ΑΝΤΩΝΙΟΥ ΜΟΝΟΚΡΟΥΣΟΥ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ

ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ
ΤΩΝ ΠΡΑΚΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΚΑΙ ΤΩΝ ΑΝΩΤΕΡΩΝ ΠΑΡΘΕΝΑΓΩΓΕΙΩΝ

Ἐνεκρίθη διὰ μίαν πενταετίαν ἀπὸ τοῦ σχολικοῦ ἔτους 1933—34 κατὰ τὸ ὑπ' ἀριθ. 41062 τῆς 22-7-1933 ἔγγραφον τοῦ Ὑπουργείου τῆς Παιδείας

ΕΚΔΟΣΙΣ ΤΡΙΤΗ

Ἀντίτυπα 200[illegible]

Ἀριθ. ἀδείας Κυκλοφορίας . . . 53.922
5-9-34

Τιμὴ μετὰ Βιβλιοσήμου . . 48.[illegible]0
Ἀξία Βιβλιοσήμου . . . . . 1[illegible].[illegible]0
Φόρος ἀναγκ. Δανείου . . . . [illegible].60

ΑΜ

ΕΚΔΟΤΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ
ΠΕΤΡΟΥ ΔΗΜΗΤΡΑΚΟΥ Α.Ε.
ΑΘΗΝΑΙ—ΠΕΣΜΑΖΟΓΛΟΥ 8—ΕΝΑΝΤΙ ΧΡΗΜΑΤΙΣΤΗΡΙΟΥ
1934

ΑΝΤΩΝΙΟΥ ΜΟΝΟΚΡΟΥΣΟΥ

ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ

ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ
ΤΩΝ ΠΡΑΚΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΚΑΙ ΤΩΝ ΑΝΩΤΕΡΩΝ ΠΑΡΘΕΝΑΓΩΓΕΙΩΝ

Ἐνεκρίθη διὰ μίαν πενταετίαν ἀπὸ τοῦ σχολικοῦ ἔτους 1933—34 κατὰ τὸ ὑπ' ἀριθ. 41062 τῆς 22-7-1933 ἔγγραφον τοῦ Ὑπουργείου τῆς Παιδείας

ΕΚΔΟΣΙΣ ΤΡΙ

ΕΚΔΟΤΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ

ΠΕΤΡΟΥ ΔΗΜΗΤΡΑΚΟΥ Α.Ε.

ΑΘΗΝΑΙ—ΠΕΣΜΑΖΟΓΛΟΥ 8—ΕΝΑΝΤΙ ΧΡΗΜΑΤΙΣΤΗΡΙΟΥ

1934

Πᾶν ἀντίτυπον τῆς γ΄ αὐτῆς ἐκδόσεως μὴ φέρον τὴν ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως θεωρεῖται κλεψίτυπον.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Κατὰ τὴν συγγραφὴν τοῦ παρόντος βιβλίου ἠκολουθήσαμεν ἀρχάς τινας, τὰς ὁποίας ἐθεωρήσαμεν σκόπιμον νὰ ἀναφέρωμεν ἐνταῦθα.

Οὕτως ὡς πρὸς τὴν γλῶσσαν μετεχειρίσθημεν ἁπλουστάτην, πλησιάζουσαν, ὅσον τὸ δυνατόν, πρὸς τὴν ὁμιλουμένην ὑπὸ τῶν μαθητῶν, δι' οὓς τὸ βιβλίον τοῦτο προορίζεται, φρονοῦντες ὅτι ὅσον οἰκειοτέρα τοῖς μαθηταῖς εἶνε ἡ γλῶσσα, δι' ἧς ἐκφράζονται αἱ διάφοροι ἔννοιαι, τόσον ζωηρότερον ἐπιδρῶσιν αὗται ἐπὶ τῆς συνειδήσεως αὐτῶν καὶ συνεπῶς τόσον εὐχερέστερον καὶ ἀκοπώτερον γίνονται κατανοηταὶ καὶ ἀπομνημονεύονται ὑπὸ τούτων.

Ὡς πρὸς τὸ ποσὸν τῆς ὕλης περιωρίσθημεν εἰς τὰ οὐσιώδη καὶ ἀπαραίτητα, συμφώνως ἄλλως τε ταῖς ὁδηγίαις τοῦ Ὑπουργείου, ζητήσαντες διὰ τὰ λοιπά, ὅπως διὰ καταλλήλων ἀσκήσεων ἐξαχθῶσιν ὑπὸ τῶν μαθητῶν.

Κατὰ δὲ τὴν διατύπωσιν ἐπεδιώξαμεν βραχυλογίαν καὶ σαφήνειαν, ἀποφυγόντες τὴν πολυλογίαν, ἡ ὁποία καὶ κουράζει καὶ μᾶλλον σύγχυσιν φέρει εἰς τοὺς μαθητάς, προσέτι δὲ παρεμποδίζει καὶ τὴν αὐτενέργειαν αὐτῶν.

Ὡς πρὸς τὸν τρόπον τῆς προσφορᾶς εἰς τοὺς μαθητὰς τῆς ὕλης ταύτης ἔχοντες ὑπ' ὄψει ὅτι προορίζεται αὕτη διὰ μαθητὰς οὐχὶ ἐκ τῆς Δ΄ τάξεως τοῦ Δημοτικοῦ σχολείου προερχομένους, ὡς ἄλλοτε, ἀλλ' ἐκ τῆς ΣΤ΄ καὶ δὴ μετὰ δοκιμασίαν, οἵτινες συνεπῶς δὲν διδάσκονται διὰ πρώτην φορὰν ταύτην, ἐθεωρήσαμεν σκόπιμον, ὅπως ἡ προσφορὰ αὕτη γίνεται μὲ ποιάν τινα συστηματοποίησιν καὶ συντομίαν, τονίσαντες καὶ ἐπεκταθέντες εἰς τὰ σημεῖα ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα εἴτε ἀνεπαρκῶς διδάσκονται εἰς τὰ Δημοτικὰ Σχολεῖα εἴτε πρώτην φορὰν προσφέρονται εἰς τοὺς μαθητάς.

Ἀλλὰ περὶ τῆς ἀξίας τοῦ βιβλίου τούτου ὡς διδακτικοῦ, ἀρκεῖ νὰ παραθέσωμεν ἀπόσπασμα τῆς ἐκθέσεως τοῦ κριτοῦ εἰσηγητοῦ κ. Γ. Ἀντωνοπούλου Γενικοῦ Ἐπιθεωρητοῦ τῶν Μαθηματικῶν.

« Τὸ ἔργον τοῦτο εἶνε συντεταγμένον μετ' ἐπιμελείας
» καὶ προσοχῆς.

» Περιέχει ἅπασαν τὴν ὑπὸ τοῦ προγράμματος ὁριζο-

» μένην ὕλην, ἥτις ἐκτίθεται εἰς γλῶσσαν ἁπλῆν καὶ σαφῆ.

» Ἡ ὕλη τοῦ βιβλίου ἀναπτύσσεται μὲ συντομίαν, ἥτις » ἐν πολλοῖς παρέχει εἰς τὸν μαθητὴν εὐκαιρίαν νὰ » αὐτενεργήσῃ.

» Ἡ εἰσαγωγὴ εἰς τὴν ἔννοιαν τῆς μεταβλητῆς γίνεται » ἐξ ἀρχῆς τοῦ βιβλίου καὶ ἐπαναλαμβάνεται εἰς πᾶσαν » κατάλληλον εὐκαιρίαν, ὡς π.χ. εἰς τὴν ἀφαίρεσιν, τὸν » πολλαπλασιασμόν, τὰ ἀνάλογα καὶ ἀντίστροφα ποσὰ κ.λ.π.

» Τὸ βιβλίον περιέχει πολλὰς καὶ καταλλήλους ἀσκή- » σεις καὶ προβλήματα τοῦ ἰδιωτικοῦ καὶ δημοσίου βίου, » ὡς π. χ. προβλήματα προϋπολογισμῶν ταμείου ἀσφαλείας, » σχολικοῦ ταμείου καὶ κοινότητος.

» Διὰ τοὺς ἀνωτέρω ἀναφερομένους λόγους εἰσηγού- » μεθα τὴν ἔγκρισιν τούτου.»

Ο ΣΥΓΓΡΑΦΕΥΣ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

ΑΚΕΡΑΙΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΠΡΟΚΑΤΑΡΚΤΙΚΑΙ ΓΝΩΣΕΙΣ

Ποσὸν ἢ ***μέγεθος*** λέγεται πᾶν ὅ,τι δύναται νὰ αὐξηθῇ ἢ νὰ ἐλαττωθῇ· π.χ. εἷς σωρὸς πορτοκαλίων ἢ μήλων, εἷς ὅμιλος μαθητῶν κλπ.

2. ***Πλῆθος*** λέγεται τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπὸ μέρη χωρισμένα μεταξύ των: π.χ. εἷς σωρὸς μήλων, ἓν ποίμνιον προβάτων κλπ.

3. ***Μονὰς*** τοῦ πλήθους λέγεται τὸ ἓν ἀπὸ τὰ μέρη, τὰ ὁποῖα τὸ ἀποτελοῦν· π.χ. τὸ ἓν πρόβατον, τὸ ἓν πορτοκάλιον κλπ.

Πολλάκις ὅμως ὡς μονὰς λαμβάνεται καὶ ἓν ποσόν, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπὸ πολλὰ ὅμοια πράγματα· π.χ. μία δωδεκὰς κοχλιαρίων, διότι θεωροῦμεν ὅτι τὰ 12 κοχλιάρια ἀποτελοῦν ἓν ὅλον. Ὥστε γενικῶς:

Μονὰς λέγεται πᾶν ὅ,τι θεωροῦμεν ὡς ἓν ὅλον.

4. Ἕκαστον πλῆθος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὅτι ἐσχηματίσθη ἀφοῦ ἐλάβομεν τὴν μονάδα του πολλὰς φοράς· π.χ. εἷς σωρὸς πορτοκαλίων δύναται νὰ θεωρηθῇ ὅτι ἐσχηματίσθη, ὅταν εἰς τὸ ἓν πορτοκάλιον προστεθῇ ἄλλο ἓν καὶ κατόπιν ἄλλο ἓν καὶ οὕτω καθ᾽ ἑξῆς. Οὕτω δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἀπὸ πόσα πορτοκάλια ἀποτελεῖται ὁ σωρὸς οὗτος. Ἡ ἐργασία αὐτὴ ὀνομάζεται ***ἀρίθμησις*** τῶν πορτοκαλίων.

5. Τὸ ἐξαγόμενον τῆς ἀριθμήσεως ἑνὸς πλήθους λέγεται ***ἀριθμὸς*** καὶ ἀποτελεῖται ἐν γένει ἀπὸ πολλὰς μονάδας.

Ὥστε ἀριθμὸς εἶνε ἓν πλῆθος μονάδων.

Καὶ ἡ μονὰς ὅμως θεωρεῖται καὶ αὐτὴ ὡς ἀριθμός.

6. ***Ἀρίθμησις*** λέγεται καὶ ὁ τρόπος, μὲ τὸν ὁποῖον σχηματίζονται, ἀπαγγέλλονται καὶ γράφονται οἱ ἀριθμοί.

7. Ὁ ἀριθμὸς λέγεται ***συγκεκριμένος***, ὅταν ὁρίζῃ τὸ πρᾶγμα, τοῦ ὁποίου παριστάνει τὸ μέγεθος· π.χ. 6 δραχμαί, 5 θρανία, ***ἀφῃρημένος*** δέ, ὅταν δὲν ὁρίζῃ τὸ πρᾶγμα, τοῦ ὁποίου παριστάνει τὸ μέγεθος· π.χ. 5, 6, 13.

8. Δύο ἢ περισσότεροι συγκεκριμένοι ἀριθμοὶ λέγονται ***ὁμοειδεῖς***, ὅταν παριστάνουν μεγέθη τοῦ αὐτοῦ πράγματος· π.χ. 5 δραχμαί, 9 δραχμαί. ***Ἑτεροειδεῖς*** δέ, ὅταν παριστάνουν μεγέθη διαφόρων πραγμάτων· π. χ. 5 μαθηταί, 7 θρανία.

9. ***Ἀριθμητικὴ*** λέγεται ἡ ἐπιστήμη, ἡ ὁποία ἐξετάζει τὰς σχέσεις, αἱ ὁποῖαι ὑπάρχουν μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν.

ΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΓΡΑΦΗ ΚΑΙ ΑΠΑΓΓΕΛΙΑ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

10. Οἱ ἀριθμοὶ σχηματίζονται, ἂν ἑνώσωμεν τὴν μονάδα μὲ ἄλλην μίαν μονάδα καὶ τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος θὰ σχηματισθῇ, ἑνώσωμεν πάλιν μὲ μίαν μονάδα καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς. Ἡ τοιαύτη σειρὰ τῶν ἀριθμῶν λέγεται ***φυσικὴ σειρὰ*** αὐτῶν. Δυνάμεθα κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον νὰ ἐξακολουθήσωμεν ὅσον θέλομεν. Ἀπὸ αὐτὸ συμπεραίνομεν ὅτι οἱ ἀριθμοὶ εἶνε ***ἄπειροι*** (ἀμέτρητοι).

11. Ὡς γνωστόν, αἱ μονάδες τῶν διαφόρων τάξεων τῶν ἀριθμῶν εἶνε κατὰ σειρὰν αἱ ἑξῆς : ἡ μονάς, δεκάς, ἑκατοντάς, μονὰς χιλιάδων, δεκὰς χιλιάδων, ἑκατοντὰς χιλιάδων, μονὰς ἑκατομμυρίων κ.τ.λ.

Εἰς τὰς μονάδας αὐτὰς παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς :

12. ***Παρατήρησις α΄.*** Δέκα μονάδες μιᾶς τάξεως ἀποτελοῦν μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως.

Διὰ τοῦτο καὶ ὁ τρόπος αὐτὸς τοῦ σχηματισμοῦ τῶν ἀριθμῶν λέγεται ***δεκαδικὸν σύστημα*** ἀριθμήσεως καὶ ὁ ἀριθμὸς δέκα λέγεται ***βάσις*** τοῦ συστήματος.

13. Ἑκάστη λοιπὸν τάξις περιέχει τὸ πολὺ ἐννέα μονάδας. Τοῦτο μᾶς διευκολύνει εἰς τὴν γραφὴν τῶν ἀριθμῶν, διότι τοὺς ἐννέα πρώτους ἀριθμούς, καθὼς καὶ τὰς μονάδας ἑκάστης τάξεως τῶν ἀριθμῶν, ἀφοῦ αὐταὶ δὲν εἶνε περισσότεραι τῶν ἐννέα, δυνάμεθα νὰ παριστάνωμεν μὲ τὰ γνωστὰ ἐννέα σύμβολα, τὰ ὁποῖα ὀνομάζομεν ***ψηφία*** ἢ ***ἀραβικοὺς χαρακτῆρας,*** ἐπειδὴ τὰ παρελάβομεν ἀπὸ τοὺς Ἄραβας, τὰ 1,2,3,4,5,6,7,8,9.

Τοιουτοτρόπως π. χ. ὁ ἀριθμὸς πεντακόσια ἑξήκοντα ἑπτά, ἐπειδὴ ἀποτελεῖται ἀπὸ πέντε ἑκατοντ., ἓξ δεκάδ. καὶ ἑπτὰ μονάδας, δύναται νὰ γραφῇ 5 ἑκατοντάδες, 6 δεκάδες, 7 μονάδες.

Παραλείπομεν ὅμως καὶ τὰς λέξεις ἑκατοντάδες, δεκάδες καὶ μονάδες, διότι ἔχομεν δεχθῆ τὴν ἑξῆς συνθήκην:

Πᾶν ψηφίον, τὸ ὁποῖον γράφομεν δεξιὰ ἄλλου, παριστάνει μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως καὶ τἀνάπαλιν.

Δι' αὐτὸ γράφομεν τὸν ἀριθμὸν αὐτὸν ὡς ἑξῆς: 567.

Ἂν λείπουν μονάδες μερικῶν τάξεων, τὰς ἀντικαθιστῶμεν μὲ τὸ σύμβολον 0 (μηδέν). Τὰ λοιπὰ ψηφία κατ' ἀντίθεσιν τοῦ μηδενὸς λέγονται ***σημαντικά.***

14. Οἱ ἀριθμοὶ λέγονται ***μονοψήφιοι, διψήφιοι, τριψήφιοι*** καὶ ἐν γένει ***πολυψήφιοι,*** ἂν ἔχουν 1, 2, 3, κλπ. ψηφία.

15. Παρατήρησις β΄. Ἀπὸ τὰς μονάδας ἡ ἁπλῆ μονάς, ἡ χιλιάς, τὸ ἑκατομμύριον, τὸ δισεκατομμύριον, τὸ τρισεκατομμύριον κλπ. καλοῦνται ***ἀρχικαὶ*** ἢ ***πρωτεύουσαι*** μονάδες, ἑκάστη δὲ περιέχει χιλίας μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας της.

16. Παρατήρησις γ΄. Αἱ μονάδες ἑκάστου ἀριθμοῦ ἀποτελοῦνται ἀπὸ ὁμάδας, ἐκ τῶν ὁποίων ἑκάστη περιέχει μονάδας, δεκάδας καὶ ἑκατοντάδας. Αἱ ὁμάδες αὐταὶ καλοῦνται ***τμήματα.*** Τοιουτοτρόπως ἔχομεν τμῆμα ἁπλῶν μονάδων, τμῆμα χιλιάδων, τμῆμα ἑκατομμυρίων, τμῆμα δισεκατομμυρίων κλπ.

17. Ταῦτα μᾶς διευκολύνουν εἰς τὴν ταχυτέραν ἀπαγγελίαν τῶν ἀριθμῶν, διότι χωρίζοντες τὸν ἀριθμὸν εἰς τμήματα τριψήφια ἀρχίζοντες ἀπὸ τὰς ἁπλᾶς μονάδας, ἀπαγγέλομεν ἐξ ἀριστερῶν διαδοχικῶς ἕκαστον τμῆμα χωριστά, ὡς ἐὰν ἦτο εἷς ἀριθμός, θέτοντες τὸ ὄνομα τῶν μονάδων, τὰς ὁποίας παριστάνει τὸ τελευταῖον πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφίον του· π. χ. ὁ ἀριθμὸς 4749623 ἀπαγγέλλεται τέσσαρα ἑκατομμύρια ἑπτακόσιαι σαράντα ἐννέα χιλιάδες ἑξακόσια εἴκοσι τρία.

ΑΣΚΗΣΙΣ. 1) Τί γίνεται ὁ ἀριθμὸς 625, ὅταν γραφοῦν δεξιά του 1, 2, 3 μηδενικά καὶ τί γίνεται ὅταν γραφοῦν ἀριστερά του ὁσαδήποτε μηδενικά;

ΙΣΟΤΗΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΟΤΗΣ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

18. Δύο ἀριθμοὶ λέγονται ἴ σ ο ι, ὅταν ὅσας μονάδας ἔχει ὁ εἷς τόσας ἔχει καὶ ὁ ἄλλος.

Διὰ νὰ δηλώσωμεν ὅτι δύο ἀριθμοὶ εἶνε ἴσοι, γράφομεν μεταξὺ αὐτῶν τὸ σημεῖον =, τὸ ὁποῖον λέγεται ***ἴσον***· π. χ. 5 = 5 καὶ ἀναγινώσκεται πέντε ἴσον πέντε.

Ἡ ἔκφρασις αὕτη τῶν δύο ἴσων ἀριθμῶν λέγεται ἰ σ ό τ η ς.

Ὁ πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ ἴσου ἀριθμὸς λέγεται ***πρῶτον μέλος*** τῆς ἰσότητος, ὁ δὲ πρὸς τὰ δεξιὰ ***δεύτερον μέλος*** τῆς ἰσότητος.

19. Δύο ἀριθμοὶ λέγονται ἄ ν ι σ ο ι, ὅταν ὁ εἷς ἔχει ὅλας τὰς μονάδας τοῦ ἄλλου καὶ ἄλλας ἀκόμη.

Ἐκεῖνος, ὁ ὁποῖος ἔχει τὰς περισσοτέρας μονάδας, λέγεται ***μεγαλύτερος***, ὁ δὲ ἄλλος ***μικρότερος***.

Διὰ νὰ δηλώσωμεν, ὅτι δύο ἀριθμοὶ εἶνε ἄνισοι, γράφομεν μεταξὺ αὐτῶν τὸ σημεῖον $<$ ἢ $>$, γράφομεν ὅμως τὸν μικρότερον εἰς τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας· π.χ. $6 < 7$, $9 > 3$ καὶ ἀπαγγέλλομεν ἓξ μικρότερον τοῦ ἑπτά, ἐννέα μεγαλύτερον τοῦ τρία.

Ἡ ἔκφρασις αὕτη τῶν δύο ἀνίσων ἀριθμῶν λέγεται ἀ ν ι σ ό τ η ς.

Τοὺς ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι εὑρίσκονται ἀπὸ τὰ δύο μέρη τοῦ σημείου τῆς ἀνισότητος, ὀνομάζομεν ὁμοίως ***μέλη*** τῆς ἀνισότητος.

ΙΔΙΟΤΗΣ ΤΗΣ ΙΣΟΤΗΤΟΣ

20. Δύο ἀριθμοὶ ἴσοι πρὸς τρίτον εἶνε καὶ μεταξύ των ἴσοι· π. χ. $5 + 3 = 8$ καὶ $6 + 2 = 8$, ἄρα $5 + 3 = 6 + 2$.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΚΑΙ ΛΑΤΙΝΙΚΗ ΓΡΑΦΗ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

1	α′	I	9	θ′	IX	50	ν′	L
2	β′	II	10	ι′	X	60	ξ′	LX
3	γ′	III	11	ια′	XI	70	ο′	LXX
4	δ′	IV	12	ιβ′	XII	80	π′	LXXX
5	ε′	V	20	κ′	XX	90	ϟ′	XC
6	ς′	VI	21	κα′	XXI	100	ρ′	C
7	ζ′	VII	30	λ′	XXX	101	ρα′	CI
8	η′	VIII	40	μ′	XXXX ἢ XL	110	ρι′	CX

125	ρκε'	CXXV	700	ψ'	DCC	4999	,δϡϟθ'	$\overline{\text{IV}}$CMXCIX
200	σ'	CC	800	ω'	DCCC	5000	,ε	IↃↃ
300	τ'	CCC	900	ϡ	DCCCC	10000	,ι	CCIↃↃ
400	υ'	CCCC	1000	,α	M	50000	,ν	IↃↃↃ
500	φ'	D ἢ IↃ	2000	,β	MM ἢ $\overline{\text{II}}$	100000	,ρ	CCCIↃↃↃ
600	χ'	DC	4000	,δ	$\overline{\text{IV}}$	500000	,φ	IↃↃↃↃ

21. Οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες διὰ τοὺς ἀριθμοὺς ἀπὸ 1 ἕως 999 μετεχειρίζοντο τὰ γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου, πλὴν τῶν 6, 90 καὶ 900, τοὺς ὁποίους παρίστανον μὲ ἰδιαίτερα σημεῖα, τὰ ὁποῖα ἐχωρίσθησαν ἀπὸ τὸ ἀρχαῖον ἀλφάβητον. Καὶ διὰ μὲν τὸν 6 μετεχειρίζοντο τὸ F, τὸ ὁποῖον ὀλίγον κατ' ὀλίγον παρεμορφώθη εἰς τὸ σημεῖον ϛ (στ,στίγμα), διὰ τὸν 90 τὸ Φοινικὸν ϟ (κόππα) καὶ διὰ τὸν 900 τὸ ἐπίσης Φοινικικὸν ϡ(σαμπὶ). Ἔθετον δὲ δεξιὰ κα ἰὀλίγον ἄνωθεν μίαν ὀξεῖαν Διὰ τὰς χιλιάδας μετεχειρίζοντο τὰ ἴδια γράμματα θέτοντες ἀριστερὰ καὶ ὑποκάτω ἀπὸ αὐτοὺς μίαν κεραίαν.

Τοὺς ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι ἀπετελοῦντο ἀπὸ μονάδας διαφόρων τάξεων, παρίστανον γράφοντες πρῶτον τὸ γράμμα τῆς ἀνωτάτης τάξεως καὶ δεξιὰ αὐτοῦ διαδοχικῶς τὰ γράμματα τῶν κατωτέρων τάξεων, ἔθετον δὲ ὀξεῖαν μόνον εἰς τὸ τελευταῖον γράμμα. Οὕτως ὁ ἀριθμὸς 68 γράφεται ξη', ὁ 573 φογ', ὁ 7654 ,ζχνδ'.

Τὰ σημεῖα μὲ τὰ ὁποῖα γράφονται οἱ Λατινικοὶ ἀριθμοὶ εἶνε τὰ ἑξῆς: I = 1, V = 5, X = 10, L = 50, C = 100, D = 500 καὶ M = 1000.

Ὅταν εἷς ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς αὐτοὺς γράφεται κατόπιν ἑνὸς ἴσου ἢ μεγαλυτέρου του, σημαίνει πρόσθεσιν· π.χ. VI = 5 + 1 = 6, LXXXV = 50 + 10 + 10 + 10 + 5 = 85, MDCCCXXI = 1000 + 500 + 100 + 100 + 100 + 10 + 10 + 1 = 1821. Ὅταν δὲ γράφεται ἔμπροσθεν μεγαλυτέρου του σημαίνει ἀφαίρεσιν, π. χ. IV = 5 — 1 = 4, XIX = 10 + 10 — 1 = 19, XCVI = 100 — 10 + 5 + 1 = 96, MCMVI = 1000 + 1000 — 100 + 5 + 1 = 1906.

Ἓν I μὲ C ἐστραμμένον πρὸς τὰ ἀριστερὰ (δηλαδὴ IↃ) σημαίνει 500, πᾶν δὲ ἄλλο C ἐστραμμένον γραφόμενον εἰς τὰ δεξιὰ ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὸ 0· π.χ. IↃↃ = 5000, IↃↃↃ = 50000. Ὁ ἀριθμὸς διπλασιάζεται, ὅταν εἰς τὰ ἀριστερά του προστεθοῦν τόσα C, ὅσα εἶνε τὰ ἐκ δεξιῶν τοῦ I· π.χ. CIↃ = 1000, CCIↃↃ = 10000, CCCIↃↃↃ = 100000.

Ὅταν ἄνωθεν ἑνὸς ἀριθμοῦ ὑπάρχει μία μὲν γραμμὴ παριστάνει οὗτος χιλιάδας, δύο γραμμαὶ ἑκατομμύρια, τρεῖς δὲ δισεκατομμύρια: π. χ. $\overline{\mathrm{III}}=3000$, $\overline{\mathrm{VI}}=6000$ $\overline{\mathrm{XX}}=20000$.

Τοὺς Λατινικοὺς καὶ Ἑλληνικοὺς ἀριθμοὺς θέτομεν ἐκεῖ ὅπου μεταχειριζόμεθα τὰ τακτικὰ ἀριθμητικὰ (πρῶτος, δεύτερος, τρίτος κλπ.)· π. χ. ὅταν δηλώνωμεν τὴν τάξιν τῶν κεφαλαίων εἰς τὰ διάφορα βιβλία κλπ. Τοὺς Λατινικοὺς ἀριθμοὺς μεταχειριζόμεθα καὶ εἰς τὰ ὡρολόγια πρὸς δήλωσιν τῶν ὡρῶν.

ΑΣΚΗΣΙΣ. 2) Νὰ γραφοῦν οἱ ἑξῆς ἀριθμοὶ μὲ Ἑλληνικοὺς καὶ Λατινικοὺς χαρακτῆρας : 78, 673, 5849, 72500, 473085.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

22. Ἓν παιδίον ἔλαβεν ἀπὸ τὸν πατέρα του 6 δρ. καὶ ἀπὸ τὴν μητέρα του 3 δρ.· πόσας δραχμὰς ἔλαβεν ἐν ὅλῳ;

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο πρέπει νὰ ἑνώσωμεν τὰς 6 μονάδας καὶ τὰς 3 μονάδας, ὁπότε θὰ σχηματισθῇ εἷς ἄλλος ἀριθμός, ὁ 9. Ἡ πρᾶξις αὐτὴ λέγεται ***πρόσθεσις***.

Ὥστε: ***Πρόσθεσις λέγεται ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας ἑνώνωμεν τὰς μονάδας πολλῶν ἀριθμῶν καὶ εὑρίσκομεν ἕνα ἄλλον ἀριθμόν.***

Οἱ ἀριθμοί, τοὺς ὁποίους προσθέτομεν, λέγονται ***προσθετέοι***, τὸ δὲ ἐξαγόμενον τῆς προσθέσεως λέγεται ***ἄθροισμα***. Σημεῖον τῆς προσθέσεως εἶνε τὸ $+$, τὸ ὁποῖον ἀπαγγέλλεται ***σὺν*** ἢ ***καί***, π. χ. τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν 6 καὶ 3 σημειώνεται $6+3$ καὶ ἀπαγγέλλεται ἓξ σὺν τρία ἢ ἓξ καὶ τρία.

Ἂν οἱ προσθετέοι εἶνε συγκεκριμένοι, πρέπει νὰ εἶνε ὁμοειδεῖς διὰ νὰ προστεθοῦν, διότι ἑτεροειδεῖς δὲν προστίθενται· π. χ. 6 μαθηταὶ καὶ 3 θρανία δὲν προστίθενται.

Ἐπειδὴ δὲ οἱ συγκεκριμένοι προσθετέοι εἶνε ὁμοειδεῖς, διὰ τοῦτο καὶ τὸ ἄθροισμά των εἶνε ὁμοειδὲς πρὸς αὐτούς.

23. ***Διὰ νὰ προσθέσωμεν πολλοὺς ἀριθμούς, προσθέτομεν τοὺς δύο πρώτους, εἰς τὸ ἄθροισμά των προσθέτομεν τὸν γ΄, εἰς τὸ νέον ἄθροισμα τὸν δ΄ καὶ οὕτω καθ᾿ ἑξῆς·***

π. χ. $2+3+4+6=5+4+6=9+6=15$

ΠΑΡΕΝΘΕΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΓΚΥΛΑΙ

24. Ὅταν θεωρῶμεν τὸ ἄθροισμα 2+3 ὡς νὰ εἶχεν εὑρεθῆ, χωρὶς ὅμως νὰ ἔχῃ ἐκτελεσθῆ ἡ πρόσθεσις, τὸ κλείομεν εἰς μίαν παρένθεσιν ὡς ἑξῆς (2 + 3). Ἂν π.χ. θέλωμεν νὰ δηλώσωμεν, ὅτι εἰς τὸ ἄθροισμα αὐτὸ πρέπει νὰ προστεθῇ ὁ 4, γράφομεν (2+3)+4. Ἂν τώρα εἰς τὸ (2 + 3) +4 θέλωμεν νὰ δηλώσωμεν ὅτι πρέπει νὰ προστεθῇ ὁ 5, τὸ κλείομεν μέσα εἰς μίαν ἀγκύλην, ἐπειδὴ ἔχομεν πλέον μεταχειρισθῆ τὴν παρένθεσιν, ὡς ἑξῆς : [(2+ 3) + 4] + 5.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΠΡΟΣΘΕΣΕΩΣ

25. Ἂν ἀλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν προσθετέων εἰς ἓν ἄθροισμα, τοῦτο δὲν ἀλλάσσει.

Ἡ ἰδιότης αὐτὴ λέγεται ***νόμος τῆς ἀντιμεταθέσεως.***

Δηλ. 2+3+4+ 5 + 6 = 5+2+ 6 +4+3 . Πράγματι 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 20 καὶ 5 + 2 + 6 + 4 + 3 = 20.

26. Εἰς ἓν ἄθροισμα δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν μερικοὺς προσθετέους μὲ τὸ ἄθροισμά των καὶ ἀντιστρόφως νὰ χωρίσωμεν ἕνα προσθετέον εἰς ἄλλους, τῶν ὁποίων νὰ εἶνε οὗτος ἄθροισμα.

Δηλ. 2′ + 3 + 4′ + 5 + 6′ = 3+ 12 + 5.

Πράγματι, 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 20 καὶ 3 +12+ 5 = 20.

27. Διὰ νὰ προσθέσωμεν ἕνα ἀριθμὸν εἰς ἓν ἄθροισμα ἢ ἓν ἄθροισμα εἰς ἕνα ἀριθμόν, δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν τὸν ἀριθμὸν εἰς ἕνα προσθετέον τοῦ ἀθροίσματος. Δηλ. (2+3+4) +5 = 5+ (2+3+4) = 2+ (5+3) + 4 = 2+8+4. Πράγματι (2+3+4)+5 = 9+5 = 14 καὶ 2+8+4 = 14.

28. Διὰ νὰ προσθέσωμεν ἀθροίσματα δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν ἓν ἄθροισμα ἀπὸ ὅλους τοὺς προσθετέους τῶν ἀθροισμάτων.

Δηλ. (2+3+4+5) + (6+7+8) = 2+3+4+5+6+7+8.

Πἰράγματι (2 + 3+ 4 + 5) + (6 + 7 + 8) = 14 + 21=35. καὶ 2+3+4+5+6+7+8= 35.

Παρατήρησις. Ἐπειδὴ τὸ μηδὲν δὲν παριστάνει ἀριθμόν, ἂν προστεθῇ εἰς ἕνα ἀριθμόν, δὲν τὸν μεταβάλει : π.χ. 4+0=4

ΠΑΡΑΣΤΑΣΙΣ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΔΙΑ ΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

29. Εἷς γεωργὸς εἰσέπραξε 2000 δρ. ἀπὸ ἔλαιον, 3000 δρ.

ἀπὸ οἶνον, 4000 δρ. ἀπὸ σταφίδα καὶ 2000 δρ. ἀπὸ καπνόν· πόσον εἰσέπραξεν ἐν ὅλῳ;

Λύσις. Εἰσέπραξε 2000 + 3000 + 4000 + 2000 = 11000 δρ.

Ἂν εἰσέπραττεν 7000δρ. ἀπὸ ἔλαιον, 6000δρ. ἀπὸ οἶνον, 9000 δρ. ἀπὸ σταφίδα, καὶ 5000 ἀπὸ καπνόν, θὰ εἰσέπραττεν ἐν ὅλῳ 7000 + 6000 + 9000 + 5000=27000 δρ.

Ὥστε διὰ νὰ ἴδωμεν πόσον εἰσέπραξεν ἐν ὅλῳ, θὰ προσθέσωμεν τοὺς ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι παριστάνουν τὰ διάφορα ποσά, ὁποιοιδήποτε καὶ ἂν εἶνε οὗτοι.

Ὅταν θέλωμεν νὰ παραστήσωμεν ὅτι μὲ αὐτὸν τὸν τρόπον θὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα ὁποιοιδήποτε καὶ ἂν εἶνε οἱ δοθέντες ἀριθμοί, μεταχειριζόμεθα ἀντὶ τῶν ἀριθμῶν τὰ γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου. Δυνάμεθα δὲ τότε νὰ διατυπώσωμεν τὸ προηγούμενον πρόβλημα ὡς ἑξῆς:

Εἷς γεωργὸς εἰσέπραξεν α δρ. ἀπὸ ἔλαιον, β δρ. ἀπὸ οἶνον, γ δρ. ἀπὸ σταφίδα καὶ α δρ. ἀπὸ καπνόν· πόσον εἰσέπραξεν ἐν ὅλῳ; Κατὰ τὰ προηγούμενα εἰσέπραξεν α + β + γ + α.

Τὸ α ἐδῶ παριστάνει ἕνα ἀριθμὸν οἱονδήποτε, τὸ β ἐπίσης, πλὴν ἐκείνου, τὸν ὁποῖον παριστάνει τὸ α, τέλος τὸ γ παριστάνει ἕνα ἀριθμὸν οἱονδήποτε, ἐκτὸς ἐκείνων τοὺς ὁποίους παριστάνουν τὸ α καὶ τὸ β.

Ἕκαστον γράμμα κατὰ τὴν λύσιν ἑνὸς ζητήματος παριστάνει πάντοτε τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος λέγεται ***τιμὴ*** τοῦ γράμματος. Οὕτω τὸ α, τὸ ὁποῖον περιλαμβάνεται εἰς τὸ ἄνω ἄθροισμα δύο φοράς, παριστάνει τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἔχει δηλ. τὴν αὐτὴν τιμήν. Ἂν τὸ α ἔχῃ τὴν τιμὴν 2000, τὸ β 3000 καὶ τὸ γ 4000, τὸ ἄνω ἄθροισμα α + β + γ + α = 2000 + 3000 + 4000 + 2000 = 11000.

ΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΠΡΟΣΘΕΣΕΩΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΑΙ ΘΕΩΡΗΤΙΚΩΣ

(Θὰ διδαχθοῦν εἰς τὴν γ'. τάξιν τοῦ γυμνασίου)

30. ***Ὁ νόμος τῆς ἀντιμεταθέσεως*** (ἐδ. 25. σελ. 11).

Δηλ. 2 + 3 + 4 = 4 + 2 + 3

Διότι, ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς εἶνε σύνολον μονάδων (ἐδ. 5, σελ 6), τὸ 2 + 3 + 4 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1

Εἶνε ὅμως φανερόν, ὅτι ὅπως καὶ ἂν προσθέσωμεν τὰς μονάδας

αὐτὴ: θὰ εὕρωμεν πάντοτε τὸν αὐτὸν ἀριθμόν· ἑπομένως;
$2+3+4=1+1+1+1 \quad + \quad 1+1 \quad + \quad 1+1+1$
$=4+2+3$ Ὅθεν (ἐδ. 20) $\quad 2+3+4=4+2+3$

Γενικῶς $\quad α+β+γ=γ+α+β$.

***31* Ἀντικατάστασις προσθετέων διὰ τοῦ ἀθροίσματός των** (ἐδ. 26 σελ. 11).

α΄) Ἂν οἱ προσθετέοι εἶνε εἰς τὴν ἀρχὴν προκύπτει ἡ πρότασις ἀπὸ τὸν τρόπον, μὲ τὸν ὁποῖον εὑρίσκομεν τὸ ἄθροισμα πολλῶν ἀριθμῶν. (ἐδ. 23, σελ. 10).

Π.χ. $\quad 2+3+4+5=5+4+5=9+4$.

β΄) Ἂν οἱ προσθετέοι δὲν εἶνε εἰς τὴν ἀρχήν, φέρωμεν τούτους εἰς τὴν ἀρχὴν (ἐδ. 30).

Γενικῶς $\quad α+β+γ+δ=α+(β+δ)+γ$,

***32.* Ἀντικατάστασις προσθετέου** (ἐδ. 26).

Εἴδομεν δηλ. ὅτι $\quad 9+5=2+3+4+5$.

***33.* Πρόσθεσις ἀριθμοῦ εἰς ἄθροισμα** (ἐδ. 27, σελ. 11).
Δηλ. $(2+3+4)+5=2+(3+5)+4=2+8+4$.

Διότι τὸ ἄθροισμα $(2+3+4)+5=9+5$, ἂν δὲ χωρίσωμεν τὸν 9 εἰς τοὺς προσθετέους του (ἐδ.32) γίνεται $2+3+4+5$, ἂν τέλος ἀντικαταστήσωμεν τοὺς 3 καὶ 5 διὰ τοῦ 8 (ἐδ. 31) γίνεται $2+8+4$

Ἑπομένως $\quad (2+3+4)+5=2+8+4$.

Γενικῶς $(α+β+γ)+δ=α+(β+δ)+γ$

***34.* Διὰ νὰ προσθέσωμεν ἓν ἄθροισμα εἰς ἕνα ἀριθμόν, ἀλλάσσωμεν τὴν θέσιν τῶν δύο αὐτῶν προσθετέων καὶ καταλήγομεν εἰς τὴν προηγουμένην ἰδιότητα.**

Π.χ. $5+(2+3+4)=(2+3+4)+5=2+8+4$

***35.* Πρόσθεσις ἀθροισμάτων** (ἐδ. 28).

Δηλ. $(2+3+4)+(5+6)=2+3+4+5+6$

Διότι τὸ ἄθροισμα $(2+3+4)+(5+6)=9+11$, ἂν δὲ χωρίσωμεν τοὺς 9 καὶ 11 εἰς τοὺς προσθετέους των γίνεται $2+3+4+5+6$.

Ἑπομένως $(2+3+4)+(5+6)=2+3+4+5+6$.

Γενικῶς $\quad (α+β+γ)+(δ+ε)=α+β+γ+δ+ε$.

ΕΚΤΕΛΕΣΙΣ ΤΗΣ ΠΡΟΣΘΕΣΕΩΣ

36. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ζητεῖται τὸ ἄθροισμα $346+527$.

Τὸ ἄθροισμα τοῦτο εἶνε ἴσον μὲ τὸ ἑξῆς:
(3 ἑκ. + 4 δεκ. + 6 μον.) + (5 ἑκ. + 2 δεκ. + 7 μον.)
Ἂν σχηματίσωμεν ἓν ἄθροισμα (ἐδ. 28) γίνεται
3 ἑκ. + 4 δεκ. + 6 μον. + 5 ἑκ. + 2 δεκ. + 7 μ.

Ἑνώνομεν τοὺς προσθετέους κατὰ τρόπον ὥστε ἡ πρόσθεσις νὰ γίνῃ ταχύτερον (ἐδ. 25). Πρὸς τοῦτο ἑνώνομεν πρῶτον τὰς μονάδας, κατόπιν τὰς δεκάδας κλπ., οὕτω δὲ θὰ ἔχωμεν 6 μον. + 7 μον. = 13 μον., δηλ. **3** μ. καὶ **1δ.**, τὴν ὁποίαν προσθέτομεν εἰς τὰς ἄλλας δεκάδας καὶ θὰ ἔχωμεν
1 δ. + 2 δ. + 4 δ. = **7** δ. Κατόπιν 5 ἑκ. + 3 ἑκ. = **8** ἑκ.

Τὸ ἄθροισμα λοιπὸν εἶνε **8** ἑκ. + **7** δεκ. + **3** μον. δηλ. ὁ ἀριθμὸς 873. Ὡς γνωστὸν χάριν συντομίας ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς:

$$\begin{array}{r} 346 \\ 527 \\ \hline 873 \end{array}$$

ΔΟΚΙΜΗ ΤΗΣ ΠΡΟΣΘΕΣΕΩΣ

37. Δοκιμὴ μιᾶς πράξεως λέγεται μία ἄλλη πρᾶξις, τὴν ὁποίαν κάμνομεν, διὰ νὰ βεβαιωθῶμεν ἂν ἡ πρώτη ἔγινε χωρὶς λάθος.

Τὴν δοκιμὴν τῆς προσθέσεως κάμνομεν ὡς ἑξῆς.

Προσθέτομεν τὰ ψηφία ὅλων τῶν προσθετέων, φροντίζοντες μόλις εὑρίσκομεν ἄθροισμα διψήφιον ἀριθμὸν νὰ προσθέτωμεν καὶ τούτου τὰ ψηφία, μέχρις ὅτου καταλήξωμεν εἰς ἀριθμὸν μονοψήφιον Προσθέτομεν ὁμοίως καὶ τὰ ψηφία τοῦ ἀθροίσματος, ἂν δὲ δὲν εὕρωμεν τὸν αὐτὸν μονοψήφιον ἀριθμόν, ἡ πρᾶξις δὲν ἔγινεν ὀρθῶς.

Οὕτως εἰς τὸ παράδειγμα 346 + 527 = 873 θὰ ἔχωμεν
3 + 4 = 7, 7 + 6 = 13, 1 + 3 = 4, 4 + 5 = 9, 9 + 2 = 11
1 + 1 = 2, 2 + 7 = **9** καὶ 8 + 7 = 15, 1 + 5 = 6, 6 + 3 = **9**

ΣΥΝΤΟΜΙΑΙ ΤΗΣ ΠΡΟΣΘΕΣΕΩΣ

38. Μερικὰς προσθέσεις δυνάμεθα νὰ κάμνωμεν συντόμως καὶ ἀπὸ μνήμης, δηλ. νοερῶς, ἐφαρμόζοντες τὰς ἰδιότητας τῆς προσθέσεως.

Π.χ. 1) 635 + 8 = 630 + 5 + 8 = 630 + 13 = 643

2) $30 + 40 = 3$ δεκ. $+ 4$ δεκ. $= 7$ δεκ. $= 70$

3) $30 + 45 = 30 + 40 + 5 = 70 + 5 = 75$

4) $58 + 27 = 50 + 8 + 20 + 7 = 50 + 20 + 8 + 7 =$
$= 70 + 15 = 85$

5) $68 + 75 = 68 + 70 + 5 = 138 + 5 = 143$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΙΣΟΤΗΤΟΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΟΤΗΤΟΣ ΕΙΣ ΤΗΝ ΠΡΟΣΘΕΣΙΝ

39. ***Ἂν εἰς ἴσους ἀριθμοὺς προσθέσωμεν ἴσους, τὰ προκύπτοντα ἀθροίσματα θὰ εἶνε ἴσα.***

Π.χ. $8 = 5 + 3$ καὶ $8 + 2 = 5 + 3 + 2$ ἢ $10 = 10$

40. ***Ἂν εἰς ἀνίσους ἀριθμοὺς προσθέσωμεν ἴσους, τὰ ἀθροίσματα θὰ εἶναι ἄνισα ὁμοίως,*** δηλ. τὸ ἄθροισμα, τὸ ὁποῖον προκύπτει ἀπὸ τὸν μεγαλύτερον, θὰ εἶνε μεγαλύτερον.

Π.χ. $8 > 5$ καὶ $8 + 2 > 5 + 2$ ἢ $10 > 7$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

3) Νὰ ἐκτελεσθοῦν ἀπὸ μνήμης καὶ γραπτῶς αἱ ἑξῆς προσθέσεις:

α′) 84 + 6, β′) 75 + 9, γ′) 32 + 68, δ′) 52 + 36, ε′) 29 + 35, στ′) 700 + 800, ζ′) 840 + 60, η′) 750 + 90, θ′) 320 + 680, ι′) 520 + 360, ια′) 548 + 7, ιβ′) 320 + 65, ιγ′) 40 + 30 + 16, ιδ′) 53 + 40 + 7, ιε′) 38 + 42 + 25, ιστ′) 530 + 400 + 70, ιζ′) 380 + 420 + 256, ιη′) 230 + 46 + 24, ιθ′) 732 + 24 + 16, κ′) 26 + 34 + 50 + 19, κα′) 34 + 52 + 46 + 38 + 17.

4) Ἐὰν ἕν παιδίον ἐγεννήθη σήμερον, εἰς ποῖον ἔτος θὰ εἶναι 50 ἐτῶν;

5) Εἷς ἄνθρωπος ἐγεννήθη τὸ 1867, ἀπέθανε δὲ 50 ἐτῶν, εἰς ποῖον ἔτος ἀπέθανεν;

6) Ὁ Μέγας Ἀλέξανδρος ἀπέθανεν εἰς ἡλικίαν 33 ἐτῶν κατὰ τὸ ἔτος 323 π.Χ.· πότε ἐγεννήθη; (356). (Τὰ π. Χ. ἔτη μετρῶνται ἀπὸ τῆς γεννήσεως αὐτοῦ, π.χ. 1 ἔτος π.Χ., 2 ἔτη π.Χ. κλπ.)

7) Ἡ ἐν Σαλαμῖνι ναυμαχία ἔγινε τὸ 480 π. Χ· πόσα ἔτη ἔχουν παρέλθει ἕως σήμερον;

8) Τὸ βάρος ἑνὸς δοχείου, μέσα εἰς τὸ ὁποῖον περιέχεται ἓν ἐμπόρευμα, εἶνε 23 ὀκάδες, τὸ βάρος τοῦ ἐμπορεύματος εἶνε 298 ὀκάδες· πόσον εἶνε τὸ βάρος τοῦ ἐμπορεύματος καὶ τοῦ δοχείου μαζύ; (321)

(Τὸ βάρος τοῦ δοχείου λέγεται ***ἀπόβαρον****. Τὸ βάρος τοῦ ἐμπορεύματος λέγεται* ***καθαρὸν βάρος*** *καὶ τὸ βάρος τοῦ ἐμπορεύματος καὶ τοῦ δοχείου μαζὺ λέγεται* ***μικτὸν βάρος****).*

9) Ποῖος εἶνε ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ὑπερβαίνει τὸν 8536 κατὰ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν 3472, 8236, 7836 καὶ 493; (28576).

10) Ἐκ πέντε ἀριθμῶν ὁ α΄ εἶνε 5678, ὁ β΄ κατὰ 1468 μεγαλύτερος τοῦ α΄, ὁ γ΄ κατὰ 2034 μεγαλύτερος τοῦ β΄, ὁ δ΄ κατὰ 3583 μεγαλύτερος τοῦ γ΄ καὶ ὁ ε΄ κατὰ 4525 μεγαλύτερος τοῦ δ΄. πόσον εἶναι τὸ ἄθροισμά των; (52055).

11) Εἷς ἐπλήρωσε τὸ χρέος του εἰς τέσσαρας δόσεις. Ἡ πρώτη δόσις ἦτο 3200 δρ., ἑκάστη δὲ ἐκ τῶν ἑπομένων ἦτο κατὰ 1200 δρ. μεγαλυτέρα τῆς προηγουμένης· πόσον ἦτο τὸ χρέος του; (20000)

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

41. Ἔχομεν 7 μῆλα καὶ δίδομεν εἰς ἓν παιδίον τὰ 3· πόσα θὰ μείνουν;

Λύσις. Διὰ νὰ εὕρωμεν πόσα μῆλα θὰ μείνουν, θὰ ἐλαττώσωμεν τὰ 7 μῆλα κατὰ τόσα, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ 3, ὁπότε θὰ μείνουν 4 μῆλα.

Ἡ πρᾶξις αὐτὴ λέγεται **ἀφαίρεσις**.

Ὥστε: **Ἀφαίρεσις εἶνε ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας ἐλαττώνομεν ἕνα ἀριθμὸν κατὰ τόσας μονάδας, ὅσας ἔχει ἄλλος δοθεὶς ἀριθμός.**

Ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος θὰ ἐλαττωθῇ, λέγεται **μειωτέος**, ὁ δὲ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος φανερώνει κατὰ πόσας μονάδας θὰ ἐλαττώσωμεν τὸν μειωτέον, λέγεται **ἀφαιρετέος**. Τὸ δὲ ἐξαγόμενον λέγεται **ὑπόλοιπον** τῆς ἀφαιρέσεως ἢ **διαφορὰ τῶν δύο ἀριθμῶν**. Σημεῖον τῆς ἀφαιρέσεως εἶνε τὸ —, τὸ ὁποῖον ἀπαγγέλλεται **πλὴν** ἢ **μεῖον** ἢ **ἀπό**· π. χ. ἡ διαφορὰ τῶν ἀριθμῶν 7 καὶ 3 σημειώνεται $7 - 3$ καὶ ἀπαγγέλλεται ἑπτὰ πλὴν τρία ἢ ἑπτὰ μεῖον τρία ἢ τρία ἀπὸ ἑπτά, εἶνε δὲ ὁ ἀριθμὸς 4.

Γενικῶς τὸ ὑπόλοιπον τῆς ἀφαιρέσεως τοῦ β ἀπὸ τὸν α (ὅπου $\alpha > \beta$) παριστάνεται διὰ τοῦ $\alpha - \beta$.

42. Ἂν ἡ διαφορὰ 4 προστεθῇ εἰς τὸν ἀφαιρετέον 3, δίδει ἄθροισμα τὸν μειωτέον 7. Γενικῶς παριστάνομεν τὴν ἰδιότητα ταύτην ὡς ἑξῆς: Ἂν $\alpha - \beta = \gamma$, τότε καὶ $\alpha = \beta + \gamma$.

Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ ὁρίσωμεν τὴν ἀφαίρεσιν καὶ ὡς ἑξῆς:

Ἀφαίρεσις εἶνε ἡ πρᾶξις, εἰς τὴν ὁποίαν δίδονται δύο ἀριθμοὶ καὶ ζητεῖται τρίτος, ὁ ὁποῖος προστιθέμενος εἰς τὸν μικρότερον δίδει ἄθροισμα τὸν μεγαλύτερον.

Ἡ πρόσθεσις λοιπὸν καὶ ἡ ἀφαίρεσις εἶναι πράξεις ἀντίθετοι.

43. Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ εἰς τὴν ἀφαίρεσιν εἶνε συγκεκριμένοι, πρέπει νὰ εἶνε ὁμοειδεῖς, τότε δὲ καὶ ἡ διαφορὰ θὰ εἶνε ὁμοειδὴς πρὸς αὐτούς. Μεταξὺ ἑτεροειδῶν ἡ ἀφαίρεσις εἶνε ἀδύνατος, ὅπως καὶ ὅταν ὁ ἀφαιρετέος εἶνε μεγαλύτερος τοῦ μειωτέου.

ΙΔΙΟΤΗΣ ΤΗΣ ΑΦΑΙΡΕΣΕΩΣ

44. Ἔστω ἡ ἀφαίρεσις $7 - 4 = 3$. Ἂν αὐξήσωμεν μόνον τὸν μειωτέον κατὰ 2 μονάδας, χωρὶς νὰ μεταβάλωμεν τὸν ἀφαιρετέον, ἡ διαφορὰ θὰ αὐξήσῃ κατὰ δύο μονάδας.

Πράγματι $9 - 4 = 5$.

Ἐὰν αὐξήσωμεν μόνον τὸν ἀφαιρετέον 4 κατὰ 2 μονάδας, χωρὶς νὰ μεταβάλωμεν τὸν μειωτέον 7, ἡ διαφορὰ θὰ ἐλαττωθῇ κατὰ δύο μονάδας. Πράγματι $7 - 6 = 1$

Ἐὰν λοιπὸν αὐξήσωμεν κατὰ δύο μονάδας καὶ τὸν μειωτέον καὶ τὸν ἀφαιρετέον, ἡ διαφορὰ δὲν θὰ μεταβληθῇ. Πράγματι, $9 - 6 = 3$.

Ἑπομένως: ***Ἐὰν προσθέσωμεν εἰς τὸν μειωτέον καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἡ διαφορὰ δὲν μεταβάλλεται.***

ΜΕΤΑΒΛΗΤΑ ΠΟΣΑ

45. Ὅπως βλέπομεν, ὁ μειωτέος δύναται νὰ μεταβληθῇ, νὰ λάβῃ δηλ. διαφόρους τιμάς· π. χ. ἀπὸ 7 ἔγινεν 9.
Ὁμοίως δύναται νὰ μεταβληθῇ ὁ ἀφαιρετέος καὶ τὸ ὑπόλοιπον.

Τὰ τοιαῦτα ποσὰ λέγονται ***μεταβλητά.***

Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι ὁ μειωτέος καὶ τὸ ὑπόλοιπον συνδέονται μεταξύ των, ὥστε ὅταν μεταβάλωμεν τὸν μειωτέον χωρὶς νὰ μεταβάλωμεν καὶ τὸν ἀφαιρετέον, τὸ ὑπόλοιπον μεταβάλλεται. Ὁμοίως συνδέεται καὶ ὁ ἀφαιρετέος μὲ τὸ ὑπόλοιπον. Ἂν ὅμως αὐξήσωμεν ἢ ἐλαττώσωμεν ἐξ ἴσου τὸν μειωτέον καὶ τὸν ἀφαιρετέον, τὸ ὑπόλοιπον δὲν μεταβάλλεται. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν, ὅτι τὸ ὑπόλοιπον διατηρεῖ ***σταθερὰν τιμήν.***

ΑΛΛΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΑΦΑΙΡΕΣΕΩΣ

46. ***Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀριθμὸν ἀπὸ ἄθροισμα δυνά-***

μεθα νὰ ἀφαιρέσωμεν αὐτὸν ἀπὸ ἕνα προσθετέον.

Δηλ. $(15+3)-7=(15-7)+3$

Πράγματι $(15+3)-7=18-7=11$

καὶ $(15-7)+3=8+3=11$.

47. ***Διὰ νὰ προσθέσωμεν εἰς ἕνα ἀριθμὸν τὴν διαφορὰν δύο ἄλλων δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν τὸν μειωτέον τῆς διαφορᾶς εἰς τὸν ἀριθμὸν καὶ ἀπὸ τὸ ἄθροισμα νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν ἀφαιρετέον τῆς διαφορᾶς.***

Δηλ $3+(15-7)=(3+15)-7$. Πράγματι $3+(15-7)=3+8=11$ καὶ $(3+15)-7=18-7=11$.

48. ***Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἄθροισμα ἀπὸ ἀριθμὸν δυνάμεθα νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τὸν α΄ προσθετέον, ἀπὸ τὸ ὑπόλοιπον τὸν β΄, ἀπὸ τὸ νέον ὑπόλοιπον τὸν γ΄ καὶ οὕτω καθ᾽ ἑξῆς.***

Δηλ. $19-(4+3+2)=19-4-3-2$.

Πράγματι $19-(4+3+2)=19-9=10$

καὶ $19-4-3-2=15-3-2=12-2=10$.

49. ***Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ ἕνα ἀριθμὸν τὴν διαφορὰν δύο ἄλλων, προσθέτομεν εἰς τὸν ἀριθμὸν τὸν ἀφαιρετέον τῆς διαφορᾶς καὶ ἀπὸ τὸ ἄθροισμα ἀφαιροῦμεν τὸν μειωτέον τῆς διαφορᾶς.***

Δηλ. $15-(7-3)=(15+3)-7$.

Πράγματι $15-(7-3)=15-4=11$

καὶ $(15+3)-7=18-7=11$

Παρατήρησις. Τὸ 0 ἀφαιρούμενον ἀπὸ ἕνα ἀριθμὸν δὲν τὸν μεταβάλλει. (Ἴδε ἐδ. 28, Παρατ.)· π. χ. $4-0=4$.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΙΣΟΤΗΤΟΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΟΤΗΤΟΣ ΕΙΣ ΤΗΝ ΑΦΑΙΡΕΣΙΝ

50. ***Ἂν ἀπὸ ἴσους ἀριθμοὺς ἀφαιρέσωμεν ἴσους, τὰ ὑπόλοιπα θὰ εἶνε ἴσα.***

Π. χ. $8=5+3$ καὶ $8-2=(5+3)-2$ ἢ $6=6$.

51. ***Ἂν ἀπὸ ἀνίσους ἀριθμοὺς ἀφαιρέσωμεν ἴσους, τὰ ὑπόλοιπα θὰ εἶνε ὁμοίως ἄνισα.***

Π. χ. $8>5$ καὶ $8-2>5-2$ ἢ $6>3$

(Διὰ τὴν γ΄ τάξιν)

ΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΑΦΑΙΡΕΣΕΩΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΑΙ ΘΕΩΡΗΤΙΚΩΣ

52 ***Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ ἄθροισμα ἕνα προσθετέον του ἀρκεῖ νὰ ἐξαλείψωμεν αὐτόν.***

Δηλ. $(5+6+7)-6=5+7$. Διότι ἡ διαφορὰ $(5+6+7)-6$ εἶνε ἴση (ἐδ. 30) μὲ $(6+5+7)-6$. Τὸ νὰ ἀφαιρέσωμεν δὲ τὸν 6 ἀπὸ τὸ ἄθροισμα $(6+5+7)$ σημαίνει νὰ τὸ ἐλαττώσωμεν κατὰ 6 μονάδας, ἀλλὰ τότε μένει $5+7$.

Γενικῶς $(\alpha+\beta+\gamma)-\beta=\alpha+\gamma$.

53. ***Ἀφαίρεσις ἀριθμοῦ ἀπὸ ἄθροισμα*** (ἐδ. 46, σελ. 17).

Δηλ. $(5+6)-2=5+(6-2)=5+4$.

Διότι ἡ διαφορὰ $(5+6)-2=(6+5)-2$, ἡ διαφορὰ αὕτη πάλιν εἶνε ἴση (ἐδ. 32, σελ. 13) μὲ $(2+4+5)-2$, αὕτη δὲ πάλιν, ὅπως ἐδείξαμεν ἀνωτέρω, εἶνε ἴση μὲ $4+5$.

Ὥστε $(5+6)-2=4+5=(6-2)+5=5+(6-2)$

Γενικῶς $(\alpha+\beta)-\gamma=\alpha+(\beta-\gamma)$.

54. Εἴδομεν λοιπὸν ὅτι $5+(6-2)=(5+6)-2$.

Ὅθεν ὁ τρόπος προσθέσεως ἀριθμοῦ καὶ διαφορᾶς (ἐδ. 47).

Γενικῶς $\alpha+(\beta-\gamma)=(\alpha+\beta)-\gamma$.

55. ***Ἀφαίρεσις ἀθροίσματος ἀπὸ ἀριθμόν*** (ἐδ 48, σελ. 18).

Δηλ. $15-(2+3+4)=15-2-3-4$

Διότι $15-(2+3+4)=15-9=6$.

Ἑπομένως (ἐδ. 42. σελ. 16) $15=9+6$.

Χωρίζοντες τὸν 9 εἰς τοὺς προσθετέους του (ἐδ. 32, σελ. 13)· θὰ ἔχωμεν $15=2+3+4+6$.

Ἀφαιροῦντες τὸν 2 καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος (ἐδ. 50, σελ. 18) θὰ ἔχωμεν $15-2=3+4+6$ (ἐδ. 52).

Ἀφαιροῦντες ὁμοίως τὸν 3 θὰ ἔχωμεν $15-2-3=4+6$

Ὁμοίως τὸν 4 θὰ ἔχωμεν $15-2-3-4=6$.

Ἀλλὰ ἔχομεν εὕρει $15-(2+3+4)=6$.

Ἑπομένως (ἐδ 20) $15-(2+3+4)=15-2-3-4$

Γενικῶς $\alpha-(\beta+\gamma+\delta)=\alpha-\beta-\gamma-\delta$

56. Εἴδομεν λοιπὸν ὅτι:

$$15-2-3-4=15-(2+3+4).$$

Ἐπομένως: *Ἀντὶ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ ἕνα ἀριθμὸν διαδοχικῶς πολλοὺς ἄλλους, δυνάμεθα νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ αὐτὸν τὸ ἄθροισμά των.*

57. *Διὰ νὰ προσθέσωμεν διαφοράς, δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν χωριστὰ τοὺς μειωτέους καὶ χωριστὰ τοὺς ἀφαιρετέους καὶ ἀπὸ τὸ α' ἄθροισμα νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ β'.*

Δηλ. $(8-3)+(6-2)=(8+6)-(3+2)$

Διότι εἰς τὸν $(8-3)$ προστίθεται ἡ διαφορὰ $6-2$, ἂν προστεθῇ ὁ 6 καὶ ἀφαιρεθῇ ὁ 2 (ἐδ. 54, σ. 19), δηλ. $(8-3)+6-2$

Εἰς τὸν ἀριθμὸν δὲ 6 προστίθεται ἡ διαφορὰ $8-3$, ἂν προστεθῇ ὁ 8 καὶ ἀφαιρεθῇ ὁ 3, δηλ. $(8+6)-3-2$. Ἀντὶ δὲ νὰ ἀφαιρέσωμεν διαδοχικῶς τοὺς ἀριθμοὺς 3 καὶ 2 ἀφαιροῦμεν τὸ ἄθροισμά των (ἐδ. 56) καὶ θὰ ἔχωμεν $(8+6)-(3+2)$.

Ἐπομένως $(8-3)+(6-2)=(8+6)-(3+2)$.

Γενικῶς $(\alpha-\beta)+(\gamma-\delta)=(\alpha+\gamma)-(\beta+\delta)$.

58. ***Ἰδιότης τοῦ ἐδ. 44*** (σελ. 17).

Δηλ. $9-4=(9+2)-(4+2)$

Διότι, ἐπειδὴ $2-2=0$, θὰ ἔχωμεν

$$9-4=(9-4)+(2-2).$$

Αἱ διαφοραὶ δὲ αὗται προστίθενται, ἂν ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν μειωτέων $9+2$ ἀφαιρέσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀφαιρετέων $4+2$. (ἐδ. 57). Ὥστε $9-4=(9+2)-(4+2)$

Γενικῶς $\alpha-\beta=(\alpha+\gamma)-(\beta+\gamma)$

59. ***Ἀφαίρεσις ἀπὸ ἀριθμὸν τῆς διαφορᾶς δύο ἄλλων*** (ἐδ. 49, σελ. 18). Δηλ. $15-(8-6)=(15+6)-8$.

Γνωρίζομεν ὅτι προσθέτοντες καὶ εἰς τὸν μειωτέον 15 καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον $(8-6)$ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 6 ἡ διαφορὰ δὲν μεταβάλλεται. Οὕτω θὰ ἔχωμεν:

$$15-(8-6)=(15+6)-(8-6+6)=(15+6)-8$$

Ἐπομένως $15-(8-6)=(15+6)-8$

Γενικῶς $\alpha-(\beta-\gamma)=(\alpha+\gamma)-\beta$.

ΣΥΝΤΟΜΙΑΙ ΤΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 12) Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ ἑξῆς πράξεις ἀπὸ μνήμης καὶ γραπτῶς μὲ ἐφαρμογὴν τοῦ ἐδ. 46 (σελ. 17).

α') $(39+21)-9$, *β')* $(67+20)-27$, *γ')* $(584+300)-84$, *δ')* $(670+200)-270$, *ε')* $(705+6)-85$, *στ')* $(756+132)-356$.

13) Ὁμοίως αἱ ἑξῆς μὲ ἐφαρμογὴν τοῦ ἐδ. 48 (σελ. 18).
α') 68 — (20 + 30), β') 130 — (20 + 10 + 25),
γ') (72 + 37) — (2 + 7), δ') (68 + 45) — (28 + 5),
ε') (56 + 84) — (36 + 54), στ') (92 + 56) — (22 + 36),
ζ') 80 — 28 (28 = 20 + 8), η') 70 — 42, θ') 350 — 56.

14) Ὁμοίως αἱ ἑξῆς μὲ ἐφαρμογὴν τοῦ ἐδ. 47 (σελ. 18).
(9 = 10 — 1). α') 325 + 9. β') 457 + 8, γ') 525 + 7,
δ') 396 + 99, ε') 542 + 98.

15) Ὁμοίως αἱ ἑξῆς μὲ ἐφαρμογὴν τοῦ ἐδ. 49. (σελ. 18)
α') 358 — 9, β') 563 — 8, γ') 742 — 7, δ') 654 — 6,
ε') 325 — 99, στ') 742 — 98, ζ') 545 — 97, η') 2872 — 999.

ΕΚΤΕΛΕΣΙΣ ΤΗΣ ΑΦΑΙΡΕΣΕΩΣ

60. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ζητεῖται ἡ διαφορὰ 594 — 268· Ἡ διαφορὰ αὕτη εἶναι ἴση μὲ τὴν ἑξῆς:
(5ε + 9δ + 4μ.) — (2ε + 6δ + 8μ.). Θὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸ α' ἄθροισμα τὸν ἕνα κατόπιν τοῦ ἄλλου ὅλους τοὺς προσθετέους τοῦ β' ἀθροίσματος (ἐδ. 48, σελ. 18).

Ἐκτελοῦμεν τὰς ἀφαιρέσεις κατὰ τρόπον, ὥστε ἡ ὅλη ἐργασία νὰ γίνῃ ταχύτερον. Πρὸς τοῦτο ἀφαιροῦμεν τὰς 8 μ. ἀπὸ τὰς 4 μ. (ἐδ. 46, σελ. 17). Ἐπειδὴ ὅμως δὲν ἀφαιροῦνται, διὰ τοῦτο προσθέτομεν 10 μ. εἰς τὰς 4 τοῦ μειωτέου καὶ γίνονται 14 καὶ 1 δ. εἰς τὰς 6 δ. τοῦ ἀφαιρετέου (ἐδ.44, σελ.17) καὶ γίνονται 7 δεκ. Οὕτως ἔχομεν τὴν ἑξῆς ἀφαίρεσιν:

(5ε + 9 δ + 14 μ.) — (2ε + 7 δ + 8 μ).

Λοιπὸν 14μ. — 8μ. = **6**μ, 9δ — 7δ = **2**δ καὶ 5ε — 2ε = **3**ε.
Ὥστε τὸ ὑπόλοιπον εἶνε **3**ε + **2** δ + **6** μ, δηλ. ὁ ἀριθμὸς 326.
Ὡς γνωστὸν χάριν συντομίας ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς.

$$\begin{array}{r} 594 \\ 268 \\ \hline 326 \end{array}$$

ΔΟΚΙΜΗ ΤΗΣ ΑΦΑΙΡΕΣΕΩΣ

61. Ἐπειδὴ ὁ μειωτέος εἶνε ἄθροισμα τοῦ ἀφαιρετέου καὶ τῆς διαφορᾶς (ἐδ.42, σελ.16), διὰ τοῦτο, διὰ νὰ κάμωμεν τὴν δοκιμὴν τῆς ἀφαιρέσεως προσθέτομεν τὸ ὑπόλοιπον εἰς τὸν ἀφαιρετέον καὶ ἂν εὕρωμεν τὸν μειωτέον, ἡ ἀφαίρεσις ἔγινε χωρὶς λάθος. Κατ' ἄλλον τρόπον προσθέτομεν τὰ ψηφία τοῦ ἀφαιρετέου καὶ τοῦ ὑπολοίπου ἕως ὅτου εὕρωμεν ἀριθμὸν μονοψήφιον. Προσθέτομεν ὁμοίως καὶ τὰ ψηφία τοῦ μειωτέου καὶ ἂν δὲν εὕρωμεν τὸν αὐτὸν μονοψήφιον ἀριθμὸν ἡ πρᾶξις δὲν ἔγινεν ὀρθῶς.

Εἰς τὸ ἄνω παράδειγμα 594 — 268 = 326 ἢ 594 = 268 + 326, 2 + 6 + 8 = 16, 1 + 6 = 7, 7 + 3 = 10, 1 + 0 = 1, 1 + 2 + 6 = **9** καὶ 5 + 9 = 14, 1 + 4 = 5, 5 + 4 = **9**.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΙΣ

62. ***Ἀριθμητικὴ παράστασις λέγεται τὸ σύνολον ἀριθμῶν καὶ τῶν σημείων τῶν πράξεων, αἱ ὁποῖαι πρέπει νὰ ἐκτελεσθοῦν εἰς τοὺς ἀριθμούς.*** Π. χ. 5 + 4 — 2 + 9 — 7.

63. Ὅταν εἰς μίαν ἀριθμητικὴν παράστασιν ὑπάρχουν παρενθέσεις, ἐκτελοῦμεν πρῶτον τὰς πράξεις, αἱ ὁποῖαι εἶνε σημειωμέναι ἐντὸς τῶν παρενθέσεων, ὁπότε ἐξ ἑκάστης θὰ προκύψη εἷς ἀριθμὸς, διὰ τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ ἀντικαθιστῶμεν τὰ ἐν τῇ παρενθέσει καὶ κατόπιν ἐκτελοῦμεν τὰς λοιπὰς πράξεις, αἱ ὁποῖαι σημειώνονται εἰς τὴν παράστασιν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

16) Πρόσθεσις ἀριθμοῦ καὶ ἀθροίσματος καὶ δύο ἀθροισμάτων α΄) (5 + 6 + 9) + 11, β΄) (9 + 7 + 4) + (5 + 3 + 7), β΄) (2 + 3) + (4 + 5 + 6) + (7 + 8 + 9).

17) Πρόσθεσις ἀριθμοῦ εἰς διαφορὰν καὶ διαφορᾶς εἰς ἀριθμόν. α΄) (139 — 47) + 85, β΄) 642 + (543 — 96).

18) Πρόσθεσις διαφορῶν. α΄) (25 — 13) + (632 — 297), β΄) (32 — 8 — 9) + (83 — 9 — 5), γ΄) (36 — 2 — 3 — 4) + + (25 — 6 — 7 — 8).

19) Ἀφαίρεσις ἀριθμοῦ ἀπὸ ἄθροισμα καὶ τἀνάπαλιν. α΄) (10 + 15 + 19) — 8, β΄) (8 + 9 + 20 + 32) — 15, γ΄) 18 — (2 + 3 + 4), δ΄) 39 — (7 + 8 + 6 + 2).

20) Ἀφαίρεσις ἀριθμοῦ ἀπὸ διαφορὰν καὶ τἀνάπαλιν, α΄) (20 — 8) — 3, β΄) 30 — (8 — 3), γ΄) (132 — 26) — 72, δ΄) 28 — (52 — 47).

21) Ἀφαίρεσις διαφορᾶς ἀπὸ ἄθροισμα καὶ τἀνάπαλιν. α΄) (10 + 8) — (7 — 4), β΄) (35 — 6) — (2 + 3), γ΄) (20 + 15 + 18) — (23 — 7), 5γ δ΄ ε΄ ζ΄

δ΄) (32 + 26 + 17) — (27 — 5 — 6),

ε΄) (89 — 6) — (7 + 9 + 5 + 3),

στ΄) (135 — 6 — 7) — (8 + 9 + 2 + 4).

22) Ἀφαίρεσις διαφορᾶς ἀπὸ διαφοράν.

α΄) (15 — 4) — (8 — 2), β΄) (32 — 6) — (9 — 4),

γ΄) (59 — 8 — 3) — (9 — 6 — 2).

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

23) Ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν 5728, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ἀριθμὸν 14660 ; (8932)

24) Νὰ ἀφαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 357, ἀπὸ τὸν 2142 ὅσας φορὰς εἶνε δυνατόν. (6 φορὰς)

25) Πόσας φορὰς εἶνε δυνατὸν νὰ ἀφαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 621 ἀπὸ τὸν 2718 καὶ ποῖον εἶνε τὸ τελευταῖον ὑπόλοιπον ; (4φ.,234).

26) Εἷς ἄνθρωπος εἶνε σήμερον 65 ἐτῶν, πότε ἐγεννήθη ;

27) Ὁ Μέγας Ἀλέξανδρος ἐγεννήθη τὸ 356 π. Χ., ἀπέθανε δὲ εἰς ἡλικίαν 33 ἐτῶν· πότε ἀπέθανεν ; (323)

28) Ἡ Κωνσταντινούπολις ἐκυριεύθη ὑπὸ τῶν Τούρκων τὸ 1453· πόσα ἔτη ἔχουν παρέλθει ἕως τώρα ;

29) Τὸ μικτὸν βάρος ἑνὸς ἐμπορεύματος εἶνε 324 ὀκάδες, τὸ δὲ ἀπόβαρον 35 ὀκάδες· πόσον εἶνε τὸ καθαρὸν βάρος ; (παράβαλε πρόβλ. 5, σελ. 15). (289)

30) Τὸ μικτὸν βάρος ἑνὸς ἐμπορεύματος εἶνε 568 ὀκάδες, τὸ δὲ καθαρὸν 532· πόσον εἶνε τὸ ἀπόβαρον ; (36)

31) Ἐὰν εἷς εἶχε 153000 δρ. θὰ εἶχε τόσα ὅσα ἀδελφός του, ὁ ὁποῖος ἔχει 700000 δρ.· πόσα ἔχει οὗτος ; (547000)

32) Δύο ὁδοιπόροι ἀναχωρήσαντες ἀπὸ δύο πόλεις, αἱ ὁποῖαι ἀπέχουν 25000 μέτρα, διήνυσαν μετὰ 1 ὥραν, ὁ μὲν α΄ 4872 μέτρα, ὁ δὲ β΄ 3568 μ.· πόση εἶνε ἡ ἀπόστασις, ἡ ὁποία τοὺς χωρίζει, ἂν βαδίζουν κατὰ τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν, καὶ ποία, ἂν κατὰ τὴν ἀντίθετον ; (26304 ἢ 23696 καὶ 33440 ἢ 16560).

33) Ἐργάτης εἶχε θέσει εἰς μίαν Τράπεζαν 4630 δραχμάς, ἀπέσυρε δὲ διαδοχικῶς 580 δραχ. 630 δρ. καὶ 350 δραχ.· πόσαι δραχμαὶ μένουν ἀκόμη εἰς τὴν Τράπεζαν ;

Μιχάλης Ψυχογιός

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

64. Ἂν τὸ 1 πορτοκάλιον τιμᾶται 5 δρ., πόσον θὰ δώσω-

μεν διὰ νὰ ἀγοράσωμεν 3 πορτοκάλια;

Παριστάνομεν τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν διὰ τοῦ γράμματος x καὶ κατόπιν κατατάσσομεν τοὺς ἀριθμοὺς ὡς ἑξῆς:

Κατάταξις. Τὸ 1 πορτοκάλιον τιμᾶται 5 δρ.
τὰ 3 πορτοκάλια τιμῶνται x ; »

Λύσις. Διὰ τὸ 1 πορτοκάλιον θὰ δώσωμεν 5 δρ., διὰ τὸ ἄλλο ἄλλας 5 δρ. καὶ διὰ τὸ τρίτον ἄλλας 5 δρ., δηλ. διὰ τὰ 3 πορτοκάλια θὰ δώσωμεν $5+5+5=15$ δρ.

Ὥστε διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο ἐκάμαμεν μίαν πρόσθεσιν, εἰς τὴν ὁποίαν ὅλοι οἱ προσθετέοι εἶνε ἴσοι μὲ τὸν ἕνα ἀπὸ τοὺς δοθέντας ἀριθμούς, εἶνε δὲ τόσοι οἱ προσθετέοι, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἄλλος δοθεὶς ἀριθμός.

Τὴν πρόσθεσιν ταύτην ὀνομάζομεν ***πολλαπλασιασμόν***.

Ὥστε: ***Πολλαπλασιασμὸς εἶνε ἡ πρᾶξις, εἰς τὴν ὁποίαν ἐπαναλαμβάνομεν ἕνα ἀριθμόν*** (ὡς προσθετέον) ***τόσας φοράς, ὅσας μονάδας ἔχει ἄλλος δοθεὶς ἀριθμός***.

65. Ὁ ἀριθμὸς, ὁ ὁποῖος ἐπαναλαμβάνεται, λέγεται ***πολλαπλασιαστέος***, ὁ ἄλλος ἀριθμὸς, ὁ ὁποῖος διὰ τῶν μονάδων του φανερώνει πόσας φορὰς θὰ ἐπαναληφθῇ ὁ πολλαπλασιαστέος, λέγεται ***πολλαπλασιαστὴς***, τὸ δὲ ἐξαγόμενον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ λέγεται ***γινόμενον***.

Ὁ πολλαπλασιαστέος καὶ ὁ πολλαπλασιαστὴς λέγονται ***παράγοντες*** τοῦ γινομένου.

Σημεῖον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἶνε τὸ $\times$ ἢ τὸ $.$, τὰ ὁποῖα ἀπαγγέλλονται ***ἐπί***. Οὕτω τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν 5 καὶ 3 σημειώνεται 5×3 ἢ $5 \,.\, 3$, ἀπαγγέλλεται δὲ πέντε ἐπὶ τρία, καὶ ὅπως εἴδομεν εἶνε ἴσον μὲ $5+5+5=15$. Ὁ πολλαπλασιασμὸς λοιπὸν εἶνε μία σύντομος πρόσθεσις.

Γενικῶς τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν α καὶ β παριστάνεται διὰ τοῦ $\alpha \times \beta$ ἢ $\alpha \,.\, \beta$ ἢ $\alpha\beta$, δὲν γράφομεν δηλ. τὸ σημεῖον μεταξὺ τῶν δύο ἀριθμῶν. Ὅταν ὅμως καὶ οἱ δύο παράγοντες εἶνε ἀριθμοὶ πρέπει νὰ γράφωμεν μεταξὺ αὐτῶν ἢ τὸ $\times$ ἢ τὸ $.$, διότι 3×5 ἢ $3 \,.\, 5$ σημαίνει τὸ ἀριθμόν 15, ἐνῷ 35 σημαίνει τὸν ἀριθμὸν τριάκοντα πέντε.

66. Ὅταν οἱ ἀριθμοὶ εἶνε συγκεκριμένοι, τὸ γινόμενον εἶνε ὁμοειδὲς μὲ τὸν πολλαπλασιαστέον, διότι γίνεται ἀπὸ αὐτὸν διὰ τῆς ἐπαναλήψεως, ὁ πολλαπλασιαστὴς ὅμως κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς πράξεως λαμβάνεται ὡς ἀφῃρημένος, διότι φανερώνει πάντοτε πόσας φορὰς θὰ ἐπαναληφθῇ ὁ πολλαπλασιαστέος.

ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΣ ΠΙΝΑΞ

67. Τὰ γινόμενα τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν περιέχονται εἰς τὸν ἑπόμενον πίνακα, ὁ ὁποῖος ὀνομάζεται ***Πυθαγόρειος πίναξ***, διότι λέγεται ὅτι τὸν ἐπενόησεν ὁ φιλόσοφος Πυθαγόρας.

Οὗτος σχηματίζεται ὡς ἑξῆς.

Γράφομεν τοὺς μονοψηφίους ἀριθμοὺς εἰς μίαν ὁριζοντίαν

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

σειράν. Διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὴν δευτέραν σειρὰν προσθέτομεν εἰς ἕκαστον μονοψήφιον τὸν ἑαυτόν του. Διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὴν τρίτην, προσθέτομεν εἰς τοὺς ἀριθμοὺς τῆς α΄ σειρᾶς, τοὺς ἀριθμοὺς τῆς β΄. Διὰ τὴν δ΄ προσθέτομεν εἰς τοὺς ἀριθμοὺς τῆς α΄ σειρᾶς τοὺς ἀριθμοὺς τῆς γ΄ καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Ἑκάστη ὁριζοντία σειρὰ περιέχει τὰ γινόμενα τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν ἐπὶ τὸ πρῶτον πρὸς τὰ ἀριστερὰ ψηφίον της, ἑκάστη δὲ κατακόρυφος γραμμὴ περιέχει τὰ γινόμενα τοῦ πρώτου ψηφίου της ἐπὶ τοὺς μονοψηφίους ἀριθμούς.

Χρῆσις τοῦ Πίνακος. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ζητοῦμεν τὸ γινόμενον 4×6. Εὑρίσκεται τοῦτο εἰς τὴν συνάντησιν τῆς δ′ γραμμῆς καὶ στ′ στήλης ἢ εἰς τὴν συνάντησιν τῆς στ′ γραμμῆς καὶ τῆς δ′ στήλης, εἶνε δηλ. ὁ 24.

ΣΧΕΣΕΙΣ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΕΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΟΥ ΚΑΙ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ

68. Ἔστω τὸ γινόμενον $3 \times 7 = 21$. Ἄν πολλαπλασιάσωμεν τὸν πολλαπλασιαστέον 3 ἐπὶ 2, ὁπότε θὰ γείνῃ 6, τὸ γινόμενον γίνεται $6 \times 7 = 42$, πολλαπλασιάζεται δηλ. καὶ αὐτὸ ἐπὶ 2.

Ὁμοίως ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸν πολλαπλασιαστὴν 7 ἐπὶ 2, ὁπότε θὰ γείνῃ 14, τὸ γινόμενον γίνεται $3 \times 14 = 42$, πολλαπλασιάζεται δηλ. καὶ αὐτὸ ἐπὶ 2.

Ὥστε τὸ γινόμενον εἶνε μεταβλητὴ ποσότης, ἐξαρτωμένη ἀπὸ τὸν πολλαπλασιαστέον καὶ τὸν πολλαπλασιαστήν, μεταβάλλεται δηλ. ὅταν μεταβάλωμεν τον πολλαπλασιαστέον ἢ τὸν πολλαπλασιαστὴν ἢ καὶ τοὺς δύο.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ

69. ***Ἄν ἀλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου τὸ γινόμενον δὲν μεταβάλλεται.***

Ἡ ἰδιότης αὕτη λέγεται ***νόμος τῆς ἀντιμεταθέσεως.***

Δηλ. $3 \times 4 = 4 \times 3$,

Πράγματι $3 \times 4 = 12$ καὶ $4 \times 3 = 12$.

70. ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἓν ἄθροισμα ἐπὶ ἕνα ἀριθμὸν ἢ ἕνα ἀριθμὸν ἐπὶ ἓν ἄθροισμα, δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕκαστον προσθετέον ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν καὶ κατόπιν νὰ προσθέσωμεν τὰ εὑρεθέντα γινόμενα***

Ἡ ἰδιότης αὕτη λέγεται ***ἐπιμεριστικὸς νόμος.***

Δηλ. $(2+3+4) \times 3 = 2 \times 3 + 3 \times 3 + 4 \times 3$.

Πράγματι $(2+3+4) \times 3 = 9 \times 3 = 27$

καὶ $2 \times 3 + 3 \times 3 + 4 \times 3 = 6 + 9 + 12 = 27$.

71. ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο ἀθροίσματα, δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕκαστον προσθετέον τοῦ ἑνὸς ἀθροίσματος ἐπὶ ἕκαστον προσθετέον τοῦ ἄλλου καὶ κατόπιν νὰ προσθέσωμεν τὰ εὑρεθέντα γινόμενα.***

Δηλ. $(2+3) \times (4+5) = 2 \times 4 + 3 \times 4 + 2 \times 5 + 3 \times 5$.

Πράγματι $(2+3)\times(4+5)=5\times 9=45.$

καὶ $\times 4 + (3\times 4)+(2\times 5)+(3\times 5)=$

$= 8+12+10+15=45.$

72. ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν διαφορὰν ἐπὶ ἀριθμὸν ἢ ἀριθμὸν ἐπὶ διαφοράν, δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὸν μειωτέον καὶ τὸν ἀφαιρετέον ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν καὶ ἀπὸ τὸ α΄ γινόμενον νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ β.΄***

Δηλ. $(9-3)\times 5=5\times(9-3)=5\times 9-5\times 3.$

Πράγματι $(9-3)\times 5=6\times 5=30$

καὶ $5\times 9-5\times 3=45-15=30$

Παρατήρησις. Τὸ γινόμενον $0\times 3=0$. Διότι $0\times 3=0+0+0=0$. Ἐπίσης $3\times 0=0$. Διότι δεχόμενοι ὅτι δυνάμεθα νὰ ἀλλάσσωμεν τὴν θέσιν τῶν παραγόντων καὶ ὅταν ὁ εἷς παράγων εἶνε 0, θὰ ἔχωμεν $3\times 0=0\times 3=0$.

(Διὰ τὴν γ΄. τάξιν)

ΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΑΙ ΘΕΩΡΗΤΙΚΩΣ

73. ***Ὁ νόμος τῆς ἀντιμεταθέσεως*** (ἐδ. 69, σελ. 26).

Δηλ. $2\times 3=3\times 2$. Διότι τὸ γινόμενον 2×3 κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (ἐδ. 64, σελ. 24) εἶνε ἴσον μὲ $2+2+2$. Τὸ ἄθροισμα πάλιν αὐτὸ κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ ἀριθμοῦ (ἐδ. 5, σελ. 5) εἶνε ἴσον μὲ $1+1+1+1+1+1$, ἂν δὲ ἑνώσωμεν τὰς μονάδας αὐτὰς ἀνὰ τρεῖς, θὰ ἔχωμεν $3+3=3\times 2$. (ἐδ. 64)

Ὥστε $2\times 3=3\times 2$ καὶ γενικῶς $\alpha\times\beta=\beta\times\alpha$.

74. ***Πολλαπλασιασμὸς ἀθροίσματος ἐπὶ ἀριθμὸν*** (ἐδ. 70)

Δηλ. $(5+6+7)\times 2=5\times 2+6\times 2+7\times 2.$

Διότι τὸ $(5+6+7)\times 2$ κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (ἐδ. 64) εἶνε ἴσον μὲ $5+6+7+5+6+7$, τοῦτο δὲ κατὰ τὸν νόμον τῆς ἀντιμεταθέσεως (ἐδ. 30) εἶνε ἴσον μὲ $5+5+6+6+7+7$, τοῦτο πάλιν κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἶνε ἴσον μὲ $5\times 2+6\times 2+7\times 2$.

Ἑπομένως $(5+6+7)\times 2=5\times 2+6\times 2+7\times 2.$

Γενικῶς $(\alpha+\beta+\gamma)\times\delta=\alpha\times\delta+\beta\times\delta+\gamma\times\delta.$

75) ***Πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ ἄθροισμα*** (ἐδ. 70)

Δηλ. $2\times(5+6+7)=2\times 5+2\times 6+2\times 7.$

Διότι $2 \times (5+6+7) = (5+6+7) \times 2 =$
$5\times2 + 6\times2 + 7\times2 = 2\times5 + 2\times6 + 2\times7$.

Ἑπομένως $2 \times (5+6+7) = 2\times5 + 2\times6 + 2\times7$.

Γενικῶς $\alpha\times(\beta+\gamma+\delta) = \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta$.

76. Ἰδιότης ἀντίστροφος τῶν δύο προηγουμένων.

Εἴδομεν ὅτι $5\times2 + 6\times2 + 7\times2 = (5+6+7)\times2$.

Ὥστε: ***Τὸ ἄθροισμα γινομένων, εἰς τὰ ὁποῖα ὑπάρχει κοινὸς παράγων, εἶνε ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μὴ κοινῶν παραγόντων ἐπὶ τὸν κοινὸν παράγοντα.***

Γενικῶς $\alpha\times\varrho + \beta\times\varrho + \gamma\times\varrho = (\alpha+\beta+\gamma)\times\varrho$.

77. *Πολλαπλασιασμὸς ἀθροίσματος ἐπὶ ἄθροισμα* (ἐδ. 71, σελ. 26.). Ἄς λάβωμεν τὸ γινόμενον $(5+6) \times (2+3)$.

Θεωροῦμεν τὸ α΄ ἄθροισμα ὡς εὑρεθὲν καὶ θὰ ἔχωμεν πολλαπλασιασμὸν ἀριθμοῦ ἐπὶ ἄθροισμα (ἐδ. 75), ἤτοι
$(5+6) \times (2+3) = (5+6) \times 2 + (5+6) \times 3$.

Τοῦτο ἐπειδὴ εἶνε πολλαπλασιασμὸς ἀθροισμάτων ἐπὶ ἀριθμοὺς (ἐδ. 74, σελ. 27) θὰ εἶνε ἴσον μὲ

$$5\times2 + 6\times2 + 5\times3 + 6\times3.$$

Ἑπομένως $(5+6) \times (2+3) = 5\times2 + 6\times2 + 5\times3 + 6\times3$

Γενικῶς $(\alpha+\beta) \times (\gamma+\delta) = \alpha\gamma + \beta\gamma + \alpha\delta + \beta\delta$.

78. *Πολλαπλασιασμὸς διαφορᾶς ἐπὶ ἀριθμὸν* (ἐδ. 72, σελ. 27). Δηλ. $(8-5) \times 2 = 8\times2 - 5\times2$.

Διότι τὸ γινόμενον $(8-5) \times 2$ κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (ἐδ. 64) εἶνε ἴσον μὲ $(8-5) + (8-5)$, τοῦτο δὲ ἐπειδὴ εἶνε πρόσθεσις διαφορῶν (ἐδ. 57, σελ. 20) θὰ εἶνε ἴσον μὲ $(8+8) - (5+5)$ καὶ τοῦτο κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ θὰ εἶνε ἴσον μὲ $8\times2 - 5\times2$.

Ἑπομένως $(8-5)\times2 = 8\times2 - 5\times2$.

Γενικῶς $(\alpha-\beta)\times\gamma = \alpha\gamma - \beta\gamma$.

79. *Πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ διαφορὰν* (ἐδ. 72, σελ. 27). Δηλ. $2 \times (8-5) = 2\times8 - 2\times5$.

Διότι $2 \times (8-5) = (8-5)\times2 = 8\times2 - 5\times2 =$
$= 2\times8 - 2\times5$.

Ἑπομένως $2 \times (8-5) = 2\times8 - 2\times5$

Γενικῶς $\alpha \times (\beta-\gamma) = \alpha\times\beta - \alpha\times\gamma$.

80. *Ἰδιότης ἀντίστροφος τῶν δύο προηγουμένων.*

Εἴδομεν ὅτι $2\times8 - 2\times5 = 2\times(8-5)$.

Ὥστε: ***Διαφορὰ γινομένων, εἰς τὰ ὁποῖα ὑπάρχει κοινὸς παράγων, εἶνε ἴση μὲ τὸν κοινὸν παράγοντα ἐπὶ τὴν διαφορὰν τῶν μὴ κοινῶν παραγόντων.***

Γενικῶς $\alpha\beta - \alpha\gamma = \alpha\times(\beta-\gamma)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

34) Νὰ ἐκτελεσθοῦν οἱ ἑξῆς πολλαπλασιασμοὶ καὶ κατὰ τοὺς δύο τρόπους: α΄) $(5+7)\times3$, β΄) $(4+3+5)\times8$, γ΄) $(3+7+4+5)\times9$

35) Ὁμοίως οἱ ἑξῆς: α΄) $8\times(3+4)$, β΄) $5\times(6+3+7)$, γ΄) $7\times(4+2+9+6)$.

36) Ὁμοίως οἱ ἑξῆς: α΄) $(8-3)\times4$, β΄) $(15-9)\times8$, γ΄) $(32-24)\times9$, δ΄) $5\times(18-12)$.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΙΣΟΤΗΤΟΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΟΤΗΤΟΣ ΕΙΣ ΤΟΝ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΝ

82. ***Ἂν ἴσους ἀριθμοὺς πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τὰ γινόμενα θὰ εἶνε ἴσα.***

Π.χ. $8=5+3$ καὶ $8\times2=(5+3)\times2$ ἢ $16=16$

85. ***Ἂν ἀνίσους ἀριθμοὺς πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τὰ γινόμενα θὰ εἶνε ὁμοίως ἄνισα.***

Π.χ. $8>5$ καὶ $8\times2>5\times2$ ἢ $16>10$.

ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ ΠΟΛΛΩΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ

83. Μία οἰκία ἔχει 4 δωμάτια, ἕκαστον δωμάτιον ἔχει 3 παράθυρα, ἕκαστον δὲ παράθυρον ἔχει 6 ὑελοπίνακας· πόσους ὑελοπίνακας ἔχει ἡ οἰκία;

Λύσις. Ἀφοῦ ἕκαστον παράθυρον ἔχει 6 ὑελοπίνακας, τὰ 3 παράθυρα ἑκάστου δωματίου θὰ ἔχουν 6×3 ὑελοπίνακας καὶ διὰ νὰ εὕρωμεν πόσους ὑελοπίνακας ἔχουν τὰ δωμάτια, θὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ 6×3 ἐπὶ τὸ 4, πρέπει δηλ. νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον $6\times3\times4$. Τὸ $6\times3=18$, καὶ τὸ $18\times4=72$. Ὥστε ἡ οἰκία ἔχει 72 ὑελοπίνακας.

Τὸ γινόμενον $6\times3\times4$ λέγεται ***γινόμενον τριῶν παραγόντων.***

Ἐν γένει : *Γινόμενον πολλῶν παραγόντων λέγεται τὸ ἐξαγόμενον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν, ὅταν πολλαπλασιάσωμεν τὸν α′ παράγοντα ἐπὶ τὸν β′, τὸ γινόμενον αὐτῶν ἐπὶ τὸν γ′, τὸ νέον γινόμενον ἐπὶ τὸν δ′ καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς:*

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ ΠΟΛΛΩΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ

84. ***Τὸ γινόμενον πολλῶν ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, ἂν ἀλλάξωμεν τὰς θέσεις αὐτῶν.***

Π.χ. $2\times3'\times4\times5\times6' = 2\times6'\times4\times5\times3'$,

Πράγματι $2\times3\times4\times5\times6=720$

καὶ $2\times6\times4\times5\times3=720$

85. ***Εἰς ἓν γινόμενον δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν μερικοὺς παράγοντας διὰ τοῦ γινομένου των ἢ νὰ ἀναλύσωμεν ἕνα παράγοντα εἰς ἄλλους, τῶν ὁποίων εἶνε οὗτος γινόμενον.*** Π. χ. $2\times3'\times4\times5'\times6\times7'=2\times105\times4\times6$

Πράγματι $2\times3\times4\times5\times6\times7=5040$

καὶ $2\times105\times4\times6=5040$.

86. ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἓν γινόμενον ἐπὶ ἕνα ἀριθμὸν ἢ ἕνα ἀριθμὸν ἐπὶ ἓν γινόμενον πολλαπλασιάζομεν ἕνα μόνον παράγοντα τοῦ γινομένου ἐπὶ τὸν ἐριθμόν.***

Δηλ. $(2\times3\times4)\times5=5\times(2\times3\times4)=2\times(3\times5)\times4=$ $=2\times15\times4$. Πράγματι $(2\times3\times4)\times5=24\times5=120$,

καὶ $2\times15\times4=120$.

87. ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν γινόμενα δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν ἓν γινόμενον ἀπὸ ὅλους τοὺς παράγοντας τῶν γινομένων.***

Δηλ. $(2\times3)\times(4\times5)\times(6\times7)=2\times3\times4\times5\times6\times7$.

Πράγματι $(2\times3)\times(4\times5)\times(6\times7)=6\times20\times42=5040$.

καὶ $2\times3\times4\times5\times6\times7=5040$.

(Διὰ τὴν γ′. τάξιν)

ΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ ΠΟΛΛΩΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΑΙ ΘΕΩΡΗΤΙΚΩΣ

88. Τὸ γινόμενον πολλῶν ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, ἂν ἀνταλλάξωμεν τὰς θέσεις τῶν δύο τελευταίων παραγόντων.

Π.χ. $2\times5\times4'\times3'=2\times5\times3'\times4'$.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ γινομένου πολλῶν παραγόντων (ἐδ. 83, σελ. 30) τὸ $2\times5\times4\times3=10\times4\times3$. Διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ τὸ γινόμενον αὐτὸ πρέπει νὰ ἐπαναλάβωμεν τρεῖς φορὰς τὸ γινόμενον 10×4 ἢ 3 φορὰς τὸ ἄθροισμα

$10+10+10+10$. δηλ.

$$\begin{matrix} 10+10+10+10 \\ 10+10+10+10 \\ 10+10+10+10 \end{matrix}$$

Εἶνε φανερὸν ὅτι ἐὰν προσθέσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς τοῦ πίνακος θὰ εὕρωμεν τὸ ζητούμενον γινόμενον.

Ἀλλὰ ἂν προσθέσωμεν κατὰ γραμμὰς εὑρίσκομεν ὅτι ἑκάστη γραμμὴ περιέχει 4 φορὰς τὸν 10, δηλ. 10×4 καὶ αἱ 3 γραμμαί, 3 φορὰς τὸ 10×4, ἤτοι $10\times4\times3$. Ἂν δὲ προσθέσωμεν κατὰ στήλας, εὑρίσκομεν ὅτι ἑκάστη στήλη περιέχει 3 φορὰς τὸ 10, δηλ. 10×3 καὶ αἱ 4 στῆλαι, 4 φορὰς τὸ 10×3, ἤτοι $10\times3\times4$ Ὥστε $10\times4\times3=10\times3\times4$.

ἢ $2\times5\times4'\times3'=2\times5\times3'\times4'$

89. Τὸ γινόμενον πολλῶν ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, ἂν ἀνταλλάξωμεν τὰς θέσεις δύο διαδοχικῶν.

Δηλ. $2\times5\times4'\times3'\times6=2\times5\times3'\times4'\times6$

Διότι διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον $2\times5\times4\times3\times6$, κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ γινομένου πολλῶν παραγόντων θὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον $2\times5\times4\times3$ καὶ θὰ τὸ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 6, Ἀλλά, ὡς εἴδομεν, τὸ $2\times5\times4'\times3'=2\times5\times3'\times4'$.

Ἑπομένως, ἀφοῦ τὰ δύο αὐτὰ γινόμενα εἶνε ἴσα, εἴτε τὸ ἓν εἴτε τὸ ἄλλο πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 6 θὰ εὕρωμεν τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον (ἐδ.82, σελ.29).

Ἄρα $2\times5\times4'\times3'\times6=2\times5\times3'\times4'\times6$.

48
60
72
90
56
70
84
205
985

90. ***Ἀλλαγὴ θέσεως οἱωνδήποτε παραγόντων*** (ἐδ.84)

Δηλ. $2\times3'\times4\times5\times6'=2\times6'\times4\times5\times3'$

Διότι. (ἐδ. 90) $2\times3\times4\times5'\times6'=2\times3\times4'\times6'\times5=$
$=2\times3'\times6'\times4\times5=2\times6\times3'\times4'\times5=2\times6\times4\times3'\times5'=$
$=2\times6'\times4\times5\times3'$.

Ἑπομένως $2\times3'\times4\times5\times6'=2\times6'\times4\times5\times3'$.

Γενικῶς $\alpha\times\beta'\times\gamma\times\delta'=\alpha\times\delta'\times\gamma\times\beta'$

91. ***Ἀντικατάστασις παραγόντων*** (ἐδ. 85, σελ. 30).

α΄ Ἂν οἱ παράγοντες εἶνε εἰς τὴν ἀρχὴν προκύπτει ἡ πρότασις ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τοῦ γινομένου πολλῶν παραγόντων (ἐδ.83).

Π. χ. $2\times3\times4\times5=6\times4\times5=24\times5$.

β') Ἂν οἱ παράγοντες δὲν εἶνε εἰς τὴν ἀρχὴν τοὺς φέρομεν εἰς τὴν ἀρχήν. (ἐδ. 90).

Γενικῶς $\alpha\times\beta\times\gamma\times\delta=\alpha\times(\beta\times\delta)\times\gamma$.

92. Ἀνάλυσις παράγοντος. (ἐδ. 85, σελ. 30).

Διότι εὕρομεν ὅτι $24\times5=2\times3\times4\times5$.

Γενικῶς $\alpha\times(\beta\times\delta)\times\gamma=\alpha\times\beta\times\delta\times\gamma$.

93. Πολλαπλασιασμὸς γινομένου ἐπὶ ἀριθμὸν (ἐδ. 86).

Δηλ. $(2\times3\times4)\times5=2\times(3\times5)\times4=2\times15\times4$.

Διότι τὸ $(2\times3\times4)\times5=24\times5$. Τοῦτο δέ, ἂν ἀναλύσωμεν τὸν 24 εἰς τοὺς παράγοντάς του, (ἐδ. 92), θὰ εἶνε ἴσον μὲ $2\times3\times4\times5$, καὶ τοῦτο ἂν ἀντικαταστήσωμεν τοὺς παράγοντας 3 καὶ 5 διὰ τοῦ γινομένου των 15, θὰ εἶνε ἴσον μὲ $2\times15\times4$·

Ἑπομένως $(2\times3\times4)\times5=2\times15\times4$.

Γενικῶς $(\alpha\times\beta\times\gamma)\times\delta=\alpha\times(\beta\times\delta)\times\gamma$.

94. Πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ γινόμενον (ἐδ. 86).

Διότι ἂν ἀλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν παραγόντων καταλήγομεν εἰς τὴν προηγουμένην ἰδιότητα.

Π. χ. $5\times(2\times3\times4)=(2\times3\times4)\times5=2\times15\times4$.

Γενικῶς $\alpha\times(\beta\times\gamma)\times\delta=\beta\times(\alpha\times\gamma)\times\delta$.

95. Πολλαπλασιασμὸς γινομένων (ἐδ. 87, σελ. 30).

Π. χ. $(2\times3)\times(4\times5)=2\times3\times4\times5$.

Διότι $(2\times3)\times(4\times5)=6\times20$, ἀναλύοντες δὲ τοὺς παράγοντας 6 καὶ 20 εἰς τοὺς παράγοντάς των (ἐδ. 92) θὰ ἔχωμεν $6\times20=2\times3\times4\times5$.

Ἑπομένως $(2\times3)\times(4\times5)=2\times3\times4\times5$.

Γενικῶς $(\alpha\times\beta)\times(\gamma\times\delta)=\alpha\beta\gamma\delta$.

ΣΥΝΤΟΜΙΑΙ ΤΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ

96. Τὸ γινόμενον 364×10 εἶνε ἴσον (ἐδ. 69, σελ. 26) μὲ τὸ 10×364, δηλ. 1 δεκ.$\times364=364$ δεκάδες. Ἀλλὰ διὰ νὰ παριστάνῃ δεκάδας ὁ ἀριθμὸς 364 πρέπει νὰ γράψωμεν δεξιά του ἓν μηδέν, δηλ. 3640. Ὥστε $364\times10=3640$.

Τὸ γινόμενον $50\times7=5$ δεκ. $\times7=35$ δεκ. $=350$.

70 × 50 = 7 δεκ. ×50=350 δεκ. = 3500.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

37) Νὰ εὑρεθοῦν ἀμέσως τὰ γινόμενα 364×100, 364×1000, 364×10000, χωρὶς νὰ ἐκτελεσθοῦν οἱ πολλαπλασιασμοί, νὰ δικαιολογηθῇ δὲ ὁ τρόπος τῆς εὑρέσεως αὐτῶν καὶ νὰ ἐξαχθῇ κανὼν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ ἄλλον ἀποτελούμενον ἀπὸ τὴν μονάδα ἀκολουθουμένην ὑπὸ μηδενικῶν.

38) Νὰ εὑρεθοῦν ταχέως τὰ γινόμενα 500×7, 500×70, 500×700, νὰ δικαιολογηθῇ δὲ ὁ ταχὺς τρόπος τῆς εὑρέσεως αὐτῶν καὶ νὰ ἐξαχθῇ κανὼν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι ἔχουν ἓν ψηφίον σημαντικὸν τὰ δὲ λοιπὰ μηδενικά.

39) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ γινόμενα 6δεκ., × 8δεκ. 6δεκ. × 8ἑκ. 6δεκ. × 8χιλ., 6ἑκ. × 8χιλ., 6χιλ. × 8χιλ.

ΕΚΤΕΛΕΣΙΣ ΤΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ

Α΄.) Πολυψηφίου ἐπὶ μονοψήφιον

97. Ἃς ὑποθέσωμεν ὅτι ζητεῖται τὸ γινόμενον 364 × 8. Τὸ γινόμενον τοῦτο εἶνε ἴσον μὲ τὸ ἑξῆς:

(3ἑκ. + 6δεκ. + 4μον.) × 8.

Θὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕκαστον προσθετέον τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν 8 καὶ κατόπιν θὰ προσθέσωμεν τὰ εὑρεθέντα γινόμενα (ἐδ. 70, σελ. 26), δηλ. θὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕκαστον ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν 8.

Ἐκτελοῦμεν τοὺς πολλαπλασιασμοὺς κατὰ τρόπον ὥστε ἡ ὅλη ἐργασία νὰ γίνῃ ταχύτερον ὡς ἑξῆς:

4μ. × 8 = 32 μ. = 3δ. καὶ *2*μ.

Τὰς 3 δεκ. θὰ προσθέσωμεν εἰς τὰς ἄλλας δεκάδας, τὰς ὁποίας θὰ εὕρωμεν. Ἔπειτα

6δ. × 8 = 48δεκ., 48 δ. + 3δ. = 51δ. = 5ἑκ. καὶ *1*δεκ.

Κατόπιν 3ἑκ. × 8 = 24 ἑκ., 24 ἑκ. + 5 ἑκ. = ***29*** ἑκ.

Ὥστε (3ἑκ. + 6δεκ. + 4μ.) × 8μ. = ***29***ἑκ. + *1*δεκ. + ***2***μ

Δηλ. 346×8 = ***2912.***

Β΄.) Πολυψηφίου ἐπὶ πολυψήφιον

98. Ἃς ὑποθέσωμεν ὅτι ζητεῖται τὸ γινόμενον 364×78.

Ἐπειδὴ ὁ παράγων 78=70+8, τὸ γινόμενον τοῦτο εἶνε ἴσον μὲ τὸ 364×(70+8) καὶ τοῦτο πάλιν εἶνε ἴσον (ἐδ.70,σελ.26) μὲ τὸ 364×70 + 364×8. Τὸ γινόμενον 364×8,ὅπως ἔχομεν εὕρει ἀνωτέρω, εἶνε ἴσον μὲ **2912**. Τὸ δὲ γινόμενον 364×70 εἶνε ἴσον μὲ τὸ 70×364 ἢ μὲ τὸ 7 δεκ.×364, δηλ. ἴσον μὲ 2548 δεκ.,ἤτοι μὲ **25480**.

Ἑπομένως 364 × 78 = 2912 + 25480 = 28392.

Ὡς γνωστὸν χάριν συντομίας ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς.

$$\begin{array}{r} 364 \\ 78 \\ \hline 2912 \\ 2548 \\ \hline 28392 \end{array}$$

ΔΟΚΙΜΗ ΤΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ

99. Τὴν δοκιμὴν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ κάμνομεν ὡς ἑξῆς: Προσθέτομεν τὰ ψηφία ἑκάστου ἐκ τῶν δύο παραγόντων μέχρις ὅτου εὕρωμεν ἀριθμοὺς μονοψηφίους,τοὺς ὁποίους γράφομεν εἰς τὰς ἄνω γωνίας ἑνὸς σταυροῦ. Τοῦ γινομένου τῶν δύο τούτων ἀριθμῶν προσθέτομεν ὁμοίως τὰ ψηφία καθὼς καὶ τοῦ γινομένου τῶν δοθέντων ἀριθμῶν μέχρις ὅτου εὕρωμεν μονοψηφίους ἀριθμούς, τοὺς ὁποίους γράφομεν εἰς τὰς δύο κάτω γωνίας τοῦ σταυροῦ. Ἂν οἱ δύο τελευταῖοι οὗτοι ἀριθμοὶ δὲν εἶνε ἴσοι, ἡ πρᾶξις δὲν ἔγινεν ὀρθῶς.

$$\begin{array}{c|c} 4 & 6 \\ \hline 6 & 6 \end{array}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

40) Νὰ ἐκτελεσθοῦν ἀπὸ μνήμης καὶ γραπτῶς οἱ ἑξῆς πολλαπλασιασμοὶ μὲ ἐφαρμογὴν τοῦ ἐδ. 70 (σελ.26). (π.χ.25=20+5).

α') τῶν ἀριθμῶν 11, 12 κλπ., μέχρι τοῦ 30 ἐπὶ τοὺς μονοψηφίους ἀριθμούς.

β') τῶν ἀριθμῶν 30, 31 κλπ., μέχρι τοῦ 100 ἐπὶ τοὺς ἀριθμοὺς 2, 3, 4, 5 καὶ 6.

41) Ὁμοίως γραπτῶς οἱ ἑξῆς:

α') 42589 × 11, β') 7464 × 101, γ') 3734 × 1001.

42) Ὁμοίως οἱ ἑξῆς μὲ ἐφαρμογὴν τοῦ ἐδ.72 (9=10—1).

α') 53457 × 9, β') 4352 × 99, γ') 3546 × 999.

43) Ὁμοίως ἀπὸ μνήμης καὶ γραπτῶς οἱ ἑξῆς: α') 30×9, β') 60×8, γ') 90×7, δ') 15×40, ε') 28×20, στ') 17×30, ζ') 34×50, η') 26×70, θ') 19×40, ι') 28×80.

44) Ὁμοίως γραπτῶς οἱ ἑξῆς: α') 250×4, β') 1870×5, γ') 560×80, δ') 370×280, ε') 6700×4, στ') 350×270. ζ') 16200×3400, η') 5300×2900, καὶ νὰ ἐξαχθῇ κανὼν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἀριθμῶν ληγόντων εἰς μηδενικά.

ΕΚΤΕΛΕΣΙΣ ΠΡΑΞΕΩΝ ΕΙΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

45) Νὰ ἐκτελεσθοῦν οἱ ἑξῆς πολλαπλασιασμοί: α') (3+4+5)×8, β') (7+9+6+4)×13, γ') 25×(7+13+24+9).

46) α') (2+3)×(4+5), β') (2+3+4)×(5+6+7), γ') (2+3)×(4+5)×(6+7).

47) α') (29—16)×13, β') (35—8—7)×8, γ') 5×(82—49), δ') 3×(36—8—4—3).

48) α') (3+4)×(6—2), β') (8—2)×(5+4), γ') (5—2)×(7—3), δ') (2+3+4)×(13—6—5), ε') (25—8—9)×(7+4+6), στ') (15—2—4)×(26—12—9).

49) α') (2×3)×4, β') 2×(3×4), γ') (2×3)×(4×5), δ') (7×8×3)×15, ε') 9×(2×3×4×5), στ') (2×7×6)×(4×5×8), ζ') (2×3)×(4×5)×(6×7×8).

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΛΥΟΜΕΝΑ ΔΙΑ ΤΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ

100. Εἰς ὁ πρόβλημα τοῦ ἐδαφίου 64, τὸ ὁποῖον ἐλύσαμεν διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ἐδόθη ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς πορτοκαλίου καὶ ἐζητεῖτο ἡ τιμὴ τῶν πολλῶν.

Ὅθεν συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

Ὅταν δίδεται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος καὶ ζητῆται ἡ τιμὴ τῶν πολλῶν ὁμοειδῶν μονάδων, διὰ νὰ εὕρωμεν ταύτην, κάμνομεν πολλαπλασιασμόν, εἰς τὸν ὁποῖον πολλαπλασιαστέος εἶνε ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος καὶ πολλαπλασιαστὴς ὁ ἄλλος δοθεὶς ἀριθμός.

Γενικῶς τὰ προβλήματα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δύνανται νὰ διατυπωθοῦν ὡς ἑξῆς:

Πόσον ἀξίζουν α πορτοκάλια, ὅταν τὸ 1 ἀξίζῃ β δραχμάς;

Λύσις. Ἀφοῦ τὸ 1 πορτοκάλιον ἀξίζῃ β δραχμάς, τὰ 2 πορτοκάλια θὰ ἀξίζουν 2 φορὰς τὰς β δραχμάς, δηλ. β×2, καὶ τὰ α πορτοκάλια β×α ἢ β α δραχμάς.

101. Εὕρομεν λοιπὸν ὅτι ἡ ἄγνωστος τιμὴ τῶν α πορτοκαλίων, τὴν ὁποίαν παριστάνομεν διὰ τοῦ x, θὰ εἶνε x=β×α

Εἰς τὴν ἰσότητα ταύτην παρατηροῦμεν ὅτι τὸ πρῶτον μέλος εἶνε ἓν μόνον γράμμα καὶ παριστάνει ἕνα ἄγνωστον ποσόν, τὸ δὲ δεύτερον μέλος περιέχει γράμματα, τὰ ὁποῖα παριστάνουν γνωστὰ ποσὰ καὶ τὸ σημεῖον τῆς πράξεως, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ἐκτελέσωμεν ἐπὶ τῶν γνωστῶν ποσῶν, διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ ἀγνώστου.

Ἡ τοιαύτη ἰσότης ὀνομάζεται **τύπος.**

Συνήθως τὰ ἄγνωστα ποσὰ παριστάνομεν μὲ τὰ τελευταῖα γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου χ, ψ, ω, κ.λ.π. τὰ δὲ γνωστὰ ποσὰ μὲ τὰ πρῶτα γράμματα α, β, γ, κ.λ.π.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

50) Οἰνοπώλης ἐγέμισε 58 βαρέλια οἴνου, ἐκ τῶν ὁποίων ἕκαστον περιέχει 465 ὀκάδας· πόσας ὀκάδας περιέχουν ὅλα τὰ βαρέλια καὶ πόσον θὰ εἰσπράξῃ, ἂν πωλῇ τὴν ὀκᾶν πρὸς 12 δρχ; (26970, 323640)

51) Ὁ ἦχος διατρέχει 340 μέτρα περίπου κατὰ δευτερόλεπτον. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν εὑρίσκεται ἓν νέφος, τὸ ὁποῖον ἐβρόντησεν, ἂν ἠκούσθη ἡ βροντὴ μετὰ 8″, ἀφ' ὅτου ἐφάνη ἡ ἀστραπή; (2720)

52) Ἡ γῆ κατὰ τὴν περιφοράν της περὶ τὸν ἥλιον διανύει 30 χιλιόμετρα περίπου κατὰ δευτερόλεπτον· πόσον διανύει εἰς μίαν ὥραν; (108000)

53) Μία σφαῖρα τηλεβόλου διανύει περίπου 500 μέτρα κατὰ δευτερόλεπτον, εἰς ποίαν ἀπόστασιν δύναται νὰ φθάσῃ μετὰ 8″, ἀφ' ὅτου ἐξῆλθεν ἀπὸ τὸ τηλεβόλον; (4000)

54) Ἔμπορος ἠγόρασε 568 ὀκάδας καφὲ πρὸς 75 δρ. τὴν ὀκᾶν· ἀντὶ πόσων δραχμῶν πρέπει νὰ τὰς πωλήσῃ διὰ νὰ κερδίσῃ 15 δρ. τὴν ὀκᾶν; (51120)

55) Ἠγόρασεν εἰς 458 πήχεις ἑνὸς οἰκοπέδου πρὸς 385 δρ. τὸν πῆχυν, ἐπλήρωσε δὲ 120000 δρ.· πόσας ὀφείλει ἀκόμη νὰ πληρώσῃ; (56330)

56) Ὀπωροπώλης ἠγόρασεν 873 ὀκ. σταφυλῶν ἀντὶ 5238 δρ. καὶ ἐπώλησε ταύτας πρὸς 5 δρ. τὴν ὀκᾶν· πόσον ἐζημιώθη; (873).

57) 133 ἐργάται εἰργάζοντο μὲ 75 δρ. ἡμερομίσθιον, ἔλαβον δὲ διὰ τὴν ἐργασίαν μιᾶς ἡμέρας ἓν ποσὸν χρημάτων, τὸ ὁποῖον διεμοιράσθησαν καὶ ἔμειναν καὶ 25 δραχμαί· πόσον ἦτο τὸ ποσόν; (10000)

58) Ἔμπορος ἠγόρασε 50 πήχεις ὑφάσματος πρὸς 130 δρ. τὸν πῆχυν, ἐπώλησε 38 πήχεις πρὸς 160 δρ. τὸν πῆχυν καὶ τὸ ὑπόλοιπον πρὸς 110 δρ.· πόσον ἐκέρδισεν; (900)

59) Οἰνέμπορος ἠγόρασεν 850 ὀκάδας οἴνου ἐρυθροῦ πρὸς 8 δρ. τὴν ὀκᾶν καὶ 250 ὀκ. οἴνου λευκοῦ πρὸς 6 δρ. τὴν ὀκᾶν, ἀνέμιξε δὲ τὰ δύο εἴδη τοῦ οἴνου καὶ ἐπώλησε τὸ μῖγμα πρὸς 10 δρ. τὴν ὀκᾶν· πόσον ἐκέρδισεν; (2700)

60) Εἰς ἓν ἐργοστάσιον ἐργάζονται 78 ἄνδρες, 30 γυναῖκες καὶ 15 παιδία, ἕκαστος ἀνὴρ ἐργάζεται 8 ὥρας τὴν ἡμέραν, ἑκάστη γυνὴ 7 καὶ ἕκαστον παιδίον 6· ἑκάστη ὥρα ἐργασίας τῶν μὲν ἀνδρῶν πληρώνεται πρὸς 9 δραχμάς, τῶν γυναικῶν πρὸς 6 καὶ τῶν παιδίων πρὸς 4· πόσα πληρώνει τὴν ἑβδομάδα εἰς αὐτοὺς τὸ ἐργοστάσιον; (43416)

61) Ἓν βιβλίον ἔχει 192 σελίδας, ἑκάστη σελὶς ἔχει 36 στίχους καὶ ἕκαστος στίχος ἔχει 52 γράμματα· πόσα γράμματα ἔχει ὅλον τὸ βιβλίον; (359424)

62) Μία ἐμπορικὴ ἁμαξοστοιχία ἔχει 14 βαγόνια, ἕκαστον τῶν ὁποίων περιέχει 345 σάκκους σίτου, ἕκαστος δὲ σάκκος ζυγίζει 70 ὀκάδας· πόσον εἶνε τὸ βάρος ὅλου τοῦ σίτου, ὁ ὁποῖος περιέχεται εἰς τὴν ἁμαξοστοιχίαν; (338100)

63) Πόσα πρῶτα καὶ πόσα δεύτερα λεπτὰ ἔχει τὸ ἔτος 1932, τὸ ὁποῖον ἔχει 366 ἡμέρας; (527040′, 31622400″)

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

Α΄) ΜΕΡΙΣΜΟΣ

102. Ἂν 4 ὀκ. μήλων τιμῶνται 12 δρ., πόσον τιμᾶται ἡ 1 ὀκᾶ;

Λύσις. Ἂν ἑκάστη ὀκᾶ ἐτιμᾶτο 1 δραχμήν, διὰ τὰς 4 ὀκ. θὰ ἐδίδομεν 4 δρ. καὶ θὰ ἔμενον 12—4 = 8 δρ. Ἂν ἡ ὀκᾶ ἐτιμᾶτο ἄλλην 1 δρ., δηλ. ἐν ὅλῳ 2 δρ., θὰ ἐδίδομεν ἄλλας 4 δρ. καὶ θὰ ἔμενον 8—4 = 4 δρ. Ἂν τιμᾶται ἄλλην 1 δρ., δηλ. ἐν ὅλῳ 3 δρ., θὰ δώσωμεν καὶ τὰς ἄλλας 4 δρ. καὶ δὲν θὰ μείνουν ἄλλαι δραχμαί, διότι 4—4 = 0.

Ἑκάστη λοιπὸν ὀκᾶ τιμᾶται τόσας δραχμάς, ὅσας φορὰς δυνάμεθα νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν 4 ἀπὸ τὸν 12. Ἂν δὲ ἀθροίσωμεν τὰς τιμὰς καὶ τῶν 4 ὀκ. εὑρίσκομεν τὰς 12 δρ. δηλ.

$$3+3+3+3=12.$$

Ἡ πρᾶξις αὕτη, διὰ τῆς ὁποίας χωρίζομεν ἕνα ἀριθμὸν (τὸν 12) ***εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσας μονάδας ἔχει ἄλλος δοθεὶς ἀριθμὸς*** (ὁ 4), ***λέγεται διαίρεσις.***

103. Ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος θὰ χωρισθῇ εἰς ἴσα μέρη, λέγεται ***διαιρετέος,*** ὁ δὲ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος φανερώνει διὰ τῶν μονάδων του εἰς πόσα ἴσα μέρη θὰ χωρίσωμεν τὸν διαιρετέον, λέγεται ***διαιρέτης,*** καὶ τὸ ἐξαγόμενον τῆς διαιρέσεως λέγεται ***πηλίκον.*** Σημεῖον τῆς διαιρέσεως εἶνε τὸ :, τὸ ὁποῖον ἀπαγγέλλεται ***διά,*** π.χ. τὸ πηλίκον τῶν ἀριθμῶν 12 καὶ 4 σημειώνεται 12 : 4 καὶ ἀπαγγέλλεται δώδεκα διὰ τέσσερα.

Γενικῶς τὸ πηλίκον τοῦ ἀριθμοῦ α διὰ τοῦ β παριστάνεται διὰ τοῦ α : β.

Ἐπειδὴ εἰς τὴν διαίρεσιν αὐτὴν μερίζομεν ἕνα ἀριθμὸν εἰς ἴσα μέρη, διὰ τοῦτο λέγεται ***διαίρεσις μερισμοῦ ἢ μερισμός.***

104. Εἰς τὸν μερισμόν, ὅταν ὁ διαιρετέος εἶνε συγκεκριμένος ἀριθμός, τὸ πηλίκον εἶνε ὁμοειδὲς μὲ αὐτόν, διότι, ὅταν διαιροῦμεν π.χ. δραχμάς, ἕκαστον μερίδιον θὰ εἶνε δραχμαί. Ὁ διαιρέτης κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς πράξεως λαμβάνεται πάντοτε ὡς ἀφῃρημένος, διότι φανερώνει εἰς πόσα ἴσα μέρη χωρίζομεν τὸν διαιρετέον.

Β'). ΜΕΤΡΗΣΙΣ

105. Τὸ ἓν μῆλον τιμᾶται 4 δρ., μὲ 12 δρ. πόσα μῆλα ἀγοράζομεν ;

Λύσις. Ἂν ἀγοράσωμεν ἓν μῆλον θὰ δώσωμεν 4 δρ. καὶ θὰ μείνουν 12 — 4 = 8 δρ., ἂν ἀγοράσωμεν καὶ ἄλλο ἓν μῆλον, δηλ. ἐν ὅλῳ 2 μῆλα, θὰ δώσωμεν ἄλλας 4 δρ. καὶ θὰ μείνουν 8 — 4 = 4 δρ.. Ἂν τέλος ἀγοράσωμεν ἄλλο ἓν μῆλον δηλ. ἐν ὅλῳ 3 μῆλα, θὰ δώσωμεν καὶ τὰς 4 δρ. καὶ δὲν θὰ μείνουν ἄλλαι δραχμαί, διότι 4 — 4 = 0. Θὰ ἀγοράσωμεν λοιπὸν 3 μῆλα, ὅσας φορὰς δηλ. ἠδυνήθημεν νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν 4 ἀπὸ τὸν 12, ἤτοι ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ 4 εἰς τὸν 12.

Ἡ πρᾶξις αὕτη εἶνε ὁμοία μὲ τὴν προηγουμένην, διότι καὶ εἰς αὐτὴν ἀφῃρέσαμεν τὸν 4 ἀπὸ τὸν 12 ὅσας φορὰς ἠδυνήθημεν· διὰ τοῦτο λέγεται καὶ αὐτὴ ***διαίρεσις.*** Ἐπειδὴ δὲ εἰς τὴν πρᾶξιν αὐτὴν μετροῦμεν πόσας φορὰς χωρεῖ εἷς ἀριθμὸς εἰς ἕνα ἄλλον διὰ τοῦτο λέγεται ***διαίρεσις μετρήσεως*** ἢ ***μέτρησις***. Ὥστε δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν τὴν διαίρεσιν καὶ ὡς ἑξῆς:

Διαίρεσις εἶνε ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν πόσας φορὰς χωρεῖ εἷς ἀριθμὸς εἰς ἕνα ἄλλον. Ὅπως βλέπομεν λοιπὸν ἡ διαίρεσις εἶνε μία συντομία τῆς ἀφαιρέσεως.

106. Εἰς τὴν μέτρησιν ἂν ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης εἶνε συγκεκριμένοι ἀριθμοί, θὰ εἶνε ὁμοειδεῖς, ἀλλὰ κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς πράξεως θεωροῦνται ὡς ἀφῃρημένοι, ὅπως καὶ τὸ πηλίκον, τὸ ὁποῖον ὅμως κατόπιν παριστάνει ὅ,τι ζητεῖται εἰς τὸ πρόβλημα.

Εἰς τὸ α΄ ω πρόβλημα ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης εἶνε δραχμαί, τὸ δὲ πηλίκον παριστάνει μῆλα.

ΤΕΛΕΙΑ ΚΑΙ ΑΤΕΛΗΣ ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

107. Ὅταν ὁ διαιρετέος μοιράζεται εἰς ἴσα μέρη χωρὶς νὰ περισσεύῃ τίποτε, τότε ἡ διαίρεσις λέγεται ***τελεία***. Οὕτως εἰς τὸ πρόβλημα τοῦ μερισμοῦ ὁ 12 διῃρέθη ἀκριβῶς εἰς ἴσα μέρη

$12 = 4 + 4 + 4 = 4 \times 3$, ἤτοι $12 = 4 \times 3$.

Ὥστε: ***Εἰς τὴν τελείαν διαίρεσιν ὁ διαιρετέος εἶνε ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον.***

Ἂν λοιπὸν εἷς ἀριθμὸς εἶνε γινόμενον δύο ἄλλων καὶ διαιρεθῇ διὰ τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν, ὡς πηλίκον θὰ προκύψῃ ὁ ἄλλος ἀριθμός.

Ἂν ὅμως ἔχωμεν νὰ μοιράσωμεν 14 δραχμὰς εἰς τρεῖς μαθητὰς εὑρίσκομεν κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον ὅτι θὰ λάβῃ ἕκαστος 4 δρ., ἑπομένως οἱ τρεῖς θὰ λάβουν $4 \times 3 = 12$ δραχμὰς καὶ θὰ περισσεύσουν 2 δραχμαί.

Ἡ διαίρεσις αὐτή, εἰς τὴν ὁποίαν ὁ διαιρετέος δὲν μοιράζεται ἀκριβῶς εἰς ὅσα ἴσα μέρη φανερώνει ὁ διαιρέτης, ἀλλὰ μένει καὶ εἷς ἀριθμός, λέγεται ***ἀτελὴς*** καὶ ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος μένει, λέγεται ***ὑπόλοιπον*** τῆς διαιρέσεως.

Εἰς τὸ ἄνω παράδειγμα ὁ 14 διῃρέθη εἰς 3 ἴσα μέρη καὶ ἐπερίσσευσαν 2 δραχμαί. Ἑπομένως ὁ 14 θὰ εἶνε ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα $4 + 4 + 4 + 2$ ἢ μὲ τὸ $4 \times 3 + 2$, ἤτοι $14 = 4 \times 3 + 2$.

Ὥστε: ***Εἰς τὴν ἀτελῆ διαίρεσιν ὁ διαιρετέος εἶνε ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον σὺν τῷ ὑπολοίπῳ.***

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ

108. ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἓν ἄθροισμα δι' ἑνὸς ἀριθμοῦ, δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν ἕκαστον προσθετέον τοῦ ἀθροίσματος διὰ τοῦ ἀριθμοῦ*** (ἂν διαιροῦνται ὅλοι ἀκριβῶ) ***καὶ κατόπιν νὰ προσθέσωμεν τὰ πηλίκα, τὰ ὁποῖα θὰ εὕρωμεν.***

Δηλ. $(8+6):2=(8:2)+(6:2)$.

Πράγματι $(8+6):2=14:2=7$

καὶ $(8:2)+(6:2)=4+3=7$

109. ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν γινόμενον δι' ἀριθμοῦ δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν ἕνα μόνον παράγοντα*** (ὁ ὁποῖος νὰ διαιρῆται) ***διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, τοὺς δὲ ἄλλους ἀφίνομεν ὅπως εὑρίσκονται.***

Δηλ. $(7\times8\times6):2=7\times8\times(6:2)$

Πράγματι $(7\times8\times6):2=336:2=168$

καὶ $7\times8\times(6:2)=7\times8\times3=168$

110. ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν γινόμενον δι' ἑνὸς παράγοντός του ἀρκεῖ νὰ ἐξαλείψωμεν τὸν παράγοντα αὐτόν.***

Δηλ. $(7\times8\times6):7=8\times6$

Πράγματι $(7\times8\times6):7=336:7=48$

καὶ $8\times6=48$

111. ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ γινομένου δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν αὐτὸν διὰ τοῦ α΄ παράγοντος, τὸ πηλίκον διὰ τοῦ β΄, τὸ νέον πηλίκον διὰ τοῦ γ΄ καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς,*** (ἂν ὅλαι αἱ διαιρέσεις αὗται γίνονται ἀκριβῶς).

Δηλ. $120:(2\times3\times4)=[(120:2):3]:4$

Πράγματι $120:(2\times3\times4)=120:24=5$

καὶ $[(120:2):3]:4=[60:3]:4=20:4=5$

112. ***Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν διαιρετέον καὶ τὸν διαιρέτην ἐπὶ ἕνα ἀριθμόν, τὸν μὲν πηλίκον δὲν μεταβάλλεται τὸ ὑπόλοιπον ὅμως πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.***

Π. χ. ἡ διαίρεσις $23:5$ δίδει πηλίκον 4 καὶ ὑπόλοιπον 3, ἐνῷ ἡ διαίρεσις $(23\times2):(5\times2)=46:10$ δίδει πηλίκον πάλιν 4 καὶ ὑπόλοιπον $6=3\times2$.

Παρατήρησις. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ μὲν πηλίκον διατηρεῖ σταθερὰν τιμήν, τὸ δὲ ὑπόλοιπον εἶνε μεταβλητὴ ποσότης ἐξαρτωμένη ἀπὸ τὸν διαιρετέον καὶ τὸν διαιρέτην.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΙΣΟΤΗΤΟΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΟΤΗΤΟΣ ΕΙΣ ΤΗΝ ΔΙΑΙΡΕΣΙΝ

113. Ἂν ἴσους ἀριθμοὺς διαιρέσωμεν διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, (ἂν διαιροῦνται ἀκριβῶς), **τὰ πηλίκα θὰ εἶνε ἴσα.**

Π.χ. $8 = 6+2$ καὶ $8:2 = (6+2):2$ ἢ $4 = 3+1$

114. Ἂν ἀνίσους ἀριθμοὺς διαιρέσωμεν διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, (ἂν διαιροῦνται ἀκριβῶς), **τὰ πηλίκα θὰ εἶνε ὁμοίως ἄνισα.** Π.χ. $8 > 6$ καὶ $8:2 > 6:2$ ἢ $4 > 3$

(Διὰ τὴν γ΄. τάξιν)

ΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΑΙ ΘΕΩΡΗΤΙΚΩΣ

115. Διαίρεσις ἀθροίσματος δι' ἀριθμοῦ (ἐδ. 108)

Δηλ. $(8+10+12):2 = 8:2 + 10:2 + 12:2 = 4+5+6$

Διότι ἀφοῦ $8:2 = 4$, $10:2 = 5$ καὶ $12:2 = 6$, θὰ εἶνε $8 = 2\times4$, $10 = 2\times5$ καὶ $12 = 2\times6$. Ἑπομένως τὸ ἄθροισμα $8+10+12 = 2\times4 + 2\times5 + 2\times6$. Τοῦτο πάλιν εἶνε ἴσον (ἐδ. 76 σελ. 28) μὲ $2\times(4+5+6)$.

Ὥστε $8+10+12 = 2\times(4+5+6)$.

Ἐπειδὴ ὅμως τὸ $8+10+12$ εἶνε γινόμενον δύο παραγόντων τοῦ 2 καὶ τοῦ $(4+5+6)$, ἂν διαιρεθῇ μὲ τὸν 2, θὰ δώσῃ πηλίκον (ἐδ. 107) τὸ $4+5+6$.

Δηλ. $(8+10+12):2 = 4+5+6$

ἢ $(8+10+12):2 = 8:2 + 10:2 + 12:2$.

Γενικῶς $(\alpha+\beta+\gamma):\delta = \alpha:\delta + \beta:\delta + \gamma:\delta$.

116. Διὰ νὰ διαιρέσωμεν διαφορὰν δι' ἀριθμοῦ δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν καὶ τὸν μειωτέον καὶ τὸν ἀφαιρετέον τῆς διαφορᾶς διὰ τοῦ ἀριθμοῦ (ἂν διαιροῦνται ἀκριβῶς) **καὶ ἀπὸ τὸ α΄ πηλίκον νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ β΄.**

Δηλαδὴ $(20-8):2 = (20:2) - (8:2) = 10-4$.

Διότι, ἀφοῦ $20:2 = 10$ καὶ $8:2 = 4$, θὰ εἶνε καὶ $20 = 2\times10$ καὶ $8 = 2\times4$. Ἑπομένως ἡ διαφορὰ $20 - 8 = 2\times10 - 2\times4$. Αὕτη πάλιν εἶνε ἴση (ἐδ. 80) μὲ $2\times(10-4)$.

Ὥστε $20-8 = 2\times(10-4)$.

Ἄρα (ἐδ. 107) $(20-8):2 = 10-4 = 20:2 - 8:4$.

Γενικῶς $(\alpha-\beta):\gamma = \alpha:\gamma - \beta:\gamma$.

117. Διαίρεσις γινομένου δι' ἀριθμοῦ (ἐδ. 109)

Δηλ. $(7\times8\times6):2=7\times8\times(6:2)=7\times8\times3$

Διότι, ἀφοῦ $6:2=3$, θὰ εἶνε καὶ $6=2\times3$. Ἑπομένως $7\times8\times6=7\times8\times2\times3$. Τοῦτο πάλιν εἶνε ἴσον (ἐδ. 91) μὲ $2\times(7\times8\times3)$.

Ὥστε $7\times8\times6=2\times(7\times8\times3)$.

Ἄρα (ἐδ. 107) $(7\times8\times6):2=7\times8\times3=7\times8\times(6:2)$.

118. ΑΣΚΗΣΙΣ. 64) ***Νὰ δειχθῇ ἡ ἰδιότης τοῦ ἐδ. 110.***

119. *Διαίρεσις ἀριθμοῦ διὰ γινομένου.* (ἐδ. 111, σελ. 40)

Ἄς λάβωμεν τὴν διαίρεσιν $120:(2\times3\times4)=120:24=5$.

Ἐπειδὴ ὁ διαιρετέος εἶνε γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον θὰ ἔχωμεν $120=24\times5$.

Ἀναλύοντες τὸν 24 (ἐδ. 92) θὰ ἔχωμεν $120=2\times3\times4\times5$.

Διαιροῦντες διὰ 2 καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος (ἐδ. 113), θὰ ἔχωμεν $120:2=3\times4\times5$ (ἐδ. 118).

Ὁμοίως διὰ 3 $(120:2):3=4\times5$.

Ὁμοίως διὰ 4 $[(120:2):3]:4=5$.

Ἀλλὰ ἔχομεν εὕρει καὶ $120:(2\times3\times4)=5$

Ἄρα $120:(2\times3\times4)=[(120:2):3]:4$

Γενικῶς $\alpha:(\beta\times\gamma\times\delta)=[(\alpha:\beta):\gamma]:\delta$.

120. *Ἰδιότης τοῦ ἐδ. 112* (σελ. 40).

Ἀφοῦ ἡ διαίρεσις $23:5$ δίδει πηλίκον 4 καὶ ὑπόλοιπον 3, θὰ ἔχωμεν $23=5\times4+3$. Πολλαπλασιάζοντες δὲ καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος ἐπὶ 2 θὰ ἔχωμεν

$$23\times2=(5\times4+3)\times2 \text{ ἢ } (\text{ἐδ. 74, σελ. 27})$$
$$23\times2=(5\times2\times4)+(3\times2)$$

Ἂν τὸ γινόμενον $(5\times2\times4)$ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ 5×2, θὰ εὕρωμεν πηλίκον ἀκριβῶς 4. Ἐὰν δὲ προσθέσωμεν εἰς τὸν διαιρετέον $(5\times2\times4)$ ἕνα ἀριθμὸν (τὸν 3×2) μικρότερον τοῦ διαιρέτου (5×2), τὸ πηλίκον δὲν ἀλλάσσει καὶ ὁ προστεθεὶς ἀριθμὸς (3×2) θὰ εἶνε ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως.

Εἰς τὴν α′ διαίρεσιν $23:5$ τὸ ὑπόλοιπον 3 εἶνε μικρότερον τοῦ διαιρέτου 5, ἐπομένως καὶ τὸ $3\times2<5\times2$.

Ἂν διαιρέσωμεν λοιπὸν τὸ $(5\times2\times4)+(3\times2)=23\times2$ διὰ τοῦ 5×2, τὸ πηλίκον θὰ εἶνε πάλιν 4 καὶ τὸ ὑπόλοιπον 3×2.

ΑΣΚΗΣΙΣ. 65) *Ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν διαιρετέον καὶ τὸν διαιρέτην δι' ἑνὸς ἀριθμοῦ, τὸ μὲν πηλίκον δὲν μεταβάλλεται, τὸ δὲ ὑπόλοιπον διαιρεῖται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.*

ΕΚΤΕΛΕΣΙΣ ΠΡΑΞΕΩΝ ΕΙΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

(μὲ ἐφαρμογὴν τῶν ἄνω ἰδιοτήτων)

66) α′) $(8+2):2$, β′) $(18+15):3$, γ′) $(56+24):4$, δ′) $(20+15+30):5$, ε′) $(63+49+35+84):7$, στ′) $(75-45):15$.

67) α′) $(8\times 9):2$, β′) $(5\times 8\times 16):4$, γ′) $(49\times 15\times 18\times 16):6$,

68) α′) $(3\times 7):7$, β′) $(2\times 3\times 5\times 8):(2\times 3)$, γ′) $(6\times 7\times 4\times 9\times 8):(6\times 7\times 4)$,

ΕΚΤΕΛΕΣΙΣ ΤΗΣ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ

121. Ἂς λάβωμεν τὴν διαίρεσιν 2349 : 67.

Τὸ 2349 : 67 = (2 χιλ. + 3ἑκ. + 4δεκ + 9μον.) : 67 Εἶνε δηλ. διαίρεσις ἀθροίσματος δι' ἀριθμοῦ. Θὰ διαιρέσωμεν ἕκαστον προσθετέον διὰ τοῦ ἀριθμοῦ (ἐδ. 108), δηλ. ἕκαστον ψηφίον τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ διαιρέτου. Θὰ ἐκτελέσωμεν τὰς διαιρέσεις κατὰ τρόπον ὥστε ἡ ὅλη ἐργασία νὰ γίνῃ ταχύτερον. Πρὸς τοῦτο διαιροῦμεν πρῶτον τὰς 2 χιλ., ἐπειδὴ ὅμως δὲν διαιροῦνται, τὰς τρέπομεν εἰς 20 ἑκ. καὶ 3 ἑκ. τοῦ ἄλλου προσθετέου 23 ἑκ., ἐπειδὴ ὅμως καὶ αὐταὶ δὲν διαιροῦνται τὰς τρέπομεν εἰς 230 δεκ. καὶ 4 τοῦ ἄλλου προσθετέου 234 δεκ. Χωρίζομεν δηλ. ἀπὸ τὰ ἀριστερὰ τοῦ διαιρετέου τόσα ψηφία ὅσα ἀρκοῦν διὰ νὰ σχηματισθῇ ἀριθμὸς ἴσος ἢ μεγαλύτερος τοῦ διαιρέτου. Τὰς 234 δεκ. διαιροῦμεν διὰ 67 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον *3* δεκ. καὶ μένουν 33 δεκ. τὰς ὁποίας τρέπομεν εἰς 330 μον. καὶ 9 τοῦ ἄλλου προσθετέου 339, διαιροῦντες καὶ ταύτας διὰ 67 εὑρίσκομεν πηλίκον *5* μον. καὶ μένουν 4 μον. Ὥστε τὸ πηλίκον εἶνε *3* δεκ. καὶ *5* μον., δηλ. ὁ ἀριθμὸς 35, καὶ τὸ ὑπόλοιπον ὁ 4.

Ὡς γνωστὸν χάριν συντομίας ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς.

$$\begin{array}{r|l} 2349 & 67 \\ \cline{2-2} 339 & 35 \\ 4 & \end{array}$$

ΔΟΚΙΜΗ ΤΗΣ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ

122. Εἴδομεν (ἐδ. 107) ὅτι εἰς πᾶσαν διαίρεσιν ὁ διαιρετέος εἶνε ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον σὺν τῷ ὑπολοίπῳ διὰ τοῦτο διὰ νὰ κάμωμεν τὴν δοκιμὴν τῆς διαιρέσεως πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ πηλίκον καὶ εἰς τὸ γινόμενον προσθέτομεν τὸ ὑπόλοιπον (ἂν ὑπάρχῃ) καὶ ἂν δὲν εὕρωμεν τὸν διαιρετέον, ἡ πρᾶξις δὲν ἔγινεν ὀρθῶς.

Κατ' ἄλλον τρόπον προσθέτομεν τὰ ψηφία τοῦ διαιρέτου καὶ κατόπιν τοῦ πηλίκου μέχρις ὅτου εὕρωμεν ἀριθμοὺς μονοψηφίους, τοὺς ὁποίους γράφομεν εἰς τὰς δύο ἄνω γωνίας ἑνὸς σταυροῦ. Τοῦ γινομένου αὐτῶν καὶ τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως προσθέτομεν ὁμοίως τὰ ψηφία, κατόπιν δὲ καὶ τοῦ διαιρέτου μέχρις ὅτου εὕρωμεν μονοψηφίους ἀριθμούς, τοὺς ὁποίους γράφομεν εἰς τὰς δύο κάτω γωνίας τοῦ σταυροῦ. Ἂν οἱ δύο τελευταῖοι οὗτοι ἀριθμοὶ δὲν εἶναι ἴσοι, ἡ πρᾶξις δὲν ἔγινεν ὀρθῶς.

4	8
9	9

ΣΥΝΤΟΜΙΑΙ ΤΗΣ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ

122. Ἔστω ὅτι ζητοῦμεν τὸ πηλίκον καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως 6352 : 10. Ζητοῦμεν δηλ. νὰ εὕρωμεν πόσας φορὰς χωρεῖ ὁ 10 εἰς τὸν 6352, ἤτοι πόσας δεκάδας ἔχει ὁ ἀριθμὸς οὗτος. Εὑρίσκομεν δὲ ταύτας ἀμέσως ἂν ἀποκόψωμεν τὰς μονάδας τοῦ ἀριθμοῦ, ἔχει δηλ. οὗτος 635 δεκάδας· ὥστε τὸ πηλίκον εἶνε 635 καὶ τὸ ὑπόλοιπον αἱ 2 μονάδες τοῦ ἀριθμοῦ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 69) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ πηλίκα καὶ τὰ ὑπόλοιπα τῶν ἑξῆς διαιρέσεων χωρὶς νὰ ἐκτελεσθοῦν αὗται καὶ νὰ δικαιολογηθῇ ὁ τρόπος τῆς εὑρέσεως αὐτῶν: α') 4500 : 100, β') 8976 : 100, γ') 956000 : 1000, δ') 64432 : 1000.

70) ***Νὰ ἐξαχθῇ κανὼν διαιρέσεως ἀριθμοῦ δι' ἄλλου ὁ ὁποῖος ἀποτελεῖται ἀπὸ τὴν μονάδα ἀκολουθουμένην ὑπὸ μηδενικῶν.***

123. Ἔστω ὅτι ζητοῦμεν τὸ πηλίκον 584 : 70. Ζητοῦμεν δηλ. νὰ εὕρωμεν πόσας φορὰς χωρεῖ ὁ 70, δηλ. αἱ 7 δεκάδες, εἰς τὸν 584. Ἀλλὰ αἱ 7 δεκ. μόνον εἰς τὰς 58 δεκάδας τοῦ ἀριθμοῦ δύνανται νὰ χωροῦν, διαιροῦντες λοιπὸν αὐτὰς εὑρίσκομεν πηλίκον 8 καὶ ὑπόλοιπον 2 δεκάδας, αἱ ὁποῖαι μὲ τὰς 4 μονάδας τοῦ ἀριθμοῦ ἀποτελοῦν τὸν ἀριθμὸν 24, ὁ ὁποῖος μένει ὡς ὑπόλοιπον.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 71). Νὰ εὑρεθοῦν τὰ πηλίκα καὶ τὰ ὑπόλοιπα τῶν ἑξῆς διαιρέσεων: 5600 : 800, 5634 : 800, 786000 : 5000, 786594 : 5000.

72) ***Νὰ ἐξαχθῇ κανὼν συντόμου ἐκτελέσεως τῆς διαιρέσεως δι' ἀριθμοῦ λήγοντος εἰς μηδενικά.***

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

73) Νὰ ἐκτελεσθοῦν ἀπὸ μνήμης καὶ γραπτῶς αἱ ἑξῆς διαιρέσεις κατὰ τὸν ἑπόμενον τρόπον: π. χ. 85 : 3, 3×20=60, 85—60=25, 3×8=24, 20+8=28 πηλίκον καὶ ὑπόλοιπον 1.

Τῶν ἀριθμῶν ἀπὸ 1 μέχρις 100 διὰ τοῦ 2 καὶ διὰ τοῦ 3.

74) Ὁμοίως τῶν ἀριθμῶν ἀπὸ 1 μέχρι 50 διὰ τοῦ 4.

75) Ὁμοίως τῶν ἀριθμῶν ἀπὸ 1 μέχρις 60 καὶ τῶν 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100 διὰ τοῦ 5.

76) Ὁμοίως τῶν ἑξῆς: α΄) 75 : 6, β΄) 65 : 7, γ΄) 100 : 8, δ΄) 103 : 9.

77) Ὁμοίως τῶν ἑξῆς: α΄) 79 : 11, β΄) 85 : 12, γ΄) 40 : 13, δ΄) 45 : 14, ε΄) 67 : 15.

78) ***Νὰ διαιρεθοῦν οἱ ἀριθμοὶ 10, 100, 1000, 10000 100000 α΄) διὰ 9, β΄) διὰ 11.***

79) Ποῖοι ἀκέραιοι ἀριθμοὶ εἶνε πηλίκα τῶν ἑξῆς διαιρέσεων: 7 : 9, 25 : 83, 562 : 749, 5429 : 8746 ;

80) Ποῖα εἶνε τὰ πηλίκα τῶν ἑξῆς διαιρέσεων: α΄) 0 : 5, β΄) 0 : 29, γ΄) 0 : 324, δ΄) 0 : 3589 ;

81) Ποῖον εἶνε τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως 0 : 0 ;

82) Ποῖα εἶνε τὰ πηλίκα τῶν ἑξῆς διαιρέσεων: 7 : 0, 32 : 0,

ΕΚΤΕΛΕΣΙΣ ΠΡΑΞΕΩΝ ΕΙΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

83) α΄) (10 + 12) : 2, β) 30 : (2 + 3), γ΄) (20 + 30 + 40) : 3, δ΄) 120 : (3 + 5 + 4), ε΄) (48 + 72 + 24) : (3 + 4 + 5).

84) α΄) (91—39—26) : 13, β΄) 51 : (59 — 23 — 19).

85) α΄) (15 + 30) : (8—3), β΄) (30—10) : (2 + 3), γ΄) (20 — 8) : (6 — 2), δ΄) (72 + 27 + 36) : (34 — 14 —11), ε΄) (112 — 42 — 28) : (6 + 5 + 3), στ΄) (85 — 27 — 25) : (39 — 15 — 13).

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΛΥΟΜΕΝΑ ΔΙΑ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ

125. Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦ ἐδ. 101, τὸ ὁποῖον ἐλύσαμεν διὰ μερισμοῦ, ἐδόθη ἡ τιμὴ τῶν πολλῶν ὀκάδων καὶ ἐζητεῖτο ἡ τιμὴ τῆς 1 ὀκᾶς.

Ἑπομένως: ***Ὅταν δίδεται ἡ τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων καὶ ζητῆται ἡ τιμή τῆς μιᾶς μονάδος, διὰ νὰ εὕρωμεν ταύτην κάμνομεν διαίρεσιν μερισμοῦ, εἰς τὴν ὁποίαν διαιρετέος***

εἶνε ἡ δοθεῖσα τιμὴ καὶ διαιρέτης ὁ ἄλλος δοθεὶς ἀριθμός.

Γενικῶς τὰ προβλήματα τοῦ μερισμοῦ δύνανται νὰ διατυπωθοῦν ὡς ἑξῆς.

Ἠγόρασεν εἷς α πορτοκάλια πληρώσας β δρ.· πόσον ἐτιμᾶτο ἕκαστον;

Λύσις. Διὰ νὰ εὕρωμεν πόσον ἠγόρασεν ἕκαστον, θὰ χωρίσωμεν τὰς β δρ. εἰς α ἴσα μέρη, θὰ διαιρέσωμεν δηλ. τὸ β. διὰ τοῦ α καὶ ἂν παραστήσωμεν τὸ πηλίκον διὰ τοῦ π, θὰ ἔχωμεν τὸν τύπον π = β : α. Οὕτως ἂν ἠγόραζε 50 πορτοκάλια ἀντὶ 200 δρ., ἕκαστον θὰ ἐτιμᾶτο π = β : α = 200 : 50 = 4 δρ.

126. Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦ ἐδ. 104, τὸν ὁποῖον ἐλύσαμεν διὰ μετρήσεως, ἐδόθησαν αἱ τιμαὶ τῆς μιᾶς ὀκᾶς καὶ τῶν πολλῶν ὀκάδων καὶ ἐζητοῦντο αἱ πολλαὶ ὀκάδες.

Ὅθεν: ***Ὅταν δίδωνται αἱ τιμαὶ τῆς μιᾶς μονάδος καὶ τῶν πολλῶν ὁμοειδῶν μονάδων καὶ ζητοῦνται αἱ πολλαὶ μονάδες, διὰ νὰ εὕρωμεν ταύτας, κάμνομεν διαίρεσιν μετρήσεως, εἰς τὴν ὁποίαν διαιρετέος εἶνε ἡ τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων καὶ διαιρέτης ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος.***

Γενικῶς τὰ προβλήματα τῆς μετρήσεως δύνανται νὰ διατυπωθοῦν ὡς ἑξῆς:

Πόσα πορτοκάλια ἀγοράζομεν μὲ β δρ., ὅταν ἕκαστον τιμᾶται α δρ.;

Λύσις. Ἀφοῦ ἕκαστον πορτοκάλιον τιμᾶται α δρ., θὰ ἀγοράσωμεν τόσα πορτοκάλια ὅσας φορὰς χωροῦν αἱ α δρ. εἰς τὰς β δρ. Θὰ διαιρέσωμεν δηλ. τὸ β διὰ τοῦ α καὶ ἂν τὸ πηλίκον παραστήσωμεν διὰ τοῦ x, θὰ ἔχωμεν τὸν τύπον x = β : α.

Οὕτως, ἂν τὸ πορτοκάλιον τιμᾶται 4 δρ., μὲ 200 δρ. θὰ ἀγοράσωμεν x = β : α = 200 : 4 = 50 πορτοκάλια.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

86) Πόσας φορὰς ὁ ἀριθμὸς 672 περιέχεται εἰς τὸν ἀριθμὸν 18816; (28)

87) Ἔχει τις 62050 δρ. τὸ ἔτος εἰσόδημα· πόσα δύναται νὰ ἐξοδεύῃ τὴν ἡμέραν; (170)

88) Ὑπάλληλος λαμβάνει τὸ ἔτος 57360 δρ. μισθόν, ἐξοδεύει δὲ 44760· πόσας δραχμὰς οἰκονομεῖ κατὰ μῆνα καὶ πόσας καθ' ἡμέραν; (1050, 35)

89) Ἐργάται τινὲς ἔλαβον διὰ τὴν ἐργασίαν 6 ἡμερῶν 11520 δρ.

τὸ ἡμερομίσθιον ἑκάστου ἦτο 80 δρ.· πόσοι ἦσαν οἱ ἐργάται; (24)

90) Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ νομοῦ Ἀττικῆς καὶ Βοιωτίας εἶνε 6750 τετραγωνικὰ χιλιόμετρα περίπου, ἐπ' αὐτῆς δὲ κατοικοῦν 1032750 κάτοικοι· πόσοι κάτοικοι ἀναλογοῦν εἰς ἕκαστον τετραγωνικὸν χιλιόμετρον; (153)

91) Διὰ τὴν πληρωμὴν χρέους 36000 δρ. πληρώνει εἰς 500 δρ. τὸν μῆνα· μετὰ πόσα ἔτη θὰ πληρώσῃ ὅλον τὸ ποσόν ; (6 ἔτη)

92) Ἠγόρασεν εἰς ἓν τεμάχιον ὑφάσματος ἀντὶ 24960 δρ. πρὸς 260 δρ. τὸν πῆχυν· ἀπὸ πόσους πήχεις ἀποτελεῖται τὸ ὕφασμα καὶ πόσας ἐνδυμασίας θὰ κατασκευάσῃ ἐξ αὐτῶν, ἂν δι' ἑκάστην ἐνδυμασίαν χρειάζωνται 4 πήχεις ; (96, 24)

93) Μὲ ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν 627 διὰ νὰ εὕρωμεν γινόμενον 223212 ; (356)

94) Μὲ ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν 245, ἵνα, ἂν προσθέσωμεν εἰς τὸ γινόμενον 244, εὕρωμεν ὡς ἄθροισμα τὸν 60269 ; (245)

√95) Διὰ τὴν οἰκοδομὴν μιᾶς οἰκίας εἰργάσθησαν 45 ἐργάται μὲ ἡμερομίσθιον 60 δρ., ἔλαβον δὲ 175500 δρ.· πόσας ἡμέρας εἰργάσθησαν ; (65)

√96) Ἠγόρασεν εἰς ζάχαριν πρὸς 18 δρ. τὴν ὀκᾶν καὶ ἐπώλησε ταύτην πρὸς 21 δρ., ἐκέρδισε δὲ 4680 δρ.· πόση ἦτο ἡ ζάχαρις ; (1560)

97) Ἀποθανὼν εἷς ἀφῆκε διὰ διαθήκης τὴν περιουσίαν του, ἀποτελουμένην ἀπὸ 550000 δρ. εἰς τοὺς τρεῖς υἱούς του μὲ τὸν ὅρον ὁ β' νὰ λάβῃ 20000 περισσοτέρας τοῦ α' καὶ ὁ γ' 30000 δρ. περισσοτέρας τοῦ β'· πόσας θὰ λάβῃ ἕκαστος ;
(160000, 180000, 210000).

98) Ἠγόρασεν εἰς σῖτον ἀντὶ 21000 δρ., ἐπώλησε δὲ ἐκ τούτου 1200 ὀκ. ἀντὶ 10800 δρ. μὲ κέρδος 2 δρ. τὴν ὀκᾶν· πόσας ὀκάδας εἶχεν ἀγοράσει ; (3000)

99) Ἠγόρασεν εἰς 360 πήχεις ὑφάσματος πρὸς 150 δρ. τὸν πῆχυν, ἐπώλησε δὲ μέρος αὐτοῦ πρὸς 180 δρ. τὸν πῆχυν καὶ τὸ ὑπόλοιπον τοῦ ἔμεινε κέρδος· πόσον τοῦ ἔμεινεν ; (60)

100) Ἂν 8 ὀκ. ζαχάρεως τιμῶνται 184 δρ.· πόσον τιμῶνται 17 ὀκάδες ; (Εὑρίσκομεν πρῶτον πόσον τιμᾶται ἡ ὀκᾶ καὶ κατόπιν πόσον τιμῶνται αἱ 17 ὀκάδες). (391)

Ὁ τρόπος αὐτὸς τῆς λύσεως λέγεται **μέθοδος** διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΔΙΑΦΟΡΑ

101) Ταχυδρόμος ἔχει νὰ διανύσῃ μίαν ἀπόστασιν εἰς 12 ἡμέρας ἀλλὰ κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς ἀναχωρήσεως λαμβάνει ἐντολὴν νὰ διανύσῃ τὴν ἀπόστασιν εἰς 9 ἡμέρας· ἕνεκα τούτου ἀναγκάζεται νὰ διανύσῃ 9 χιλιόμετρα περισσότερον· πόση εἶνε ἡ ἀπόστασις;
(9×9 χιλ. ὤφειλε νὰ διανύσῃ εἰς 3 ἡμέρας) (324)

102) Κτηνοτρόφος ἐπλήρωσεν ἓν ποσὸν χρημάτων, διὰ νὰ βοσκήσῃ 30 βόας εἰς ἓν λιβάδιον ἐπὶ 150 ἡμέρας, μετὰ 90 δὲ ἡμέρας ἔφερε καὶ ἄλλους 6 βόας· ἐπὶ πόσας ἡμέρας, δύναται ἀκόμη νὰ βοσκήσῃ τοὺς 36 βόας; (50)

103) Τὸ πηλίκον δύο ἀριθμῶν εἶνε 7, τὸ δὲ ἄθροισμά των 2760· ποῖοι εἶνε οἱ δύο αὐτοὶ ἀριθμοί; (Τὸ 8πλάσιον τοῦ β' εἶνε 2760)
(2415, 345)

104) Τὸ πηλίκον δύο ἀριθμῶν εἶναι 19, ἡ δὲ διαφορά των εἶνε 4266· ποῖοι εἶνε οἱ δύο αὐτοὶ ἀριθμοί; (4503, 237)

105) Δύο ἐργάται λαμβάνουν μαζὺ 100 δραχμὰς τὴν ἡμέραν, ὁ πρῶτος εἰργάσθη 23 ἡμέρας καὶ ὁ δεύτερος 17 ἡμέρας, ἔλαβον δὲ μαζὺ 2060 δραχμάς· πόσον ἦτο τὸ ἡμερομίσθιον ἑκάστου;
(Διὰ τὰς 17 ἡμέρας ἔλαβον 1700 δρ.) (60, 40)

106) Δύο ἐργάται λαμβάνουν 100 δρ. τὴν ἡμέραν, ἀφοῦ δὲ εἰργάσθησαν ὁμοῦ μερικὰς ἡμέρας ἔλαβον ὁ μὲν πρῶτος 2100 δραχμὰς ὁ δὲ δεύτερος 1400 δρ.· πόσον ἦτο τὸ ἡμερομίσθιον ἑκάστου;
(60, 40)

107) Εἷς ἐπλήρωσε 1030 δραχμὰς μὲ 320 πεντάδραχμα καὶ δίδραχμα· πόσα πεντάδραχμα καὶ πόσα δίδραχμα ἔδωσεν;

Λύσις. Ἂν ἔδιδε μόνον δίδραχμα θὰ ἐπλήρωνε 320 × 2 = 640 δρ. ἕως δὲ εἰς τὰς 1030 ὑπολείπονται 390 δρ. Ἂν ἀντικαθιστᾷ ἓν δίδραχμον ἐξ αὐτῶν μὲ ἓν πενάδραχμον, ἐλαττώνει τὰς 390 δρ. κατὰ 3 δρ. Ἄρα θὰ ἀντικαταστήσῃ 390 : 3 = 130 δίδραχμα.

108) Εἷς ἐπώλησεν 600 ὀκ. σίτου ἀντὶ 4100 δρ., ἓν μέρος αὐτοῦ πρὸς 8 δρ. τὴν ὀκᾶν καὶ ἓν μέρος πρὸς 6 δρ. τὴν ὀκᾶν· πόσον ἐπώλησε πρὸς 8 δρ. τὴν ὀκᾶν καὶ πόσον πρὸς 5 δρ. τὴν ὀκᾶν; (Λύσις ὁμοία πρὸς τὴν προηγουμένην). (250, 350)

109) Δύο ἐργάται λαμβάνουν ὁ μὲν εἷς 50 δρ. ἡμερομίσθιον, ὁ δὲ ἄλλος 70 δρ., δι' 25 δὲ ἡμερομίσθια ἔλαβον 1450 δραχμάς· πόσας ἡμέρας εἰργάσθη ἕκαστος; (Ἐὰν ὁ α' εἰργάζετο ἐπὶ 25 ἡμέρας θὰ ἐλάμβανε 1250 δρ., αἱ ἐπὶ πλέον 200 δρ. προῆλθον ἀπὸ

τὸ κατὰ 20 δρ. μεγαλύτερον ἡμερομίσθιον τοῦ β΄). (15, 10)

110) Δύο ἐργάται ἐργάζονται μαζύ, καὶ ὁ μὲν πρῶτος λαμβάνει 20 δρ. τὴν ἡμέραν περισσότερον ἀπὸ τὸν δεύτερον, ἀφοῦ δὲ εἰργάσθησαν καὶ οἱ δύο τὰς αὐτὰς ἡμέρας, ἔλαβον ὁ μὲν πρῶτος 1750 δρ. ὁ δὲ δεύτερος 1250 δρ.· πόσον ἦτο τὸ ἡμερομίσθιον ἑκάστου; (70, 50)

111) 1200 ἄνθρωποι εἶχον τροφὰς διὰ 40 ἡμέρας, μετὰ 10 δὲ ἡμέρας ἦλθον καὶ ἄλλοι 300 ἄνθρωποι· πόσας ἡμέρας θὰ διαρκέσουν ἀκόμη αἱ τροφαί; (24)

112) Δύο ἐργάται ἐργάζονται μαζύ, ὁ πρῶτος λαμβάνει 20 δρ. τὴν ἡμέραν περισσότερον ἀπὸ τὸν δεύτερον, ἔλαβον δὲ διὰ 10 ἡμερομίσθια τοῦ πρώτου καὶ 3 τοῦ δευτέρου 850 δραχμάς· πόσον ἦτο τὸ ἡμερομίσθιον ἑκάστου; (10 ἡμερομίσθια τοῦ α΄ ἰσοδυναμοῦν πρὸς 10 τοῦ β΄ καὶ 200 δρ., ἄρα τὰ 10 τοῦ α΄ καὶ 3 τοῦ β΄, διὰ τὰ ὁποῖα ἔλαβον 850 δρ., ἰσοδυναμοῦν πρὸς 13 τοῦ β΄ καὶ 200 δρ.). (70, 50)

ΠΕΡΙ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

127. Εἷς ἐργάτης λαμβάνει δι' ἑκάστην ὥραν ἐργασίας 8 δρ. ἐργάζεται δὲ ἐπὶ 8 ὥρας τὴν ἡμέραν· πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ ἂν ἐργασθῇ 8 ἡμέρας;

Λύσις. Ἀφοῦ διὰ 1 ὥραν ἐργασίας λαμβάνῃ 8 δρ., διὰ 8 ὥρ., δηλ. διὰ μίαν ἡμέραν, θὰ λάβῃ 8×8 δρ. καὶ διὰ τὰς 8 ἡμέρας θὰ λάβῃ $8 \times 8 \times 8 = 512$ δρ.

Εἰς τὸ γινόμενον $8 \times 8 \times 8$ παρατηροῦμεν ὅτι ὅλοι οἱ παράγοντες εἶνε ἴσοι. Τὰ γινόμενα ταῦτα λέγονται ***δυνάμεις*** τῶν ἀριθμῶν.

Ὥστε: ***Δύναμις ἑνὸς ἀριθμοῦ λέγεται τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων ἴσων πρὸς τὸν ἀριθμόν.***

Οὕτω τὸ ἄνω γινόμενον $8 \times 8 \times 8$ λέγεται τρίτη δύναμις τοῦ 8. Γράφομεν δὲ συντόμως τὰ γινόμενα ταῦτα ὡς ἑξῆς. Γράφομεν τὸν ἕνα μόνον παράγοντα, ὁ ὁποῖος λέγεται ***βάσις*** τῆς δυνάμεως, δεξιὰ δὲ καὶ ὀλίγον ἄνω γράφομεν τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος φανερώνει πόσοι εἶναι οἱ παράγοντες, καὶ ὁ ὁποῖος λέγεται ***ἐκθέτης*** τῆς δυνάμεως.

Π.χ. τὸ γινόμενον $8 \times 8 \times 8$ γράφεται συντόμως 8^3 καὶ ἀπαγγέλεται 8 εἰς τὴν τρίτην δύναμιν ἢ τρίτη δύναμις τοῦ 8.

Ὁμοίως 5^4 ἀπαγγέλεται τετάρτη δύναμις τοῦ 5 ἢ 5 εἰς τὴν τετάρτην δύναμιν.

Ἡ δευτέρα δύναμις τῶν ἀριθμῶν λέγεται καὶ ***τετράγωνον***, ἡ δὲ τρίτη λέγεται καὶ ***κύβος***.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

128. Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δυνάμεις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, σχηματίζομεν μίαν νέαν δύναμιν μὲ βάσιν τὸν ἀριθμὸν αὐτὸν καὶ μὲ ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν του.

Δηλ. $8^2 \times 8^3 = 8^5$

Διότι $8^2 = 8 \times 8$ κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν δυνάμεων

καὶ $8^3 = 8 \times 8 \times 8$

Ἄρα $8^2 \times 8^3 = (8 \times 8) \times (8 \times 8 \times 8)$

ἢ (ἐδ. 87) $8^2 \times 8^3 = 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 = 8^5$

Ὅθεν $8^2 \times 8^3 = 8^5$.

129. Διὰ νὰ διαιρέσωμεν δύο δυνάμεις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ σχηματίζομεν μίαν νέαν δύναμιν μὲ βάσιν τὸν ἀριθμὸν αὐτὸν καὶ μὲ ἐκθέτην τὴν διαφορὰν τοῦ ἐκθέτου τοῦ διαιρέτου ἀπὸ τὸν ἐκθέτην τοῦ διαιρετέου. Δηλ. $8^5 : 8^2 = 8^3$.

Διότι $8^5 : 8^2 = (8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8) : (8 \times 8)$. Διὰ νὰ διαιρέσωμεν δὲ τὸ α΄ γινόμενον διὰ τοῦ β΄, διαιροῦμεν αὐτὸ διὰ τοῦ α΄ παράγοντος τοῦ β΄ γινομένου (ἐδ.111) καὶ ἐπειδὴ ὁ διαιρέτης οὗτος, ὁ 8, εἶνε εἷς τῶν παραγόντων τοῦ α΄, ἐξαλείφομεν αὐτὸν (ἐδ.110) καὶ εὑρίσκομεν $8 \times 8 \times 8 \times 8$. Τοῦτο διαιροῦμεν διὰ τοῦ β΄ παράγοντος τοῦ β΄ γινομένου καὶ εὑρίσκομεν ὁμοίως πηλίκον $8 \times 8 \times 8$, δηλ. 8^3. Ὥστε $8^5 : 8^2 = 8^3$.

130. Ἡ μηδενικὴ δύναμις παντὸς ἀριθμοῦ εἶνε ἴση μὲ τὴν μονάδα. Δηλ. $\alpha^0 = 1$.

Ἔστω ἡ διαίρεσις $7^3 : 7^3$.

Κατὰ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα θὰ ἔχωμεν $7^3 : 7^3 = 7^0$,

Ἀλλὰ τὸ πηλίκον 7^0 δὲν ἔχει καμμίαν σημασίαν, διότι δηλοῖ γινόμενον, τὸ ὁποῖον δὲν ἔχει κανένα παράγοντα, τοιοῦτον ὅμως γινόμενον δὲν ὑπάρχει. Ἀλλὰ ἐπειδὴ ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης εἶνε ἴσοι γνωρίζομεν ὅτι τὸ πηλίκον αὐτῶν εἶνε ἡ 1. Δεχόμεθα λοιπὸν ὅτι τὸ σύμβολον 7^0 εἶνε ἴσον πρὸς τὴν 1, καὶ γενικῶς $\alpha^0 = 1$.

131. Ἡ πρώτη δύναμις παντὸς ἀριθμοῦ εἶνε ἴση μὲ αὐτὸν τὸν ἀριθμόν. Δηλ. $\alpha^1 = \alpha$.

Ἔστω ἡ διαίρεσις $7^3 : 7^2$.

Θὰ ἔχωμεν $7^3 : 7^2 = 7^1$. Ἀλλὰ τὸ πηλίκον 7^1 δὲν ἔχει καμμίαν σημασίαν, διότι δηλοῖ γινόμενον, τὸ ὁποῖον ἔχει ἕνα μόνον παράγοντα, τοιοῦτον ὅμως γινόμενον δὲν ὑπάρχει. Ἀλλὰ ἐὰν διαιρέσωμεν τὰς δυνάμεις αὐτὰς ὡς γινόμενα (ἐδ. 111 καὶ 110) θὰ ἔχωμεν $7^3 : 7^2 = (7\times7\times7) : (7\times7) = 7$.

Δεχόμεθα λοιπὸν ὅτι τὸ σύμβολον $7^1 = 7$, καὶ γενικῶς $α^1 = α$

132. Διὰ νὰ ὑψώσωμεν μίαν δύναμιν ἀριθμοῦ εἰς ἄλλην δύναμιν, σχηματίζομεν μίαν νέαν δύναμιν μὲ βάσιν τὸν ἴδιον ἀριθμὸν καὶ μὲ ἐκθέτην τὸ γινόμενον τῶν δύο ἐκθετῶν

Ἔστω ὅτι ἔχομεν νὰ ὑψώσωμεν τὴν δύναμιν 8^3 εἰς τὴν δευτέραν δύναμιν, δηλ. $(8^3)^2$.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν δυνάμεων $(8^3)^2$ σημαίνει $8^3\times8^3$, τὸ ὁποῖον εἶνε ἴσον μὲ 8^6. Ὅθεν $(8^3)^2 = 8^6$.

133. Διὰ νὰ ὑψώσωμεν γινόμενον εἰς μίαν δύναμιν, ὑψώνομεν ἕκαστον παράγοντα τοῦ γινομένου εἰς τὴν δύναμιν αὐτήν. Δηλ. $(2\times3)^2 = 2^2\times3^2$.

Διότι $(2\times3)^2 = (2\times3)\times(2\times3)$, πολλαπλασιάζοντες τὰ δύο ταῦτα γινόμενα (ἐδ. 87) εὑρίσκομεν $2\times3\times2\times3$, ἀλλάσσοντες δὲ τὴν τάξιν τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου θὰ ἔχωμεν (ἐδ. 84) $2\times2\times3\times3$ ἢ (ἐδ. 85) $(2\times2)\times(3\times3) = 2^2\times3^2$. Ἑπομένως $(2\times3)^2 = 2^2\times3^3$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

113) Νὰ εὑρεθοῦν ἀπὸ μνήμης καὶ γραπτῶς οἱ ἀριθμοί, τοὺς ὁποίους παριστάνουν αἱ δυνάμεις τοῦ 10 ἀπὸ τῆς 2ας μέχρι τῆς 6ης, β') τὰ τετράγωνα τῶν ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ 13, γ') ὁμοίως τῶν ἀριθμῶν 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 200, 500, 800, 1000, 7000, 9000, 10000, δ') οἱ κύβοι τῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3, 4, 5, ε') τὸ γινόμενον $2^2\times2^3\times3^2$, στ') τὰ πηλίκα $2^{25} : 2^{15}$, $3^9 : 3^5$, $5^{10} : 5^6$.

114) Νὰ εὑρεθοῦν γραπτῶς οἱ ἀριθμοί, τοὺς ὁποίους παριστάνουν α') αἱ δυνάμεις 6^3, 7^3 κλπ. μέχρι 15^3, β') αἱ δυνάμεις 9^4, 8^5, 5^6, γ') τὸ γινόμενον $2^4\times3^3\times5^2$ καὶ τὸ πηλίκον $7^9 : 7^4$.

115) Νὰ ὑψωθοῦν αἱ ἑξῆς δυνάμεις εἰς ἄλλας:
α') $(8^6)^3$, β') $(10^7)^{13}$, γ') $(17^{19})^{25}$.

116) Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοί, τοὺς ὁποίους παριστάνουν αἱ ἑξῆς δυνάμεις: α') $(3^2)^4$, β') $(2^4)^3$, γ') $(5^2)^4$.

117) Νὰ ὑψωθῇ τὸ γινόμενον $2 \times 3 \times 4$ εἰς τὴν 4ην δύναμιν καὶ κατόπιν νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός, τὸν ὁποῖον παριστάνει ἡ δύναμις αὐτή.

ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΣ

134. ***Ἀριθμὸς λέγεται διαιρετὸς δι' ἄλλου, ἐὰν διαιρῆται δι' αὐτοῦ ἀκριβῶς,*** χωρὶς δηλ. νὰ ἀφίνῃ ὑπόλοιπον.

Π.χ. ὁ ἀριθμὸς 12 εἶνε διαιρετὸς διὰ τοῦ 4, διότι $12 : 4 = 3$ ἀκριβῶς. Ἀντιστρόφως ὁ 4 λέγεται ***διαιρέτης*** τοῦ 12.

Ὥστε: ***Ἀριθμὸς λέγεται διαιρέτης ἄλλου, ὅταν διαιρῇ τὸν ἄλλον ἀριθμὸν ἀκριβῶς.***

Ἐπειδὴ $12 : 4 = 3$, ἕπεται ὅτι ὁ $12 = 4 \times 3$, δηλ. γίνεται ὁ 12 ἀπὸ τὸν 4 διὰ πολλαπλασιασμοῦ, διὰ τοῦτο ὁ 12 λέγεται ***πολλαπλάσιον*** τοῦ 4, ὁ δὲ 4 ***παράγων*** τοῦ 12.

Ὁ 12 λοιπὸν λέγεται καὶ διαιρετὸς ἀριθμὸς διὰ τοῦ 4 καὶ πολλαπλάσιον τοῦ 4, ὁ δὲ 4 λέγεται καὶ διαιρέτης τοῦ 12 καὶ παράγων τοῦ 12.

Εἶνε φανερὸν ὅτι πᾶς ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ τῆς μονάδος καὶ διὰ τοῦ ἑαυτοῦ του.

(Διὰ τὴν γ΄ τάξιν)

ΓΕΝΙΚΑΙ ΑΡΧΑΙ ΤΗΣ ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΟΣ

135. ***Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῇ ἄλλους, θὰ διαιρῇ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν.***

Π. χ. ὁ 4 διαιρῇ τοὺς 8, 12 καὶ 16, θὰ διαιρῇ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν $8+12+16=36$.

Διότι, ἀφοῦ οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι διαιροῦνται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 4, θὰ εἶνε πολλαπλάσια τοῦ 4, ἀποτελοῦνται δηλ. ἀπὸ πολλὰ 4, ἤτοι $8=4+4$, $12=4+4+4$ καὶ $16=4+4+4+4$, ἑπομένως καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν $36=8+12+16$ ἀποτελεῖται ἀπὸ πολλὰ 4, δηλ. $4+4 + 4+4+4 + 4+4+4+4$ καὶ συνεπῶς διαιρεῖται διὰ τοῦ 4.

136. ***Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῇ ἄλλον, θὰ διαιρῇ καὶ τὰ πολλαπλάσια αὐτοῦ.***

Π. χ. Ὁ 4 διαιρεῖ τὸν 20, θὰ διαιρῇ καὶ τὸ πολλαπλάσιον αὐτοῦ 60. Διότι ὁ 60 ὡς πολλαπλάσιον τοῦ 20 ἀποτελεῖται ἀπὸ πολλὰ 20, ἤτοι $60=20+20+20$. Ἀλλὰ ἀφοῦ ὁ 4 διαιρῇ τοὺς προσθετέους, θὰ διαιρῇ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν 60.

137. Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῇ δύο ἄλλους, θὰ διαιρῇ καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν.

Π. χ. ὁ 4 διαιρεῖ τοὺς 20 καὶ 8, θὰ διαιρῇ καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν $12=20-8$. Διότι ἀφοῦ οἱ ἀριθμοὶ 20 καὶ 8 διαιροῦνται ὑπὸ τοῦ 4 ἀπτελοῦνται ἀπὸ πολλὰ 4, ἤτοι

$$
\begin{array}{r}
20=4+4+4+4+4 \\
8=4+4 \\
\hline
20-8=12=4+4+4.
\end{array}
$$

ἀφαιροῦντες ἔχομεν

Εἶνε λοιπὸν ἡ διαφορὰ αὐτὴ πολλαπλάσιον τοῦ 4 καὶ ἑπομένως διαιρεῖται δι᾽ αὐτοῦ.

138. Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῇ δύο ἄλλους, θὰ διαιρῇ καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ μεγαλυτέρου διὰ τοῦ μικροτέρου.

Π. χ. Ὁ 3 διαιρεῖ τοὺς ἀριθμοὺς 66 καὶ 15, θὰ διαιρῇ καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $66:15$, δηλ. τὸ 6.

Διότι, ἀφοῦ ἡ διαίρεσις $66:15$ δίδῃ πηλίκον 4 καὶ ὑπόλοιπον 6, θὰ ἔχωμεν (ἐδ. 107) $66=(15\times4)+6$ ἢ (ἐδ. 50) $66-(15\times4)=6$. Ἀλλὰ ἀφοῦ ὁ 3 διαιρῇ τὸν 15, θὰ διαιρῇ καὶ τὸ πολλαπλάσιον αὐτοῦ (15×4), ἐπειδὴ δὲ διαιρεῖ καὶ τὸν 66, θὰ διαιρῇ καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν 6.

ΑΣΚΗΣΙΣ. 118) Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῇ τὸν μικρότερον ἐκ δύο ἀριθμῶν καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ μεγαλυτέρου διὰ τοῦ μικροτέρου, θὰ διαιρῇ καὶ τὸν μεγαλύτερον.

ΓΝΩΡΙΣΜΑΤΑ ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΟΣ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Πολλάκις εἶνε χρήσιμον νὰ γνωρίζωμεν ἂν εἷς ἀριθμὸς εἶνε διαιρετὸς δι᾽ ἄλλου, χωρὶς νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν. Τοῦτο εἶνε δυνατόν, ὅταν διαιρέται εἶνε οἱ ἀριθμοὶ 2, 3, 4, 5, 9, 25 καὶ μερικοὶ ἄλλοι.

139. Διὰ τοῦ 2 ἢ διὰ τοῦ 5 εἶνε διαιρετὸς ὁ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ ψηφίον τῶν μονάδων εἶνε διαιρετὸν διὰ τοῦ 2 ἢ διὰ τοῦ 5.

Διότι πᾶς πολυψήφιος ἀριθμὸς ἀποτελεῖται ὑπὸ δεκάδας καὶ μονάδας, π. χ. ὁ $2568=256$δεκ. $+$ 8μον. Ἑκάστη δεκὰς διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 2 καὶ διὰ τοῦ 5, καὶ ὅλαι λοιπὸν αἱ 256 δεκάδες τοῦ ἀριθμοῦ διαιροῦνται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 2 καὶ διὰ τοῦ 5.

Ἐπομένως ὅ,τι ὑπόλοιπον ἀφήσῃ τὸ ψηφίον 8 τῶν μονάδων τοῦ ἀριθμοῦ διαιρούμενον διὰ τοῦ 2 ἢ διὰ τοῦ 5, τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον θὰ ἀφήσῃ καὶ ὅλος ὁ ἀριθμὸς 2568 διαιρούμενος διὰ τοῦ 2 ἢ διὰ τοῦ 5.

Οἱ διὰ τοῦ 2 διαιρετοὶ ἀριθμοὶ λέγονται ***ἄρτιοι***, οἱ δὲ μὴ διαιρετοὶ λέγονται ***περιττοί***.

140. Διὰ τοῦ 4 ἢ τοῦ 25 εἶνε διαιρετὸς ὁ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὰ δύο τελευταῖα ψηφία σχηματίζουν ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ τοῦ 4 ἢ διὰ τοῦ 25.

Διότι πᾶς ἀριθμὸς μεγαλύτερος διψηφίου ἀποτελεῖται ἀπὸ ἑκατοντάδας, καὶ ἀπὸ τὸν ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον σχηματίζουν τὰ δύο τελευταῖα ψηφία του: π.χ. ὁ 3675 ἀποτελεῖται ἀπὸ 36ἑκ.+75. Ἑκάστη ἑκατοντὰς διαιρεῖται διὰ τοῦ 4 καὶ τοῦ 25, καὶ ὅλαι λοιπὸν αἱ 36 ἑκατοντάδες τοῦ ἀριθμοῦ διαιροῦνται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 4 καὶ διὰ τοῦ 25, συνεπῶς ὅ,τι ὑπόλοιπον ἀφίνει ὁ 75 διαιρούμενος διὰ τοῦ 4 ἢ διὰ τοῦ 25 τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον θὰ ἀφήσῃ καὶ ὅλος ὁ ἀριθμὸς 3675 διαιρούμενος διὰ τοῦ 4 ἢ τοῦ 25.

141. Διὰ τοῦ 3 ἢ διὰ τοῦ 9 εἶνε διαιρετὸς πᾶς ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων (θεωρουμένων ὡς ἁπλῶν μονάδων) ***εἶνε διαιρετὸν διὰ τοῦ 3 ἢ τοῦ 9.***

Ἂς λάβωμεν τὸν ἀριθμὸν 678.

Ὁ 678=6ἑκ.+7δεκ.+8μον. Ἐὰν ἑκάστην ἐκ τῶν 6 τούτων ἑκατ. διαιρέσωμεν διὰ τοῦ 3 ἢ τοῦ 9 θὰ ἀφήσῃ ὑπόλοιπον 1 μονάδα. (Ἀσκ. 78) καὶ αἱ 6 θὰ ἀφήσουν *6* μονάδας. Ἐπίσης ἐὰν ἑκάστην ἐκ τῶν 7 τούτων δεκάδων διαιρέσωμεν διὰ τοῦ 3 ἢ διὰ τοῦ 9, θὰ ἀφήσῃ ὑπόλοιπον 1 μον. καὶ αἱ 7 θὰ ἀφήσουν *7* μον. Ὥστε θὰ μείνουν *6* μον. καὶ *7* μον. καὶ αἱ *8* μον. τοῦ ἀριθμοῦ, δηλ. τὸ ἄθροισμα 6+7+8 τῶν ψηφίων τοῦ ἀριθμοῦ θεωρουμένων ὡς ἁπλῶν μονάδων. Συνεπῶς ὅ,τι ὑπόλοιπον ἀφίνει τὸ ἄθροισμα τοῦτο διαιρούμενον διὰ τοῦ 3 ἢ τοῦ 9, τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον θὰ ἀφήσῃ καὶ ὅλος ὁ ἀριθμὸς διαιρούμενος διὰ τοῦ 3 ἢ τοῦ 9.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

119) Εἰς ποῖα ψηφία λήγουν οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι εἶνε διαιρετοὶ διὰ τοῦ 2 καὶ εἰς ποῖα οἱ διὰ τοῦ 5;

120) Ποίους ἀριθμοὺς ἀποτελοῦν τὰ δύο τελευταῖα ψηφία τῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι εἶναι διαιρετοὶ διὰ τοῦ 25;

121) Ποῖοι ἀριθμοὶ εἶνε διαιρετοὶ διὰ 10, 100, 1000 κλπ. (παράβαλε ἄσκησιν 69).

122) Νὰ εὑρεθῇ ποῖοι ἐκ τῶν ἀριθμῶν 680, 2587, 95675, 527248 εἶνε διαιρετοὶ δι᾿ ἑκάστου ἐκ τῶν 2, 4, 5, 10, 25, καὶ ποῖα τὰ ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων ὅλων διὰ τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν, χωρὶς νὰ ἐκτελεσθοῦν αὗται.

123) Νὰ εὑρεθοῦν δύο τριψήφιοι ἀριθμοὶ διαιρετοὶ διὰ τοῦ 2, καὶ δύο μὴ διαιρετοί, ὁμοίως διὰ τῶν 4, 5, 10, καὶ 25.

124) Νὰ εὑρεθῇ ποῖοι ἐκ τῶν ἀριθμῶν 254, 5726, 56473, 85379151 εἶνε διαιρετοὶ διὰ τοῦ 3 καὶ ποῖοι διὰ τοῦ 9 καὶ ποῖα τὰ ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων ὅλων διὰ τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν χωρὶς νὰ ἐκτελεσθοῦν αὗται.

125) Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἑξαψήφιοι ἀριθμοὶ διαιρετοὶ διὰ τοῦ 3 καὶ δύο μὴ διαιρετοί, ὁμοίως διὰ τοῦ 9.

126) Ποῖοι ἀριθμοὶ εἶνε διαιρετοὶ διὰ τοῦ 8 καὶ τοῦ 125; (Παράβαλε διὰ 4 καὶ 25).

127) Νὰ εὑρεθῇ ποῖοι ἐκ τῶν ἀριθμῶν 7259, 5654, 18749, 5642625 εἶνε διαιρετοὶ διὰ τοῦ 8 καὶ ποῖοι διὰ τοῦ 125 καὶ ποῖα τὰ ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων ὅλων διὰ τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν, χωρὶς νὰ ἐκτελεσθοῦν αὗται.

128) Ποῖοι ἀριθμοὶ εἶνε διαιρετοὶ διὰ τοῦ 11 (παράβ. διὰ τοῦ 9).

129) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων διὰ τοῦ 11, χωρὶς νὰ ἐκτελεσθοῦν αὗται, τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν; 358, 4961, 52836

ΠΕΡΙ ΜΕΓΙΣΤΟΥ ΚΟΙΝΟΥ ΔΙΑΙΡΕΤΟΥ

142. *Κοινὸς διαιρέτης πολλῶν ἀριθμῶν λέγεται ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος τοὺς διαιρεῖ ὅλους ἀκριβῶς.*

Παραστάνεται δὲ διὰ τοῦ συμβόλου κ.δ.· π.χ. ὁ 2 εἶνε κ.δ. τῶν ἀριθμῶν 24, 36 καὶ 48.

143. *Μέγιστος κοινὸς διαιρέτης πολλῶν ἀριθμῶν λέγεται ὁ μεγαλύτερος ἀπὸ ὅλους τοὺς κοινοὺς διαιρέτας, τοὺς ὁποίους ἔχουν οἱ ἀριθμοί*

Παριστάνεται δὲ διὰ τοῦ συμβόλου μ.κ δ.· π.χ. οἱ ἀριθμοὶ 24, 36 καὶ 48 ἔχουν κ.δ. τοὺς 1, 2, 3, 4, 6 καὶ 12, μ.κ.δ. αὐτῶν εἶνε ὁ 12,

144. *Πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους λέγονται οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι δὲν ἔχουν ἄλλον κ. δ. παρὰ μόνον τὴν μονάδα.*

Π.χ. οἱ ἀριθμοὶ 3, 5, 6 καὶ 9.

145. ***Πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο λέγονται οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι καὶ ἀνὰ δύο λαμβανόμενοι εἶνε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.*** Π. χ. οἱ ἀριθμοὶ 4, 5, 7 καὶ 9

ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΟΥ Μ.Κ.Δ. ΠΟΛΛΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

146 Ἔστω ὅτι ζητοῦμεν τὸν μ.κ.δ. τῶν ἀριθμῶν 48, 12, 36, 24. Διαιροῦμεν ὅλους διὰ τοῦ μικροτέρου ἐξ αὐτῶν, τοῦ 12, καὶ εὑρίσκομεν ὑπόλοιπα 0. Ὁ 12 θὰ εἶνε ὁ μ.κ.δ., διότι ἄλλος ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ 12 δὲν διαιρεῖ τὸν 12 καὶ ἑπομένως δὲν θὰ εἶνε κ.δ. ὅλων αὐτῶν τῶν ἀριθμῶν.

Ἔστω ὅτι ζητοῦμεν τὸν μ.κ δ. τῶν ἀριθμῶν 44, 24, καὶ 56 Γράφομεν αὐτοὺς εἰς μίαν ὁριζοντίαν σειράν, κατόπιν γράφομεν τὸν μικρότερον κάτωθεν τῆς θέσεώς του καὶ μὲ αὐτὸν διαιροῦμεν ὅλους τοὺς ἄλλους, κάτωθεν δὲ ἑκάστου γράφομεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεώς του, Ἂν ὅλα τὰ ὑπόλοιπα εἶνε 0. ὁ μικρότερος θὰ εἶνε ὁ μ.κ.δ. Ἂν ἓν ὑπόλοιπον εἶνε διάφορον τοῦ μηδενός, εἰς τὴν νέαν σειράν, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν τὰ ὑπόλοιπα καὶ ὁ διαιρέτης, κάμνομεν τὸ αὐτὸ καὶ ἐξακολουθοῦμεν οὕτως μέχρις ὅτου ὅλα τὰ ὑπόλοιπα γίνουν 0. Ὁ τελευταῖος διαιρέτης θὰ εἶνε ὁ μ. κ. δ.

44	24	56	διὰ τοῦ 24
20	24	8	διὰ τοῦ 8
4	0	8	διὰ τοῦ 4
4	0	0	

Εἰς τὸ παράδειγμα μ. κ. δ. εἶνε ὁ 4.

ΑΣΚΗΣΙΣ. 130) **Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ.κ.δ. τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν:** *α΄) 12, 38, 36, 24, β΄) 80, 90, 150, 180, 540, 300, γ΄) 180, 300, 120, 540, 750.*

(Διὰ τὴν γ΄. τάξιν)

ΕΞΗΓΗΣΙΣ ΤΟΥ ΤΡΟΠΟΥ ΤΗΣ ΕΥΡΕΣΕΩΣ ΤΟΥ Μ. Κ. Δ,

147. Εἰς τὸ παράδειγμα τοῦ ἄνω ἐδ. πᾶς κ.δ. τοῦ 24 καὶ τοῦ 44 εἶνε καὶ τοῦ 20, δηλ. τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως 44 : 24 καὶ ἀντιστρόφως πᾶς κ.δ. τοῦ 24 καὶ τοῦ 20 εἶνε καὶ τοῦ 44 (ἐδ. 137 καὶ ἄσκ.118). Ὁμοίως σκεπτόμεθα καὶ διὰ τοὺς 24 καὶ 56. Ὥστε πᾶς κ.δ τῆς α΄ σειρᾶς τῶν ἀριθμῶν εἶνε καὶ τῆς β΄, δι᾽ ὅμοιον λόγον εἶνε καὶ τῆς γ΄ κλπ. μέχρι τῆς τελευταίας καὶ ἀντιστρόφως. Ἑπομένως ὁ μ. κ. δ. τῆς α΄ σειρᾶς τῶν ἀριθμῶν εἶνε καὶ τῆς τελευταίας καὶ ἀντιστρόφως.

Ἄρα ὁ μ. κ. δ. 4 τῶν ἀριθμῶν τῆς τελευταίας σειρᾶς εἶνε καὶ μ. κ. δ. τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

148. Πᾶς κ. δ. ἀριθμῶν εἶνε καὶ διαιρέτης τοῦ μ. κ. δ. αὐτῶν καὶ πᾶς διαιρέτης τοῦ μ. κ. δ. ἀριθμῶν εἶνε καὶ κ. δ. αὐτῶν.

Διότι, ὅπως εἴδομεν, πᾶς κ. δ. τῶν 24, 44 καὶ 56, δηλ. τῆς α΄ σειρᾶς τῶν ἀριθμῶν, εἶνε καὶ τῆς τελευταίας, δηλ. τοῦ 4, ἤτοι τοῦ μ. κ. δ. αὐτῶν καὶ πᾶς διαιρέτης τοῦ 4 εἶνε καὶ τῆς α΄ σειρᾶς, δηλ. τῶν 24, 44 καὶ 56.

149. Ἐὰν ἀριθμοὶ πολλαπλασιασθοῦν ἢ διαιρεθοῦν μὲ ἕνα ἀριθμὸν καὶ ὁ μ. κ. δ. αὐτῶν πολλαπλασιάζεται ἢ διαιρεῖται μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Διότι, ἂν οἱ ἀριθμοὶ 24, 44 καὶ 56 πολλαπλασιασθοῦν π.χ. ἐπὶ τὸν 5, καὶ οἱ ἀριθμοὶ τῆς β΄ σειρᾶς θὰ πολλαπλασιασθοῦν ἐπὶ 5, διότι εἶνε οὗτοι ὑπόλοιπα τῆς διαιρέσεως τῶν 44 καὶ 56 διὰ τοῦ 24 (ἐδ. 120), δι' ὅμοιον λόγον καὶ οἱ τῶν λοιπῶν σειρῶν ἀριθμοὶ θὰ πολλαπλασιασθοῦν ἐπὶ 5, ἄρα καὶ ὁ 4 τῆς τελευταίας σειρᾶς, δηλ. ὁ μ. κ. δ., θὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 5.

Ὁμοίως δεικνύεται καὶ ἡ β΄ πρότασις ἡ τῆς διαιρέσεως.

(Διὰ τὴν γ΄. τάξιν)

ΠΡΩΤΟΙ ΠΡΟΣ ΑΛΛΗΛΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΙ

150. Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῇ τὸ γινόμενον δύο ἄλλων καὶ εἶνε πρῶτος πρὸς τὸν ἕνα, θὰ διαιρῇ τὸν ἄλλον.

Δηλ. ἂν π.χ. ὁ 4 διαιρῇ τὸ γινόμενον $7 \times B$ καὶ εἶνε πρῶτος πρὸς τὸν 7 θὰ διαιρῇ τὸν B.

Οἱ ἀριθμοὶ 4 καὶ 7 ὡς πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔχουν μ.κ.δ. τὴν 1, καὶ οἱ ἀριθμοὶ $4 \times B$ καὶ $7 \times B$ θὰ ἔχουν μ. κ. δ. τὸν $1 \times B = B$ (ἐδ. 149). Ὁ 4 ἐπειδὴ διαιρεῖ τὸν $4 \times B$ ὡς πολλαπλάσιόν του καὶ τὸν $7 \times B$, ὅπως ὑπεθέσαμεν, θὰ διαιρῇ καὶ τὸν μ. κ. δ. αὐτῶν τὸν B (ἐδ. 148).

151. Ἐὰν εἷς ἀριθμὸς εἶνε διαιρετὸς ὑπὸ ἄλλων πρώτων πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο, θὰ εἶνε διαιρετὸς καὶ ὑπὸ τοῦ γινομένου αὐτῶν.

Δηλ. ἂν ὁ ἀριθμὸς A εἶνε διαιρετὸς ὑπὸ τῶν 3, 4 καὶ 5, πρώτων πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο, θὰ εἶνε διαιρετὸς καὶ ὑπὸ τοῦ γινομένου των $3 \times 4 \times 5$. Διότι ἂν $A : 3 = \pi$, τότε $A = 3 \times \pi$.

Ὁ 4 διαιρεῖ τὸν Α, ἄρα καὶ τὸ ἴσον του γινόμενον $3 \times \pi$ καὶ ἐπειδὴ εἶνε πρῶτος πρὸς τὸν 3 θὰ διαιρῇ τὸν π (ἐδ. 150).

Ἄν δὲ $\pi : 4 = \pi'$, τότε $\pi = 4 \times \pi'$.

Ὁ 5 διαιρεῖ τὸν Α ἢ τὸ ἴσον του γινόμενον $3 \times \pi$ καὶ ἐπειδὴ εἶνε πρῶτος πρὸς τὸν 3 θὰ διαιρῇ τὸν π ἢ τὸ ἴσον του γινόμενον $4 \times \pi'$, ἐπειδὴ ὅμως εἶνε πρῶτος καὶ πρὸς τὸν 4, θὰ διαιρῇ τὸν π'. Ἄν δὲ $\pi' : 5 = \pi''$, τότε $\pi' = 5 \times \pi''$.

Ὥστε ὁ $A = 3 \times \pi = 3 \times 4 \times \pi' = 3 \times 4 \times 5 \times \pi''$.

Ἀφοῦ λοιπὸν ὁ $A = (3 \times 4 \times 5) \times \pi''$, εἶνε πολλαπλάσιον τοῦ γινομένου $3 \times 4 \times 5$ καὶ ἑπομένως θὰ διαιρῆται ὑπ' αὐτοῦ.

Οὕτως ἂν εἷς ἀριθμὸς εἶνε διαιρετὸς ὑπὸ τοῦ 2 καὶ 3, θὰ εἶνε διαιρετὸς καὶ ὑπὸ τοῦ $6 = 2 \times 3$.

ΑΣΚΗΣΙΣ. 131) Ποῖοι ἀριθμοὶ εἶνε διαιρετοὶ ὑπὸ τοῦ 12, 15, 18, 20, 21, 22, 24 καὶ 30.

ΠΕΡΙ ΕΛΑΧΙΣΤΟΥ ΚΟΙΝΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΟΥ

152. ***Εἷς ἀριθμὸς λέγεται κοινὸν πολλαπλάσιον ἄλλων ἀριθμῶν, ὅταν εἶνε πολλαπλάσιον ἑνὸς ἑκάστου ἐξ αὐτῶν.*** Παριστάνεται δὲ διὰ τοῦ συμβόλου κ. π.: π.χ. ὁ ἀριθμὸς 24 εἶνε κ. π. τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 4 καὶ 6.

153. ***Εἷς ἀριθμὸς λέγεται ἐλάχιστον κ.π. ἄλλων, ὅταν εἶνε τὸ μικρότερον ἀπὸ ὅλα τὰ κ. π. των.*** Παριστάνεται δὲ διὰ τοῦ συμβόλου ε. κ. π.· π.χ. οἱ ἀριθμοὶ 2, 3, 4, καὶ 6 ἔχουν κ. π. τοὺς 12, 24, 36, 48 κλπ., ε.κ.π. των εἶνε ὁ 12.

ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΟΥ Ε. Κ. Π.

154 Ἔστω ὅτι ζητοῦμεν τὸ ε. κ. π. τῶν ἀριθμῶν 3, 4, 6, καὶ 12. Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ μεγαλύτερος ἀπὸ αὐτούς, ὁ 12, εἶνε διαιρετὸς δι' ὅλων τῶν ἄλλων, ἄρα αὐτὸς θὰ εἶνε τὸ ε. κ. π., διότι ἄλλος ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ 12, δὲν θὰ εἶνε διαιρετὸς ὑπὸ τοῦ 12 καὶ ἑπομένως δὲν θὰ εἶνε κ.π.

Ἔστω ὅτι ζητοῦμεν τὸ ε. κ. π. τῶν ἀριθμῶν 4, 6, 9 καὶ 12. Ἐπειδὴ ὁ μεγαλύτερος ἐξ ὅλων, ὁ 12, δὲν εἶνε διαιρετὸς δι' ὅλων τῶν ἄλλων, διὰ τοῦτο διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ε. κ. π. ἀνατρέχομεν εἰς τὰ πολλαπλάσια τοῦ 12, διότι αὐτὰ μόνον εἶνε διαιρετὰ διὰ τοῦ 12. Λαμβάνομεν πρῶτον τὸ διπλάσιον τοῦ 12, τὸ 24, τοῦτο δὲν εἶνε διαιρετὸν ὑπὸ τοῦ 9, λαμβάνομεν τὸ τριπλάσιον τοῦ 12, τὸ 36, τοῦτο εἶνε διαιρετὸν δι' ὅλων τῶν ἀριθμῶν, ἄρα τὸ 39 εἶνε τὸ ε. κ. π. αὐτῶν.

ΑΣΚΗΣΙΣ. 132) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ε. κ. π. τῶν ἀριθμῶν, α′) 2, 3, 4, 6, 12, β′) 2, 3, 4, 6, 8, 12, γ′) 2, 3, 4, 6, 9, 12, δ′) 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΠΡΩΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

155. **Ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος δὲν ἔχει ἄλλον διαιρέτην παρὰ μόνον τὴν μονάδα καὶ τὸν ἑαυτόν του, λέγεται π ρ ῶ τ ο ς.** Π.χ. οἱ 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 31 κλπ.

Ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἐκτὸς τῆς μονάδος καὶ τοῦ ἑαυτοῦ του ἔχει καὶ ἄλλους διαιρέτας, λέγεται σύνθετος. Π. χ. οἱ 4, 6, 8, 10, 15, 28 κλπ.

ΕΥΡΕΣΙΣ ΠΡΩΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

156. Διὰ νὰ εὕρωμεν πρώτους ἀριθμοὺς ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς. Ἀφοῦ γράψωμεν τοὺς ἀριθμοὺς κατὰ τὴν φυσικὴν σειράν, διαγράφομεν τοὺς διαιρετοὺς διὰ τοῦ 2, κατόπιν τοὺς διαιρετοὺς διὰ τοῦ μετὰ τὸν 2 μὴ διαγραφέντος καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς. Οἱ μὴ διαγραφέντες εἶνε οἱ ζητούμενοι πρῶτοι.

Ὁ τρόπος οὗτος τῆς εὑρέσεως τῶν πρώτων ἀριθμῶν ἐπενοήθη ὑπὸ τοῦ φιλοσόφου Ἐρατοσθένους καὶ διὰ τοῦτο λέγεται **«Κόσκινον τοῦ Ἐρατοσθένους»**.

ΑΣΚΗΣΙΣ. 133) Νὰ εὑρεθοῦν οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ οἱ περιλαμβανόμενοι μεταξὺ τοῦ 1 καὶ τοῦ 100.

(Διὰ τὴν γ′. τάξιν)

ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΔΙΑΙΡΕΤΟΥ

157. Ἐκ τῶν διαιρετῶν παντὸς ἀριθμοῦ ὁ ἀμέσως μεγαλύτερος τῆς μονάδος λέγεται **δεύτερος** διαιρέτης αὐτοῦ π.χ. ἀπὸ τοὺς διαιρέτας τοῦ 12, τοὺς 1, 2, 3, 4, 6 καὶ 12, ὁ 2 λέγεται δεύτερος διαιρέτης του.

Ὁ β′ διαιρέτης παντὸς ἀριθμοῦ εἶνε ἀριθμὸς πρῶτος.

Δηλ. ἂν ὁ δεύτερος διαιρέτης ἑνὸς ἀριθμοῦ Α εἶνε ὁ Δ, οὗτος θὰ εἶνε πρῶτος. Διότι, ἂν ἦτο σύνθετος, θὰ εἶχεν ἕνα διαιρέτην Ρ μεγαλύτερον τῆς μονάδος καὶ μικρότερόν του, ὁ ὁποῖος θὰ διῄρει καὶ τὸν Α ὡς πολλαπλάσιον τοῦ Δ (ἐδ. 136), ἀλλὰ τότε δὲν θὰ ἦτο ὁ Δ δεύτερος διαιρέτης τοῦ Α, ἑπομένως ὁ Δ. εἶνε ἀριθμὸς πρῶτος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 134) *Ἀπὸ τοὺς διαιρέτας ἑνὸς ἀριθμοῦ εἷς τοὐλάχιστον εἶνε ἀριθμὸς πρῶτος.*

135.) *Ἐὰν ἀριθμοί τινες δὲν εἶνε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους θὰ ἔχουν ἕνα τοὐλάχιστον κ. δ. ἀριθμὸν πρῶτον.*

(Διὰ τὴν γ΄. τάξιν)

ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΕΙΣ ΠΡΩΤΟΥΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ

158. Ἐὰν ἕνα σύνθετον ἀριθμόν, π. χ. τὸν 60, διαιρέσωμεν διὰ τοῦ δευτέρου διαιρέτου του, τοῦ 2, θὰ ἔχωμεν:

$60 : 2 = 30$, ἑπομένως $60 = 2 \times 30$.

Οὕτως ἀνελύσαμεν τὸν 60 εἰς γινόμενον δύο παραγόντων ἐκ τῶν ὁποίων ἕκαστος εἶνε μικρότερος τοῦ 60· εἶνε δὲ ὁ μὲν 2 πρῶτος ἀριθμός, ὁ δὲ 30 σύνθετος.

Ἐὰν τὸν παράγοντα 30, ὁ ὁποῖος εἶνε σύνθετος, ἀναλύσωμεν καθ' ὅμοιον τρόπον εἰς γινόμενον δύο παραγόντων, θὰ ἔχωμεν $30 = 2 \times 15$, ἀντικαθιστῶντες δὲ εἰς τὴν ἀνάλυσιν $60 = 2 \times 30$, τὸν 30 διὰ τοῦ ἴσου πρὸς αὐτὸν γινομένου 2×15 θὰ ἔχωμεν $60 = 2 \times 2 \times 15$.

Οὕτως ἔχομεν τὸν 60 ἀναλελυμένον εἰς τρεῖς παράγοντας

Εἰς ἑκάστην ἀνάλυσιν μόνον ὁ τελευταῖος παράγων δύναται νὰ εἶνε σύνθετος, οἱ δὲ λοιποὶ θὰ εἶνε πρῶτοι, διότι εἶνε δεύτεροι διαιρέται. Εἶνε δὲ ὁ τελευταῖος οὗτος μικρότερος τοῦ ἀντιστοίχου του τῆς προηγουμένης ἀναλύσεως· π. χ. ὁ $15 < 30$, διότι ὁ 15 εἶνε πηλίκον ἐνῷ ὁ 30 εἶνε διαιρετέος.

Ἂν ἐξακολουθήσωμεν κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον, ὁ τελευταῖος οὗτος παράγων διαρκῶς ἐλαττούμενος ἀναγκαίως θὰ καταντήσῃ ἀριθμὸς πρῶτος. Οὕτως ὁ παράγων 15 ἀναλύεται εἰς 3×5, ὁπότε ὁ $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3 \times 5$, ὅπου ὅλοι οἱ παράγοντες εἶνε πρῶτοι.

Δυνάμεθα λοιπὸν πάντα σύνθετον ἀριθμὸν νὰ ἀναλύσωμεν εἰς γινόμενον παραγόντων πρώτων.

Χάριν συντομίας ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὅπως δεικνύει ὁ ἑπόμενος πίναξ, εἰς τὸν ὁποῖον τὸν δοθέντα ἀριθμὸν καὶ τὰ πηλίκα γράφομεν ἀριστερὰ τῆς γραμμῆς, τὸ ἓν ὑποκάτω ἀπὸ τὸ ἄλλο, ὁμοίως δὲ καὶ τοὺς διαιρέτας, ἀλλὰ δεξιὰ τῆς γραμμῆς.

60	2
30	2
15	3
5	5
1	

ΑΣΚΗΣΙΣ. 136) *Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενα παραγόντων πρώτων οἱ ἀριθμοὶ* 160, 612, 1680, 1260, 1512, 2310, 2772, 5148, 7560.

(Διὰ τὴν γ΄. τάξιν)

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

Α΄.) ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

159. ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμοὺς ἀναλελυμένους εἰς τοὺς πρώτους παράγοντάς των σχηματίζομεν ἓν γινόμενον ἀπὸ ὅλους τοὺς παράγοντας αὐτοὺς μὲ ἐκθέτην εἰς ἕκαστον τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν του.***

Π. χ. ὁ $36=2^2\times3^2$ καὶ ὁ $600=2^3\times3\times5^2$, τὸ γινόμενόν των $30\times600=2^5\times3^3\times5^2$.

Διότι $36\times600=(2^2\times3^2)\times(2^3\times3\times5^2)=$
$=2^2\times3^2\times2^3\times3\times5^2=(2^2\times2^3)\times(3^2\times3)\times5^2=2^5\times3^3\times5^2$.

ΑΣΚΗΣΙΣ. 137) *Νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον ἀναλελυμένον εἰς τοὺς πρώτους παράγοντάς του τῶν ἀριθμῶν* $A=2^2\times3^5\times7^8$, $B=2^4\times3^5\times5^2$, $\Gamma=3^4\times7^2\times11^3$.

Β΄.) ΔΥΝΑΜΙΣ

160. ***Διὰ νὰ ὑψώσωμεν ἕνα ἀριθμὸν ἀναλελυμένον εἰς τοὺς πρώτους παράγοντάς του εἰς μίαν δύναμιν πολλαπλασιάζομεν τοὺς ἐκθέτας τῶν πρώτων παραγόντων του ἐπὶ τὸν ἐκθέτην τῆς δυνάμεως.***

Π. χ. ὁ ἀριθμὸς $360=2^3\times3^2\times5$ νὰ ὑψωθῇ εἰς τὴν τρίτην δύναμιν. Θὰ ἔχωμεν $360^3=(2^3\times3^2\times5)^3=$

$$=(2^3)^3\times(3^2)^3\times5^3=2^9\times3^6\times5^3.$$

161. ***Εἷς ἀριθμός, εἶνε τετράγωνον ἄλλου, ὅταν ὅλοι οἱ ἐκθέται τῶν πρώτων παραγόντων του εἶνε πολλαπλάσια τοῦ 2.***

Π. χ. ὁ ἀριθμὸς $A=2^6\times3^4\times5^2$ εἶνε τετράγωνον τοῦ ἀριθμοῦ $B=2^3\times3^2\times5$, τὸν ὁποῖον εὑρίσκομεν διαιροῦντες τοὺς ἐκθέτας τῶν πρώτων παραγόντων τοῦ A διὰ τοῦ 2.

Διότι, ἂν ὑψώσωμεν τὸν B εἰς τὸ τετράγωνον, εὑρίσκομεν τὸν A. Πράγματι $B^2=(2^3\times3^2\times5)^2=2^6\times3^4\times5^2=A$.

162. ***Ἂν ἔστω καὶ εἷς ἐκθέτης ἑνὸς παράγοντος ἀριθμοῦ τινος δὲν εἶνε πολλαπλάσιον τοῦ 2, ὁ ἀριθμὸς οὗτος δὲν εἶνε τετράγωνον ἄλλου ἀριθμοῦ.***

Διότι οἱ ἐκθέται τῶν πρώτων παραγόντων παντὸς τετραγώνου εἶνε πολλαπλάσια τοῦ 2, ἐπειδὴ προέρχονται ἀπὸ ἄλλους ἐκθέτας διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ αὐτῶν ἐπὶ 2.

Ὁμοίως εἷς ἀριθμὸς εἶνε κύβος, τετάρτη δύναμις κλπ., ἄλλου ἀριθμοῦ, ἂν οἱ ἐκθέται τῶν πρώτων παραγόντων του, εἶνε πολλαπλάσια τοῦ 3, 4 κλπ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

138) *Νὰ ὑψωθοῦν οἱ ἀριθμοὶ* $A=2^3\times5^2\times7$ *εἰς τὸν κύβον,* $B=2^8\times11^3\times5^4$ *εἰς τὴν πέμπτην δύναμιν καὶ*
$\Gamma=2^5\times3^2\times5^3\times7^2$ *εἰς τὴν ὀγδόην.*

139) *Ἐκ τῶν ἀριθμῶν* $A=2^5\times3^{15}\times5^{35}$, $B=2^3\times7^2\times5^2$ $\Gamma=2^3\times7^{20}\times11^{12}$, $\Delta=2^{24}\times3^{32}\times5^{12}\times7^{40}$ *ποῖοι εἶνε δυνάμεις, ποῖαι δυνάμεις εἶνε καὶ ποίων ἀριθμῶν, ποῖοι δὲν εἶνε καὶ διατί;*

Γ'.) ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΣ

163. ***Ἂν εἷς ἀριθμὸς περιέχῃ ὅλους τοὺς πρώτους παράγοντας ἄλλου καὶ ἕκαστον μὲ ἐκθέτην ἴσον ἢ μεγαλύτερον, θὰ εἶνε διαιρετὸς ὑπ' αὐτοῦ.***

Ἂς λάβωμεν τὸν ἀριθμὸν $4320=2^5\times3^3\times5$ καὶ τὸν $72=2^3\times3^2$. Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ 4320 περιέχει ὅλους τοὺς πρώτους παράγοντας τοῦ 72 μὲ ἐκθέτην ὄχι μικρότερον. Ἀποχωρίζομεν ἀπὸ τὸν 4320 τοὺς παράγοντας τοῦ 72, ὁπότε θὰ ἔχωμεν:

$$4320=2^5\times3^3\times5=2^3\times2^2\times3^2\times3\times5=(2^3\times3^2)\times2^2\times3\times5,$$

ἤτοι $4320=72\times2^2\times3\times5$.

Εἶνε δηλ. ὁ 4320 πολλαπλάσιον τοῦ 72 καὶ ἑπομένως διαιρεῖται δι' αὐτοῦ.

164. ***Ἂν εἷς ἀριθμὸς εἶνε διαιρετὸς δι' ἄλλου, θὰ περιέχῃ ὅλους τοὺς πρώτους παράγοντας αὐτοῦ καὶ μὲ ἐκθέτην εἰς ἕκαστον παράγοντα ἴσον ἢ μεγαλύτερον.***

Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 240, ὁ ὁποῖος εἶνε διαιρετὸς διὰ τοῦ $60=2^2\times3\times5$. Θὰ ἔχωμεν $240:60=4$, ὅθεν $240=60\times4$ ἢ $240=(2^2\times3\times5)\times2^2=2^4\times3\times5$.

Εἶνε λοιπὸν ὁ 240 πολλαπλάσιον τοῦ 60, ἀποτελεῖται δηλ. ἀπὸ πολλὰ 60, καὶ ἑπομένως θὰ περιέχῃ κατ' ἀνάγκην ὅλους τοὺς α' παράγοντας τοῦ 60 καὶ ἕκαστον μὲ ἐκθέτην τοὐλάχιστον ἴσον. Δύναται νὰ περιέχῃ καὶ ἕνα πρῶτον παράγοντα μὲ ἐκθέτην μεγαλύτερον ἀπὸ τὸν 60, ὅ αν ὁ πρῶτος οὗτος παράγων περιέχεται εἰς τὸ πηλίκον 4.

165. ***Ἂν εἷς ἀριθμὸς δὲν περιέχει ἔστω καὶ ἕνα πρῶτον παράγοντα ἄλλου, δὲν θὰ εἶνε διαιρετὸς ὑπ' αὐτοῦ.*** Διότι, ἂν ἦτο διαιρετός, θὰ περιεῖχε καὶ τὸν πρῶτον αὐτὸν παράγοντα.

Ἐπίσης ***δὲν θὰ εἶνε διαιρετός, ἂν περιέχῃ ἕνα παράγοντα μὲ ἐκθέτην μικρότερον.*** Διότι, ἂν ἦτο διαιρετός, θὰ περιεῖχε τὸν παράγοντα αὐτὸν μὲ ἐκθέτην ἴσον ἢ μεγαλύτερον.

ΑΣΚΗΣΙΣ. 140) *Ἐκ τῶν ἀριθμῶν* $A=2^3\times3^3\times5^6\times7$, $B=2^5\times3^4\times7^2\times11$, $\Gamma=2^4\times3^2\times5^4\times13$ *ποῖοι εἶνε διαιρετοὶ διὰ τοῦ* $K=2^2\times3^3\times5^4$, *ποῖοι δὲν εἶνε καὶ διατί;*

Δ'.) ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΟΥ Μ. Κ. Δ.

166. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ζητοῦμεν τὸν μ.κ.δ. τῶν ἀριθμῶν 36, 84 καὶ 360. Πρὸς εὕρεσιν τούτου ἀναλύομεν αὐτοὺς εἰς τοὺς πρώτους παράγοντάς των καὶ θὰ ἔχωμεν $36=2^2\times3^2$, $84=2^2\times3\times7$ καὶ $360=2^3\times3^2\times5$. Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ παράγων 2^2 περιέχεται εἰς τὸν 24, καὶ εἰς τὸν 84, ἀλλὰ καὶ εἰς τὸν 360, διότι $2^3=2\times2\times2=2^2\times2$. Εἶνε λοιπὸν κοινὸς παράγων ἢ κοινὸς διαιρέτης καὶ τῶν τριῶν ἀριθμῶν, (ἐδ. 134, σελ. 52). Ὁ παράγων 3^2 δὲν περιέχεται εἰς τὸν 84, ὁ παράγων ὅμως ***3*** περιέχεται καὶ εἰς τοὺς τρεῖς ἀριθμούς, εἶνε λοιπὸν κοινὸς παράγων ἢ κ.δ. Ἄλλος κοινὸς παράγων τῶν τριῶν ἀριθμῶν δὲν ὑπάρχει. Ἀλλὰ καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν $\boldsymbol{2^2\times3}$ περιέχεται καὶ εἰς τοὺς τρεῖς ἀριθμούς, εἶνε λοιπὸν καὶ αὐτὸ κ. δ. Εἶνε δὲ καὶ ὁ μ.κ.δ., διότι ἄλλος ἀριθμὸς μεγαλύτερος αὐτοῦ ἢ θὰ ἔχῃ καὶ ἄλλους παράγοντας ἐκτὸς τῶν 2^2 καὶ 3 ἢ θὰ ἔχῃ τοὺς παράγοντας 2 ἢ 3 μὲ ἐκθέτας μεγαλυτέρους. Ἀλλὰ τοὺς νέους αὐτοὺς παράγοντας δὲν περιέχουν καὶ οἱ τρεῖς ἀριθμοί, ἑπομένως δὲν θὰ εἶνε ὅλοι διαιρετοὶ ὑπὸ τοῦ μεγαλυτέρου αὐτοῦ ἀριθμοῦ (ἐδ. 165) καὶ συνεπῶς δὲν θὰ εἶνε οὗτοι κ. δ. Ἄρα ὁ $2^2 \times 3 = 12$ εἶνε ὁ μ.κ.δ.

Ὥστε: ***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν μ. κ δ. δοθέντων ἀριθμῶν, ἀναλύομεν αὐτοὺς εἰς γινόμενα πρώτων παραγόντων καὶ κατόπιν σχηματίζομεν ἓν γινόμενον λαμβάνοντες τοὺς κοινοὺς παράγοντας τῶν γινομένων αὐτῶν καὶ ἕκαστον παράγοντα μὲ τὸν μικρότερον ἐκθέτην του, τὸ γινόμενον δὲ τοῦτο εἶνε ὁ μ. κ. δ. τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.***

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

141) *Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ.κ.δ. δι' ἀναλύσεως εἰς πρώτους παράγοντας τῶν ἀριθμῶν τῆς ἀσκήσεως 130.*

142) *Νὰ δειχθῇ ὅτι, ἐὰν ἀριθμοί τινες διαιρεθοῦν διὰ τοῦ μ. κ. δ. των, τὰ πηλίκα θὰ εἶνε ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.*

143) *Ὁμοίως ἐὰν διαιρέσωμεν ἀριθμοὺς δι' ἑνὸς κ.δ. των καὶ τὰ πηλίκα εἶνε ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ὁ διαιρέτης οὗτος θὰ εἶνε μ.κ.δ. τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν.*

Ε'.) ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΟΥ Ε Κ. Π.

167 Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ζητοῦμεν τὸ ε. κ. π. τῶν ἀριθμῶν 36, 54, 35.

Πρὸς εὕρεσιν τούτου ἀναλύομεν αὐτοὺς εἰς τοὺς πρώτους παράγοντάς των καὶ ἔχομεν $36 = 2^2 \times 3^2$, $54 = 2 \times 3^3$ καὶ $35 = 5 \times 7$. Τὸ ε. κ. π. πρέπει νὰ διαιρῆται καὶ διὰ τῶν τριῶν αὐτῶν ἀριθμῶν, ἑπομένως πρέπει νὰ περιέχῃ τὸ γινόμενον $2^2 \times 3^2$, δηλ. τὸν 36. Ἐπίσης πρέπει νὰ περιέχῃ τὸ γινόμενον 2×3^3, δηλ. τὸν 54. Ἂν λοιπὸν εἰς τὸ γινόμενον $2^2 \times 3^2$ θέσωμεν 3^3 ἀντὶ 3^2 περιέχεται καὶ ὁ 54. Πρέπει ἀκόμη νὰ περιέχῃ καὶ τὸ γινόμενον 5×7, δηλ. τὸν 35. Ὥστε τὸ γινόμενον $2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7$ διαιρεῖται καὶ διὰ τῶν τριῶν ἀριθμῶν, ἄρα εἶνε κ. π. αὐτῶν.

Εἶνε ὅμως καὶ τὸ ε. κ. π. αὐτῶν, διότι ἄλλος ἀριθμὸς μικρότερος αὐτοῦ ἢ δὲν θὰ ἔχῃ ἕνα παράγοντα ἐκ τῶν 2, 3, 5 καὶ 7 ἢ θὰ ἔχῃ μερικοὺς παράγοντας ἐξ αὐτῶν μὲ ἐκθέτην μικρότερον, ἀλλὰ τότε δὲν θὰ διαιρῆται καὶ διὰ τῶν τριῶν ἀριθμῶν (ἐδ. 165) ἑπομένως δὲν θὰ εἶνε κ. π αὐτῶν. Ἄρα ὁ $2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7 = 7560$ εἶνε τὸ ε. κ. π. αὐτῶν.

Ὥστε: ***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ε. κ. π δοθέντων ἀριθμῶν ἀναλύομεν αὐτοὺς εἰς γινόμενα πρώτων παραγόντων καὶ κατόπιν σχηματίζομεν ἓν γινόμενον λαμβάνοντες ὅλους τοὺς***

παράγοντας τῶν γινομένων αὐτῶν καὶ ἕκαστον παράγοντα μὲ τὸν μεγαλύτερον ἐκθέτην του.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

144) *Νὰ εὑρεθῇ τὸ ε. κ. π. τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν*: α′) 6, 10, 15, 12, 20, β′) 15, 21, 30, 42, 105, γ′) 36, 140, 180, 252.

145) *Νὰ δειχθῇ ὅτι, πᾶν κ. π. ἀριθμῶν εἶνε καὶ πολλαπλάσιον τοῦ ε. κ. π. των καὶ πᾶν πολλαπλάσιον τοῦ ε. κ. π. των εἶνε καὶ κ. π. αὐτῶν.*

146) *Ἐπίσης, ἐὰν τὸ ε. κ. π. ἀριθμῶν διαιρεθῇ δι' ἑκάστου ἐξ αὐτῶν, τὰ πηλίκα εἶνε ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.*

147) *Ὁμοίως ἂν τὸ ε. κ. π. ἀριθμῶν διαιρούμενον δι' αὐτῶν δίδει πηλίκα ἀριθμοὺς πρώτους πρὸς ἀλλήλους, τότε εἶνε τοῦτο τὸ ε. κ. π. των.*

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β′

ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΓΡΑΦΗ ΚΑΙ ΑΠΑΓΓΕΛΙΑ ΑΥΤΩΝ

168. Διὰ νὰ μοιράσωμεν ἓν μῆλον εἰς 2 παιδία, χωρίζομεν αὐτὸ εἰς 2 ἴσα μέρη καὶ δίδομεν εἰς ἕκαστον τὸ ἓν μέρος, τὸ ὁποῖον ὀνομάζομεν ἓν δεύτερον ἢ ἥμυσι καὶ τὸ παριστάνομεν διὰ τοῦ συμβόλου $\frac{1}{2}$, διὰ νὰ τὸ μοιράσωμεν εἰς 3 παιδία, τὸ χωρίζομεν εἰς 3 ἴσα μέρη καὶ δίδομεν εἰς ἕκαστον τὸ ἕν, τὸ ὁποῖον ὀνομάζομεν ἓν τρίτον καὶ τὸ παριστάνομεν διὰ τοῦ $\frac{1}{3}$, κλπ.

Τοὺς ἀριθμοὺς $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, κλπ. ὀνομάζομεν ***κλασματικὰς μονάδας***, τὴν δὲ μονάδα 1 ὀνομάζομεν ***ἀκεραίαν***.

Ὥστε: ***Κλασματικὴ μονὰς λέγεται τὸ ἓν ἀπὸ τὰ ἴσα μέρη, εἰς τὰ ὁποῖα ἐχωρίσαμεν τὴν ἀκεραίαν μονάδα.***

169. Ἂν χωρίσωμεν τὴν ἀκεραίαν μονάδα εἰς 7 ἴσα μέρη καὶ λάβωμεν τὰ 3, τὰ ὀνομάζομεν τρία ἕβδομα καὶ τὰ παριστάνομεν διὰ τοῦ $\frac{3}{7}$, ἂν τὴν χωρίσωμεν εἰς 9 καὶ λάβωμεν τὰ 5, τὰ ὀνομάζομεν πέντε ἔνατα καὶ τὰ παριστάνομεν διὰ τοῦ $\frac{5}{9}$, κλπ.

Τοὺς ἀριθμοὺς $\frac{3}{7}$, $\frac{5}{9}$ κ.λ.π. ὀνομάζομεν **κλασματικοὺς ἀριθμοὺς** ἢ **κλάσματα**. Ὅπως βλέπομεν δὲ ἀποτελοῦνται ἀπὸ πολλὰς κλασματικὰς μονάδας, Ἓν πλῆθος δὲ ἀκεραίων μονάδων θὰ τὸ ὀνομάζωμεν **ἀκέραιον ἀριθμόν**.

170. Ὅπως εἴδομεν, ὁ κλασματικὸς ἀριθμὸς παριστάνεται διὰ δύο ἀκεραίων, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ μὲν εἷς φανερώνει εἰς πόσα ἴσα μέρη χωρίζομεν τὴν ἀκεραίαν μονάδα καὶ λέγεται **παρονομαστής**, ὁ δὲ ἄλλος φανερώνει πόσα μέρη ἐξ αὐτῶν ἐλάβομεν καὶ λέγεται **ἀριθμητὴς** καὶ οἱ δύο δὲ μὲ ἓν ὄνομα λέγονται **ὅροι** τοῦ κλάσματος. Τὸν ἀριθμητὴν ἀπαγγέλλομεν ὡς ἀριθμητικὸν ἀπόλυτον, τὸν δὲ παρονομαστὴν ὡς ἀριθμητικὸν τακτικόν.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὅταν ὁ παρονομαστὴς εἶνε πολὺ μεγάλος ἀριθμός, ὅπως π. χ. εἰς τὸ κλάσμα $\frac{3567}{456789}$, *τότε ἀπαγγέλλομεν αὐτὸν ὡς ἑξῆς:* 3567 *τῶν* 456789, *καὶ ἐννοοῦμεν* 3567 *μέρη ἐκ τῶν* 456789, *εἰς τὰ ὁποῖα ἐχωρίσθη ἡ μονάς.*

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Ἀπὸ μνήμης καὶ γραπτῶς.

148) *Ποῖον μέρος τῆς δραχμῆς εἶνε τὸ 1 λεπτόν, τὰ 14, τὰ 36;*

149) *Ποῖον μέρος τῆς ὀκᾶς εἶνε τὸ 1 δράμιον, τὰ 75, τὰ 150, τὰ 360; (Ἡ ὀκᾶ ἔχει 400 δράμια).*

150) *Ποῖον μέρος τοῦ στατῆρος εἶνε ἡ 1 ὀκᾶ, αἱ 7 ὀκ. αἱ 15, αἱ 19; (Ὁ στατὴρ ἔχει 44 ὀκ.).*

151) *Ποῖον μέρος τοῦ μέτρου εἶνε 1 παλάμη, αἱ 3, αἱ 5, αἱ 7 παλάμαι, ὁ 1 δάκτυλος, οἱ 4, οἱ 6, ἡ 1 γραμμή, αἱ 3, αἱ 8 γραμμαί; (Τὸ μέτρον ἔχει 10 παλάμας, ἡ παλάμη 10 δακτύλους καὶ ὁ δάκτυλος 10 γραμμάς).*

152) *Ποῖον μέρος τῆς ἡμέρας εἶνε ἡ 1 ὥρα, αἱ 3, αἱ 11, αἱ 23;*

153) *Ποῖον μέρος τῆς ὥρας εἶνε τὸ 1'', τὰ 5', τὰ 23', τὰ 58';*

154) *Ποῖον μέρος τοῦ 1' τῆς ὥρας εἶνε τὸ 1'', τὰ 7'', τὰ 45'';*

155) *Ποῖον μέρος τῆς ὥρας εἶναι τὸ 1'', τὰ 9'', τὰ 36'';*

155) *Ποῖον μέρος τοῦ ἔτους εἶνε ἡ ἡμέρα, αἱ 25, αἱ 283 ἡμέραι;*

157) *Πόσα λεπτὰ εἶνε τὸ* $\frac{1}{2}$ *τῆς δραχμῆς, τὸ* $\frac{1}{4}$, *τὸ* $\frac{1}{5}$, *τὸ* $\frac{1}{10}$, *τὰ* $\frac{3}{4}$, *τὰ* $\frac{2}{5}$, *τὰ* $\frac{4}{10}$, *τὰ* $\frac{9}{10}$;

158) *Πόσα δράμια εἶνε τὸ* $\frac{1}{4}$ *τῆς ὀκᾶς, τὸ* $\frac{1}{5}$, *τὸ* $\frac{1}{8}$, *τὸ* $\frac{1}{10}$, *τὸ* $\frac{1}{20}$, *τὸ* $\frac{1}{25}$. *τὸ* $\frac{1}{50}$, *τὸ* $\frac{1}{100}$, *τὸ* $\frac{1}{200}$, *τὰ* $\frac{3}{4}$, *τὰ* $\frac{2}{5}$, *τὰ* $\frac{7}{8}$, *τὰ* $\frac{9}{10}$, *τὰ* $\frac{3}{20}$, *τὰ* $\frac{13}{25}$, *τὰ* $\frac{9}{50}$, *τὰ* $\frac{24}{100}$.

159) *Ἐκ τῶν κλασμάτων* $\frac{5}{7}$ *καὶ* $\frac{3}{7}$ *ποῖον εἶνε μεγαλύτερον καὶ διατί ;*

160) *Ἐκ τῶν κλασμάτων* $\frac{5}{7}$ *καὶ* $\frac{5}{9}$ *ποῖον εἶνε μεγαλύτερον καὶ διατί ;*

161) *Ἐκ τῶν κλασμάτων* $\frac{7}{7}$, $\frac{5}{7}$ *καὶ* $\frac{9}{7}$ *ποῖον εἶνε μεγαλύτερον, ποῖον μικρότερον, ποῖον ἴσον πρὸς τὴν ἀκεραίαν μονάδα καὶ διατί ;*

171. Τὰ κλάσματα τὰ μικρότερα τῆς ἀκεραίας μονάδος λέγονται ***γνήσια***, τὰ δὲ ἴσα ἢ μεγαλύτερα ***νόθα*** ἢ ***καταχρηστικά***.

Μικτὸς ἀριθμὸς λέγεται ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἀποτελεῖται ἀπὸ ἀκέραιον καὶ ἀπὸ κλάσμα, π.χ. $8\frac{2}{3}$.

ΤΡΟΠΗ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΕΙΣ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

172. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ τρέψωμεν τὸν ἀκέραιον 3 εἰς κλάσμα, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ παρονομαστὴν τὸν 7, δηλ. εἰς ἕβδομα. Πρὸς τοῦτο θὰ τρέψωμεν ἀνὰ μίαν τὰς μονάδας του εἰς ἕβδομα. Ἡ 1 ἀκεραία μονὰς ἔχει 7 ἕβδομα, αἱ 2 θὰ ἔχουν 2 φορὰς τὰ 7 ἕβδομα, δηλ. 2×7 ἕβδομα, καὶ αἱ 3 θὰ ἔχουν 3 φορὰς τὰ 7 ἕβδομα, δηλ. 3×7 ἕβδομα. Ὥστε $3=\frac{3\times7}{7}=\frac{21}{7}$.

ΑΣΚΗΣΙΣ. 162) Νὰ ἐξαχθῇ κανὼν τροπῆς ἀκεραίου εἰς κλάσμα μὲ δοθέντα παρονομαστήν.

ΤΡΟΠΗ ΜΙΚΤΟΥ ΕΙΣ ΚΛΑΣΜΑ

173. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ τρέψωμεν τὸν μικτὸν $4\frac{3}{7}$, εἰς κλάσμα. Κατὰ τὰ προηγούμενα ὁ ἀκέραιος 4 ἔχει $4\times7=28$ ἕβδομα προσθέτομεν καὶ τὰ 3 ἕβδομα τοῦ κλάσματος καὶ ἔχομεν ἐν συνόλῳ $28+3=31$ ἕβδομα.

Ὥστε $4\frac{3}{7}=\frac{4\times 7+3}{7}=\frac{31}{7}$.

ΑΣΚΗΣΙΣ. 163) Νὰ ἐξαχθῇ κανὼν τροπῆς μικτοῦ εἰς κλάσμα.

ΕΞΑΓΩΓΗ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΜΟΝΑΔΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ

174. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ ἐξάγωμεν τὰς ἀκεραίας μονάδας, τὰς ὁποίας περιέχει τὸ κλάσμα $\frac{29}{6}$.

Γνωρίζομεν ὅτι 6 ἕκτα ἀποτελοῦν μίαν ἀκεραίαν μονάδα, τὰ 29 λοιπὸν ἕκτα ἀποτελοῦν τόσας ἀκεραίας μονάδας, ὅσας φορὰς χωροῦν τὰ 6 ἕκτα εἰς τὰ 29 ἕκτα, θὰ διαιρέσωμεν δηλ. τὸν 29 διὰ τοῦ 6, ὁπότε εὑρίσκομεν πηλίκον 4 ἀκεραίας μονάδας καὶ ὑπόλοιπον 4 ἕκτα. Ὥστε $\frac{29}{6}=4\frac{5}{6}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

164) *Νὰ ἐξαχθῇ κανὼν ἐξαγωγῆς τῶν ἀκεραίων μονάδων τῶν περιεχομένων εἰς ἓν κλάσμα.*

Ἀπὸ μνήμης καὶ γραπτῶς. 165) Νὰ τραποῦν οἱ ἀκέραιοι 2, 3, 5 καὶ 10 εἰς δεύτερα, τρίτα, ἕκτα, ἕβδομα, ἔνατα, δέκατα, ἑνδέκατα, δέκατα πέμπτα, δέκατα ἕβδομα, εἰκοστά, εἰκοστὰ πέμπτα, πεντηκοστὰ δεύτερα, ἑξηκοστά, διακοσιοστὰ πεντηκοστά.

166) *Νὰ τραποῦν 5 μέτρα εἰς δέκατα, 3 ἡμέραι εἰς εἰκοστὰ τέταρτα.*

167) *Νὰ τραποῦν οἱ ἑξῆς μικτοὶ εἰς κλάσματα :* $2\frac{3}{4}$; $3\frac{4}{5}$, $4\frac{5}{6}$, $5\frac{6}{7}$, $6\frac{7}{8}$, $7\frac{8}{9}$, $8\frac{9}{10}$, $9\frac{10}{11}$.

168) *Νὰ ἐξαχθοῦν αἱ ἀκέραιαι μονάδες ἀπὸ τὰ ἑξῆς κλάσματα :*

$\frac{5}{9}$, $\frac{9}{4}$, $\frac{17}{5}$, $\frac{22}{6}$, $\frac{40}{7}$, $\frac{55}{8}$, $\frac{70}{9}$, $\frac{24}{10}$, $\frac{117}{11}$.

169) *Ὁμοίως ἀπὸ τὰ ἑξῆς :* $\frac{8}{2}$, $\frac{12}{3}$, $\frac{40}{5}$, $\frac{63}{7}$, $\frac{72}{9}$, $\frac{198}{11}$, $\frac{130}{13}$, $\frac{150}{25}$, $\frac{180}{30}$, $\frac{840}{40}$, $\frac{320}{80}$.

ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΣ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

175. Διὰ τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν δυνάμεθα νὰ κάνωμεν τὴν διαίρεσιν καὶ ὅταν ὁ διαιρετέος εἶνε μικρότερος τοῦ διαιρέτου, καθὼς καὶ πᾶσαν ἀτελῆ διαίρεσιν νὰ καταστήσωμεν τελείαν. Π. χ. διὰ νὰ μοιράσωμεν 6 μῆλα εἰς 7 μαθητάς, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸν 6 διὰ τοῦ 7. Διὰ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἡ διαίρεσις αὕτη εἶνε ἀδύνατος, διὰ τῶν κλασματικῶν ὅμως δύναται νὰ ἐκτελεσθῇ. Οὕτω μοιράζομεν εἰς τοὺς 7 μαθητὰς ἀνὰ ἓν μῆλον ὥστε ἐξ ἑκάστου μήλου λαμβάνει ἕκαστος μαθητὴς $\frac{1}{7}$, ἄρα ἀπὸ τὰ 6 μῆλα θὰ λάβῃ τὰ $\frac{6}{7}$. Ὥστε $6:7=\frac{6}{7}$.

Ἐπίσης ἐὰν ἔχωμεν νὰ μοιράσωμεν 18 μῆλα εἰς 7 μαθητάς, διαροῦντες τὸν 18 διὰ τοῦ 7 εὑρίσκομεν πηλίκον 2 καὶ ὑπόλοιπον 4, εἶνε δηλ. ἡ διαίρεσις αὐτὴ ἀτελής. Μοιράζοντες ὅμως τὰ μῆλα ἀνὰ ἕν, ὅπως προηγουμένως εὑρίσκομεν ὅτι ἕκαστον παιδίον θὰ λάβῃ $\frac{18}{7}$. Ἄρα $18:7=\frac{18}{7}$. Γενικῶς $\alpha:\beta=\frac{\alpha}{\beta}$

Ἑπομένως: ***Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο ἀριθμῶν εἶνε κλάσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀριθμητὴν μὲν τὸν διαιρετέον, παρονομαστὴν δὲ τὸν διαιρέτην.***

176. Τὸ πηλίκον τοῦ 18 διὰ τοῦ 7, δηλ. τὸ $\frac{18}{7}$, γνωρίζομεν ὅτι εἶνε ἴσον μὲ $2\frac{4}{7}$. Ἑπομένως: ***Τὸ ἀκριβὲς πηλίκον πάσης ἀτελοῦς διαιρέσεως ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ ἀκέραιον πηλίκον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν ταύτην, καὶ ἀπὸ τὸ κλάσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀριθμητὴν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως καὶ παρονομαστὴν τὸν διαιρέτην.***

Σημ. Ἐπειδὴ τὸ κλάσμα φανερώνει διαίρεσιν τοῦ ἀριθμητοῦ του διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, διὰ τοῦτο τὰ κλάσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν μεγάλον παρονομαστήν, δυνάμεθα νὰ τὰ ἀπαγγέλλωμεν καὶ ὡς ἑξῆς: π.χ. τὸ κλάσμα $\frac{3567}{456789}$ ἀπαγγέλλεται 3567 διὰ 456789.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

*170) **Νὰ εὑρεθοῦν τὰ τέλεια πηλίκα τῶν ἑξῆς διαιρέσεων ἀπὸ μνήμης καὶ γραπτῶς·** 7 : 9, 6 : 25, 13 : 27, 1 : 135, 24 : 127, 132 : 146, 3657 : 8972.*

*171) **Ὁμοίως τῶν ἑξῆς·** 9 : 5, 13 : 8, 26 : 17, 135 : 37. 542 : 123*

*172) **Μία σφαῖρα τηλεβόλου διανύει 480 μέτρα περίπου εἰς 1″. εἰς πόσον χρόνον θὰ φθάσῃ ἀντικείμενον εὑρισκόμενον εἰς*** *ἀπόστασιν 7030 μέτρων ;* $(14\frac{31}{48})$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

177. ***Ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμητὴν ἑνὸς κλάσματος ἐπὶ ἕνα ἀκέραιον ἀριθμόν, τὸ κλάσμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἂν δὲ τὸν διαιρέσωμεν δι' ἑνὸς ἀκεραίου ἀριθμοῦ, τὸ κλάσμα διαιρεῖται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.*** Π. χ. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος $\frac{2}{10}$ ἐπὶ 3, τὸ κλάσμα θὰ γείνῃ $\frac{2\times3}{10}=\frac{6}{10}$. Ἀλλὰ τὰ 6 μέρη εἶνε 3 φορὰς περισσότερα ἀπὸ τὰ 2, ἑπομένως καὶ τὸ κλάσμα $\frac{6}{10}$ εἶνε 3 φορὰς μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{2}{10}$.

Ἀντιστρόφως τὸ κλάσμα $\frac{2}{10}$ εἶνε 3 φορὰς μικρότερον ἀπὸ τὸ $\frac{6}{10}$. Εὑρίσκεται δὲ τὸ $\frac{2}{10}$, ἂν διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμητὴν 6 τοῦ $\frac{6}{10}$ διὰ 3.

178. ***Ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸν παρονομαστὴν ἑνὸς κλάσματος ἐπὶ ἕνα ἀκέραιον ἀριθμόν, τὸ κλάσμα διαιρεῖται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἂν δὲ τὸν διαιρέσωμεν δι' ἑνὸς ἀκεραίου ἀριθμοῦ, τὸ κλάσμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.***

Π.χ. Ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸν παραονομαστὴν τοῦ κλάσματος $\frac{2}{10}$ ἐπὶ 2, θὰ γείνῃ $\frac{2}{10\times2}=\frac{2}{20}$. Ἀλλὰ τὸ $\frac{1}{20}$ εἶνε 2 φορὰς μικρότερον ἀπὸ τὸ $\frac{1}{10}$, διότι, διὰ νὰ σχηματισθῇ, ἐχωρίσθη ἡ μονὰς εἰς 2 φορὰς περισσότερα τεμάχια, ἑπομένως καὶ τὸ $\frac{2}{20}$ εἶνε 2 φορὰς μικρότερον ἀπὸ τὸ $\frac{2}{10}$.

Ἂν διαιρέσωμεν τὸν παρονομαστὴν τοῦ $\frac{2}{10}$ διὰ 2, θὰ γείνῃ $\frac{2}{10:2}=\frac{2}{5}$. Ἀλλὰ τὸ $\frac{1}{5}$ εἶνε δύο φορὰς μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ $\frac{1}{10}$, διότι διὰ νὰ σχηματισθῇ ἐχωρίσθη ἡ μονὰς εἰς δύο φορὰς ὀλιγώτερα τεμάχια, ἐπομένως καὶ τὸ $\frac{2}{5}$ εἶνε δὺο φορὰς μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ $\frac{2}{10}$. Ὥστε ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος καὶ ὁ ἀριθμητὴς αὐτοῦ, καθὼς καὶ ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος καὶ ὁ παρονομαστὴς αὐτοῦ εἶνε ποσὰ μεταβλητὰ ἐξαρτώμενα ἀπ' ἀλλήλων.

179. ***Ἂν πολλαπλασιάσωμεν ἢ διαιρέσωμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους ἑνὸς κλάσματος μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος δὲν μεταβάλλετια.***

Π. χ. Ἂν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{2}{10}$ ἐπὶ 2 γίνεται $\frac{2\times2}{10\times2}=\frac{4}{20}$. Οὕτως ὅμως ἐκάμαμεν τὴν ἀξίαν αὐτοῦ 2 φορὰς μεγαλυτέραν καὶ 2 φορὰς μικροτέραν, ἐπομένως ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος δὲν μετεβλήθη. Τὸ $\frac{2}{10}$ λοιπὸν εἶνε ἰσοδύναμον μὲ τὸ $\frac{4}{20}$. Τὸ δὲ $\frac{2}{10}$ προκύπτει ἀπὸ τὸ $\frac{4}{20}$, ἂν διαιρέσωμεν τοὺς ὅρους του διὰ τοῦ 2.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος δὲν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν μεταβολὴν αὐτὴν τῶν ὅρων του, καίτοι δηλ. μεταβάλλονται οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἢ τῆς διαιρέσεως αὐτῶν μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος διατηρεῖ σταθερὰν τιμήν.

ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΙΣ

180. ***Ἁπλοποίησις ἑνὸς κλάσματος λέγεται ἡ εὕρεσις ἄλλου κλάσματος ἰσοδυνάμου πρὸς τὸ πρῶτον, τὸ ὁποῖον ὅμως νὰ ἔχῃ μικροτέρους ὅρους.***

Διὰ νὰ ἁπλοποιήσωμεν ἕνα κλάσμα διαιροῦμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους του διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ. Ὥστε ἓν κλάσμα ἁπλοποιεῖται, ὅταν οἱ ὅροι του ἔχουν κοινὸν διαιρέτην :

Π. χ. $\frac{12}{30}=\frac{12:2}{30:2}=\frac{6}{15}=\frac{6:3}{15:3}=\frac{2}{5}$.

Τὸ κλάσμα $\frac{2}{5}$ δὲν ἁπλοποιεῖται, διότι οἱ ὅροι του δὲν ἔχουν κοινὸν διαιρέτην, εἶνε δηλ. πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Τὰ τοιαῦτα κλάσματα λέγονται ***ἀνάγωγα.***

Παρατήρησις. Τὸ κλάσμα $\frac{15}{3}$ ἐπειδὴ ὁ ἀριθμητής του διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του, εἶνε ἴσον μὲ τὸν ἀκέραιον 5, ἂν δὲ τὸ ἁπλοποιήσωμεν γίνεται $\frac{5}{1}$. Ὥστε ὁ ἀκέραιος 5 ἰσοῦται μὲ τὸ κλάσμα $\frac{5}{1}$.

Ὅθεν: ***Εἰς πάντα ἀκέραιον δυνάμεθα νὰ θέσωμεν παρονομαστὴν τὴν ἀκεραίαν μονάδα.***

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

173) Νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ ἑξῆς κλάσματα ἀπὸ μνήμης καὶ γραπτῶς. α') $\frac{2}{4}$, β') $\frac{4}{6}$, γ') $\frac{6}{9}$, δ') $\frac{8}{10}$, ε') $\frac{12}{15}$, στ') $\frac{14}{21}$ ζ') $\frac{18}{24}$, η') $\frac{20}{25}$, θ') $\frac{30}{36}$, ι') $\frac{42}{49}$, ια') $\frac{48}{64}$, ιβ') $\frac{30}{90}$, ιγ') $\frac{60}{90}$, ιδ') $\frac{1200}{1600}$

174) Ὁμοίως τὰ ἑξῆς γραπτῶς: α') $\frac{120}{150}$, β') $\frac{1050}{1260}$, γ') $\frac{5544}{6468}$, δ') $\frac{7560}{15120}$, ε') $\frac{22680}{45360}$, ($\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$,)

(Διὰ τὴν γ' τάξιν)

ΑΝΑΓΩΓΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

181. ***Ἐὰν οἱ ὅροι κλάσματος εἶνε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, οἱ ὅροι παντὸς κλάσματος ἴσου πρὸς αὐτὸ προέρχονται ἐκ τῶν ὅρων αὐτοῦ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ των ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.***

Δηλ. ἂν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{2}{3}$, ὅπου 2 καὶ 3 πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, τότε θὰ εἶνε τὸ $\alpha = 2 \times \pi$ καὶ τὸ $\beta = 3 \times \pi$.

Διότι, ἂν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{2}{3}$, πολλαπλασιάζοντες τὰ κλάσματα ἐπὶ $\beta \times 3$ θὰ ἔχομεν $\frac{\alpha \times \beta \times 3}{\beta}=\frac{2 \times \beta \times 3}{3}$ ἢ ἁπλοποιοῦντες $3 \times \alpha = 2 \times \beta$. Ὁ 3 διαιρεῖ τὸ $3 \times \alpha$ ὡς πολλαπλάσιόν του, διαιρεῖ καὶ τὸ ἴσον πρὸς αὐτὸ γινόμενον $2 \times \beta$ καὶ ἐπειδὴ εἶνε πρῶτος πρὸς τὸν 2 θὰ διαιρῇ (ἐδ. 150) τὸν β, ἤτοι $\beta : 3 = \pi$, ὅθεν $\boldsymbol{\beta = 3 \times \pi}$.

Ἑπομένως $3 \times \alpha = 2 \times \beta = 2 \times 3 \times \pi$, ἤτοι $3 \times \alpha = 2 \times 3 \times \pi$, διαιροῦντες δὲ διὰ 3 εὑρίσκομεν $\boldsymbol{\alpha = 2 \times \pi}$.

Ὥστε κλάσμα ἴσον πρὸς τὸ $\frac{2}{3}$ μὲ μικροτέρους ὅρους δὲν ὑπάρχει.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

175) Δύο ἀνάγωγα κλάσματα εἶνε ἴσα, μόνον ὅταν ἔχουν τοὺς ἰδίους ἀριθμητὰς καὶ παρονομαστάς.

176) Ἐὰν οἱ ὅροι ἑνὸς κλάσματος διαιρεθοῦν διὰ τοῦ μ.κ.δ.των, προκύπτει κλάσμα ἀνάγωγον.

ΤΡΟΠΗ ΕΤΕΡΩΝΥΜΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ ΕΙΣ ΟΜΩΝΥΜΑ

182. Τὰ κλάσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, λέγονται ὁμώνυμα, π. χ. $\frac{2}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{6}{8}$.

Τὰ κλάσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν διαφόρους παρονομαστάς, λέγονται **ἑτερώνυμα**· π. χ. $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$.

Διὰ νὰ τρέψωμεν ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα, πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους ἑκάστου κλάσματος ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν λοιπῶν παρονομαστῶν.

Ἂς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι θέλομεν νὰ τρέψωμεν εἰς ὁμώνυμα τὰ ἄνω κλάσματα.
Πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο ὅρους τοῦ α′ ἐπὶ τὸ γινόμενον 4×6 τῶν λοιπῶν παρανομαστῶν, τοὺς ὅρους τοῦ β′ ἐπὶ 3×6 καὶ τοῦ γ′ ἐπὶ 3×4 καὶ οὕτω θὰ ἔχωμεν $\frac{2\times4\times6}{3\times4\times6} = \frac{48}{72}$,

$$\frac{3\times3\times6}{4\times3\times6} = \frac{54}{72} \quad \text{καὶ} \quad \frac{5\times3\times4}{6\times3\times4} = \frac{60}{72}.$$

183. Κατ' ἄλλον τρόπον ***διαιροῦμεν τὸ ε.κ.π. τῶν παρονομαστῶν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ ἑκάστου κλάσματος καὶ μὲ τὸ πηλίκον πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος τούτου.***

Οὕτως εἰς τὸ ἄνω παράδειγμα ε.κ.π. τῶν παρονομαστῶν εἶνε ὁ 12. Πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο ὅρους τοῦ α′ κλάσματος ἐπὶ τὸ πηλίκον $12 : 3 = 4$, τοὺς ὅρους τοῦ β′ ἐπὶ $12 : 4 = 3$ καὶ τοὺς ὅρους τοῦ γ′ ἐπὶ $12 : 6 = 2$ καὶ οὕτω θὰ ἔχωμεν $\frac{2\times4}{3\times4} = \frac{8}{12}$,

$$\frac{3\times3}{4\times3}=\frac{9}{12} \quad \text{καὶ} \quad \frac{5\times2}{6\times2}=\frac{10}{12}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 177) *Νὰ τραποῦν εἰς ὁμώνυμα τὰ ἑξῆς κλάσματα:*

α) $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{12}$, β') $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{12}$,

γ') $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{7}{12}$, δ') $\frac{5}{6}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{12}$,

ε') $\frac{1}{12}$, $\frac{11}{18}$, $\frac{13}{15}$, $\frac{17}{45}$, $\frac{19}{30}$, $\frac{31}{36}$, στ') $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{2}{11}$.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

Ὁ ὁρισμὸς τῆς προσθέσεως τῶν κλασμάτων εἶνε ὁ ἴδιος μὲ τὸν ὁρισμὸν τῆς προσθέσεως τῶν ἀκεραίων μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι αἱ μονάδες τῶν προσθετέων εἶνε ἢ κλασματικαὶ ἢ ἀκέραιαι καὶ κλασματικαί.

184. ***Διὰ νὰ προσθέσωμεν κλάσματα, ἂν εἶνε ἑτερώνυμα τρέπομεν αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα καὶ κατόπιν προσθέτομεν τοὺς ἀριθμητάς των καὶ τὸ ἄθροισμα γράφομεν ἀριθμητήν, παρονομαστὴν δὲ γράφομεν τὸ κοινὸν παρονομαστὴν τῶν κλασμάτων.***

Παραδείγματα. 1) $\frac{3}{10}+\frac{6}{10}+\frac{9}{10}=\frac{3+6+9}{10}=\frac{18}{10}=$
$=1\,\frac{8}{10}=1\,\frac{4}{5}$

2) $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}=\frac{8}{12}+\frac{9}{12}+\frac{10}{12}=\frac{27}{12}=2\frac{3}{12}$.

Γενικῶς $\frac{\alpha}{\varrho}+\frac{\beta}{\varrho}=\frac{\alpha+\beta}{\varrho}$.

185. ***Διὰ νὰ προσθέσωμεν μικτοὺς ἀριθμοὺς προσθέτομεν τοὺς ἀκεραίους, κατόπιν τὰ κλάσματα καὶ ἀκολούθως προσθέτομεν τὰ δύο ἀθροίσματα.***

Π.χ. $2\frac{4}{5}+3\frac{7}{10}+5\frac{13}{20}=2+3+5+\frac{4}{5}+\frac{7}{10}+\frac{13}{20}$
$=10+\frac{16}{20}+\frac{14}{20}+\frac{13}{20}=10\frac{43}{20}=12\frac{3}{20}$,

186. Ὁ νόμος τῆς ἀντιμεταθέσεως ἰσχύει καὶ ἐπὶ τῶν κλασμάτων. Διότι $\frac{5}{11}+\frac{3}{11}+\frac{2}{11}=\frac{5+3+2}{11}=\frac{2+3+5}{11}=\frac{2}{11}+\frac{3}{11}+\frac{5}{11}$. Ἄρα $\frac{5}{11}+\frac{3}{11}+\frac{2}{11}=\frac{2}{11}+\frac{3}{11}+\frac{5}{11}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ.

178) Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ προσθέσεις εἰς τὰ κλάσματα τῆς ἀσκήσεως 177.

179) Ὁμοίως αἱ ἑξῆς : α΄) $2\frac{1}{3}+3\frac{3}{5}+7\frac{3}{4}$

β΄) $3\frac{5}{6}+4\frac{7}{8}+5\frac{2}{9}+10\frac{2}{3}$, *γ΄)* $5\frac{7}{9}+4+8\frac{4}{5}+\frac{3}{9}$,

δ΄) $5\frac{2}{7}+4+3\frac{2}{3}+\frac{5}{9}$.

180) Ἀπὸ ἓν βαρέλιον τυροῦ ἐπώλησεν εἷς ἔμπορος $5\frac{3}{4}$ *δκ., κατόπιν* $17\frac{2}{5}$, *κατόπιν* $23\frac{5}{8}$ *καὶ τέλος* $19\frac{7}{10}$· *πόσον ἐπώλησεν ἐν ὅλῳ ;* $(66\frac{19}{40})$

181) Ἔμπορος ἠγόρασε 5 σάκκους ὀρύζης, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ πρῶτος ἐζύγιζεν $65\frac{1}{2}$ *δκ., ὁ β΄* $63\frac{7}{8}$, *ὁ γ΄* $64\frac{1}{4}$, *ὁ δ΄* $64\frac{7}{20}$ *καὶ ὁ ε΄* $63\frac{4}{5}$· *πόσας δκ. ἠγόρασεν ἐν ὅλῳ ;* $(321\frac{31}{40})$

180) Ὁ εἰσπράκτωρ μιᾶς Ἑταιρείας εἰσέπραξεν εἰς μίαν ἡμέραν ἀπὸ ἕνα ὀφειλέτην $158\frac{2}{5}$ *δραχμάς, ἀπὸ δεύτερον* $563\frac{1}{2}$, *ἀπὸ τρίτον* $872\frac{3}{10}$, *ἀπὸ τέταρτον* $2589\frac{1}{20}$ *δραχμὰς καὶ τέλος ἀπὸ πέμπτον* $3873\frac{3}{4}$ *δρ.· πόσα εἰσέπραξεν ἐν ὅλῳ ;* (8057)

183) Μία ὑφάντρια ὑφαίνει εἰς μίαν ἡμέραν $3\frac{1}{4}$ *πήχεις, δευτέρα* $\frac{1}{2}$ *πηχ. περισσότερον τῆς πρώτης καὶ τρίτη* $\frac{1}{8}$ *περισσότερον τῆς δευτέρας· πόσον θὰ ὑφάνουν καὶ αἱ τρεῖς μαζὺ εἰς μίαν ἡμέραν ;* $(10\frac{7}{8})$

184) Ἀπὸ ἕνα σάκκον καφὲ ἐπώλησεν εἷς ἔμπορος εἰς ἕνα $7\frac{1}{2}$ *δκ., εἰς ἄλλον* $12\frac{3}{20}$ *δκ., εἰς τρίτον ὅσον καὶ εἰς τοὺς δύο* *πρώτους καὶ 15 δκ. ἀκόμη, ἔμειναν δὲ εἰς τὸν σάκκον $21\frac{3}{4}$ δκ.· πόσας δκ. περιεῖχεν ὁ σάκκος;* $(90\frac{1}{20})$

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

187. Ὁ ὁρισμὸς τῆς ἀφαιρέσεως τῶν κλασμάτων εἶνε ὁ ἴδιος μὲ τὸν ὁρισμὸν τῆς ἀφαιρέσεως τῶν ἀκεραίων μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι αἱ μονάδες τῶν ἀριθμῶν εἶνε ἢ κλασματικαὶ ἢ ἀκέραιαι καὶ κλασματικαί.

188. ***Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν δύο κλάσματα, ἂν εἶνε ἑτερώνυμα τρέπομεν αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα καὶ κατόπιν ἀφαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ μειωτέου καὶ τὴν διαφορὰν γράφομεν ὡς ἀριθμητήν, παρονομαστὴν δὲ τὸν κοινὸν παρονομαστὴν τῶν κλασμάτων.***

1) $\frac{7}{8}-\frac{5}{8}=\frac{2}{8}$. Γενικῶς $\frac{\alpha}{\varrho}-\frac{\beta}{\varrho}=\frac{\alpha-\beta}{\varrho}$.

2) $\frac{7}{8}-\frac{2}{3}=\frac{21}{24}-\frac{16}{24}=\frac{5}{24}$.

189. ***Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν μικτούς, ἀφαιροῦμεν πρῶτον τὰ κλάσματα καὶ κατόπιν τοὺς ἀκεραίους, ἔπειτα ἑνώνομεν τὰ δύο ὑπόλοιπα.***

Παράδειγμα. $7\frac{3}{8}-1\frac{5}{8}=6+1\frac{3}{8}-1\frac{5}{8}=$

$=6\frac{11}{3}-1\frac{5}{8}=(6-1)+(\frac{11}{8}-\frac{5}{8})=5\frac{6}{8}=5\frac{3}{4}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

185) Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ ἑξῆς ἀφαιρέσεις: α΄) $\frac{7}{9}-\frac{630}{945}$,

β΄) $25\frac{7}{8}-17$, γ΄) $62\frac{1}{9}-\frac{1}{8}$, δ΄) $358-\frac{242}{469}$,

ε΄) $532-289\frac{138}{245}$.

186) Ὁμοίως αἱ ἑξῆς: α΄) $29-(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6})$

β΄) $32-(2\frac{5}{6}+3\frac{7}{8}+7\frac{4}{9})$, γ΄) $17\frac{6}{17}-(\frac{5}{9}+\frac{7}{11}-\frac{4}{15})$, δ') $53\frac{5}{8} - (3\frac{7}{12} + 5\frac{6}{11} + 9\frac{2}{3})$,

ε')$(15\frac{2}{7} + 28\frac{3}{14} + 39\frac{2}{5}) - (8\frac{5}{9} + 13\frac{7}{12} + 15\frac{4}{15})$.

187) Ἔμπορος ἐπώλησε τὰ $\frac{5}{6}$ ἑνὸς τεμαχίου ὑφάσματος· πόσον τοῦ ἔμεινεν; $(\frac{1}{6})$

188) Τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν εἶνε $9\frac{5}{8}$, ὁ εἷς προσθετέος εἶνε $3\frac{11}{12}$· ποῖος εἶνε ὁ ἄλλος προσθετέος καὶ ποία ἡ διαφορὰ αὐτῶν; $(5\frac{17}{24},\ 1\frac{19}{24})$

189) Δύο ἄνθρωποι ἐμοίρασαν ἓν τεμάχιον ὑφάσματος ἀποτελούμενον ἀπὸ $8\frac{3}{8}$ πηχ.· ὁ α' ἔλαβε $3\frac{3}{4}$ πήχ.· πόσους πήχεις ἔλαβεν ὁ β' καὶ πόσους περισσότερον τοῦ α'; $(4\frac{5}{8},\ \frac{7}{8})$

190) Μαθητὴς ἠγόρασε βιβλία ἀντὶ $85\frac{3}{4}$ δρ., εἶχε δὲ 100 δρ. πόσον τοῦ ἔμεινεν; $(14\frac{1}{4})$

191) Ἐξώδευσεν εἷς διὰ τροφήν του τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ εἰσοδήματός του, διὰ τὴν ἐνδυμασίαν του τὸ $\frac{1}{12}$ καὶ δι' ἔκτακτα ἔξοδα $\frac{1}{15}$· πόσον μέρος τοῦ εἰσοδήματος τοῦ ἀπομένει: $(\frac{13}{20})$

192) Ἐξώδευσεν εἰς μίαν ἡμέραν $7\frac{1}{2}$ δρ. δι' ἄρτον, $35\frac{1}{4}$ δρ. διὰ κρέας, $8\frac{3}{4}$ δρ. διὰ τυρὸν καὶ $14\frac{8}{10}$ δρ. δι' ὀπωρικά· πόσαι δραχμαὶ τοῦ ἀπέμειναν ἀπὸ ἓν ἑκατοντάδραχμον, τὸ ὁποῖον εἶχεν; $(33\frac{7}{10})$.

193) Ἔμπορος ἐπώλησεν ἀπὸ ἓν βαρέλιον τυροῦ, τὸ ὁποῖον περιεῖχεν $108\frac{3}{4}$ ὀκ., εἰς ἕνα $5\frac{7}{8}$ ὀκ., εἰς ἄλλον $1\frac{3}{5}$ περισσότερον

ἀπὸ ὅσον ἐπώλησεν εἰς τὸν πρῶτον καὶ εἰς τρίτον $7\frac{9}{20}$ περισσότερον ἀπὸ ὅσον ἐπώλησεν εἰς τοὺς δύο προηγουμένους· πόσον ἐπώλησεν ἐν ὅλῳ καὶ πόσον ἀπομένει εἰς τὸ βαρέλιον;

$(34\frac{3}{20},\ 76\frac{3}{5})$.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

ΓΕΝΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ ΑΥΤΟΥ

190. ***Πολλαπλασιασμὸς εἶνε ἡ πρᾶξις, εἰς τὴν ὁποίαν δίδονται δύο ἀριθμοί, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ εἷς λέγεται πολλαπλασιαστέος καὶ ὁ ἄλλος πολλαπλασιαστὴς καὶ σχηματίζομεν τρίτον, ὀνομαζόμενον γινόμενον, ἀπὸ τὸν α΄, ὅπως ὁ β΄ ἐσχηματίσθη ἀπὸ τὴν ἀκεραίαν μονάδα.***

Εἰς τὸν γενικὸν τοῦτον ὁρισμὸν ὑπάγεται καὶ ὁ δοθεὶς εἰς τοὺς ἀκεραίους. Διότι ἐκ τοῦ γενικοῦ ὁρισμοῦ συνάγεται ὅτι, ἂν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἐσχηματίσθη ἀπὸ τὴν ἀκεραίαν μονάδα, ἀφοῦ ἐλάβομεν ταύτην 2, 3, 4 κλπ. φοράς, καὶ τὸ γινόμενον θὰ σχηματισθῇ ἀπὸ τὸν πολλαπλασιαστέον, ἀφοῦ λάβωμεν αὐτὸν 2, 3, 4 κλπ. φοράς.

Α΄.) ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΗΣ ΑΚΕΡΑΙΟΣ

191. ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν κλάσμα ἐπὶ ἀκέραιον,*** (κατὰ τὰς ἰδιότητας τῶν κλασμάτων, ἐδ. 177 καὶ 178), ***ἢ πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμητήν του ἐπὶ τὸν ἀκέραιον καὶ ἀφίνομεν τὸν ἴδιον παρονομαστήν, ἢ διαιροῦμεν τὸν παρονομαστήν του διὰ τοῦ ἀκεραίου, ἂν διαιρῆται, καὶ ἀφίνομεν τὸν ἴδιον ἀριθμητήν.***

Π. χ. $\frac{3}{8}\times 4=\frac{3\times 4}{8}=\frac{12}{8}=1\frac{4}{8}=1\frac{1}{2}$ ἢ

$\frac{3}{8}\times 4=\frac{3}{8:4}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$. Γενικῶς $\frac{\alpha}{\varrho}\times\beta=\frac{\alpha\times\beta}{\varrho}$

192. ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν μικτὸν ἐπὶ ἀκέραιον, πολλαπλασιάζομεν χωριστὰ τὸν ἀκέραιον τοῦ μικτοῦ καὶ χωριστὰ τὸ κλάσμα του ἐπὶ τὸν ἀκέραιον καὶ κατόπιν προσθέτομεν τὰ δύο γινόμενα, ἢ τρέπυμεν τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα καὶ κατόπιν ἐκτελοῦμεν τὸν πολλαπλασιασμόν.***

Π. χ. $3\frac{2}{5}\times 2=3\frac{2}{5}+3\frac{2}{5}=3+3+\frac{2}{5}+\frac{2}{5}=$

$$=3\times 2+\frac{2}{5}\times 2=6\frac{4}{5}, \quad \text{ἢ}\ 3\frac{2}{5}\times 2=\frac{17}{5}\times 2=6\frac{4}{5}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

194) Νὰ ἐκτελεσθοῦν ἀπὸ μνήμης καὶ γραπτῶς οἱ ἑξῆς πολλαπλασιασμοὶ καὶ κατὰ τοὺς δύο τρόπους.

α′) $\frac{7}{24}\times 6$, β′) $\frac{13}{70}\times 10$, γ′) $\frac{7}{36}\times 18$, δ′) $\frac{17}{120}\times 30$

195) Ὁμοίως γραπτῶς οἱ ἑξῆς: α) $\frac{121}{938}\times 134$, β′) $9\frac{78}{980}\times 245$.

196) Ὁμοίως οἱ ἑξῆς: α′) $\frac{3}{4}\times 4$, β′) $\frac{5}{9}\times 9$, γ′) $\frac{245}{368}\times 368$ *καὶ νὰ ἐξαχθῇ* ***κανὼν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ κλάσματος ἐπὶ τὸν παρονομαστήν του.***

197) Μία λάμπα καίει εἰς μίαν ὥραν $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς· πόσον θὰ καύσῃ εἰς 5 ὥρας; ($3\frac{3}{4}$)

198) Τὸ ῥούπιον ἑνὸς ὑφάσματος τιμᾶται $\frac{7}{8}$ τῆς δραχμῆς· πόσον τιμῶνται τὰ 6 ῥούπια; ($5\frac{1}{4}$)

199) Τὸ δράμιον τοῦ καφὲ τιμᾶται $18\frac{3}{4}$ λ.· πόσον τιμῶνται 80 δράμια; (15 δρ.)

200) Τὸ δράμιον τοῦ κρέατος τιμᾶται $\frac{2}{25}$ δρ.· πόσον τιμῶνται 350 δράμια; (28)

201) Ἐργάτης λαμβάνει ἡμερομίσθιον $65\frac{1}{2}$ δρ.· πόσα θὰ λάβῃ εἰς ἓν ἔτος (365 ἡμέρας), ἂν δὲν ἐργάζεται 70 ἡμέρας τὸ ἔτος καὶ πόσον θὰ τοῦ μείνῃ, ἐὰν ἐξοδεύῃ καθ' ἡμέραν $45\frac{3}{4}$ δραχμάς; ($19322\frac{1}{2}$, $2623\frac{3}{4}$)

202) Ἔμπορος ἐπώλησε 2580 ὀκ. ἀλεύρου πρὸς $5\frac{3}{4}$ δρ. τὴν ὀκᾶν καὶ 1890 ὀκ. κριθῆς πρὸς $3\frac{1}{2}$ δρ. τὴν ὀκᾶν· πόσας δρ. εἰσέπραξεν; (19515)

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

193. Εἴδομεν ὅτι διὰ τῶν κλασμάτων ἡ διαίρεσις εἶνε δυνατὴ καὶ ὅταν ὁ διαιρετέος εἶνε μικρότερος τοῦ διαιρέτου καὶ πάντοτε τελεία (ἐδ. 175), διὰ τοῦτο εἰς πᾶσαν διαίρεσιν ὁ διαιρετέος εἶνε γινόμενον τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ πηλίκου, ὥστε δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν γενικώτερον τὴν διαίρεσιν ὡς ἑξῆς :

Διαίρεσις εἶνε ἡ πρᾶξις, εἰς τὴν ὁποίαν δίδονται δύο ἀριθμοί, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ εἷς λέγεται διαιρετέος, ὁ δὲ ἄλλος διαιρέτης καὶ ζητεῖται τρίτος, ὁ ὁποῖος λέγεται πηλίκον καὶ ὁ ὁποῖος πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν διαιρέτην δίδει γινόμενον τὸν διαιρετέον.

ΔΙΑΙΡΕΤΗΣ ΑΚΕΡΑΙΟΣ

194. ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν κλάσμα δι᾽ ἀκεραίου*** (κατὰ τὰς ἰδιότητας τῶν κλασμάτων, ἐδ. 177 καὶ 178) ***ἢ διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητήν του, ἂν διαιρῆται, καὶ ἀφίνομεν τὸν ἴδιον παρονομαστὴν ἢ πολλαπλασιάζομεν τὸν παρονομαστήν του καὶ ἀφίνομεν τὸν ἴδιον ἀριθμητήν.***

Π. χ. $\frac{6}{7} : 2 = \frac{6:2}{7} = \frac{3}{7}$ ἢ $\frac{6}{7} : 2 = \frac{6}{7 \times 2} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$.

195. ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν μικτὸν δι᾽ ἀκεραίου διαιροῦμεν χωριστὰ τὸν ἀκέραιον τοῦ μικτοῦ καὶ χωριστὰ τὸ κλάσμα του διὰ τοῦ ἀκεραίου καὶ κατόπιν ἑνώνομεν τὰ δύο πηλίκα ἢ τρέπομεν τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα καὶ κατόπιν ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν.***

Π. χ. $15\frac{6}{10} : 3 = 15 : 3 + \frac{6}{10} : 3 = 5\frac{2}{10}$

ἢ $15\frac{6}{10} : 3 = \frac{156}{10} : 3 = \frac{52}{10} = 5\frac{2}{10}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ.

203) Νὰ ἐκτελεσθοῦν ἀπὸ μνήμης καὶ γραπτῶς αἱ ἑξῆς διαιρέσεις καὶ κατὰ τοὺς δύο τρόπους : α΄) $\frac{2}{5} : 2$, *β΄)* $\frac{18}{19} : 6$ *γ΄)* $\frac{33}{40} : 11$, *δ΄)* $\frac{48}{70} : 16$

204) Ὁμοίως γραπτῶς αἱ ἑξῆς : α΄) $\frac{52}{67} : 13$, *β΄)* $\frac{34}{85} : 17$, *γ΄)* $\frac{343}{738} : 123$, *δ΄)* $30\frac{45}{53} : 15$, *ε΄)* $133\frac{114}{234} : 19$, *205) Ἐργάτης ἤνοιξεν εἰς 3 ἡμέρας τὰ $\frac{6}{7}$ μιᾶς τάφρου· πόσον ἤνοιγε τὴν ἡμέραν;* $(\frac{2}{7})$

206) Ἀποθανὼν εἷς ὥρισε διὰ διαθήκης νὰ λάβῃ ἡ μὲν σύζυγός του τὰ $\frac{4}{9}$ τῆς περιουσίας του, τὸ δὲ ὑπόλοιπον νὰ μοιρασθῇ ἐξ ἴσου εἰς τοὺς τρεῖς υἱούς του· πόσον μέρος τῆς περουσίας θὰ λάβῃ ἕκαστος ἐκ τῶν τριῶν υἱῶν του; $(\frac{5}{27})$

207) Πόσον τιμᾶται ἡ ὀκᾶ τῶν σταφυλῶν ὅταν 5 ὀκ. τιμῶνται 38 $\frac{3}{4}$ $(7\frac{3}{4})$

208) 15 πήχεις ὑφάσματος τιμῶνται 1886 $\frac{1}{4}$ δρ.· πόσον τιμᾶται ὁ πῆχυς; $(125\frac{3}{4})$

209) Ἡ ὀκᾶ τοῦ σάπωνος τιμᾶται 12δρ.· πόσας ὀκ. σάπωνος θὰ ἀγοράσωμεν μὲ 158 $\frac{3}{4}$ δρ.; $(13\frac{11}{48})$

210) Μία ὀκᾶ βουτύρου ἀνταλλάσσεται μὲ 3 ὀκ. τυροῦ· μὲ πόσας ὀκ. βουτύρου θὰ ἀνταλλαχθοῦν 139 $\frac{5}{8}$ ὀκ. τυροῦ; $(46\frac{13}{24})$

211) Ὁ πῆχυς ἑνὸς ὑφάσματος τιμᾶται 85 δρ.· πόσους πήχεις ἀγοράζομεν μὲ 2578 $\frac{1}{2}$ δρ. $(30\frac{57}{170})$

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

Β'.) ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΗΣ ΚΛΑΣΜΑ ἢ ΜΙΚΤΟΣ

196.** **Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀκέραιον ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀκέραιον ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν καὶ τὸ γινόμενον γράφομεν ὡς ἀριθμητήν, παρονομαστὴν δὲ τὸν τοῦ κλάσματος.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ζητοῦμεν τὸ γινόμενον $6\times\frac{3}{8}$. Κατὰ τὸν γενικὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (ἐδ.184) θὰ σχηματίσωμεν τὸ γινόμενον ἀπὸ τὸν πολλαπλασιαστέον 6, ὅπως ἐσχηματίσθη ὁ πολλαπλασιαστὴς $\frac{3}{8}$ ἀπὸ τὴν ἀκεραίαν μονάδα. Ὁ $\frac{3}{8}$ ἐσχηματίσθη, ἀφοῦ ἐλάβομεν ὄχι ὁλόκληρον τὴν ἀκεραίαν μονάδα, ἀλλὰ τὸ ὄγδοον αὐτῆς καὶ τὸ ἐπανελάβομεν τρεῖς φοράς, ἑπομένως καὶ τὸ γινόμενον θὰ σχηματισθῇ, ἂν λάβωμεν τὸ ὄγδοον τοῦ 6, δηλ. τὸ $6:8=\frac{6}{8}$, καὶ τὸ ἐπαναλάβωμεν τρεῖς φοράς, ἤτοι $\frac{6}{8}\times 3=\frac{6\times 3}{8}$. Ὥστε $6\times\frac{3}{8}=\frac{6\times 3}{8}$. Γενικῶς $\alpha\times\frac{\beta}{\gamma}=$ $=\frac{\alpha\times\beta}{\gamma}$. Ὁμοίως σκεπτόμενοι εὑρίσκομεν $\frac{6}{7}\times\frac{3}{8}=\frac{6\times 3}{7\times 8}$.

Γενικῶς $\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\times\gamma}{\beta\times\delta}$. Ἐπομένως:

197. Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο κλάσματα, πολλαπλασιάζομεν τοὺς ἀριθμητάς των καὶ τὸ γινόμενον γράφομεν ὡς ἀριθμητήν, πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς παρονομαστάς των καὶ τὸ γινόμενον γράφομεν ὡς παρονομαστήν.

198. Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν μικτὸν ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιάζομεν χωριστὰ τὸν ἀκέραιον τοῦ μικτοῦ καὶ χωριστὰ τὸ κλάσμα του ἐπὶ τὸ κλάσμα, καὶ κατόπιν ἑνώνομεν τὰ δύο γινόμενα.

Κατ' ἄλλον τρόπον συντομώτερον *τρέπομεν τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα καὶ κατόπιν ἐκτελοῦμεν τὸν πολλαπλασιασμόν.*

Π. χ. $5\frac{6}{7}\times\frac{3}{8}=5\times\frac{3}{8}+\frac{6}{7}\times\frac{3}{8}=\frac{15}{8}+\frac{18}{56}=2\frac{11}{56}$

ἢ $5\frac{6}{7}\times\frac{3}{8}=\frac{41}{7}\times\frac{3}{8}=\frac{123}{56}=2\frac{11}{56}$.

199. Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἢ καὶ οἱ δύο παράγοντες εἶνε μικτοὶ ἀριθμοί, τρέπομεν αὐτοὺς εἰς κλάσματα καὶ κατόπιν ἐκτελοῦμεν τὸν πολλαπλασιασμόν.

Π. χ. τὸ γινόμενον $5\frac{6}{7}\times 4\frac{3}{8}=\frac{41}{7}\times\frac{35}{8}=25\frac{35}{58}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

212) Νὰ ἐκτελεσθοῦν οἱ ἑξῆς πολλαπλασιασμοὶ ἀπὸ μνήμης καὶ γραπτῶς: α΄) $6\times\frac{1}{3}$, β΄) $200\times\frac{1}{50}$, γ΄) $5\times\frac{1}{7}$, δ΄) $300\times\frac{1}{40}$, ε΄) $45\times\frac{7}{15}$, στ΄) $11\times\frac{3}{8}$, ζ΄) $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}$, η΄) $\frac{8}{9}\times\frac{5}{8}$.

213) Ὁμοίως γραπτῶς οἱ ἑξῆς: α΄) $132\times\frac{145}{213}$, β΄) $\frac{112}{213}\times\frac{215}{273}$, γ΄) $10\times\frac{127}{368}$, δ΄) $\frac{12}{17}\times 13\frac{14}{15}$, ε΄) $12\frac{14}{15} \times 17\frac{11}{23}$.

214) Ἐπίσης οἱ ἑξῆς κατὰ τὸν ἑπόμενον τρόπον:

$468 \times 5 = 468 \times \frac{10}{2}$.

α΄) 893×5, β΄) 7546×50, γ΄) 25769×500,

δ΄) 725894×5000, ε΄) 595×25, στ΄) 895×250, $(25 = \frac{100}{4})$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΛΥΟΜΕΝΑ ΔΙΑ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ

200. α΄) Πόσον τιμῶνται τὰ $\frac{3}{5}$ τῆς ὀκᾶς τῶν μήλων, ὅταν ἡ ὀκᾶ τιμᾶται $7\frac{1}{2}$ δρ.;

Λύσις διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα.

(Ἴδε πρόβλημα 100 σελὶς 47)

Ἀφοῦ ἡ 1 ὀκᾶ τιμᾶται $7\frac{1}{2} = \frac{15}{2}$ δρ.

τὸ $\frac{1}{5}$ ὀκ. τιμᾶται τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ $\frac{15}{2} = \frac{15}{2 \times 5}$ δρ.

τὰ $\frac{3}{5}$ ὀκ. τιμῶνται 3 φορ. τὸ $\frac{15}{2 \times 5} = \frac{15 \times 3}{2 \times 5} = \frac{45}{10} = 4\frac{1}{2}$ δρ.

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο ἐδόθη ἡ τιμὴ τῆς 1 ὀκᾶς, καὶ ἐζητεῖτο ἡ τιμὴ μέρους τῆς ὀκᾶς, παρατηροῦμεν δὲ ὅτι τὸ εὑρεθὲν ἐξαγόμενον $\frac{15 \times 3}{2 \times 5}$ εἶνε τὸ γινόμενον τοῦ κλάσματος $\frac{15}{4}$, δηλ. τῆς τιμῆς τῆς ὀκᾶς, ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{3}{5}$. Ἄρα τὸ πρόβλημα λύεται διὰ πολλαπλασιασμοῦ.

β΄) Πόσον τιμῶνται $4\frac{2}{3}$ ὀκ. γεωμήλων, ὅταν ἡ ὀκᾶ τιμᾶται $5\frac{1}{10}$ δρ.;

Ἀφοῦ ἡ 1 ὀκ. τιμᾶται $5\frac{1}{10} = \frac{51}{10}$ δρ.

τὸ $\frac{1}{3}$ » » τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ $\frac{51}{10} = \frac{51}{10 \times 3}$ δρ.

τὰ $\frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$ τιμῶνται 14 φορ. τὸ $\frac{51}{10 \times 3} = \frac{714}{30} = 23\frac{3}{10}$ δρ.

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο ἐδόθη ἡ τιμὴ τῆς 1 ὀκᾶς καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ τῶν πολλῶν ὀκάδων καὶ μέρους τῆς ὀκᾶς, παρατηρούμεν δὲ ὅτι τὸ εὑρεθὲν ἐξαγόμενον $\frac{51\times14}{10\times3}$ εἶνε γινόμενον τοῦ $\frac{51}{10}=5\frac{1}{10}$, δηλ. τῆς τιμῆς τῆς ὀκᾶς, ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν $\frac{14}{4}=4\frac{2}{3}$.

Ἄρα τὸ πρόβλημα λύεται διὰ πολλαπλασιασμοῦ.

Ἐκ τῆς λύσεως τῶν προβλημάτων τούτων συνάγομεν ὅτι : ***Ὅταν δίδεται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ ἢ μέρους τῆς μονάδος ἢ τῶν πολλῶν μονάδων καὶ μέρους τῆς μονάδος, κάμνομεν πολλαπλασιασμόν, εἰς τὸν ὁποῖον πολλαπλασιαστέος εἶνε ἡ δοθεῖσα τιμή.*** (Παράβαλε κανόνα ἐδ. 125).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

215) *Ἡ ὀκᾶ τοῦ κρέατος τιμᾶται 32 δρ.· πόσον τιμᾶται τὸ* $\frac{1}{4}$ *τῆς ὀκᾶς ;* (8)

216) *Ὁ πῆχυς ἑνὸς ὑφάσματος τιμᾶται 232 δρ.· πόσον τιμᾶται τὸ* $\frac{1}{8}$ *τοῦ πήχεως ;* (29)

217) *Ποῖον εἶνε τὸ* $\frac{1}{11}$ *τοῦ ἀριθμοῦ 154 ;* (14)

(*Ὁλόκληρος ὁ ἀριθμὸς παριστάνεται διὰ τῆς μονάδος*).

218) *Πόσον εἶνε τὸ* $\frac{1}{16}$ *τοῦ ἀριθμοῦ 238 ;* $(14\frac{7}{8})$

219) *Πόσον εἶνε τὰ* $\frac{5}{6}$ *τοῦ ἀριθμοῦ 348 ;* (290)

220) *Βαρέλιον χωρεῖ 584 ὀκάδας, ἔχουν δὲ πωληθῆ τὰ* $\frac{5}{8}$ *αὐτοῦ· πόσαι ὀκάδες μένουν ἀκόμη εἰς τὸ βαρέλιον ;* (219)

221) *Πόσον εἶνε τὰ* $\frac{6}{7}$ *τοῦ ἀριθμοῦ* $\frac{3}{4}$; $(\frac{9}{14})$

222) *Μία ὀκᾶ καφὲ τιμᾶται 72* $\frac{1}{2}$ *δρ· πόσον τιμῶνται τὰ* $\frac{3}{4}$ *τῆς ὀκᾶς ;* $(54\frac{3}{8})$

223) *Πόσον εἶνε τὰ* $\frac{4}{9}$ *τοῦ ἀριθμοῦ* $2\frac{5}{6}$; $(1\frac{7}{27})$

224) *Πόσον εἶνε τὸ τριπλάσιον καὶ τὰ* $\frac{3}{7}$ *τοῦ ἀριθμοῦ* $6\frac{5}{8}$; $(22\frac{5}{7})$

ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ ΠΟΛΛΩΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ

201) Τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων ὁρίζεται καὶ εὑρίσκεται ὅπως καὶ εἰς τοὺς ἀκεραίους (ἐδ. 83). Π. χ. Ἂν ζητῆται νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{8}\times\frac{4}{5}$, εὑρίσκομεν τὸ γινόμενον τῶν δύο πρώτων $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1\times2}{2\times3}$, κατόπιν τὸ γινόμενον $\frac{1\times2}{2\times3}\times\frac{3}{8}=\frac{1\times2\times3}{2\times3\times8}$ καὶ τέλος τὸ $\frac{1\times2\times3}{2\times3\times8}\times\frac{4}{5}=$ $=\frac{1\times2\times3\times4}{2\times3\times8\times5}=\frac{24}{240}=\frac{1}{10}$. Γενικῶς $\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\gamma}{\delta}\times\frac{\varepsilon}{\zeta}=\frac{\alpha\gamma\varepsilon}{\beta\delta\zeta}$.

Ἑπομένως. ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν πολλὰ κλάσματα σχηματίζομεν ἓν κλάσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀριθμητὴν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν, παρονομαστὴν δὲ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν.***

Παρατηρήσεις. 1) Τὸ κλάσμα $\frac{1\times2\times3\times4}{2\times3\times8\times5}$ δυνάμεθα νὰ ἁπλοποιήσωμεν διαιροῦντες τοὺς ὅρους του διὰ τοῦ 2, ἔπειτα διὰ 3, ὁπότε θὰ ἔχωμεν $\frac{1\times4}{8\times5}$ καὶ τέλος διὰ 4, ὁπότε πάλιν θὰ ἔχωμεν $\frac{1\times1}{2\times5}=\frac{1}{10}$.

2) Ἂν μερικοὶ παράγοντες εἶνε μικτοὶ τρέπομεν αὐτοὺς εἰς κλάσματα καὶ κατόπιν ἐκτελοῦμεν τὸν πολλαπλασιασμόν· π. χ. τὸ γινόμενον $\frac{1}{2}\times2\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}$ εἶνε ἴσον μὲ τὸ $\frac{1}{2}\times\frac{8}{3}\times\frac{3}{4}$. Πράγματι ἂν ἐκτελέσωμεν τὰς πράξεις εὑρίσκομεν καὶ ἀπὸ τὰ δύο τὸν ἀριθμὸν 1.

ΔΥΝΑΜΙΣ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ

202. Διὰ νὰ ὑψώσωμεν κλάσμα εἰς μίαν δύναμιν, ὑψώνομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους του εἰς τὴν δύναμιν ταύτην.

Π. χ. $(\frac{5}{6})^3=\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{5\times5\times5}{6\times6\times6}=\frac{5^3}{6^3}$.

Γενικῶς $(\frac{\beta}{\gamma})^\nu=\frac{\beta^\nu}{\gamma^\nu}$.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ

203. Ὁ νόμος τῆς ἀντιμεταθέσεως ἰσχύει καὶ ἐπὶ τῶν κλασμάτων : π. χ. $\frac{2}{3}\times 5\times\frac{6}{7}=\frac{2\times5\times6}{3\times7}=\frac{6\times5\times2}{7\times3}=$

$=\frac{6}{7}\times 5\times\frac{2}{3}$.

Ἑπομένως $\frac{2}{3}\times 5\times\frac{6}{7}=\frac{6}{7}\times 5\times\frac{2}{3}$.

204. Ἐπίσης ἰσχύει καὶ ὁ ἐπιμεριστικὸς νόμος.

Π. χ. $(\frac{2}{9}+\frac{3}{9}+\frac{5}{9})\times 2=\frac{2+3+5}{9}\times 2=$

$=\frac{(2+3+5)\times 2}{9}=\frac{2\times2+3\times2+5\times2}{9}=\frac{2\times2}{9}+\frac{3\times2}{9}+\frac{5\times2}{9}=$

$=\frac{2}{9}\times 2+\frac{3}{9}\times 2+\frac{5}{9}\times 2.$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

225) *Νὰ δειχθῇ ἡ ἰσχὺς τοῦ ἐπιμεριστικοῦ νόμου καὶ ἐπὶ τῶν ἑτερωνύμων κλασμάτων.*

226) *Νὰ ἐκτελεσθοῦν οἱ ἑξῆς πολλαπλασιασμοὶ μετὰ τῶν δυνατῶν ἁπλοποιήσεων :* α′) $\frac{2}{3}\times\frac{5}{6}\times\frac{7}{9}$,

β′) $\frac{6}{7}\times\frac{7}{11}\times\frac{8}{13}\times\frac{11}{12}$, γ′) $\frac{3}{4}\times\frac{12}{17}\times 4\frac{8}{15}\times\frac{1}{24}\times 15$,

δ′) $\frac{6}{7}\times 2\times 3\frac{2}{5}\times\frac{14}{24}\times 15\times 4\frac{9}{11}$.

227) *Ἐπίσης οἱ ἑξῆς καὶ κατὰ τοὺς δύο τρόπους :*

α′) $(\frac{1}{2}+\frac{2}{3})\times 4$, β′) $(\frac{3}{4}+\frac{5}{8}+7)\times\frac{1}{3}$,

γ′) $(\frac{2}{9}+3+\frac{5}{6}+2\frac{4}{12})\times\frac{5}{9}$.

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

Β′) ΔΙΑΡΕΤΗΣ ΚΛΑΣΜΑ ἢ ΜΙΚΤΟΣ

205. ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἕνα ἀριθμὸν διὰ κλάσματος, πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρετέον ἐπὶ τὸν διαιρέτην ἀντεστραμμένον.***

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ζητοῦμεν τὸ πηλίκον $\frac{2}{5}:\frac{3}{4}$. Κατὰ τὸν γενικὸν ὁρισμὸν τῆς διαιρέσεως (ἐδ. 193) πολλαπλασιάζοντες τὸ ζητούμενον πηλίκον ἐπὶ τὸν διαιρέτην $\frac{3}{4}$, ἤτοι λαμβάνοντες τὰ

$\frac{3}{4}$ τοῦ πηλίκου, εὑρίσκομεν τὸν διαιρετέον $\frac{2}{5}$.

Λοιπόν, ἀφοῦ τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ πηλίκου εἶνε $\frac{2}{5}$

τὸ $\frac{1}{4}$ » » θὰ » $\frac{2}{5}:3=\frac{2}{5\times3}$

καὶ τὰ $\frac{4}{4}=1$ πηλ. θὰ εἶνε $\frac{2}{5\times3}\times4=\frac{2\times4}{5\times3}$

Ἀλλὰ τὸ ἐξαγόμενον $\frac{2\times4}{5\times3}$ εἶνε τὸ γινόμενον τῶν κλασμάτων $\frac{2}{5}\times\frac{4}{3}$ εἶνε δηλ γινόμενον τοῦ διαιρετέου $\frac{2}{5}$ ἐπὶ $\frac{4}{3}$, ἤτοι ἐπὶ τὸν διαιρέτην $\frac{3}{4}$ ἀντεστραμμένον.

Γενικῶς $\frac{\alpha}{\beta}:\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\delta}{\gamma}=\frac{\alpha\times\delta}{\beta\times\gamma}$.

Ὁμοίως σκεπτόμενοι εὑρίσκομεν ὅτι τὸ πηλίκον $6:\frac{3}{4}=6\times\frac{4}{3}$ καὶ τὸ πηλίκον $6\frac{2}{5}:\frac{3}{4}=6\frac{2}{5}\times\frac{4}{3}$.

Γενικῶς $\alpha:\frac{\beta}{\gamma}=\alpha\times\frac{\gamma}{\beta}=\frac{\alpha\gamma}{\beta}$.

206. Διὰ μικτοῦ δὲν γίνεται κατ' ἄλλον τρόπον ἡ διαίρεσις εἰμὴ διὰ τῆς τροπῆς αὐτοῦ εἰς κλάσμα.

Π. χ. $5\frac{2}{3}:6\frac{1}{4}=\frac{17}{3}:\frac{25}{4}=\frac{17}{3}\times\frac{4}{25}=\frac{68}{75}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

228) ***Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ ἑξῆς διαιρέσεις μετὰ τῶν δυνατῶν ἁπλοποιήσεων : α´)*** $5:\frac{2}{7}$, $9:\frac{13}{14}$, $39:\frac{13}{27}$, $625:\frac{210}{252}$, $4936:\frac{1234}{5648}$, β´) $\frac{2}{3}:\frac{7}{8}$, $\frac{5}{6}:\frac{25}{42}$, $\frac{12}{13}:\frac{36}{39}$, $\frac{123}{234}:\frac{246}{702}$, $\frac{1324}{2132}:\frac{3972}{4264}$. γ´) $2\frac{3}{4}:\frac{5}{6}$, $52\frac{4}{7}:\frac{16}{35}$, $19\frac{21}{63}:\frac{39}{45}$, $12\frac{11}{13}:17$. δ´) $7:2\frac{3}{4}$, $9:12\frac{4}{5}$, $13:4\frac{11}{12}$, $135:13\frac{320}{560}$, ε´) $\frac{3}{5}:2\frac{6}{8}$, $\frac{2}{3}:11\frac{4}{7}$, $\frac{9}{11}:4\frac{13}{25}$, $\frac{35}{37}:\frac{240}{480}$, στ´) $3\frac{5}{7}:2\frac{4}{9}$, $3\frac{5}{6}:9\frac{18}{25}$, $15\frac{12}{18}:2\frac{39}{36}$, $11\frac{13}{14}:10\frac{12}{17}$.

ΣΥΝΘΕΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

207. Ὅπως τὸ πηλίκον δύο ἀκεραίων, π. χ. τοῦ 5 : 6, δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν διὰ τοῦ κλάσματος $\frac{5}{6}$, τοιουτοτρόπως θὰ παραστάνωμεν κατ' ἀναλογίαν καὶ τὸ πηλίκον $\frac{2}{3}$: 4 διὰ τοῦ κλάσματος $\frac{\frac{2}{3}}{4}$, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀριθμητὴν τὸν διαιρετέον $\frac{2}{3}$ καὶ παρονομαστὴν τὸν διαιρέτην 4. Ὁμοίως τὸ πηλίκον $\frac{2}{3} : \frac{4}{5}$ παριστάνεται διὰ τοῦ κλάσματος $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}}$, καὶ τὸ πηλίκον $5\frac{2}{3} : 4$ διὰ τοῦ κλάσματος $\frac{5\frac{2}{3}}{4}$. Τὰ τοιαῦτα κλάσματα λέγονται ***σύνθετα***, τὰ δὲ ἕως τώρα γνωστὰ λέγονται ***ἁπλᾶ.***

Ὥστε: ***Σύνθετα κλάσματα λέγονται ὅσα ἔχουν ἢ τὸν ἕνα ὅρον ἢ καὶ τοὺς δύο ὅρους των κλάσματα ἢ μικτούς.***

208. Τὰ σύνθετα κλάσματα ἔχουν ὅλας τὰς ἰδιότητας τῶν ἁπλῶν, ἐπειδὴ εἶνε καὶ αὐτά, ὅπως καὶ τὰ ἁπλᾶ, πηλίκα διαιρέσεως. Τοιουτοτρόπως δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάζωμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους των ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, χωρὶς ἡ ἀξία των νὰ μεταβληθῇ.

Διὰ νὰ τρέψωμεν σύνθετον κλάσμα εἰς ἁπλοῦν ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν τοῦ ἀριθμητοῦ του διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του.

Π. χ. $\frac{2\frac{3}{4}}{3\frac{5}{6}}$ εἶνε πηλίκον τῶν $2\frac{3}{4} : 3\frac{5}{6}$, ἤτοι $\frac{11}{4} : \frac{23}{6} = \frac{33}{46}$.

Κατ' ἄλλον τρόπον τρέπομεν σύνθετον κλάσμα εἰς ἁπλοῦν ὡς ἑξῆς: π. χ. τοῦ ἄνω κλάσματος $\frac{2\frac{3}{4}}{3\frac{5}{6}} = \frac{\frac{11}{4}}{\frac{23}{6}}$ πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν του, δηλ. τὸ $4 \times 6 = 24$, ἢ προτιμότερον ἐπὶ τὸ ε. κ. π. τῶν παρονομαστῶν του, τὸ 12, ὁπότε θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\frac{11}{4} \times 12}{\frac{23}{6} \times 12} = \frac{11 \times 3}{23 \times 2} = \frac{33}{46}.$$

Ἐὰν εἷς ὅρος εἶνε ἀκέραιος, τότε πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ ἄλλου καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ συνθέτου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

229) Νὰ τραποῦν τὰ ἑξῆς σύνθετα κλάσμαεα εἰς ἁπλᾶ.

$$\frac{\frac{2}{3}}{4}, \quad \frac{5}{\frac{6}{7}}, \quad \frac{\frac{7}{8}}{\frac{9}{10}}, \quad \frac{2\frac{3}{5}}{4}, \quad \frac{6}{4\frac{5}{7}}, \quad \frac{5\frac{3}{4}}{\frac{4}{8}}, \quad \frac{\frac{5}{6}}{4\frac{7}{9}}, \quad \frac{7\frac{3}{8}}{9\frac{5}{12}},$$

$$\frac{8-\frac{2}{3}}{7+\frac{5}{6}}, \quad \frac{2+4\frac{5}{6}}{7-2\frac{3}{8}}, \quad \frac{6\frac{2}{7}-5}{4\frac{2}{14}+2}, \quad \frac{2\frac{3}{4}+4\frac{2}{3}}{6\frac{5}{8}-2\frac{7}{15}}, \quad \frac{\frac{2\frac{1}{5}}{4}}{8}, \quad \frac{\frac{2\frac{1}{2}}{3}}{5\frac{1}{4}}$$

ΕΚΤΕΛΕΣΙΣ ΠΡΑΞΕΩΝ ΕΙΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

209. Τὰ σημεῖα τῆς προσθέσεως καὶ τῆς ἀφαιρέσεως χωρίζουν τὰς ἀριθμητικὰς παραστάσεις εἰς μέρη, κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν δὲ τῶν πράξεων ἐκτελοῦμεν πρῶτον τὰς σημειωμένας εἰς ἕκαστον μέρος, ὁπότε θὰ προκύψῃ ἐξ ἑκάστου μέρους εἷς ἀριθμὸς καὶ κατόπιν εἰς τοὺς οὕτω προκύψαντας ἀριθμοὺς ἐκτελοῦμεν τὴν πρόσθεσιν ἢ τὴν ἀφαίρεσιν: π. χ. $3 + 5 \times 7 - 8 : 2$. Τὰ μέρη τῆς παραστάσεως εἶνε κατὰ σειρὰν τὰ ἑξῆς 3, 5×7 καὶ $8 : 2$. Ἐκτελοῦντες εἰς αὐτὰ τὰς σημειωμένας πράξεις εὑρίσκομεν τοὺς ἀριθμοὺς 3, 35 καὶ 4.

Ὅθεν: $3 + 5 \times 7 - 8 : 2 = 3 + 35 - 4 = 34.$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

230) Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις εἰς τὰς ἑξῆς παραστάσεις:
α΄) $9 + 3 \times 5$, *β΄)* $6 \times 7 - 4$, *γ΄)* $9 \times 3 + 8 \times 7$, *δ΄)* 5×6

-4×7, ε′) $2\times3+12:6$, στ′) $8:2-10:5$, ζ′) $5\times3\times8:2-5\times9+3$, η′) $\frac{2}{3}\times6+\frac{3}{4}:2-\frac{5}{6}:\frac{2}{7}$.

231) Ὁμοίως εἰς τὰς ἑξῆς: $(3+5)\times7$, $(14-2):4$, $(7+2+3)\times6$, $(8+5+3-6):2$,
$(4+2)\times4+(9-5):2$, $(5+2-3)\times6-(9-5+2):3$,
$(7+2)\times9+(11-3):2-(7+5)\times3$,
$(6+5)\times(7+2)+(9-2)\times(7+3)-(12-3):(7-4)$,
$(\frac{1}{2}+\frac{2}{6})\times6+(\frac{3}{4}-\frac{2}{8}):(\frac{5}{6}-\frac{2}{3})+$
$+(\frac{4}{5}-\frac{2}{10})\times3$.

Ὅταν εἰς μίαν παράστασιν ὑπάρχουν παρενθέσεις ἐντὸς ἀγκυλῶν, τότε ἐκτελοῦμεν πρῶτον τὰς ἐντὸς τῶν παρενθέσεων πράξεις καὶ ἀντικαθιστῶμεν τὰς ἐντὸς τῶν παρενθέσεων παραστάσεις μὲ τοὺς εὑρεθέντας ἐξ αὐτῶν ἀριθμούς.
Π. χ. $[(3+5)\times4-(6+3)]\times2=[8\times4-9]\times2=$ $=[32-9]\times2=23\times2=46$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

232) Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις ἐπὶ τῶν ἑξῆς παραστάσεων:
α′) $[(8+5)\times3+7]\times6$, β′) $[60-(2+3)]\times5$,
γ′) $[(5+7)\times(3+2)-(8-3)\times(4+2)]:6$,
δ′) $[(5+7-2)\times6+(9-5+2):3-(12-4-2)\times2]:25$,
ε′) $\left|[(8+2)\times3-(8-2)\times3]:2\right|\times9$, στ′) $\left|[(2+7)\times3-(6+8):2]\times4+[(5-2)\times3-(8-6):2]:4\right|\times2$,
ζ′) $\left|[(\frac{2}{3}+\frac{2}{6})\times20-(\frac{3}{8}+\frac{1}{4}):(\frac{1}{7}-\frac{1}{9})]\times\frac{1}{3}+9\right|:\frac{3}{4}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΛΥΟΜΕΝΑ ΔΙΑ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ

210. α′) Τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς τῆς ζαχάρεως τιμῶνται $16\frac{1}{2}$ δρ.· πόσον τιμᾶται ἡ ὀκᾶ;

Λύσις. Ἀφοῦ τὰ $\frac{3}{4}$ ὀκ. τιμῶνται $16\frac{1}{2}=\frac{33}{2}$ δρ.
τὸ $\frac{1}{4}$ ὀκ. θὰ τιμᾶται $\frac{33}{2}:3=\frac{33}{2\times3}$ δρ.

καὶ τὰ $\frac{4}{4} = 1$ ὀκ. θὰ τιμῶνται $\frac{33}{2 \times 3} \times 4 = \frac{33 \times 4}{2 \times 3} = 22$ δρ.

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο ἐδόθη ἡ τιμὴ μέρους τῆς ὀκᾶς καὶ ἐζητεῖτο ἡ τιμὴ ὁλοκλήρου τῆς ὀκᾶς, τὸ δὲ εὑρεθὲν ἐξαγόμενον $\frac{33 \times 4}{2 \times 3}$, τὸ ὁποῖον εἶνε ἴσον μὲ τὸ $\frac{33}{2} \times \frac{4}{3}$, εἶνε γινόμενον τοῦ $\frac{33}{2}$ ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{4}{3}$, τὸ ὁποῖον εἶνε τὸ δοθὲν κλάσμα $\frac{3}{4}$ ἀντεστραμμένον, εἶνε ἑπομένως πηλίκον τοῦ $\frac{23}{2}$, δηλ. τῆς δοθείσης τιμῆς διὰ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ $\frac{3}{4}$. Ἄρα τὸ πρόβλημα λύεται διὰ διαιρέσεως (μερισμοῦ).

β΄) Πόσον τιμᾶται ἡ ὀκᾶ τοῦ γλεύκους, ὅταν $2\frac{2}{3}$ ὀκ. τιμῶνται $16\frac{2}{5}$ δρ.;

Λύσις. Ἀφοῦ αἱ $2\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$ ὀκ. τιμῶνται $16\frac{2}{5} = \frac{82}{5}$ δρ.

τὸ $\frac{1}{3}$ ὀκ. θὰ τιμᾶται $\frac{82}{5} : 8 = \frac{82}{5 \times 8}$

καὶ τὰ $\frac{3}{3} = 1$ ὀκ. θὰ τιμῶνται $\frac{82}{5 \times 8} \times 3 = \frac{82 \times 3}{5 \times 8} = 6\frac{3}{20}$ δρ.

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο ἐδόθη ἡ τιμὴ τῶν πολλῶν ὀκάδων καὶ μέρους τῆς ὀκᾶς καὶ ἐζητεῖτο ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς ὀκᾶς, τὸ δὲ εὑρεθὲν ἐξαγόμενον $\frac{82 \times 3}{5 \times 8}$, τὸ ὁποῖον εἶνε ἴσον μὲ τὸ $\frac{82}{5} \times \frac{3}{8}$, εἶνε τὸ γινόμενον τοῦ $\frac{82}{5}$ ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{3}{8}$, τὸ ὁποῖον $\frac{3}{8}$ εἶνε τὸ δοθὲν κλάσμα $\frac{8}{3}$ ἀντεστραμμένον, εἶνε ἑπομένως πηλίκον τοῦ $\frac{82}{5}$ $(= 16\frac{2}{5})$, δηλ. τῆς δοθείσης τιμῆς, διὰ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ $\frac{8}{3}$ $(= 2\frac{2}{3})$. Ἄρα τὸ πρόβλημα λύεται διὰ διαιρέσεως.

Ἐκ τῆς λύσεως τῶν προβλημάτων τούτων συνάγομεν ὅτι.

Ὅταν δίδεται ἡ τιμὴ ἢ μέρους τῆς μονάδος ἢ τῶν πολλῶν μονάδων καὶ μέρους τῆς μονάδος καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος, κάμνομεν διαίρεσιν, εἰς τὴν ὁποίαν διαιρετέος εἶνε ἡ δοθεῖσα τιμή.

(Παράβαλε κανόνα ἐδ. 125).

211. γ΄) Ἡ ὀκᾶ τοῦ σάπωνος τιμᾶται $7\frac{1}{2}$ δρ.· πόσας ὀκ. ἀγοράζομεν μὲ $\frac{3}{4}$ δρ.;

Ἀφοῦ μὲ $7\frac{1}{2} = \frac{15}{2}$ δρ. ἀγοράζομεν 1 ὀκ.

» $\frac{1}{2}$ δρ. ἀγοράζομεν $1 : 15 = \frac{1}{15}$ ὀκ.

» $\frac{2}{2} = 1$ δρ. » $\frac{1}{15} \times 2 = \frac{2}{15}$ ὀκ.

» $\frac{1}{4}$ δρ. » $\frac{2}{15} : 4 = \frac{2}{15 \times 4}$ ὀκ.

» $\frac{3}{4}$ δρ. » $\frac{2}{15 \times 4} \times 3 = \frac{2 \times 3}{15 \times 4} = \frac{1}{10}$ ὀκ.

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο ἐδόθη ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς ὀκ. καὶ ἡ τιμὴ μέρους τῆς ὀκᾶς καὶ ἐζητεῖτο τὸ μέρος τῆς ὀκᾶς τὸ δὲ εὑρεθὲν ἐξαγόμενον $\frac{2 \times 3}{15 \times 4}$, τὸ ὁποῖον εἶνε ἴσον μὲ τὸ $\frac{3}{4} \times \frac{2}{15}$, εἶνε γινόμενον τοῦ $\frac{3}{4}$ ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{2}{15}$, τὸ ὁποῖον $\frac{2}{15}$ εἶνε τὸ δοθὲν $\frac{15}{2}$ ἀντεστραμμένον, εἶνε ἑπομένως πηλίκον τοῦ $\frac{3}{4}$ διὰ τοῦ $\frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$, δηλ. διὰ τῆς τιμῆς τῆς 1 μονάδος.

δ΄) Εἰς τὸ ἄνω πρόβλημα ἂν ἐζητεῖτο πόσας ὀκ. ἀγοράζομεν μὲ $15\frac{3}{4} = \frac{63}{4}$ δρ., ὁμοίως σκεπτόμενοι θὰ εὑρίσκομεν $\frac{2 \times 63}{15 \times 4}$, τὸ ὁποῖον εἶνε ἴσον μὲ $\frac{2}{15} \times \frac{63}{4}$ ἢ με $\frac{63}{4} \times \frac{2}{15}$ ἢ μὲ $\frac{63}{4} : \frac{15}{2}$ ἢ μὲ $15\frac{3}{4} : 7\frac{1}{2}$.

Ἐκ τῆς λύσεως τῶν προβλημάτων αὐτῶν συνάγομεν ὅτι ὁ κανὼν τοῦ ἐδ. 126, κατὰ τὸν ὁποῖον, ***ὅταν δίδωνται αἱ τιμαὶ τῆς μιᾶς μονάδος καὶ τῶν πολλῶν μονάδων καὶ ζητοῦνται αἱ πολλαὶ μονάδες, κάμνομεν διαίρεσιν*** (μέτρησιν), ἰσχύει καὶ ὅταν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ εἶνε κλασματικοὶ ἢ μικτοί.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

233) Τὰ $\frac{3}{5}$ τῆς ὀκᾶς τοῦ καφὲ τιμῶνται 45 δρ.· πόσον τιμᾶται ἡ ὀκᾶ; (75)

234) Ποίου ἀριθμοῦ τὰ $\frac{7}{10}$ εἶνε 4571; (6530)

235) Τὰ $\frac{7}{8}$ τοῦ πήχεως ἑνὸς ὑφάσματος τιμῶνται $\frac{4}{5}$ τῆς λίρας· πόσον τιμᾶται ὁ πῆχυς; ($\frac{32}{35}$)

236) Ποῖος ἀριθμὸς πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν $\frac{2}{3}$ δίδει γινόμενον τὸν $\frac{1}{2}$; ($\frac{3}{4}$)

237) Ποίου ἀριθμοῦ τὰ $\frac{2}{3}$ ἰσοῦνται μὲ τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$; ($1\frac{1}{8}$)

238) Μὲ $\frac{4}{5}$ τοῦ ταλλήρου ἀγοράζομεν μίαν ὀκ. γεωμήλων· μὲ $8\frac{3}{4}$ τοῦ ταλλήρου πόσας ὀκ. ἀγοράζομεν; ($10\frac{15}{16}$)

239) Ποίου ἀριθμοῦ τὰ $\frac{5}{6}$ ἰσοῦνται μὲ τὸν ἀριθμὸν $7\frac{2}{9}$; ($8\frac{2}{3}$)

240) Πόσον τιμᾶται ἡ ὀκᾶ τοῦ γάλακτος, ὅταν $5\frac{7}{8}$ τῆς ὀκᾶς τιμῶνται 47 δρ. (8)

241) Ποῖος εἶνε ὁ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ διπλάσιον καὶ τὰ $\frac{2}{3}$ εἶνε 679; ($254\frac{5}{8}$)

242) Μὲ $9\frac{3}{4}$ δρ. ἀγοράζομεν ἕνα πῆχυν ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος· μὲ 624 δρ. πόσους πήχεις ἀγοράζομεν; (64)

243) Ποίου ἀριθμοῦ τὸ τριπλάσιον καὶ τὰ $\frac{3}{5}$ ἰσοῦνται μὲ τὸν ἀριθμὸν $\frac{7}{9}$; ($\frac{35}{162}$)

244) Πόσον τιμᾶται ἡ ὀκᾶ τῶν ἰχθύων, ὅταν $3\frac{1}{2}$ ὀκ. τιμῶνται $183\frac{3}{4}$ δρ.; ($52\frac{1}{2}$)

245) *Ποίου ἀριθμοῦ τὸ τετραπλάσιον καὶ τὰ* $\frac{4}{9}$ *ἰσοῦντα*
μὲ τὸν ἀριθμὸν $8\frac{4}{7}$; $(1\frac{13}{14})$

246) *Ἔμπορος ἠγόρασε* 1500 *ὀκ. ἐλαίου πρὸς* $23\frac{1}{2}$ *δρ. τὴν ὀκᾶν, ἐπώλησε δὲ τὰς* 1300 *ὀκ. πρὸς* 25 *δρ. τὴν ὀκᾶν· πόσον τοῦ στοιχίζει ἡ ὀκᾶ τοῦ ὑπολοίπου ἐλαίου;* $(13\frac{3}{4})$

247) *Εἷς ἀποθανὼν ὥρισε διὰ διαθήκης νὰ λάβῃ ἡ σύζυγός του τὸ* $\frac{1}{3}$ *τῆς περιουσίας του, ἡ θυγάτηρ του τὸ* $\frac{1}{4}$ *καὶ ἕκαστος ἐκ τῶν δύο υἱῶν του τὸ* $\frac{1}{6}$, *τὸ δὲ ὑπόλοιπον νὰ δοθῇ εἰς ἓν νοσοκομεῖον· τὸ νοσοκομεῖον ἔλαβε* 28000 *δρ.· πόση ἦτο ἡ περιουσία, πόσον ἔλαβεν ἡ σύζυγος, πόσον ἡ θυγάτηρ καὶ πόσον ἕκαστος ἐκ τῶν δύο υἱῶν;* (336000, 112000, 84000, 56000)

248) *Ἐργάτης ἐκτελεῖ ἓν ἔργον εἰς 4 ἡμέρας, ἄλλος δὲ εἰς 6 ἡμέρας, εἰς πόσας ἡμέρας ἐργαζόμενοι καὶ οἱ δύο ὁμοῦ ἐκτελοῦν τὸ ἔργον;* $(2\frac{2}{5})$.

249) *Εἰς ἓν ἐργοστάσιον ἐργάζονται ἐπὶ ἕνα μῆνα (26 ἡμέρας ἐργασίμους)* 36 *ἄνδρες μὲ ἡμερομίσθιον* $75\frac{1}{2}$ *δρ.,* 26 *γυναῖκες μὲ ἡμερομίσθιον* $35\frac{3}{4}$, *καὶ* 23 *παιδία μὲ ἡμερομίσθιον* $22\frac{1}{4}$ *δρ., κατεσκεύασαν δὲ* 5600 *πήχεις ὑφάσματος, τὸ ὁποῖον ἐπωλήθη πρὸς* $58\frac{1}{2}$ *δρ. τὸν πῆχυν· ἂν τὰ ὑλικά, μὲ τὰ ὁποῖα κατεσκευάσθη τὸ ὕφασμα, στοιχίζουν* 25000 *δρ., πόσον κερδίζει ὁ ἐργοστασιάρχης;* (194459, 59)

250) *Ἀτμόπλοιον πρέπει νὰ διανύσῃ* 139 *μίλλια εἰς 8 ὥρας, εἰς τὰς 3 δὲ πρώτας ὥρας διήνυσε* $45\frac{1}{4}$ *μίλλια· πόσα πρέπει τώρα νὰ διανύσῃ καθ' ὥραν;* $(18\frac{3}{4})$

251) *Ὑαλέμπορος ἠγόρασε* 1200 *φιάλας πρὸς* $96\frac{1}{2}$ *δρ. τὴν δωδεκάδα, κατὰ τὴν μεταφορὰν δὲ ἐθραύσθησαν* 200, *πόσον πρέ-*

πει νὰ πωλήσῃ ἑκάστην φιάλην διὰ νὰ κερδίσῃ 3000 δραχμάς;

$(12 \frac{13}{20})$

252) Ἔμπορος ἠγόρασεν ἔλαιον πρὸς $23 \frac{1}{2}$ δρ. τὴν ὀκᾶν καὶ πωλήσας πρὸς 25 δρ. μέρος τοῦ ἐλαίου ἔλαβεν ὅσα χρήματα εἶχε δώσει καὶ τοῦ ἔμειναν καὶ 105 ὀκ.· πόσας ὀκ. εἶχεν ἀγοράσει;

(1750)

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΔΙΑΦΟΡΑ

253) Ποῖος εἶνε ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος αὐξανόμενος κατὰ τὰ $\frac{14}{17}$ αὐτοῦ δίδει τὸν ἀριθμὸν 11942 $(6548 \frac{26}{31})$.

254) Εἷς ἠγόρασεν ἓν οἰκόπεδον πρὸς 355 δρ. τὸν πῆχυν, παρεχώρησε δὲ τὸ $\frac{1}{3}$ αὐτοῦ εἰς ἕνα φίλον του ἀντὶ 85200 δρ.· πόσους πήχεις ἔλαβεν ἕκαστος; (480, 240)

255) Μία σφαῖρα ἐλαστικὴ ἀναπηδᾷ εἰς τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ὕψους, ἐκ τοῦ ὁποίου κατέπεσε, κατὰ τὴν τρίτην ἀναπήδησιν ἀνυψώθη εἰς 2 μέτρα· πόσον εἶνε τὸ ὕψος ἐκ τοῦ ὁποίου κατέπεσε τὴν πρώτην φοράν; (Ἑκάστη ἀναπήδησις ἐπειδὴ εἶνε τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς προηγουμένης θὰ εἶνε τὰ $\frac{3}{2}$ τῆς ἑπομένης). $(6 \frac{3}{4})$

256) Ποῖος εἶνε ὁ ἀριθμὸς, τοῦ ὁποίου τὸ $\frac{1}{2}$ καὶ τὸ $\frac{1}{4}$ ἀποτελοῦν τὸν ἀριθμὸν $66 \frac{3}{4}$; (89)

257) Εἰς ἓν ἐργοστάσιον ἐργάζονται ἄνδρες γυναῖκες καὶ παιδία, τὸ ἡμερομίσθιον ἑκάστης γυναικὸς εἶνε τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ ἡμερομισθίου τῶν ἀνδρῶν καὶ τὸ ἡμερομίσθιον τοῦ παιδίου εἶνε τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ἡμερομισθίου τῶν γυναικῶν. 16 ἄνδρες, 10 γυναῖκες καὶ 20 παιδία ἐλάμβανον τὴν ἡμέραν 2250 δραχμάς· ποῖον εἶνε τὸ ἡμερομίσθιον ἑκάστου; (75, 45, 30).

258) Εἷς ἐπιχειρηματίας ηὔξησε τὴν περιουσίαν του εἰς τὸ τέλος ἑνὸς ἔτους κατὰ τὰ $\frac{2}{17}$ τῆς ἀξίας της, τὸ ἑπόμενον ἔτος κατὰ

τὰ $\frac{6}{11}$ τῆς νέας ἀξίας της. Ἡ περιουσία του ἦτο τότε 428691 δραχμάς· πόση ἦτο κατ' ἀρχὰς ἡ περιουσία του; ($248189\frac{10}{19}$)

259) Εἷς ἀριθμὸς εἶνε τὰ $\frac{5}{11}$ ἑνὸς ἄλλου ἀριθμοῦ, ἡ διαφορά των εἶνε 1302· ποῖοι εἶνε οἱ δύο οὗτοι ἀριθμοί; (1085, 2387).

260) Διέθεσεν εἰς τὴν περιουσίαν του ὡς ἑξῆς. Ἀφίνει τὰ $\frac{5}{8}$ αὐτῆς εἰς τοὺς κληρονόμους του, τὸ $\frac{1}{10}$ τοῦ ὑπολοίπου εἰς ἓν πτωχοκομεῖον, τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ νέου ὑπολοίπου εἰς τοὺς πτωχοὺς τοῦ τόπου του καὶ τέλος ὁρίζει αἱ 49320 δραχμαί, αἱ ὁποῖαι ἀπομένουν, νὰ διατεθοῦν εἰς τὴν ἀγορὰν διαφόρων ὀργάνων τοῦ σχολείου τοῦ τόπου του· πόση ἦτο ἡ περιουσία του, πόσον ἔλαβον οἱ κληρονόμοι του καὶ πόσον οἱ πτωχοί;

($365333\frac{1}{3}$, $220333\frac{1}{3}$, 13700, 73980, 49320).

261) Μία ὁμὰς ἐργατῶν δύναται νὰ ἐκτελέσῃ ἓν ἔργον εἰς 8 ἡμέρας, δευτέρα ὁμὰς ἐργατῶν δύναται νὰ ἐκτελέσῃ τὸ ἴδιον ἔργον εἰς 12 ἡμέρας. Λαμβάνει εἰς τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς πρώτης ὁμάδος καὶ τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς δευτέρας, εἰς πόσας ἡμέρας θὰ ἐκτελεσθῇ τὸ ἔργον (Ἡ α' ὁμάς εἰς μίαν ἡμέραν ἐκτελεῖ τὸ $\frac{1}{8}$ τοῦ ἔργου καὶ τὰ $\frac{2}{3}$ αὐτῆς θὰ ἐκτελέσουν $\frac{1}{8}\times\frac{2}{3}$ τοῦ ἔργου). ($6\frac{6}{7}$)

262) Εἷς ἀριθμὸς εἶνε τὰ $\frac{4}{15}$ ἑνὸς ἄλλου ἀριθμοῦ, τὸ ἄθροισμά των εἶνε 437· ποῖοι εἶνε οἱ δύο οὗτοι ἀριθμοί; (92, 345

263) Βαρέλιον περιέχει 500 ὀκ. οἴνου, ἐκ τοῦ ὁποίου ἀφαιροῦμεν τὸ $\frac{1}{3}$ καὶ τὸ ἀναπληρώνομεν μὲ ὕδωρ, κατόπιν ἀφαιροῦμε τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ μίγματος καὶ τὸ ἀναπληρώνομεν μὲ ὕδωρ καὶ τέλος ἀφαιροῦμεν τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ νέου μίγματος καὶ τὸ ἀναπληρώνομεν μ

ὕδωρ· πόσαι δκ. ἐκ τοῦ ὑγροῦ εἶνε οἶνος ; (Μετὰ τὴν πρώτην ἀφαίρεσιν ἐναπέμεινεν οἶνος $500\times\frac{2}{3}$, *μετὰ δὲ τὴν δευτέραν* $500\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}$*)*. (200)

264) Ἓν δοχεῖον περιέχει 10 *δκ. οἴνου καὶ* 5 *δκ. ὕδατος, δεύτερον δοχεῖον περιέχει* 7 *δκ. οἴνου καὶ* 5 *δκ. ὕδατος. Ἀφαιροῦμεν* 5 *δκ. ἀπὸ ἕκαστον δοχεῖον καὶ ρίπτομεν τὰς* 5 *δκ. τοῦ πρώτου εἰς τὸ δεύτερον καὶ τὰς* 5 *δκ. τοῦ δευτέρου εἰς τὸ πρῶτον· πόσον οἶνον καὶ πόσον ὕδωρ περιέχει τώρα ἕκαστον δοχεῖον ; (Ἀπὸ τὸ α΄ δοχεῖον ἀφαιροῦμεν* $\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$ *τοῦ ποσοῦ, τὸ ὁποῖον περιέχει, ἑπομένως ἀφαιροῦμεν* $10\times\frac{1}{3}$ *οἶνον καὶ* $5\times\frac{1}{3}$ *ὕδωρ.)* $(9\frac{7}{12},\ 5\frac{5}{12},\ 7\frac{5}{12},\ 4\frac{7}{12})$

265) Ποῖος εἶνε ὁ ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν $\frac{5}{6}$ *αὐτοῦ καὶ τῶν* $\frac{5}{11}$ *εἶνε ὁ ἀριθμὸς* 546 ; (1232)

266) Οἱ δύο δεῖκται ἑνὸς ὡρολογίου συναντῶνται τὴν μεσημβρίαν, κατὰ ποίαν ὥραν θὰ γείνῃ ἡ ἑπομένη συνάντησίς των καὶ πόσας φορὰς θὰ συναντηθοῦν ἀπὸ τῆς μεσημβρίας μέχρι τοῦ μεσονυκτίου ; (Ἂν ἡ πλὰξ τοῦ ὡρολογίου ὑποτεθῇ διῃρημένη εἰς 60 *ἴσας διαιρέσεις, ὁ δείκτης τῶν λεπτῶν διατρέχει εἰς* 1 *ὥραν* 60 *τοιαύτας, ἐνῷ ὁ τῶν ὡρῶν* 5, *ἑπομένως εἰς* 1 *ὥραν ὁ α΄ δείκτης διατρέχει* 55 *διαιρέσεις περισσοτέρας τοῦ β΄. Ὅταν πάλιν θὰ συναντηθοῦν ὁ α΄ δείκτης θὰ ἔχῃ διατρέξει* 60 *διαιρέσεις περισσοτέρας τοῦ β΄).* $(1\frac{1}{11},\ 12)$.

267) Ἓν ὡρολόγιον καθυστερεῖ $1\frac{3}{5}$ *ὥρας εἰς* $4\frac{1}{2}$ *ἡμέρας, ἐτέθη δὲ εἰς τὴν κανονικὴν ὥραν τὴν μεσημβρίαν· ποία εἶνε ἡ ἀληθὴς ὥρα, ὅταν τοῦτο δεικνύει* $8\frac{1}{2}$ *ὥρας τῆς αὐτῆς ἡμέρας ; (Εἰς 1 ἡμ. καθυστερεῖ* $1\frac{3}{5} : 4\frac{1}{2}=\frac{16}{45}$. *Ὅταν λοιπὸν δεικνύει* $23\frac{29}{45}$ *εἶνε πραγματικῶς 24 ὥρ.)* $(8\frac{167}{266})$.

268) Δύο ἐργολάβοι κατεσκεύασαν μίαν οἰκίαν, διὰ τὴν ὁποίαν ἔλαβον 165000 *δραχμάς, ὁ πρῶτος ἔχει διαθέσει διὰ τὴν ἐργασίαν αὐτὴν κεφάλαιον ὅσον ὁ δεύτερος καὶ τὸ* $\frac{1}{5}$ *αὐτοῦ ἀκόμη καὶ ἔλαβεν ἐκτὸς ἀπὸ τὸ κεφάλαιόν του* 9000 *δρ. κέρδος· πόσον κεφάλαιον εἶχε καταθέσει ἕκαστος; (Αἱ* 9000 *δρ. εἶνε* $1\frac{1}{5}$ *τοῦ κέρδους τοῦ β′)* (81000, 67500).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ′.

ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

212. **Α**ἱ κλασματικαὶ μονάδες $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, κλπ., ὅσαι δηλ. ἔχουν παρονομαστὴν τὸ 10, 100, 1000, κλπ., λέγονται ***δεκαδικαὶ μονάδες***, διότι ἑκάστη ἐξ αὐτῶν (καθ' ἣν τάξιν εἶνε γραμμέναι) εἶνε δέκα φορὰς μεγαλυτέρα ἀπὸ τὴν ἀμέσως ἑπομένης της. Τοιουτοτρόπως τὸ $\frac{1}{10}=\frac{10}{100}$, $\frac{1}{100}=\frac{10}{1000}$. $\frac{1}{1000}=\frac{10}{10000}$ κλπ. (ἐδ. 179). Τὸ $\frac{1}{10}$ λέγεται μονὰς α′ τάξεως, τὸ $\frac{1}{100}$ β′, τὸ $\frac{1}{1000}$ γ′, καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Ἐπίσης τὰ κλάσματα $\frac{5}{10}$, $\frac{237}{100}$, $\frac{1345}{1000}$ κλπ., ἤτοι ***ὅσα ἔχουν παρονομαστὴν τὴν μονάδα ἀκολουθουμένην ὑπὸ μηδενικῶν***, γίνονται δηλ. ἀπὸ μίαν δεκαδικὴν μονάδα διὰ τῆς ἐπαναλήψεως, ***λέγονται δεκαδικὰ κλάσματα*** ἢ ***δεκαδικοὶ ἀριθμοί.***

Τὰ λοιπὰ κλάσματα λέγονται πρὸς διάκρισιν ***κοινά.***

ΙΔΙΟΤΗΣ ΤΩΝ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

213. ***Πᾶν δεκαδικὸν κλάσμα δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς δεκαδικὰς μονάδας διαφόρων τάξεων.***

Π. χ. τὸ κλάσμα $\frac{6543}{1000}=\frac{6000+500+40+3}{1000}=$

$=\frac{6000}{1000}+\frac{500}{1000}+\frac{40}{1000}+\frac{3}{1000}=$

$=6+\frac{5}{10}+\frac{4}{100}+\frac{3}{1000}$. Ἀνελύθη δηλ. εἰς 6 ἀκέραια, 5 δέκατα, 4 ἑκατοστὰ καὶ 3 χιλιοστά.

ΓΡΑΦΗ ΤΩΝ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

214. Ἐπειδὴ ἑκάστη δεκαδικὴ μονὰς εἶνε 10 φορὰς μεγαλυτέρα ἀπὸ τὴν ἀμέσως ἑπομένην της, ἕκαστον δὲ δεκαδικὸν κλάσμα δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς δεκαδικὰς μονάδας διαφόρων τάξεων, ὅπως συμβαίνει καὶ εἰς τοὺς ἀκεραίους, διὰ τοῦτο δυνάμεθα νὰ γράφωμεν τὰ δεκαδικὰ κλάσματα ὅπως καὶ τοὺς ἀκεραίους.

Καὶ ἂν μὲν τὸ δεκαδικὸν κλάσμα περιέχει ἀκεραίας μονάδας, διὰ νὰ διακρίνωμεν ταύτας, γράφομεν κατόπιν αὐτῶν μίαν ὑποδιαστολήν, ἂν δὲ δὲν ὑπάρχῃ ἀκέραιος γράφομεν εἰς τὴν θέσιν αὐτοῦ 0. Συμφώνως πρὸς ταῦτα τὸ κλάσμα $\frac{6543}{1000}$ ἐπειδὴ εἶνε ἴσον μὲ $6+\frac{5}{10}+\frac{4}{100}+\frac{3}{1000}$ γράφεται 6,543.

Ὁμοίως τὸ κλάσμα $\frac{204}{1000}=\frac{200}{1000}+\frac{4}{1000}=0{,}204$ καὶ τὸ κλάσμα $\frac{234}{10000}=0{,}0234$.

Ἡ ὑποδιαστολὴ χωρίζει τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν εἰς δύο μέρη, εἰς τὸ ἀκέραιον καὶ εἰς τὸ δεκαδικόν, τοῦ ὁποίου τὰ ψηφία λέγονται ***δεκαδικὰ ψηφία***.

215. Ἑπομένως: ***Πᾶν δεκαδικὸν κλάσμα γράφεται ὡς δεκαδικὸς ἀριθμός, ἂν γράψωμεν τὸν ἀριθμητήν του καὶ χωρίσωμεν κατόπιν δι᾽ ὑποδιαστολῆς ἀπὸ τὰ δεξιὰ τόσα δεκαδικὰ ψηφία ὅσα μηδενικὰ ἔχει ὁ παρονομαστής του, ἂν δὲ δὲν ἐπαρκοῦν τὰ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ, ἀναπληρώνομεν τὰ ἐλλείποντα καθὼς καὶ τὸν ἀκέραιον διὰ μηδενικῶν.***

Ἀντιστρόφως: ***Πᾶς δεκαδικὸς ἀριθμὸς γράφεται ὡς κλάσμα, ἂν παραλείψωμεν τὴν ὑποδιαστολήν του καὶ τὸν προκύπτοντα ἀκέραιον γράψωμεν ὡς ἀριθμητήν, παρονομαστὴν δὲ γράψωμεν τὴν μονάδα ἀκολουθουμένην ἀπὸ τόσα μηδενικά, ὅσα εἶνε τὰ δεκαδικὰ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ.***

Π.χ. $0{,}037=\frac{37}{1000}$

Κυρίως τὰ δεκαδικὰ κλάσματα λέγονται δεκαδικοὶ ἀριθμοί, ὅταν γράφωνται ὑπὸ τὴν νέαν ταύτην μορφήν.

ΑΠΑΓΓΕΛΙΑ ΤΩΝ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

216. Διὰ νὰ ἀπαγγείλωμεν ἕνα δεκαδικὸν συνηθέστερον ἀπαγγέλλομεν χωριστὰ τὸ ἀκέραιον μέρος του καὶ χωριστὰ τὸ δεκαδικὸν ὡς ἀκέραιον, ἀπαγγέλοντες ὅμως εἰς τὸ τέλος τὸ ὄνομα τῶν μονάδων τοῦ τελευταίου ψηφίου ὡς ἑξῆς : π.χ. ὁ 8, 543 ἀπαγγέλεται 8 ἀκέραια 543 χιλιοστά.

Ἂν τὰ δεκαδικὰ ψηφία εἶνε πολλά, τότε χωρίζομεν αὐτὰ εἰς τμήματα τριψήφια ἀρχίζοντες ἀπὸ τὴν ὑποδιαστολήν, καὶ ἀπαγγέλλομεν πρῶτον τὸ ἀκέραιον μέρος καὶ κατόπιν ἕκαστον τμῆμα τοῦ δεκαδικοῦ μέρους, ἀπαγγέλλοντες ὅμως κατόπιν καὶ τὸ ὄνομα τῶν μονάδων τοῦ τελευταίου ψηφίου ἑκάστου τμήματος. Π.χ. ὁ ἀριθμὸς 22, 325 164 07 ἀπαγγέλλεται ὡς ἑξῆς : 27 ἀκέραια 325 χιλιοστὰ 164 ἑκατομμυριαστὰ 7 ἑκατοντάκις ἑκατομμυριοστά.

ΙΔΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

217. ***Ἂν γράψωμεν εἰς τὰ δεξιὰ ἑνὸς δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ ὁσαδήποτε μηδενικὰ ἢ παραλείψωμεν τοιαῦτα, ἂν ὑπάρχουν, ἡ ἀξία τοῦ δεκαδικοῦ δὲν μεταβάλλεται.***

Διότι π.χ. $2,5 = \frac{25}{10} = \frac{250}{100} = \frac{2500}{1000} = 2,50 = 2,500.$

218. ***Πᾶς δεκαδικὸς ἀριθμὸς γίνεται 10, 100 κλπ. φορὰς μεγαλύτερος ἢ μικρότερος πολλαπλασιάζεται δηλ. ἢ διαιρεῖται διὰ 10, 100 κλπ., ἂν μεταφέρωμεν τὴν ὑποδιαστολήν του 1, 2 κλπ. θέσεις πρὸς τὰ δεξιὰ ἢ πρὸς τὰ ἀριστερά.***

Διότι π.χ. τὸ $\frac{3658}{100}$ εἶνε 10 φορὰς μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ $\frac{3658}{1000}$.

Ἄρα ὁ 36,58 εἶνε 10 φορὰς μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν 3,658.

Ὁμοίως τὸ $\frac{3658}{100}$ εἶνε 10 φορὰς μικρότερον ἀπὸ τὸ $\frac{3658}{10}$.

Ἄρα ὁ 36,58 εἶνε 10 φορὰς μικρότερος ἀπὸ τὸν 365,8.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

269) *Νὰ γραφοῦν αἱ δεκαδικαὶ μονάδες ἀπὸ τοῦ δεκάτου μέχρι τοῦ δισεκατομμυριοστοῦ με τὸ ὄνομά των καὶ ὡς ἀριθμοί.*

270) *Ποίας δεκαδικὰς μονάδας παριστάνουν τὰ ψηφία, τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται εἰς τὴν 5ην, 7ην, 10ην θέσιν μετὰ τὴν ὑποδιαστολήν ;*

271) *Νὰ γραφο[illegible] ἑξῆς [illegible]κοὶ ἀριθμοί: δύο ἀκέραια εἴκοσι*

πέντε ἑκατοστὰ καὶ τριάκοντα ἑπτὰ ἑκατομμυριοστά, δύο ἀκέραια δύο χιλιοστὰ δύο ἑκατομμυριοστά, πέντε ἀκέραια ἑξακόσια χιλιοστὰ ἑπτὰ ἑκατομμυριοστά, δύο χιλιοστὰ ὀκτὼ ἑκατομμυριοστά.

272) *Νὰ ἀπαγγελθοῦν οἱ ἑξῆς ἀριθμοί :* 25,0048. 0,428. 7,50903. 59,6543278. 8,00190. 0,00078. 365,00079. 365,08090483.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

***219.* Διὰ νὰ προσθέσωμεν συντόμως δεκαδικοὺς ἀριθμούς, γράφομεν αὐτοὺς ὅπως καὶ εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν ἀκεραίων, κατόπιν ἐκτελοῦμεν τὴν πρόσθεσιν ὅπως καὶ εἰς τοὺς ἀκεραίους φροντίζοντες μόνον νὰ γράφωμεν εἰς τὸ ἄθροισμα τὴν ὑποδιαστολὴν εἰς τὴν στήλην τῶν ὑποδιαστολῶν.**

Παράδειγμα. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα

$$35,678 + 2,3 + 5,42 + 0,635 + 0,007.$$

Διάταξις τῆς πράξεως

$$\begin{array}{r} 35,678 \\ 2,3 \\ 5,42 \\ 0\ 635 \\ 0,007 \\ \hline 44,040 \end{array}$$

Ἡ δοκιμὴ γίνεται ὅπως καὶ εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν ἀκεραίων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

273) *Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ ἑξῆς προσθέσεις μὲ τὰς δοκιμάς των:*

α΄) 5,8+27,39+654,373+4519,8745.

β΄) 5,367+28,42+9,350+368,5.

γ΄) 5,008+0,0037+4,06035+359,04.

274) *Ἓν βαρέλιον κενὸν ζυγίζει* 25,75 *δκ., ἐχύσαμεν δὲ ἐντὸς αὐτοῦ* 112,30 *δκ. οἴνου· πόσον ζ[illegible]τώρα ;* (138,05)

275) *Ἠγόρασεν εἰς ἄρ[illegible] τυρὸν ἀντὶ* 68,60,

κρέας ἀντὶ 92,80 καὶ ὄρυζαν ἀντὶ 64,70· πόσα ἐξώδευσεν ἐν ὅλῳ; (310,60)

276) *Γεωργὸς εἰσέπραξεν ἀπὸ σῖτον 3569,85 δρ., ἀπὸ κριθὴν 2369,30 ἀπὸ βρώμην 1487,40, ἀπὸ λαχανικὰ 587,60, ἀπὸ καρποὺς 456,25 καὶ ἀπὸ ὀρνίθια 275,80 πόσον εἰσέπραξεν ἐν ὅλῳ;* (8746,25)

277) *Ἔμπορος ἐπώλησε 5,25 ὀκ. ἐλαίου ἀντὶ 117,60 δρ., κατόπιν 35,5 ὀκ. ἀντὶ 766,80 δρ. καὶ τέλος 56,40 ὀκ. ἀντὶ 1099,80 δρ.· πόσας ὀκ. ἐπώλησε καὶ πόσον εἰσέπραξεν;* (97,15. 1984,20)

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

220. ***Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν συντόμως δύο δεκαδικοὺς ἀριθμούς, γράφομεν αὐτοὺς ὅπως καὶ εἰς τὴν ἀφαίρεσιν τῶν ἀκεραίων, κατόπιν ἐκτελοῦμεν τὴν ἀφαίρεσιν ὅπως καὶ εἰς τοὺς ἀκεραίους φροντίζοντες μόνον νὰ γράφωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν εἰς τὴν στήλην τῶν ὑποδιαστολῶν.***

Παραδείγματα. Νὰ ἀφαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 5,673 ἀπὸ τὸν 37,2 καὶ ὁ ἀριθμὸς 0,00537 ἀπὸ τὸν 0,01.

Διάταξις τῆς πράξεως

α΄)	37,200	β΄)	0,01
	5,673		0,000637
	31,527		0,009363

Ἡ δοκιμὴ γίνεται ὅπως καὶ εἰς τὴν ἀφαίρεσιν τῶν ἀκεραίων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

278) *Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ ἑξῆς ἀφαιρέσεις μὲ τὰς δοκιμάς των:* 25,67—13,542. 8,32—0,495. 7—2,5894. 8,2—1 9346. 0,0369—0,00369. 0,01—0,005643. 826,7—1,354287.

279) *Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἑξῆς ὑπόλοιπα:*

α΄) 560,48—(32,605+5,72+0,029).

52,6—(8,375+4,09+0,007).

(83,4+6,0009) — (4,5028+13,602).

(15,3 — 2,14) — (8—0,009).

280) *Ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν 2353, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ἀριθμὸν 8967,90;* (6404,90)

281) *Ἔχει εἰς 7876,80 δρ. ἐκ τῶν ὁποίων ἐπλήρωσε 2205,50 διὰ μίαν ἐνδυμασίαν μετὰ τῶν μεταφορικῶν αὐτῆς, ὁμοίως*

1805,50 δι' ἓν ἐπανωφόριον, 323,50 δι' ἓν ζεῦγος ὑποδημάτων καὶ 860 δρ. δι' ἐνοίκιον· πόσον τοῦ ἔμεινε; (2682,30)

282) *Εἰσέπραξεν εἰς 7895,80 δρ., ἐπλήρωσε δὲ 3695.80, κατόπιν εἰσέπραξε 10789,40 καὶ ἐπλήρωσε 5079,20 καὶ τέλος εἰσέπραξεν 6732,90 καὶ ἐπλήρωσεν 9863,70· πόσον τοῦ ἔμεινε;* (6779,40).

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

221. **Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο δεκαδικοὺς ἀριθμούς, πολλαπλασιάζομεν αὐτοὺς ὡς νὰ ἦσαν ἀκέραιοι καὶ εἰς τὸ γινόμενον αὐτῶν χωρίζομεν ἐκ δεξιῶν τόσα δεκαδικὰ ψηφία ὅσα ἔχουν καὶ οἱ δύο ἀριθμοί, ἂν δὲ δὲν ἐπαρκοῦν τὰ ψηφία τοῦ γινομένου, ἀναπληρώνομεν τὰ ἐλλείποντα καθὼς καὶ τὸν ἀκέραιον διὰ μηδενικῶν.**

Διότι π.χ. $2,5 \times 3,67 = \frac{25}{10} \times \frac{367}{100} = \frac{25 \times 367}{10 \times 100} = \frac{9175}{1000} =$ $= 9,175$.

Παραδείγματα. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ γινόμενα α΄) 32,43 × 27. β΄) 232 × 2,6. γ΄) 0,00367 × 0,08

Διάταξις τῆς πράξεως

32,43	232	0,00367
27	2,6	0,08
22701	1492	0,0002936
6486	464	
875,61	603,2	

Ἡ δοκιμὴ γίνεται ὅπως καὶ εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν ἀκεραίων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ.

283) *Νὰ ἐκτελεσθοῦν οἱ ἑξῆς πολλαπλασιασμοί:*

23,558×28. 0.234×15.0016×395. 0,008×8,695.
42,24×2,93. 0,35×7,82. 0,25×0,43. 0,009×0,0007.

284) *Μία ὀκᾶ βουτύρου τιμᾶται 68,75· πόσον τιμῶνται 16,50 ὀκάδες;* (1134,38)

285) *Ἔμπορος ἠγόρασε 675,6 ὀκ. ζαχάρεως πρὸς 16,50 δρ. τὴν ὀκᾶν· ἀντὶ πόσων δραχμῶν πρέπει νὰ τὴν πωλήσῃ, διὰ νὰ κερδίσῃ 2,75 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν;* (13005,30)

286) *Οἰνοπώλης ἠγόρασε 230 ὀκ. οἶνου πρὸς 6,20 δρ. τὴν*

ὀκᾶν, 930 ὀκ. πρὸς 6,40, καὶ 640 ὀκ. πρὸς 3,70 δρ. τὴν ὀκᾶν, ἐπώλησε δὲ ὅλα αὐτὰ τὰ εἴδη πρὸς 8,20 δρ. τὴν ὀκᾶν. πόσον ἐκέρδισεν; (5014)

287) *Ἡ περιουσία ἑνὸς εἶνε 580000 δρ.· πόσον εἶνε τὰ 0,65 αὐτῆς;* (377000)

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

Α΄) ΔΙΑΙΡΕΤΗΣ ΑΚΕΡΑΙΟΣ

222. ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν δεκαδικὸν δι᾿ ἀκεραίου, διαιροῦμεν αὐτὸν ὡς νὰ ἦτο ἀκέραιος, φροντίζοντες μόνον μετὰ τὴν διαίρεσιν τοῦ ἀκεραίου μέρους νὰ γράφωμεν εἰς τὸ πηλίκον ὑποδιαστολήν.***

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ζητοῦμεν τὸ πηλίκον 14,35 : 5. Διαιροῦμεν πρῶτον τὸ ἀκέραιον μέρος 14 διὰ τοῦ 5 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 2 μον. καὶ ὑπόλοιπον 4 μ.

Αἱ 4 μον. ἀποτελοῦν 40 δέκατα καὶ 3 δέκατα τοῦ ἀριθμοῦ κάμνουν 43 δέκατα.

Τὸν ἀριθμὸν 43 σχηματίζομεν ἀμέσως καταβιβάζοντες τὸ ψηφίον 3 δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου 4. Διαιροῦντες τὸν 43 διὰ τοῦ 5 εὑρίσκομεν πηλίκον 8 δεκ. Ἐξακολουθοῦμεν δὲ οὕτως τὴν διαίρεσιν ὅπως καὶ εἰς τοὺς ἀκεραίους.

Διάταξις τῆς πράξεως

```
14,35 | 5
      |-------
 43     2,87
  35
   0
```

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

288) *Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ ἑξῆς διαιρέσεις:* 398,65 : 7. 396,14 : 58. 6,606 : 18. 0,28623 : 87. 0,03798 : 73. 0,000632 : 79.

289) *Ἠγόρασεν εἰς 527 ὀκ. μήλων ἀντὶ 6587,50 δρ.· πρὸς πόσον ἠγόρασε τὴν ὀκᾶν;* (12,50)

290) *Ἔμπορος ἐκέρδισεν ἐκ τῆς πωλήσεως ὑφασμάτων 1373,50 δρ., κερδίζει δὲ 25 δρ. τὸν πῆχυν· πόσους πήχεις ἐπώλησεν;* (125,50)

291) *Μὲ ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν 537 διὰ νὰ εὕρωμεν γινόμενον τὸν 125,658* (2,34)

ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΟΥ ΠΗΛΙΚΟΥ ΚΑΤΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΙΝ

223. Ἔστω ὅτι ζητοῦμεν τὸ πηλίκον 0,096 : 7.

Διάταξις τῆς πράξεως

$$\begin{array}{r|l} 0{,}096 & 7 \\ \cline{2-2} 26 & 0{,}013 \\ 5 & \end{array}$$

Τὸ ἀκριβὲς πηλίκον εἶνε 0,013 καὶ 5 χιλιοστὰ διὰ 7, δηλ. καὶ $\frac{5}{7}$ τοῦ χιλιοστοῦ. Ἂν λάβωμεν ὡς πηλίκον, ἀντὶ τοῦ ἀκριβοῦς $0{,}013 + \frac{5}{7}$ τοῦ χιλιοστοῦ, μόνον τὸν 0,013, κάμνομεν λάθος τὰ παραλειφθέντα $\frac{5}{7}$ τοῦ χιλιοστοῦ, λάθος δηλ. μικρότερον τοῦ ἑνὸς χιλιοστοῦ, ἔχομεν τότε τὸ πηλίκον ***κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς χιλιοστοῦ κατ' ἔλλειψιν,*** διότι εἶνε μικρότερον ἀπὸ τὸ ἀκριβὲς πηλίκον. Ἂν ἀντὶ τῶν $\frac{5}{7}$ τοῦ χιλιοστοῦ λάβωμεν 0,001 (λάβωμεν δηλ. $\frac{2}{7}$ τοῦ χιλιοστοῦ ἐπὶ πλέον) καὶ τὸ προσθέσωμεν εἰς τὸ 0,013, ὁπότε θὰ γίνῃ 0,014, καὶ τοῦτο θεωρήσωμεν ὡς πηλίκον, πάλιν κάμνομεν λάθος τὰ ἐπὶ πλέον ληφθέντα $\frac{2}{7}$ τοῦ χιλιοστοῦ, λάθος δηλ. μικρότερον τοῦ ἑνὸς χιλιοστοῦ, ἔχομεν τότε τὸ πηλίκον, ***κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς χιλιοστοῦ καθ' ὑπεροχήν,*** διότι εἶνε μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ ἀκριβὲς πηλίκον. Πλησιάζομεν ὅμως περισσότερον πρὸς τὸ ἀκριβὲς πηλίκον, ἂν λάβωμεν τὸ 0,014, διότι τὸ λάθος εἶνε μόνον $\frac{2}{7}$ τοῦ χιλιοστοῦ, ἐνῷ, ἂν λάβωμεν τὸ 0,013, τὸ λάθος θὰ εἶνε $\frac{5}{7}$ τοῦ χιλιοστοῦ.

Δυνάμεθα νὰ ἐξακολουθήσωμεν τὴν διαίρεσιν γράφοντες δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου 5 ἓν μηδενικόν, τρέποντες δηλ. αὐτὸ εἰς δεκάκις χιλιοστὰ καὶ διαιροῦντες τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν διὰ τοῦ διαιρέτου. Ἐὰν προχωρήσωμεν κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον καὶ δὲν εὕρωμεν ὑπόλοιπον 0, δυνάμεθα νὰ ἐξακολουθήσωμεν τὴν διαίρεσιν ὅσον θέλομεν καὶ ἑπομένως νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον μὲ ὅσην θέλομεν προσέγγισιν.

224. Ὁμοίως δύναται νὰ γίνῃ καὶ ἡ διαίρεσις τῶν ἀκεραίων, διότι καὶ ὁ ἀκέραιος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς δεκαδικὸς τοῦ ὁποίου τὰ δεκαδικὰ ψηφία εἶνε μηδενικά.

Παράδειγμα 1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον 3 : 4.

Διάταξις τῆς πράξεως

$$\begin{array}{l|l} 30 & 4 \\ \cline{2-2} 20 & 0{,}75 \\ \;\;0 & \end{array}$$

Ὥστε τὸ πηλίκον 3 : 4 = 0,75

Παράδειγμα 2) Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον 8 : 3 κατὰ προσέγγισιν ἑκατοστοῦ.

Διάταξις τῆς πράξεως

$$\begin{array}{l|l} 8 & 3 \\ \cline{2-2} 20 & 2{,}66 \\ \;\;20 & \\ \;\;\;\;2 & \end{array}$$

Ὥστε τὸ πηλίκον $8 : 3 = 2{,}66 + \frac{2}{3}$ τοῦ ἑκατοστοῦ = 2,67 κατὰ προσέγγισιν ἑκατοστοῦ.

ΤΡΟΠΗ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ ΕΙΣ ΔΕΚΑΔΙΚΟΝ

225. Γνωρίζομεν ὅτι τὸ πηλίκον $3 : 4 = \frac{3}{4}$ καὶ τὸ πηλίκον τοῦ $8 : 3 = \frac{8}{3}$. Ἀλλὰ εὕρομεν ἀνωτέρω ὅτι 3 : 4 = 0,75 καὶ 8 : 3 = 2,67. Ἄρα τὸ κλάσμα $\frac{3}{4} = 3 : 4 = 0{,}75$ καὶ τὸ κλάσμα $\frac{8}{3} = 8 : 3 = 2{,}67$ κατὰ προσέγγισιν ἑκατοστοῦ.

Ὥστε: ***Κλάσμα τρέπεται εἰς δεκαδικὸν ἀριθμόν, ἂν διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμητήν του διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του.***

ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΙ

226. Νὰ τραπῇ τὸ κλάσμα $\frac{3}{7}$ εἰς δεκαδικὸν ἀριθμόν.

Διάταξις τῆς πράξεως

$$\begin{array}{l|l} 30 & 7 \\ \cline{2-2} \;\;20 & 0{,}4285714 \\ \;\;\;\;60 & \\ \;\;\;\;\;\;40 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;50 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;10 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;30 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;2 & \end{array}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὸ πηλίκον εὕρομεν πάλιν τὸ 4, ἐπομένως θὰ εὕρωμεν πάλιν ὅλα τὰ μετὰ τὸ 4 ψηφία συνεπῶς τὰ ψηφία 428571, ἐπαναλαμβάνονται κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν ἐπ' ἄπειρον. Τοῦτο δὲ συμβαίνει, διότι, ἀφοῦ τὸ κλάσμα δὲν τρέπεται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικόν, ὅλα τὰ ὑπόλοιπα εἶνε διάφορα τοῦ 0 καὶ μικρότερα τοῦ 7, ἑπομένως δύνανται νὰ εἶνε οἱ ἀριθμοὶ 1, 2, 3, 4, 5, 6, ὥστε ἔπειτα ἀπὸ 6 τὸ πολὺ διαιρέσεις θὰ εὑρεθῇ κατ' ἀνάγκην ἓν ἀπὸ τὰ προηγούμενα ὑπόλοιπα, ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἀρχίζομεν πάλιν τὰς ἰδίας διαιρέσεις καὶ ἑπομένως θὰ εὑρίσκωμεν τὰ αὐτὰ πηλίκα.

Τὰ ψηφία 428571, τὰ ὁποῖα ἐπαναλαμβάνονται κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν ἐπ' ἄπειρον, λέγονται **περιοδικά**, τὸ δὲ σύνολον αὐτῶν **περίοδος** καὶ ὁ τοιοῦτος δεκαδικὸς λέγεται **περιοδικός**.

Εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα ἡ περίοδος ἀρχίζει εὐθὺς ἀμέσως μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν καὶ διὰ τοῦτο ὁ δεκαδικὸς αὐτὸς λέγεται **ἁπλοῦς περιοδικός**.

Νὰ τραπῇ τὸ κλάσμα $\frac{5}{12}$ εἰς δεκαδικόν.

Διάταξις τῆς πράξεως

$$\begin{array}{l|l} 50 & 12 \\ \hline \;\;20 & 0{,}4166\ldots \\ \;\;\;\;80 & \\ \;\;\;\;\;\;80 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;8 & \end{array}$$

Εἰς τὸ παράδειγμα αὐτὸ μεταξὺ τῆς ὑποδιαστολῆς καὶ τῆς περιόδου μεσολαβοῦν δύο ψηφία μὴ περιοδικά, τὸ 4 καὶ τὸ 1, διὰ τοῦτο ὁ τοιοῦτος δεκαδικὸς λέγεται **μικτὸς περιοδικός**.

227. Ὅταν ὁ παρονομαστὴς ἀναγώγου κλάσματος δὲν ἔχῃ ἄλλον παράγοντα παρὰ μόνον τὸν 2 ἢ τὸν 5 ἢ καὶ τοὺς δύο, τότε τὸ κλάσμα αὐτὸ τρέπεται εἰς δεκαδικὸν ἀκριβῶς.

Π.χ. $\frac{3}{4}=\frac{3}{2^2}=0{,}75$, $\quad \frac{7}{25}=\frac{7}{5^2}=0{,}28$.

Ὅταν ὁ παρονομαστὴς ἀναγώγου κλάσματος δὲν ἔχῃ οὔτε τὸν παράγοντα 2 οὔτε τὸν παράγοντα 5, τότε τὸ κλάσμα αὐτὸ τρέπεται εἰς ἁπλοῦν περιοδικόν.

Π.χ. $\frac{2}{3}=0{,}66\ldots$, $\quad \frac{3}{11}=0{,}2727\ldots$

Ὅταν ὁ παρονομαστὴς ἀναγώγου κλάσματος ἔχῃ τὸν παράγοντα 2 ἢ τὸν 5 ἢ καὶ τοὺς δύο καὶ ἄλλους ἀκόμη, τότε κλάσμα αὐτὸ τρέπεται εἰς μικτὸν περιοδικόν.

Π.χ. $\frac{3}{22}=\frac{3}{2\times 11}=0{,}13636\ldots$, $\frac{7}{15}=\frac{7}{3\times 5}=0{,}466\ldots$

Ὥστε: ***Πᾶν κοινὸν κλάσμα τρέπεται ἢ εἰς δεκαδικὸν μὲ ὡρισμένον πλῆθος δεκαδικῶν ψηφίων ἢ εἰς δεκαδικὸν περιοδικὸν ἁπλοῦν ἢ μικτόν.***

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

292) *Νὰ εὑρεθοῦν τὰ πηλίκα τῶν ἑξῆς διαιρέσεων κατὰ προσέγγισιν ἑκατοστοῦ:* 2,5 : 3. 3,47 : 8. 21,3 : 24.

293) *Νὰ εὑρεθοῦν τὰ πηλίκα κατὰ προσέγγισιν χιλιοστοῦ τῶν ἑξῆς διαιρέσεων:* 58 : 7. 63,8 : 19. 137,56 : 123. 0,483 : 13.

294) *Νὰ τραποῦν τὰ ἑξῆς κλάσματα εἰς δεκαδικοὺς ἀριθμούς:* $\frac{1}{2}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{17}{16}$, $\frac{23}{25}$, $\frac{229}{64}$, $\frac{123}{125}$, $\frac{371}{256}$, $\frac{837}{625}$,

295) *Νὰ τραποῦν τὰ ἑξῆς κλάσματα εἰς δεκαδικοὺς περιοδικοὺς καὶ νὰ εὑρεθῇ μία περίοδος αὐτῶν, καθὼς καὶ ποῖοι ἐξ αὐτῶν εἶνε ἁπλοῖ περιοδικοὶ καὶ ποῖοι μικτοί:* $\frac{2}{3}$, $\frac{17}{12}$, $\frac{15}{7}$, $\frac{18}{14}$, $\frac{19}{14}$, $\frac{5}{11}$, $\frac{13}{21}$, $\frac{15}{22}$, $\frac{9}{44}$.

ΤΡΟΠΗ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΥ ΔΕΚΑΔΙΚΟΥ ΕΙΣ ΚΛΑΣΜΑ ΚΟΙΝΟΝ

228. ***Ὁ ἁπλοῦς περιοδικὸς χωρὶς ἀκέραιον μέρος τρέπεται εἰς κοινὸν κλάσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀριθμητὴν μίαν περίοδον καὶ παρονομαστὴν τὸν ἀκέραιον, ὁ ὁποῖος ἔχει ὡς ψηφία τόσα 9 ὅσα ψηφία ἔχει ἡ περίοδος.***

Π.χ. ὁ $0{,}3636\ldots=\frac{36}{99}=\frac{4}{11}$

Πράγματι, ἂν τρέψωμεν τὸ $\frac{4}{11}$ εἰς δεκαδικόν, θὰ εὕρωμεν τὸν 0,3636 . . . .

Ἐὰν ὁ δεκαδικὸς περιοδικὸς ἔχῃ καὶ ἀκέραιον μέρος τρέπεται εἰς μικτόν.

Π.χ. $5{,}3636\ldots=5+0{,}3636\ldots=5\frac{36}{99}$.

Ἐὰν εἶνε μικτὸς περιοδικὸς τὸν πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 10 ἢ 100 κλπ. ὥστε νὰ γίνῃ ἁπλοῦς περιοδικός, ἀφοῦ δὲ τρέψωμεν τοῦτον εἰς κλάσμα κοινόν, διαιροῦμεν τὸ κλάσμα τοῦτο διὰ 10 ἢ 100 κλπ. Π.χ. ὁ $1,23636\ldots = \frac{136}{110}$.

Διότι $10 \times 1,23636\ldots = 12,3636\ldots = 12\frac{36}{99} = \frac{136}{11}$

καὶ $1,23636\ldots = \frac{136}{11} : 10 = \frac{136}{110}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

296) ***Νὰ τραποῦν τὰ ἑξῆς περιοδικὰ κλάσματα εἰς κοινά:***
0,333 .... 0,567567 .... 4,198198 .... 2,122727 ....
0,999 .... 7,999 .... 5,3299 ...

Β΄) ΔΙΑΙΡΕΤΗΣ ΔΕΚΑΔΙΚΟΣ

229. Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἕνα ἀριθμὸν διὰ δεκαδικοῦ, πολλαπλασιάζομεν καὶ τὸν διαιρετέον καὶ τὸν διαιρέτην ἐπὶ 10 ἢ 100 ἢ 1000 κλπ., ὥστε νὰ γίνῃ ὁ διαιρέτης ἀκέραιος καὶ κατόπιν ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν.

Π.χ. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ζητεῖται τὸ πηλίκον 8,376 : 3,25 Πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ἀριθμοὺς ἐπὶ 100, ὥστε νὰ γίνῃ ὁ διαιρέτης ἀκέραιος.

Διάταξις τῆς πράξεως

$$\begin{array}{r|l} 837,6 & 325 \\ \cline{2-2} 187\,6 & 2,5 \\ 25\,1 & \end{array}$$

Ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν τῶν προκυψάντων ἀριθμῶν 837,6 καὶ 325, εὑρίσκομεν πηλίκον 2,5 καὶ ὑπόλοιπον 251 δέκατα. Καὶ τὸ μὲν 2,5 εἶνε τὸ ζητούμενον πηλίκον, τὰ δὲ 251 δέκατα εἶνε τὸ ἑκατονταπλάσιον τοῦ ζητουμένου ὑπολοίπου, διότι (ἐδ.112) ἀφοῦ ἐπολλαπλασιάσαμεν τὸν διαιρετέον καὶ τὸν διαιρέτην ἐπὶ 100, τὸ μὲν πηλίκον δέν μετεβλήθη, τὸ ὑπόλοιπον ὅμως ἐπολλαπλασιάσθη καὶ αὐτὸ ἐπὶ 100, ἐπομένως διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον θὰ διαιρέσωμεν τὸ εὑρεθὲν ὑπόλοιπον 25,1 διὰ 100. Ὥστε τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον εἶνε 25,1 : 100 = 0,251.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

297) ***Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ ἑξῆς διαιρέσεις; 361,8 : 2,7.***

270

71,54 : 3,76. 25,584 : 21,32. 0,00245 : 0,07. 8 : 2,5. 560 : 0,35. 6732 : 6,732. 549 : 0,000549.

298) *Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν εἶνε 99,96, ὁ εἷς παράγων εἶνε 2,8· ποῖος εἶνε ὁ ἕτερος ;* (35,7)

299) *Τὰ 0,25 τῆς περιουσίας ἑνὸς εἶνε 131717,50· πόση εἶνε ὁλόκληρος ἡ περιουσία του ;* (526870)

300) *Ἐπληρώθησαν 1360 δραχμαὶ εἰς μερικοὺς ἐργάτας, ἕκαστος ἐλάμβανεν ἡμερομίσθιον 42,50 δρ.· πόσοι ἦσαν οἱ ἐργάται ;* (32)

301) *Ἠγόρασεν εἰς ἓν τεμάχιον ὑφάσματος ἀντὶ 14311,50 δραχμῶν πρὸς 243,60 δρ. τὸν πῆχυν· ἀπὸ πόσους πήχεις ἀπετελεῖτο τὸ ὕφασμα ;* (58,75)

302) *Ἠγόρασεν εἰς σάπωνα πρὸς 9,80 δρ. τὴν ὀκᾶν καὶ πωλήσας αὐτὸν πρὸς 12,40 ἐκέρδισε 1374,75 δρ.· πόσας ὀκάδας ἠγόρασεν ;* (528,75)

303) *Μία θερμάστρα καίει ἄνθρακα ἀξίας 52,25 δρ. τὴν ἡμέραν. Ἡ ὀκᾶ τοῦ ἄνθρακος στοιχίζει 3,65 δρ. Ἡ θέρμανσις διαρκεῖ ἀπὸ 15 Νοεμβρίου μέχρι 1ης Ἀπριλίου. Ἡ θερμάστρα θερμαίνει 18 δωμάτια. Πόση εἶνε ἡ ὁλικὴ δαπάνη ; Πόσαι ὀκ. ἄνθρακος θὰ καταναλωθοῦν καὶ πόση εἶνε ἡ δαπάνη δι' ἕκαστον δωμάτιον ;* (7158,25 δρ. 1961,16 ὀκ. 397,63 δρ.).

ΠΡΑΞΕΙΣ
ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

230. Ὅταν ἔχωμεν νὰ ἐκτελέσωμεν πρόσθεσιν ἢ ἀφαίρεσιν δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ καὶ κοινοῦ κλάσματος ἢ τρέπομεν τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν εἰς κλάσμα ἢ τρέπομεν τὸ κλάσμα εἰς δεκαδικὸν ἀριθμὸν εἴτε ἀκριβῶς εἴτε κατὰ προσέγγισιν καὶ κατόπιν ἐκτελοῦμεν τὴν πρόσθεσιν ἢ τὴν ἀφαίρεσιν :

Παραδείγματα

α′) $2{,}35 + \frac{1}{2} = 2{,}35 + 0{,}5 = 2{,}85$

ἢ $2{,}35 + \frac{1}{2} = \frac{235}{100} + \frac{1}{2} = \frac{235}{100} + \frac{50}{100} = 2{,}85.$

β′) $3{,}4 - \frac{2}{3} = 3{,}4 - 0{,}67 = 2{,}73$

ἢ $3{,}4 - \frac{2}{3} = \frac{34}{10} - \frac{2}{3} = \frac{102}{30} - \frac{20}{30} = \frac{82}{30} = 2{,}73.$

231. Όταν έχωμεν νὰ ἐκτελέσωμεν πολλαπλασιασμὸν ἢ διαίρεσιν δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ καὶ κοινοῦ κλάσματος ἢ ἐκτελοῦμεν τὴν πρᾶξιν ὅπως μεταξὺ ἀκεραίου καὶ κλάσματος ἢ τρέπομεν τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν εἰς κλάσμα ἢ τὸ κλάσμα εἰς δεκαδικὸν ἀριθμὸν καὶ κατόπιν ἐκτελοῦμεν τὴν πρᾶξιν.

Παραδείγματα

α΄) $0{,}5 \times \frac{3}{4} = \frac{0{,}5 \times 3}{4} = \frac{1{,}5}{4} = 0{,}375$

ἢ $0{,}5 \times \frac{3}{4} = \frac{5}{10} \times \frac{3}{4} = \frac{15}{40} = 0{,}375$

ἢ $0{,}5 \times \frac{3}{4} = 0{,}5 \times 0{,}75 = 0{,}375.$

β΄) $0{,}5 : \frac{3}{4} = 0{,}5 \times \frac{4}{3} = \frac{2}{3} = 0{,}67$

ἢ $0{,}5 : \frac{3}{4} = \frac{5}{10} : \frac{3}{4} = \frac{5}{10} \times \frac{4}{3} = \frac{20}{30} = 0{,}67$

ἢ $0{,}5 : \frac{3}{4} = 0{,}5 : 0{,}75 = 0{,}67.$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

304) *Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ ἑξῆς πράξεις:*

α΄) $\frac{3}{4} + 10{,}75.$ $\frac{5}{8} + 6{,}37.$ $\frac{13}{5} + 5{,}97.$ $\frac{16}{3} + 0{,}00052.$

β΄) $2\frac{5}{8} - 1{,}25.$ $8{,}9 - 4\frac{1}{5}.$ $0{,}635 - \frac{7}{16}.$ $\frac{13}{6} - 0{,}00084.$

γ΄) $\frac{6}{15} \times 3{,}7.$ $4\frac{12}{15} \times 2{,}13.$ δ΄) $2{,}4 : 6\frac{7}{12}.$ $0{,}00035 : \frac{3}{4}.$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΔΙΑΦΟΡΑ

305) *Εἷς ἠγόρασεν 25,50 ὀκ. καφὲ πρὸς 72,75 δρ. τὴν ὀκᾶν, 80,25 ὀκ. ζαχάρεως πρὸς 19,30 τὴν ὀκᾶν, 58,50 ὀκ. ἐλαίου πρὸς 26,70 δρ. τὴν ὀκᾶν, συνεφώνησε δὲ νὰ πληρώσῃ τὸ ἀντίτιμον αὐτῶν εἰς 3 ἴσας δόσεις· ἀπὸ πόσας δραχμὰς θὰ ἀποτελῆται ἑκάστη δόσις;* *(1655,30)*

306) *Ἐργάτης λαμβάνει ἡμερομίσθιον 42,50 δρ.· πόσα πρέπει νὰ ἐξοδεύῃ τὴν ἡμέραν, ἵνα ἐργαζόμενος 304 ἡμέρας τὸ ἔτος οἰκονομήσῃ εἰς ἓν ἔτος 3795 δρ.;* *(25)*

307) *Ἐὰν προστεθοῦν 48 ἀριθμοί, ἐκ τῶν ὁποίων ἕκαστος εἶνε ἴσος πρὸς τὸ ἑκατοστὸν τοῦ 14,5, ποῖον ἄθροισμα θὰ εὑρεθῇ;* *(6,96)*

308) *Εἷς θέλει νὰ κατασκευάσῃ 36 ὑποκάμισα ἀπὸ ἓν ὕφασμα, τὸ ὁποῖον στοιχίζει 27,50 δρ. ὁ πῆχυς, χρειάζονται δὲ 4,25 πήχεις δι' ἕκαστον ὑποκάμισον καὶ ἡ ἐργάτρια, ἡ ὁποία κατασκευάζει εἰς 2 ἡμέρας 3 ὑποκάμισα, λαμβάνει 218,40 δρ. τὴν ἑβδομάδα (τὰς 6 ἡμέρας)· πόσον στοιχίζουν τὰ ὑποκάμισα ταῦτα; (5081,10)*

309) *Οἰνέμπορος ἠγόρασεν 532. δκ. οἴνου πρὸς 8,75 τὴν δκ., ἀνέμιξε δὲ τοῦτον μὲ 45 δκ. ὕδατος· πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὴν φιάλην τῶν 300 δραμίων, ὥστε νὰ κερδίζῃ 561,40 δρ.; (6,80)*

310) *Οἰνέμπορος ἠγόρασε 375 δκ. οἴνου πρὸς 7,25 δρ. τὴν δκᾶν, θέτει δὲ τοῦτον εἰς φιάλας τῶν 250 δραμίων. Ἡ ἑκατοντὰς τῶν φιαλῶν στοιχίζει 345 δρ., τῶν δὲ πωμάτων 25 δρ. καὶ ἡ ἐργασία τῆς παρασκευῆς δι' ἑκάστην ἑκατοντάδα 75 δρ.· πόσαι φιάλαι χρειάζονται, πόσον θὰ στοιχίσῃ ἐν ὅλῳ ἡ φιάλη καὶ πόσον πρέπει νὰ τὴν πωλῇ, ἵνα κερδίσῃ 2000 δραχμάς;*

(600. 8,98. 12,32)

311) *Μία δεξαμενὴ χωρητικότητος 640 ὀκάδων γεμίζει εἰς 5 ὥρας ὑπὸ δύο κρουνῶν. Ὁ πρῶτος κρουνὸς χύνει 226,5 ὀκάδας εἰς 3 ὥρας· πόσας ὀκάδας χύνει ὁ δεύτερος τὴν ὥραν; (52,5)*

312) *Ἔμπορος ἠγόρασε δύο τεμάχια ὑφάσματος ἀντὶ 718,50 δρ., τὸ πρῶτον εἶνε 17,80 πήχεις καὶ στοιχίζει κατὰ πῆχυν δύο φορὰς περισσότερον ἀπὸ τὸ δεύτερον, τὸ ὁποῖον εἶνε 12,30 πηχ.· ποία εἶνε ἡ τιμὴ τοῦ πήχεως ἑκάστου τεμαχίου; (30, 15)*

313) *Ἔμπορος ἠγόρασε 40 δκ. ῥακὶ πρὸς 43,50 δρ. τὴν δκᾶν, ἔρριψε δὲ ἐντὸς αὐτοῦ ὕδωρ καὶ ἠδύνατο οὕτω νὰ πωλῇ τὸ ποτήριον πρὸς 1,50 δρ., χωρὶς οὔτε νὰ κερδίζῃ οὔτε νὰ ζημιώνεται· πόσον ὕδωρ ἔρριψεν ἐντὸς αὐτοῦ, ἂν ἑκάστη δκᾶ περιέχῃ 25 ποτήρια; (6,4)*

314) *Διὰ τὴν ἐνδυμασίαν μιᾶς κόρης διετέθησαν 12 πήχεις ὑφάσματος καὶ 8 πήχεις δι' ὑπένδυσιν (φόδραν), διὰ τὴν ἐνδυμασίαν τῆς νεωτέρας ἀδελφῆς της διετέθησαν 6 πήχεις ὑφάσματος καὶ 5 πήχεις δι' ὑπένδυσιν. Ἡ ἐνδυμασία τῆς πρώτης στοιχίζει 270,64 τῆς δευτέρας 141,10· πόσον στοιχίζει τὸ ὕφασμα καὶ πόσον ἡ φόδρα; (Ἂν διπλασιασθοῦν τὰ ὑφάσματα καὶ αἱ δραχμαί, αἱ διατεθεῖσαι διὰ τὴν δευτέραν, τὸ ἐπὶ πλέον ὕφασμα ἀπὸ τὸ τῆς πρώτης τιμᾶται τὰς ἐπὶ πλέον δραχμάς). (18,70 5,78)*

315) *Δύο ἄνθρωποι ἠγόρασαν συγχρόνως ὁ πρῶτος 13 δκ. ζαχάρεως καὶ 4 δκ. καφέ, ὁ δεύτερος 5 δκ. τῆς ἰδίας ζαχάρεως*

καὶ 2 ὀκ. τοῦ ἰδίου καφὲ· ὁ πρῶτος ἐπλήρωσε 559,50 δρ., ὁ δὲ δεύτερος 250,50· πόσον ἠγόρασεν ἕκαστος τὴν ὀκᾶν τῆς ζαχάρεως καὶ πόσον τὴν ὀκᾶν τοῦ καφέ ; (*19,50 76,50*)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ΄.

ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΡΙΖΑ

ΟΡΙΣΜΟΙ

232. **Τετραγωνικὴ ῥίζα ἑνὸς ἀριθμοῦ λέγεται ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος, ἂν ὑψωθῇ εἰς τὸ τετράγωνον, δίδει τὸν δοθέντα.**

Π. χ. Τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 16, λέγεται ὁ ἀριθμὸς 4, διότι $4^2=4\times4=16$. Τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ $\frac{4}{9}$ λέγεται ὁ $\frac{2}{3}$, διότι $\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$.

Ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα παριστάνεται μὲ τὸ σύμβολον $\sqrt{\ }$, τὸ ὁποῖον λέγεται **ῥιζικόν**: π. χ. τὸ $\sqrt{16}$ σημαίνει τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ 16, δηλ. τὸν ἀριθμὸν 4. Ὁ δὲ 16, ὁ ὁποῖος εἶνε ὑποκάτω ἀπὸ τὸ ῥιζικόν, λέγεται **ὑπόρριζον**.

233. Ἂν ζητήσωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ ἀριθμοῦ 17, παρατηροῦμεν ὅτι εἰς αὐτὸν χωροῦν μόνον τὰ τετράγωνα τῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3 καὶ 4, ἤτοι οἱ ἀριθμοὶ 1, 4, 9 καὶ 16, διότι τὸ τετράγωνον τοῦ 5, τὸ 25, εἶνε μεγαλύτερον ἀπὸ τὸν 17, ὥστε ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 17 εἶνε μεγαλυτέρα τοῦ 4 καὶ μικροτέρα τοῦ 5, ἂν δὲ λάβωμεν ὡς τοιαύτην τὸ 4, κάμνομεν λάθος ὀλιγώτερον τῆς ἀκεραίας μονάδος καὶ λέγομεν τότε ὅτι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 17 εἶνε ὁ 4 **κατὰ προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος.**

Ὥστε : **Τετραγωνικὴ ῥίζα ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος λέγεται ὁ μεγαλύτερος ἀκέραιος, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον χωρεῖ εἰς τὸν ἀριθμόν.**

Οὕτω τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 24,5 εἶνε ὁ 4 κατὰ προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος, διότι ὁ 4^2, δηλαδὴ ὁ 16, χωρεῖ εἰς τὸν 24,5 ὄχι ὅμως καὶ ὁ 5^2 δηλ. ὁ 25.

Ὥστε : **Τετραγωνικὴ ῥίζα δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ κατὰ προ-**

σέγγισιν ἀκεραίας μονάδος εἶνε ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ ἀκεραίου μέρους του.

ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΡΙΖΑ ΑΡΙΘΜΟΥ ΚΑΤΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΙΝ ΔΕΚΑΔΙΚΗΣ ΜΟΝΑΔΟΣ

234. Εἰς τὸν ἀριθμὸν 2 χωροῦν μόνον τὰ τετράγωνα τῶν ἀριθμῶν $\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10} \dots \frac{14}{10}$, ἐκ τῶν ὁποίων μεγαλύτερος εἶνε τὸ $\frac{14}{10}$.

Πράγματι $\left(\frac{14}{10}\right)^2 = \frac{14^2}{10^2} = \frac{196}{100} = 1{,}96 < 2$. Τὸ τετράγωνον ὅμως τοῦ $\frac{15}{10}$ δὲν χωρεῖ. Πράγματι $\left(\frac{15}{10}\right)^2 = \frac{15^2}{10^2} = \frac{225}{100} = 2{,}25 > 2$. Ὥστε ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 2 εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ $\frac{14}{10}$, καὶ μικροτέρα τοῦ $\frac{15}{10}$. Ἂν λάβωμεν ὡς τοιαύτην τὸ $\frac{14}{10}$, κάμνομεν λάθος ὀλιγώτερον τοῦ $\frac{1}{10}$ καὶ λέγομεν τότε ὅτι $\sqrt{2}$ εἶνε τὸ $\frac{14}{10} = 1{,}4$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$. Ὁμοίως εἰς τὸν ἀριθμὸν 2 χωροῦν μόνον τὰ τετράγωνα τῶν κλασμάτων $\frac{1}{100}, \frac{2}{100} \dots \frac{141}{100}$, ἐνῷ τὸ τετράγωνον τοῦ $\frac{142}{100}$ δὲν χωρεῖ. Πράγματι $\left(\frac{141}{100}\right)^2 = 1{,}9881 < 2$ καὶ $\left(\frac{142}{100}\right)^2 = 2{,}0164 > 2$. Διὰ τοῦτο τὸ $\frac{141}{100} = 1{,}41$ λέγεται $\sqrt{2}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{100}$.

Ὅθεν: ***Τετραγωνικὴ ῥίζα ἑνὸς ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν*** $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$ ***κλπ. λέγεται τὸ μεγαλύτερον κλάσμα, ἀπὸ ὅσα ἔχουν παρονομαστὴν τὸν 10, 100 κλπ., τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον χωρεῖ εἰς τὸν ἀριθμόν.***

ΕΞΑΓΩΓΗ ΤΗΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΡΙΖΗΣ

Α'). Ἀριθμοῦ μικροτέρου τοῦ 100.

234. Ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἑνὸς ἀριθμοῦ, λέγεται ***ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης***. Ὅταν ὁ ἀριθμὸς εἶνε μικρότερος τοῦ 100, ὁπότε καὶ ἡ τετραγωνική του ῥίζα (εἴτε ἀκριβὴς εἶνε αὕτη εἴτε κατὰ προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος) εἶνε μικροτέρα τοῦ 10, δηλ. ἀριθμὸς μονοψήφιος, εὑρίσκομεν εὐκόλως ταύτην διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ: π.χ. τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 81 εἶνε 9, διότι 9^2, δηλ. 9×9 κάμνει 81. Τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 70 κατὰ προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος εἶνε ὁ 8, διότι 8×8 κάμνει 64, τὸ ὁποῖον εἶνε μικρότερον τοῦ 70, ἐνῷ 9×9 κάμνει 81, τὸ ὁποῖον εἶνε μεγαλύτερον τοῦ 70.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

310) *Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοὶ ἀπὸ τοῦ 1 ἕως 100, τῶν ὁποίων ἐξάγεται ἀκριβῶς ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα.*

311) *Νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τῶν ἀριθμῶν 11, 19, 21, 29, 32, 47, 37, 45, 57, 63, 85, 94 κατὰ προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος.*

Β'). Ἀριθμοῦ μεγαλυτέρου τοῦ 100.

235. Ὅταν ὁ ἀριθμὸς ἀποτελῆται ἀπὸ τὴν μονάδα ἀκολουθουμένην ἀπὸ ἄρτιον ἀριθμὸν μηδενικῶν, ἡ τετραγωνική του ρίζα ἀποτελεῖται ἀπὸ τὴν μονάδα ἀκολουθουμένην ἀπὸ μηδενικὰ δύο φορὰς ὀλιγώτερα ἐκείνων, τὰ ὁποῖα ἔχει ὁ ἀριθμός.

Π.χ. $\sqrt{10000}=100$, διότι $100^2=10000$

καὶ $\sqrt{1000000}=1000$, διότι $1000^2=1000000$.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ζητεῖται ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ ἀριθμοῦ 142897. Πρὸς εὕρεσιν ταύτης γράφομεν δεξιὰ τοῦ ἀριθμοῦ μίαν γωνίαν, ἐντὸς τῆς ὁποίας γράφομεν τὴν ῥίζαν.

Κατόπιν ἐκτελοῦμεν τὰς ἑξῆς ἐργασίας:

1) Χωρίζομεν τὸν ἀριθμὸν εἰς τμήματα διψήφια ἀρχίζοντες ἐκ δεξιῶν.

Τὸ πρῶτον ἐξ ἀριστερῶν τμῆμα δύναται νὰ εἶνε καὶ μονοψήφιον.

Διάταξις τῆς πράξεως

14'2 8'97	378	
5'2' 8	67	748
4 6 9	7	8
5 9 9' 7	469	5984
5 9 8 4		
1 3		

2) Ἐξάγομεν τοῦ τμήματος τούτου, δηλ. τοῦ 14, τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν καὶ εὑρίσκομεν οὕτως τὸ πρῶτον ψηφίον τῆς ῥίζης, τὸ 3, τὸ ὁποῖον γράφομεν ἐντὸς τῆς γωνίας.

3) Τὸ τετράγωνον τοῦ ψηφίου τούτου, ἤτοι τὸ 9, ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸ τμῆμα, ἀπὸ τὸ ὁποῖον εὑρέθη, δηλ. ἀπὸ τὸ 14, καὶ δεξιὰ

τοῦ ὑπολοίπου 5 καταβιβάζομεν τὸ ἀκόλουθον τμῆμα, τὸ 28, καὶ σχηματίζεται οὕτω νέος ἀριθμὸς ὁ 528.

4) Τὰς 52 δεκάδας τοῦ ἀριθμοῦ τούτου, διαιροῦμεν διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ εὑρεθέντος ψηφίου τῆς ῥίζης, δηλ. διὰ τοῦ 6, τὸ ὁποῖον γράφομεν ὑποκάτω ἀπὸ τὴν γωνίαν.

5) Τὸ πηλίκον 7 γράφομεν δεξιὰ τοῦ διαιρέτου 6 καὶ τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν 67 πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸ ἴδιον πηλίκον 7. Ἂν τὸ γινόμενον 469 ἀφαιρῆται ἀπὸ τὸν ἀριθμόν, τοῦ ὁποίου διῃρέσαμεν τὰς δεκάδας, δηλ. ἀπὸ τὸν 528, τὸ πηλίκον 7 εἶναι τὸ δεύτερον ψηφίον τῆς ῥίζης, ἐὰν δὲ δὲν ἀφαιρῆται δοκιμάζομεν κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον ψηφίον καὶ οὕτω καθ᾽ ἑξῆς, μέχρις ὅτου εὕρωμεν ψηφίον, τοῦ ὁποίου τὸ γινόμενον νὰ ἀφαιρῆται Τὸ ψηφίον τοῦτο θὰ εἶνε τὸ δεύτερον ψηφίον τῆς ῥίζης καὶ τὸ γράφομεν δεξιὰ τοῦ πρώτου.

6) Μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τοῦ 469 ἀπὸ τὸν 528 καταβιβάζομεν δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου 59 τὸ ἑπόμενον τμῆμα 97 καὶ σχηματίζεται οὕτω νέος ἀριθμὸς ὁ 5997, τοῦ ὁποίου τὰς 599 δεκάδας διαιροῦμεν διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ εὑρεθέντος μέρους τῆς ῥίζης, δηλ. διὰ τοῦ 74 ($=37\times2$), τὸ ὁποῖον γράφομεν ὑποκάτω ἀπὸ τὴν γωνίαν.

7) Τὸ πηλίκον 8 γράφομεν δεξιὰ τοῦ διαιρέτου 74 καὶ τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν 748 πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸ ἴδιον πηλίκον 8. Ἂν τὸ γινόμενον ἀφαιρῆται ἀπὸ τὸν ἀριθμόν, τοῦ ὁποίου διῃρέσαμεν τὰς δεκάδας, δηλ. ἀπὸ τὸ 5997, τὸ πηλίκον 8 εἶνε τὸ γ΄ ψηφίον τῆς ῥίζης, τὸ ὁποῖον γράφομεν δεξιὰ τῶν εὑρεθέντων, ἄλλως δοκιμάζομεν τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, μέχρις ὅτου καταβιβάσωμεν καὶ τὸ τελευταῖον τμῆμα, ὁπότε θὰ εὕρωμεν τὸ τελευταῖον ψηφίον τῆς ῥίζης. Οὕτως ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ ἀριθμοῦ 142897 εἶνε ὁ ἀριθμὸς 378 κατὰ προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος, δηλ. ὁ $142897 = 378^2 + 13$.

Τὸ ὑπόλοιπον 13 λέγεται ***ὑπόλοιπον τῆς ῥίζης***. Ἂν δὲ ἡ πρᾶξις δὲν ἀφήσῃ ὑπόλοιπον, τότε ὁ ἀριθμὸς λέγεται ***τέλειον τετράγωνον***.

Ἂν κατὰ τὴν εὕρεσιν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης εἰς μίαν διαίρεσιν τὸ πηλίκον εἶνε 0, γράφομεν τοῦτο ὡς ψηφίον τῆς ῥίζης καὶ ἐξακολουθοῦμεν καθ' ὅμοιον τρόπον τὴν πρᾶξιν.

Π χ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ ἀριθμοῦ 164836.

Διάταξις τῆς πράξεως

16΄4 8΄3 6	406	
4΄8 3΄6	8	806
4 8 3 6		6
0		4836

ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΗΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΡΙΖΗΣ ΚΑΤΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΙΝ ΔΕΚΑΔΙΚΗΣ ΜΟΝΑΔΟΣ

236. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν ἀκεραίου ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$, δηλ. διὰ νὰ εὕρωμεν καὶ τὰ δέκατα τῆς ρίζης, ἀφοῦ εὕρωμεν ταύτην κατὰ προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος, γράφομεν εὐθὺς μετ' αὐτὴν ὑποδιαστολήν, κατόπιν δὲ γράφομεν δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου δύο μηδενικὰ καὶ ἐξακολουθοῦμεν ὡς συνήθως τὴν πρᾶξιν.

Διὰ νὰ εὕρωμεν ταύτην κατὰ προσέγγισιν 0,01 θέτομεν πάλιν εἰς τὸ νέον ὑπόλοιπον δύο μηδενικὰ καὶ ἐξακολουθοῦμεν τὴν πρᾶξιν. Καθ' ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν τὴν ῥίζαν καὶ κατὰ προσέγγισιν 0,001, 0,0001 κ.λ.π.

Π. χ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 6 κατὰ προσέγγισιν 0,001.

Διάταξις τῆς πράξεως

6	2,449		
20΄0	44	484	4889
1 76	4	4	9
240΄0	176	1936	44001
193 6			
4640΄0			
4400 1			
239 9			

237. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ, ἐὰν δὲν ἔχῃ ἄρτιον ἀριθμὸν δεκαδικῶν ψηφίων, θέτομεν εἰς τὰ δεξιὰ ἓν μηδενικὸν καὶ κατόπιν ἐξάγομεν τὴν ρίζαν αὐτοῦ ὅπως καὶ τῶν ἀκεραίων, φροντίζοντες μόνον ὅταν εὕρωμεν τὸ ψηφίον τῆς ρίζης, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ τελευταῖον τμῆμα τοῦ ἀκεραίου μέρους τοῦ ἀριθμοῦ, νὰ θέσωμεν εὐθὺς μετ' αὐτὸ τὴν ὑποδιαστολήν.

Διάταξις τῆς πράξεως

5,48'90	2,34	
14'8	43	464
129	3	4
190'0	129	1856
1856		
134		

Ἂν ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς δὲν ἔχει ἀκέραιον μέρος, θέτομεν 0 διὰ τὸ ἀκέραιον μέρος τῆς ρίζης καὶ ἐξάγομεν τὴν ρίζαν τοῦ δεκαδικοῦ ὡς νὰ ἦτο ἀκέραιος.

Διάταξις τῆς πράξεως

0,06'25	0,25
22'5	45
225	5
0	225

238. **Δ**ιὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν κλάσματος, ἂν καὶ οἱ δύο ὅροι του εἶνε ἢ δύνανται νὰ γίνουν δι' ἁπλοποιήσεως τέλεια τετράγωνα ἐξάγομεν καὶ τῶν δύο τὴν ρίζαν, ἄλλως τρέπομεν τοῦτο εἰς δεκαδικὸν καὶ τούτου ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν· π. χ. $\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}} = \frac{2}{6}$. $\sqrt{\frac{5}{5}} =$ $= 0{,}833\ldots = 0{,}9$ κατὰ προσέγγισιν 0,1.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

318) *Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν:* 169, 961, 1369, 7921, 15129, 762129.

319) *Ὁμοίως τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν κατὰ προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος:* 637, 94376.

320) *Ὁμοίως τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν κατὰ προσέγγισιν χιλιοστοῦ:* 839, 564, 2328, 37639.

321) *Ὁμοίως τῶν ἑξῆς:* 1,96. 92,16. 11, 9025. 5,274.

322) *Ὁμοίως τῶν ἑξῆς:* $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{49}$, $\frac{1}{121}$, $\frac{1}{225}$, $\frac{3}{27}$, $\frac{2}{98}$, $\frac{4}{25}$, $\frac{9}{36}$, $\frac{25}{64}$, $\frac{36}{81}$.

323) *Ὁμοίως κατὰ προσέγγισιν* 0,01 *τῶν ἑξῆς:* $\frac{1}{5}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{7}{13}$, $\frac{25}{26}$, $\frac{132}{133}$,

7) Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τετραγώνου εἶνε 3481 μέτρα· πόσον εἶνε ἑκάστη πλευρὰ αὐτοῦ; (59)

8) Ἂν τὸ νέον στρέμμα θεωρηθῇ ὡς τετράγωνον, πόσον θὰ εἶνε ἡ πλευρὰ αὐτοῦ; (προσέγγισις $\frac{1}{100}$ *). (1 στρεμ.=1000 τ.μ.).*

ΑΣΥΜΜΕΤΡΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

239. Ἂν ἐξάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ 2, θὰ εὕρωμεν τὸν ἀριθμὸν 1,4142135...... Ὁ ἀριθμὸς οὗτος ἔχει ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία, τὰ ὁποῖα δὲν ἐπαναλαμβάνονται τὰ αὐτὰ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν, εἶνε δηλ. ***δεκαδικὸς μὲ ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία μὴ περιοδικά.*** Οἱ τοιοῦτοι ἀριθμοὶ λέγονται ***ἀσύμμετροι.***

ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΑΣΥΜΜΕΤΡΩΝ

240. Ὅταν θέλωμεν νὰ ἐκτελέσωμεν πράξεις ἐπὶ τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν, παραλείπομεν ἀπό τινος δεκαδικῆς τάξεως καὶ ἐφεξῆς ὅλα τὰ πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφία τῶν ἀριθμῶν καὶ ἐπὶ τῶν ὑπολειπομένων μερῶν ἐκτελοῦμεν τὰς πράξεις: π.χ, 1,4142135.. +1,73205....ἀντ' αὐτῶν λαμβάνομεν τοὺς ἑξῆς ἀριθμοὺς κατὰ προσέγγισιν 0,0001: 1,4142+ 1,7320=3,1462.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

326) *Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ ἑξῆς πράξεις.*

α') 2,235067 .. — 1,73206 .... β') 1,4142135 .... × 2,44989 .

γ') 2,44989 ...: 1,73205 ....

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

ΣΥΜΜΙΓΕΙΣ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΜΕΤΡΙΚΟΝ ΣΥΣΤΗΜΑ

241. Ἐκτὸς τῶν ποσῶν, τὰ ὁποῖα ὠνομάσαμεν πλήθη (ἐδ.2) ὑπάρχουν καὶ ἄλλα ποσά, ἕκαστον ἐκ τῶν ὁποίων ἀποτελεῖ ἓν ὅλον, χωρὶς νὰ παρουσιάζῃ καμμίαν διαίρεσιν, π.χ. ὁ ὄγκος τῶν σωμάτων, τὸ βάρος αὐτῶν, αἱ γραμμαί, αἱ ἐπιφάνειαι κλπ.

Τὰ ποσὰ ταῦτα ὀνομάζονται ***συνεχῆ*** ποσά.

Διὰ νὰ προσδιορίσωμεν ἓν συνεχὲς ποσόν, τὸ συγκρίνομεν πρὸς ἓν ἄλλο ποσόν, ὁμοειδὲς πρὸς αὐτό, τὸ ὁποῖον ὁρίζομεν ὡς μονάδα καὶ εὑρίσκομεν ἀπὸ πόσας μονάδας ἢ καὶ μέρη αὐτῆς ἀποτελεῖται τὸ δοθέν.

Ὥστε: ***Μονὰς τῶν συνεχῶν ποσῶν λέγεται ἓν ποσὸν ὁμοειδές, ὡρισμένον καὶ γνωστόν.***

Ἡ σύγκρισις δὲ ἑνὸς συνεχοῦς ποσοῦ πρὸς τὴν μονάδα του λέγεται μ έ τ ρ η σ ι ς αὐτοῦ.

Ἐπειδὴ τὰ διάφορα κράτη δὲν συνεφώνησαν νὰ ὁρίσουν δι' ἕκαστον ποσὸν τὴν αὐτὴν μονάδα, διὰ τοῦτο ὑπάρχουν διὰ τὸ αὐτὸ ποσὸν διάφοροι μονάδες, ἀπὸ τὰς ὁποίας θὰ ἀναφέρωμεν τὰς κυριωτέρας.

ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΗΚΟΥΣ

242. Μονὰς τοῦ μήκους εἶναι τὸ ***Γαλλικὸν μέτρον*** ἢ ***βασιλικὸς πῆχυς,*** ἴσος πρὸς τὸ 0,0000001 τοῦ τετάρτου τοῦ μεσημβρινοῦ τῆς Γῆς. Ἐκ τοῦ μέτρου τούτου σχηματίζομεν ἄλλας μονάδας. Οὕτω λαμβάνεται ὡς μονὰς τὸ 0,1 τοῦ μέτρου, τὸ ὁποῖον λέγεται ***παλάμη*** ἢ ὑποδεκάμετρον, τὸ 0,01 τὸ ὁποῖον λέγεται ***δάκτυλος*** ἢ ὑφεκατόμετρον (κοινῶς πόντος) καὶ τὸ 0,001, τὸ ὁποῖον λέγεται ***χιλιοστόμετρον***. Ἐπίσης λαμβάνεται ὡς μονὰς τὸ μῆκος 10 μέτρων καὶ λέγεται ***δεκάμετρον.*** τὸ μῆκος 100 μέτρων καὶ λέγεται ***ἑκατόμετρον,*** τὸ μῆκος 1000 μέτρων, τὸ ὁποῖον λέγεται ***χιλιόμετρον*** καὶ τὸ μῆκος 10000 μέτρων, τὸ ὁποῖον λέγεται ***μυριάμετρον*** Τὸ μέτρον δηλ. ἡ μονὰς ἀπὸ τὴν ὁποίαν σχηματίζονται αἱ ἄλλαι μονάδες, λέγεται ***ἀρχικὴ μονάς.***

Εἰς τὴν οἰκοδομικὴν λαμβάνεται ὡς μονὰς ὁ ***τεκτονικὸς πῆχυς,*** ἴσος πρὸς 0,75 τοῦ μέτρου.

Διὰ τὴν μέτρησιν τῶν ὑφασμάτων λαμβάνεται ὡς μονὰς ὁ ***μικρὸς πῆχυς Κωνσταντινουπόλεως,*** ὁ ὁποῖος εἶνε ἴσος ἀκριβῶς πρὸς 0,648 μ. Εἰς τὴν Ἑλλάδα λαμβάνεναι ἴσος μόνον πρὸς 0,64 καὶ λέγεται ἁπλῶς ***πῆχυς.*** Ὑποδιαιρεῖται εἰς 8 ρούπια.

Οἱ Ἄγγλοι ἔχουν ὡς ἀρχικὴν μονάδα τὴν ὑάρδαν, ἡ ὁποία εἶνε ἴση μὲ 0,914 τοῦ μέτρου περίπου (ἀκριβῶς 1 ὑάρδα=0,91439 τοῦ μέτρου), ὑποδιαιρεῖται δὲ εἰς 3 ***πόδας*** καὶ ἕκαστος ποῦς εἰς 12 ***δακτύλους*** (ἴντσας).

Οἱ Ρῶσσοι ἔχουν ὡς ἀρχικὴν μονάδα τὸν ***ἀρσίν,*** ὁ ὁποῖος εἶνε 0,711 τοῦ μέτρου.

Οἱ Γάλλοι πρὶν ὁρίσουν ὡς ἀρχικὴν μονάδα τὸ μέτρον, εἶχον τὴν ***ὀργυάν,*** ἡ ὁποία εἶνε ἴση πρὸς 1,95 μέτρα περίπου (ἀκριβῶς 1 ὀργ. = 1,94904 μέτρα). Ὑποδιαιρεῖται δὲ εἰς 6 ***πόδας***, ἕκαστος ποὺς εἰς 12 ***δακτύλους*** καὶ ἕκαστος δάκτυλος εἰς 12 ***γραμμάς***.

Διὰ τὰς μεγάλας ἀποστάσεις ἄλλαι μονάδες εἶνε τὸ ***ναυτικὸν μίλιον***, ἴσον μὲ 1852 μέτρα περίπου, ἡ ***λεῦγα***, ἴση μὲ 4000 μέτρα, τὸ ***Γεωγραφικὸν ἢ Γερμανικὸν μίλιον***, ἴσον μὲ 7420,44 μέτρα, τὸ ***Ἀγγλικὸν μίλιον***, ἴσον μὲ 1760 ὑάρδας ἢ μὲ 1609,3295 μέτρα καὶ τὸ ***Ῥωσσικὸν βέρτσιον***, ἴσον μὲ 1500 ἀρσὶν ἢ μὲ 1066,79 μέτρα.

Ενυ ελ

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

327) *Νὰ τραποῦν εἰς μέτρα α′) 58,7 τεκτονικοὶ πήχεις, β′) 32,4 Ἑλλ. ἐνδεζὲ (πήχεις ὑφάσματος).*

328) *Νὰ τραποῦν 42,8 μέτρα α′) εἰς τεκτονικοὺς πήχεις. β′) εἰς Ἑλλ. ἐνδεζέ, γ′) εἰς ὑάρδας.*

329) *Νὰ τραποῦν* $74\frac{3}{8}$ *πήχεις εἰς ὑάρδας καὶ* $23\frac{2}{3}$ *ὑάρδαι εἰς πήχεις.*

330) *Νὰ τραποῦν εἰς χιλιόμετρα, α′) 36,8 ναυτικὰ μίλια β′) 45,9 Ἀγγλικὰ μίλια, γ′) 72,6 Γεωγραφικὰ μίλια, δ′) 58,7 λεῦγαι.*

331) *Νὰ τραποῦν 5282 χιλιόμετρα, α′) εἰς ναυτικὰ μίλια. β′) εἰς Ἀγγλικὰ μίλια, γ′) εἰς Γεωγραφικὰ μίλια, δ′) εἰς λεύγας.*

332) *Ἔμπορος ἔφερε 2850 πήχεις ὑφάσματος, τὸ ὁποῖον ἐπλήρωσε πρὸς 46 δρ. τὸ μέτρον· πόσον ἐπλήρωσεν;*

ΜΟΝΑΔΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ

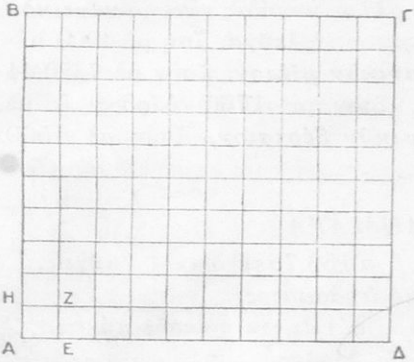
243. Μονάδες ἐπιφανείας εἶνε τὰ τετράγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν πλευρὰς τὰς μονάδας τοῦ μήκους.

Εἶναι δὲ αὗται τὸ τετραγωνικὸν μυριάμετρον, τὸ τετραγωνικὸν χιλιόμετρον, τὸ τετρ. ἑκατόμετρον ἢ ἑκτάριον, τὸ τετραγ. δεκάμετρον, τὸ τετραγ. μέτρον, ἡ τετραγ. παλάμη, ὁ τετραγων. δάκτυλος καὶ ἡ τετραγ. γραμμή.

Ἀρχικὴ μονὰς εἶνε τὸ ***τετραγωνικὸν μέτρον***.

Ἀπὸ τὰς μονάδας αὐτὰς ἑκάστη περιέχει 100 μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως.

Πράγματι, ἂν λάβωμεν ἓν τετράγωνον, π. χ. τὸ ΑΒΓΔ, καὶ χωρίσωμεν τὰς πλευράς του ΑΒ καὶ ΑΔ εἰς 10 ἴσα μέρη καὶ ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως τῆς ΑΒ φέρωμεν παραλλήλους πρὸς τὴν ΑΔ, ἀπὸ δὲ τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως τῆς ΑΔ παραλλήλους πρὸς τὴν ΑΒ, θὰ διαιρεθῇ τὸ τετράγωνον εἰς 100 ἴσα τετράγωνα, ἐκ τῶν ὁποίων ἕκαστον ἔχει ὡς πλευρὰν τὸ 0,1 τῆς πλευρᾶς τοῦ ΑΒΓΔ.



Ἂν λοιπὸν ἡ ΑΒ εἶνε ἴση μὲ ἓν μέτρον, τὸ ΑΒΓΔ θὰ εἶνε ἓν τετραγωνικὸν μέτρον, ἡ δὲ ΑΕ θὰ εἶνε ἴση μὲ μίαν παλάμην, καὶ τὸ ΑΕΖΗ θὰ εἶνε μία τετραγωνικὴ παλάμη. Ἑπομένως τὸ τετραγωνικόν μέτρον περιέχει 100 τετραγ. παλάμας.

Ἂν ΑΒ=1 δεκάμετρον, τὸ ΑΒΓΔ εἶνε ἓν τετραγωνικὸν δεκάμετρον, ΑΕ=1 μ. καὶ ΑΕΖΗ εἶνε ἓν τετραγ. μέτρον. Ὥστε 1 τετρ. δεκ. =100 τετρ. μέτρα.

Διὰ τὴν μέτρησιν τῶν οἰκοπέδων λαμβάνεται ὡς μονὰς τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶνε εἷς τεκτονικὸς πῆχυς καὶ λέγεται ***τεκτονικὸς τετραγωνικὸς πῆχυς.***

Διὰ τὴν μέτρησιν τῶν ἀγρῶν λαμβάνεται ὡς μονὰς ἐπιφάνεια 1000 τετρ. μέτρων καὶ λέγεται ***στρέμμα νέον***. Ἐπίσης λαμβάνεται καὶ τὸ ***παλαιὸν στρέμμα,*** τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπὸ 1270 τ. μ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

333) *Νὰ τραποῦν, α')* 368,5 *νέα στρέμματα εἰς παλαιὰ καὶ β')* 262,7 *παλαιὰ στρέμματα εἰς νέα.*

334) 156 *ἑκτάρια μὲ ποσὰ νέα καὶ μὲ ποσὰ παλαιὰ στρέμματα ἰσοδυναμοῦν ;*

335) *Μὲ πόσα ἑκτάρια ἰσοδυναμοῦν* 362,27 *νέα στρέμματα καὶ* 427,17 *παλαιά ;*

336) 252,8 *τ. μ. μὲ πόσους τεκτονικοὺς τετραγωνικοὺς πήχεις ἰσοδυναμοῦν ;*

337) 562,7 *τεκτον. τετραγ. πήχεις μὲ πόσα τ. μ. ἰσοδυναμοῦν ;*

338) *Οἰκόπεδον* 456 *τ. μ. ἐπωλήθη πρὸς* 160 *δρ. τὸν τεκτον.*

τετραγ. πῆχυν· ἀντὶ πόσων δραχμῶν ἐπωλήθη ;

339) ***Κτῆμα*** *26,5 στρεμμάτων παλαιῶν ἐπωλήθη ἀντὶ 60000 δρ. πόσον ἐπωλήθη τὸ βασιλικὸν στρέμμα ;*

ΜΟΝΑΔΕΣ ΟΓΚΟΥ ἢ ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΟΣ

244. Διὰ τὴν μέτρησιν τοῦ ὄγκου λαμβάνομεν ὡς ἀρχικὴν μονάδα τὸν κύβον, τοῦ ὁποίου ἑκάστη πλευρὰ εἶνε ἓν μέτρον καὶ λέγεται ***κυβικὸν μέτρον***.

Ἐὰν χωρίσωμεν τὸ κυβικὸν μέτρον κατὰ μῆκος, πλάτος καὶ ὕψος εἰς 10 ἴσα μέρη, θὰ προκύψουν 1000 κύβοι, ἕκαστος ἐκ τῶν ὁποίων θὰ ἔχῃ πλευρὰν μίαν παλάμην, ὀνομάζεται δὲ ***κυβικὴ παλάμη*** καὶ λαμβάνεται ὡς μονὰς τοῦ ὄγκου.

Τὸ κυβικὸν μέτρον λοιπὸν ἔχει 1000 κυβικὰς παλάμας.

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἡ κυβικὴ παλάμη χωρίζεται εἰς 1000 ***κυβικοὺς δακτύλους*** καὶ ἕκαστος κυβικὸς δάκτυλος εἰς 1000 ***κυβικὰς γραμμάς***. Διὰ τὴν μέτρησιν μεγάλων ὄγκων, π. χ. τοῦ ὄγκου τῆς γῆς, λαμβάνεται ὡς μονὰς τὸ ***κυβικὸν χιλιόμετρον***, ἤτοι κύβος ἔχων πλευρὰν ἓν χιλιόμετρον.

Διὰ τὴν μέτρησιν τῶν ὑγρῶν λαμβάνεται ὡς ἀρχικὴ μονὸς ἡ κυβικὴ παλάμη, ἡ ὁποία λέγεται τότε ***λίτρα***. Διὰ τὴν μέτρησιν τῶν δημητριακῶν καρπῶν λαμβάνεται ὡς ἀρχική μονὰς τὸ ***κοιλόν***, ἡ χωρικότης δηλ. 100 κυβικῶν παλαμῶν.

Διὰ τὴν μέτρησιν τῆς χωρητικότητος τῶν πλοίων λαμβάνεται ὡς μονὰς ὁ ***τόννος τῶν πλοίων***, ὁ ὁποῖος εἶνε ἴσος πρὸς 2,83 κυβικὰ μέτρα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

340) *Τὰ* $\frac{3}{4}$ *τοῦ κυβικοῦ μέτρου πόσας κυβικὰς παλάμας, πόσους κυβικοὺς δακτύλους καὶ πόσας κυβικὰς γραμμὰς περιέχουν ;*

341) *Πόσας λιτρας περιέχουν 5,678 κυβ. μέτρα ;*

342) *Μία ἀποθήκη χωρεῖ 800 κοιλά· πόσων κυβ. μέτρων εἶνε ἡ χωρητικότης τῆς ἀποθήκης αὐτῆς ;*

343) *Ἡ χωρητικότης ἑνὸς πλοίου εἶνε 6585,4 τόννοι· πρὸς πόσα κυβικὰ μέτρα ἰσοδυναμεῖ ἡ χωρητικότης αὐτή ;*

ΜΟΝΑΔΕΣ ΒΑΡΟΥΣ

245. Ὡς μονάδα τοῦ βάρους ἔχομεν τὸ ***γραμμάριον***, δηλ.

τὸ βάρος ὕδατος καθαροῦ ἀπεσταγμένου καὶ θερμοκρασίας 4,°1 Κελσίου, τὸ ὁποῖον χωρεῖ εἰς ἕνα κυβικὸν δάκτυλον.

Τὸ βάρος 1000 γραμμαρίων λαμβάνεται ὡς μονὰς καὶ λέγεται ***χιλιόγραμμον***. Ὁμοίως τὸ βάρος 1000 χιλιογράμμων λέγεται ***τόννος***.

Ἄλλην μονάδα βάρους ἔχομεν τὴν ***ὀκᾶν***, ἡ ὁποία εἶνε ἴση πρὸς 1280 γραμμάρια. Διαιρεῖται δὲ εἰς 400 ἴσα μέρη, ἕκαστον ἐκ τῶν ὁποίων λαμβάνεται ὡς μονὰς καὶ λέγεται ***δράμιον***. Τὸ βάρος 44 ὀκ. λαμβάνεται ὡς μονὰς καὶ λέγεται ***στατὴρ*** (κοινῶς καντάρι).

Εἰς τὰ φαρμακεῖα λαμβάνεται ὡς μονὰς τὸ γραμμάριον. Παλαιότεραι δὲ μονάδες ἦσαν ἡ ***φαρμακευτικὴ λίτρα***, ἴση πρὸς 360 γρ. Αὕτη διαιρεῖται εἰς 12 ***οὐγγίας***, ἑκάστη οὐγγία εἰς 8 ***δραχμάς***, ἑκάστη δραχμὴ εἰς 3 ***γράμμα*** (σκρούπουλα) καὶ ἕκαστον γράμμον εἰς 20 ***κόκκους***.

Εἰς τὴν Ἑπτάνησον λαμβάνεται ὡς μονὰς τοῦ βάρους ἡ ***Ἀγγλικὴ λίτρα***, ἡ ὁποία εἶνε ἴση πρὸς 453,6 γραμμάρια καὶ διαιρεῖται εἰς 16 ***οὐγγίας***.

Διὰ τὴν μέτρησιν τοῦ βάρους τῆς σταφίδος λαμβάνεται ὡς μονὰς ἡ ***Ἑνετικὴ λίτρα***, ὁ ὁποία εἶνε ἴση μὲ 149 δράμια.

Τὸ βάρος 1000 λιτρῶν λαμβάνεται ὡς μονὰς καὶ λέγεται ***χιλιόλιτρον***.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

344) *Τὸ χιλιόγραμμον πόσου ὕδατος εἶνε βάρος καὶ πόσου ὁ τόννος;*

344) *Νὰ τραποῦν εἰς χιλιόγραμμα, α΄) 56 ὀκ., β΄) 250 δράμια, γ΄) τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς.*

346) *Τὸ δράμιον μὲ πόσα γραμμάρια ἰσοδυναμεῖ; καὶ τὸ γραμμάριον τί μέρος εἶνε τοῦ δραμίου;*

347) *Τὸ χιλιόγραμμον μὲ πόσα δράμια ἰσοδυναμεῖ;*

348) *Ὁ τόννος μὲ πόσας ὀκάδας ἰσοδυναμεῖ;*

349) *Ὁ στατὴρ μὲ πόσα χιλιόγραμμα ἰσοδυναμεῖ;*

350) *Μὲ πόσα γραμμάρια καὶ μὲ πόσα δράμια ἰσοδυναμοῦν α΄) ἡ οὐγγία, β΄) ἡ δραχμή, γ΄) τὸ γράμμον καὶ δ΄) κόκκος;*

351) *Ἔμπορος ἔφερε 5800 ὀκάδας ζαχάρεως, τὴν ὁποίαν ἐπλήρωσε πρὸς 11 δρ. τὸ χιλιόγραμμον· πόσον ἐπλήρωσεν;*

352) *Σταφιδέμπορος ἐπώλησε* 15000 *ἐνετικὰς λίτρας σταφίδος· πόσας Ἀγγλικὰς λίτρας θὰ παραδώσῃ εἰς τὸν ἀγοραστήν;*

353) *Ἡ οὐγγία τῆς Ἀγγλικῆς λίτρας μὲ πόσα δράμια καὶ μὲ πόσα γραμμάρια ἰσοδυναμεῖ;*

354) *Ἡ ὀκᾶ μὲ πόσας λίτρας Ἀγγλικὰς ἰσοδυναμεῖ;*

344) *Ἔμπορος ἐπώλησε* 28000 *ἐνετικὰς λίτρας σταφίδος· πόσας ὀκάδας θὰ παραδώσῃ εἰς τὸν ἀγοραστήν;*

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΔΙΑΦΟΡΑ

356) *Εἰς ἓν δοχεῖον γεμάτον ἀπὸ ὕδωρ ἐβυθίσθη ἓν σῶμα στερεόν, τὸ βάρος τοῦ χυθέντος ὕδατος εἶνε* 5,2 *γραμμάρια· πόσος εἶνε ὁ ὄγκος τοῦ βυθισθέντος σώματος;*

357) *Ἓν δοχεῖον κενὸν ζυγίζει* 243 *γραμμάρια, γεμάτον δὲ ἀπὸ ὕδωρ ζυγίζει* 1549 *γραμμάρια· πόση εἶνε ἡ χωρητικότης αὐτοῦ;* *(1 κ. π. 306 κ. δ).*

358) *Ἓν δοχεῖον κενὸν ζυγίζει* 645 *γραμμάρια, γεμάτον δὲ ἀπὸ ὑδράργυρον, τοῦ ὁποίου τὸ εἰδικὸν βάρος εἶνε* 13,569, *ζυγίζει* 15 *χιλιόγραμμα* 300 *γραμ.· ποία εἶνε ἡ χωρητικότης τοῦ δοχείου;* *(1 κ. π. 77,89 κ.δ).*

(*Εἰδικὸν βάρος εἶνε ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος δεικνύει πόσας φορὰς τὸ βάρος ἑνὸς σώματος εἶνε μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ βάρος ἴσου ὄγκου ὕδατος καθαροῦ, ἀπεσταγμένου καὶ θερμοκρασίας* 4°,1. *Ἀλλὰ ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος παριστάνει τὸ βάρος τοῦ ὕδατος παριστάνει καὶ τὸν ὄγκον του ἢ τὸν ὄγκον τοῦ σώματος, διότι π. χ.* 3 *χιλιόγραμμα ὕδατος ἔχουν ὄγκον* 3 *κυβ. παλ., ὥστε τὸ εἰδικὸν βάρος ἑνὸς σώματος εἶνε πηλίκον τοῦ βάρους του διὰ τοῦ ὄγκου του, δηλ.* $E = B : O$).

359) *Ὅταν τὸ ὕδωρ πηχθῇ, αὐξάνει ὁ ὄγκος του εἰς τρόπον ὥστε μία κυβικὴ παλάμη πάγου ζυγίζει* 918 *γραμμάρια· ποῖος θὰ εἶνε ὁ ὄγκος* 100 *κυβικῶν παλαμῶν ὕδατος μετὰ τὴν πῆξιν;* (108,932461)

360) *Ποῖον εἶνε τὸ βάρος ἑνὸς σιδηροῦ κανόνος, ὁ ὁποῖος ἔχει μῆκος* 25 *δακτύλων καὶ τοῦ ὁποίου ἡ κάθετος τομὴ εἶνε τετράγωνον μὲ πλευρὰν* 1,5 *δακτύλων; (Τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ σιδήρου εἶνε* 7,7). *(433,125 γρ.).*

361) *Τὸ βάρος ἑνὸς σώματος εἶνε* 450 *γραμμάρια, ἂν δὲ βυθισθῇ μέσα εἰς τὸ ὕδωρ ἐκτοπίζει* 90 *γραμμάρια αὐτοῦ· πόσον εἶνε τὸ εἰδικὸν βάρος του;* *(5)*

362) *Ποῖος εἶνε ὁ ὄγκος ἑνὸς λίθου, ὁ ὁποῖος ζυγίζει 234 χιλιόγραμμα, ἂν τὸ εἰδικὸν βάρος αὐτοῦ εἶνε 2,5;*
(93 κ. π. 500 κ. δ.).

363) *Τὸ ὕδωρ εἶνε 770 φορὰς βαρύτερον ἀπὸ τὸν ἀέρα ὑπὸ τὴν συνήθη ἀτμοσφαιρικὴν πίεσιν καὶ εἰς τὴν θερμοκρασίαν τοῦ μηδενός· ὑπὸ τοὺς ὅρους αὐτοὺς ποῖον θὰ εἶνε τὸ βάρος ἑνὸς κυβικοῦ μέτρου ἀέρος;* *(1 χιλ. 298,7 γρ.)*

364) *Ἓν φύλλον μολύβδου ἔχει πάχος 6 γραμμῶν· πόσον βάρος θὰ ἔχῃ ἓν τετραγωνικὸν μέτρον τοιούτου φύλλου; (Τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ μολύβδου εἶνε 11,35) (68 χιλ. 100 γρμ.)*

365) *Πόσον εἶνε τὸ βάρος μιᾶς στήλης ὑδραργύρου, ὁ ὁποῖος περιέχεται εἰς ἕνα σωλῆνα, τοῦ ὁποίου ἡ κάθετος τομὴ ἔχει ἐπιφάνειαν 1,5 τοῦ δακτύλου, τὸ δὲ ὕψος αὐτοῦ εἶνε 76,5 δάκτυλοι;*
(Τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὑδραργύρου εἶνε 13,596).
(1 χιλ. 560, 141 γρ.),

366) *Ἓν σῶμα βυθιζόμενον εἰς ἕνα ὑγρὸν χάνει τόσον ἀπὸ τὸ βάρος του, ὅσον εἶνε τὸ βάρος τοῦ ὑγροῦ, τὸ ὁποῖον ἐκτοπίζει. Ἓν σῶμα βυθισθὲν εἰς τὸ ὕδωρ ἔχασε 25 γραμμάρια ἐκ τοῦ βάρους του, βυθισθὲν δὲ εἰς ὕδωρ ἁλμυρὸν ἔχασε 30 γραμμάρια ἀπὸ τὸ βάρος του, πόσον εἶνε τὸ βάρος μιᾶς κυβικῆς παλάμης ἁλμυροῦ ὕδατος; (Ὁ ἀριθμὸς 25 παριστάνει τὸ βάρος καὶ τὸν ὄγκον τοῦ ἐκτοπιζομένου ὕδατος, συνεπῶς καὶ τὸν ὄγκον τοῦ σώματος καὶ τὸν ὄγκον τοῦ ἐκτοπιζομένου ἁλμυροῦ ὕδατος). (1 χιλ, 200γρ.)*

ΜΟΝΑΔΕΣ ΝΟΜΙΣΜΑΤΩΝ

246. Εἰς τὴν Ἑλλάδα ἀρχικὴ μονὰς νομισμάτων εἶνε ἡ **δραχμή.** Ἀρχικὴ μονὰς ἴσης ἀξίας πρὸς τὴν δραχμήν, εἶνε διὰ τὴν Γαλλίαν, Ἑλβετίαν καὶ Βέλγιον τὸ **φράγκον**, διὰ τὴν Ἰταλίαν ἡ **λίρα** ἢ λιρέττα, διὰ τὴν Ἰσπανίαν ἡ **πεσσέτα,** διὰ τὴν Ρουμανίαν τὸ **λέϊ**, διὰ τὴν Βουλγαρίαν τὸ **λέβι**, καὶ διὰ τὴν Σερβίαν τὸ **δηνάριον.**

Ἡ δραχμὴ εἶνε κρᾶμα ἀργύρου καὶ χαλκοῦ. Εἰς ἕκαστον δὲ γραμμάριον αὐτῆς τὰ 0,835 εἶνε ἄργυρος τὰ δὲ ὑπόλοιπα 0,165 εἶνε χαλκός. Ὁ ἀριθμὸς 0,835, ὁ ὁποῖος παριστάνει τὸ ποσὸν τοῦ πολυτίμου μετάλλου, τὸ ὁποῖον περιέχεται εἰς τὴν μονάδα τοῦ κράματος, λέγεται **τίτλος ἢ βαθμὸς καθαρότητος** τοῦ κράματος. Ἡ δραχμὴ ὑποδιαιρεῖται εἰς 100 λεπτά.

Ἄλλα ἀργυρᾶ νομίσματα εἶνε τὸ εἰκοσάλεπτον, τὸ πεντηκοντάλεπτον, τὸ δίδραχμον, ὅλα μὲ τίτλον 0,835, καὶ τὸ πεντάδραχμον μὲ τίτλον 0,900. Τὸ βάρος αὐτῶν εἶνε ἓν γραμμάριον ἀνὰ 20 λεπτὰ τῆς ἀξίας των, οὕτω τὸ εἰκοσάλεπτον ἔχει βάρος 1 γραμ., τὸ πεντηκοντάλεπτον $2\,^1/_2$ γραμ. καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Χρυσᾶ νομίσματα εἶνε τῶν 5 δρ., τῶν 10, τῶν 20, τῶν 50 καὶ τῶν 100 δρ., ὅλα μὲ τίτλον 0,900. Τὸ βάρος αὐτῶν εἶνε $15\,^1/_2$ φορὰς μικρότερον ἀπὸ τὸ βάρος ἀργυρῶν νομισμάτων ἴσης ἀξίας. Χαρτονομίσματα εἶνε τῶν 50 δρ., τῶν 100 δρ., τῶν 500 δρ. τῶν 1000 δρ., καὶ τῶν 5000 δραχμῶν.

Εἰς τὴν Ἀγγλίαν ἀρχικὴ μονὰς εἶνε ἡ ***Ἀγγλικὴ Λίρα*** ἢ ***στερλίνα***, νόμισμα χρυσοῦν, ἀξίας 25,20 χρυσῶν δραχμῶν, τίτλου $\frac{11}{12}$ καὶ βάρους 7,988 γρ. Ἡ λίρα ὑποδιαιρεῖται εἰς 20 ***σελλίνια***, τὸ σελλίνιον εἰς 12 ***πέννας*** καὶ ἡ πέννα εἰς 4 ***φαρδίνια***.

Σημείωσις. Ἄλλα χρυσᾶ νομίσματα εἶνε τὸ ἥμισυ τῆς λίρας καὶ τὰ νομίσματα τῶν 2 καὶ 3 λιρῶν. Ἀργυρᾶ δὲ τὸ σελλίνιον καὶ τὰ νομίσματα τῶν 2, 2 καὶ ἥμισυ καὶ 5 σελλινίων καὶ τῶν 2, 3, 4 καὶ 6 πεννῶν. Ὅλων τίτλος εἶνε $\frac{37}{40}$. *Χαλκᾶ εἶνε ἡ πέννα τὸ φαρδίνιον καὶ τὸ νόμισμα τῶν 2 φαρδινίων.*

Εἰς τὴν Τουρκίαν ἀρχικὴ μονὰς εἶνε τὸ ***γρόσιον***, νόμισμα ἀργυροῦν, ἀξίας 23 λεπτῶν περίπου. Ὑποδιαιρεῖται εἰς 40 ***παράδες*** καὶ ὁ παρᾶς εἰς 3 ***ἄσπρα***.

Σημείωσις. Ἄλλα ἀργυρᾶ νομίσματα εἶνε τὸ μιτζίτιον, ἴσον πρὸς 20 γρόσια τὸ ἥμισυ καὶ τὸ τέταρτον αὐτοῦ. Χρυσᾶ νομίσματα εἶνε ἡ λίρα ἴση πρὸς 100 γρόσια

Εἰς τὴν Γερμανίαν ἀρχικὴ μονὰς εἶνε τὸ ***μάρκον***, νόμισμα ἀργυροῦν, βάρους 6,55 γρ. καὶ ἀξίας 1,25 δρ. περίπου καὶ ὑποδιαιρεῖται εἰς 100 ***πφένιχ***.

Σημείωσις. Ἄλλα ἀργυρᾶ νομίσματα εἶνε τὸ πέμπτον καὶ τὸ ἥμισυ τοῦ μάρκου καὶ τὰ νομίσματα τῶν 2 καὶ 5 μάρκων. Χρυσᾶ δὲ νομίσματα εἶνε τῶν 5, τῶν 10 καὶ τῶν 20 μάρκων. Τίτλος ὅλων εἶνε 0,900.

Εἰς τὰς Ἡνωμένας Πολιτείας ἀρχικὴ μονὰς εἶνε τὸ ***δολλάριον***, νόμισμα ἀργυροῦν, ἀξίας 5,18 δρ. ὑποδιαιρούμενον εἰς 100 ***σέντς***.

Σημείωσις. Ἄλλα ἀργυρᾶ νομίσματα εἶνε τὸ ἥμισυ, τὸ τέταρτον, τὸ πέμπτον καὶ τὸ δέκατον τοῦ δολλαρίου. Χρυσᾶ δὲ τὸ δολλάριον καὶ τὰ νομίσματα τῶν 2, 5, 20 καὶ 25 δολλαρίων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

367) *Νὰ τραποῦν εἰς χαρτίνας δραχμὰς α')* 32,46 *λίραι Ἀγ-*

γλίας, β') 59,85 *δολλάρια καὶ* γ') 462,75 *Γαλλικὰ φράγκα.*

368) *Νὰ τραποῦν εἰς χαρτίνας δραχμὰς* α') 872,6 *λιρέτται,* β') 39,85 *λίραι Τουρκίας καὶ* γ') 156,60 *μάρκα.*

369) *Νὰ τραποῦν εἰς χαρτίνας δραχμὰς* α') 596,20 *δηνάρια,* β') 804,30 *λέβι,* γ') 793 *λέϊ καὶ* δ') 143,70 *Ἑλβετικὰ φράγκα.*

370) *Πόσον ζυγίζουν 3850 δραχμαὶ εἰς χρυσᾶ νομίσματα*
(1241,935 *γρ.*)

371) *Ποία εἶνε ἡ ἀξία χρυσῶν νομισμάτων, τὰ ὁποῖα ζυγίζουν 400 γραμμάρια;* (1240 *δρ.*).

ΜΟΝΑΔΕΣ ΧΡΟΝΟΥ

247. Μονὰς τοῦ χρόνου εἶνε ἡ ***ἡμέρα*** ἢ ***ἡμερονύκτιον***, δηλ. ὁ χρόνος, ὁ ὁποῖος παρέρχεται μεταξὺ δύο διαδοχικῶν μεσονυκτίων. Διαιρεῖται εἰς 24 ***ὥρας***, ἡ ὥρα εἰς 60 ***πρῶτα λεπτὰ*** (δηλούμενα 60′) καὶ τὸ πρῶτον λεπτὸν εἰς 60 ***δεύτερα λεπτὰ*** (δηλούμενα 60″).

Ἄλλη μονὰς εἶνε τὸ ***ἔτος*** ἀποτελούμενον ἀπὸ 365 ἡμέρας, ὁπότε λέγεται ***κοινὸν*** καὶ ἀπὸ 366 ἀνὰ πᾶν τέταρτον ἔτος, ὁπότε λέγεται ***δίσεκτον***, Δίσεκτα εἶνε τὰ ἔτη, τῶν ὁποίων ὁ ἀριθμὸς εἶνε διαιρετὸς διὰ 4, π.χ. 1928, 1932 κλπ.

Ἄλλη μονὰς εἶνε ἡ ***ἑβδομὰς*** ἀποτελουμένη ἀπὸ 7 ἡμέρας Διὰ τὴν μέτρησιν μεγάλων χρονικῶν διαστημάτων λαμβάνεται ὡς μονὰς ὁ ***αἰὼν*** ἢ ***ἑκατονταετηρὶς*** ἀποτελουμένη ἀπὸ 100 ἔτη καὶ ἡ ***χιλιετηρὶς*** ἀποτελουμένη ἀπὸ 1000 ἔτη.

ΜΟΝΑΔΕΣ ΚΥΚΛΙΚΩΝ ΤΟΞΩΝ

248. Διὰ τὴν μέτρησιν ἑνὸς κυκλικοῦ τόξου λαμβάνεται ὡς μονὰς τὸ τόξον, τὸ ὁποῖον εἶνε τὸ $\frac{1}{360}$ τῆς περιφερείας, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει τὸ δοθὲν τόξον καὶ λέγεται ***μοῖρα*** (δηλουμένη 1^o) διαιρεῖται δὲ εἰς 60 ***πρῶτα λεπτὰ*** (δηλούμενα 60′) καὶ τὸ πρῶτον λεπτὸν εἰς 60 ***δεύτερα λεπτὰ*** (δηλούμενα 60″).

ΣΥΜΜΙΓΕΙΣ ΑΡΙΘΜΟΙ

249. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἐζυγίσαμεν ἕνα σάκκον ὀρύζη καὶ εὕρωμεν ὅτι τὸ βάρος του εἶνε 2 στατ. 32 ὀκ. καὶ 250 δράμια. Ὁ ἀριθμὸς οὗτος, ὁ ὁποῖος παριστάνει τὸ βάρος τῆς ὀρύ ζης ἀποτελεῖται ἀπὸ τρεῖς ἀριθμούς, αἱ μονάδες δὲ τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν εἶνε πολλαπλάσια τῆς ἀρχικῆς μονάδος, ὅπως οἱ στατῆρες, οἱ ὁποῖοι εἶνε πολλαπλάσια τῆς ὀκᾶς, ἢ ὑποδιαιρέσεις αὐτῆς, ὅπως τὰ δράμια, τὰ ὁποῖα εἶνε ὑποδιαιρέσεις τῆς ὀκᾶς.

Ὁ τοιοῦτος ἀριθμὸς λέγεται ***συμμιγὴς*** ἀριθμός.

Ὥστε: ***Συμμιγὴς ἀριθμὸς εἶνε ἀριθμὸς συγκεκριμένος, ἀποτελούμενος ἀπὸ ἄλλους ἀριθμούς, τῶν ὁποίων αἱ μονάδες ἔχουν ἰδιαίτερα ὀνόματα, ἑκάστη δὲ ἐξ αὐτῶν εἶνε ἢ πολλαπλάσιον μιᾶς ἀρχικῆς μονάδος ἢ ὑποδιαίρεσις αὐτῆς.***

Οἱ ἀκέραιοι καὶ οἱ κλασματικοὶ ἀριθμοὶ διὰ νὰ διακρίνωνται ἀπὸ τοὺς συμμιγεῖς λέγονται **ἁπλοῖ** ἀριθμοί.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

250. Τροπὴ συμμιγοῦς εἰς μονάδος τῆς τελευταίας τάξεώς του.

Ἀπὸ μνήμης καὶ γραπτῶς.

372) 5 *μέτρα καὶ* 6 *παλάμαι πόσαι παλάμαι εἶνε ἐν ὅλῳ;*

373) 5 *μ.* 6 *παλ.* 7 *δάκτ. πόσοι δάκτυλοι εἶνε ἐν ὅλῳ;*

374) 5 *μ.* 6 *παλ.* 7 *δακτ.* 8 *γραμ. πόσαι γραμμαὶ εἶνε ἐν ὅλῳ;*

375) 6 *δεκάδραχμα* 1 *πεντάδραχμον καὶ* 3 *δραχμαὶ πόσαι δραχμαὶ εἶνε ἐν ὅλῳ;*

376) *Νὰ τραποῦν* 7 *δεκάδραχμα* 3 *δρ.* 90 *λεπτὰ εἰς λεπτά.*

377) *Νὰ τραποῦν* 2 *τόννοι καὶ* 568 *χιλιόγραμμα εἰς χιλιόγραμμα*

378) *Νὰ τραποῦν* 3 *τόννοι* 456 *χιλ. καὶ* 78 *γραμ. εἰς γραμμάρια.*

379) *Νὰ τραποῦν* 5 *πήχεις* 6 *ρούπια εἰς ρούπια.*

Γραπτῶς. 380) *Νὰ τραποῦν* 2 *στατ. καὶ* 3 *ὀκ. εἰς ὀκάδας.*

381) *Νὰ τραποῦν* 7 *στατ.* 5 *ὀκ.* 150 *δράμια εἰς δράμια.*

382) *Νὰ τραποῦν* 2 *λίραι* 7 *σελ.* 6 *πέν,* 2 *φαρδ. εἰς φαρδίνια.*

383) *Νὰ τραποῦν* 2 *ἡμέραι* 6 *ὧραι* 2′ 42′′ *εἰς δεύτερα λεπτά.*

384) *Νὰ τραποῦν* 23° 26′ 32′′ *εἰς δεύτερα λεπτά.*

385) *Ἐκ τῆς λύσεως τῶν ἀνωτέρω προβλημάτων νὰ ἐξαχθῇ* ***κανὼν τροπῆς συμμιγοῦς ἀριθμοῦ εἰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεώς του.***

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

251. Τροπὴ συγκεκριμένου ἀκεραίου ἀριθμοῦ εἰς συμμιγῆ.

Ἀπὸ μνήμης καὶ γραπτῶς :

386) *Πόσα χιλιόγραμμα κάμνουν* 25000 *γραμμάρια ;*

387) 234567 *γραμμάρια πόσα χιλιόγραμμα κάμνουν καί πόσα γραμμάρια μένουν ;*

388) *Πόσους τόννους κάμνουν* 532000 *χιλιόγραμμα ;*

389) 348878 *χιλιόγραμμα πόσους τόννους κάμνουν καὶ πόσα χιλιόγραμμα μένουν ;*

390) 123456789 *γραμμάρια πόσα χιλιόγραμμα κάμνουν καὶ πόσα γραμμάρια μένουν καὶ τὰ χιλιόγραμμα ταῦτα πόσους τόννους κάμνουν καὶ πόσα χιλιόγραμμα μένουν ; ὥστε μὲ τὶ ἰσοδυναμοῦν τὰ δοθέντα γραμμάρια καὶ ποίου εἴδους ἀριθμὸς εἶνε ὁ οὕτω παραχθείς ;*

Γραπτῶς. 391) 41450 *δράμια πόσας ὀκάδας κάμνουν καὶ πόσα δράμια μένουν καὶ αἱ ὀκάδες αὐταὶ πόσους στατῆρας κάμνουν καὶ πόσαι ὀκάδες μένουν καὶ εἰς ποῖον ἀριθμὸν ἐτράπη ὁ δοθείς ;*

392) *Ἐκ τῆς λύσεως τῶν προβλημάτων αὐτῶν νὰ ἐξαχθῇ* ***κανὼν τροπῆς συγκεκριμένου. ἀκεραίου ἀριθμοῦ εἰς συμμιγῆ.***

393) *Νὰ τραποῦν εἰς συμμιγεῖς οἱ ἑξῆς ἀριθμοί :* 5837 *γραμμαὶ τοῦ μέτρου,* 52689742 *γραμμαὶ τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου,* 42795482 *δάκτυλοι τοῦ κυβικοῦ μέτρου.*

394) *Ὁμοίως οἱ ἑξῆς :* 46 *ρούπια,* 9872″ *τῆς μοίρας,* 109232″ *τῆς ὥρας.*

395) *Ὁμοίως οἱ ἑξῆς :* 150 *δάκτ. τῆς ὑάρδας,* 11232 *δάκτ. τῆς ὀργυᾶς,* 1658 *φαρδίνια.*

ΤΡΟΠΗ ΣΥΜΜΙΓΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΕΙΣ ΑΠΛΟΥΝ

252. Διὰ νὰ τρέψωμεν ἕνα συμμιγῆ εἰς ἀριθμὸν παριστάνοντα μονάδας ὡρισμένης τάξεως, τρέπομεν αὐτὸν εἰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεώς του καὶ τὸ ἐξαγόμενον γράφομεν ἀριθμητήν, παρανομαστὴν δὲ τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος παριστάνει πόσας μονάδας τῆς τελευταίας τάξεως περιέχει μία μονὰς τῆς ὁρισθείσης τάξεως.

Π. χ. Νὰ τραπῇ ὁ συμμιγὴς 2 στ. 24 ὀκ. 250 δράμ. εἰς ὀκάδας καὶ κατόπιν εἰς στατῆρας. Ἐπειδὴ μία ὀκ. $=$ 400 δράμ, καὶ 1στ. $=$ 44 ὀκ $= 400 \times 44 = 1760$ δραμ. θὰ ἔχωμεν 2 στ. 24 ὀκ. 250 δράμ. $=$ 45050 δράμια $= \frac{45050}{400}$ ὀκ. $= \frac{45050}{17600}$ στ.

Κατ᾽ ἄλλον τρόπον τρέπομεν, τὰς μονάδας τὰς ἀνωτέρας τῆς ὁρισθείσης τάξεως εἰς τὴν ὁρισθεῖσαν, τὰς δὲ κατωτέρας εἰς τὴν τελευταίαν τάξιν καὶ τὸν ἐκ τῆς δευτέρας ταύτης τροπῆς ἀριθμὸν γράφομεν ἀριθμητήν, παρονομαστὴν δὲ τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος παριστάνει πόσας μονάδας τῆς τελευταίας τάξεως περιέχει μία μονὰς τῆς ὁρισθείσης τάξεως.

Π. χ. Νὰ τραπῇ ὁ συμμιγὴς 2λ. 3 σ. 4πεν. 2 φαρ. εἰς σελλίνια.
Θὰ ἔχωμεν 20 σ. × 2 = 40 σελ. 40 σ. + 3 σ. = ***43*** σ.
4 φ. × 4 = 16 φ. 16 φ. + 2 φ. = ***18*** φ.
1 σελ. = 12 πεν. = 12×4 = ***48***φαρ.
Ὥστε 2 λ. 3 σελ. 4 π. = $43\frac{18}{48}$ σελ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

496) *Ὁ συμμιγὴς* 5μ. 6 *δάκ.* 7 *γραμ. νὰ τραπῇ α') εἰς δακτύλους β') εἰς παλάμας καὶ γ') εἰς μέτρα.* (565,7 56,57 5,667).

397) *Ὁ συμμιγὴς* 5 *ὥρ.* 25′ 50″ *νὰ τραπῇ α') εἰς πρῶτα λεπτὰ καὶ β') εἰς ὥρας.* ($325\frac{5'}{6}$, $\frac{391}{72}$ *ὥρ.*)

398) *Ὁ συμμιγὴς* 5 *ὑάρδαι* 2 *πόδες* 7 *δάκτυλοι νὰ τραπῇ α') εἰς πόδας καὶ β') εἰς ὑάρδας.* ($17\frac{7}{12}$, $5\frac{31}{36}$).

399) *Ὁ συμμιγὴς* 6 *ὀργ.* 5 *ποδ.* 5 *δάκτ.* 8 *γρ. νὰ τραπῇ α') εἰς δακτύλους, β') εἰς πόδας, γ') εἰς ὀργυάς.* ($282\frac{2}{3}$, $\frac{212}{9}$, $3\frac{27}{25}$)

ΤΡΟΠΗ ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΟΥ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ ΕΙΣ ΣΥΜΜΙΓΗ

253. Διὰ νὰ τρέψωμεν συγκεκριμένον κλάσμα εἰς συμμιγῆ, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητήν του διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του, καὶ τὸ μὲν πηλίκον θὰ παριστάνῃ μονάδας, ὁποίας καὶ τὸ κλάσμα, τὸ δὲ ὑπόλοιπον τρέπομεν εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως, τὰς ὁποίας διαιροῦμεν διὰ τοῦ παρανομαστοῦ καὶ ἐξακολουθοῦμεν οὕτω μέχρι τῆς τελευταίας τάξεως.

Νὰ τραπῇ τὸ κλάσμα $\frac{35}{8}$ τῆς λίρας εἰς συμμιγῆ.

Διάταξις τῆς πράξεως

$$\begin{array}{r|l} 35\,\lambda. & 8 \\ \cline{2-2} 3 & 4\,\lambda.\ 7\,\sigma.\ 6\,\pi. \\ \underline{20}\,\sigma. & \\ 60\,\sigma. & \\ 4 & \\ \underline{12}\,\pi. & \\ 48\,\pi. & \\ 0 & \end{array}$$

Οὕτω $\frac{35}{8}$ τῆς λίτρας $= 4$ λ. 7 σ. 6 πεν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

400) *Νὰ τραποῦν εἰς συμμιγεῖς οἱ ἑξῆς ἀριθμοί :*

α') $\frac{7}{8}$ *τῆς ὥρας,* *β')* $5\frac{3}{8}$ *πήχεις,* *γ')* $\frac{23}{5}$ *τῆς ὀκᾶς.*

δ') $\frac{29}{8}$ *τῆς ὑάρδας, ε')* $\frac{5}{8}$ *τοῦ χιλιογράμμου καὶ στ')* $\frac{8}{11}$ *τοῦ στατ.*

401) *Ὁμοίως οἱ ἑξῆς : α')* 5,7647 *τετραγωνικὰ μέτρα, β')* 16,123456789 *κυβ. μέτρα, γ')* 35^0, 127, *δ')* 365,242217 *ἡμ.*

402) *Ὁμοίως οἱ ἑξῆς : α')* $\frac{5}{7}$ *τῆς λίρας, β')* $18\frac{7}{11}$ *τῆς δργυιᾶς, γ')* $\frac{376}{34}$ *στ.*

403) *Νὰ τραποῦν 3670 χάρτιναι δραχμαὶ α') εἰς λίρας Ἀγγλίας, β') εἰς δολλάρια καὶ γ') εἰς Γαλλικὰ φράγκα.*

(1 *Λίρα Ἀγγλικὴ ἰσοδυναμεῖ μὲ 375 δρ., 1 δολ. ἰσοδ. μὲ 77,86 δρ., 1 Γαλλικὸν φράγκον ἰσοδ. μὲ 3,04 δρ.*).

404) *Νὰ τραποῦν 580,75 δρ, α') εἰς λιρέττας, β') εἰς λίρας Τουρκίας καὶ γ') εἰς μάρκα.*

(1 *λιρέττα ἰσοδ. μὲ 4,03 δρ., 1 λίρα Τουρκικὴ ἰσοδ. μὲ 39,65 δρ., 1 μάρκον ἰσοδ. μὲ 18,40 δρ.*).

405) *Νὰ τραποῦν 790 δρ. α') εἰς δηνάρια, β') εἰς λέβι, γ) εἰς λὲϋ καὶ δ') εἰς Ἑλβετικὰ φράγκα.*

(*Τὸ δηνάριον ἰσοδ. μὲ 1,35 δρ., τὸ λέβι ἰσοδ. μὲ 0,65 δρ., τὸ λὲϋ ἰσοδ. μὲ 0,46 καὶ τὸ Ἑλβετικὸν φράγκον ἰσοδ. μὲ 14,95 δρ.*

ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΣΥΜΜΙΓΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

254. Διὰ νὰ προσθέσωμεν συμμιγεῖς, ἀριθμοὺς γράφομεν τὸν ἕνα ὑποκάτω ἀπὸ τὸν ἄλλον, ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην καὶ κατόπιν ἐκτελοῦμεν τὴν πρόσθεσιν τῶν ἀριθμῶν, ἀπὸ τοὺς ὁποίους ἀποτελοῦνται οἱ συμμιγεῖς.

Π. χ. Νὰ προστεθοῦν οἱ ἀριθμοὶ 2 στ. 40 ὀκ 350 δραμ., 3 στ. 2 ὀκ. 180 δράμ., 7 στ. 25 ὀκ. 390 δράμ..

Διάταξις τῆς πράξεως

2 στ.	40 ὀκ.	350 δράμ.
3	2	180
7	25	390
12 στ.	67 ὀκ.	920 δραμ.
13 στ.	25 ὀκ.	120 δραμ.

Διαιροῦντες τὰ 920 δράμια τοῦ ἀθροίσματος διὰ 400 εὑρίσκομεν 2 ὀκ., αἱ ὁποῖαι μὲ τὰς 67 κάνουν 69 ὀκ. καὶ μένουν 120 δράμια. Τὰς 69 ὀκ. διαιροῦντες διὰ τοῦ 44 ὀκ. εὑρίσκομεν 1 στ., ὁ ὁποῖος μὲ τοὺς 12 κάμνει 13 στ. καὶ μένουν 25 ὀκ.

Ἡ πρᾶξις αὕτη λέγεται **κατάταξις** τοῦ συμμιγοῦς.

Ὥστε τὸ ἄθροισμα εἶνε 13 στ. 25 ὀκ. 120 δράμ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ ἑξῆς προθέσεις :

406) *α΄) 5 πήχεις 4 ρούπ. + 7 πήχ. 3 ρ.*

β΄) 2 ὀκ. 300 δρ. + 5 ὀκ. 250 δρ.

γ΄) 5 ὥρ. 45΄ 37΄΄ + 7 ὥρ. 39΄ + 6 ὥρ. 52΄ 39΄΄ + 5 ὥρ. 48΄΄

δ΄) 2 λ. 17 σ. + 5 λ. 8 π. + 3 λ. 15 σ. 9 π. 3 φ.

407) *Ὁμοίως αἱ ἑξῆς :*

α΄) 1 στ. 6 ὀκ. 250 δραμ. $+ \frac{37}{8}$ *στ. + 17 ὀκ.*

β΄) 5 ὑάρδ. 2 πόδ. 7 δ. $+ \frac{17}{6}$ *ὑάρ. + 6,75 ὑάρ.*

408) *Τὸ καθαρὸν βάρος ἑνὸς ἐμπορεύματος εἶνε 2 στ. 25 ὀκ.*

350 δράμ., τὸ ἀπόβαρον 3 δκ. καὶ 250 δράμ. πόσον εἶνε τὸ μικτὸν βάρος ; (2 στ. 29 δκ. 200 δράμ.)

409) *Σιδηρόδρομος ἀνεχώρησεν ἔκ τινος πόλεως τὰς 6 ὥρας 35′ 30″ π. μ. καὶ ἔφθασε μετὰ 4 ὥρας 45′ 35″ εἰς ἄλλην πόλιν· ποίαν ὥραν ἔφθασεν ;* (11 ὥρ. 21′ 5″)

410) *Θέλει εἷς νὰ ἀγοράσῃ ὕφασμα διὰ τὰς ἐνδυμασίας τῶν δύο τέκνων του, διὰ τὸ ἓν χρειάζεται 2 ὑάρδας καὶ 2 πόδ., διὰ τὸ δεύτερον 1 ὑάρδα 1 π. καὶ 9 δάκτ. περισσότερον παρὰ διὰ τὸ α′· πόσον ὕφασμα πρέπει νὰ ἀγοράσῃ ;* (6 ὑάρ 2 π. 9 δ.)

411) *Ἓν κινητὸν κινεῖται ἐπὶ μιᾶς περιφερείας· τὴν πρώτην ὥραν διήνυσε 15° 45′ 54″, τὴν δευτέραν 17° 32′ 16″ καὶ τὴν τρίτην 16° 42′ 26″· πόσας μοίρας διήνυσεν ἐν ὅλῳ ;* (50° 36″)

412) *Ἐγεννήθη εἰς τὴν 28 Ἰουλίου 1842 καὶ ἔζησε 58 ἔτη 10 μῆνας καὶ 23 ἡμέρας· πότε ἀπέθανεν ; (Ἐγεννήθη τὸ 1842 τὸν 7ον μῆνα τὴν 28 τοῦ μηνός).* (21 Ἰουνίου 1901).

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

255. Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν συμμιγεῖς γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον ὑποκάτω ἀπὸ τὸν μειωτέον, ὅπως καὶ εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν συμμιγῶν καὶ κατόπιν ἐκτελοῦμεν τὴν ἀφαίρεσιν ἀρχίζοντες ἀπὸ τὴν τελευταίαν τάξιν.

Π. χ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὑπόλοιπον 6 ὥρ. 2′ 11″ — 4 ὥρ. 45′ 25″.

Διάταξις τῆς πράξεως

	62	71
6 ὥρ.	2′	11″
4 ὥρ.	45′	25″
1 ὥρ.	16′	46″

Ἐπειδὴ τὰ 11″ τοῦ μειωτέου εἶνε ὀλιγώτερα ἀπὸ τὰ 25″ τοῦ ἀφαιρετέου, διὰ τοῦτο αὐξάνομεν αὐτὰ κατὰ 60″, ὅσα δηλ. ἔχει τὸ 1′, καὶ κατόπιν ἀφαιροῦμεν, φροντίζοντες ὅμως νὰ αὐξήσωμεν κατὰ 1′ τὰ 45′ τοῦ ἀφαιρετέου. Ὁμοίως κάμνομεν καὶ εἰς τὰ 2′ τοῦ μειωτέου, ἐπειδὴ εἶνε ὀλιγώτερα ἀπὸ τὰ 46′ τοῦ ἀφαιρετέου. Ὥστε τὸ ὑπόλοιπον εἶνε 1 ὥρ. 16′ 46″.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

413) *Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ ἑξῆς ἀφαιρέσεις.*

α′) 8 πήχ. 3 ρ. — 3 πήχ. 7 ρ.

β′) 5 στ. 18 δκ 200 δρ. — 2 στ. 32 δκ. 350 δρ.

γ') 5 λιρ. — 2 λιρ. 6 σελ. 7π. 3 φ.

414) α') 8 ὑαρδ. 2 π. 7 δακτ. — $\frac{15}{8}$ ὑαρ.

β') 15,75 ὀργ. — 7ὀργ. 7 ποδ. 9 δακ. 10 γρ.

415) Τὸ μικτὸν βάρος ἑνὸς ἐμπορεύματος εἶνε 2 στ. 2 ὀκ. 150 δραμ., τὸ δὲ ἀπόβαρον 5 ὀκ. 350 δραμ.· πόσον εἶνε τὸ καθαρὸν βάρος; (1 στ. 40 ὀκ. 200 δραμ.)

416) Ἐκ δύο ἀδελφῶν ὁ α' εἶνε 32 ἐτῶν 8 μηνῶν 17 ἡμερῶν, ὁ β' εἶνε 28 ἐτῶν 10 μηνῶν καὶ 23 ἡμερῶν· κατὰ πόσον χρόνον ὁ α' εἶνε μεγαλύτερος τοῦ β'. (3 ἔτη 9 μῆνες 24 ἡμέραι).

417) Πόσος χρόνος παρέρχεται ἀπὸ τῆς 7 ὥρ. 18' 45'' π. μ. μέχρι α') τῆς 11 ὥρας 15' 32'' π. μ. τῆς αὐτῆς ἡμέρας καὶ β') τῆς 11 ὥρας 42' 57'' μ. μ. τῆς ἰδίας ἡμέρας;

(3 ὥρ. 56' 47'', 16 ὥρ. 24' 12'')

418) Πόσος χρόνος παρέρχεται ἀπὸ τῆς 8ης ὥρ. 32' 10'' π. μ. μέχρι α') τῆς 10 ὥρ. 43' 39'' π. μ. τῆς ἑπομένης ἡμέρας, β') τῆς 10 ὥρ. 43' 39'' μ. μ. τῆς ἑπομένης ἡμέρας;

(1 ἡμ. 2 ὥρ. 11' 29'', 1 ἡμ. 14 ὥρ. 11' 29'').

419) Εἷς ἐγεννήθη τὴν 25 Ἰουλίου 1892 καὶ ἀπέθανε τὴν 23 Ἀπριλίου 1928· εἰς ποίαν ἡλικίαν ἀπέθανε; (35 ἔτ. 8 μην. 28 ἡμ.).

420) Εἷς ἀπέθανε τὴν 19 Μαΐου 1917 εἰς ἡλικίαν 56 ἐτῶν 7 μην. 23 ἡμ.· πότε ἐγεννήθη; (26 Σεπτεμβρίου 1860)

421) Ἔμπορος ἐπώλησεν ἀπὸ ἓν βαρέλιον βουτύρου, τὸ ὁποῖον περιεῖχε 2 στ. 35 ὀκ. 350 δρ., εἰς ἕνα 8 ὀκ. 380 δρ., εἰς ἄλλον 1 ὀκ. 250 δρ. περισσότερον ἀπὸ ὅσον ἐπώλησεν εἰς τὸν πρῶτον καὶ εἰς τρίτον 7 ὀκ. 300 δρ. περισσότερον ἀπὸ ὅσον ἐπώλησεν καὶ εἰς τοὺς δύο προηγουμένους· πόσον ἐπώλησεν ἐν ὅλῳ καὶ πόσον μένει εἰς τὸ βαρέλιον.

(1 στ. 2 ὀκ. 320 δράμ., 1 στ. 33 ὀκ. 30 δράμ.)

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

Α'). Συμμιγοῦς ἐπὶ ἀκέραιον

256. **Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῆ ἐπὶ ἀκέραιον πολλαπλασιάζομεν ἕκαστον ἀριθμὸν τοῦ συμμιγοῦς ἐπὶ τὸν ἀκέραιον** (ἐδ. 70) **καὶ κατόπιν εἰς τὸ γινόμενον ἐκτελοῦμεν τὴν κατάταξιν.**

Π. χ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον τοῦ συμμιγοῦς 2 στ. 24 ὀκ. 350 δράμ. ἐπὶ τὸν ἀκέραιον 5.

Διάταξις τῆς πράξεως

2 στ.	24 ὀκ.	350 δρ.
		5
10 στ.	120 ὀκ.	1750 δρ.
12 στ.	36 ὀκ.	150 δρ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

422) *Νὰ ἐκτελεσθοῦν οἱ ἑξῆς πολλαπλασιασμοί :*

α') 5 πήχ. 6 ρ. × 15. β') 2 ὥρ. 38′ 40″ × 15
γ') 3 ὑάρδ. 2 πόδ. 7 δακ. × 47.
δ') 5 λιρ. 15 σελ. 9 πεν. 2 φαρ. × 365.
ε') 2 ὑάρ. 5 ποδ. 7 δακ. × 427. ϛ') 2° 15′ 12″ × 128.

423) *Εἷς σάκκος καφὲ ζυγίζει 2 στ. 38 ὀκ. 250 δρ.· πόσον ζυγίζουν 56 σάκκοι ;* (161 στ. 7 ὀκ.)

424) *Ἐργάτης ὑφαίνει τὴν ἡμέραν 3 πήχ. 7 ρούπια ἑνὸς ὑφάσματος· πόσον θὰ ὑφάνῃ τὴν ἑβδομάδα ; (6 ἡμέρας)* (23 π. 2ρ.)

425) *Πόσον βάρος ἔχουν 15 λίτραι ὑδραργύρου, ὅταν ἑκάστη λίτρα ζυγίζει 13 χιλιόγρ. 396 γραμμάρια ;* (200 χιλ. 940 γραμ.)

426) *Σιδηρόδρομος ἀναχωρήσας ἀπὸ μίαν πόλιν καὶ διανύων 23 χιλ. 870 μέτρα τὴν ὥραν ἔφθασεν εἰς ἄλλην μετὰ 8 ὥρας· ποία εἶνε ἡ μεταξὺ τῶν δύο πόλεων ἀπόστασις ;*
(190 χιλ. 960 μέτρα.)

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

Α'). Συμμιγοῦς δι' ἀκεραίου

257. **Διὰ νὰ διαιρέσωμεν συμμιγῆ δι' ἀκεραίου διαιροῦμεν ἕκαστον μέρος τοῦ συμμιγοῦς διὰ τοῦ ἀκεραίου** (ἐδ. 107)

Π. χ. Νὰ διαιρεθῇ ὁ συμμιγὴς 19 ὥρ. 26′ 48″ διὰ τοῦ ἀκεραίου 4.

Διάταξις τῆς πράξεως

19 ὥρ.	26′	48″	4
3	180′	120″	4 ὥρ. 51′ 42″
60′	206′	168″	
180′	2′	0	
	60″		
	120″		

Διαιροῦμεν πρῶτον τὰς 19 ὥρ., καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 4 ὥρ. καὶ ὑπόλοιπον 3 ὥρ., τὰς ὁποίας διὰ νὰ διαιρέσωμεν τρέπομεν εἰς 180′ καὶ 26′ τοῦ συμμιγοῦς 206′· διαιροῦμεν ταῦτα καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 51΄ καὶ ὑπόλοιπον 2΄, τὰ ὁποῖα τρέπομεν εἰς 120΄΄, καὶ 48΄΄ τοῦ συμμιγοῦς 168΄΄· διαιροῦντες καὶ ταῦτα εὑρίσκομεν πηλίκον 42΄΄.

Ὥστε τὸ πηλίκον εἶνε 4ὥρ. 51΄ 42΄΄.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

427) Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ ἑξῆς διαιρέσεις :

α΄) 150° 45΄ 30΄΄ : 15. *β΄)* 9στ. 25δκ. 200δρ. : 4.

γ΄) 70ὑάρ. 1πόδ. 6δάκ. : 10. *δ΄)* 25δργ. 5πόδ. 9δάκ. 6γρ. : 8.

428) Μὲ ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν 13 διὰ νὰ εὕρωμεν γινόμενον 29λίρ. 13σελ. 4πέν. 3φ. (2λίρ. 5σελ. 7πέν. 3φ.)

429) Μία ἁμαξοστοιχία διήνυσε 422 χιλ. 500 μέτρα εἰς 13 ὥρας· πόσον διήνυε τὴν ὥραν (32 χιλ. 500 μέτρα)

430) Μία οἰκογένεια καταναλίσκει 31δκ. 130δρ. ἄρτου τὴν ἑβδομάδα· πόσον καταναλίσκει τὴν ἡμέραν; (4δκ. 190δρ.)

431) Εἰς 25 ἐργατρίας διενεμήθησαν 3147ὑάρδ. 2π. 9δάκ. νήματος, διὰ νὰ κατασκευάσουν χειροτεχνήματα· πόσον ἔλαβεν ἑκάστη; (125ὑάρ. 2πόδ. 9δάκ.)

432) Πόσον τιμᾶται ὁ πῆχυς ἑνὸς ὑφάσματος, ὅταν 39πήχεις τιμῶνται 9λίρ. 3σελ. 7πέν. 2φαρ. (4σελ. 8πέν. 2φ.)

433) 15 θερισταὶ ἔλαβον ὡς ἀμοιβὴν τῆς ἐργασίας των 4στ. 12δκ. 250δρ. σίτου· πόσον θὰ λάβῃ ἕκαστος; (12δκ. 230δρ.)

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

Β΄) Συμμιγοῦς ἐπὶ ἀκέραιον

Κατὰ τὴν μέθοδον τῶν ἁπλῶν μερῶν

258. Ὁ πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ ἀκέραιον, ὅταν οὗτος εἶνε πολυψήφιος γίνεται κατὰ τὸν ἑξῆς εὐκολώτερον τρόπον.

Π. χ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον 2στ. 24δκ. 350δρ. × 340.

Πρὸς εὕρεσιν τούτου πολλαπλασιάζομεν πρῶτον τοὺς δύο στατῆρας ἐπὶ 340 καὶ εὑρίσκομεν **640**στ. Κατόπιν ἀντὶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰς 24δκ., χωρίζομεν ταύτας εἰς 22 καὶ 2 καὶ πολλαπλασιάζομεν τὰ δύο αὐτὰ μέρη τοῦ 24.

Αἱ 22δκ. εἶναι τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ στατῆρος. $\frac{1}{2}$ στ × 340 = **170**στατ.

Ἀφοῦ δὲ αἱ 22δκ. ἔδωσαν γινόμενον 170στ., αἱ 2δκ., αἱ ὁποῖαι εἶνε τὸ $\frac{1}{11}$ τῶν 22δκ., θὰ δώσουν γινόμενον τὸ $\frac{1}{11}$ τῶν 170στ., ἤτοι 170στ. : 11 = ***15*στ. *20*δκ.**

Ἀντὶ πάλιν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ 358 δρ., χωρίζομεν ταῦτα εἰς 200, 100 καὶ 50 καὶ πολλαπλασιάζομεν τὰ 3 αὐτὰ μέρη τοῦ 350.

Αἱ 2δκ εἴδομεν ὅτι ἔδωσαν γινόμενον 15στ. 20 δκ.

Τὰ 200 δρ., τὰ ὁποῖα εἶνε τὸ $\frac{1}{4}$ τῶν 2 ὀκάδων, θὰ δώσουν γινόμενον τὸ $\frac{1}{4}$ τῶν 15στ. 20 δκ., ἤτοι 15στ. 20δκ: 4=***3*στ. *38* δκ.**

Τὰ 100 δρ., τὰ ὁποῖα εἶνε τὸ $\frac{1}{2}$ τῶν 200δρ., θὰ δώσουν γινόμενον τὸ $\frac{1}{2}$ τῶν 3στ. 38δκ., ἤτοι 3στ. 38δκ. : 2=***1*στ. *41*δκ**

Καὶ τὰ 50 δρ., τὰ ὁποῖα εἶνε τὸ $\frac{1}{2}$ τῶν 100 δρ., θὰ δώσουν γινόμενον τὸ $\frac{1}{2}$ τῶν 1στατῆρος 41δκ., ἤτοι 1στ. 41 δκ : 2= ***42* δκ. *200* δρ.**

Τὸ ἄθροισμα δὲ ὅλων αὐτῶν τῶν ἐξαγομένων εἶνε τὸ ζητούμενον γινόμενον.

Ὁ τρόπος οὗτος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ λέγεται ***μέθοδος τῶν ἁπλῶν μερῶν,*** διότι, ὅπως εἴδομεν, χωρίζομεν ἕκαστον ἀριθμὸν τοῦ συμμιγοῦς εἰς ἁπλᾶ μέρη τῆς μονάδος τῆς ἀνωτέρας τάξεως, δηλ. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{11}$, κ.λ.π.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς:

		2στ.	*24δκ.*	*350 δρ.*
		340		
		680στ.		
24 δκ.	*22δκ.* $(=\frac{1}{2}$ *στ.*$) \times 340 = 340 : 2 =$	*170*		
	2 δκ. $(=\frac{1}{11}$ *τῶν 22δκ.*$) \times 340 = 170 : 11 =$	*15*	*20δκ.*	
350 δρ.	*200 δρ.* $(\frac{1}{4}$ *τῶν 2δκ.*$) \times 340 =$ *15στ. 20δκ* $: 4 =$	*3*	*38*	
	100 δρ. $(\frac{1}{2}$ *τῶν200δρ.*$) \times 340 =$ *3στ.38δκ*$:2=$	*1*	*41*	
	50 δρ) $\frac{1}{2}$ *τῶν100δρ.*$) \times 340 =$ *1στ.41δκ.*$:2=$		*42*	*200δρ.*
		889στ.	*151δκ.*	*200δρ.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

434) Νὰ ἐκτελεσθοῦν οἱ ἑξῆς πολλαπλασιασμοὶ κατὰ τὴν μέθοδον τῶν ἁπλῶν μερῶν :

α') 7λίρ. 10σελ 6πέν. 2φαρ. × 120.
β') 3στ. 33δκ. 300δρ. × 180.
γ') 6δργ. 4πόδ. 9δάκ. 10γρ. × 240.
δ') 5ὑάρδαι 2πόδ. 5δάκτ. × 350.
ε') 3ὥρ. 25' 38'' × 460.

435) Τόξον 1^0 *τοῦ μεσημβρινοῦ τῆς Γῆς εἶνε* 111χιλ. 131,9 *μέτρα· πόσον εἶναι τόξον* 345^0 ; (38340χιλ. 505,5μ.)

436) Τὸ μέτρον ἑνὸς ὑφάσματος τιμᾶται 1λιρ. 5σελ. 9πέν. 3φαρ.· *πόσον τιμῶνται* 240*μέτρα τοῦ ὑφάσματος αὐτοῦ ;*
(309λιρ. 15σελ.)

437) Εἷς σάκκος καφὲ ἔχει βάρος 2στ. 37δκ. 350δρ.· *πόσον βάρος ἔχουν* 1360 *σάκκοι ;* (3890στ. 30δκ.)

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

Γ'). Συμμιγοῦς ἐπὶ κλάσμα ἢ μικτὸν

259. **Ν**ὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον τοῦ συμμιγοῦς 5πήχ. 6ρ. ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$.

Πρὸς εὕρεσιν τούτου θὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν συμμιγῆ ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν καὶ τὸ γινόμενον θὰ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ (ἐδ. 196) καὶ θὰ ἔχωμεν 5π. 6ρ. $\times \frac{3}{4} =$

$= \frac{5π.\ 6ρ. \times 3}{4} =$ 4πήχ. $2\frac{1}{2}$ ρ.

260. Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῆ ἐπὶ μικτὸν ἢ δεκαδικὸν τρέπομεν τὸν μικτὸν ἢ τὸν δεκαδικὸν εἰς κλάσμα καὶ κατόπιν ἐκτελοῦμεν τὸν πολλαπλασιασμόν, ἢ πολλαπλασιάζομεν τὸν συμμιγῆ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον τοῦ μικτοῦ καὶ κατόπιν ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ μικτοῦ, καὶ ἔπειτα προσθέτομεν τὰ δύο γινόμενα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

438) Ἡ ὑάρδα ἑνὸς ὑφάσματος τιμᾶται 1λίρ. 2σελ. 9πέν *πόσον τιμῶνται τὰ* $\frac{3}{4}$ *αὐτῆς ;* (17σελ. 3φαρ.)

439) Τὸ μέτρον μιᾶς σιδηρᾶς ῥάβδου ἔχει βάρος 3δκ.360δρ.· πόσον ἔχουν τὰ $4\frac{5}{8}$ μέτρα τῆς ῥάβδου; (18 δκ. 15 δρ.).

440) Ὑπὸ κλίμακα 0,000001 πόσον εἶνε τὸ μῆκος, μὲ τὸ ὁποῖον παριστάνεται ἐπὶ χάρτου μία ἀπόστασις 280 χιλιομέτρων; (Ὅταν σχεδιάζωμεν ἐπὶ τοῦ χάρτου μίαν χώραν, σμικρύνομεν π. χ. 1000000 φοράς, τὸ κλάσμα $\frac{1}{10000000}$ λέγεται κλίμαξ τοῦ χάρτου). (28δάκτυλοι).

441) Ἐπὶ ἑνὸς χάρτου μῆκος 4930 μέτρων παριστάνεται μὲ μῆκος 58 δακτύλων· ποία εἶνε ἡ κλίμαξ τοῦ σχεδίου; ($\frac{1}{8500}$)

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

Β΄) Συμμιγοῦς διὰ κλάσματος ἢ μικτοῦ.

461. **Διὰ νὰ διαιρέσωμεν συμμιγῆ διὰ κλάσματος πολλαπλασιάζομεν τὸν συμμιγῆ ἐπὶ τὸ κλάσμα ἀντεστραμμένον.** (ἐδ. 200).

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν συμμιγῆ διὰ μικτοῦ ἢ δεκαδικοῦ, τρέπομεν τὸν μικτὸν ἢ τὸν δεκαδικὸν εἰς κλάσμα καὶ κατόπιν πολλαπλασιάζομεν τὸν συμμιγῆ ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦτο ἀντεστραμμένον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

442) Πόσον τιμᾶται ὁ πῆχυς ἑνὸς ὑφάσματος, ἂν $15\frac{3}{8}$ πήχ. τιμῶνται 16λιρ. 2σελ. 10πέν. 2φ. (1λιρ. 1σελ.)

443) Ἡ μηχανὴ ἑνὸς ἀτμοπλοίου ἔκαυσε 8στ. 180 δρ. ἄνθρακος εἰς $5\frac{3}{4}$ ὥρ.· πόσον καίει εἰς 1 ὥραν;

(1στ. 17δκ 118δρ.)

444) Ἐργάτης εἰς $7\frac{1}{2}$ ὥρας ἤνοιξε τάφρον μήκους 27 μέτρων 6π.· πόσον ἤνοιγε τὴν ὥραν; (3μέτρα 6π. 8δ.)

445) Κτίστης εἰς $5\frac{3}{4}$ ἡμέρας ἔκτισε τοῖχον 19 ὀργ. 4π. 10δ. πόσον ἔκτιζεν εἰς μίαν ἡμέραν; (3 ὀργ. 2π. 8δακ.).

446) Ὑπὸ κλίμακα 0,000001 πόσον εἶναι τὸ μῆκος μιᾶς *ἀποστάσεως, ἡ ὁποία παρουσιάζεται ἐπὶ τοῦ χάρτου μὲ μῆκος 35 δακτύλων;* *(350 χιλ.)*

447) Πόσον εἶνε τὸ μῆκος μιᾶς ἀποστάσεως, ἡ ὁποία παριστάνεται ἐπὶ τοῦ χάρτου μὲ μῆκος 27 δακτύλων μὲ κλίμακα $\frac{1}{1250}$;

(337,50).

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

Δ΄). Πολλαπλασιαστὴς συμμιγής.

262. ***Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶνε συμμιγής, τρέπομεν τοῦτον εἰς μονάδας τῆς τάξεως ἐκείνης, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει καὶ ἡ μονάς, τῆς ὁποίας ἔχει δοθῆ ἡ τιμὴ καὶ κατόπιν ἐκτελοῦμεν τὸν πολλαπλασιασμόν.***

Π, χ. Ἂν ἡ ὀκᾶ τῶν μήλων τιμᾶται 8δρ., πόσον τιμῶνται 4στ. 24ὀκ. 300δρ.

Λύσις. Ἡ πρᾶξις εἶνε πολλαπλασιασμός, εἰς τὸν ὁποῖον πολλαπλασιαστής, εἶνε ὁ συμμιγής (ἐδ. 200).

Ἐπειδὴ ἐδόθη ἡ τιμὴ τῆς ὀκᾶς, θὰ τρέψωμεν τὸν συμμιγῆ εἰς ὀκάδας καὶ θὰ ἔχωμεν 8δρ. $\times$ (4στ. 24ὀκ. 300δρ.) = 8δρ. $\times$ 200 $\frac{3}{4}$ = 1606δρ.

Ὥστε οἱ 2στ. 25 ὀκ. 300 δρ.τιμῶνται 1606 δραχμάς.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Ἀπὸ μνήμης καὶ γραπτῶς.

448) Ἡ ὀκᾶ ἑνὸς πράγματος τιμᾶται 40δρ.· πόσον τιμῶνται τὰ 300 δράμια;

449) Ἡ ὀκᾶ ἑνὸς πράγματος τιμᾶται 1δραχ.· πόσον τιμᾶται τὸ 1 δράμιον, τὰ 8, τὰ 15, τὰ 90, τὰ 160 δράμια;

450) Ἡ ὀκᾶ ἑνὸς πράγματος τιμᾶται 2δραχ. πόσον τιμᾶται τὸ 1 δράμιον, τὰ 26, τὰ 76, τὰ 320δράμια;

451) Ἡ ὀκᾶ ἑνὸς πράγματος τιμᾶται 3δραχ.· πόσον τιμᾶται τὸ 1 δράμ. τὰ 4, τὰ 8, τὰ 12, τὰ 25, τὰ 50, τὰ 100, τὰ 250 δράμια;

452) Ἡ ὀκᾶ ἑνὸς πράγματος τιμᾶται 4δρ.· πόσον τιμᾶται τὸ 1 δρμ. τὰ 6, τὰ 48, τὰ 135, τὰ 250, τὰ 370 δράμια;

453) Ἡ ὀκᾶ ἑνὸς πράγματος τιμᾶται 8 δρχ.· πόσον τιμᾶται τὸ 1 δρ., τὰ 9, τὰ 52, τὰ 145, τὰ 250, τὰ 386 δράμια;

454) Ἡ ὀκᾶ ἑνὸς πράγματος τιμᾶται 1 δρχ.· πόσον τιμᾶται ὁ

1 στ, οἱ 5, οἱ 10, οἱ 90, οἱ 100, οἱ 50 οἱ 25 στατῆρες;

455) Ἡ ὀκᾶ ἑνὸς πράγματος τιμᾶται 2 δρχ.· πόσον τιμᾶται ὁ 1στ., οἱ 10, οἱ 5, οἱ 20, οἱ 25, οἱ 100, οἱ 50 στατῆρες;

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

Ε'.) Συμμιγοῦς ἐπὶ συμμιγῆ

Κατὰ τὴν μέθοδον τῶν ἁπλῶν μερῶν.

263. Πόσον τιμῶνται 25 ὀκάδες 350 δράμ. σταφυλῶν, ὅταν ἡ ὀκᾶ τιμᾶται 8 δρχ. 50 λεπτά;

Λύσις. Ἡ πρᾶξις εἶνε πολλαπλασιασμὸς καὶ πολλαπλασιαστέος ὁ 8 δρ. 50 λ.

Αἱ 25 ὀκάδες πρὸς 8 δρ. τὴν ὀκᾶν τιμῶνται 200 δρχ., πρὸς 50 λ., ἤτοι πρὸς $\frac{1}{2}$ δρχ., θὰ τιμῶνται $\frac{1}{2} \times 25 = 12$ δρχ. 50 λ.

Τὰ 350 δρ. χωρίζομεν εἰς 200, 100 καὶ 50.

Ἀφοῦ ἡ ὀκᾶ τιμᾶται 8 δραχ. 50 λ., τὰ 200 δράμ., δηλ. τὸ $\frac{1}{2}$ τῆς ὀκᾶς, θὰ τιμᾶται 4 δρχ. 25 λ.

Τὰ δὲ 100, δηλ. τὸ $\frac{1}{2}$ τῶν 200, θὰ τιμῶνται τὸ $\frac{1}{2}$ τῶν 4 δρ. 25 λ., ἤτοι 2 δρχ. 12 λ.

καὶ τὰ 50 δρ., τὸ $\frac{1}{2}$ δηλ. τῶν 100, θὰ τιμῶνται τὸ $\frac{1}{2}$ τῶν 2 δρχ. 12 λ., ἤτοι 1 δρχ. 6 λ.

Τὸ ἄθροισμα ὅλων αὐτῶν τῶν ἐξαγομένων εἶνε τὸ ζητούμενον γινόμενον.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς:

	8δρ.	*50λ.*
	25ὀκ.	*350δρμ.*
	200δρχ.	
50λ. (= $\frac{1}{2}$ δρ.)×25=	*12*	*50λ.*
350 { *200δρ. (= $\frac{1}{2}$ ὀκ.)×8δρ. 50λ.=*	*4*	*25*
100δρ. (= $\frac{1}{2}$ τῶν200)×8δρ.50λ.=4δρ. 25λ : 2 =	*2*	*12*
50δρ. (= $\frac{1}{2}$ τῶν 100)×8δρ.50λ.=2δρ.12λρ : 2 =	*1*	*6*
Ὥστε αἱ 25ὀκ. 350δρ. τιμῶνται	*219δρ.*	*93λ.*

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

456) Ὁ πῆχυς ἑνὸς ὑφάσματος τιμᾶται 385 δρ.· πόσον τιμῶνται 4 πήχ. καὶ 6 ρούπια ; (1828 δρχ. 75 λ.)

457) Τὸ ρούπιον ἑνὸς ὑφάσματος τιμᾶται 43 δρχ. 80 λ.· πόσον τιμῶνται οἱ 3 πήχεις 7 ρούπια. (1357 δρ. 80 λ.)

458) Ὁ στατὴρ τῆς ζαχάρεως τιμᾶται 2 λιρ. 7 σελ. 3 πέν. 2φ.· πόσον τιμῶνται 2 στ. 25 δκ. 250 δρμ. ; (6 λιρ. 2 σελ. 1 πεν. 2φ.)

459) Ἡ δκᾶ τοῦ ἀρωματικοῦ σάπωνος τιμᾶται 2σελ. 8πεν. 2φ.· πόσον τιμῶνται 2 στ. 10δκ. 350 δρμ.

(13 λίρ. 7σελ. 9 πέν. $1\frac{3}{4}$ φαρ.)

460) Τὸ δράμιον τοῦ καφὲ τιμᾶται 18λ.· πόσον τιμῶνται 1στ. 26κ. 150δρμ. (3339)

461) Πόσον ὕφασμα ἀγοράζομεν μὲ 3λιρ. 11σελ. 9πεν, ἂν μὲ 1σελ. ἀγοράζομεν 4ρούπια ; (35π. 7ρ.)

462) Μία Ἀγγλικὴ λίρα ἰσοδυναμεῖ πρὸς 375δρχ.· πρὸς πόσον ἰσοδυναμοῦν 5λιρ. 7σελ. 8πεν. 2φαρ. ; (2019,53)

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

Γ'). Διαιρέτης συμμιγὴς

Α'). Διαίρεσις συμμιγῶν ἑτεροειδῶν (Μερισμός).

264. Διὰ νὰ διαιρέσωμεν συμμιγεῖς ἑτεροειδεῖς, τρέπομεν τὸν διαιρέτην εἰς μονάδας τῆς τάξεως ἐκείνης, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει καὶ ἡ μονάς, τῆς ὁποίας ζητεῖται ἡ τιμὴ καὶ κατόπιν ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν.

Πρόβλημα. Πόσον τιμᾶται ὁ πῆχυς ἑνὸς ὑφάσματος, ἂν 4 πήχ. 2 ρ. τιμῶνται 2 λίρ. 16 σελ. 8 πέννας ;

Τὸ πρόβλημα θὰ λυθῇ διὰ μερισμοῦ (ἐδ. 210), διαιρέτης δὲ εἶνε ὁ συμμιγὴς 4 πήχ. 2 ρούπ., ὁ ὁποῖος θὰ τραπῇ εἰς πήχεις, διότι τοῦ πήχεως ζητεῖται ἡ τιμή. Οὕτω δὲ τὸ πηλίκον 2λίρ. 16 σελ. 8 πέν. : 4 πήχ. 2 ρούπ. = 2 λίρ. 16 σελ. 8 πέν. : $4\frac{2}{8}$ = = 13σελ. 4πεν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

463) Ἀτμόπλοιον εἰς 8 ὥρας 45' διήνυσεν $109\frac{3}{8}$ μίλλια·

πόσα μίλλια διήνυε τὴν ὥραν; *($12\frac{1}{2}$)*

464) Σιδηρόδρομος εἰς 5 ὥρας 15′ διήνυσεν 149 χιλιόμετρα 625 μέτ.· πόσον διήνυεν εἰς 1′; *(475 μέτρα)*

465) Μία ἀτμομηχανὴ εἰς 2 ὥρας 35′ 24″ διήνυσεν 116 χιλιόμ. 550 μέτ.· εἰς πόσον χρόνον διήνυεν 1 μέτρον; *(0,08″)*

466) 5πήχ. 6 ρ. ἑνὸς ὑφάσματος τιμῶνται 6λίρ. 7σελ. 11πέν. 1 φαρ.· πόσον τιμᾶται ὁ πῆχυς; *(1λίρ. 2σελ. 3 πέν.)*

467) Μὲ 25 λίρ. 5 σελ. 6 πέν. ἀγοράζομεν 15στ. 35 δκ. 250δρ. ζαχάρεως· μὲ 1σελ. πόσον ἀγοράζομεν; *(1δκ. 150 δρ.)*

268) 5 στ. 9 δκ. 875 δρμ. καφὲ τιμῶνται 45 λίρ. 18 σελ. 9 πέν.· πόσον ἀγοράζομεν μὲ 1 σελλίνιον; *(100 δρμ.)*

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

Β′). Συμμιγῶν ὁμοειδῶν (Μέτρησις)

265. Διὰ νὰ διαιρέσωμεν συμμιγεῖς ὁμοειδεῖς, τρέπομεν καὶ τοὺς δύο εἰς τὴν αὐτὴν τάξιν, συνήθως εἰς τὴν τελευταίαν ὁπότε γίνονται ἀκέραιοι καὶ κατόπιν ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν, τὸ δὲ πηλίκον παριστάνει ὅ,τι ζητεῖται εἰς τὸ πρόβλημα.

Πρόβλημα. Ὑφάντρια ὑφαίνει εἰς μίαν ὥραν 1 πήχ. 2 ρουπ.· εἰς πόσας ὥρας θὰ ὑφάνῃ 18 πήχ. 4 ρούπια;

Λύσις. Ἡ πρᾶξις εἶνε διαίρεσις μετρήσεως (ἐδ. 210) καὶ διαιρέτης ἡ τιμὴ τῆς ὥρας, δηλ. ὁ συμμιγὴς 1 πήχ. καὶ 3 ρούπ. Διὰ νὰ ἐκτελέσωμεν δὲ τὴν διαίρεσιν, τρέπομεν καὶ τοὺς δύο εἰς τὴν τελευταίαν τάξιν, τὸ δὲ πηλίκον θὰ παριστάνῃ ὥρας, διότι ὧραι ζητοῦνται εἰς τὸ πρόβλημα. Οὕτω τὸ πηλίκον 18 πήχ. 4 ρούπ. : 1 πήχ. 2 ρούπ. = 148 : 10 = 14 ὥρ. 48′.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

469) Ὁ πῆχυς ἑνὸς ὑφάσματος, τιμᾶται 25δρ. 80 λεπτά· πόσον ἀγοράζομεν μὲ 148 δρχ. 35 λ.; *(5πήχ. 6ρ.)*

470) Σιδηρόδρομος διανύει εἰς 1ὥραν 24 χιλιόμετρα 680 μ.· εἰς πόσον χρόνον θὰ διανύσῃ 215 χιλιόμετρα 950 μ.; *(8ὥρας 45′)*

471) Μία μηχανὴ καίει εἰς 1ὥραν 1στ. 42 δκ. 300 δρμ. ἄνθρακος· εἰς πόσον χρόνον θὰ καύσῃ 16στ. 7δκ. 140δραμ;
(8ὥρας 12′)

472) Μία ὀκᾶ ἐλαίου ἀνταλλάσσεται μὲ 3ὀκ. 160δρμ. οἴνου· μὲ πόσας ὀκάδας ἐλαίου ἀνταλλάσσονται 19ὀκ. 50δραμ. οἴνου;
(5ὀκ. 250δρμ.)

473) Ἂν εἰς ἕκαστον δοχεῖον πετρελαίου χωροῦν 14ὀκ. 100 δραμ., εἰς πόσα δοχεῖα χωροῦν 11 στ. 14 ὀκ. καὶ 300 δραμ; (35)

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΔΙΑΦΟΡΑ

474) Πόσον εἶνε τὸ βάρος τοῦ ἀέρος, ὁ ὁποῖος ἐκτοπίζεται ὑπὸ 432χιλιογρ. 689γραμ. σιδήρου, ἂν μία κυβικὴ παλάμη σιδήρου ζυγίζει 7 χιλ. 788 γραμ, μία δὲ κυβικὴ παλάμη ἀέρος ζυγίζει 1,293187 γραμ.; (71,84 γραμ.)

475) Ἓν στρέμμα ἀγροῦ καλλιεργούμενον παράγει 1700 ὀκ. σίτου· πόσον θὰ παράγῃ εἰς ἀγρὸς ἀποτελούμενος ἀπὸ 15 στρέμματα καὶ 568 τετρ. μέτρα; (601στ. 21ὀκ. 240 δρ.)

476) Πόσων κυβικῶν δακτύλων εἶνε ἓν τεμάχιον χρυσοῦ καθαροῦ ἀξίας 754 δραχμῶν, ἂν ὁ χρυσὸς ζυγίζῃ 19 φορὰς περισσότερον ἴσου ὄγκου ὕδατος καὶ ἀξίζῃ 3437 δραχμὰς τὸ χιλιόγραμμον ; (11, 530)

477) Ἀπὸ ἕνα τόπον ἀναχωροῦν δύο σιδηρόδρομοι, ὁ μὲν τὴν 11ην ὥραν π. μ., ὁ δὲ τὴν 8ην μ. μ. καὶ φθάνουν εἰς ἄλλην πόλιν ἀπέχουσαν 512 χιλιόμετρα, ὁ μὲν πρῶτος τὰς 10 ὥρας 5′ μ.μ., ὁ δὲ δεύτερος τὰς 6 ὥρας 55′ π.μ. Ἄλλος σιδηρόδρομος ἀναχωρεῖ ἀπὸ τὴν δευτέραν πόλιν τὰς 7 ὥρας 45′ μ. μ. διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὴν πρώτην πόλιν τὰς 5 ὥρας 5′ π. μ. Εἰς ποίας ὥρας καὶ εἰς ποίας ἀποστάσεις ἀπὸ τὴν πρώτην πόλιν θὰ συναντήσῃ ὁ τρίτος σιδηρόδρομος τοὺς δύο πρώτους ; (Θὰ εὑρεθῇ πόσον διάστημα εἶχε διανύσει ὁ α′ πρὶν ἐκκινήσῃ ὁ γ′, κατόπιν εἰς πόσον χρόνον τὸ ἐναπομένον διάστημα διηνύθη ὑπὸ τῶν ἀντιθέτως βαινόντων δύο τούτων σιδηροδρόμων. Ὁμοίως καὶ διὰ τὸν β′ σιδηρόδρομον). (8 ὥρ. 49′μ.μ., 453,489χιλ. 53′π.μ., 229,662).

478) Ἓν δοχεῖον κενὸν ζυγίζει 950 γρμ., πλῆρες δὲ βενζίνης ζυγίζει 3 χιλιόγρ. 250 γρμ. Τὸ εἰδικὸν βάρος τῆς βενζίνης εἶνε $\frac{17}{20}$· πόση εἶνε ἡ χωρητικότης τοῦ δοχείου ; (2κ.π. 709 κ.δ.)

479) Ὁ σῖτος πρώτης ποιότητος δίδει 0,75 τοῦ βάρους του ἀ-

λευρον, τὸ ἄλευρον ἀπορροφᾷ 0,66 τοῦ βάρους του ὕδωρ καὶ ἐξατμίζει τὰ 0,50 ὅταν ψηθῇ· πόσος ἄρτος θὰ παραχθῇ ἀπὸ 25 στ. 20 ὀκ. σίτου; (118 στ. 14 ὀκ. 380 δρ.)

480) Σιδηρόδρομος διανύων 32 χιλιόμετρα τὴν ὥραν, ἀνεχώρησεν ἀπὸ μίαν πόλιν τὰς 5 ὥρας 30′ μ.μ. μεταβαίνων εἰς ἄλλην ἀπέχουσαν 512 χιλιόμετρα. Ὅταν εἶχε διανύσει τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ἀποστάσεως ὁ μηχανικὸς ηὔξησε τὴν ταχύτητα τῆς μηχανῆς κατὰ 6 χιλιόμετρα τὴν ὥραν· κατὰ ποίαν ὥραν θὰ φθάσῃ; (8 ὥρ. 52′′π. μ.)

481) Ἓν κιβώτιον ἔχον μῆκος 3,20 μέτρων, πλάτος 0,75 καὶ ὕψος 1,65 μ. εἶνε γεμάτον ἀπὸ σῖτον μέχρι τῶν $\frac{3}{4}$ τοῦ ὕψους του· πόσοι ἄρτοι τῆς μιᾶς ὀκᾶς εἶνε δυνατὸν νὰ παραχθοῦν ἐξ αὐτοῦ, ἂν τὸ κοιλὸν τοῦ σίτου τούτου ζυγίζῃ 60 ὀκάδας καὶ ἀπὸ 100 ὀκάδας σίτου ἐξάγονται 82 ὀκάδες ἀλεύρου καὶ μὲ 60 ὀκάδας ἀλεύρου κατασκευάζονται 75 ὀκάδες ἄρτου; (1826)

482) Κτηνοτρόφος ἔχει 3600 ὀκάδας ξηροῦ χόρτου, διὰ νὰ διαθρέψῃ 27 κτήνη ἐπὶ 168 ἡμέρας τοῦ χειμῶνος, μετὰ 42 ἡμέρας, ἀφ' ὅτου ἤρχισεν ἡ διατροφὴ αὐτῶν, ὁ ἀριθμὸς τῶν κτηνῶν ηὔξησε κατὰ 3· πόσον χόρτον πρέπει νὰ ἀγοράσῃ, ἐὰν δὲν θέλῃ νὰ ἐλαττώσῃ τὴν μερίδα ἑκάστου κτήνους; καὶ πόσον θὰ στοιχίσῃ τὸ νέον αὐτὸ χόρτον, ἂν αἱ 100 ὀκάδες τιμῶνται 26 δραχ. 25 λ.; (Θὰ εὑρεθῇ πρῶτον πόσας ὀκάδας χόρτου χρειάζεται τὴν ἡμέραν ἕκαστον κτῆνος.) (300 ὀκ. 78 δρ. 75λ.).

483) Μία λυχνία φωταερίου καίει εἰς 86 ὥρας 27 κυβικὰ μέτρα φωταερίου, τὰ ὁποῖα τιμῶνται 243 δρ.· πόσον φωταέριον ἔκαυσεν ἡ λυχνία αὕτη εἰς μίαν ἑσπέραν, κατὰ τὴν ὁποίαν ἔκαιεν ἐπὶ 3 ὥρας 30′; πόσον ἐστοίχισεν ὁ φωτισμὸς καθ' ὥραν; καὶ πόσον τιμᾶται τὸ κυβικὸν μέτρον τοῦ φωταερίου;
(1κ.μ. 97κ.π. 2,83 δρ. 9δρ.)

434) Ἓν σῶμα εἰς τὸν ἀέρα ζυγίζει 350 γραμμάρια, βυθιζόμενον εἰς καθαρὸν ὕδωρ ζυγίζει μόνον 325 γραμμάρια, βυθιζόμενον δὲ εἰς μῖγμα ὕδατος καὶ οἰνοπνεύματος ζυγίζει 337 γραμμάρια· ποῖον εἶνε τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ μίγματος;
(Ἴδε πρόβλημα 366 σελ. 126). (0,52)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤ΄.

ΠΕΡΙ ΜΕΘΟΔΩΝ

ΠΟΣΑ ΑΝΑΛΟΓΑ

266. Ἂν 10 ὀκάδες μήλων τιμῶνται 80 δρ., διπλάσιαι ὀκάδες μήλων, δηλ. 20 ὀκ., τιμῶνται διπλασίας δραχμάς, δηλ. 160 δρ. καὶ τριπλάσιαι ὀκ. μήλων, δηλ. 30 ὀκ., θὰ τιμῶνται τριπλασίας δρ., δηλ. 240 δραχμάς.

Εἰς τὸ παράδειγμα αὐτὸ παρατηροῦμεν ὅτι τὰ μῆλα καὶ αἱ δραχμαὶ εἶνε μεταβλητὰ ποσά, τὰ ὁποῖα συνδέονται μεταξύ των εἰς τρόπον ὥστε, ***ὅταν διπλασιασθῇ, τριπλασιασθῇ κλπ. ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς ποσοῦ, διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται κλπ. καὶ ἡ τιμὴ τοῦ ἄλλου ποσοῦ.***

Τὰ τοιαῦτα ποσὰ λέγονται ***ἀνάλογα.***

ΠΟΣΑ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΑ

267. Εἷς ταχυδρόμος, διατηρῶν πάντοτε τὴν αὐτὴν ταχύτητα, ἂν βαδίζῃ 3 ὥρας τὴν ἡμέραν διανύει μίαν ἀπόστασιν εἰς 30 ἡμέρας, ἂν βαδίζῃ διπλασίας ὥρας τὴν ἡμέραν, δηλ. 6 ὥρας, θὰ διανύσῃ τὴν ἀπόστασιν αὐτὴν εἰς τὸ ἥμισυ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἡμερῶν, δηλ. εἰς 15 ἡμέρας, ἂν δὲ βαδίζῃ τριπλασίας ὥρας τὴν ἡμέραν, δηλ. 9 ὥρας, θὰ διανύσῃ τὴν ἀπόστασιν αὐτὴν εἰς τὸ τρίτον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἡμερῶν, δηλ. εἰς 10 ἡμέρας.

Παρατηροῦμεν καὶ ἐδῶ ὅτι αἱ ὧραι καὶ αἱ ἡμέραι τῆς πορείας εἶνε μεταβλητὰ ποσά, τὰ ὁποῖα συνδέονται μεταξύ των εἰς τρόπον ὥστε, ***ἂν διαπλασιασθῇ, τριπλασιασθῇ κλπ. ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς ποσοῦ, ἡ τιμὴ τοῦ ἄλλου ποσοῦ γίνεται τὸ ἥμισυ, τὸ τρίτον κλπ. τῆς ἀρχικῆς.***

Τὰ τοιαῦτα ποσὰ λέγονται ***ἀντιστρόφως ἀνάλογα*** ἢ ἁπλῶς ***ἀντίστροφα.***

Παρατήρησις. Ὅπως βλέπομεν λοιπὸν τὰ ἀνάλογα καὶ τὰ ἀντίστροφα ποσὰ εἶνε μεταβλητὰ ποσὰ ἐξαρτώμενα τὸ ἓν ἀπὸ τὸ ἄλλο εἰς τρόπον ὥστε, ὅταν ὁρίσωμεν τὴν τιμὴν τοῦ ἑνός, εἶνε ὡρισμένη πλέον καὶ ἡ τιμὴ τοῦ ἄλλου.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ. Α΄). ΑΠΛΗ

268. ***Μέθοδος*** λέγεται ὁ γενικὸς τρόπος, διὰ τοῦ ὁποίου λύομεν ἓν εἶδος προβλημάτων.

Πρόβλημα 1) Πόσον τιμῶνται 35 ὀκάδες γεωμήλων, ὅταν 6 ὀκ. ἐξ αὐτῶν τιμῶνται 24 δραχμάς.

Κατάταξις. 6 ὀκ. τιμῶνται 24 δρ.
35 » » x »

Λύσις. Ἀφοῦ 6 ὀκ. τιμῶνται 24 δρ.

ἡ 1 ὀκ. θὰ τιμᾶται $\frac{24}{6}$ δρ.

καὶ αἱ 35 ὀκ. » τιμῶνται $\frac{24 \times 35}{6} = 140$ δρ.

Ὥστε ὁ $x = \frac{24 \times 35}{6}$ ἢ $x = 24 \times \frac{35}{6}$

Πρόβλημα 2). Εἰς πόσας ἡμέρας 20 ἐργάται τελειώνουν ἓν ἔργον, ὅταν 25 ἐργάται τελειώνουν τοῦτο εἰς 40 ἡμέρας ;

Κατάταξις. 25 ἐργ. τελειώνουν τὸ ἔργον εἰς 40 ἡμ.
20 » » » » » x »

Λύσις. Ἀφοῦ οἱ 25 ἐργάται τελειώνουν τὸ ἔργον εἰς 40 ἡμέρας, ὁ 1 ἐργάτης τελειώνει τὸ ἔργον εἰς 40×25 ἡμ. καὶ οἱ 20 ἐργ. τελειώνουν τὸ ἔργον εἰς $\frac{40 \times 25}{20} = 50$ ἡμέρας.

Ὥστε ὁ $x = \frac{40 \times 25}{20}$ ἢ $x = 40 \times \frac{25}{20}$.

Εἰς τὰ προβήματα αὐτὰ παρατηροῦμεν ὅτι ***δίδονται αἱ ἀντίστοιχαι τιμαὶ δύο ποσῶν ἀναλόγων ἢ ἀντιστρόφων καὶ μία νέα τιμὴ τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν καὶ ζητεῖται ἡ ἀντίστοιχος πρὸς αὐτὴν τιμὴ τοῦ ἄλλου.***

Διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ τὴν ἄγνωστον τιμήν, τὴν ὁποίαν παριστάνομεν διὰ τοῦ x, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμὸν τὸν εὑρισκόμενον εἰς τὴν κατάταξιν τοῦ προβλήματος ὑπεράνω τοῦ x, ἐπὶ τὸ κλάσμα, τὸ ὁποῖον ἀποτελοῦν αἱ δύο τιμαὶ τοῦ ἄλλου ποσοῦ, ἀντεστραμμένον μὲν ἂν τὰ ποσὰ εἶνε ἀνάλογα, ὅπως ἔχει δέ, ἂν τὰ ποσὰ εἶνε ἀντίστροφα.

Ἐπειδὴ εἰς τὰ προβλήματα αὐτὰ δίδονται τρεῖς ἀριθμοὶ καὶ ζητεῖται τέταρτος, διὰ τοῦτο ὁ τρόπος οὗτος τῆς λύσεως λέγεται ***μέθοδος τῶν τριῶν*** καὶ τὰ προβλήματα ταῦτα ***προβλήματα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν.***

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

485) *Ἂν 5 πήχεις ὑφάσματος τιμῶνται 750 δρ., 35 πήχεις πό-*

σον τιμῶνται; (5150)

486) Ἂν 8 ὀκ. ζαχάρεως τιμῶνται 161,50 δρ., μὲ 661,20 δρ. πόσον ἀγοράζομεν; (34,8)

487) Πόσοι πήχεις ὑφάσματος πλάτους $\frac{3}{5}$ μέτ. χρειάζονται διὰ νὰ ὑπενδυθοῦν 26,40 μέτρα τσόχας πλάτους $\frac{11}{12}$ τοῦ μέτρου; (63)

488) 180 βαθμοὶ τοῦ θερμομέτρου Φαρενάϊτ ἰσοδυναμοῦν πρὸς 100 βαθμοὺς Κελσίου καὶ 80 Ρεωμύρου· 50 βαθμοὶ Φαρενάϊτ μὲ πόσους Κελσίου καὶ μὲ πόσους Ρεωμύρου ἰσοδυναμοῦν; ($27\frac{7}{9}$· $22\frac{2}{9}$)

489) Ἂν 12 χιλ. 800 γραμ. ἑνὸς ἐμπορεύματος τιμῶνται 1 λίρ. 10 σελ. 5 πέν., πόσον τιμῶνται 38 χιλ. καὶ 400 γρ.; (4λ. 11σ. 3π.)

490) 15 ἐργάται τελειώνουν ἓν ἔργον εἰς 25 ἡμέρας· 45 ὅμοιοι ἐργάται εἰς πόσας ἡμέρας τελειώνουν τὸ αὐτὸ ἔργον; ($8\frac{1}{3}$)

491) Ἔχει εἷς ἓν ποσὸν χρημάτων, μὲ τὸ ὁποῖον θέλει νὰ περάσῃ 30 ἡμέρας ἐξοδεύων 153,60 δρ. τὴν ἡμέραν· ἂν θελήσῃ νὰ περάσῃ 45 ἡμέρας, πόσον πρέπει νὰ ἐξοδεύῃ καθ' ἡμέραν; (102,40)

492) Ἂν 28 ἐργάται τελειώνουν ἓν ἔργον ἐργαζόμενοι 6 ὥρας τὴν ἡμέραν, πόσοι ἐργάται θὰ τελειώσουν τὸ αὐτὸ ἔργον εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον ἐργαζόμενοι 8 ὥρας τὴν ἡμέραν; (21)

493) Ἀπὸ ὕφασμα πλάτους 2 μέτρων χρειάζονται 4 πηχ. καὶ 2 ρούπια διὰ τὴν κατασκευὴν μιᾶς ἐνδυμασίας· πόσοι πήχεις χρειάζονται ἀπὸ ὕφασμα πλάτους 1,5 μέτρων; (5π. $5\frac{1}{3}$ ρ.)

494) 1725 χιλιόγραμμα σίτου ἐπωλήθησαν ἀντὶ 6440 δρ. Τὸ κοιλὸν τιμᾶται 8 δραχμάς. Πόσον εἶνε τὸ βάρος τοῦ κοιλοῦ τοῦ σίτου εἰς χιλιόγραμμα καὶ πόσον εἰς ὀκάδας; (75χιλ. 58 ὀκ. 237,5 δρ.)

495) Μία κατακόρυφος ῥάβδος ὕψους 1,50 μέτρ. ῥίπτει σκιὰν 0,75 μέτρ.· ποῖον εἶνε τὸ ὕψος τοῦ δένδρου, τὸ ὁποῖον τὴν αὐτὴν στιγμὴν ῥίπτει σκιὰν 12,30 μ.; (24,60 μ.)

496) Διὰ νὰ λιπανθοῦν 5 στρέμματα ἑνὸς κτήματος χρειάζονται 6 στ. 26 ὀκάδες ἐξ ἑνὸς λιπάσματος· διὰ νὰ λιπανθοῦν 12 στρέμματα καὶ 320 τετραγ. μέτρα πόσον λίπασμα χρειάζεται; (16 στ. 10ὀκ. 224δρ.)

497) *Τόξον 42° 25′ 40″ ἔχει μῆκος 25,45 μέτρων· πόσον μῆκος ἔχει ὅλη ἡ περιφέρεια;* (15,94)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ΄.

(Διὰ τὴν γ΄ τάξιν)

ΛΟΓΟΙ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΑΙ

269. Ἂν συγκρίνωμεν δύο ποσά, π.χ. ἕνα σωρὸν μήλων πρὸς ἕνα ἄλλον σωρὸν μήλων καὶ εὕρωμεν ὅτι ὁ α΄ σωρὸς σχηματίζεται ἀπὸ τὸν β΄, ὅταν ληφθῇ οὗτος τρεῖς φοράς, εἶνε δηλ. ὁ α΄ σωρὸς 3 φορὰς μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν β΄, τότε ὁ ἀριθμὸς 3 λέγεται **λόγος** τοῦ α΄ σωροῦ πρὸς τὸν β΄.

Ἀντιστρόφως ὁ β΄ σωρὸς θὰ εἶνε 3 φορὰς μικρότερος ἀπὸ τὸν α΄., θὰ εἶνε δηλ. τὸ ἓν τρίτον τοῦ α΄.

Ὁ ἀριθμὸς $\frac{1}{3}$ λέγεται λόγος τοῦ β΄ σωροῦ πρὸς τὸν α΄.

Ὁμοίως ἂν συγκρίνωμεν δύο τμήματα εὐθειῶν καὶ εὕρωμεν ὅτι τὸ α΄ σχηματίζεται ἀπὸ τὸ β΄, ὅταν ληφθῇ τοῦτο 4 φορὰς καὶ τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτοῦ 3 φοράς, ληφθοῦν δηλ. καὶ τὰ $\frac{3}{4}$ αὐτοῦ, τότε ὁ ἀριθμὸς $4\frac{3}{4}=\frac{19}{4}$, (ὁ ὁποῖος σχηματίζεται ἀπὸ τὴν ἀκεραίαν μονάδα, ὅταν ληφθῇ αὕτη ὁλόκληρος 4 φορὰς καὶ τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτῆς 3 φοράς, ὅπως δηλ. ἐσχηματίσθη τὸ α΄ τμῆμα ἀπὸ τὸ β΄), λέγεται λόγος τοῦ α΄ τμήματος πρὸς τὸ β΄.

Ἀντιστρόφως ὁ λόγος τοῦ β΄ πρὸς τὸ α΄ θὰ εἶνε ὁ $\frac{4}{19}$.

Ὅθεν: ***Λόγος δύο μεγεθῶν ὁμοιοειδῶν λέγεται ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος σχηματίζεται ἀπὸ τὴν μονάδα κατὰ τὸν ἴδιον ἀκριβῶς τρόπον, κατὰ τὸν ὁποῖον σχηματίζεται τὸ πρῶτον μέγεθος ἀπὸ τὸ δεύτερον.***

Ὁμοίως ὁρίζεται καὶ ὁ λόγος δύο ἀριθμῶν.

Εἶνε δὲ οὗτος τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἑνὸς διὰ τοῦ ἄλλου. Π. χ. λόγος τοῦ 8 πρὸς τὸν 2 εἶνε τὸ πηλίκον $8:2=4$, διότι καὶ ὁ 4 ἐσχηματίσθη ἀπὸ τὴν μονάδα ληφθεῖσαν τέσσαρας φορὰς ($4=1+1+1+1$), ὅπως καὶ ὁ 8 ἐσχηματίσθη ἀπὸ τὸν

2, ἀφοῦ ἐλήφθη οὗτος τέσσαρας φορὰς $(8=2+2+2+2)$.

Ὁμοίως λόγος τοῦ 3 πρὸς τὸν 2 εἶνε τὸ πηλίκον $3:2=\frac{3}{2}$, διότι τὸ $\frac{3}{2}$ ἐσχηματίσθη ἀπὸ τὴν ἀκεραίαν μονάδα ἀφοῦ ἐλήφθη τὸ $\frac{1}{2}$ αὐτῆς καὶ ἐπανελήφθη τρεῖς φορὰς $\left(\frac{3}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)$, ὅπως καὶ ὁ 3 ἔγινε ἀπὸ τὸν 2 ἀφοῦ ἐλήφθη τὸ $\frac{1}{2}$ αὐτοῦ, δηλ. τὸ 1, καὶ ἐπανελήφθη τρεῖς φορὰς $(3=1+1+1)$.

Δύο λόγοι λέγονται ***ἀντίστροφοι***, ὅταν τὸ γινόμενόν των εἶνε ἴσον πρὸς τὴν μονάδα: π.χ. ὁ $\frac{2}{3}$ καὶ ὁ $\frac{3}{2}$, διότι $\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}=1$.

Ὁμοίως ὁ 5 καὶ ὁ $\frac{1}{5}$, διότι $5\times\frac{1}{5}=1$.

ΙΔΙΟΤΗΣ ΤΟΥ ΛΟΓΟΥ ΔΥΟ ΟΜΟΕΙΔΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ

270. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ λόγος δύο οἰκοπέδων εἶνε 5, δηλ. τὸ πρῶτον οἰκόπεδον εἶνε 5 φορὰς μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ δεύτερον. Ἄν μετρήσωμεν τὰ δύο οἰκόπεδα μὲ τὸν τετραγωνικὸν πῆχυν καὶ εὕρωμεν, ὅτι τὸ δεύτερον ἀποτελεῖται ἀπὸ 200 τ. π., τότε τὸ πρῶτον, τὸ ὁποῖον εἶνε πενταπλάσιον τοῦ δευτέρου, θὰ ἀποτελῆται ἀπὸ $200\times5=1000$ τ. π. Ὁ λόγος ὅμως τοῦ 1000 πρὸς τὰ 200 εἶνε πάλιν 5.

Ὅθεν: ***Ὁ λόγος δύο μεγεθῶν ὁμοειδῶν εἶνε ἴσος πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι προκύπτουν, ὅταν μετρηθοῦν τὰ ποσὰ ταῦτα μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα.***

ΠΕΡΙ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ

271. Ἡ ἰσότης δύο λόγων λέγεται ***ἀναλογία***: π.χ. ἡ ἰσότης $\frac{6}{2}=\frac{12}{4}$ ἢ $6:2=12:4$, ὅπου $6:2=3$ καὶ $12:4=3$, λέγεται ἀναλογία. Ἀπαγγέλεται δὲ ὡς ἑξῆς: 6 πρὸς 2 ἴσον 12 πρὸς 4 ἢ 6 πρὸς 2 ὡς 12 πρὸς 4. Οἱ τέσσαρες ἀριθμοί, διὰ τῶν ὁποίων γράφεται ἡ ἀναλογία, λέγονται ***ὅροι*** αὐτῆς, ἐκ τούτων ὁ πρῶτος καὶ ὁ τέταρτος λέγονται ***ἄκροι***, ὁ δὲ δεύτερος καὶ ὁ τρίτος ***μέσοι***, ἐπίσης ὁ πρῶτος καὶ ὁ τρίτος λέγονται ***ἡγούμενοι***, ὁ δὲ δεύτερος καὶ ὁ τέταρτος **ἑπόμενοι.**

Ὅταν οἱ δύο μέσοι ὅροι μιᾶς ἀναλογίας εἶνε ἴσοι, ἡ ἀναλογία λέγεται **συνεχὴς** καὶ ὁ κοινὸς ὅρος λέγεται **μέσος ἀνάλογος** τῶν δύο ἄλλων ὅρων: π.χ. $2 : 6 = 6 : 18$.

Ὅταν οἱ ὅροι τῆς ἀναλογίας εἶνε μεγέθη δυνάμεθα νὰ τὰ ἀντικαταστήσωμεν μὲ τοὺς ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι προκύπτουν ἐκ τῆς μετρήσεως αὐτῶν διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος. (ἐδ. 271). ὡ τῶν

ΙΔΙΟΤΗΣ ΤΩΝ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ

272. Ἐὰν τῆς ἀναλογίας $\frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν 6×3 θὰ ἔχωμεν (ἐδ. 82) $\frac{8}{6} \times 6 \times 3 = \frac{4}{3} \times 3 \times 6$. Ἁπλοποιοῦντες δὲ εὑρίσκομεν $8 \times 3 = 4 \times 6$.

Ὅθεν: ***Εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων ὅρων εἶνε ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν μέσων ὅρων.***

Διὰ τῆς ἰδιότητος ταύτης δυνάμεθα νὰ εὑρίσκωμεν ἕνα ὅρον τῆς ἀναλογίας, ὅταν εἶνε γνωστοὶ οἱ τρεῖς ἄλλοι.

Οὕτως ἂν ὑποθέσωμεν εἰς τὴν ἄνω ἀναλογίαν ἄγνωστον ἕνα ἄκρον ὅρον, π. χ. τὸν πρῶτον, καὶ παραστήσωμεν αὐτὸν διὰ τοῦ x, θὰ ἔχωμεν $\frac{x}{9} = \frac{4}{3}$ καὶ κατὰ τὴν ἄνω ἰδιότητα $3 . x = 4 . 6$.

Διὰ νὰ ἀπομονώσωμεν τὸ x εἰς τὸ α΄ μέλος τῆς ἰσότητος, ἐπειδὴ πολλαπλασιάζεται τοῦτο ἐπὶ 3, διαιροῦμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος διὰ τοῦ 3, (ἐδ. 113) ὅτε θὰ ἔχωμεν $\frac{3x}{3} = \frac{4 \times 6}{3}$ ἢ $x = 8$.

η

Ἐπίσης ἂν ὑποθέσωμεν ἄγνωστον ἕνα μέσον ὅρον, π.χ τὸν τρίτον θὰ ἔχωμεν $\frac{8}{6} = \frac{x}{3}$, ἐκ τούτου $3 \times 8 = 6 . x$, ἐκ τούτου πάλιν $\frac{6x}{3} = \frac{3 \times 8}{6}$ ἢ $x = 4$.

Ὅθεν: ***Διὰ νὰ εὕρωμεν ἕνα ἄκρον ὅρον μιᾶς ἀναλογίας, διαιροῦμεν τὸ γινόμενον τῶν μέσων διὰ τοῦ γνωστοῦ ἄκρου, διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ ἕνα μέσον, διαιροῦμεν τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων διὰ τοῦ γνωστοῦ μέσου.***

Ἂν εἶνε ἄγνωστος ὁ μέσος ὅρος μιᾶς συνεχοῦς ἀναλογίας, π.χ. $3 : x = x : 48$, δηλ. ὁ μέσος ἀνάλογος τῶν ἀριθμῶν 3 καὶ 48, θὰ ἔχωμεν $x . x = 3 . 48$ ἢ $x^2 = 144$. Ἐξάγοντες δὲ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν καὶ τῶν δύο μελῶν τῆς ἰσότητος θὰ ἔχωμεν:

$\sqrt{x^2} = \sqrt{144}$. Ἀλλὰ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ x^2 εἶνε ὁ x, διότι ὁ x ὑψούμενος εἰς τὸ τετράγωνον δίδει τὸν x^2, ἐπομένως

$$x = \sqrt{144} \text{ ἢ } x = 12.$$

Ὅθεν: ***Ὁ μέσος ἀνάλογος δύο ἀριθμῶν εὑρίσκεται, ἂν ἐξάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ γινομένου των.***

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

498) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἄγνωστος ὅρος τῶν ἑξῆς ἀναλογιῶν:
α′) $x : 10 = 8 : 20$. β′) $x : 3 = 8 : 4$. γ′) $20 : 52 = x : 65$.
δ′) $39 : 21 = 78 : x$

499) Ὁμοίως τῶν ἑξῆς: α′) $x : 6{,}3 = 2 : 3{,}6$.
β′) $5{,}6 : x = 4{,}2 : 1{,}8$. γ′) $4 : 2{,}4 = x : 1{,}2$.
δ′) $5{,}2 : 4{,}8 = x : 72$. ε′) $1{,}8 : 2{,}1 = 3 : x$.

500) Ὁμοίως τῶν ἑξῆς: α′) $x : \frac{3}{2} = 5 : \frac{2}{3}$, β′) $1\frac{2}{3} : x = 6 : \frac{4}{5}$,
γ′) $7 : 3{,}2 = x : 1\frac{3}{4}$, δ′) $2{,}3 : 1\frac{1}{7} = 4\frac{1}{3} : x$.

501) Ὁμοίως τῶν ἑξῆς: α′) $5 : x = x : 45$. β′) $12 : x = x : 3$.

502) Νὰ εὑρεθῇ ὁ μέσος ἀνάλογος τῶν ἀριθμῶν: α′) 2 *καὶ* 12,5. β′) 3 *καὶ* $\frac{1}{3}$. γ′) 5 *καὶ* 7 *(κατὰ προσέγγισιν* 0,01).

ΑΛΛΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ

273. ***Ἐὰν 4 ἀριθμοὶ γραμμένοι κατὰ σειρὰν εἶνε τοιοῦτοι, ὥστε τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων νὰ εἶνε ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν μέσων, οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι, ὅπως εἶνε γραμμένοι, ἀποτελοῦν ἀναλογίαν.***

Δηλ. ἂν εἰς τοὺς ἀριθμοὺς 3, 4, 6, 8, ἔχωμεν $3 \times 8 = 4 \times 6$, τότε θὰ ἔχωμεν καὶ $3 : 4 = 6 : 8$.

Διότι διαιροῦντες τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος $3 \times 8 = 4 \times 6$ διὰ τοῦ 4×8 θὰ ἔχωμεν $\frac{3 \times 8}{4 \times 8} = \frac{4 \times 6}{4 \times 8}$ καὶ ἁπλοποιοῦντες εὑρίσκομεν $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$.

Γενικῶς ἂν εἰς τοὺς ἀριθμοὺς α, β, γ, δ ἔχωμεν $\alpha \times \delta = \beta \times \gamma$, τότε θὰ ἔχωμεν $\alpha : \beta = \gamma : \delta$.

274. ***Εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν δυνάμεθα νὰ ἀνταλλάξωμεν τοὺς μέσους ὅρους.***

Δηλ. ἂν $3:4=6:8$, θὰ ἔχωμεν καὶ $3:6=4:8$. Διότι ἀφοῦ $3:4=6:8$ θὰ εἶνε καὶ $3\times 8=4\times 6$ διαιροῦντες δὲ καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος διὰ 6×8 εὑρίσκομεν $\frac{3\times 8}{6\times 8}=\frac{4\times 6}{6\times 8}$ καὶ ἁπλοποιοῦντες θὰ ἔχωμεν $3:6=4:8$.

Γενικῶς ἂν $\alpha:\beta=\gamma:\delta$ τότε καὶ $\alpha:\gamma=\beta:\delta$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

503) Εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν δυνάμεθα νὰ ἀνταλλάξωμεν τοὺς ἄκρους ὅρους, ἐπίσης δυνάμεθα τοὺς μέσους νὰ κάμωμεν ἄκρους καὶ τοὺς ἄκρους μέσους.

504) Ἐὰν δύο λόγοι εἶνε ἴσοι καὶ οἱ ἀντίστροφοί των θὰ εἶνε ἴσοι.

505) Εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν δύο πρώτων ὅρων ἔχει λόγον πρὸς τὸν β′ ἢ τὸν α′, ὁποῖον λόγον ἔχει τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν δύο τελευταίων πρὸς τὸν δ′ ἢ τὸν γ′. (Προσθέτομεν ἢ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὰ δύο μέλη τῆς ἀναλογίας τὴν 1).

506) Εἰς μίαν σειρὰν ἴσων λόγων τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμητῶν ἔχει λόγον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν παρονομαστῶν, ὁποῖον λόγον ἔχει εἷς ἀριθμητὴς πρὸς τὸν παρονομαστήν του;

(Ἂν καλέσωμεν τὸν ἴσον λόγον λ, ἕκαστος ἀριθμητὴς εἶνε ἴσος μὲ τὸν παρονομαστήν του ἐπὶ λ).

507) Τὰ γινόμενα τῶν ὁμοταγῶν ὅρων ὁσωνδήποτε ἀνολογιῶν ἀποτελοῦν νέαν ἀναλογίαν.

ΙΔΙΟΤΗΣ ΤΩΝ ΑΝΑΛΟΓΩΝ ΠΟΣΩΝ

(Διὰ τὴν γ′ τάξιν)

275. Εἴδομεν εἰς τὰ ἀνάλογα ποσὰ ὅτι, ἂν 20 ὀκ. μήλων τιμῶνται 160 δρ., 30 ὀκ. μήλων θὰ τιμῶνται 240 δρ. καὶ 40 ὀκ. μήλων θὰ τιμῶνται 320 δρ. κλπ.

Ἂν λάβωμεν τὸν λόγον δύο τιμῶν τῶν μήλων, π.χ. 20 ὀκ. καὶ 30 ὀκ., θὰ εἶνε οὗτος $\frac{20}{30}=\frac{2}{3}$, ὁ δὲ λόγος τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τῶν χρημάτων, δηλ. τῶν 160 δρ. καὶ 240 δρ., εἶνε $\frac{160}{240}=\frac{2}{3}$, παρατηροῦμεν δὲ ὅτι οἱ δύο οὗτοι λόγοι εἶνε ἴσοι, δηλ. $\frac{20}{30}=\frac{160}{240}$ ἢ $20:30=160:240$.

Ὅθεν: ***Ὅταν δύο ποσὰ εἶνε ἀνάλογα, ὁ λόγος δύο τιμῶν τοῦ ἑνὸς εἶνε ἴσος πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τοῦ ἄλλου***, δηλ. οἱ δύο οὗτοι λόγοι ἀποτελοῦν ἀναλογίαν.

(Διὰ τὴν γ´ τάξιν)

ΙΔΙΟΤΗΣ ΤΩΝ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΝ ΠΟΣΩΝ

276. Εἴδομεν εἰς τὰ ἀντίστροφα ποσὰ ὅτι, ἂν εἷς ταχυδρόμος διανύσῃ μίαν ἀπόστασιν εἰς 30 ἡμέρας ἂν βαδίζῃ 3 ὥρας τὴν ἡμέραν, θὰ διανύσῃ τὴν ἀπόστασιν αὐτὴν εἰς 15 ἡμέρας ἂν βαδίζῃ 6 ὥρας τὴν ἡμέραν καὶ εἰς 10 ἡμέρας ἂν βαδίζῃ 9 ὥρας τὴν ἡμέραν κλπ.

Ἂν λάβωμεν τὸν λόγον δύο τιμῶν τῶν ὡρῶν, π.χ. 6 ὥρ. καὶ 9 ὥρ. θὰ εἶνε οὗτος $\frac{6}{9}$, ὁ δὲ λόγος τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τῶν ἡμερῶν, 15 ἡμ. καὶ 10 ἡμ., εἶνε $\frac{15}{10}$, παρατηροῦμεν δὲ ὅτι ὁ λόγος $\frac{6}{9}$ $(=\frac{2}{3})$ εἶνε ἴσος πρὸς τὸν $\frac{10}{15}$ $(=\frac{2}{3})$, ὁ ὁποῖος εἶνε ἀντίστροφος τοῦ $\frac{15}{10}$. Ἤτοι $\frac{6}{9}=\frac{10}{15}$ ἢ $6:9=10:15$.

Ὅθεν: ***Ὅταν δύο ποσὰ εἶνε ἀντίστροφα, ὁ λόγος δύο τιμῶν τοῦ ἑνὸς εἶνε ἴσος πρὸς τὸν ἀντίστροφον τοῦ λόγου τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τοῦ ἄλλου***, δηλ. οἱ δύο οὗτοι λόγοι ἀποτελοῦν ἀναλογίαν.

277. Διὰ τῶν ἀναλογιῶν δυνάμεθα νὰ λύσωμεν διάφορα προβλήματα.

Οὕτω τὸ πρόβλημα 1 τοῦ ἐδ. 268 λύεται καὶ διὰ τῶν ἀναλογιῶν ὡς ἑξῆς:

Ἐπειδὴ τὰ γεώμηλα καὶ αἱ δραχμαὶ εἶναι ποσὰ ἀνάλογα, διὰ τοῦτο ὁ λόγος $\frac{x}{24}$ τῶν τιμῶν τῶν δραχμῶν εἶνε ἴσος πρὸς τὸν λόγον $\frac{35}{6}$ τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τῶν ὀκάδων, ἤτοι $\frac{x}{24}=\frac{35}{6}$ ἢ $6x=24\times35$ καὶ $x=\frac{24\times35}{6}=140$.

Ὁμοίως τὸ πρόβλημα 2 τοῦ ἐδ. 268 λύεται ὡς ἑξῆς.

Ἐπειδὴ ἐργάται καὶ ἡμέραι εἶνε ποσὰ ἀντίστροφα, διότι ἂν διπλασιασθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν, ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν γίνεται τὸ ἥμισυ, διὰ τοῦτο ὁ λόγος $\frac{x}{40}$ τῶν τιμῶν τῶν ἡμερῶν εἶνε ἴσος πρὸς $\frac{25}{20}$, δηλ. τὸν ἀντίστροφον τοῦ $\frac{20}{25}$, ἤτοι τοῦ λόγου τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τῶν ἐργατῶν. Ὅθεν $\frac{x}{40}=\frac{25}{20}$ ἢ $20\,x=25\times40$ καὶ $x=\frac{25\times40}{20}=50$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

508) Ὁ ὄγκος ὁ καταλαμβανόμενος ὑπὸ ἑνὸς ἀερίου, τοῦ ὁποίου ἡ θερμοκρασία παραμένει σταθερά, εἶνε ἀντιστρόφως ἀνάλογος πρὸς τὴν ἐπιφερομένην πίεσιν ἐπ' αὐτοῦ.

Ἐν ποσὸν ἀερίου καταλαμβάνει 12 κυβικὰς παλάμας ὑπὸ πίεσιν 760 χιλιοστῶν, ποῖος θὰ εἶνε ὁ ὄγκος του ὑπὸ πίεσιν 230 χιλιοστῶν; (39,65)

509) Ἐν ποσὸν ἀέρος καταλαμβάνει 10 κυβικὰς παλάμας ὑπὸ πίεσιν 760 χιλιοστῶν, ποία θὰ εἶνε ἡ πίεσις, ἡ ὁποία θὰ ἠνάγκαζεν αὐτὸ νὰ καταλάβῃ 2,25 κυβικὰς παλάμας; (3377,7)

510 Ὁ λόγος τῆς ξηρᾶς πρὸς τὴν θάλασσαν εἶνε εἰς μὲν τὸ βόρειον ἡμισφαίριον τῆς Γῆς 0,419, εἰς δὲ τὸ νότιον ὁ 0,129· ποῖος εἶνε λόγος τῶν ἐπιφανειῶν τῶν θαλασσῶν εἰς τὰ δύο ἡμισφαίρια; (Τὸ Β. ἡμισφαίριον ἀποτελεῖται ἀπὸ τὴν ξηρὰν=0,419 τῆς θαλάσσης καὶ ἀπὸ τὴν θάλασσαν=1,000, δηλ. ἐν ὅλῳ ἀπὸ 1,419 τῆς θαλάσσης. Ἄρα ἡ θάλασσα = $\frac{1000}{1419}$ τοῦ Βορείου ἡμισφαιρίου).

$\left(\frac{1129}{4419}\right)$

511) Τὰ διαστήματα, τὰ ὁποῖα διανύει ἓν σῶμα πίπτον ἐλευθέρως ἀπὸ ὕψους ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν τῆς βαρύτητος, εἶνε ἀνάλογα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν χρόνων, κατὰ τοὺς ὁποίους διηνύθησαν. Εἰς τὸ πρῶτον δευτερόλεπτον σῶμα πίπτον διανύει 4,9 μέτρα, εἰς πόσον χρόνον θὰ πέσῃ ἀπὸ ὕψος 122,5 μέτρων; (5'')

512) Εἰς τὴν Γεωμετρίαν ἀποδεικνύεται, ὅτι ὁ λόγος τῶν ἐπιφανειῶν δύο ὁμοίων πολυγώνων εἶνε ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν τετραγώνων δύο ὁμολόγων πλευρῶν αὐτῶν. Ἡ ἐπιφάνεια ἑνὸς πολυγώνου εἶνε 3438 τετραγωνικὰ μέτρα, μία δὲ πλευρὰ αὐτοῦ εἶνε 40 μέτρα, ἡ δὲ ὁμόλογος πρὸς αὐτὴν πλευρὰ ἄλλου ὁμοίου πολυγώνου εἶνε 24 μέτρα· πόση εἶνε ἡ ἐπιφάνεια τοῦ δευτέρου πολυγώνου; (1237, 68 τ. μ.)

213) Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ σχεδίου ἑνὸς οἰκοπέδου εἶνε 35 τετρα-

γωνικοὶ δάκτυλοι· πόση εἶνε ἡ ἐπιφάνεια τοῦ οἰκοπέδου, ἂν ἡ κλίμαξ τοῦ σχεδίου εἶνε $\frac{1}{1250}$ *(5468,75 τ. μ.)*

ανεκλώσιως

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΠΟΣΟΣΤΩΝ

278. Ὅταν εἷς ἔμπορος τιμολογῇ τὰ ἐμπορεύματά του, ὁρίζῃ δηλ. τὴν τιμήν, εἰς τὴν ὁποίαν θὰ πωλῇ ἕκαστον ἐμπόρευμα, προσθέτει εἰς τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον διέθεσε διὰ τὴν ἀγορὰν τοῦ ἐμπορεύματος, καὶ τὸ κέρδος τὸ ὁποῖον θέλει νὰ ἀποκομίσῃ ἐξ αὐτοῦ. Τὸ κέρδος αὐτὸ τὸ κανονίζει ἐπὶ τῇ βάσει τῶν 100 δρ., δηλ. κανονίζει ὥστε ἀνὰ 100 δρ. ἐξ ὅσων διέθεσε διὰ τὴν ἀγορὰν τοῦ ἐμπορεύματος, νὰ κερδίζῃ π. χ. 10 δρ. Λέγομεν τότε ὅτι ὁ ἔμπορος κερδίζει 10 τοῖς ἑκατὸν καὶ γράφομεν αὐτὸ συμβολικῶς 10 %. Οὕτως, ἂν τὸ ἐμπόρευμα ἀξίζῃ 500 δρ., θὰ κερδίσῃ 50 δρ. Αἱ 50 αὗται δρ. λέγονται ***ποσοστὸν ἐπὶ τοῖς ἑκατόν***.

Ὅταν λέγωμεν ὅτι εἷς ἔμπορος πωλεῖ μὲ ἔκπτωσιν 20 %, ἐννοοῦμεν ὅτι τὸ ἐμπόρευμα, τὸ ὁποῖον ἐπώλει ἀντὶ 100 δρ., τὸ πωλεῖ τώρα ἀντὶ 80 δρ.

Ὅταν λέγωμεν ὅτι ἡ μεσιτεία εἶνε 3 τοῖς χιλίοις, τὸ ὁποῖον σημειώνομεν 3 ‰, ἐννοοῦμεν ὅτι ὁ μεσάζων μεταξὺ ἀγοραστοῦ καὶ πωλητοῦ διευκολύνων τὴν πώλησιν ἑνὸς πράγματος, λαμβάνει ὡς ἀμοιβὴν 3 δρ. ἀπὸ ἑκάστην χιλιάδα δραχμῶν ἐκ τῆς ἀξίας τοῦ πωλουμένου πράγματος.

Ὅταν λέγωμεν ὅτι τὰ ἀσφάλιστρα μιᾶς οἰκίας εἶνε 3 τοῖς χιλίοις, ἐννοῦμεν ὅτι ἀνὰ 1000 δρ., ἐξ ὅσων ἀξίζει ἡ οἰκία, πληρώνομεν εἰς τὴν Ἀσφαλ. Ἑταιρείαν 3 δρ. κατ' ἔτος. Οὕτως, ἂν ἡ οἰκία ἀξίζει 25000 δρ., θὰ πληρώσωμεν ἀσφάλιστρα $3 \times 25 = 75$ δρ. Αἱ 75 δρ. λέγονται ***ποσοστὸν ἐπὶ τοῖς χιλίοις***.

Ὥστε. ***Ποσοστὸν λέγεται τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ 100 ἢ τοῦ 1000 ἀντιστοιχεῖ εἰς ὁλόκληρον τὸ δοθὲν ποσόν.***

Πρόβλημα 1) Πόσον ἐκέρδισεν εἷς ἔμπορος ἀπὸ ἐμπόρευμα, τὸ ὁποῖον ἠγόρασεν ἀντὶ 2400 δρ. καὶ τὸ ἐπώλησε μὲ κέρδος 20 %;

Λύσις. Τὸ πρόβλημα εἶνε τῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

Εἰς τὰς 100 δρ. κερδίζει 20 δρ.
» » 2400 » » x »

Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ εἶνε ἀνάλογα ὁ $x = 20 \text{ δρ.} \times \frac{2400}{100} = 480$ δρ.

2) Πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐκέρδισεν εἷς πωλήσας ἐμπορεύματα ἀξίας 2400 δρ. καὶ κερδίσας ἐξ αὐτῶν 480 δρ.;

'Από ἐμπορεύματα ἀξίας 2400 δρ. κερδίζει 480 δρ.
» » » 100 » » x

$$x = 480 \text{ δρ.} \times \frac{100}{2400} = 20\,\%.$$

3) Πόσον ἐζημιώθη εἷς πωλήσας ἐμπορεύματα ἀντὶ 1920 δρ. μὲ ζημίαν 20 %;

'Από ἐμπόρευμα, τὸ ὁποῖον ἐστοίχιζε 100 δρ., ἐζημιώνετο 20 δρ., ἄρα πωλῶν αὐτὸ εἰσέπραττεν 80.

Λοιπὸν ἀπὸ ἐμπορεύματα πωληθέντα ἀντὶ 80 δρ. ἐζημιώθη 20 δρ.
» » » » 1920 » » x »

$$x = 20 \text{ δρ.} \times \frac{1920}{80} = 480 \text{ δρ.}$$

4) Εἷς μεσίτης ἐπώλησε μίαν οἰκίαν ἀντὶ 580000 δρ., λαμβάνει δὲ διὰ τὴν μεσιτείαν του 2 ‰ ἐπὶ τῆς ἀξίας αὐτῆς· πόσον θὰ λάβῃ;

'Από τὰς 1000 δρ. λαμβάνει 2 δρ.
» » 580000 » x

$$x = 2 \text{ δρ.} \times \frac{580000}{1000} = 1160 \text{ δρ.}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

*514) **Νὰ** εὑρεθοῦν ἀπὸ μνήμης καὶ γραπτῶς τὰ ποσοστὰ τῶν 10, 20, 25, 30, 45, 60, 70, 90, 100, 200, 400, 70C 900 πρὸς 1 %, 2 %, 4 %, 5 %.*

515) Ὁμοίως τῶν 15, 35, 45, 50, 60, 80, 210, 300, 600, 800, πρὸς 3 % καὶ 6 %.

516) Ὁμοίως τῶν 100 δρ. 400, 800, 1200, 3000, 5000, πρὸς 0,5 %, 0,25 %, 0,2 %.

517) Ὁμοίως γραπτῶς τῶν ἑξῆς: 58, 394, 5842, 4562,80 843733,50 πρὸς 7 %, 8,5 %, $12\frac{1}{3}$ %, 6,23 %, 7,6 %, 120 %, 150 %, 200 %, 240 %, 2 ‰, 3,5 ‰.

518) Πόσον ἐκέρδισεν εἷς ἔμπορος ἀπὸ ἐμπόρευμα, τὸ ὁποῖον ἠγόρασε 5680 δρ. καὶ τὸ ἐπώλησε μὲ κέρδος $17\frac{1}{2}$ %; (994)

519) Πόσον ἐκέρδισεν εἷς πωλήσας ἐμπορεύματα ἀντὶ 6273 δρ.

μὲ κέρδος $12\frac{1}{2}$ %; (Εἰς 112,50 δρ. εἶχε κέρδος 12,50) (697)

520) Ἔμπορος πωλεῖ τὰ ἐμπορεύματά του ζημιωνόμενος 15 %, ὑπέστη δὲ ζημίαν ἐκ πωλήσεως τοιούτων εἰς μίαν ἡμέραν 585 δρ.· πόσον τὰ εἶχεν ἀγοράσει καὶ πόσον εἰσέπραξεν; (3900, 3315)

521) Ἠγόρασεν εἰς ἐμπορεύματα ἀξίας 5485 δρ. μὲ ἔκπτωσιν 20 %· πόσον θὰ πληρώσῃ; (4388)

522) Ἠγόρασεν εἰς ἓν ἐμπόρευμα ἀντὶ 3043 δρ., τοῦ ἔγινε δὲ ἔκπτωσις 15 %· πόσον ἤξιζε τὸ ἐμπόρευμα; (3580)

523) Ἐπλήρωσεν εἰς φόρον εἰσοδήματος πρὸς 2,5 % 4786,50 δρ.· πόσον εἶνε τὸ εἰσόδημά του; (191460)

524) Ἠσφάλισεν εἰς ἐμπορεύματα ἀξίας 38600 δρ. κατὰ τῶν κινδύνων τῆς θαλάσσης πρὸς $3\frac{3}{4}$ %· πόσον θὰ πληρώσῃ; (1447,50)

525) Ἐπλήρωσεν εἰς 1447,50 δρ. δι' ἀσφάλιστρα ἐμπορευμάτων ἀξίας 38600 δρ.· πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐπλήρωσεν; ($3\frac{3}{4}$)

526) Πόσον εἶνε τὸ καθαρὸν βάρος ἐμπορεύματος, ὅταν τὸ μικτὸν βάρος του εἶνε 4στ. 15δκ. 200δρ., τὸ δὲ ἀπόβαρον 2,5 %; (4στ. 10δκ. 285δρ.)

427) Αἱ ἐλαῖαι περιέχουν 15 % ἔλαιον· πόσον ἔλαιον θὰ παραχθῇ ἀπὸ 2500δκ. ἐλαιῶν; (375)

528) Ἡ σταφὶς περιέχει 58 % γλεῦκος, πόσαι ὀκάδες σταφίδος θὰ χρειασθοῦν διὰ νὰ παραχθοῦν 1740 δκ. γλεύκους; (3000)

529) Τὸ γάλα περιέχει 15 % ἀνθόγαλα· πόσον γάλα χρειάζεται διὰ νὰ ἐξαχθοῦν ἐξ αὐτοῦ 3δκ. 300δρ. ἀνθόγαλα; (25)

530) 500δκάδες ἀλεύρου πόσον ἄρτον θὰ παράγουν, ἂν τὸ βάρος τοῦ ἀλεύρου μετασχηματιζομένου εἰς ἄρτον αὐξάνῃ κατὰ 22 %. (610)

531) Ἂν ξύλα καιόμενα δίδουν τέφραν 3 %, πόσον θὰ δώσουν 689δκ. ξύλων, ὅταν καοῦν; (20,67)

532) Ἂν μία τέφρα περιέχει 6,25 % ἀνθρακικὸν κάλιον (ποτάσσαν), πόσον περιέχουν 85δκ. ἐκ τῆς ἰδίας τέφρας; (5δκ. 125δρ.)

533) Τὸ θαλάσσιον ὕδωρ περιέχει 7,5 % ἅλας· πόσον ἅλας δύναται νὰ ἐξαχθῇ ἀπὸ 2000δκ. θαλασσίου ὕδατος; (150)

534) Τὸ ζαχαροκάλαμον περιέχει 30 % ζάχαριν, τὰ τεῦτλα

10 $^0/_0$ καὶ ὁ ἀραβόσιτος 6 $^0/_0$· 2700δκ. ζαχάρεως α΄) ἀπὸ πόσον ζαχαροκάλαμον, β΄) ἀπὸ πόσα τεῦτλα καὶ γ΄) ἀπὸ πόσον ἀραβόσιτον δύνανται νὰ ἐξαχθοῦν; (9000, 27000, 45000)

535) Πόσοι ἄνθρωποι γεννῶνται κατ' ἔτος εἰς μίαν πόλιν 578000 κατοίκων, ἂν αἱ γεννήσεις ἀνέρχονται εἰς 2,3 $^0/_0$ ἐπὶ τοῦ πληθυσμοῦ; (13294)

536) Εἰς πόσον τοῖς ἑκατὸν ἀνέρχεται ἡ θνησιμότης μιᾶς χώρας, ἂν ἐπὶ 6200000 κατοίκων ἀποθνήσκουν κατ' ἔτος 155000; (2,5 $^0/_0$)

537) Ἠσφάλισεν εἰς τὴν οἰκίαν του ἀξίας 485000δρ. πληρώσας δι' ἓν ἔτος 1697,50· πόσον τοῖς χιλίοις ἐπλήρωσεν ἀσφάλιστρα; (3,5 $^0/_0$)

538) Μεσίτης πωλήσας μίαν οἰκίαν ἔλαβε μεσιτείαν πρὸς 2,5 $^0/_0$ 145δρ.· ποία ἦτο ἡ ἀξία τῆς οἰκίας; (58000)

539) Πωλητὴς χαρτοσήμου ἠγόρασε χαρτόσημον ἐκ τοῦ Δημοσίου Ταμείου πρὸς μεταπώλησιν ἀξίας 2000δρ., ἐπὶ τῆς ὀνομαστικῆς ὅμως ἀξίας πληρώνεται καὶ ἐπὶ πλέον φόρος 30 $^0/_0$· πόσον θὰ πληρώσῃ ἐν ὅλῳ; (2600)

540) Ἔχει εἷς ἓν χιλιόδραχμον καὶ μὲ αὐτὸ θέλει νὰ ἀγοράσῃ 10 χαρτόσημα τῆς 1δρ. 15 τῶν 2δρ., 10 τῶν 5δρ., 7 τῶν 10δρ., 6 τῶν 25δρ. καὶ 5 τῶν 50δρ. καὶ μὲ τὸ ὑπόλοιπον νὰ ἀγοράσῃ χαρτόσημα τῶν 100δρ.· πόσα χαρτόσημα τῶν 100 δρ. θὰ ἀγοράσῃ καὶ πόσαι δρ. θὰ τοῦ μείνουν; (2χαρτ. 12δρ.)

541) Θέλει εἷς νὰ ἀποστείλῃ διὰ τραπεζικῶν ἐπιταγῶν ἐξ Ἀθηνῶν εἰς ἕνα 50000 δραχ. εἰς Πάτρας, εἰς ἄλλον 25000δρ. εἰς Πύλον καὶ 60000 δραχμὰς εἰς ἕτερον εἰς Πύργον, διὰ τὴν α΄ ἐπιταγὴν θὰ πληρώσῃ προμήθειαν 0,75 $^0/_{00}$, διὰ τὴν β΄ 1,5 $^0/_{00}$ καὶ διὰ τὴν γ΄ $1\frac{1}{8}$ $^0/_{00}$, προσέτι δὲ θὰ πληρώσῃ 2,60 δραχ. διὰ χαρτόσημον δι' ἑκάστην ἐπιταγήν· πόσον ἐν ὅλῳ θὰ πληρώσῃ; (135150,30)

542) Θέλει εἷς νὰ ἀποστείλῃ εἰς ἕνα διὰ ταχυδρομικῆς ἐντολῆς μιᾶς Τραπέζης ἐκ Πατρῶν εἰς Καρπενήσιον 30000 δραχμὰς καὶ ἑτέρας 30000 δραχμὰς διὰ τηλεγραφικῆς ἐντολῆς εἰς ἄλλον εἰς Ἄρταν. Διὰ τὴν α΄ θὰ πληρώσῃ 3 $^0/_{00}$ καὶ διὰ τὴν β΄ $3\frac{1}{3}$ $^0/_{00}$ προμήθειαν καὶ 2,60 δραχμὰς χαρτόσημον δι' ἑκάστην ἐντολήν· πόσον ἐν ὅλῳ θὰ πληρώσῃ; (60195,20)

543) Ἀπέστειλεν εἷς ἐξ Ἀθηνῶν εἰς Πύργον εἰς ἕνα μέσῳ μιᾶς Τραπέζης ἓν ταχυδρομικὸν δέμα ἀξίας 25000δρ., εἰς ἄλλον εἰς Κέρκυραν ἐμπόρευμα 8000δρ. ἀποστείλας τὴν φορτωτικὴν εἰς μίαν Τράπεζαν πρὸς εἴσπραξιν τοῦ ποσοῦ. Διὰ τὸ δέμα θὰ κρατήσῃ ἡ Τράπεζα προμήθειαν $1,5\,^0/_{00}$ καὶ 2 δραχμὰς ἐπὶ πλέον, διὰ δὲ τὸ ἐμπόρευμα $2\,^0/_{00}$· πόσας δραχμὰς θὰ εἰσπράξῃ ὁ ἀποστολεύς ; (32944,50)

544) Ἔμπορος ἀπέστειλε μέσῳ μιᾶς Τραπέζης εἰς Ἀγγλίαν 500000 λίτρας σταφίδος πωληθείσης πρὸς 7 λίρας τὸ χιλιόλιτρον· ἡ προμήθεια τῆς Τραπέζης εἶνε $1,25\,^0/_{00}$· πόσας δραχμὰς θὰ εἰσπράξῃ ὁ ἔμπορος, ἂν ἡ λίρα ἰσοδυναμῇ πρὸς 450 δραχμάς ; (1555312,50δρ.)

Β'). ΣΥΝΘΕΤΟΣ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ

279. Διὰ τὴν κατασκευὴν 4 ἐνδυμασιῶν χρειάζονται 18 πήχεις ὑφάσματος πλάτους 2 πήχεων· πόσοι πήχεις χρειάζονται διὰ τὴν κατασκευὴν 12 ἐνδυμασιῶν ἐξ ὑφάσματος πλάτους 1,5 πήχεων ;

Κατάταξις. Διὰ 4 ἐνδ. χρειάζονται 18 πχ. μήκ. 2 π. πλ.
» 12 » » x 1,5 » »

Λύσις. Θὰ εὕρωμεν πρῶτον πόσοι πήχεις χρειάζονται διὰ τὰς 12 ἐνδυμασίας ἐξ ὑφάσματος πλάτους πάλιν 2 πήχεων, θὰ ἔχωμεν δὲ οὕτως τὸ ἑξῆς πρόβλημα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

Διὰ τὰς 4 ἐνδ. χρειάζονται 18 πηχ.
» » 12 » » x »

Τὰ ποσὰ ἀνάλογα. Ἄρα $x = 18 \times \frac{12}{4}$.

Ὥστε διὰ τὰ 12 ἐνδυμασίας χρειάζονται $18 \times \frac{12}{4}$ πήχεις ἐξ ὑφάσματος πλάτους 2 πήχ. Τώρα θὰ εὕρωμεν πόσοι πήχεις χρειάζονται διὰ τὰς 12 πάλιν ἐνδυμασίας ἐξ ὑφάσματος 1,5 πηχ. πλάτους. Θὰ ἔχωμεν οὕτως τὸ ἑξῆς πρόβλημα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

Μὲ πλάτος 2 πηχ. χρειάζονται μῆκος $18 \times \frac{12}{4}$ πηχ.
» » 1,5 » » » x

Τὰ ποσὰ ἀντίστροφα. Ἄρα $x = 18 \times \frac{12}{4} \times \frac{2}{1,5} = 72$.

Ὥστε διὰ τὰς 12 ἐνδυμασίας χρειάζονται 72 πήχεις.

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο ἐδόθησαν αἱ τιμαὶ τῶν ἐνδυμασιῶν, τοῦ πλάτους καὶ τοῦ μήκους, τὸ ὁποῖον μῆκος πρὸς μὲν τὰς ἐνδυμασίας εἶνε ἀνάλογον, πρὸς δὲ τὸ πλάτος ἀντίστροφον, ἐδόθησαν προσέτι καὶ νέαι τιμαὶ τῶν ἐνδυμασιῶν καὶ τοῦ πλάτους καὶ ἐζητήθη ἡ ἀντίστοιχος πρὸς αὐτὰς τιμὴ τοῦ μήκους.

Διὰ νὰ λύσωμεν δὲ τὸ πρόβλημα τοῦτο, τὸ ἀνελύσαμεν εἰς ἄλλα προβλήματα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν, διὰ τοῦτο λέγεται καὶ ***πρόβλημα τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν***, ἡ δὲ μέθοδος τῶν τριῶν λέγεται ***ἁπλῆ***.

Ἑπομένως: ***Προβλήματα τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν λέγονται ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα δίδονται αἱ τιμαὶ πολλῶν ποσῶν ἀναλόγων, ἢ ἀντιστρόφων πρὸς ἓν ἐξ αὐτῶν, καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ τοῦ ποσοῦ τούτου, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς ἄλλας δοθείσας τιμὰς τῶν λοιπῶν ποσῶν.***

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος εὕρομεν ὅτι

$$\text{ὁ } x = 18 \times \frac{12}{4} \times \frac{20}{1{,}5}.$$

Δηλ. ***Εἰς τὴν σύνθετον μέθοδον τῶν τριῶν διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ἄγνωστον πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμὸν τὸν εὑρισκόμενον εἰς τὴν κατάταξιν τοῦ προβλήματος ὑπεράνω τοῦ*** x ***ἐπὶ ἕκαστον ἐκ τῶν κλασμάτων, τὰ ὁποῖα σχηματίζονται ἀπὸ τὰς δύο τιμὰς ἑκάστου ποσοῦ, ἀντεστραμμένον μέν, ἂν τὸ ποσόν του εἶνε ἀνάλογον πρὸς τὸ ποσὸν τοῦ ἀγνώστου, ὅπως ἔχει δέ, ἂν εἶνε ἀντίστροφον.***

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

545) Ταχυδρόμος βαδίζων 6 ὥρας τὴν ἡμέραν εἰς 15 ἡμέρας διήνυσε 45 χιλιόμετρα· ἂν βαδίζῃ 7 ὥρας τὴν ἡμέραν εἰς 22 ἡμέρας πόσον θὰ διανύσῃ; *(77)*

546) Σιδηρόδρομος λαμβάνει 60 δρ. διὰ μεταφορὰν 10 τόννων ἐμπορευμάτων εἰς ἀπόστασιν 5 χιλιομέτρων· ἀντὶ πόσων δραχμῶν θὰ μεταφέρῃ 185 τόννους εἰς ἀπόστασιν 218 χιλιομέτρων; *(48396)*

547) Μὲ 18 ὀκάδας νήματος κατεσκευάσθη ὕφασμα μήκους 25 πήχ. καὶ πλάτος 1 πήχ. 1 ρ.· πόσον πλάτος θὰ ἔχῃ ὕφασμα μήκους 22 πήχ. 4 ρ., τὸ ὁποῖον θὰ κατασκευασθῇ μὲ 12 ὀκάδας 240 δρ. νήματος; *(7 ρ.)*

548) 18 ἐργάται ἐργαζόμενοι 7ὥρας τὴν ἡμέραν ἐθέρισαν εἰς 16ἡμέρας ἕνα ἀγρὸν μήκους 400μ. καὶ πλάτους 300μ.· πόσοι ἐργάται ἐργαζόμενοι 8ὥρας τὴν ἡμέραν θὰ θερίσουν ἀγρὸν 400 στρεμμάτων εἰς 10 ἡμέρας; (84)

549) Διὰ νὰ ἐκτελεσθῇ τὸ $\frac{1}{3}$ ἑνὸς ἔργου ἐχρειάσθησαν 18 ἐργάται ἐπὶ 24 ἡμέρας, διὰ νὰ ἐκτελεσθῇ τὸ ὑπόλοιπον ταχύτερον προσελήφθησαν ἀκόμη 16ἐργάται· εἰς πόσας ἡμέρας θὰ τελειώσῃ τὸ ὑπόλοιπον τοῦ ἔργου; (21,41) 36

550) Εἷς ἀγρὸς παράγων κατὰ στρέμμα 2κοιλὰ ἐξ ἑνὸς προϊόντος πωλουμένου πρὸς 26,30δρ. τὸ κοιλόν, ἐνοικιάζεται πρὸς 65δρ. τὸ στρέμμα· πόσον πρέπει νὰ ἐνοικιασθῇ εἷς ἀγρός, ὁ ὁποῖος παράγει 1,5 κοιλὸν κατὰ στρέμμα ἐξ ἑνὸς προϊόντος πωλουμένου πρὸς 25δρ. τὸ κοιλόν; (46,34)

551) Τὰ 0,75 τῆς ὀκᾶς τοῦ οἰνοπνεύματος 60° τιμῶνται 12 δρ.· 58,4ὀκάδες οἰνοπνεύματος 75° πόσον τιμῶνται; (1168)

552) Εἰς ἓν φρούριον ὑπάρχουν 1200 στρατιῶται ἔχοντες τροφὰς διὰ 3μῆνας· εἰς πόσους πρέπει νὰ περιορισθοῦν διὰ νὰ διαρκέσουν αἱ τροφαὶ 10 μῆνας, ἀφοῦ ἐλαττωθῇ καὶ τὸ μερίδιον ἑκάστου στρατιώτου κατὰ τὸ $\frac{1}{5}$; (450)

553) Μία ἀτμομηχανὴ ἐργαζομένη 14ὥρας τὴν ἡμέραν κατηνάλωσεν εἰς 27ἡμέρας 10350 ὀκάδας ἄνθρακος· πόσον θὰ στοιχίζῃ ὁ ἄνθραξ, τὸν ὁποῖον θὰ καταναλώσῃ ἡ μηχανὴ αὐτή, ἂν ἐργασθῇ 300ἡμέρας ἐπὶ 10ὥρας τὴν ἡμέραν, ὅταν ἡ ὀκᾶ τοῦ ἄνθρακος τιμᾶται 3δρ.; 12 (295714,29)

554) 40ἐργάται ἐργαζόμενοι 8ὥρας τὴν ἡμέραν εἰς 50ἡμέρας ἤνοιξαν μίαν τάφρον μήκους 128μέτρων, πλάτους 6μέτρων καὶ βάθους 3μέτρων· εἰς πόσας ἡμέρας 30ἐργάται ἐργαζόμενοι 10ὥρας τὴν ἡμέραν θὰ ἀνοίξουν τάφρον 100μέτρων μήκους, 9 πλάτους καὶ 4μέτρων βάθους εἰς γῆν παρέχουσαν δυσκολίαν 3 φορὰς μεγαλυτέραν ἀπὸ τὴν πρώτην; (250ἡμ.)

ΠΕΡΙ ΤΟΚΟΥ

280. Τόκος λέγεται τὸ κέρδος, τὸ ὁποῖον λαμβάνει, ἐκεῖνος ὁ ὁποῖος δανείζει χρήματα.

Τὸ δανειζόμενον ποσὸν λέγεται **κεφάλαιον.** Τὸ δὲ χρονικὸν διάστημα, κατὰ τὸ ὁποῖον διαρκεῖ τὸ δάνειον, λέγεται **χρόνος**.

Ὁ τόκος τῶν 100δρ. εἰς ἓν ἔτος λέγεται ***ἐπιτόκιον.***

281. Ὥστε εἰς τὰ προβλήματα τοῦ τόκου παρουσιάζονται 4 ποσά, τὸ κεφάλαιον, τὸ ἐπιτόκιον, ὁ χρόνος καὶ ὁ τόκος, ἂν δὲ συγκρίνωμεν τὰ ποσὰ ταῦτα ἀνὰ δύο εὑρίσκομεν τὰ ἑξῆς.

Ὁ τόκος εἶνε ἀνάλογος πρὸς ἓν ἕκαστον ἐκ τῶν λοιπῶν ποσῶν. Διότι ἂν διπλασιάσωμεν ἢ τὸ κεφάλαιον ἢ τὸ ἐπιτόκιον ἢ τὸν χρόνον, ὁ τόκος διπλασιάζεται.

Τὸ κεφάλαιον καὶ ὁ χρόνος εἶνε ποσὰ ἀντίστροφα. Διότι διπλάσιον κεφάλαιον τοκιζόμενον εἰς τὸν ἥμισυ χρόνον· θὰ φέρῃ τὸν αὐτὸν τόκον με τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον.

Τὸ κεφάλαιον καὶ τὸ ἐπιτόκιον εἶνε ποσὰ ἀντίστροφα. Διότι διπλάσιον κεφάλαιον ἂν τοκισθῇ πρὸς τὸ ἥμισυ ἐπιτόκιον, θὰ φέρῃ τὸ αὐτὸν τόκον εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον.

Ὁ χρόνος καὶ τὸ ἐπιτόκιον εἶνε ποσὰ ἀντίστροφα. Διότι εἰς διπλάσιον χρόνον, πρὸς τὸ ἥμισυ ἐπιτόκιον ἐὰν τοκισθῇ ἓν κεφάλαιον θὰ φέρῃ τὸν αὐτὸν τόκον. Ὥστε πλὴν τοῦ τόκου τὰ λοιπὰ ποσὰ εἶνε μεταξύ των ἀντίστροφα.

Ἐπειδὴ εἰς τὰ προβλήματα τοῦ τόκου τὰ ποσὰ εἶνε ἀνάλογα ἢ ἀντίστροφα, διὰ τοῦτο λύονται ταῦτα διὰ τῆς μεθόδου τῶν τριῶν. Ἐπειδὴ δὲ τὰ ποσὰ εἶνε τέσσερα καὶ εἶνε δυνατὸν νὰ ζητῆται ἕκαστον ἐξ αὐτῶν, διὰ τοῦτο τὰ προβλήματα τοῦ τόκου εἶνε 4 εἰδῶν.

ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΟΥ ΤΟΚΟΥ

282. Πρόβλημα 1). Πόσον τόκον φέρουν 6000δρ. τοκιζόμεναι πρὸς 9 % εἰς 3 ἔτη;

Ὁ τόκος εἶνε ἀνάλογος πρὸς τὰ λοιπὰ ποσά. Ἀναπτύσσοντες δὲ τὸ ἐπιτόκιον ἔχομεν τὴν κατάταξιν τοῦ προβλήματος.

Κεφάλαιον 100δρ. εἰς 1 ἔτος φέρει τόκον 9 δρ.
» 6000δρ. » 3 ἔτη » » x »

$$x = 9\text{δρ.} \times \frac{6000}{100} \times \frac{3}{1} = \frac{9 \times 6000 \times 3}{100} = 1620\text{δρ.}$$

2) Πόσον τόκον φέρουν 6000δρ. τοκιζόμεναι πρὸς 9 % εἰς 3 μῆνας;

Κεφάλαιον 100δρ. εἰς ἓν ἔτος ἢ 12 μῆνας φέρει τόκον 9δρ.
» 6000δρ. » 3 » » » x »

$$x = 9 \times \frac{6000}{100} \times \frac{3}{12} = \frac{9 \times 6000 \times 3}{1200} = 135\text{δρ.}$$

3) Πόσον τόκον φέρουν 6000 δραχ. τοκιζόμεναι πρὸς 9 % εἰς 3 ἡμέρας;

Κεφάλαιον	100 δρ.	εἰς 1 ἔτος ἢ 360 ἡμ.	φέρει τόκον	9 δρ.
»	6000 »	» 3 »	» »	x »

$$x = 9\text{δρ.} \times \frac{6000}{100} \times \frac{3}{360} = \frac{9 \times 6000 \times 3}{36000} = 4{,}50 \text{ δρ.}$$

Ἀπὸ τὰ ἐξαγόμενα $\frac{9 \times 6000 \times 3}{100}$, $\frac{9 \times 6000 \times 3}{1200}$, $\frac{9 \times 6000 \times 3}{36000}$ τῶν τριῶν τούτων προβλημάτων συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν τόκον πολλαπλασιάζομεν τὰ τρία δεδομένα ποσὰ (ἐπιτόκιον, κεφάλαιον καὶ χρόνον) ***καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ 100, ἂν ὁ χρόνος δίδεται εἰς ἔτη, διὰ 1200, ἂν δίδεται εἰς μῆνας καὶ διὰ 36000, ἂν δίδεται εἰς ἡμέρας.***

Ἂν εἰς τὴν κατάταξιν τοῦ β´ καὶ γ´ προβλήματος γράψωμεν εἰς τὴν στήλην τοῦ χρόνου ἄνωθεν μὲν μόνον 1 ἔτος, κάτωθεν δὲ ἀντὶ 3μην. $\frac{3}{12}$ ἔτους καὶ ἀντὶ 3 ἡμ. $\frac{3}{360}$ ἔτ., τρέψωμεν δηλ. τοὺς μῆνας ἢ τὰς ἡμέρας εἰς κλάσμα τοῦ ἔτους, τὰ ἄνω ἐξαγόμενα γίνονται $\frac{9 \times 6000 \times \frac{3}{12}}{100}$ καὶ $\frac{9 \times 6000 \times \frac{3}{360}}{100}$ οὕτως ἔχομεν τὸν ἑξῆς γενικὸν κανόνα.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν τόκον, πολλαπλασιάζομεν τὸ ἐπιτόκιον ἐπὶ τὸ κεφάλαιον καὶ ἐπὶ τὸν χρόνον, λογιζόμενον εἰς ἔτη, καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ 100.

Ἂν παραστήσωμεν συμβολικῶς τὸ κεφάλαιον διὰ τοῦ Κ, τὸν τόκον διὰ τοῦ Τ, τὸ ἐπιτόκιον διὰ τοῦ Ε καὶ τὸν χρόνον διὰ τοῦ Χ, θὰ ἔχωμεν τὸν ἑξῆς τύπον τῆς εὑρέσεως τοῦ τόκου.

$$T = \frac{K \times E \times X}{100}$$

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΤΙΜΗ ΤΩΝ ΤΥΠΩΝ

283. Ὅταν γνωρίζωμεν τὰς τιμὰς τῶν γραμμάτων, τὰ ὁποῖα ὑπάρχουν μέσα εἰς ἕνα τύπον καὶ θέσωμεν αὐτὰς εἰς τὴν θέσιν τῶν γραμμάτων, ἐκτελέσωμεν δὲ καὶ τὰς σημειωμένας πράξεις, θὰ εὕρωμεν τὸν ζητούμενον ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον παριστάνει ὁ τύπος καὶ ὁ ὁποῖος λέγεται ***ἀριθμητικὴ τιμὴ*** αὐτοῦ. Οὕτως, ἂν εἰς τὸν τύπον $T = \frac{K \times E \times X}{100}$ τὸ K ἔχει τὴν τιμὴν 5000 τὸ $E = 8$ καὶ ὁ $X = 3$, ὁ τύπος γίνεται $T = \frac{5000 \times 8 \times 3}{100} = 1200$.

ΑΣΚΗΣΙΣ

555) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τοῦ ἑξῆς τύπου.

$x = \alpha - \beta + \gamma - \delta$, *ὅταν τὰ γράμματα ἔχουν τὰς ἑξῆς τιμάς:*

α') $\alpha = 8$, $\beta = 3$, $\gamma = 15$ *καὶ* $\delta = 1$.

β') $\alpha = \frac{3}{4}$, $\beta = \frac{2}{3}$, $\gamma = \frac{6}{5}$ *καὶ* $\delta = \frac{5}{6}$.

γ') $\alpha = 3\frac{1}{3}$, $\beta = 3\frac{3}{4}$, $\gamma = 6\frac{3}{8}$ *καὶ* $\delta = 4\frac{5}{9}$.

ΤΟΚΑΡΙΘΜΟΣ

284. Ἐὰν εἰς τὸ ἐξαγόμενον τοῦ γ' προβλήματος τοῦ τόκου (σελ.165) $T = \frac{9 \times 6000 \times 3}{36000}$ διαιρέσωμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος διὰ τοῦ ἐπιτοκίου 9, θὰ ἔχωμεν $T = \frac{6000 \times 3}{36000 : 9} = \frac{6000 \times 3}{4000} = 4{,}50$.

Τὸ γινόμενον 6000×3, δηλ. τοῦ κεφαλαίου ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἡμερῶν, λέγεται ***τοκάριθμος***, τὸ δὲ πηλίκον $36000 : 9$, δηλ. τοῦ 36000 διὰ τοῦ ἐπιτοκίου, λέγεται ***σταθερὸς διαιρέτης.***

Ὥστε: ***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν τόκον ἑνὸς κεφαλαίου δι' ὀλίγας ἡμέρας διαιροῦμεν τὸν τοκάριθμον διὰ τοῦ σταθεροῦ διαιρέτου.***

ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

285. Πρόβλημα. 1) Ποῖον κεφάλαιον τοκιζόμενον πρὸς 8 % εἰς 5 ἔτη ἔφερε τόκον 2000 δρ.;

Τὸ κεφάλαιον πρὸς μὲν τὸν τόκον εἶνε ἀνάλογον, πρὸς τὸν χρόνον δὲ ἀντίστροφον.

Κεφάλαιον	100δρ.	εἰς	1	ἔτος	φέρει	τόκον	8δρ.
»	x	»	5	ἔτη	»	»	2000δρ.

$$x = K = 100\delta\rho. \times \frac{2000}{8} \times \frac{1}{5} = \frac{2000 \times 100}{8 \times 5} = \frac{T \times 100}{E \times X} = 5000\delta\rho.$$

Ὅθεν: ***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ κεφάλαιον πολλαπλασιάζομεν***

τὸν τόκον ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τοῦ ἐπιτοκίου ἐπὶ τὸν χρόνον, λογιζόμενον εἰς ἔτη.

2) Ποῖον κεφάλαιον τοκιζόμενον πρὸς 8 % εἰς 3 ἔτη καὶ 3 μῆνας ἔφερε τόκον 780 δρ. ;

$$K = \frac{T\times 100}{E\times X} = \frac{780\times 100}{8\times 3\frac{3}{12}} = 3000 \text{ δρ.}$$

ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

286. Πρόβλημα. 1) Εἰς πόσον χρόνον 4000δρ. τοκιζόμεναι πρὸς 6 % ἔφερον τόκον 540δρ. ;

Ὁ χρόνος εἶνε πρὸς μὲν τὸν τόκον ἀνάλογος πρὸς δὲ τὸ κεφάλαιον ἀντίστροφος.

Κεφάλαιον	100δρ.	εἰς	1 ἔτος	φέρει	τόκον	6δρ.
»	4000	»	x	»	»	540δρ.

$$x = 1\text{ἔτ.} \times \frac{540}{6}\times\frac{100}{4000} = \frac{540\times 100}{6\times 4000} = \frac{T\times 100}{E\times K} = \frac{54}{24}\text{ ἔτ.} =$$
$= 2$ ἔτ. 3 μην.

Ὅθεν: ***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν χρόνον πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τοῦ ἐπιτοκίου ἐπὶ τὸ κεφάλαιον.***

2) Εἰς πόσον χρόνον 2000δρ. τοκιζόμεναι πρὸς 9 % φέρουν τόκον 45δρ. ;

$$X = \frac{T\times 100}{E\times K} = \frac{45\times 100}{9\times 2000} = \frac{1}{4}\text{ ἔτ.} = 3 \text{ μῆνες.}$$

ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΟΥ ΕΠΙΤΟΚΙΟΥ

287. Πρόβλημα 1) Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον τοκιζόμεναι 3000 δρ. εἰς 3 ἔτη φέρουν τόκον 585 δρ. ;

Ζητοῦμεν τὸ ἐπιτόκιον, δηλ. τὸν τόκον τῶν 100 δρ εἰς 1 ἔτος, γνωρίζοντες τὸν τόκον τῶν 3000 δρ. εἰς 3 ἔτη.

Ὁ τόκος εἶνε ἀνάλογος πρὸς τὰ λοιπὰ ποσά.

Κεφάλαιον	3000 δρ.	εἰς	3 ἔτη	φέρει	τόκον	585 δρ.
»	100	»	1 ἔτος	»	»	x »

$$x = E = 585 \times\frac{100}{3000}\times\frac{1}{3} = \frac{585\times 100}{3000\times 3} = \frac{T\times 100}{K\times X} = 6{,}5\,\%$$

Ὅθεν: ***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐπιτόκιον, πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τοῦ κεφαλαίου ἐπὶ τὸν χρόνον, λογιζόμενον εἰς ἔτη.***

2) Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον τοκιζόμεναι 2000δρ. εἰς 3 ἔτη 4μην. φέρουν τόκον 500δραχμάς ;

$$E = \frac{T \times 100}{K \times X} = \frac{500 \times 100}{2000 \times 3\frac{4}{12}} = \frac{500 \times 100}{2000 \times \frac{40}{12}} = \frac{500 \times 100 \times 12}{2000 \times 40} =$$

$= 7{,}5\,^0/_0$.

Τοὺς τέσσαρας κανόνας, διὰ τῶν ὁποίων εὑρίσκομεν ἓν ἕκαστον ἐκ τῶν ποσῶν τοῦ τόκου, ὅταν δίδωνται τὰ λοιπὰ τρία, δυνάμεθα νὰ περιλάβωμεν εἰς τὸν ἑξῆς :

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν τόκον, πολλαπλασιάζομεν τὰ τρία ἄλλα ποσὰ καὶ τὸ γινόμενόν των διαιροῦμεν διὰ 100, διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ ἕκαστον ἐκ τῶν ἄλλων ποσῶν, πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενον αὐτὸ διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων ποσῶν. (Τὸν χρόνον ὅμως πάντοτε πρέπει νὰ ὑπολογίζωμεν εἰς ἔτη).

Τύποι τοῦ τόκου.

$$T = \frac{K.E.X.}{100}, \quad K = \frac{T.100}{E.X}, \quad E = \frac{T.100}{K.X}, \quad X = \frac{T.100}{E.K}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 *556) Πόσον τόκον φέρουν 9870 δρ. πρὸς 15 $^0/_0$ ἀπὸ τῆς 1ης Αὐγούστου μέχρι 15 Σεπτεμβρίου τοῦ αὐτοῦ ἔτους ; (Νὰ λυθῇ διὰ τοῦ τοκαρίθμου).* *(185,06)*

557) Ποῖον κεφάλαιον τοκιζόμενον πρὸς 13,25 $^0/_0$ εἰς 165 ἡμέρας ἔφερε τόκον 437,25δρ. ; *(7200)*

2 *558) Ποῖον κεφάλαιον τοκιζόμενον πρὸς 7 $^0/_0$ μετὰ 3 ἔτη ἔγινε μαζὺ μὲ τοὺς τόκους του 6050 δρ. ; (Αἱ 100 δρ. μετὰ 3 ἔτη γίνονται μαζὺ μὲ τοὺς τόκους των 121)* *(5000)*

4 *559) Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον τοκιζόμεναι 7500 δρ. ἐπὶ 2,5 ἔτη ἔφερον τόκον 843,75 δρ. ;* *(4,5 $^0/_0$)*

5 *560) Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον πρέπει νὰ τοκισθῇ ἓν κεφάλαιον, ἵνα μετὰ 10 ἔτη διπλασιασθῇ καὶ πρὸς ποῖον ἵνα τριπλασιασθῇ ; (Ζητεῖται πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον τοκιζόμεναι π.χ. 100 δρ. εἰς 10 ἔτη φέρουν τόκον 100 δρ, ἢ 200 δρ. κλπ).* *(10 $^0/_0$. 20 $^0/_0$)*

6 *561) Εἰς πόσον χρονικὸν διάστημα κεφάλαιον 6400 δρ. τοκιζόμενον πρὸς 9 $^0/_0$ ἔγινε μαζὺ μὲ τοὺς τόκους του 6568 δραχμαί ;* *(3,5 μην.)*

7 *562) Εἰς πόσον χρόνον ἓν κεφάλαιον τοκιζόμενον πρὸς 12 $^0/_0$*

διπλασιάζεται καὶ εἰς πόσον τριπλασιάζεται; (Ἡ λύσις ὅπως εἰς τὸ 560ον πρόβλημα). (8ἔτ. 4 μην. 16 ἔτ. 8 μην.)

563) Πόσος εἶνε ὁ τόκος 350 λιρῶν 14 σελ. πρὸς 6 $^0/_0$ εἰς 84 ἡμέρας; (4λίρ. 18σελ. 2πέν.)

564) Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον 834 λίρ. 12 σελ. 7 πεν. εἰς 2 μην. 15 ἡμ. φέρουν τόκον 8 λίρ. 15 σελ.; (5 λίρ. 7 πεν. $^0/_0$)

565) Ποῖον κεφάλαιον τοκιζόμενον πρὸς 4 λιρ. 15 σελ. $^0/_0$ εἰς 7 μην. 6 ἡμ. ἔφερε τόκον 26 λίρ. 3 σελ.; (917λ. 10σ. 11π.)

566) Εἰς πόσον χρόνον 438 λίρ. 15 σελ. τοκιζόμεναι πρὸς 4 λ. 5 σ. $^0/_0$ ἔφερον τόκον 6λ. 17 σ. 3 π.; (3 μην. 28 ἡμ.)

567) Ποῖον κεφάλαιον τοκιζόμενον πρὸς 8 $^0/_0$ φέρει εἰς 3 ἔτη τόσον τόκον, ὅσον φέρουν 6000 δρ. εἰς 5 ἔτη; (10000)

568) Πρὸς πόσον τοῖς ἑκατὸν τοκιζόμεναι 4500 δρ. ἔφερον τόκον εἰς 5 $\frac{1}{5}$ ἔτη ὅσον 13650 πρὸς 4 $^0/_0$ εἰς 3 ἔτη; (7)

569) Εἰς πόσον χρόνον 36000 δρ. τοκιζόμεναι πρὸς 8 $^0/_0$ φέρουν τόκον τόσον, ὅσον φέρουν 3600 δρ. τοκιζόμεναι πρὸς 10 $^0/_0$ ἐπὶ 6 ἔτη; (9 μην.)

3000

570) Ἐδανείσθη εἰς 30000 δρ. πρὸς 10 $^0/_0$, διὰ νὰ ἐξοφλήσῃ δὲ τοῦτο πληρώνει 10000 κατ' ἔτος, ἀπὸ τὰς δόσεις ὅμως αὐτὰς πληρώνονται οἱ δεδουλευμένοι τόκοι· πόσα ὀφείλει ἀκόμη μετὰ τὴν τρίτην δόσιν; (6830)

571) Ἐδάνεισεν εἷς εἰς ἄλλον 15000 δρ. πρὸς 10 $^0/_0$ διὰ 4 ἔτη, ἐκράτησεν ὅμως τὸν τόκον ἀμέσως καὶ ἔδωσεν εἰς αὐτὸν τὸ ὑπόλοιπον· πόσον τοῖς ἑκατὸν πραγματικῶς τὸν ἐδάνεισεν;

(16 $\frac{2}{3}$ $^0/_0$)

572) Ἐδάνεισεν εἷς εἰς ἄλλον ἓν ποσὸν χρημάτων διὰ 5 ἔτη καὶ τὰ μὲν 2 πρῶτα ἔτη πρὸς 8 $^0/_0$, τὰ δὲ ἄλλα πρὸς 10 $^0/_0$, ἔλαβε δέ, ἀφοῦ παρῆλθον τὰ 5 ἔτη, διὰ τόκους καὶ κεφάλαιον μαζὺ 13140 δρ.· πόσον ἦτο τὸ δανεισθὲν ποσόν; (Θὰ εὕρωμεν πόσον θὰ γείνουν 100 δρ. εἰς 5 ἔτη.) (9000)

ΠΕΡΙ ΥΦΑΙΡΕΣΕΩΣ

288. Ὅταν εἷς ἔμπορος δανεισθῇ ἓν ποσὸν χρημάτων, π.χ. 1000δρ., πρὸς 10 $^0/_0$ διὰ τρεῖς μῆνας, δίδει εἰς τὸν δανειστὴν μίαν ἔγγραφον ἀπόδειξιν τοῦ χρέους του, εἰς τὴν ὁποίαν ἀναγράφεται τὸ δανεισθὲν ποσὸν τῶν 1000δρ. ηὐξημένον κατὰ τὸν

τὸν τόκον του, ἤτοι τὰς 25δρ., καὶ διὰ τῆς ὁποίας ὑπόσχεται νὰ πληρώσῃ τὸ χρέος του εἰς ὡρισμένην ἡμέραν.

Ἡ ἔγγραφος αὕτη ἀπόδειξις λέγεται ***γραμμάτιον.***

Τὰ γραμμάτια εἶνε τριῶν εἰδῶν:

α΄) Γραμμάτιον εἰς διαταγήν. Εἶνε τοῦτο μία ἀπόδειξις, διὰ τῆς ὁποίας ὁ δανειζόμενος ὑπόσχεται νὰ πληρώσῃ εἰς διαταγὴν τοῦ δανειστοῦ τὸ χρέος του εἰς ὡρισμένην ἡμέραν.

Ὑπόδειγμα γραμματίου εἰς διαταγήν.

Ἀθῆναι τῇ 5 Αὐγούστου 1930 Διὰ δρ. 1025

Τὴν 5 προσεχοῦς Νοεμβρίου ὑπόσχομαι καὶ ὑποχρεοῦμαι νὰ πληρώσω εἰς διαταγὴν τοῦ κ. Α. Κ. χιλίας εἴκοσι πέντε δραχμάς, ἃς παρ' αὐτοῦ ἔλαβον τοῖς μετρητοῖς.

Ὑπογραφὴ Β. Τ. Ὁδὸς Μιλτιάδου 124.

β΄) Συναλλαγματική. Εἶνε αὕτη ἓν ἔγγραφον, διὰ τοῦ ὁποίου ὁ δανειστὴς διατάσσει τὸν ὀφειλέτην νὰ πληρώσῃ τὸ χρέος του εἰς τρίτον ἢ εἰς διαταγὴν τρίτου εἰς ὡρισμένην ἡμέραν καὶ εἰς τὸ ὁποῖον ὁ ὀφειλέτης δηλώνει ὅτι ἀποδέχεται τὴν διαταγήν.

Ὑπόδειγμα συναλλαγματικῆς.

Ἀθῆναι τῇ 5 Αὐγούστου 1930 Διὰ δρ. 1025

Τὴν 5 προσεχοῦς Νοεμβρίου πληρώσατε διὰ τῆς παρούσης εἰς τὴν διαταγὴν τῆς ἐνταῦθα Ἐθνικῆς Τραπέζης, δραχμὰς χιλίας εἴκοσι πέντε, τὰς ὁποίας παρ' ἐμοῦ ἐλάβετε εἰς ἐμπορεύματα.

Ὑπογραφὴ Α. Κ. Δεκτὴ
Πρὸς τὸν κ. Β. Τ. Ἀθῆναι 5 Αὐγούστου 1930
Ὁδὸς Μυλτιάδου 149. Ὑπογραφὴ Β. Τ

γ΄) Ἐπιταγή. Εἶνε αὕτη ἓν ἔγγραφον, διὰ τοῦ ὁποίου ὁ δανειστὴς διατάσσει τὸν ὀφειλέτην νὰ πληρώσῃ ἓν ποσὸν εἰς τρίτον ἢ εἰς διαταγὴν τρίτου ἢ εἰς τὸν φέροντα τὸ ἔγγραφον τοῦτο, μόλις οὗτος τὸ παρουσιάσῃ εἰς αὐτόν.

Ὑπόδειγμα ἐπιταγῆς.

Ἀθῆναι τῇ 5 Αὐγούστου 1930. Διὰ δρ. 1025.

Πληρώσατε ἅμα τῇ ἐμφανίσει εἰς διαταγὴν τοῦ κ. Π. Σ. δραχμὰς 1025 εἰς χρέωσιν τοῦ παρ' ὑμῖν λογαριασμοῦ μου.

Πρὸς τὴν Ἐθνικὴν Τράπεζαν τῆς Ἑλλάδος
Ἐνταῦθα. Ὑπογραφὴ Α. Κ.

Τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον ἀναγράφεται εἰς τὸ γραμμάτιον, λέγεται ***ὀνομαστικὴ ἀξία*** τοῦ γραμματίου. Τὴν ἀξίαν ταύτην, ἤτοι τὰς 1025δρ., θὰ ἔχῃ τὸ γραμμάτιον τὴν ὡρισμένην ἡμέραν, κατὰ τὴν ὁποίαν θὰ πληρώσῃ τοῦτο ὁ ὀφειλέτης, καὶ ἡ ὁποία λέγεται **ἡμέρα λήξεως** τοῦ γραμματίου.

Ἂν ὁ κάτοχος τοῦ γραμματίου θελήσῃ νὰ τὸ προεξοφλήσῃ, ἤτοι νὰ τὸ πωλήσῃ εἰς ἄλλον, 2 μῆνας π. χ. πρὸ τῆς λήξεώς του, γράφει εἰς τὸ ὄπισθεν μέρος τοῦ γραμματίου

Νὰ πληρωθῇ εἰς διαταγὴν τοῦ κ. Μ. Ν. (τοῦ ἀγοραστοῦ)
Ἀθῆναι τῇ 5 Σεπτεμβρίου 1930.
Ὑπογραφὴ Α. Κ.

Ἡ διαταγὴ αὐτή, πρὸς τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ὑπακούσῃ ὁ ὀφειλέτης, νὰ πληρώσῃ δηλ. τὸ γραμμάτιον εἰς τὸν ἀγοραστὴν αὐτοῦ, ὀνομάζεται **ὀπισθογράφησις** τοῦ γραμματίου.

Ὁ ἀγοραστὴς τοῦ γραμματίου δύναται κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον νὰ τὸ πωλήσῃ εἰς ἄλλον καὶ οὗτος εἰς ἄλλον καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς. Ὥστε τὸ γραμμάτιον δύναται πρὶν λήξῃ νὰ διέλθῃ ἀπὸ τὰς χεῖρας πολλῶν ἀγοραστῶν.

Ἀφοῦ ὅμως τὸ γραμμάτιον δὲν ἔχῃ λήξῃ ἀκόμη, δὲν ἀξίζει τοῦτο κατὰ τὴν ἡμέραν τῆς προεξοφλήσεως ὅσον εἶνε ἡ ὀνομαστική του ἀξία, δηλ. 1025 δρ., ἀλλὰ ὀλιγώτερον. Θὰ κρατήσῃ λοιπὸν ὁ ἀγοραστὴς ἓν ποσὸν ἀπὸ τὰς 1025 δρ., τὸ ὁποῖον ποσὸν λέγεται **ὑφαίρεσις**.

Ὥστε: ***Ὑφαίρεσις λέγεται τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον κρατεῖται ἀπὸ ἓν γραμμάτιον, ὅταν προεξοφλῆται τοῦτο.***

Ὁ ἀγοραστὴς λοιπὸν τοῦ γραμματίου θὰ κρατήσῃ ἀπὸ τὰς 1025 δρ. τὸν τόκον τῶν χρημάτων, τὰ ὁποῖα θὰ δώσῃ εἰς τὸν πωλητήν, διὰ 2 μῆνας, ἤτοι διὰ τὸν χρόνον ὁ ὁποῖος θὰ παρέλθῃ ἀπὸ τὴν ἡμέραν κατὰ τὴν ὁποίαν δίδει τὰ χρήματα, μέχρι τῆς ἡμέρας κατὰ τὴν ὁποίαν θὰ τὰ λάβῃ, δηλ. ἀπὸ τὴν ἡμέραν τῆς προεξοφλήσεως μέχρι τῆς λήξεως τοῦ γραμματίου καὶ ὁ ὁποῖος τόκος λέγεται **ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις,** εἰς δὲ τὸν πωλητὴν θὰ δώσῃ τὸ ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον λέγεται **παροῦσα ἢ πραγματικὴ ἀξία** τοῦ γραμματίου.

Ὥστε: ***Ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις εἶνε ὁ τόκος τῆς παρούσης ἀξίας τοῦ γραμματίου διὰ τὸν χρόνον, ὁ ὁποῖος θὰ παρέλθῃ ἀπὸ τὴν ἡμέραν τῆς προεξοφλήσεως μέχρι τῆς λήξεως αὐτοῦ.***

Ὅπως βλέπομεν λοιπὸν ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου εἶνε ἄθροισμα τῆς παρούσης ἀξίας καὶ τῆς ὑφαιρέσεως.

Συνήθως ὅμως ὁ ἀγοραστὴς τοῦ γραμματίου κρατεῖ τὸν τόκον ὄχι τῶν χρημάτων, τὰ ὁποῖα δίδει, ἤτοι τῆς παρούσης ἀξίας, ἀλλὰ τὸν τόκον τῆς ὀνομαστικῆς, δηλ. τῶν 1025 δρ.

Ὁ τόκος οὗτος λέγεται ***ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις.***

Ὥστε: ***Ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις εἶνε ὁ τόκος τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας τοῦ γραμματίου διὰ τὸν χρόνον, ὁ ὁποῖος θὰ παρέλθῃ ἀπὸ τὴν ἡμέραν τῆς προεξοφλήσεως μέχρι τῆς λήξεως αὐτοῦ.***

Εἰς τὴν ἐξωτερικὴν λοιπὸν ὑφαίρεσιν ὁ ἀγοραστὴς τοῦ γραμματίου κρατεῖ τὸν τόκον κεφαλαίου μεγαλυτέρου ἀπὸ ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον δίδει, διὰ τοῦτο ἡ ὑφαίρεσις αὕτη εἶνε ἄδικος, προτιμᾶται ὅμως, διότι εἶνε εὐκολωτέρα, ἡ διαφορὰ ἄλλωστε μεταξὺ τῶν δύο ὑφαιρέσεων εἶνε σχετικῶς μικρά.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΞΩΤΕΡΙΚΗΣ ΥΦΑΙΡΕΣΕΩΣ

289. Τὰ προβλήματα τῆς ἐξωτερικῆς ὑφαιρέσεως εἶνε, ὅπως εἴδομεν, προβλήματα τόκου, μόνον ὅτι ὁ τόκος λέγεται ὑφαίρεσις, τὸ δὲ κεφάλαιον ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου.

1) Γραμμάτιον 1530 δρ. προεξοφλεῖται 4 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 6 %· ποία εἶνε ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσίς του:

$$\text{Ἐξ ὑφ.} = \text{Τ} = \frac{1530 \times 6 \times 4}{1200} = 30{,}60 \text{ δρ.}$$

$$\text{Παρ. ἀξ.} = 1530 - 30{,}60 = 1499{,}40 \text{ δρ.}$$

Εἰς τὰ προβλήματα τῆς ἐξωτερικῆς ὑφαιρέσεως ὑπάγεται καὶ τὸ ἑξῆς:

2) Ποία εἶνε ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία γραμματίου, τὸ ὁποῖον προεξωφλήθη 4 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 6 % ἀντὶ 1499,40 δρ.

Λύσις. Ἂν προεξωφλεῖτο γραμμάτιον 100 δρ. πρὸς 6 % 4 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του, θὰ ἔδιδεν ἐξ. ὑφ. $\frac{100 \times 6 \times 4}{1200} = 2$ δρ., ἑπομένως θὰ εἶχε παρ. ἀξ. $100 - 2 = 98$ δρ.

Ὥστε: Παρ. ἀξ. 98 δρ. ἀντιστοιχεῖ εἰς ὀνομ. 100 δρ.
» » 1499,40 δρ. » » » x

$$\text{Ὀν. ἀξ.} = 100 \times \frac{1499{,}40}{98} = 1530 \text{ δρ.}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΣΩΤΕΡΙΚΗΣ ΥΦΑΙΡΕΣΕΩΣ

290. Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα 1 τοῦ ἄνω ἐδαφίου μὲ ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν, θὰ εὕρωμεν πρῶτον πόσον μέρος τοῦ ἐν τῷ γραμματίῳ ποσοῦ πληρώνει ὁ ἀγοραστὴς αὐτοῦ, ὅταν δίδῃ εἰς τὸν πωλητὴν 100δρ., θὰ εὕρωμεν δηλ. εἰς παροῦσαν ἀξίαν 100δρ. πόση ὀνομαστικὴ ἀντιστοιχεῖ. Ἂν δὲ εἰς τὴν παροῦσαν ἀξίαν προσθέσωμεν καὶ τὴν ἐσωτερ. ὑφαίρ., δηλ. τὸν τόκον της, ἔχομεν τὴν ὀνομαστικήν. Ὁ τόκος ὅμως τῶν 100 δρ. εἰς 4 μῆνας πρὸς 6 % εἶνε 2δρ., ὥστε ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία εἶνε $100 + 2 = 102$δρ.

Λοιπὸν εἰς 102δρ. ὀν. ἀξ. ἀντιστοιχεῖ ἐσ. ὑφ. 2 καὶ π.α. 100
» 1530 » » » » » » x » » » y

$$x = \text{ἐσ. ὑ.} = \frac{2 \times 1530}{102} = 30\text{δρ.},$$

$$y = \text{π. ἀξ.} = \frac{100 \times 1530}{102} = 1500\ \text{δρ.}$$

Ὅθεν : ***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν, πολλαπλασιάζομεν τὴν ὀνομαστικὴν ἀξίαν τοῦ γραμματίου ἐπὶ τὸν τόκον τῶν 100δρ. διὰ τὸν χρόνον, ὁ ὁποῖος θὰ παρέλθῃ ἀπὸ τὴν ἡμέραν τῆς προεξοφλήσεως μέχρι τῆς λήξεως τοῦ γραμματίου καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀθροίσματος τοῦ τόκου τούτου καὶ τοῦ 100.***

Διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ τὴν παροῦσαν ἀξίαν πολλαπλασιάζομεν τὴν ὀνομαστικὴν ἀξίαν ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἰδίου ἀθροίσματος.

Τὰ λοιπὰ προβλήματα τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται ἓν οἱονδήποτε ἄλλο ποσόν, λύονται ὅπως τὰ προβλήματα τοῦ τόκου, μόνον ὅτι πρέπει νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψει ὅτι κεφάλαιον εἶνε ἡ παροῦσα ἀξία τοῦ γραμματίου.

Π.χ. 2) Γραμμάτιον 1640 δρ. προεξωφλήθη 4 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του μὲ ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν 40 δρ.· πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἔγινεν ἡ προεξόφλησις ;

$$K = 1640 - 40 = 1600, \quad X = 4\mu. \quad T = 40.$$

$$E = \frac{40 \times 1200}{1600 \times 4} = 7{,}5\ \%.$$

3) Ποῖον γραμμάτιον προεξωθλήθη 8 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του μὲ ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν 9 % ἀντὶ 1600 δρ. ;

$$K = 1600\text{δρ.}, \quad X = 8\mu., \quad E = 9\ \%.,$$

$$\text{Ἐσ. ὑφ.} = \frac{1600 \times 8 \times 9}{1200} = 96\ \text{δρ.}$$

Γραμμάτιον = παρ ἀξ. + ἐσ. ὑφ. = 1600 + 96 = 1696δρ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

573) Ποία εἶνε ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις γραμματίου 12640 δραχμῶν προεξοφλουμένου τὴν 3 Σεπτεμβρίου πρὸς 4,5 %, πληρωτέου δὲ τὴν 27 Δεκεμβρίου τοῦ ἰδίου ἔτους; (181,70. 179,12)

574) Γραμμάτιον 8000δρ. προεξωφλήθη πρὸς 6 % μὲ ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν 75 δραχμῶν τὴν 3 Ἰουνίου· ποία εἶνε ἡ ἡμερομηνία λήξεως αὐτοῦ; (29 Ἰουλίου)

575) Προεξωφλήθη τὴν 15 Μαΐου πρὸς 6 % ἓν γραμμάτιον πληρωτέον τὴν 9 Ἰουλίου μὲ ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν 27,50· ποία εἶνε ἡ ὀνομαστική του ἀξία; (3000, 3027,50)

576) Γραμμάτιον 8000 δρ. πληρωτέον τὴν 15 Ἰουνίου προεξωφλήθη μὲ ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν 96 δρ. τὴν 4 Ἀπριλίου· πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἔγινεν ἡ προεξόφλησις; (6 %. 6,0728 %)

577) Γραμμάτιον 6680δρ. προεξωφλήθη μὲ ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν 129 ἡμέρας πρὸ τῆς λήξεώς του μὲ ἐπιτόκιον 5 % καὶ μὲ προμήθειαν $\frac{5}{8}$ %· ποία εἶνε ἡ παροῦσα ἀξία του;

(6518,57. 652,52)

578) Ἔχει εἰς ἓν γραμμάτιον 1200δρ. λῆγον μετὰ 75 ἡμέρας, β΄ 1800δρ. λῆγον μετὰ 90 ἡμέρας καὶ γ΄ 2000 λῆγον μετὰ 120 ἡμέρας, θέλει δὲ νὰ τὰ ἀντικαταστήσῃ μὲ ἓν γραμμάτιον λῆγον μετὰ 80 ἡμέρας. Τὸ ἐπιτόκιον εἶνε 6 %· ποία θὰ εἶνε ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ νέου γραμματίου; (Ἡ πραγματικὴ ἀξία τοῦ νέου γραμματίου θὰ εἶνε τὸ ἄθροισμα τῶν πραγματικῶν ἀξιῶν τῶν τριῶν γραμματίων. Ἔχοντες ταύτην, τὸ ἐπιτόκιον καὶ τὸν χρόνον εὑρίσκομεν τὴν ὀνομαστικὴν ὡς εἰς τὸ πρόβλημα 2 τοῦ ἐδαφίου 289). (4984,46. 4984,96)

579) Νὰ ἀντικατασταθοῦν τὰ γραμμάτια τοῦ προηγουμένου προβλήματος μὲ ἓν γραμμάτιον ἐκ 5140δρ. καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ὁ χρόνος λήξεως αὐτοῦ. (Ἀφαιροῦντες τὴν παροῦσαν ἀξίαν τοῦ νέου γραμματίου ἀπὸ τὴν ὀνομαστικὴν εὑρίσκομεν τὴν ὑφαίρεσιν καὶ κατόπιν τὸν χρόνον). (259ἡμ. 269ἡμ.)

580) Νὰ λυθοῦν ὅλα τὰ ἀνωτέρω προβλήματα μὲ ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν.

581) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν δύο ὑφαιρέσεων εἰς τὸ πρόβλημα 573 εἶνε ὁ τόκος τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως εἰς τὸν αὐ-

τὸν χρόνον καὶ μὲ τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΜΕΡΙΣΜΟΥ

291. ***Ἀριθμοί τινες λέγονται ἀνάλογοι πρὸς ἄλλους ἰσοπληθεῖς, ἂν προκύπτουν ἀπὸ αὐτοὺς διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ των ἐπὶ ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.***

Π. χ. Ἂν οἱ ἀριθμοὶ 4, 6, 8 πολλαπλασιασθοῦν ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 3, προκύπτουν οἱ ἀριθμοὶ 12, 18, 24, οἱ ὁποῖοι λέγονται ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 4, 6, 8. Ἀλλὰ καὶ οἱ ἀριθμοὶ 4, 6, 8, λέγονται ἀνάλογοι πρὸς τοὺς 12, 18, 24, διότι προκύπτουν ἀπὸ αὐτοὺς διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἐπὶ $\frac{1}{3}$.

Πράγματι $12 \times \frac{1}{3} = 4$, $18 \times \frac{1}{3} = 6$, $24 \times \frac{1}{3} = 8$.

Ἀριθμοί τινες λέγονται ἀντιστρόφως ἀνάλογοι πρὸς ἄλλους ἰσοπληθεῖς, ὅταν εἶνε ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἀντιστρόφους αὐτῶν.

Π. χ. οἱ ἀριθμοὶ 12, 18, 24 εἶνε ἀντιστρόφως ἀνάλογοι πρὸς τοὺς $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$, διότι εἶνε ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἀντιστρόφους αὐτῶν, δηλ. πρὸς τοὺς 4, 6, 8.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕΡΙΣΜΟΥ

Α'). Ἁπλᾶ

292. Πρόβλημα 1). Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 90 εἰς τρία μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 4, 6, 8, νὰ προκύπτουν δηλ. τὰ μέρη ταῦτα ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς αὐτοὺς διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ των ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Λύσις. Ἂν ὁ μεριστέος ἀριθμὸς ἦτο τὸ ἄθροισμα $4 + 6 + 8 = 18$, τὰ μέρη θὰ ἦσαν 4, 6, 8. Ἂν ὁ μεριστέος ἀριθμὸς ἦτο 1, τὰ μέρη θὰ ἦσαν $\frac{4}{18}$, $\frac{6}{18}$, $\frac{8}{18}$.

Ἀφοῦ δὲ ὁ μεριστέος ἀριθμὸς εἶνε 90, τὰ μέρη θὰ εἶνε

$$\frac{4 \times 90}{18} = 20, \quad \frac{6 \times 90}{18} = 30, \quad \frac{8 \times 90}{18} = 40.$$

Ὅθεν : ***Διὰ νὰ μερίσωμεν ἕνα ἀριθμὸν εἰς μέρη ἀνάλογα ἄλλων δοθέντων ἀριθμῶν, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ ἕκαστον ἐκ τῶν δοθέντων καὶ τὰ γινόμενα διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν.***

14 γ δ θ κ ζη

293. Ἁπλοποιοῦντες τὰ κλάσματα $\frac{4\times90}{18}$, $\frac{6\times90}{18}$, $\frac{8\times90}{18}$ εὑρίσκομεν τὰ ἑξῆς: $\frac{2\times90}{9}$, $\frac{3\times90}{9}$, $\frac{4\times90}{9}$.

Ταῦτα ὅμως εἶνε τὰ μέρη, εἰς τὰ ὁποῖα μερίζεται ὁ ἀριθμὸς 90 ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 2. 3 καὶ 4, οἱ ὁποῖοι προκύπτουν ἀπὸ τοὺς 4, 6 καὶ 8 διὰ τῆς διαιρέσεώς των διὰ τοῦ κ. δ. 2. Ἑπομένως τὰ αὐτὰ μέρη εὑρίσκομεν εἴτε μερίσωμεν τὸν 90 ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 4, 6 καὶ 8 εἴτε ἀναλόγως τῶν 2, 3 καὶ 4.

Ὅθεν: ***Δυνάμεθα τοὺς ἀριθμούς, ἀναλόγως τῶν ὁποίων θὰ μερίσωμεν ἕνα ἄλλον ἀριθμόν, νὰ διαιροῦμεν ἢ νὰ πολλαπλασιάζωμεν μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.***

Παράδειγμα. Νὰ μερισθῇ ὁ 1100 ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν $\frac{3}{4}$, 2, $\frac{5}{6}$ καὶ 1. Πολλαπλασιάζομεν τοὺς $\frac{3}{4}$, 2, $\frac{5}{6}$, 1 ἐπὶ τὸ ε.κ.π. τῶν παρονομαστῶν των, τὸ 12, καὶ ἔχομεν $\frac{3}{4}\times12=9$, $2\times12=24$, $\frac{5}{6}\times12=10$, $1\times12=12$. Τὰ δὲ μέρη θὰ εἶνε $\frac{9\times1100}{55}=180$, $\frac{24\times1100}{55}=480$, $\frac{10\times1100}{55}=200$, $\frac{12\times1100}{55}=240$.

294. Πρόβλημα 2). Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 78 εἰς μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 4, 6 καὶ 8.

Λύσις. Διὰ νὰ μερίσωμεν τὸν ἀριθμὸν 78 εἰς μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 4, 6, 8, μερίζομεν αὐτὸν εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀντιστρόφους των, δηλ. πρὸς τοὺς $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$ καὶ $\frac{1}{8}$ ἢ πρὸς τοὺς ἀναλόγους πρὸς αὐτούς, τοὺς 6, 4, 3, τοὺς ὁποίους εὑρίσκομεν πολλαπλασιάζοντες αὐτοὺς ἐπὶ τὸ ε.κ.π. τῶν παρονομαστῶν των τὸ 24. Τὰ δὲ μερίδια θὰ εἶνε $\frac{6\times78}{13}=36$, $\frac{4\times78}{13}=24$, $\frac{3\times78}{13}=18$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

582) ***Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς*** 9240 ***ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν*** *α')* 7, 10, 3 *β')* 2, 5, 8, 11 *γ')* 4, 6, 8, 9.

583) ***Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς*** 557 ***ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν*** 3,4,7,9.

584) *Νὰ μερισθοῦν ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν* $\frac{2}{3}$, 1, $\frac{1}{6}$ *α΄) ὁ ἀριθμὸς* 147, *καὶ β΄) ὁ ἀριθμὸς* 344.

585) *Νὰ μερισθοῦν ἀντιστρόφως ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν* $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$, $2\frac{1}{5}$ *α΄) ὁ* 930 *καὶ β΄)* 234.

586) *Διέθεσεν εἰς* 30000 *δραχμὰς διὰ νὰ μοιρασθοῦν εἰς τρεῖς οἰκογενείας ἀναλόγως τῶν μελῶν ἑκάστης. Ἡ α΄ οἰκογένεια ἀπετελεῖτο ἀπὸ* 3 *ἄτομα, ἡ β΄ ἀπὸ* 5 *καὶ ἡ γ΄ ἀπὸ* 7· *πόσον θὰ λάβῃ ἑκάστη;* (6000, 10000, 14000)

587) *Μία οἰκογένεια ἀποτελουμένη ἀπὸ τὴν μητέρα,* 3 *υἱοὺς καὶ* 2 *θυγατέρας ἐκληρονόμησεν ἀπὸ ἕνα συγγενῆ της* 630000 *δρ., κατὰ τὴν διαθήκην ἡ μητέρα θὰ λάβῃ τὸ* $\frac{1}{3}$ *τῆς περιουσίας, ἑκάστη δὲ κόρη διπλάσιον παρὰ ὅσον ἕκαστος υἱός· πόσον θὰ λάβῃ ἕκαστος;* (210000, 60000, 120000)

588) *Τρεῖς ἀδελφοὶ ἐκληρονόμησαν ἀπὸ ἕνα συγγενῆ των* 360000 *δρ.· κατὰ τὴν διαθήκην πρέπει νὰ λάβῃ ὁ β΄ διπλάσια τοῦ α΄ καὶ ὁ γ΄ διπλάσια ἀπὸ ὅσον θὰ λάβουν ὁ α΄ καὶ ὁ β΄· πόσον θὰ λάβῃ ἕκαστος;* (40000, 80000, 240000)

589) *Τρεῖς ἄνθρωποι ἠγόρασαν ἀπὸ κοινοῦ ἓν οἰκόπεδον* 1200 *τετραγ. πήχεων πρὸς* 25 *δρ. τὸν πῆχυν, ὁ α΄ κατέβαλε* 10650 *δρ., ὁ β΄* 9975 *καὶ ὁ γ΄ τὰς ὑπολοίπους· πόσοι πήχεις ἀναλογοῦν εἰς ἕκαστον;* (426, 399, 375)

590) *Τὸ ὀξυγόνον εἶνε* 16 *φορὰς βαρύτερον τοῦ ὑδρογόνου, ἓν δὲ μέρος ὀξυγόνου καὶ δύο ὑδρογόνου παράγουν ὕδωρ· πόσον ὑδρογόνον καὶ πόσον ὀξυγόνον ὑπάρχει εἰς ὕδωρ βάρους* 36 *ὀκάδων;*

591) *Ὁ ἀὴρ ἀποτελεῖται κυρίως ἀπὸ* 21 *μέρη ὀξυγόνου καὶ* 79 *μέρη ἀζώτου· πόσον ὀξυγόνον καὶ πόσον ἄζωτον περιέχονται εἰς* 64 *κυβικὰ μέτρα ἀέρος;* (13,44. 50,56 *μέτρα*)

592) *Τὸ σκιροκονίαμα (μπετὸν) περιέχει* 2 *μέρη σιμέντου,* 3 *μέρη ἄμμου καὶ* 4 *μέρη σκίρων· πόσον ἐξ ἑκάστου τούτων ἀπαιτεῖται διὰ νὰ παρασκευασθοῦν* 56 *κυβικὰ μέτρα σκιροκονιάματος;* (12,444. 18,667. 24,889)

593) *Νὰ μοιρασθοῦν* 18500 *δρ. εἰς τρεῖς ἀνθρώπους, ὥστε ὁ β΄) νὰ λάβῃ τὰ* $\frac{4}{5}$ *τοῦ α΄ καὶ ὁ γ΄ τὰ* $\frac{5}{6}$ *τοῦ β΄· πόσον θὰ λάβῃ ἕκαστος;* (7500. 6000. 5000)

594) *Τρεῖς ἄνθρωποι διεμοιράσθησαν τὴν ἀσφάλειαν ἐκ 36000 λιρῶν ἑνὸς ναυαγήσαντος πλοίου, τὸ ὁποῖον εἶχον ἀπὸ κοινοῦ· ὁ α΄ εἶχε τὸ $\frac{1}{3}$, ὁ β΄ τὸ $\frac{1}{2}$ καὶ ὁ γ΄ τὸ ὑπόλοιπον· πόσον θὰ λάβῃ ἕκαστος;* (12000. 18000. 6000)

595) *Τρεῖς ἄνθρωποι ἀνέλαβον νά σκάψουν μίαν ἄμπελον ἀντὶ 372δρ., ὁ πρῶτος μόνος θὰ ἔσκαπτε ταύτην εἰς 6ἡμέρας, ὁ β΄ εἰς 7 καὶ ὁ γ΄ εἰς 7,5· ἀφοῦ θὰ τὴν σκάψουν ὁμοῦ πόσον μέρος θὰ σκάψῃ ἕκαστος καὶ πόσον θὰ λάβῃ ἀπὸ τὴν ἀμοιβήν;*

$\left(\frac{35}{93},\ \frac{10}{31},\ \frac{28}{93}.\ 140,\ 120,\ 112\right)$

596) *Ἀποθανὼν εἰς ἀφῆκε διὰ διαθήκης τὴν περιουσίαν του ἀποτελουμένην ἀπὸ 145000δρ. εἰς τοὺς 3 υἱούς του μὲ τὴν ἐντολὴν νὰ μοιρασθῇ αὕτη εἰς αὐτοὺς ἀντιστρόφως ἀναλόγως τῆς ἡλικίας των· ὁ πρῶτος ἦτο 20 ἐτῶν, ὁ δεύτερος 16 καὶ ὁ τρίτος 4· πόσον ἔλαβεν ἕκαστος;* (20000. 25000. 100000)

Β΄). Σύνθετα

295. Πρόβλημα. Δύο ποιμένες ἐμίσθωσαν ἓν λιβάδιον ἀντὶ 4500δρ. τὸ ἔτος· ὁ α΄ ἔθρεψεν ἐκεῖ 60 πρόβατα ἐπὶ 10μῆνας, ὁ δὲ β΄ 80 πρόβατα ἐπὶ 6 μῆνας· πόσον θὰ πληρώσῃ ἕκαστος;

Λύσις. Ὁ α΄ θὰ ἐπλήρωνε τὸ αὐτὸ ποσόν, ἂν ἔτρεφε $60 \times 10 = 600$ πρόβατα ἐπὶ 1μῆνα, ὁμοίως ὁ β΄ θὰ ἐπλήρωνε τὸ αὐτὸ ποσόν, ἂν ἔτρεφε $80 \times 6 = 480$ πρόβατα ἐπὶ 1μῆνα.

Ὥστε θὰ μερισθοῦν αἱ 4500δρ. εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 600 καὶ 480 ἢ τοὺς $600 : 120 = 5$ καὶ $480 : 120 = 4$. Οὕτως ὁ α΄ θὰ πληρώσῃ $\frac{4500 \times 5}{5+4} = 2500$ καὶ ὁ β $\frac{4500 \times 4}{9} =$ $= 2000$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

597) *Δύο ὁδηγοὶ αὐτοκινήτων ἀνέλαβον νὰ μεταφέρουν ἐμπορεύματα ἀντὶ 2750δρ.· ὁ α΄ μετέφερε 1000 ὀκάδας ἀπὸ ἀπόστασιν 15 χιλιομέτρων, ὁ δὲ β΄ 1500ὀκ. ἀπὸ ἀπόστασιν 8 χιλιομέτρων· πόσον θὰ λάβῃ ἕκαστος;* (1250, 1500)

598) *Τρεῖς ἐργάται ἐξετέλεσαν ἓν ἔργον ἀντὶ 1490δρ.· ὁ α΄ εἰργάσθη 4ἡμέρας ἐπὶ 10 ὥρας τὴν ἡμέραν, ὁ β΄ 5ἡμέρας ἐπὶ 9ὥρας τὴν ἡμέραν καὶ ὁ γ΄ 8 ἡμέρας ἐπὶ 8 ὥρας τὴν ἡμέραν· πόσον θὰ λάβῃ ἕκαστος;* (400, 450, 640)

δ' ἐξάμηνον τῇ 9/2/37

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

296. Εἰς τὰ προβλήματα τοῦ μερισμοῦ ὑπάγονται καὶ τὰ ***προβλήματα τῆς Ἑταιρείας, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται νὰ μοιρασθῇ τὸ κέρδος ἢ ἡ ζημία μιᾶς ἐπιχειρήσεως εἰς τοὺς συνεταίρους, οἱ ὁποῖοι τὴν ἀνέλαβον.***

Πρόβλημα. 1) Τρεῖς ἄνθρωποι ἵδρυσαν ἑταιρείαν διὰ μίαν ἐπιχείρησιν καὶ κατέβαλον τὰ ἑξῆς ποσά: ὁ α΄) 50000 δρ. ὁ β΄) 80000 καὶ ὁ γ΄) 150000 δρ.· εἰς τὸ τέλος τοῦ α΄ ἔτους εὗρον ὅτι ἐκέρδισαν ἐκ τῆς ἐπιχειρήσεως 56000 δρ.· πόσον θὰ λάβῃ ἕκαστος;

Τὸ κέρδος πρέπει νὰ μοιρασθῇ ἀναλόγως τῶν χρημάτων, τὰ ὁποῖα κατέβαλεν ἕκαστος, διότι ἂν εἷς καταβάλῃ διπλάσια ἄλλου, πρέπει νὰ λάβῃ ἐκ τοῦ κέρδους καὶ διπλάσια καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς. Θὰ μοιράσωμεν λοιπὸν τὸ κέρδος ἀναλόγως τῶν κατατεθέντων κεφαλαίων 50000, 80000, 150000 ἢ ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 5, 8 καὶ 15. Συνεπῶς τὸ μερίδιον τοῦ α΄ θὰ εἶνε $\frac{5\times 56000}{28}=10000$, τοῦ β΄ $\frac{8\times 56000}{28}=16000$ καὶ τοῦ γ΄ $\frac{15\times 56000}{28}=30000$.

2) Ἤρχισεν εἷς μίαν ἐπιχείρησιν μὲ 20000 δρ., μετὰ 10 μῆνας προσλαμβάνει συνέταιρον, ὁ ὁποῖος κατέθεσε 30000 δρ. μετὰ 2 ἔτη, ἀφ' ὅτου ἤρχισεν ἡ ἐπιχείρησις, εὗρον ὅτι ἐκέρδισαν 36000 δρ.· πόσον θὰ λάβῃ ἕκαστος;

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο καὶ τὰ κατατεθέντα κεφάλαια καὶ οἱ χρόνοι εἶνε διάφοροι, διότι ὁ χρόνος τοῦ πρώτου εἶνε 2 ἔτη ἢ 24 μῆνες, τοῦ β΄ εἶνε 10 μῆνες ὀλιγώτερον, ἤτοι 14 μῆνες, πρέπει λοιπὸν τὸ κέρδος νὰ μοιρασθῇ ἀναλόγως τῶν κεφαλαίων καὶ τῶν χρόνων.

Πρὸς τοῦτο σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς. Ὁ πρῶτος κατέβαλε 20000 δρ. ἐπὶ 24 μῆνας καὶ θὰ λάβῃ ἓν μερίδιον ἐκ τοῦ κέρδους. Ἂν ἤθελε νὰ λάβῃ τὸ αὐτὸ μερίδιον εἰς ἕνα μῆνα, ἔπρεπε νὰ καταθέσῃ κεφάλαιον 24 φορὰς μεγαλύτερον, ἤτοι $20000\times 24=480000$ δρ. Ὁμοίως τὸ μερίδιον, τὸ ὁποῖον θὰ λάβῃ ὁ β΄ καταθέσας 30000 δρ. ἐπὶ 14 μῆνας, εἶνε τὸ αὐτὸ μὲ τὸ μερίδιον, τὸ ὁποῖον θὰ ἐλάμβανεν, ἂν κατέθετεν ἐπὶ 1 μῆνα κεφάλαιον 14 φορὰς περισσότερον, ἤτοι $30000\times 14=420000$. Τὰ μερίδια λοιπόν, τὰ ὁποῖα θὰ λάβουν οἱ συνέταιροι, εἶνε τὰ αὐτὰ μὲ τὰ μερίδια, τὰ ὁποῖα θὰ ἐλάμβανον, ἂν κατέθετον ἐπὶ ἕνα μῆνα τὰ νέα κεφάλαια. Διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ ταῦτα θὰ μοιράσωμεν τὸ κέρδος ἀναλόγως τῶν 480000 καὶ 420000 ἢ τῶν 48 καὶ 42 ἢ τῶν 8 καὶ 7.

Οὕτω τοῦ α΄ εἶνε $\frac{8\times 36000}{15}=19200$, τοῦ β΄ $\frac{7\times 36000}{15}=16800$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

599) *Δύο συνέταιροι ἐκέρδισαν* 42000 *δρ., ὁ πρῶτος εἶχε καταθέσει* 80000 *δρ. εἰς τὴν ἐπιχείρισιν καὶ ἔλαβε μερίδιον ἀπὸ τὸ κέρδος* 24000 *δρ.· πόσον εἶχε καταβάλει ὁ β΄;* (60000)

600) *Δύο συνέταιροι ἐκέρδισεν* 12000 *δρ., τὸ κεφάλαιον τοῦ πρώτου ἦτο* 25000 *δρ. καὶ τὸ κέρδος τοῦ δευτέρου* 4500 *δρ.· ποῖον ἦτο τὸ κέρδος τοῦ α΄ καὶ τὸ κεφάλαιον τοῦ β΄;*
(7500, 15000)

601) *Δύο συνέταιροι κατέβαλον διὰ μίαν ἐπιχείρησιν* 30000 *δρ. καὶ ἐκέρδισαν* 9000 *δρ., ὁ β΄ ἔλαβεν ἐκ τοῦ κέρδους* 1800 *δρ. ὀλιγώτερον τοῦ α΄· ποῖον κεφάλαιον εἶχε καταθέσει ἕκαστος ἐκ τῶν δύο συνεταίρων;* (18000, 12000)

602) *Δύο συνέταιροι κατέβαλον εἰς μίαν ἐπιχείρησιν* 137000 *δρ. καὶ ἐκέρδισαν* 73980 *δρ.· ὁ α΄ κατέβαλεν* 29000 *δρ. περισσότερον τοῦ β΄· πόσον εἶνε τὸ μερίδιον ἐκ τοῦ κέρδους ἑκάστου ἐκ τῶν δύο συνεταίρων;* (44820, 29160)

603) *Ἔμπορος ἤρχισε μίαν ἐπιχείρησιν, διὰ τὴν ὁποίαν κατέβαλεν* 15000 *δρ., μετὰ* 8 *μῆνας προσέλαβεν συνέταιρον, ὁ ὁποῖος κατέθεσε τὸ αὐτὸ ποσόν, μετὰ* 10 *μῆνας προσλαμβάνει καὶ τρίτον συνέταιρον, ὁ ὁποῖος κατέθεσε καὶ αὐτὸς τὸ αὐτὸ ποσόν, μετὰ* 6 *μῆνας εὗρον ὅτι ἐκέρδισαν* 9200 *δρ.· πόσας θὰ λάβῃ ἕκαστος; (Εἰς τὸ πρόβλημα αὐτὸ τὰ κεφάλαια εἶνε τὰ αὐτὰ καὶ οἱ χρόνοι διάφοροι. Οὕτω τοῦ γ΄ ὁ χρόνος εἶνε* 6 *μῆνες, τοῦ β΄* 16 *μῆνες καὶ τοῦ α΄* 24 *μῆνες. Θὰ μοιρασθῇ λοιπὸν τὸ κέρδος ἀναλόγως τῶν χρόνων.)*
(4800, 3200, 1200)

604) *Δύο συνέταιροι κατέθεσαν κεφάλαια ἴσα εἰς μίαν ἐπιχείρησιν· τὸ κεφάλαιον τοῦ α΄ ἔμεινε* 18 *μῆνας καὶ ἔφερε κέρδος* 36000 *δρ., τὸ κεφάλαιον τοῦ β΄ ἔφερε κέρδος* 26000 *δρ.· πόσον χρόνον ἔμεινε τὸ κεφάλαιον τοῦ β΄ εἰς τὴν ἐπιχείρησιν;* (13μ.)

605) *Δύο συνέταιροι καταθέσαντες ἴσον ποσὸν διὰ μίαν ἐπιχείρησιν ἐκέρδισαν* 10105 *δρ., τὸ κεφάλαιον τοῦ α΄ ἔμεινεν* 24

μῆνας εἰς τὴν ἐπιχείρησιν, ὁ β' ἔλαβεν 4465 δρ. κέρδος· ποῖον εἶνε τὸ κέρδος τοῦ α' καὶ πόσον χρόνον ἔμεινεν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν τὸ κεφάλαιον τοῦ β'; (5640, 1ἔτ. 7μην.)

606) Τρεῖς ἄνθρωποι κατέθεσαν ἕν ποσὸν χρημάτων διὰ μίαν ἐπιχείρησιν· τὸ κεφάλαιον τοῦ β' εἶνε 0,75 τοῦ κεφαλαίου τοῦ α' καὶ τοῦ γ' τὰ 0,50 τοῦ κεφαλαίου τοῦ β'. Ἡ ἐπιχείρησις ἔφερε κέρδος 26350 δρ., τὸ ὁποῖον εἶνε τὸ 20 % τοῦ κατατεθέντος ποσοῦ· ποῖον εἶνε τὸ μερίδιον ἐκ τοῦ κέρδους ἑκάστου καὶ ποῖον τὸ κατατεθὲν ποσόν; (12400, 9300, 4650, 131750)

607) Εἷς ἐπιχειρηματίας ἤρχισε μίαν ἐπιχείρησιν τὴν 7 Ἀπριλίου τοῦ 1927, διὰ τὴν ὁποίαν κατέβαλεν 50000 δρ. Τὴν 14ην ~~τοῦ ἑπομένου~~ Ἰουνίου προσέλαβε συνέταιρον, ὁ ὁποῖος κατέβαλε 33500 δρ. καὶ τὴν 6 Ὀκτωβρίου προσέλεβε τρίτον, ὁ ὁποῖος κατέβαλε 40000 δρ. Τὴν 4 Σεπτεμβρίου 1928 ἡ ἐπιχείρησις εἶχε φέρει κέρδος 60000 δρ., ἐκ τοῦ ὁποίου ὁ πρῶτος ὡς διευθυντὴς λαμβάνει 8%· πόσον θὰ λάβῃ ἕκαστος ἐκ τῶν συνεταίρων; (31100,54. 15294,66. 13604,78)

608) Τρεῖς συνέταιροι ἐκέρδισαν 150000 δρ.· τὰ κεφάλαιά των εἶνε ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 4, 5 καὶ 7· πόσον θὰ λάβῃ ἕκαστος; (37500, 46875, 65625)

609) Εἷς ἐπιχειρηματίας ἤρχισε μίαν ἐπιχείρησιν καταθέσας 126000 δρ., μετὰ 3 μῆνας προσλαμβάνει συνέταιρον, ὁ ὁποῖος κατέθεσεν 7000 δρ., 3 μῆνας βραδύτερον προσλαμβάνει καὶ τρίτον συνέταιρον, ὁ ὁποῖος κατέθεσε 15000 δρ.· μετὰ 1 μῆνα ἀπὸ τὴν πρόσληψιν τοῦ γ' συνεταίρου ἀπεσύρθη ἐκ τῆς ἐπιχειρήσεως ὁ πρῶτος καὶ εἰς τὸ τέλος ἑνὸς ἔτους ἡ ἐπιχείρησις ἐκαθάρισε μὲ ζημίαν 7500 δρ.· πόσον θὰ πληρώσῃ ἕκαστος συνέταιρος;

(6391,30. 456,52. 752,17)

610) Ἤρχισεν εἷς μίαν ἐμπορικὴν ἐπιχείρησιν μὲ 120000 δρ., μετὰ 8 μῆνας προσλαμβάνει συνέταιρον, ὁ ὁποῖος κατέθεσεν 200000 δρ., 10 μῆνας βραδύτερον προσλαμβάνει καὶ τρίτον συνέταιρον, ὁ ὁποῖος κατέθεσεν ἀμέσως μὲ 300000 δρ., μετὰ δὲ 3 μῆνας ἄλλας 60000 δρ., μετὰ παρέλευσιν 2 ἐτῶν, ἀφ' ὅτου ἤρχισεν ἡ ἐπιχείρησις, προέκυψε κέρδος 50000 δρ.· πόσον θὰ λάβῃ ἕκαστος συνέταιρος, ἂν ὁ πρῶτος λαμβάνῃ ἐκ τῶν κερδῶν ἐκτὸς τοῦ μεριδίου του καὶ 4% ὡς διευθυντὴς τῆς ἐπιχειρήσεως;

(19151,36. 19057,07. 11791,56)

611) *Τέσσαρες συνέταιροι κατέθεσαν διὰ μίαν ἐπιχείρησιν* 20000 *δρ.,* 50000 *δρ.,* 55000 *δρ.* 42300 *δρ., ὁ πρῶτος ἐπὶ* 2 *ἔτη* 5 *μῆνας, ὁ δεύτερος ἐπὶ* 1 *ἔτος* 6 *μῆνας καὶ ὁ τρίτος ἐπὶ* 7 *μην. Ἡ ἐπιχείρησις ἀπέφερε κέρδος* 120000 *δρ., ἐκ τῶν ὁποίων τὰ* $\frac{2}{9}$ *ἔλαβεν ὁ τρίτος ὡς μερίδιον· πόσον ἔλαβεν ἕκαστος καὶ ἐπὶ πόσον χρόνον τὸ κεφάλαιον τοῦ 4ου ἔμεινεν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν;* (29025,91. 45040,21. 19267,20. 26666,66. 1 *ἔτ.* 18*ἡμ.*)

ΠΕΡΙ ΜΕΣΟΥ ΟΡΟΥ

297. Εἷς σιδηρόδρομος διήνυσε τὴν α΄ ὥραν ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεώς του 25χιλιόμετρα, τὴν β΄ 27 χιλιόμετρα, τὴν γ΄ 30 χιλιόμετρα καὶ τὴν δ΄ 34 χιλιόμετρα· ἂν διήνυε εἰς τὰς 4ὥρας τὸ αὐτὸ διάστημα, ἀλλὰ εἰς ἑκάστην ὥραν διήνυε ἴσον διάστημα, πόσον θὰ διήνυε τὴν ὥραν.

Λύσις. Εἰς τὰς 4 ὥρας διήνυσε 25+27+30+34 χιλιόμετρα. Ἂν εἰς ἑκάστην ὥραν διήνυεν ἴσον διάστημα, θὰ διήνυεν

$$\frac{25+27+30+34}{4}=\frac{116}{4}=29 \text{ χιλ.}$$

Τὸ πηλίκον τοῦτο τοῦ ἀθροίσματος ὁμοειδῶν ποσῶν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, ὁ ὁποῖος ἐκφράζει τὸ πλῆθος αὐτῶν, ὀνομάζεται ἀριθμητικὸν μέσον ἢ μέσος ὅρος αὐτῶν. Τοὺς μέσους ὅρους μεταχειριζόμεθα εἰς διαφόρους περιστάσεις, ἰδίως ὅμως εἰς τὰς καταμετρήσεις, ὅπου συμβαίνουν ἀναπόφευκτα λάθη. Μετροῦμεν τότε τὸ αὐτὸ ποσὸν πολλὰς φορὰς καὶ ὡς πιθανωτέραν τιμὴν αὐτοῦ λαμβάνομεν τὸν μέσον ὅρον τῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι εὑρίσκονται ἀπὸ τὰς καταμετρήσεις ταύτας.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

612) *Μία ὁδὸς μετρηθεῖσα τρεῖς φορὰς εὑρέθη ὅτι ἔχει μῆκος τὴν α΄ φορὰν* 27,954 *χιλιόμετρα, τὴν β΄* 27,963 *χιλιόμετρα καὶ τὴν γ΄* 27,969 *χιλιόμετρα· ποῖον εἶνε τὸ πιθανότερον μῆκος τῆς ὁδοῦ.* (27,962)

613) *Ὁ ἄρτος ἐτιμᾶτο τὴν α΄ ἑβδομάδα ἑνὸς μηνὸς* 8,70 *δρ. τὴν ὀκᾶν, τὴν β΄* 8,10 *δρ. τὴν ὀκᾶν, τὴν γ΄* 8,80 *καὶ τὴν δ΄* 8,20. *πόσον ἐτιμᾶτο ἡ ὀκᾶ κατὰ μέσον ὅρον τὸν μῆνα αὐτόν;* (8,45)

614) *Ταμίας ἔχει μηνιαῖον μισθὸν* 4500 *δρ., λαμβάνει δὲ καὶ ποσοστά, τὰ ὁποῖα κατὰ τοὺς* 3 *πρώτους μῆνας τοῦ ἔτους ἦσαν*

1561,20 897,60 *καὶ* 1280,70· *ποῖον ἦτο κατὰ μέσον ὅρον τὸ μηνιαῖον εἰσόδημά του κατὰ τὴν τριμηνίαν αὐτήν;* (5746,50)

615) *Μία οἰκία ἐνοικιάσθη τὸ α' ἔτος ἀντὶ* 5400 *δρ. τὸν μῆνα, τὸ β' ἔτος ἀντὶ* 4800 *δρ., τὸ γ' ἔτος ἀντὶ* 6000 *δρ., τὸ δ' ἀντὶ* 6300 *δρ. καὶ τὸ ε' ἀντὶ* 5820 *δρ.· πόσον ἦτο κατὰ μέσον ὅρον τὸ ἐτήσιον εἰσόδημα τῆς οἰκίας κατὰ τὴν πενταετίαν αὐτήν;* (67968)

616) *Ὁ μέσος ὅρος τῶν ἐξόδων μιᾶς οἰκογενείας τὴν πρώτην τριμηνίαν τοῦ ἔτους ἦτο* 5730,60, *τὴν δευτέραν* 4970,20, *τὴν τρίτην* 5342,40 *καὶ τὴν τετάρτην* 5637,80· *ποῖος ἦτο ὁ μέσος ὅρος ὅλου τοῦ ἔτους;* (5420,25)

617) *Αἱ θερμοκρασίαι εἰς ἕνα τόπον τῶν* 24 *ὡρῶν ἑνὸς ἡμερονυκτίου ἀπὸ τοῦ μεσονυκτίου κατὰ σειρὰν ἦσαν αἱ ἑξῆς:* 4° 3° 2° 2°,3 3° 4° 5° 6° 7°,7 9°,4 11°,3 13°,2 14° 3 15°,4 16°,5 15°,2 14° 13° 12° 11° 10°,5 8°,5 7°,3 5°· *ποία εἶνε ἡ μέση θερμοκρασία τοῦ ἡμερονυκτίου;* (8°,9).

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΡΟ·Υ·ΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ

Α'). Ταμείου ἀσφαλείας

298. Πολλάκις μερικοὶ ἐπαγγελματίαι ἱδρύουν ἓν ταμεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον καταθέτουν κατὰ μῆνα ἓν ὡρισμένον ποσὸν ἐκ τῶν εἰσπράξεών των, μὲ τὸν σκοπὸν ὅπως, ὅταν γίνουν ἀνίκανοι πρὸς ἐργασίαν εἴτε ἕνεκα γήρατος εἴτε ἕνεκα ἀσθενείας, λαμβάνουν ἀπὸ τὸ ταμεῖον αὐτὸ κατὰ μῆνα ἓν ὡρισμένον ποσὸν χρημάτων διὰ τὴν συντήρησίν των.

Τὸ ποσὸν αὐτὸ ὀνομάζεται ***σύνταξις***, τὸ δὲ ταμεῖον ***ταμεῖον ἀσφαλείας***.

618) Τὸ Ταμεῖον Ἀσφαλείας μερικῶν Ὑπαλλήλων ἔχει περιουσίαν 5000000 δραχμῶν τοκιζομένην πρὸς 6 %, ἔχει προσέτι κατά τι ἔτος 5000 μετόχους μὲ μηνιαῖον μισθὸν 1000δρ., 2000 μὲ μηνιαῖον μισθὸν 1500δρ., 1000 μὲ μηνιαῖον μισθὸν 2000δρ., 500 μὲ 3000δρ. καὶ 250 μὲ 4500δρ., παρὰ τῶν ὁποίων εἰσπράττει 5,5 % ἐπὶ τοῦ μηνιαίου μισθοῦ ἑκάστου, δίδει δὲ εἰς 500 συνταξιούχους του μηνιαίαν σύνταξιν δρ. 450, εἰς 200 δρ. 675, εἰς 100 δρ. 900, εἰς 50 δρ. 1250 καὶ εἰς 25 δρ. 2000· πόσα θὰ μείνουν εἰς τὸ ταμεῖον κατὰ τὸ τέλος τοῦ ἔτους αὐτοῦ; (1882500)

Β'). Σχολικοῦ Ταμείου

299. Τὸ ταμεῖον ἑνὸς σχολείου προϋπολογίζεται νὰ ἔχῃ κατά τι ἔτος τὰ ἑξῆς ἔσοδα:

619) 1) Τοὺς τόκους ἐκ περιουσίας 30000δρ. κατατεθειμένης εἰς μίαν Τράπεζαν πρὸς 4 %.

2) Τὸ σχολεῖον ἔχει κατὰ τὸ ἔτος αὐτὸ 65 μαθητὰς εἰς τὴν α' τάξιν, 60 εἰς τὴν β', 58 εἰς τὴν γ', 53 εἰς τὴν δ', 48 εἰς τὴν ε' καὶ 41 εἰς τὴν στ'. Ἐξ ἑκάστου τούτων εἰσπράττει 6δρ. κατὰ μῆνα ἐπὶ 10 μῆνας.

3) Ὑπολογίζεται ὅτι θὰ προαχθοῦν καὶ θὰ ἀπολυθοῦν 80 % ἐκ τῶν μαθητῶν αὐτῶν, ἀπὸ τοὺς ὁποίους θὰ εἰσπραχθοῦν 4δρ. δι' ἕκαστον ἐνδεικτικὸν καὶ 10δρ. δι' ἕκαστον ἀπολυτήριον ἀπὸ τὰ ἔνσημα ἐκπαιδευτικῆς προνοίας.

4) Εἰς μίαν σχολικὴν ἑορτήν, μίαν θεατρικὴν παράστασιν καὶ μίαν σχολικὴν ἀγοράν, αἱ ὁποῖαι θὰ διοργανωθοῦν ὑπὸ τοῦ σχολείου ὑπολογίζεται νὰ διατεθοῦν 300 πεντάδραχμα εἰσιτήρια διὰ τὴν α', 450 δεκάδραχμα διὰ τὴν β' καὶ νὰ εἰσπραχθοῦν 3000δρ. ἀπὸ τὴν γ', τὰ δὲ ἔξοδα νὰ ἀνέλθουν εἰς 5 % διὰ τὴν ἑορτήν, 20 % διὰ τὴν παράστασιν καὶ 25 % διὰ τὴν ἀγορὰν ἐπὶ τῶν ἀκαθαρίστων εἰσπράξεων.

5) Ἀπὸ ἓν τοπικὸν λαχεῖον ἐκδιδόμενον διὰ τὴν ἐνίσχυσιν τοῦ ταμείου τοῦ ἄνω σχολείου, ὑπολογίζεται νὰ διατεθοῦν 1000 δίδραχμοι λαχνοί, τὰ δὲ ἔξοδα νὰ ἀνέλθουν εἰς 10 % ἐπὶ τῶν ἀκαθαρίστων εἰσπράξεων.

6) Ὑπολογίζεται 80 % ἀπὸ τοὺς γονεῖς καὶ κηδεμόνας νὰ εἰσφέρουν προαιρετικῶς κατὰ τὴν ἐγγραφήν, προαγωγὴν καὶ ἀπόλυσιν τῶν μαθητῶν κατὰ μέσον ὅρον 10δρ. ἕκαστος.

7) Ὑπολογίζεται νὰ εἰσπραχθοῦν προσέτι 2000δρ. εἰσφορὰ κοινότητος, 1500δρ. Ἐκκλησιαστικοῦ Συμβουλίου τοῦ ναοῦ καὶ 3000δρ. συνδρομὴ τοῦ κράτους.

Πόσα συνολικῶς προϋπολογίζεται νὰ εἰσπραχθοῦν κατὰ τὸ ἔτος αὐτὸ ὑπὸ τοῦ σχολικοῦ τούτου ταμείου; (40103)

8) Ὡς ἑξῆς δὲ προϋπολογίζονται τὰ ἔξοδα:

α') μηνιαῖον ἐπίδομα τοῦ ἐπιστάτου ἐκ 300 δρ. ἐπὶ 12μῆνας,

β') ἀντίτιμον 6 ὑελοπινάκων τῶν παραθύρων ἐξ 60δρ. ἕκαστον μετὰ τῶν ἐξόδων τοποθετήσεώς των,

γ') 1200δρ. δι' ὑδροχρωματισμὸν αὐτοῦ,

δ') ἀντίτιμον 15 θρανίων ἐξ 700δρ. ἕκαστον,

ε') 1000δρ. δι' ἀγορὰν βιβλίων τῆς βιβλιοθήκης, ϛ΄) 1500δρ. δι' ἐπισκευὴν καὶ ἀγορὰν διαφόρων ὀργάνων,

ζ΄) 10000δρ. δι' ὄργανα φυσικῆς,

η΄) 5000δρ. δι' ὄργανα καὶ ὑλικὰ χημείας.

Εἰς ποῖον ποσὸν προϋπολογίζεται ὅτι θὰ ἀνέλθουν τὰ ἔξοδα καὶ πόσον θὰ μείνῃ εἰς τὸ ταμεῖον κατὰ τὸ τέλος τοῦ ἔτους αὐτοῦ; (33160. 6943)

Γ΄). Κοινότητος

300. Μία κοινότης προϋπολογίζεται νὰ ἔχῃ κατά τι ἔτος τὰ ἑξῆς ἔσοδα.

620) 1) Ὑπολογίζεται ὅτι θὰ εἰσπραχθοῦν εἰς τὴν κοινότητα πρὸς κατανάλωσιν ἐμπορεύματα κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ ἔτους ἀξίας 1000000δρ. Ἐξ αὐτῶν θὰ εἰσπραχθῇ φόρος τοῦ δημοσίου κατὰ μέσον ὅρον 15 % ἐκ τοῦ ὁποίου 20 % θὰ δοθῇ εἰς τὴν κοινότητα.

2) Ὑπολογίζεται ὅτι θὰ παραχθοῦν 80000ὀκ. ἐλαίου, ἐπὶ τοῦ ὁποίου θὰ εἰσπραχθῇ φόρος τοῦ δημοσίου 7 %, κοινοτικὸς δὲ 30 % ἐπὶ τοῦ δημοσίου φόρου, ἡ δὲ ὀκᾶ τοῦ ἐλαίου ἔχει διατιμηθῇ πρὸς 25 δραχμάς.

3) Ὑπολογίζεται ὅτι θὰ παραχθοῦν 500000 ὀκ. οἴνου, ἐκ τῶν ὁποίων κατ' ἀπόφασιν τῆς κοινότητος, θὰ εἰσπραχθῇ φόρος 1,5 %, ἡ δὲ ὀκᾶ τοῦ οἴνου ἔχει διατιμηθῇ πρὸς 5δραχμάς.

4) Ἡ κοινότης ἔχει ὁρίσει 12δρ. φόρον ἐπὶ ἑκάστου στρέμματος ἀμπέλου χάριν τῆς ἀγροφυλακῆς, ἀνήκουν δὲ εἰς τοὺς κατοίκους τῆς κοινότητος 6000στρέμματα.

5) Ἡ κοινότης ἔχει ἐνοικιάσει 5000 στρέμματα βοσκησίμων γαιῶν πρὸς 5δρ. τὸ στρέμμα.

Πόσον προϋπολογίζονται ὅτι θὰ εἶνε ὅλα τὰ ἔσοδα τῆς κοινότητος κατὰ τὸ ἔτος αὐτό; (206500)

Ὡς ἑξῆς δὲ προϋπολογίζονται τὰ ἔξοδα τῆς κοινότητος.

1) Ἔξοδα παραστάσεως προέδρου 1000 δρ. κατὰ μῆνα.

2) Μισθὸς γραμματέως 1800δρ. κατὰ μῆνα.

3) Μισθὸς κλητῆρος 900δρ. κατὰ μῆνα.

4) Ἐνοίκιον κοινοτικοῦ καταστήματος 80 δρ. κατὰ μῆνα.

5) Βιβλία διοικητικὰ καὶ ληξιαρχικὰ 150δρ.

6) Ποσοστὰ εἰσπράξεως 4 % ἐπὶ τῶν εἰσπραχθησομένων.

7) Μισθὸς κοινοτικοῦ ἰατροῦ 1200δρ. κατὰ μῆνα.

8) Δαμαλισμὸς κατοίκων 6000δρ.

9) Ὑπὲρ τῶν σχολικῶν ταμείων:

α΄) τοῦ Δημοτικοῦ σχολείου 3000δρ.,

β΄) τοῦ ἡμιγυμνασίου 4000δρ..

10) Ὑπὲρ τοῦ μισθοῦ διοικητικῶν ὑπαλλήλων 7000δρ.

11) Ὑπὲρ τῆς μηχανικῆς ὑπηρεσίας τῶν κοινοτήτων 4000δρ.

12) Συντήρησις τῶν ἔργων ὑδρεύσεως 4000δρ.

13) Συντήρησις ὁδῶν 10000δρ.

14) Μισθὸς ἀρχιαγροφύλακος 1600δρ. κατὰ μῆνα.

15) Μισθὸς 5 ἀγροφυλάκων 1000δρ. κατὰ μῆνα δι' ἕκαστον.

Πόσα εἶνε ὅλα τὰ ἔξοδα τῆς κοινότητος καὶ πόσον θὰ ἀπομείνῃ εἰς τὸ ταμεῖον τῆς κοινότητος εἰς τὸ τέλος τοῦ ἔτους αὐτοῦ;

(185370. 21130)

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΙΞΕΩΣ

301. Ἔμπορος ἀνέμιξε σῖτον 3 εἰδῶν, ἀπὸ τὸ πρῶτον εἶδος, τὸ ὁποῖον ἐπώλει πρὸς 6 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν, ἔλαβε 500ὀκ., ἀπὸ τὸ δεύτερον εἶδος, τὸ ὁποῖον ἐπώλει πρὸς 8δρ. τὴν ὀκᾶν, ἔλαβε 300ὀκ. καὶ ἀπὸ τὸ τρίτον εἶδος, τὸ ὁποῖον ἐπώλει πρὸς 10δρ. τὴν ὀκᾶν, ἔλαβε 200ὀκ.· πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὴν ὀκᾶν τοῦ μίγματος, διὰ νὰ λάβῃ τὰ ἴδια χρήματα, τὰ ὁποῖα θὰ ἐλάμβανεν, ἂν ἐπώλει ἕκαστον εἶδος χωριστά;

Λύσις. Πρέπει νὰ εὕρωμεν πόσα χρήματα θὰ ἐλάμβανεν, ἂν ἐπώλει ἕκαστον εἶδος χωριστά.

Ἀπὸ τὸ α΄ εἶδος θὰ ἐλάμβανεν	6 δρ.	×500	=	3000δρ.
» » β΄ » » »	8 »	×300	=	2400 »
» » γ΄ » » »	10 »	×200	=	2000 »
Ὥστε » »	ἀπὸ τὰς	1000ὀκ.		7400 »

Ταύτας πρέπει νὰ λάβῃ τώρα ἀπὸ τὸ μῖγμα τῶν 1000ὀκάδων, ἄρα πρέπει νὰ πωλῇ τὴν ὀκᾶν τοῦ μίγματος 7400 : 1000 = 7,40 δραχμάς.

Τὰ τοιούτου εἴδους προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα ***δίδονται αἱ ποσότητες τῶν ἀναμιχθέντων πραγμάτων καὶ ἡ τιμὴ τῆς μονάδος ἑκάστου ἐξ αὐτῶν, καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ τῆς μονάδος τοῦ μίγματος, λέγονται προβλήματα τοῦ α΄ εἴδους τῆς μίξεως.***

Ἡ τιμὴ δὲ τῆς μονάδος τοῦ μίγματος εὑρίσκεται, ἂν πολλαπλασιάσωμεν ἑκάστην ποσότητα ἐπὶ τὴν τιμὴν τῆς μονάδος της καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων αὐτῶν διαι-

ρέσωμεν διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ποσοτήτων.

302. Ἔμπορος ἔχει δύο εἴδη οἴνου, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ μὲν α΄ πωλεῖ πρὸς 7δρ. τὴν ὀκᾶν, τὸ β΄ πρὸς 12δρ., θέλει δὲ νὰ κάμῃ ἐξ αὐτῶν μῖγμα 500ὀκ., τὸ ὁποῖον νὰ πωλῇ πρὸς 10δρ. τὴν ὀκᾶν καὶ νὰ λάβῃ τὰ αὐτὰ χρήματα· πόσον πρέπει νὰ λάβῃ ἀπὸ ἕκαστον εἶδος ;

Λύσις. Μία ὀκᾶ τοῦ πρώτου εἴδους ἐπωλεῖτο 7δρ., εἰς δὲ τὸ μῖγμα θὰ πωλῆται 10δρ., ὥστε ἀπὸ ἑκάστην ὀκᾶν τοῦ α΄ εἴδους, τὴν ὁποίαν θέτει εἰς τὸ μῖγμα, κερδίζει $10 - 7 = 3$δρ. Μία ὅμως ὀκᾶ τοῦ β΄ εἴδους ἐπωλεῖτο 12δρ., εἰς δὲ τὸ μῖγμα θὰ πωλῆται 10δρ., ὥστε ἀπὸ ἑκάστην ὀκᾶν τοῦ β΄ εἴδους, τὴν ὁποίαν θέτει εἰς τὸ μῖγμα ζημιώνεται $12 - 10 = 2$δρ.

Ἂν λοιπὸν θέτῃ εἰς τὸ α΄ εἶδος τόσας ὀκάδας, ὅσας δραχμὰς ζημιώνεται ἀπὸ ἑκάστην ὀκᾶν τοῦ β΄ εἴδους, δηλ. 2ὀκ., θὰ κερδίζῃ $3 \times 2 = 6$ δρ.

Ἂν δὲ θέτῃ ἀπὸ τὸ β΄ εἶδος τόσας ὀκάδας, ὅσας δραχμὰς κερδίζει ἀπὸ ἑκάστην ὀκᾶν τοῦ α΄ εἴδους, δηλ. 3ὀκ., θὰ ζημιώνεται $2 \times 3 = 6$ δρ.

Ἑπομένως ἂν θέτῃ 2ὀκ. ἀπὸ τὸ α΄ εἶδος καὶ 3 ἀπὸ τὸ β΄ καὶ σχηματίζῃ οὕτω μῖγμα 5ὀκάδων, οὔτε θὰ κερδίζῃ οὔτε θὰ ζημιώνεται. Ὥστε :

Εἰς 5 ὀκ. μίγματος θὰ θέτῃ 2 ὀκ. τοῦ α΄ καί 3 τοῦ β΄
» 500 » » » » x » » » » y » »

$$x = 2 \times \frac{500}{5} = 200 \text{ ὀκ. τοῦ α΄}, \quad y = \frac{3 \times 500}{5} = 300 \text{ὀκ. τοῦ β΄}.$$

Τὰ τοιούτου εἴδους προβλήματα, ***εἰς τὰ ὁποῖα δίδεται ἡ τιμὴ τῆς μονάδος ἑκάστου ἐκ δύο πραγμάτων, τὰ ὁποῖα θὰ ἀναμιχθοῦν, τὸ ποσὸν τοῦ μίγματος καὶ ἡ τιμὴ τῆς μονάδος αὐτοῦ καὶ ζητεῖται ἡ ποσότης ἑκάστου πράγματος, λέγονται προβλήματα τοῦ β΄ εἴδους τῆς μίξεως.***

Ἀπὸ τὴν λύσιν τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα, διὰ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν τὰς ζητουμένας ποσότητας.

Εὑρίσκομεν πρῶτον τὰς δύο διαφορὰς μεταξὺ τῆς τιμῆς τῆς μονάδος τοῦ μίγματος καὶ τῆς τιμῆς τῆς μονάδος ἑκάστου ἐκ τῶν δύο πραγμάτων.

Κατόπιν διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ποσότητα τοῦ ἑνὸς πράγ-

ματος πολλαπλασιάζομεν τὴν διαφοράν, ἡ ὁποία προκύπτει ἀπὸ τὸ ἄλλο πρᾶγμα ἐπὶ τὸ ποσὸν τοῦ μίγματος καὶ τὸ γινόμενον αὐτὸ διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο διαφορῶν.

Παράδειγμα. Εἷς ἔμπορος ἔχει σῖτον ἀξίας 4δρ. τὴν ὀκᾶν καὶ ἄλλον σῖτον ἀξίας 9δρ. τὴν ὀκᾶν, θέλει δὲ νὰ κάμῃ μῖγμα 600ὀκάδων ἀξίας 6δρ. τὴν ὀκᾶν· πόσον πρέπει νὰ λάβῃ ἀπὸ ἕκαστον εἶδος;

Διαφορὰ α΄ εἴδους $6 - 4 = 2$.

Διαφορὰ β΄ εἴδους $9 - 6 = 3$.

Ἄθροισμα διαφορῶν $2 + 3 = 5$.

Ποσὸν α΄ εἴδους $\frac{3 \times 600}{2+3} = 360$ὀκ.

Ποσὸν β΄ εἴδους $\frac{2 \times 600}{5} = 240$ὀκ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

621) Ἀνέμιξεν εἷς 100 ὀκ. οἴνου τῶν 7,50δρ. τὴν ὀκᾶν μὲ 230 ὀκ. τῶν 6δρ. τὴν ὀκᾶν καὶ μὲ ἄλλας 180ὀκ., τῶν 8,50 δρ. τὴν ὀκᾶν· ποία εἶνε ἡ τιμὴ τῆς ὀκᾶς τοῦ μίγματος; (7,21)

622) Ἐγέμισεν εἷς ἓν βαρέλιον τῶν 500ὀκ. μὲ 240ὀκ. οἴνου τῶν 6,40δρ. τὴν ὀκᾶν, μὲ 150ὀκ. τῶν 7,60δρ. τὴν ὀκᾶν καὶ τὸ ὑπόλοιπον μὲ οἶνον τῶν 8δρ. τὴν ὀκᾶν· πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὴν ὀκᾶν τοῦ μίγματος, ὥστε νὰ κερδίζῃ 12 %; (7,96)

623) Ἔχει εἷς σῖτον ἀξίας 5,60δρ. τὴν ὀκᾶν καὶ ἄλλον ἀξίας 4,80δρ. τὴν ὀκᾶν, τοὺς ἀναμιγνύει δὲ θέτων 5ὀκ. ἐκ τοῦ πρώτου καὶ 8 ἐκ τοῦ δευτέρου· πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὴν ὀκᾶν τοῦ μίγματος, ὥστε νὰ κερδίζῃ ἐξ αὐτῆς 1,20δρ.; (6,30)

524) Ἔμπορος ἀνέμιξε 800ὀκ. σίτου τῶν 6δρ. τὴν ὀκᾶν μὲ 1000ὀκ. τῶν 7,20δρ. τὴν ὀκᾶν, πωλεῖ δὲ τὸ μῖγμα πρὸς 7,65 δρ. τὴν ὀκᾶν· πόσον τοῖς ἑκατὸ κερδίζει; (14,69 %)

625) Ἔμπορος ἠγόρασεν 650 ὀκ. οἴνου τῶν 7,80δρ. τὴν ὀκᾶν καὶ ἀνέμιξεν αὐτὸν μὲ 289 ὀκ. τῶν 5 δρ. τὴν ὀκᾶν καὶ μὲ 50 ὀκ. ὕδατος· πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὴν φιάλην τῶν 300 δραμίων διὰ νὰ κερδίζῃ 15 %; (5,69)

626) Κατὰ ποίαν ἀναλογίαν πρέπει νὰ ἀναμιχθῇ ἔλαιον ἀξίας 21,50δρ. τὴν ὀκᾶν μὲ ἔλαιον τῶν 26,80δρ. τὴν ὀκᾶν, διὰ νὰ τιμᾶται ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος 25δρ.; (18 τοῦ α΄ 35 τοῦ β΄)

627) Κατὰ ποίαν ἀναλογίαν πρέπει νὰ ρίψῃ εἰς ὕδωρ εἰς οἶνον τῶν 8 δρ. τὴν ὀκᾶν, ἵνα καταβιβασθῇ ἡ τιμὴ τῆς ὀκᾶς εἰς 6 δρ.; (6 ὀκ. οἴνου 2 ὕδ.)

628) Θέλει εἷς νὰ κάμῃ μῖγμα σίτου 540 ὀκ. μὲ σῖτον τῶν 5,80 δρ. τὴν ὀκᾶν καὶ μὲ ἄλλον τῶν 4 δρ. τὴν ὀκᾶν, ὥστε ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος νὰ τιμᾶται 5 δρ.· πόσον πρέπει νὰ λάβῃ ἐξ ἑκάστου εἴδους; (300 α' 240 β')

629) Ἔχει εἷς 600 ὀκ. σίτου τῶν 7 δρ. τὴν ὀκᾶν· μὲ πόσον σῖτον τῶν 5,20 δρ. τὴν ὀκᾶν πρέπει νὰ τὸν ἀναμίξῃ, ἵνα ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος τιμᾶται 6 δρ.; (750)

630) Πόσον ὕδωρ πρέπει νὰ ρίψῃ εἷς εἰς οἶνον τῶν 8,50 δρ. τὴν ὀκᾶν, διὰ νὰ σχηματίσῃ μῖγμα 340 ὀκ. τῶν 5,30 δρ. τὴν ὀκᾶν; (212 οἴνου, 128 ὕδ.)

631) Ἓν βαρέλιον 500 ὀκ. οἴνου ἠγοράσθη ἀντὶ 3640 δρ.· πόσον ὕδωρ πρέπει νὰ ρίψῃ εἷς ἐντὸς αὐτοῦ, ἵνα σχηματισθῇ μῖγμα ἀξίας 5,80 δρ. τὴν ὀκᾶν; (127 ὀκ. 236 δρ.)

632) Ἔχει εἷς 500 ὀκ. ἐλαίου τῶν 23 δρ. τὴν ὀκᾶν, τὸ ὁποῖον ἀναμιγνύει μὲ 150 ὀκ. ἄλλης ποιότητος καὶ λαμβάνει μῖγμα ἀξίας 24,50 τὴν ὀκᾶν· ποία εἶνε ἡ τιμὴ τοῦ ἐλαίου τῆς β' ποιότητος; (29,50)

633) Ἔμπορος ἠγόρασε 200 ὀκ. οἰνοπνεύματος πρὸς 18 δρ. τὴν ὀκᾶν· πόσον ὕδωρ πρέπει νὰ προσθέσῃ διὰ νὰ κερδίσῃ 30 % ἐπὶ τῆς ἀξίας τοῦ οἰνοπνεύματος πωλῶν τὸ μῖγμα πρὸς 16 δρ. τὴν ὀκᾶν; (92,5) (94,5)

634) Ἀρτοποιὸς εἶχε 2 εἴδη ἀλεύρου τῶν 5,60 δρ. τὴν ὀκᾶν καὶ τῶν 6,50 δρ. τὴν ὀκᾶν, ἀναμιγνύει ταύτας εἰς ἀναλογίαν 2 πρὸς 3· πόσον πρέπει νὰ λάβῃ ἐξ ἑκάστου εἴδους διὰ νὰ κατασκευάσῃ 330 ὀκ. ἄρτου, ἂν 100 ὀκ. ἀλεύρου, παράγουν 132 ἄρτους τῆς μιᾶς ὀκᾶς καὶ πόσον τοῦ στοιχίζει τὸ ἄλευρον, τὸ ὁποῖον θὰ χρησιμοποιήσῃ; (100 ὀκ. 150 ὀκ. 1535 δρ.)

635) Ἠγόρασεν εἷς 300 ὀκ. οἰνοπνεύματος 45° πρὸς 12 δρ. τὴν ὀκᾶν καὶ 200 ὀκ. τῶν 52° πρὸς 18 δρ. τὴν ὀκᾶν· εἰς ποίαν τιμὴν ἠγόρασεν ἑκάστην φορὰν τὴν ὀκᾶν τοῦ καθαροῦ οἰνοπνεύματος; Ἐὰν ἀναμίξῃ τὰ δύο εἴδη ποίου βαθμοῦ θὰ εἶνε τὸ μῖγμα; (26,67. 34,62. 47°,8)

636) Ἠγόρασεν εἷς 1200 ὀκ. οἴνου τῶν 8 δρ. τὴν ὀκᾶν· μὲ πόσας ὀκάδας οἴνου τῶν 5,80 δρ. τὴν ὀκᾶν πρέπει νὰ ἀναμίξῃ τοῦ

τον, ἵνα τὸ μῖγμα στοιχίζει 7 δρ. ἡ ὀκᾶ; (1000)

627) *Ἀνέμιξεν εἰς 500 ὀκ. οἴνου τῶν 7,20 δρ. τὴν ὀκᾶν καὶ 400 ὀκ. τῶν 6 δρ. τὴν ὀκᾶν· μὲ πόσας ὀκάδας οἴνου τῶν 5 δρ. τὴν ὀκᾶν πρέπει νὰ ἀναμίξῃ τοῦτον ἵνα ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος τιμᾶται 6,80 δρ.;* (600)

628) *Οἰνοπώλης θέλει νὰ ἀναμίξῃ οἶνον τῶν 8 δρ. τὴν ὀκᾶν μὲ οἶνον τῶν 7 δρ. τὴν ὀκᾶν καὶ μὲ ὕδωρ κατ' ἀναλογίαν 20 %· πόσον πρέπει νὰ ἀναμίξῃ τῆς δευτέρας ποιότητος μὲ 348 ὀκ. τῆς πρώτης, ὥστε ἡ φιάλη τῶν 300 δραμίων τοῦ μίγματος νὰ στοιχίζῃ 5,10 ἡ ὀκᾶ;* (117)

629) *Ἔχει εἰς σῖτον τῶν 4,70 δρ. τὴν ὀκᾶν καὶ ἄλλον τῶν 6,80 δρ. τὴν ὀκᾶν καὶ θέλει νὰ κάμῃ μῖγμα ἐξ αὐτῶν 9800 ὀκάδων, τὸν ὁποῖον νὰ πωλῇ 5,90 δρ. τὴν ὀκᾶν καὶ νὰ κερδίζῃ 18 % ἐπὶ τῆς ἀξίας τοῦ μίγματος· πόσας ὀκάδας πρέπει νὰ λάβῃ ἐξ ἑκάστου εἴδους;* (8400. 1400)

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕΤΑΛΛΙΚΩΝ ΚΡΑΜΑΤΩΝ

303. Τὰ προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα τὰ ἀναμιγνυόμενα εἴδη εἶνε πολύτιμα μέταλλα καὶ ἄλλα τοιαῦτα κατωτέρας ἀξίας, λέγονται προβλήματα **μεταλλικῶν κραμάτων**, ὑπάγονται δὲ εἰς τὰ προβλήματα τῆς μίξεως.

Πρόβλημα 1) Συνεχωνεύθησαν 100 γραμμάρια χρυσοῦ βαθμοῦ καθαρότητος 0,900 καὶ 200 γραμ. χρυσοῦ βαθμοῦ καθαρότητος 0,750· ποῖος εἶνε ὁ βαθμὸς καθαρότητος τοῦ κράματος;

Λύσις. Εὑρίσκομεν πρῶτον πόσος καθαρὸς χρυσὸς ὑπάρχει εἰς ἕκαστον ἀπὸ τὰ δύο εἴδη τοῦ χρυσοῦ.

Εἰς 1 γρ. τοῦ α΄ εἴδους ὑπάρχει καθ. χρ. 0,900 γρ.
» » » » β΄ » » » » 0,750 ». Ὥστε
εἰς 100 γρ. τοῦ α΄ εἴδ. ὑπάρχει καθ. χρ. $0,900 \times 100 = 90$ γ.
» 200 » » β΄ » » » » $0,750 \times 200 = 150$ »

Ἄρα 300 γρ. κρᾶμα περιέχει καθ. χρυσὸν 240
1 » » » » » $\frac{240}{300} = 0,800$ γρ.

Ὥστε βαθμὸς καθαρότητος τοῦ κράματος θὰ εἶνε 0,800.

2) Ἔχει εἰς ἄργυρον τίτλου 0,950 καὶ ἄλλον τίτλου 0,700, θέλει δὲ ἐξ αὐτῶν νὰ κάμῃ κρᾶμα 600 γραμμαρ. τίτλου 0,800· πόσα γραμμάρια θὰ λάβῃ ἀπὸ ἕκαστον εἶδος;

Λύσις. Ἕκαστον γραμμάριον τοῦ α΄ εἴδους ἔχει καθαρὸν χρυσὸν 0,950, εἰς δὲ τὸ κρᾶμα πρέπει νὰ ἔχῃ 0,800 γρ., ἄρα περισσεύουν ἐξ αὐτοῦ 0,950 — 0,800 = 0,15 γρ.

Ἕκαστον γραμμάριον τοῦ β΄ εἴδους ἔχει καθαρὸν χρυσὸν 0,700 γρ., εἰς τὸ κρᾶμα πρέπει νὰ ἔχῃ 0,800, ἄρα τοῦ λείπουν 0,800 — 0,700 = 0,10 γρ.

Ὥστε ἂν λάβῃ ἀπὸ τὸ α΄ εἶδος τόσα γραμμάρια ὅσα ἑκατοστὰ τοῦ γραμμαρίου λείπουν ἀπὸ τὸ β΄, δηλ. 10 γρ., θὰ ἔχῃ περίσσευμα $0{,}15 \times 10 = 1{,}5$ γρ.

Ἂν λάβῃ ἀπὸ τὸ β΄ εἶδος τόσα γραμμάρια ὅσα ἑκατοστὰ περισσεύουν ἀπὸ τὸ πρῶτον, δηλ. 15 γρ., θὰ ἔχῃ ἔλλειμμα $0{,}10 \times 15 = 1{,}5$ γρ.

Ὅθεν ἂν λαμβάνῃ 10 γρ. ἀπὸ τὸ α΄ καὶ 15 ἀπὸ τὸ β΄ καὶ ἀποτελεῖ κρᾶμα 25 γρ., δὲν θὰ ἔχῃ οὔτε περίσσευμα οὔτε ἔλλειμμα. Ὥστε:

Εἰς 25 γρ. πρέπει νὰ εἶνε 10γρ. ἐκ τοῦ α΄ καὶ 15 ἐκ τοῦ β΄
» 600 » » » » x » » » » » y » » »

$$x = \frac{10 \times 600}{25} = 240 \text{ γρ. τοῦ α΄}, \quad y = \frac{15 \times 600}{25} = 360 \text{ τοῦ β΄}.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 *640) Συνεχώνευσεν εἰς 548 γρ. χρυσοῦ τίτλου 0,900, 647 γρ. τίτλου 0,840 καὶ 285γρ. τίτλου 0,650· πόσος εἶνε ὁ τίτλος τοῦ κράματος;* (0,825)

2 *641) Συνεχώνευσεν εἰς 980γρ. χρυσοῦ τίτλου 0,850 μὲ 46γρ. καθαροῦ χρυσοῦ· πόσος εἶνε ὁ τίτλος τοῦ κράματος;* (0,856)

3 *642) Κατὰ ποίαν ἀναλογίαν πρέπει νὰ ἀναμιχθῇ χρυσὸς τίτλου 0,875 μὲ χρυσὸν τίτλου 0,640 διὰ νὰ κατασκευασθῇ κρᾶμα τίτλου 0,700:* (12 : 35)

4 *643) Ἔχει εἰς ἄργυρον τίτλου 0,950 γρ. καὶ ἄλλον τίτλου 0,780· πόσον πρέπει νὰ λάβῃ ἀπὸ ἕκαστον εἶδος διὰ νὰ σχηματίσῃ κρᾶμα 2600 γρ. τίτλου 0,800;* (306, 2294)

5 *644) Ποῖος εἶνε ὁ τίτλος ἑνὸς κράματος ἀποτελουμένου ἀπὸ 42 γρ. ἀργύρου καὶ 8 γραμ. χαλκοῦ;* (0,840)

6 *645) Πόσος ἄργυρος πρέπει νὰ προστεθῇ εἰς τὸ προηγούμενον κρᾶμα, διὰ δὰ ἔχῃ τοῦτο τίτλον 0,900;* (30 γρ.)

646) Πόσος χαλκὸς πρέπει νὰ προστεθῇ εἰς τὸ ἴδιον κρᾶμα διὰ νὰ ἔχῃ τοῦτο τίτλον 0,835; (0,299 γρ.)

7 647) Πόσος καθαρὸς ἄργυρος ὑπάρχει εἰς ἓν κρᾶμα 4 χιλ. 300 γραμ. τίτλου 0,900; (3χμ. 870γρ.)

8 648) Ποῖον εἶνε τὸ βάρος ἑνὸς κράματος χρυσοῦ καὶ χαλκοῦ, τοῦ ὁποίου ὁ τίτλος εἶνε 0,850 καὶ τὸ ὁποῖον περιέχει 40 γραμμάρια χαλκοῦ; (266,666γρ.)

9 649) Ἐὰν συγχωνευθοῦν 400 γρ. ἀργύρου τίτλου 0,900 καὶ 149 γρ. τίτλου 0,835, ποῖος θὰ εἶνε ὁ τίτλος τοῦ κράματος; (0,882)

10 650) Πόσος χαλκὸς πρέπει νὰ συγχωνευθῇ μὲ 1200 γρ. καθαροῦ ἀργύρου, διὰ νὰ κατασκευασθοῦν νομίσματα τῶν 5 δραχμῶν καὶ πόσα τοιαῦτα θὰ κατασκευασθοῦν; (τίτλος 0,900). (1333,33 γρ. 53)

11 651) Πόσα νομίσματα τῶν 2 δραχμῶν εἶνε δυνατὸν νὰ κατασκευασθοῦν μὲ τὸ προηγούμενον κρᾶμα; (Τίτλος 0,835) (143)

12 652) Πόσος ἄργυρος πρέπει νὰ συγχωνευθῇ μὲ 50 γρ. χαλκοῦ, διὰ νὰ κατασκευασθοῦν νομίσματα τῶν 2δραχμῶν καὶ πόσα τοιαῦτα θὰ κατασκευασθοῦν; ἀργύρου 0,835 (303,03γρ. 30)

13 653) Πόσος χρυσὸς πρέπει νὰ συγχωνευθῇ μὲ 50γρ. χαλκοῦ, διὰ νὰ ἔχῃ τὸ κρᾶμα τίτλον 0,900, ποῖον θὰ εἶνε τὸ βάρος τοῦ κράματος, καὶ πόσα νομίσματα τῶν 20 δραχμῶν εἶνε δυνατὸν νὰ κατασκευασθοῦν μὲ αὐτό; (450γρ. 500γρ. 77)

14 654) Ἔχει εἰς 1500δρ. εἰς ἀργυρᾶ πεντάδραχμα· πόσον εἶνε τὸ βάρος τοῦ καθαροῦ ἀργύρου, ὁ ὁποῖος περιέχεται εἰς αὐτὰ καὶ μὲ πόσον χαλκὸν πρέπει νὰ συγχωνευθοῦν ταῦτα, διὰ νὰ ἔχῃ τὸ κρᾶμα τίτλον 0,835; (6750γρ. 583,83γρ.)

15 655) Συνεχώνευσεν εἰς ἄργυρον τίτλου 0,850 μὲ ἄλλον τίτλου 0,650 κατ' ἀναλογίαν 9 πρὸς 13· ποῖος εἶνε ὁ τίτλος τοῦ κράματος; (0,732)

16 656) Ἔχει εἰς 600γρ. χρυσοῦ τίτλου 0,750, ζητεῖται α') πόσον χαλκὸν πρέπει νὰ ἀφαιρέσῃ ἐξ αὐτοῦ ἵνα τὸ κρᾶμα γίνῃ τίτλου 0,900 καὶ β') πόσον χρυσὸν πρέπει νὰ προσθέσῃ διὰ νὰ ἔχῃ τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα; (100, 900)

17 657) Ἔχει εἰς 2500 γρ. χρυσοῦ τίτλου 0,855· πόσον χρυσὸν πρέπει νὰ συγχωνεύσῃ μετ' αὐτοῦ, διὰ νὰ γίνῃ τὸ κρᾶμα τίτλου 0,900; (1125)

18 658) Ἔχει εἰς 2300 γρ. ἀργύρου τίτλου 0,930 καὶ ἄλλον τίτλου 0,850· πόσον ἐκ τοῦ δευτέρου πρέπει νὰ συγχωνεύσῃ μετὰ

τοῦ πρώτου, διὰ νὰ λάβῃ κρᾶμα τίτλου 0,900; (1380)

659) Ἔχει εἰς ἄργυρον τίτλου 0,750 καὶ ἄλλον τίτλου 0,800, θέλει δὲ νὰ λάβῃ ἴσην ποσότητα ἐξ ἑκάστου καὶ νὰ τὰς συγχωνεύσῃ μὲ 2300 γρ. ἄλλου ἀργύρου τίτλου 0,950, διὰ νὰ σχηματισθῇ κρᾶμα 0,900· πόσον πρέπει νὰ λάβῃ ἐξ ἑκάστου εἴδους; (460)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Η'.

ΠΕΡΙ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

304. 1) Τρία παιδία θὰ μοιρασθοῦν ἐξ ἴσου 24 μῆλα· πόσα θὰ λάβῃ ἕκαστον;

Λύσις. Ἂν τὸ μερίδιον ἑκάστου παραστήσωμεν διὰ τοῦ x (ἐδ. 64), τὰ τρία μερίδια θὰ εἶνε $x+x+x=3x$, ὅλα ὅμως αὐτὰ πρέπει νὰ εἶνε 24 μῆλα, δηλ. $3x=24$.

Διαιροῦντες καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης διὰ τοῦ 3 θὰ ἔχωμεν $\frac{3x}{3}=\frac{24}{3}$ ἢ $x=8$ μῆλα.

Εἰς τὴν ἰσότητα $3x=24$ παρατηροῦμεν ὅτι περιέχει αὕτη ἓν γράμμα καὶ ὅτι εἶνε ἀληθής, μόνον ὅταν δώσωμεν εἰς τὸ γράμμα αὐτὸ μίαν ὡρισμένην τιμήν, τὴν τιμὴν 8.

Πράγματι $3.8=24$ ἢ $24=24$.

Ἂν δώσωμεν εἰς τὸν x ἄλλην τιμήν, π. χ. τὴν τιμὴν 7, θὰ ἔχωμεν $3.7=24$ ἢ $21=24$, τὸ ὁποῖον δὲν εἶνε ἀληθές.

Αἱ τοιαῦται ἰσότητες λέγονται **ἐξισώσεις.**

Σημείωσις. Ὑπάρχουν καὶ ἐξισώσεις μὲ πολλὰ γράμματα, ἀλλὰ περὶ αὐτῶν δὲν θὰ ὁμιλήσωμεν ἐδῶ.

Ὥστε: ***Ἐξίσωσις λέγεται ἡ ἰσότης, ἡ ὁποία περιέχει ἓν ἢ περισσότερα γράμματα καὶ ἡ ὁποία ἀληθεύει, μόνον ὅταν δώσωμεν εἰς τὰ γράμματα ὡρισμένας τιμάς.***

Ἡ τιμὴ τοῦ γράμματος, ἡ ὁποία κάμνει τὴν ἐξίσωσιν ἀληθῆ ἰσότητα λέγεται ***λύσις*** τῆς ἐξισώσεως. Εἰς τὸ ἄνω παράδειγμα λύσις τῆς ἐξισώσεως εἶνε ὁ ἀριθμὸς 8.

2). Ἓν παιδίον ἔδωσεν ὅσας δραχμὰς εἶχεν εἰς ἕνα πτωχόν· ὁ πατήρ του τότε τοῦ ἔδωσε τετραπλασίας καὶ ἡ μήτηρ του τριπλασίας. Τὸ παιδίον ἔδωσεν ἐξ αὐτῶν εἰς τὸν μικρότερον ἀδελφόν του διπλασίας ἀπὸ ὅσας εἶχε δώσει εἰς τὸν πτωχόν, παρετήρησε δὲ τότε ὅτι τοῦ ἔμειναν εἰς τὸ ἓν θυλάκιόν του 23 δρ. καὶ εἰς τὸ ἕτερον 7 δρ.· πόσας δραχμὰς ἔδωσεν εἰς τὸν πτωχόν;

Λύσις. Ἂν παραστήσωμεν τὰς δραχμάς, τὰς ὁποίας ἔδωσεν εἰς τὸν πτωχὸν διὰ τοῦ x, τὸ τετραπλάσιόν των θὰ εἶνε $4x$ καὶ τὸ τριπλάσιόν των $3x$, τὸ δὲ ἄθροισμα αὐτῶν θὰ εἶνε $4x + 3x$, ἂν δὲ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ αὐτὰς τὸ διπλάσιόν των, τὸ ὁποῖον ἔδωσεν εἰς τὸν ἀδελφόν του, δηλ. τὸ $2x$, θὰ ἔχωμεν ἐξαγόμενον $4x + 3x - 2x$, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἰσοῦται μὲ τὰς δραχμάς, αἱ ὁποῖαι ἔμειναν εἰς τὰ θυλάκιά του, δηλ. μὲ τὸ $23 + 7$.

Οὕτω θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν $4x + 3x - 2x = 23 + 7$.

Τὸ τετραπλάσιον ὅμως τὸ x καὶ τὸ τριπλάσιόν του ἀποτελοῦν τὸ ἑπταπλάσιόν του $(4 + 3 = 7)$, ἂν δὲ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ αὐτὸ τὸ διπλάσιόν του, μένει τὸ πενταπλάσιόν του $(7 - 2 = 5)$, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ εἶνε ἴσον μὲ τὸν $23 + 7$.

Ὥστε: $(4 + 3 - 2)x = 23 + 7$ ἢ $5x = 30$ ἢ $x = 6$.

Εἰς τὴν ἐξίσωσιν $4x + 3x - 2x = 23 + 7$ παρατηροῦμεν ὅτι τὰ σημεῖα τῆς προσθέσεως (+) καὶ τῆς ἀφαιρέσεως (—) χωρίζουν ἕκαστον μέλος εἰς μέρη.

Τὰ μέρη ταῦτα ὀνομάζονται ***ὅροι***.

305. 3). Εἷς μαθητὴς ἔδωσεν ὅσα μῆλα εἶχεν εἰς τοὺς συμμαθητάς του· ὁ πατήρ του τότε τοῦ ἔδωσε τετραπλάσια. Ὁ μαθητὴς ἔδωσε 2 ἐξ αὐτῶν εἰς ἄλλον συμμαθητήν του καὶ τοῦ ἔμειναν 18 μῆλα καὶ ἀκόμη τὸ διπλάσιον τῶν ὅσων εἶχε κατ' ἀρχάς· πόσα μῆλα εἶχε κατ' ἀρχάς;

Λύσις. Ἂν παραστήσωμεν τὸν ἄγνωστον ἀριθμὸν τῶν μήλων, τὰ ὁποῖα εἶχε κατ' ἀρχάς, διὰ τοῦ x, θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν $4x - 2 = 18 + 2x$.

Διὰ νὰ ἀπομονώσωμεν τὸν x, πρέπει νὰ φέρωμεν εἰς τὸ β' μέλος τῆς ἐξισώσεως τὸν 2 καὶ εἰς τὸ α' μέλος τὸν ὅρον $2x$. Πρὸς τοῦτο, ἐπειδὴ ὁ 2 ἀφαιρεῖται ἀπὸ τὸ α' μέλος τῆς ἐξισώσεως, τὸν προσθέτομεν καὶ εἰς τὰ δύο μέλη αὐτῆς, καὶ ἐπειδὴ ὁ $2x$ προστίθεται εἰς τὸ β' μέλος, τὸν ἀφαιροῦμεν καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέλη καὶ θὰ ἔχωμεν $4x + 2 - 2 - 2x = 18 + 2x + 2 - 2x$. Ἀλλὰ εἰς τὸ α' μέλος $2 - 2 = 0$ καὶ εἰς τὸ β' $2x - 2x = 0$ καὶ μένει $4x - 2x = 18 + 2$.

Ὅθεν $2x = 20$ καὶ ἑπομένως $x = 10$.

Ἂν παραβάλωμεν τὰς δύο ἐξισώσεις $4x - 2 = 18 + 2x$ καὶ $4x - 2x = 18 + 2$ παρατηροῦμεν ὅτι ὁ ὅρος $2x$ ἀπὸ τὸ β' μέλος μετεφέρθη εἰς τὸ α', ἀλλ' ἐνῷ εἰς τὸ β' προστίθεται εἰς τὸ α' ἀφαιρεῖται. Ἐπίσης ὁ 2 ἀπὸ τὸ α' μέλος μετεφέρθη εἰς τὸ β', ἀλλ' ἐνῷ εἰς τὸ α' ἀφαιρεῖται εἰς τὸ β' προστίθεται.

Ὅθεν : ***Δυνάμεθα νὰ μεταφέρωμεν ἕνα ὅρον ἀπὸ τὸ ἓν μέλος μιᾶς ἐξισώσεως εἰς τὸ ἄλλο, ἀρκεῖ νὰ σημειώσωμεν ἐπ' αὐτοῦ τὴν ἀντίθετον πρᾶξιν ἐκείνης, ἡ ὁποία εἶνε σημειωμένη ἐπ' αὐτοῦ,*** (δηλ. ἀντὶ προσθέσεως ἀφαίρεσιν καὶ ἀντὶ ἀφαιρέσεως πρόσθεσιν).

ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΙΣ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ

306. **Ε**ἴδομεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις $4x - 2 = 18 + 2x$ ἔχει τὴν λύσιν $x = 10$.

Διὰ νὰ εἴδωμεν ἂν ἡ εὑρεθεῖσα λύσις εἶνε ἡ ζητουμένη καὶ ἑπομένως δὲν ἔχομεν περιπέσει εἰς λάθος, ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν τὸν x διὰ τῆς εὑρεθείσης λύσεως καὶ ἐκτελοῦμεν τὰς σημειουμένας πράξεις, ἂν δὲ καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως εὕρωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τότε ἡ εὑρεθεῖσα λύσις εἶνε ἡ ζητουμένη.

Ἡ ἐργασία αὕτη λέγεται ***ἐπαλήθευσις*** τῆς ἐξισώσεως.

Εἰς τὸ ἄνω παράδειγμα $4.10 - 2 = 18 + 2.10$ ἢ $40 - 2 = 18 + 20$ ἢ $38 = 38$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

660) Νὰ λυθοῦν καὶ ἐπαληθευθοῦν αἱ ἑξῆς ἐξισώσεις.

α') $7x = 35$, *β'*) $9x = 27$, *γ'*) $5x + 5 = 20$,
δ') $6x + 1 = 37$, *ε'*) $15x - 4 = 19 + 7$,
στ') $23x - 5 = 70 - 6$, *ζ'*) $3x + 2x = 43 - 8$,
η') $8x - 2x = 59 + 7$, *θ'*) $9x - 3x + 6x = 10 + 2 - 8$,
ι') $8x - 5 = 4x - 2$, *ια'*) $10x - 3 = 4x + 2x - 10x + 72$,
ιβ') $25x + 42 - 6x = 3x + 6x + 52$.

661) Νὰ μοιρασθοῦν 300 *δραχμαὶ εἰς* 3 *ἀνθρώπους, ὥστε ὁ δεύτερος νὰ λάβῃ* 15 *δραχμὰς περισσοτέρας τοῦ α' καὶ ὁ γ' νὰ λάβῃ* 30 *δραχμὰς περισσοτέρας τοῦ β'· πόσας θὰ λάβῃ ἕκαστος; (Ἂν ὁ α' λάβῃ* x *δραχμάς, τὰ λοιπὰ μερίδια θὰ εἶνε* x + 15 *καὶ* x + 15 + 30. *Τὸ ἄθροισμα δὲ τῶν μεριδίων αὐτῶν θὰ εἶνε ἴσον πρὸς* 500).

662) Νὰ μοιρασθῇ ὁ ἀριθμὸς 370 *εἰς τρεῖς ἀνθρώπους, ὥστε ὁ γ' νὰ λάβῃ* 20 *δρ. ὀλιγωτέρας ἀπὸ τὸν β' καὶ ὁ β'* 30 *δρ. περισσοτέρας ἀπὸ τὸν α'· πόσας θὰ λάβῃ ἕκαστος; (Ἂν ὁ α' λάβῃ* **x** *τὰ μερίδια θὰ εἶνε* 110, 140, 120).

653) Τὸ ἄθροισμα τῶν ἡλικιῶν 3 ἀνθρώπων εἶνε 50 *ἔτη, ὁ β' εἶνε κατὰ* 5 *ἔτη μεγαλύτερος τοῦ γ' καὶ ὁ α' ἔχει ἡλικίαν ὅσην ἔχουν οἱ δύο ἄλλοι μαζύ· πόσων ἐτῶν εἶνε ἕκαστος;*

(Ἂν ὁ γ' ἔχει ἡλικίαν x *ἔτη, αἱ ἡλικίαι θὰ εἶνε τοῦ α'* 25, *τοῦ β'* 15, *τοῦ γ'* 10).

664) Δύο ἀδελφοὶ ἔχουν μαζὺ 52 *δρ., ἀλλὰ ὁ μεγαλύτερος ἔχει τρεῖς φορὰς περισσοτέρας ἀπὸ ὅσας ἔχει ὁ μικρότερος· πόσα ἔχει ἕκαστος; (Ἂν ὁ μικρότερος ἔχει* x, *ὁ μεγαλύτερος θὰ ἔχῃ* 3x, *τὸ δὲ ἄθροισμα αὐτῶν θὰ εἶνε* 52) (13, 39)

665) Ἐπώλησεν εἰς μίαν ἅμαξαν, ἕνα ἵππον καὶ τὴν σκευὴν αὐτοῦ ἀντὶ 32000 *δραχμῶν, ὁ ἵππος ἔχει τιμὴν πενταπλασίαν ἀπὸ τὴν σκευήν του καὶ ἡ ἅμαξα διπλασίαν ἀπὸ τὸν ἵππον· ποία εἶνε ἡ τιμὴ ἑκάστου; (Ἂν ἡ σκευὴ ἔχει τιμὴν* x, *αἱ τιμαὶ θὰ εἶνε* 2000, 10000, 20000).

666) Τὸ ἄθροισμα τῶν ἡλικιῶν μιᾶς μητρὸς μετὰ τῶν δύο τέκνων της εἶνε 30 *ἔτη, τὸ μεγαλύτερον τέκνον ἔχει διπλασίαν ἀπὸ τὸ μικρότερον, ἡ δὲ μήτηρ τετραπλασίαν καὶ ἀπὸ τὰ δύο τέκνα της· ποία εἶνε ἡ ἡλικία ἑκάστου;*

(Ἂν τοῦ μικροτέρου εἶνε x *τοῦ μεγαλυτέρου θὰ εἶνε* 2x *καὶ τῆς μητρὸς* 4 (x + 2x) = **4x** + 8x.) (2, 4, 24)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Θ'.

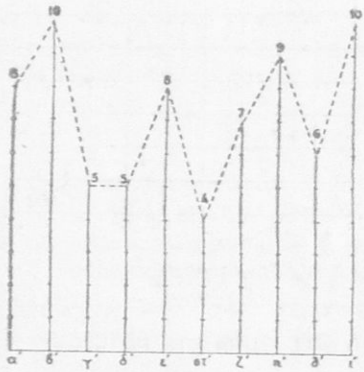
ΓΡΑΦΙΚΑΙ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

307. Ὑπάρχουν μεταβλητὰ ποσά, τὰ ὁποῖα συνδέονται μεταξύ των ὥστε, ὅταν μεταβάλλεται ἡ τιμὴ τοῦ ἑνός, μεταβάλλεται καὶ ἡ τιμὴ τοῦ ἄλλου (ἐδ. 45)· π. χ. καθόσον μεταβάλλεται ὁ χρόνος μεταβάλλεται καὶ ἡ θερμοκρασία ἑνὸς ἀσθενοῦς, ἡ βαρομετρικὴ πίεσις, ἡ θερμοκρασία τῆς ἀτμοσφαίρας κ. λ. π. Ὅταν θέλωμεν νὰ ἔχωμεν μίαν εἰκόνα τῶν αὐξήσεων καὶ τῶν ἐλαττώσεων, τὰς ὁποίας ὑφίσταται ἓν ποσόν, ὅταν μεταβάλλεται σταθερῶς ἓν ἄλλο ποσόν, ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἐξαρτᾶται, κατασκευάζομεν ἓν σχεδιάγραμμα κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον.

Παράδειγμα 1ον) Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι εἷς μαθητὴς κατὰ τὴν διάρκειαν 10 ἑβδομαδιαίων διαδοχικῶν ἀσκήσεων ἔλαβε τοὺς βαθμούς, τοὺς ὁποίους δεικνύει ὁ ἑπόμενος πίναξ.

Ἀσκήσεις	α′	β′	γ′	δ′	ε′	ϛ′	ζ′	η′	θ′	ι′
Βαθμοὶ	8	10	5	5	8	4	7	9	6	10

Πρὸς κατασκευὴν τοῦ σχεδιαγράμματος σύρομεν μίαν ὁριζοντίαν εὐθείαν τὴν α′ι′ (Σχ. 1), τὴν ὁποίαν ὀνομάζομεν ***βασικὴν γραμμὴν*** καὶ τὴν ὁποίαν χωρίζομεν εἰς 10 ἴσα μέρη, ἕκαστον ἐκ τῶν ὁποίων παριστάνει τὴν χρονικὴν διάρκειαν μιᾶς ἑβδομάδος.



Ἑβδομαδιαῖαι ἀσκήσεις

Σχῆμα 1

Εἰς τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως σύρομεν καθέτους καὶ ἐπὶ ἑκάστης ἐξ αὐτῶν λαμβάνομεν ἴσα τμήματα, 8 εἰς τὴν πρώτην παριστάνοντα τὸν βαθμὸν 8 τῆς α′ ἑβδομαδιαίας ἀσκήσεως, 10 εἰς τὴν β′ παριστάνοντα τὸν βαθμὸν 10 τῆς β′ ἑβδομαδιαίας ἀσκήσεως καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Οὕτω τὰ μήκη τῶν καθέτων αὐτῶν παριστάνουν τοὺς διαφόρους βαθμοὺς τοῦ μαθητοῦ.

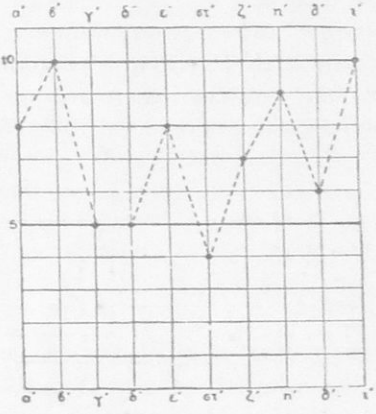
Τὰ τοιαῦτα σχεδιαγράμματα, τὰ ὁποῖα δεικνύουν πῶς μεταβάλλεται ἓν ποσόν, ὅταν μεταβάλλεται ἓν ἄλλο ποσόν, ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἐξαρτᾶται, ὀνομάζονται γραφικαὶ παραστάσεις.

Ἂν ἑνώσωμεν τὰ ἄκρα τῶν εὐθειῶν αὐτῶν σχηματίζεται μία τεθλασμένη γραμμὴ (ἢ διακεκομμένη), ἡ ὁποία δίδει μίαν εἰκόνα τῆς αὐξήσεως καὶ τῆς ἐλαττώσεως τῆς βαθμολογίας τοῦ μαθητοῦ κατὰ τὴν διάρκειαν τῶν 10 ἑβδομάδων.

Ἡ τεθλασμένη αὕτη γραμμὴ ὀνομάζεται **παραστατικὴ γραμμὴ** τῶν μεταβολῶν τῆς βαθμολογίας τοῦ μαθητοῦ.

Συντομώτερον κατασκευάζομεν τὸ σχεδιάγραμμα τοῦτο ὡς ἑξῆς:

Λαμβάνομεν ἕνα τετραγωνισμένον χάρτην (Σχῆμα 2), τοῦ



Ἑβδομαδιαῖαι ἀσκήσεις
Σχῆμα 2

ὁποίου μίαν ὁριζοντίαν γραμμὴν ὁρίζομεν ὡς βασικὴν γραμμήν, τὴν α'ι', εἶνε δὲ ἤδη αὕτη διῃρημένη εἰς ἴσα μέρη, ἕκαστον ἐκ τῶν ὁποίων ὁρίζομεν νὰ παριστάνῃ μίαν μονάδα τοῦ σταθερῶς μεταβαλλομένου ποσοῦ, εἰς τὸ παράδειγμά μας μίαν ἑβδομάδα. Ὁμοίως εἶνε χαραγμέναι αἱ ἐπ' αὐτὴν κάθετοι καὶ χωρισμέναι εἰς ἴσα μέρη, ἕκαστον ἐκ τῶν ὁποίων ὁρίζομεν νὰ παριστάνῃ μίαν μονάδα π. χ. τοῦ ἄλλου μεταβαλλομένου ποσοῦ, εἰς τὸ παράδειγμά μας μίαν μονάδα τοῦ βαθμοῦ.

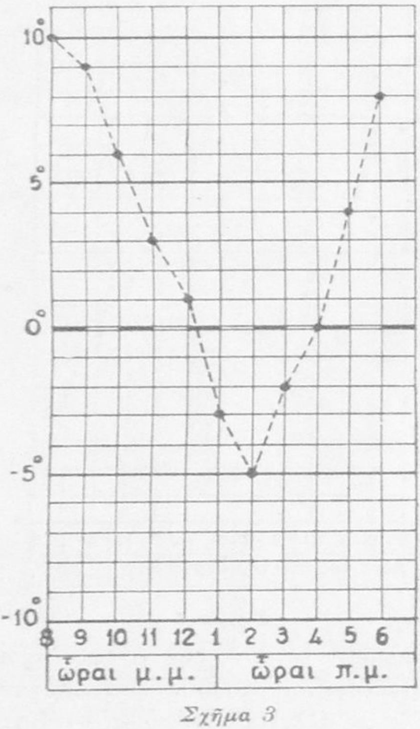
Εἰς μίαν κάθετον σημειώνομεν ἀνὰ 5 τὰς μονάδας τῶν βαθμῶν π. χ. ἐπὶ τῆς α'α'. Ἐπὶ τῆς καθέτου ταύτης μετρῶμεν 8 τμήματα καὶ εἰς τὸ τέλος τοῦ ὀγδόου τμήματος χαράσσομεν μίαν τελείαν.

Τὸ μῆκος τῶν 8 αὐτῶν τμημάτων θὰ παριστάνῃ τὸν βαθμὸν 8 τῆς α' ἑβδομαδιαίας ἀσκήσεως. Ἐπὶ τῆς ἀκολούθου καθέτου μετροῦμεν 10 τμήματα καὶ εἰς τὸ τέλος τοῦ 10ου χαράσσομεν μίαν τελείαν. Τὸ μῆκος τῶν 10 αὐτῶν τμημάτων θὰ παριστάνη τὸν βαθμὸν τῆς β΄ ἀσκήσεως καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς. Ἑνώνοντες τὰς τελείας αὐτὰς διὰ τεθλασμένης γραμμῆς, ἔχομεν τὴν ζητουμένην παραστατικὴν γραμμήν.

Παράδειγμα 2ον. Ἡ θερμοκρασία ἑνὸς τόπου ἀπὸ τῆς 8ης μ. μ. μέχρι τῆς 5ης π. μ., κατὰ μίαν ψυχρὰν χειμερινὴν νύκτα ἔλαβε τὰς τιμάς, τὰς ὁποίας δεικνύει ὁ ἀκόλουθος πίναξ, εἰς τὸν ὁποῖον οἱ ἄνωθεν τοῦ μηδενὸς βαθμοὶ φέρουν τὸ σημεῖον + οἱ δὲ κάτωθεν τοῦ 0 τὸ σημεῖον —.

8μμ.	9μμ.	10μμ.	11μμ.	12μμ.	1πμ.	2πμ.	3πμ.	4πμ.	5πμ.
+10°	+9°	+6°	+3°	+1°	—3°	—5°	—2°	0°	+4°

Ἡ παραστατικὴ γραμμὴ τῶν μεταβολῶν τῆς θερμοκρασίας ταύτης δεικνύεται εἰς τὸ σχῆμα 3 ὅπου οἱ κάτωθεν τοῦ 0 βα



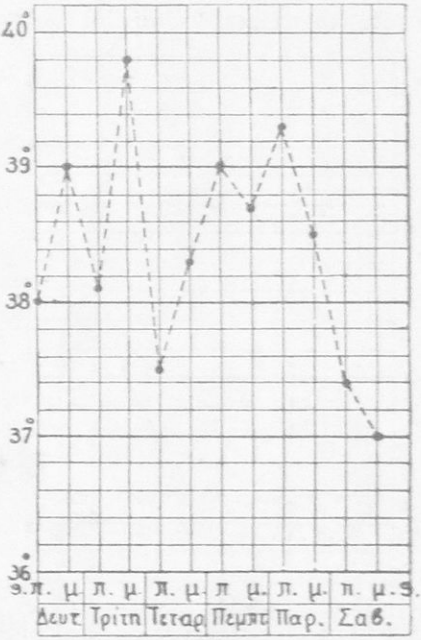
Σχῆμα 3

θμοὶ σημειώνονται κάτωθεν τῆς διακεκομμένης γραμμῆς, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸν βαθμὸν 0.

Παράδειγμα 3ον. Ἡ Θερμοκρασία ἑνὸς ἀσθενοῦς εἶχε τὴν 9 π.μ. καὶ τὴν 9 μ.μ. ἑκάστης ἡμέρας κατὰ τὸ διάστημα 6 ἡμερῶν τὰς τιμάς, τὰς ὁποίας δεικνύει ὁ ἑπόμενος πίναξ:

	Δευτέρα		Τρίτη		Τετάρτη		Πέμπτη		Παρασκ.		Σάββατ.	
Χρ. 9	π μ	μ μ	π μ	μ μ	π μ	μ μ	π μ	μ μ	π μ	μ μ	π μ	μ μ
Θερμοκρ.	38°	39°	38°,7	39°,8	37°,5	38°,3	39°	38°,7	39°,3	38°,5	37°,4	37°

Ἡ παραστατικὴ γραμμὴ τῶν μεταβολῶν τῆς θερμοκρασίας ταύτης δεικνύεται εἰς τὸ σχῆμα 4, ὅπου ἕκαστον τμῆμα τῶν καθέτων εὐθειῶν παριστάνει 0,2 τοῦ βαθμοῦ.



Σχῆμα 4

Διὰ νὰ σχεδιάσωμεν λοιπὸν τὴν γραφικὴν παράστασιν τῶν τιμῶν ἑνὸς μεταβαλλομένου ποσοῦ, ἐξαρτωμένου ἀπὸ ἓν ἄλλο ποσόν, τὸ ὁποῖον μεταβάλλεται σταθερῶς, σχηματίζομεν πρῶτον ἕνα πίνακα, ὁ ὁποῖος περιέχῃ τὰς τιμὰς τοῦ σταθερῶς μεταβαλλομένου καὶ τὰς ἀντιστοίχους πρὸς αὐτὰς τιμὰς τοῦ ἄλλου ποσοῦ, κατόπιν κατὰ μῆκος τῆς βασικῆς γραμμῆς χαράσσομεν ἴσα διαστήματα, διὰ νὰ δείξωμεν, ἴσας περιόδους τοῦ σταθερῶς μεταβαλλομένου ποσοῦ, π.χ. ὥρας, ἡμέρας, ἑβδομάδας κλπ.

Ἐὰν τότε μεταχειρισθῶμεν κοινὸν χάρτην, σύρομεν εὐθείας καθέτους ἐπὶ τὴν βασικήν, διὰ νὰ παραστήσωμεν τὰς τιμὰς τοῦ ἄλλου μεταβλητοῦ ποσοῦ (θερμοκρασίας, βαθμοὺς τοῦ μαθητοῦ κλπ.), ἐὰν δὲ μεταχειριζώμεθα τετραγωνισμένον χάρτην, σημειώνομεν ἀριστερὰ τί παριστάνει ἕκαστον διάστημα, ἢ 5 τοιαῦτα μαζύ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

667) Κατὰ τὴν διάρκειαν 10 ἑβδομαδιαίων διαδοχικῶν ἀσκήσεων ἔλαβεν εἷς μαθητὴς τοὺς ἑξῆς βαθμούς:

7, 9, 6, 6, 10, 5, 6, 8, 7, 9.

Ὁ πρῶτος μαθητὴς τῆς τάξεως διὰ τὰς αὐτὰς ἀσκήσεις ἔλαβε τοὺς ἑξῆς βαθμούς: 10, 10, 9, 10, 10, 8, 10, 10, 9, 10.

Νὰ σχηματισθοῦν καὶ αἱ δύο γραφικαὶ παραστάσεις ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ χάρτου.

668) Ὁ ἑπόμενος πίναξ δεικνύει τὰς γεννήσεις ἀνὰ 1000 κατοίκους εἰς μίαν πόλιν κατὰ τὰ ἔτη 1920—1931.

1920	21	22	23	24	1925	26	27	28	29	30	1931
28	27	27	25	29	30	28	26	27	24	28	26

Νὰ σχεδιασθῇ ἡ παραστατικὴ γραμμὴ τῶν μεταβολῶν τῶν γεννήσεων εἰς τὴν πόλιν ταύτην μὲ ἕνα δάκτυλον ἐπὶ τῆς βασικῆς γραμμῆς δι' ἕκαστον ἔτος καὶ μὲ ἕνα δάκτυλον ἐπὶ τῶν καθέτων διὰ 5 γεννήσεις.

669) Ἡ μέση μηνιαία θερμοκρασία ἑνὸς τόπου κατὰ τοὺς 12 μῆνας ἀπὸ Ἰανουαρίου μέχρι Δεκεμβρίου κατά τι ἔτος ἔλαβε τὰς ἑξῆς τιμάς:

5^0, 7^0, 10^0, 15^0, 17^0, 20^0, 22^0, 19^0, 16^0, 14^0, 8^0, 6^0.

Νὰ σχεδιασθῇ ἡ παραστατικὴ γραμμὴ τῶν μεταβολῶν τῆς θερμοκρασίας ταύτης.

670) Εἰς μίαν τάξιν 60 μαθητῶν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀπουσιαζόντων κατὰ τὴν διάρκειαν μιᾶς ἑβδομάδος τοῦ Ὀκτωβρίου μετεβάλλετο ὅπως δεικνύει ὁ ἑπόμενος πίναξ.

Δευτέρα		Τρίτη		Τετάρτη		Πέμπτ.	Παρασκ.		Σάββατον	
π μ	μ μ	π μ	μ μ	π μ	μ μ	π μ	π μ	μ μ	π μ	μ μ
18	16	12	12	8	9	10	13	17	14	16

Νὰ σχηματισθῇ ἡ παραστατικὴ γραμμὴ τῶν μεταβολῶν τοῦ ἀριθμοῦ τούτου.

671) Νὰ σχηματισθῇ ἡ παραστατικὴ γραμμὴ τῶν μεταβολῶν τῆς τιμῆς τοῦ ἄρτου τοῦ προβλήματος 613 τῆς σελίδος 182 καὶ τῆς θερμοκρασίας τοῦ προβλήματος 617 τῆς σελίδος 183.

672) Ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις μίαν ἡμέραν ἀπὸ τῆς 8ης π. μ. μέχρι τῆς 8ης μ.μ. εἶχε τὰς ἑξῆς τιμάς: 734, 752, 756, 757, 760, 753, 750, 759, 751, 754, 755, 759. Νὰ σχηματισθῇ ἡ παραστατικὴ γραμμὴ τῶν μεταβολῶν τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πιέσεως κατὰ τὴν ἡμέραν ταύτην.

673) Ἡ τιμὴ τῆς λίρας κατὰ τὰς δύο πρώτας ἑβδομάδας ἑνὸς μηνὸς ἦτο καθ' ἑκάστην ἡμέραν 543 δρχ., 565, 558, 612, 584, 605, 594, 592, 597, 588, 598, 605. Νὰ σχηματισθῇ ἡ παραστατικὴ γραμμὴ τῶν μεταβολῶν τῆς τιμῆς τῆς λίρας κατὰ τὸν χρόνον αὐτὸν μὲ ἕνα δάκτυλον ἐπὶ τῆς βασικῆς γραμμῆς δι' ἑκάστην ἡμέραν καὶ μὲ ἕνα δάκτυλον ἐπὶ τῶν καθέτων γραμμῶν δι' ἑκάστην δεκάδα δραχμῶν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι.

ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΕΙΣ
ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

308. Ὁ ἄνθρωπος ὅταν ἤρχισε νὰ μετρῇ τὰ διάφορα ποσά, ἐβοηθεῖτο ὑπὸ τῶν δακτύλων τῶν χειρῶν. Ὅταν π. χ. ἤθελε νὰ μετρήσῃ ἕνα σωρὸν μήλων ἔλεγεν, 1 δάκτυλος 1 μῆλον, 2 δάκτυλοι 2 μῆλα κλπ. 10 δάκτυλοι 10 μῆλα. Δὲν ἐπροχώρει περαιτέρω, διότι δὲν εἶχεν ἄλλους δακτύλους. Οὕτω τὰ 10 αὐτὰ μῆλα ἀπετέλουν ἕνα σωρόν. Κατόπιν ἤρχιζεν πάλιν ἐξ ἀρχῆς, 1 δάκτυλος 1 μῆλον κλπ. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἐχώριζεν τὰ μῆλα εἰς σωροὺς ἐκ 10 μήλων ἕκαστον. Κατόπιν μὲ τὴν βοήθειαν τῶν δακτύλων ἐμέτρει ἀνὰ 10 τοὺς σωροὺς καὶ ἀπετέλει μεγαλυτέρους σωρούς, ἐκ τῶν ὁποίων ἕκαστος περιεῖχε 10 σωροὺς μικροτέρους ἢ 100 μῆλα καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Ἂν ὁ ἄνθρωπος εἶχει 12 δακτύλους καθ' ὅμοιον τρόπον θὰ ἐσχημάτιζεν ἀντὶ τοῦ δεκαδικοῦ τὸ δωδεκαδικὸν σύστημα, δηλ. 12 μονάδες μιᾶς τάξεως θὰ ἀπετέλουν μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως. Θὰ ἐχρειάζοντο δὲ τότε 2 ἀκόμη σύμβολα ἐκτὸς τῶν γνωστῶν, διὰ νὰ παριστάνωνται οἱ ἀριθμοὶ δέκα καὶ ἕνδεκα. Ἂν δὲ ἐφηρμόζετο καὶ εἰς τὸ δωδεκαδικὸν σύστημα ἡ συνθήκη τῆς γραφῆς τῶν ἀριθμῶν τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος, ὁ ἀριθμὸς δώδεκα εἰς τὸ σύστημα αὐτὸ θὰ ἐγράφετο 10, δηλ. μία δωδεκάς, ὁ δεκατρία 11, δηλ. μία δωδεκὰς καὶ μία μονὰς κλπ. Οὕτως εἶνε δυνατὸν νὰ σχηματισθοῦν διάφορα συστήματα ἀριθμήσεως.

Τὸ δωδεκαδικὸν σύστημα θὰ ἦτο βεβαίως τὸ τελειότερον, διότι ἑκάστης δωδεκάδος δύναται νὰ ληφθῇ καὶ τὸ $\frac{1}{2}$ καὶ τὸ $\frac{1}{3}$ καὶ τὸ $\frac{1}{4}$ καί τὸ $\frac{1}{6}$, διὰ τοῦτο, καίτοι ἔχει κυριαρχήσει τὸ δεκαδικὸν σύστημα, εὑρισκόμεθα εἰς τὴν ἀνάγκην πολλάκις νὰ μεταχειριζώμεθα καὶ τὸ δωδεκαδικόν. Οὕτω τὰ μαχαίρια, τὰ μανδύλια κλπ., πωλοῦνται ἀνὰ δωδεκάδας.

309. Εἴδομεν ὅτι αἱ πράξεις, τὰς ὁποίας ἐκτελοῦμεν ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν, εἶνε 5, ἡ πρόσθεσις, ἡ ἀφαίρεσις, ὁ πολλαπλασιασμός, ἡ διαίρεσις καὶ ἡ ἐξαγωγὴ τῆς ῥίζης. Διὰ τοῦ συνδιασμοῦ τῶν 5 αὐτῶν πράξεων λύονται ὅλα τὰ προβλήματα, τὰ ὁποῖα ἀπαντῶνται συνήθως εἰς τὸν πρακτικὸν βίον. Κυρίως ὅμως αἱ πράξεις αἱ διάφοροι ἀλλήλων εἶνε δύο, ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις. Διότι ὁ μὲν πολλαπλασιασμὸς εἶνε μία ἰδιαιτέρα περίπτωσις τῆς προσθέσεως, ἐκείνη δηλ. εἰς τὴν ὁποίαν ὅλοι οἱ προσθετέοι εἶνε ἴσοι, ἡ διαίρεσις εἶνε μία ἰδιαιτέρα περίπτωσις τῆς ἀφαιρέσεως, ἐκείνη εἰς τὴν ὁποίαν ἀφαιρεῖται κατ' ἐπανάληψιν ὁ ἴδιος ἀριθμός, ἡ δὲ ἐξαγωγὴ τῆς ῥίζης εἶνε συνδυασμὸς τῶν τεσσάρων αὐτῶν πράξεων.

310. Εἴδομεν ὅτι διὰ νὰ μετρήσωμεν ἓν ποσὸν συγκρίνομεν αὐτὸ πρὸς τὴν μονάδα του καὶ εὑρίσκομεν ἀπὸ πόσας μονάδας ἀποτελεῖται τοῦτο. Συμβαίνει ὅμως πολλάκις τὸ μετρούμενον ποσὸν νὰ μὴ ἀποτελῆται ἀπὸ ὁλοκλήρους μονάδας, ἀλλὰ νὰ μένῃ καὶ ἓν μέρος αὐτοῦ μικρότερον τῆς μονάδος. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ἀκριβὴς μέτρησις τοῦ ποσοῦ μὲ τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς εἶνε ἀδύνατος. Ἐπίσης εἰς τὴν διαίρεσιν τῶν ἀκεραίων, ὅταν ὁ διαιρετέος εἶνε μικρότερος τοῦ διαιρέτου ἡ διαίρεσις εἰς τὸ σύστημα τῶν ἀκεραίων εἶνε ἀδύνατος, διότι οὐδεὶς ἀκέραιος εἶνε πηλίκον. Ἐπίσης ὅταν ὁ διαιρετέος δὲν διαιρῆται ἀκριβῶς διὰ τοῦ διαιρέτου, εἰς τὸ σύστημα τῶν ἀκεραίων δὲν ὑπάρχει ἀκριβὲς πηλίκον. Ἐκ τούτων ὡρμήθη ὁ ἄνθρωπος εἰς τὸν σχηματισμὸν τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν.

Ὡς γνωστὸν τὸ πλῆθος τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν εἶνε ἄπειρον. Ἀλλὰ πόσοι νὰ εἶνε ἄρά γε οἱ κλασματικοὶ ἀριθμοί; Ἐφ' ὅσον θέτοντες εἰς τὴν ἀκεραίαν μονάδα παρονομαστὴν ἕνα ἀκέραιον σχηματίζομεν μίαν κλασματικὴν μονάδα, ἕπεται ὅτι τὸ πλῆθος τῶν κλασματικῶν μονάδων εἶνε ἄπειρον, τὸ ὁποῖον ὁλόκληρον περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ 0 καὶ 1. Ἐπίσης μεταξὺ καὶ 1 ὑπάρχουν οἱ κλασματικοὶ ἀριθμοὶ $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$ κλπ. Ὁμοίως μεταξὺ τοῦ 1 καὶ 2 ὑπάρχουν ἄπειροι κλασματικοὶ ἀριθμοὶ ὡς οἱ ἑξῆς : $1\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{3}$, $1\frac{2}{3}$ κλπ. Ὁμοίως μεταξὺ 2 καὶ 3 κλπ. Μεταξὺ λοιπὸν δύο διαδοχικῶν ἀκεραίων ὑπάρχουν ἄπειροι κλασματικοὶ ἀριθμοί, ἄρα καὶ οἱ κλασματικοὶ ἀριθμοὶ εἶνε ἄπειροι.

311. Ὡς γνωστὸν ἡ ἐκτέλεσις τῶν πράξεων ἐπὶ τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν εἶνε δυσκολωτέρα ἢ ἐπὶ τῶν ἀκεραίων. Ἐκ τούτου ὡρμήθη ὁ ἄνθρωπος νὰ ἀποχωρήσῃ ἀπὸ τὰς κλασματικὰς μονάδας ἐκείνας, αἱ ὁποῖαι ἔχουν μεταξύ των τὴν σχέσιν, τὴν ὁποίαν ἔχουν καὶ αἱ ἀκέραιαι μονάδες (ἐδ 12). Οὕτως ἀποχώρησε τὰς δεκαδικὰς μονάδας καὶ ἐσχημάτισεν ἐξ αὐτῶν τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμούς, τοὺς ὁποίους δύναται νὰ γράφῃ, καθὼς καὶ νὰ ἐκτελῇ ἐπ' αὐτῶν τὰς πράξεις, ὅπως καὶ εἰς τοὺς ἀκεραίους. Ἕνεκα δὲ τῆς σχέσεως τῶν δεκαδικῶν μονάδων πρὸς ἀλλήλας καὶ πρὸς τὰς ἀκεραίας οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ εἶνε συνέχεια, οὕτως εἰπεῖν, τῶν ἀκεραίων.

312. Ἀλλὰ καὶ τὰς κλασματικὰς καὶ τὰς δεκαδικὰς μονάδας ὁ ἄνθρωπος ἐννοεῖ πάντοτε συνδεδεμένας μὲ τὴν ἀκεραίαν, ὡς μέρη αὐτῆς. Ἐπίσης τοὺς πολὺ μεγάλους ἀριθμοὺς τοὺς προκύπτοντας ἐκ τῆς μετρήσεως μεγάλων ποσῶν σχετικῶς πρὸς τὴν μονάδα, δι' ἧς ἐμετρήθησαν, εἶνε δύσκολον νὰ φαντασθῇ καὶ νὰ ἐννοήσῃ ὁ ἄνθρωπος. Διὰ τοῦτο ἵνα ἀπομονώσῃ τὰς κλασματικὰς μονάδας καὶ δύναται νὰ θεωρῇ ταύτας ἀνεξαρτήτους ἀπὸ τὴν ἀκεραίαν τῆς ὁποίας αὗται εἶνε μέρος, καὶ συνεπῶς νὰ ἐννοῇ ταύτας ἐντελέστερον, σμικρύνῃ δὲ καὶ τοὺς ἀριθμοὺς τοὺς προκύπτοντας ἀπὸ τὴν μέτρησιν τῶν μεγάλων ποσῶν, ἐπεννόησε τοὺς συμμιγεῖς ἀριθμούς. Ἕνεκα διαφόρων αἰτίων οἱ διάφοροι λαοὶ ἔλαβον διαφόρους μονάδας διὰ τὴν μέτρησιν τῶν συνεχῶν ποσῶν καθὼς καὶ διαφόρους ὑποδιαιρέσεις καὶ πολλαπλάσια τῶν μονάδων αὐτῶν.

Πρῶτοι οἱ Γάλλοι ἔλαβον ὑποδιαιρέσεις τῶν μονάδων καθὼς καὶ πολλαπλάσια αὐτῶν κατὰ τὸ δεκαδικὸν σύστημα, τούτους δὲ ἠκολούθησαν καὶ πολλοὶ ἄλλοι λαοί.

Τὸ Γαλλικὸν τοῦτο σύστημα ἔχει τὸ προτέρημα ὅτι, ἐνῷ ἐννοοῦνται ἐντελέστερον τὰ ὑπὸ τῶν συμμιγῶν παριστανόμενα ποσά, ὅταν πρόκηται νὰ ἐκτελεσθοῦν πράξεις ἐπ' αὐτῶν, μετατρέπονται εὐκόλως οὗτοι εἰς δεκαδικούς, ἐπὶ τῶν ὁποίων αἱ πράξεις ἐκτελοῦνται εὐκολώτερον παρὰ ἐπὶ τῶν συμμιγῶν, κατόπιν δὲ τὸ εὑρεθὲν δεκαδικὸν ἐξαγόμενον μετατρέπεται πάλιν εὐχερῶς εἰς συμμιγῆ.

Ἐπὶ ὅλων ὅμως αὐτῶν τῶν συστημάτων τῶν ἀριθμῶν, κλασματικῶν, δεκαδικῶν καὶ συμμιγῶν, ἰσχύουν αἱ θεμελειώδεις ἰδιότητες τῶν ἀκεραίων καθὼς καὶ ὅλαι αἱ ἰδιότητες, αἱ ὁποῖαι εἶνε τούτων συνέπειαι καὶ διὰ τοῦτο τὰ τέσσαρα αὐτὰ συστήματα τῶν ἀριθμῶν ἀποτελοῦν ἓν ὅλον τέλειον καὶ ἁρμονικόν.

Οὕτω διὰ τῆς θαυμασίας ἐπινοήσεως τῶν ἀριθμῶν κατορθώνει τὸ ἀνθρώπινον πνεῦμα νὰ ἀπογυμνώνῃ τὰ ἀντικείμενα ἀπὸ τὰς αἰσθητικὰς καὶ ἀτομικάς των ἰδιότητας καὶ νὰ καταλήγῃ ἐξ αὐτῶν εἰς ἀφῃρημένους ἀριθμούς, τότε λησμονεῖ τὰ ἀντικείμενα, τὰ ὁποῖα παύουν πρὸς στιγμὴν νὰ ὑπάρχουν δι' αὐτόν, καὶ ἔχει πλέον ὡς μόνον ἀντικείμενον τῶν μελετῶν του τοὺς ἀριθμούς, ἐπὶ τῶν ὁποίων καὶ μόνον ἐργάζεται, ὅταν δὲ φθάσῃ εἰς τὸ ἀποτέλεσμα, τότε ἐπανέρχεται εἰς τὰ ἀντικείμενα καὶ ἐφαρμόζει τὸ ἀποτέλεσμα τοῦτο εἰς αὐτά. Οὕτω δὲ ἐξοικονομεῖ χρόνον καὶ διανοητικὴν ἐργασίαν κοπιώδη, προσέτι δὲ ἀποκτᾷ τάξιν εἰς τὴν ἐργασίαν του ἀπαράμιλλον.

Διὰ τοῦτο τὰ Μαθηματικὰ πολὺ δικαίως ἐθεωρήθησαν ὡς ἡ ὑψηλοτέρα ἔκφανσις τῆς ἀνθρωπίνης διανοίας.

ΤΕΛΟΣ

Ἀριθ. (Πρωτ. 41062 / Διεκπ.) Ἐν Ἀθήναις τῇ 22 Αὐγούστου 1933

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ

ΤΟ ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

Πρὸς
τὸν κ. Ἀντώνιον Μονοκρούσον
Καθηγητὴν Μαθηματικῶν

Ἀνακοινοῦμεν ὑμῖν, ὅτι διὰ ταὐταρίθμου ὑπουργικῆς ἀποφάσεως, ἐκδοθείσης τὴν ... Ἰουλίου 1933 καὶ δημοσιευθείσης τὴν 4-8-1933 εἰς τὸ ὑπ' ἀριθ. 77 φύλλον τῆς Ἐφημ. Κυβερνήσεως, στηριζομένης δὲ εἰς τὸ ἄρθρ. 3 τοῦ νόμου 5045 καὶ ἀπόφασιν τῆς οἰκείας κριτικῆς ἐπιτροπῆς, τὴν περιλαμβανομένην ... τὸ ὑπ' ἀριθ. 40 πρακτικὸν ταύτης, ἐνεκρίθη ὡς διδακτικὸν βιβλίον πρὸς χρῆσιν τῶν μαθητῶν τῆς Α', Β' καὶ Γ' τάξεως τῶν Γυμνασίων, Ἡμιγυμνασίων, Πρακτικῶν Λυκείων καὶ Ἀνωτέρων Παρθεναγωγείων τὸ ὑπὸ τὸν τίτλον «Ἀριθμητικὴ» βιβλίον σας.

Ἐντολῇ τοῦ Ὑπουργοῦ
Ὁ Τμηματάρχης
Ν. ΣΜΥΡΝΗΣ

Ἄρθρον 6 τοῦ ἀπὸ 21 Σεπ)βρίου 1932
Προεδρ. Διατάγματος

Τὰ διδακτικὰ βιβλία τὰ πωλούμενα μακρὰν τοῦ τόπου ἐκδόσεώς των ἐπιτρέπεται νὰ πωλῶνται ἐπὶ τιμῇ ἀνωτέρᾳ κατὰ 10% τῆς ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ παρόντος διατάγματος κανονισθείσης ἄνευ βιβλιοσήμου τιμῆς πρὸς ἀντιμετώπισιν τῆς δαπάνης συσκευῆς καὶ τῶν ταχυδρομικῶν τελῶν, ὑπὸ τὸν ὅρον ὅπως ἐπὶ τοῦ ἐσωτερικοῦ μέρους τοῦ ἐξωφύλλου ἢ τῆς τελευταίας σελίδος τούτου ἐκτυποῦται τὸ παρὸν ἄρθρον.