=12 \end{matrix}\right\} \text{ κα } \left.\begin{matrix} x=4 \\ y=3 \end{matrix}\right\}.$$

Ἄρα ὑπάρχουν δύο κύλινδροι, οἱ ὁποῖοι ἱκανοποιοῦν τό πρόβλημα.

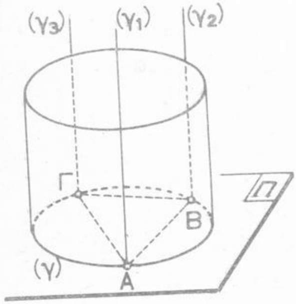
606. Νά κατασκευασθῇ κυλινδρική ἐπιφάνεια ἐκ περιστροφῆς ἐκ τριῶν γενετειρῶν αὐτῆς.

Λ ύ σ ι ς: Ἔστωσαν $(γ_1)$, $(γ_2)$ καί $(γ_3)$ αἱ δοθεῖσαι γενέτειραι. (σχ.464).

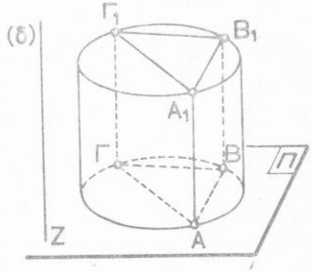
Θεωροῦμεν ἐπίπεδον (Π) κάθετον πρός τάς γενετείρας ταύτας, τό ὁποῖον τέμνει αὐτάς εἰς τά σημεῖα Α, Β, Γ ἀντιστοίχως.

Τά σημεῖα Α,Β,Γ ὁρίζουν τόν ὁδηγόν κύκλον (γ) τῆς ζητουμένης κυλινδρικῆς ἐπιφανείας,ἄρα καί τήν κυλινδρικήν ἐπιφάνειαν.

Διά νά ὑπάρχῃ λύσις πρέπει τά Α,Β,Γ νά μήν κεῖνται ἐπ' εὐθείας.



σχ.464



σχ.465

607. Ὁμοίως ἐκ τριῶν δοθέντων ἐπιπέδων παραλλήλων πρός δοθεῖσαν εὐθεῖαν.

Λ ύ σ ι ς:"Εστωσαν τά ἐπίπεδα $ΑΒΒ_1Α_1$, $ΒΓΓ_1Β_1$, $ΓΓ_1Α_1Α$ παράλληλα πρός τήν δοθεῖσαν εὐθεῖαν (δ) καί μή παράλληλα μεταξύ των (σχ.465).

Ταῦτα,ἀνά δύο,τέμνονται κατά τάς εὐθείας $ΑΑ_1$, $ΒΒ_1$ καί $ΓΓ_1$. Θεωροῦμεν καί τό ἐπίπεδον (Π),κάθετον πρός τήν εὐθεῖαν (δ),ἄρα καί πρός τά ἀνωτέρω τρία ἐπίπεδα.Τό (Π) τέμνει τά ἐν λόγῳ ἐπίπεδα κατά τάς εὐθείας ΑΒ,ΒΓ,ΓΑ,αἵτινες ὁρίζουν τό τρίγωνον ΑΒΓ. Ὁ περιγεγραμμένος κύκλος περί τό ΑΒΓ θά εἶναι ὁ ὁδηγός τῆς ζητουμένης κυλινδρικῆς ἐπιφανείας."Αρα ὁρίζεται οὕτως ἡ ζητουμένη κυλινδρική ἐπιφάνεια.

'Εάν τά δύο ἐκ τῶν δοθέντων ἐπιπέδων εἶναι παράλληλα, τό δέ τρίτον τέμνει αὐτά,πάλιν ὁρίζεται ἡ κυλινδρική ἐπιφάνεια.Πῶς;

'Εάν τά τρία ἐπίπεδα εἶναι παράλληλοι πρός τήν (δ) καί μεταξύ των,ἔχει τό πρόβλημα λύσιν;

608. Ὁμοίως ἐκ δύο ἐφαπτομένων ἐπιπέδων καί μιᾶς ἐφαπτομένης.

Λ ύ σ ι ς:"Εστωσαν (P_1) καί (P_2) τά δύο ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα καί (δ) ἡ ἐφαπτομένη εὐθεῖα.

Ἡ τομή (γ) τῶν (P_1) καί (P_2) εἶναι παράλληλος πρός τόν ἄξονα (x) τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας."Αρα τό διά τῆς (δ) ἐπίπεδον (Π), τό παράλληλον πρός τήν (γ), εἶναι ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας. Δηλαδή ἡ ζητουμένη κυλινδρική ἐπιφάνεια ἐφάπτεται τριῶν γνωστῶν ἐπιπέδων (P_1), (P_2) καί (Π).

Ἐάν τά (P_1) καί (P_2) εἶναι παράλληλα, τό πρόβλημα ἔχει ἀπείρους λύσεις.

609. Ὁμοίως ἐκ δύο ἐφαπτομένων εὐθειῶν καί μιᾶς γενετείρας.

Λ ύ σ ι ς: Θεωροῦμεν ἐπίπεδον (Π) κάθετον πρός τήν γενέτειραν (γ) καί ἔστω Γ τό σημεῖον τομῆς αὐτῶν.

Ἔστωσαν (δ_1'), (δ_2') αἱ προβολαί τῶν ἐφαπτομένων (δ_1) καί (δ_2) ἐπί τό ἐπίπεδον (Π) ἀντιστοίχως.

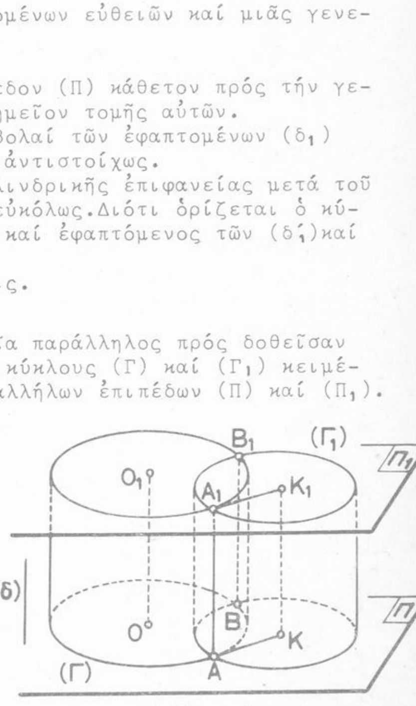
Ἡ τομή τῆς ζητουμένης κυλινδρικῆς ἐπιφανείας μετά τοῦ ἐπιπέδου (Π) κατασκευάζεται εὐκόλως. Διότι ὁρίζεται ὁ κύκλος ὁ διερχόμενος διά τοῦ Γ καί ἐφαπτόμενος τῶν (δ_1') καί (δ_2').

Τό πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις.

610. Νά κατασκευασθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρός δοθεῖσαν εὐθεῖαν (δ), καί τέμνουσα δύο κύκλους (Γ) καί (Γ_1) κειμένους ἀντιστοίχως ἐπί δύο παραλλήλων ἐπιπέδων (Π) καί (Π_1).

Ἀ ν ά λ υ σ ι ς: Ἔστωσαν (Γ) καί (Γ_1) οἱ δύο κύκλοι, οἱ ὁποῖοι κεῖνται ἐπί τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων (Π) καί (Π_1), (δ) ἡ δοθεῖσα διεύθυνσις, μή παράλληλος πρός τά (Π) καί (Π_1).

Ἔστω AA_1 ἡ ζητουμένη εὐθεῖα, ἡ ὁποία τέμνει τούς δύο κύκλους εἰς τά σημεῖα A καί A_1 ἀντιστοίχως, καί εἶναι παράλληλος πρός τήν δοθεῖσαν διεύθυνσιν (δ).



σχ.466

Ἄγομεν τήν K_1K παράλληλον πρός τήν (δ), ἄρα καί πρός τήν A_1A. Τό τετράπλευρον AKK_1A_1 θά εἶναι παραλληλόγραμμον. Ἄρα $KA=K_1A_1=\rho$. Κατ'ἀκολουθίαν τό A θά κεῖται ἐπί τοῦ κύκλου ($K, KA=K_1A_1=\rho$).

Σ ύ ν θ ε σ ι ς: Ἐκ τοῦ K_1 ἄγομεν τήν παράλληλον K_1K ἡ ὁποία τέμνει τό ἐπίπεδον (Π) εἰς τό σημεῖον K.

Γράφομεν τόν κύκλον ($K, KA=\rho$), ὅστις τέμνει τόν κύκλον (Γ) εἰς τά σημεῖα A καί B. Αἱ ἐκ τῶν A, B ἀγόμεναι παράλληλοι πρός τήν (δ) τέμνουν τόν κύκλον (Γ_1) εἰς τά σημεῖα A_1

καί B_1 ἀντιστοίχως.

Αἱ AA_1 καί BB_1 εἶναι αἱ ζητούμεναι εὐθεῖαι.

Τό πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις, ἤ μίαν ἤ οὐδεμίαν, καθόσον ὁ κύκλος (Κ,ρ) τέμνει, ἤ ἐφάπτεται ἤ δέν ἔχει κοινόν σημεῖον μέ τόν κύκλον (Γ).

611. Δύο κύλινδροι ἔχουν τό αὐτό ὕψος καί κοινόν ἄξονα. Ἄν $R > R_1$ εἶναι αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεων αὐτῶν, νά ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος αὐτῶν, ὁ περιεχόμενος μεταξύ τῶν δύο κυλίνδρων, ἄν αἱ βάσεις των κεῖνται ἐπί τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

Λ ύ σ ι ς: Ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου ἀκτῖνος R εἶναι:

$$V=\pi.R^2.\upsilon \qquad (1)$$

καί ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου ἀκτῖνος R_1 εἶναι:

$$V_1=\pi.R_1^2.\upsilon \qquad (2)$$

Ὁ ζητούμενος ὄγκος εἶναι:

$$V-V_1=\pi.R^2.\upsilon-\pi.R_1^2.\upsilon=\pi(R^2-R_1^2).\upsilon.$$

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο Ν XIII

ΚΩΝΙΚΑΙ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΙ-ΚΩΝΟΣ-ΚΟΛΟΥΡΟΣ ΚΩΝΟΣ

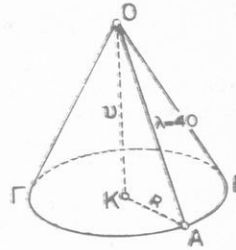
612. Ἡ ἀκτίς τῆς βάσεως ἐκ περιστροφῆς κώνου εἶναι R=9 cm καί τό ὕψος του υ=12 cm. Νά ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος αὐτοῦ.

Λ ύ σ ι ς: Ὁ ζητούμενος ὄγκος τοῦ κώνου εἶναι:

$$V = \frac{1}{3}.\pi.R^2.\upsilon=\frac{1}{3}.\pi.9^2.12=324\pi \text{ cm}^3.$$

613. Ἐκ περιστροφῆς κώνου ἡ ἀκτίς εἶναι R=24 cm καί τό μῆκος τῆς γενετείρας του λ=40 cm. Ποῖος εἶναι ὁ ὄγκος του;

Λ ύ σ ι ς: Τό ὕψος τοῦ κώνου εἶναι: (σχ.467)



σχ.467

$\upsilon^2=\lambda^2-R^2=40^2-24^2=1600-576=1024$
ἐξ οὗ: $\upsilon=32$ cm.
Ἄρα ὁ ὄγκος τοῦ κώνου θά εἶναι:
$V=\frac{1}{3}.\pi.R^2.\upsilon=\frac{1}{3}.\pi.24^2.32=9216.\pi$ cm^3.

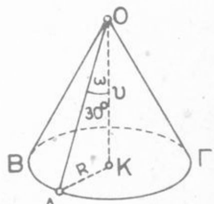
614. Ἐκ περιστροφῆς κώνου τό μῆκος τῆς βάσεως εἶναι 94,20 . Ἄν τό ὕψος του εἶναι $\upsilon=9$,ποῖος εἶναι ὁ ὄγκος του;

Λ ύ σ ι ς: Ἐκ τοῦ τύπου $\varphi=2\pi R$, ἕπεται ὅτι:
$$R=\frac{\varphi}{2\pi}=\frac{94,20}{2.3,14}=\frac{94,20}{6,28}=15 \text{ m}.$$
Ἄρα ὁ ὄγκος τοῦ κώνου τούτου εἶναι:
$$V=\frac{1}{3}.\pi.R^2.\upsilon=\frac{1}{3}.\pi.15^2.0,09=6,75 \text{ m}^3.$$

615. Ὁ ὄγκος ἐκ περιστροφῆς κώνου εἶναι 36π cm^3 καί τό ὕψος του $\upsilon=12$ cm. Ποία εἶναι ἡ ἀκτίς τῆς βάσεώς του;

Λ ύ σ ι ς: Ἐκ τοῦ τύπου $V=\frac{1}{3}.\pi.R^2.\upsilon$, ἔχομεν:
$$R^2=\frac{3.V}{\pi.\upsilon}=\frac{3.36\pi}{\pi.12}=9 \implies R=3 \text{ cm}.$$

616. Ἡ γενέτειρα γωνία ἑνός κώνου ἐκ περιστροφῆς εἶναι 30° ἤ 60° ἤ 45° καί τό ὕψος του 12 cm. Ποῖος εἶναι ὁ ὄγκος του;



σχ.468

Λ ύ σ ι ς: 1) Ἔστω ὅτι $\omega=30^\circ$ καί $KA=R$. Ἄρα $OA=2R$.
Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου OKA ἔχωμεν: $OA^2-KA^2=\upsilon^2$ ἤ
$4R^2-R^2=12^2 \implies 3R^2=144 \implies R^2=48 \implies R=4\sqrt{3}$
Ἄρα ὁ ὄγκος τοῦ κώνου θά εἶναι:
$V=\frac{1}{3}.\pi.R^2.\upsilon=\frac{1}{3}.\pi.48.12=192\pi$ cm^3.

2) Ἄν $\omega=60^\circ$, τότε $\sphericalangle KAO=30^\circ$ καί κατ'ἀκολουθίαν
$OA=2\upsilon=2.12=24$ cm.
Ἄρα $R^2=OA^2-\upsilon^2=24^2-12^2=576-144=432 \implies R=12\sqrt{3}$, καί κατ'ἀκολουθίαν: $V=\frac{1}{3}.\pi.R^2.\upsilon=\frac{1}{3}.\pi.432.12=2592\pi$ cm^3.

3) Ἄν $\omega=45^\circ$, τότε $R=\upsilon=12$ καί ἄρα:

$$V=\frac{1}{3}.\pi.R^2.\upsilon=\frac{1}{3}.\pi.12^2.12=864\pi\ cm^3.$$

617. ’Ορθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ μέ καθέτους πλευράς β,γ στρέφεται διαδοχικῶς περί τάς πλευράς ταύτας κατά γωνίαν 2π.Νά ὑπολογισθῇ ὁ λόγος τῶν ὄγκων τῶν παραχθησομένων κώνων.

Λ ύ σ ι ς: Ὅταν ἡ περιστροφή γίνῃ περί τήν πλευράν β, τότε ὁ ὄγκος τοῦ παραγομένου κώνου εἶναι:

$$V_1=\frac{1}{3}.\pi.\gamma^2.\beta \qquad (1)$$

Ὅταν δέ ἡ περιστροφή γίνῃ περί τήν γ,τότε:

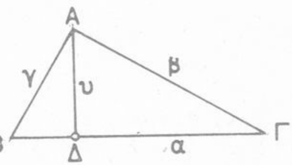
$$V_2=\frac{1}{3}.\pi.\beta^2.\gamma \qquad (2)$$

Κατ’ἀκολουθίαν:

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{\pi.\gamma^2\beta}{\pi.\beta^2\gamma}=\frac{\gamma}{\beta}.$$

618. Ἔστωσαν $V_\alpha, V_\beta, V_\gamma$ οἱ ὄγκοι οἱ παραγόμενοι διά περιστροφῆς ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ περί τήν ὑποτείνουσαν καί τάς καθέτους πλευράς καί κατά γωνίαν 2π.Νά ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\frac{1}{V_\beta^2}+\frac{1}{V_\gamma^2}=\frac{1}{V_\alpha^2}$$



σχ.469

Λ ύ σ ι ς: Θά εἶναι:

$$V_\alpha = V_{A\Delta\Gamma} + V_{A\Delta B} =$$
$$=\frac{1}{3}\pi.\upsilon^2.\Delta\Gamma+\frac{1}{3}.\pi.\upsilon^2.\Delta B$$
$$=\frac{1}{3}\pi.\upsilon^2.(\Delta\Gamma+\Delta B)=\frac{1}{3}\pi.\alpha.\upsilon^2,$$

καί κατ’ἀκολουθίαν:

$$\frac{1}{V_\alpha^2}=\frac{9}{\pi^2\alpha^2\upsilon^4} \qquad (1)$$

’Επίσης:

$$V_\beta=\frac{1}{3}\pi.\gamma^2.\beta \Longrightarrow \frac{1}{V_\beta^2}=\frac{9}{\pi^2\gamma^4\beta^2} \qquad (2)$$

καί

$$V_\gamma=\frac{1}{3}\pi.\beta^2.\gamma \Longrightarrow \frac{1}{V_\gamma^2}=\frac{9}{\pi^2\beta^4\gamma^2} \qquad (3)$$

καί κατ’ἀκολουθίαν:

$$\frac{1}{V_\beta^2}+\frac{1}{V_\gamma^2}=\frac{9}{\pi^2\gamma^4\beta^2}+\frac{9}{\pi^2\beta^4\gamma^2}=\frac{9}{\pi^2\beta^2\gamma^2}\left(\frac{1}{\gamma^2}+\frac{1}{\beta^2}\right)=$$
$$=\frac{9}{\pi^2\beta^2\gamma^2}.\frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta^2.\gamma^2}=\frac{9\alpha^2}{\pi^2\beta^4\gamma^4}=\frac{9\alpha^2}{\pi^2\alpha^4\upsilon^4}=\frac{9}{\pi^2\alpha^2\upsilon^4}=\frac{1}{V_\alpha^2}$$

619. Διά μιᾶς εὐθείας ΣΑ, ἐξωτερικῆς μιᾶς κωνικῆς ἐπιφανείας ἐκ περιστροφῆς, ἄγομεν δύο ἐπίπεδα ἐφαπτόμενα αὐτῆς. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι ἡ ΣΑ σχηματίζει ἴσας γωνίας μέ τάς γενετείρας ἐπαφῆς.

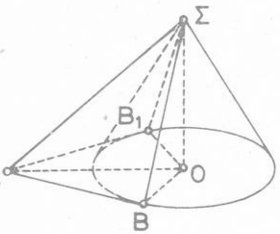
'Α π ό δ ε ι ξ ι ς: Διά τοῦ σημείου Α ἄγομεν ἐπίπεδον κάθετον πρός τόν ἄξονα ΣΟ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας. Ἡ τομή θά εἶναι κύκλος κέντρου Ο. (σχ.470).

Τά ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα τοῦ κώνου τέμνονται κατά τάς ἐφαπτομένας ΑΒ καί $ΑΒ_1$ τοῦ κύκλου (Ο).

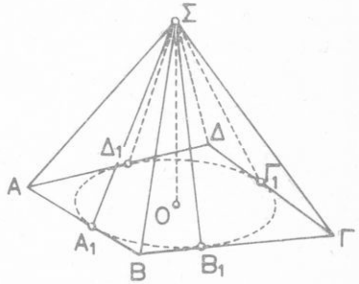
Ἔχομεν $ΑΒ=ΑΒ_1$ καί $ΣΒ=ΣΒ_1$, ὡς γενέτειραι τοῦ κώνου $ΣΒΒ_1$.

Τά τρίγωνα ΣΑΒ καί $ΣΑΒ_1$ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τήν ΣΑ κοινήν καί τάς ἄλλας δύο πλευράς ἴσας. Ἄρα:

$$\sphericalangle ΑΣΒ = \sphericalangle ΑΣΒ_1 .$$



σχ.470



σχ.471

620. Τετραγωνική πυραμίς ΣΑΒΓΔ εἶναι περιγεγραμμένη περί κῶνον ἐκ περιστροφῆς. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι τό ἄθροισμα τῶν δύο ἀπέναντι παραπλεύρων ἑδρῶν αὐτῆς ἰσοῦται πρός τό ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων ἀπέναντι παραπλεύρων ἑδρῶν.

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς: Κατά τήν προηγουμένην ἄσκησιν 619 ἡ ΣΑ σχηματίζει ἴσας γωνίας μέ τάς γενετείρας $ΣΑ_1$ καί $ΣΔ_1$.

$$\sphericalangle ΑΣΑ_1 = \sphericalangle ΑΣΔ_1$$

Ὁμοίως: $\sphericalangle Α_1ΣΒ = \sphericalangle ΒΣΒ_1$, $\sphericalangle ΓΣΓ_1 = \sphericalangle Β_1ΣΓ$ καί $\sphericalangle Γ_1ΣΔ = \sphericalangle Δ_1ΣΔ$.

Διά προσθέσεως τούτων κατά μέλη, λαμβάνομεν:

$$\sphericalangle ΑΣΑ_1 + Α_1ΣΒ + ΓΣΓ_1 + Γ_1ΣΔ = \sphericalangle ΑΣΔ_1 + Δ_1ΣΔ + ΒΣΒ_1 + Β_1ΣΓ \quad ἤ$$

$$\sphericalangle ΑΣΒ + \sphericalangle ΓΣΔ = \sphericalangle ΑΣΔ + \sphericalangle ΒΣΓ$$

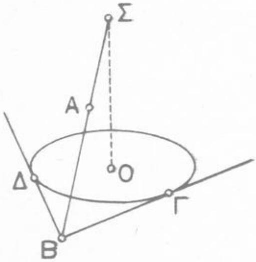
621. Διά δοθέντος σημείου Α νά ἀχθῆ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον μιᾶς ἐκ περιστροφῆς κωνικῆς ἐπιφανείας (δύο περιπτώσεις).

Λ ύ σ ι ς: Ἔστω Σ ἡ κορυφή τοῦ δοθέντος κώνου καί Α τό δοθέν σημεῖον (σχ.472). Ἡ ΣΑ τέμνει τό ἐπίπεδον τῆς βάσεως τοῦ κώνου κατά τό σημεῖον Β.

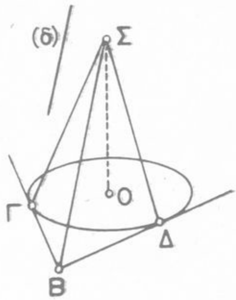
Ἐκ τοῦ Β θεωροῦμεν τάς ἐφαπτομένας ΒΓ καί ΒΔ τοῦ κύκλου τῆς βάσεως.

Τά ἐπίπεδα ΣΑΒΓ καί ΣΑΒΔ εἶναι τά ζητούμενα.

Ἄν τό Β εἶναι ἐξωτερικόν τοῦ κύκλου (Ο), ὑπάρχουν δύο λύσεις. Ἄν τό Β εἶναι σημεῖον τοῦ κύκλου (Ο), ὑπάρχει μία λύσις. Ἄν τό Β εἶναι ἐσωτερικόν τοῦ κύκλου (Ο) δέν ὑπάρχει λύσις.



σχ.472



σχ.473

622. Νά ἀχθῆ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον μιᾶς ἐκ περιστροφῆς κωνικῆς ἐπιφανείας παράλληλον πρός δοθεῖσαν εὐθεῖαν.

Λ ύ σ ι ς: Ἐκ τῆς κορυφῆς Σ τοῦ κώνου ἄγομεν εὐθεῖαν παράλληλον πρός τήν δοθεῖσαν εὐθεῖαν (δ), ἡ ὁποία τέμνει τό ἐπίπεδον τῆς βάσεως τοῦ κώνου κατά τό σημεῖον Β. Ἐκ τοῦ Β ἄγομεν τάς ἐφαπτομένας ΒΔ καί ΒΓ τοῦ κύκλου τῆς βάσεως.

Τά ἐπίπεδα ΣΒΔ καί ΣΒΓ εἶναι τά ζητούμενα.

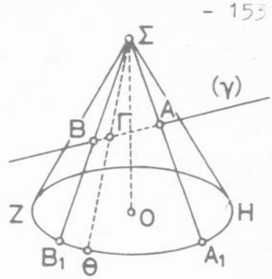
Ἐάν τό Β εἶναι ἐξωτερικόν τοῦ κύκλου (Ο), ὑπάρχουν δύο λύσεις.

Ἐάν τό Β εἶναι σημεῖον τοῦ κύκλου (Ο), ὑπάρχει μία λύσις. Ἐάν τό Β εἶναι ἐσωτερικόν τοῦ κύκλου (Ο) δέν ὑπάρχει λύσις τοῦ προβλήματος.

623. Μία εὐθεῖα, διάφορος μιᾶς γενετείρας κωνικῆς ἐπιφανείας, δέν δύναται νά ἔχῃ κοινά σημεῖα περισσότερα τῶν δύο μετά τῆς ἐπιφανείας ταύτης. Ἐάν ἔχῃ τρία συμπίπτει μέ μίαν γενέτειραν.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς, Ἔστω Σ ἡ κορυφή τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας μέ ὁδηγόν τόν κύκλον (Ο). Ἔστω ὅτι ἡ εὐθεῖα (γ) ἔχει τρία κοινά σημεῖα μετά τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, τά Α,Β,Γ. Αἱ γενέτειραι ΣΑ,ΣΒ,ΣΓ θά τέμνουν τόν κύκλον (Ο) κατά τά σημεῖα $Α_1$,$Β_1$,$Γ_1$, τά ὁποῖα θά πρέπει νά κεῖνται ἐπ' εὐθείας, διότι καί τά Α,Β,Γ κεῖνται ἐπί τῆς εὐθείας (γ), ὅπερ ἄτοπον.

Ἄν ἡ (γ) ἔχῃ τρία κοινά σημεῖα ὀφείλει νά διέρχεται διά τοῦ Σ. Ἄρα θά εἶναι γενέτειρα τῆς κωνικῆς ταύτης ἐπιφανείας.

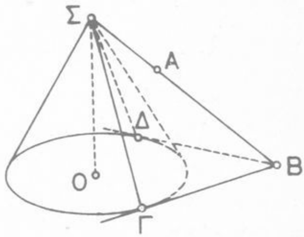


σχ.474

624. Διά δοθέντος σημείου Α ἄγομεν δύο ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα μιᾶς κωνικῆς ἐπιφανείας ἐκ περιστροφῆς. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ τομή τῶν ἐπιπέδων τούτων διέρχεται διά τῆς κορυφῆς τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Ἔστω Β τό κοινόν σημεῖον τῆς ΣΑ καί τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ὁδηγοῦ κύκλου (Ο) τοῦ κώνου. Αἱ διά τοῦ Β ἐφαπτόμεναι ΒΓ καί ΒΔ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας (Σ), ὁρίζουν τά ἐπίπεδα ΣΒΓ καί ΣΒΔ, τά ὁποῖα διέρχονται διά τοῦ Α.

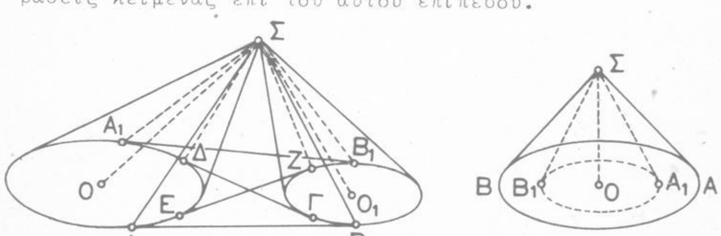
Ἡ τομή ΒΑ διέρχεται διά τῆς κορυφῆς Σ.



σχ.475

Διότι τά σημεῖα ἐπαφῆς τῶν ἐν λόγῳ ἐπιπέδων μετά τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας εἶναι δύο γενέτειραι ΓΣ καί ΔΣ.

625. Νά ὁρισθοῦν τά κοινά ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα δύο κωνικῶν ἐπιφανειῶν ἐκ περιστροφῆς, ἐχουσῶν κοινήν κορυφήν καί βάσεις κειμένας ἐπί τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.



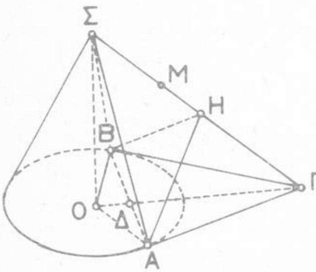
σχ.476

Λ ύ σ ι ς: Ἀφοῦ οἱ κῶνοι εἶναι ἐκ περιστροφῆς καί ἔχουν κοινήν κορυφήν,τά δέ ἐπίπεδα τῶν βάσεων συμπίπτουν,ἕπεται ὅτι δέν ὑπάρχουν κοινά ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα τῶν δύο τούτων κώνων,ἐκτός ἐάν οἱ κύκλοι τῶν βάσεων συμπίπτουν (σχ.476-α).

'Εάν αἱ κωνικαί ἐπιφάνειαι ἔχουν κοινήν κορυφήν καί οἱ ὁδηγοί κύκλοι ἑκατέρας εἶναι ὁμοεπίπεδοι,τότε αἱ κοιναί ἐξωτερικαί ἤ ἐσωτερικαί αὐτῶν ἐφαπτόμεναι μετά τῆς κορυφῆς Σ ὁρίζουν ἀντιστοίχως τέσσαρα ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα τῶν κωνικῶν τούτων ἐπιφανειῶν.

626. Δίδεται ἐκ περιστροφῆς κῶνος κορυφῆς Σ καί σημεῖον Μ ἐξωτερικόν αὐτοῦ.Διά τοῦ Μ ἄγονται τά ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα τοῦ κώνου καί ἔστωσαν ΣΑ καί ΣΒ αἱ γενέτειραι ἐπαφῆς.Ἄν Ο εἶναι τό κέντρον τῆς βάσεως,νά ἀποδειχθῇ ὅτι: 1) Τό ἐπίπεδον ΣΟΜ διχοτομεῖ τήν δίεδρον ΣΜ.2)Τό ἐπίπεδον ΣΟΜ διχοτομεῖ τήν δίεδρον ΣΟ καί 3) Τό ἐπίπεδον ΣΟΜ εἶναι κάθετον ἐπί τό ἐπίπεδον ΑΣΒ.

'Α π ό δ ε ι ξ ις: 1) Ἔστωσαν ΣΓΑ καί ΣΓΒ τά διά τῆς ΣΜ ἀγόμενα ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα τοῦ κώνου.



σχ.477

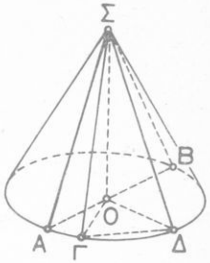
Θά εἶναι ΟΑ⊥ΑΓ,ΟΒ⊥ΓΒ καί ΟΑ=ΟΒ.Ἄρα ἡ ΟΓ διχοτομεῖ τήν γωνίαν ΑΓΒ.'Επειδή ΟΑ⊥ΑΓ,ΣΟ ἐπί τό ἐπίπεδον (Ο),ἕπεται ὅτι ΣΑ⊥ΑΓ.'Ομοίως ΣΒ⊥ΒΓ.

Τά τρίγωνα ΣΑΓ καί ΣΒΓ εἶναι προφανῶς,ἴσα.Ἄρα αἱ ἐκ τῶν Α καί Β κάθετοι πρός τήν ΣΓ τέμνουν αὐτήν εἰς τό αὐτό σημεῖον Η.'Η γωνία ΒΗΑ θά εἶναι ἡ ἀντίστοιχος τῆς διέδρου ΣΓ.'Επειδή ἡ ΔΗ διχοτομεῖ τήν γωνίαν ΑΗΒ,ἕπεται ὅτι τό ἐπίπεδον ΓΔΗ ἤ τό ΣΟΜ διχοτομεῖ τήν δίεδρον ΣΓ.

2)'Ομοίως τό ἐπίπεδον ΣΟΜ διχοτομεῖ τήν δίεδρον ΣΟ, διότι τό τετράεδρον ΣΟΑΓ καί τό ΣΟΒΓ εἶναι ἴσα,ὡς ἔχοντα τάς ἕδρας των ἀνά μίαν ἴσας.

3)'Επειδή τό ἐπίπεδον ΣΟΓ εἶναι κάθετον πρός τό ἐπίπεδον τῆς βάσεως τοῦ κώνου καί ἡ ΟΓ εἶναι κάθετος πρός τήν ΑΒ,ἕπεται ὅτι τό ἐπίπεδον ΣΟΓ εἶναι κάθετον πρός τό ἐπίπεδον ΣΑΒ.

627. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ γωνία τῆς κορυφῆς κώνου ἐκ περιστροφῆς εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας τῶν δύο γενετειρῶν, τῶν μή κειμένων ἐπί τοῦ αὐτοῦ μεσημβρινοῦ ἐπιπέδου.



'Α π ό δ ε ι ξ ι ς:"Εστωσαν δύο γενέτειραι ΣΓ καί ΣΔ τοῦ ἐκ περιστροφῆς κώνου,μή κείμεναι ἐπί τοῦ αὐτοῦ μεσημβρινοῦ ἐπιπέδου καί ΑΣΒ ἡ γωνία τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου."Αν ἀχθοῦν αἱ ΟΓ,ΟΔ,ΟΑ, ΟΒ,ΓΔ,θά εἶναι:

$\sphericalangle$ ΟΣΑ= $\sphericalangle$ ΟΣΒ= $\sphericalangle$ ΟΣΓ= $\sphericalangle$ ΟΣΔ,

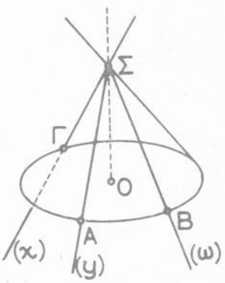
καί $\sphericalangle$ ΟΣΓ+ $\sphericalangle$ ΟΣΔ > ΓΣΔ

ἤ $\sphericalangle$ ΟΣΑ+ΟΣΒ > $\sphericalangle$ ΓΣΔ

ἤ $\sphericalangle$ ΑΣΒ > $\sphericalangle$ ΓΣΔ

σχ.478

628. Δοθεισῶν τριῶν τεμνομένων εὐθειῶν,νά ἀποδειχθῇ ὅτι ὑπάρχουν τέσσαρες κωνικαί ἐπιφάνειαι ἐκ περιστροφῆς,αἱ ὁποῖαι δέχονται τάς εὐθείας ταύτας ὡς γενετείρας.



'Α π ό δ ε ι ξ ι ς:"Εστωσαν (x), (y),(ω) αἱ τρεῖς εὐθεῖαι,διερχόμεναι διά τοῦ σημείου Σ καί μή κείμεναι ἐπί τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.'Επ'αὐτῶν θεωροῦμεν τά σημεῖα Α,Β,Γ ἀντιστοίχως, καί τοιαῦτα ὥστε:

ΣΑ = ΣΒ = ΣΓ.

'Ο κῶνος,ὁ ὁποῖος ἔχει κορυφήν τό Σ καί ὁδηγόν τόν κύκλον ΑΒΓ εἶναι ὁ ζητούμενος.

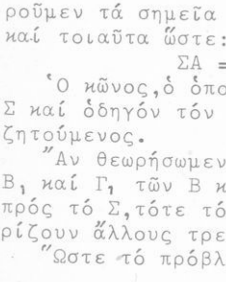
"Αν θεωρήσωμεν καί τά συμμετρικά $Β_1$ καί $Γ_1$ τῶν Β καί Γ ἀντιστοίχως ὡς πρός τό Σ,τότε τό Σ καί οἱ ὁδηγοί κύκλοι ΑΒΓ,$ΑΒ_1Γ$,$ΑΒ_1Γ_1$ ὁρίζουν ἄλλους τρεῖς κώνους.

σχ.479

"Ωστε τό πρόβλημα δέχεται τέσσαρας λύσεις.

629. Νά εὑρεθῇ ὁ γεωμ.τόπος τῶν ἀκμῶν τῶν ὀρθῶν διέδρων γωνιῶν,ὧν αἱ ἕδραι διέρχονται ἀντιστοίχως διά δύο δοθεισῶν τεμνομένων εὐθειῶν.

Λ ύ σ ι ς:"Εστω π-ΓΔ-Ρ ἡ ὀρθή δίεδρος γωνία,τῆς ὁποίας αἱ ἕδραι (Ρ) καί (Π) διέρχονται ἀντιστοίχως ἀπό τάς τεμνομένας εὐθείας Οx καί Οy.'Υποθέτομεν ὅτι αἱ Οx καί Οy δέν εἶναι κάθετοι.Διά τυχόντος σημείου Α τῆς Οx θεωροῦμεν τό κάθετον ἐπίπεδον (Σ) πρός τήν Οx.Τοῦτο τέμνει τήν Ο εἰς τό Β καί τήν δίεδρον ΓΔ κατά τήν γωνίαν ΑΜΒ,ἡ ὁποία εἶναι ὀρθή.Διότι ἡ ΜΒ ὡς τομή τῶν ἐπιπέδων (Π) καί (Σ),καθέ-



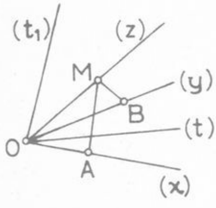
σχ.480

των πρός τό (P),εἶναι κάθετος πρός τό (P).Ἄρα καί πρός τήν ΑΜ. Ἄρα τό Μ θᾶ κεῖται ἐπί τοῦ κύκλου διαμέτρου ΑΒ καί κειμένου ἐπί τοῦ ἐπιπέδου (Σ),καί ἡ ΟΜ θά εἶναι γενέτειρα τοῦ κώνου,ὅστις ἔχει ὁδηγόν κύκλον ΑΜΒ.

Ἐάν ἡ δίεδρος ΓΔ δέν εἶναι ὀρθή,ἔχει λύσιν τό πρόβλημα καί διατί;

630. Νά εὑρεθῇ ὁ γεωμ.τόπος τῶν σημείων τοῦ χώρου,ὧν ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων ἀπό δύο τεμνομένων εὐθειῶν εἶναι ἴσος πρός λ.

Λ ύ σ ι ς:Ἔστω Μ τυχόν σημεῖον τοῦ χώρου,τοιοῦτον ὥστε αἱ ἀποστάσεις ΜΑ καί ΜΒ ἀπό τάς τεμνομένας εὐθείας Ox καί Oy νά ἔχουν δοθέντα λόγον λ.Δηλαδή: $\frac{MA}{MB}=\lambda$.



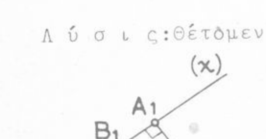
σχ.481

Κατ'ἀκολουθίαν ὅλα τά σημεῖα τῆς ΟΜ θά ἔχουν τήν δοθεῖσαν ἰδιότητα.Ἄρα ὁ γεωμ.τόπος τῶν σημείων Μ θά ἀποτελεῖται ἀπό εὐθείας διερχομένας διά τοῦ Ο.

Εἰς τό ἐπίπεδον τῶν Ox καί Oy ὑπάρχουν δύο εὐθεῖαι Ot καί Ot_1 ἀνήκουσαι εἰς τό ζητούμενον Σύνολον.Τά ἐπίπεδα MOt καί MOt_1 εἶναι τά διχοτομοῦντα τήν δίεδρον ΟΜ τῆς τριέδρου ΟΜΑΒ καί ἑπομένως κάθετα πρός ἄλληλα.Ἄρα ἡ ΟΜ εἶναι ἡ ἀκμή ὀρθῆς διέδρου,τῆς ὁποίας τά ἐπίπεδα τῶν ἑδρῶν περιέχουν τάς Ox καί Oy.Ἑπομένως κατά τήν προηγουμένην ἄσκησιν ἡ ΟΜ θά εἶναι γενέτειρα γνωστοῦ κώνου.

631. Νά εὑρεθῇ ὁ γεωμ.τόπος τῶν εὐθειῶν ΣΧ,τῶν διερχομένων διά δοθέντος σημείου Σ,καί ὧν ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων ἀπό δύο δεδομένα σημεῖα Α καί Β εἶναι ἴσος πρός .

Λ ύ σ ι ς:Θέτομεν ΣΑ=α,ΣΒ=β καί ἔστωσαν AA_1,BB_1 αἱ κάθετοι πρός τήν ΣΧ ἐκ τῶν σημείων Α καί Β ἀντιστοίχως.



σχ.482

Ἐκ τυχόντος σημείου Μ τῆς ΣΧ ἄγομεν τάς καθέτους ΜΓ καί ΜΔ πρός τάς ΣΑ καί ΣΒ ἀντιστοίχως.Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων $ΣAA_1$ καί ΣΜΓ ἔχομεν:

$$\frac{AA_1}{M\Gamma}=\frac{\Sigma A}{\Sigma M}=\frac{\alpha}{\Sigma M} \Longrightarrow AA_1=\frac{\alpha . M\Gamma}{\Sigma M} \quad (1)$$

Ἐκ δέ τῶν ὁμοίων ὀρθογ.τριγώνων $ΣBB_1$ καί ΣΔΜ ἔχομεν:

$$\frac{BB_1}{M\Delta}=\frac{\Sigma B}{\Sigma M}=\frac{\beta}{\Sigma M} \Longrightarrow BB_1=\frac{\beta . M\Delta}{\Sigma M} \quad (2)$$

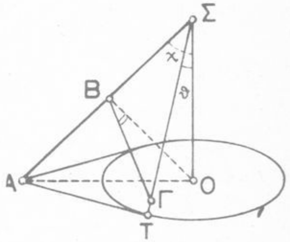
Διαιροῦντες κατά μέλη τάς (1) καί (2), λαμβάνομεν:

$$\frac{AA_1}{BB_1}=\frac{\alpha.M\Gamma}{\beta.M\Delta} \quad \text{ἤ} \quad k=\frac{\alpha.M\Gamma}{\beta.M\Delta} \Rightarrow \frac{M\Gamma}{M\Delta}=\frac{\beta.k}{\alpha} \qquad (3)$$

Ἀναγόμεθα οὕτως εἰς τό προηγούμενον πρόβλημα, καί ἡ ΣΧ θά εἶναι γενέτειρα γνωστοῦ κώνου.

632. Νά εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν ἀκμῶν τῶν διέδρων γωνιῶν (ὀρθῶν), ὧν αἱ ἕδραι ἐφάπτονται δοθείσης ἐκ περιστροφῆς κωνικῆς ἐπιφανείας.

Λ ύ σ ι ς: Θεωροῦμεν κῶνον ἐκ περιστροφῆς κορυφῆς Σ, τοῦ ὁποίου ἡ γενέτειρα γωνία εἶναι θ. Θεωροῦμεν ἐπίσης δύο ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα κάθετα μεταξύ των καί τεμνόμενα κατά τήν ΣΑ.



Τό ἐπίπεδον ΣΟΑ διχοτομεῖ τήν δίεδρον ΣΑ.

Ἄγομεν τήν ΟΒ ⊥ ΣΑ καί εἰς τό ἐπίπεδον ΣΑΤ ἄγομεν τήν κάθετον ΒΓ πρός τήν ΣΑ. Ἡ γωνία ΟΒΓ θά εἶναι ἡ ἀντίστοιχος τῆς διέδρου ΟΣΑΤ. Δηλαδή: $\sphericalangle$ ΟΒΓ$=45^\circ$

σχ. 483

Τό τρίγωνον ΟΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τό Γ. Διότι ἡ τρίεδρος Σ.ΟΑΤ ἔχει τήν δίεδρον ΣΤ ὀρθήν, καθόσον τό ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον ΣΑΤ εἶναι κάθετον ἐπί τό μεσημβρινόν ἐπίπεδον ΣΟΤ καί ἡ τομή ὀρθῆς τριέδρου ὑπό ἐπιπέδου καθέτου πρός μίαν τῶν ἀκμῶν της εἶναι ὀρθογώνιον τρίγωνον, μέ κορυφήν τῆς ὀρθῆς γωνίας κειμένην ἐπί τῆς ἀκμῆς τῆς ὀρθῆς διέδρου.

Διά νά εἶναι $\sphericalangle$ ΟΒΓ$=45^\circ$, πρέπει ΟΒ=ΟΓ ἤ ΟΒ=ΟΓ$\sqrt{2}$.

Ἀλλά ΟΓ=ΣΟημθ, ΟΒ=ΟΣημx. Ἄρα:

$$\eta\mu x=\sqrt{2}.\eta\mu\theta \qquad (1)$$

Πρέπει δέ $\sqrt{2}.\eta\mu\theta\leq 1 \Rightarrow \theta\leq 45^\circ$

Ἄν $\theta<45^\circ$, ὁ γεωμ. τόπος τῆς ΣΑ εἶναι κωνική ἐπιφάνεια, κορυφῆς Σ, ἄξονος ΣΟ καί γενετείρας γωνίας x.

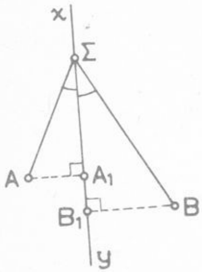
Ἐάν $\theta=45^\circ \Rightarrow \eta\mu x=1 \Rightarrow x=90^\circ$ καί ὁ τόπος τῆς ΣΑ εἶναι τό κάθετον ἐπίπεδον ἐπί τήν ΣΟ εἰς τό Σ.

Ἐάν $\theta>45^\circ$, δέν δυνάμεθα νά φέρωμεν ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα τοῦ κώνου, κάθετα μεταξύ των.

633. Νά κατασκευασθῇ κωνική ἐπιφάνεια ἐκ περιστροφῆς ἐκ τοῦ ἄξονος αὐτῆς κ[illegible] δύο σημείων τῆς ἐπιφανείας της.

Λ ύ σ ι ς: Ἔστω xy ὁ ἄξων καί Α, Β τά δοθέντα σημεῖα τῆς ζητουμένης κωνικῆς ἐπιφανείας. Ἄγομεν τάς AA_1 καί BB_1 καθέτους πρός τήν xy.

῞Ινα σημεῖον Σ τῆς xy εἶναι κορυφή τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας πρέπει καί ἀρκεῖ $\sphericalangle A\Sigma A_1 = \sphericalangle B\Sigma B_1$ ἤ $\frac{\Sigma A_1}{\Sigma B_1} = \frac{AA_1}{BB_1}$.



σχ.484

῎Αρα ἡ ζητουμένη κωνική ἐπιφάνεια ἔχει ὡς κορυφήν τό ἕν ἤ τό ἄλλο ἐκ τῶν δύο σημείων τῆς xy, ὧν ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων ἀπό τά A_1 καί B_1 εἶναι ἴσος πρός $\frac{AA_1}{BB_1}$.

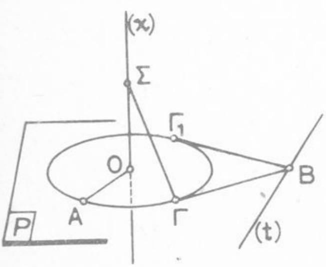
᾿Εάν ἡ κορυφή Σ εἶναι γνωστή, ἡ κωνική ἐπιφάνεια εἶναι ὡρισμένη, διότι γνωρίζομεν τήν γενέτειραν γωνίαν $A\Sigma A_1$.

῾Επομένως τό πρόβλημα δέχεται δύο λύσεις, ὅταν $\frac{AA_1}{BB_1} \neq 1$. ῞Οταν δέ $AA_1 = BB_1$ καί τά A_1, B_1 εἶναι διάφορα, ὑπάρχει λύσις (μία μόνον) ἔχουσα κορυφήν τό μέσον τοῦ τμήματος A_1B_1.

᾿Εάν τά A_1 καί B_1 συμπίπτουν, τότε: πᾶν σημεῖον Σ τῆς xy εἶναι κορυφή κωνικῆς ἐπιφανείας ἐκ περιστροφῆς καί τό πρόβλημα ἔχει ἀπείρους λύσεις.

634. ῾Ομοίως ἐξ ἑνός σημείου αὐτῆς Α, μιᾶς ἐφαπτομένης (t) καί τοῦ ἄξονος.

Λ ύ σ ι ς: ῾Υποθέτομεν τό πρόβλημα λελυμένον καί ἔστω Σ ἡ κορυφή τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας. Αὕτη περιέχει τόν κύκλον, ὅστις ἔχει κέντρον τήν προβολήν Ο τοῦ Α ἐπί τόν ἄξονα (x), ὡς ἀκτῖνα τήν ΟΑ καί κείμενον ἐπί τοῦ καθέτου ἐπιπέδου (P) πρός τόν ἄξονα εἰς τό Ο.



σχ.485

᾿Επειδή ἡ (t) εἶναι ἐφαπτομένη, τό ἐπίπεδον (Σ,t) θά εἶναι ἐφαπτόμενον τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας. Τό ἐπίπεδον τοῦτο τέμνει τό (P) κατά τήν εὐθεῖαν ΓΒ, ἥτις ἐφάπτεται τοῦ κύκλου (Ο) καί διέρχεται διά τῆς τομῆς Β τῆς (t) καί τοῦ (P).

᾿Εντεῦθεν προκύπτει ἡ κατασκευή τῆς κορυφῆς Σ.

῎Εστωσαν Β ἡ τομή τῆς (t) ἐπί τοῦ (P), ΒΓ, $B\Gamma_1$ αἱ ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου (Ο). Τά ἐπίπεδα ΒΓt καί $B\Gamma_1 t$ τέμνουν τήν (x) εἰς τά σημεῖα Σ καί Σ_1 ἀντιστοίχως.

Αἱ κωνικαί ἐπιφάνειαι μέ κορυφάς Σ καί Σ_1, διερχόμεναι διά τοῦ Α καί διά τοῦ κύκλου (Ο), ἐφάπτονται ἡ μία τοῦ ἐπιπέδου ΣΓΒ καί ἡ ἄλλη τοῦ ἐπιπέδου $\Sigma\Gamma_1 B$ καί ἀμφότερα τῆς (t).

Τό πρόβλημα τοῦτο δέχεται δύο λύσεις ἤ μίαν ἤ οὐδεμίαν ἀναλόγως τῆς θέσεως τοῦ Β πρός τόν κύκλον (Ο).

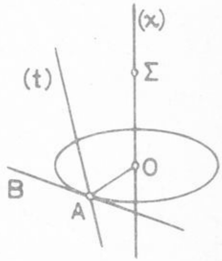
635. Ὁμοίως ἐκ τοῦ ἄξονος, μιᾶς ἐφαπτομένης (t) καί τοῦ σημείου ἐπαφῆς της.

Λ ύ σ ι ς: Ἔστω (x) ὁ ἄξων, (t) ἡ ἐφαπτομένη καί Α τό σημεῖον ἐπαφῆς.

Ἔστω λελυμένον τό πρόβλημα καί Σ ἡ κορυφή τῆς ζητουμένης κωνικῆς ἐπιφανείας. Ἡ ἐπιφάνεια αὕτη περιέχει τόν κύκλον (Ο) κέντρου Ο, προβολῆς τοῦ Α ἐπί τόν ἄξονα (x), ἀκτῖνος ΟΑ καί κείμενον ἐπί τοῦ καθέτου ἐπιπέδου πρός τόν (x) ἐκ τοῦ σημείου Ο.

Τό εἰς τό Α ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον περιέχει τήν At καί τήν ἐφαπτομένην ΑΒ τοῦ κύκλου (Ο).

Κατ'ἀκολουθίαν ἡ κορυφή Σ θά εἶναι τομή τοῦ ἐπιπέδου ΑΒ καί τοῦ ἄξονος (x).



σχ.486

Ὑπάρχει μία μόνον λύσις.

Ἐάν τό ἐπίπεδον ΑΒt εἶναι παράλληλον πρός τόν ἄξονα (x), καί τοῦτο συμβαίνει ὅταν ἡ At εἶναι κάθετος πρός τήν ΟΑ, τότε ἡ ζητουμένη ἐπιφάνεια εἶναι κυλινδρική ἐκ περιστροφῆς.

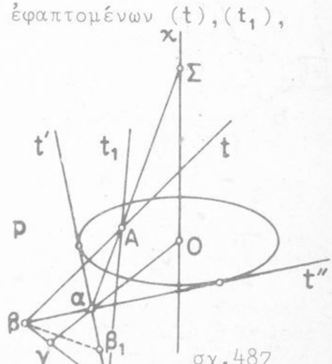
Ἐάν ἡ At εἶναι ὀρθογώνιος πρός τόν ἄξονα (x), δέν ὑπάρχει λύσις, ἐκτός ἐάν ἡ At συμπίπτη μέ τήν ΑΒ.

Εἰς τήν περίπτωσιν ταύτην ἡ κορυφή Σ θά εἶναι τό τυχόν σημεῖον τῆς xy.

636. Ὁμοίως ἐκ τοῦ ἄξονος, δύο ἐφαπτομένων (t), (t_1), ἀγομένων ἐκ σημείου Α.

Λ ύ σ ι ς: Ὑποθέτομεν τό πρόβλημα λελυμένον καί ἔστω Σ ἡ κορυφή τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας. Τά ἐπίπεδα ΣAt καί ΣAt_1, εἶναι ἐφαπτόμενα. Διακρίνομεν τώρα δύο περιπτώσεις. Ἐάν τά δύο ταῦτα ἐπίπεδα συμπίπτουν, δηλαδή ἐάν αἱ At καί At_1 κεῖνται ἐπί τοῦ αὐτοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου, ἡ κορυφή Σ θά εἶναι ἡ τομή τῆς (x) καί τοῦ ἐπιπέδου tAt_1.

Ἡ γενέτειρα γωνία εἶναι ἡ γω-



σχ.487

νία τῆς (x) καί τοῦ ἐπιπέδου tAt_1 καί ἡ οὕτως ὁριζομένη κωνική ἐπιφάνεια ἀποτελεῖ μίαν λύσιν.

Ἐάν τά ἐπίπεδα ΣAt καί $ΣAt_1$ εἶναι διάφορα, θεωροῦμεν ἐπίπεδον (P) κάθετον πρός τήν (x), καί ἔστωσαν at'' καί at' αἱ τομαί τῶν ἐφαπτομένων ἐπιπέδων καί τοῦ (P). Αὗται εἶναι ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου τομῆς.

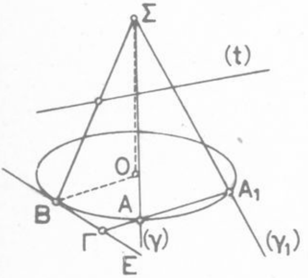
Αἱ (t) καί (t_1) τάμνουν τάς at' καί at'' εἰς τά σημεῖα β καί β', καί ἡ Οα εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας $t''at'$.

Ἀντιστρόφως, ἐάν ἡ Σ ἐκλεγῇ ἐπί τῆς (x), οὕτως ὥστε ἡ Οα νά εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας $t''at'$, ἡ κωνική ἐπιφάνεια κορυφῆς Σ καί ἔχουσα ὁδηγόν κύκλον κέντρου Ο καί ἐγγεγραμμένου εἰς τήν γωνίαν $t''at'$ ἐφάπτεται τῶν ἐπιπέδων $Σat''$, $Σat'$ καί κατ' ἀκολουθίαν τῶν At καί At_1.

Ἐπί τοῦ ἐπιπέδου (P) γνωρίζομεν τάς τομάς β, β' τῶν (t) καί (t_1) μετά τοῦ (P). Τό α εὑρίσκεται ἐπί τῆς Ογ τοῦ ἐπιπέδου (x,A) καί πρέπει νά ὁρισθῇ τό α ἐπί τῆς Ογ, οὕτως ὥστε ἡ αγ νά εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας βαβ'. Πρός τοῦτο πρέπει καί ἀρκεῖ ἡ β'α νά διέρχεται διά τοῦ συμμετρικοῦ $β_1$ τοῦ β ὡς πρός τήν Ογ. Ἄγομεν τώρα τήν $β'β_1$, τέμνουσαν τήν Ογ εἰς τό α, ἔπειτα τήν αA, ἥτις τέμνει τόν ἄξονα (x) εἰς τό A. Λαμβάνομεν οὕτω μίαν δευτέραν λύσιν. Τό πρόβλημα τοῦτο δέχεται, ἐν γένει, δύο λύσεις.

637. Ὁμοίως ἐκ δύο γενετειρῶν (γ), $(γ_1)$ καί μιᾶς ἐφαπτομένης (t).

Λ ύ σ ι ς: Ὑποθέτομεν τό πρόβλημα λελυμένον. Ἔστω λοιπόν μία ἐκ περιστροφῆς κωνική ἐπιφάνεια, ἔχουσα γενετείρας (γ) καί $(γ_1)$ καί ἐφαπτομένη τῆς εὐθείας (t). Θεωροῦμεν μίαν τομήν κάθετον πρός τόν ἄξονα.



σχ.488

Ἡ τομή θά εἶναι κύκλος τέμνων τάς Σγ καί $Σγ_1$ εἰς τά σημεῖα A καί A_1 καί ἐφαπτόμενος τοῦ ἐπιπέδου (Σ,t) κατά τήν εὐθεῖαν BE. Θά εἶναι δέ καί $ΣB=ΣA=ΣA_1$ καί ∢ ΣBΓ=1 ὀρθή.

Ἡ κατασκευή γίνεται ὡς ἀκολούθως: Ἐπί τῶν γενετειρῶν λαμβάνομεν $ΣA=ΣA_1$ καί ἔστω Γ ἡ τομή τῆς AA_1 καί τοῦ ἐπιπέδου (Σ,t). Εἰς τό ἐπίπεδον (Σ,t) γράφομεν τόν κύκλον (Σ,ΣA) καί τόν κύκλον διαμέτρου ΣΓ.

Ἐάν B εἶναι τό ἕν τῶν σημείων τομῆς τῶν δύο τούτων κύκλων, τά τρία σημεῖα A, A_1, B ὁρίζουν τόν κύκλον (O), τοῦ ὁποίου ὁ ἄξων διέρχεται διά τοῦ Σ, διότι $ΣB=ΣA=ΣA_1$. Ὁ κύκλος οὗτος ἐφάπτεται τῆς ΓB, διότι ∢ ΣBΓ=1 ὀρθή καί ἄρα

∢ ΟΒΓ=1 ὀρθή.

Κατ'ἀκολουθίαν ἡ κωνική ἐπιφάνεια κορυφῆς Σ,μέ ὁδηγόν τόν κύκλον τοῦτον,περιέχει τάς γενετείρας (γ) καί ($γ_1$), ἐφάπτεται δέ τοῦ ἐπιπέδου ΣΒΓ καί ἄρα τῆς (t),ἥτις κεῖται ἐπ'αὐτοῦ.

Διά νά ἔχῃ τό πρόβλημα λύσιν,πρέπει τό Γ νά εἶναι ἐξωτερικόν σημεῖον τοῦ τμήματος $ΑΑ_1$,ἤ ἡ (t) νά τέμνῃ τό ἐπίπεδον $Σγγ_1$ εἰς σημεῖον ἐξωτερικόν τῆς γωνίας $γΣγ_1$ καί εἰς τήν κατά κορυφήν της. Ἀλλά,τῆς ΣΑ οὔσης σταθερᾶς,δυνάμεθα νά λάβωμεν $ΣΑ_1$=ΣΑ ἐπί τῆς $Σγ_1$ ἤ ἐπί τῆς ἀντιθέτου της,καί τοῦτο δεικνύει ὅτι ὑπάρχει ἕν σημεῖον Γ καί ἕν μόνον ἐξωτερικόν τοῦ $ΑΑ_1$. Ἐπί πλέον ὁ κύκλος (Σ,ΣΑ) καί ὁ κύκλος διαμέτρου ΣΓ πρέπει νά τέμνωνται.Τοῦτο ὅμως συμβαίνει πάντοτε,διότι ἡ ΣΑ εἶναι μικροτέρα τῆς ΣΓ.Τό πρόβλημα δέχεται δύο λύσεις.

638. Ὁμοίως ἐκ τῆς κορυφῆς Σ,ἑνός σημείου Α καί δύο ἐφαπτομένων (t),(t_1).

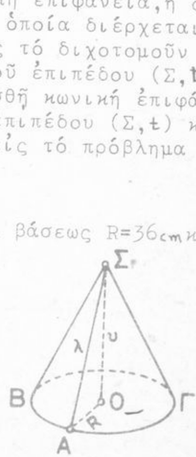
Λ ύ σ ι ς:Τά ἐπίπεδα (Σ,t) καί (Σ,t_1) εἶναι ἐφαπτόμενα τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας,καί ἡ κωνική ἐπιφάνεια κεῖται εἰς τό ἐσωτερικόν τῆς διέδρου τῶν δύο τούτων ἐπιπέδων (ἤ τῆς ἀντιθέτου της ὡς πρός τήν ἀκμήν),ἡ ὁποία περιέχει τό Α.

Ἐπί πλέον τό διχοτομοῦν ἐπίπεδον τήν δίεδρον ταύτην εἶναι ἐπίπεδον συμμετρίας τῆς κωνικῆς ταύτης ἐπιφανείας. Ἄρα ἡ κωνική αὕτη ἐπιφάνεια περιέχει τό συμμετρικόν $Α_1$ τοῦ Α ὡς πρός τό διχοτομοῦν τοῦτο ἐπίπεδον.

Ἀντιστρόφως,μία ἐκ περιστροφῆς κωνική ἐπιφάνεια,ἡ ὁποία ἐφάπτεται τοῦ ἐπιπέδου (Σ,t) καί ἡ ὁποία διέρχεται ἀπό τά Α καί $Α_1$ εἶναι συμμετρική ὡς πρός τό διχοτομοῦν ἐπίπεδον καί κατ'ἀκολουθίαν ἐφαπτομένη τοῦ ἐπιπέδου (Σ,t_1).

Ἀναγόμεθα οὕτως εἰς τό νά κατασκευασθῇ κωνική ἐπιφάνεια ἐκ περιστροφῆς ἐκ τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου (Σ,t) καί δύο γενετειρῶν ΣΑ,$ΣΑ_1$,δηλαδή ἀναγόμεθα εἰς τό πρόβλημα 637.

639. Κῶνος ἐκ περιστροφῆς ἔχει ἀκτῖνα βάσεως R=36cm καί ὕψος υ=27cm.Νά ὑπολογισθῇ ἡ κυρτή καί ἡ ὁλική ἐπιφάνειά του.



σχ.489

Λ ύ σ ι ς: Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΣΟΑ ἔχομεν:

$$λ^2=υ^2+R^2=27^2+36^2=729+1296=2025$$

ἐξ οὗ: $λ=45cm$.

Κατ'ἀκολουθίαν:

$$E_{κυρτή}=πRλ=π.36.45=1620π\ cm^2.$$

Τό ἐμβαδόν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας εἶναι:

$$E_{ολ}=\pi R(R+\lambda)=\pi.36.(36+45)=\pi.36.81=2916\pi\ cm^2.$$

640. Κῶνος ἐκ περιστροφῆς ἔχει ὕψος $υ=32$ cm καί ἀπόστημα $\lambda=40$ cm. Νά ὑπολογισθῇ ἡ κυρτή καί ἡ ὁλική ἐπιφάνειά του.

Λ ύ σ ι ς: Εἶναι: $R^2=\lambda^2-υ^2=40^2-32^2=1600-1024=576$, ἐξ οὗ $R=24$ cm.

Τό ἐμβαδόν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας εἶναι:

$$E_κ=\pi.R.\lambda=\pi.24.40=960\pi\ cm^2.$$

Τό ἐμβαδόν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας εἶναι:

$$E_{ολ}=\pi R(\lambda+R)=\pi.24(40+24)=\pi.24.64=1536\pi\ cm^2.$$

641. Κῶνος ἐκ περιστροφῆς ἔχει ὕψος 40 cm καί μῆκος βάσεως 188,4 cm. Νά ὑπολογισθῇ ἡ ὁλική ἐπιφάνεια καί ὁ ὄγκος αὐτοῦ.

Λ ύ σ ι ς: Ἐκ τοῦ τύπου $\mathcal{P}=2\pi R$, ἔχομεν:

$$188,4=2.3,14.R=6,28R \Rightarrow R=30\ cm.$$

Κατ' ἀκολουθίαν:

$$\lambda^2=R^2+υ^2=30^2+40^2=900+1600=2500$$

ἐξ οὗ: $\lambda=50$ cm.

Ἄρα τό ἐμβαδόν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας εἶναι:

$$E_{ολ}=\pi R(\lambda+R)=\pi.30(50+30)=\pi.30.80=2400\pi\ cm^2.$$

Ὁ ὄγκος τοῦ κώνου τούτου εἶναι:

$$V=\frac{1}{3}.\pi.R^2.υ=\frac{1}{3}.\pi.30^2.40=\pi.300.40=12000\pi\ cm^3.$$

642. Τό ἐμβαδόν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας κώνου ἐκ περιστροφῆς εἶναι 2160π cm^2 καί ἡ γενέτειρά του $\lambda=6$ cm. Νά ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος καί ἡ κυρτή ἐπιφάνειά του.

Λ ύ σ ι ς: Τό ἐμβαδόν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας εἶναι:

$$E_{ολ}=\pi R(\lambda+R) \text{ ἤ } 2160\pi=\pi.R(6+R) \Rightarrow 2160=6R+R^2 \Rightarrow R^2+6R-21,60=0$$

$$\Rightarrow R=\frac{-6+\sqrt{36+86,40}}{2}=\frac{-6+\sqrt{122,40}}{2}=\frac{-6+11,06}{2}=2,5$$

Τό ὕψος τοῦ κώνου εἶναι:

$$υ^2=\lambda^2-R^2=6^2-(2,5)^2=36-6,25=29,75$$

ἐξ οὗ: $υ=\sqrt{29,75}=5,4$ cm.

Ὁ ὄγκος τοῦ κώνου εἶναι:

$$V=\frac{1}{3}.\pi.R^2.υ=\frac{1}{3}.\pi(2,5)^2.5,4=\pi.6,25.1,8=11,250\pi\ cm^3.$$

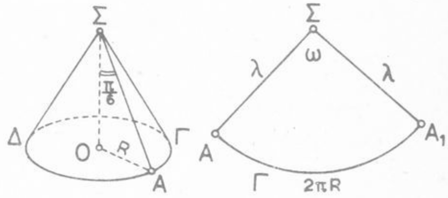
Τό ἐμβαδόν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας εἶναι:

$$E=\pi R\lambda=\pi.2,5.6=15.\pi\ cm^2.$$

643. Ἡ γενέτειρα γωνία κώνου ἐκ περιστροφῆς εἶναι $\frac{\pi}{6}$. Νά ὑπολογισθῇ ἡ γωνία τοῦ ἀναπτύγματος αὐτοῦ. Τό αὐτό ἄν ἡ γενέτειρα γωνία εἶναι $\frac{\pi}{4}$ ἤ $\frac{\pi}{3}$.

Λ ύ σ ι ς: Τό ἀνάπτυγμα τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κώνου ἐκ περιστροφῆς εἶναι κυκλικός τομεύς ἀκτῖνος ἴσης πρός τήν γενέτειραν τοῦ κώνου καί βάσεως ἴσης πρός τό μῆκος τοῦ κύκλου τῆς βάσεως $2\pi R$.

Διά νά ὑπολογίσωμεν τήν γωνίαν ω τοῦ κυκλικοῦ τούτου τομέως, ἀρκεῖ νά ἐξισώσωμεν τάς δύο ἐκφράσεις τοῦ μήκους τοῦ τόξου $A\Gamma A_1$.



σχ.490

Ἐάν ἡ ω εἶναι ἐκπεφρασμένη εἰς μοίρας, τότε θά ἔχωμεν:

$$\frac{2\pi.\lambda.\omega}{360}=2\pi.R \iff \boxed{\omega=360^\circ.\frac{R}{\lambda}} \qquad (1)$$

Οὕτω, διά τήν γενέτειραν γωνίαν $\frac{\pi}{6}$ θά εἶναι:

$$R=\lambda\eta\mu\frac{\pi}{6}=\lambda.\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{R}{\lambda}=\frac{1}{2}$$ καί ἡ (1) γίνεται:

$$\omega=360^\circ.\frac{1}{2}=180^\circ,$$

καί τό ἀνάπτυγμα θά εἶναι ἡμικύκλιον.

Ἐάν ἡ γενέτειρα γωνία εἶναι $\frac{\pi}{4}$, τότε $\frac{R}{\lambda}=\eta\mu\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ καί ἡ (1) γίνεται: $\omega=360^\circ.\frac{\sqrt{2}}{2}=180^\circ.\sqrt{2}$

Ἐάν, τέλος, ἡ γενέτειρα γωνία εἶναι $\frac{\pi}{3}$, τότε: $\frac{R}{\lambda}=\eta\mu\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ καί ἡ (1) γίνεται: $\omega=360^\circ.\frac{\sqrt{3}}{2}=180^\circ.\sqrt{3}$.

644. Τό ἀνάπτυγμα τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κώνου ἐκ περιστροφῆς εἶναι ἡμικύκλιον ἀκτῖνος 12 cm. Νά ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ κώνου καί ἡ ὁλική ἐπιφάνειά του.

Λ ύ σ ι ς: Εἰς τήν προηγουμένην ἄσκησιν εὕρομεν:

$$\omega=360^o.\frac{R}{\lambda} \quad (1)$$

'Επειδή τό ἀνάπτυγμα εἶναι ἡμίκυκλος, θά ἔχωμεν $\omega=180^o$ καί ἡ (1) γίνεται: $180^o=360^o.\frac{R}{\lambda} \Rightarrow \lambda=2R=2.12=24$ cm.

Ἄρα $\upsilon^2=\lambda^2-R^2=24^2-12^2=576-144=232 \Rightarrow \upsilon=2\sqrt{58}$ cm.

'Ο ὄγκος τοῦ κώνου εἶναι:

$$V=\frac{1}{3}.\pi.R^2.\upsilon=\frac{1}{3}.\pi.12^2.2\sqrt{58}=96\pi\sqrt{58}=96\sqrt{58}\pi \text{ cm}^3.$$

'Η ὁλική ἐπιφάνεια εἶναι:

$$E_{o\lambda}=\pi R(R+\lambda)=\pi.12(12+24)=\pi.12.36=432\pi \text{ cm}^2.$$

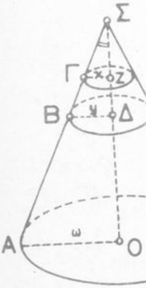
645. Νά ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτίς R καί ἡ γωνία ω ἑνός κυκλικοῦ τομέως ἐξ ἑνός φύλλου ψευδαργύρου, διά νά κατασκευάσωμεν κωνικόν δοχεῖον χωρητικότητος 5 λιτρῶν καί εἰς τό ὁποῖον νά εἶναι $\upsilon=3R$.

Λύσις: 'Εκ τῆς ἐπιλύσεως τοῦ συστήματος:

$$\left.\begin{array}{l}\omega=360^o.\frac{R}{\lambda}\\ \upsilon=3R\\ V=\frac{1}{3}\pi R^2.\upsilon=5\end{array}\right\}$$ εὑρίσκομεν τούς ἀγνώστους R καί ω.

646. Θεωροῦμεν κωνικήν ἐπιφάνειαν ἐκ περιστροφῆς, ἧς ἡ γενέτειρα γωνία $\omega=30^o$. Τέμνομεν αὐτήν ὑπό ἐπιπέδων καθέτων πρός τόν ἄξονα καί ἀπεχόντων ἀπό τῆς κορυφῆς ἀντιστοίχως κατά 2 cm, 4 cm, 5 cm. 1) Νά ὑπολογισθοῦν τά ἐμβαδά τῶν τομῶν καί νά δειχθῇ ὅτι εἶναι ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν $2^2, 4^2, 5^2$. 2) 'Ομοίως, ἡ αὐτή πρότασις, διά τά ἐμβαδά τῶν ὁλικῶν ἐπιφανειῶν τῶν τριῶν τούτων κώνων καί 3) Νά ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τῶν τριῶν τούτων κώνων καί νά γίνῃ σύγκρισις αὐτῶν.

Λύσις: 1) Ἔστω ΣΖ=2 cm, ΣΔ=4 cm, ΣΟ=5 cm καί ΖΓ=x, ΔΒ=y, ΟΑ=ω. 'Επειδή ∢ ΑΣΟ=30^o, θά εἶναι: ΣΓ=2x, ΣΒ=2y, ΣΑ=2ω καί κατ'ἀκολουθίαν:



$$\left.\begin{array}{l}(2x)^2-x^2=\Sigma Z^2=2^2 \Rightarrow x^2=\frac{2^2}{3} \quad (1)\\ (2y)^2-y^2=\Sigma\Delta^2=4^2 \Rightarrow y^2=\frac{4^2}{3} \quad (2)\\ (2\omega)^2-\omega^2=\Sigma O^2=5^2 \Rightarrow \omega^2=\frac{5^2}{3} \quad (3)\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}E_1=\pi x^2=\frac{2^2\pi}{3}\\ E_2=\pi y^2=\frac{4^2\pi}{3}\\ E_3=\pi\omega^2=\frac{5^2\pi}{3}\end{array}$$

καί κατ'ἀκολουθίαν:

σχ.491

$$\frac{E_1}{2^2}=\frac{E_2}{4^2}=\frac{E_3}{5^2}=\frac{\pi}{3} \qquad (4)$$

ἔνθα E_1, E_2, E_3 τά ἐμβαδά τῶν τομῶν (ἀντιστοίχων).

Ἡ ὁλική ἐπιφάνεια τοῦ κώνου ἀκτῖνος x εἶναι:

$$E_1'=\pi x(\Sigma\Gamma+x)=\pi\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{4}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi\cdot 12}{3}=4\pi=2^2\cdot\pi \qquad (5)$$

Ὁμοίως θά εἶναι καί:

$$E_2'=4^2\cdot\pi \quad (6) \qquad \text{καί} \qquad E_3'=5^2\cdot\pi \quad (7)$$

Ἐκ τῶν (5),(6) καί (7) λαμβάνομεν:

$$\frac{E_1'}{2^2}=\frac{E_2'}{4^2}=\frac{E_3'}{5^2} \qquad (8)$$

3) Ὁ ὄγκος τοῦ κώνου ἀκτῖνος x εἶναι:

$$V_1=\frac{1}{3}\pi\cdot x^2\cdot\upsilon_1=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{2^2}{3}\cdot 2=\frac{\pi\cdot 2^3}{9} \qquad (9)$$

$$V_2=\frac{1}{3}\pi\cdot y^2\cdot\upsilon_2=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{4^2}{3}\cdot 4=\frac{\pi\cdot 4^3}{9} \qquad (10)$$

$$V_3=\frac{1}{3}\pi\cdot\omega^2\cdot\upsilon_3=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{5^2}{3}\cdot 5=\frac{\pi\cdot 5^3}{9} \qquad (11)$$

Ἐκ τῶν (9),(10) καί (11) λαμβάνομεν:

$$\frac{V_1}{2^3}=\frac{V_2}{4^3}=\frac{V_3}{5^3} \qquad (12)$$

647. Θεωροῦμεν κῶνον ἐκ περιστροφῆς $\upsilon=12$ cm. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπό τῆς κορυφῆς πρέπει νά φέρωμεν ἐπίπεδον παράλληλον πρός τήν βάσιν, ἵνα ἡ κυρτή ἐπιφάνειά του διαιρεθῇ εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη;

Λ ύ σ ι ς: Ἔστω ΚΒ ἡ ἀκτίς τῆς τομῆς καί $\Sigma O=\upsilon=12$ cm. Θά εἶναι: $E_1=\frac{1}{2}E$ ἤ $2E_1=E$ ἤ $2\cdot\pi\cdot KB\cdot\Sigma B=\pi\cdot R\cdot\Sigma A \Rightarrow 2\cdot KB\cdot\Sigma B=R\cdot\Sigma A$ (1)

Ἔστω $\Sigma K=x$, ὁπότε $\Sigma B^2=x^2+KB^2$ (2)

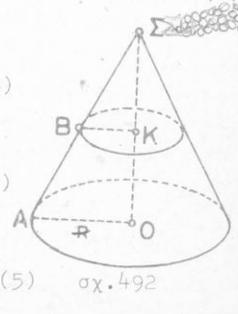
Ἐπειδή $\Sigma A=\sqrt{R^2+\Sigma O^2}=\sqrt{R^2+12^2}=\sqrt{R^2+144}$ (3)

καί $\frac{KB}{R}=\frac{\Sigma K}{12} \Rightarrow KB=\frac{R\cdot\Sigma K}{12}=\frac{Rx}{12}$, ἡ (2) γίνεται:

$$\Sigma B^2=x^2+\frac{R^2x^2}{144}=\frac{x^2}{144}\cdot(1+R^2) \Rightarrow \Sigma B=\frac{x}{12}\sqrt{1+R^2} \qquad (4)$$

καί κατ᾽ἀκολουθίαν ἡ (1) γίνεται:

$$2\cdot\frac{Rx}{12}\cdot\frac{x}{12}\sqrt{1+R^2}=R\cdot\sqrt{R^2+144} \Rightarrow x^2=\frac{72\sqrt{R^2+144}}{\sqrt{1+R^2}} \qquad (5)$$

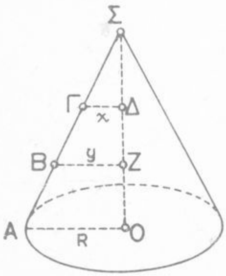


σχ. 492

'Εκ τῆς (5) ὁρίζεται τό $x=K\Sigma$, ἄρα καί ἡ ζητουμένη τομή.

648. Δίδεται κῶνος ἐκ περιστροφῆς καί ζητεῖται νά ἀχθοῦν δύο ἐπίπεδοι τομαί παράλληλοι πρός τάς βάσεις, ὥστε τό ἐμβαδόν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του νά χωρισθῆ εἰς τρία ἰσοδύναμα μέρη.

Λ ύ σ ι ς: Ἔστω $\Sigma A=\lambda$ ἡ γενέτειρα τοῦ δοθέντος κώνου καί $OA=R$ ἡ ἀκτίς τῆς βάσεως αὐτοῦ.



σχ.493

Ἔστωσαν $\Delta\Gamma=x$ καί $ZB=y$ αἱ ἀκτῖνες τῶν ζητουμένων τομῶν.

Θά εἶναι, ἄν $\Sigma\Gamma=\lambda_1$ καί $\Sigma B=\lambda_2$,

$$E_{(\Sigma\Gamma)}=\frac{1}{3}E_{(\Sigma A)} \Rightarrow \pi x\lambda_1=\frac{1}{3}\pi R.\lambda$$

ἐξ οὗ: $$x\lambda_1=\frac{R.\lambda}{3} \qquad (1)$$

'Αλλά $\frac{x}{R}=\frac{\Sigma\Gamma}{\Sigma A}=\frac{\lambda_1}{\lambda} \Rightarrow x=\frac{R\lambda_1}{\lambda}$ καί ἡ (1)

γίνεται: $$\frac{R\lambda_1}{\lambda}.\lambda_1=\frac{R.\lambda}{3} \Rightarrow \lambda_1=\frac{\lambda\sqrt{3}}{3} \qquad (2)$$

'Εκ τῆς (2) ὁρίζεται τό σημεῖον Γ ἐπί τῆς ΣΑ.

'Επίσης θά εἶναι:

$$E_{(\Sigma B)}=\frac{2}{3}E_{(\Sigma A)} \quad \text{ἤ} \quad \pi y\lambda_2=\frac{2}{3}\pi.R\lambda \Rightarrow y\lambda_2=\frac{2}{3}R\lambda \qquad (3)$$

'Αλλά $\frac{y}{R}=\frac{\lambda_2}{\lambda} \Rightarrow y=\frac{R\lambda_2}{\lambda}$ καί ἡ (3) γίνεται:

$$\frac{R.\lambda_2}{\lambda}.\lambda_2=\frac{2}{3}.R\lambda \Rightarrow \lambda_3=\frac{\lambda\sqrt{6}}{3} \qquad (4)$$

'Εκ τῆς (4) ὁρίζεται τό σημεῖον Β ἐπί τῆς ΣΑ. 'Εκ τῶν Γ καί Β ἄγομεν τά ζητούμενα ἐπίπεδα.

649. 'Ισόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ πλευρᾶς α στρέφεται περί μίαν τῶν πλευρῶν του κατά γωνίαν 2π. Νά ὑπολογισθῆ ἡ ἐπιφάνεια καί ὁ ὄγκος τοῦ παραγομένου σχήματος.

Λ ύ σ ι ς: Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ παραγομένου σχήματος εἶναι τό διπλάσιον τῆς ἐπιφανείας, τήν ὁποίαν θά γράφη ἡ ΑΒ (σχ. 494).

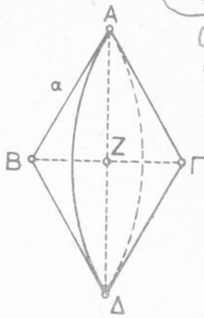
'Επειδή $BZ=\frac{\alpha}{2}$, ἕπεται ὅτι:

$$E=2.E_{AB}=2.\pi.BZ.AB=2\pi.\frac{\alpha}{2}.\alpha=\pi\alpha^2.$$

Ὁ ὄγκος τοῦ παραγομένου σχήματος εἶναι:

$$V_{(AB\Gamma)}=2V_{(ABZ)}=2.\frac{1}{3}\pi.BZ^2.AZ=\frac{2}{3}.\pi.\frac{\alpha^2}{4}.\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi\alpha^3\sqrt{3}}{12}$$

650. Τετράγωνον πλευρᾶς α στρέφεται περί τήν διαγώνιόν του κατά γωνίαν 2π. Νά ὑπολογισθῆ ὁ ὄγκος καί ἡ ἐπιφάνεια τοῦ παραγομένου σχήματος.



σχ.494

Λ ύ σ ι ς: Ἀφοῦ $AB=\alpha$, ἕπεται

$A\Gamma=B\Delta=\alpha\sqrt{2}$ καί: $BO=OA=\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$ (1)

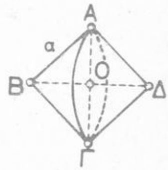
Ὁ ὄγκος τοῦ παραγομένου σχήματος εἶναι (σχ.495):

$$V=2.V_{(ABO)}=2.\frac{1}{3}.\pi.AO^2.BO=$$

$$=\frac{2}{3}\pi.\frac{2\alpha^2}{4}.\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi\alpha^3\sqrt{2}}{6}$$

Τό ἐμβαδόν τῆς ἐπιφανείας του θά εἶναι:

$$E=2.E_{(AB)}=2.\pi.AB.AO=2\pi.\alpha.\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}=\pi\alpha^2\sqrt{2}.$$



σχ.495

651. Ἰσόπλευρος κῶνος ἔχει ὕψος $\upsilon=\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$. Νά ὑπολογισθῆ ὁ ὄγκος του καί ἡ ὁλική ἐπιφάνειά του.

Λ ύ σ ι ς: Ὁ κῶνος καλεῖται ἰσόπλευρος, ὅταν ἡ γενέτειρά του ἰσοῦται πρός τήν διάμετρον τῆς βάσεως, ἤτοι

$$\lambda=2R \qquad (1)$$

Ἀλλά $\lambda^2=\upsilon^2+R^2$ ἤ $4R^2=\frac{3\alpha^2}{4}+R^2 \Rightarrow R=\frac{\alpha}{2}$ (2)

καί ἡ (1) δίδει $\lambda=2.\frac{\alpha}{2}=\alpha$ (3)

Κατ'ἀκολουθίαν ἡ ὁλική ἐπιφάνειά του εἶναι:

$$E_{o\lambda}=\pi R(\lambda+R)=\pi.\frac{\alpha}{2}\left(\alpha+\frac{\alpha}{2}\right)=\pi.\frac{\alpha}{2}.\frac{3\alpha}{2}=\frac{3\pi\alpha^2}{4} \qquad (4)$$

καί ὁ ὄγκος του εἶναι:

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2.\upsilon=\frac{1}{3}\pi.\frac{\alpha^2}{4}.\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi\alpha^3\sqrt{3}}{24} \qquad (5)$$

652. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι ὁ ὄγκος κώνου ἐκ περιστροφῆς ἰσοῦται πρός τό γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, ἐξ οὗ παράγεται, ἐπί τό μῆκος τοῦ κύκλου, ὅν γράφει τό κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου τούτου.

Λ ύ σ ι ς: Ἔστω $OA=R$ ἡ ἀκτίς κώνου καί $A\Sigma=\upsilon$ τό ὕφος τοῦ κώνου, καί Z τό κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου ΣΟΑ.

Ὁ ὄγκος τοῦ κώνου εἶναι:

$V=\frac{1}{3}\pi.R^2.\upsilon=\pi R^2.\frac{1}{3}.\upsilon$ (1)

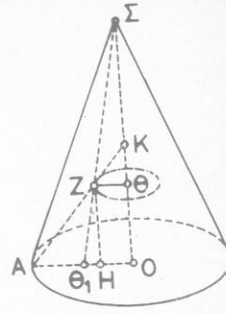
'Εάν $Z\Theta \perp \Sigma O$, καί $ZH \perp OA$, θά εἶναι:

$$Z\Theta=\frac{2}{3}.O\Theta_1=\frac{2}{3}.\frac{1}{2}R=\frac{R}{3}$$

καί ἡ (1) γράφεται διαδοχικῶς:

$V=\pi.R.\upsilon.\frac{R}{3}=\pi.R.\upsilon.Z\Theta=(2\pi.Z\Theta).\frac{1}{2}R.\upsilon=(2\pi.Z\Theta).(AO\Sigma)$

"Ωστε: $V=(AO\Sigma).(2\pi.Z\Theta)$



σχ.496

653. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ ὄγκος κώνου ἐκ περιστροφῆς ἰσοῦται πρός τό γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του ἐπί τό τρίτον τῆς ἀποστάσεως τοῦ κέντρου τῆς βάσεώς του ἀπό τό ἀπόστημά του.

Λ ύ σ ι ς: "Εστω $OB \perp \Sigma A=\lambda$. Ὁ ὄγκος τοῦ κώνου θά εἶναι:

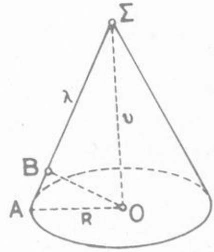
$$V=\frac{1}{3}\pi.R^2.\upsilon=\frac{1}{3}\pi.R.R\upsilon \qquad (1)$$

'Εκ τῶν ὁμοίων ὀρθογωνίων τριγώνων ΟΑΣ καί ΣΟΒ ἔχομεν:

$$\frac{\lambda}{\upsilon}=\frac{R}{OB} \Rightarrow R\upsilon=\lambda.OB$$

καί ἡ (1) γίνεται:

$V=\frac{1}{3}\pi.R.\lambda.OB=(\pi R\lambda).\frac{1}{3}.OB=(E_{\kappa\upsilon\rho\tau\acute{\eta}}).\frac{1}{3}.OB$



σχ,497

654. Νά ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος V κώνου ἐκ περιστροφῆς ἐκ τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας του $E_{o\lambda}$ καί τοῦ ἀποστήματος αὐτοῦ λ.

Λ ύ σ ι ς: Τό ἐμβαδόν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας του εἶναι:

$E_{o\lambda}=\pi R(\lambda+R)=\pi R\lambda+\pi R^2 \Longrightarrow \pi R^2+\pi R\lambda-E_{o\lambda}=0$ (1)

'Εκ τῆς (1) ὁρίζεται τό R.

'Επειδή $\upsilon^2=\lambda^2-R^2 \Longrightarrow \upsilon=\sqrt{\lambda^2-R^2}$ καί ἄρα ὁ ὄγκος εἶναι:

$$V=\frac{1}{3}.\pi.R^2.\upsilon=\frac{1}{3}\pi.R^2.\sqrt{\lambda^2-R^2} \qquad (2)$$

ἔνθα

$$R=\frac{-\pi\lambda+\sqrt{\pi^2\lambda^2+4\pi.E_{o\lambda}}}{2\pi}$$

655. 'Ομοίως ἐκ τοῦ $E_{o\lambda}$ καί τοῦ ὕψους υ.

Λ ύ σ ι ς: Ἔχομεν $E_{ολ}=\pi R(\lambda+R)$ (1) καί $V=\frac{1}{3}\pi R^2.\upsilon$ (2)

καί $\lambda=\sqrt{R^2+\upsilon_2}$ (3).

Ἡ (1) γράφεται:

$$E_{ολ}=\pi R(\sqrt{R^2+\upsilon^2}+R)=\pi R\sqrt{R^2+\upsilon^2}+\pi R^2$$

ἤ $$E_{ολ}-\pi R^2=\pi R\sqrt{R^2+\upsilon^2}$$

ἤ $$E^2_{ολ}-2\pi R^2.E_{ολ}+\pi^2R^4=\pi^2R^2(R^2+\upsilon^2)=\pi^2R^4+\pi^2R^2\upsilon^2$$

ἤ $$(\pi^2\upsilon^2+2\pi.E_{ολ}).R^2=E^2_{ολ}\Rightarrow R^2=\frac{E^2_{ολ}}{\pi^2.\upsilon^2+2\pi.E_{ολ}}$$

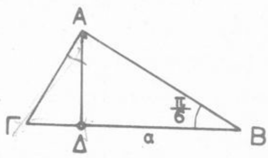
καί ἡ (2) γίνεται:

$$V=\frac{1}{3}\pi.R^2.\upsilon=\frac{1}{3}\pi.\frac{E^2_{ολ}.\upsilon}{\pi^2\upsilon^2+2\pi.E_{ολ}}=\frac{E^2_{ολ}.\upsilon}{\pi\upsilon^2+2.E_{ολ}}.$$

$\frac{1}{3}\pi R^2\upsilon$

656. Ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ἡ ὑποτείνουσα ΒΓ=α καί ἡ γωνία $B=\frac{\pi}{6}$. Τοῦτο στρέφεται περί τήν ὑποτείνουσαν κατά γωνίαν 2π. Νά ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος καί ἡ ὁλική ἐπιφάνεια τοῦ παραγομένου σχήματος.

Λ ύ σ ι ς: Ἐπειδή $B=\frac{\pi}{6}$, ἕπεται ὅτι: $A\Gamma=\frac{\alpha}{2}$ καί $AB^2=\alpha^2-\frac{\alpha^2}{4}=\frac{3\alpha^2}{4}$, ἄρα: $AB=\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$, ὁπότε: $\Delta\Gamma=\frac{A\Gamma}{2}=\frac{\alpha}{4}$ καί $\Delta B=\alpha-\frac{\alpha}{4}=\frac{3\alpha}{4}$ καί $\Delta A=\frac{AB}{2}=\frac{\alpha\sqrt{3}}{4}$.



σχ.498

Ὁ ὄγκος V τοῦ παραγομένου σχήματος εἶναι:

$$V=V_{(A\Delta\Gamma)}+V_{(A\Delta B)}=\frac{1}{3}\pi.\Delta A^2.\Gamma\Delta+\frac{1}{3}\pi.\Delta A^2.\Delta B=$$

$$=\frac{1}{3}\pi.\Delta A^2(\Gamma\Delta+\Delta B)=\frac{1}{3}\pi.\Delta A^2.\Gamma B=\frac{1}{3}\pi.\frac{3\alpha^2}{16}.\alpha=\frac{\pi\alpha^3}{16}.$$

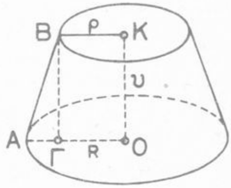
Ἡ ὁλική ἐπιφάνεια τοῦ παραγομένου σχήματος εἶναι:

$$E=E_{(A\Gamma)}+E_{(AB)}=\pi.A\Delta.A\Gamma+\pi.A\Delta.AB=$$

$$=\pi.\frac{\alpha\sqrt{3}}{4}.\frac{\alpha}{2}+\pi.\frac{\alpha\sqrt{3}}{4}.\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi\alpha^2\sqrt{3}}{8}+\frac{3\pi\alpha^2}{8}=\frac{\pi\alpha^2}{8}(\sqrt{3}+3).$$

657. Κόλουρος κῶνος ἐκ περιστροφῆς ἔχει R=16 cm, ρ=4cm καί υ=20 cm. Νά ὑπολογισθῇ ἡ κυρτή καί ἡ ὁλική ἐπιφάνειά του καί ὁ ὄγκος.

Λ ύ σ ι ς: Ἄγομεν τήν κάθετον ΒΓ πρός τήν ΟΑ. Θά εἶναι:
$ΓΑ=ΟΑ-ΟΓ=16-4=12$ καί $ΒΓ=υ=20$ cm .
Κατ' ἀκολουθίαν:
$$λ^2=ΑΒ^2=ΓΑ^2+ΓΒ^2=12^2+20^2=544$$
ἐξ οὗ: $λ=\sqrt{544}=4\sqrt{34}$ cm.
Τό ἐμβαδόν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας εἶναι:
$E_κ=π(R+ρ)λ=π(16+4).4\sqrt{34}=80π\sqrt{34}$ cm^2.



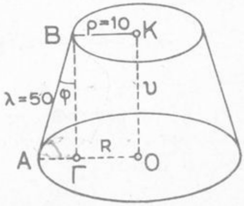
Τό ἐμβαδόν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας εἶναι: σχ. 499
$$E_{ολ}=E_κ+πR^2+πρ^2=80π\sqrt{34}+π16^2+π4^2=16π(17\sqrt{34}+5)\ \ ^2.$$
Ὁ ὄγκος τοῦ κολούρου κώνου εἶναι:
$$V=\frac{1}{3}π(R^2+ρ^2+Rρ)υ=\frac{1}{3}π.(16^2+4^2+16.4).20=2240π\ cm^3.$$

658. Ὁμοίως, ὅταν εἶναι $R=30$ cm, $ρ=6$ cm καί $λ=40$ cm.

Λ ύ σ ι ς: Ἐάν εἰς τό προηγούμενον σχῆμα (499) εἶναι $R=ΟΑ=30$ cm, $ρ=6$ cm, τότε $ΓΑ=30-6=24$ cm , καί
$$υ^2=ΒΓ^2=ΑΒ^2-ΑΓ^2=40^2-24^2=1600-576=1024$$
ἐξ οὗ: $$υ=\sqrt{1024}=32\ cm\ .$$
Τό ἐμβαδόν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας εἶναι:
$$E_κ=π(R+ρ)λ=π(30+6).40=1600π\ cm^2.$$
Τό ἐμβαδόν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας εἶναι:
$$E_{ολ}=E_κ+πR^2+πρ^2=1600π+π.30^2+π.6^2=2536π\ cm^2.$$
Ὁ ὄγκος τοῦ κολούρου κώνου εἶναι:
$$V=\frac{1}{3}π(R^2+ρ^2+Rρ)υ=\frac{1}{3}π(30^2+6^2+30.6).32=\frac{36352}{3}π\ \ cm^3$$
$$=12117,3π\ cm^3.$$

659. Κόλουρος κῶνος ἐκ περιστροφῆς ἔχει $ρ=10$cm, $λ=50$cm καί γενέτειραν γωνίαν $φ=\frac{π}{6}$. Ποία ἡ ἐπιφάνειά του καί ὁ ὄγκος του.

Λ ύ σ ι ς: Ἀφοῦ $φ=\frac{π}{6}$, ἕπεται ὅτι
$ΑΓ=\frac{λ}{2}=\frac{50}{2}=25$, καί ἄρα
$υ^2=ΒΓ^2=50^2-25^2=2500-625=1875$,
ἐξ οὗ: $υ=\sqrt{1875}=25\sqrt{3}$ cm.
Θά εἶναι:
$R=ΟΑ=ΟΓ+ΓΑ=10+25=35$ cm.



σχ. 500

Τό ἐμβαδόν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας του εἶναι:

$$E_{\sigma\lambda}=\pi(R+\rho)\lambda+\pi R^2+\pi\rho^2=\pi(35+10).50+\pi.35^2+\pi.10^2=$$
$$=2250\pi+1225\pi+100\pi=3575\pi \ cm^2.$$

Ὁ ὄγκος τοῦ κώνου εἶναι:

$$V=\frac{1}{3}\pi(R^2+\rho^2+R\rho)\upsilon=\frac{1}{3}\pi(35^2+10^2+35.10).25\sqrt{3}=\frac{41875\sqrt{3}}{3}\pi$$

660. Ὁμοίως, ὅταν $\varphi=\frac{\pi}{4}$, $\upsilon=12 \ cm$ καί $R=24 \ cm$.

Λ ύ σ ι ς: Ἐάν $\varphi=\frac{\pi}{4}$, ἐκ τοῦ σχήματος τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως θά εἶναι: $A\Gamma=B\Gamma=\upsilon=12 \ cm$. Ἄρα:

$$\lambda^2=12^2+12^2=144+144=2.144 \Longrightarrow \lambda=12\sqrt{2}$$

Ἄρα $\rho=O\Gamma=OA-\Gamma A=24-12=12 \ cm$.

Τό ἐμβαδόν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας εἶναι:

$$E_{\sigma\lambda}=\pi(R+\rho)\lambda+\pi R^2+\pi\rho^2=\pi(24+12).12\sqrt{2}+\pi.24^2+\pi.12^2=$$
$$=432\sqrt{2}\pi+576\pi+144\pi=432\sqrt{2}\pi+720\pi=\pi(720+432\sqrt{2}) \ cm^2.$$

Ὁ ὄγκος τοῦ κώνου εἶναι:

$$V=\frac{1}{3}\pi(R^2+\rho^2+R\rho)\upsilon=\frac{1}{3}\pi(24^2+12^2+24.12).12=4032\pi \ cm^3.$$

661. Εἰς κόλουρον κῶνον ἐκ περιστροφῆς νά ἀποδειχθῇ ὅτι: 1) $\lambda=\sqrt{\upsilon^2+(R-\rho)^2}$, 2) $E_{\kappa\upsilon\rho\tau\acute{\eta}}=\pi(R+\rho)\sqrt{\upsilon^2-(5-\rho)^2}=\pi\lambda(2R-\sqrt{\lambda^2-\upsilon^2})$

Λ ύ σ ι ς: 1) Ἐκ τοῦ σχήματος 186 τοῦ βιβλίου εἶναι:

$$HA=OA-OH=OA-O_1B=R-\rho$$

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΒΗΑ ἔχομεν:

$$\lambda^2=BH^2+HA^2=\upsilon^2+(R-\rho)^2 \Longrightarrow \lambda=\sqrt{\upsilon^2+(R-\rho)^2} \quad (1)$$

2) $$E_{\kappa}=\pi(R+\rho)\lambda=\pi(R+\rho)\sqrt{\upsilon^2+(R-\rho)^2} \quad (2)$$

3) $$E_{\kappa}=\pi(R+\rho)\lambda=\pi\lambda(R+\rho)=\pi\lambda(R+OA-HA)=$$
$$=\pi\lambda(R+R-\sqrt{\lambda^2-\upsilon^2})=\pi\lambda(2R-\sqrt{\lambda^2-\upsilon^2}) \quad (3)$$

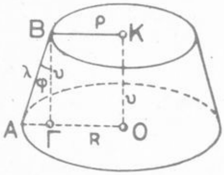
662. Ἄν ἡ γενέτειρα γωνία κολούρου κώνου ἐκ περιστροφῆς εἶναι $\varphi=\frac{\pi}{4}$ ἤ $\varphi=\frac{\pi}{6}$ ἤ $\varphi=\frac{\pi}{3}$, νά ἀποδειχθῇ ἀντιστοίχως ὅτι:

1) $E_{\kappa\upsilon\rho\tau\acute{\eta}}=\pi(R-\rho)(R-\rho)\sqrt{2}$, 2) $E_{\kappa\upsilon\rho\tau\acute{\eta}}=\frac{2}{9}\pi\upsilon(6\rho\sqrt{3}-3\upsilon)$,

3) $E_{\kappa\upsilon\rho\tau\acute{\eta}}=\frac{1}{2}\pi\lambda(4\rho-\lambda\sqrt{3})$.

Λ ύ σ ι ς: 1) Ἄγομεν τό ὕψος ΒΓ, ὁπότε, ἄν $\varphi=\frac{\pi}{4}$, ἕπεται

$A\Gamma=\Gamma B=\upsilon=R-\rho$ καί $\lambda^2=\upsilon^2+\upsilon^2=2\upsilon^2 \Longrightarrow \lambda=\upsilon\sqrt{2}=(R-\rho)\sqrt{2}$.



σχ.501

Κατ' ἀκολουθίαν:

$$E_\kappa=\pi(R+\rho)\lambda=\pi(R+\rho)(R-\rho)\sqrt{2}.$$

2) Ἐάν $\varphi=\frac{\pi}{6}$, τότε $A\Gamma=\frac{\lambda}{2}$ καί κατ' ἀκολουθίαν:

$$\upsilon^2=\lambda^2-A\Gamma^2=\lambda^2-\frac{\lambda^2}{4}=\frac{3\lambda^2}{4} \Longrightarrow \lambda=\frac{2\upsilon\sqrt{3}}{3}$$

$$R=O\Gamma+A\Gamma=\rho+\frac{\lambda}{2}=\rho+\frac{\upsilon\sqrt{3}}{3}.$$ Ἄρα:

$$E_\kappa=\pi(R+\rho)\lambda=\pi\left(\rho+\frac{\upsilon\sqrt{3}}{3}+\rho\right)\cdot\frac{2\upsilon\sqrt{3}}{3}=\frac{2\pi\upsilon}{9}(6\rho\sqrt{3}+3\upsilon)$$

3) Ἔστω $\varphi=\frac{\pi}{3}$, ἄρα $\sphericalangle\,\Gamma AB=\frac{\pi}{6}$, ὁπότε $\upsilon=\frac{\lambda}{2}$ καί ἄρα:

$$A\Gamma^2=\lambda^2-\upsilon^2=\lambda^2-\frac{\lambda^2}{4}=\frac{3\lambda^2}{4} \Longrightarrow A\Gamma=\frac{\lambda\sqrt{3}}{2}$$

καί ἄρα: $$R=OA=O\Gamma+A\Gamma=\rho+\frac{\lambda\sqrt{3}}{2}.$$ Ὅθεν:

$$E_\kappa=\pi(R+\rho)\lambda=\pi\left(\rho+\frac{\lambda\sqrt{3}}{2}+\rho\right)\cdot\lambda=\frac{1}{2}\pi\lambda(4\rho+\lambda\sqrt{3})$$

663. Ἐάν $\varphi=\frac{\pi}{6}$, τότε νά ἀποδειχθῇ ὅτι:

1) $R=\frac{1}{2}\left(\frac{E_\kappa}{\pi\lambda}+\frac{\lambda}{2}\right)$ καί 2) $\rho=\frac{1}{2}\left(\frac{E_\kappa}{\pi\lambda}-\frac{\lambda}{2}\right)$.

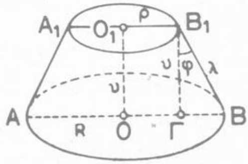
Λ ύ σ ι ς: Ἐάν $\varphi=\frac{\pi}{6}$, τότε

$\Gamma B=\frac{\lambda}{2}$ ἤ $R-\rho=\frac{\lambda}{2}$ (1)

Ἐκ τοῦ τύπου $E_\kappa=\pi(R+\rho)\lambda$ ἕπεται ὅτι:

$$R+\rho=\frac{E_\kappa}{\pi\lambda} \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν (1) καί (2), διά προσθαφαιρέσεως κατά μέλη, λαμβάνομεν: 1) $R=\frac{1}{2}\left(\frac{E_\kappa}{\pi\lambda}+\frac{\lambda}{2}\right)$ καί 2) $\rho=\frac{1}{2}\left(\frac{E_\kappa}{\pi\lambda}-\frac{\lambda}{2}\right)$.



σχ.502

664. Ὁ ὄγκος κολούρου κώνου ἐκ περιστροφῆς δίδεται καί ὑπό τοῦ τύπου: $V=\frac{1}{4}\pi\upsilon\left[(R+\rho)^2+\frac{1}{3}(R-\rho)^2\right]$.

Λ ύ σ ι ς: Γνωρίζομεν ὅτι: $V=\frac{1}{3}\pi(R^2+\rho^2+R\rho)\upsilon$ (1)

Ἔχομεν ὅμως τήν ταυτότητα:

$$4R^2+4\rho^2+4R\rho=3R^2+3\rho^2+6R\rho+R^2+\rho^2-2R\rho$$
$$=3(R^2+\rho^2+2R\rho)+(R^2+\rho^2-2R\rho)$$
$$=3(R+\rho)^2+(R-\rho)^2,$$

ἐξ οὗ: $R^2+\rho^2+R\rho=3\left(\frac{R+\rho}{2}\right)^2+\left(\frac{R-\rho}{2}\right)^2$

καί ἡ (1) γίνεται:

$$V=\frac{\pi.\upsilon}{3}\left[3.\left(\frac{R+\rho}{2}\right)^2+\left(\frac{R-\rho}{2}\right)^2\right]=\frac{1}{4}\pi\upsilon\left[(R+\rho)^2+\frac{1}{3}(R-\rho)^2\right].$$

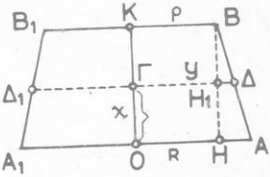
665. Αἱ διαστάσεις κολούρου κώνου ἐκ περιστριφῆς εἶναι R,ρ,υ. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπό τῆς μεγαλυτέρας βάσεως πρέπει νά φέρωμεν ἐπίπεδον παράλληλον πρός τάς βάσεις, ὥστε τό ἐμβαδόν τῆς τομῆς νά εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν ἐμβαδῶν τῶν βάσεων;

Λύσις: Ἔστω $\Delta\Delta_1=2y$ ἡ διάμετρος τῆς τομῆς καί $O\Gamma=x$.

Θά πρέπει νά ἔχωμεν:

$$(\pi y^2)^2=(\pi R^2)(\pi\rho^2)$$

ἤ $y^4=R^2\rho^2 \Longrightarrow y=\sqrt{R\rho}$ (1)



σχ.503

Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων $BH_1\Delta$ καί BHA ἔχομεν:

$$\frac{BH_1}{H\Delta}=\frac{BH}{HA} \quad ἤ \quad \frac{\upsilon-x}{y-\rho}=\frac{\upsilon}{R-\rho} \quad ἤ \quad \upsilon(R-\rho)-x(R-\rho)=\upsilon y-\upsilon R$$

ἤ $$\upsilon(R-y)=x(R-\rho) \Longrightarrow x=\frac{\upsilon(R-y)}{R-\rho} \qquad (2)$$

Ἡ (2), βάσει τῆς (1), γίνεται: $x=\frac{\upsilon(R-\sqrt{R\rho})}{R-\rho}$ (3)

666. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπό τῆς μεγαλυτέρας βάσεως κολούρου κώνου ἐκ περιστροφῆς πρέπει νά φέρωμεν ἐπίπεδον παράλληλον πρός αὐτήν, ὥστε ἡ κυρτή ἐπιφάνειά του νά διαιρῆται εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη;

Λύσις: Ἔστω AA_1B_1B μία μεσημβρινή τομή τοῦ κολούρου κώνου καί $\Gamma\Gamma_1$ ἡ τομή αὐτῆς ὑπό τοῦ ζητουμένου παραλλήλου ἐπιπέδου. Αἱ κυρταί ἐπιφάνειαι τῶν δύο μερῶν τοῦ κολούρου κώνου παράγονται ὑπό τῶν ΒΓ καί ΓΑ, ὅταν στραφοῦν περί τό ὕψος ἰσοσκελοῦς τριγώνου OAA_1. Θά εἶναι δηλαδή:

$$E_{(B\Gamma)}=E_{(\Gamma A)}$$

ἤ $$E_{(O\Gamma)}-E_{(\rho B)}=E_{(\rho A)}-E_{(O\Gamma)} \qquad (1)$$

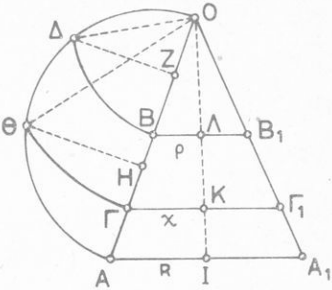
α cm

Ἀλλά οἱ κῶνοι γενετειρῶν ΟΓ, ΟΒ,ΟΑ εἶναι ὅμοιοι καί κατ'ἀκολουθίαν τά ἐμβαδά τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν των εἶναι ἀνάλογα πρός τά τετράγωνα τῶν γενετειρῶν των καί κατ'ἀκολουθίαν ἀνάλογα πρός τά ἐμβαδά τῶν τριγώνων $ΟΓΓ_1$, $ΟΒΒ_1$ καί $ΟΑΑ_1$. Ἄρα ἡ (1) γίνεται:

$$(ΟΓΓ_1)-(ΟΒΒ_1)=(ΟΑΑ_1)-(ΟΓΓ_1)$$

ἤ $$(ΒΒ_1Γ_1Γ)=(ΓΓ_1Α_1Α) \qquad (2)$$

Ἡ (2) δεικνύει ὅτι ἡ $ΓΓ_1$ διαιρεῖ τό τραπέζιον $ΑΑ_1Β_1Β$ εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη. Οὕτω τό πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τό: Νά ἀχθῇ ἡ $ΓΓ_1$ παράλληλος πρός τάς βάσεις τοῦ τραπεζίου καί διαιροῦσα αὐτό εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη (ἰδέ ἄσκησιν 120).



σχ.504

[illegible]7. Ἐπί τοῦ ἀποστήματος κολούρου κώνου ἐκ περιστροφῆς νά ὁρισθῇ σημεῖον, τοιοῦτον ὥστε, ἄν ἀχθῇ ἐπίπεδον παράλληλον πρός τάς βάσεις, νά διαιρῆται ὁ ὄγκος του εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη;

Λ ύ σ ι ς: Ἐργασία ὁμοία πρός τήν προηγουμένην.

Δυνάμεθα ὅμως νά ἐργασθῶμεν καί ὡς ἑξῆς: Ἐάν V, V_1, V_2 εἶναι οἱ ὄγκοι τῶν τριῶν κώνων $ΟΑΑ_1$, $ΟΒΒ_1$ καί $ΟΓΓ_1$, θά εἶναι:

$$\frac{V-V_1}{V-V_2}=2 \qquad (1)$$

Ἐπειδή οἱ κῶνοι οὗτοι εἶναι ὅμοιοι, θά ἰσχύουν αἱ σχέσεις:

$$\frac{V}{ΟΑ_1^3}=\frac{V_1}{ΟΒ_1^3}=\frac{V_2}{ΟΓ_1^3}=\frac{V-V_1}{ΟΑ_1^3-ΟΒ_1^3}=\frac{V-V_2}{ΟΑ_1^3-ΟΒ_1^3} \qquad (2)$$

καί λόγῳ τῆς (1) ἡ (2) γίνεται:

$$\frac{ΟΑ_1^3-ΟΒ_1^3}{ΟΑ_1^3-ΟΓ_1^3}=2 \Rightarrow ΟΓ=\sqrt[3]{\frac{ΟΑ_1^3+ΟΒ_1^3}{2}} \qquad (3)$$

Ἀλλ'εἶναι καί: $$\frac{ΟΑ_1}{R}=\frac{ΟΒ_1}{ρ}=\frac{ΟΑ_1-ΟΒ_1}{R-ρ}=\frac{λ}{R-ρ}$$

ἐξ οὗ: $$ΟΑ_1=\frac{Rλ}{R-λ} \quad καί \quad ΟΒ_1=\frac{ρλ}{R-λ},$$

καί ἡ (1) γίνεται: $$ΟΓ_1=\frac{λ}{R-λ}\sqrt[3]{\frac{R^3+ρ^3}{2}} \qquad (4)$$

καί κατ'ἀκολουθίαν:

$$Γ_1Α_1=ΟΑ_1-ΟΓ_1=\frac{λ}{R-ρ}-\frac{λ}{R-ρ}\sqrt[3]{\frac{R^3+ρ^3}{2}}=\frac{λ}{R-ρ}\left[1-\sqrt[3]{\frac{R^3+ρ^3}{2}}\right] \qquad (5)$$

668. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι εἰς κόλουρον κῶνον ἐκ περιστροφῆς εἶναι $\lambda=R+\rho$, ποῖαι σχέσεις ὑπάρχουν 1) μεταξύ υ καί τῶν R,ρ; 2) μεταξύ V καί τῶν E_κ,υ;

Λ ύ σ ι ς: 1) Βάσει τῆς ἀσκήσεως 661-1 εἶναι:

$$\upsilon^2=\lambda^2-(R-\rho)^2 \qquad (1)$$

καί ἐπειδή $\lambda=R+\rho$, ἡ (1) γίνεται:

$$\upsilon^2=(R+\rho)^2-(R-\rho)^2=4R\rho \implies \upsilon=2\sqrt{R\rho} \qquad (2)$$

2) Εἶναι: $E_\kappa=\pi(R+\rho)\lambda+\pi R^2+\pi\rho^2=\pi(R+\rho)(R+\rho)+\pi R^2+\pi\rho^2$

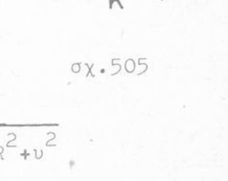
$$=\pi(R+\rho)^2+\pi R^2+\pi\rho^2=2\pi(R^2+\rho^2+R\rho) \qquad (3)$$

Ἐπειδή δέ: $V=\frac{1}{3}\pi(R^2+\rho^2+R\rho)$ (4)

ἔπεται ὅτι: $\frac{E_\kappa}{V}=\frac{\upsilon}{6} \implies V=E_\kappa\cdot\frac{\upsilon}{6}$. (5)

Ἡ (5) ἐκφράζει ὅτι: ὁ ὄγκος κολούρου κώνου ἐκ περιστροφῆς ἰσοῦται πρός τό γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του, ἐπί τό ἕκτον τοῦ ὕψους του, ὅταν $\lambda=R+\rho$.

669. Κῶνος ἐκ περιστροφῆς ἔχει ὕψος υ καί ἀκτῖνα βάσεως R. Νά τμηθῆ οὗτος ὑπό ἐπιπέδου παραλλήλου πρός τήν βάσιν, ὥστε τό ἐμβαδόν τῆς τομῆς νά εἶναι ἰσοδύναμον πρός τό ἐμβαδόν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ προκύπτοντος κολούρου κώνου.



σχ.505

Λ ύ σ ι ς: Ἔστω OAB καί A_1B_1 ἡ ζητουμένη τομή. Πρέπει νά ἔχωμεν:

$$\pi.K_1B_1^2=\pi(KB+K_1B_1).BB_1 \qquad (1)$$

Θέτομεν $OK_1=x$ καί ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων OK_1B_1, OKB θά ἔχωμεν:

$$\frac{OK_1}{K_1B_1}=\frac{OK}{KB} \text{ ἤ } \frac{x}{K_1B_1}=\frac{\upsilon}{R} \implies K_1B_1=\frac{Rx}{\upsilon} \qquad (2)$$

Ἐξ ἄλλου:

$$\frac{BB_1}{KK_1}=\frac{OB}{OK} \text{ ἤ } \frac{BB_1}{\upsilon-x}=\frac{\sqrt{R^2+\upsilon^2}}{\upsilon} \implies BB_1=\frac{\upsilon-x}{\upsilon}\sqrt{R^2+\upsilon^2} \qquad (3)$$

Βάσει τῶν (2) καί (3), ἡ (1) γίνεται:

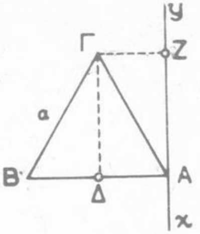
$$\frac{R^2x^2}{\upsilon^2}=\left(R+\frac{Rx}{\upsilon}\right)\cdot\frac{\upsilon-x}{\upsilon}\sqrt{R^2+\upsilon^2}$$

ἐξ οὗ:

$$\frac{x^2}{\upsilon^2}=\frac{\sqrt{R^2+\upsilon^2}}{R+\sqrt{R^2+\upsilon^2}} \qquad (4)$$

Ἀναγόμεθα οὕτως εἰς τό πρόβλημα τῆς §26 τοῦ βιβλίου.

670. 'Ισόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς α στρέφεται κατά γωνίαν 2π περί ἄξονα xy τοῦ ἐπιπέδου του, κάθετον πρός τήν πλευράν ΑΒ εἰς τό Α. Ποῖος ὁ ὄγκος καί ἡ ἐπιφάνεια τοῦ παραγομένου σχήματος;



Λ ύ σ ι ς: Ἄγομεν τό ὕψος ΓΔ τοῦ τριγώνου ΑΓΒ καί τήν κάθετον ΓΖ πρός τόν ἄξονα xy. Θά εἶναι:

$$ΓΖ=ΑΔ=\frac{α}{2},\qquad ΑΖ=ΔΓ=\frac{α\sqrt{3}}{2}$$

καί κατ' ἀκολουθίαν:

'Ο ὄγκος τοῦ παραγομένου σχήματος εἶναι:

$$V_{(ΑΒΓ)}=V_{(ΑΒΓΖ)}-V_{(ΑΓΖ)}=\frac{1}{3}π(ΑΒ^2+ΓΖ^2+ΑΒ.ΓΖ).ΑΖ-\frac{1}{3}π.ΓΖ^2.ΑΖ$$ σχ.506

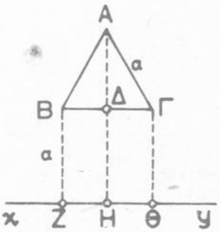
$$=\frac{1}{3}π\left(α^2+\frac{α^2}{4}+α.\frac{α}{2}\right).\frac{α\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{3}π.\frac{α^2}{4}.\frac{α\sqrt{3}}{2}=\frac{π.α^3\sqrt{3}}{24}.$$

'Η ἐπιφάνεια τοῦ προηγουμένου σχήματος εἶναι:

$$E=E_{(ΓΒ)}+E_{(ΓΑ)}+E_{(ΑΒ)}=π(ΑΒ+ΓΖ).ΓΒ+π.ΓΖ.ΑΓ+π.ΑΒ^2=$$

$$=π\left(α+\frac{α}{2}\right).α+π.\frac{α}{2}.α+πα^2=3πα^2.$$

671. Τό αὐτό πρόβλημα, ἄν ὁ ἄξων xy ἀπέχῃ τῆς ΒΓ ἀπόστασιν α.



Λ ύ σ ι ς: Εἶναι $ΒΖ=α=ΔΗ,\ ΑΔ=\frac{α\sqrt{3}}{2}$,

$$ΑΗ=ΑΔ+ΔΗ=\frac{α\sqrt{3}}{2}+α=\frac{α}{2}(2+\sqrt{3})\ \text{καί}\ ΖΗ=ΒΔ=\frac{α}{2}.$$

'Ο ὄγκος τοῦ παραγομένου σχήματος ὑπό τοῦ ΑΒΓ εἶναι:

$$V_{(ΑΒΓ)}=2V_{(ΑΒΖΗ)}-2V_{(ΒΖΗΔ)}$$

$$=2.\frac{1}{3}π(ΑΗ^2+ΒΖ^2+ΑΗ.ΒΖ).ΖΗ-2.π.ΒΖ^2.ΖΗ$$

$$=\frac{2π}{3}\left[\frac{α^2}{4}(2+\sqrt{3})^2+α^2+\frac{α}{2}(2+\sqrt{3}).α\right].\frac{α}{2}-2π.α^2.\frac{α}{2}=\frac{πα^3}{4}(1+2\sqrt{3})$$

Τό ἐμβαδόν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ παραγομένου σχήματος εἶναι:

$$E=2E_{(ΑΒ)}+E_{(ΒΓ)}=2.π(ΑΗ+ΒΖ).ΑΒ+2π.ΒΖ.ΒΓ=$$

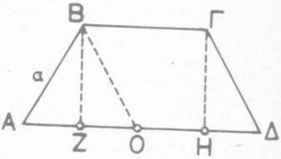
$$=2π\left[\frac{α}{2}(2+\sqrt{3})+α\right].α+2π.α.α=πα^2(6+\sqrt{3}).$$

672. Κανονικόν ἡμιεξάγωνον στρέφεται κατά γωνίαν 2π περί τήν διάμετρόν του ΑΒ=2α. Νά ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος καί ἡ ὁλική ἐπιφάνεια τοῦ παραγομένου σχήματος.

780 1000 220 2000 19100 14100 14100 9900 6200

Λ ύ σ ι ς: Ἄγομεν τάς καθέτους ΒΖ καί ΓΗ πρός τήν ΑΔ. Θά εἶναι: $AZ=\frac{AO}{2}=\frac{\alpha}{2}$ καί $B=\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$.

Ὁ ὄγκος τοῦ παραγομένου σχήματος εἶναι:



σχ.508

$$V_{(AB\Gamma\Delta)}=2.V_{(BZA)}+V_{(B\Gamma HZ)}=$$
$$=2.\frac{1}{3}\pi.BZ^2.AZ+\pi.BZ^2.B\Gamma=$$
$$=\frac{2}{3}\pi.\frac{3\alpha^2}{4}.\frac{\alpha}{2}+\pi.\frac{3\alpha^2}{4}.\alpha=\frac{\pi\alpha^3}{4}+\frac{3\pi\alpha^3}{4}=\pi\alpha^3$$

Τό ἐμβαδόν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ παραγομένου σχήματος θά εἶναι:

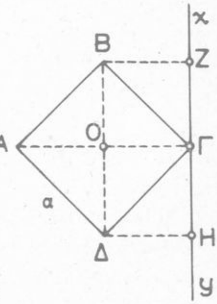
$$E=2.E_{(AB)}+E_{(B\Gamma)}=2.\pi.BZ.AB+2\pi.BZ.B\Gamma$$
$$=2\pi.\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}.\alpha+2\pi.\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}.\alpha=2\pi\alpha^2\sqrt{3}.$$

673. Τετράγωνον ΑΒΓΔ πλευρᾶς α στρέφεται κατά γωνίαν 2π περί ἄξονα xy τοῦ ἐπιπέδου του κάθετον ἐπί τήν διαγώνιον ΑΓ εἰς τό Γ. Νά ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος καί ἡ ὁλική ἐπιφάνεια τοῦ παραγομένου σχήματος.

Λ ύ σ ι ς: Ἄγομεν τάς καθέτους ΒΖ καί ΔΗ ἐπί τόν ἄξονα xy. Θά εἶναι:

$$A\Gamma=\alpha\sqrt{2},\ BZ=\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}=\Delta H,\ \text{καί}\ BO=\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}.$$

Ὁ ὄγκος τοῦ παραγομένου σχήματος θά εἶναι:



σχ.509

$$V=2.V_{(AB\Gamma Z)}-2.V_{(\Gamma ZB)}=$$
$$=2.\frac{1}{3}\pi\left[A\Gamma^2+BZ^2+A\Gamma.BZ\right].OB-2.\frac{1}{3}\pi.BZ^2.\Gamma Z=$$
$$=\frac{2\pi}{3}\left[2\alpha^2+\frac{2\alpha^2}{4}+\alpha\sqrt{2}.\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}\right].\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}-\frac{2\pi}{3}.\frac{2\alpha^2}{4}.\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$$
$$=\frac{2\pi}{3}\left[2\alpha^2+\frac{2\alpha^2}{4}+\alpha^2\right]\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}-\frac{\pi\alpha^3\sqrt{2}}{6}=\frac{14\pi\alpha^3\sqrt{2}}{12}-\frac{\pi\alpha^3\sqrt{2}}{6}=\pi\alpha^3\sqrt{2}.$$

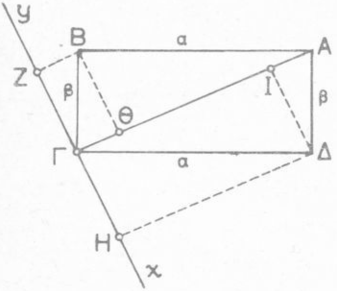
Τό ἐμβαδόν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ παραγομένου σχήματος εἶναι:

$$E=2.E_{(AB)}+2.E_{(B\Gamma)}=2.\pi(A\Gamma+BZ).AB+2.\pi.BZ.B\Gamma=$$
$$=2\pi\left(\alpha\sqrt{2}+\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}\right).\alpha+2\pi.\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}.\alpha=3\pi\alpha^2\sqrt{2}+\pi\alpha^2\sqrt{2}=4\pi\alpha^2\sqrt{2}.$$

674. Ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ εἶναι ΑΒ=α, ΑΔ=β. Στρέφεται τοῦτο κατά γωνίαν 2π περί εὐθεῖαν xy τοῦ ἐπιπέδου του, κάθετον ἐπί τήν διαγώνιον ΑΓ εἰς τό Γ. Ποῖος ὁ ὄγκος τοῦ παραγομένου σχήματος;

Λ ύ σ ι ς: Ἄγομεν τάς καθέτους ΒΖ,ΔΗ,ΒΘ,ΔΙ ἐπί τάς καί ΑΓ ἀντιστοίχως. Θά εἶναι:

$$A\Gamma=\sqrt{\alpha^2+\beta^2},\quad B\Theta=\Gamma Z=\frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.$$



σχ.510

Ὁμοίως $\Delta I=\Gamma H=\frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ καί

$$B\Gamma^2=\Gamma A.\Gamma\Theta \Rightarrow \beta^2=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}.\Gamma\Theta \Rightarrow$$

$$\Gamma\Theta=\frac{\beta^2}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}=BZ$$ καί $\Gamma\Delta^2=\Gamma A.\Gamma I$ ἤ

$$\alpha^2=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}.\Gamma I \Rightarrow \Gamma I=\Delta H=\frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

Ὁ ὄγκος τοῦ παραγομένου σχήματος εἶναι:

$$V=V_{(AB\Gamma)}+V_{(A\Delta\Gamma)}=\frac{1}{3}\pi\left[A\Gamma^2+BZ^2+A\Gamma.BZ\right].\Gamma Z+\frac{1}{3}\pi\left[A\Gamma^2+\Delta H^2+A\Gamma.\Delta H\right].\Gamma H$$

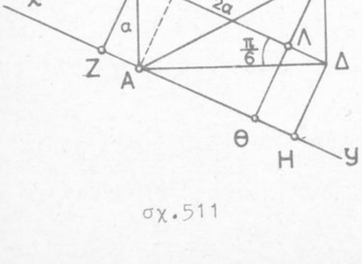
Ἀντικαθιστῶντες τά ἴσα εὑρίσκομεν:

$$V=\frac{1}{3}\pi\left[(\alpha^2+\beta^2)+\frac{\beta^4}{\alpha^2+\beta^2}+\beta^2\right].\frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}+\frac{1}{3}\pi\left[(\alpha^2+\beta^2)+\frac{\alpha^4}{\alpha^2+\beta^2}+\alpha^2\right].\frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

$$=\frac{\pi\alpha\beta}{3\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\left[3(\alpha^2+\beta^2)+\frac{\alpha^4+\beta^4}{\alpha^2+\beta^2}\right]=\frac{2\pi\alpha\beta\left[2\alpha^4+2\beta^4+3\alpha^2\beta^2\right]}{3(\alpha^2+\beta^2)\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.$$

675. Νά ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ σχήματος, ὅπερ παράγεται ὑπό ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ, στρεφομένου περί ἄξονα xAy παράλληλον πρός τήν διαγώνιον ΒΔ=2α, ἄν γωνία $B\Delta A=\frac{\pi}{6}$.

Λ ύ σ ι ς: Ἄγομεν τάς καθέτους ΒΖ,ΔΗ,ΓΘ πρός τόν ἄξο-xAy, ὅστις εἶναι παράλληλος πρός τήν διαγώνιον ΒΔ=2α. Ἀφοῦ



σχ.511

∢ $B\Delta A=\frac{\pi}{6}$, ἕπεται ὅτι ΑΒ=α καί κατ' ἀκολουθίαν:

$$A\Delta^2=B\Delta^2-AB^2=4\alpha^2-\alpha^2=3\alpha^2 \Rightarrow$$

$A\Delta=\alpha\sqrt{3}$. Θά εἶναι δέ καί ΑΓ=ΒΔ=2α. Ἄγομεν τήν ΑΚ⊥ΒΔ. Θά εἶναι:

$$\frac{1}{AK^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{A\Delta^2}=\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{3\alpha^2}=\frac{4}{3\alpha^2} \Rightarrow$$

$AK=\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}=\Gamma\Lambda$. Ὅθεν καί:

$\Theta\Lambda=BZ=\Delta H=AK=\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$. Ἄρα:

$$AZ^2=AB^2-BZ^2=\alpha^2-\frac{3\alpha^2}{4}=\frac{\alpha^2}{4} \implies AZ=\frac{\alpha}{2}=\Theta H$$

καί $AH^2=A\Delta^2-\Delta H^2=3\alpha^2-\frac{3\alpha^2}{4}=\frac{9\alpha^2}{4} \implies AH=\frac{3\alpha}{2}$

καί $\Gamma\Theta=\Gamma\Lambda+\Lambda\Theta=AK+\Delta H=\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}+\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}=\alpha\sqrt{3}$ καί $A\Theta=\alpha$

Ὁ ὄγκος ὁ παραγόμενος ὑπό τοῦ τριγώνου ΑΒΔ εἶναι:

$V_{(AB\Delta)}=V_{(B\Delta HZ)}-V_{(ABZ)}-V_{(A\Delta H)}=$

$$=\pi.BZ^2.B\Delta-\frac{1}{3}\pi.BZ^2.AZ-\frac{1}{3}\pi.\Delta H^2.AH=$$

$$=\pi.\frac{3\alpha^2}{4}.2\alpha-\frac{1}{3}\pi.\frac{3\alpha^2}{4}.\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{3}\pi.\frac{3\alpha^2}{4}.\frac{3\alpha}{2}=\pi\alpha^3. \qquad (1)$$

Ὁ ὄγκος ὁ παραγόμενος ὑπό τοῦ ΒΓΔ εἶναι:

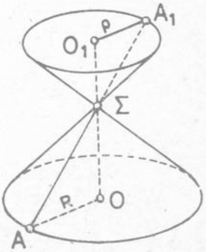
$V_{(B\Gamma\Delta)}=V_{(B\Gamma\Theta Z)}+V_{(\Gamma\Delta HB)}-V_{(B\Delta ZH)}=$

$$=\frac{1}{3}\pi(\Gamma\Theta^2+BZ^2+\Gamma\Theta.BZ).Z\Theta+\frac{1}{3}\pi(\Gamma\Theta^2+\Delta H^2+\Gamma\Theta.\Delta H)\Theta H-\pi.BZ^2.B\Delta$$

$$=\frac{1}{3}\pi(3\alpha^2+\frac{3\alpha^2}{4}+\alpha\sqrt{3}.\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}).\frac{3\alpha}{2}+\frac{1}{3}\pi(3\alpha^2+\frac{3\alpha^2}{4}+\alpha\sqrt{3}.\frac{\alpha\sqrt{3}}{2})\frac{\alpha}{2}-\pi\frac{3\alpha^2}{4}.2\alpha=2\pi\alpha^3$$

καί κατ'ἀκολουθίαν: $V_{(AB\Gamma\Delta)}=\pi\alpha^3+2\pi\alpha^3=3\pi\alpha^3$.

676. Ὁ ὄγκος κολούρου κώνου ἐκ περιστροφῆς τοῦ δευτέρου εἴδους παρέχεται ὑπό τοῦ τύπου: $V=\frac{1}{3}\pi\upsilon(R^2+\rho^2-R\rho)$.



σχ.512

Λ ύ σ ι ς: Ὁ ὄγκος τοῦ κολούρου κώνου ἐκ περιστροφῆς καί τοῦ δευτέρου εἴδους εἶναι:

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2.\Sigma O+\frac{1}{3}\pi\rho^2.\Sigma O_1 \qquad (1)$$

Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΣΟΑ καί $\Sigma O_1 A_1$ ἔχομεν:

$$\frac{\Sigma O}{R}=\frac{\Sigma O_1}{\rho}=\frac{\Sigma O+\Sigma O_1}{R+\rho}=\frac{OO_1}{R+\rho}=\frac{\upsilon}{R+\rho},$$

ἐξ ὧν λαμβάνομεν: $\Sigma O=\frac{R\upsilon}{R+\rho}$ καί $\Sigma O_1=\frac{\rho\upsilon}{R+\rho}$,

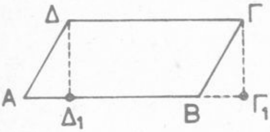
ὁπότε ἡ (1) γίνεται:

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2.\frac{R\upsilon}{R+\rho}+\frac{1}{3}\pi\rho^2.\frac{\rho\upsilon}{R+\rho}=\frac{1}{3}\pi\upsilon.\frac{R^3+\rho^3}{R+\rho}=\frac{1}{3}\pi(R^2+\rho^2-R\rho)\upsilon$$

Ὥστε: $V=\frac{1}{3}\pi(R^2+\rho^2-R\rho)\upsilon$.

677. Ποῖος ὁ λόγος τῶν ὄγκων τῶν σχημάτων τῶν παραγομένων ὑπό τοῦ παραλ/μου ΑΒΓΔ στρεφομένου διαδοχικῶς περί τάς πλευράς ΑΒ καί ΒΓ κατά γωνίαν 2π;

Λ ύ σ ι ς: Ἔστω τό παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ. Ἄγομεν τά ὕψη $ΓΓ_1$ καί $ΔΔ_1$. Ὑποθέτομεν δέ ὅτι τό παραλληλόγραμμον στρέφεται περί τήν ΑΒ κατά γωνίαν 2π. Θά εἶναι:



σχ.513

$$V_{(ΑΒΓΔ)} = V_{(Δ_1Γ_1ΓΔ)} + V_{(ΑΔΔ_1)} - V_{(ΒΓ_1Γ)}$$
$$= πΔΔ_1^2 . Δ_1Γ_1 + \frac{1}{3}π . ΔΔ_1^2 . ΑΔ_1 - \frac{1}{3}πΓΓ_1^2 . ΒΓ_1$$
$$= π . ΔΔ_1^2 . ΑΒ$$

διότι $Δ_1Γ_1 = ΑΒ$ καί $ΑΔ_1 = ΒΓ_1$.

Ἡ (1) γράφεται καί ὡς ἑξῆς:

$$V_{1(ΑΒΓΔ)} = π . ΔΔ_1 . (ΔΔ_1 . ΑΒ) = π . \frac{(ΑΒΓΔ)}{ΑΒ} . (ΑΒΓΔ) = \frac{π(ΑΒΓΔ)^2}{ΑΒ} \quad (2)$$

Ἐάν τό παραλληλόγραμμον στραφῇ περί τήν ΑΔ, τότε:

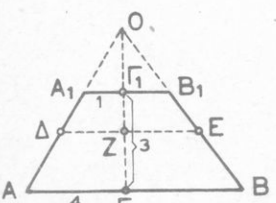
$$V_{2(ΑΒΓΔ)} = \frac{π(ΑΒΓΔ)^2}{ΑΔ} \quad (3)$$

Ἐκ τῶν (2) καί (3) λαμβάνομεν: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{ΑΔ}{ΑΒ}$, (4)

ἡ ὁποία ἐκφράζει ὅτι: Οἱ δύο οὗτοι ὄγκοι εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν πλευρῶν περί τάς ὁποίας περιστρέφεται τό παραλληλόγραμμον.

678. Κολούρου κώνου ἐκ περιστροφῆς εἶναι $υ=3m$, $R=4m$, $ρ=1m$. Νά διαιρεθῇ οὗτος εἰς δύο μέρη ἐπί ἐπιπέδου παραλλήλου πρός τήν βάσιν, ὥστε τό προσκείμενον μέρος πρός τήν μεγαλυτέραν βάσιν νά εἶναι ὀκταπλάσιον τοῦ ἄλλου μέρους.

Λ ύ σ ι ς: Ἔστω $Α_1ΑΒΑ_1$ μία μεσημβρινή τομή τοῦ κολούρου κώνου καί ΔΕ ἡ τομή αὐτῆς ὑπό τοῦ ζητουμένου παραλλήλου ἐπιπέδου πρός τάς βάσεις τοῦ κολ.κώνου, τοιαύτη ὥστε:



σχ.514

$$\frac{V_{(ΑΒΕΔ)}}{V_{(ΔΕΒ_1Α_1)}} = 8 \quad ἤ \quad \frac{V_{(ΟΑΒ)} - V_{(ΟΔΕ)}}{V_{(ΟΔΕ)} - V_{(ΟΑ_1Β_1)}} = 8 \quad (1)$$

Ἐπειδή οἱ κῶνοι ΟΑΒ, ΟΔΕ, $ΟΑ_1Β_1$ εἶναι ὅμοιοι, ἡ (8) γίνεται:

$$\frac{ΟΓ^3 - ΟΖ^3}{ΟΖ^3 - ΟΓ_1^3} = 8 \quad (2).$$ Ἀλλά

$\frac{ΟΓ}{4} = \frac{ΟΓ_1}{1} = \frac{ΟΓ - ΟΓ_1}{4-1} = \frac{3}{3} = 1$, ἐξ οὗ: $ΟΓ = 4$, $ΟΓ_1 = 1$ καί ἡ (2) γίνεται:

$$\frac{64-OZ^3}{OZ^3-1}=8 \Rightarrow OZ=2.$$ Οὕτω τό σημεῖον Ζ κεῖται ἐπί τοῦ $ΓΓ_1$ εἰς τά $\frac{2}{3}$ τοῦ ὕφους ἀπό τό $Γ_1$.

679. Νά διαιρεθῇ τό ἐμβαδόν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κολούρου κώνου ἐκ περιστροφῆς εἰς ν ἰσοδύναμα μέρη ὑπό ἐπιπέδων παραλλήλων πρός τάς βάσεις του.

Λ ύ σ ι ς: Πρός λύσιν τῆς ἀσκήσεως ταύτης, ἀρκεῖ νά λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τήν ἄσκησιν 667 καί τήν ἄσκησιν 120.

503

680. Ὁ λόγος τῶν τετραγώνων τῶν ὄγκων δύο ὁμοίων κολούρων κώνων ἐκ περιστροφῆς ἰσοῦται πρός τόν λόγον τῶν κύβων τῶν ὁλικῶν ἐπιφανειῶν των ἤ τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν αὐτῶν.

Λ ύ σ ι ς: Ἔστωσαν R, ρ, υ τά στοιχεῖα τοῦ πρώτου κολούρου κώνου ἐκ περιστροφῆς καί $R_1, ρ_1, υ_1$ τά στοιχεῖα τοῦ δευτέρου ὁμοίου κολούρου κώνου καί V, V_1 οἱ ὄγκοι αὐτῶν.

Θά εἶναι: $$\frac{V}{V_1}=\frac{\frac{1}{3}πυ(R^2+ρ^2+R.ρ)}{\frac{1}{3}πυ_1(R_1^2+ρ_1^2+R_1ρ_1)}=\frac{υ}{υ_1}\cdot\frac{R^2+ρ^2+R.ρ}{R_1^2+ρ_1^2+R_1ρ_1} \qquad (1)$$

Ἐπειδή οἱ κόλ.κῶνοι εἶναι ὅμοιοι, τά ὀρθογώνια τραπέζια ἀπό τά ὁποῖα παράγονται θά εἶναι ὅμοια, καί ἄρα:

$$\frac{λ}{λ_1}=\frac{R}{R_1}=\frac{ρ}{ρ_1}=\frac{υ}{υ_1}=k \Rightarrow \left.\begin{array}{l} R=R_1.k \\ ρ=ρ_1.k \\ υ=υ_1.k \\ λ=λ_1.k\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} R^2=R_1^2.k^2 \\ ρ^2=ρ_1^2.k^2 \\ Rρ=R_1ρ_1.k^2\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{R^2+ρ^2+R.ρ}{R_1^2+ρ_1^2+R_1ρ_1}=k^2$$

καί ἡ (1) γίνεται: $$\frac{V}{V_1}=k\cdot k^2=k^3 \Rightarrow \frac{V^2}{V_1^2}=k^6 \qquad (2)$$

Ὁ λόγος τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν των εἶναι:

$$\frac{E_κ}{E_{1κ}}=\frac{π.(R+ρ).λ}{π.(R_1+ρ_1).λ_1} \quad (3).$$ Ἀλλά $$\frac{R}{R_1}=\frac{ρ}{ρ_1}=\frac{υ}{υ_1}=\frac{λ}{λ_1}=\frac{R+ρ}{R_1+ρ_1}$$

καί ἡ (3) γίνεται:

$$\frac{E}{E_1}=\frac{R+ρ}{R_1+ρ_1}\cdot\frac{λ}{λ_1}=k.k=k^2 \Rightarrow \frac{E^3}{E_{1κ}^3}=k^6 \qquad (4)$$

Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τῶν ὁλικῶν ἐπιφανειῶν των εἶναι:

$$\frac{E_{oλ}}{E_{1oλ}}=\frac{π(R+ρ)λ+πR^2+πρ^2}{π(R_1+ρ_1)λ_1+πR_1^2+πρ_1^2}=\frac{(R+ρ)λ+R^2+ρ^2}{(R_1+ρ_1)λ_1+R_1^2+ρ_1^2}=k^2 \Rightarrow \frac{E_{oλ}^3}{E_{1oλ}^3}=k^6 \qquad (5)$$

'Εκ τῶν (2),(4) καί (5) λαμβάνομεν:

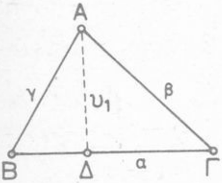
$$\frac{V^2}{V_1^2}=\frac{E_{\kappa}^3}{E_{1\kappa}^3}=\frac{E_{o\lambda}^3}{E_{1o\lambda}^3}$$

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο Ν XIV

ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΙ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ

681. Περί ποίαν πλευράν πρέπει νά στραφῇ τρίγωνον ΑΒΓ κατά γωνίαν 2π,ὥστε νά παραχθῇ ὁ μέγιστος ὄγκος;

Λ ύ σ ι ς:"Εστω $\alpha>\beta>\gamma$ (1) αἱ πλευραί τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καί ὅτι τό τρίγωνον τοῦτο στρέφεται πρῶτον περί τήν πλευράν α. "Εστω ΑΔ ⊥ ΒΓ.Θά εἶναι:



σχ.515

$$V_\alpha=V_{(A\Delta B)}+V_{(A\Delta\Gamma)}=\frac{1}{3}\pi.\upsilon_1^2.\Delta B+\frac{1}{3}\pi.\upsilon_1^2.\Delta\Gamma=$$

$$=\frac{1}{3}\pi.\upsilon_1^2.\alpha=\frac{1}{3}\pi.\upsilon_1.2E$$

ἐξ οὗ: $\upsilon_1=\frac{3V_\alpha}{2\pi E}$ (1)

'Ομοίως ἐργαζόμενοι,εὑρίσκομεν ὅτι:

$\upsilon_2=\frac{3V_\beta}{2\pi E}$ (3) καί $\upsilon_3=\frac{3V_\gamma}{2\pi E}$ (4)

'Εκ τῆς (1) ἕπεται ὅτι $\upsilon_1<\upsilon_2<\upsilon_3$ (5)

ἤ $\frac{3V_\alpha}{2\pi E}<\frac{3V_\beta}{2\pi E}<\frac{3V_\gamma}{2\pi E} \Longrightarrow \boxed{V_\alpha<V_\beta<V_\gamma}$ (6)

"Αρα ὁ μέγιστος ὄγκος παράγεται,ὅταν τό ΑΒΓ στραφῇ περί τήν μικροτέραν πλευράν του.

682. Διά τῆς κορυφῆς Α τριγώνου ΑΒΓ νά ἀχθῇ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ του εὐθεῖα **xy**,μή τέμνουσα αὐτό,τοιαύτη ὥστε ὁ ὄγκος τοῦ σχήματος τοῦ παραγομένου ὑπό τοῦ τριγώνου ΑΒΓ,στρεφομένου περί τήν xy ,νά εἶναι μέγιστος;

Λ ύ σ ι ς: "Εστω ΧΑΥ ἡ ζητουμένη εὐθεῖα καί ὅτι ἡ ΒΓ τέμνει τήν ΧΥ εἰς τό Κ. Ἔστωσαν ΒΘ ⊥ ΑΚ, ΓΙ ⊥ ΑΚ, ΑΕ ⊥ ΒΓ.

Θά εἶναι:

$$V_{(ΑΒΚ)} = \frac{1}{3}\pi.ΒΘ^2.ΑΚ =$$
$$= \frac{1}{3}\pi.ΒΘ.ΑΚ.ΒΘ = \frac{1}{3}\pi.ΒΚ.ΑΕ.ΒΘ = \frac{1}{3}(\pi.ΒΚ.ΒΘ).ΑΕ$$
$$= \frac{1}{3}.E_{(ΒΚ)}.ΑΕ.$$

Ὁμοίως: $V_{(ΑΓΚ)} = \frac{1}{3}.E_{(ΓΚ)}.ΑΕ$

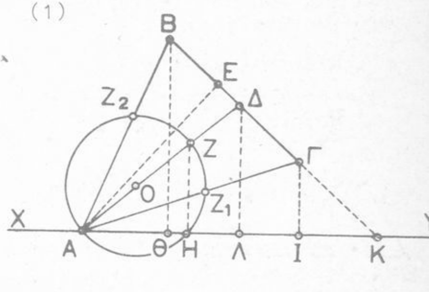
καί κατ' ἀκολουθίαν:

$$V_{(ΑΒΓ)} = V_{(ΑΒΚ)} - V_{(ΑΓΚ)} = \frac{1}{3}.E_{(ΒΚ)}.ΑΕ - \frac{1}{3}.E_{(ΓΚ)}.ΑΕ =$$
$$= \frac{1}{3}.\left[E_{(ΒΚ)} - E_{ΓΚ}\right].ΑΕ = \frac{1}{3}.E_{(ΒΓ)}.ΑΕ =$$
$$= \frac{1}{3}.\pi.(ΒΘ+ΓΙ).ΒΓ.ΑΕ = \frac{1}{3}\pi.(ΒΘ+ΓΙ).2(ΑΒΓ)$$
$$= \frac{1}{3}.(ΑΒΓ).[2\pi(ΒΘ+ΓΙ)] \qquad (1)$$

Ἄν ΑΔ εἶναι ἡ διάμεσος τοῦ ΑΒΓ καί ΔΛ ⊥ ΧΥ, τότε ΒΘ+ΓΙ=2.ΔΛ, καί ἡ (1) γίνεται:

$$V_{(ΑΒΓ)} = \frac{1}{3}(ΑΒΓ).2\pi.2.ΔΛ \quad (2)$$

Ἐκ τοῦ κέντρου βάρους Ζ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἄγομεν τήν κάθετον ΖΗ πρός τήν ΧΥ. Θά εἶναι: $ΔΛ = \frac{3}{2}.ΖΗ$ καί ἡ (2) γίνεται:



σχ.516

$$V_{(ΑΒΓ)} = (ΑΒΓ).2\pi.ΖΗ \qquad (3)$$

Τό μέγιστον τοῦ $V_{(ΑΒΓ)}$ ἀντιστοιχεῖ εἰς τό μέγιστον τοῦ ΖΗ.

Ὑποθέτομεν ὅτι οὐδεμία τῶν γωνιῶν ΔΑΒ, ΔΑΓ εἶναι ἀμβλεῖα. Ἐάν γραφῇ ὁ κύκλος διαμέτρου ΑΖ, τά τόξα $ΖZ_2$ καί $ΖZ_1$ κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς ΑΖ, καί ὅταν ἡ ΧΥ στρέφεται περί τό Α, μένουσα ἐκτός τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἀπό τήν θέσιν ΑΓ ἕως τήν ΑΒ, τό Η θά διαγράφῃ τό τόξον $ΗΑZ_2$ καί τό ΖΗ γίνεται μέγιστον, ὅταν τό Η συμπέσῃ μέ τό Α. Τότε ἡ ΧΥ γίνεται κάθετος πρός τήν διάμεσον ΑΔ.

Ἐάν μία τῶν γωνιῶν ΔΑΒ, ΔΑΓ εἶναι ὀρθή, ἡ ΧΥ συμπίπτει μέ μίαν τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος πρός τήν διάμεσον ΑΔ.

Ἐάν ὑποθέσωμεν ὅτι ΔΑΒ > 1 ὀρθή, τότε αἱ ΑΒ καί ΑΓ τέμνουν τόν κύκλον διαμέτρου ΑΖ εἰς τά σημεῖα Z_2 καί Z_1, τά ὁποῖα κεῖ νται πρός τό αὐτό μέρος τῆς ΑΖ.

Τό Η γράφει τότε τό τόξον Z_2Z_1,καί τό ΖΗ γίνεται μέγιστον,ὅταν τό Η συμπέσῃ μέ τό Z_2. Ἄρα,τότε,ἡ ΧΥ συμπίπτει μέ τήν ΑΒ,δηλαδή μέ ἐκείνην τῶν πλευρῶν ΑΒ,ΑΓ,ἡ ὁποία σχηματίζει μετά τῆς ΑΔ ἀμβλεῖαν γωνίαν.

683. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καί ζητεῖται νά εὑρεθῇ ἐπί τῆς πλευρᾶς ΒΓ ἕν σημεῖον Δ,τοιοῦτον ὥστε οἱ ὄγκοι τῶν σχημάτων,οἱ παραγόμενοι ὑπό τῶν τριγώνων ΑΒΔ,ΑΔΓ,στρεφομένων περί ἄξονα xy τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τριγώνου,μή τέμνοντος αὐτό,νά εἶναι ἰσοδύναμοι.

Λ ύ σ ι ς:Θέτομεν ΒΔ=μ καί ΔΓ=ν καί ἔστωσαν α,β,γ,δ αἱ ἀποστάσεις τῶν Α,Β,Γ,Δ ἀπό τήν εὐθεῖαν xy.

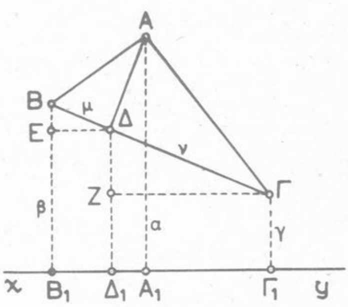
Αἱ ἀποστάσεις τῶν κέντρων βάρους τοῦ τριγώνου ΑΒΔ καί ΑΓΔ ἀπό τήν xy εἶναι ἀντιστοίχως:

$\frac{1}{3}(\alpha+\beta+\delta)$ καί $\frac{1}{3}(\alpha+\gamma+\delta)$

Ἀρκεῖ νά ὁρισθῇ τό Δ ἐπί τῆς ΒΓ,εἰς τρόπον ὥστε:

$$V_{(AB\Delta)}=V_{(A\Gamma\Delta)}$$

ἤ κατά τό θεώρημα τοῦ Πάππου:



$$(AB\Delta).2\pi.\frac{\alpha+\beta+\delta}{3}=(A\Delta\Gamma).2\pi.\frac{\alpha+\gamma+\delta}{3}$$

σχ.517

ἤ $$(AB\Delta).(\alpha+\beta+\delta)=(A\Delta\Gamma).(\alpha+\gamma+\delta) \qquad (1)$$

Ἐπειδή δέ $\frac{(AB\Delta)}{\mu}=\frac{(A\Delta\Gamma)}{\nu}$, ἡ (1) γίνεται:

$$\mu(\alpha+\beta+\delta)=\nu(\alpha+\gamma+\delta) \qquad (2)$$

Ἄγομεν τάς $\Delta E\perp\beta$, $\Gamma Z\perp\delta$ καί ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΔΕΒ καί ΓΖΔ θά ἔχωμεν:

$\frac{\mu}{BE}=\frac{\nu}{\Delta Z}$ ἤ $\frac{\mu}{\beta-\delta}=\frac{\nu}{\delta-\alpha}$ καί ἡ (2) γίνεται:

$$(\beta-\delta).(\alpha+\beta+\delta)=\nu(\alpha+\gamma+\delta)$$

ἤ $$f(\delta)=2\delta^2+2\alpha\delta-(\beta^2+\gamma^2+\alpha\gamma+\alpha\beta)=0 \qquad (3)$$

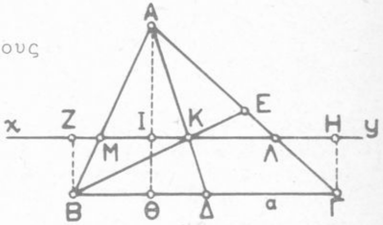
Ἐπειδή $$\left.\begin{aligned} f(\beta)&=(\beta-\gamma).(\alpha+\beta+\gamma)\\ f(\gamma)&=-(\beta-\gamma).(\alpha+\beta+\gamma)\end{aligned}\right\} \Rightarrow f(\beta).f(\gamma)=-(\beta-\gamma)^2(\alpha+\beta+\gamma)^2<0,$$

ἕπεται ὅτι ἡ θετική ρίζα τῆς (3) κεῖται μεταξύ β καί γ. Ἄρα τό πρόβλημα ἔχει μίαν,καί μόνον μίαν,λύσιν. Ἐκ τῆς (3) ὁρίζεται ἡ ἀπόστασις δ,ἄρα καί τό Δ.

684. Διά τοῦ κέντρου βάρους Κ τριγώνου ΑΒΓ ἄγεται παράλ-

ληλος xy πρός τήν ΒΓ καί τό ὅλον σχῆμα στρέφεται περί τήν xy κατά γωνίαν 2π. Νά εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ὄγκων τῶν σχημάτων, τῶν παραγομένων ὑπό τῶν δύο μερῶν, εἰς ἅ χωρίζεται τό τρίγωνον ὑπό τῆς xy.

Λ ύ σ ι ς: Ἄγομεν τάς καθέτους ΑΘ, ΒΖ, ΓΗ πρός τήν xy. Θά εἶναι:



$BZ=I\Theta=\Gamma H=\frac{1}{3}.A\Theta=\frac{1}{3}.\upsilon_1$

καί $AI=\frac{2}{3}.\upsilon_1$.

$V_{(AM\Lambda)}=\frac{1}{3}\pi.AI^2.M\Lambda=\frac{1}{3}\pi.\frac{4}{9}\upsilon_1^2.M\Lambda=$

$=\frac{4\pi}{27}.\upsilon_1^2.M\Lambda=\frac{4\pi}{27}.\upsilon^2.\frac{2}{3}.\alpha=\frac{8\pi.\alpha.\upsilon_1^2}{81}$ (1)

σχ. 518

$V_{(BM\Lambda\Gamma)}=V_{(BZH\Gamma)}-V_{(BZM)}-V_{(\Gamma H\Lambda)}$

$=\pi.BZ^2.HZ-\frac{1}{3}\pi.BZ^2.ZM-\frac{1}{3}.\pi.BZ^2.H\Lambda$

$=\frac{1}{3}.\pi.BZ^2(3.HZ-ZM-H\Lambda)=\frac{1}{3}.\pi.BZ^2(2.HZ+M\Lambda)$

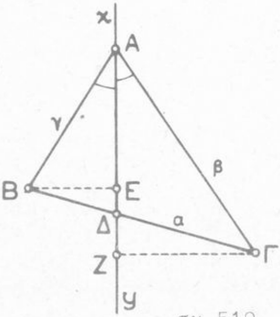
$=\frac{1}{3}\pi.\frac{\upsilon_1^2}{9}.\left(2\alpha+\frac{2\alpha}{3}\right)=\frac{8\pi.\upsilon_1^2.\alpha}{81}$ (2)

Κατ' ἀκολουθίαν:

$$V_{(BM\Lambda\Gamma)}=V_{(AM\Lambda)}$$

685. Τρίγωνον ΑΒΓ στρέφεται περί τήν ἐσωτερικήν διχοτόμον του ΑΔ κατά γωνίαν 2π. Νά εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ὄγκων τῶν σχημάτων τῶν παραγομένων ὑπό τῶν τριγώνων ΑΒΔ καί ΑΔΓ.

Λ ύ σ ι ς: Ἐκ τῶν Β καί Γ ἄγομεν τάς καθέτους ΒΕ καί ΓΖ πρός τήν διχοτόμον xAy τῆς γωνίας Α. Θά εἶναι:



σχ. 519

$V_{(AB\Delta)}=\frac{1}{3}.\pi.BE^2.A\Delta$ (1)

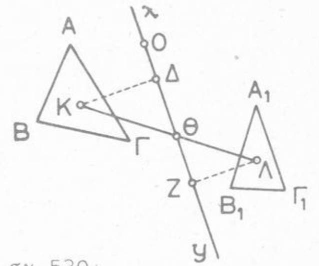
$V_{(A\Delta\Gamma)}=\frac{1}{3}.\pi.\Gamma Z^2.A\Delta$ (2)

Ἐκ τῶν (1) καί (2) λαμβάνομεν:

$$\frac{V_{(AB\Delta)}}{V_{(A\Delta\Gamma)}}=\frac{BE^2}{\Gamma Z^2}=\frac{B\Delta^2}{\Gamma\Delta^2}=\left(\frac{B\Delta}{\Gamma\Delta}\right)^2=\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^2=\frac{\gamma^2}{\beta^2}$$

Ὥστε: $\frac{V_{(AB\Delta)}}{V_{(A\Delta\Gamma)}}=\frac{\gamma^2}{\beta^2}$.

686. Δίδονται δύο τρίγωνα ΑΒΓ καί $A_1B_1\Gamma_1$ καί ἕν σημεῖον Ο ἐπί τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου (Π) κειμένων. Νά ἀχθῇ διά τοῦ Ο εὐθεῖα xy τοῦ (Π), μή τέμνουσα τά τρίγωνα, τοιαύτη ὥστε οἱ ὄγκοι τῶν παραγομένων σχημάτων, ὑπό τῶν τριγώνων, στρεφομένων περί τήν xy κατά γωνίαν 2π, νά ἔχουν λόγον $\frac{\mu}{\nu}$.



Λ ύ σ ι ς: Ἔστωσαν Κ καί Λ τά κέντρα βάρους τῶν τριγώνων ΑΒΓ καί $A_1B_1\Gamma_1$ ἀντιστοίχως καί ΚΔ, ΛΖ κάθετοι πρός τήν xOy. Ἔστω Θ ἡ τομή τῶν εὐθειῶν xy καί ΚΛ. Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΚΔΘ καί ΛΖΘ θά ἔχωμεν: $\frac{K\Theta}{\Lambda\Theta}=\frac{K\Delta}{\Lambda Z}$ (1)

Ἀλλά κατά τό θεώρημα τοῦ Πάππου εἶναι:

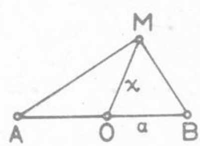
σχ.520

$$\left.\begin{array}{l} V_{(AB\Gamma)}=(AB\Gamma).2\pi.K\Delta \\ V_{(A_1B_1\Gamma_1)}=(A_1B_1\Gamma_1).2\pi.\Lambda Z \end{array}\right\} \rightarrow \frac{\mu}{\nu}=\frac{V_{(AB\Gamma)}}{V_{(A_1B_1\Gamma_1)}}=\frac{K\Delta}{\Lambda Z}=\frac{K\Theta}{\Lambda\Theta} \qquad (2)$$

Ἡ (2) δηλοῖ ὅτι τό Θ εἶναι ὡρισμένον σημεῖον τοῦ τμήματος ΚΛ. Ἄρα εἶναι ὡρισμένη καί ἡ εὐθεῖα ΟΘ, δηλαδή ἡ xy.

Πόσας λύσεις ἔχει τό πρόβλημα;

687. Ποῖος εἶναι ὁ γεωμετρικός τόπος τῶν σημείων τοῦ χώρου, ἀπό τά ὁποῖα δοθέν εὐθ. τμῆμα ΑΒ σταθερόν, θέσει καί μεγέθει, φαίνεται ὑπό ὀρθήν γωνίαν;



Λ ύ σ ι ς: Ἔστω ΑΒ=α τό δοθέν εὐθύγραμμον τμῆμα καί Μ τυχόν σημεῖον τοῦ χώρου, τοιοῦτον ὥστε: $\sphericalangle$ AMB=1 ὀρθή.

Ἐάν Ο εἶναι τό μέσον τοῦ ΑΒ, τότε $OM=x=\frac{\alpha}{2}$, καί κατ' ἀκολουθίαν τό Μ κεῖται ἐπί τῆς σφαίρας, ἡ ὁποία ἔχει κέντρον τό Ο καί ἀκτῖνα $x=\frac{\alpha}{2}$.

σχ.521

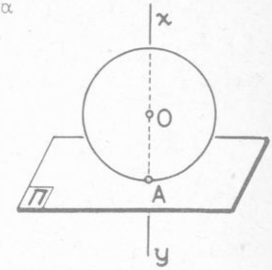
Τό ἀντίστροφον ἀποδεικνύεται εὐκόλως.

688. Ποῖος ὁ γεωμ. τόπος τῶν κέντρων τῶν σφαιρῶν τῶν ἐφαπτομένων δοθέντος ἐπιπέδου (Ρ), εἰς δοθέν σημεῖον Α αὐτοῦ;

Λ ύ σ ι ς: Ἔστω Ο τό κέντρον μιᾶς σφαίρας ἐφαπτομένης τοῦ ἐπιπέδου (Ρ) εἰς τό δοθέν σημεῖον Α αὐτοῦ. Ἡ ΟΑ θά εἶναι κάθετος ἐπί τό (Ρ) εἰς τό σημεῖον Α αὐτοῦ (σχ.522).

Ἄρα τό Ο κεῖται ἐπί τῆς ἡμιευθείας Αx, καθέτου πρός τό ἐπίπεδον (Ρ) εἰς τό σημεῖον Α αὐτοῦ.

"Αλλη μία λύσις εἶναι ἡ ἡ ἡμιευθεῖα Αy, ἡ κάτωθεν τοῦ (P) κειμένη.
"Ωστε: Ὁ ζητούμενος γεωμετρικός τόπος εἶναι ὁλόκληρος ἡ εὐθεῖα xAy.



σχ.522

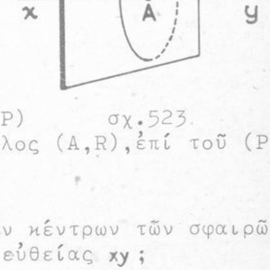
689. Ποῖος εἶναι ὁ γεωμ.τόπος τῶν κέντρων τῶν σφαιρῶν τῶν ἐφαπτομένων δύο ἐπιπέδων (P) καί (P_1).

Λ ύ σ ι ς: Ἐάν τά ἐπίπεδα (P) καί (P_1) τέμνωνται, τότε ὁ ζητούμενος γεωμετρικός τόπος εἶναι τό διχοτομοῦν ἐπίπεδον τῆν δίεδρον τῶν (P) καί (P_1) καθώς καί τό διχοτομοῦν ἐπίπεδον τῆς κατακορυφήν τῆς δοθείσης διέδρου.
Ἐάν τά (P) καί (P_1) εἶναι παράλληλα, τότε ὁ ζητούμενος γεωμ.τόπος εἶναι τό μεσοπαράλληλον ἐπίπεδον τῶν (P) καί (P_1).

690. Δίδεται σημεῖον A ἐπί μιᾶς εὐθείας xy. 1) Ποῖος ὁ γεωμ.τόπος τῶν κέντρων τῶν σφαιρῶν τῶν ἐφαπτομένων τῆς xy εἰς τό A. 2) Ποῖος ὁ γεωμ.τόπος τῶν κέντρων τῶν σφαιρῶν ἀκτῖνος R, τῶν ἐφαπτομένων τῆς xy εἰς τό A;

Λ ύ σ ι ς: 1) "Εστω O τό κέντρον μιᾶς σφαίρας ἐφαπτομένης τῆς εὐθείας xy εἰς τό δοθέν σημεῖον A αὐτῆς. Ἡ OA θά εἶναι κάθετος πρός τήν xy εἰς τό σημεῖον A. "Αρα τό O θά κεῖται ἐπί τοῦ καθέτου ἐπιπέδου (P) πρός τήν xy εἰς τό δοθέν σημεῖον A αὐτῆς.

2) Ἐάν OA=R, τότε τό O θά κεῖται ἐπί τοῦ κύκλου (A,R) κειμένου ἐπί τοῦ καθέτου ἐπιπέδου (P) πρός τήν xy εἰς τό σημεῖον A αὐτῆς.
"Ωστε: Ὁ ζητούμενος γεωμετρικός τόπος εἶναι ὁλόκληρον τό ἐπίπεδον (P) εἰς τήν πρώτην περίπτωσιν καί ὁ κύκλος (A,R), ἐπί τοῦ (P). εἰς τήν δευτέραν περίπτωσιν.

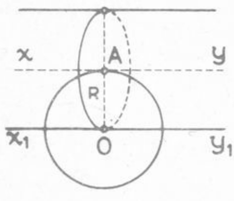


σχ.523

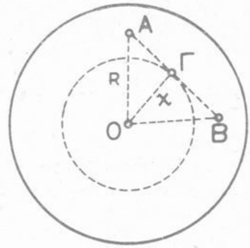
691. Ποῖος εἶναι ὁ γεωμ.τόπος τῶν κέντρων τῶν σφαιρῶν ἀκτῖνος R, τῶν ἐφαπτομένων δοθείσης εὐθείας xy;

Λ ύ σ ι ς: "Εστω O τό κέντρον μιᾶς σφαίρας ἀκτῖνος R, ἐφαπτομένης τῆς xy, ἔστω εἰς τό σημεῖον A (σχ.524). Ἡ OA θά

εἶναι κάθετος πρός τήν xy. Ἄρα τό Ο θά κεῖται ἐπί τοῦ κύκλου (A,R), τοῦ ὁποίου τό ἐπίπεδον εἶναι κάθετον ἐπί τήν εὐθεῖαν xy. Ἐπειδή $AO=R$, τό Ο θά κεῖται καί ἐπί τῆς εὐθείας x_1y_1, παραλλήλου πρός τήν xy εἰς ἀπόστασιν R ἀπό τήν xy.
Ἄρα τό Ο θά κεῖται ἐπί τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας ἐκ περιστροφῆς ἄξονος xy καί ἀκτῖνος R.



σχ.524



σχ.525

692. Ποῖος ὁ γεωμ.τόπος τῶν μέσων ἴσων χορδῶν δοθείσης σφαίρας (O,R).

Λ ύ σ ι ς: Ἔστω $AB=\lambda$ μία τυχοῦσα χορδή τῆς σφαίρας (O,R). Ἄν Γ εἶναι τό μέσον τῆς χορδῆς AB, τότε:

$$x^2=O\Gamma^2=OA^2-A\Gamma^2=R^2-\frac{\lambda^2}{4}=\frac{4R^2-\lambda^2}{4}$$

ἐξ οὗ:

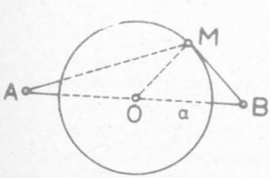
$$O\Gamma=x=\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-\lambda^2}$$

Κεῖται ἄρα τό Γ ἐπί τῆς σφαίρας $(O,\ x=\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-\lambda^2})$

Τό ἀντίστροφον ἀποδεικνύεται εὐκόλως. (σχ.525).

693. Ποῖος ὁ γεωμ.τόπος τῶν σημείων Μ τοῦ χώρου, διά τά ὁποῖα $MA^2+MB^2=k^2$, ἔνθα Α καί Β δεδομένα σταθερά σημεῖα;

Λ ύ σ ι ς: Ἔστω Μ τυχόν σημεῖον τοῦ χώρου, τοιοῦτον ὥστε: $MA^2+MB^2=k^2$ (1)



σχ.526

Ἔστω Ο τό μέσον τοῦ τμήματος $AB=\alpha$. Θά εἶναι:

$$MA^2+MB^2=2.OM^2+\frac{\alpha^2}{2} \quad (2)$$

Ἐκ τῶν (1) καί (2) λαμβάνομεν:

$$2OM^2+\frac{\alpha^2}{2}=k^2 \Rightarrow OM=\frac{1}{2}\sqrt{2k^2-\alpha^2} \quad (3)$$

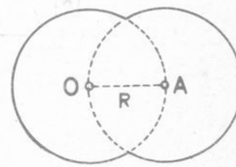
Ἄρα τό Μ θά κεῖται ἐπί σφαίρας $(O, OM = \frac{1}{2}\sqrt{2k^2-\alpha^2})$.

Τό ἀντίστροφον ἀποδεικνύεται εὐκόλως.

Ὁ τόπος ὑπάρχει, ὅταν $k\sqrt{2} \geq \alpha$.

694. Ποῖος εἶναι ὁ γεωμ.τόπος τῶν κέντρων: 1) τῶν σφαιρῶν ἀκτῖνος R, διερχομένων διά δοθέντος σημείου Α. 2) Τῶν σφαιρῶν ἀκτῖνος R, διερχομένων διά δύο σταθερῶν σημείων Α, Β. 3) Τῶν σφαιρῶν ἀκτῖνος R, ἐφαπτομένων δοθέντος ἐπιπέδου (Π). 4) Τῶν σφαιρῶν ἀκτῖνος R, ἐφαπτομένων δύο παραλλήλων εὐθειῶν (δ) καί (δ_1).

Λ ύ σ ι ς: 1) Ἔστω Ο τό κέντρον μιᾶς σφαίρας, διερχομένης διά τοῦ δοθέντος σημείου Α καί ἐχούσης ἀκτῖνα R. Ἐπειδή AO=R, ἔπεται ὅτι τό Ο θά κεῖται ἐπί σφαίρας (A,R).



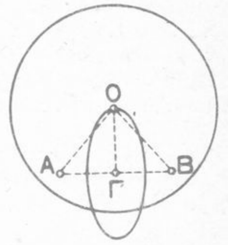
Τό ἀντίστροφον ἀποδεικνύεται εὐκόλως.

2) Ἔστω Ο τό κέντρον μιᾶς σφαίρας, διερχομένης διά τῶν δοθέντων σημείων Α καί Β καί ἐχούσης ἀκτῖνα R.

Ἔστω AB=2α καί Γ τό μέσον τοῦ τμήματος AB. Θά εἶναι:

$$\Gamma O = \sqrt{OA^2 - A\Gamma^2} = \sqrt{R^2-\alpha^2} = \text{ὡρισμένον}.$$

Ἄρα τό Ο θά κεῖται ἐπί τοῦ κύκλου $(\Gamma, \Gamma O = \sqrt{R^2-\alpha^2})$, τοῦ ὁποίου τό ἐπίπεδον εἶναι κάθετον πρός τό τμῆμα AB καί εἰς τό μέσον αὐτοῦ Γ.



σχ.527

3) Ἔστω Ο τό κέντρον μιᾶς σφαίρας, ἀκτῖνος R. Τό Ο θά κεῖται ἐπί τοῦ ἐπιπέδου (P) τοῦ παραλλήλου πρός τό δοθέν ἐπίπεδον (Π) καί εἰς ἀπόστασιν R.

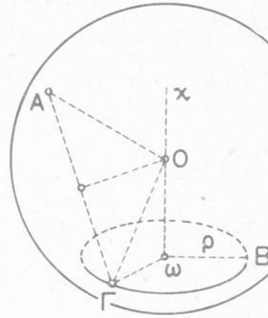
Ἐπίσης τό Ο θά κεῖται καί ἐπί τοῦ ἐπιπέδου (P_1), συμμετρικοῦ τοῦ (P) ὡς πρός τό (Π).

4) Εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι τά κέντρα τῶν σφαιρῶν ἀκτῖνος R, τῶν ἐφαπτομένων δύο παραλλήλων εὐθειῶν (δ) καί (δ_1), θά κεῖνται ἐπί εὐθείας παραλλήλου πρός τάς (δ) καί (δ_1) καί ἀπεχούσης ἀπό αὐτάς ἀπόστασιν R.

Τό σχῆμα νά γίνῃ ὑπό τῶν μαθητῶν.

695. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι κύκλος (ω,ρ) καί σημεῖον Α ἐκτός αὐτοῦ, ὁρίζουν μίαν σφαῖραν.

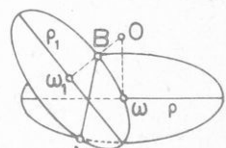
Λ ύ σ ι ς:Ἔστω ωx ὁ ἄξων τοῦ κύκλου (ω,ρ) καί Α τό δοθέν σημεῖον.Θεωροῦμεν ἐπί τοῦ κύκλου (ω,ρ) ἕν σημεῖον Γ.Τό μεσοκάθετον ἐπίπεδον τοῦ τμήματος ΑΓ ὁρίζει ἐπί τοῦ ἄξονος ωx τοῦ κύκλου (ω,ρ) τό σημεῖον Ο,τό ὁποῖον εἶναι κέντρον σφαίρας,διερχομένης διά τοῦ Α καί τοῦ κύκλου (ω,ρ).Διότι εἶναι ΟΑ=ΟΓ=ΟΒ,ὅπου Β τυχόν ἄλλο σημεῖον τοῦ κύκλου (ω,ρ).



σχ.529

696. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι δύο κύκλοι (ω,ρ) καί ($ω_1$,$ρ_1$),μή κείμενοι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ καί ἔχοντες δύο κοινά σημεῖα Α,Β,ὁρίζουν μίαν σφαῖραν.

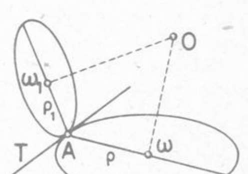
Λ ύ σ ι ς:Ἔστωσαν δύο κύκλοι κέντρων ω καί $ω_1$,τεμνόμενοι εἰς τά σημεῖα Α καί Β.
Ὁ ἄξων τοῦ κύκλου (ω) κεῖται ἐπί τοῦ μεσοκαθέτου ἐπιπέδου τοῦ τμήματος ΑΒ.Ὁμοίως ὁ ἄξων τοῦ κύκλου ($ω_1$) κεῖται ἐπί τοῦ μεσοκαθέτου ἐπιπέδου τοῦ τμήματος ΑΒ.Οἱ δύο οὗτοι ἄξονες τέμνονται εἰς τό σημεῖον Ο,τό ὁποῖον εἶναι τό κέντρον σφαίρας ἀκτῖνος ΟΑ=ΟΒ.



σχ.529

697. Δύο κύκλοι (ω,ρ) καί ($ω_1$,$ρ_1$),μή κείμενοι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ,ἐφάπτονται εἰς τό σημεῖον Α.Νά δειχθῇ ὅτι ὁρίζουν μίαν σφαῖραν.

Λ ύ σ ι ς:Ἔστωσαν δύο κύκλοι (ω,ρ) καί ($ω_1$,$ρ_1$) ἐφαπτόμενοι εἰς τό σημεῖον Α τῆς εὐθείας ΑΤ.
Οἱ ἄξονες τῶν κύκλων (ω) καί ($ω_1$) κεῖνται ἐπί τοῦ καθέτου ἐπιπέδου πρός τήν ΑΤ εἰς τό σημεῖον Α καί τέμνονται εἰς ἕν σημεῖον Ο.
Ἡ σφαῖρα κέντρου Ο καί ἀκτῖνος ΟΑ περιέχει τούς κύκλους (ω) καί ($ω_1$).



σχ.530

698. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ὑπάρχει σφαῖρα ἐφαπτομένη τῶν ἑδρῶν τετραέδρου (ἐγγεγραμμένη ἤ παραγγεγραμμέναι).

Λ ύ σ ι ς: Γνωρίζομεν ὅτι τά διχοτομοῦντα τάς ἐσωτερικάς διέδρους γωνίας τοῦ τετραέδρου ἐπίπεδα διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο,τό ὁποῖον ἀπέχει ἀπό ἑκάστην ἕδραν τοῦ τετραέδρου ἀποστάσεις ἴσας,"Αρα τό Ο εἶναι κέντρον σφαίρας ἐγγεγραμμένης εἰς τό τετράεδρον τοῦτο.

'Επίσης τά διχοτομοῦντα ἐπίπεδα τάς ἐξωτερικάς διέδρους γωνίας τῆς μιᾶς ἕδρας τοῦ τετραέδρου,διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου O_1 ἤ O_2,O_3.

"Αρα ὑπάρχουν ἄλλαι τρεῖς σφαῖραι ἐφαπτόμεναι τῶν ἑδρῶν τετραέδρου (παρεγγεγραμμέναι σφαῖραι).

699. Δίδονται δύο σταθερά σημεῖα Α καί Β καί ζητεῖται ὁ γεωμ.τόπος τῶν σημείων Μ τοῦ χώρου,διά τά ὁποῖα ἰσχύουν αἱ ἰσότητες: 1) $MA:MB=\mu:\nu$, 2) $\mu.MA^2 \pm \nu.MB^2 = k^2$.

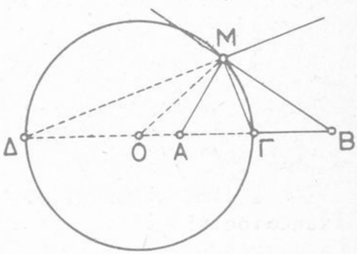
Λ ύ σ ι ς: 1) "Εστω Μ τυχόν σημεῖον τοῦ χώρου,τοιοῦτον ὥστε: $\frac{MA}{MB} = \frac{\mu}{\nu} \neq 1$

'Επί τοῦ τμήματος ΑΒ ὑπάρχουν δύο σημεῖα Γ καί Δ,τοιαῦτα ὥστε:

$$\frac{\Gamma A}{\Gamma B} = \frac{\mu}{\nu} \quad \text{καί} \quad \frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{\mu}{\nu},$$

ἡ δέ γωνία ΔΜΓ εἶναι ὀρθή."Αρα,ἄν Ο εἶναι τό μέσον τοῦ τμήματος ΓΔ,θά εἶναι:

$$OM = \frac{\Gamma\Delta}{2}$$



σχ.531

Κατ'ἀκολουθίαν τό Μ θά κεῖται ἐπί σφαίρας κέντρου Ο καί ἀκτῖνος: $OM = \frac{MA.MB.AB}{|MA^2-MB^2|} = \frac{AB.\mu\nu}{|\mu^2-\nu^2|}$.

Εὐκόλως ἀποδεικνύεται καί τό ἀντίστροφον.

700. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι πᾶσα κανονική πυραμίς εἶναι ἐγγράψιμος εἰς σφαῖραν.

Λ ύ σ ι ς:Γνωρίζομεν ὅτι πᾶν σημεῖον τοῦ ἄξονος τῆς βάσεως κανονικῆς πυραμίδος ἀπέχει ἰσάκις τῶν κορυφῶν τῆς βάσεως.

Τό μεσοκάθετον ἐπίπεδον μιᾶς παραπλεύρου ἀκμῆς τῆς πυραμίδος τέμνει τόν ἐν λόγῳ ἄξονα εἰς τό σημεῖον Κ,τό ὁποῖον θά ἀπέχῃ ἰσάκις τῆς κορυφῆς τῆς κανονικῆς πυραμίδος καί τῶν κορυφῶν τῆς βάσεως."Αρα τό Κ θά εἶναι τό κέντρον σφαίρας περιγεγραμμένης περί τήν πυραμίδα ταύτην.

—

701. Πᾶν ὀρθογώνιον παραλ/δον εἶναι ἐγγράφιμον εἰς σφαῖραν.

Λ ύ σ ι ς: Γνωρίζομεν ὅτι αἱ διαγώνιοι ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσαι, διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο, τό ὁποῖον ἀπέχει ἰσάκις τῶν κορυφῶν τοῦ παραλ/δου τούτου.

Ἄρα τό Ο εἶναι κέντρον σφαίρας διερχομένης διά τῶν κορυφῶν τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

Ἄρα τό ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον εἶναι ἐγγράφιμον εἰς σφαῖραν.

702. Πᾶσα κόλουρος κανονική πυραμίς εἶναι ἐγγράφιμος εἰς σφαῖραν.

Λ ύ σ ι ς: Γνωρίζομεν ὅτι πᾶν σημεῖον Ο τοῦ ἄξονος κανονικῆς κολούρου πυραμίδος ἀπέχει ἰσάκις τῶν κορυφῶν τῶν δύο βάσεων ἀντιστοίχως.

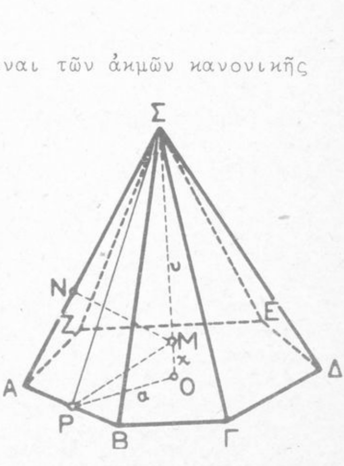
Τό μεσοκάθετον ἐπίπεδον μιᾶς παραπλεύρου ἀκμῆς τῆς πυραμίδος ταύτης τέμνει τόν ἄξονα τῆς πυραμίδος ταύτης εἰς ἕν σημεῖον Κ, τό ὁποῖον θά ἀπέχῃ ἰσάκις τῶν κορυφῶν τῶν δύο βάσεων. Ἄρα τό Κ θά εἶναι κέντρον σφαίρας διερχομένης διά τῶν κορυφῶν τῶν βάσεων τῆς πυραμίδος ταύτης.

Ὥστε, πᾶσα κόλουρος κανονική πυραμίς εἶναι ἐγγράφιμος εἰς σφαῖραν.

703. Ὑπάρχουν σφαῖραι ἐφαπτόμεναι τῶν ἀκμῶν κανονικῆς πυραμίδος;

Λ ύ σ ι ς: Ἔστω Ο τό κέντρον, α τό ἀπόστημα ΟΡ καί R ἡ ἀκτίς τοῦ πολυγώνου τῆς βάσεως τῆς κανονικῆς πυραμίδος ΣΑΒΓ...Ζ.

Ἔστω ΣΟ=υ τό ὕψος τῆς πυραμίδος καί Μ σημεῖον τοῦ ὕψους, τοιοῦτον ὥστε ΟΜ=χ. Αἱ ἀποστάσεις τοῦ Μ ἀπό τάς πλευράς τῆς βάσεως καί τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν ἔστω ὅτι εἶναι αἱ ΜΡ=ΜΝ. Ἐκ τῶν ὁμοίων ὀρθογωνίων τριγώνων ΣΜΝ καί ΣΑΟ ἔχομεν:



σχ.532

$$\frac{MN}{AO}=\frac{\Sigma M}{\Sigma A} \quad ἤ$$

$$\frac{MN}{R}=\frac{|\upsilon-x|}{\sqrt{\upsilon^2+R^2}} \Rightarrow MN=\frac{R|\upsilon-x|}{\sqrt{\upsilon^2+R^2}}$$

Έστω ΜΡ ἡ ἀπόστασις τοῦ Μ ἀπό τήν ΑΒ. Θά εἶναι $MP=\sqrt{\alpha^2+x^2}$

Ἄρα εἶναι:

$$\frac{R|\upsilon-x|}{\sqrt{\upsilon^2+R^2}}=\sqrt{\alpha^2+x^2} \Longrightarrow f(x)=\upsilon^2x^2+2R^2\upsilon x+R^2\alpha^2+\upsilon^2\alpha^2-R^2\upsilon^2=0. \qquad (1)$$

Ἐπειδή ἡ διακρίνουσα $\Delta=\upsilon^2(R^2-\alpha^2)(R^2+\upsilon^2)$ τῆς ἐξισώσεως (1) εἶναι θετική, ἕπεται ὅτι αὕτη ἔχει δύο ρίζας.

Ἐπειδή δέ $f(\upsilon)>0$ καί $x_1+x_2<0$, ἕπεται ὅτι ἀμφότεραι αἱ ρίζαι τῆς (1) εἶναι μικρότεραι τοῦ υ. Κατ' ἀκολουθίαν θά εἶναι ἀμφότεραι ἤ ἀρνητικαί ἤ ἑτερόσημοι ἤ μηδέν.

Ἄρα ὑπάρχουν πάντοτε δύο σφαῖραι, καί δύο μόνον, ἐφαπτόμεναι τῶν ἀκμῶν τῆς πυραμίδος.

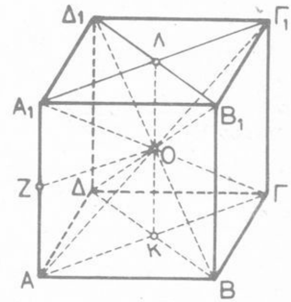
704. Συναρτήσει τῆς ἀκμῆς α κύβου, νά ὑπολογισθῇ 1) ἡ ἀκτίς τῆς περιγεγραμμένης σφαίρας, 2) τῆς ἐγγεγραμμένης καί 3) τῆς ἐφαπτομένης τῶν ἀκμῶν τοῦ κύβου.

Λ ύ σ ι ς: 1) Γνωρίζομεν ὅτι αἱ διαγώνιοι τοῦ κύβου ἀκμῆς α εἶναι ἴσαι, διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο, διχοτομοῦνται εἰς τό Ο καί ὅτι $\delta=\alpha\sqrt{3}$.

Ἄρα τό Ο εἶναι τό κέντρον σφαίρας ἀκτῖνος $OA=\frac{\delta}{2}=\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$.

2) Αἱ ἀποστάσεις τοῦ Ο ἀπό τάς ἕδρας εἶναι, προφανῶς, ἴσαι. Δηλαδή $OK=\frac{K\Lambda}{2}=\frac{\alpha}{2}$.

Ἄρα τό Ο εἶναι κέντρον σφαίρας ἀκτῖνος $\frac{\alpha}{2}$ καί ἐφαπτομένης πασῶν τῶν ἑδρῶν τοῦ κύβου.



σχ.533

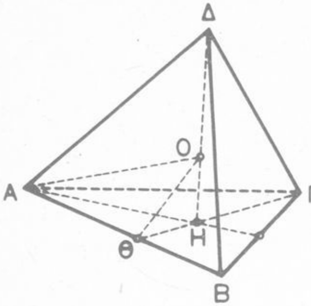
3) Ἐάν Ζ εἶναι τό μέσον τῆς ἀκμῆς AA_1, τότε ἡ ΟΖ θά εἶναι κάθετος πρός τήν AA_1 καί:

$$OZ^2=OA^2-AZ^2=\left(\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}\right)^2-\frac{\alpha^2}{4}=\frac{3\alpha^2}{4}-\frac{\alpha^2}{4}=\frac{2\alpha^2}{4} \Rightarrow OZ=\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}.$$

Ἄρα τό Ο εἶναι κέντρον σφαίρας ἐφαπτομένης τῶν ἀκμῶν κύβου καί ἀκτῖνος $OZ=\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$.

705. Πῶς συνδέονται αἱ ἀκτῖνες τῶν σφαιρῶν, περιγεγραμμένης, ἐγγεγραμμένης καί ἐφαπτομένης τῶν ἕξ ἀκμῶν κανονικοῦ τετραέδρου ἀκμῆς α;

Λ ύ σ ι ς: Γνωρίζομεν ὅτι αἱ διάμεσοι τοῦ κανονικοῦ τετραέδρου διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο, τό ὁποῖον ἀπέχει ἰσάκις τῶν κορυφῶν Α,Β,Γ,Δ τοῦ τετραέδρου. Δηλαδή:



σχ.534

$ΟΑ=ΟΒ=ΟΓ=ΟΔ=\frac{3}{4}.ΔΗ=\frac{3}{4}.\frac{α\sqrt{6}}{3}=\frac{α\sqrt{6}}{4}$.

Ἄρα ἡ ἀκτίς τῆς περιγεγραμμένης σφαίρας εἶναι: $\boxed{R=\frac{α\sqrt{6}}{4}}$ (1)

Ἡ ἀκτίς τῆς ἐγγεγραμμένης σφαίρας εἶναι ἡ

$ΟΗ=\frac{1}{4}.ΔΗ=\frac{1}{4}.\frac{α\sqrt{6}}{3}=\frac{α\sqrt{6}}{12}$ ἤ $\boxed{ρ=\frac{α\sqrt{6}}{12}}$ (2)

Ἐάν Θ εἶναι τό μέσον τῆς ἀκμῆς ΑΒ, τότε ἡ ΟΘ θά εἶναι ἡ ἀκτίς τῆς σφαίρας, τῆς ἐφαπτομένης τῶν ἀκμῶν τοῦ τετραέδρου καί θά εἶναι: $ΟΘ^2=ΟΗ^2+ΗΘ^2=\left(\frac{α\sqrt{6}}{12}\right)^2+\left(\frac{1}{3}.ΓΘ\right)^2=\frac{6α^2}{144}+\frac{3α^2}{36}=\frac{18α^2}{144}$

ἐξ οὗ: $ΟΘ=\frac{3α\sqrt{2}}{12}$ ἤ $\boxed{ρ_1=\frac{3α\sqrt{2}}{12}}$ (3)

Εἶναι δέ $Rρ=\frac{α\sqrt{6}}{4}.\frac{α\sqrt{6}}{12}=\frac{6α^2}{48}=\frac{α^2}{8}$ (4)

καί $ρ_1^2=\left(\frac{3α\sqrt{2}}{12}\right)^2=\frac{18α^2}{144}=\frac{α^2}{8}$ (5)

Ἐκ τῶν (4) καί (5) ἕπεται: $\boxed{ρ_1^2=Rρ}$ (6)

706. Ποῖος ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Μ τοῦ χώρου, διά τά ὁποῖα ἰσχύει ἡ ἰσότης:

$$ΜΑ^2+ΜΒ^2+ΜΓ^2=k^2,$$

ἔνθα Α,Β,Γ αἱ κορυφαί σταθεροῦ τριγώνου ΑΒΓ;

Λ ύ σ ι ς: Ἐάν α,β,γ εἶναι αἱ πλευραί τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, Ζ τό κέντρον βάρους τούτου καί Μ τυχόν σημεῖον τοῦ χώρου, κατά τό θεώρημα τοῦ LEIBNITZ θά ἔχωμεν:

$$ΜΑ^2+ΜΒ^2+ΜΓ^2=3.ΜΖ^2+\frac{1}{3}(α^2+β^2+γ^2)$$

ἤ $$k^2=3.ΜΖ^2+\frac{1}{3}(α^2+β^2+γ^2) \Rightarrow ΜΖ=\frac{1}{3}\sqrt{3k^2-(α^2+β^2+γ^2)},$$

ἡ ὁποία σχέσις ἐκφράζει ὅτι τό Μ κεῖται ἐπί τῆς σφαίρας

$$\left[Ζ, ΖΜ=\frac{1}{3}\sqrt{3k^2-(α^2+β^2+γ^2)}\right].$$

Διά νά ὑπάρχῃ ἡ σφαῖρα αὕτη πρέπει: $k\sqrt{3}\geq\sqrt{α^2+β^2+γ^2}$

707. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐάν μία σφαῖρα ἐφάπτεται τῶν ἕξ ἀκμῶν τετραέδρου ΑΒΓΔ, τότε θά εἶναι: ΑΒ+ΓΔ=ΑΓ+ΒΔ=ΑΔ+ΒΓ.

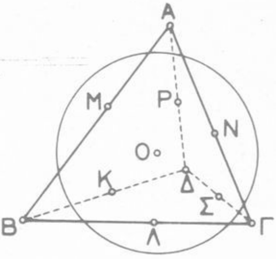
Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Ἔστωσαν Κ,Λ,Σ,Μ,Ρ,Ν τά σημεῖα ἐπαφῆς τῆς σφαίρας (Ο) καί τῶν ἀκμῶν τοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ. Θά ἔχωμεν:

ΑΜ=ΑΝ=ΑΡ,
ΒΜ=ΒΚ=ΒΛ,
ΓΣ=ΓΝ=ΓΛ,
καί ΔΣ=ΔΚ=ΔΡ,

καί κατ'ἀκολουθίαν:

(ΑΜ+ΒΜ)+(ΓΣ+ΔΣ)=(ΑΝ+ΓΝ)+(ΒΚ+ΔΚ)=
=(ΑΡ+ΔΡ)+(ΒΛ+ΓΛ)

ἤ ΑΒ+ΓΔ=ΑΓ+ΒΔ=ΑΔ+ΒΓ.



σχ.535

708. Νά κατασκευασθῇ σφαῖρα ἀκτῖνος R, διερχομένη διά τριῶν δεδομένων σημείων Α,Β,Γ μή κειμένων ἐπ'εὐθείας.

Λ ύ σ ι ς: Ἔστω Ο τό κέντρον τῆς ζητουμένης σφαίρας, ἡ ὁποία διέρχεται διά τῶν σημείων Α,Β,Γ μή κειμένων ἐπ'εὐθείας. Θά εἶναι:

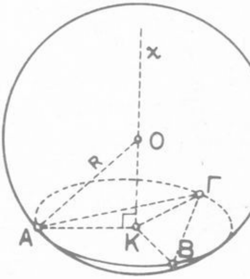
ΟΑ=ΟΒ=ΟΓ=R.

Ἄρα τό Ο θά κεῖται ἐπί τοῦ ἄξονος Κx τοῦ κύκλου ΑΒΓ.

Ἐπίσης τό Ο θά κεῖται καί ἐπί τοῦ κύκλου (Α,R) τοῦ κειμένου ἐπί τοῦ ἐπιπέδου ΑΚx.

Ἄρα τό Ο εἶναι τελείως ὡρισμένον, ἄν ΟΑ⩾ΚΑ ἤ R⩾ΚΑ.

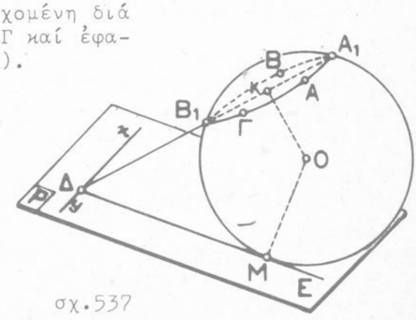
Πόσαι λύσεις ὑπάρχουν;



σχ.536

709. Νά γραφῇ σφαῖρα, διερχομένη διά τριῶν δεδομένων σημείων Α,Β,Γ καί ἐφαπτομένη δοθέντος ἐπιπέδου (Ρ).

Λ ύ σ ι ς: Τά σημεῖα Α, Β,Γ ὁρίζουν τόν κύκλον(Κ), τοῦ ὁποίου τό ἐπίπεδον τέμνει τό δοθέν ἐπίπεδον(Ρ) κατά τήν εὐθείαν **xy**. Ἐάν Μ εἶναι τό σημεῖον ἐπαφῆς τῆς σφαίρας (Ο) καί τοῦ (Ρ), τό ἐπίπεδον ΜΟΚ εἶναι κάθετον πρός τήν **xy**, ὡς κάθετον πρός



σχ.537

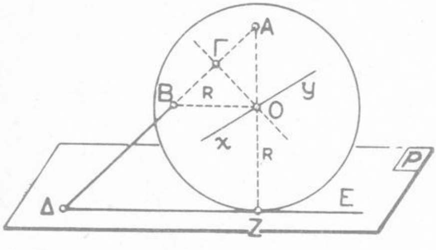
τό (P) καί πρός τό ἐπίπεδον ΑΒΓ. Τοῦτο τέμνει τό (P) κατά τήν εὐθεῖαν ΔΜΕ καί τό ἐπίπεδον τοῦ κύκλου ΑΒΓ κατά τήν εὐθεῖαν $A_1KB_1\Delta$ καί τήν σφαῖραν (O) κατά τόν μέγιστον κύκλον ΑΒΜ.

Οὕτω τό πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τό νά γραφῇ κύκλος (μέγιστος) διερχόμενος διά τῶν δεδομένων σημείων A_1, B_1 καί ἐφαπτόμενος τῆς εὐθείας ΔΕ.

Ὅταν τό ἐπίπεδον ΑΒΓ εἶναι παράλληλον πρός τό (P), τό σημεῖον ἐπαφῆς Μ εἶναι ἡ τομή τοῦ ἄξονος τοῦ κύκλου ΑΒΓ καί τοῦ (P), τό δέ κέντρον τῆς σφαίρας εἶναι ἡ τομή τοῦ ἄξονος τούτου καί τοῦ μεσοκαθέτου ἐπιπέδου τοῦ τμήματος, τό ὁποῖον ὁρίζεται ἀπό τό Μ καί τυχόντος σημείου τοῦ κύκλου ΑΒΓ.

710. Νά κατασκευασθῇ σφαῖρα ἀκτῖνος R, διερχομένη διά δύο δεδομένων σημείων Α, Β καί ἐφαπτομένη δοθέντος ἐπιπέδου (P).

Λ ύ σ ι ς: Τό κέντρον Ο τῆς ζητουμένης σφαίρας θά κεῖται ἐπί ἐπιπέδου παραλλήλου πρός τό δοθέν ἐπίπεδον (P) καί εἰς ἀπόστασιν R ἀπό αὐτό. Κεῖται δέ καί ἐπί τοῦ μεσοκαθέτου ἐπιπέδου τοῦ τμήματος ΑΒ.



σχ.538

Τά δύο ταῦτα ἐπίπεδα τέμνονται κατά μίαν εὐθεῖαν **x**O**y**, παράλληλον πρός τό ἐπίπεδον (P).

Τό Ο θά εἶναι ἡ τομή τοῦ κύκλου (B,R) καί τῆς εὐθείας **xy**.

Ἡ ὑπόλοιπος ἐργασία νά γίνῃ ὑπό τῶν μαθητῶν.

Τί συμβαίνει, ἄν ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος πρός τό ἐπίπεδον (P); Τί συμβαίνει, ἄν ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος πρός τό (P);

711. Δίδονται δύο εὐθεῖαι (δ) καί (δ_1), μή κείμεναι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, καί δύο σημεῖα Α καί A_1 ἐπ' αὐτῶν. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ὑπάρχει μία, καί μόνον μία, σφαῖρα ἐφαπτομένη τῶν (δ) καί (δ_1) εἰς τά σημεῖα Α καί A_1.

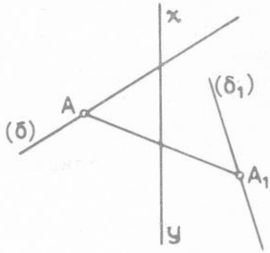
Λ ύ σ ι ς: Ἐπειδή ἡ σφαῖρα ὀφείλει νά διέρχεται ἀπό τά σημεῖα Α καί A_1, τό κέντρον της Ο θά κεῖται ἐπί τοῦ μεσοκαθέτου ἐπιπέδου τοῦ τμήματος AA_1. Ὀφείλει ὅμως ἡ σφαῖρα νά ἐφάπτεται τῆς (δ) εἰς τό Α. Ἄρα τό κέντρον της Ο θά κεῖται καί ἐπί τοῦ καθέτου ἐπιπέδου πρός τήν (δ) εἰς τό σημεῖον Α.

Τά δύο ταῦτα ἐπίπεδα δέν εἶναι παράλληλα, διότι αἱ (δ) καί AA_1 θά εἶχον τήν αὐτήν διεύθυνσιν καί τό Α θά ἔκειτο ἐπί τῆς (δ), αἱ (δ) καί (δ_1) θά ἔκειντο ἐπί τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, ὅπερ ἄτοπον, ἐξ ὑποθέσεως. Ἄρα τά δύο ταῦτα ἐπίπεδα τέμνονται κατά μίαν εὐθεῖαν **xy** κάθετον πρός τό ἐπίπεδον (Π) τῶν εὐθειῶν (δ) καί AA_1.

Τό κέντρον Ο τῆς σφαίρας θά εὑρίσκεται οὕτως ἐπί τοῦ ἐπιπέδου(Ρ), καθέτου πρός τήν (δ_1) εἰς τό σημεῖον A_1.

Τό (Ρ) δέν δύναται νά εἶναι παράλληλον πρός τήν **xy** οὔτε νά περιέχῃ τήν **xy**, διότι ἡ **xy** καί ἡ (δ_1) θά ἦσαν ὀρθογώνιοι. Ἡ (δ_1) θά ἔκειτο εἰς τό (Π), ὅπερ ἄτοπον.

Ἄρα τό ἐπίπεδον (Ρ) τέμνει τήν **xy** εἰς ἕν μόνον σημεῖον, τό ὁποῖον θά εἶναι τό κέντρον σφαίρας, ἡ ὁποία θά ἐφάπτεται τῶν (δ) καί (δ_1) ἀντιστοίχως εἰς τά Α καί A_1.



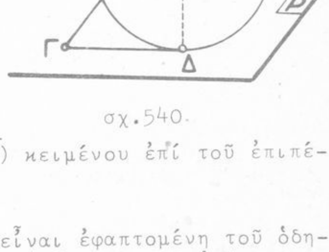
σχ.539

712. Μεταβλητή σφαῖρα διέρχεται διά δύο σταθερῶν σημείων Α καί Β καί ἐφάπτεται δοθέντος ἐπιπέδου (Ρ). Νά εὑρεθῇ ὁ γεωμ.τόπος τῶν σημείων ἐπαφῆς.

Λ ύ σ ι ς: Ἡ ὡρισμένη εὐθεῖα ΑΒ τέμνει τό ἐπίπεδον (Ρ) εἰς τό ὡρισμένον σημεῖον Γ. Ἐάν Δ εἶναι τό σημεῖον ἐπαφῆς τῆς σφαίρας, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπό τά Α καί Β καί ἐφάπτεται τοῦ (Ρ), ἡ ΓΔ θά εἶναι ἐφαπτομένη τῆς σφαίρας εἰς τό Δ καί θά ἔχωμεν:

$$\Gamma\Delta^2=\overline{\Gamma A}.\overline{\Gamma B} \Longrightarrow \Gamma\Delta=\sqrt{\overline{\Gamma A}.\overline{\Gamma B}},$$

καί κατ' ἀκολουθίαν τό Δ θά κεῖται ἐπί τοῦ κύκλου ($\Gamma,\Gamma\Delta=\sqrt{\overline{\Gamma A}.\overline{\Gamma B}}$) κειμένου ἐπί τοῦ ἐπιπέδου (Ρ).



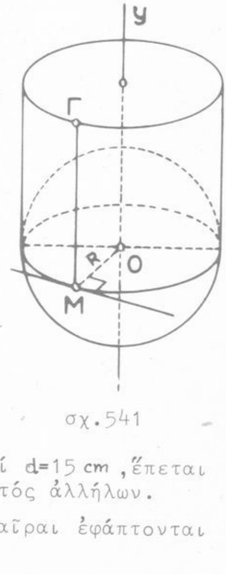
σχ.540

713. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐάν ΜΤ εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ ὁδηγοῦ κύκλου (Η,ϰ), (σχ.212), τότε τό ἐπίπεδον ΣΜΤ ἐφάπτεται τοῦ κώνου κατά τήν γενέτειραν ΣΜ καί τῆς σφαίρας εἰς τό σημεῖον τοῦτο Μ (ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον σφαίρας καί κωνικῆς ἐπιφανείας).

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Εἰς τό σχ.212 τοῦ βιβλίου ἡ ΜΤ εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου $(Η,x)$, εἶναι κάθετος πρός τήν ἀκτῖνα $ΗΜ=x$ τοῦ κύκλου τούτου. Ἐπειδή δέ ἡ ΣΗ εἶναι κάθετος πρός τό ἐπίπεδον τοῦ κύκλου $(Η,ΗΜ=x)$, κατά τό θεώρημα τῶν τριῶν καθέτων ἡ ΣΜ θά εἶναι κάθετος πρός τήν ΜΤ. Κατ' ἀκολουθίαν τό ἐπίπεδον ΣΜΤ θά εἶναι ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς σφαίρας (Ο,R) καί τοῦ κώνου $ΣΜΜ_1Μ_2$.

714. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐάν ΜΤ εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ μεγίστου κύκλου (Ο,ΟΜ) εἰς τό σημεῖον Μ καί ἡ γενέτειρα ΜΓ τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας (σχ.213) ὁρίζουν ἐπίπεδον, τό ὁποῖον ἐφάπτεται τῆς σφαίρας (Ο,R) καί τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας (ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον σφαίρας καί κυλινδρικῆς ἐπιφανείας).

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Ἐπειδή ἡ κυλινδρική ἐπιφάνεια εἶναι ἐκ περιστροφῆς, ἡ ΜΓ θά εἶναι κάθετος πρός τήν ἀκτῖνα ΟΜ. Ἐπειδή ὅμως ἡ ΜΤ ἐφάπτεται τοῦ κύκλου (Ο,ΟΜ) (μεγίστου), ἕπεται ὅτι ἡ ΜΤ θά εἶναι κάθετος πρός τήν ΟΜ. Κατ' ἀκολουθίαν τό ἐπίπεδον ΓΜΤ θά εἶναι κάθετον πρός τήν ΟΜ. Ἄρα θά εἶναι ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς σφαίρας (Ο,R) καί τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας.



σχ.541

715. Δύο σφαῖραι ἔχουν ἀκτῖνας $R=5$ cm καί $R_1=3$ cm. Ποῖαι εἶναι αἱ σχετικαί θέσεις αὐτῶν, ἐάν ἡ διάκεντρός των εἶναι: $d=15$ cm, $d=8$ cm, $d=4$ cm, $d=2$ cm, $d=1$ cm;

Λ ύ σ ι ς: 1) Ἐπειδή $R+R_1=5+3=8$ cm καί $d=15$ cm, ἕπεται ὅτι: $d>R+R_1$. Ἄρα αἱ σφαῖραι κεῖνται ἐκτός ἀλλήλων.

2) Ἐπειδή $R+R_1=8=d$, ἕπεται ὅτι αἱ σφαῖραι ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς.

3) Ἐπειδή $R+R_1=8>d=4$ cm, ἕπεται ὅτι αἱ σφαῖραι τέμνονται.

4) Ἐπειδή $R-R_1=5-3=2$ cm $=d$, ἕπεται ὅτι αἱ σφαῖραι ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς.

5) Ἐπειδή $R-R_1=5-3=2$ cm $>d=1$, ἕπεται ὅτι ἡ μία σφαῖρα κεῖται ἐντός τῆς ἄλλης.

716. Νά εὑρεθῇ ἡ σχετική θέσις δύο σφαιρῶν, ὅταν ἡ διάκεν-

τρος d καί αἱ ἀκτῖνες R καί R_1 ἔχουν τάς ἀκολούθους τιμάς εἰς ἑκατοστόμετρα:

d	1	7	3	6	5
R	5	5	3	2	12
R_1	3	2	3	3	7

Λ ύ σ ι ς: 1) Ἔχομεν $d=1$, $R=5$, $R_1=3$. Ἐπειδή $1<5-3$ ἤ $d<R-R_1$, ἡ μία σφαῖρα κεῖται ἐντός τῆς ἄλλης.

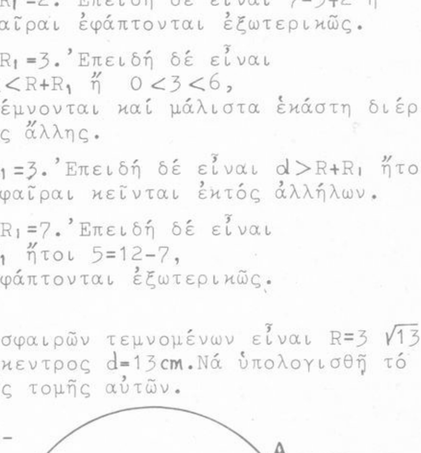
2) Ἔχομεν $d=7$, $R=5$, $R_1=2$. Ἐπειδή δέ εἶναι $7=5+2$ ἤ $d=R+R_1$, ἔπεται ὅτι αἱ σφαῖραι ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς.

3) Ἔχομεν $d=3$, $R=3$, $R_1=3$. Ἐπειδή δέ εἶναι
$$R-R_1<d<R+R_1 \text{ ἤ } 0<3<6,$$
ἔπεται ὅτι αἱ σφαῖραι τέμνονται καί μάλιστα ἑκάστη διέρχεται ἀπό τό κέντρον τῆς ἄλλης.

4) Εἶναι $d=6$, $R=2$, $R_1=3$. Ἐπειδή δέ εἶναι $d>R+R_1$ ἤτοι $6>2+3$, ἔπεται ὅτι αἱ σφαῖραι κεῖνται ἐκτός ἀλλήλων.

5) Εἶναι $d=5$, $R=12$, $R_1=7$. Ἐπειδή δέ εἶναι
$$d=R-R_1 \text{ ἤτοι } 5=12-7,$$
ἔπεται ὅτι αἱ σφαῖραι ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς.

717. Αἱ ἀκτῖνες δύο σφαιρῶν τεμνομένων εἶναι $R=3\sqrt{13}$ cm, $R_1=2\sqrt{13}$ cm, καί ἡ διάκεντρος $d=13$ cm. Νά ὑπολογισθῆ τό μῆκος καί τό ἐμβαδόν τῆς τομῆς αὐτῶν.



σχ.542

Λ ύ σ ι ς: Ἐπειδή εἶναι: $R-R_1<d<R+R_1$ ἤ $\sqrt{13}<13<4\sqrt{13}$, αἱ σφαῖραι τέμνονται κατά κύκλον (Γ,ΓΑ).

Ἐπειδή δέ εἶναι καί $d^2=R^2+R_1^2$ ἤ $13^2=(3\sqrt{13})^2+(2\sqrt{13})^2$ ἤ $169=117-52=169$, τό τρίγωνον OAO_1 εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τό Α. Κατ' ἀκολουθίαν:

$$\frac{1}{A\Gamma^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{O_1A^2}=\frac{1}{117}+\frac{1}{52}=\frac{52+117}{52.117}=\frac{169}{52.117}=\frac{1}{36},$$

ἐξ οὗ: ΓΑ=6 cm. Ἄρα τό ἐμβαδόν τῆς τομῆς εἶναι:

$$E=\pi.\Gamma A^2=\pi.6^2=36\pi\ cm^2.$$

718. Δίδονται δύο σημεῖα Α,Β σταθερά, ἐκτός ἐπιπέδου (Π) καί πρός τό αὐτό μέρος αὐτοῦ. Νά εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικός τόπος τῶν σημείων Μ τοῦ (Π), ἀπό τά ὁποῖα τό τμῆμα ΑΒ φαίνεται ὑπό ὀρθήν γωνίαν.

Ὁμοίως, ἵνα $MA^2+MB^2=k^2$.

Ὁμοίως, ἵνα $MA:MB=(\mu:\nu)\neq 1$.

Λ ύ σ ι ς: 1) Ἔστω Μ τυχόν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου (Π), εἰς τρόπον ὥστε: $\sphericalangle AMB=\frac{\pi}{2}$. Ἐάν Ο εἶναι τό μέσον τοῦ τμήματος ΑΒ, τότε $OM=\frac{AB}{2}$ καί κατ'ἀκολουθίαν τό Μ θά κεῖται ἐπί σφαίρας κέντρου Ο καί ἀκτῖνος $\frac{AB}{2}$. Ἐπειδή δέ τό Μ κεῖται καί ἐπί τοῦ ἐπιπέδου (Π), ἕπεται ὅτι τό Μ θά γράφῃ κύκλον, ὅστις εἶναι ἡ τομή τῆς ἐν λόγῳ σφαίρας καί τοῦ ἐπιπέδου.

Πότε ὑπάρχει ὁ τόπος οὗτος;

2) Ἐάν Μ εἶναι τυχόν σημεῖον τοῦ (Π), καί Ο τό μέσον τοῦ ΑΒ, θά εἶναι:

$$MA^2+MB^2=2.OM^2+\frac{AB^2}{2} \quad \text{ἤ} \quad k^2=2.OM^2+\frac{AB^2}{2}$$

ἐξ οὗ: $OM=\frac{1}{2}\sqrt{2k^2-AB^2}$, ὁπότε τό Μ θά εἶναι ἡ τομή τῆς σφαίρας (Ο,ΟΜ) καί τοῦ (Π).

Πόσαι λύσεις ὑπάρχουν;

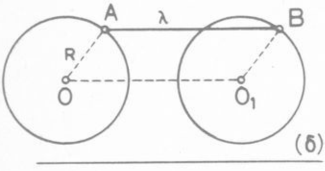
3) Ἐάν Γ καί Δ εἶναι τά σημεῖα, τά ὁποῖα χωρίζουν τό τμῆμα ΑΒ ἐσωτερικῶς εἰς λόγον $(\mu:\nu)\neq 1$, ἡ γωνία ΓΜΔ θά εἶναι ὀρθή. Ἐάν δέ Ο εἶναι τό μέσον τοῦ τμήματος ΓΔ, τότε $OM=\frac{\Gamma\Delta}{2}$, καί τό Μ θά κεῖται ἐπί τῆς τομῆς τῆς σφαίρας $(O,OM=\frac{\Gamma\Delta}{2})$ καί τοῦ ἐπιπέδου (Π). Πόσαι λύσεις ὑπάρχουν;

Τά ἀντίστροφα τῶν ἀνωτέρω ἀποδεικνύονται εὐκόλως.

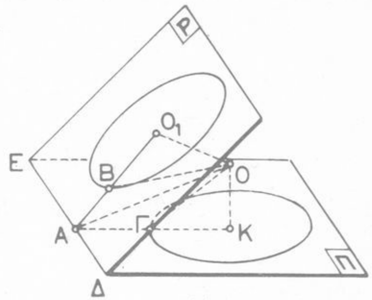
719. Ἀπό τά σημεῖα μιᾶς σφαίρας (O,R) ἄγομεν εὐθύγραμμα τμήματα μήκους λ, παράλληλα πρός δοθεῖσαν διεύθυνσιν (δ). Νά εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν ἄκρων αὐτῶν.

Λ ύ σ ι ς: Ἔστω ΑΒ=λ ἕν εὐθύγραμμον τμῆμα, παράλληλον πρός τήν διεύθυνσιν (δ) καί τοῦ ὁποίου τό Α εἶναι σημεῖον τῆς σφαίρας (O,R). Ἐκ τοῦ Ο ἄγομεν τό τμῆμα $OO_1=AB=\lambda$ καί παράλληλον πρός τήν (δ).Τό τετράπλευρον $OABO_1$ εἶναι παραλληλόγραμμον."Αρα τό Β θά κεῖται ἐπί τῆς σφαίρας $(O_1, O_1B = OA = R)$.

'Εάν θεωρήσωμεν καί τό συμμετρικόν OO_2 τοῦ $OO_1 = \lambda$ ὡς πρός τό σημεῖον Ο,τότε τό Β θά γράφῃ τήν συμμετρικήν σφαῖραν τῆς (O_1),ὡς πρός κέντρον συμμετρίας τό Ο. (σχ.543).



σχ.543



σχ.544

720. Τό κέντρον Ο μιᾶς σφαίρας κεῖται ἐπί τοῦ διχοτομοῦντος ἐπιπέδου μίαν δίεδρον γωνίαν.Νά ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ τομαί τῶν ἑδρῶν καί τῆς σφαίρας εἶναι κύκλοι ἴσοι.

Λ ύ σ ι ς:"Εστωσαν (Π) καί (Ρ) αἱ ἕδραι τῆς δοθείσης διέδρου καί Ο τό κέντρον μιᾶς σφαίρας,τό ὁποῖον κεῖται ἐπί τοῦ διχοτομοῦντος ἐπιπέδου τήν δίεδρον (π-ΔΕ-Ρ).

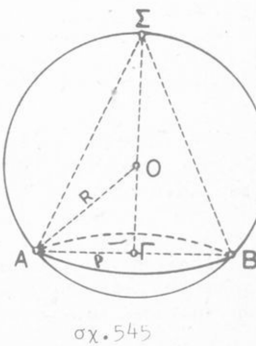
'Επειδή $OB = O\Gamma = R$ καί $OK = OO_1$,ἕπεται ὅτι τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΚΓ καί OO_1B εἶναι ἴσα."Αρα $K\Gamma = O_1B$ καί αἱ τομαί τῆς σφαίρας ὑπό τῶν ἑδρῶν (Π) καί (Ρ) θά εἶναι κύκλοι ἴσοι. (σχ.544).

721. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ὑπάρχει σφαῖρα περιγεγραμμένη περί κῶνον ἐκ περιστροφῆς.

Λ ύ σ ι ς:"Εστω ΣΑΒ ὁ δοθείς κῶνος ἐκ περιστροφῆς.Προφανῶς τό κέντρον Ο τῆς περιγεγραμμένης σφαίρας θά κεῖται ἐπί τοῦ ὕψους ΣΓ τοῦ κώνου.'Επειδή ΟΑ=ΟΣ,τό Ο θά κεῖται καί ἐπί τοῦ μεσοκαθέτου ἐπιπέδου τῆς γενετείρας ΣΑ τοῦ κώνου.

"Αρα ὑπάρχει σφαῖρα περιγεγραμμένη περί τόν δοθέντα κῶνον.

Πῶς θά ὑπολογίσετε τήν ἀκτῖνα R τῆς σφαίρας συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος $A\Gamma = \rho$ τοῦ κώνου καί τοῦ ὕψους $\Gamma\Sigma = \upsilon$ τοῦ κώνου τούτου;

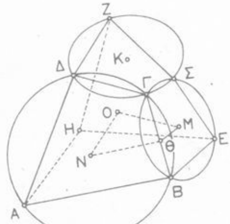


σχ.545

722. Ἵνα ἑξάεδρον εἶναι ἐγγράψιμον εἰς σφαῖραν, πρέπει καί ἀρκεῖ αἱ ἕδραι του νά εἶναι τετράπλευρα ἐγγράψιμα εἰς κύκλους.

Λ ύ σ ι ς: Περί τά τετράπλευρα ΑΒΓΔ καί ΒΕΣΓ περιγράφομεν κύκλους. Ἔστωσαν Μ καί Ν τά κέντρα αὐτῶν ἀντιστοίχως. Ἐπειδή ΜΒ=ΜΓ, τό Μ θά κεῖται ἐπί τοῦ μεσοκαθέτου ἐπιπέδου τοῦ τμήματος ΒΓ. Ἐπειδή δέ ΝΒ=ΝΓ, τό Ν θά κεῖται ἐπί τοῦ μεσοκαθέτου ἐπιπέδου τοῦ τμήματος ΒΓ, δηλαδή ἐπί τοῦ προηγουμένου. Τό ἐπίπεδον τοῦτο περιέχει τήν ΜΝ. Εἰς τά Μ καί Ν ἄγομεν τάς καθέτους ἐπί τά ἐπίπεδα ΑΒΓΔ καί ΒΕΣΓ. Αὗται τέμνονται εἰς ἕν σημεῖον Ο. Θά εἶναι:

ΟΑ=ΟΔ=ΟΒ=ΟΓ=ΟΕ=ΟΣ.



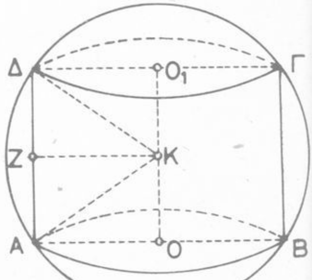
σχ.546

Δηλαδή τό Ο θά κεῖται ἐπί τῶν μεσοκαθέτων ἐπιπέδων τῶν τμημάτων ΓΔ καί ΓΣ καί ἡ σφαῖρα (Ο,ΟΔ) θά περιέχῃ καί τό σημεῖον Ζ. Ὁμοίως θά περιέχῃ καί τό σημεῖον Η. Ἄρα τό ἑξάεδρον ΑΒΕΗΔΓΣΖ θά εἶναι ἐγγράψιμον εἰς σφαῖραν. Τό ἀντίστροφον ἀποδεικνύεται εὐκόλως.

723. Πᾶς κύλινδρος ἐκ περιστροφῆς εἶναι ἐγγράψιμος εἰς σφαῖραν.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Ἔστω OO_1 ὁ ἐκ περιστροφῆς κύλινδρος. Ἐάν Κ εἶναι τό μέσον τοῦ ἄξονος OO_1 τοῦ κυλίνδρου, τότε τό Κ θά ἀπέχῃ ἰσάκις τῶν σημείων τῶν κύκλων τῶν δύο βάσεων.

Δηλαδή ΚΑ=ΚΔ=ΚΒ=ΚΓ=... καί κατ' ἀκολουθίαν τό Κ θά εἶναι ἡ τομή τοῦ μεσοκαθέτου ἐπιπέδου τῆς γενετείρας ΑΔ καί τοῦ ἄξονος OO_1. Ἄρα τό Κ εἶναι κέντρον σφαίρας ἀκτῖνος ΚΑ περιγεγραμμένης περί τόν κύλινδρον.



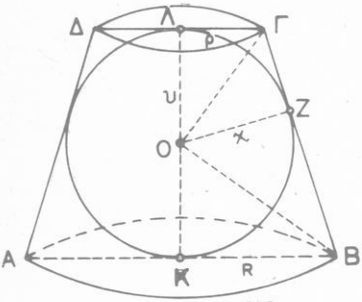
σχ.547

724. Κόλουρος κῶνος ἐκ περιστροφῆς εἶναι τοιοῦτος, ὥστε τό ὕψος του εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν διαμέτρων τῶν βάσεών του. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι οὗτος εἶναι περιγράψιμος εἰς σφαῖραν.

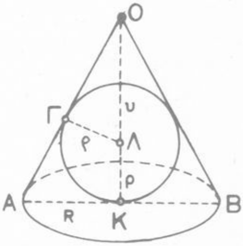
Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Θεωροῦμεν μίαν μεσημβρινήν τομήν τοῦ κολούρου κώνου ἐκ περιστροφῆς, ἡ ὁποία θά εἶναι ἰσοσκελές τραπέζιον, ἔστω τό ΑΒΓΔ. Αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν Γ καί Β τέμνονται ἐπί τοῦ ὕψους ΚΛ τοῦ κώνου·(σχ.548), καί τό τρίγω-

νον ΟΒΓ θά εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τό Ο. Ἔστω ΟΖ=x τό ὕψος τοῦ τριγώνου ΟΒΓ. Θά εἶναι: $\upsilon^2=4R\rho$, καί
$x^2=BZ.Z\Gamma=BK.\Gamma\Lambda=R.\rho=\frac{\upsilon^2}{4}$ ἐξ οὗ: $x=\frac{\upsilon}{2}$.

Κατ'ἀκολουθίαν ὁ κύκλος $(O,OZ=x=\frac{\upsilon}{2})$ ἐφάπτεται τῶν πλευρῶν τοῦ ἰσοσκελοῦς τραπεζίου ΑΒΓΔ. Ἄρα ὁ κόλουρος οὗτος κῶνος εἶναι περιγράφιμος περί τήν σφαῖραν $(O,\frac{\upsilon}{2})$.



σχ. 548



σχ.549

725. Σφαῖρα ἀκτῖνος ρ εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς κῶνον ἐκ περιστροφῆς ἀκτῖνος βάσεως R καί ὕψους υ. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\frac{1}{R^2}=\frac{1}{\rho^2}-\frac{2}{\rho\upsilon}$$

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΚΑ ἔχομεν (σχ.549): $OA^2=R^2+\upsilon^2$ (1)

Ἐκ τῶν ὁμοίων ὀρθογωνίων τριγώνων ΟΚΑ καί ΟΛΓ ἔχομεν:

$$\frac{\Gamma\Lambda}{AK}=\frac{O\Lambda}{OA} \text{ ἤ } \frac{\rho}{R}=\frac{\upsilon-\rho}{\sqrt{R^2+\upsilon^2}} \Longrightarrow \frac{\rho^2}{R^2}=\frac{\upsilon^2+\rho^2-2\rho\upsilon}{R^2+\upsilon^2}$$

ἤ $\rho^2R^2+\rho^2\upsilon^2=R^2\upsilon^2+\rho^2R^2-2R^2\rho\upsilon$ ἤ $\rho^2\upsilon^2=\upsilon^2R^2-2R^2\rho\upsilon$

ἤ $\rho^2\upsilon=\upsilon R^2-2R^2\rho=R^2(\upsilon-2\rho) \Longrightarrow R^2=\frac{\rho^2.\upsilon}{\upsilon-2\rho} \Longrightarrow$

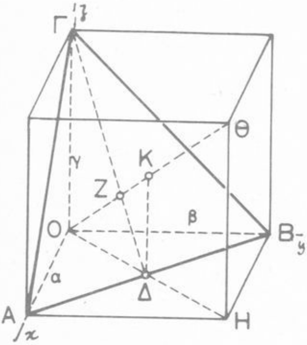
$$\frac{1}{R^2}=\frac{\upsilon-2\rho}{\rho^2.\upsilon}=\frac{\upsilon}{\rho^2.\upsilon}-\frac{2\rho}{\rho^2.\upsilon}=\frac{1}{\rho^2}-\frac{2}{\rho\upsilon},$$

ἤτοι: $$\frac{1}{R^2}=\frac{1}{\rho^2}-\frac{2}{\rho\upsilon}.$$

726. Ἐπί τῶν ἀκμῶν τρισορθογωνίου τριέδρου γωνίας Οχψζ

λαμβάνομεν τμήματα ΟΑ=α, ΟΒ=β, ΟΓ=γ. Νά ὁρισθῆ τό κέντρον καί ἡ ἀκτίς τῆς σφαίρας, τῆς διερχομένης διά τῶν σημείων Α, Β, Γ, Ο.

Λ ύ σ ι ς: Ἐκ τῶν Α, Β, Γ θεωροῦμεν τά παράλληλα ἐπίπεδα πρός τάς ἕδρας ΒΟΓ, ΓΟΑ, ΟΑΒ, ὁπότε σχηματίζεται τό ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον (ΟΘ). Ἐπειδή (ἄσκ.701) πᾶν ὀρθογώνιον παραλ/δον εἶναι ἐγγράψιμον εἰς σφαῖραν, ἕπεται ὅτι ἡ σφαῖρα διαμέτρου ΟΘ θά εἶναι καί ἡ περιγεγραμμένη σφαῖρα περί τό τετράεδρον ΟΑΒΓ.



σχ.550

Ἔστω Κ τό κέντρον τῆς σφαίρας ταύτης. Τοῦτο θά εἶναι τό μέσον τῆς ΟΘ. Ἐπειδή δέ

$$ΟΘ=\sqrt{α^2+β^2+γ^2}$$

ἕπεται ὅτι:

$$ΟΚ=\frac{1}{2}.ΟΘ=\frac{1}{2}\sqrt{α^2+β^2+γ^2} \qquad (1)$$

Ἔστω Δ τό μέσον τῆς ΑΒ. Αἱ ΓΔ καί ΟΘ κεῖνται ἐπί τοῦ ἐπιπέδου ΟΗΘΓ καί τέμνονται εἰς τό Ζ. Δηλαδή ἡ ΟΘ τέμνει τήν διάμεσον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἄρα θά τέμνῃ καί τάς ἄλλας. Ἐπειδή δέ δέν κεῖται εἰς τό ἐπίπεδον ΑΒΓ, θά διέρχεται διά τῆς τομῆς αὐτῶν Ζ, τό ὁποῖον εἶναι τό κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἐπί πλέον θά εἶναι: ΚΔ // ΟΓ καί κατ' ἀκολουθίαν τά τρίγωνα ΖΚΔ καί ΖΟΓ θά εἶναι ὅμοια, ὁπότε:

$$\frac{ΖΚ}{ΖΟ}=\frac{ΖΔ}{ΖΓ}=\frac{1}{2} \text{ ἤ } \frac{ΖΚ+ΖΟ}{ΖΟ}=\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2} \Longrightarrow ΟΖ=\frac{2}{3}.ΟΚ \text{ ἤ } ΟΖ=\frac{1}{3}.ΟΘ$$

$$\text{ἤ} \quad ΟΖ=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}\sqrt{α^2+β^2+γ^2}=\frac{1}{6}\sqrt{α^2+β^2+γ^2}.$$

727, Δίδεται σφαῖρα ἀκτῖνος R καί ζητεῖται ὁ γεωμ. τόπος τῆς κορυφῆς τριέδρου γωνίας Ο, τῆς ὁποίας αἱ ἀκμαί ἐφάπτονται τῆς σφαίρας, ἄν καί αἱ ἕδραι της εἶναι ἑκάστη 60^o.

Ἀ ν ά λ υ σ ι ς: Ἐπειδή ΟΑ=ΟΒ=ΟΓ, ὡς ἐφαπτόμεναι τῆς σφαίρας Κ καί $\sphericalangle$ ΑΟΒ=ΒΟΓ=ΓΟΑ=60^o, τά τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΑΓ, ΟΒΓ εἶναι ἰσόπλευρα. Ἄρα:

$$ΑΒ = ΒΓ = ΓΑ$$

καί τό τετράεδρον ΟΑΒΓ θά εἶναι κανονικόν. Τό ὕψος του $ΟΗ=\frac{ΟΒ\sqrt{6}}{3}$. Τό τρίγωνον ΟΒΚ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τό Β. Ἄρα:

$OB^2=OK.OH=OK.\frac{OB\sqrt{6}}{3} \Longrightarrow OK=\frac{OB\sqrt{6}}{2}$ (1)

'Εκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΒΚ ἔχομεν:

$OK^2-OB^2=R^2$ ἤ $\frac{6OB^2}{4}-OB^2=R^2 \Rightarrow OB=R\sqrt{2}$ (2)

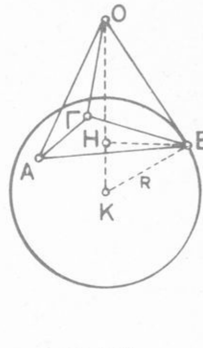
καί ἡ (1) γίνεται:

$$OK=\frac{R\sqrt{2}.\sqrt{6}}{2}=R\sqrt{3}=ct.$$

Ἄρα τό Ο γράφει σφαῖραν ἀκτῖνος $R\sqrt{3}$ καί κέντρου Κ.

Εὐκόλως ἤδη ἀποδεικνύεται καί τό ἀντίστροφον.

Ἡ ἐργασία αὕτη νά γίνῃ ὑπό τῶν μαθητῶν.

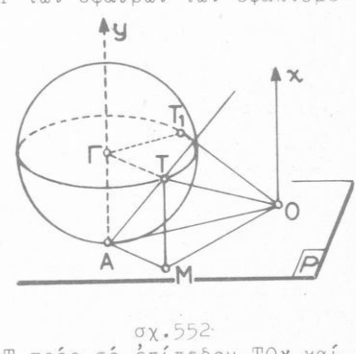


σχ.551

728. 'Επί ἐπιπέδου (Ρ) δίδεται σταθερόν σημεῖον Α καί μία σταθερά εὐθεῖα Οx, κάθετος ἐπί τό (Ρ) εἰς τό σημεῖον Ο. Θεωροῦμεν τάς σφαίρας τάς ἐφαπτομένας τοῦ (Ρ) εἰς τό Α καί τά διά τῆς Οx ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα τῶν σφαιρῶν τούτων. Νά εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικός τόπος τῶν σημείων ἐπαφῆς.

'Α ν ά λ υ σ ι ς: Τά κέντρα Γ τῶν σφαιρῶν τῶν ἐφαπτομένων τοῦ (Ρ) εἰς τό Α κεῖνται ἐπί τῆς καθέτου Αy πρός τό ἐπίπεδον (Ρ). Ἔστωσαν Τ καί T_1 τά σημεῖα ἐπαφῆς τῶν διά τῆς Οx ἀγομένων ἐφαπτομένων τῆς (Γ). Αἱ ΟΑ, ΟΤ, OT_1 ἐφάπτονται τῆς σφαίρας (Γ), διότι ἑκάστη τούτων κεῖται ἐπί τοῦ (Ρ) καί τῶν διά τῆς Οx ἀγομένων ἐφαπτομένων ἐπιπέδων ἀντιστοίχως. Ἄρα $OT_1=OT=OA$.

Ἄρα τά σημεῖα T_1 καί Τ κεῖνται ἐπί σφαίρας κέντρου Ο καί ἀκτῖνος ΟΑ.



σχ.552

Ἡ ΓΤ εἶναι κάθετος εἰς τό Τ πρός τό ἐπίπεδον ΤΟx καί ἑπομένως ὀρθογώνιος πρός τήν Οx. Ἡ προβολή τῆς ὀρθῆς γωνίας ΓΤΟ ἐπί τό (Ρ) εἶναι ἡ γωνία ΑΜΟ=1 ὀρθή, διότι ἡ ΓΤ εἶναι παράλληλος πρός τό (Ρ).

'Επειδή δέ ἡ ΟΑ εἶναι ὡρισμένη, ἕπεται ὅτι τό Μ θά κεῖται ἐπί κύκλου διαμέτρου ΟΑ. Ἄρα τό Τ θά γράφῃ κυλινδρικήν ἐπιφάνειαν ἐκ περιστροφῆς, μέ ὁδηγόν τόν κύκλον ΑΜΟ.

'Επειδή τό τρίγωνον ΓΤΑ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τό Γ καί ΓΤ=ΓΑ, ἕπεται ὅτι $\sphericalangle ΓAT=\frac{\pi}{4}$. Ἄρα τό Τ θά γράφῃ κωνικήν ἐπιφάνειαν ἐκ περιστροφῆς μέ κορυφήν Α καί γενέτειραν γωνίαν $\frac{\pi}{4}$.

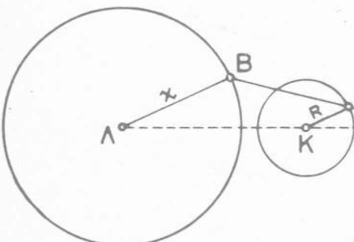
Τά σημεῖα ἐπαφῆς Τ καί T_1 εἶναι λοιπόν κοινά τῶν τριῶν ἀνωτέρω εὑρεθεισῶν ἐπιφανειῶν.

Εὐκόλως ἤδη ἀποδεικνύονται καί τά ἀντίστροφα τῶν ἀνωτέρω.

729. Τό ὁμοιόθετον σφαίρας ὡς πρός κέντρον εἶναι σφαῖρα.

Ἀ ν ά λ υ σ ι ς: Ἔστω (K,R) ἡ δοθεῖσα σφαῖρα καί Ο τό κέντρον ὁμοθεσίας, $\frac{\mu}{\nu}$ δέ ὁ λόγος ὁμοθεσίας. Ἔστω Λ σημεῖον τῆς ΟΚ, τοιοῦτον ὥστε $\frac{ΟΛ}{ΟΚ}=\frac{\mu}{\nu}$ (1). Ἐάν Α εἶναι τυχόν σημεῖον τῆς σφαίρας (K,R) καί Β τό ὁμοιόθετον τοῦ Α ὡς πρός τό Ο, θά εἶναι:

$$\frac{ΟΒ}{ΟΑ}=\frac{ΟΛ}{ΟΚ}=\frac{\mu}{\nu}$$



σχ.553

Ἄν ἀχθῇ ἡ ΛΒ=x, αὕτη θά εἶναι ὁμοιόθετος τῆς ΚΑ=R καί θά ἔχωμεν: $\frac{x}{R}=\frac{ΟΛ}{ΟΚ}=\frac{\mu}{\nu} \Longrightarrow x=\frac{\mu}{\nu}.R$=ὡρισμένον

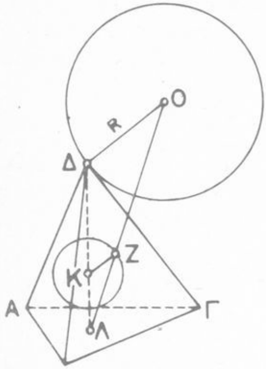
Ἄρα τό Β θά κεῖται ἐπί σφαίρας $(Λ,\frac{\mu}{\nu}R)$, ἡ ὁποία θά εἶναι εὐθέως ὁμοιόθετος τῆς (K,R) ὡς πρός τό Ο καί μέ λόγον ὁμοιοθεσίας $\frac{\mu}{\nu}$.

Μήπως ὑπάρχει καί ἄλλη σφαῖρα (ἀντιθέτως ὁμοιόθετος τῆς (K) καί μέ ποῖον λόγον ὁμοιοθεσίας;

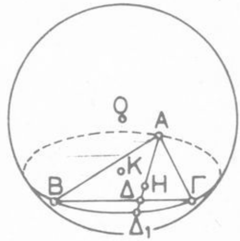
730. Τετραέδρου ΑΒΓΔ ἡ βάσις ΑΒΓ εἶναι σταθερά, ἡ δέ κορυφή Δ κινεῖται ἐπί σφαίρας (O,R). Νά εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τοῦ κέντρου βάρους τοῦ τετραέδρου.

Ἀ ν ά λ υ σ ι ς: Ἔστω Κ τό κέντρον βάρους τοῦ τετραέδρου (σχ.554).

Θά εἶναι $ΛΚ=\frac{1}{4}.ΛΔ$. Ἄν ἀχθῇ ἡ ΚΖ παράλληλος πρός τήν ΔΟ, θά εἶναι $ΛΖ=\frac{1}{4}ΛΟ$=ὡρισμένον καί $ΚΖ=\frac{1}{4}ΔΟ=\frac{R}{4}$. Ἄρα τό Κ θά κεῖται ἐπί σφαίρας κέντρου Ζ καί ἀκτῖνος $ΖΚ=\frac{R}{4}$. Τό ἀντίστροφον ἀποδεικνύεται εὐκόλως.



σχ.554



σχ.555

731. Δίδεται σφαῖρα (O,R) καί χορδή ΒΓ αὐτῆς σταθερά. Ἕν σημεῖον Α διαγράφει τήν σφαῖραν.Νά εὑρεθῇ ὁ γεωμ.τόπος τοῦ ὀρθοκέντρου Η τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Ἀ ν ά λ υ σ ι ς:Τό ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τήν σφαῖραν (Ο) κατά κύκλον κέντρου Κ,καί τό ὕψος ΑΔ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τόν κύκλον ΑΒΓ εἰς ἕν σημεῖον $Δ_1$,συμμετρικόν τοῦ Η ὡς πρός τήν ΒΓ.Κατ'ἀκολουθίαν τό σημεῖον Η κεῖται ἐπί σφαίρας ($Ο_1$),συμμετρικῆς τῆς (Ο) ὡς πρός τήν ΒΓ.

Ἀ ν τ ι σ τ ρ ό φ ω ς:Ἔστω Η τυχόν σημεῖον τῆς σφαίρας (Ο).Τό ἐπίπεδον ΗΒΓ τέμνει τήν σφαῖραν (Ο) κατά κύκλον κέντρου (Κ) καί ἡ κάθετος ἐκ τοῦ Η πρός τήν ΒΓ τέμνει τόν κύκλον τοῦτον εἰς ἕν σημεῖον $Δ_1$,συμμετρικόν τοῦ Η ὡς πρός τήν ΒΓ καί εἰς ἕν ἄλλο σημεῖον Α.

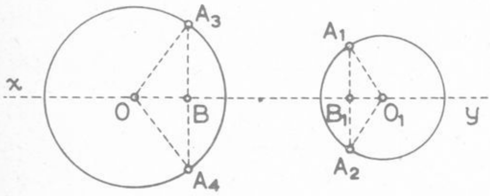
Τό Η εἶναι τό ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ,διότι τό συμμετρικόν του ὡς πρός τήν ΒΓ κεῖται ἐπί τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου περί τό ΑΒΓ.

732. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι τό σχῆμα,ὅπερ ἀποτελεῖται ἀπό δύο σφαίρας (Ο) καί ($Ο_1$) ἔχει ἄξονα συμμετρίας τήν διάκεντρον $ΟΟ_1$ τῶν σφαιρῶν,καί ὡς ἐπίπεδον συμμετρίας τό τυχόν διά τῆς $ΟΟ_1$ διερχόμενον. .

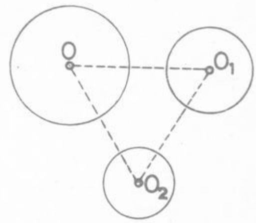
Λ ύ σ ι ς:Ἔστω $ΟΟ_1$ ἡ διάκεντρος δύο σφαιρῶν (σχ.556). Ἐάν $Α_1$ εἶναι τυχόν σημεῖον τῆς σφαίρας ($Ο_1$),τότε τό συμμετρικόν του $Α_2$ ὡς πρός τήν $ΟΟ_1$ θά κεῖται ἐπί τῆς σφαίρας

(O_1). Ὁμοίως ἄν A_3 εἶναι τυχόν σημεῖον τῆς σφαίρας (O), τότε τό συμμετρικόν του A_4 ὡς πρός τήν OO_1 θά κεῖται ἐπί τῆς σφαίρας (O).

Ἄν διά τῆς OO_1 θεωρήσωμεν τυχόν ἐπίπεδον, τότε πᾶν σημεῖον τῆς σφαίρας (O) ἤ τῆς (O_1) θά ἔχῃ τό συμμετρικόν του ἐπί τῆς σφαίρας (O) ἤ τῆς (O_1) ὡς πρός τό ἐπίπεδον τοῦτο.



σχ.556



σχ.557

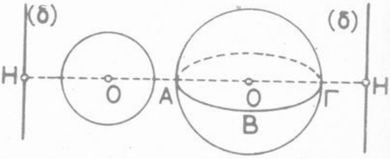
733. Ἐάν τά κέντρα O, O_1, O_2 τριῶν σφαιρῶν δέν κεῖνται ἐπ' εὐθείας, τό σχῆμα τοῦτο ἔχει ἐπίπεδον συμμετρίας τό (OO_1O_2).

Λ ύ σ ι ς: Τά κέντρα O, O_1, O_2 ὁρίζουν ἐπίπεδον (σχ.557). Πᾶν σημεῖον ἑκατέρας τῶν σφαιρῶν (O), (O_1), (O_2) θά ἔχῃ τό συμμετρικόν του ἐπί τῆς ἀντιστοίχου σφαίρας ὡς πρός τό ἐπίπεδον (OO_1O_2). Ἄρα τό ἐπίπεδον (OO_1O_2) εἶναι ἐπίπεδον συμμετρίας τῶν σφαιρῶν (O), (O_1) καί (O_2).

734. Τό σχῆμα, τό ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπό μίαν σφαῖραν (O) καί μίαν εὐθεῖαν (δ), δέχεται ὡς ἐπίπεδα συμμετρίας: 1) τό διαμετρικόν ἐπίπεδον τῆς σφαίρας, τό διά τῆς (δ) διερχόμενον. 2) Τό διαμετρικόν ἐπίπεδον τῆς σφαίρας, τό κάθετον πρός τήν (δ).

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς:

1) Ἔστω σφαῖρα (O) καί μία εὐθεῖα (δ). Ἡ (δ) καί τό O ὁρίζουν ἐπίπεδον, τό ὁποῖον τέμνει τήν σφαῖραν (O) κατά μέγιστον κύκλον. Τό ἐπίπεδον τοῦτο εἶναι ἐπίπεδον συμμετρίας τοῦ σχήματος.



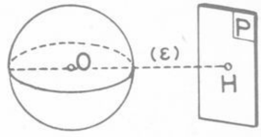
σχ.538

2) Διά τοῦ κέντρου O ἄγομεν ἐπίπεδον κάθετον πρός τήν (δ). Τοῦτο τέμνει τήν σφαῖραν κατά μέγιστον κύκλον ΑΒΓ, ὅπερ εἶναι ἐπίπεδον συμμετρίας τοῦ σχήματος.

735. Τό σχῆμα τό ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπό μίαν σφαῖραν (O) καί ἕνα ἐπίπεδον (P), ἔχει: 1) ἄξονα συμμετρίας τήν διά τοῦ κέντρου κάθετον εὐθεῖαν (ε) ἐπί τό ἐπίπεδον τοῦτο (P), καί 2) ἐπίπεδον συμμετρίας κάθε ἐπίπεδον διερχόμενον διά τοῦ ἀνωτέρω ἄξονος συμμετρίας (ε).

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: 1) Ἔστω (O) ἡ δοθεῖσα σφαῖρα καί (P) τό δοθέν ἐπίπεδον. Ἐκ τοῦ O ἄγομεν τήν κάθετον OH πρός τό ἐπίπεδον (P).

Ἡ εὐθεῖα (ε) εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ σχήματος.



σχ.559

2) Διά τῆς OH θεωροῦμεν τυχόν ἐπίπεδον κάθετον πρός τό (P). Τοῦτο εἶναι προφανῶς ἐπίπεδον συμμετρίας τοῦ σχήματος.

736. Ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου σφαίρας (O, R=15 cm) ἀπό τό κέντρον ἑνός μικροῦ κύκλου αὐτῆς εἶναι 9 cm. Νά ὑπολογισθῇ ἡ πολική ἀκτίς τῶν σημείων τοῦ μικροῦ τούτου κύκλου.

Λ ύ σ ι ς: Ἔστω $O\Pi_1=R=15$ cm καί $OK=9$ cm $=d$. Ἔστωσαν $\Pi A=\rho_1$ καί $\Pi_1 A=\rho_2$ αἱ πολικαί ἀκτῖνες τοῦ κύκλου (K).

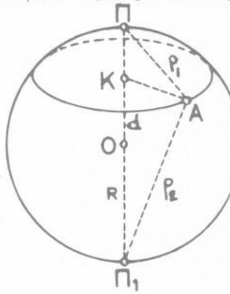
Ἐκ τῶν τύπων:

$\rho_1^2=2.R(R-d)=2.15(15-9)=30.6=180$

$\Rightarrow \rho_1=6\sqrt{5}$ cm.

καί $\rho_2^2=2.R(R+d)=2.15(15+9)=30.24=720$

$\Rightarrow \rho_2=12\sqrt{5}$



σχ.560

737. Μικρός κύκλος σφαίρας ἀπέχει ἀπό τόν πόλον 3 cm, ἡ δέ πολική ἀκτίς τοῦ κύκλου τούτου εἶναι 6 cm. Νά ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτίς τῆς σφαίρας καί ἡ ἀκτίς τοῦ μικροῦ κύκλου.

Λ ύ σ ι ς: Ἔστω $K\Pi=3$ cm, καί $\Pi A=6$ cm. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΠKA ἔχομεν:

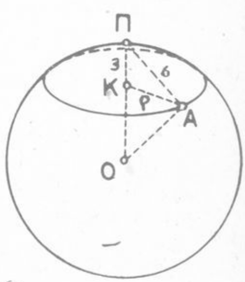
$KA^2=\Pi A^2-K\Pi^2=6^2-3^2=36-9=25$

καί ἄρα: $KA=5$ cm.

Ἐπειδή $\rho=KA=5$ cm, ἐκ τοῦ τύπου

$\rho_1^2=2.R(R-\sqrt{R^2-\rho^2})$ διά $\rho_1=\Pi A=6$ καί $\rho=5$, ἔχομεν:

$6^2=2.R(R-\sqrt{R^2-5^2})$ ἤ $36=2.R(R-\sqrt{R^2-25})$



σχ.561

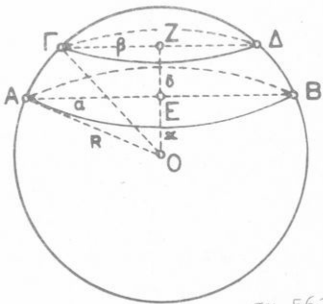
ἤ $18=R^2-R\sqrt{R^2-25}$ ἤ $R\sqrt{R^2-25}=R^2-18$

ἤ $R^2(R^2-25)=R^4-36R^2+324$

$$R^4-25R^2=R^4-36R^2+324 \Longrightarrow 11R^2=324$$

$$R\sqrt{11}=18 \Longrightarrow R=\frac{18\sqrt{11}}{11}$$

738. Αἱ ἀκτῖνες δύο παραλλήλων κύκλων σφαίρας εἶναι α καί β (α>β), ἡ δέ ἀπόστασίς των δ. Ποῖα ἡ ἀκτίς τῆς σφαίρας;



σχ.562

Λ ύ σ ι ς: Ἔστω ΟΕ=x. Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΟΖΓ καί ΟΕΑ ἔχομεν ἀντιστοίχως:

$$\left.\begin{aligned} R^2&=\beta^2+(x+\delta)^2 \\ R^2&=\alpha^2+x^2 \end{aligned}\right\} \text{ καί },$$

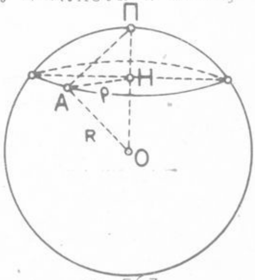
ὅθεν $\alpha^2+x^2=\beta^2+(x+\delta)^2=\beta^2+x^2+2\delta x$

ἐξ οὗ: $x=\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{2\delta}$,

καί κατ' ἀκολουθίαν:

$$R^2=\alpha^2+\left(\frac{\alpha^2-\beta^2}{2\delta}\right)^2=\frac{4\alpha^2\delta^2+(\alpha^2-\beta^2)^2}{4\delta^2} \Rightarrow R=\frac{1}{2\delta}\sqrt{4\alpha^2\delta^2+(\alpha^2-\beta^2)^2}$$

739. Ἡ ἀκτίς ἑνός μικροῦ κύκλου σφαίρας εἶναι 6 cm, ἡ δέ ἀπόστασις αὐτοῦ ἀπό τόν πόλον εἶναι 4 cm. Ποία ἡ ἀκτίς τῆς σφαίρας;



σχ.563

Λ ύ σ ι ς: Εἶναι ΗΑ=ρ=6 cm, καί ΗΠ=4 cm. Ἄρα:

$$\rho_1^2=\Pi A^2=HA^2+H\Pi^2=6^2+4^2=36+16=52$$

ἐξ οὗ: $\rho_1=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$ cm.

Ἐκ τοῦ τύπου $\rho_1^2=2R(R-\sqrt{R^2-\rho^2})$

διά $\rho_1=2\sqrt{13}$ καί $\rho=6$, εὑρίσκομεν τό R.

740. Ἐπί δοθείσης σφαίρας νά γραφῆ κύκλος ἀκτῖνος ρ, διερχόμενος διά δύο δεδομένων σημείων Α, Β τῆς σφαίρας ταύτης.

Λ ύ σ ι ς: Ἐκ τοῦ τύπου $d=\sqrt{R^2-\rho^2}$ προκύπτει τό τμῆμα

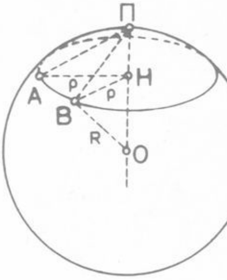
OH=d.

'Αλλά $\rho_1^2=\Pi B^2=2R(R-\sqrt{R^2-\rho^2})=\Pi A^2$

ἐξ οὗ: $\rho_1=\sqrt{2R(R-\sqrt{R^2-\rho^2})}$ (1)

Μέ κέντρα τά Α καί Β καί ἀκτῖνα ρ_1 γράφομεν δύο τόξα ἐπί τῆς σφαίρας, τεμνόμενα εἰς τό Π. Μέ κέντρον τό Π καί ἀκτῖνα ρ_1 γράφομεν τόν ζητούμενον κύκλον, ὅστις θά διέλθη ἀπό τά Α καί Β.

Διά νά ὑπάρχη τό Π πρέπει $\boxed{AB<2\rho_1}$



σχ.564

741. 'Επί δοθείσης σφαίρας νά γραφῆ κύκλος δεδομένης ἀκτῖνος λ.

Λ ύ σ ι ς: Εἶναι ρ=λ καί ἄρα

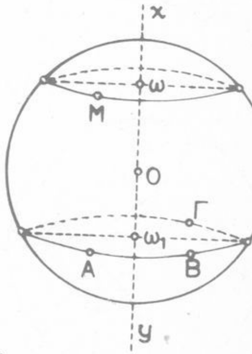
$$\rho_1^2=2R(R-\sqrt{R^2-\lambda^2}) \Rightarrow \rho_1=\sqrt{2R(R-\sqrt{R^2-\lambda^2})}.$$

Κατ' ἀκολουθίαν, μέ κέντρον τυχόν σημεῖον τῆς σφαίρας (O,R) καί ἀκτῖνα ρ_1 γράφομεν τόν ζητούμενον κύκλον.

742. Ἵνα δύο κύκλοι ἀνήκουν εἰς σφαῖραν, πρέπει καί ἀρκεῖ νά ἔχουν τόν αὐτόν ἄξονα.

Λ ύ σ ι ς: Ἔστωσαν δύο κύκλοι (ω) καί (ω_1), οἱ ὁποῖοι ἔχουν τόν αὐτόν ἄξονα xOy. 'Επί τοῦ κύκλου (ω_1) θεωροῦμεν τρία τυχόντα σημεῖα Α,Β,Γ καί ἐπί τοῦ κύκλου (ω) θεωροῦμεν τυχόν σημεῖον Μ. Διά τῶν τεσσάρων σημείων Α,Β,Γ,Μ διέρχεται σφαῖρα (§ 221-4ον). Τό κέντρον τῆς σφαίρας ταύτης κεῖται ἐπί τοῦ ἄξονος xy. Ἡ σφαῖρα αὕτη τέμνεται ὑπό τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κύκλου (ω) κατά κύκλον, ὅστις συμπίπτει μέ τόν (ω), διότι ἔχει τό αὐτό κέντρον καί διέρχεται διά τοῦ Μ.

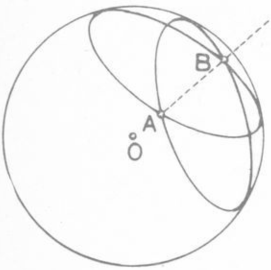
Τό ἀντίστροφον ἀποδεικνύεται εὐκόλως.



σχ.565

743. Ἵνα δύο κύκλοι κείμενοι ἐπί δύο τεμνομένων ἐπιπέδων, ἀνήκουν εἰς τήν αὐτήν σφαῖραν, πρέπει καί ἀρκεῖ: 1) νά ἔχουν δύο κοινά σημεῖα. 2) νά ἐφάπτωνται τῆς αὐτῆς εὐθείας εἰς τό αὐτό σημεῖον καί 3) οἱ ἄξονές των νά τέμνωνται καί τό ἐπίπεδον τῶν ἀξόνων των νά τέμνη τούς δύο κύκλους εἰς τέσσαρα σημεῖα ὁμοκύκλια.

Λ ύ σ ι ς:"Εστωσαν δύο κύκλοι μιᾶς σφαίρας,τῶν ὁποίων τά ἐπίπεδα τέμνονται κατά μίαν εὐθεῖαν (δ).



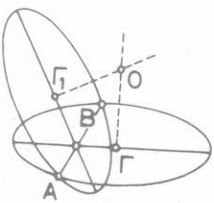
σχ.566

1)'Εάν ἡ εὐθεῖα (δ) τέμνῃ τήν σφαῖραν εἰς τά σημεῖα Α καί Β,οἱ δύο κύκλοι ἔχουν τά Α καί Β κοινά σημεῖα.

'Αντιστρόφως:ἔστωσαν δύο κύκλοι (Γ) καί ($Γ_1$),τεμνόμενοι κατά τά Α καί Β.

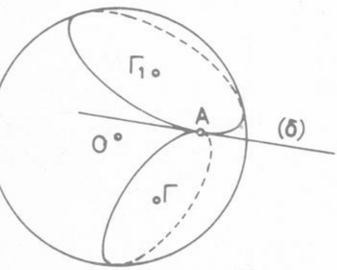
'Ο ἄξων τοῦ κύκλου (Γ) κεῖται ἐπί τοῦ μεσοκαθέτου ἐπιπέδου τοῦ τμήματος ΑΒ.'Ομοίως ὁ ἄξων τοῦ κύκλου ($Γ_1$) κεῖται ἐπί τοῦ μεσοκαθέτου ἐπιπέδου τοῦ τμήματος ΑΒ.

Οἱ δύο οὗτοι ἄξονες τέμνονται εἰς τό σημεῖον Ο.'Η σφαῖρα κέντρου Ο καί ἀκτῖνος ΟΑ περιέχει τούς δύο κύκλους (Γ) καί ($Γ_1$).

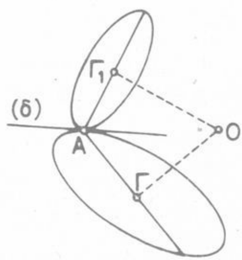


χ.567

2) 'Εάν ἡ (δ) ἐφάπτεται τῆς σφαίρας, αὕτη ἔχει μόνον ἕνα κοινόν σημεῖον μετά τῶν δύο κύκλων,διότι ἄλλως θά ἦτο τέμνουσα τῆς σφαίρας.'Επίσης ἡ (δ)κεῖται ἐπί τοῦ ἐπιπέδου ἑκάστου κύκλου. "Αρα οἱ κύκλοι οὗτοι ἐφάπτονται τῆς (δ) εἰς τό σημεῖον Α.



σχ.568

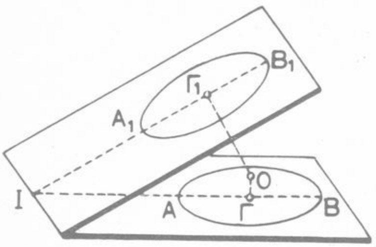


σχ.569

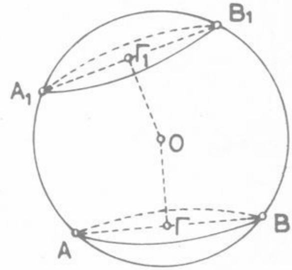
'Αντιστρόφως:"Εστωσαν δύο κύκλοι (Γ) καί ($Γ_1$) ἐφαπτόμενοι τῆς (δ) εἰς τό σημεῖον Α.Οἱ ἄξονες τῶν δύο κύκλων κεῖται ἐπί τοῦ καθέτου ἐπιπέδου πρός τήν (δ) εἰς τό σημεῖον Α αὐτῆς."Αρα τέμνονται εἰς ἕν σημεῖον Ο.

'Η σφαῖρα κέντρου Ο καί ἀκτῖνος ΟΑ περιέχει τούς δύο κύκλους (Γ) καί ($Γ_1$).

3) Ἐάν ἡ (δ) κεῖται ἐκτός τῆς σφαίρας, οἱ ἄξονες ΟΓ καί ΟΓ$_1$ τῶν δύο σφαιρῶν κεῖνται ἐπί τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, τοῦ καθέτου πρός τήν (δ), ἔστω εἰς τό σημεῖον I καί τό ὁποῖον ἐπίπεδον τέμνει τούς κύκλους (Γ) καί (Γ$_1$) κατά τάς διαμέτρους IAB καί IA$_1$B$_1$ ἀντιστοίχως. Τά σημεῖα A, B, A$_1$, B$_1$ κεῖνται ἐπί ἑνός μεγίστου κύκλου τομῆς τῆς σφαίρας καί τοῦ ἐπιπέδου ΓΟΓ$_1$.



σχ.570



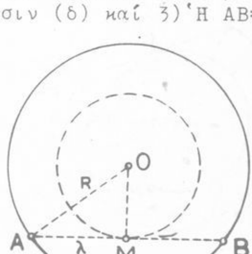
σχ.571

Ἀντιστρόφως: Ἔστωσαν δύο κύκλοι (Γ) καί (Γ$_1$), οἱ ὁποῖοι δέν τέμνονται, ἀλλ' οἱ ἄξονες αὐτῶν τέμνονται εἰς ἕν σημεῖον Ο, καί εἶναι τοιοῦτοι ὥστε τό ἐπίπεδον τῶν ἀξόνων των τέμνει τούς δύο κύκλους κατά τά σημεῖα A, B καί A$_1$, B$_1$ ἀντιστοίχως, τά ὁποῖα κεῖνται ἐπί τοῦ αὐτοῦ κύκλου. Ὁ κύκλος οὗτος ἔχει κέντρον τό Ο, διότι τό Ο εἶναι κοινόν τῶν μεσοκαθέτων ἐπιπέδων τῶν τμημάτων AB καί A$_1$B$_1$. Θά ἔχωμεν δέ OA=OA$_1$ καί ἡ σφαῖρα κέντρου Ο καί ἀκτῖνος OA περιέχει τούς κύκλους (Γ) καί (Γ$_1$).

744. Θεωροῦμεν σφαῖραν (O,R) καί μεταβλητήν χορδήν αὐτῆς AB. Νά εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τοῦ μέσου M τῆς AB, ὅταν: 1) AB=λ, 2) ἡ AB διέρχεται διά σταθεροῦ σημείου P (ἤ μένει παράλληλος πρός δοθεῖσαν διεύθυνσιν (δ) καί 3) Ἡ AB=λ διέρχεται διά σταθεροῦ σημείου Γ ἤ εἶναι παράλληλος πρός δοθεῖσαν διεύθυνσιν (δ).

Λ ύ σ ι ς: 1) Ἔστω AB=λ καί OA=R. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου OMA ἔχομεν: $OM^2=OA^2-AM^2=R^2-\frac{\lambda^2}{4}=\frac{4R^2-\lambda^2}{4}$

ἐξ οὗ: $OM=\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-\lambda^2}=ct$.

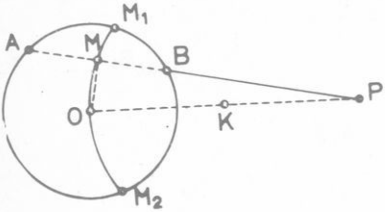


σχ.572

Ἄρα τό M θά κεῖται ἐπί τῆς σφαίρας (O,OM).
Πρέπει $\lambda \leq 2R$, διά νά ὑπάρχῃ ἡ σφαῖρα αὕτη.
Τό ἀντίστροφον ἀποδεικνύεται εὐκόλως.

2) α) Ἔστω ὅτι ἡ χορδή AB τῆς σφαίρας (O,R) διέρχεται διά τοῦ ὡρισμένου σημείου P. Ἄν M εἶναι τό μέσον τῆς AB, τότε ἡ OM θά εἶναι κάθετος πρός τήν AB. Ἄρα τό M θά κεῖται ἐπί σφαίρας διαμέτρου OP.

Μόνον τό μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, διαμέτρου OP, τό κείμενον ἐντός τῆς σφαίρας (O) ἀποτελεῖ τόν ζητούμενον τόπον.

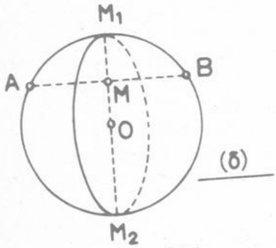


σχ.573

Τό ἀντίστροφον ἀποδεικνύεται εὐκόλως.
Ἐάν τό P κειται ἐπί τῆς σφαίρας ἤ εἶναι ἐσωτερικόν σημεῖον αὐτῆς, τότε τό M γράφει σφαῖραν διαμέτρου OP.

β) Ἔστω ὅτι ἡ χορδή AB μένει διαρκῶς παράλληλος πρός τήν διεύθυνσιν (δ). Ἐάν M εἶναι τό μέσον τῆς AB, τότε τοῦτο θά κεῖται ἐπί τοῦ μεσοκαθέτου ἐπιπέδου τῆς AB, τό ὁποῖον ἐπίπεδον θά εἶναι καί κάθετον πρός τήν (δ). Τό ἐπίπεδον τοῦτο τέμνει τήν σφαῖραν κατά κύκλον διαμέτρου M_1OM_2, καθέτου πρός τήν (δ). Τά ἐσωτερικά σημεῖα τοῦ κύκλου τούτου καί τά σημεῖα τοῦ κύκλου τούτου ἀποτελοῦν τόν ζητούμενον τόπον τοῦ M.

Τό ἀντίστροφον ἀποδεικνύεται εὐκόλως.



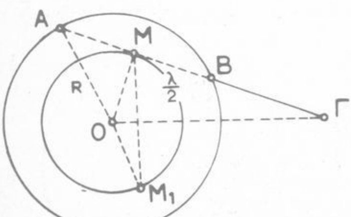
σχ.574

3) α) Ἔστω ὅτι $AB=\lambda$ καί ὅτι ἡ AB διέρχεται διά τοῦ ὡρισμένου σημείου Γ.

Ἐάν M εἶναι τό μέσον τῆς AB, τότε $AM=\frac{\lambda}{2}$ καί $OM=\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-\lambda^2}$ (1)

Ἡ (1) ἐκφράζει ὅτι τό M κεῖται ἐπί σφαίρας κέντρου O καί ἀκτῖνος OM.

Ἐπειδή δέ ∢ ΟΜΓ=1 ὀρθή, ἕπεται ὅτι τό M θά κεῖται καί ἐπί τῆς σφαίρας ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον ΟΓ. Ἡ τομή τῶν δύο τούτων σφαιρῶν εἶναι, ὡς γνωστόν, κύκλος διαμέτρου MM_1, ἔνθα M_1 τό συμμετρικόν τοῦ M ὡς πρός τήν OP.

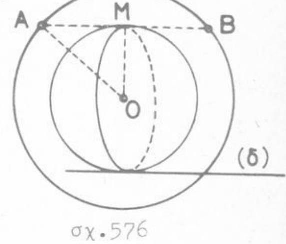


σχ.575

Τό ἀντίστροφον ἀποδεικνύεται εὐκόλως.

β) Ἐάν ἡ AB=λ μένῃ διαρκῶς παράλληλος πρός τήν δοθεῖσαν διεύθυνσιν(δ), τότε τό M θά κεῖται ἐπί τῆς τομῆς τῆς σφαίρας $(O,OM=\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-\lambda^2})$ καί τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ἀγομένου ἐκ τοῦ O καθέτως πρός τήν δοθεῖσαν διεύθυνσιν (δ).

Εὐκόλως ἤδη ἀποδεικνύεται καί τό ἀντίστροφον.



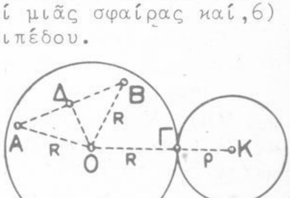
σχ.576

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XVI

ΣΦΑΙΡΙΚΗ ΖΩΝΗ-ΣΦ.ΤΟΜΕΥΣ-ΟΓΚΟΣ ΣΦΑΙΡΑΣ

745. Νά κατασκευασθῇ σφαῖρα δοθείσης ἀκτῖνος R καί 1) διερχομένη διά δύο σημείων A,B καί ἐφαπτομένη δοθείσης σφαίρας. 2) Διερχομένη διά σημείου A καί ἐφαπτομένη δύο ἐπιπέδων (P) καί (P_1), 3) Διερχομένη διά δοθέντος σημείου Γ καί ἐφαπτομένη δύο σφαιρῶν. 4) Διερχομένη διά δοθέντος σημείου καί ἐφαπτομένη σφαίρας καί δοθέντος ἐπιπέδου. 5) Ἐφαπτομένη δύο ἐπιπέδων καί μιᾶς σφαίρας καί,6) Ἐφαπτομένη δύο σφαιρῶν καί ἑνός ἐπιπέδου.

Λ ύ σ ι ς:1) Ἔστω O τό κέντρον τῆς ζητουμένης σφαίρας. Ἐπειδή KO=ρ+R, τό O θά κεῖται ἐπί τῆς σφαίρας, ἡ ὁποία ἔχει κέντρον τό K καί ἀκτῖνα R+ρ.



σχ.577

Ἐπειδή ἡ σφαῖρα (O) διέρχεται ἀπό τά A καί B, τό κέντρον της O θά κεῖται καί ἐπί τοῦ μεσοκαθέτου ἐπιπέδου τοῦ τμήματος AB[Γ*] καί τῆς σφαίρας (A,R), δηλαδή κύκλος. Ἄρα τό O θά κεῖται ἐπί τῆς τομῆς τῶν σφαιρῶν (O,R) καί (K,R+ρ) ἤ (K,R-ρ).

Ἐάν KO=R+ρ, αἱ σφαῖραι (O,R) καί (K,R+ρ) ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς. Ἐάν KO=R-ρ (R > ρ), αἱ σφαῖραι (O,R) καί (K,R-ρ) ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς.

Γ* Ἐπειδή δέ AO=R, ἕπεται ὅτι τό O δέ κεῖται ἐπί τοῦ μεσοκαθέτου ἐπιπέδου τοῦ τμήματος AB

Τό ἀντίστροφον ἀποδεικνύεται εὐκόλως.

2) Ἔστω O τό κέντρον μιᾶς σφαίρας ἀκτῖνος R, διερχομένης διά τοῦ A καί ἐφαπτομένης τῶν ἐπιπέδων (P) καί (P_1).
Τό κέντρον O θά κεῖται εἰς τό ἐσωτερικόν τῆς διέδρου, ἡ ὁποία σχηματίζεται ἀπό τά (P) καί (P_1). Τό A θά εἶναι ἐσωτερικόν τῆς διέδρου ταύτης γωνίας.
Τό O θά κεῖται ἐπί τῶν ἐπιπέδων (P΄) καί (P_1'), τῶν παραλλήλων ἀντιστοίχως πρός τά (P) καί (P_1), εἰς ἀπόστασιν R ἀπό ταῦτα, πρός τό αὐτό μέρος μετά τοῦ A, καί κατ'ἀκολουθίαν ἐπί τῆς τομῆς (δ) τῶν (P΄) καί (P_1').
Ἐπί πλέον τό O θά κεῖται καί ἐπί τῆς σφαίρας (A,R).
Ἄρα τό O εἶναι κοινόν τῆς σφαίρας ταύτης καί τῆς εὐθείας (δ).
Τό ἀντίστροφον ἀποδεικνύεται εὐκόλως.
Τό πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις ἤ μίαν ἤ οὐδεμίαν.
Ἐξετάσατε τήν περίπτωσιν καθ'ἥν τά (P) καί (P_1) εἶναι παράλληλα. Τά (P΄) καί (P_1') θά εἶναι παράλληλα ἤ θά συμπίπτουν. Ἵνα τό πρόβλημα ἔχῃ λύσιν, πρέπει ἡ ἀπόστασις τῶν (P) καί (P_1) νά εἶναι 2R. Τό πρόβλημα ἐπιδέχεται ἀπείρους λύσεις.

3) Ἔστωσαν ρ, R_1, R_2 αἱ ἀκτῖνες τῶν σφαιρῶν (O), (O_1), (O_2) ἀντιστοίχως, ὅπου ρ ἡ ἀκτίς τῆς ζητουμένης (μέ $R_1>\rho$, $R_2>\rho$).
Ἐπειδή ΟΓ=ρ, ἕπεται ὅτι τό κέντρον O τῆς ζητουμένης σφαίρας θά κεῖται ἐπί σφαίρας κέντρου Γ καί ἀκτῖνος ΓΟ=ρ.
Ἐπειδή δέ ἡ (O) θά ἐφάπτεται τῶν (O_1) καί (O_2) ἕπεται ὅτι τό κέντρον O θά κεῖται καί ἐπί τῶν σφαιρῶν ἀντιστοίχως:

1) $(O_1, R_1+\rho), (O_2, R_2+\rho)$ δύο λύσεις | $(O_1, R_1-\rho), (O_2, R_2+\rho)$ δύο λύσεις

2) $(O_1, R_1+\rho), (O_2, R_2-\rho)$ δύο λύσεις | $(O_1, R_1-\rho), (O_2, R_2-\rho)$ δύο λύσεις

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω φαίνεται ὅτι τό πρόβλημα ἔχει ὀκτώ λύσεις.

4) Ἔστωσαν Γ τό δοθέν σημεῖον, (O_1, R) ἡ δοθεῖσα σφαῖρα καί (Π) τό δοθέν ἐπίπεδον. Ἀφοῦ ἡ ζητουμένη σφαῖρα ἔχει ἀκτῖνα ρ καί ἐφάπτεται τῆς (O_1, R) καί τοῦ ἐπιπέδου (Π), ἕπεται ὅτι τό O θά εἶναι κοινόν σημεῖον τῶν σφαιρῶν:

1) $(\Gamma,\rho), (O_1, R+\rho), (\Pi_1)$ 3) $(\Gamma,\rho), (R-\rho), (\Pi_1)$
2) $(\Gamma,\rho), (O_1, R+\rho), (\Pi_2)$ 4) $(\Gamma,\rho), (R-\rho), (\Pi_2)$, $R>\rho$

ὅπου (Π_1) καί (Π_2) εἶναι ἐπίπεδα παράλληλα πρός τό (Π) καί εἰς ἀπόστασιν ρ ἀπό τοῦτο.
Τό πρόβλημα ἔχει, ἐν γένει, ὀκτώ λύσεις.

5) Ἔστωσαν (O) ἡ ζητουμένη σφαῖρα καί (α), (β) τά δοθέντα ἐπίπεδα. Τό κέντρον O τῆς ζητουμένης σφαίρας θά κεῖ-

ται:

α΄)'Επί τοῦ ἐπιπέδου (α_1) ἤ (α_2), παραλλήλων πρός τό (α) εἰς ἀπόστασιν ρ ἀπό τό (α)

β΄)'Επί τοῦ ἐπιπέδου (β_1) ἤ (β_2), παραλλήλων πρός τό (β) καί εἰς ἀπόστασιν ρ ἀπό τό (β).

γ΄)'Εάν (σ,R) εἶναι ἡ δοθεῖσα σφαῖρα, τό Ο θά κεῖται καί ἐπί τῶν σφαιρῶν (σ,R+ρ),(σ,R-ρ).

'Εκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι τό Ο θά εἶναι κοινόν σημεῖον τῶν ἑξῆς τόπων (ἄν $R>\rho$):

1) $(\alpha_1),(\beta_1),(\sigma,R+\rho)$, 5) $(\alpha_2),(\beta_1),(\sigma,R+\rho)$,
2) $(\alpha_1),(\beta_1),(\sigma,R-\rho)$, 6) $(\alpha_2),(\beta_2),(\sigma,R+\rho)$,
3) $(\alpha_1),(\beta_2),(\sigma,R+\rho)$, 7) $(\alpha_2),(\beta_1),(\sigma,R-\rho)$,
4) $(\alpha_1),(\beta_2),(\sigma,R-\rho)$, 8) $(\alpha_2),(\beta_2),(\sigma,R-\rho)$.

Τό πρόβλημα ἔχει δέκα λύσεις.

6)'Εργαζόμενοι ὡς ἀνωτέρω εὑρίσκομεν ὅτι τό κέντρον Ο τῆς ζητουμένης σφαίρας θά εἶναι κοινόν σημεῖον τῶν ἑξῆς γεωμετρικῶν τόπων:

1) $(\alpha_1),(\sigma_1,R_1+\rho),(\sigma_2,R_2+\rho)$, 5) $(\alpha_1),(\sigma_1,R_1-\rho),(\sigma_2,R_2+\rho)$,
2) $(\alpha_2),(\sigma_1,R_1+\rho),(\sigma_2,R_2+\rho)$, 6) $(\alpha_2),(\sigma_1,R_1-\rho),(\sigma_2,R_2+\rho)$,
3) $(\alpha_1),(\sigma_1,R_1+\rho),(\sigma_2,R_2-\rho)$, 7) $(\alpha_1),(\sigma_1,R_1-\rho),(\sigma_2,R_2-\rho)$,
4) $(\alpha_2),(\sigma_1,R_1+\rho),(\sigma_2,R_2-\rho)$, 8) $(\alpha_2),(\sigma_1,R_1-\rho),(\sigma_2,R_2-\rho)$,

ὅπου $(\alpha_1),(\alpha_2)$ ἐπίπεδα παράλληλα πρός τό δοθέν (α) καί εἰς ἀπόστασιν ρ ἀντιστοίχως καί $(\sigma_1,R_1),(\sigma_2,R_2)$ αἱ δοθεῖσαι σφαῖραι.

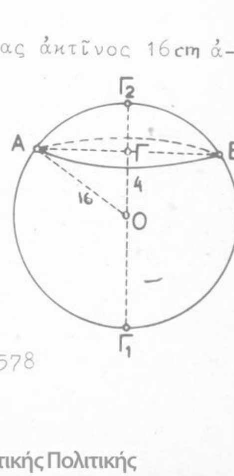
Τό πρόβλημα ἔχει δέκα ἕξ λύσεις.

746. 'Η ἀκτίς μιᾶς σφαίρας εἶναι 3m καί τό ὕφος μιᾶς σφαιρικῆς ζώνης αὐτῆς εἶναι υ=0,4m. Νά ὑπολογισθῇ τό ἐμβαδόν τῆς ζώνης ταύτης.

Λ ύ σ ι ς: 'Εκ τοῦ τύπου $E_z=2\pi R.\upsilon$ ἔχομεν:

$$E_z=2\pi.R.\upsilon=2\pi.3.0,4=2,4\pi \text{ m}^2.$$

747. Τό ἐπίπεδον μικροῦ κύκλου σφαίρας ἀκτῖνος 16cm ἀπέχει ἀπό τό κέντρον τῆς σφαίρας ἀπόστασιν ἴσην πρός 4 cm. Νά ὑπολογισθῇ τό ἐμβαδόν τῶν ζωνῶν τῆς σφαίρας ταύτης.



σχ.578

Λ ύ σ ι ς: Ἔστω ὅτι ΟΑ=R=16 cm. καί ΟΓ=4cm. καί $\Gamma\Gamma_1=\Gamma O+O\Gamma_1=4+16=20$ cm. Κατ' ἀκολουθίαν τό ὕφος τῆς ἄνω σφαιρικῆς ζώνης εἶναι $\upsilon_1=\Gamma\Gamma_2=O\Gamma_2-O\Gamma=16-4=12$ cm.

Ἄρα τό ἐμβαδόν ἑκάστης τῶν σφαιρικῶν ζωνῶν εἶναι:

$E_1=2\pi.R.\upsilon_1=2\pi.16.12=384\pi \text{ cm}^2$

καί $E_2=2\pi.R.\upsilon_2=2\pi.16.20=640\pi \text{ cm}^2$.

748. Τό ἐμβαδόν σφαιρικῆς ζώνης ὕψους $υ=5$ cm εἶναι 251,2 cm^2. Νά ὑπολογισθῇ τό ἐμβαδόν τῆς σφαίρας, εἰς ἥν ἀνήκει ἡ ζώνη αὕτη.

Λ ύ σ ι ς: Εἶναι: $E_Z=2\pi.R.υ$ ἤ $251,2=2\pi.R.5=10\pi.R=31,4R$, ἐξ οὗ: $R=251,2:31,4=8$ cm.
Ἄρα τό ἐμβαδόν τῆς σφαίρας εἶναι:

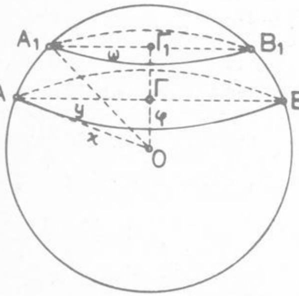
$$E_\Sigma=4\pi R^2=4.\pi.8^2=4.\pi.64=256\pi \text{ cm}^2.$$

749. Τά μήκη τῶν βάσεων σφαιρικῆς ζώνης ὕψους $υ=0,2$ dm εἶναι 8π dm καί 16π dm. Νά ὑπολογισθῇ τό ἐμβαδόν τῆς σφαίρας, εἰς ἥν ἀνήκει ἡ ζώνη αὕτη.

Λ ύ σ ι ς: Ἔστω $OA=OA_1=x$ ἡ ἀκτίς τῆς σφαίρας (O). Ἡ ἀκτίς τοῦ κύκλου (AB) εἶναι:

$$y=\Gamma A=\frac{16\pi}{2\pi}=8 \text{ dm}$$

καί ἡ ἀκτίς τοῦ κύκλου (A_1B_1) εἶναι: $ω=\Gamma_1 A_1=\frac{8\pi}{2\pi}=4$ dm.



σχ.579

Εἶναι δέ καί $\Gamma\Gamma_1=υ=0,2$ dm. Ἐάν τεθῇ $O\Gamma=φ$, τότε $O\Gamma_1=φ+0,2$ dm.
Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων $O\Gamma A$ καί $O\Gamma_1 A_1$ ἔχομεν ἀντιστοίχως:

$$x^2=y^2+φ^2=64+φ^2 \qquad (1)$$

καί $x^2=ω^2+(φ+0,2)^2=16+(φ+0,2)^2$ (2).
Ἐπιλύοντες τό σύστημα τῶν (1) καί (2), εὑρίσκομεν $φ=59,85$ ἐξ οὗ $x=;$ Ἄρα τό ἐμβαδόν τῆς σφαίρας (O,x) εἶναι:

$$E_\Sigma=4\pi x^2.$$

750. Τό ἐμβαδόν σφαίρας εἶναι 100π cm^2. Ποία ἡ ἀκτίς αὐτῆς;

Λ ύ σ ι ς: Ἐκ τοῦ τύπου $E_\Sigma=4\pi R^2$, ἔχομεν: $100\pi=4\pi R^2$ ἤ $25=R^2 \Rightarrow R=5$ cm.

751. Τό ἐμβαδόν σφαιρικῆς ζώνης παραγομένης ὑπό τόξου AB στρεφομένου περί τήν διάμετρον PP_1 εἶναι ἰσοδύναμον πρός τό ἐμβαδόν κυκλικοῦ δακτυλίου ἀκτίνων PA καί PB.

Λ ύ σ ι ς: Τό ἐμβαδόν τῆς σφαιρικῆς ζώνης (σχ.580), ἡ ὁποία παράγεται ἀπό τό τόξον AB εἶναι:

$$E_Z=2\pi.R.υ \qquad (1)$$

ἔνθα $\upsilon = Z\Theta$ τό ὕψος τῆς ζώνης καί R ἡ ἀκτίς OP.

Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων $PB\Theta$ καί PAZ ἔχομεν ἀντιστοίχως, ἄν $O\Theta = x$:

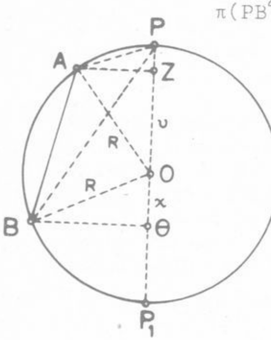
$$PB^2 = \Theta P^2 + B\Theta^2 = (x+R)^2 + R^2 - x^2 = 2R^2 + 2Rx, \qquad (1)$$

$$PA^2 = AZ^2 + ZP^2 = R^2 - OZ^2 + (R-OZ)^2 = 2R^2 - 2R.OZ \qquad (2)$$

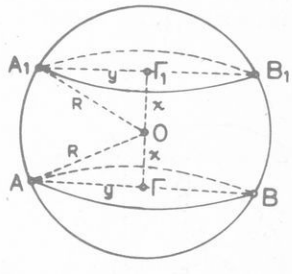
καί ἄρα:

$$PB^2 - PA^2 = 2Rx + 2R.OZ = 2R(x+OZ) = 2R.\Theta Z = 2R.\upsilon \qquad \text{ἤ}$$

$$\pi(PB^2 - PA^2) = 2\pi R.\upsilon = E_z.$$



σχ.580



σχ.581

752. Σφαῖρα ἀκτῖνος R νά τμηθῇ ὑπό ἐπιπέδων ἴσων ἀπεχόντων ἀπό τό κέντρον, εἰς τρόπον ὥστε τό ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τομῶν νά εἶναι ἰσοδύναμον πρός τό ἐμβαδόν τῆς ζώνης, τήν ὁποίαν ὁρίζουν ταῦτα.

Λύσις: Ἀφοῦ αἱ τομαί (σχ.581) θά ἀπέχουν ἀπόστασιν x ἀπό τό κέντρον τῆς σφαίρας (O,R), ἔπεται ὅτι αἱ ἀκτῖνες τῶν τομῶν θά εἶναι ἴσαι. Δηλαδή $\Gamma A = \Gamma_1 A_1 = y$. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου $O\Gamma A$ ἔχομεν:

$$x^2 + y^2 = R^2 \qquad (1)$$

Τό ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τομῶν εἶναι: $2\pi y^2$ (2)

Τό ἐμβαδόν τῆς σφαιρικῆς ζώνης τόξου AA_1 εἶναι:

$$E_z = 2\pi R.\upsilon = 2\pi R.2x = 4\pi Rx,$$

καί πρέπει νά ἔχωμεν:

$$4\pi Rx = 2\pi y^2 \Rightarrow 2Rx = y^2 \qquad (3)$$

Ἄρα ἡ (1) γίνεται:

$$x^2 + 2Rx = R^2 \Longrightarrow x^2 + 2Rx - R^2 = 0 \Longrightarrow$$

$$x = -R + \sqrt{R^2 + R^2} = R(\sqrt{2} - 1).$$

753. Νά ὑπολογισθῇ τό ὕψος σφαιρικῆς ζώνης, γνωστοῦ ὄντος

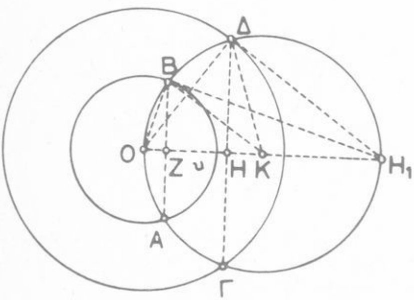
ὅτι τό ἐμβαδόν της ἰσοῦται πρός τό ἐμβαδόν μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας, εἰς ἥν ἀνήκει ἡ ζώνη.

Λ ύ σ ι ς: Τό ἐμβαδόν τῆς σφαιρικῆς ζώνης εἶναι: $E_z=2\pi.R.\upsilon$ (1), καί τό ἐμβαδόν ἑνός μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας εἶναι: $E=\pi R^2$ (2). Ἐπειδή $E_z=E$, ἕπεται ὅτι:

$$2\pi.R.\upsilon=\pi R^2 \Rightarrow \upsilon=\frac{R}{2}$$

754. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ζώνη, τήν ὁποίαν ὁρίζουν δύο ὁμόκεντροι σφαῖραι ἐπί τρίτης σφαίρας, διερχομένης ἀπό τό κέντρον των, ἔχει ἐμβαδόν σταθερόν.

Λ ύ σ ι ς: Ἔστω ΖΗ=υ τό ὕψος τῆς σφαιρικῆς ζώνης, ἡ ὁποία ὁρίζεται καθώς ὁρίζει τό πρόβλημα. Ἔστωσαν $OB=\rho$, $O\Delta=\rho_1$ καί ΚΟ αἱ ἀκτῖνες τῶν σφαιρῶν (Ο) καί (Κ). Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου OBH_1 ἔχομεν:



σχ.582

$OB^2=OH_1.OZ$ ἤ

$$\rho^2=2R.OZ \Rightarrow OZ=\frac{\rho^2}{2R} \quad (1)$$

Ἐκ δέ τοῦ ὀρθ. τριγώνου $O\Delta H_1$ ἔχομεν:

$O\Delta^2=OH.OH_1$ ἤ

$$\rho_1^2=2R.OH \Rightarrow OH=\frac{\rho_1^2}{2R} \quad (2)$$

Κατ' ἀκολουθίαν: $\upsilon=OH-OZ=\frac{\rho_1^2-\rho^2}{2R}$ (3)

Τό ζητούμενον ἐμβαδόν τῆς σφαιρικῆς ζώνης εἶναι:

$$E_z=2\pi.R.\upsilon=2\pi.R.\frac{\rho_1^2-\rho^2}{2R}=\pi(\rho_1^2-\rho^2)$$

Δηλαδή τό ἐμβαδόν τῆς σφ. ζώνης εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπό τό κέντρον Ο τῶν δύο ὁμοκέντρων σφαιρῶν.

755. Δοθεῖσα σφαιρική ζώνη νά διαιρεθῇ εἰς μέσον καί ἄκρον λόγον ὑπό κύκλου παραλλήλου πρός τάς βάσεις τῆς ζώνης ἤ εἰς δύο μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν μ καί ν.

Λ ύ σ ι ς: 1) Ἔστω ΚΗ=υ τό ὕψος τῆς δοθείσης σφαιρικῆς ζώνης, ἀκτῖνος R. Τό ἐμβαδόν αὐτῆς εἶναι:

$$(E_z)=2\pi.R.\upsilon \qquad (1)$$

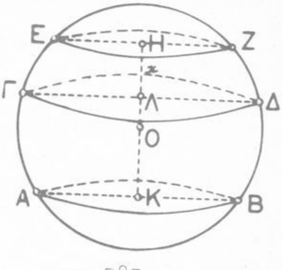
Ἔστω ΓΔ ὁ παράλληλος κύκλος πρός τάς βάσεις τῆς σφ.ζώνης, τοιοῦτος ὥστε: $(E_1)^2=(E_\xi).(E_z)$, (2) ὅπου E_1 καί E_2 τά ἐμβαδά τῶν σφαιρικῶν ζωνῶν ΕΓΔΖ καί ΓΑΒΔ. Θά εἶναι (ἄν ΗΛ=x, ὅτε ΚΛ=υ-x):

$(E_1)=2\pi Rx$ (3) καί $(E_2)=2\pi R(\upsilon-x)$ (4)

Ἡ (2), βάσει τῶν (1),(3) καί (4), γίνεται: $4\pi R^2x^2=2\pi R.\upsilon.2\pi R(\upsilon-x)$

ἤ $x^2+\upsilon x-\upsilon^2=0$,

ἐξ οὗ: $x=\frac{\upsilon}{2}(\sqrt{5}-1)$. (5)



σχ.583

Ἡ (5) ἐκφράζει ὅτι τό Λ διαιρεῖ τό ὕψος ΚΗ=υ τῆς ζώνης εἰς μέσον καί ἄκρον λόγον. Ἐντεῦθεν ἕπεται εὐκόλως ἡ κατασκευή.

2) Εἰς τήν περίπτωσιν ταύτην πρέπει νά ἔχωμεν:

$$\frac{(E_1)}{(E_2)}=\frac{\mu}{\nu} \quad ἤ \quad \frac{2\pi Rx}{2\pi R(\upsilon-x)}=\frac{\mu}{\nu} \quad ἤ \quad \frac{x}{\upsilon-x}=\frac{\mu}{\nu}$$

ἐξ οὗ: $\frac{\mu+\nu}{\mu}=\frac{\upsilon}{x}$, ἡ ὁποία ἐκφράζει ὅτι τό x εἶναι ἡ τετάρτη ἀνάλογος γνωστῶν τμημάτων μ+ν, μ, υ ἤ γνωστῶν ἀριθμῶν μ+ν, μ καί υ.

Ἐντεῦθεν ἕπεται εὐκόλως ἡ κατασκευή.

756. Τό ἐμβαδόν μονοβασικῆς σφαιρικῆς ζώνης ἰσοῦται πρός τό ἐμβαδόν τοῦ κύκλου ἀκτῖνος ἴσης πρός τήν χορδήν τοῦ τόξου, τό ὁποῖον παράγει τήν ζώνην ταύτην.

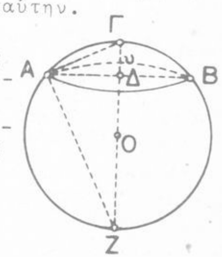
Λ ύ σ ι ς: Ἔστω ΔΓ=υ τό ὕψος τῆς μονοβασικῆς ζώνης ΑΒΓ. Τό ἐμβαδόν αὐτῆς εἶναι: $E_z=2\pi R.\upsilon$ (1)

Θεωροῦμεν τήν διάμετρον ΓΟΖ τῆς σφαίρας (Ο). Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΓΑΖ ἔχομεν: $A\Gamma^2=\Gamma Z.\Gamma\Delta=2R.\upsilon$ (2)

Ἄρα ἡ (1) γράφεται διαδοχικῶς:

$E_z=2\pi R.\upsilon=\pi.2R.\upsilon=\pi.A\Gamma^2$ (3)

Ἡ (3) λύει τό πρόβλημα.

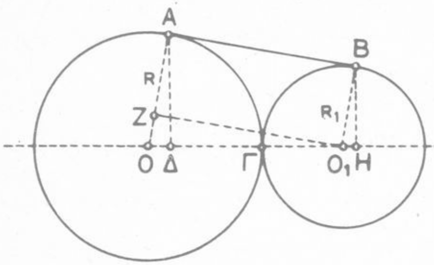


σχ.584

757. Δύο κύκλοι (Ο,R) καί (O_1,R_1) ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς τό σημεῖον Γ. Ἄγεται ἡ ἐξωτερική ἐφαπτομένη αὐτῶν ΑΒ καί τό σχῆμα στρέφεται περί τήν OO_1 κατά γωνίαν 2π. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι τό ἐμβαδόν τῆς ἐπιφανείας, τήν ὁποίαν παρά-

γει ἡ ΑΒ, εἶναι μέσον ἀνάλογον μεταξύ τῶν ἐμβαδῶν τῶν σφαιρῶν, αἱ ὁποῖαι παράγονται ὑπό τῶν κύκλων (Ο) καί (O_1).

Λ ύ σ ι ς: Ἄν ἀχθῇ ἡ O_1Z κάθετος πρός τήν ΟΑ, θά εἶναι $OZ=R-R_1$, $OO_1=R+R_1$ καί $O_1Z=AB$. Κατ' ἀκολουθίαν:



σχ. 585

$$AB^2=O_1Z^2=(R+R_1)^2-(R-R_1)^2=$$
$$=4RR_1 \implies AB=2\sqrt{RR_1} \quad (1)$$

Ἄγομεν τάς ΑΔ καί ΒΗ καθέτους πρός τήν OO_1.

Ἐκ τῶν ὁμοίων ὀρθ. τριγώνων OO_1Z καί ΟΔΑ ἔχομεν:

$$\frac{O\Delta}{OZ}=\frac{\Delta A}{O_1Z}=\frac{OA}{OO_1} \quad \text{ἤ}$$

$$\frac{O\Delta}{R-R_1}=\frac{\Delta A}{2\sqrt{RR_1}}=\frac{R}{R+R_1},$$ ἐξ ὧν λαμβάνομεν: $$O\Delta=\frac{R(R-R_1)}{R+R_1} \quad (2) \text{ καί}$$

$$\Delta A=\frac{2R\sqrt{RR_1}}{R+R_1} \quad (3)$$

Ἐκ τῶν ὁμοίων ὀρθ. τριγώνων O_1HB καί O_1ZO ἔχομεν:

$$\frac{O_1H}{OZ}=\frac{HB}{O_1Z}=\frac{R_1}{OO_1} \quad \text{ἤ} \quad \frac{O_1H}{R-R_1}=\frac{HB}{2\sqrt{RR_1}}=\frac{R_1}{R+R_1},$$

ἐξ ὧν λαμβάνομεν: $O_1H=\frac{R_1(R-R_1)}{R+R_1}$ (4) καί $HB=\frac{2R_1\sqrt{RR_1}}{R+R_1}$. (5)

Τό ἐμβαδόν, τό ὁποῖον παράγεται ὑπό τῆς ΑΒ εἶναι τό ἐμβαδόν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κολούρου κώνου μέ ἀκτῖνας βάσεων ΔΑ καί ΗΒ. Ἄρα:

$$E_{(AB)}=\pi(\Delta A+HB)AB=\pi\left(\frac{2R\sqrt{RR_1}}{R+R_1}+\frac{2R_1\sqrt{RR_1}}{R+R_1}\right).2\sqrt{RR_1}=$$

$$=\pi.\frac{4R^2R_1+4R_1^2R}{R+R_1}=\frac{4\pi RR_1(R+R_1)}{R+R_1}=4\pi RR_1 \qquad (6)$$

Τό ἐμβαδόν τῶν σφαιρῶν (Ο) καί (O_1) εἶναι:

$$(E)=4\pi R^2 \text{ καί } (E_1)=4\pi R_1^2 \implies (E.E_1)=16\pi^2R^2.R_1^2$$

ἐξ οὗ: $\sqrt{E_1.E}=4\pi RR_1$ καί ἡ (6) γίνεται $E_{(AB)}=\sqrt{E.E_1}$.

758. Ἡ ἀκτίς μιᾶς σφαίρας εἶναι R=12 cm. Ποῖος εἶναι ὁ ὄγκος της;

Λ ύ σ ι ς: Ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας εἶναι:

$$V_{\sigma\varphi}=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}.\pi.12^3=\frac{4}{3}.\pi.144.12=2304 \text{ cm}^3.$$

759. Ὁ ὄγκος σφαίρας εἶναι $36\pi\ m^3$. Ποία ἡ ἀκτίς της καί τό ἐμβαδόν της;

Λ ύ σ ι ς: Ἐκ τοῦ τύπου $V_{σφ}=\frac{4}{3}.\pi.R^3$ ἔχομεν:

$$R^3=\frac{3V}{4\pi}=\frac{3.36.\pi}{4\pi}=3.9=27 \Longrightarrow R=3\ m.$$

Τό ἐμβαδόν της εἶναι: $E_{σφ}=4\pi R^2=4\pi.3^2=36\pi\ m^2$.

760. Ποῖος ὁ ὄγκος σφαίρας περιγεγραμμένης περί κύβον ἀκμῆς α;

Λ ύ σ ι ς: Ἡ διαγώνιος τοῦ κύβου ἀκμῆς α εἶναι: $\delta=\alpha\sqrt{3}$. Ἡ ἀκτίς τῆς περιγεγραμμένης περί τόν κύβον τοῦτον σφαίρας εἶναι τό ἥμισυ τῆς διαγωνίου δ τοῦ κύβου, δηλαδή:

$$R=\frac{\delta}{2}=\frac{\alpha\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow V_{σφ}=\frac{4}{3}.\pi.R^3=\frac{4}{3}.\pi.\left(\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}\right)^3=\pi\frac{\alpha^3\sqrt{3}}{2}$$

761. Ποῖος ὁ ὄγκος σφαίρας περιγεγραμμένης ἤ ἐγγεγραμμένης εἰς κανονικόν τετράεδρον ἀκμῆς α;

Λ ύ σ ι ς: Γνωρίζομεν ὅτι τό ὕφος τοῦ κανονικοῦ τετραέδρου εἶναι: $\upsilon=\frac{\alpha\sqrt{6}}{3}$.

Τό κέντρον τῆς περιγεγραμμένης καί ἐγγεγραμμένης σφαίρας εἰς τό τετράεδρον τοῦτο συμπίπτει μέ τό κέντρον βάρους Κ τοῦ τετραέδρου, τό ὁποῖον ἀπέχει ἀπό ἑκάστην κορυφήν τοῦ τετραέδρου ἀπόστασιν ἴσην πρός τά $\frac{3}{4}.\upsilon$.

Δηλαδή: $R=\frac{3}{4}.\upsilon=\frac{3}{4}.\frac{\alpha\sqrt{6}}{3}=\frac{\alpha\sqrt{6}}{4}$.

Ἄρα ὁ ὄγκος τῆς περιγεγραμμένης σφαίρας εἶναι:

$$V_{σφ}=\frac{4}{3}.\pi.R^3=\frac{4}{3}.\pi.\left(\frac{\alpha\sqrt{6}}{4}\right)^3=\frac{4}{3}.\pi.\frac{6\alpha^3\sqrt{6}}{64}=\frac{\pi\alpha^3\sqrt{6}}{8}$$

Ἡ ἀκτίς ρ τῆς ἐγγεγραμμένης σφαίρας εἶναι:

$$\rho=\frac{1}{4}.\upsilon=\frac{1}{4}.\frac{\alpha\sqrt{6}}{3}=\frac{\alpha\sqrt{6}}{12}$$

καί ἑπομένως ὁ ὄγκος της εἶναι:

$$V_{σφ}=\frac{4}{3}.\pi.\rho^3=\frac{4}{3}.\pi.\left(\frac{\alpha\sqrt{6}}{12}\right)^3=\frac{4}{3}.\pi.\frac{6\alpha^3\sqrt{6}}{12^2.12}=\frac{\alpha^3\sqrt{6}}{216}$$

762. Δίδεται σφαῖρα (O,R). Ποῖος ὁ λόγος τῶν ὄγκων τῶν κύβων, ἐγγεγραμμένου καί περιγεγραμμένου εἰς τήν σφαῖραν ταύτην;

Λ ύ σ ι ς: Ἡ διάμετρος 2R τῆς σφαίρας εἶναι ἡ διαγώνιος δ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύβου εἰς ταύτην.

Ἄρα $2R=\delta=\alpha\sqrt{3} \Longrightarrow \alpha=\frac{2R\sqrt{3}}{3}$, καί κατάκολουθίαν ὁ ὄγκος

τοῦ ἐγγεγραμμένου κύβου εἶναι: $V_1=\alpha^3=\left(\frac{2R\sqrt{3}}{3}\right)^3=\frac{8}{9}R^3\sqrt{3}$.

Ἡ ακμή τοῦ περιγεγραμμένου κύβου εἶναι 2R, ὁπότε ὁ ὄγκος τοῦ κύβου τούτου εἶναι:

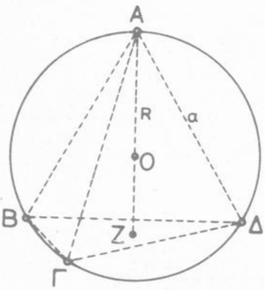
$$V_2=(2R)^3=8R^3,$$

καί κατ'ἀκολουθίαν:

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{8}{9}R^3\sqrt{3}:8R^3=\frac{\sqrt{3}}{9}.$$

763. Δίδεται σφαῖρα (O,R) καί ζητεῖται ὁ λόγος τῶν ὄγκων τῶν κανονικῶν τετραέδρων ἐγγεγραμμένου καί περιγεγραμμένου περί τήν σφαῖραν ταύτην.

Λ ύ σ ι ς: Εἶναι $R=\frac{3}{4}.AZ=\frac{3}{4}.\upsilon \Rightarrow \upsilon=\frac{4}{3}R$ (1). Ἀλλά $\upsilon=\frac{\alpha\sqrt{6}}{3}$, ὁπότε $\frac{\alpha\sqrt{6}}{3}=\frac{4}{3}R \Longrightarrow \alpha=\frac{2R\sqrt{6}}{3}$, καί κατ'ἀκολουθίαν ὁ ὄγκος τοῦ ἐγγ/νου τετραέδρου εἶναι:



σχ.586

$$V_1=\frac{\alpha^3\sqrt{2}}{12}=\left(\frac{2R\sqrt{6}}{3}\right)^3.\frac{\sqrt{2}}{12}=\frac{8R^3\sqrt{3}}{27}$$

Ἀφοῦ ἡ σφαῖρα (O,R) θά εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τό κανονικόν τετράεδρον ἀκμῆς x, ἕπεται ὅτι:

$R=\frac{1}{4}.\upsilon_1 \Longrightarrow \upsilon_1=4R$. Ἀλλά $\upsilon_1=\frac{x\sqrt{6}}{3}$ ἤ

$4R=\frac{x\sqrt{6}}{3}$, ἐξ οὗ: $x=2R\sqrt{6}$.

Κατ'ἀκολουθίαν ὁ ὄγκος τοῦ περιγεγραμμένου τετραέδρου

θά εἶναι: $V_2=\frac{x^3\sqrt{2}}{12}=\frac{(2R\sqrt{6})^3\sqrt{2}}{12}=\frac{8R^3.6\sqrt{6}.\sqrt{2}}{12}=6R^3\sqrt{3}$.

Ἄρα: $\frac{V_1}{V_2}=\frac{8R^3\sqrt{3}}{27}:6R^3\sqrt{3}=\frac{4}{81}$.

764. Ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ πλευρᾶς α στρέφεται περί τό ὕψος του ΑΗ. Θεωροῦμεν καί τήν ἐγγεραμμένην σφαῖραν εἰς τόν παραγόμενον κῶνον ὑπό τοῦ ΑΗΒ. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ λόγος τῶν ὄγκων τοῦ κώνου καί τῆς σφαίρας ταύτης, ἰσοῦται πρός τόν λόγον τῶν ὁλικῶν ἐπιφανειῶν τῶν δύο τούτων σχημάτων.

Λ ύ σ ι ς: Ἔστω $ΑΗ=υ=\frac{α\sqrt{3}}{2}$. Εἶναι δέ $ΟΗ=\frac{1}{3}.υ=\frac{α\sqrt{3}}{6}$. Ἄρα ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας (Ο) εἶναι:

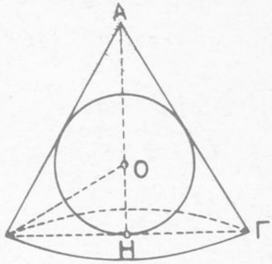
$$V_1=\frac{4}{3}.π.(ΟΗ)^3=\frac{4}{3}.π.\left(\frac{α\sqrt{3}}{6}\right)^3=\frac{πα^3\sqrt{3}}{54} \quad (1)$$

καί τό ἐμβαδόν τῆς σφαίρας ταύτης εἶναι:

$$(E_1)=4.π.ΟΗ^2=4.π.\left(\frac{α\sqrt{3}}{6}\right)^2=\frac{πα^2}{3} \quad (2)$$

Ὁ ὄγκος τοῦ κώνου ΑΒΓ εἶναι:

$$V_2=\frac{1}{3}π.ΗΒ^2.ΑΗ=\frac{1}{3}π.\left(\frac{α}{2}\right)^2.\frac{α\sqrt{3}}{2}=\frac{πα^3\sqrt{3}}{24} \quad (3)$$



σχ.587

καί τό ἐμβαδόν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τούτου εἶναι:

$$(E_2)=π.ΗΒ.ΑΒ+π.ΗΒ^2=π.\frac{α}{2}.α+π.\left(\frac{α}{2}\right)^2=\frac{πα^2}{2}+\frac{πα^2}{4}=\frac{3πα^2}{4} \quad (4)$$

Ἐκ τῶν (1) καί (3) ἔχομεν:

$$\frac{V_2}{V_1}=\frac{πα^3\sqrt{3}}{24}:\frac{πα^3\sqrt{3}}{54}=\frac{54}{24}=\frac{9}{4} \quad (5)$$

καί ἐκ τῶν (4) καί (2) λαμβάνομεν:

$$\frac{(E_2)}{(E_1)}=\frac{3πα^2}{4}:\frac{πα^2}{3}=\frac{9}{4} \quad (6)$$

Ἐκ τῶν (5) καί (6) λαμβάνομεν:

$$\frac{V_2}{V_1}=\frac{(E_2)}{(E_1)}=\frac{9}{4} \quad (7)$$

765. Δίδεται τετράγωνον ΑΒΓΔ πλευρᾶς α.

α) Νά κατασκευασθῆ γεωμετρικῶς ἡ κορυφή Σ μιᾶς τετραγωνικῆς πυραμίδος μέ βάσιν τό τετράγωνον τοῦτο, οὕτως ὥστε ἡ πολύεδρος γωνία Σ νά ἔχῃ ἕδρας ἴσας πρός $\frac{π}{3}$ ἑκάστην.

β) Νά ὁρισθῆ γεωμετρικῶς τό κέντρον Ο τῆς περιγεγραμμένης σφαίρας εἰς τήν πυραμίδα ταύτην, καθώς καί ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας ταύτης.

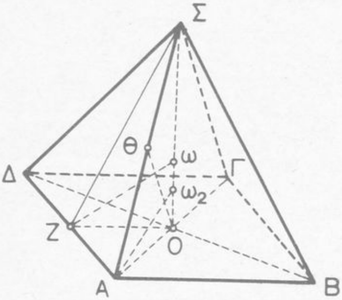
γ) Νά ὁρισθῆ τό κέντρον ω καί νά εὑρεθῆ ὁ ὄγκος τῆς ἐγγεγραμμένης σφαίρας εἰς τήν πυραμίδα ταύτην.

δ) Νά ὁρισθῆ ἀλγεβρικῶς τό κέντρον $ω_1$ τῆς σφαίρας, τῆς ἐφαπτομένης τῶν ὀκτώ ἀκμῶν τῆς πυραμίδος ΣΑΒΓΔ. Ἐάν δέ $ω_1Ο=x$, νά ὑπολογισθῆ ἡ ἀκτίς τῆς σφαίρας ταύτης.

ε) Νά ὁρισθῆ γεωμετρικῶς τό κέντρον $ω_2$ τῆς σφαίρας, τῆς ἐφαπτομένης τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως καί τῶν τεσσάρων παραπλεύρων ἀκμῶν τῆς πυραμίδος. Νά ὑπολογισθῆ τό τμῆμα $Ο\overline{ω_2}$ καί ἡ ἀκτίς τῆς σφαίρας ταύτης.

στ) Νά ὑπολογισθοῦν οἱ λόγοι τοῦ ὄγκου ἑκάστης τῶν προηγουμένων σφαιρῶν πρός τόν ὄγκον τῆς πυραμίδος.

Λ ύ σ ι ς: α) Ἔστω Σ ἡ κορυφή τῆς ζητουμένης πυραμίδος, είς τρόπον ὥστε: $\angle A\Sigma B = B\Sigma\Gamma = \Gamma\Sigma\Delta = \Delta\Sigma A = \frac{\pi}{3}$.



σχ.588

Ἄρα τά τρίγωνα ΣΑΒ, ΣΒΓ, ΣΓΔ καί ΣΔΑ εἶναι ἰσόπλευρα πλευρᾶς α. Ἐπειδή δέ $OA = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$ καί ΣΑ=α, ἔπεται ὅτι:

$$O\Sigma^2 = \Sigma A^2 - OA^2 = \alpha^2 - \left(\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2\alpha^2}{4},$$

ἐξ οὗ: $O\Sigma = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$ (1)

Ἐντεῦθεν ἔπεται εὐκόλως ἡ κατασκευή τῆς κορυφῆς Σ.

β) Ἐπειδή $O\Sigma = OA = OB = O\Gamma = O\Delta = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$, ἔπεται ὅτι τό κέντρον Ο τῆς περιγεγραμμένης σφαίρας περί τό πολύεδρον ΣΑΒΓΔ εἶναι τό κέντρον Ο τῆς βάσεως ΑΒΓΔ.

Ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας ταύτης εἶναι:

$$V_{\sigma\varphi} = \frac{4}{3}\pi . OA^3 = \frac{4}{3}\pi . \left(\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{\pi\alpha^3\sqrt{2}}{3} \qquad (2)$$

γ) Τό κέντρον ω τῆς ἐγγεγραμμένης σφαίρας είς τήν πυραμίδα ΣΑΒΓΔ θά κεῖται ἀφ' ἑνός μέν ἐπί τῆς ΟΣ, ἀφ' ἑτέρου δέ ἐπί τοῦ διχοτομοῦντος ἐπιπέδου τήν δίεδρον (ΑΔ). Ἄν Ζ εἶναι τό μέσον τῆς ΑΔ, τότε ἡ γωνία ΣΖΔ θά εἶναι ἡ ἀντίστοιχος ἐπίπεδος τῆς διέδρου ΑΔ καί ἡ ωΔ θά διχοτομῆ τήν γωνίαν ΣΖΟ. Ἄρα:

$$\frac{\omega O}{OZ} = \frac{\omega\Sigma}{\Sigma Z} = \frac{\omega O + \omega\Sigma}{OZ + \Sigma Z} = \frac{O\Sigma}{OZ + \Sigma Z} = \frac{\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}}{\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \text{ καί ἄρα}$$

$$\omega O = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2} . OZ = (\sqrt{6}-\sqrt{2}) . \frac{\alpha}{4} \qquad (3)$$

Ἄρα ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας (ἐγγεγραμμένης) εἶναι:

$$V_{\sigma\varphi} = \frac{4}{3}\pi . \omega O^3 = \frac{4}{3}\pi . \left[(\sqrt{6}-\sqrt{2})\frac{\alpha}{4}\right]^3 = .. \qquad (4)$$

δ) Ἐάν Θ εἶναι τό μέσον τῆς ΣΑ, ἐπειδή $OA = O\Sigma = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$, ἡ ΟΘ θά εἶναι κάθετος πρός τήν ΣΑ. Ἄρα:

$$\frac{1}{O\Theta^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{O\Sigma^2} = \frac{2}{OA^2} = \frac{2}{\left(\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{4}{\alpha^2} \Rightarrow O\Theta = \frac{\alpha}{2} = OZ \qquad (5)$$

῎Αρα τό κέντρον ω_1 τῆς σφαίρας τῆς ἐφαπτομένης τῶν ὀκτώ ἀκμῶν τῆς πυραμίδος ΣΑΒΓΔ συμπίπτει μέ τό κέντρον Ο τῆς βάσεως ΑΒΓΔ. Ἡ ἀκτίς τῆς σφαίρας ταύτης εἶναι ἡ

$$O\Theta = OZ = \frac{\alpha}{2}. \quad (6)$$

ε) Τό κέντρον ω_2 θά κεῖται ἐπί τῆς ΟΣ καί ἐπί τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας ΣΑΟ. ῎Αρα θά ἔχωμεν διαδοχικῶς:

$$\frac{\omega_2 O}{OA} = \frac{\omega_2 \Sigma}{\Sigma A} = \frac{\omega_2 O + \omega_2 \Sigma}{OA + \Sigma A} = \frac{O\Sigma}{OA + \Sigma A} = \frac{\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}}{\frac{\alpha\sqrt{2}}{2} + \alpha} = \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}-2}{2} = \sqrt{2}-1,$$

ἐξ οὗ: $\quad \omega_2 O = (\sqrt{2}-1).OA = (\sqrt{2}-1).\frac{\alpha\sqrt{2}}{2} = \frac{\alpha}{2}(2-\sqrt{2}). \quad (7)$

στ) Ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος ΣΑΒΓΔ εἶναι:

$$V = \frac{1}{3}(AB\Gamma\Delta).O\Sigma = \frac{1}{3}.\alpha^2.\frac{\alpha\sqrt{2}}{2} = \frac{\alpha^3\sqrt{2}}{6}.$$

Ἐντεῦθεν εὑρίσκομεν εὐκόλως τούς ζητουμένους λόγους.

766. Ἐάν $\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3, \upsilon_4$ εἶναι τά ὕψη τετραέδρου ΑΒΓΔ, τά ἀγόμενα ἐκ τῶν κορυφῶν Α, Β, Γ Δ, ἀντιστοίχως καί $\rho, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ αἱ ἀκτῖνες τῶν σφαιρῶν, ἐγγεγραμμένης καί παρεγγεγραμμένης ἀντιστοίχως εἰς τάς πολυέδρους γωνίας Α, Β, Γ, Δ, νά ἀποδειχθῇ ὅτι:

α) $\frac{1}{\upsilon_1} + \frac{1}{\upsilon_2} + \frac{1}{\upsilon_3} + \frac{1}{\upsilon_4} = \frac{1}{\rho}$

β) $\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\upsilon_2} + \frac{1}{\upsilon_3} + \frac{1}{\upsilon_4} - \frac{1}{\upsilon_1}$

γ) $\frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{\upsilon_3} + \frac{1}{\upsilon_4} + \frac{1}{\upsilon_1} - \frac{1}{\upsilon_2}$

δ) $\frac{1}{\rho_3} = \frac{1}{\upsilon_4} + \frac{1}{\upsilon_1} + \frac{1}{\upsilon_2} - \frac{1}{\upsilon_3}$

ε) $\frac{1}{\rho_4} = \frac{1}{\upsilon_1} + \frac{1}{\upsilon_2} + \frac{1}{\upsilon_3} - \frac{1}{\upsilon_4}$

στ) $\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_3} + \frac{1}{\rho_4} = \frac{2}{\rho}$

Λ ύ σ ι ς: α) Ἐάν Ο εἶναι τό κέντρον τῆς ἐγγεγραμμένης σφαίρας εἰς τό τετράεδρον ΑΒΓΔ καί ρ ἡ ἀκτίς αὐτῆς, V, V_1, V_2, V_3, V_4 οἱ ὄγκοι τῶν τετραέδρων ΑΒΓΔ καί ΟΒΓΔ, ΟΑΒΓ, ΟΑΓΔ, ΟΑΒΔ, θά ἔχωμεν:

$$\frac{V_1}{V} = \frac{\rho}{\upsilon_1}, \quad \frac{V_2}{V} = \frac{\rho}{\upsilon_2}, \quad \frac{V_3}{V} = \frac{\rho}{\upsilon_3} \quad \text{καί} \quad \frac{V_4}{V} = \frac{\rho}{\upsilon_4},$$

ὁπότε: $\quad 1 = \frac{V_1 + V_2 + V_3 + V_4}{V} = \frac{\rho}{\upsilon_1} + \frac{\rho}{\upsilon_2} + \frac{\rho}{\upsilon_3} + \frac{\rho}{\upsilon_4}$

ἐξ οὗ: $\quad \frac{1}{\upsilon_1} + \frac{1}{\upsilon_2} + \frac{1}{\upsilon_3} + \frac{1}{\upsilon_4} = \frac{1}{\rho} \quad (1)$

β) Ἐάν (O_1, ρ_1) εἶναι ἡ παρεγγεγραμμένη σφαῖρα εἰς τό τετράεδρον ΑΒΓΔ καί ἐντός τῆς πολυέδρου γωνίας Α, τότε:

$$1 = \frac{V_2 + V_3 + V_4 - V_1}{V} = \frac{\rho_1}{\upsilon_2} + \frac{\rho_1}{\upsilon_3} + \frac{\rho_1}{\upsilon_4} - \frac{\rho_1}{\upsilon_1},$$

ἐξ οὗ: $\quad \frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\upsilon_2} + \frac{1}{\upsilon_3} + \frac{1}{\upsilon_4} - \frac{1}{\upsilon_1} \quad (2)$

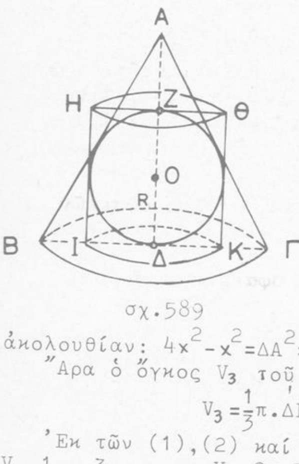
καί ὁμοίως: $\frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{\upsilon_3} + \frac{1}{\upsilon_4} + \frac{1}{\upsilon_1} - \frac{1}{\upsilon_2}$ (3)

$\frac{1}{\rho_3} = \frac{1}{\upsilon_4} + \frac{1}{\upsilon_1} + \frac{1}{\upsilon_2} - \frac{1}{\upsilon_3}$ (4) καί $\frac{1}{\rho_4} = \frac{1}{\upsilon_1} + \frac{1}{\upsilon_2} + \frac{1}{\upsilon_3} - \frac{1}{\upsilon_4}$ (5)

Διά προσθέσεως κατά μέλη τῶν (2),(3),(4) καί (5) λαμβάνομεν: $\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_3} + \frac{1}{\rho_4} = \frac{2}{\rho}$ (6)

767. Ὁ ὄγκος V_1 σφαίρας, ὁ ὄγκος V_2 κυλίνδρου περιγεγραμμένου περὶ τὴν σφαῖραν ταύτην καί ὁ ὄγκος V_3 τοῦ περιγεγραμμένου περί τήν αὐτήν σφαῖραν ἰσοπλεύρου κώνου συνδέονται διά τῶν σχέσεων: $\frac{V_1}{4} = \frac{V_2}{6} = \frac{V_3}{9}$.

Λ ύ σ ι ς: Ἔστω R ἡ ἀκτίς ΟΔ τῆς σφαίρας. Ὁ ὄγκος V_1 αὐτῆς εἶναι: $V_1 = \frac{4}{3}.\pi.R^3$ (1)



σχ.589

Ὁ ὄγκος V_2 τοῦ περιγεγραμμένου κυλίνδρου περί τήν σφαῖραν ταύτην εἶναι:

$V_2 = \pi.\Delta I^2.\Delta Z = \pi.R^2.2R = 2\pi R^3$. (2)

Τό ὕψος τοῦ περιγεγραμμένου περί τήν σφαῖραν ἰσοπλεύρου κώνου εἶναι ΔΑ=3.ΟΔ=3R.

Ἐπειδή δέ $\angle BA\Delta = 30^o$, ἔπεται ὅτι: $B\Delta = \frac{1}{2}AB$.

Ἄν δέ AB=2x, τότε BΔ=x καί κατ' ἀκολουθίαν: $4x^2 - x^2 = \Delta A^2 = (3R)^2 = 9R^2$ ἤ $3x^2 = 9R^2 \Longrightarrow x = R\sqrt{3} = B\Delta$.

Ἄρα ὁ ὄγκος V_3 τοῦ ἰσοπλεύρου κώνου εἶναι:

$$V_3 = \frac{1}{3}\pi.\Delta B^2.\Delta A = \frac{1}{3}.\pi.(R\sqrt{3})^2.3R = 3\pi R^3 \quad (3)$$

Ἐκ τῶν (1),(2) καί (3) λαμβάνομεν ἀντιστοίχως:

$\frac{V_1}{4} = \frac{1}{3}\pi.R^3$ (1΄), $\frac{V_2}{6} = \frac{2\pi.R^3}{6} = \frac{1}{3}\pi.R^3$ (2΄) καί $\frac{V_3}{9} = \frac{1}{3}\pi.R^3$ (3΄)

καί κατ'ἀκολουθίαν:

$$\boxed{\frac{V_1}{4} = \frac{V_2}{6} = \frac{V_3}{9}} \quad (4)$$

768. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι τά ἐμβαδά τῶν ὁλικῶν ἐπιφανειῶν τῶν αὐτῶν σχημάτων συνδέονται διά τῶν σχέσεων:

α) $\frac{E_1}{4} = \frac{E_2}{6} = \frac{E_3}{9}$, β) ὅτι: $V_2^2 = V_1.V_3$, γ) $E_2^2 = E_1.E_3$ καί δ) $2E_2 = E_1 + E_3$.

Λ ύ σ ι ς: α) Εἶναι: $E_1 = 4\pi.R^2$, ἐξ οὗ: $\frac{E_1}{4} = \pi.R^2$ (1)

$E_2=2\pi.\Delta I.\Delta Z+2\pi.\Delta I^2=2\pi.\Delta I.(\Delta Z+\Delta I)=2\pi.R(2R+R)=6\pi.R^2$,

ἐξ οὗ: $\frac{E_2}{6}=\pi.R^2$ (2)

καί τέλος:

$E_3=\pi.\Delta B\ AB+\pi.\Delta B^2=\pi.R\sqrt{3}.2R\sqrt{3}+\pi.(R\sqrt{3})^2=9\pi R^2$,

ἐξ οὗ: $\frac{E_3}{9}=\pi.R^2$ (3)

Ἐκ τῶν (1),(2) καί (3) λαμβάνομεν:

$$\boxed{\frac{E_1}{4}=\frac{E_2}{6}=\frac{E_3}{9}} \quad (4)$$

β) Ἐκ τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως προκύπτει ὅτι:

$$V_1.V_3=\frac{4}{3}\pi.R^3.3\pi.R^3=4\pi^2.R^6=(2\pi.R^3)^2=V_2^2.$$

γ) Ἐκ τῶν (1) καί (3) καί (2) λαμβάνομεν:

$$E_1.E_3=4\pi.R^2.9\pi.R^2=36\pi^2.R^4=(6\pi.R^2)^2=E_2^2.$$

δ) Ἐάν E_2 εἶναι τό ἐμβαδόν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου καί E_1,E_3 τά ἐμβαδά τῶν σφαιρῶν ἐγγεγραμμένης καί περιγεγραμμένης περί τόν κύλινδρον τοῦτον, τότε ἀποδεικνύεται εὐκόλως ὅτι: $2E_2=E_1+E_3$.

769. Νά ὑπολογισθοῦν αἱ ἀκτῖνες R καί R_1 δύο σφαιρῶν, ἐάν εἶναι $R-R_1=\alpha$ καί $V-V_1=4\pi\beta^3$.

Λ ύ σ ι ς: Ἡ διαφορά τῶν ὄγκων τῶν σφαιρῶν εἶναι:

$$4\pi\beta^3=V-V_1=\frac{4}{3}\pi.R^3-\frac{4}{3}\pi.R_1^3 \Longrightarrow R^3-R_1^3=3\beta^3 \quad (1)$$

Ἐπειδή δέ εἶναι καί $R-R_1=\alpha$ (2)

ἐπιλύοντες τό σύστημα τῶν (1) καί (2), εὑρίσκομεν τάς ἀκτῖνας R καί R_1.

Ἡ (1) γράφεται: $(R-R_1).(R^2+R_1^2+RR_1)=3\beta^3$ ἤ

$\alpha(R^2+R_1^2+RR_1)=3\beta^3$ ἤ $\alpha[R^2+(R-\alpha)^2+R(R-\alpha)]=3\beta^3$

ἤ $\alpha(R^2+R^2+\alpha^2-2\alpha R+R^2-R\alpha)=3\beta^3$ ἤ $3\alpha R^2-3\alpha R+\alpha^3-3\beta^3=0$, (1)

ἐξ οὗ: $R=\dots$ καί ἄρα $R_1=R-\alpha=\dots$

Νά διερευνήσετε τήν (1).

770. Πᾶν κανονικόν πολύεδρον εἶναι ἐγγράφιμον καί περιγράφιμον περί σφαῖραν. Ποῖοι οἱ ὄγκοι τῶν σφαιρῶν τούτων, δι' ὅλα τά κανονικά πολύεδρα;

Λ ύ σ ι ς: Γνωρίζομεν ὅτι τό κέντρον τοῦ κανονικοῦ πολυέδρου ἀπέχει ἴσον ἀπό τάς κορυφάς αὐτοῦ καί ἀπό τάς ἕδρας αὐτοῦ ἐπίσης ἴσον.

1) Διά τό κανονικόν τετράεδρον ἰδέ ἄσκησιν 761.

Εἶναι: $R=\frac{1}{4}.\alpha\sqrt{6}$ καί $\rho=\frac{1}{12}.\alpha\sqrt{6}$

Ἄρα εὐκόλως εὑρίσκονται οἱ ὄγκοι τῶν ἀντιστοίχων σφαιρῶν.

2) Διά τόν κύβον εἶναι $R=\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$ καί $\rho=\frac{\alpha}{2}$.

3) Διά τό κανονικόν ὀκτάεδρον εἶναι:

$$R=\frac{\alpha\sqrt{2}}{2} \quad \text{καί} \quad \rho=\frac{\alpha\sqrt{6}}{6}$$

4) Διά τό κανονικόν δωδεκάεδρον εἶναι:

$$R=\frac{\alpha}{4}(\sqrt{15}+\sqrt{3}) \quad \text{καί} \quad \rho=\frac{1}{20}.\alpha\sqrt{250+110\sqrt{5}}$$

5) Διά τό κανονικόν εἰκοσάεδρον εἶναι:

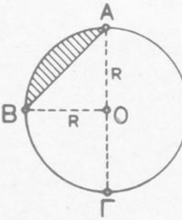
$$\rho=\frac{\alpha}{12}(3\sqrt{3}+\sqrt{15}) \quad \text{καί} \quad R=\frac{\alpha}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

Ἰδέ καί ἄσκησιν 560 πλήρη λύσιν.

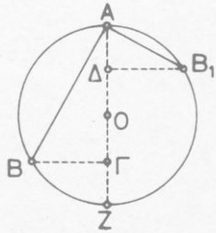
771. Νά ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος σφαιρικοῦ δακτυλίου, ὅστις παράγεται ἀπό κυκλικόν τμῆμα, τοῦ ὁποίου ἡ χορδή ΑΒ εἶναι πλευρά τετραγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἀκτῖνος R, ἡ δέ διάμετρος διέρχεται ἀπό τό Α.

Λ ύ σ ι ς: Τό ὕψος τοῦ σφαιρικοῦ δακτυλίου εἶναι ΟΑ=R (σχ.590). Ὁ ὄγκος τοῦ σφαιρικοῦ δακτυλίου εἶναι:

$$V_{\sigma\delta}=\frac{1}{6}\pi.AB^2.\upsilon=\frac{1}{6}\pi.(R\sqrt{2})^2.R=\frac{1}{3}\pi.R^3.$$



σχ.590



σχ.591

772. Ὁμοίως, ἄν ἡ χορδή ΑΒ εἶναι πλευρά ἰσοπλεύρου τριγώνου ἤ κανονικοῦ ἑξαγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἀκτῖνος R καί ἡ διάμετρος διέρχεται ἀπό τό Α.

Λ ύ σ ι ς: 1) Ἔστω ὅτι $AB=R\sqrt{3}$, τότε τό ὕψος ΓΑ τοῦ σφαιρικοῦ δακτυλίου (σχ.591) θά ἰσοῦται πρός τό ὕψος ἰσοπλεύρου τριγώνου πλευρᾶς $R\sqrt{3}$, ἤτοι:

$$ΓΑ=\frac{ΑΒ\sqrt{3}}{2}=\frac{R\sqrt{3}.\sqrt{3}}{2}=\frac{3R}{2},$$

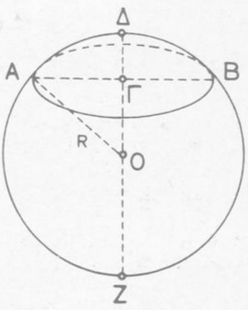
καί ὁ ὄγκος τοῦ σφαιρικοῦ τούτου δακτυλίου θά εἶναι:

$$V=\frac{1}{6}π.ΑΒ^2.υ=\frac{1}{6}π.(R\sqrt{3})^2.\frac{3R}{2}=\frac{3}{4}π.R^3.$$

2) Ἔστω $ΑΒ_1=R$, τότε τό ὕψος ΔΑ τοῦ σφαιρικοῦ δακτυλίου θά εἶναι $\frac{R}{2}$ καί ὁ ὄγκος αὐτοῦ:

$$V=\frac{1}{6}π.ΑΒ_1^2.υ=\frac{1}{6}π.R^2.\frac{R}{2}=\frac{πR^3}{12}.$$

773. Σφαῖρα ἀκτῖνος 6 m τέμνεται ὑπό ἐπιπέδου ἀπέχοντος τοῦ κέντρου 2μ. Νά ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος ἑκατέρου τῶν σφαιρικῶν τμημάτων, εἰς τά ὁποῖα διαιρεῖται ἡ σφαῖρα ὑπό τοῦ ἐπιπέδου τούτου.



σχ.592

Λ ύ σ ι ς: Ἐπειδή ΟΑ=R=6 m καί ΟΓ=2 m, ἕπεται ὅτι:

$$α^2=ΓΑ^2=ΟΑ^2-ΟΓ^2=6^2-2^2=32,$$

ἐξ οὗ: $α=4\sqrt{2}$ m.

Ὁ ὄγκος V_1 τοῦ μονοβασικοῦ σφαιρικοῦ τμήματος ΔΑΒ εἶναι:

$$V_1=\frac{1}{3}π.υ^3+\frac{1}{2}πα^2.υ=\frac{1}{3}π.2^3+\frac{1}{2}π.(4\sqrt{2})^2.2=$$
$$=\frac{104π}{3}\ m^3.$$

Τό ὕψος τοῦ μονοβασικοῦ σφαιρικοῦ τμήματος ΖΑΒ εἶναι ΓΖ=ΟΖ+ΟΓ=6+2=8 m.

Ἄρα ὁ ὄγκος του V_2 εἶναι:

$$V_2=\frac{1}{3}π.υ^2(3R-υ)=\frac{1}{3}π.8^2(3.6-8)=\frac{1}{3}π.64.10=\frac{640π}{3}\ m^3$$

774. Ἡ διάμετρος σφαίρας (O,R) τέμνεται ὑπό δύο ἐπιπέδων καθέτων πρός αὐτήν εἰς τρία ἴσα μέρη. Νά ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τῶν τριῶν σφαιρικῶν τμημάτων, τά ὁποῖα προκύπτουν.

Λ ύ σ ι ς: Τά δύο σφαιρικά μονοβασικά τμήματα ΕΑΒ καί ΖΓΔ εἶναι ἰσοδύναμα, διότι ΑΒ = ΓΔ καί

$$ΕΘ = ΖΗ = \frac{2R}{3}.$$

Τό ὕψος τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος ΑΒΓΔ εἶναι $ΗΘ=2.ΟΗ=\frac{2R}{3}$.

Εἶναι δέ καί:

$$ΑΘ^2=ΟΑ^2-ΟΘ^2=R^2-\left(\frac{R}{3}\right)^2=R^2-\frac{R^2}{9}=\frac{8R^2}{9} \Rightarrow ΑΘ=\frac{2R\sqrt{2}}{3}=ΓΗ.$$

Ὁ ὄγκος τοῦ μονοβασικοῦ σφ. τμήματος ΕΑΒ εἶναι: (σχ.593)

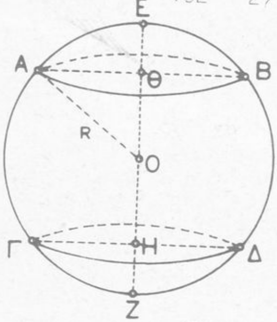
$$V_1 = \frac{1}{3}\pi \cdot \upsilon^2(3R-\upsilon) = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{2R}{3}\right)^2 \cdot \left(3R - \frac{2R}{3}\right) = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{4R^2}{9} \cdot \frac{7R}{3} = \frac{28\pi R^3}{81} \qquad (1)$$

Ὁμοίως ὁ ὄγκος V_2 τοῦ ΖΓΔ εἶναι: $V_2 = \frac{28\pi R^3}{81}$ (2)

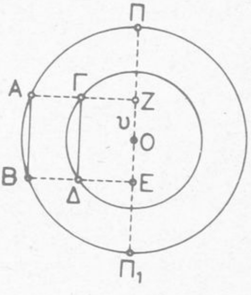
Ὁ ὄγκος V_3 τοῦ ΑΒΔΓ εἶναι:

$$V_3 = \frac{1}{6}\pi \cdot \upsilon^3 + \frac{1}{2}\pi \cdot (\alpha^2+\beta^2) \cdot \upsilon = \frac{1}{6}\pi \cdot \left(\frac{2R}{3}\right)^3 + \frac{1}{2}\pi \cdot \left(\frac{8R^2}{9} + \frac{8R^2}{9}\right) \cdot \frac{2R}{3} =$$

$$= \frac{8\pi R^3}{162} + \frac{16\pi R^3}{27} = \frac{104\pi R^3}{162} = \frac{52\pi R^3}{81}.$$



σχ.593



σχ.594

775. Δίδονται δύο ὁμόκεντροι κύκλοι (Ο,R) καί (Ο,R_1), ἔνθα $R > R_1$ καί δύο ἴσαι καί παράλληλοι χορδαί αὐτῶν. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι οἱ σφαιρικοί δακτύλιοι, οἱ ὁποῖοι θά παραχθοῦν ἀπό τά δύο κυκλικά τμήματα, ὅταν ταῦτα στραφοῦν περί μίαν διάμετρον, μή τέμνουσαν αὐτά, κατά γωνίαν 2π, εἶναι ἰσοδύναμοι.

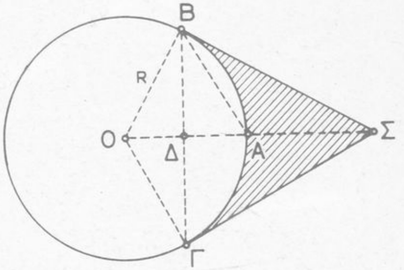
Λ ύ σ ι ς: Ἐπειδή (σχ.594) αἱ χορδαί ΑΒ καί ΓΔ εἶναι ἴσαι καί παράλληλοι, αἱ προβολαί αὐτῶν ἐπί τήν διάμετρον $ΠΠ_1$ θά εἶναι ἴσαι πρός τό ὕψος υ ἑκάστου σφαιρικοῦ δακτυλίου. Κατ᾽ ἀκολουθίαν, ἐάν V_1 καί V_2 εἶναι ἀντιστοίχως οἱ ὄγκοι τῶν σφαιρικῶν δακτυλίων, θά ἔχωμεν:

$$V_1 = \frac{1}{6}\pi \cdot AB^2 \cdot \upsilon \quad \text{καί} \quad V_2 = \frac{1}{6}\pi \cdot Γ\Delta^2 \cdot \upsilon = \frac{1}{6}\pi \cdot AB^2 \cdot \upsilon.$$

Ἄρα: $V_1 = V_2$.

776. Δίδεται σφαῖρα (Ο,R). Ἐπί τῆς προεκτάσεως μιᾶς ἀκτῖνος της ΟΑ λαμβάνομεν τμῆμα ΑΣ=R. Ἐκ τοῦ Σ ἄγομεν τάς ἐφαπτομένας πρός τήν σφαῖραν. Νά ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ σχήματος, ὅπερ ὁρίζεται ἀπό τάς ἐφαπτομένας καί τῆς ἐπιφανείας

τῆς ἐλάσσονος μονοβασικῆς σφαιρικῆς ζώνης.



σχ.595

Λ ύ σ ι ς: Προφανῶς εἶναι: $AB=OB=R, \Delta A=\frac{R}{2}, \Delta B=\frac{R\sqrt{3}}{2}$

καί $\Sigma B^2=O\Sigma^2-OB^2=4R^2-R^2=3R^2$, ἐξ οὗ: $\Sigma B=R\sqrt{3}$.

Ὁ ὄγκος τοῦ κώνου ΣΒΓ εἶναι:

$$V_{(\Sigma B\Gamma)}=\frac{1}{3}\pi.\Delta B^2.\Delta\Sigma=$$

$$=\frac{1}{3}\pi.\left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2.\left(R+\frac{R}{2}\right)=\frac{1}{3}\pi.\frac{3R^2}{4}.\frac{3R}{2}=$$

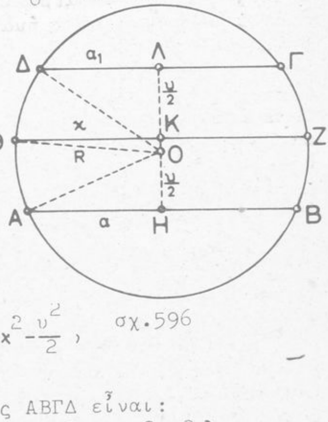
$$=\frac{3\pi R^3}{8}. \quad (1)$$

Ὁ ὄγκος τοῦ μονοβασικοῦ σφαιρικοῦ τμήματος ΓΑΒ εἶναι:

$$V_{(A\Gamma B)}=\frac{1}{3}\pi.\upsilon^2(3R-\upsilon)=\frac{1}{3}\pi.\Delta A^2.(3R-\Delta A)=\frac{1}{3}\pi.\left(\frac{R}{2}\right)^2.\left(3R-\frac{R}{2}\right)=\frac{5\pi R^3}{24}. \quad (2)$$

Κατ'ἀκολουθίαν: $V_{(\Sigma BA\Gamma)}=\frac{3\pi R^3}{8}-\frac{5\pi R^3}{24}=\frac{1}{6}\pi R^3$.

777. Ἐάν (β), (β_1), (β_2) εἶναι τά ἐυβαδά τῶν βάσεων καί τῆς μέσης τομῆς ἑνός σφαιρικοῦ τμήματος ὕψους υ, τότε ὁ ὄγκος τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος εἶναι: $V=\frac{1}{6}(\beta+\beta_1+4\beta_2)\upsilon$.



σχ.596

Λ ύ σ ι ς: Ἔστω x ἡ ἀκτίς τῆς μεσαίας τομῆς καί R ἡ ἀκτίς τῆς σφαίρας. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΑΗ ἔχομεν:

$$\alpha^2=R^2-OH^2=R^2-\left(\frac{\upsilon}{2}-OK\right)^2 \quad (1)$$

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΛΔ ἔχομεν:

$$\alpha_1^2=R^2-O\Lambda^2=R^2-\left(\frac{\upsilon}{2}+OK\right)^2, \quad (2)$$

καί κατ'ἀκολουθίαν:

$$\alpha^2+\alpha_1^2=2R^2-\frac{\upsilon^2}{2}-2.OK^2=2(R^2-OK^2)-\frac{\upsilon^2}{2}=2x^2-\frac{\upsilon^2}{2},$$

ἐξ οὗ: $\upsilon^2=4x^2-2(\alpha^2+\alpha_1^2)$. (3)

Ὁ ὄγκος τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος ΑΒΓΔ εἶναι:

$$V=\frac{1}{6}\pi\upsilon\left[\upsilon^2+3(\alpha^2+\alpha_1^2)\right]=\frac{1}{6}\pi\upsilon\left[4x^2-2(\alpha^2+\alpha_1^2)+3(\alpha^2+\alpha_1^2)\right]=$$

$$=\frac{1}{6}\upsilon\left[4\pi x^2+\pi\alpha^2+\pi\alpha_1^2\right]=\frac{1}{6}\upsilon(\beta+\beta_1+4\beta_2).$$

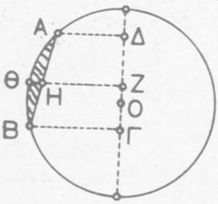
778. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ ὄγκος σφαιρικοῦ δακτυλίου ἰσοῦται πρός τά 2/3 τοῦ ὕψους του ἐπί τό ἐμβαδόν τῆς τομῆς του ὑπό ἐπιπέδου καθέτου εἰς τό μέσον τοῦ ὕψους του.

Λ ύ σ ι ς: Ὁ ὄγκος (σχ.597) τοῦ σφαιρικοῦ δακτυλίου ΑΒΘΑ εἶναι ἡ διαφορά τῶν ὄγκων τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος ΑΔΓΒΘΑ καί τοῦ κολούρου κώνου ΑΔΓΒ. Δηλαδή:

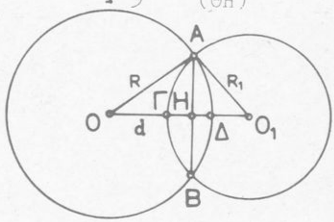
$$V_1=\frac{\upsilon}{6}\left[\pi.\Gamma B^2+\pi.\Delta A^2+4\pi.Z\Theta^2\right],$$

$$V_2=\frac{\upsilon}{6}\left[\pi.B\Gamma^2+\pi.\Delta A^2+4\pi.ZH^2\right]$$

ἤτοι: $$V_{\sigma\delta}=V_1-V_2=\frac{\upsilon}{6}\left[\pi.Z\Theta^2-\pi.ZH^2\right]=\frac{2}{3}.\upsilon.E_{(\Theta H)}$$



σχ.597



σχ.598

779. Δίδονται δύο σφαῖραι (O,R) καί (O_1,R_1), ὧν ἡ διάκεντρος αὐτῶν εἶναι $OO_1=d$. Ἐάν αἱ σφαῖραι αὗται τέμνωνται, νά εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ κοινοῦ μέρους αὐτῶν.

Λ ύ σ ι ς: Θεωροῦμεν μίαν ἐπίπεδον τομήν τῶν σφαιρῶν (Ο) καί (O_1), διερχομένην διά τῶν κέντρων Ο καί O_1. Ἐκ τοῦ τριγώνου AOO_1 ἔχομεν:

$$R_1^2=R^2+d^2-2d.OH,$$

ἐξ οὗ: $OH=\dfrac{R^2+d^2-R_1^2}{2d}$ (1), καί ὁμοίως: $O_1H=\dfrac{R_1^2+d^2-R^2}{2d}$ (2)

Ἀλλά: $H\Delta=R-OH=R-\dfrac{R^2+d^2-R_1^2}{2d}=\dfrac{R_1^2-(d-R)^2}{2d}$ (3).

καί: $H\Gamma=R_1-O_1H=\dfrac{R^2-(\delta-R_1)^2}{2d}$ (4)

Ὁ ὄγκος τοῦ μονοβασικοῦ σφ. τμήματος εἶναι:

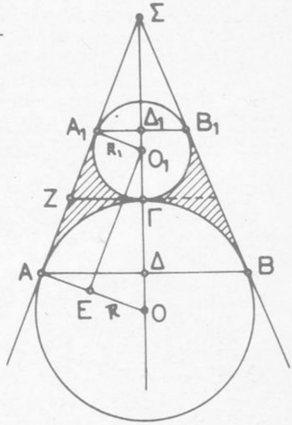
$$V=\frac{1}{3}\pi.\upsilon^2(3R-\upsilon).$$

Κατ' ἀκολουθίαν:

$$V=\frac{1}{3}\pi.H\Delta^2(3R-H\Delta)+\frac{1}{3}\pi.H\Gamma^2(3R_1-H\Gamma) \quad (5)$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τήν (5) τά ΗΔ καί ΗΓ ἐκ τῶν (3) καί (4), λαμβάνομεν τήν ζητουμένην σχέσιν.

780. Νά ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ σχήματος τοῦ περιεχομένου μεταξύ δύο σφαιρῶν (O,R) καί (O_1,R_1) ἐφαπτομένων ἐξωτερικῶς καί τοῦ περιγεγραμμένου κώνου περί αὐτάς.



σχ.599

Λ ύ σ ι ς: Ὁ ὄγκος V ὁ περιλαμβανόμενος μεταξύ τῶν δύο σφαιρῶν (O) καί (O_1) καί τοῦ κώνου ἰσοῦται πρός τόν ὄγκον V_1 τοῦ κολούρου κώνου ABB_1A_1, ἠλαττωμένον κατά τούς ὄγκους V_2 καί V_3 τῶν δύο σφαιρικῶν τμημάτων μέ μίαν βάσιν $A\Gamma B$ καί $A_1\Gamma B_1$.

Θά ἔχωμεν:

$$V_1=\frac{1}{3}\pi.\Delta\Delta_1\left[\Delta A^2+\Delta_1A_1^2+\Delta A.\Delta_1A_1\right] \quad (1)$$

καί $$V_2=\frac{1}{3}\pi.\Delta\Gamma^2(3R-\Delta\Gamma)$$

καί $$V_3=\frac{1}{3}\pi.\Delta_1\Gamma^2(3R_1-\Delta_1\Gamma).$$

Ἐάν εἰς μίαν μεσημβρινήν τομήν ΣAB φέρωμεν τήν κοινήν ἐσωτερικήν ἐφαπτομένην, τέμνουσαν τήν ΣA εἰς τό Z, θά ἔχωμεν: $\Gamma Z=ZA=ZA_1$. Ἄρα τό Z εἶναι τό μέσον τῆς AA_1 καί τό Γ εἶναι μέσον τῆς $\Delta\Delta_1$. Ἤτοι $\Delta\Gamma=\Delta_1\Gamma$, ἐξ οὗ:

$$V_2+V_3=\frac{1}{3}\pi.\Delta\Gamma^2\left[3(R+R_1)-2.\Delta\Gamma\right] \qquad (2)$$

Ἔχομεν:

$$\frac{\Sigma O}{\Sigma O_1}=\frac{R}{R_1} \Longrightarrow \frac{\Sigma O}{\Sigma O-\Sigma O_1}=\frac{R}{R-R_1} \Longrightarrow \frac{\Sigma O}{OO_1}=\frac{R}{R-R_1}$$

καί τέλος $$\Sigma O=\frac{R(R+R_1)}{R-R_1} \qquad (3)$$

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου $OA\Sigma$ ἔχομεν:

$$OA^2=O\Sigma.O\Delta \Longrightarrow O\Delta=\frac{R^2}{\frac{R(R+R_1)}{R-R_1}}=\frac{R(R-R_1)}{R+R_1}$$

καί κατ' ἀκολουθίαν:

$$\Gamma\Delta=R-O\Delta=R-\frac{R(R-R\;)}{R+R_1}=\frac{2RR_1}{R+R_1}, \qquad (4)$$

ἄρα ἡ (2) γίνεται:

$$V_2+V_3=\frac{1}{3}\pi\frac{4R^2R_1^2}{(R+R_1)^2}\left[3(R+R_1)-\frac{4RR_1}{R+R_1}\right]=\frac{4}{3}\pi.\frac{R^2.R_1^2}{(R+R_1)^3}\left[3R^2+3R_1^2+2RR_1\right] \quad (5)$$

Ἔχομεν: $\Delta\Delta_1=\Gamma\Delta+\Gamma_1\Delta=2\Gamma\Delta \Longrightarrow \Delta\Delta_1=\frac{4RR_1}{R+R_1}$.

$$A\Delta^2=R^2-O\Delta^2=R^2-\frac{R^2(R-R_1)^2}{(R+R_1)^2}=\frac{4RR_1}{(R+R_1)^2}.R^2.$$

'Αλλά $\frac{A_1\Delta_1}{A\Delta}=\frac{R_1}{R} \rightarrow A_1\Delta_1^2=A\Delta^2.\frac{R_1^2}{R^2}=\frac{4RR_1}{(R+R_1)^2}.R_1^2.$

Κατ'ἀκολουθίαν:

$$V_1=\frac{1}{3}\pi.\frac{4RR_1}{(R+R_1)}\left[\frac{4RR_1}{(R+R_1)^2}.R^2+\frac{4RR_1}{(R+R_1)^2}.R_1^2+\frac{4RR_1}{(R+R_1)^2}.RR_1\right]=$$

$$=\frac{4}{3}\pi.\frac{R^2R_1^2}{(R+R_1)^2}\left[4R^2+4R_1^2+4RR_1\right] \qquad (6)$$

Ἄρα: $V=V_1-(V_2+V_3)=\frac{4}{3}\pi.\frac{R^2R_1^2}{(R+R_1)^2}\left[4R^2+4R_1^2+4RR_1-3R^2-3R_1^2-2RR_1\right]$

$$=\frac{4}{3}\pi.\frac{R^2R_1^2}{(R+R_1)^2}\left[R^2+R_1^2+2RR_1\right]=\frac{4}{3}\pi.\frac{R^2R_1^2}{R+R_1}$$

Ὥστε: $\qquad V=\frac{4}{3}\pi.\frac{R^2R_1^2}{R+R_1}$

781. 'Ισόπλευρος κῶνος εἶναι περιγεγραμμένος περί σφαῖραν ἀκτῖνος R.Ποῖος εἶναι ὁ λόγος τῶν ὄγκων καί ὁ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν δύο τούτων σχημάτων;

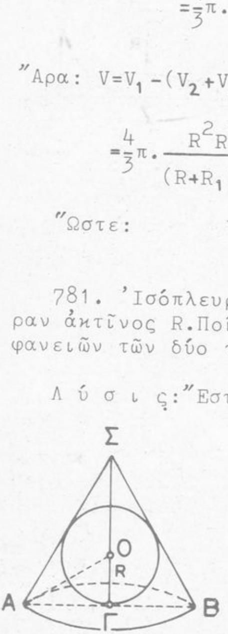
Λ ύ σ ι ς: Ἔστω ΟΓ=R ἡ ἀκτίς τῆς δοθείσης σφαίρας ἐγγεγραμμένης είς τόν ἰσόπλευρον κῶνον ΣΑΒ.

Θά εἶναι: ΟΑ=2R=ΟΣ καί ΓΣ=R+2R=3R.

Ἄρα: $A\Gamma^2=OA^2-O\Gamma^2=4R^2-R^2=3R^2 \Rightarrow A\Gamma=R\sqrt{3}$,

καί $\Sigma A^2=\Gamma\Sigma^2+\Gamma A^2=9R^2+3R^2=12R^2 \rightarrow A\Sigma=2R\sqrt{3}$.

Κατ'ἀκολουθίαν ὁ ὄγκος τοῦ κώνου εἶναι: $V_1=\frac{1}{3}\pi.\Gamma A^2.\Gamma\Sigma=\frac{1}{3}\pi.(R\sqrt{3})^2.3R=3\pi R^3$. (1)



σχ.600

'Ο ὄγκος τῆς σφαίρας εἶναι:

$$V_2=\frac{4}{3}\pi.R^3 \qquad (2)$$

Ἄρα: $V_1:V_2=3\pi.R^3:\frac{4}{3}\pi.R^3=\frac{9}{4}$ (3)

'Η ὁλική ἐπιφάνεια τοῦ κώνου εἶναι:

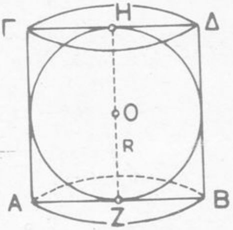
$E_1=\pi.A\Gamma.\Sigma A+\pi.A\Gamma^2=\pi.R\sqrt{3}.2R\sqrt{3}+\pi.(R\sqrt{3})^2=9\pi R^2$. (4)

'Η ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας εἶναι: $E_2=4\pi.R^2$ (5)

καί κατ'ἀκολουθίαν: $E_1:E_2=9\pi.R^2:4\pi.R^2=\frac{9}{4}$ (6)

Ἄρα: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{E_1}{E_2} = \frac{9}{4}$ (7)

782. Κύλινδρος εἶναι περιγεγραμμένος περί σφαῖραν ἀκτῖνος R. Ποῖος εἶναι ὁ λόγος τῶν ὄγκων καί ὁ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν δύο σχημάτων;



σχ.601

Λ ύ σ ι ς: Ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου εἶναι: $V_1=\pi.ZA^2.ZH=\pi.R^2.2R=2\pi.R^3$ (1)

Ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας εἶναι:

$$V_2=\frac{4}{3}\pi.R^3. \quad (2)$$

Κατ'ἀκολουθίαν:

$$V_1:V_2=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}. \quad (3)$$

Τό ἐμβαδόν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου εἶναι:

$$E_1=2\pi.ZA.HZ+2\pi.ZA^2=2\pi.R.2R+2\pi.R^2=6\pi R^2, \quad (4)$$

καί τό ἐμβαδόν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας εἶναι:

$$E_2=4\pi.R^2 \quad (5)$$

Κατ'ἀκολουθίαν:

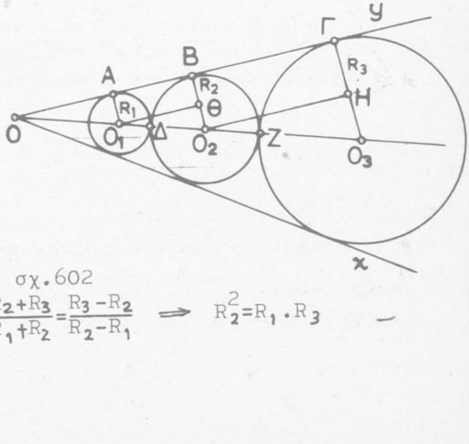
$$E_1:E_2=\frac{6}{4}=\frac{3}{2} \quad (6)$$

Ἐκ τῶν (3) καί (6) λαμβάνομεν:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{E_1}{E_2} = \frac{3}{2} \quad (7)$$

783. Εἰς κωνικήν ἐπιφάνειαν ἐκ περιστροφῆς ἐγγράφομεν τρεῖς σφαίρας, ὧν ἡ μεσαία ἐφάπτεται ἐξωτερικῶς τῶν δύο ἄλλων. Πῶς συνδέονται αἱ ἀκτῖνες τῶν σφαιρῶν τούτων;

Λ ύ σ ι ς: Θεωροῦμεν μίαν μεσημβρινήν τομήν τοῦ σχήματος καί ἔστωσαν O_1, O_2, O_3 τά κέντρα τῶν σφαιρῶν. Ἄγομεν τάς $O_1\Theta$ καί O_2H καθέτους ἀντιστοίχως πρός τάς O_2B καί $O_3\Gamma$, ὁπότε τά ὀρθογώνια τρίγωνα O_2O_3H καί $O_1O_2\Theta$ εἶναι ὅμοια καί κατ'ἀκολουθίαν:



σχ.602

$$\frac{O_2O_3}{O_1O_2}=\frac{O_3H}{O_2\Theta} \quad \text{ἤ} \quad \frac{R_2+R_3}{R_1+R_2}=\frac{R_3-R_2}{R_2-R_1} \implies R_2^2=R_1.R_3$$

784. Κύλινδρος εἶναι περιγεγραμμένος περί σφαῖραν ἀκτῖνος R.Τέμνομεν τό σχῆμα ὑπό δύο ἐπιπέδων (P) καί (P_1) καθέτων πρός τόν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου.Νά ἀποδειχθῇ ὅτι τό ἐμβαδόν τῆς σφαιρικῆς ζώνης εἶναι ἰσοδύναμον πρός τό ἐμβαδόν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου,ὅστις ἔχει βάσεις τάς ἐν λόγῳ τομάς.

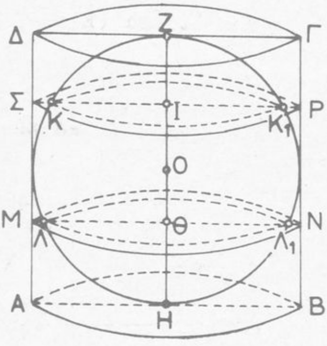
Λ ύ σ ι ς:Τό ὕψος ΜΣ τοῦ κυλίνδρου ΜΝΡΣ ἰσοῦται πρός τό ὕψος ΘΙ τῆς σφαιρικῆς ζώνης $ΛΛ_1Κ_1Κ$.Τό ἐμβαδόν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ ἐν λόγῳ κυλίνδρου εἶναι:

$$(E_1)=2\pi.R.Μ\Sigma=2\pi.R.ΙΘ \qquad (1)$$

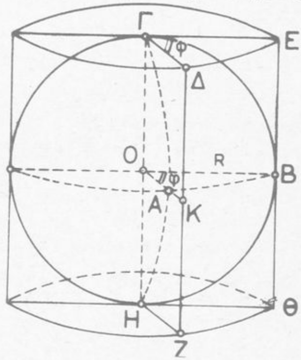
καί τό ἐμβαδόν τῆς σφαιρικῆς ζώνης εἶναι:

$$(E_2)=2\pi.R.ΘΙ \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν (1) καί (2) ἕπεται ὅτι: $(E_1)=(E_2)$.(σχ.603)



σχ.603



σχ.604

785. Κύλινδρος εἶναι περιγεγραμμένος περί σφαῖραν ἀκτῖνος R.Τέμνομεν τήν σφαῖραν καί τόν κύλινδρον ὑπό δύο ἐπιπέδων διερχομένων διά τοῦ ἄξονος τοῦ κυλίνδρου.Νά ἀποδειχθῇ ὅτι τά ἐμβαδά τῶν ἀποκοπτομένων ἐπιφανειῶν ἐπί τῆς σφαίρας καί τοῦ κυλίνδρου εἶναι ἴσα.

Λ ύ σ ι ς:Τά ἐπίπεδα ΓΗΘΕ καί ΓΗΖΔ,ὡς διερχόμενα διά τοῦ ἄξονος τοῦ κυλίνδρου,τέμνουν τόν κύλινδρον κατά τάς γενετείρας ΘΕ καί ΖΔ, αἱ ὁποῖαι θά εἶναι παράλληλοι.Ἐπίσης τέμνουν τήν σφαῖραν κατά τά τόξα ΓΒΗ καί ΓΑΗ,τά ὁποῖα εἶναι τό ἥμισυ τῶν μεγίστων κύκλων τῆς σφαίρας(O,R).(σχ.604).Αἱ ΓΕ καί ΓΔ ἐφάπτονται τῶν ἐν λόγῳ τόξων εἰς τό σημεῖον Γ καί ἡ γωνία ΕΓΔ=φ καλεῖται γωνία τῶν δύο τούτων μεγίστων κύκλων τῆς σφαίρας.Τό μέρος τῆς σφαίρας,τό περιεχόμενον μεταξύ τῶν δύο τούτων τόξων καλεῖται σφαιρική ἄτρακτος καί ἡ γωνία φ εἶναι ἡ γωνία τῆς σφαιρικῆς ἀτράκτου.

'Εάν $\varphi=\frac{\pi}{2}$, τότε ἡ ἄτρακτος καλεῖται ὀρθογώνιος καί τό ἐμβαδόν αὐτῆς θά ἰσοῦται πρός τό τέταρον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας σφαίρας. Ἤτοι:

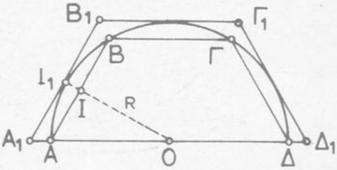
$$E_{\text{ὀρθ.ἀτράκτου}}=\pi.R^2.$$

'Εάν ἡ γωνία τῆς ἀτράκτου εἶναι μ ὀρθαί καί ἡ ἀκτίς τῆς σφαίρας R, θά ἔχωμεν $(E)=\mu.(E_1)$, ἔνθα E τό ἐμβαδόν τῆς ἀτράκτου καί E_1 τό ἐμβαδόν τῆς ὀρθογωνίου ἀτράκτου, ἤτοι:

$$(E)=\mu.\pi R^2 \qquad (1)$$

'Εάν (E_2) εἶναι τό ἐμβαδόν ΖΘΕΔ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου, τό περιεχόμενον μεταξύ τῶν δύο ἐπιπέδων ΗΘΕΓ καί ΗΖΔΓ, τότε $(E_2)=\mu.\pi.R^2$ (2) καί ἄρα $(E)=(E_2)$.

786. Τό ἐμβαδόν σφαίρας παραγομένης ὑπό ἡμικύκλου στρεφομένου περί τήν διάμετρόν του εἶναι μέσον ἀνάλογον μεταξύ τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἐπιφανειῶν τῶν παραγομένων ὑπό δύο ἡμικανονικῶν ὁμοίων πολυγώνων, ἐγγεγραμμένου καί περιγεγραμμένου περί τόν ἡμίκυκλον τοῦτον.



σχ.605

Λ ύ σ ι ς: Ἔστωσαν ΑΒΓΔ καί $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$ αἱ κανονικαί πολυγωνικαί γραμμαί, ἡ μία ἐγγεγραμμένη καί ἡ ἄλλη περιγεγραμμένη εἰς τόν ἐν λόγῳ ἡμίκυκλον ἀκτῖνος R.

Θά ἔχωμεν:

$$E_{(AB\Gamma\Delta)}=A\Delta.2\pi.OI \quad \text{καί} \quad \Gamma_{(A_1B_1\Gamma_1\Delta_1)}=A_1\Delta_1.2\pi.OI$$

καί κατ' ἀκολουθίαν:

$$E_{(AB\Gamma\Delta)}.E_{(A_1B_1\Gamma_1\Delta_1)}=4\pi^2.A\Delta.A_1\Delta_1.OI.OI_1 \qquad (1)$$

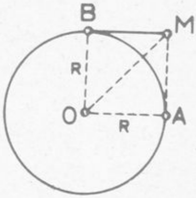
'Επειδή αἱ πολυγωνικαί γραμμαί εἶναι ὁμοιόθετοι, θά εἶναι: $\frac{A_1\Delta_1}{A\Delta}=\frac{OI_1}{OI}$ ἤ $A_1\Delta_1.\frac{OI_1.A\Delta}{OI_1}$ καί ἡ (1) γίνεται:

$$E_{(AB\Gamma\Delta)}.E_{(A_1B_1\Gamma_1\Delta_1)}=4\pi^2.A\Delta^2.OI_1^2=16\pi^2\rho^4$$

787. Δίδεται σφαῖρα (O,R) καί θεωροῦμεν τάς τρισορθογωνίους τριέδρους γωνίας, ἑκάστης τῶν ὁποίων αἱ ἕδραι ἐφάπτονται τῆς σφαίρας ταύτης. Νά εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν κορυφῶν Σ τῶν τριέδρων τούτων γωνιῶν.

Λ ύ σ ι ς: 'Αφοῦ ἡ τρίεδρος εἶναι τρισορθογώνιος εἰς τό Μ καί αἱ ἕδραι της ἐφάπτονται τῆς σφαίρας, ἕπεται ὅτι ἡ ΟΜ θά εἶναι ἡ διαγώνιος κύβου ἀκμῆς R.

Δηλαδή $OM=R\sqrt{3}$ καί τό M θά κεῖται ἐπί σφαίρας $(O,R\sqrt{3})$.(σχ.606).



σχ.606

788. Ἐάν R, ρ_1, ρ_2 εἶναι αἱ ἀκτῖνες τῶν σφαιρῶν, περιγεγραμμένης, ἐγγεγραμμένης καί ἐφαπτομένης τῶν ἀκμῶν κύβου καί κανονικοῦ ὀκταέδρου, νά ἀποδειχθῇ ὅτι:

α´) $R^2=\rho_1^2+\rho_2^2$ καί β´) $\frac{1}{\rho_1^2}=\frac{1}{R^2}+\frac{1}{\rho^2}$

γ´) Εὕρετε ἀναλόγους σχέσεις διά τό κανονικόν δωδεκάεδρον καί κανονικόν εἰκοσάεδρον.

Λ ύ σ ι ς: α´) Ἡ ἀκτίς R τῆς περιγεγραμμένης σφαίρας περί κύβον εἶναι τό ἥμισυ τῆς διαγωνίου τοῦ κύβου ἀκμῆς α.

Ἤτοι: $$R=\frac{\alpha\sqrt{3}}{2} \qquad (1)$$

Ἡ ἀκτίς τῆς ἐγγεγραμμένης σφαίρας εἰς τόν κύβον τοῦτον εἶναι: $\rho_1=\frac{\alpha}{2}$ (2).

Ἡ ἀκτίς τῆς σφαίρας τῆς ἐφαπτομένης τῶν ἀκμῶν τοῦ κύβου τούτου εἶναι: $\rho_2=\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$ (3)

καί κατ'ἀκολουθίαν:

$$\rho_1^2+\rho_2^2=\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{\alpha^2}{4}+\frac{2\alpha^2}{4}=\frac{3\alpha^2}{4}=\left(\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}\right)^2=R^2.$$

Ὥστε: $$R^2=\rho_1^2+\rho_2^2 \qquad (4)$$

β´) Κατά τήν ἄσκησιν 761 εἶναι:

$$R=\frac{\alpha\sqrt{6}}{4} \quad \text{καί} \quad \rho_1=\frac{\alpha\sqrt{6}}{12} \quad \text{καί} \quad \rho_2=\frac{\alpha\sqrt{3}}{8}$$

καί κατ'ἀκολουθίαν:

$$\frac{1}{R^2}+\frac{1}{\rho_2^2}=\frac{1}{\frac{6\alpha^2}{16}}+\frac{1}{\frac{3\alpha^2}{64}}=\frac{16}{6\alpha^2}+\frac{64}{3\alpha^2}=\frac{16+128}{6\alpha^2}=\frac{144}{6\alpha^2}=\frac{1}{\rho^2}$$

γ´) Ἡ ἐργασία αὐτή νά γίνῃ ὑπό τῶν μαθητῶν.

789. Θεωροῦμεν τρεῖς σφαίρας ἐφαπτομένας ἀνά δύο ἐξωτερικῶς καί τοῦ ἐπιπέδου (P) κατά τά σταθερά σημεῖα A, B, Γ αὐτοῦ. Ἐάν α, β, γ εἶναι αἱ πλευραί τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, νά ὑπολογισθοῦν αἱ ἀκτῖνες τῶν σφαιρῶν τούτων.

Λ ύ σ ι ς: Ἔστωσαν A_1, B_1, Γ_1 τά κέντρα τῶν σφαιρῶν καί $AA_1=x$, $BB_1=y$, $\Gamma\Gamma_1=\omega$ αἱ ἀκτῖνες αὐτῶν. Αἱ σφαῖραι ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς. Ἄρα:

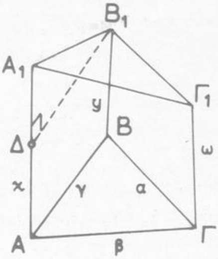
$B_1\Gamma_1=y+\omega$, $\Gamma_1A_1=\omega+x$, $A_1B_1=x+y$.

Ἄγομεν τήν $B_1\Delta \parallel BA$ καί ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου $B_1A_1\Delta$ θά ἔχωμεν:

$$A_1B_1^2=A_1\Delta^2+\Delta B_1^2$$

ἤ $(x+y)^2=(x-y)^2+\gamma^2 \Rightarrow xy=\dfrac{\gamma^2}{4}$ (1)

καί ὁμοίως: $y\omega=\dfrac{\alpha^2}{4}$ (2) καί $\omega x=\dfrac{\beta^2}{4}$ (3)



σχ.607

Διά πολ/σμοῦ κατά μέλη τῶν (1), (2),(3) λαμβάνομεν:

$$x^2y^2\omega^2=\frac{\alpha^2\beta^2\gamma^2}{64} \Leftrightarrow xy\omega=\frac{\alpha\beta\gamma}{8} \quad (4)$$

Διαιροῦντες τήν (4) διά τῶν (1),(2) καί (3), λαμβάνομεν:

$$x=\frac{\beta\gamma}{2\alpha}, \quad y=\frac{\gamma\alpha}{2\beta}, \quad \omega=\frac{\alpha\beta}{2\gamma}$$

790. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος δίδεται ὑπό τοῦ τύπου: $V=\pi\rho^2\upsilon-\frac{1}{12}\pi\upsilon^3$, ἔνθα ρ ἡ ἀκτίς τῆς μεσαίας τομῆς αὐτοῦ καί υ τό ὕψος του.(τύπος MACLAURIN).

Λ ύ σ ι ς: Ὁ ὄγκος τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος, τοῦ ὁποίου αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεων εἶναι α, β καί τό ὕψος υ, εἶναι:

$$V=\frac{\pi.\upsilon}{6}(\upsilon^2+3\alpha^2+3\beta^2) \qquad (1)$$

Ἀλλά κατά τήν ἄσκησιν 777 εἶναι:

$$\alpha^2+\beta^2=2\rho^2-\frac{\upsilon^2}{2},$$

ἔνθα ρ ἡ ἀκτίς τῆς μέσης τομῆς τοῦ σφ.τμήματος, ὁπότε ἡ (1) γίνεται, μετά τάς πράξεις: $V=\pi\rho^2\upsilon-\frac{1}{12}\pi.\upsilon^3$.

791. Δίδεται κύβος ἀκμῆς α. Θεωροῦμεν ὅλας τάς σφαίρας, ἑκάστη τῶν ὁποίων κεῖται ἐντός τοῦ κύβου καί ἔχει διάμετρον ἴσην πρός $\frac{\alpha}{\nu}$. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι τό ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν σφαιρῶν τούτων εἶναι σταθερόν καί ἀνεξάρτητον τοῦ ν.

Λ ύ σ ι ς: Ἡ βάσις τοῦ κύβου θά περιλάβῃ ν^2 σφαίρας, διαμέτρου $\frac{\alpha}{\nu}$. Ὁ ὄγκος ἑκάστης τῶν σφαιρῶν τούτων εἶναι:

$$V_1=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{\alpha}{2\nu}\right)^3=\frac{1}{6}\pi.\frac{\alpha^3}{\nu^3}$$

Κατ'ἀκολουθίαν αἱ ν^2 σφαῖραι θά ἔχουν ὄγκον:

$$V_2 = \frac{1}{6}\pi . \frac{\alpha^3}{\nu^3} . \nu^2 = \frac{1}{6}\pi . \frac{\alpha^3}{\nu}$$

'Επειδή ἡ πλήρωσις τοῦ κύβου θά γίνῃ ὑπό ν τοιούτων στρωμάτων σφαιρῶν, ὁ ὄγκος τούτων θά εἶναι:

$$V = \frac{1}{6}\pi . \frac{\alpha^3}{\nu} . \nu = \frac{1}{6}\pi . \alpha^3 ,$$

δηλαδή ἀνεξάρτητος τοῦ πλήθους τῶν σφαιρῶν.

792. Κυλίνδρου τό ὕψος εἶναι ἴσον πρός τήν διάμετρον τῆς βάσεως αὐτοῦ. Εἰς τοῦτον ἐγγράφομεν σφαῖραν καί ἐκ περιστροφῆς κῶνον. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι οἱ ὄγκοι τῶν τριῶν τούτων σχημάτων εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀριθμῶν 3,2,1.

Λ ύ σ ι ς: Ὁ κύλινδρος ἔχει ἀκτῖνα βάσεως R καί ὕψος 2R, καί ἡ ἀκτίς τῆς σφαίρας εἶναι R.

Ὁ κῶνος ἔχει ἀκτῖνα βάσεως R καί ὕψος τό ὕψος τοῦ κυλίνδρου, δηλαδή 2R.

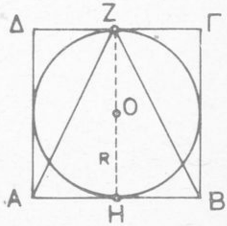
'Εάν V, V_1, V_2 εἶναι οἱ ὄγκοι τῶν τριῶν τούτων σχημάτων, θά ἔχωμεν:

$$V = \pi R^2 . 2R = 2\pi . R^3 \quad , \quad V_1 = \frac{4}{3}\pi . R^3 \quad , \quad V_2 = \frac{1}{3}\pi . R^2 . 2R = \frac{2}{3}\pi . R^3 ,$$

ἐκ τῶν ὁποίων λαμβάνομεν:

$$2\pi . R^3 = V = \frac{3V_1}{2} = 3V_2 \implies \boxed{\frac{V}{3} = \frac{V_1}{2} = \frac{V_2}{1}}$$

793. Ὁ ὄγκος ἰσοπλεύρου κυλίνδρου ἐγγεγραμμένου εἰς σφαῖραν ἀκτῖνος R εἶναι μέσος ἀνάλογος μεταξύ τῶν ὄγκων τοῦ ἐγγεγραμμένου ἰσοπλεύρου κώνου καί τοῦ ὄγκου τῆς σφαίρας.



σχ.608

Λ ύ σ ι ς: Ἔστω R ἡ ἀκτίς τῆς σφαίρας. Ὁ ὄγκος της εἶναι:

$$V = \frac{4}{3}\pi . R^3 \qquad (1)$$

Ὁ ἰσόπλευρος κύλινδρος, ὁ ἐγγεγραμμένος εἰς τήν σφαῖραν ἔχει μεσημβρινήν τομήν τετράγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς τόν μέγιστον κύκλον τῆς τομῆς. Ἔχει ἀκτῖνα βάσεως $\frac{R\sqrt{2}}{2}$ καί ὕψος $R\sqrt{2}$. Ἄρα ὁ ὄγκος

του εἶναι: $$V_1 = \pi\left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2 . R\sqrt{2} = \frac{\pi R^3\sqrt{2}}{2} \qquad (2)$$

Ὁ ἐγγεγραμμένος ἰσόπλευρος κῶνος ἔχει μεσημβρινήν τομήν ἰσόπλευρον τρίγωνον, ἐγγεγραμμένον εἰς μέγιστον κύκλον τῆς σφαίρας. Ἡ ἀκτίς τῆς βάσεώς του εἶναι $\frac{R\sqrt{3}}{2}$ καί τό ὕψος $\frac{3R}{2}$. Ἄρα ὁ ὄγκος του εἶναι:

$$V_2=\frac{1}{3}\pi.\left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2.\frac{3R}{2}=\frac{3}{8}\pi.R^3 \qquad (3)$$

Ἐκ τῶν (1),(2) καί (3) ἕπεται ὅτι:

$$\boxed{V_1^2=V.V_2} \qquad (4)$$

794. Ὁ ὄγκος ἑνός κυλίνδρου, ἑνός κώνου καί ἑνός κολούρου κώνου ἐκ περιστροφῆς, περιγεγραμμένων εἰς σφαῖραν ἀκτῖνος R ἰσοῦται πρός τό γινόμενον τοῦ ὁλικοῦ ἐμβαδοῦ των ἐπί τό τρίτον τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας.

Λ ύ σ ι ς: Ἔστω R ἡ ἀκτίς τῆς σφαίρας. Ὁ περιγεγραμμένος κύλινδρος εἰς τήν σφαῖραν ἔχει μεσημβρινήν τομήν τετράγωνον πλευρᾶς 2R. Ἐάν (E) καί V εἶναι τό ἐμβαδόν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας του καί ὁ ὄγκος του, τότε:

$$(E)=2\pi.R^2+2\pi.R.2R=6\pi.R^2 \quad \text{καί} \quad V=\pi R^2.2R=2\pi.R^3,$$

καί κατ'ἀκολουθίαν:

$$V=\frac{1}{3}R.(E). \qquad (1)$$

Ἔστω τώρα κῶνος ἐκ περιστροφῆς περιγεγραμμένος περί τήν σφαῖραν. Ἐάν x,y,ω εἶναι ἡ ἀκτίς τῆς βάσεως, τό ὕψος καί ἡ πλευρά τοῦ κώνου, τότε:

$$(E)=\pi x^2+\pi x\omega=\pi x(x+\omega) \quad \text{καί} \quad V=\frac{1}{3}\pi x^2 y,$$

καί κατ'ἀκολουθίαν:

$$\frac{V}{E}=\frac{1}{3}\cdot\frac{xy}{x+\omega} \qquad (2)$$

Ἐάν θεωρήσωμεν μίαν μεσημβρινήν τομήν, τότε τό ἐμβαδόν τῆς τομῆς εἶναι xy. Ἐπειδή δέ E=τR, ἕπεται ὅτι:

$$(x+\omega)R=xy \Longrightarrow \frac{xy}{x+\omega}=R$$

καί ἡ (2) γίνεται: $\frac{V}{E}=\frac{1}{3}R \Longrightarrow V=\frac{1}{3}R(E)$.

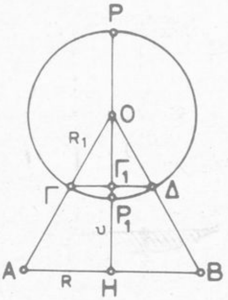
Τέλος θεωροῦμεν τόν περιγεγραμμένον ἐκ περιστροφῆς κόλουρον κῶνον. Ἔστωσαν x,y αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεων. Τό ὕψος του εἶναι 2R καί ἡ μεσημβρινή τομή εἶναι ἰσοσκελές τραπέζιον, τοῦ ὁποίου ἡ παράπλευρος ἀκμή εἶναι x+y. Θά ἔχωμεν:

$$(E)=\pi x^2+\pi y^2+\pi(x+y)^2=2\pi(x^2+y^2+xy),$$
$$V=\frac{1}{3}\pi.2R(x^2+y^2+xy),$$

καί κατ'ἀκολουθίαν: $\frac{V}{E}=\frac{1}{3}R \Longrightarrow V=\frac{1}{3}R.(E)$.

795. Κῶνος ἐκ περιστροφῆς ὕψους υ καί ἀκτῖνος βάσεως R ἔχει κορυφήν τό κέντρον σφαίρας ἀκτῖνος R_1.Νά ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ κοινοῦ μέρους τῶν δύο τούτων σχημάτων.

Λ ύ σ ι ς:Θεωροῦμεν μίαν μεσημβρινήν τομήν τοῦ κώνου. Αὕτη τέμνει τήν σφαῖραν κατά μέγιστον κύκλον $ΡΓΡ_1Δ$ καί τόν κῶνον κατά τό ἰσοσκελές τρίγωνον ΟΑΒ,ὕψους ΟΗ=υ.



σχ.609

Θά ἔχωμεν:

$$V=E_{(ΓΡ_1)}.\frac{R_1}{3}=2\pi.R_1.Γ_1Ρ_1.\frac{R_1}{3}=\frac{2}{3}\pi.R_1^2.Γ_1Ρ_1.$$

'Αλλά $Γ_1Ρ_1=ΟΡ_1-ΟΓ_1=R_1-ΟΓ_1$ καί

$$\frac{ΟΓ_1}{ΟΗ}=\frac{ΟΓ}{ΟΑ} \Rightarrow ΟΓ_1=\frac{ΟΓ.ΟΗ}{ΟΑ}=\frac{R_1.\upsilon}{\sqrt{R^2+\upsilon^2}} \text{ καί}$$

$$Γ_1Ρ_1=R_1-\frac{R_1.\upsilon}{\sqrt{R^2+\upsilon^2}} \text{ καί κατ'ακολουθίαν:}$$

$$V=\frac{2}{3}\pi.R_1^2.\left(R_1-\frac{R_1.\upsilon}{\sqrt{R^2+\upsilon^2}}\right).$$

796. 'Ο ὄγκος V ὁ περιλαμβανόμενος μεταξύ δύο ὁμοκέντρων σφαιρῶν (Ο,R) καί $(Ο,R_1)$ εἶναι ἰσοδύναμος πρός τόν ὄγκον ἑνός κολούρου κώνου,ἔχοντος βάσεις τούς μεγίστους κύκλους τῶν σφαιρῶν τούτων καί ὕψος τό τετραπλάσιον τῆς ἀποστάσεως $d=R-R_1$ τῶν σφαιρικῶν ἐπιφανειῶν.

Λ ύ σ ι ς:"Εστωσαν ΟΑ=R καί $ΟΒ=R_1$ $(R>R_1)$ αἱ ἀκτῖνες τῶν δύο ὁμοκέντρων σφαιρῶν.

'Ο ὄγκος V ὁ περιλαμβανόμενος μεταξύ τῶν δύο σφαιρῶν εἶναι:

$$V=\frac{4}{3}\pi.R^3-\frac{4}{3}\pi.R_1^3=\frac{4}{3}\pi.(R^3-R_1^3) \qquad (1)$$

'Επειδή δέ $R^3-R_1^3=(R-R_1).(R^2+R_1^2+RR_1)$,ἡ (1) γράφεται:

$$V=\frac{4}{3}\pi.(R-R_1).(R^2+R_1^2+RR_1)=\frac{1}{3}\cdot 4(R-R_1).(\pi R^2+\pi R_1^2+\pi RR_1) \qquad (2)$$

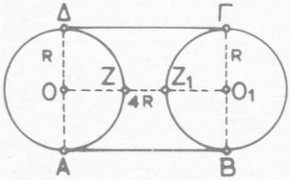
'Η σχέσις (2) ἐκφράζει τό ζητούμενον ἀποτέλεσμα.

797. Δύο ἴσαι σφαῖραι (Ο,R) καί $(Ο_1,R)$ εἶναι τοιαῦται, ὥστε $ΟΟ_1=4R$.Νά ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος V,ὁ περιλαμβανόμενος μεταξύ τῶν σφαιρῶν καί τοῦ περιγεγραμμένου κυλίνδρου.

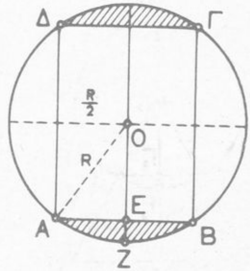
Λ ύ σ ι ς:'Ο ζητούμενος ὄγκος V (σχ.610) εἶναι ἡ διαφορά τῶν ὄγκων τοῦ κυλίνδρου ΑΒΓΔ καί τῶν δύο ἡμισφαιρίων ΟΑΖΔ . Δηλαδή:

$$V=V_1-V_2=\pi R^2.4R-\frac{4}{3}\pi.R^3=\frac{8}{3}\pi.R^3.$$

798. Δίδεται σφαῖρα (O,R) καί κύλινδρος ἐγγεγραμμένος εἰς τήν σφαῖραν ἀκτῖνος βάσεως R/2. Νά ὑπολογισθῆ ὁ ὄγκος τοῦ κοινοῦ μέρους αὐτῶν.



σχ.610



σχ.611

Λ ύ σ ι ς: Ὁ ζητούμενος ὄγκος (σχ.611) ἀποτελεῖται ἀπό τόν ὄγκον V_1 τοῦ κυλίνδρου ἀκτῖνος βάσεως $\frac{R}{2}$ καί ὕφους $\upsilon=2.OE$ καί ἀπό τόν ὄγκον δύο ἴσων μονοβασικῶνσφαιρικῶν τμημάτων ὕφους $EZ=R-OE$.

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου OEA ἔχομεν:

$$OE^2=R^2-\frac{R^2}{4}=\frac{3R^2}{4} \Rightarrow OE=\frac{R\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \upsilon=R\sqrt{3} \text{ καί}$$

$$EZ=R-OE=\frac{R(2-\sqrt{3})}{2}.$$

Κατ'ἀκολουθίαν:

$$V_1=\pi.\frac{R^2}{4}.R\sqrt{3}=\frac{\pi.R^3\sqrt{3}}{4} \qquad (1)$$

Ὁ ὄγκος V_2 τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος AZBA εἶναι:

$$V_2=\frac{1}{3}\pi.EZ^2(3R-EZ)=\frac{1}{3}\pi.\frac{R^2(2-\sqrt{3})^2}{4}\left[3R-\frac{R(2-\sqrt{3})}{2}\right]$$

ἤ

$$V_2=\frac{1}{24}\pi.R^3(16-9\sqrt{3})$$

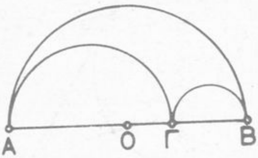
Κατ'ἀκολουθίαν:

$$V=V_1+2V_2=\frac{\pi R^3\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{12}\pi R^3(16-9\sqrt{3})=\frac{\pi R^3}{6}(8-3\sqrt{3}).$$

799. Δίδεται ἡμίκυκλος διαμέτρου AB καί σημεῖον Γ ἐπί τῆς AB. Μέ διαμέτρους AΓ καί ΓB γράφομεν δύο ἄλλους ἡμικύκλους ἐντός τοῦ πρώτου. Τό ὅλον σχῆμα στρέφεται περί τήν

ΑΒ κατά γωνίαν 2π.Νά ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ σχήματος,τόν ὁποῖον θά γράφῃ τό καμπυλόγραμμον τρίγωνον,τό σχηματιζόμενον ὑπό τῶν τριῶν ἡμικύκλων,συναρτήσει τῶν ΑΓ=α καί ΓΒ=β.

Λ ύ σ ι ς:Ὁ ζητούμενος ὄγκος εἶναι ἡ διαφορά τῶν ὄγκων: $V_1=\frac{1}{6}\pi.AB^3$ (1)



σχ.612

τῆς σφαίρας,ἡ ὁποία παράγεται ὑπό τοῦ ἡμικύκλου,διαμέτρου ΑΒ καί τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὄγκων:

$V_2=\frac{1}{6}\pi.A\Gamma^3$ (2) καί $V_3=\frac{1}{6}\pi.\Gamma B^3$ (3),

τῶν παραγομένων ὑπό τῶν ἄλλων ἡμικύκλων,διαμέτρων ΑΓ καί ΓΒ ἀντιστοίχως.Δηλαδή:

$$V=V_1-(V_2+V_3)=\frac{1}{6}\pi.\left[AB^3-(A\Gamma^3+\Gamma B^3)\right]=$$

$$=\frac{1}{6}\pi\left[AB^3-(A\Gamma+\Gamma B)(A\Gamma^2+\Gamma B^2-A\Gamma.\Gamma B\right]=\frac{1}{6}\pi.AB.\left[AB^2-(A\Gamma^2+\Gamma B^2-A\Gamma.\Gamma B)\right]=$$

$$=\frac{1}{6}\pi.AB\left[AB^2-A\Gamma^2-\Gamma B^2+A\Gamma.\Gamma B\right] \qquad (4)$$

Ἐπειδή δέ $AB=A\Gamma+\Gamma B \Longrightarrow AB^2=A\Gamma^2+\Gamma B^2+2.A\Gamma.\Gamma B$
καί ἡ (4) γίνεται:

$$V=\frac{1}{6}\pi.AB.3A\Gamma.\Gamma B=\frac{1}{2}\pi.AB.A\Gamma.\Gamma B=\frac{1}{2}\pi.(\alpha+\beta)\alpha\beta$$

Ὥστε: $$V=\frac{1}{2}\pi.(\alpha+\beta)\alpha\beta.$$

800. Θεωροῦμεν κῶνον ἐκ περιστροφῆς,περιγεγραμμένον περί σφαῖραν (Ο,R).Τό ἐμβαδόν τοῦ κύκλου ἐπαφῆς ἰσοῦται πρός τήν διαφοράν τῶν ἐμβαδῶν τῶν ὑπό τούτου ὁριζομένων ἐπί τῆς σφαίρας μονοβασικῶν σφαιρικῶν ζωνῶν.Νά εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ κώνου.

Λ ύ σ ι ς:Ἔστω x ἡ ἀκτίς ΖΓ τοῦ κύκλου ἐπαφῆς καί ΟΖ=y
Θά εἶναι: ΖΕ=R+y, ΖΗ=R-y καί:

$$\pi x^2=2\pi R.ZE-2\pi R.ZH,$$

ἐξ οὗ: $$x^2=2R(ZE-ZH)=2R\left[R+y-(R-y)\right]=4Ry.$$

Ὥστε: $$x^2=4Ry \qquad (1)$$

Ἀλλά $x^2=R^2-y^2$ καί ἡ (1) γίνεται:

$$R^2-y^2=4Ry \Rightarrow y^2+4Ry-R^2=0, \qquad (2)$$

ἐξ οὗ: $$y=R(\sqrt{5}-2) \qquad (3)$$

καί κατ'ἀκολουθίαν:

$x^2=4R.R(\sqrt{5}-2)=4R^2(\sqrt{5}-2)$

$\Rightarrow x=2R\sqrt{\sqrt{5}-2}$ (4)

Θά εἶναι:

$ZE=y+R=R(\sqrt{5}-2)+R=R(\sqrt{5}-1)$ (5)

Ἐπειδή δέ εἶναι:

$x^2=OZ.Z\Sigma$,

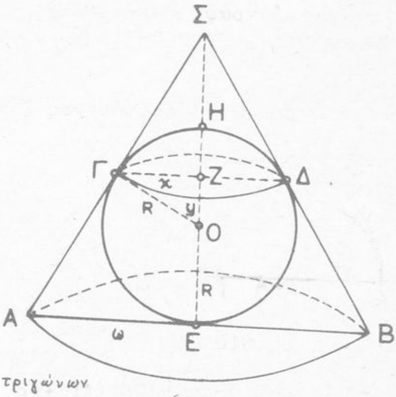
ἕπεται ὅτι:

$(2R\sqrt{\sqrt{5}-2})^2=R(\sqrt{5}-2).Z\Sigma$

$\Rightarrow 4R^2(\sqrt{5}-2)=R(\sqrt{5}-2).Z\Sigma$

ἐξ οὗ: $Z\Sigma=4R$ καί ἄρα:

$E\Sigma=ZE+Z\Sigma=R(\sqrt{5}-1)+4R=R(\sqrt{5}+3)$



σχ.613

Ἐκ τῶν ὁμοίων ὀρθογωνίων τριγώνων ΟΓΣ καί ΕΑΣ ἔχωμεν:

$$\frac{\omega}{R}=\frac{E\Sigma}{\Gamma\Sigma}=\frac{R(\sqrt{5}+3)}{\sqrt{O\Sigma^2-R^2}}=\frac{R(\sqrt{5}+3)}{\sqrt{R^2(\sqrt{5}+2)^2-R^2}}=\frac{\sqrt{5}+3}{2\sqrt{2+\sqrt{5}}},$$

ἐξ οὗ:

$$\omega=\frac{R(\sqrt{5}+3)}{2\sqrt{2+\sqrt{5}}}$$

Ὁ ὄγκος τοῦ κώνου θά εἶναι:

$$V=\frac{1}{3}\pi\omega^2.E\Sigma=\frac{1}{3}\pi.\frac{R^2(\sqrt{5}+3)^2}{4(2+\sqrt{5})}.R(\sqrt{5}+3)=\frac{1}{3}.\frac{\pi R^3(\sqrt{5}+3)^3}{4(2+\sqrt{5})}=\frac{\pi R^3(\sqrt{5}+3)^3}{12(2+\sqrt{5})}$$

801. Νά ὑπολογισθῇ τό ἐμβαδόν καί ὁ ὄγκος ἀμφικύρτου σφαιρικοῦ φακοῦ ἐκ τοῦ πάχους αὐτοῦ ε καί τῶν ἀκτίνων R, R_1 τῶν σφαιρῶν,αἱ ὁποῖαι ὁρίζουν τοῦτον.

Λ ύ σ ι ς: Ἐκ τοῦ σχήματος τῆς ἀσκήσεως 779 ἔχομεν: $OO_1=O\Gamma+\Gamma O_1$ ἤ $OO_1=O\Delta-\Gamma\Delta+\Gamma O_1 \Rightarrow d=R-\varepsilon+R_1$.

Γνωρίζομεν,οὕτω, τήν ἀπόστασιν d τῶν κέντρων καί τάς ἀκτῖνας R καί R_1 τῶν δύο σφαιρῶν. Ἀναγόμεθα οὕτως εἰς τό πρόβλημα 779.

802. Τό αὐτό πρόβλημα,ἄν ὁ φακός εἶναι κοιλόκυρτος.

Λ ύ σ ι ς: Ἔχομεν:

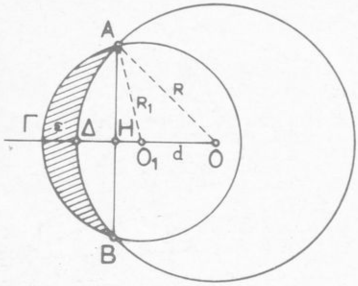
$d=OO_1=\Gamma O-\Gamma O_1$ ἤ $OO_1=\Gamma\Delta+\Delta O-\Gamma O_1$

ἤ $d=\varepsilon+R-R_1$ (1)

Ἀλλά $R_1^2=R^2+d^2-2d.OH$,

ἐξ οὗ: $OH=\dfrac{R^2+d^2-R_1^2}{2d}$ καί $H\Delta=R-\dfrac{R^2+d^2-R_1^2}{2d}=\dfrac{R_1^2-(R-d)^2}{2d}$ (2)

'Εκ τῆς (1) ἔχομεν: $R-d=R_1-\varepsilon$ καί κατ' ἀκολουθίαν:



σχ.614

$$Η\Delta=\frac{R_1^2-(R_1-\varepsilon)^2}{\varepsilon+(R-R_1)}=\frac{\varepsilon(2R_1-\varepsilon)}{\varepsilon+R-R_1},$$

καί κατ' ἀκολουθίαν $ΗΓ=ΗΔ+\varepsilon$

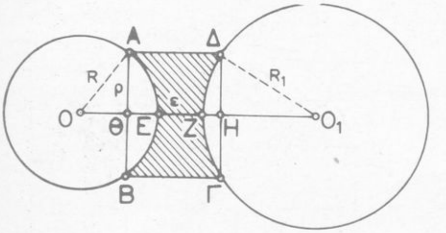
$$ΗΓ=\frac{\varepsilon(2R_1-\varepsilon)}{\varepsilon+R-R_1}+\varepsilon=\frac{\varepsilon(R+R_1)}{\varepsilon+R-R_1}.$$

Γνωρίζομεν, οὕτω, τάς ἀκτῖνας καί τά ὕψη τῶν σφαιρικῶν τμημάτων μέ μίαν βάσιν ΑΓΒ καί ΑΔΒ.

Ἄρα καί τούς ὄγκους αὐτῶν. Ἄρα καί τόν ὄγκον τοῦ κοιλοκύρτου φακοῦ.

803. Νά ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος ἀμφικοίλου φακοῦ, συναρτήσει τῶν ἀκτίνων R καί R_1 τῶν σφαιρῶν, αἱ ὁποῖαι τόν ὁρίζουν, τοῦ πάχους ε αὐτοῦ καί τῆς ἀκτῖνος ρ τῆς καθέτου τομῆς αὐτοῦ πρός τόν ἄξονα τοῦ φακοῦ.

Λ ύ σ ι ς: Ὁ ζητούμενος ὄγκος ἰσοῦται πρός τόν ὄγκον τοῦ κυλίνδρου ἀκτῖνος βάσεως ρ καί ὕφους ΘΗ, ἠλαττωμένον κατά τό ἄθροισμα τῶν ὄγκων δύο σφαιρικῶν τμημάτων μέ βάσεις ΑΕΒ καί ΔΖΓ. Ἀλλ' ἔχομεν:



σχ.612

$ΖΗ=ΟΟ_1-ΟΘ-Ο_1Η$ (1)

Ἐπειδή δέ $ΟΘ=\sqrt{R^2-\rho^2}$ καί

$$Ο_1Η=\sqrt{R_1^2-\rho^2}$$

ἕπεται ὅτι:

$$\upsilon=ΘΗ=R+R_1+\varepsilon-\sqrt{R^2-\rho^2}-\sqrt{R_1^2-\rho^2}.$$

Θά ἔχωμεν τώρα:

$$V_{κυλίνδρου}ΑΒΓΔ=\pi\rho^2\upsilon=V_1 \quad (2)$$

Τό ὕψος τοῦ σφ. τμήματος ΑΕΒ εἶναι:

$$ΘΕ=R-ΟΘ=R-\sqrt{R^2-\rho^2}=\upsilon_1 \quad (3)$$

καί τό ὕψος τοῦ σφ. τμήματος ΔΖΓ εἶναι:

$$ΗΖ=R_1-Ο_1Η=R_1-\sqrt{R_1^2-\rho^2}=\upsilon_2. \quad (4)$$

'Εκ τοῦ τύπου $V=\frac{1}{3}\pi.\upsilon^2(3R-\upsilon)$, ὅστις δίδει τόν ὄγκον τοῦ μονοβασικοῦ σφαιρικοῦ τμήματος, ἔχομεν:

$$\text{Ὄγκ.σφ.τμ.}ΑΕΒ=\frac{1}{3}\pi.\upsilon_1^2.(3R-\upsilon_1)=V_2 \quad (5)$$

$$\text{Ὄγκ.σφ.τμ.}ΔΖΓ=\frac{1}{3}\pi.\upsilon_2^2.(3R_1-\upsilon_2)=V_3 \quad (6)$$

Κατ' ἀκολουθίαν ὁ ζητούμενος ὄγκος εἶναι:

$$V=V_1-V_2-V_3 \quad (7)$$

804. Νά ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος κώνου ἐκ περιστροφῆς ἀκτῖνος βάσεως ρ, περιγεγραμμένου περί σφαῖραν ἀκτῖνος R.

Λ ύ σ ι ς: Ἔστω ΟΣ=x, ὁπότε ΓΣ=x+R. Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΑΓΣ καί ΟΔΣ ἔχομεν ἀντιστοίχως:

$$ΣΑ=\sqrt{(x+R)^2+ρ^2} \qquad (1)$$

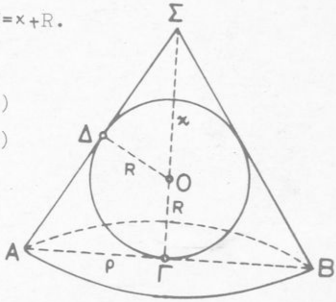
καί

$$ΣΔ=\sqrt{x^2-R^2} \qquad (2)$$

Ἐκ δέ τῶν ὁμοίων ὀρθογωνίων τριγώνων ΑΓΣ καί ΟΔΣ ἔχομεν:

$$\frac{ΑΓ}{ΟΔ}=\frac{ΣΑ}{ΟΣ} \text{ ἤ } \frac{ρ}{R}=\frac{\sqrt{(x+R)^2+ρ^2}}{x} \text{ ἤ}$$

$$\frac{ρ^2}{R^2}=\frac{(x+R)^2+ρ^2}{x^2} \Rightarrow$$



σχ.616

$$(R^2-ρ^2)x^2+2R^3x+R^4+R^2ρ^2=0. \qquad (3)$$

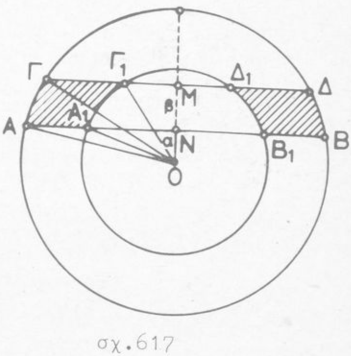
Ἐκ τῆς (3) προκύπτει τό x=ΟΣ. Ἄρα ΓΣ=x+R καί κατ'ἀκολουθίαν εὐκόλως προκύπτει ὁ ὄγκος τοῦ κώνου ΣΑΒ.

805. Θεωροῦμεν δύο σφαίρας (O,R) καί (O,R_1) ὁμοκέντρους μέ $R>R_1$. Νά ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος V, ὁ περιλαμβανόμενος μεταξύ τῶν σφαιρῶν καί δύο ἐπιπέδων παραλλήλων, ἀπεχόντων ἀπό τό κέντρον O ἀποστάσεις ἀντιστοίχως α καί α+β, ἔνθα α+β<R καί κειμένων πρός τό αὐτό μέρος τοῦ κέντρου O.

Λ ύ σ ι ς: Ἔστωσαν V_1 καί V_2 οἱ ὄγκοι τῶν σφαιρικῶν τμημάτων ΑΒΓΔ καί $Α_1Β_1Γ_1Δ_1$, οἱ ὁριζόμενοι ἐπί τῶν δύο σφαιρῶν ὑπό τῶν δύο παραλλήλων ἐπιπέδων, καθώς ὁρίζει τό πρόβλημα. Θά εἶναι: $V=V_1-V_2$ (1)

Ἐπειδή δέ εἶναι:

$$V_1=\frac{1}{2}π.β(ΝΑ^2+ΜΓ^2)+\frac{1}{6}π.β^3 \qquad (2)$$



καί $V_2=\frac{1}{2}π.β(ΝΑ_1^2+ΜΓ_1^2)+\frac{1}{6}π.β^3$ (3),

σχ.617

ἕπεται ὅτι: $V=V_1-V_2=\frac{1}{2}π.β\left[ΝΑ^2-ΝΑ_1^2+ΜΓ^2-ΜΓ_1^2\right]$

$$=\frac{1}{2}π.β\left[R^2-α^2-R_1^2+α^2+R^2-(α+β)^2-R_1^2+(α+β)^2\right]$$

$$=\frac{1}{2}π.β(2R^2-2R_1^2)=π.β(R^2-R_1^2)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XVII

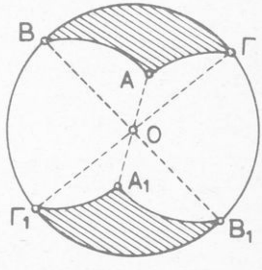
ΣΦΑΙΡΙΚΗ ΓΩΝΙΑ — ΣΦΑΙΡΙΚΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΝ
Στοιχειώδεις ιδιότητες

806. Δύο σφαιρικά τρίγωνα συμμετρικά ὡς πρός τό κέντρον τῆς σφαίρας,εἰς τήν ὁποίαν ἀνήκουν,εἶναι ἴσα;

Λ ύ σ ι ς:Δύο σφαιρικά τρίγωνα τῆς αὐτῆς σφαίρας λέγονται συμμετρικά,ὅταν αἱ ἀντίστοιχοι κορυφαί των εἶναι ἀντιδιαμετρικά σημεῖα τῆς σφαίρας ταύτης.

Οὕτω,τά τρίγωνα ΑΒΓ καί $A_1B_1\Gamma_1$ εἶναι συμμετρικά ὡς πρός τό κέντρον Ο τῆς σφαίρας (Ο).

Ταῦτα ἔχουν ἀντιστοίχως τριέδρους γωνίας κατά κορυφήν.Εἰς ταῦτα αἱ ἀντίστοιχοι πλευραί εἶναι ἴσαι καί αἱ ἀντίστοιχοι γωνίαι χωρίς νά εἶναι ἴσα.Διότι αἱ ἀντίστοιχοι τρίεδροι γωνίαι εἶναι κατά κορυφήν.



σχ.618

807. Τό αὐτό διά δύο σφαιρικά πολύγωνα.

Λ ύ σ ι ς: Δύο σφαιρικά πολύγωνα συμμετρικά ὡς πρός τό κέντρον τῆς σφαίρας,εἰς τήν ὁποίαν ἀνήκουν δέν εἶναι,ἐν γένει,ἴσα.Διότι καί αἱ ἀντίστοιχοι πολύεδροι γωνίαι δέν εἶναι,ἐν γένει,ἴσαι.

808. Δύο σφαιρικά ἰσοσκελῆ τρίγωνα εἶναι ἴσα;καί πότε;

Λ ύ σ ι ς:Μόνον τά σφαιρικά τρίγωνα,τά ὁποῖα ἔχουν δύο γωνίας ἴσας εἶναι ἴσα.Διότι καί αἱ ἀντίστοιχοι ἰσοσκελεῖς τρίεδροι γωνίαι εἶναι ἴσαι.

809. Εἰς ἕν ἰσοσκελές σφαιρικόν τρίγωνον ἀπέναντι ἴσων πλευρῶν ἀντιστοιχοῦν ἴσαι γωνίαι καί ἀντιστρόφως.

Λ ύ σ ι ς: Διότι εἰς μίαν ἰσοσκελῆ τρίεδρον ἀπέναντι ἴσων ἑδρῶν ἀντιστοιχοῦν ἴσαι δίεδροι καί ἀντιστρόφως.

810. 'Εάν σφαιρικόν τρίγωνον εἶναι ἰσόπλευρον θά εἶναι καί ἰσογώνιον καί ἀντιστρόφως.

Λ ύ σ ι ς: Πράγματι,εἰς μίαν ἰσόεδρον τρίεδρον ἀπέναντι ἴσων ἑδρῶν ἀντιστοιχοῦν ἴσαι δίεδροι καί ἀντιστρόφως.

811. Ἑκάστη πλευρά σφαιρικοῦ πολυγώνου εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὑπολοίπων.

Λ ύ σ ι ς: Ἡ ἀπόδειξις γίνεται,ἄν ἀχθοῦν ἀπό μίαν κορυφήν τοῦ σφαιρικοῦ πολυγώνου αἱ δυναταί διαγώνιοι αὐτοῦ.

812. Τό ἄθροισμα τῶν πλευρῶν κυρτοῦ σφαιρικοῦ πολυγώνου εἶναι μικρότερον ἑνός μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας, εἰς ἥν ἀνήκει τοῦτο.

Λ ύ σ ι ς: Ἀρκεῖ νά θεωρήσωμεν τήν ἀντίστοιχον πολύεδρον γωνίαν,τῆς ὁποίας κορυφαί εἶναι τό κέντρον τῆς σφαίρας,εἰς ἥν ἀνήκει τό σφαιρικόν τοῦτο πολύγωνον.

813. Ἐάν δύο γωνίαι σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι ἄνισοι καί αἱ ἀπέναντι αὐτῶν πλευραί θά εἶναι ὁμοίως ἄνισοι καί ἀντιστρόφως.

Λ ύ σ ι ς: Ἔστω τό σφαιρικόν τρίγωνον ΑΒΓ,εἰς τό ὁποῖον εἶναι:

$\measuredangle$ ΑΒΓ > ΑΓΒ.

Ἄγομεν τό τόξον ΒΔ,οὕτως ὥστε

$\measuredangle$ ΔΒΓ= $\measuredangle$ ΔΓΒ,

σχ.619

ὁπότε ΔΓ=ΔΒ καί κατ'ἀκολουθίαν: ΑΓ=ΑΔ+ΔΒ.'Αλλά ΑΔ+ΔΒ > ΑΒ.
Ἄρα ΑΓ > ΑΒ.

Τό ἀντίστροφον ἀποδεικνύεται εὐκόλως διά τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς,ὅπως καί εἰς τήν Γεωμετρίαν τοῦ ἐπιπέδου.

814. Δύο σφαιρικά τρίγωνα τῆς αὐτῆς σφαίρας εἶναι ἴσα:
1) ἄν ἔχουν μίαν πλευράν ἴσην καί τάς προσκειμένας γωνίας ἴσας,μίαν πρός μίαν.
2) ἐάν ἔχουν δύο πλευράς ἴσας,μίαν πρός μίαν,καί τάς ὑπ'αὐτῶν περιεχομένας γωνίας ἴσας καί
3) ἄν ἔχουν τάς πλευράς των ἴσας,μίαν πρός μίαν.

Λ ύ σ ι ς: 1) Διότι,ἄν δύο τρίεδροι ἔχουν μίαν ἕδραν ἴσην καί τάς προσκειμένας διέδρους ἴσας μίαν πρός μίαν θά εἶναι ἴσαι ἤ κατά κορυφήν.

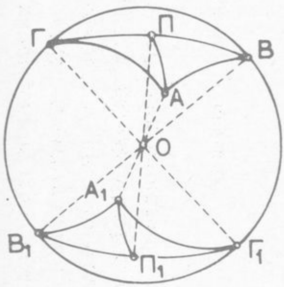
2) Διότι,ἄν δύο τρίεδροι ἔχουν δύο ἕδρας ἴσας μίαν πρός μίαν καί τάς ὑπ'αὐτῶν περιεχομένας διέδρους ἴσας θά εἶναι ἴσαι ἤ κατά κορυφήν.

3) Διότι,ἐάν δύο τρίεδροι ἔχουν τάς ἕδρας αὐτῶν ἴσας

μίαν πρός μίαν θά εἶναι ἴσαι ἤ κατά κορυφήν.

815. Δύο συμμετρικά σφαιρικά τρίγωνα εἶναι ἰσοδύναμα;

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Ἔστωσαν τά συμμετρικά σφαιρικά τρίγωνα ΑΒΓ καί $A_1B_1\Gamma_1$ τῆς σφαίρας (Ο).



σχ.620

Ἄν Π καί Π_1 εἶναι οἱ πόλοι τοῦ κύκλου, ὁ ὁποῖος διέρχεται διά τῶν σημείων Α,Β,Γ, καί ἀχθοῦν τά τόξα τῶν μεγίστων κύκλων ΠΑ,ΠΒ,ΠΓ,Π_1A_1, Π_1B_1, $\Pi_1\Gamma_1$, θά εἶναι:

$$ΠΑ=ΠΒ=ΠΓ$$

Ἐπειδή δέ ΠΑ=Π_1A_1 (διότι καί ΑΟΠ=$A_1O\Pi_1$) ΠΒ=Π_1B_1, ΠΓ=$\Pi_1\Gamma_1$, ἕπεται ὅτι: $\Pi_1A_1=\Pi_1B_1=\Pi_1\Gamma_1$.

Οὕτω, τά σφαιρικά τρίγωνα ΠΑΓ, ΠΑΒ, ΠΒΓ, $\Pi_1A_1B_1$, $\Pi_1A_1\Gamma_1$ καί $\Pi_1B_1\Gamma_1$ εἶναι πάντα ἰσοσκελῆ. Ἐπειδή δέ εἶναι, ἕν πρός ἕν, συμμετρικά, ἕπεται ὅτι εἶναι ἴσα ἕν πρός ἕν. Ἤτοι: ΠΑΓ=$\Pi_1A_1\Gamma_1$, ΠΒΓ=$\Pi_1B_1\Gamma_1$ καί ΠΑΒ=$\Pi_1A_1B_1$.

Τά τρίγωνα λοιπόν ΑΒΓ καί $A_1B_1\Gamma_1$ ἀποτελοῦνται ἐκ μερῶν ἴσων ἕν πρός ἕν. Ἄρα εἶναι ἰσοδύναμα.

816. Ἰσχύει τοῦτο διά δύο συμμετρικά σφαιρικά πολύγωνα;

Σημείωσις: Ἐπί μιᾶς σφαίρας δέν ἔχομεν σφαιρικά τρίγωνα ὅμοια. Δέν ὑφίσταται ἡ θεωρία τῆς ὁμοιότητος, ἡ ἀναφερομένη εἰς τά εὐθύγραμμα τρίγωνα καί πολύγωνα.

Λ ύ σ ι ς: Ἕκαστον τῶν συμμετρικῶν σφαιρικῶν πολυγώνων διαιρεῖται ὑπό τῶν διαγωνίων, τῶν ἀγομένων ἐκ δύο ὁμολόγων κορυφῶν, εἰς τρίγωνα ἰσοδύναμα. Κατ' ἀκολουθίαν τά πολύγωνα ὡς ἀποτελούμενα ἐξ ἰσοδυνάμων σφαιρικῶν τριγώνων (συμμετρικῶν), ἕπεται ὅτι εἶναι ἰσοδύναμα.

$3\varepsilon\varphi^2 x - 16\eta\mu^2 x + 3 = 0$

$3\frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 16\eta\mu^2 x + 3 = 0$

$3\eta\mu^2 x - 16\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x + 3\sigma\upsilon\nu^2 x = 0$

$3\eta\mu^2 x - 16\eta\mu^2 x \cdot (1-\eta\mu^2 x) + 3\sigma\upsilon\nu^2 x = 0$

$3\eta\mu^2 x - 16\eta\mu^2 x(1-\eta\mu^2 x) + 3(1-\eta\mu^2 x) = 0$

$3\eta\mu^2 x - 16\eta\mu^2 x + 16\eta\mu^4 x + 3 - 3\eta\mu^2 x = 0$

$-16\eta\mu^2 x - 16\eta\mu^4 x + 3 = 0$

$16\eta\mu^4 x + 16\eta\mu^2 - 3 = 0$

$$\boxed{\begin{aligned} \eta\mu^2 x &= y \\ (\eta\mu^2 x)^2 &= y^2 \end{aligned}}$$

$\varepsilon\varphi = \pm\sqrt{3}$

$\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi 60$

$x = 2\kappa\pi \pm 60$

$\frac{1}{\sqrt{3}} = 30$ ~~$\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi 30 \to 2\kappa\pi \pm 30$~~

$\eta\mu x + \eta\mu 3x = 2\eta\mu 2x$

$2\eta\mu \frac{x+3x}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{x-3x}{2} = 2\eta\mu 2x$

$2\eta\mu \frac{4^2}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{2}{2} = 2\eta\mu 2x$

$2\eta\mu 2 \cdot \sigma\upsilon\nu 2 = 2\eta\mu x$

$2\eta\mu 2x \cdot \sigma\upsilon\nu x 2 = 2\eta\mu x$

$\sigma\upsilon\nu 2x$

$\eta\mu x + \eta\mu 2x + \eta\mu 3x = 0$

$(\eta\mu x + \eta\mu 3x) + \eta\mu 2x = 0$

$2\eta\mu \frac{x+3x}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{x-3x}{2} + \eta\mu 2x = 0$

$2\eta\mu 2x \cdot \sigma\upsilon\nu 2x + \eta\mu 2x = 0$

$\eta\mu 2x (2\sigma\upsilon\nu 2x + 1) = 0$

$\eta\mu 2x = 0 \Rightarrow 2x = \kappa\pi$

$2\sigma\upsilon\nu 2x + 1 = 0 \qquad x = \kappa\pi = \frac{\kappa\pi}{2}$

$\sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2}$

$\eta\mu 7x - \eta\mu x = \eta\mu 3x$

$2\eta\mu \frac{7x+x}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{7x-x}{2} = \eta\mu 3x$

24
20
20
30
24
22

$\boxed{140}$

$\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu 2x + \eta\mu 3x = 0$

$(\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu 2x) + \eta\mu 3x = 0$

$2\eta\mu \frac{x+2x}{2} \cdot \eta\mu \frac{x-2x}{2} + 2\eta\mu \frac{3x}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{3x}{2}$

$2\eta\mu \frac{3x}{2} \cdot \eta\mu \frac{x}{2} + 2\eta\mu \frac{3x}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{3x}{2}$

$2\eta\mu \frac{3x}{2} \left(\eta\mu \frac{x}{2} + \sigma\upsilon\nu \frac{3x}{2}\right)$

$2\eta\mu \frac{3x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{3x}{2} = \kappa\pi \Rightarrow \frac{2\kappa\pi}{3}$

$\eta\mu \frac{x}{2} \ldots \frac{3x}{2}$

40

Γ. Ηλιοπουλου

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

ΙΩΑΝΝΟΥ Φ. ΠΑΝΑΚΗ

ΙΩΑΝΝΟΥ Φ. ΠΑΝΑΚΗ

1. ΜΕΓΑΛΗ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ (Ἔκδοσις 1948). Περιέχει 779 ἀσκήσεις .... Δρχ. 30
2. ΤΟ ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΝ .... » 20
3. 2500 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΤΟΠΩΝ, μετὰ τῶν λύσεων αὐτῶν, εἰς 2 τόμους ἐκ 500 σελίδων ἕκαστος. Ἀπαραίτητον βοήθημα διὰ τοὺς ὑποψηφίους τῶν Ἀνωτέρων Σχολῶν τοῦ Κράτους καὶ τοὺς μαθητὰς τῶν τριῶν ἀνωτέρων τάξεων τοῦ Γυμνασίου .... Δρχ. 400
4. ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΚ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΣΥΝΟΛΩΝ (Ἔκδοσις 1966—1967). 2 Τόμοι .... Δρχ. 90
5. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ε΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ (ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Πρακτικῆς Κατευθύνσεως. Ἔκδοσις Ο.Ε.Δ.Β. τοῦ Ὑπουργείου Παιδείας).
6. ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ—2 τεύχη. Α΄ τεῦχος Δρχ. 35—Β΄ τεῦχος Δρχ. 40.
7. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ε΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ (ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ Πρακτικῆς Κατευθύνσεως. Ἔκδοσις Ο.Ε.Δ.Β. Ὑπουργείου Παιδείας) .....
8. ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ .... Δρχ. 30
9. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ε΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ (ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ. Πρακτικῆς Κατευθύνσεως. Ἔκδοσις Ο.Ε.Δ.Β. Ὑπουργείου Παιδείας) ....
10. ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ Δ. ΛΟΓΙΣΜΟΥ .... Δρχ. 30

Τριγώνου.

11\. 11. **ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ.** Βιβλίον ἀπαραίτητον διὰ τοὺς μαθητὰς τῶν τριῶν τελευταίων τάξεων τοῦ Γυμνασίου, ἰδιαιτέρως δὲ διὰ τοὺς ὑποψηφίους τῶν Ἀνωτάτων Σχολῶν τοῦ Κράτους, ὡς καὶ παντὸς ἐνδιαφερομένου διὰ τὴν Γεωμετρίαν.

12\. 12. **ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ. Β΄** Αὗται ἀποτελοῦν τὸν Β΄ ΤΟΜΟΝ τῆς Γεωμετρίας τοῦ Τριγώνου. Τὸ βιβλίον τοῦτο εἶναι ἀπαραίτητον διὰ τοὺς μαθητὰς τῶν τριῶν τελευταίων τάξεων τοῦ Γυμνασίου καὶ διὰ τοὺς ὑποψηφίους τῶν ἀνωτέρων Σχολῶν τοῦ Κράτους. Διακρίνεται διὰ τὴν μεθοδικότητα τῶν λύσεων καὶ τὴν ποικιλίαν τῶν προβλημάτων.

κατασκευαί Γ

13 13. **ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ Γ΄** Αὗται ἀποτελοῦν τὸν Γ΄ ΤΟΜΟΝ τῆς Γεωμετρίας τοῦ Τριγώνου. Τὸ βιβλίον τοῦτο εἶναι ἀπαραίτητον διὰ τοὺς μαθητὰς τῶν τριῶν τελευταίων τάξεων τοῦ Γυμνασίου καὶ διὰ τοὺς ὑποψηφίους τῶν Ἀνωτάτων Σχολῶν τοῦ Κράτους. Διακρίνεται διὰ τὴν μεθοδικότητα καὶ τὴν ποικιλίαν τῶν προβλημάτων. Μεθ' ἑκάστην ἑνότητα ἀκολουθοῦν προβλήματα πρὸς λύσιν, λίαν ἐνδιαφέροντα.

14

Οἱ τρεῖς τόμοι τῆς Γεωμετρίας τοῦ Τριγώνου πωλοῦνται ἀπὸ ἀπὸ τὸν Ἐκδοτικὸν Οἶκον **«GUTENBERG», Σόλωνος 99, τηλ. 626.684,** ἀντὶ 115 δρχ. ὁ Α΄ τόμος, 85 δρχ. ὁ Β΄ τόμος

15

καὶ 125 δρχ. ὁ Γ΄ τόμος.

15 15 15 15