Ν. ΧΑΤΖΙΔΑΚΙ — ΧΡ. Α. ΜΠΑΡΜΠΑΣΤΑΘΗ
...ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ... ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΥ ΠΕΙΡΑΜΑΤ. ΣΧΟΛΕΙΟΥ ... ΑΘΗΝΩΝ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΔΙΑ ΤΗΝ Α^{ην}, Β^{αν}, Γ^{ην} ΤΑΞΙΝ ΤΩΝ ΕΞΑΤΑΞΙΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ

ΕΚΔΟΣΙΣ ΤΡΙΤΗ

Ἐγκεκριμένη διὰ τὴν πενταετίαν 1933—1938

Τιμὴ μετὰ τοῦ βιβλιοσήμου καὶ ... δρχ. 31.40
Βιβλιόσημον καὶ Φόρος Ἀναγκαστ. δανείου δρχ. 10.30
Ἀριθμὸς ἐγκριτικῆς ἀποφάσεως 71062 - 31-7-33
Ἀριθ. ἀδείας κυκλοφορίας 44381 / 6-7-33

ΕΝ Α...
ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ...
ΙΩΑΝΝΟΥ Δ. ΚΟΛΛΑΡΟΥ
45α - Ὁδὸς Σταδίου - 45α

Σταυρόπουλος Νικ. 19728

Ν. ΧΑΤΖΙΔΑΚΙ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ

Χρ. Α. ΜΠΑΡΜΠΑΣΤΑΘΗ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΥ ΠΕΙΡΑΜΑΤ. ΣΧΟΛΕΙΟΥ ΠΑΝΕΠ. ΑΘΗΝΩΝ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΔΙΑ ΤΗΝ Α^{ΗΝ}, Β^{ΑΝ}, Γ^{ΗΝ} ΤΑΞΙΝ ΤΩΝ ΕΞΑΤΑΞΙΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ

Ἐγκεκριμένη διὰ τὴν πενταετίαν 1933—1938
Ἀριθμὸς ἐγκριτικῆς ἀποφάσεως 4100/31-7-33

ΕΚΔΟΣΙΣ ΤΡΙΤΗ

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΤΗΣ "ΕΣΤΙΑΣ"
ΙΩΑΝΝΟΥ Δ. ΚΟΛΛΑΡΟΥ & Σ^{ΙΑΣ} Α. Ε.
46α—Ὁδὸς Σταδίου—46α
1935

Τὰ γνήσια ἀντίτυπα φέρουσι τὴν ὑπογραφὴν τοῦ κ. Χρ. Μπαρμπαστάθη καὶ τὴν σφραγῖδα τοῦ Βιβλιοπωλείου τῆς «Ἑστίας».

Μπαρμπαστάθης

ΤΥΠΟΙΣ ΠΑΡΑΣΚΕΥΑ ΛΕΩΝΗ, Περικλέους 30

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΒΙΒΛΙΟΝ Α΄.

ΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΚΑΙ ΑΙ ΕΠ' ΑΥΤΩΝ ΠΡΑΞΕΙΣ

I

Προκαταρκτικαὶ ἔννοιαι.

1. Εἶναι γνωστόν, ὅτι ἐκ τοῦ πλήθους ὁμοίων πραγμάτων (ἢ τῶν ὁποίων τὰς διαφορὰς παραβλέπομεν), ὅταν τὸ ὁρίζωμεν, δηλ. ὅταν μανθάνωμεν ἀπὸ πόσα πράγματα ἀποτελεῖται, προκύπτει ἡ ἔννοια τοῦ ἀριθμοῦ.

Διὰ νὰ ὁρίσωμεν ὅμως ἓν πλῆθος ὁμοίων πραγμάτων λαμβάνομεν ἓν ἐξ αὐτῶν καὶ πρὸς αὐτὸ συγκρίνομεν τὸ πλῆθος. Διὰ τοῦτο δὲ λέγομεν, ὅτι ***ἀριθμὸς εἶναι ἡ ἔννοια, ἡ ὁποία ὁρίζει τὸ πλῆθος.*** Τὸ δὲ ἓν ἐκ τῶν πραγμάτων, πρὸς τὸ ὁποῖον συγκρίνεται τὸ πλῆθος, λέγεται ***μονάς.***

Ὅταν ὁρίζεται τὸ πρᾶγμα, τοῦ ὁποίου τὸ μέγεθος φανερώνει ὁ ἀριθμός, τότε οἱ ἀριθμοὶ λέγονται ***συγκεκριμένοι***· ἐνῷ ὅταν δὲν ὁρίζεται αὐτό, οἱ ἀριθμοὶ λέγονται ***ἀφηρημένοι.***

Οὕτω οἱ ἀριθμοὶ 8 μῆλα, 9 δένδρα εἶναι συγκεκριμένοι, οἱ δὲ ἀριθμοὶ 8, 9 εἶναι ἀφηρημένοι.

Ἐὰν εἰς τὴν μονάδα προστεθῇ ἄλλη μία μονάς, προκύπτει νέος ἀριθμός· ἐὰν δέ εἰς τοῦτον προστεθῇ καὶ ἄλλη μία μονάς, προκύπτει νέος ἀριθμὸς κ.ο.κ. Οὕτω οἱ ἀριθμοὶ ἀποτελοῦσι σειρὰν ἄπειρον, ἡ ὁποία ἄρχεται ἀπὸ τοῦ ἑνὸς καὶ ἐν τῇ ὁποίᾳ ἕκαστος γίνεται ἐκ τοῦ προηγουμένου διὰ τῆς προσθέσεως μιᾶς μονάδος. Διὰ τοῦτο ὁ ἀριθμὸς εἶναι ***ἄθροισμα πολλῶν μονάδων***, ἤτοι ἀποτελεῖται ὑπὸ τῆς μονάδος πολλάκις ἐπαναλαμβανομένης.

Ἡ εὕρεσις τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις ὁρίζει τὸ πλῆθος, λέγεται ***ἀρίθμησις***· ἀλλ' ***ἀρίθμησις*** λέγεται καὶ ἡ διδασκαλία περὶ τῆς ὀνομασίας τῶν ἀριθμῶν καὶ τῆς γραφῆς αὐτῶν.

Ἡ ἐπιστήμη ἡ ὁποία πραγματεύεται περὶ τῶν ἀριθμῶν, λέγεται ***ἀριθμητική.***

2. ***Ἀραβικὴ γραφή.*** Περὶ τῆς ὀνομασίας καὶ τῆς γραφῆς τῶν ἀριθμῶν καὶ τῆς ἀπαγγελίας αὐτῶν δὲν θὰ κάμωμεν λόγον, ὡς γνωστῶν. Παρατηροῦμεν ὅμως, ὅτι ἡ γραφὴ τῶν ἀριθμῶν διὰ τῶν ψηφίων *1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9* καὶ *0* λέγεται ***ἀραβικὴ γραφὴ*** καὶ τὰ ψηφία ταῦτα ***ἀραβικοὶ χαρακτῆρες.*** Διότι ἡμεῖς ἐμάθομεν ταῦτα παρὰ τῶν Ἀράβων περὶ τὸν 12ον αἰῶνα μ. Χ. Ἡ ἐφεύρεσις ὅμως αὐτῶν καὶ ἡ μέθοδος τῆς γραφῆς τῶν ἀριθμῶν εἶναι ἐπινόησις τῶν Ἰνδῶν, παρὰ τῶν ὁποίων ἔμαθον αὐτὴν οἱ Ἄραβες. Ἡ γραφὴ αὕτη τῶν ἀριθμῶν (ἡ ὁποία εἶναι συντομωτάτη καὶ εὐκολωτάτη) στηρίζεται ***πρῶτον μὲν ἐπὶ τῆς ἀναλύσεως τῶν ἀριθμῶν εἰς μονάδας διαφόρων τάξεων καὶ δεύτερον ἐπὶ τῆς ἑξῆς συμφωνίας : ἕκαστον σημαντικὸν ψηφίον παριστᾷ μονάδας πάσης τάξεως κατὰ τὴν θέσιν του·*** ἤτοι τὸ 5, ἐὰν εἶναι μόνον του, παριστᾷ πέντε μονάδας, ἐὰν ἔχῃ ἓν οἱονδήποτε ψηφίον κατόπιν του, παριστᾷ πέντε δεκάδας, ἐὰν δὲ δύο, παριστᾷ πέντε ἑκατοντάδας καὶ γενικῶς ***πᾶν ψηφίον, γραφόμενον πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἄλλου, παριστᾷ μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως ἢ τὸ ἄλλο ψηφίον.***

Ἡ μέθοδος αὕτη καὶ ἡ ἀνάλυσις τῶν ἀριθμῶν εἰς μονάδας διαφόρων τάξεων ἀποτελοῦν τὸ λεγόμενον σύστημα ἀριθμήσεως. Ὁ ἀριθμὸς δέκα, ὅστις δεικνύει πόσαι μονάδες ἑκάστης τάξεως ἀποτελοῦσι μίαν τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας, λέγεται βάσις τοῦ συστήματος τούτου, τὸ ὁποῖον διὰ τοῦτο λέγεται ***δεκαδικὸν*** σύστημα.

Ἀσκήσεις.

1) Τί λαμβάνομεν ὅταν συγκρίνωμεν ἕνα πλῆθος πρὸς τὴν μονάδα του ;

2) Ὅταν λέγωμεν, ὅτι ἕνας σάκκος περιέχει τριάκοντα ὀκάδας ζάχαρη, ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς καὶ ποία ἡ μονάς ;

3) Πόσας μονάδας, δεκάδας, ἑκατοντάδας ἔχει α΄) μία χιλιάς, β΄) μία δεκὰς χιλιάδων, γ΄) μία ἑκατοντὰς χιλιάδων ;

4) Πόσα δεκάδραχμα καὶ πόσα ἑκατοντάδραχμα περιέχονται α΄) εἰς 1000 δρχ., β΄) εἰς 10000 δρχ., καὶ γ΄) εἰς 100000 δρχ. ;

5) Ποσάκις ἡ χιλιὰς εἶναι μεγαλυτέρα τῆς δεκάδος καὶ ποσάκις ἡ δεκὰς χιλιὰς εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἑκατοντάδος ;

6) Εἰς ποίαν ἀρχικὴν πρωτεύουσαν μονάδα ἀνήκουσι α΄) αἱ

ἑκατοντάδες τῶν ἁπλῶν μονάδων, β) αἱ δεκάδες τῶν χιλιάδων, γ') αἱ ἑκατοντάδες τῶν ἑκατομμυρίων ;

7) Πῶς γράφονται διὰ ψηφίων οἱ ἀριθμοί : α') τριάκοντα χιλιάδες δέκα ἑπτά, β') τριάκοντα χιλιάδες ἑπτά, γ') ὀκτακόσιαι πεντήκοντα χιλιάδες εἴκοσι ἑπτά, δ') ὀκτακόσιαι χιλιάδες εἴκοσι ἑπτά, ε') ὀκτακόσιαι χιλιάδες ἑπτά, στ') τρία ἑκατομμύρια πεντακόσιαι δέκα χιλιάδες, ζ') ἐννέα ἑκατομμύρια πέντε χιλιάδες ἑκατὸν πέντε, η') τριάκοντα ἑπτὰ ἑκατομμύρια εἴκοσι ὀκτώ ;

8) Τί παριστᾷ ἕκαστον ψηφίον εἰς τὸν ἀριθμὸν 358647 ;

9) Εἰς ἕνα ἀριθμὸν ἓν ψηφίον κατέχει τὴν ἕκτην, ὀγδόην, ἐννάτην θέσιν. Ποίας τάξεως μονάδας παριστᾷ ;

10) Πῶς ἀπαγγέλλονται οἱ ἑξῆς ἀριθμοί ;

859	80007	1010101	300500000
1650	50800	30005	305000000
12107	800106	300005	6006006
35011	100001	300030	6060060

11) Νὰ γραφῶσι διὰ ψηφίων οἱ ἀριθμοί, οἵτινες ἔχουσι α') 12 δεκάδας καὶ 7 μονάδας, β') 12 ἑκατοντάδας καὶ 7 μονάδας, γ') 12 χιλιάδας καὶ 7 μονάδας, δ') 3 δεκάδας χιλιάδων, 5 ἑκατοντάδας καὶ 2 δεκάδας, ε') 4 μονάδας ἑκατομμυρίων καὶ 4 δεκάδας ἁπλᾶς.

12) Πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ 4 γράφομεν ἓν μηδενικόν, δύο μηδενικά, τρία μηδενικὰ κλπ., τί γίνεται ὁ ἀριθμὸς 4 ;

13) Νὰ γίνῃ ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 4, 5, 6, δέκα, ἑκατόν, χιλίας φορὰς μεγαλύτερος.

14) Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν δεκάδων, ἑκατοντάδων, χιλιάδων καὶ ἑκατοντάδων χιλιάδων ἑκάστου τῶν ἀριθμῶν 1252, 37206, 705040, 3604809.

Ἑλληνικὴ καὶ ῥωμαϊκὴ γραφὴ τῶν ἀριθμῶν.

3. Οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες δὲν ἐγνώριζον τὰ ἰνδικὰ ψηφία· μετεχειρίζοντο δὲ διὰ τὴν γραφὴν τῶν ἀριθμῶν τὰ 24 γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου, θέτοντες πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτῶν καὶ ὀλίγον ὑπεράνω ἕνα τόνον. Καὶ τὰς μὲν μονάδας *1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9* παρίστανον διὰ τῶν γραμμάτων ἀπὸ τοῦ α μέχρι τοῦ θ· ἐπειδὴ ὅμως τὰ γράμματα ταῦτα εἶναι μόνον ὀκτώ, μετεχει-

ρίζοντο πρὸς παράστασιν τοῦ ἀριθμοῦ 6 τὸ σημεῖον ϛ (στίγμα)˙ ὥστε οἱ ἀριθμοὶ *1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9* παριστάνοντο α΄, β΄, γ΄, δ΄, ε΄, ϛ΄, ζ΄, η΄, θ΄

Τὰς δὲ δεκάδας *10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90* παρίστανον διὰ τῶν γραμμάτων ἀπὸ τοῦ ι μέχρι τοῦ π, ἐπειδὴ δὲ καὶ ταῦτα εἶναι ὀκτώ, μετεχειρίζοντο τὸ σύμβολον ϟ΄ (ὅπερ λέγεται κόππα) πρὸς παράστασιν τοῦ ἀριθμοῦ 90˙ ὥστε οἱ ἀριθμοὶ *10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90* παριστάνοντο ι΄, κ΄, λ΄, μ΄, ν΄, ξ΄, ο΄, π΄, ϟ΄.

Τὰς δὲ ἑκατοντάδας *100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900* παρίστανον διὰ τῶν ὑπολοίπων ὀκτὼ γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου καὶ διὰ τοῦ σημείου ϡ (ὅπερ λέγεται σαμπὶ) ὡς ἑξῆς:

100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900
ρ΄, σ΄, τ΄, υ΄, φ΄, χ΄, ψ΄, ω΄, ϡ΄

Τοὺς ἐκ μονάδων καὶ δεκάδων συγκειμένους ἀριθμοὺς παρίστανον γράφοντες πρῶτον τὸ γράμμα τῶν δεκάδων καὶ ἔπειτα τὸ γράμμα τῶν μονάδων. Οὕτω 47 ἐγράφετο μζ΄, 53 νγ΄.

Ὁμοίως καὶ τοὺς συγκειμένους ἐκ μονάδων καὶ δεκάδων καὶ ἑκατοντάδων. Οὕτω οἱ ἀριθμοὶ *312, 507, 609* ἐγράφοντο ὡς ἑξῆς: τιβ΄, φζ΄, χθ΄.

Διὰ τὰς χιλιάδας μετεχειρίζοντο τὰ αὐτὰ γράμματα, θέτοντες τὸν τόνον ὄπισθεν καὶ ὀλίγον ὑποκάτω˙ οὕτω ὁ 1000 ἐγράφετο ͵α, ὁ 3000 ͵γ, ὁ 100000 ͵ρ κτλ.

4. Οἱ Ρωμαῖοι ἐχρησιμοποίουν ἑπτὰ ἐκ τῶν γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου των, διὰ τῶν ὁποίων διὰ διαφόρων συνδυασμῶν, ἠδύναντο νὰ γράφωσιν οἱονδήποτε ἀριθμόν. Ἦσαν δὲ τά:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

ὁ δὲ σχηματισμὸς τῶν ἀριθμῶν διὰ τῆς ρωμαϊκῆς γραφῆς ἐγίνετο κατὰ τοὺς ἑξῆς κανόνας:

1ον) Ὅμοια ψηφία, παρατιθέμενα, προστίθενται.

Οὕτω ὁ ἀριθμὸς	XX	παριστᾷ τὸν	20
» »	CC	» »	200
» »	MMM	» »	3000

2ον) Πᾶν ψηφίον, γραφόμενον ἀριστερὰ μεγαλυτέρου του, ἀφαιρεῖται ἀπ᾿ αὐτοῦ καὶ δεξιά, προστίθεται εἰς αὐτό.

Οὕτω ὁ ἀριθμὸς IV παριστᾷ τὸν ἀριθμὸν 4
καὶ » » VI » » » 6
ὁ δὲ » XL » » » 40
καὶ » » LX » » » 60

3ον) Ἀριθμός, ὑπεράνω τοῦ ὁποίου γράφεται μία γραμμή, παριστᾷ χιλιάδας, δύο γραμμαί, ἑκατομμύρια, τρεῖς γραμμαί, δισεκατομμύρια· οὕτω :

ὁ ἀριθμὸς $\overline{\text{VII}}$ παριστᾷ 7 χιλιάδας
» » $\overline{\overline{\text{XIX}}}$ » 19 ἑκατομμύρια
καὶ » » $\overline{\overline{\overline{\text{LXX}}}}$ » 70 δισεκατομμύρια.

Ἡ ἑλληνικὴ καὶ ἡ ρωμαϊκὴ γραφὴ χρησιμοποιοῦνται σήμερον εἰς ὡρισμένας περιστάσεις, π. χ. εἰς τὴν ἀρίθμησιν κεφαλαίων ἑνὸς βιβλίου καὶ τῶν τόμων ἑνὸς ἔργου, εἰς τὴν ἀρίθμησιν τῶν σελίδων τοῦ προλόγου ἑνὸς βιβλίου, εἰς τὴν σημείωσιν τῶν ὡρῶν ἐπὶ τῆς πλακὸς τοῦ ὡρολογίου κλπ.

Ἄσκησις.

15) Οἱ ἀριθμοὶ 11, 85, 350, 756, 1725, 30700, 50000 νὰ γραφῶσι διὰ τῆς ἑλληνικῆς καὶ ρωμαϊκῆς γραφῆς.

Ἴσοι καὶ ἄνισοι ἀριθμοί.

5. Ἴσοι λέγονται δύο ἀριθμοί, ὅταν ἑκάστη μονὰς τοῦ ἑνὸς ἀντιστοιχεῖ εἰς μίαν καὶ μόνον μίαν μονάδα τοῦ ἄλλου. Π. χ. ὁ ἀριθμὸς τῶν ἄνω ἄκρων τοῦ ἀνθρώπου εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν κάτω ἄκρων αὐτοῦ. Ἐπίσης ὁ ἀριθμὸς τῶν δακτύλων τῆς δεξιᾶς χειρὸς εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν δακτύλων τῆς ἀριστερᾶς.

Σημεῖον τῆς ἰσότητος δύο ἀριθμῶν εἶναι τὸ =, τὸ ὁποῖον ἀπαγγέλλεται ***ἴσον*** καὶ τὸ ὁποῖον γράφεται μεταξὺ τῶν δύο ἴσων ἀριθμῶν, ὡς $8 = 8$ (ὀκτὼ ἴσον ὀκτώ).

Ἄνισοι λέγονται δύο ἀριθμοί, ὅταν μονάδες τινὲς τοῦ ἑνὸς δὲν ἔχωσιν ἀντιστοίχους εἰς τὸν ἄλλον· ὁ δὲ ἔχων τὰς περισσοτέρας μονάδας λέγεται μεγαλύτερος, ἐνῷ ὁ ἄλλος λέγεται μικρότερος. Π.χ. οἱ ἀριθμοὶ 7 καὶ 5 εἶναι ἄνισοι· εἶναι δὲ ὁ 7 μεγαλύτερος τοῦ 5.

Σημεῖον τῆς ἀνισότητος εἶναι $<$, γράφεται δὲ ὁ μικρότερος ἀριθμὸς πρὸς τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας, ὡς $8 < 9$, ἀναγινώσκεται δὲ ὀκτὼ μικρότερον τοῦ ἐννέα ἢ $9 > 8$ καὶ ἀναγινώσκεται ἐννέα μεγαλύτερον τοῦ ὀκτώ.

6. Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἰσότητος τῶν ἀριθμῶν φαίνεται φανερὰ ἀμέσως ἡ ἑξῆς ἰδιότης.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ εἶναι ἴσοι πρὸς τρίτον εἶναι καὶ μεταξύ των ἴσοι.

Σημ. α΄) Ἕνα οἱονδήποτε ἀριθμὸν δυνάμεθα νὰ τὸν παραστήσωμεν διὰ τοῦ γράμματος α ἢ β ἢ γ κλπ.

Σημ. β΄) Ἡ ἀνωτέρω ἰδιότης τῆς ἰσότητος ἐκφράζεται καὶ ὡς ἑξῆς: ἐὰν $\alpha = \beta$ καὶ $\alpha = \gamma$ θὰ εἶναι καὶ $\beta = \gamma$.

II

Αἱ τέσσαρες πράξεις.

Α΄ ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

7. Πρόβλημα. ***Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ μάθωμεν πόσας δραχμὰς ἔλαβεν ἓν παιδίον, εἰς τὸ ὁποῖον ὁ πατήρ του ἔδωκεν 25 δραχμάς, ἡ μήτηρ του 18, καὶ ὁ πάππος του 7.***

Ἀλλὰ τοῦτο εἶναι πρόβλημα ***προσθέσεως***· δηλαδὴ τῆς πράξεως, ***διὰ τῆς ὁποίας σχηματίζομεν ἕνα ἀριθμὸν ἐξ ὅλων τῶν μονάδων τὰς ὁποίας ἔχουσι δύο ἢ περισσότεροι ἄλλοι ἀριθμοί.***

8. Περὶ τῆς προσθέσεως γνωρίζομεν, ὅτι εἶναι δυνατὴ ἐπὶ συγκεκριμένων ἀριθμῶν, ὅταν οὗτοι εἶναι ὁμοειδεῖς, δηλ. ὅταν αἱ μονάδες των παριστάνουν ὅλαι τὸ αὐτὸ πρᾶγμα καὶ ὅτι τὸ ἄθροισμά των εἶναι ὁμοειδὲς πρὸς αὐτούς: ἤτοι γνωρίζομεν, ὅτι δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν τρία μῆλα καὶ δύο μῆλα, ἀλλ' ὅτι δὲν δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν τρία μῆλα καὶ δύο μῆνας. Προκειμένου δὲ περὶ τῆς προσθέσεως δύο ἀριθμῶν, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ εἷς εἶναι μονοψήφιος, προσθέτομεν εἰς τὸν ἄλλον κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς προσθέσεως, τὰς μονάδας τοῦ μονοψηφίου μίαν πρὸς μίαν καὶ ἐκτελοῦμεν τὴν πρόσθεσιν δύο τοιούτων ἀριθμῶν ἀπὸ μνήμης.

9) Ὅταν οἱ προσθετέοι ἀριθμοὶ εἶναι ὁποιοιδήποτε, προσθέτομεν αὐτοὺς κατὰ τὸν γνωστὸν κανόνα, κατὰ τὸν ὁποῖον ***διὰ***

νὰ προσθέσωμεν ἀριθμούς, γράφομεν αὐτοὺς τὸν ἕνα ὑπὸ τὸν ἄλλον εἰς τρόπον, ὥστε αἱ μονάδες ἑκάστης τάξεως νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν κατακόρυφον στήλην καὶ κάτωθεν αὐτῶν σύρομεν γραμμήν. Ἔπειτα προσθέτομεν χωριστὰ τὰ ψηφία κάθε μιᾶς στήλης, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὰ δεξιὰ καί, ὅταν μὲν τὸ ἄθροισμα μιᾶς στήλης δὲν εἶναι μεγαλύτερον τοῦ 9, γράφομεν αὐτὸ κάτωθεν τῆς ἰδίας στήλης, ἐὰν ὅμως εἶναι μεγαλύτερον τοῦ 9, γράφομεν μόνον τὰς μονάδας, τὰς δὲ δεκάδας προσθέτομεν εἰς τὴν στήλην ποὺ ἀκολουθεῖ κ.ο.κ. μέχρι τῆς τελευταίας στήλης.

10. Ἡ ἐξήγησις τοῦ ἀνωτέρω κανόνος στηρίζεται εἰς τὰς κάτωθι ἰδιότητας τῆς προσθέσεως :

α΄) Ἄς ἐπανέλθωμεν εἰς τὸ πρόβλημα τῆς παραγράφου 7. Οἱ ἀριθμοὶ τοῦ προβλήματος αὐτοῦ, ἀφοῦ εἶναι ὁμοειδεῖς, δύνανται νὰ προστεθῶσιν· ἀλλὰ παρατηροῦμεν, ὅτι κατὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ ἀθροίσματος, εἴτε προσθέσωμεν εἰς τὰς μονάδας τοῦ 25 τὰς μονάδας τοῦ 18 καὶ εἰς τὸν οὕτω εὑρισκόμενον ἀριθμὸν τὰς μονάδας τοῦ 7, εἴτε εἰς τὰς μονάδας τοῦ 18 προσθέσωμεν τὰς μονάδας τοῦ 7 καὶ εἰς τὸν νέον ἀριθμὸν τὰς μονάδας τοῦ 25, τὸ αὐτὸ θὰ εὕρωμεν ἄθροισμα· διότι πάντοτε το ἄθροισμα ἀποτελεῖται ἀπὸ 25 μονάδας, ἀπὸ 18 μονάδας καὶ ἀπὸ 7 μονάδας. Τὴν ἰδιότητα ταύτην ἐκφράζομεν λέγοντες : ***καθ᾽ οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν ἐκτελεσθῇ ἡ πρόσθεσις πολλῶν ἀριθμῶν, πάντοτε εὑρίσκεται τὸ αὐτὸ ἄθροισμα.***

Δηλαδὴ $\alpha+\beta+\gamma+\delta=\beta+\delta+\alpha+\gamma$.

β΄) Εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν πόσας δραχμὰς ἔλαβε τὸ παιδίον ἀπὸ τοὺς γονεῖς του καὶ κατόπιν εἰς τὸ εὑρεθὲν ἄθροισμα νὰ προσθέσωμεν τὰς δραχμὰς τοῦ πάππου του, ἐὰν δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δραχμῶν ποὺ ἔλαβεν ἀπὸ τοὺς γονεῖς του τὸ παραστήσωμεν διὰ τοῦ (25 δρ. + 18 δρ.), ἔχομεν τὴν ἰσότητα 25δρ. + 18δρ. + 7δρ. = (25δρ. + 18δρ.) + 7δρ. (ἡ παρένθεσις σημαίνει, ὅτι τὸ ἐντὸς αὐτῆς ἄθροισμα ἔχει ἐκτελεσθῇ). Τὴν ἰδιότητα ταύτην ἐκφράζομεν ὡς ἑξῆς : ***εἰς πᾶν ἄθροισμα δύνανται νὰ ἀντικατασταθῶσι δύο ἢ περισσότεροι προσθετέοι διὰ τοῦ εὑρεθέντος ἀθροίσματός των.***

Ἡ ἀνωτέρω ἰσότης γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς (25δρ. + 18δρ.)+ + 7δρ. = 25δρ. + 18δρ. + 7δρ. ἤτοι, ἐὰν εἰς μίαν πρόσθεσιν ἕνας προσθετέος εἶναι ἄθροισμα ἐντὸς παρενθέσεως, δυνάμεθα νὰ ἐξαλείψωμεν τὴν παρένθεσιν.

Ἀλλ' εἶναι φανερόν, ὅτι καὶ περισσότεροι προσθετέοι, ἂν εἶναι ἀθροίσματα ἐντὸς παρενθέσεων, δύνανται νὰ γραφῶσιν ἄνευ παρενθέσεων. Οὕτω ἔχομεν :

$$(8+7+3)+(9+6)=8+7+3+9+6.$$ Ὅθεν :

γ΄) ***Ἄθροισμα προστίθεται εἰς ἄθροισμα καὶ ἂν προστεθῶσιν οἱ προσθετέοι τῶν δύο ἀθροισμάτων.***

ἤτοι $(\alpha+\beta)+(\gamma+\delta+\varepsilon)=\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon.$

11. Κατόπιν τούτων ἂς λύσωμεν τὸ ἑπόμενον πρόβλημα. ***Ἕνας παντοπώλης ἐκέρδισεν ἀπὸ τὴν πώλησιν βουτύρου 4507 δρ., ἀπὸ τὴν πώλησιν ἐλαίου 9813 δρ., καὶ ἀπὸ τὴν πώλησιν ἀλεύρου 552 δρ. Πόσας δραχμὰς ἐκέρδισεν ἐν ὅλῳ ;***

Τὸ ζητούμενον ὁλικὸν κέρδος εἶναι τὸ ἄθροισμα 4507 δρ. + + 9813δρ. + 552δρ. Ἀλλὰ καθεὶς τῶν ἀριθμῶν τούτων εἶναι ἄθροισμα μονάδων, δεκάδων, ἑκατοντάδων κλπ. Ὥστε διὰ νὰ προσθέσωμεν αὐτοὺς εἶναι φανερόν, ὅτι ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν χωριστὰ τὰς μονάδας των, χωριστὰ τὰς δεκάδας των κλπ. καὶ νὰ ἑνώσωμεν ἔπειτα τὰ ἀθροίσματα ποὺ εὑρέθησαν. Τοῦτο δὲ κάμνομεν, ὅταν προσθέτωμεν, κατὰ τὸν κανόνα, χωριστὰ τὰ ψηφία ἑκάστης στήλης κλπ. Πρέπει ὅμως νὰ σημειωθῇ, ὅτι γράφομεν τοὺς ἀριθμοὺς εἰς τρόπον, ὥστε αἱ μονάδες ἑκάστης τάξεως νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν κατακόρυφον στήλην μόνον πρὸς εὐκολίαν. Διότι ἡ πρόσθεσις τῶν ἀριθμῶν γίνεται καὶ ὅταν οἱ ἀριθμοὶ διαταχθῶσι καὶ κατ' ἄλλον τρόπον, ἀρκεῖ νὰ προσθέτωμεν χωριστὰ τὰς μονάδας τῶν αὐτῶν τάξεων.

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω λοιπὸν εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ ζητούμενον ὁλικὸν κέρδος εἶναι 14872 δρ.

$$\begin{array}{r} 4507 \\ 9813 \\ 552 \\ \hline 14872 \end{array} \qquad 4507+9813+552=14872$$

12. ***Πρόσθεσις ἀπὸ μνήμης.*** Ὅταν οἱ ἀριθμοὶ εἶναι δύο καὶ διψήφιοι προσθέτομεν γενικῶς εἰς τὸν ἕνα χωριστὰ τὰ μέρη τοῦ ἄλλου, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὰς μονάδας τῆς ἀνωτέρας τάξεως· π.χ. διὰ

τοὺς ἀριθμοὺς 58 καὶ 26 λέγομεν ἀπὸ μνήμης 58 καὶ 20 78 καὶ 6 84. Διὰ δὲ τοὺς 60 καὶ 30 λέγομεν ἀμέσως 90.

Ὅταν οἱ ἀριθμοὶ εἶναι περισσότεροι καὶ πολυψήφιοι (ὄχι βέβαια πολὺ μεγάλοι), προσθέτομεν ἀπὸ μνήμης χωριστὰ τὰς μονάδας τῶν διαφόρων τάξεων, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὴν ἀνωτάτην τάξιν καὶ ἔπειτα ἑνοῦμεν τὰ ἐξαγόμενα· οὕτω διὰ τοὺς ἀριθμοὺς 217, 325, 436 λέγομεν 200 καὶ 300 καὶ 400 κάμνουν 900· 10 20 καὶ 30 κάμνουν 60· 7, 5 καὶ 6 κάμνουν 18 καὶ τέλος 900 60 καὶ 18 κάμνουν 978.

13. ***Δοκιμὴ τῆς προσθέσεως. Δοκιμὴ μιᾶς πράξεως ἀριθμητικῆς λέγεται ἄλλη πρᾶξις, τὴν ὁποίαν κάμνομεν διὰ νὰ ἴδωμεν ἂν ἡ πρώτη ἔγινε χωρὶς λάθος.***

Γίνεται δὲ ἡ δοκιμὴ μὲ τὴν ἐπανάληψιν τῆς προσθέσεως ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω· ἢ ἐὰν γράψωμεν τοὺς προσθετέους κατ' ἄλλην σειράν· ἐὰν εὕρωμεν πάλιν τὸ αὐτὸ ἄθροισμα, εἶναι πιθανόν, ὅτι δὲν ἔγινε λάθος.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

Ἀπὸ μνήμης.

Νὰ εὑρεθῶσι τὰ κάτωθι ἀθροίσματα.

16) 40δρ.+50δρ.+60δρ., 80μ.+70μ.+37μ.
90 πηχ.+69 πηχ.+70 πηχ., 20 ταλ.+90 τάλ.+10 τάλ.+95 τάλ.

17) 900+800 700+800+600
200+257 200+600+436
400+159 700+900+100+436
400+500+300 300+500+755+400

18) 630+70 468+40 7200+800 3349+700
910+90 911+90 6400+658 4977+100

19) 67+33 72+32 880+220 846+160
81+19 73+69 350+655 638+462

20) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ κάτωθι ἀθροίσματα κατὰ δύο τρόπους:
(62+37)+53, (35+29)+(42+79+37),
20+(16+30+25)+(18+31)

21) Ἀπὸ τὰ χρήματα, τὰ ὁποῖα εἶχέ τις, ἐπλήρωσε διὰ τὴν ἀγορὰν πράγματός τινος 57 δρ. καὶ τοῦ ἔμειναν 43 δρ. Πόσας δραχμὰς εἶχεν;

22) Ἕνας μαθητὴς ἠγόρασε τρία βιβλία, τὸ μὲν ἤξιζε 16 δρ., τὸ δὲ 14 δρ. καὶ τὸ τρίτον 20 δρ. Πόσας δραχμὰς ἤξιζον τὰ τρία βιβλία ;

23) Πόσας ἡμέρας ἔχουσιν οἱ μῆνες Ἰανουάριος, Φεβρουάριος, Μάρτιος καὶ Ἀπρίλιος τοῦ ἔτους 1932 ;

24) Διέθεσέ τις διὰ τοὺς πτωχοὺς τὸν ἕνα μῆνα 40 δρ., τὸν ἑπόμενον 55 δρχ., τὸν τρίτον 80 δρ., τὸν τέταρτον 85 δρ. καὶ τὸν πέμπτον 70 δρ. Πόσας δραχμὰς διέθεσεν ἐν ὅλῳ ;

Αἱ ἑπόμεναι ἀσκήσεις καὶ προβλήματα νὰ λυθῶσι γραπτῶς.

25) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἀθροίσματα :

$2943+3851+536+584+5208$

$59308+95244+25091+561+6781+3038$

$21979+128661+30577+450590+598+46+48954$

$104283+875+99+3019+2702300+27803$.

26) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ κάτωθι προσθέσεις χωρὶς νὰ τεθοῦν οἱ ἀριθμοὶ ὁ εἷς κάτωθεν τοῦ ἄλλου :

α΄) $58+22+76+85+34$ γ΄) $4728+5926+8975$

β΄) $589+325+121+864$ δ΄) $6547+523+9478+659$.

27) Κατὰ τὴν πρόσθεσιν τῶν ἀριθμῶν, πότε δυνάμεθα νὰ ἀρχίσωμεν τὴν πρᾶξιν ἢ ἀπὸ τὴν πρόσθεσιν τῶν ἁπλῶν μονάδων καὶ νὰ προχωροῦμεν πρὸς τ᾽ ἀριστερὰ ἢ ἀπὸ τὴν πρόσθεσιν τῶν μονάδων τῆς ἀνωτάτης τάξεως καὶ νὰ προχωροῦμεν πρὸς τὰ δεξιά ;

28) Ὁ Καποδίστριας ἐγεννήθη τὸ ἔτος 1776 καὶ ἔζησε 55 ἔτη. Κατὰ ποῖον ἔτος ἀπέθανεν ;

29) Ἡ Τροία ἐκυριεύθη τὸ ἔτος 1270 π. Χ. Πόσα ἔτη παρῆλθον ἀπὸ τότε ἕως σήμερον ;

30) Εἷς ἔμπορος ἠγόρασε τυρὸν ἀντὶ 5075 δρ. καὶ τὸν μετεπώλησε μὲ κέρδος 967 δρ. Πόσας δραχμὰς ἐκέρδισεν ἐκ τῆς πωλήσεως ;

31) Εἷς ὀπωροπώλης ἐπώλησεν ὀπωρικὰ ἀντὶ δρ. 2115 καὶ ἐζημιώθη ἐκ τῆς πωλήσεως αὐτῆς 892 δρ. Πόσης ἀξίας ἦσαν τὰ πωληθέντα ;

32) Γεωργός τις εἰσέπραξεν ἐκ τοῦ σίτου του 1050 δρ.,

ἐκ τοῦ οἴνου του 822 δρ. καὶ ἐκ τοῦ βάμβακός του 2500 δρ. Πόσας δραχμὰς εἰσέπραξεν ἐν ὅλῳ ;

33) Κατὰ τὴν ἐνοικίασιν τῆς οἰκίας ἐπλήρωσέ τις ἐνοίκιον ἑνὸς μηνὸς ἐκ 2300 δρ., τὸ ἀντίτιμον τοῦ ἐνοικίου ἑνὸς μηνὸς δι' ἐγγύησιν, 552 δρ. διὰ μεσιτείαν, 750 δρ. δι' ἔξοδα συμβολαίου τῆς ἐνοικιάσεως καὶ 250 δρ. διὰ τὴν μεταφορὰν τῶν ἐπίπλων του. Πόσας δραχμὰς ἐπλήρωσεν ἐν ὅλῳ ;

34) Οἰκογενειάρχης τις δαπανᾶ κατὰ μῆνα, δι' ἐνοίκιον 2500 δρ., διὰ τρόφιμα 4675 δρ., διὰ φωτισμὸν 112 δρ., διὰ καύσιμον ὕλην 127 δρ., δι' ὑδροληψίαν 39 δρ. καὶ διὰ διάφορα ἄλλα ἔξοδα 875 δρ. Πόσον δαπανᾷ οὗτος κατὰ μῆνα ;

35) 'Επώλησέ τις 370 ὀκ. οἴνου ἀντὶ 3320 δρ., 725 ὀκ. ἀντὶ 7975 δρ., 1095 ὀκ. ἀντὶ 8760 δρ. καὶ 1810 ὀκ. ἀντὶ 12670 δρ. Πόσας ὀκάδας ἐπώλησε καὶ πόσας δραχμὰς εἰσέπραξεν ;

36) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα πέντε διαδοχικῶν ἀριθμῶν, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ πρῶτος εἶναι ὁ 1024. (ἀπ. 5130).

37) 'Επλήρωσέ τις χρέος εἰς τρεῖς δόσεις. Διὰ τὴν πρώτην ἐπλήρωσε 1275 δρ., διὰ τὴν δευτέραν 375 δρ. περισσότερον καὶ διὰ τὴν τρίτην 680 δρ. περισσότερον ἀπὸ τὴν δευτέραν. Εἰς πόσας δραχμὰς ἀνήρχετο τὸ χρέος του ; (ἀπ. 5255 δρ.).

38) 'Ηγόρασέ τις ζάχαριν ἀντὶ α δραχμῶν, βούτυρον ἀντὶ β δραχμῶν καὶ κρέας ἀντὶ γ δραχμῶν. Πόσας δραχμὰς ἔδωκεν ἐν ὅλῳ ;

Β'. ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

14. Πρόβλημα. ***Πόσαι δραχμαὶ θὰ μοῦ μείνουν, ὅταν ἀπὸ τὰς 49 δραχμὰς ποὺ ἔχω, ἐξοδεύσω τὰς 25 ;***

'Αλλὰ τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι πρόβλημα ἀφαιρέσεως, δηλαδὴ τῆς πράξεως, ***διὰ τῆς ὁποίας ἐλαττώνομεν δοθέντα ἀριθμὸν κατὰ τόσας μονάδας, ὅσας ἔχει ἄλλος δοθεὶς ἀριθμὸς*** καὶ εἰς τὴν ὁποίαν ὁ ἀριθμὸς ποὺ πρέπει νὰ ἐλαττωθῇ (ὁ 49) λέγεται ***μειωτέος***, ὁ δὲ ἄλλος (ὁ 25) ***ἀφαιρετέος.***

Εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα εἶναι φανερόν, ὅτι αἱ δραχμαὶ ποὺ θὰ μοῦ μείνουν (δηλαδὴ τὸ ὑπόλοιπον ἢ ἡ διαφορὰ) μαζὺ μὲ τὰς δραχμὰς ποὺ θὰ ἐξοδεύσω κάμνουν τὰς 49 δραχμάς.

"Αρα ***ὁ μειωτέος εἶναι ἄθροισμα τοῦ ἀφαιρετέου καὶ τῆς διαφορᾶς.***

Διὰ τοῦτο ὁρίζομεν τὴν ἀφαίρεσιν καὶ ὡς ἑξῆς:

Ἡ ἀφαίρεσις εἶναι πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας, ὅταν δίδωνται δύο ἀριθμοί, εὑρίσκεται τρίτος, ὅστις, ἐὰν προστεθῇ εἰς τὸν ἕνα, δίδει ἄθροισμα τὸν ἄλλον.

Καὶ εἰς τὴν ἀφαίρεσιν οἱ ἀριθμοὶ πρέπει νὰ εἶναι ὁμοειδεῖς.

Ἐὰν ὁ ἀφαιρετέος εἶναι ἴσος μὲ τὸν μειωτέον, εἶναι φανερόν, ὅτι μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν οὐδεμία μονὰς τοῦ μειωτέου μένει· λέγομεν δὲ τότε, ὅτι ἡ διαφορὰ αὐτῶν εἶναι 0, παραδεχόμενοι τὸ 0 ὡς ἀριθμόν. Οὕτω $8-8=0$.

Ἐὰν ὁ ἀφαιρετέος εἶναι μεγαλύτερος τοῦ μειωτέου, ἡ ἀφαίρεσις εἶναι ἀδύνατος.

15. Προκειμένου περὶ τῆς ἐκτελέσεως τῆς ἀφαιρέσεως, παρατηροῦμεν, ὅτι, ὅταν ἀφαιροῦμεν μονοψήφιον ἀριθμὸν ἀπὸ ἄλλου, ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τούτου, κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς πράξεως, τὰς μονάδας τοῦ μονοψηφίου μίαν πρὸς μίαν. Γίνεται δὲ ἡ πρᾶξις αὕτη ἀπὸ μνήμης. Ὅταν ὅμως ἔχωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν δύο οἱουσδήποτε ἀριθμούς, ἐκτελοῦμεν τὴν ἀφαίρεσιν κατὰ τὸν γνωστὸν κανόνα, κατὰ τὸν ὁποῖον ***διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα ἀπὸ ἄλλον, γράφομεν αὐτὸν ὑποκάτω τοῦ ἄλλου, ὡς καὶ εἰς τὴν πρόσθεσιν· ἔπειτα, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὰς ἁπλᾶς μονάδας, ἀφαιροῦμεν ἕκαστον ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὸ ἀντίστοιχον ψηφίον τοῦ μειωτέου. Ἐὰν δὲ ψηφίον τι τοῦ μειωτέου εἶναι μικρότερον τοῦ ἀντιστοιχοῦντος ψηφίου τοῦ ἀφαιρετέου, προσθέτομεν εἰς αὐτὸ 10, ἀλλ᾽ ἔπειτα, ἐρχόμενοι εἰς τὸ ἀκόλουθον πρὸς τὰ ἀριστερὰ ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου, αὐξάνομεν αὐτὸ κατὰ μίαν μονάδα πρὶν τὸ ἀφαιρέσωμεν. Τὰ ὑπόλοιπα τῶν μερικῶν τούτων ἀφαιρέσεων εἶναι τὰ ψηφία τοῦ ζητουμένου ὑπολοίπου.***

16. Ἡ ἐξήγησις τοῦ κανόνος τούτου στηρίζεται εἰς τὰς κάτωθι ἰδιότητας τῆς ἀφαιρέσεως.

Πρόβλημα. ***Εἶχέ τις 50 δρ., ἠγόρασε δὲ ἀπὸ ἕνα κατάστημα 5 δρ. τυρόν, 3 δρ. ἐλαίας καὶ 2 δρ. ἅλας. Πόσαι δραχμαὶ τοῦ ἔμειναν;***

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ζητούμενον πρέπει νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὰς 50 δρ. τὸ ἄθροισμα 5δρ $+$3δρ. $+$2δρ. $=$10δρ., ἢ ἀντὶ νὰ ἀφαιρέσωμεν διὰ μιᾶς ὅλον τὸ ἄθροισμα, εἶναι φανερόν, ὅτι δυνάμεθα νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὰς 50 δρ. πρῶτον τὰς 5 δρ. (ὅτε μένουν 45) καὶ ἔπειτα ἀπὸ ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον μένει νὰ ἀφαιρέσωμεν τὰς 3 δρ. (ὅτε μένουν 42) καὶ τέλος ἀπὸ τὰς 42 νὰ ἀφαιρέσωμεν τὰς 2 δρ. (ὅτε μένουν 40). Δηλαδὴ ἡ ἀνωτέρω διαφορὰ 50δρ.—(5δρ.+ +3δρ.+2δρ.) γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς: 50δρ.—5δρ.—3δρ.—2δρ.

Ὅθεν συνάγεται, ὅτι ***διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἄθροισμα ἀπὸ ἀριθμὸν δυνάμεθα νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν πάντας τοὺς προσθετέους τοῦ ἀθροίσματος τὸν ἕνα μετὰ τὸν ἄλλον.***

17. Πρόβλημα. ***Ποία εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν ἡλικιῶν δύο ἀδελφῶν, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ μὲν εἶναι 14 ἐτῶν ὁ δὲ 9 ἐτῶν;***

Ἡ ζητουμένη διαφορὰ εἶναι 14 — 9 = 5 ἔτη. Ἀλλὰ παρατηροῦμεν, ὅτι καὶ μετὰ 1, 2, 3 ἔτη κλπ. ἡ διαφορὰ τῶν ἡλικιῶν θὰ εἶναι πάλιν 5 ἔτη, ὅπως ἐπίσης καὶ πρὸ 1, 2, 3 ἐτῶν ἡ διαφορὰ τῶν ἡλικιῶν των ἦτο πάλιν 5 ἔτη.

Ὅθεν ***ἐὰν προσθέσωμεν (ἢ ἀφαιρέσωμεν) καὶ εἰς τὸν μειωτέον καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἡ διαφορὰ δὲν μεταβάλλεται.***

18. Τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα ἂς τὴν ἐφαρμόσωμεν εἰς τὴν ἀφαίρεσιν τῆς διαφορᾶς 9 — 5 ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 28, τὴν ὁποίαν σημειοῦμεν 28 — (9—5). Ἀλλ' ἂν προσθέσωμεν εἰς τὸν μειωτέον 28 τὸν ἀριθμὸν 5 καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον 9—5 τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 5, θὰ ἔχωμεν, κατὰ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα, 28— (9 — 5) = (28 + 5) — (9 — 5 + 5)· ἀλλὰ παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ ἀφαιρετέος 9 — 5 + 5 ἰσοῦται μὲ τὸν 9, ὥστε ἔχομεν 28 — (9 — 5) = (28 + 5) — 9. Καὶ πράγματι 28 — (9 — 5) = 28 — 4 = 24 καὶ (28 + 5) — 9 = 33 — 9 = 24.

Ὥστε ***διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν διαφορὰν ἀπὸ ἀριθμοῦ δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν ἀριθμὸν τὸν ἀφαιρετέον τῆς διαφορᾶς καὶ ἀπὸ τὸ εὑρισκόμενον ἄθροισμα νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν μειωτέον αὐτῆς.***

Διὰ τοῦτο, ὅταν ἔχωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν 9, προσθέτομεν 1 καὶ ἀφαιροῦμεν ἔπειτα 10.

Ἔστω ἤδη πρὸς λύσιν τὸ ἑξῆς πρόβλημα:

Μετεπώλησέ τις ζάχαριν ἀντὶ 75853 δρ. μὲ κέρδος 8492 δρ. Πόσων δραχμῶν ἦτο ἡ ἀξία τῆς ζαχάρεως;

Αἱ ζητούμεναι δραχμαὶ εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς ἀφαιρέσεως 75853δρ. — 8492δρ. Ὅταν δέ, ἐκτελοῦντες αὐτήν, ἀφαιροῦμεν τὰς μονάδας τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὰς μονάδας τοῦ μειωτέου κλπ.

ἐφαρμόζομεν τὴν ἰδιότητα 16, διότι ὁ ἀφαιρετέος εἶναι ἄθροισμα μονάδων· διὰ νὰ γίνῃ δὲ τοῦτο εὐκολώτερον γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον ὑποκάτω τοῦ μειωτέου. Ὅταν δέ, ἐρχόμενοι εἰς τὰς δεκάδας, ἀφαιροῦμεν τὰς δεκάδας τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ 15 δεκάδας τοῦ μειωτέου καὶ κατόπιν κάμνομεν τὰς 4 ἑκατοντάδας τοῦ ἀφαιρετέου 5, ἐφαρμόζομεν τὴν ἰδιότητα 17 κ.ο.κ. ἐργαζόμενοι εὑρίσκομεν τὴν ζητουμένην διαφοράν.

$$\begin{array}{r} 75853 \\ 8492 \\ \hline 67361 \end{array} \qquad 75853 - 8492 = 67361$$

20. ***Ἀφαίρεσις ἀπὸ μνήμης.*** Πρὸς τοῦτο ἀφαιροῦμεν τὰ μέρη τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὸν μειωτέον, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὴν ἀνωτάτην τάξιν· οὕτω τὴν διαφορὰν 873 — 527 εὑρίσκομεν ἀπὸ μνήμης, λέγοντες 500 ἀπὸ 873 373· 20 ἀπὸ 373 353 καὶ 7 ἀπὸ 353 346 ἢ καί, συντομώτερον, 520 ἀπὸ 873 353 καὶ 7 ἀπὸ 353 346.

21. ***Δοκιμὴ τῆς ἀφαιρέσεως.*** Πρὸς τοῦτο προσθέτομεν τὸν ἀφαιρετέον καὶ τὴν διαφορὰν καί, ἐὰν εὕρωμεν τὸν μειωτέον, εἶναι πιθανόν, ὅτι δὲν ἐγένετο λάθος ἢ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸν μειωτέον τὴν εὑρεθεῖσαν διαφοράν, ὁπότε πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸν ἀφαιρετέον.

Ἔννοια τῆς μεταβλητῆς καὶ τῆς συναρτήσεως.

22. Ἔστω, ὅτι ***ἐξῆλθέ τις τῆς οἰκίας του μὲ 200 δραχμὰς διὰ νὰ κάμῃ τὰς προμηθείας τῆς ἡμέρας***· ἐὰν τώρα ζητήσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν δραχμῶν μὲ τὰς ὁποίας ἐπέστρεψε, θὰ ἴδωμεν, ὅτι αὐτὸς ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τῶν δραχμῶν τὰς ὁποίας ἐδαπάνησε καί :

ἐὰν ἐδαπάνησεν 120 δρ. ἐπέστρεψε μὲ 200—120= 80 δρ.
» » 135 » » » 200—135= 65 »
» » 95 » » » 200— 95=105 » κ.ο.κ.

Ἀλλ' εἰς τὰς ἀφαιρέσεις αὐτὰς βλέπομεν, ὅτι ὁ μειωτέος εἶναι σταθερὸς ἀριθμός, ἐνῷ ὁ ἀφαιρετέος εἶναι μεταβλητός· ἡ δὲ διαφορά, ἡ ὁποία ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸν ἀφαιρετέον, εἶναι καὶ αὐτὴ μεταβλητή. Τὴν μεταβλητὴν αὐτὴν διαφοράν, ἡ ὁποία ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸν μεταβλητὸν ἀφαιρετέον (ἐνῷ ὁ μειωτέος εἶναι σταθερὸς ἀριθμός), καλοῦμεν ***συνάρτησιν*** τοῦ ἀφαιρετέου.

'Ασκήσεις καὶ προβλήματα.

Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ κάτωθι ἀφαιρέσεις (ἀπὸ μνήμης):

39) 580 δρ. — 35 δρ. 820 πήχ. — 310 πήχ.
770 ὀκ. — 75 ὀκ. 3600 ὀκ. — 700 ὀκ.
480 πήχ. — 190 πήχ. 7800 δρ. — 900 δρ.
275 μέτρ. — 185 μέτρα 89000 μ. — 8900 μ.

40) 59 — 18 200 — 37 942 — 608
47 — 25 800 752 8500 — 6500
88 — 49 335 — 317 9700 — 3800
345000 — 35000

41) Νὰ συμπληρωθῶσιν αἱ ἰσότητες:

11 + . . . = 31 42 + . . . = 97 437 + . . . = 545
15 + . . . = 40 750 + . . . = 950 1049 + . . . = 1200

42) Μία μαθητικὴ κοινότης εἶχεν εἰς τὸ ταμεῖόν της 570 δραχ. 'Ηγόρασε δὲ εἰκόνα, μὲ τὴν ὁποίαν διεκόσμησε τὴν αἴθουσαν τῆς τάξεώς της, ἀντὶ 280 δραχ. Πόσαι δραχμαὶ ἀπέμειναν εἰς τὸ ταμεῖόν της;

43) 'Εκ τῶν 235 μαθητῶν σχολείου τινος οἱ 145 εἶναι εἰς τὸ γυμναστήριον. Πόσοι μαθηταὶ εἶναι εἰς τὰς αἰθούσας τῆς διδασκαλίας;

44) Μία μήτηρ εἰς ἕνα μῆνα ὕφαινε ὕφασμα 95 πήχεων καὶ ἡ κόρη της ὕφασμα 69 πήχεων. Πόσους πήχεις ὕφαινεν ἡ μήτηρ περισσότερον;

45) Ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν 70 διὰ νὰ λάβωμεν διαφορὰν 43;

46) Ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν 39 διὰ νὰ λάβωμεν ἄθροισμα 68;

47) Τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν εἶναι 145 καὶ ὁ εἷς ἐκ τῶν ἀριθμῶν εἶναι 46. Ποῖος εἶναι ὁ ἄλλος;

Αἱ κάτωθι ἀσκήσεις καὶ τὰ προβλήματα νὰ λυθῶσι γραπτῶς.

48) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἑπόμεναι ἀφαιρέσεις:

52436 — 23709 101010 — 85054 1483080 — 606450
10006 — 5938 748317 — 269931 2372691 — 1131943
5130248 — 3025619 24494576 — 20212683

49) Νὰ συμπληρωθῶσιν αἱ ἰσότητες:

757+...= 4463 87308+...=96094

23063+...= 40541 98769+...=181211

260368+...=455049 698409+...=900400

50) Αἱ κάτωθι ἀφαιρέσεις νὰ ἐκτελεσθῶσι χωρὶς νὰ τεθῇ ὁ ἀφαιρετέος κάτωθεν τοῦ μειωτέου:

α) 4709—3657 γ) 85704—16007 ε) 70043—27168

β) 56700—8956 δ) 90007—45009 ϛ) 97541—79742

51) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων κατὰ δύο τρόπους:

α) 48712—(3038 + 26406 + 9268) γ) 48201 + (8300—7019)

β) 3725—(1000—7) δ) 1284 — (918—662)

ε) (219 + 528 + 311)—(737—329)

52) Ὁ Κολοκοτρώνης, γεννηθεὶς τῷ 1770, ἀπέθανε τὸ ἔτος 1843. Εἰς ποίαν ἡλικίαν ἀπέθανεν;

53) Ἡ Κωνσταντινούπολις ἔπεσεν εἰς χεῖρας τῶν Τούρκων τῷ 1453. Πόσα ἔτη παρῆλθον μέχρι σήμερον;

54) Δύο ἐργάται ἐκέρδισαν ὁμοῦ 1932 δρ., ἐκ τῶν ὁποίων ὁ εἷς ἐκέρδισεν 807 δρ. Πόσας ἐκέρδισεν ὁ ἄλλος καὶ πόσας ἐπὶ πλέον τοῦ πρώτου;

55) Ἐκ δύο ἀριθμῶν ἐχόντων διαφορὰν 4658 ὁ μικρότερος εἶναι 9859. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἄλλος.

56) Νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ τοῦ 684 ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ, μετὰ τοῦ ὁποίου ἔχει ἄθροισμα 1890.

57) Ἐκ τῶν 45750 κατοίκων μιᾶς πόλεως ἀπέθανον ἐντὸς ἑνὸς ἔτους 569 καὶ ἐγεννήθησαν 625. Πόσους κατοίκους εἶχεν αὕτη εἰς τὸ τέλος τοῦ ἔτους;

58) Εἰς μίαν τράπεζαν κατέθεσαν εἰς τὸ α΄ τρίμηνον ἑνὸς ἔτους 3500000 δρ. καὶ ἀπέσυρον 800000, εἰς τὸ β΄ κατέθεσαν 2100000 καὶ ἀπέσυρον 750000, εἰς τὸ γ΄ κατέθεσαν 1850000 καὶ ἀπέσυρον 1050000 καὶ εἰς τὸ τελευταῖον κατέθεσαν 2000500 δρ. καὶ ἀπέσυρον 575000 δρ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ τῶν καταθέσεων καὶ τῶν ἀπολήψεων κατὰ τριμηνίαν, ὡς καὶ τί ποσὸν ἔμεινεν ὡς κατάθεσις εἰς τὸ τέλος τοῦ ἔτους.

59) Ἐὰν εἶχον 47500 δρ. ἀκόμη, θὰ ἠγόραζον μίαν οἰκίαν 36750 δρ., μίαν ἄμπελον 27000 δρ. καὶ θὰ μοῦ ἐπερίσσευον

διὰ τὴν καλλιέργειαν τῆς ἀμπέλου 5250 δρ. Πόσας δραχμὰς ἔχω; (ἀπ. 21500).

60) Πατήρ τις εἶναι 48 ἐτῶν, ὁ δὲ υἱός του 14. Ποία θὰ εἶναι ἡ ἡλικία τοῦ πατρός, ὅταν ἡ τοῦ υἱοῦ του θὰ εἶναι 37 ἐτῶν; (ἀπ. 71).

61) Πατήρ τις εἶναι κατὰ 36 ἔτη μεγαλύτερος τοῦ υἱοῦ του, ὅστις εἶναι 17 ἐτῶν. Ποία θὰ εἶναι ἡ ἡλικία τοῦ πατρός, ὅταν ἡ τοῦ υἱοῦ του θὰ εἶναι 40 ἐτῶν; (ἀπ. 76).

62) Πατήρ τις εἶναι κατὰ 17 ἔτη μεγαλύτερος τοῦ υἱοῦ του καὶ κατὰ 28 ἔτη μεγαλύτερος τῆς θυγατρός του, ἥτις εἶναι 23 ἐτῶν. Πόσον ἐτῶν εἶναι ὁ πατὴρ καὶ πόσον ὁ υἱός; (ἀπ. 51, 34).

63) Εἰς τριτάξιόν τι σχολεῖον φοιτῶσιν 120 μαθηταὶ καὶ εἰς μὲν τὴν τρίτην τάξιν φοιτῶσιν 27, εἰς δὲ τὴν δευτέραν 14 μαθηταὶ περισσότεροι ἀπὸ τοὺς τῆς τρίτης. Πόσοι μαθηταὶ φοιτῶσιν εἰς τὴν Βαν καὶ τὴν Αην τάξιν; (ἀπ. 41, 52).

64) ᾿Εδαπάνησέ τις πρὸς συντήρησιν τῆς οἰκογενείας του διὰ τρεῖς μῆνας ἐν ὅλῳ 15291 δρ. Αἱ δαπάναι τοῦ πρώτου μηνὸς ἦσαν 5764 δρ., αἱ δὲ τοῦ δευτέρου κατὰ 325 δρ. ὀλιγώτεραι ἀπὸ τὰς τοῦ πρώτου. Πόσας δραχμὰς ἐδαπάνησε τὸν δεύτερον καὶ τὸν τρίτον μῆνα; (ἀπ. 5439, 4088).

65) ᾿Εάν τις, ἔχων α δραχμάς, ἐξώδευσεν ἀπὸ αὐτὰς β δραχμάς, πόσαι τοῦ ἔμειναν;

66) Ἕνας ἔμπορος ἐκέρδισεν ἀπὸ ἕνα εἶδος α δρ., ἀπὸ ἄλλο β δρ., ἀλλ᾿ ἐδαπάνησεν ἀπὸ τὰ κέρδη του γ δραχμάς. Πόσαι τοῦ ἀπέμειναν;

67) ᾿Εὰν Μ εἶναι ὁ μειωτέος μιᾶς ἀφαιρέσεως, Α ὁ ἀφαιρετέος καὶ Υ ἡ διαφορὰ αὐτῆς, τί μᾶς λέγουσιν αἱ ἰσότητες $M=A+Y$, $M-Y=A$;

68) Τί ἐκφράζει ἡ ἰσότης $A-(\alpha+\beta)=(A-\alpha)-\beta$;

69) Τί ἐκφράζουσιν αἱ ἰσότητες $\alpha-\beta=\upsilon$ καὶ $(\alpha+\gamma)-(\beta+\gamma)=\upsilon$ καὶ τί ἡ ἰσότης $\alpha-(\beta-\gamma)=\alpha+\gamma-\beta$;

70) ᾿Εὰν εἰς τὸν μειωτέον μιᾶς ἀφαιρέσεως προσθέσωμεν 5 μονάδας, τί παθαίνει ἡ διαφορά;

71) ᾿Εὰν ἀπὸ τὸν μειωτέον μιᾶς ἀφαιρέσεως ἀφαιρέσωμεν 4 μονάδας, τί παθαίνει ἡ διαφορά;

48
14
34

72) Εἰς τὸν ἀφαιρετέον ἀφαιρέσεώς τινος ἐὰν προσθέσωμεν 6 μονάδας, τί παθαίνει ἡ διαφορά;

73) Ἐὰν ἀπὸ τὸν ἀφαιρετέον ἀφαιρέσεώς τινος ἀφαιρέσωμεν 3 μονάδας, ποίαν μεταβολὴν ὑφίσταται ἡ διαφορά;

Γ´ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

23. Πρόβλημα. ***Πόσας ἡμέρας ἔχουν τρεῖς ἑβδομάδες;*** Ἔχουσιν 7 ἡμ. + 7ἡμ. + 7ἡμ.=21 ἡμ. Ἀλλ' ἡ πρόσθεσις ἴσων ἀριθμῶν εἶναι ***πολλαπλασιασμὸς*** καί, ἕκαστος μὲν προσθετέος ἀθροίσματος ἴσων ἀριθμῶν λέγεται ***πολλαπλασιαστέος*** καὶ ***πολλαπλασιαστὴς*** λέγεται ὁ ἀριθμὸς ὁ ἐκφράζων τὸ πλῆθος τῶν προσθετέων αὐτοῦ καὶ τὸ ἐξαγόμενον τῆς πράξεως λέγεται ***γινόμενον.***

Εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα πολλαπλασιαστέος εἶναι ὁ 7, πολλαπλασιαστὴς ὁ 3 καὶ γινόμενον ὁ 21, τὸ δὲ ἄθροισμα 7+7+7 εἶναι πολλαπλασιασμὸς τοῦ 7 ἐπὶ 3. Οὕτω, ἐὰν εἴπω, νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ 8 ἐπὶ 5, σημαίνει νὰ ἐκτελεσθῇ τὸ ἄθροισμα 8+8+8+8+8. Τὸ αὐτὸ σημαίνει καὶ ἐὰν εἴπω, νὰ ἐπαναληφθῇ ὁ 8 πέντε φοράς.

Ὁ πολλαπλασιαστέος καὶ ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι οἱ ***παράγοντες*** τοῦ γινομένου. Κατὰ τὰ ἀνωτέρω, ὁ πολλαπλασιαστέος καὶ τὸ γινόμενον εἶναι ὁμοειδεῖς, ὁ δὲ πολλαπλασιαστὴς θεωρεῖται πάντοτε ὡς ἀφῃρημένος ἀριθμός.

Σημειοῦμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν γράφοντες πρῶτον τὸν πολλαπλασιαστέον, ἔπειτα τὸ σημεῖον × ἢ . καὶ κατόπιν τὸν πολλαπλασιαστήν. Οὕτω 7×5 ἢ 7 . 5 σημαίνει 7+7+7+7+7, τὸ δὲ ἄθροισμα 8+8+8+8 γράφεται 8×4 ἢ 8.4.

24. Ὁ πολλαπλασιασμὸς μονοψηφίου ἀριθμοῦ ἐπὶ μονοψήφιον γίνεται εὐκόλως διὰ τῆς προσθέσεως κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς πράξεως αὐτῆς. Γνωρίζομεν δὲ τὰ γινόμενα τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν ἀπὸ μνήμης.

Αἱ ἄλλαι περιπτώσεις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ὅπως εἶναι π.χ. ὁ πολλαπλασιασμὸς πολυψηφίου ἐπὶ μονοψήφιον ἢ ἐπὶ πολυψήφιον, στηρίζονται ἐπὶ τῶν κάτωθι ἰδιοτήτων τοῦ πολλαπλασιασμοῦ:

25. 1) Ἔστω, ὅτι ἔχω νὰ πολλαπλασιάσω τὸ ἄθροισμα (3+8+9) ἐπὶ ἀριθμόν τινα, π. χ. τὸν 2· ἤτοι νὰ εὕρω τὸ (3+

$+8+9)\times 2$. Πρὸς τοῦτο ἢ εὑρίσκω τὸ ἄθροισμα 20 καὶ ἔπειτα πολλαπλασιάζω αὐτὸ ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν 20×2 ἤ, κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, γράφω :
$(3+8+9)\times 2=3+8+9+3+8+9=3+3+8+8+9+9$ ἀλλὰ $3+3=3\times 2$, $8+8=8\times 2$ καὶ $9+9=9\times 2$ ὥστε ἔχω $(3+8+9)\times 2=3\times 2+8\times 2+9\times 2$.

Ὅθεν ***ἄθροισμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀριθμὸν καὶ ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ἕκαστος τῶν προσθετέων ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν καὶ προστεθῶσι τὰ γινόμενα***.

2) Ἔστω, ὅτι ἔχω νὰ εὕρω τὸ γινόμενον 5×4.

Ἐπειδὴ $5=1+1+1+1+1$, ἔχω, κατὰ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα, $5\times 4=(1+1+1+1+1)\times 4=4+4+4+4+4=4\times 5$. Δηλ. εἶναι $5\times 4=4\times 5$. Ὥστε ***τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται ἂν ἀλλαχθῇ ἡ τάξις τῶν παραγόντων***.

3) Ἔστω, ὅτι ἔχω νὰ εὕρω τὸ γινόμενον τοῦ ἀριθμοῦ 5 ἐπὶ τὸ ἄθροισμα $7+2+4$· ἀλλά, κατὰ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα, ἔχω $5\times(7+2+4)=(7+2+4)\times 5$· ἀλλ' εἶναι $(7+2+4)\times 5=7\times 5+2\times 5+4\times 5=5\times 7+5\times 2+5\times 4$· ἄρα εἶναι $5\times(7+2+4)=5\times 7+5\times 2+5\times 4$.

Ὅθεν ***ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἄθροισμα καὶ ἐὰν πολλαπλασιασθῇ μὲ ἕνα ἕκαστον τῶν προσθετέων καὶ προστεθῶσι τὰ γινόμενα***.

4) Ἔστω, ὅτι ἔχω νὰ πολλαπλασιάσω τὰ δύο ἀθροίσματα $3+5+10$ ἐπὶ $8+9$ (πρὶν ἢ εὕρω αὐτά). Ἀλλὰ ἔχω $(3+5+10)\times(8+9)=(3+5+10)\times 8+(3+5+10)\times 9=3\times 8+5\times 8+10\times 8+3\times 9+5\times 9+10\times 9$, κατὰ τὰς προηγουμένας ἰδιότητας 3 καὶ 1.

Ὅθεν ***ἄθροισμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἄλλο ἄθροισμα*** (χωρὶς νὰ εὑρεθῶσιν), ***ἐὰν ἕκαστον τῶν μερῶν τοῦ πρώτου πολλαπλασιασθῇ ἐφ' ἕκαστον τῶν μερῶν τοῦ δευτέρου καὶ προστεθῶσι τὰ γινόμενα.***

26. Κατόπιν τούτων εὐκόλως ἐξηγοῦμεν τὸν γνωστὸν κανόνα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ πολυψηφίου ἀριθμοῦ ἐπὶ μονοψήφιον, κατὰ τὸν ὁποῖον ***γράφομεν τὸν μονοψήφιον κάτωθεν τοῦ πολυψηφίου καὶ σύρομεν κάτωθεν αὐτῶν γραμμήν· ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν χωριστὰ ἕκαστον ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστήν, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὸ***

ψηφίον τῶν ἁπλῶν μονάδων, καὶ ἑκάστου μερικοῦ γινομένου γράφομεν μόνον τὰς μονάδας αὐτοῦ, τὰς δὲ δεκάδας ἑνώνομεν μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἀκολούθου ψηφίου κ.ο.κ.

Διότι ἔστω ὁ πολλαπλασιασμὸς 276×5. Ἀλλὰ 276=6 μον. +7 δεκ. + 2 ἑκατ. Ὥστε :

276×5=6 μον. ×5+7 δεκ. ×5+2 ἑκατ. × 5 ἤτοι :

276×5=30 μον. +35 δεκ. +10 ἑκ.=3δεκ.+5δεκ.+3ἑκ.+1χιλ.

δηλ. 276×5=1380.

Ἐκ τούτου δὲ φαίνεται, ὅτι, ὅταν πολλαπλασιάζομεν χωριστὰ τὰ ψηφία τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστήν, ἐφαρμόζομεν τὴν ἰδιότητα 25,1.

Ἡ δὲ γραφὴ τοῦ μονοψηφίου κάτωθεν τοῦ πολυψηφίου γίνεται μόνον χάριν εὐκολίας.

π. δ.
$$\begin{array}{r} 678508 \\ 6 \\ \hline 4071048 \end{array} \qquad 678508\times 6=4071048$$

Πολλαπλασιασμὸς οἱωνδήποτε ἀριθμῶν.

27. Διὰ νὰ ἐννοήσωμεν ἤδη πῶς εὑρίσκεται τὸ γινόμενον δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν, πρέπει νὰ ἔχωμεν ὑπ᾽ ὄψει καὶ τὰς ἑξῆς συντομίας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ :

1) Ἔστω, ὅτι ἔχω νὰ πολλαπλασιάσω ἕνα ἀριθμόν, π. χ. τὸν 63, ἐπὶ 10 ἢ ἐπὶ 100 κ.λπ.

Διὰ νὰ ἐπαναλάβω τὸν 63 δέκα φοράς, πρέπει νὰ ἐπαναλάβω 10 φορὰς τὰς 3 μονάδας του, ὡς καὶ τὰς 6 δεκάδας του, ἤτοι αἱ 3 μονάδες νὰ γίνωσι 3 δεκάδες καὶ αἱ 6 δεκάδες νὰ γίνωσιν 6 ἑκατοντάδες· ἀλλὰ τοῦτο γίνεται, ὅταν γραφῇ ἓν μηδενικὸν εἰς τὸ τέλος τοῦ ἀριθμοῦ. Ὥστε 63×10=630. Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι 63×100=6300, 63×1000=63000 κ. ο. κ. Ὥστε, ***διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕνα ἀριθμὸν ἐπὶ 10, γράφομεν δεξιὰ αὐτοῦ ἓν μηδενικόν, ἐπὶ 100 γράφομεν δύο μηδενικά, ἐπὶ 1000 τρία κ. ο. κ.***

2) Ἔστω τώρα, ὅτι ἔχω 159×400.

Ἀλλὰ 159 × 400= 400 × 159 (25,2) ἢ 4 ἑκ. ×159=636 ἑκ. = 63600 μονάδες. Ὁμοίως ἔχομεν 125×60=60×125 ἢ 6 δεκ. ×125=750 δεκ.=7500 μονάδες. Ὥστε, ***διὰ νὰ πολλα-***

πλασιάσωμεν ἕνα ἀριθμὸν ἐπὶ ἄλλον, τοῦ ὁποίου τὸ πρῶτον ψηφίον εἶναι σημαντικόν, τὰ δὲ ἄλλα μηδενικά, πολλαπλασιάζομεν μόνον ἐπὶ τὸ σημαντικὸν ψηφίον καὶ δεξιὰ τοῦ γινομένου γράφομεν μόνον τὰ μηδενικὰ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ. π.χ. $4508 \times 800 = 3606400$ $\quad 4508 \times 8 = 36064$

28. Ἔστω τώρα, ὅτι ἔχω 4897×875.

Ἐπειδὴ $875 = 800 + 70 + 5$, ἀντὶ νὰ ἐπαναλάβω τὸν 4897 875 φοράς, δύναμαι (25,3) νὰ λάβω αὐτὸν πρῶτον 800 φοράς, ἔπειτα 70 φορὰς καὶ ἔπειτα 5 φορὰς καὶ νὰ προσθέσω τὰ τρία γινόμενα, ἤτοι τὰ $4897 \times 5 = 24485$, $4897 \times 70 = 342790$ καὶ $4897 \times 800 = 3917600$, θὰ ἔχω δὲ τὸ ἄθροισμα

$$\begin{array}{r} 24485 \\ 342790 \\ 3917600 \\ \hline 4284875 \end{array} \text{ γινόμενον τοῦ } 4897 \times 875.$$

Πρὸς συντομίαν διατάσσομεν τὴν πρᾶξιν ὡς ἑξῆς :

4897	πολλαπλασιαστέος			
875	πολλαπλασιαστὴς			
24485	μερικὸν	γινόμενον	ἐπὶ	5
34279	»	»	»	70
39176	»	»	»	800
4284875	ὁλικὸν	γινόμενον.		

29. Ὅθεν ἕπεται ὁ γνωστὸς κανών : ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕνα ἀριθμὸν ἐπὶ ἄλλον, γράφομεν τὸν πολλαπλασιαστὴν ὑπὸ τὸν πολλαπλασιαστέον καὶ σύρομεν κάτωθεν γραμμήν· πολλαπλασιάζομεν τὸν πολλαπλασιαστέον χωριστὰ με ἕκαστον σημαντικὸν ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὰ δεξιά, καὶ γράφομεν ἕκαστον μερικὸν γινόμενον εἰς τρόπον, ὥστε τὸ τελευταῖον ψηφίον του νὰ εἶναι ὑποκάτω τοῦ ψηφίου, μὲ τὸ ὁποῖον ἐπολλαπλασιάσαμεν· ἔπειτα σύρομεν γραμμὴν καὶ προσθέτομεν τὰ μερικὰ γινόμενα· τὸ εὑρισκόμενον ἄθροισμα εἶναι τὸ ζητούμενον γινόμενον.***

Συντομία. Ὅταν εἷς ἐκ τῶν παραγόντων, ἢ καὶ οἱ δύο, λήγουσιν εἰς μηδενικά, συντομεύεται ὁ πολλαπλασιασμὸς ὡς ἑξῆς : Πολλαπλασιάζομεν τοὺς ἀριθμοὺς χωρὶς τὰ μηδενικὰ καὶ δεξιὰ τοῦ γινομένου γράφομεν τὰ παραλειφθέντα μηδενικά. Π. χ. διὰ νὰ πολλαπλασιάσω τὸν 87000 ἐπὶ 900, πολλαπλασιάζω 87×9 καὶ δεξιὰ τοῦ γινομένου 783 γράφω τὰ πέντε μηδενικά, τὰ ὁποῖα παρέλειψα, 78300000.

30. ***Δοκιμὴ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.*** Ἀφοῦ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο ἀριθμούς, διὰ νὰ δοκιμάσωμεν τὸν πολλαπλασιασμόν, ἐπαναλαμβάνομεν αὐτόν, λαμβάνοντες ὡς πολλαπλασιαστὴν τὸν πολλαπλασιαστέον καὶ ἀντιστρόφως (25,2). ἐὰν δὲ δὲν ἔγινε λάθος, πρέπει νά εὑρεθῇ τὸ ἴδιον γινόμενον.

Σημ. Ὅταν πολλαπλασιασμοὶ συνδέωνται διὰ τῶν σημείων τῆς προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως, διὰ νὰ εὑρεθῇ τὸ τελικὸν ἐξαγόμενον πρέπει νὰ ἐκτελεσθῶσιν πρῶτον οἱ πολλαπλασιασμοὶ καὶ κατόπιν αἱ προσθέσεις ἢ αἱ ἀφαιρέσεις. Οὕτω ἔχομεν $5\times3+8\times9=15+72=87$.

Ἀσκήσεις.

74) Νὰ εὑρεθῶσι συντόμως τὰ ἀθροίσματα :

α) 5+5+5+5+5 γ) 8+8+8+8+8+8+8

β) 9+9+9+9+9+9+9 δ) 60+60+60+60

ε) 23+23+23+23+23+23+23+23+23+23

75) Εἰς ἕνα πολλαπλασιασμὸν ὁ πολλαπλασιαστέος εἶναι 894 καὶ τὸ γινόμενον 894. Ποῖος εἶναι ὁ πολλαπλασιαστής ;

76) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν οἱ κάτωθι πολλαπλασιασμοί :

40×2, 80×5, 30×9, 600×8, 900×6,
50×3, 70×6, 700×5, 600×7.

77) Ὁμοίως οἱ :

3000×2, 8000×9, 50000×3, 60×40, 800×30
7000×4, 6000×8, 40×50, 50×70.

78) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ γινόμενα καθενὸς τῶν ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ 10 μέχρι τοῦ 20 ἐπὶ 1, 2, 3, 4, 5.

79) Ὁμοίως νὰ εὑρεθῶσι τὰ γινόμενα καθενὸς τῶν ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ 10 μέχρι τοῦ 20 ἐπὶ 6, 7, 8, 9, 10.

80) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν οἱ κάτωθι πολλαπλασιασμοί :

36×2 82×2 72×50 25×300
33×3 72×5 26×400 520×200

81) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν οἱ κάτωθι πολλαπλασιασμοὶ γραπτῶς:

1283×96 274×520 205×817 3039×6300 2045×4069
9563×39 849×360 145×916 3673×3002.

82) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων:

α) $4\times25+18\times32+27\times65$ β) $58\times63-36\times47$
γ) $78\times140+30\times70-29\times60$.

83) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων κατὰ δύο τρόπους:

α) $(32+27+9)\times12$, β) $(64+108+53+64)\times80$
γ) $45\times(50+34+27)$.

84) Τί ἐκφράζει ἡ ἰσότης $(\alpha+\beta)\times\gamma=\alpha\times\gamma+\beta\times\gamma$;

85) Ὁμοίως ἡ $\alpha\times\beta=\beta\times\alpha$;

86) Ὁμοίως ἡ $\alpha\times(\beta+\gamma)=\alpha\times\beta+\alpha\times\gamma$ καὶ ἡ
$(\alpha+\beta)\times(\gamma+\delta)=\alpha\times\gamma+\beta\times\gamma+\alpha\times\delta+\beta\times\delta$;

Γινόμενον πολλῶν παραγόντων.

31. Ὅταν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν πολλοὺς ἀριθμούς, πολλαπλασιάζομεν δύο ἐξ αὐτῶν, ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν τὸ γινόμενον ἐπὶ ἕνα ἄλλον καὶ τὸ νέον γινόμενον ἐπὶ ἕνα ἄλλον κ.ο.κ., ἕως οὗ λάβωμεν πάντας τοὺς ἀριθμούς.

Π. χ. διὰ νὰ εὕρω τὸ γινόμενον $5\times6\times7\times12$, πολλαπλασιάζω $5\times6=30$, ἔπειτα $30\times7=210$ καὶ τέλος $210\times12=2520$. Ὥστε $5\times6\times7\times12=2520$.

32. ***Ἰδιότητες.*** 1. Ὅπως τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν δὲν ἀλλάσσει ἂν ἀλλαχθῇ ἡ τάξις τῶν παραγόντων, οὕτω καὶ τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων δὲν ἀλλάσσει ἂν ἀλλαχθῇ ὁπωσδήποτε ἡ τάξις τῶν παραγόντων. Δηλαδή, ἂν ἔχω νὰ πολλαπλασιάσω τοὺς ἀριθμοὺς 5, 6, 2, 4, δύναμαι νὰ εἴπω $5\times2=10$, $10\times4=40$ καὶ $40\times6=240$· τοῦτο δὲ τὸ γινόμενον θὰ εὕρω καὶ ἂν τοὺς λάβω μὲ τὴν σειράν, κατὰ τὴν ὁποίαν εἶναι γραμμένοι.

Ἡ ἐλευθερία αὕτη συντομεύει πολλάκις τὸν πολλαπλασιασμόν. Διότι ἂν ἔχω 54×27198, λαμβάνω ὡς πολλαπλασιαστέον τὸν μεγαλύτερον, ἐπειδὴ θὰ κάμω ὀλιγωτέρους μερικοὺς πολλαπλασιασμούς. Ἐὰν δὲ ἔχω $2\times13\times7\times5\times5\times2$, λέγω $5\times2=10$, $10\times5=50$, $50\times2=100$, $100\times13=1300$, $1300\times7=9100$·

δύναμαι μάλιστα νὰ ἀντικαταστήσω δύο ἢ περισσοτέρους παράγοντας διὰ τοῦ γινομένου των· οὕτω εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα δύναμαι νὰ θέσω, ἀντὶ τῶν 2 καὶ 5, τὸν 10 καί, ἀντὶ τῶν ἄλλων 2 καὶ 5, τὸν 10· τοὺς παράγοντας δὲ τούτους 10 καὶ 10 τοὺς ἀντικαθιστῶ μὲ τὸν 100, ὁπότε θὰ ἔχω :

$100 \times 7 \times 13 = 9100$. Ὁμοίως εὑρίσκω εὐκολώτατα, ὅτι :

$$6 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 2 \times 5 \times 8 = 48000$$

2. Κατόπιν τούτων, ***ἂν ἔχω νὰ πολλαπλασιάσω γινόμενον*** π.χ. τὸ $3 \times 5 \times 8$, ***ἐπὶ ἀριθμόν***, π.χ. τὸν 7, ***δύναμαι νὰ πολλαπλασιάσω ἐπὶ τὸν ἀριθμόν***, δηλ. τὸν 7, ***ἕνα τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου***, π.χ. τὸν 5· ἤτοι $(3 \times 5 \times 8) \times 7 = 3 \times 35 \times 8$· διότι διὰ νὰ εὕρω τὸ ζητούμενον γινόμενον, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσω πρῶτον τοὺς ἀριθμοὺς 3, 5, 8 καὶ ἔπειτα τὸ εὑρεθὲν γινόμενον νὰ πολλαπλασιάσω ἐπὶ 7· ἤτοι πρέπει νὰ εὕρω τὸ γινόμενον $3 \times 5 \times 8 \times 7$· ἀλλὰ ἤδη ἀντικαθιστῶ τοὺς παράγοντας 5 καὶ 7 διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν 35 καὶ εὑρίσκω $3 \times 35 \times 8$.

3. ***Ἐὰν ἔχω νὰ πολλαπλασιάσω δύο γινόμενα δύναμαι νὰ πολλαπλασιάσω ὁμοῦ πάντας τοὺς παράγοντας τῶν δύο γινομένων.***

Δηλαδὴ ἔχομεν $(5 \times 12 \times 8) \times (7 \times 22) = 5 \times 12 \times 8 \times 7 \times 22$. Διότι εἰς τὸ γινόμενον $5 \times 12 \times 8 \times 7 \times 22$ ἂν ἀντικαταστήσωμεν τοὺς παράγοντας 5, 12 καὶ 8 διὰ τοῦ γινομένου των $5 \times 12 \times 8$, ὡς καὶ τοὺς παράγοντας 7 καὶ 22 διὰ τοῦ γινομένου των 7×22, εὑρίσκομεν $5 \times 12 \times 8 \times 7 \times 22 = (5 \times 12 \times 8) \times (7 \times 22)$.

33. ***Πολλαπλασιασμὸς ἀπὸ μνήμης***. Πολλαπλασιάζομεν ἀπὸ μνήμης εἰς πολλὰς περιπτώσεις. Π. χ. ὅταν πολλαπλασιάζωμεν ἀριθμόν : 1) ἐπὶ 4· διπλασιάζομεν δύο φοράς, π.χ. 78×4, λέγομεν δύο φορὰς τὸ $78 = 156$ καὶ δύο φορὰς $156 = 312$ (διότι $4 = 2 \times 2$).

2) ἐπὶ 9· πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 10 καὶ ἀπὸ τοῦ γινομένου ἀφαιροῦμεν τὸν ἀριθμόν. Π.χ. 38×9· λέγομεν $38 \times 10 = 380$ καὶ 38 ἀπὸ $380 = 342$ (διότι $9 = 10 - 1$).

3) ἐπὶ 99· πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 100 καὶ ἀπὸ τοῦ γινομένου ἀφαιροῦμεν τὸν ἀριθμόν. Οὕτω $56 \times 99 = 5600 - 56$ (διατί ;)

4) ἐπὶ 11· πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 10 καὶ εἰς τὸ γινόμενον προσθέτομεν τὸν ἀριθμόν. Οὕτω $75 \times 11 = 750 + 75$.

5) ἐπὶ 12· πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 10 καὶ εἰς τὸ γινόμενον προσθέτομεν τὸ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ. Π. χ. 49×12=490+98.

6) Διψήφιον ἀριθμὸν ἐπὶ 101· θέτομεν τότε πλησίον τοῦ ἀριθμοῦ τὸν ἑαυτόν του. Οὕτω 69 × 101 = 6969· (διότι 101=100 +1 καὶ 69×(100+1)=6900+69.

7) Διψήφιον ἢ τριψήφιον ἀριθμὸν ἐπὶ μονοψήφιον. Τότε πολλαπλασιάζομεν τὰ μέρη τοῦ ἀριθμοῦ χωριστά, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὴν ἀνωτάτην τάξιν, καὶ ἔπειτα προσθέτομεν τὰ ἐξαγόμενα. Π.χ. 36×7· λέγομεν 30×7=210, 6×7=42 καὶ τέλος 210 καὶ 42=252· ὁμοίως διὰ 248×5 λέγομεν 200×5=1000, 40×5=200, 8×5=40 καὶ τέλος 1000, 200 καὶ 40, 1240.

8) Δύο διψηφίους ἀριθμούς, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ εἷς εἶναι μικρότερος τοῦ 20, δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν ὡς ἑξῆς: πολλαπλασιάζομεν τὸν μικρότερον ἐπὶ τὰ μέρη χωριστὰ τοῦ ἄλλου, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὸ ψηφίων τῶν μονάδων. Π. χ. 17×43· λέγομεν 3×17=51, 1 καὶ κρατοῦμεν 5· 4×17=68 καὶ 5=73. Ὅθεν 17×43=731.

Ἀσκήσεις.

87) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ κάτωθι γινόμενα: (ἀπό μνήμης).

3×3×2×2 2×7×5×2 5×7×2×10 7×9×100
5×5×2×2 8×8×4×2 3×2×3×20 3×8×5×20

88) Ὁμοίως τά:

3×5×7 5×4×12 5×8×9×10 4×29×25 50×49×4
6×8×2 8×4×30 4×25×30 50×78×2 4×20×125

89) Ὁμοίως τά:

87×4 475×4 57×9 150×9 67×11 42×12
165×4 273×4 93×9 340×9 75×11 56×12

90) Ὁμοίως τά:

72×101 89×6 85×7 564×5 63×18
98×101 48×8 145×5 37×14 75×16

91) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ κάτωθι γινόμενα (γραπτῶς):

5×7×9×13 38×4×77×8 50×25×19×2×10
13×17×55×46 8×7×4×30×5×2 101×21×37×4×15

92) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἑπόμενα γινόμενα κατὰ τὸν συντομώτερον τρόπον: 275×11 2140×12 493×101 1170×102
3212×11 4245×12 750×101 2489×102

93) Ὁμοίως τά: $27\times22=(54\times11)$ (διότι $22=2\times11$)
$15\times33=(45\times11)$ (διότι $33=3\times11$)
145×22 540×22 2104×22 2548×33
272×33 115×44 1250×33 1897×44

94) Ὁμοίως τά:
5125×9 719×99 460×98 1037×999 520×998
7018×9 872×99 223×999 6208×999

95) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων:
$57+24\times3$ $11\times92+147$ $81\times4+95\times4$
$98+19\times4$ $16\times74+205$ $9\times8+15\times8+24\times8$
$9\times23+76$ $13\times7+25\times7$ $43+20\times11+11+35\times11$
$101+17\times15+51\times15$

96) Ὁμοίως τά:
$17\times8+4\times45+87\times11$ $85\times215-39\times79-48\times84$
$53\times12+14\times63-105\times3$ $8\times7+5\times15+12\times3+25\times6$
$142\times7-204\times4+15\times104$ $33\times4+60\times9+75\times8-22\times33$
$65\times11-85\times6+93\times7-99\times6$
$345\times12-108\times4-79\times5-26\times45$

97) Τί μᾶς λέγει ἡ ἰσότης $\alpha\times\beta\times\gamma\times\delta\times\varepsilon=\delta\times\beta\times\gamma\times\varepsilon\times\alpha$;

98) Ὁμοίως αἱ:
1) $\alpha\times\beta\times\gamma\times\delta\times\varepsilon=\alpha\times(\beta\times\gamma)\times\delta\times\varepsilon$, 2) $(\alpha\times\beta\times\gamma)\times\delta=\alpha\times(\beta\times\delta)\times\gamma$, 3) $(\alpha\times\beta)\times(\gamma\times\delta\times\varepsilon)=\alpha\times\beta\times\gamma\times\delta\times\varepsilon$;

Περὶ δυνάμεων.

34. Πολλάκις συμβαίνει οἱ παράγοντες γινομένου τινὸς νὰ εἶναι ἴσοι. Τότε τὸ γινόμενον τοῦτο λέγεται δύναμις ἑνὸς τῶν παραγόντων τούτων. Π. χ. τὸ γινόμενον $5\times5\times5$ λέγεται δύναμις τοῦ 5 καὶ τὸ γινόμενον $2\times2\times2\times2$ λέγεται δύναμις τοῦ 2.

Ὅθεν ***δύναμις ἀριθμοῦ λέγεται τὸ γινόμενον ἴσων παραγόντων πρὸς τὸν ἀριθμὸν τοῦτον.***

Ἐὰν εἶναι δύο οἱ παράγοντες, τὸ γινόμενον λέγεται ***δευτέρα δύναμις*** ἢ ***τετράγωνον***, ἐὰν τρεῖς, ***τρίτη δύναμις*** ἢ ***κῦβος***, ἐὰν τέσσαρες, ***τετάρτη δύναμις*** κ. ο. κ.

Τὰς δυνάμεις γράφομεν συντόμως ὡς ἑξῆς: γράφομεν μόνον τὸν ἕνα παράγοντα καὶ ὀλίγον ὑπεράνω γράφομεν τὸν ἀριθμόν, ὅστις δεικνύει πόσοι εἶναι οἱ παράγοντες καὶ ὅστις λέγεται ***ἐκθέτης***, ἐνῷ ὁ εἷς τῶν παραγόντων λέγεται ***βάσις*** τῆς δυνάμεως. Οὕτω ἡ τρίτη δύναμις τοῦ 2 γράφεται συντόμως 2^3· εἰς αὐτὴν ὁ 2 εἶναι βάσις, ὁ δὲ 3 ἐκθέτης καὶ εἶναι $2^3=2\times2\times2=8$· ἐπίσης ἡ τετάρτη δύναμις τοῦ 5 γράφεται 5^4 καὶ εἰς αὐτήν, ἡ μὲν βάσις εἶναι ὁ 5, ὁ δὲ ἐκθέτης εἶναι 4 καὶ εἶναι:

$$5^4=5\times5\times5\times5=625.$$

Ἰδιότητες τῶν δυνάμεων.

35. 1) Ἔστω, ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰς δύο δυνάμεις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἤτοι τὰς 3^2 καὶ 3^4.

Ἐπειδὴ $3^2=3\times3$, καὶ $3^4=3\times3\times3\times3$, θὰ εἶναι καὶ $3^2\times3^4=3\times3\times3\times3\times3\times3$, ἤτοι $3^2\times3^4=3^6$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι $7^3\times7^5=7^8$.

Ὅθεν ***τὸ γινόμενον δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι πάλιν δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ μὲ ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐκθετῶν.***

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται, ὅτι καὶ τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι πάλιν δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ μὲ ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν π.χ. $5^2\times5^4\times5^3=5^9$.

2) Ὁμοίως ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται, ὅτι, ***διὰ νὰ ὑψώσωμεν δύναμιν ἀριθμοῦ εἰς ἄλλην δύναμιν, πολλαπλασιάζομεν τοὺς ἐκθέτας.***

Ἤτοι $(7^2)^3=7^6$· διότι:

$$(7^2)^3=7^2\times7^2\times7^2=7^{2+2+2}=7^{2\times3}=7^6.$$

3) Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ ὑψώσωμεν τὸ γινόμενον $3\times5\times7$ εἰς τὴν δευτέραν δύναμιν· ἀλλὰ

$$(3\times5\times7)^2=3\times5\times7\times3\times5\times7=3\times3\times5\times5\times7\times7=$$
$$=3^2\times5^2\times7^2, \quad \text{ἤτοι} \quad (3\times5\times7)^2=3^2\times5^2\times7^2.$$

Ὅθεν ***γινόμενον ὑψοῦται εἰς δύναμιν, ἐὰν ὑψωθῇ ἕκαστος τῶν παραγόντων εἰς τὴν αὐτὴν δύναμιν.***

Ἀσκήσεις.

99) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ τετράγωνα τῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3 κ.τ.λ. μέχρι τοῦ 20.

100) Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ κῦβοι τῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3 κ.τ.λ. μέχρι τοῦ 10.

101) Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ δυνάμεις τοῦ 10 ἀπὸ τῆς 2ας μέχρι τῆς 8ης.

102) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐξαγόμενον τῶν γινομένων, α΄) $2^3 \times 2^4$, β΄) $2^3 \times 3^2$, γ΄) $5^2 \times 7^2$.

103) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἐξαγόμενα :

α΄) $2^2+2^3+2^4$, β΄) 5^3+5^2+5, γ΄) $10+10^2+10^3+10^4$.

104) Ἡ δύναμις 3^7 ν' ἀντικατασταθῇ διὰ γινομένου δύο δυνάμεων τοῦ 3.

105) Τὸ γινόμενον $2^4 \times 5^4 \times 7^4$ ν' ἀντικατασταθῇ διὰ τῆς τετάρτης δυνάμεως ἑνὸς ἀριθμοῦ.

106) Ἡ δύναμις 2^{12} νὰ μετατραπῇ εἰς δύναμιν τινὰ τοῦ 2, ἡ ὁποία νὰ ὑψώνεται εἰς ἄλλην δύναμιν.

107) Τί ἐκφράζει ἑκάστη τῶν ἰσοτήτων :

1) $\alpha^\mu \times \alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}$, 2) $(\alpha^\mu)^\nu = \alpha^{\mu \times \nu}$,

3) $(\alpha \times \beta \times \gamma)^\mu = \alpha^\mu \times \beta^\mu \times \gamma^\mu$;

Προβλήματα λυόμενα διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

36. ***Πόσον ἀξίζουν 15 πήχεις ὑφάσματος, ἐὰν ὁ πῆχυς ἀξίζει 78 δραχμάς ;***

Λύσις. Ἀφοῦ ὁ πῆχυς ἀξίζει 78 δρ., εἶναι φανερόν, ὅτι οἱ 15 θὰ ἀξίζουν 15 φορὰς 78 δρ., ἤτοι οἱ 15 πήχεις ἀξίζουν 78 δρ.$\times$15=1170 δρ. Ἀπὸ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα :

Ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν ἀξίαν τῆς μιᾶς μονάδος ἑνὸς πράγματος (ἤτοι τοῦ ἑνὸς πήχεως, ἢ τῆς μιᾶς ὀκᾶς κ.τ.λ.), ***καὶ ζητοῦμεν τὴν ἀξίαν πολλῶν μονάδων τοῦ αὐτοῦ πράγματος, κάμνομεν πολλαπλασιασμόν. Πολλαπλασιάζομεν δὲ τὴν ἀξίαν τῆς μιᾶς μονάδος ἐπὶ τὸν ἀριθμόν, ὅστις ἐκφράζει πόσαι εἶναι αἱ μονάδες, τῶν ὁποίων ζητοῦμεν τὴν ἀξίαν.***

Ἤτοι ἐὰν

	1	ὀκ. πράγματος	ἀξίζει	α δρχμ.,
αἱ	2	»	ἀξίζουν	α δρ.×2
αἱ	3	»	»	α δρ.×3
καὶ αἱ	β	»	»	α δρ.×β

Τὸ γινόμενον εἶναι πάντοτε ὁμοειδὲς μὲ τὸν πολλαπλασιαστέον (ὅστις εἶναι ἡ ἀξία τῆς μονάδος), ὁ δὲ πολλαπλασιαστὴς θεωρεῖται πάντοτε ὡς ἀφῃρημένος ἀριθμὸς (ἴδε σελ. 20).

37. Ἕνας εἰδικὸς τεχνίτης ἐργάζεται εἰς διάφορα ἐργοστάσια μὲ τὴν ὥραν καὶ λαμβάνει διὰ μίαν ὥραν ἐργασίας 50 δρχμ. ἐὰν τώρα ζητήσωμεν τὸ ἡμερήσιον κέρδος αὐτοῦ, θὰ εἴδωμεν, ὅτι τοῦτο εἶναι ***συνάρτησις*** τῶν ὡρῶν τῆς καθ᾽ ἡμέραν ἐργασίας του· καὶ πράγματι,

ἐὰν ἐργασθῇ	εἰς	1	ἡμ.	3	ὥρας	θὰ	κερδίσῃ	50 δρ.×3=150 δρ.
»	»	» 1	»	4	»	»	»	50 δρ.×4=200 δρ.
»	»	» 1	»	5	»	»	»	50 δρ.×5=250 δρ. κ.ο.κ.

Βλέπομεν δηλαδή, ὅτι τὰ γινόμενα αὐτὰ 150, 200, 250 τοῦ σταθεροῦ παράγοντος 50 ἐπὶ τὸν μεταβλητὸν πολλαπλασιαστὴν εἶναι μεταβλητὰ καὶ ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὸν πολλαπλασιαστήν, ἤτοι ὅτι εἶναι συνάρτησις αὐτοῦ.

Προβλήματα.

Ἀπὸ μνήμης :

108) Ὁ πῆχυς ὑφάσματος ἀξίζει 125 δρχμ. Πόσον ἀξίζουν οἱ 8 πήχεις;

109) Ἕνας ἐργάτης κερδίζει τὴν ἡμέραν 85 δρχ. Πόσας κερδίζει τὴν ἑβδομάδα ;

110) Μία φιλανθρωπικὴ ἑταιρεία ἔχει ὁρίσει μηνιαίαν συνδρομὴν 8 δρχμ. Πόσα εἰσπράττει κατὰ μῆνα ἀπὸ τὰ 1200 μέλη της ;

111) Ἕνας μαθητής, διὰ νὰ μετάσχῃ μιᾶς μεγάλης σχολικῆς ἐκδρομῆς, ἡ ὁποία ἔχει ἀναγγελθῆ διὰ τὸ τέλος τοῦ σχολικοῦ ἔτους, οἰκονομεῖ 15 δραχμὰς τὴν ἑβδομάδα. Πόσας θὰ οἰκονομήσῃ ἐπὶ 36 ἑβδομάδας ;

112) Ἕνα αὐτοκίνητον διανύει 35 χλμ. τὴν ὥραν. Πόσα χιλιόμετρα θὰ διανύσῃ εἰς 22 ὥρας ;

113) 8 ἐργάται τελειώνουν μίαν ἐργασίαν εἰς 16 ἡμέρας. Πόσας ἡμέρας θὰ χρειασθῇ εἷς ἐργάτης διὰ νὰ τελειώσῃ τὴν ἰδίαν ἐργασίαν ;

Γραπτῶς :

114) Εἶχέ τις ἄμπελον 15 στρεμμάτων καὶ ἀπὸ κάθε στρέμμα ἔλαβεν 1200 ὀκάδας σταφυλῶν, ἀπὸ 1200 δὲ ὀκάδας σταφυλῶν ἔλαβεν 750 ὀκ. οἴνου. Πόσας ὀκ. σταφυλῶν, ἔλαβεν ἐν ὅλῳ καὶ πόσον οἶνον κατεσκεύασεν ἐκ τῶν σταφυλῶν αὐτῶν ;

115) Ἔμπορός τις ἠγόρασε 6252 ὀκάδας ἐμπορεύματος πρὸς 25 δρχμ. τὴν ὀκᾶν· ἐξ αὐτῶν ἐπώλησε 5480 ὀκ. πρὸς 30 δρχμ. τὴν ὀκᾶν, τὰς δὲ ὑπολοίπους πρὸς 28. Πόσον ἐκέρδισεν ; (ἀπ. 29716).

116) Ἠγόρασέ τις 128 πρόβατα πρὸς 220 δρχμ. τὸ καθέν· ἀπέθανον τὰ 12, τὰ δὲ ὑπόλοιπα ἐπώλησε πρὸς 270 δρχ. τὸ καθέν. Ἐκέρδισεν ἢ ἐζημίωσεν, καὶ πόσον ; (ἐκέρδ. 3160 δρ.).

117) Ὑπηρέτης λαμβάνει μισθὸν 480 δρ. κατὰ μῆνα· στέλλει δὲ ἐξ αὐτοῦ εἰς τοὺς γέροντας γονεῖς του 200 δρχ. τὸν μῆνα καὶ εἰς τὴν ἀδελφήν του 150. Πόσα τοῦ μένουν κατ' ἔτος ; (1560).

118) Ἐκ δύο βαρελίων οἴνου, τὸ μὲν περιέχει 238 ὀκάδας, τὸ δὲ ἄλλο 386 ὀκάδας. Καὶ τὸν μὲν οἶνον τοῦ πρώτου βαρελίου ἠγόρασε πρὸς 13 δρ. τὴν ὀκᾶν, τὸν δὲ τοῦ δευτέρου πρὸς 11 δρ. Πόσον ἐστοίχισεν ὁ οἶνος ; (ἀπ. 7340).

119) Ἑκάστη τάξις ἑξαταξίου γυμνασίου ἔχει 40 μαθητάς· εἰς μίαν δὲ ἡμερησίαν ἐκδρομὴν ἐξώδευσεν ἕκαστος μαθητὴς 17 δρ. Πόσαι δραχμαὶ ἐδαπανήθησαν ἐν ὅλῳ ; (ἀπ. 4080).

120) Βιβλίον τι ἔχει 120 σελίδας· ἑκάστη σελὶς ἔχει 35 στίχους καὶ ἕκαστος στίχος ἔχει 40 γράμματα. Πόσα γράμματα ἔχει ὅλον τὸ βιβλίον ; (ἀπ. 168000).

121) Αὐτοκίνητον συγκοινωνίας μεταφέρει εἰς ἕκαστον ταξείδιον 16 ἄτομα. Πόσα ἄτομα μεταφέρει εἰς 30 ἡμέρας, ἐὰν ἑκάστην ἡμέραν κάμνει 8 ταξείδια ; (ἀπ. 3840).

122) Ἀτμάμαξά τις διατρέχουσα 10 μέτρα εἰς 1 δευτερόλεπτον, φθάνει ἀπὸ μιᾶς πόλεως εἰς ἄλλην εἰς 5 ὥρας. Πόσα μέτρα ἀπέχουν αἱ δύο πόλεις ἀπ' ἀλλήλων ; (180000). (Σημ. ἑκάστη ὥρα ἔχει 60 πρῶτα λεπτὰ καὶ ἕκαστον πρῶτον λεπτὸν ἔχει 60 δεύτερα).

121
50
6050

123) Ἠγόρασέ τις 20 δωδεκάδας μανδύλια πρὸς 128 δραχ. τὴν δωδεκάδα καὶ ἐπώλησεν αὐτὰ πρὸς 12 δρ. τὸ ἕνα. Πόσας δραχμὰς ἔδωκε διὰ τὴν ἀγορὰν καὶ πόσας ἐκέρδισεν;

124) Ἔχει τις 18 χαρτονομίσματα τῶν 1000 δρ., 9 τῶν 5000, 24 τῶν 500, 115 τῶν 100, 208 τῶν 25 καὶ 121 τῶν 50. Πόσας δραχμὰς ἔχει ἐν ὅλῳ;

125) Ἠγόρασέ τις γ ὀκάδας ἑνὸς πράγματος πρὸς α δραχμ. τὴν ὀκᾶν καὶ δ ὀκάδας ἑνὸς ἄλλου πράγματος πρὸς β δρ. τὴν ὀκᾶν. Πόσας δραχμὰς ἔδωκεν ἐν ὅλῳ;

126) Ἠγόρασέ τις ἐπὶ πιστώσει α πήχεις ὑφάσματος πρὸς β δραχμὰς τὸν πῆχυν· ἐπλήρωσε δὲ ἐκ τῶν ἀγορασθέντων πήχεων τὴν ἀξίαν γ πήχεων. Πόσας δραχμὰς ὀφείλει ἀκόμη;

208
25
1040
416
5200

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

38. ***Πρόβλημα. Θέλομεν νὰ μοιράσωμεν 18 τετράδια εἰς 6 μαθητὰς ἐξ ἴσου. Πόσα τετράδια θὰ λάβῃ ὁ καθείς;***

Πρὸς τοῦτο ἠμποροῦμεν νὰ δώσωμεν εἰς καθένα μαθητὴν ἀπὸ ἕν τετράδιον ὅσας φορὰς εἶναι δυνατόν· γίνεται δὲ τοῦτο τρίς, χωρὶς μετὰ ταύτην νὰ μείνῃ κανὲν τετράδιον. Ἑπομένως τὸ μερίδιον τοῦ καθενὸς εἶναι τρία τετράδια.

Ἡ πρᾶξις αὕτη εἶναι ἡ διαίρεσις (μερισμός), ἤτοι ***ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας μοιράζομεν ἀριθμόν τινα εἰς ἴσα μέρη.***

39. ***Πρόβλημα. Πόσα τετράδια ἀγοράζω μὲ 24 δρ.***, ***ἂν ἕκαστον τετράδιον ἀξίζει 6 δραχμάς;***

Ἂν ἀπὸ τὰς 24 δραχμὰς δώσω 6 καὶ κατόπιν ἄλλας 6 κ. ο. κ. θὰ ἴδω, ὅτι θὰ ἀγοράσω τόσα τετράδια, ὅσας φορὰς ἀφήρεσα τὸν 6· δηλ. ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ 6 εἰς τὸν 24.

Ἡ πρᾶξις, δι᾽ ἧς εὕρομεν τὸ ζητούμενον εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν πρᾶξιν, δι᾽ ἧς εὕρομεν εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα τὰ 3 τετράδια, ἤτοι διαίρεσις· καὶ διὰ τοῦτο λέγομεν, ὅτι ***ἡ διαίρεσις εἶναι ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν πόσας φορὰς χωρεῖ εἷς ἀριθμὸς εἰς ἄλλον.***

Τὴν τοιαύτην διαίρεσιν λέγομεν ***μέτρησιν*** καὶ τὸ ἀκριβὲς πηλίκον αὐτῆς ***λόγον.***

Παρατήρησις. Ἔστω ἡ διαίρεσις 44 : 8. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ 1, 2, 3 κ. λ. π. $8\times1=8$, $8\times2=16$,

$8 \times 3 = 24$, $8 \times 4 = 32$, $8 \times 5 = 40$, $8 \times 6 = 48$, βλέπομεν, ὅτι, ἂν ἔχω νὰ μοιράσω 44 δρ. εἰς 8 ἀνθρώπους, δύναμαι νὰ δώσω εἰς ἕκαστον ἀπὸ 5 δραχμὰς καὶ θὰ περισσεύσουν καὶ 4 δραχμαί, ἀλλὰ δὲν δύναμαι νὰ δώσω εἰς καθένα ἀπὸ 6· λοιπὸν ἡ διαίρεσις ἐξετελέσθη καὶ πηλίκον μὲν εἶναι 5, ὑπόλοιπον δὲ 4. ***Διὰ ποίας πράξεως ἑπομένως δύναται νὰ γίνῃ ἡ διαίρεσις ;***

40. ***Τελεία καὶ ἀτελὴς διαίρεσις.*** Εἰς τὴν τελείαν διαίρεσιν (δηλαδὴ εἰς ἐκείνην, ἥτις δὲν ἀφίνει ὑπόλοιπον) λέγομεν, ὅτι ***ὁ διαιρετέος εἶναι γινόμενον τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ πηλίκου. Διατί ; Καὶ διατί, ἐὰν εἶναι π. χ.*** $18 = 6 \times 3$, ***εἶναι καὶ*** $18 : 6 = 3$ ***καὶ*** $18 : 3 = 6$ ***;***

Εἰς τὴν ἀτελῆ διαίρεσιν (δηλ. εἰς ἐκείνην, ἥτις ἀφίνει ὑπόλοιπον) λέγομεν ἐξ ἄλλου, ὅτι ***ὁ διαιρετέος εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ πηλίκου, ὅταν εἰς τὸ γινόμενον τοῦτο προστεθῇ καὶ τὸ ὑπόλοιπον. Διατί ;***

Εἰς τὴν ἀτελῆ διαίρεσιν τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ πηλίκου τί εἶναι ἐν σχέσει μὲ τὸν διαιρετέον ; Ἐπίσης τὸ ὑπόλοιπον αὐτῆς τί εἶναι ἐν σχέσει μὲ τὸν διαιρέτην ;

Γενικὸς ὁρισμὸς τῆς διαιρέσεως.

41. Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἰδιότητος τοῦ πηλίκου συνάγομεν τὸν ἑξῆς γενικώτερον ὁρισμὸν τῆς διαιρέσεως :

Διαίρεσις ἀριθμοῦ δι᾽ ἄλλου εἶναι ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκεται ὁ μεγαλύτερος ἀριθμός, ὅστις, πολλαπλασιάζων τὸν διαιρέτην, δίδει γινόμενον ἴσον ἢ μικρότερον τοῦ διαιρετέου.

Παρατηρήσεις. Ὅταν ἡ μονὰς εἶναι διαιρέτης, τὸ πηλίκον εἶναι ἴσον μὲ τὸν διαιρετέον.

Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι ἴσος μὲ τὸν διαιρετέον, τὸ πηλίκον εἶναι 1.

Ὅταν ὁ διαιρετέος εἶναι 0, ὁ δὲ διαιρέτης ἄλλος ἀριθμὸς μὴ μηδέν, τὸ πηλίκον εἶναι 0. Καὶ πράγματι, ἂν ἔχωμεν $0 : 5$, τὸ πηλίκον εἶναι 0, διότι $5 \times 0 = 0$.

Ὅταν καὶ ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης εἶναι 0, πᾶς ἀριθμὸς δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς πηλίκον, π.χ. $0 : 0 = 5$, διότι $0 \times 5 = 0$. Ἀλλὰ καὶ $0 : 0 = 6$, διότι $0 \times 6 = 0$ κ. ο. κ.

Ὅταν ὁ διαιρετέος εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός, ὁ δὲ διαιρέτης 0, ἡ διαίρεσις δὲν δύναται νὰ γίνῃ, ἤτοι εἶναι ἀδύνατος. Διότι πᾶς ἀριθμός, πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν διαιρέτην 0, δίδει γινόμενον 0. Ἐπίσης ἀδύνατος εἶναι ἡ διαίρεσις καὶ ὅταν ὁ διαιρετέος εἶναι μικρότερος τοῦ διαιρέτου.

Ἰδιότητες τῆς διαιρέσεως.

42. 1) Ἔστω, ὅτι ἔχομεν νὰ μοιράσωμεν ἐξ ἴσου 1868 δρ. εἰς 4 ἀνθρώπους· ἀλλ' εἶναι φανερόν, ὅτι δυνάμεθα νὰ μοιράσωμεν εἰς αὐτοὺς πρῶτον τὰς 1000 δρ. καὶ ἔπειτα τὰς 800, ἔπειτα τὰς 60 καὶ τέλος τὰς 8.

Ὅθεν, ***ὅταν ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν τὰ μέρη του χωριστὰ*** (ἐὰν διαιροῦνται ἀκριβῶς) ***καὶ ἔπειτα νὰ ἑνώσωμεν τὰ πηλίκα.***

2) Ἔστω, ὅτι ἔχομεν νὰ μοιράσωμεν 76 δρ. εἰς 8 ἀνθρώπους· ἕκαστος τῶν ἀνθρώπων θὰ λάβῃ 9 δρ. καὶ θὰ περισσεύσουν καὶ 4 δρ. Ἀλλ' ἂν ἔλθουν καὶ ἄλλοι 8 ἄνθρωποι καὶ ἄλλαι 76 δρ., δηλ. ἂν διπλασιασθοῦν οἱ ἄνθρωποι, ἀλλὰ διπλασιασθοῦν καὶ αἱ δραχμαί, εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ μερίδιον τῶν 9 δραχμῶν ἑκάστου ἀνθρώπου θὰ μείνῃ τὸ αὐτό, εἴτε χωριστὰ μοιράσουν οἱ 8 τὰς 76 δρ. καὶ οἱ ἄλλοι τὰς ἄλλας 76 δρ., εἴτε ὁμοῦ μοιράσουν τὰς διπλασίας 76×2· ἀλλ' ὅμως θὰ περισσεύσουν τώρα διπλάσιαι δραχμαί, ἤτοι 4×2.

Ὅθεν, ***ἂν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὸν διαιρετέον καὶ τὸν διαιρέτην ἐπὶ ἕνα οἱονδήποτε ἀριθμόν, τὸ μὲν πηλίκον δὲν μεταβάλλεται, τὸ δὲ ὑπόλοιπον πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.***

Σημ. Ὁμοίως δεικνύεται, ὅτι, καὶ ἂν διαιρέσωμεν τὸν διαιρετέον καὶ τὸν διαιρέτην διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ὁ ὁποῖος τοὺς διαιρεῖ, τὸ πηλίκον δὲν μεταβάλλεται, ἐνῷ τὸ ὑπόλοιπον διαιρεῖται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

Σημ. Αἱ δύο ἀνωτέρω ἰδιότητες ἀληθεύουν καὶ διὰ τὴν τελείαν διαίρεσιν.

3) Ἔστω, ὅτι ἔχω νὰ διαιρέσω τὸ γινόμενον $8 \times 2 \times 5$ δι' ἑνὸς τῶν παραγόντων του, π. χ. διὰ τοῦ 5· ἀλλὰ παρατηρῶ, ὅτι ὁ διαιρέτης 5, πολλαπλασιάζων τὸν 8×2, δίδει τὸν διαιρετέον $8 \times 2 \times 5$· ὥστε τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως αὐτῆς εἶναι 8×2.

Ὅθεν, ***διὰ νὰ διαιρέσω γινόμενον δι' ἑνὸς τῶν παραγόντων του ἀρκεῖ νὰ ἐξαλείψω τὸν παράγοντα τοῦτον.***

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἰδιότητος ἕπεται ὅτι, ***διὰ νὰ διαιρέσω γινόμενον δι' ἀριθμοῦ, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσω ἕνα τῶν παραγόντων αὐτοῦ*** (ἐὰν διαιρῆται ἀκριβῶς), ἤτοι $(5\times12\times8\times7):4=$ $=5\times3\times8\times7$. Διότι εἶναι φανερόν, ὅτι $5\times12\times8\times7=5\times3\times$ $\times4\times8\times7$· ὥστε εἶναι $(5\times12\times8\times7):4=(5\times3\times4\times8\times7):$ $:4=5\times3\times8\times7$.

Περὶ τοῦ τρόπου, καθ' ὃν γίνεται ἡ διαίρεσις.

43. Διὰ νὰ ἐξηγήσωμεν τὸν τρόπον, καθ' ὃν ἐμάθομεν νὰ κάμωμεν συντόμως τὴν διαίρεσιν, διακρίνομεν τὰς ἑξῆς περιπτώσεις:

1) ***Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι 10, 100, 1000 κ.τ.λ.*** Ἔστω ἡ διαίρεσις 678 : 100. Ἀλλ' ἐπειδὴ $678=600+78$, ἤτοι $678=6\times100+78$ καὶ ἐπειδὴ τὸ 78 εἶναι μικρότερον τοῦ 100, ἕπεται, ὅτι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως αὐτῆς εἶναι 6 καὶ τὸ ὑπόλοιπον 78.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι ἡ διαίρεσις 5763 : 1000 δίδει πηλίκον 5 καὶ ὑπόλοιπον 763.

Ἐκ τῶν ἄνω παραδειγμάτων εὐκόλως συνάγομεν τὸν κανόνα τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ διὰ 10, 100, 1000 κλπ.

2) ***Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι μονοψήφιος καὶ ὁ διαιρετέος εἶναι μικρότερος τοῦ δεκαπλασίου τοῦ διαιρέτου.*** (Ἤτοι, ὅταν τὸ πηλίκον εἶναι μονοψήφιον).

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ διαίρεσις γίνεται ἀπὸ μνήμης.

3) ***Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι πολυψήφιος καὶ τὸ πηλίκον μονοψήφιον.*** (Ἤτοι, ὅταν ὁ διαιρετέος εἶναι μικρότερος τοῦ δεκαπλασίου τοῦ διαιρέτου).

Ἔστω ἡ διαίρεσις 8975 : 2891. Ἐπειδὴ $8975<28910$, τὸ πηλίκον εἶναι μονοψήφιον καὶ διὰ νὰ τὸ εὕρω παρατηρῶ, ὅτι αἱ δύο χιλιάδες τοῦ διαιρέτου χωροῦν εἰς τὸν διαιρετέον (δηλ. εἰς τὰς χιλιάδας του) 4 φορὰς μόνον· λοιπὸν καὶ ὅλος ὁ διαιρέτης 2891 δὲν ἠμπορεῖ νὰ χωρῇ εἰς τὸν διαιρετέον περισσοτέρας ἀπὸ 4 φοράς· ὥστε τὸ πηλίκον εἶναι ἢ 4 ἢ μικρότερον τοῦ 4. Διὰ νὰ δοκιμάσω τὸ 4, πολλαπλασιάζω αὐτὸ ἐπὶ τὸν διαιρέτην 2891 καὶ εὑρίσκω γινόμενον 11564 μεγαλύτερον τοῦ διαιρετέου· ὥστε τὸ πηλίκον εἶναι μικρότερον τοῦ 4. Διὰ νὰ δοκιμάσω τὸ 3, πολλαπλασιάζω αὐτὸ ἐπὶ τὸν διαιρέτην καὶ εὑρίσκω γινόμενον 8673, μικρότερον τοῦ διαιρετέου· λοιπὸν τὸ πηλίκον εἶναι 3. Ἀφαιρῶ τώρα τὸ γινόμενον τοῦ πηλίκου 3 καὶ τοῦ διαιρέτου 2891 ἀπὸ τὸν διαιρετέον καὶ εὑρίσκω τὸ ὑπόλοιπον 302· καὶ οὕτως ἐξετελέσθη ἡ διαίρεσις.

Ἡ γνωστὴ διάταξις τῆς πράξεως

```
 8975 |2891
 8673  3
 ----
  302
```

γίνεται πρὸς συντομίαν. Ἐκ τούτων λοιπὸν συνάγομεν τὸν κανόνα:

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο ἀριθμῶν, ὅταν εἶναι μονοψήφιον, διαιροῦμεν διὰ τοῦ πρώτου ψηφίου τοῦ διαιρέτου τὰς μονάδας τοῦ διαιρετέου τῆς αὐτῆς τάξεως καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον ἴσον ἢ μεγαλύτερον τοῦ ζητουμένου. Διὰ νὰ δοκιμάσωμεν δὲ τὸ εὑρεθὲν ψηφίον, τὸ πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν διαιρέτην καὶ ἂν μὲν τὸ γινόμενον χωρεῖ εἰς τὸν διαιρετέον, τότε αὐτὸ εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον, εἰ δὲ μὴ δοκιμάζομεν τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον κ. ο. κ. ἕως οὗ εὕρωμεν ἓν ψηφίον, τοῦ ὁποίου τὸ γινόμενον νὰ περιέχηται εἰς τὸν διαιρετέον.

4) ***Ὅταν τὸ πηλίκον εἶναι πολυψήφιον.***

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι πρόκειται νὰ κάμωμεν τὴν διαίρεσιν 15384 : 65, ἤτοι πρόκειται νὰ μοιράσωμεν 15384 δραχμὰς εἰς 65 ἀνθρώπους.

Κατὰ πρῶτον παρατηρῶ, ὅτι, ἐπειδὴ $15384 > 6500$ καὶ $15384 < 65000$, τὸ πηλίκον πρέπει νὰ εἶναι τὸ ὀλιγώτερον 100 καὶ μικρότερον τοῦ 1000, ἤτοι τριψήφιον.

```
 15384 | 65
 130    236
 -----
  2384
  195
  ----
   434
   390
   ---
    44
```

Κατόπιν λαμβάνω ἀπὸ τὴν ἀρχὴν τοῦ διαιρετέου τόσα ψηφία, ὅσα χρειάζονται διὰ νὰ ἔχω πηλίκον μονοψήφιον· λαμβάνω λοιπὸν τὰς 153 ἑκατοντάδας καὶ τὰς μοιράζω εἰς 65 ἀνθρώπους· εὑρίσκω δὲ πηλίκον 2 ἑκατοντάδας καὶ ὑπόλοιπον 23 ἑκατοντάδας· αἱ 23 αὗται ἑκατοντάδες ὁμοῦ μὲ τὰς 84 μονάδας ἀποτελοῦσιν ἀριθμὸν 2384, ὁ ὁποῖος μένει ἀκόμη νὰ μοιρασθῇ εἰς τοὺς 65 ἀνθρώπους. Καὶ εἰς τὴν νέαν ταύτην διαίρεσιν λαμβάνω ἀπὸ τὴν ἀρχὴν τοῦ διαιρετέου τὰ τρία πρῶτα ψηφία, ἤτοι τὰς 238 δεκάδας, διὰ νὰ ἔχω πηλίκον μονοψήφιον, καὶ μοιράζω αὐτὰς εἰς τοὺς 65 ἀνθρώπους, εὑρίσκω δὲ πηλίκον 3 δεκάδας καὶ ὑπόλοιπον 43 δεκάδας· αὗται μὲ τὰς 4 μονάδας, τὰς ὁποίας ἀφήκαμεν, ἀποτελοῦσι τὸν ἀριθμὸν 434, τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ μοιράσωμεν εἰς τοὺς 65 ἀνθρώπους. Εἰς τὴν διαίρεσιν ταύτην λαμβάνω ὅλον τὸν διαιρετέον 434, διότι δίδει πηλίκον μονοψήφιον· διαιρῶ τὸν 434 διὰ 65 καὶ εὑρίσκω πηλίκον μὲν 6, ὑπόλοιπον δὲ 44. Ὥστε ἡ διαίρεσις 15384 : 65 ἐτελείωσε καὶ πηλίκον μὲν ἔδωκε τὸν ἀριθμὸν 236, ὑπόλοιπον δὲ 44.

Οἱ ἀριθμοὶ 153, 238, 434 εἶναι οἱ μερικοὶ διαιρετέοι· παρατηρῶ δέ, ὅτι ὁ δεύτερος ἐξ αὐτῶν λαμβάνεται, ἐὰν δεξιὰ τοῦ πρώτου ὑπολοίπου 23 καταβιβάσω τὸ πρῶτον ἐκ τῶν ψηφίων, τὰ ὁποῖα ἀφῆκα, ἤτοι τὸ 8.

Σημ. Πολλάκις συμβαίνει εἷς ἐκ τῶν μερικῶν διαιρετέων (ὄχι βέβαια ὁ πρῶτος) νὰ εἶναι μικρότερος τοῦ διαιρέτου· ἀλλὰ τότε τὸ ἀντίστοιχον ψηφίον τοῦ πηλίκου εἶναι 0.

$$
\text{π. δ.}\quad
\begin{array}{r|l}
23914 & 47 \\
\cline{2-2}
235 & 508 \\
\cline{1-1}
414 & \\
376 & \\
\cline{1-1}
38 &
\end{array}
$$

Ἐκ τούτων λοιπὸν συνάγεται ὁ κανών :

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα δι' ἄλλου ἀριθμοῦ χωρίζομεν ἀπὸ τὴν ἀρχὴν τοῦ διαιρετέου τόσα ψηφία, ὅσα χρειάζονται διὰ νὰ ἔχωμεν πηλίκον μονοψήφιον, διαιροῦμεν τὸ μέρος, τὸ ὁποῖον ἐχωρίσαμεν, καὶ εὑρίσκομεν τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ πηλίκου. Πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ ψηφίον τοῦτο καὶ τὸ γινόμενον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸ ἴδιον μέρος, δεξιὰ δὲ τοῦ ὑπολοίπου καταβιβάζομεν τὸ ἀμέσως ἑπόμενον ψηφίον τοῦ διαιρετέου. Τὸν πρ

κύπτοντα ἀριθμὸν διαιροῦμεν διὰ τοῦ διαιρέτου καὶ εὑρίσκομεν τὸ δεύτερον ψηφίον τοῦ πηλίκου, ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἐργαζόμεθα ὡς καὶ ἐπὶ τοῦ πρώτου καὶ ἐξακολουθοῦμεν οὕτω, μέχρις οὗ καταβιβάσωμεν ὅλα τὰ ψηφία τοῦ διαιρετέου. Ἐὰν δὲ μερικός τις διαιρετέος εἶναι μικρότερος τοῦ διαιρέτου, γράφομεν Ο εἰς τὸ πηλίκον καὶ καταβιβάζομεν τὸ ἀκόλουθον ψηφίον τοῦ διαιρετέου.

44. Ἔστω ἡ διαίρεσις 3897521 : 45000.

Διὰ νὰ εὕρω τὸ πηλίκον, πρέπει νὰ ἀφαιρέσω τὰς 45000 μονάδας ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν 3897521 ὅσας φορὰς δύναμαι· ἐπειδὴ ὅμως αἱ χιλιάδες δὲν ἠμποροῦν νὰ ἀφαιρεθοῦν ἢ μόνον ἀπὸ χιλιάδας, ἀφαιρῶ τὰς 45 χιλ. ἀπὸ τὰς 3897 τοῦ διαιρέτου, ὅσας φορὰς δύναμαι, ἤτοι διαιρῶ 3897 : 45 διὰ νὰ εὕρω τὸ πηλίκον, τὸ δὲ ὑπόλοιπον θὰ ἀπαρτίζεται ἀπὸ χιλιάδας, αἱ ὁποῖαι θὰ μείνουν καὶ ἀπὸ τὰς 521 μονάδας, τὰς ὁποίας ἐξ ἀρχῆς ἀφήκαμεν. Ἡ διάταξις τῆς πράξεως φαίνεται ἐκ τῶν ἑξῆς παραδειγμάτων :

389′7(521	45(000	1410(00	3(00
360	86	21	470
297		00	
270			
27521			

45. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω εὐκόλως συνάγομεν τὸν κανόνα τῆς διαιρέσεως, ὅταν ὁ διαιρέτης ἔχῃ εἰς τὸ τέλος μηδενικά.

46. ***Δοκιμὴ τῆς διαιρέσεως.*** Διὰ νὰ δοκιμάσωμεν τὴν διαίρεσιν πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ πηλίκον καὶ εἰς τὸ γινόμενον προσθέτομεν καὶ τὸ ὑπόλοιπον, ἂν ἔμεινεν· ἐὰν τότε εὑρεθῇ ὁ διαιρετέος, συμπεραίνομεν, ὅτι ἡ πρᾶξις ἔγινε χωρὶς λάθος.

Σημ. Διὰ τῆς διαιρέσεως δυνάμεθα νὰ κάμωμεν τὴν δοκιμὴν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὡς ἑξῆς : Διαιροῦμεν τὸ εὑρεθὲν γινόμενον διὰ τοῦ ἑνὸς τῶν παραγόντων καί, ἂν ἡ πρᾶξις ἔγινε χωρὶς λάθος, πρέπει νὰ εὕρωμεν ὡς πηλίκον τὸν ἄλλον παράγοντα, ὑπόλοιπον δὲ 0.

47. ***Διαίρεσις ἀπὸ μνήμης.*** Ὑπάρχουσι περιπτώσεις τινὲς κατὰ τὰς ὁποίας ἡ διαίρεσις δύναται νὰ γίνῃ ἀπὸ μνήμης.

1η) Διὰ νὰ διαιρέσω ἕνα ἀριθμὸν διὰ 5 ἢ 50 ἢ 500, διπλασιάζω τὸν ἀριθμὸν τοῦτον καὶ ἔπειτα διαιρῶ διὰ 10 ἢ 100 ἢ 1000. Οὕτω, ἀντὶ νὰ διαιρέσω τὸν 3244 : 5 ἢ 50 ἢ 500, διαιρῶ τὸν 6488 διὰ 10 ἢ 100 ἢ 1000.

2α) Διὰ νὰ διαιρέσω ἕνα ἀριθμὸν διὰ 25, πολλαπλασιάζω αὐτὸν ἐπὶ 4 καὶ ἔπειτα διαιρῶ διὰ 100. Οὕτω, ἀντὶ νὰ διαιρέσω τὸν 1575 διὰ 25, διαιρῶ τὸν 6300 διὰ 100.

3η) Διὰ νὰ διαιρέσω ἕνα ἀριθμὸν διὰ 4, διαιρῶ πρῶτον διὰ 2 καὶ ἔπειτα πάλιν διὰ 2 καί, ἐὰν ἔχω νὰ διαιρέσω διὰ 6, διαιρῶ διὰ 2 καὶ ἔπειτα διὰ 3. Οὕτω εἰς τὴν διαίρεσιν 724 : 4 διαιρῶ διὰ 2 καὶ εὑρίσκω 362 καὶ διαιρῶ τὸ 362 : 2.

Ἐπίσης εἰς τὴν διαίρεσιν 576 : 6 διαιρῶ διὰ 2 καὶ εὑρίσκω 288 καὶ ἔπειτα διαιρῶ τὸ 288 διὰ 3.

Σημ. Ἡ διαίρεσις βοηθεῖ καὶ τὸν πολλαπλασιασμόν, ὡς φαίνεται ἐκ τῶν κάτωθι ἰσοτήτων :

$537 \times 5 = 5370 : 2$, $475 \times 25 = 47500 : 4$, $57 \times 125 = 57000 : 8$

Διατί ;

Ἀσκήσεις.

127) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἑπόμεναι διαιρέσεις (ἀπὸ μνήμης):

34 : 2	82 : 2	84 : 4	51 : 3	75 : 5	85 : 5
63 : 3	96 : 8	88 : 8	84 : 6	91 : 7	96 : 6

128) Ὁμοίως αἱ :

36 : 12	75 : 15	540 : 9	2400 : 80
48 : 12	60 : 15	390 : 13	4500 : 90
72 : 12	68 : 17	720 : 12	2500 : 500
39 : 13	95 : 19	800 : 80	6300 : 700

129) Ὁμοίως αἱ :

37 : 12	65 : 15	50 : 17	1593 : 100
40 : 13	91 : 15	60 : 18	1579 : 100
62 : 12	95 : 16	476 : 10	9895 : 1000

130) Ὁμοίως αἱ :

158 : 5	7450 : 500	268 : 4	1720 : 25
1265 : 5	2175 : 50	750 : 6	3675 : 25

131) Ἐκ δύο ἀδελφῶν ὁ εἷς ἔχει 120 πρόβατα, ὁ δὲ ἄλλος 70. Πόσα πρέπει νὰ δώσῃ ὁ πρῶτος εἰς τὸν δεύτερον διὰ νὰ ἔχουν ἴσα ;

132) Πόσας ὥρας κάμνουν 6000 πρῶτα λεπτά ;

133) Μία ἅμαξα ἐνοικιάζεται 560 δραχ. διὰ 5 ἡμέρας. Πόσον ἐνοικιάζεται τὴν ἡμέραν ;

134) 50 ἄνθρωποι ἐξώδευσαν ἀπὸ κοινοῦ εἰς ἓν ταξείδιον 1200 δραχ. Πόσα ἐξώδευσεν ὁ καθείς ;

135) Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμός, ὅστις εἶναι τρεῖς φορὰς μικρότερος τοῦ 45, 75, 240, 360 ;

136) Ποῖος ἀριθμός, πολλαπλασιάζων τὸν 24, δίδει γινόμενον 120 ;

137) Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν εἶναι 400 καὶ ὁ εἷς ἐξ αὐτῶν εἶναι ὁ 25. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἄλλος.

138) Διὰ ποίου ἀριθμοῦ πρέπει νὰ διαιρεθῇ ὁ 750 διὰ νὰ λάβω ἀριθμὸν κατὰ 6 φορὰς μικρότερόν του ;

139) Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ 8]πλάσιον δίδει τὸν 480 ;

140) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ κάτωθι διαιρέσεις (γραπτῶς) :

49776 : 48	150880 : 736	284355 : 16871
85258 : 94	388025 : 709	8384628 : 15419
14700 : 196	8152 : 1019	9150000 : 375000
59576 : 709	14616 : 1624	2576194 : 706

141) Τί ἐκφράζουσιν αἱ ἰσότητες :

$$\Delta=\delta\times\pi+\upsilon \text{ καὶ } (\Delta\times\alpha)=(\delta\times\alpha)\times\pi+\upsilon\times\alpha \text{ ;}$$

142) Τί μᾶς λέγει ἡ ἰσότης :

$$(\alpha\times\beta\times\gamma\times\delta) : \beta=\alpha\times\gamma\times\delta$$

$$\text{καὶ ἡ } (\alpha\times\beta\times\gamma\times\delta) : \varepsilon = \alpha\times\beta\times(\gamma : \varepsilon)\times\delta \text{ ;}$$

Προβλήματα.

1ον) ***75 ὀκάδες ἑνὸς πράγματος ἀξίζουν 1125 δραχ. Πόσον ἀξίζει ἡ ὀκᾶ ;***

Θὰ εὕρωμεν τὴν ἀξίαν τῆς μιᾶς ὀκᾶς, ἐὰν μοιράσωμεν τὰς 1125 δραχ. εἰς τόσα μέρη, ὅσα εἶναι αἱ ὀκάδες, καὶ τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν θὰ εἶναι ἡ ἀξία τῆς ὀκᾶς. Διαιροῦντες, εὑρίσκομεν, ὅτι ἡ ζητουμένη ἀξία τῆς ὀκᾶς εἶναι 15 δραχμαί.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται ὁ κανών :

Ὅταν ἠξεύρωμεν τὴν ἀξίαν πολλῶν μονάδων ἑνὸς πράγματος, διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἀξίαν μιᾶς μονάδος τοῦ αὐτοῦ πράγματος, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὴν γνωστὴν ἀξίαν τῶν μονάδων διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις ἐκφράζει πόσαι εἶναι αἱ μονάδες.

Ἤτοι, ἐὰν οἱ β πήχεις ἀξίζουν α δραχμάς, ὁ 1 πῆχυς ἀξίζει α δραχ. : β καὶ τὸ πηλίκον εἶναι δραχμαί.

2ον) ***Ἡ ὀκᾶ ἑνὸς πράγματος ἀξίζει 75 δραχμάς. Πόσας ὀκάδας ἀγοράζω μὲ 1125 δραχμάς ;***

Λύσις : Ἂν ἀπὸ τὰς 1125 δρχ. δώσω 75 καὶ ἔπειτα δώσω ἄλλας 75 κ. ο. κ. θὰ ἴδω, ὅτι τόσας ὀκάδας θὰ ἀγοράσω, ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ 75 εἰς τὸν 1125. Διὰ νὰ λύσω τὸ πρόβλημα, πρέπει νὰ διαιρέσω τὸν 1125 διὰ 75· διαιρῶ καὶ εὑρίσκω 15· ὥστε 15 ὀκάδας δύναμαι νὰ ἀγοράσω.

Παρατήρησις. Τὸ δεύτερον τοῦτο πρόβλημα ἔχει τοὺς ἰδίους ἀριθμούς, τοὺς ὁποίους ἔχει καὶ τὸ πρῶτον καὶ μὲ τὴν ἰδίαν πρᾶξιν ἐλύθη. Ἀλλ᾽ εἰς μὲν τὸ πρῶτον πρόβλημα ἐμοιράσαμεν τὸ 1125 εἰς 75 ἴσα μερίδια· διὰ τοῦτο ἕκαστον μερίδιον εἶναι ὁμοειδὲς μὲ τὸν διαιρετέον· εἰς δὲ τὸ δεύτερον ἐξητάσαμεν πόσας φορὰς χωρεῖ ὁ ἀριθμὸς 75 εἰς τὸν 1125, δηλ. ἀπὸ πόσα 75 σύγκειται ὁ 1125· οἱ ἀριθμοὶ λοιπὸν τώρα θεωροῦνται ἀφῃρημένοι, διὰ τοῦτο καὶ τὸ πηλίκον αὐτῶν, ὡς ἐξαγόμενον τῆς πράξεως, εἶναι ἀριθμὸς ἐπίσης ἀφῃρημένος, λαμβάνει δὲ ἔπειτα τὴν σημασίαν, τὴν ὁποίαν ὁρίζει τὸ πρόβλημα καὶ ἥτις δύναται νὰ εἶναι ὁποιαδήποτε· ἤτοι, ἐὰν μὲ α πήχεις κάμνομεν μίαν ἐνδυμασίαν, μὲ β πήχεις θὰ κάμωμεν β : α ἐνδυμασίας.

Ἐκ τῶν δύο τούτων διαιρέσεων παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ μὲν πρώτη εἶναι μερισμός, ἡ δὲ δευτέρα μέτρησις.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

143) Ἠγόρασέ τις μίαν ραπτομηχανὴν ἀντὶ 7200 δραχ., αἱ ὁποῖαι θὰ πληρωθῶσιν εἰς 18 μηνιαίας δόσεις. Πόσων δραχμῶν εἶναι ἡ μία δόσις ;

144) Ἠγόρασέ τις μίαν ραπτομηχανὴν ἀντὶ 7840 δρχ., τὰς ὁποίας θὰ πληρώσῃ εἰς μηνιαίας δόσεις πρὸς 245 δρ. ἑκάστην. Μετὰ πόσους μῆνας θὰ ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος του ;

145) Αὐτοκίνητον διέτρεξεν εἰς 16 ὥρας 368 χλμ. Πόσα χιλιόμετρα διέτρεξε κάθε ὥραν ;

146) Ἕνας σιδηρόδρομος διανύει διάστημα 550 χιλιομ. μὲ ταχύτητα 25 χιλιομ. τὴν ὥραν. Εἰς πόσας ὥρας διανύει τὸ διάστημα αὐτό ;

147) Ἐκ μιᾶς κρήνης ρέει ὕδωρ 879 ὀκάδων καθ' ὥραν. Εἰς πόσας ὥρας θὰ γεμίσῃ δεξαμενήν, ἥτις χωρεῖ 24612 ὀκάδας ;

148) Ἐφύτευσέ τις ἄμπελον· πρὸς τοῦτο ἠγόρασε 25395 κλήματα καὶ εἰς κάθε στρέμμα ἐφύτευσεν 985 κλήματα. Πόσων στρεμμάτων εἶναι ἡ ἄμπελος ;

149) Διὰ τὴν μόρφωσιν τῶν ἑλληνοπαίδων ἐδαπάνησε τὸ κράτος εἰς ἓν ἔτος 631969065 δραχ. Νὰ εὑρεθῇ πόση δαπάνη ἀντιστοιχεῖ εἰς ἕκαστον ἑλληνόπαιδα, ἐὰν εἰς ὅλα τὰ σχολεῖα ἐφοίτησαν 812245 μαθηταὶ κατὰ τὸ ἔτος αὐτό ;

150) Τὸ Ἑλληνικὸν κράτος εἰσέπραξεν ἀπὸ ἀμέσους φόρους εἰς ἓν ἔτος 1416000000 δραχ. Δεδομένου δὲ ὅτι οἱ φορολογούμενοι κάτοικοι τῆς Ἑλλάδος εἶναι 6000000, πόσον φορολογεῖ τὸ κράτος τοὺς κατοίκους του κατὰ κεφαλήν ;

151) Ἐπὶ ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν 83 διὰ νὰ λάβωμεν γινόμενον 1411 ;

152) Ἐκ δύο παραγόντων ἐχόντων γινόμενον 48118 ὁ εἷς εἶναι 491. Ποῖος εἶναι ὁ ἄλλος ;

153) Πόσας φορὰς δύναμαι νὰ ἀφαιρέσω ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν 67450 τὸν 475 ;

154) Ἀτμόπλοιόν τι διανύει 90 μίλλια εἰς 8 ὥρας. Ἓν ἄλλο διανύει 250 μίλια εἰς 28 ὥρας. Ποῖον εἶναι τὸ ταχύτερον ;

155) Θέλει τις νὰ ἀγοράσῃ σῖτον, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 5 δρ., καὶ διὰ νὰ λάβῃ χρήματα πωλεῖ 167 ὀκάδας ἐλαίου πρὸς 37 δρ. τὴν ὀκᾶν. Πόσας ὀκάδας σίτου θὰ ἀγοράσῃ μὲ τὰ χρήματα τὰ ὁποῖα θὰ λάβῃ ἐκ τῆς πωλήσεως τοῦ ἐλαίου ; (ἀπ. 1235)

156) Ἔμπορός τις ἠγόρασεν ὕφασμα ἀντὶ 2975 δρ. καὶ τὸ μετεπώλησε πρὸς 3570 δρ. κερδίσας 7 δρ. τὸν πῆχυν. Ἐκ πόσων πήχεων ἀπετελεῖτο τὸ ἀγορασθὲν ὕφασμα ; (ἀπ. 85).

157) Ἱππεύς τις καταδιώκει πεζόν, ὅστις ἀνεχώρησεν 20 ὥρας πρὸ αὐτοῦ καὶ ὁ μὲν πεζὸς διατρέχει καθ' ὥραν 6 χιλιόμετρα ὁ δὲ ἱππεὺς 10. Πόσας ὥρας χρειάζεται ὁ ἱππεὺς διὰ νὰ φθάσῃ τὸν πεζόν ; (ἀπ. 30).

158) Ἐπώλησέ τις 8 σάκκους ξυλανθράκων ἀντὶ 1440 δρχ. μὲ κέρδος ἐν ὅλῳ 120 δρ. Πόσον ἠγόρασε τὸν σάκκον; (ἀπ. 165).

159) Ἠγόρασέ τις 67 ὀκάδας ἔλαιον καὶ 15 ὀκ. βούτυρον ἀντὶ 4223 δραχ. Τὸ βούτυρον ἠγόρασε πρὸς 85 δρ. τὴν ὀκᾶν. Πρὸς πόσας δραχμὰς ἠγόρασε τὴν μίαν ὀκᾶν ἐλαίου; (ἀπ. 44).

160) Ἁμαξοστοιχία τις διέτρεξε διάστημα 309 χιλιομέτρων εἰς 9 ὥρας. Κατὰ τὰς 3 πρώτας ὥρας ἔτρεχεν 29 χιλιόμετρα τὴν ὥραν. Πόσα χιλιόμετρα ἔτρεχε τὴν ὥραν κατὰ τὸν ὑπόλοιπον χρόνον; (ἀπ. 37).

161) 16 ἄνθρωποι ἐμοιράσθησαν ποσόν τι χρημάτων ἐξ ἴσου· οἱ 14 ἐξ αὐτῶν ἔλαβον ὁμοῦ 2100 δρ. Πόσα ἦσαν τὰ χρήματα καὶ πόσα ἔλαβεν ὁ καθείς; (ἀπ. 2400, 150).

162) Κτηνοτρόφος τις ἐχρεώστει 26000 δραχ. Ἐξώφλησε δὲ τὸ χρέος του τοῦτο μὲ 7300 δραχ. εἰς μετρητὰ καὶ τὸ ὑπόλοιπον μὲ πρόβατα, τὰ ὁποῖα ἤξιζον 275 δρ. τὸ ἕνα. Πόσα πρόβατα ἔδωκε; (ἀπ. 68).

163) Ὑπάλληλός τις ἐξοδεύει πρὸς συντήρησίν του 68 δραχ. τὴν ἡμέραν καὶ ἐξοικονομεῖ εἰς ἓν ἔτος 4380 δραχ. Ποῖος εἶναι ὁ μηνιαῖος μισθός του; (ἀπ. 2400).

164) Ἐργάτης ἐργάζεται καθ᾿ ἑκάστην, πλὴν τῶν Κυριακῶν καὶ λαμβάνει ἡμερομίσθιον 49 δρ., ἐξοδεύει ὅμως πρὸς συντήρησίν του καθ᾿ ἡμέραν 32 δραχ. Εἰς πόσας ἡμέρας θὰ οἰκονομήσῃ 1350 δραχ.; (ἀπ. 135).

165) Ἐργάτης τις λαμβάνει δι᾿ ἑκάστην ἡμέραν ἐργασίας 60 δρ., ἐξοδεύει δὲ πρὸς συντήρησίν του καθ᾿ ἡμέραν 39 δραχ. Εἰς τὸ διάστημα ἑνὸς ἔτους τοῦ ἐπερίσσευσαν 2085 δρ. Πόσας ἡμέρας εἰργάσθη καὶ πόσας ἔμεινεν ἄνεργος; (ἀπ. εἰργάσθη 272).

166) Ἠγόρασέ τις οἶνον πρὸς 9 δρ. τὴν ὀκᾶν, διὰ τὸν ὁποῖον ἐπλήρωσε 12825 δρ. καὶ τὸν ὁποῖον μετήγγισεν εἰς βαρέλια τῶν 127 ὀκάδων ἕκαστον. Εἰς πόσα βαρέλια τὸν μετήγγισεν; (ἀπ. 11).

167) Ἠγόρασέ τις ἀντὶ 5349 δρ. ὕφασμα τριῶν ποιοτήτων. Τῆς πρώτης ποιότητος ἦτο 19 πήχ. καὶ ἤξιζε 87 δρ. τὸν πῆχυν, τῆς δευτέρας ποιότητος ἦτο 28 πήχ. καὶ ἤξιζεν 78 δραχμάς, τῆς δὲ τρίτης ἦτο ὕφασμα 24 πήχεων. Ποία ἦτο ἡ ἀξία τοῦ πήχεως τοῦ ὑφάσματος τῆς τρίτης ποιότητος; (ἀπ. 63).

168) Ἑκάστη τάξις ἑξαταξίου γυμνασίου ἔχει ἰσαρίθμους μαθητάς, οἱ δὲ μαθηταὶ κάθηνται εἰς θρανία ἀνὰ 3. Πόσα θρα-

νία χρησιμοποιεῖ ἑκάστη τάξις, δεδομένου ὅτι ὅλοι οἱ μαθηταὶ τοῦ γυμνασίου εἶναι 270 ; (ἀπ. 15).

169) Μία πολυκατοικία ἀποτελεῖται ἀπὸ 6 πατώματα· ἕκαστον πάτωμα ἔχει 4 διαμερίσματα καὶ ἕκαστον διαμέρισμα ἀποτελεῖται ἀπὸ τρία δωμάτια, ἐστοίχισε δὲ 2570400 δραχ. Πόση δαπάνη ἀντιστοιχεῖ εἰς ἕνα δωμάτιον ; (ἀπ. 35700).

170) Εἰς τοὺς κατοίκους ἑνὸς συνοικισμοῦ ὁ ὁποῖος κατεστράφη ἐκ πυρκαϊᾶς ἐδόθησαν ὡς βοήθημα 167200 δρ. Πόσας δραχμὰς ἔλαβεν ἕκαστος κάτοικος αὐτοῦ δεδομένου, ὅτι ἀπετελεῖτο ἀπὸ 130 οἰκογενείας, ἐκ τῶν ὁποίων αἱ μὲν 25 ἀπετελοῦντο ἀπὸ 6 ἄτομα ἑκάστη, αἱ δὲ 38 ἀπὸ 5 ἄτομα καὶ αἱ ὑπόλοιποι ἀπὸ 4 ἄτομα ; (ἀπ. 275 δρ).

Περὶ διαιρετότητος.

48. ***Ὁρισμοί.*** Ἀριθμός τις λέγεται ***διαιρετὸς δι᾽ ἄλλου ἢ ὅτι εἶναι πολλαπλάσιον αὐτοῦ***, ἐὰν διαιρῆται δι᾽ αὐτοῦ ἀκριβῶς. Οὕτω ὁ 15 εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 5 ἢ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 5.

Ὁ διαιρῶν ἀκριβῶς ἀριθμόν τινα λέγεται διαιρέτης ἢ ***παράγων*** ἢ ὑποπολλαπλάσιον αὐτοῦ. Οὕτω ὁ 3 εἶναι διαιρέτης ἢ παράγων ἢ ὑποπολλαπλάσιον τοῦ 15.

Πᾶς ἀριθμὸς διαιρεῖ τὰ πολλαπλάσιά του καὶ μόνον αὐτά.

Γενικαὶ ἀρχαὶ τῆς διαιρετότητος.

49. ***Ἐὰν εἷς ἀριθμὸς διαιρῇ δύο ἢ περισσοτέρους ἀριθμούς, διαιρεῖ καὶ τὸ ἄθροισμά των.***

Π. χ. Ἐπειδὴ ὁ 5 διαιρεῖ τοὺς ἀριθμοὺς 15 καὶ 25 θὰ διαιρῇ καὶ τὸ ἄθροισμα $15+25=40$.

Διότι εἶναι $15=5+5+5$ καὶ $25=5+5+5+5+5$ ἄρα τὸ ἄθροισμα $15+25$ εἶναι $5+5+5+5+5+5+5+5$, ἤτοι εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 5, ἑπομένως διαιρεῖται διὰ 5. Ἐκ τῆς ἀρχῆς ταύτης συμπεραίνομεν, ὅτι :

50. ***Ἐὰν ἀριθμός τις διαιρῇ ἄλλον, διαιρεῖ καὶ τὰ πολλαπλάσια αὐτοῦ.*** Π. χ. Ἐπειδὴ ὁ 9 διαιρεῖ τὸν 27 θὰ διαιρῇ καὶ τὰ πολλαπλάσια αὐτοῦ, ἤτοι τὰ 27×2, 27×3 κλπ.

51. ***Ἐὰν εἷς ἀριθμὸς διαιρῇ δύο ἄλλους, διαιρεῖ καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν.***

Ὁ λόγος τούτου εἶναι ὅμοιος μὲ τὸν ἄνω.

Χαρακτηριστικὰ τῆς διαιρετότητος.

Πολλάκις εἶναι ὠφέλιμον νὰ γνωρίζωμεν, ἐὰν ἕνας ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς δι᾿ ἄλλου, χωρὶς νὰ κάμωμεν τὴν διαίρεσιν. Εἰς τοῦτο βοηθούμεθα διὰ τῶν ἑξῆς κανόνων :

52. ***Κανὼν διὰ τὸ 10, 100, 1000 κλπ.***

Ἔχοντες ὑπ᾿ ὄψιν τὴν περίπτωσιν 1 τῆς διαιρέσεως (ἐδ. 43) εὐκόλως συνάγομεν τὸν ἑπόμενον κανόνα :

Διὰ τοῦ 10 διαιρεῖται πᾶς ἀριθμός, ἐὰν τελειώνῃ εἰς 0, διὰ τοῦ 100, ἐὰν τελειώνῃ εἰς δύο 0, διὰ τοῦ 1000, ἐὰν τελειώνῃ εἰς τρία 0 κ. ο. κ.

53. ***Κανὼν διὰ τὸ 2 ἢ 5.***

Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 824· οὗτος ἀποτελεῖται ἀπὸ 82 δεκάδας καὶ 4 μονάδας· ἀλλ᾿ ἐπειδὴ ἑκάστη δεκὰς διαιρεῖται διὰ 2 καὶ 5 ($10=2\times5$), αἱ 82 δεκάδες διαιροῦνται διὰ 2 καὶ 5· ἂν λοιπὸν καὶ αἱ 4 μονάδες τοῦ 824 διαιροῦνται διὰ 2 καὶ 5, καὶ ὅλος ὁ ἀριθμὸς 824 θὰ διαιρῆται διὰ 2 ἢ 5. Ὥστε ***διὰ 2 ἢ 5 διαιρεῖται πᾶς ἀριθμός, ἐὰν τὸ τελευταῖον ψηφίον του διαιρῆται διὰ 2 ἢ 5.***

Π.χ. ὁ 1025 διαιρεῖται διὰ 5, διότι λήγει εἰς 5· ὁ 128 διαιρεῖται διὰ 2, ὁ δὲ 1027 δὲν διαιρεῖται οὔτε διὰ 2, οὔτε διὰ 5.

54. ***Κανὼν διὰ τὸ 4 ἢ 25.***

Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 18544· ἂν ἔχωμεν ὑπ᾿ ὄψιν, ὅτι οὗτος ἀποτελεῖται ἀπὸ 185 ἑκατοντάδας καὶ 44 μονάδας καὶ ὅτι ἑκάστη ἑκατοντὰς διαιρεῖται διὰ 4 καὶ 25 ($100=4\times25$) καὶ σκεφθῶμεν ὁμοίως ὡς ἄνω, εὐκόλως συνάγομεν τὸν κανόνα : ***Διὰ 4 ἢ 25 διαιρεῖται πᾶς ἀριθμός, ἐὰν τὰ δύο τελευταῖα ψηφία αὐτοῦ σχηματίζουσιν ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 4 ἢ 25.***

Π. χ. ὁ 2532 διαιρεῖται διὰ 4, διότι ὁ 32 διαιρεῖται διὰ 4, ὁ 38675 διαιρεῖται διὰ 25, διότι ὁ 75 διαιρεῖται διὰ 25 καὶ ὁ 42837 δὲν διαιρεῖται οὔτε διὰ 4 οὔτε διὰ 25.

55. ***Κανὼν διὰ τὸ 8 ἢ 125.***

Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 486375. Οὗτος ἀποτελεῖται ἀπὸ 486 χιλιάδας καὶ 375 μονάδας· ἑκάστη δὲ χιλιὰς διαιρεῖται διὰ 8 ἢ 125 ($1000=8\times125$). Καὶ ἐὰν σκεφθῶμεν ὁμοίως ὡς ἄνω, συνάγομεν ὅτι : ***Διὰ 8 ἢ 125 διαιρεῖται πᾶς ἀριθμός, ἐὰν τὰ τρία***

τελευταῖα ψηφία αὐτοῦ σχηματίζουσιν ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 8 ἢ 125.

Π. χ. ὁ 1573128 διαιρεῖται διὰ 8, διότι ὁ 128 διαιρεῖται διὰ 8, ὁ δὲ 3721625 διαιρεῖται διὰ 125, διότι ὁ 625 διαιρεῖται διὰ 125.

56. ***Κανὼν διὰ τὸ 9 ἢ 3.***

Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 8975· ὁ ἀριθμὸς οὗτος ἀποτελεῖται ἀπὸ 897 δεκάδας καὶ ἀπὸ 5 μονάδας· ἂν ἀπὸ ἑκάστην δεκάδα ἀφαιρέσωμεν τὸ 9 μένει ὑπόλοιπον 1 μονάς· ἤτοι ἡ δεκὰς γίνεται μονὰς ἁπλῆ· ἂν λοιπὸν ἀπὸ τὰς 897 δεκάδας τοῦ ἀριθμοῦ 8975 ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ κάθε μίαν τὸ 9, θὰ μείνουν εἰς τὸν ἀριθμὸν 897 μονάδες καὶ 5 μονάδες· ἤτοι θὰ μείνῃ ὁ ἀριθμὸς 897+5. Ἐὰν δὲ πάλιν ἀπὸ τὰς 89 δεκάδας τοῦ ἀριθμοῦ τούτου ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ κάθε μίαν τὸ 9, θὰ μείνουν 89 μονάδες καὶ 7 μονάδες καὶ 5 μονάδες, ἤτοι ὁ ἀριθμὸς 89+7+5. Καὶ τέλος, ἂν ἀπὸ τὰς 8 δεκάδας τούτου ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ κάθε μίαν τὸ 9, θὰ μείνῃ ὁ ἀριθμὸς 8+9+7+5. Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς 8975 σύγκειται ἀπὸ πολλὰ 9 (ἤτοι ἀπὸ πολλαπλάσιόν τι τοῦ 9) καὶ ἀπὸ τὸ ἄθροισμα 8+9+7+5· ἤτοι εἶναι 8975=8+9+7+5+ πολλαπλάσιόν τι τοῦ 9· ὥστε, ἂν τὸ ἄθροισμα 8+9+7+5 διαιρῆται διὰ 9 καὶ ὅλος ὁ ἀριθμὸς θὰ διαιρῆται διὰ 9.

Ὁμοίως σκεπτόμεθα καὶ διὰ τὸ 3· ἐπειδή, ἂν ἀπὸ μίαν δεκάδα ἀφαιρέσωμεν τρεῖς φορὰς τὸν 3, μένει ὑπόλοιπον 1, ἤτοι μία μονὰς ἁπλῆ. Εὑρίσκομεν δὲ ἑπομένως, ὅτι, ἂν τὸ ἄθροισμα 8+9+7+5 διαιρῆται διὰ 3 καὶ ὅλος ὁ ἀριθμὸς 8975 διαιρεῖται διὰ 3.

Ὥστε, ***διὰ τοῦ 9 ἢ 3 διαιρεῖται πᾶς ἀριθμός, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του εἶναι διαιρετὸν διὰ 9 ἢ 3.***

Π. χ. ὁ ἀριθμὸς 1845 διαιρεῖται διὰ 9 καὶ διὰ 3, διότι τὸ ἄθροισμα 1+8+4+5 τῶν ψηφίων του, ἤτοι 18, διαιρεῖται διὰ 9 καὶ 3. Ἐπίσης ὁ ἀριθμὸς 85107 διαιρεῖται διὰ 3, διότι τὸ ἄθροισμα 8+5+1+0+7 διαιρεῖται διὰ 3.

57. ***Κανὼν διὰ τὸ 11.***

Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 3562715· οὗτος ἀποτελεῖται ἀπὸ 35627 ἑκατοντάδας καὶ 15 μονάδας· ἂν ἀπὸ ἑκάστην ἑκατοντάδα ἀφαιρέσωμεν τὸ 11 ἐννέα φοράς, μένει ὑπόλοιπον 1, ἤτοι ἡ ἑκατοντὰς γίνεται ἁπλῆ μονάς· ἂν λοιπὸν ἀπὸ τὰς 35627 ἑκατοντάδας τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ κάθε μίαν τὸν 11 ἐννέα φοράς, θὰ μείνωσιν εἰς τὸν ἀριθμὸν 35627 μονάδες καὶ 15 μονάδες, ἤτοι θὰ μείνῃ ὁ ἀριθμὸς 35627+15. Ἐὰν δὲ πάλιν ἀπὸ τὰς 356 ἑκατοντάδας τοῦ ἀριθμοῦ 35627 ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ κάθε μίαν τὸν 11 ἐννέα φοράς, θὰ μείνῃ ὁ ἀριθμὸς 356+27+15. Καὶ τέλος, ἂν ἀπὸ τὰς 3 ἑκατοντάδας τοῦ 356 ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ κάθε μίαν τὸν 11 ἐννέα φοράς, θὰ μείνῃ ὁ ἀριθμὸς 3+56+27+15. Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς 3562715 ἀποτελεῖται ἀπὸ πολλὰ 11 καὶ ἀπὸ τὸ ἄθροισμα 3+56+27+15, ἤτοι εἶναι 3562715=3+56+27+15+πολλαπλάσιόν τι τοῦ 11· ἑπομένως, ἂν τὸ ἄθροισμα 3+56+27+15 διαιρῆται δι' 11, καὶ ὅλος ὁ ἀριθμὸς θὰ διαιρῆται δι' 11.

Ὥστε, ***διὰ τοῦ 11 διαιρεῖται πᾶς ἀριθμός, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν διψηφίων τμημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα ἀναλύεται*** (ἐκ δεξιῶν) ***εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ 11.*** Π. χ. ὁ ἀριθμὸς 42746 διαιρεῖται διὰ τοῦ 11, διότι τὸ ἄθροισμα 4+27+46=77 διαιρεῖται διὰ τοῦ 11.

Ἀσκήσεις.

171) Εἰς τί ψηφίον ἢ ψηφία πρέπει νὰ λήγῃ ἀριθμός τις διὰ νὰ εἶναι διαιρετὸς διὰ 2 ἢ 5, 4 ἢ 25, 8 ἢ 125 ;

172) Ποῖοι ἐκ τῶν ἀριθμῶν 298, 140, 453, 25700, 10425, 16000 εἶναι διαιρετοὶ μὲ καθένα ἐκ τῶν ἀριθμῶν 2, 5, 10, 100;

173) Ποῖοι ἐκ τῶν ἀριθμῶν 1900, 608, 975, 1400, 18250, 19285, 10382 εἶναι διαιρετοὶ διὰ 4 ἢ 25 ;

174) Ποῖοι ἐκ τῶν ἀριθμῶν 15128, 78625, 150000, 578324 630875, 397475, 1806032, 3008784 εἶναι διαιρετοὶ διὰ τοῦ 8 ἢ 125 ;

175) Ποῖοι ἐκ τῶν ἀριθμῶν 891, 652, 6273, 8604, 64370, 16326, 206007, 315783 εἶναι διαιρετοὶ διὰ 3 ἢ 9 ;

176) Ποῖοι ἐκ τῶν ἀριθμῶν 174526, 95867, 346579, 1260567, εἶναι διαιρετοὶ διὰ 11 ;

177) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων (χωρὶς νὰ γίνωσιν αὗται) διὰ 2, 3, 4, 5, 8, 9, 11, 25, 125 τῶν ἀριθμῶν 648, 2075, 1593, 4735, 7128, 8043, 65826, 53469, 40007, 162072

178) Εἰς τὸν ἀριθμὸν 358167 νὰ ἀντικατασταθῇ τὸ ψηφίον 7 δι' ἄλλου οὕτως, ὥστε νὰ προκύψῃ ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ

2 ἢ 4 ἢ 5 ἢ 8 ἢ 10. Ποῖον δὲ ψηφίον τοῦ ἀριθμοῦ τούτου πρέπει ν' ἀντικαταστήσωμεν δι' ἄλλου, ὥστε νὰ προκύψῃ ἀριθμὸς διαιρετὸς δι' 9;

179) Ἐὰν ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς δι' 9 καὶ ἀλλάξωμεν τὴν τάξιν τῶν ψηφίων αὐτοῦ, ὁ προκύπτων ἀριθμὸς θὰ ἐξακολουθῇ νὰ εἶναι διαιρετὸς διὰ 9;

Κοινοὶ διαιρέται.

58. Ἄς λάβωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 18 καὶ 24 καὶ ἂς ἐξετάσωμεν τοὺς διαιρέτας ἑνὸς ἑκάστου χωριστά. Καὶ τοῦ μὲν 18 διαιρέται εἶναι οἱ 1, 2, 3, 6, 9, 18, τοῦ δὲ 24 διαιρέται εἶναι οἱ 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. Ἀλλ' ἂν προσέξωμεν τοὺς διαιρέτας τῶν ληφθέντων ἀριθμῶν, θὰ ἴδωμεν, ὅτι οἱ διαιρέται 1, 2, 3, 6 εἶναι ***κοινοὶ*** καὶ τῶν δύο τούτων ἀριθμῶν. Ἐξ αὐτῶν δὲ τῶν κοινῶν διαιρετῶν ὁ 6, ὅστις εἶναι ὁ μεγαλύτερος λέγεται ***μέγιστος κοινὸς διαιρέτης*** τῶν ἀριθμῶν 18 καὶ 24.

Ὥστε ***κοινὸς διαιρέτης δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν λέγεται ἀριθμός τις, ἐὰν διαιρῇ ὅλους ἀκριβῶς. Μέγιστος δὲ κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν λέγεται ὁ μεγαλύτερος ἐκ τῶν κοινῶν διαιρετῶν, τοὺς ὁποίους ἔχουσιν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι.***

Π. χ. οἱ ἀριθμοὶ 16, 24, 40 ἔχουσι κοινοὺς διαιρέτας τοὺς 1, 2, 4, 8 καὶ μ. κ. δ. τὸν 8.

Ἐὰν ἀριθμοί τινες δὲν ἔχωσι κανένα κοινὸν διαιρέτην, πλὴν τοῦ 1, λέγονται πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Τοιοῦτοι εἶναι οἱ 3,4,9.

Εὕρεσις τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου δοθέντων ἀριθμῶν.

59. α') Δύο ἀριθμῶν.

1) Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 84 καὶ 21. Εἰς τὸ παράδειγμα αὐτὸ παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ 21 διαιρεῖ ἀκριβῶς τὸν 84. Ὥστε ὁ 21 εἶναι ὁ ζητούμενος μ.κ.δ. Διότι ἄλλος μεγαλύτερος ἀριθμός, ὅστις θὰ διαιρῇ τὸν 84, δὲν θὰ διαιρῇ τὸν 21.

2) Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 128 καὶ 40. Εἰς τὸ παράδειγμα αὐτὸ ἡ διαίρεσις τοῦ 128 διὰ τοῦ 40 ἀφίνει ὑπόλοιπον 8. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν μ.κ.δ., σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς: Ἐὰν ἀφαιρέσωμεν τὸν 40 ἀπὸ τὸν 128,

ἡ διαφορὰ 88 θὰ ἔχῃ διαιρέτας τοὺς κοινοὺς διαιρέτας τῶν δοθέντων ἀριθμῶν (51)· ὅπως ἐπίσης ὁ 128 θὰ ἔχῃ διαιρέτας τοὺς κοινοὺς διαιρέτας τῶν ἀριθμῶν 88 καὶ 40 (49). Ἑπομένως οἱ κοινοὶ διαιρέται τῶν 88 καὶ 40 εἶναι κ. δ. τῶν 128 καὶ 40 καὶ τἀνάπαλιν· ἐὰν πάλιν ἀφαιρέσωμεν τὸν 40 ἀπὸ τὸν 88, 88—40=48, καὶ κατόπιν ἀπὸ τὸν 48 καὶ σκεφθῶμεν ὁμοίως, εὑρίσκομεν ὅτι αἱ σειραὶ

128	40
88	40
48	40
8	40

ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς κοινοὺς διαιρέτας, ἑπομένως ἔχουσι καὶ τὸν αὐτὸν μ. κ. δ. Ἀλλ' ἡ τελευταία σειρὰ ἔχει μ. κ. δ. τὸν 8 (διότι ὁ 8 διαιρεῖ ἀκριβῶς τὸν 40)· ὥστε καὶ ἡ πρώτη σειρὰ ἔχει μ. κ. δ. τὸν 8. Ἀλλ' ἡ τελευταία σειρά, ἡ ὁποία κυρίως μᾶς ἐν- διαφέρει, ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸν μικρότερον ἐκ τῶν δοθέντων καὶ ἀπὸ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως αὐτῶν.

Τὰ ἀνωτέρω ἐξηγοῦσι τὸν κάτωθι κανόνα :

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν μ. κ. δ. δύο ἀριθμῶν, διαιροῦμεν αὐτοὺς καί, ἐὰν εὕρωμεν ὑπόλοιπον Ο, ὁ μικρότερος εἶναι ὁ ζητούμενος μ. κ. δ. ἂν δὲ ὄχι διαιροῦμεν τὸν μικρότερον διὰ τοῦ ὑπολοίπου, τὸ ὑπόλοιπον αὐτὸ διὰ τοῦ νέου ὑπολοίπου κ. ο. κ. μέχρις ὅτου εὕρωμεν ὑπόλοιπον Ο. Ὁ διαιρέτης τῆς τελευταίας διαιρέσεως εἶναι ὁ ζητούμενος μ. κ. δ.

Ἡ πρᾶξις δὲ αὕτη ἐν τῷ συνόλῳ της διατάσσεται πρὸς συντομίαν ὡς ἑξῆς, ἐκ τοῦ παραδείγματος εἰς ὃ ζητεῖται ὁ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 1600 καὶ 60

	26	1	2
1600	60	40	20
120	40	40	
400	20	0	
360			
40			

β΄) Ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν.

Τὰ προηγουμένως λεχθέντα ἐξηγοῦσι καὶ τὸν κάτωθι κανόνα·

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν μ. κ. δ. πολλῶν ἀριθμῶν, γράφομεν αὐτοὺς εἰς μίαν σειρὰν καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν διὰ τοῦ μικροτέρου ὅλους τοὺς ἄλλους καὶ γράφομεν ὑποκάτω ἑκάστου τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεώς του. Ἂν ὅλα τὰ ὑπόλοιπα εἶναι Ο, ὁ μικρότερος τῶν δοθέντων εἶναι ὁ μ. κ. δ., εἰ δὲ μὴ κάμνομεν τὰ αὐτὰ καὶ εἰς τὴν νέαν σειρὰν τῶν ἀριθμῶν καὶ ἐξακολουθοῦμεν οὕτω μέχρις οὗ εὕρωμεν ἀριθμόν, ὅστις νὰ διαιρῇ ἀκριβῶς ὅλους τοὺς ἄλλους τῆς σειρᾶς του. Ὁ διαιρέτης οὗτος εἶναι ὁ ζητούμενος μ. κ. δ.

Π. χ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν :

36,	40,	48,	56,	24	(διὰ τοῦ 24)
12,	16,	0,	8,	24	(διὰ τοῦ 8)
4,	0,	0,	8,	0	(διὰ τοῦ 4)
4,	0,	0,	0,	0	μ. κ. δ. ὁ 4.

Σημ. α΄. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω εὐκόλως συνάγεται, ὅτι :

Κοινοὶ διαιρέται δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν εἶναι μόνον οἱ διαιρέται τοῦ μ. κ. δ. αὐτῶν.

Σημ. β΄. Εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα οἱ ἀριθμοί :

36 40, 48, 56, 24 γράφονται :

9×4, 10×4, 12×4, 14×4, 6×4,

Τὰ πηλίκα δὲ τῆς διαιρέσεως αὐτῶν διὰ τοῦ μ. κ. δ. εἶναι 9, 10, 12, 14, 6· ἐπειδὴ δὲ ὁ μέγιστος κοινὸς παράγων τῶν δοθέντων ἀριθμῶν εἶναι ὁ 4, εὐκόλως συνάγεται, ὅτι τὰ εὑρεθέντα πηλίκα εἶναι πρῶτα πρὸς ἄλληλα.

Ὅθεν, ***ἐὰν διαιρεθῶσιν ἀριθμοὶ διὰ τοῦ μ. κ. δ. αὐτῶν τὰ πηλίκα θὰ εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.***

Ἀσκήσεις.

180) Νὰ εὑρεθῶσιν ὅλοι οἱ κοινοὶ διαιρέται τῶν ἀριθμῶν :

α) 24, 8 γ) 15, 28 ε) 51, 27, 15
β) 12, 36 δ) 21, 42, 84 ϛ) 30, 40, 27.

181) Νὰ εὑρεθῇ ἀπὸ μνήμης ὁ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν :

α) 4, 8 γ) 12, 36 ε) 5, 7 ζ) 4, 6
β) 24, 8 δ) 21, 42 ϛ) 6, 13 η) 10, 15.

182) Ὁμοίως τῶν :

α) 2, 4, 8 γ) 11, 33, 55 ε) 2, 3, 5 ζ) 4, 6, 8
β) 3, 9, 12 δ) 25, 75, 100 ς) 5, 9, 10 η) 12, 16, 24

183) Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν (γραπτῶς) :

α) 752, 256 γ) 252, 588 ε) 768, 256 ζ) 1591, 1247
β) 180, 156 δ) 1881, 475 ς) 648, 75 η) 17171, 4906

184) Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν :

α) 87, 348, 783 δ) 825, 2570, 1375, 2475
β) 144, 180, 396 ε) 4200, 8100, 900, 1500
γ) 310, 290, 570, 150.

60. ***Κοινὰ πολλαπλάσια.*** Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 4, 6, τῶν ὁποίων ἂς ἴδωμεν μερικὰ πολλαπλάσια αὐτῶν :

Τοῦ 4 εἶναι $4\times2=8$, $4\times3=12$, 16, 20, 24. . . .
» 6 » $6\times2=12$, $6\times3=18$, 24, 30, 36. . . .

Ἀλλὰ παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ 12 εἶναι πολλαπλάσιον καὶ τοῦ 4 καὶ τοῦ 6 καὶ ἑπομένως διαιρεῖται ἀκριβῶς καὶ διὰ τοῦ 4 καὶ διὰ τοῦ 6. Τὴν αὐτὴν παρατήρησιν κάμνομεν καὶ διὰ τὸ 24. Τὰ πολλαπλάσια ταῦτα 12 καὶ 24 τὰ λέγομεν κοινὰ πολλαπλάσια τῶν ἀριθμῶν 4 καὶ 6.

Ὅθεν ***κοινὸν πολλαπλάσιον δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν λέγεται πᾶς ἀριθμός, ὅστις διαιρεῖται ἀκριβῶς μὲ καθένα ἐξ αὐτῶν.***

Οὕτω κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν 3, 5, 8 εἶναι ὁ ἀριθμὸς $3\times5\times8=120$. Ἀλλ' ἀφοῦ εἶναι ὁ 120, εἶναι φανερόν, ὅτι εἶναι καὶ ὁ $120\times2=240$ καὶ ὁ $120\times3=360$ κ. ο. κ. Ὅθεν κοινὰ πολλαπλάσια δοθέντων ἀριθμῶν εἶναι ἄπειρα, τὸ δὲ μικρότερον ἐξ αὐτῶν λέγεται ***ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον.*** Οὕτω τὸ ἐ. κ. π. τῶν ἀριθμῶν 3, 5 (πρώτων πρὸς ἀλλήλους) εἶναι τὸ $3\times5=15$ καὶ τῶν 4 καὶ 7 εἶναι τὸ $4\times7=28$ καὶ τῶν 4 καὶ 6 εἶναι τὸ 12.

61. ***Εὕρεσις τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου δοθέντων ἀριθμῶν.***

α΄) Δύο ἀριθμῶν.

1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐ. κ. π. τῶν ἀριθμῶν 72 καὶ 18.

Ἐπειδὴ ὁ 72 διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 18, ὁ 72 εἶναι τὸ ζητούμενον ἐ. κ. π.

2) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐ. κ. π. τῶν ἀριθμῶν 21 καὶ 35.

Εὑρίσκομεν τὸν μ. κ. δ. αὐτῶν, ὅστις εἶναι ὁ 7, καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸν ἕνα ἐξ αὐτῶν ἐπὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἄλλου διὰ τοῦ εὑρεθέντος μ. κ. δ.

Οὕτω ἔχομεν 35 : 7=5 καὶ ἐ. κ. π. = 21×5=105.

Ἐπίσης νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐ. κ. π. τῶν ἀριθμῶν 60, 108.

Ὁ μ. κ. δ. αὐτῶν εἶναι 12 καὶ 60 : 12 = 5.

Ὥστε ἐ. κ. π. = 108×5 = 540.

β΄) Ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν.

1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐ. κ. π. τῶν ἀριθμῶν 54, 135, 270.

Εἰς τὸ παράδειγμα τοῦτο τὸ ἐ. κ. π. εἶναι ὁ μεγαλύτερος ἐξ αὐτῶν, δηλ. ὁ 270, ἐπειδὴ διαιρεῖται διὰ τοῦ 54 καὶ διὰ τοῦ 135.

2) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐ. κ. π. τῶν ἀριθμῶν 12, 18, 40.

Πρὸς τοῦτο εὑρίσκομεν τὸ ἐ. κ. π. τῶν δύο ἐξ αὐτῶν, π. χ. τῶν 12 καὶ 18, καὶ τὸ ὁποῖον εἶναι ὁ 36· κατόπιν εὑρίσκομεν τὸ ἐ. κ. π. τοῦ 36 καὶ τοῦ 40· εὑρίσκομεν δὲ 360· ὥστε τὸ ἐ. κ. π. τῶν τριῶν δοθέντων ἀριθμῶν εἶναι ὁ 360.

3) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐ. κ. π. τῶν ἀριθμῶν 36, 54, 24, 30.

Ἐργαζόμεθα ὁμοίως ὡς καὶ εἰς τὸ παράδειγμα 2.

ἐ. κ. π. 36 καὶ 54 = 108
ἐ. κ. π. 108 καὶ 24 = 216
ἐ. κ. π. 216 καὶ 30 =1080

ἐ. κ. π. τῶν δοθέντων ἀριθμῶν εἶναι ὁ 1080.

Ἀσκήσεις.

185) Νὰ εὑρεθῶσι μερικὰ κοινὰ πολλαπλάσια τῶν ἀριθμῶν :

α) 3, 5	γ) 16, 12	ε) 20, 30, 12
β) 8, 24	δ) 2, 5, 7	ϛ) 18, 30, 45

186) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐ. κ. π. τῶν ἀριθμῶν (ἀπὸ μνήμης) :

α) 21, 63	δ) 7, 9	ζ) 15, 21	ι) 15, 45, 90
β) 17, 68	ε) 11, 6	η) 26, 39	
γ) 130, 26	ϛ) 14, 21	θ) 20, 40, 80	

187) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐ. κ. π. τῶν ἀριθμῶν (γραπτῶς):

α) 42, 63	γ) 60, 225	ε) 20, 30, 12	ζ) 24, 30, 60, 40
β) 75, 180	δ) 72, 120	ϛ) 18, 30, 45	η) 84, 56, 24, 36.

Περὶ τῶν πρώτων ἀριθμῶν.

62. Ἤδη θὰ ἐξετάσωμεν τοὺς διαιρέτας τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὴν 1.

διαιρέται	τοῦ	1	εἶναι	ὁ 1
»	»	2	»	οἱ 1, 2
»	»	3	»	» 1, 3
»	»	4	»	» 1, 2, 4
»	»	5	»	» 1, 5
»	»	6	»	» 1, 2, 3, 6
»	»	7	»	» 1, 7
»	»	8	»	» 1, 2, 4, 8
»	»	9	»	» 1, 3, 9
»	»	10	»	» 1, 2, 5, 10 κ. ο. κ.

Ἀλλὰ παρατηροῦμεν, ὅτι μερικοὶ ἐκ τῶν ἀριθμῶν π. χ. οἱ 2,3,5,7, ἔχουσι διαιρέτας μόνον τὸν ἑαυτόν τους καὶ τὴν μονάδα, ἐνῷ οἱ 4, 6, 8 κ. λ. π. ἔχουσιν ἐκτὸς τῆς μονάδος, καὶ τοῦ ἑαυτοῦ των, καὶ ἄλλους διαιρέτας. Ἐκ τῶν ἀριθμῶν ἐκεῖνοι, οἱ ὁποῖοι ἔχουσι δύο καὶ μόνον διαιρέτας λέγονται ***πρῶτοι***, ἐνῷ οἱ ἄλλοι λέγονται σύνθετοι.

Ὅθεν ***πρῶτος ἀριθμὸς λέγεται ἐκεῖνος, ὅστις δὲν ἔχει ἄλλους διαιρέτας παρὰ μόνον τὸν ἑαυτόν του καὶ τὴν μονάδα.***

Π. χ. πρῶτοι ἀριθμοὶ εἶναι καὶ οἱ 13, 17, 15 κ.λ.π.

Σύνθετος ἀριθμὸς λέγεται ὁ μὴ πρῶτος.

Π. χ. σύνθετοι ἀριθμοὶ εἶναι ὁ 27, ὁ 51 κ.λ.π.

Εὕρεσις τῶν πρώτων ἀριθμῶν. Κόσκινον τοῦ Ἐρατοσθένους.

63. Ἡ ἑξῆς μέθοδος, διὰ τῆς ὁποίας δυνάμεθα νὰ ἀποχωρίσωμεν τοὺς πρώτους ἀριθμοὺς ἀπὸ τῶν ἄλλων, λέγεται ***κόσκινον τοῦ Ἐρατοσθένους.***

Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι θέλομεν νὰ ἀποχωρίσωμεν τοὺς πρώτους ἀριθμούς, οἵτινες περιλαμβάνονται μεταξὺ τοῦ 1 καὶ τοῦ 1000.

Γράφομεν πρῶτον τοὺς ἀριθμοὺς κατὰ τὴν φυσικὴν αὐτῶν τάξιν 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, . . . 1000. Ἔπειτα δὲ σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς :

Ὁ 2 εἶναι προφανῶς πρῶτος ἀριθμός, ἐνῷ τὰ πολλαπλάσιά του δὲν εἶναι· ὅθεν διαγράφομεν αὐτά, δηλ. τὸ 4, 6, 8 κ.λπ. Ὁμοίως σκεπτόμενοι διαγράφομεν τὰ πολλαπλάσια τοῦ 3, πλὴν τοῦ 3 καὶ ἑπομένως ἀρχίζομεν τὴν διαγραφὴν ἀπὸ τὸ 3×3, διότι τὸ 3×2, ὡς πολλαπλάσιον τοῦ 2, ἔχει διαγραφῆ. Ἔπειτα παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ κατόπιν ἀριθμός, ὅστις δὲν ἔχει διαγραφῆ εἶναι ὁ 5· οὗτος εἶναι πρῶτος· διαγράφομεν λοιπὸν τὰ πολλαπλάσιά του, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὸ 5^2, διότι τὰ μικρότερα πολλαπλάσια αὐτοῦ 5×2, 5×3, 5×4, ἔχουσι διαγραφῆ· ἔπειτα ὁ ἑπόμενος ἀριθμός, ὅστις δὲν διεγράφη καὶ ὅστις εἶναι ἑπομένως πρῶτος, εἶναι ὁ 7· διαγράφομεν λοιπὸν τὰ πολλαπλάσια αὐτοῦ, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὸ 7^2 κ. ο. κ. ἐξακολουθοῦμεν ἐργαζόμενοι ὁμοίως.

Παρατηροῦμεν δὲ ἐν γένει, ὅτι, ὅταν μέλλωμεν νὰ διαγράψωμεν τὰ πολλαπλάσια οἱουδήποτε πρώτου ἀριθμοῦ, τὸ πρῶτον πολλαπλάσιον αὐτοῦ τὸ ὁποῖον θὰ ἀπαντήσωμεν, εἶναι τὸ τετράγωνόν του, διότι τὰ μικρότερα θὰ εἶναι διαγεγραμμένα, ὡς πολλαπλάσια ἀριθμῶν μικροτέρων.

Ἐκ τῆς παρατηρήσεως ταύτης συνάγεται ὅτι, ἂν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν πάντας τοὺς πρώτους ἀριθμοὺς τοὺς ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ 1000 περιλαμβανομένους, ἀρκεῖ κατὰ τὸν ἀνωτέρω τρόπον νὰ διαγράψωμεν τὰ πολλαπλάσια πάντων τῶν πρώτων ἀριθμῶν μέχρι τοῦ 37 (τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον 1369 εἶναι μεγαλύτερον τοῦ 1000)· διότι τότε οἱ ἀπομείναντες ἀριθμοὶ δὲν θὰ διαγραφῶσιν, ὅσον καὶ ἂν προχωρήσωμεν, καὶ ἑπομένως δὲν εἶναι πολλαπλάσια οὐδενὸς ἀριθμοῦ, ἄρα εἶναι πρῶτοι.

Πρῶτοι ἀριθμοὶ ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ 100 εἶναι οἱ ἑξῆς:

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Ἀνάλυσις συνθέτου ἀριθμοῦ εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων.

64 Ἔστω ὁ σύνθετος ἀριθμὸς 6· οὗτος παρατηροῦμεν, ὅτι εἶναι γινόμενον τῶν πρώτων ἀριθμῶν 2 καὶ 3· ἤτοι $6=2\times3$.

Ὁ 24 ἀναλύεται εἰς γινόμενον 4×6· καὶ ὁ μὲν 4 ἀναλύεται πάλιν εἰς 2×2 καὶ ὁ 6 εἰς 2×3· ὥστε εἶναι $24=4\times6=2\times2\times2\times3=2^3\times3$. Διὰ τὸν ἀριθμὸν 56 ἔχομεν $56=7\times8=7\times2\times4=7\times2\times2\times2=2^3\times7$ κ. ο. κ. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συμπεραίνομεν, ὅτι ***πᾶς σύνθετος ἀριθμὸς ἀναλύεται εἰς γινόμενον παραγόντων πρώτων.***

Ἡ μέθοδος διὰ τῆς ὁποίας ἐκτελοῦμεν, συνήθως, τὴν ἀνάλυσιν τῶν συνθέτων ἀριθμῶν, φαίνεται ἀπὸ τὸ ἑξῆς παράδειγμα :

Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 252· κατὰ πρῶτον παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ 252 διαιρεῖται διὰ τοῦ 2 καὶ δίδει πηλίκον 126. Ὅθεν εἶναι $252=2\times126$· ὁ 126 διαιρεῖται πάλιν διὰ 2 καὶ δίδει πηλίκον 63. Ὥστε $126=2\times63$· ἄρα καὶ $252=2\times2\times63$.

Ὁ ἀριθμὸς 63 δὲν διαιρεῖται διὰ τοῦ 2, διαιρεῖται ὅμως διὰ τοῦ 3 καὶ δίδει πηλίκον 21· ὥστε εἶναι $63=3\times21$ καὶ ἑπομένως εἶναι $252=2\times2\times3\times21$. ὁ 21 διαιρεῖται πάλιν διὰ τοῦ 3 καὶ δίδει πηλίκον 7· ὥστε εἶναι $252=2\times2\times3\times3\times7$. Ἐπειδὴ ὁ 7 εἶναι πρῶτος ἡ ἀνάλυσις ἐτελείωσεν.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται συνήθως ὡς ἑξῆς :

252	2
126	2
63	3
21	3
7	7
1	

$$252=2^2\times3^2\times7$$

Παρατήρησις. Ὡς διαιρέτας ὀνομάζομεν τοὺς πρώτους ἀριθμοὺς κατὰ τὴν φυσικὴν σειράν των ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ 2· δοκιμάζομεν δὲ ἕκαστον ἐπανειλημμένως, μέχρις ὅτου παύσῃ νὰ εἶναι διαιρέτης.

Ἀσκήσεις.

188) Νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων ἀπὸ μνήμης ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν 8, 16, 18, 27, 36, 45, 66, 50, 75, 60, 100.

189) Νὰ ἀναλυθῇ ἕκαστος τῶν κάτωθι ἀριθμῶν εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων (γραπτῶς) 630, 216, 3750, 2205, 1323, 14400.

Ἰδιότητες τῶν πρώτων ἀριθμῶν.

65. ***Πᾶς πρῶτος ἀριθμός, ὅστις δὲν διαιρεῖ ἕνα ἄλλον ἀριθμόν, εἶναι πρῶτος πρὸς αὐτόν.***

Δηλαδὴ ἂν λάβω ἕνα πρῶτον ἀριθμόν, π. χ. τὸν 5, καὶ ἕνα ἄλλον οἱονδήποτε α καὶ ὁ 5 δὲν διαιρεῖ τὸν α λέγω, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ 5 καὶ α εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Διότι ὁ 5 διαιρεῖται μόνον διὰ τῶν 5 καὶ 1· ἑπομένως οἱ κοινοὶ διαιρέται τῶν ἀριθμῶν 5 καὶ α δὲν δύνανται νὰ εἶναι ἄλλοι ἀπὸ τοὺς 1 καὶ 5· ἀλλ' ἡμεῖς ὑπεθέσαμεν, ὅτι ὁ 5 δὲν διαιρεῖ τὸν α· ὥστε ὁ μόνος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 5 καὶ α εἶναι ἡ μονὰς 1. Ἤτοι οἱ ἀριθμοὶ 5 καὶ α εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

66. ***Ἐὰν ἀριθμὸς πρῶτος διαιρῇ ἕνα γινόμενον, θὰ διαιρῇ τοὐλάχιστον ἕνα παράγοντα τοῦ γινομένου αὐτοῦ.***

Ἔστω πρῶτος ἀριθμός, π. χ. ὁ 5, ὅστις διαιρεῖ τὸ γινόμενον $\alpha\times\beta\times\gamma$. Ἐὰν ὁ 5 δὲν διαιρῇ κανένα ἐκ τῶν παραγόντων α ἢ β ἢ γ, θὰ εἶναι πρῶτος μὲ καθένα ἐξ αὐτῶν· ἤτοι μὲ ἄλλους λόγους οὐδεὶς τῶν παραγόντων α, β, γ, περιέχει τὸν παράγοντα 5· εἶναι φανερὸν ἑπομένως, ὅτι καὶ τὸ γινόμενον $\alpha\times\beta\times\gamma$ δὲν περιέχει τὸν παράγοντα 5· ὥστε τὸ γινόμενον $\alpha\times\beta\times\gamma$ δὲν διαιρεῖται διὰ 5· ἀλλ' ἡμεῖς ὑπεθέσαμεν, ὅτι τὸ γινόμενον αὐτὸ διαιρεῖται διὰ 5. Ἑπομένως ὁ 5 διαιρεῖ τοὐλάχιστον ἕνα τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου.

67. Ἐὰν οἱ παράγοντες τοῦ γινομένου εἶναι πρῶτοι, ὁ 5 θὰ εἶναι ἴσος μὲ ἕνα ἐξ αὐτῶν· διότι ὁ πρῶτος ἀριθμὸς μόνον διὰ τοῦ ἑαυτοῦ του διαιρεῖται (ἡ μονὰς δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν).

Ὥστε, ***ἐὰν ἀριθμὸς πρῶτος διαιρῇ γινόμενον παραγόντων πρώτων, θὰ εἶναι ἴσος πρὸς ἕνα ἐκ τῶν παραγόντων.***

68. ***Ἐὰν δύο γινόμενα παραγόντων πρώτων εἶναι ἴσα, οἱ παράγοντες ἀμφοτέρων εἶναι οἱ αὐτοὶ καὶ ἕκαστος περιέχεται ἰσάκις.***

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ ἓν ἐκ τῶν δύο ἴσων γινομένων ἔχει τὸν παράγοντα 7· λέγω, ὅτι καὶ τὸ ἄλλο θὰ ἔχῃ τὸν αὐτὸν παράγοντα, καὶ ὅσους παράγοντας 7 ἔχει τὸ ἕν, τόσους θὰ ἔχῃ καὶ τὸ ἄλλο.

Διότι ὁ 7, ὡς παράγων τοῦ πρώτου γινομένου, θὰ διαιρῇ αὐτό : ἄρα θὰ διαιρῇ καὶ τὸ δεύτερον, ὡς ἴσον πρὸς τὸ πρῶτον. Ἀλλ' ὅταν ἀριθμὸς πρῶτος (ὡς ὁ 7) διαιρῇ τὸ γινόμενον παραγόντων πρώτων, εἶναι ἴσος πρὸς ἕνα ἐξ αὐτῶν· ἄρα καὶ τὸ δεύτερον γινόμενον θὰ ἔχῃ τὸν παράγοντα 7.

Καὶ ὅσους παράγοντας ἴσους πρὸς τὸν 7 ἔχει τὸ ἓν γινόμενον, τόσους θὰ ἔχῃ καὶ τὸ ἄλλο. Διότι, ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ ἓν ἔχει τρεῖς παράγοντας 7, τὸ δὲ ἄλλο δύο μόνον. Ἐὰν τότε διαιρέσωμεν τὰ ἴσα γινόμενα διὰ τοῦ 7 δίς, (ὅπερ γίνεται, ἂν ἀπ' ἀμφοτέρων ἐξαλείψωμεν δύο παράγοντας 7), πρέπει νὰ εὕρωμεν γινόμενα ἴσα. Ἀλλ' ἡ ἰσότης τῶν νέων τούτων γινομένων εἶναι ἀδύνατος· διότι τὸ μὲν ἓν θὰ ἔχῃ τὸν παράγοντα 7 ἅπαξ, τὸ δὲ ἄλλο δὲν θὰ ἔχῃ αὐτόν. Ἄρα, ὅσους παράγοντας 7 ἔχει τὸ ἓν γινόμενον, τόσους ἔχει καὶ τὸ ἄλλο.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι, ἐὰν δύο γινόμενα παραγόντων πρώτων εἶναι ἴσα, οἱ παράγοντες ἀμφοτέρων εἶναι οἱ αὐτοί, καὶ μόνον κατὰ τὴν τάξιν δύνανται νὰ διαφέρωσι.

69. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται, ὅτι ***καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν ἀναλύσωμεν ἀριθμὸν εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας, πάντοτε τοὺς αὐτοὺς παράγοντας θὰ εὕρωμεν.***

Ἐφαρμογαὶ τῆς ἀναλύσεως τῶν ἀριθμῶν εἰς πρώτους παράγοντας.

70. ***Πότε ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς δι' ἄλλου.***

Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 144, ὁ ὁποῖος θέλομεν νὰ ἴδωμεν, ἐὰν διαιρεῖται ἀκριβῶς διά τινος ἀριθμοῦ, π.χ. διὰ τοῦ 36.

Ἂς ὑποτεθῇ, ὅτι ὁ 144 διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 36 καὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως εἶναι π· θὰ ἔχωμεν τότε $144=36\times\pi$· ἐὰν ἑπομένως ἀναλύσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς αὐτοὺς εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων, εἶναι φανερόν, ὅτι οἱ παράγοντες τοῦ 36 πρέπει νὰ περιέχωνται εἰς τοὺς παράγοντας τοῦ 144· ἕκαστος δὲ παράγων τοῦ 36 θὰ περιέχηται εἰς τὸν 144 τόσας φορὰς τοὐλάχιστον, ὅσας φορὰς περιέχει αὐτὸν ὁ 36. Ἐὰν κατόπιν τούτων ἀναλύσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 144 καὶ 36 καὶ ἴδωμεν, ὅτι ὁ διαιρετέος περιέχει τοὺς παράγοντας τοῦ διαιρέτου καὶ ἕκαστον τοὐλάχιστον τόσας φοράς, ὅσας περιέχει αὐτὸν ὁ διαιρέτης, συμπεραίνομεν, ὅτι ἡ διαίρεσις γίνεται ἀκριβῶς. Διότι τότε θὰ ἔχωμεν, (ἐπειδὴ $144=2\times2\times2\times2\times3\times3=2^4\times3^2$ καὶ $36=2\times2\times3\times3=$ $=2^2\times3^2$) $(2\times2\times2\times2\times3\times3)=(2\times2\times3\times3)\times(2\times2)$ ἤτοι :

$$2^4\times3^2=(2^2\times3^2)\times2^2 \text{ καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι :}$$

$$2^4\times3^2 : 2^2\times3^2=2^2.$$

Ὥστε, ***διὰ νὰ εἶναι ἀριθμός τις διαιρετὸς δι' ἄλλου, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἵνα ὁ διαιρετέος περιέχῃ πάντας τοὺς πρώτους παράγοντας τοῦ διαιρέτου καὶ ἕκαστον ἐξ αὐτῶν, τοσάκις τοὐλάχιστον, ὁσάκις περιέχει αὐτὸν ὁ διαιρέτης.***

71. ***Ἄλλος χαρακτὴρ διαιρετότητος.*** Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 180, ὁ ὁποῖος διαιρεῖται διὰ 2 καὶ διὰ 9· κατὰ τὰ προηγούμενα λοιπόν, ὁ 180 περιέχει τοὺς παράγοντας 2 καὶ 3^2· ἀλλ᾽ ἐπειδὴ οὗτοι δὲν ἔχουσι κανένα κοινὸν παράγοντα, εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ ἑπομένως τὸ γινόμενον αὐτῶν 2×3^2 περιέχει τὸ αὐτὸ πλῆθος παραγόντων 2 καὶ 3, τὸ ὁποῖον ἔχουν οἱ διαιρέται 2 καὶ 9· ἑπομένως οἱ παράγοντες τοῦ γινομένου 2×3^2 περιέχονται εἰς τοὺς παράγοντας τοῦ 180 καὶ ἕκαστος τοσάκις τοὐλάχιστον, ὁσάκις περιέχεται εἰς τὸ γινόμενον· ἄρα ὁ 180 διαιρεῖται ὑπὸ τοῦ $2\times3^2=18$.

Ἂς ἐξετάσωμεν ἤδη τοὺς διαιρέτας 4 καὶ 6 τοῦ 180· ὁ 180, ὡς διαιρούμενος διὰ 4, περιέχει τὸν $4=2^2$ καί, ὡς διαιρούμενος διὰ 6, περιέχει τὸ $6=2\times3$· ἀλλ᾽ οἱ 4 καὶ 6 ἔχουσι κοινὸν παράγοντα τὸν 2· ἑπομένως τὸ γινόμενον $4\times6=2^2\times2\times3=2^3\times3$ περιέχει ἕνα ἐπὶ πλέον παράγοντα 2· ἐπειδὴ δὲ ὁ 180 δὲν περιέχει τὸν ἐπὶ πλέον παράγοντα τοῦτον, ἕπεται, ὅτι δὲν διαιρεῖται διὰ τοῦ γινομένου $2^3\times3=24$, ὅπως πράγματι δὲν διαιρεῖται.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι ***μόνον, ὅταν ἀριθμός τις διαιρεῖται διὰ δύο ἄλλων πρώτων πρὸς ἀλλήλους, εἴμεθα βέβαιοι, ὅτι διαιρεῖται καὶ διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν.***

Οἱ αὐτοὶ ὡς ἄνω συλλογισμοὶ μᾶς ὁδηγοῦν καὶ εἰς τὸ κάτωθι συμπέρασμα:

Ἐὰν ἀριθμός τις διαιρεῖται διὰ πολλῶν ἄλλων πρώτων πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο, διαιρεῖται καὶ διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν.

Π. χ. ὁ ἀριθμὸς 210 διαιρεῖται διὰ τοῦ 2, διὰ τοῦ 3 καὶ διὰ τοῦ 5. Εἶναι δὲ οἱ ἀριθμοὶ 2 καὶ 3, 2 καὶ 5, 3 καὶ 5 πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· διαιρεῖται ἑπομένως καὶ διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν $2\times3\times5=30$.

72. ***Εὕρεσις τοῦ μ. κ. δ. δοθέντων ἀριθμῶν διὰ τῆς ἀναλύσεως αὐτῶν εἰς πρώτους παράγοντας.***

Ἂς λάβωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 72, 180, 240. Ὁ μ. κ. δ. αὐτῶν εὑρίσκεται καὶ ὡς ἑξῆς:

Ἀναλύομεν τοὺς ἀριθμοὺς καὶ εὑρίσκομεν:

$$72 = 2\times2\times2\times3\times3 = 2^3\times3^2$$
$$180 = 2\times2\times3\times3\times5 = 2^2\times3^2\times5$$
$$240 = 2\times2\times2\times2\times3\times5 = 2^4\times3\times5.$$

Κατόπιν παρατηροῦμεν τοὺς κοινοὺς παράγοντας αὐτῶν, οἵ ὁποῖοι εἶναι 2,2,3· ἑπομένως τὸ γινόμενον αὐτῶν $2\times2\times3=2^2\times3$ εἶναι κοινὸς διαιρέτης τῶν δοθέντων ἀριθμῶν (70)· εἶναι ὅμως καὶ μ. κ. δ. αὐτῶν, διότι, ἂν περιέχῃ οἱονδήποτε ἄλλον πρῶτον παράγοντα, δὲν θὰ διαιρῇ πάντας τοὺς δοθέντας· π.χ. ὁ $2^2\times3\times5$ θὰ διαιρῇ μὲν τοὺς 180 καὶ 240, ἀλλὰ δὲν θὰ διαιρῇ τὸν 72 κ.ο.κ.

Ὁμοίως σκεπτόμενοι εὑρίσκομεν, ὅτι ὁ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν

$$108 = 2^2\times3^3$$
$$144 = 2^4\times3^2$$
$$252 = 2^2\times3^2\times7$$

εἶναι ὁ $2^2\times3^2$. Ὅθεν συνάγομεν, ὅτι:

Ὁ μ. κ. δ. ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν εἶναι γινόμενον, περιέχον μόνον τοὺς κοινοὺς πρώτους παράγοντας αὐτῶν καὶ ἕκαστον μὲ τὸν ἐλάχιστον ἐκθέτην του.

73. ***Εὕρεσις τοῦ ἐ. κ. π. δοθέντων ἀριθμῶν διὰ τῆς ἀναλύσεως αὐτῶν εἰς πρώτους παράγοντας.***

Ἄς λάβωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 84, 72, 180.

Τὸ ἐ. κ. π. εὑρίσκεται καὶ ὡς ἑξῆς.

Ἀναλύομεν τοὺς ἀριθμοὺς καὶ εὑρίσκομεν:

$$84 = 2\times2\times3\times7 = 2^2\times3\times7$$
$$72 = 2\times2\times2\times3\times3 = 2^3\times3^2$$
$$180 = 2\times2\times3\times3\times5 = 2^2\times3^2\times5.$$

Κατόπιν παρατηροῦμεν τοὺς παράγοντας αὐτῶν, οἱ ὁποῖοι εἶναι οἱ 2, 3, 5, 7· ἑπομένως συνάγομεν, ὅτι ἓν κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν δοθέντων ἀριθμῶν θὰ περιέχῃ ἐξ ἅπαντος τοὺς παράγοντας 2, 3, 5, 7, ἀλλ' ἐξ αὐτῶν πρέπει, τὸν μὲν 2 νὰ περιέχῃ τοὐλάχιστον τρίς, τὸν δὲ 3 τοὐλάχιστον δίς· ἀλλὰ τότε τὸ γινόμενον $2^3\times3^2\times5\times7$ εἶναι τὸ ἐ. κ. π. τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Ὥστε ***τὸ ἐ. κ. π. ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν εἶναι γινόμενον περιέχον πάντας τοὺς πρώτους παράγοντας αὐτῶν*** (κοινοὺς καὶ μὴ κοινούς) ***καὶ ἕκαστον μὲ τὸν μέγιστον ἐκθέτην του.***

Ἀσκήσεις.

190) Πότε ἀριθμός τις διαιρεῖται διὰ 6, 15, 20, 24, 30, 33;

191) Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ. κ. δ. καὶ τὸ ἐ. κ. π. διὰ τῆς ἀναλύσεως εἰς γινόμενα πρώτων παραγόντων τῶν ἀριθμῶν:

α) 60, 90 γ) 8041, 2940 ε) 50, 20, 225

β) 36, 240 δ) 15, 30, 63 ϛ) 16, 72, 100

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΒΙΒΛΙΟΝ Β΄

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

Ὁρισμοί.

74. Πρόβλημα. ***Ἐὰν μοιρασθῇ ἕνα μῆλον εἰς 4 παιδία, ποῖον εἶναι τὸ μερίδιον ἑκάστου;***

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο, πρέπει νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν 1μ : 4. Ἀλλ' ἡ διαίρεσις αὕτη, ἐπειδὴ ὁ διαιρετέος εἶναι μικρότερος τοῦ διαιρέτου, εἶναι ἀδύνατος (παρτ. σελ.35).

Ἑπομένως ἡ λύσις τοῦ προβλήματος τούτου εἶναι ἀδύνατος. Ἀλλ' εἰς τὴν πραγματικότητα δυνάμεθα νὰ κόψωμεν τὸ 1 μῆλον εἰς 4 ἴσα μέρη· καὶ τὸ μερίδιον ἑκάστου θὰ εἶναι ἓν ἀπὸ τὰ ἴσα αὐτὰ μέρη. Δι' ἀριθμοῦ ὅμως δὲν δυνάμεθα νὰ τὸ παραστήσωμεν· διὰ τοῦτο εἶναι ἀνάγκη νὰ ἐπινοηθῶσι καὶ ἄλλοι ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι μετὰ τῶν ἤδη γνωστῶν ἀριθμῶν νὰ ἀποτελέσωσιν ἕνα γενικώτερον σύστημα ἀριθμῶν, εἰς τὸ ὁποῖον πᾶσα διαίρεσις νὰ εἶναι δυνατὴ καὶ τελεία (ἐκτὸς τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ διαφόρου τοῦ 0 διὰ τοῦ 0). Καὶ ἐπενοήθησαν οἱ κλασματικοὶ ἀριθμοί.

Ἡ ἐπινόησις τῶν νέων ἀριθμῶν ἐστηρίχθη ἐπὶ τοῦ ἑξῆς· ὅλοι παραδεχόμεθα, ὅτι πᾶν πρᾶγμα (ὅπως ἀνωτέρω εἰς τὸ μῆλον) δύναται νὰ διαιρεθῇ εἰς ὁσαδήποτε ἴσα μέρη καὶ κατὰ συνέπειαν δυνάμεθα νὰ δεχθῶμεν, ὅτι καὶ ἡ μονὰς 1 δύναται νὰ διαιρεθῇ εἰς ὁσαδήποτε ἴσα μέρη.

Καί, ἐὰν μὲν ἡ μονὰς 1 διαιρεθῇ εἰς δύο ἴσα μέρη, τὸ καθὲν λέγεται ἥμισυ καὶ γράφεται ὡς ἑξῆς $\frac{1}{2}$, ἂν δὲ εἰς τρία τὸ καθὲν λέγεται τρίτον καὶ γράφεται $\frac{1}{3}$ κ. ο. κ. Ὅθεν εἶναι

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1, \quad \frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1, \quad \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1, \ldots$$

Δεχόμεθα δηλαδή, ὅτι τὰ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, εἶναι ἀριθμοί.

Τοὺς ἀριθμοὺς τούτους θεωροῦμεν ὡς νέας ***μονάδας***, αἵτινες λέγονται ***κλασματικαί***, ἡ δὲ μονὰς 1 λέγεται ***ἀκεραία***. Ὥστε ***κλασματικὴ μονὰς λέγεται τὸ ἓν ἀπὸ τὰ ἴσα μέρη, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ἡ ἀκεραία μονάς.***

Ἀκέραιοι ἀριθμοὶ λέγονται ὅσοι γίνονται ἀπὸ τὴν ἀκεραίαν μονάδα διὰ τῆς ἐπαναλήψεως, ὡς 1+1 ἢ 2, 1+1+1 ἢ 3 κλπ. ἔτι δὲ καὶ αὐτὴ ἡ μονὰς 1.

Κλασματικοὶ ἀριθμοὶ ἢ ἁπλῶς ***κλάσματα*** λέγονται οἱ ἀριθμοὶ οἱ ὁποῖοι γίνονται ἀπὸ μίαν κλασματικὴν μονάδα διὰ τῆς ἐπαναλήψεως, ὡς $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$, ἤτοι δύο τρίτα, ἔτι δὲ καὶ αἱ κλασματικαὶ μονάδες.

Ὥστε ***πᾶς ἀριθμὸς εἶναι ἄθροισμα μονάδων ἢ καὶ μία μονάς, οἱ δὲ κλασματικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι ἓν ἢ πολλὰ μέρη τῆς μονάδος 1.***

Κατὰ ταῦτα λοιπὸν ὁ μὲν ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος φανερώνει πόσας μονάδας (τοῦ κλάσματος) ἔχει αὐτό, ὁ δὲ παρονομαστὴς φανερώνει τὸ ὄνομα τῶν μονάδων τούτων, ἤτοι δεικνύει εἰς πόσα ἴσα μέρη διῃρέθη ἡ ἀκεραία μονὰς καὶ ἔδωκε τὴν κλασματικήν.

75. Διὰ τῆς παραδοχῆς τῶν νέων τούτων ἀριθμῶν πᾶσα διαίρεσις καθίσταται δυνατὴ καὶ τελεία.

Διότι εἰς τὸ πρόβλημα τοῦ ἐδ. 74 εἶναι φανερόν, ἐξ ὅσων εἴπομεν, ὅτι τὸ ζητούμενον μερίδιον εἶναι $\frac{1}{4}$ τοῦ μήλου· ἂν δὲ ἔχωμεν νὰ μοιράσωμεν 5 δραχμὰς εἰς 6 ἀνθρώπους, φανερὸν εἶναι, ὅτι δυνάμεθα νὰ μοιράσωμεν χωριστὰ μίαν μίαν. Ἀλλ᾽ ἀπὸ κάθε μίαν δραχμὴν θὰ λάβῃ ἕκαστος τῶν ἀνθρώπων $\frac{1}{6}$ τῆς δραχμῆς· λοιπὸν ἀπὸ 5 δραχμὰς θὰ λάβῃ ἕκαστος $\frac{5}{6}$. Ὥστε τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως 5 : 6 εἶναι $\frac{5}{6}$. Ἂν πάλιν ἔχωμεν νὰ μοιράσωμεν 17 δραχμὰς εἰς 5 ἀνθρώπους, μοιράζοντες αὐτὰς μίαν πρὸς μίαν, θὰ εὕρωμεν, ὅτι ἕκαστος θὰ λάβῃ $\frac{17}{5}$ τῆς δραχμῆς, ἤτοι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως 17 : 5 εἶναι $\frac{17}{5}$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι πᾶσα διαίρεσις εἶναι ***δυνατὴ*** καὶ ὅτι ***τὸ πηλίκον πάσης διαιρέσεως εἶναι κλάσμα***

ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὸν διαιρετέον, παρονομαστὴν δὲ τὸν διαιρέτην.

Ὁ μερισμὸς τῶν 17 δραχμῶν εἰς τοὺς 5 ἀνθρώπους διὰ τῶν ἀκεραίων θὰ μᾶς ἔδιδε πηλίκον 3 καὶ ὑπόλοιπον 2, ἤτοι τὸ μερίδιον ἑκάστου θὰ ἦτο 3 δρ. καὶ θὰ μᾶς ἐπερίσσευαν καὶ 2 δραχ. Ἀλλ' ἤδη διὰ τῶν κλασμάτων δυνάμεθα νὰ μοιράσωμεν καὶ τὰς 2 αὐτὰς δραχμὰς εἰς τοὺς 5 ἀνθρώπους, ἐκ τῶν ὁποίων θὰ λάβῃ ἕκαστος $\frac{2}{5}$. Ἤτοι τὸ ἀκριβὲς πηλίκον τῆς διαιρέσεως $17:5$ εἶναι $3+\frac{2}{5}$ ἢ ἁπλούστερον $3\frac{2}{5}$. Ἐπίσης τὸ ἀκριβὲς πηλίκον τῆς διαιρέσεως $31:7$ εἶναι $4\frac{3}{7}$. Ἐντεῦθεν συνάγομεν, ὅτι διὰ τῶν κλασμάτων ***πᾶσα διαίρεσις*** εἶναι τελεία καὶ ὅτι τὸ ***ἀκριβὲς πηλίκον*** (πάσης ἀτελοῦς διαιρέσεως) ***σύγκειται ἐκ τοῦ πηλίκου, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν διὰ τῆς πράξεως καὶ ἐκ τοῦ κλάσματος, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀριθμητὴν μὲν τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως, παρονομαστὴν δὲ τὸν διαιρέτην.***

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἑξῆς γενικώτερον ὁρισμὸν τῆς διαιρέσεως :

Διαίρεσις δοθέντος ἀριθμοῦ, καλουμένου διαιρετέου, διά τινος ἄλλου, καλουμένου διαιρέτου, λέγεται ἡ πρᾶξις διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν τρίτον ἀριθμόν, καλούμενον πηλίκον, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν διαιρέτην, δίδει τὸν διαιρετέον.

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ συμπεραίνομεν τὴν ἑξῆς ἰδιότητα :

Πᾶν κλάσμα πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν παρονομαστήν του, δίδει γινόμενον τὸν ἀριθμητήν του·

διότι, ἐπειδὴ $5:6=\frac{5}{6}$, ἔχομεν καὶ $\frac{5}{6}\times 6=5$.

Ἀσκήσεις.

192) Νὰ γραφῶσιν οἱ κλασματικοὶ ἀριθμοὶ τεσσαράκοντα ἐννέα ἑκατοστά, τριάκοντα ἐννέα ἑκατοστά, εἴκοσι πέμπτα, ἕνδεκα ἑξακοσιοστά, ἑκατὸν τριάκοντα πέντε ἑπτακοσιοστὰ πεντηκοστά, δεκατρία χιλιοστά, ἑκατὸν πέντε χιλιοστὰ εἰκοστὰ ἔννατα, εἴκοσι ὀκτὼ δισχιλιοστά.

193) Πῶς σχηματίζονται ἐκ τῆς μονάδος 1, οἱ ἀνωτέρω κλασματικοὶ ἀριθμοί ;

194) Ὁ Γεώργιος ἀπὸ τὰς 8 δραχμὰς τὰς ὁποίας εἶχεν ἔδωκε τὰς 3 εἰς ἕνα πτωχόν. Τί μέρος τῶν ὅσων δραχμῶν εἶχεν ἔδωκεν ;

195) 12 καλλιεργηταὶ ἐμοίρασαν ἐξ ἴσου ἕνα κτῆμα, τί μέρος τοῦ κτήματος ἔλαβον οἱ 7 ἐκ τῶν καλλιεργητῶν ;

196) Τί μέρος τῆς δραχμῆς εἶναι τὸ 1 λεπτόν, τὰ 5, τὰ 20, τὰ 50 καὶ τὰ 85 λεπτά ;

197) Τί μέρος τοῦ ἡμερονυκτίου εἶναι ἡ 1 ὥρα, αἱ 7 ὧραι ;

198) Τί μέρος τοῦ ἔτους εἶναι ὁ 1 μήν, οἱ 5 μῆνες ;

199) Ἐμοιράσαμεν 7 δραχμὰς εἰς 8 ἀνθρώπους. Ποῖον εἶναι τὸ μερίδιον ἑκάστου ;

200) Ὕφασμα 25 πήχεων ἐμοιράσθη εἰς 8 ἀνθρώπους. Ποῖον εἶναι τὸ μερίδιον ἑκάστου ;

201) Ποῖον εἶναι τὸ (ἀκριβὲς) πηλίκον τῶν διαιρέσεων 3 : 7, 8 : 23, 21 : 3, 42 : 5, 65 : 12, 120 : 9 ;

202) Ποία εἶναι ἡ διπλῆ σημασία τοῦ κλάσματος $\frac{7}{9}$;

203) Τί ἐκφράζει ἑκάστη τῶν κάτωθι ἰσοτήτων ;

1) $\alpha : \beta = \frac{\alpha}{\beta}$, 2) $\frac{\alpha}{\beta} = \pi$ καὶ $\alpha = \beta \times \pi$, 3) $\frac{\alpha}{\beta} \times \beta = \alpha$.

Σύγκρισις τῶν κλασμάτων πρὸς τὴν ἀκεραίαν μονάδα

76. Ἐξ ὅσων προηγουμένως εἴπομεν εὐκόλως συνάγεται, ὅτι π. χ. εἶναι $\frac{5}{5} = 1$, $\frac{3}{7} < 1$, $\frac{7}{4} > 1$· ἤτοι, ἐὰν $\alpha = \beta$ θὰ εἶναι $\frac{\alpha}{\beta} = 1$, ἐὰν $\alpha < \beta$, θὰ εἶναι $\frac{\alpha}{\beta} < 1$ καὶ ἐὰν $\alpha > \beta$, θὰ εἶναι καὶ $\frac{\alpha}{\beta} > 1$.

Τροπὴ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν εἰς κλάσματα.

77. Ἔστω ὅτι θέλω νὰ τρέψω τὸν ἀκέραιον 8 δρ. εἰς πέμπτα (εἰκοσάλεπτα), ἤτοι εἰς κλάσμα ἔχον παρονομαστὴν 5. Πρὸς τοῦτο, ἀφοῦ παρατηρήσω, ὅτι ἡ μία δραχμὴ ἔχει 5 πέμπτα εὐκόλως εὑρίσκω, ὅτι 8 δρ. $= \frac{8 \times 5}{5} = \frac{40}{5}$ δρ.

Ὁμοίως εὑρίσκω, ὅτι ὁ ἀκέραιος 7 ἔχει π. χ. 56 ὄγδοα, ἤτοι $7 = \frac{7 \times 8}{8} = \frac{56}{8}$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω εὐκόλως συνάγεται ὁ σχετικὸς κανών.

Τροπὴ μικτῶν ἀριθμῶν εἰς κλάσματα.

78. Ἔστω ὁ μικτὸς ἀριθμὸς $5\frac{2}{3}$, τὸν ὁποῖον θέλω νὰ τρέψω εἰς κλάσμα.

Ἐπειδὴ $5 = \frac{5 \times 3}{3}$, ἔπεται, ὅτι $5\frac{2}{3} = \frac{5 \times 3 + 2}{3} = \frac{17}{3}$

Ὁμοίως εὑρίσκω, ὅτι $7\frac{4}{5} = \frac{7 \times 5 + 4}{5} = \frac{39}{5}$.

Ἐκ τῶν παραδειγμάτων δὲ τούτων εὐκόλως συνάγεται ὁ σχετικὸς κανών.

Ἀσκήσεις.

204) (Ἀπὸ μνήμης). Ἐκ τῶν κλασμάτων $\frac{32}{31}$, $\frac{106}{160}$, $\frac{545}{545}$, $\frac{1015}{1016}$, $\frac{8003}{8002}$, ποῖα εἶναι μικρότερα τῆς ἀκεραίας μονάδος καὶ ποῖα μεγαλύτερα αὐτῆς;

205) Νὰ τραπῶσιν αἱ 7 δραχμαὶ εἰς δεύτερα (50λεπτα), εἰς πέμπτα (20λεπτα), εἰς δέκατα.

206) Νὰ τραπῇ ὁ ἀκέραιος 9 εἰς πέμπτα, ἔννατα, ἑνδέκατα.

207) Νὰ τραπῶσιν οἱ 5 πήχεις εἰς ὄγδοα (ρούπια), αἱ 3 ὧραι εἰς ἑξηκοστὰ (πρῶτα λεπτὰ) καὶ αἱ δύο ὀκάδες εἰς τετρακοσιοστὰ (δράμια).

208) Νὰ τραπῶσιν εἰς κλάσματα οἱ μικτοί:

$4\frac{1}{5}$, $7\frac{1}{2}$, $6\frac{3}{4}$, $5\frac{5}{10}$, $10\frac{4}{7}$, $15\frac{2}{3}$, $30\frac{3}{4}$, $36\frac{1}{2}$

209) (Γραπτῶς). Νὰ τραπῇ ὁ ἀκέραιος 18 εἰς δέκατα πέμπτα, ὁ 25 εἰς εἰκοστὰ πρῶτα, ὁ 198 εἰς τριακοστὰ ἕβδομα, ὁ 201 εἰς τεσσαρακοστὰ καὶ ὁ 1305 εἰς ἑκατοστὰ εἰκοστά.

210) Νὰ τραπῶσιν εἰς κλάσματα οἱ μικτοί:

$18\frac{8}{15}$, $68\frac{9}{20}$, $99\frac{85}{97}$, $317\frac{6}{7}$, $36\frac{41}{54}$, $351\frac{44}{45}$, $872\frac{305}{871}$

211) Ἀπὸ πόσα ὄγδοα ἀποτελοῦνται οἱ $15\frac{9}{8}$ πήχεις, ἀπὸ πόσα τέταρτα αἱ $20\frac{3}{4}$ ὧραι, ἀπὸ πόσα δωδέκατα τὰ $49\frac{7}{12}$ ἔτη καὶ ἀπὸ πόσα τετρακοσιοστὰ αἱ $23\frac{350}{400}$ ὀκάδες;

212) Τί ἐκφράζει ἑκάστη τῶν ἰσοτήτων:

1) $\alpha = \frac{\alpha \times \beta}{\beta}$, 2) $\alpha + \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha \times \gamma + \beta}{\gamma}$; ($\alpha$, β, γ, ἀκέραιοι ἀριθμοί).

Ἐξαγωγὴ τῶν ἀκεραίων μονάδων τοῦ κλάσματος.

79. Ἐὰν κλάσμα τι περιέχῃ ἀκεραίας μονάδας, δυνάμεθα νὰ ἐξαγάγωμεν αὐτάς. Ἡ δὲ ἐξαγωγὴ αὕτη γίνεται κατὰ τὸν κάτωθι κανόνα:

Διὰ νὰ ἐξαγάγωμεν τὰς ἀκεραίας μονάδας κλάσματός τινος, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ καὶ τὸ μὲν πηλίκον εἶναι ὁ ἀκέραιος τοῦ κλάσματος, τὸ δὲ ὑπόλοιπον, ἂν μείνῃ, εἶναι ὁ ἀριθμητὴς τοῦ μένοντος κλάσματος, ὅπερ ἔχει τὸν ἴδιον παρονομαστήν. Διατί;

π. δ. $\frac{13}{5} = 2\frac{3}{5}$, $\frac{31}{8} = 3\frac{7}{8}$, $\frac{28}{4} = 7$, $\frac{54}{9} = 6$.

Ἀσκήσεις.

213) Νὰ ἐξαχθῶσιν αἱ ἀκέραιαι μονάδες, αἱ ὁποῖαι περιέχονται εἰς τὰ κλάσματα (ἀπὸ μνήμης).

$\frac{72}{9}$, $\frac{81}{27}$, $\frac{120}{12}$, $\frac{240}{12}$, $\frac{225}{25}$, $\frac{80}{11}$, $\frac{65}{12}$, $\frac{91}{15}$, $\frac{165}{25}$, $\frac{242}{80}$.

214) Νὰ ἐξαχθῶσιν αἱ ἀκέραιαι μονάδες, αἱ ὁποῖαι περιέχονται εἰς τὰ κλάσματα (γραπτῶς):

$\frac{631}{9}$, $\frac{916}{7}$, $\frac{497}{40}$, $\frac{819}{13}$, $\frac{5400}{25}$, $\frac{10000}{35}$, $\frac{17873}{74}$, $\frac{75719}{365}$.

215) Πόσας ἡμέρας καὶ πόσα μέρη αὐτῆς κάμνουν αἱ 185 ὧραι, αἱ 1050 ὧραι;

216) Πόσας ὀκάδας καὶ πόσα μέρη αὐτῆς κάμνουν 15170 δράμια καὶ πόσους στατῆρας καὶ μέρη αὐτοῦ κάμνουν αἱ 279 ὀκάδες; (1 στ. = 44 ὀκ.).

Ἰδιότητες τῶν κλασμάτων.

80. Ἐὰν 5 ἄνθρωποι μοιρασθῶσι 4 δραχμάς, τὸ μερίδιον ἑκάστου εἶναι $\frac{4}{5}$ δρ., ἐὰν δὲ διπλασιασθῶσιν οἱ ἄνθρωποι, διπλασιασθῶσι δὲ καὶ αἱ δραχμαί, εἶναι φανερὸν (42, 2), ὅτι τὸ μερίδιον $\frac{8}{10}$ θὰ εἶναι τὸ ἴδιον μὲ τὸ προηγούμενον· ὥστε:

$$\frac{4}{5} = \frac{8}{10} \quad \text{ἢ} \quad \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

Ὅθεν, ***ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν καὶ οἱ δύο ὅροι του πολλαπλασιασθῶσιν ἢ διαιρεθῶσι μὲ ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.***

81. Ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{4}{10}$· ἐὰν μὲν διπλασιασθῇ ὁ ἀριθμητὴς του, γίνεται $\frac{8}{10}$, ἤτοι διπλασιάζεται, διότι εἶναι φανερόν, ὅτι τὰ 8 δέκατα εἶναι διπλάσια τῶν 4 δεκάτων· ἐὰν δὲ διαιρεθῇ ὁ ἀριθμητής του διὰ 2, γίνεται $\frac{2}{10}$, ἤτοι διαιρεῖται διὰ δύο.

Ὅθεν, ***ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς κλάσματος πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ἀριθμόν, καὶ ὅλον τὸ κλάσμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν ἴδιον ἀριθμόν· ἐὰν δὲ ὁ ἀριθμητὴς διαιρεθῇ, ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος διαιρεῖται.***

82. Ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{5}{8}$, τοῦ ὁποίου τριπλασιάζω τὸν παρονομαστὴν καὶ λαμβάνω τὸ $\frac{5}{24}$. Ἀλλὰ παρατηρῶ, ὅτι, ὅταν τριπλασιάσω τὸ $\frac{5}{24}$ λαμβάνω (81) τὸ $\frac{15}{24}$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον μὲ τὸ $\frac{5}{8}$ (80). Ὥστε τὸ $\frac{5}{24}$ εἶναι τὸ τρίτον τοῦ $\frac{5}{8}$ ἢ τὸ $\frac{5}{8}$ εἶναι τὸ τριπλάσιον τοῦ $\frac{5}{24}$· εὑρίσκεται δὲ τὸ $\frac{5}{8}$, ὅταν τὸν παρονομαστὴν τοῦ $\frac{5}{24}$ διαιρέσω διὰ 3.

Ὅθεν, ***ἐὰν ὁ παρονομαστὴς ἑνὸς κλάσματος πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ἀριθμόν, ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος διαιρεῖται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἐὰν δὲ διαιρεθῇ, ἡ ἀξία του πολλαπλασιάζεται.***

Ἀσκήσεις.

217) Νὰ καταταχθῶσι κατὰ τάξιν μεγέθους αὐξανομένου τὰ κλάσματα: $\frac{31}{64}$, $\frac{17}{64}$, $\frac{2}{64}$, $\frac{45}{64}$, $\frac{39}{64}$, $\frac{13}{64}$, $\frac{51}{64}$, $\frac{25}{64}$.

218) Ὁμοίως νὰ καταταχθῶσιν κατὰ τάξιν μεγέθους ἐλαττουμένου τὰ κλάσματα: $\frac{108}{130}$, $\frac{108}{184}$, $\frac{108}{260}$, $\frac{108}{120}$, $\frac{108}{196}$.

219) Νὰ γίνωσι τὰ κάτωθι κλάσματα 2, 3, 4, ... φορὰς μεγαλύτερα: $\frac{6}{15}$, $\frac{16}{90}$, $\frac{45}{120}$, $\frac{76}{84}$, $\frac{156}{280}$.

220) Νὰ γίνουν τὰ ἑπόμενα κλάσματα 2, 3, 4, ... φορὰς μικρότερα: $\frac{8}{15}$, $\frac{18}{96}$, $\frac{13}{21}$, $\frac{86}{108}$, $\frac{96}{180}$.

221) Νὰ συμπληρωθοῦν αἱ ἰσότητες:

$\frac{5}{6}=\frac{\quad}{30}$, $\frac{4}{9}=\frac{\quad}{36}$, $\frac{19}{24}=\frac{\quad}{120}$, $\frac{7}{8}=\frac{\quad}{24}$, $\frac{2}{9}=\frac{\quad}{63}$, $\frac{3}{4}=\frac{\quad}{192}$.

222) Ὁμοίως αἱ:

$\frac{3}{4}=\frac{9}{\quad}$, $\frac{9}{11}=\frac{45}{\quad}$, $\frac{19}{24}=\frac{95}{\quad}$, $\frac{5}{8}=\frac{45}{\quad}$, $\frac{7}{17}=\frac{28}{\quad}$.

223) Ὁμοίως αἱ:

$\frac{8}{12}=\frac{2}{\quad}$, $\frac{44}{77}=\frac{4}{\quad}$, $\frac{35}{50}=\frac{\quad}{10}$, $\frac{15}{40}=\frac{\quad}{8}$, $\frac{10}{15}=\frac{\quad}{3}$, $\frac{132}{156}=\frac{\quad}{13}$.

224) Τί ἐκφράζει ἑκάστη τῶν ἰσοτήτων:

1) $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha\times\gamma}{\beta\times\gamma}$, 2) $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha:\gamma}{\beta:\gamma}$, 3) $\frac{\alpha\times\gamma}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}\times\gamma$,

4) $\frac{\alpha}{\beta\times\gamma}=\frac{\alpha}{\beta}:\gamma$, 5) $\frac{\alpha:\gamma}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}:\gamma$, 6) $\frac{\alpha}{\beta:\gamma}=\frac{\alpha}{\beta}\times\gamma$;

Ἁπλοποίησις τῶν κλασμάτων.

83. Ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{18}{20}$, τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι ἔχουσι κ. δ. τὸν 2· ἐὰν διαιρέσωμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους διὰ τοῦ 2, εὑρίσκομεν τὸ $\frac{9}{10}$, ὅπερ εἶναι ἴσον μὲ τὸ $\frac{18}{20}$ (80) καὶ ἁπλούστερον αὐτοῦ, διότι ἔχει μικροτέρους ὅρους.

Ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν ἄλλο κλάσμα ἴσον μὲ τὸ δοθὲν καὶ ἔχον μικροτέρους ὅρους λέγεται ***ἁπλοποίησις τοῦ δοθέντος κλάσματος.***

Εἶναι δὲ φανερόν, ὅτι γίνεται αὕτη, ὅταν οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος, ἔχωσι κοινόν τινα διαιρέτην. Οὕτω ἔχομεν, ἁπλοποιοῦντες, $\frac{16}{24} = \frac{2}{3}$. Ἐὰν οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος δὲν ἔχωσι κοινὸν διαιρέτην, τὸ κλάσμα δὲν ἁπλοποιεῖται καὶ λέγεται ***ἀνάγωγον***· τοιαῦτα εἶναι τὰ $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$ κτλ.

Διὰ νὰ καταστήσωμεν δοθὲν κλάσμα ἀνάγωγον, διαιροῦμεν τοὺς ὅρους αὐτοῦ διὰ τοῦ μ. κ. δ. αὐτῶν (σελ. 51, σημ. β').

Σημ. Τὸ κλάσμα $\frac{15}{5} = 3$ (79)· ὥστε $3 = \frac{3}{1}$.

Ὅθεν ***δυνάμεθα νὰ παριστῶμεν τοὺς ἀκεραίους καὶ ὡς κλάσματα ἔχοντα παρονομαστὴν τὴν μονάδα 1.***

Ἀσκήσεις.

225) Νὰ ἁπλοποιηθῶσι τὰ κλάσματα (ἀπὸ μνήμης):

$$\frac{20}{30},\ \frac{16}{18},\ \frac{15}{60},\ \frac{36}{48},\ \frac{25}{100},\ \frac{35}{49},\ \frac{48}{64},\ \frac{39}{91}.$$

226) Ὁμοίως τὰ $\frac{350}{450}$, $\frac{600}{750}$, $\frac{1250}{1500}$, $\frac{140}{420}$.

227) Νὰ ἁπλοποιηθῶσι τὰ κλάσματα (γραπτῶς):

$$\frac{39}{117},\ \frac{95}{133},\ \frac{825}{975},\ \frac{108}{396},\ \frac{2568}{7680},\ \frac{10200}{47600},\ \frac{3765}{4020},\ \frac{6363}{9999}.$$

82. ***Σύγκρισις κλασμάτων πρὸς ἄλληλα. Τροπὴ ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα.***

Δύο ἄνθρωποι εἶχον τὸ αὐτὸ ποσὸν δραχμῶν. Ἀλλ' ὁ μὲν εἷς ἐδαπάνησε τὰ $\frac{7}{12}$ τῶν χρημάτων του, ὁ δὲ τὰ $\frac{4}{7}$ αὐτῶν. Ποῖος ἐδαπάνησε τὰ περισσότερα χρήματα;

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ζητούμενον, πρέπει νὰ ἴδωμεν ποῖον ἐκ τῶν κλασμάτων αὐτῶν εἶναι μεγαλύτερον. Ἀλλὰ τὰ κλάσματα αὐτά, ὡς ἔχοντα διαφόρους παρονομαστάς, δηλ. ὡς **ἑτερώνυμα**, δὲν δύνανται νὰ συγκριθῶσιν. Διὰ νὰ γίνῃ ἡ σύγκρισις, πρέπει νὰ τραπῶσιν εἰς ἄλλα ἰσοδύναμα μὲ τὸν αὐτὸν ὅμως παρονομαστήν, δηλ. πρέπει νὰ τραπῶσιν εἰς **ὁμώνυμα**. Γίνεται δὲ τοῦτο ὡς ἑξῆς:

Πολλαπλασιάζω τοὺς ὅρους τοῦ $\frac{7}{12}$ ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν 7 τοῦ ἄλλου κλάσματος $\frac{4}{7}$ καὶ τοὺς ὅρους τοῦ $\frac{4}{7}$ ἐπὶ τὸν 12. Λαμβάνω δὲ οὕτω τὰ ὁμώνυμα κλάσματα :

$$\frac{7\times7}{12\times7}, \quad \frac{4\times12}{7\times12} \quad ἢ \quad \frac{49}{84}, \quad \frac{48}{84}.$$

τὰ ὁποῖα εἶναι ἰσοδύναμα πρὸς τὰ δοθέντα.

Ὥστε βλέπω, ὅτι ὁ πρῶτος ἐδαπάνησε τὰ περισσότερα χρήματα. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν κανόνα :

Διὰ νὰ τρέψωμεν δύο ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα, πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ καθενὸς ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ ἄλλου.

2) Ἔστωσαν ἤδη τὰ κλάσματα $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{1}{8}$, τὰ ὁποῖα θέλομεν νὰ τρέψωμεν εἰς ὁμώνυμα.

Τρέπω δὲ ταῦτα εἰς ὁμώνυμα κατὰ τὸν κάτωθι κανόνα :

Διὰ νὰ τρέψωμεν πολλὰ ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους τοῦ καθενὸς μὲ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν ὅλων τῶν ἄλλων κλασμάτων.

Εὑρίσκομεν δὲ οὕτω τὰ κλάσματα :

$$\frac{3\times7\times8}{5\times7\times8}, \quad \frac{2\times5\times8}{7\times5\times8}, \quad \frac{1\times5\times7}{8\times5\times7}, \quad ἢ \quad \frac{168}{280}, \quad \frac{80}{280}, \quad \frac{35}{280}$$

τὰ ὁποῖα εἶναι ἰσοδύναμα πρὸς τὰ δοθέντα.

85. Ἐνίοτε κοινὸς παρονομαστὴς εὑρίσκεται ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις εὑρίσκεται ὡς ἀνωτέρω καὶ ὅστις εἶναι τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν· τότε ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι προτιμώτερος. Ὁ μικρότερος δὲ κοινὸς παρονομαστής, τὸν ὁποῖον δυνάμεθα νὰ λάβωμεν, εἶναι τὸ ἐ. κ. π. τῶν παρονομαστῶν (καὶ τοῦτο πρέπει νὰ προτιμῶμεν) τῶν διδομένων κλασμάτων, ἐὰν εἶναι ἀνάγωγα. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους ἑκάστου κλάσματος μὲ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ κοινοῦ αὐτοῦ παρονομαστοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ κλάσματος τούτου.

Ἄς λάβωμεν ὡς παράδειγμα τὰ ἀνάγωγα κλάσματα $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{9}$. Ὁ 18 εἶναι τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν· θὰ εἶναι λοιπὸν οὗτος ὁ ἐλάχιστος κοινὸς παρονομαστὴς καὶ διὰ νὰ γίνῃ οὗτος πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους τοῦ $\frac{1}{2}$ ἐπὶ τὸ πηλίκον $18:2=9$, τοὺς ὅρους τοῦ $\frac{2}{3}$ ἐπὶ τὸ πηλίκον $18:3=6$ καὶ τοὺς ὅρους τοῦ $\frac{4}{9}$ ἐπὶ τὸ πηλίκον $18:9=2$· εὑρίσκομεν δὲ οὕτω τὰ ὁμώνυμα κλάσματα $\frac{9}{18}$, $\frac{12}{18}$, $\frac{8}{18}$ ἰσοδύναμα πρὸς τὰ δοθέντα.

Παρατήρησις. Ἡ σύγκρισις τῶν κλασμάτων γίνεται καὶ διὰ τῆς τροπῆς αὐτῶν εἰς ἰσοδύναμα ἔχοντα κοινὸν ἀριθμητήν. Γίνεται δὲ καθ' ὅμοιον τρόπον, ὡς φαίνεται ἐκ τῶν κάτωθι παραδειγμάτων :

1ον)

$$\frac{4}{9} \qquad \frac{3}{7}$$

$$\frac{4\times3}{9\times3} \qquad \frac{3\times4}{7\times4}$$

$$\frac{12}{27} \qquad \frac{12}{28}.$$

Ὥστε τὸ μεγαλύτερον εἶναι τὸ $\frac{12}{27}$ ὡς ἔχον τὸν μικρότερον παρονομαστήν.

2ον)

$$\frac{3}{5} \qquad \frac{4}{9} \qquad \frac{7}{11}$$

$$\frac{3\times4\times7}{5\times4\times7} \qquad \frac{4\times3\times7}{9\times3\times7} \qquad \frac{7\times4\times3}{11\times4\times3}$$

$$\frac{84}{140} \qquad \frac{84}{189} \qquad \frac{84}{132}.$$

Ὥστε τὸ μεγαλύτερον ἐκ τῶν δοθέντων εἶναι τὸ $\frac{7}{11}$ καὶ μικρότερον τὸ $\frac{4}{9}$.

Ἀσκήσεις.

228) Νὰ τραπῶσιν εἰς ὁμώνυμα τὰ κλάσματα (ἀπὸ μνήμης):

α) $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$, β) $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, γ) $\frac{6}{8}$, $\frac{1}{4}$, δ) $\frac{9}{100}$, $\frac{11}{25}$

ε) $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ϛ) $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, ζ) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, η) $\frac{2}{9}$, $\frac{11}{36}$, $\frac{5}{6}$.

229) Ἐκ τῶν κλασμάτων $\frac{5}{7}$, $\frac{4}{6}$ ποῖον εἶναι τὸ μεγαλύτερον καὶ ἐκ τῶν $\frac{11}{13}$, $\frac{3}{9}$ ποῖον εἶναι τὸ μικρότερον ;

230) Νὰ τραπῶσιν εἰς ὁμώνυμα τὰ κλάσματα (γραπτῶς):

α) $\frac{7}{13}$, $\frac{8}{15}$ β) $\frac{2}{7}$, $\frac{16}{17}$ γ) $\frac{7}{12}$, $\frac{13}{18}$ δ) $\frac{9}{15}$, $\frac{15}{20}$

ε) $\frac{13}{35}$, $\frac{5}{14}$ ϛ) $\frac{27}{45}$, $\frac{34}{36}$.

231) Ὁμοίως τά:

α) $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{14}$, $\frac{4}{15}$ β) $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{6}{11}$ γ) $\frac{5}{12}$, $\frac{7}{18}$, $\frac{13}{29}$

δ) $\frac{7}{9}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{13}{20}$ ε) $\frac{11}{35}$, $\frac{12}{84}$, $\frac{19}{63}$ ϛ) $\frac{5}{33}$, $\frac{7}{44}$, $\frac{1}{6}$.

232) Νὰ τραπῶσι τὰ κλάσματα εἰς ἰσοδύναμα ἔχοντα κοινὸν ἀριθμητήν:

α) $\frac{5}{6}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{7}{9}$ β) $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{19}{30}$

γ) $\frac{13}{60}$, $\frac{8}{25}$, $\frac{11}{12}$ δ) $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{3}$.

233) Εἴς τινα ἐκδρομὴν ἐκ δύο μαθητῶν, ἐκ τῶν ὁποίων εἶχεν ἑκάτερος τὸ αὐτὸ ποσὸν χρημάτων, ὁ εἷς ἐδαπάνησεν τὰ $\frac{13}{15}$ τῶν χρημάτων του, ἐνῷ ὁ ἄλλος τὰ $\frac{19}{25}$. Ποῖος ἐκ τῶν δύο ἐδαπάνησε περισσότερα;

234) Ἡ μεγαλυτέρα ἐπίδοσις τριῶν μαθητῶν εἰς τὸ ἅλμα εἰς ὕψος ἄνευ φορᾶς εἶναι $\frac{3}{5}$ τοῦ μέτρου τοῦ ἑνός, $\frac{16}{25}$ τοῦ ἄλλου καὶ $\frac{2}{3}$ τοῦ τρίτου. Ποῖος ἐξ αὐτῶν ὑπερτερεῖ τοὺς δύο ἄλλους;

235) Ἐκ τῶν κλασμάτων $\frac{3}{7}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{7}{15}$, $\frac{2}{3}$ ποῖον εἶναι τὸ μεγαλύτερον καὶ ποῖον εἶναι τὸ μικρότερον;

236) Νὰ γραφῶσι κατὰ τάξιν μεγέθους αὐξανομένου τὰ κλάσματα: α) $\frac{3}{4}$, $\frac{13}{18}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{11}{12}$ β) $\frac{9}{10}$, $\frac{14}{25}$, $\frac{17}{30}$, $\frac{3}{5}$.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

86. Ἡ πρόσθεσις τῶν κλασμάτων ὁρίζεται ὅπως καὶ εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν ἀκεραίων· μόνον ἐδῶ πρέπει νὰ ἐνθυμούμεθα, ὅτι αἱ μονάδες τὰς ὁποίας ἔχουσιν οἱ ἀριθμοί, δύνανται νὰ εἶναι ἀκέραιαι ἢ κλασματικαί.

87. ***Πρόσθεσις κλασμάτων ὁμωνύμων.***

Ἡ πρόσθεσις κλασμάτων ὁμωνύμων γίνεται κατὰ τὸν κάτωθι κανόνα ὅστις εἶναι εὔκολον νὰ ἐξηγηθῇ.

Διὰ νὰ προσθέσωμεν κλάσματα ὁμώνυμα προσθέτομεν μόνον τοὺς ἀριθμητάς των, ὁ δὲ παρονομαστὴς μένει ὁ ἴδιος.

Ἤτοι: $\frac{\alpha}{\mu} + \frac{\beta}{\mu} + \frac{\gamma}{\mu} = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{\mu}$.

88. ***Πρόσθεσις κλασμάτων ἑτερωνύμων.***

Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ προσθέσωμεν τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{5}{18}$. Ἀλλ' αὐτά, εὔκολον ἐπίσης εἶναι νὰ ἐξηγηθῇ διατί, δὲν δύνανται νὰ προστεθῶσιν ὅπως εἶναι, ἀλλὰ πρέπει νὰ τραπῶσι πρῶτον εἰς ὁμώνυμα, ὁπότε ἔχωμεν:

$$\frac{12}{18} + \frac{3}{18} + \frac{8}{18} + \frac{5}{18} = \frac{28}{18} = 1 + \frac{10}{18} = 1\frac{5}{9}.$$

89. ***Πρόσθεσις μικτῶν ἀριθμῶν.***

Διὰ νὰ προσθέσωμεν μικτοὺς ἀριθμούς, προσθέτομεν χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα καὶ ἔπειτα ἑνώνομεν τὰ δύο ἀθροίσματα.

Οὕτω ἔχομεν $15\frac{1}{3}$ δρ. $+ 2\frac{4}{5}$ δρ. $= 18\frac{2}{15}$ δρ.

Ὁμοίως ἔχομεν:

$$5\frac{1}{7} + 3 = 8\frac{1}{7} \text{ καὶ } 2\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = 2\frac{5}{15} + \frac{3}{15} = 2\frac{8}{15}.$$

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

237) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ προσθέσεις (ἀπὸ μνήμης):

α) $\frac{5}{12} + \frac{7}{12}$, β) $\frac{15}{33} + \frac{17}{33}$, γ) $\frac{11}{36} + \frac{19}{36} + \frac{7}{36}$,

δ) $\frac{23}{45} + \frac{43}{45} + \frac{24}{45}$, ε) $\frac{3}{28} + \frac{9}{28} + \frac{11}{28} + \frac{5}{28}$, ϛ) $7\frac{2}{3}+8\frac{1}{3}$ ζ) $5+\frac{3}{5}+4\frac{4}{5}$ η) $3\frac{1}{7}+2\frac{5}{7}+\frac{4}{7}$.

238) Ὁμοίως αἱ :

α) $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$ β) $\frac{1}{6}+\frac{5}{8}$ γ) $\frac{2}{3}+\frac{8}{15}$,

δ) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ ε) $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{5}{12}$ ϛ) $\frac{3}{8}+\frac{1}{4}+\frac{11}{16}$.

239) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ προσθέσεις (γραπτῶς) :

α) $\frac{3}{4}+\frac{9}{10}$ δ) $\frac{8}{9}+\frac{2}{15}+\frac{2}{3}$

β) $\frac{13}{16}+\frac{7}{12}$ ε) $\frac{5}{12}+\frac{2}{15}+\frac{9}{10}+\frac{3}{5}$

γ) $\frac{7}{8}+\frac{3}{15}$ ϛ) $13\frac{1}{4}+7\frac{11}{12}+2\frac{25}{36}+8\frac{7}{9}$

ζ) $9\frac{1}{3}$ ὀκ. $+12\frac{5}{9}$ ὀκ. $+7\frac{7}{8}$ ὀκ. $+4\frac{1}{6}$ ὀκ. $+11\frac{3}{4}$ ὀκ.

η) $15\frac{7}{10}$ χλμ $+82$ χλμ. $+42\frac{19}{24}$ χλμ. $+28\frac{14}{15}$ χλμ. $+74\frac{30}{45}$ χλμ.

240) Τρία πακέτα νήματος ζυγίζουν τὸ α΄ $\frac{4}{5}$ ὀκ. τὸ β΄ $\frac{3}{4}$ ὀκ. καὶ τὸ γ΄ $\frac{9}{10}$. Πόσον ζυγίζουν ἐν ὅλῳ ;

241) Ἐξώδευσέ τις ἐκ τῶν χρημάτων ποὺ εἶχε $37\frac{1}{4}$ δρχ. καὶ τοῦ ἔμειναν $108\frac{4}{5}$ δρ. Πόσας εἶχεν ;

242) Εἷς σωφὲρ ἐξεκίνησεν ἀπὸ τὴν πόλιν Α διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὴν Β καί, ἀφοῦ διέτρεξε $28\frac{7}{12}$ χλμ., ὑπελόγισεν, ὅτι διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὴν πόλιν Β, πρέπει νὰ διατρέξῃ ἀκόμη $13\frac{2}{3}$ χλμ. Πόσον ἀπέχει ἡ Α ἀπὸ τὴν Β ; $\left(\text{ἀπ. } 42\frac{1}{4}\right)$

243) Ἠγόρασέ τις δύο φιάλας οἴνου καὶ ἡ μὲν μία περιεῖχε $2\frac{3}{8}$ ὀκ., ἡ δὲ ἄλλη $\frac{1}{2}$ ὀκ. περισσότερον. Πόσας ὀκάδας οἴνου περιεῖχον αἱ δύο φιάλαι ; $\left(\text{ἀπ. } 5\frac{1}{4}\right)$

244) Ἠγόρασέ τις δύο ἐνδυμασίας διὰ τὰ τέκνα του καὶ διὰ μὲν τὴν μίαν ἐπλήρωσεν $628\frac{3}{4}$ δρ., διὰ δὲ τὴν ἄλλην

$57\frac{4}{5}$ δρχ. περισσότερον. Πόσας δραχμὰς ἔδωκεν ἐν ὅλῳ ;
$\left(\text{ἀπ. } 1315\frac{3}{10}\right)$.

245) Ἀπὸ ἕνα τεμάχιον ~~ὑφάσματος~~ ἐπώλησέ τις $18\frac{2}{3}$ μέτρα καὶ ἔπειτα ἄλλα $5\frac{1}{6}$ μέτρα, τοῦ ἔμειναν δὲ $37\frac{1}{2}$ ~~μέτρα~~. Ἐκ πόσων μέτρων ἀπετελεῖτο ὁλόκληρον τὸ τεμάχιον ; $\left(\text{ἀπ. } 61\frac{1}{3}\right)$.

246) Οἰκογενειάρχης τις ἐξώδευσε μίαν ἡμέραν $48\frac{3}{4}$ δρχ. διὰ κρέας, $18\frac{4}{5}$ δρ. δι' ἄρτον, 9 δρ. διὰ τυρόν, $12\frac{1}{2}$ δρχ. διὰ λαχανικὰ καὶ $16\frac{9}{20}$ δρχ. διὰ φροῦτα. Πόσας δραχμὰς ἐξώδευσεν ἐν ὅλῳ ; $\left(\text{ἀπ. } 105\frac{1}{2}\right)$.

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

90. Ἡ ἀφαίρεσις τῶν κλασμάτων ὁρίζεται ὅπως καὶ εἰς τὴν ἀφαίρεσιν τῶν ἀκεραίων. Αἱ μονάδες δὲ δυνατὸν νὰ εἶναι ἀκέραιαι ἢ κλασματικαί.

91. ***Ἀφαίρεσις κλασμάτων.***

Αὕτη γίνεται κατὰ τοὺς κάτωθι κανόνας, οἱ ὁποῖοι εὐκόλως ἐξηγοῦνται :

α΄) ***Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν κλάσμα ἀπὸ ἄλλο κλάσμα ὁμώνυμον, ἀφαιροῦμεν τὸν ἀριθμητήν του ἀπὸ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ μειωτέου καὶ ὑποκάτω τοῦ ὑπολοίπου γράφομεν τὸν ἴδιον παρονομαστήν.***

Ἤτοι : $\frac{7}{12}-\frac{5}{12}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$ καὶ $\frac{\alpha}{\mu}-\frac{\beta}{\mu}=\frac{\alpha-\beta}{\mu}$.

β΄) ***Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἑτερώνυμα κλάσματα, πρέπει νὰ τρέψωμεν αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα.***

π. δ. $\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{5}{20}-\frac{4}{20}=\frac{1}{20}$, $\frac{2}{3}-\frac{4}{9}=\frac{6}{9}-\frac{4}{9}=\frac{2}{9}$.

92. ***Ἀφαίρεσις μικτῶν.***

Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν μικτὸν ἀπὸ μικτοῦ, ἀφαιροῦμεν χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα καὶ ἔπειτα ἑνώνομεν τὰ δύο ὑπόλοιπα.

π. δ. $8\frac{5}{12} - 5\frac{1}{8} = 3\frac{7}{24}$.

Παρατήρησις. Ἐὰν τὸ κλάσμα τοῦ ἀφαιρετέου εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ κλάσμα τοῦ μειωτέου, λαμβάνομεν μίαν ἀκεραίαν μονάδα τοῦ μειωτέου ***καὶ τὴν ἑνώνομεν μὲ τὸ κλάσμα αὐτοῦ, ἀφοῦ τὴν τρέψωμεν καὶ αὐτὴν εἰς κλάσμα ὁμώνυμον.***

π. δ. $5\frac{1}{8} - 1\frac{2}{9} = 5\frac{9}{72} - 1\frac{16}{72} = 4\frac{81}{72} - 1\frac{16}{72} = 3\frac{65}{72}$.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

247) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἀφαιρέσεις (ἀπὸ μνήμης):

α) $\frac{28}{41} - \frac{9}{41}$, β) $23\frac{45}{53} - \frac{19}{53}$, β) $37\frac{18}{25} - \frac{12}{25}$, δ) $35\frac{13}{16} - 26\frac{5}{16}$,

ε) $1 - \frac{16}{19}$, ϛ) $11 - \frac{61}{100}$, ζ) $5 - 3\frac{2}{7}$, η) $4\frac{1}{5} - \frac{3}{5}$,

θ) $12 - 1\frac{7}{12}$, ι) $101 - 5\frac{3}{4}$, κ) $2\frac{1}{2} - \frac{2}{3}$, λ) $\frac{2}{5} - \frac{3}{10}$.

248) Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ ἀφαιρέσεις (γραπτῶς):

α) $\frac{19}{18} - \frac{11}{12}$, β) $10\frac{9}{16} - 6\frac{11}{12}$, γ) $26\frac{14}{25} - 9\frac{13}{15}$,

δ) $17\frac{29}{35} - 12\frac{41}{42}$, ε) $15\frac{4}{21} - \left(3\frac{5}{7} + 8\frac{2}{3}\right)$.

ϛ) $18\frac{11}{15} - \left(3\frac{7}{48} + 5\frac{1}{3} + 2\frac{7}{8}\right)$.

ζ) $\left(13\frac{7}{8} + 8\frac{2}{3}\right) - \left(7\frac{12}{16} + 5\frac{4}{9} + 3\frac{5}{12}\right)$.

249) Νὰ συμπληρωθοῦν αἱ ἰσότητες:

α) $\frac{7}{9} + \ldots = \frac{17}{18}$, β) $\frac{2}{13} + \ldots = \frac{4}{11}$,

γ) $\ldots + \frac{25}{36} = \frac{57}{60}$, δ) $14\frac{7}{18} + \ldots = 31\frac{23}{36}$,

ε) $52\frac{35}{72} + \ldots = 100\frac{7}{24}$, ϛ) $33\frac{6}{35} + \ldots = 44\frac{2}{21}$.

250) Ποίαν μεταβολὴν ὑφίσταται τὸ κλάσμα $\frac{5}{7}$, ἐὰν εἰς ἕκαστον τῶν ὅρων αὐτοῦ προστεθῇ ὁ 3;

251) Ποίαν μεταβολὴν ὑφίσταται τὸ κλάσμα $\frac{7}{9}$, ἐὰν ἀπὸ ἕκαστον τῶν ὅρων αὐτοῦ ἀφαιρεθῇ ὁ 2;

252) Τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν εἶνα $7\frac{2}{3}$ καὶ ὁ εἷς ἐξ αὐτῶν εἶναι $\frac{6}{7}$. Ποῖος εἶναι ὁ ἄλλος;

253) Ποῖος ἀριθμός, προστιθέμενος εἰς τὸν $17 \frac{8}{9}$, δίδει ἄθροισμα $41 \frac{5}{8}$;

254) Δοχεῖον πλῆρες οἴνου ζυγίζει ὁλόκληρον (μικτὸν βάρος) $11 \frac{1}{2}$ ὀκάδας, κενὸν δὲ $2 \frac{13}{16}$ ὀκάδας. Ποῖον εἶναι τὸ καθαρὸν βάρος τοῦ οἴνου;

255) Τὸ ἄθροισμα τριῶν κλασμάτων εἶναι $\frac{11}{12}$. Τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν εἶναι $\frac{1}{3}$ καὶ τὸ ἄλλο $\frac{2}{5}$. Ποῖον εἶναι τὸ τρίτον κλάσμα;
$\left(\text{ἀπ. } \frac{11}{60}\right)$

256) Δι' ἕνα χρέος ἐπλήρωσέ τις πρῶτον τὸ $\frac{1}{3}$ αὐτοῦ καὶ ἔπειτα τὰ $\frac{5}{12}$ αὐτοῦ. Πόσον μέρος τοῦ χρέους ὑπολείπεται νὰ πληρώση;
$\left(\text{ἀπ. } \frac{1}{4}\right)$

257) Τέσσαρες ὁμάδες ἐργατῶν ἀνέλαβον νὰ ἐπισκευάσουν δρόμον $70 \frac{7}{10}$ χλμ. Ἡ α΄ ὁμὰς ἀνέλαβε νὰ ἐπισκευάση $17 \frac{4}{5}$ χλμ. ἡ β΄ ὁμὰς $17 \frac{1}{2}$ καὶ ἡ γ΄ $17 \frac{2}{5}$ χλμ. Πόσα χιλιόμετρα ἀνέλαβεν ἡ δ΄ ὁμάς; (ἀπ. 18)

258) Ἀτμόπλοιόν τι ἀνεχώρησεν ἐκ τοῦ λιμένος Α τὴν $6 \frac{3}{4}$ π. μ. καὶ ἔφθασεν εἰς τὸν λιμένα Β μετὰ $12 \frac{1}{3}$ ὥρ. Ποίαν ὥραν ἔφθασεν;
$\left(\text{ἀπ. } 7 \frac{1}{12} \text{ μ. μ.}\right)$

259) Ἀτμόπλοιόν τι ἀνεχώρησεν ἐκ τοῦ λιμένος Α τὴν $9 \frac{1}{4}$ π. μ. καὶ ἔφθασεν εἰς τὸν λιμένα Β τὴν $11 \frac{43}{60}$ π. μ. τῆς ἐπομένης ἡμέρας. Πόσας ὥρας ἐταξείδευσεν; $\left(\text{ἀπ. } 26 \frac{7}{15}\right)$

93. ***Πολλαπλασιασμὸς κλάσματος ἐπὶ ἀκέραιον.***

Ἔστω ὁ πολλαπλασιασμὸς $\frac{3}{8} \times 4$. Ἀλλ' οὗτος σημαίνει νὰ καταστήσωμεν τὸ κλάσμα $\frac{3}{8}$, 4 φορὰς μεγαλύτερον· ἔχοντες ἑπομένως ὑπ' ὄψει τὰς ἰδιότητας 81,82, εὑρίσκομεν $\frac{3}{8} \times 4 = \frac{12}{8}$ ἢ $\frac{3}{8} \times 4 = \frac{3}{2}$.

Ὅθεν, ***διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν κλάσμα ἐπὶ ἀκέραιον, ἢ πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμητὴν ἢ διαιροῦμεν τὸν παρονομαστὴν διὰ τοῦ ἀκεραίου*** (ἐὰν διαιρῆται).

Ἤτοι $\frac{\alpha}{\beta} \times \gamma = \frac{\alpha \times \gamma}{\beta}$ ἢ $\frac{\alpha}{\beta : \gamma}$

π. δ. $\frac{7}{20} \times 5 = \frac{7}{4}$, $\frac{2}{5} \times 3 = \frac{6}{5}$, $\frac{5}{8} \times 8 = 5$.

94. ***Πολλαπλασιασμὸς μικτοῦ ἐπὶ ἀκέραιον.***

Ἐπειδὴ ὁ μικτὸς εἶναι ἄθροισμα, εὐκόλως ἕπεται, ὅτι :

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν μικτὸν ἐπὶ ἀκέραιον, πολλαπλασιάζομεν χωριστὰ τὸ ἀκέραιον μέρος τούτου καὶ χωριστὰ τὸ κλάσμα του καὶ ἔπειτα ἑνώνομεν τὰ δύο γινόμενα.

Ἤτοι $\alpha \frac{\beta}{\gamma} \times \delta = \alpha \times \delta + \frac{\beta}{\gamma} \times \delta$.

π. δ. $5 \frac{3}{8} \times 6 = 5 \times 6 + \frac{3}{8} \times 6 = 32 \frac{1}{4}$.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

260) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ κάτωθι γινόμενα (ἀπὸ μνήμης) :

$\frac{2}{7} \times 5$, $\frac{5}{11} \times 4$, $\frac{4}{15} \times 5$, $\frac{7}{24} \times 6$, $\frac{3}{18} \times 21$,

$\frac{15}{106} \times 106$, $\frac{5}{87} \times 17$, $2 \frac{1}{8} \times 3$, $7 \frac{1}{9} \times 6$,

$9 \frac{4}{31} \times 7$, $3 \frac{1}{15} \times 13$, $2 \frac{1}{17} \times 17$.

261) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ κάτωθι γινόμενα :

$\frac{15}{16} \times 35$, $\frac{7}{8} \times 125$, $\frac{19}{40} \times 95$, $\frac{11}{12} \times 248$,

$\frac{121}{272} \times 84$, $18 \frac{5}{6} \times 25$, $71 \frac{15}{27} \times 19$, $101 \frac{27}{35} \times 41$.

262) Ἐὰν εἷς ἐργάτης κερδίζῃ $62 \frac{1}{2}$ δρ. ἑκάστην ἡμέραν, πόσας κερδίζει εἰς μίαν ἑβδομάδα ; (ἀπ. 375)

263) Ἐπὶ μιᾶς πλευρᾶς ἑνὸς κτήματος εἶναι φυτευμένα 68 δένδρα εἰς ἀπόστασιν τὸ ἓν ἀπὸ τὸ ἄλλο $4 \frac{3}{5}$ μέτρων. Πόσων μέτρων εἶναι τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς ; (ἀπ. $308 \frac{1}{5}$)

264) Μία δακτυλογράφος ἀντιγράφει $15 \frac{2}{3}$ τῆς σελίδος εἰς 1 ὥραν. Πόσας σελίδας θὰ ἀντιγράψῃ εἰς 8 ὥρας ; (ἀπ. $125 \frac{1}{3}$)

655
917
9825

265) Εἰς ταξείδιον 12 ὡρῶν ἀτμόπλοιόν τι τρέχει κατὰ μὲν τὰς 5 πρώτας ὥρας μὲ ταχύτητα $7\frac{1}{2}$ μιλ. τὴν ὥραν, κατὰ δὲ τὰς ὑπολοίπους μὲ ταχύτητα $8\frac{3}{4}$ μιλίων. Πόσα μίλια διέτρεξεν ἐν ὅλῳ; (ἀπ. $98\frac{3}{4}$)

266) Ἕνας ἔμπορος ἠγόρασε 3 τεμάχια ὑφάσματος, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἀπετελεῖτο ἀπὸ 75 πήχεις, ἀλλὰ τοῦ μὲν ἑνὸς τεμαχίου ὁ πῆχυς ἐτιμᾶτο $65\frac{1}{2}$ δρ., τοῦ ἄλλου $122\frac{3}{4}$ δρ. καὶ τοῦ τρίτου $263\frac{2}{5}$ δρ. Πόσον ἐπλήρωσεν ἐν ὅλῳ; (ἀπ. $33873\frac{3}{4}$)

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

95. ***Ἀκεραίου δι᾿ ἀκεραίου.*** Ἂν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν πόσον ἠγόρασέ τις τὸ 1 πορτοκάλιον, ὅταν διὰ 5 πορτοκάλια ἔδωκεν 11 δρ., θὰ κάμωμεν τὴν διαίρεσιν 11 δρ. : 5 (σελ. 42), τῆς ὁποίας πηλίκον εἶναι τὸ $\frac{11}{5}$ (75)

Ὅθεν, ***διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀκέραιον δι᾿ ἀκεραίου γράφομεν τὸν διαιρετέον ὡς ἀριθμητὴν καὶ τὸν διαιρέτην ὡς παρονομαστήν· τὸ οὕτω σχηματιζόμενον κλάσμα εἶναι τὸ πηλίκον.***

96. ***Διαίρεσις κλάσματος δι᾿ ἀκεραίου.***

Ἠγόρασέ τις 8 δράμια νήματος πρὸς $\frac{32}{5}$ δραχ. Πόσον ἠγόρασε τὸ ἓν δράμιον;

Ἐνταῦθα πρέπει νὰ διαιρέσωμεν $\frac{32}{5}$ δρ. : 8, ἤτοι νὰ εὕρωμεν ἀριθμόν, ὅστις, πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 8, νὰ δίδῃ τὸν $\frac{32}{5}$. ὥστε ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι 8 φορὰς μικρότερος τοῦ $\frac{32}{5}$. Γνωρίζομεν δὲ πῶς γίνεται ἕνα κλάσμα ὡρισμένας φορὰς μικρότερον (81, 82).

Ἔχομεν ἐπομένως $\frac{32}{5} : 8 = \frac{4}{5}$ ἢ $\frac{32}{5} : 8 = \frac{32}{40} = \frac{4}{5}$.

Ὅθεν, ***διὰ νὰ διαιρέσωμεν κλάσμα δι᾿ ἀκεραίου διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητήν του διὰ τοῦ ἀκεραίου*** (ἂν διαιρῆται) ***ἢ πολλαπλασιάζομεν τὸν παρονομαστήν του ἐπὶ τὸν ἀκέραιον.***

Ἤτοι $\frac{\alpha}{\beta} : \gamma = \frac{\alpha : \gamma}{\beta}$ ἢ $\frac{\alpha}{\beta \times \gamma}$.

97. ***Διαίρεσις μικτοῦ δι᾽ ἀκεραίου.***

Ἂν ὁ διαιρετέος εἶναι μικτός, διαιροῦμεν τὰ μέρη του χωριστὰ καὶ ἔπειτα ἑνώνομεν τὰ δύο πηλίκα. Διατί ;

π. δ. $15\frac{1}{5} : 3 = 15 : 3 + \frac{1}{5} : 3 = 5\frac{1}{15}$

$12\frac{4}{9} : 8 = 12 : 8 + \frac{4}{9} : 8 = \frac{12}{8} + \frac{4}{72} = 1\frac{5}{9}$.

Καὶ γενικῶς $\alpha\frac{\beta}{\gamma} : \delta = \alpha : \delta + \frac{\beta}{\gamma} : \delta$.

Παρατήρησις. Τὰς ἀνωτέρω πράξεις ἐπὶ τῶν μικτῶν δύναταί τις νὰ τὰς ἀποφύγῃ, ἐὰν τρέπῃ αὐτοὺς εἰς κλάσματα καὶ ἔπειτα νὰ τὰς ἐκτελῇ.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

267) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ πηλίκα (ἀπὸ μνήμης) :

$\frac{6}{7} : 3$, $\frac{18}{25} : 9$, $\frac{35}{44} : 7$, $\frac{72}{91} : 8$, $\frac{25}{27} : 25$,

$\frac{49}{84} : 49$, $9\frac{3}{5} : 9$, $12\frac{8}{15} : 4$, $75\frac{50}{97} : 25$,

$108\frac{27}{32} : 27$, $140\frac{80}{81} : 20$, $1\frac{2}{3} : 3$, $1\frac{1}{4} : 5$,

$2\frac{1}{7} : 4$, $3\frac{4}{5} : 7$, $8\frac{7}{11} : 9$, $5\frac{9}{25} : 8$.

268) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ πηλίκα :

$\frac{64}{85} : 18$, $\frac{72}{49} : 27$, $\frac{44}{75} : 77$, $\frac{39}{105} : 65$, $\frac{51}{90} : 85$, $\frac{126}{243} : 105$.

$4\frac{8}{25} : 36$, $18\frac{3}{16} : 15$, $79\frac{3}{5} : 14$, $175\frac{7}{8} : 15$, $118\frac{1}{3} : 45$.

269) Μία ἐργάτρια ὑφαίνει εἰς 16 ἡμέρας 150 πήχεις ὑφάσματος. Πόσους πήχεις ὑφαίνει εἰς 1 ἡμέραν ; $\left(\text{ἀπ. } \frac{150}{16} = 9\frac{3}{8}\right)$

270) Ἕνας μαθητὴς διὰ νὰ λύσῃ 8 προβλήματα κατηνάλωσε $2\frac{2}{5}$ ὥρας. Πόσος χρόνος ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν λύσιν ἑνὸς προβλήματος; $\left(\text{ἀπ. } \frac{3}{10} \text{ τῆς ὥρας}\right)$

270) β') Ἕνας ἐργάτης εἶναι ὑποχρεωμένος ἐντὸς 9 ἡμερῶν ἀπὸ σήμερον νὰ ἀνοίξῃ τάφρον μήκους $14\frac{2}{5}$ μέτρων. Πόσα μέτρα πρέπει ν' ἀνοίγῃ τὴν ἡμέραν; $\left(\text{ἀπ. } 1\frac{3}{5}\right)$

271) Ἓν ἀεροπλάνον διέτρεξεν ἀπόστασιν $1320\frac{3}{8}$ μιλίων εἰς 12 ὥρας. Πόσα μίλια διέτρεξεν εἰς μίαν ὥραν; $\left(\text{ἀπ. } 110\frac{1}{32}\right)$

272) Διὰ τὴν κατασκευὴν 84 θρανίων ἐπληρώθησαν $14767\frac{1}{5}$ δρ. Πόσας δραχμὰς ἐστοίχισεν τὸ 1 θρανίον καὶ πόσαι δραχμαὶ χρειάζονται ἀκόμη διὰ νὰ παραγγελθῶσιν ἄλλα 36 τοιαῦτα θρανία;

98. ***Γενίκευσις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.*** Ὁ πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ κλάσμα δὲν δύναται νὰ σημαίνῃ ὅ,τι ὁ πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ ἀκέραιον. Δὲν δυνάμεθα δηλ. νὰ εἴπωμεν ὅτι $7 \times \frac{5}{8}$ σημαίνει νὰ ἐπαναλάβωμεν τὸν 7 $\frac{5}{8}$ φοράς.

Διὰ νὰ λάβῃ ὅμως ὁ πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ κλάσμα σημασίαν, πρέπει νὰ γενικεύσωμεν τὴν ἔννοιαν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Πρὸς τοῦτο ἂς ὑποθέσωμεν πρῶτον, ὅτι ***ἡ ἀξία τῆς μιᾶς ὀκᾶς πράγματός τινος ἔχει 35 δραχ. καὶ θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὴν ἀξίαν τῶν 7 ὀκάδων τοῦ αὐτοῦ πράγματος.***

Ἀλλὰ διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ζητούμενον, γνωρίζομεν, ὅτι πρέπει νὰ κάμωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν 35×7. Ἔπειτα, ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τί ποσὸν ἀξίζουν τὰ $\frac{7}{8}$ τῆς ὀκᾶς τοῦ αὐτοῦ ὡς ἄνω πράγματος. Ἀλλὰ διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ζητούμενον τοῦ προβλήματος αὐτοῦ σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς:

Ἀφοῦ ἡ 1 ὀκᾶ ἀξίζει 35 δρ., τὸ ἓν ὄγδοον αὐτῆς ἀξίζει τὸ ὄγδοον τῶν 35 δρ., ἤτοι $\frac{35}{8}$ δρ. (95) καὶ ἑπομένως τὰ 7 ὄγδοα τῆς ὀκᾶς ἀξίζουν 7 φορὰς τὸ $\frac{35}{8}$, δηλ. $\frac{35}{8} \times 7$ ἢ $\frac{245}{8}$ δρχ. $=$ $= 30\frac{5}{8}$ δραχμάς.

Διὰ νὰ λύσωμεν λοιπὸν τὸ 2ον τοῦτο πρόβλημα ἐκάμαμεν πρῶτον μερισμὸν τοῦ 35 εἰς 8 ἴσα μέρη καὶ δεύτερον πολλαπλασιασμὸν τοῦ ἑνὸς μέρους $\left(\text{τοῦ } \frac{35}{8}\right)$ ἐπὶ 7. Ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ εἰς τὸ πρῶτον πρόβλημα καὶ εἰς τὸ δεύτερον γνωρίζομεν τὴν ἀξίαν τῆς μιᾶς μονάδος ἑνὸς πράγματος καὶ ζητοῦμεν τὴν ἀξίαν τῶν πολλῶν μονάδων (ἀκεραίων ἢ κλασματικῶν) καὶ ἐπειδὴ ἡ πρᾶξις τὴν ὁποίαν κάμνομεν διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ζητούμενον τοῦ πρώτου προβλήματος καλεῖται πολλαπλασιασμός, κατ' ἀναλογίαν, τὰς δύο πράξεις ὁμοῦ, τὰς ὁποίας κάμνομεν διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ζητούμενον τοῦ δευτέρου προβλήματος, τὰς καλοῦμεν μὲ ἓν ὄνομα ***πολλαπλασιασμόν***. Οὕτω δὲ ἀληθεύει ὁ κανὼν τῆς § 36, οἱοσδήποτε καὶ ἂν εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν μονάδων, τῶν ὁποίων ζητεῖται ἡ ἀξία. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι :

Ὁ πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ κλάσμα πρέπει νὰ ὁρισθῇ ὡς ἡ ἐπανάληψις μέρους τινος τοῦ ἀριθμοῦ.

Οὕτω $7 \times \frac{4}{5}$ σημαίνει $\frac{7}{5}+\frac{7}{5}+\frac{7}{5}+\frac{7}{5}$.

Ὥστε γενικῶς, ***ὁ πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ ἄλλον οἱονδήποτε πρέπει νὰ ὁρισθῇ ὡς πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας ἐπαναλαμβάνομεν ἕνα ἀριθμὸν ἢ μέρος τι αὐτοῦ καὶ σχηματίζομεν νέον ἀριθμόν.***

Σημ. Ὁ πολλαπλασιασμὸς καταντᾶ μερισμός, ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι κλασματικὴ μονάς, διότι π.χ. εἶναι $8\times\frac{1}{4}=\frac{8}{4}$ ἢ 2.

99. ***Πολλαπλασιασμὸς ἀκεραίου ἐπὶ κλάσμα. Ἐὰν ὁ 1 πῆχυς ὑφάσματος τιμᾶται 75 δραχμάς, πόσον τιμῶνται τὰ $\frac{3}{5}$ αὐτοῦ ;***

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω λεχθέντα, διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο, πρέπει νὰ κάμωμεν τὸν πολλαπλασιασμόν :

$$74 \text{ δρ.} \times \frac{3}{5}=\frac{74}{5}\text{ δρ.}+\frac{74}{5}\text{ δρ.}+\frac{74}{5}\text{ δρ.}=\frac{74\times 3}{5}=\frac{222}{5}\text{ δρ.}=44\frac{2}{5}\text{δρ.}$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι ἡ ἀξία τῶν $\frac{\beta}{\gamma}$ τοῦ πήχεως, ὅταν ὁ 1 πῆχυς ἀξίζει α δραχμάς, εἶναι $\alpha \times \frac{\beta}{\gamma}=\frac{\alpha\times\beta}{\gamma}$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παραδειγμάτων νὰ ἐξαχθῇ ὁ σχετικὸς κανών.

100. ***Πολλαπλασιασμὸς κλάσματος ἐπὶ κλάσμα. Ἐὰν 1 ὀκᾶ νήματος ἀξίζει $\frac{17}{20}$ τῆς λίρας, πόσον ἀξίζουν τὰ $\frac{3}{8}$ αὐτῆς ;***

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο πρέπει νὰ πολλαπλα-

...σιάσωμεν $\frac{17}{20}$ λιρ. $\times \frac{3}{8}$, ἤτοι νὰ εὕρωμεν τὸ ὄγδοον τοῦ $\frac{17}{20}$ καὶ νὰ ...παναλάβωμεν αὐτὸ τρίς. Ἀλλὰ τὸ ὄγδοον τοῦ $\frac{17}{20}$ εἶναι (82) $\frac{17}{20 \times 8}$, τὸ δὲ τριπλάσιον τοῦ $\frac{17}{20 \times 8}$ εἶναι $\frac{17 \times 3}{20 \times 8}$.

Ὥστε εἶναι $\frac{17}{20} \times \frac{3}{8} = \frac{17 \times 3}{20 \times 8} = \frac{51}{160}$ λίρας.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι, ἐὰν μία ὀκᾶ νήματος ἀξίζῃ $\frac{\alpha}{\beta}$ δρχ., ...ὰ $\frac{\gamma}{\delta}$ αὐτῆς ἀξίζουν $\frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha \times \gamma}{\beta \times \delta}$.

Ἐκ τῶν παραδειγμάτων τούτων νὰ ἐξαχθῇ ὁ σχετικὸς κανών.

Σημ. $\frac{3}{5} \times \frac{7}{8} = \frac{7}{8} \times \frac{3}{5}$.

101. ***Πολλαπλασιασμὸς μικτῶν.*** ***Ὅταν ὁ εἷς τῶν παρα-γόντων εἶναι μικτὸς ἢ καὶ οἱ δύο, τρέπομεν αὐτοὺς εἰς κλά-σματα καὶ ἐκτελοῦμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν ὡς ἀνωτέρω.***

π. δ. $3\frac{5}{7} \times \frac{2}{3} = \frac{26}{7} \times \frac{2}{3} = \frac{52}{21} = 2\frac{10}{21}$,

$\frac{4}{3} \times 3\frac{1}{5} = \frac{4}{3} \times \frac{16}{5} = \frac{64}{15} = 4\frac{4}{15}$,

$3\frac{1}{8} \times 5\frac{2}{3} = \frac{25}{8} \times \frac{17}{3} = \frac{425}{24} = 17\frac{17}{24}$.

Παρατήρησις. Ἐκ τῶν προηγουμένων εὐκόλως συνάγεται, ὅτι ***ὁ ἀριθμός, ὅστις πολλαπλασιάζεται, αὐξάνει μέν, ἂν πολ-λαπλασιάζηται ἐπὶ ἀριθμὸν μεγαλύτερον τῆς μονάδος 1, ἐλαττοῦται δέ, ἂν πολλαπλασιάζηται ἐπὶ ἀριθμὸν μικρότερον τῆς μονάδος.***

Γινόμενον πολλῶν παραγόντων.

102. Τὸ γινόμενον πολλῶν ἀριθμῶν ὁρίζεται ὡς καὶ εἰς τοὺς ...ακεραίους (31). Οὕτω διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον $\frac{2}{3} \times \frac{3}{5} \times \frac{7}{8} \times \frac{1}{7}$, εὑρίσκομεν τὸ γινόμενον τῶν δύο πρώτων $\frac{2 \times 3}{3 \times 5}$, ἔπειτα τὸ γινόμενον τοῦτο ἐπὶ τὸν τρίτον $\frac{2 \times 3 \times 7}{3 \times 5 \times 8}$ καὶ τέλος τὸ γινόμενον τοῦτο ἐπὶ τὸν τέταρτον $\frac{2 \times 3 \times 7 \times 1}{3 \times 5 \times 8 \times 7}$. Ὥστε εἶναι :

$$\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{7}{8}\times\frac{1}{7}=\frac{2\times3\times7\times1}{3\times5\times8\times7}=\frac{1}{20}.$$

Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι, ***τὸ γινόμενον πολλῶν κλασμάτω εἶναι κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθ μητῶν, παρονομαστὴν δὲ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν.***

δηλ. $\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\gamma}{\delta}\times\frac{\varepsilon}{\zeta}=\frac{\alpha\times\gamma\times\varepsilon}{\beta\times\delta\times\zeta}$.

Τοῦτο δὲ ἀληθεύει καὶ ὅταν τινὲς τῶν παραγόντων εἶνα ἀκέραιοι, ἀρκεῖ νὰ γράφωνται ὡς κλάσματα μὲ παρονομαστὴ τὴν μονάδα 1.

π. δ. $\frac{1}{3}\times5\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\times\frac{5}{1}\times\frac{2}{3}=\frac{1\times5\times2}{3\times1\times3}$.

103. ***Δυνάμεις κλασμάτων.*** Αἱ δυνάμεις τῶν κλασματικῶ ἀριθμῶν ὁρίζονται ὅπως καὶ τῶν ἀκεραίων (34) καὶ σημειοῦν ται ὁμοίως.

Οὕτω $\left(\frac{3}{7}\right)^2=\frac{3}{7}\times\frac{3}{7}$. Ἐπειδὴ δὲ $\frac{3}{7}\times\frac{3}{7}=\frac{3\times3}{7\times7}=\frac{3^2}{7^2}$

ἕπεται, ὅτι $\left(\frac{3}{7}\right)^2=\frac{3^2}{7^2}$ καὶ γενικῶς $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\mu=\frac{\alpha^\mu}{\beta^\mu}$. Ἤτοι ***δι νὰ ὑψώσωμεν κλάσμα εἰς δύναμιν, ὑψοῦμεν τοὺς δύ ὅρους του εἰς τὴν δύναμιν ταύτην.***

Παρατήρησις. Αἱ ἰδιότητες τῶν δυνάμεων (35) ἀληθεύουσ καὶ περὶ τῶν κλασματικῶν, οὕτω :

π. χ. $\left(\frac{4}{9}\right)^2\times\left(\frac{4}{9}\right)^3=\left(\frac{9}{4}\right)^5$.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

273) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ γινόμενα (ἀπὸ μνήμης) :

$12\times\frac{1}{12}$, $24\times\frac{11}{24}$, $36\times\frac{1}{12}$, $51\times\frac{1}{3}$, $12\times\frac{3}{4}$, $49\times\frac{5}{7}$,

$90\times\frac{13}{18}$, $15\times\frac{4}{45}$, $21\times\frac{3}{20}$, $19\times\frac{7}{25}$, $30\times\frac{12}{45}$, $24\times\frac{11}{21}$,

274) Ὁμοίως τά :

$9\times5\frac{2}{9}$, $12\times2\frac{1}{4}$, $15\times4\frac{3}{5}$, $18\times5\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}\times7\frac{1}{7}$, $\frac{2}{5}\times4\frac{1}{4}$

$\frac{7}{9}\times\frac{3}{11}$, $\frac{7}{9}\times\frac{5}{11}$, $\frac{15}{16}\times\frac{4}{25}$, $\left(\frac{4}{5}\right)^2$, $\left(\frac{8}{9}\right)^2$, $\left(\frac{2}{3}\right)^3$.

275) Ὁμοίως τά :

$1\frac{1}{7}\times 1\frac{1}{6}$, $8\frac{1}{3}\times 1\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{7}\times 1\frac{1}{5}$, $9\frac{3}{5}\times 3\frac{1}{8}$, $\frac{4}{9}\times\frac{5}{8}\times\frac{9}{5}$.

$\frac{3}{4}\times\frac{2}{9}\times\frac{6}{11}$, $\frac{11}{12}\times\frac{3}{7}\times\frac{4}{11}\times 2$, $\frac{8}{9}\times\frac{3}{5}\times\frac{15}{16}\times\frac{2}{5}$.

276) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ γινόμενα (γραπτῶς):

$60\times\frac{25}{36}$, $88\times\frac{17}{33}$, $57\times\frac{18}{19}$, $28\times 2\frac{4}{7}$, $98\times 8\frac{5}{6}$

$225\times 1\frac{1}{9}$, $437\times 5\frac{11}{12}$, $\frac{40}{81}\times\frac{23}{85}$, $1\frac{27}{40}\times\frac{19}{45}$,

$\frac{3}{7}\times 6\frac{15}{22}$, $8\frac{3}{8}\times 8\frac{3}{4}$, $28\frac{1}{2}\times 49\frac{2}{3}$, $\left(\frac{11}{12}\right)^2$, $\left(\frac{4}{5}\right)^3$.

277) Ὁ πῆχυς ὑφάσματός τινος ἀξίζει 120 δρ. Πόσον ἀξίζουν τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ πήχεως ; $\left(\text{ἀπ. } 120\times\frac{3}{5}\right)$

278) Ἡ ὀκᾶ βουτύρου τιμᾶται 84 δρχ. Πόσον ἀξίζουν τὰ $\frac{5}{8}$ τῆς ὀκᾶς ; $\left(\text{ἀπ. } 84\times\frac{5}{8}\right)$

279) Ἡ 1 ὀκᾶ τυροῦ ἀξίζει 32 δρ. Πόσον ἀξίζουν αἱ $3\frac{3}{5}$ ὀκάδες ;

280) Ἐὰν εἰς μίαν ὥραν βαδίζῃ τις 5 χιλιόμ. πόσα θὰ βαδίσῃ εἰς $7\frac{1}{2}$ ὥρας ;

281) Νὰ τραπῶσι τὰ $\frac{7}{10}$ τῆς ὀκᾶς εἰς δράμια.

282) Ἐργάτης ὅταν ἐκτελῇ ἓν ὡρισμένον ἔργον, λαμβάνει 700 δραχμάς. Πόσας θὰ λάβῃ, ἂν ἐκτελέσῃ τὰ $\frac{3}{4}$ αὐτοῦ ;

283) Πόσα πρῶτα λεπτὰ ἔχουν τὰ $\frac{5}{8}$ τῆς ἡμέρας ;

284) Ἡ ὀκᾶ ἑνὸς πράγματος ἀξίζει $50\frac{3}{8}$ δραχμάς. Πόσον ἀξίζουν τὰ $\frac{7}{10}$ τῆς ὀκᾶς ;

285) Ἓν ἀτμόπλοιον διανύει εἰς 1 ὥραν $15\frac{7}{8}$ χλμ. Πόσα διανύει εἰς $\frac{14}{15}$ τῆς ὥρας ;

286) Ὁ πῆχυς βαμβακεροῦ ὑφάσματος ἀξίζει $20\frac{2}{5}$ δρ. Π...σον ἀξίζουν $18\frac{3}{10}$ τοῦ πήχεως;

287) Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμός ὅστις εἶναι $36\frac{3}{4}$ φορὰς μεγ...λύτερος τοῦ $10\frac{1}{6}$;

288) Ἠγόρασέ τις $7\frac{3}{8}$ στρέμματα ἀγροῦ πρὸς 1150 ... δραχ. τὸ στρέμμα. Πόσας δραχμὰς ἐπλήρωσεν;

289) Διὰ νὰ κατασκευάσῃ τις μίαν ἐνδυμασίαν ἠγόρα... $4\frac{1}{4}$ πήχεις ὑφάσματος μαλλίνου πρὸς $372\frac{1}{2}$ δρ. τὸν πῆχυν κ... $3\frac{1}{2}$ λινοῦ ὑφάσματος διὰ φόδραν πρὸς $64\frac{3}{4}$ δρχ. τὸν πῆχυ... Πόσας δραχμὰς ἐπλήρωσεν;

Διαίρεσις ἀριθμοῦ διὰ κλάσματος.

104. ***Εἰς $\frac{2}{5}$ τῆς ὥρας ὑφαίνει τις ὕφασμα μήκους $\frac{3}{8}$ τοῦ πήχεως. Πόσα μέρη τοῦ πήχεως θὰ ὑφάνῃ εἰς μίαν ὥρα...***

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο πρέπει νὰ κάμωμεν τὴ... διαίρεσιν $\frac{3}{8} : \frac{2}{5}$ (κατὰ τὸν κανόνα τῆς σελ. 42, ὅστις ἀληθεύ... καὶ ὅταν γνωρίζωμεν τὴν ἀξίαν μονάδων τινῶν).

Ἀλλὰ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως αὐτῆς εἶναι ὁ ἀριθμός, ὅστι... πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ $\frac{2}{5}$, δίδει γινόμενον $\frac{3}{8}$ (σελ. 63)· διὰ ν... πολλαπλασιάσω ὅμως ἀριθμόν τινα ἐπὶ $\frac{2}{5}$ πρέπει νὰ λάβω τ... πέμπτον αὐτοῦ δύο φοράς, ἤτοι τὰ δύο πέμπτα αὐτοῦ.

Ὥστε τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ εἶναι $\frac{3}{8}$· ἄρ... τὸ $\frac{1}{5}$ αὐτοῦ θὰ εἶναι $\frac{3}{8\times 2}$ (82) καὶ τὰ $\frac{5}{5}$, ἤτοι ὅλο... ὁ ἀριθμός, θὰ εἶναι $\frac{3\times 5}{8\times 2}$ ἢ $\frac{3}{8}\times\frac{5}{2}$. Καὶ πράγματι, ἐ... πολλαπλασιάσωμεν τὸ $\frac{3}{8}\times\frac{5}{2}$ ἐπὶ τὸ $\frac{2}{5}$, εὑρίσκομεν τὸ... διαιρετέον $\frac{3}{8}$.

Ὅθεν ***διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ κλάσματος, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν ἐπὶ τὸ κλάσμα ἀντεστραμμένον.***

π. δ. $5 : \frac{7}{6} = 5 \times \frac{6}{7} = \frac{30}{7}$.

$$\left(8 + \frac{1}{3}\right) : \frac{2}{7} = \left(8 + \frac{1}{3}\right) \times \frac{7}{2} = 8 \times \frac{7}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{7}{2} =$$

$$= 28 + \frac{7}{6} = 29\frac{1}{6} .$$

$$\alpha : \frac{\beta}{\gamma} = \alpha \times \frac{\gamma}{\beta}, \quad \frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\delta}{\gamma} .$$

Σημ. Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι κλασματικὴ μονὰς ἡ διαίρεσις καταντᾷ πολλαπλασιασμός, διότι

$$12 : \frac{1}{5} = 12 \times \frac{5}{1} = 12 \times 5 = 60.$$

105. ***Διὰ μικτοῦ ἀριθμοῦ δὲν δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν ἄλλως ἢ τρέποντες αὐτὸν εἰς κλάσμα.***

π. δ. $2 : 1\frac{1}{5} = 2 : \frac{6}{5} = 2 \times \frac{5}{6} = 1\frac{2}{3}$. $\frac{10}{6}$ 1 6

$$\frac{1}{8} : 2\frac{3}{5} = \frac{1}{8} : \frac{13}{5} = \frac{1}{8} \times \frac{5}{13} .$$

Αἱ γενικαὶ ἰδιότητες τῆς διαιρέσεως τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀληθεύουσι καὶ διὰ τοὺς κλασματικούς.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

290) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ πηλίκα (ἀπὸ μνήμης):

$$1 : \frac{1}{15}, \quad 1 : \frac{1}{20}, \quad 2 : \frac{1}{3}, \quad 3 : \frac{1}{4}, \quad 5 : \frac{1}{9}, \quad 8 : \frac{1}{11} .$$

$$1 : \frac{2}{5}, \quad 1 : \frac{7}{8}, \quad 6 : \frac{2}{3}, \quad 12 : \frac{4}{5}, \quad 36 : \frac{9}{11}, \quad 55 : \frac{11}{22} .$$

291) Ὁμοίως τά:

$$1 : 2\frac{1}{3}, \quad 1 : 3\frac{2}{5}, \quad 1 : 5\frac{5}{9}, \quad 3 : 1\frac{1}{2}, \quad 14 : 1\frac{3}{4}, \quad \frac{35}{41} : \frac{7}{41}$$

$$\frac{3}{4} : \frac{7}{8}, \quad 4\frac{2}{9} : \frac{2}{9}, \quad 5\frac{1}{7} : 3\frac{3}{7} .$$

292) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ πηλίκα (γραπτῶς):

$21 : \frac{28}{41}$, $52 : \frac{28}{39}$, $114 : \frac{76}{81}$, $35 : 4\frac{3}{8}$, $41 : 62\frac{5}{6}$,

$\frac{21}{50} : \frac{16}{25}$, $\frac{117}{300} : \frac{59}{200}$, $\frac{57}{175} : \frac{133}{275}$, $16\frac{4}{7} : 3\frac{11}{28}$, $15\frac{5}{6} : 5\frac{1}{15}$,

$41\frac{2}{3} : 34\frac{3}{7}$, $88\frac{5}{12} : 79\frac{3}{4}$, $125\frac{5}{6} : 12\frac{19}{36}$.

293) Ἐπλήρωσέ τις διὰ $\frac{3}{8}$ πήχεις ὑφάσματος 123 δρ. Πόσον ἐπλήρωσε δι' ἕνα πῆχυν; (ἀπ. 328)

294) Ἐπλήρωσέ τις διὰ $4\frac{3}{5}$ ὀκάδας βουτύρου 391 δρ. Πόσον ἐπλήρωσε τὴν ὀκᾶν; (ἀπ. 85)

295) Μία ὑφάντρια ὑφαίνει εἰς $1\frac{1}{4}$ ὥρας $\frac{7}{8}$ πήχεις ὑφάσματος. Πόσον ὑφαίνει εἰς μίαν ὥραν; $\left(\text{ἀπ. } \frac{7}{10}\right)$

296) Ἕνας ἐργάτης εἰργάσθη $6\frac{3}{5}$ ὥρας καὶ ἔλαβεν $115\frac{1}{2}$ δρ. Πόσας ἔλαβε διὰ μίαν ὥραν; $\left(\text{ἀπ. } 17\frac{1}{2}\right)$

297) Πόσας φορὰς χωρεῖ ὁ $\frac{2}{3}$ εἰς τὸν 5, ὁ $\frac{4}{9}$ εἰς τὸν $\frac{5}{7}$ καὶ ὁ $5\frac{1}{2}$ εἰς τὸν $22\frac{1}{2}$;

298) Ἐὰν μὲ $328\frac{4}{5}$ δρ. ἀγοράζῃ τις 1 πῆχυν ὑφάσματος, πόσους πήχεις θὰ ἀγοράσῃ μὲ 1644 δρ.; (ἀπ. 5)

299) Ἐὰν ἕνα αὐτοκίνητον δύναται νὰ τρέξῃ μὲ ταχύτητα $42\frac{3}{8}$ χιλ. τὴν ὥραν, εἰς πόσας ὥρας θὰ διανύσῃ τὸ διάστημα $508\frac{1}{2}$ χιλιομέτρων; (ἀπ. 12)

300) Ἐπὶ ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν $\frac{4}{7}$ διὰ νὰ λάβωμεν τὸν $3\frac{1}{5}$; $\left(\text{ἀπ. } 5\frac{3}{5}\right)$

301) Ποῖος ἀριθμὸς γίνεται $\frac{19}{25}$, ὅταν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ $\frac{4}{5}$; $\left(\text{ἀπ. } \frac{19}{20}\right)$

302) Ἕνα ὡρολόγιον εἰς $4\frac{2}{3}$ ἡμέρας προχωρεῖ κατὰ $11\frac{2}{3}$

πρῶτα λεπτά, πόσον προχωρεῖ εἰς 1 ἡμέραν; καὶ πόσον θὰ προχωρήσῃ, ἐὰν δὲν κανονισθῇ εἰς 15 ἡμέρας; $\left(\text{ἀπ. } 2\frac{1}{2},\ 37\frac{1}{2}\right)$·

303) Λάμπα, ἡ ὁποία ἑκάστην ἑσπέραν ἀνάπτει ἐπὶ $5\frac{1}{2}$ ὥρας, καίει πετρέλαιον κατὰ τὰς ὥρας αὐτὰς $102\frac{17}{20}$ δράμια. Πόσον πετρέλαιον καίει εἰς μίαν ὥραν καὶ πόσον εἰς 30 ὥρας;

$\left(\text{ἀπ. } 18\frac{7}{10},\ 561\right)$·

Λύσις προβλημάτων διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα.

1) ***Ὁ πῆχυς ὑφάσματος ἀξίζει 228 δρ. Πόσον ἀξίζουν τὰ 3/5 αὐτοῦ;***

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο πρέπει νὰ κάμωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν 228 δρ. $\times \frac{3}{5} = \frac{228 \times 3}{5}$ δρ.

Ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ τὸ λύσωμεν σκεπτόμενοι ὡς ἑξῆς:

Ἀφοῦ ὁ 1 πῆχυς ἢ τὰ $\frac{5}{5}$ αὐτοῦ ἀξίζουν δρ. 228.

τὸ $\frac{1}{5}$ ἀξίζει » $\frac{228}{5}$

καὶ τὰ $\frac{3}{5}$ ἀξίζουν $\frac{228 \times 3}{5}$ δρ.

Ὁ τρόπος οὗτος (ἴδε καὶ 98) τῆς λύσεως τῶν προβλημάτων λέγεται ***λύσις διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα.***

2) ***Νὰ εὕρωμεν τὰ $\frac{4}{9}$ τοῦ ἀριθμοῦ 40.***

Τὰ $\frac{9}{9}$ τοῦ ἀριθμοῦ εἶναι 40

ἑπομένως τὸ $\frac{1}{9}$ » » » $\frac{40}{9}$

καὶ τὰ $\frac{4}{9}$ » » » $\frac{40 \times 4}{9} = 17\frac{7}{9}$

Παρατήρησις. Ἀντὶ τῆς λύσεως διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα, ἠμπορούσαμεν νὰ προτιμήσωμεν τὴν ἀπ' εὐθείας λύσιν διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ $40 \times \frac{4}{9}$.

3) ***Τίνος ἀριθμοῦ τὰ $\frac{3}{8}$ εἶναι 62;***

ἀφοῦ τὰ $\frac{3}{8}$ εἶναι 62

τὸ $\frac{1}{8}$ » $\frac{62}{3}$

καὶ τὰ $\frac{8}{8}$ ἢ ὅλος ὁ ἀριθμὸς εἶναι $\frac{62\times8}{3} = 165\frac{1}{3}$

Παρατήρησις. Τὸ πρόβλημα τοῦτο θὰ ἠδύνατο νὰ λυθῇ καὶ διὰ τῆς διαιρέσεως $62 : \frac{3}{8} = \frac{62\times8}{3}$.

4) ***Ἕνας δρομεὺς εἰς 1 πρῶτον λεπτὸν διανύει τὰ $\frac{7}{8}$ τοῦ χιλιομέτρου. Εἰς πόσον χρόνον θὰ διανύσῃ τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ χιλιομέτρου;***

Θὰ τὰ διανύσῃ εἰς τόσα λεπτά, ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ $\frac{7}{8}$ εἰς τὸν $\frac{3}{5}$, ἤτοι εἰς $\frac{3}{5} : \frac{7}{8} = \frac{3\times8}{5\times7}$.

Ἀλλὰ διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα λύεται ὡς ἑξῆς:

Ἀφοῦ διὰ τὰ $\frac{7}{8}$ τοῦ χιλιομέτρου χρειάζεται 1 πρ. λεπτ.

» τὸ $\frac{1}{8}$ » » » $\frac{1}{7}$ » »

καὶ διὰ τὰ $\frac{8}{8}$ χλμ. ἢ 1 χλμ. » $\frac{8}{7}$ » »

ἑπομένως διὰ τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ χιλιομέτρου » $\frac{8}{7\times5}$ » »

καὶ διὰ τὰ $\frac{3}{5}$ » » » $\frac{8\times3}{7\times5}$ » »

5) ***Ἐργάτης τις τελειώνει ἓν ἔργον εἰς 12 ἡμέρας. Ἄλλος τις ἐργάτης τελειώνει τὸ αὐτὸ ἔργον εἰς 18 ἡμέρας. Ἐὰν οἱ δύο οὗτοι ἐργάται ἐργάζωνται συγχρόνως, εἰς πόσας ἡμέρας θὰ τελειώσουν τὸ ἔργον;***

Θὰ εὕρω πρῶτον πόσον μέρος τοῦ ἔργου κάμνουν οἱ δύο οὗτοι ἐργάται εἰς μίαν ἡμέραν. Εἰς μίαν ἡμέραν δὲ ἐκτελεῖ ὁ μὲν πρῶτος τὸ $\frac{1}{12}$ τοῦ ἔργου, ὁ δὲ δεύτερος τὸ $\frac{1}{18}$ αὐτοῦ. Ὅταν λοιπὸν ἐργάζωνται καὶ οἱ δύο συγχρόνως, θὰ κάμουν εἰς μίαν ἡμέραν $\frac{1}{12} + \frac{1}{18} = \frac{5}{36}$ τοῦ ἔργου. Ἑπομένως:

διὰ τὰ $\frac{5}{36}$ τοῦ ἔργου χρειάζονται 1 ἡμέραν

» τὸ $\frac{1}{36}$ » » » $\frac{1}{5}$ »

καὶ » τὰ $\frac{36}{36}$ » » (ἢ 1 ἔργ.) » $\frac{36}{5}$ ἡμ. ἢ $7\frac{1}{5}$ ἡμ.

Προβλήματα.

304) Μὲ 80 δραχμὰς ἀγοράζει τις $\frac{5}{9}$ πήχεις. Πόσους πήχεις ἀγοράζει μὲ 450 δραχμάς; $\left(\text{ἀπ. } 3\frac{1}{8}\right)$.

305) Τὰ $\frac{3}{5}$ τεμαχίου ὑφάσματος ἀξίζουν 1320 δρχ. Πόσον ἀξίζει ὅλον τὸ τεμάχιον; (ἀπ. 2200).

306) Εἰς $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας γεμίζει μία κρήνη τὰ $\frac{2}{7}$ μιᾶς δεξαμενῆς. Πόσα μέρη τῆς δεξαμενῆς θὰ γεμίσῃ εἰς $1\frac{1}{5}$ τῆς ὥρας; $\left(\text{ἀπ. } \frac{16}{35}\right)$.

307) Εἰς τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ πρώτου λεπτοῦ ὁ τροχὸς μιᾶς ἠλεκτρομηχανῆς κάμνει $44\frac{1}{3}$ στροφάς. Πόσας στροφὰς θὰ κάμῃ εἰς $3\frac{1}{2}$ πρῶτα λεπτά; $\left(\text{ἀπ. } 387\frac{11}{12}\right)$.

308) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ ἀριθμοῦ 52. $\left(\text{ἀπ. } 20\frac{4}{5}\right)$.

309) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ $\frac{5}{7}$ τοῦ μικτοῦ ἀριθμοῦ $6\frac{1}{3}$.

310) Τίνος ἀριθμοῦ τὰ $\frac{2}{5}$ εἶναι 40; (ἀπ. 100).

311) Τὰ $\frac{3}{4}$ ἀριθμοῦ τινος εἶναι 120. Πόσον εἶναι τὰ $\frac{5}{8}$ αὐτοῦ; (ἀπ. 100).

312) Ὑφάντρια ὑφαίνει $8\frac{1}{3}$ πήχεις ὑφάσματος εἰς $6\frac{1}{4}$ ὥρας. Πόσους πήχεις ὑφαίνει εἰς 1 ὥραν; $\left(\text{ἀπ. } 1\frac{1}{3}\right)$.

313) Οἱ βαθμοὶ τοῦ θερμομέτρου τοῦ Ρεωμύρου εἶναι τὰ $\frac{4}{5}$ τῶν βαθμῶν τοῦ θερμομέτρου τοῦ Κελσίου. Νὰ τραπῶσιν α΄) 28 βαθμοὶ Ρεωμύρου εἰς βαθμοὺς Κελσίου καὶ β΄) 20 βαθμοὶ Κελσίου εἰς βαθμοὺς Ρεωμύρου. (ἀπ. α΄) 35°, β΄) 16°).

314) Βαρέλιον πλῆρες οἴνου κατὰ $\frac{3}{7}$, χρειάζεται διὰ νὰ γεμίσῃ ἐντελῶς 66 ὀκάδας οἴνου ἀκόμη. Πόσας ὀκάδας οἴνου χωρεῖ τὸ βαρέλιον ; $\left(\text{ἀπ. } 115\frac{1}{2}\right)$.

315) Ἀπὸ ἕνα βαρέλιον πλῆρες οἴνου ἀφηρέθησαν τὰ $\frac{4}{9}$ αὐτοῦ, ἀπέμεινε δὲ εἰς τὸ βαρέλιον οἶνος $68\frac{4}{7}$ ὀκάδες. Πόσαι ὀκάδες οἴνου ἀφηρέθησαν ; $\left(\text{ἀπ. } 54\frac{6}{7}\right)$

316) Λάμπα καίει $28\frac{1}{2}$ δράμια πετρελαίου καθ᾽ ὥραν, μένει δὲ ἀναμμένη ἐπὶ $5\frac{3}{4}$ ὥρας καθ᾽ ἑκάστην ἑσπέραν. Πόσα δράμια πετρελαίου καίει ἐπὶ 6 ἡμέρας ; $\left(\text{ἀπ. } 983\frac{1}{4}\right)$.

317) Ἠγόρασέ τις $47\frac{3}{4}$ ὀκάδας καφὲ πρὸς $92\frac{1}{2}$ δραχμὰς τὴν ὀκᾶν καὶ διπλασίαν ποσότητα ζαχάρεως, τῆς ὁποίας ἡ τιμὴ κατ᾽ ὀκᾶν εἶναι τὸ $\frac{1}{5}$ τῆς τοῦ καφέ. Πόσας δραχμὰς ἔδωκεν ἐν ὅλῳ ; $\left(\text{ἀπ. } 6183\frac{5}{8}\right)$.

318) Ἐάν τις δι᾽ ἑκάστην ὥραν ἐργασίας λαμβάνει $\frac{3}{5}$ τοῦ 25δράχμου, πόσας ὥρας πρέπει νὰ ἐργασθῇ διὰ νὰ λάβῃ 30 25δραχμα ; (ἀπ. 50).

319) Πόσον ἀξίζει ἡ ὀκᾶ τοῦ καφέ, ὅταν 18 ὀκάδες καὶ $\frac{2}{5}$ τῆς ὀκᾶς ἐπωλήθησαν $1389\frac{1}{5}$ δραχμάς ; $\left(\text{ἀπ. } 75\frac{1}{2}\right)$.

320) Ἐκ τῶν 60 ἑκατομμυρίων ποὺ ἐκυκλοφόρησε μία Τράπεζα, ἐδόθησαν ὡς πίστωσις διὰ τὸ ἐμπόριον τὰ $\frac{2}{15}$ διὰ τὴν βιομηχανίαν τὰ $\frac{7}{20}$, διὰ τὴν διευκόλυνσιν τῆς οἰκοδομήσεως κατοικιῶν τὰ $\frac{9}{25}$ καὶ τὰ ὑπόλοιπα ἔμειναν ἀδιάθετα. Πόσαι δραχμαὶ ἀντιστοιχοῦσιν εἰς ἑκάστην κατηγορίαν ἐκ τῶν ἄνω δαπανῶν καὶ πόσαι ἔμειναν ἀδιάθετοι ;

321) Ἐκ τῆς περιουσίας τοῦ πατρός των, τὸν ὁποῖον ἐκληρονόμησαν, ἔλαβεν ὁ υἱὸς τὰ $\frac{2}{5}$ καὶ ἡ θυγάτηρ τὰ $\frac{4}{9}$, ἡ δὲ μήτηρ αὐτῶν ἔλαβε τὸ ὑπόλοιπον μέρος ἐξ 70000 δραχ. Πόσας δραχμὰς ἔλαβον τὰ τέκνα ; (ἀπ. 180000, 200000).

322) Ἕνας Δῆμος διέθεσεν ἐκ τοῦ προϋπολογισμοῦ του 360000 δραχμὰς ὑπὲρ τῶν ἀπόρων δημοτῶν του. Ἐκ τοῦ ποσοῦ τούτου τὰ $\frac{3}{8}$ διενεμήθησαν πρὸς ἄμεσον ἐνίσχυσιν 72 οἰκογενειῶν καὶ τὰ ὑπόλοιπα διὰ τὴν λειτουργίαν συσσιτίου ὑπὲρ τῶν ἀνέργων. Πόσαι δραχμαὶ ἐδόθησαν εἰς ἑκάστην οἰκογένειαν καὶ πόσαι δραχμαὶ διετέθησαν διὰ τὸ συσσίτιον ; (ἀπ. 1875, 225000).

323) Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ $\frac{1}{3}$ καὶ $\frac{3}{4}$ ἔχουσιν ἄθροισμα 39 ; (ἀπ. 36).

324) Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ $\frac{1}{3}$, τὰ $\frac{3}{4}$ καὶ τὸ $\frac{1}{6}$ κάμνουσι τὸν 60 ; (ἀπ. 48).

325) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ $\frac{2}{5}$ τῶν $\frac{3}{4}$ τοῦ ἀριθμοῦ 60. (ἀπ. 18).

326) Τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν $\frac{4}{5}$ ἀριθμοῦ τινος εἶναι 32. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμός ; (ἀπ. 60).

327) Δεξαμενή τις γεμίζει ὑπὸ δύο κρουνῶν, ὅταν ῥέωσι συγχρόνως εἰς 20 ὥρας· ὁ εἷς ἐκ τῶν κρουνῶν μόνος γεμίζει τὴν δεξαμενὴν εἰς 30 ὥρας. Εἰς πόσας ὥρας ὁ ἄλλος θὰ γεμίσῃ αὐτήν ; (ἀπ. 60).

328) Δύο κρουνοὶ μαζὺ γεμίζουσι μίαν δεξαμενὴν εἰς $2\frac{1}{4}$ ὥρας, ὁ πρῶτος μόνος του γεμίζει εἰς $4\frac{2}{3}$ ὥρας. Εἰς πόσας ὥρας ὁ ἄλλος μόνος θὰ γεμίσῃ τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς δεξαμενῆς ;

329) Ἀτμόπλοιον διανύον 8 μίλια τὴν ὥραν, καταδιώκει ἄλλο ἀναχωρῆσαν 15 ὥρας πρὸ αὐτοῦ καὶ διανύον $6\frac{1}{2}$ μίλια τὴν ὥραν. Μετὰ πόσας ὥρας θὰ τὸ φθάσῃ ; (ἀπ. 65).

330) Ὁδοιπόρος τις ἔχει νὰ διατρέξῃ 700 χιλιόμετρα εἰς 30 ἡμέρας, διέτρεξε δὲ τὰς 12 πρώτας ἡμέρας τὰ 350 χιλιόμετρα. Πόσα ἔχει νὰ διατρέχῃ τώρα καθ' ἡμέραν ; $\left(\text{ἀπ. } 19\frac{4}{9}\right)$

Σύνθετα κλάσματα

106. Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν, π. χ. τῆς διαιρέσεως 3 : 5, τὸ παριστῶμεν διὰ τοῦ κλάσματος $\frac{3}{5}$. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον δεχόμεθα ἤδη νὰ παριστῶμεν καὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν.

Οὕτω τὰ πηλίκα $\frac{2}{3} : 4$, $7 : \frac{3}{4}$, $\frac{5}{8} : \frac{2}{3}$ τὰ παριστῶμεν ἀντιστοίχως διὰ τῶν κλασμάτων

$$\frac{\frac{2}{3}}{4}, \qquad \frac{7}{\frac{3}{4}}, \qquad \frac{\frac{5}{8}}{\frac{2}{3}}.$$

Τὰ κλάσματα, ὡς τὰ ἀνωτέρω, τῶν ὁποίων δὲν εἶναι ἀμφότεροι οἱ ὅροι ἀκέραιοι ἀριθμοί, λέγονται ***σύνθετα κλάσματα***, τὰ δὲ μέχρι τοῦδε γνωστὰ λέγονται ***ἁπλᾶ***.

107. Τὰ σύνθετα κλάσματα ἔχουσιν ὅλας τὰς ἰδιότητας τῶν ἁπλῶν κλασμάτων. Τρέπεται δὲ σύνθετον κλάσμα εἰς ἁπλοῦν, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ συνθέτου ἐπὶ τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν τῶν ὅρων αὐτοῦ.

Π. χ. διὰ νὰ τρέψωμεν τὸ σύνθετον κλάσμα $\frac{\frac{4}{9}}{\frac{5}{8}}$ εἰς ἁπλοῦν, πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους τοῦ συνθέτου κλάσματος $\frac{4}{9}$ καὶ $\frac{5}{8}$ ἐπὶ τὸ ἐ.κ.π. 8×9 τῶν παρονομαστῶν 9, 8 χωρὶς νὰ μεταβληθῇ ἡ ἀξία του καὶ ἔχομεν.

$$\frac{\frac{4}{9}}{\frac{5}{8}} = \frac{\frac{4}{9} \times 9 \times 8}{\frac{5}{8} \times 9 \times 8} = \frac{4 \times 8}{5 \times 9} = \frac{32}{45}.$$

Ὁμοίως ἔχομεν $$\frac{5}{\frac{3}{4}} = \frac{\frac{5}{1}}{\frac{3}{4}} = \frac{\frac{5}{1} \times 4}{\frac{3}{4} \times 4} = \frac{20}{3}.$$

$$\frac{3\frac{1}{15}}{4\frac{2}{5}} = \frac{\frac{46}{15}}{\frac{22}{5}} = \frac{\frac{46}{15} \times 15}{\frac{22}{5} \times 15} = \frac{46}{66} = \frac{23}{33}.$$

Εἰς τὰ αὐτὰ ἐξαγόμενα φθάνομεν καὶ ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ συνθέτου κλάσματος.

Ἀσκήσεις.

331) Νὰ τραπῶσι τὰ σύνθετα κλάσματα εἰς ἁπλᾶ :

$$\frac{\frac{5}{9}}{\frac{4}{9}},\quad \frac{\frac{7}{12}}{\frac{11}{12}},\quad \frac{\frac{1}{15}}{\frac{8}{15}},\quad \frac{\frac{9}{20}}{\frac{1}{20}},\quad \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}},\quad \frac{\frac{2}{5}}{\frac{5}{2}}$$

$$\frac{\frac{8}{9}}{4},\quad \frac{\frac{30}{7}}{6},\quad \frac{2}{\frac{2}{3}},\quad \frac{3}{\frac{9}{10}},\quad \frac{1\frac{1}{3}}{1\frac{1}{2}},\quad \frac{3\frac{1}{5}}{7\frac{2}{5}}$$

332) Νὰ τραπῶσι τὰ κάτωθι σύνθετα κλάσματα εἰς ἁπλᾶ :

$$\frac{\frac{15}{64}}{45},\quad \frac{\frac{28}{81}}{112},\quad \frac{17\frac{7}{9}}{480},\quad \frac{23\frac{9}{11}}{411},\quad \frac{72}{\frac{9}{13}},\quad \frac{225}{\frac{25}{37}}$$

$$\frac{49}{5\frac{3}{19}},\quad \frac{49}{4\frac{4}{31}},\quad \frac{4\frac{9}{50}}{3\frac{17}{25}},\quad \frac{14\frac{5}{12}}{\frac{23}{24}},\quad \frac{43\frac{1}{8}}{5\frac{11}{18}},\quad \frac{40\frac{1}{5}}{14\frac{14}{25}}.$$

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

108. Ὁρισμοί. Ἐκ τῶν κλασματικῶν μονάδων ὅσαι ἔχουσι παρονομαστὴν 10 ἢ 100, ὡς αἱ $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ κλπ. λέγονται ***δεκαδικαὶ μονάδες***. Δεκαδικοὶ δὲ ἀριθμοὶ ἢ δεκαδικὰ κλάσματα λέγονται ὅσοι γίνονται ἀπὸ μίαν δεκαδικὴν μονάδα διὰ τῆς ἐπαναλήψεως, ὡς οἱ $\frac{75}{100}$, $\frac{3}{10}$ . . . Τὰ ἄλλα κλάσματα λέγονται ***κοινά***.

109. ***Γραφὴ τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.*** Ἔστω ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς $3\frac{754}{1000}$· οὗτος εἶναι $3\frac{754}{1000} = 3 + \frac{700}{1000} + \frac{50}{1000} + \frac{4}{1000} = 3 + \frac{7}{10} + \frac{5}{100} + \frac{4}{1000}$.

Ἀλλὰ παρατηροῦμεν, ὅτι ἕκαστον μέρος τοῦ ἀριθμοῦ τούτου παριστᾶ μονάδας δέκα φορὰς μεγαλυτέρας τῶν μονάδων τοῦ ἑπομένου μέρους· ἐκ τούτου ἕπεται, ὅτι δυνάμεθα νὰ γράφωμεν τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς ὡς ἀκεραίους, στηριζόμενοι εἰς τὴν ἀρχήν, ὅτι ***πᾶν ψηφίον, γραφόμενον κατόπιν ἄλλου, σημαίνει μονάδας τῆς ἀμέσως ἑπομένης τάξεως.***

Χωρίζομεν ὅμως τὸ ψηφίον τῶν ἁπλῶν μονάδων ἀπὸ τοῦ ψηφίου τῶν δεκάτων διὰ μιᾶς ὑποδιαστολῆς.

Οὕτω γράφομεν $3\frac{754}{1000}=3,754$, $4\frac{38}{100}=4,38$, $15\frac{64}{1000}=15,064$

Ὅταν ὁ ἀριθμὸς δὲν ἔχῃ ἀκέραιον μέρος, γράφομεν 0 εἰς τὴν θέσιν τῶν ἀκεραίων μονάδων.

Οὕτω $\frac{72}{100}=0,72$. Ἀντιστρόφως δὲ πᾶς δεκαδικὸς ἀριθμὸς γράφεται ***ὡς κοινὸν κλάσμα*** μὲ ἀριθμητὴν τὸν προκύπτοντα ἀριθμόν, ὅταν παραλειφθῇ ἡ ὑποδιαστολὴ καὶ μὲ παρονομαστὴν τὴν μονάδα ἀκολουθουμένην ἀπὸ τόσα μηδενικά, ὅσα εἶναι τα ***δεκαδικὰ ψηφία τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ.***

$$\text{Π. χ. } 1,5=\frac{15}{10},\quad 13,705=\frac{13705}{100}$$

110. ***Ἀπαγγελία δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ.*** Ἀπαγγέλλομεν συνήθως ἕνα δεκαδικὸν ἀριθμὸν ὡς ἑξῆς:

Ἀπαγγέλλομεν χωριστὰ τὸ ἀκέραιον μέρος αὐτοῦ, ἐὰν ὑπάρχῃ, καὶ κατόπιν τὸ δεκαδικὸν μὲ τὸ ὄνομα τῶν μονάδων τοῦ τελευταίου ψηφίου. Π. χ. 17,587 ἀπαγγέλλεται 17 ἀκέραια καὶ 587 χιλιοστά.

Διὰ νὰ γράψωμεν δὲ ἀπαγγελλόμενον δεκαδικὸν ἀριθμόν, γράφομεν τὸ ἀκέραιον μέρος, κατόπιν τὴν ὑποδιαστολὴν και ἔπειτα τὸ δεκαδικὸν μέρος, προσέχοντες ὅμως νὰ γράψωμεν πρῶτον ὅσα μηδενικὰ εἶναι ἀνάγκη, ὥστε τὸ τελευταῖον ψηφίον αὐτοῦ νὰ κατέχῃ τὴν θέσιν τὴν ὁποίαν ὁρίζει ἡ ἀπαγγελλομένη τάξις.

Οὕτω 12 ἀκέραια καὶ 5 ἑκατοστὰ γράφονται 12,05, τὰ 7 χιλιοστὰ γράφονται 0,007.

111. Ἰδιότητες. 1) ***Ἡ ἀξία δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ δὲν ἀλλάσσει, ἐὰν γραφῶσιν ὁσαδήποτε μηδενικὰ εἰς τὸ τέλος αὐτοῦ***

$$\text{Δηλ. } 3,8=3,80, \text{ διότι } \frac{38}{10}=\frac{380}{100}.$$

Ὁμοίως ἀντὶ τοῦ ἀκεραίου 5 δύναμαι νὰ γράψω

$5{,}0$ ἢ $5{,}00$, διότι $5 = \frac{50}{10} = \frac{500}{100}$.

2. ***Πολλαπλασιάζομεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν ἐπὶ 10, 100, 1000 κλπ. μεταθέτοντες τὴν ὑποδιαστολὴν μίαν θέσιν πρὸς τὰ ἐμπρὸς (διὰ τὸ 10), δύο (διὰ τὸ 100), τρεῖς (διὰ τὸ 1000) κλπ. Διαιροῦμεν δὲ δεκαδικὸν ἀριθμὸν διὰ 10, 100, 1000 κλπ. μεταθέτοντες τὴν ὑποδιαστολὴν πρὸς τὰ ὀπίσω, μίαν, δύο, τρεῖς κλπ. θέσεις.***

Δηλ. $5{,}871 \times 10 = 58{,}71$ διότι $\frac{5871}{1000} \times 10 = \frac{5871}{100} = 58{,}71$,

$16{,}59 : 10 = 1{,}659$, διότι $\frac{1659}{100} : 10 = \frac{1659}{1000} = 1{,}659$.

Ὁμοίως ἔχομεν $1{,}2 \times 1000 = 1200$ καὶ $0{,}15 : 1000 = 0{,}00015$.

Ἀσκήσεις.

333) Πόσα ἑκατοστὰ κάμνουν ἓν δέκατον, μίαν ἀκεραίαν μονάδα, μίαν δεκάδα ;

334) Πόσα δεκάκις χιλιοστὰ κάμνουν ἓν χιλιοστόν, ἓν ἑκατοστόν, ἓν δέκατον ;

335) Τέσσαρες ἁπλαῖ μονάδες πόσα ἑκατοστά, πόσα χιλιοστὰ καὶ πόσα δεκάκις χιλιοστὰ κάμνουν ;

336) Μὲ πόσα δεκαδικὰ ψηφία γράφονται τὰ δέκατα, τὰ ἑκατοστά, τὰ δεκάκις χιλιοστά, τὰ ἑκατοντάκις χιλιοστά, τὰ ἑκατομμυριοστά ;

337) Ἀριθμοῦ, ὅστις ἔχει ἑπτὰ δεκαδικὰ ψηφία, πῶς θὰ ἀπαγγελθῇ τὸ ψηφίον, τὸ ὁποῖον παριστᾷ μονάδας τῆς μικροτέρας τάξεως ;

338) Νὰ γραφῶσιν οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοί :

α΄) Τρία ἀκέραια καὶ ὀκτὼ χιλιοστά.

β΄) Τετρακόσια πέντε δεκάκις χιλιοστά.

γ΄) Εἴκοσι πέντε ἑκατοντάκις χιλιοστά.

δ΄) Εἴκοσι ἑπτὰ ἀκέραια καὶ πέντε ἑκατοντάκις χιλιοστά.

ε΄) Ἑκατὸν ὀκτὼ ἀκέραια καὶ διακόσια πέντε ἑκατομμυριοστά.

ϛ΄) Τριάκοντα δύο ἑκατομμυριοστά.

ζ΄) Ἑκατὸν τεσσαράκοντα πέντε δεκάκις ἑκατομμυριοστά.

339) Νὰ ἀπαγγελθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ καὶ νὰ δειχθῇ ἡ ἀξία ἑκάστου δεκαδικοῦ ψηφίου.

47,08	25,513006	0,0000003
1,034	32,00671	0,0000058
0,0038	1,030072	5,20500342

340) Πῶς ἄλλως δυνάμεθα νὰ ἀπαγγείλωμεν δεκαδικὸν ἀριθμόν;

341) Νὰ γραφῶσιν οἱ ἑπόμενοι ἀριθμοὶ ὡς κοινὰ κλάσματα.
0,6 0,18 0,608 0,005 4,25 0,00175 18,008.

342) Νὰ γίνωσιν οἱ ἀριθμοὶ 7,112 1,195 0,534 0,7 18,24 2,12847 0,000009 10, 100, 1000 φορὰς μεγαλύτεροι.

343) Νὰ γίνωσιν οἱ ἑπόμενοι ἀριθμοὶ 10, 100, 1000 φορὰς μικρότεροι 10,4 31,415 0,075 0,0001 1563,62.

Πράξεις τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

Ἀφοῦ οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ ὑπάγονται εἰς τὰ κλάσματα αἱ πράξεις ἐπ' αὐτῶν ὁρίζονται ὅπως καὶ αἱ τῶν κλασμάτων. Ἐκτελοῦνται ὅμως πολὺ εὐκολώτερον, ἐπειδὴ γράφονται ὡς ἀκέραιοι.

112. ***Πρόσθεσις*** καὶ ***Ἀφαίρεσις. Διὰ νὰ προσθέσωμεν ἢ ἀφαιρέσωμεν δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς γράφομεν αὐτοὺς τὸν ἕνα ὑπὸ τὸν ἄλλον οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν κατακόρυφον στήλην*** (γίνεται δὲ τοῦτο, ὅταν αἱ ὑποδιαστολαὶ εὑρίσκονται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην) ***καὶ ἔπειτα ἐκτελοῦμεν τὴν πρᾶξιν ὡς καὶ εἰς τοὺς ἀκεραίους καὶ εἰς τὸ ἐξαγόμενον θέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν ὑπὸ τὴν στήλην τῶν ὑποδιαστολῶν.***

Ποῖος ὁ λόγος τούτου;

π. δ.

$$\begin{array}{r} 51,809 \\ 12,65 \\ 1,0591 \\ \hline 65,5181 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 82,7 \\ 53,138 \\ \hline 29,562 \end{array}$$

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

344) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἀθροίσματα (ἀπὸ μνήμης):

0,3+0,7	4,5+5,5	5,4+7,6
0,15+0,35	0,2+7	7,30+8,70
0,37+0,63	13+21,7	15,60+3,85

345) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἀθροίσματα (γραπτῶς)
62,22+73,8+2,429+45,6+0,287
0,425+3,1418+1,32816+8,42+102,564
74,1+0,7568+300,42+0,785649+48+0.0268
97,72+954,07+105+15,175+13,2+5,0003+0,46160.

346) Ἀφοῦ ἐξώφλησέ τις τρία γραμμάτια ἐκ 3100 δραχμῶν, 2845,65 δρχ. καὶ 4150,4 δρχ. τοῦ ἔμειναν εἰς τὸ ταμεῖόν του ἄλλαι 5075,75 δρχ. Πόσας δραχμὰς εἶχε πρὸ τῆς ἐξοφλήσεως τῶν γραμματίων ;

347) Ἐργάτης τις κερδίζει τὴν 1ην ἡμέραν τῆς ἑβδομάδος 45,75 δρχ., τὴν 2αν 53,35, τὴν 3ην 60 δρχ. Πόσον ἐκέρδισε κατὰ τὴν ἑβδομάδα ταύτην ;

348) Ἐργάτης τις ἐδαπάνησε τὴν 1ην ἡμέραν ἐκ τοῦ ἡμερομισθίου του 35,60 δρχ. καὶ οἰκονόμησε 17,15 δρχ., τὴν 2αν ἐδαπάνησε 38,75 δρχ. καὶ οἰκονόμησε 16,25 δρχ. καὶ τὴν 3ην ἐδαπάνησε 37,8 δρχ. οἰκονομήσας 18,85. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμερομίσθιον ἑκάστης ἡμέρας, πόσον ἐδαπάνησεν ἐν ὅλῳ καὶ πόσον ἐξοικονόμησε κατὰ τὰς τρεῖς ταύτας ἡμέρας.

349) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἀφαιρέσεις (ἀπὸ μνήμης) :

5,45—3	1—0,25	5,20—3,40
18,68—6	4—2,35	17,50—12,65
13,25—8,25	9,48—7,23	0,1—0,01
47,30—20,30	12,80—6,37	0,35—0,035

350) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἀφαιρέσεις (γραπτῶς) :

1—0,008	25,0378—17,127
15—6,072	462—268.846
8,9—3,569	0,005—0,00059
0,75—0,075	1000—775,0998

351) Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ διαφοραί :

160,75—(15,408+3,517+103,64)
1115—(69,07+462,4+56+3,0005)
(3109,8+214,527)—(375,198+2115,0019)

352) Μία ράβδος μεταλλικὴ μήκους 0,875 τοῦ μέτρου θερμαινομένη, ἔχει μῆκος 0,876124 μ. Ποία εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν μηκῶν;

353) Οἱ μαθηταὶ ἑνὸς σχολείου ἠγόρασαν βιβλία διὰ τὸν πλουτισμὸν τῆς βιβλιοθήκης τοῦ σχολείου ἀξίας 875,50 δρχ. Ἐπληρώθησαν δὲ αὗται ἀπὸ τὸ προϊὸν ἐράνου, τὸν ὁποῖον ἕκα-

μαν μεταξύ των καὶ ὁ ὁποῖος ἀπέδωκε κατὰ τάξεις 128,50 δρχ. 140,75 δρ., 170 δρ., 220,60 δρ., 235 δρ. καὶ 300,40 δρ. Τί ποσὸν ἐπερίσσευσεν;

354) Ἐχρεώστει τις εἴς τινα 7105,35 δραχ. καὶ ἔδωκεν εἰς αὐτὸν κατὰ διαφόρους ἐποχὰς τὰ ποσὰ 2125,50 δρχ., 900 δρχ., 1775,75 καὶ 1320,25 δρχ. Πόσας δραχμὰς χρεωστεῖ ἀκόμη;

355) Διὰ τὴν ἀγορὰν οἰκίας ἐπλήρωσέ τις 125000 δρ. καὶ διὰ τὴν ἐπισκευὴν αὐτῆς ἐδαπάνησεν ἀκριβῶς 8164,65· ἀπὸ δὲ τὴν μεταπώλησιν αὐτῆς ἔλαβε κατὰ πρῶτον μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τῶν συμβολαιογραφικῶν ἐξόδων 107500,50 δραχμὰς καὶ ἔπειτα 4332,75 δρχ. Πόσον ἐκέρδισεν;

356) Ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ προσθέσω εἰς τὸν 408,157 διὰ νὰ λάβω τὸν 1000;

357) Ἀπὸ ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ ἀφαιρέσω τὸν 0,97 διὰ νὰ λάβω τὸν 0,00346;

113. ***Πολλαπλασιασμός. Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς σχηματίζομεν τὸ γινόμενον ὡς νὰ μὴ ὑπῆρχον αἱ ὑποδιαστολαί, ἔπειτα χωρίζομεν εἰς τὸ γινόμενον ἀπὸ τὰ δεξιὰ τόσα δεκαδικὰ ψηφία, ὅσα ἔχουσι καὶ οἱ δύο ὁμοῦ.***

Ὁ ἀνωτέρω κανὼν ἐξηγεῖται ἐὰν γράψωμεν τοὺς δύο παράγοντας ὡς κοινὰ κλάσματα καὶ κατόπιν τὸ γινόμενον γράψωμεν ὑπὸ δεκαδικὴν μορφήν.

π. δ. $32,79 \times 0,5$ $\qquad$ $158 \times 1,8$

$$\begin{array}{r} 32,79 \\ 0,5 \\ \hline 16,395 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 158 \\ 1,8 \\ \hline 1264 \\ 158 \\ \hline 284,4 \end{array}$$

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

358) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ γινόμενα (ἀπὸ μνήμης):

$5 \times 0,2$	$5,15 \times 4$	$0,5 \times 0,3$
$25 \times 0,4$	$8,09 \times 7$	$0,7 \times 0,3$
$25 \times 0,08$	$7,25 \times 8$	$0,4 \times 0,15$

359) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ γινόμενα (γραπτῶς):

6253×48 $\qquad$ $625,3 \times 4,8$ $\qquad$ $0,6253 \times 0,48$ $\qquad$ $6,253 \times 0,048$

360) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ γινόμενα :

68,0705×13	5,79×4,45
768×82,003	2,003×1,01
24,5×24×0,3	6,89×0,49×0,02
74,9×4,8×0,6	80,09×7,4×0,015

361) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἐξαγόμενα :

50,26 δρχ. ×4+86,75 δρχ. ×8
19,25 δκ. ×12—9,125 δκ. ×14
(5,28+7,05+0,03)×0,15.
(17+8,23+0,045)×3,2—25,5×2,7.

362) Ἐάν τις οἰκονομῇ καθ' ἡμέραν 25,25 δραχ. πόσας θὰ οἰκονομήσῃ εἰς ἕνα μῆνα καὶ πόσας εἰς ἓν ἔτος ; (ἀπ. 757,50 9216,25)

363) Ἁμαξοστοιχία διανύει εἰς μίαν ὥραν 37,7 χλμ. Πόσα χιλιόμετρα θὰ διανύσῃ εἰς 18,8 ὥρας ; (ἀπ.708,76)

364) Εἶχέ τις 376,4 δρχ. καὶ ἐδαπάνησε τὰ 0,35 αὐτῶν. Πόσας δραχμὰς ἐδαπάνησε καὶ πόσαι τοῦ ἔμειναν ; (ἀπ. 131,74 244,66).

365) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ 0,15 τοῦ ἀριθμοῦ 257,4 καὶ τὰ 0,125 τοῦ ἀριθμοῦ 25,38. (ἀπ. 38,61 3,1725)

366) Ἐπώλησέ τις 53450 πορτοκάλια πρὸς 175,45 τὰ ἑκατόν. Πόσας δραχμὰς εἰσέπραξεν ; (ἀπ. 93778,025)

367) Ἕνας ἔμπορος παρήγγειλε 18 τεμάχια ὑφάσματος ἐκ 42 πήχεων ἕκαστον καὶ πρὸς 118,75 δραχμὰς τὸν πῆχυν. Πόσας δραχμὰς θὰ πληρώσῃ ; (ἀπ. 89775)

368) Διὰ νὰ γίνῃ μία μικρὰ σιδηροδρομικὴ γραμμὴ ἐχρειάσθησαν 1273 σιδηροτροχιαὶ μήκους 3,76 μέτρων ἑκάστη. Ἐὰν δὲ ἕκαστον μέτρον σιδηροτροχιᾶς στοιχίζει 27,45 δρ. πόσον ἐστοίχισαν αἱ χρησιμοποιηθεῖσαι σιδηροτροχιαί ; (ἀπ. 131388,876)

369) Εἰς ἕνα ἐργοστάσιον ἐργάζονται 45 ἐργάται, καθεὶς τῶν ὁποίων λαμβάνει 52,75 δρχ. τὴν ἡμέραν καὶ 63 ἐργάτριαι, καθεμία τῶν ὁποίων λαμβάνει τὴν ἡμέραν 38,25. Πόσαι δραχμαὶ πληρώνονται δι' ἡμερομίσθια μιᾶς ἡμέρας ; (ἀπ. 4783,50)

370) Ὁ ἀὴρ εἶναι 770 φορὰς ἐλαφρότερος ἴσου ὄγκου ὕδατος καὶ ὁ ὑδράργυρος 13,598 φορὰς βαρύτερος τοῦ ὕδατος. Ποσάκις ὁ ὑδράργυρος εἶναι βαρύτερος τοῦ ἀέρος ; (ἀπ. 10470,46)

371) Ὁ ἦχος ἔχει εἰς τὸν ἀέρα ταχύτητα 337,118 μέτρα κατ 1″, ἐνῷ ἡ ταχύτης εἰς τὸ ὕδωρ αὐξάνει κατὰ 1179,912 μέτρ εἰς τὸ 1″. Πόσον διάστημα διατρέχει ὁ ἦχος εἰς τὸ ὕδωρ, εἰς 2,5″ (ἀπ. 3792,575)

114. ***Διαίρεσις, Διαίρεσις δεκαδικοῦ δι' ἀκεραίου.*** Ἔστω ἡ διαίρεσις τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ 21,879 διὰ τοῦ ἀκεραίου 12

Ἀλλ' εἶναι $21,879 : 12 = \frac{21879}{1000} : 12 = \frac{21879}{12000} = 21879 : 12000$

Ἀλλ' ἐπειδὴ $12000 = 12 \times 1000$, εἶναι φανερόν ὅτι, ἀντὶ νὰ διαιρέσωμεν τὸν 21879 διὰ μιᾶς διὰ 12000, δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν αὐτὸν διὰ 12 καὶ ἔπειτα τὸ εὑρεθὲν πηλίκον διὰ 1000· οὕτω δ ἔχομεν $21879 : 12 = 1823\frac{1}{4}$, $1823\frac{1}{4} : 1000 = 1,823 + \frac{1}{4000}$.

ἂν δέ, ἀντὶ τοῦ ἀκριβοῦς τούτου πηλίκου, λάβωμεν ὡς πηλίκο μόνον τὸ 1,823, θὰ κάμωμεν λάθος μικρότερον τοῦ ἑνὸς χιλιο στοῦ, ἤτοι θὰ ἔχωμεν τὸ πηλίκον μὲ προσέγγισιν ἑνὸς χιλιοστοῦ.
Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἑπομένως ἕπεται :

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν δεκαδικὸν δι' ἀκεραίου, διαιροῦμε ὡς ὁ διαιρετέος νὰ ἦτο ἀκέραιος καὶ χωρίζομεν ἔπειτα εἰ τὸ πηλίκον τόσα δεκαδικὰ ψηφία, ὅσα τοιαῦτα ἔχει ὁ διαι ρετέος. Τὸ πηλίκον δὲ τοῦτο θὰ εἶναι μὲ προσέγγισιν μιᾶ δεκαδικῆς μονάδος τῆς τάξεως τοῦ τελευταίου ψηφίου το (ἂν μείνῃ ὑπόλοιπον).

π. δ.

$$\begin{array}{r|l} 1,58 & 7 \\ \cline{2-2} 18 & 0,22 \\ 4 & \end{array}$$

μὲ προσέγγισιν ἑνὸς ἑκατοστοῦ.

$$\begin{array}{r|l} 0,015 & 3 \\ \cline{2-2} & 0,005 \end{array}$$

ἀκριβές.

Σημ. Τὴν διαίρεσιν, ἥτις ἀφίνει ὑπόλοιπον, δυνάμεθα ν ἐξακολουθήσωμεν, τρέποντες αὐτὸ εἰς μονάδας τῆς ἀμέσω κατωτέρας τάξεως καὶ πρὸς τοῦτο γράφομεν ἓν 0 δεξιὰ τοῦ ὑπο λοίπου. Οὕτω δὲ προχωροῦντες, ἐὰν δὲν εὕρωμεν ὑπόλοιπον 0 δυνάμεθα νὰ ἐξακολουθήσωμεν τὴν διαίρεσιν ὅσον θέλομεν κα ἑπομένως νὰ προσδιορίσωμεν τὸ πηλίκον μὲ ὅσην προσέγγισι θέλομεν.

π. χ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως 125,75 : 7 μ προσέγγισιν 0,001.

```
125,75 | 7
55       17,964
 67
  45
   30
    2
```

Ὁμοίως τῆς 1,6038 : 6 μὲ προσέγγισιν 0,01.

```
1,6038 | 6
16       0,26
 40
  4
```

ἢ ἀκριβέστερον 0,27, διότι τὸ κλάσμα $\frac{4}{6}$ ποὺ παραλείπομεν ὑπερβαίνει τὸ ἥμισυ.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

372) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ διαιρέσεις (ἀπὸ μνήμης):

8,46 : 2	0,64 : 8	7,2 : 9
12,69 : 3	0,035 : 7	5,6 : 8
25,75 : 5	0,081 : 9	12,1 : 11

373) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ διαιρέσεις (γραπτῶς):

173,52 : 9	0,3465 : 231
5,0024 : 18	27,69 : 213
83,5128 : 36	359,7 : 654
5,705 : 35	9,765 : 1050

374) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ πηλίκα τῶν κάτωθι διαιρέσεων μὲ προσέγγισιν 0,001:

0,566 : 21	3,4 : 701	1,70342 : 786
73,18 : 137	76,5 : 859	28,8778 : 3567

375) Ὁμοίως τῶν κάτωθι διαιρέσεων κατὰ προσέγγισιν 0,0001:

24,8 : 7	206,7 : 419	80,50 : 144
142,56 : 23	0,572 : 859	224,1 : 4728

376) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἐξαγόμενα:

$$(5078,4+7,065+75,61+478,3) : 16$$
$$(75,68+42,528+35,7-71,256) : 48$$

377) Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν εἶναι 1310,25 καὶ ὁ εἷς ἐξ αὐτῶν εἶναι ὁ 15. Ποῖος εἶναι ὁ ἄλλος;

378) Οἱ 39 μαθηταὶ μιᾶς τάξεως ἔκαμον ἔρανον μεταξύ των ὑπὲρ ἑνὸς πτωχοῦ καὶ συνέλεξαν 487.50 δρχ. Πόσας δραχμὰς συνεισέφερεν ἕκαστος μαθητής ; (ἀπ. 12,50).

379) Ἠγόρασέ τις ἕνα σερβίτσιο φαγητοῦ ἀντὶ 2636,25 δρ. Ἐξώφλησε δὲ αὐτὸ διὰ μηνιαίων δόσεων εἰς 15 μῆνας. Πόσον ἐπλήρωνε τὸν μῆνα ; (ἀπ. 175,75).

380) Εἰς ἕνα τελωνεῖον εἰσήχθησαν εἰς ἕνα ἔτος ἐμπορεύματα βάρους 65728,476 χιλιογράμμων. Πόσα χιλιόγραμμα ἀντιστοιχοῦν εἰς ἕνα μῆνα ; (ἀπ. 5477,373).

381) Ἐργοστασιάρχης ἐπλήρωσε δι᾽ ἐργασίαν μιᾶς ἡμέρας εἰς 7 ὁμάδας ἐξ 9 ἐργατῶν ἑκάστην 3008,25 δρχ. Πόσον εἶναι τὸ ἡμερομίσθιον ἑνὸς ἐργάτου ; (ἀπ. 47,75).

382) Βιβλίον τι ἔχει 320 σελίδας καὶ τὸ πάχος αὐτοῦ, ὅταν σφιχθῇ καλῶς, εἶναι 0,015 τοῦ μέτρου. Πόσον εἶναι τὸ πάχος ἑκάστου φύλλου ; (Τὰ φύλλα ὑποθέτω, ὅτι ἔχουν ὅλα ἴσον πάχος). (ἀπ. 0,015 : 160 ἤτοι 0,000094).

383) Τρεῖς ἀδελφοὶ ἐμοίρασαν ἕνα κτῆμα ἐκτάσεως 185,532 στρεμμάτων καὶ ὁ μὲν πρῶτος ἔλαβε τὸ $\frac{1}{3}$ αὐτῶν, ὁ δὲ δεύτερος τὸ $\frac{1}{2}$ καὶ ὁ τρίτος τὸ ὑπόλοιπον. Πόσα στρέμματα ἔλαβεν ὁ καθείς ; ἀπ. ὁ γ΄ ἔλαβε 30,922).

115. ***Διαίρεσις δεκαδικοῦ διὰ δεκαδικοῦ.***

Ἔστω ἡ διαίρεσις 15,897 : 3,1. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν διαιρετέον καὶ διαιρέτην ἐπὶ 10, θὰ ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν 158,97 : 31, ἤτοι δεκαδικὸν δι᾽ ἀκεραίου.

Ὁμοίως, ὅταν ἔχωμεν 0,37 : 1,869, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν διαιρετέον καὶ διαιρέτην ἐπὶ 1000 θὰ ἔχωμεν 370 : 1869.

Ὅθεν, ***διὰ νὰ διαιρέσωμεν δεκαδικὸν διὰ δεκαδικοῦ καθιστῶμεν πρῶτον τὸν διαιρέτην ἀκέραιον καὶ ἔπειτα μεταθέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν τοῦ διαιρετέου τόσας θέσεις πρὸς τὰ δεξιά, ὅσα δεκαδικὰ ψηφία εἶχεν ὁ διαιρέτης. Διαιροῦμεν δὲ οὕτω δεκαδικὸν ἢ ἀκέραιον δι᾽ ἀκεραίου.***

π. δ. 1,51 : 2,61 Διαιρ. Διαιρέτης

151	261
1510	0.57...
2050	
223	

Τὸ πηλίκον εἶναι 0,57 ἢ μᾶλλον 0,58 μὲ προσέγγισιν $\frac{1}{100}$.

Σημ. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ πραγματικὸν ὑπόλοιπον μιᾶς τοιαύτης διαιρέσεως, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸ εὑρεθὲν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, ἐφ᾽ ὃν ἐπολλαπλασιάσθη ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

384) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ πηλίκα (ἀπὸ μνήμης):

8 : 0,2	1 : 0,005	0,16 : 0,4
27 : 0,3	0,35 : 0,07	0,25 : 0,5
24 : 0,04	0,64 : 0,08	1,22 : 0,002
35 : 0,07	0,125 : 0,025	4,04 : 0,004

385) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ πηλίκα (γραπτῶς):

356 : 89	0,0356 : 0,89
35,6 : 890	0,356 : 0,0089

386) Ὁμοίως τά:

169 : 0,013	819 : 0,2457	2345,6 : 0,06
81 : 0,0162	8675,6 : 0,004	0,00027 : 11,07
2875 : 2,875	8,5604 : 0,012	354,293 : 6,005
91 : 0,130	32,85 : 0,075	151,416 : 4,206

387) Ἐργάτης τις λαμβάνει δι᾽ ἑκάστην ὥραν ἐργασίας 8,75 δρ. Πόσας ὥρας πρέπει νὰ ἐργασθῇ διὰ νὰ λάβῃ 638,75 δρ.; (ἀπ. 73).

388) Διὰ νὰ μεταφέρωσιν ὕδωρ ἔκ τινος πηγῆς εἰς ἀπόστασιν 2085 μέτρων ἐχρησιμοποίησαν σωλῆνας μήκους 0,75 τοῦ μέτρου. Πόσους τοιούτους σωλῆνας ἐχρησιμοποίησαν; (ἀπ. 2780)

389) Ἕνα αὐτοκίνητον διέτρεξεν εἰς 5,75 ὥρας διάστημα 222,065 χιλιομέτρων. Πόσα χιλιόμετρα διέτρεξεν εἰς 1 ὥραν; (ἀπ. 38,62)

390) Διὰ ποίου ἀριθμοῦ πρέπει νὰ διαιρέσω τὸν 891,28 διὰ νὰ λάβω πηλίκον 34,28; (ἀπ. 26)

391) Ἐπὶ ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν 634,12 διὰ νὰ λάβωμεν γινόμενον 35510,72; (ἀπ. 56)

392) Τὸ γινόμενον τοῦ ἀριθμοῦ 8,2 ἐπὶ ἄλλον ἀριθμὸν εἶναι 0,08036. Ποῖος εἶναι ὁ ἄλλος; (ἀπ. 0,0098)

393) Εἶχέ τις οἶνον, τὸ ἥμισυ τοῦ ὁποίου ἐπώλησε πρὸς 7,86 δρ. τὴν ὀκᾶν καὶ ἔλαβε 884,25 δρ. Πόσον οἶνον εἶχεν; (ἀπ. 225)

394) Ἠγόρασέ τις ὕφασμα πρὸς 48,75 δρχ. τὸν πῆχυν καὶ μετεπώλησεν αὐτὸ πρὸς 57 δρχ. τὸν πῆχυν, ἐκέρδισε δὲ οὕτω

ἐν ὅλῳ 693 δρ. Ἐκ πόσων πήχεων ἀπετελεῖτο τὸ ὕφασμα ; (ἀπ. 84)

395) Ποία εἶναι ἡ πραγματικὴ ἀξία ἑνὸς χαρτονομίσματος τῶν 1000 δραχμῶν, ὅταν τὸ χρυσοῦν εἰκοσόφραγκον ἰσοδυναμεῖ μὲ 400,40 χαρτίνας δραχμάς ; $\left(\text{Ἀπ.}\ \frac{20 \times 1000}{400,4}\right)$

396) Ἕνας οἰκογενειάρχης ἐξοδεύει 1800 δραχμὰς τὸν μῆνα δι᾽ ἐνοίκιον, 82,50 δρχ. τὴν ἡμέραν διὰ τρόφιμα καὶ 23,75 δρ. τὴν ἡμέραν δι᾽ ἄλλα ἔξοδα. Πόσας ἡμέρας θὰ περάσῃ μὲ 7481,25 δρχ. (ἀπ. 45)

116. ***Τροπὴ κοινοῦ κλάσματος εἰς δεκαδικόν.***

Ἐπειδὴ πᾶς ἀκέραιος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς δεκαδικὸς δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν καὶ ἀκέραιον δι᾽ ἀκεραίου κατὰ τὸν τρόπον τῆς § 114. Οὕτω διὰ τὴν διαίρεσιν 17 : 20 λαμβάνομεν

$$\begin{array}{r|l} 17 & 20 \\ \hline 170 & 0,85 \\ 100 & \\ 0 & \end{array}$$

Ἀλλ᾽ ἐπειδὴ εἶναι καὶ $17 : 20 = \frac{17}{20}$, ἔπεται $\frac{17}{20} = 0,85$.

Ὥστε ***κοινὸν κλάσμα τρέπεται εἰς δεκαδικόν*** · ***γίνεται δὲ ἡ τροπὴ αὕτη, ὅταν διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμητήν του διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του.***

π. δ. $\frac{7}{8} = 0,875$ $\begin{array}{r|l} 70 & 8 \\ \hline 60 & 0,875 \\ 40 & \\ 0 & \end{array}$ $\frac{18}{5} = 3,6$ $\begin{array}{r|l} 18 & 5 \\ \hline 30 & 3,6 \\ 0 & \end{array}$

$\frac{9}{11} = 0,8181\ldots$ $\begin{array}{r|l} 90 & 11 \\ \hline 20 & 0,8181\ldots \\ 90 & \\ 20 & \\ 9 & \end{array}$

$\frac{27}{55} = 0,49090\ldots$ $\begin{array}{r|l} 270 & 55 \\ \hline 500 & 0,49090\ldots \\ 500 & \\ 50 & \end{array}$

117. ***Περιοδικὰ δεκαδικὰ κλάσματα.*** Κατὰ τὴν τροπὴν κοινῶν κλασμάτων εἰς δεκαδικὰ παρατηροῦμεν, ὅτι ἄλλα μὲν τρέπονται εἰς ἀκριβῆ δεκαδικὰ (ὅπως ἀνωτέρω τὰ 1ον καὶ 2ον)

ἄλλα δὲ τρέπονται εἰς δεκαδικά, τῶν ὁποίων τὰ δεκαδικὰ ψηφία εἶναι ἀφ᾽ ἑνὸς μὲν **ἄπειρα,** ἀφ᾽ ἑτέρου δὲ ψηφία τινὰ ἐπαναλαμβάνονται τὰ αὐτὰ καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν (ὅπως τὰ 3ον καὶ 4ον). Τὰ τελευταῖα ταῦτα λέγονται ***περιοδικὰ δεκαδικὰ κλάσματα***, τὸ δὲ σύνολον τῶν ἐπαναλαμβανομένων ψηφίων λέγεται ***περίοδος*** καὶ ὅταν μὲν ἡ περίοδος ἀρχίζῃ ἀμέσως μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν τὸ περιοδικὸν λέγεται ***ἁπλοῦν***, ὅταν δὲ ὄχι, λέγεται ***μικτόν.***

Οὕτω τὸ κλάσμα 0,8181.... εἶναι περιοδικὸν ἁπλοῦν, ἡ δὲ περίοδος αὐτοῦ εἶναι 81· τὸ δὲ 0,49090 . . . . εἶναι περιοδικὸν μικτὸν μὲ περίοδον 90 καὶ μὲ μὴ περιοδικὸν μέρος 4.

118. ***Εὕρεσις τοῦ κοινοῦ κλάσματος, ἐξ οὗ παράγεται δοθὲν περιοδικὸν κλάσμα :*** α΄) ***ὅταν εἶναι ἁπλοῦν περιοδικόν, τὸ δεκαδικὸν μέρος του παράγεται ἐκ κοινοῦ κλάσματος, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀριθμητὴν μὲν μίαν περίοδον, παρονομαστὴν δὲ τὸν ἀριθμόν, ὅστις ἔχει τόσα 9, ὅσα ψηφία ἔχει ἡ περίοδος.***

Οὕτω εἶναι $0,454545.... = \frac{45}{99} = \frac{5}{11}$. Καὶ πράγματι, τρέποντες τὸ κοινὸν κλάσμα $\frac{5}{11}$ εἰς δεκαδικόν, εὑρίσκομεν, ὅτι $\frac{5}{11} = 0,454545 \ldots$ Ὁμοίως εἶναι $1,333\ldots = 1\frac{3}{9} = 1\frac{1}{3}$.

β΄) ***Ὅταν εἶναι μικτὸν περιοδικὸν ἀνάγομεν τοῦτο εἰς ἁπλοῦν.*** Διότι ἔστω π. χ. τὸ 0,4515151... Ἐὰν μεταθέσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν μίαν θέσιν πρὸς τὰ ἐμπρός, λαμβάνομεν τὸ ἁπλοῦν περιοδικὸν 4,515151.., τὸ ὁποῖον παράγεται ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ $4\frac{51}{99}$, ἤτοι ἐκ τοῦ κοινοῦ κλάσματος $\frac{4\times99+51}{99}$. Ἑπομένως τὸ δοθὲν μικτὸν προκύπτει ἐκ τοῦ $\frac{4\times99+51}{990}$ (τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν διαιροῦντες τὸ $\frac{4\times99+51}{99}$ διὰ 10).

Ὁμοίως, ἐὰν ἔχωμεν τὸ μικτὸν 3,75427427.... καθιστῶμεν αὐτὸ πρῶτον ἁπλοῦν 375,427427..... Τοῦτο προκύπτει ἐκ τοῦ $375\frac{427}{999}$, ἤτοι ἐκ τοῦ κοινοῦ κλάσματος $\frac{375\times999+427}{999}$. Ἐὰν δὲ τὸ κοινὸν αὐτὸ κλάσμα διαιρέσωμεν διὰ 100, εὑρίσκομεν τὸ κοινὸν κλάσμα, ἐκ τοῦ ὁποίου παράγεται τὸ δοθὲν μικτόν, ἤτοι τὸ $\frac{375\times999+427}{99900}$.

Ὅθεν, ***διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ μικτὸν κλάσμα, ἐξ οὗ παράγεται δοθὲν μικτὸν περιοδικόν, μεταθέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν πρὸς τὰ ἐμπρός, ὥστε νὰ καταστήσωμεν αὐτὸ ἁπλοῦν, εὑρίσκομεν τὸν ἀριθμόν, ἐξ οὗ παράγεται τὸ ἁπλοῦν τοῦτο, καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν διὰ 10, ἂν μίαν θέσιν μεταθέσωμεν τὴν ὑποδιαστολήν, διὰ 100, ἂν δύο κ.ο.κ.***

Ἀσκήσεις.

397) Νὰ τραπῶσιν εἰς δεκαδικὰ τὰ κοινὰ κλάσματα :

$\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{11}{10}$, $\frac{9}{25}$, $\frac{19}{32}$, $\frac{13}{40}$, $\frac{27}{64}$, $\frac{111}{125}$.

398) Ὁμοίως τὰ $2\frac{3}{8}$, $3\frac{3}{12}$, $7\frac{9}{20}$, $11\frac{21}{80}$, $5\frac{111}{200}$.

399) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ κοινὰ κλάσματα, ἐκ τῶν ὁποίων παράγονται τὰ κάτωθι περιοδικά :

0,373737...	0,1636363...
2,513513513...	0,253333...
3,185185185...	4,17262626...
2,692307692307...	62,47513513513...

400) Νὰ προστεθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ $\frac{3}{4}$ καὶ 0,275 ὡς καὶ οἱ $\frac{\ }{5}$, 0,08 καὶ $7\frac{5}{8}$.

401) Νὰ ἀφαιρεθῇ ὁ $5\frac{3}{8}$ ἀπὸ τοῦ 6,065 καὶ ὁ 4,6 ἀπὸ τοῦ $5\frac{1}{25}$.

402) Νὰ πολλαπλασιασθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ α) $2\frac{1}{2}$ καὶ 4,8 β) $5\frac{3}{16}$ καὶ 2,7 καὶ γ) $2\frac{2}{3}$ καὶ 1,6.

403) Νὰ διαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 59763,73 εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε τὸ ἓν νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἄλλου κατὰ $75\frac{3}{4}$.

404) Νὰ διαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 868,302 εἰς τρία μέρη τοιαῦτα, ὥστε τὸ πρῶτον νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ δευτέρου κατὰ 57,35 καὶ τὸ δεύτερον μεγαλύτερον τοῦ τρίτου κατὰ $28\frac{3}{8}$.

405) Πωλήσας τις $50\frac{3}{4}$ ὀκάδας κριθῆς πρὸς $3\frac{1}{2}$ τὴν ὀκᾶν, ἐζημιώθη 40,6 δρ. Πρὸς πόσον εἶχεν ἀγοράσει τὴν κριθήν ;

ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΡΙΖΗΣ

119. ***Ἔννοια τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης.***

Γνωρίζομεν, ὅτι τετράγωνον ἀριθμοῦ τινος λέγεται τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του. Οὕτω ὁ 25 εἶναι τὸ τετράγωνον τοῦ 5· τότε ὁ 5 λέγεται τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 25.

Ὅθεν ***τετραγωνικὴ ῥίζα δοθέντος ἀριθμοῦ λέγεται ὁ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον ἰσοῦται μὲ τὸν δοθέντα.***

Π. χ. τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 81 εἶναι ὁ 9, διότι $9^2=81$.

Τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν παριστῶμεν διὰ τοῦ σημείου $\sqrt{}$, τὸ ὁποῖον λέγεται ῥιζικόν. Οὕτω $\sqrt{49}$ σημαίνει τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ 49, εἶναι δὲ $\sqrt{49}=7$.

Ἀλλὰ $\sqrt{58}$ δὲν ὑπάρχει, διότι δὲν εὑρίσκεται οὔτε ἀκέραιος ἀριθμὸς οὔτε κλάσμα, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸν 58· τότε εὑρίσκομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν αὐτοῦ κατὰ προσέγγισιν, π.χ. μονάδος· ***λέγεται δὲ τετραγωνικὴ ῥίζα ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν μονάδος ὁ μέγιστος ἀκέραιος, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον χωρεῖ ὁ ἀριθμός·*** οὕτω $\sqrt{58}=7$ κατὰ προσέγγισιν μονάδος, διότι $7^2=49$ (καὶ χωρεῖ ὁ 49 εἰς τὸν 58) ἐνῷ $8^2=64$ (ὁ δὲ 64 δὲν χωρεῖ εἰς τὸν 58). Ὁμοίως εἶναι $\sqrt{17}=4$ κατὰ προσέγγισιν μονάδος.

Ἄσκησις.

406) Νὰ εὑρεθῇ ἡ $\sqrt{}$ τῶν ἀριθμῶν 1, 4, 9, 16, 36, 64, 100, 2, 15, 30, 42, 60, 71, 90, 98.

Ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.

120. Ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα, ἡ ἀκριβὴς ἢ ἡ κατὰ προσέγγισιν μονάδος, ἀκεραίων ἀριθμῶν μικροτέρων τοῦ 100 εἴδομεν, ὅτι εἶναι μικροτέρα τοῦ 10 καὶ εὑρίσκεται ἀμέσως ἀπὸ μνήμης.

Τώρα θὰ εὕρωμεν τὴν $\sqrt{}$ ἀριθμῶν ἀκεραίων μεγαλυτέρων τοῦ 100. Π. χ. ἔστω πρὸς εὕρεσιν ἡ $\sqrt{}$ 1) τοῦ 250^2· αὕτη εἶναι 250, διότι $250\times250=250^2$.

2) τοῦ 145^4· αὕτη εἶναι 145^2, διότι $145^2\times145^2=145^4$.

3) τοῦ $1225=5^2\times7^2$· αὕτη εἶναι 5×7, διότι $(5\times7)\times$ $\times(5\times7)=5^2\times7^2$.

4) τοῦ $7056 = 2^4 \times 3^2 \times 7^2$· αὕτη εἶναι $2^2 \times 3 \times 7$, διότι $(2^2 \times 3 \times 7) \times (2^2 \times 3 \times 7) = 2^4 \times 3^2 \times 7^2$.

5) τοῦ 149^3 δὲν ὑπάρχει ἀκριβὴς $\sqrt{}$, διότι ὁ μὲν 149 εἶναι πρῶτος ἀριθμός, ὁ δὲ ἐκθέτης περιττός.

121. Ὅταν δὲν ὑπάρχῃ ἀκριβὴς $\sqrt{}$ ἢ ὅταν δὲν θέλωμεν νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν $\sqrt{}$ διὰ τῆς ἀναλύσεως τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ εἰς πρώτους παράγοντας, ἐξάγομεν αὐτὴν ἢ ἀκριβῶς ἢ κατὰ προσέγγισιν μονάδος διὰ τῆς ἑξῆς πράξεως :

Ἔστω π. χ. ὅτι ζητεῖται ἡ $\sqrt{3854}$.

$$
\begin{array}{r|l}
38'54 & \;\;62 \\ \hline
36 & 122 \\
\hline 25'4 & \;\;\;\;2 \\ \cline{2-2}
24'4 & 224 \\ \hline
10 &
\end{array}
\qquad 244\sqrt{}
$$

Πρὸς τοῦτο α΄) χωρίζομεν τὸν ἀριθμὸν εἰς διψήφια τμήματα, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὰς ἁπλᾶς μονάδας β΄) ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ πρώτου πρὸς τὰ ἀριστερὰ τμήματος, ἤτοι $\sqrt{38} = 6$, ἡ ὁποία θὰ εἶναι τὸ πρῶτον ψηφίον τῆς ζητουμένης ρίζης, γ΄) τὸ τετράγωνον τοῦ πρώτου ψηφίου τῆς ρίζης ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ τμήματος, ἐκ τοῦ ὁποίου εὑρέθη $(38-36)$ καὶ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου καταβιβάζομεν τὸ ἑπόμενον τμῆμα, ὅτε σχηματίζεται ὁ ἀριθμὸς 254, δ) τοῦ ἀριθμοῦ τούτου ἀποχωρίζομεν τὰς ἁπλᾶς μονάδας καὶ διαιροῦμεν τὰς δεκάδας του διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ εὑρεθέντος ψηφίου τῆς ρίζης $(25 : 12 = 2)$, ε) διὰ νὰ δοκιμάσωμεν, ἂν τὸ πηλίκον τῆς τελευταίας ταύτης διαιρέσεως εἶναι τὸ δεύτερον ψηφίον τῆς ρίζης, γράφομεν αὐτὸ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρέτου αὐτῆς (τοῦ 12) καὶ τὸν οὕτω προκύπτοντα ἀριθμὸν (τὸν 122) πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸ ἴδιον πηλίκον 2, τὸ δὲ γινόμενον (244) ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 254. Τὸ ὑπόλοιπον εἶναι 10 καὶ λέγεται ὑπόλοιπον τῆς ὅλης πράξεως, τὸ ὁποῖον δὲν δύναται νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ διπλασίου τῆς εὑρεθείσης τετραγωνικῆς ρίζης. Δηλαδὴ εἶναι $3854 = (62)^2 + 10$ καὶ ἑπομένως $\sqrt{3854} = 62$ κατὰ προσέγγισιν μονάδος.

Παρατηρήσεις. 1) Ἐὰν τὸ γινόμενον, ὅπερ σχηματίζεται κατὰ τὰ ἀνωτέρω (ε) δὲν ἀφαιρῆται ἀπὸ τὸν σχηματισθέντα ἀριθμόν, τότε δοκιμάζομεν κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον ψηφίον κ. ο. κ. ἀλλὰ ἐάν, ἀφαιρούμενον, δίδει ὑπόλοιπον μεγαλύτερον τοῦ διπλασίου τοῦ ἀριθμοῦ, τὸν ὁποῖον κάμνουσιν ὅλα τὰ εὑρεθέντα ὡς ψηφία τῆς ρίζης, δοκιμάζομεν τὸ κατὰ μονάδα μεγαλύτερον ψηφίον κ. ο. κ.

2) Ἂν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ἀναλύεται εἰς διψήφια τμήματα περισσότερα τῶν δύο, τότε διὰ μὲν τὸ πρῶτον τμῆμα ἐκτελοῦμεν τὰ τοῦ ἐδ. β, διὰ δὲ τὰ λοιπὰ τμήματα μέχρι τοῦ τελευταίου ἐφαρμόζομεν ὅσα ἐκεῖ εἴπομεν διὰ τὸ δεύτερον τμῆμα. Π. χ. $\sqrt{93636} = 306$ ἀκριβής, $\sqrt{7492767} = 2737$ κατὰ προσέγγισιν 1·

9.36.36	306
9	606
0 3636	6
3636	3636
0	

7.49.27.67	2737			
4	48	47	543	5467
349	8	7	3	7
329	384	329	1629	38269
2027				
1629				
39867				
38269				
1598				

122. ***Τετραγωνικὴ ρίζα κλασματικῶν ἀριθμῶν.***

1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ $\sqrt{\frac{9}{16}}$. ἐπειδὴ $\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$, ἕπεται ὅτι $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4}$.

2) Νὰ εὑρεθῇ ἡ $\sqrt{4\frac{21}{25}}$.

Ἔχομεν $\sqrt{4\frac{21}{25}} = \sqrt{\frac{121}{25}} = \frac{\sqrt{121}}{\sqrt{25}} = \frac{11}{5}$.

3) Νὰ εὑρεθῇ ἡ $\sqrt{6\frac{1}{25}}$.

Ἔχομεν $\sqrt{6\frac{1}{25}} = \sqrt{\frac{151}{25}} = \frac{\sqrt{151}}{\sqrt{25}} = \frac{12}{5}$ προσ. $\frac{1}{5}$.

Σημ. Ἐὰν ἐζητεῖτο ἡ $\sqrt{6\frac{1}{25}}$ κατὰ προσέγγισιν 1, θὰ εἴχομεν $\sqrt{6\frac{1}{25}} = 2$, δηλαδὴ τὴν $\sqrt{}$ τοῦ ἀκεραίου μέρους του.

4) Νὰ εὑρεθῇ ἡ $\sqrt{\frac{4}{7}}$.

Εἰς τὸ παράδειγμα τοῦτο, ἐπειδὴ ὁ παρονομαστὴς δὲν εἶνα[ι] τέλειον τετράγωνον, πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους τοῦ δοθέντο[ς] κλάσματος ἐπὶ τὸν παρονομαστήν του διὰ νὰ γίνῃ οὗτος τέλειο[ν] τετράγωνον· ἔχομεν δὲ οὕτω :

$$\sqrt{\frac{7}{4}} = \sqrt{\frac{28}{49}} = \frac{5}{7} \text{ προσ. } \frac{1}{7}.$$

123. ***Τετραγωνικὴ ρίζα δεκαδικῶν ἀριθμῶν.***

1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ $\sqrt{6,25}$. Ἔχομεν $\sqrt{6,25} = \sqrt{\frac{625}{100}} = \frac{25}{10} = 2,$[5]

2) Νὰ εὑρεθῇ ἡ $\sqrt{0,0004}$.

Ἔχομεν $\sqrt{0,0004} = \sqrt{\frac{4}{10000}} = \frac{2}{100} = 0,02$

3) Νὰ εὑρεθῇ ἡ $\sqrt{0,004}$. Ἔχομεν :

$$\sqrt{0,004} = \sqrt{\frac{4}{1000}} = \sqrt{\frac{40}{10000}} = \frac{6}{100} = 0,06 \text{ προσ. } \frac{1}{100}.$$

124. ***Τετραγωνικὴ ρίζα ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν κλασματικῆς μονάδος.***

π. δ. α) Νὰ εὑρεθῇ ἡ $\sqrt{45}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$.

Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν καὶ διαιροῦμεν τὸν 45 διὰ το[ῦ] τετραγώνου τοῦ παρονομαστοῦ τῆς προσεγγίσεως, ἔχομεν δὲ οὕτ[ω]

$\sqrt{45} = \sqrt{\frac{4500}{100}} = \frac{\sqrt{4500}}{\sqrt{100}} = \frac{67}{10} = 6,7$ πρ. $\frac{1}{10}$ (67 εἶναι ἡ $\sqrt{4500}$ κατὰ προσέγγισιν 1).

β) Νὰ εὑρεθῇ ἡ $\sqrt{3}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{100}$

ἔχομεν $\sqrt{3} = \sqrt{\frac{30000}{10000}} = \frac{\sqrt{30000}}{\sqrt{10000}} = \frac{173}{100} = 1,73.$

γ) Νὰ εὑρεθῇ ἡ $\sqrt{27,5434}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$

ἔχομεν $\sqrt{27,5434} = \sqrt{\frac{2754,34}{100}} = \frac{\sqrt{2754,34}}{\sqrt{100}} = \frac{\sqrt{2.54}}{\sqrt{100}} = 5,2.$

δ) Νὰ εὑρεθῇ ἡ $\sqrt{5}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{7}$.

ἔχομεν $\sqrt{5} = \sqrt{\frac{5 \times 49}{49}} = \sqrt{\frac{245}{49}} = \frac{15}{7}$.

ε) Νὰ εὑρεθῇ ἡ $\sqrt{\frac{12}{7}}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{100}$.

ἔχομεν $\sqrt{\frac{12}{7}} = \sqrt{\frac{\frac{12}{7} \times 10000}{10000}} = \sqrt{\frac{17143}{10000}} = 1,30$.

125. ***Ἀσύμμετροι ἀριθμοί.*** Ἔστω ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς 2· ἡ $\sqrt{2}$ δὲν εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός, ἀφοῦ λοιπὸν δὲν εἶναι αὕτη ἀκέραιος ἀριθμός, λέγομεν, ὅτι δὲν εἶναι οὔτε κλάσμα, διότι, ἂν ἦτο κλάσμα, π.χ. $\frac{\alpha}{\beta}$, τὸ ὁποῖον ὑποθέτομεν ἀνάγωγον, θὰ εἴχομεν $\sqrt{2} = \frac{\alpha}{\beta}$ ἢ $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 = 2$, ἤτοι $\frac{\alpha^2}{\beta^2} = 2$. Ἀλλ' ἡ τελευταία αὕτη ἰσότης δεικνύει, ὅτι ὁ α^2 διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ β^2 καὶ δίδει πηλίκον 2· ἀλλὰ διὰ νὰ συμβῇ αὐτὸ πρέπει οἱ πρῶτοι παράγοντες τοῦ β^2 ἢ τοῦ $\beta \times \beta$ νὰ περιέχωνται εἰς τοὺς πρώτους παράγοντας τοῦ α^2 ἢ τοῦ $\alpha \times \alpha$, δηλαδὴ οἱ παράγοντες τοῦ β νὰ περιέχωνται εἰς τοὺς παράγοντας τοῦ α· ἀλλὰ αὐτὸ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ συμβῇ, διότι οἱ α καὶ β ὑπετέθησαν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἤτοι, ὅτι ὁ α δὲν περιέχει οὐδένα πρῶτον παράγοντα τοῦ β· ἐπομένως ὁ β^2 δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ διαιρῇ τὸν α^2 καὶ νὰ δίδῃ ἀκέραιον πηλίκον 2.

Ὅθεν, συνάγομεν ὅτι ***ὁ 2, ὡς καὶ πᾶς ἀκέραιος ἀριθμός, ὁ ὁποῖος δὲν ἔχει τετραγωνικὴν ῥίζαν ἀκέραιον ἀριθμόν, δὲν ἔχει ὡς τοιαύτην οὐδὲ κλάσμα.***

Ἡ $\sqrt{2}$ (ὅπως καὶ ἡ $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ κτλ.), ἡ ὁποία δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἐκφρασθῇ δι' οὐδενὸς τῶν ἀκεραίων ἢ κλασματικῶν ἀριθμῶν, θεωρεῖται ὡς νέος ἀριθμός, ὅστις λέγεται ***ἀσύμμετρος.***

Οὕτω εἰς τοὺς ἤδη γνωστοὺς ἀριθμοὺς προσαρτῶνται νέοι ἀριθμοί, οἱ ἀσύμμετροι, χωρὶς νὰ πάθωσιν οὐδεμίαν μεταβολὴν αἱ ἀρχικαὶ ἰδιότητες τῶν πράξεων. Οὗτοι, τρεπόμενοι εἰς δεκαδικούς, ἔχουσιν ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία μὴ περιοδικά· οὕτω ὁ ἀριθμὸς 2.2360679779 . . . . . ὁ ἔχων ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία μὴ περιοδικὰ εἶναι ἀσύμμετρος ἀριθμός.

Οἱ ἀκέραιοι καὶ οἱ κλασματικοὶ ἀριθμοὶ πρὸς διάκρισιν λέγονται **σύμμετροι**.

Ὅταν ἐργαζώμεθα μὲ ἀσυμμέτρους ἀριθμοὺς παραλείπομεν τὰ ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία, ἀπό τινος δεκαδικῆς τάξεως, ὅτε εὑρίσκομεν ἀριθμοὺς συμμέτρους, τὰ δὲ ἐξαγόμενα, τὰ ὁποῖα εὑρίσκομεν, πλησιάζουσι τόσῳ περισσότερον πρὸς τὰ ἀληθῆ, ὅσῳ περισσότερα ψηφία διατηροῦμεν.

Ἀσκήσεις

407) Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι τῶν ἀριθμῶν (ἀπὸ μνήμης):

82^2, 217^2, 75^4, 111^4, $0{,}05^2$, $0{,}002^2$, $0{,}4^4$, $0{,}02^6$.

408) Ὁμοίως νὰ εὑρεθῶσιν αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι τῶν ἀριθμῶν.

$2^2\times7^2\times11^2$, $4^4\times10^2\times5^4$, $2^6\times3^4\times5^2$

$0{,}09$, $0{,}0025$, $0{,}000036$, $\frac{16}{81}$, $\frac{49}{100}$, $1\frac{9}{16}$, $2\frac{14}{25}$.

409) Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι, αἱ ἀκριβεῖς ἢ κατὰ προσέγγισιν μονάδος, τῶν κάτωθι ἀριθμῶν (γραπτῶς):

1275, 2304, 3251, 12596, 22441, 73934

$59{,}82$ $173{,}2$ $273\frac{14}{15}$ $\frac{18518}{26}$ $\frac{73692}{171}$ $\frac{219}{220}$.

410) Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι τῶν κάτωθι ἀριθμῶν κατὰ προσέγγισιν 0,1, 0,01, 0,001.

28 15 $3{,}03$ $57{,}729$ $1\frac{4}{5}$ $28\frac{1}{2}$ $\frac{7}{8}$ $\frac{9}{11}$.

411) Ἐὰν ἀκέραιος ἀριθμὸς λήγῃ εἰς ἓν ἐκ τῶν ψηφίων 2, 3, 7, 8 ἢ ἂν λήγῃ εἰς περιττὸν ἀριθμὸν μηδενικῶν, δὲν εἶναι τετράγωνον ἄλλου· διατί;

412) Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πατώματος ἑνὸς δωματίου σχήματος τετραγώνου εἶναι 11,56 τετρ. παλάμαι. Ποῖον εἶναι τὸ μῆκος ἑκάστης πλευρᾶς αὐτοῦ; (ἀπ. 3,4

413) Τὸ πάτωμα ἑνὸς δωματίου ἔχει σχῆμα τετραγώνου πλευρᾶς 3 μέτρων, ἐστρώθη δὲ διὰ πλακῶν τετραγωνικῶν, ἑκάστη τῶν ὁποίων ἔχει ἐμβαδὸν 2,25 τ. παλάμας. Ποῖον εἶναι τὸ μῆκος μιᾶς πλευρᾶς ἑκάστης πλακὸς καὶ πόσαι πλάκες ἐχρειάσθησαν διὰ τὴν στρῶσιν τοῦ δωματίου; (ἀπ. 1,5 π. 400 πλ

414) Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς ὑποτεινούσης ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ μία κάθετος πλευρὰ εἶναι 12 μ. καὶ ἡ ἄλλη 16 μ. (ἀπ. $\sqrt{12^2+16^2}=\sqrt{400}=20$)

415) Αἱ δύο μικρότεραι πλευραὶ ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι 12 μ. καὶ 6 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς τρίτης πλευρᾶς. (ἀπ. $\sqrt{12^2+6^2}=\sqrt{180}$)

416) Μὲ 400 δραχμὰς ἠγόρασα τόσας ὀκάδας ἑνὸς πράγματος, ὅσας δραχμὰς ἐστοίχιζεν ἡ ὀκᾶ. Πόσας ὀκάδας ἠγόρασα ; (ἀπ. 20 ὀκ.)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΔΙΑΦΟΡΑ

417) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα πέντε ἀριθμῶν, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ πρῶτος εἶναι 53482 καὶ ὁ καθεὶς τῶν ἄλλων εἶναι μεγαλύτερος τοῦ προηγουμένου κατὰ 4007. (ἀπ. 307480).

418) Ἐξ ὀκτὼ ἀριθμῶν ὁ εἷς εἶναι μικρότερος τοῦ ἑπομένου του κατὰ 2706 καὶ ὁ τελευταῖος εἶναι 3969. Ποῖον εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ὀκτὼ αὐτῶν ἀριθμῶν ; (ἀπ. 107520)

419) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα $α+β+γ+δ+ε$, ὅταν ὁ μὲν $α$ ἀντικατασταθῇ διὰ τοῦ 182, ὁ καθεὶς δὲ τῶν ἄλλων κατὰ σειρὰν ἀντικατασταθῇ δι' ἀριθμοῦ, ὅστις εἶναι μεγαλύτερος τοῦ προηγουμένου του κατὰ 25. (ἀπ. 1160)

420) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα $α+β+γ+δ+ε$, ὅταν ὁ μὲν $α$ ἀντικατασταθῇ διὰ τοῦ 2260, ὁ καθεὶς δὲ τῶν ἄλλων ἀντικατασταθῇ κατὰ σειρὰν δι' ἀριθμοῦ, ὅστις εἶναι μικρότερος τοῦ προηγουμένου του κατὰ 175. (ἀπ. 9550)

421) Ἐκ δύο ἀριθμῶν ὁ μεγαλύτερος εἶναι 217· ἐὰν δὲ εἰς τὸ ἄθροισμα αὐτῶν προσθέσω τὸν 135, λαμβάνω τὸν 500. Ποῖος εἶναι ὁ μικρότερος ἐξ αὐτῶν καὶ ποία ἡ διαφορά των ; (ἀπ. ὁ μικρ. 148 καὶ ἡ διαφορὰ 69).

422) Ἐκ δύο ἀριθμῶν ὁ μικρότερος εἶναι 79. Ἐὰν αὐξηθῇ ὁ μὲν ἐξ αὐτῶν κατὰ 37 καὶ ὁ ἄλλος κατὰ 48, θὰ ἔχωσιν ἄθροισμα 276. Ποῖος εἶναι ὁ μεγαλύτερος ; (ἀπ. 112)

423) Οἰκογένειά τις συνέκειτο ἐκ πέντε ἀνθρώπων καὶ αἱ ἡλικίαι αὐτῶν ἀπετέλουν ποτὲ τὸν ἀριθμὸν 98. Μετὰ 30 ἔτη ἀπέθανεν ὁ πατὴρ καὶ τότε αἱ ἡλικίαι τῶν ἄλλων ἀπετέλουν τὸν ἀριθμὸν 165. Εἰς ποίαν ἡλικίαν ἀπέθανεν ὁ πατήρ ; (ἀπ. 83)

424) Τρεῖς ἐργάται ἐκέρδισαν ὁμοῦ 600 δρ. ἀλλὰ ἐπειδὴ

εἰργάσθησαν ἀνίσως, ἔλαβον κατὰ τὴν διανομὴν περισσοτέρας τοῦ πρώτου, ὁ μὲν δεύτερος 60 δρ., ὁ δὲ τρίτος 90. Πόσας δραχμὰς ἔλαβεν ὁ καθείς ; (ἀπ. 150, 210, 240)

425) Ἐὰν μία οἰκογένεια καταναλίσκῃ σταθερῶς δύο ὀκάδας ἄρτου τὴν ἡμέραν, ἡ ἡμερησία δαπάνη διὰ τὸν ἄρτον τίνος ποσοῦ εἶναι συνάρτησις ;

426) Ἐὰν ἔχῃ τις εἰς τὸ δωμάτιόν του ἐγκαταστήσῃ ἠλεκτρικὸν λαμπτῆρα δυνάμεως 50 κηρίων, ἡ ἡμερησία δαπάνη διὰ τὸν φωτισμόν του τίνος ποσοῦ εἶναι συνάρτησις ;

427) Ἐὰν ἕνας σωφὲρ κάμνῃ τακτικὰ ταξείδια ἀπὸ τῆς πόλεως Α εἰς τὴν πόλιν Β καὶ τἀνάπαλιν, ὁ χρόνος ποῦ διαρκεῖ ἕκαστον ἀπὸ τὰ ταξείδια αὐτὰ τίνος ποσοῦ εἶναι συνάρτησις ;

428) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ προσθέσεις :

α) $\frac{7}{12} + \frac{2}{3} + \frac{6}{7} + \frac{11}{14}$

β) $7\frac{4}{15} + 3\frac{1}{8} + \frac{2}{3} + 6\frac{3}{4}$

γ) $2\frac{2}{3} + 5\frac{1}{7} + 1\frac{4}{21} + \frac{3}{5}$

δ) $15\frac{2}{3} + 29\frac{4}{9} + 48\frac{10}{11} + 32 + 75\frac{1}{2}$

ε) $14\frac{1}{9} + 12\frac{3}{5} + 3\frac{2}{7}$

ϛ) $115\frac{3}{14} + 208\frac{5}{21} + 193\frac{11}{28} + 305\frac{7}{9}$

429) Τρεῖς ἐργάται ἤνοιξαν ἕνα χάνδακα καὶ ὁ μὲν πρῶτος ἤνοιξε $12\frac{7}{20}$ μέτρα μῆκος, ὁ 2ος 3 μέτρα ἐπὶ πλέον τοῦ 1ου καὶ ὁ 3ος $1\frac{3}{4}$ ἐπὶ πλέον τοῦ 2ου. Πόσων μέτρων ἦτο τὸ μῆκος τοῦ χάνδακος ; $\left(\text{ἀπ. } 44\frac{4}{5}\right)$

430) Ἀπὸ ἕνα βαρέλιον τὸ ὁποῖον περιεῖχε 375 ὀκάδας οἴνου ἐπώλησέ τις $76\frac{1}{4}$ ὀκ. καὶ ἀπὸ ἓν ἄλλο περιέχον $215\frac{1}{4}$ ὀκάδας ἐπώλησε $43\frac{2}{5}$ ὀκάδας. Πόσαι ὀκάδες ἔμειναν ἐπὶ πλέον εἰς τὸ ἓν βαρέλιον ἀπὸ τὸ ἄλλο : $\left(\text{ἀπ. } 126\frac{9}{10}\right)$

$\frac{1}{8}$ $\frac{7}{20}$ $\frac{3}{4}$ 28 60 $\frac{88}{80}$

431) Ὁ πολλαπλασιασμὸς $3\frac{1}{8} \times 5\frac{2}{3}$ ἔγινε κατὰ τὰ λεχθέντα εἰς τὴν § 101 ὡς ἑξῆς :

$$3\frac{1}{8} \times 5\frac{2}{3} = \frac{25}{8} \times \frac{17}{3} = \frac{425}{24} = 17\frac{17}{24}.$$

Δύναται ὅμως νὰ γίνῃ καὶ ὡς ἑξῆς :

$$3\frac{1}{8} \times 5\frac{2}{3} = 3\frac{1}{8} \times 5 + 3\frac{1}{8} \times \frac{2}{3} = 3 \times 5 + \frac{1}{8} \times 5 + 3 \times$$
$$\times \frac{2}{3} + \frac{1}{8} \times \frac{2}{3} = 15 + \frac{5}{8} + 2 + \frac{2}{24} = 17\frac{17}{24}.$$

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον νὰ γίνωσιν οἱ πολλαπλασιασμοί :

α) $4\frac{2}{5} \times 7\frac{3}{7}$, β) $9\frac{5}{11} \times 8\frac{5}{9}$,

γ) $11\frac{7}{12} \times 12\frac{8}{15}$, δ) $13\frac{11}{12} \times 25\frac{15}{16}$.

432) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ γινόμενα :

α) $\frac{15}{16} \times \frac{4}{9} \times \frac{6}{17} \times \frac{51}{60}$, β) $3\frac{1}{3} \times \frac{25}{37} \times 5\frac{1}{2}$,

γ) $2\frac{3}{4} \times 3\frac{2}{5} \times 3\frac{5}{7}$, δ) $9 \times 8\frac{3}{4} \times 2\frac{1}{7} \times \frac{2}{9} \times 5\frac{1}{5}$,

ε) $3\frac{3}{4} \times 13\frac{3}{5} \times 6\frac{2}{7} \times \frac{41}{46} \times 6\frac{4}{11}$.

ϛ) $\left(\frac{17}{19}\right)^2$, ζ) $\left(\frac{29}{30}\right)^2$, η) $\left(\frac{7}{9}\right)^3$, ϑ) $\left(\frac{4}{7}\right)^4$, ι) $\left(\frac{2}{3}\right)^5$.

433) Εἶχέ τις 25 φιάλας οἴνου καθεμία τῶν ὁποίων περιεῖχεν $\frac{7}{8}$ τῆς ὀκᾶς οἴνου, ἐπώλησε δὲ τὸν οἶνον τοῦτον πρὸς $8\frac{1}{4}$ δρ. τὴν ὀκᾶν. Πόσας δραχμὰς ἔλαβεν ; $\left(\text{ἀπ. } 8\frac{1}{4} \times \frac{7}{8} \times 25\right)$

434) Ἕνας εἰδικὸς τεχνίτης λαμβάνει διὰ μίαν ὥραν ἐργασίας $96\frac{1}{2}$ δρ. Πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ, ἐὰν ἐργασθῇ ὁλόκληρον ἑβδομάδα ἐπὶ $4\frac{1}{2}$ ὥρας καθ' ἡμέραν ; $\left(\text{ἀπ. } 96\frac{1}{2} \times 4\frac{1}{2} \times 6\right)$

435) Ἠρώτησαν καθηγητήν τινα πόσοι μαθηταὶ φοιτῶσιν εἰς τὸ σχολεῖόν του. Καὶ ἐκεῖνος ἀπήντησεν ὡς ἑξῆς : Ἐὰν εἰς τὸ $\frac{1}{2}$ αὐτῶν προσθέσητε τὸ $\frac{1}{3}$ καὶ τὸ $\frac{1}{4}$ καὶ τὸ $\frac{1}{5}$ αὐτῶν, θὰ εὕρητε 34 μαθητὰς ἐπὶ πλέον τῶν ὅσων φοιτῶσιν. Πόσοι μαθηταὶ φοιτῶσιν εἰς τὸ σχολεῖον ; (ἀπ. 120)

436) Δύο βαρέλια εἶναι πλήρη ἐλαίου, ἀλλ' ἡ χωρητικότης τοῦ ἑνὸς εἶναι τὰ $\frac{3}{7}$ τῆς τοῦ ἄλλου, τὸ ὁποῖον περιέχει 252 ὀκάδας ἐπὶ πλέον τοῦ πρώτου. Πόσας ὀκάδας ἐλαίου περιέχει ἕκαστον βαρέλιον ; (ἀπ. 189,441)

437) Ἔχων τὶς νὰ λάβῃ παρ' ἄλλου ποσόν τι χρημάτων ἐχάρισεν εἰς αὐτὸν τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ ποσοῦ καὶ ἀκόμη 100 δραχμάς, ἔλαβε δὲ τὰ ἐπίλοιπα, τὰ ὁποῖα ἦσαν 1560 δραχμαί. Πόσα εἶχε νὰ λάβῃ ; (ἀπ. 2075 δρ., ἐχάρισε δὲ 515 δραχμάς)

438) Ἐὰν εἰς τὸ $\frac{1}{3}$ ἀριθμοῦ τινος καὶ τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτοῦ προσθέσωμεν τὸν 25, λαμβάνομεν τὸν ἴδιον ἀριθμόν. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς αὐτός ; (ἀπ. 60

439) Τίνος ἀριθμοῦ τὸ $\frac{1}{20}$, κατὰ 30 αὐξηθέν, γίνεται ἴσον μὲ τὸ $\frac{1}{8}$ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ ; (ἀπ. 400

440) Ἐρωτηθείς τις πόσα χρήματα εἶχεν ἀπήντησεν ὡς ἑξῆς Ἐὰν εἶχον τὸ ἥμισυ, τὸ τρίτον καὶ τὸ τέταρτον τῶν ὅσων ἔχω θὰ εἶχον 20 δραχμὰς ἐπὶ πλέον. Πόσας δραχμὰς εἶχεν ; (ἀπ.240

441) Ἐδαπάνησέ τις τὰ $\frac{3}{5}$ τῶν χρημάτων του, ἔπειτα τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ ὑπολοίπου καὶ ἔπειτα τὰ $\frac{2}{7}$ τοῦ νέου ὑπολοίπου, τὰ ἔμειναν δὲ 45 δραχμαί. Πόσας εἶχεν ἀρχικῶς ; (ἀπ. 210

442) 100 χιλιόγραμμα γαιανθράκων παράγουσιν 22 $\frac{1}{2}$ κυβικὰ μέτρα φωταερίου, τὰ $\frac{4}{9}$ δὲ τοῦ βάρους αὐτῶν ἀπομένουν ὡς κὼκ. Πόσον κὼκ παράγει ἓν ἐργοστάσιον, τὸ ὁποῖον ἐτησίως δίδει εἰς μίαν πόλιν φωταέριον 27000 κυβ. μέτρα ;
(ἀπ. $53333\frac{1}{3}$ χιλ

443) Ἀνέμιξέ τις 9 γραμμάρια ἀργύρου μετὰ 4 γραμμαρίων χαλκοῦ. Πόσα γραμμάρια ἐξ ἑκάστου τῶν μετάλλων τούτων περιέχονται εἰς κρᾶμα $5\frac{3}{5}$ γραμμ. ; (ἀπ. $3\frac{57}{65}$, $1\frac{47}{65}$

444) Ἠγόρασέ τις κτῆμα καὶ τὸ ἐπώλησε κατόπιν ἀντὶ 23750 δραχμῶν, χάσας τὸ $\frac{1}{20}$ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς. Ἀντὶ πόσων δραχμῶν ἠγόρασε τὸ κτῆμα ; (ἀπ. 2500

445) Ἤθελέ τις νὰ περιτοιχίσῃ τὸ κτῆμα του καὶ διεπραγματεύετο μὲ μίαν ὁμάδα ἐργατῶν, ἡ ὁποία ἀνελάμβανε νὰ τελειώσῃ τὸ ἔργον εἰς 8 ἡμέρας καὶ μὲ ἄλλην, ἥτις θὰ τὸ ἐτελείωνεν εἰς 5 ἡμέρας. Ἀλλ' ἐν τῷ μεταξύ, ἐκ τῆς πρώτης ὁμάδος ἀπεχώρησαν τὰ $\frac{}{3}$ αὐτῆς καὶ ἐκ τῆς ἄλλης τὸ ἥμισυ. Ἠναγκάσθη δὲ οὕτω νὰ προσλάβῃ καὶ τὰ δύο ἀπομείναντα μέρη τῶν ὁμάδων διὰ νὰ ἐκτελέσῃ ὁμοῦ τὸ ἔργον. Εἰς πόσας ἡμέρας τὸ ἐτελείωσαν ; $\left(\text{ἀπ. } 7\frac{1}{17} \text{ ἡμέρας}\right)$

446) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἐξαγόμενα :

α) $0,674\times,06\times0,68$ β) $0,004\times0,05\times0,0017$

γ) $5,125\times9-650\times8+4,756\times11$

δ) $(3,28+7,25)\times0,4-(3,25-0,75)\times0,08$

ε) $(2,5)^2$ ϛ) $(0,47)^2$ ζ) $(0,02)^3$ η) $0,2.(0,3)^2-0,3.(0,2)^2$.

447) Εἶχε δανεισθῆ τις προπολεμικῶς 12000 χρυσᾶς δραχμάς. Συνεβιβάσθη ὅμως σήμερον νὰ πληρώσῃ ἐκ τοῦ χρέους αὐτοῦ τὰ 0,35 εἰς χρυσᾶς δραχμὰς καὶ τὸ ὑπόλοιπον εἰς χαρτίνας, μία δὲ χρυσῆ δραχμὴ ἰσοῦται πρὸς 19,25 χαρτίνας δραχμάς. Πόσας χαρτίνας δραχμὰς ἐπλήρωσε διὰ νὰ ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος του ;

448) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων :

$[(17+25).4-18].13.$

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ζητούμενον ἐξαγόμενον θὰ ἐκτελέσωμεν πρῶτον τὴν πρόσθεσιν, τὴν σημειουμένην ἐντὸς τῆς παρενθέσεως $(17+25)$, τὸ ἄθροισμα τοῦτο θὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 4 καὶ ἀπὸ τοῦ γινομένου θὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν 18, τέλος τὴν εὑρεθεῖσαν διαφορὰν θὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 13.

449) Ὁμοίως νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων :

α) $[(24+85-39)\times17+23]\times15$,

β) $[(6,25+7,35+9,40)\times0,5-8.0,25]\times\frac{1}{4}$.

γ) $[(19\times3+7\times5):4+3+7]:11$,

δ) $\left[\left(12\frac{1}{3}-6\frac{1}{4}\right)\times24-\frac{5}{8}\times32\right]:\frac{7}{9}$,

ε) $[(7-0,625)\times0,8-(2,25-1,75)\times0,04]\times5$.

450) Ἡ σχολικὴ ἐπιτροπὴ ἑξαταξίου γυμνασίου, τοῦ ὁπο-

ἑκάστη τάξις ἀριθμεῖ 50 μαθητάς, εἰσέπραξεν εἰς διάστημα ἑνὸς ἔτους ἀπὸ μηνιαίας εἰσφορὰς τῶν μαθητῶν τῶν 2 κατωτέρων τάξεων 27,50 δι᾽ ἕκαστον καὶ τῶν 4 ἀνωτέρων τάξεων 48,50 δι᾽ ἕκαστον, καὶ ἀπὸ προαιρετικὰς εἰσφορὰς γονέων καὶ μαθητῶν 5000.

ἀπὸ σχολικὰς ἑορτὰς κλπ.	δρχ.	11500
ἀπὸ εἰσφορὰν τοῦ Δήμου	»	5000
ἀπὸ ἔνσημον ἐκπαιδ. προνοίας	»	500
ἀπὸ χορήγησιν τοῦ Κράτους	»	15000

Ἐδαπάνησε δὲ

διὰ τὴν συντήρησιν καὶ ἐπισκευὴν τοῦ διδακτηρίου	»	7250
διὰ τὴν θέρμανσιν, φωτισμόν, καθαριότητα	»	10000
διὰ τὴν προμήθειαν σχολικῶν ἐπίπλων	»	2000
διὰ τὴν προμήθειαν σχολικῶν ὀργάνων	»	15000
διὰ τὴν προμήθειαν σχολικῶν βιβλίων	»	4000
δι᾽ ἵδρυσιν καὶ συντήρησιν σχολικοῦ κήπου	»	2000
διὰ τὴν γυμναστικὴν	»	1500
δι᾽ ἐνίσχυσιν τοῦ μισθοῦ τοῦ ὑπηρετικοῦ προσωπ.	»	5000

Νὰ καταρτισθῇ ὁ ἐτήσιος προϋπολογισμὸς τῆς σχολικῆς ταύτης ἐπιτροπῆς

451) Μία κοινότης, εἰσέπραξεν εἰς ἓν ἔτος

ἀπὸ φόρον εἰσερχομένων ἐμπορευμάτων	Δρχ.	400000
ἀπὸ φόρον σφαζομένων ζώων	»	78000
ἀπὸ εἰσφορὰν 500 οἰκογενειῶν ἐξ 78,50 ἑκάστη	»	39250
ἀπὸ χορήγησιν τοῦ Κράτους	»	120000

Ἐδαπάνησε δὲ κατὰ τὸ ἔτος αὐτὸ

διὰ τὴν καθαριότητα τῆς κοινότητος	Δρχ.	85000
διὰ τὸν φωτισμὸν τῆς κοινότητος	»	100000
διὰ τὴν συντήρησιν καὶ κατασκευὴν ὁδῶν	»	250000
διὰ βοηθήματα εἰς ἀπόρους	»	50000
δι᾽ ἔξοδα διοικήσεως τῆς κοινότητος	»	125000

Νὰ καταρτισθῇ ὁ ἐτήσιος προϋπολογισμὸς τῆς κοινότητος αὐτῆς.

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΒΙΒΛΙΟΝ Γ΄.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΣΥΜΜΙΓΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

126. Ὁρισμοί. ***Ποσὸν*** λέγεται κάθε πρᾶγμα, τὸ ὁποῖον ἐπιδέχεται αὔξησιν καὶ ἐλάττωσιν.

Μέτρησις τοῦ ποσοῦ λέγεται ἡ σύγκρισις αὐτοῦ πρὸς ἄλλο ὁμοειδές, ὡρισμένον καὶ γνωστόν, τὸ ὁποῖον λέγεται μονάς.

Διὰ τῆς συγκρίσεως ταύτης εὑρίσκομεν πόσαι μονάδες ἢ μέρη τῆς μονάδος ἀποτελοῦσ· τὸ ποσὸν καὶ παριστάνομεν αὐτὸ δι᾽ ἀριθμοῦ. Ἐὰν π.χ. τὸ ποσὸν ἀποτελῆται ἀπὸ τὴν μονάδα καὶ ἀπὸ τὸ ἥμισυ αὐτῆς, θὰ παρασταθῇ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ $1\frac{1}{2}$· ἐὰν δὲ ἀποτελῆται ἀπὸ τὴν μονάδα λαμβανομένην πέντε φοράς, θὰ παρασταθῇ διὰ τοῦ 5.

Διὰ νὰ ἀποφύγωσι τὰ κλάσματα (καὶ τοὺς μεγάλους ἀριθμοὺς) ἔδωκαν εἴς τινα μέρη τῆς ἀρχικῆς μονάδος ἰδιαίτερα ὀνόματα καὶ ἐθεώρησαν αὐτὰ ὡς νέας μονάδας· π.χ. τὸ $\frac{1}{400}$ τῆς ὀκᾶς ὠνόμασαν ***δράμιον***· ὡς νέαι μονάδες λαμβάνονται καὶ ὡρισμένα πολλαπλάσια τῆς ἀρχικῆς μονάδος, π. χ. ὁ στατὴρ $=$ 44 ὀκάδες κλπ.

127. Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον ἠμπορεῖ ποσόν τι νὰ παριστάνηται δι᾽ ἀριθμοῦ συγκειμένου ἐκ πολλῶν ἄλλων, ὁμοειδῶν μέν, ἀλλ᾽ ἐχόντων διαφόρους μονάδας· ὁ τοιοῦτος ἀριθμὸς λέγεται ***συμμιγὴς*** ἀριθμός. Ἐκ τούτων ὁδηγούμεθα εἰς τὸν ἑξῆς ὁρισμὸν τῶν συμμιγῶν.

128. ***Συμμιγὴς ἀριθμὸς εἶναι ἀριθμὸς συγκεκριμένος σύνθετος ἐξ ἄλλων, τῶν ὁποίων αἱ μονάδες εἶναι πολλαπλάσια μιᾶς ἀρχικῆς μονάδος ἢ μέρη αὐτῆς, ἔχοντα ἴδιον ὄνομα ἕκαστον.***

Οὕτω 7 ὀκάδες καὶ 250 δράμια εἶναι συμμιγὴς ἀριθμός.

Πρὶν μάθωμεν τὰς πράξεις ἐπὶ τῶν συμμιγῶν, θὰ μάθωμεν τὰ διάφορα εἴδη αὐτῶν, καὶ μάλιστα ὅσα ἡμεῖς μεταχειριζόμεθα· ἐξ ἐκείνων δὲ τὰ ὁποῖα εἶναι ἐν χρήσει εἰς ἄλλα ἔθνη θὰ μάθωμεν τὰ κυριώτερα.

Μονάδες μήκους.

x 129. α) Αἱ κυριώτεραι μονάδες μήκους παρ᾽ ἡμῖν εἶναι τὸ ***γαλλικὸν μέτρον***, ὑποδιαίρεσις δὲ αὐτοῦ εἶναι ἡ ***παλάμη*** $=\frac{1}{10}$ τοῦ μέτρου· ὁ ***δάκτυλος*** $=\frac{1}{10}$ τῆς παλάμης καὶ ἡ ***γραμμὴ*** $=\frac{1}{10}$ τοῦ δακτύλου, ἐνῷ πολλαπλάσια εἶναι τὸ ***δεκάμετρον*** $=10$ μέτρα, τὸ ***ἑκατόμετρον*** $=100$ μέτρα, τὸ ***χιλιόμετρον*** (ἢ στάδιον) $=1000$ μέτρα.

β) Ὁ ***τεκτονικὸς πῆχυς*** $=0,75$ τοῦ μέτρου (διὰ τὰς οἰκοδομὰς καὶ τὰ οἰκόπεδα).

γ) Ὁ μικρὸς πῆχυς Κωνσταντινουπόλεως $=0,648$ τοῦ μέτρου (διὰ τὸ ἐμπόριον)· 1 πῆχ. $=8$ ῥούπια.

Οἱ Ἄγγλοι καὶ οἱ Ἀμερικανοὶ μεταχειρίζονται τὴν ὑάρδαν $=0,914$ τοῦ μέτρου. 1 ὑάρδα $=3$ πόδας, 1 ποῦς $=12$ δακτύλους (ἴντσες).

Οἱ Ἰταλοὶ καὶ οἱ Γερμανοὶ παρεδέχθησαν τὸ γαλλικὸν μέτρον, οἱ δὲ Ρῶσσοι ἔχουσι τὸ ***ἀρσὶν*** $=0,711$ τοῦ μέτρου.

Διὰ τὰς μεγάλας ἀποστάσεις οἱ ξένοι χρησιμοποιοῦσι καὶ τὸ γεωγραφικὸν ἢ γερμανικὸν μίλιον $=7420,44$ μέτρα, τὸ ἀγγλικὸν μίλιον $=1700$ ὑάρδαι ἢ $1609,3295$ μέτρα.

Τὸ ναυτικὸν μίλιον δι᾽ ὅλα τὰ ἔθνη εἶναι 1852 μέτρα.

Τὸ ρωσσικὸν βέρτσιον ἔχει 1500 ἀρσίν, ἤτοι 1066,79 μέτρα.

Χ Μονάδες ἐπιφανείας.

130. Μονάδες ἐπιφανειῶν εἶναι τὰ τετράγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι πλευρὰς τὰς μονάδας μήκους καὶ ὀνομάζονται τετραγωνικὸν μέτρον, τετραγωνικὴ παλάμη κλπ., ἐφ᾽ ὅσον ἔχουσι πλευρὰν ἑνὸς μέτρου, μιᾶς παλάμης κλπ.

Ἀρχικὴ μονὰς εἶναι τὸ τετραγωνικὸν μέτρον· ὑποδιαιρεῖται δὲ εἰς 100 τετραγωνικὰς παλάμας (10×10) καὶ ἑκάστη τετραγωνικὴ παλάμη εἰς 100 τετραγ. δακτύλους. Πολλαπλάσια τῆς ἀρχικῆς μονάδος εἶναι τὸ **τετραγ. δεκάμετρον** (ἄρ)=100 τ. μ. τὸ τετραγ. ἑκατόμετρον (ἑκτάριον)=10000 τ. μ. καὶ τὸ τετραγ. χιλιόμετρον=1000000 τ. μ. Διὰ τοὺς ἀγροὺς μεταχειρίζονται τὸ **βασιλικὸν στρέμμα**=1000 τ. μ.˙ ἐὰν νοηθῇ ὡς τετράγωνον, ἡ πλευρὰ αὐτοῦ εἶναι περίπου 31,6 . . . . μ. Τὸ **παλαιὸν** στρέμμα εἶναι ἴσον μὲ 1,27 βασιλικὰ στρέμματα. Διὰ τὰ οἰκόπεδα μεταχειρίζονται τὸν τετραγ. τεκτονικὸν πῆχυν = $\frac{9}{16}$ τοῦ τετρ. μέτρου.

Μονάδες ὄγκου ἢ χωρητικότητος.

131. Μονάδες ὄγκου εἶναι οἱ κῦβοι, τῶν ὁποίων πλευραὶ εἶναι αἱ μονάδες τοῦ μήκους.

Εἶναι δὲ ὁ κῦβος στερεὸν περικλειόμενον ὑπὸ ἓξ ἴσων τετραγώνων.

Καὶ ἂν μὲν ἡ μονὰς τοῦ μήκους εἶναι τὸ μέτρον, ἡ μονὰς τοῦ ὄγκου λέγεται κυβικὸν μέτρον κ.ο.κ.

Τὸ κυβικὸν μέτρον διαιρεῖται εἰς 1000 κυβικὰς παλάμας ($10\times10\times10$)˙ ὁμοίως ἡ κυβικὴ παλάμη διαιρεῖται εἰς 1000 κυβικοὺς δακτύλους.

Λίτρα λέγεται ἡ χωρητικότης τῆς κυβικῆς παλάμης˙ εἶναι δὲ ἐν χρήσει διὰ τὴν μέτρησιν τῶν ὑγρῶν.

Κοιλὸν λέγεται τὸ $\frac{1}{10}$ τοῦ κυβικοῦ μέτρου˙ γίνεται δὲ ἡ χρῆσις τούτου ἰδίως εἰς τοὺς δημητριακοὺς καρπούς.

Μονάδες βάρους.

132. Ἡ συνηθεστέρα μονὰς βάρους εἶναι παρ' ἡμῖν ἡ ὀκᾶ. Μικρότερα βάρη μετροῦνται μὲ τὸ $\frac{1}{400}$ τῆς ὀκᾶς (δράμιον) καὶ μεγαλύτερα μὲ τὸν στατῆρα (44 ὀκάδες).

Εἰς τὰ τελωνεῖα ὅμως, καπνεργοστάσια, φαρμακεῖα κλπ. χρησιμοποιοῦσι τὸ γραμμάριον (βάρος ὕδατος ἑνὸς κυβικοῦ δακτύλου ἀπεσταγμένου καὶ θερμοκρασίας 4°), τὸ χιλιόγραμμον (1000) γραμμάρια) καὶ τὸν τόνον (1000 χιλιόγραμμα).

1 χιλιόγραμμον ἔχει βάρος 312,5 δραμίων καὶ 1 ὀκᾶ ἔχει βάρος 1280 γραμμαρίων περίπου.

Διὰ τὰ φάρμακα εἶναι ἡ λίτρα = 115 δράμια περίπου.

1 λίτρα = 12 οὐγγίαι, 1 οὐγγία = 8 δράμια, 1 δράμιον = 3 γράμμα, 1 γράμμον = 20 κόκκοι.

Ἐν τῇ Ἑπτανήσῳ χρησιμοποιοῦν τὴν ἀγγλικὴν λίτραν = 453,5 γρ.

Διὰ τὴν σταφῖδα χρησιμοποιεῖται ἡ ἑνετικὴ λίτρα $\left(\frac{3}{8}\right.$ τῆς ὀκᾶς περίπου).

ε) Διὰ τοὺς πολυτίμους λίθους λαμβάνεται ὡς μονὰς βάρους τὸ καράτιον = 0,205 ἢ 0,2 γραμμ.

Μονάδες νομισμάτων.

133. Μονὰς νομισμάτων παρ' ἡμῖν εἶναι ἡ δραχμή, ἡ ὁποία ὑποδιαιρεῖται εἰς 100 ἑκατοστά. Ἡ δραχμὴ ἀρχικῶς εἶχεν ὁρισθῇ ὡς νόμισμα ἀργυροῦν βάρους 5 γραμμαρίων καὶ βαθμοῦ καθαρότητος 0,835, δηλ. μόνον τὰ 0,835 αὐτοῦ εἶναι καθαρὸς ἄργυρος, τὰ δὲ ἄλλα 0,165 εἶναι χαλκὸς ἢ ἄλλα μέταλλα.

Σήμερον ἐν Ἑλλάδι κυκλοφοροῦν κυρίως νομίσματα ἐξ ἀλουμινίου (10 λεπτῶν), ἐκ νικελίου (τῶν 50 λεπτῶν, τῆς 1, 2 καὶ 5 δραχμῶν καὶ ἀργυρᾶ τῶν 10 καὶ 20 δραχμῶν). Καὶ χαρτονομίσματα τῶν 50, 100, 500, 1000 καὶ 5000 δραχμῶν.

Μονάδες νομισμάτων ξένων κρατῶν.

134. 1) Τῆς λατινικῆς ἑνώσεως. Ἡ Γαλλία, ἡ Ἰταλία, ἡ Ἑλλάς, τὸ Βέλγιον καὶ ἡ Ἑλβετία παρεδέχθησαν διὰ τῆς λεγομένης ***Λατινικῆς νομισματικῆς ἑνώσεως*** (ἥτις δὲν ἰσχύει σήμερον ἢ ἐν μέρει) νὰ κόπτωσι νομίσματα ὅμοια καὶ ἴσης ἀξίας καὶ τὰ ὁποῖα νὰ κυκλοφορῶσιν ἐλευθέρως εἰς τὰ κράτη αὐτά. Ὥρισαν δὲ ὡς ἀρχικὴν μονάδα νομισμάτων το φράγκον, ὅπερ ἐν Ἑλλάδι λέγεται ***δραχμή***.

Ἡ ἀξία τοῦ φράγκου σήμερον δὲν εἶναι ἡ αὐτὴ διὰ τὰ κράτη αὐτά. Εἰς μερικὰ ἐξ αὐτῶν μάλιστα δὲν εἶναι καὶ σταθερά, ἀλλὰ μεταβλητὴ (ὅπως εἶναι ἄλλως τε μεταβλητὴ καὶ ἡ ἀξία τῶν νομισμάτων τῶν ἄλλων χωρῶν).

Τὸ φράγκον τὸ ἔχουσι παραδεχθῆ καὶ ἡ Ἱσπανία (πεσσέτα), ἡ Ρουμανία (λέϊ), ἡ Σερβία (δηνάριον), ἡ Βουλγαρία (λέβα).

2) Ἐν Ἀγγλίᾳ ἀρχικὴ μονὰς εἶναι ἡ ***ἀγγλικὴ λίρα*** = 25,22 δραχμαὶ χρυσαῖ· 1 λίρα = 20 σελλίνια, 1 σελλίνιον = 12 πένναι καὶ 1 πέννα = 4 φαρδίνια.

3) Ἐν Γερμανίᾳ εἶναι τὸ μάρκον = 1,234 χρ. δρχ· 1 μάρκον=100 πφένιχ.

4) Ἐν Αὐστρίᾳ ἡ ***κορῶνα***=1,05 δρ. χρ., 1 κορ.=100 χέλλερ.

5) Ἐν Τουρκίᾳ τὸ ***γρόσιον*** = 40 παράδες· 100 γρόσια = = 1 λίρα.

6) Ἐν Ρωσσίᾳ τὸ ***ρούβλιον***=2,667 χρ. δρχ.· 1 ρούβλιον= 100 καπίκια.

7) Ἐν ταῖς Ἡνωμέναις Πολιτείαις τὸ ***δολλάριον*** = 5,18 χρ. δρχ., 1 δολλάριον=100 ἑκατοστὰ (σέντς).

Μονάδες χρόνου.

135. Εἶναι ἡ ἡμέρα ἢ τὸ ἡμερονύκτιον. Ἄλλαι μονάδες εἶναι ἡ ὥρα, τὸ $\frac{1}{24}$ τῆς ἡμέρας, τὸ πρῶτον λεπτόν, $\frac{1}{60}$ τῆς ὥρας καὶ τὸ δευτερόλεπτον, $\frac{1}{60}$ τοῦ πρώτου λεπτοῦ.

Ἐπίσης εἶναι ὁ μὴν καὶ τὸ ἔτος.

Τὰ ἔτη δὲν ἔχουσι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἡμερῶν. Ἀπὸ 4 συνεχῆ ἔτη τὰ μὲν 3 ἔχουσιν ἀπὸ 365 ἡμέρας, λέγονται δὲ ταῦτα ***κοινά***, τὸ δὲ ἄλλο ἔχει 366 ἡμέρας καὶ λέγεται ***δίσεκτον***. Ἀπὸ τὰ 4 αὐτὰ ἔτη δίσεκτον εἶναι ἐκεῖνο, τοῦ ὁποίου ὁ ἀριθμὸς διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ 4, π.χ. ἐκ τῶν ἐτῶν 1928, 1929, 1930, 1931 δίσεκτον εἶναι τὸ 1928. Ἐξαιροῦνται τὰ ἔτη, τὰ ὁποῖα φανερώνουν αἰῶνας (αἰὼν = 100 ἔτη), τὰ ὁποῖα εἶναι κοινά, ἐκτὸς ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἑκατοντάδων διαιρῆται διὰ 4· οὕτω ἐκ τῶν 2000, 2100, 2200, 2300 δίσεκτον εἶναι τὸ 2000.

Μονάδες κυκλικῶν τόξων.

136. Ὡς μονὰς κυκλικοῦ τόξου λαμβάνεται τόξον τῆς αὐτῆς περιφερείας ἴσον μὲ τὸ $\frac{1}{360}$ αὐτῆς καὶ λέγεται ***μοῖρα***· σημειοῦνται δὲ αἱ μοῖραι διὰ τοῦ συμβόλου (°) π.χ. 320°. 1°=60 πρῶτα λεπτὰ δηλ. 60′, καὶ 1′=60 δεύτερα λεπτά, δηλ. 60″.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

452) Νὰ τραπῶσιν 158 πήχεις εἰς μέτρα.

453) Νὰ τραπῶσι 285 τεκτ. πήχεις εἰς μέτρα.

454) Νὰ τραπῶσι 573 ὑάρδαι εἰς μέτρα.

455) Νὰ τραπῶσι 464 μέτρα εἰς πήχεις $\left(\text{ἀπ. } \frac{464}{0,64}\right)$.

456) 105,5 ὑάρδαι νὰ τραπῶσιν εἰς πήχεις.

457) 312 πήχεις νὰ τραπῶσιν εἰς ὑάρδας.

458) Ποία εἶναι ἡ σχέσις τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου πρὸς τὸν τετραγωνικὸν τεκτονικὸν πῆχυν ; $\left(\text{ἀπ. } 1 \text{ τ.μ.} = \frac{16}{9} \text{ τ. τ. π.}\right)$

459) Ἔκτασιν 1840 τετρ. μέτρων μετέτρεψέ τις εἰς οἰκόπεδα. Ἐκ πόσων τετραγωνικῶν τεκτονικῶν πήχεων ἀποτελεῖται ἕκαστον ;

460) Ἕνα οἰκόπεδον 2000 τετραγ. τεκτονικῶν πήχεων ἀπὸ πόσα τετραγωνικὰ μέτρα ἀποτελεῖται ;

461) Μία ἔκτασις 15 τετρ. δεκαμέτρων ἐχρησιμοποιήθη διὰ τὴν ἀνέγερσιν ἑνὸς σχολείου· ἐξ αὐτῶν τὸ $\frac{1}{3}$ ἐχρησιμοποιήθη διὰ τὴν κυρίως οἰκοδομήν, τὰ $\frac{2}{10}$ διὰ γυμναστήριον καὶ τὰ ὑπόλοιπα διὰ σχολικὸν κῆπον. Ἀπὸ πόσους τετραγ. τεκτονικοὺς πήχεις ἀποτελεῖται ἕκαστον τμῆμα ;

462) Ἀγρὸς ἐκτάσεως $6\frac{3}{4}$ παλαιῶν στρεμμάτων ἐπωλήθη πρὸς 2500 δραχμὰς τὸ βασιλικὸν στρέμμα. Ἀντὶ πόσων δραχμῶν ἐπωλήθη ;

463) Ἔστρωσέ τις δάπεδον ἐκτάσεως 20 τετρ. πήχεων διὰ πλακῶν, ἑκάστη τῶν ὁποίων εἶχεν ἐπιφάνειαν 2 τετρ. παλαμῶν καὶ ἀξίαν 0,75 δρχ. τὴν τετραγ. παλάμην. Πόσον ἐστοίχισαν αἱ ἀπαιτηθεῖσαι πλάκες διὰ τὴν ἐπίστρωσιν ;

464) Πόσοι κυβικοὶ δάκτυλοι περιέχονται α) εἰς $1\frac{1}{4}$ κυβικὰς παλάμας καὶ β) εἰς τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ κυβικοῦ μέτρου ;

465) Δεξαμενὴ χωρητικότητος 7,45 κυβ. μέτρων μὲ πόσας λίτρας ὕδατος γεμίζει ;

466) Μὲ πόσα γραμμάρια ἰσοῦται ἓν δράμιον ;

467) 1 γραμμάριον τί μέρος τοῦ δραμίου ἀποτελεῖ ;

468) Νὰ τραπῶσιν εἰς γραμμάρια α) 150 δράμια, β) τὰ $\frac{5}{8}$ τῆς ὀκᾶς.

469) Νὰ τραπῶσι 320 γραμμάρια εἰς δράμια.

470) Εἰσήγαγέ τις μεταξωτὰ ὑφάσματα βάρους 48 ὀκάδων καὶ ἐπλήρωσεν εἰσαγωγικὸν δασμὸν 1242,50 δρχ. τὸ χιλιόγραμμον. Πόσον ἐπλήρωσεν ;

471) Πόσα χιλιόγραμμα κάνουν ἕνα στατῆρα ;

472) Νὰ τραπῶσιν 8 χιλιόγραμμα καὶ 562 γραμμάρια εἰς ὀκάδας.

473) Νὰ τραπῶσιν 12,5 ἀγγλικαὶ λίτραι α) εἰς χιλιόγραμμα καὶ β) εἰς ὀκάδας.

474) Νὰ τραπῶσιν 87,25 λίραι ἀγγλίας εἰς δραχμάς.

Σημ. Αἱ μετατροπαὶ τῶν νομισμάτων θὰ στηρίζωνται ἐπὶ τῆς τιμῆς τῆς δραχμῆς κατὰ τὴν ἡμέραν τῆς μετατροπῆς.

475) Τὸ σελλίνιον ποίαν ἀξίαν ἔχει α) εἰς χρυσᾶς δραχμὰς καὶ β) εἰς χαρτίνας ; Ὁμοίως νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀξία μιᾶς πέννας.

476) 55687,50 δραχμαὶ πόσας λίρας ἀγγλίας κάμνουν ; 55687

477) Πόσας δραχμὰς κάμνουσι 124,8 μάρκα ;

478) Πόσα μάρκα κάμνουσι 7345 δραχμαί ;

479) Πόσας λίρας Τουρκίας κάμνουσι 6276,60 δραχμαί ;

480) 11718 δραχμαὶ πόσας κορώνας Αὐστρίας καὶ πόσα δολλάρια κάμνουν ;

481) Πόσας δραχμὰς κάμνουσι 2147,6 γαλλικὰ φράγκα ;

482) Πόσας δραχμὰς κάμνουσι 1050 ἑλβετικὰ φράγκα ;

483) Μὲ 9375,55 δραχμὰς πόσα γαλλικὰ φράγκα ἀγοράζομεν ;

484) Πόσα δηνάρια κάμνουσι 6256 δραχμαί ;

485) Πόσα λέβι κάμνουσι 12800 δραχμαί ;

486) Πόσας δραχμὰς κάμνουσι 7345,8 λιρέται ;

Τροπὴ συμμιγοῦς εἰς μονάδας μιᾶς τάξεως.

137. Πρόβλημα. ***Ἐὰν ἐβάδισέ τις ἐπὶ 5 ὥρας καὶ 27′ λεπτά, ἐπὶ πόσα πρῶτα λεπτὰ ἐβάδισεν ;***

Ἐβάδισεν ἐπὶ $60' \times 5 + 27' = 327'$.

Πρόβλημα. ***Νὰ τραπῇ ὁ συμμιγὴς 12 στατ. 18 ὀκ. 250 δράμ. εἰς δράμια.***

Ὁ δοθεὶς συμμιγὴς ἰσοῦται μὲ 218650 δράμια· ἡ δὲ κάτωθι διάταξις τῆς πράξεως ἐξηγεῖ τὸν τρόπον τῆς λύσεως τοῦ δοθέντος προβλήματος.

12 στατ. 18 ὀκ. 250 δραμ.
44
―――
48
48
―――
528 ὀκάδες
18 »
―――
546
400 δράμια
―――
218400 »
250 »
―――
218650 »

138. Πρόβλημα. ***Νὰ τραπῇ ὁ συμμιγὴς 25 ὀκ. 150 δράμ εἰς ἀριθμὸν ὀκάδων***

Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν, ὅτι μόνον τὰ 150 δράμια πρέπ νὰ τραποῦν εἰς ὀκάδας, ὁπότε εὑρίσκομεν 25 ὀκ. 150 δράμ. = $= 35\frac{150}{400} = 25\frac{3}{8}$ ὀκάδες.

Πρόβλημα. ***Νὰ τραπῇ ὁ συμμιγὴς 2 λίρ. ἀγγλ. 5. σελ 7 πένν. καὶ 2 φαρδίνια εἰς ἀριθμὸν σελλινίων.***

Ἔχομεν κατὰ πρῶτον 2 λίρας 5 σελ = 20 σελ. × 2 + σελ, = 45 σελ. Ἔπειτα τρέπομεν τὸ ὑπόλοιπον μέρος τοῦ συμ μιγοῦς εἰς φαρδίνια, εἶναι δὲ 7 πέν. 2 φαρδ. = 30 φαρδ. κα τὰ εὑρεθέντα 30 φαρδίνια τρέπομεν εἰς ἀριθμὸν σελλινίων ἐπειδὴ δὲ 1 σελ. = 12 πένναι = 4 φαρδ. × 12 =48 φαρδ ἕπεται, ὅτι τὸ 1 φαρδ. $= \frac{1}{48}$ σελ. καὶ τὰ 30 φαρδ. $= \frac{30}{48} = \frac{5}{8}$ σελ. Ὥστε εἶναι 2 λίρ. 5 σελ. 7 πέν. 2 φαρδ. $= 45\frac{5}{8}$ σελ.

Προβλήματα.

487) Τί ἀριθμὸν λαμβάνομεν, ὅταν ὁ συμμιγὴς τραπῇ εἰ μονάδας τῆς τελευταίας τάξεως καὶ τί ἀριθμόν, ὅταν τραπῇ εἰ μονάδας ὄχι τῆς τελευταίας τάξεως;

488) Νὰ ἐξαχθῇ ὁ κανὼν τῆς τροπῆς συμμιγοῦς ἀριθμο εἰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεως.

489) Μὰ τραπῶσιν εἰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεως:
α) 15 μέτρ. 7 παλ. 5 δ., β) 3 κυβ. μ. 8 κυβ. παλ. 13 κ. δ

γ) 65 πήχ. 6 ρούπ., δ) 7238 ὀκ. 300 δράμ., ε) 27 στατ. 31 ὀκ. 300 δράμ., ϛ) 34 λίρ. ἀγγλ. 15 σελ. 8 πέν., ζ) 8 ὑάρ. 2 πόδ. 5 ἴντσες.

490) Ὁμοίως νὰ τραπῶσιν εἰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεως:

α) 4° 7′ 40′′, β) 5 ἡμέραι 10 ὧραι 25′, γ) 15 ἡμέραι 9 ὧραι 40′ 25′′.

491) Νὰ ἐξαχθῇ ὁ κανὼν τῆς τροπῆς συμμιγοῦς ἀριθμοῦ τάξεως ἀνωτέρας τῆς τελευταίας.

492) Νὰ τραπῶσιν εἰς λίρας ἀγγλίας α) αἱ 7 λίραι 12 σελ. β) 15 σελ. 6 πέν. καὶ γ) 11 πέν. 3 φαρδ.

493) Νὰ τραπῶσι 3 λίρ. τουρκίας 40 γρόσια καὶ 15 παράδες α) εἰς λίρας. β) εἰς γρόσια.

494) Ὁμοίως νὰ τραπῶσι α) 20 πήχ. 3 ρούπ. εἰς πήχεις, β) 9 ὑάρδαι 1 ποῦς 9 ἴντσες εἰς ὑάρδας.

495) Νὰ τραπῶσιν εἰς ὥρας : α) 5ὥ. 20′ καὶ β) ~~7 ὡρ. 48′25′′~~.

496) Νὰ τραπῶσιν εἰς στατῆρας : α) 350 δράμ., β) 35 ὀκ. 150 δράμ. καὶ γ) 3 στατ. 19 ὀκ. 250 δράμ.

497) Νὰ τραπῶσιν εἰς μοίρας 27° 20′ 40′′.

Τροπὴ συγκεκριμμένου ἀριθμοῦ εἰς συμμιγῆ.

139. ***Ἕνας δρομεὺς διήνυσεν ἕνα δρόμον εἰς 4340′′ ἐπὶ πόσας ὥρας, πρῶτα λεπτὰ καὶ δεύτερα λεπτὰ ἔτρεξεν ;***

Ἔτρεξεν ἐπὶ 1 ὥρ. 12′ 20′′, ἡ δὲ κάτωθι διάταξις τῆς πράξεως ἐξηγεῖ τὸν τρόπον τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος αὐτοῦ.

```
4340′′  | 60
 140      72′  | 60
  20′′    12′     1 ὥρα.
```

140. ***Ἐμοιράσθησαν 13 ὀκάδες ἀλεύρου εἰς 5 πτωχούς. Πόσας ὀκάδας καὶ δράμια ἔλαβεν ἕκαστος ;***

Διαιροῦντες 13 ὀκ. : 5$\left(=\frac{13}{5}\right.$ ὀκ.$\left.\right)$ εὑρίσκομεν, ὅτι ἕκαστος θὰ λάβῃ 2 ὀκάδας καὶ περισσεύουν πρὸς διανομὴν 3 ὀκ. ἢ 1200 δράμια· ὥστε ἕκαστος θὰ λάβῃ ἀκόμη δράμια 1200 : 5=240 ἢ ἐν ὅλῳ 2 ὀκ. καὶ 240 δραμ. δηλαδὴ εἶναι $\frac{13}{5}$ ὀκ.=2 ὀκ. 240 δρ.

Διάταξις τῆς πράξεως :

13 ὀκ.	5
3	2 ὀκ. 240 δράμ.
400	
1200 δράμ.	
20	
0	

141. *Ὁ ἀριθμὸς 3,275 λίρ. ἀγγλ. νὰ τραπῆ εἰς συμμιγῆ*

Ἐπειδὴ μία λίρα=20 σελ., ἕπεται, ὅτι 0,275 λίρ.=20 σελ.× ×0,275=5,5 σελ. Ἐπειδὴ δὲ πάλιν 1 σελ.=12 πέν. ἕπεται, ὅτι 0,5 σελ.=12×0,5=6 πέν. Ὥστε 3,275 λίρ.=3 λίρ. 5 σελ. 6 πέν

Προβλήματα.

498) Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος § 133 νὰ ἐξαχθῆ ὁ κανὼν τῆς τροπῆς συγκεκριμένου ἀκεραίου ἀριθμοῦ εἰς συμμιγῆ.

499) Νὰ τραπῶσιν εἰς συμμιγεῖς οἱ ἑπόμενοι ἀκέραιοι : α) 36 ρούπια, β) 900 δράμια, γ) 42 σελλίνια, δ) 4108 παλάμαι ε) 468 πρῶτα λεπτὰ τῆς ὥρας.

500) Νὰ τραπῶσιν εἰς συμμιγεῖς οἱ ἑπόμενοι ἀκέραιοι : α) 16765 δράμια, β) 10174 πένναι, γ) 232465″ ὥρας.

501) Ὁμοίως οἱ α) 214816″ κυκλικοῦ τόξου, β) 15311 φαρδίνια, γ) 45350 δράμια.

502) Νὰ ἐξαχθῆ ὁ κανὼν τῆς μετατροπῆς συγκεκριμένου κλάσματος εἰς συμμιγῆ.

503) Νὰ τραπῶσιν εἰς συμμιγεῖς οἱ ἑπόμενοι ἀριθμοί. α) $2\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς, β) $8\frac{1}{4}$ πήχ., γ) $6\frac{7}{12}$ ὥρας, δ) $9\frac{3}{4}$ λίραι ἀγγλ.

504) Νὰ τραπῶσιν εἰς συμμιγεῖς οἱ α) $\frac{19}{5}$ στατ., β) $\frac{37}{9}$ ἡμ. γ) $\frac{53}{15}$ ἔτη.

505) Ὁμοίως οἱ α) $\frac{239}{32}$ λίρ. ἀγγλ., β) $\frac{149}{45}$ μοῖραι.

506) Ὁμοίως οἱ α) 4,25 ὧραι, β) 8,375 πήχεις, γ) 0,45 λίρ. τουρκίας, δ) 15,1875 μοῖραι.

507) Ὁ συμμιγὴς ἀριθμὸς 5 ὧραι 84′ 50″, 25 νὰ τραπῆ εἰς δεκαδικὸν ἀριθμὸν ἡμερῶν.

508) Τὸ τροπικὸν ἔτος ἀποτελεῖται ἀπὸ 365,24226 ἡμέρας. Νὰ τραπῆ εἰς συμμιγῆ ἀριθμόν.

12
2
84
24
6

Αἱ τέσσαρες πράξεις ἐπὶ τῶν συμμιγῶν.

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

142. ***Νὰ προστεθῶσιν οἱ συμμιγεῖς ἀριθμοί :***

1ον)

	56 στατῆρες	28 ὀκάδες	150 δράμια
		40 »	280 »
	6 »	22 »	100 »
	62 στατῆρες	90 ὀκάδες	530 δράμια
ἢ	64 »	3 »	130 »

2ον)

	18	ὧραι	28′	53″
			3′	20″
	5	»		25″
			8′	35″
	23	ὧραι	39′	133″
ἢ	23	»	41′	13″.

Σημ. [illegible] τῶν ἀνωτέρω παραδειγμάτων εὐκόλως συνάγεται ὁ κανὼν τῆς προσθέσεως τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

509) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ προσθέσεις :

α) 3 ὑάρδ. 1 π. 8 ἴν. + 5 ὑάρδ. 1 πόδ. 8 ἴν. + 1 ὑάρ. 7 ἴν.

β) 14 λίρ. 8 σελ. 5 π. + 3 λίρ. 5 πέν. 3 φαρδ. + 5 λίρ. 7 π. 2 φαρδ.

γ) 20 ὧραι 32′ 25″ + 7 ὧραι 50′ 40″ + 25′ 28″ + 16 ὧραι 45″

δ) 10° 15′ 25,5″ + 83° 34′ 77,6″ + 44° 49′ 19,7″.

510) Ὁμοίως αἱ :

α) 7 δρχ. 45 λεπ. + $3\frac{1}{2}$ δρ. + 3,2 δρχ., β) 3 στατ. 17 ὀκ. 200 δράμ. + $8\frac{7}{8}$ στατ. + $3\frac{2}{5}$ ὀκ. γ) 3 κυβ. μ. 275 κυβ. παλ. 870 κ. δακτ. + 1,2576 κυβ. μ. + $\frac{3}{16}$ κυβ. μ. δ) $123,25^{\circ}$ + 75° 35′ 32″ + $\frac{213^{\circ}}{90}$.

511) Ἐγεννήθη τις τὴν 6 Δεκεμβρίου 1884 καὶ ἀπέθανεν εἰς ἡλικίαν 42 ἐτῶν, 5 μηνῶν, 12 ἡμερῶν. Πότε ἀπέθανεν ;

(ἀπ. 18 Μαΐου 1927)

512) Ἕνα διάστημα 50 χιλιομέτρων τὸ διήνυσέ τις ἀφοῦ πρῶτον ἐβάδισεν ἐπὶ 3 ὥρας 30′ καὶ ἐστάθμευσεν ἐπὶ 15′

ἔπειτα ἐβάδισεν ἄλλας 4 ὥρας καὶ 10′ καὶ ἐστάθμευσεν ἐπὶ 1 ὥραν καὶ 10′ καὶ τέλος ἀφοῦ ἐβάδισεν ἐπὶ 2 ὥρας 25′ 30″. Πόσον χρονικὸν διάστημα παρῆλθεν ἀπὸ τῆς στιγμῆς τῆς ἐκκινήσεως μέχρι τῆς στιγμῆς, κατὰ τὴν ὁποίαν ἔφθασεν εἰς τὸ τέρμα ;

513) Τρεῖς γωνίαι διαδοχικαὶ ἔχουσι τὴν κοινὴν κορυφήν των εἰς τὸ κέντρον περιφερείας κύκλου. Ἡ πρώτη γωνία ἀντιστοιχεῖ εἰς τόξον 41°25′40″, ἡ δευτέρα εἰς τόξον 13°48′25″ καὶ ἡ τρίτη εἰς τόξον $75\frac{1''}{2}$. Πόσον τόξον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν γωνίαν, ἥτις εἶναι ἄθροισμα αὐτῶν ;

514) Τρία δοχεῖα εἶναι πλήρη ὕδατος καθαροῦ καὶ τὸ μὲν βάρος τοῦ ὕδατος τοῦ πρώτου δοχείου εἶναι 25 χιλιόγραμμα καὶ 600 γραμμ., τοῦ δευτέρου 17 χιλιόγρ. 370 γραμμ. καὶ τοῦ τρίτου 17,375 χιλ. Ποία εἶναι ἡ χωρητικότης τῶν 3 δοχείων ὁμοῦ ;

515) Μετέφερέ τις εἰς τὴν ἀποθήκην του τὴν α΄ ἡμέραν 84 στατ. 25 ὀκ. ξυλανθράκων, τὴν β΄ 15 στατ. 30 ὀκ. περισσότερον καὶ τὴν τρίτην ὅσον μετέφερε καὶ τὰς δύο ἡμέρας ὁμοῦ. Πόσους ξυλάνθρακας μετέφερεν ἐν ὅλῳ ; (ἀπ. 369 στ. 28 ὀκ.)

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

143. ***Νὰ ἀφαιρεθῶσιν οἱ συμμιγεῖς :***

1ον)

24 ὧρ.+5 ὧρ.			60′+22′	
18	ἡμ.	5 ὧρ.	22′	40″
4	»	12 »	52′	20″
13	ἡμ.	16 ὧρ.	30′	20″

2ον)

125	στατ.	28 ὀκ.	
8	»	40 »	150 δράμ.
116	στατ.	31 ὀκ.	250 δράμ.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παραδειγμάτων εὐκόλως συνάγεται ὁ κανὼν τῆς ἀφαιρέσεως συμμιγῶν ἀριθμῶν.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

516) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἑπόμεναι ἀφαιρέσεις :

α) 5 στ.—3 στ. 15 ὀκ., β) 35 λιρ. τ. 40 γρ. 20 παρ.—17 λ. 60 γρ. 30 παρ. γ) 25° 40′—15° 32′, δ) 9 ἡμ. 7 ὧρ. 35′ 15″—2 ἡμ. 14 ὧρ. 50′ 20″.

517) $5\frac{3}{8}$ λίρ.—2 λίρ. 16 σελ. 3 πέν. 2 φαρδ.

7 ὧραι 40′ 32″—3,145 ὥρ.

2 στ. 6 ὀκ 150 δράμ.— $\frac{21}{32}$ στ.

8 λίρ. τ. 25 γρ.—0,875 λίρ. τ.

518) Εἶχέ τις ὕφασμα 7 ὑαρδ. 1 ποδ. 7 δακτ., ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἀπέκοψε διὰ τὴν κατασκευὴν ἐνδυμασίας 3 ὑάρδ. 2 ποδ. 10 δακτ. Πόσον ἀπέμεινεν ;

519) Ἐγεννήθη τις τὴν 28 Φεβρουαρίου 1892 καὶ ἀπέθανε τὴν 11 Αὐγούστου 1928. Εἰς ποίαν ἡλικίαν ἀπέθανεν ;

520) Ἁμαξοστοιχία ἀναχωρεῖ ἑκάστην ἡμέραν ἐξ Ἀθηνῶν εἰς τὰς 7 ὥρας 15′ π.μ. καὶ φθάνει εἰς τὰς Πάτρας εἰς τὰς 4 μ.μ. τῆς αὐτῆς ἡμέρας. Πόσον χρόνον διαρκεῖ τὸ ταξείδιον τοῦτο ;

521) Πόσος χρόνος μεσολαβεῖ ἀπὸ τῆς 6 ὥρ. 25′ π.μ. μέχρι τῆς 7 ὥρ. 40′ π.μ. τῆς ἑπομένης ἡμέρας ;

522) Ἐὰν ἀπὸ μίαν περιφέρειαν κύκλου ἀφαιρεθῇ τόξον 125° 32′ 9″, τί τόξον ἀπομένει ;

523) Ἀπέστειλεν ἔμπορος εἰς ἕνα κατάστημα τοῦ Λονδίνου ἕνα τσὲκ χιλίων λιρῶν διὰ μίαν παραγγελίαν του· τοῦ ἀπεστάλησαν δὲ ἐμπορεύματα ἀξίας 850 λιρ. 15 σελ., τὰ ὁποῖα ἐπεβαρύνθησαν μὲ ἀσφάλιστρα 5 λιρ. 7 πεν. καὶ μὲ ναῦλα 3 λιρῶν 10 σελ. 6 πεν. Τί ποσὸν πρέπει νὰ τοῦ ἐπιστραφῇ ;

524) Ὁ Α χρεωστεῖ εἰς τὸν Β 5 λίρ. 12 σελ., ὁ Β χρεωστεῖ εἰς τὸν Γ 6 λίρ. 15 σελ., ὁ δὲ Γ χρεωστεῖ εἰς τὸν Α 8 λίρας. Μετὰ τὴν ἐκκαθάρισιν τῶν λογαριασμῶν τί ποσὸν ἔμεινεν εἰς τὸν πρῶτον καὶ τί ἐπλήρωσαν οἱ δύο ἄλλοι ;

Πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ ἀκέραιον.

144. Πρόβλημα. ***Διὰ νὰ κατασκευάσῃ τις μίαν ἐνδυμασίαν ἠγόρασε 3 ὑάρδας ἀγγλικοῦ ὑφάσματος πρὸς 1 λίραν 7 σελ. 6 πέν. τὴν ὑάρδαν. Πόσον ἐπλήρωσεν ;***

Πρὸς τοῦτο θὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν συμμιγῆ 1 λίρ. 7 σελ. 6 πέν. ἐπὶ τὸν 3.

6 πέν. ×3=18 πέν. =		1 σελ.	6 πέν.
7 σελ. ×3=21 σελ. =	1 λίρ.	1 σελ.	
1 λίρ. ×3=	3 λίρ.		
ἤτοι ἐν ὅλῳ	4 λίρ.	2 σελ.	6 πέν.

Διάταξις τῆς πράξεως.

$$\begin{array}{rrr} 1 \text{ λίρ.} & 7 \text{ σελ.} & 6 \text{ πέν.} \\ & & 3 \\ \hline 3 \text{ λίρ.} & 21 \text{ σελ.} & 18 \text{ πέν.} \\ 4 \text{ λίρ.} & 2 \text{ σελ.} & 6 \text{ πέν.} \end{array}$$

Τὸ ζητούμενον τοῦ ἄνω προβλήματος δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ ἐὰν τρέψωμεν τὸν δοθέντα συμμιγῆ εἰς ἀκέραιον καὶ κατόπιν πολλαπλασιάσωμεν 330 πέν.$\times$3 $=$990 πέν $=$4 λίρ. 2 σελ.6π.

145. Ὁ πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ ἀκέραιον καὶ ἰδίως ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι πολυψήφιος ἀριθμός, δύναται νὰ γίνῃ καὶ κατὰ τὴν μέθοδον τῶν ***ἁπλῶν μερῶν,*** ἥτις φαίνεται εἰς τὸ ἑξῆς παράδειγμα :

Ἔστω ὁ πολλαπλασιασμὸς (7 ὥρ. 40′ 50″)$\times$240.

Καὶ ἐδῶ θὰ πολλαπλασιάσωμεν κάθε μέρος τοῦ συμμιγοῦς χωριστά. Ἤτοι 7 ὥρ.$\times$240$=$1680 ὧραι· ἀλλ' εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ 40′$\times$240 παρατηροῦμεν, ὅτι τὰ 40′ ἀναλύονται εἰς $30' = \frac{1}{2}$ ὥρ. καὶ $10' = \frac{1}{6}$ ὥρ. Ὥστε εἶναι :
$40'\times 240 = \frac{1}{2}$ ὥρ.$\times 240 + \frac{1}{6}$ ὥρ.$\times 240 = 120$ ὥρ.$+40$ ὥρ.$=$ 160 ὥρ. Ἐπίσης εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν $50''\times 240$ παρατηροῦμεν, ὅτι τὰ 50″ ἀναλύονται εἰς $30'' = \frac{1}{2}$ τοῦ πρώτου λεπτοῦ καὶ εἰς $20'' = \frac{1'}{3}$. Ὥστε εἶναι $50''\times 240 = \frac{1'}{2}\times 240 + \frac{1'}{3}\times 240 = 120' + 80' = 2$ ὥρ.$+1$ ὥρ. $20' = 3$ ὥρ. $20'$· ἄρα εἶναι (7 ὥρ. 40′ 50″)$\times 240 = 1680$ ὥρ.$+160$ ὥρ.$+3$ ὥρ. $20' = 1843$ ὥρ. $20'$.

Διάταξις τῆς πράξεως.

$$\begin{array}{lllr} & & & 7 \text{ ὥρ. } 40' \ 50'' \\ & & & 240 \\ \hline & & & 1680 \text{ ὥρ.} \\ 40' & \left\{ \begin{array}{l} 30' = \frac{1}{2} \text{ τῆς ὥρας δίδει} \\ 10' = \frac{1}{6} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \end{array} \right. & & \begin{array}{r} 120 \text{ ὥρας} \\ 40 \ \text{»} \end{array} \\ 50'' & \left\{ \begin{array}{l} 30'' = \frac{1}{2} \text{ τοῦ } 1' \text{ δίδει } 120' \text{ ἢ} \\ 20'' = \frac{1}{3} \quad \text{»} \ 1' \quad \text{»} \quad 80' \text{ ἢ} \end{array} \right. & & \begin{array}{r} 2 \ \text{»} \\ 1 \ \text{»} \ 20' \end{array} \\ \hline & & & 1843 \text{ ὥρ. } 20' \end{array}$$

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

525) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν οἱ πολλαπλασιασμοί :
α) (3 ὧρ. 15′ 44″)×4.
β) (9° 35′ 24″)×9.
γ) (12 πήχ. 6 ρούπ.)×16.
δ) (14 ὑάρδ. 2 πόδ. 7 δακτ.)×21.
ε) (9 ἡμ. 5 ὧρ. 52′ 35″)×18.
ς) $\left(1 \text{ ὧρ. } 12' \ 23\frac{1''}{2}\right) \times 24$.

526) Ἐργάτης τις μετατρέπει 1 ὀκᾶν βάμβακος εἰς νῆμα εἰς διάστημα 2 ὡρῶν 25′. Εἰς πόσον χρόνον θὰ μετατρέψῃ εἰς νῆμα 5 ὀκάδας βάμβακος ; (ἀπ. 12 ὥρας 5′).

527) Πόσον ζυγίζουν 15 σάκκοι ξυλανθράκων, ὅταν ὁ εἷς ζυγίζει 1 στατ. 15 ὀκ. 250 δράμια ; (ἀπ. 19 στ. 14 ὀκ. 150 δρ.).

528) Διὰ μίαν ἐνδυμασίαν χρειάζεται ὕφασμα 2 ὑαρδ. 1 ποδ. καὶ 7 δακτ. Πόσον ὕφασμα χρειάζεται διὰ 24 ἐνδυμασίας ; (ἀπ. 60 ὑαρδ. 2 ποδ.).

529) Ἵνα διατρέξῃ τις ἓν χιλιόμετρον χρειάζεται 1 ὥρα 12′ καὶ 20″. Πόσας ὥρας χρειάζεται διὰ νὰ διατρέξῃ 12 χιλιόμετρα ; (ἀπ. 14 ὥρ. 28′).

530) Ὕφασμα 400 πήχεων, τὸ ὁποῖον ἐστοίχισε 1 λίρ. 5 σελ. 10 πεν. τὸν πῆχυν, μετεπώλησεν ἔμπορός τις πρὸς 1 λιρ. 6 σελ. 1 πεν. τὸν πῆχυν. Πόσον ἐκέρδισεν ἐν ὅλῳ ; (ἀπ. 5 λιρ.).

531) Μετέφερέ τις 15 σάκκους καφφέ, ἕκαστος τῶν ὁποίων ἐζύγιζε 31 ὀκ. 200 δραμ., 25 σάκκους ζακχάρεως, ἕκαστος τῶν ὁποίων ἐζύγιζεν 28 ὀκ. 150 δρ. καὶ 50 σάκκους ἀλεύρου, ἕκαστος τῶν ὁποίων ἐζύγιζεν 1 στατ. 8 ὀκ. 250 δραμ. Πόσον βάρος μετέφερεν ἐν ὅλῳ ; (ἀπ. 86 στ. 29 ὀκ. 50 δρ.).

532) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν οἱ ἑπόμενοι πολλαπλασιασμοὶ κατὰ τὴν μέθοδον τῶν ἁπλῶν μερῶν.

9 ὧρ. 35′ 12″×360,
4 στατ. 33 ὀκ. 320 δραμ.×160,
7 λιρ. 16 σελ. 8 πεν.×210.
12 ταλ. 4 δραχμ. 80 λεπτὰ × 420.

533) Μὲ 1 λίραν ἀγοράζει τις ἐξ ἑνὸς πράγματος 2 στατ. 35 ὀκ. 250 δραμ. Πόσον θὰ ἀγοράσῃ μὲ 280 λίρας ; (ἀπ. 786 στατ. 31 ὀκ.).

534) Διὰ νὰ κατασκευάσῃ τις τυρὸν ἠγόρασε 520 ὀκάδ
γάλακτος πρὸς 6 δρχ. 30 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν. Πόσας δραχμ
ἔδωκεν ; (ἀπ. 3276 δρχ.

535) Μία ὑφάντρια ὑφαίνει εἰς μίαν ὥραν ὕφασμα 1 ὑάρδ
2 ποδῶν 8 δακτύλων. Πόσον θὰ ὑφάνῃ εἰς 120 ὥρας ;
(ἀπ. 226 ὑάρδ. 2 πόδ.)

Διαίρεσις συμμιγοῦς δι᾽ ἀκεραίου.

146. ***Διενεμήθη σῖτος πρὸς σπορὰν 170 στ. 30 ὀκ. εἰ 16 χωρία. Πόσος σῖτος ἀντιστοιχεῖ εἰς ἕκαστον χωρίον***

Πρὸς τοῦτο πρέπει νὰ κάμωμεν τὴν διαίρεσιν (170 στατ 30 ὀκ.) : 16. Εὑρίσκομεν δέ, ὅτι εἰς ἕκαστον χωρίον ἀντιστοι χοῦν 10 στ. 29 ὀκ. 150 δράμ. Ἡ δὲ κάτωθι διάταξις τῆς πρά ξεως δεικνύει πῶς ἐξετελέσθη ἡ διαίρεσις αὕτη.

170 στ. 30 ὀκ.	16
10	10 στ. 29 ὀκ. 150 δρ.
44	
440 ὀκ.	
30	
470	
150	
6	
400	
2400 δράμια	
80	
0	

Σημ. Τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον θὰ εὕρωμεν καὶ ἂν τρέψωμεν πρῶτον τὸν διαιρετέον εἰς ἀκέραιον καὶ κατόπιν διαιρέσωμεν.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

536) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ διαιρέσεις :
72 λίρ. 7 σελ. 6 πέν. : 15.
24 στ. 17 ὀκ. 300 δράμ. : 16.
21 ὧραι 45΄ 40΄΄ : 25.
30° 45΄ 32΄΄ : 64.

537) Ὁμοίως αἱ :

1 λίρ. ἀγγλ. : 32.

88 λίρ. 17 σελ. 1 $\frac{1}{2}$ πέν. : 63.

56 ὑάρδ. 9 δακτ. : 30.

5 ὥρ. 37 $\frac{1'}{2}$: 72.

538) Ἁμαξοστοιχία διατρέχει εἰς 1 ὥραν 20″ 64 χιλιόμετρα. Εἰς πόσον χρόνον διατρέχει ἕνα χιλιόμετρον ; (ἀπ. 1′ 15″)

539) Εἰς χρονικὸν διάστημα 24 ὡρῶν 50′ 30″ συμβαίνουν δύο ἀμπώτιδες καὶ δύο πλημμυρίδες. Ποῖον χρονικὸν διάστημα χωρίζει ἓν φαινόμενον ἀπὸ τὸ ἀμέσως ἑπόμενον ; (ἀπ. 6 ὥρ. 12′ 37,5″)

540) Ἕνας μαθητὴς διὰ νὰ λύσῃ 15 προβλήματα ἐχρειάσθη 6 ὥρ. 18′. Πόσος χρόνος ἀντιστοιχεῖ εἰς ἕκαστον πρόβλημα ; (ἀπ. 25′ 12″)

541) Ἠγόρασέ τις 48 στατῆρας ἐλαιῶν αἱ ὁποῖαι κατὰ τὴν μεταφορὰν ἔχασαν βάρος 2 στατῆρας 24 ὀκ. 320 δράμ. Πόση ἀπώλεια βάρους ἀντιστοιχεῖ εἰς ἕνα στατ. ; (ἀπ. 2 στ. 140 δράμ.)

542) 175 τεμάχια χάλυβος ζυγίζουν 1 τόννον 330 χιλιόγρ. Πόσον ζυγίζει τὸ 1 τεμάχιον ; (ἀπ. 7 χιλ. 600 γρ.)

543) Ἔμπορός τις τὴν ἀξίαν 6 τεμαχίων ὑφάσματος ἐπλήρωσεν εἰς δόσεις ἐκ 40 λιρ. 10 σελ. 7 πεν. τὴν πρώτην καὶ ἐξ 65 λιρ. 19 σελ. 8 π. τὴν δευτέραν. Πόσον ἤξιζε τὸ 1 τεμάχιον ;

544) Ἠγόρασέ τις 25 χιλιόγραμμα κινίνης, τὰ ὁποῖα ἐπλήρωσε μὲ νόμισμα ἀγγλικὸν καὶ ἑλληνικόν. Ἔδωσε δὲ 75 λίρας 15 σελ. ὡς καὶ 8550 δρχ. 50 λεπτά Πόσας δραχμὰς ἐπλήρωσε τὸ χιλιόγραμμον ;

Πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ κλασματικόν.

147. ***Ἕνα κινητὸν διατρέχει μίαν περιφέρειαν κύκλου εἰς 5 ὥρας 18′ 20″. Εἰς πόσον χρόνον διατρέχει τὰ $\frac{3}{4}$ αὐτῆς ;***

Διὰ νὰ νὰ εὕρω τὸ ζητούμενον πολλαπλασιάζω (5 ὥρ. 18′20″) $\times \frac{3}{4} = \frac{(5 \text{ ὥρ. } 18' \ 20'') \times 3}{4}$ =(15 ὥρ. 54′ 60″) : 4=3 ὥρ. 58′ 45″.

148. ***Πῶς πολλαπλασιάζομεν συμμιγῆ ἐπὶ μικτόν ;***

'Ασκήσεις καὶ προβλήματα.

545) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν οἱ ἑπόμενοι πολλαπλασιασμοί :

(17 πήχ. 3 ρούπ.) $\times \frac{3}{4}$

$(35^{\circ}\ 45'\ 20'') \times 3\frac{1}{5}$

(22 ὑάρδ. 2 πόδ.) $\times \frac{4}{5}$

(40 στ. 33 ὀκ. 200 δράμ.) $\times 7\frac{9}{16}$

546) Ὁμοίως οἱ :

(14 λίρ. 7 σελ. 2 πεν.) $\times 2\frac{5}{8}$

(7 ὧρ. 40΄ 20΄΄) $\times$ 1,25

(3 στ. 12 ὀκ. 100 δράμ.) $\times$ 0,35.

(8 λιρ. 16 σελ.) $\times$ 2,037

547) Ἐάν, διὰ νὰ στρώσῃ τις ἕνα διάδρομον χρειάζεται τάπητα μήκους 2 πήχ. 5 ρούπ., πόσους πήχεις χρειάζεται διὰ νὰ στρώσῃ ἄλλον διάδρομον, ὅστις εἶναι τὰ $\frac{5}{6}$ τοῦ πρώτου ;

$\left(\text{ἀπ. 2 π. } 1\frac{1}{2}\text{ ρ.}\right)$

548) Ἐργάτης τις ὑπελόγισεν, ὅτι διὰ νὰ κτίσῃ ἕνα τοῖχον χρειάζεται 37 ὥρας 40΄· ἔκτισεν ὅμως τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ τοίχου. Ἐπὶ πόσας ὥρας εἰργάσθη ; (ἀπ. 15 ὧρ. 4΄).

549) Ἐὰν μία μηχανὴ ὑφαίνῃ καθ' ἡμέραν 158 πήχ. 3 ρούπ. ἑνὸς ὑφάσματος, πόσον θὰ ὑφαίνῃ εἰς $\frac{1}{2}$ ἡμέρας ;

550) Ἔχει τις δάνεια εἰς χρυσόν. Λαμβάνει δὲ ἀπὸ αὐτὰ κατ' ἔτος εἰσόδημα 14 λιρ. 12 σελ. 6 πεν. Πόσας λίρας θὰ λάβῃ εἰς $4\frac{1}{2}$ ἔτη ; (ἀπ. 65 λ. 16 σ. 3 π.)

551) Μία μηχανὴ ἀνασκάπτει ἀγρὸν καθ' ἡμέραν 17 τετρ. δεκαμέτρων καὶ 40 τ.μ. Πόσον θὰ ἀνασκάψῃ ἐπὶ $8\frac{1}{2}$ ἡμέρας ;

552) Ἠγόρασέ τις $4\frac{3}{4}$ πήχεις μαλλίνου ὑφάσματος πρὸς 1 λίρ. 4 σελ. τὸν πῆχυν· 8,4 πηχ. μεταξωτοῦ πρὸς 1 λιρ. 8 σελ. 6 πεν. τὸν πῆχυν καὶ $10\frac{1}{2}$ πήχεις βαμβακεροῦ πρὸς 2 σελ. 4 πέν. τὸν πῆχυν. Πόσον ἐπλήρωσεν ἐν ὅλῳ ;

Διαίρεσις (μερισμὸς) συμμιγοῦς διὰ κλάσματος.

149. ***Μία μηχανὴ ἀνασκάπτει τὰ $\frac{2}{5}$ ἑνὸς κτήματος εἰς 7 ὥρ. 32′ 16″. Εἰς πόσον χρόνον θὰ ἀνασκάψῃ ὅλον τὸ κτῆμα ;***

Διὰ νὰ εὕρω τὸ ζητούμενον πρέπει νὰ κάμω τὴν διαίρεσιν (μερισμὸν) (7 ὥρ. 32′ 16″) : $\frac{2}{5}$ = (7 ὥρ. 32′ 16″) × $\frac{5}{2}$. Εὑρίσκω δέ, ὅτι τὸ ὅλον κτῆμα θὰ τὸ ἀνασκάψῃ εἰς 18 ὥρ. 50′ 40″.

150. Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι μικτός, τρέπομεν αὐτὸν εἰς κλάσμα καὶ διαιροῦμεν ἔπειτα ὡς ἀνωτέρω, ἐὰν ἡ διαίρεσις εἶναι μερισμός.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

553) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἑξῆς διαιρέσεις :

15 μ. 6 παλ. 9 δακτ. : $\frac{3}{5}$

75 λιρ. 18 σελ. 9 πεν. : $2\frac{1}{2}$

7 ὑάρδ. 2 πόδ. 9 δακτ. : $\frac{5}{9}$

12 στ. 35 ὀκ. 75 δραμ. : $5\frac{7}{8}$

554) Ὁμοίως αἱ :

46 ταλ. 3 δρχ. 10 λεπτ. : 0,8.

3 τον. 200 χιλ. 150 γρ. :0,4.

32 λιρ. 45 γρ. 15 παρ. : 0,12.

15° 45′ 56″ : 3,25.

555) Νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ συμμιγὴς 2 στ. 15 ὀκ. ἐπὶ $5\frac{1}{4}$ καὶ τὸ γινόμενον νὰ διαιρεθῇ διὰ $2\frac{1}{5}$ (ἀπ. 5 στ. 25 ὀκ. 318 δρ.).

556) Ἐὰν δι' ὕφασμα $4\frac{1}{4}$ πήχ. ἐπλήρωσέ τις 1480 δρ. 60 λεπτά, πόσας δραχμὰς ἐπλήρωσε δι'ἕνα πῆχυν; (ἀπ. 348 δρ. 37 λ.)

557) Ἐὰν μία ἁμαξοστοιχία διατρέχῃ διάστημα 140 χιλιομ. καὶ 650 μέτρ. εἰς $5\frac{7}{12}$ ὥρ., πόσον διατρέχει εἰς 1 ὥραν ;

(ἀπ. 25 χιλ. 191 μ.).

558) Τὰ 0,35 τοῦ ἐτησίου εἰσοδήματος ἑνὸς ἀνθρώπου εἶναι 63 λιρ. 14 σελ. Ποῖον εἶναι τὸ ἐτήσιον εἰσόδημά του ;

559) Διὰ τὴν θέρμανσιν τῆς οἰκίας του ἐξώδευσέ τις εἰς $5\frac{1}{2}$ μῆνας, ξύλα 17 στατ. 20 ὀκ. Πόσους στατ. ἐξώδευσεν εἰς ἕνα μῆνα.

560) Ἠγόρασέ τις 17 τεμάχια ὑφάσματος, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἦτο 52 πήχ., 6 ρούπ., ἐπώλησε δὲ τοῦτο ἐντὸς $3\frac{1}{3}$ μηνῶν. Πόσων πήχεων πώλησις ἀντιστοιχεῖ εἰς ἕνα μῆνα;

Πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ συμμιγῆ.

151. ***Ὁ πῆχυς ὑφάσματός τινος ἀξίζει 65 δρχ. 60 λ. Πόσον ἀξίζουν 12 πήχ. 6 ρούπ. τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος;***

Τὸ πρόβλημα τοῦτο λύεται διὰ πολλαπλασιασμοῦ (65 δραχ. 60 λεπτ.) × (12 πήχ. 6 ρούπ.).

Ἀλλ᾽ ἐπειδὴ ἐδόθη ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς πήχεως, τρέπομεν τὸν συμμιγῆ πολλαπλασιαστὴν εἰς πήχεις καὶ πολλαπλασιάζομεν (65 δρ. 60 λεπτ.) × $12\frac{6}{8}$ =836 δρ. 40 λεπτ.

Ὅθεν ***ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι συμμιγής, τρέπομεν αὐτὸν εἰς μονάδας μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς τάξεως καὶ τὴν ὁποίαν ὁρίζει τὸ πρόβλημα.***

Τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα λύεται καὶ διὰ τῆς μεθόδου τῶν ἁπλῶν μερῶν, ὡς ἑξῆς φαίνεται.

ἀξία τῶν 12 πήχεων 65 δρ. 60 λ. ×12=787 δρ. 20 λ.

ἀξία 6 ρ. ἢ $\begin{cases} 4 \text{ ρ.} = \frac{1}{2} \text{ πήχ. } 65 \text{ δρχ. } 60 \text{ λ.} \times \frac{1}{2} = 32 \text{ δρ. } 80 \text{ λ.} \\ 2 \text{ ρ.} = \frac{1}{4} \text{ πηχ. ἢ } \frac{1}{2} \text{ τοῦ προηγουμ.} = 16 \text{ » } 40 \text{ λ.} \end{cases}$

ὁλικὸν ἐξαγόμενον 836 δρ. 40 λ.

Διαίρεσις συμμιγοῦς διὰ συμμιγοῦς.

152. *Διαίρεσις μερισμοῦ.* ***Ἕνα αὐτοκίνητον διέτρεξεν εἰς 3 ὥρ. 45΄ 102 χιλιόμετρα 450 μ. Πόσον διατρέχει τὴν ὥραν;***

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ζητούμενον πρέπει νὰ διαιρέσωμεν (102 χιλ. 450 μ.) : (3 ὥρ. 45΄). Ἀλλὰ ὁ συμμιγὴς διαιρέτης δὲν ἠμπορεῖ νὰ διαιρέσῃ κανένα ἀριθμόν, πρέπει δὲ ὁ διαιρέτης νὰ τραπῇ εἰς μονάδας μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς τάξεως. Ἐνταῦθα ἐπειδὴ ζητεῖται ἡ τιμὴ 1 ὥρας τρέπομεν τὸν συμμιγῆ 3 ὥρ. 45΄ εἰς ὥρας : $3\frac{3}{4}$. Διαιροῦμεν δὲ 102 χιλ. 450 μ. : $3\frac{3}{4}$ =27 χιλ.320μ.

Ἡ διαίρεσις αὕτη, εἰς τὴν ὁποίαν ὁ διαιρετέος εἶναι ὁμοειδὴς πρὸς τὸ πηλίκον καὶ διάφορος πρὸς τὸν διαιρέτην εἶναι ***μερισμός.***

Ὅθεν ***διὰ νὰ διαιρέσωμεν συμμιγῆ δι' ἄλλου, ὅταν ἡ διαίρεσις εἶναι μερισμός, τρέπομεν τὸν διαιρέτην εἰς μονάδας μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς τάξεως τὴν ὁποίαν ὁρίζει τὸ πρόβλημα, ἔπειτα διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τὸν ὁποῖον εὑρίσκομεν.***

153. ***Διαίρεσις μετρήσεως. Μία μηχανὴ ὑφαίνει εἰς μίαν ὥραν 7 πήχ. 6 ρούπ. ἑνὸς ὑφάσματος. Πόσας ὥρας χρειάζεται διὰ νὰ ὑφάνῃ 197 πήχ. 5 ρούπ. τοῦ ἰδίου ὑφάσματος;***

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ζητούμενον πρέπει νὰ διαιρέσωμεν (197 πηχ. 5 ρουπ.) : (7 πηχ. 6 ρουπ.)· ἀλλ' ἵνα ἐκτελεσθῇ ἡ διαίρεσις αὕτη τρέπομεν ἀμφοτέρους τοὺς συμμιγεῖς εἰς ρούπια καὶ διαιροῦμεν 1581 : 62, θεωροῦντες τοὺς δύο τούτους ἀκεραίους ὡς ἀφῃρημένους· τὸ πηλίκον εἶναι $\frac{1581}{62}$ καὶ πρέπει νὰ θεωρηθῇ, ὅτι παριστᾷ ὥρας, διότι ὥρας λέγει τὸ πρόβλημα. Εὑρίσκομεν δὲ $25\frac{1}{2}$ ὥρ.

Ἡ διαίρεσις αὕτη, καθ' ἣν ὁ διαιρετέος εἶναι ὁμοειδὴς πρὸς τὸν διαιρέτην, εἶναι ***μέτρησις.***

Ὅθεν ***διὰ νὰ διαιρέσωμεν συμμιγῆ δι' ἄλλου, ὅταν ἡ διαίρεσις εἶναι μέτρησις, τρέπομεν αὐτοὺς εἰς ἀκεραίους ὁμοειδεῖς καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν τοὺς ἀκεραίους τούτους, τὸ δὲ εἶδος τοῦ πηλίκου προσδιορίζεται ἐκ τοῦ προβλήματος.***

Προβλήματα.

X 561) Ὁ πῆχυς ἑνὸς ὑφάσματος ἀξίζει 80 δραχ. 75 λεπτά. Πόσον ἀξίζουν οἱ 19 πηχ. 6 ρουπ. τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος;

(ἀπ. 1352,56)

X 562) Ἀτμόπλοιον διατρέχει εἰς μίαν ὥραν $14\frac{1}{2}$ μίλ. Πόσον θὰ διατρέξῃ εἰς 8 ὥρας 15′ 20″; (ἀπ. $119\frac{127}{180}$)

X 563) Τὸ ρούπιον ἑνὸς ὑφάσματος ἀξίζει 5 δραχμ. 20 λεπτά. Πόσον ἀξίζουν 12 πήχ. 6 ρουπ. τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος;

(ἀπ. 530,40)

5/8

564) Ἕνα κινητὸν διατρέχει εἰς 1´ 8 μέτρα 4 παλ. Πόσ
διατρέχει εἰς 20´ 45´´ ; (ἀπ. 174 μ. 3 παλ

565) Διὰ νὰ πλέξῃ μία ἐργάτρια 1 μ. δαντέλλαν χρειάζετ
20´ 45´´ τῆς ὥρας. Εἰς πόσον χρόνον θὰ πλέξῃ δαντέλλαν
μέτρα 4 παλ. ; (ἀπ. 2 ὥρ. 54´ 18´

566) Μία ὀκᾶ σίτου ἀνταλλάσσεται μὲ 1 ὀκᾶν 300 δράμ
κριθῆς. Μὲ πόσας ὀκάδας κριθῆς θ' ἀνταλλαχθῶσι 12 ὀκάδ
100 δραμ. σίτου ; (ἀπ. 21 ὀκ. 175 δρ

567) Ὁ πῆχυς μιᾶς τσόχας ἔχει βάρος 150 δράμια. Πόσ
βάρος ἔχουσι 18 πήχεις 5 ρούπια ; (ἀπ. 6 ὀκ. 394 δ

568) Μία μηχανὴ καίει καθ' ἡμέραν 2 τόννους καὶ 5
χιλιόγραμμα ἀνθράκων. Πόσον θὰ καύσῃ εἰς 7 ἡμερ. 5 ὥρα
(ἡ μηχανὴ ἐργάζεται ἐπὶ 8 ὥρας καθ' ἡμέραν).
(ἀπ. 19 τ. 62 χιλ. 500 γ

569) Ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος ἐπωλήθησαν 18 πήχ. 3 ρούπ. ἀ
2241 δρχ. καὶ 75 λεπ. Πόσον ἐπωλήθη ὁ εἷς πῆχυς ; (ἀπ. 12

570) Ἐργασθείς τις 8 ὥρας 15´ ἔλαβεν ὡς ἀμοιβὴν 59 δ
40 λεπ. Πόσας ἔλαβε διὰ 1 ὥραν ; (ἀπ. 7,2

571) Σιδηρόδρομός τις διήνυσε 306 χιλιόμ. εἰς 12 ὥρας κ
45´. Πόσον διήνυσεν εἰς μίαν ὥραν καὶ πόσον εἰς 1´ ;
(ἀπ. 24 χιλ. 400 μ

572) Εἴς τινα ἀγρὸν ἐσπάρησαν 25 ὀκ. 300 δράμ. σίτ
καὶ παρήγαγον 452 ὀκ. 120 δράμ. Πόσον παρήγαγεν ἑκάσ
ὀκᾶ ; (ἀπ. 17 ὀκ. 226 δ

573) Ἐκ τοῦ αὐτοῦ πράγματος ἐπώλησαν δύο ἔμποροι
μὲν εἰς 15 ὀκ. 300 δράμ. ἀντὶ 649 δρχ. 65 λεπτ. ὁ δὲ ἄλ
52 ὀκ. 250 δράμ. ἀντὶ 2252 δραχ. 35 λεπτά. Τίς ἐκ τῶν δύο ἐπ
λησεν εὐθηνότερον ; (ἀπ. ὁ α

574) Ἠγόρασέ τις βούτυρον 108 ὀκ. 300 δραμ. καὶ ἐπλ
ρωσεν δρχ. 6785 καὶ 80 λεπτά, χρεωστεῖ δὲ ἀκόμη νὰ πληρώ
2838,90 δρ. Πρὸς πόσας δρ. ἠγόρασε τὴν μίαν ὀκᾶν ; (ἀπ. 88,

575) Ἡ ὑάρδα ἑνὸς ὑφάσματος τιμᾶται 8 σελ. 6 π. 3 φα
Πόσας ὑάρδας δυνάμεθα νὰ ἀγοράσωμεν μὲ 2 λίρας 7 σελ.
πέν. 1 φαρδ. ; (ἀπ. 5 ὑ. 1 π. 7

576) Μὲ μίαν λίραν Τ. ἀγοράζει τις 38 ὀκ. 350 δράμ.
ἑνὸς πράγματος. Πόσας λίρας χρειάζεται διὰ νὰ ἀγοράσῃ 5
ἐκ τοῦ αὐτοῦ πράγματος ;. (ἀπ. 5 λ. 65 γ. 36

577) Μία μηχανὴ ὑφαίνει 5 πήχ. ἑνὸς ὑφάσματος κάθε ὥραν. Πόσας ὥρας χρειάζεται διὰ νὰ ὑφάνῃ 1870 πήχ. 2 ρούπ. τοῦ ἰδίου ὑφάσματος; (ἀπ. 374 ὥρ. 3′)

578) Ἕνα κινητὸν διατρέχει εἰς 1′ τῆς ὥρας τόξον περιφερείας κύκλου 3° 15′ 42″· εἰς πόσον χρόνον θὰ διατρέξῃ τόξον τῆς αὐτῆς περιφερείας 17° 56′ 21″; (ἀπ. 5′ 30″)

579) Τόξον περιφερείας κύκλου 2° 15′ ἔχει μῆκος ἑνὸς μέτρου. Πόσων μέτρων θὰ εἶναι τὸ μῆκος τοῦ τόξου 63° 33′ 45″ τῆς αὐτῆς περιφερείας;

580) Ἡ ἀγγλικὴ λίρα ἔχει βάρος 7,988 γραμμαρίων. Πόσαι λίραι ἔχουσι βάρος ἑνὸς χιλιογράμμου;

581) Ὅταν 1 ὀκᾶ 100 δράμια καπνοῦ τιμῶνται 1 ἑκατοντάδραχμον, μὲ πόσα ἑκατοντάδραχμα θὰ ἀγοράσωμεν 93 χιλιόγρ. 312 γραμ. τοῦ καπνοῦ αὐτοῦ;

582) Ἓν ὡρολόγιον ἔμεινεν ὀπίσω 8′ 40″. Πρὸ πόσων ὡρῶν ἐκανονίσθη μὲ τὴν ἀκριβῆ ὥραν, γνωστοῦ ὄντος, ὅτι τὸ ὡρολόγιον τοῦτο μένει ὀπίσω κάθε ὥραν $21''\frac{2}{3}$;

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΒΙΒΛΙΟΝ Δ΄

ΠΕΡΙ ΜΕΘΟΔΩΝ

Ποσὰ ἀνάλογα καὶ ἀντίστροφα

154. ***Ποσὰ ἀνάλογα.*** Ἂς θεωρήσωμεν δύο ποσά, π. χ. τὸ μῆκος ἑνὸς ὑφάσματος καὶ τὴν ἀξίαν αὐτοῦ. Ἀλλὰ παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ ἀξία τοῦ ὑφάσματος αὐτοῦ εἶναι συνάρτησις τοῦ μήκους του· ἐὰν δὲ ὁ 1 πῆχυς τιμᾶται 50 δρχ. οἱ 2 πήχεις θὰ τιμῶνται 100 δρχ. οἱ 3 πήχεις 150 δρχ. καὶ γενικῶς, ὅταν τὸ μῆκος αὐτὸ γίνῃ 2, 3, 4, ... φορὰς μεγαλύτερον (ἢ μικρότερον) ἡ ἀξία του θὰ γίνῃ 2, 3, 4 . . . . φορὰς μεγαλυτέρα (ἢ μικροτέρα).

Ὁμοίως τὸ διάστημα τὸ ὁποῖον διανύει ἕνας σιδηρόδρομος εἶναι συνάρτησις τοῦ χρόνου, κατὰ τὸν ὁποῖον κινεῖται. Ἐὰν δὲ ἡ ταχύτης του εἶναι σταθερὰ καὶ διανύει εἰς 1 ὥραν 30 π.χ. χιλιόμετρα, εἰς χρόνον διπλάσιον, τριπλάσιον κτλ. θὰ διανύσῃ διπλάσιον, τριπλάσιον κτλ. διάστημα.

Τὰ τοιαῦτα ποσὰ λέγονται ***ἀπ᾽ εὐθείας ἀνάλογα*** ἢ ***ἁπλῶς ἀνάλογα.***

155. ***Ποσὰ ἀντίστροφα.*** Ἐὰν 1 ἐργάτης τελειώνῃ ἓν ἔργον εἰς 18 ἡμέρας, 2 ἐργάται θὰ τὸ τελειώσουν εἰς 9 μόνον ἡμέρας, 3 δὲ ἐργάται εἰς 6 ἡμέρας κ.ο.κ. Ὁμοίως ἕνα αὐτοκίνητον, τὸ ὁποῖον ὅταν κινῆται μὲ ταχύτητα 40 χιλιομέτρων τὴν ὥραν, διανύει ἕνα ὡρισμένον διάστημα εἰς 4 ὥρας, ἐὰν καταστήσῃ τὴν ταχύτητα αὐτοῦ 2, 3, ... φορὰς μεγαλυτέραν (ἢ μικροτέραν) θὰ διανύσῃ τὸ αὐτὸ διάστημα εἰς χρόνον 2, 3 φορὰς μικρότερον (ἢ μεγαλύτερον).

Τὰ τοιαῦτα ποσὰ καλοῦνται ***ἀντιστρόφως ἀνάλογα*** ἢ ἁπλῶς ***ἀντίστροφα.***

156. Ἕνα ποσὸν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι συνάρτησις πολλῶν ἄλλων καὶ νὰ εἶναι ἀνάλογον πρὸς τὰ μὲν ἐξ αὐτῶν καὶ ἀντίστροφον πρὸς τὰ ὑπόλοιπα. Π.χ. ὁ χρόνος κατὰ τὸν ὁποῖον ἕνα

κινητὸν διανύει διάστημά τι ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ διάστημα καὶ ἀπὸ τὴν ταχύτητά του καὶ εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὸ διάστημα (ὅταν ἡ ταχύτης του μένει σταθερὰ) καὶ ἀντίστροφος πρὸς τὴν ταχύτητα, ὅταν τὸ διάστημα μένῃ σταθερόν).

Ἀσκήσεις.

583) Πότε δύο ποσὰ λέγονται ἀνάλογα καὶ πότε ἀντίστροφα ;

584) Δώσατε παραδείγματα ποσῶν ἀναλόγων καὶ ἀντιστρόφων.

585) Ἐὰν δύο ποσὰ ἁπλῶς συναυξάνουσιν ἢ ἁπλῶς μεταβάλλωνται ἀνομοίως, δύναται νὰ λεχθῶσιν ἀνάλογα ἢ ἀντίστροφα ; Δώσατε παραδείγματα τοιούτων ποσῶν.

Μέθοδος τῶν τριῶν.

157. Πρόβλημα. ***Ὀκτὼ ὀκάδες οἴνου ἀξίζουν 92 δραχ. Πόσον ἀξίζουν 35 ὀκάδες τοῦ αὐτοῦ οἴνου ;***

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο ἔχομεν δύο ποσὰ ἀνάλογα, τὸν ἀριθμὸν τῶν ὀκάδων καὶ τὰς δραχμάς. Λύοντες δὲ αὐτὸ διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα, εὑρίσκομεν, ὅτι αἱ 35 ὀκάδες ἀξίζουν $\frac{92\times35}{8}=92$ δρ. $\times\frac{35}{8}=402{,}50$ δρχ.

Πρόβλημα. ***Ἐργάτης τις, ἐργαζόμενος 8 ὥρας καθ' ἡμέραν, ἐτελείωσεν ἔργον τι εἰς 12 ἡμέρας· ἂν εἰργάζετο 9 ὥρας καθ' ἡμέραν, εἰς πόσας ἡμέρας ἤθελε τελειώσει τὸ ἔργον ;***

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο ἔχομεν δύο ποσὰ ἀντίστροφα, τὰς ὥρας τῆς καθημερινῆς ἐργασίας καὶ τὰς ἡμέρας, εἰς τὰς ὁποίας τελειώνει τὸ ἔργον· λύομεν δὲ αὐτὸ ὁμοίως ὡς τὸ ἄνω καὶ εὑρίσκομεν, ὅτι, ἂν εἰργάζετο 9 ὥρας καθ' ἡμέραν θὰ ἐτελείωνε τὸ ἔργον εἰς 12 ἡμ. $\times\frac{8}{9}=10$ ἡμ. 6 ὥρας.

158. Εἰς ἕκαστον τῶν προηγουμένων δύο προβλημάτων παρατηροῦμεν, ὅτι δίδονται δύο ἀντίστοιχοι τιμαὶ δύο ποσῶν ἀναλόγων ἢ ἀντιστρόφων καὶ μία ἄλλη τιμὴ τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν· ζητεῖται δὲ ἡ πρὸς τὴν νέαν ταύτην τιμὴν ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ἄλλου. Τὰ τοιαῦτα προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα δίδονται τρεῖς ἀριθμοὶ καὶ ἐξ αὐτῶν ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ὁ ἄγνωστος, λέγονται προβλήματα ***τῆς μεθόδου τῶν τριῶν***,

159. Ἐὰν τὰ δεδομένα ἑκάστου τῶν ἀνωτέρω προβλημάτων

καὶ τὸ ζητούμενον διατάξωμεν εἰς δύο στίχους, ὡς ἑξῆς φαίνεται

α) ὀκάδες δραχμαὶ β) ὧραι ἡμέραι

$$\frac{8}{35} \quad \frac{92}{\chi} \qquad \frac{8}{9} \quad \frac{12}{\chi}$$

καὶ παρατηρήσωμεν τὰς εὑρεθείσας τιμὰς $\chi = 92$ δρχμ. $\times \frac{35}{8}$ καὶ $\chi = 12$ ἡμ. $\times \frac{8}{9}$ ὡς πρὸς τὴν διάταξιν ταύτην, εὐκόλως συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα πρὸς σύντομον λύσιν τῶν προβλημάτων τῆς μεθόδου τῶν τριῶν, τῶν ὁποίων τὰ δεδομένα καὶ τὸ ζητούμενον διατάσσομεν ὡς ἀνωτέρω.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ἄγνωστον χ πολλαπλασιάζομεν τὸν ὑπεράνω αὐτοῦ ὁμοειδῆ ἀριθμὸν μὲ τὸ κλάσμα, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπὸ τοὺς δύο ἄλλους ὡς εἶναι γραμμένοι, ἐὰν τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα, ἢ μὲ τὸ κλάσμα αὐτὸ ἀντεστραμμένον, ἐὰν τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα.

Ἤτοι ἐὰν ἡ τιμὴ τῶν α μονάδων ἑνὸς ποσοῦ εἶναι β, ἡ τιμὴ γ ὁμοίων μονάδων τοῦ αὐτοῦ ποσοῦ εἶναι $\beta \times \frac{\gamma}{\alpha}$, ἐὰν τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, καὶ $\beta \times \frac{\alpha}{\gamma}$, ἐὰν τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα.

Προβλήματα.

586) Ἐὰν 10 ἐργάτριαι ὑφαίνωσι 35 πήχεις ὑφάσματος εἰς χρόνον τινά, πόσαι ἐργάτριαι θὰ ὑφάνωσιν εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον 49 πήχεις τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος; (ἀπ. 14).

587) Ἐργάτης τις ἐκέρδισεν εἰς 15 ἡμέρας 845,25 δραχμ. Πόσας θὰ ἐκέρδιζεν ἐὰν ἠργάζετο 6 ἡμέρας ἐπὶ πλέον; (ἀπ. 1183,35).

588) Ἐὰν 25 ὀκάδες καυσόξυλα ἀξίζουν 32,50 δρ. πόσον ἀξίζουν 4 στατῆρες τῶν αὐτῶν καυσοξύλων; (ἀπ. 228,80).

589) Οἰκογένειά τις χρειάζεται 428 ὀκάδες ἄλευρον τὸ ἔτος. Πόσον χρειάζεται διὰ 8 μῆνας; $\left(\text{ἀπ. } 285\frac{1}{3}\right)$

590) 30 δράμια μετάξης ἀξίζουν 125 δρχ. Πόσον ἀξίζουν 2 ὀκ. 150 δράμ. τῆς αὐτῆς μετάξης; $\left(\text{ἀπ. } 3958\frac{1}{3}\right)$

591) Μὲ 464,20 δρχ. ἀγοράζει τις $5\frac{1}{2}$ ὀκάδας βουτύρου. Πόσας ὀκάδας τοῦ αὐτοῦ βουτύρου θὰ ἀγοράσῃ μὲ 1455,90 δρ;

592) Μὲ 3 λίρ. 5 σελ. ἀγοράζει τις 5 ὑάρδ. ἀγγλικοῦ ὑφά-

σματος. Πόσας ὑάρδας τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος θὰ ἀγοράσῃ μὲ 92 λίρ. 16 σελ. 8 πεν. ;

593) Ἐὰν 4 ὑάρδ. 2 ποδ. ὑφάσματός τινος τιμῶνται 3 λιρ. 10 σελ., πόσας λίρας τιμῶνται 12 ὑάρδαι καὶ 1 ποῦς τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος ;

594) 250 δράμια πράγματός τινος ἀξίζουν 27,5 δρχ. Πόσον ἀξίζουν τὰ $\frac{7}{8}$ τῆς ὀκᾶς τοῦ αὐτοῦ πράγματος ; (ἀπ. 38,50)

595) 15 ἐργάται στρώνουν ἕνα τμῆμα μιᾶς ὁδοῦ εἰς 13 ὥρ. Ἐὰν ἠργάζοντο 18 ἐργάται, εἰς πόσον χρόνον θὰ ἔστρωναν τὸ αὐτὸ τμῆμα ; $\left(\text{ἀπ. } 10\frac{5}{6}\right)$

596) Διὰ τὴν ἐνδυμασίαν 80 ἀνθρώπων ἐχρειάσθησαν 312 πήχ. καὶ 2 ρούπ. ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος, πλάτους 6 ρούπ. Πόσοι πήχεις χρειάζονται διὰ τὴν ἐνδυμασίαν τῶν ἰδίων ἀνθρώπων ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος, τὸ ὁποῖον ἔχει πλάτος ἕνα πῆχυν ; $\left(\text{ἀπ. } 234 \text{ π. } 1\frac{1}{2} \text{ ρ.}\right)$

597) Ἐὰν 10 ἐργάται τελειώνουν ἕνα ἔργον εἰς 28 ἡμέρας πόσοι ἐργάται ἀκόμη πρέπει νὰ προσληφθῶσι διὰ νὰ τελειώσῃ τὸ ἔργον εἰς 8 ἡμέρας ; (ἀπ. 25)

598) Ἁμαξοστοιχία τις διανύει διάστημά τι εἰς 12 ὥρας μὲ ταχύτητα 34 χιλιομέτρων τὴν ὥραν. Ἐὰν ὅμως ἡ ταχύτης αὐτῆς ἦτο 40 χιλ. τὴν ὥραν, εἰς πόσον χρόνον θὰ διήνυε τὸ αὐτὸ διάστημα ; (ἀπ. 10 ὥρ. 12′)

599) Ταχυδρόμος, βαδίζων 5 ὥρας καθ' ἡμέραν, διανύει ἀπόστασίν τινα εἰς 12 ἡμέρας. Ἂν βαδίζῃ καθ' ἑκάστην 6 ὥρας, εἰς πόσας ἡμέρας θὰ διανύσῃ τὴν αὐτὴν ἀπόστασιν ; (ἀπ. 10)

600) Τὸ ἥμισυ ἔργου τινὸς ἐτελείωσαν 38 ἐργάται εἰς 18 ἡμέρας. Πόσοι ἐργάται θὰ τελειώσουν τὸ ὑπόλοιπον ἔργον εἰς 12 ἡμέρας ; (ἀπ. 57)

601) Ἐπρόκειτο νὰ μοιρασθῇ ἓν ποσὸν χρημάτων εἰς 68 πτωχούς, ἕκαστος τῶν ὁποίων ὑπελογίσθη, ὅτι θὰ ἐλάμβανε 17,50 δρχ., ἀλλὰ τὸ ποσὸν τοῦτο ἐμοιράσθη τελικῶς εἰς 70 πτωχούς. Πόσας δραχμὰς ἔλαβεν ἕκαστος ; (ἀπ. 17)

Προβλήματα ποσοστῶν.

160. Οἱ ἄνθρωποι εἰς τὰς συναλλαγάς των πολλὰ ποσὰ τὰ προσδιορίζουν ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ 100 ἢ τοῦ 1000.

Π. χ. ὁ μεσίτης λαμβάνει μεσιτείαν 2 ἐπὶ τοῖς 100, δηλαδὴ δι᾿ ἑκάστην ἑκατοντάδα δραχμῶν ἐπὶ τῆς ἀξίας τοῦ ἐμπορεύματος τὸ ὁποῖον μεσιτεύει καὶ πωλεῖται, λαμβάνει ὡς ἀμοιβὴν 2 δρχ. καὶ σημειοῦται αὕτη συμβολικῶς 2%. Ὁμοίως ὁ ἔμπορος πωλεῖ μὲ κέρδος π. χ. ἢ μὲ ἔκπτωσιν 12%. Τὸ δημόσιον ὁρίζει φόρον ἐπὶ τοῦ εἰσοδήματος πρὸς 3 %, αἱ ἀσφαλιστικαὶ ἑταιρεῖαι ἀσφαλίζουσι τὰ ἐμπορεύματα ἐναντίον τοῦ πυρὸς μὲ ἀσφάλιστρα $3\frac{1}{2}$ ‰ $\left(3\frac{1}{2} \text{ ἐπὶ τοῖς χιλίοις} \right)$ διὰ διάστημα ἑνὸς ἔτους κτλ.

Τὸ ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ 100 ἢ τοῦ 1000 ἀντιστοιχοῦν ποσὸν ἐπὶ τῆς ὅλης ἀξίας λέγεται ***ποσοστόν***.

Προβλήματα.

1ον) ***Ἐπώλησέ τις ἐμπορεύματα ἀξίας 3650 δρχ. μὲ κέρδος 12%. Πόσας δραχμὰς ἐκέρδισεν;***

Εἰς 100 δραχμὰς κερδίζει 12
» 3650 » » χ

$$χ = 12 \text{ δρχ.} \times \frac{3650}{100} = 438 \text{ δρχ.} \text{ (τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα)}$$

ἢ εἰς 100 δραχμὰς κερδίζει 12 δραχμὰς
» 1 δραχμὴν » 0,12 »
» 3650 δραχμὰς » 0,12 δρχ. × 3650=438 δρχ.

2ον) ***Ἠσφάλισέ τις ἐμπόρευμα ἐναντίον τῶν κινδύνων τῆς θαλάσσης πρὸς 4‰, ἐπλήρωσε δὲ δι᾿ ἀσφάλιστρα 720 δρχ. Ποία ἦτο ἡ ἀξία τῶν ἀσφαλισθέντων ἐμπορευμάτων;***

Δι᾿ ἀξίαν 1000 δρχ. ἐπλήρωσε 4 δρχ.
» » χ » » 720 »

$$χ = 1000 \text{ δρχ.} \times \frac{720}{4} = 180000 \text{ δρχμ.}$$

3ον) ***Ἔμπορος, πωλήσας ἐμπόρευμά τι μὲ κέρδος 7%, ἔλαβεν ἐκ τῆς πωλήσεως 2289,80 δρχ. Ποία ἦτο ἡ ἀξία τοῦ ἐμπορεύματος;***

Δι᾿ ἀξίαν 100 δρχμ. ἔλαβεν 107
» » χ » » 2289,80

$$χ = 100 \text{ δρχ.} \times \frac{2289,80}{107} = 2140 \text{ δρχμ.}$$

4ο) ***Ἀπὸ ἓν μετάλλευμα 150 χιλιογράμμων ἐξήχθησαν***

1,25 χιλιόγραμμα καθαροῦ σιδήρου. Πόσα τοῖς ἑκατὸν οῦ ὅλου μεταλλεύματος εἶναι ὁ ἐξαχθεὶς σίδηρος;

ἀπὸ 150 χιλ. ἐξήχθησαν 11,25 χιλ. σιδήρου
» 100 » » x » »

$= 11,25 \times \frac{100}{150} = 7,5\%$.

Προβλήματα.

Ἀπὸ μνήμης:

602) Νὰ εὑρεθῇ τὸ 1%, 2%, 3% ἐπὶ τῶν 200 δρχ., 700 ρχ. 800 ὀκ., 350 δολ. 1500 λιρ. Τουρκ.

603) Ὁμοίως νὰ εὑρεθῇ τὸ $\frac{1}{2}$%, $1\frac{1}{2}$%, $\frac{1}{3}$%, $1\frac{1}{3}$% πὶ τῶν 600 δρχ., 1500 δρχ., 1200 ὀκ.

604) Ὁμοίως νὰ εὑρεθῇ τὸ 50%, 100%, 150%, 200% πὶ τῶν 24 λιρ., 80 δρχ., 184 ὀκ. 525 μ.

605) Νὰ εὑρεθῇ τὸ 1‰, 2‰ $2\frac{1}{2}$‰ ἐπὶ τῶν 10000 δρχ. 25000 δρχ., 3500 δρχ.

Γραπτῶς.

606) Νὰ εὑρεθῇ τὸ $\frac{3}{4}$%, $3\frac{3}{4}$%, $5\frac{1}{2}$%, 12,5% ἐπὶ τῶν 480 δρ. 1257,5 λιρ. ἀγγλ., 1086,4 ὀκ.

607) Μεσίτης τις ἐνοικίασεν οἰκίαν πρὸς 2500 δραχμὰς τὸν μῆνα. Ἔλαβε δὲ μεσιτείαν ἐπὶ τοῦ ἐνοικίου ἑνὸς ἔτους $2\frac{1}{4}$% Πόσας δραχμὰς ἔλαβεν; (ἀπ. 675).

608) Ἔμπορός τις, πτωχεύσας μὲ παθητικὸν 400000 δραχμῶν, συνεβιβάσθη νὰ πληρώσῃ 55% ἐπὶ ἐκείνων, τὰ ὁποῖα χρεωστεῖ. Πόσα ἐπλήρωσεν; (ἀπ. 220000).

609) Ἐπὶ 375 μαθητῶν σχολείου οἱ 92% προήχθησαν καὶ οἱ λοιποὶ ἀπερρίφθησαν. Πόσοι μαθηταὶ τοῦ σχολείου αὐτοῦ προήχθησαν καὶ πόσοι ἀπερρίφθησαν; (ἀπ. 345, 30)

610) Ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία χαρτοσήμου ἐπιβαρύνεται μὲ 30% ἐπ' αὐτῆς διὰ τὴν ἐξυπηρέτησιν τοῦ ἀναγκαστικοῦ δανείου καὶ προμήθειαν 2%, ἐὰν πωλῆται παρ' ἰδιώτου. Ἐὰν ἑπομένως ἀγοράσῃ τις παρ' ἰδιώτου χαρτόσημον ὀνομαστικῆς ἀξίας 40 δρχμ. πόσας δραχμὰς θὰ πληρώσῃ;

611) Ὁ πληθυσμὸς μιᾶς πόλεως κατά τινα ἀπογραφὴν εὑρέθη ὅτι ἀνήρχετο εἰς 250000 καὶ κατὰ τὴν ἑπομένην εὑρέθη ηὐξημένος κατὰ 12 %. Ποῖος ἦτο ὁ πληθυσμὸς αὐτῆς κατὰ τὴν ἑπομένην ἀπογραφήν ; (ἀπ. 280000).

612) Ἀπὸ ἕνα μετάλλευμα 156 τόννων ἐξήχθησαν 5,5 % καθαροῦ χαλκοῦ. Πόσος χαλκὸς ἐξήχθη ; (ἀπ. 8 τ. 580 χιλ.)

613) Ἀσφαλίζει τις οἰκίαν ἀξίας 225000 δρχ. πρὸς $2\frac{3}{4}$ ‰. Πόσα ἀσφάλιστρα πληρώνει ἐτησίως ; (ἀπ. 618,75).

614) Διὰ τὴν πώλησιν ἐμπορευμάτων ἀξίας 56000 δραχ. ὁ μεσίτης ἐπρόκειτο νὰ λάβῃ μεσιτείαν 4 %, ἀλλ' ἔλαβε $3\frac{3}{4}$ %. Πόσον ἐζημιώθη ; (ἀπ. 140).

615) Τὸ μικτὸν βάρος ἐμπορεύματος εἶναι 875 ὀκ. Πόσον εἶναι τὸ καθαρὸν βάρος αὐτοῦ, ἐὰν τὸ ἀπόβαρον εἶναι $4\frac{1}{2}$ %; (ἀπ. 835 ὀκ. 250 δραμ.).

616) Ὁ πληθυσμὸς μιᾶς πόλεως εἶναι 12000, αὐξάνει δὲ ἐτησίως κατὰ 5%. Ποῖος θὰ εἶναι ὁ πληθυσμὸς αὐτῆς μετὰ 2 ἔτη ; (ἀπ. 13230).

617) Ἠσφάλισέ τις ἐμπορεύματα ἐναντίον τῶν κινδύνων τοῦ πυρὸς πρὸς $3\frac{1}{2}$ % καὶ ἐπλήρωσεν 896 δρχ. Ποία ἦτο ἡ ἀξία τῶν ἐμπορευμάτων. (ἀπ. 25600).

618) Τὸ καθαρὸν βάρος ἐμπορεύματος εἶναι 609 ὀκ. 240 δραμ. Πόσον εἶναι τὸ μικτὸν βάρος αὐτοῦ, ἐὰν τὸ ἀπόβαρον εἶναι 4% ; (ἀπ. 635).

619) Ἀγοράσας τις ὕφασμα ἀντὶ 56,25 δρχ. τὸν πῆχυν τὸ πωλεῖ ἀντὶ 60,75 δρ. Πόσον τοῖς ἑκατὸν κερδίζει ; (ἀπ. 8).

620) Ὁ πληθυσμὸς τῆς Ἑλλάδος ἀπὸ 2000000 ποὺ ἦτο πρὸ τοῦ 1912 ἀνέρχεται σήμερον εἰς 6200000. Πόσον τοῖς % ηὐξήθη ; (ἀπ. 210).

621) Εἰς μίαν πόλιν αἱ γεννήσεις ἀνῆλθον εἰς διάστημα ἑνὸς ἔτους εἰς 9450. Ἐὰν αὗται ἀποτελοῦν τὰ 4,5 % ἐπὶ τῶν κατοίκων, πόσους κατοίκους εἶχεν ἡ πόλις αὕτη ; (ἀπ. 210000).

622) Ἐκ τῶν κατοίκων μιᾶς πόλεως, οἵτινες προσεβλήθησαν ὑπὸ ἐπιδημίας, ἀπέθανον 4 %. Ἐὰν ἐξ αὐτῶν ἐπέζησαν 720, πόσοι ἦσαν οἱ προσβληθέντες ὑπὸ τῆς ἐπιδημίας ; (ἀπ. 750).

623) Ἔμπορος, πωλήσας ὕφασμα ἀντὶ 789,95 δρ., ἐζημιώθη $7\frac{1}{2}$ %, ἐπὶ τῆς ἀξίας του. Ποία ἦτο ἡ ἀξία τοῦ ὑφάσματος; (ἀπ. 854).

624) Ὠφειλέ τις ἓν ποσὸν χρημάτων, ἐπὶ τοῦ ὁποίου τῷ ἐγένετο ἔκπτωσις 25 %. Ἐπλήρωσε δὲ οὕτω 2625 δραχ. Πόσα ὤφειλεν; (ἀπ. 3500).

625) Ἐπώλησέ τις οἰκίαν καὶ ἀφοῦ ἐπλήρωσεν ἐπὶ τῆς τιμῆς τῆς πωλήσεως 3 % διὰ μεσιτείαν καὶ 12 % διὰ φόρον ὑπερτιμήματος, τῷ ἀπέμειναν 327250 δρχ. Ἀντὶ πόσων δραχμῶν ἐπώλησε τὴν οἰκίαν; (ἀπ. 385000)

626) Ὁ ἄρτος, τὸν ὁποῖον παρασκευάζει ἀρτοποιὸς ἐξ ἀμερικανικοῦ ἀλεύρου εἶναι κατὰ 23 % βαρύτερος τοῦ χρησιμοποιουμένου ἀλεύρου· ἡμέραν δέ τινα παρεσκεύασε 984 ὀκ. ἄρτου. Πόσον ἄλευρον ἐχρησιμοποίησεν; (ἀπ. 800).

627) Ἔχει τις οἰκίαν καὶ εἰσπράττει κατ᾽ ἔτος ἀπὸ ἐνοίκιον 380000 δρχ. Πληρώνει δὲ ἐπ᾽ αὐτοῦ φόρον οἰκοδομῶν 12 % καὶ φόρον ὁδοστρωμάτων $3\frac{1}{2}$ % καί $2\frac{1}{2}$ ‰ δι᾽ ἀσφάλιστρα ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς οἰκίας ὑπολογιζομένης εἰς 500000 δρχ. Ἐπὶ τοῦ ἀπομένοντος δὲ ποσοῦ πληρώνει φόρον εἰσοδήματος 4 %. Ποῖον εἶναι τὸ καθαρὸν εἰσόδημα τοῦ ἰδιοκτήτου εἰς ἓν ἔτος; (ἀπ. 355507,20).

628) Ἀπὸ ἕνα ἐμπόρευμα ἤλπιζε νὰ κερδίσῃ τις 10 % ἐπὶ τῆς ἀξίας του, ἀλλὰ τὸ ἐπώλησεν ἀντὶ 13300 δρχ. μὲ ζημίαν 5%. Εἰς ποίαν τιμὴν ἤλπιζε νὰ πωλήσῃ τὸ ἐμπόρευμα; (ἀπ. 15400).

629) Κατὰ τὸν Εὐρωπαϊκὸν πόλεμον τὰ ἀσφάλιστρα ἐπὶ τῶν ἐμπορευμάτων ηὐξήθησαν ἀπὸ 5 ‰ εἰς 5 %, ἐπλήρωσε δὲ τότε εἷς ἔμπορος ἐπὶ πλέον ἀσφάλιστρα διά τὰ ἐμπορεύματά του 18000 δρχ. Ποία ἦτο ἡ ἀξία τῶν ἀσφαλισθέντων ἐμπορευμάτων; (ἀπ. 400000).

630) Θέλει νὰ ἀσφαλίσῃ τις ἓν παλαιὸν πλοῖον ἀξίας 3120000 δρχ. μὲ ἀσφάλιστρα $2\frac{1}{2}$ %. Ποίαν ἀξίαν πρέπει νὰ δηλώσῃ, ἵνα ἐν περιπτώσει ἀπωλείας τοῦ πλοίου εἰσπράξῃ καὶ τὴν ἀξίαν αὐτοῦ καὶ τὰ ἀσφάλιστρα; Καὶ πόσα ἀσφάλιστρα θὰ πληρώσῃ ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει; (ἀπ. 3200000, 80000).

631) Εἰς μίαν πόλιν αἱ γεννήσεις ἀνῆλθον εἰς ἕνα ἔτος εἰς 6°/ₒ καὶ οἱ θάνατοι εἰς 4,5 °/ₒ ἐπὶ τοῦ πληθυσμοῦ. Ὁ δὲ πληθυσμὸς τῆς πόλεως εὑρέθη εἰς τὸ τέλος τοῦ ἔτους ηὐξημένος κατὰ 300 κατοίκους. Ποῖος ἦτο ὁ ὅλος πληθυσμός αὐτῆς; (ἀπ. 20000)

632) Διὰ νὰ κερδίσῃ τις 12 $\frac{1}{2}$ °/ₒ ἐπὶ τῆς ἀξίας ἐμπορεύματός τινος ἔπρεπε νὰ πωλήσῃ αὐτὸ ἀντὶ 3600 δρχ. Ἐπώλησεν ὅμως αὐτὸ ἀντὶ 3040 δρχ. Ἐζημιώθη; Καὶ ἂν ναί, πόσον τοῖς °/ₒ; (ἀπ. ἐζημιώθη 5 °/ₒ).

633) Ἠγόρασέ τις ἕνα κτῆμα ἀντὶ 400000 δρχ. καὶ μετεπώλησεν αὐτὸ μὲ κέρδος 10°/ₒ, ἀλλ᾽ ἐπὶ τοῦ κέρδους ἐπλήρωσε φόρον 10°/ₒ. Ποῖον εἶναι τὸ καθαρὸν κέρδος του; καὶ πρὸς πόσον °/ₒ ἀντιστοιχεῖ ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς; (ἀπ. 36000, 9 °/ₒ).

634) Θέλει νὰ κάμῃ τις κρᾶμα, τὸ ὁποῖον ν᾽ ἀποτελῆται ἀπὸ 90 °/ₒ ἐκ χαλκοῦ καὶ 10 °/ₒ ἐκ κασσιτέρου, ἔχει δὲ 36 χιλιόγραμμα χαλκοῦ καὶ 9 χιλιόγραμμα κασσιτέρου. Πόσων χιλιογράμμων κρᾶμα δύναται νὰ κάμῃ; (40, 36 χαλ., 4 κασ.)

635) Ἡ πυρῖτις συνίσταται ἀπὸ 75°/ₒ νίτρου, 10°/ₒ θείου καὶ 15°/ₒ ἄνθρακος. Ἔχει δέ τις ἄφθονον ποσότητα θείου καὶ ἄνθρακος καὶ 45 χιλιόγραμμα νίτρου. Πόσα χιλιόγραμμα πυρίτιδος δύναται νὰ κατασκευάσῃ, ἐὰν χρησιμοποιήσῃ ὅλην τὴν ποσότητα τοῦ νίτρου; (ἀπ. 60 χιλ.)

Σύνθετος μέθοδος τῶν τριῶν.

161. Πρόβλημα. ***Εἰς ἓν οἰκοτροφεῖον διὰ τὴν διατροφὴν 25 μαθητῶν εἰς 18 ἡμέρας ἐδαπανήθησαν 8100 δραχ., ἀλλ᾽ ἐπειδὴ οἱ μαθηταὶ ηὐξήθησαν εἰς 62, θέλομεν νὰ εὕρωμεν πόση θὰ εἶναι ἡ δαπάνη διὰ τὴν διατροφὴν τῶν 62 μαθητῶν εἰς 30 ἡμέρας.***

Διὰ νὰ λύσω τὸ πρόβλημα τοῦτο κατατάσσω τὰ δεδομένα καὶ τὸν ἄγνωστον χ ὡς ἑξῆς:

Μαθηταὶ	ἡμέραι	ἔξοδα δρχμ.
25	18	8100
62	30	χ

Καὶ ἔπειτα λέγω· ἂν μόνον οἱ μαθηταὶ ἀπὸ 25 γίνουν 62, αἱ δὲ ἡμέραι μείνουν αἱ ἴδιαι 18, τὰ ἔξοδά των (δηλ. τῶν

62 μαθητῶν εἰς 18 ἡμέρας) θὰ γίνουν (159) $8100 \times \frac{62}{25}$; ἐὰν δὲ ἔπειτα μεταβληθῇ καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν καὶ ἀπὸ 18 γίνῃ 30, τὰ ἔξοδα $8100 \times \frac{62}{25}$ δρχμ. τῶν 62 μαθητῶν θὰ πολλαπλασιασθῶσι μὲ $\frac{30}{18}$ καὶ θὰ γίνουν:

$8100 \times \frac{62}{25} \times \frac{30}{18} = 33480$ ἤτοι $\chi = 33480$ δρχμ.

162. Πρόβλημα. ***12 ἐργάται, ἐργαζόμενοι 8 ὥρας καθ' ἡμέραν, ἐχρειάσθησαν 35 ἡμέρας διὰ νὰ σκάψουν τάφρον μήκους 36 μέτρων. Πόσοι ἐργάται, ἐργαζόμενοι 7 ὥρας καθ' ἡμέραν, θὰ σκάψουν ἄλλα 126 μέτρα εἰς 56 ἡμέρας;***

Κατατάσσω πρῶτον τὰ δεδομένα καὶ τὸ ζητούμενον

ἐργ.	ὥρ.	ἡμ.	μῆκος μ.
$\frac{12}{\chi}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{35}{56}$	$\frac{36}{126}$

ἔπειτα σκέπτομαι ὡς ἑξῆς· ἂν μόνον αἱ ὧραι ἀπὸ 8 γίνουν 7, τὰ δὲ ἄλλα μείνουν ὡς ἦσαν, ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν θὰ πολλαπλασιασθῇ (159) μὲ $\frac{8}{7}$ καὶ θὰ γίνῃ $12 \times \frac{8}{7}$, δηλαδὴ τόσοι ἐργάται, ἐργαζόμενοι 7 ὥρας τὴν ἡμέραν, χρειάζονται διὰ νὰ σκάψουν τάφρον 36 μέτρων εἰς 35 ἡμέρας· ἂν ἔπειτα μεταβληθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν καὶ ἀπὸ 35 γίνῃ 56 (νὰ μείνουν ὅμως αἱ ὧραι 7 καὶ τὰ μέτρα 36) ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν $12 \times \frac{8}{7}$ θὰ πολλαπλασιασθῇ μὲ $\frac{35}{56}$ καὶ θὰ γίνῃ $12 \times \frac{8}{7} \times \frac{35}{56}$, δηλ. τόσοι ἐργάται, ἐργαζόμενοι 7 ὥρας καθ' ἡμέραν, θὰ σκάψουν εἰς 56 ἡμ. τάφρον 36 μέτρων· ἂν τέλος μεταβληθῇ καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν μέτρων καὶ ἀπὸ 36 γίνῃ 126, ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν $12 \times \frac{8}{7} \times \frac{35}{56}$ θὰ πολλαπλασιασθῇ μὲ $\frac{126}{36}$ καὶ θὰ γίνῃ $12 \times \frac{8}{7} \times \frac{35}{56} \times \frac{126}{36}$, δηλ. εἶναι $\chi = 12 \times \frac{8}{7} \times \frac{35}{56} \times \frac{126}{36}$· ἁπλοποιοῦντες δὲ εὑρίσκομεν $\chi = 30$ ἐργ.

163. Εἰς ἕκαστον τῶν δύο προηγουμένων προβλημάτων βλέπομεν, ὅτι δίδονται ποσὰ περισσότερα τῶν δύο, ἀνάλογα ἢ ἀντίστροφα πρὸς ἓν ἐξ αὐτῶν καὶ ἡ τιμὴ αὐτοῦ ἡ ἀντίστοιχος πρὸς τὰς δεδομένας τιμὰς τῶν ἄλλων καὶ ζητεῖται τί γίνεται ἡ

τιμὴ αὕτη, ὅταν αἱ τιμαὶ ὅλων τῶν ἄλλων ποσῶν μεταβληθῶσιν. Εἴδομεν δέ, ὅτι διὰ νὰ λύσωμεν τὰ προβλήματα αὐτὰ τὰ ἀνελύσαμεν εἰς δύο ἢ περισσότερα προβλήματα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν· διὰ τοῦτο ἡ μέθοδος, διὰ τῆς ὁποίας λύομεν τὰ τοιαῦτα προβλήματα λέγεται ***σύνθετος μέθοδος τῶν τριῶν*** (ἡ δὲ μέθοδος τῶν τριῶν, πρὸς διάκρισιν, λέγεται ἁπλῆ).

164. Ἐὰν τώρα συγκρίνωμεν εἰς τὰ λυθέντα προβλήματα τὴν τιμὴν τοῦ ἀγνώστου χ μὲ τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος, ὡς τὰ κατετάξαμεν, συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα :

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ ἀγνώστου πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ὁμοειδῆ αὐτοῦ ἀριθμὸν (τὸν ὑπεράνω αὐτοῦ) ***μὲ ἕκαστον τῶν κλασμάτων, ἅτινα ἀποτελοῦνται ἀπὸ τὰς τιμὰς ἑκάστου ποσοῦ, ἀντιστρέφομεν ὅμως προηγουμένως τὸ κλάσμα, ἐὰν τὸ ποσόν του εἶναι ἀνάλογον πρὸς τὸ ποσὸν τοῦ ἀγνώστου.***

Προβλήματα.

636) 15 ἐργάται κερδίζουν 12000 δραχμάς, ἐργαζόμενοι 20 ἡμέρας. Πόσας θὰ κερδίσουν 12 τοιοῦτοι ἐργάται, ἐργαζόμενοι 35 ἡμέρας ; (ἀπ. 16800)

637) 7 ἐργάται, ἐὰν ἐργάζωνται 10 ὥρας καθ' ἡμέραν, θὰ χρειασθοῦν 28 ἡμέρας διὰ νὰ τελειώσουν ἔργον τι· 49 ἐργάται ἐὰν ἐργάζωνται 8 ὥρας καθ' ἡμέραν, εἰς πόσας ἡμέρας θὰ τελειώσουν τὸ αὐτὸ ἔργον ; (ἀπ. 5).

638) 57 βαρέλια οἴνου, ἕκαστον τῶν ὁποίων περιέχει 65 ὀκάδας, ἐπωλήθησαν ἀντὶ 29381 δρχμ. Πόσον θὰ πωληθοῦν 32 βαρέλια τοῦ αὐτοῦ οἴνου, ἕκαστον τῶν ὁποίων περιέχει 87 ὀκάδας ; (ἀπ. 22077, 38).

639) Μὲ 12 ὀκάδας νήματός τινος κατασκευάζεται ὕφασμα 27 μέτρων μήκους καὶ 0,75 μ. πλάτους. Μὲ 15 ὀκάδας τοῦ αὐτοῦ νήματος πόσον μῆκος θὰ ἔχῃ τὸ ὕφασμα ποὺ θὰ κατασκευασθῇ, ἐὰν τὸ πλάτος του εἶναι 0,8 μ. ; (ἀπ 31,64).

640) Ταχυδρόμος τις, βαδίζων 5 ὥρας τὴν ἡμέραν, διέτρεξεν εἰς 12 ἡμέρας 420 στάδια· ὁ αὐτὸς ταχυδρόμος, ἐὰν βαδίζῃ 8 ὥρας τὴν ἡμέραν, εἰς πόσας ἡμέρας θὰ διατρέξῃ 1200 στάδια ; $\left(\text{ἀπ. } 21\frac{3}{7}\text{ ἡμ.}\right)$

641) Τάπης τις, ἔχων μῆκος 8 πήχεων καὶ πλάτος $4\frac{1}{2}$ ἀξίζει 350 δραχμάς. Πόσον ἀξίζει ἄλλος τάπης τῆς αὐτῆς ποιότητος, ἔχων μῆκος μὲν $6\frac{1}{2}$ πήχεων, πλάτος δὲ 5;

(ἀπ. $315{,}97\frac{2}{9}$)

642) 42 ἐργάται, ἐργαζόμενοι 8 ὥρας καθ' ἡμέραν, ἐξετέλεσαν εἰς 15 ἡμέρας τὰ $\frac{2}{5}$ ἔργου τινός· πόσας ὥρας πρέπει νὰ ἐργάζωνται τὴν ἡμέραν διὰ νὰ ἐκτελέσουν τὸ ἐπίλοιπον ἔργον εἰς 18 ἡμέρας; (ἀπ. 10)

643) Ἀντιγραφεύς τις, ἐργαζόμενος 10 ὥρας τὴν ἡμέραν, ἀντέγραψεν εἰς 12 ἡμέρας ἓν βιβλίον 180 σελίδων, ἑκάστη τῶν ὁποίων ἀποτελεῖται ἀπὸ 48 στίχους, ἕκαστος τῶν ὁποίων περιεῖχε 45 γράμματα. Εἰς πόσας ἡμέρας, ἐργαζόμενος 8 ὥρας καθ' ἡμέραν, θὰ ἀντιγράψῃ βιβλίον ἐκ 270 σελίδων, ὅταν ἑκάστη σελὶς ἀποτελῆται ἀπὸ 50 στίχους καὶ ἕκαστος στῖχος περιέχῃ 48 γράμματα; (ἀπ. 25)

644) Ἕνα κατάστημα ἑτοίμων ἐνδυμάτων διὰ τὴν κατασκευὴν 75 ἀνδρικῶν ἐνδυμασιῶν ἐχρειάσθη 318 πήχεων ὕφασμα πλάτους $1\frac{3}{8}$ πήχ. Ἐπειδὴ ἔχει τώρα ὕφασμα πλάτους $1\frac{3}{4}$ πήχ., πόσον ὕφασμα θὰ χρειασθῇ διὰ τὴν κατασκευὴν 238 ὁμοίων ἀνδρικῶν ἐνδυμασιῶν;

645) 12 ἐργάται, ἐργαζόμενοι 8 ὥρας καθ' ἡμέραν, ἐχρειάσθησαν 25 ἡμέρας διὰ νὰ σκάψουν τάφρον ἔχουσαν μῆκος 200 πήχεων, πλάτος 4 καὶ βάθος 2. Εἰς πόσας ἡμέρας 50 ἐργάται, ἐργαζόμενοι 9 ὥρας καθ' ἑκάστην, θὰ σκάψουν τάφρον, ἔχουσαν μῆκος 80 πήχεων, πλάτος 8 καὶ βάθος 1;

Προβλήματα ἁπλοῦ τόκου.

800 κεφάλαιον

165. Πολλάκις οἱ ἄνθρωποι εὑρίσκονται εἰς τὴν ἀνάγκην νὰ δανείζωνται χρήματα, τὰ ὁποῖα ἐπιστρέφουν εἰς τὸν δανειστὴν μετὰ συμπεφωνημένον ἐκ τῶν προτέρων χρόνον· ἐκτὸς ὅμως τῶν χρημάτων, τὰ ὁποῖα ἐδανείσθησαν, πληρώνουν εἰς τὸν δανειστὴν καὶ ἕνα ἄλλο ποσὸν χρημάτων (τὸ κέρδος), τὸ ὁποῖον λέγεται ***τόκος***, ἐνῷ τὸ δανειζόμενον ποσὸν λέγεται ***κεφάλαιον***.

Ὁ τόκος τὸν ὁποῖον θὰ λάβῃ ὁ δανείζων χρήματα, ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν ἰδιαιτέρων συμφωνιῶν μεταξὺ τοῦ δανειστοῦ καὶ τοῦ ὀφειλέτου. Συνήθως ὁρίζεται ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ συμφωνουμένου τόκου τῶν 100 δραχ. εἰς 1 ἔτος· ὁ τόκος οὗτος λέγεται **ἐπιτόκιον.** Οὕτω, ὅταν δανείζῃ τις μὲ ἐπιτόκιον 5 %, τοῦτο σημαίνει, ὅτι εἰς ἑκάστην ἑκατοντάδα δραχμῶν καὶ δι᾿ ἓν ἔτος θὰ λαμβάνῃ τόκον 5 δραχμὰς (ἂν τὸ δάνειον εἶναι ὅμως εἰς λίρας, θὰ λαμβάνῃ ἐπὶ 100 λιρῶν τόκον 5 λιρῶν δι᾿ ἓν ἔτος). Ἐπίσης μία ἄλλη συνήθης συμφωνία, ἡ ὁποία γίνεται, εἶναι νὰ μένῃ τὸ κεφάλαιον τὸ αὐτὸ κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ δανείου. Ὁ τόκος τότε λέγεται **ἁπλοῦς.** Ὑπὸ τοὺς ὅρους δὲ τούτους ὁ τόκος εἶναι ἀνάλογος καὶ πρὸς τὸ κεφάλαιον καὶ πρὸς τὸν χρόνον καὶ πρὸς τὸ ἐπιτόκιον· ἐνῷ τὸ κεφάλαιον καὶ ὁ χρόνος, τὸ κεφάλαιον καὶ τὸ ἐπιτόκιον, ὁ χρόνος καὶ τὸ ἐπιτόκιον, εἶναι ποσὰ ἀντίστροφα.

Ἐκ τούτων συμπεραίνομεν, ὅτι τὰ προβλήματα τόκου θὰ λύωνται κατὰ τὴν μέθοδον τῶν τριῶν ἁπλῆν ἢ σύνθετον.

166. ***Εὕρεσις τοῦ τόκου. Πόσον τόκον φέρουν 850 δραχμαὶ εἰς 3 ἔτη πρὸς 9 %;***

κεφ.	ἔτη	τόκος
100	1	9
850	3	χ

$$χ=9\times\frac{850}{100}\times\frac{3}{1}=\frac{9\times850\times3}{100}=229,50 \text{ δραχ.}$$

167. ***Γενίκευσις τοῦ προβλήματος. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόκος τῶν κ δραχμῶν εἰς χ ἔτη πρὸς ε%.***

κεφ.	ἔτη	τόκος
100	1	ε
κ	χ	τ

$$τ=ε.\frac{κ}{100}.\frac{χ}{1} \qquad \text{ἤτοι } τ=\frac{ε.κ.χ.}{100}$$

Ἡ ἰσότης $τ=\frac{ε.κ.χ.}{100}$ εἶναι ὁ καλούμενος ***τύπος*** τοῦ τόκου. Λύομεν δὲ δι᾿ αὐτοῦ εὐκόλως πᾶν πρόβλημα, εἰς ὃ ζητεῖται ὁ τόκος, ὅταν, ἀντὶ τῶν γραμμάτων ε, κ, χ, θέσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς τοῦ προβλήματος. Οὕτω, ἂν ζητῆται ὁ τόκος τῶν 2700 δρχ. εἰς 5 ἔτη πρὸς 12 %, εὑρίσκομεν:

$$τ=\frac{12\times2700\times5}{100}=1620 \text{ δραχμαὶ}$$

ἂν δὲ ἐν τῷ ἀνωτέρω προβλήματι ζητῆται ὁ τόκος δι' 8 μῆνας (8 μην.$=\frac{8}{12}$ τοῦ ἔτους) εὑρίσκομεν :

$$\tau = \frac{22\times 2700\times \frac{8}{12}}{100} = \frac{12\times 2700\times 8}{1200} = 216 \text{ δραχ.}$$

ἂν δὲ ζητῆται διὰ 45 ἡμέρας (45 ἡμ.$=\frac{45}{360}$ ἔτη, διότι τὸ ἐμπορικὸν ἔτος λογίζεται ὡς ἔχον 360 ἡμέρας) εὑρίσκομεν :

$$\tau = \frac{12\times 2700\times \frac{45}{360}}{100} = \frac{12\times 2700\times 45}{36000} = 40{,}50 \text{ δραχ.}$$

Σημ. α'). Ἐκ τῶν ἀμέσως ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι, ὅταν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν ἀμέσως τὸν τόκον, ὅταν ὑπολογίζεται ὁ χρόνος εἰς μῆνας ἢ ἡμέρας, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸ γινόμενον τῶν τριῶν δεδομένων διὰ 1200 ἢ διὰ 36000.

168. ***Τοκάριθμοι καὶ σταθεροὶ διαιρέται.*** Ἔστω ὅτι ζητεῖται ὁ τόκος τῶν 900 δραχ. εἰς 20 ἡμέρας πρὸς 8 %· ἂν ἐφαρμόσωμεν τὸν ἄνω κανόνα εὑρίσκομεν :

$$\tau = \frac{900\times 20\times 8}{36000} = \frac{900\times 20}{36000 : 8} = \frac{900\times 20}{4500} = 4 \text{ δραχμαί.}$$

Τὸ γινόμενον τοῦ κεφαλαίου ἐπὶ τὰς ἡμέρας ὀνομάζομεν ***τοκάριθμον***, τὸ δὲ πηλίκον τοῦ 36000 διὰ τοῦ ἐπιτοκίου ***σταθερὸν διαιρέτην.***

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ προηγουμένου προβλήματος ἕπεται ὁ ἑξῆς πρακτικὸς κανών, ἐν χρήσει εἰς τὸ ἐμπόριον.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν τόκον ἑνὸς κεφαλαίου διά τινας ἡμέρας, διαιροῦμεν τὸν τοκάριθμον διὰ τοῦ σταθεροῦ διαιρέτου.

169. ***Εὕρεσις τοῦ κεφαλαίου. Ποῖον κεφάλαιον, τοκισθὲν ἐπὶ 5 ἔτη πρὸς 12 %, ἔφερεν τόκον 1500 δραχμάς ;***

κεφ.	ἔτη	τόκος
$\frac{100}{\chi}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{12}{1500}$

$$\chi = 100 \times \frac{1}{5} \times \frac{1500}{12} = \frac{100\times 1500}{5\times 12} = 2500 \text{ δραχ.}$$

Ἐὰν ἤδη παραστήσω τὰ δεδομένα καὶ τὸ ζητούμενον ὡς καὶ ἐν τῷ προβλήματι 167, εὑρίσκω εὐκόλως τὸν τύπον τοῦ κεφαλαίου $\kappa = \frac{100.\ \tau}{\chi.\ \varepsilon}$ (ὁ χ ὑπολογίζεται εἰς ἔτη).

170. ***Εὕρεσις τοῦ χρόνου. Εἰς πόσον χρόνον κεφάλαιον 18890 δρχ., τοκιζόμενον πρὸς 6 °/ₒ, θὰ φέρῃ τόκον 981,55 δραχ. ;***

$$\begin{array}{ccc} \text{κεφ.} & \text{ἔτη} & \text{τόκος} \\ \frac{100}{18890} & \frac{1}{\chi} & \frac{6}{981,55} \end{array}$$

$$\chi = 1 \text{ ἐτ.} \times \frac{100}{18890} \times \frac{981,55}{6} = \frac{100 \times 981,55}{18890 \times 6} \text{ τοῦ ἔτους}$$

$$\text{καὶ } \chi = \frac{12 \times 100 \times 981,55}{18890 \times 6} \text{ μῆνας ἢ } \chi = 10 \text{ μην. } 12 \text{ ἡμ.}$$

Ὁ τύπος τοῦ χρόνου εἰς ἔτη εὑρίσκεται εὐκόλως, ὅτι εἶναι $\chi = \frac{100.\ \tau}{\kappa.\ \varepsilon}$.

171. ***Εὕρεσις τοῦ ἐπιτοκίου. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐτοκίσθη κεφάλαιον 825 δραχ. καὶ ἔφερεν εἰς 7 ἔτη καὶ 3 μῆνας τόκον 717,75 δραχμάς ;***

$$\begin{array}{ccc} \text{κεφ.} & \text{ἔτη} & \text{τόκος} \\ \frac{825}{100} & \frac{7\frac{1}{4}}{1} & \frac{717,75}{\chi} \end{array}$$

$$\chi = 717,75 \times \frac{100}{825} \times \frac{1}{7\frac{1}{4}} = 717,75 \times \frac{100}{825} \times \frac{4}{29} \text{ ἢ } \chi = 12\ \%$$

Ὁ τύπος τοῦ ἐπιτοκίου εὑρίσκεται ὅτι εἶναι $\varepsilon = \frac{100.\ \tau}{\kappa.\ \chi}$ (ὁ χ ὑπολογίζεται εἰς ἔτη).

172. ***Μερικὴ περίπτωσις. Ἐδάνεισέ τις χρήματα πρὸς 9 °/ₒ καὶ μετὰ 3 ἔτη ἔλαβε τόκον καὶ κεφάλαιον ὁμοῦ 73406 δραχμάς. Πόσον ἦτο τὸ κεφάλαιον ;***

Ἂν λάβωμεν ἓν οἱονδήποτε κεφάλαιον, π. χ. 100 δρχ. καὶ ὑπολογίσωμεν πόσον θὰ γίνῃ μετὰ τῶν τόκων ἐπὶ 3 ἔτη πρὸς 9 °/ₒ εὑρίσκομεν εὐκόλως τὸ ζητούμενον (διότι θὰ γίνῃ 100+27=127).

$$\frac{127}{73406} \qquad \frac{100}{\chi\ ;}$$

Ἤτοι ἂν ἐλάμβανε 127 δρχ., τὸ κεφάλαιον θὰ ἦτο 100 δρχ. Τώρα ποὺ ἔλαβε 73406 δρχ., τὸ κεφάλαιον θὰ εἶναι :

$$\chi = 100 \times \frac{73406}{127} = 57800 \text{ δρχ.}$$

Ἐὰν ἐζητεῖτο ὁ τόκος θὰ εἴχομεν :

διὰ 127 δρχ. τόκος 27
» 73406 » » χ ;

$$\chi = 27 \times \frac{73406}{127} = 15606 \text{ δραχμαί.}$$

173. ***Πρόβλημα ἀνατοκισμοῦ. Κατέθεσέ τις εἴς τινα τράπεζαν 80000 δρχ. πρὸς 5 %, δι' ἓν ἔτος, ἀλλ' εἰς τὸ τέλος αὐτοῦ τὸν ὑπολογισθέντα τόκον προσέθεσεν εἰς τὸ κεφάλαιον καὶ τὸ προκῦψαν ποσὸν ἄφισε κατατεθειμένον δι' ἓν ἀκόμη ἔτος μὲ τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον, εἰς δὲ τὸ τέλος τοῦ δευτέρου ἔτους ἔκαμε τὸ ἴδιον. Πόσας δραχμὰς ἔλαβεν ἐν ὅλῳ εἰς τὸ τέλος τοῦ τρίτου ἔτους;***

Λύσις :

Ἀρχικὸν κεφάλαιον	80000	δρχ.
τόκος πρὸς 5 %, διὰ τὸ 1ον ἔτος.	4000	»
Κεφάλαιον κατὰ τὸ 2ον ἔτος.....	84000	δρχ.
τόκος πρὸς 5 %, διὰ τὸ 2ον ἔτος.	4200	»
Κεφάλαιον κατὰ τὸ 3ον ἔτος....	88200	δρχ.
τόκος πρὸς 5 %, διὰ τὸ 3ον ἔτος.	4410	»

Ἔλαβεν εἰς τὸ τέλος τοῦ 3ου ἔτους ἐν ὅλῳ 92610 δραχ.

Εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ τόκος ἑκάστου ἔτους προστίθεται εἰς τὸ κεφάλαιον καὶ ἀποτελεῖται οὕτω νέον κεφάλαιον τὸ ὁποῖον τοκίζεται κατὰ τὸ ἑπόμενον ἔτος. Ἡ εἰς τὸ κεφάλαιον τοῦτο πρόσθεσις τοῦ τόκου, ἤτοι ἡ κεφαλαιοποίησις τοῦ τόκου, λέγεται ***ἀνατοκισμός,*** ὁ δὲ ἐπ' ἀνατοκισμῷ λαμβανόμενος τόκος λέγεται ***σύνθετος.*** Κατὰ ταῦτα τὸ προηγούμενον πρόβλημα εἶναι πρόβλημα ἀνατοκισμοῦ, ὁ δὲ τόκος 92610 — 80000 = 12610 εἶναι σύνθετος.

Παρατήρησις. Ὁ ἀνατοκισμὸς δύναται νὰ γίνεται καὶ καθ' ἑξάμηνον, τρίμηνον κτλ.

Προβλήματα.

646) Πόσον τόκον φέρουσι κατ' ἔτος 7875 δρχ. πρὸς 4 % ; (ἀπ. 315).

1) 647) Πόσον τόκον φέρουσι 12600 δραχ. πρὸς 7 °/₀ εἰς 8 μῆνας ; (ἀπ. 588).

2) 648) Πόσον τόκον φέρουσι 3278 δρχ. πρὸς $4\frac{1}{2}$ °/₀ εἰς 1 ἔτος καὶ 3 μῆνας ; (ἀπ. 184,38)

649) Πόσον τόκον φέρουσι 87521,60 δραχ. εἰς 90 ἡμέρας πρὸς 6 °/₀ ; (ἀπ. 1312,82).

650) Ποῖον κεφάλαιον, τοκισθὲν ἐπὶ 5 ἔτη πρὸς $6\frac{3}{4}$ °/₀, ἔφερε τόκον 7931,25 δρχ. ; (ἀπ. 23500).

651) Ποῖον κεφάλαιον, τοκισθὲν ἐπὶ 1 ἔτος, 8 μῆνας πρὸς 9 °/₀, ἔφερε τόκον 637,5 δρχ. ; (ἀπ. 4250).

652) Ποῖον κεφάλαιον, τοκισθὲν πρὸς 7,5 °/₀, ἐπὶ 165 ἡμέρας, ἔφερε τόκον 1105,50 δρχ. ; (ἀπ. 32160).

653) Εἰς πόσον χρόνον κεφάλαιον 61575 δρχ., τοκιζόμενον πρὸς $8\frac{1}{2}$ °/₀, θὰ φέρῃ τόκον 20935,50 ; (ἀπ. 4 ἔτη).

654) Εἰς πόσον χρόνον κεφάλαιον 9640 δρχ., τοκιζόμενον πρὸς $6\frac{3}{4}$ °/₀, θὰ φέρῃ τόκον 759,15 δρχ. ; (ἀπ. 14 μην).

655) Εἰς πόσον χρόνον κεφάλαιον 75300 δρχ., τοκιζόμενον πρὸς 12 °/₀, θὰ φέρῃ τόκον 2710,80 δρ. ; (ἀπ. 108 ἡμ.).

656) Εἰς πόσα ἔτη κεφάλαιόν τι (π. χ. 500 δραχ.), τοκιζόμενον πρὸς 8 °/₀, διπλασιάζεται ; (δηλαδὴ ὁ τόκος γίνεται ἴσος μὲ τὸ κεφάλαιον ;) (ἀπ. $12\frac{1}{2}$ ἔτη)

657) Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐτοκίσθη κεφάλαιον 7360 δραχ. καὶ ἔφερε εἰς 5 ἔτη τόκον 1656 δραχ. ; (ἀπ. 4,5).

658) Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐτοκίσθη κεφάλαιον 5000 δραχ. καὶ ἔφερεν εἰς 3 μῆνας τόκον 75 δραχ. ; (ἀπ. 6).

659) Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐτοκίσθη κεφάλαιον 9600 δραχ. καὶ ἔφερεν εἰς 3 ἔτη καὶ 4 μῆνας τόκον 1120 δρ. ; (ἀπ. 3,5).

660) Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐτοκίσθη κεφάλαιον 4800 δραχ. καὶ ἔφερεν εἰς 75 ἡμέρας τόκον 82,50 δρ. ; (ἀπ. 8,25).

661) Ἐδάνεισέ τις 30000 δρχ. καὶ μετὰ 3 μῆνας ἔλαβεν ἐν ὅλῳ 30375 δρχ. Πόσον °/₀ ἐτόκισε τὰ χρήματά του ; (ἀπ. 5).

662) Ἐπρόκειτο νὰ δανείσῃ τις χρήματα πρὸς 8 °/₀, ἀλλὰ τελικῶς τὰ ἐδάνεισε πρὸς $8\frac{1}{2}$ °/₀ καὶ ηὔξησεν οὕτω τὸν τόκον

ἑνὸς ἔτους κατὰ 350 δρχ. Πόσα ἦσαν τὰ δανεισθέντα χρήματα; (ἀπ. 70000).

663) Ἔχει τις κεφάλαιόν τι εἰς τόκον πρὸς 6 % καὶ λαμβάνει κατὰ μῆνα τόκον 1250 δρχμ. Ἐὰν τοκίσῃ αὐτὸ πρὸς $7\frac{1}{2}$ %, πόσον τόκον θὰ λαμβάνῃ κατὰ μῆνα ἐκ τοῦ αὐτοῦ κεφαλαίου; (ἀπ. 1562,50).

664) Κατέθεσέ τις εἰς ταχυδρομικὸν ταμιευτήριον τὴν 1ην Ἰανουαρίου 15000 δρχ. πρὸς 6% καὶ μετὰ ἓξ μῆνας κατέθηκεν ἄλλας 23000 δρχ. Εἰς τὸ τέλος τοῦ αὐτοῦ ἔτους εἰς τί ποσὸν ἀνέρχονται οἱ τόκοι μετὰ τοῦ κεφαλαίου; (ἀπ. 39590).

665) Εἰς μίαν τράπεζαν εἶχον καταθέσει τὴν 1ην Ἰανουαρίου 2000000 δρχ. καὶ μετὰ 2 μῆνας 3000000 δραχμὰς πρὸς $4\frac{1}{2}$ %. Τὰ ποσὰ αὐτὰ ἡ τράπεζα ἐδάνεισεν αὐθημερὸν πρὸς 9 %. Πόσον εἶναι τὸ κέρδος αὐτῆς ἐκ τῶν κεφαλαίων τούτων εἰς τὸ τέλος τοῦ ἔτους; (ἀπ. 202500).

666) Ἐδάνεισέ τις χρήματα πρὸς 7 % καὶ μετὰ 3 ἔτη καὶ 4 μῆνας ἔλαβε κεφάλαιον καὶ τόκον ὁμοῦ 29600 δραχμάς. Πόσον ἦτο τὸ κεφάλαιον καὶ πόσος ὁ τόκος; (ἀπ. 24000, 5600).

667) Δανείζει τις ἓν κεφάλαιον πρὸς 8 % καὶ ὑπολογίζει ὅτι μετὰ $5\frac{1}{2}$ ἔτη θὰ ἔχῃ κεφάλαιον καὶ τόκους ὁμοῦ 135000 δρχ. Ποῖον κεφάλαιον ἐδάνεισε; (ἀπ. 93750).

668) Δανείσας τις χρήματα εἰς ἄλλον πρὸς 5 % διὰ 2 ἔτη ἐκράτησεν εὐθὺς τὸν τόκον καὶ ἔδωκεν εἰς αὐτὸν τὰ ὑπόλοιπα, ἅτινα ἦσαν 13500 δρχ. Πόσον ἦτο τὸ κεφάλαιον; (ἀπ. 15000).

669) Μία ὁμολογία τοῦ Α΄ δανείου ἀνταλλαξίμων ἔχει ὀνομαστικὴν ἀξίαν 1000 δραχμῶν καὶ ἀποφέρει τόκον 8 % ἐπὶ τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας. Τὸ κράτος ὅμως πληρώνει τόκον ἠλαττωμένον κατὰ 0,25. Πόσον τόκον λαμβάνει τις καθ᾽ ἑξάμηνον, ὅταν ἔχῃ 500 τοιαύτας ὁμολογίας; (ἀπ. 15000).

670) Ἠγόρασέ τις διὰ μεσίτου τοῦ χρηματιστηρίου ὁμολογίας Α΄ δανείου ἀνταλλαξίμων πρὸς 584 δραχ. ἑκάστην· ἐπλήρωσε δὲ μεσιτικὰ διὰ τὴν ἀγορὰν αὐτῶν 1 δραχ. δι᾽ ἑκάστην ὁμολογίαν. Πόσον % τοῦ ἔρχονται τὰ χρήματά του; (ἀπ.10,2).

671) Ἐπώλησέ τις διὰ μεσίτου 75 μετοχὰς πρὸς 270 δραχ. ἑκάστην καὶ μὲ τὰ εἰσπραχθέντα χρήματα ἠγόρασεν ὁμολογίας τοῦ Β΄ ἀναγκαστικοῦ δανείου (ὀν. ἀξίας 100 δραχ.) 6 % πρὸς

65,50 δραχ. ἑκάστην. Ποῖον εἶναι τὸ ἐτήσιον εἰσόδημά του ἐξ αὐτῶν ; (ἀπ. 1363,50).

Σημ. Ὁ τόκος πληρώνεται ἠλαττωμένος κατὰ 0,25.

Τὰ μεσιτικὰ διὰ τὴν ἀγορὰν καὶ πώλησιν εἶναι 0,75 δι' ἑκάστην ἐκ τῶν μ τοχῶν αὐτῶν ἢ ὁμολογιῶν. Διὰ δὲ τὰς μετοχὰς πληρώνεται καὶ **τέλος** 0,20 δρχ. δι' ἑκάστην.

672) Ἔμπορός τις ἠγόρασε σῖτον πρὸς 6 δραχ. τὴν ὀκᾶν καὶ ἐπώλησεν αὐτὸν μετὰ 6 μῆνας κερδίσας 15 °/₀. Πόσον ἐπώλησε τὴν μίαν ὀκᾶν ; (ἀπ. 6,45).

673) Ἠγόρασέ τις 2500 ὀκ. τυροῦ πρὸς 26 δραχ. τὴν ὀκᾶν καὶ μετὰ 3 μῆνας ἐπώλησεν αὐτὸν κερδίσας 20 °/₀. Πόσας δραχμὰς ἔλαβεν ἐκ τῆς πωλήσεως ; (ἀπ. 68250).

674) Ἠγόρασέ τις ἔλαιον πρὸς 24 δραχ. τὴν ὀκᾶν καὶ μετὰ 5 μῆνας ἐπώλησεν αὐτὸ πρὸς 26,80 δραχ. Πόσον °/₀ ἐκέρδισεν ; (ἀπ. 28).

675) Ἔμπορός τις ἠγόρασεν 615 ὀκάδας βουτύρου πρὸς 72 δραχ. τὴν ὀκᾶν καὶ μετὰ 7 μῆνας μετεπώλησεν αὐτὸ ἀντὶ 48412,80 δραχ. Πόσον °/₀ ἐκέρδισεν ; (ἀπ. 16).

676) Οἰνοπώλης τις ἠγόρασε 5500 ὀκάδας οἴνου πρὸς 6,25 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν. Ἐκ τούτων ἐχύθησαν 150 καὶ ἐξύνησαν 1250 ὀκ. Μετὰ 8 μῆνας ἐπώλησε τὸ μὲν ὄξος πρὸς 3,5 δραχ. τὴν ὀκᾶν, τὸν δὲ οἶνον πρὸς 8,40. Πόσον °/₀ ἐκέρδισεν ;

677) Τὸ χιλιόγραμμον ἑνὸς ἐμπορεύματος κοστίζει εἰς ἔμπορον 56,25 δραχ. Πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ τὴν ὀκᾶν μετὰ 1 ἔτος, ἵνα κερδίσῃ 15 °/₀ ;

678) Ἠγόρασέ τις οἰκόπεδον πρὸς 60 δραχ. τὸ τετραγωνικὸν μέτρον καὶ μετὰ ἓξ μῆνας ἐπώλησεν αὐτὸ εἰς τετραγωνικοὺς τεκτονικοὺς πήχεις κερδίσας 8°/₀. Πόσον ἐπώλησε τὸν τετραγωνικὸν τεκτονικὸν πῆχυν ;

679) Ἠγόρασέ τις καφὲν καὶ μετὰ 4 μῆνας ἐπώλησεν αὐτὸν μὲ κέρδος 18 °/₀ καὶ ἔλαβεν ἐκ τῆς πωλήσεως 53000 δραχ. Πόσον ἠγόρασε τὸν καφέν ;

680) Ἠγόρασέ τις οἶνον καὶ μετὰ 3 μῆνας ἐπώλησεν αὐτὸν ἀντὶ 44325 δραχ. ζημιώσας 6 °/₀ ἐπὶ τῆς ἀξίας. Πόσον ἠγόρασε τὸν οἶνον ;

681) (Ἀνατοκισμοῦ). Κεφάλαιον 15500 δραχ., ἀνατοκιζόμενον κατ' ἔτος πρὸς 8°/₀, πόσον θὰ γίνῃ μετὰ 2 ἔτη ; (ἀπ.18079,20

682) Εἰς τὶ θὰ ἀνέλθη κεφάλαιον 18000 δραχ. ἀνατοκιζόμενον κατ' ἔτος πρὸς 7 % ἐπὶ 3 ἔτη ; (ἀπ. 22050,77)

683) Ποῖος εἶναι ὁ σύνθετος τόκος κεφαλαίου δραχμῶν 150000 ἀνατοκιζομένου κατ' ἔτος πρὸς 4 % ἐπὶ 4 ἔτη ; (ἀπ. 25478,78)

684) ***Κεφάλαιον 10000, ἀνατοκιζόμενον κατ' ἔτος πρὸς 9 %, πόσον θὰ γίνῃ μετὰ 3 ἔτη καὶ 4 μῆνας ;***

Εὑρίσκομεν πόσον θὰ γίνῃ ἀνατοκιζόμενον ἐπὶ 3 ἔτη καὶ τοῦ ποσοῦ ποὺ θὰ ἔχωμεν εὑρίσκομεν τὸν ἁπλοῦν τόκον πρὸς 9 % ἐπὶ 4 μῆνας, τὸν ὁποῖον προσθέτομεν εἰς τὸ εὑρεθὲν ποσόν. Εὑρίσκομεν δὲ οὕτω 13338,80.

685) Πόσον θὰ γίνῃ μετὰ $2\frac{1}{4}$ ἔτη κεφάλαιον 52000 δρχ. ἀνατοκιζόμενον κατ' ἔτος πρὸς 10 % ; (ἀπ. 64493)

686) 50000 δρχ., ἀνατοκιζόμεναι κατ' ἔτος πρὸς $3\frac{1}{2}$ %, πόσον θὰ γίνουν μετὰ 3 ἔτη ; (ἀπ. 55435,90)

687) 25000 δρχ., ἀνατοκιζόμεναι καθ' ἑξάμηνον πρὸς 8 % ἐτησίως, πόσον θὰ γίνουν μετὰ 5 ἔτη ; (ἀπ. 40025,80)

688) Ὁ πληθυσμὸς μιᾶς πόλεως αὐξάνει κατ' ἔτος κατὰ 2 % αὐτοῦ καὶ εἶναι σήμερον 250000. Πόσος θὰ γίνῃ μετὰ 3 ἔτη ; (ἀπ. 265302)

Περὶ ὑφαιρέσεως.

174. Ὅταν δανείζωμεν χρήματα, ἢ ἀσφαλίζομεν τὸ δανεισθὲν ποσόν, ἐγγράφοντες ὑποθήκην ἐπὶ τῆς ἀκινήτου περιουσίας τοῦ ὀφειλέτου μας, ἢ ζητοῦμεν νὰ μᾶς δώσῃ ἔγγραφον ἀπόδειξιν τοῦ χρέους του μὲ τὴν ὑπόσχεσιν νὰ τὸ πληρώσῃ εἰς ὡρισμένην ἡμέραν. Τὸ ἔγγραφον τοῦτο ὀνομάζεται γενικῶς ***γραμμάτιον***· χρῆσις τοῦ γραμματίου γίνεται κυρίως ὑπὸ τῶν ἐμπόρων· ἕνας δὲ τύπος γραμματίου εἶναι καὶ ὁ κάτωθι :

Ἀθῆναι τῇ 10 Μαρτίου 1930. Διὰ δρχ. 10000

Τὴν δεκάτην τρέχοντος Ἰουλίου ὑπόσχομαι καὶ ὑποχρεοῦμαι νὰ πληρώσω εἰς διαταγὴν τοῦ κ. Ι. Ἰωάννου δέκα χιλιάδας δραχμὰς ἃς ἔλαβον παρ' αὐτοῦ εἰς ἐμπορεύματα.

Γ. Γεωργίου
Ὁδὸς Βύσσης 315

175. Τὸ ποσὸν τὸ ὁποῖον ἀναφέρεται εἰς ἓν γραμμάτιον

ὅτι θὰ πληρωθῇ εἰς ὡρισμένην ἡμέραν λέγεται ***ὀνομαστικὴ ἢ μέλλουσα ἀξία*** αὐτοῦ καὶ εἶναι ἄθροισμα τοῦ δανεισθέντος ποσοῦ καὶ τοῦ τόκου αὐτοῦ ἀπὸ τῆς συνάψεως τοῦ δανείου μέχρι τῆς λήξεως τοῦ γραμματίου. Ἂν ὅμως ὁ κάτοχος τοῦ γραμματίου θέλῃ νὰ ***προεξοφλήσῃ*** τὸ γραμμάτιόν του, δηλαδὴ νὰ τὸ πωλήσῃ εἰς ἄλλον πρὸ τῆς λήξεώς του, τὸ ποσὸν ποὺ θὰ λάβῃ λέγεται ***παροῦσα*** ἀξία τοῦ γραμματίου, εἶναι δὲ μικρότερον τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας κατὰ τὸν τόκον τῆς παρούσης ἀξίας ἀπὸ τῆς ἡμέρας τῆς προεξοφλήσεως μέχρι τῆς λήξεως. Ὁ τόκος οὗτος λέγεται ***ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις.*** Εἰς τὸ ἐμπόριον ὅμως συνειθίζεται νὰ κρατῇ ὁ ἐξαργυρώνων τὸ γραμμάτιον ὄχι τὸν τόκον τῆς παρούσης ἀξίας, ἀλλὰ τὸν τόκον τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας διὰ τὸν χρόνον τῆς προεξοφλήσεως. Ὁ τόκος δὲ οὗτος τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας λέγεται ***ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις.***

167. α΄) ***Ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις.*** Τὰ προβλήματα αὐτῆς εἶναι προφανῶς προβλήματα τόκου (μόνον ἀντὶ τόκου λέγεται ὑφαίρεσις). Εἰσέρχονται δὲ εἰς αὐτὰ 1) τὸ ποσὸν τοῦ γραμματίου, 2) ὁ χρόνος, 3) τὸ ἐπιτόκιον καὶ 4) ἡ ὑφαίρεσις· τὰ δὲ 4 προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται ἓν ἐκ τῶν τεσσάρων τούτων καὶ δίδονται τὰ τρία ἄλλα, δὲν διαφέρουσι διόλου ἀπὸ τὰ 4 προβλήματα τοῦ τόκου. Π. χ.

Γραμμάτιον 1800 δρχ. ἐξαργυροῦται 5 μῆνας πρὸ τῆς διορίας του πρὸς 8 %. Πόση εἶναι ἡ ὑφαίρεσίς του ;

Τὸ ζητούμενον εἶναι ὁ τόκος τῶν 1800 δραχμῶν κλπ. Ὥστε

ἐξ. ὑφ. $= \frac{1800 \times 5 \times 8}{1200} = 60$ δρχ.

Γραμμάτιον ἐξωφλήθη 4 μῆνας πρὸ τῆς διορίας του πρὸς 9 % ἀντὶ 1455 δρχ. Ποία εἶναι ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου ;

Ἂν τὸ γραμμάτιον εἶχεν ὀνομαστικὴν ἀξίαν 100 δρχμ. θὰ προεξωφλεῖτο ὑπὸ τοὺς ἄνω ὅρους ἀντὶ 97 (διότι ὁ τόκος τῶν 100 δρχ. εἰς 4 μῆνας πρὸς 9 % εἶναι 3 δρχμ.)

ὥστε 100 δραχμ. ὀνομαστ. ἀξίας ἔχουσι 97 δραχμ. παροῦσαν
χ » » » » 1455 » »

$\chi = \frac{100 \times 1455}{97} = 1500$ δραχμαί.

177. β΄) ***Ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις. Γραμμάτιον 7650 δρχ. ἐξαργυροῦται 3 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του· ποία εἶναι ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσίς του πρὸς 8 % ;***

Ἡ ζητουμένη ὑφαίρεσις δὲν εἶναι τώρα ὁ τόκος τῶν 7650 δραχμῶν εἰς 3 μῆνας, ἀλλ᾽ ὀλιγώτερον, δηλ. ἐκείνων τὰς ὁποίας θὰ πληρώσῃ ὁ ἐξαργυρώνων τὸ γραμμάτιον. Διὰ νὰ λύσω τὸ πρόβλημα τοῦτο εὑρίσκω πρῶτον τὸν τόκον τῶν 100 δρχ. διὰ 3 μῆνας πρὸς 8 %₀ ὅστις εἶναι 2 δραχμαί.

Ὥστε αἱ 100 δραχμαί, τοκιζόμεναι σήμερον πρὸς 8%₀, γίνονται μετὰ 3 μῆνας 102, ἑπομένως ἂν ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου ἦτο 102 δρχμ. καὶ προεξωφλεῖτο πρὸ 3 μηνῶν ἀντὶ 100 δρχμ., θὰ ἔδιδεν ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν 2 δρχ.

Κατόπιν τούτων λέγομεν

ὀνομαστ. ἀξία ἐσ. ὑφ.

$$\frac{102}{7650} \qquad \frac{2}{\chi} \qquad \chi=2\times\frac{7650}{102}=150$$ ἐσ. ὑφ.

Ἡ παροῦσα λοιπὸν ἀξία τοῦ γραμματίου εἶναι 7650 −150= =7500, ἡ ὁποία εὑρίσκεται καὶ ἀπ᾽ εὐθείας.

ὀνομ. ἀξία παροῦσα

$$\frac{102}{7650} \qquad \frac{100}{\chi}\Big|\,\chi=100\times\frac{7650}{120}=7500$$

Προβλήματα.

689) Προεξώφλησέ τις γραμμάτιον ὀν. ἀξίας 8200 δρχμ. 6 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του ἐξωτερικῶς πρὸς 8%₀. Τί ὑφαίρεσιν ἐπλήρωσε καὶ τὶ εἰσέπραξεν ; (ἀπ. 328, 7872)

690) Γραμμάτιον ὀνομαστ. ἀξίας 4200 δρχ. ἐξωφλήθη 1 μῆνα καὶ 20 ἡμέρας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς $7\frac{1}{2}$ %₀. Ποία εἶναι ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις ; (ἀπ. 43,75)

691) Προεξώφλησέ τις ἐξωτερικῶς γραμμάτιον ὀνομ. ἀξίας 12500 δρ. 5 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς $7\frac{1}{2}$ %₀, ἐπλήρωσε δὲ καὶ προμήθειαν $1\frac{1}{2}$ %₀ ἐπὶ τῆς ὀνομ. ἀξίας. Πόσας δραχμὰς εἰσέπραξεν ; (ἀπ. 11921,88)

~~692)~~ Ἐξώφλησέ τις γραμμάτιον, 5 μῆνας καὶ 10 ἡμέρας πρὸ τῆς διορίας του καὶ ἐπλήρωσεν ἐξ. ὑφ. 3173,35 δρ. ὑπολογισθεῖσαν πρὸς 9 %₀. Ποία ἦτο ἡ ὀνομ. ἀξία ; (ἀπ. 79334)

693) Γραμμάτιον 3781,25 δραχ. προεξωφλήθη ἐξωτερικῶς πρὸς 8%₀ ἀντὶ 3720,75 δρχ. Πρὸ πόσων ἡμερῶν ἀπὸ τῆς λήξεώς του ἐγένετο ἡ προεξόφλησίς του ; (ἀπ. 72)

694) Γραμμάτιον 27675 δρχ., λῆγον τὴν 28 Μαΐου, προεξωφλήθη ἐξωτερικῶς τὴν 2 Ἀπριλίου ἀντὶ 27416,70 δρ. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἔγινεν ἡ προεξόφλησίς του ; (ἀπ. 6 %)

695) Δανείσας τις πρὸ 2 ἐτῶν κεφάλαιόν τι πρὸς 6% ἔλαβε σήμερον τόκον καὶ κεφάλαιον ὁμοῦ 560 δρχ. Πόσον ἦτο τὸ δανεισθὲν κεφάλαιον καὶ πόσος ὁ τόκος ; (ἀπ. 500)

696) Ποῖα εἶναι ἡ ὀν. ἀξία τοῦ γραμματίου ἐξοφληθέντος ἐξωτερικῶς πρὸς $6\frac{3}{4}$ % 5 μῆνας 10 ἡμέρας πρὸ τῆς διορίας του ἀντὶ 6596 δραχμῶν ; (ἀπ. 6800)

697) Γραμμάτιον 2840 δρχ. ἐξαργυροῦται 2 μῆνας 10 ἡμέρας πρὸ τῆς λήξεως ἐσωτερικῶς πρὸς 6%. Ποία εἶναι ἡ ὑφαίρεσις καὶ ποία ἡ παροῦσα ἀξία ; (ἀπ. 32,75)

698) Γραμματίου ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία εἶναι 8240 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ α) ἡ ἐσ. καὶ ἡ ἐξ. ὑφαίρεσις αὐτοῦ προεξοφλουμένου 4 μῆνας πρὸ τῆς λήξεως του πρὸς 9 % καὶ β) ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν δύο ὑφαιρέσεων τούτων ἰσοῦται πρὸς τὸν τόκον τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον καὶ εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον.

699) Γραμμάτιον προεξωφλήθη ἐσωτερικῶς πρὸς 5 % 7 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του ἀντὶ 6000 δρ. Πόση εἶναι ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις ; (ἀπ. 175)

700) Γραμμάτιον προεξωφλήθη ἐσωτερικῶς 3 μῆνας 20 ἡμέρας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 10% καὶ μὲ ὑφαίρεσιν 220 δρχ. Ποία εἶναι ἡ παροῦσα ἀξία του ; (ἀπ. 7200)

701) Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον προεξωφλήθη γραμμάτιον παρούσης ἀξίας 5000 δρχ. ὅταν ὁ χρόνος προεξοφλήσεως εἶναι 9 μῆνες καὶ ὅταν ἔδωκεν ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν 262,5 ; (ἀπ. 7 %)

702) Γραμμάτιον παρούσης ἀξίας 10800 δραχμῶν προεξωφλήθη πρὸς 4,5% μὲ ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν 175,50 δρχ. Πρὸ πόσου χρόνου ἐγένετο ἡ προεξόφλησις ; (ἀπ. 4 μ. 10 ἡμ.)

Προβλήματα μερισμοῦ

178. Πρόβλημα. ***Ἐκ τριῶν ἐργατῶν, οἵτινες εἰργάζοντο εἰς τὸ αὐτὸ ἐργοστάσιον, ὁ μὲν εἰργάσθη 2 ἡμ., ὁ δὲ 3 ἡμ. ὁ δὲ ἄλλος 5 ἡμ. Ἐὰν τὸ σύνολον τῆς ἀμοιβῆς αὐτῶν εἶναι 450 δρχ. πόσαι ἐξ αὐτῶν ἀντιστοιχοῦν εἰς ἕκαστον τῶν ἐργατῶν τούτων ;***

Ἐπειδὴ τὰ ἡμερομίσθια καὶ τῶν τριῶν ἐργατῶν εἶναι $2+3+5=10$ τὸ ἓν ἡμερομίσθιον εἶναι $\frac{450}{10}$ δρχ., ἄρα ὁ μὲν α΄ ἔλαβε $\frac{450}{10}\times2=45\times2=90$ δρχ., ὁ β΄ ἔλαβε $\frac{450}{10}\times3=135$ δρ., ὁ δὲ γ΄ ἔλαβε $\frac{450}{10}\times5=225$ δραχμάς. Εἶναι δὲ $90+135+225=450$.

Ἀλλὰ τώρα παρατηροῦμεν, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ 90, 135, 225, εἰς τοὺς ὁποίους ἐμερίσθη ὁ 450, προέκυψαν ἐκ τῶν 2, 3, 5, οἵτινες ἐπολλαπλασιάσθησαν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 45. Οἱ 90, 135, 225 λέγονται ἀνάλογοι τῶν 2, 3, 5. Ἐν γένει δέ:

Δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ λέγονται ἀνάλογοι πρὸς ἄλλους ἰσοπληθεῖς, ὅταν προκύπτουν ἐξ αὐτῶν διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα, εἰς ὃ ὁ 450 ἐμερίσθη εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν 2, 3, 5, εἶναι πρόβλημα μερισμοῦ εἰς μέρη ἀνάλογα, ἐκ τῆς λύσεως δὲ αὐτοῦ συνάγομεν, πρὸς συντομωτέραν λύσιν αὐτῶν, τὸν κανόνα:

Διὰ νὰ μερίσωμεν ἀριθμὸν εἰς μέρη ἀνάλογα δοθέντων ἀριθμῶν, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐφ᾽ ἕκαστον τῶν δοθέντων ἀριθμῶν καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν.

Σημ. Ἐὰν οἱ 2, 3, 5 πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, π. χ. τὸν 4, καὶ μερίσωμεν τὸν 450 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν γινομένων 8, 12, 20, θὰ εὕρωμεν τὰ ἴδια μέρη 90, 135, 225· διότι τὰ μέρη ταῦτα εἶναι $\frac{450\times8}{40}=\frac{450\ 2\times4}{10\times4}=\frac{450\times2}{10}=90$ κλπ.

Ἀλλὰ καὶ ἂν διαιρεθῶσι πάντες διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πάλιν τὰ ἴδια μέρη θὰ εὕρωμεν. Διὰ ταῦτα, ἐὰν ἔχωμεν νὰ μερίσωμεν ἀριθμόν τινα, π. χ, τὸν 160, ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν $2\frac{1}{2}$, 5, $\frac{4}{9}$ τρέπομεν πρῶτον τοὺς τρεῖς τούτους ἀριθμοὺς εἰς κλάσματα ὁμώνυμα $\frac{45}{18}$, $\frac{90}{18}$, $\frac{8}{18}$ καὶ ἔπειτα μερίζομεν τὸν 160 ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 45, 90, 8 ὅπερ εἶναι εὐκολώτερον.

179. Πρόβλημα. ***Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 775 εἰς μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 5.***

Ἤτοι νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 775 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀντιστρόφων ἀριθμῶν τῶν 2, 3, 5, οἵτινες ἀντίστροφοι αὐτῶν εἶναι οἱ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$.

Πρὸς τοῦτο τρέπομεν τὰ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ εἰς ὁμώνυμα $\frac{15}{30}$, $\frac{10}{30}$ $\frac{6}{30}$ καὶ μερίζομεν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν 775 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν 15, 10, 6. εὑρίσκομεν δὲ 375, 250, 150.

180. Πρόβλημα. ***Τρεῖς ἐργάται ἤνοιξαν ἓν φρέαρ καὶ ἔλαβον διὰ τὴν ἐργασίαν των 1200 δραχμάς. Ἀλλ' ὁ πρῶτος ἐξ αὐτῶν εἰργάσθη ἐπὶ 5 ἡμέρας καὶ 8 ὥρας καθ' ἡμέραν, ὁ δεύτερος ἐπὶ 4 ἡμέρας καὶ 9 ὥρας καθ' ἡμέραν καὶ ὁ τρίτος ἐπὶ 7 ἡμέρας καὶ ἐπὶ 7 ὥρας καθ' ἡμέραν. Πόσας δραχμὰς ἐκ τῶν 1200 ἔλαβεν ἕκαστος ἐργάτης ;***

Ἐνταῦθα παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ πρῶτος ἐργάτης εἰργάσθη ὥρας $8 \times 5 = 40$, ὁ δεύτερος $9 \times 4 = 36$ καὶ ὁ τρίτος $7 \times 7 = 49$.

Ὥστε αἱ 1200 δραχμαὶ πρέπει νὰ μερισθῶσιν ἀναλόγως τῶν ὡρῶν ἐργασίας 40, 36, 49. Ἔλαβον ἑπομένως

ὁ α΄ $\frac{1200 \times 40}{125} = 384$ ὁ β΄ $\frac{1200 \times 36}{125} = 345{,}60$

καὶ ὁ γ΄ $\frac{1200 \times 49}{125} = 470{,}40$

Προβλήματα.

1 ~~703)~~ Νὰ μερισθῇ ὁ 987 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 7, 9, 5.

2 ~~704)~~ Ὁ ἀριθμὸς 3944 νὰ μερισθῇ εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν 3, 7, 8, 11.

~~705)~~ Ὁμοίως ὁ ἀριθμὸς 2675 νὰ μερισθῇ εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 3, $\frac{3}{5}$, $1\frac{3}{4}$.

3 ~~706)~~ Τέσσαρες ἐργάται ἐξετέλεσαν ἔργον τι διὰ τὸ ὁποῖον ἐπληρώθησαν 1200 δρχμ. καὶ ὁ μὲν α΄ εἰργάσθη 12 ἡμέρας, ὁ β΄ 18, ὁ γ΄ 10 καὶ ὁ δ΄ 8. Πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ ἕκαστος ;

707) Ἔμπορός τις χρεωκοπήσας παραχωρεῖ τὴν περιουσίαν του συγκειμένην ἀπὸ 90000 δραχμὰς εἰς τοὺς τρεῖς δανειστάς του· χρεωστεῖ δὲ εἰς μὲν τὸν πρῶτον 40000, εἰς τὸν δεύτερον 24000 καὶ εἰς τὸν τρίτον 80000. Πόσας θὰ λάβῃ ἕκαστος ;

~~708)~~ Ἐμοιράσθησαν 24000 δρχμ. μεταξὺ τριῶν προσώπων οὕτως ὥστε, ὅταν ὁ πρῶτος ἐλάμβανε 9, ὁ δεύτερος ἐλάμβανε 15 καὶ ὁ τρίτος 24. Ποῖον εἶναι τὸ μερίδιον ἑκάστου ;

~~709)~~ Εἰς τρία πρόσωπα διενεμήθησαν ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν $\frac{14}{15}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$ 5540 δρχ. Πόσας δραχμὰς ἔλαβεν ἕκαστον ;

710) Τρεῖς ἄνθρωποι ἠγόρασαν ἄμπελον ἀντὶ 10000 δραχμῶν καὶ ἔπειτα διένειμον αὐτήν, ἔλαβε δὲ ὁ μὲν α΄ $5\frac{1}{2}$ στρέμματα, ὁ β΄ 5 στρέμματα καὶ ὁ γ΄ ἔλαβε τὰ ὑπόλοιπα $2\frac{5}{6}$ στρέμματα. Πόσον ἐπλήρωσεν ὁ καθείς ;

711) Πατήρ τις διέταξεν ἐν τῇ διαθήκῃ του νὰ μοιρασθῇ ἡ περιουσία του μεταξὺ τῶν 2 τέκνων του οὕτως, ὥστε νὰ λάβῃ ἡ κόρη του διπλάσια ἢ ὁ υἱός του· ἡ περιουσία του ἦτο 12000 δραχ. Πόσας θὰ λάβῃ ὁ καθείς ; (ἀπ. 8000, 4000).

712) 345 δραχ. ἐμοιράσθησαν εἰς τρεῖς ἀνθρώπους Α, Β, Γ. Ὁ Γ ἔλαβεν ὅσας οἱ δύο ἄλλοι ὁμοῦ, ὁ δὲ Β τὰς ἡμίσεις ἀπὸ ὅσας ἔλαβεν ὁ Α. Πόσας δραχμὰς ἔλαβεν ἕκαστος ; (ἀπ. ὁ Α 115).

713) Μετέφερέ τις ἀπὸ Πειραιῶς εἰς Ἀθήνας ἐμπόρευμα βάρους 4800 ὀκάδων διὰ τεσσάρων φορτηγῶν αὐτοκινήτων. Ἐξ αὐτῶν τὰ δύο πρῶτα μετέφερον ἴσον βάρος ἕκαστον, τὸ τρίτον μετέφερεν ὅσον βάρος τὰ δύο πρῶτα ὁμοῦ, τὸ δὲ τέταρτον τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ βάρους τοῦ τρίτου. Πόσου βάρους ἦτο τὸ φορτίον ἑκάστου αὐτοκινήτου ; (ἀπ. α΄ 900, γ΄ 1800).

714) Μία εὐθεῖα γραμμὴ 15 μέτρων διῃρέθη εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν $1\frac{1}{2}$, $1\frac{2}{3}$, $1\frac{5}{6}$. Ἄλλη δέ τις εὐθεῖα διῃρέθη καὶ αὕτη εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν καὶ τὸ μεγαλύτερον μέρος τῆς δευτέρας ταύτης γραμμῆς εἶναι $2\frac{3}{4}$ μέτρα. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὅλον μῆκος τῆς δευτέρας γραμμῆς καὶ τὸ μῆκος τῶν δύο ἄλλων μερῶν. $\left(\text{ἀπ. } 7{,}5,\ 2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}\right)$

715) Ὁ ἀριθμὸς 4350 νὰ μοιρασθῇ εἰς μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 2, 4, $\frac{3}{5}$. (ἀπ. 900 τὸ α΄).

716) Πατήρ τις διένειμεν εἰς τοὺς τρεῖς υἱούς του τὴν κτηματικὴν περιουσίαν του καὶ ἔλαβεν ὁ μὲν α΄ 3 στρέμματα, ὁ β΄ 6 στρέμματα καὶ ὁ γ΄ 8 στρέμματα, τὴν χρηματικὴν ὅμως περιουσίαν του ἐξ 75000 δραχ. διένειμεν εἰς μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα τῶν στρεμμάτων ποὺ ἔλαβον. Πόσας δραχμὰς ἔλαβεν ὁ καθεὶς ἀδελφός ; (ἀπ. ὁ α΄ 40000).

717) Τέσσαρες ἀδελφοὶ διένειμον κληρονομίαν ἐξ 165000

δραχμῶν εἰς μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα τῶν ἡλικιῶν των ἦσαν δὲ 18, 15, 12 καὶ 10 ἐτῶν. Ποῖον εἶναι τὸ μερίδιον ἑκάστου ; (ἀπ. ὁ α΄ 30000)

718) Τρεῖς ἁμαξηλάται μετέφερον ἐμπόρου τινος ὁ μὲν α΄ 800 ὀκ. σίτου ἐξ ἀποστάσεως 8 χιλιομέτρων, ὁ β΄ 1000 ὀκάδας ἐξ ἀποστάσεως 5 χιλιομέτρων, καὶ ὁ γ΄ 2000 ὀκάδες ἐξ ἀποστάσεως 4 χιλιομέτρων, ἔλαβον δὲ καὶ οἱ τρεῖς ὁμοῦ 2500 δραχμάς. Πόσα θὰ λάβῃ ὁ καθείς ; $\left(\text{ἀπ. ὁ α΄ } 824\frac{72}{97}\right)$

719) Ἄνθρωπός τις θέλων νὰ ἐκτελέσῃ ἐργασίαν τινα, ἐμίσθωσε πρὸς τοῦτο 10 ἐργάτας· τὴν ἐπιοῦσαν προσέλαβε καὶ ἄλλους 9 ἐργάτας καὶ τὴν ἑπομένην ἡμέραν ἄλλους 4. Οὕτως ἐξετελέσθη τὸ ἔργον εἰς 12 ἡμέρας (ὥστε οἱ τελευταῖοι εἰργάσθησαν μόνον 10 ἡμέρας). Διὰ τὴν ἐργασίαν ταύτην ἔλαβον οἱ ἐργάται ὅλοι ὁμοῦ 5180 δραχ. Πῶς θὰ μοιρασθῶσιν αὐτάς ;
(ἀπ. ἕκαστος ἐκ τῶν πρώτων θὰ λάβῃ 240 δρ.)

720) 992 δρχ. διενεμήθησαν μεταξὺ 12 ἀνδρῶν καὶ 5 γυναικῶν καὶ 13 παιδίων οὕτως, ὥστε μία γυνὴ νὰ λάβῃ τριπλάσια τῶν ὅσων θὰ λάβῃ ἓν παιδίον καὶ εἷς ἀνὴρ διπλάσια τῶν ὅσων θὰ λάβουν ὁμοῦ μία γυνὴ καὶ ἓν παιδίον. Πόσας δραχμὰς ἔλαβον ἕκαστον παιδίον, ἑκάστη γυνὴ καὶ ἕκαστος ἀνήρ ;
(ἀπ. 8,24, 64).

181. ***Προβλήματα Ἑταιρείας.*** Εἰς ταῦτα ζητεῖται νὰ μοιρασθῇ τὸ κέρδος ἢ ἡ ζημία μιᾶς ἐπιχειρήσεως εἰς ἐκείνους οἱ ὁποῖοι τὴν ἀνέλαβον· ἀνάγονται δὲ εἰς τὸν μερισμὸν εἰς μέρη ἀνάλογα, ὡς φαίνεται ἐκ τῶν κάτωθι :

1ον) ***Τρεῖς ἄνθρωποι ἔκαμον ἑταιρείαν διά τινα ἐμπορικὴν ἐπιχείρησιν καὶ κατέβαλον ὁ α΄ 5500 δρχ. ὁ β΄ 8000 καὶ ὁ γ΄ 15000 δραχ. Ἐκ τῆς ἐπιχειρήσεως ἐκέρδισαν 3420 δρχ. Πόσον θὰ λάβῃ ἕκαστος ;***

Εἶναι φανερόν, ὅτι πρέπει νὰ μοιρασθῇ τὸ κέρδος 3420 δρχ. εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν 5500, 8000 καὶ 15000 δραχ. Εὑρίσκομεν δὲ ὅτι θὰ λάβῃ ὁ α΄) $\frac{3420\times5500}{28500}=660$ δρ., ὁ β΄) $\frac{3420\times8000}{28500}=960$, ὁ γ΄) $\frac{3420\times15000}{28500}=1800$ δρχ.

2ον) ***Ἔμπορος ἀρχίζει μίαν ἐπιχείρησιν μὲ 8600 δραχμάς, μετὰ 8 δὲ μῆνας προσλαμβάνει καὶ συνέταιρον, ὅστις καταβάλλει 14000 δραχμάς· 10 δὲ μῆνας μετὰ ταῦτα*** *προσλαμβάνει καὶ ἄλλον, ὅστις καταβάλλει 7500 δραχμάς. Τρία ἔτη μετὰ τὴν ἔναρξιν τῆς ἐπιχειρήσεως ἐλογαριάσθησαν καὶ εὗρον, ὅτι ἐκέρδισαν 50000 δραχμάς. Πόσα πρέπει νὰ λάβῃ ἕκαστος ;*

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο καὶ τὰ κεφάλαια εἶναι διάφορα καὶ οἱ χρόνοι καθ' οὓς ἔμειναν ταῦτα εἰς τὴν ἐπιχείρησιν εἶναι διάφοροι· καὶ τοῦ μὲν Α^ου ἔμειναν 3 ἔτη, τοῦ Β^ου 28 μῆνας, τοῦ δὲ Γ^ου 18 μῆνας. Πρέπει λοιπὸν τὸ κέρδος νὰ μοιρασθῇ ὄχι μόνον ἀναλόγως τῶν κεφαλαίων, ἀλλὰ καὶ ἀναλόγως τῶν χρόνων. Πρὸς τοῦτο δὲ σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς :

Αἱ 8600 δρχ. τοῦ Α^ου εἰς 36 μῆνας φέρουν τὸ ἴδιον κέρδος, τὸ ὁποῖον φέρουν 8600 × 36 δρχ. εἰς ἕνα μῆνα. Ὁμοίως αἱ 14000 δρχ. τοῦ Β^ου εἰς 28 μῆνας καὶ αἱ 7500 δρχ. τοῦ Γ^ου εἰς 18 μῆνας φέρουν ὅσον κέρδος φέρουν 14000×28 δραχ. καὶ 7500×18 δρχ. εἰς ἕνα μῆνα. Εἶναι λοιπὸν τὸ ἴδιον ὡς νὰ κατέβαλον δι' ἕνα μῆνα ὁ Α^ος 8600 × 36 = 309600 δραχ., ὁ Β^ος 392000 δρχ. καὶ ὁ Γ^ος 135000 δραχ. Μοιράζοντες λοιπὸν τὸ κέρδος ἀναλόγως τῶν τριῶν τούτων ἀριθμῶν, εὑρίσκομεν διὰ τὸν Α^ον 18503,4 δραχ., τὸν Β^ον 23428,1 δραχ. καὶ διὰ τὸν Γ^ον 8068,3 δραχ.

Προβλήματα.

721) Τρεῖς ἔμποροι ἔκαμαν ἑταιρείαν διὰ μίαν ἐπιχείρησιν. Ὁ α΄ κατέθεσεν 45000 δρχ. ὁ β΄ 40000 καὶ ὁ γ΄ 55000. Ἐκ τῆς ἐπιχειρήσεως ταύτης ἐκέρδισαν 8920 δρχ. Πόσον εἶναι τὸ κέρδος ἑκάστου ; (ἀπ. ὁ β΄ 2548,57).

722) Διὰ μίαν ἐπιχείρησιν κατέθεσεν ὁ μὲν εἷς 75000 δραχ. ὁ β΄ 83000 καὶ ὁ γ΄ 47000. Ἐζημίωσαν δὲ οἱ τρεῖς οὗτοι ἐκ τῆς ἐπιχειρήσεως ταύτης 8815 δρχ. Πόσον ἐζημιώθη ὁ καθείς ; (ἀπ. ὁ α΄ 3225).

723) Διὰ μίαν ἐπιχείρησιν κατέθεσαν τρεῖς ὁμοῦ 60000 δρχ. μετὰ δὲ τὸ πέρας αὐτῆς διένειμον τὰ ἐξ αὐτῆς κέρδη καὶ ἔλαβεν ὁ α΄ 3000 δραχ., ὁ β΄ 2500 καὶ ὁ γ΄ 2000. Πόσας δραχμὰς κατέθεσεν ἕκαστος ; (ἀπ. ὁ α΄ 24000).

724) Τρεῖς ἔμποροι ἔκαμαν ἑταιρείαν διὰ μίαν ἐπιχείρησιν διὰ τὴν ὁποίαν κατέθεσαν ἐν ὅλῳ 12000 δραχ., ὁ α΄ κατέθεσεν 45000 δραχ., ὁ β΄ 33000 καὶ ὁ γ΄ τὸ ὑπόλοιπον. Ἐκ τῆς ἐπιχειρήσεως ταύτης ἐκέρδισαν 8 ‰ ἐπὶ τοῦ κατατεθέντος κεφα-

λαίου, ἐπὶ τοῦ κέρδους δὲ ἐπλήρωσαν φόρον καθαρᾶς προσόδου 3 %. Ποῖον εἶναι τὸ καθαρὸν κέρδος τὸ ὁποῖον ἔλαβεν ἕκαστος; (ἀπ. ὁ α΄ 3492).

725) Ἔμπορός τις ἤρχισεν ἐπιχείρησίν τινα μὲ κεφάλαιον 18000 δραχμῶν. Μετὰ ἓν ἔτος προσέλαβε καὶ συνέταιρον ὅστις κατέβαλεν ἐπίσης 18000 δραχ. Τρία ἔτη μετὰ ταῦτα εὗρον, ὅτι ἐκέρδισαν 5000 δραχ. ἐκ τῆς ἐπιχειρήσεως. Πόσας θὰ λάβῃ ὁ καθείς; $\left(\text{ἀπ. ὁ α΄ } 2875\,\frac{1}{7}\right)$

726) Τρεῖς ἔμποροι ἔκαμαν ἑταιρείαν καὶ κατέβαλον ὁ μὲν α, 8000 δρχ. β΄ 5000 καὶ ὁ γ΄ 3500· ὅταν δὲ μετὰ ταῦτα ἐμοιράσθησαν τὰ κέρδη ἔλαβεν ὁ α΄ 400 δρχ. Πόσας ἔλαβεν ἑκάτερος τῶν ἄλλων; (ἀπ. ὁ β΄ 250).

727) Δύο ἔμποροι ἔκαμαν ἑταιρείαν, ἥτις ἔφερε κέρδος 12000 δρ. Κατὰ τὴν διανομὴν τοῦ κέρδους τούτου ὁ α΄ ἔλαβεν 1000 δραχ. περισσοτέρας, διότι εἶχε καταβάλει 5600 δρχ. περισσοτέρας τοῦ ἄλλου. Πόσον ἦτο τὸ κεφάλαιον ἑκάστου ἐξ αὐτῶν καὶ πόσον ἐκ τοῦ κέρδους ἔλαβεν ἕκαστος; (ἀπ. ὁ α΄ 36400).

728) Διαλυθείσης ἑταιρείας τινός, ἥτις εἶχε 3 μετόχους εὑρέθη κέρδος 5000 δρχ. Ἐκ τούτων δὲ οἱ δύο πρῶτοι ἔλαβον ὁμοῦ τὰς 2000 δραχ. ὁ δὲ τρίτος ὅστις εἶχε καταβάλει 26000 δραχ., ἔλαβε τὰς ἐπιλοίπους 3000. Νὰ εὑρεθῇ τὸ κεφάλαιον τῶν δύο πρώτων μετόχων.

729) Ἔμπορός τις ἤρχισεν ἐπιχείρησιν διὰ τὴν ὁποίαν κατέβαλεν 7000 δραχ. Μετὰ δύο ἔτη προσέλαβε καὶ συνέταιρον, ὅστις κατέβαλε 12000 δρχ. Μετὰ 3 ἔτη ὁ α΄ κατέβαλεν πάλιν 4000 δραχ., ἓν δὲ ἔτος μετὰ ταῦτα διελύθη ἡ ἑταιρεία καὶ εὑρέθη κέρδος 20000 δρχ. Πόσον θὰ λάβῃ ἕκαστος;

Περὶ μέσου ὅρου.

182. Ἕνας ἐργάτης ὁ ὁποῖος εἰργάσθη ἐπὶ δύο ἡμέρας μὲ ἡμερομίσθια τὴν μὲν α΄ ἡμέραν 25 δραχ. τὴν δὲ β΄ 65 δραχ. εἶναι ὡς νὰ εἰργάσθη τὰς δύο ἡμέρας μὲ τὸ αὐτὸ ἡμερομίσθιον τῶν 60 δρχ. Διότι $\frac{35+65}{2}=60$. Τὸ ἡμερομίσθιον τῶν 60 δραχ. λέγεται ***μέσος ὅρος*** (ἢ μέσον ἡμερομίσθιον) τῶν δύο δοθέντων ἡμερομισθίων. Ἐν γένει δὲ ***μέσος ὅρος ἢ ἀριθμητικὸν μέσον διαφόρων ποσῶν ὁμοειδῶν λέγεται τὸ πηλίκον τῆς διαι-***

ρέσεως τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ αὐτῶν. Οὕτω ὁ μέσος ὅρος τῶν 12, 18, 30 εἶναι $\frac{12+18+30}{3} = 20$.

Τοὺς μέσους ὅρους μεταχειρίζονται εἰς πολλὰς περιστάσεις. Π. χ. τὰ ἄτομα ὑπολογίζουσι τὴν μέσην ἡμερησίαν δαπάνην, τὸ κράτος τὴν μέσην μηνιαίαν εἴσπραξιν ἐκ τῶν φόρων. Ὁμοίως εὑρίσκουν τὸν μέσον ὅρον τῶν γεννήσεων ἢ τῶν θανάτων εἰς μίαν χώραν κλπ. Εἰς περιπτώσεις μετρήσεων ἑνὸς μεγέθους, αἵ ὁποῖαι δίδουσι διάφορα ἐξαγόμενα, ὡς πιθανώτερον ἐξαγόμενον λαμβάνουσι τὸν μέσον ὅρον τῶν διαφόρων ἐξαγομένων.

Πρόβλημα. ***Ἐὰν ἐδαπάνησέ τις ἐπὶ 3 ἡμέρας 60 δραχ. τὴν ἡμέραν, κατὰ τὰς ἑπομένας 2 ἡμέρας ἀπὸ 72 δρχ. καὶ κατὰ τὰς ἑπομένας 5 ἡμέρας ἀπὸ 54 δρχ., ποία εἶναι ἡ μέση ἡμερησία δαπάνη κατὰ τὸ διάστημα τοῦτο;***

Ἐδαπάνησεν ἐν ὅλῳ $60 \times 3 + 72 \times 2 + 54 \times 5 = 594$ δραχ. κατὰ τὸ διάστημα τῶν $3+2+5=10$ ἡμερῶν. Ὥστε ἡ ζητουμένη δαπάνη εἶναι 594 δραχ. : 10 = 59,40 δραχ.

Προβλήματα ἀναμίξεως.

183. 1ον) ***Οἰνοπώλης τις ἀνέμιξε τριῶν εἰδῶν οἴνους, ἑκάστου τῶν ὁποίων ἡ ὀκᾶ τιμᾶται 8 δρχ., 6,50 δρχ., 5,60 δρχ. Ἔλαβε δὲ ἐκ τοῦ πρώτου 864 ὀκ., ἐκ τοῦ δευτέρου 720 ὀκ. καὶ ἐκ τοῦ τρίτου 360 ὀκ. Ποία εἶναι ἡ μέση τιμὴ τῆς ὀκᾶς τοῦ μίγματος;***

864 ὀκ.	πρὸς 8,00 δρχ.	τὴν ὀκᾶν ἀξ.	$8{,}00 \times 864 =$	6912 δρχ.
720 »	» 6,50 »	» »	» $6{,}50 \times 720 =$	4680 »
360 »	» 5,60 »	» »	» $5{,}60 \times 360 =$	2016 »
1944		αἱ 1944 ὀκάδες τοῦ μίγματος ἀξίζουν		13608 »

καὶ ἑπομένως ἡ 1 ὀκᾶ ἀξίζει 13608 δρχ. : 1944 = 7 δραχμάς.

184. 2ον) ***Ἔμπορός τις ἔχει δύο εἴδη ἐλαίου· τοῦ πρώτου εἴδους ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 37 δρχ., τοῦ δὲ δευτέρου 29 δρχ. θέλει δὲ νὰ κάμῃ ἐξ αὐτοῦ μῖγμα 2400 ὀκάδων, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ νὰ τιμᾶται 34 δραχ. Πόσον θὰ βάλῃ ἀπὸ κάθε εἶδος;***

Πρὸς τοῦτο σκέπτομαι ὡς ἑξῆς: ἀπὸ κάθε ὀκᾶν τοῦ α' εἴδους, τὴν ὁποίαν θὰ βάλῃ ὁ ἔμπορος εἰς τὸ μῖγμα, θὰ χάσῃ $37 - 34 = 3$ δρχ.· ἐνῷ ἀπὸ κάθε ὀκὰν τοῦ β' εἴδους θὰ κερδίση 34 — 29 = 5 δρχ. Λοιπόν, ἂν βάλῃ ἀπὸ τὸ πρῶτον εἶδος 5 ὀκάδας (ὅσας δραχμὰς κερδίζει ἀπὸ τὸ δεύτερον) θὰ χάσῃ 3×5· ἂν δὲ βάλῃ ἀπὸ τὸ δεύτερον 3 ὀκ. (ὅσας δραχμὰς χάνει ἀπὸ τὸ πρῶτον) θὰ κερδίσῃ 5×3. Ὥστε οὔτε κέρδος οὔτε ζημίαν θὰ ἔχῃ ἂν ἀναμείξῃ 5 ὀκάδας ἀπὸ τὸ πρῶτον καὶ 3 ὀκ. ἀπὸ τὸ δεύτερον. Ὥστε :

διὰ μῖγμα 8 ὀκ. βάζει 5 ὀκ. α΄ καὶ 3 ὀκ. β΄
» » 2400 » » χ; » α΄ » χ; » β΄

ἤτοι α΄ $=5\times\dfrac{2400}{8}=1500$ ὀκ. καὶ β΄ $=3\times\dfrac{2400}{8}=900$ ὀκ.

Σημ. Εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα παρατηροῦμεν, ὅτι, ὅταν ὁ ἔμπορος λαμβάνῃ ἀπὸ τὸ α΄ εἶδος 2, 3, 4 κλπ. φορὰς 5 ὀκάδας, πρέπει νὰ λαμβάνῃ ἀπὸ τὸ β΄ εἶδος 2, 3, 4 κλπ. φορὰς 3 ὀκάδας, διὰ νὰ μὴ ἔχῃ οὔτε κέρδος οὔτε ζημίαν.

Ἑπομένως ἂν μερίσωμεν τὸν ἀριθμὸν 2400 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν 5 καὶ 3, εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται συντόμως ὡς ἑξῆς :

α΄ δρχ. 37 5

τιμὴ μίγματος 34

β΄ δρχ. 29 3

α΄ $\dfrac{2400\times5}{8}=1500$ ὀκ. β΄ $\dfrac{2400\times3}{8}=900$ ὀκ.

Παρατ. Ἐπὶ τῶν ἀνωτέρω παρατηροῦμεν, ὅτι τὰ προβλήματα ἀναμίξεως εἶναι δύο εἰδῶν : 1) Ἐκεῖνα εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται ἡ τιμὴ τῆς μονάδος τοῦ μίγματος πραγμάτων τῶν ὁποίων δίδονται αἱ ποσότητες καὶ ἡ τιμὴ τῆς μονάδος ἑκάστου ἐξ αὐτῶν.

2) Ἐκεῖνα εἰς τὰ ὁποῖα δίδονται αἱ τιμαὶ τῆς μονάδος δύο πραγμάτων καὶ ζητεῖται πόσον θὰ λάβωμεν ἐξ ἑκάστου εἴδους διὰ νὰ σχηματίσωμεν μῖγμα ὡρισμένον καὶ τοῦ ὁποίου ἡ μονὰς νὰ ἔχῃ δεδομένην τιμήν.

185. Εἰς τὰ προβλήματα τῆς ἀναμίξεως ἀνάγονται καὶ τὰ προβλήματα εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ὁ τίτλος τοῦ κράματος πολυτίμου τινος μετάλλου, π. χ. ἀργύρου ἢ χρυσοῦ, μὲ ἄλλο τι μέταλλον. Λέγεται δὲ **τίτλος** τὸ ποσὸν τοῦ πολυτίμου

μετάλλου, τὸ περιεχόμενον εἰς μίαν μονάδα κράματος. Οὕτως ὁ τίτλος τῶν χρυσῶν νομισμάτων εἶναι 0,900.

1ον) Πρόβλημα. ***Ποῖος εἶναι ὁ τίτλος τοῦ κράματος 150 γραμμαρίων ἀργύρου ἔχοντος τίτλον 0,950 καὶ 50 γραμμαρίων ἀργύρου ἔχοντος τίτλον 0,750;***

Τὰ 150 γρ. ἀργύρ. περιέχουσι καθ. ἄργυρ. $0,950 \times 150 = 142,50$
» 50 » » » » » $0,750 \times 50 = 37,50$
Τὰ 200 γραμ. τοῦ κράματος περιέχουν καθ. ἄργυρον 180
ἄρα τὸ 1 γραμ. περιέχει καθαρὸν ἄργυρον $180 : 200 = 0,900$.

Ὥστε ὁ τίτλος τοῦ κράματος θὰ εἶναι 0,900.

2ον) Πρόβλημα. ***Ἔχει τις χρυσὸν τίτλου 0,965 καὶ ἄλλον τίτλου 0,870, θέλει δὲ ἐξ αὐτῶν νὰ κάμῃ κρᾶμα 380 γραμμαρίων τίτλου 0,920. Πόσα γραμμάρια θὰ λάβῃ ἀπὸ ἕκαστον εἶδος;***

Ἀπὸ κάθε γραμμάριον τοῦ α΄ εἴδους τὸ ὁποῖον θὰ εἰσέλθῃ εἰς τὸ κρᾶμα θὰ ἔχῃ περίσσευμα $0,965 - 0,920 = 0,045$ γραμ. καθαροῦ χρυσοῦ, ἐνῷ ἀπὸ κάθε γραμμάριον τοῦ β΄ εἴδους θὰ τοῦ λείπουν $0,920 - 0,870 = 0,050$ γραμμάρια καθαροῦ χρυσοῦ. Ἂν λάβῃ λοιπὸν ἀπὸ τὸ α΄ 50 γραμ. θὰ ἔχῃ περίσσευμα $0,045 \times 50$ γρ. καθ. χρ.· καὶ ἂν λάβῃ ἀπὸ τὸ β΄ 45 γρ. θὰ τοῦ λείπουν $0,050 \times 45$ γρ. καθ. χρ. Ἑπομένως οὔτε περίσσευμα οὔτε ἔλλειμμα θὰ ἔχῃ· ἀλλὰ τότε θὰ κάμῃ κρᾶμμα 95 γραμμαρίων καὶ διὰ νὰ κάμῃ κρᾶμα 380 γραμ. θὰ λάβῃ ἀπὸ τὸ α΄ $50 \times \frac{380}{95} = 200$ γρ. καὶ ἀπὸ τὸ β΄ $45 \times \frac{380}{95} = 180$ γρ.

Σημ. Εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον μερίζοντες τὸν 380 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 50 καὶ 45 ἢ 10 καὶ 9 (Σημ. § 184).

Διάταξις τῆς πράξεως.

α΄ 0,965 — 50 ἢ 10 — α΄ $\frac{380 \times 10}{19} = 200$ γραμμάρια.
τίτλ. κρ. 0,920
β΄ 0,870 — 45 ἢ $\frac{9}{19}$ — β΄ $\frac{380 \times 9}{19} = 180$ γραμμάρια.

Προβλήματα.

730) Ἀνέμιξέ τις 175 ὀκ. οἴνου ἀξίας 6,40 δρ. κατ᾽ ὀκᾶν μὲ 215 ὀκ. οἴνου ἀξίας 5,80 δρ. κατ᾽ ὀκᾶν καὶ μὲ ἄλλας 110 ὀκάδας οἴνου ἀξίας 7,20 δρχ. τὴν ὀκᾶν. Ποία εἶναι ἡ ἀξία τῆς ὀκᾶς τοῦ μίγματος; (ἀπ. 6,32)

731) Ἀνέμιξέ τις 125 ὀκ. ἐλαίου τῶν 32 δρχ. τὴν ὀκᾶν μὲ 140 ὀκάδας ἐλαίου τῶν 24 δρχ. τὴν ὀκᾶν. Πόσον τιμῶνται αἱ 85 ὀκάδες τοῦ μίγματος τούτου;

732) Εἶχέ τις δύο βαρέλια πλήρη ἐλαίου· τὸ α΄ περιεῖχε 450 ὀκάδας ἀξίας 33 δραχ. τὴν ὀκᾶν, τὸ δὲ ἄλλο 300 ὀκάδας ἀξίας 22,50 δρ. τὴν ὀκᾶν, ἔκαμε δὲ μῖγμα ἀπὸ τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ α΄ καὶ τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ β΄ βαρελίου. Πόσον τιμᾶται ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος; (ἀπ. 31,25)

733) Εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα νὰ εὑρεθῇ πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὴν ὀκᾶν τοῦ μίγματος διὰ νὰ κερδίσῃ ἐν ὅλῳ 1350 δραχμάς; (ἀπ. 35)

734) Εἶχέ τις 2340 ὀκάδας οἴνου, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἐτιμᾶτο 6,80 δρ., ἔρριψε δὲ εἰς αὐτὸν 5 °/₀ τοῦ βάρους του οἰνόπνευμα ἀξίας 18 δρ. τὴν ὀκᾶν καὶ 380 ὀκ. ὕδατος. Πόσας δραχμὰς ἦτο ἡ ἀξία τῆς ὀκᾶς τοῦ μίγματος; (ἀπ. 6,35 περίπου)

735) Ἀνέμιξέ τις 120 λίτρας οἰνοπνεύματος 8° μετὰ διπλασίας ποσότητος οἰνοπνεύματος 40° καὶ μετὰ 630 λιτρῶν ὕδατος. Ποῖος εἶναι ὁ βαθμὸς τοῦ μίγματος; (ἀπ. 20°)

736) Κατασκευάζει τις κρᾶμα μὲ 220 δράμια ἀργύρου, τίτλου 0,920 καὶ μὲ 320 δράμια ἀργύρου, τίτλου 0,785. Ποῖος εἶναι ὁ τίτλος τοῦ κράματος; (ἀπ. 0,840)

737) Ἔχει τις 385 γραμμάρια χρυσοῦ τίτλου 0,880 καὶ 140 γραμμάρια καθαροῦ χρυσοῦ (τίτλος 1,000)· κάμνει δὲ ἐξ αὐτῶν καὶ ἐκ 35 γραμ. χαλκοῦ (τίτλος 0) κρᾶμα. Ποῖος εἶναι ὁ τίτλος τοῦ κράματος; (ἀπ. 0,855)

738) Ἀνέμιξέ τις 158 ὀκάδας καφέ, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἐτιμᾶτο 85 δρ., μὲ 39 ὀκ. κριθὴν καὶ ἔκαμε μῖγμα τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἐτιμᾶτο 69,40 δρχ. Πόσον ἐτιμᾶτο ἡ ὀκᾶ τῆς κριθῆς; (Ἀπὸ τὴν ἀξίαν τοῦ ὅλου μίγματος ἀφαιροῦμεν τὴν ἀξίαν τοῦ καφὲ καὶ τὴν διαφορὰν διαιροῦμεν διὰ 39. (ἀπ. 6,20)

739) Ἔκαμέ τις κρᾶμα τίτλου 0,640 ἐκ 52 γραμμ. χρυσοῦ τίτλου 0,895, ἐξ 76 γραμμ. χρυσοῦ τίτλου ἀγνώστου καὶ ἐκ 32 γραμμ. χαλκοῦ. Ποῖος εἶναι ὁ ἄγνωστος τίτλος; (ἀπ. 0,735)

740) Σιτέμπορος ἔχει δύο εἰδῶν σίτου, τοῦ πρώτου εἴδους ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 5,40 δρχ., τοῦ δὲ δευτέρου 3,85 δρχ. Θέλει δὲ νὰ κάμῃ ἐξ αὐτῶν μῖγμα 2480 ὀκάδων, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ νὰ ἀξίζῃ 4,45 δρχ. Πόσον θὰ λάβῃ ἀπὸ κάθε εἶδος; (ἀπ. α΄ 960)

741) Θέλει νὰ κάμῃ τις μετ᾽ ἀνύδρου οἰνοπνεύματος (100°)

καὶ οἰνοπνεύματος 30°, μῖγμα 450 λιτρῶν 52°. Πόσον πρέπει νὰ λάβῃ ἀπὸ κάθε εἶδος ; $\left(\text{ἀπ. α΄ } 112\frac{1}{2}\right)$

742) Ἀνέμιξέ τις βούτυρον, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἤξιζε 84 δρχ. μετὰ λίπους ἀξίας κατ' ὀκᾶν 36 δρχ. καὶ ἔκαμε μῖγμα 114 ὀκάδων ὁλικῆς ἀξίας 10080 δρχ. Πόσον ἔλαβεν ἐξ ἑκάστου εἴδους ; (ἀπ. 102, 42.)

743) Οἰνοπώλης ἔχει 3500 ὀκάδας οἴνου, τὸν ὁποῖον πωλεῖ πρὸς 8 δρχ. τὴν ὀκᾶν. Πόσον ὕδωρ πρέπει νὰ ἀναμίξῃ, ὥστε ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος ν' ἀξίζῃ 7 δραχμάς ; (ἀπ. 500).

744) Ἐὰν ὁ αὐτὸς οἰνοπώλης θέλει νὰ κερδίσῃ ἐκ τῆς ἀναμίξεως 10°/ₒ ἐπὶ τῆς ἀξίας τοῦ μίγματος (ἂν δηλ. τὸ μῖγμα ἀξίζει 100 δρχ. νὰ λάβῃ 110) πόσον ὕδωρ πρέπει νὰ βάλῃ ; (ἀπ. 900).

745) Ἔμπορός τις ἔχει δύο εἴδη σίτου, τοῦ πρώτου εἴδους ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 5,20 δρχ., τοῦ δὲ δευτέρου 3,60. Πόσας ὀκάδας τοῦ πρώτου εἴδους πρέπει νὰ ἀναμίξῃ μὲ 1200 ὀκάδας τοῦ δευτέρου διὰ νὰ κάμῃ μῖγμα, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ νὰ ἀξίζῃ 4 δραχμάς ; (ἀπ. 400).

746) Ἐὰν ὁ αὐτὸς ἔμπορος θέλει ἐκ τῆς ἀναμίξεως νὰ κερδίσῃ 300 δρχ., πόσας ὀκάδας ἐκ τοῦ πρώτου εἴδους πρέπει νὰ βάλῃ ; (ἀπ. 150).

747) Παντοπώλης τις ἔχει 200 ὀκ. βουτύρου ἁγνοῦ, τοῦ ὁποίου ἑκάστη ὀκᾶ ἀξίζει 76 δραχ., θέλει δὲ νὰ τὸ ἀναμίξῃ μὲ λῖπος, τοῦ ὁποίου ἑκάστη ὀκᾶ ἀξίζει 24 δρχ., ὥστε νὰ ἀποτελεσθῇ μῖγμα, οὗτινος ἡ ὀκᾶ νὰ ἀξίζῃ 55,40. Πόσον λῖπος πρέπει νὰ βάλῃ ;

Ἰδιότητες τῆς ἰσότητος καὶ ἀνισότητος τῶν ἀριθμῶν. Λόγοι καὶ ἀναλογίαι

186. Τὰ περισσότερα ἐκ τῶν προβλημάτων τὰ ὁποῖα ἐλύσαμεν προηγουμένως λύονται καὶ διὰ μεθόδων ἄλλων. Ἀλλὰ διὰ νὰ κατανοήσωμεν αὐτὰς πρέπει νὰ ἐξετάσωμεν προηγουμένως τὰ κάτωθι ζητήματα.

187. Α΄. ***Ἰδιότητες τῆς ἰσότητος καὶ ἀνισότητος τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.*** Εἰς τὴν § 6 β΄ εἴδομεν, ὅτι, ἐὰν εἶναι α=β καὶ α=γ, θὰ εἶναι καὶ β=γ. Ἄλλαι ἰδιότητες τῆς ἰσό-

τητος καὶ τῆς ἀνισότητος, αἱ ὁποῖαι εἶναι φανεραὶ ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ αὐτῶν, εἶναι καὶ αἱ ἐκφραζόμεναι διὰ τῶν ἑξῆς:

1) Ἐὰν εἶναι $α=β$ θὰ εἶναι καὶ $α+1=β+1$ καὶ γενικῶς $α+γ=β+γ$.

2) Ἐὰν εἶναι $α=β$ θὰ εἶναι καὶ $α+α=β+β$, ἤτοι $2.α=2.β$. Ἐπίσης θὰ εἶναι καὶ $3.α=3.β$ καὶ γενικῶς $μ.α=μ.β$.

3) Ἐὰν εἶναι $α>β$, θὰ εἶναι καὶ $α+γ>β+γ$.

4) Ὅταν εἶναι $α>β$, θὰ εἶναι καὶ $2.α>2.β$ ἢ $3.α>3.β$ καὶ γενικῶς $μ.α>μ.β$.

188. Ἄλλαι ἰδιότητες εἶναι καὶ αἱ ἐκφραζόμεναι διὰ τῶν ἑξῆς:

1) Ἐὰν $α=β$, θὰ εἶναι καὶ $α-γ=β-γ$ (αἱ ἀφαιρέσεις ὑποτίθενται δυναταί)· διότι ἂν εἰς τὰς διαφοράς $α-γ$ καὶ $β-γ$ προστεθῶσι, πάλιν οἱ ἀφαιρεθέντες ἴσοι, θὰ ἔχωμεν.

$$α-\cancel{γ+γ}=α \text{ καὶ } β-\cancel{γ+γ}=β, \text{ ἤτοι } α=β.$$

Ἡ ἰσότης ὅμως αὕτη δὲν θὰ προέκυπτεν ἂν αἱ διαφοραὶ ἦσαν ἄνισοι.

2) Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι, ἐὰν $α>β$, θὰ εἶναι καὶ $α-δ>β-γ$.

3) Ἐὰν εἶναι $α=β$, θὰ εἶναι καὶ $α:γ=β:γ$ (ἡ διαίρεσις ὑποτίθεται τελεία), διότι ἂν τὰ πηλίκα πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ τὸν διαιρέτην θὰ ἔχωμεν· $(α:γ).γ=α$ καὶ $(β:γ).γ=β$, ἤτοι $α=β$.

Ἡ ἰσότης δὲ αὕτη δὲν θὰ προέκυπτεν, ἂν τὰ πηλίκα ἦσαν ἄνισα.

4) Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι ἐὰν $α>β$, θὰ εἶναι καὶ $α:γ>β:γ$.

189. Β΄. ***Ἰδιότητες τῆς ἰσότητος καὶ ἀνισότητος τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν.*** Εἴδομεν, ὅτι, διὰ νὰ συγκρίνωμεν δύο κλάσματα τρέπομεν αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα· ἐκ τῆς ἰσότητος δὲ ἢ τῆς ἀνισότητος τῶν ἀριθμητῶν συμπεραίνομεν τὴν ἰσότητα ἢ τὴν ἀνισότητα τῶν κλασμάτων. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ἰσότης ἢ ἡ ἀνισότης τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν ἀνάγεται εἰς τὴν ἰσότητα ἢ ἀνισότητα τῶν ἀκεραίων, ἕπεται, ὅτι αἱ ἰδιότητες τῆς ἰσότητος καὶ τῆς ἀνισότητος τῶν ἀκεραίων, τὰς ὁποίας εἴδομεν προηγουμένως, ἀληθεύουσι καὶ ὅταν πρόκειται περὶ κλασματικῶν ἀριθμῶν.

Ἀσκήσεις.

748) Νὰ δειχθῇ, ὅτι

1) Ἐὰν $\alpha=\beta$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha^\mu=\beta^\mu$.

2) Ἐὰν $\alpha>\beta$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha^\mu>\beta^\mu$.

3) Ἐὰν $\alpha>\beta$ καὶ $\gamma>\delta$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha+\gamma>\beta+\delta$.

4) Ἐὰν $\alpha>\beta$ καὶ $\gamma>\delta$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha.\gamma>\beta.\delta$.

190. Γ΄. ***Π ε ρ ὶ λ ό γ ο υ. Λόγος ἀφηρημένου ἀριθμοῦ α πρὸς ἄλλον τοιοῦτον β ἢ συγκεκριμένου ἀριθμοῦ πρὸς ἄλλον ὁμοειδῆ, λέγεται ὁ ἀριθμός, ὅστις δεικνύει πῶς ἀποτελεῖται ὁ α ἐκ τοῦ β καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτοῦ.***

Ὁ λόγος σύγκειται ἀπὸ τὴν μονάδα 1 καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτῆς, καθ' ὃν τρόπον σύγκειται ὁ α ἐκ τοῦ β καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτοῦ.

Ἐὰν π. χ. εἶναι $\alpha=\beta+\beta+\frac{\beta}{2}$, ὁ λόγος τοῦ α πρὸς τὸν β εἶναι $1+1+\frac{1}{2}$ ἤτοι $\frac{5}{2}$.

Σημείωσις. Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον ὁρίζεται καὶ ὁ λόγος δύο οἱωνδήποτε ὁμοειδῶν ποσῶν.

191. ***Ὁ λόγος τοῦ α πρὸς τὸν β εἶναι τὸ πηλίκον*** $\frac{\alpha}{\beta}$.

Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι ὁ λόγος τοῦ α πρὸς τὸν β εἶναι $2\frac{3}{5}$ Τοῦτο σημαίνει, ὅτι εἶναι :

$$\alpha=\beta+\beta+\frac{\beta}{5}+\frac{\beta}{5}+\frac{\beta}{5} \text{ ἢ } \alpha=\left(1+1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\right)\beta.$$

Ἐντεῦθεν συνάγεται, ἂν διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ ἴσα διὰ τοῦ β, $\frac{\alpha}{\beta}=1+1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=2\frac{3}{5}$.

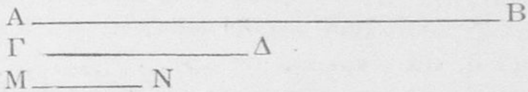
Ὥστε ὁ λόγος τοῦ α πρὸς τὸν β εἶναι τὸ πηλίκον τοῦ α διὰ τοῦ β.

Διὰ τοῦτο ὁ λόγος τοῦ α πρὸς τὸν β παρίσταται διὰ τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$ ἢ καὶ διὰ τοῦ $\alpha:\beta$.

Ὁ λόγος $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι ὁ ***ἀντίστροφος*** τοῦ $\frac{\beta}{\alpha}$.

192. Ἄς λάβωμεν δύο ὁμοειδῆ ποσά, π.χ. τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΓΔ· ἔστω δὲ ὁ λόγος αὐτῶν 2· ἤτοι ΑΒ=2ΓΔ. Ἐὰν τώρα μετρήσωμεν τὰ δύο ταῦτα ποσὰ διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος

ΜΝ καὶ εὕρωμεν ἐκ τῆς μετρήσεως τοῦ ΑΒ τὸν ἀριθμὸν α καὶ



ἐκ τῆς μετρήσεως τοῦ ΓΔ τὸν ἀριθμὸν β, εἶναι φανερόν, ὅτι θὰ ἔχωμεν $\alpha=2.\beta$ (διότι τὰ ποσὰ ΑΒ καὶ 2.ΓΔ εἶναι ἴσα) ἤτοι $\frac{\alpha}{\beta}=2$, ἤτοι ***ὁ λόγος τῶν δύο ὁμοειδῶν ποσῶν*** $\frac{AB}{\Gamma\Delta}=2$ ***εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν λόγον τῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι παριστῶσι τὰ ποσὰ αὐτὰ*** $\frac{\alpha}{\beta}=2$ (μετρηθέντα διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος).

Μὲ ἄλλους λόγους, ἐὰν τὰ ποσὰ αὐτὰ μετρηθῶσι διὰ τοῦ μέτρου καὶ εὕρωμεν, ὅτι τὸ μῆκος τῆς ΑΒ εἶναι 6 μ. θὰ εὕρωμεν, ὅτι τὸ μῆκος τῆς ΓΔ εἶναι 3 μ. δηλαδή, ὅτι $\frac{6}{3}=2$· ἐὰν δὲ μετρήσωμεν αὐτὰ διὰ τῆς παλάμης, θὰ εὕρωμεν 60 παλάμας διὰ τὴν μίαν καὶ 40 διὰ τὴν ἄλλην κ.ο.κ.

193. ***Ἐὰν ἔχωμεν λόγους ἴσους καὶ προστεθῶσιν οἱ ὁμώνυμοι ὅροι αὐτῶν προκύπτει λόγος ἴσος.***

Ἔστωσαν οἱ ἴσοι λόγοι $\frac{3}{5}$ $\frac{6}{10}$ $\frac{12}{20}$.

Ἐπειδὴ τὰ κλάσματα ταῦτα εἶναι ἴσα, ἐὰν προσθέσωμεν τοὺς ὁμωνύμους ὅρους αὐτῶν, προκύπτει τὸ κλάσμα $\frac{3+6+12}{5+10+20}=\frac{21}{35}$, τὸ ὁποῖον προφανῶς εἶναι ἴσον πρὸς τὰ προηγούμενα, ἤτοι εἶναι $\frac{3}{5}=\frac{6}{10}=\frac{12}{20}=\frac{3+6+12}{5+10+20}$.

194. Δ΄. ***Περὶ ἀναλογιῶν. Ἀναλογία λέγεται ἡ ἰσότης δύο λόγων.***

Οὕτω $\frac{12}{8}=\frac{6}{4}$ ἢ $12:8=6:4$ εἶναι ἀναλογία.

Ἐν τῇ ἀναλογίᾳ $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ ἢ $\alpha:\beta=\gamma:\delta$ οἱ α, β, γ, δ λέγονται ***ὅροι*** τῆς ἀναλογίας καὶ οἱ μὲν α καὶ δ λέγονται ***ἄκροι*** οἱ δὲ β καὶ γ ***μέσοι.***

Μία ἀναλογία, ἡ ὁποία ἔχει τοὺς μέσους ὅρους ἴσους, λέγεται ***συνεχής***. Ὁ δὲ μέσος ὅρος αὐτῆς λέγεται ***μέσος ἀνάλογος*** τῶν δύο ἄκρων ὅρων αὐτῆς. Οὕτω ἡ ἀναλογία $\frac{12}{6}=\frac{6}{3}$ εἶναι συνεχής, ὁ δὲ 6 εἶναι μέσος ἀνάλογος **τῶν** 12 καὶ 3.

195. ***Ἰδιότητες τῶν ἀναλογιῶν.*** Ἔστω $\frac{5}{8}=\frac{10}{16}$.

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὰ δύο ἴσα ἐπὶ 8×16, εὑρίσκομεν $\frac{5}{8}\times8\times16=\frac{10}{16}\times8\times16$ ἢ $5\times16=10\times8$.

Ὅθεν ***εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν μέσων.*** Καὶ ἀντιστρόφως ἐκ τῆς ἰσότητος $5\times16=10\times8$, ἐὰν διαιρέσωμεν τὰ ἴσα διὰ τοῦ 8×16, προκύπτει $\frac{5\times16}{8\times16}=\frac{8\times10}{8\times16}$ ἢ $\frac{5}{8}=\frac{10}{16}$ (1)

Ὥστε, ***ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ εἶναι τοιοῦτοι, ὥστε τὸ γινόμενον δύο ἐξ αὐτῶν νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν δύο ἄλλων, οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι συνιστῶσιν ἀναλογίαν, ἐν τῇ ὁποίᾳ ἄκροι ὅροι εἶναι οἱ παράγοντες τοῦ ἑνὸς γινομένου, μέσοι δὲ οἱ παράγοντες τοῦ ἄλλου.***

Σημ. Ἐὰν τὰ ἴσα τῆς ἰσότητος $5\times16=8\times10$ διαιρέσωμεν διὰ 16×10 ἢ 8×5 ἢ 5×10, θὰ εὕρωμεν $\frac{5}{10}=\frac{8}{16}$ (2), ἢ $\frac{16}{8}=\frac{10}{5}$ (3), ἢ $\frac{16}{10}=\frac{8}{5}$ (4). Παρατηροῦντες δὲ τὰς ἀναλογίας (1), (2), (3), (4), συνάγομεν, ὅτι δυνάμεθα εἰς μίαν ἀναλογίαν νὰ ἀλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν μέσων ὅρων ἢ τῶν ἄκρων.

Τὰ ἀνωτέρω ἐκφράζονται ὡς ἑξῆς· ἐὰν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ θὰ εἶναι καὶ $\alpha\times\delta=\beta\times\gamma$ ἢ $\alpha.\delta=\beta.\gamma$.

Ἐὰν δὲ εἶναι $\alpha.\delta=\beta.\gamma$ θὰ εἶναι καὶ $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ ἢ $\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta}$ ἢ $\frac{\delta}{\beta}=\frac{\gamma}{\alpha}$ ἢ $\frac{\delta}{\gamma}=\frac{\beta}{\alpha}$.

196. Ἔστω ἡ ἀναλογία $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$, ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν $\frac{2}{3}+1=\frac{4}{6}+1$, ἤτοι $\frac{2+3}{3}=\frac{4+6}{6}$.

Ὅθεν, ***ἐὰν ἔχωμεν ἀναλογίαν καὶ προσθέσωμεν εἰς τὸν πρῶτον ὅρον ἑκάστου λόγου τὸν δεύτερον ὅρον αὐτοῦ, λαμβάνομεν νέαν ἀναλογίαν.*** Νέας ἀναλογίας λαμβάνομεν ἐκ δοθείσης καὶ ὡς ἑξῆς φαίνεται.

1) $\frac{5}{4}=\frac{10}{8}$ $\quad \frac{5}{4}-1=\frac{10}{8}-1$, ἤτοι $\frac{5-4}{4}=\frac{10-8}{8}$,

2) $\frac{5}{7}=\frac{15}{21}$ $\quad 1-\frac{5}{7}=1-\frac{15}{21}$ ἢ $\frac{7-5}{7}=\frac{21-15}{21}$,

3) $\frac{8}{3}=\frac{24}{9}$, ἐξ ἧς ἔχομεν $\frac{8+3}{3}=\frac{24+9}{9}$ καὶ

$$\frac{8-3}{3}=\frac{24-9}{9}.$$

Καὶ ἐκ τῶν τελευταίων ἀναλογιῶν λαμβάνομεν

$$\frac{8+3}{24+9}=\frac{3}{9} \quad \frac{8-3}{24-9}=\frac{3}{9} \quad \text{ἤτοι:} \quad \frac{8+3}{24+9}=\frac{8-3}{24-9},$$

ἐξ ἧς τέλος ἔχομεν $\frac{8+3}{8-3}=\frac{24+9}{24-9}$.

197. ***Ὅταν εἷς ὅρος τῆς ἀναλογίας εἶναι ἄγνωστος δυνάμεθα νὰ τὸν εὕρωμεν.*** Π.χ. ἐὰν ζητῆται ὁ τέταρτος ὅρος, τὸν ὁποῖον παριστῶμεν διὰ χ, τῆς ἀναλογίας $\frac{10}{2}=\frac{15}{\chi}$, θὰ ἔχωμεν $10\,\chi=2.15$, ὥστε $\chi=\frac{2.15}{10}=\frac{30}{10}=3$.

Ἐπίσης ἐκ τῆς ἀναλογίας $\frac{12}{3}=\frac{\chi}{9}$ εὑρίσκομεν $3.\chi=12.9$ καὶ $\chi=\frac{12.9}{3}=4.9=36$.

Ὁμοίως ἐκ τῆς συνεχοῦς ἀναλογίας $\frac{8}{\chi}=\frac{\chi}{2}$ εὑρίσκομεν $\chi^2=8.2$ καὶ $\chi=\sqrt{8.2}=\sqrt{16}=4$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω εὐκόλως συνάγομεν τοὺς κανόνας τῆς εὑρέσεως ἑνὸς ὅρου δοθείσης ἀναλογίας, ὅταν ὁ ἄγνωστος εἶναι μέσος ἢ ἄκρος, ἢ τῆς εὑρέσεως τοῦ μέσου ἀναλόγου μιᾶς συνεχοῦς ἀναλογίας.

198. ***Λύσις προβλημάτων διὰ τῶν ἀναλογιῶν.***

Τὰς ἐννοίας τοῦ λόγου καὶ τῶν ἀναλογιῶν δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν εἰς τὴν λύσιν προβλημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα εἰσέρχονται ποσὰ ἀνάλογα ἢ ἀντιστρόφως ἀνάλογα· ἀλλὰ πρὸ αὐτῶν θὰ ἴδωμεν τὰς ἑξῆς ἰδιότητας.

199. 1) ***Ἐὰν δύο ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, ὁ λόγος δύο οἱωνδήποτε τιμῶν τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τοῦ ἄλλου.***

Ἂς λάβωμεν δύο τυχόντα ἀνάλογα ποσά, π. χ. τὸν μισθὸν ἑνὸς ἐργάτου, τοῦ ὁποίου τὸ ἡμερομίσθιον εἶναι 45 δρχ. καὶ τὰς ἡμέρας τῆς ἐργασίας του. Ἐὰν ὁ ἐργάτης οὗτος ἐργασθῇ ἐπὶ 3 ἡμέρας, θὰ λάβῃ 45 δρχ.×3, ἐὰν δὲ ἐπὶ 7 ἡμέρας, θὰ λάβῃ 45 δραχ. × 7. Ἐὰν δὲ λάβωμεν τὸν λόγον $\frac{3}{7}$ τῶν δύο τιμῶν τοῦ πρώτου ποσοῦ καὶ τὸν λόγον $\frac{45\times3}{45\times7}=\frac{3}{7}$ τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τοῦ ἄλλου, παρατηροῦμεν, ὅτι οἱ δύο οὗτοι λόγοι εἶναι ἴσοι.

2) ***Ἐὰν δύο ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα, ὁ λόγος δύο οἱωνδήποτε τιμῶν τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν ἰσοῦται μὲ τὸν ἀντίστροφον τοῦ λόγου τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τοῦ ἄλλου.***

Διότι, ἐὰν 1 ἐργάτης τελειώσῃ ἓν ἔργον εἰς 18 ἡμέρας, οἱ 2 ἐργάται θὰ τὸ τελειώσουν εἰς 9 ἡμέρας καὶ οἱ 3 ἐργάται εἰς 6 μόνον ἡμέρας· ἐὰν δὲ λάβωμεν τὸν λόγον $\frac{2}{3}$ τῶν τελευταίων τιμῶν τοῦ πρώτου ποσοῦ καὶ τὸν λόγον $\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$ τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τοῦ ἄλλου, παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ λόγος $\frac{2}{3}$ ἰσοῦται μὲ τὸν ἀντίστροφον τοῦ λόγου $\frac{3}{2}$.

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω τὸ πρῶτον πρόβλημα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν (σελ. 145) λύεται ὡς ἑξῆς. Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ ἀξία τοῦ οἴνου εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὸ ποσὸν αὐτοῦ· ἑπομένως ἔχομεν $\frac{\chi}{92}=\frac{35}{8}$, ἤτοι $\chi=\frac{92\times35}{8}=402{,}50$ δρχ.

Ἐνῷ εἰς τὸ δεύτερον πρόβλημα, εἰς τὸ ὁποῖον αἱ ὧραι τῆς καθημερινῆς ἐργασίας καὶ αἱ ἡμέραι, εἰς τὰς ὁποίας τελειώνει τὸ ἔργον, εἶναι ποσὰ ἀντίστροφα, ἔχομεν $\frac{\chi}{12}=\frac{8}{9}$, ἤτοι $\chi=\frac{12\times8}{9}$ $=10$ ἡμ. 6 ὧραι.

Καθ' ὅμοιον τρόπον λύονται καὶ τὰ προβλήματα μερισμοῦ εἰς μέρη ἀνάλογα. Π. χ. ἐὰν τὰ ζητούμενα μέρη τοῦ πρώτου προβλήματος (σελ. 166) παραστήσωμεν διὰ χ, ψ, φ, θὰ ἔχωμεν $\frac{\chi}{2}=\frac{\psi}{3}=\frac{\varphi}{5}=\frac{\chi+\psi+\varphi}{2+3+5}$ καὶ ἐπειδὴ $\chi+\psi+\varphi=450$ θὰ ἔχωμεν $\frac{\chi}{2}=\frac{450}{10}$, ἤτοι $\chi=90$, $\frac{\psi}{3}=\frac{450}{10}$, ἤτοι $\psi=135$, $\frac{\varphi}{5}=\frac{450}{10}$, ἤτοι $\varphi=225$.

Ἀσκήσεις

749) Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος (ἀπὸ μνήμης):

α) τοῦ 63 πρὸς τὸν 7, β) τοῦ 7 πρὸς τὸν 63,

γ) » 8 » » 36, δ) » 12 » » 21,

ε) » $\frac{3}{7}$ » » $\frac{5}{7}$, ϛ) » $\frac{2}{5}$ » » $\frac{7}{10}$.

750) Νὰ γίνῃ ἐπαλήθευσις τῶν ἀναλογιῶν :

α) $\frac{3}{7}=\frac{15}{35}$, β) $\frac{33}{11}=\frac{21}{7}$, γ) $\frac{25}{200}=\frac{98}{196}$,

δ) $\frac{8}{27}=\frac{3}{9}$, ε) $\frac{39}{52}=\frac{26}{39}$, ϛ) $\frac{36}{9}:5=\frac{12}{5}:5$.

751) Νὰ εὑρεθῇ ἂν οἱ ἀριθμοὶ 3, 5, 9, 15 συνιστῶσιν ἀναλογίαν καὶ ποίαν ὡς καὶ οἱ α) 4, 7, 14, 2 καὶ β) 80, 16, 100, 20.

752) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὅρος χ τῶν ἀναλογιῶν :

α) $\frac{3}{5}=\frac{12}{\chi}$, β) $\frac{\chi}{15}=\frac{4}{6}$, γ) $\frac{20}{\chi}=\frac{20}{6}$,

δ) $\frac{11}{16}=\frac{\chi}{32}$, ε) $\frac{18}{\chi}=\frac{\chi}{4}$.

753) Ἐκ τῆς ἀναλογίας $\frac{5}{12}=\frac{15}{36}$ νὰ εὑρεθῶσιν ἄλλαι ἀναλογίαι.

754) Νὰ λυθοῦν διὰ τῶν ἀναλογιῶν προβλήματα ἐκ τῶν δοθέντων εἰς τὰς μεθόδους.

Περὶ ἐξισώσεων

200. Πρόβλημα. ***Ἐὰν εἰς τὸ τριπλάσιον ἑνὸς ἀριθμοῦ προσθέσω τὸν 15 θὰ λάβω τὸν 45. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς οὗτος;***

Διὰ νὰ λύσω τὸ πρόβλημα τοῦτο σκέπτομαι ὡς ἑξῆς : Ὁ 45 εἶναι ἄθροισμα τοῦ τριπλασίου τοῦ ζητουμένου καὶ τοῦ 15· ὥστε ἡ διαφορὰ $45-15=30$ εἶναι τὸ τριπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ καὶ ἑπομένως ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι τὸ τρίτον τοῦ 30 ἤτοι $\frac{30}{3}=10$.

Ἀλλὰ τὸ πρόβλημα τοῦτο δύναμαι νὰ τὸ λύσω καὶ ὡς ἑξῆς· ἂν παραστήσω τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν διὰ τοῦ χ, τὸ τριπλάσιον αὐτοῦ εἶναι 3χ· ἐὰν δὲ εἰς τὸ 3χ προσθέσω τὸν 15, θὰ λάβω, κατὰ τὸ πρόβλημα, τὴν ἰσότητα $3\chi+15=45$ (1). Τώρα ἐκεῖνο ποὺ μένει νὰ εὕρω εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ χ, δηλαδὴ ὁ ἀριθμός, ὅστις, τιθέμενος ἀντὶ τοῦ χ, ἐπαληθεύει τὴν ἰσότητα. Εὑρίσκεται δὲ ἡ τιμὴ αὕτη τοῦ χ ἀπὸ τὴν σχηματισθεῖσαν ἰσότητα ὡς ἑξῆς. Ἀφαιρῶ ἀπ' ἀμφότερα τὰ ἴσα (τὰ μέλη) τὸν 15, ὁπότε εὑρίσκω $3\chi+15-15=45-15$ ἢ $3\chi=30$ τῆς νέας δὲ αὐτῆς ἰσότητος διαιρῶ ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ 3 καὶ εὑρίσκω $\frac{3\chi}{3}=\frac{30}{3}$ ἢ $\chi = 10$. Ἡ εὑρεθεῖσα τιμὴ 10 (καὶ μόνη αὐτὴ) ***ἐπαληθεύει*** τὴν ἰσότητα $3\chi+15=45$· καὶ πράγματι $3.10+15=45$ ἢ $45=45$.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ τιμὴ $\chi=10$ ἁρμόζει καὶ εἰς τὸ πρόβλημα, λέγω, ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 10.

201. Διὰ νὰ λύσω τὸ προταθὲν πρόβλημα διὰ τῆς δευτέρας μεθόδου ἐσχημάτισα μίαν ἰσότητα (1), ἥτις συνέδεσε τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος (δηλ. τοὺς γνωστοὺς ἀριθμοὺς) μὲ τὸ ζητούμενον (δηλ. τὸν ἄγνωστον ἀριθμὸν) καὶ κατόπιν εὗρον τὴν τιμὴν τοῦ ἀγνώστου χ, ἥτις ἐπηλήθευσε τὴν ἰσότητα· ἔλαβον δὲ οὕτω τὸν ζητούμενον ἀριθμόν.

Ἡ ἰσότης (1), ἥτις περιέχει τὸν ἄγνωστον ἀριθμόν, λέγεται ***ἐξίσωσις***, ἡ δὲ εὕρεσις τῆς τιμῆς $\chi = 10$ λέγεται ***λύσις*** τῆς ἐξισώσεως.

Ὅθεν ***ἐξίσωσις λέγεται ἰσότης, ἥτις συνδέει γνωστοὺς καὶ ἀγνώστους ἀριθμοὺς καὶ τῆς ὁποίας τὸ α΄ μέλος γίνεται ἴσον μὲ τὸ β΄, ὅταν οἱ ἄγνωστοι λάβωσι καταλλήλους τιμάς.***

Π.χ. αἱ ἰσότητες $\frac{\chi}{2}+5=3\chi-7$, $3\chi-\psi=1$ εἶναι ἐξισώσεις.

202. Διὰ τῆς μεθόδου τῶν ἐξισώσεων θὰ λύσωμεν καὶ τὰ ἑπόμενα προβλήματα, ἡ λύσις δὲ αὐτῶν θὰ κάμῃ νὰ ἐννοήσωμεν καὶ πῶς γίνεται ἡ λύσις τῶν ἐξισώσεων.

Πρόβλημα 1ον. ***Ὁ Ἰωάννης εἶχε τόσους βόλους, ὅσους καὶ ὁ Πέτρος· ἔπαιξαν μὲ ἄλλους συμμαθητάς των καὶ ὁ μὲν Ἰωάννης, ἀφοῦ ἑπταπλασίασε πρῶτον τοὺς ἰδικούς του, ἔχασεν ἔπειτα 12, ὁ δὲ Πέτρος, ἀφοῦ τοὺς ἐδιπλασίασεν, ἐκέρδισεν ἔπειτα ἄλλους 8· εὑρέθησαν δὲ πάλιν μὲ ἴσους βόλους. Πόσους βόλους εἶχεν ἕκαστος ἀρχικῶς;***

Ἔστω, ὅτι εἶχον ἀπὸ χ βόλους. Ὁ Ἰωάννης τοὺς ἔκαμε πρῶτον 7χ· ἐπειδὴ δὲ ἔχασεν ἔπειτα 12, τοῦ ἔμειναν τελικῶς $7\chi-12$ βόλοι· ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι ὁ Πέτρος εἶχε τελικῶς $2\chi+8$· πρέπει δέ, κατὰ τὸ πρόβλημα, νὰ εἶναι $7\chi-12=2\chi+8$. Διὰ νὰ λύσωμεν τώρα τὴν σχηματισθεῖσαν ἐξίσωσιν, προσθέτομεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς τὸν 12 καὶ εὑρίσκομεν $7\chi-12+12=2\chi+8+12$ ἢ $7\chi=2\chi+8+12$ ἢ $7\chi=2\chi+20$· ἀπὸ τὰ μέλη αὐτῆς ἀφαιροῦμεν τὸν 2χ καὶ λαμβάνομεν $7\chi-2\chi=2\chi+20-2\chi$ ἢ $7\chi-2\chi=20$ ἢ $5\chi=20$ καὶ τέλος διαιροῦμεν καὶ τὰ δύο μέλη διὰ 5, ὁπότε εὑρίσκομεν $\frac{5\chi}{5}=\frac{20}{5}$ ἢ $\chi=4$· ἡ τιμὴ δὲ αὕτη τοῦ χ (καὶ μόνον αὐτὴ) ἐπαληθεύει τὴν σχηματισθεῖσαν ἐξίσωσιν $7\chi-12=2\chi+8$· καὶ πράγματι $7.4-12=2.4+8$ ἢ $16=16$. Ἐπειδὴ δὲ ἡ τιμὴ $\chi=4$ ἁρμόζει εἰς τὸ πρόβλημα, λέγομεν, ὅτι ὁ Ἰωάννης καὶ ὁ Πέτρος εἶχον ἀπὸ 4 βόλους.

Πρόβλημα 2ον. ***Εἰς μίαν μαθητικὴν ἐκδρομὴν οἱ μαθηταὶ μιᾶς τάξεως ἀπεφάσισαν, ἵνα πληρώσωσιν ἐκ τοῦ κοινοτικοῦ ταμείου τῆς τάξεώς των τὰς δαπάνας μεταφορᾶς τῶν ἀπόρων μαθητῶν, αἱ ὁποῖαι ἦσαν 35 δραχμαὶ δι᾽ ἕκαστον. Ἀλλ᾽ εἶδον, ὅτι, ἐὰν ἐπλήρωνε τὸ ταμεῖον ὅλας τὰς δαπάνας αὐτάς, θὰ ἐχρειάζοντο ἀκόμη 10 δραχμ., ἐνῷ, ἐὰν κατέβαλον 30 δραχμ. δι᾽ ἕκαστον ἄπορον θὰ ἐπερίσσευον 20 δραχμαί. Πόσοι ἦσαν οἱ ἄποροι μαθηταί;***

Ἔστω, ὅτι οἱ ἄποροι μαθηταὶ ἦσαν χ· αἱ δαπάναι λοιπὸν τῆς μεταφορᾶς τῶν ἀπόρων ἦσαν 35χ δρχ. ἄρα τὸ ταμεῖον τῆς κοινότητος τῆς τάξεως εἶχε $35.\chi-10$ δραχμ. Ἐὰν τώρα ἐξ ἄλλου κατέβαλε δι᾽ ἕκαστον ἄπορον 30 δρχμ., διὰ τοὺς χ ἀπόρους θὰ κατέβαλεν $30.\chi$ δρχμ. ἄρα τὸ ταμεῖον τῆς κοινότητος εἶχε $30.\chi+20$ δρχμ.

Ἔχομεν ἑπομένως τὴν ἐξίσωσιν $35.\chi-10=30.\chi+20$ (1)

Ἐὰν τώρα προσθέσωμεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς τὸν ἀριθμὸν 10 καὶ ἀφαιρέσωμεν κατόπιν ἀπ᾽ ἀμφότερα τὰ μέλη τὸν $30.\chi$. ἔχομεν $35.\chi-10+10=30.\chi+20+10$ ἢ $35\chi=30\chi+30$. Κατόπιν δὲ $35\chi-30\chi=30\chi+30-30\chi$ ἢ $5\chi=30$.

Διαιροῦντες δὲ ἤδη διὰ 5, εὑρίσκομεν $\frac{5\chi}{5}=\frac{30}{5}$, ἤτοι $\chi=6$.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ εὑρεθεῖσα τιμὴ $\chi=6$ ἐπαληθεύει τὴν ἐξίσωσιν (1) διότι $35.6-10=30.6+20$, ἤτοι $200=200$, ἕπεται, ὅτι οἱ ἄποροι μαθηταὶ ἦσαν 6.

Πρόβλημα 3ον. ***Ἕνας πατὴρ εἶναι σήμερον ἡλικίας 46 ἐτῶν, ὁ δὲ υἱός του 12 ἐτῶν. Μετὰ πόσα ἔτη ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς θὰ εἶναι τριπλασία τῆς τοῦ υἱοῦ;***

Ἔστω μετὰ χ ἔτη, ὁπότε ὁ πατὴρ θὰ εἶναι $46+\chi$ ἐτῶν, ὁ δὲ υἱὸς $12+\chi$. Ἐπειδὴ δὲ τότε ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς θὰ εἶναι τριπλασία τῆς τοῦ υἱοῦ, διὰ νὰ γίνωσιν ἴσαι, πρέπει τὴν ἡλικίαν τοῦ υἱοῦ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 3, ὁπότε θὰ λάβωμεν τὴν ἐξίσωσιν $46+\chi=(12+\chi).3$.

Διὰ νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν ἐκτελοῦμεν πρῶτον τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ β΄ μέλους καὶ εὑρίσκομεν $46+\chi=36+3\chi$. Ἔπειτα ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὰ δύο μέλη τὸν χ, ὅτε ἔχομεν $46+\chi-\chi=36+3\chi-\chi$ ἢ $46=36+2\chi$· κατόπιν ἀφαιροῦμεν πάλιν τὸν 36 καὶ λαμβάνομεν $46-36=36+2\chi-36$ ἢ $10=2\chi$ καὶ τέλος, διαιροῦντες διὰ 2, εὑρίσκομεν $\frac{10}{2}=\frac{2\chi}{2}$ ἢ $5=\chi$. Ἡ εὑρεθεῖσα τιμὴ $\chi=5$ ἐπαληθεύει τὴν ἐξίσωσιν $46+\chi=(12+\chi).3$ καὶ πράγματι $46+5=(12+5).3$ ἢ $51=17.3$· ὥστε μετὰ πέντε ἔτη ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς θὰ εἶναι τριπλασία τῆς ἡλικίας τοῦ υἱοῦ.

Πρόβλημα 4ον. ***Εὑρεῖν ἀριθμόν, τοῦ ὁποίου τὸ $\frac{1}{4}$, αὐξηθὲν κατὰ 9, ἰσοῦται μὲ τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ ἀριθμοῦ.*** Ἔστω χ ὁ ζητούμενος ἀριθμός· τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτοῦ, ἤτοι τὸ $\frac{\chi}{4}$ αὐξηθὲν κατὰ 9, γίνεται $\frac{\chi}{4}+9$, τὰ δὲ $\frac{2}{5}$ αὐτοῦ εἶναι $\frac{2\chi}{5}$, πρέπει δὲ νὰ εἶναι $\frac{\chi}{4}+9=\frac{2\chi}{5}$.

Διὰ νὰ λύσωμεν ἤδη αὐτήν, πολλαπλασιάζομεν πρῶτον ἀμφότερα τὰ μέλη ἐπὶ 4.5 (ἤτοι ἐπὶ ἕνα κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν 4 καὶ 5) διὰ νὰ ἐξαλειφθῶσιν οἱ παρονομασταὶ καὶ εὑρίσκομεν $4.5.\frac{\chi}{4}+4.5.9=4.5.\frac{2\chi}{5}$ ἢ $5\chi+180=8\chi$. Ἔπειτα ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὰ δύο μέλη τὸν 5χ, ὁπότε εὑρίσκομεν $180=3\chi$· καὶ τέλος, διαιροῦντες διὰ 3, εὑρίσκομεν $\frac{180}{3}=\frac{3\chi}{3}$ ἢ $60=\chi$.

Ὥστε ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 60. Καὶ πράγματι τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ 60, ἤτοι τὸ 15, αὐξηθὲν κατὰ 9, γίνεται 24· ἀλλὰ $24=\frac{2}{5}$ τοῦ 60 ἢ $24=24$.

Πρόβλημα 5ον. ***Ἐχρεώστει τις ἕνα ποσὸν δραχμῶν καὶ ἐπλήρωσε πρῶτον τὸ $\frac{1}{2}$ αὐτοῦ, ἔπειτα τὸ $\frac{1}{4}$, ἔπειτα τὸ $\frac{1}{6}$ αὐτοῦ καὶ τέλος ἐπλήρωσεν 100 δραχμάς· οὕτω δὲ ἐξώφλησε τὸ χρέος αὐτό. Πόσας δραχμὰς ἐχρεώστει;***

Ἔστω, ὅτι ἐχρεώστει χ δραχμάς· ἐπλήρωσε δὲ $\frac{\chi}{2}$ δρ., $\frac{\chi}{4}$, $\frac{\chi}{6}$

καὶ 100 δρχ.· ἐὰν δὲ αὐτὰ προστεθῶσι, θὰ ἰσοῦνται μὲ τὸ ὅλον χρέος, ἤτοι μὲ χ δραχμάς. Ὥστε ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$\frac{\chi}{2}+\frac{\chi}{4}+\frac{\chi}{6}+100=\chi.$$

Διὰ νὰ λύσωμεν τώρα τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν πολλαπλασιάζομεν πρῶτον ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς ἐπὶ 12, ἤτοι ἐπὶ τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν, καὶ εὑρίσκομεν :

$$12.\frac{\chi}{2}+12.\frac{\chi}{4}+12.\frac{\chi}{6}+12.100=12.\chi$$

ἢ $6.\chi+3.\chi+2.\chi+1200=12.\chi$ ἢ $11\chi+1200=12\chi$.

Ἐὰν δὲ κατόπιν ἀφαιρέσωμεν ἀπ᾽ ἀμφότερα τὰ μέλη τὸν 11χ, εὑρίσκομεν $1200=12\chi-11\chi$ ἢ $1200=\chi$. Ὥστε ἐχρεώστει 1200 δρχ. καὶ πράγματι τὸ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$ αὐτῶν εἶναι 600, 300 200 καὶ 100 ἀκόμη κάμνουν 1200 δρχ.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

755) Νὰ λυθῶσιν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις (ἀπὸ μνήμης) :

x=3 $2\chi=6$ ψ=4 $5+\psi=9$ x=5 $\frac{\chi}{5}=1$ $3\chi=2\chi+7$

x=9 $5\chi=45$ ψ=15 $16+\psi=31$ x=15 $\frac{\chi}{3}=5$ $7\psi=5\psi+16$

x=11 $7\chi=77$ ψ=55 $25+\psi=80$ $5\varphi=2\varphi+15$

x=10 $12\chi=72$ ψ=18 $\psi-12=6$ x=18 $\frac{\chi}{6}=3$ $9\chi=4\chi+20$

x=7 $15\chi=105$ ψ=50 $\psi-15=35$ x=54 $\frac{\chi}{9}=6$ $10\omega=\omega+90$

756) Νὰ λυθῶσιν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις (γραπτῶς) :

$9\chi+14=7\chi+22$ $\qquad \frac{3\chi}{5}=6$

$19\chi-11=11\chi+5$ $\qquad \frac{9\chi}{11}=18$

$12\chi-37=7\chi-17$ $\qquad \frac{\psi}{3}+\frac{\psi}{8}=11$

$4\chi+3\chi+20=5\chi+30$ $\qquad \frac{2\psi}{3}+\frac{4\psi}{5}=22$

$25\chi-32=7\chi+8\chi-12$ $\qquad \frac{\chi}{4}+\frac{\chi}{5}=\frac{13}{20}$

$3(\varphi+7)=36$ $\qquad \frac{2\chi}{3}+\frac{1}{4}=\frac{11}{12}$

$5(\chi + 9) = \chi + 81$ $\qquad$ $\frac{3\psi}{8} - \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$

$4(\psi + 1) = 3(\psi + 9)$ $\qquad$ $4\chi - \frac{2\chi}{7} = \frac{\chi}{2} + 45$

$7(\chi + 3) = 3(\chi + 4) + 41$ $\qquad$ $\frac{\varphi + 3}{5} = \frac{\varphi + 5}{6}$

$15(\chi + 2) = 8(\chi + 6) + 5\chi$ $\qquad$ $\frac{\psi}{2} - 1 = \frac{\psi - 1}{3}$

757) Εἰς ἕνα ἀριθμόν, ἐὰν προσθέσω τὸν 84, εὑρίσκω ἄθροισμα ἴσον μὲ τὸ τετραπλάσιον τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς οὗτος. (ἀπ. 28).

758) Ἐὰν ἀπὸ τὸ πενταπλάσιον ἀριθμοῦ ἀφαιρέσω τὸν 81, ὑρίσκω τὸ διπλάσιον τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριμὸς οὗτος; (ἀπ. 27).

759) Ἐὰν ἀπὸ τὸ ἐννεαπλάσιον ἀριθμοῦ τινος ἀφαιρέσω ὸν 23 ἢ εἰς τὸ ἑπταπλάσιον αὐτοῦ προσθέσω τὸν 11, εὑρίσκω ὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς αὐτός. (ἀπ. 17).

760) Οἱ μαθηταὶ μιᾶς τάξεως σχολείου τινὸς παρήγγειλαν ίαν βιβλιοθήκην πρὸς χρῆσιν των. Ἐὰν ἕκαστος μαθητὴς ατέβαλλε 17 δραχμάς, θὰ ἐπερίσσευον μετὰ τὴν πληρωμὴν ῆς βιβλιοθήκης 39 δραχμαί, ἐνῷ, ἐὰν ἐπλήρωνεν ἕκαστος 15 ραχμάς, θὰ ἐχρειάζοντο ἀκόμη 55 δραχμαί. Πόσοι εἶναι οἱ αθηταὶ τῆς τάξεως αὐτῆς; (ἀπ. 47).

761) Δύο τάξεις ἑνὸς σχολείου ἔκαμαν ἔρανον καὶ συνέλεν ὁμοῦ 285 δραχμάς· ἀλλ' ἡ δευτέρα τάξις συνέλεξε διπλαας δραχμὰς ἀπὸ τὴν πρώτην. Πόσας δραχμὰς συνέλεξαν ἡ ρώτη καὶ πόσας ἡ δευτέρα; (ἀπ. 95, 190).

762) Ἠγόρασέ τις ὕφασμα βαμβακερὸν καὶ μάλλινον τὸ ον 73 πήχεις. Ἀλλὰ τὸ βαμβακερὸν ὕφασμα ἦτο κατὰ 15 ήχεις περισσότερον τοῦ μαλλίνου. Πόσους πήχεις ἠγόρασε ἀπὸ άθε ὕφασμα; (ἀπ. 44, 29).

763) Τρεῖς ἐργάται ἐμοιράσθησαν 1400 δραχμάς, ἔλαβε δὲ δεύτερος 150 δραχμὰς περισσοτέρας ἀπὸ τὸν πρῶτον καὶ ὁ ίτος 50 δραχμὰς περισσοτέρας ἀπὸ τὸν δεύτερον. Πόσας δραχὰς ἔλαβεν ὁ καθείς; (ἀπ. 350, 500, 550).

764) Εἰς μίαν ἐκδρομὴν ἑνὸς διδασκαλείου μετέσχον ἐν ὅλῳ 0 πρόσωπα καὶ ἐξ αὐτῶν οἱ μαθηταὶ ἦσαν κατὰ 30 περιστεροι τῶν μαθητριῶν καὶ κατὰ 60 περισσότεροι τῶν καθηγη-

τῶν. Πόσοι ἦσαν οἱ μαθηταί, αἱ μαθήτριαι καὶ οἱ καθηγηταί;
(ἀπ. 70, 40, 10).

765) Ἕνας πατὴρ εἶναι ἡλικίας 48 ἐτῶν καὶ ὁ υἱός του 9 ἐτῶν· μετὰ πόσα ἔτη ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς θὰ εἶναι τετραπλασία τῆς ἡλικίας τοῦ υἱοῦ; (ἀπ. 4).

766) Ὁ ἑβδομαδιαῖος μισθὸς ἑνὸς ἀρχιεργάτου εἶναι τριπλάσιος τοῦ αὐτοῦ μισθοῦ ἑνὸς ἁπλοῦ ἐργάτου· κατὰ τὸ διάστημα δὲ μιᾶς ἑβδομάδος ἔλαβον ἀπέναντι τοῦ μισθοῦ των, ὁ μὲν πρῶτος 1115 δραχμάς, ὁ δὲ δεύτερος 205 δραχμάς. Ἔχουσι δὲ νὰ λάβωσιν ἀκόμη ἀπὸ ἴσας δραχμὰς ὁ καθείς. Πόσας δραχμὰς ἔχει νὰ λάβῃ ὁ καθείς; (ἀπ. 250).

767) Ἐὰν εἰς τὸ τρίτον ἀριθμοῦ τινος προσθέσω τὸν 16, λαμβάνω τὸν αὐτὸν ἀριθμόν. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς οὗτος. (ἀπ. 24).

768) Ἐὰν εἰς ἓν σχολεῖον ἐφοίτων μαθηταὶ κατὰ $\frac{1}{3}$ περισσότεροι ἀπὸ ὅσους φοιτοῦν, τὸ σχολεῖον θὰ εἶχε 220 μαθητάς. Πόσοι μαθηταὶ φοιτοῦν εἰς τὸ σχολεῖον; (ἀπ. 165).

769) Μία σχολικὴ ἐπιτροπὴ ἀπὸ τὰ ἔσοδα ἑνὸς ἔτους ἐδαπάνησε τὸ $\frac{1}{3}$ αὐτῶν διὰ τὴν ἀγορὰν σχολικῶν ἐπίπλων, τὰ $\frac{2}{5}$ διὰ τὴν ἀγορὰν σχολικῶν ὀργάνων, τὸ $\frac{1}{10}$ αὐτῶν διὰ τὸν πλουτισμὸν τῆς βιβλιοθήκης τοῦ σχολείου καὶ τὰς ὑπολοίπους 12500 δραχμὰς ἐκράτησεν ὡς ἀποθεματικὸν τοῦ ταμείου. Πόσα ἦσαν τὰ ἐτήσια ἔσοδα; Πόσα ἐδαπάνησε διὰ τὴν προμήθειαν ἐπίπλων, ὀργάνων καὶ βιβλίων; (ἀπ. 75 χιλ. 25, 30, 75).

770) Ἕνας ἐργάτης ἀπὸ τὸν μισθὸν μιᾶς ἡμέρας διαθέτει τὸ $\frac{1}{2}$ διὰ τὴν τροφὴν τῆς οἰκογενείας του καὶ τὸ $\frac{1}{5}$ θέτει κατὰ μέρος διὰ τὸ ἐνοίκιον τῆς οἰκίας του καὶ τὸ $\frac{1}{8}$ δαπανᾷ δι' ἀτομικάς του ἀνάγκας, τοῦ περισσεύουν δὲ καὶ 14 δραχμαί. Ποῖον εἶναι τὸ ἡμερομίσθιόν του; (ἀπ. 80).

771) Ἀνέμιξέ τις ἔλαιον τῶν 22 δραχμ. τὴν ὀκᾶν, μετ' ἄλλου ἐλαίου τῶν 28 δραχμ. τὴν ὀκᾶν καὶ ἔκαμε μῖγμα 1200 ὀκάδων τῶν 26 δραχμῶν τὴν ὀκᾶν. Πόσας ὀκάδας ἀνέμιξεν ἐξ ἑκάστου εἴδους; (ἀπ. 400, 800).

772) Ἐὰν ἀπὸ τὰ $\frac{3}{4}$ ἀριθμοῦ τινος ἀφαιρέσω τὸ $\frac{1}{2}$ αὐτοῦ, λαμβάνω τὸν 30. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμός; (ἀπ. 120).

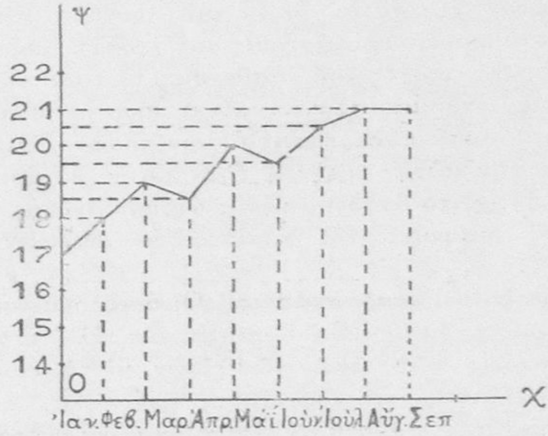
773) Εἴτε εἰς τὰ $\frac{2}{7}$ ἀριθμοῦ τινος προσθέσω τὸν 6, εἴτε εἰς τὸν ἀριθμὸν αὐτὸν προσθέσω τὸν 1 καὶ ἔπειτα λάβω τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ἀθροίσματος, θὰ ἔχω ἐξαγόμενα ἴσα. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς οὗτος ; (ἀπ. 119).

203) ***Μεταβλητὰ καὶ σταθερὰ ποσά*** Ἐκ τῶν προηγουμένων (§ 22, § 37) ἔχομεν ἔννοιαν τῶν μεταβλητῶν ποσῶν. Μεταβλητὸν δὲ ποσὸν λέγεται τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον λαμβάνει διαφόρους τιμὰς ἢ καταστάσεις. Π. χ. τὸ ἀνάστημα ἑνὸς παιδίου εἶναι μεταβλητόν, ἐξαρτᾶται δὲ ἐκ τοῦ χρόνου. Εἶναι λοιπὸν τὸ ἀνάστημα τοῦ παιδίου συνάρτησις τοῦ χρόνου. Ὁμοίως τὸ βάρος τοῦ παιδίου, ὁ πυρετὸς τοῦ ἀσθενοῦς, αἱ τιμαὶ τῶν διαφόρων εἰδῶν τροφῆς, ἐνδυμασίας κ.τ.λ. εἶναι ποσὰ μεταβλητά. Εἶναι δὲ τὰ μεταβλητὰ ποσὰ συναρτήσεις ἄλλων ποσῶν. Ὅταν ἕνα ποσὸν ἔχῃ πάντοτε τὴν αὐτὴν τιμὴν ἢ τὴν αὐτὴν κατάστασιν, λέγεται ***σταθερόν.*** Π. χ. τὸ ἀνάστημα ἑνὸς ὡρίμου ἀνδρὸς εἶναι ποσὸν σταθερόν, ἡ διαφορὰ τῆς ἡλικίας δύο ἀδελφῶν εἶναι σταθερὰ κ.ο.κ.

204. ***Γραφικαὶ παραστάσεις.*** Οἱ ἀσχολούμενοι εἰς διαφόρους ἐπιχειρήσεις ἐμπορικάς, βιομηχανικὰς κτλ. παρακολουθοῦσι τὰς διακυμάνσεις τῶν τιμῶν τῶν εἰδῶν, μὲ τὰ ὁποῖα ἀσχολοῦνται, διὰ νὰ ἐξαγάγωσιν ὠφελίμους προβλέψεις. Οὕτω π. χ. ὁ ἔμπορος ζακχάρεως παρατηρεῖ εἰς ποῖον μῆνα ἑνὸς ἔτους ἡ μέση μηνιαία τιμὴ αὐτῆς κατ᾽ ὀκᾶν εἶναι μεγαλυτέρα ἢ μικροτέρα· ἐὰν δὲ ἔχῃ ὑπ᾽ ὄψει τοιαύτας παρατηρήσεις ἐτῶν τινῶν, εἶναι πιθανὸν νὰ εὕρῃ σχέσιν τινὰ μεταξὺ ἐποχῆς καὶ τιμῆς καὶ νὰ κανονίσῃ οὕτω τὰς ἀγορὰς καὶ πωλήσεις αὐτοῦ. Καταγράφει λοιπὸν τὰς διαφόρους τιμὰς εἰς ἕνα πίνακα καὶ παρακολουθεῖ αὐτάς. Ἐξ ἄλλου ὁ ἰατρός, ὅστις θεραπεύει ἕνα ἀσθενῆ, πρέπει νὰ παρακολουθήσῃ μεταξὺ ἄλλων καὶ τὰς μεταβολὰς τοῦ πυρετοῦ τοῦ ἀσθενοῦς, διὰ νὰ κάμῃ τὴν πρέπουσαν διάγνωσιν τῆς ἀσθενείας. Καταγράφονται λοιπὸν αἱ παρατηρήσεις ἐπὶ τοῦ πυρετοῦ εἰς ἕνα πίνακα, ὅστις τίθεται ὑπ᾽ ὄψει τοῦ ἰατροῦ κατὰ τὴν ἐπίσκεψίν του εἰς τὸν ἀσθενῆ. Ἀλλὰ καὶ ὁ ἔμπορος καὶ ὁ ἰατρὸς παρακολουθοῦσιν εὐκολώτερον τὰς μεταβολὰς τῶν ποσῶν, διὰ τὰ ὁποῖα ἐνδιαφέρονται, ἐάν, ἀντὶ τῶν πινάκων τῶν μεταβολῶν τῶν ποσῶν αὐτῶν, εἶχον ὑπ᾽ ὄψει τὰς

γραφικὰς παραστάσεις τῶν ἐν λόγῳ μεταβολῶν, Πρὸς τοῦτο δὲ ὁ ἔμπορος π. χ. τῆς ζακχάρεως ἐργάζεται ὡς ἑξῆς.

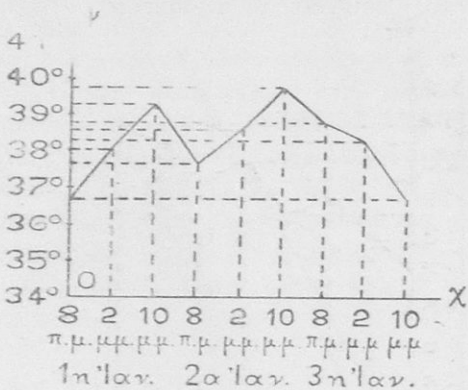
Λαμβάνει δύο εὐθείας Οχ καὶ Οψ καθέτους πρὸς ἀλλήλας καὶ ἑκάστην τῶν ὁποίων διαιρεῖ εἰς τμήματα ἴσα. Εἰς τὴν ἀρχὴν ἑκάστου τμήματος τῆς ὁριζοντίου εὐθείας Οχ σημειώνει διαδοχικῶς τοὺς μῆνας Ἰανουάριος, Φεβρουάριος, Μάρτιος κλπ. Ὁμοίως εἰς τὴν ἀρχὴν ἑκάστου τμήματος τῆς ἄλλης εὐθείας Οψ σημειώνει διαδοχικῶς τοὺς ἀριθμοὺς 14, 15, 16, 17, 18, 19, (δηλ. τὰς πιθανὰς τιμὰς τῆς μιᾶς ὀκᾶς ζακχάρεως εἰς



δραχμάς), ὅπως δεικνύει τὸ παρακείμενον σχῆμα. Κατόπιν τούτων, ἐὰν π. χ. τὸν Φεβρουάριον μῆνα ἡ μέση τιμὴ τῆς μιᾶς ὀκᾶς ζακχάρεως ἦτο 18 δρχμ., φέρει ἐκ μὲν τοῦ σημείου, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι σημειωμένος ὁ Φεβρουάριος, παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν Οψ, ἐκ δὲ τοῦ σημείου, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι σημειωμένος ὁ ἀριθμὸς 18, φέρει εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν Οχ· αἱ δύο ἀχθεῖσαι παράλληλοι τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον Α· τὸ σημεῖον λοιπὸν Α διὰ πάντα, ὅστις θὰ παρακολουθήσῃ τὰς εὐθείας, αἵτινες τέμνονται εἰς αὐτό, δεικνύει, ὅτι κατὰ τὸν μῆνα Φεβρουάριον ἡ μέση τιμὴ τῆς ζακχάρεως ἦτο 18 δραχμῶν κατ᾽ ὀκᾶν. Ὁμοίως ἐργαζόμενος λαμβάνει διὰ τὴν μέσην τιμὴν τῶν 19 δραχμ. τῆς μιᾶς ὀκᾶς ζακχάρεως κατὰ τὸν μῆνα Μάρτιον τὸ σημεῖον Β· ἐξακολουθεῖ δὲ οὕτω λαμβάνων τὰ σημεῖα Γ, Δ κλπ. διὰ τὰς μέσας τιμάς, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦσιν εἰς τοὺς ἄλλους μῆνας· ἐὰν τώρα ἑνώσῃ δι᾽ εὐθειῶν γραμμῶν τὰ σημεῖα Α, Β, Γ κλπ.

θὰ λάβη μίαν τεθλασμένην γραμμήν, ἥτις λέγεται γραφικὴ παράστασις τῶν μεταβολῶν τῶν μέσων μηνιαίων τιμῶν τῆς ζακχάρεως κατὰ τὸ διάστημα ἑνὸς ἔτους. Ἐὰν δέ τις ρίψῃ ἕνα μόνον βλέμμα ἐπ' αὐτῆς, ἀντιλαμβάνεται ἀμέσως τὴν πορείαν τῶν μεταβολῶν τούτων.

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἔγινε καὶ ἡ γραφικὴ παράστασις τῶν μεταβολῶν τοῦ πυρετοῦ ἑνὸς ἀσθενοῦς, ἥτις φαίνεται εἰς τὸ παρακείμενον σχῆμα. Κατὰ τὸν αὐτὸν ἐπίσης τρόπον κατα-



σκευάζουσιν αἱ τράπεζαι τὰς γραφικὰς παραστάσεις τῶν μεταβολῶν τῶν τιμῶν τοῦ συναλλάγματος, οἱ χρηματισταὶ τῶν τιμῶν τῶν χρεωγράφων κ.ο.κ.

205. Αἱ γραφικαὶ παραστάσεις χρησιμοποιοῦνται πολλάκις καὶ εἰς τὴν γραφικὴν λύσιν προβλημάτων. Π. χ.

Μία ἁμαξοστοιχία ἀναχωρεῖ ἐξ Ἀθηνῶν τὴν 7 π. μ. μὲ ταχύτητα 25 χιλιομέτρων τὴν ὥραν καὶ μία ἄλλη ἀναχωρεῖ πάλιν ἐξ Ἀθηνῶν τὴν 8 π. μ. μὲ ταχύτητα 30 χιλιομέτρων τὴν ὥραν καὶ τρέχει πρὸς τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν μὲ τὴν πρώτην. Κατὰ ποίαν ὥραν θὰ συναντηθῶσιν αἱ ἁμαξοστοιχίαι αὗται καὶ εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἐξ Ἀθηνῶν;

Διὰ τὴν πρώτην ἁμαξοστοιχίαν ἔχομεν τὸν κάτωθι πίνακα τιμῶν.

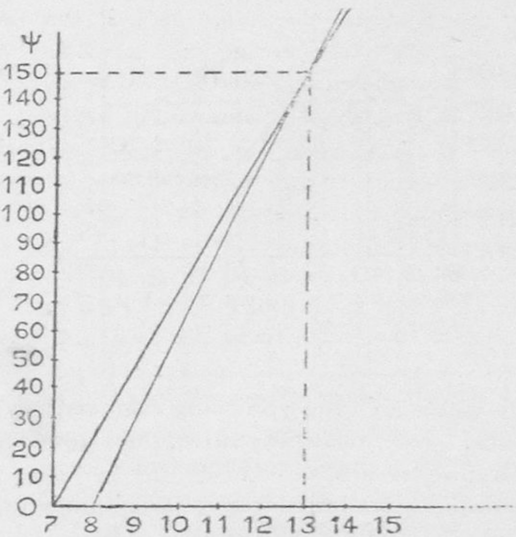
ὧραι	7	8	9	10 . . . .
χιλμ.	0	25	50	75 . . . .

Καὶ ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ πίνακος αὐτοῦ κατασκευάζομεν τὴν γραφικὴν παράστασιν τῶν σχετικῶν μεταβολῶν.

Διὰ τὴν δευτέραν ἁμαξοστοιχίαν ἔχομεν τὸν ἑπόμενον πίνακα.

ὧραι	8	9	10	11 . . . . .
χιλμ.	0	30	60	90 . . . . .

Καὶ ἐπὶ τοῦ πρώτου διαγράμματος κατασκευάζομεν τὴν δευτέραν γραφικὴν παράστασιν, ἡ ὁποία θὰ τέμνῃ τὴν πρώτην εἰς ἓν σημεῖον ὡς δεικνύει τὸ παρακείμενον σχῆμα. Ἐὰν ἤδη



φέρωμεν ἐκ τοῦ σημείου αὐτοῦ καθέτους πρὸς τὰς εὐθείας Οχ καὶ Οψ καὶ μετρήσωμεν τὰς ἀποστάσεις τῶν σημείων, εἰς τὰ ὁποῖα αἱ εὐθεῖαι αὗται τέμνονται ὑπὸ τῶν ἀχθεισῶν καθέτων ἀπὸ τοῦ Ο, θὰ ἔχωμεν τοὺς ζητουμένους ἀριθμούς. Οὕτω εὑρίσκομεν, ὅτι θὰ συναντηθῶσι τὴν 13 ὥραν (1 μ.μ.) καὶ εἰς ἀπόστασιν 150 χιλιομέτρων ἀπὸ τῶν Ἀθηνῶν.

Ἀσκήσεις.

774) Ἡ τιμὴ τοῦ λευκοῦ ἄρτου κατ' ὀκᾶν ἦτο ἐπὶ 10 συνεχεῖς ἑβδομάδας κατὰ σειρὰν 7 δρχ. 7,20, 7,40, 7,80, 7, 6,80, 6,60,

6,80, 6,90, 7,10, 7,50. Νὰ παρασταθῇ γραφικῶς ἡ μεταβολὴ τῶν τιμῶν τοῦ ἄρτου κατὰ τὸ διάστημα τοῦτο.

775) Ἡ θερμοκρασία ἀσθενοῦς τινὸς λαμβάνεται τρεῖς φορὰς ἑκάστην ἡμέραν· κατὰ τὰς 9 δὲ θερμομετρήσεις τριῶν συνεχῶν ἡμερῶν, ὁ πυρετὸς τοῦ ἀσθενοῦς ἦτο κατὰ σειρὰν 38,2, 38,8, 39,5, 39, 38,4, 39,2, 38, 37,6, 36,4. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ γραφικὴ παράστασις τῶν μεταβολῶν τοῦ πυρετοῦ τοῦ ἀσθενοῦς τούτου.

776) Αἱ μέσαι ἑβδομαδιαῖαι τιμαὶ τῶν ἀνταλλαξίμων 8% ἦσαν 625, 632, 638, 650, 658, 651, 647, 630, 615, 600, 570, 578, 584, 580. Νὰ παρασταθῶσι γραφικῶς αἱ μεταβολαὶ αὗται.

777) Ὁ πληθυσμὸς μιᾶς πόλεως ἦτο κατὰ τὸ 1890 12000 κ., τὸ 1900 14800, τὸ 1910 16000, τὸ 1920 19000 καὶ κατὰ τὸ 1930 24000. Νὰ παρασταθῇ γραφικῶς ἡ μεταβολὴ τοῦ πληθυσμοῦ τῆς πόλεως αὐτῆς κατὰ τὸ διάστημα ἀπὸ 1890—1930.

778) Ἐκ τῆς ἄνω γραφικῆς παραστάσεως νὰ εὑρεθῇ α) ὁ (πιθανὸς) πληθυσμὸς τῆς πόλεως αὐτῆς κατὰ τὰ ἔτη 1905, 1914, 1922, 1928 καὶ β) κατὰ ποῖον ἔτος ὁ πληθυσμὸς αὐτῆς ἦτο 13400 ἢ 22000;

Socrate Tzivas

Socrate Tjivas

a as

a b as

Τζίβας

ΣΤΟΙΧΕΙΑ
ΕΚ ΤΗΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

ΒΙΒΛΙΟΝ Ε΄.

Θεμελιώδεις ἰδιότητες τῶν πράξεων ἐπὶ τῶν ἀκεραίων.

206. ***Ἰδιότητες τῆς προσθέσεως.***

1) ***Εἴδομεν, ὅτι ἡ πρόσθεσις εἶναι ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας σχηματίζομεν ἕνα ἀριθμὸν ἐξ ὅλων τῶν μονάδων, τὰς ὁποίας ἔχουσι δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοί.***

Ἀφοῦ λοιπὸν αἱ μονάδες, αἱ ὁποῖαι θὰ ἀποτελέσωσι τὸ ἄθροισμα, ἔχουσι δοθῇ, ἕπεται, ὅτι τοῦτο εἶναι ἐντελῶς ὡρισμένος ἀριθμός. Ὅθεν ἕπεται ἡ γνωστὴ ἰδιότης τῆς προσθέσεως κατὰ τὴν ὁποίαν :

Τὸ ἄθροισμα πολλῶν ἀριθμῶν μένει τὸ αὐτό, καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν προστεθῶσιν. ΤΖΙΒΑΣ

2) Κατὰ τὴν ἰδιότητα λοιπὸν αὐτὴν ἔχομεν

$$10 + 8 + 14 + 4 + 25 = 14 + 4 + 10 + 8 + 25$$

ἢ $$10 + 8 + 14 + 4 + 25 = 18 + 10 + 8 + 25$$

διότι ἀρχίζω ἀπὸ τὴν πρόσθεσιν τῶν 14 καὶ 4, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι 18· ἔπειτα δὲ ἔχω νὰ προσθέσω τοὺς ἀριθμοὺς 10, 8 καὶ 25· ἀλλὰ πάλιν ἔχω

$$10 + 8 + 14 + 4 + 25 = 10 + 8 + 10 + 18 + 25.$$

Ὥστε ***δυνάμεθα εἰς πᾶν ἄθροισμα νὰ ἀντικαταστήμεν προσθετέους τινὰς διὰ τοῦ εὑρεθέντος ἀθροίσματος αὐτῶν.***

3) Ἐπειδὴ ἡ ἀνωτέρω ἰσότης γράφεται

$10 + 8 + 18 + 25 = 10 + 8 + 14 + 4 + 25$ ἕπεται, ὅτι:

Εἰς πᾶν ἄθροισμα δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν οἱονδήποτε προσθετέον δι᾽ ἄλλων ἀριθμῶν, ἐχόντων αὐτὸν ἄθροισμα.

4) Ἂς ὑποθέσωμεν τώρα, ὅτι εἰς τὸ ἄθροισμα $(4+7+10+$ $+12)$ ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν τὸν 8, ἀλλὰ τότε εὑρίσκομεν τὸ ἄθροισμα $4+7+10+12+8$ ἢ τὸ $4+15+10+12$ ὥστε εἶναι $(4+7+10+12)+8=4+(7+8)+10+12$ δηλαδὴ ***ἵνα προσθέσωμεν ἀριθμὸν εἰς ἄθροισμα ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν αὐτὸν εἰς ἕνα ἐκ τῶν προσθετέων τοῦ ἀθροίσματος.***

5) Ἔστω ἤδη, ὅτι ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν τὰ ἀθροίσματα $(5+12+18)$ καὶ $(7+22)$· ἀλλὰ τότε λέγομεν, ὅτι εἶναι $(5+12+$ $+18)+(7+22)=5+12+18+7+22$ διότι κατὰ τὴν ἰδιότητα (2) ἔχομεν $5+12+18+7+22=(5+12+18)+(7+22)$. (ἐδ. 10 γ΄).

207. ***Ἰδιότητες τῆς ἀφαιρέσεως.***

1) Ἐὰν ἔχω τὴν διαφορὰν $15-7$ εἶναι φανερόν, ὅτι αὕτη ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν $(15+9)-(7+9)$, ἤτοι εἶναι $15-7=$ $(15+9)-(7+9)$, ὅπως ἐπίσης εἶναι καὶ $15-7=(15-3)-(7-3)$.

Ὅθεν, ***ἐὰν προστεθῇ (ἢ ἀφαιρεθῇ) ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς εἰς τὸν ἀφαιρετέον καὶ εἰς τὸν μειωτέον, ἡ διαφορὰ δὲν μεταβάλλεται.***

2) Ἐπίσης εἶναι φανερόν, ὅτι, ἀντὶ νὰ ἀφαιρέσω ἀπὸ τὸν 47 διὰ μιᾶς τὸ ἄθροισμα $2+10$, ἤτοι τὸν 12, δύναμαι νὰ ἀφαιρέσω ἀπὸ τὸν 47 πρῶτον τὰς δύο μονάδας, ὅτε μένουν 45, καὶ ἔπειτα ἀπὸ τὸν 45 νὰ ἀφαιρέσω τὰς 10 μονάδας, ὅτε μένουν 35, ἤτοι εἶναι $47-(2+10)=(47-2)-10$.

Ὅθεν, ***ἵνα ἀφαιρέσωμεν ἄθροισμα ἀπὸ ἀριθμοῦ, ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τούτου πάντας τοὺς προσθετέους τοῦ ἀθροίσματος, τὸν ἕνα μετὰ τὸν ἄλλον.***

8) Ἔστω ἤδη, ὅτι ἔχω νὰ ἀφαιρέσω τὸν 12 ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος $15+6+20+9$· ἀλλ᾽ εἶναι φανερόν, ὅτι, ἀντὶ νὰ ἀφαιρέσω τὰς μονάδας τοῦ 12 ἀπὸ τὰς μονάδας τοῦ ἀθροίσματος, δύναμαι νὰ ἀφαιρέσω αὐτὰς ἀπὸ τὰς μονάδας τοῦ 20, ὁπότε τὸ ὑπόλοιπον θὰ εἶναι $15+6+8+9$· διότι ἄλλως τε εἶναι

$$(15+6+8+9)+12=15+6+20+9.$$

Ὅθεν, ***ἵνα ἀφαιρέσωμεν ἀριθμὸν ἀπὸ ἀθροίσματος ἄλλων ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσωμεν αὐτὸν ἀφ᾽ ἑνὸς τῶν προσθετέων.***

4) Ἂς ὑποτεθῇ ἤδη, ὅτι θέλομεν νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν 18 τὴν διαφορὰν 12—8· ἀλλὰ κατὰ τὴν ἰδιότητα (1) ἔχομεν

$$18-(12-8)=(18+8)-(12-8+8)$$

ἤτοι $18-(12-8)=(18+8)-12.$

Ὥστε, ***ἵνα ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ ἀριθμοῦ τὴν διαφορὰν δύο ἄλλων, χωρὶς προηγουμένως νὰ εὕρωμεν αὐτήν, προσθέτομεν εἰς αὐτὸν τὸν ἀφαιρετέον τῆς δοθείσης διαφορᾶς καὶ ἀπὸ τοῦ ἐξαγομένου ἀφαιροῦμεν τὸν μειωτέον αὐτῆς.***

208. ***Ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.***

Ἐκ τῶν ἰδιοτήτων τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἀπεδείξαμεν γενικώτερον τὰς ἐκφραζομένας ὡς ἑξῆς :

1) $(\alpha+\beta).\gamma=\alpha.\gamma+\beta.\gamma$

2) $\alpha.\beta=\beta.\alpha$

3) $\gamma.(\alpha+\beta)=\gamma.\alpha+\gamma.\beta.$

Ἤδη θὰ ἀποδείξωμεν καὶ τὰς ἑξῆς.

4) Ἂς ὑποτεθῇ, ὅτι θέλομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν 8 ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 3 καὶ κατόπιν τὸ εὑρεθὲν γινόμενον ἐπὶ 2· ἀλλὰ τότε θὰ ἔχω

α) $8\times3=8+8+8$

καὶ β) $(8+8+8)\times2=8+8+8+8+8+8=8\times6.$

Ὅθεν ***ἐὰν ἀριθμὸς πολλαπλασιασθῇ ἀλλεπαλλήλως ἐπὶ δύο ἄλλους, εἶναι τὸ αὐτὸ ὡς νὰ πολλαπλασιασθῇ διὰ μιᾶς ἐπὶ τὸ γινόμενόν των.***

5) Ἐπὶ τῆς ἀνωτέρω ἰδιότητος στηριζόμενοι, δυνάμεθα εἰς ἕνα γινόμενον νὰ ἀλλάξωμεν τὴν τάξιν δύο ἐφεξῆς παραγόντων· π. χ. εἰς τὸ γινόμενον $8\times15\times2\times7\times9$ ἐκτελοῦμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ $8\times15=120$, κατόπιν δὲ πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ 120 πρῶτα ἐπὶ 2 καὶ κατόπιν ἐπὶ 7, ἀλλ' ἀντὶ τούτου πολλαπλασιάζομεν διὰ μιᾶς ἐπὶ τὸ γινόμενον 2×7 ἢ ἐπὶ 7×2· ἀλλὰ πάλιν ἀντὶ τούτου πολλαπλασιάζομεν πρῶτα ἐπὶ 7 καὶ κατόπιν ἐπὶ 2· ὥστε εἶναι :

$$8\times15\times2\times7\times9=8\times15\times7\times2\times9.$$

ἀλλὰ κατὰ τὴν αὐτὴν ἰδιότητα εἶναι :

$$8\times15\times7\times2\times9=8\times7\times15\times2\times9\cdot$$

ὁμοίως εἶναι : $8\times7\times15\times2\times9=7\times8\times15\times2\times9$

ὁμοίως εἶναι : $7\times8\times15\times2\times9=7\times8\times15\times9\times2$ κ.ο.κ.,
ἤτοι εἶναι : $8\times15\times2\times7\times9=7\times15\times2\times9\times8$ ὥστε :

Τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν δὲν ἀλλάσσει, καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν πολλαπλασιασθῶσιν.

6) Ἐπὶ τῆς προηγουμένης θεμελιώδους ἰδιότητος στηριζόμενοι συνάγομεν καὶ τὰς ἑξῆς :

α) ***Εἰς πᾶν γινόμενον δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν παράγοντάς τινας διὰ τοῦ εὑρεθέντος γινομένου αὐτῶν.***

διότι ἔχομεν : $8\times12\times10\times4\times25=10\times4\times8\times12\times25$

ἢ $8\times12\times10\times4\times25=40\times8\times12\times25$

ἢ $8\times12\times10\times4\times25=8\times12\times40\times25$:

Ἡ αὐτὴ ἰδιότης ἐκφράζεται καὶ ὡς ἑξῆς, ἐπειδὴ εἶναι

$$8\times12\times40\times25=8\times12\times10\times4\times25$$

Εἰς πᾶν γινόμενον δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν παράγοντα δι' ἄλλων ἀριθμῶν ἐχόντων αὐτὸν ὡς γινόμενον.

β) ***Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν γινόμενον ἐπὶ ἀριθμὸν ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν ἕνα τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου*** (§ 32, 2).

γ) ***Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν δύο γινόμενα ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ὁμοῦ πάντας τοὺς παράγοντας ἀμφοτέρων τῶν γινομένων*** (§ 32, 3).

7) Ἰδιότητες συνδέουσαι τὰς τρεῖς πρώτας πράξεις.

α) ***Ἄθροισμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἄλλο ἄθροισμα*** (χωρὶς νὰ εὑρεθῶσιν), ***ἐὰν ἕκαστον τῶν μερῶν τοῦ πρώτου πολλαπλασιασθῇ ἐφ' ἕκαστον τῶν μερῶν τοῦ δευτέρου καὶ προστεθῶσι τὰ προκύπτοντα γινόμενα*** (§ 25, 4).

β) ***Διαφορὰ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀριθμόν, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσι καὶ ὁ μειωτέος καὶ ὁ ἀφαιρετέος αὐτῆς ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν καὶ ἀπὸ τοῦ πρώτου γινομένου ἀφαιρεθῇ τὸ δεύτερον.***

Διότι τὸ γινόμενον $(18-6)\times3$ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα :

$$\begin{array}{c} 18-6 \\ 18-6 \\ 18-6 \\ \hline 18\times3-6\times3 \end{array}$$

209. Δ΄. ***Ἰδιότητες τῆς διαιρέσεως.***

1) ***Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὸν διαιρετέον καὶ τὸν***

διαιρέτην ἐφ᾽ ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τὸ μὲν πηλίκον δὲν βλάπτεται, τὸ ὑπόλοιπον ὅμως πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Ἐπειδὴ ἡ διαίρεσις $38:9$ δίδει πηλίκον 4 καὶ ὑπόλοιπον 2, ἡ διαίρεσις $(38\times3):(9\times3)$ θὰ δώσῃ πηλίκον 4 καὶ ὑπόλοιπον 2×3.

Διότι ἀπὸ μὲν τὴν πρώτην διαίρεσιν ἔχομεν :

	38			38+38+38	
	9	1		9+ 9+ 9	1
	29			29+29+29	
	9	1		9+ 9+ 9	1
	20		καὶ ἀπὸ τὴν βαν	20+20+20	
	9	1		9+ 9+ 9	1
	11			11+11+11	
	9	1		9+ 9+ 9	1
ὑπολ.	2 πηλ.	4	ὑπόλ.	$2+2+2=2\times3$	π. 4

Σημ. Διὰ τὴν τελείαν διαίρεσιν π. χ. τὴν $36:4$ ἔχομεν $36:4=(36\times9):(4\times9)$.

2) ***Ἵνα διαιρέσωμεν γινόμενον δι᾽ ἑνὸς τῶν παραγόντων του, ἀρκεῖ νὰ ἐξαλείψωμεν τὸν παράγοντα τοῦτον.*** (§ 42,3).

3) ***Ἵνα διαιρέσωμεν γινόμενον δι᾽ ἀριθμοῦ ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν ἕνα τῶν παραγόντων αὐτοῦ*** (ἐὰν διαιρῆται ἀκριβῶς) (§ 42, 3).

4) ***Ἵνα διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ τοῦ γινομένου πολλῶν ἄλλων, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν αὐτὸν ἀλλεπαλλήλως διὰ πάντων τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου*** (τουτέστι πρῶτον διὰ τοῦ πρώτου παράγοντος, ἔπειτα τὸ εὑρεθὲν πηλίκον διὰ τοῦ δευτέρου, τὸ νέον πηλίκον διὰ τοῦ τρίτου καὶ οὕτω καθεξῆς). Αἱ διαιρέσεις ὑποτίθεται, ὅτι γίνονται πᾶσαι ἀκριβῶς.

Ἔστω ἡ διαίρεσις $360:(2\times3\times5)$ ἢ $360:30=12$. Ὥστε εἶναι $360=(2\times3\times5)\times12$ ἤτοι $360=2\times3\times5\times12$ ἀλλὰ τότε ἔχομεν $2\times3\times5\times12:2=3\times5\times12$ $3\times5\times12:3=5\times12$ καὶ $5\times12:5=12$.

Βλέπομεν λοιπόν, ὅτι εὕρομεν τὸ αὐτὸ πηλίκον μὲ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 360 διὰ μιᾶς διὰ τοῦ γινομένου $2\times3\times5$.

5) ***Ἄθροισμα διαιρεῖται δι᾽ ἀριθμοῦ, ἐὰν διαιρεθῇ ἕκαστος τῶν προσθετέων διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου καὶ προστεθῶσι τὰ προκύπτοντα πηλίκα.***

Αἱ διαιρέσεις ὑποτίθεται, ὅτι γίνονται πᾶσαι ἀκριβῶς.

Δηλαδὴ εἶναι $(12+20+40) : 4 = 3+5+10$· διότι

$$(3+5+10)\times 4 = 12+20+40$$

Ἀσκήσεις

779) Νὰ παρασταθῶσιν αἱ ἰδιότητες τῶν πράξεων διὰ γραμμάτων.

780) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν ἀριθμῶν, οἵτινες εἶναι μικρότεροι τοῦ 100 καὶ οἱ ὁποῖοι λήγουν εἰς 2.

781) Ποίαν μεταβολὴ ὑφίσταται τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν 25, 32, 11, ὅταν εἰς τὸν 25 προσθέσω 12, εἰς τὸν 32 9 καὶ εἰς τὸν 11 14;

782) Ποίαν μεταβολὴν ὑφίσταται τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν, ὅταν εἰς ἕκαστον προσθετέον αὐτοῦ προσθέσω 10;

783) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ κάτωθι ἀφαιρέσεις διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῆς ἰδιότητος 4 τοῦ ἐδαφ. 207, $4895 - 999$, $83453 - 9997$, $2156865 - 999997$.

784) Ποίαν μεταβολὴν ὑφίσταται ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν, ἐὰν προστεθῇ εἰς τὸν μειωτέον ὁ 18 καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον ὁ 13 (ἢ 13 καὶ 18);

785) Ὁμοίως ποίαν μεταβολὴν ὑφίσταται ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν, ἐὰν ἀπὸ τὸν μειωτέον ἀφαιρέσωμεν τὸν 15 καὶ ἀπὸ τὸν ἀφαιρετέον τὸν 23 (ἢ 23 καὶ 15); Αἱ ἀφαιρέσεις αὗται ὑποτίθενται δυναταί.

786) Ὁμοίως ποίαν μεταβολὴν ὑφίσταται ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν, ἐὰν εἰς τὸν μειωτέον προσθέσωμεν (ἀφαιρέσωμεν) τὸν 17 καὶ ἀπὸ τοῦ ἀφαιρετέου ἀφαιρέσωμεν (προσθέσωμεν) τὸν 8;

787) Κατὰ τὴν ἀφαίρεσιν τοῦ 1675 ἀπὸ τοῦ 2563 παρελείφθησαν ὅλα τὰ κρατούμενα. Νὰ εὑρεθῇ ἄνευ ἐκτελέσεως τῆς ἀφαιρέσεως ἡ διαφορὰ τοῦ ἀκριβοῦς ὑπολοίπου ἀπὸ τοῦ ἐσφαλμένου.

788) Πόσον μεταβάλλεται τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν, ὅταν πολλαπλασιασθῇ ἕκαστος τούτων ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν;

789) Νὰ γραφῶσιν ὑπὸ μορφὴν γινομένου διαφορᾶς ἐπὶ ἀριθμὸν αἱ παραστάσεις $18 \times 17 - 18\times 9$, $29\times 12 - 12$, $4\times 5\times 7 - 7$.

790) Νὰ γραφῇ ὑπὸ μορφὴν γινομένου δύο παραγόντων τὸ ἄθροισμα 45000+4500+450+45.

791) Πόσον μεταβάλλεται τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν, ἐὰν εἰς τὸν μεγαλύτερον προσθέσω 3 καὶ ἀπὸ τὸν μικρότερον ἀφαιρέσω 3;

792) Πόσον μεταβάλλεται τὸ γινόμενον δύο παραγόντων, ἐὰν εἰς ἕκαστον τούτων προσθέσω τὸν αὐτὸν ἀριθμόν;

793) Εἰς γινόμενόν τι πρόκειται νὰ αὐξηθῇ εἷς παράγων κατὰ μονάδα. Ποῖον παράγοντα πρέπει νὰ αὐξήσωμεν, ὥστε ἡ αὔξησις τοῦ γινομένου νὰ εἶναι μεγίστη;

794) Πόσον μεταβάλλεται τὸ γινόμενον δύο παραγόντων, ὅταν ἕκαστος τούτων πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, καὶ γενικῶς τὸ γινόμενον παραγόντων, ὅταν ἕκαστος τούτων πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν;

795) Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ 298 διά τινος ἄλλου εἶναι 12 καὶ τὸ ὑπόλοιπον 22. Νὰ εὑρεθῇ ὁ διαιρέτης.

796) Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο ἀριθμῶν εἶναι 8 καὶ τὸ ὑπόλοιπον 15· τὸ δὲ ἄθροισμα τοῦ διαιρετέου, τοῦ διαιρέτου, τοῦ πηλίκου καὶ τοῦ ὑπολοίπου εἶναι 659. Νὰ εὑρεθῇ ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης.

797) Πότε τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δὲν βλάπτεται, ἂν προστεθῇ εἰς τὸν διαιρετέον μία μονὰς ἢ καὶ περισσότεραι; καὶ πόσας μονάδας πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν διαιρετέον διὰ νὰ αὐξήσῃ τὸ πηλίκον κατὰ μίαν μονάδα;

798) Ἐὰν ὁ διαιρετέος πολλαπλασιασθῇ ἐπί τινα ἀριθμόν, ὁ δὲ διαιρέτης μείνῃ ὁ αὐτός, ποίαν μεταβολὴν πάσχουσι τὸ πηλίκον καὶ τὸ ὑπόλοιπον;

Ἐπισκόπησις τῶν ἀκεραίων, κλασματικῶν καὶ δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

210. Εἴδομεν, ὅτι ἀκέραιος ἀριθμὸς εἶναι ἡ ἔννοια, διὰ τῆς ὁποίας ἐκφράζομεν τὴν σχέσιν πολλῶν ὁμοίων πραγμάτων μὲ ἕνα ἐξ αὐτῶν, ὅταν ἐξετάζωμεν αὐτὰ μόνον ὡς πρὸς τὸ πλῆθος.

Ἐπίσης εἴδομεν, ὅτι ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἄθροισμα πολλῶν ἀκεραίων μονάδων.

Τὰ ζητήματα τὰ ὁποῖα ἀναφέρονται εἰς τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς (ὅπως ἄλλως τε καὶ εἰς τοὺς ἄλλους ἀριθμούς), καθὼς δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν ἐκ τῶν προηγουμένων, ἀνάγονται ὅλα εἰς τὰ τέσσαρα στοιχειώδη: ***Πρόσθεσιν, ἀφαίρεσιν, πολλαπλασιασμὸν*** καὶ ***διαίρεσιν.***

Ἡ ἐκτέλεσις τῶν ἀνωτέρω πράξεων στηρίζεται ἐπὶ τῶν ἰδιοτήτων αὐτῶν καὶ τῆς μὲν προσθέσεως θεμελιώδης ἰδιότης εἶναι ἡ τῆς ***ἀδιαφορίας*** ὡς πρὸς τὴν τάξιν τῶν ἀριθμῶν, ἐπὶ τῶν ὁποίων ἐκτελοῦνται· εἶναι δὲ ἡ ἰδιότης αὕτη θεμελιώδης, διότι ἐξ αὐτῆς εὑρίσκονται ὅλαι αἱ ἄλλαι ἰδιότητες τῆς προσθέσεως.

Ἡ ἀφαίρεσις, ἡ ὁποία εἶναι πρᾶξις ἀντίστροφος τῆς προσθέσεως, ἔχει ἰδιότητας, αἱ ὁποῖαι εὑρίσκονται ἐκ τῶν ἰδιοτήτων τῆς προσθέσεως (διότι εἶναι $M = A + Y$) καὶ τῆς ἰσότητος. Ἀλλ' ὅσα ζητήματα ἔχουσι σχέσιν μὲ τὴν ἀφαίρεσιν ὑποθέτουσι τὴν πρᾶξιν αὐτὴν δυνατήν.

Ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶναι πρόσθεσις ἀριθμῶν ἴσων, ἀνάγεται λοιπὸν εἰς τὴν πρόσθεσιν.

Θεμελιώδης ἰδιότης τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἶναι ἡ τῆς ἀδιαφορίας ὡς πρὸς τὴν τάξιν τῶν παραγόντων.

Ἐξ αὐτῆς εὑρίσκονται ὅλαι αἱ ἄλλαι ἰδιότητες αὐτοῦ καὶ αἱ ὁποῖαι εἶναι ἐντελῶς ὅμοιαι πρὸς τὰς ἰδιότητας τῆς προσθέσεως.

Ἡ πρόσθεσις καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς συνδέονται διὰ τῆς ***ἐπιμεριστικῆς*** λεγομένης ἰδιότητος, δηλαδὴ τῆς ἰδιότητος (§ 208, 1).

Ἡ διαίρεσις ἀνάγεται εἰς τὴν ἀφαίρεσιν ἐμφανίζεται δὲ ἡ διαίρεσις ὑπὸ δύο διαφόρους ὄψεις, δηλαδὴ ὡς ***μερισμὸς*** καὶ ὡς ***μέτρησις.***

Εἰς τὴν τελείαν διαίρεσιν ἔχομεν τὴν σχέσιν $\Delta = \delta.\pi$· ἕνεκα δὲ τούτου αἱ ἰδιότητες τῆς διαιρέσεως εὑρίσκονται ἐκ τῶν ἰδιοτήτων τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς ἰσότητος.

Ἀλλ' ἡ διαίρεσις δὲν εἶναι πρᾶξις πάντοτε δυνατή· καὶ διὰ νὰ καταστῇ δυνατὴ ἐπενοήθησαν νέοι ἀριθμοί, οἱ ***κλασματικοί***, οἱ ὁποῖοι, μετὰ τῶν ἀκεραίων, ἀποτελοῦσιν ἕνα γενικώτερον σύστημα ἀριθμῶν, τὸ λεγόμενον ***κλασματικόν.*** Εἰς τὸ σύστημα τοῦτο ἡ ἔννοια τοῦ ἀριθμοῦ γενικεύεται, διατηροῦνται δὲ αἱ θεμελιώδεις ἰδιότητες τῆς ἰσότητος καὶ τῶν πράξεων.

Καὶ αἱ μὲν ἰδιότητες τῆς ἰσότητος διατηροῦνται, διότι, ἀφοῦ τὰ κλάσματα δύνανται πάντοτε νὰ τρέπωνται εἰς ὁμώνυμα, ἡ ἰσότης ἢ ἡ ἀνισότης αὐτῶν ἀνάγεται εἰς τὴν ἰσότητα ἢ τὴν ἀνισότητα τῶν ἀριθμητῶν των· αἱ δὲ ἰδιότητες τῶν πράξεων διατηροῦνται, διότι εἰς τὸ νέον σύστημα γενικεύεται καὶ ἡ ἔννοια τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Ἡ διαίρεσις εἰς τὸ κλασματικὸν σύστημα εἶναι πρᾶξις πάντοτε δυνατὴ καὶ τελεία· ὁρίζεται ἑπομένως αὕτη ὡς πρᾶξις ἀντίστροφος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Ὥστε ἤδη ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ διαίρεσις δὲν ἔχουσι τὴν ἀρχικὴν αὐτῶν σημασίαν, κατὰ τὴν ὁποίαν ὁ μὲν πρῶτος ἦτο πρόσθεσις ἴσων ἀριθμῶν, ἡ δὲ δευτέρα μερισμὸς ἀριθμοῦ εἰς πολλὰ ἴσα μέρη· ἀλλὰ δύναται πᾶς πολλαπλασιασμὸς νὰ θεωρηθῇ καὶ ὡς διαίρεσις καὶ πᾶσα διαίρεσις ὡς πολλαπλασιασμός.

Ἐκ τῶν κλασμάτων, ὅσα ἔχουσι παρονομαστὴν δύναμίν τινα τοῦ 10, ἀποτελοῦσι τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς (ἐνῷ τὰ ἄλλα ἀποτελοῦσι τὰ κοινὰ κλάσματα), οἱ ὁποῖοι ἔχουσι τὴν ἰδιότητα νὰ γράφωνται, ὡς καὶ οἱ ἀκέραιοι, μὲ τὴν διαφοράν, ὅτι τὸ ἀκέραιον μέρος χωρίζεται ἀπὸ τὸ δεκαδικὸν διὰ τῆς ὑποδιαστολῆς.

Ἕνεκα δὲ τούτου αἱ πράξεις ἐπὶ τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν γίνονται ὡς καὶ αἱ τῶν ἀκεραίων· ἑπομένως αἱ πράξεις ἐπὶ τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἁπλούστεραι ἀπὸ τὰς πράξεις ἐπὶ τῶν κοινῶν κλασμάτων· ἕνεκα δὲ τούτου πάλιν εἰς τὰς ἐφαρμογὰς τῆς ἀριθμητικῆς προτιμῶνται οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοί. Εἶναι δὲ δυνατὸν τοῦτο, διότι τὰ κοινὰ κλάσματα τρέπονται εἰς δεκαδικά. Ἀλλὰ κατὰ τὴν τροπὴν τῶν κοινῶν κλασμάτων εἰς δεκαδικὰ παρατηροῦμεν, ὅτι ἄλλα μὲν ἐκ τῶν κοινῶν κλασμάτων τρέπονται εἰς ἀκριβῆ δεκαδικά, ἄλλα δὲ εἰς περιοδικὰ δεκαδικὰ κλάσματα.

Θεωρία τῆς ἀριθμήσεως κατὰ τὸ δεκαδικὸν σύστημα.

211. Εἴδομεν, ὅτι οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ ἀποτελοῦσι σειρὰν ἄπειρον ἀρχομένην ἀπὸ τοῦ ἑνὸς καὶ εἰς τὴν ὁποίαν ἕκαστος γίνεται ἐκ τοῦ προηγουμένου του διὰ τῆς προσθέσεως μιᾶς ἀκεραίας μονάδος. Ἑπομένως δὲν εἶναι δυνατὸν ἕκαστος ἀριθμὸς οὔτε νὰ λέγεται μὲ ἰδιαίτερον ὄνομα, οὔτε νὰ γράφηται μὲ ἴδιον σύμβολον ἢ ψηφίον. Διὰ τοῦτο οἱ ἄνθρωποι ἐπενόησαν τρόπον νὰ ἐκφράζωσι τοὺς ἀριθμοὺς δι᾽ ὀλίγων δια-

φόρων λέξεων, αἱ ὁποῖαι εἶναι γνωσταὶ εἰς ἡμᾶς καὶ νὰ γράφωσιν αὐτοὺς διὰ τῶν δέκα ψηφίων.

Στηρίζεται δὲ ὁ τρόπος οὗτος ἐπὶ τῶν ἑξῆς:

Ἀριθμοί τινες λαμβάνονται ὡς νέαι μονάδες καὶ ἐξ αὐτῶν σχηματίζονται οἱ ἄλλοι.

Ἀρχικὴ δὲ μονὰς εἶναι ἡ ἁπλῆ ἢ ἡ μονὰς πρώτης τάξεως· ἀμέσως κατόπιν ὡς νέα μονὰς θεωρεῖται ἡ δεκὰς ἢ ἡ μονὰς δευτέρας τάξεως καὶ ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ δέκα ἁπλᾶς μονάδας· ἀμέσως ἔπειτα ὡς νέα μονὰς θεωρεῖται ἡ ἑκατοντὰς ἢ ἡ μονὰς τρίτης τάξεως καὶ ἡ ὁποία σχηματίζεται ἐκ δέκα δεκάδων· δέκα δὲ ἑκατοντάδες κάμνουν τὴν χιλιάδα ἢ τὴν μονάδα τετάρτης τάξεως κ.ο.κ., ἐκ δέκα δὲ μονάδων μιᾶς τάξεως σχηματίζεται μία νέα μονάς, ἡ ὁποία εἶναι τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως.

Κατόπιν τούτων δυνάμεθα νὰ δείξωμεν, ὅτι πᾶς ἀριθμὸς δύναται νὰ σχηματισθῇ ἐκ τῶν μονάδων τούτων καὶ ἐξ ἑκάστης νὰ μὴ περιέχῃ περισσοτέρας τῶν ἐννέα.

Διότι ἂς φαντασθῇ τις οἱονδήποτε θέλει ἀριθμὸν (π. χ. τὸν ἀριθμὸν τῶν κόκκων σίτου οἱ ὁποῖοι περιέχονται εἰς ἕνα σάκκον). Τὰς ἁπλᾶς μονάδας τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ ἑνοῦμεν ἀνὰ δέκα. Χωρίζομεν δηλαδὴ τὸν ἀριθμὸν εἰς δεκάδας· θὰ περισσεύουν δὲ καὶ μονάδες ἁπλαῖ, ἂν περισσεύσουν, ἀλλ' ὄχι περισσότεραι τῶν ἐννέα· διότι ἂν ἔμεναν δέκα, θὰ ἐγίνετο ἐξ αὐτῶν ἄλλη μία δεκάς.

Ἔπειτα τὰς δεκάδας ἑνοῦμεν ἀνὰ δέκα, σχηματίζονται δὲ οὕτω ἑκατοντάδες τινές, εἶναι δὲ δυνατὸν νὰ περισσεύσουν καὶ δεκάδες, ἀλλ' ὄχι περισσότεραι τῶν ἐννέα.

Ἐὰν ἔπειτα ἑνώσωμεν ὁμοίως καὶ τὰς ἑκατοντάδας, θὰ σχηματισθῶσιν ἐξ αὐτῶν χιλιάδες τινές· εἶναι δὲ δυνατὸν νὰ μείνωσι καί τινες ἑκατοντάδες, ἀλλ' ὄχι περισσότεραι τῶν ἐννέα.

Ἐξακολουθοῦντες τοιουτοτρόπως θὰ φθάσωμεν ἀναγκαίως εἰς τάξιν τινα μονάδων, ἡ ὁποία δὲν θὰ ἔχῃ περισσοτέρας τῶν ἐννέα καὶ ἑπομένως δὲν θὰ εἶναι, δυνατὸν νὰ σχηματισθῇ ἐξ αὐτῶν μονὰς ἀνωτέρας τάξεως (θὰ συμβῇ δὲ τοῦτο, διότι εἰς ἑκάστην τάξιν, ὅσον προχωροῦμεν, τόσον αἱ μονάδες γίνονται ὀλιγώτεραι)· τότε ὁ ἀριθμὸς θὰ εἶναι ἀναλελυμένος εἰς μονάδας διαφόρων τάξεων καὶ εἰς ἑκάστην τάξιν θὰ εἶναι μονάδες ὄχι περισσότεραι τῶν ἐννέα, Ὥστε πᾶς ἀριθμὸς δύναται νὰ ἀποτελεσθῇ ἐκ τῶν μονάδων τῶν διαφόρων τάξεων, χωρὶς νὰ ληφθῶσιν ἀπὸ οὐδεμίαν περισσότεραι τῶν ἐννέα.

Ὥστε, ***ἵνα ἐκφράσωμεν ἀριθμόν τινα ἀρκεῖ νὰ δηλώσωμεν πόσας μονάδας ἑκάστης τάξεως περιέχει.***

Π. χ. ἀριθμός τις εἶναι ἐντελῶς ὡρισμένος καὶ εἰς ἡμᾶς γνωστός, ὅταν γνωρίζωμεν, ὅτι ἀποτελεῖται ἐκ πέντε χιλιάδων, ὀκτὼ ἑκατοντάδων, ἑπτὰ δεκάδων καὶ ἓξ μονάδων.

Ἕνεκα δὲ τούτου δυνάμεθα διὰ τῶν ὀνομάτων τῶν ἐννέα πρώτων ἀριθμῶν καὶ τῶν ὀνομάτων τῶν μονάδων τῶν διαφόρων τάξεων νὰ ὀνομάσωμεν μέγα πλῆθος ἀριθμῶν.

212. Ἡ γραφὴ τῶν ἀριθμῶν διὰ τῶν ψηφίων στηρίζεται εἰς τὸν σχηματισμὸν αὐτῶν ἐκ μονάδων διαφόρων τάξεων.

Γράφομεν δὲ ἕνα ἀριθμόν, ἐὰν γράψωμεν διὰ τῶν ἐννέα ψηφίων τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων ἑκάστης τάξεως, ὅστις δὲν ὑπερβαίνει τὸν ἐννέα καὶ εἰς ἕκαστον ψηφίον προσαρτήσωμεν τὸ ὄνομα τῶν μονάδων τὰς ὁποίας παριστᾷ. Οὕτω γράφομεν 3 χιλ., 2 ἑκατον., 8 δεκ. καὶ 4 μον., ἢ ἁπλούστερον 3284 ἐὰν κάμνωμεν τὴν συμφωνίαν (τὴν ὁποίαν ἄλλως τε γνωρίζομεν) ἵνα ***ἕκαστον ψηφίον τὸ ὁποῖον γράφεται πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἄλλου φανερώνῃ μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως ἢ τὸ ἄλλο ψηφίον.*** Διότι κατ᾽ αὐτὴν εἰς τὸν ἄνω ἀριθμὸν 3284 τὸ 4 φανερώνει ἁπλᾶς μονάδας, τὸ 8 δεκάδας, τὸ 2 ἑκατοντάδας καὶ τὸ 3 χιλιάδας.

Ὥστε, ***κατὰ τὴν ἀνωτέρω συμφωνίαν, ἡ σημασία ἑκάστου ψηφίου ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς θέσεώς του.***

Ὅταν ὁ ἀριθμός, τὸν ὁποῖον γράφομεν διὰ ψηφίων, δὲν ἔχῃ μονάδας τάξεώς τινος, γράφομεν εἰς τὴν θέσιν τῶν μονάδων, αἱ ὁποῖαι λείπουν, τὸ 0. Τὸ μηδὲν λοιπὸν αὐτὸ καθ᾽ ἑαυτὸ δὲν ἔχει ἀξίαν, διὰ τοῦτο τὰ ἄλλα ψηφία, ὡς ἔχοντα ἀξίαν, λέγοντα ***σημαντικά.***

Οὕτω ὁ ἀριθμὸς 5 ἑκατοντ. καὶ 7 μον. γράφεται 507. Οἱ κανόνες τῆς ἀπαγγελίας καὶ τῆς γραφῆς τῶν ἀριθμῶν εἶναι γνωστοί.

Τώρα παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς· ὅτι κατὰ τὸν τρόπον τῆς ἀπαγγελίας τῶν ἀριθμῶν, θεωροῦμεν αὐτοὺς ὡς ἀποτελουμένους ἀπὸ μέρη, τὰ ὁποῖα εἶναι μονάδες, χιλιάδες, ἑκατομμύρια, δισεκατομμύρια κλπ.

ον κλπ αὗται, ἤτοι οἱ ἀριθμοὶ ***ἕν, χίλια, ἑκατομμύ-***
ιται, ὅπ αι ***πρωτεύουσαι*** καὶ ἑκάστη ἐξ αὐτῶν ἀποτε-
υμένης τατομεν, ἐκ χιλίων μονάδων τῆς ἀμέσως προη-

213. Ἡ

ὸν εὐφυεστάτων ψηφίων γραφὴ τῶν ἀριθμῶν εἶναι μία
ύτη σταθμόν, κινοήσεων τοῦ ἀνθρώπου, ἀπετέλεσε δὲ
αὶ διὰ τὴν ἐξυπη ιὰ τὴν ἀνάπτυξιν τῆς ἀριθμητικῆς, ὅσον
ότητος. ν τῶν πρακτικῶν ἀναγκῶν τῆς ἀνθρω-

Ἡ μεγάλη ἀξία
ραφὴν τῶν ἀριθμῶν αφῆς αὐτῆς συνίσταται αον εἰς τὴν
υμφωνίαν, καθ' ἣν ἡ λαχίστων ψηφίων καὶ βον εἰς τὴν
έσεώς του ἐν τῷ ἀριθ κάστου ψηφίου ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς
ριθμούς, ἔστω καὶ τοὺς εκα δὲ τούτου γράφομεν τοὺς
οῦμεν τὰς πράξεις αὐτῶν ει λυτέρους, συντόμως καὶ ἐκτε-

214. Τὸ σύστημα τῆς ἀριθ ατα.
σει, εἶναι τὸ δεκαδικὸν (ἐδ. 2). ως, τὸ ὁποῖον ἔχομεν ἐν χρή-
ἀντὶ τοῦ 10, ἄλλον ἀριθμόν, π. λλ' ἂν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν,
μονάδας τῶν διαφόρων τάξεων ν 8, καὶ σχηματίσωμεν τὰς
ὀκταπλασία τῆς ἀμέσως προηγου ως, ὥστε ἑκάστη νὰ εἶναι
κὸν σύστημα τῆς ἀριθμήσεως· διὰ δ ς, θὰ ἔχωμεν τὸ ὀκταδι-
καὶ εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα θὰ χρ ὴν γραφὴν αὐτῶν, ὡς

Ἐπειδὴ δὲ δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ὡς σθῶμεν ὀκτὼ ψηφία.
μόν, ἕπεται, ὅτι εἶναι δυνατὸν νὰ σχη σιν οἱονδήποτε ἀριθ-
στήματα ἀριθμήσεως. Ἀλλ' ἂν ὡς βάσι ισθῶσιν ἄπειρα συ-
μεν ἀριθμὸν μικρότερον τοῦ 10, θὰ χρεια ἀριθμήσεως λάβω-
ὀλιγώτερα, ἀλλ' αἱ πράξεις ἐπὶ τῶν ἀριθμ ῶμεν μὲν ψηφία
τούτου θὰ εἶναι μακρότεραι. Ἐὰν δὲ λάβωμεν ὡς βασι τοῦ συστήματος
μὸν μεγαλύτερον τοῦ 10, θὰ χρειασθῶμεν ψηφία περισσότερα
καὶ αἱ πράξεις ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν τοῦ συστήματος τούτου θὰ
εἶναι, ἂν καὶ συντομώτεραι, δυσκολώτεραι. Δυνάμεθα λοιπὸν
νὰ εἴπωμεν, ὅτι τὸ δεκαδικὸν σύστημα τῆς ἀριθμήσεως, εἶναι
πλεονεκτικώτερον παντὸς ἄλλου συστήματος ἀριθμήσεως.

ΤΕΛΟΣ

703
85
53
99

1351

703
85
53
99
80
60
90
30
450

1860