ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΣΤ. ΚΑΤΣΑΡΛΙΝΟΥ - ΜΑΤΘ. ΜΠΑΪΜΠΑ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑ 1977

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

«Τὸ βιβλίο μεταγλωττίστηκε ἀπὸ τὸν Ε. Πλατή, φιλόλογο, Ἐπιθεωρητὴ Μ. Ε. καὶ τὸν Ἰορδάνη Παπαδόπουλο μαθηματικὸ καθηγητή».

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Α' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΣΤ. ΚΑΤΣΑΡΛΙΝΟΥ — ΜΑΤΘ. ΜΠΑ·Ι·ΜΠΑ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑ 1977

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Α΄

ΑΠΟ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΣΥΝΟΛΩΝ

1. ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ

1.1. Εἰσαγωγή

Στὴν καθημερινὴ ζωὴ μιλοῦμε γιά:
τὴν ἀθλητικὴ ὁ μ ά δ α τῆς τάξης μας·
τὴ σ υ λ λ ο γ ὴ τῶν γραμματοσήμων μας·
τὸ σ ύ λ λ ο γ ο τῶν καθηγητῶν τοῦ Γυμνασίου μας·
τὸ σ ύ ν ο λ ο τῶν ἀντικειμένων ποὺ βρίσκονται στὴ σάκα μας·
τὸ σ ύ ν ο λ ο τῶν ἐποχῶν τοῦ ἔτους.

Δηλαδὴ χρησιμοποιοῦμε τὶς λέξεις:

ὁ μ ά δ α, σ υ λ λ ο γ ή, σ ύ λ λ ο γ ο ς, σ ύ ν ο λ ο,
ὅταν θέλουμε νὰ μιλήσουμε γιὰ ἀντικείμενα ποὺ ἀπαρτίζουν μιὰν ὁ λ ό τ η τ α.

Μὲ τὴν ἴδια σημασία χρησιμοποιοῦμε τὸν ὅρο σ ύ ν ο λ ο στὰ Μαθηματικά. Προσέχουμε μόνο, τὰ διάφορα ἀντικείμενα (ἀριθμοί, σχήματα, ἀκόμη καὶ πρόσωπα ἢ πράγματα) ποὺ συγκροτοῦν τὸ σύνολο νὰ εἶναι ὁ ρ ι σ μ έ ν α καὶ δ ι α φ ο ρ ε τ ι κ ὰ μ ε τ α ξ ύ τ ο υ ς.

Αὐτὰ τὰ ἀντικείμενα τὰ ὀνομάζουμε συνήθως μ έ λ η ἢ σ τ ο ι χ ε ῖ α τοῦ συνόλου.

Ἔτσι λέμε:
Ἡ ἄνοιξη εἶναι στοιχεῖο τοῦ συνόλου τῶν ἐποχῶν τοῦ ἔτους·
ἢ ἡ ἄνοιξη ἀνήκει στὸ σύνολο τῶν ἐποχῶν τοῦ ἔτους.

1.2. Πότε ἕνα σύνολο εἶναι καθορισμένο

Στὸ πάρα κάτω σχέδιο 1 εἰκονίζεται ἡ οἰκογένεια Σαμπάνη τὴν ὥρα τοῦ φαγητοῦ. Αὐτὴ ἡ οἰκογένεια ἀποτελεῖ ἕνα σύνολο. Ἄς τὸ ὀνομάσουμε σύνολο Α.

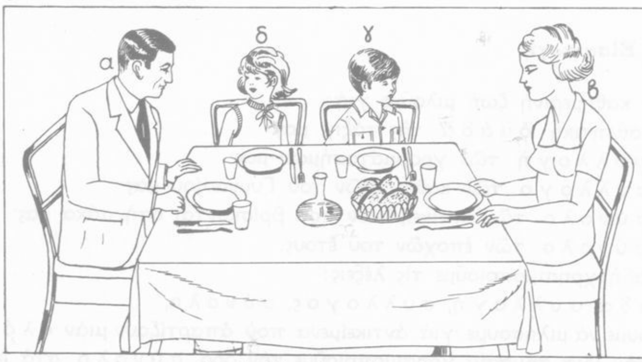
Ἂν μᾶς ρωτήσουν:

Π ο ι ὸ ε ἶ ν α ι τ ὸ σ ύ ν ο λ ο Α;

Θὰ ἀπαντήσουμε: Τὸ σύνολο Α ἀ π α ρ τ ί ζ ε τ α ι ἀπὸ τὸν πατέρα α, τὴ μητέρα β, τὸ γιὸ γ καὶ τὴ θυγατέρα δ. Ἢ ὅτι εἶναι τὸ σύνολο τ ῶ ν μ ε λ ῶ ν τ ῆ ς ο ἰ κ ο γ έ ν ε ι α ς Σ α μ π ά ν η.

Στὴν πρώτη περίπτωση, γιὰ νὰ καθορίσουμε τὸ σύνολο A, ἀναφέραμε ἀκριβῶς ἀπὸ ποιὰ στοιχεῖα ἀπαρτίζεται. Στὴ δεύτερη περίπτωση χρησιμοποιήσαμε ἕνα χαρακτηριστικὸ γνώρισμα τῶν στοιχείων του, τὸ γνώρισμα «μέλος τῆς οἰκογένειας Σαμπάνη».

Γενικά, **λέμε ὅτι ἕνα σύνολο A εἶναι καθορισμένο : ὅταν γνωρίζουμε ἀκριβῶς ποιὰ στοιχεῖα τὸ ἀπαρτίζουν** ἢ **ὅταν γνωρίζουμε ἕνα χαρακτηριστικὸ γνώρισμα τῶν στοιχείων του**, δηλαδὴ ἕνα γνώρισμα ποὺ μᾶς ἐπιτρέπει νὰ ποῦμε μὲ βεβαιότητα ἂν ἕνα ὁποιοδήποτε ἀντικείμενο εἶναι ἢ δὲν εἶναι στοιχεῖο τοῦ συνόλου ποὺ ἐξετάζουμε.



Σχ. 1. Οἰκογένεια Σαμπάνη.

Παρατήρηση

Ἂς προσέξουμε τὰ δύο γνωρίσματα:

«Μαθητὴς τῆς τάξης μας μὲ ἀνάστημα ἄνω τοῦ 1,60 m»

«Ψηλὸς μαθητὴς τῆς τάξης μας»

Παρατηροῦμε ὅτι τὸ πρῶτο μᾶς ἐπιτρέπει νὰ ἀπαντήσουμε χωρὶς δισταγμοὺς ἂν ἕνας ὁποιοσδήποτε μαθητὴς τῆς τάξης μας ἔχει ἢ δὲν ἔχει ἀνάστημα ἄνω τοῦ 1,60 m.

Τὸ δεύτερο σὲ ὁρισμένες περιπτώσεις δὲν μᾶς ἐπιτρέπει νὰ ἀπαντήσουμε χωρὶς δισταγμοὺς ἂν ἕνας ὁποιοσδήποτε μαθητὴς τῆς τάξης μας εἶναι ἢ δὲν εἶναι ψηλός. Γι' αὐτὸ λέμε ὅτι μόνο τὸ πρῶτο γνώρισμα καθορίζει καλῶς τὸ σύνολο.

1. 3. Εἰδικὰ σύνολα

Μονομελῆ σύνολα. Τὸ κενὸ σύνολο.

Ὅταν μιὰ μέρα ἀπουσιάζουν ἀπὸ τὴν τάξη μας δύο μαθητές, π.χ. ὁ Καλὴς καὶ ὁ Σαμπάνης, τότε αὐτοὶ οἱ δύο μαθητὲς ἀπαρτίζουν τὸ σύνολο τῶν ἀπόντων μαθητῶν. Ἂν μιὰν ἄλλη μέρα ἀπουσιάζει μόνον ὁ Σαμπάνης, τότε ποιὸ θὰ εἶναι τὸ σύνολο τῶν ἀπόντων μαθητῶν;

Θὰ μπορούσαμε νὰ ἀπαντήσουμε ὅτι εἶναι ἕνα σύνολο μὲ μοναδικὸ στοιχεῖο τὸν Σαμπάνη.

Μιὰ τρίτη μέρα δὲν ἀπουσιάζει κανεὶς μαθητής. Ποιὸ θὰ εἶναι τὸ σύνολο τῶν ἀπόντων μαθητῶν ἐκείνης τῆς ἡμέρας;

Ἴσως τότε θὰ ποῦμε πὼς δὲν ὑπάρχει σύνολο. Μποροῦμε ὅμως νὰ ποῦμε ὅτι τὸ σύνολο τῶν ἀπόντων εἶναι ἕνα σύνολο χωρὶς στοιχεῖα: Εἶναι τὸ κενὸ σύνολο.

Στὰ Μαθηματικά, γιὰ νὰ γενικεύσουμε τὴν ἔννοια τοῦ συνόλου, δεχόμαστε ὅτι ὑπάρχουν σύνολα μὲ ἕνα μόνο στοιχεῖο (μονομελῆ). Δεχόμαστε ἀκόμη ὅτι ὑπάρχει ἕνα κενὸ σύνολο.

2. ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΟΥ ΣΥΝΟΛΟΥ

2.1. Μὲ ἀναγραφή.

α) Γιὰ νὰ παραστήσουμε συμβολικὰ τὸ σύνολο τῶν φωνηέντων, γράφουμε:

$$\{\alpha, \varepsilon, \eta, o, \omega, \upsilon, \iota\}$$

Δηλαδὴ γράφουμε ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου καὶ μόνον αὐτὰ μέσα σὲ ἄγκιστρα ({ }), χωρὶς νὰ λάβουμε ὑπόψη μας τὴ σειρὰ τῆς ἀναγραφῆς τους. Καὶ διαβάζουμε: Σύνολο μὲ στοιχεῖα α, ε, η, ο, ω, υ, ι.

Αὐτὸς ὁ τρόπος τοῦ συμβολισμοῦ τοῦ συνόλου λέγεται: μὲ ἀναγραφὴ τῶν στοιχείων του ἢ σύντομα: μὲ ἀναγραφή.

Μάλιστα, ἐπειδὴ τὰ στοιχεῖα ἑνὸς συνόλου πρέπει νὰ εἶναι διαφορετικὰ μεταξύ τους, δὲν ἀναγράφουμε δύο φορὲς τὸ ἴδιο στοιχεῖο. Π.χ. τὸ σύνολο τῶν ψηφίων τοῦ ἀριθμοῦ 122 γράφεται:

$$\{1, 2\} \text{ ἢ } \{2, 1\}, \text{ ἀλλὰ ὄχι } \{1, 2, 2\}.$$

β) Ἂς πάρουμε τώρα τὸ σύνολο τῶν λεγομένων φυσικῶν* ἀριθμῶν ποὺ εἶναι μικρότεροι ἀπὸ τὸ 1000. Ἐπειδὴ τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου αὐτοῦ ἔχουν μιὰ διάταξη (μιὰ σειρὰ δηλαδὴ στὴν ἀναγραφή), μποροῦμε νὰ τὸ παραστήσουμε ὡς ἑξῆς:

$$\{1, 2, 3, \ldots, 999\}$$

Δηλαδή, γράφουμε μέσα σὲ ἄγκιστρα μὲ τὴ σειρὰ τὰ τρία πρῶτα στοιχεῖα, ἔπειτα τρεῖς τελεῖες καὶ κατόπιν τὸ τελευταῖο στοιχεῖο 999.

---

* Φυσικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 1, 2, 3, 4, . . .

2. 2. Μὲ περιγραφή

Τὸ σύνολο τῶν φωνηέντων μποροῦμε νὰ τὸ παραστήσουμε καὶ ὡς ἑξῆς:

{Ὅλα τὰ στοιχεῖα χ, ὅπου χ εἶναι φωνῆεν}

ἢ σύντομα {χ ὅπου χ φωνῆεν}

ἢ {χ | χ φωνῆεν}

(Τὸ διαχωριστικὸ | ἀντικαθιστᾶ τὴ λέξη ὅπου).

Καὶ διαβάζουμε «σύνολο μὲ στοιχεῖα χ ὅπου χ φωνῆεν».

Αὐτὸς ὁ τρόπος τῆς παραστάσεως ἑνὸς συνόλου λέγεται: μὲ π ε ρ ι γ ρ α φ ὴ τ ο ῦ χ α ρ α κ τ η ρ ι σ τ ι κ ο ῦ γ ν ω ρ ί σ μ α τ ο ς τῶν στοιχείων του. Ἢ σύντομα: μὲ π ε ρ ι γ ρ α φ ή.

Παραδείγματα

α) Τὸ σύνολο τῶν ψηφίων τοῦ ἀριθμοῦ 1969 τὸ παριστάνουμε:

{1, 9, 6} ἢ {χ | χ ψηφίο τοῦ ἀριθμοῦ 1969}.

β) Τὸ σύνολο τῶν μαθητῶν τοῦ γυμνασίου μας τὸ παριστάνουμε:

{χ | χ μαθητὴς τοῦ γυμνασίου μας}.

(Γιατί δὲν χρησιμοποιοῦμε καὶ τὸν ἄλλο τρόπο παραστάσεως;)

γ) Τὸ σύνολο ποὺ ἀπαρτίζουν οἱ μῆνες Ἰούνιος, Ἰούλιος καὶ Αὔγουστος τὸ παριστάνουμε:

{Ἰούνιος, Ἰούλιος, Αὔγουστος} καὶ {χ | χ μήνας τοῦ θέρους}.

Εἰδικὰ τὸ κενὸ σύνολο* τὸ παριστάνουμε { } ἢ ∅.

2. 3. Ὁ συμβολισμὸς τοῦ «ἀνήκει»

Ἂς ἐπανέλθουμε στὸ σύνολο τῶν ψηφίων τοῦ ἀριθμοῦ 122 ἢ συμβολικὰ στὸ σύνολο {1, 2}. Ἂς ὀνομάσουμε αὐτὸ τὸ σύνολο Α. Τὰ ψηφία 1, 2 εἶναι τὰ στοιχεῖα αὐτοῦ τοῦ συνόλου. Ἢ μ' ἄλλα λόγια, τὰ στοιχεῖα 1, 2 ἀ ν ή κ ο υ ν στὸ σύνολο Α. Ἡ σχέση «1 ἀ ν ή κ ε ι σ τ ὸ σ ύ ν ο λ ο Α» συμβολίζεται $1 \in A$. Ἡ σχέση «3 δ ὲ ν ἀ ν ή κ ε ι σ τ ὸ σ ύ ν ο λ ο Α» συμβολίζεται $3 \notin A$.

Εἶναι φανερὸ ὅτι γιὰ κάθε στοιχεῖο ὑπάρχουν μόνον δύο δυνατότητες: Ν ὰ ἀ ν ή κ ε ι ἢ ν ὰ μ ὴ ν ἀ ν ή κ ε ι στὸ σύνολο. Ἔτσι ἔχουμε:

$$1 \in \{1,2\},\ 2 \in \{1,2\},\ 3 \notin \{1,2\},\ 4 \notin \{1,2\} \ldots$$

* Δὲν πρέπει νὰ συγχέουμε τὰ σύμβολα { 0 } καὶ ∅. Τὸ πρῶτο σύμβολο παριστάνει ἕνα μονομελὲς σύνολο μὲ στοιχεῖο τὸ 0, ἐνῶ τὸ δεύτερο παριστάνει τὸ κενὸ σύνολο. Ἐπίσης σημειώνουμε ὅτι τὸ σύνολο { 0 } εἶναι κάτι διαφορετικὸ ἀπὸ τὸν ἀριθμὸ 0.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Νὰ παραστήσετε μὲ ἀναγραφὴ καὶ περιγραφὴ τὸ σύνολο τῶν ἡμερῶν τῆς ἑβδομάδας, ποὺ τὸ ὄνομά τους ἀρχίζει ἀπὸ Π. Γράψετε ἔπειτα συμβολικὰ ποιὲς ἡμέρες τῆς ἑβδομάδας ἀνήκουν σ' αὐτὸ τὸ σύνολο καὶ ποιὲς δὲν ἀνήκουν.
2. Νὰ παραστήσετε μὲ περιγραφὴ τὰ σύνολα:

$$A = \{\text{'Ιανουάριος, 'Ιούνιος, 'Ιούλιος}\} \quad \text{καὶ} \quad B = \{1, 2, \ldots, 9\}$$

3. Ποιὸ εἶναι τὸ σύνολο τῶν ἀκεραίων ποὺ περιέχονται μεταξὺ 4 καὶ 5;
4. Ἂν $A = \{0, 1, \{2\}\}$, τότε ποιὲς ἀπὸ τὶς σχέσεις $0 \in A$, $1 \in A$, $2 \in A$ εἶναι ἀληθεῖς:
5. Τί μπορεῖτε νὰ πεῖτε γιὰ τὸ σύνολο $\{\chi \mid \chi$ ὡραῖο ποίημα $\}$;

3. ΥΠΟΣΥΝΟΛΟ ΕΝΟΣ ΣΥΝΟΛΟΥ. ΕΓΚΛΕΙΣΜΟΣ

3.1. Ὁρισμὸς

Ἂς προσέξουμε τὰ δύο σύνολα:

$A = \{\chi \mid \chi$ μαθητὴς τῆς τάξης μας$\}$

καὶ $B = \{\chi \mid \chi$ ἀριστοῦχος μαθητὴς τῆς τάξης μας$\}$.

Παρατηροῦμε ὅτι:

Κάθε στοιχεῖο τοῦ συνόλου Β εἶναι καὶ στοιχεῖο τοῦ συνόλου Α. Γιὰ τοῦτο λέμε ὅτι τὸ σύνολο Β εἶναι ὑ π ο σ ύ ν ο λ ο τοῦ συνόλου Α.

Γράφουμε συμβολικά: $B \subseteq A$

καὶ διαβάζουμε: Β εἶναι ὑποσύνολο τοῦ Α.

Γενικά: **Ἕνα σύνολο Β λέγεται ὑποσύνολο ἑνὸς συνόλου Α, ἂν κάθε στοιχεῖο τοῦ Β εἶναι καὶ στοιχεῖο τοῦ Α.**

Ἡ σχέση «Β ε ἶ ν α ι ὑ π ο σ ύ ν ο λ ο τ ο ῦ Α» διατυπώνεται καὶ ὡς ἑξῆς:

«Τὸ Β π ε ρ ι έ χ ε τ α ι ἢ ἐ γ κ λ ε ί ε τ α ι στὸ Α».

Ἢ «Τὸ Α π ε ρ ι έ χ ε ι ἢ ἐ γ κ λ ε ί ε ι τὸ Β».

Στὸ πιὸ πάνω παράδειγμα σχηματίσαμε τὸ σύνολο Β ἀποκλειστικὰ ἀπὸ στοιχεῖα τοῦ συνόλου Α. Θὰ μπορούσαμε νὰ σχηματίσουμε καὶ ἄλλα τέτοια σύνολα, ὑποσύνολα τοῦ Α.

Π.χ.

$\Gamma = \{\chi \mid \chi$ μαθητὴς τῆς τάξης μας μὲ βαθμὸ ἄνω τοῦ 15 στὰ Θρησκευτικὰ$\}$

$\Delta = \{\chi \mid \chi$ μαθητὴς τῆς τάξης μας μὲ βαθμὸ ἄνω τοῦ 18 στὴν Ἱστορία$\}$

Τὸ σύνολο Α, ποὺ μὲ στοιχεῖα του σχηματίζονται τὰ διάφορα ὑποσύνολα, ὅπως τὰ πάρα πάνω Β, Γ, Δ, ὀνομάζεται βασικὸ σύνολο ἢ σύνολο ἀναφορᾶς τῶν ὑποσυνόλων του.

Συχνὰ τὸ βασικὸ σύνολο σημειώνεται μὲ Ω.

Παραδείγματα ὑποσυνόλων

α) Τὸ σύνολο τῶν φωνηέντων εἶναι ὑποσύνολο τοῦ συνόλου τῶν γραμμάτων.

β) Τὸ σύνολο τῶν κατοίκων τῶν Ἀθηνῶν εἶναι ὑποσύνολο τοῦ συνόλου τῶν κατοίκων τῆς Ἑλλάδας.

γ) Τὸ σύνολο τῶν μηνῶν τῆς ἄνοιξης εἶναι ὑποσύνολο τῶν μηνῶν τοῦ ἔτους.

δ) Τὸ σύνολο $\{1, 2\}$ εἶναι ὑποσύνολο τοῦ $\{1, 2, 5\}$, ἀλλὰ δὲν εἶναι ὑποσύνολο τοῦ $\{1, 3, 4, 5\}$. (Γιατί;)

$$\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 5\}, \ \{1, 2\} \nsubseteq \{1, 3, 4, 5\}.$$

3.2. Εἰδικὲς περιπτώσεις

I) Ὁ ὁρισμὸς τοῦ ὑποσυνόλου μᾶς ἐπιτρέπει νὰ λάβουμε ἕνα σύνολο ὡς ὑποσύνολο τοῦ ἑαυτοῦ του.

Κάθε σύνολο εἶναι ὑποσύνολο τοῦ ἑαυτοῦ του.

$\Sigma \subseteq \Sigma$ (Ἐγκλεισμὸς μὲ πλατιὰ ἔννοια)

Παράδειγμα. Ἂς πάρουμε τὸ σύνολο Σ τῶν μαθητῶν τῆς τάξης μας καὶ τὸ ὑποσύνολό του Α τῶν μαθητῶν ποὺ μαθαίνουν Γαλλικά.

Δηλαδὴ $A \subseteq \Sigma$

Ἂν ὑποθέσουμε ὅτι ὅλοι οἱ μαθητὲς τῆς τάξης μας μαθαίνουν Γαλλικά, τότε τὸ σύνολο Σ ταυτίζεται μὲ τὸ ὑποσύνολό του Α.

II) Ἐπίσης ὁ ὁρισμὸς τοῦ ὑποσυνόλου μᾶς ἐπιτρέπει νὰ ποῦμε ὅτι:

Τὸ κενὸ σύνολο εἶναι ὑποσύνολο κάθε συνόλου.

$$\varnothing \subseteq \Sigma$$

Πραγματικά, δὲν ὑπάρχει στοιχεῖο τοῦ κενοῦ συνόλου, ποὺ νὰ μὴν ἀνήκει σ' ἕνα σύνολο Σ.

Παράδειγμα. Ἂν ὑποθέσουμε ὅτι οὔτε ἕνας μαθητὴς τῆς τάξης μας δὲν μαθαίνει Γαλλικά, τότε τὸ σύνολο Α, ποὺ εἶναι ὑποσύνολο τοῦ Σ, εἶναι τὸ κενὸ σύνολο.

3.3. Γνήσιο ὑποσύνολο συνόλου

Ἂς λάβουμε τὸ σύνολο $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ καὶ τὸ ὑποσύνολό του $\{\beta, \gamma\}$. Παρατηροῦμε ὅτι τὸ $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, ἐκτὸς ἀπὸ τὰ στοιχεῖα β καὶ γ ποὺ περιέχει τὸ ὑποσύνολό του, περιέχει καὶ ἄλλα στοιχεῖα, τὰ α, δ. Γι' αὐτὸ ἀκριβῶς, τὸ σύνολο {β, γ} λέγεται γ ν ή σ ι ο ὑ π ο σ ύ ν ο λ ο τοῦ {α, β, γ, δ}.

Γενικά: **Ἕνα σύνολο Β λέγεται γνήσιο ὑποσύνολο ἑνὸς συνόλου Α, ὅταν τὸ Α περιέχει ἕνα τουλάχιστο ἐπὶ πλέον στοιχεῖο ἐκτὸς ἀπὸ ἐκεῖνα ποὺ περιέχει τὸ Β.**

Τὸ γράφουμε $B \subset A$ (Ἐγκλεισμὸς μὲ στενὴ ἔννοια).

Παράδειγμα: Τὰ σύνολα {1}, {1, 2}, {2}, {2, 3} εἶναι γνήσια ὑποσύνολα τοῦ συνόλου {1, 2, 3}, ἐνῶ τὸ {1, 2, 3} δὲν εἶναι γνήσιο ὑποσύνολο.

3. 4. Ἰδιότητες

α) Καθὼς εἴδαμε στὴν § 3, 2 κάθε σύνολο Σ εἶναι ὑποσύνολο (ὄχι γνήσιο) τοῦ ἑαυτοῦ του

$$\boxed{\Sigma \subseteq \Sigma}$$

Γιὰ τοῦτο λέμε ὅτι ἡ σχέση ἐγκλεισμοῦ μὲ πλατιὰ σημασία ἔχει τὴν ἀ ν α κ λ α σ τ ι κ ὴ ἰ δ ι ό τ η τ α.

β) Ἂν σᾶς ποῦν ὅτι ἀνάμεσα σὲ τρία σύνολα Α, Β, Γ ἰσχύουν οἱ σχέσεις:

$$A \subseteq B \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad B \subseteq \Gamma \quad (2)$$

Τί συμπέρασμα βγάζετε γιὰ τὴ σχέση ἀνάμεσα στὸ Α καὶ στὸ Γ;

Ἀπὸ τὶς (1) καὶ (2) σ υ μ π ε ρ α ί ν ο υ μ ε ὅτι τὸ Α περιέχεται στὸ Γ, $A \subseteq \Gamma$. Αὐτὰ ὅλα διατυπώνονται συμβολικὰ ὡς ἑξῆς:

$$\boxed{A \subseteq B \ \text{καὶ} \ B \subseteq \Gamma \Rightarrow A \subseteq \Gamma^*} \quad (3)$$

Δηλαδή: Ἂν $A \subseteq B$ καὶ $B \subseteq \Gamma$, τ ό τ ε θὰ εἶναι καὶ $A \subseteq \Gamma$.
Ἢ $A \subseteq B$ καὶ $B \subseteq \Gamma$ συνεπάγεται ὅτι $A \subseteq \Gamma$.

Αὐτὴ ἡ ἰδιότητα τῆς σχέσης ἐγκλεισμοῦ λέγεται μ ε τ α β α τ ι κ ὴ ἰ δ ι ό τ η τ α.

Ὥστε ὁ ἐγκλεισμὸς μὲ πλατιὰ σημασία ἔχει τὴν ἀ ν α κ λ α σ τ ι κ ὴ καὶ τὴ μ ε τ α β α τ ι κ ὴ ἰδιότητα.

4. ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΕΝΟΣ ΣΥΝΟΛΟΥ**

4. 1. Καθὼς εἶναι γνωστό, σὲ πολλὲς περιπτώσεις χρησιμοποιοῦμε διαγράμματα, ὅπως π.χ. ὅταν θέλουμε ν' ἀποκτήσουμε μιὰ σύντομη καὶ παραστα-

* Τὸ σύμβολο $\Rightarrow$ εἶναι γνωστὸ ὡς σύμβολο σ υ ν ε π α γ ω γ ῆ ς.

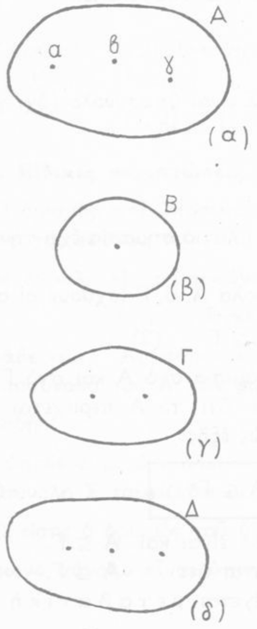
** Ἡ συστηματικὴ χρήση διαγραμμάτων γιὰ τὴ γραφικὴ παράσταση τῶν συνόλων ὀφείλεται στὸν Ἄγγλο Μαθηματικὸ J. Venn (1834 - 1923). Γιὰ τοῦτο εἶναι γνωστὰ ὡς διαγράμματα τοῦ Venn.

τικὴ εἰκόνα γιὰ τὴν πορεία τοῦ πυρετοῦ ἑνὸς ἀσθενοῦς, γιὰ τὶς μεταβολὲς τῆς θερμοκρασίας σὲ μιὰ περίοδο, γιὰ τὶς κινήσεις τῶν κερδῶν μιᾶς ἐπιχειρήσεως κλπ.

Διαγράμματα χρησιμοποιοῦμε, γιὰ νὰ ἔχουμε μιὰ παραστατικὴ εἰκόνα διαφόρων συνόλων καθὼς καὶ τῶν σχέσεων μεταξύ τους.

4. 2. Πῶς θὰ παραστήσουμε γραφικὰ ἕνα σύνολο; Π.χ. τὸ σύνολο $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$;

Παριστάνουμε κάθε στοιχεῖο τοῦ συνόλου μὲ ἕνα σημεῖο καὶ ἔπειτα κλείνουμε ὅλα αὐτὰ τὰ σημεῖα, καὶ μόνον αὐτά, μέσα σὲ μιὰν ἁπλὴ κλειστὴ γραμμὴ (σχ. 2α).



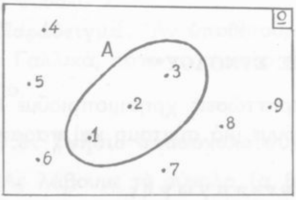
Σχ. 2.

Σύμφωνα μὲ τὰ πιὸ πάνω: ἕνα μονομελὲς σύνολο Β, ἕνα διμελὲς Γ, ἕνα τριμελὲς Δ, ἔχουν τὰ ἀντίστοιχα διαγράμματα (σχ. 2β, 2γ καὶ 2δ).

Γιὰ νὰ παραστήσουμε γραφικὰ ὅτι τοῦ συνόλου $A = \{1, 2, 3\}$ βασικὸ σύνολο εἶναι π.χ. τὸ $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$, σχηματίζουμε τὸ διάγραμμα τοῦ σχ. 3.

Ἀπὸ τὸ διάγραμμα αὐτὸ ἐννοοῦμε ὅτι:

$$A \subseteq \Omega, \quad 1 \in A, \quad 2 \in A, \quad 3 \in A,$$
$$4 \notin A, \quad 5 \notin A, \ldots$$



Σχ. 3.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

6. Νὰ ἀναφέρετε παραδείγματα ὑποσυνόλων τοῦ συνόλου τῶν μαθητῶν τῆς τάξης σας.

7. Ἂν $A = \{1, 2, 3, \ldots, 99\}$, $B = \{1, 2, 3, \ldots\}$ καὶ $\Gamma = \{1, 2, 3, \ldots, 999\}$, νὰ σχηματίσετε τὶς σχέσεις ἐγκλεισμοῦ μεταξύ τους.

8. Ἂν $A = \{\chi \mid \chi$ Εὐρωπαῖος$\}$, $B = \{\chi \mid \chi$ Ἕλληνας$\}$, $\Gamma = \{\chi \mid \chi$ Καναδὸς$\}$ καὶ $\Delta = \{\chi \mid \chi$ Βέλγος$\}$, νὰ ἐξετάσετε ποιὰ ἀπὸ τὰ σύνολα Β, Γ, Δ εἶναι ὑποσύνολα τοῦ Α.

9. Ἐξετάστε ἂν ἡ σχέση ἐγκλεισμοῦ μὲ στενὴ σημασία ἔχει τὴν ἀνακλαστικὴ ἰδιότητα.

10. Ποιὰ εἶναι τὰ ὑποσύνολα τοῦ συνόλου $\{0, 1\}$ καὶ ποιὰ τὰ γνήσια ὑποσύνολα τοῦ συνόλου $\{0, 1, 2\}$;

5. ΙΣΑ ΣΥΝΟΛΑ

5. 1. Ὁρισμὸς

Εἴδαμε ὅτι ἡ σειρὰ τῆς ἀναγραφῆς τῶν στοιχείων ἑνὸς συνόλου δὲν ἔχει σημασία. Δηλαδὴ οἱ συμβολισμοὶ $A =$

$=\{1, 2\}$ καὶ $B=\{2, 1\}$ παριστάνουν τὸ ἴδιο σύνολο ἤ, καθὼς λέμε, παριστάνουν δύο ἴ σ α σύνολα.

Ἂν προσέξουμε τὰ στοιχεῖα τῶν δύο συνόλων A καὶ B, διακρίνουμε ὅτι:

Κάθε στοιχεῖο τοῦ A εἶναι καὶ στοιχεῖο τοῦ B, ἀλλὰ καὶ

Κάθε στοιχεῖο τοῦ B » » » » A.

Ἕνα σύνολο A λέγεται ἴ σ ο μὲ ἕνα σύνολο B, ἐὰν κάθε στοιχεῖο τοῦ A εἶναι καὶ στοιχεῖο τοῦ B καὶ κάθε στοιχεῖο τοῦ B εἶναι καὶ στοιχεῖο τοῦ A.

Τότε γράφουμε $A=B$ (1)

Ἡ σχέση (1) λέγεται ἰ σ ό τ η τ α. Τὰ μέρη της ποὺ βρίσκονται ἀριστερὰ καὶ δεξιὰ τοῦ συμβόλου = λέγονται μ έ λ η τῆς ἰσότητας. Π ρ ῶ τ ο μέλος λέγεται τὸ ἀριστερὸ καὶ δ ε ύ τ ε ρ ο τὸ δεξιό.

Παραδείγματα

α) Τὰ σύνολα $\Gamma=\{3, 5, 7\}$ καὶ $\Delta=\{7, 5, 3\}$ εἶναι ἴσα μεταξύ τους· τὸ γράφουμε $\Gamma=\Delta$. Ἀντίθετα τὰ σύνολα $\Gamma=\{3, 5, 7\}$ καὶ $E=\{3, 5, 7, 9\}$ δὲν εἶναι ἴσα (Γιατί;)

β) Τὰ σύνολα $K=\{5, 6, 4\}$ καὶ $\Lambda=\{\chi \mid \chi$ ψηφίο τοῦ ἀριθμοῦ 4665$\}$ εἶναι ἴσα (Γιατί;)

5.2. Ἰδιότητες τῆς ἰσότητας συνόλων

I) Ὁ ὁρισμὸς τῆς ἰσότητας μᾶς ἐπιτρέπει νὰ λέμε ὅτι κάθε σύνολο A εἶναι ἴσο μὲ τὸν ἑαυτό του

$A=A$ Ἀ ν α κ λ α σ τ ι κ ὴ ἰ δ ι ό τ η τ α

II) Εὔκολα ἐννοοῦμε ὅτι, ἂν εἶναι $A=B$, τότε θὰ εἶναι καὶ $B=A$.

Ἢ συμβολικά: $A=B \Rightarrow B=A$ Σ υ μ μ ε τ ρ ι κ ὴ ἰ δ ι ό τ η τ α.

Αὐτὴ ἡ ἰδιότητα μᾶς ἐπιτρέπει νὰ ἐναλλάσσουμε τὸ α′ μέλος τῆς ἰσότητας μὲ τὸ β′ μέλος της.

Π.χ. γράφουμε $\{3, 5, 6\}=\{5, 3, 6\}$ ἢ $\{5, 3, 6\}=\{3, 5, 6\}$

III) Ἂν γνωρίζετε ὅτι $A=B$ καὶ $B=\Gamma$, τί συνάγετε γιὰ τὰ σύνολα A καὶ Γ;

Ἂν εἶναι $A=B$ καὶ $B=\Gamma$, τότε σ υ μ π ε ρ α ί ν ο υ μ ε ὅτι θὰ εἶναι καὶ $A=\Gamma$. Ἢ συμβολικά:

$(A=B$ καὶ $B=\Gamma) \Rightarrow A=\Gamma$ Μ ε τ α β α τ ι κ ὴ ἰ δ ι ό τ η τ α.

Ἡ μεταβατικὴ ἰδιότητα μᾶς ἐπιτρέπει νὰ κάνουμε ἔμμεσες συγκρίσεις. Μ' αὐτὴν εἶναι δυνατὸ νὰ βροῦμε ἂν δύο σύνολα A καὶ Γ εἶναι ἴσα, χωρὶς νὰ τὰ συγκρίνουμε ἀπευθείας, ἀλλὰ μόνο μὲ σύγκρισή τους πρὸς ἕνα ἄλλο σύνολο Β.

Ὥστε ἡ ἰσότητα τῶν συνόλων ἔχει τὶς ἰδιότητες:

1. Ἀνακλαστικὴ	$A = A$
2. Συμμετρικὴ	$A = B \Rightarrow B = A$
3. Μεταβατικὴ	$\left.\begin{array}{l} A = B \\ B = \Gamma \end{array}\right\} \Rightarrow A = \Gamma$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

11. Ποιὰ ἀπὸ τὰ σύνολα { 12, } { 1, 2 }, { 2, 1 }, { 1, 2, 0 } εἶναι ἴσα μεταξύ τους;

12. Πόσες συγκρίσεις πρέπει νὰ κάνετε, γιὰ νὰ βρεῖτε ἂν τρία σύνολα εἶναι ἴσα μεταξύ τους; Ἐπίσης, ὅταν τὰ σύνολα εἶναι τέσσερα;

6. ΜΟΝΟΣΗΜΑΝΤΗ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΑ.

6. 1. Πολὺ συχνὰ τὰ στοιχεῖα ἑνὸς συνόλου σχετίζονται μὲ τὰ στοιχεῖα ἑνὸς ἄλλου συνόλου ἢ ἀκόμη καὶ μὲ στοιχεῖα τοῦ ἰδίου συνόλου.

Ἂς εἶναι Α τὸ σύνολο τῶν μαθητῶν τῆς τάξης μας καὶ Β τὸ σύνολο τῶν θρανίων μέσα στὴν αἴθουσά μας. Ὅταν λέμε νὰ καθήσουν οἱ μαθητὲς στὶς θέσεις τους, ἀντιστοιχίζουμε κάθε μαθητὴ (στοιχεῖο τοῦ Α) μὲ ἕνα θρανίο (στοιχεῖο τοῦ Β), τὸ ὁρισμένο θρανίο ὅπου κάθεται ὁ μαθητής.

Ἂς λάβουμε ἀκόμη δύο σύνολα: τὸ σύνολο Γ τῶν μαθητῶν τοῦ γυμνασίου μας καὶ τὸ σύνολο Τ τῶν 6 τάξεων. Ὅταν λέμε νὰ μεταβοῦν οἱ μαθητὲς στὶς τάξεις τους, ἀντιστοιχίζουμε κάθε μαθητὴ (στοιχεῖο τοῦ Γ) μὲ μία τάξη (στοιχεῖο τοῦ Τ), τὴν τάξη ποὺ φοιτᾶ.

6. 2. Ἂς προσέξουμε τὶς ἑπόμενες ἀντιστοιχίες (α) καὶ (β) ποὺ τὶς ἔχουμε σημειώσει μὲ βέλη:

$$\begin{array}{l} A = \{\alpha, \beta, \gamma\} \\ \quad\ \downarrow\ \ \downarrow\ \ \downarrow \\ B = \{1, 2, 3, 4\} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \Gamma = \{\alpha, \beta, \gamma\} \\ \quad\ \downarrow\ \ \downarrow\ \swarrow \\ \Delta = \{1, 2\} \end{array} \qquad \begin{array}{l} E = \{\alpha, \quad \beta, \gamma\} \\ \quad\ \downarrow\ \searrow\ \downarrow\ \downarrow \\ Z = \{1, \ 2, 3, 4\} \end{array}$$

(α) (β) (γ)

Καὶ οἱ δύο ἔχουν ἕνα κοινὸ γνώρισμα. Ἀπὸ κάθε στοιχεῖο τοῦ συνόλου Α (ἢ Γ) ξεκινᾶ ἕνα βέλος, ποὺ δείχνει ὅτι σὲ κάθε στοιχεῖο τοῦ συνόλου Α (ἢ Γ) ἀντιστοιχεῖ ἕ ν α, κ α ὶ μ ό ν ο ἕ ν α, σ τ ο ι χ ε ῖ ο τοῦ Β (ἢ Δ). Π.χ. στὴν ἀντιστοιχία (α) καθὼς δείχνουν τὰ βέλη παρατηροῦμε ὅτι:

Στὸ στοιχεῖο α τοῦ συνόλου Α ἀντιστοιχεῖ τὸ 1 τοῦ Β
» » β » » » » 2 » Β
» » γ » » » » 3 » Β

Ἡ ἀντιστοιχία, στὴν ὁποία σὲ κάθε στοιχεῖο τοῦ συνόλου Α ἀντιστοιχεῖ ἕνα καὶ μόνο ἕνα στοιχεῖο τοῦ συνόλου Β, λέγεται μονοσήμαντη ἀντιστοιχία τοῦ Α στὸ Β.

Παραδείγματα μονοσήμαντων ἀντιστοιχιῶν ἔχομε πολλά. Π.χ. Ἡ ἀντιστοιχία «μαθητὴς → μήνας ποὺ γεννήθηκε» εἶναι μία μονοσήμαντη ἀντιστοιχία τοῦ συνόλου τῶν μαθητῶν στὸ σύνολο τῶν μηνῶν τοῦ ἔτους.

Ἀντιπαράδειγμα: Ἡ πιὸ πάνω ἀντιστοιχία (γ) δὲν εἶναι μονοσήμαντη. Γιατί;

7. ΑΜΦΙΜΟΝΟΣΗΜΑΝΤΗ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΑ. ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ ΣΥΝΟΛΑ

7.1. Ὁρισμοὶ

$$(\mathrm{I})\quad \begin{array}{l} A = \{\alpha, \beta, \gamma\} \\ \quad\ \ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow \\ B = \{1, 2, 3\} \end{array}$$

$$(\mathrm{II})\quad \begin{array}{l} A = \{\alpha, \beta, \gamma\} \\ \quad\ \ \uparrow\ \uparrow\ \uparrow \\ B = \{1, 2, 3\} \end{array}$$

$$(\mathrm{III})\quad \begin{array}{l} A = \{\alpha, \beta, \gamma\} \\ \quad\ \ \updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow \\ B = \{1, 2, 3\} \end{array}$$

Ἂς προσέξουμε τώρα τὴν ἀντιστοιχία (Ι), δίπλα.

Εἶναι μία μονοσήμαντη ἀντιστοιχία τοῦ συνόλου Α στὸ σύνολο Β. Ὅμως στὸ (ΙΙ) βλέπουμε ἐπιπλέον κι ἄλλη μιὰ ἀντιστοιχία μονοσήμαντη ἀπὸ τὸ Β στὸ Α.

Δηλαδή: Ἀνάμεσα στὰ σύνολα Α καὶ Β ὑπάρχει ἀντιστοιχία τέτοια, ὥστε:

Σὲ κάθε στοιχεῖο τοῦ Α νὰ ἀντιστοιχεῖ ἕνα, καὶ μόνο ἕνα, στοιχεῖο τοῦ Β, καὶ ἐπιπλέον σὲ κάθε στοιχεῖο τοῦ Β νὰ ἀντιστοιχεῖ ἕνα, καὶ μόνο ἕνα, στοιχεῖο τοῦ Α. Αὐτὴ ἡ διπλὴ ἀντιστοιχία (ΙΙΙ) λέγεται ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία μεταξὺ τῶν συνόλων Α καὶ Β. Σ' αὐτὴ τὴν περίπτωση τὸ σύνολο Α λέγεται ἰσοδύναμο μὲ τὸ σύνολο Β.

Γράφουμε τότε $A \sim B$

Γενικά: **Ἂν εἶναι δυνατὸ νὰ τοποθετήσουμε τὰ στοιχεῖα τοῦ Α σὲ ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία μὲ τὰ στοιχεῖα τοῦ Β,** τότε λέμε ὅτι τὸ Α εἶναι ἰσοδύναμο μὲ τὸ Β.

Τὸ σύμβολο $\sim$ λέγεται σύμβολο ἰσοδυναμίας μεταξὺ δύο συνόλων.

Παραδείγματα

α) Ὅταν τὸ μικρὸ παιδὶ μετρᾶ μὲ τὰ δάχτυλα τοῦ ἑνὸς χεριοῦ ἀπὸ τὸ 1 ἕως καὶ τὸ 5, σχηματίζει μιὰν ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία ἀνάμεσα στὸ σύνολο τῶν δαχτύλων τοῦ ἑνὸς χεριοῦ καὶ στὸ σύνολο $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

β) Τὸ σύνολο τῶν ἡμερῶν τῆς ἑβδομάδας εἶναι ἰσοδύναμο μὲ τὸ σύνολο τῶν φωνηέντων τοῦ ἀλφαβήτου μας.

Ἀντιπαράδειγμα

Τὸ σύνολο $A = \{\alpha, \beta\}$ δὲν εἶναι ἰσοδύναμο μὲ τὸ σύνολο $B = \{1, 2, 3\}$.

Πραγματικά: ἐνῶ κάθε στοιχεῖο τοῦ Α μπορεῖ νὰ τὸ ἀντιστοιχίσουμε κατὰ μοναδικὸ τρόπο μὲ ἕνα στοιχεῖο τοῦ Β,

π.χ. $\alpha \rightarrow 1, \quad \beta \rightarrow 2,$

κάθε στοιχεῖο τοῦ Β δὲν εἶναι δυνατὸ νὰ τὸ ἀντιστοιχίσουμε κατὰ τρόπο μοναδικὸ μὲ ἕνα στοιχεῖο τοῦ Α

$$1 \rightarrow \alpha, \quad 2 \rightarrow \beta, \quad 3 \rightarrow \;;$$

7. 2. Παρατηρήσεις

α) Τὰ στοιχεῖα δύο ἰσοδύναμων συνόλων μποροῦμε νὰ τὰ ἀντιστοιχίσουμε ἀμφιμονοσήμαντα μὲ διαφόρους τρόπους.

Π.χ. γιὰ τὰ ἰσοδύναμα σύνολα $A = \{1, 2\}$ καὶ $B = \{\alpha, \beta\}$

Ἔχουμε
$$\begin{matrix} \alpha \leftrightarrow 1 \\ \beta \leftrightarrow 2 \end{matrix} \qquad \begin{tikzcd} \alpha \arrow[dr, leftrightarrow] & 1 \\ \beta \arrow[ur, leftrightarrow] & 2 \end{tikzcd}$$
(2 τρόποι)

Ἐπίσης γιὰ τὰ ἰσοδύναμα σύνολα $A = \{1, 2, 3\}$ καὶ $B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ ἔχουμε:

$1 \leftrightarrow \alpha$	$1 \leftrightarrow \alpha$	$1 \leftrightarrow \beta$	$1 \leftrightarrow \beta$	$1 \leftrightarrow \gamma$	$1 \leftrightarrow \gamma$	
$2 \leftrightarrow \beta$	$2 \leftrightarrow \gamma$	$2 \leftrightarrow \gamma$	$2 \leftrightarrow \alpha$	$2 \leftrightarrow \beta$	$2 \leftrightarrow \alpha$	(6 τρόποι)
$3 \leftrightarrow \gamma$	$3 \leftrightarrow \beta$	$3 \leftrightarrow \alpha$	$3 \leftrightarrow \gamma$	$3 \leftrightarrow \alpha$	$3 \leftrightarrow \beta$	

β) Δύο ἴσα σύνολα εἶναι πάντοτε ἰσοδύναμα, ἐνῶ δύο ἰσοδύναμα δὲν εἶναι κατ᾽ ἀνάγκη καὶ ἴσα.

7. 3. Ἰδιότητες ἰσοδυναμίας

α) Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ τῶν ἰσοδύναμων συνόλων συνάγομε ὅτι κάθε σύνολο εἶναι ἰσοδύναμο μὲ τὸν ἑαυτό του

$$\boxed{A \sim A} \qquad \text{Ἀνακλαστικὴ ἰδιότητα}$$

β) Ἂν ὑπάρχει μία ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία ἀνάμεσα στὰ στοιχεῖα ἑνὸς συνόλου Α καὶ στὰ στοιχεῖα ἑνὸς συνόλου Β, τότε ἡ ἴδια ἀντιστοιχία ὑπάρχει καὶ ἀνάμεσα στὰ στοιχεῖα τοῦ Β καὶ στὰ στοιχεῖα τοῦ Α.

Δηλαδὴ ἂν ἕνα σύνολο Α εἶναι ἰσοδύναμο μὲ τὸ σύνολο Β, τότε καὶ τὸ Β εἶναι ἰσοδύναμο μὲ τὸ Α.

$$\boxed{A \sim B \Rightarrow B \sim A} \qquad \text{Συμμετρικὴ ἰδιότητα.}$$

γ) Ἂν ὑπάρχει μία ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία ἀνάμεσα στὰ στοιχεῖα τῶν συνόλων Α καὶ Β, $A \sim B$ καὶ ὑπάρχει ἀκόμη μία ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία ἀνάμεσα στὰ στοιχεῖα τῶν συνόλων Β καὶ Γ, $B \sim \Gamma$, τότε θὰ ὑπάρχει μία ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία ἀνάμεσα στὰ στοιχεῖα τῶν συνόλων Α καὶ Γ, $A \sim \Gamma$.

$\boxed{(A \sim B \text{ καὶ } B \sim \Gamma) \Rightarrow A \sim \Gamma}$ Μεταβατικὴ ἰδιότητα.

Ὥστε ἡ σχέση ἰσοδυναμίας μεταξὺ τῶν συνόλων ἔχει τὶς ἑξῆς ἰδιότητες:

1. Ἀνακλαστικὴ	$A \sim A$
2. Συμμετρικὴ	$A \sim B \Rightarrow B \sim A$
3. Μεταβατικὴ	$\left.\begin{matrix} A \sim B \\ B \sim \Gamma \end{matrix}\right\} \Rightarrow A \sim \Gamma$

Ποιὰ ἄλλη σχέση ἀνάμεσα σὲ σύνολα ἔχει αὐτὲς τὶς ἰδιότητες;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

13. Νὰ ἀναφέρετε παραδείγματα μὲ μονοσήμαντες ἀντιστοιχίες καὶ μὲ ἀμφιμονοσήμαντες ἀντιστοιχίες.

14. Ποιὲς ἀπὸ τὶς ἑπόμενες σχέσεις εἶναι ἀληθεῖς καὶ ποιὲς ψευδεῖς;

$\varnothing \sim \{0\}$ $\qquad$ $\{\varnothing, \{\alpha\}, \beta\} \sim \{\alpha, \beta, 1\}$

$\varnothing \sim 0$ $\qquad$ $\{\alpha, \beta, 1\} \sim \{\{\alpha, \beta\}, 1\}$

15. Οἱ μαθητὲς Τζιτζᾶς, Παγώνης καὶ Νίκας κάθονται σὲ τρεῖς θέσεις α, β, γ. Μὲ πόσους καὶ ποιοὺς τρόπους εἶναι δυνατὸ νὰ σχηματίσετε ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία ἀνάμεσα στὸ σύνολο τῶν μαθητῶν καὶ στὸ σύνολο τῶν θέσεών τους;

8. ΤΟΜΗ ΣΥΝΟΛΩΝ

8.1. Ὁρισμὸς

Στὸ σύνολο Σ τῶν μαθητῶν τῆς τάξης μας οἱ μαθητὲς Νίκας, Σαμπάνης, Δουζίνας καὶ Σχοινᾶς εἶναι ἀριστοῦχοι στὰ Ἑλληνικά. Οἱ μαθητὲς Κυριαζῆς, Κουμαντάτος, Νίκας, Δουζίνας καὶ Μανιάτης εἶναι ἀριστοῦχοι στὰ Μαθηματικά.

Καθὼς βλέπουμε, οἱ δύο μαθητὲς Νίκας καὶ Δουζίνας εἶναι ἀριστοῦχοι καὶ στὰ δύο μαθήματα: Στὰ Μαθηματικὰ καὶ στὰ Ἑλληνικά. Ἂς διατυπώσουμε τὰ πιὸ πάνω στὴ γλώσσα τῶν συνόλων.

Θέτουμε Α = {Νίκας, Σαμπάνης, Δουζίνας, Σχοινᾶς}

Β = {Κυριαζῆς, Κουμαντάτος, Νίκας, Δουζίνας, Μανιάτης}

Γ = {Νίκας, Δουζίνας}

Τὸ σύνολο Γ, ποὺ τὸ ἀπαρτίζουν τὰ κοινὰ στοιχεῖα τῶν συνόλων Α, Β, καὶ μόνον αὐτά, λέγεται τομὴ τοῦ συνόλου Α μὲ τὸ σύνολο Β.

Γράφουμε τότε:

$$\boxed{A \cap B = \Gamma}$$ ($\cap$ εἶναι τὸ σύμβολο τῆς τομῆς)

καὶ διαβάζουμε: Α τομὴ Β ἴσον Γ.

Δηλαδὴ κάθε στοιχεῖο τῆς τομῆς $A \cap B$ ἀνήκει καὶ στὸ Α καὶ στὸ Β.

Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ τῆς τομῆς ἐννοοῦμε ὅτι τὸ χαρακτηριστικὸ γνώρισμα τῶν στοιχείων της εἶναι: «κοινὰ στοιχεῖα τῶν συνόλων Α καὶ Β».

Ἔτσι ἔχουμε:

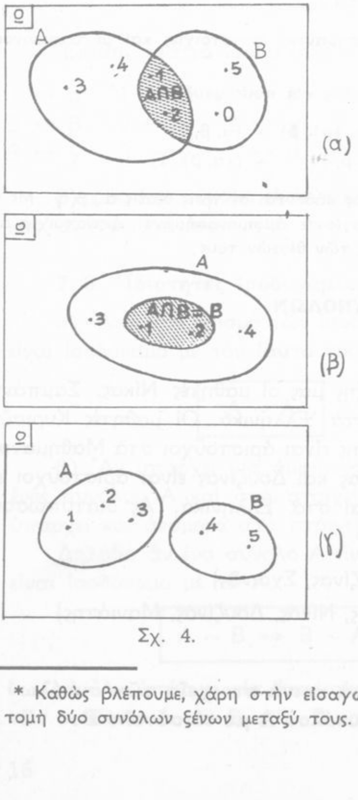
$$A \cap B = \{\chi \mid \chi \text{ κοινὸ στοιχεῖο τῶν Α καὶ Β}\}$$

Ἤ

$$\boxed{A \cap B = \{\chi \mid \chi \in A \text{ καὶ } \chi \in B\}}$$

Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ τῆς τομῆς ἐννοοῦμε ἀκόμη ὅτι:

$$A \cap B \subseteq A, \quad A \cap B \subseteq B \quad \text{καὶ } A \cap \varnothing = \varnothing$$



Σχ. 4.

Παραδείγματα

α) Ἂν $A = \{1, 2, 3, 4\}$ καὶ $B = \{0, 1, 2, 5\}$,

τότε $A \cap B = \{1, 2\}$.

Αὐτὴ ἡ τομὴ στὸ σχ. 4α παριστάνεται μὲ τὴ σκιερὴ ἐπιφάνεια.

β) Ἂν $A = \{1, 2, 3, 4\}$ καὶ $B = \{1, 2\}$,

τότε $A \cap B = \{1, 2\}$.

Καὶ αὐτὴ ἡ τομὴ παριστάνεται στὸ σχ. 4β μὲ τὴ σκιερὴ ἐπιφάνεια.

γ) Ἂν $A = \{1, 2, 3\}$ καὶ $B = \{4, 5\}$, τότε παρατηροῦμε ὅτι τὰ Α καὶ Β δὲν ἔχουν κανένα κοινὸ στοιχεῖο.

Συνεπῶς $A \cap B = \varnothing$. (σχ. 4γ).

Σ' αὐτὴ τὴν περίπτωση λέμε ὅτι τὰ σύνολα εἶναι ξένα* μεταξύ τους.

* Καθὼς βλέπουμε, χάρη στὴν εἰσαγωγὴ τοῦ κενοῦ συνόλου μπορέσαμε νὰ ὁρίσουμε τὴν τομὴ δύο συνόλων ξένων μεταξύ τους.

8. 2. Ἰδιότητες τῆς τομῆς

α) Μεταθετική

Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ τῆς τομῆς ἐννοοῦμε ὅτι τὰ σύνολα $A \cap B$ καὶ $B \cap A$ εἶναι ἴσα.

$$\boxed{A \cap B = B \cap A}$$

Τοῦτο σημαίνει ὅτι, γιὰ νὰ βροῦμε τὴν τομὴ δύο συνόλων, δὲν ἔχει σημασία ἡ σειρὰ (διάταξη) μὲ τὴν ὁποία θὰ λάβουμε τὰ δύο σύνολα. Γι' αὐτὸ λέμε ὅτι ἡ τομὴ δύο συνόλων εἶναι πράξη μεταθετικὴ ἤ, μ' ἄλλα λόγια, ἔχει τὴ μεταθετικὴ ἰδιότητα.

β) Προσεταιριστική

Προηγουμένως ὁρίσαμε τὴν τομὴ δύο συνόλων. Τί θὰ ὀνομάσουμε τομὴ τριῶν συνόλων Α, Β, Γ;

Ὀνομάζουμε τομὴ τριῶν συνόλων κατὰ τὴ σειρὰ Α, Β, Γ τὸ σύνολο ποὺ προκύπτει, ἂν σχηματίσουμε πρῶτα τὴν τομὴ τῶν συνόλων Α καὶ Β, $A \cap B$, καὶ ἔπειτα τὴν τομὴ τοῦ συνόλου $A \cap B$ μὲ τὸ σύνολο Γ.

Γιὰ νὰ σημειώσουμε τὴν τομὴ τοῦ συνόλου $A \cap B$ μὲ τὸ σύνολο Γ,

γράφουμε: $\boxed{(A \cap B) \cap \Gamma.}$ *

Ἤτοι γιὰ τὴν εὕρεση τῆς τομῆς τριῶν συνόλων, κατὰ τὴ σειρὰ Α, Β, Γ, ὅπου π.χ. $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ καὶ $\Gamma = \{2, 4, 6, 8\}$, ἐκτελοῦμε κατὰ σειρὰ τὶς ἀκόλουθες δύο πράξεις:

$$A \cap B = \{2, 3\},$$
$$(A \cap B) \cap \Gamma = \{2, 3\} \cap \{2, 4, 6, 8\} = \{2\}$$

Ὥστε $(A \cap B) \cap \Gamma = \{2\}$ (1)

Ἂς βροῦμε ἤδη καὶ τὴν τομὴ τῶν δύο συνόλων Α καὶ $B \cap \Gamma$.

Ἔχουμε: $B \cap \Gamma = \{2, 4\}$,

$$A \cap (B \cap \Gamma) = \{1, 2, 3\} \cap \{2, 4\}$$

ἢ $A \cap (B \cap \Gamma) = \{2\}$ (2)

Ἀπὸ τὶς (1) καὶ (2) συνάγουμε ὅτι τὸ σύνολο $(A \cap B) \cap \Gamma$ εἶναι ἴσο μὲ τὸ σύνολο $A \cap (B \cap \Gamma)$:

$$\boxed{(A \cap B) \cap \Gamma = A \cap (B \cap \Gamma)} \quad (3)$$

---

* Ἡ παρένθεση δηλώνει ὅτι θὰ βρεθεῖ πρῶτα ἡ τομὴ τῶν συνόλων Α καὶ Β.

Γι' αὐτὸ λέμε ὅτι ἡ τομὴ τῶν συνόλων ἔχει τὴν προσεταιριστικὴ ἰδιότητα ἢ ὅτι εἶναι πράξη προσεταιριστική.

Ὥστε ἡ τομὴ τῶν συνόλων ἔχει τὶς ἰδιότητες:

1. Μεταθετική	$A \cap B = A \cap \Gamma$
2. Προσεταιριστική	$(A \cap B) \cap \Gamma = A \cap (B \cap \Gamma)$

Σημειώσεις

1) Ἂν συνδυάσουμε τὴν προσεταιριστικὴ μὲ τὴ μεταθετικὴ ἰδιότητα, βρίσκουμε ὅτι ἡ τομὴ τριῶν συνόλων δὲν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴ σειρά τους.

Π.χ. $(A \cap B) \cap \Gamma = A \cap (B \cap \Gamma)$ Προσεταιριστικὴ ἰδιότητα.
$= A \cap (\Gamma \cap B)$ Μεταθετική.
$= (A \cap \Gamma) \cap B$ Προσεταιριστική.

2) Ἂν θέλουμε τὴν τομὴ περισσότερων συνόλων, τότε βρίσκουμε τὴν τομὴ τῶν τριῶν πρώτων, ἔπειτα τὴν τομὴ τοῦ ἀποτελέσματος αὐτοῦ μὲ τὸ τέταρτο σύνολο κ.ο.κ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

16. Νὰ ὁρίσετε τὶς τομὲς $A \cap B$, $A \cap \Gamma$, $(A \cap \Gamma) \cap B$, ὅπου $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $B = \{\chi \mid \chi$ γράμμα τῆς λέξης «διά»$\}$ καὶ $\Gamma = \{\chi \mid \chi$ φωνῆεν$\}$ καὶ νὰ τὶς παραστήσετε μὲ διαγράμματα.

17. Νὰ ἐπαληθεύσετε ὅτι $(A \cap B) \cap \Gamma = (\Gamma \cap A) \cap B$. (Χρησιμοποιῆστε δικά σας σύνολα).

18. Νὰ ὁρίσετε τὴν τομὴ $A \cap \varnothing$, ὅπου A εἶναι ἕνα τυχαῖο σύνολο.
Ἂν $A \cap B = \varnothing$, τί συνάγετε γιὰ τὰ σύνολα A καὶ B; Ἐπίσης καὶ ἂν $A \cap B = B$.

9 ΕΝΩΣΗ ΣΥΝΟΛΩΝ

9.1. Ὁρισμός

Ἂς ξανάρθουμε στὰ σύνολα A = {Νίκας, Σαμπάνης, Δουζίνας, Σχοινᾶς} καὶ B = {Κυριαζῆς, Κουμαντάτος, Νίκας, Δουζίνας, Μανιάτης}. Δηλαδὴ στὰ σύνολα τῶν ἀριστούχων μαθητῶν τῆς τάξης μας, στὰ Ἑλληνικὰ (σύνολο A) καὶ στὰ Μαθηματικὰ (σύνολο B). Ἂν ζητήσουμε τὸ σύνολο Γ τῶν ἀριστούχων μαθητῶν τῆς τάξης μας ἢ στὰ Ἑλληνικὰ ἢ στὰ Μαθηματικὰ ἢ καὶ στὰ δυὸ μαζί, θὰ ἔχουμε:

Γ = {Νίκας, Σαμπάνης, Δουζίνας, Σχοινᾶς, Κυριαζῆς, Κουμαντάτος, Μανιάτης}.

Τὸ σύνολο Γ, ποὺ ἀπαρτίζεται ἀπὸ τὰ στοιχεῖα τῶν συνόλων A καὶ B, καὶ μόνον ἀπ' αὐτά, λέγεται ἕνωση* τοῦ συνόλου A μὲ τὸ σύνολο B.

---

* Ἐννοεῖται ὅτι τὸ κάθε κοινὸ στοιχεῖο τῶν συνόλων A καὶ B δὲν παρουσιάζεται δυὸ φορὲς στὴν ἕνωση.

Γράφουμε τότε:

$$\boxed{A \cup B = \Gamma}$$ (∪ εἶναι τὸ σύμβολο τῆς ἑνώσεως)

καὶ διαβάζουμε Α ἕνωση Β ἴσον Γ.

Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ τῆς ἑνώσεως ἐννοοῦμε ὅτι τὸ χαρακτηριστικὸ γνώρισμα τῶν στοιχείων της εἶναι: «Στοιχεῖα ποὺ ἀνήκουν στὸ σύνολο Α εἴτε* στὸ σύνολο Β».

Ἔτσι ἔχουμε:

$$\boxed{A \cup B = \{\chi \mid \chi \in A \ \text{εἴτε} \ \chi \in B\}}$$

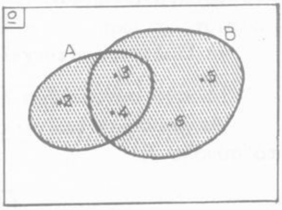
Ἐπίσης ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ τῆς ἑνώσεως προκύπτει ὅτι:

$$A \subseteq A \cup B \quad \text{καὶ} \quad B \subseteq A \cup B$$

Παραδείγματα:

α) Ἂν $A = \{2, 3, 4\}$ καὶ $B = \{3, 4, 5, 6\}$, τότε $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

Αὐτὴ τὴν ἕνωση στὸ σχ. 5 τὴν παριστάνουμε μὲ τὴ σκιερὴ ἐπιφάνεια.



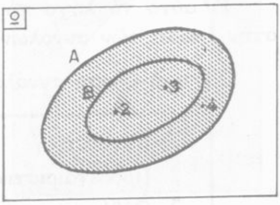
Σχ. 5.

β) Ἂν $A = \{2, 3, 4\}$ καὶ $B = \{2, 3\}$, τότε:

$A \cup B = \{2, 3, 4\} = A$ (Σχ. 6)

γ) Ἂν $A = \{2, 3, 4\}$ καὶ $B = \{5, 6\}$, τότε:

$A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ (Σχ. 7)



Σχ. 6.

9. 2. Ἰδιότητες

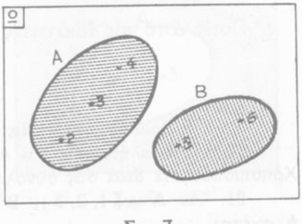
α) Μεταθετική

Εἶναι φανερὸ ὅτι τὰ σύνολα $A \cup B$ καὶ $B \cup A$ εἶναι ἴσα μεταξύ τους.

$A \cup B = B \cup A$ Μεταθετικὴ ἰδιότητα.

β) Προσεταιριστική

Ὅπως στὴν τομή, ἔτσι κι ἐδῶ λέμε ἕνωση τριῶν συνόλων κατὰ τὴ σειρὰ Α, Β, Γ τὴν ἕνωση τοῦ $A \cup B$ μὲ τὸ Γ καὶ γράφουμε $(A \cup B) \cup \Gamma$. Συνεπῶς ἂν εἶναι:



Σχ. 7.

* Τὸ «εἴτε» σημαίνει ἢ στὸ Α ἢ στὸ Β ἢ καὶ στὰ δύο μαζί.

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ καὶ $\Gamma = \{3, 4, 5\}$, τότε θὰ ἔχουμε:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\},$$
$$(A \cup B) \cup \Gamma = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{3, 4, 5\}$$

ἢ
$$(A \cup B) \cup \Gamma = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad (1)$$

Εἶναι ὅμως:

$$B \cup \Gamma = \{2, 3, 4, 5\}$$

καὶ
$$A \cup (B \cup \Gamma) = \{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4, 5\}$$

ἢ
$$A \cup (B \cup \Gamma) = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad (2)$$

Ἀπὸ τὶς ἰσότητες (1) καὶ (2) ἔχουμε ὅτι:

$$\boxed{(A \cup B) \cup \Gamma = A \cup (B \cup \Gamma)}$$

Δηλαδὴ ἡ ἕνωση συνόλων εἶναι μία πράξη προσεταιριστική.

γ) Οὐδέτερο στοιχεῖο

Τὸ κενὸ σύνολο ἔχει ἕναν ἰδιαίτερο ρόλο στὴν πράξη τῆς ἑνώσεως.

Ἂν ἑνώσουμε ἕνα σύνολο Α μὲ τὸ κενὸ σύνολο, θὰ βροῦμε ὡς ἀποτέλεσμα τὸ σύνολο Α.

$$\boxed{A \cup \varnothing = \varnothing \cup A = A.}$$

Γι' αὐτὸ τὸ λόγο τὸ κενὸ σύνολο καλεῖται οὐδέτερο στοιχεῖο στὴν ἕνωση τῶν συνόλων.

Ὥστε ἡ ἕνωση συνόλων ἔχει τὶς ἰδιότητες:

1. Μεταθετικὴ	$A \cup B = B \cup A$
2. Προσεταιριστικὴ	$(A \cup B) \cup \Gamma = A \cup (B \cup \Gamma)$
3. Οὐδέτερο στοιχεῖο	$A \cup \varnothing = \varnothing \cup A = A$

Ποιὲς ἀπὸ τὶς ἰδιότητες αὐτὲς ἔχει ἡ τομὴ τῶν συνόλων;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

19. Νὰ βρεθοῦν οἱ ἑνώσεις: $\{1, 2, 5\} \cup \{2, 4, 6\}$, $\{1, 3, 4\} \cup \{2, 5, 6\}$

20. Νὰ ἐπαληθεύσετε ὅτι $A \cup (\Gamma \cup B) = (A \cup B) \cup \Gamma$
Χρησιμοποιῆστε δικά σας σύνολα.

21. Ἂν $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ καὶ $\Gamma = \{0, 1, 2\}$, νὰ ἐξετάσετε ἂν ἰσχύει ἡ σχέση: $A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$

22. Ἂν γιὰ τρία σύνολα Α, Β, Γ εἶναι $A \cup B \subset \Gamma$, τότε ποιά σχέση ὑπάρχει ἀνάμεσα στὰ Α καὶ Γ ἢ στὰ Β καὶ Γ.

23. Νὰ ἐπαληθεύσετε τὶς σχέσεις: $A \cup (A \cap B) = A$ καὶ $A \cap (A \cup B) = A$ μὲ δικά σας σύνολα.

10. ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ Ἢ (ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟ) ΕΝΟΣ ΣΥΝΟΛΟΥ

10. 1. Ὁρισμὸς

Ἂς λάβουμε τὸ σύνολο Ω τῶν γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου μας καὶ ἂς ὁρίσουμε ἕνα ὑποσύνολό του: Τὸ σύνολο Α τῶν φωνηέντων. Μ' αὐτὸν τὸν τρόπο ὁρίζεται κι ἕνα ἄλλο σύνολο Β: Τὸ σύνολο τῶν συμφώνων. Δηλαδὴ τὸ σύνολο τῶν στοιχείων τοῦ Ω, ποὺ δὲν ἀνήκουν στὸ Α. Τὸ σύνολο Β λέγεται σ υ μ π λ ή ρ ω μ α (ἢ σ υ μ π λ η ρ ω μ α τ ι κ ὸ) τοῦ συνόλου Α ὡς πρὸς τὸ σύνολο Ω.

Γενικά: **Συμπλήρωμα ἑνὸς συνόλου Α ὡς πρὸς ἕνα σύνολο Ω λέγεται τὸ σύνολο τῶν στοιχείων τοῦ Ω ποὺ δὲν ἀνήκουν στὸ Α.**

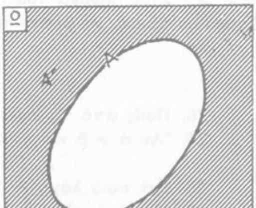
Τὸ συμπλήρωμα τοῦ συνόλου Α ὡς πρὸς τὸ σύνολο Ω τὸ σημειώνουμε μὲ A'.

Ἀπὸ αὐτὸ τὸν ὁρισμὸ τοῦ συμπληρώματος τοῦ Α ὡς πρὸς τὸ σύνολο Ω, ἔχουμε:

$$\boxed{A \cap A' = \varnothing} \quad \text{καὶ} \quad \boxed{A \cup A' = \Omega}$$

10. 2. Γραφικὴ παράσταση

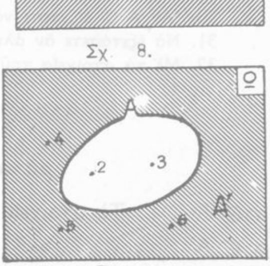
Ἡ γραφικὴ παράσταση τοῦ συμπληρώματος A' ἑνὸς συνόλου Α ὡς πρὸς ἕνα βασικὸ σύνολο Ω ἀποδίδεται στὸ Σχ. 8 (σκιερὴ ἐπιφάνεια).



Σχ. 8.

Τὸ A' εἶναι τὸ μέρος ποὺ ἀπομένει ἀπὸ τὸ διάγραμμα τοῦ Ω, ὅταν ἀπ' αὐτὸ ἀφαιρέσουμε τὸ μέρος ποὺ παριστάνει τὸ Α.

Παράδειγμα: Ἂν λάβουμε ὡς βασικὸ σύνολο Ω τὸ σύνολο $\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ καὶ τὸ σύνολο $A = \{2, 3\}$, τότε τὸ συμπλήρωμα τοῦ Α ὡς πρὸς τὸ Ω εἶναι τὸ $A' = \{4, 5, 6\}$ (σχ. 9).



Σχ. 9.

ΑΣΚΗΣΗ

24. Ἂν $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, νὰ βρεῖτε τὸ συμπλήρωμα: α) A' τοῦ $A = \{1, 3\}$, β) τοῦ $\varnothing$, γ) κάθε διμελοῦς ὑποσυνόλου τοῦ Ω.

11. ΖΕΥΓΟΣ

Προσέξετε τὸν πίνακα τοῦ σχ. 10. Πῶς θὰ ὁρίσουμε τὴ θέση τοῦ Α;

Θὰ ποῦμε ὅτι τὸ Α βρίσκεται στὴ διασταύρωση τῆς 3ης σειρᾶς καὶ τῆς 2ης στήλης. Θέση τοῦ Α: 3η σειρὰ καὶ 2η στήλη. Ἢ πιὸ σύντομα: Α (3, 2). Δηλαδὴ στὴν παράσταση (3, 2) ὁ α′ ὅρος, τὸ 3, παριστάνει τὸν ἀριθμὸ τῆς σειρᾶς καὶ ὁ β′ ὅρος, τὸ 2, τὸν ἀριθμὸ τῆς στήλης. Ἂν ἀλλάξουμε τὴ σειρὰ τῶν ὅρων στὴν παρένθεση, δὲν ὁρίζουμε πιὰ τὴ θέση τοῦ Α, ἀλλὰ τοῦ Β.

Θέση τοῦ Β: 2η σειρά, 3η στήλη, ἢ πιὸ σύντομα: Β (2, 3). Τέτοιες καταστάσεις μᾶς ὁδηγοῦν στὴ χρησιμοποίηση διμελῶν συνόλων, ποὺ τὰ στοιχεῖα τους ἔχουν μιὰν ὁρισμένη σειρὰ μεταξύ τους.

Τὸ σύνολο δύο στοιχείων α, β, ἀπὸ τὰ ὁποῖα τὸ α εἶναι πρῶτο καὶ τὸ β εἶναι δεύτερο, λέγεται διατεταγμένο ζεῦγος ἤ, πιὸ σύντομα, ζεῦγος.

0	1	2	3	4
1				
2		Δ	Β	Γ
3		Α	Ε	
4				

Σχ. 10.

Τὸ γράφουμε: (α, β).

Δηλαδὴ ἡ γραφὴ (3, 2) παριστάνει ἕνα ζεῦγος μὲ π ρ ῶ τ ο στοιχεῖο τὸ 3 καὶ δ ε ύ τ ε ρ ο τὸ 2. Δὲν ἀποκλείεται τὰ στοιχεῖα ἑνὸς ζεύγους νὰ εἶναι ἴσα. Π.χ. γιὰ τὴ θέση Δ ἔχουμε τὸ ζεῦγος (2, 2).

Σύμφωνα μὲ τὰ προηγούμενα:

Εἶναι $(\alpha, \beta) = (\gamma, \delta)$, ὅταν, καὶ μόνον ὅταν, $\alpha = \gamma$ καὶ $\beta = \delta$.

Δηλαδὴ $(\alpha, \beta) \neq (\beta, \alpha)$, ἐκτὸς ἂν εἶναι $\alpha = \beta$.

ΑΣΚΗΣΗ

25. Στὸν πίνακα τοῦ σχεδίου 10 νὰ ὁρίσετε τὶς θέσεις τῶν σημείων Γ, Ε μὲ ζεύγη. Στὸν ἴδιο πίνακα νὰ βρεῖτε ποιά τετραγωνίδια ὁρίζουν τὰ ζεύγη (1, 2), (2, 1), (1, 1), (2, 2).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

26. Ποιὲς ἀπὸ τὶς σχέσεις: $\chi = \{\chi\}$, $\chi \in \{\chi\}$, $\chi \neq \{\chi\}$ εἶναι ἀληθεῖς:
27. Ἂν $\alpha \neq \beta$ καὶ $\chi \neq \psi$, τότε νὰ δικαιολογήσετε τὴ συνεπαγωγή:
$\{\alpha, \chi\} = \{\beta, \psi\} \Longrightarrow (\alpha = \psi$ καὶ $\beta = \chi)$
28. Γιὰ ποιὸ λόγο $A \nsubseteq B \Longrightarrow A \not\subset B$;
29. Ἀπὸ τὸ σύνολο $A = \{1, 2, 3, 4\}$ πόσα γνήσια ὑποσύνολα προκύπτουν;
30. Ἂν $A \subseteq \varnothing$, τότε νὰ δείξετε ὅτι $A = \varnothing$.
31. Νὰ ἐξετάσετε ἂν ἀληθεύει ἡ σχέση: $(A \cap B) \cup \Gamma = (A \cup \Gamma) \cap (B \cup \Gamma)$
32. Μὲ τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου $\{1, 2, 3\}$ ποιὰ ζεύγη μπορεῖτε νὰ κάνετε;

ΠΙΝΑΚΑΣ

μὲ τοὺς κυριότερους συμβολισμοὺς

$\alpha \in A$: Τὸ στοιχεῖο α ἀ ν ή κ ε ι στὸ σύνολο Α.
$\alpha \notin A$: » » δ ὲ ν ἀ ν ή κ ε ι » » Α.
$\{\ \}$: Ἄγκιστρα γιὰ τὴν παράσταση ἑνὸς συνόλου.

$\chi : \chi \ldots$	:	χ ὅπου $\chi \ldots$
$\chi \mid \chi \ldots$	:	» » »...
$\varnothing$	:	Κενὸ σύνολο.
$A \subseteq B$	:	A εἶναι ὑποσύνολο τοῦ B.
$A \subset B$	:	A » γνήσιο ὑποσύνολο τοῦ B.
$\Longrightarrow$	:	Τὸ σύμβολο τῆς συνεπαγωγῆς.
$\Leftrightarrow$	:	» » » διπλῆς συνεπαγωγῆς.
$A \cap B$	:	A τομὴ B.
$A \cup B$	:	A ἕνωση B.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β'

ΑΠΟ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

12. ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

12.1. Πάνω στὸ ἄδειο τραπέζι τοποθετοῦμε ἕνα ἀντικείμενο α. Ἔπειτα τοποθετοῦμε ἄλλο ἀντικείμενο β, ἄλλο γ κ.ο.κ.

Ἔτσι, σχηματίζεται μιὰ σειρὰ ἀπὸ σύνολα $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \ldots$

Μὲ τὴν πρώτη τοποθέτηση ἔχουμε τὸ σύνολο $\Sigma_1 = \{\alpha\}$

» δεύτερη » » » $\Sigma_2 = \{\alpha, \beta\}$

» τρίτη » » » $\Sigma_3 = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ κ.ο.κ.

Τὸ σύνολο Σ_1 καὶ ὅλα τὰ ἰσοδύναμα μ' αὐτὸ σύνολα,

π.χ. $\{+\}, \{\times\}, \{.\}, \{\Delta\}, \ldots,$

γεννοῦν στὴ σκέψη μας τὴν ἔννοια τοῦ ἀριθμοῦ ἕ ν α.

Ὅμοια τὸ σύνολο Σ_2 καὶ ὅλα τὰ ἰσοδύναμα μ' αὐτὸ σύνολα,

π.χ. $\{+, \Delta\}, \{-, \Delta\}, \{., \Delta\}, \{X, Y\} \ldots,$

γεννοῦν στὴ σκέψη μας τὴν ἔννοια τοῦ ἀριθμοῦ δ ύ ο.

Μὲ ὅμοιο τρόπο γεννᾶται ἡ ἔννοια τῶν ἀριθμῶν τ ρ ί α, τ έ σ σ ε ρ α κλπ.

12.2. Παρατηροῦμε ὅτι οἱ ἀριθμοὶ ἕνα, δύο, τρία κλπ. φανερώνουν τὸ πλῆθος τῶν στοιχείων σὲ καθένα ἀπ' αὐτὰ τὰ σύνολα. Γι' αὐτὸ καὶ ὀνομάζονται καὶ π λ η θ ι κ ο ὶ ἀ ρ ι θ μ ο ὶ τῶν συνόλων. Π.χ. ὁ ἀριθμὸς τρία εἶναι πληθικὸς ἀριθμὸς τοῦ συνόλου $\{\alpha, \beta, \gamma\}$.

12.3. Ἂς προσέξουμε πῶς σχηματίζεται τὸ σύνολο Σ_2 ἀπὸ τὸ σύνολο Σ_1, τὸ σύνολο Σ_3 ἀπὸ τὸ σύνολο Σ_2 κ.ο.κ.

Παρατηροῦμε ὅτι:

$$\{\alpha, \beta\} = \{\alpha\} \cup \{\beta\} \quad \text{ἤ} \quad \Sigma_2 = \Sigma_1 \cup \{\beta\}$$
$$\{\alpha, \beta, \gamma\} = \{\alpha, \beta\} \cup \{\gamma\} \quad \text{ἤ} \quad \Sigma_3 = \Sigma_2 \cup \{\gamma\}$$

Ἀπὸ τὰ πιὸ πάνω ἐννοοῦμε ὅτι καθένας ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 2, 3, 4, ... προκύπτει ἀπὸ τὸν ἀντιστοίχως προηγούμενό του ἀριθμὸ 1, 2, 3, ..., ἂν ὁ τελευταῖος αὐτὸς αὐξηθεῖ κατὰ τὸν ἀριθμὸ ἕνα (1). Εἶναι φανερὸ ὅτι μ' αὐτὸν τὸν τρόπο μποροῦμε νὰ συνεχίσουμε χωρὶς τέλος καὶ νὰ σχηματίσουμε τὴ σειρὰ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν:

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

Αὐτὴ ἡ σειρὰ ἔχει ἕνα στοιχεῖο ἀρχικό, τὴ μονάδα, καὶ κανένα τελευταῖο. Τὸ σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν τὸ παριστάνουμε μὲ τὸ γράμμα N:

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

13. ΑΠΑΡΙΘΜΗΣΗ

13. 1. Ἀπὸ τὸ σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν $N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ σχηματίζουμε τὰ ὑποσύνολα:

$$N_1 = \{1\}$$
$$N_2 = \{1, 2\}$$
$$N_3 = \{1, 2, 3\} \quad \text{κ.ο.κ.}$$

Καθὼς παρατηροῦμε, τὸ τελευταῖο στοιχεῖο (ἀριθμὸς) καθενὸς ἀπὸ τὰ σύνολα $N_1, N_2, N_3, \ldots$ εἶναι καὶ ὁ πληθικός του ἀριθμός.

13. 2. Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ πλῆθος τῶν στοιχείων ἑνὸς συνόλου, π.χ. τοῦ συνόλου $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, λέμε ἕνα, δύο, τρία, τέσσερα, δείχνοντας ἕνα-ἕνα τὰ στοιχεῖα του μέχρις ὅτου τελειώσουν. Μ' αὐτὸν τὸν τρόπο ἀντιστοιχίζουμε ἀμφιμονοσήμαντα τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου A μὲ τὰ στοιχεῖα ἑνὸς ἀπὸ τὰ ὑποσύνολα $N_1, N_2, N_3, \ldots$ τοῦ N, καὶ συγκεκριμένα στὴν περίπτωσή μας μὲ τὰ στοιχεῖα τοῦ N_4:

$$\begin{array}{l} A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} \\ \quad\;\;\; \updownarrow \;\; \updownarrow \;\; \updownarrow \;\; \updownarrow \\ N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\} \end{array}$$

Ὁ 4, τελευταῖος ἀριθμὸς τοῦ N_4, εἶναι ὁ πληθικὸς ἀριθμὸς τοῦ συνόλου A.

Ἡ εὕρεση τοῦ πληθικοῦ ἀριθμοῦ ἑνὸς συνόλου λέγεται ἀπαρίθμηση τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου.

14. ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΚΑΙ ΜΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΥΝΟΛΑ

14. 1. Τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου $A = \{\chi \mid \chi$ ἡμέρα τῆς ἑβδομάδας$\}$ εἶναι φανερὸ ὅτι μποροῦν νὰ τεθοῦν σὲ ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία μὲ τὸ ἀρχικὸ ἀπόκομμα

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

τῆς σειρᾶς τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν.

Γι' αὐτὸν τὸ λόγο λέμε ὅτι τὸ σύνολο A εἶναι πεπερασμένο.

Τὸ σύνολο Α καὶ γενικὰ κάθε σύνολο ἰσοδύναμο μ' ἕνα ἀπὸ τὰ σύνολα $N_1, N_2, N_3, \ldots$ λέμε ὅτι ἔχει πεπερασμένο πλῆθος στοιχείων ἢ ὅτι εἶναι πεπερασμένο σύνολο.

14. 2. Ἂς προσπαθήσουμε νὰ βροῦμε τὸν πληθικὸ ἀριθμὸ τοῦ συνόλου

$$N = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

Θὰ διαπιστώσουμε ὅτι μᾶς εἶναι ἀδύνατο. Ὅποιον φυσικὸ ἀριθμὸ καὶ ἂν σκεφτοῦμε, θὰ ὑπάρχει πάντοτε ὁ ἀμέσως ἑπόμενός του, ποὺ θὰ εἶναι καὶ αὐτὸς στοιχεῖο τοῦ συνόλου Ν. Δηλαδὴ τὸ σύνολο Ν δὲν εἶναι πεπερασμένο σύνολο.

Γιὰ τοῦτο λέμε ὅτι τὸ σύνολο Ν τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν εἶναι μὴ πεπερασμένο σύνολο ἢ ἀπειροσύνολο.

Παραθέτουμε καὶ ἄλλα παραδείγματα ἀπὸ πεπερασμένα καὶ ἀπὸ μὴ πεπερασμένα σύνολα:

Πεπερασμένα σύνολα	Ἀπειροσύνολα
1) Οἱ κάτοικοι τῆς γῆς	1) Οἱ ἄρτιοι ἀριθμοὶ
2) Οἱ λέξεις ἑνὸς ὁρισμένου λεξικοῦ	2) Οἱ περιττοὶ ἀριθμοὶ
3) Τὰ αὐτοκίνητα ποὺ κυκλοφοροῦν	3) Τὰ σημεῖα μιᾶς εὐθείας

15. ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

15. 1. Ὀνομάζουμε μηδὲν (0) τὸν πληθικὸ ἀριθμὸ τοῦ κενοῦ συνόλου. Ἡ ἕνωση τοῦ συνόλου $\{0\}$ μὲ τὸ σύνολο Ν τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ὀνομάζεται σύνολο τῶν ἀκεραίων τῆς ἀριθμητικῆς.

$$\{0\} \cup \{1, 2, 3, \ldots\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Αὐτὸ τὸ νέο σύνολο τὸ παριστάνουμε σύντομα μὲ N_0.

Δηλαδή: $$N_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

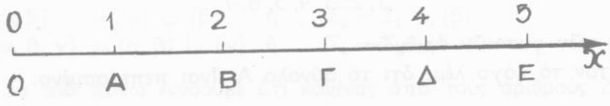
Τὰ σύμβολα μὲ τὰ ὁποῖα παριστάνουμε τοὺς ἀκεραίους λέγονται ψηφία. Εἰδικὰ τὰ ψηφία:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,$$

ὀνομάζονται ἀραβικὰ ψηφία, ἐπειδὴ πρῶτοι οἱ Ἄραβες τὰ χρησιμοποίησαν καὶ ἀπὸ αὐτοὺς τὰ παρέλαβαν γύρω στὸν 9ο αἰώνα οἱ λαοὶ τῆς Δύσεως.

15.2. Παράσταση τῶν ἀκεραίων πάνω σὲ ἡμιευθεία.

Χαράζουμε μιὰν ἡμιευθεία Οχ καὶ λαμβάνουμε διαδοχικὰ ἐπάνω σ' αὐτὴν ἴσα τμήματα ΟΑ = ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = ... (σχ. 11).



Τοὺς ἀριθμοὺς 0, 1, 2, 3, 4, ... τοὺς τοποθετοῦμε στὰ σημεῖα Α, Β, Γ, ... ἀντιστοίχως. Γι' αὐτὸ τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, ... ὀνομάζονται εἰκόνες αὐτῶν τῶν ἀριθμῶν. Ἡ ἡμιευθεία Οχ λέγεται ἡμιευθεία διατάξεως τοῦ συνόλου τῶν ἀκεραίων.

15.3. Χρησιμοποίηση γραμμάτων γιὰ τὴν παράσταση τῶν ἀριθμῶν.

Συχνὰ στὰ Μαθηματικὰ μᾶς διευκολύνει ἡ χρησιμοποίηση γραμμάτων γιὰ τὴν παράσταση ἀριθμῶν. Π.χ. κατὰ τὸ συμβολισμὸ τοῦ συνόλου τῶν μονοψηφίων φυσικῶν ἀριθμῶν γράφουμε:

$$\{\, \chi \mid \chi \text{ μονοψήφιος ἀριθμὸς} \,\}$$

Σ' αὐτὴν τὴν περίπτωση χρησιμοποιοῦμε τὸ χ γιὰ νὰ παραστήσουμε ἕναν ἀριθμό, ποὺ εἶναι μὲν ὁρισμένος, ἀλλὰ συγχρόνως μπορεῖ νὰ εἶναι καὶ ὁποιοσδήποτε ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 1, 2, 3, ..., 9.

Γνωρίζουμε ὅτι, γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸ ἑνὸς ὀρθογωνίου, πολλαπλασιάζουμε τὸ μῆκος μὲ τὸ πλάτος του. Ὁ ἴδιος κανόνας ἀποδίδεται πιὸ σύντομα μὲ τὸν γνωστὸ τύπο:

$$E = \alpha \cdot \beta$$

ὅπου τὰ γράμματα α καὶ β παριστάνουν τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος τοῦ ὀρθογωνίου.

Δηλαδὴ καὶ σ' αὐτὴ τὴν περίπτωση χρησιμοποιοῦμε γράμματα, γιὰ νὰ παραστήσουμε ὁρισμένους μὲν ἀλλὰ ὁποιουσδήποτε ἀριθμούς. Μ' αὐτὴν τὴν ἔννοια λέμε ὅτι τὰ γράμματα α καὶ β παριστάνουν γενικοὺς ἀριθμούς.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

33. Τὸ σύνολο $A = \{\, \chi \mid \chi$ μήνας τοῦ ἔτους $\}$ μὲ ποιό ἀπὸ τὰ σύνολα N_1, N_2, N_3, ... εἶναι ἰσοδύναμο; Ποιὸς εἶναι ὁ πληθικὸς ἀριθμός του;
34. Νὰ ἀναφέρετε παραδείγματα ἀπὸ πεπερασμένα καὶ ἀπὸ μὴ πεπερασμένα σύνολα.
35. Νὰ βρεῖτε γνήσια ὑποσύνολα τοῦ N_0, ποὺ νὰ εἶναι ἰσοδύναμα μὲ αὐτό.

16. ΤΟ ΔΕΚΑΔΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΡΙΘΜΗΣΕΩΣ

16. 1. Ἀρίθμηση

Καθὼς εἴδαμε, οἱ ἀκέραιοι ἀποτελοῦν μιὰ σειρὰ ἀπὸ ἀριθμοὺς χωρὶς τέλος. Εἶναι δηλαδή, ὅπως λέμε, στὸ πλῆθος ἄπειροι. Ἂν γιὰ κάθε ἀκέραιο εἴχαμε διαφορετικὸ ὄνομα, ἄσχετο μὲ τὰ ὀνόματα τῶν ἄλλων, θὰ χρειαζόμασταν ἄπειρες λέξεις γιὰ νὰ τοὺς ὀνομάσουμε καὶ ἄπειρα σύμβολα γιὰ νὰ τοὺς γράψουμε. Ἐκτὸς ἀπὸ αὐτό, θὰ ἦταν ἀδύνατη ἡ ἀπομνημόνευση καὶ ἡ χρησιμοποίηση ἀριθμῶν.

Ἔτσι προκύπτει τὸ ἑξῆς πρόβλημα:

Πῶς εἶναι δυνατό, συνδυάζοντας λίγες λέξεις καὶ σύμβολα, νὰ ὀνομάζουμε καὶ νὰ γράφουμε ὅλους τοὺς ἀκεραίους.

Τὴν ἀπάντηση σ' αὐτὸ τὸ πρόβλημα τὴ δίνει ἡ ἀ ρ ί θ μ η σ η (προφορικὴ καὶ γραπτή).

16. 2. Προφορικὴ ἀρίθμηση

Κατὰ τὴν ἀπαρίθμηση τῶν στοιχείων ἑνὸς συνόλου βρίσκουμε ἕναν ἀριθμό. Ἂς δοῦμε μὲ ποιὸ τρόπο ὀνομάζουμε αὐτὸν τὸν ἀριθμὸ στὸ δ ε κ α δ ι κ ὸ σ ύ σ τ η μ α ἀριθμήσεως.

Ἂς λάβουμε π.χ. ἕνα σύνολο ἀπὸ βώλους.

α) Ἂν οἱ βῶλοι εἶναι λιγότεροι ἀπὸ δέκα, χρησιμοποιοῦμε ἕνα ἀπὸ τὰ ἐννέα ὀνόματα τῶν ἀριθμῶν:

ἕνα, δύο, τρία, τέσσερα, . . . , ἐννέα.

β) Ἂν οἱ βῶλοι εἶναι περισσότεροι ἀπὸ ἐννέα, τότε σχηματίζουμε μὲ αὐτοὺς ὅσες δ ε κ ά δ ε ς εἶναι δυνατό.

Ἔτσι, μπορεῖ νὰ σχηματίσουμε π.χ. πέντε δεκάδες καὶ νὰ μείνουν τρεῖς βῶλοι. Τότε ὁ ἀριθμὸς τῶν βώλων θὰ εἶναι διψήφιος· θὰ ἀποτελεῖται ἀπὸ πέντε δεκάδες καὶ τρεῖς μονάδες.

Καθεμιὰ δεκάδα λέγεται καὶ μονάδα δ ε υ τ έ ρ α ς τ ά ξ ε ω ς, ἐνῶ καθεμιὰ μονάδα λέγεται ἁ π λ ὴ μ ο ν ά δ α ἢ μ ο ν ά δ α π ρ ώ τ η ς τ ά ξ ε ω ς.

γ) Ἂν οἱ δεκάδες ποὺ σχηματίσαμε πιὸ πάνω ἦταν περισσότερες ἀπὸ ἐννέα, τότε τὶς ἑνώνουμε δέκα-δέκα. Ἔτσι, σχηματίζονται «νέες» μονάδες, οἱ ἑ κ α τ ο ν τ ά δ ε ς.

Π.χ. μπορεῖ νὰ σχηματίσουμε ἑφτὰ ἑκατοντάδες καὶ νὰ μείνουν πέντε δεκάδες καὶ τρεῖς μονάδες.

Σ' αὐτὴ τὴν περίπτωση ὁ ἀριθμὸς τῶν βώλων θὰ εἶναι τ ρ ι ψ ή φ ι ο ς· θὰ ἀποτελεῖται ἀπό:

ἑφτὰ ἑκατοντάδες, πέντε δεκάδες καὶ τρεῖς μονάδες.

Ἡ μιὰ ἑκατοντάδα λέγεται καὶ μονάδα τ ρ ί τ η ς τ ά ξ ε ω ς.

Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο μποροῦμε νὰ συνεχίσουμε ὅσο χρειαστεῖ.

Ἀπὸ τὰ προηγούμενα ἐννοοῦμε ὅτι στὸ δεκαδικὸ σύστημα ἀριθμήσεως:

i) Δέκα μονάδες μιᾶς τάξεως σχηματίζουν μιὰ μονάδα ἀπὸ τὴν ἀμέσως ἀνώτερη τάξη (δέκα μονάδες = μιὰ δεκάδα, δέκα δεκάδες = μιὰ ἑκατοντάδα).

ii) Κάθε ἀριθμὸς ἀποτελεῖται ἀπὸ μονάδες διαφόρων τάξεων.

Ἂν ὑπάρχουν πολλὲς τάξεις, τὶς χωρίζουμε διαδοχικά, τρεῖς-τρεῖς, σὲ κ λ ά σ ε ι ς, ὅπως φαίνεται στὸν ἑπόμενο πίνακα.

Τάξη	Ὀνόματα τάξεων	Γραφὴ μὲ ψηφία	Κλάσεις
1η	Ἁπλὴ μονάδα	1	1η κλάση (μονάδων)
2η	Δεκάδα	10	
3η	Ἑκατοντάδα	100	
4η	Χιλιάδα	1000	2η κλάση (χιλιάδων)
5η	Δεκάδα χιλιάδων	10000	
6η	Ἑκατοντάδα χιλιάδων	100000	
7η	Ἑκατομμύριο	1000000	3η κλάση (ἑκατομμυρίων)
8η	Δεκάδα ἑκατομμυρίων	10000000	
9η	Ἑκατοντάδα ἑκατομμυρίων	100000000	

Βάση σ' ἕνα σύστημα ἀριθμήσεως εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν μονάδων ποὺ πρέπει νὰ λάβουμε γιὰ νὰ δημιουργήσουμε μιὰ μονάδα ἀπὸ τὴν ἀμέσως ἀνώτερη τάξη. Ἡ βάση ἑνὸς συστήματος μπορεῖ νὰ εἶναι δέκα, ὅπως πιὸ πάνω, μπορεῖ νὰ εἶναι 5 (πενταδικὸ σύστημα), 12 (δωδεκαδικὸ σύστημα) κ.ο.κ.

16. 3. **Γραπτὴ ἀρίθμηση** (γραφὴ τῶν ἀριθμῶν μὲ ψηφία)

Στὸ δεκαδικὸ σύστημα ἀριθμήσεως γιὰ τὴ γραφὴ τῶν ἀριθμῶν χρησιμοποιοῦμε τὰ δέκα γνωστὰ ψηφία:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Ἕνας ἀκέραιος ἀριθμὸς γράφεται μὲ ἕνα ἢ περισσότερα ἀπὸ τὰ δέκα αὐτὰ ψηφία. Π.χ. ὁ ἀριθμὸς ἑφτὰ ἑκατοντάδες, πέντε δεκάδες καὶ τρεῖς μονάδες γράφεται 753.

Γιὰ τὸν τρόπο γραφῆς παρατηροῦμε τὰ ἑξῆς:

α) Τὸ πρῶτο ψηφίο ἀπὸ δεξιὰ (τὸ 3) δηλώνει τὶς μονάδες πρώτης τάξεως, τὸ δεύτερο ψηφίο (τὸ 5) τὶς μονάδες δευτέρας τάξεως κ.ο.κ. Ἔτσι στὸν ἀριθμὸ 222 τὸ ἴδιο ψηφίο, τὸ 2, ἀνάλογα μὲ τὴ θέση του δηλώνει μονάδες, δεκάδες ἢ ἑκατοντάδες.

β) Ἂν δὲν ὑπάρχουν μονάδες μιᾶς τάξεως, στὴ θέση τους τοποθετοῦμε τὸ μηδέν. Π.χ. στὴν περίπτωση γραφῆς τοῦ ἀριθμοῦ πέντε ἑκατοντάδες καὶ δύο ἁπλὲς μονάδες, γράφουμε 502. Δηλαδή, στὴ θέση τῶν δεκάδων τοποθετοῦμε τὸ μηδὲν (0).

Ἔτσι ἂν στὸ τέλος τοῦ ἀριθμοῦ 24 τοποθετήσουμε τὸ μηδέν, 240, ἀμέσως οἱ 4 μονάδες θὰ γίνουν δεκάδες καὶ οἱ 2 δεκάδες θὰ γίνουν ἑκατοντάδες.

17. Η ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΓΡΑΦΗ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες χρησιμοποιοῦσαν τὸ δεκαδικὸ σύστημα ἀριθμήσεως, ἀλλὰ ἀντὶ γιὰ ἀραβικὰ σύμβολα μεταχειρίζονταν τὰ γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου καθὼς καὶ τὰ σύμβολα Ϛ (στίγμα), Ϟ (κόππα) καὶ Ϡ (σαμπί).

Ἔτσι γιὰ τὶς ἁπλὲς μονάδες 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

εἶχαν τὰ σύμβολα α' β' γ' δ' ε' ς' ζ' η' θ', ἀντιστοίχως

γιὰ τὶς δεκάδες 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90

τὰ σύμβολα ι', κ', λ', μ', ν', ξ', ο', π', ϟ'

γιὰ τὶς ἑκατοντάδες 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900

τὰ σύμβολα ρ', σ', τ', υ', φ', χ', ψ', ω', ϡ'

Γιὰ τὶς χιλιάδες μεταχειρίζονταν τὰ ἴδια γράμματα ἀλλὰ μὲ τὸν τόνο ἀριστερὰ καὶ κάτω.

Π.χ. ἀντὶ γιὰ τὰ 1000 2000 3000

εἶχαν τὰ σύμβολα ͵α, ͵β, ͵γ ἀντιστοίχως.

Ἡ γραφὴ τῶν ἄλλων ἀκεραίων γίνεται μὲ τὴν ἑξῆς συμφωνία:

«Ὁ ἀριθμὸς ποὺ σχηματίζεται, ὅταν γράψουμε γράμματα στὴ σειρά, παριστάνει τὸ ἄθροισμα τῶν μονάδων ὅλων τῶν ψηφίων».

Π.χ. ια' σημαίνει $10 + 1 = 11$

ξη' σημαίνει $60 + 8 = 68$

Ὁ ἀριθμὸς 1821 γράφεται ͵αωκα'.

18. Η ΡΩΜΑΪΚΗ ΓΡΑΦΗ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Οἱ Ρωμαῖοι χρησιμοποιοῦσαν ἐπίσης τὸ δεκαδικὸ σύστημα ἀριθμήσεως.

I, V, X, L, C, D, M,

ἀντὶ γιὰ τὰ 1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000 ἀντιστοίχως.

Γιὰ νὰ γράφουν τοὺς ἄλλους ἀριθμούς, εἶχαν τοὺς ἑξῆς κανόνες:

α) Ὅμοια γράμματα, ὅταν γραφτοῦν τὸ ἕνα δίπλα στὸ ἄλλο, προστίθενται.

Π.χ. $XX = 10 + 10 = 20$

$CCC = 100 + 100 + 100 = 300$

β) Ὅταν ἕνα γράμμα γράφεται ἀριστερὰ ἀπὸ ἕνα μεγαλύτερό του, ἀφαιρεῖται ἀπὸ αὐτό· ἀντίθετα, ὅταν γράφεται δεξιά, προστίθεται.

Π.χ. $IV = 4$ $XL = 40$ $XC = 90$

$VI = 6$ $LX = 60$ $CCXVI = 216$

γ) Κάθε ψηφίο τοποθετημένο ἀνάμεσα σὲ δύο ἄλλα μεγαλύτερά του, τὸ ἀφαιροῦμε ἀπὸ ἐκεῖνο ποὺ βρίσκεται δεξιά του καὶ τὴ διαφορὰ τὴν προσθέτουμε στὸ ψηφίο ποὺ εἶναι ἀριστερά του.

Π.χ. $$\mathrm{XIV} = 10 + (5 - 1) = 14$$

δ) Ὅταν ἕνα γράμμα ἔχει μιὰν ὁριζόντια γραμμὴ ἐπάνω, παριστάνει χιλιάδες, δυὸ γραμμές, ἑκατομμύρια κ.ο.κ.

$$\overline{\mathrm{V}} = 5.000, \quad \overline{\overline{\mathrm{XIX}}} = 19.000.000$$

$$\overline{\mathrm{X}} = 10.000$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

36. α) Πόσες μονάδες, δεκάδες, ἑκατοντάδες ἔχει καθένας ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 200, 8.000, 32.000, 1.000.000; β) Πόσους διψήφιους, τριψήφιους ἀριθμοὺς μπορεῖτε νὰ γράψετε μὲ ψηφίο μονάδας τὸ 3;

37. Νὰ βρεῖτε ἕνα διψήφιο ἀριθμὸ τέτοιον, ὥστε, ἂν βάλουμε τὸ 0 ἀνάμεσα στὰ ψηφία του, νὰ αὐξηθεῖ κατὰ 4 ἑκατοντάδες καὶ νὰ ἐλαττωθεῖ κατὰ 4 δεκάδες.

38. Νὰ γράψετε διαφόρους διψήφιους ἀριθμοὺς καὶ ἔπειτα νὰ ἀλλάξετε σὲ καθέναν ἀπ' αὐτοὺς τὸ ψηφίο τῶν μονάδων μὲ τὸ ψηφίο τῶν δεκάδων. Τί παρατηρεῖτε γιὰ τὴ μεταβολὴ τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν;

39. Νὰ γράψετε μὲ ἀραβικὰ ψηφία τοὺς ἀριθμοὺς κγ', ρογ', ͵αωκα', XC, CLX, MCCX, MXV.

19. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑΣ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

19.1. Ἴσοι καὶ ἄνισοι ἀριθμοί.

Ὅταν μποῦμε σ' ἕνα λεωφορεῖο καὶ παρατηρήσουμε τὰ δύο σύνολα, «ἐπιβάτες» καὶ «καθίσματα», εἶναι δυνατὸ νὰ διαπιστώσουμε ὅτι:

Οἱ ἐπιβάτες εἶναι ὅσοι καὶ τὰ καθίσματα. Δηλαδὴ τὸ πεπερασμένο σύνολο «ἐπιβάτες» εἶναι ἰσοδύναμο μὲ τὸ πεπερασμένο σύνολο «καθίσματα»·

ἤ: Κάθε ἐπιβάτης κατέχει ἕνα κάθισμα καὶ μένουν ἄδεια καθίσματα·

ἤ: Ὑπάρχει σὲ κάθε κάθισμα ἕνας ἐπιβάτης καὶ ἐπιπλέον ὄρθιοι ἐπιβάτες.

Ἂν παραστήσουμε μὲ α τὸν πληθικὸ ἀριθμὸ τοῦ συνόλου «ἐπιβάτες» καὶ μὲ β τὸν πληθικὸ ἀριθμὸ τοῦ συνόλου «καθίσματα», τότε:

Στὴν 1η περίπτωση λέμε ὅτι οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β εἶναι ἴ σ ο ι μεταξύ τους καὶ γράφουμε $\alpha = \beta$.

Στὴ 2η περίπτωση λέμε ὅτι ὁ ἀριθμὸς α εἶναι μ ι κ ρ ό τ ε ρ ο ς ἀπὸ τὸν β καὶ γράφουμε $\alpha < \beta$.

Στὴν 3η περίπτωση λέμε ὅτι ὁ ἀριθμὸς α εἶναι μ ε γ α λ ύ τ ε ρ ο ς ἀπὸ τὸν β καὶ γράφουμε $\alpha > \beta$.

Στὶς δύο τελευταῖες περιπτώσεις οἱ ἀριθμοὶ εἶναι ἄ ν ι σ ο ι μεταξύ τους.

Εἶναι φανερὸ ὅτι, ἂν δοθοῦν οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β, μ ί α, κ α ὶ μ ό ν ο μ ί α, ἀπὸ τὶς προηγούμενες σχέσεις θὰ ἰσχύει.

Γενικά: α) **Δύο ἀριθμοὶ α, β, λέγονται ἴσοι, ὅταν εἶναι πληθικοὶ ἀριθμοὶ σὲ δύο σύνολα ποὺ εἶναι πεπερασμένα καὶ ἰσοδύναμα.**

β) **Ἕνας ἀκέραιος α λέγεται μεγαλύτερος ἀπὸ ἄλλον ἀκέραιο β, ἂν ὁ α εἶναι πληθικὸς ἀριθμὸς ἑνὸς πεπερασμένου συνόλου Α καὶ ὁ β ἑνὸς γνήσιου ὑποσυνόλου του Β.**

Ἂν ὁ α εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν β, τότε λέμε ὅτι καὶ ὁ β εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὸν α.

19.2. Ἰσότητα, ἀνισότητα.

Ἡ σχέση $\alpha=\beta$, μὲ τὴν ὁποία δηλώνουμε ὅτι ὁ ἀκέραιος α εἶναι ἴσος μὲ τὸν β, λέγεται ἰ σ ό τ η τ α. Αὐτὰ ποὺ γράφουμε ἀπὸ τὰ δύο μέρη τοῦ συμβόλου = τῆς ἰσότητας τὰ λέμε μ έ λ η τῆς ἰσότητας· αὐτὸ ποὺ εἶναι ἀριστερὰ λέγεται π ρ ῶ τ ο μέλος καὶ αὐτὸ ποὺ εἶναι δεξιὰ δ ε ύ τ ε ρ ο μέλος.

Οἱ σχέσεις $\alpha<\beta$, καὶ $\alpha>\beta$ λέγονται ἀνισότητες, μὲ πρῶτο μέλος πρὸς τὰ ἀριστερὰ καὶ δεύτερο μέλος πρὸς τὰ δεξιὰ τῶν συμβόλων τῆς ἀνισότητας ($<$, $>$).

Σημειώνουμε ὅτι οἱ σχέσεις $\alpha<\beta$ καὶ $\beta>\alpha$ ἔχουν ἀκριβῶς τὴν ἴδια σημασία.

19.3. Ἰδιότητες τῆς ἰσότητας.

Εἶναι φανερὸ ὅτι:

1. Κάθε ἀκέραιος α εἶναι ἴσος μὲ τὸν ἑαυτό του.

$\alpha=\alpha$ Ἀ ν α κ λ α σ τ ι κ ὴ ἰ δ ι ό τ η τ α

2. Ἂν ὁ ἀκέραιος α εἶναι ἴσος μὲ τὸν ἀκέραιο β, τότε καὶ ὁ ἀκέραιος β εἶναι ἴσος μὲ τὸν α.

$\alpha=\beta \Rightarrow \beta=\alpha$ Σ υ μ μ ε τ ρ ι κ ὴ ἰ δ ι ό τ η τ α

3. Ἂν ἀνάμεσα στοὺς ἀκεραίους α, β, γ εἶναι:

$$\alpha=\beta \text{ καὶ } \beta=\gamma, \text{ τότε θὰ εἶναι καὶ } \alpha=\gamma$$

Ἢ συμβολικὰ $\left.\begin{array}{l}\alpha=\beta\\ \beta=\gamma\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha=\gamma$ Μ ε τ α β α τ ι κ ὴ ἰ δ ι ό τ η τ α

Ἡ συμμετρικὴ ἰδιότητα μᾶς ἐπιτρέπει νὰ ἐναλλάσσουμε τὸ 1ο μέλος μιᾶς ἰσότητας μὲ τὸ 2ο, ἐνῶ ἡ μεταβατικὴ μᾶς ἐπιτρέπει ἔμμεσες συγκρίσεις.

Οἱ προηγούμενες τρεῖς ἰδιότητες τῆς ἰσότητας ἀκεραίων προκύπτουν ἀπὸ τὶς ἰδιότητες τῶν ἰσοδυνάμων συνόλων.

19.4. Ἰδιότητες τῆς ἀνισότητας.

Ἂς δοῦμε ἂν οἱ ἰδιότητες τῆς ἰσότητας ἰσχύουν καὶ στὴν ἀνισότητα.
Ἡ σχέση $5 > 5$ δὲν εἶναι ἀληθής.
Ὅμοια δὲν εἶναι ἀληθὲς ὅτι:

$$5 > 3 \Rightarrow 3 > 5$$

Γενικά: Στὴν ἀνισότητα δὲν ἰσχύει ἡ ἀνακλαστικὴ καὶ ἡ συμμετρικὴ ἰδιότητα, ἰσχύει ὅμως ἡ μεταβατικὴ ἰδιότητα.

Πραγματικά: Ἂν εἶναι $\alpha > 4$ καὶ $4 > \beta$, τότε θὰ εἶναι καὶ $\alpha > \beta$.
Γενικά: ἂν α, β, γ εἶναι ἀκέραιοι, τότε:

$$\left.\begin{array}{r} \alpha > \beta \\ \text{καὶ} \quad \beta > \gamma \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha > \gamma$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

40. Νὰ γράψετε τὴ σχέση ποὺ ὑπάρχει ἀνάμεσα στὸ α καὶ στὸ β, ὅταν:
α) $\alpha =$ ὁ ἀριθμὸς σὲ μονόδραχμα καὶ $\beta =$ ὁ ἀριθμὸς σὲ δίδραχμα σ' ἕνα εἰκοσάδραχμο.
β) $\alpha =$ ὁ πληθικὸς ἀριθμὸς τοῦ συνόλου A { χ | χ ψηφίο τοῦ ἀριθμοῦ 35 }, $\beta =$ πληθικὸς ἀριθμὸς τοῦ συνόλου $B =$ { χ | χ ψηφίο τοῦ ἀριθμοῦ 15673 }.

41. Ἂν τὰ α, β, γ εἶναι τὰ ἀντίστοιχα βάρη τριῶν κιβωτίων Α, Β, Γ, πόσες τουλάχιστο μετρήσεις χρειάζεστε, γιὰ νὰ συγκρίνετε τὰ βάρη αὐτά;

20. ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΩΣ ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΟ ΣΥΝΟΛΟ

20.1. Διάταξη

Σ' ἕνα λεξικὸ μποροῦμε νὰ βροῦμε εὔκολα ὁποιαδήποτε λέξη θελήσουμε, ἐπειδὴ οἱ λέξεις εἶναι τοποθετημένες μὲ ἀλφαβητικὴ σειρά.

Ὅταν ἡ τοποθέτηση τῶν ἀντικειμένων γίνεται μὲ βάση κάποιον κανόνα, τότε λέμε ὅτι τὰ ἀντικείμενα αὐτὰ εἶναι διατεταγμένα.

Οἱ μαθητὲς στὴν ὥρα τῆς γυμναστικῆς εἶναι διατεταγμένοι κατ' ἀνάστημα.

20.2. Στὰ προηγούμενα θεωρήσαμε τὰ σύνολα ἀνεξάρτητα ἀπὸ τὴ διάταξη τῶν στοιχείων τους, $\{1, 2\} = \{2, 1\}$.

Πιὸ κάτω θὰ ἐξετάσουμε τὸ σύνολο N_0 ὡς διατεταγμένο σύνολο. Τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου $N_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, μὲ τὸν τρόπο ποὺ κατασκευάστηκαν, παρουσιάζονται σὲ διάταξη μὲ αὐξανόμενο μέγεθος.

Συγκεκριμένα:

i) Ὑπάρχει στὸ σύνολο N_0 ἕνα πρῶτο στοιχεῖο, τὸ μηδέν, ποὺ εἶναι καὶ τὸ ἐλάχιστο στοιχεῖο, καὶ δὲν ὑπάρχει τελευταῖο (μέγιστο).

ii) Κάθε στοιχεῖο τοῦ συνόλου, ἐκτὸς ἀπὸ τὸ πρῶτο, ἔχει ἀριστερά του ἕνα ὁρισμένο π ρ ο η γ ο ύ μ ε ν ο στοιχεῖο, ποὺ εἶναι μικρότερο ἀπ' αὐτό, καὶ δεξιά του ἕνα ὁρισμένο ἑ π ό μ ε ν ο, ποὺ εἶναι καὶ μεγαλύτερό του. Π.χ. τὸ στοιχεῖο 5 ἔχει προηγούμενο τὸ 4 καὶ ἑπόμενο τὸ 6, καὶ εἶναι $4 < 5 < 6$.

Τὸ ἴδιο σύνολο N_0 μποροῦμε νὰ τὸ διατάξουμε καὶ σὲ τάξη μὲ ἐ λ α τ τ ο ύ μ ε ν ο μ έ γ ε θ ο ς:

$$N_0 = \{\ldots, 3, 2, 1, 0\}$$

Σ' αὐτὴ τὴ διάταξη:

i) Ὑπάρχει ἕνα τελευταῖο στοιχεῖο ποὺ εἶναι καὶ τὸ μικρότερο, ἐνῶ δὲν ὑπάρχει πρῶτο στοιχεῖο (μέγιστο).

ii) Κάθε στοιχεῖο τοῦ συνόλου, ἐκτὸς ἀπὸ τὸ τελευταῖο, ἔχει ἀριστερά του ἕνα ὁρισμένο προηγούμενο, ποὺ εἶναι καὶ μεγαλύτερό του, καὶ δεξιά του ἕνα ὁρισμένο ἑπόμενο, μικρότερό του. Π.χ. τὸ στοιχεῖο 5 ἔχει προηγούμενο τὸ 6, ἑπόμενο τὸ 4, καὶ εἶναι $6 > 5 > 4$.

20. 3. Εἶναι φανερὸ ὅτι κάθε πεπερασμένο ὑποσύνολο τοῦ N_0 μποροῦμε νὰ τὸ διατάξουμε σὲ τάξη μὲ αὐξανόμενο ἢ ἐλαττούμενο μέγεθος. Π.χ. ἂς λάβουμε τὸ σύνολο $\{2, 5, 6, 4\}$. Τοῦτο γράφεται σὲ τάξη μὲ αὐξανόμενο μέγεθος ὡς ἑξῆς:

$$\{2, 4, 5, 6\}$$

Ἔτσι ὅπως εἶναι διατεταγμένο, αὐτὸ τὸ σύνολο ἔχει: ἕνα πρῶτο στοιχεῖο, τὸ 2, ποὺ εἶναι καὶ τὸ μικρότερο στοιχεῖο τοῦ συνόλου καὶ ἕνα τελευταῖο στοιχεῖο, τὸ 6, ποὺ εἶναι καὶ τὸ μεγαλύτερο. Τὸ ἴδιο σύνολο μποροῦμε νὰ τὸ διατάξουμε σὲ τάξη μὲ ἐλαττούμενο μέγεθος:

$$\{6, 5, 4, 2\}$$

Καὶ σ' αὐτὴ τὴ διάταξη διακρίνουμε ἕνα πρῶτο στοιχεῖο, ποὺ εἶναι ὅμως μεγαλύτερο ἀπ' ὅλα τ' ἄλλα, καὶ ἕνα τελευταῖο στοιχεῖο, μικρότερο ἀπ' ὅλα τ' ἄλλα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

42. Νὰ διατάξετε σὲ τάξη μὲ αὐξανόμενο μέγεθος τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου $A = \{3, 8, 12, 5, 18\}$.

43. Τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου $A = \{\chi \mid \chi$ περιττὸς ἀκέραιος $\}$ νὰ τὰ διατάξετε σὲ τάξη μὲ αὐξανόμενο μέγεθος, ἐνῶ τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου $B = \{\chi \mid \chi$ ἄρτιος ἀκέραιος $\}$ σὲ τάξη μὲ ἐλαττούμενο μέγεθος.

44. Οἱ ἀριθμοὶ 41532 καὶ 12345 ἔχουν τὸ ἴδιο πλῆθος στοιχεῖα. Ποιόν ἀπ' αὐτοὺς μπορεῖτε νὰ ἀπομνημονεύσετε εὐκολότερα καὶ γιατί;

Νέοι συμβολισμοί

N	Τὸ σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν
N_0	» » » ἀκεραίων τῆς Ἀριθμητικῆς
$>$	Τὸ ... εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ ...
$<$	Τὸ ... εἶναι μικρότερο ἀπὸ τὸ ...

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Γ'

ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

21. Η ΠΡΑΞΗ ΤΗΣ ΠΡΟΣΘΕΣΕΩΣ.

21.1. Ὁρισμὸς

Τὰ σύνολα $A = \{+, -, \times\}$ καὶ $B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ εἶναι πεπερασμένα, ξένα μεταξύ τους καὶ ἔχουν πληθικοὺς ἀριθμοὺς 3 καὶ 4 ἀντίστοιχα. Ὁ πληθικὸς ἀριθμὸς τῆς ἑνώσεως $A \cup B = \{+, -, \times, \alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, δηλαδὴ τὸ 7, ὀνομάζεται ἄθροισμα τῶν ἀκεραίων 3 καὶ 4.

Γενικά: **Ἂν A, B εἶναι δύο σύνολα ξένα μεταξύ τους μὲ πληθικοὺς ἀριθμοὺς α, β ἀντιστοίχως, τότε ὁ πληθικὸς ἀριθμὸς γ τῆς ἑνώσεως A∪B λέγεται ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν α καὶ β.**

Τὸ γράφουμε $\alpha + \beta = \gamma$.

Δηλαδή: Πληθ. ἀριθμὸς τοῦ A + Πληθ. ἀριθμὸς τοῦ B = Πληθ. ἀριθ. τοῦ A∪B

$$\begin{array}{ccccc} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \alpha & + & \beta & = & \gamma \end{array}$$

Ἡ πράξη μὲ τὴν ὁποία ἀπὸ τὸ ζεῦγος (α, β) βρίσκουμε τὸ ἄθροισμα α + β λέγεται πρόσθεση* τῶν ἀριθμῶν α καὶ β.

$$\boxed{(\alpha, \beta) \xrightarrow{+} \alpha + \beta}$$

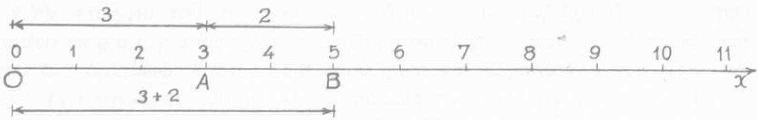
Οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β λέγονται ὅροι τῆς προσθέσεως ἢ προσθετέοι.

Ἡ πράξη τῆς προσθέσεως ἀναφέρεται πάντοτε σὲ δύο ὅρους. Γι' αὐτὸ λέγεται διμελὴς πράξη.

21.2. Γεωμετρικὴ ἑρμηνεία τῆς προσθέσεως.

Χαράζουμε τὴν ἡμιευθεία διατάξεως τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.

* Δὲν πρέπει νὰ συγχέουμε τὴν «πρόσθεση» μὲ τὸ «ἄθροισμα». Ἡ πρόσθεση εἶναι πράξη, ἐνῶ τὸ ἄθροισμα εἶναι τὸ ἀποτέλεσμα τῆς πράξεως (ἀριθμός).



Σχ. 12.

i) Τὸ εὐθ. τμῆμα ΟΑ (σχ. 12) ἀποτελεῖται ἀπὸ τρία ἴσα διαστήματα καὶ παριστάνει τὸν ἀκέραιο 3. Τὸ διαδοχικό του εὐθ. τμῆμα ΑΒ ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ἴσα διαστήματα καὶ παριστάνει τὸν ἀκέραιο 2. Τὸ εὐθ. τμῆμα ΟΒ = = ΟΑ + ΑΒ παριστάνει τὸ ἄθροισμα 3 + 2.

ii) Ἡ πρόσθεση τοῦ 2 στὸ 3 μπορεῖ νὰ ἑρμηνευτεῖ καὶ ὡς μετατόπιση τοῦ σημείου Α, ποὺ εἶναι ἡ εἰκόνα τοῦ 3, πρὸς τὰ δεξιὰ κατὰ 2 διαστήματα.

22. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΠΡΟΣΘΕΣΕΩΣ.

22.4. Ὕπαρξη ἀθροίσματος. Τὸ μονότιμο

Ἀπὸ τὴν πείρα σας γνωρίζετε ὅτι: ἂν δοθοῦν δύο ὁποιοιδήποτε ἀκέραιοι α, β, τότε ὑπάρχει ἕνας, καὶ μόνον ἕνας, ἀκέραιος, ὁ ὁποῖος εἶναι τὸ ἄθροισμά τους.

Γι' αὐτὸ λέμε πὼς ἡ πράξη τῆς προσθέσεως στὸ σύνολο N_0 εἶναι πάντοτε δυνατὴ καὶ μονότιμη.

22. 2. Μεταθετική

α) Παρατηροῦμε ὅτι $2 + 3 = 3 + 2$, $3 + 4 = 4 + 3$, $5 + 6 = 6 + 5$, ...

β) Ἂς λάβουμε δύο σύνολα Α, Β ξένα μεταξύ τους καὶ μὲ πληθικοὺς ἀριθμοὺς α, β, ἀντιστοίχως.

Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ τοῦ ἀθροίσματος ὁ πληθικὸς ἀριθμὸς τῆς ἑνώσεως $A \cup B$ εἶναι $\alpha + \beta$ καὶ τῆς ἑνώσεως $B \cup A$ εἶναι $\beta + \alpha$.

Ἀλλὰ γνωρίζουμε ὅτι $A \cup B = B \cup A$

Ἄρα $\boxed{\alpha + \beta = \beta + \alpha}$

Δηλαδή, ἡ ἀλλαγὴ στὴν τάξη τῶν προσθετέων δὲν μεταβάλλει τὸ ἄθροισμά τους.

Γι' αὐτὸ λέμε ὅτι ἡ πρόσθεση τῶν ἀκεραίων εἶναι πράξη μεταθετική.

22. 3. Προσεταιριστική

Ἂς λάβουμε στὴ σειρὰ τοὺς ἀκεραίους 2, 3, 7 καὶ ἂς προσπαθήσουμε νὰ τοὺς προσθέσουμε ταυτόχρονα. Παρατηροῦμε ὅτι αὐτὸ δὲν ἔχει ἔννοια. Ἡ πρόσθεση εἶναι πράξη διμελής: Δηλαδὴ μόνο δύο ἀκεραίους μποροῦμε νὰ προσθέσουμε ταυτόχρονα. Μποροῦμε ὅμως νὰ προχωρήσουμε μὲ δ ύ ο προσθέσεις ὡς ἑξῆς:

$$2+3=5 \qquad \text{(1η πρόσθεση)}$$
$$5+7=12 \qquad \text{(2η πρόσθεση)}$$

Ἢ πιὸ σύντομα $(2+3)+7=12$* (1)

Στὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα καταλήγουμε κι ἂν ἐκτελέσουμε στὴ σειρὰ τὶς ἑξῆς προσθέσεις:

$$3+7=10 \qquad \text{(1η πρόσθεση)}$$
$$2+10=12 \qquad \text{(2η πρόσθεση)}$$

Ἢ πιὸ σύντομα $2+(3+7)=12$ (2)

Ἀπὸ τὶς σχέσεις (1) καὶ (2) ἔχουμε:

$$(2+3)+7=2+(3+7)$$

Γενικὰ γ ι ὰ κ ά θ ε τ ρ ι ά δ α ἀ κ ε ρ α ί ω ν α, β, γ ἔ χ ο υ μ ε:

$$\boxed{(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)}$$

Γι᾽ αὐτὸ λέμε ὅτι ἡ πρόσθεση τῶν ἀκεραίων εἶναι πράξη π ρ ο σ ε τ α ι ρ ι σ τ ι κ ή.

Σημείωση

Ἡ πιὸ πάνω ἰδιότητα προκύπτει ἀπὸ τὴν προσεταιριστικὴ ἰδιότητα τῆς ἑνώσεως τῶν συνόλων.

22. 4. Ὕπαρξη οὐδέτερου στοιχείου

Ἀπὸ τὶς ἰσότητες:

$$2+0=2, \quad 0+2=2, \quad 3+0=3, \quad 0+3=3, \ \ldots$$

καὶ γενικὰ $\boxed{\alpha+0=\alpha, \quad 0+\alpha=\alpha \quad \text{ὅπου } \alpha \in N_0}$

συνάγομε ὅτι στὸ σύνολο τῶν ἀκεραίων ὑπάρχει ἕνα στοιχεῖο, τὸ μηδέν, ποὺ ὅταν τὸ προσθέσουμε σ᾽ ὁποιονδήποτε ἀκέραιο, τὸν ἀφήνει ἀμετάβλητο. Γιὰ τοῦτο λέμε ὅτι τὸ μηδὲν εἶναι ο ὐ δ έ τ ε ρ ο σ τ ο ι χ ε ῖ ο τ ῆ ς π ρ ο σ θ έ σ ε ω ς σ τ ὸ σ ύ ν ο λ ο N_0.

---

* Ἡ παρένθεση σημαίνει ὅτι πρέπει νὰ βρεθεῖ πρῶτα τὸ ἄθροισμα $2+3$.

Ἂν λάβουμε ὁποιονδήποτε ἄλλον ἀκέραιο $\beta \neq 0$, εἶναι φανερὸ ὅτι θὰ ἔχουμε $\alpha + \beta \neq \alpha$. Π.χ. $4 + 3 \neq 4$.

Δηλαδὴ τὸ μηδὲν εἶναι τὸ μ ο ν α δ ι κ ὸ οὐδέτερο στοιχεῖο στὴν πρόσθεση ἀκεραίων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

45. Νὰ συμπληρώσετε τὶς συνεπαγωγές:

$$\alpha + \beta = \beta \Rightarrow \alpha \ldots \quad \text{καὶ} \quad \alpha + \beta = \alpha \Rightarrow \beta \ldots$$

46. Ἂν $\alpha, \beta \in N_0$ καὶ $\alpha + \beta = 1$, ποιὲς εἶναι οἱ δυνατὲς τιμὲς γιὰ τὰ α καὶ β;

47. Τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν εἶναι 100. Πόσα ψηφία μπορεῖ νὰ ἔχει καθένας ἀπὸ αὐτοὺς τοὺς ἀριθμούς; (Νὰ ἐξετάσετε διάφορες περιπτώσεις).

23. ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΤΡΙΩΝ Ἢ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΩΝ ΠΡΟΣΘΕΤΕΩΝ.

23.1. Ὁρισμὸς

Σ' ἕνα καλάθι ἔχουμε 2 μῆλα. Θέτουμε διαδοχικὰ σ' αὐτὸ 3 μῆλα, 4 μῆλα καὶ 5 μῆλα. Πόσα μῆλα ἔχουμε τελικὰ στὸ καλάθι; Αὐτὸ τὸ παράδειγμα μᾶς ὁδηγεῖ κατὰ σειρὰ στὶς ἑξῆς τρεῖς πράξεις ἀνάμεσα στοὺς ἀριθμοὺς 2, 3, 4 καὶ 5.

$$2 + 3 = 5$$

$$5 + 4 = 9$$

$$9 + 5 = 14$$

Ὁ ἀριθμὸς 14, στὸν ὁποῖο καταλήξαμε ἔτσι, λέγεται ἄ θ ρ ο ι σ μ α τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 4, 5.

Τὸ γράφουμε $\quad 2 + 3 + 4 + 5 = 14$

Δηλαδή: $\quad 2 + 3 + 4 + 5 = [(2 + 3) + 4] + 5 = 14$

Ὅπου ἡ γραφὴ $(2 + 3)$ δηλώνει ἕ ν α ν ἀριθμό: τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν 2 καὶ 3. Ὅμοια, ἡ γραφὴ $[(2 + 3) + 4]$ δηλώνει ἕ ν α ν ἀριθμό: τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν $(2 + 3)$ καὶ 4.

Γενικά: **Ἄθροισμα τριῶν ἢ περισσότερων ἀκεραίων, ποὺ δίνονται σὲ μιὰ σειρά, λέγεται ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος προκύπτει ὅταν στὸν πρῶτο ἀπ' αὐτοὺς προσθέσουμε τὸν δεύτερο, στὸ ἄθροισμα ποὺ βρίσκουμε προσθέσουμε τὸν τρίτο κ.ο.κ. ὥσπου νὰ τελειώσουν ὅλοι οἱ ἀκέραιοι.**

Ἢ συμβολικά: Ἂν $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \in N_0$,

τότε $\quad \alpha + \beta + \gamma + \delta = [(\alpha + \beta) + \gamma] + \delta$

23. 2. Ἰδιότητες

α) Ἂν στὸ καλάθι βάλουμε πρῶτα τὰ 5 μῆλα, ἔπειτα τὰ 3 καὶ τελευταῖα τὰ 4, εἶναι φανερὸ πὼς θὰ ἔχουμε βάλει πάλι τὸ ἴδιο πλῆθος μῆλα. Ἀπὸ αὐτὴ τὴν παρατήρηση ἐννοοῦμε ὅτι ἡ σειρὰ μὲ τὴν ὁποία λαμβάνουμε τοὺς προσθετέους, γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἄθροισμά τους, δὲν μεταβάλλει τὸ τελικὸ ἄθροισμα. Π.χ.

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=\alpha+\delta+\gamma+\beta=\alpha+\gamma+\beta+\delta=\ldots,\quad \alpha,\beta,\gamma,\delta\in N_0$$

Δηλαδή: **Ἡ μεταθετικὴ ἰδιότητα ἰσχύει καὶ ὅταν οἱ προσθετέοι εἶναι τρεῖς ἢ περισσότεροι.**

β) Στὸ παράδειγμά μας ἐλαττώνουμε τὸν ἀριθμὸ τῶν ἐργασιῶν μας, χωρὶς νὰ μεταβληθεῖ ὁ ἀριθμὸς τῶν μήλων ποὺ ἔχουμε στὸ καλάθι, ἂν βάλουμε 7 μῆλα συγχρόνως ἀντὶ νὰ βάλουμε 3 μῆλα τὴ μιὰ φορὰ καὶ 4 τὴν ἑπόμενη. Αὐτὴ ἡ παρατήρηση μᾶς ὁδηγεῖ στὸ νὰ γράψουμε:

$$\begin{aligned}2+3+4+5&=2+(3+4)+5\\&=2+7+5\end{aligned}$$

καὶ γενικὰ $\quad \alpha+\beta+\gamma+\delta=\alpha+(\beta+\gamma)+\delta,\quad \alpha,\beta,\gamma,\delta\in N_0$

Δηλαδή: **Τὸ ἄθροισμα ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, ἂν ἀντικαταστήσουμε δύο ἢ περισσοτέρους ἀπὸ τοὺς προσθετέους μὲ τὸ ἄθροισμά τους.**

γ) Εἶναι φανερὸ πὼς θὰ ἔχουμε στὸ καλάθι τὸ ἴδιο πλῆθος μῆλα, ἂν ἀντὶ γιὰ 5 μῆλα, ποὺ βάλαμε τὴν τελευταία φορά, βάζαμε διαδοχικὰ 3 μῆλα καὶ 2 μῆλα. Αὐτὴ ἡ παρατήρηση μᾶς ὁδηγεῖ στὸ νὰ γράψουμε:

$$2+3+4+5=2+3+4+3+2$$

καὶ γενικὰ $\quad \alpha+\beta+(\gamma+\delta)=\alpha+\beta+\gamma+\delta,\quad \alpha,\beta,\gamma,\delta\in N_0$

Δηλαδή: **Μποροῦμε σ' ἕνα ἄθροισμα νὰ ἀντικαταστήσουμε ἕναν προσθετέο μὲ δύο ἢ περισσότερους ἄλλους, οἱ ὁποῖοι νὰ τὸν ἔχουν ὡς ἄθροισμά τους.**

Οἱ πιὸ πάνω ἰδιότητες μᾶς ἐπιτρέπουν νὰ συντομεύσουμε τοὺς ὑπολογισμοὺς ἀθροισμάτων.

Παραδείγματα

1. $$\begin{aligned}56+75+44+25&=(56+44)+(75+25)\\&=\;\;100\;\;+\;\;100\;\;=200\end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned}115+36+14+985&=100+15+36+14+985\\&=100+(15+985)+(36+14)\\&=100+\;\;1000\;\;+50\;\;=1150\end{aligned}$$

23.3. Παραθέτουμε τώρα ἕναν πίνακα μὲ τὶς πιὸ πάνω ἰδιότητες τῆς προσθέσεως.

Ἂν α, β, γ, δ εἶναι ὁποιοιδήποτε ἀκέραιοι, τότε:

1. $\alpha+\beta \in N_0$
2. $\alpha+\beta=\beta+\alpha$
3. $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$
4. $\alpha+0=0+\alpha=\alpha$
5. $\alpha+\beta+\gamma+\delta=\alpha+\gamma+\beta+\delta=\alpha+\delta+\gamma+\beta=\ldots$
6. $\alpha+\beta+\gamma+\delta=\alpha+(\beta+\gamma)+\delta=\alpha+(\beta+\delta)+\gamma=\ldots$
7. $\alpha+(\beta+\gamma)+\delta=\alpha+\beta+\gamma+\delta$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

48. Νὰ χρησιμοποιήσετε τὶς ἰδιότητες τῆς προσθέσεως, γιὰ νὰ ὑπολογίσετε μὲ τὸν συντομότερο τρόπο τὸ ἄθροισμα:

$$17+(2+83)+98$$

49. Νὰ ὑπολογισθοῦν μὲ τὸν συντομότερο τρόπο τὰ ἀθροίσματα:

$$\alpha=(5+20+4)+(95+80+996)$$
$$\beta=24+(52+35)+(65+48)+976$$

50. Νὰ χρησιμοποιήσετε τὴ μεταθετικὴ καὶ τὴν προσεταιριστικὴ ἰδιότητα, γιὰ νὰ δικαιολογήσετε ὅτι:

$$(\alpha+\beta)+\gamma=(\alpha+\gamma)+\beta$$

23.4. Ἐξισώσεις, ταυτότητες.

Νὰ προσέξετε τὶς ἑπόμενες ἰσότητες:

$$3+4=7 \quad (1) \qquad 5+3=9 \quad (2) \qquad 5+9=14 \quad (3)$$

Ἀπὸ αὐτὲς ἡ (1) καὶ ἡ (3) εἶναι ἀληθεῖς, ἐνῶ ἡ (2) εἶναι ψευδής.

Τί μποροῦμε ὅμως νὰ ποῦμε γιὰ τὶς πιὸ κάτω *ἐγγράμματες* ἰσότητες;

$$\chi+3=5 \quad (4) \qquad \chi+3=3+\chi \quad (5)$$

Γιὰ τὴ σχέση (4) δὲν μποροῦμε νὰ ἀπαντήσουμε ἂν εἶναι ἢ δὲν εἶναι ἀληθής. Γιατὶ δὲν γνωρίζουμε ποιὸν ἀριθμὸ παριστάνει ὁ χ.

Ἂν ὅμως μᾶς ποῦν ὅτι ὁ χ μπορεῖ νὰ ἀντικατασταθεῖ μὲ κάποιον ἀπὸ τοὺς ἀκεραίους 0, 1, 2, 3, . . ., θὰ παρατηρήσουμε τὰ ἑξῆς:

Ὅταν θέσουμε $\chi=2$, τότε ἡ (4) γίνεται:

$$2+3=5 \qquad (\text{ἀληθής})$$

Ἀντιθέτως, ὅταν θέσουμε $\chi=1$ ἢ $\chi=3$, $\chi=4$, . . .,
θὰ ἔχουμε $1+3=5$, $3+3=5$, $4+3=5$,
δηλαδὴ ψευδεῖς προτάσεις.

Γιὰ τὴν (5) παρατηροῦμε ὅτι, μὲ ὅποιον ἀκέραιο κι ἂν ἀντικαταστήσουμε τὸ χ, θὰ βροῦμε ἀληθεῖς προτάσεις.

Π.χ. γιὰ $\chi = 1$ ἔχομε $1+3=3+1$ $(4=4)$
» $\chi = 2$ » $2+3=3+2$ $(5=5)\ldots$

Ἡ ἰσότητα (5), καθὼς καὶ ὁποιαδήποτε ἐγγράμματη ἰσότητα ποὺ ἀληθεύει γιὰ κάθε τιμὴ τοῦ γράμματος ποὺ περιέχει, λέγεται ταυτότητα.

Ἡ ἰσότητα (4), καθὼς καὶ κάθε ἄλλη ἐγγράμματη ἰσότητα ποὺ δὲν εἶναι ταυτότητα, λέγεται ἐξίσωση.

Ἡ τιμὴ τοῦ χ, γιὰ τὴν ὁποία ἀληθεύει ἡ ἐξίσωση, λέγεται ρίζα ἢ λύση τῆς ἐξισώσεως.

Π.χ. ὁ ἀριθμὸς $\chi = 2$ εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως (4), ἐπειδὴ $2+3=5$.

Ἡ ἐργασία ποὺ κάνουμε γιὰ νὰ βροῦμε τὴ ρίζα μιᾶς ἐξισώσεως καλεῖται ἐπίλυση τῆς ἐξισώσεως.

Εἶναι δυνατὸ μία ἐξίσωση νὰ μὴν ἔχει λύση σ' ἕνα ὁρισμένο σύνολο. Π.χ. ἡ ἐξίσωση $\chi+4=3$ δὲν ἔχει λύση στὸ σύνολο N_0. Πραγματικά, δὲν ὑπάρχει ἀκέραιος, στοιχεῖο τοῦ συνόλου N_0, ποὺ ὅταν τὸν προσθέσουμε στὸ 4 νὰ δίνει ἄθροισμα 3. Σ' αὐτὴ τὴν περίπτωση ἡ ἐξίσωση λέγεται ἀδύνατη στὸ σύνολο N_0.

Παραδείγματα

Ἐξισώσεις	Ταυτότητες
$\chi+5=5$	$\chi+5=3+2+\chi$
$7+\chi=12$	$\chi+2=2+\chi$
$\alpha+1=9$	$5+(1+\chi)=\chi+6$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

51. Ἂν χ λαμβάνει τιμὲς ἀπὸ τὸ σύνολο $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$, νὰ βρεθεῖ ἡ ρίζα καθεμιᾶς ἀπὸ τὶς ἑπόμενες ἐξισώσεις:

$\chi+7=12$ $\quad$ $4+\chi=10$
$\chi+5=17$ $\quad$ $\chi+0=10$

Ποιὰ ἀπὸ τὶς προηγούμενες ἐξισώσεις δὲν ἔχει λύση στὸ σύνολο τιμῶν τοῦ χ ποὺ λάβαμε;

52. Ποιὲς ἀπὸ τὶς ἑπόμενες ἐγγράμματες ἰσότητες εἶναι ἐξισώσεις καὶ ποιὲς εἶναι ταυτότητες;

$\chi+8=12$ $\quad$ $\chi+7=7+\chi$
$2+(\chi+1)=3+\chi$, $\quad$ $9+\chi=20$

24. Η ΠΡΑΞΗ ΤΗΣ ΑΦΑΙΡΕΣΕΩΣ.

24.1. Ὁρισμὸς

Ὅταν δίνουμε 100 δρχ. γιὰ νὰ πληρώσουμε σ' ἕνα κατάστημα ἀντικείμενα ἀξίας 53 δρχ., ἡ ταμίας, γιὰ νὰ μᾶς δώσει τὰ ὑπόλοιπα χρήματα (τὰ ρέστα).

σκέφτεται νὰ βρεῖ πόσες δραχμὲς πρέπει νὰ προσθέσει στὶς 53 δρχ., γιὰ νὰ γίνουν αὐτὲς 100 δρχ.

Δηλαδή, ἂν παραστήσουμε μὲ χ τὸν ἀριθμὸ τῶν δραχμῶν ποὺ θέλουμε, πρέπει:

$$53+\chi=100 \qquad (1)$$

Ὁ ἀριθμὸς $\chi=47$, ποὺ πρέπει νὰ προστεθεῖ στὸ 53 γιὰ νὰ δώσει ἄθροισμα 100, λέγεται διαφορὰ τῶν ἀριθμῶν 100 καὶ 53.

Τὸ γράφουμε: $100-53=\chi \quad (=47) \qquad (2)$

Ἀπὸ τὰ πιὸ πάνω ἐννοοῦμε ὅτι οἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2) ἔχουν τὸ ἴδιο νόημα ἢ ὅπως λέμε εἶναι ἰσοδύναμες.

Ἔτσι, ὅταν ἰσχύει ἡ μιὰ ἀπὸ αὐτές, τότε θὰ ἰσχύει καὶ ἡ ἄλλη.

Ἢ συμβολικά:

$$53+\chi=100 \Rightarrow 100-53=\chi$$
$$100-53=\chi \Rightarrow 53+\chi=100$$
ἢ
$$53+\chi=100 \Leftrightarrow 100-53=\chi$$

Γενικά: **Ὁ ἀκέραιος χ πού, ὅταν τὸν προσθέσουμε στὸ β, δίνει ἄθροισμα ἴσο μὲ α λέγεται διαφορὰ τῶν ἀριθμῶν α καὶ β.**

Τὸ γράφουμε: $\alpha-\beta=\chi$

Ὥστε $\boxed{\alpha-\beta=\chi \Leftrightarrow \beta+\chi=\alpha}$

Στὸ σύνολο N_0 ὑπάρχει διαφορὰ $\alpha-\beta$, μόνον ὅταν εἶναι:

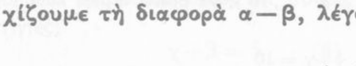
$$\alpha \geq \beta$$

Ἡ πράξη, μὲ τὴν ὁποία στὸ ζεῦγος (α, β), ὅπου $\alpha \geq \beta$, ἀντιστοιχίζουμε τὴ διαφορὰ $\alpha-\beta$, λέγεται ἀφαίρεση.

$$(\alpha, \beta) \xrightarrow{\;-\;} \alpha-\beta$$

Οἱ ἀκέραιοι α, β λέγονται ὅροι τῆς ἀφαιρέσεως. Εἰδικότερα, ὁ α λέγεται μειωτέος, ὁ β ἀφαιρετέος. Ἡ διαφορὰ λέγεται καὶ ὑπόλοιπο.

24. 2. Οἱ σχέσεις $\alpha+\beta=\gamma$, $\gamma-\beta=\alpha$, $\gamma-\alpha=\beta$



Σχ. 13.

Ὅπως φαίνεται παραστατικὰ καὶ στὸ σχ. 13, ἂν σὲ τρεῖς ἀκεραίους α, β, γ εἶναι $\alpha+\beta=\gamma$, θὰ εἶναι $\gamma-\beta=\alpha$ καὶ $\gamma-\alpha=\beta$.

Ἐπίσης, ἂν εἶναι $\gamma-\beta=\alpha$ (ἢ $\gamma-\alpha=\beta$), θὰ εἶναι καὶ $\alpha+\beta=\gamma$.

Ἢ συμβολικά:

$$\alpha+\beta=\gamma \Leftrightarrow \left\}\begin{array}{l}\gamma-\beta=\alpha \\ \gamma-\alpha=\beta\end{array}\right.$$

Παραδείγματα:

1) Ἀφοῦ εἶναι $5+7=12$, εἶναι καὶ $12-7=5$, καθὼς καὶ $12-5=7$.

2) Ἀφοῦ εἶναι $15-6=9$, εἶναι καὶ $9+6=15$ καθὼς καὶ $15-9=6$.

24. 3. Ἡ ἀφαίρεση ὡς πράξη ἀντίστροφη στὴν πρόσθεση

Ἂν στὸ 3 προσθέσουμε τὸ 4, βρίσκουμε τὸ 7. Ἂν κατόπιν ἀφαιρέσουμε ἀπὸ τὸ 7 τὸ 4, ξαναβρίσκουμε τὸ 3.

$$3+4=7 \qquad\qquad 7-4=3$$

$$3 \underset{\text{Ἀφαίρεση τοῦ 4}}{\overset{\text{Πρόσθεση τοῦ 4}}{\rightleftarrows}} 7$$

Ἤτοι: $(3+4)-4=3$

Γενικὰ ἔχουμε: $(\alpha+\beta)-\beta=\alpha$

Γι' αὐτὸ λέμε πὼς ἡ ἀφαίρεση εἶναι π ρ ά ξ η ἀ ν τ ί σ τ ρ ο φ η τῆς προσθέσεως.

25. ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΠΛΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ.

Μὲ τὴ βοήθεια τῆς σχέσεως ποὺ ὑπάρχει ἀνάμεσα στὴν πρόσθεση καὶ τὴν ἀφαίρεση, μποροῦμε νὰ ἐπιλύσουμε προβλήματα καὶ ἐξισώσεις.

25. 1. Πρόβλημα

Ὁ Λεωνίδας εἶναι 29 ἐτῶν καὶ εἶναι κατὰ 12 ἔτη μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν Νίκο. Πόσων ἐτῶν εἶναι ὁ Νίκος;

Ἂν παραστήσουμε μὲ χ τὸν ἀριθμὸ τῶν ἐτῶν τοῦ Νίκου, θὰ πρέπει:

$$\chi+12=29 \qquad (1)$$

Ἡ (1) παριστάνει μιὰν ἐξίσωση ποὺ μποροῦμε νὰ ἐπιλύσουμε, ἂν σκεφτοῦμε ὅτι:

$$\alpha+\beta=\gamma \Leftrightarrow \alpha=\gamma-\beta$$

Συνεπῶς $\chi+12=29 \Leftrightarrow \chi=29-12$. Ἤτοι $\chi=17$

Ὥστε ὁ Νίκος εἶναι 17 ἐτῶν.

25. 2. Πρόβλημα

Ἀπὸ ποιὸν ἀριθμὸ πρέπει νὰ ἀφαιρέσουμε τὸ 43, γιὰ νὰ βροῦμε ὑπόλοιπο 24;

Ἂν χ παριστάνει τὸν ζητούμενο ἀριθμό, πρέπει:

$$\chi - 43 = 24 \tag{3}$$

Ἡ (3) εἶναι μία ἐξίσωση. Γιὰ νὰ τὴν ἐπιλύσουμε, σκεφτόμαστε ὅτι:

$$\gamma - \beta = \alpha \iff \gamma = \alpha + \beta \tag{4}$$

Συνεπῶς $\chi - 43 = 24 \iff \chi = 24 + 43.$ Ἤτοι $\chi = 67$

Ὥστε ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι 67.

25. 3. Πρόβλημα

Μὲ ποιὸν ἀριθμὸ πρέπει νὰ ἐλαττώσουμε τὸ 324, γιὰ νὰ βροῦμε 169;

Ἂν χ παριστάνει τὸν ζητούμενο ἀριθμό, τότε σύμφωνα μὲ τὸ πρόβλημα ἔχουμε:

$$324 - \chi = 169 \tag{5}$$

Γιὰ νὰ ἐπιλύσουμε τὴν ἐξίσωση (5), σκεφτόμαστε ὅτι:

$$\alpha - \beta = \gamma \iff \beta = \alpha - \gamma$$

Ἤτοι $324 - \chi = 169 \iff \chi = 324 - 169.$ Ὥστε $\chi = 155$

25. 4. Γενικὰ

Γιὰ νὰ ἐπιλύσουμε μιὰν ἐξίσωση ποὺ ἔχει τὴ μορφὴ $\chi + \beta = \gamma$, σκεφτόμαστε ὅτι: $\alpha + \beta = \gamma \iff \alpha = \gamma - \beta$

Συνεπῶς ἔχουμε: $\chi + \beta = \gamma \iff \chi = \gamma - \beta$

Μὲ ἀνάλογο τρόπο βρίσκουμε ὅτι:

$$\chi - \alpha = \beta \iff \chi = \beta + \alpha$$

$$\alpha - \chi = \beta \iff \chi = \alpha - \beta$$

Ἐξίσωση	Λύση
$\chi - \alpha = \beta \longrightarrow$	$\chi = \beta + \alpha$
$\chi + \beta = \alpha \longrightarrow$	$\chi = \alpha - \beta$
$\alpha - \chi = \beta \longrightarrow$	$\chi = \alpha - \beta$

Φυσικὰ οἱ πιὸ πάνω σχέσεις ἰσχύουν, ὅταν οἱ ἐξισώσεις εἶναι ἐπιλύσιμες στὸ σύνολο N_0.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

53. Συμπληρῶστε τὶς ἰσοδυναμίες:

α) $5 + 7 = 12 \iff$ γ) $\alpha + \beta = 10 \iff$

β) $5 + 7 = 12 \iff$ δ) $\alpha + \beta = 10 \iff$

54. Νὰ ἐπιλύσετε τὶς ἐξισώσεις:

$$\chi+7=19, \qquad 18-\chi=11, \qquad \chi-24=36, \text{ όπου } \chi \in N_0$$

55. Ἐρώτησαν κάποιον γιὰ τὴν ἡλικία του καὶ ἀπάντησε ὅτι μετὰ ἀπὸ 24 ἔτη θὰ εἶναι 89 ἐτῶν. Ποιὰ εἶναι ἡ σημερινή του ἡλικία;

56. Τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν εἶναι 76. Ὁ ἕνας ἀπ' αὐτοὺς εἶναι 37. Ποιὸς εἶναι ὁ ἄλλος ἀριθμός;

26. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΑΦΑΙΡΕΣΕΩΣ

26. 1. Βασικὴ ἰδιότητα

Ὁ Νίκος εἶναι 18 ἐτῶν καὶ ἡ Κλαίρη 12. Δηλαδὴ οἱ ἡλικίες τους διαφέρουν κατὰ 6 ἔτη.

$$18-12=6 \qquad (1)$$

Ὕστερα ἀπὸ 5 ἔτη ὁ Νίκος θὰ εἶναι 23 ἐτῶν καὶ ἡ Κλαίρη 17. Καὶ πάλι οἱ ἡλικίες τους θὰ διαφέρουν κατὰ 6 ἔτη.

$$(18+5)-(12+5)=6 \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὶς ἰσότητες (1) καὶ (2) ἔχουμε:

$$18-12=(18+5)-(12+5)$$

Πρὶν 5 χρόνια ὁ Νίκος ἦταν 13 ἐτῶν, ἐνῶ ἡ Κλαίρη 7 ἐτῶν καὶ εἶχαν πάλι διαφορὰ ἡλικίας 6 ἔτη.

Δηλαδὴ $\quad 18-12=(18-5)-(12-5)$

Γενικὰ γιὰ τοὺς ἀκεραίους α, β, γ ἔχουμε:

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha-\beta=(\alpha+\gamma)-(\beta+\gamma), \quad \alpha \geq \beta \\ \alpha-\beta=(\alpha-\gamma)-(\beta-\gamma), \quad \alpha \geq \beta,\ \beta \geq \gamma \end{array}}$$

Ἂν στὸ μειωτέο καὶ στὸν ἀφαιρετέο προσθέσουμε ἢ ἀφαιρέσουμε τὸν ἴδιο ἀριθμό, ἡ διαφορὰ δὲν ἀλλάζει.

Παράδειγμα

$$7-4=(7+2)-(4+2)=(7-2)-(4-2)=3$$

26. 2. Ἀφαίρεση ἑνὸς ἀριθμοῦ ἀπὸ ἄθροισμα.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὴ διαφορὰ $(17+6)-7$, παρατηροῦμε

ὅτι: $\quad 17+6=23 \quad$ ἀλλὰ καὶ $\quad 17-7=10$

$\quad 23-7=16 \qquad\qquad 10+6=16$

Ἢ $\quad (17+6)-7=16. \qquad$ Ἢ $\quad (17-7)+6=16$

Ὥστε $\quad (17+6)-7=(17-7)+6$

Γενικὰ ἔχουμε:

$$\boxed{(\alpha+\beta)-\gamma=(\alpha-\gamma)+\beta \qquad \alpha,\beta,\gamma\in N_0 \text{ καὶ } \alpha\geq\gamma}$$

26. 3. Ἀφαίρεση ἑνὸς ἀθροίσματος

Γιὰ νὰ βροῦμε τὴ διαφορὰ $15-(5+7)$, παρατηροῦμε

ὅτι: $5+7=12$ ἀλλὰ καὶ $15-5=10$

$15-12=3$ $\qquad$ $10-7=3$

Ἤ $15-(5+7)=3$ $\qquad$ Ἤ $(15-5)-7=3$

Ὥστε $15-(5+7)=(15-5)-7$

Γενικὰ $\boxed{\alpha-(\beta+\gamma)=(\alpha-\beta)-\gamma}$

Ὅπου $\alpha,\beta\in N_0$ καὶ οἱ ἀφαιρέσεις ποὺ σημειώνονται εἶναι δυνατές.

26. 4. Πρόσθεση μιᾶς διαφορᾶς

Ὅμοια, γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἄθροισμα $4+(6-5)$, παρατηροῦμε

ὅτι: $6-5=1$ ἀλλὰ καὶ $4+6=10$

$4+1=5$ $\qquad$ $10-5=5$

Ἤ $4+(6-5)=5$ $\qquad$ Ἤ $(4+6)-5=5$

Ἤτοι $4+(6-5)=(4+6)-5$

Γενικὰ $\boxed{\alpha+(\beta-\gamma)=(\alpha+\beta)-\gamma \quad \text{ὅπου } \alpha,\beta,\gamma\in N_0 \text{ καὶ } \beta\geq\gamma}$

26. 5. Ἀφαίρεση μιᾶς διαφορᾶς.

Ὅμοια γιὰ νὰ βροῦμε τὴ διαφορὰ $15-(10-4)$, παρατηροῦμε

ὅτι: $10-4=6$ ἀλλὰ καὶ $15+4=19$

$15-6=9$ $\qquad$ $19-10=9$

Ἤ $15-(10-4)=9$ $\qquad$ Ἤ $(15+4)-10=9$

Ὥστε $15-(10-4)=(15+4)-10$

Γενικὰ $\boxed{\alpha-(\beta-\gamma)=(\alpha+\gamma)-\beta}$

Ὅπου $\alpha,\beta,\gamma\in N_0$ καὶ οἱ ἀφαιρέσεις ποὺ σημειώνονται εἶναι δυνατές.

26. 6. Παρατήρηση

Οἱ προηγούμενες ἰδιότητες μᾶς διευκολύνουν συχνὰ στοὺς ὑπολογισμοὺς ποὺ κάνουμε ἀπὸ μνήμης.

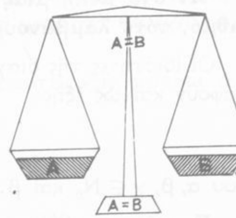
Π.χ. γιὰ νὰ βροῦμε ἀπὸ μνήμης τὴ διαφορὰ $192-(50-8)$, σκεφτόμαστε ὅτι:

$$192-(50-8)=(192+8)-50$$
$$=200-50=150$$

26· 7. Ἰδιότητες τῆς διαγραφῆς

i) Ὁ ζυγὸς στὸ σχ. 14 ἰσορροπεῖ, ὅταν στοὺς δίσκους τεθοῦν τὰ βάρη Α καὶ Β. Ἄρα

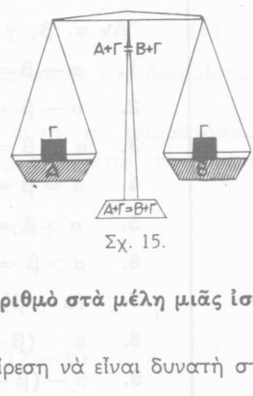
$$A=B$$



Σχ. 14.

Στὸ ζυγὸ τοῦ σχ. 15 ἔχουμε τοποθετήσει πάνω στοὺς δίσκους καὶ ἕνα νέο βάρος Γ, καὶ βλέπουμε ὅτι πάλι ἔχουμε ἰσορροπία. Ἄρα

$$A+\Gamma=B+\Gamma$$



Σχ. 15.

Τὸ προηγούμενο πείραμα μᾶς διευκολύνει νὰ καταλάβουμε τὶς ἀκόλουθες ἰδιότητες ἀριθμῶν:

Ἂν $\alpha=\beta$, τότε εἶναι καὶ $\alpha+\gamma=\beta+\gamma$.

Καὶ ἀντίστροφα: Ἂν εἶναι $\alpha+\gamma=\beta+\gamma$,

τότε $\alpha=\beta$

Ἢ συμβολικά:

$$\boxed{\alpha=\beta \Leftrightarrow \alpha+\gamma=\beta+\gamma \quad \alpha, \beta, \gamma \in N_0}$$

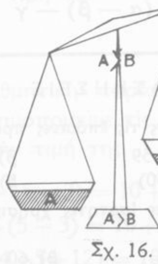
Ἂν προσθέσουμε (ἢ ἀφαιρέσουμε) τὸν ἴδιο ἀριθμὸ στὰ μέλη μιᾶς ἰσότητας, λαμβάνουμε πάλι ἰσότητα.

Στὴν περίπτωση τῆς ἀφαιρέσεως πρέπει ἡ ἀφαίρεση νὰ εἶναι δυνατὴ στὸ σύνολο N_0.

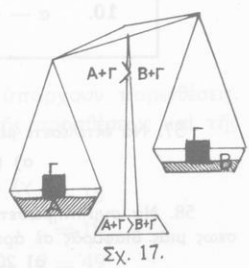
ii) Στὸ ζυγὸ τοῦ σχ. 16 τὸ βάρος Α εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ βάρος Β

$$A>B \quad (1)$$

Στὸ ζυγὸ τοῦ σχ. 17 ἔχουμε τοποθετήσει πάνω στὰ βάρη Α καὶ Β τὸ ἴδιο βάρος Γ. Παρατηροῦμε ὅτι:



Σχ. 16.



Σχ. 17.

$$A + \Gamma > B + \Gamma \qquad (2)$$

Αὐτὸ τὸ πείραμα μᾶς διευκολύνει νὰ καταλάβουμε ὅτι, ἂν ἀνάμεσα σὲ δυὸ ἀκεραίους α, β εἶναι $\alpha > \beta$, τότε θὰ εἶναι καὶ $\alpha+\beta > \beta+\gamma$, ὅπου $\gamma \in N_0$· καὶ ἀντίστροφα, ἂν $\alpha+\gamma > \beta+\gamma$, τότε θὰ εἶναι καὶ $\alpha > \beta$.

$$\boxed{\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha+\gamma > \beta+\gamma, \quad \alpha, \beta, \gamma \in N_0}$$

Ἂν στὰ μέλη μιᾶς ἰσότητας προσθέσουμε (ἢ ἀφαιρέσουμε) τὸν ἴδιο ἀριθμό, τότε λαμβάνουμε πάλι ἀνισότητα μὲ τὴν ἴδια φορά.

Οἱ ἰδιότητες τῆς διαγραφῆς στὴν πρόσθεση καὶ τὴν ἀφαίρεση μποροῦν νὰ γραφοῦν καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha - \gamma = \beta - \gamma$$
$$\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \gamma > \beta - \gamma$$

ὅπου $\alpha, \beta, \gamma \in N_0$ καὶ $\beta \geq \gamma$.

Παραθέτουμε συγκεντρωτικὸ πίνακα μὲ τὶς ἰδιότητες τῆς ἀφαιρέσεως.

Ἂν $\alpha, \beta, \gamma \in N_0$, τότε

1.	$\alpha - \beta = (\alpha+\gamma) - (\beta+\gamma)$	$\alpha \geq \beta$
2.	$\alpha - \beta = (\alpha-\gamma) - (\beta-\gamma)$	$\alpha \geq \beta,\ \beta \geq \gamma$
3.	$\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma = \beta + \gamma$	
4.	$\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha - \gamma = \beta - \gamma$	$\alpha \geq \gamma$
5.	$\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$	
6.	$\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \gamma > \beta - \gamma$	$\beta \geq \gamma$
7.	$(\alpha+\beta) - \gamma = (\alpha-\gamma) + \beta$	$\alpha \geq \gamma$
8.	$\alpha + (\beta-\gamma) = (\alpha+\beta) - \gamma$	$\beta \geq \gamma$
9.	$\alpha - (\beta-\gamma) = (\alpha+\gamma) - \beta$	$\alpha \geq \beta-\gamma$
10.	$\alpha - (\beta+\gamma) = (\alpha-\beta) - \gamma$	$\alpha \geq \beta+\gamma$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

57. Νὰ ἐκτελέσετε μὲ δύο τρόπους τὶς ἑπόμενες πράξεις:

α) $(100 - 60) + 59$ β) $(80 - 50) - 25$
γ) $105 - (80 - 50)$ δ) $80 + (40 - 30)$

58. Νὰ συμπληρώσετε τὶς ἑπόμενες ἰσότητες χρησιμοποιώντας τὴν ἰδιότητα προσθέσεως μιᾶς διαφορᾶς σὲ ἀριθμό:

α) $20 + (\alpha - 2) =$ β) $60 + (\alpha - 10) =$

59. Νὰ συμπληρώσετε τὶς ἑπόμενες ἰσότητες χρησιμοποιώντας τὴν ἰδιότητα τῆς ἀφαιρέσεως μιᾶς διαφορᾶς:

α) $30-(\alpha-10)=$ β) $\alpha-(\beta-12)=$

γ) $\alpha-(\ldots-5)=\alpha+5-\beta$

60. Νὰ ὑπολογιστεῖ ἡ διαφορὰ $(5+\alpha)-(3+\alpha)=$

27. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ.

Ἕνας ταμίας ἔχει στὸ ταμεῖο του 800 δρχ. Ὕστερα εἰσπράττει 120 δρχ., πληρώνει 50 δρχ. καὶ τέλος εἰσπράττει 70 δραχ. Πόσα χρήματα θὰ ἔχει τελικὰ στὸ ταμεῖο του;

Οἱ ὑπολογισμοὶ τοῦ ταμία μᾶς ὁδηγοῦν κατὰ σειρὰ στὶς ἑξῆς πράξεις ἀνάμεσα στοὺς ἀριθμούς:

$$800+120=920$$
$$920-50=870$$
$$870+70=940$$

Αὐτὲς οἱ τρεῖς διαδοχικὲς πράξεις σημειώνονται πιὸ σύντομα ὡς ἑξῆς:

$$800+120-50+70 \qquad (1)$$

Ἡ γραφὴ (1), ποὺ παριστάνει μιὰ διαδοχὴ προσθέσεων εἴτε ἀφαιρέσεων, ὀνομάζεται ἀ ρ ι θ μ η τ ι κ ὴ π α ρ ά σ τ α σ η.

Οἱ ἀριθμοὶ 80, 120, 50 καὶ 70 καλοῦνται ὅ ρ ο ι αὐτῆς τῆς παραστάσεως. Τὸ ἐξαγόμενο ἀπὸ τὴ διαδοχικὴ ἐκτέλεση τῶν πράξεων λέγεται τ ι μ ὴ τῆς ἀ ρ ι θ μ η τ ι κ ῆ ς παραστάσεως.

Σύμφωνα μὲ τὰ πιὸ πάνω ἡ ἀριθμητικὴ παράσταση

$$25-8+5-12$$

δηλώνει τὴν ἑξῆς διαδοχὴ πράξεων:

$$25-8=17,\ 17+5=22 \text{ καὶ } 22-12=10$$

Συνεπῶς ἔχει ἀριθμητικὴ τιμὴ 10.

Παρατήρηση

Εἶναι δυνατὸ σὲ μιὰ ἀριθμητικὴ παράσταση νὰ ὑπάρχουν παρενθέσεις. Σ' αὐτὴ τὴν περίπτωση χρησιμοποιοῦμε τὶς ἰδιότητες τῆς προσθέσεως καὶ τῆς ἀφαιρέσεως, γιὰ νὰ βροῦμε τὴν τιμή της.

Π.χ. $10+7-(5-3)=10+7+3-5 \quad =15$

$10+7+(5-3)=10+7+5-3 \quad =19$

$100-(34+5+12)=100-34-5-12=49$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

61. Νὰ βρεῖτε τὶς τιμὲς τῶν ἀριθμητικῶν παραστάσεων:

α) $20-5+15+30-22-7$ β) $12-10+30-8+7$

62. Νὰ ἐκτελεστοῦν οἱ πράξεις:

α) $13-(6-1)-(9-8+1)$ β) $8+[(3+(7-5)-2)]$

63. Νὰ ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση: $\chi-4+6+2=28$

64. Ἂν $\alpha+\beta=12$, νὰ ὑπολογιστεῖ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως:

$$30+(\alpha+3)-(10-\beta)$$

28. ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

28. 1. Ὁρισμὸς

Τὸ ἄθροισμα

$$12+12+12+12+12$$

ἀποτελεῖται ἀπὸ ἴσους προσθετέους. Συνεπῶς, γιὰ νὰ τὸ ὁρίσουμε, ἀρκεῖ νὰ γνωρίζουμε ποιὸν προσθετέο λαμβάνομε καὶ πόσες φορές.

Γιὰ τοῦτο, ἀντὶ νὰ γράφουμε

$12+12+12+12+12$, γράφουμε $5\cdot 12$

Αὐτὸ τὸ ἄθροισμα ὀνομάζεται γινόμενο 5 ἐπὶ 12.

Σ' αὐτὸ τὸ γινόμενο ὁ ἀριθμὸς 5, ποὺ δηλώνει τὸ πλῆθος τῶν ἴσων ὅρων, ὀνομάζεται πολλαπλασιαστής, ἐνῶ ὁ 12 πολλαπλασιαστέος. Ὁ πολλαπλασιαστὴς καὶ ὁ πολλαπλασιαστέος ὀνομάζονται ὅροι ἢ παράγοντες τοῦ γινομένου.

Ὅμοια, τὸ ἄθροισμα

$$\beta+\beta+\beta+\beta$$

λέγεται γινόμενο τοῦ 4 ἐπὶ τὸ β καὶ γράφεται $4\cdot\beta$.

Γενικὰ τὸ ἄθροισμα

$$\beta+\beta+\ldots+\beta \quad (\alpha \text{ φορὲς})$$

λέγεται γινόμενο* τοῦ α ἐπὶ τὸ β.

Καὶ γράφεται $\alpha\cdot\beta$ ἢ $\alpha\times\beta$

Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ αὐτὸ ἐννοοῦμε ὅτι ὁ α παριστάνει ἀκέραιο μεγαλύτερο ἀπὸ τὴ μονάδα ($\alpha>1$).

Ἡ πράξη μὲ τὴν ὁποία ἀπὸ τὸ ζεῦγος (α, β) βρίσκουμε τὸ γινόμενο α . β ὀνομάζεται πολλαπλασιασμὸς τοῦ α ἐπὶ τὸ β.

$$(\alpha, \beta) \xrightarrow{\times} \alpha\cdot\beta$$

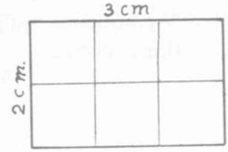
* Δὲν πρέπει νὰ συγχέουμε τὸ «γινόμενο» μὲ τὸν «πολλαπλασιασμό». Ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶναι μία πράξη, ἐνῶ τὸ γινόμενο εἶναι τὸ ἀποτέλεσμα τῆς πράξεως (ἀριθμός).

Εἶναι φανερὸ ὅτι καὶ ὁ πολλαπλασιασμός, καθὼς καὶ ἡ πρόσθεση, εἶναι διμελὴς πράξη.

28. 2. Εἰδικὲς περιπτώσεις.

Γιὰ νὰ γενικεύσουμε τὸν ὁρισμὸ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ στὶς περιπτώσεις ποὺ ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι 1 ἢ 0 συμφωνοῦμε ὅτι:

$$\begin{array}{l} 1\cdot\beta=\beta \\ 0\cdot\beta=0 \end{array} \qquad \beta\in N_0$$

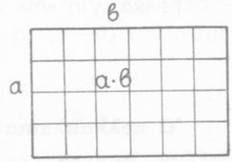


Σχ. 18.

28. 3. Γεωμετρικὴ παράσταση τοῦ γινομένου

Τὸ ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο στὸ σχ. 18, ἔχει διαστάσεις 2 cm καὶ 3 cm καὶ εἶναι χωρισμένο σὲ τετράγωνα μὲ πλευρὰ 1 cm. Τὸ γινόμενο $2\cdot3=6$ εἶναι ἴσο μὲ τὸ πλῆθος αὐτῶν τῶν τετραγώνων.

Γενικά: Ἂν $\alpha, \beta \in N_0$, τότε τὸ γινόμενο $\alpha.\beta$ εἶναι ἴσο μὲ τὸ πλῆθος τῶν τετραγώνων μὲ πλευρὰ 1 cm, στὰ ὁποῖα χωρίζεται ἕνα ὀρθογώνιο μὲ διαστάσεις α cm καὶ β cm, (σχ. 19).



Σχ. 19.

29. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ

29. 1. Ὕπαρξη γινομένου. Τὸ μονότιμο

Ἂν σκεφτοῦμε ὅτι κάθε γινόμενο εἶναι ἕνα ἄθροισμα:

Π.χ. $3\cdot4=4+4+4$

$5\cdot\beta=\beta+\beta+\beta+\beta+\beta$

ἐννοοῦμε ὅτι, ἂν δοθοῦν δύο ἀκέραιοι α, β, τότε ὑπάρχει ἕνας καὶ μόνον ἕνας ἀκέραιος ποὺ εἶναι τὸ γινόμενό τους: α.β.

29. 2. Μεταθετικὴ

Εἶναι $3\cdot5=5+5+5=15$

Ἀλλὰ καὶ $5\cdot3=3+3+3+3+3=15$

Ἤτοι $3\cdot5=5.3$

Γενικά, ἂν $\alpha, \beta\in N_0$, τότε $\boxed{\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha}$

Ὁ πολλαπλασιασμὸς στὸ σύνολο N_0 εἶναι πράξη μεταθετική.

29. 3. Οὐδέτερο στοιχεῖο

Καθὼς εἴδαμε: $3\cdot1=1\cdot3=3$

$5\cdot1=1\cdot5=5$

Γενικά, γιὰ κάθε ἀκέραιο α εἶναι:

$$\boxed{\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha}$$

Γι' αὐτὸ λέμε ὅτι ἡ μονάδα εἶναι οὐδέτερο στοιχεῖο στὸν πολλαπλασιασμὸ καὶ μάλιστα τὸ μοναδικό.

29. 4. Προσεταιριστική

Ἂς λάβουμε τρεῖς ἀκεραίους στὴ σειρά, π.χ. τοὺς 2, 5, 6.
Παρατηροῦμε

ὅτι: $2 \cdot 5 = 10$ ἀλλὰ καὶ $5 \cdot 6 = 30$

$10 \cdot 6 = 60$ $\qquad$ $2 \cdot 30 = 60$

Ἤ $(2 \cdot 5) \cdot 6 = 60$ Ἤ $2 \cdot (5 \cdot 6) = 60$

Ὥστε $(2 \cdot 5) \cdot 6 = 2 \cdot (5 \cdot 6)$

Γενικά, γιὰ κάθε τριάδα ἀκεραίων α, β, γ εἶναι:

$$\boxed{(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)}$$

Ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶναι πράξη προσεταιριστική.

29. 5. Ἐπιμεριστική

α) Ὡς πρὸς τὴν πρόσθεση:

Σύμφωνα μὲ τὸν ὁρισμὸ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἶναι:

$$3 \cdot (2+5) = (2+5)+(2+5)+(2\times5)$$

ἢ $3 \cdot (2+5) = (2+2+2)+(5+5+5)$

ἢ $3 \cdot (2+5) = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 5$

Γενικά, γιὰ κάθε τριάδα ἀκεραίων α, β, γ εἶναι:

$$\boxed{\alpha \cdot (\beta+\gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma}$$

Ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶναι πράξη ἐπιμεριστικὴ ὡς πρὸς τὴν πρόσθεση.

β) Ὡς πρὸς τὴν ἀφαίρεση:

Παρατηροῦμε ὅτι: $3 \cdot (7-5) = 3 \cdot 2 = 6$

Ἀλλὰ καὶ $(3 \cdot 7) - (3.5) = 21 - 15 = 6$

Ἄρα $3 \cdot (7-5) = (3 \cdot 7) - (3 \cdot 5)$

Γενικά, ἂν $\alpha, \beta, \gamma \in N_0$ καὶ $\beta > \gamma$, τότε $\boxed{\alpha\cdot(\beta-\gamma)=(\alpha\cdot\beta)-(\alpha\cdot\gamma)}$

Ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶναι πράξη ἐπιμεριστικὴ ὡς πρὸς τὴν ἀφαίρεση.

Ἐφαρμογὲς

1) Ἡ ἰσότητα $\alpha\cdot(\beta+\gamma)=(\alpha\cdot\beta)+(\alpha\cdot\gamma)$
γράφεται $(\alpha\cdot\beta)+(\alpha.\gamma)=\alpha\cdot(\beta+\gamma)$ Γιατί;

Τὸ α΄ μέλος τῆς ἰσότητας εἶναι ἄθροισμα δύο γινομένων, ἐνῶ τὸ β΄ μέλος εἶναι γινόμενο ἑνὸς ἀριθμοῦ μὲ ἕνα ἄθροισμα. Σύμφωνα μὲ τὴν ἰσότητα αὐτὴ ἔχουμε:

α) $$(5\cdot4)+(5\cdot6)=5\cdot(4+6)=5.10$$

β) $$(2\cdot\alpha)+(3\cdot\alpha)=(2+3)\cdot\alpha=5.\alpha$$

2) Ἡ ἐπιμεριστικὴ ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὡς πρὸς τὴν πρόσθεση μᾶς ἐπιτρέπει νὰ ὑπολογίσουμε τὸ γινόμενο: $(\alpha+\beta)\cdot(\gamma+\delta)$ (ἄθροισμα ἐπὶ ἄθροισμα).

$$(\alpha+\beta)\cdot(\gamma+\delta)=(\alpha+\beta)\cdot\gamma+(\alpha+\beta)\cdot\delta$$

Ἤ $$(\alpha+\beta)\cdot(\gamma+\delta)=(\alpha\cdot\gamma)+(\beta\cdot\gamma)+(\alpha\cdot\delta)+(\beta\cdot\delta)$$

Δηλαδή: **Γιὰ νὰ πολλαπλασιάσουμε ἄθροισμα ἐπὶ ἄθροισμα, πολλαπλασιάζουμε κάθε προσθετέο τοῦ ἑνὸς ἀθροίσματος μὲ κάθε προσθετέο τοῦ ἄλλου ἀθροίσματος καὶ προσθέτουμε τὰ μερικὰ γινόμενα.**

Π.χ. γιὰ τὸ γινόμενο $(2+4)\cdot(3+5)$
ἔχουμε: $$(2+4)\cdot(3+5)=(2\cdot3)+(2\cdot5)+(4\cdot3)+(4\cdot5)=6+10+12+20=48$$

29. 6. Ἰδιότητες τῆς διαγραφῆς

α) Ἀπὸ τὴ γνωστὴ ἰσοδυναμία

$$\alpha=\beta\Leftrightarrow\alpha+\gamma=\beta+\gamma \quad \text{ὅπου } \alpha,\beta,\gamma\in N_0$$

ἔχομε $$\alpha=\beta\Leftrightarrow\alpha+\alpha=\beta+\alpha$$
$$\alpha=\beta\Leftrightarrow\alpha+\alpha=\beta+\beta \quad \text{ἐπειδὴ } \alpha=\beta$$
ἢ $$\alpha=\beta\Leftrightarrow 2.\alpha=2\cdot\beta$$

Γενικά, ἂν $\gamma\in N$,

τότε $\boxed{\alpha=\beta\Leftrightarrow\alpha\cdot\gamma=\beta\cdot\gamma}$

Ὑπογραμμίζουμε ὅτι αὐτὴ ἡ ἰσοδυναμία ἰσχύει, ὅταν ὁ γ εἶναι φυσικὸς ἀριθμὸς καὶ ὄχι μηδέν.

Π.χ. Ἀπὸ τὴν ἰσότητα $6\cdot\chi=6\cdot7$

ἕπεται ὅτι $\chi=7$

ἐνῷ ἀπὸ τὴν ἰσότητα $0\cdot6=0\cdot3$

δὲν ἕπεται ὅτι $6=3$

β) Ἂν σκεφτοῦμε ὅπως προηγούμενα, ἀπὸ τὴ σχέση

$$\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha+\beta>\beta+\gamma$$

πᾶμε στὴ σχέση

$$\boxed{\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha.\gamma>\beta\cdot\gamma \quad \text{ὅπου } \gamma\in N}$$

Π.χ. Ἀπὸ τὴν ἀνισότητα $3>2$ συνάγομε ὅτι καὶ $3.1524>2.1524$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

65. Νὰ συμπληρώσετε τὶς ἰσότητες:

$6\cdot9=9+9+\ldots \qquad 4.\alpha=\alpha+$

66. Νὰ συμπληρώσετε τὴ συνεπαγωγὴ $\alpha.\beta=\alpha \Rightarrow \beta=$; ὅπου $\alpha\neq0$. Τί μπορεῖτε νὰ πεῖτε ὅταν $\alpha=0$;

67. Νὰ συμπληρώσετε τὶς ἰσότητες:

$4.\beta=\beta.\ \ldots \qquad 3.(5.\alpha)=15.\ \ldots$

68. Νὰ βρεῖτε μὲ δύο τρόπους τὰ γινόμενα:

α) $3.(4+7)$ β) $(3+2).(5+4)$ γ) $(8+3).(12+5)$

69. Νὰ γράψετε μὲ μορφὴ γινομένου τὰ ἀθροίσματα:

α) $(3.\alpha)+(5.\alpha)$ β) $(7.\alpha)+(3.\alpha)+(2.\alpha)$ γ) $6+9$

70. Τί παθαίνει τὸ γινόμενο δύο ἀκεραίων, ὅταν ὁ ἕνας ἀπὸ αὐτοὺς αὐξάνεται ἢ ἐλαττώνεται κατὰ μία μονάδα;

(Νὰ χρησιμοποιήσετε ἀριθμητικὰ παραδείγματα καὶ ἔπειτα γενικοὺς ἀριθμούς).

30. ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΠΟΛΛΩΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ

Μιὰ πόλη ἔχει 3 Γυμνάσια. Κάθε Γυμνάσιο ἔχει 6 τάξεις. Κάθε τάξη ἔχει 2 τμήματα. Κάθε τμῆμα ἔχει 50 μαθητές. Πόσους μαθητὲς ἔχουν ὅλα μαζὶ τὰ Γυμνάσια σ' αὐτὴ τὴν πόλη;

Γιὰ νὰ ὑπολογίσουμε τὸ συνολικὸ ἀριθμὸ τῶν μαθητῶν σ' αὐτὰ τὰ τρία Γυμνάσια, μποροῦμε νὰ ἐργαστοῦμε ὡς ἑξῆς:

Ἀριθμὸς τάξεων $3\cdot6=18$

» τμημάτων $18\cdot2=36$ ἢ $(3\cdot6)\cdot2=36$

» μαθητῶν $36\cdot50=1800$ ἢ $[(3\cdot6)\cdot2]\cdot50=1800$

Ὁ ἀριθμὸς 1800 λέγεται **γινόμενο** τῶν ἀριθμῶν 3, 6, 2, 50 κατὰ τὴ σειρὰ αὐτή.

Τὸ γράφομε $3 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 50 = 1800$

Ἤτοι $3 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 50 = [(3 \cdot 6) \cdot 2] \cdot 50$

Σημειώνουμε ὅτι ἡ γραφὴ $(3 \cdot 6)$ δηλώνει ἕναν ἀριθμό: τὸ γινόμενο $3 \cdot 6 = 18$. Καὶ ἡ γραφὴ $[(3 \cdot 6) \cdot 2]$ δηλώνει ἕναν ἀριθμό: τὸ γινόμενο $18 \cdot 2$.

Γενικά, ὀνομάζουμε γινόμενο τριῶν ἢ καὶ περισσότερων ἀκεραίων, ποὺ δίνονται σὲ μιὰ σειρά, τὸν ἀριθμὸ ποὺ βρίσκουμε, ὅταν πολλαπλασιάσουμε τὸν π ρ ῶ τ ο μὲ τὸ δ ε ύ τ ε ρ ο, τὸ γ ι ν ό μ ε ν ο μὲ τὸν τ ρ ί τ ο κ.ο.κ. ἕως καὶ τὸν τελευταῖο.

Ἢ συμβολικά: Ἂν $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in N_0$, τότε $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta = [(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma] \cdot \delta$

31. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ ΠΟΛΛΩΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ

31. 1. Μεταθετικὴ ἰδιότητα

Εἶναι $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 6 \cdot 4 \cdot 5 = 24 \cdot 5 = 120$

Ἀλλὰ καὶ $2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 4 = 10 \cdot 3 \cdot 4 = 30 \cdot 4 = 120$

Ἤτοι $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 4$

Γενικὰ $\boxed{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta = \alpha \cdot \delta \cdot \beta \cdot \gamma = \gamma \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \delta = \ldots, \text{ ὅπου } \alpha, \beta, \gamma, \delta \in N_0}$

31. 2. Συνθετική, ἀναλυτικὴ

Εἶναι $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 6 \cdot 4 \cdot 5 = 24 \cdot 5 = 120$

ἀλλὰ καὶ $2 \cdot (3 \cdot 4) \cdot 5 = 2 \cdot 12 \cdot 5 = 24 \cdot 5 = 120$

Ἤτοι $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 2 \cdot (3 \cdot 4) \cdot 5$

Γενικὰ $\boxed{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) \cdot \delta = \alpha \cdot (\beta \cdot \delta) \cdot \gamma \ldots, \text{ ὅπου } \alpha, \beta, \gamma, \delta \in N_0}$

Δηλαδὴ στὸ γινόμενο πολλῶν παραγόντων μποροῦμε:

α) Νὰ ἀντικαταστήσουμε δύο (ἢ περισσότερους) παράγοντες μὲ τὸ γινόμενό τους.

β) Νὰ ἀντικαταστήσουμε ἕναν παράγοντα μὲ δύο (ἢ περισσότερους) ἄλλους ποὺ τὸν ἔχουν ὡς γινόμενο.

Ἐφαρμογὲς i) $6 \cdot 4 \cdot 25 \cdot 2 = 6 \cdot 100 \cdot 2 = 1200$

ii) $20 \cdot 25 \cdot 3 = 5 \cdot 4 \cdot 25 \cdot 3 = 5 \cdot 100 \cdot 3 = 1500$

31.3. Γινόμενο ἐπὶ ἕναν ἀριθμό.

Ἂν πολλαπλασιάσουμε τὸ γινόμενο $(2 \cdot 3 \cdot 5)$ ἐπὶ τὸν ἀκέραιο 4,

ἔχουμε $(2 \cdot 3 \cdot 5) \cdot 4 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4$ (Ἀναλυτικὴ ἰδιότητα) καὶ $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 = 2 \cdot 3 \cdot (5 \cdot 4)$ (Συνθετικὴ ἰδιότητα)

Ἤτοι $(2 \cdot 3 \cdot 5) \cdot 4 = 2 \cdot 3 \cdot (5 \cdot 4)$

Γενικὰ
$$\boxed{\begin{aligned}(\alpha \cdot \beta \cdot \gamma) \cdot \delta &= \alpha \cdot \beta \cdot (\gamma \cdot \delta) \\ &= \alpha \cdot (\beta \cdot \delta) \cdot \gamma \quad \text{ὅπου } \alpha, \beta, \gamma, \delta \in N_0 \\ &= (\alpha \cdot \delta) \cdot \beta \cdot \gamma\end{aligned}}$$

Γιὰ νὰ πολλαπλασιάσουμε ἕνα γινόμενο μὲ ἕναν ἀριθμό, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσουμε ἕνα μόνο παράγοντα τοῦ γινομένου μὲ τὸν ἀριθμό.

Ἐφαρμογή $(2 \cdot \alpha) \cdot 3 = (2 \cdot 3) \cdot \alpha = 6 \cdot \alpha$

31.4. Γινόμενο ἐπὶ ἕνα γινόμενο.

Ἂς πολλαπλασιάσουμε τὸ γινόμενο 2.3 ἐπὶ τὸ γινόμενο 4.5.

Ἔχουμε: $(2 \cdot 3) \cdot (4 \cdot 5) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ (Ἀναλυτικὴ ἰδιότητα)

Γενικὰ $\boxed{(\alpha \cdot \beta) \cdot (\gamma \cdot \delta) = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta \quad \text{ὅπου } \alpha, \beta, \gamma, \delta \in N_0}$

Γιὰ νὰ πολλαπλασιάσουμε δύο γινόμενα, ἀρκεῖ νὰ σχηματίσουμε ἕνα νέο γινόμενο, τὸ ὁποῖο νὰ περιέχει ὅλους τοὺς παράγοντες τῶν δύο γινομένων καὶ μόνον αὐτούς.

Ἐφαρμογή: $(2 \cdot \alpha) \cdot (3 \cdot \beta) = 2 \cdot \alpha \cdot 3 \cdot \beta = (2 \cdot 3)\alpha \cdot \beta = 6 \cdot \alpha \cdot \beta$ ὅπου $\alpha, \beta \in N_0$

32. ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑ ΑΚΕΡΑΙΩΝ

Οἱ ἀριθμοὶ 0, 7, 14, 21, 28 προκύπτουν ἀπὸ τὸ 7, ἂν τὸ πολλαπλασιάσουμε μὲ τοὺς ἀριθμοὺς 0, 1, 2, 3, 4 ἀντιστοίχως. Γι' αὐτὸ λέγονται π ο λ λ α π λ ά σ ι α τοῦ 7.

Γενικά, τὸ γινόμενο ἑνὸς ἀκεραίου α μὲ ὁποιονδήποτε ἀκέραιο λέγεται π ο λ λ α π λ ά σ ι ο τοῦ α.

Ἤτοι τὰ πολλαπλάσια τοῦ $\alpha \in N_0$ εἶναι: 0.α, 1.α, 2.α, 3.α, ...

Τὸ σύνολο $\Pi(7) = \{0, 7, 14, 21, 28, \ldots\}$,

τὸ ὁποῖο ἀπαρτίζεται ἀπὸ τὰ πολλαπλάσια τοῦ 7, λέγεται σύνολο τῶν π ο λ λ α π λ α σ ί ω ν τοῦ ἀκεραίου 7.

Ἔτσι, τὸ σύνολο τῶν πολλαπλασίων τοῦ α εἶναι:

$$\Pi(\alpha) = \{0, \alpha, 2\alpha, 3\alpha, \ldots\}$$

Εἶναι φανερὸ ὅτι τὸ σύνολο τῶν πολλαπλασίων ἑνὸς ἀκεραίου εἶναι ἕνα ἀπειροσύνολο.

Παρατηρήσεις

1) Ἐπειδὴ $0 \cdot \alpha = 0$, ὅπου $\alpha \in N_0$, ἕπεται ὅτι τὸ 0 εἶναι πολλαπλάσιο ὁποιουδήποτε ἀκεραίου.

2) Ἐπειδὴ $\alpha \cdot 1 = \alpha$, ὅπου $\alpha \in N_0$, ἕπεται ὅτι κάθε ἀκέραιος εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ ἑαυτοῦ του.

ΠΙΝΑΚΑΣ

μὲ τὶς ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

1. Ἂν	$\alpha, \beta \in N_0$, τότε	ὑπάρχει ἕνας καὶ μόνον ἕνας ἀκέραιος $\gamma = \alpha \cdot \beta$ ·
2. »	$\alpha, \beta \in N_0$,	τότε $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$
3. »	$\alpha, \beta, \gamma \in N_0$,	τότε $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$
4. »	»	τότε $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$
5. »	$\alpha \in N_0$,	τότε $\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$
6. »	$\alpha, \beta, \gamma \in N_0$,	τότε $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta = \alpha \cdot \gamma \cdot \beta \cdot \delta = \alpha \cdot \delta \cdot \beta \cdot \gamma \cdot$
7. »	$\alpha, \beta, \gamma, \delta \in N_0$,	τότε $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) \cdot \delta = \alpha \cdot (\delta \cdot \beta) \cdot \gamma$
8. »	»	τότε $(\alpha \cdot \beta \cdot \gamma) \cdot \delta = \alpha \cdot \beta \cdot (\gamma \cdot \delta)$
9. »	»	τότε $(\alpha \cdot \beta) \cdot (\gamma \cdot \delta) = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta$
10. »	$\alpha, \beta \in N_0, \gamma \in N$,	τότε $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha . \gamma = \beta \cdot \gamma$
11. »	»	τότε $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

71. Στὶς ἰσότητες: i) $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = 24$, ii) $\alpha \cdot \beta + \gamma = 72$ νὰ δώσετε κάθε δυνατὴ τιμὴ στὰ γράμματα α, β, γ, ὥστε αὐτὲς νὰ ἀληθεύουν.

72. Ποιὲς ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ μᾶς ἐπιτρέπουν νὰ γράψουμε:

i) $2 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 4 = 8 \cdot 63 = 2 \cdot 7 \cdot 36$ ii) $25 \cdot 4 \cdot 5 \cdot = 100 \cdot 5 = 25 \cdot 20$

73. Τὸ γινόμενο δύο ἀριθμῶν εἶναι 50. Πῶς θὰ μεταβληθεῖ,

α) ἂν πολλαπλασιάσουμε τὸν ἕναν παράγοντα ἐπὶ 3, β) ἂν πολλαπλασιάσουμε τὸν ἕναν παράγοντα ἐπὶ 5 καὶ τὸν ἄλλο ἐπὶ 2;

74. Νὰ συμπληρώσετε τὶς σχέσεις:

$\chi = 3 \Leftrightarrow 5 \cdot \chi = ;$ $\chi < 4 \Leftrightarrow 7 \cdot \chi < \ldots$

75. α) Νὰ γράψετε τὸ σύνολο τῶν πολλαπλασίων τοῦ 6 ποὺ περιέχονται ἀνάμεσα στὸ 20 καὶ στὸ 76.

β) Νὰ γράψετε 3 διψήφια καὶ 4 τριψήφια πολλαπλάσια τοῦ 15.

33. Η ΠΡΑΞΗ ΤΗΣ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ

33. 1. Ὁρισμὸς

Ὁ ἐπιστάτης τοῦ Γυμνασίου, γιὰ νὰ δώσει ἀπὸ 5 κιμωλίες σὲ καθένα ἀπὸ τὰ 12 τμήματα, παίρνει συνολικὰ $12 \cdot 5 = 60$ κιμωλίες.

Ὅταν φτάσει στὴν Α' τάξη, λησμονεῖ πόσες κιμωλίες πρέπει νὰ δώσει σὲ κάθε τμῆμα. Ἔτσι προκύπτει τὸ ἑξῆς πρόβλημα:

Τὸ γινόμενο τοῦ 12 μὲ «κάποιον» ἀκέραιο εἶναι ἴσο μὲ 60. Ποιὸς εἶναι αὐτὸς ὁ ἀκέραιος;

Δηλαδή, ἂν παραστήσουμε μὲ χ τὸν ἀκέραιο ποὺ ζητοῦμε, θὰ πρέπει

$$12 \cdot \chi = 60 \qquad (1)$$

Ὁ ἀριθμὸς $\chi = 5$, μὲ τὸν ὁποῖο πρέπει νὰ πολλαπλασιάσουμε τὸν 12 γιὰ νὰ δώση γινόμενο 60, λέγεται ἀκριβὲς πηλίκο τῶν ἀριθμῶν 60 καὶ 12.

Γράφουμε τότε $$60 : 12 = \chi \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὰ προηγούμενα ἐννοοῦμε ὅτι οἱ σχέσεις (1) καὶ (2) ἐκφράζουν τὸ ἴδιο πρόβλημα, εἶναι ἰσοδύναμες μεταξύ τους. Δηλαδή: Ἂν ἰσχύει ἡ μία ἀπὸ αὐτές, θὰ ἰσχύει καὶ ἡ ἄλλη. Γι' αὐτὸ γράφουμε

$$12 \cdot \chi = 60 \Leftrightarrow 60 : 12 = \chi$$

Γενικά: **Ἂν $\beta \in N_0$, $\alpha \in N$ καὶ ὑπάρχει ἀκέραιος χ τέτοιος ὥστε**

$$\alpha \cdot \chi = \beta$$

τότε λέμε ὅτι ὁ χ εἶναι τὸ ἀκριβὲς πηλίκο τοῦ β διὰ α.

Τὸ γράφουμε: $$\beta : \alpha = \chi$$

Ὥστε $$\alpha . \chi = \beta \Leftrightarrow \beta : \alpha = \chi$$

Ἡ πράξη μὲ τὴν ὁποία ἀπὸ τὸ ζεῦγος (β, α) βρίσκουμε τὸ ἀκριβὲς πηλίκο β : α, ἂν ὑπάρχει, ὀνομάζεται τέλεια διαίρεση.

$$(\beta, \alpha) \xrightarrow{\;:\;} \beta : \alpha$$

Ὁ β εἶναι ὁ διαιρετέος καὶ ὁ α ὁ διαιρέτης.

33. 2. Ἂς ξαναγυρίσουμε στὸ παράδειγμά μας.

Ὁ ἐπιστάτης γνώριζε ὅτι τὸ 60 ἦταν πολλαπλάσιο τοῦ 12. Λησμόνησε ὅμως ποιὸ πολλαπλάσιο.

Γι' αὐτό, ἂς δοῦμε τὰ διαδοχικὰ πολλαπλάσια τοῦ 12

	$0 \cdot 12$	$1 \cdot 12$	$2 \cdot 12$	$3 \cdot 12$	$4 \cdot 12$	$5 \cdot 12$ ...
Ἤ	0	12	24	36	48	60 ...

Ἀνάμεσα σ' αὐτὰ ὑπάρχει τὸ 60. Καὶ εἶναι $60 = 5 \cdot 12$. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι τὸ 5 εἶναι τὸ ἀκριβὲς πηλίκο τοῦ 60 διὰ 12.

Γενικά, ἂν α καὶ β εἶναι δύο ἀκέραιοι, $\alpha \neq 0$, γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἀκριβὲς πηλίκο β : α, σχηματίζουμε τὸ σύνολο μὲ τὰ διαδοχικὰ πολλαπλάσια τοῦ α.

$$\{0 \cdot \alpha, 1 \cdot \alpha, 2 \cdot \alpha, 3 \cdot \alpha, \ldots, \pi \cdot \alpha, \ldots\}$$

Ὑπάρχουν τότε δύο περιπτώσεις:

i) Ὁ β νὰ εἶναι στοιχεῖο αὐτοῦ τοῦ συνόλου· π.χ. εἶναι $\beta = \pi . \alpha$. Τότε ὑπάρχει στὸ σύνολο N_0 ἀκριβὲς πηλίκο τοῦ β διὰ α καὶ εἶναι τὸ π.

ii) Ὁ β νὰ μὴν εἶναι στοιχεῖο αὐτοῦ τοῦ συνόλου. Τότε δ ὲ ν ὑ π ά ρ χ ε ι ἀκριβὲς πηλίκο τοῦ β διὰ α στὸ N_0.

Ὥστε: **Ἡ τέλεια διαίρεση β διὰ α εἶναι δυνατὴ στὸ σύνολο No, μόνον ὅταν ὁ β εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ α.**

33. 3. Οἱ σχέσεις $\alpha \cdot \beta = \gamma$, $\gamma : \beta = \alpha$, $\gamma : \alpha = \beta$.

Ὅπως φαίνεται παραστατικὰ καὶ στὸ σχ. 19, ἂν ἀνάμεσα σὲ τρεῖς ἀκεραίους α, β, γ εἶναι $\alpha \cdot \beta = \gamma$, θὰ εἶναι ἐπίσης καὶ $\gamma : \beta = \alpha$ καὶ $\gamma : \alpha = \beta$.

Ἐπίσης, ἂν εἶναι $\gamma : \beta = \alpha$ (ἢ $\gamma : \alpha = \beta$), θὰ εἶναι καὶ $\alpha . \beta = \gamma$

Ἢ συμβολικά:

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha \cdot \beta = \gamma \;\Leftrightarrow\; \gamma : \beta = \alpha \\ \alpha \cdot \beta = \gamma \;\Leftrightarrow\; \gamma : \alpha = \beta \end{array}}$$

Παραδείγματα

α) Ἀφοῦ εἶναι $4 \cdot 5 = 20$ εἶναι ἐπίσης $20 : 4 = 5$ καὶ $20 : 5 = 4$

β) Ἀφοῦ εἶναι $36 : 12 = 3$ εἶναι ἐπίσης $3 \cdot 12 = 36$ καὶ $36 : 3 = 12$

33. 4. Ἐπίλυση ἁπλῶν ἐξισώσεων.

α) Ν ὰ β ρ ε θ ε ῖ ἀ ρ ι θ μ ὸ ς χ τ έ τ ο ι ο ς, ὥ σ τ ε $8 \cdot \chi = 56$

Γιὰ νὰ ἐπιλύσουμε αὐτὴ τὴν ἐξίσωση, σκεφτόμαστε ὅτι:

$\alpha . \beta = \gamma \;\Leftrightarrow\; \beta = \gamma : \alpha$

Ἄρα $8 . \chi = 56 \;\Leftrightarrow\; \chi = 56 : 8$ Ἤτοι $\chi = 7$

Ἐπαλήθευση $8 . 7 = 56$

β) Ν ὰ β ρ ε θ ε ῖ ἀ ρ ι θ μ ὸ ς χ τ έ τ ο ι ο ς, ὥ σ τ ε $\chi : 7 = 4$

Σκεφτόμαστε ὅτι: $\gamma : \beta = \alpha \;\Leftrightarrow\; \gamma = \alpha \cdot \beta$

Ἄρα $\chi : 7 = 4 \;\Leftrightarrow\; x = 7 \cdot 4$ Ἤτοι $\chi = 28$

Ἐπαλήθευση $28 : 7 = 4$

γ) Ν ὰ β ρ ε θ ε ῖ ἀ ρ ι θ μ ὸ ς χ τ έ τ ο ι ο ς, ὥ σ τ ε $72 : \chi = 8$

Σκεφτόμαστε ὅτι: $\alpha : \gamma = \beta \;\Leftrightarrow\; \alpha : \beta = \gamma$

Ἄρα $72 : \chi = 8 \;\Leftrightarrow\; 72 : 8 = \chi$ Ἤτοι $\chi = 9$

Ἐπαλήθευση $72 : 9 = 8$

Γενικὰ κάθε ἐξίσωση μὲ τὴ μορφὴ $\alpha . \chi = \beta$ ἔχει τὴ λύση $\chi = \beta : \alpha$

Ὅμοια ἡ ἐξίσωση μὲ τὴ μορφὴ $\chi : \alpha = \beta$ ἔχει τὴ λύση $\chi = \beta \cdot \alpha$

καὶ ἡ ἐξίσωση μὲ τὴ μορφὴ $\beta : \chi = \alpha$ ἔχει τὴ λύση $\chi = \beta : \alpha$

ὅπου $\alpha \in N$, $\beta \in N_0$ καὶ οἱ ἐξισώσεις ἔχουν λύση στὸ σύνολο N_0.

Ἐξίσωση		Λύση
$\alpha \cdot \chi = \beta$	$\longrightarrow$	$\chi = \beta : \alpha$
$\chi : \alpha = \beta$	$\longrightarrow$	$\chi = \beta \cdot \alpha$
$\beta : \chi = \alpha$	$\longrightarrow$	$\chi = \beta : \alpha$

33. 5. Ἡ διαίρεση ὡς πράξη ἀντίστροφη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Ἂν τὸν ἀριθμὸ 4 τὸν πολλαπλασιάσουμε μὲ τὸ 5, λαμβάνουμε 20. Ἂν τὸ 20 τὸ διαιρέσουμε μὲ τὸ 5, ξαναβρίσκουμε τὸ 4.

$$4 \cdot 5 = 20 \quad \text{καὶ} \quad 20 : 5 = 4$$

Ἤτοι: $(4.5) : 5 = 4$

Γενικὰ $\boxed{(\alpha \cdot \beta) : \beta = \alpha}$

Γι' αὐτὸ λέμε ὅτι ἡ διαίρεση εἶναι πράξη ἀ ν τ ί σ τ ρ ο φ η τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

34. ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ

34. 1. Ἡ διαίρεση $0 : \alpha$, ὅπου $\alpha \in N$.

Ἂν θέσουμε $0 : \alpha = \chi$, τότε θὰ πρέπει $0 = \chi \cdot \alpha$

$$0 : \alpha = \chi \Leftrightarrow 0 = \chi \cdot \alpha$$

Ἐπειδὴ $\alpha \neq 0$, τὸ γινόμενο $\chi \cdot \alpha$ εἶναι 0 μόνον ὅταν $\chi = 0$.

Ἄρα $0 : \alpha = 0$

34. 2. Ἡ διαίρεση $0 : 0$

Ἂν θέσουμε $0 : 0 = \chi$, τότε θὰ πρέπει $0 = 0 \cdot \chi$

$$0 : 0 = \chi \Leftrightarrow 0 = 0 \cdot \chi$$

Ἀλλὰ ἡ ἰσότητα $0 = 0.\chi$ ἀληθεύει γιὰ ὁποιαδήποτε τιμὴ τοῦ χ. (Γιατί;) Συνεπῶς, κάθε ἀριθμὸς μπορεῖ νὰ εἶναι τὸ πηλίκο τῆς διαιρέσεως $0 : 0$. Γι' αὐτὸ λέμε ὅτι ἡ διαίρεση $0 : 0$ εἶναι ἀ ό ρ ι σ τ η.

34. 3. Ἡ διαίρεση $\alpha : 0$, ὅπου $\alpha \in N$.

Ἂν θέσουμε $\alpha : 0 = \chi$, τότε θὰ πρέπει $\alpha = 0 \cdot \chi$

$$\alpha : 0 = \chi \Leftrightarrow \alpha = 0 \cdot \chi$$

Ἀλλὰ ἡ ἰσότητα $\alpha = 0 \cdot \chi$ δὲν ἀληθεύει γιὰ καμιὰ τιμὴ τοῦ χ (Γιατί;) Συνεπῶς, ἡ διαίρεση $\alpha : 0$ εἶναι ἀ δ ύ ν α τ η.

34. 4. Ἡ διαίρεση $\alpha : 1$, ὅπου $\alpha \in N_0$.

Ἂν θέσουμε $\alpha : 1 = \chi$, τότε θὰ πρέπει $\alpha = \chi \cdot 1$.

$$\alpha : 1 = \chi \Leftrightarrow \alpha = \chi \cdot 1 \Leftrightarrow \alpha = \chi$$

Ἄρα $\alpha : 1 = \alpha$

34.5. Ἡ διαίρεση $\alpha : \alpha$, ὅπου $\alpha \in N$.

Ἂν θέσουμε $\alpha : \alpha = \chi$, τότε θὰ πρέπει $\alpha = \alpha \cdot \chi$.

$$\alpha : \alpha = \chi \Leftrightarrow \alpha = \alpha \cdot \chi$$

Ἀλλὰ ἡ ἰσότητα $\alpha = \alpha . \chi$ ἀληθεύει μόνον ὅταν $\chi = 1$ (Γιατί;)

Ἄρα $\qquad \alpha : \alpha = 1$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

76. Ἀπὸ τὴν ἰσότητα $325 = 13.25$ ποιὲς τέλειες διαιρέσεις συνάγετε;

77. Νὰ ἐπιλυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:

α) $20 \cdot \chi = 80$

β) $\chi : 19 = 21$

γ) $63 : \chi = 7$

78. Ποιὲς ἀπὸ τὶς πιὸ κάτω ἰσότητες εἶναι ἀληθεῖς καὶ ποιὲς δὲν εἶναι;

$0 : 5 = 5$	$0 : 3 = 0$	$0 : 0 = 2$	$3 : 0 = 3$
$3 : 1 = 0$	$3 : 1 = 3$	$6 : 6 = 1$	$6 : 6 = 0$

35. Η ΑΤΕΛΗΣ ΔΙΑΙΡΕΣΗ

35. 1. Ὁρισμὸς

Ὅπως εἴδαμε ἡ ἐξίσωση $12 . \chi = 60$ ἔχει τὴ λύση $\chi = 5$, ἐπειδὴ ὁ 60 εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 12.

Ἂς λάβουμε τὸν ἀκέραιο 67 στὴ θέση τοῦ 60. Δηλαδὴ ἂς λάβουμε τὴν ἐξίσωση:

$$12 \cdot \chi = 67$$

Γιὰ νὰ δοῦμε ἂν αὐτὴ ἡ ἐξίσωση ἔχει λύση στὸ σύνολο N_0, ἀρκεῖ νὰ ἐξετάσουμε ἂν τὸ 67 εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 12. Γι' αὐτὸ γράφουμε τὸ σύνολο τῶν διαδοχικῶν πολλαπλασίων τοῦ 12.

$$\{12 \cdot 0,\ 12 \cdot 1,\ 12 \cdot 2,\ 12 \cdot 3,\ 12 \cdot 4,\ 12 \cdot 5,\ 12 \cdot 6,\ \ldots\}$$

Ἢ $\qquad \{0,\ 12,\ 24,\ 36,\ 48,\ 60,\ 72,\ \ldots\}$

Ὅπως παρατηροῦμε, τὸ 67 δὲν εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 12. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι δὲν ὑπάρχει στὸ σύνολο N_0 ἀκριβὲς πηλίκο τῆς διαιρέσεως 67 διὰ 12. Σ' αὐτὴ τὴν περίπτωση λέμε ὅτι ἡ διαίρεση εἶναι ἀτελὴς στὸ σύνολο N_0. Παρατηροῦμε ὅτι ὁ 67 περιέχεται ἀνάμεσα σὲ δύο διαδοχικὰ πολλαπλάσια τοῦ 12. Συγκεκριμένα ἀνάμεσα στὸ 60 καὶ στὸ 72.

$$60 < 67 < 72$$

Ἢ $\qquad 5 \cdot 12 < 67 < 6 \cdot 12$

Ἀπὸ αὐτὴ τὴ διπλὴ ἀνισότητα ἐννοοῦμε ὅτι ὁ ἀριθμὸς 5 εἶναι ὁ μέγιστος ἀκέραιος, μὲ τὸν ὁποῖο εἶναι δυνατὸ νὰ πολλαπλασιαστεῖ ὁ 12 καὶ νὰ δώσει γινόμενο μικρότερο ἀπὸ τὸ 67. Τὸν ἀκέραιο 5 τὸν ὀνομάζουμε ἀκέραιο πηλίκο τῆς ἀτελοῦς διαιρέσεως διὰ 12· καὶ τὴ διαφορὰ

$$67 - 5 \cdot 12 = 67 - 60 = 7,$$

ποὺ εἶναι μικρότερη ἀπὸ τὸ διαιρέτη, τὴν ὀνομάζουμε ὑπόλοιπο.

Γενικά: Ἂν α καὶ β εἶναι δύο ἀκέραιοι καὶ $\alpha \neq 0$, $\beta > \alpha$, τότε, ἂν τὸ β δὲν εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ α, θὰ περιέχεται ἀνάμεσα σὲ δύο διαδοχικὰ πολλαπλάσιά του, π.χ. τὰ $\pi . \alpha$ καὶ $(\pi+1) . \alpha$.

Δηλαδή: $$\pi\alpha < \beta < (\pi+1)\cdot\alpha \qquad (1)$$

Σ' αὐτὴ τὴν περίπτωση λέμε ὅτι ἡ διαίρεση β διὰ α εἶναι ἀτελὴς στὸ σύνολο N_0.

Ἀπὸ τὴ διπλὴ ἀνισότητα (1) ἐννοοῦμε ὅτι ὁ ἀκέραιος π εἶναι ὁ μέγιστος ἀκέραιος, τοῦ ὁποίου τὸ γινόμενο ἐπὶ α εἶναι μικρότερο ἀπὸ τὸ β. Γι' αὐτὸ καὶ ὁ ἀκέραιος π λέγεται ἀκέραιο πηλίκο τῆς ἀτελοῦς διαιρέσεως β διὰ α.

Ἡ διαφορὰ $$\beta - (\pi\cdot\alpha) = \upsilon \qquad (2)$$

εἶναι μικρότερη ἀπὸ τὸ α (γιατί;) καὶ ὀνομάζεται ὑπόλοιπο τῆς ἀτελοῦς διαιρέσεως β διὰ α.

Ἀπὸ τὴ (2) λαμβάνουμε:

$$\left.\begin{aligned} \beta &= (\pi\alpha)+\upsilon \\ \upsilon &< \alpha \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Καὶ ἐπειδὴ συνήθως παριστάνουμε μὲ Δ τὸ διαιρετέο, μὲ δ τὸ διαιρέτη, μὲ π τὸ πηλίκο καὶ μὲ υ τὸ ὑπόλοιπο, οἱ πιὸ πάνω σχέσεις (3) γράφονται:

$$\left.\begin{aligned} \Delta &= \delta\cdot\pi+\upsilon \\ \upsilon &< \delta \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Οἱ σχέσεις (4), ὅπως εἶναι γραμμένες, ἀποτελοῦν τὶς βασικὲς συνθῆκες στὴν ἀτελῆ διαίρεση. Καὶ μᾶς ἐπιτρέπουν νὰ βροῦμε μὲ ἕναν καὶ μοναδικὸ τρόπο ἀπὸ τὸ Δ καὶ τὸ δ δύο ἄλλους ἀριθμούς: τὸ ἀκέραιο πηλίκο π καὶ τὸ ὑπόλοιπο υ τῆς ἀτελοῦς διαιρέσεως Δ διὰ δ.

Στὸ παράδειγμά μας ἡ σχέση:

$$67 = 5\cdot 12+7$$

δηλώνει ὅτι ὁ 5 εἶναι τὸ ἀκέραιο πηλίκο, ὁ 12 εἶναι ὁ διαιρέτης καὶ ὁ $7 < 12$ τὸ ὑπόλοιπο.

Ἡ ἴδια σχέση δὲν μᾶς ἐπιτρέπει νὰ λάβουμε τὸ 12 ὡς πηλίκο καὶ τὸ 5 ὡς διαιρέτη, ἐπειδὴ τότε τὸ ὑπόλοιπο 7 θὰ ἦταν μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ διαιρέτη 5.

Παρατηρήσεις

i) Ἂν στὶς συνθῆκες (4) εἶναι $\upsilon = 0$, τότε ἔχουμε $\Delta = \delta\cdot\pi$.

Δηλαδὴ ἡ διαίρεση εἶναι τέλεια καὶ ὁ ἀκέραιος π εἶναι τὸ ἀκριβὲς της πηλίκο.

ii) Ἂν λάβουμε $\Delta = 2$ καὶ $\delta = 3$, δηλαδὴ $\Delta < \delta$, παρατηροῦμε ὅτι οἱ συνθῆκες (4) ἀληθεύουν μόνον ὅταν $\pi = 0$.

$$2 = 0.3 + 2 \quad \text{καὶ} \quad 2 < 3$$

Σ' αὐτὴ τὴν περίπτωση λέμε ὅτι τὸ ἀκέραιο πηλίκο τῆς διαιρέσεως 2 διὰ 3 εἶναι τὸ μηδέν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

79. Νὰ βρεθοῦν τὰ δύο διαδοχικὰ πολλαπλάσια τοῦ 15, ἀνάμεσα στὰ ὁποῖα περιέχεται ὁ ἀριθμὸς 80. Νὰ ἐκφράσετε τὸ ἀποτέλεσμα μὲ μιὰ διπλὴ ἀνισότητα. Νὰ βρεθεῖ τὸ ἀκέραιο πηλίκο καὶ τὸ ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως.

80. Νὰ γράψετε τὸ σύνολο τῶν ὑπολοίπων τῶν διαιρέσεων ποὺ ἔχουν ὡς διαιρέτη:

i) 4, ii) 9. iii) $\gamma \in N_0$

81. Νὰ συμπληρώσετε τὸν ἀκέραιο ποὺ λείπει στὶς ἰσότητες:

$$\ldots = 97 \cdot 122 + 38$$
$$615 = \ldots 30 + 15$$

82. Ὁ διαιρέτης σὲ μιὰ διαίρεση εἶναι 7. Ποιὲς εἶναι οἱ δυνατὲς τιμὲς τοῦ ὑπολοίπου;

36. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ

36.1. Πολλαπλασιασμὸς τῶν ὅρων μιᾶς διαιρέσεως ἐπὶ τὸν ἴδιο φυσικὸ ἀριθμό.

Δ	δ	π	υ
23	5	4	3
46	10	4	6
69	15	4	9
92	20	4	12

Στὸν πίνακα ἔχουμε συγκεντρώσει στοιχεῖα ἀπὸ τέσσερεις διαιρέσεις. Ἂς προσέξουμε τὸν διαιρετέο (Δ), τὸν διαιρέτη (δ), τὸ πηλίκο (π) καὶ τὸ ὑπόλοιπο (υ). Παρατηροῦμε ὅτι:

Ὅταν πολλαπλασιάζεται ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης ἐπὶ 2, 3, 4, τότε τὸ πηλίκο δὲν μεταβάλλεται, ἐνῶ τὸ ὑπόλοιπο πολλαπλασιάζεται ἀντιστοίχως ἐπὶ 2, 3, 4.

Γενικά: **Ἂν πολλαπλασιάσουμε καὶ τοὺς δύο ὅρους μιᾶς διαιρέσεως ἐπὶ τὸν ἴδιο φυσικὸ ἀριθμό, τὸ πηλίκο δὲν μεταβάλλεται, ἀλλὰ τὸ ὑπόλοιπο πολλαπλασιάζεται μὲ τὸν ἴδιο ἀριθμό.**

Ἔτσι, μιὰ τέλεια διαίρεση παραμένει τέλεια καὶ ἀφοῦ πολλαπλασιάσουμε τοὺς ὅρους της μὲ τὸν ἴδιο φυσικὸ ἀριθμό.

36.2. Διαίρεση μὲ ἕνα φυσικὸ ἀριθμὸ ἑνὸς ἀθροίσματος ποὺ ἔχει ὅρους πολλαπλάσια αὐτοῦ τοῦ ἀριθμοῦ.

Στὸ ἄθροισμα $12 + 20 + 16$ ὅλοι οἱ ὅροι εἶναι πολλαπλάσια τοῦ 4.

Δηλαδὴ ἔχουμε: $12 = 4.3$ ἢ $12 : 4 = 3$

$20 = 4.5$ ἢ $20 : 4 = 5$

$16 = 4.4$ ἢ $16 : 4 = 4$

Ἀπὸ τὶς ἰσότητες τῆς πρώτης στήλης ἔχουμε:

$$12+20+16=(4.3)+(4.5)+(4.4)$$

Ἤ $\quad 12+20+16=4.(3+5+4) \quad$ (Γιατί;)

Ἤ $\quad (12+20+16):4=3+5+4 \quad$ (1)

Ὅμοια, ἀπὸ τὶς ἰσότητες τῆς δεύτερης στήλης ἔχουμε:

$$(12:4)+(20:4)+(16:4)=3+5+4 \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὶς (1) καὶ (2) λαμβάνουμε

$$(12+20+16):4=(12:4)+(20:4)+(16:4)$$

Γενικά: Ἂν α, β, $\gamma \in N_0$ καὶ πολλαπλάσια τοῦ ν, τότε

$$\boxed{(\alpha+\beta+\gamma):\nu=(\alpha:\nu)+(\beta:\nu)+(\gamma:\nu)}$$

Ὥστε : **Ἡ διαίρεση εἶναι πράξη ἐπιμεριστικὴ ὡς πρὸς τὴν πρόσθεση, ὅταν οἱ μερικὲς διαιρέσεις εἶναι δυνατὲς στὸ σύνολο Νο.**

36.3. Διαίρεση, μὲ φυσικὸ ἀριθμό, μιᾶς διαφορᾶς ποὺ οἱ ὅροι της εἶναι πολλαπλάσια αὐτοῦ τοῦ ἀριθμοῦ.

Οἱ ἀκέραιοι 28 καὶ 21 εἶναι πολλαπλάσια τοῦ 7.

Ἤτοι ἔχουμε $\quad 28=4\cdot 7 \quad$ ἢ $\quad 28:7=4$

καὶ $\quad 21=3\cdot 7 \quad$ ἢ $\quad 21:7=3$

Ἀπὸ τὶς ἰσότητες τῆς πρώτης στήλης ἔχουμε:

$28-21=(7\cdot 4)-(7\cdot 3)=7\cdot(4-3) \quad$ (Γιατί;)

Ἤτοι $\quad (28-21):7 \quad = \quad 4-3 \quad$ (1)

Ἀπὸ τὶς ἰσότητες τῆς δεύτερης στήλης ἔχουμε:

$$(28:7)-(21:7)=\ 4-3 \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὶς (1) καὶ (2) ἔχουμε:

$$(28-21):7=(28:7)-(21:7)$$

Γενικά, ἂν οἱ ἀκέραιοι α, β εἶναι πολλαπλάσια τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ ν καὶ

$\alpha>\beta$, τότε $\quad \boxed{(\alpha-\beta):\nu=(\alpha:\nu)-(\beta:\nu)}$

Ὥστε : Ἡ διαίρεση εἶναι ἐπιμεριστικὴ πράξη ὡς πρὸς τὴν ἀφαίρεση, ὅταν ὅλες οἱ μερικὲς διαιρέσεις εἶναι δυνατὲς στὸ Νο.

36.4. Διαίρεση, μὲ φυσικὸ ἀριθμό, ἑνὸς γινομένου ποὺ ἔχει τουλάχιστο ἕναν παράγοντα πολλαπλάσιο τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ.

Ἔστω τὸ γινόμενο $13\cdot12\cdot5$, ποὺ ὁ παράγοντας 12 εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 4.

Ἔχουμε
$$13\cdot12\cdot5 = 13\cdot(3\cdot4)\cdot5$$
$$= 4\cdot(13\cdot3\cdot5) \qquad (\text{Γιατί;})$$

Ἢ
$$(13\cdot12\cdot5) : 4 = 13\cdot3\cdot5$$
$$= 13\cdot(12 : 4)\cdot5$$

Γενικά, ἂν $\alpha, \beta, \gamma \in N_0$, $\nu \in N$ καὶ $\beta =$ πολλαπλάσιο τοῦ ν, τότε

$$\boxed{(\alpha\cdot\beta\cdot\gamma) : \nu = \alpha\cdot(\beta : \nu)\cdot\gamma} \qquad (1)$$

Εἰδικὴ περίπτωση

Ἂν $\nu = \beta$, ἡ σχέση (1) γίνεται
$$(\alpha\cdot\beta\cdot\gamma) : \beta = \alpha\cdot(\beta : \beta)\cdot\gamma = \alpha\cdot1\cdot\gamma = \alpha\cdot\gamma$$

Ὥστε: **Γιὰ νὰ διαιρέσουμε ἕνα γινόμενο μὲ ἕναν ἀπὸ τοὺς παράγοντές του, ἀρκεῖ νὰ ἐξαλείψουμε αὐτὸν τὸν παράγοντα ἀπὸ τὸ γινόμενο.**

Ἐφαρμογή: $(25\cdot38\cdot13) : 38 = 25\cdot13$

36.5. Πηλίκο ἑνὸς ἀριθμοῦ μὲ ἕνα γινόμενο.

Γιὰ τὸ πηλίκο $50 : (2\cdot5)$ ἔχουμε
$$2\cdot5 = 10 \quad \text{καὶ} \quad 50 : 10 = 5$$

Ἤτοι
$$50 : (2\cdot5) = 5 \qquad (1)$$

Παρατηροῦμε ὅμως ὅτι:
$$50 : 2 = 25 \qquad \text{καὶ} \qquad 25 : 5 = 5$$

Ἤτοι
$$(50 : 2) : 5 = 5 \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὶς (1) καὶ (2) ἔχουμε ὅτι
$$50 : (2\cdot5) = (50 : 2) : 5$$

Γενικά, ἂν $\alpha \in N_0$ καὶ $\beta, \gamma, \delta \in N$, ἔχουμε:

$$\boxed{\alpha : (\beta\cdot\gamma\cdot\delta) = [(\alpha : \beta) : \gamma] : \delta}$$

μὲ τὴν προϋπόθεση ὅτι ὅλες οἱ διαιρέσεις ποὺ σημειώνονται εἶναι δυνατὲς στὸ N.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

83. Νὰ ὑπολογίσετε μὲ διαφόρους τρόπους τὰ ἑξῆς πηλίκα:

$36 : (3 \cdot 4) =$ $\qquad$ $(36+24) : 12 =$

$(24-8) : 2 =$ $\qquad$ $(53 \cdot 14) : 7 =$

$(12 \cdot 9 \cdot 5) : 19 =$ $\qquad$ $(12 \cdot 19 \cdot 5) : 38 =$

84. Νὰ ἐκτελέσετε τὶς διαιρέσεις:

$(27 \cdot \alpha - 12) : 3,$ $\qquad$ $36\alpha : (3\alpha \cdot 4) =$ $\qquad$ $(120 \cdot \alpha + 8\alpha + 24) : 8 =$

85. Νὰ ἐπαληθεύσετε ὅτι, ἂν στὸ διαιρετέο μιᾶς διαιρέσεως προσθέσουμε ἕνα πολλαπλάσιο τοῦ διαιρέτη, τότε τὸ ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως δὲν μεταβάλλεται.

37. ΑΛΛΕΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

37. 1. Ἐκτὸς ἀπὸ τὶς ἀριθμητικὲς παραστάσεις ποὺ περιέχουν εἴτε προσθέσεις εἴτε ἀφαιρέσεις, συναντήσαμε ὡς τώρα καὶ ἄλλες ἀριθμητικὲς παραστάσεις, δηλαδὴ ἀριθμητικὲς παραστάσεις στὶς ὁποῖες εἶναι σημειωμένες καὶ ἄλλες πράξεις (πολλαπλασιασμὸς ἢ διαίρεση).

37. 2. Ὅπως εἶναι γνωστό, ἡ γραφὴ $3+(8 : 2)$ $\qquad$ (1)

δηλώνει μὲ τὴ σειρὰ τὶς ἑξῆς πράξεις:

α) $8 : 2 = 4$ καὶ β) $3+4=7$

Ἤτοι $3+(8 : 2) = 3+4 = 7$

Ὅμοια, ἡ γραφὴ $23-(8.2)$ $\qquad$ (2)

δηλώνει α) $8.2 = 16$ καὶ β) $23-16=7$

Ἤτοι $23-(8.2) = 23-16 = 7$

Γιὰ νὰ ἁπλοποιήσουμε τὴ γραφὴ τῶν παραστάσεων (1) καὶ (2), παραλείπουμε τὶς παρενθέσεις καὶ συμφωνοῦμε στὰ ἑξῆς :

Ὅταν σὲ μιὰν ἀριθμητικὴ παράσταση εἶναι σημειωμένοι καὶ πολλαπλασιασμοὶ ἢ διαιρέσεις, ἐκτελοῦμε πρῶτα αὐτὲς τὶς πράξεις καὶ ἔπειτα τὶς προσθέσεις καὶ τὶς ἀφαιρέσεις καὶ μὲ τὴ σειρὰ ἀπὸ ἀριστερὰ πρὸς τὰ δεξιά.

Παραδείγματα

Ἀντὶ $7+(4 \cdot 5)$ γράφουμε $7+4.5$ καὶ βρίσκουμε $7+20=27$

» $(20 : 5)-2$ » $20 : 5-2$ » $4-2=2$

» $(60 : 2)+(5.3)$ » $60 : 2+5.3$ » $30+15=45$

» $3+(7.2)-(2+3.2)$ » $3+7.2-(2+6)$

ἢ $3+14-8$ » $17-8=9$

Ὅμοια, ἡ γραφὴ $6.5-7.3+1$ σημαίνει $(6.5)-(7.3)+1 = 30-21+1 = 10$

» » $12:2+3.2-1$ » $(12 : 2)+(3.2)-1 = 6+6-1 = 11$

» » $3.4 : 2+5$ » $(3.4) : 2+5 = 12 : 2+5 = 11$

Ἀντιπαράδειγμα

Ἡ παράσταση $(7+4)\cdot 5$ δὲν γράφεται $7+4\cdot 5$

Πραγματικὰ $(7+4)\cdot 5 = 11\cdot 5 = 55$ ἐνῶ $7+4\cdot 5 = 7+20 = 27$

ΑΣΚΗΣΗ

86. Νὰ ὑπολογιστοῦν οἱ ἑξῆς ἀριθμητικὲς παραστάσεις:

α) $6\cdot 5 - 3\cdot 2$ β) $6\cdot 5 - 3\cdot 2 - 2$

γ) $88 : 4\cdot 2 + 3\cdot 4 - 5$ δ) $120 : 8 - 2\cdot 4 + 2$

ε) $3 + 4\cdot 2 + 8\cdot(12-4)$

ΠΙΝΑΚΑΣ

μὲ τὶς ἰδιότητες τῆς διαιρέσεως

1. $\Delta : \delta = \pi \Leftrightarrow \Delta = \delta\cdot\pi$ (τέλεια διαίρεση)
2. $\Delta = \delta\cdot\pi + \upsilon$ καὶ $\upsilon < \delta$ (ἀτελὴς διαίρεση)
3. Ἐὰν $\Delta = \delta\cdot\pi + \upsilon$ καὶ $\upsilon < \delta$
   τότε $\mu\cdot\Delta = (\mu\cdot\delta)\pi + \mu\cdot\upsilon$ καὶ $\mu\cdot\upsilon < \mu\cdot\delta$
4. $(\alpha + \beta + \gamma) : \delta = (\alpha : \delta) + (\beta : \delta) + (\gamma : \delta)$
5. $(\alpha - \beta) : \gamma = (\alpha : \gamma) - (\beta : \gamma)$
6. $(\alpha\cdot\beta) : \gamma = (\alpha : \gamma)\cdot\beta$
7. $\alpha : (\beta\cdot\gamma) = (\alpha : \beta) : \gamma$
8. $0 : \alpha = 0$, $0 : 0$ ἀόριστη
   $\alpha : \alpha = 1$ $\alpha : 0$ ἀδύνατη

Ἐννοεῖται ὅτι οἱ πιὸ πάνω ἰδιότητες ἰσχύουν μὲ τοὺς ἑξῆς περιορισμούς:

α) Οἱ διαιρέτες νὰ εἶναι διαφορετικοὶ ἀπὸ τὸ μηδέν.

β) Οἱ σημειωμένες διαιρέσεις νὰ εἶναι δυνατὲς στὸ N_0.

38. Η ΤΕΧΝΙΚΗ ΤΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ ΣΤΟ ΔΕΚΑΔΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

Ὅπως εἴδαμε στὸ κεφάλαιο τῆς ἀριθμήσεως, κάθε ἀριθμὸς στὸ δεκαδικὸ σύστημα ἀποτελεῖται ἀπὸ μονάδες διαφόρων τάξεων. Π.χ. ὁ ἀριθμὸς 2537 ἀποτελεῖται ἀπὸ 7 μονάδες (Μ), 3 δεκάδες (Δ), 5 ἑκατοντάδες (Ε) καὶ 2 χιλιάδες (Χ) καὶ γράφεται μὲ ἀναπτυγμένο τρόπο ὡς ἑξῆς:

$$2537 = 2X + 5E + 3\Delta + 7M$$

Ὅμοια: $4052 = 4X + 0E + 5\Delta + 2M$

Αὐτὴ ἡ ἀναπτυγμένη μορφὴ καθὼς καὶ οἱ ἰδιότητες τῶν πράξεων θὰ μᾶς βοηθήσουν νὰ κατανοήσουμε τὴν τεχνικὴ τῆς ἐκτελέσεως τῶν πράξεων.

39. ΕΚΤΕΛΕΣΗ ΤΗΣ ΠΡΟΣΘΕΣΕΩΣ

39. 1. Διακρίνουμε τὶς ἑξῆς περιπτώσεις:

α) Οἱ ἀριθμοὶ εἶναι μονοψήφιοι.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἄθροισμα δύο μονοψηφίων, π.χ. τὸ ἄθροισμα 5 σὺν 3, ἀρκεῖ νὰ γράψουμε μετὰ τὸ 5 τοὺς τρεῖς διαδοχικοὺς ἀκεραίους 6, 7, 8 καὶ νὰ λάβουμε τὸν τελευταῖο ἀπὸ αὐτούς. Τὸ ἄθροισμα δύο μονοψηφίων πρέπει νὰ τὸ γνωρίζουμε ἀπὸ μνήμης.

Ὁ ἑπόμενος πίνακας μᾶς βοηθεῖ νὰ ἀσκηθοῦμε στὴν πρόσθεση μονοψηφίων ἀριθμῶν.

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Ὁ τρόπος ποὺ συντάξαμε τὸν πίνακα φαίνεται ἀμέσως, ἂν προσέξουμε μὲ ποιὸ τρόπο εἶναι γραμμένες οἱ διαδοχικὲς σειρὲς τῶν ἀριθμῶν. Τὸ ἄθροισμα π.χ. 5+3 βρίσκεται στὴ διασταύρωση τῆς σειρᾶς μὲ ἐπικεφαλίδα 5 καὶ τῆς στήλης μὲ ἐπικεφαλίδα 3. Τὸ ἴδιο ἄθροισμα τὸ βρίσκουμε στὴ διασταύρωση τῆς σειρᾶς μὲ ἐπικεφαλίδα 3 καὶ τῆς στήλης μὲ ἐπικεφαλίδα 5. Γιατί;

β) Οἱ ἀριθμοὶ εἶναι πολυψήφιοι

Σκεφτόμαστε τὸν κάθε πολυψήφιο ὡς ἄθροισμα τῶν μονάδων τῶν διαφόρων τάξεων.

Ἔτσι, ἡ πρόσθεση πολυψηφίων ἀριθμῶν ἀνάγεται στὴν πρόσθεση μονοψηφίων.

Παράδειγμα

Ἔστω τὸ ἄθροισμα $235+528$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{εἶναι} & 235 = 2E+3\Delta+5M \\ \text{καὶ} & 528 = 5E+2\Delta+8M \end{array}\right\} \quad \text{(Πρόσθεση ἀθροισμάτων)}$$

$$235+528 = 7E+5\Delta+13M = 7E+6\Delta+3M \quad (\text{Διότι } 10M = 1\Delta)$$
$$= 763$$

Συντομότερα, αὐτὴ ἡ διαδικασία ἐκτελεῖται μὲ τὴ γνωστὴ πρακτικὴ διάταξη τῆς προσθέσεως. Θέτουμε τὶς μονάδες τῆς ἴδιας τάξεως στὴν ἴδια στήλη καὶ μεταφέρουμε νοερὰ τὸ κ ρ α τ ο ύ μ ε ν ο μιᾶς τάξεως στὴν ἀμέσως ἑπόμενη τάξη.

$$\begin{array}{r} 235 \\ +\ 528 \\ \hline 763 \end{array}$$

39. 2. Ἐφαρμόζοντας τὶς ἰδιότητες τῆς προσθέσεως, μποροῦμε νὰ ἐλέγξουμε ἂν ἕνα ἄθροισμα εἶναι ὀρθὸ (δοκιμὴ) ἢ καὶ νὰ ἐκτελέσουμε πολλὲς φορές, γιὰ περισσότερη σιγουριά, μιὰ πρόσθεση.

$$\begin{array}{r} 895 \\ 379 \\ +\quad 27 \\ 1521 \\ \hline 2822 \end{array}$$

Ἡ πρόσθεση ἀπὸ πάνω πρὸς τὰ κάτω καὶ ἀντιστρόφως πρέπει νὰ δώσει τὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα (Γιατί;)

$$\begin{array}{r|l} \left.\begin{array}{r} 124 \\ 7832 \end{array}\right\} & \text{Μερικὰ ἀθροίσματα} \quad 7956 \\ \hline \left.\begin{array}{r} 28 \\ 589 \end{array}\right\} & \\ \left.375\right\} & 992 \\ \hline 8948 & = 8948 \end{array}$$

Ἡ ἀντικατάσταση προσθετέων μὲ τὸ ἄθροισμά τους διευκολύνει ἢ ἐλέγχει τὸ τελικὸ ἀποτέλεσμα (Γιατί;)

40. ΕΚΤΕΛΕΣΗ ΤΗΣ ΑΦΑΙΡΕΣΕΩΣ

40. 1. Διακρίνουμε τὶς ἑξῆς περιπτώσεις:

α) Ο ἱ ἀ ρ ι θ μ ο ὶ ε ἶ ν α ι μ ο ν ο ψ ή φ ι ο ι

$$9-5=4 \quad \text{ἐπειδὴ} \quad 4+5=9$$

β) Κ ά θ ε ψ η φ ί ο τ ο ῦ ἀ φ α ι ρ ε τ έ ο υ ε ἶ ν α ι μ ι κ ρ ό τ ε ρ ο ἢ ἴ σ ο μ ὲ τ ὸ ψ η φ ί ο τ ῆ ς ἴ δ ι α ς τ ά ξ ε ω ς τ ο ῦ μ ε ι ω τ έ ο υ.

$$\left.\begin{array}{l} 678 = 6Ε+7Δ+8Μ \\ 375 = 3Ε+7Δ+5Μ \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Ἀφαίρεση ἀθροίσματος} \\ \text{ἀπὸ ἄθροισμα} \end{array}$$

$$678-375 = 3Ε+0Δ+3Μ = 303$$

Σύντομα

$$\begin{array}{r} 678 \\ -\ 375 \\ \hline 303 \end{array}$$

γ) Μ ε ρ ι κ ὰ ψ η φ ί α τ ο ῦ ἀ φ α ι ρ ε τ έ ο υ ε ἶ ν α ι μ ε γ α λ ύ τ ε ρ α ἀ π ὸ τ ὰ ἀ ν τ ί σ τ ο ι χ α ψ η φ ί α τ ο ῦ μ ε ι ω τ έ ο υ.

$$\begin{array}{rr} 4827 = & 4Χ+8Ε+2Δ+7Μ \\ -\ 369 = & 3Ε+6Δ+9Μ \\ \hline & ;\qquad ; \end{array}$$

Προσθέτουμε στὸ μειωτέο καὶ ἀφαιρετέο τὸν ἴδιο ἀριθμό, ἤτοι προσθέτουμε:

Στὸ μειωτέο 10Μ, 10Δ

Στὸν ἀφαιρετέο 1Δ, 1Ε

$$\begin{array}{rr} 4827 = & 4Χ+8Ε+2Δ+7Μ \\ -\ 369 = & 3Ε+6Δ+9Μ \\ \hline 4827-\ 369 = & 4Χ+4Ε+5Δ+8Μ = 4458 \end{array}$$

Ἢ σύντομα

$$\begin{array}{r} 4827 \\ -\ 369 \\ \hline 4458 \end{array}$$

40. 2. Δοκιμὴ

Γιὰ τὴ δοκιμὴ τῆς ἀφαιρέσεως χρησιμοποιοῦμε μιὰ ἀπὸ τὶς γνωστὲς ἰσοδυναμίες.

$$\alpha - \beta = \gamma \Leftrightarrow \alpha = \beta + \gamma \Leftrightarrow \alpha - \gamma = \beta$$

Π.χ. $837 - 253 = 584$, ἐπειδὴ $584 + 253 = 837$, ἐπειδὴ $837 - 584 = 253$

41. ΕΚΤΕΛΕΣΗ ΤΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ.

41. 1. Διακρίνουμε τὶς ἑξῆς περιπτώσεις:

α) Γ ι ν ό μ ε ν ο μ ο ν ο ψ η φ ί ω ν

Π.χ.
$$\begin{aligned} 3.5 &= 5+5+5 \\ &= 10+5 = 15 \end{aligned}$$

Τὰ γινόμενα, τὰ ὁποῖα βρίσκουμε, ὅταν πολλαπλασιάσουμε δύο ὁποιουσδήποτε μονοψήφιους ἀριθμοὺς εἶναι συγκεντρωμένα στὸν Π υ θ α γ ό ρ ε ι ο* πίνακα:

×	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Ὁ τρόπος κατασκευῆς τοῦ πίνακα φαίνεται ἀμέσως, ἂν προσέξουμε ὅτι i) ἡ πρώτη στήλη ἔχει μόνο μηδενικά, ii) στὴ δεύτερη στήλη οἱ ἀριθμοὶ αὐξάνονται κατὰ ἕνα, στὴν τρίτη κατὰ δύο, στὴν τέταρτη κατὰ τρία κ.ο.κ.

Τὸ γινόμενο 5.7 βρίσκεται στὴ διασταύρωση τῆς σειρᾶς μὲ ἐπικεφαλίδα 5 καὶ τῆς στήλης μὲ ἐπικεφαλίδα 7 ἢ . . .

---

* Π υ θ α γ ό ρ α ς : Ἕλληνας φιλόσοφος καὶ μαθηματικὸς ποὺ γεννήθηκε στὴ Σάμο γύρω στὰ 580 π.Χ. Ἱδρυτὴς τῆς Πυθαγορείου Σχολῆς, ποὺ ὑπῆρξε κέντρο ἀναπτύξεως τῶν Μαθηματικῶν καὶ ἰδίως τῆς Γεωμετρίας.

β) Ὁ ἕνας παράγοντας εἶναι 10, 100, 1000 κ.ο.κ.

Π.χ. $15 \cdot 10 =$ 15 δεκάδες
$=$ 150 μονάδες
$15 \cdot 100 =$ 15 ἑκατοντάδες
$=$ 1500 μονάδες

Ὥστε: ...

γ) Ὁ ἕνας παράγοντας μονοψήφιος καὶ ὁ ἄλλος πολυψήφιος.

Σκεφτόμαστε τὸν πολυψήφιο παράγοντα ὡς ἄθροισμα τῶν μονάδων τῶν διαφόρων τάξεων.

Π.χ.

$$\begin{array}{r} 218 \\ \times \quad 3 \\ \hline 654 \end{array} \quad \begin{array}{l} = 2E + 1\Delta + 8M \\ \qquad\qquad\quad 3 \\ \hline 6E + 3\Delta + 24M = 6E + 5\Delta + 4M \\ \qquad\qquad\qquad\quad = 654 \end{array}$$

('Επιμεριστική ἰδιότητα)

δ) Καὶ οἱ δύο παράγοντες πολυψήφιοι

Π.χ. $318 \cdot 253 = 318 \cdot (2E + 5\Delta + 3M)$
$= 318 \cdot 200 + 318 \cdot 50 + 318 \cdot 3$ ('Επιμεριστική ἰδιότητα)

Ὑπολογίζουμε τὰ μερικὰ γινόμενα καὶ προσθέτουμε:

$318 \cdot 200 = (318 \cdot 2) \cdot 100 = 636 \cdot 100 = 63600$ (Γινόμενο ἐπὶ 200)
$318 \cdot 50 = (318 \cdot 5) \cdot 10 = 1590 \cdot 10 = 15900$ » » 50
$318 \cdot 3 = 954$ » » 3

$318 \cdot 200 + 318 \cdot 50 + 318 \cdot 3 = 80454$

Ἡ διάταξη τῆς πράξεως γίνεται μὲ τὸ γνωστὸ τρόπο ὡς ἑξῆς:

$$\begin{array}{r} 318 \\ \times\ 253 \\ \hline 954 \\ 1590 \\ 636 \\ \hline 80454 \end{array}$$

954 → (Γινόμενο 318 ἐπὶ 3) $318 \cdot 3 = 954$
1590 → (» 318 » 50) $318 \cdot 50 = 15900$
636 → (» 318 » 200) $318 \cdot 200 = 63600$

Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἔχει ἐνδιάμεσα μηδενικά, ἔχουμε τὴν ἑξῆς συντομία:

$$\begin{array}{r} 3768 \\ \times\ 1007 \\ \hline 26376 \\ 0000 \\ 0000 \\ 3768 \\ \hline 3794376 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3768 \\ \times\ 1007 \\ \hline 26376 \\ 3768 \\ \hline 3794376 \end{array}$$

41. 2. Δοκιμὴ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Γιὰ τὴ δοκιμὴ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ χρησιμοποιοῦμε τὴ μεταθετικὴ ἰδιότητα καὶ ἐναλλάσσουμε τὸν πολλαπλασιαστὴ μὲ τὸν πολλαπλασιαστέο.

41. 3. Συντομίες τοῦ πολλαπλασισμοῦ.

Σὲ πολλὲς περιπτώσεις, ἐφαρμόζοντας τὶς γνωστὲς ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, φτάνουμε συντομότερα στὸ ἀποτέλεσμα.

α) Ὁ ἕνας ἀπὸ τοὺς παράγοντες εἶναι 9, 99, 999, ...

Π.χ.

$$35.9 = 35.(10-1) = 35.10 - 35.1 = 350 - 35 = 315$$

$$28.99 = 28.(100-1) = 2800 - 28.1 = 2800 - 28 = 2772$$

β) Ὁ ἕνας ἀπὸ τοὺς παράγοντες εἶναι 11, 101, 1001, ...

Π.χ.

$$32.11 = 32.(10+1) = 32.10 + 32.1 = 320 + 32 = 352$$

$$175.101 = 175.(100+1) = 17500 + 175.1 = 17500 + 175 = 17675$$

42. ΕΚΤΕΛΕΣΗ ΤΗΣ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ

Γιὰ νὰ κατανοήσουμε τὸν τρόπο ποὺ ἐκτελεῖται ἡ διαίρεση, θυμίζουμε τὶς βασικὲς συνθῆκες.

$$\left.\begin{array}{l} \Delta = \delta\pi + \upsilon \\ \upsilon < \delta \end{array}\right\}$$

Διακρίνουμε τὶς ἑξῆς περιπτώσεις:

42. 1. Ὁ διαιρέτης καὶ τὸ πηλίκο εἶναι μονοψήφιοι.

Ἔστω ἡ διαίρεση τοῦ 65 διὰ 7. Ἀπὸ τὸν πυθαγόρειο πίνακα βρίσκουμε:

$$65 = 7.9 + 2$$

Ἄρα $\pi = 9$ καὶ $\upsilon = 2$

Συνήθως αὐτὲς οἱ διαιρέσεις ἐκτελοῦνται ἀπὸ μνήμης.

42. 2. Ὁ διαιρέτης μονοψήφιος καὶ τὸ πηλίκο πολυψήφιο.

Ἔστω ἡ διαίρεση 953 διὰ 7.

Εἶναι $7 \cdot 100 < 953 < 7 \cdot 1000$

Ἄρα τὸ πηλίκο θὰ εἶναι τριψήφιος ἀριθμός.

Γιὰ νὰ ὑπολογίσουμε τὰ ψηφία του, ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

α) Ψ η φ ί ο ἑ κ α τ ο ν τ ά δ ω ν (Ε): Ὁ Διαιρετέος γράφεται

$$953 = 9E + 5\Delta + 3M$$
$$= (7E + 2E) + 5\Delta + 3M$$

Ἡ διαίρεση 7Ε : 7 εἶναι τέλεια καὶ δίνει πηλίκο 1. Ἄρα $E = 1$.

β) Ψ η φ ί ο δ ε κ ά δ ω ν (Δ): Ἀπὸ τὴν προηγούμενη διαίρεση ἔχουμε ὑπόλοιπο

$$2E + 5\Delta + 3M = 25\Delta + 3M$$
$$= (21\Delta + 4\Delta) + 3M$$

Οἱ 21Δ διαιρούμενες διὰ 7 δίνουν ἀκριβὲς πηλίκο 3. Ἄρα $\Delta = 3$.

γ) Ψ η φ ί ο μ ο ν ά δ ω ν (Μ): Ἡ προηγούμενη διαίρεση ἀφήνει ὑπόλοιπο

$$4\Delta + 3M = 43M$$
$$= 42M + 1M$$

Οἱ 42Μ διαιρούμενες μὲ τὸ 7 δίνουν ἀκριβὲς πηλίκο 6. Ἄρα $M = 6$. Σύμφωνα μὲ αὐτά, τὸ ζητούμενο πηλίκο εἶναι:

$$1E + 3\Delta + 6M = 136$$

Τὸ τελικὸ ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως εἶναι 1.

Στὴ χώρα μας ἡ πιὸ πάνω διαδοχὴ τῶν πράξεων γίνεται σύντομα μὲ τὴ γνωστὴ πρακτικὴ διάταξη τῆς διαιρέσεως

$$\begin{array}{r|l} 953 & 7 \\ \cline{2-2} 25 & 136 \\ 43 & \\ 1 & \end{array}$$

42. 3. Ὁ διαιρέτης καὶ τὸ πηλίκο εἶναι πολυψήφιοι.

Καὶ σ' αὐτὴ τὴν περίπτωση βρίσκουμε πρῶτα τὸ πλῆθος τῶν ψηφίων τοῦ πηλίκου καὶ ὕστερα ὑπολογίζουμε τὰ ψηφία του ὅπως προηγουμένως.

1ο Π α ρ ά δ ε ι γ μ α : Στὴ διαίρεση 3763 διὰ 23 τὸ πηλίκο εἶναι τριψήφιο, ἐπειδὴ

$$23 \cdot 100 < 3763 < 23 \cdot 1000$$

Γιὰ νὰ ἀρχίσουμε τὴν πράξη, γράφουμε:

$$3763 = 3X + 7E + 6\Delta + 3M$$
$$= \quad 37E + 6\Delta + 3M$$

2ο Π α ρ ά δ ε ι γ μ α : Στὴ διαίρεση 3763 : 52 τὸ πηλίκο εἶναι διψήφιο, ἐπειδὴ

$$52.10 < 3763 < 52.100$$

Γιὰ νὰ ἀρχίσουμε τὴν πράξη, γράφουμε:

$$\begin{aligned} 3763 &= 3X + 7E + 6\Delta + 3M \\ &= 37E + 6\Delta + 3M \\ &= 376\Delta + 3M \end{aligned}$$

Παρατηροῦμε ὅτι ἀρχίζουμε ἀπὸ τὶς δεκάδες τοῦ διαιρετέου, ἐπειδὴ οἱ ἑκατοντάδες του (37) δὲν διαιροῦνται διὰ τοῦ 52.

Στὴν πρακτικὴ διάταξη τῆς διαιρέσεως τοῦτο σημαίνει ὅτι, ἐνῶ ὁ διαιρέτης ἔχει δύο ψηφία, χωρίζουμε τρία ψηφία ἀπὸ τὸν διαιρετέο, γιὰ νὰ ἀρχίσουμε τὴ διαίρεση.

Γιὰ τὴ δοκιμὴ τῆς διαιρέσεως χρησιμοποιοῦμε τὶς συνθῆκες:

$$\left.\begin{aligned} \Delta &= \delta\pi + \upsilon \\ \upsilon &< \delta \end{aligned}\right\}$$

Π.χ. στὴ διαίρεση μὲ $\Delta = 953$ καὶ $\delta = 7$

ἡ εὕρεση τοῦ $\pi = 136$ καὶ $\upsilon = 1$, εἶναι ὀρθή, ἐπειδὴ $1 < 7$ καὶ $953 = 7.136 + 1$.

43. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΩΝ ΤΕΣΣΑΡΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ

43. 1. Πρόσθεση

Πρόβλημα: Ἡ ΣΤ' τάξη ἑνὸς Γυμνασίου ἔχει 48 μαθητές, ἡ Ε' 15 περισσότερους ἀπὸ τὴ ΣΤ' καὶ ἡ Δ' 12 περισσότερους ἀπὸ τὴν Ε'. Πόσους μαθητὲς ἔχουν συνολικὰ αὐτὲς οἱ τρεῖς τάξεις;

Σύμφωνα μὲ τὸ πρόβλημα, ἔχουμε:

Ἀριθμὸς μαθητῶν	ΣΤ' τάξεως	48
	Ε' »	48+15
	Δ' »	(48+15)+12

Συνολικὸς ἀριθμὸς μαθητῶν: $48+(48+15)+(48+15)+12$

ἢ $48+63+75=186$

Ὥστε οἱ 3 τελευταῖες τάξεις ἔχουν συνολικὰ 186 μαθητές.

43. 2. Ἀφαίρεση

Ἡ ἀφαίρεση χρησιμοποιεῖται, γιὰ νὰ λύσουμε προβλήματα τῶν ἑξῆς τύπων:

α) Κάποιος ἔχει α δρχ. καὶ ξοδεύει ἀπὸ αὐτὲς β δρχ. Πόσες δραχμὲς ἀπομένουν;

β) Κάποιος ἔχει α δρχ. καὶ ἕνας ἄλλος β δρχ. Πόσες δραχμὲς περισσότερες ἔχει ὁ πρῶτος ἀπὸ τὸ δεύτερο; (Ἐννοεῖται βέβαια ὅτι $\alpha > \beta$).

Εἶναι φανερὸ ὅτι καὶ στὶς δύο περιπτώσεις πρέπει ἀπὸ τὸν ἀριθμὸ α νὰ ἀφαιρέσουμε τὸν ἀριθμὸ β. Ἐπειδὴ τώρα, στὴν πρώτη περίπτωση, τὸ ἀποτέλεσμα τῆς ἀφαιρέσεως δείχνει πόσες δραχμὲς ἀπόμειναν, γι' αὐτὸ ὀνομάζεται ὑ π ό λ ο ι π ο τῆς ἀφαιρέσεως τοῦ α πλὴν β.

Ἀντίθετα, στὴ δεύτερη περίπτωση τὸ ἀποτέλεσμα τῆς ἀφαιρέσεως δείχνει τὴν ὑ π ε ρ ο χ ὴ τῶν χρημάτων τοῦ πρώτου σὲ σχέση μὲ τὰ χρήματα τοῦ δευτέρου· γι' αὐτὸ ὀνομάζεται δ ι α φ ο ρ ὰ μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν α καὶ β.

Σ η μ ε ί ω σ η : Σημειώνουμε ὅτι, ὅσες φορὲς ἔχουμε νὰ προσθέσουμε ἢ νὰ ἀφαιρέσουμε συγκεκριμένους ἀριθμούς, πρέπει νὰ προσέχουμε νὰ εἶναι ὁμοειδεῖς (νὰ ἀναφέρονται σὲ πράγματα μὲ τὴν ἴδια ὀνομασία).

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

87. Τὸ ἄθροισμα τριῶν ἀριθμῶν εἶναι 53775. Οἱ δύο πρῶτοι ἔχουν ἄθροισμα 43253 καὶ ὁ δεύτερος εἶναι 17473. Νὰ βρεθοῦν οἱ ἄλλοι ἀριθμοί.

88. Ἕνας ἔμπορος ὀφείλει 300.000 δρχ. καὶ πλήρωσε γιὰ τὸ χρέος του διαδοχικὰ 27450 δρχ., 65880 δρχ., 84978 δρχ. Πόσα χρήματα ὀφείλει ἀκόμη;

89. Σ' ἕνα ἐργοστάσιο ἐργάζονται 100 ἄτομα, ἄνδρες, γυναῖκες καὶ παιδιά. Οἱ ἄνδρες καὶ τὰ παιδιὰ μαζὶ εἶναι 70, ἐνῶ οἱ γυναῖκες καὶ τὰ παιδιὰ μαζὶ 40. Πόσοι εἶναι οἱ ἄνδρες, πόσες οἱ γυναῖκες καὶ πόσα τὰ παιδιά;

90. Ἂν ἐλαττώσουμε τὸ μειωτέο μιᾶς διαφορᾶς κατὰ 35 καὶ αὐξήσουμε τὸν ἀφαιρετέο κατὰ 16, ποιὰ μεταβολὴ παθαίνει ἡ διαφορά;

44. ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

Ὁ πολλαπλασιασμὸς χρησιμοποιεῖται, γιὰ νὰ ἐπιλύουμε προβλήματα ὅπως τὸ ἀκόλουθο:

Ἕνα αὐτοκίνητο τρέχει μὲ σταθερὴ ταχύτητα 60 km/h. Σὲ 4 h πόσα χιλιόμετρα θὰ διανύσει;

Ἔχουμε $60\text{ km}+60\text{ km}+60\text{ km}+60\text{ km}$

ἢ $4.60\text{ km} = 240\text{ km}$

Στὰ προβλήματα αὐτοῦ τοῦ τύπου πολλαπλασιάζουμε ἕνα συγκεκριμένο ἀριθμὸ (πολλαπλασιαστέος) μὲ ἕναν ἄλλο, ποὺ τὸν λαμβάνουμε ὡς ἀφηρημένο (πολλαπλασιαστής). Ὡστόσο ὑπάρχουν προβλήματα ὅπου ἔχουμε νὰ πολλαπλασιάσουμε δύο συγκεκριμένους ἀριθμούς· τότε τὸ ἐξαγόμενο εἶναι ἑτεροειδὲς καὶ πρὸς τοὺς δύο παράγοντες.

Π.χ. γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸ ἑνὸς ὀρθογωνίου μὲ διαστάσεις 3 m καὶ 4 m, ἔχουμε

$$3\text{m}\cdot 4\text{m} = 12\text{m}^2 \qquad (\text{m} \neq \text{m}^2)$$

45. ΔΙΑΙΡΕΣΗ

1ο Π ρ ό β λ η μ α : Θέλουμε νὰ μοιράσουμε 3.600 δρχ. σὲ 8 ἄπορους μαθητές. Πόσες δραχμὲς θὰ δώσουμε στὸν καθένα;

3.600 δρχ.: 8 = 450 δρχ.

Παρατηροῦμε ὅτι: Διαιρετέος εἶναι ἡ τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων (3.600 δρχ.), διαιρέτης εἶναι ὁ ἀφηρημένος ἀριθμὸς 8, ποὺ δείχνει σὲ πόσα ἴσα μέρη μερίζεται ὁ διαιρετέος. Τὸ πηλίκο εἶναι ὁμοειδὲς πρὸς τὸν διαιρετέο ἀφοῦ εἶναι μέρος του.

2ο Π ρ ό β λ η μ α : Θέλουμε νὰ τοποθετήσουμε 1.300 kg σαπούνι σὲ κιβώτια μὲ χωρητικότητα 25 kg. Πόσα κιβώτια θὰ χρειαστοῦμε;

Ἔχομε 1300 kg : 25 kg = 52.

Παρατηροῦμε ὅτι:

Διαιρετέος εἶναι ἡ τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων (1300 kg), διαιρέτης ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδας (25 kg) καὶ πηλίκο ὁ ἀριθμὸς 52, ποὺ δηλώνει πόσες φορὲς περιέχεται ὁ διαιρέτης στὸν διαιρετέο.

Αὐτὰ τὰ δύο προβλήματα εἶναι ἀντιπροσωπευτικὰ γιὰ τοὺς δύο γνωστοὺς τύπους διαιρέσεως: Μ ε ρ ι σ μ ο ῦ (1ο πρόβλημα) καὶ μ ε τ ρ ή σ ε ω ς (2ο πρόβλημα).

Ὅπως εἴδαμε, στὴ διαίρεση μερισμοῦ μερίζουμε ἕνα μέγεθος (Διαιρετέος) σὲ ἴσα μέρη (τὸ πλῆθος τὸ καθορίζει ὁ διαιρέτης). Στὴ διαίρεση μετρήσεως βρίσκουμε πόσες τὸ πολὺ φορὲς ἕνα μέγεθος (διαιρέτης) περιέχεται σ' ἕνα ἄλλο ὁμοειδὲς μ' αὐτὸ μέγεθος (διαιρετέος).

Καὶ στὰ δύο εἴδη διαιρέσεως, ἂν ὑπάρχει ὑπόλοιπο, εἶναι ὁμοειδὲς μὲ τὸν διαιρετέο.

Τὸ εἶδος τῆς διαιρέσεως καθορίζεται κάθε φορὰ ἀπὸ τὴ φύση τοῦ προβλήματος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

91. Δύο ἐργάτες ἐργάστηκαν μερικὲς ἡμέρες καὶ ἔλαβε ὁ πρῶτος 750 δρχ., καὶ ὁ δεύτερος 525 δρχ. Ὁ πρῶτος ἐλάμβανε 15 δρχ. τὴν ἡμέρα περισσότερες ἀπὸ τὸ δεύτερο. Ζητεῖται: α) Πόσες ἡμέρες ἐργάστηκαν, β) τὸ ἡμερομίσθιο τοῦ καθενός.

92. Κάποιος ἀγόρασε ἀπὸ τὸν παντοπώλη 11 kg λάδι καὶ ἔδωσε ἕνα χιλιόδραχμο. Ὁ παντοπώλης τοῦ ἐπέστρεψε 769 δρχ. Πόσο ἀγόρασε τὸ κιλὸ τὸ λάδι;

93. 12 ἄτομα, ἄντρες καὶ γυναῖκες, πλήρωσαν μαζὶ γιὰ ἕνα γεῦμα 364 δρχ. Καθένας ἀπὸ τοὺς ἄντρες πλήρωσε 32 δρχ. καὶ κάθε γυναίκα 28 δρχ. Πόσοι ἦταν οἱ ἄντρες καὶ πόσες οἱ γυναῖκες;

94. Στὸ γινόμενο 427.25 αὐξάνουμε τὸν πολλαπλασιαστέο κατὰ 36. Νὰ βρεθεῖ πόσο αὐξάνει τὸ γινόμενο, χωρὶς νὰ ἐκτελέσουμε κανονικὰ τὸν πολλαπλασιασμό.

95. Μιὰ ἀγελάδα μαζὶ μὲ τὸ μοσχάρι της πουλήθηκαν γιὰ 4800 δρχ. Ἡ ἀξία τῆς ἀγελάδας ἦταν 8πλάσια ἀπὸ τὴν ἀξία τοῦ μοσχαριοῦ σὺν 300 δρχ. Νὰ βρεθεῖ ἡ ἀξία κάθε ζώου χωριστά.

96. Κάποιος ὑπάλληλος ὑπολόγισε ὅτι, ἂν ξοδεύει τὸ μῆνα 5520 δρχ., σ' ἕνα χρόνο θὰ ἔχει ἔλλειμμα 6.720 δρχ. Πόσες δραχμὲς πρέπει νὰ δαπανᾶ τὸ μῆνα, γιὰ νὰ ἔχει περίσσευμα 4.320 δρχ.;

97. Ἕνα ἀτμόπλοιο, κινούμενο μὲ ταχύτητα 14 κόμβους τὴν ὥρα, διέτρεξε τὴν ἀπόσταση ἀνάμεσα σὲ δυὸ λιμάνια σὲ 9 ὧρες. Μὲ ποιὰ ταχύτητα πρέπει νὰ κινηθεῖ γιὰ νὰ φτάσει 2 ὧρες νωρίτερα;

98. Ἕνας ἔμπορος ἀγόρασε 180 kg καφὲ πρὸς 65 δρχ. τὸ kg. Πούλησε ἔπειτα ἕνα μέρος ἀπὸ αὐτὸ πρὸς 72 δρχ. τὸ kg, καὶ τὸ ὑπόλοιπο τοῦ ἔμεινε κέρδος. Πόσα kg τοῦ ἔμειναν ὡς κέρδος;

ΠΙΝΑΚΑΣ

Μὲ τὶς βασικὲς ἰδιότητες τῶν πράξεων στὸ N_0

1. Ὑπάρξεως μονότιμο	: Ἂν α, $\beta \in N_0$ ὑπάρχει ἕνας καὶ μόνον ἕνας ἀριθμὸς γ ἴσος μὲ $\alpha+\beta$ καὶ ἕνας καὶ μόνον ἕνας ἀριθμὸς δ ἴσος μὲ $\alpha\cdot\beta$.	
2. Μεταθετική	: $\alpha+\beta=\beta+\alpha$ $\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$	$\left.\right\}$ $\alpha, \beta \in N_0$
3. Προσεταιριστική	: $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$ $(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)$	$\left.\right\}$ $\alpha, \beta, \gamma \in N_0$
4. Ἐπιμεριστική	: $(\alpha+\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot\gamma+\beta\cdot\gamma$	»
5. Οὐδέτερο στοιχεῖο	$\alpha+0=0+\alpha=\alpha$: $\alpha\cdot 1=1\cdot\alpha=\alpha$	$\alpha \in N_0$
6. Διαγραφῆς	: $\alpha=\beta \Leftrightarrow \alpha+\gamma=\beta+\gamma$ $\alpha=\beta \Leftrightarrow \alpha\cdot\gamma=\beta\cdot\gamma$ $\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha+\gamma>\beta+\gamma$ $\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha\cdot\gamma>\beta\cdot\gamma$	$\alpha, \beta, \gamma \in N_0$ $\alpha, \beta \in N_0, \gamma \in N$ $\alpha, \beta, \gamma \in N_0$ $\alpha, \beta \in N_0, \gamma \in N$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

99. Οἱ μικροὶ τροχοὶ μιᾶς ἅμαξας κάνουν 56 στροφὲς τὸ λεπτό, ἐνῶ οἱ μεγάλοι κάνουν 42. Πόσες λιγότερες στροφὲς θὰ κάνουν οἱ μεγάλοι τροχοὶ σὲ 2 ὧρες;

100. Μὲ ποιὸν ἀριθμὸ πρέπει νὰ διαιρέσουμε τὸ 4227, γιὰ νὰ βροῦμε πηλίκο 13 καὶ ὑπόλοιπο 171;

101. 9 ἐργάτες καὶ 5 ἐργάτριες ἔλαβαν γιὰ δουλειὰ 6 ἡμερῶν 11340 δρχ. Ἂν κάθε ἐργάτρια παίρνει τὴν ἡμέρα 70 δρχ λιγότερες ἀπὸ κάθε ἐργάτη, πόσο εἶναι τὸ ἡμερομίσθιο κάθε ἐργάτη;

102. Τρεῖς ἀδελφοὶ πλήρωσαν ἕνα χρέος 125.000 δρχ. Οἱ δύο μεγαλύτεροι πλήρωσαν ὁ καθένας 12.500 δρχ. λιγότερα ἀπὸ τὸ διπλάσιο τῶν ὅσων πλήρωσε ὁ τρίτος. Πόσα χρήματα πλήρωσε ὁ καθένας;

103. Ἕνας ἔμπορος χώρισε ἕνα ὕφασμα σὲ δύο κομμάτια ποὺ εἶχαν διαφορὰ 42 m. Νὰ βρεθοῦν τὰ μήκη τῶν δύο μερῶν, ἂν γνωρίζουμε ὅτι τὸ μῆκος τοῦ πρώτου ἦταν τετραπλάσιο ἀπὸ τὸ μῆκος τοῦ δευτέρου.

104. Κάποιος ἀγόρασε 360 αὐγὰ πρὸς 27 δρχ. τὰ 15 καὶ ἄλλα 360 πρὸς 21 δρχ. τὰ 18. Ἀπὸ αὐτὰ τὰ αὐγὰ καταστράφηκαν τὰ 72 καὶ τὰ ὑπόλοιπα τὰ πούλησε πρὸς 45 δρχ. τὰ 27. Πόσες δραχμὲς κέρδισε;

105. Τὸ ἡμερομίσθιο ἑνὸς τεχνίτη εἶναι 3/πλάσιο ἀπὸ τὸ ἡμερομίσθιο τοῦ βοηθοῦ του. Σὲ 5 ἡμέρες ἐργασίας ἔλαβαν καὶ οἱ δύο μαζὶ 1200 δρχ. Ποιὸ ἦταν τὸ ἡμερομίσθιο τοῦ καθενός;

106. Νὰ λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:

$$3\chi + (5\chi + 1) = 33, \qquad 2\cdot(3\chi + 4) = 20$$

107. Νὰ ὑπολογίσετε τὴν ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς παραστάσεως:

$$10\alpha - 2\beta + 3(\gamma - \alpha) + 2(\alpha + 3\beta - \gamma), \quad \text{ὅταν } \alpha = 5,\ \beta = 9,\ \gamma = 10$$

108. Τίνος ἀριθμοῦ τὸ πενταπλάσιο, ἐλαττωμένο κατὰ 30, ἰσοῦται μὲ τὸν ἀριθμὸ αὐξημένον κατὰ 10;

109. Μία μητέρα ἔχει ἡλικία τριπλάσια ἀπὸ τὴν κόρη της. Οἱ ἡλικίες καὶ τῶν δύο μαζὶ εἶναι 80 ἔτη. Ποιὰ εἶναι ἡ ἡλικία τῆς κόρης καὶ ποιὰ τῆς μητέρας;

110. Νὰ δείξετε ὅτι τὸ ἄθροισμα τριῶν διαδοχικῶν ἀκεραίων εἶναι πάντοτε πολλαπλάσιο τοῦ 3.

111. Στὶς σχέσεις $\alpha - 15 = \beta$, $\alpha - 15 < \beta$, ποιὲς εἶναι οἱ μικρότερες τιμὲς ποὺ μποροῦν νὰ λάβουν τὰ α καὶ β;

112. Ποιὲς τιμὲς πρέπει νὰ λάβει τὸ α, ὥστε οἱ παραστάσεις:

$$\alpha\cdot(7 - \beta) \quad \text{καὶ} \quad \alpha\cdot 7 - \beta$$

νὰ εἶναι ἴσες μεταξύ τους;

113. Ἔστω ὅτι $B = 25\cdot 8\cdot 28$. Χωρὶς νὰ ὑπολογίσετε τὴν τιμὴ τοῦ B νὰ βρῆτε τὸ πηλίκο τῆς διαιρέσεως B διὰ 28, 100, 56.

114. Νὰ διαιρέσετε τὸ 353 διὰ 43. Κατὰ πόσες μονάδες μποροῦμε νὰ αὐξήσουμε τὸ διαιρετέο χωρὶς νὰ μεταβληθεῖ τὸ πηλίκο;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Δ'

46. ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

46. 1. Ὁρισμὸς

Μία πολυκατοικία ἔχει 5 ὀρόφους. Κάθε ὄροφος ἔχει 5 διαμερίσματα καὶ κάθε διαμέρισμα 5 δωμάτια. Πόσα διαμερίσματα καὶ πόσα δωμάτια ἔχει ἡ πολυκατοικία;

Εἶναι φανερὸ ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν διαμερισμάτων εἶναι $5 \cdot 5 = 25$,
ἐνῶ ὁ ἀριθμὸς τῶν δωματίων εἶναι $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$

Τὸ γινόμενο $5 \cdot 5$, ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο παράγοντες ἴσους μὲ τὸν ἀριθμὸ 5, λέγεται δεύτερη δύναμη τοῦ 5 καὶ γράφεται σύντομα 5^2.

Τὸ γινόμενο $5 \cdot 5 \cdot 5$, ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ τρεῖς παράγοντες ἴσους μὲ τὸν ἀριθμὸ 5, λέγεται τρίτη δύναμη τοῦ 5 καὶ γράφεται σύντομα 5^3.

Ὥστε ἂν $\alpha \in N_0$, τότε:

Τὸ γινόμενο $\alpha \cdot \alpha$ λέγεται δεύτερη δύναμη τοῦ α καὶ γράφεται α^2

Τὸ γινόμενο $\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha$ λέγεται τρίτη δύναμη τοῦ α καὶ γράφεται α^3

Τὸ γινόμενο $\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha$ λέγεται τέταρτη δύναμη τοῦ α καὶ γράφεται α^4.

κ.ο.κ.

Γενικά: **Τὸ γινόμενο ν παραγόντων ἴσων μὲ α λέγεται νιοστὴ δύναμη τοῦ α.**

Τὸ γράφουμε α^ν.

$$\boxed{\alpha^\nu = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{\nu \text{ παράγοντες}} \qquad \text{Ὅπου } \nu \in N \quad \text{καὶ} \quad \nu > 1}$$

Ὁ ἀριθμὸς α λέγεται βάση τῆς δυνάμεως. Ὁ ἀριθμὸς ν, τὸν ὁποῖο γράφουμε δεξιὰ καὶ λίγο ψηλότερα ἀπὸ τὴ βάση, λέγεται ἐκθέτης τῆς δυνάμεως.

$$\text{Δύναμη} \rightarrow \alpha^{\overset{\swarrow \text{ ἐκθέτης}}{\nu}}_{\underset{\text{βάση}}{\nwarrow}}$$

Ἡ πράξη, μὲ τὴν ὁποία ἀπὸ ἕναν ἀριθμὸ βρίσκουμε τὴ νιοστή του δύναμη

α^ν, λέγεται ὕ ψ ω σ η τοῦ α στὴ ν καὶ τὸ ἐξαγόμενο λέγεται τ ι μ ὴ τῆς δυνάμεως α^ν.

Παραδείγματα

$3^2 = 3\cdot3 = 9$ $\qquad$ $2\cdot2\cdot2\cdot2 = 2^4$

$2^3 = 2\cdot2\cdot2 = 8$ $\qquad$ $3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3 = 3^5$

$5^4 = 5\cdot5\cdot5\cdot5 = 625$ $\qquad$ $\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha = \alpha^6$

46. 2 Παρατηρήσεις

α) Παρατηροῦμε ὅτι $5^2 = 5\cdot5 = 25$, ἐνῶ $2^5 = 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2 = 32$.

Ὥστε: Ἡ ἀντιμετάθεση τῆς βάσεως μὲ τὸν ἐκθέτη σὲ μιὰ δύναμη α^ν μεταβάλλει τὴν τιμὴ τῆς δυνάμεως, ὅταν $\alpha \neq \nu$.

β) Δὲν πρέπει νὰ συγχέουμε τὶς γραφὲς 2^3 καὶ $2\cdot3$, διότι:

$$2^3 = 2\cdot2\cdot2 = 8, \quad \text{ἐνῶ} \quad 2\cdot3 = 3+3 = 6.$$

Ἐπίσης τὶς γραφὲς 2^2+3^2 καὶ $(2+3)^2$, ἐπειδὴ

$$2^2+3^2 = 13, \quad \text{ἐνῶ} \quad (2+3)^2 = 5^2 = 25.$$

γ) Ἡ δεύτερη δύναμη ἑνὸς ἀριθμοῦ λέγεται καὶ τ ε τ ρ ά γ ω ν ο τοῦ ἀριθμοῦ, ἡ τρίτη δύναμη λέγεται καὶ κ ύ β ο ς τοῦ ἀριθμοῦ.

46. 3. Εἰδικὲς περιπτώσεις.

I. Δυνάμεις τοῦ 0

Σύμφωνα μὲ τὸν ὁρισμὸ τῆς δυνάμεως ἔχουμε:

$$0^2 = 0\cdot0 = 0, \qquad 0^3 = 0\cdot0\cdot0 = 0$$

Γενικὰ $0^\nu = \underbrace{0\cdot0\cdots0}_{\nu \text{ παράγοντες}} = 0,$

II. Δυνάμεις τοῦ 1

$$1^2 = 1.1 = 1, \qquad 1^3 = 1\cdot1\cdot1 = 1$$

Γενικά: $1^\nu = \underbrace{1\cdot1\cdot1\cdots1}_{\nu \text{ παράγοντες}} = 1$

III. Δυνάμεις τοῦ 10

Σύμφωνα μὲ τὸν ὁρισμὸ τῆς δυνάμεως ἔχουμε:

$10^2 = 10\cdot10 = 100$ $\qquad$ $10^3 = 10\cdot10\cdot10 = 1000$

$10^4 = 10\cdot10\cdot10\cdot10 = 10000$ $\qquad$ $10^5 = 10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10 = 100000$

Γενικά: **Κάθε δύναμη τοῦ 10 ἰσοῦται μὲ τὴ μονάδα ἀκολουθούμενη ἀπὸ τόσα μηδενικά, ὅσες μονάδες ἔχει ὁ ἐκθέτης.**

Ἡ χρησιμοποίηση δυνάμεων τοῦ 10 συντομεύει τὴ γραφὴ καὶ τὴν ἐκτέλεση πράξεων μὲ μεγάλους ἀριθμούς.

Παραδείγματα

α) $10.000.000 = 10^7$

β) $36.000.000 = 36.1000.000 = 36.10^6$

γ) Ἡ ταχύτητα τοῦ φωτὸς εἶναι 299.00000000 cm ἀνὰ sec ἢ 299.10^8 cm ἀνὰ sec.

47. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

47.1. Γινόμενο δυνάμεων τοῦ ἴδιου ἀριθμοῦ.

Ἂς λάβουμε τὰ γινόμενα $3^2 . 3^3$ καὶ $\alpha^3 . \alpha^4$. Ἔχουμε:

$$\begin{aligned} 3^2 \cdot 3^3 &= (3\cdot 3)\cdot(3\cdot 3\cdot 3) \\ &= 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3 \\ &= 3^5 = 3^{2+3} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \alpha^3\cdot\alpha^4 &= (\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha)\cdot(\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha) \\ &= \alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha \\ &= \alpha^7 = \alpha^{3+4} \end{aligned}$$

Γενικά: $\boxed{\alpha^\mu\cdot\alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu} \quad \text{ὅπου } \alpha\in N_0 \;\; \mu,\ \nu\in N,\ \mu,\ \nu > 1}$

Γιὰ νὰ πολλαπλασιάσουμε δυνάμεις μὲ τὴν ἴδια βάση, σχηματίζαυμε μιὰ δύναμη μὲ τὴν ἴδια βάση καὶ μὲ ἐκθέτη τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν.

Π.χ. $2^5 . 2^6 = 2^{11}$, $\alpha^3 . \alpha^7 = \alpha^{10}$

47. 2. Δύναμη γινομένου.

Ἂς λάβουμε τὶς δυνάμεις $(3.5)^2$ καὶ $(\alpha.\beta.\gamma)^3$. Ἔχουμε:

$$\begin{aligned} (3\cdot 5)^2 &= (3\cdot 5)\cdot(3\cdot 5) \\ &= 3\cdot 5\cdot 3\cdot 5 \\ &= 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5 \\ &= 3^2 . 5^2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} (\alpha\cdot\beta\cdot\gamma)^3 &= (\alpha\cdot\beta\cdot\gamma)\cdot(\alpha\cdot\beta\cdot\gamma)\cdot(\alpha\cdot\beta\cdot\gamma) \\ &= \alpha\beta\gamma\cdot\alpha\beta\gamma\cdot\alpha\beta\gamma \\ &= \alpha\alpha\alpha\cdot\beta\beta\beta\cdot\gamma\gamma\gamma \\ &= \alpha^3\cdot\beta^3\cdot\gamma^3 \end{aligned}$$

Γενικά: $\boxed{(\alpha\cdot\beta\cdot\gamma)^\nu = \alpha^\nu\cdot\beta^\nu\cdot\gamma^\nu \quad \text{ὅπου } \alpha,\ \beta,\ \gamma\in N_0 \;\; \nu\in N \text{ καὶ } \nu > 1}$

Γιὰ νὰ ὑψώσουμε ἕνα γινόμενο σὲ μιὰ δύναμη, ὑψώνουμε κάθε παράγοντα τοῦ γινομένου σ' αὐτὴ τὴ δύναμη.

47. 3. Ὕψωση δυνάμεως σὲ δύναμη.

Σύμφωνα μὲ τὸν ὁρισμὸ τῆς δυνάμεως, τὸ γινόμενο $3^2 . 3^2 . 3^2$ μπορεῖ νὰ γραφεῖ $(3^2)^3$. Ἡ γραφὴ αὐτὴ λέγεται ὕ ψ ω σ η δ υ ν ά μ ε ω ς σὲ δ ύ ν α μ η.

Ὥστε
$$\begin{aligned} (3^2)^3 &= 3^2 . 3^2 . 3^2 \\ &= 3^{2+2+2} = 3^{3.2} \end{aligned}$$

Γενικά: $\boxed{(\alpha^{\mu})^{\nu} = \alpha^{\mu \cdot \nu} \quad \text{ὅπου } \alpha \in N_0 \ \mu, \nu \in N \text{ καὶ } \mu, \nu > 1.}$

Γιὰ νὰ ὑψώσουμε μιὰ δύναμη σὲ ἄλλη δύναμη, σχηματίζουμε μιὰ δύναμη μὲ τὴν ἴδια βάση καὶ μὲ ἐκθέτη τὸ γινόμενο τῶν ἐκθετῶν.

47.4. Πηλίκο δύο δυνάμεων τοῦ ἴδιου ἀριθμοῦ.

Ἀπὸ τὴν ἰσότητα

$$5^3 . 5^4 = 5^7$$

συνάγουμε ὅτι 5^3 εἶναι τὸ ἀκριβὲς πηλίκο τῆς διαιρέσεως 5^7 διὰ 5^4.

Ἤτοι $\quad 5^7 : 5^4 = 5^3$

Ἤ $\quad 5^7 : 5^4 = 5^{7-4}$

Ὁμοίως βρίσκουμε ὅτι, $\alpha^7 : \alpha^4 = \alpha^{7-4}$

Γενικὰ $\boxed{\alpha^{\mu} : \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu - \nu} \quad \text{ὅπου } \alpha, \mu, \nu \in N \text{ καὶ } \mu > \nu}$

Τὸ πηλίκο δύο δυνάμεων τοῦ ἴδιου ἀριθμοῦ εἶναι δύναμη τοῦ ἴδιου ἀριθμοῦ μὲ ἐκθέτη τὴ διαφορὰ τῶν ἐκθετῶν (Διαιρετέου μεῖον τοῦ διαιρέτη).

47. 5. Ἐφαρμογὲς

Νὰ ἐκτελεσθοῦν οἱ πράξεις:

$$3 \cdot 5^2, \quad 3 \cdot 5^2 + 2, \quad 3 \cdot 5 + 2^2, \quad 3 \cdot (5+2)^2$$

Ἔχουμε

$$3 \cdot 5^2 = 3 \cdot 25 = 75$$
$$3 \cdot 5^2 + 2 = 3 \cdot 25 + 2 = 77$$
$$3 \cdot 5 + 2^2 = 3 \cdot 5 + 4 = 19$$
$$3 \cdot (5+2)^2 = 3 \cdot 7^2 = 3 \cdot 49 = 147$$

48. ΕΠΕΚΤΑΣΗ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΗΣ ΔΥΝΑΜΕΩΣ ΓΙΑ : $\nu = 1$ καὶ $\nu = 0$

48.1. Τὸ σύμβολο α^1, $\alpha \in N_0$.

Εἶναι δυνατόν, ἐφαρμόζοντας τὴν ἰδιότητα 47· 4, νὰ βροῦμε:

$$\alpha^3 : \alpha^2 = \alpha^{3-2}$$

ἤ

$$\alpha^3 : \alpha^2 = \alpha^1$$

Ἡ γραφὴ α^1, σύμφωνα μὲ τὸν ὁρισμὸ τῆς δυνάμεως, δὲν ἔχει νόημα, ἐπειδὴ ὁ ἐκθέτης της εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὸ 2. Γιὰ νὰ γενικεύσουμε τὴν ἰσχὺ τῆς ἰδιότητας 47· 4, δεχόμαστε ὅτι καὶ τὸ σύμβολο α^1 παριστάνει δύναμη. Ἤτοι, ἐπεκτείνουμε τὴν ἔννοια τῆς δυναμεως καὶ ὅταν $\nu = 1$.

Γιὰ νὰ ὁρίσουμε τὴν τιμὴ αὐτῆς τῆς δυνάμεως, σκεφτόμαστε ὅτι:

$$\alpha^3 : \alpha^2 = (\alpha.\alpha.\alpha) : (\alpha.\alpha)$$

ἤ $\quad \alpha^3 : \alpha^2 = \alpha$

Γιὰ τοῦτο συμφωνοῦμε ὅτι:

$$\boxed{\alpha^1 = \alpha, \qquad \alpha \in N_0}$$

Ἤτοι : **Ἡ πρώτη δύναμη ἑνὸς φυσικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι ὁ ἴδιος ὁ ἀριθμός.**

Παραδείγματα.

$$8^1 = 8, \quad 2^3.2^1 = 2^{3+1} = 2^4, \quad (\alpha^5)^1 = \alpha^{5\cdot 1} = \alpha^5$$

48. 2. Τὸ σύμβολο α^0, $\alpha \in N$.

Ἂν σκεφτοῦμε ὅπως προηγουμένως, βρίσκουμε:

$$\alpha^3 : \alpha^3 = \alpha^{3-3} = \alpha^0 \qquad (1)$$
$$\alpha^3 : \alpha^3 = 1 \qquad (2)$$

Γιὰ νὰ ἰσχύει γενικὰ ἡ ἰδιότητα 47. 4, δεχόμαστε ὅτι τὸ σύμβολο α^0 παριστάνει δύναμη καὶ θέτουμε:

$$\boxed{\alpha^0 = 1, \quad \alpha \in N}$$

Ἡ μηδενικὴ δύναμη κάθε φυσικοῦ ἀριθμοῦ ἰσοῦται μὲ τὴ μονάδα.

Παραδείγματα

$$7^0 = 1, \quad (3\cdot 5)^0 = 1, \quad (\alpha^3)^0 = 1$$

Παραθέτουμε πίνακα μὲ τὶς ἰδιότητες τῶν δυνάμεων.

1. $\alpha^\mu \cdot \alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}$	ὅπου		$\alpha, \beta, \gamma \in N_0$
2. $(\alpha\cdot\beta\cdot\gamma)^\nu = \alpha^\nu \cdot \beta^\nu \cdot \gamma^\nu$			$\nu \in N$
3. $(\alpha^\mu)^\nu = \alpha^{\mu\cdot\nu}$			
4. $\alpha^\mu : \alpha^\nu = \alpha^{\mu-\nu}$	καὶ	$\alpha \neq 0$	$\mu > \nu$
5. $\alpha^1 = \alpha, \ \alpha^0 = 1$			

Σημείωση

Δὲν ὁρίζουμε τὸ σύμβολο 0^0. Ἡ σχετικὴ ἐξέταση θὰ γίνει σὲ ἄλλη τάξη.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

115. Νὰ γράψετε μὲ μορφὴ δυνάμεων τὰ γινόμενα:
$3\cdot 3\cdot 3\cdot 3$, $\quad 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1$, $\quad 0\cdot 0\cdot 0\cdot 0\cdot 0\cdot 0$, $\quad \alpha\cdot\alpha\cdot\alpha$

116. Νὰ βρεῖτε τὶς τιμὲς τῶν παραστάσεων:

$3^4 - 2^3 + 1^{15}$, $\quad 7^3 - 2^2 \cdot 2^3 + 1$, $\quad (2^3 \cdot 3^2)^2 - 5^2$

$5 \cdot 2^7 : 4$, $\quad 7 \cdot 3^4 : 9$

117. Νά βρεῖτε τὰ τετράγωνα καὶ τοὺς κύβους τῶν ἀριθμῶν:

10, 20, 30, 40 Τί παρατηρεῖτε;

118. Χρησιμοποιῆστε ἰδιότητες τῶν δυνάμεων, γιὰ νὰ ὑπολογίσετε σύντομα τὰ γινόμενα:

$2^3 \cdot 5^3$, $\quad 4^2 \cdot 25^2$, $\quad 2^4 \cdot 8^2 \cdot 125^2 \cdot 5^4$

119. Τί παθαίνει τὸ τετράγωνο ἑνὸς ἀκεραίου, ὅταν τὸν διπλασιάζουμε, τριπλασιάζουμε; Χρησιμοποιῆστε παραδείγματα.

49. ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ.

49.1. Τετράγωνα ἀθροίσματος.

Γιὰ νὰ ὑπολογίσουμε τὸ τετράγωνο τοῦ ἀθροίσματος $3+5$, μποροῦμε νὰ ἐργασθοῦμε καὶ ὡς ἑξῆς:

$$(5+3)^2 = (5+3)\cdot(5+3) \quad \text{(Ὁρισμὸς δυνάμεως)}$$
$$= 5.5+5.3+3.5+3.3 \quad \text{(Ἐπιμεριστικὴ ἰδιότητα)}$$
$$= 5^2+2\cdot(5\cdot 3)+3^2$$
$$= 25+30+9 = 64$$

Γενικά, γιὰ δύο ἀκεραίους α, β ἔχουμε:

$$(\alpha+\beta)^2 = (\alpha+\beta)\cdot(\alpha+\beta)$$
$$= \alpha\cdot\alpha+\alpha\cdot\beta+\beta\cdot\alpha+\beta\cdot\beta$$
$$= \alpha^2+2.\alpha.\beta+\beta^2$$

Ἤτοι, ἔχουμε τὸν τύπο

$$\boxed{(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2+2\cdot\alpha\cdot\beta+\beta^2} \quad (1)$$

Αὐτὸς ὁ τύπος συχνὰ εἶναι χρήσιμος γιὰ τὴ συντόμευση τῶν ὑπολογισμῶν μας.

Π.χ. $1001^2 = (1000+1)^2$

$$= 1000^2+2\cdot 1000\cdot 1+1^2$$
$$= 1000.000+2000+1 = 1002001$$

49.2. Τετράγωνο διαφορᾶς.

Γιὰ τὸ τετράγωνο τῆς διαφορᾶς $8-3$, ἔχουμε

$$(8-3)^2 = 5^2 = 25 \quad (1)$$

Ἀλλὰ καὶ $8^2 - 2\cdot 8\cdot 3+3^2 = 64-48+9 = 25$ (2)

Ἀπὸ τὶς (1) καὶ (2) ἔχουμε

$$(8-3)^2 = 8^2 - 2\cdot(8\cdot 3)+3^2$$

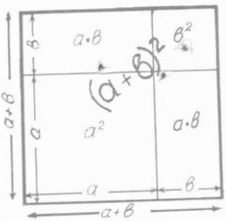
Γενικά, γιὰ ὁποιουσδήποτε ἀκεραίους α, β, ὅπου $\alpha > \beta$, εἶναι:

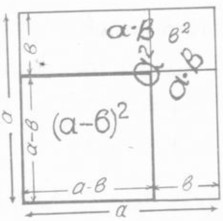
$$\boxed{(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2 - 2\cdot\alpha\cdot\beta + \beta^2} \qquad (2)$$

Ἐφαρμογή

$$\begin{aligned} 999^2 &= (1000-1)^2 \\ &= 1000^2 - 2\cdot 1000\cdot 1 + 1 \\ &= 1000000 - 2000 + 1 = 998001 \end{aligned}$$

Παραθέτουμε γεωμετρική παράσταση τῶν δύο αὐτῶν τύπων





ΑΣΚΗΣΕΙΣ

120. Νὰ βρεῖτε σύντομα τὰ τετράγωνα τῶν ἀκεραίων: 102, 98, 998, 1002.

121. Νὰ βρεῖτε τὰ τετράγωνα τῶν παραστάσεων:

$$2+\alpha, \quad \alpha+3, \quad 2\alpha+3$$

122. Μὲ ἀριθμητικὰ παραδείγματα ἐπαληθεύσετε ὅτι:

$$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) = \alpha^2 - \beta^2 \qquad \alpha, \beta \in N_0 \qquad \alpha > \beta$$

50. ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΔΥΝΑΜΕΩΣ ΤΟΥ 10 ΣΤΟ ΔΕΚΑΔΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΡΙΘΜΗΣΕΩΣ

Γνωρίζουμε ὅτι ὁ ἀριθμὸς 1265 τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος ἀποτελεῖται ἀπὸ 1 χιλιάδα, 2 ἑκατοντάδες, 6 δεκάδες καὶ 5 μονάδες, καὶ γράφεται:

$$1265 = 1X + 2E + 6\Delta + 5M$$

ἢ

$$1265 = 1\cdot 1000 + 2\cdot 100 + 6\cdot 10 + 5\cdot 1 \qquad (1)$$

Οἱ ἀκέραιοι 1000, 100, 10, 1 εἶναι ὅλοι δυνάμεις τοῦ 10. Συγκεκριμένα εἶναι: $1000 = 10^3$, $100 = 10^2$, $10 = 10^1$ καὶ $1 = 10^0$

Ἂν θέσουμε τὶς πιὸ πάνω δυνάμεις τοῦ 10 στὴν (1), ἔχουμε

$$1265 = 1\cdot 10^3 + 2\cdot 10^2 + 6\cdot 10^1 + 5\cdot 10^0$$

Εἶναι φανερὸ ὅτι στὴ μορφὴ αὐτὴ μποροῦμε νὰ θέσουμε ὁποιονδήποτε ἄλλον ἀκέραιο, γραμμένο στὸ δεκαδικὸ σύστημα ἀριθμήσεως.

Παραδείγματα

$$36723 = 3 \cdot 10^4 + 6 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$$
$$52001 = 5 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$$

Ἀντιστρόφως, ὅταν δοθεῖ ἕνα ἄθροισμα διαδοχικῶν δυνάμεων τοῦ 10 πολλαπλασιασμένων μὲ ἀκεραίους μικρότερους ἀπὸ τὸ 10, ὅπως εἶναι τὸ ἄθροισμα

$$\chi = 3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$$

ἔχουμε: $\chi = 3 \cdot 1000 + 2 \cdot 100 + 9 \cdot 10 + 5 \cdot 1$

ἢ $\chi = 3X + 2E + 9\Delta + 5M$

ἢ $\chi = 3295$

Ὁμοίως, γιὰ τὸ ἄθροισμα

$$\psi = 3 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$$

ἔχουμε: $\psi = 3.1000 + 0 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 4 \cdot 1$

ἢ $\psi = 3004$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

123. Νὰ γράψετε τοὺς ἀκεραίους 2378, 3005, 10709 μὲ μορφὴ ἀθροίσματος δυνάμεων τοῦ 10 πολλαπλασιασμένων μὲ 0, 1, 2, . . ., 9.

124. Τὰ πιὸ κάτω ἀθροίσματα:

$$\alpha = 8 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$$
$$\beta = 5 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^0$$
$$\gamma = 7.10^9 + 5.10^5 + 3.10^2$$

ποιοὺς ἀκεραίους παριστάνουν;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

125. Ἂν $\alpha = 2^4 \cdot 3$, $\beta = 2^3 \cdot 3^2$ καὶ $\gamma = 2^3 \cdot 7 \cdot 5$, νὰ βρεθοῦν οἱ τιμὲς τῶν ἀριθμητικῶν παραστάσεων:

$$\alpha^2 \cdot \beta, \quad (\alpha^2 \cdot \beta^2)^2, \quad (\alpha \cdot \beta^2 \cdot \gamma)^3, \quad \beta : \alpha, \quad \beta^2 : \alpha$$

126. Νὰ βρεῖτε τὸ πηλίκο τῆς διαιρέσεως:

$$(3^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3) : (9^2 \cdot 25)$$

127. Νὰ ἐκφράσετε σὲ μορφὴ δυνάμεως τὰ ἀθροίσματα:

$$9 + 6 \cdot \beta + \beta^2, \quad 4\alpha^2 - 4\alpha + 1$$

128. Νὰ ἐκφράσετε σὲ μορφὴ γινομένου τὴ διαφορὰ $25\alpha^2 - 9$ (ἄσκ. 122).

129. Ποιῶν ἀριθμῶν τετράγωνα εἶναι οἱ ἀριθμοί:

$$2^6 \cdot 3^2, \quad 5^4 \cdot 7^2, \quad 3^2 \cdot 2^4 \cdot 5^2, \quad 9 \cdot 5^4, \quad 36 \cdot 2^8 \cdot 3^{10}$$

130. Τί παθαίνει ὁ κύβος ἑνὸς ἀριθμοῦ α, ἂν πολλαπλασιάσουμε τὸν α ἐπὶ 2, 3, 4; Χρησιμοποιῆστε παραδείγματα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ε'

ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΑ

51. ΔΙΑΙΡΕΤΕΣ ΑΚΕΡΑΙΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

51.1. Ἀκέραιος διαιρετὸς μὲ φυσικὸ ἀριθμό.

Γνωρίζουμε ὅτι τὸ 20 εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 5, $(20 = 4 \cdot 5)$.

Πολλὲς φορές, ἀντὶ νὰ λέμε 20 εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 5, λέμε

20 εἶναι διαιρετὸ διὰ 5

ἢ 5 εἶναι διαιρέτης τοῦ 20

Γενικά : **ἕνας ἀκέραιος α εἶναι διαιρετὸς μὲ ἕναν ἄλλο $\beta \neq 0$, ἂν ὁ α εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ β.**

51. 2. Πρῶτοι καὶ σύνθετοι ἀριθμοί.

Ἂς βροῦμε τοὺς διαιρέτες τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Διαιρέτες τοῦ 2 εἶναι οἱ φυσικοὶ ἀριθμοὶ 1, 2
Διαιρέτες τοῦ 3 εἶναι οἱ φυσικοὶ ἀριθμοὶ 1, 3
Διαιρέτες τοῦ 4 εἶναι οἱ φυσικοὶ ἀριθμοὶ 1, 2, 4
Διαιρέτες τοῦ 5 εἶναι οἱ φυσικοὶ ἀριθμοὶ 1, 5
Διαιρέτες τοῦ 6 εἶναι οἱ φυσικοὶ ἀριθμοὶ 1, 2, 3, 6
Διαιρέτες τοῦ 7 εἶναι οἱ φυσικοὶ ἀριθμοὶ 1, 7
Διαιρέτες τοῦ 8 εἶναι οἱ φυσικοὶ ἀριθμοὶ 1, 2, 4, 8
Διαιρέτες τοῦ 9 εἶναι οἱ φυσικοὶ ἀριθμοὶ 1, 3, 9

Ἀπὸ τὰ πιὸ πάνω παρατηροῦμε ὅτι:

α) Ὑπάρχουν ἀκέραιοι ποὺ δὲν ἔχουν ἄλλους διαιρέτες ἐκτὸς ἀπὸ τὴ μονάδα καὶ τὸν ἑαυτό τους. Ὅπως π.χ. οἱ ἀκέραιοι 2, 3, 5, 7.

β) Ὑπάρχουν ἀκέραιοι ποὺ ἔχουν περισσότερους ἀπὸ δύο διαιρέτες.

Ἀπὸ αὐτὲς τὶς παρατηρήσεις φτάνουμε στὸν ἑξῆς ὁρισμό:

Κάθε φυσικὸς ἀριθμός, μεγαλύτερος ἀπὸ τὴ μονάδα, λέγεται πρῶτος ἂν ἔχει δύο μόνο διαιρέτες, σύνθετος* ἂν ἔχει περισσότερους ἀπὸ δύο.

---

* Ἡ ὀνομασία σύνθετος ἀριθμὸς δικαιολογεῖται ἀπὸ τὸ ὅτι κάθε σύνθετος ἀριθμὸς μπορεῖ νὰ ἐκφρασθεῖ ὡς γινόμενο πρώτων παραγόντων. Π.χ. $6 = 2 \cdot 3$, $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$.

Σημείωση

Παρατηροῦμε ὅτι ὁ δεύτερος στὴ σειρὰ διαιρέτης τῶν ἀκεραίων 2, 3, 4,..., 9 εἶναι πρῶτος ἀριθμός. Τὸ ἴδιο μποροῦμε νὰ διαπιστώσουμε καὶ στὴν περίπτωση ὁποιουδήποτε ἀκεραίου.

51.3. Κόσκινο τοῦ Ἐρατοσθένη.

Γεννᾶται τὸ ἐρώτημα: Πόσοι εἶναι οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ καὶ μὲ ποιὸ τρόπο θὰ τοὺς βροῦμε;

Οἱ Ἀρχαῖοι Ἕλληνες γνώριζαν ὅτι δὲν ὑπάρχει μέγιστος πρῶτος ἀριθμός· δηλαδὴ τὸ σύνολο τῶν πρώτων ἀριθμῶν εἶναι μὴ πεπερασμένο.

$$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots\}$$

Γνώριζαν ἀκόμη ὅτι δὲν ὑπάρχει ἁπλὸς κανόνας ποὺ νὰ μᾶς δίνει τὸν ἕναν μετὰ τὸν ἄλλο τοὺς διαφόρους πρώτους ἀριθμούς. Εἶχαν ὅμως ἀνακαλύψει μιὰ μέθοδο γιὰ νὰ βρίσκουμε τοὺς πρώτους ἀριθμοὺς ποὺ εἶναι μικρότεροι ἀπὸ ἕναν δεδομένο ἀκέραιο. Αὐτὴ ἡ μέθοδος εἶναι γνωστὴ ὡς κόσκινο τοῦ Ἐρατοσθένη* καὶ μὲ λίγα λόγια εἶναι ἡ ἑξῆς:

Γιὰ νὰ βροῦμε τοὺς πρώτους ἀριθμοὺς ποὺ εἶναι μικρότεροι π.χ. ἀπὸ τὸ 100, γράφουμε ὅλους τοὺς ἀκεραίους 1, 2, 3,.., 100. Στὴ συνέχεια διαγράφουμε:

1) τὴ μονάδα
2) τὰ πολλαπλάσια τοῦ 2 ἀρχίζοντας ἀπὸ τὸ $2^2 = 4$
3) τὰ πολλαπλάσια τοῦ 3 ἀρχίζοντας ἀπὸ τὸ $3^2 = 9$
4) τὰ πολλαπλάσια τοῦ 5 ἀρχίζοντας ἀπὸ τὸ $5^2 = 25$
5) τὰ πολλαπλάσια τοῦ 7 ἀρχίζοντας ἀπὸ τὸ $7^2 = 49$

Οἱ ἀριθμοὶ ποὺ ἀπομένουν εἶναι ὅλοι οἱ πρῶτοι οἱ μικρότεροι ἀπὸ τὸ 100. Εἶναι οἱ: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

131. Στὸ σύνολο $A = \{2, 4, 5, 7, 9, 11, 15, 17, 21, 29\}$ ποιὰ ἀπὸ τὰ στοιχεῖα του εἶναι πρῶτοι καὶ ποιὰ σύνθετοι ἀριθμοί;

132. Τὸ διπλάσιο ἑνὸς πρώτου ἀριθμοῦ εἶναι πρῶτος ἢ σύνθετος ἀριθμός;

133. Ποιὸ εἶναι τὸ σύνολο τῶν διαιρετῶν τῶν ἀριθμῶν:

$25 = 5^2$, $49 = 7^2$, 11^2, 13^2; Τί παρατηρεῖτε;

134. Μία δύναμη α^ν ἑνὸς ἀκεραίου $\alpha > 1$ μπορεῖ ἄραγε νὰ εἶναι πρῶτος ἀριθμός, ὅταν: $\nu > 1$;

---

* Ὁ Ἐρατοσθένης ἦταν ἕνας ἀπὸ τοὺς ἐπιστήμονες καὶ λογίους τῆς ἀρχαιότητας. Διακρίθηκε ὡς μαθηματικός, φιλόλογος, γεωγράφος, ἱστορικὸς καὶ ποιητής. (275-194 π.Χ.).

52. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΔΙΑΙΡΕΤΩΝ ΕΝΟΣ ΑΚΕΡΑΙΟΥ

51. 1. Εἶναι γνωστὸ ὅτι ὁ 5 διαιρεῖ κάθε πολλαπλάσιό του. Ἤτοι διαιρεῖ τοὺς ἀριθμούς: $0\cdot 5 = 0$, $1\cdot 5 = 5$, $2\cdot 5 = 10$, $3\cdot 5 = 15\ldots$

Ἀντιστρόφως. Ἂν ὁ 5 διαιρεῖ κάποιον ἀριθμὸ α, αὐτὸς θὰ εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 5

$$\alpha:5 = \beta \Leftrightarrow \alpha = 5\cdot\beta \qquad \alpha, \beta \in N_0$$

Ὥστε: ὁ 5 διαιρεῖ ὅλα τὰ πολλαπλάσιά του καὶ μόνον αὐτά.

Γενικά, ἀπὸ τὴ γνωστὴ ἰσοδυναμία

$$\alpha:\beta = \gamma \Leftrightarrow \alpha = \beta\cdot\gamma$$

ἐννοοῦμε ὅτι:

Κάθε φυσικὸς ἀριθμὸς διαιρεῖ τὰ πολλαπλάσιά του καὶ μόνον αὐτά.

52. 2. Ὁ φυσικὸς ἀριθμὸς 5 διαιρεῖ τοὺς ἀριθμοὺς 15 καὶ 30. Διαιρεῖ ἄραγε καὶ τὸ ἄθροισμά τους;

Ἔχουμε $\quad 15 = 3\cdot 5$

$\qquad\qquad 30 = 6\cdot 5$

Ἄρα $\quad 15+30 = (3\cdot 5)+(6\cdot 5)$

$\qquad\qquad = 5\cdot(3+6)$ (ἐπιμεριστικὴ ἰδιότητα)

$\qquad\qquad = 5\cdot 9$, δηλαδὴ πολλαπλάσιο τοῦ 5.

Παρατηροῦμε ὅτι τὸ ἄθροισμα $15+30$ εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 5 καὶ συνεπῶς διαιρετὸ διὰ 5. Ὁμοίως ἐννοοῦμε ὅτι τὸ ἄθροισμα $15+30+40$ εἶναι διαιρετὸ διὰ 5.

Ἀπὸ τὶς παρατηρήσεις αὐτὲς συνάγομε ὅτι:

Ἂν ἕνας φυσικὸς ἀριθμὸς διαιρεῖ δύο ἄλλους, θὰ διαιρεῖ καὶ τὸ ἄθροισμά τους.

Ἐφαρμογή : Διαιρεῖ ὁ ἀριθμὸς 6 τὸν 324;

Γράφουμε $\quad 324 = 300+24$

Εὔκολα διακρίνουμε ὅτι ὁ 6 διαιρεῖ τὸ 300 καὶ τὸ 24, ἄρα θὰ διαιρεῖ καὶ τὸ ἄθροισμά τους $300+24 = 324$.

52. 3. Σύμφωνα μὲ τὴν προηγούμενη ἰδιότητα, ὁ ἀριθμὸς 5, ἀφοῦ διαιρεῖ τὸν ἀριθμὸ 15, θὰ διαιρεῖ καὶ τὸ ἄθροισμα $15+15+15$, ἤτοι τὸ γινόμενο $3\cdot 15$.

Ὥστε : **Ἂν ἕνας φυσικὸς ἀριθμὸς διαιρεῖ ἕναν ἄλλο, θὰ διαιρεῖ καὶ τὰ πολλαπλάσιά του.**

Ἐφαρμογή: Διαιρεῖ ὁ ἀριθμὸς 4 τὸν ἀριθμὸ 280; Ἀφοῦ ὁ 4 διαιρεῖ τὸ 28, θὰ διαιρεῖ καὶ τὸ πολλαπλάσιό του $28\cdot 10 = 280$.

52. 4. Ὁ φυσικὸς ἀριθμὸς 5 διαιρεῖ τοὺς ἀριθμοὺς 60 καὶ 35. Θὰ διαιρεῖ καὶ τὴ διαφορά τους 60 – 35;

Εἶναι: $60 = 5 \cdot 12$

$35 = 5 \cdot 7$

Ἄρα $60 - 35 = (5 \cdot 12) - (5 \cdot 7)$

$= 5 \cdot (12 - 7)$

$= 5 \cdot 5 =$ πολλαπλάσιο 5

Ὥστε: **Ἂν ἕνας φυσικὸς ἀριθμὸς διαιρεῖ δύο ἄλλους, θὰ διαιρεῖ καὶ τὴ διαφορά τους.**

Ἐφαρμογή: Ὁ ἀριθμὸς 2 διαιρεῖ τὸν ἀριθμὸ 196;

Γράφουμε $196 = 200 - 4$

Εὔκολα διακρίνουμε ὅτι ὁ ἀριθμὸς 2 διαιρεῖ τοὺς ἀριθμοὺς 200 καὶ 4. Συνεπῶς διαιρεῖ καὶ τὴ διαφορά τους $200 - 4 = 196$.

25. 5. Ἕνας φυσικὸς ἀριθμός, π.χ. ὁ 3, διαιρεῖ τὸν διαιρετέο καὶ τὸ διαιρέτη σὲ μιὰν ἀτελῆ διαίρεση, π.χ. στὴ διαίρεση 78 διὰ 9. Μήπως ὁ ἴδιος ἀριθμός, ὁ 3, διαιρεῖ καὶ τὸ ὑπόλοιπο αὐτῆς τῆς διαιρέσεως; Βρίσκουμε εὔκολα ὅτι πραγματικὰ αὐτὸ ἰσχύει. (Ἂν $\Delta = 78$ καὶ $\delta = 9$, τότε $\pi = 8$ καὶ $\upsilon = 6 = 2.3$).

Μὲ διάφορες δοκιμὲς μποροῦμε νὰ διαπιστώσουμε ὅτι αὐτὸ ἰσχύει γενικά.

Π.χ. ἂν $\left.\begin{array}{l}\Delta = 60 = \text{πολ/σιο τοῦ } 3 \\ \text{καὶ } \delta = 18 = \text{πολ/σιο τοῦ } 3\end{array}\right\}$ τότε $\upsilon = 6 =$ πολ/σιο τοῦ 3

Ὥστε: **Ἂν ἕνας φυσικὸς ἀριθμὸς διαιρεῖ τὸν διαιρετέο καὶ τὸ διαιρέτη σὲ μιὰ ἀτελῆ διαίρεση, θὰ διαιρεῖ καὶ τὸ ὑπόλοιπό της.**

Ἐφαρμογή: Οἱ ἀκέραιοι 69 καὶ 9 εἶναι διαιρετοὶ μὲ τὸ φυσικὸ ἀριθμὸ 3. Καὶ τὸ ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεώς τους 6 εἶναι διαιρετὸ μὲ τὸ 3. Σημειώνουμε ὅτι τὸ πηλίκο τῆς διαιρέσεως τοῦ 69 διὰ 9 δὲν εἶναι ὑποχρεωτικὰ διαιρετὸ μὲ τὸ 3.

ΣΥΝΟΨΗ ΤΩΝ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ

Ἂν ὁ φυσικὸς ἀριθμὸς α	1) $\beta + \gamma$
διαιρεῖ τοὺς ἀκεραίους β καὶ	2) $\beta - \gamma$, $\beta > \gamma$
γ, τότε θὰ διαιρεῖ καὶ τούς:	3) $\beta \cdot \lambda$ ἢ $\gamma \cdot \lambda$ $\lambda \in N$
	4) $\upsilon = \beta - (\gamma \cdot \pi)$ $\upsilon < \gamma$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

135. Οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β, ὅπου $\alpha > \beta$, εἶναι διαιρετοὶ διὰ τοῦ 5. Νὰ σχηματίσετε μὲ αὐτοὺς ἄλλους ἀριθμοὺς διαιρετοὺς διὰ 5.

136. Νὰ ἐξετάσετε ἂν οἱ ἀριθμοί: $A = 7 \cdot \alpha + 21$ καὶ $B = 28 \cdot \alpha + 14$, $\alpha \in N$, εἶναι διαιρετοὶ διὰ 7.

137. Νὰ ἐξετάσετε ἂν ὁ ἀριθμὸς $X = 18\alpha^2 \cdot \beta$ εἶναι διαιρετὸς διὰ 9.

138. Ὁ 9 εἶναι διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 27, 45 καὶ 81. Αἰτιολογήσετε γιατὶ θὰ εἶναι διαιρέτης καὶ τῶν ἀριθμῶν 153, 243, 378.

53. ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΤΗΣ ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΟΣ

53. 1. Γιὰ νὰ βροῦμε ἂν ὁ ἀκέραιος α εἶναι διαιρετὸς μὲ τὸν φυσικὸ ἀριθμὸ β, πρέπει νὰ ἐκτελέσουμε τὴ διαίρεση τοῦ α διὰ β, γιὰ νὰ δοῦμε ἂν αὐτὴ εἶναι τέλεια ἢ ὄχι.

Ἐντούτοις, μποροῦμε γιὰ ὁρισμένες τιμὲς τοῦ β νὰ βροῦμε ἂν ὁ α εἶναι ἢ ὄχι διαιρετὸς διὰ β, χωρὶς νὰ ἐκτελέσουμε τὴ διαίρεση. Οἱ ἑπόμενες ἰδιότητες τῶν διαιρετῶν θὰ μᾶς ὁδηγήσουν σὲ κανόνες, στὰ κ ρ ι τ ή ρ ι α τ ῆ ς δ ι α ι ρ ε τ ό τ η τ α ς, ποὺ θὰ μᾶς ἐπιτρέπουν νὰ βρίσκουμε εὔκολα πότε ὁ ἀκέραιος α εἶναι διαιρετὸς μὲ τὸ φυσικὸ ἀριθμὸ β. Αὐτὰ τὰ κριτήρια ἰσχύουν γιὰ τὸ δεκαδικὸ σύστημα γραφῆς τῶν ἀκεραίων.

53. 2. Τρόπος ἐργασίας.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὰ κριτήρια διαιρετότητας, θὰ ἀκολουθήσουμε πιὸ κάτω τὴν ἑξῆς γενικὴ μέθοδο: Γιὰ νὰ διακρίνουμε π.χ. ἂν ὁ ἀκέραιος 2630 εἶναι διαιρετὸς διὰ 25, τὸν ἀναλύουμε σὲ δύο μέρη

$$2630 = 2500 + 130$$

τέτοια, ὥστε τὸ πρῶτο μέρος νὰ φαίνεται ἀμέσως ὅτι εἶναι διαιρετὸ διὰ 25, ὁπότε ἡ προσοχή μας περιορίζεται στὸ δεύτερο μέρος.

Γενικά, γιὰ νὰ διακρίνουμε ἂν ὁ ἀκέραιος α εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ β, ἀναλύουμε τὸ α σύμφωνα μὲ τὸν τύπο

$$\boxed{\alpha = (\text{πολλαπλάσιο } \beta) + \upsilon} \quad (1)$$

53. 3. 1ο κριτήριο. Ἀριθμοὶ διαιρετοὶ διὰ 10, 100, 1000, ...

Ἂς λάβουμε τὸν ἀριθμὸ 3567 καὶ ἂς τὸν ἀναλύσουμε σύμφωνα μὲ τὸν τύπο (1).

Συγκεκριμένα ἔχουμε:

$$3567 = 3560 + 7$$

ἢ $$3567 = 356 \cdot 10 + 7$$

ἢ $$3567 = (\text{πολλαπλάσιο } 10) + 7$$

Ὁ ἀριθμὸς 3567 ἀναλύθηκε σὲ δύο μέρη (προσθετέους). Τὸ πρῶτο μέρος διαιρεῖται διὰ 10, ὡς πολλαπλάσιό του. Συνεπῶς, ἂν καὶ τὸ δεύτερο μέρος (7) διαιρεῖται διὰ 10, ὁλόκληρος ὁ ἀριθμὸς θὰ εἶναι διαιρετὸς διὰ 10.

Δηλαδή, ἕνας ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ 10, ἂν τὸ τελευταῖο ψηφίο του διαιρεῖται διὰ 10, δηλαδὴ ἂν εἶναι 0.

Μὲ ὅμοιο τρόπο ἐργαζόμαστε καὶ ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι 100, 1000, . . .

Π.χ. $3567 = 3500 + 67$

ἢ $3567 = 35 . 100 + 67$

ἢ $3567 = (\text{πολλαπλάσιο } 100) + 67$

Ὥστε : **Ἕνας ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ 10, 100, 1000, ... ἂν λήγει τουλάχιστο σὲ ἕνα, δύο, τρία, ...μηδενικὰ ἀντιστοίχως.**

Ἐφαρμογή: Ἀπὸ τοὺς ἀριθμούς: 175, 15360, 38600, 1867. εἶναι διαιρετοὶ διὰ 10 οἱ 15360, 38600, ἐνῶ διὰ 100 εἶναι διαιρετὸς ὁ 38600.

53.4. 2ο κριτήριο. Ἀριθμοὶ διαιρετοὶ διὰ 2 ἢ διὰ 5.

Ἂς λάβουμε τὸν ἀριθμὸ 1536 καὶ ἂς τὸν ἀναλύσουμε σύμφωνα μὲ τὸν τύπο (1).

Συγκεκριμένα, ἐπειδὴ $2.5 = 10$

γράφουμε $1536 = (153.10) + 6$

ἢ $1536 = (\text{πολλαπλάσιο } 10) + 6 \quad (2)$

Ἂς προσέξουμε στὸ δεύτερο μέρος τῆς (2). Καθένας ἀπὸ τοὺς ἀκεραίους 2 καὶ 5 διαιρεῖ τὸν 10 ὡς πολλαπλάσιό του. Ἄρα θὰ διαιρεῖ καὶ τὰ πολλαπλάσια τοῦ 10. Ἂν καὶ ὁ 6, τελευταῖο ψηφίο τοῦ ἀριθμοῦ, διαιρεῖται διὰ 2 (ἢ 5), ὁλόκληρος ὁ ἀριθμὸς θὰ εἶναι διαιρετὸς διὰ 2 (ἢ 5) ἀντιστοίχως.

Ὥστε : **Ἕνας ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ 2 ἢ 5 ἂν τὸ τελευταῖο ψηφίο του εἶναι διαιρετὸ διὰ 2 ἢ 5 ἀντιστοίχως.**

Παράδειγμα

Ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 172, 57, 1160, 475 εἶναι διαιρετοὶ διὰ 2 οἱ 172, 1160 καὶ διὰ 5 οἱ 1160, 475.

Σημείωση

Οἱ ἀκέραιοι, οἱ ὁποῖοι εἶναι διαιρετοὶ διὰ 2, λέγονται ἄ ρ τ ι ο ι ἀριθμοί. Δηλαδή, ἄρτιοι εἶναι ὅλα τὰ πολλαπλάσια τοῦ 2. Γιὰ τοῦτο ὁ συμβολισμὸς

$$\alpha = 2 \cdot \nu \quad \text{ὅπου} \quad \nu \in N_0$$

σημαίνει ὅτι ὁ ἀκέραιος α εἶναι ἄρτιος ἀριθμός. Οἱ ἀκέραιοι, ποὺ δὲν εἶναι διαιρετοὶ διὰ 2, λέγονται π ε ρ ι τ τ ο ὶ ἀριθμοί. Αὐτοὶ διαιρούμενοι διὰ 2 ἀφήνουν ὑπόλοιπο πάντοτε 1. Γιὰ τοῦτο ὁ συμβολισμὸς

$$\alpha = 2 \cdot \nu + 1 \quad \text{ὅπου} \quad \nu \in N_0$$

σημαίνει ὅτι ὁ α εἶναι περιττὸς ἀριθμός.

53.5. 3ο κριτήριο. Ἀριθμοὶ διαιρετοὶ διὰ 4 ἢ 25.

Ἂς λάβουμε τὸν ἀριθμὸ 6575 καὶ ἂς τὸν ἀναλύσουμε σύμφωνα μὲ τὸν τύπο (1).

Συγκεκριμένα, ἐπειδὴ $4 \cdot 25 = 100$

γράφουμε $6575 = 65 \cdot 100 + 75$

ἢ $6575 = (\text{πολλαπλάσιο } 100) + 75 \quad (3)$

Στὸ δεύτερο μέλος τῆς (3) παρατηροῦμε ὅτι ὁ 100 εἶναι διαιρετὸς διὰ 4 καὶ 25, ἄρα καὶ τὸ πολλαπλάσιό του 65.100. Συνεπῶς ἂν ὁ 75 εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 4 ἢ 25, ὁλόκληρος ὁ ἀριθμὸς θὰ εἶναι διαιρετὸς διὰ 4 ἢ 25 ἀντιστοίχως.

Ὥστε : **Ἕνας ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ 4 ἢ διὰ 25, ἂν τὸ τελευταῖο διψήφιο τμῆμα του ἀποτελεῖ ἀριθμὸ διαιρετὸ διὰ τοῦ 4 ἢ 25 ἀντιστοίχως.**

Παραδείγματα

Ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 6736, 2300, 638, 3275, οἱ ἀριθμοὶ 6736, 2300 εἶναι διαιρετοὶ διὰ 4, ἐνῶ οἱ 2300, 3275 εἶναι διαιρετοὶ διὰ 25.

53. 6. 4ο κριτήριο. Ἀριθμοὶ διαιρετοὶ διὰ 3 ἢ διὰ 9.

Ἂς γράψουμε διάφορα πολ/σια τοῦ 9 καὶ ἂς σχηματίσουμε ἔπειτα τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τοῦ καθενὸς ἀπὸ αὐτά.

π.χ. $3 \cdot 9 = 27, \quad 7+2=9 \qquad 15 \cdot 9 = 135, \quad 1+3+5=9$

$7 \cdot 9 = 63, \quad 6+3=9 \qquad 52 \cdot 9 = 468, \quad 4+6+8=18$

$322 \cdot 9 = 2898, \quad 2+8+9+8=27 \qquad 843 \cdot 9 = 7587, \quad 7+5+8+7=27$

Παρατηροῦμε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων ἑνὸς ὁποιουδήποτε πολ/σίου εἶναι διαιρετὸ διὰ 9. Τὴν ἴδια παρατήρησή μποροῦμε νὰ κάνουμε καὶ γιὰ τὸ 3.

Τὰ προηγούμενα μᾶς ὁδηγοῦν στὸν ἀκόλουθο κανόνα:

Ἕνας ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ 9 ἢ διὰ 3, ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του εἶναι διαιρετὸ διὰ 9 ἢ 3 ἀντιστοίχως.

Παρατήρηση

Ἐπειδὴ ὁ 9 εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 3, κάθε ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 9 θὰ εἶναι διαιρετὸς καὶ διὰ 3. Τὸ ἀντίστροφο ὅμως δὲν ἰσχύει. Εἶναι δυνατὸ τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων ἑνὸς ἀριθμοῦ νὰ εἶναι διαιρετὸ διὰ 3, ὄχι ὅμως καὶ διὰ 9, π.χ. ὁ ἀριθμὸς 33.

Παραδείγματα

Ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 561, 783, 75234, 11342 εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 9 μόνον ὁ ἀριθμὸς 783, ἐνῶ διὰ 3 οἱ ἀριθμοὶ 561, 75234, 783.

139. Ποιοὶ ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 216, 7852, 189756, 810, 3775, 328 εἶναι διαιρετοὶ διὰ 2, 5, 4, 25, 3, 9;

140. Στὸ τέλος τῶν ἀριθμῶν 13, 63, 22 νὰ θέσετε ἕνα ψηφίο, ὥστε νὰ προκύψουν ἀριθμοὶ διαιρετοὶ συγχρόνως διὰ 5 καὶ 9.

141. Δίνονται οἱ ἀριθμοὶ 10802, 180540. Ἀντικαταστῆστε τὰ μηδενικὰ μὲ ἄλλα ψηφία, ὥστε νὰ προκύψουν ἀριθμοὶ διαιρετοὶ συγχρόνως διὰ 4 καὶ 9.

142. Νὰ ἀντικαταστήσετε τὸ τετραγωνίδιο μὲ ἕνα ψηφίο, ὥστε ὁ ἀριθμὸς 35 □, ἐὰν διαιρεθεῖ διὰ 9, νὰ ἀφήσει ὑπόλοιπο 4.

54. ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΝΟΣ ΦΥΣΙΚΟΥ ΣΥΝΘΕΤΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ ΣΕ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΠΡΩΤΩΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ

54. 1. Ἂς προσέξουμε τὶς ἰσότητες:

$$3 \cdot 4 = 12$$
$$2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$$

Τὰ πρῶτα μέλη τῶν ἰσοτήτων παριστάνουν τοὺς ἀριθμοὺς 12 καὶ 30 μὲ μιὰν ἄλλη μορφή. Μὲ μορφὴ ἑνὸς γινομένου παραγόντων.

Ἡ γραφὴ ἑνὸς ἀριθμοῦ μὲ τὴ μορφὴ αὐτὴ λέγεται ἀνάλυση τοῦ ἀριθμοῦ σὲ γινόμενο παραγόντων ἢ παραγοντοποίηση τοῦ ἀριθμοῦ.

Στὴ δεύτερη ἰσότητα παρατηροῦμε ὅτι ὅλοι οἱ παράγοντες, στοὺς ὁποίους ἀναλύθηκε ὁ ἀριθμὸς 30, εἶναι πρῶτοι ἀριθμοί. Γι' αὐτό, λέμε ὅτι ἀναλύσαμε τὸν ἀριθμὸ 30 σὲ γινόμενο πρώτων παραγόντων ἢ ὅτι ἔχουμε πλήρη παραγοντοποίηση τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ.

Πολὺ συχνὰ μᾶς διευκολύνει στὰ μαθηματικὰ ἡ παράσταση ἑνὸς ἀριθμοῦ μὲ μορφὴ ἑνὸς γινομένου πρώτων παραγόντων. Γιὰ νὰ ἀναλύσουμε ἕναν σύνθετο ἀριθμὸ σὲ γινόμενο πρώτων παραγόντων, π.χ. τὸν ἀριθμὸ 150, ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

$$\begin{aligned} 150 &= 2 \cdot 75 & \text{ἐπειδὴ} \quad & 2 \cdot 75 = 150 \\ &= 2 \cdot 3 \cdot 25 & \text{»} \quad & 3 \cdot 25 = 75 \\ &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 & \text{»} \quad & 5 \cdot 5 = 25 \end{aligned}$$

Δηλαδή, βρίσκουμε τὸν ἐλάχιστο πρῶτο παράγοντα (δεύτερο διαιρέτη) τοῦ 150, τὸν 2, ἔπειτα τὸν ἐλάχιστο πρῶτο παράγοντα τοῦ πηλίκου $150:2 = 75$, τὸν 3, κατόπιν τὸν ἐλάχιστο πρῶτο παράγοντα τοῦ πηλίκου $75:3 = 25$, τὸν 5.

Ἔτσι καταλήγουμε στὸ γινόμενο $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$, ποὺ ὅλοι του οἱ παράγοντες εἶναι πρῶτοι. Αὐτὴ ἡ διαδικασία γράφεται πιὸ σύντομα μὲ τὴν ἑπόμενη διάταξη:

$$\begin{array}{r|l}
150 & 2 \\
75 & 3 \\
25 & 5 \\
5 & 5 \\
1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
150:2=75 \\
75:3=25 \\
25:5=5 \\
5:5=1
\end{array}$$

Δηλαδὴ $150 = 2.3.5^2$

Ἄλλα παραδείγματα

$$\begin{array}{r|l}
60 & 2 \\
30 & 2 \\
15 & 3 \\
5 & 5 \\
1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
72 & 2 \\
36 & 2 \\
18 & 2 \\
9 & 3 \\
3 & 3 \\
1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
180 & 2 \\
90 & 2 \\
45 & 3 \\
15 & 3 \\
5 & 5 \\
1 &
\end{array}$$

Ὥστε $60 = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5$

ἢ $60 = 2^2\cdot 3\cdot 5$ $\qquad 72 = 2^3\cdot 3^2$ $\qquad 180 = 2^2\cdot 3^2\cdot 5$

54. 3. Ἐφαρμογὲς

Νὰ ὑπολογισθεῖ τὸ γινόμενο $72\cdot 2^5\cdot 7$

Ἔχουμε $\quad 72 = 2^3\cdot 3^2$

Ἄρα
$$\begin{aligned}
72.2^5.7 &= (2^3\cdot 3^2)\cdot(2^5\cdot 7) \\
&= (2^3\cdot 2^5)\cdot 3^2\cdot 7 \\
&= 2^8\cdot 3^2\cdot 7 \\
&= 256\cdot 9\cdot 7 = 16128
\end{aligned}$$

Νὰ ὑπολογισθεῖ τὸ πηλίκο $\quad (2^{10}\cdot 3^2):256$

Ἔχουμε $\quad 256 = 2^8$

Ἄρα
$$\begin{aligned}
(2^{10}\cdot 3^2):256 &= (2^{10}\cdot 3^2):2^8 \\
&= (2^{10}:2^8)\cdot 3^2 \\
&= 2^2\cdot 3^2 = 36
\end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

143. Νὰ συγκριθοῦν οἱ ἀριθμοί:

$$216 \quad \text{καὶ} \quad 2^3\cdot 3^3$$

144. Νὰ ἀναλυθοῦν σὲ γινόμενα πρώτων παραγόντων οἱ ἀκέραιοι:

580, 612, 1245, 1440

145. Ἂν $\alpha = 2^5 \cdot 3^7 \cdot 5 \cdot 7^2$, $\beta = 2^4 \cdot 3^5 \cdot 7$ καὶ $\gamma = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 7$ νὰ βρεθοῦν τὰ γινόμενα:

$$\alpha \cdot \beta, \quad \alpha \cdot \gamma, \quad (\alpha^2 \cdot \beta) \cdot \gamma$$

καὶ τὰ πηλίκα $\alpha : \beta$, $(\alpha \cdot \beta) : \gamma$.

146. Ἀφοῦ ἀναλύσετε σὲ γινόμενα πρώτων παραγόντων τοὺς ἀκεραίους 6, 15, 18, 30, νὰ βρεῖτε τὰ τετράγωνά τους. Τί παρατηρεῖτε γιὰ τοὺς ἐκθέτες; Στηριζόμενοι στὴν παρατήρησή σας, νὰ βρεῖτε ποιῶν ἀκεραίων τὰ τετράγωνα εἶναι οἱ ἀριθμοὶ $2^6 \cdot 3^4$, $2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^4$ καὶ 256.

55. ΚΟΙΝΟΙ ΔΙΑΙΡΕΤΕΣ ΚΑΙ Μ.Κ.Δ. ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

55. 1. Ἂς λάβουμε δύο ἀριθμούς, τοὺς 16 καὶ 24, καὶ ἂς βροῦμε τὰ σύνολα τῶν διαιρετῶν τους. Ἔχουμε

Σύνολο τῶν διαιρετῶν τοῦ 16 : $A = \{1, 2, 4, 8, 16\}$

» » 24 : $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

Ἂς σχηματίσουμε καὶ τὴν τομὴ τῶν συνόλων Α καὶ Β, δηλαδὴ τὸ σύνολο τῶν κοινῶν διαιρετῶν τῶν ἀριθμῶν 16 καὶ 24

$$A \cap B = \{1, 2, 4, 8\}$$

Στὸ σύνολο $A \cap B$ παρατηροῦμε τὰ ἑξῆς:

i) Ἔχει ὡς στοιχεῖα του τοὺς ἀριθμοὺς ποὺ εἶναι οἱ κοινοὶ διαιρέτες τῶν 16 καὶ 24. Γιὰ τοῦτο καὶ λέγεται σύνολο τῶν κοινῶν διαιρετῶν τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν.

ii) Εἶναι πεπερασμένο σύνολο καὶ ἔχει ὡς ἐλάχιστο στοιχεῖο τὸ 1 καὶ μέγιστο τὸ 8. Τὸν ἀκέραιο 8, μέγιστο στοιχεῖο τοῦ συνόλου τῶν κοινῶν διαιρετῶν, τὸν ὀνομάζουμε μέγιστο κοινὸ διαιρέτη τῶν ἀριθμῶν 16 καὶ 24 καὶ σημειώνουμε σύντομα Μ.Κ.Δ. $(16, 24) = 8$.

iii) Τὸ σύνολο Γ τῶν διαιρετῶν τοῦ Μ.Κ.Δ., $\Gamma = \{1, 2, 4, 8\}$, ταυτίζεται μὲ τὸ σύνολο $A \cap B = \{1, 2, 4, 8\}$.

Δηλαδή: $A \cap B = \Gamma$

Μὲ ἐντελῶς ἀνάλογο τρόπο μποροῦμε νὰ βροῦμε τὸν Μ.Κ.Δ. τριῶν ἢ περισσοτέρων ἀκεραίων.

Π.χ. γιὰ τοὺς ἀκεραίους 12, 20, 28 ἔχουμε:

Σύνολο διαιρετῶν τοῦ 12 : $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

Σύνολο διαιρετῶν τοῦ 20 : $B = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$

Σύνολο διαιρετῶν τοῦ 28 : $\Gamma = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$

Σύνολο κοινῶν διαιρετῶν:

$$\Delta = A \cap B \cap \Gamma = \{1, 2, 4\}$$

Ὥστε Μ.Κ.Δ. (12, 20, 28) εἶναι ὁ 4.

Αὐτὲς οἱ παρατηρήσεις μᾶς διευκολύνουν νὰ κατανοήσουμε τὶς ἑξῆς γενικὲς προτάσεις.

Ἂς εἶναι α, β, γ, ... δύο ἢ περισσότεροι ἀκέραιοι, ἀπὸ τοὺς ὁποίους ὁ ἕνας τουλάχιστο εἶναι διαφορετικὸς ἀπὸ τὸ μηδέν. Π.χ. $\alpha \neq 0$.

Τὸ σύνολο Δ τῶν κοινῶν τους διαιρετῶν:

i) Δὲν εἶναι δυνατὸ νὰ εἶναι τὸ κενὸ σύνολο.

Γνωρίζουμε ὅτι ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ ἔχουν διαιρέτη τὴ μονάδα.

Ἄρα καὶ ἡ τομὴ Δ θὰ ἔχει ἕνα τουλάχιστο στοιχεῖο, τὴ μονάδα.

ii) Εἶναι πεπερασμένο σύνολο, ἐπειδὴ ὅλα τὰ στοιχεῖα του εἶναι μικρότερα (ἢ ἴσα) μὲ α. Συνεπῶς ὑπάρχει ἕνα μέγιστο στοιχεῖο: ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν δεδομένων ἀριθμῶν.

iii) Ταυτίζεται μὲ τὸ σύνολο τῶν διαιρετῶν τοῦ Μ.Κ.Δ. τῶν δεδομένων ἀριθμῶν.

55.2. Ἀριθμοὶ πρῶτοι μεταξύ τους.

Ἂς ζητήσουμε τὸν Μ.Κ.Δ. τῶν ἀριθμῶν 5 καὶ 8. Ἔχουμε:

Σύνολο διαιρετῶν τοῦ 5 : $A = \{1, 5\}$

Σύνολο διαιρετῶν τοῦ 8 : $B = \{1, 2, 4, 8\}$

Ἄρα Μ.Κ.Δ. (5, 8) εἶναι ἡ μονάδα.

Ὅταν δύο ἢ περισσότεροι ἀκέραιοι, ὅπως οἱ 5 καὶ 8, ἔχουν ὡς Μ.Κ.Δ. τὴ μονάδα, λέγονται πρῶτοι μεταξύ τους.

55. 3. Παρατήρηση

Δὲν πρέπει νὰ συγχέουμε τὶς ἔννοιες:

1) «Πρῶτος ἀριθμός», π.χ. ὁ 7 εἶναι πρῶτος ἀριθμός.

2) «Πρῶτοι μεταξύ τους ἀριθμοί», π.χ. οἱ ἀριθμοὶ 6, 4, 9 εἶναι πρῶτοι μεταξύ τους χωρὶς ὁ καθένας ἀπὸ αὐτοὺς νὰ εἶναι πρῶτος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

147. Νὰ βρεῖτε τὰ σύνολα τῶν διαιρετῶν τῶν ἀριθμῶν 15, 20, 30 καὶ τὸν Μ.Κ.Δ. αὐτῶν.

148. Ὁ Μ.Κ.Δ. τριῶν ἀριθμῶν εἶναι ὁ 17. Ποιὸ εἶναι τὸ σύνολο τῶν κοινῶν διαιρετῶν τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν;

149. Νὰ βρεῖτε τὸν Μ.Κ.Δ. τῶν ἀριθμῶν 3, 8, 30.

150. Δύο ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι μεταξύ τους. Ὁ ἕνας εἶναι ἄρτιος. Εἶναι δυνατὸ καὶ ὁ ἄλλος νὰ εἶναι ἄρτιος ἢ ὄχι, καὶ γιατί;

56. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ Μ.Κ.Δ.

56. 1. 1η Ἰδιότητα

Ἂς θεωρήσουμε τὸν Μ.Κ.Δ. $(36, 14) = 2$ καὶ ἂς ἀντικαταστήσουμε τὸν 36 μὲ τὴ διαφορὰ $36 - 14 = 22$.

Παρατηροῦμε ὅτι Μ.Κ.Δ. (22, 14) = 2.

Ὥστε Μ.Κ.Δ. (36, 14) = Μ.Κ.Δ.(36 – 14, 14).

Σ' αὐτὴ τὴν παρατήρηση μποροῦμε νὰ φτάσουμε, ἂν σκεφτοῦμε ὅτι ὁποιοσδήποτε κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 36 καὶ 14, συνεπῶς καὶ ὁ Μ.Κ.Δ. τους, ὀφείλει νὰ διαιρεῖ καὶ τὴ διαφορὰ 36 – 14 (§ 52. 4).

Γενικά : **Ὁ Μ.Κ.Δ. δύο ἢ περισσοτέρων ἀκεραίων δὲν ἀλλάζει, ἂν ἀντικαταστήσουμε τὸν ἕνα ἀπ' αὐτοὺς μὲ τὴ διαφορὰ ποὺ ἔχει ὁ ἴδιος καὶ ἕνας ἄλλος ἀπὸ τοὺς διδομένους ἀριθμούς.**

Ἐφαρμογή: Ἂς ἐφαρμόσουμε διαδοχικὰ αὐτὴ τὴν ἰδιότητα, γιὰ νὰ βροῦμε τὸν Μ.Κ.Δ. τῶν ἀριθμῶν 42 καὶ 18.

Ἐπειδὴ 42 – 18 = 24, 24 – 18 = 6, 18 – 6 = 12, 12 – 6 = 6

Ἔχουμε: Μ.Κ.Δ. (42, 18) = Μ.Κ.Δ. (24, 18) = Μ.Κ.Δ. (6, 18) = Μ.Κ.Δ. (6, 12) = Μ.Κ.Δ. (6, 6) = 6

Ἡ εὕρεση τοῦ Μ.Κ.Δ. μὲ τὴ μέθοδο αὐτὴ εἶναι κοπιαστική, ἰδίως ὅταν οἱ ἀριθμοὶ εἶναι μεγάλοι.

56. 2. 2η ἰδιότητα

Ἂς ξαναγυρίσουμε στὸ παράδειγμα τῆς 1ης ἰδιότητας καὶ ἂς ἀντικαταστήσουμε τὸ 36 μὲ τὸ ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεώς του διὰ 14, δηλ. 8. Παρατηροῦμε ὅτι καὶ πάλι Μ.Κ.Δ. (8, 14) = 2.

Δηλαδή: Μ.Κ.Δ. (26, 14) = Μ.Κ.Δ. (8, 14)

Σ' αὐτὴ τὴν παρατήρηση φτάνουμε, ἂν σκεφτοῦμε ὅτι ὁποιοσδήποτε κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 36 καὶ 14, συνεπῶς καὶ ὁ Μ.Κ.Δ. τους, ὀφείλει νὰ διαιρεῖ καὶ τὸ ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως 36 διὰ 14 (§ 52. 5).

Γενικά : **Ὁ Μ.Κ.Δ. δύο ἢ περισσοτέρων ἀκεραίων δὲν ἀλλάζει, ἂν ἀντικαταστήσουμε ἕναν ἀπὸ αὐτοὺς μὲ τὸ ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεώς του δι' ἑνὸς ἄλλου ἀπὸ τοὺς διδομένους ἀριθμούς.**

57. ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ* ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΗ

Στὴ 2η ἰδιότητα τοῦ Μ.Κ.Δ. στηρίζεται μία σύντομη μέθοδος γιὰ τὴν εὕρεση Μ.Κ.Δ. δύο ἀκεραίων. Ἡ μέθοδος αὐτὴ λέγεται Εὐκλείδειος ἀλγόριθμος ἀπὸ τὸ ὄνομα τοῦ μεγάλου Ἕλληνα μαθηματικοῦ Εὐκλείδη, ὁ ὁποῖος τὴ δίδαξε.

* Ἡ λέξη ἀλγόριθμος ἔχει ἀραβικὴ προέλευση καὶ σημαίνει μία σειρὰ ἀπὸ πράξεις, ἡ ὁποία ἐπαναλαμβανομένη μᾶς ὁδηγεῖ στὴν εὕρεση τοῦ τελικοῦ ἀποτελέσματος π.χ. στὴν εὕρεση τοῦ Μ.Κ.Δ.

Παράδειγμα

Νὰ βρεθεῖ ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν ἀριθμῶν 256 καὶ 120.

Ἔχουμε: Μ.Κ.Δ. (256, 120) = Μ.Κ.Δ. (16, 120) ἐπειδὴ $256 = 2.120+16$

= Μ.Κ.Δ. (16, 8) » $120 = 7 \cdot 16+8$

= Μ.Κ.Δ. (8, 0) » $16 = 2 \cdot 8+0$

Ἡ πράξη διατάσσεται σχηματικὰ ὡς ἑξῆς:

Πηλίκα		2	7	2
Ἀριθμοὶ	256	120	16	8 Μ.Κ.Δ.
Ὑπόλοιπα	16	8	0	8

Γενικά, ἔχουμε τὸν ἑξῆς κανόνα:

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ Μ.Κ.Δ. δύο ἀκεραίων α καὶ β, ὅταν α>β, διαιροῦμε τὸ α διὰ β:

ι) Ἂν τὸ ὑπόλοιπο εἶναι 0, τότε Μ.Κ.Δ. (α, β) = β.

ιι) Ἂν ἡ διαίρεση τοῦ α διὰ β δίδει ὑπόλοιπο $\upsilon_1 \neq 0$, διαιροῦμε τὸ β διὰ τοῦ υ_1. Ἂν τὸ ὑπόλοιπο υ_2, ποὺ προκύπτει ἀπὸ τὴ νέα διαίρεση, εἶναι μηδὲν ($\upsilon_2 = 0$), τότε Μ.Κ.Δ. (α, β) = υ_1. Ἂν $\upsilon_2 \neq 0$, διαιροῦμε τὸ υ_1 διὰ υ_2 κ.ο.κ., ἕως ὅτου βροῦμε μιὰ διαίρεση μὲ ὑπόλοιπο 0. Αὐτὸ θὰ συμβεῖ κατ' ἀνάγκη, ἐπειδὴ οἱ ἀκέραιοι β, υ_1, υ_2 γίνονται διαρκῶς μικρότεροι $\beta>\upsilon_1>\upsilon_2$.....

Ὁ διαιρέτης τῆς τελευταίας διαιρέσεως εἶναι ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν ἀκεραίων α καὶ β.

58. ΕΥΡΕΣΗ ΤΟΥ Μ.Κ.Δ. ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΩΝ ΤΩΝ ΔΥΟ ΑΚΕΡΑΙΩΝ

58. 1. Ἂς βροῦμε τὸν Μ.Κ.Δ. τῶν ἀριθμῶν 96, 72 καὶ 24. Παρατηροῦμε ὅτι ὁ μικρότερος ἀπὸ αὐτούς, ὁ 24, εἶναι κοινὸς διαιρέτης τῶν 96 καὶ 72. Ἂν σκεφτοῦμε ἀκόμη ὅτι ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν τριῶν ἀριθμῶν 96, 72, 24, δὲν μπορεῖ νὰ εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸ 24 (γιατί;), ἐννοοῦμε ὅτι ὁ 24 εἶναι ὁ Μ.Κ.Δ. τους.

58. 2. Ἂς βροῦμε τὸν Μ.Κ.Δ. τῶν ἀριθμῶν 36, 48, 60.

Γνωρίζουμε ὅτι τὸ σύνολο τῶν κοινῶν διαιρετῶν τῶν ἀριθμῶν 60 καὶ 48 ταυτίζεται μὲ τὸ σύνολο τῶν διαιρετῶν τοῦ Μ.Κ.Δ. τους. Μποροῦμε συνεπῶς νὰ ἀντικαταστήσουμε τοὺς δύο ἀριθμοὺς 48 καὶ 60 μὲ τὸν Μ.Κ.Δ. τους, δηλαδὴ τὸ 12. Μ' αὐτὸ τὸν τρόπο καταλήγουμε στὴν εὕρεση τοῦ Μ.Κ.Δ. δύο ἀριθμῶν 36 καὶ 12.

Δηλαδὴ Μ.Κ.Δ.(26, 48, 60) = Μ.Κ.Δ.(36, 12) = 12.

Ἐντελῶς ἀνάλογα ἐργαζόμαστε καὶ ὅταν οἱ ἀριθμοὶ εἶναι περισσότεροι ἀπὸ τρεῖς. Κάνουμε ἀντικατάσταση ἀνὰ δύο μὲ τὸ Μ.Κ.Δ. τους, ὥσπου νὰ καταλήξουμε στὴν περίπτωση τῆς εὑρέσεως Μ.Κ.Δ. δύο ἀριθμῶν.

58. 3. Πολλὲς φορὲς στὴν πράξη ἐφαρμόζουμε καὶ τὴν ἑξῆς σύντομη διάταξη, ποὺ εἶναι μία ἐφαρμογὴ τῶν ἰδιοτήτων τοῦ Μ.Κ.Δ.

α) Γράφουμε σὲ μιὰ σειρὰ τοὺς δεδομένους ἀριθμούς.	240	48	64
β) Τὸν μικρότερο ἀπὸ αὐτοὺς (48) τὸν γράφουμε πάλι στὴν ἴδια στήλη· κάτω ἀπὸ	0	48	16
τοὺς ἄλλους ἀριθμοὺς γράφουμε τὸ ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ καθενὸς μὲ τὸ 48.	0	0	16

γ) Ἐπαναλαμβάνουμε τὴν ἴδια διαδικασία *, ὥσπου, σὲ μιὰ σειρά, νὰ βροῦμε μηδενικὰ καὶ ἕναν ἀριθμὸ μὴ μηδενικὸ (16).

Αὐτὸς θὰ εἶναι ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν δεδομένων ἀριθμῶν.

$$\text{Μ.Κ.Δ.}\ (240, 48, 64) = 16$$

59. ΕΥΡΕΣΗ ΤΟΥ Μ.Κ.Δ. ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΜΕ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΣΕ ΓΙΝΟΜΕΝΑ ΠΡΩΤΩΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ

Ἂς προσπαθήσουμε νὰ βροῦμε τὸν Μ.Κ.Δ. τῶν ἀριθμῶν $\alpha = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5$, $\beta = 2^3 . 3^2 . 5$ καὶ $\gamma = 2^2 . 3^2 . 5$.

Σκεφτόμαστε ὅτι κάθε κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν α, β, γ: 1) δὲν μπορεῖ νὰ ἔχει ἄλλους πρώτους παράγοντες ἐκτὸς ἀπὸ τοὺς 2, 3 καὶ 5, ποὺ εἶναι οἱ κοινοὶ πρῶτοι παράγοντες τῶν α, β καὶ γ· (γιατί;) 2) δὲν μπορεῖ νὰ ἔχει τὸν πρῶτο παράγοντα 2 σὲ δύναμη μεγαλύτερη ἀπὸ τὴ δεύτερη (2^2), ποὺ εἶναι ἡ μικρότερη μὲ τὴν ὁποία παρουσιάζεται ὁ 2 στοὺς δεδομένους ἀριθμοὺς α, β, γ.

Ὅμοια, δὲν μπορεῖ νὰ ἔχει τὸν πρῶτο παράγοντα 3 σὲ δύναμη μεγαλύτερη ἀπὸ τὴ δεύτερη καὶ τὸν πρῶτο παράγοντα 5 σε δύναμη μεγαλύτερη ἀπὸ τὴν πρώτη.

Ἀπὸ τὰ πιὸ πάνω καταλήγουμε στὸ συμπέρασμα ὅτι ὁ Μ.Κ.Δ. θὰ εἶναι ἴσος μὲ $2^2 . 3^2 . 5$.

Μ.Κ.Δ. τῶν ἀριθμῶν $\alpha = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5$, $\beta = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ καὶ $\gamma = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ εἶναι $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$

Μὲ ὅμοιο τρόπο βρίσκουμε ὅτι:

Μ.Κ.Δ. $(2 \cdot 3 \cdot 5,\ 2^2 \cdot 3 \cdot 5) = 2 \cdot 3 \cdot 5$

Μ.Κ.Δ. $(2^3 \cdot 3 \cdot 5,\ 2^4 \cdot 3^2,\ 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2) = 2^3 . 3$

Μ.Κ.Δ. $(2^3 \cdot 3 \cdot 5,\ 2^3 . 3^2 . 5,\ 2^2 . 3^2) = 2^2 \cdot 3$

Στὰ πιὸ πάνω παραδείγματα, ἂν παρατηρήσουμε προσεχτικὰ τοὺς πρώτους παράγοντες καὶ τοὺς ἐκθέτες στοὺς δεδομένους ἀριθμοὺς καὶ στὸ Μ.Κ.Δ. τους, θὰ διακρίνουμε ὅτι:

Ὁ Μ.Κ.Δ. ἀριθμῶν ποὺ ἔχουν ἀναλυθεῖ σὲ γινόμενα πρώτων παραγόντων εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενο τῶν πιὸ μικρῶν δυνάμεων μὲ τὶς ὁποῖες παρουσιάζονται οἱ κοινοὶ πρῶτοι παράγοντες.

* λαμβάνοντας πάντοτε τὸν μικρότερο ἀριθμό, τὸν διαφορετικὸ ἀπὸ τὸ μηδέν.

Ἐφαρμογή: Ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν ἀριθμῶν $2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^3$, $2^2 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7$, $2^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11$ εἶναι $2^2 . 5^2 . 7$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

151. Νὰ βρεῖτε τὸν Μ.Κ.Δ. τῶν ἀριθμῶν: α) 78, 104, β) 504, 576, 1140, γ) 24, 72, 108.

152. Ποιὸς εἶναι ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν ἀριθμῶν:

α) $2^2 \cdot 5$, 300, $2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$, β) $3 \cdot 5 \cdot 7$, $2^2 \cdot 5 \cdot 11$, $2 \cdot 3^2 \cdot 11^2$

153. Μία χορωδία ἀποτελεῖται ἀπὸ 60 ὑψιφώνους, 120 μέσους καὶ 40 βαθυφώνους. Πόσες τὸ πολὺ ὅμοιες ὁμάδες μποροῦμε νὰ σχηματίσουμε μὲ αὐτοὺς καὶ πόσους ὑψιφώνους, μέσους καὶ βαθυφώνους θὰ ἔχει κάθε ὁμάδα;

154. Ἀπὸ τὶς ἰσότητες $33 = 11 \cdot 3$, $132 = 11 \cdot 12$, $154 = 11 \cdot 14$ νὰ βρεῖτε ἕναν κοινὸ διαιρέτη τῶν ἀριθμῶν 33, 132 καὶ 154.

155. Δύο ἀριθμοὶ ἔχουν τὸν 15 ὡς κοινὸ διαιρέτη. Νὰ δείξετε ὅτι οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ θὰ ἔχουν καὶ ἄλλους κοινοὺς διαιρέτες.

60. ΚΟΙΝΑ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑ ΦΥΣΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ἂς λάβουμε δύο ἀριθμούς, π.χ. τοὺς 3 καὶ 5, καὶ ἂς σχηματίσουμε τὰ σύνολα τῶν πολλαπλασίων τους. Ἔχουμε:

Σύνολο πολλαπλασίων τοῦ 3: $\Pi_1 = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, \ldots\}$

Σύνολο πολλαπλασίων τοῦ 5: $\Pi_2 = \{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, \ldots\}$

Ἡ τομὴ τῶν συνόλων Π_1 καὶ Π_2

$$\Pi_1 \cap \Pi_2 = \{0, 15, 30, \ldots\}$$

εἶναι ἕνα νέο σύνολο, ποὺ ἔχει γιὰ στοιχεῖα τὰ κοινὰ πολλαπλάσια τῶν ἀριθμῶν 3 καὶ 5. Ἐκτὸς ἀπὸ τὸ μηδέν, τὸ ἐλάχιστο στοιχεῖο αὐτοῦ τοῦ συνόλου εἶναι ὁ ἀκέραιος 15. Γι' αὐτὸ ὁ ἀκέραιος 15 ὀνομάζεται ἐλάχιστο κοινὸ πολλαπλάσιο τῶν ἀριθμῶν 3 καὶ 5.

Τὸ σημειώνουμε σύντομα Ε.Κ.Π. $(3, 5) = 15$

Ἂς σχηματίσουμε τὸ σύνολο

$$\Pi = \{\chi \mid \chi \text{ πολλαπλάσιο τοῦ Ε.Κ.Π.}\} = \{0, 15, 30, 45, \ldots\}$$

Παρατηροῦμε ὅτι αὐτὸ ταυτίζεται μὲ τὸ σύνολο

$$\Pi_1 \cap \Pi_2 = \{0, 15, 30, \ldots\}$$

Δηλαδή: $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \Pi$

Ὅμοιες παρατηρήσεις μποροῦμε νὰ κάνουμε καὶ ὅταν οἱ ἀριθμοὶ εἶναι τρεῖς ἢ περισσότεροι.

Π.χ. γιὰ τὸ Ε.Κ.Π. (12, 15, 20) ἔχουμε:

Σύνολο πολλαπλασίων τοῦ 12: $\Pi_1 = \{0, 12, 24, 36, 48, 60, \ldots\}$

Σύνολο πολλαπλασίων τοῦ 15: $\Pi_2 = \{0, 15, 30, 45, 60, 75, \ldots\}$

Σύνολο πολλαπλασίων τοῦ 20: $\Pi_3 = \{0, 20, 60, 80, \ldots\}$

καὶ ἑπομένως

$$\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3 = \{0, 60, 120, \ldots\}$$
$$= \{\chi \mid \chi \text{ πολ/σιο τοῦ } 60\}$$

Αὐτὲς οἱ παρατηρήσεις μᾶς διευκολύνουν νὰ κατανοήσουμε τὶς ἑξῆς γενικὲς προτάσεις:

Ἂν δοθοῦν δύο ἢ περισσότεροι φυσικοὶ ἀριθμοί, τότε τὸ σύνολο τῶν κοινῶν πολλαπλασίων τους:

1) Εἶναι ἕνα ἀπειροσύνολο, ἐπειδή, μαζὶ μὲ τ' ἄλλα στοιχεῖα του, περιέχει καὶ τὸ γινόμενο τῶν ἀριθμῶν καθὼς καὶ τὰ πολλαπλάσιά του, ποὺ εἶναι ἄπειρα στὸ πλῆθος (Γιατί;)

2) Ἔχει ἕνα ἐλάχιστο στοιχεῖο, διαφορετικὸ ἀπὸ τὸ μηδέν, ποὺ εἶναι καὶ τὸ Ε.Κ.Π. τῶν δεδομένων ἀριθμῶν.

3) Ταυτίζεται μὲ τὸ σύνολο τῶν πολλαπλασίων τοῦ Ε.Κ.Π. τῶν δεδομένων ἀριθμῶν.

61. ΕΥΡΕΣΗ ΤΟΥ Ε.Κ.Π. ΔΥΟ Ἢ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Στὴν προηγούμενη παράγραφο γνωρίσαμε μιὰ γενικὴ μέθοδο γιὰ τὴν εὕρεση τοῦ Ε.Κ.Π. δύο ἢ περισσοτέρων φυσικῶν ἀριθμῶν. Αὐτὴ ἡ μέθοδος εἶναι κοπιαστική, ἰδίως ὅταν οἱ ἀριθμοὶ εἶναι μεγάλοι.

Τὰ ἑπόμενα παραδείγματα μᾶς ὁδηγοῦν σὲ δύο ἄλλους τρόπους εὑρέσεως τοῦ Ε.Κ.Π., ποὺ μᾶς εἶναι χρήσιμοι στοὺς ὑπολογισμούς.

Παράδειγμα 1ο.

Νὰ βρεθεῖ τὸ Ε.Κ.Π. τῶν ἀριθμῶν 20 καὶ 24.

Ἔχουμε:

Σύνολο πολ/σίων τοῦ 20: $\Pi_1 = \{0, 20, 40, 60, 80, 100, 120, 140, \dots\}$

Σύνολο πολ/σίων τοῦ 24: $\Pi_2 = \{0, 24, 48, 72, 96, 120, \dots\}$

Σύνολο $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \{0, 120, 240, \dots\}$

Ὥστε Ε.Κ.Π. $(20, 24) = 120$

Ὕστερα ἀπὸ τὴν ἀνάλυση τῶν ἀριθμῶν 20, 24, 120 σὲ γινόμενα πρώτων παραγόντων ἡ προηγούμενη ἰσότητα μπορεῖ νὰ γραφεῖ:

$$\text{Ε.Κ.Π.}\ (2^2\cdot 5,\ 2^3\cdot 3) = 2^3\cdot 3\cdot 5 \qquad (1)$$

Ἂν ἐργαστοῦμε μὲ ὅμοιο τρόπο, μποροῦμε νὰ βροῦμε κι ἄλλες τέτοιες ἰσότητες.

Ἔτσι ἔχουμε:

$$\text{Ε.Κ.Π.}\ (2^3\cdot 5,\ 2^2\cdot 7) = 2^3\cdot 5\cdot 7 \qquad (2)$$

$$\text{Ε.Κ.Π.}\ (2^3\cdot 3,\ 2^2\cdot 5^2\cdot 11,\ 2^3\cdot 7) = 2^3\cdot 3\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11 \qquad (3)$$

Ἀπὸ τὴν προσεκτικὴ παρατήρηση τῶν ἰσοτήτων (1), (2) καὶ (3) ὁδηγούμαστε στὸν ἑξῆς κανόνα:

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ Ε.Κ.Π. ἀριθμῶν ποὺ εἶναι ἀναλυμένοι σὲ γινόμενο πρώτων παραγόντων, σχηματίζουμε τὸ γινόμενο τῶν μεγίστων δυνάμεων τῶν κοινῶν καὶ τῶν μὴ κοινῶν παραγόντων ποὺ ὑπάρχουν στὶς ἀναλύσεις τῶν ἀριθμῶν.

Παράδειγμα 2ο.

Νὰ βρεθεῖ τὸ Ε.Κ.Π. τῶν ἀριθμῶν 12, 15, 42.

Γράφουμε τοὺς δεδομένους ἀριθμοὺς σὲ μιὰ σειρὰ καὶ φέρνουμε μιὰ κατακόρυφη εὐθεία δεξιά τους. Ἐξετάζουμε ἂν ἀνάμεσα σ' αὐτοὺς τοὺς ἀριθμοὺς ὑπάρχουν δύο ἢ περισσότεροι ποὺ νὰ ἔχουν ἕναν κοινὸ πρῶτο διαιρέτη.

12	15	42	2
6	15	21	3
2	5	7	

$$\text{Ε.Κ.Π.}\,(12, 15, 42) = (2\cdot3)(2\cdot5\cdot7)$$
$$= 2^2\cdot3\cdot5\cdot7$$

Τὸν κοινὸ αὐτὸ διαιρέτη τὸν γράφουμε δεξιὰ ἀπὸ τὴν κατακόρυφη γραμμὴ καὶ διαιροῦμε μὲ αὐτὸν τοὺς δεδομένους ἀριθμούς. Κάτω ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς ποὺ διαιροῦνται ἀκριβῶς γράφομε τὰ πηλίκα τῶν διαιρέσεων, ἐνῶ ὅσους τυχὸν δὲν διαιροῦνται τοὺς μεταφέρουμε κάτω ὅπως εἶναι.

Ἔτσι λαμβάνουμε μία νέα σειρὰ ἀριθμῶν· σ' αὐτὴν ἐργαζόμαστε ὅμοια, ὥσπου νὰ φτάσουμε σὲ μιὰ σειρὰ ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι εἶναι ἀνὰ δύο πρῶτοι μεταξύ τους. Τὸ Ε.Κ.Π. ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενο τῶν διαιρετῶν, ποὺ γράψαμε δεξιὰ ἀπὸ τὴν κατακόρυφο, πολλαπλασιασμένο μὲ τὸ γινόμενο τῶν ἀριθμῶν τῆς τελευταίας σειρᾶς.

Παρατήρηση

Ἂν ὁ μεγαλύτερος ἀπὸ τοὺς δεδομένους ἀριθμοὺς εἶναι διαιρετὸς μὲ ὅλους τοὺς ἄλλους, τότε αὐτὸς εἶναι τὸ Ε.Κ.Π. (Γιατί;)

π.χ. Ε.Κ.Π. (6, 12, 48) = 48.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

156. Νὰ βρεῖτε τὸ Ε.Κ.Π. τῶν ἀριθμῶν:

α) 6, 18, β) 8, 20, 30, γ) 14, 31, 24, 48

157. Ποιοὶ ἀπὸ τοὺς ἀριθμούς: 885, 1670, 8976, 336 καὶ 2340 εἶναι κοινὰ πολλαπλάσια τῶν ἀριθμῶν 3 καὶ 5;

158. Ποιὸ εἶναι τὸ Ε.Κ.Π. τῶν ἀριθμῶν $2^2\cdot5\cdot7$ καὶ 644;

159. Τρεῖς ποδηλάτες ἀναχωροῦν ταυτόχρονα ἀπὸ τὸ ἴδιο σημεῖο ἑνὸς κυκλικοῦ στίβου καὶ κινοῦνται μὲ τὴν ἴδια φορά. Ὁ πρῶτος διανύει τὸ στίβο σὲ 25 sec, ὁ δεύτερος σὲ 36 sec καὶ ὁ τρίτος σὲ 45 sec. Ὕστερα ἀπὸ πόσο χρόνο μετὰ τὴν ἀναχώρησή τους θὰ συναντηθοῦν στὸ ἴδιο σημεῖο τῆς ἀφετηρίας καὶ πόσους γύρους θὰ ἔχει κάνει ὁ καθένας ἀπὸ αὐτούς;

160. Οἱ μαθητὲς μιᾶς τάξης μποροῦν νὰ παραταχθοῦν σὲ τριάδες ἢ τετράδες ἢ πεντάδες, χωρὶς νὰ περισσεύει κανείς, καὶ εἶναι λιγότεροι ἀπὸ 80. Πόσους μαθητὲς ἔχει ἡ τάξη;

161. Ὅλα τὰ ψηφία ἑνὸς ἀριθμοῦ εἶναι 5. Εἶναι δυνατὸν αὐτὸς ὁ ἀριθμὸς νὰ εἶναι διαιρετὸς μὲ τὸ 2 ἢ 3 ἢ 4 ἢ 5 ἢ 9;

162. Ἕνας ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ 9. Ἂν ἀλλάξουμε τὴ σειρὰ τῶν ψηφίων του, ὁ νέος ἀριθμὸς θὰ εἶναι διαιρετὸς διὰ 9;

163. Δίνεται ὁ ἀριθμὸς 7254; ; Νὰ ἀντικαταστήσετε τὰ ἐρωτηματικὰ μὲ ψηφία, ὥστε ὁ ἀριθμὸς ποὺ θὰ προκύψει νὰ εἶναι διαιρετὸς συγχρόνως διὰ 4 καὶ 9.

164. Ἡ διαίρεση ἑνὸς ἀκεραίου α διὰ 72 ἀφήνει ὑπόλοιπο 64. Ποιὸς εἶναι ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν ἀριθμῶν α καὶ 72;

165. Νὰ βρεθοῦν δύο ἀριθμοὶ ποὺ νὰ ἔχουν ἄθροισμα 288 καὶ Μ.Κ.Δ. 24.

166. Νὰ δικαιολογήσετε γιατί, ἂν ἕνας ἀκέραιος διαιρεῖ δύο ἄλλους ἀκεραίους, θὰ διαιρεῖ καὶ τὸν Μ.Κ.Δ. τους.

167. Νὰ βρεῖτε τὸν Μ.Κ.Δ. καὶ τὸ Ε.Κ.Π. τῶν ἀριθμῶν: $A = 2.3.5^2.7$ καὶ $B = 2^2.3^4.5$. Ἔπειτα νὰ συγκρίνετε τὸ γινόμενο Α.Β μὲ τὸ γινόμενο τοῦ Μ.Κ.Δ. ἐπὶ τὸ Ε.Κ.Π. Τί παρατηρεῖτε;

168. Οἱ μαθητὲς ἑνὸς σχολείου εἶναι τόσοι, ὥστε ἂν τοποθετηθοῦν κατὰ 10δες λείπει ἕνας, ἐνῶ, ἂν τοποθετηθοῦν κατὰ 9δες, περισσεύουν 7, Ποιὸς εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν μαθητῶν αὐτοῦ τοῦ σχολείου, ἂν γνωρίζουμε ὅτι εἶναι περισσότεροι ἀπὸ 300 καὶ λιγότεροι ἀπὸ 400;

169. Θέλουμε νὰ μοιράσουμε 8800 δρχ., 200 ζεύγη κάλτσες καὶ 80 φανέλες ἐξίσου σὲ φτωχὲς οἰκογένειες. Πόσες τὸ πολὺ οἰκογένειες μποροῦμε νὰ βοηθήσουμε καὶ πόσα ἀπὸ κάθε εἶδος θὰ πάρει κάθε οἰκογένεια;

170. Τρία ἀτμόπλοια, ποὺ ἐκτελοῦν τὰ δρομολόγιά τους, ἀναχώρησαν συγχρόνως μιὰ μέρα ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ. Τὸ πρῶτο ἀτμόλποιο ἐπανέρχεται καὶ ἀναχωρεῖ πάλι ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ κάθε 18 ἡμέρες, τὸ δεύτερο κάθε 20 ἡμέρες καὶ τὸ τρίτο κάθε 24 ἡμέρες.

Μετὰ πόσες τουλάχιστο ἡμέρες θὰ συνατηθοῦν καὶ πάλι στὸν Πειραιᾶ;

171. Σὲ μιὰ ἀτελῆ διαίρεση ὁ διαιρετέος εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 5 καὶ ὁ διαιρέτης εἶναι 25. Ποιὸ εἶναι τὸ σύνολο τῶν τιμῶν ποὺ μπορεῖ νὰ λάβει τὸ ὑπόλοιπο;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΣΤ΄.

ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΡΗΤΩΝ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

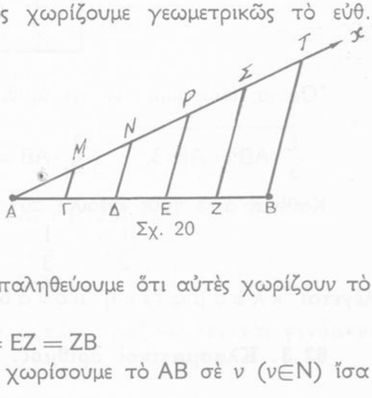
62. ΚΛΑΣΜΑΤΑ

62.1. Διαίρεση ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος δι' ἑνὸς φυσικοῦ ἀριθμοῦ.

i) Στὸ διπλανὸ σχ. 20 βλέπουμε πῶς χωρίζουμε γεωμετρικῶς τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ σὲ 5 ἴσα μέρη.

Ἀπὸ τὸ ἕνα ἄκρο Α φέρνουμε μιὰν εὐθεία Αχ καὶ πάνω σ' αὐτὴ λαμβάνουμε διαδοχικὰ 5 ἴσα εὐθ. τμήματα.

$$AM = MN = NP = P\Sigma = \Sigma T$$



Σχ. 20

Φέρνουμε τὸ εὐθ. τμῆμα ΤΒ καὶ ἀπὸ τὰ σημεῖα Μ, Ν, Ρ, Σ φέρνουμε παραλλήλους πρὸς τὸ ΤΒ. Μὲ τὸ διαβήτη μας ἐπαληθεύουμε ὅτι αὐτὲς χωρίζουν τὸ τμῆμα ΑΒ σὲ 5 ἴσα μέρη.

$$A\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta E = EZ = ZB$$

Μὲ ὅμοιο τρόπο ἐργαζόμαστε γιὰ νὰ χωρίσουμε τὸ ΑΒ σὲ ν ($\nu \in N$) ἴσα μέρη.

ii) Ἄς προσέξουμε ἕνα ἀπὸ τὰ 5 ἴσα τμήματα τοῦ ΑΒ, π.χ. τὸ ΑΓ.

Εἶναι $\quad 5 \cdot A\Gamma = AB$

Τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΓ λέγεται πηλίκο τῆς διαιρέσεως τοῦ ΑΒ διὰ 5.

Γράφουμε $\quad AB:5 = A\Gamma$

Ἤτοι: $\quad AB:5 = A\Gamma$ σημαίνει ὅτι $5 \cdot A\Gamma = AB$

Γενικά : **Ὀνομάζουμε πηλίκο τῆς διαιρέσεως ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος α δι' ἑνὸς φυσικοῦ ἀριθμοῦ ν, ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα β τέτοιο ὥστε ν · β = α.**

$$\boxed{\alpha:\nu = \beta \quad \Leftrightarrow \quad \nu \cdot \beta = \alpha \qquad \nu \in N}$$

Εἰδικὰ γιὰ $\nu = 1$ θέτουμε $\alpha : 1 = \alpha$.

62.2. Κλασματικὴ μονάδα.

Σχ. 21

Στὸ σχ. 21 εἶναι $AM = AB:2$.

Ἂν μᾶς ρωτήσουν ποιὸ μέρος τοῦ τμήματος AB εἶναι τὸ τμῆμα AM, ἀντὶ νὰ ἀπαντήσουμε ὅτι τοῦτο εἶναι τὸ πηλίκο τοῦ AB διὰ 2, λέμε ὅτι εἶναι τὸ ἕνα δεύτερο τοῦ AB ἢ τὸ ἕνα δεύτερο ἐπὶ AB.

Καὶ γράφουμε: $AM = \frac{1}{2} \cdot AB$

Ἤτοι ἡ γραφὴ $\frac{1}{2}$ παριστάνει ἕναν «νέο» ἀριθμὸ τέτοιον, ὥστε τὸ γινόμενό του ἐπὶ AB νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ πηλίκο τοῦ AB διὰ 2.

$$\boxed{\frac{1}{2} \cdot AB = AB:2}$$

Ὅμοια, θεωροῦμε «νέους» ἀριθμοὺς $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, ... τέτοιους ὥστε:

$$\frac{1}{3} \cdot AB = AB:3, \qquad \frac{1}{4} \cdot AB = AB:4, \qquad \frac{1}{5} \cdot AB = AB:5, \ \ldots$$

Καθένας ἀπὸ τοὺς «νέους» αὐτοὺς ἀριθμοὺς

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \ldots, \quad \frac{1}{\nu} \qquad \nu \in N$$

λέγεται κλασματικὴ μονάδα.

62.3. Κλασματικοὶ ἀριθμοί.

α) Ὅπως ἀπὸ τὴν ἀκέραιη μονάδα σχηματίζουμε τοὺς ἀκεραίους ἀριθμούς, π.χ. $1+1 = 2.1 = 2$, $1+1+1 = 3.1 = 3$, ἔτσι ἀπὸ κάθε κλασματικὴ μονάδα σχηματίζουμε «νέους» ἀριθμούς, τοὺς κλασματικούς.

Συγκεκριμένα: Ἀντὶ «2 φορὲς τὸ $\frac{1}{7}$» λέμε «γινόμενο 2 μὲ $\frac{1}{7}$» ἢ «κλάσμα δύο ἕβδομα».

Τὸ γράφουμε: $2 \cdot \frac{1}{7} = \frac{2}{7}$

Ἐπίσης γράφουμε: $3 \cdot \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$, $3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$, $5 \cdot \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$

Γενικά, ἀντὶ «α φορὲς τὸ $\frac{1}{\beta}$» λέμε «γινόμενο α ἐπὶ $\frac{1}{\beta}$» ἢ «κλάσμα α διὰ β».

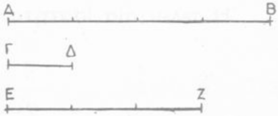
Τὸ γράφουμε $\boxed{\alpha \cdot \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \text{ὅπου } \alpha \in N_0 \text{ καὶ } \beta \in N}$

Ἤτοι: **Κάθε κλάσμα εἶναι γινόμενο ἑνὸς ἀκεραίου μὲ μιὰ κλασματικὴ μονάδα.**

Στὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς α (πάνω ἀπὸ τὴν ὁριζόντια γραμμὴ) λέγεται *ἀριθμητής*, ἐνῶ ὁ φυσικὸς ἀριθμὸς β (κάτω ἀπὸ τὴν ὁριζόντια γραμμὴ) *παρονομαστής*. Οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β λέγονται *ὅροι* τοῦ κλάσματος.

62.4. Γινόμενο ἑνὸς κλάσματος ἐπὶ ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα.

Εἴδαμε πιὸ πάνω ὅτι γινόμενο μιᾶς κλασματικῆς μονάδας, π.χ. τοῦ $\frac{1}{4}$, μὲ τὸ τμῆμα ΑΒ εἶναι τὸ πηλίκο τῆς διαιρέσεως τοῦ ΑΒ διὰ 4. Τώρα θὰ ὁρίσουμε τὸ γινόμενο ἑνὸς κλάσματος, π.χ. τοῦ $\frac{3}{4}$, μὲ τὸ ΑΒ.



Σχ. 22

Βρίσκουμε:

i) Τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ ΑΒ, δηλαδὴ $\frac{1}{4}$ ΑΒ $=$ ΓΔ, σχ. 22.

ii) Τὸ γινόμενο τοῦ 3 μὲ τὸ $\frac{1}{4}$ ΑΒ, δηλαδὴ $3 \cdot \left(\frac{1}{4} AB\right) = EZ$.

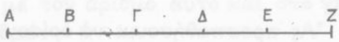
Τὸ ἀποτέλεσμα τῶν δύο διαδοχικῶν αὐτῶν πράξεων λέγεται **γινόμενο τοῦ κλάσματος $\frac{3}{4}$ μὲ τὸ τμῆμα ΑΒ.**

Τὸ γράφουμε $\frac{3}{4} \cdot AB$.

Δηλαδή : $\frac{3}{4} \cdot AB = 3 \cdot \left(\frac{1}{4} AB\right)$

Γενικά: **Γινόμενο ἑνὸς κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$ ἐπὶ ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ λέγεται τὸ γινόμενο τοῦ α ἐπὶ τὸ τμῆμα $\frac{1}{\beta} \cdot AB$.**

$$\boxed{\frac{\alpha}{\beta} \cdot AB = \alpha \cdot \left(\frac{1}{\beta} \cdot AB\right)}$$



Σχ. 23

Παραδείγματα

Στὸ σχέδιο 23 ἔχουμε

$$ΑΓ=\frac{2}{5}\cdot ΑΖ, \quad ΑΕ=\frac{4}{5}\cdot ΑΖ, \quad ΑΔ=\frac{3}{4}\cdot ΑΕ, \ \ldots$$

62.5. Ἡ ἀκέραιη μονάδα ὡς κλάσμα.

Στὸ σχ. 23 εἶναι

$$ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ+ΔΕ+ΕΖ=ΑΖ$$

ἤ $$\frac{1}{5}\cdot ΑΖ+\frac{1}{5}\cdot ΑΖ+\frac{1}{5}\cdot ΑΖ+\frac{1}{5}\cdot ΑΖ+\frac{1}{5}\cdot ΑΖ=ΑΖ$$

ἤ $$5\cdot\left(\frac{1}{5}ΑΖ\right)=ΑΖ$$

ἤ $$\frac{5}{5}\cdot ΑΖ=1\cdot ΑΖ$$

Ἡ τελευταία ἰσότητα μᾶς ὁδηγεῖ νὰ γράψουμε:

$$\frac{5}{5}=1$$

Ὅμοια γράφουμε : $\frac{2}{2}=\frac{3}{3}=\frac{4}{4}=\frac{5}{5}=\frac{\alpha}{\alpha}=1 \qquad \alpha\in N$

Κατ' ἐπέκταση σημειώνουμε καὶ $\frac{1}{1}=1$

Ἤτοι: **Κάθε κλάσμα μὲ ἴσους ὅρους ἰσοῦται μὲ τὴν ἀκέραιη μονάδα.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

172. Ποιὸ κλάσμα τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι μία γωνία 40°, 50°;

173. Νὰ γράψετε ἕνα εὐθ. τμῆμα ΑΒ καὶ ἔπειτα τμήματα ἴσα πρὸς $\frac{1}{3}\cdot ΑΒ$, $\frac{1}{4}\cdot ΑΒ$, $\frac{2}{3}\cdot ΑΒ$, $\frac{3}{4}\cdot ΑΒ$.

174. Ποιὰ γινόμενα παριστάνουν τὰ κλάσματα $\frac{3}{11}$, $\frac{5}{13}$, $\frac{7}{9}$;

175. Ἂν $\chi\in N_0$, νὰ βρεῖτε γιὰ ποιὰ τιμὴ τοῦ χ τὸ κλάσμα $\frac{5}{\chi+3}$ ἰσοῦται μὲ 1.

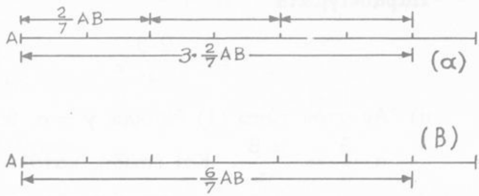
176. Γιὰ ποιὰ τιμὴ τοῦ $\chi\in N_0$ τὸ κλάσμα $\frac{2\cdot\chi+3}{9}$ ἰσοῦται μὲ 1;

63. ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΕΝΟΣ ΑΚΕΡΑΙΟΥ ΕΠΙ ΕΝΑ ΚΛΑΣΜΑ

Ἂς προσπαθήσουμε νὰ ὁρίσουμε τὸ γινόμενο $3\cdot\frac{2}{7}$

Στὸ σχ. 24α σχηματίσαμε πρῶτα τὸ γινόμενο $\frac{2}{7} \cdot AB$ καὶ ἔπειτα τὸ γινόμενο $3 \cdot \left(\frac{2}{7} AB \right)$.

Στὸ σχ. 24β σχηματίσαμε τὸ γινόμενο $\frac{6}{7} \cdot AB$



Σχ. 24

Παρατηροῦμε ὅτι καὶ στὶς δύο περιπτώσεις καταλήξαμε στὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα. Δηλαδή, ἂν πολλαπλασιάσουμε τὸ $\frac{2}{7}$ μὲ ΑΒ καὶ ἔπειτα τὸ 3 μὲ τὸ γινόμενο ποὺ βρήκαμε, θὰ βροῦμε τὸ τμῆμα $\frac{6}{7} \cdot AB$.

$$3 \cdot \left(\frac{2}{7} \cdot AB \right) = \frac{6}{7} \cdot AB$$

Αὐτὴ ἡ παρατήρηση μᾶς ἐπιτρέπει νὰ γράψουμε:

$$3 \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{7} \quad \text{ἢ} \quad 3 \cdot \frac{2}{7} = \frac{3 \cdot 2}{7} \qquad (\text{Διότι } 6 = 3 \cdot 2)$$

Γενικά :

$$\boxed{\alpha \cdot \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha \cdot \beta}{\gamma} \quad \alpha, \beta \in N_0, \gamma \in N} \qquad (1)$$

Τὸ γινόμενο ἑνὸς ἀκεραίου ἐπὶ ἕνα κλάσμα εἶναι κλάσμα, ποὺ ἔχει ἀριθμητὴ τὸ γινόμενο τοῦ ἀκεραίου ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴ τοῦ κλάσματος καὶ παρονομαστὴ τὸν ἴδιο.

63. 2. Ἐφαρμογές.

i) Ἂν στὸν τύπο (1) θέσουμε $\gamma = \beta$, θὰ ἔχουμε $\alpha . \frac{\beta}{\beta} = \frac{\alpha \cdot \beta}{\beta}$

Ἢ

$$\boxed{\alpha = \frac{\alpha . \beta}{\beta}} \qquad (2)$$

Ὁ τύπος αὐτὸς δηλώνει ὅτι:

Γιὰ νὰ τρέψουμε ἕναν ἀκέραιο σὲ κλάσμα μὲ παρονομαστὴ ὁποιονδήποτε ἀριθμὸ θέλουμε, τὸν πολλαπλασιάζουμε μὲ τὸν ἀριθμὸ αὐτὸ καὶ στὸ γινόμενο θέτουμε παρονομαστὴ τὸν ἴδιο ἀριθμό.

Παραδείγματα

$$2=\frac{2\cdot 3}{3},\qquad 3=\frac{3\cdot 2}{2}$$

ii) Ἂν στὸν τύπο (1) θέσουμε $\gamma=\alpha$, θὰ ἔχουμε

$\alpha\cdot\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha\cdot\beta}{\alpha}$. Καὶ ἐπειδή, κατὰ τὸν τύπο (2), $\frac{\alpha\cdot\beta}{\alpha}=\beta$

θὰ ἔχουμε
$$\boxed{\alpha\cdot\frac{\beta}{\alpha}=\beta}\qquad(3)$$

Ἤτοι : **Τὸ γινόμενο ἑνὸς κλάσματος μὲ τὸν παρονομαστή του εἶναι ἴσο μὲ τὸν ἀριθμητὴ τοῦ κλάσματος.**

$$3\cdot\frac{2}{3}=2,\quad 4\cdot\frac{3}{4}=3,\quad 5\cdot\frac{3}{5}=3$$

$$4\cdot\frac{2}{4}=2,\quad 4\cdot\frac{3}{4}=3,\quad 4\cdot\frac{4}{4}=4$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

177. Ἂν αὐξήσουμε τὸν ἀριθμὸ 36 κατὰ τὰ 3/9 αὐτοῦ, πόσος θὰ γίνει;

178. Νὰ γραφοῦν ὡς ἀκέραιοι τὰ κλάσματα:

$$\frac{12}{4},\quad \frac{5\cdot\alpha}{5},\quad \frac{5\cdot\alpha}{\alpha}\qquad \text{ὅπου } \alpha\in N$$

179. Στὶς ἑπόμενες ἰσότητες νὰ ἀντικαταστήσετε τὸ χ μὲ κατάλληλον ἀκέραιο, ὥστε αὐτὲς νὰ εἶναι ἀληθεῖς.

$$4=\frac{11+\chi}{5},\quad \chi=\frac{24}{4},\quad 9=\frac{3\chi+3}{6}$$

64. Η ΣΧΕΣΗ ΤΗΣ ΙΣΟΤΗΤΑΣ

64. Ὁρισμὸς

Νὰ χαράξετε ἕνα εὐθ. τμῆμα ΑΒ καὶ νὰ βρεῖτε:

α) τὰ $\frac{6}{8}$ τοῦ ΑΒ καὶ β) τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ ΑΒ. Συγκρίνετέ τα. Τί παρατηρεῖτε;

Εἶναι
$$\frac{3}{4}\cdot AB=\frac{6}{8}\cdot AB\qquad(1)$$

Αὐτὴ ἡ ἰσότητα μᾶς ὁδηγεῖ νὰ λάβουμε τὰ κλάσματα $\frac{3}{4}$ καὶ $\frac{6}{8}$ ἴσα μεταξύ τους.

Δηλαδή:
$$\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$$

Γενικά : **Δύο κλάσματα εἶναι ἴσα, ἂν τὰ γινόμενά τους ἐπὶ ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ εἶναι ἴσα.**

Δηλαδή: ἂν $\frac{\alpha}{\beta}\cdot AB = \frac{\gamma}{\delta}\cdot AB$, τότε $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ $\quad \alpha, \gamma \in N_0$, $\beta, \delta \in N$

64. 2. Χαρακτηριστικὴ ἰδιότητα.

Ἂς δοῦμε πῶς εἶναι δυνατὸν καθένα ἀπὸ τὰ ἴσα μεταξύ τους κλάσματα $\frac{3}{4}$ καὶ $\frac{6}{8}$ νὰ προκύψει ἀπὸ τὸ ἄλλο. Παρατηροῦμε ὅτι, ἂν πολλαπλασιάσουμε τοὺς ὅρους τοῦ $\frac{3}{4}$ μὲ τὸ 2, θὰ βροῦμε $\frac{6}{8}$. Ἐνῶ, ἂν διαιρέσουμε τοὺς ὅρους τοῦ $\frac{6}{8}$ διὰ 2, βρίσκουμε $\frac{3}{4}$.

$$\frac{3}{4} = \frac{3\cdot 2}{4\cdot 2} = \frac{6}{8}, \qquad \Bigg| \quad \frac{6}{8} = \frac{6:2}{8:2} = \frac{3}{4}.$$

Ἀπὸ αὐτὴ τὴν παρατήρηση φτάνουμε στὴν ἑξῆς θεμελιακὴ ἰδιότητα τῶν ἴσων κλασμάτων.

Ἂν πολλαπλασιάσουμε τοὺς ὅρους ἑνὸς κλάσματος μὲ τὸν ἴδιο φυσικὸ ἀριθμὸ ἢ ἂν τοὺς διαιρέσουμε μὲ τὸν ἴδιο φυσικὸ ἀριθμό, ὅταν εἶναι δυνατὲς οἱ διαιρέσεις, τότε προκύπτει κλάσμα ἴσο πρὸς τὸ ἀρχικό.

$$\boxed{\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha\cdot\gamma}{\beta\cdot\gamma}, \qquad \frac{\alpha\cdot\gamma}{\beta\cdot\gamma} = \frac{(\alpha\cdot\gamma):\gamma}{(\beta\cdot\gamma):\gamma} = \frac{\alpha}{\beta} \qquad \alpha \in N_0,\ \beta, \gamma \in N}$$

Σύμφωνα μ' αὐτά, ἂν δοθεῖ ἕνα κλάσμα, π.χ. τὸ $\frac{3}{4}$, μποροῦμε νὰ βροῦμε ἕνα μὴ πεπερασμένο πλῆθος κλάσματα ἴσα πρὸς αὐτό.

Δηλαδή:
$$\frac{3}{4} = \frac{3\cdot 2}{4\cdot 2} = \frac{3\cdot 3}{4\cdot 3} = \frac{3\cdot 4}{4\cdot 4} = \frac{3\cdot 5}{4\cdot 5} = \dots$$
$$= \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{12}{16} = \frac{15}{20} = \dots$$

Τὸ σύνολο ὅλων αὐτῶν τῶν ἴσων κλασμάτων λέμε ὅτι ἀποτελεῖ μιὰ κλάση ἰσοδυναμίας.

Ὅμοια τὸ σύνολο τῶν κλασμάτων ποὺ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ $\frac{1}{2}$, ἤτοι τὸ σύνολο

$$\left\{\frac{1}{2}, \quad \frac{2}{4}, \quad \frac{3}{6}, \quad \frac{4}{8}, \dots\right\}$$

ἀποτελεῖ μιὰν ἄλλη κλάση ἰσοδυναμίας.

Γενικὰ τὸ σύνολο τῶν κλασμάτων, τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα μὲ δεδομένο κλάσμα, ἀποτελεῖ μιὰ κλάση ἰσοδυναμίας.

65. 1. Ἀνάγωγα κλάσματα.

Ἄς προσέξουμε τὰ κλάσματα μιᾶς κλάσεως ἰσοδυναμίας, π.χ. τῆς κλάσεως

$$\left\{\frac{1}{2}, \quad \frac{2}{4}, \quad \frac{3}{6}, \quad \frac{4}{8}, \ldots\right\}$$

Ἀνάμεσα σὲ ὅλα αὐτὰ τὰ κλάσματα τὸ πιὸ εὔχρηστο εἶναι τὸ κλάσμα $\frac{1}{2}$. (Γιατί;). Οἱ ὅροι του εἶναι πρῶτοι μεταξύ τους καὶ λέγεται ἀ ν ά γ ω γ ο κλάσμα.

Γενικά: **Ὅταν ἕνα κλάσμα ἔχει τοὺς ὅρους του πρώτους μεταξύ τους, λέγεται ἀνάγωγο.**

Παραδείγματα.

Τὰ κλάσματα $\frac{2}{5}, \frac{4}{9}, \frac{8}{11}$ εἶναι ἀνάγωγα. Ἀντίθετα, τὰ κλάσματα $\frac{2}{6}$, $\frac{4}{8}, \frac{2}{36}$ δὲν εἶναι ἀνάγωγα. (Γιατί;)

65.2. Ἁπλοποίηση κλάσματος.

Ἄν μᾶς δοθεῖ ἕνα ἀνάγωγο κλάσμα $\frac{1}{2}$, τότε μποροῦμε νὰ πολλαπλασιάσουμε τοὺς ὅρους του ἐπὶ 2, 3, 4,... καὶ νὰ βροῦμε τὰ μὴ ἀνάγωγα κλάσματα $\frac{2}{3}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \ldots$ τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα μὲ αὐτό.

Ἀντιστρόφως, ἂν μᾶς δοθεῖ ἕνα μὴ ἀνάγωγο κλάσμα, π.χ. τὸ κλάσμα $\frac{24}{60}$, μποροῦμε νὰ διαιρέσουμε τοὺς ὅρους του μὲ τὸν Μ.Κ.Δ. τους,

$$\text{Μ.Κ.Δ. } (24 \text{ καὶ } 60) = 12, \qquad \frac{24}{60} = \frac{24:12}{60:12} = \frac{2}{5}.$$

καὶ νὰ βροῦμε τὸ ἀνάγωγο κλάσμα ποὺ εἶναι ἴσο μὲ αὐτό.

Τὸ ἀνάγωγο κλάσμα $\frac{2}{5}$ ἔχει τοὺς ὅρους του μικρότερους ἀπὸ τοὺς ἀντίστοιχους ὅρους τοῦ ἴσου του κλάσματος $\frac{24}{60}$. Εἶναι, καθὼς λέμε, ἁπλούστερο. Γι' αὐτὸ καὶ αὐτὴ ἡ ἐργασία λέγεται ἁ π λ ο π ο ί η σ η τοῦ κλάσματος $\frac{24}{60}$.

Γενικά: **Ἁπλοποίηση ἑνὸς κλάσματος λέγεται ἡ εὕρεση ἄλλου κλάσματος ἴσου μὲ αὐτὸ ἀλλὰ μὲ μικρότερους ὅρους.**

Παραδείγματα ἁπλοποιήσεως.

$\frac{125}{1500} = \frac{125:125}{1500:125} = \frac{1}{12}$

Διότι Μ.Κ.Δ. (125, 1500) = 125

$\frac{2\cdot 3^4}{5\cdot 3^4} = \frac{2}{5}$

$\frac{2\cdot\alpha}{5\cdot\alpha} = \frac{(2\cdot\alpha):\alpha}{(5\cdot\alpha):\alpha} = \frac{2\,(\alpha:\alpha)}{5\,(\alpha:\alpha)} = \frac{2\cdot 1}{5\cdot 1} = \frac{2}{5},\ \alpha\in N$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

180. Νὰ γράψετε τὸ σύνολο τῶν κλασμάτων ποὺ ἔχουν παρονομαστὴ 30 ἢ 50 καὶ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ κλάσμα $\frac{5}{6}$.

181. Νὰ βρεθεῖ κλάσμα ἴσο πρὸς τὸ $\frac{3}{5}$ καὶ ποὺ οἱ ὅροι του ἔχουν Μ.Κ.Δ. τὸν ἀριθμὸ 7.

182. Νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ κλάσματα:

$\frac{3\cdot 5^2+3\cdot 10}{15},\quad \frac{3^5\cdot 5^3\cdot 7^4}{3^4\cdot 5^2\cdot 7^5},\quad \frac{2\cdot\alpha+3\cdot\alpha}{6\cdot\alpha}\qquad \alpha\in N$

183. Μιὰ ὁποιαδήποτε κλασματικὴ μονάδα εἶναι ἀνάγωγο κλάσμα; Γιατί;

184. Νὰ προσδιορίσετε τὸν ἀκέραιο χ μὲ τέτοιον τρόπο, ὥστε

$$\frac{2\chi+2}{5} = \frac{8}{10}.$$

66. Ο ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ ΩΣ ΠΗΛΙΚΟ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ

66. 1. Ἔχουμε ὁρίσει τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$, $\alpha\in N_0$, $\beta\in N$ ὡς γινόμενο τοῦ ἀκεραίου α ἐπὶ τὴν κλασματικὴ μονάδα $\frac{1}{\beta}$, $\frac{\alpha}{\beta} = \alpha\cdot\frac{1}{\beta}$.

Τώρα θὰ δοῦμε μιὰν ἄλλη σημασία αὐτοῦ τοῦ κλάσματος.

66. 2. Ἂς ζητήσουμε τὸ ἀκριβὲς πηλίκο τῆς διαιρέσεως 2:3. Δηλαδή, ἂς ζητήσουμε ἕναν ἀριθμὸ ποὺ τὸ γινόμενό του ἐπὶ 3 νὰ ἰσοῦται μὲ 2. Εἶναι γνωστὸ πὼς δὲν ὑπάρχει τέτοιος ἀκέραιος. Ὑπάρχει ὅμως κλάσμα.

Πράγματι $\qquad 3\cdot\frac{2}{3} = 2$

Αὐτὴ ἡ ἰσότητα μᾶς ἐπιτρέπει νὰ ποῦμε ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{2}{3}$ εἶναι τὸ ἀκριβὲς πηλίκο τῆς διαιρέσεως 2:3. (Γιατί; Νὰ θυμηθεῖτε ὅτι $\delta\cdot\pi = \Delta \Leftrightarrow \Delta:\delta = \pi$)

Ὥστε $\qquad 2:3 = \frac{2}{3}$

Γενικά: $\boxed{\alpha:\beta = \frac{\alpha}{\beta}\qquad \alpha\in N_0,\quad \beta\in N}\qquad (1)$

66. 3. Συμπέρασμα

Χάρη στὰ κλάσματα, κάθε διαίρεση ἔγινε δυνατὴ καὶ τέλεια, ἐκτὸς βέβαια ἀπὸ τὴν περίπτωση ποὺ ὁ διαιρέτης εἶναι μηδέν. Τὸ ἀκριβὲς πηλίκο κάθε διαιρέσεως, μὲ διαιρέτη διαφορετικὸ ἀπὸ τὸ μηδέν, εἶναι κλάσμα μὲ ἀριθμητὴ τὸν διαιρετέο καὶ παρονομαστὴ τὸν διαιρέτη.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Ἀριθμητὴς} & \alpha = \text{Διαιρετέος} \\ \text{Παρονομαστὴς} & \beta = \text{διαιρέτης}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} \text{ ἀκριβὲς πηλίκο}$$

66.4. Λόγος δύο ἀκεραίων.

Τὸ ἀκριβὲς πηλίκο τῆς διαιρέσεως 2 διὰ 3, ἤτοι τὸ κλάσμα $\frac{2}{3}$, λέγεται καὶ λ ό γ ο ς τοῦ 2 πρὸς τὸ 3.

Γενικά, ἂν $\alpha \in N_0$ καὶ $\beta \in N$, τότε λόγος τοῦ α πρὸς τὸ β λέγεται τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$.

66. 5. Ἡ ἐξίσωση $\alpha \cdot \chi = \beta$ ὅπου $\alpha \in N$, $\beta \in N_0$.

Τὸ συμπέρασμα τῆς 66.3 μᾶς ἐπιτρέπει νὰ ἐπιλύσουμε τὴν ἐξίσωση $\alpha \cdot \chi = \beta$, ὅπου $\alpha \in N$, $\beta \in N_0$, καὶ ὅταν ἀκόμη β δὲν εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ α.

Π.χ. γιὰ τὴν ἐξίσωση $2 \cdot \chi = 3$, σύμφωνα μὲ τὴ γνωστὴ ἰσοδυναμία

$$\alpha \cdot \beta = \gamma \Leftrightarrow \beta = \gamma : \alpha$$

ἔχουμε
$$2 \cdot \chi = 3 \Leftrightarrow \chi = 3:2 = \frac{3}{2}$$

Γενικά, γιὰ τὴν ἐξίσωση $\alpha \cdot \chi = \beta$, ὅπου $\alpha \in N$, $\beta \in N_0$, ἔχουμε

$$\alpha \cdot \chi = \beta \Leftrightarrow \chi = \beta : \alpha$$

Ἤ
$$\boxed{\alpha . \chi = \beta \Leftrightarrow \chi = \frac{\beta}{\alpha}}$$

66. 6. Παρατηρήσεις

α) Τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{1}$, $\alpha \in N_0$.

Σύμφωνα μὲ τὸν τύπο $\alpha : \beta = \frac{\alpha}{\beta}$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{ἔχουμε} & 3:1 = \frac{3}{1} \\ \text{Ἀλλὰ γνωρίζουμε ὅτι} & 3:1 = 3\end{array}\right\} \text{Ἄρα } \frac{3}{1} = 3$$

Ὅμοια, $\frac{4}{1} = 4$, $\frac{5}{1} = 5$, $\frac{6}{1} = 6$, ...

καὶ γενικά: $\boxed{\dfrac{\alpha}{1}=\alpha \quad \text{ὅπου } \alpha \in N_0}$

β) Τὸ κλάσμα $\dfrac{0}{\alpha}$, $\alpha \in N$

εἶναι $0:2=\dfrac{0}{2}$ ‍ ‍ Ἄρα $\dfrac{0}{2}=0$

ἀλλὰ $0:2=0$

Ὅμοια $\dfrac{0}{3}=0,\ \dfrac{0}{4}=0,\ \dfrac{0}{5}=0,\dots$

Γενικά: $\boxed{\dfrac{0}{\alpha}=0 \quad \text{ὅπου } \alpha \in N}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

185. Νὰ βρεθοῦν τὰ ἀκριβῆ πηλίκα τῶν διαιρέσεων 5:9, 3α:5α, ὅπου α ∈ N.

186. Σὲ μιὰ ἐκδρομή, ἀπὸ τοὺς 48 μαθητὲς τῆς τάξης, ἀπουσίαζαν 2. Ποιὸς εἶναι ὁ λόγος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἀπόντων μαθητῶν α) πρὸς τὸν συνολικὸ ἀριθμὸ τῶν μαθητῶν τῆς τάξης, β) πρὸς τὸν ἀριθμὸ τῶν μαθητῶν ποὺ ἦταν παρόντες στὴν ἐκδρομή;

187. Νὰ ἐπιλύσετε τὶς ἐξισώσεις:

$$2\cdot x=5, \quad \frac{x}{3}=4, \quad \frac{x}{2}=0, \quad \frac{2x+1}{3}=3$$

188. Ποιὲς ἀπὸ τὶς ἑπόμενες ἰσότητες εἶναι ἀληθεῖς;

$$\frac{0}{4}=0, \quad \frac{0}{4}=4, \quad \frac{5}{5}=0, \quad \frac{5}{1}=5, \quad \frac{6}{0}=6$$

67. ΟΜΩΝΥΜΑ, ΕΤΕΡΩΝΥΜΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

67. 1. Ὁρισμοὶ

Τὰ κλάσματα $\dfrac{3}{8}, \dfrac{5}{8}, \dfrac{7}{8}$, ἔχουν ἕνα κοινὸ γνώρισμα: Ἔχουν ἴσους παρονομαστές. Γιὰ τοῦτο λέγονται ὁ μ ώ ν υ μ α.

Τὰ κλάσματα $\dfrac{3}{8}$ καὶ $\dfrac{4}{7}$ ἔχουν διαφορετικοὺς παρονομαστές. Γιὰ τοῦτο λέγονται ἑ τ ε ρ ώ ν υ μ α.

67. 2. Τροπὴ ἑτερονύμων κλασμάτων σὲ ὁμώνυμα.

Συχνὰ στοὺς ὑπολογισμοὺς εἶναι ἀνάγκη νὰ ἔχουμε ὁμώνυμα κλάσματα ἀντὶ γιὰ ἑτερώνυμα. Πῶς ὅμως θὰ τρέψουμε ἑτερώνυμα κλάσματα σὲ ἴσα τους ὁμώνυμα;

῞Ας λάβουμε δύο κλάσματα, π.χ. τὰ κλάσματα $\frac{9}{10}$, $\frac{7}{8}$, καὶ ἂς προσπαθήσουμε νὰ τὰ τρέψουμε σὲ ἄλλα, ἴσα τους ἀντιστοίχως ἀλλὰ ὁμώνυμα.

Γι' αὐτὸ τὸ σκοπό, βρίσκουμε τὰ κλάσματα ποὺ εἶναι ἴσα μὲ τὸ $\frac{9}{10}$ καὶ ἀκόμη ἐκεῖνα ποὺ εἶναι ἴσα μὲ τὸ $\frac{7}{8}$.

Εἶναι: $$\frac{9}{10}=\frac{18}{20}=\frac{27}{30}=\frac{36}{40}=\frac{45}{50}\ldots$$

καὶ $$\frac{7}{8}=\frac{14}{16}=\frac{21}{24}=\frac{28}{32}=\frac{35}{40}=\frac{42}{48}\ldots$$

᾿Ανάμεσα σ' αὐτὰ ἂς προσέξουμε τὰ ὁμώνυμα κλάσματα $\frac{36}{40}$ καὶ $\frac{35}{40}$, τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα μὲ τὰ κλάσματα $\frac{9}{10}$ καὶ $\frac{7}{8}$ ἀντιστοίχως.

$$\frac{9}{10}=\frac{36}{40},\qquad \frac{7}{8}=\frac{35}{40}$$

Παρατηροῦμε τὰ ἑξῆς:

i) Ὁ κοινὸς παρονομαστὴς 40 εἶναι τὸ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν τῶν κλασμάτων $\frac{9}{10}$ καὶ $\frac{7}{8}$.

ii) Κάθε πολλαπλάσιο τοῦ 40, δηλαδὴ κάθε κοινὸ πολλαπλάσιο τῶν παρονομαστῶν 8 καὶ 10, μπορεῖ νὰ χρησιμοποιηθεῖ ὡς κοινὸς παρονομαστὴς ὁμωνύμων κλασμάτων ἴσων ἀντιστοίχως πρὸς τὰ κλάσματα $\frac{9}{10}$ καὶ $\frac{7}{8}$.

$$\frac{9}{10}=\frac{72}{80}=\frac{108}{120}=\ldots$$

$$\frac{7}{8}=\frac{70}{80}=\frac{102}{120}=\ldots$$

Εἶναι ὅμως προτιμότερο νὰ χρησιμοποιοῦμε τὸ Ε.Κ.Π. γιὰ νὰ ἔχουμε κλάσματα μὲ τοὺς μικρότερους δυνατοὺς ὅρους.

Ἡ πρώτη παρατήρηση μᾶς ὁδηγεῖ στὸ γνωστὸ τρόπο τροπῆς ἑτερωνύμων κλασμάτων σὲ ὁμώνυμα ἴσα πρὸς αὐτά.

67. 3. Παραδείγματα

1) Γιὰ τὰ κλάσματα $\frac{2}{15}$ καὶ $\frac{7}{9}$ ἔχουμε:

α) Ε.Κ.Π. $(15, 9)=45$ β) $45:15=3$, $45:9=5$

$\gamma)\ \frac{2}{15}=\frac{2\cdot 3}{15\cdot 3}=\frac{6}{45}$, καὶ $\frac{7}{9}=\frac{7\cdot 5}{9\cdot 5}=\frac{35}{45}$

2) Γιὰ τὰ κλάσματα $\frac{4}{15}, \frac{5}{12}, \frac{2}{3}$ ἔχουμε:

α) Ε.Κ.Π. $(15, 12, 3)=60$ β) $60:15=4$, $60:12=5$, $60:3=20$

$\gamma)\ \frac{4}{15}=\frac{4\cdot 4}{15\cdot 4}=\frac{16}{60}$, $\frac{5}{12}=\frac{5\cdot 5}{12\cdot 5}=\frac{25}{60}$, $\frac{2}{3}=\frac{2\cdot 20}{3\cdot 20}=\frac{40}{60}$.

3) Γιὰ τὰ κλάσματα $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}$, ποὺ οἱ παρονομαστές τους εἶναι ἀνὰ δύο πρῶτοι μεταξύ τους, ἔχουμε:

α) Ε.Κ.Π. $(2, 3, 5)=2\cdot 3\cdot 5=30$, β) $(2\cdot 3\cdot 5):2=3\cdot 5$, $(2\cdot 3\cdot 5):3=2\cdot 5$, $(2\cdot 3\cdot 5):5=2\cdot 3$

$\gamma)\ \frac{1}{2}=\frac{1\cdot 5\cdot 3}{2\cdot 5\cdot 3}=\frac{15}{30}$, $\frac{2}{3}=\frac{2\cdot 2\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 5}=\frac{20}{30}$, $\frac{3}{5}=\frac{3\cdot 2\cdot 3}{5\cdot 2\cdot 3}=\frac{18}{30}$

67. 4. Μιὰ ἄλλη ἰδιότητα τῶν ἴσων κλασμάτων.

i) Ἂς λάβουμε δύο ἴσα κλάσματα, π.χ. τὰ κλάσματα $\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{6}{9}$, καὶ ἂς σχηματίσουμε τὸ γινόμενο τοῦ ἀριθμητῆ τοῦ ἑνὸς ἐπὶ τὸν παρονομαστὴ τοῦ ἄλλου. Δηλαδὴ τὰ γινόμενα $2\cdot 9$ καὶ $6\cdot 3$. Παρατηροῦμε ὅτι τὰ γινόμενα αὐτὰ εἶναι ἴσα.

$$2\cdot 9=6\cdot 3 \quad (=18).$$

Ὅμοια, γιὰ τὰ ἴσα κλάσματα $\frac{3}{7}, \frac{12}{28}$ ἔχουμε

$$3\cdot 28=7\cdot 12$$

Γενικά: **ἂν δύο κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$ εἶναι ἴσα μεταξύ τους, τότε θὰ εἶναι καὶ $\alpha\cdot\delta=\beta\cdot\gamma$.**

ἢ συμβολικά: $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Rightarrow \alpha\cdot\delta=\beta\cdot\gamma$, ὅπου $\begin{matrix}\alpha, \gamma \in N_0\\ \beta, \delta \in N\end{matrix}$ (1)

ii) Εἶναι εὔκολο νὰ ἐπαληθεύσουμε ὅτι ἡ συνεπαγωγὴ αὐτὴ ἰσχύει καὶ ἀντιστρόφως.

Π.χ. ἀπὸ τὴν ἰσότητα $3\cdot 4=6\cdot 2$ προκύπτει ὅτι $\frac{3}{6}=\frac{2}{4}$

Ὅμοια, ἀπὸ τὴν ἰσότητα $7\cdot 8=4\cdot 14$ » » $\frac{7}{4}=\frac{14}{8}$

Γενικά: $\alpha\cdot\delta=\beta\cdot\gamma \Rightarrow \dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\gamma}{\delta} \quad \begin{matrix}\alpha,\gamma\in N_0\\ \beta,\delta\in N\end{matrix}$ (2)

Ἀπὸ τὶς (1) καὶ (2) ἔχουμε ὅτι

$$\boxed{\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\cdot\delta=\beta\cdot\gamma \qquad \beta,\delta\in N,\quad \alpha,\gamma\in N_0}$$

Αὐτὴ ἡ σχέση μᾶς δίνει ἕναν ἄλλο τρόπο γιὰ νὰ ἐξακριβώσουμε ἂν δύο κλάσματα εἶναι ἴσα.

Παραδείγματα

Τὰ κλάσματα $\dfrac{3}{10}, \dfrac{21}{70}$ εἶναι ἴσα, ἐπειδὴ $3.70=10\cdot 21 \quad (=210)$

Ἀντίθετα, τὰ κλάσματα $\dfrac{7}{9}$ καὶ $\dfrac{20}{27}$ δὲν εἶναι ἴσα, ἐπειδὴ $7\cdot 27\neq 9\cdot 20$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

189. Νὰ τρέψετε σὲ ὁμώνυμα τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα

$$\frac{3}{10},\quad \frac{2}{2^3\cdot 5},\quad \frac{1}{4}$$

190. Ἐπίσης, τὰ κλάσματα $\dfrac{14}{35}$ καὶ $\dfrac{18}{27}$.

191. Ποιὰ ἀπὸ τὰ ἑπόμενα ζεύγη κλασμάτων ἀποτελοῦνται ἀπὸ ἴσα κλάσματα;

$$\alpha)\ \frac{7}{75},\ \frac{35}{375} \qquad \beta)\ \frac{3}{29},\ \frac{7}{90} \qquad \gamma)\ \frac{2}{11},\ \frac{14}{77}$$

Ἐργασθεῖτε χωρὶς νὰ τρέψετε τὰ κλάσματα σὲ ὁμώνυμα.

192. Ἀπὸ τὴν ἰσότητα $\alpha\cdot 4=2.18$ ποιὲς ἰσότητες κλασμάτων συνάγετε; $\alpha\in N_0$

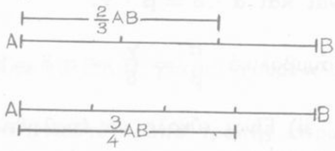
68. Η ΣΧΕΣΗ ΤΗΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑΣ

68.1. Ὁρισμὸς

Ἄς λάβουμε ἕνα εὐθ. τμῆμα ΑΒ καὶ ἄς σχηματίσουμε:

α) τὰ $\dfrac{2}{3}$ τοῦ ΑΒ καὶ β) τὰ $\dfrac{3}{4}$ τοῦ ΑΒ (σχ. 25). Παρατηροῦμε ὅτι

$$\frac{3}{4}\cdot AB > \frac{2}{3}\cdot AB$$



Σχ. 25

Γιὰ τοῦτο λέμε ὅτι τὸ $\dfrac{3}{4}$ εἶναι μ ε γ α λ ύ τ ε ρ ο ἀπὸ τὸ $\dfrac{2}{3}$ ἤ ὅτι τὸ $\dfrac{2}{3}$ εἶναι μ ι κ ρ ό τ ε ρ ο ἀπὸ τὸ $\dfrac{3}{4}$.

Γράφουμε ἀντιστοίχως

$$\frac{3}{4} > \frac{2}{3} \qquad \frac{2}{3} < \frac{3}{4}$$

Γενικά: **Ἂν $\frac{\alpha}{\beta} \cdot AB > \frac{\gamma}{\delta} \cdot AB$, ὅπου α, $\gamma \in N_0$ καὶ β, $\delta \in N$, τότε λέμε ὅτι $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ $\frac{\gamma}{\delta}$.**

Γράφουμε $$\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\gamma}{\delta}.$$

68. 2. Ὁμώνυμα κλάσματα.

Εἶναι φανερὸ ὅτι

$\frac{3}{4} \cdot AB > \frac{2}{4}$ AB, (σχ. 26).

Ἄρα $\frac{3}{4} > \frac{2}{4}$.

Σχ. 26

Γενικά: **Ἀπὸ δύο ὁμώνυμα κλάσματα, μεγαλύτερο εἶναι ἐκεῖνο ποὺ ἔχει τὸν μεγαλύτερο ἀριθμητή.**

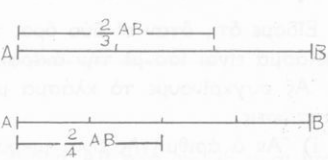
$$\boxed{\text{Ἂν } \alpha > \beta, \text{ τότε } \frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma} \qquad \left.\begin{matrix} \alpha, \beta \in N_0 \\ \gamma \in N \end{matrix}\right\}}$$

68. 3. Κλάσματα μὲ ἴσους ἀριθμητές.

Εἶναι φανερὸ ὅτι

$\frac{2}{3}$ AB $> \frac{2}{4}$ AB, (σχ. 27).

Ἄρα $\frac{2}{3} > \frac{2}{4}$



Σχ. 27

Γενικά : **Ἀπὸ δύο κλάσματα μὲ ἴσους ἀριθμητές, μεγαλύτερο εἶναι αὐτὸ ποὺ ἔχει τὸν μικρότερο παρονομαστή.**

$$\boxed{\text{Ἂν } \beta < \gamma, \text{ τότε } \frac{\alpha}{\beta} > \frac{\alpha}{\gamma} \qquad \left.\begin{matrix} \alpha \in N_0 \\ \beta, \gamma \in N \end{matrix}\right\}}$$

68. 4. Ὁποιαδήποτε κλάσματα.

α) Ἂς προσπαθήσουμε νὰ βροῦμε ποιὸ ἀπὸ τὰ κλάσματα $\frac{3}{5}$ καὶ $\frac{2}{3}$ εἶναι τὸ μεγαλύτερο.

Τὰ κλάσματα αὐτὰ οὔτε ὁμώνυμα εἶναι οὔτε ἴσους ἀριθμητὲς ἔχουν. Ἂς τὰ τρέψουμε σὲ ὁμώνυμα. Ἔχουμε

$$\frac{3}{5}=\frac{3\cdot 3}{5\cdot 3}, \qquad \frac{2}{3}=\frac{2\cdot 5}{3\cdot 5}$$

Παρατηροῦμε ὅτι στοὺς ἀριθμητὲς τῶν ὁμωνύμων κλασμάτων $\frac{3\cdot 3}{5\cdot 3}$ καὶ $\frac{2\cdot 5}{3\cdot 5}$ εἶναι $3\cdot 3 < 2\cdot 5$· τοῦτο σημαίνει ὅτι

$$\frac{3\cdot 3}{5\cdot 3} < \frac{2\cdot 5}{3\cdot 5} \qquad \text{ἢ} \qquad \frac{3}{5} < \frac{2}{3}$$

Γενικά, ἂν σὲ δύο κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$ εἶναι $\alpha\cdot\delta < \beta\cdot\gamma$, τότε θὰ εἶναι καὶ $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\gamma}{\delta}$.

Αὐτὴ ἡ ἰδιότητα ἰσχύει καὶ ἀντιστρόφως. Δηλαδή:

$$\left.\begin{array}{llll} \text{Ἂν } \frac{\alpha}{\beta} > \frac{\gamma}{\delta}, & \text{τότε καὶ} & \alpha\cdot\delta > \beta\cdot\gamma & \alpha,\gamma \in N_0 \\ \text{»} \ \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\gamma}{\delta}, & \text{» \quad »} & \alpha\cdot\delta < \beta\cdot\gamma & \beta,\delta \in N \end{array}\right\}$$

68. 5. Ἐφαρμογές.

1) Σύγκριση κλάσματος μὲ τὴ μονάδα.

Εἴδαμε ὅτι, ὅταν οἱ δύο ὅροι τοῦ κλάσματος εἶναι ἴσοι μεταξύ τους, τότε τὸ κλάσμα εἶναι ἴσο μὲ τὴν ἀκέραιη μονάδα.

Ἂς συγκρίνουμε τὸ κλάσμα μὲ τὴν ἀκέραιη μονάδα στὶς δυὸ ὑπόλοιπες περιπτώσεις:

i) Ἂν ὁ ἀριθμητὴς εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὸν παρονομαστή.

ii) Ἂν ὁ ἀριθμητὴς εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν παρονομαστή.

Παρατηροῦμε ὅτι: $\frac{3}{5} < \frac{5}{5}$ ἢ $\frac{3}{5} < 1$

$$\frac{6}{5} > \frac{5}{5} \quad \text{ἢ} \quad \frac{6}{5} > 1$$

Γενικά: i) Ἂν ὁ ἀριθμητὴς εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὸν παρονομαστή, τὸ κλάσμα εἶναι μικρότερο ἀπὸ τὴ μονάδα. Ἀντιστρόφως, ἂν τὸ κλάσμα εἶναι μικρότερο ἀπὸ τὴ μονάδα, τότε ὁ ἀριθμητὴς θὰ εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὸν παρονομαστή.

$$\boxed{\alpha < \beta \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} < 1}$$

ii) Ἂν ὁ ἀριθμητὴς εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν παρονομαστή, τὸ κλάσμα εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ τὴ μονάδα· καὶ ἀντιστρόφως.

$$\boxed{\alpha > \beta \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} > 1}$$

Στὴ δεύτερη περίπτωση τὸ κλάσμα λέγεται καταχρηστικό.

2. Νὰ συγκριθοῦν τὰ κλάσματα $\frac{327}{421}$, $\frac{79}{85}$

Ἔχουμε $327 \cdot 85 = 27795$ $\quad 421 \cdot 79 = 33259$

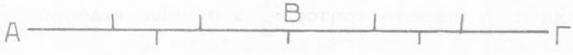
Εἶναι $27795 < 33259$ ἄρα $\frac{327}{421} < \frac{79}{85}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

193. Νὰ διατάξετε σὲ σειρὰ αὐξανομένου μεγέθους τὰ κλάσματα $\frac{8}{9}$, $\frac{27}{35}$, $\frac{15}{19}$, χωρὶς νὰ τὰ τρέψετε σὲ ὁμώνυμα.

194. Νὰ βρεῖτε τὸ σύνολο τῶν ἀναγώγων κλασμάτων, ποὺ εἶναι μικρότερα ἀπὸ τὴ μονάδα καὶ ἔχουν παρονομαστὴ μικρότερο ἀπὸ τὸ 5, καὶ νὰ τὰ διατάξετε σὲ σειρὰ αὐξανομένου μεγέθους.

69. ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΡΗΤΩΝ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ



Σχ. 28

69. 1. Μποροῦμε νὰ ποῦμε ὅτι τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ στὸ σχ. 28 εἶναι ἴσο μὲ

τὸ $\frac{1}{2}$ ἢ τὰ $\frac{2}{4}$ ἢ τὰ $\frac{3}{6}$ τοῦ ΑΓ.

$$AB = \frac{1}{2} \cdot A\Gamma \text{ ἢ } AB = \frac{2}{4} \cdot A\Gamma \text{ ἢ } AB = \frac{3}{6} \cdot A\Gamma \ldots$$

Ἡ παρατήρηση αὐτὴ μᾶς ἐπιτρέπει νὰ ποῦμε ὅτι τὰ κλάσματα

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{2}{4}, \quad \frac{3}{6}, \quad \frac{4}{8}, \quad \frac{5}{10}, \ldots$$

δὲν εἶναι διαφορετικοὶ ἀριθμοί, ἀλλὰ μόνο διαφορετικὲς παραστάσεις, συμβολισμοί, «ἀντιπρόσωποι» ἑ ν ὸ ς κ α ὶ τ ο ῦ α ὐ τ ο ῦ ἀ ρ ι θ μ ο ῦ*.

Μ' ἄλλα λόγια: Ἡ κλάση ἰσοδυναμίας $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8} \ldots\right\}$ ὁρίζει ἕναν, καὶ μόνον ἕναν, ἀριθμό, τὸν ὁποῖο καὶ ὀνομάζουμε ρ η τ ὸ ἀ ρ ι θ μ ὸ τ ῆ ς ἀ ρ ι θ μ η τ ι κ ῆ ς ἢ ἁ π λ ῶ ς ρ η τ ό.

Ὅμοια, καθεμιὰ ἀπὸ τὶς κλάσεις ἰσοδυναμίας $\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{4}{12} \ldots\right\}$, $\left\{\frac{1}{4}, \frac{2}{8}, \frac{3}{12} \ldots\right\}$, $\left\{\frac{1}{5}, \frac{2}{10}, \frac{3}{15} \ldots\right\}$, ὁρίζει ἕναν ρητὸν ἀριθμό.

Στοὺς ὑπολογισμούς, ἕνας ρητὸς ἀριθμὸς «ἀντιπροσωπεύεται» μὲ ἕνα ὁποιοδήποτε ἀπὸ τὰ κλάσματα τῆς κλάσεως ἰσοδυναμίας ποὺ τὸν ὁρίζει, συνήθως ὅμως μὲ τὸ ἀνάγωγο κλάσμα. Π.χ. τὸν ρητό, ποὺ ὁρίζει ἡ κλάση ἰσοδυναμίας

$$\left\{\frac{3}{7}, \frac{6}{14}, \frac{9}{21} \ldots\right\},$$

μπορεῖ νὰ τὸν ἀντιπροσωπεύσει ἕνα ἀπὸ τὰ κλάσματα $\frac{3}{7}$, $\frac{6}{14}$, $\frac{9}{21}$ ..., συνήθως ὅμως ἀντιπροσωπεύεται μὲ τὸ ἀνάγωγο κλάσμα $\frac{3}{7}$.

Ἐξ ἄλλου εἶναι φανερὸ ὅτι κάθε ἀκέραιος ἢ κλάσμα μπορεῖ νὰ ἀντιπροσωπεύσει ἕναν, καὶ μόνον ἕναν, ρητό.

Π.χ. ὁ ἀκέραιος 2 μπορεῖ νὰ ἀντιπροσωπεύσει τὸν ρητὸ ποὺ ὁρίζει ἡ κλάση ἰσοδυναμίας $\left\{\frac{2}{1}, \frac{4}{2}, \frac{6}{3} \ldots\right\}$

καὶ κανέναν ἄλλον. (Γιατί;)

Στὰ ἑπόμενα, ἡ ἔκφραση «ρητὸς $\frac{1}{2}$» σημαίνει «κλάσμα $\frac{1}{2}$ καὶ ὁποιοδήποτε ἄλλο κλάσμα ἴσο πρὸς αὐτό». Μ' αὐτὴ τὴ σημασία τὸ κλάσμα $\frac{1}{2}$ θὰ χρησιμοποιεῖται ὡς ἀντιπρόσωπος τοῦ ρητοῦ

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6} \ldots\right\}$$

* Ὑπενθυμίζουμε ὅτι ὁ ἀριθμὸς εἶναι μιὰ ἔννοια. Τὴ συμβολίζουμε, τὴν παριστάνουμε μὲ ἕναν ἢ περισσότερους τρόπους. Π.χ. οἱ γραφὲς 3, $2+1$, $5-2$, $\frac{6}{2}$ εἶναι διαφορετικοὶ συμβολισμοὶ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς ἔννοιας: τῆς ἔννοιας τοῦ ἀριθμοῦ τρία.

Σύμφωνα μ' αὐτά, ἡ γραφὴ $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ δηλώνει ὅτι τὰ κλάσματα εἶναι ἴσα.

Δηλώνει ἐπίσης ὅτι $\frac{1}{2}$ καὶ $\frac{2}{4}$ εἶναι διαφορετικὲς γραφὲς ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ρητοῦ.

Τὸ σύνολο τῶν ρητῶν τῆς ἀριθμητικῆς παριστάνεται συνήθως μὲ τὸ σύμβολο Q_0^+. Γεννᾶται τὸ ἐρώτημα: Ποιὰ σχέση ἔχουν μεταξύ τους τὰ δύο σύνολα N_0 καὶ Q_0^+;

Εἶναι γνωστὸ ὅτι κάθε ἀκέραιος εἶναι ρητός.

Π.χ. $3 = \frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{9}{3} \ldots, \qquad 0 = \frac{0}{1} = \frac{0}{2} = \frac{0}{3} \ldots$

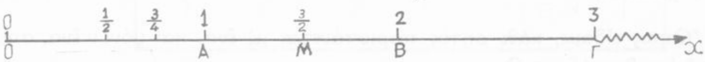
Ἐξ ἄλλου ὑπάρχουν ρητοὶ ποὺ δὲν εἶναι ἀκέραιοι. Π.χ. $\frac{2}{3} \notin N_0$.

Ἀπὸ αὐτὰ ἐννοοῦμε ὅτι τὸ σύνολο N_0 εἶναι γνήσιο ὑποσύνολο τοῦ συνόλου Q_0^+.

$$N_0 \subset Q_0^+$$

69. 2. Ἡμιευθεία διατάξεως τοῦ συνόλου Q_0^+

Γνωρίζουμε νὰ παριστάνουμε ἀκεραίους μὲ σημεῖα μιᾶς ἡμιευθείας. Ἂς δοῦμε πῶς μποροῦμε νὰ παραστήσουμε ρητοὺς μὲ σημεῖα ἡμιευθείας.



Σχ. 29

Πάνω στὴν ἡμιευθεία Οχ σημειώνουμε ἴσα τμήματα $OA = AB = B\Gamma \ldots$ (σχ. 29). Ἔπειτα τὸν ρητὸ $0 = \frac{0}{1}$ τὸν παριστάνουμε μὲ τὴν ἀρχὴ Ο τῆς ἡμιευθείας.

Τὸν ρητὸ $1 = \frac{1}{1}$ τὸν παριστάνουμε μὲ τὸ σημεῖο Α. Τότε, ἐπειδὴ $2 \cdot OA = OB$, $3 \cdot OA = O\Gamma \ldots$, τοὺς ρητοὺς $2 = \frac{2}{1}$, $3 = \frac{3}{1}$ τοὺς παριστάνουμε μὲ τὰ σημεῖα Β, Γ, ... ἀντιστοίχως.

Τὸν ρητὸ $\frac{1}{2}$ τὸν παριστάνουμε μὲ τὸ μέσο τοῦ τμήματος ΟΑ. Ὅμοια, τὸν ρητὸ $\frac{3}{2}$ τὸν παριστάνουμε μὲ τὸ μέσο Μ τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ ($OM = \frac{3}{2} \cdot OA$).

Γιὰ νὰ παραστήσουμε τὸν ρητὸ $\frac{3}{4}$, χωρίζουμε τὸ τμῆμα ΟΑ σὲ 4 ἴσα μέρη. Τὸ τρίτο κατὰ σειρὰ πρὸς τὰ δεξιὰ σημεῖο τῆς διαιρέσεως τοῦ ΟΑ παριστάνει αὐτὸν τὸν ρητό.

Εἶναι φανερὸ ὅτι μ' αὐτὸν τὸν τρόπο μποροῦμε νὰ παραστήσουμε κάθε ρητὸ μὲ ἕνα, καὶ μόνον ἕνα, σημεῖο τῆς ἡμιευθείας Οχ.

Γιὰ τὴν παράσταση αὐτὴ τῶν ρητῶν παρατηροῦμε τὰ ἑξῆς:

α) Ὁ ρητὸς $\frac{3}{2}$ εἶναι ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ τμήματος ΟΜ, (σχ. 29), μὲ μονάδα μετρήσεως τὸ τμῆμα ΟΑ.

Γενικά, κάθε ρητὸς α παριστάνεται μὲ ἕνα σημεῖο Μα τῆς Οχ, τέτοιο ὥστε ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ τμήματος ΟΜα νὰ εἶναι α. (Μονάδα εἶναι πάντοτε τὸ τμῆμα ΟΑ).

β) Δύο ἄνισοι ρητοὶ α, β παριστάνονται μὲ δύο διαφορετικὰ σημεῖα Μα, Μβ, τέτοια ὥστε, ἂν α εἶναι μ ε γ α λ ύ τ ε ρ ο ς ἀ π ὸ β, τότε τὸ Μα κεῖται «δ ε ξ ι ὰ» τοῦ Μβ.

Δηλαδὴ τὸ σύνολο τῶν ρητῶν Q_0^+ εἶναι διατεταγμένο πάνω στὴν ἡμιευθεία Οχ. Γι' αὐτό, ἡ ἡμιευθεία Οχ λέγεται καὶ ἡ μ ι ε υ θ ε ί α δ ι α τ ά ξ ε ω ς τοῦ συνόλου τῶν ρητῶν.

Σημείωση

Ὅπως εἴδαμε, κάθε ρητὸς παριστάνεται μὲ ἕνα, καὶ μόνον ἕνα, σημεῖο τῆς ἡμιευθείας διατάξεως Οχ.

Γεννᾶται τὸ ἐρώτημα: Κάθε σημεῖο τῆς ἡμιευθείας Οχ παριστάνει ἕναν ρητὸ ἀριθμό;

Ἡ ἀπάντηση σ' αὐτὸ τὸ ἐρώτημα εἶναι ἀρνητική. Σὲ ἄλλη τάξη θὰ μάθουμε ὅτι ὑπάρχουν σημεῖα τῆς Οχ ποὺ δὲν παριστάνουν κανέναν ρητό. Αὐτὰ τὰ σημεῖα θὰ «συμπληρωθοῦν» μὲ «νέους» ἀριθμούς, τοὺς ἀ σ υ μ μ έ τ ρ ο υ ς.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

195. Νὰ γραφεῖ μὲ ἀναγραφὴ τῶν στοιχείων του τὸ σύνολο $\left\{ x \mid x = \frac{3}{5} \right\}$.

196. Πῶς φαίνεται πάνω στὴν ἡμιευθεία διατάξεως ὅτι κλάσματα $\frac{3}{4}, \frac{6}{8}, \frac{9}{12} \cdots$ ἀντιπροσωπεύουν τὸν ἴδιο ρητό;

197. Πάνω στὴν ἡμιευθεία διατάξεως νὰ τοποθετήσετε τοὺς ρητοὺς

$$\frac{2}{3}, \quad \frac{3}{4}, \quad 1\frac{1}{4}.$$

ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΡΗΤΩΝ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

70. ΠΡΟΣΘΕΣΗ

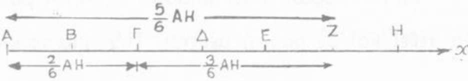
70. 1. Ὅταν οἱ ρητοὶ ἀντιπροσωπεύονται ἀπὸ ὁμώνυμα κλάσματα.

1) Στὸ σχ. 30, ὅπου λάβαμε

$AB = B\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta E = EZ = ZH$

εἶναι $A\Gamma = \frac{2}{6}AH$, $\Gamma Z = \frac{3}{6}AH$,

καὶ $A\Gamma + \Gamma Z = AZ$



Σχ. 30

Ἄρα $AZ = \frac{2}{6} \cdot AH + \frac{3}{6} \cdot AH = \frac{5}{6} \cdot AH$

Ἡ πιὸ πάνω ἰσότητα ἀνάμεσα σ' αὐτὰ τὰ τμήματα μᾶς ὁδηγεῖ νὰ λάβουμε τὸν ρητὸ $\frac{5}{6}$ ὡς ἄθροισμα τῶν ρητῶν $\frac{2}{6}$ καὶ $\frac{3}{6}$

Τὸ γράφουμε: $\frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$ ἢ $\frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{2+3}{6}$

Γενικά: **Ὀνομάζουμε ἄθροισμα δύο ρητῶν $\frac{\alpha}{\gamma}$ καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$ τὸν ρητὸ $\frac{\alpha+\beta}{\gamma}$**

Γράφουμε :

$$\boxed{\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha+\beta}{\gamma} \qquad \left.\begin{array}{l}\alpha,\beta \in N_0\\ \gamma \in N\end{array}\right\}}$$

70. 2. Ὅταν οἱ ρητοὶ ἀντιπροσωπεύονται ἀπὸ ἑτερώνυμα κλάσματα.

Σ' αὐτὴ τὴν περίπτωση τρέπουμε τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα σὲ ὁμώνυμα (διαλέγουμε ὡς ἀντιπροσώπους τῶν ρητῶν ὁμώνυμα κλάσματα) καὶ ἐργαζόμαστε ὅπως προηγουμένως.

Παράδειγμα: $\frac{3}{5} + \frac{2}{7} = \frac{3\cdot 7}{5\cdot 7} + \frac{2\cdot 5}{7\cdot 5} = \frac{(3.7)+(2.5)}{5\cdot 7} = \frac{31}{35}$

Γενικά:

$$\boxed{\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\cdot\delta}{\beta\cdot\delta} + \frac{\gamma\cdot\beta}{\delta\cdot\beta} = \frac{(\alpha\cdot\delta)+(\gamma\cdot\beta)}{\beta\cdot\delta} \qquad \left.\begin{array}{l}\alpha,\gamma \in N_0\\ \beta,\delta \in N\end{array}\right\}}$$

70. 3. Μεικτοὶ

Γνωρίζουμε ὅτι τὸ ἄθροισμα $2 + \frac{3}{4}$ γράφεται σύντομα $2\frac{3}{4}$ καὶ μὲ τὴ μορφὴ αὐτὴ λέγεται μ ε ι κ τ ὸ ς ἀ ρ ι θ μ ό ς.

Δηλαδὴ $$2\frac{3}{4}=2+\frac{3}{4}=\frac{2}{1}+\frac{3}{4}$$

ἢ $$2\frac{3}{4}=\frac{2\cdot4+3}{4}=\frac{11}{4}$$

Ἀντιστρόφως, κάθε κλάσμα μεγαλύτερο ἀπὸ τὴν ἀκέραιη μονάδα, μπορεῖ νὰ τεθεῖ καὶ σὲ μορφὴ μεικτοῦ. Π.χ. γιὰ τὸ κλάσμα $\frac{22}{5}$ ἔχουμε:

$$22=4\cdot5+2$$

$$\frac{22}{5}=\frac{4\cdot5+2}{5}=\frac{4\cdot5}{5}+\frac{2}{5}$$

ἢ $$\frac{22}{5}=4+\frac{2}{5}=4\frac{2}{5}$$

Ὅμοια, γιὰ τὸ κλάσμα $\frac{9}{5}$ ἔχουμε $9=1\cdot5+4$

$$\frac{9}{5}=\frac{1\cdot5}{5}+\frac{4}{5}$$

$$=1+\frac{4}{5}=1\frac{4}{5}$$

Ὥστε: **Κάθε μεικτὸς μπορεῖ νὰ τεθεῖ σὲ μορφὴ κλάσματος. Ἀντιστρόφως, κάθε κλάσμα μεγαλύτερο ἀπὸ τὴν ἀκέραιη μονάδα μπορεῖ νὰ τεθεῖ σὲ μορφὴ μεικτοῦ.**

70.4. Διατήρηση τῶν ἰδιοτήτων τῆς προσθέσεως στὸ σύνολο Q_0^+.

Παρατηροῦμε ὅτι ἡ πρόσθεση δύο ρητῶν ἀνάγεται στὴν πρόσθεση τῶν ἀριθμητῶν δύο ὁμωνύμων κλασμάτων· δηλαδὴ στὴν πρόσθεση ἀκεραίων. Τοῦτο σημαίνει ὅτι οἱ γνωστὲς ἰδιότητες τῆς προσθέσεως τῶν ἀκεραίων ἰσχύουν καὶ στὴν πρόσθεση τῶν ρητῶν.

Ἐφαρμογὲς

$$2\frac{3}{7}+\frac{2}{7}=2+\left(\frac{3}{7}+\frac{2}{7}\right)=2\frac{5}{7}$$

$$2+\frac{3}{7}+5=(2+5)+\frac{3}{7}=7\frac{3}{7}$$

$$2\frac{1}{4}+3\frac{5}{8}+5=(2+3+5)+\left(\frac{1}{4}+\frac{5}{8}\right)=10\frac{7}{8}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

198. Νὰ ὑπολογιστοῦν μὲ τὸν πιὸ ἁπλὸ τρόπο τὰ ἀθροίσματα:

$$\alpha = \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{7}\right) + \left(\frac{1}{7} + \frac{3}{5}\right), \quad \beta = \left(2\frac{1}{3} + \frac{4}{9}\right) + \left(\frac{3}{8} + 4\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{5}{9} + \frac{1}{4}\right)$$

199. Νὰ τεθεῖ σὲ μορφὴ μεικτοῦ καθένα ἀπὸ τὰ κλάσματα $\frac{17}{9}$, $\frac{35}{11}$, $\frac{23}{8}$.

200. Μιὰ γωνία εἶναι ἴση μὲ τὰ $\frac{3}{9}$ τῆς ὀρθῆς, μιὰ ἄλλη εἶναι μεγαλύτερη ἀπὸ αὐτὴν κατὰ τὰ $\frac{2}{13}$ τῆς ὀρθῆς. Νὰ βρεθεῖ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο αὐτῶν γωνιῶν.

201. Νὰ βρεθεῖ τὸ βάρος τριῶν δοχείων α, β, γ, ἂν εἶναι γνωστὸ ὅτι τὸ α ζυγίζει $10\frac{2}{5}$ kg, τὸ β $1\frac{3}{4}$ kg περισσότερο ἀπὸ τὸ α καὶ τὸ γ $2\frac{4}{5}$ kg περισσότερο ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν α καὶ β.

71. ΑΦΑΙΡΕΣΗ

71. 1. Ὁρισμὸς

Ἡ ἀφαίρεση στὸ σύνολο τῶν ρητῶν Q_0^+ ὁρίζεται ὅπως καὶ στὸ σύνολο τῶν ἀκεραίων N_0. Π.χ. λέμε ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν ρητῶν $\frac{5}{7}$ καὶ $\frac{3}{7}$ εἶναι $\frac{2}{7}$, καὶ γράφουμε $\frac{5}{7} - \frac{3}{7} = \frac{2}{7}$ ἐπειδὴ $\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{5}{7}$.

Γενικά, $\frac{\alpha}{\pi} - \frac{\beta}{\pi} = \frac{\chi}{\pi}$ σημαίνει ὅτι $\frac{\chi}{\pi} + \frac{\beta}{\pi} = \frac{\alpha}{\pi}$ $\left.\begin{matrix} \alpha, \beta, \chi \in N_0 \\ \pi \in N \end{matrix}\right\}$

Δηλαδὴ

$$\boxed{\frac{\alpha}{\pi} - \frac{\beta}{\pi} = \frac{\chi}{\pi} \Leftrightarrow \frac{\chi}{\pi} + \frac{\beta}{\pi} = \frac{\alpha}{\pi}}$$

71. 2. Εὕρεση τῆς διαφορᾶς.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὴ διαφορὰ δύο ρητῶν, π.χ. τὴ διαφορὰ $\frac{7}{13} - \frac{4}{13}$, σκεφτόμαστε ὅτι πρέπει νὰ βροῦμε ἕναν ρητὸ $\frac{\chi}{13}$ τέτοιον, ὥστε $\frac{\chi}{13} + \frac{4}{13} = \frac{7}{13}$

Δηλαδὴ

$$\frac{7}{13} - \frac{4}{13} = \frac{\chi}{13} \Leftrightarrow \frac{\chi}{13} + \frac{4}{13} = \frac{7}{13} \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\chi + 4}{13} = \frac{7}{13} \qquad (2)$$

Ἀλλὰ ἀπὸ τὴ (2) ἐννοοῦμε ὅτι $\chi + 4 = 7 \Leftrightarrow \chi = 7 - 4$

Ὥστε: $$\frac{7}{13}-\frac{4}{13}=\frac{7-4}{13}$$

Γενικά: $$\frac{\alpha}{\pi}-\frac{\beta}{\pi}=\frac{\alpha-\beta}{\pi} \qquad (3)$$

Ἀπὸ τὴν (3) εἶναι φανερὸ ὅτι

ὑπάρχει διαφορὰ $\frac{\alpha}{\pi}-\frac{\beta}{\pi}$ ὅταν, καὶ μόνον ὅταν, $\alpha \geq \beta$.

Ὥστε: $$\boxed{\frac{\alpha}{\pi}-\frac{\beta}{\pi}=\frac{\alpha-\beta}{\pi}, \quad \text{ὅπου} \quad \begin{matrix}\alpha, \beta \in N_0\\ \pi \in N\end{matrix} \quad \text{καὶ } \alpha \geq \beta}$$

Ἂν οἱ ρητοί, ποὺ ζητοῦμε τὴ διαφορά τους, παριστάνονται μὲ ἑτερώνυμα κλάσματα, τότε τρέπουμε αὐτὰ τὰ κλάσματα σὲ ὁμώνυμα καὶ ἐργαζόμαστε ὅπως προηγουμένως.

Π.χ. $$\frac{2}{3}-\frac{1}{4}=\frac{2\cdot 4}{3\cdot 4}-\frac{1\cdot 3}{4\cdot 3}=\frac{(2\cdot 4)-(1\cdot 3)}{3\cdot 4}$$

Ἢ $$\frac{2}{3}-\frac{1}{4}=\frac{8-3}{12}=\frac{5}{8}$$

71. 3. Ἰδιότητες

Ὅπως βλέπουμε, ἡ ἀφαίρεση ρητῶν «μεταφέρεται» σὲ ἀφαίρεση τῶν ἀριθμητῶν δύο ὁμώνυμων κλασμάτων, δηλαδὴ σὲ ἀφαίρεση ἀκεραίων. Ἀπὸ αὐτὴ τὴν παρατήρηση ἐννοοῦμε ὅτι ὅλες οἱ γνωστὲς ἰδιότητες τῆς ἀφαιρέσεως στὸ σύνολο N_0 ἰσχύουν καὶ στὸ σύνολο Q_0^+.

71. 4. Παραδείγματα

1. $$5\frac{1}{2}-3=\left(5+\frac{1}{2}\right)-3=(5-3)+\frac{1}{2}=2\frac{1}{2}$$

[Σύμφωνα μὲ τὸν τύπο $(\alpha+\beta)-\gamma=(\alpha-\gamma)+\beta$]

2. $$5\frac{7}{8}-\frac{3}{8}=\left(5+\frac{7}{8}\right)-\frac{3}{8}=5+\left(\frac{7}{8}-\frac{3}{8}\right)=5\frac{4}{8}.$$

[Σύμφωνα μὲ τὸν τύπο $(\alpha+\beta)-\gamma=\alpha+(\beta-\gamma)$].

3. $$9\frac{4}{7}-5\frac{3}{7}=9\frac{4}{7}-\left(5+\frac{3}{7}\right)$$
$$=\left(9\frac{4}{7}-5\right)-\frac{3}{7}$$
$$=4\frac{4}{7}-\frac{3}{7}=4\frac{1}{7}.$$

[Σύμφωνα μὲ τὸν τύπο $\alpha-(\beta+\gamma)=(\alpha-\beta)-\gamma$]

4. $9\frac{4}{7} - 5\frac{4}{7} = \left(9 + \frac{4}{7}\right) - \left(5 + \frac{4}{7}\right) = 9 - 5 = 4$

[Σύμφωνα μὲ τὸν τύπο $(\alpha \pm \mu) - (\beta \pm \mu) = \alpha - \beta$]

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

202. Νὰ ἐκτελεστοῦν μὲ δύο τρόπους οἱ πράξεις

$$\frac{25}{8} - \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{4}\right), \quad \frac{25}{8} - \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{4}\right)$$

203. Ποιὸν ρητὸ πρέπει νὰ προσθέσουμε στὸ $\frac{4}{9}$, γιὰ νὰ βροῦμε ἄθροισμα $1\frac{1}{3}$;

204. Ποιὰ μεταβολὴ παθαίνει τὸ κλάσμα $\frac{5}{7}$, ἂν προσθέσουμε τὴ μονάδα α) στὸν ἀριθμητή, β) στὸν παρονομαστή, γ) καὶ στοὺς δύο ὅρους του;

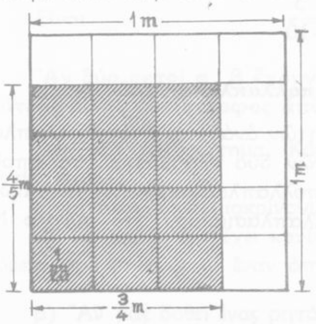
205. Τρεῖς ἀδελφοὶ α, β, γ μοίρασαν ἕνα χωράφι. Ὁ α πῆρε $4\frac{2}{5}$ στρέμματα λιγότερα ἀπὸ τὸν β καὶ $3\frac{1}{2}$ στρέμματα λιγότερα ἀπὸ τὸν γ. Νὰ βρεῖτε πόσα στρέμματα πῆρε ὁ καθένας, ἂν γνωρίζετε ὅτι ὁ γ πῆρε $7\frac{1}{2}$ στρέμματα.

206. Κατὰ ποιόν ρητὸ πρέπει νὰ ἐλαττωθεῖ ὁ $2\frac{3}{7}$, γιὰ νὰ γίνει ἴσος μὲ $1\frac{8}{9}$;

72. ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

72. 1. Ὁρισμὸς

Εἶναι γνωστὸ ὅτι τὸ ἐμβαδὸ ἑνὸς ὀρθογωνίου δίνεται ἀπὸ τὸν τύπο $E = \alpha . \beta$, ὅπου α, β εἶναι οἱ διαστάσεις (σὲ ὁμοειδεῖς μονάδες) τοῦ ὀρθογωνίου, καὶ Ε τὸ ἐμβαδό του σὲ τετραγωνικὲς μονάδες αὐτῶν τῶν διαστάσεων.



Σχ. 31

Π.χ. ἂν $\alpha = 2$ cm, $\beta = 3$ cm, τότε $E = 2 \cdot 3$ cm^2.

Ἂς δοῦμε ποιὸ εἶναι τὸ ἐμβαδὸ Ε ἑνὸς ὀρθογωνίου μὲ διαστάσεις $\frac{4}{5}$ m καὶ $\frac{3}{4}$ m.

Τὸ τετράγωνο τοῦ σχ. 31 μὲ πλευρὰ 1 m (μία τετραγωνικὴ μονάδα) εἶναι χωρισμένο σὲ 5 ἴσες ταινίες ὁριζοντίως καὶ σὲ 4 ἴσες ταινίες κατακορύφως. Ἔτσι αὐτὸ τὸ τετράγωνο εἶναι χωρισμένο σὲ $5 . 4 = 20$ ἴσα ὀρθογώνια, ποὺ τὸ καθένα ἔχει ἐμβαδὸ ἴσο μὲ τὸ 1/20 τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς τετραγωνικῆς μονάδας (1 m^2). Παρατηροῦμε ὅμως ὅτι τὸ ὀρθογώνιο μὲ διαστάσεις $\frac{4}{5}$ m καὶ $\frac{3}{4}$ m (σκιερὴ ἐπιφάνεια τοῦ σχ. 31) καλύπτει ἀκριβῶς 12 ἀπὸ τὰ 20 ἴσα ὀρθογώνια τῆς τετραγωνικῆς μονάδας.

Ἄρα: $E = \frac{3}{4}\,m \cdot \frac{4}{5}\,m = \frac{12}{20}\,m^2$ κι' ἐπειδὴ $\frac{12}{20} = \frac{3 \cdot 4}{4 \cdot 5}$

εἶναι $E = \frac{3}{4}\,m \cdot \frac{4}{5}\,m = \frac{3 \cdot 4}{4 \cdot 5}\,m^2$ (1)

Μὲ ὅμοιο τρόπο, ἀπὸ τὸ ἴδιο σχέδιο, βρίσκουμε π.χ. ὅτι

$$\frac{3}{4}\,m \cdot \frac{2}{5}\,m = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 5}\,m^2 \qquad (2)$$

$$\frac{1}{4}\,m \cdot \frac{4}{5}\,m = \frac{1 \cdot 4}{4.5}\,m^2 \qquad (3)$$

Αὐτὲς οἱ ἰσότητες (1), (2), (3), μᾶς ὁδηγοῦν στὸν ἑξῆς ὁρισμὸ τοῦ γινομένου δύο ρητῶν:

Γινόμενο δύο ρητῶν $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$ εἶναι ὁ ρητὸς $\frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta \cdot \delta}$.

Τὸ γράφουμε: $\boxed{\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta \cdot \delta} \qquad \alpha, \gamma \in N_0 \quad \beta, \delta \in N}$

Παραδείγματα

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 7} = \frac{6}{35}$$

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

72. 2. Διατήρηση τῶν ἰδιοτήτων τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Ὅπως εἴδαμε, ὁ πολλαπλασιασμὸς τῶν ρητῶν ἀνάγεται στὸν πολλαπλασιασμὸ τῶν ἀριθμητῶν καὶ τῶν παρονομαστῶν δύο κλασμάτων, τὰ ὁποῖα ἀντιπροσωπεύουν τοὺς ρητούς· δηλαδὴ στὸν πολλαπλασιασμὸ τῶν ἀκεραίων. Γι' αὐτό, ὅλες οἱ γνωστὲς ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ στὸ σύνολο N_0 ἰσχύουν καὶ στὸ σύνολο Q_0^+.

72. 3. Ἐφαρμογὲς

α) Πολλαπλασιασμὸς κλάσματος ἐπὶ ἕνα διαιρέτη τοῦ παρονομαστῆ.

$$\frac{5}{6} \cdot 3 = \frac{5 \cdot 3}{6} = \frac{5 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$$

Γενικά: $$\boxed{\frac{\beta}{\alpha\cdot\gamma}\cdot\alpha=\frac{\beta\cdot\alpha}{\alpha\cdot\gamma}=\frac{\beta}{\gamma} \quad \text{ὅπου} \quad \left.\begin{matrix}\beta\in N_0\\ \alpha,\gamma\in N\end{matrix}\right\}}$$

β) Μεικτὸς ἐπὶ κλάσμα.

$$6\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\left(6+\frac{4}{5}\right)\cdot\frac{2}{3}=6\cdot\frac{2}{3}+\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\dots$$

γ) Μεικτὸς ἐπὶ μεικτό.

$$36\frac{2}{5}\cdot 2\frac{3}{4}=\left(36+\frac{2}{5}\right)\cdot\left(2+\frac{3}{4}\right)$$
$$=36\cdot 2+36\cdot\frac{3}{4}+\frac{2}{5}\cdot 2+\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}$$
$$=72+27+\frac{4}{5}+\frac{3}{10}=100\frac{1}{10}$$

(Διπλὴ ἐφαρμογὴ τῆς ἐπιμεριστικῆς ἰδιότητας)

72.4. Ἀντίστροφοι ἀριθμοί.

i) Προσέξετε τὰ γινόμενα

$$\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{3},\qquad 2\cdot\frac{1}{2},\qquad \frac{1}{7}\cdot 7$$

Καθένα ἀπὸ αὐτὰ ἰσοῦται μὲ τὴ μονάδα.

ii) Ποιοὶ ρητοὶ ἐπαληθεύουν τὶς ἐξισώσεις:

$$\frac{3}{7}\cdot\chi=1,\qquad \frac{1}{5}\cdot\psi=1$$

Εἶναι $\chi=\frac{7}{3}$ καὶ $\psi=5$

Ἂν δύο ρητοὶ α, β ἔχουν γινόμενο ἴσο μὲ 1, τότε λέμε ὅτι ὁ ἕνας ἀπ' αὐτοὺς εἶναι ἀντίστροφος ἀπὸ τὸν ἄλλο.

Γεννᾶται τὸ ἐρώτημα. Κάθε ρητὸς ἔχει ἕναν ἢ πολλοὺς ἢ καὶ κανέναν ἀντίστροφο;

Εἶναι εὔκολο νὰ διακρίνουμε ὅτι:

α) Τὸ μηδὲν δὲν ἔχει κανέναν ἀντίστροφο (Γιατί; Εἶναι δυνατὸν τὸ γινόμενο τοῦ μηδενὸς μὲ ἕναν ὁποιονδήποτε ρητὸ νὰ ἰσοῦται μὲ 1;)

β) Ἂν μᾶς δοθεῖ ἕνας ρητός, π.χ. ὁ $\frac{4}{9}$, τότε ὁ ρητὸς $\frac{9}{4}$ εἶναι ἀντίστροφός του καὶ μάλιστα ὁ μοναδικός.

$$\frac{4}{9}\cdot\frac{9}{4}=1$$

Γενικά: **Κάθε ρητὸς $\frac{\alpha}{\beta}$ διαφορετικὸς ἀπὸ τὸ μηδὲν ἔχει ἕναν καὶ μόνον ἕναν ἀντίστροφο, τὸν ρητὸ $\frac{\beta}{\alpha}$.**

$$\boxed{\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha\cdot\beta}{\beta\cdot\alpha}\doteq 1 \qquad \alpha,\beta\in N}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

207. Νὰ ἐπαληθεύσετε ὅτι $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2\cdot 3}$, $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{3\cdot 4}$ καὶ μὲ βάση αὐτὰ νὰ βρεῖτε ὅτι: $\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha+1}=\frac{1}{\alpha\cdot(\alpha+1)}$ $\quad\alpha\in N$

208. Δύο ἀδελφοὶ α, β μοίρασαν μιὰ περιουσία. Ὁ α πῆρε τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς περιουσίας καὶ τὸ $\frac{1}{4}$ ἀπὸ τὸ ὑπόλοιπο. Ποιὸ κλάσμα τῆς περιουσίας πῆρε ὁ β;

209. Νὰ ὑπολογίσετε μὲ δύο τρόπους τὰ γινόμενα:

α) $\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{4}{9}+\frac{1}{2}\right)$ β) $\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{5}{9}-\frac{1}{2}\right)$

γ) $3\frac{1}{2}\cdot 5\frac{2}{3}$ δ) $4\frac{3}{4}\cdot 3\frac{4}{5}$.

210. Νὰ συμπληρώσετε τὶς ἰσότητες $1\frac{4}{9}\cdots=1$, $\frac{3}{8}\cdots=0$, $\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{9}\cdots=\frac{5}{24}$

211. Ὑπολογίστε μὲ τὸ συντομότερο τρόπο τὰ γινόμενα:

$\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{9}{7}$, $\quad\frac{4}{5}\cdot\frac{10}{8}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{24}{22}$

73. ΔΙΑΙΡΕΣΗ

73. 1. Ὁρισμὸς

Ἡ διαίρεση στὸ σύνολο Q_0^+ ὁρίζεται ὅπως καὶ στὸ σύνολο N_0.

Π.χ. λέμε ὅτι τὸ (ἀκριβὲς) πηλίκο τοῦ ρητοῦ $\frac{8}{9}$ διὰ τοῦ ρητοῦ 4 εἶναι ὁ ρητὸς $\frac{2}{9}$ καὶ γράφουμε

$$\frac{8}{9}:4=\frac{2}{9} \quad \text{ἐπειδὴ} \quad \frac{2}{9}\cdot 4=\frac{8}{9}$$

Γενικὰ $\quad\frac{\alpha}{\beta}:\frac{\gamma}{\delta}=\chi$ σημαίνει ὅτι $\frac{\gamma}{\delta}\cdot\chi=\frac{\alpha}{\beta}$

$$\boxed{\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \chi \Leftrightarrow \frac{\gamma}{\delta}\cdot\chi = \frac{\alpha}{\beta}, \text{ ὅπου } \frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\delta}, \quad \chi \in Q_0^+ \text{ καὶ } \frac{\gamma}{\delta} \neq 0}$$

73.2. Εὕρεση τοῦ πηλίκου.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ (ἀκριβὲς) πηλίκο μιᾶς διαιρέσεως, π.χ. τῆς διαιρέσεως $4 : \frac{2}{3}$, σκεφτόμαστε ὅτι πρέπει νὰ βροῦμε ἕναν ρητὸ χ τέτοιον, ὥστε $\frac{2}{3}\cdot\chi = 4$

Δηλαδὴ $$4 : \frac{2}{3} = \chi \Leftrightarrow \frac{2}{3}\cdot\chi = 4 \qquad (1)$$

Ἂς προσπαθήσουμε νὰ ἐπιλύσουμε τὴν ἐξίσωση $\frac{2}{3}\cdot\chi = 4$

$$\frac{2}{3}\cdot\chi = 4 \Leftrightarrow \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\chi\right) = \frac{3}{2}\cdot 4 \qquad \text{(Πολ/σμὸς ἐπὶ } \tfrac{3}{2}\text{. Γιατί;)}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\right)\cdot\chi = 4\cdot\frac{3}{2} \qquad \text{(Προσεταιριστικὴ ἰδιότητα)}$$

$$\Leftrightarrow \chi = 4\cdot\frac{3}{2} \qquad \left(\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3} = 1\right)$$

Ὥστε $$4 : \frac{2}{3} = 4\cdot\frac{3}{2}$$

Μὲ ὅμοιο τρόπο βρίσκουμε ὅτι $\frac{5}{8} : \frac{4}{7} = \frac{5}{8}\cdot\frac{7}{4}$

$$\frac{5}{8} : 3 = \frac{5}{8}\cdot\frac{1}{3}$$

Γενικὰ $$\boxed{\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\delta}{\gamma} \qquad \text{ὅπου} \quad \left.\begin{matrix}\alpha \in N_0 \\ \beta, \gamma, \delta \in N\end{matrix}\right\}}$$

Τὸ (ἀκριβὲς) πηλίκο ἑνὸς ρητοῦ δι' ἑνὸς ἄλλου ρητοῦ μὴ μηδενικοῦ ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενο τοῦ διαιρετέου ἐπὶ τὸν ἀντίστροφο τοῦ διαιρέτη.

Παρατήρηση

Ὅπως γνωρίζουμε, στὸ σύνολο N_0 ἡ διαίρεση εἶναι δυνατὴ καὶ τέλεια, μόνον ὅταν ὁ διαιρετέος εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ διαιρέτη καὶ ὁ διαιρέτης εἶναι διαφορετικὸς ἀπὸ τὸ μηδέν. Στὸ σύνολο Q_0^+ ἡ διαίρεση εἶναι δυνατὴ καὶ τέλεια, ἐκτὸς μόνον ἀπὸ τὴν περίπτωση ποὺ ὁ διαιρέτης εἶναι μηδέν.

73. 3. Διατήρηση τῶν ἰδιοτήτων.

Εἶναι εὔκολο νὰ ἐννοήσουμε ὅτι ὅλες οἱ ἰδιότητες τῆς διαιρέσεως στὸ σύνολο N_0 ἰσχύουν καὶ στὸ σύνολο Q_0^+, καὶ μάλιστα μὲ λιγότερους περιορισμούς.

73. 4. Ἐφαρμογὲς

1. Διαίρεση δι' ἑνὸς διαιρέτη τοῦ ἀριθμητῆ.

$$\frac{4\cdot5}{3}:5=\frac{4\cdot5}{3}\cdot\frac{1}{5}=\frac{4\cdot5}{3\cdot5}=\frac{4}{3}$$

$$\frac{\alpha\cdot\beta}{\gamma}:\beta=\frac{\alpha\cdot\beta}{\gamma}\cdot\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha\cdot\beta}{\gamma\cdot\beta}=\frac{\alpha}{\gamma}$$

Δηλαδή: $\dfrac{\alpha\cdot\beta}{\gamma}:\beta=\dfrac{\alpha}{\gamma}\qquad \left.\begin{matrix}\alpha\in N_0\\ \beta,\gamma\in N\end{matrix}\right\}.$

2. Μεικτὸς δι' ἀκεραίου.

$$24\frac{3}{4}:4=(24:4)+\left(\frac{3}{4}:4\right)=6+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=6\frac{3}{16}$$

3. Μεικτὸς διὰ κλάσματος.

$$3\frac{1}{2}:\frac{4}{5}=3\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4}=\left(3\cdot\frac{5}{4}\right)+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4}\right)=4\frac{3}{8}$$

4. Μεικτὸς διὰ μεικτοῦ.

$$6\frac{2}{3}:2\frac{3}{6}=6\frac{2}{3}:\frac{15}{6}=6\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{15}=2\frac{2}{3}$$

(Χρησιμοποιῆστε καὶ ἄλλους τρόπους)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

212. Ἂν πολλαπλασιάσετε ἕναν ἀριθμὸ μὲ $\frac{2}{3}$, θὰ βρεῖτε 48. Ποιὸς εἶναι ὁ ἀριθμός;

213. Ὁ λόγος ἑνὸς ρητοῦ πρὸς $\frac{7}{8}$ ἰσοῦται μὲ $\frac{7}{8}$. Ποιὸς εἶναι αὐτὸς ὁ ρητός.

215. Ὑπολογίστε μὲ δύο τρόπους τὰ ἐξαγόμενα $\left(8+6\frac{4}{9}\right):2$, $\left(3\frac{6}{7}-1\frac{4}{5}\right):3$

215. Πόσο αὐξάνεται ἢ ἐλαττώνεται ὁ ρητὸς $\frac{3}{5}$, ἂν τὸν διαιρέσουμε διὰ $\frac{3}{4}$;

216. Μὲ ποιὸν ρητὸ πρέπει νὰ διαιρέσουμε τὸ $\frac{4}{9}$, γιὰ νὰ λάβουμε πηλίκο 8;

74. ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΡΗΤΩΝ

74. 1. Ὁρισμοὶ

Ὅπως, γιὰ συντομία, ἀντὶ $2\cdot2\cdot2$ γράφουμε 2^3

ὅμοια, » $\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}$ » $\left(\frac{2}{5}\right)^3$

Δηλαδή: $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 = \frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\alpha}{\beta}$

καὶ γενικά: $$\boxed{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu = \frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\cdots \text{ (ν παράγοντες)} \quad \left.\begin{matrix}\alpha \in N_0\\ \beta \in N\end{matrix}\right\}}$$

Ἀπὸ αὐτὸν τὸν ὁρισμὸ ἔχουμε

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2\cdot2\cdot2\cdot2}{3\cdot3\cdot3\cdot3} = \frac{2^4}{3^4}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3\cdot3\cdot3}{4\cdot4\cdot4} = \frac{3^3}{4^3}$$

Γενικά:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu = \frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\cdots \text{ (ν παράγοντες)}$$

$$= \frac{\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdots \text{ (ν παράγοντες)}}{\beta\cdot\beta\cdot\beta\cdots \text{ (ν παράγοντες)}}$$

Ἤ $$\boxed{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu = \frac{\alpha^\nu}{\beta^\nu} \qquad \left.\begin{matrix}\alpha \in N_0\\ \beta, \nu \in N\end{matrix}\right\}}$$

Ὥστε: Γιὰ νὰ ὑψώσουμε ἕνα κλάσμα σὲ μιὰ δύναμη, ὑψώνουμε καὶ τοὺς δύο ὅρους του σ' αὐτὴ τὴ δύναμη.

74.2. Ὅπως στὸ σύνολο N_0 λάβαμε $\alpha^0=1$, ὅπου $\alpha \in N$, ὅμοια λαμβάνουμε

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^0 = 1 \qquad \text{ὅπου} \qquad \alpha, \beta \in N.$$

74. 3. Ἰδιότητες

Οἱ γνωστὲς ἰδιότητες τῶν δυνάμεων στὸ No ἰσχύουν καὶ στὸ Q_0^+.

Παραδείγματα

1. $\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^2}{3^2}\cdot\frac{2^3}{3^3} = \frac{2^2\cdot2^3}{3^2\cdot3^3} = \frac{2^{2+3}}{3^{2+3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2+3}$

2. $\left(\frac{2}{3}\right)^5 : \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\right] : \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^3.$

3. $\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}\right)^2=\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{7}\right)^2$

4. $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^3=\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2=\left(\frac{2}{3}\right)^{2+2+2}=\left(\frac{2}{3}\right)^{3\cdot 2}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

217. Ὑπολογίστε τὶς δυνάμεις:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^4,\quad \left(\frac{1}{2}\right)^6,\quad \left(\frac{3}{5}\right)^3,\quad \left(\frac{5}{9}\right)^3$$

218. Προσδιορίστε τὸν ἀκέραιο α, ὥστε νὰ ἀληθεύει ἡ ἰσότητα

$$\frac{\alpha}{625}=\left(\frac{7}{25}\right)^2$$

219. Γράψετε μὲ μορφὴ μιᾶς δυνάμεως τὰ πιὸ κάτω γινόμενα ἢ πηλίκα:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\frac{4}{9}\cdot\left(\frac{8}{27}\right)^2,\quad \frac{2^3}{5^3}\cdot\left(\frac{8}{125}\right)^2,\quad \left(\frac{4}{9}\right)^4:\left(\frac{2}{3}\right)^2,\quad \left(\frac{3}{4}\right)^4\cdot\left(\frac{7}{9}\right)^0:\frac{9}{16}$$

75. ΣΥΝΘΕΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ.

75. 1. Ὁρισμὸς

Ὅπως γράφουμε $2:3=\frac{2}{3}$, $\quad 3:5=\frac{3}{5}$,

μὲ τὸν ἴδιο τρόπο συμφωνοῦμε νὰ γράφουμε

$$\frac{2}{3}:5=\frac{\frac{2}{3}}{5},\qquad 3:\frac{2}{5}=\frac{3}{\frac{2}{5}},\qquad \frac{2}{3}:\frac{4}{5}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}}$$

Γενικὰ τὸ πηλίκο $\frac{\alpha}{\beta}:\frac{\gamma}{\delta}$ τῶν ρητῶν $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$ γράφεται καὶ μὲ τὴ μορφὴ

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}}\qquad \text{ὅπου}\quad \alpha\in N_0,\quad \beta,\gamma,\delta\in N$$

Μ' αὐτὴ τὴ μορφὴ λέγεται σ ύ ν θ ε τ ο κ λ ά σ μ α.

Γενικά : **Σύνθετο κλάσμα λέγεται τὸ κλάσμα ποὺ ἕνας τουλάχιστο ὅρος του εἶναι κλάσμα.**

Γιὰ ν' ἀποφεύγεται ἡ σύγχυση, ἡ γραμμὴ τοῦ σύνθετου κλάσματος γράφεται πάντοτε μεγαλύτερη ἀπὸ τὴ γραμμὴ καθενὸς κλάσματος - ὅρου του.

Π.χ. γιὰ τὸ πηλίκο $\frac{2}{3} : 4$ γράφουμε $\dfrac{\frac{2}{3}}{4}$ καὶ ὄχι $\dfrac{2}{\frac{3}{4}}$.

Γιὰ νὰ διακρίνουμε ἀπὸ τὰ σύνθετα κλάσματα τὰ κλάσματα ποὺ ὁ ἀριθμητής τους εἶναι ἀκέραιος καὶ ὁ παρονομαστὴς φυσικὸς ἀριθμός, τὰ ὀνομάζουμε ἁ π λ ὰ κ λ ά σ μ α τ α.

75.2. Τροπὴ σύνθετου κλάσματος σὲ ἁπλό.

Γιὰ νὰ ἐκτελέσουμε πράξεις μὲ σύνθετα κλάσματα, πρέπει πρῶτα νὰ τὰ τρέψουμε σὲ ἁπλά.

Γι' αὐτὸν τὸ σκοπό, σκεφτόμαστε ὅτι ἕνα σύνθετο κλάσμα παριστάνει τὸ πηλίκο τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητῆ μὲ τὸν παρονομαστή του.

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}} = \frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 5}$$

Δηλαδή: $$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 5}$$

Γενικά: $$\boxed{\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\alpha \cdot \delta}{\beta \cdot \gamma} \quad \text{ὅπου} \quad \left.\begin{matrix} \alpha \in N_0 \\ \beta, \gamma, \delta \in N \end{matrix}\right\}}$$

Μποροῦμε νὰ ἐργαστοῦμε καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 7}{\frac{5}{7} \cdot 3 \cdot 7} = \frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 3},$$

Δηλαδή, στηριζόμενοι στὴ βασικὴ ἰδιότητα τῶν κλασμάτων, πολλαπλασιάζουμε τοὺς ὅρους τοῦ σύνθετου κλάσματος μὲ τὸ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν τῶν ἁπλῶν κλασμάτων του.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

220. Νὰ ἐκτελεστοῦν οἱ πράξεις:

$$\frac{\frac{3}{4}}{5} + \frac{1}{\frac{2}{3}}, \quad \frac{4}{7} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2}, \quad \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \cdot 2} + 1, \quad \frac{2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2}{\left(1 - \frac{1}{8}\right)^2}$$

221. Ποιὸ ἀπὸ τὰ ἑπόμενα δύο σύνθετα κλάσματα εἶναι τὸ μεγαλύτερο;

$$\frac{2}{\frac{2}{2}} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\frac{2}{2}}{2}$$

76. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΟΥ ΕΠΙΛΥΟΝΤΑΙ ΜΕ ΤΙΣ ΤΕΣΣΕΡΕΙΣ ΠΡΑΞΕΙΣ ΤΩΝ ΡΗΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

76. 1. Πρόσθεση - Ἀφαίρεση

Πρόβλημα

Ἕνας ἄνθρωπος θέλει νὰ διανύσει μιὰν ἀπόσταση 25 km σὲ τρεῖς ἡμέρες. Τὴν πρώτη ἡμέρα ἔκανε $8\frac{1}{3}$ km καὶ τὴ δεύτερη 3 km περισσότερα ἀπὸ τὴν πρώτη. Πόσα χιλιόμετρα πρέπει νὰ διανύσει τὴν τρίτη ἡμέρα;

Ἐπίλυση

Σύμφωνα μὲ τὸ πρόβλημα ἔχουμε τὴν ἑπόμενη σειρὰ πράξεων:

Ἀριθμὸς km ποὺ διανύθηκαν τὴν α' μέρα: $8\frac{1}{3}$

Ἀριθμὸς km ποὺ διανύθηκαν τὴ β' μέρα: $8\frac{1}{3} + 3 = 11\frac{1}{3}$

Ἀριθμὸς km ποὺ διανύθηκαν τὴν α' καὶ β' μέρα: $8\frac{1}{3} + 11\frac{1}{3} = 19\frac{2}{3}$

Ἀριθμὸς km τὰ ὁποῖα θὰ διανύσει τὴ γ' μέρα:

$$25 - 19\frac{2}{3} = 24\frac{3}{3} - 19\frac{2}{3} = 5\frac{1}{3}$$

Ὥστε τὴν τρίτη μέρα πρέπει νὰ διανύσει $5\frac{1}{3}$ km.

76. 2. Πολλαπλασιασμὸς

Πρόβλημα 1ο

Τὸ 1 m ἑνὸς ὑφάσματος ἔχει τιμὴ $60\frac{1}{2}$ δρχ. Πόσο τιμῶνται τὰ 5 m ἀπὸ τὸ ἴδιο ὕφασμα;

Ἐπίλυση

Τὰ 5 m τοῦ ὑφάσματος αὐτοῦ θὰ ἔχουν δρχ.:

$$60\frac{1}{2}+60\frac{1}{2}+60\frac{1}{2}+60\frac{1}{2}+60\frac{1}{2}$$

ἢ πιὸ σύντομα: $$5\cdot 60\frac{1}{2}=302\frac{1}{2}$$

Δηλαδὴ τὰ 5 m ὕφασμα τιμῶνται $302\frac{1}{2}$ δρχ.

Πρόβλημα 2ο

Τὸ 1 m ἑνὸς ὑφάσματος τιμᾶται 60 δρχ. Πόσο τιμῶνται τὰ $\frac{7}{10}$ ἀπὸ τὸ ἴδιο ὕφασμα;

Ἐπίλυση

Ἂν φανταστοῦμε ὅτι τὸ ἕνα μέτρο, καθὼς καὶ ἡ τιμή του, χωρίζεται σὲ 10 ἴσα μέρη, τότε τὸ $\frac{1}{10}$ τοῦ μέτρου θὰ ἔχει ἀξία ἴση μὲ τὸ $\frac{1}{10}$ τῶν 60 δρχ. Ἄρα τὰ $\frac{7}{10}$ τοῦ μέτρου θὰ ἀξίζουν τὰ $\frac{7}{10}$ τῶν 60 δρχ. Γνωρίζουμε ὅμως ὅτι, γιὰ νὰ βροῦμε τὰ $\frac{7}{10}$ τοῦ 60, πολλαπλασιάζουμε τὸ $\frac{7}{10}$ μὲ τὸ 60.

$$\frac{7}{10}\cdot 60=42$$

Ὥστε τὰ $\frac{7}{10}$ τοῦ ὑφάσματος ἀξίζουν 42 δρχ.

Πρόβλημα 3ο

Τὸ 1m ἑνὸς ὑφάσματος τιμᾶται $60\frac{1}{2}$ δρχ. Πόσο τιμῶνται τὰ $5\frac{1}{4}$m ἀπὸ τὸ ἴδιο ὕφασμα;

Ἐπίλυση

Ἂν σκεφτοῦμε ὅπως καὶ προηγουμένως, βρίσκουμε ὅτι

τὰ $5\frac{1}{4}\text{ m}=\frac{21}{4}\text{ m}$ ὑφάσματος ἀξίζουν τὰ $\frac{21}{4}$ τῶν $60\frac{1}{2}$ δρχ.

$$5\frac{1}{4}\cdot 60\frac{1}{2}=317\frac{5}{8}$$

Ὥστε, τὰ $5\frac{1}{4}$ m ὑφάσματος ἀξίζουν $317\frac{5}{8}$ δρχ.

Ἡ ἐπίλυση προβλημάτων ὅπως τὰ παραπάνω μᾶς ὁδηγεῖ στὸν ἀκόλουθο γνωστὸ κανόνα:

Ὅταν γνωρίζουμε τὴν τιμὴ τῆς μιᾶς ἀκέραιης μονάδας καὶ θέλουμε τὴν τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων, ποὺ εἶναι ὁμοειδεῖς μ' αὐτήν, ἢ τὴν τιμὴ ἑνὸς μέρους τῆς μονάδας, ἐκτελοῦμε πολλαπλασιασμό.

Πολλαπλασιαστέος εἶναι πάντοτε ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς ἀκέραιης μονάδας καὶ πολλαπλασιαστὴς ὁ ἀριθμὸς τῶν πολλῶν μονάδων ἢ τὸ μέρος τῆς μονάδας.

Σημείωση

Εἶναι γνωστὸ ὅτι, καὶ γιὰ νὰ βροῦμε ἕνα μέρος ἑνὸς ἀριθμοῦ, πολλαπλασιάζουμε τὸν ἀριθμὸ μὲ τὸ ζητούμενο μέρος του. Π.χ. τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ ἀριθμοῦ 30 εἶναι:

$$\frac{3}{5}\cdot 30 = 18$$

76. 3. Διαίρεση

Πρόβλημα 1ο. Τὰ 4 kg ἑνὸς ἐμπορεύματος τιμῶνται $20\frac{2}{5}$ δρχ. Πόσο τιμᾶται τὸ 1 kg;

Ἐπίλυση. Εἶναι φανερὸ ὅτι πρέπει νὰ διαιρέσουμε τὸ $20\frac{2}{5}$ διὰ τοῦ 4.

$$20\frac{2}{5} : 4 = 5\frac{1}{10}$$

Δηλαδὴ τὸ 1 kg τοῦ ἐμπορεύματος ἀξίζει $5\frac{1}{10}$ δρχ.

Πρόβλημα 2ο. Τὰ $\frac{5}{7}$ kg ἑνὸς ἐμπορεύματος τιμῶνται 20 δρχ. Πόσο τιμᾶται τὸ 1 kg;

Ἐπίλυση. Σκεφτόμαστε ὅτι, ἂν πολλαπλασιάσουμε τὴν τιμὴ τοῦ 1 kg μὲ τὰ $\frac{5}{7}$, θὰ πρέπει νὰ βροῦμε 20 δρχ. Συνεπῶς, σύμφωνα μὲ τὸν ὁρισμὸ τῆς τελείας διαιρέσεως, ἡ τιμὴ τοῦ 1 kg θὰ εἶναι τὸ ἀκριβὲς πηλίκο τῆς διαιρέσεως 20 διὰ $\frac{5}{7}$.

$$20 : \frac{5}{7} = 20\cdot\frac{7}{5} = 28$$

Ὥστε τὸ 1 kg τοῦ ἐμπορεύματος τιμᾶται 28 δρχ.

Ἡ ἐπίλυση τῶν πιὸ πάνω προβλημάτων μᾶς ὁδηγεῖ στὸ γνωστὸ κανόνα:

Ὅταν γνωρίζουμε τὴν τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων, ἀκεραίων ἢ κλασματικῶν, ἢ ἑνὸς μέρους τῆς μονάδας καὶ ζητοῦμε νὰ βροῦμε τὴν τιμὴ τῆς

μιᾶς (ἀκέραιης μονάδας), ποὺ εἶναι ὁμοειδὴς μὲ τὶς πολλές, κάνουμε διαίρεση.

Διαιρετέος εἶναι πάντοτε ἡ τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων ἢ ἡ τιμὴ τοῦ μέρους.

Αὐτὴ τὴ διαίρεση τὴν ἔχουμε ὀνομάσει μερισμό.

Πρόβλημα 3ο. Τὸ 1 kg ἑνὸς ἐμπορεύματος τιμᾶται $10\frac{2}{5}$ δρχ. Πόσα kg ἐμπόρευμα ἀγοράζουμε μὲ $33\frac{4}{5}$ δρχ.;

Ἐπίλυση. Εἶναι φανερὸ ὅτι, ἂν πολλαπλασιάσουμε τὸν ἀριθμὸ τῶν kg, ποὺ θέλουμε νὰ ἀγοράσουμε, ἐπὶ τὴν τιμὴ τοῦ 1 kg, θὰ πρέπει νὰ βροῦμε $33\frac{4}{5}$ δρχ. Συνεπῶς ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν kg θὰ εἶναι τὸ ἀκριβὲς πηλίκο τῆς διαιρέσεως τοῦ $33\frac{4}{5}$ διὰ τοῦ $10\frac{2}{5}$.

$$33\frac{4}{5} : 10\frac{2}{5} = 3\frac{1}{4}$$

Δηλαδή, θὰ ἀγοράσουμε $3\frac{1}{4}$ kg ἐμπόρευμα.

Ἡ ἐπίλυση προβλημάτων ὅπως τὸ προηγούμενο μᾶς ὁδηγεῖ στὸ γνωστὸ κανόνα:

Ὅταν γνωρίζουμε τὴν τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδας καὶ τὴν τιμὴ τῶν πολλῶν ὁμοειδῶν ἀκεραίων ἢ κλασματικῶν μονάδων καὶ ζητοῦμε νὰ βροῦμε πόσες εἶναι αὐτές, ἐκτελοῦμε διαίρεση.

Διαιρετέος εἶναι πάντοτε ἡ τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων. Αὐτὴ τὴ διαίρεση τὴν ἔχουμε ὀνομάσει μέτρηση.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

222. Τρία πρόσωπα μοιράστηκαν ἕνα κομμάτι ὕφασμα. Τὸ α΄ πῆρε $12\frac{3}{5}$ m, τὸ β΄ πῆρε $2\frac{2}{3}$ m λιγότερα ἀπὸ τὸ α΄ καὶ $2\frac{5}{8}$ m περισσότερα ἀπὸ τὸ γ΄. Πόσο ἦταν τὸ μῆκος τοῦ ὑφάσματος;

223. Ἕνας ἔμπορος ἀγόρασε ἐμπορεύματα ἀξίας 72000 δρχ. καὶ πλήρωσε ἀμέσως τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ἀξίας τους. Πόσα ὀφείλει ἀκόμη;

224. Τὸ σιτάρι δίνει τὰ $\frac{11}{12}$ τοῦ βάρους του σὲ ἀλεύρι καὶ τὸ ἀλεύρι δίνει τὰ $\frac{13}{10}$ τοῦ βάρους του σὲ ψωμί. Πόσο ψωμὶ θὰ πάρουμε ἀπὸ 150 kg σιτάρι;

225. Ἕνα ρολόι σὲ $15\frac{1}{2}$ h μένει πίσω $\frac{6}{60}$ h. Πόσο πίσω μένει σὲ μιὰ ὥρα;

226. Μιὰ ἐλαστικὴ σφαίρα ἀφέθηκε νὰ πέσει ἐλεύθερα στὸ πάτωμα καὶ ἀναπηδᾶ κάθε φορὰ στὰ 2/3 τοῦ προηγουμένου ὕψους. Ἀφοῦ χτύπησε 3 φορὲς στὸ πάτωμα, ἀνέβηκε σὲ ὕψος 48 cm. Ἀπὸ ποιὸ ὕψος ἀφέθηκε νὰ πέσει;

77. ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΗΣ ΑΝΑΓΩΓΗΣ ΣΤΗ ΜΟΝΑΔΑ

Πρόβλημα 1ο

Τὰ 5 kg ἀλεύρι τιμῶνται 30 δρχ. Πόσο τιμῶνται τὰ 8 kg ἀλεύρι;

Ἐπίλυση

Μποροῦμε νὰ ἀναλύσουμε τὸ πρόβλημα στὰ ἑξῆς δύο ἁπλὰ προβλήματα:

i) Τὰ 5 kg ἀλεύρι ἀξίζουν 30 δρχ.
Τὸ 1 kg ἀλεύρι πόσο ἀξίζει;
Εἶναι $\frac{30}{5} = 6$. Συνεπῶς τὸ 1 kg ἔχει τιμὴ 6 δρχ.

ii) Τὸ 1 kg ἀλεύρι ἀξίζει 6 δρχ. Τὰ 8 kg πόσο ἀξίζουν;
Εἶναι $8 \cdot 6 = 48$. Συνεπῶς τὰ 8 kg ἀλεύρι ἀξίζουν 48 δρχ.

Σύμφωνα μὲ τὴν πιὸ πάνω ἀνάλυση, γιὰ νὰ βροῦμε ἀπὸ τὴν τιμὴ τῶν 5 kg τὴν τιμὴ τῶν 8 kg, βρήκαμε πρῶτα τὴν τιμὴ τοῦ 1 kg καὶ ἔπειτα τὴν τιμὴ τῶν 8 kg ἀλεύρι.

Γιὰ τοῦτο, αὐτὸς ὁ τρόπος ἐργασίας λέγεται *μέθοδος τῆς ἀναγωγῆς στὴ μονάδα*.

Οἱ ἐπιλύσεις τῶν δύο ἁπλῶν προβλημάτων γράφονται σύντομα ὡς ἑξῆς:

Τὰ 5 kg ἀλεύρι ἀξίζουν 30 δρχ.
Τὸ 1 kg » ἀξίζει $\frac{30}{5}$ δρχ.
Τὰ 8 kg » ἀξίζουν $8 \cdot \frac{30}{5}$ δρχ. $= 48$ δρχ.

Πρόβλημα 2ο

Τὰ $\frac{2}{3}$ μιᾶς ἀποστάσεως εἶναι 24 km. Πόσα km εἶναι τὰ $\frac{3}{5}$ τῆς ἀποστάσεως αὐτῆς;

Ἐπίλυση

Γιὰ πιὸ σύντομα, τρέπουμε σὲ ὁμώνυμα τὰ κλάσματα $\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{3}{5}$. Λαμβάνουμε $\frac{10}{15}$ καὶ $\frac{9}{15}$.

Σκεφτόμαστε ὅτι:

$$\text{τὰ } \frac{10}{15} \text{ τῆς ἀποστάσεως εἶναι } 24 \text{ km}$$

$$\text{τὸ } \frac{1}{15} \quad » \quad » \quad » \quad \frac{24}{10} \text{ km}$$

$$\text{τὰ } \frac{9}{15} \quad » \quad » \quad » \quad 9 \cdot \frac{24}{10} \text{ km} = 21\frac{3}{5} \text{ km}$$

Παρατηροῦμε ὅτι καὶ σ' αὐτὸ τὸ πρόβλημα βρήκαμε πρῶτα τὴν τιμὴ τῆς μιᾶς κλασματικῆς μονάδας $\frac{1}{15}$ καὶ κατόπιν τὴν τιμὴ τῶν πολλῶν κλασματικῶν μονάδων $\frac{9}{15}$.

Πρόβλημα 3ο

Τὰ $\frac{2}{3}$ καὶ τὰ $\frac{3}{4}$ ἑνὸς ἀριθμοῦ εἶναι 51. Ποιὸς εἶναι ὁ ἀριθμός;

Ἐπίλυση

Εἶναι $$\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{8}{12} + \frac{9}{12} = \frac{17}{12}$$

$$\text{Τὰ } \frac{17}{12} \text{ τοῦ ἀριθμοῦ εἶναι } 51$$

$$\text{Τὸ } \frac{1}{12} \quad » \quad » \quad » \quad \frac{51}{17} = 3$$

$$\text{Τὰ } \frac{12}{12} \quad » \quad » \quad » \quad 3 \cdot 12 = 36$$

Ὥστε ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι 36.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

227. Ποιὸς εἶναι ὁ ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου τὰ $\frac{7}{12}$ εἶναι 21;

228. Ἂν ἀπὸ τὸ $\frac{1}{2}$ ἑνὸς ἀριθμοῦ ἀφαιρέσουμε τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ ἀριθμοῦ, βρίσκουμε τὸν ἀριθμὸ 7. Ποιὸς εἶναι ὁ ἀριθμός;

229. Τὰ $\frac{3}{4}$ kg λάδι ἔχουν 18 δρχ. Πόσο ἔχουν τὰ $2\frac{4}{5}$ kg λάδι;

230. Μιὰ δεξαμενὴ περιέχει 216 kg νερὸ καὶ εἶναι γεμάτη ὡς τὰ $\frac{3}{7}$ της. Πόσα kg νερὸ χρειάζονται ἀκόμη γιὰ νὰ γεμίσει;

231. Τὸ τριπλάσιο καὶ τὰ $\frac{2}{3}$ ἑνὸς ἀριθμοῦ ἀποτελοῦν τὸν ἀριθμὸ 11. Ποιὸς εἶναι αὐτὸς ὁ ἀριθμός;

78. ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Πρόβλημα 1ο

Ποιὸν ἀριθμὸ πρέπει νὰ προσθέσουμε στὸ κλάσμα $\frac{4}{7}$, γιὰ νὰ λάβουμε ἄθροισμα $1\frac{6}{11}$;

Ἐπίλυση

i) Σχηματισμὸς τῆς ἐξισώσεως:

Ἂν παραστήσουμε μὲ χ τὸν ἀριθμὸ ποὺ ζητοῦμε, σύμφωνα μὲ τὸ πρόβλημα θὰ ἔχουμε:

$$\frac{4}{7}+\chi=1\,\frac{6}{11}$$

ii) Ἐπίλυση τῆς ἐξισώσεως:

$$\frac{4}{7}+\chi=1\,\frac{6}{11} \Leftrightarrow \chi=1\,\frac{6}{11}-\frac{4}{7} \quad \text{ἢ} \quad \chi=\frac{75}{77}.$$

iii) Ἐπαλήθευση: $\frac{4}{7}+\frac{75}{77}=\frac{119}{77}=1\frac{42}{77}=1\frac{6}{11}$

Ὥστε ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι $\frac{75}{77}$

Πρόβλημα 2ο

Ἕνα δοχεῖο ἔχει $18\frac{3}{4}$ kg λάδι. Πόσα kg λάδι πρέπει νὰ ἀφαιρέσουμε, γιὰ νὰ μείνουν $6\,\frac{4}{5}$ kg λάδι στὸ δοχεῖο;

Ἐπίλυση

i) Σχηματισμὸς τῆς ἐξισώσεως:

Ἂν παραστήσουμε μὲ χ τὸν ἀριθμὸ kg λάδι, ποὺ πρέπει νὰ ἀφαιρέσουμε, θὰ ἔχουμε:

$$18\frac{3}{4}-\chi=6\frac{4}{5}$$

ii) Ἐπίλυση τῆς ἐξισώσεως:

$$18\frac{3}{4}-\chi=6\frac{4}{5} \Leftrightarrow 18\frac{3}{4}-6\frac{4}{5}=\chi \quad \text{ἢ} \quad \chi=11\,\frac{19}{20}.$$

iii) Ἐπαλήθευση: $18\,\frac{3}{4}-11\,\frac{19}{20}=17\frac{35}{20}-11\frac{19}{20}=6\frac{4}{5}.$

Ὥστε πρέπει νὰ ἀφαιρέσουμε $11\,\frac{19}{90}$ kg.

Πρόβλημα 3ο

Τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ βάρους ἑνὸς κιβωτίου εἶναι $30\frac{1}{2}$ kg. Ποιὸ εἶναι τὸ βάρος ὁλόκληρου τοῦ κιβωτίου;

Ἐπίλυση

i) Σχηματισμὸς τῆς ἐξισώσεως:

Ἂν παραστήσουμε μὲ χ τὴν ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ βάρους τοῦ κιβωτίου, θὰ ἔχουμε:

$$\frac{2}{5} \cdot \chi = 30\frac{1}{2}$$

ii) Ἐπίλυση τῆς ἐξισώσεως:

$$\frac{2}{5} \cdot \chi = 30\frac{1}{2} \Leftrightarrow \chi = 30\frac{1}{2} : \frac{2}{5} \qquad \text{ἢ} \quad \chi = 76\frac{1}{4}$$

iii) Ἐπαλήθευση: $\frac{2}{5} \cdot 76\frac{1}{4} = \frac{2}{5} \cdot \frac{305}{4} = \frac{305}{10} = 30\frac{1}{2}$

Ὥστε τὸ βάρος ὁλόκληρου τοῦ κιβωτίου εἶναι $76\frac{1}{4}$ kg.

Σημείωση: Εἶναι πολὺ χρήσιμο, στὶς προσπάθειές μας ν' ἀντιμετωπίσουμε συστηματικὰ ἕνα πρόβλημα, νὰ ἀκολουθοῦμε κατὰ κανόνα τὰ ἑξῆς στάδια:

1) Μελετοῦμε προσεκτικὰ τὸ πρόβλημα, ὥστε νὰ κατανοήσουμε τί ἀκριβῶς μᾶς δίνει (τὰ δεδομένα) καὶ τί ἀκριβῶς μᾶς ζητᾶ (τὰ ζητούμενα).

2) Παριστάνουμε μὲ χ τὸν ζητούμενο ἀριθμὸ τοῦ προβλήματος.

3) Σχηματίζουμε μιὰ ἐξίσωση, μὲ τὴν ὁποία ἐκφράζουμε μὲ μαθηματικὲς σχέσεις τὴ λεκτικὴ διατύπωση τοῦ προβλήματος.

4) Ἐπιλύουμε τὴν ἐξίσωση.

5) Ἐπανερχόμαστε στὸ πρόβλημα καὶ δίνουμε τὴν ἀπάντηση σ' αὐτό, προσέχοντας πάντοτε ποιὸ στοιχεῖο τοῦ προβλήματος παραστήσαμε στὴν ἀρχὴ μὲ χ.

6) Εἶναι μερικὲς φορὲς δυνατὸν ἡ ἐξίσωση τοῦ προβλήματος νὰ μὴν εἶναι ἐπιλύσιμη στὸ σύνολο τῶν ἀριθμῶν ποὺ χρησιμοποιοῦμε. Σ' αὐτὴ τὴν περίπτωση λέμε ὅτι τὸ πρόβλημά μας δὲν ἔχει λύση στὸ ἐξεταζόμενο σύνολο ἀριθμῶν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

232. Ποιὸν ἀριθμὸ πρέπει νὰ προσθέσουμε στὸ $\frac{3}{5}$, γιὰ νὰ λάβουμε ἄθροισμα $7\frac{2}{3}$;

233. Ἂν ἀφαιρέσουμε $2\frac{3}{4}$ kg ἀπὸ ἕνα δοχεῖο βενζίνη, θὰ μείνουν σ' αὐτὸ $8\frac{1}{5}$ kg. Πόσα kg βενζίνη περιέχει τὸ δοχεῖο;

234. Δύο ἀριθμοὶ ἔχουν γινόμενο 32. Ὁ ἕνας ἀπ' αὐτοὺς εἶναι $18\frac{2}{5}$. Ποιὸς εἶναι ὁ ἄλλος;

235. Ἂν ἀπὸ τὸ διπλάσιο ἑνὸς ἀριθμοῦ ἀφαιρέσετε τὸ κλάσμα $\frac{2}{5}$, θὰ βρεῖτε $7\frac{3}{5}$. Ποιὸς εἶναι ὁ ἀριθμὸς αὐτός;

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

236. Μία βρύση γεμίζει τὴ δεξαμενὴ σὲ 8 h, δεύτερη τὴ γεμίζει σὲ 12 h καὶ τρίτη σὲ 15 h. Ἂν ἀνοίξουμε ταυτόχρονα καὶ τὶς τρεῖς βρύσες, σὲ πόσο χρόνο θὰ γεμίσει ἡ δεξαμενή; Πόσο μέρος τῆς δεξαμενῆς θὰ ἔχει γεμίσει κάθε βρύση;

237. Τρεῖς ἀδελφοὶ κληρονόμησαν τὰ $\frac{8}{9}$ μιᾶς περιουσίας. Καθένας τους πῆρε 2400 δρχ. Πόση ἦταν ὁλόκληρη ἡ περιουσία;

238. Ἡ ἀξία ἑνὸς οἰκοπέδου αὐξήθηκε κατὰ τὰ $\frac{3}{20}$ τῆς ἀξίας τοῦ προηγουμένου ἔτους καὶ ἔφτασε στὶς 325.000 δρχ. Πόση ἦταν ἡ ἀξία τοῦ οἰκοπέδου πρὶν ἀπὸ τὴν αὔξηση;

239. Ἕνα ἐμπόρευμα εἶχε φθορά, κατὰ τὴ μεταφορά του, ἴση μὲ τὰ $\frac{3}{40}$ τῆς ἀξίας του. Ἂν γνωρίζετε ὅτι ἡ ἀξία του μετὰ τὴ φθορὰ εἶναι 60.000 δρχ. νὰ βρεῖτε τὴν ἀξία τοῦ ἐμπορεύματος πρὶν ἀπὸ τὴ φθορά.

240. Τὰ $\frac{2}{5}$ τῶν $\frac{3}{4}$ τῆς ἡλικίας ἑνὸς ἀτόμου εἶναι 18 ἔτη. Πόση εἶναι ἡ ἡλικία του;

241. Τὰ $\frac{3}{4}$ ἑνὸς ἀριθμοῦ ἂν αὐξηθοῦν κατὰ τὰ $\frac{2}{5}$ του δίνουν ἀποτέλεσμα 21. Ποιὸς εἶναι αὐτὸς ὁ ἀριθμός;

242. Τὸ $\frac{1}{3}$ καὶ τὰ $\frac{3}{8}$ ἑνὸς ποσοῦ εἶναι 3400 δρχ. Νὰ βρεθεῖ αὐτὸ τὸ ποσό.

243. Ἂν ἀπὸ ἕνα ποσὸ ἀφαιρέσουμε τὰ $\frac{3}{4}$ του καὶ τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ὑπολοίπου, θὰ ἀπομείνουν 1440 δρχ. Νὰ βρεθεῖ τὸ ἀρχικὸ ποσό.

244. Ἕξι ἄτομα μοίρασαν μεταξύ τους τὰ $\frac{5}{8}$ ἑνὸς ποσοῦ καὶ ἀπέμειναν 57.600 δρχ. Ποιὸ ἦταν τὸ ἀρχικὸ ποσό;

245. Νὰ μοιραστοῦν 20.230 δρχ. σὲ τρία ἄτομα α', β', γ' μὲ τέτοιον τρόπο, ὥστε τὸ μερίδιο τοῦ β' νὰ εἶναι τὰ $\frac{7}{22}$ τοῦ μεριδίου τοῦ α' καὶ τὸ μερίδιο τοῦ γ' νὰ εἶναι τὰ $\frac{16}{33}$ τοῦ μεριδίου τοῦ α'.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ζ'

79. ΔΕΚΑΔΙΚΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Στὰ ἑπόμενα θὰ χρησιμοποιήσουμε τὸ δεκαδικὸ σύστημα ἀριθμήσεως καὶ στὴν περίπτωση τῶν ἀριθμῶν ποὺ εἶναι μικρότεροι ἀπὸ τὴν ἀκέραιη μονάδα. Τοῦτο θὰ μᾶς διευκολύνει στὴν ἐκτέλεση τῶν πράξεων.

79. 1. Δεκαδικὲς κλασματικὲς μονάδες. Δεκαδικὴ κλίμακα.

Ἀπὸ τὶς κλασματικὲς μονάδες

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{20},\ \frac{1}{100},\ \frac{1}{500},\ \frac{1}{1000},\ \frac{1}{10000}$$

οἱ κλασματικὲς μονάδες $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}$

ἔχουν ἕνα ἰδιαίτερο γνώρισμα. Ἔχουν ὡς παρονομαστὴ δυνάμεις τοῦ 10.

$$10 = 10^1,\quad 100 = 10^2,\quad 1000 = 10^3,\quad 10.000 = 10^4.$$

Γι' αὐτὸ καὶ ὀνομάζονται δεκαδικὲς κλασματικὲς μονάδες. Ἰδιαίτερα:

Τὸ $\frac{1}{10}$ λέγεται δεκαδικὴ κλασμ. μονάδα 1ης τάξεως

Τὸ $\frac{1}{100}$ » » » » 2ης »

Τὸ $\frac{1}{1000}$ » » » » 3ης » κ.ο.κ.

Αὐτὲς τὶς κλασματικὲς μονάδες μποροῦμε νὰ τὶς γράψουμε καὶ σὲ τάξη ἐλαττουμένου μεγέθους ἀπὸ ἀριστερὰ πρὸς τὰ δεξιά:

$$\frac{1}{10},\ \frac{1}{100},\ \frac{1}{1000},\ \frac{1}{10.000}\ \cdots \qquad (1)$$

Παρατηροῦμε ὅτι

$$10 \cdot \frac{1}{10.000} = \frac{1}{1000},\qquad 10 \cdot \frac{1}{1000} = \frac{1}{100},\qquad 10 \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{10}$$

Δηλαδὴ στὴν ἀπεριόριστη πρὸς τὰ δεξιὰ κλίμακα (1) κάθε δεκαδικὴ κλασματικὴ μονάδα εἶναι δεκαπλάσια ἀπὸ τὴν ἀμέσως ἑπόμενή της (πρὸς τὰ δεξιὰ) καὶ ὑποδεκαπλάσια ἀπὸ τὴν ἀμέσως προηγούμενή της (πρὸς τὰ ἀριστερά).

Ὅπως θυμούμαστε, καὶ ἡ δεκαδικὴ κλίμακα (ἀπεριόριστη πρὸς τὰ ἀριστερὰ)

$$\ldots 10000,\quad 1000,\quad 100,\quad 10,\quad 1 \qquad (2)$$

ἔχει τὴν ἴδια ἰδιότητα

$$1\cdot 10 = 10,\quad 10\cdot 10 = 100,\quad 10\cdot 100 = 1000,\quad 10\cdot 1000 = 10000$$

Ἄρα μποροῦμε νὰ συνδυάσουμε αὐτὲς τὶς δύο κλίμακες (1) καὶ (2), γιὰ νὰ σχηματίσουμε τὴν ἑπόμενη συμπληρωμένη κλίμακα τῶν ἀκεραίων καὶ τῶν δεκαδικῶν κλασματικῶν μονάδων σὲ ἐλαττούμενη τάξη μεγέθους ἀπὸ ἀριστερὰ πρὸς τὰ δεξιά.

$$\ldots 10.000,\ 1000,\ 100\ \ 10,\ 1\quad 1/10,\ 1/100,\ 1/1000,\ 1/10000, \ldots$$

$$\text{ἢ}\ \ldots 10^4,\quad 10^3,\quad 10^2,\ 10^1,\ 10^0,\ 1/10^1,\ 1/10^2,\ 1/10^3,\quad 1/10^4 \ldots \qquad (3)$$

Καθὼς παρατηροῦμε, αὐτὴ ἡ τελευταία κλίμακα εἶναι ἀπεριόριστη καὶ πρὸς τὰ ἀριστερὰ καὶ πρὸς τὰ δεξιά.

79. 2. Δεκαδικὰ κλάσματα. Δεκαδικοὶ ἀριθμοί.

Κάθε κλάσμα, ποὺ ὁ παρονομαστής του εἶναι δύναμη τοῦ δέκα, λέγεται δεκαδικὸ κλάσμα. Π.χ. τὰ κλάσματα

$\frac{3}{10}$, $\frac{7}{100}$, $\frac{254}{1000}$, εἶναι δεκαδικὰ κλάσματα.

Τὰ κλάσματα ποὺ δὲν εἶναι δεκαδικὰ λέγονται κοινὰ κλάσματα.

Μὲ τὴ βοήθεια τῆς δεκαδικῆς κλίμακας (3) μποροῦμε νὰ θέσουμε τὰ δεκαδικὰ κλάσματα σὲ δεκαδικὴ μορφή. Π.χ. ὅπως ὁ ἀκέραιος 547 γράφεται

$$\begin{aligned} 547 &= 5\cdot 100 + 4\cdot 10 + 7 \\ &= 5\cdot 10^2 + 4\cdot 10^1 + 7\cdot 10^0, \end{aligned}$$

ὅμοια, καὶ τὸ δεκαδικὸ κλάσμα 547/1000 γράφεται

$$\begin{aligned} \frac{547}{1000} &= \frac{500+40+7}{1000} = \frac{500}{1000} + \frac{40}{1000} + \frac{7}{1000} \\ &= \frac{5}{10} + \frac{4}{100} + \frac{7}{1000} \\ &= 5\cdot\frac{1}{10^1} + 4\cdot\frac{1}{10^2} + 7\cdot\frac{1}{10^3} \end{aligned}$$

Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο ἔχουμε:

$$135\,\frac{24}{100}=\frac{13524}{100}=\frac{1\cdot 10000+3\cdot 1000+5\cdot 100+2\cdot 10+4}{100}$$

$$=\frac{1\cdot 10000}{100}+\frac{3\cdot 1000}{100}+\frac{5\cdot 100}{100}+\frac{2\cdot 10}{100}+\frac{4\cdot 1}{100}$$

$$=1\cdot 10^2+3\cdot 10^1+5\cdot 10^0+2\cdot\frac{1}{10^1}+4\cdot\frac{1}{10^2}\qquad (4)$$

Ἐπειδή, σ' ὁλόκληρη τὴν κλίμακα τῶν μονάδων, 10 μονάδες μιᾶς τάξεως ἰσοδυναμοῦν μὲ μιὰ μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, μποροῦμε νὰ γράψουμε τὸ 2ο μέλος τῆς (4) ὡς ἑξῆς:

$$135{,}24\qquad (5)$$

ὅπου ἡ ὑποδιαστολὴ χρησιμοποιεῖται γιὰ νὰ χωρίσει τὶς ἀκέραιες μονάδες ἀπὸ τὶς δεκαδικές. Συγκεκριμένα: ἀριστερὰ ἀπὸ τὴν ὑποδιαστολὴ βρίσκονται κατὰ σειρὰ τὰ ψηφία τῶν ἀκεραίων μονάδων, τῶν δεκάδων, τῶν ἑκατοντάδων ..., δεξιὰ καὶ κατὰ σειρὰ βρίσκονται τὰ ψηφία τῶν δεκάτων, τῶν ἑκατοστῶν...

Ὅταν ἕνας ρητὸς γράφεται μὲ τὴ μορφὴ (5), λέγεται δεκαδικὸς ἀριθμός*. Τὰ ψηφία τοῦ δεκαδικοῦ μέρους ἑνὸς δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ λέγονται δεκαδικὰ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ.

79. 3. Παραδείγματα

α) $$\frac{3756}{10000}=\frac{3000}{10000}+\frac{700}{10000}+\frac{50}{10000}+\frac{6}{10000}$$

$$=\frac{3}{10}+\frac{7}{100}+\frac{5}{1000}+\frac{6}{10000}$$

$$=3\cdot\frac{1}{10^1}+7\cdot\frac{1}{10^2}+5\cdot\frac{1}{10^3}+6\cdot\frac{1}{10^4}$$

Δηλαδή: $$\frac{3756}{10000}=0{,}3756\qquad (6)$$

β) $$\frac{30402}{1000}=\frac{3\cdot 10000}{1000}+\frac{0\cdot 1000}{1000}+\frac{4\cdot 100}{1000}+\frac{0\cdot 10}{1000}+\frac{2\cdot 1}{1000}$$

$$=3\cdot 10^1+0\cdot 10^0+4\cdot\frac{1}{10^1}+0\cdot\frac{1}{10^2}+2\cdot\frac{1}{10^3}$$

(Ἐπειδὴ δὲν ὑπάρχουν ἑκατοστά, θέσαμε στὴ θέση τους 0).

---

* Πρόκειται γιὰ μιὰν ἄλλη γραφὴ ἑνὸς ρητοῦ ἀριθμοῦ. Ἡ γραφὴ αὐτὴ θὰ μᾶς διευκολύνει στὴν ἐκτέλεση τῶν πράξεων.

Δηλαδή: $$\frac{30402}{1000}=30{,}402 \qquad (7)$$

$$\gamma)\ \frac{342}{10000}=\frac{300+40+2}{10000}=\frac{300}{10000}+\frac{40}{10000}+\frac{2}{10000}$$

$$=3\cdot\frac{1}{10^2}+4\cdot\frac{1}{10^3}+2\cdot\frac{1}{10^4}$$

Δηλαδή: $$\frac{342}{10000}=0{,}0342 \qquad (8)$$

Ἀντιστρόφως: ἕνας δεκαδικὸς ἀριθμός, π.χ. ὁ δεκαδικὸς 3,02, γράφεται μὲ κλασματικὴ μορφὴ ὡς ἑξῆς:

$$3{,}02\ =3+0{,}02=3+0\cdot\frac{1}{10^1}+2\cdot\frac{1}{10^2}$$

$$=\frac{3\cdot10^2}{10^2}+\frac{0\cdot10^1}{10^2}+\frac{2\cdot1}{10^2}$$

$$=\frac{3\cdot10^2+0\cdot10^1+2}{10^2}=\frac{302}{100}$$

Δηλαδή: $$3{,}02=\frac{302}{100} \qquad (9)$$

Ἀπὸ τὶς ἰσότητες (6), (7), (8) καὶ (9) ἐννοοῦμε τοὺς ἑξῆς κανόνες.

1. Γιὰ νὰ γράψουμε ἕνα δεκαδικὸ κλάσμα μὲ μορφὴ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ, γράφουμε τὸν ἀριθμητὴ τοῦ κλάσματος καὶ χωρίζουμε ἀπὸ τὰ δεξιὰ τόσα δεκαδικὰ ψηφία, ὅσα μηδενικὰ ἔχει ὁ παρονομαστής.

Π.χ. $\frac{349}{100}=3{,}49 \qquad \frac{28}{1000}=0{,}028$

2. Γιὰ νὰ γράψουμε ἕνα δεκαδικὸ ἀριθμὸ μὲ μορφὴ δεκαδικοῦ κλάσματος, παραλείπουμε τὴν ὑποδιαστολὴ καὶ τὸν γράφουμε σὰν ἀριθμητὴ κλάσματος μὲ παρονομαστὴ τὴ μονάδα, ποὺ τὴν ἀκολουθοῦν τόσα μηδενικά, ὅσα δεκαδικὰ ψηφία ἔχει αὐτός.

Π.χ. $0{,}005=\frac{5}{1000},\qquad 32{,}04=\frac{3204}{100}$

79. 4. Ἀπαγγελία δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ.

Γιὰ νὰ ἀπαγγείλουμε τὸν δεκαδικὸ 4,125 λέμε:

τέσσερα καὶ ἑκατὸν εἴκοσι πέντε χιλιοστά,
ἢ τέσσερα ἀκέραιος, ἕνα δέκατο, δύο ἑκατοστὰ καὶ πέντε χιλιοστά,
ἢ τέσσερες χιλιάδες ἑκατὸν εἴκοσι πέντε χιλιοστά.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

246. Νὰ γράψετε μὲ δεκαδικὴ μορφὴ τὰ ἑπόμενα δεκαδικὰ κλάσματα:

$$\frac{1}{10^5},\quad \frac{23}{10^4},\quad \frac{201}{100000},\quad \frac{234}{10^2}$$

247. Νὰ γράψετε μὲ μορφὴ δεκαδικῶν κλασμάτων τοὺς ἑπόμενους δεκαδικοὺς ἀριθμούς:

4,002, 1,002, 0,005, 0,000104

80. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

80. 1. Ἀπὸ τὰ ἴσα κλάσματα

$$\frac{24}{10}=\frac{240}{100}=\frac{2400}{1000}\ldots$$

ἔχουμε $\quad 2,4 = 2,40 = 2,400 \ldots$

Παρατηροῦμε δηλαδὴ ὅτι:

Ἂν στὸ τέλος ἑνὸς δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ γράψουμε ὁσαδήποτε μηδενικὰ ἢ ἂν παραλείψουμε ἀπὸ τὸ τέλος του ὅσα μηδενικὰ τυχὸν ὑπάρχουν, ἡ τιμὴ δὲν μεταβάλλεται.

80. 2. Παρατηροῦμε ἐπίσης ὅτι

$$\frac{245}{1000}\cdot 10=\frac{245}{100}\qquad \frac{245}{1000}\cdot 100=\frac{245}{10}\qquad \frac{245}{1000}\cdot 1000=245$$

ἢ $\quad 0,245\cdot 10 = 2,45 \qquad 0,245\cdot 100 = 24,5 \qquad 0,245\cdot 1000 = 245$

Δηλαδή: **Γιὰ νὰ πολλαπλασιάσουμε ἕνα δεκαδικὸ ἀριθμὸ ἐπὶ 10, 100, 1000 ......, ἀρκεῖ νὰ μεταθέσουμε τὴν ὑποδιαστολή του μία, δύο, τρεῖς... θέσεις πρὸς τὰ δεξιὰ ἀντιστοίχως.**

Παρατηροῦμε ἀκόμη ὅτι:

$$\frac{245}{1000}:10=\frac{245}{10000},\qquad \frac{245}{1000}:100=\frac{245}{100000}$$

Ἤ $\quad 0,245 : 10 = 0,0245 \qquad 0,245 : 100 = 0,00245$

Δηλαδή: **Γιὰ νὰ διαιρέσουμε ἕνα δεκαδικὸ ἀριθμὸ διὰ 10, 100, 1000..., ἀρκεῖ νὰ μεταθέσουμε τὴν ὑποδιαστολή του μία, δύο, τρεῖς ..... θέσεις πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἀντιστοίχως.**

Σημείωση

Ἂν τὰ ὑπάρχοντα δεκαδικὰ ψηφία δὲν ἀρκοῦν, τὰ συμπληρώνουμε μὲ μηδενικά. Π.χ. $\quad 0,24\cdot 1000 = 240, \qquad 0,24 : 1000 = 0,00024$

248. Νὰ βρεθοῦν τὰ γινόμενα:

$$4{,}002.10, \quad 4{,}002.100, \quad 4{,}002.10^5$$

249. Νὰ βρεθοῦν τὰ πηλίκα:

$$4{,}002:10, \quad 4{,}002:100, \quad 4{,}002:10^5$$

250. Νὰ συμπληρώσετε τὶς ἰσότητες:

$$7{,}05.10 = \ldots\ldots\, 100 = \ldots\ldots\, 1000$$

81. ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

81. 1. Νὰ βρεθεῖ τὸ ἄθροισμα:

$$\chi = 13{,}45 + 12{,}7 + 0{,}3$$

Γράφουμε τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς μὲ μορφὴ δεκαδικῶν κλασμάτων καὶ τὰ προσθέτουμε.

$$\begin{aligned} 13{,}45 + 12{,}7 + 0{,}3 &= \frac{1345}{100} + \frac{127}{10} + \frac{3}{10} \\ &= \frac{1345}{100} + \frac{1270}{100} + \frac{30}{100} \\ &= \frac{1345 + 1270 + 30}{100} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|r} \text{(I)} & \text{(II)} \\ 1345 & 13{,}45 \\ 1270 & 12{,}7 \\ 30 & 0{,}3 \\ \hline 2645 & 26{,}45 \end{array}$$

Ἡ πρόσθεση (I) δίνει τὸ ἄθροισμα στὸν ἀριθμητὴ τοῦ τελευταίου κλάσματος

Ἄρα $\chi = \dfrac{2645}{100} = 26{,}45$

Τὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα δίνει πιὸ σύντομα καὶ ἡ πρόσθεση (II).

Σ' αὐτὴ τὴν πρόσθεση οἱ ὑποδιαστολές, ἄρα καὶ τὰ ψηφία τῆς ἴδιας τάξεως, βρίσκονται στὴν ἴδια στήλη. Ἀπ' αὐτὸ συνάγουμε τὸν γνωστὸ κανόνα τῆς προσθέσεως δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

82. ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

Νὰ βρεθεῖ ἡ διαφορὰ $\quad \delta = 31{,}4 - 8{,}32$

Ἐργαζόμενοι ὅπως πιὸ πάνω, ἔχουμε

$$31{,}4 - 8{,}32 = \frac{314}{10} - \frac{832}{100} = \frac{3140}{100} - \frac{832}{100} = \frac{3140 - 832}{100}$$

Ἀπὸ τὴν ἀφαίρεση (Ι) ἔχουμε τὴ διαφορὰ στὸν ἀριθμητὴ τοῦ τελευταίου κλάσματος.

(Ι)	(ΙΙ)
$\begin{array}{r} 3140 \\ -\ 832 \\ \hline 2308 \end{array}$	$\begin{array}{r} 31,40 \\ -\ 8,32 \\ \hline 23,08 \end{array}$

Ἄρα $\delta = \dfrac{2308}{100} = 23,08$

Στὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα φτάνουμε πιὸ σύντομα καὶ μὲ τὴν ἀφαίρεση (ΙΙ).

Σ' αὐτὴ τὴν ἀφαίρεση οἱ ὑποδιαστολές, ἄρα καὶ τὰ ψηφία τῆς ἴδιας τάξεως, βρίσκονται στὴν ἴδια στήλη.

Ἀπὸ αὐτὸ συνάγουμε τὸν γνωστὸ κανόνα τῆς ἀφαιρέσεως δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

Σημείωση: Εἶναι σκόπιμο νὰ συμπληρώνουμε τὰ δεκαδικὰ ψηφία ποὺ λείπουν στοὺς ἀριθμοὺς μὲ μηδενικά, γιὰ νὰ ἀποφεύγουμε τὰ λάθη.

83. ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

Ἂς βροῦμε τὸ γινόμενο $\chi = 15,32 \cdot 3,4$

Μποροῦμε νὰ γράψουμε

$$\chi = \frac{1532}{100} \cdot \frac{34}{10}$$

$$= \frac{1532 \cdot 34}{100 \cdot 10} = \frac{52088}{1000} = 52,088$$

Παρατηροῦμε ὅτι:

α) Ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος 52088/1000 προκύπτει ἂν πολλαπλασιάσουμε τοὺς δεδομένους δεκαδικοὺς σὰν νὰ ἦταν ἀκέραιοι.

β) Ὁ παρονομαστὴς ὁρίζει ὅτι στὸ γινόμενο πρέπει νὰ χωρίσουμε τόσα δεκαδικὰ ψηφία, ὅσα ἔχουν μαζὶ καὶ οἱ δυὸ παράγοντες.

Ὥστε: **Γιὰ νὰ πολλαπλασιάσουμε δεκαδικοὺς ἀριθμούς, τοὺς πολλαπλασιάζουμε σὰν νὰ ἦταν ἀκέραιοι καὶ στὸ γινόμενο χωρίζουμε ἀπὸ δεξιὰ τόσα δεκαδικὰ ψηφία, ὅσα ἔχουν καὶ οἱ δύο παράγοντες μαζί.**

Ἡ διάταξη τῆς πράξεως γίνεται ὡς ἑξῆς:

$\begin{array}{r} 15,32 \\ \times\ 3,4 \\ \hline 6128 \\ 4596 \\ \hline 52,088 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2,35 \\ \times\ 6 \\ \hline 14,10 \end{array}$	$\begin{array}{r} 0,67 \\ \times\ 3,2 \\ \hline 134 \\ 201 \\ \hline 2,144 \end{array}$

251. Νὰ βρεῖτε τὰ ἀθροίσματα:

ι) $28,3+0,625$ ιι) $6,25+47,4+175,803$

252. Νὰ βρεθοῦν οἱ διαφορές:

ι) $0,84-0,76$ ιι) $12-0,075$ ιιι) $135,1-37,803$

253. Νὰ ἐκτελεστοῦν οἱ πολλαπλασιασμοί:

ι) $3,45\cdot 0,37$ ιι) $101,11\cdot 31,9$ ιιι) $0,01^3\cdot 0,02$

254. Χρησιμοποιῆστε μιὰ γνωστὴ ἰδιότητα, γιὰ νὰ ὑπολογίσετε σύντομα τὶς ἀριθμητικὲς παραστάσεις:

ι) $9,1\cdot 72,65+0,9\cdot 72,65$

ιι) $81,2\cdot 0,48+81,2\cdot 13,42$

255. Νὰ ὑπολογιστεῖ μὲ δύο τρόπους ἡ ἀριθμητικὴ παράσταση

$$8,12-(0,385-0,03)$$

256. Ἕνα πεντάδραχμο ἔχει πάχος 1,5 mm. Πόσο ὕψος ἔχει μία στήλη ἀπὸ 35 πεντάδραχμα, ι) σὲ dm καὶ ιι) σὲ cm. Πόσο ὕψος ἔχουν τὰ 0,75 τῆς στήλης, σὲ cm;

84. ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

84. 1. Ὁ διαιρέτης εἶναι ἀκέραιος.

i) Ἂς προσέξουμε τὴ διαίρεση 8,55:3.

Μποροῦμε νὰ γράψουμε

$$8,55 : 3=\frac{855}{100} : 3=\frac{855:3}{100}=\frac{285}{100}=2,85$$

Βρίσκουμε πιὸ σύντομα τὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα μὲ τὴ γνωστὴ διάταξη (βλ. παραπλεύρως).

$$\begin{array}{r|l} \dot{8},\dot{5}\dot{5} & 3 \\ \cline{2-2} 2\,5 & 2,85 \\ 15 & \\ 0 & \end{array}$$

Σ' αὐτὴ τὴ διάταξη, ὅταν δεξιὰ ἀπὸ τὸ πρῶτο ὑπόλοιπο 2 τοποθετοῦμε τὸ πρῶτο δεκαδικὸ ψηφίο τοῦ διαιρετέου, τὸ 5, σχηματίζεται ὁ ἀριθμὸς 25, ποὺ σημαίνει πλέον δέκατα $\left(2,5=\frac{25}{10}\right)$.

Ἑπομένως καὶ τὸ δεύτερο ψηφίο τοῦ πηλίκου θὰ εἶναι δέκατα. Γι' αὐτὸ καὶ θέσαμε πρὶν ἀπ' αὐτὸ ὑποδιαστολή.

Ὅμοια τὸ νέο ὑπόλοιπο εἶναι ἑκατοστά. $0,15=\frac{15}{100}$.

Ἑπομένως καὶ τὸ νέο ψηφίο τοῦ πηλίκου θὰ εἶναι ἑκατοστὰ κ.ο.κ.

Ὥστε : **Γιὰ νὰ διαιρέσουμε δεκαδικὸ ἀριθμὸ μὲ ἀκέραιο, ἐκτελοῦμε τὴ διαίρεση σὰν νὰ ἦταν ἀκέραιοι καὶ βάζουμε στὸ πηλίκο ὑποδιαστολή, ἀμέσως μόλις τελειώσει ἡ διαίρεση τοῦ ἀκέραιου μέρους.**

ii) Ἂς προσέξουμε τὴ διαίρεση $2{,}3 : 3$.

Μποροῦμε πάλι νὰ γράψουμε

$$2{,}3:3 = \frac{23}{10} : 3 = \frac{23}{30}$$

Παρατηροῦμε ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{23}{30}$ εἶναι ἀνάγωγο καὶ ὁ παρονομαστής του δὲν εἶναι οὔτε μπορεῖ νὰ γίνει δύναμη τοῦ 10. (Τὸ 23 δὲν διαιρεῖται διὰ 3).

Δηλαδὴ τὸ κλάσμα $\frac{23}{3\cdot 10} = \frac{23}{30}$ δὲν εἶναι δεκαδικὸ κλάσμα· ἄρα οὔτε καὶ τὸ πηλίκο τῆς διαιρέσεως $2{,}3:3$.

Ὥστε : **Τὸ πηλίκο ἑνὸς δεκαδικοῦ δι' ἑνὸς ἀκεραίου δὲν εἶναι πάντοτε δεκαδικὸ κλάσμα.**

Τί θὰ λάβουμε ὅμως ὡς πηλίκο σ' αὐτὴ τὴν περίπτωση;

Μποροῦμε:

1) Νὰ λάβουμε τὸ κλάσμα $\frac{23}{30}$ ὡς τὸ ἀκριβὲς πηλίκο τῆς διαιρέσεως τοῦ 2,3 διὰ 3. $\left(2{,}3:3 = 23:30 = \frac{23}{30}\right)$

2) Νὰ βροῦμε τὸ πηλίκο σὲ μορφὴ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ, ἀλλὰ *κατὰ προσέγγιση* μὲ τὸν ἑξῆς τρόπο.

Ἐκτελοῦμε τὴ διαίρεση καθὼς στὸ προηγούμενο παράδειγμα.

$$\begin{array}{r|l} 2{,}3 & 3 \\ \cline{2-2} 2 & 0{,}7 \end{array}$$

Ἡ διαίρεση ἀφήνει ὑπόλοιπο $0{,}2 = \frac{2}{10}$. Δηλαδὴ τὸ ἀκριβὲς πηλίκο εἶναι: 0,7 καὶ $\frac{2}{3}$ τοῦ δεκάτου. Ἂν συνεπῶς παραλείψουμε τὸ ὑπόλοιπο καὶ λάβουμε ὡς πηλίκο τὸ 0,7, κάνουμε λάθος.

Παρατηροῦμε ὅτι αὐτὸ τὸ λάθος εἶναι μικρότερο ἀπὸ τὸ ἕνα δέκατο.

Γιὰ τοῦτο λέμε ὅτι τὸ 0,7 εἶναι τὸ πηλίκο τῆς διαιρέσεως κατὰ *προσέγγιση* δεκάτου.

Καὶ ἐπειδὴ εἶναι μικρότερο ἀπὸ τὸ πραγματικό, ὀνομάζεται κατὰ *προσέγγιση δεκάτου μὲ ἔλλειψη*. Ἄν, ἀντὶ νὰ παραλείψουμε τὸ ὑπόλοιπο $\frac{2}{3}$ τοῦ δεκάτου, ποὺ εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ μισὸ δέκατο, τὸ κάνουμε ἕνα δέκατο καὶ τὸ προσθέσουμε στὸ 0,7, θὰ ἔχουμε γιὰ πηλίκο 0,8. Τώρα τὸ πηλίκο εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ ἀκριβὲς πηλίκο κατὰ $\frac{1}{3}$ τοῦ δεκάτου. Σ' αὐτὴ τὴν περίπτωση λέμε ὅτι τὸ πηλίκο βρέθηκε κατὰ *προσέγγιση μὲ ὑπεροχή*.

Ἂν θέλουμε μεγαλύτερη *προσέγγιση*, μποροῦμε νὰ συνεχίσουμε τὴ διαίρεση καὶ νὰ βροῦμε πηλίκο κατὰ *προσέγγιση ἑκατοστοῦ, χιλιοστοῦ* κ.ο.κ., ὅπως πιὸ κάτω:

Πηλίκο μὲ προσέγγιση ἑκατοστοῦ	Πηλίκο μὲ προσέγγιση χιλιοστοῦ
$\begin{array}{r\|l} 2{,}3 & 3 \\ \cline{2-2} 20 & 0{,}76 \\ 2 & \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} 2{,}3 & 3 \\ \cline{2-2} 20 & 0{,}766 \\ 20 & \\ 2 & \end{array}$
Μὲ ἔλλειψη : 0,76	Μὲ ἔλλειψη : 0,766
Μὲ ὑπεροχή: 0,77	Μὲ ὑπεροχή: 0,767

Παρατηροῦμε ἐπιπλέον ὅτι: τὸ νέο κάθε φορὰ ὑπόλοιπο εἶναι πάντοτε 2. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι, ὅσο καὶ ἂν συνεχίσουμε τὴ διαίρεση, δὲν θὰ τελειώσει ποτὲ καὶ ὅτι στὸ πηλίκο θὰ βρίσκουμε διαρκῶς τὸ ἴδιο ψηφίο 6.

Γι' αὐτὸ λέμε ὅτι τὸ ἀκριβὲς πηλίκο τῆς διαιρέσεως τοῦ 2,3 διὰ 3, δηλαδὴ τὸ κλάσμα 23/30, δὲν μπορεῖ νὰ πάρει *τερματιζόμενη δεκαδικὴ μορφή*. Καὶ γιὰ νὰ τὸ δηλώσουμε αὐτό, γράφουμε: $\frac{23}{30} = 0{,}766\ldots$

84. 2. Διαιρέτης δεκαδικὸς ἀριθμός.

Ἔστω γιὰ ἐκτέλεση ἡ διαίρεση 0,45:1,5.

Αὐτὴ ἡ περίπτωση ἀνάγεται στὴ διαίρεση μὲ διαιρέτη ἀκέραιο.

Πραγματικά:

$$0{,}45:1{,}5 = 4{,}5:15 = 0{,}3 \text{ (πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ 10).}$$

Ὅμοια, τὸ πηλίκο τῆς διαιρέσεως τοῦ 49 διὰ 0,72 βρίσκεται, ἂν ἐκτελέσουμε τὴ διαίρεση 4900 διὰ 72 (πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ 100). Αὐτὴ ἡ διαίρεση εἶναι ἀτελής. Τὸ ὑπόλοιπο τῆς ἀρχικῆς διαιρέσεως 49 διὰ 0,72 δὲν εἶναι 4, ἀλλὰ $\frac{4}{100}$. Γιατί;

$$\begin{array}{r|l} & 72 \\ 4900 & \\ \cline{2-2} 580 & 68 \\ 4 & \end{array}$$

Σημείωση

Μποροῦμε πάντοτε νὰ τρέπουμε τοὺς δεκαδικοὺς διαιρέτες σὲ δεκαδικὰ κλάσματα· τότε ἐκτελοῦμε διαίρεση διὰ κλάσματος.

85. ΤΡΟΠΗ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ ΣΕ ΔΕΚΑΔΙΚΟ.

Γνωρίζουμε ὅτι κάθε κλάσμα παριστάνει τὸ ἀκριβὲς πηλίκο τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητῆ μὲ τὸν παρονομαστή του. Γιὰ νὰ τὸ τρέψουμε σὲ δεκαδικό, ἐκτελοῦμε αὐτὴ τὴ διαίρεση. Π.χ. γιὰ τὰ κλάσματα

$\frac{3}{5}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{7}{6}$ ἔχουμε:

$$\begin{array}{r|l} 3{,}0 & 5 \\ \hline 0 & 0{,}6 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 7{,}0 & 8 \\ \hline 60 & 0{,}875 \\ 40 & \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 7 & 6 \\ \hline 10 & 1{,}166 \\ 40 & \\ 40 & \\ 4 & \end{array}$$

Ἤτοι $\frac{3}{5} = 0{,}6$ $\qquad$ $\frac{7}{8} = 0{,}875$ $\qquad$ $\frac{7}{6} = 1{,}166\ldots$

Παρατηροῦμε ὅτι τὰ κλάσματα $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{8}$, τρέπονται σὲ τερματιζόμενους δεκαδικοὺς ἀριθμούς, ἐνῶ τὸ κλάσμα $\frac{7}{6}$ εἶναι ἀδύνατο νὰ λάβει τερματιζόμενη δεκαδικὴ μορφή.

86. ΠΟΙΑ ΑΝΑΓΩΓΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ ΤΡΕΠΟΝΤΑΙ ΣΕ ΤΕΡΜΑΤΙΖΟΜΕΝΟΥΣ ΔΕΚΑΔΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ

Εἴδαμε πιὸ πάνω ὅτι ὁρισμένα κλάσματα τρέπονται σὲ τερματιζόμενους δεκαδικοὺς ἀριθμούς, ἐνῶ ἄλλα δὲν τρέπονται. Γεννᾶται τὸ ἐρώτημα: Μποροῦμε νὰ διακρίνουμε, πρὶν ἐκτελέσουμε τὴ διαίρεση, ἂν ἕνα κλάσμα τρέπεται σὲ τερματιζόμενο δεκαδικὸ ἀριθμό;

Στὴν ἀπάντηση θὰ ὁδηγηθοῦμε ἀπὸ τὶς ἑξῆς παρατηρήσεις:

α) Ἂς λάβουμε τοὺς τερματιζόμενους δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς 0,4, 0,15, 0,625 καὶ ἂς βροῦμε τὰ δεκαδικὰ κλάσματα στὰ ὁποῖα τρέπονται.

Ἔχουμε:

$$0{,}4 = \frac{4}{10}, \qquad 0{,}15 = \frac{15}{100}, \qquad 0{,}625 = \frac{625}{1000}$$

Μετὰ τὴν ἁπλοποίηση, ὁπότε τὰ κλάσματα γίνονται ἀνάγωγα, ἔχουμε:

$$\frac{4}{10} = \frac{2\cdot 2}{2\cdot 5} = \frac{2}{5}, \qquad \frac{15}{100} = \frac{3\cdot 5}{2^2\cdot 5^2} = \frac{3}{2^2\cdot 5}, \qquad \frac{625}{1000} = \frac{5^4}{2^3\cdot 5^3} = \frac{5}{2^3}.$$

Παρατηροῦμε ὅτι:

Τὰ ἀ ν ά γ ω γ α κλάσματα, στὰ ὁποῖα τρέπονται αὐτοὶ οἱ δεκαδικοί, ἔχουν παρονομαστὲς μ ό ν ο δ υ ν ά μ ε ι ς τ ῶ ν ἀ ρ ι θ μ ῶ ν 2 κ α ὶ 5 ἢ μ ό ν ο τ ο ῦ ἑ ν ὸ ς ἀ π ὸ α ὐ τ ο ύ ς.

β) Ἂς λάβουμε ἀνάγωγα κλάσματα, π.χ. τὰ $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{9}{20}$, στὰ ὁποῖα οἱ παρονομαστὲς δὲν ἔχουν κανέναν πρῶτο παράγοντα διαφορετικὸ ἀπὸ τοὺς 2 καὶ 5.

Ἔχουμε:

$$\frac{1}{2}=\frac{5\cdot 1}{5\cdot 2}=\frac{5}{10}=0{,}5 \qquad \frac{3}{5}=\frac{3\cdot 2}{5\cdot 2}=\frac{6}{10}=0{,}6 \qquad \frac{9}{20}=\frac{5\cdot 9}{5\cdot 20}=0{,}45$$

Παρατηροῦμε ὅτι τὰ κλάσματα τρέπονται σὲ τερματιζόμενους δεκαδικοὺς ἀριθμούς.

Ἀπὸ τὶς προηγούμενες παρατηρήσεις ἐννοοῦμε ὅτι:

Γιὰ νὰ τρέπεται ἕνα ἀνάγωγο κλάσμα σὲ τερματιζόμενο δεκαδικὸ ἀριθμό, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ὁ παρονομαστής του, ἀναλυμένος σὲ γινόμενο πρώτων παραγόντων, νὰ ἔχει ὡς μόνους παράγοντες τοὺς 2 καὶ 5 ἢ τὸν ἕναν ἀπ' αὐτούς.

Παράδειγμα

Τὸ ἀνάγωγο κλάσμα $\frac{147}{40}$ τρέπεται σὲ τερματιζόμενο δεκαδικό, ἐπειδὴ ὁ παρονομαστής του, $40=2^3\cdot 5$, ἔχει ὡς μόνους πρώτους παράγοντες τοὺς 2 καὶ 5. Ἀντίθετα τὸ ἀνάγωγο κλάσμα $\frac{2}{35}$ δὲν τρέπεται, ἐπειδὴ ὁ παρονομαστής του ἔχει ὡς πρῶτο παράγοντα καὶ τὸ 7 $(35=5\cdot 7)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

257. Νὰ ἐπιλυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:

α) $5\cdot x=0{,}0125$ β) $12\cdot x=0{,}0144$

258. Νὰ τραποῦν σὲ δεκαδικοὺς τὰ κλάσματα:

$\frac{1}{8}$, $\frac{3}{25}$, $\frac{7}{2^2\cdot 5^3}$, $\frac{9}{2^2\cdot 5}$

259. Νὰ ἐκτελεστοῦν οἱ πράξεις:

ι) $\frac{3}{8}-0{,}07$ ιι) $\frac{3}{5}\cdot 0{,}75$ ιιι) $0{,}225:5$

260. Νὰ βρεῖτε μὲ προσέγγιση ἑκατοστοῦ τὰ πηλίκα τῶν διαιρέσεων:

ι) $10:28$ ιι) $6{,}4:3$

261. Ποιὰ ἀπὸ τὰ ἑπόμενα κλάσματα τρέπονται σὲ τερματιζόμενους δεκαδικούς;

$\frac{3}{5}$, $\frac{11}{50}$, $\frac{7}{15}$, $\frac{6}{48}$, $\frac{9}{32}$, $\frac{718}{325}$

262. Νὰ γράψετε τὸ σύνολο τῶν κλασματικῶν μονάδων μὲ παρονομαστὴ μικρότερο ἀπὸ τὸ 20, οἱ ὁποῖες τρέπονται σὲ τερματιζόμενους δεκαδικούς.

87. ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΙ ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

87. 1. Ἀπὸ τοὺς παρονομαστὲς τῶν ἀνάγωγων κλασμάτων $\frac{2}{3}$, $\frac{9}{11}$, $\frac{1}{12}$ διακρίνουμε ὅτι αὐτὰ δὲν τρέπονται σὲ τερματιζόμενους δεκαδικοὺς ἀριθμούς.

Ἂς προσέξουμε τὰ πηλίκα τῶν διαιρέσεων 2:3, 9:11 καὶ 1:12.

$$\begin{array}{r|l} 2{,}0 & 3 \\ \cline{2-2} 20 & 0{,}666\ldots \\ 20 & \\ 20 & \\ 2 & \\ .. & \\ .. & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 9{,}0 & 11 \\ \cline{2-2} 20 & 0{,}8181\ldots \\ 90 & \\ 20 & \\ 9 & \\ .. & \\ .. & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1{,}00 & 12 \\ \cline{2-2} 40 & 0{,}0833\ldots \\ 40 & \\ 4 & \\ .. & \\ .. & \end{array}$$

Διακρίνουμε ὅτι τὰ ψηφία σὲ κάθε πηλίκο *ἐπαναλαμβάνονται ἀπεριόριστα τὰ ἴδια καὶ μὲ τὴν ἴδια σειρὰ διαδοχῆς* (Γιατί;). Καθὼς λέμε, ἐπαναλαμβάνονται *περιοδικά*.

Γι' αὐτὸ οἱ ἀριθμοί:

0,666..., 0,8181..., 0,08333...

λέγονται *περιοδικοὶ δεκαδικοὶ ἀριθμοί*.

Τὸ τμῆμα τοῦ δεκαδικοῦ μέρους ποὺ ἐπαναλαμβάνεται λέγεται *περίοδος*.

Π.χ. τοῦ ἀριθμοῦ 0, 666... περίοδος εἶναι 6

» » 0,8181... » » 81

» » 0,0833... » » 3

Στοὺς περιοδικοὺς ἀριθμοὺς 0,666... καὶ 0,8181... παρατηροῦμε ὅτι ἡ περίοδος ἀρχίζει ἀμέσως μετὰ τὴν ὑποδιαστολή. Γι' αὐτὸ λέγονται *ἁπλοὶ περιοδικοί*. Στὸ δεκαδικὸ 0,0833... ἡ περίοδος ἀρχίζει ὕστερα ἀπὸ δύο δεκαδικὰ ψηφία. Δηλαδὴ τὸ δεκαδικὸ μέρος του ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕνα περιοδικὸ τμῆμα καὶ ἀπὸ ἕνα μὴ περιοδικό. Γι' αὐτὸ καὶ λέγεται *μεικτὸς περιοδικός*.

87. 2. Ἀπὸ τὶς ἰσότητες: $\frac{4}{10} = 0{,}4 = 0{,}4000\ldots$, $\frac{25}{100} = 0{,}25 = 0{,}2500\ldots$

εἶναι εὔκολο νὰ ἐννοήσουμε ὅτι κάθε κλάσμα ποὺ τρέπεται σὲ τερματιζόμενο δεκαδικὸ μπορεῖ νὰ λάβει μορφὴ περιοδικοῦ ἀριθμοῦ. Ἀρκεῖ νὰ λάβουμε ὡς περίοδό του τὸ 0.

Μποροῦμε λοιπὸν νὰ ποῦμε γενικὰ ὅτι:

Κάθε ρητὸς ἀριθμὸς μπορεῖ νὰ τεθεῖ σὲ μορφὴ δεκαδικοῦ περιοδικοῦ ἀριθμοῦ ἤ, καθὼς λέμε, ἔχει ἕνα δεκαδικὸ περιοδικὸ ἀνάπτυγμα.

Ἀντιστρόφως:

Κάθε περιοδικὸς ἀριθμὸς παριστάνει ἕναν ρητὸ ποὺ μποροῦμε νὰ βροῦμε.

Διακρίνουμε γι' αὐτὸ τὶς ἑξῆς περιπτώσεις:

α) Ὁ περιοδικὸς ἀριθμὸς εἶναι ἁπλός: π.χ. ὁ 0,777...

Ἂν ὀνομάσουμε χ τὸν ζητούμενο ρητὸ ἀριθμό, θὰ ἔχουμε τὴν ἰσότητα:

$$\chi = 0{,}777\ldots \quad (1)$$

i) Πολλαπλασιάζουμε τὰ μέλη τῆς (1) ἐπὶ 10 $\rightarrow$ $10\cdot\chi = 7{,}77\ldots$ (2)

ii) Ἀφαιροῦμε ἀπὸ τὰ μέλη τῆς (2) τοὺς ἴσους ἀριθμοὺς χ καὶ 0,777... $\rightarrow$ $\underline{\chi = 0{,}777\ldots}$

Διαφορὰ $9\cdot\chi = 7$

Ἄρα $\chi = \dfrac{7}{9}$ ἢ $0{,}777\ldots = \dfrac{7}{9}$

Ὅμοια, γιὰ τὸν περιοδικὸ ἀριθμὸ $\chi = 0{,}636363\ldots$ (3)

i) Πολλαπλασιάζουμε ἐπὶ 100 τὰ μέλη τῆς (3) $\rightarrow$ $100\cdot\chi = 63{,}6363\ldots$ (4)

ii) Ἀφαιροῦμε ἀπὸ τὰ μέλη τῆς (4) τοὺς ἴσους ἀριθμοὺς χ καὶ 0,6363... $\rightarrow$ $\underline{\chi = 0{,}636363\ldots}$

Διαφορὰ $99\cdot\chi = 63$

Δηλαδή: $\chi = \dfrac{63}{99}$ ἢ $0{,}636363\ldots = \dfrac{63}{99}$

Αὐτὸς ὁ τρόπος ἐργασίας μᾶς ὁδηγεῖ στὸ ἑπόμενο συμπέρασμα:

Κάθε ἁπλὸς περιοδικὸς δεκαδικὸς ἀριθμὸς <1 εἶναι ἴσος μὲ κλάσμα, ποὺ ἔχει ἀριθμητὴ τὴν περίοδό του καὶ παρονομαστὴ τόσα 9, ὅσα εἶναι τὰ ψηφία τῆς περιόδου.

β) Ὁ περιοδικὸς ἀριθμὸς εἶναι μεικτὸς

Ἔστω $\chi = 0{,}8333\ldots$ (5)

Ἔχουμε:

$$\begin{array}{rl} 100\cdot\chi = 83{,}33\ldots & \text{Πολ/σμὸς τῶν μελῶν τῆς (5) μὲ 100} \\ 10\cdot\chi = 8{,}33\ldots & \text{» » » » » 10} \\ \hline 90\cdot\chi = 83 - 8 & \text{Διαφορὰ} \end{array}$$

Δηλαδή $\chi = \frac{83-8}{90}$ ἢ $0{,}8333\ldots = \frac{83-8}{90}$

Ἐργαζόμενοι μὲ ὅμοιο τρόπο βρίσκουμε: $0{,}54888\ldots = \frac{548-54}{900}$

Δηλαδή: κάθε μεικτὸς περιοδικὸς εἶναι ἴσος μὲ ἕνα κοινὸ κλάσμα, τοῦ ὁποίου ὁ ἀριθμητὴς εἶναι ὁ ἀριθμός, ποὺ σχηματίζεται ἀπὸ τὰ ψηφία τοῦ μὴ περιοδικοῦ τμήματος καὶ μιᾶς περιόδου ἐλαττωμένος κατὰ τὸ μὴ περιοδικὸ τμῆμα, καὶ ὁ παρονομαστής του σχηματίζεται ἀπὸ τόσα 9, ὅσα ψηφία ἔχει ἡ περίοδος, ἀκολουθούμενα ἀπὸ τόσα μηδενικά, ὅσα δεκαδικὰ ψηφία ἔχει τὸ μὴ περιοδικὸ τμῆμα.

Στὴν περίπτωση ποὺ ὁ δεκαδικὸς περιοδικὸς ἀριθμὸς ἔχει καὶ ἀκέραιο μέρος, μὲ ἀνάλογο τρόπο σχηματίζουμε τὸ κλάσμα ποὺ ἀντιστοιχεῖ σ' αὐτόν.

Παραδείγματα

α) $12{,}4343\ldots = 12 + 0{,}4343\ldots = \frac{1243-12}{99}$

β) $5{,}423636\ldots = \frac{54236-542}{9900}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

263. Νὰ γράψετε ὡς περιοδικοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς τὰ κλάσματα:

$\frac{1}{7}, \quad \frac{2}{75}, \quad \frac{5}{21}, \quad \frac{31}{33}$

264. Νὰ τραποῦν σὲ κλάσματα οἱ περιοδικοὶ δεκαδικοὶ ἀριθμοί:

i) 0,4545... ii) 0,3141414... iii) 7,555...
iv) 15,32858585... v) 0,006767...

265. Στὸ σύνολο $A = \left\{ \frac{2}{5}, \frac{1}{7}, \frac{3}{12}, \frac{5}{8}, \frac{15}{45}, \frac{4}{40} \right\}$, ποιὸ εἶναι τὸ ὑποσύνολο κλασμάτων, τὰ ὁποῖα τρέπονται σὲ δεκαδικοὺς περιοδικοὺς ἀριθμούς;

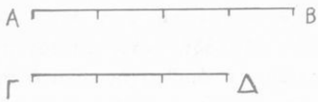
266. Δείξετε ὅτι τὸ κλάσμα: $\dfrac{\frac{1}{5} - 0{,}1}{\frac{1}{5} + 0{,}1}$ τρέπεται σὲ ἁπλὸ περιοδικό.

267. Νὰ ἐκτελέσετε τὶς πράξεις:

i) $\frac{5}{6} + 2{,}353535\ldots$ ii) $0{,}7272\ldots - 0{,}444\ldots$

88. ΛΟΓΟΣ ΔΥΟ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ

88.1. Εἶναι γνωστὸ ὅτι, ἂν δοθεῖ ἕνα εὐθ. τμῆμα ΑΒ καὶ ἕνας ρητὸς $\lambda \neq 0$, μποροῦμε νὰ κατασκευάσουμε ἕνα ἄλλο εὐθ. τμῆμα ἴσο μὲ τὸ γινόμενο $\lambda \cdot AB$. Π.χ. ἂν δοθεῖ ἕνα εὐθ. τμῆμα ΑΒ καὶ ὁ ρητὸς $\frac{3}{4}$, μποροῦμε νὰ κατασκευάσουμε εὐθ. τμῆμα $\Gamma\Delta = \frac{3}{4} \cdot AB$. Γι' αὐτό, ἀρκεῖ νὰ χωρίσουμε τὸ ΑΒ σὲ 4 ἴσα μέρη καὶ νὰ λάβουμε ἕνα τμῆμα ἴσο μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν μερῶν. Ἔτσι στὸ σχ. 33 ἔχουμε $\Gamma\Delta = \frac{3}{4} \cdot AB$.



Σχ. 33

Ὁ ρητὸς $\frac{3}{4}$ λέγεται λ ό γ ο ς τοῦ ΓΔ πρὸς τὸ ΑΒ· γράφουμε $\frac{\Gamma\Delta}{AB} = \frac{3}{4}$.

Ὥστε $\frac{\Gamma\Delta}{AB} = \frac{3}{4}$ σημαίνει ὅτι $\Gamma\Delta = \frac{3}{4} \cdot AB$

$$\frac{\Gamma\Delta}{AB} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \Gamma\Delta = \frac{3}{4} \cdot AB$$

Σύμφωνα μὲ τὰ πιὸ πάνω στὸ σχ. 34, ὅπου λάβαμε $AB = B\Gamma = \Gamma\Delta$, ἔχουμε

$$AB = \frac{1}{3} \cdot A\Delta \Leftrightarrow \frac{AB}{A\Delta} = \frac{1}{3}$$

$$AB = \frac{1}{2} \cdot A\Gamma \Leftrightarrow \frac{AB}{A\Gamma} = \frac{1}{2}$$

$$A\Gamma = \frac{2}{3} \cdot A\Delta \Leftrightarrow \frac{A\Gamma}{A\Delta} = \frac{2}{3}$$

Σχ. 34

88. 2. Ἂς ἐξετάσουμε καὶ τὸ ἀντίστροφο πρόβλημα.

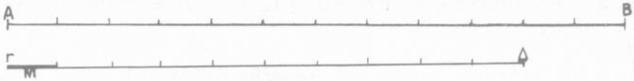
Δηλαδή: Ἂν δοθοῦν δύο εὐθ. τμήματα ΑΒ, ΓΔ, μποροῦμε νὰ ὁρίσουμε τὸ λόγο τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ $\Gamma\Delta \neq 0$;

1) Στὸ σχ. 35 τὸ τμῆμα ΓΔ χωράει ἀκριβῶς 4 φορὲς στὸ τμῆμα ΑΒ. Δηλαδὴ ἔχουμε

Σχ. 35

$$AB = 4 \cdot \Gamma\Delta \Leftrightarrow \frac{AB}{\Gamma\Delta} = 4$$

Σ' αὐτὴ τὴν περίπτωση ὁ λόγος τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ ἰσοῦται μὲ 4. Καὶ ἂν τὸ ΓΔ τὸ λάβουμε ὡς μονάδα μετρήσεως τοῦ ΑΒ, τότε ὁ ἀκέραιος 4 εἶναι ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ ΑΒ.



Σχ. 36

2) Στὸ σχ. 36 τὸ ΓΔ δὲν χωράει ἀκριβῶς ν φορὲς ($\nu \in \mathrm{N}$) στὸ ΑΒ. Γι' αὐτὸ χωρίζουμε τὸ ΓΔ σὲ ἴσα μέρη, π.χ. σὲ 10 ἴσα μέρη. Ἂν ὀνομάσουμε Μ τὸ ἕνα ἀπὸ αὐτά, θὰ ἔχουμε: $\Gamma\Delta = 10 \cdot \mathrm{M} \Leftrightarrow \mathrm{M} = \frac{1}{10} \cdot \Gamma\Delta$ (1)

Ἂς μετρήσουμε τώρα τὸ ΑΒ μὲ μονάδα τὸ Μ. Εἶναι δυνατόν:

α) Ἡ μονάδα μετρήσεως Μ νὰ χωράει στὸ ΑΒ ἀκριβῶς ν φορὲς ($\nu \in \mathrm{N}$) π.χ. 12 φορές, ὅπως στὸ σχ. 36.

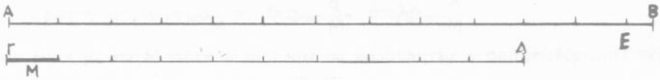
Δηλαδὴ $\quad \mathrm{AB} = 12 \cdot \mathrm{M} \quad$ ἢ $\quad \mathrm{AB} = 12 \cdot \left(\frac{1}{10} \cdot \Gamma\Delta\right)$

ἢ $\quad \mathrm{AB} = \frac{12}{10} \cdot \Gamma\Delta \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{AB}}{\Gamma\Delta} = \frac{12}{10}$

Σ' αὐτὴ τὴν περίπτωση ὁ ρητὸς $\frac{12}{10} = 1{,}2$ εἶναι ὁ λόγος τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ ἢ ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ ΑΒ μὲ μονάδα μετρήσεως τὸ ΓΔ.

β) Ἡ μονάδα μετρήσεως Μ ν ὰ μ ὴ χ ω ρ ά ε ι ἀ κ ρ ι β ῶ ς ν φορὲς ($\nu \in \mathrm{N}$) στὸ ΑΒ, ὅπως π.χ. φαίνεται στὸ σχ. 37, ὅπου εἶναι

$12 \cdot \mathrm{M} < \mathrm{AB} < 13 \cdot \mathrm{M}$ ('Επειδὴ $\mathrm{EB} < \mathrm{M}$).



Σχ. 37

Δηλαδὴ $\quad \mathrm{AB} > \frac{12}{10} \cdot \Gamma\Delta \quad$ καὶ $\quad \mathrm{AB} < \frac{13}{10} \cdot \Gamma\Delta$

ἢ $\quad \frac{12}{10} < \frac{\mathrm{AB}}{\Gamma\Delta} < \frac{13}{10}$

Καθὼς βλέπουμε, σ' αὐτὴ τὴν περίπτωση ὁ λόγος ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ εἶναι μ ό ν ο κ α τ ὰ π ρ ο σ έ γ γ ι σ η (μὲ ἔλλειψη) ἴσος μὲ $\frac{12}{10} = 1{,}2$. Ἤτοι ἡ ἀριθμ. τιμὴ τοῦ ΑΒ μὲ μονάδα μετρήσεως τὸ ΓΔ εἶναι κατὰ προσέγγιση (μὲ ἔλλειψη) ἴση μὲ 1,2. Αὐτὴ τὴν προσέγγιση μπορoῦμε νὰ τὴν κάνουμε ὅσο θέλουμε μεγάλη. Ἀρκεῖ νὰ λάβουμε ὡς μονάδα Μ 10 ἢ 100 ἢ 1000 ... φορὲς μικρότερη*.

88. 3. Ἂς ὑποθέσουμε ὅτι $AB = 12 \cdot M$, $\Gamma\Delta = 10 \cdot M$, ὁπότε $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{12}{10}$, (σχ. 36).

Ἀπὸ τὶς ἰσότητες αὐτές, ἂν προσέξουμε ὅτι οἱ ρητοὶ 10 καὶ 12 εἶναι ἀντιστοίχως οἱ ἀριθμητικὲς τιμὲς τῶν τμημάτων ΓΔ καὶ ΑΒ μὲ τὴν ἴδια μονάδα μετρήσεως Μ,

ἔχουμε: $$\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{12}{10} = \frac{\text{Ἀριθ. τιμὴ τοῦ } AB \text{ μὲ μονάδα } M}{\text{Ἀριθ. τιμὴ τοῦ } \Gamma\Delta \text{ μὲ μονάδα } M}$$

Δηλαδή: **Ὁ λόγος ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος πρὸς ἕνα ἄλλο εἶναι ἴσος μὲ τὸ λόγο τῆς ἀριθμητικῆς τιμῆς τοῦ πρώτου πρὸς τὴν ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ δευτέρου, ἂν μετρηθοῦν μὲ τὴν ἴδια μονάδα καὶ τὰ δύο.**

$$\boxed{\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{\alpha \cdot M}{\beta \cdot M} \Rightarrow \frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{\alpha}{\beta}}$$

Σημειώνουμε ὅτι αὐτὸς ὁ λόγος εἶναι ἀνεξάρτητος ἀπὸ τὴ μονάδα ποὺ θὰ χρησιμοποιήσουμε γιὰ τὴ μέτρηση τῶν δύο αὐτῶν τμημάτων.

Π.χ. ἂν εἶναι $AB = 40$ cm καὶ $\Gamma\Delta = 50$ cm,

ὁπότε $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{40}{50}$, τότε θὰ εἶναι $AB = 0{,}4$ m, $\Gamma\Delta = 0{,}5$ m καὶ $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{0{,}4}{0{,}5} = \frac{40}{50}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

268. Νὰ χαράξετε ἕνα εὐθ. τμῆμα Μ καὶ ἔπειτα τρία ἄλλα Α, Β, Γ τέτοια, ὥστε:

$$\frac{A}{M} = 2, \quad \frac{B}{M} = 2{,}5, \quad \frac{\Gamma}{M} = 3.$$

269. Τρία εὐθ. τμήματα μετρήθηκαν μὲ τὴν ἴδια μονάδα Μ καὶ οἱ τιμές τους ἦταν οἱ ἑξῆς:

$$A = \frac{3}{4} \cdot M, \qquad B = 5 \cdot M, \qquad \Gamma = 2 \cdot M$$

Νὰ βρεθοῦν οἱ λόγοι: $\frac{A}{M}$, $\frac{M}{A}$, $\frac{A}{B}$, $\frac{A}{\Gamma}$, $\frac{B}{\Gamma}$.

* Ὑπάρχουν περιπτώσεις, στὶς ὁποῖες, ὁσοδήποτε μικρὴ καὶ ἂν λάβουμε τὴ μονάδα Μ, ἡ ἀκριβὴς τιμὴ τοῦ λόγου ΑΒ/ΓΔ δὲν εἶναι ρητὸς ἀριθμός.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Η'

89. ΣΥΜΜΙΓΕΙΣ ΑΡΙΘΜΟΙ

89.1. Ὁρισμὸς

Ὅπως εἶναι γνωστό, οἱ μονάδες μετρήσεως τόξων, γωνιῶν, χρόνου, δὲν ἔχουν δεκαδικὲς ὑποδιαιρέσεις.

$1^0 = 60'$, $1' = 60''$ $1\text{ h} = 60\text{ min}$, $1\text{ min} = 60\text{ sec}$

Συνεπῶς, ὅταν μετρήσουμε μία γωνία ἢ ἕνα τόξο ἢ ἕνα χρονικὸ διάστημα μ' αὐτὲς τὶς μονάδες, εἶναι πιθανὸ νὰ βροῦμε ὡς τιμὲς συγκεκριμένους ἀριθμούς, ὅπως π.χ. $30^0\,20'\,10''$.

Ἕνας τέτοιος ἀριθμὸς ἀποτελεῖται ἀπὸ ὁμοειδεῖς ἀριθμούς, ποὺ οἱ μονάδες τους εἶναι πολλαπλάσια ἢ ὑποπολλαπλάσια τῆς ἴδιας ἀρχικῆς μονάδας. Γι' αὐτὸ λέγεται σ υ μ μ ι γ ὴ ς ἀ ρ ι θ μ ό ς.

Τοὺς ἀριθμοὺς ποὺ γνωρίσαμε ὡς τώρα, γιὰ νὰ τοὺς διακρίνουμε ἀπὸ τοὺς συμμιγεῖς, θὰ τοὺς λέμε ἁ π λ ο ὺ ς ἀ ρ ι θ μ ο ύ ς.

Ἄλλα παραδείγματα συμμιγῶν ἀριθμῶν εἶναι:

2 h 5 min 20 sec, 1 yrd. 2 ft. 4 in.

89.2. Τροπὴ συμμιγοῦς ἀριθμοῦ σὲ ἁπλό.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὴν τιμὴ μιᾶς γωνίας $10^0\,20'\,12''$ σὲ δεύτερα λεπτὰ ($''$), σκεφτόμαστε ὅτι:

i) $1^0 = 60'$. Ἄρα $10^0 = 10 \cdot 60' = 600'$

ii) $1' = 60''$. Ἄρα $600' + 20' = 620'$ καὶ $620' = 620 \cdot 60'' = 37200''$

iii) $37200'' + 12'' = 37212''$

Δηλαδή: $10^0\,20'\,12'' = 37212''$

Ὅμοια, γιὰ νὰ βροῦμε τὸ χρόνο 1 h 20 min 15 sec σὲ δευτερόλεπτα (sec), σκεφτόμαστε ὅτι:

$1\text{ h} = 60\text{ min}$, $1\text{ min} = 60\text{ sec}$

Ἄρα: $60\text{ min} + 20\text{ min} = 80\text{ min}$ καὶ $80\text{ min} = 80 \cdot 60\text{ sec} = 4800\text{ sec}$

$4800\text{ sec} + 15\text{ sec} = 4815\text{ sec}.$

Δηλαδή: $1\text{ h } 20\text{ min } 15\text{ sec} = 4815\text{ sec}.$

89. 3. Τροπὴ συμμιγοῦς σὲ μονάδες μιᾶς τάξεώς του.

Γιὰ νὰ τρέψουμε τὸ συμμιγῆ 2 h 10 min 45 sec σὲ πρῶτα λεπτὰ (min), σκεφτόμαστε ὅτι:

$$2\ \mathrm{h} = 2\cdot 60\ \mathrm{min} = 120\ \mathrm{min}, \qquad 45\ \mathrm{sec} = \frac{45}{60}\ \mathrm{min} = 0{,}75\ \mathrm{min}$$

Ἄρα: $2\ \mathrm{h}\ 10\ \mathrm{min}\ 45\ \mathrm{sec} = 120\ \mathrm{min} + 10\ \mathrm{min} + 0{,}75\ \mathrm{min}$
$= 130{,}75\ \mathrm{min}.$

Θὰ ἦταν ὅμως δυνατὸ νὰ τρέψουμε πρῶτα τὸ συμμιγῆ σὲ μονάδες τῆς τελευταίας τάξεως (sec) καὶ κατόπιν νὰ τρέψουμε αὐτὲς σὲ πρῶτα λεπτὰ (min).

i) $2\ \mathrm{h} = 120\ \mathrm{min}, \quad 120\ \mathrm{min} + 10\ \mathrm{min} = 130\ \mathrm{min}.$
$130\ \mathrm{min} = 130\cdot 60\ \mathrm{sec} = 7800\ \mathrm{sec} \qquad 7800\ \mathrm{sec} + 45\ \mathrm{sec} = 7845\ \mathrm{sec}.$

ii) $7845\ \mathrm{sec} : 60 = 130{,}75\ \mathrm{min}.$

Δηλαδή: $2\ \mathrm{h}\ 10\ \mathrm{min}\ 45\ \mathrm{sec} = 130{,}75\ \mathrm{min}.$

89. 4. Τροπὴ ἁπλοῦ συγκεκριμένου ἀριθμοῦ σὲ συμμιγῆ.

Εἶναι φανερὸ ὅτι ἔχουμε σαφέστερη ἀντίληψη γιὰ τὴ διάρκεια ἑνὸς ταξιδιοῦ, ἂν μᾶς ποῦν ὅτι κράτησε 1 h 20 min 10 sec, παρὰ ἂν μᾶς ποῦν ὅτι κράτησε 4810 sec (1 h 20 min 10 sec).

Αὐτὸ τὸ γεγονὸς μᾶς ὁδηγεῖ στὴν τροπὴ ἑνὸς ἁπλοῦ συγκεκριμένου ἀριθμοῦ σὲ συμμιγῆ.

Γιὰ νὰ τρέψουμε ἕναν ἁπλὸ συγκεκριμένο ἀριθμό, π.χ. τὸν ἀριθμὸ 4830 sec, σὲ συμμιγῆ, ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

1) Διαιροῦμε τὸ 4830 sec διὰ 60, ὁπότε βρίσκουμε 80 min καὶ 30 sec.

2) Διαιροῦμε τὰ 80 min διὰ 60, ὁπότε βρίσκουμε 1 h καὶ 20 min.

α) $\begin{array}{r|l} 4830\ \mathrm{sec} & 60 \\ \cline{2-2} 30\ \mathrm{sec} & 80\ \mathrm{min} \end{array}$ β) $\begin{array}{r|l} 80\ \mathrm{min} & 60 \\ \cline{2-2} 20\ \mathrm{min} & 1\ \mathrm{h} \end{array}$

Δηλαδὴ $4830\ \mathrm{sec} = 1\ \mathrm{h}\ 20\ \mathrm{min}\ 30\ \mathrm{sec}.$

Ὅμοια, γιὰ νὰ τρέψουμε τὸν συγκεκριμένο ἀριθμὸ 72620′′ σὲ συμμιγῆ, ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

α) $\begin{array}{r|l} 72620'' & 60 \\ \cline{2-2} 126\ \ & 1210' \\ 62 & \\ 20'' & \end{array}$ β) $\begin{array}{r|l} 1210' & 60 \\ \cline{2-2} 10' & 20^0 \end{array}$

Δηλαδὴ $72620'' = 20^0\ 10'\ 20''$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

270. Νὰ τραποῦν σὲ δευτερόλεπτα (sec):

α) 3 h 25 min 40 sec, β) 2 h 10 min 48 sec

271. Νὰ τραποῦν σὲ πρῶτα λεπτά:

α) $2^0\,32'\,48''$ β) $9^0\,20'\,15''$

272. Νὰ τραποῦν σὲ συμμιγεῖς:

α) $3\frac{1}{4}$ h, β) $2\frac{4^0}{5}$

273. Ὁ χρόνος ἀνάμεσα σὲ δύο πανσέληνους εἶναι 29 ἡμ., 12 h 43 min. Αὐτὸς ὁ χρόνος νὰ τραπεῖ α) σὲ sec, β) σὲ min.

90. ΠΡΟΣΘΕΣΗ, ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΣΥΜΜΙΓΩΝ

90. 1. Πρόσθεση

Νὰ βρεθεῖ τὸ ἄθροισμα

$$(25^0\,17'\,32'') + (5^0\,20'\,19'') + (10^0\,32'\,51'')$$

Ἔχουμε

$$\begin{array}{rrr} 25^0 & 17' & 32'' \\ 5^0 & 20' & 19'' \\ 10^0 & 32' & 51'' \\ \hline 40^0 & 69' & 102'' \end{array} + \quad \text{ἢ} \quad 40^0\ 70'\ 42'' \quad \text{ἢ} \quad 41^0\ 10'\ 42''$$

90. 2. Ἀφαίρεση

i) Νὰ βρεθεῖ ἡ διαφορὰ $(18^0\ 20'\ 31'') - (7^0\ 17'\ 26'')$

Ἔχουμε

$$\begin{array}{rrr} 18^0 & 20' & 31'' \\ 7^0 & 17' & 26'' \\ \hline 11^0 & 3' & 5'' \end{array}$$

ii) Νὰ βρεθεῖ ἡ διαφορὰ $(18^0\,20'\,31'') - (7^0\,24'\,41'')$

Ἔχουμε

$$\begin{array}{rrr} 18^0 & 20' & 31'' \\ 7^0 & 24' & 41'' \\ \hline \end{array} \quad \text{ἢ} \quad \begin{array}{rrr} 18^0 & 19' & 91'' \\ 7^0 & 24' & 41'' \\ \hline \end{array} \quad \text{ἢ} \quad \begin{array}{rrr} 17^0 & 79' & 91'' \\ 7^0 & 24' & 41'' \\ \hline 10^0 & 55' & 50'' \end{array}$$

Δηλαδή, γιὰ νὰ γίνουν δυνατὲς οἱ ἀφαιρέσεις (ὅπου δὲν εἶναι δυνατές), ἀναλύουμε μιὰ μονάδα σὲ μονάδες τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως...

91. 1. Πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς μὲ ἀκέραιο.

Νὰ βρεθεῖ τὸ γινόμενο $(13^0\,20'\,12'')\cdot 6$

$$\begin{array}{rrr} 13^0 & 20' & 12'' \\ & & 6\ \times \\ \hline 78^0 & 120' & 72'' \end{array} \quad \text{ἤ} \quad 78^0\ 121'\ 12'' \quad \text{ἤ} \quad 80^0\ \ 1'\ \ 12''$$

91. 2. Διαίρεση συμμιγοῦς μὲ ἀκέραιο.

Νὰ βρεθεῖ τὸ πηλίκο $(15^0\,12'\,20'') : 4$

$$\begin{array}{rrr|l} 15^0 & 12' & 20'' & \ 4 \\ \cline{4-4} -\,12^0 & & & 3^0\ 48'\ 5'' \\ \cline{1-1} 3^0 = & 180' & & \\ \cline{2-2} & 192' & & \\ & 32' & & \\ & 0' = & 0'' & \\ \cline{3-3} & & 20'' & \\ & & 0'' & \end{array}$$

91. 3. Πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ κλάσμα.

Εἶναι $\quad (3^0\ \ 13'\ \ 20'')\cdot\dfrac{3}{5} = [(3^0\ \ 13'\ \ 20'')\cdot 3]:5$

$$\begin{array}{r} 3^0\,13'\,20'' \\ 3\ \ \times \\ \hline 9^0\,39'\,60'' \end{array} \qquad \begin{array}{rrr|l} 9^0 & 39' & 60'' & \ 5 \\ \cline{4-4} 5^0 & & & 1^0\,55'60'' \\ \cline{1-1} 4^0 = & 240' & & \\ \cline{2-2} & 279' & & \\ \cline{2-2} & 29' & & \\ & 4' = & 240'' & \\ \cline{3-3} & & 300'' & \end{array}$$

Δηλαδὴ $\qquad (3^0\ \ 13'\ \ 20'')\cdot\dfrac{3}{5} = 1^0\,55'\,60'' = 1^0\,56'$

91. 4. Διαίρεση συμμιγοῦς μὲ κλάσμα.

Αὐτὴ ἡ περίπτωση ἀνάγεται στὴν προηγούμενη, ἐπειδὴ ἡ διαίρεση μὲ κλάσμα ἰσοδυναμεῖ μὲ πολλαπλασιασμὸ ἐπὶ τὸ ἀντίστροφο κλάσμα.

Π.χ. $(2\text{ h } 31\text{ min } 15\text{ sec}) : \dfrac{2}{5} = (2\text{ h } 31\text{ min } 15\text{ sec})\cdot\dfrac{5}{2}$

91. 5. Γινόμενο δύο συμμιγῶν.

Ἕνα κινητὸ σὲ χρόνο 1 h διαγράφει τόξο $30^0\ 20'\ 10''$. Πόσο τόξο θὰ διαγράψει σὲ 2 h 40 min 30 sec;

Ἐπίλυση

Τρέπουμε τὸν συμμιγῆ 2 h 40 min 30 sec σὲ ἁπλό, συγκεκριμένα ἐδῶ σὲ ὧρες.

$$2\ \mathrm{h}\ 40\ \mathrm{min}\ \ 30\ \mathrm{sec} = 2\frac{27}{40}\ \mathrm{h}.$$

Ἤδη εἶναι εὔκολο νὰ ἐννοήσουμε ὅτι πρέπει νὰ πολλαπλασιάσουμε τὸν ἀριθμὸ τῶν ὡρῶν μὲ τὸν συμμιγῆ $30^0\ 20'\ 10''$.

$$2\frac{27}{40}\cdot 30^0\ 20'\ 10'' = 81^0\ 8'\ 56{,}75''$$

Γενικὰ τρέπουμε τὸν πολλαπλασιαστὴ σὲ ἁπλὸ ἀριθμό, ποὺ τὸν λαμβάνουμε ὡς ἀφηρημένο. Τὸ γινόμενο θὰ εἶναι συγκεκριμένος ἀριθμός, ὁμοειδὴς μὲ τὸν πολλαπλασιαστέο.

91. 6. Διαίρεση συμμιγοῦς μὲ συμμιγῆ.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1. Ἂν οἱ συμμιγεῖς εἶναι ἑτεροειδεῖς,

τότε ἡ διαίρεση εἶναι μερισμὸς καὶ τὸ πηλίκο εἶναι ὁμοειδὲς μὲ τὸν διαιρετέο. Γι' αὐτό, τρέπουμε τὸ διαιρέτη σὲ μονάδες τῆς τάξεως ποὺ ὁρίζει τὸ πρόβλημα.

2. Ἂν οἱ συμμιγεῖς εἶναι ὁμοειδεῖς,

τότε ἡ διαίρεση εἶναι μέτρηση καὶ τὸ πηλίκο εἶναι ἀφηρημένος ἀριθμὸς ἢ τὸ εἶδος του θὰ ὁρίζεται ἀπὸ τὴν ἐκφώνηση τοῦ προβλήματος.

Παραθέτουμε σχετικὰ παραδείγματα:

α) Μερισμὸς

Ἕνα κινητὸ σὲ 2 h 40 min διατρέχει τόξο $34^0\ 9'\ 20''$. Πόσο τόξο (τοῦ ἴδιου κύκλου) διατρέχει σὲ μιὰ ὥρα;

Ἐπίλυση

Τρέπουμε τὸ χρόνο 2 h 40 min (διαιρέτη) σὲ ὧρες: $2\ \mathrm{h}\ 40\ \mathrm{min} = 2\frac{2}{3}\ \mathrm{h}$.

Ἀρκεῖ τώρα νὰ ἐκτελέσουμε τὴ διαίρεση $(34^0\,9'\,20'') : 2\frac{2}{3}$

$$(34^0\,9'\,20'') : 2\frac{2}{3} = 12^0\,48'\,30''$$

Ὥστε τὸ κινητὸ σὲ 1 h διατρέχει τόξο $12^0\,48'\,30''$.

β) Μέτρηση

Ἕνα κινητὸ σὲ 1 h διατρέχει τόξο $3^0\,20'\,10''$. Σὲ πόσο χρόνο θὰ διατρέξει τόξο (τοῦ ἴδιου κύκλου) $23^0\,21'\,10''$;

Ἐπίλυση

Ἔχουμε τὴ διαίρεση:

$$(23^0\,21'\,10''):(3^0\,20'\,10'')$$

Τρέπουμε καὶ τὸν διαιρετέο καὶ τὸ διαιρέτη σὲ μονάδες τῆς ἴδιας κατωτέρας τάξεως (σὲ $''$) καὶ κατόπιν ἐκτελοῦμε τὴ διαίρεση κατὰ τὰ γνωστά.

$$23^0\,21'\,10''= 84070'',\quad 3^0\,20'\,10''= 12010'',\quad 84070:12010 = 7$$

Δηλαδὴ τὸ κινητὸ θὰ διατρέξει τόξο $23^0\,21'\,10''$ σὲ 7 h.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

274. Ἕνα κινητὸ διατρέχει πάνω σ' ἕναν κύκλο τόξο $5^0\,10'\,20''$ σὲ 1 min. Πόσο τόξο τοῦ ἴδιου κύκλου θὰ διατρέξει σὲ 8 min;

275. Ἕνα ρολόι σὲ 6 h μένει πίσω 8 min 30 sec. Πόσο πίσω μένει σὲ 1 h;

276. Ἕνα αὐτοκίνητο διατρέχει σὲ 1 min 30 sec ἀπόσταση 1 km. Σὲ πόσο χρόνο θὰ διατρέξει ἀπόσταση $8\frac{3}{4}$ km;

277. Τὰ $\frac{5}{8}$ ἑνὸς τόξου ἔχουν τιμὴ $50^\circ\,12'\,55''$. Πόση εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ τόξου;

278. Ἕνα διαστημικὸ πλοῖο ἐκτελεῖ μιὰ ὁλόκληρη περιφορὰ γύρω ἀπὸ τὴ γῆ σὲ 1 h καὶ 12 min. Πόσες τέτοιες περιφορὲς ἐκτελεῖ σὲ 14 h 24 min;

279. Ἕνα διαστημόπλοιο ἐκτελεῖ μιὰ ὁλόκληρη στροφὴ γύρω ἀπὸ τὴ γῆ σὲ 1 h 20 min. Σὲ πόσο χρόνο θὰ διανύσει τόξο $30^\circ\,20'$ τῆς στροφῆς αὐτῆς; (Θεωροῦμε τὴν τροχιὰ τοῦ διαστημοπλοίου κυκλική).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΓΕΝΙΚΗ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

280. Σ' ἕνα μεικτὸ Γυμνάσιο γράφτηκαν 635 μαθητὲς καὶ μαθήτριες. Ἂν γράφονταν 50 μαθητὲς λιγότεροι καὶ 15 μαθήτριες περισσότερες, ὁ ἀριθμὸς τῶν μαθητῶν θὰ ἦταν ἴσος μὲ τὸν ἀριθμὸ τῶν μαθητριῶν. Πόσοι μαθητὲς καὶ πόσες μαθήτριες γράφτηκαν;

281. Ἕνας ἐργάτης ἔκανε τὰ $\frac{3}{5}$ ἑνὸς ἔργου σὲ 12 h· κατόπιν πῆραν καὶ δεύτερο ἐργάτη. Ἔτσι τὸ ἔργο τελείωσε συνολικὰ σὲ 15 h. Πόσο μέρος τοῦ ἔργου ἔκανε ὁ δεύτερος ἐργάτης;

282. Ἀπὸ δύο πόλεις Α, Β ἀναχωροῦν ταυτόχρονα δύο κινητὰ α, β. Ἂν ἡ ταχύτητα τοῦ α εἶναι μεγαλύτερη ἀπὸ τὴν ταχύτητα τοῦ β κατὰ 10 km τὴν ὥρα καὶ τὰ κινητὰ κινηθοῦν στὴν ἴδια κατεύθυνση, θὰ συναντηθοῦν ὕστερα ἀπὸ 42 h. Ἂν ὅμως κινηθοῦν ἀντίθετα, θὰ συναντηθοῦν ὕστερα ἀπὸ 7 h. Νὰ βρεθοῦν οἱ ταχύτητες καὶ ἡ ἀπόσταση ΑΒ.

283. Ἕνας ἐργολάβος ἔχει 3 συνεργεῖα ἐργάτες. Τὸ α′ μπορεῖ νὰ τελειώσει ἕνα ἔργο σὲ 8 ἡμέρες, τὸ β′ σὲ 5 ἡμέρες καὶ τὸ γ′ σὲ 15 ἡμέρες. Ὁ ἐργολάβος παίρνει τὰ $\frac{2}{3}$ ἀπὸ τοὺς ἐργάτες τοῦ α′ συνεργείου, τὸ $\frac{1}{3}$ ἀπὸ τοῦ β′ καὶ τὰ $\frac{3}{4}$ ἀπὸ τοῦ γ′ καὶ σχηματίζει ἕνα νέο συνεργεῖο. Σὲ πόσες ἡμέρες θὰ τελειώσει τὸ ἔργο τὸ νέο συνεργεῖο;

284. Μιὰ περιουσία ἔπρεπε νὰ διανεμηθεῖ ἀνάμεσα στοὺς κληρονόμους κάποιου ποὺ πέθανε, καὶ θὰ ἔπαιρνε ὁ καθένας 288.000 δρχ. Ἐπειδὴ ὅμως δύο ἀπὸ αὐτοὺς παραιτήθηκαν, οἱ ὑπόλοιποι πῆραν ἀπὸ 432.000 δρχ. ὁ καθένας. Πόσοι ἦταν οἱ κληρονόμοι;

285. Νὰ βρεθεῖ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὰ $\frac{2}{3}$ αὐξανόμενα κατὰ 52 δίνουν ἄθροισμα κατὰ 12 μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ διπλάσιό του.

286. Τρεῖς ἐργάτες, ἐργαζόμενοι μαζί, σὲ πόσες ὧρες θὰ ἐκτελέσουν ἕνα ἔργο, ἂν ὁ πρῶτος μαζὶ μὲ τὸν δεύτερο ἐκτελοῦν τὸ μισὸ ἔργο σὲ 6 h, ὁ πρῶτος μαζὶ μὲ τὸν τρίτο ἐκτελοῦν ὁλόκληρο τὸ ἔργο σὲ 15 h, καὶ ὁ β′ μαζὶ μὲ τὸν γ′ σὲ 20 h.

287. Κάποιος πεθαίνοντας ἀφήνει στὸ γιό του τὰ $\frac{2}{5}$ τῆς περιουσίας του, στὴ θυγατέρα του τὰ $\frac{3}{8}$ καὶ στὴ σύζυγό του τὸ ὑπόλοιπο, δηλαδὴ 315.000 δρχ. Πόση ἦταν ἡ περιουσία;

288. Ἕνας ἐργάτης ἐκτελεῖ τὰ $\frac{2}{3}$ ἑνὸς ἔργου σὲ 9 ἡμέρες. Ἄλλος ἐργάτης ἐκτελεῖ τὰ $\frac{5}{8}$ τοῦ ἴδιου ἔργου σὲ 5 ἡμέρες. Σὲ πόσες ἡμέρες θὰ ἐκτελέσουν τὸ ἔργο αὐτό, ἂν ἐργαστοῦν μαζὶ καὶ οἱ δύο ἐργάτες;

289. Τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ $\frac{1}{4}$ τῶν $\frac{3}{5}$ τῆς ἡλικίας ἑνὸς ἀνθρώπου εἶναι 10 ἔτη. Πόση εἶναι ἡ ἡλικία αὐτοῦ τοῦ ἀνθρώπου;

290. Τρεῖς ἐργάτες μοιράστηκαν 19.600 δρχ. μὲ τέτοιο τρόπο, ὥστε ὁ ἕνας ἀπὸ αὐτοὺς νὰ λάβει 800 δρχ. λιγότερες ἀπὸ ὅσα ἔλαβε ὁ καθένας ἀπὸ τοὺς δύο ἄλλους. Πόσα χρήματα ἔλαβε ὁ καθένας;

Γ Ε Ω Μ Ε Τ Ρ Ι Α

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Α΄

1. ΦΥΣΙΚΑ ΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΤΕΡΕΑ

1.1. Παντοῦ γύρω μας βλέπουμε «γεωμετρία». Στὴν αἴθουσα, στὴν αὐλή, στὸ κτίριο τοῦ Γυμνασίου, στὶς διακοσμήσεις, ἀλλὰ καὶ στὰ φύλλα τῶν δέντρων, στὴν κηρύθρα, στὰ πετρώματα, διακρίνουμε διάφορα «γεωμετρικὰ» σχήματα.

1.2. Ἀνάμεσα στὰ διάφορα στερεὰ* ποὺ βρίσκονται γύρω μας, εἶναι εὔκολο νὰ παρατηρήσουμε μερικὰ βασικὰ κοινὰ γνωρίσματα:

Τὸ βάρος: Ὅλα τὰ στερεὰ σώματα ἔχουν βάρος.

Τὸν ὄγκο: Δηλαδὴ τὴν περιορισμένη ἔκταση ποὺ καταλαμβάνει κάθε στερεὸ στὸ ἀπεριόριστο διάστημα (χῶρο) τοῦ περιβάλλοντός μας. Αὐτὴ ἐκτείνεται μέσα στὸ χῶρο σὲ β ά θ ο ς, σὲ π λ ά τ ο ς, καὶ σὲ μ ῆ κ ο ς. Γιὰ τοῦτο λέμε ὅτι κάθε στερεὸ σῶμα, καθὼς καὶ ὁ χῶρος ποὺ μᾶς περιβάλλει, ἔχουν τρεῖς δ ι α σ τ ά σ ε ι ς.

Τὸ σχῆμα: Κάθε στερεὸ ἔχει μιὰν ὁρισμένη μορφή, ἕνα ὁρισμένο σχῆμα. Τὴ μορφὴ (σχῆμα) τοῦ στερεοῦ τὴν ἀντιλαμβανόμαστε ἀπὸ τὴν ἐπιφάνειά του.

1.3. Γιὰ νὰ διευκολυνθοῦμε στὴ μελέτη τῶν στερεῶν σωμάτων, τὰ ἐξετάζουμε ἀπὸ διάφορες ἀπόψεις. Πρῶτοι οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες** φιλόσοφοι ἐξέτασαν τὰ στερεὰ ἰδιαίτερα ὡς πρὸς τὸ σχῆμα καὶ τὸ μέγεθος, χωρὶς νὰ λάβουν ὑπόψη τὰ λοιπὰ γνωρίσματά τους (βάρος, ὕλη, χρῶμα ...). Ἔτσι ἀπὸ τὰ

---

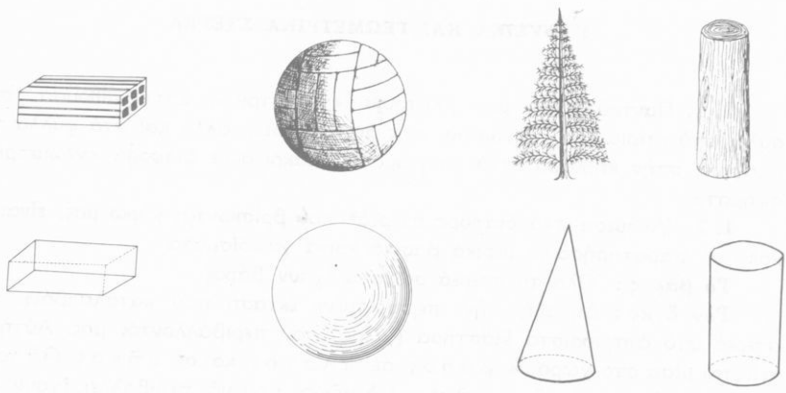
* Ἕνα ὑλικὸ σῶμα λέγεται στερεό, ἂν τὸ σχῆμα καὶ τὸ μέγεθός του εἶναι ἀμετάβλητα, ὅταν οἱ ἐξωτερικὲς συνθῆκες δὲν ἀλλάζουν αἰσθητά.

** Οἱ γεωμετρικὲς γνώσεις, ὡς ἐκείνη τὴν ἐποχή, ἀποτελοῦσαν πρακτικὴ τέχνη καὶ ὄχι ἐπιστήμη. Οἱ Ἀρχαῖοι Ἕλληνες δημιούργησαν τὸ λαμπρὸ οἰκοδόμημα τῆς Μαθηματικῆς ἐπιστήμης.

στερεὰ τοῦ φυσικοῦ περιβάλλοντος ὁδηγήθηκαν στὴν ἰδέα τοῦ γεωμετρικοῦ στερεοῦ. Ἂν φανταστεῖτε ἕνα στερεὸ μὲ σχῆμα καὶ μέγεθος ὁρισμένα καὶ ἀμετάβλητα, ὅταν μετατοπίζεται στὸ χῶρο, χωρὶς ἄλλα γνωρίσματα (βάρος, χρῶμα, ...), θὰ ἔχετε τὴν ἰδέα ἑνὸς γεωμετρικοῦ στερεοῦ. Βέβαια στὸ φυσικό μας περιβάλλον δὲν ὑπάρχει τέτοιο στερεὸ χωρὶς ὕλη, βάρος, ...· ὅπως δὲν ὑπάρχει π.χ. ὑλικὸς ἄξονας, γύρω ἀπὸ τὸν ὁποῖο περιστρέφεται ἡ γῆ, ἀλλὰ εἶναι μόνο νοητὸς καὶ ἐπινοήθηκε γιὰ νὰ μᾶς διευκολύνει στὴ μελέτη τοῦ σχήματος, τῶν διαστάσεων καὶ τῶν κινήσεών της.

2. ΑΠΛΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΤΕΡΕΑ

1.2. Ἀπὸ τὸ δημοτικὸ σχολεῖο ἔχετε μιὰ πρώτη γνωριμία μὲ μερικὰ ἁπλὰ γεωμετρικὰ στερεά, ποὺ προέρχονται ἀπὸ τὰ ἀντίστοιχα φυσικὰ στερεά.

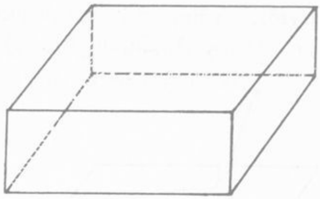


Σχ. 1. Πάνω: Εἰκόνες φυσικῶν στερεῶν. Κάτω: Εἰκόνες γεωμετρικῶν στερεῶν.

Τώρα θὰ περιγράψουμε σύντομα δύο χαρακτηριστικὰ στερεὰ ἀπὸ τὰ πιὸ ἁπλά: τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο καὶ τὸν κύλινδρο.

2.2. Τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο.

Ἕνα κουτὶ ἀπὸ κιμωλίες ἢ ἀπὸ σπίρτα, πολλὰ κιβώτια καὶ γενικὰ πολλὰ ἀντικείμενα τοῦ περιβάλλοντός μας ἔχουν σχῆμα ὀρθογώνιου παραλληλεπίπεδου. Ἂς προσέξουμε τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο τοῦ σχ. 2. Παρατηροῦμε ὅτι ἡ ἐπιφάνειά του ἀποτελεῖται ἀπὸ 6 διακεκριμένα ἐπίπεδα μέρη, τὶς ἕδρες. Κάθε ἕδρα ἔχει σχῆμα ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο. Ἀνὰ δύο οἱ ἀπέναντι ἕδρες δὲν τέμνονται, ἐνῶ ἀνὰ δύο συνεχόμενες τέμνονται (συναντῶνται) σὲ μία γραμμή. Καθεμιὰ ἀπὸ αὐτὲς τὶς γραμμὲς λέγεται ἀκμὴ τοῦ στερεοῦ. Μερικὲς ἀπὸ τὶς ἀκμὲς τέμνονται (συναντῶνται) ἀνὰ τρεῖς σὲ ἕνα σημεῖο. Καθένα ἀπὸ αὐτὰ τὰ σημεῖα λέγεται κορυφὴ τοῦ ὀρθογωνίου παραληλεπιπέδου.

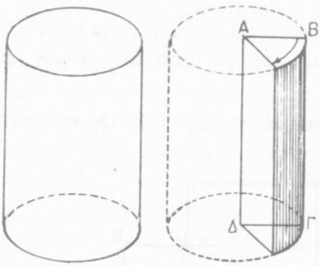


Σχ. 2

Δηλαδὴ κάθε ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο ἔχει: 6 ἕδρες, 12 ἀκμὲς καὶ 8 κορυφές.

2.3. Ὁ κύλινδρος

Ἕνα κουτὶ ἀπὸ γάλα, ἕνας κλειστὸς σωλήνας θερμάστρας ἢ νεροῦ, πολλὰ μολύβια, ἄξονες ἀπὸ διάφορα ἐργαλεῖα ἢ μηχανές, ἔχουν σχῆμα κυλίνδρου.



Σχ. 3

Μιὰ περιστρεφόμενη θύρα, ὅπως ὁρισμένες θύρες π.χ. σὲ τράπεζες καὶ μεγάλα καταστήματα, μᾶς δείχνει πῶς γεννᾶται ἕνας κύλινδρος μὲ τὴν περιστροφὴ ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ γύρω ἀπὸ μία πλευρά του ΑΔ (σχ. 3).

Ἂς προσέξουμε ἕναν κύλινδρο, π.χ. τὸν κύλινδρο τοῦ σχ. 3. Παρατηροῦμε ὅτι αὐτὸς τελειώνει:

α) Σὲ μιὰ καμπύλη ἐπιφάνεια, ποὺ παράγεται ἀπὸ τὴν πλευρὰ ΒΓ κατὰ τὴν περιστροφή της γύρω ἀπὸ τὴν ΑΔ.

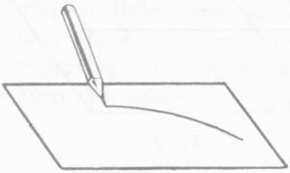
β) Σὲ δύο ἐπίπεδες ἐπιφάνειες, ποὺ παράγονται ἀπὸ τὶς πλευρὲς ΑΒ, ΓΔ κατὰ τὴν περιστροφὴ τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ γύρω ἀπὸ τὴν ΑΔ.

Παρατηροῦμε ἀκόμη ὅτι κάθε ἐπίπεδη ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου τελειώνει σὲ μιὰ καμπύλη γραμμή, ποὺ ὀνομάζεται κύκλος.

3. ΤΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

3.1. Τὸ γεωμετρικὸ σχῆμα ὡς σύνολο σημείων.

α) Καθὼς εἴδαμε, στὸ ὀρθογ. παραλληλεπίπεδο οἱ συνεχόμενες ἀκμὲς κάθε ἕδρας του συναντῶνται ἀνὰ δύο σ' ἕνα σημεῖο. Τί ἀκριβῶς εἶναι τὸ γεωμετρικὸ σημεῖο; Εἶναι δύσκολο νὰ ἀπαντήσουμε. Πάντως, ὁ κόκκος σκόνης, τὸ ἴχνος τῆς μύτης τοῦ μολυβιοῦ μας (ὅταν τὸ κρατοῦμε ἀκίνητο) στὸ σχέδιο ἀποτελοῦν μιὰν ἀρκετὰ καλὴ εἰκόνα του. Γι' αὐτὸ τὸ λόγο, τὸ σημεῖο στὸ σχέδιο τὸ παριστάνουμε μὲ μιὰ τελεία καὶ τὸ ὀνομάζουμε μὲ ἕνα κεφαλαῖο γράμμα (Σημεῖο Α, Σημεῖο Β, ...).



Σχ. 4

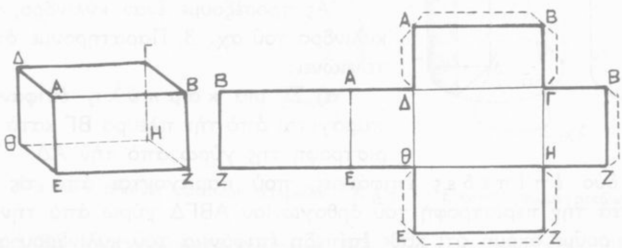
β) Ἂν μετακινήσουμε χωρὶς διακοπὴ τὴ μύτη τοῦ μολυβιοῦ μας πάνω στὸ χαρτί, τότε τὸ ἴχνος της παριστάνει μιὰ γραμμή, σχ. 4. Ἀλλὰ σὲ κάθε θέση τοῦ μολυβιοῦ, τὸ ἴχνος τῆς μύτης του παριστάνει ἕνα σημεῖο. Δηλαδὴ ἡ γραμμὴ μπορεῖ νὰ θεωρηθεῖ ὡς μία συνεχόμενη σειρὰ ἀπὸ διαδοχικὲς θέσεις ἑνὸς σημείου ποὺ μετατοπίζεται. Γι' αὐτό, λαμβάνουμε τὴ γραμμὴ ὡς σύνολο σημείων (σημειοσύνολο).

Ἐξ ἄλλου, τὰ γνωστά μας σχήματα (τὸ ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο, ὁ κύκλος, τὸ τρίγωνο, ...) ἀπαρτίζονται ἀπὸ γραμμές. Συνεπῶς εἶναι καὶ αὐτὰ σύνολα σημείων.

3. 2. Ἰσότητα γεωμετρικῶν σχημάτων.

i) Τὸ σχ. 5 δείχνει πῶς μποροῦμε νὰ ἀναπτύξουμε τὴν ἐπιφάνεια ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου (σχ. 5α) πάνω στὸ ἐπίπεδο μιᾶς ἕδρας του (σχ. 5β).

ii) Πάνω σὲ διαφανὲς χαρτὶ ἀντιγράφουμε τὸ σχῆμα τῆς ἕδρας ΑΒΓΔ.



(α) Σχ. 5 (β)

Αὐτὸ τὸ ἀντίγραφο μποροῦμε νὰ τὸ τοποθετήσουμε κατάλληλα πάνω στὸ σχῆμα τῆς ἀπέναντι ἕδρας ΕΖΗΘ, μὲ τρόπο ὥστε τὰ δύο σχήματα νὰ ἐφαρμόσουν καὶ νὰ ἀποτελέσουν ἕνα σχῆμα. Γι' αὐτὸ λέμε πὼς αὐτὰ τὰ δύο σχήματα εἶναι ἴσα μεταξύ τους ἢ ἁπλῶς ἴσα.

Γενικά : **Δύο γεωμετρικὰ σχήματα Σ, Σ' λέγονται ἴσα μεταξύ τους, ὅταν εἶναι δυνατὸ νὰ τοποθετήσουμε τὸ ἕνα πάνω στὸ ἄλλο, μὲ τρόπο ὥστε νὰ ἐφαρμόσουν καὶ νὰ ἀποτελέσουν ἕνα σχῆμα.**

Τὸ γράφουμε: $\Sigma = \Sigma'$ *

Σύμφωνα μὲ τὰ πιὸ πάνω:

Οἱ ἀπέναντι ἕδρες τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου εἶναι ἴσες.

Ὅταν δύο γεωμετρικὰ σχήματα Σ, Σ' δὲν εἶναι ἴσα μεταξύ τους, λέμε ὅτι εἶναι ἄ ν ι σ α καὶ γράφουμε $\Sigma \neq \Sigma'$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Νὰ ἀναφέρετε φυσικὰ ἀντικείμενα, ποὺ ἔχουν τὸ σχῆμα γνωστῶν γεωμετρικῶν στερεῶν.

2. Κατασκευάστε ὑποδείγματα (μοντέλα) κύβου, πρίσματος, πυραμίδας καὶ περιγράψετέ τα.

3. Μὲ ἕνα φύλλο χαρτὶ διαφανὲς νὰ συγκρίνετε τὰ σχήματα τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν ἑνὸς τριγωνικοῦ πρίσματος. Πόσες συγκρίσεις χρειάζεστε;

4. Νὰ βρεῖτε φυσικὰ ἀντικείμενα, ποὺ τὸ σχῆμα τους εἶναι σύνθεση τῶν σχημάτων ἁπλῶν γεωμετρικῶν στερεῶν.

4. Η ΕΥΘΕΙΑ

4.1. Μιὰ φωτεινὴ ἀκτίνα, ἕνα τεντωμένο νῆμα, ἔχουν σχῆμα εὐθείας γραμμῆς. Ἡ εὐθεία, ὡς γεωμετρικὴ ἔννοια, δὲν ἔχει τὰ γνωρίσματα τῶν ὑλικῶν εὐθειῶν (πάχος, χρῶμα, βάρος). Ἔχει μόνο μία διάσταση: ἐκτείνεται σὲ μ ῆ κ ο ς. Στὴν πράξη, ἡ εὐθεία ἀντιπροσωπεύεται συνήθως ἀπὸ τὴν ἀκμὴ ἑνὸς κανόνα σχεδιάσεως. Π.χ. γιὰ νὰ ἐλέγξουμε ἂν μία ἀκμὴ ἑνὸς στερεοῦ εἶναι εὐθεία, τοποθετοῦμε πάνω της τὴν ἀκμὴ τοῦ κανόνα καὶ ἐξετάζουμε ἂν αὐτὲς οἱ δύο ἀκμὲς εἶναι δυνατὸ νὰ ἐφαρμόσουν.

Σχ. 6

Παρόμοια, μὲ ὁδηγὸ τὴν ἀκμὴ τοῦ κανόνα, χαράσσουμε εὐθεῖες γραμμὲς (σχ. 6).

4.2. Στὸ σχέδιό σας σημειῶστε ἕνα σημεῖο Α. Πόσες εὐθεῖες διέρχονται ἀπὸ αὐτό; Ἄπειρες.

Σημειῶστε ἐπίσης δύο διαφορετικὰ σημεῖα Β, Γ. Πόσες εὐθεῖες διέρχονται καὶ ἀπὸ τὰ δύο αὐτὰ σημεῖα; Μία καὶ μόνο μία εὐθεία.

Τέτοιες παρατηρήσεις μᾶς ἐξηγοῦν γιατί στὴ Γεωμετρία δεχόμαστε ὅτι:

Ἀπὸ δύο διαφορετικὰ σημεῖα διέρχεται μία καὶ μόνο μία εὐθεία.

Γι' αὐτὸ λέμε ὅτι δύο διαφορετικὰ σημεῖα Α, Β ὁρίζουν μία εὐθεία: τὴν εὐθεία ΑΒ ἢ ΒΑ.

---

* Ἤτοι ἡ ἰσότητα $\Sigma = \Sigma'$ σημαίνει ἐδῶ ὅτι τὸ Σ εἶναι ἐφαρμόσιμο (μπορεῖ νὰ ἐφαρμόσει) πάνω στὸ Σ'.

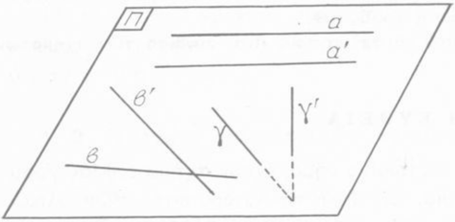
Ἐπίσης, ὀνομάζουμε μιὰν εὐθεία μὲ ἕνα γράμμα τοῦ ἀλφαβήτου μας (εὐθεία ε, εὐθεία δ, ...).

4. 4. Εἶναι εὔκολο νὰ ἀντιληφθοῦμε ὅτι ἡ εὐθεία προεκτείνεται ὅσο θέλουμε. Γι' αὐτὸ στὴ Γεωμετρία δεχόμαστε ὅτι:

Ἡ εὐθεία μπορεῖ νὰ προεκταθεῖ ἀπεριόριστα καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη.

4. 5. i) Προσέξετε τὶς εὐθεῖες τῶν πλευρῶν ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου. Οἱ ἀπέναντι εὐθεῖες βρίσκονται δύο-δύο στὸ ἴδιο ἐπίπεδο καὶ δὲν ἔχουν κανένα κοινὸ σημεῖο. Ἀντίθετα, οἱ συνεχόμενες ἔχουν δύο-δύο ἕνα κοινὸ σημεῖο.

ii) Στὸ «ἐπίπεδο» ἑνὸς φύλλου τοῦ τετραδίου σας νὰ χαράξετε δύο εὐθεῖες. Πόσα τὸ πολὺ κοινὰ σημεῖα εἶναι δυνατὸ νὰ ἔχουν;



Σχ. 7. Οἱ εὐθεῖες α, α' εἶναι μεταξύ τους παράλληλες. Οἱ εὐθεῖες β, β' καὶ γ, γ' τέμνονται.

Παρατηροῦμε ὅτι:

Ἢ δὲν ἔχουν κ α ν έ ν α κοινὸ σημεῖο, ὁσοδήποτε καὶ ἂν προεκταθοῦν, ὅπως οἱ εὐθεῖες α, α' τοῦ σχ. 7.

Ἢ ἔχουν μ ό ν ο ἕ ν α κοινὸ σημεῖο, ὅπως γίνεται μὲ τὰ ζεύγη τῶν εὐθειῶν β, β' καὶ γ, γ' τοῦ σχ. 7.

Στὴν πρώτη περίπτωση λέμε πὼς οἱ εὐθεῖες α, α' εἶναι π α ρ ά λ λ η λ ε ς*, ἐνῶ στὴ δεύτερη ὅτι τ έ μ ν ο ν τ α ι. Τὸ μοναδικὸ κοινὸ σημεῖο τους λέγεται σημεῖο τ ο μ ῆ ς.

Οἱ πιὸ πάνω παρατηρήσεις μᾶς ὁδηγοῦν στὸ ἑξῆς συμπέρασμα:

Δύο διαφορετικὲς εὐθεῖες τοῦ ἐπιπέδου εἶναι δυνατό:

α) Νὰ μὴν ἔχουν κανένα κοινὸ σημεῖο, ὁπότε λέμε ὅτι εἶναι παράλληλες.

β) Νὰ ἔχουν ἕνα μόνο κοινὸ σημεῖο, ὁπότε λέμε ὅτι τέμνονται.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

5. Σημειῶστε δύο σημεῖα Α, Β καὶ ἔπειτα χαράξετε δύο εὐθεῖες τέτοιες, ὥστε $A \in \varepsilon$, $B \in \varepsilon$, $A \in \varepsilon'$.

6. Πάνω στὴν κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου νὰ βρεῖτε εὐθεῖες χρησιμοποιώντας τὴν ἀκμὴ τοῦ κανόνα. Τί παρατηρεῖτε;

7. Σημειῶστε στὸ τετράδιό σας τρία διαφορετικὰ σημεῖα καὶ χαράξετε ἔπειτα ὅλες τὶς εὐθεῖες ποὺ διέρχονται ἀπὸ αὐτά. Πόσες τέτοιες εὐθεῖες ὑπάρχουν; (Νὰ διακρίνετε περιπτώσεις).

* Μὲ τὶς παράλληλες εὐθεῖες θὰ ἀσχοληθοῦμε πιὸ ἀναλυτικὰ σὲ ἄλλο κεφάλαιο.

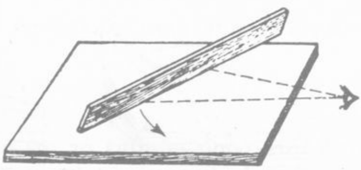
8. Ἐπαναλάβετε τὸ πιὸ πάνω πρόβλημα γιὰ τέσσερα διαφορετικὰ σημεῖα. (Διακρίνετε διάφορες περιπτώσεις).

9. Γιὰ τρεῖς εὐθεῖες α, β, γ καὶ ἕνα σημεῖο Μ τοῦ ἐπιπέδου γνωρίζετε ὅτι $M \in (\alpha \cap \beta) \cap \gamma$. Ποιὸ εἶναι τὸ σχετικὸ σχέδιο;

5. ΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

5.1. Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πίνακα, τοῦ νεροῦ ποὺ ἠρεμεῖ, τοῦ λείου πατώματος εἶναι ὑλικὲς παραστάσεις, εἰκόνες, ἐπιπέδων ἐπιφανειῶν.

5.2. Γιὰ νὰ ἐλέγξουμε ἂν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πίνακα εἶναι ἐπίπεδη, τοποθετοῦμε πάνω της τὴν ἀκμὴ τοῦ κανόνα. Πρέπει τότε, ὁποιαδήποτε κι ἂν εἶναι ἡ θέση τοῦ κανόνα, ἡ εὐθεία ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ δύο σημεῖα του νὰ βρίσκεται ὁλόκληρη πάνω στὸ ἐπίπεδο (σχ. 8).

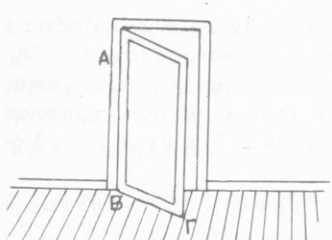


Σχ. 8

Αὐτὸ τὸ πείραμα μᾶς ὁδηγεῖ στὴν ἑξῆς ἰδιότητα τοῦ ἐπιπέδου.

Ἂν δύο διαφορετικὰ σημεῖα Α καὶ Β βρίσκονται πάνω σ' ἕνα ἐπίπεδο Π, τότε ὅλα τὰ σημεῖα τῆς εὐθείας ΑΒ εἶναι πάνω στὸ ἐπίπεδο Π.

Ἀπὸ αὐτὴ τὴν πρόταση ἐννοοῦμε ὅτι, ὅπως ἡ εὐθεία δὲν ἔχει ἄκρα ἀλλὰ μποροῦμε νὰ τὴν προεκτείνουμε ὅσο θέλουμε, ἔτσι καὶ τὸ ἐπίπεδο προεκτείνεται ἀπεριόριστα πρὸς ὅλες τὶς διευθύνσεις του.



Σχ. 9

5.3. i) Ἡ θύρα τοῦ σχ. 9 παριστάνει ἕνα ἐπίπεδο τὸ ὁποῖο διέρχεται ἀπὸ δύο διαφορετικὰ σημεῖα Α, Β (τὰ κέντρα τῶν στροφέων). Ἀπὸ τὴ στροφὴ τοῦ ἐπιπέδου τῆς θύρας γύρω ἀπὸ τὴν εὐθεία του ΑΒ ἐννοοῦμε ὅτι:

Ἀπὸ μία εὐθεία διέρχονται ἄπειρα ἐπίπεδα.

Αὐτὰ τὰ ἐπίπεδα ἀντιπροσωπεύονται ἀπὸ τὶς διαφορετικὲς θέσεις τῆς στρεφόμενης θύρας.

ii) Ἂν τοποθετήσουμε ἕνα καρφὶ στὸ πάτωμα (σημεῖο Γ) ἔξω ἀπὸ τὴν εὐθεία ΑΒ τῶν στροφέων, τότε ἡ πόρτα θὰ προσκρούσει στὸ καρφὶ καὶ θὰ σταθεροποιηθεῖ σὲ μιὰν ὁρισμένη θέση. Ἡ παρατήρηση αὐτὴ μᾶς ὁδηγεῖ στὴν ἀκόλουθη πρόταση:

Μία εὐθεία ΑΒ καὶ ἕνα σημεῖο Γ ἔξω ἀπὸ αὐτὴν ὁρίζουν ἕνα καὶ μόνον ἕνα ἐπίπεδο.

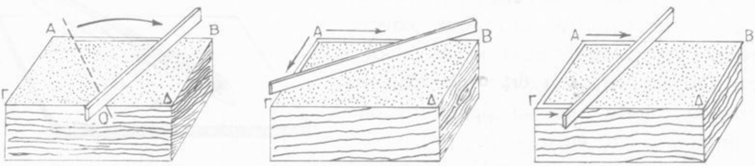
Σ' αὐτὸ τὸ ἐπίπεδο κεῖται ἡ εὐθεία ΑΒ καὶ τὸ σημεῖο Γ.

iii) Ἂν σκεφτοῦμε ὅτι ἡ εὐθεία ΑΒ ὁρίζεται ἀπὸ τὰ δύο διαφορετικὰ σημεῖα Α, Β, τότε ἡ προηγούμενη πρόταση διατυπώνεται καὶ ὡς ἑξῆς:

Τρία διαφορετικὰ σημεῖα Α, Β, Γ, ποὺ δὲν βρίσκονται πάνω στὴν ἴδια εὐθεία, ὁρίζουν ἕνα καὶ μόνον ἕνα ἐπίπεδο.

5.3. Γένεση ἐπιπέδου μὲ κίνηση εὐθείας.

Τὰ πιὸ κάτω σχέδια 10α, β, γ δείχνουν πῶς δημιουργεῖται ἕνα ὑλικὸ ἐπίπεδο μὲ κατάλληλη μετατόπιση μιᾶς ὑλικῆς εὐθείας.



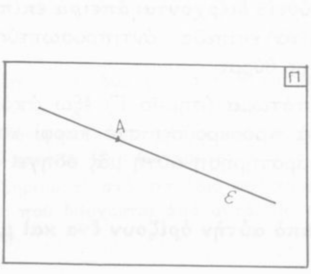
(α) (β) (γ)

Σχ. 10

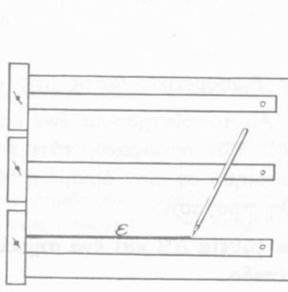
α) Μὲ στροφὴ μιᾶς εὐθείας.

Πάνω στὸ ἐπίπεδο ἑνὸς σκληροῦ φύλλου χαρτιοῦ σχεδιάζουμε μία εὐθεία ε καὶ ἔπειτα κατὰ μῆκος της τοποθετοῦμε τὴν ἀκμὴ τοῦ κανόνα (σχ. 11). Ἂν τώρα περιστρέψουμε τὸν κανόνα γύρω ἀπὸ ἕνα σημεῖο Α τῆς ε, προσέχοντας ὥστε ἡ ἀκμή του νὰ παραμένει στὸ ἐπίπεδο τοῦ χαρτιοῦ, θὰ παρατηρήσουμε ὅτι, σὲ μιὰν ὁλόκληρη στροφή, ἡ ἀκμὴ τοῦ κανόνα *θὰ διαγράψει ὁλόκληρο τὸ ἐπίπεδο*.

Ὁ πιὸ πάνω τρόπος ἐργασίας εἶναι *μία στροφὴ τῆς εὐθείας ε γύρω ἀπὸ τὸ σημεῖο Α*.



Σχ. 11



Σχ. 12

β) Μὲ παράλληλη μετατόπιση μιᾶς εὐθείας.

Πάνω στὸ ἐπίπεδο τοῦ πίνακα ἢ σὲ μιὰ πινακίδα σχεδιάσεως, τοποθετοῦμε τὸ ταῦ, ὅπως δείχνει τὸ σχ. 12, καὶ τὸ κάνουμε νὰ γλιστρήσει, προσέχοντας ὥστε ἡ κεφαλή του νὰ ἐφαρμόζει σταθερὰ πάνω στὴν πλευρὰ τοῦ πίνακα (ἢ τῆς πινακίδας).

Παρατηροῦμε ὅτι, καθὼς τὸ ταῦ γλιστρᾶ, ἡ εὐθεία ε τῆς ἀκμῆς τοῦ βραχίονα τοῦ ταῦ διαγράφει τὸ ἐπίπεδο τοῦ πίνακα.

Αὐτὸς ὁ τρόπος ἐργασίας λέγεται παράλληλη μετατόπιση τῆς εὐθείας ε.

Ἀπὸ τὰ προηγούμενα συνάγουμε ὅτι:

Μιὰ ἐπίπεδη ἐπιφάνεια παράγεται μὲ κατάλληλη μετατόπιση μιᾶς εὐθείας.

5.4. Τὸ ἐπίπεδο ὡς σημειοσύνολο.

Ἐπειδὴ ἡ εὐθεία εἶναι ἕνα σημειοσύνολο καὶ τὸ ἐπίπεδο παράγεται ἀπὸ τὴν εὐθεία, εἶναι φυσικὸ νὰ θεωρήσουμε τὸ ἐπίπεδο ὡς σημειοσύνολο*.

(Ἂν χτυπήσουμε ἕνα σπόγγο πάνω στὸν πίνακα, τότε ὁ πίνακας σκεπάζεται μὲ σκόνη κιμωλίας. Ἂν κάθε κόκκος σκόνης παριστάνει ἕνα σημεῖο, τότε τὸ στρῶμα τῆς σκόνης τοῦ πίνακα παριστάνει τὸ σημειοσύνολο τοῦ ἐπιπέδου).

5.5. Τομὴ δύο διαφορετικῶν ἐπιπέδων.

Προσέξετε δύο συνεχόμενες ἕδρες στὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο. Ἔχουν κοινὰ σημεῖα, ποὺ βρίσκονται πάνω σὲ μιὰν εὐθεία. Ὅταν δύο διαφορετικὰ ἐπίπεδα ἔχουν κοινὰ σημεῖα, τότε λέμε ὅτι τέμνονται. Σ' αὐτὴ τὴν περίπτωση τὸ σύνολο τῶν κοινῶν σημείων εἶναι μία εὐθεία, ποὺ λέγεται τομὴ τῶν δύο ἐπιπέδων.

5.6. Ἐπίπεδα σχήματα.

Σ' αὐτὸ τὸ βιβλίο περιοριζόμαστε στὴ μελέτη γεωμετρικῶν σχημάτων, ὅπως εἶναι ἡ εὐθεία, ὁ κύκλος, ἡ γωνία, ποὺ ἔχουν ὅλα τους νὰ σημεῖα πάνω σ' ἕνα ἐπίπεδο καὶ ὀνομάζονται γι' αὐτὸ ἐπίπεδα σχήματα. Ὁ ἰδιαίτερος κλάδος τῆς γεωμετρίας ποὺ ἀναφέρεται στὰ ἐπίπεδα σχήματα λέγεται ἐπιπεδομετρία.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

10. Νὰ ἀναφέρετε παραδείγματα σχηματισμοῦ ἑνὸς ἐπιπέδου μὲ κατάλληλη κίνηση μιᾶς εὐθείας.

---

* Τὸ σημειοσύνολο ἑνὸς ἐπιπέδου εἶναι διαφορετικοῦ εἴδους ἀπὸ τὸ σημειοσύνολο μιᾶς εὐθείας.

11. Ἐξετάστε ἂν εἶναι δυνατὸ νὰ μὴν εἶναι ἐπίπεδο σχῆμα ἕνα τρίγωνο.

12. Ἐξετάστε ἂν εἶναι δυνατὸ ἕνα τετράπλευρο νὰ μὴν εἶναι ἐπίπεδο σχῆμα.

13. Τέσσερα διαφορετικὰ σημεῖα δὲν βρίσκονται πάνω στὸ ἴδιο ἐπίπεδο. Ἐξετάστε ἂν τρία ἀπὸ αὐτὰ βρίσκονται πάνω στὴν ἴδια εὐθεία.

14. Πόσα ἐπίπεδα ὁρίζουν τὰ 4 διαφορετικὰ σημεῖα πού, ἂν ληφθοῦν ἀνὰ τρία, δὲν βρίσκονται πάνω στὴν ἴδια εὐθεία;

ΕΠΙΠΕΔΟΜΕΤΡΙΑ

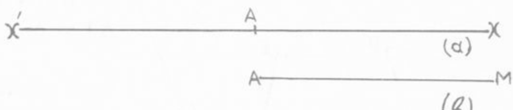
ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β'

6. Η ΗΜΙΕΥΘΕΙΑ

Πάνω σὲ μιὰ εὐθεία χχ' σημειώνουμε ἕνα σημεῖο Α, σχ. 13.

Παρατηροῦμε τότε ὅτι ἡ ε χωρίζεται σὲ δύο ἀπεριόριστα μέρη. Καθένα ἀπὸ αὐτὰ λέγεται *ἡμιευθεία*.

Τὸ σημεῖο Α εἶναι τὸ μοναδικὸ ἄκρο καθεμιᾶς ἀπὸ τὶς ἡμιευθεῖες τοῦ σχ. 13α καὶ λέγεται *ἀρχὴ* καθεμιᾶς ἀπὸ αὐτὲς τὶς ἡμιευθεῖες.



Σχ. 13

Δηλαδή, ἡ ἡμιευθεία μπορεῖ νὰ προεκταθεῖ ἀπεριόριστα *πρὸς τὴ μία* μόνο κατεύθυνση. Μιὰ ἡμιευθεία ὀνομάζεται μὲ δύο τρόπους:

i) Μὲ δύο κεφαλαῖα γράμματα, π.χ. ΑΜ. Ἀπὸ αὐτὰ τὸ πρῶτο εἶναι τὸ ὄνομα τῆς ἀρχῆς, ἐνῶ τὸ δεύτερο εἶναι τὸ ὄνομα ἑνὸς ὁποιουδήποτε ἄλλου σημείου της. Π.χ. ἡ ἡμιευθεία ΑΜ τοῦ σχ. 13β ἔχει ἀρχὴ τὸ Α.

ii) Μὲ ἕνα κεφαλαῖο γράμμα, τὸ ὄνομα τῆς ἀρχῆς της, καὶ ἕνα μικρὸ γράμμα γιὰ τὴν κατεύθυνση πρὸς τὴν ὁποία ἡ ἡμιευθεία μπορεῖ νὰ προεκταθεῖ ἀπεριόριστα. Π.χ. στὸ σχ. 13α τὸ σημεῖο Α χωρίζει τὴν εὐθεία χ'Αχ στὶς δύο ἡμιευθεῖες Αχ καὶ Αχ'. Καθεμιὰ ἀπὸ αὐτὲς τὶς ἡμιευθεῖες λέγεται *ἀντίθετη* ἢ *ἀντικειμένη* τῆς ἄλλης.

7. ΤΟ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟ ΤΜΗΜΑ

Σχ. 14

Πάνω σὲ μιὰν εὐθεία ε σημειώνουμε δύο σημεῖα Α, Β.

Τὸ σύνολο ποὺ ἀπαρτίζεται ἀπὸ τὰ δύο σημεῖα καὶ ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς εὐθείας ε ποὺ βρίσκονται ἀνάμεσά τους λέγεται *εὐθύγραμμο τμῆμα* ΑΒ ἢ ΒΑ.

Τὰ σημεῖα Α, Β λέγονται ἄκρα τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος ΑΒ. Ἂν αὐτὰ τὰ ἄκρα συμπέσουν (Α ≡ Β), τότε τὸ ΑΒ λέγεται μηδενικὸ εὐθύγραμμο τμῆμα.

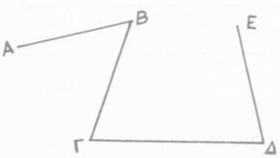
8. Η ΤΕΘΛΑΣΜΕΝΗ ΓΡΑΜΜΗ. ΠΟΛΥΓΩΝΟ

8.1. Στὸ σχ. 15 ἔχουμε τέσσερα εὐθύγραμμα τμήματα, μὲ τὴ σειρὰ τὰ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ καὶ ΔΕ. Παρατηροῦμε ὅτι:

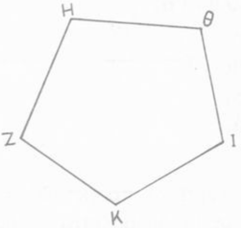
Τὸ πρῶτο ΑΒ καὶ τὸ δεύτερο ΒΓ ἔχουν ἕνα κοινὸ ἄκρο καὶ δὲν βρίσκονται πάνω στὴν ἴδια εὐθεία. Ὅμοια τὸ δεύτερο ΒΓ καὶ τὸ τρίτο ΓΔ ἔχουν ἕνα κοινὸ ἄκρο καὶ δὲν βρίσκονται πάνω στὴν ἴδια εὐθεία κ.ο.κ. Ἡ γραμμὴ ΑΒΓΔΕ καλεῖται τεθλασμένη γραμμή.

Τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, Ε τῆς πιὸ πάνω τεθλασμένης γραμμῆς λέγονται κορυφές. Τὰ σημεῖα Α καὶ Ε λέγονται ἄκρα καὶ τὰ τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ καὶ ΔΕ πλευρές.

8.2. Μία τεθλασμένη γραμμὴ τοῦ ἐπιπέδου λέγεται κυρτή, ὅταν ἡ εὐθεία, ποὺ διέρχεται ἀπὸ δύο ὁποιεσδήποτε διαδοχικὲς κορυφές της, ἀφήνει ὅλες τὶς ἄλλες κορυφὲς πρὸς τὸ ἴδιο μέρος μαζὶ μὲ τὴν τεθλασμένη γραμμή. Π.χ. ἡ τεθλασμένη γραμμὴ τοῦ σχ. 16 εἶναι κυρτή, ἐνῶ ἡ τεθλασμένη γραμμὴ τοῦ σχ. 15 δὲν εἶναι κυρτή. Γιατί;



Σχ. 15



Σχ. 16

8.3. Ὅταν τὰ ἄκρα μιᾶς τεθλασμένης γραμμῆς συμπίπτουν, τότε αὐτὴ λέγεται κλειστὴ τεθλασμένη γραμμὴ ἢ πολύγωνο. Ἔτσι, στὸ σχ. 16 ἔχουμε ἕνα πολύγωνο: τὸ ΖΗΘΙΚ.

Ἕνα πολύγωνο ἔχει τὸν ἴδιο ἀριθμὸ κορυφὲς καὶ πλευρές. Ἂν αὐτὸς ὁ ἀριθμὸς εἶναι 3, 4, 5, ..., τὸ πολύγωνο λέγεται τρίγωνο, τετράπλευρο, πεντάγωνο, ... ἀντιστοίχως. Κάθε εὐθ. τμῆμα ποὺ συνδέει δύο μὴ γειτονικὲς κορυφὲς τοῦ πολυγώνου καλεῖται διαγώνιος τοῦ πολυγώνου. Ἔτσι, τὸ πολύγωνο ΖΗΘΙΚ τοῦ σχ. 16 εἶναι πεντάγωνο καὶ ἀπὸ τὴν κορυφή του Ζ ξεκινοῦν οἱ διαγώνιοι ΖΘ καὶ ΖΙ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

15. Πάνω σὲ μιὰν εὐθεία ε σημειῶστε δύο διαφορετικὰ σημεῖα Α καὶ Β. Ποιὲς ἡμιευθεῖες ὁρίζονται α) μὲ ἀρχὴ τὸ Α, β) μὲ ἀρχὴ τὸ Β;

16. Πάνω σὲ μιὰν εὐθεία ε σημειῶστε 4 διαφορετικὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ. Νὰ βρεῖτε ὅλα τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ποὺ σχηματίζονται.

17. Πάνω σ' ἕνα ἐπίπεδο σημειῶστε 5 διαφορετικὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, Ε τέτοια, ὥστε

νὰ μὴ βρίσκονται ἀνὰ τρία πάνω στὴν ἴδια εὐθεία. Πόσα εὐθ. τμήματα ὁρίζονται μ' αὐτὸ τὸν τρόπο;

18. Νὰ σχεδιάσετε ἕνα ἑξάγωνο καὶ ἔπειτα νὰ βρεῖτε πόσες διαγώνιες ἄγονται α) ἀπὸ μιὰ κορυφή, β) ἀπὸ ὅλες μαζὶ τὶς κορυφές του.

19. Τὸ προηγούμενο πρόβλημα νὰ ἐξεταστεῖ καὶ στὴν περίπτωση 7/γώνου, 8/γώνου.

9. ΙΣΑ, ΑΝΙΣΑ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΑ ΤΜΗΜΑΤΑ

9. 1. Ὁρισμοὶ

Χαράζουμε δύο εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΓΔ καὶ μία ἡμιευθεία Οχ. Μὲ τὸ διαβήτη ἢ τὸ διαστημόμετρο μεταφέρουμε τὸ ΑΒ πάνω στὴν Οχ, μὲ τρόπο ὥστε τὸ ἕνα ἄκρο του νὰ συμπέσει μὲ τὴν ἀρχὴ Ο τῆς ἡμιευθείας (σχ. 17).

Τὸ ἴδιο ἐπαναλαμβάνουμε καὶ γιὰ τὸ ΓΔ.

Τότε ὑπάρχουν ἀποκλειστικὰ τὰ ἑπόμενα τρία ἐνδεχόμενα:

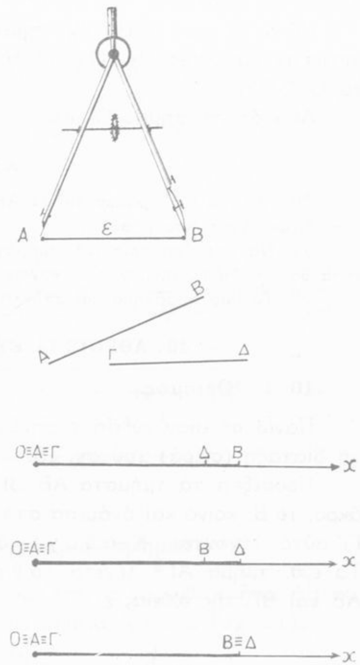
α) Τὸ Δ νὰ βρίσκεται ἀνάμεσα στὴν ἀρχὴ Ο καὶ στὸ Β (σχ. 17α). Λέμε τότε ὅτι τὸ ΑΒ εἶναι μ ε γ α λ ύ τ ε ρ ο ἀπὸ τὸ ΓΔ καὶ γράφουμε ΑΒ $>$ ΓΔ.

β) Τὸ Β νὰ βρίσκεται ἀνάμεσα στὴν ἀρχὴ Ο καὶ στὸ Δ (σχ. 17β). Τότε λέμε ὅτι τὸ ΑΒ εἶναι μ ι κ ρ ό τ ε ρ ο ἀπὸ τὸ ΓΔ καὶ γράφουμε ΑΒ $<$ ΓΔ.

γ) Τὸ Β νὰ συμπέσει (ταυτισθεῖ) μὲ τὸ Δ (σχ. 17γ), ὁπότε λέμε ὅτι τὸ ΑΒ εἶναι ἴσο μὲ τὸ ΓΔ καὶ γράφουμε ΑΒ $=$ ΓΔ.

Ὅταν ΑΒ δὲν εἶναι ἴσο μὲ ΓΔ (ὁπότε θὰ εἶναι ἢ μεγαλύτερο ἢ μικρότερο ἀπὸ αὐτό), λέμε ὅτι τὰ τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι ἄ ν ι σ α· καὶ γράφουμε ΑΒ $\neq$ ΓΔ.

Ἂς σημειωθεῖ ὅτι οἱ σχέσεις ΑΒ $>$ ΓΔ καὶ ΓΔ $<$ ΑΒ ἔχουν τὴν ἴδια σημασία.



Σχ. 17

9. 2. Ἰδιότητες

i) Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ τῆς ἰσότητας στὰ εὐθύγραμμα τμήματα ἐννοοῦμε ὅτι:

α) ΑΒ $=$ ΑΒ Ἀ ν α κ λ α σ τ ι κ ὴ ἰ δ ι ό τ η τ α

β) Ἂν εἶναι ΑΒ $=$ ΓΔ, τότε θὰ εἶναι καὶ ΓΔ $=$ ΑΒ.

Ἢ συμβολικά:

ΑΒ $=$ ΓΔ $\Rightarrow$ ΓΔ $=$ ΑΒ Σ υ μ μ ε τ ρ ι κ ὴ ἰ δ ι ό τ η τ α

ii) Ἂν, συγκρίνοντας τρία εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, βρεῖτε ὅτι: ΑΒ = ΓΔ (1) καὶ ΓΔ = ΕΖ (2), τί συμπέρασμα βγάζετε γιὰ τὰ ΑΒ καὶ ΕΖ; Ἀπὸ τὶς ἰσότητες (1) καὶ (2) συμπεραίνουμε ὅτι καὶ ΑΒ = ΕΖ.

(Νὰ ἐπαληθεύσετε αὐτὸ τὸ συμπέρασμα μὲ τὸ διαβήτη σας).

Ἢ συμβολικά:

(ΑΒ = ΓΔ καὶ ΓΔ = ΕΖ) ⇒ ΑΒ = ΕΖ Μεταβατικὴ ἰδιότητα.

iii) Ἔχετε τρία εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΓΔ καὶ ΕΖ. Μὲ τὸ διαβήτη σας βρίσκετε ὅτι ΑΒ > ΓΔ καὶ ΓΔ > ΕΖ. Ὕστερα ἀπὸ αὐτό, μπορεῖτε νὰ συγκρίνετε χωρὶς ὄργανα τὰ τμήματα ΑΒ καὶ ΕΖ; Θὰ εἶναι ΑΒ > ΕΖ.

Ὥστε (ΑΒ > ΓΔ καὶ ΓΔ > ΕΖ) ⇒ ΑΒ > ΕΖ Μεταβατικὴ ἰδιότητα

9.3. Τὸ μέσο ἑνὸς εὐθύγραμμου τμήματος.

Πάνω σὲ μιὰν εὐθεία χχ′ σημειώνουμε ἕνα σημεῖο Ο. Κατόπιν, πάνω στὶς ἀντίθετες ἡμιευθεῖες Οχ, Οχ′ μὲ τὸ διαβήτη μας λαμβάνουμε δύο ἴσα τμήματα ΟΜ, ΟΜ′.

Λέμε ὅτι τὸ σημεῖο Ο εἶναι τὸ μέσο τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος ΜΜ′.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

20. Ἂν ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ δὲν εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ ἕνα ἄλλο ΓΔ, τότε θὰ εἶναι ὁπωσδήποτε ἴσο μ' αὐτό;

21. Νὰ χαράξετε τρία εὐθ. τμήματα καὶ νὰ τὰ κατατάξετε κατὰ μέγεθος. Ποιὰ ἰδιότητα θὰ σᾶς διευκολύνει, γιὰ νὰ κάνετε λιγότερες συγκρίσεις;

22. Τὸ ἴδιο πρόβλημα καὶ στὴν περίπτωση τεσσάρων εὐθ. τμημάτων.

10. ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ

10. 1. Ὁρισμὸς

Πάνω σὲ μιὰν εὐθεία ε σημειώνουμε τρία διαφορετικὰ σημεῖα Α, Β, Γ μὲ τὴ διάταξη (σειρὰ) τοῦ σχ. 18.

Προσέξετε τὰ τμήματα ΑΒ, ΒΓ. Ἔχουν τὸ ἕνα ἄκρο, τὸ Β, κοινὸ καὶ ἀνάμεσα στὰ δύο ἄλλα ἄκρα.

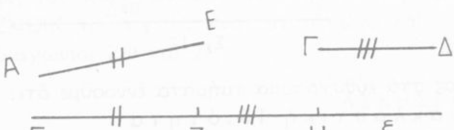
Σχ. 18

Γι' αὐτὸ λέγονται διαδοχικὰ ἢ ἐφεξῆς.

Τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΓ* λέγεται ἄθροισμα τῶν διαδοχικῶν εὐθ. τμημάτων ΑΒ καὶ ΒΓ τῆς εὐθείας ε.

Γράφουμε

ΑΒ + ΒΓ = ΑΓ



Σχ. 19

10. 2. Εὕρεση τοῦ ἀθροίσματος.

Δίνονται δύο εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ. Μὲ τὸ διαβήτη μας λαμβάνουμε πάνω σὲ μιὰν εὐθεία ε διαδοχικὰ τμήματα

* ὅπως καὶ κάθε εὐθ. τμῆμα ποὺ εἶναι ἴσο μὲ τὸ ΑΓ.

EZ = AB καὶ ZH = ΓΔ. Τὸ εὐθ. τμῆμα EH = EZ+ZH εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων AB καὶ ΓΔ.

$$AB + \Gamma\Delta = EH$$

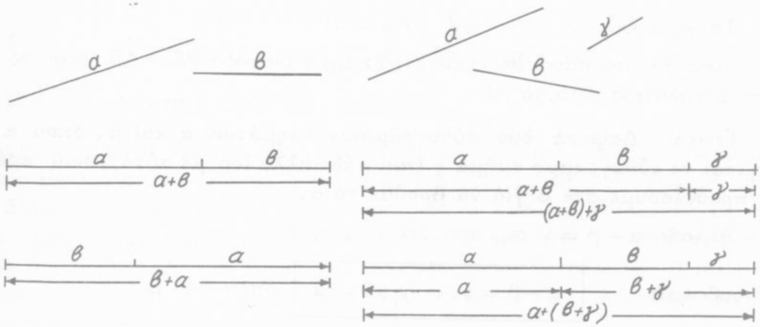
10.3. Ἄθροισμα περισσοτέρων ἀπὸ δύο εὐθυγράμμων τμημάτων.

i) Τρία ἢ περισσότερα εὐθ. τμήματα στὴ σειρὰ πάνω σὲ μιὰν εὐθεία λέγονται διαδοχικά, ὅταν τὸ 2ο εἶναι ἐφεξῆς μὲ τὸ 1ο, τὸ 3ο μὲ τὸ 2ο κ.ο.κ.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἄθροισμα τριῶν ἢ περισσότερων εὐθ. τμημάτων, βρίσκουμε τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων, σ' αὐτὸ τὸ ἄθροισμα προσθέτουμε τὸ τρίτο εὐθ. τμῆμα κ.ο.κ.

ii) Καθὼς φαίνεται στὸ σχ. 20 μὲ τὸ διαβήτη μας μποροῦμε νὰ ἐπαληθεύσουμε ὅτι γιὰ τρία εὐθ. τμήματα α, β, γ ἔχουμε:

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha \quad \text{καὶ} \quad (\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$$



$\alpha+\beta=\beta+\alpha,$ $\quad (\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$

Σχ. 20

10.4. Μία βασικὴ ἰδιότητα τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων.

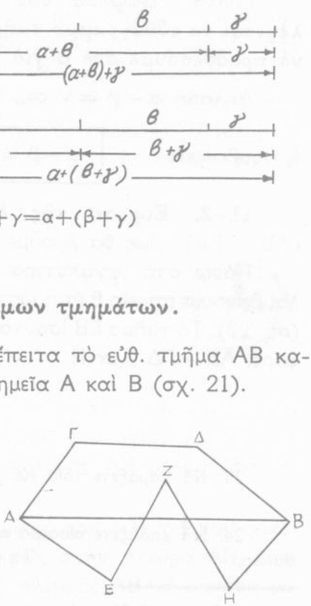
Γράφουμε δύο σημεῖα A καὶ B. Χαράζουμε ἔπειτα τὸ εὐθ. τμῆμα AB καθὼς καὶ ἄλλες τεθλασμένες γραμμὲς μὲ ἄκρα τὰ σημεῖα A καὶ B (σχ. 21).

Ἂς βροῦμε τὰ ἀθροίσματα ΑΓ+ΓΔ+ΔB, AE+EZ+ZH+HB καὶ ἂς συγκρίνουμε καθένα ἀπὸ αὐτὰ μὲ τὸ εὐθ. τμῆμα AB.

Θὰ παρατηρήσουμε ὅτι:

$$AB < A\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta B$$
$$AB < AE + EZ + ZH + HB$$

Οἱ πιὸ πάνω παρατηρήσεις μᾶς ὁδηγοῦν στὴν ἑξῆς γεωμετρικὴ πρόταση:



Σχ. 21

Τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα εἶναι μικρότερο ἀπὸ κάθε ἄλλη τεθλασμένη γραμμὴ ποὺ ἔχει τὰ ἴδια ἄκρα.

11. ΔΙΑΦΟΡΑ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ

11.1. Ὁρισμὸς

Πάνω σὲ μιὰ εὐθεία ε ἂς σημειώσουμε δύο διαδοχικὰ εὐθ. τμήματα ΑΒ καὶ ΒΓ, σχ. 22.

Σχ. 22

Θὰ ἔχουμε τότε

$$ΑΒ + ΒΓ = ΑΓ \qquad (1)$$

Παρατηροῦμε ὅτι τὸ εὐθ. τμῆμα ΒΓ* προστίθεται στὸ ΑΒ, γιὰ νὰ δώσει ἄθροισμα τὸ ΑΓ. Γι' αὐτὸ λέγεται δ ι α φ ο ρ ὰ τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων ΑΓ καὶ ΑΒ.

Τὸ γράφουμε $$ΑΓ - ΑΒ = ΒΓ \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὰ πιὸ πάνω ἐννοοῦμε ὅτι ὑπάρχει διαφορὰ ΑΓ – ΑΒ, ὅταν τὸ ΑΓ εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ ΑΒ.

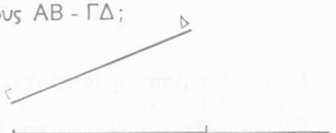
Γενικά : **Δαφορὰ δύο εὐθυγράμμων τμημάτων α καὶ β, ὅπου α>β, λέγεται τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα γ (καὶ κάθε ἄλλο ἴσο μὲ αὐτό), ποὺ πρέπει νὰ προσθέσουμε στὸ β γιὰ νὰ βροῦμε τὸ α.**

Δηλαδὴ $\alpha - \beta = \gamma$ σημαίνει ὅτι $\gamma + \beta = \alpha$

ἢ συμβολικὰ $\boxed{\alpha - \beta = \gamma \Leftrightarrow \gamma + \beta = \alpha}$ ὅπου $\alpha > \beta$

11.2. Εὕρεση τῆς διαφορᾶς. Δίνονται δύο εὐθ. τμήματα ΑΒ, ΓΔ, (ΑΒ > ΓΔ). Πῶς θὰ βροῦμε τὴ διαφορά τους ΑΒ - ΓΔ;

Πάνω στὸ μεγαλύτερο τμῆμα ΑΒ λαμβάνουμε σημεῖο Ε ἔτσι ὥστε ΑΕ = ΓΔ (σχ. 23). Τὸ τμῆμα ΕΒ ἰσοῦται μὲ τὴ διαφορὰ ΑΒ – ΓΔ. Γιατί;



Σχ. 23

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

23. Νὰ χαράξετε τρία εὐθ. τμήματα α, β, γ καὶ ἔπειτα νὰ ἐπαληθεύσετε ὅτι:

$$(\alpha + \gamma) + \beta = \alpha + (\beta + \gamma)$$

24. Νὰ χαράξετε τέσσερα εὐθ. τμήματα α, β, γ, δ καὶ ἔπειτα νὰ σχηματίσετε τὰ ἀθροίσματα: $(\alpha + \beta) + (\gamma + \delta), \quad \alpha + (\beta + \gamma + \delta)$

---

* ὅπως καὶ ὅλα τὰ τμήματα ποὺ εἶναι ἴσα μὲ τὸ ΒΓ.

25. Νὰ χαράξετε δύο εὐθ. τμήματα α, β ($\alpha=\beta$) καὶ ἕνα ἄλλο $\gamma<\beta$. Μὲ αὐτὰ νὰ ἐπαληθεύσετε ὅτι: $\alpha+\gamma=\beta+\gamma$ καὶ $\alpha-\gamma=\beta-\gamma$

26. Νὰ χαράξετε δύο εὐθ. τμήματα α, β ($\alpha>\beta$) καὶ νὰ βρεῖτε ἕνα ἄλλο εὐθ. τμῆμα χ τέτοιο, ὥστε $\beta+\chi=\alpha$.

12. ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΦΥΣΙΚΟ ΑΡΙΘΜΟ

Χαράζουμε ἕνα εὐθ. τμῆμα ΑΒ καὶ βρίσκουμε τὸ ἄθροισμα

$$AB+AB+AB=\Gamma\Delta$$

Τὸ ΓΔ λέγεται γ ι ν ό μ ε ν ο τοῦ ΑΒ ἐπὶ 3.

Τὸ γράφουμε $\Gamma\Delta=3\cdot AB$

Σχ. 24

Γενικά: **Γινόμενο ἑνὸς εὐθύγραμμου τμήματος ΑΒ ἐπὶ 2, 3, 4... λέγεται τὸ ἄθροισμα 2, 3, 4... τμημάτων ἴσων πρὸς τὸ ΑΒ.**

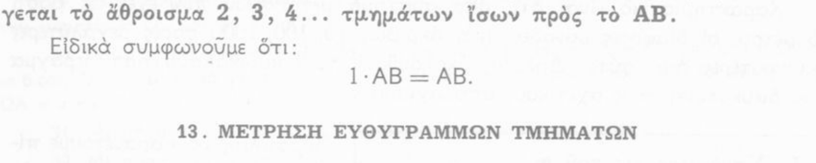
Εἰδικὰ συμφωνοῦμε ὅτι:

$$1\cdot AB=AB.$$

13. ΜΕΤΡΗΣΗ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ

13. 1. Ἀριθμητικὴ τιμὴ εὐθ. τμήματος.

Οἱ καθημερινὲς ἀνάγκες μᾶς ἐπιβάλλουν τὴ μέτρηση διαφόρων μεγεθῶν. Ὅπως εἶναι γνωστό, γιὰ νὰ μετρήσουμε ἕνα εὐθ. τμῆμα ΑΒ, χρειαζόμαστε ἕνα ἄλλο εὐθ. τμῆμα Μ, ποὺ συμφωνοῦμε νὰ τὸ λάβουμε ὡς μονάδα μετρήσεως. Ἔπειτα βρίσκουμε ἀπὸ πόσες μονάδες (καὶ μέρη τῆς μονάδας ποὺ πήραμε) ἀποτελεῖται τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ ποὺ ἔχουμε νὰ μετρήσουμε. Ἔτσι βρίσκουμε ἕναν ἀριθμό, ποὺ λέγεται ἀ ρ ι θ μ η τ ι κ ὴ τ ι μ ὴ ἢ ἁπλῶς τ ι μ ὴ τοῦ εὐθ. τμήματος.



Ὄργανα μετρήσεως εὐθ. τμημάτων

Π.χ. ὀνομάζουμε ΑΒ τὴ μιὰ πλευρὰ τοῦ μαυροπίνακα καὶ βρίσκουμε ὅτι αὐτὴ περιέχει 6 φορὲς ἀκριβῶς τὴ μεγαλύτερη πλευρὰ τοῦ γνώμονα. Τότε ὁ ἀριθμὸς 6 εἶναι ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ ἢ ἡ τιμὴ τῆς πλευρᾶς ΑΒ μὲ μονάδα μετρήσεως τὴ μεγαλύτερη πλευρὰ τοῦ γνώμονα.

Ἂν ὅμως λάβουμε ὡς μονάδα μετρήσεως τὴ μικρότερη πλευρὰ τοῦ γνώμονα καὶ βροῦμε ὅτι αὐτὴ περιέχεται 9 φορὲς ἀκριβῶς στὴν πλευρὰ ΑΒ, τότε ὁ ἀριθμὸς 9 εἶναι ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ ἢ ἡ τιμὴ τῆς πλευρᾶς ΑΒ μὲ μονάδα μετρήσεως τὴ μικρότερη πλευρὰ τοῦ γνώμονα.

Παρατήρηση

Ἄν, ὅταν μετροῦμε, ἡ μονάδα Μ ποὺ διαλέξαμε δὲν περιέχεται ἀκριβῶς ν φορὲς ($\nu \in \mathbb{N}$) στὸ μετρούμενο τμῆμα, τότε λαμβάνομε μιὰν ἄλλη μονάδα 10 ἢ 100 ἢ 1000 ... φορὲς μικρότερη ἀπὸ τὴ Μ.

13.2. Μονάδες μετρήσεως εὐθυγράμμων τμημάτων.

Σχεδὸν ὅλα τὰ κράτη, γιὰ νὰ διευκολύνουν τὶς συναλλαγές, συμφώνησαν καὶ πῆραν τὴν ἴδια μονάδα μετρήσεως εὐθ. τμημάτων.

Αὐτὴ ἡ μονάδα εἶναι τὸ γαλλικὸ μέτρο* ἢ ἁπλῶς μέτρο (m). Αὐτὸ εἶναι (περίπου) ἴσο μὲ τὸ 1/40.000.000 ἑνὸς μεσημβρινοῦ τῆς γῆς.

Χαρακτηριστικὸ εἶναι ὅτι, στὸ σύστημα μετρήσεων ποὺ ἔχει ὡς βάση τὸ μέτρο, οἱ διάφορες μονάδες εἶναι ἀκριβῶς 10, 100, 1000 φορὲς μεγαλύτερες ἢ μικρότερες ἀπὸ αὐτό. Δηλαδὴ ἀκολουθοῦν τὸ δεκαδικὸ σύστημα, πρᾶγμα ποὺ διευκολύνει τοὺς σχετικοὺς ὑπολογισμούς.

I. Ὑποδιαιρέσεις τοῦ m	
Τὸ δεκατόμετρο:	dm = 1/10 m
Τὸ ἑκατοστόμετρο:	cm = 1/100 m
Τὸ χιλιοστόμετρο:	mm = 1/1000 m
II. Πολαπλάσια τοῦ m	
Τὸ δεκάμετρο:	dam = 10 m
Τὸ ἑκατόμετρο:	hm = 100 m
Τὸ χιλιόμετρο:	km = 1000 m

Παραπλεύρως παραθέτουμε πίνακα μὲ ὑποδιαιρέσεις καὶ πολλαπλάσια τοῦ m, ποὺ χρησιμοποιοῦνται συνήθως ὡς μονάδες. Ἀπὸ αὐτὸ τὸν πίνακα προκύπτουν οἱ σχέσεις:

1m=10 dm=100 cm=1000 mm
1 km=1000 m=10000 dm
=100000 cm

Ἄλλες χρησιμοποιούμενες μονάδες μήκους εἶναι οἱ ἑξῆς:

1 τεκτονικὸς πῆχυς = 0,75 m = 75 cm

1 ὑάρδα (yard) = 0,914 m = 91,4 cm = 914 mm

Κάθε ὑάρδα ὑποδιαιρεῖται σὲ 3 πόδια (ft)

Κάθε πόδι » σὲ 12 ἴντσες (in)

Δηλαδὴ 1 yard = 3 ft = 36 in

Στὴ ναυτιλία χρησιμοποιεῖται τὸ γαλλικὸ ναυτικὸ μίλι = 1852 m.

* Σήμερα τὸ μέτρο καθορίζεται ἀπὸ τὸ πρότυπο μέτρο ποὺ φυλάγεται στὸ διεθνὲς γραφεῖο μέτρων καὶ σταθμῶν στὶς Sèvres τῆς Γαλλίας. Μὲ βάση αὐτὸ βαθμολογοῦνται μὲ ἀκρίβεια οἱ συνηθισμένοι κανόνες, τὰ μέτρα, οἱ μετροταινίες...

13.3. Σημείωση

Ἄν, στὴ μέτρηση ἑνὸς εὐθ. τμήματος ΑΒ, βροῦμε ὅτι ἡ μονάδα 1 cm περιέχεται σ' αὐτὸ ἀκριβῶς 3 φορές, τότε γράφουμε:

ΑΒ = 3 cm καὶ διαβάζουμε: τὸ ΑΒ ἔχει μῆκος 3 cm.

Δηλαδὴ ἡ γραφὴ ΓΔ = 2 m σημαίνει ὅτι τὸ ΓΔ ἔχει μῆκος 2 m.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

27. Νὰ γράψετε ἕνα εὐθ. τμῆμα καὶ ἔπειτα νὰ ἐπαληθεύσετε ὅτι:

$$2.(3.AB) = (2.3).AB$$

28. Πάνω σὲ μιὰ εὐθεία ε σημειῶστε δύο τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ τέτοια, ὥστε $AB \cap \Gamma\Delta = \varnothing$ καὶ ΑΒ = ΓΔ = 2 cm. Νὰ ἐξετάσετε ἂν ΑΓ = ΒΔ.

29. Ἕνας τριψήφιος ἀκέραιος, π.χ. ὁ 856, παριστάνει χιλιοστὰ (mm). Ποιὸ ψηφίο του παριστάνει cm καὶ ποιὸ dm;

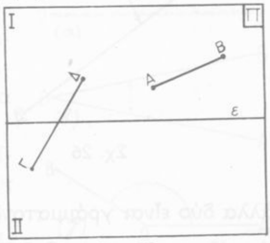
30. Πάνω σὲ μιὰ εὐθεία Οχ λαμβάνουμε σημεῖα Α, Β τέτοια, ὥστε ΟΑ=4 cm καὶ ΟΒ=6 cm. Ἂν Μ εἶναι τὸ μέσο τοῦ ΑΒ, νὰ ὑπολογίσετε τὸ μῆκος τοῦ ΟΜ. Γενίκευση γιὰ ΟΑ = α καὶ ΟΒ = β.

31. Μὲ πόσα m ἰσοῦται τὸ 1/100 τοῦ γαλλικοῦ ναυτικοῦ μιλίου;

32. Μὲ πόσα mm ἰσοῦται μῆκος 2 ἰντσῶν (in);

14. ΤΟ ΗΜΙΕΠΙΠΕΔΟ

Στὸ ἐπίπεδο Π χαράζουμε μιὰ εὐθεία ε. Αὐτὴ χωρίζει τὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου, ποὺ βρίσκονται ἔξω ἀπὸ αὐτή, σὲ δύο «περιοχὲς» Ι καὶ ΙΙ (σχ. 25).



Σχ. 25

Στὸ σχέδιο αὐτὸ τὰ σημεῖα Α, Β βρίσκονται καὶ τὰ δύο μαζὶ στὴ μία ἀπὸ αὐτὲς τὶς περιοχές. Γι'αὐτό, λέμε ὅτι βρίσκονται π ρ ὸ ς τ ὸ ἴ δ ι ο μ έ ρ ο ς τῆς εὐθείας ε.

Στὸ ἴδιο σχέδιο τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ, ἀπὸ τὰ ὁποῖα τὸ ἕνα βρίσκεται στὴ μία περιοχὴ καὶ τὸ ἄλλο στὴν ἄλλη, λέμε ὅτι βρίσκονται ἀ π ὸ τ ὰ δ ύ ο μ έ ρ η τ ῆ ς ε ὐ θ ε ί α ς ε.

Τὸ σύνολο τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου, ποὺ βρίσκονται πρὸς τὸ ἴδιο μέρος τῆς εὐθείας ε, λέγεται ἡμιεπίπεδο.

Ἡ εὐθεία ε λέγεται ἀ κ μ ὴ τοῦ ἡμιεπιπέδου.

Εἶναι φανερὸ ὅτι ἕνα ἡμιεπίπεδο μπορεῖ νὰ ὁριστεῖ ἀπὸ τὴν ἀκμὴ ε καὶ ἕνα σημεῖο του ποὺ βρίσκεται ἔξω ἀπὸ αὐτή. Γιὰ νὰ ὀνομάσουμε ἕνα ἡμιεπίπεδο, ἀναφέρουμε π ρ ῶ τ α τὴν ἀκμή του καὶ ἔπειτα ἕνα σημεῖο του. Π.χ. στὸ σχέδιο 25 διακρίνουμε τὸ ἡμιεπίπεδο (ε, Α) ἢ (ε, Β) ἢ (ε, Δ) καὶ τὸ ἡμιεπίπεδο (ε, Γ).

Ἀπὸ τὰ πιὸ πάνω ἐννοοῦμε ὅτι, ἂν σ' ἕνα ἐπίπεδο Π δοθεῖ μία εὐθεία ε, τότε ὁρίζονται τρία σημειοσύνολα, ὑποσύνολα, τοῦ Π: ἡ εὐθεία ε (τὸ ἕνα σημειοσύνολο) καὶ τὰ δύο ἡμιεπίπεδα ποὺ ἔχουν ἀκμὴ τὴν ε (τὰ δύο ἄλλα). Αὐτὰ τὰ δύο ἡμιεπίπεδα λέγονται ἀ ν τ ί θ ε τ α μεταξύ τους.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

33. Ἡ ἕνωση ἑνὸς ἡμιεπιπέδου καὶ τῆς ἀκμῆς του λέγεται κ λ ε ι σ τ ὸ ἡ μ ι ε π ί π ε δ ο. Ἂν ὀνομάσουμε K_1, K_2 τὰ δύο κλειστὰ ἡμιεπίπεδα, ποὺ ὁρίζονται πάνω σ' ἕνα ἐπίπεδο Π ἀπὸ μιὰ εὐθεία του ε, νὰ βρεῖτε τὸ σύνολο $K_1 \cup K_2$ καὶ $K_1 \cap K_2$.

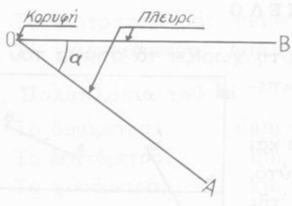
34. Σ' ἕνα ἐπίπεδο χαράξετε δύο εὐθεῖες τεμνόμενες καὶ σημειῶστε τὰ 4 ἡμιεπίπεδα ποὺ αὐτὲς ὁρίζουν.

15. Η ΓΩΝΙΑ

15. 1. Ὁρισμὸς

Χαράζουμε δύο ἡμιευθεῖες ΟΑ, ΟΒ μὲ κοινὴ ἀρχὴ Ο, σχ. 26. Σχηματίζεται τότε μία γωνία.

Γενικά: **Τὸ σχῆμα δύο ἡμιευθειῶν ποὺ ἔχουν κοινὴ ἀρχὴ λέγεται γωνία.**



Σχ. 26

Οἱ δύο ἡμιευθεῖες λέγονται π λ ε υ ρ ὲ ς τῆς γωνίας καὶ ἡ κοινὴ ἀρχή τους κ ο ρ υ φ ή.

Π.χ. ἡ γωνία τοῦ σχ. 26 ἔχει κορυφὴ τὸ σημεῖο Ο καὶ πλευρὲς τὶς ἡμιευθεῖες ΟΑ, ΟΒ.

Ὀνομάζουμε μία γωνία μὲ τοὺς ἑξῆς τρόπους:

α) Μὲ τὸ γράμμα τῆς κορυφῆς της.

β) Μὲ τρία γράμματα. Ἀπὸ αὐτὰ τὸ μ ε σ α ῖ ο εἶναι τὸ γράμμα τῆς κορυφῆς καὶ τὰ ἄλλα δύο εἶναι γράμματα δύο σημείων, ἑνὸς ἀπὸ κάθε πλευρά. Π.χ. στὸ σχ. 26 εἰκονίζεται ἡ γωνία Ο ἢ γωνία ΑΟΒ ἢ ΒΟΑ. Ἢ συμβολικά: $\widehat{O}$ ἢ $\widehat{AOB}$ ἢ $\widehat{BOA}$.

γ) Μὲ ἕνα μικρὸ γράμμα τοποθετημένο κοντὰ στὴν κορυφή. Π.χ. γιὰ τὴ γωνία τοῦ σχ. 26 λέμε: γωνία α ἢ συμβολικὰ $\widehat{\alpha}$.

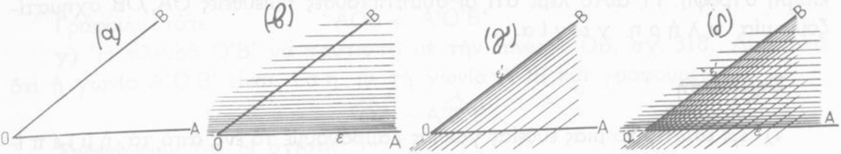
15.2. Ἐσωτερικό, ἐξωτερικὸ γωνίας. Κυρτή, μὴ κυρτὴ γωνία.

Στὴ γωνία ΑΟΒ, σχ. 27α, σημειῶστε:

i) Τὸ ἡμιεπίπεδο (ε, Β). Δηλαδὴ τὸ ἡμιεπίπεδο τῆς εὐθείας ε (τῆς πλευρᾶς ΟΑ) καὶ ἑνὸς σημείου Β τῆς πλευρᾶς ΟΒ, σχ. 27β.

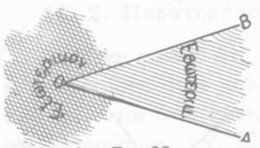
ii) Τὸ ἡμιεπίπεδο (ε', Α). Δηλαδὴ τὸ ἡμιεπίπεδο τῆς εὐθείας ε' (τῆς πλευρᾶς ΟΒ) καὶ ἑνὸς σημείου Α τῆς πλευρᾶς ΟΑ, σχ. 27γ.

iii) Τὴν τομὴ αὐτῶν τῶν δύο ἡμιεπιπέδων $(\varepsilon, B) \cap (\varepsilon', A)$, σχ. 27δ.



Σχ. 27

(Διπλογραμμοσκιασμένο μέρος τοῦ ἐπιπέδου). Αὐτὴ ἡ τομὴ λέγεται ἐ σ ω τ ε ρ ι κ ὸ τῆς γωνίας ΑΟΒ. Τὸ σύνολο τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου, ποὺ δὲν ἀνήκουν στὸ ἐσωτερικὸ τῆς γωνίας οὔτε στὶς πλευρές της, λέγεται ἐ ξ ω τ ε ρ ι κ ὸ τῆς γωνίας. Ἡ ἕνωση τῆς γωνίας ΑΟΒ καὶ τοῦ ἐσωτερικοῦ της λέγεται κ υ ρ τ ὴ γ ω ν ί α ΑΟΒ. Ἡ ἕνωση τῆς γωνίας ΑΟΒ καὶ τοῦ ἐξωτερικοῦ της λέγεται μ ὴ κ υ ρ τ ὴ γωνία ΑΟΒ.



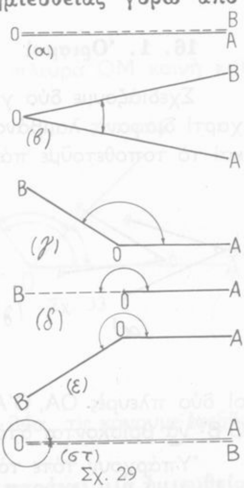
Σχ. 28

Ὥστε : **Κάθε γωνία ὁρίζει μία κυρτὴ καὶ μία μὴ κυρτὴ γωνία.**

Ἐπειδὴ σ' αὐτὴ τὴν τάξη θὰ ἀσχοληθοῦμε κυρίως μὲ κυρτὲς γωνίες, στὰ ἑπόμενα, ὅταν γράφουμε γωνία ΑΟΒ ἢ $\widehat{AOB}$, θὰ ἐννοοῦμε τὴν κυρτὴ γωνία ΑΟΒ. Σὲ κάθε ἄλλη περίπτωση θὰ ἀναφέρεται εἰδικά.

15.3. Σχηματισμὸς γωνίας μὲ στροφὴ μιᾶς ἡμιευθείας γύρω ἀπὸ τὴν ἀρχή της.

α) Οἱ δύο δεῖκτες τοῦ ρολογιοῦ εἰκονίζουν δύο ἡμιευθεῖες μὲ κοινὴ ἀρχὴ Ο, οἱ ὁποῖες στρέφονται στὸ ἐπίπεδό τους γύρω ἀπὸ τὸ Ο. Σὲ κάθε θέση ὁρίζουν μία κυρτὴ γωνία.



Σχ. 29

β) Φανταστεῖτε ὅτι δύο ἡμιευθεῖες ΟΑ, ΟΒ ταυτίζονται, σχ. 29α, ὅπως τυχαίνει μερικὲς φορές, μὲ τοὺς δεῖκτες τοῦ ρολογιοῦ. Κρατοῦμε τὴ μιὰ σταθερή, τὴν ΟΑ, καὶ στρέφουμε* τὴν ΟΒ γύρω ἀπὸ τὸ Ο (προσέχοντας ὥστε νὰ παραμένει πάντοτε μέσα στὸ ἐπίπεδο). Σὲ κάθε θέση, ἡ ΟΒ μαζὶ μὲ τὴν ΟΑ ὁρίζει μία κυρτὴ καὶ μία μὴ κυρτὴ γωνία, σχ. 29β, 29γ καὶ 29ε.

Εἰδικά:

i) Στὸ σχ. 29δ ἡ ΟΒ ἔχει γίνει ἀντίθετη πρὸς τὴν ΟΑ. Σ' αὐτὴ τὴν περίπτωση λέμε ὅτι οἱ δύο ἀντίθετες ἡμιευθεῖες ΟΑ, ΟΒ σχηματίζουν ε ὐ θ ε ῖ α γ ω ν ί α.

---

* Εἶναι φανερὸ ὅτι ἡ στροφὴ μπορεῖ νὰ γίνει πρὸς δύο κατευθύνσεις. Πρὸς τὴν κατεύθυνση τῆς κινήσεως τῶν δεικτῶν τοῦ ρολογιοῦ ἢ πρὸς τὴν ἀντίθετη κατεύθυνση. Πρὸς τὸ παρὸν δὲ θὰ λαμβάνουμε ὑπόψη μας πρὸς ποιὰ κατεύθυνση ἔγινε ἡ στροφή.

ii) Στὸ σχ. 29στ ἡ ΟΒ ἔχει συμπέσει μὲ τὴν ΟΑ ὕστερα ἀπὸ μιὰ ὁλόκληρη στροφή. Γι' αὐτὸ λέμε ὅτι οἱ συμπίπτουσες ἡμιευθεῖες ΟΑ, ΟΒ σχηματίζουν μία π λ ή ρ η γ ω ν ί α.

Σημείωση

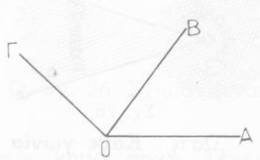
i) Ὡς ἐσωτερικὸ μιᾶς εὐθείας γωνίας λαμβάνουμε τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ ἡ μ ι ε π ί π ε δ α ποὺ ὁρίζουν οἱ π λ ε υ ρ έ ς της. Ὡς ἐσωτερικὸ μιᾶς πλήρους γωνίας λαμβάνουμε ὁλόκληρο τὸ ἐπίπεδο.

ii) Ἡ γωνία ποὺ ὁρίζεται μὲ στροφὴ μιᾶς ἡμιευθείας γύρω ἀπὸ τὴν ἀρχή της εἶναι πολὺ χρήσιμη γιὰ τὴ μέτρηση περιστροφικῶν κινήσεων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

35. Νὰ ὀνομάσετε διάφορες γωνίες σ' ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο.

36. Χαράξετε δύο τεμνόμενες εὐθεῖες ε, ε' καὶ ἔπειτα χρωματίστε τὰ 4 ἡμιεπίπεδα ποὺ αὐτὲς ὁρίζουν (καθένα μὲ διαφορετικὸ χρῶμα). Ποιὰ εἶναι τὰ ἐσωτερικὰ τῶν τεσσάρων γωνιῶν, ποὺ ὁρίζουν οἱ δύο τεμνόμενες εὐθεῖες;



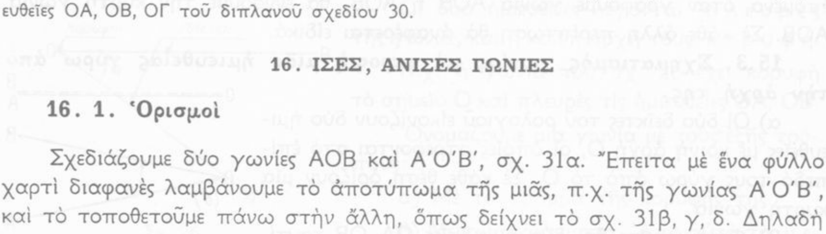
Σχ. 30

37. Ὀνομάστε ὅλες τὶς κυρτὲς καὶ μὴ κυρτὲς γωνίες ποὺ σχηματίζονται ἀπὸ τὶς ἡμιευθεῖες ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ τοῦ διπλανοῦ σχεδίου 30.

16. ΙΣΕΣ, ΑΝΙΣΕΣ ΓΩΝΙΕΣ

16. 1. Ὁρισμοὶ

Σχεδιάζουμε δύο γωνίες ΑΟΒ καὶ Α'Ο'Β', σχ. 31α. Ἔπειτα μὲ ἕνα φύλλο χαρτὶ διαφανὲς λαμβάνουμε τὸ ἀποτύπωμα τῆς μιᾶς, π.χ. τῆς γωνίας Α'Ο'Β', καὶ τὸ τοποθετοῦμε πάνω στὴν ἄλλη, ὅπως δείχνει τὸ σχ. 31β, γ, δ. Δηλαδὴ



Σχ. 31

οἱ δύο πλευρὲς ΟΑ, Ο'Α' νὰ συμπέσουν (ταυτιστοῦν), ἐνῶ οἱ δύο ἄλλες ΟΒ, Ο'Β' νὰ βρίσκονται στὸ ἕνα ἀπὸ τὰ δύο ἡμιεπίπεδα ποὺ ὁρίζει ἡ εὐθεία ΟΑ.

Ὑπάρχουν τότε τὰ ἑξῆς τρία ἐνδεχόμενα.

α) Ἡ πλευρὰ Ο'Β' νὰ βρεθεῖ στὸ ἐσωτερικὸ τῆς γωνίας ΑΟΒ, σχ. 31β. Λέμε τότε ὅτι ἡ γωνία ΑΟΒ εἶναι μ ε γ α λ ύ τ ε ρ η ἀπὸ τὴ γωνία Α'Ο'Β'.

Γράφουμε $\widehat{AOB} > \widehat{A'O'B'}$

β) Ἡ πλευρὰ Ο'Β' νὰ βρεθεῖ στὸ ἐξωτερικὸ τῆς γωνίας ΑΟΒ, σχ. 31γ. Λέμε τότε ὅτι ἡ γωνία ΑΟΒ εἶναι μ ι κ ρ ό τ ε ρ η ἀπὸ τὴ γωνία Α'Ο'Β'.

Γράφουμε τότε $\widehat{AOB} < A'\widehat{O'}B'$.

γ) Ἡ πλευρὰ Ο'Β' νὰ ταυτιστεῖ μὲ τὴν πλευρὰ ΟΒ, σχ. 31δ. Λέμε τότε ὅτι ἡ γωνία Α'Ο'Β' εἶναι ἴ σ η μὲ τὴ γωνία ΑΟΒ καὶ γράφουμε:

$$\widehat{AOB} = A'\widehat{O'}B'$$

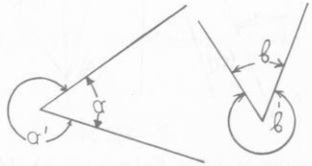
Σημειώνουμε ὅτι οἱ σχέσεις:

$$\widehat{AOB} > A'\widehat{O'}B' \quad \text{καὶ} \quad A'\widehat{O'}B' < \widehat{AOB}$$

ἔχουν τὴν ἴδια σημασία.

16. 2. Παρατηρήσεις

α) Εἶναι φανερὸ ὅτι, ἂν δύο κυρτὲς γωνίες α, β εἶναι ἴσες, τότε καὶ οἱ μὴ κυρτὲς α', β' ποὺ ὁρίζονται ἀπὸ αὐτὲς ἀντιστοίχως, θὰ εἶναι ἐφαρμόσιμες, σχ. 32. Συνεπῶς εἶναι καὶ αὐτὲς ἴσες.



Σχ. 32

β) Οἱ εὐθεῖες γωνίες εἶναι μεταξύ τους ἴσες.

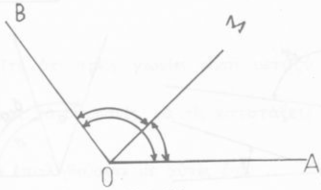
γ) Κάθε μὴ κυρτὴ γωνία εἶναι μεγαλύτερη ἀπὸ ὁποιαδήποτε κυρτή.

17. ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΓΩΝΙΩΝ

17.1. Ἐφεξῆς γωνίες.

Στὸ σχ. 33 οἱ γωνίες ΑΟΜ καὶ ΜΟΒ ἔχουν τὴν πλευρὰ ΟΜ κοινὴ καὶ τὶς πλευρὲς ΟΑ, ΟΒ ἑκατέρωθεν τῆς ΟΜ. Γι' αὐτὸ λέγονται ἐ φ ε ξ ῆ ς.

Δύο γωνίες τοῦ ἐπιπέδου λέγονται ἐφεξῆς, ὅταν ἔχουν μιὰ πλευρὰ κοινὴ καὶ τὶς μὴ κοινὲς πλευρές τους ἑκατέρωθεν τῆς κοινῆς.



Σχ. 33

Π.χ. στὸ σχ. 33 οἱ γωνίες ΑΟΜ, ΜΟΒ εἶναι ἐφεξῆς, ἐνῶ οἱ γωνίες ΑΟΜ, ΑΟΒ δὲν εἶναι ἐφεξῆς. (Γιατί;).

17. 2. Ἄθροισμα γωνιῶν

Γιὰ νὰ π ρ ο σ θ έ σ ο υ μ ε δύο γωνίες α, β, σχ. 34α, τὶς κάνουμε ἐφεξῆς, σχ. 34β, (χρησιμοποιώντας διαφανὲς χαρτί).

Ἡ κυρτὴ (ἢ μὴ κυρτὴ) γωνία ΑΟΒ*, τὴν ὁποία παράγει μία ἡμιευθεία,

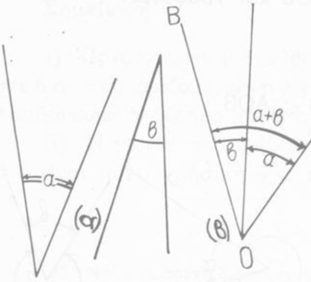
---

* ὅπως καὶ κάθε ἄλλη γωνία ἴση μὲ αὐτή.

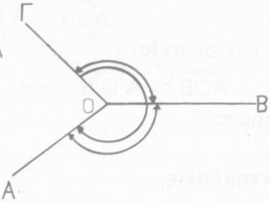
ὅταν διαγράφει διαδοχικὰ τὶς ἐφεξῆς κυρτὲς γωνίες α, β καὶ μόνον αὐτές, λέγεται ἄθροισμα τῶν γωνιῶν.

Τὸ γράφουμε: $\widehat{\alpha}+\widehat{\beta}=\widehat{AOB}$

Ἔτσι στὸ σχ. 33 τὸ ἄθροισμα τῶν κυρτῶν γωνιῶν ΑΟΜ καὶ ΜΟΒ εἶναι ἡ κυρτὴ γωνία ΑΟΒ. Στὸ σχ. 35 ἄθροισμα τῶν κυρτῶν γωνιῶν ΑΟΒ καὶ ΒΟΓ εἶναι ἡ μὴ κυρτὴ γωνία ΑΟΓ.



Σχ. 34

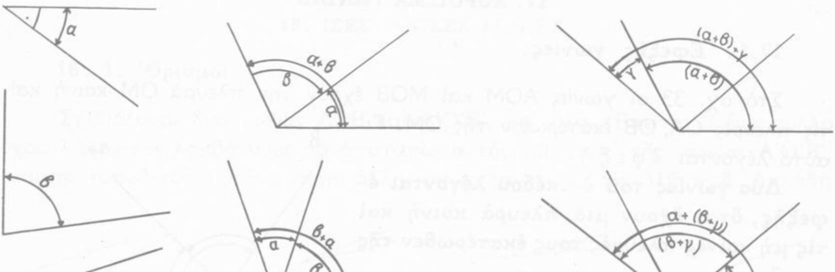


Σχ. 35

17. 3. Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἄθροισμα, ὅταν ἔχουμε περισσότερες γωνίες, βρίσκουμε τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων. Σ' αὐτὸ τὸ ἄθροισμα προσθέτουμε τὴν τρίτη γωνία κ.ο.κ.

17. 4. Χρησιμοποιώντας ἕνα φύλλο χαρτὶ διαφανὲς μποροῦμε νὰ ἐπαληθεύσουμε ὅτι, ἂν μᾶς δοθοῦν τρεῖς γωνίες α, β, γ, τότε θὰ εἶναι:

$$\widehat{\alpha}+\widehat{\beta}=\widehat{\beta}+\widehat{\alpha}=(\widehat{\alpha}+\widehat{\beta})+\widehat{\gamma}=\widehat{\alpha}+(\widehat{\beta}+\widehat{\gamma})$$



$\widehat{\alpha}+\widehat{\beta}=\widehat{\beta}+\widehat{\alpha}$ $\quad(\widehat{\alpha}+\widehat{\beta})+\widehat{\gamma}=\widehat{\alpha}+(\widehat{\beta}+\widehat{\gamma})$

Σχ. 36

18. ΔΙΑΦΟΡΑ ΓΩΝΙΩΝ

18. 1. Ὁρισμὸς

Ἂς ἐπανέλθουμε στὸ σχ. 33. Ἂν στὴ γωνία ΑΟΜ προσθέσουμε τὴ γωνία ΜΟΒ, θὰ βροῦμε τὴ γωνία ΑΟΒ. Γι' αὐτό, ἡ γωνία ΜΟΒ λέγεται δ ι α φ ο ρ ὰ τῶν γωνιῶν ΑΟΒ καὶ ΑΟΜ.

Τὸ γράφουμε: $AOB - AOM = MOB$

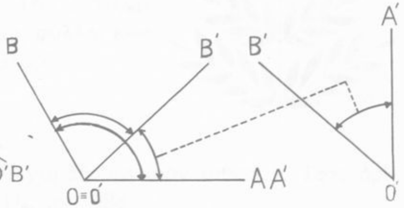
Γενικά: **Διαφορὰ δύο γωνιῶν α καὶ β, ὅπου α>β, λέγεται ἡ γωνία γ, ποὺ πρέπει νὰ προσθέσουμε στὴ β, γιὰ νὰ βροῦμε τὴν α.**

Δηλαδή: $\widehat{\alpha} - \widehat{\beta} = \widehat{\gamma}$ σημαίνει ὅτι $\widehat{\gamma} + \widehat{\beta} = \widehat{\alpha}$

ἢ συμβολικά: $\boxed{\widehat{\alpha} - \widehat{\beta} = \widehat{\gamma} \Leftrightarrow \widehat{\gamma} + \widehat{\beta} = \widehat{\alpha}}$ ὅπου $\widehat{\alpha} > \widehat{\beta}$

18. 2. Εὕρεση τῆς διαφορᾶς.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὴ διαφορὰ δύο γωνιῶν ΑΟΒ, Α'Ο'Β', ἐργαζόμαστε ὅπως φαίνεται στὸ σχ. 37. Δηλαδὴ τοποθετοῦμε τὴ μικρότερη γωνία Α'Ο'Β' πάνω στὴ γωνία ΑΟΒ, μὲ τρόπο ὥστε νὰ ταυτιστοῦν οἱ δύο πλευρὲς ΟΑ, Ο'Α', καὶ ἡ πλευρὰ Ο'Β' νὰ βρίσκεται στὸ ἐσωτερικὸ τῆς γωνίας ΑΟΒ.



Σχ. 37

Τότε ἔχουμε $B\widehat{O}B' = A\widehat{O}B - A'\widehat{O'}B'$

Εἰδικά, ὅταν οἱ γωνίες ΑΟΒ, Α'Ο'Β' εἶναι ἴσες, τότε λέμε ὅτι ἡ διαφορά τους εἶναι μ η δ ε ν ι κ ὴ γωνία.

Μία μηδενικὴ γωνία ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ἡμιευθεῖες ποὺ ταυτίζονται (συμπίπτουν) καὶ ἔχει ὡς ἐσωτερικό της τὸ κενὸ σύνολο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

38. Πόσες συγκρίσεις χρειάζεστε γιὰ νὰ βεβαιωθεῖτε ὅτι τρεῖς γωνίες εἶναι μεταξύ τους ἴσες;

39. Χαράξετε τρεῖς γωνίες. Ἔπειτα, χρησιμοποιώντας τὸ διαφανές, νὰ τὶς κατατάξετε κατὰ μέγεθος.

40. Χαράξετε τρεῖς γωνίες $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$, $\widehat{\gamma}$, καὶ ἔπειτα νὰ ἐπαληθεύσετε μὲ αὐτὲς ὅτι:

$$\widehat{\alpha} + (\widehat{\beta} + \widehat{\gamma}) = (\widehat{\alpha} + \widehat{\gamma}) + \widehat{\beta}.$$

41. Χαράξετε τρεῖς γωνίες $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$, $\widehat{\gamma}$, ὅπου $\widehat{\alpha} > \widehat{\beta} > \widehat{\gamma}$, καὶ ἐπαληθεύσετε μ' αὐτὲς ὅτι:

$$\widehat{\alpha} - \widehat{\gamma} > \widehat{\beta} - \widehat{\gamma}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

42. Πάνω σὲ μιὰν εὐθεία βρίσκονται στὴ σειρὰ τὰ σημεῖα Α, Β, Γ καὶ Δ. Τὸ ΒΓ εἶναι 3 cm μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ ΑΒ καὶ 2 cm μικρότερο ἀπὸ τὸ ΓΔ. Νὰ βρεῖτε τὰ μήκη αὐτῶν τῶν τμημάτων, ἂν γνωρίζετε ὅτι ΑΔ = 17 cm.

43. Γράψετε δύο εὐθ. τμήματα α, β ($\alpha > \beta$) καὶ ἐπαληθεύσετε ὅτι α) $2(\alpha+\beta) = 2\alpha + 2\beta$, β) $2(\alpha-\beta) = 2\alpha - 2\beta$, γ) $\alpha > \beta \Rightarrow 3\cdot\alpha > 3\cdot\beta$.

44. Γράψετε δύο εὐθ. τμήματα α, β καὶ ἔπειτα σχηματίστε τμήματα ἴσα μὲ $2\alpha+\beta$, $\alpha+2\beta$.

45. Γράψετε ἕνα εὐθ. τμῆμα α καὶ ἐπαληθεύσετε ὅτι $2.(3.\alpha)=(2.3).\alpha$.

46. Γράψετε τρία εὐθ. τμήματα α, β, γ καὶ ἐπαληθεύσετε ὅτι $\alpha>\beta \Rightarrow \alpha+\gamma>\beta+\gamma$.

47. Μὲ εὐθ. τμήματα α, β, γ ἐπαληθεύσετε ὅτι $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)=(\gamma+\alpha)+\beta$.

48. Μὲ ἕνα διαφανὲς νὰ βρεῖτε τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου.

49. Ὅμοια γιὰ τὶς γωνίες ἑνὸς κυρτοῦ τετραπλεύρου.

50. Μὲ κατάλληλα εὐθ. τμήματα α, β, γ ἐπαληθεύσετε ὅτι $\alpha-(\beta+\gamma)=(\alpha-\beta)-\gamma$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Γ'

19. Η ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΩΣ ΠΡΟΣ ΕΥΘΕΙΑ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ (ΑΞΟΝΙΚΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ)

19. 1. Εἰσαγωγὴ

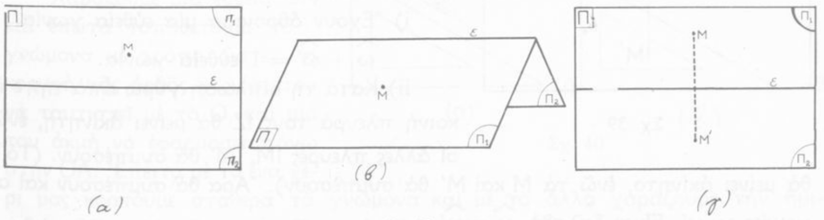
Συχνὰ στὴ φύση, σὲ σχέδια, στὶς διακοσμήσεις, στὶς κατασκευὲς συναντοῦμε μιὰ «συμμετρία». Τὴν ἀντιλαμβανόμαστε εὐκολότερα παρατηρώντας τὸ φύλλο ἑνὸς δέντρου, τὸ σκελετὸ ἑνὸς ζώου, μιὰ πεταλούδα...

19. 2. Ὁρισμὸς

Στὸ ἐπίπεδο Π ἑνὸς φύλλου χαρτιοῦ χαράζουμε μιὰν εὐθεία ε. Τότε ορίζονται δύο ἀντίθετα ἡμιεπίπεδα, τὰ Π_1, Π_2, σχ. 38α.

Ἂς «διπλώσουμε» τὸ ἐπίπεδο Π γύρω ἀπὸ τὴν εὐθεία του ε, σχ. 38β. Παρατηροῦμε ὅτι τὰ δύο ἡμιεπίπεδα Π_1, Π_2 συμπίπτουν καὶ κάθε σημεῖο τοῦ ἑνὸς ἡμιεπιπέδου, π.χ. τὸ σημεῖο Μ τοῦ Π_1, συμπίπτει μὲ ἕνα σημεῖο Μ' τοῦ Π_2, σχ. 38β, γ.

Τὸ σημεῖο Μ' λέγεται σ υ μ μ ε τ ρ ι κ ὸ τ ο ῦ σ η μ ε ί ο υ Μ ὡ ς π ρ ὸ ς τ ὴ ν ε ὐ θ ε ί α ε.



Σχ. 38

Ἀπὸ τὰ πιὸ πάνω ἐννοοῦμε ὅτι κάθε σημεῖο τοῦ Π_2 ἔχει ἕνα (καὶ μόνον ἕνα) συμμετρικὸ σημεῖο ὡς πρὸς τὴν εὐθεία ε. Αὐτὸ βρίσκεται πάνω στὸ Π_1. Ὅμοια καὶ κάθε σημεῖο τοῦ Π_1 ἔχει ὡς πρὸς τὴν εὐθεία ε ἕνα (καὶ μόνον ἕνα) συμμετρικὸ σημεῖο, καὶ αὐτὸ βρίσκεται πάνω στὸ Π_2.

Γιὰ τὰ σημεῖα τῆς εὐθείας ε παρατηροῦμε ὅτι κατὰ τὴ δίπλωση καθένα ἀπὸ αὐτὰ μένει ἀκίνητο ἤ, ὅπως λέμε, *συμπίπτει* (ταυτίζεται) *μὲ τὸ συμμετρικό του*.

Δηλαδή: Ἂν σὲ ἐπίπεδο Π δοθεῖ μιὰ εὐθεία ε, τότε *σὲ κάθε σημεῖο Μ τοῦ Π μποροῦμε νὰ ἀντιστοιχίσουμε τὸ συμμετρικό του Μ′ ὡς πρὸς τὴν ε.*

Αὐτὴ ἡ ἀντιστοιχία ὀνομάζεται *συμμετρία ὡς πρὸς τὴν εὐθεία* (ἄξονα) ε. Γιὰ συντομία, ἀντὶ «συμμετρία» ὡς πρὸς εὐθεία ε γράφουμε Σ(ε).

Στὴ δίπλωση γύρω ἀπὸ τὴν ε, ἀντὶ νὰ ποῦμε ὅτι τὸ Μ ταυτίζεται μὲ τὸ Μ′, μποροῦμε νὰ ποῦμε ὅτι τὸ Μ′ ταυτίζεται μὲ τὸ Μ. Δηλαδὴ ὅτι καὶ τὸ Μ′ εἶναι συμμετρικὸ μὲ τὸ Μ.

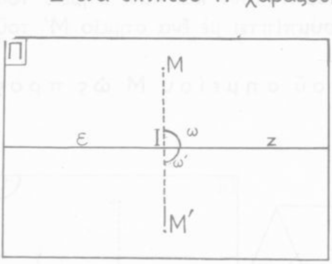
Γι᾽ αὐτὸ λέμε πὼς τὰ σημεῖα Μ, Μ′ εἶναι συμμετρικὰ μεταξύ τους ἢ ἁπλῶς *συμμετρικὰ* ἢ *ὁμόλογα* στὴ Σ(ε).

19. 3. Ἂν στρέψουμε ὁλόκληρο τὸ ἐπίπεδο Π γύρω ἀπὸ τὴν εὐθεία του ε κατὰ μισὴ στροφή, θὰ παρατηρήσουμε ὅτι κάθε σημεῖο του Μ *ἐναλλάσσεται μὲ τὸ συμμετρικό του* Μ′. (Τὸ Μ λαμβάνει τὴ θέση τοῦ Μ′ καὶ τὸ Μ′ τὴ θέση τοῦ Μ).

20. ΚΑΘΕΤΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ, ΟΡΘΕΣ ΓΩΝΙΕΣ

20. 1. Ὀρθὴ γωνία

Σ᾽ ἕνα ἐπίπεδο Π χαράζουμε μιὰ εὐθεία ε (σχ. 39). Ἔπειτα μὲ δίπλωση γύρω ἀπὸ τὴν ε βρίσκουμε τὸ συμμετρικὸ Μ′ ἑνὸς σημείου Μ καὶ χαράζουμε τὸ εὐθ. τμῆμα ΜΜ′ ποὺ τέμνει τὴν ε στὸ σημεῖο Ι.



Σχ. 39

Ἂς προσέξουμε τὶς δύο γωνίες $\widehat{MIZ} = \widehat{\omega}$ καὶ $\widehat{M'IZ} = \widehat{\omega'}$.

i) Ἔχουν ἄθροισμα μία εὐθεία γωνία.

$\widehat{\omega} + \widehat{\omega'} = 1$ εὐθεία γωνία.

ii) Κατὰ τὴ δίπλωση γύρω ἀπὸ τὴν ε ἡ κοινὴ πλευρά τους ΙΖ θὰ μείνει ἀκίνητη, ἐνῶ οἱ ἄλλες πλευρὲς ΙΜ, ΙΜ′ θὰ συμπέσουν. (Τὸ Ι θὰ μείνει ἀκίνητο, ἐνῶ τὰ Μ καὶ Μ′ θὰ συμπέσουν). Ἄρα θὰ συμπέσουν καὶ οἱ γωνίες ω, ω′. Εἶναι δηλαδὴ $\widehat{\omega} = \widehat{\omega'}$.

Ὥστε: οἱ γωνίες $\widehat{\omega}$, $\widehat{\omega'}$ ἔχουν ἄθροισμα *μία εὐθεία γωνία* καὶ εἶναι *ἴσες*.

Καθεμιὰ ἀπὸ αὐτὲς τὶς γωνίες λέγεται *ὀρθὴ γωνία*.

Δηλαδή : **Ἡ ὀρθὴ γωνία εἶναι τὸ μισὸ μιᾶς εὐθείας γωνίας.**

Ἂν σκεφτοῦμε ὅτι ὅλες οἱ εὐθεῖες γωνίες εἶναι ἴσες, ἐννοοῦμε ὅτι:

Ὅλες οἱ ὀρθὲς γωνίες εἶναι ἴσες.

20. 2. Κάθετες εὐθεῖες.

Οἱ εὐθεῖες ΜΜ′ καὶ ε, πάνω στὶς ὁποῖες βρίσκονται οἱ πλευρὲς μιᾶς ὀρθῆς γωνίας, λέγονται κ ά θ ε τ ε ς μεταξύ τους ἢ ἁπλῶς κ ά θ ε τ ε ς. Γιὰ νὰ γράψουμε σύντομα ὅτι δύο εὐθεῖες δ, δ′ εἶναι κάθετες, γράφουμε:

$$\delta \perp \delta' \quad \text{ἢ} \quad \delta' \perp \delta.$$

Ὅταν δύο εὐθεῖες τέμνονται, ἀλλὰ ὄχι κάθετα, λέμε ὅτι τέμνονται π λ ά γ ι α ἢ ὅτι εἶναι μεταξύ τους π λ ά γ ι ε ς.

20. 3. Ἂς ἐπανέλθουμε στὸ σχ. 39. Κατὰ τὴ δίπλωση γύρω ἀπὸ τὴν ε, εἶναι φανερὸ ὅτι θὰ συμπέσουν καὶ τὰ τμήματα ΙΜ, ΙΜ′.

Δηλαδή: Ἡ εὐθεία ε εἶναι κ ά θ ε τ η πρὸς τὸ τμῆμα ΜΜ′ στὸ μ έ σ ο του Ι.

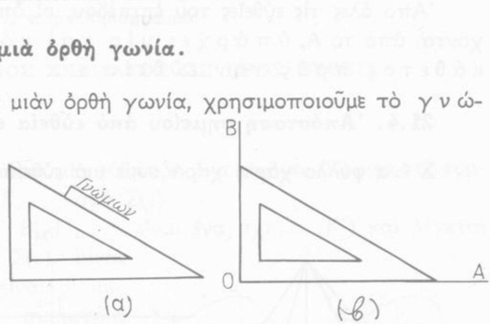
Γι' αὐτὸ λέμε ὅτι ἡ ε εἶναι ἡ μ ε σ ο κ ά θ ε τ ο ς τοῦ εὐθ. τμήματος ΜΜ′.

Ὥστε : **Στὴ Σ(ε): Μ,Μ′ συμμετρικά, σημαίνει ὅτι ἡ ε εἶναι ἡ μεσοκάθετος τοῦ ΜΜ′.**

21. ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ

21.1. Νὰ κατασκευαστεῖ μιὰ ὀρθὴ γωνία.

Γιὰ νὰ χαράξουμε πρακτικὰ μιὰν ὀρθὴ γωνία, χρησιμοποιοῦμε τὸ γ ν ώ μ ο ν α (τρίγωνο), σχ. 40α καὶ ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:



Σχ. 40

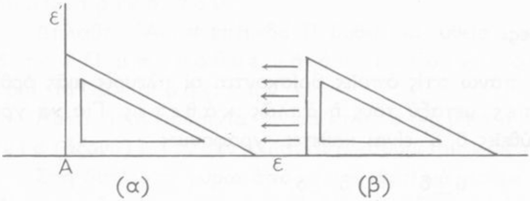
Χαράζουμε μιὰ εὐθεία ΟΑ καὶ ἔπειτα τοποθετοῦμε τὸ γνώμονα μὲ τρόπο ὥστε: Ἡ κορυφὴ τῆς ὀρθῆς γωνίας του νὰ ταυτιστεῖ μὲ τὸ Ο, καὶ μιά του ἀκμὴ νὰ ἐφαρμόσει πάνω στὴν ΟΑ. Ἔπειτα μὲ τὸ ἕνα χέρι μας κρατοῦμε σταθερὰ τὸ γνώμονα καὶ μὲ τὸ ἄλλο χαράζουμε τὴν ἡμιευθεία ΟΒ κατὰ μῆκος τῆς ἄλλης ἀκμῆς του, σχ. 40β.

Μὲ ὅμοιο τρόπο ἐλέγχουμε ἂν μία γωνία εἶναι ὀρθὴ ἢ ἂν δύο εὐθεῖες εἶναι κάθετες μεταξύ τους.

21.2. Νὰ χαραχτεῖ κάθετος ἀπὸ ἕνα σημεῖο Α πρὸς μία εὐθεία ε.

α) Ἂ ν τὸ Α β ρ ί σ κ ε τ α ι π ά ν ω σ τ ὴ ν ε.

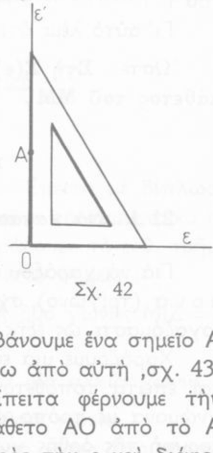
Τοποθετοῦμε τὸν γνώμονα πάνω στὸ ἐπίπεδο. μὲ τρόπο ὥστε ἡ μία ἀκμή του νὰ ἐφαρμόζει πάνω στὴν ε, σχ. 41β. Ἔπειτα μετακινοῦμε τὸ γνώμονα, προσέχοντας νὰ ἐφαρμόζει πάντοτε ἡ ἀκμή του πάνω στὴν ε, ὥσπου ἡ κορυφὴ τῆς ὀρθῆς γωνίας νὰ ταυτιστεῖ μὲ τὸ σημεῖο Α, σχ. 41α. Σ' αὐτὴ τὴ θέση χαράζουμε τὴν εὐθεία ε', ποὺ εἶναι καὶ ἡ μοναδικὴ κάθετος πρὸς τὴν ε στὸ σημεῖο της Α.



Σχ. 41

β) Ἂ ν τ ὸ σ η μ ε ῖ ο Α ε ἶ ν α ι ἔ ξ ω ἀ π ὸ τ ὴ ν ε.

Ἐργαζόμαστε ὅπως προηγουμένως, μὲ τὴ διαφορὰ ὅτι στὴν τελικὴ θέση τοῦ γνώμονα τὸ Α θὰ βρίσκεται πάνω στὴν ε'. Ἔτσι, στὸ σχ. 42, ἡ εὐθεία ε' εἶναι κάθετος πρὸς τὴν εὐθεία ε καὶ διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖο Α. Τὸ σημεῖο Ο, ὅπου ἡ ε' συναντάει τὴν ε, λέγεται ὀ ρ θ ὴ π ρ ο β ο λ ὴ ἢ ἁπλῶς π ρ ο β ο λ ὴ τοῦ σημείου Α πάνω στὴν εὐθεία ε.



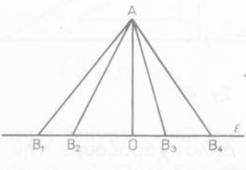
Σχ. 42

21. 3. Σὲ ἀνώτερη τάξη θὰ ἀποδείξουμε ὅτι:

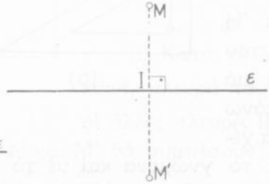
Ἀπὸ ὅλες τὶς εὐθεῖες τοῦ ἐπιπέδου, οἱ ὁποῖες διέρχονται ἀπὸ τὸ Α, ὑ π ά ρ χ ε ι μ ί α κ α ὶ μ ό ν ο μ ί α κ ά θ ε τ ο ς π ρ ὸ ς τ ὴ ν ε ὐ θ ε ί α ε.

21.4. Ἀπόσταση σημείου ἀπὸ εὐθεία ε.

Σ' ἕνα φύλλο χαρτὶ χαράζουμε μιὰ εὐθεία ε καὶ λαμβάνουμε ἕνα σημεῖο Α ἔξω ἀπὸ αὐτή ,σχ. 43. Ἔπειτα φέρνουμε τὴν κάθετο ΑΟ ἀπὸ τὸ Α πρὸς τὴν ε καὶ διάφορα ἄλλα εὐθ. τμήματα AB_1, AB_2, AB_3, AB_4, ἀπὸ τὸ σημεῖο Α ἕως τὴν εὐθεία ε. Ἂν συγκρίνουμε μὲ τὸ διαβήτη μας τὸ τμῆμα ΑΟ πρὸς τὰ τμήματα AB_1, AB_2, AB_3, καὶ AB_4, θὰ διαπιστώσουμε ὅτι:



Σχ. 43



Σχ. 44

Τὸ κάθετο τμῆμα ΑΟ εἶναι μικρότερο ἀπὸ ὁποιοδήποτε ἄλλο τμῆμα ποὺ φέρνουμε ἀπὸ τὸ σημεῖο Α ἕως τὴν εὐθεία ε.

Δηλαδή: $AO < AB_1$, $AO < AB_2$, $AO < AB_3$ . . .

Τὸ μῆκος τοῦ κάθετου τμήματος ΑΟ λέγεται *ἀπόσταση* τοῦ σημείου Α ἀπὸ τὴν εὐθεία ε.

21.5. Νὰ βρεθεῖ τὸ συμμετρικὸ Μ′ ἑνὸς σημείου Μ στὴ συμμετρία ὡς πρὸς τὴν εὐθεία ε.

α) *Ἂν τὸ Μ βρίσκεται ἔξω ἀπὸ τὴν* ε, σχ. 44.

Φέρνουμε τὴν κάθετο ἀπὸ τὸ Μ στὴν ε. Ἔπειτα πάνω σ' αὐτὴ καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη τοῦ σημείου τομῆς Ι μὲ τὴν ε, λαμβάνουμε ἴσα τμήματα ΙΜ = ΙΜ′.

Τὸ σημεῖο Μ′ εἶναι τὸ συμμετρικὸ τοῦ Μ στὴ Σ(ε). Γιατί; (§ 20.3).

β) *Ἂν τὸ Μ βρίσκεται πάνω στὴν ε.*

Σ' αὐτὴ τὴν περίπτωση, καθὼς εἴδαμε καὶ στὴν παρ. 19.2, τὸ Μ′ ταυτίζεται μὲ τὸ συμμετρικό του Μ′, Μ ≡ Μ′.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

51. Χαράξετε μία εὐθεία ε καὶ λάβετε δύο σημεῖα Α, Β. Στὴ Σ(ε) νὰ βρεῖτε τὰ συμμετρικὰ τῶν Α, Β καὶ τοῦ μέσου Μ τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ. Τί παρατηρεῖτε γιὰ τὴ θέση τοῦ συμμετρικοῦ τοῦ Μ;

52. Χαράξετε μία εὐθεία ε καὶ δύο συμμετρικὰ σημεῖα Α, Α′ ὡς πρὸς αὐτήν. Ἂν Ο εἶναι ἕνα σημεῖο τῆς ε, νὰ συγκρίνετε τὰ τμήματα ΟΑ καὶ ΟΑ′.

53. Χαράξετε ἕνα εὐθ. τμῆμα ΑΒ καὶ δύο εὐθεῖες δ, δ′ κάθετες πρὸς τὸ ΑΒ στὰ σημεῖα Α καὶ Β ἀντιστοίχως.

54. Χαράξετε μία εὐθεία ε καὶ ἕνα εὐθ. τμῆμα ΑΒ. Νὰ βρεῖτε στὴ Σ(ε) τὰ συμμετρικὰ διαφόρων σημείων τοῦ ΑΒ. Τί παρατηρεῖτε;

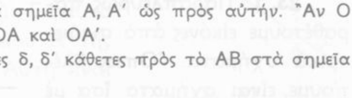
55. Κατασκευάστε ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο.

22. ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟ ΕΝΟΣ ΣΧΗΜΑΤΟΣ ΩΣ ΠΡΟΣ ΕΥΘΕΙΑ

22. 1. Ὁρισμὸς

Στὸ σχῆμα 45 ἔχουμε σχεδιάσει μία εὐθεία ε, ἕνα σχῆμα (Κ) καὶ τὰ συμμετρικὰ τῶν σημείων του Α, Β, Γ, . . . στὴ Σ(ε).

Τὸ σύνολο τῶν σημείων Α′, Β′, Γ′, . . . εἶναι ἕνα σχῆμα (Κ′) καὶ λέγεται *συμμετρικὸ* τοῦ (Κ) στὴ Σ(ε). Εἶναι φανερὸ ὅτι καὶ τὸ σχῆμα (Κ) εἶναι συμμετρικὸ τοῦ (Κ′) στὴν ἴδια συμμετρία (Κ) ⇄ (Κ′). Γι' αὐτὸ λέμε πὼς τὰ σχήματα (Κ) καὶ (Κ′) εἶναι μεταξύ τους συμμετρικὰ ἢ ἁπλῶς *συμμετρικὰ* ἢ *ὁμόλογα* στὴ Σ(ε).



Σχ. 45

22. 2. Ἰσότητα συμμετρικῶν σχημάτων.

Ἂς στρέψουμε τὸ ἐπίπεδο ,σχ. 45, γύρω ἀπὸ τὴν εὐθεία του ε κατὰ μισὴ στροφή. Κάθε σημεῖο τοῦ (Κ) θὰ λάβει τὴ θέση τοῦ συμμετρικοῦ του στὸ σχῆμα (Κ′). Ἐπίσης κάθε σημεῖο τοῦ (Κ′) θὰ λάβει τὴ θέση τοῦ συμμετρικοῦ του στὸ (Κ). Δηλαδὴ τὰ συμμετρικὰ σχήματα (Κ) καὶ (Κ′) εἶναι ἐφαρμόσιμα (ἴσα).

Ὥστε : **Στὴ Σ(ε) τὰ συμμετρικὰ σχήματα εἶναι ἴσα.**

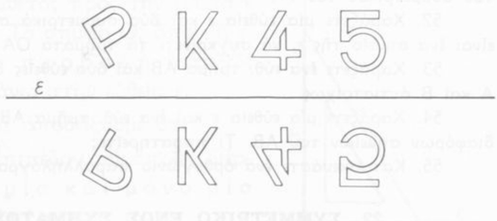
22.3. Σπουδαία παρατήρηση.

Εἶναι εὔκολο νὰ παρατηρήσουμε ὅτι ἡ μισὴ στροφὴ τοῦ ἐπιπέδου γύρω ἀπὸ τὴν ε ἀναστρέφει* τὸ ἐπίπεδο. Συνεπῶς δύο συμμετρικὰ σχήματα στὴ Σ(ε) εἶναι ἐφαρμόσιμα, μόνον ἔπειτα ἀπὸ ἀναστροφὴ τοῦ ἑνὸς ἀπὸ αὐτά. Π.χ. τὰ σχήματα (Κ) καὶ (Κ′) τοῦ σχ. 45 δὲν εἶναι δυνατὸ νὰ τὰ φέρουμε σὲ σύμπτωση μὲ ἁπλὴ ὀλίσθηση. Πρέπει καὶ νὰ ἀναστρέψουμε τὸ ἕνα ἀπὸ αὐτά. Γι᾽ αὐτὸ λέμε ὅτι τὰ σχήματα (Κ) καὶ (Κ′) εἶναι ἴ σ α μ ὲ ἀ ν α σ τ ρ ο φ ή.

Ὥστε : **Στὴ Σ(ε) δύο ὁμόλογα σχήματα εἶναι ἴσα μὲ ἀναστροφή.**

23. ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΑ ΑΠΛΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

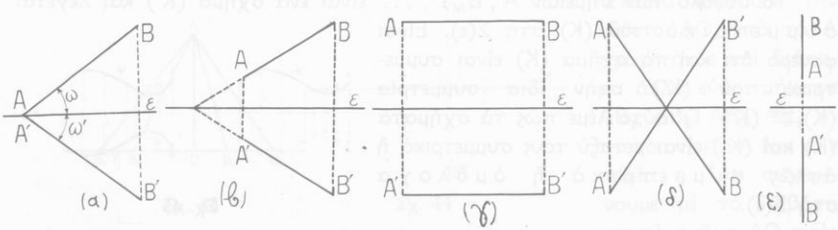
23. 1. Παραπλεύρως παραθέτουμε εἰκόνες ἀπὸ συμμετρικὰ σχήματα. Ὅπως βλέπουμε, εἶναι σχήματα ἴσα μὲ ἀναστροφή.



23.2. Συμμετρικὸ εὐθ. τμήματος.

Καθὼς εἴδαμε προηγουμένως, τὸ συμμετρικὸ ἑνὸς σχήματος ὡς πρὸς μία εὐθεία εἶναι ἕνα σχῆμα ἴσο μὲ τὸ ἀρχικὸ σχῆμα.

Συνεπῶς τὸ συμμετρικὸ ἑνὸς εὐθ. τμήματος ΑΒ ὡς πρὸς τὴν εὐθεία ε εἶναι ἕνα εὐθ. τμῆμα Α′Β′ ἴσο μὲ τὸ ΑΒ. Γιὰ νὰ τὸ βροῦμε, ἀρκεῖ νὰ σημειώσουμε τὰ συμμετρικὰ τῶν ἄκρων τοῦ ΑΒ. Τὰ ἑπόμενα σχέδια 46 δείχνουν τὸ συμ-



Σχ. 46

μετρικὸ Α′Β′ τοῦ τμήματος ΑΒ σὲ πέντε διαφορετικὲς περιπτώσεις.

---

* Κάνει τὴν «ἐπάνω» ὄψη τοῦ ἐπιπέδου «κάτω» καὶ τὴν «κάτω» ὄψη «ἐπάνω».

Παρατηροῦμε ὅτι:

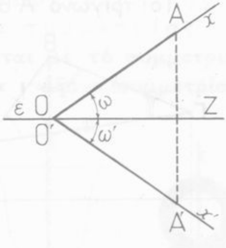
1. Ἂν τὸ ΑΒ βρίσκεται πάνω σὲ μιὰ εὐθεία παράλληλη πρὸς τὴν ε, τότε καὶ τὸ Α΄Β΄ βρίσκεται ἐπίσης πάνω σὲ μιὰν εὐθεία παράλληλη πρὸς τὴν ε (Σχ. 46γ).

Ἂν τὸ ΑΒ τέμνει τὴν ε, τότε καὶ τὸ Α΄Β΄ θὰ τέμνει τὴν ε στὸ ἴδιο σημεῖο (σχ. 46δ).

3. Ἂν τὸ ΑΒ βρίσκεται πάνω σὲ μιὰν εὐθεία κάθετη πρὸς τὴν ε, τότε καὶ τὸ Α΄Β΄ βρίσκεται πάνω στὴν ἴδια εὐθεία (σχ. 46ε).

23.3. Συμμετρικὸ ἡμιευθείας Οχ. Διχοτόμος γωνίας.

α) Ὅταν τὸ Ο βρίσκεται πάνω στὴν ε:



Σχ. 47

Γιὰ νὰ προσδιορίσουμε τὴ συμμετρικὴ τῆς ἡμιευθείας Οχ, ἀρκεῖ νὰ προσδιορίσουμε τὸ συμμετρικὸ τῆς ἀρχῆς Ο καὶ ἑνὸς ὁποιουδήποτε σημείου της Α.

Ἀλλὰ ἡ ἀρχὴ Ο εἶναι σημεῖο τῆς ε καὶ συνεπῶς συμπίπτει μὲ τὸ συμμετρικό του Ο΄ (Ο ≡ Ο΄). Γι᾿ αὐτὸ βρίσκουμε μόνο τὸ συμμετρικὸ Α΄ ἑνὸς σημείου Α τῆς Οχ καὶ χαράζουμε ἔπειτα τὴν ἡμιευθεία ΟΑ΄. Αὐτὴ εἶναι ἡ ζητουμένη.

Ἂς προσέξουμε τώρα τὶς γωνίες ω, ω΄, ποὺ τὶς σχηματίζουν οἱ συμμετρικὲς ἡμιευθεῖες ΟΑ, ΟΑ΄ μὲ τὴν ΟΖ, σχ. 47.

Παρατηροῦμε ὅτι ἡ δίπλωση τοῦ ἐπιπέδου γύρω ἀπὸ τὴν ε ἀφήνει ἀκίνητη τὴν ΟΖ καὶ φέρνει τὶς ΟΑ, ΟΑ΄ σὲ σύμπτωση. Ἀπὸ αὐτὴ τὴν παρατήρηση ἐννοοῦμε ὅτι οἱ πιὸ πάνω γωνίες ω καὶ ω΄ εἶναι ἴσες.

$$\widehat{\omega} = \widehat{\omega'}$$

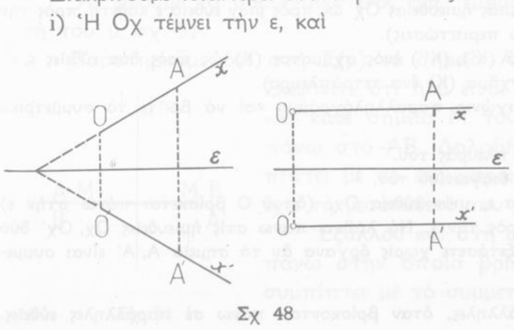
Ἡ ἡμιευθεία ΟΖ, ποὺ βρίσκεται στὸ ἐσωτερικὸ τῆς γωνίας ΑΟΑ΄ καὶ τὴ χωρίζει σὲ δύο ἴσες γωνίες, λέγεται διχοτόμος τῆς γωνίας αὐτῆς.

β) Ὅταν τὸ Ο βρίσκεται ἔξω ἀπὸ τὴν ε.

Διακρίνουμε ἰδιαίτερα δύο περιπτώσεις:

i) Ἡ Οχ τέμνει τὴν ε, καὶ

ii) Ἡ Οχ βρίσκεται πάνω σὲ εὐθεία παράλληλη μὲ τὴν ε, σχ. 48. Καὶ στὶς δυὸ περιπτώσεις τὰ ἀρχικὰ σημεῖα Ο, Ο΄ τῶν συμμετρικῶν ἡμιευθειῶν Οχ, Ο΄χ΄ εἶναι συμμετρικά.



Σχ 48

Συνεπῶς, γιὰ νὰ χαράξουμε τὴν Ο΄χ΄, ἀρκεῖ νὰ βροῦμε ἐκτὸς τοῦ Ο΄ καὶ τὸ συμμετρικὸ A′ ἑνὸς ἄλλου σημείου A τῆς Οχ. Ἰδιαίτερα παρατηροῦμε ὅτι:

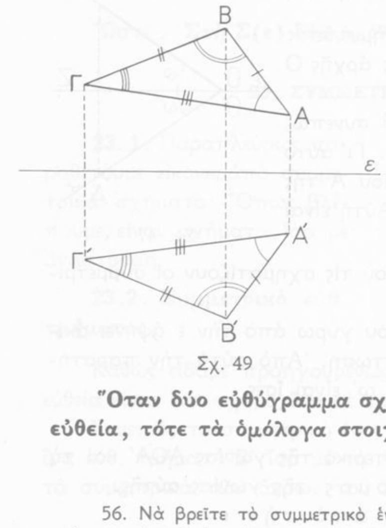
Στὴν πρώτη περίπτωση οἱ εὐθεῖες Οχ, Ο′χ′ συναντοῦν τὴν ε στὸ ἴδιο σημεῖο.

Στὴ δεύτερη περίπτωση οἱ συμμετρικὲς ἡμιευθεῖες Οχ, Ο′χ′ εἶναι παράλληλες* μεταξύ τους καὶ μὲ τὴν ε καὶ βρίσκονται στὸ ἴδιο ἡμιεπίπεδο μὲ ἀκμὴ ΟΟ′ (ὁμόρροπες).

23. 4. Συμμετρικὸ ἑνὸς τριγώνου.

Χαράζουμε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ. Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ συμμετρικό του στὴ Σ(ε), βρίσκουμε τὰ συμμετρικὰ τῶν κορυφῶν του Α, Β, Γ: τὰ Α′, Β′, Γ′ ἀντιστοίχως.

Τὸ τρίγωνο Α′Β′Γ′ εἶναι τὸ συμμετρικὸ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ στὴ Σ(ε). (Γιατί;).



Σχ. 49

Ἂς προσέξουμε τὶς γωνίες καὶ τὶς πλευρὲς τῶν δύο αὐτῶν τριγώνων. Ἡ δίπλωση γύρω ἀπὸ τὴν ε φέρνει σὲ σύμπτωση τὰ δύο τρίγωνα, συνεπῶς φέρνει σὲ σύμπτωση τὶς γωνίες καὶ τὶς πλευρὲς τοῦ ἑνὸς μὲ τὶς ὁμόλογες γωνίες καὶ πλευρὲς τοῦ ἄλλου.

Π.χ. στὸ σχῆμα 49 ἔχουμε:

$$\widehat{A} = \widehat{A'},\ \widehat{B} = \widehat{B'},\ \widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'}$$

καὶ $AB = A'B',\ B\Gamma = B'\Gamma',\ \Gamma A = \Gamma'A'$.

Γενικά, γιὰ δύο συμμετρικὰ εὐθύγραμμα σχήματα (Κ), (Κ′) μποροῦμε νὰ διατυπώσουμε τὸν ἑξῆς κανόνα:

Ὅταν δύο εὐθύγραμμα σχήματα (Κ), (Κ′) εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς εὐθεία, τότε τὰ ὁμόλογα στοιχεῖα τους εἶναι ἴσα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

56. Νὰ βρεῖτε τὸ συμμετρικὸ ἑνὸς εὐθύγραμμου τμήματος ΑΒ ὡς πρὸς μιὰ εὐθεία ε κάθετη πρὸς αὐτὸ στὸ σημεῖο Α.

57. Νὰ βρεθεῖ ἡ συμμετρικὴ μιᾶς ἡμιευθείας Οχ ὡς πρὸς μιὰν εὐθεία ε κάθετη πρὸς τὴν εὐθεία τῆς Οχ. (Νὰ διακρίνετε δύο περιπτώσεις).

58. Νὰ βρεῖτε τὰ συμμετρικὰ (Κ′), (Κ′′) ἑνὸς σχήματος (Κ) ὡς πρὸς δύο εὐθεῖες ε, ε′. Τί παρατηρεῖτε; (Νὰ λάβετε ὡς σχῆμα (Κ) ἕνα τετράπλευρο).

59. Νὰ σχεδιάσετε ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο καὶ νὰ βρεῖτε τὸ συμμετρικό του:

α) Ὡς πρὸς τὴν εὐθεία μιᾶς πλευρᾶς του.

β) Ὡς πρὸς τὴν εὐθεία μιᾶς διαγωνίου του.

60. Νὰ χαράξετε μιὰν εὐθεία ε, μιὰν εὐθεία Οχ, (ὅπου Ο βρίσκεται πάνω στὴν ε) καὶ τὴ συμμετρική της Οχ′ ὡς πρὸς τὴν ε. Νὰ λάβετε πάνω στὶς ἡμιευθεῖες Οχ, Οχ′ δύο ἴσα τμήματα ΟΑ = ΟΑ′ καὶ νὰ ἐξετάσετε χωρὶς ὄργανα ἂν τὰ σημεῖα Α, Α′ εἶναι συμμετρικά.

---

* Δύο ἡμιευθεῖες εἶναι παράλληλες, ὅταν βρίσκονται πάνω σὲ παράλληλες εὐθεῖες.

61. Πάνω σὲ μιὰν εὐθεία ε φέρνουμε μία κάθετο δ, ποὺ τέμνει τὴν ε στὸ σημεῖο Α. Πάνω στὴ δ καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη τοῦ Α λαμβάνουμε δύο ἴσα τμήματα ΑΒ καὶ ΑΒ΄. Ἂν Ο εἶναι ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τῆς ε, νὰ δικαιολογήσετε γιατί τὰ τμήματα ΟΒ καὶ ΟΒ΄ εἶναι ἴσα.

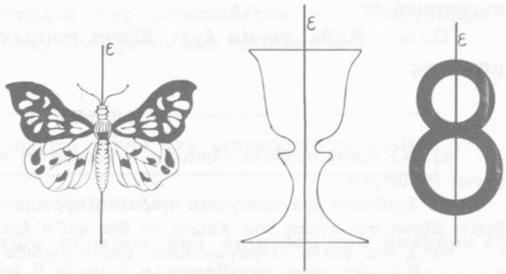
24. ΑΞΟΝΑΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ

24. 1. Ὁρισμὸς

Ἂς χαράξουμε μιὰν εὐθεία ε καὶ μιὰν ἄλλη δ κάθετη πρὸς αὐτὴ (δ ⊥ ε). Ἔπειτα ἂς προσπαθήσουμε νὰ βροῦμε τὴ συμμετρικὴ δ΄ τῆς δ στὴ Σ(ε). Ἐπειδὴ δ ⊥ ε, κάθε σημεῖο τῆς δ ἔχει τὸ συμμετρικό του πάνω στὴν ἴδια τὴ δ. Τοῦτο σημαίνει ὅτι στὴ Σ(ε) ἡ δ *συμπίπτει μὲ τὴ συμμετρική της* δ΄. Γι᾽ αὐτὸ λέμε ὅτι ἡ εὐθεία δ ἔχει τὴν εὐθεία ε *ἄξονα συμμετρίας*.
Γενικά: **Ἂν στὴ Σ(ε) ἕνα σχῆμα (Κ) ταυτίζεται μὲ τὸ συμμετρικό του (Κ΄), τότε λέμε ὅτι τὸ σχῆμα (Κ) ἔχει τὴν εὐθεία ε ἄξονα συμμετρίας.**

24. 2. Παραδείγματα

i) Τὰ σχήματα τοῦ σχ. 50 ἔχουν ἄξονα συμμετρίας.



Σχ. 50

ii) Πόσους ἄξονες συμμετρίας ἔχει μιὰ εὐθεία; Μιὰ εὐθεία δ ἔχει ὁποιαδήποτε κάθετή της ἄξονα συμμετρίας.

Ἀλλὰ καὶ στὴ συμμετρία ὡς πρὸς τὸν ἑαυτό της, ἡ δ συμπίπτει μὲ τὴ συμμετρική της. δ ≡ δ΄.

Δηλαδή : **Κάθε εὐθεία ἔχει ἄπειρους ἄξονες συμμετρίας: τὸν ἑαυτό της καὶ κάθε κάθετο πρὸς αὐτή.**

iii) Ἄξονες συμμετρίας ἑνὸς εὐθ. τμήματος.

Ἂς βροῦμε τὸ συμμετρικὸ ἑνὸς εὐθ. τμήματος ΑΒ ὡς πρὸς τὴ μεσοκάθετή του μ, σχ. 51.

Παρατηροῦμε ὅτι στὴ Σ(μ) τὰ σημεῖα Α καὶ Β εἶναι ὁμόλογα (Γιατί; Σκεφτεῖτε ὅτι ἡ μ εἶναι ἡ μεσοκάθετος τοῦ ΑΒ). Ἀλλὰ καὶ κάθε σημεῖο Μ τοῦ ΑΒ ἔχει τὸ ὁμόλογό του Μ΄ πάνω στὸ ΑΒ. Δηλαδὴ στὴ Σ(μ) τὸ τμῆμα ΑΒ συμπίπτει μὲ τὸ συμμετρικό του. Μὲ ἄλλα λόγια τὸ ΑΒ ἔχει τὴ μεσοκάθετό του ὡς ἄξονα συμμετρίας.

Σχ. 51

Ἐξάλλου καὶ στὴ συμμετρία ὡς πρὸς τὴν εὐθεία ε, πάνω στὴν ὁποία βρίσκεται τὸ ΑΒ, αὐτὸ τὸ τμῆμα συμπίπτει μὲ τὸ συμμετρικό του. (Γιατί;).

Ὥστε: **Κάθε εὐθύγραμμο τμῆμα ἔχει δύο ἄξονες συμμετρίας, τὴ μεσοκάθετό του καὶ τὴν εὐθεία ὅπου βρίσκεται τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα.**

iv) Ἄξονας συμμετρίας ἡμιευθείας.

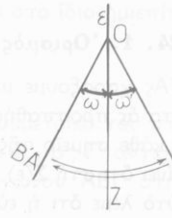
Μία ἡμιευθεία Οχ ἔχει μοναδικὸ ἄξονα συμμετρίας τὴν εὐθεία πάνω στὴν ὁποία βρίσκεται αὐτή. (Γιατί;).

v) Ἄξονας συμμετρίας γωνίας.

Ἂς ἀναζητήσουμε τώρα ἄξονα συμμετρίας σὲ μιὰ γωνία ΑΟΒ. Γι' αὐτὸν τὸ σκοπὸ βρίσκουμε τὴ διχοτόμο* τῆς ΟΖ καὶ στρέφουμε τὸ ἐπίπεδο γύρω ἀπὸ αὐτὴ κατὰ μισὴ στροφή, σχ. 52. Παρατηροῦμε τότε ὅτι:

α) Ἡ διχοτόμος ΟΖ μένει ἀκίνητη.

β) Οἱ πλευρὲς ΟΑ, ΟΒ ἐναλλάσσονται. (Καθεμιὰ ἀπὸ αὐτὲς παίρνει τὴ θέση τῆς ἄλλης).



Σχ. 52

Δηλαδὴ στὴ Σ(ε) ἡ γωνία ΑΟΒ συμπίπτει μὲ τὴ συμμετρική της.

Ὥστε: **Κάθε γωνία ἔχει ἄξονα συμμετρίας τὴν εὐθεία τῆς διχοτόμου της.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

62. Νὰ βρεῖτε σύμβολα (ἀριθμοὺς ἢ γράμματα) ποὺ νὰ ἔχουν ἕναν ἢ περισσότερους ἄξονες συμμετρίας.

63. Σχεδιάστε ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο καὶ μὲ διπλώσεις προσπαθῆστε νὰ βρεῖτε ἄξονες συμμετρίας του. Κάμετε τὸ ἴδιο καὶ σ' ἕνα τετράγωνο.

64. Σ' ἕνα φύλλο τετραγωνισμένο χαρτὶ σχεδιάστε ἕνα εὐθύγραμμο σχῆμα ποὺ νὰ ἔχει ὡς ἄξονα συμμετρίας μιὰν εὐθεία τῆς ἐκλογῆς σας.

65. Στὴν πλευρὰ Οχ μιᾶς γωνίας χΟψ λαμβάνουμε δύο σημεῖα Α, Β καὶ στὴν πλευρὰ Οψ δύο ἄλλα σημεῖα Α', Β', τέτοια ὥστε ΟΑ = ΟΑ', ΟΒ = ΟΒ'.

α) Στὴ συμμετρία ὡς πρὸς τὴν εὐθεία τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας νὰ βρεῖτε τὰ ὁμόλογα γιὰ τὰ Α, Β, ΟΑ, ΟΒ, ΑΑ', ΑΒ', Α'Β.

β) Γιατί οἱ εὐθεῖες ΑΒ' καὶ Α'Β τέμνονται πάνω στὴ διχοτόμο;

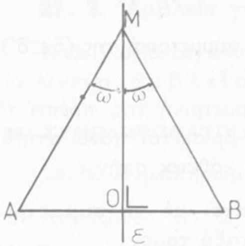
25. ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΤΗΣ ΜΕΣΟΚΑΘΕΤΟΥ

Πάνω σὲ μιὰ εὐθεία, σχ. 53, σημειώνουμε δύο διαδοχικὰ ἴσα τμήματα ΑΟ = ΟΒ καὶ κατόπι φέρνουμε τὴν κάθετο τῆς ΑΒ στὸ μέσο της (μεσοκάθετος).

i) Ἂς λάβουμε ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Μ πάνω στὴ μεσοκάθετο καὶ ἂς συγκρίνουμε τὶς ἀποστάσεις του ΜΑ καὶ ΜΒ ἀπὸ τὰ ἄκρα τοῦ τμήματος ΑΒ (μὲ τὸ διαβήτη ἢ μὲ δίπλωση γύρω ἀπὸ τὴ μεσοκάθετο). Θὰ διαπιστώσουμε ὅτι:

---

* Πρὸς τὸ παρὸν βρίσκουμε τὴ διχοτόμο διπλώνοντας τὸ ἐπίπεδο τῆς γωνίας ἔτσι, ὥστε ἡ μία πλευρά της νὰ ταυτιστεῖ μὲ τὴν ἄλλη.



Σχ. 53

$$MA = MB$$

Τοῦτο μποροῦμε νὰ τὸ δικαιολογήσουμε, ἂν σκεφτοῦμε ὅτι στὴ συμμετρία ὡς πρὸς τὴ μεσοκάθετο τὰ τμήματα MA καὶ MB εἶναι ὁμόλογα. (Τὸ M ὁμόλογο μὲ τὸν ἑαυτό του καὶ τὰ A, B ὁμόλογα μεταξύ τους).

ii) Μὲ τὸ διαβήτη σημειῶστε ἕνα σημεῖο N τοῦ ἐπιπέδου, ποὺ νὰ ἀπέχει ἐξίσου ἀπὸ τὰ ἄκρα A καὶ B τοῦ AB. Θὰ διαπιστώσετε ὅτι αὐτὸ τὸ σημεῖο βρίσκεται πάνω στὴ μεσοκάθετο τοῦ AB.

iii) Σημειῶστε ἀκόμη ἕνα σημεῖο P πάνω στὸ ἴδιο ἐπίπεδο, τὸ ὁποῖο νὰ μὴ βρίσκεται πάνω στὴ μεσοκάθετο. Θὰ διαπιστώσετε ὅτι αὐτὸ δὲν ἀπέχει ἐξίσου ἀπὸ τὰ ἄκρα τοῦ AB.

Τὰ προηγούμενα μᾶς ὁδηγοῦν στὸν ἑξῆς κανόνα:

Πάνω στὸ ἐπίπεδο τὰ σημεῖα τῆς μεσοκαθέτου τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος AB καὶ μόνο αὐτὰ ἀπέχουν ἐξίσου ἀπὸ τὰ ἄκρα του.

Ἢ συμβολικὰ

MA = MB ⇔ M βρίσκεται πάνω στὴ μεσοκάθετο τοῦ AB

Μὲ ἄλλη διατύπωση ἡ ἴδια πρόταση λέγεται:

Ὁ γεωμετρικὸς τόπος* τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου ποὺ ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ δύο σημεῖα του A καὶ B εἶναι ἡ μεσοκάθετος πρὸς τὴν AB.

26. ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΜΕΤΑΞΥ ΔΥΟ ΚΑΘΕΤΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ

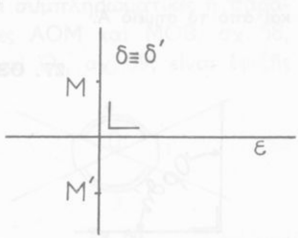
26. 1. Χαράζουμε δύο εὐθεῖες δ, ε κάθετες μεταξύ τους, σχ. 54.

Ποιὸ εἶναι τὸ συμμετρικὸ τῆς δ στὴ Σ(ε);

Παρατηροῦμε ὅτι ἡ δ εἶναι κάθετη πρὸς τὴν ε. Ἄρα συμπίπτει μὲ τὴ συμμετρική της (δ ≡ δ', § 24. 1).

Ὅμοια βρίσκουμε ὅτι στὴ Σ(δ) ἡ ε συμπίπτει μὲ τὴ συμμετρική της.

Ὥστε: **Ἂν δύο εὐθεῖες εἶναι κάθετες μεταξύ τους, τότε καθεμία ἀπὸ αὐτὲς συμπίπτει μὲ τὴ συμμετρική της στὴ συμμετρία ὡς πρὸς τὴν ἄλλη.**



Σχ. 54

* Ἡ ἔννοια καὶ ὁ ὅρος «γεωμετρικὸς τόπος» ὀφείλεται στὸ διάσημο Ἕλληνα φιλόσοφο καὶ μαθηματικὸ τῆς ἀρχαιότητας Πλάτωνα (429 - 347).

Ἢ συμβολικά: Στὴ Σ(ε): $\delta \perp \varepsilon \Rightarrow \delta \equiv \delta'$.

26. 2. Στὴ Σ(ε) μία εὐθεία $\delta \neq \varepsilon$ συμπίπτει μὲ τὴ συμμετρική της ($\delta \equiv \delta'$). Ποιὰ εἶναι ἡ θέση τῆς δ ὡς πρὸς τὴν ε;

Σκεφτόμαστε ὅτι: Ἀφοῦ ἡ δ συμπίπτει μὲ τὴ συμμετρική της, πρέπει τὸ συμμετρικὸ Μ′ ἑνὸς ὁποιουδήποτε σημείου Μ τῆς δ νὰ βρίσκεται πάνω στὴ δ. Ἀλλὰ ἡ ΜΜ′ εἶναι κάθετος στὴν ε. Δηλαδὴ ἡ δ εἶναι κάθετος στὴν ε.

Ὥστε: **Ἂν στὴ Σ(ε) μία εὐθεία $\delta \neq \varepsilon$ συμπίπτει μὲ τὴ συμμετρική της, τότε οἱ εὐθεῖες δ καὶ ε εἶναι κάθετες μεταξύ τους.**

Ἢ συμβολικά: στὴν Σ(ε): $\delta \equiv \delta' \Longrightarrow \delta \perp \varepsilon$ (2)

26. 3. Οἱ συνεπαγωγὲς (1) καὶ (2) γράφονται μαζὶ ὡς ἑξῆς:

$$\boxed{\text{Στὴ } \Sigma(\varepsilon):\ \delta \perp \varepsilon \ \Leftrightarrow\ \delta \equiv \delta',\ \ \delta \neq \varepsilon}$$

Στὴ Σ(ε) μία εὐθεία $\delta \neq \varepsilon$ γιὰ νὰ συμπίπτει μὲ τὴ συμμετρική της, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι κάθετος στὴν ε.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

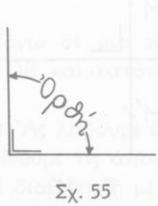
66. Ἂν Μ, Μ′ εἶναι ἕνα ζεῦγος σημεῖα συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν εὐθεία ε καὶ Ν ἕνα σημεῖο τῆς ε, τί συνάγετε γιὰ τὰ τμήματα ΝΜ καὶ ΝΜ′;

67. Ἂν τὸ σημεῖο Ν στὴν προηγούμενη ἄσκηση βρίσκεται ἔξω ἀπὸ τὴν εὐθεία ε, τί συνάγετε γιὰ τὰ τμήματα ΝΜ καὶ ΝΜ′;

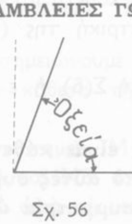
68. Χαράξετε μιὰν εὐθεία ε καὶ ἀπὸ ἕνα σημεῖο Μ ἔξω ἀπὸ τὴν εὐθεία ε φέρτε τὴν κάθετη ΜΟ πρὸς αὐτή. Ἔπειτα φέρτε ἀπὸ τὸ Μ δύο πλάγιες πρὸς τὴν ε. Σὲ ποιὰ περίπτωση τὰ τμήματα τῶν πλαγίων ἀπὸ τὸ Μ ἕως τὴν ε θὰ εἶναι ἴσα;

69. Σχηματίστε μιὰ γωνία χΟψ καὶ πάνω στὴν πλευρὰ Οχ σημειῶστε ἕνα σημεῖο Α. Νὰ βρεθεῖ πάνω στὴν πλευρὰ Οψ ἕνα σημεῖο Β, ποὺ νὰ ἀπέχει ἐξίσου ἀπὸ τὴν κορυφὴ Ο καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖο Α.

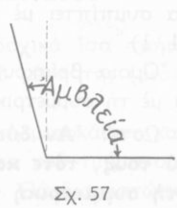
27. ΟΞΕΙΕΣ, ΑΜΒΛΕΙΕΣ ΓΩΝΙΕΣ



Σχ. 55



Σχ. 56



Σχ. 57

27. 1. Ὀξεία γωνία

Κάθε γωνία μικρότερη ἀπὸ τὴν ὀρθὴ λέγεται ὀξεία γωνία, σχ. 56.

27. 2. Ἀμβλεία γωνία

Κάθε γωνία μεγαλύτερη ἀπὸ τὴν ὀρθὴ καὶ μικρότερη ἀπὸ τὴν εὐθεία γωνία λέγεται ἀ μ β λ ε ί α γ ω ν ί α, σχ. 57.

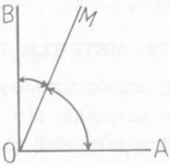
28. ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΕΣ, ΠΑΡΑΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΕΣ, ΚΑΤΑ ΚΟΡΥΦΗΝ ΓΩΝΙΕΣ

28. 1. Συμπληρωματικές

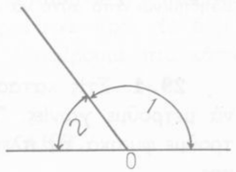
Χαράζουμε μιὰ ὀρθὴ γωνία ΑΟΒ καὶ φέρνουμε μιὰ ἡμιευθεία ΟΜ στὸ ἐσωτερικό της, σχ. 58.

Οἱ γωνίες ΑΟΜ καὶ ΜΟΒ ἔχουν ἄθροισμα μία ὀρθὴ γωνία.

Γι' αὐτὸ λέμε ὅτι καθεμιὰ ἀπὸ αὐτὲς εἶναι σ υ μ π λ η ρ ω μ α τ ι κ ὴ τῆς ἄλλης ἢ ὅτι εἶναι μεταξύ τους σ υ μ π λ η ρ ω μ α τ ι κ έ ς.



Σχ. 58



Σχ. 59

Γενικά: **Δύο γωνίες λέγονται συμπληρωματικές, ὅταν ἔχουν ἄθροισμα μία ὀρθὴ γωνία.**

28. 2. Παραπληρωματικὲς

Στὸ σχ. 59 οἱ γωνίες O_1 καὶ O_2 ἔχουν ἄθροισμα μία εὐθεία γωνία. Γι' αὐτὸ λέμε ὅτι καθεμιὰ ἀπὸ αὐτὲς εἶναι π α ρ α π λ η ρ ω μ α τ ι κ ὴ τῆς ἄλλης ἢ ὅτι εἶναι μεταξύ τους π α ρ α π λ η ρ ω μ α τ ι κ έ ς.

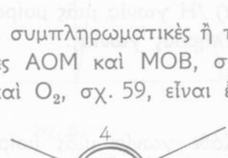
Γενικά: **Δύο γωνίες λέγονται παραπληρωματικές, ὅταν ἔχουν ἄθροισμα μία εὐθεία γωνία.**

28. 3. Παρατηρήσεις

Στὰ σχήματα 58, 59 οἱ γωνίες, ἐκτὸς ποὺ εἶναι συμπληρωματικὲς ἢ παραπληρωματικές, εἶναι καὶ ἐφεξῆς. Δηλαδὴ οἱ γωνίες ΑΟΜ καὶ ΜΟΒ, σχ. 58, εἶναι ἐφεξῆς συμπληρωματικές, καὶ οἱ γωνίες O_1 καὶ O_2, σχ. 59, εἶναι ἐφεξῆς παραπληρωματικές.

28. 4. Κατακορυφὴν γωνίες.

Ἂς προσέξουμε τὶς γωνίες O_1, O_2 στὸ σχ. 60. Οἱ πλευρὲς τῆς μιᾶς εἶναι ἀντίθετες ἀπὸ τὶς πλευρὲς τῆς ἄλλης ἀντιστοίχως. Γι' αὐτὸ λέγονται κ α τ α κ ο ρ υ φ ὴ ν γ ω ν ί ε ς.



Σχ. 60

Ὥστε: **Δύο γωνίες λέγονται κατακορυφήν, ἂν οἱ πλευρὲς τῆς μιᾶς εἶναι ἡμιευθεῖες ἀντίθετες πρὸς τὶς πλευρὲς τῆς ἄλλης.**

Σύμφωνα μὲ τὰ πιὸ πάνω, στὸ ἴδιο σχέδιο οἱ γωνίες O_3, O_4 εἶναι κατακορυφήν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

70. Χρησιμοποιώντας τὰ ὄργανά σας χαράξετε μιὰ ὀξεία γωνία καὶ ἔπειτα μιὰ συμπληρωματικὴ καὶ μιὰ παραπληρωματική της.

71. Εἶναι δυνατὸ δύο ὀξεῖες γωνίες ἢ δύο ἀμβλεῖες γωνίες νὰ εἶναι παραπληρωματικές;

72. Δύο παραπληρωματικὲς γωνίες εἶναι ἴσες. Τί συμπέρασμα βγάζετε γιὰ καθεμιὰ ἀπὸ αὐτές;

73. Χαράξετε δύο τεμνόμενες εὐθεῖες καὶ βρεῖτε ὅλα τὰ ζεύγη τῶν παραπληρωματικῶν γωνιῶν ποὺ ὑπάρχουν σ' αὐτὸ τὸ σχέδιο.

74. Γιατί, ὅταν δύο γωνίες ἔχουν τὴν ἴδια παραπληρωματική, εἶναι μεταξύ τους ἴσες; Βοηθημένοι ἀπὸ αὐτὸ νὰ ἀποδείξετε ὅτι δύο κατακορυφὴν γωνίες εἶναι ἴσες.

29. ΜΕΤΡΗΣΗ ΓΩΝΙΩΝ

29.1. Στὶς κατασκευές, στοὺς ὑπολογισμούς, στὴν τεχνικὴ εἶναι ἀνάγκη νὰ μετροῦμε γωνίες. Ὅταν μετροῦμε μία γωνία κυρτὴ ἢ μὴ κυρτή, δὲν μετροῦμε φυσικὰ τὶς πλευρές της οὔτε καὶ τὸ ἐσωτερικό της, ἀλλὰ τὸ «ἄνοιγμά» της.

29.2. Ἀριθμητικὴ τιμὴ γωνίας.

Ὅπως καὶ στὴν περίπτωση τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων, γιὰ νὰ μετρήσουμε μιὰ γωνία, πρέπει πρῶτα νὰ διαλέξουμε μιὰν ὁρισμένη γωνία ὡς μονάδα καὶ ἔπειτα νὰ βροῦμε πόσες φορὲς περιέχει ἡ γωνία μας τὴ μονάδα καὶ τὰ μέρη της.

Μ' αὐτὸ τὸν τρόπο προκύπτει ἕνας ἀριθμὸς ποὺ λέγεται ἀ ρ ι θ μ η τ ι κ ὴ τ ι μ ὴ ἢ τ ι μ ὴ τῆς γωνίας.

29.3. Μονάδες μετρήσεως γωνιῶν.

Συνηθισμένες μονάδες μετρήσεως γωνιῶν εἶναι ἡ ὀρθὴ γωνία (L), ἡ γωνία μιᾶς μ ο ί ρ α ς (1^0) καὶ ἡ γωνία ἑνὸς β α θ μ ο ῦ (1 gr).

α) Ἡ γωνία μιᾶς μοίρας ἰσοῦται μὲ τὸ 1/90 τῆς ὀρθῆς γωνίας ἢ τὸ 1/360 τῆς πλήρους γωνίας.

$$\boxed{1^0 = 1/90\ \mathrm{L}}$$

Κάθε γωνία μιᾶς μοίρας ὑποδιαιρεῖται σὲ 60 γωνίες τοῦ ἑνὸς πρώτου λεπτοῦ ($1'$). Καὶ κάθε γωνία ἑνὸς πρώτου λεπτοῦ ὑποδιαιρεῖται σὲ 60 γωνίες τοῦ ἑνὸς δεύτερου λεπτοῦ ($1''$).

Δηλαδή: $\boxed{1^0 = 60', \quad 1' = 60''}$

β) Κάθε γωνία ἑνὸς βαθμοῦ ἰσοῦται μὲ τὸ 1/100 τῆς ὀρθῆς γωνίας.

Σύμφωνα μὲ τὰ πιὸ πάνω,

Μία πλήρης γωνία ἰσοῦται μὲ 4 L ἢ 360^0 ἢ 400 gr

Μία εὐθεία γωνία ἰσοῦται μὲ 2 L ἢ 180^0 ἢ 200 gr

29. 4. Σημείωση

Ἂν στὴ μέτρηση μιᾶς γωνίας ω βροῦμε ὅτι ἡ μονάδα μία μοίρα περιέχεται σ' αὐτή, π.χ. 60 φορὲς ἀκριβῶς, τότε γράφουμε:

$$(\widehat{\omega}) = 60^0$$

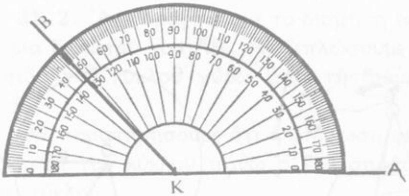
29.5. Γωνιόμετρο (Μοιρογνωμόνιο).

Γιὰ τὴ μέτρηση τῶν γωνιῶν συχνὰ χρησιμοποιοῦμε τὸ γωνιόμετρο. Αὐτὸ τὸ ὄργανο ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕνα ἡμικύκλιο μετάλλινο ἢ πλαστικὸ ἢ ξύλινο, ποὺ διαιρεῖται σὲ 180 ὑποδιαιρέσεις ἀπὸ ἀριστερὰ πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ ἀντίστροφα. Οἱ ἐνδείξεις ἀναγράφονται κάθε 10^0. Ἀναφέρουμε πιὸ κάτω παραδείγματα γιὰ δύο χρήσεις τοῦ γωνιόμετρου.

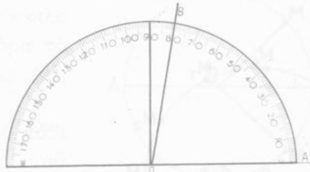
29. 6. Νὰ βρεθεῖ ἡ τιμὴ μιᾶς δεδομένης γωνίας ΑΚΒ.

Τοποθετοῦμε τὸ γωνιόμετρο, σχ. 61, μὲ τρόπο ποὺ νὰ συμπέσουν: α) Τὸ κέντρο του Ο μὲ τὴν κορυφὴ Κ τῆς γωνίας καὶ β) ἡ διάμετρος τοῦ γωνιομέτρου μὲ τὴ μία πλευρὰ ΚΑ τῆς γωνίας. (Ἡ πλευρὰ ΚΑ νὰ διέρχεται ἀπὸ τὸ μηδὲν τῆς κλίμακας μετρήσεως).

Τώρα ἀρκεῖ νὰ διαβάσουμε στὴ βαθμολογημένη κλίμακα τὴν ἔνδειξη ποὺ δείχνει ἡ πλευρὰ ΚΒ. Π.χ. ἡ γωνία ΑΚΒ στὸ σχ. 61 εἶναι περίπου 130^0.



Σχ. 61



Σχ. 62

29.7. Νὰ κατασκευάσετε γωνία 80^0 μὲ πλευρὰ μιὰ δεδομένη ἡμιευθεία ΟΑ.

Τοποθετοῦμε τὸ γωνιόμετρο μὲ τρόπο ὥστε νὰ ταυτιστοῦν:

α) τὸ κέντρο του Ο μὲ τὴν ἀρχὴ Ο τῆς δεδομένης ἡμιευθείας καὶ

β) ἡ διάμετρος τοῦ γωνιομέτρου μὲ τὴν ἡμιευθεία ΟΑ.

(Ἡ ΟΑ νὰ διέρχεται ἀπὸ τὸ μηδὲν τῆς κλίμακας).

Ἔπειτα χαράζουμε τὴν ἡμιευθεία ΟΒ, ποὺ διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖο μὲ τὴν ἔνδειξη 80^0 τοῦ γωνιομέτρου, σχ. 62.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

75. Μία γωνία εἶναι διπλάσια ἀπὸ τὴ συμπληρωματική της. Νὰ βρεῖτε σὲ μοῖρες, σὲ βαθμοὺς καὶ σὲ ὀρθὲς καθεμιὰ ἀπὸ αὐτὲς τὶς γωνίες.

76. Μία γωνία εἶναι μεγαλύτερη ἀπὸ τὴν παραπληρωματική της κατὰ 30^0. Νὰ ὑπολογίσετε καθεμιὰ ἀπὸ αὐτὲς τὶς δύο γωνίες.

30. Ο ΚΥΚΛΟΣ

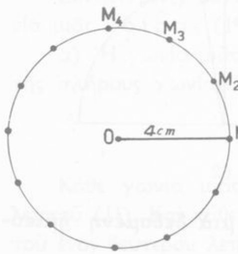
30.1. Ὁρισμὸς

i) Σ' ἕνα ἐπίπεδο σημειῶστε ἕνα σημεῖο Ο καὶ μὲ τὸ διαβήτη βρεῖτε διάφορα ἄλλα σημεῖα M_1, M_2, M_3, ... ποὺ νὰ ἀπέχουν 4 cm ἀπὸ τὸ Ο, σχ. 63. Προσέξετε τὶς θέσεις αὐτῶν τῶν σημείων.

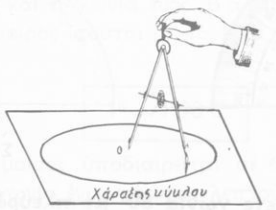
ii) Στερεώνουμε τὰ σκέλη τοῦ διαβήτη μας, ὥστε νὰ μὴ μεταβάλλεται ἡ γωνία τους. Ἔπειτα στηρίζουμε τὴν αἰχμὴ τοῦ ἑνὸς σκέλους στὸ σημεῖο Ο τοῦ ἐπιπέδου καὶ περιφέρουμε τὸ διαβήτη μὲ τρόπο ποὺ ἡ γραφίδα τοῦ σκέλους νὰ ἐγγίζει συνεχῶς τὸ ἐπίπεδο. Μ' αὐτὸ τὸν τρόπο ἡ γραφίδα χαράζει μία γραμμή, σχ. 64, τῆς ὁποίας ὅλα τὰ σημεῖα ἀπέχουν ἐξίσου ἀπὸ τὸ σημεῖο Ο.

iii) Ἂν στὸ ἐπίπεδο δοθεῖ ἕνα σημεῖο Ο καὶ ἕνα εὐθ. τμῆμα α, τότε τὸ σύνολο τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου, ποὺ βρίσκονται ἀπὸ τὸ Ο σὲ ἀπόσταση ἴση μὲ α, λέγεται κ ύ κ λ ο ς.

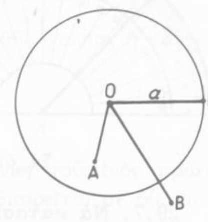
Τὸ σημεῖο Ο λέγεται κ έ ν τ ρ ο καὶ τὸ τμῆμα α ἀ κ τ ί ν α τοῦ κύκλου. Ἐπειδὴ ὁ κύκλος ὁρίζεται, ἂν γνωρίζουμε τὸ κέντρο Ο καὶ τὴν ἀκτίνα του α, συμβολίζεται (Ο, α).



Σχ. 63



Σχ. 64



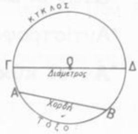
Σχ. 65

30.2. Στοιχεῖα τοῦ κύκλου.

i) Ἐ σ ω τ ε ρ ι κ ὰ κ α ὶ ἐ ξ ω τ ε ρ ι κ ὰ σ η μ ε ῖ α.

α) Στὸ σχ. 65 τὸ σημεῖο Α βρίσκεται ἀπὸ τὸ κέντρο Ο σὲ ἀπόσταση μικρότερη ἀπὸ τὴν ἀκτίνα α (ΟΑ $<$ α) καὶ λέγεται ἐ σ ω τ ε ρ ι κ ὸ σημεῖο τοῦ κύκλου (Ο, α). Στὸ ἴδιο σχέδιο τὸ σημεῖο Β βρίσκεται ἀπὸ τὸ κέντρο Ο σὲ ἀπόσταση ΟΒ μεγαλύτερη ἀπὸ τὴν ἀκτίνα α, (ΟΒ $>$ α) καὶ λέγεται *ἐξωτερικὸ* σημεῖο τοῦ κύκλου (Ο, α).

Τὸ σύνολο τῶν ἐσωτερικῶν σημείων τοῦ κύκλου λέγεται *ἐσωτερικὸ τοῦ κύκλου*. Τὸ σύνολο τῶν ἐξωτερικῶν σημείων τοῦ κύκλου λέγεται *ἐξωτερικὸ τοῦ κύκλου*.



Σχ. 66

Δηλαδή:

ΟΑ $<$ α $\Leftrightarrow$ (Α βρίσκεται στὸ ἐσωτερικὸ τοῦ κύκλου)
ΟΜ $=$ α $\Leftrightarrow$ (Μ βρίσκεται πάνω στὸν κύκλο)
ΟΒ $>$ α $\Leftrightarrow$ (Β βρίσκεται στὸ ἐξωτερικὸ τοῦ κύκλου)

ii) *Χορδή, διάμετρος, τόξο.*

Ἂν Α, Β εἶναι δύο σημεῖα τοῦ κύκλου, τότε τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ λέγεται *χορδὴ* τοῦ κύκλου.

Ἂν εἰδικὰ μιὰ χορδὴ ΓΔ διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρο Ο τοῦ κύκλου, τότε αὐτὴ λέγεται *διάμετρος* τοῦ κύκλου, σχ. 66.

Κάθε χορδή, π.χ. ἡ χορδὴ ΑΒ, σχ. 66, χωρίζει τὸν κύκλο σὲ δύο μέρη ποὺ βρίσκονται ἀπὸ τὴ μιὰ καὶ τὴν ἄλλη πλευρά της. Καθένα ἀπὸ αὐτὰ λέγεται *τόξο*.

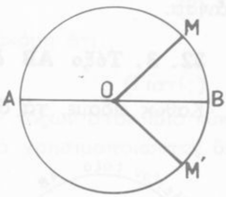
Δηλαδή: ἡ χορδὴ ΑΒ ὁρίζει στὸν κύκλο δύο τόξα μὲ ἄκρα τὰ σημεῖα Α καὶ Β.

31. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΔΙΑΜΕΤΡΟΥ

31. 1. Παρατηροῦμε ὅτι κάθε διάμετρος ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ἀκτίνες.

Ἄρα: Ὅλες οἱ διάμετροι ἑνὸς κύκλου εἶναι ἴσες.

31. 2. Ἂς χαράξουμε μὲ τὸ διαβήτη ἕναν κύκλο καὶ μία διάμετρό του ΑΒ. Ἂς διπλώσουμε τώρα τὸ ἐπίπεδο τοῦ κύκλου γύρω ἀπὸ τὴ διάμετρο ΑΒ, σχ. 67.



Σχ. 67

Θὰ παρατηρήσουμε ὅτι ἡ δίπλωση φέρνει κάθε σημεῖο Μ τοῦ κύκλου πάνω σ' ἕνα σημεῖο Μ′ τοῦ ἴδιου κύκλου.

Τοῦτο σημαίνει ὅτι τὸ συμμετρικὸ τοῦ κύκλου ὡς πρὸς τὴν εὐθεία ΑΒ εἶναι ὁ ἴδιος ὁ κύκλος.

Δηλαδή:

1. **Ἡ εὐθεία κάθε διαμέτρου εἶναι ἄξονας συμμετρίας τοῦ κύκλου.**
2. **Κάθε διάμετρος χωρίζει τὸν κύκλο σὲ δύο ἴσα μέρη.**

Καθένα ἀπὸ τὰ δύο αὐτὰ μέρη τοῦ κύκλου λέγεται *ἡμικύκλιο*.

32. ΙΣΟΤΗΤΑ ΚΥΚΛΩΝ, ΤΟΞΩΝ

32.1. Ἰσότητα, ἀνισότητα κύκλων.

Χαράζουμε δύο κύκλους (Ο, α), (Ο′, α′) μὲ ἴσες ἀκτίνες α $=$ α′. Ἔπειτα, χρησιμοποιώντας τὸ διαφανές, ἐπιθέτουμε τὸν ἕνα πάνω στὸν ἄλλο μὲ τέτοιο τρόπο, ὥστε νὰ συμπέσουν τὰ κέντρα τους Ο, Ο′. Παρατηροῦμε τότε ὅτι οἱ δύο κύκλοι συμπίπτουν (ἐφαρμόζουν).

Αὐτὸ τὸ πείραμα μᾶς ὁδηγεῖ στὴν ἑπόμενη πρόταση:

Ὅταν οἱ ἀκτῖνες δύο κύκλων εἶναι ἴσες, τότε καὶ οἱ κύκλοι εἶναι ἴσοι.

Ἀντίστροφα μποροῦμε νὰ ἐπαληθεύσουμε ὅτι:

Ἂν οἱ κύκλοι εἶναι ἴσοι, τότε θὰ ἔχουν ἴσες ἀκτῖνες.

$$\boxed{(O, \alpha) = (O', \alpha') \Leftrightarrow \alpha = \alpha'}$$

Ἂν δύο κύκλοι δὲν εἶναι ἴσοι, τότε λέγονται ἄνισοι.

32. 2. Τόξα ἴσων κύκλων.

Χαράζουμε δύο κύκλους μὲ ἴσες ἀκτίνες. Δηλαδὴ δύο ἴσους κύκλους. Πάνω σ' αὐτοὺς τοὺς δύο κύκλους λαμβάνουμε δύο τόξα ΑΒ καὶ Α′Β′. Ἔπειτα μὲ ἕνα διαφανὲς τοποθετοῦμε τὸν ἕναν κύκλο πάνω στὸν ἄλλο μὲ τρόπο ποὺ νὰ ἐφαρμόσουν οἱ δύο κύκλοι. Παρατηροῦμε τότε ὅτι τὸ τόξο ΑΒ τοῦ ἑνὸς κύκλου ἐφαρμόζει στὸ τόξο Α′Β′ τοῦ ἄλλου κύκλλου (ἔστω καὶ ἂν χρειαστεῖ νὰ περιστρέψουμε τὸν ἕναν κύκλο γύρω ἀπὸ τὸ κέντρο του) ἢ δὲν ἐφαρμόζει. Στὴν πρώτη περίπτωση λέμε ὅτι τὰ δύο τόξα εἶναι ἴσα καὶ στὴ δεύτερη ὅτι εἶναι ἄνισα.

Δηλαδή: σὲ δύο ἴσους κύκλους (ἢ στὸν ἴδιο κύκλο) δύο τόξα εἶναι ἢ ἴσα ἢ ἄνισα.

32. 3. Τόξο ΑΒ ἔλασσον, μεῖζον.

Καθὼς εἴδαμε, τὰ ἄκρα Α, Β μιᾶς χορδῆς ΑΒ εἶναι ἄκρα δύο τόξων τοῦ κύκλου. Αὐτὰ τὰ τόξα εἶναι ἄνισα. Τὸ ἕνα, ποὺ εἶναι πιὸ μικρό, ὀνομάζεται ἔλασσον τόξο ΑΒ, καὶ τὸ ἄλλο, τὸ πιὸ μεγάλο, ὀνομάζεται μεῖζον τόξο ΑΒ.

Σχ. 68

Στὰ ἑπόμενα, ὅσες φορὲς γράφουμε «τόξο ΑΒ» ἢ συμβολικὰ $\widehat{AB}$, θὰ ἐννοοῦμε τὸ ἔλασσον τόξο ΑΒ. Γιὰ τὸ μεῖζον τόξο θὰ μιλοῦμε εἰδικά.

32.4. Τόξα ἀνίσων κύκλων.

Χαράξτε δύο ἄνισους κύκλους καὶ μὲ ἕνα διαφανὲς προσπαθῆστε νὰ φέρετε σὲ σύμπτωση (νὰ ἐφαρμόσετε) ἕνα τόξο τοῦ ἑνὸς μὲ ὁποιοδήποτε τόξο τοῦ ἄλλου. Θὰ πεισθεῖτε ὅτι αὐτὸ εἶναι ἀδύνατο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

77. Χαράξετε δύο κύκλους (Ο, α) καὶ (Ο, β), ὅπου $\alpha > \beta$. Νὰ βρεῖτε τὸ σύνολο τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου, τὰ ὁποῖα εἶναι ἐσωτερικὰ τοῦ κύκλου (Ο, α) καὶ ἐξωτερικὰ τοῦ κύκλου (Ο, β).

78. Θέλουμε νὰ χαράξουμε κύκλους μὲ ἀκτίνα μήκους 3 cm, ποὺ νὰ διέρχονται ἀπὸ τὸ ἴδιο σημεῖο Α. Πόσους τέτοιους κύκλους μποροῦμε νὰ χαράξουμε στὸ ἐπίπεδο; Ποῦ βρίσκονται τὰ κέντρα αὐτῶν τῶν κύκλων;

79. Σ' ἕναν κύκλο νὰ χαράξετε δύο κάθετες διαμέτρους. Ἔπειτα μὲ ἕνα διαφανὲς νὰ συγκρίνετε τὰ 4 τόξα τοῦ κύκλου ποὺ ὁρίζονται ἀπὸ αὐτές.

80. Νὰ χαράξετε ἕνα εὐθ. τμῆμα ΑΒ μήκους 4 cm. Ἔπειτα νὰ βρεῖτε σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου τὰ ὁποῖα ἀπέχουν 3 cm ἀπὸ κάθε ἄκρο τοῦ ΑΒ.

33. ΑΘΡΟΙΣΜΑ, ΔΙΑΦΟΡΑ ΤΟΞΩΝ ΙΣΩΝ ΚΥΚΛΩΝ.

33. 1. Ὁρισμοὶ

α) Στὸ πάρα κάτω σχ. 69 τὰ ἐλάσσονα τόξα ΑΒ, ΒΓ ἔχουν τὸ ἕνα ἄκρο τους (Β) κοινὸ καὶ ἀνάμεσα στὰ δύο ἄλλα ἄκρα. Γι' αὐτὸ λέγονται διαδοχικά.

Τὸ μεῖζον ἢ ἔλασσον τόξο ΑΓ, ποὺ περιέχει τὸ σημεῖο Β, λέγεται ἄθροισμα τῶν διαδοχικῶν τόξων ΑΒ καὶ ΒΓ.

Τὸ γράφουμε: $\overset{\frown}{\mathrm{AB}} + \overset{\frown}{\mathrm{B\Gamma}} = \overset{\frown}{\mathrm{A\Gamma}}$ (1)

β) Τὸ τόξο ΒΓ προστίθεται στὸ τόξο ΑΒ καὶ δίνει ἄθροισμα τὸ τόξο ΑΓ. Λέγεται γι' αὐτὸ διαφορὰ τῶν τόξων ΑΓ καὶ ΑΒ.

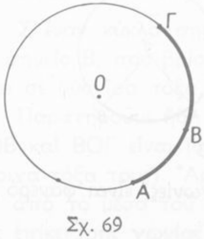
Τὸ γράφουμε:

$$\overset{\frown}{\mathrm{A\Gamma}} - \overset{\frown}{\mathrm{AB}} = \overset{\frown}{\mathrm{B\Gamma}} \qquad (2)$$

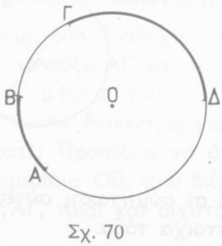
Σύμφωνα μὲ τὰ πιὸ πάνω, ἀπὸ τὴν (1) ἔχουμε ἀκόμη ὅτι:

$$\overset{\frown}{\mathrm{A\Gamma}} - \overset{\frown}{\mathrm{B\Gamma}} = \overset{\frown}{\mathrm{AB}} \qquad \text{(Γιατί;)}$$

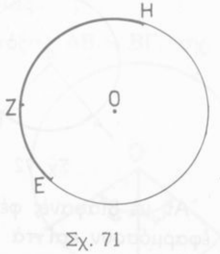
33. 2. Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἄθροισμα μὴ διαδοχικῶν τόξων στὸν ἴδιο κύκλο ἢ σὲ δύο ἴσους κύκλους, τὰ κάνουμε πρῶτα διαδοχικὰ χρησιμοποιώντας διαφανὲς χαρτί.



Σχ. 69



Σχ. 70



Σχ. 71

Π.χ. γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἄθροισμα τῶν τόξων ΑΒ καὶ ΓΔ στὸ σχ. 70, λαμβάνουμε:

$$\overset{\frown}{EZ} = \overset{\frown}{AB} \text{ καὶ } \overset{\frown}{ZH} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$$

Ἄρα: $$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{\Gamma\Delta} = \overset{\frown}{EZ} + \overset{\frown}{ZH}$$

ἤ $$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{\Gamma\Delta} = \overset{\frown}{EZH}$$

Γιὰ νὰ βροῦμε τὴ διαφορὰ δύο τόξων στὸν ἴδιο κύκλο ἢ σὲ ἴσους κύκλους, ἐργαζόμαστε ὅπως καὶ στὴν περίπτωση τῆς διαφορᾶς γωνιῶν ἢ εὐθ. τμημάτων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

81. Μὲ ἕνα διαφανὲς νὰ ἐπαληθεύσετε ὅτι γιὰ τρία τόξα α, β, γ, ποὺ ἀνήκουν στὸν ἴδιο κύκλο (ἢ σὲ ἴσοὺς κύκλους) ἰσχύουν: 1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$, 2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$.

82. Σὲ δύο ἴσους κύκλους δύο τόξα ἐλάσσονα εἶναι ἴσα. Τί συμπέρασμα βγάζετε γιὰ τὰ ἀντίστοιχα μείζονα τόξα; Δικαιολογῆστε τὴν ἀπάντησή σας.

83. Σὲ δύο ἴσους κύκλους σημειῶστε δύο ἄνισα ἐλάσσονα τόξα. Μὲ ἕνα διαφανὲς νὰ συγκρίνετε τὰ ἀντίστοιχα μείζονα τόξα τους. Τί παρατηρεῖτε;

34. ΕΠΙΚΕΝΤΡΗ ΓΩΝΙΑ - ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΟ ΤΟΞΟ

43, 1. Ὁρισμοὶ

Κάθε γωνία ΑΟΒ ποὺ ἔχει τὴν κορυφή της στὸ κέντρο ἑνὸς κύκλου λέγεται ἐπίκεντρη γωνία σ' αὐτὸν τὸν κύκλο. Τὰ σημεῖα Α, Β, ὅπου ἡ ἐπίκεντρη γωνία ΑΟΒ, σχ. 72, τέμνει τὸν κύκλο, εἶναι ἄκρα δύο τόξων. Τὸ ἔλασσον τόξο ΑΒ λέγεται ἀντίστοιχο τόξο στὴν κυρτὴ ἐπίκεντρη γωνία ΑΟΒ καὶ τὸ μεῖζον τόξο ΑΒ ἀντίστοιχο τόξο στὴν μὴ κυρτὴ ἐπίκεντρη γωνία ΑΟΒ.

34.2. Σχέση ἀνάμεσα σὲ ἐπίκεντρες γωνίες καὶ ἀντίστοιχα τόξα.

i) Σὲ δύο ἴσους κύκλους σημειώνουμε δύο ἴσες ἐπίκεντρες γωνίες ΑΟΒ καὶ Α'Ο'Β', σχ. 73.

Σχ. 72

Σχ. 73

Ἂν μὲ διαφανὲς φέρουμε σὲ σύμπτωση αὐτὲς τὶς γωνίες, εἶναι φανερὸ ὅτι θὰ ἐφαρμόσουν καὶ τὰ ἀντίστοιχα τόξα.

ii) Σὲ δύο ἴσους κύκλους μὲ ἕνα φύλλο χαρτὶ διαφανὲς σημειώνουμε δύο ἴσα τόξα ΑΒ = Α'Β'. Ἂν φέρουμε σὲ σύμπτωση αὐτὰ τὰ τόξα, θὰ παρατηρήσουμε ὅτι καὶ οἱ ἀντίστοιχες ἐπίκεντρες γωνίες τους συμπίπτουν (ταυτίζονται).

Τὰ πιὸ πάνω πειράματα μᾶς ὁδηγοῦν στὴν ἑξῆς γεωμετρικὴ πρόταση:

Σὲ δύο ἴσους κύκλους (ἢ στὸν ἴδιο κύκλο)

Σὲ ἴσες κυρτὲς (ἢ μὴ κυρτὲς) ἐπίκεντρες γωνίες ἀντιστοιχοῦν ἴσα τόξα καὶ ἀντιστρόφως σὲ ἴσα τόξα ἀντιστοιχοῦν ἴσες κυρτὲς (ἢ μὴ κυρτὲς) ἐπίκεντρες γωνίες.

Ἢ συμβολικά:

Σὲ ἴσους κύκλους: $\widehat{AB} = \widehat{A'B'} \Leftrightarrow A\widehat{O}B = A'\widehat{O'}B'$

35. ΙΣΑ ΤΟΞΑ, ΙΣΕΣ ΧΟΡΔΕΣ

35.1. i) Σὲ δύο ἴσους κύκλους (ἢ στὸν ἴδιο κύκλο) νὰ χαράξετε, μὲ τὴ βοήθεια ἑνὸς διαφανοῦς, δύο ἴσες χορδὲς $AB = A'B'$ καὶ νὰ συγκρίνετε τὰ δύο ἐλάσσονα καθὼς καὶ τὰ δύο μείζονα τόξα. Γι' αὐτὸ τὸ σκοπὸ νὰ φέρετε σὲ σύμπτωση (μὲ ἕνα διαφανὲς) τοὺς ἴσους κύκλους, μὲ τρόπο ὥστε νὰ συμπέσουν οἱ ἴσες χορδές. Τί παρατηρεῖτε;

ii) Σὲ δύο ἴσους κύκλους (ἢ στὸν ἴδιο κύκλο) νὰ σημειώσετε, μὲ ἕνα διαφανές, δύο ἴσα τόξα καὶ ἔπειτα νὰ συγκρίνετε τὶς χορδές τους. Γι' αὐτὸν τὸ σκοπό, νὰ φέρετε σὲ σύμπτωση τοὺς δύο ἴσους κύκλους, μὲ τρόπο ὥστε νὰ ἐφαρμόσουν τὰ ἴσα τόξα. Τί παρατηρεῖτε;

Τὰ πιὸ πάνω πειράματα μᾶς ὁδηγοῦν στὶς ἑξῆς γεωμετρικὲς προτάσεις:

Σὲ ἴσους κύκλους ἢ στὸν ἴδιο κύκλο

1. Σὲ ἴσες χορδὲς ἀντισοιχοῦν ἴσα ἐλάσσονα ἢ μείζονα τόξα.

2. Σὲ ἴσα τόξα ἀντιστοιχοῦν ἴσες χορδές.

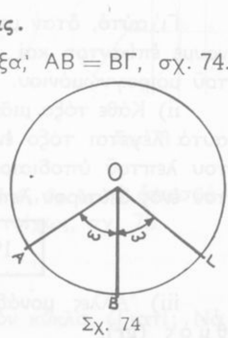
Σημείωση

Ἡ 1η ἀπὸ τὶς πιὸ πάνω ἰδιότητες μᾶς ἐπιτρέπει νὰ ὁρίσουμε σὲ ἴσους κύκλους ἴσα τόξα, λαμβάνοντας μὲ τὸ διαβήτη ἴσες χορδές.

35.2. Μέσο τόξου. Διχοτόμος ἐπίκεντρης γωνίας.

Σ' ἕναν κύκλο σημειώνουμε δύο διαδοχικὰ ἴσα τόξα, $AB = B\Gamma$, σχ. 74. Τὸ σημεῖο Β, ποὺ βρίσκεται στὸ τόξο ΑΓ καὶ τὸ χωρίζει σὲ δύο ἴσα τόξα, λέγεται μέσο του.

Παρατηροῦμε ἤδη ὅτι οἱ κυρτὲς ἐπίκεντρες γωνίες ΑΟΒ καὶ ΒΟΓ εἶναι ἴσες. (Γιατί; Προσέξετε τὰ ἀντίστοιχα τόξα τους). Ἄρα ἡ ἡμιευθεία ΟΒ, ποὺ διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσο τοῦ τόξου ΑΓ, εἶναι καὶ διχοτόμος τῆς ἐπίκεντρης γωνίας ΑΟΓ.



Σχ. 74

Ἡ διχοτόμος μιᾶς ἐπίκεντρης γωνίας διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσο τοῦ ἀντίστοιχου τόξου της.

Αὐτὴ ἡ πρόταση μᾶς ἐπιτρέπει νὰ κατασκευάσουμε μὲ χάρακα τὴ διχοτόμο μιᾶς ἐπίκεντρης γωνίας, ὅταν γνωρίζουμε τὸ μέσο τοῦ ἀντίστοιχου τόξου της.

36. ΜΕΤΡΗΣΗ ΤΟΞΩΝ

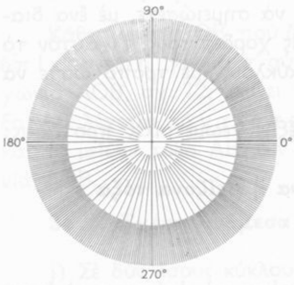
36. 1. Ἀριθμητικὴ τιμὴ τόξου.

Γιὰ νὰ μετρήσουμε ἕνα τόξο AB, τὸ συγκρίνουμε μὲ ἕνα ἄλλο τόξο M τοῦ ἴδιου κύκλου, ποὺ τὸ λαμβάνουμε ὡς μονάδα. Ἀπὸ αὐτὴ τὴ σύγκριση προκύπτει ἕνας ἀριθμός, ποὺ δείχνει πόσες φορὲς ἡ μονάδα τῶν τόξων (καὶ τὰ μέρη της) χωράει στὸ μετρούμενο τόξο. Αὐτὸς ὁ ἀριθμὸς εἶναι ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ ἢ ἡ τιμὴ τοῦ τόξου.

36. 2. Μονάδες μετρήσεως τόξου.

i) Στὸν κύκλο μονάδα μετρήσεως τόξων εἶναι τὸ τόξο μιᾶς μοίρας (1^0). Αὐτὴ ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:

Φανταστεῖτε ὅτι ἀπὸ τὸ κέντρο O τοῦ κύκλου φέρνουμε ἡμιευθεῖες OA, OB, OΓ, . . . ἔτσι ποὺ νὰ σχηματίσουμε 360 διαδοχικὰ ἴσα τόξα, σχ. 75.



Σχ. 75

Καθένα ἀπὸ αὐτὰ τὰ τόξα λέγεται τόξο μιᾶς μοίρας.

Παρατηροῦμε ὅτι οἱ ἀντίστοιχες ἐπίκεντρες γωνίες αὐτῶν τῶν τόξων εἶναι ἴσες. Καθεμιά τους εἶναι ἴση μὲ 1^0.

Σύμφωνα μὲ τὰ πιὸ πάνω, σὲ ἐπίκεντρη γωνία μιᾶς μοίρας ἀντιστοιχεῖ τόξο μιᾶς μοίρας, σὲ ἐπίκεντρη γωνία 2, 3, 4, . . . μοιρῶν ἀντιστοιχεῖ τόξο 2, 3, 4, . . . μοιρῶν ἀντιστοίχως.

Δηλαδὴ ἡ τιμὴ μιᾶς ἐπίκεντρης γωνίας εἶναι ἴδια μὲ τὴν τιμὴ τοῦ ἀντίστοιχου τόξου της (ὅταν αὐτὰ μετρηθοῦν μὲ μοῖρες).

Γι' αὐτό, ὅταν μετροῦμε μία γωνία μὲ τὸ μοιρογνωμόνιο (§ 29), τὴν κάνουμε ἐπίκεντρη καὶ μετροῦμε τὸ ἀντίστοιχο τόξο της πάνω στὸ ἡμικύκλιο τοῦ μοιρογνωμόνιου.

ii) Κάθε τόξο μιᾶς μοίρας (1^0) ὑποδιαιρεῖται σὲ 60 ἴσα τόξα. Καθένα ἀπὸ αὐτὰ λέγεται τόξο ἑνὸς πρώτου λεπτοῦ ($1'$). Ὅμοια, κάθε τόξο ἑνὸς πρώτου λεπτοῦ ὑποδιαιρεῖται σὲ 60 ἴσα τόξα. Καθένα ἀπὸ αὐτὰ λέγεται τόξο τοῦ ἑνὸς δεύτερου λεπτοῦ ($1''$).

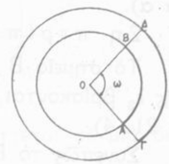
$$\boxed{1^0 = 60', \quad 1' = 60'', \quad 1^0 = 3600''}$$

iii) Ἄλλες μονάδες μετρήσεως τόξων εἶναι τὸ ἀκτίνιον καὶ ὁ βαθμὸς (gr).

Τόξο ἑνὸς ἀκτινίου = Τόξο ποὺ ἔχει μῆκος ἴσο μὲ τὴν ἀκτίνα τοῦ κύκλου.

Τόξο ἑνὸς βαθμοῦ = Τόξο ἴσο μὲ τὸ 1/400 τοῦ κύκλου.

Ὁ βαθμὸς ὑποδιαιρεῖται σὲ δέκατα (dgr), ἑκατοστὰ (cgr).



Σχ. 76

Παρατηρήσεις

i) Ὅταν δύο τόξα ἔχουν τὴν ἴδια τιμή, δὲν εἶναι ἀναγκαστικὰ καὶ ἴσα. Πρέπει ἐπιπλέον νὰ ἀνήκουν στὸν ἴδιο κύκλο ἢ σὲ ἴσους κύκλους. Π.χ. τὰ τόξα ΑΒ, ΓΔ τοῦ σχ. 76, ἔχουν ἴσες τιμὲς (σὲ μοῖρες) χωρὶς νὰ εἶναι ἴσα. (Γιατί;).

ii) Ἡ λέξη «μοίρα», ὅταν χρησιμοποιεῖται ὡς μονάδα τόξων, δηλώνει ἕνα τόξο, ἐνῶ ,ὅταν χρησιμοποιεῖται ὡς μονάδα γωνιῶν, δηλώνει μία γωνία.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

84. Σ' ἕναν κύκλο φέρτε δύο κάθετες διαμέτρους. Συγκρίνετε ἔπειτα τὶς τέσσερες χορδὲς ποὺ ὁρίζονται ἀπὸ αὐτές.

85. Μὲ τρεῖς διαμέτρους χωρίζουμε ἕναν κύκλο σὲ 6 ἴσα τόξα. Νὰ βρεῖτε τὶς τιμὲς (σὲ μοῖρες) καὶ γιὰ τὰ 6 τόξα καθὼς καὶ γιὰ τὶς ἀντίστοιχες ἐπίκεντρες γωνίες τους.

86. Σ' ἕναν κύκλο νὰ πάρετε δύο ἄνισες χορδὲς καὶ ἔπειτα νὰ συγκρίνετε τὶς ἀποστάσεις τοῦ κέντρου ἀπὸ αὐτές. Τί παρατηρεῖτε; Νὰ διατυπώσετε τὰ συμπεράσματά σας.

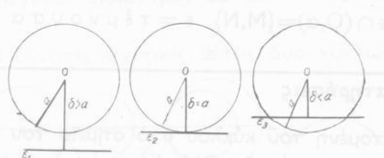
87. Νὰ ἐξετάσετε ἂν ἡ μεσοκάθετος μιᾶς χορδῆς διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρο τοῦ κύκλου καὶ ἀπὸ τὰ μέσα τῶν τόξων τῆς χορδῆς.

37. ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΘΕΣΕΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΥ

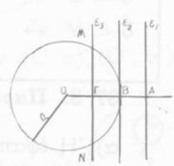
37. 1. Ἂν σᾶς ζητήσουν νὰ χαράξετε μιὰ εὐθεία καὶ ἕναν κύκλο, σὲ ποιὲς θέσεις εἶναι δυνατὸ νὰ τοποθετήσετε τὴν εὐθεία ὡς πρὸς τὸν κύκλο;

Οἱ δυνατὲς σχετικὲς θέσεις φαίνονται στὸ σχ. 77.

Σὲ κάθε περίπτωση θὰ συγκρίνουμε τὴν ἀκτίνα α μὲ τὴν ἀ π ό σ τ α σ η δ τοῦ κέντρου Ο ἀπὸ τὴν εὐθεία.



Σχ. 77



Σχ. 78

37. 2. Χαράζουμε ἕναν κύκλο (Ο, α) καὶ τρεῖς εὐθεῖες ε_1, ε_2, ε_3 σὲ ἀποστάσεις ἀπὸ τὸ κέντρο ΟΑ $>$ α, ΟΒ $=$ α καὶ ΟΓ $<$ α ἀντιστοίχως, σχ. 78.

Διακρίνουμε τότε τὰ ἑξῆς:

1 η π ε ρ ί π τ ω σ η : ΟΑ $>$ α.

Ἡ εὐθεία δὲν ἔχει κ α ν έ ν α κ ο ι ν ὸ σημεῖο μὲ τὸν κύκλο. (Γιατί; Νὰ συγκρίνετε τὴν ἀπόσταση τοῦ κέντρου Ο ἀπὸ ἕνα σημεῖο τῆς $ε_1$ μὲ τὴν ἀκτίνα α).

2η περίπτωση: $ΟΒ = α$.

Τὸ σημεῖο Β τῆς $ε_2$ βρίσκεται πάνω στὸν κύκλο. Ὅλα τὰ ἄλλα σημεῖα τῆς $ε_2$ βρίσκονται ἀπὸ τὸ κέντρο σὲ ἀπόσταση μεγαλύτερη ἀπὸ τὴν $ΟΒ = α$ (§ 21.4).

Συνεπῶς τὸ Β εἶναι τὸ μοναδικὸ κοινὸ σημεῖο τῆς εὐθείας $ε_2$ μὲ τὸν κύκλο.

Γι' αὐτὸ λέμε ὅτι ἡ εὐθεία $ε_2$ εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου στὸ σημεῖο του Β. Αὐτὸ τὸ σημεῖο ὀνομάζεται σημεῖο ἐπαφῆς.

3η περίπτωση: $ΟΓ < α$

Τὸ σημεῖο Γ εἶναι ἐσωτερικὸ τοῦ κύκλου (Ο, α), καὶ ἡ εὐθεία ε, ἔχει δύο κοινὰ σημεῖα Μ καὶ Ν μὲ τὸν κύκλο, καὶ γι' αὐτὸ λέγεται τέμνουσα τοῦ κύκλου.

Ὥστε:

Ἂν $δ > α$, τότε ἡ εὐθεία εἶναι ἐξωτερικὴ (κανένα κοινὸ σημεῖο)
» $δ = α$, » ἡ » » ἐφαπτομένη (1 κοινὸ σημεῖο)
» $δ < α$, » ἡ » » τέμνουσα (2 κοινὰ σημεῖα)

Αὐτὲς οἱ τρεῖς προτάσεις ἰσχύουν καὶ ἀντιστρόφως.

Δηλαδή: **Ἂν δὲν ὑπάρχουν κοινὰ σημεῖα, τότε εἶναι $δ > α$**
Ἂν ὑπάρχει 1 μόνο κοινὸ σημεῖο, τότε $δ = α$
Ἂν ὑπάρχουν 2 κοινὰ σημεῖα, τότε εἶναι $δ < α$

Οἱ ἕξι (6) προηγούμενες προτάσεις γράφονται συμβολικὰ ὡς ἑξῆς:

$δ > α$	$\Leftrightarrow$	$ε \cap (Ο,α) = \varnothing$,	ε = ἐξωτερικὴ τοῦ κύκλου	(1)
$δ = α$	$\Leftrightarrow$	$ε \cap (Ο,α) = \{Β\}$	ε = ἐφαπτομένη	(2)
$δ < α$	$\leftrightarrow$	$ε \cap (Ο,α) = \{Μ,Ν\}$	ε = τέμνουσα	(3)

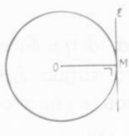
37. 3. Παρατηρήσεις

α) Ἡ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου στὸ σημεῖο του Μ εἶναι κάθετη πρὸς τὴν ἀκτίνα ΟΜ. Ἀντιστρόφως, ἂν ΟΜ εἶναι μία ἀκτίνα τοῦ κύκλου καὶ φέρουμε τὴν κάθετο πρὸς αὐτὴ στὸ ἄκρο της Μ, αὐτὴ ἡ κάθετος θὰ εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου στὸ σημεῖο Μ. (Γιατί;)

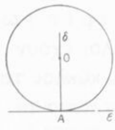
Δηλαδή: **Ἡ κάθετος πρὸς μιὰν ἀκτίνα στὸ ἄκρο της εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου.**

β) Ἂν διπλώσουμε τὸ ἐπίπεδο τοῦ σχ. 78 γύρω ἀπὸ τὴν εὐθεία ΟΓ, τὰ κοινὰ σημεῖα Μ καὶ Ν θὰ συμπέσουν (Γιατί;). Δηλαδὴ ἡ ΟΓ εἶναι μεσοκάθετος στὸ τμῆμα ΜΝ.

37. 4. ’Εφαρμογὲς



Σχ. 79



Σχ. 80

α) Νὰ κατασκευαστεῖ ἡ ἐφαπτομένη κύκλου σ’ ἕνα σημεῖο του Μ.

Χαράζουμε τὴν ἀκτίνα ΟΜ καὶ ἔπειτα τὴν κάθετο πρὸς αὐτὴ στὸ σημεῖο Μ, σχ. 79.

β) Νὰ κατασκευαστεῖ κύκλος μὲ ἀκτίνα α, ποὺ νὰ ἐφάπτεται σὲ μιὰ δεδομένη εὐθεία ε στὸ σημεῖο της Α, σχ. 80.

i) Χαράζουμε τὴν εὐθεία δ κάθετη πρὸς τὴν εὐθεία ε στὸ σημεῖο της Α.

ii) Πάνω στὴ δ λαμβάνουμε τμῆμα ΟΑ = α καὶ γράφουμε τὸν κύκλο (Ο, α).

Αὐτὸς ὁ κύκλος εἶναι ὁ ζητούμενος.

Πραγματικά, ἡ ἀκτίνα ΟΑ εἶναι κάθετη πρὸς τὴν εὐθεία ε στὸ σημεῖο Α. Συνεπῶς ὁ κύκλος (Ο, ΟΑ) ἐφάπτεται στὴν εὐθεία ε (§ 37. 3).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

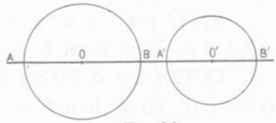
88. Νὰ βρεῖτε τὸν ἀριθμὸ τῶν κοινῶν σημείων μιᾶς εὐθείας ε μὲ ἕναν κύκλο (Ο, α) στὶς ἑξῆς περιπτώσεις:
α) Ὅταν $\alpha = 3$ cm καὶ $\delta = 2$ cm, β) ὅταν $\alpha = 3$ cm καὶ $\delta = 3$cm, γ) ὅταν $\alpha = 3$ cm καὶ $\delta = 4$ cm. Ὅπου δ εἶναι ἡ ἀπόσταση τοῦ κέντρου Ο ἀπὸ τὴν εὐθεία ε.

89. Νὰ χαράξετε ἐφαπτόμενες κύκλου στὰ ἄκρα μιᾶς διαμέτρου του.

90. Νὰ χαράξετε εὐθ. τμῆμα ΑΒ καὶ ἔπειτα κύκλους ἐφαπτόμενους στὸ ἄκρο Α τοῦ ΑΒ. Πόσες λύσεις ἔχει τὸ πρόβλημα;

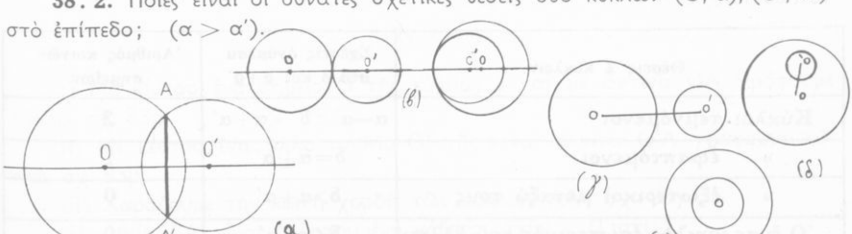
38. ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΘΕΣΕΙΣ ΔΥΟ ΚΥΚΛΩΝ

38. 1. Ἂς χαράξουμε δύο κύκλους μὲ κέντρα Ο, Ο′. Ἂν σκεφτοῦμε ὅτι ἡ εὐθεία μιᾶς διαμέτρου ἑνὸς κύκλου εἶναι ἄξονας συμμετρίας του, εἶναι εὔκολο νὰ ἐννοήσουμε ὅτι ἡ εὐθεία ΟΟ′ εἶναι ἄξονας συμμετρίας τοῦ σχήματος τῶν δύο κύκλων. Ἡ εὐθεία ΟΟ′ λέγεται διάκεντρος αὐτῶν τῶν δύο κύκλων, σχ. 81.



Σχ. 81

38. 2. Ποιὲς εἶναι οἱ δυνατὲς σχετικὲς θέσεις δύο κύκλων (Ο, α), (Ο′, α′) στὸ ἐπίπεδο; ($\alpha > \alpha'$).



Σχ. 82

Διακρίνουμε τὶς πιὸ πάνω εἰκονιζόμενες περιπτώσεις.

1η περίπτωση

Οἱ κύκλοι ἔχουν δύο κοινὰ σημεῖα· τὰ σημεῖα Α, Α', σχ. 82α. Λέμε τότε ὅτι οἱ κύκλοι τέμνονται καὶ τὸ τμῆμα ΑΑ' εἶναι ἡ κοινὴ χορδή.

Ἂς διπλώσουμε τὸ ἐπίπεδο τοῦ σχήματος γύρω ἀπὸ τὸν ἄξονα συμμετρίας ΟΟ' τῶν δύο κύκλων.

Παρατηροῦμε ὅτι τὰ δύο κοινὰ σημεῖα Α, Α' συμπίπτουν (Γιατί;).

Δηλαδὴ ἡ διάκεντρος εἶναι μεσοκάθετος στὴν κοινὴ χορδὴ ΑΑ'.

2η περίπτωση

Οἱ κύκλοι ἔχουν ἕνα μόνο κοινὸ σημεῖο. Αὐτὸ βρίσκεται πάνω στὴ διάκεντρο*, σχ. 82β, καὶ λέγεται σημεῖο ἐπαφῆς, ἐνῶ οἱ κύκλοι λέγονται ἐφαπτόμενοι ἐξωτερικὰ ἢ ἐσωτερικὰ (2 περιπτώσεις).

3η περίπτωση

Οἱ κύκλοι δὲν ἔχουν κανένα κοινὸ σημεῖο (σχ. 82γ, δ, ε).

Σ' αὐτὴ τὴν περίπτωση οἱ δύο κύκλοι:

i) Ἢ ὁ ἕνας βρίσκεται ἔξω ἀπὸ τὸν ἄλλο (σχ. 82 γ).

ii) Ἢ ὁ ἕνας βρίσκεται στὸ ἐσωτερικὸ τοῦ ἄλλου (σχ. 82 δ).

iii) Ἢ ἔχουν κοινὸ κέντρο (ὁμόκεντροι κύκλοι, σχ. 82 ε).

38.3. Στὶς πιὸ πάνω περιπτώσεις θὰ συγκρίνουμε τὸ ἄθροισμα $\alpha+\alpha'$ ἢ τὴ διαφορὰ $\alpha-\alpha'$ τῶν ἀκτίνων μὲ τὴν ἀπόσταση $OO'=\delta$ τῶν δύο κέντρων.

α) Ὅταν οἱ κύκλοι τέμνονται. Τότε μὲ τὸ διαβήτη βρίσκουμε ὅτι:

$\delta<\alpha+\alpha'$ καὶ $\delta>\alpha-\alpha'$ ἢ σύντομα $\alpha-\alpha'<\delta<\alpha+\alpha'$.

β) Ὅταν οἱ κύκλοι ἐφάπτονται. Τότε εἶναι $\delta=\alpha+\alpha'$, ἂν ἐφάπτονται ἐξωτερικά, καὶ $\delta=\alpha-\alpha'$, ἂν ἐφάπτονται ἐσωτερικά.

γ) Ὅταν κάθε κύκλος βρίσκεται στὸ ἐξωτερικὸ τοῦ ἄλλου. Τότε εἶναι $\delta>\alpha+\alpha'$.

δ) Ὅταν ὁ ἕνας κύκλος βρίσκεται στὸ ἐσωτερικὸ τοῦ ἄλλου. Τότε εἶναι $\delta<\alpha-\alpha'$.

Οἱ πιὸ πάνω τέσσερες προτάσεις ἰσχύουν καὶ ἀντιστρόφως. (Νὰ τὶς διατυπώσετε).

Θέσεις 2 κύκλων	Σχέσεις ἀνάμεσα στὰ δ καὶ α+α'	Ἀριθμὸς κοινῶν σημείων
Κύκλοι τεμνόμενοι	$\alpha-\alpha'<\delta<\alpha+\alpha'$	**2**
» ἐφαπτόμενοι	$\delta=\alpha\pm\alpha'$	**1**
» ἐξωτερικοὶ μεταξύ τους	$\delta>\alpha+\alpha'$	**0**
Ὁ ἕνας κύκλος ἐσωτερικὸς τοῦ ἄλλου	$\delta<\alpha-\alpha'$	**0**

* Τὰ δύο σημεῖα τομῆς Α', Α τοῦ σχ. 82α συμπίπτουν στὸ σχ. 82β.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

91. Ἂν α, α' παριστάνουν τὰ μήκη (σὲ cm) τῶν ἀκτίνων δύο κύκλων καὶ δ τὸ μῆκος τῆς διακέντρου τους (σὲ cm), νὰ βρεῖτε τὶς σχετικὲς θέσεις αὐτῶν τῶν δύο κύκλων στὶς περιπτώσεις τοῦ διπλανοῦ πίνακα.

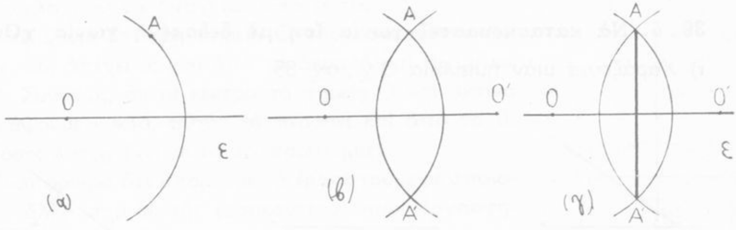
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
δ	5	1	6	2	2
α	3	3	3	5	5
α	3	2	2	2	3

92. Γράψετε εὐθ. τμῆμα ΑΒ μὲ μῆκος 5 cm καὶ κύκλο μὲ κέντρο Α καὶ ἀκτίνα 3 cm. Ἔπειτα γράψετε κύκλο μὲ κέντρο τὸ μέσο τοῦ ΑΒ καὶ ἀκτίνα τέτοια, ὥστε οἱ δύο κύκλοι: α) νὰ ἐφάπτονται ἐσωτερικά, β) νὰ τέμνονται, γ) νὰ μὴν ἔχουν κοινὰ σημεῖα.

39. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ

39. 1. Ὅταν χρησιμοποιοῦμε διαφανὲς χαρτὶ καὶ γνώμονα στὴν κατασκευὴ ἑνὸς σχεδίου, ἀνεξάρτητα ἀπὸ τὶς προσπάθειές μας, δὲν εἶναι δυνατὸ νὰ ἐπιτύχουμε μεγάλη ἀκρίβεια. Γι' αὐτό, στὸ ἑξῆς θὰ ἐπιδιώκουμε νὰ χρησιμοποιοῦμε μόνο κανόνα (χάρακα) καὶ διαβήτη. Μὲ τὸν ὅρο γεωμετρικὴ κατασκευὴ θὰ ἐννοοῦμε κατασκευὴ μὲ χρησιμοποίηση μόνο τοῦ κανόνα καὶ τοῦ διαβήτη. Παραθέτουμε πιὸ κάτω μερικὲς χαρακτηριστικὲς περιπτώσεις γεωμετρικῶν κατασκευῶν.

39. 2. Ἀπὸ ἕνα σημεῖο Α ἔξω ἀπὸ μιὰν εὐθεία ε νὰ φέρετε τὴν κάθετο πρὸς τὴν εὐθεία.



Σχ. 83

i) Μὲ κέντρο ἕνα σημεῖο Ο τῆς εὐθείας ε καὶ μὲ ἀκτίνα ΟΑ γράφουμε κύκλο, σχ. 83α.

ii) Μὲ κέντρο ἕνα ἄλλο σημεῖο Ο' τῆς ε καὶ ἀκτίνα Ο'Α γράφουμε κύκλο, σχ. 83β.

iii) Χαράζουμε τὴν κοινὴ χορδὴ τῶν κύκλων ΑΑ', σχ. 83γ.

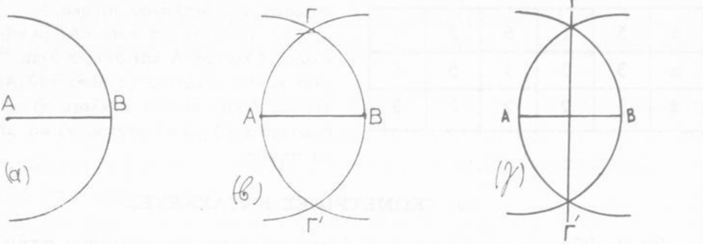
Ἡ εὐθεία ΑΑ' εἶναι ἡ ζητουμένη κάθετος στὴν ε. (Γιατί;).

39.3. Νὰ κατασκευαστεῖ ἡ μεσοκάθετος σ' ἕνα εὐθ. τμῆμα ΑΒ.

i) Μὲ κέντρο τὸ ἄκρο Α καὶ ἀκτίνα ΑΒ γράφουμε κύκλο, σχ. 84α.

ii) Μὲ κέντρο τὸ ἄλλο ἄκρο Β καὶ ἀκτίνα ἴση μὲ τὴν προηγούμενη γράφουμε κύκλο, σχ. 84β.

iii) Χαράζουμε τὴν κοινὴ χορδὴ ΓΓ'. Αὐτὴ εἶναι ἡ μεσοκάθετος στὸ τμῆμα ΑΒ, σχ. 84γ.



Σχ. 84

Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο χωρίζουμε ἕνα εὐθ. τμῆμα σὲ 2 ἴσα μέρη.

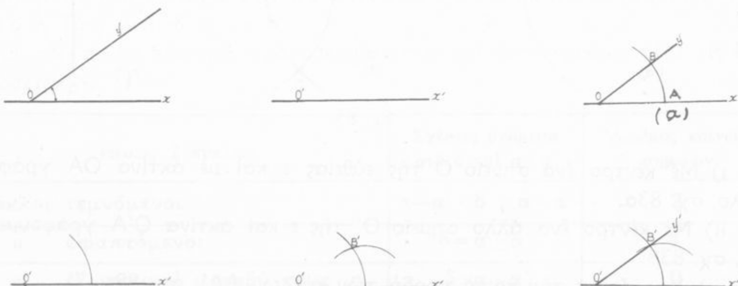
39. 4. Νὰ κατασκευαστεῖ ἡ κάθετος μιᾶς εὐθείας ε σὲ δεδομένο σημεῖο της Α.

Πάνω στὴν ε καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη τοῦ Α λαμβάνουμε δύο ἴσα τμήματα ΑΒ = ΑΓ.

Μ' αὐτὸ τὸν τρόπο κάναμε τὸ Α μέσο τοῦ ΒΓ. Ἀρκεῖ συνεπῶς νὰ χαράξουμε σύμφωνα μὲ τὰ γνωστὰ τὴ μεσοκάθετο τοῦ ΒΓ.

39. 5. Νὰ κατασκευαστεῖ γωνία ἴση μὲ δεδομένη γωνία χΟψ.

i) Χαράζουμε μιὰν ἡμιευθεία Ο'χ', σχ. 85.



Σχ. 85

ii) Μὲ κέντρο τὸ Ο καὶ ἀκτίνα ὅση θέλουμε (ὄχι πολὺ μικρὴ) γράφουμε ἕνα τόξο κύκλου, ποὺ τέμνει τὶς πλευρὲς Οχ, Οψ στὰ σημεῖα Α, Β ἀντιστοίχως, σχ. 85α. Μ' ἄλλα λόγια, κάνουμε τὴ γωνία χΟψ ἐπίκεντρη.

iii) Μὲ κέντρο Ο' καὶ ἀκτίνα ἴση μὲ τὴν προηγούμενη γράφουμε δεύτερο τόξο κύκλου, ποὺ τέμνει τὴν Ο'χ' σ' ἕνα σημεῖο Α', σχ. 85β.

iv) Μὲ κέντρο Ο' καὶ ἀκτίνα ἴση μὲ τὴ χορδὴ ΑΒ γράφουμε τρίτο τόξο κύκλου, ποὺ νὰ τέμνει τὸ δεύτερο σ' ἕνα σημεῖο Β', σχ. 85γ.

Ἡ γωνία Α'Ο'Β' εἶναι ἡ ζητουμένη. Ἰδοὺ γιατί:

i) Οἱ δύο κύκλοι (Ο, ΟΑ) καὶ (Ο', Ο'Α') εἶναι, ἀπὸ κατασκευή, ἴσοι.

ii) Οἱ χορδές τους ΑΒ καὶ Α'Β' εἶναι ἴσες.

iii) Τὰ τόξα ΑΒ, Α'Β' εἶναι ἴσα. (Γιατί;)

Συνεπῶς καὶ οἱ ἐπίκεντρες γωνίες ΑΟΒ καὶ Α'Ο'Β' εἶναι ἴσες.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Οἱ πιὸ κάτω κατασκευὲς νὰ γίνουν μὲ τὸν κανόνα καὶ τὸ διαβήτη.

93. Νὰ χαράξετε ἕνα εὐθ. τμῆμα ΑΒ καὶ ἔπειτα τὶς καθέτους στὰ ἄκρα του Α καὶ Β.

94. Νὰ χαράξετε μιὰ ἡμιευθεία καὶ ἔπειτα μιὰ ὀρθὴ γωνία μὲ μία πλευρὰ τὴν ἡμιευθεία αὐτή.

95. Νὰ χωρίσετε ἕνα εὐθ. τμῆμα σὲ 4 ἴσα μέρη.

96. Νὰ γράψετε κύκλο μὲ διάμετρο ἕνα δεδομένο εὐθ. τμῆμα.

97. Νὰ χαράξετε ἐφαπτόμενες κύκλου στὰ ἄκρα μιᾶς χορδῆς του.

40. ΚΥΚΛΟΙ ΠΟΥ ΔΙΕΡΧΟΝΤΑΙ ΑΠΟ ΔΥΟ ΣΗΜΕΙΑ

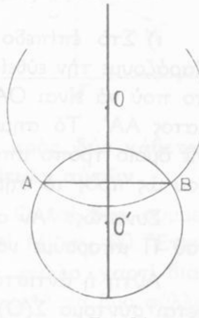
Σ' ἕνα ἐπίπεδο δίνονται δύο διαφορετικὰ σημεῖα Α, Β καὶ ζητοῦμε νὰ χαράξουμε κύκλο ποὺ νὰ διέρχεται ἀπὸ αὐτά.

Γνωρίζουμε ὅτι κάθε σημεῖο Ο τῆς μεσοκαθέτου τοῦ ΑΒ, σχ. 86, ἀπέχει ἐξίσου ἀπὸ τὰ ἄκρα Α καὶ Β (ΟΑ = = ΟΒ). Συνεπῶς, ἂν μὲ κέντρο τὸ σημεῖο Ο καὶ ἀκτίνα ΟΑ γράψουμε κύκλο, αὐτὸς θὰ περάσει καὶ ἀπὸ τὸ Β.

Πόσες λύσεις ἔχει αὐτὸ τὸ πρόβλημα;

Εἶναι φανερὸ ὅτι μποροῦμε νὰ ἐργαστοῦμε μὲ ὁποιοδήποτε ἄλλο σημεῖο τῆς μεσοκαθέτου ὅπως ἐργαστήκαμε μὲ τὸ σημεῖο Ο.

Δηλαδὴ ὑπάρχουν στὸ ἐπίπεδο ἄπειροι κύκλοι ποὺ διέρχονται ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Τὰ κέντρα ὅλων αὐτῶν τῶν κύκλων εἶναι σημεῖα τῆς μεσοκαθέτου στὸ τμῆμα ΑΒ.



Σχ. 86

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

98. Σημειῶστε τρία διαφορετικὰ σημεῖα, ποὺ νὰ μὴ βρίσκονται πάνω στὴν ἴδια εὐθεία, καὶ κατασκευάστε κύκλο, ποὺ νὰ διέρχεται ἀπὸ τὰ τρία αὐτὰ σημεῖα. Πόσους τέτοιους κύκλους μποροῦμε νὰ βροῦμε;

99. Σημειῶστε 4 διαφορετικὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, ποὺ δὲν βρίσκονται τρία-τρία πάνω

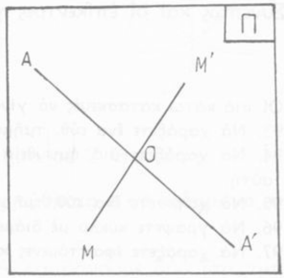
στὴν ἴδια εὐθεία. Ἔπειτα νὰ χαράξετε δύο κύκλους, ποὺ νὰ διέρχονται ὁ ἕνας ἀπὸ τὰ σημεῖα Α, Β, Γ καὶ ὁ ἄλλος ἀπὸ τὰ Α, Β, Δ.

41. Η ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΩΣ ΠΡΟΣ ΣΗΜΕΙΟ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ (ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ)

Ἡ συμμετρία ὡς πρὸς εὐθεία δὲν εἶναι τὸ μόνο εἶδος συμμετρίας ποὺ συναντοῦμε στὸ περιβάλλον μας.

Στὸ σχ. 87 διακρίνουμε μιὰν ἄλλη συμμετρία: τὴ *συμμετρία ὡς πρὸς σημεῖο*.

Σχ. 87



Σχ. 88

41. 1. Ὁρισμὸς

i) Στὸ ἐπίπεδο Π, σχ. 88, δίνονται δύο διαφορετικὰ σημεῖα Ο καὶ Α. Χαράζουμε τὴν εὐθεία ΑΟ καὶ πάνω σ' αὐτὴ λαμβάνουμε ἕνα σημεῖο Α′, μὲ τρόπο ποὺ νὰ εἶναι ΟΑ = ΟΑ′. Δηλαδὴ τὸ σημεῖο Ο νὰ εἶναι *μέσο* τοῦ τμήματος ΑΑ′. Τὸ σημεῖο Α′ λέγεται *συμμετρικὸ* τοῦ Α ὡς πρὸς τὸ Ο. Μὲ ὅμοιο τρόπο μποροῦμε νὰ βροῦμε τὸ συμμετρικὸ κάθε σημείου τοῦ ἐπιπέδου ὡς πρὸς τὸ σημεῖο Ο.

Συνεπῶς: Ἂν στὸ ἐπίπεδο Π δοθεῖ ἕνα σημεῖο Ο, τότε σὲ κάθε σημεῖο Μ τοῦ Π μποροῦμε νὰ ἀντιστοιχίσουμε τὸ συμμετρικό του Μ′ ὡς πρὸς τὸ Ο.

Αὐτὴ ἡ ἀντιστοιχία ὀνομάζεται *συμμετρία* ὡς πρὸς τὸ Ο καὶ γράφεται σύντομα Σ(Ο).

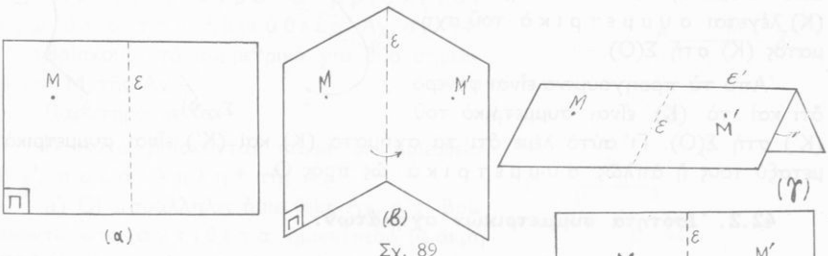
ii) Στὴ Σ(Ο) τὸ Μ′ εἶναι συμμετρικὸ τοῦ Μ. Ὅμως, ἀπὸ τὸν τρόπο ποὺ βρήκαμε τὸ Μ′ ἐννοοῦμε ὅτι στὴν ἴδια συμμετρία καὶ τὸ Μ εἶναι συμμετρικὸ τοῦ Μ′. δηλαδὴ Στὴ Σ(Ο) τὰ σημεῖα Μ, Μ′ ἀντιστοιχοῦν διπλὰ (ἀμφιμονοσήμαντα) μεταξύ τους ($Μ \rightleftarrows Μ'$). Γι' αὐτὸ λέμε ὅτι στὴ Σ (Ο) τὰ σημεῖα Μ, Μ′ εἶναι συμμετρικὰ μεταξύ τους ἢ ἁπλῶς *συμμετρικὰ* ἢ *ὁμόλογα*. Εἰδικά, τὸ σημεῖο Ο, ποὺ στὴ Σ(Ο) λέγεται *κέντρο συμμετρίας*, *συμπίπτει* (ταυτίζεται) μὲ τὸ *συμμετρικό του*.

iii) Ἀπὸ τὰ προηγούμενα ἐννοοῦμε ὅτι:

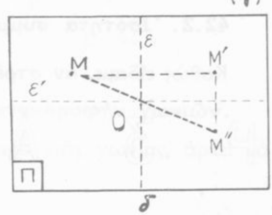
Στὴ Σ(Ο): **Μ, Μ' εἶναι συμμετρικά, σημαίνει ὅτι τὸ Ο εἶναι μέσο τοῦ τμήματος Μ Μ'.**

41. 2. Σ' ἕνα φύλλο χαρτὶ σημειώνουμε ἕνα σημεῖο Μ, σχ. 89α. Διπλώνουμε ἔπειτα αὐτὸ τὸ φύλλο δύο φορὲς διαδοχικά. Τὴν πρώτη φορὰ κατὰ μία εὐθεία του ε, ποὺ νὰ μὴ διέρχεται ἀπὸ τὸ Μ, σχ. 89β, καὶ τὴ δεύτερη κατὰ μία εὐθεία ε', κάθετη στὴν ε, σχ. 89γ. (Διπλὴ δίπλωση).

Σημειώνουμε τὸ συμμετρικὸ Μ' τοῦ Μ στὴ Σ(ε) καὶ τὸ συμμετρικὸ Μ'' τοῦ Μ' στὴ Σ(ε'). Ἂς ἀναπτύξουμε τώρα τὸ φύλλο καὶ ἂς προσέξουμε τὴ θέση τῶν σημείων Μ καὶ Μ'' ὡς πρὸς τὸ σημεῖο Ο, ποὺ εἶναι ἡ τομὴ τῶν δύο καθέτων εὐθειῶν ε, ε, σχ. 89δ. Διαπιστώνουμε* ὅτι τὸ Ο εἶναι τὸ μέσο τοῦ



Σχ. 89

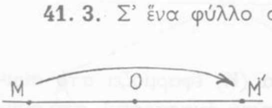


εὐθ. τμήματος ΜΜ''. Δηλαδὴ τὰ σημεῖα Μ, Μ'' εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς κέντρο συμμετρίας, τὸ Ο.

Τὸ πιὸ πάνω πείραμα μᾶς ὁδηγεῖ στὸ ἑξῆς συμπέρασμα:

Τὰ ἀποτελέσματα δύο διαδοχικῶν συμμετριῶν ὡς πρὸς δύο κάθετες εὐθεῖες εἶναι μία συμμετρία ὡς πρὸς τὴν τομὴ τῶν εὐθειῶν αὐτῶν.

41. 3. Σ' ἕνα φύλλο σχεδίου σημειώνουμε ἕνα σημεῖο Ο καὶ δύο συμμετρικὰ ὡς πρὸς αὐτὸ τὸ σημεῖο Μ, Μ', σχ. 90. Ἔπειτα θέτουμε πάνω σ' αὐτὸ ἕνα φύλλο χαρτὶ διαφανὲς καὶ ἀφοῦ σταθεροποιήσουμε** τὰ δύο φύλλα στὸ Ο, περιστρέφουμε τὸ διαφανὲς γύρω στὸ Ο μισὴ στροφή. Παρατηροῦμε ὅτι αὐτὴ ἡ στροφὴ φέρνει τὸ Μ στὸ Μ' καὶ τὸ Μ' στὸ Μ.



Σχ. 90

Αὐτὴ ἡ παρατήρηση μᾶς ὁδηγεῖ στὸ ἑξῆς συμπέρασμα:

Ἂν στρέψουμε τὸ ἐπίπεδο πάνω στὸν ἑαυτό του γύρω ἀπὸ τὸ Ο κατὰ

---

* Ἡ ἀπόδειξη θὰ δοθεῖ ἀργότερα.

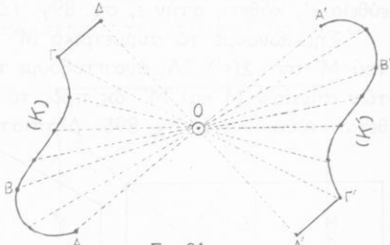
** Μὲ τὴ βοήθεια μιᾶς καρφίδας.

μισὴ στροφή, τότε κάθε σημεῖο του ἐναλλάσσεται μὲ τὸ συμμετρικό του ὡς πρὸς τὸ Ο.

42. ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟ ΕΝΟΣ ΣΧΗΜΑΤΟΣ ΩΣ ΠΡΟΣ ΣΗΜΕΙΟ

42. 1. Ὁρισμὸς

Σ' ἕνα ἐπίπεδο δίνεται ἕνα σημεῖο Ο καὶ ἕνα σχῆμα (Κ). Ἂς βροῦμε στὴ Σ(Ο) τὰ ὁμόλογα Α', Β', Γ', ... τῶν σημείων Α, Β, Γ, ... τοῦ σχήματος (Κ), σχ. 91.



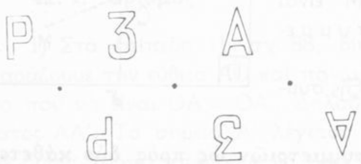
Σχ. 91

Τὸ σχῆμα (Κ'), ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ ὁμόλογα ὅλων τῶν σημείων τοῦ (Κ) λέγεται σ υ μ μ ε τ ρ ι κ ὸ τοῦ σχήματος (Κ) στὴ Σ(Ο).

Ἀπὸ τὰ προηγούμενα εἶναι φανερὸ ὅτι καὶ τὸ (Κ) εἶναι συμμετρικὸ τοῦ (Κ') στὴ Σ(Ο). Γι' αὐτὸ λέμε ὅτι τὰ σχήματα (Κ) καὶ (Κ') εἶναι συμμετρικὰ μεταξύ τους ἢ ἁπλῶς σ υ μ μ ε τ ρ ι κ ὰ ὡς πρὸς Ο.

42.2. Ἰσότητα συμμετρικῶν σχημάτων.

Καθὼς εἴδαμε, ἂν στρέψουμε τὸ ἐπίπεδο πάνω στὸν ἑαυτό του γύρω ἀπὸ τὸ Ο κατὰ μισὴ στροφή, τότε κάθε σημεῖο του ἐναλλάσσεται μὲ τὸ συμμετρικό του. Συνεπῶς καὶ κάθε σχῆμα (Κ) τοῦ ἐπιπέδου ἐναλλάσσεται μὲ τὸ συμμετρικό του (Κ').


Σχ. 92 Εἰκόνες συμμετρικῶν σχημάτων

Δηλαδή : **Δύο σχήματα συμμετρικὰ ὡς πρὸς κέντρο εἶναι ἴσα.**

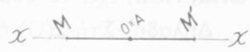
42.3. Παρατήρηση

Ἐνῶ στὴ συμμετρία ὡς πρὸς εὐθεία ἕνα σχῆμα (Κ) ἐφαρμόζει στὸ συμμετρικό του (Κ'), ἀφοῦ προηγουμένως τὸ ἕνα ἀπὸ αὐτὰ ἀναστραφεῖ, στὴ συμμετρία ὡς πρὸς σημεῖο ἡ ἐφαρμογὴ ἐπιτυγχάνεται μόνο μὲ ὀλίσθηση. Γι' αὐτὸ λέμε ὅτι στὴ συμμετρία ὡς πρὸς σημεῖο δύο συμμετρικὰ σχήματα εἶναι κατευθείαν ἴσα.

43. ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΑ ΜΕΡΙΚΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΣΤΗ Σ(Ο)

43. 1. Συμμετρικὸ ἡμιευθείας Αχ.

Καθὼς εἴδαμε, τὰ συμμετρικὰ σχήματα ὡς πρὸς κέντρο εἶναι ἴσα. Συνεπῶς καὶ τὸ συμμετρικὸ ἡμιευθείας Αχ θὰ εἶναι ἐπίσης ἡμιευθεία. Γιὰ νὰ τὴ βροῦμε ἀρκεῖ νὰ βροῦμε τὰ συμμετρικὰ τοῦ ἄκρου Α καὶ ἑνὸς ἄλλο σημείου της Μ. Διακρίνουμε ἰδιαίτερα τὶς ἑξῆς περιπτώσεις:



Σχ. 93

1) Ἂν τὸ κέντρο Ο συμπίπτει μὲ τὴν ἀρχὴ Α τῆς ἡμιευθείας, σχ. 93.

Παρατηροῦμε ὅτι:

i) Τὸ συμμετρικὸ Α′ τῆς ἀρχῆς Α συμπίπτει μὲ τὸν ἑαυτό του ($A \equiv A'$).

ii) Τὸ συμμετρικὸ ἑνὸς σημείου Μ τῆς Αχ βρίσκεται στὴν ἀντίθετή της ἡμιευθεία Αχ′. Ἀπὸ αὐτὴ τὴν παρατήρηση φτάνουμε στὸ συμπέρασμα ὅτι τὸ **συμμετρικὸ τῆς ἡμιευθείας Αχ εἶναι ἡ ἀντίθετή της ἡμιευθεία Αχ′.**

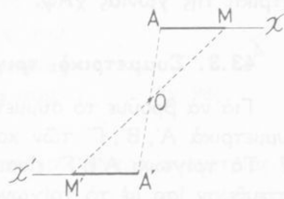
Ἂν τὸ κέντρο Ο βρίσκεται ἔξω ἀπὸ τὴν ἡμιευθεία Αχ, σχ. 94.

Βρίσκουμε τὰ συμμετρικὰ γιὰ δύο σημεῖα Α καὶ Μ τῆς Αχ.

Παρατηροῦμε ὅτι:

i) Αὐτὰ βρίσκονται πάνω σὲ ἡμιευθεία Α′χ′, παράλληλη* τῆς Αχ.

ii) Οἱ παράλληλες ἡμιευθεῖες Αχ, Α′χ′ βρίσκονται στὰ ἀντίθετα ἡμιεπίπεδα μὲ ἀκμὴ ΑΑ′ (ἀντίρροπες).

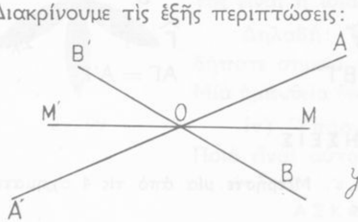


Σχ. 94

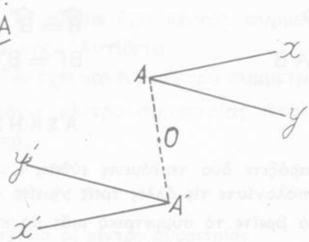
43. 2. Συμμετρικὸ γωνίας. Ἰσότητα τῶν κατακορυφὴν γωνιῶν.

Εἶναι φανερὸ πώς, γιὰ νὰ ὁρίσουμε τὸ συμμετρικὸ μιᾶς γωνίας, ἀρκεῖ νὰ βροῦμε τὰ συμμετρικὰ τῶν πλευρῶν της.

Διακρίνουμε τὶς ἑξῆς περιπτώσεις:



Σχ. 95



Σχ. 96

α) Ὅταν ἡ κορυφὴ τῆς γωνίας συμπίπτει μὲ τὸ κέντρο συμμετρίας.

Ἂς βροῦμε τὸ συμμετρικὸ τῆς γωνίας ΑΟΒ, σχ. 95.

Στὴ Σ(Ο) οἱ ἡμιευθεῖες ΟΑ, ΟΒ ἔχουν ὡς συμμετρικὲς τὶς ἀντίθετές τους

* Ὅτι οἱ Αχ, Α′χ′ εἶναι παράλληλες τὸ διαπιστώνουμε πρὸς τὸ παρὸν μὲ παράλληλη μετατόπιση.

ἡμιευθεῖες ΟΑ', ΟΒ' ἀντιστοίχως. Ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Μ, ἐσωτερικὸ τῆς γωνίας ΑΟΒ, ἔχει τὸ συμμετρικό του Μ' στὸ ἐσωτερικὸ τῆς γωνίας Α'ΟΒ'.

Δηλαδή: Στὴ Σ(Ο) ἡ γωνία ΑΟΒ ἔχει ὡς συμμετρικὴ τὴν κατακορυφήν της γωνία.

Ἀπὸ τὴν ἰσότητα τῶν συμμετρικῶν σχημάτων συμπεραίνουμε ὅτι:

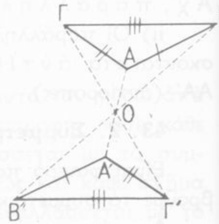
Οἱ κατακορυφὴν γωνίες εἶναι ἴσες.

β) Ὅταν ἡ κορυφὴ τῆς γωνίας δὲν συμπίπτει μὲ τὸ κέντρο συμμετρίας.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ συμμετρικὸ τῆς γωνίας χΑψ, σχ. 96, στὴ Σ(Ο) βρίσκουμε τὰ συμμετρικὰ τῶν πλευρῶν της. Ἔτσι, στὴ Σ(Ο) ἡ γωνία χ'Α'ψ' εἶναι συμμετρικὴ τῆς γωνίας χΑψ.

43.3. Συμμετρικὸ τριγώνου.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ συμμετρικὸ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ στὴ Σ(Ο), βρίσκουμε τὰ συμμετρικὰ Α', Β', Γ' τῶν κορυφῶν του Α, Β, Γ, σχ. 97. Τὸ τρίγωνο Α'Β'Γ' εἶναι τὸ ζητούμενο καὶ εἶναι κατευθείαν ἴσο μὲ τὸ τρίγωνο ΑΒΓ.



Εὔκολα ἐννοοῦμε ὅτι, ἂν φέρουμε σὲ σύμπτωση τὰ δύο ἴσα τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ', κάθε πλευρὰ καὶ κάθε γωνία τοῦ ἑνὸς τριγώνου συμπίπτει μὲ μία πλευρὰ καὶ μὲ μία γωνία τοῦ ἄλλου τριγώνου. Π.χ. στὰ ἴσα τρίγωνα τοῦ σχ. 97 ἔχουμε τὶς ἑξῆς ἰσότητες:

$\widehat{A} = \widehat{A'}$ $\quad$ $\widehat{B} = \widehat{B'}$ $\quad$ $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'}$

Σχ. 97

$AB = A'B'$ $\quad$ $B\Gamma = B'\Gamma'$ $\quad$ $A\Gamma = A'\Gamma'$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

100. Χαράξετε δύο τεμνόμενες εὐθεῖες ε, ε'. Μετρῆστε μία ἀπὸ τὶς 4 σχηματιζόμενες γωνίες καὶ ὑπολογίστε τὶς ἄλλες τρεῖς γωνίες.

101. Νὰ βρεῖτε τὸ συμμετρικὸ μιᾶς μὴ κυρτῆς γωνίας μὲ κέντρο συμμετρίας τὴν κορυφή της.

102. Χαράξετε δύο εὐθεῖες ε, ε', τεμνόμενες στὸ σημεῖο Ο. Πάνω στὴν ε καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη τοῦ Ο νὰ λάβετε δύο σημεῖα Α, Β τέτοια, ὥστε ΟΑ = ΟΒ. Πάνω στὴν ε' καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη τοῦ Ο νὰ λάβετε δύο ἄλλα σημεῖα τέτοια, ὥστε ΟΓ = ΟΔ.

α) Νὰ βρεῖτε στὴ Σ(Ο) τὰ ὁμόλογα τῶν ΟΑ, ΓΔ καὶ ΒΔ.

β) Νὰ ἐξετάσετε ἂν εἶναι παράλληλες οἱ εὐθεῖες ΑΓ καὶ ΒΔ.

103. Στὸ σχέδιο τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως νὰ ἐξετάσετε γιατί ἡ εὐθεία ποὺ συνδέει τὰ μέσα τῶν τμημάτων ΑΓ καὶ ΒΔ διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖο Ο.

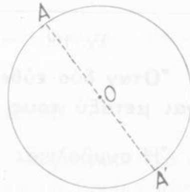
104. Ποιὸ εἶναι τὸ συμμετρικὸ τοῦ σχήματος ΑΓΒΔ τῆς ἀσκήσεως 102 στὴ Σ(Ο);

44. ΚΕΝΤΡΟ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ ΣΧΗΜΑΤΟΣ

44. 1. Ὁρισμὸς

Ἔχουμε ἕναν κύκλο μὲ κέντρο τὸ σημεῖο Ο καὶ ζητοῦμε νὰ βροῦμε τὸ συμμετρικὸ τοῦ κύκλου τούτου στὴ συμμετρία ὡς πρὸς Ο, σχ. 98.

Παρατηροῦμε ὅτι τὸ συμμετρικὸ ἑνὸς σημείου του Α εἶναι τὸ σημεῖο Α', ποὺ βρίσκεται πάνω στὸν ἴδιο κύκλο (ἐπειδὴ πρέπει νὰ εἶναι ΟΑ = ΟΑ').



Σχ. 98

Γενικὰ τὸ συμμετρικὸ κάθε σημείου τοῦ κύκλου βρίσκεται πάνω στὸν ἴδιο κύκλο.

Δηλαδή: Στὴ Σ(Ο) ὁ κύκλος μὲ κέντρο τὸ Ο συμπίπτει μὲ τὸ συμμετρικό του. Γι' αὐτὸ λέμε ὅτι τὸ κέντρο τοῦ κύκλου εἶναι κ έ ν τ ρ ο σ υ μ μ ε τ ρ ί α ς του.

Γενικὰ : **Ἕνα σημεῖο Ο εἶναι κέντρο συμμετρίας ἑνὸς σχήματος, ἂν στὴ Σ(Ο) αὐτὸ τὸ σχῆμα συμπίπτει μὲ τὸ συμμετρικό του.**

Ἕνα σχῆμα μπορεῖ νὰ ἔχει ἕνα ἢ καὶ περισσότερα κέντρα συμμετρίας.

44. 2. Παραδείγματα

i) Τὰ σύμβολα Χ, Η, Ν, Ξ, Ζ ἔχουν κέντρο συμμετρίας. Ποιὸ εἶναι αὐτό;


Σχ. 99

ii) Τὸ μέσο ἑνὸς εὐθ. τμήματος εἶναι τὸ μοναδικὸ κέντρο συμμετρίας του. (Γιατί;)

iii) Τὸ συμμετρικὸ μιᾶς εὐθείας ὡς πρὸς ἕνα σημεῖο της εἶναι ἡ ἴδια εὐθεία.

Δηλαδή: Ἡ εὐθεία ἔχει κέντρο συμμετρίας ὁποιοδήποτε σημεῖο της. Ἀντίθετα:
Μιὰ ἡμιευθεία δὲν ἔχει κανένα κέντρο συμμετρίας. (Γιατί;)

iv) Ὑπάρχει κέντρο συμμετρίας στὸ σχέδιο 99; Ποιὸ εἶναι αὐτό;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

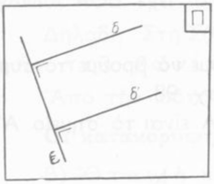
105. Νὰ βρεῖτε γνωστὰ σύμβολα ἢ σχέδια μὲ κέντρο συμμετρίας.

106. Νὰ βρεῖτε τὸ κέντρο συμμετρίας:

α) σὲ δύο τεμνόμενες εὐθεῖες, β) σὲ δύο παράλληλα καὶ ἴσα εὐθ. τμήματα, γ) σὲ δύο κατακορυφὴν γωνίες, δ) στὸ σχῆμα ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕνα εὐθ. τμῆμα καὶ τὴ μεσοκάθετό του.

45. ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ

Τί εἶναι παράλληλες εὐθεῖες τὸ γνωρίζουμε ἤδη. Πιὸ κάτω θὰ ἔχουμε τὴν εὐκαιρία γιὰ μιὰ καλύτερη γνωριμία μ' αὐτές.



Σχ. 100

Σ' ἕνα ἐπίπεδο Π χαράζουμε μιὰν εὐθεία ε καὶ δύο καθέτους σ' αὐτὴ $\delta \perp \varepsilon$, $\delta' \perp \varepsilon$, σχ. 100.

Ἂς προσέξουμε τὶς δύο διαφορετικὲς εὐθεῖες δ, δ'.

i) Αὐτὲς βρίσκονται στὸ ἴδιο ἐπίπεδο καὶ

ii) δὲν τέμνονται (ὅσο κι ἂν προεκταθοῦν).

Δύο εὐθεῖες ποὺ βρίσκονται στὸ ἴδιο ἐπίπεδο καὶ δὲν τέμνονται λέγονται παράλληλοι.

Ἀπὸ τὰ προηγούμενα συνάγουμε ὅτι:

Ὅταν δύο εὐθεῖες τοῦ ἐπιπέδου εἶναι κάθετες στὴν ἴδια εὐθεία, τότε εἶναι μεταξύ τους παράλληλες.

Ἤ συμβολικά:

$$\left\{ \delta, \delta' \in \Pi \quad \text{καὶ} \quad \begin{array}{l} \delta \perp \varepsilon \\ \delta' \perp \varepsilon \end{array} \right\} \Rightarrow \delta \parallel \delta'$$

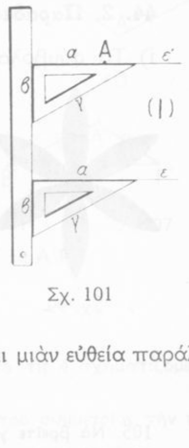
46. ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΣ ΠΡΟΣ ΜΙΑΝ ΕΥΘΕΙΑ ΑΠΟ ΕΝΑ ΣΗΜΕΙΟ

Θέλουμε νὰ χαράξουμε μιὰ παράλληλο πρὸς δεδομένη εὐθεία ε ἀπὸ ἕνα σημεῖο Α, σχ. 101. Ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

i) Τοποθετοῦμε πάνω στὴν ε μία ἀπὸ τὶς κάθετες πλευρὲς τοῦ γνώμονα. Π.χ. τὴν πλευρὰ α.

ii) Στὴ δεύτερη πλευρὰ β τοῦ γνώμονα τοποθετοῦμε τὴν ἀκμὴ τοῦ κανόνα Κ.

iii) Κρατοῦμε ἀκίνητο τὸν κανόνα καὶ μετακινοῦμε (μὲ ὀλίσθηση) τὸ γνώμονα προσέχοντας ὥστε ἡ δεύτερη κάθετη πλευρά του β νὰ ἐφαρμόζει διαρκῶς πάνω στὸν κανόνα. Στὴ θέση (I) τοῦ γνώμονα, σχ. 101, ἡ κάθετη πλευρά του α διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖο Α. Σ' αὐτὴ τὴ θέση χαράζουμε τὴν εὐθεία ε', ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὴν πλευρὰ α. Αὐτὴ ἡ εὐθεία περνάει ἀπὸ τὸ σημεῖο Α καὶ εἶναι παράλληλη μὲ τὴν εὐθεία ε. (Γιατί;).



Σχ. 101

Γενικά, κάθε θέση τῆς πρώτης κάθετης πλευρᾶς α ὁρίζει μιὰν εὐθεία παράλληλη πρὸς τὴν εὐθεία ε.

47. ΕΥΚΛΕΙΔΙΟ ΑΙΤΗΜΑ

Γεννᾶται τὸ ἐρώτημα:

Ἀπὸ τὸ ἴδιο σημεῖο Α μήπως εἶναι δυνατὸ νὰ χαράξουμε καὶ ἄλλη παράλληλο πρὸς τὴν εὐθεία ε; Πρακτικὰ μποροῦμε νὰ βεβαιωθοῦμε στὸ σχέδιό μας ὅτι αὐτὸ εἶναι ἀδύνατο. Στὴ Γεωμετρία ποὺ μελετοῦμε παραδεχόμαστε ὅτι:

Ἀπὸ ἕνα σημεῖο ποὺ βρίσκεται ἔξω ἀπὸ μιὰν εὐθεία περνᾶ μία καὶ μόνο μία παράλληλος πρὸς αὐτὴ τὴν εὐθεία.

Ἡ προηγούμενη πρόταση εἶναι βασικὴ καὶ εἶναι γνωστὴ ὡς **Εὐκλείδειο* αἴτημα**.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

107. Χαράξετε δύο παράλληλες εὐθεῖες καὶ μία ἄλλη εὐθεία κάθετη πρὸς τὴ μία ἀπὸ αὐτές. Πῶς τέμνει αὐτὴ ἡ κάθετος τὴν παράλληλο; Χρησιμοποιῆστε τὰ ὄργανά σας.

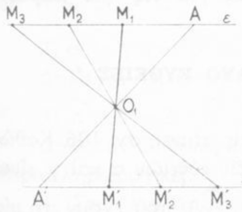
108. Χαράξετε δύο παράλληλες εὐθεῖες καὶ μιὰν ἄλλη παράλληλη πρὸς τὴ μία ἀπὸ αὐτές. Ποιὰ εἶναι ἡ θέση αὐτῆς τῆς τελευταίας εὐθείας ὡς πρὸς τὴν ἄλλη παράλληλη; (Χρησιμοποιῆστε παράλληλη μετατόπιση).

109. Νὰ βρεῖτε γιατί οἱ ἐφαπτόμενες ἑνὸς κύκλου στὰ ἄκρα μιᾶς διαμέτρου του εἶναι παράλληλες.

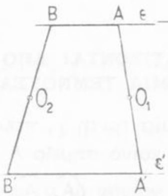
48. ΚΕΝΤΡΑ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ ΔΥΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ

48. 1. Χαράζουμε δύο παράλληλες εὐθεῖες, $\varepsilon \,||\, \varepsilon'$, καὶ λαμβάνουμε ἕνα σημεῖο Α τῆς ε καὶ ἕνα σημεῖο Α′ τῆς ε′. Θὰ προσπαθήσουμε νὰ βροῦμε κέντρο ἢ κέντρα συμμετρίας τοῦ σχήματος ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ τὶς δύο αὐτὲς παράλληλες εὐθεῖες. Ἂς συγκεντρώσουμε τὴν προσοχή μας στὴ συμμετρία ὡς πρὸς τὸ μέσο O_1 τοῦ τμήματος ΑΑ′, σχ. 102.

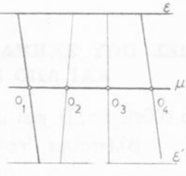
i) Εἶναι φανερὸ ὅτι τὰ Α καὶ Α′ εἶναι συμμετρικὰ (ἀφοῦ $AO_1 = O_1A'$)



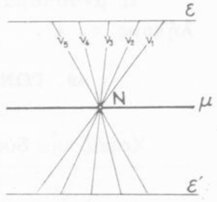
Σχ. 102



Σχ. 103



Σχ. 104



Σχ. 105

ii) Ἡ συμμετρικὴ τῆς ε, καθὼς γνωρίζουμε, εἶναι παράλληλη πρὸς αὐτὴ καὶ διέρχεται ἀπὸ τὸ Α′. Δηλαδὴ εἶναι ἡ ε′.

iii) Ὅμοια, ἡ συμμετρικὴ τῆς ε′ εἶναι ἡ ε.

Ἀπὸ τὰ πιὸ πάνω ἐννοοῦμε ὅτι:

Στὴ $\Sigma(O_1)$ τὸ σχῆμα ποὺ ἀποτελοῦν οἱ δυὸ παράλληλες ε, ε′, ἔχει ὡς κέντρο συμμετρίας τὸ σημεῖο O_1.

48. 2. Τὸ σημεῖο O_1 εἶναι ἄραγε τὸ μοναδικὸ κέντρο συμμετρίας τῶν παραλλήλων ε, ε′; Στὸ σχ. 103 πάνω στὶς ἴδιες εὐθεῖες ε, ε′, ἔχουμε λάβει ἕνα ἄλλο

* **Εὐκλείδης**: Διάσημος Ἕλληνας μαθηματικὸς (4ος π.Χ. αἰ.). Στὸ περίφημο ἔργο του τὰ «Στοιχεῖα», ὀργάνωσε τὶς μαθηματικὲς γνώσεις τῆς ἐποχῆς του μὲ θαυμάσιο τρόπο. Τὰ «Στοιχεῖα» ἀπὸ τότε ἀποτελοῦν τὴ βάση γιὰ τὴ γεωμετρικὴ μόρφωση.

ζεῦγος σημείων Β, Β', τοῦ ὁποίου τὸ μέσο O_2 εἶναι διαφορετικὸ ἀπὸ τὸ O_1. Ἐργαζόμενοι ὅπως πιὸ πρίν, βρίσκουμε ὅτι καὶ τὸ σημεῖο O_2 εἶναι κέντρο συμμετρίας γιὰ τὶς ε, ε'.

48. 3. Ἀπὸ τὰ προηγούμενα καταλαβαίνουμε ὅτι τὸ σχῆμα τῶν δύο παραλλήλων ε, ε' ἔχει ἄπειρα κ έ ν τ ρ α συμμετρίας.

Ἂς βροῦμε μερικὰ ἀπὸ αὐτά: Τὰ O_1, O_2, O_3, ..., σχ. 104. Παρατηροῦμε ὅτι ὅλα βρίσκονται πάνω σὲ μιὰν ε ὐ θ ε ί α μ, ποὺ εἶναι π α ρ ά λ λ η λ η πρὸς τὶς ε, ε'. Ἡ εὐθεία μ λέγεται μ ε σ ο π α ρ ά λ λ η λ ο ς τῶν δύο παραλλήλων ε, ε'.

48.4. Λαμβάνουμε ἕνα τυχαῖο σημεῖο Ν πάνω στὴ μεσοπαράλληλο μ τῶν ε, ε', σχ. 105. Ἔπειτα φέρνουμε ἀπὸ τὸ Ν διάφορα εὐθ. τμήματα ν_1, ν_2, ν_3, ... ποὺ τελειώνουν στὶς παραλλήλους ε, ε'. Εἶναι εὔκολο νὰ διαπιστώσουμε μὲ τὸ διαβήτη μας ὅτι τὸ σημεῖο Ν εἶναι τὸ μ έ σ ο καθενὸς ἀπὸ αὐτὰ τὰ τμήματα. Ἀπὸ αὐτὴ τὴ διαπίστωση φτάνουμε στὸ συμπέρασμα ὅτι:

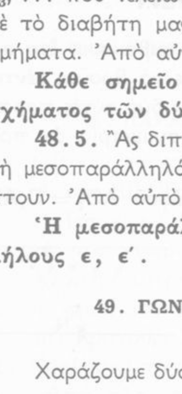
Κάθε σημεῖο τῆς μεσοπαραλλήλου μ εἶναι κέντρο συμμετρίας τοῦ σχήματος τῶν δύο παραλλήλων ε, ε'.

48.5. Ἂς διπλώσουμε τὸ ἐπίπεδο μὲ τὶς δύο παραλλήλους ε, ε' γύρω ἀπὸ τὴ μεσοπαράλληλό τους μ. Παρατηροῦμε τότε ὅτι οἱ παράλληλοι ε, ε' συμπίπτουν. Ἀπὸ αὐτὸ τὸ πείραμα φτάνουμε στὸ συμπέρασμα ὅτι:

Ἡ μεσοπαράλληλος μ εἶναι ἄξονας συμμετρίας γιὰ τὶς δύο παραλλήλους ε, ε'.

49. ΓΩΝΙΕΣ ΠΟΥ ΣΧΗΜΑΤΙΖΟΝΤΑΙ ΑΠΟ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΕΣ ΚΑΙ ΑΠΟ ΜΙΑ ΤΕΜΝΟΥΣΑ

Χαράζουμε δύο εὐθεῖες α, β καὶ μία τρίτη γ, ποὺ τὶς τέμνει, σχ. 106. Καθὼς βλέπουμε, τὸ κοινὸ σημεῖο Α τῶν εὐθειῶν α καὶ γ εἶναι κορυφὴ σὲ 4 γωνίες ($\widehat{A_1}$, $\widehat{A_2}$, $\widehat{A_3}$, $\widehat{A_4}$), ποὺ ἔχουν τὴ μία πλευρὰ πάνω στὴ γ καὶ τὴν ἄλλη πάνω στὴν α. Παρόμοια, τὸ σημεῖο Β τῶν εὐθειῶν β καὶ γ εἶναι κορυφὴ σὲ 4 γωνίες ($\widehat{B_1}$, $\widehat{B_2}$, $\widehat{B_3}$, $\widehat{B_4}$), ποὺ ἔχουν τὴ μία πλευρὰ πάνω στὴ γ καὶ τὴν ἄλλη πάνω στὴ β.



Σχ. 106

Ἀπὸ αὐτὲς τὶς 8 γωνίες οἱ 4, καὶ συγκεκριμένα οἱ γωνίες A_1, A_2, B_1, B_2, ἔχουν ὡς μία πλευρὰ τὴν ἡμιευθεία ΑΒ ἢ τὴν ἡμιευθεία ΒΑ καὶ λέγονται ἐ σ ω τ ε ρ ι κ ὲ ς ἢ ἐ ν τ ό ς.

$\widehat{A_1}$, $\widehat{A_2}$, $\widehat{B_1}$, $\widehat{B_2}$ ἐ σ ω τ ε ρ ι κ ὲ ς ἢ ἐ ν τ ὸ ς γ ω ν ί ε ς.

Οἱ ἄλλες τέσσερες γωνίες, οἱ $\widehat{A_3}$, $\widehat{A_4}$, $\widehat{B_3}$, $\widehat{B_4}$, ἔχουν ὡς μία πλευρά τους τὴν ἡμιευθεία ΑΖ ἢ τὴν ἡμιευθεία ΒΖ' καὶ λέγονται ἐ ξ ω τ ε ρ ι κ ὲ ς ἢ ἐ κ τ ό ς.

Οἱ γωνίες A_1 καὶ B_1, ἐπειδὴ εἶναι καὶ οἱ δύο ἐσωτερικὲς (ἐντὸς) καὶ βρίσκονται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς τέμνουσας γ, λέγονται ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη. Ὅμοια καὶ οἱ γωνίες A_2, B_2.

Οἱ γωνίες A_2 καὶ B_1 εἶναι καὶ οἱ δύο ἐσωτερικὲς (ἐντὸς) ἀλλὰ ὄχι καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς τέμνουσας γ, καὶ γι' αὐτὸ λέγονται ἐντὸς ἐναλλάξ. Ὅμοια καὶ οἱ γωνίες A_1, B_2.

Οἱ γωνίες A_4 καὶ B_1 βρίσκονται ἡ μία ἐσωτερικὰ (ἐντὸς) καὶ ἡ ἄλλη ἐξωτερικὰ (ἐκτός), ἀλλὰ καὶ οἱ δύο πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς γ, καὶ λέγονται ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.

50. ΓΩΝΙΕΣ ΠΟΥ ΣΧΗΜΑΤΙΖΟΝΤΑΙ ΑΠΟ ΔΥΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΥΣ ΚΑΙ ΜΙΑ ΤΕΜΝΟΥΣΑ

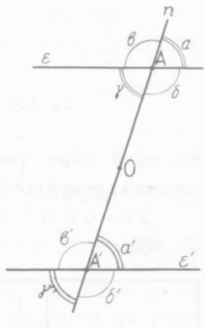
Στὸ σχ. 107 ἔχουμε χαράξει δύο παραλλήλους $\varepsilon \,||\, \varepsilon'$, καὶ μιὰν εὐθεία η, ποὺ τὶς τέμνει στὰ σημεῖα A καὶ A'.

Προσέξετε τὶς ὀκτὼ (8) γωνίες ποὺ σχηματίζονται. (4 μὲ κορυφὴ τὸ A καὶ ἄλλες 4 μὲ κορυφὴ τὸ A').

I) Μὲ ἕνα διαφανὲς (ἢ μὲ μετρήσεις) βρίσκουμε ὅτι:

1) $\widehat{\alpha}=\widehat{\alpha'}$, $\widehat{\beta}=\widehat{\beta'}$, $\widehat{\gamma}=\widehat{\gamma'}$, $\widehat{\delta}=\widehat{\delta'}$.

Δηλαδή: Οἱ ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίες εἶναι ἴσες.



Σχ. 107

2) $\widehat{\alpha'}=\widehat{\gamma}$ καὶ $\widehat{\beta'}=\widehat{\delta}$.

Δηλαδή: Οἱ ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίες εἶναι ἴσες.

3) $\widehat{\alpha'}+\widehat{\delta}=2$, $\widehat{\beta'}+\widehat{\gamma}=2$.

Δηλαδή: Οἱ ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίες εἶναι παραπληρωματικές.

II) Στὰ ἴδια ἀποτελέσματα μποροῦμε νὰ φτάσουμε καὶ ὡς ἑξῆς:

Ἂς συγκεντρώσουμε τὴν προσοχή μας στὴ συμμετρία ὡς πρὸς τὸ μέσο O τοῦ τμήματος AA'.

Παρατηροῦμε ὅτι οἱ εὐθεῖες ε, ε' εἶναι συμμετρικὲς καὶ ἡ η ταυτίζεται μὲ τὴ συμμετρική της. Συνεπῶς τὸ O εἶναι κέντρο συμμετρίας τοῦ σχήματος.

1) Ἂς προσέξουμε τώρα δύο ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίες σ' αὐτὸ τὸ σχῆμα.

Παρατηροῦμε ὅτι: Οἱ ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίες α' καὶ γ εἶναι συμμετρικὲς ὡς πρὸς τὸ O, ἄρα καὶ ἴσες. $\widehat{\alpha'}=\widehat{\gamma}$.

2) Ἂν λάβουμε ὑπ' ὄψη μας ὅτι $\widehat{\alpha}=\widehat{\gamma}$ (κατακορυφὴν γωνίες), βρίσκουμε ὅτι καὶ $\widehat{\alpha}=\widehat{\alpha'}$.

3) Ἐπειδὴ $\alpha=\alpha'$ καὶ $\alpha+\delta=2\,L$, θὰ εἶναι καὶ $\widehat{\alpha'}+\widehat{\delta}=2\,L$.

Ὥστε: **Δύο εὐθεῖες παράλληλες σχηματίζουν μὲ μίαν εὐθεία ποὺ τὶς τέμνει :**

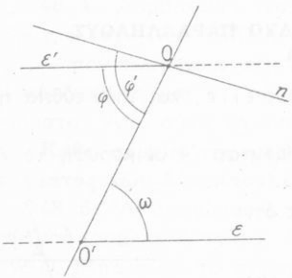
1) Τὶς ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίες ἴσες.

2) Τὶς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίες ἴσες.

3) Τὶς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίες παραπληρωματικές.

51. ΓΝΩΡΙΣΜΑΤΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ

51. 1. Σχηματίζουμε δύο ἴσες γωνίες $\omega = \varphi$ καὶ τὶς τοποθετοῦμε ὅπως δείχνει τὸ σχ. 108. Παρατηροῦμε ὅτι σ' αὐτὸ τὸ σχέδιο οἱ εὐθεῖες ε, ε' τέμνονται ἀπὸ τὴν εὐθεία ΟΟ' καὶ σχηματίζουν δύο ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίες ἴσες. Ποιὰ θέση ἔχουν μεταξύ τους οἱ εὐθεῖες ε, ε';



Σχ. 108

Μὲ παράλληλη μετατόπιση διαπιστώνουμε ὅτι οἱ εὐθεῖες ε, ε' εἶναι παράλληλες.

Δηλαδή: **Ἂν δύο εὐθεῖες τέμνονται ἀπὸ μιὰ τρίτη καὶ σχηματίζουν δύο ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίες ἴσες, θὰ εἶναι παράλληλες.**

51. 2. Ἀπὸ τὴν πιὸ πάνω πρόταση προκύπτουν καὶ οἱ ἑξῆς προτάσεις:

Ἂν δύο εὐθεῖες ποὺ τέμνονται ἀπὸ μία τρίτη σχηματίζουν δύο ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίες ἴσες, ἢ δύο ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίες παραπληρωματικές, τότε αὐτὲς οἱ εὐθεῖες εἶναι παράλληλες.

Σύνοψη: Οἱ προτάσεις τῶν παραγράφων 50 καὶ 51 συνοψίζονται ὡς ἑξῆς:

$$\varepsilon \parallel \varepsilon' \Leftrightarrow \begin{cases} \text{1. Ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίες ἴσες} \\ \text{2. Ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίες ἴσες.} \\ \text{3. Ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίες παραπληρωματικές.} \end{cases}$$

52. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

52. 1. Ἡ πρόταση τῆς παρ. 50 μᾶς ἐπιτρέπει, ὅταν γνωρίζουμε τὴ μία ἀπὸ τὶς 8 γωνίες ποὺ σχηματίζονται ἀπὸ δύο παραλλήλους καὶ μία τέμνουσα, νὰ ὑπολογίσουμε τὶς ὑπόλοιπες 7.

Π.χ. ἂν στὸ σχ. 107 εἶναι $\widehat{\alpha} = 60^0$, τότε θὰ ἔχουμε:

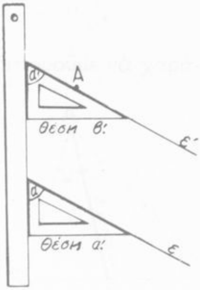
$$\widehat{\alpha} = \widehat{\alpha'} = \widehat{\gamma} = \widehat{\gamma'} = 60^0$$

$$\widehat{\beta} = 180^0 - 60^0 = 120^0 \quad \text{καὶ} \quad \widehat{\beta} = \widehat{\delta} = \widehat{\beta'} = \delta' = 120^0$$

52. 2. Ἡ πρόταση τῆς παρ. 51 μᾶς ὁδηγεῖ νὰ χαράξουμε μὲ τὸν ἑξῆς τρόπο παράλληλες εὐθεῖες μὲ γνώμονα καὶ κανόνα.

Ἔστω ὅτι θέλουμε νὰ χαράξουμε εὐθεία ε′ παράλληλη πρὸς δεδομένη εὐθεία, σχ. 109.

Τοποθετοῦμε, γι' αὐτὸ τὸ σκοπό, πάνω στὴν ε τὴ μία πλευρὰ τοῦ γνώμονα καὶ ἐφαρμόζουμε σὲ μιὰν ἀπὸ τὶς δύο ἄλλες πλευρές του τὴν ἀκμὴ τοῦ κανόνα (α′ θέση). Ἔπειτα σύρουμε τὸ γνώμονα πάνω στὴν ἀκμὴ τοῦ κανόνα σὲ μιὰν ἄλλη θέση (β′ θέση). Σ' αὐτὴ τὴ θέση χαράζουμε εὐθεία ε′ κατὰ μῆκος ἐκείνης τῆς πλευρᾶς τοῦ γνώμονα ποὺ ἀρχικὰ ἐφάρμοζε πάνω στὴν εὐθεία ε. Οἱ εὐθεῖες ε, ε′ εἶναι μεταξύ τους παράλληλες. (Γιατί; Προσέξετε τὶς γωνίες α, α′ τοῦ σχεδίου 109).



Σχ. 109

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

110. Δύο παράλληλες εὐθεῖες τέμνονται ἀπὸ μιὰ τρίτη εὐθεία. Μία ἀπὸ τὶς γωνίες ποὺ σχηματίζονται εἶναι 75⁰. Νὰ βρεῖτε τὶς τιμὲς (σὲ μοῖρες) τῶν ἄλλων 7 γωνιῶν.

111. Χαράξετε δύο παραλλήλους α || β καὶ ἔπειτα δύο ἄλλες παραλλήλους γ || δ, ποὺ νὰ τέμνουν τὶς δύο πρῶτες. Νὰ βρεῖτε ὅλες τὶς ἴσες γωνίες σ' αὐτὸ τὸ σχῆμα.

112. Δύο παράλληλες εὐθεῖες (α || β) τέμνονται ἀπὸ μιὰ εὐθεία γ καὶ σχηματίζουν δύο ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίες ὀρθές. Ποιὰ θέση ἔχει ἡ εὐθεία γ ὡς πρὸς τὶς εὐθεῖες α καὶ β;

113. Ἀπὸ ἕνα σημεῖο τῆς διχοτόμου μιᾶς γωνίας 50⁰ φέρνουμε παραλλήλους πρὸς τὶς πλευρές της. Νὰ ὑπολογίσετε τὶς ἄλλες γωνίες τοῦ σχήματος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

114. Νὰ χαράξετε δύο ἴσους κύκλους καὶ ἔπειτα ἕναν ἄξονα συμμετρίας τοῦ σχήματος ποὺ ἀποτελοῦν αὐτοὶ οἱ δύο κύκλοι.

115. Δύο παράλληλες εὐθεῖες τέμνονται ἀπὸ μιὰ τρίτη εὐθεία καὶ σχηματίζουν δύο ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίες παραπληρωματικές. Ποιὰ θέση ἔχει ἡ τέμνουσα ὡς πρὸς τὶς ἄλλες;

116. Τέσσερες διαδοχικὲς γωνίες ἔχουν ἄθροισμα 360⁰. Ἂν ἡ 1η εἶναι 70⁰, ἡ 2η τριπλάσια ἀπὸ τὴν τρίτη καὶ ἡ 4η ἴση μὲ 90⁰, ὑπολογίστε καθεμιὰ ἀπὸ αὐτὲς τὶς γωνίες.

117. Δύο εὐθεῖες ε, ε′ τέμνονται στὸ σημεῖο Ο. Ἂν λάβουμε πάνω στὴν ε: ΑΟ = ΟΒ καὶ πάνω στὴν ε′: ΓΟ = ΟΔ, νὰ ἐξετάσετε ἂν εἶναι παράλληλες οἱ εὐθεῖες ΑΔ καὶ ΓΒ. Νὰ ὁρίσετε ἐπίσης τὸ συμμετρικὸ τοῦ σχήματος ΑΓΒΔ ὡς πρὸς τὸ Ο.

118. Χαράζουμε μιὰν εὐθεία ε καὶ δυὸ ἡμιευθεῖες Αχ, Βψ, ὅπου Α, Β ∈ ε. Ἔπειτα στὴ Σ(ε) χαράζουμε τὶς συμμετρικὲς Αχ′, Βψ′ τῶν ἡμιευθειῶν Αχ, Βψ. Ἂν Μ, Μ′ εἶναι τὰ σημεῖα ὅπου τέμνονται οἱ Αχ, Βψ καὶ Αχ′, Βψ′, νὰ ἐξετάσετε ἂν ἡ ε εἶναι ἡ μεσοκάθετος στὸ τμῆμα ΜΜ′. (Νὰ δικαιολογήσετε τὴν ἀπάντησή σας).

119. Ἐξετάσετε ἂν ἰσχύει ἡ ἑξῆς πρόταση:

Ἂν στὴ συμμετρία (ὡς πρὸς εὐθεία ἢ ὡς πρὸς σημεῖο) δύο σχήματα (Κ), (Λ) ἔχουν ὡς ὁμόλογα τὰ (Κ′), (Λ′), τότε ἡ τομὴ τῶν (Κ), (Λ) ἔχει ὡς ὁμόλογο τὴν τομὴ τῶν (Κ′), (Λ′).

Νὰ λάβετε ὡς σχήματα (Κ), (Λ) 2 εὐθεῖες ἢ δύο κύκλους ἢ εὐθεία καὶ κύκλο.

120. Χαράξετε δύο τεμνόμενες εὐθεῖες ε, ε′. Ἔπειτα γράψετε κύκλο μὲ κέντρο τὸ σημεῖο τομῆς τους Ο. Ἂν αὐτὸς ὁ κύκλος τέμνει τὴν ε στὰ σημεῖα Α, Γ καὶ τὴν ε′ στὰ σημεῖα Β καὶ Δ, νὰ βρεῖτε:

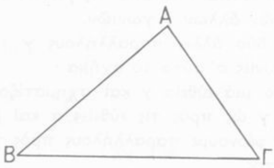
α) τὰ συμμετρικὰ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, ΑΓ, ΒΔ, ὡς πρὸς τὸ Ο.

β) τὸ συμμετρικὸ τοῦ σχήματος ΑΒΓΔ ὡς πρὸς τὸ κέντρο Ο. Τί παρατηρεῖτε;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Δ'

53. ΤΟ ΤΡΙΓΩΝΟ

53. 1. Ἂς λάβουμε τρία διαφορετικὰ σημεῖα Α, Β, Γ, ποὺ δὲν βρίσκονται πάνω στὴν ἴδια εὐθεία, σχ. 110. Ἡ ἕνωση τῶν εὐθ. τμημάτων ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ λέγεται τ ρ ί γ ω ν ο. Τὰ σημεῖα Α, Β, Γ λέγονται κ ο ρ υ φ ὲ ς τοῦ τριγώνου, καὶ τὰ εὐθ. τμήματα ΑΒ, ΒΓ καὶ ΓΑ λέγονται π λ ε υ ρ έ ς.

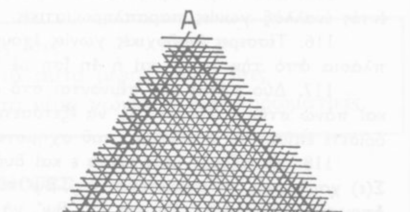


Σχ. 110

Ἕνα τρίγωνο μὲ κορυφὲς Α, Β, Γ ὀνομάζεται τρίγωνο ΑΒΓ ἢ συμβολικά: Δ. ΑΒΓ.

53. 2. Στὸ τρίγωνο ΑΒΓ, σχ. 111, ἔχουμε σημειώσει τὰ τρία ἡμιεπίπεδα (ΒΓ, Α), (ΑΒ, Γ) καὶ (ΑΓ, Β). Δηλαδὴ τὰ ἡμιεπίπεδα ποὺ ὁρίζονται ἀπὸ τὴν εὐθεία κάθε πλευρᾶς μὲ τὴν ἀπέναντί της κορυφή. Ἡ τομὴ αὐτῶν τῶν τριῶν ἡμιεπιπέδων λέγεται ἐ σ ω τ ε ρ ι κ ὸ τοῦ τριγώνου. Κάθε σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου, ποὺ δὲν βρίσκεται στὸ ἐσωτερικὸ τοῦ τριγώνου οὔτε καὶ στὶς πλευρές του, λέγεται ἐ ξ ω τ ε ρ ι κ ὸ τοῦ τριγώνου.

Κάθε κορυφὴ τοῦ τριγώνου εἶναι κορυφὴ σὲ μιὰ κυρτὴ γωνία, ποὺ πάνω στὶς πλευρές της βρίσκονται δύο πλευρὲς τοῦ τριγώνου. Συνήθως κάθε γ ω ν ί α τ ο ῦ τ ρ ι γ ώ ν ο υ ὀνομάζεται μὲ τὸ γράμμα τῆς κορυφῆς της. Π.χ. γωνία Α, γωνία Β, γωνία Γ.



Σχ. 111

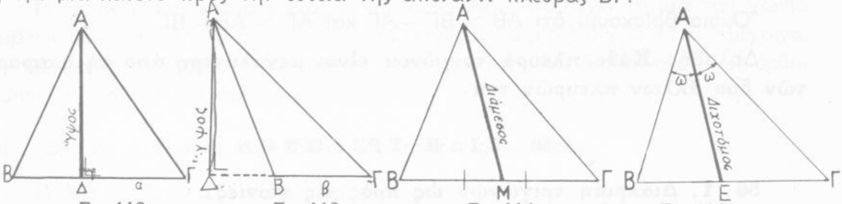
Στὸ τρίγωνο ΑΒΓ ἡ γωνία Α ἔχει π ρ ο σ κ ε ί μ ε ν ε ς τὶς πλευρὲς ΑΒ καὶ ΑΓ καὶ ἀ π έ ν α ν τ ι τὴν πλευρὰ ΒΓ.

Οἱ τρεῖς πλευρὲς καὶ οἱ τρεῖς γωνίες ἑνὸς τριγώνου λέγονται π ρ ω τ ε ύ ο ν τ α στοιχεῖα τοῦ τριγώνου.

54. ΔΕΥΤΕΡΕΥΟΝΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

54.1. Ὕψος

Ἀπὸ τὴν κορυφὴ Α ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ, σχ. 112, 113 μποροῦμε νὰ χαράξουμε μιὰ κάθετο πρὸς τὴν εὐθεία τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς ΒΓ.



Σχ. 112 Σχ. 113 Σχ. 114 Σχ. 115

Τὸ τμῆμα ΑΔ αὐτῆς τῆς καθέτου ἢ καὶ ὁλόκληρη ἡ εὐθεία τῆς καθέτου, λέγεται ὕ ψ ο ς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ πρὸς τὴν πλευρὰ ΒΓ. Τὸ σημεῖο Δ λέγεται ἴ χ ν ο ς αὐτοῦ τοῦ ὕψους.

54. 2. Διάμεσος

Ἡ κορυφὴ Α καὶ τὸ μέσο Μ τῆς ἀπέναντί της πλευρᾶς ΒΓ, σχ. 114, ὁρίζουν τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΜ. Αὐτὸ τὸ τμῆμα, ἢ καὶ ὁλόκληρη ἡ ἡμιευθεία του, λέγεται δ ι ά μ ε σ ο ς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ πρὸς τὴν πλευρὰ ΒΓ.

54. 3. Διχοτόμος

Τὸ τμῆμα ΑΕ, σχ. 115 τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Α ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ, ἢ καὶ ὁλόκληρη ἡ ἡμιευθεία της, λέγεται δ ι χ ο τ ό μ ο ς τῆς γωνίας Α αὐτοῦ τοῦ τριγώνου. Τὸ σημεῖο Ε λέγεται ἴ χ ν ο ς αὐτῆς τῆς διχοτόμου.

Σύμφωνα μὲ τὰ πιὸ πάνω:

Κάθε τρίγωνο ἔχει 3 ὕψη, 3 διαμέσους καὶ 3 διχοτόμους.

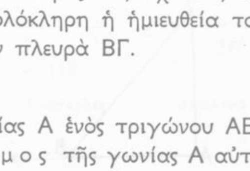
Τὰ ὕψη, οἱ διάμεσοι καὶ οἱ διχοτόμοι λέγονται δ ε υ τ ε ρ ε ύ ο ν τ α στοιχεῖα τοῦ τριγώνου. Ἀργότερα θὰ γνωρίσουμε καὶ ἄλλα δευτερεύοντα στοιχεῖα τοῦ τριγώνου.

55. ΑΝΙΣΟΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΑΝΑΜΕΣΑ ΣΤΙΣ ΠΛΕΥΡΕΣ ΤΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

55. 1. Μὲ τὸ διαβήτη μας ἂς συγκρίνουμε κάθε πλευρὰ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του, σχ. 116.

Θὰ βροῦμε ὅτι:

$$\left.\begin{array}{l} \text{ΒΓ} < \text{ΑΒ}+\text{ΑΓ} \\ \text{ΑΒ} < \text{ΑΓ}+\text{ΓΒ} \\ \text{ΑΓ} < \text{ΑΒ}+\text{ΒΓ} \end{array}\right\} \quad (\S\ 10.\ 5)$$



Σχ. 116

Δηλαδή: **Κάθε πλευρὰ τριγώνου εἶναι μικρότερη ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του.**

55. 2. Στὸ τρίγωνο ΑΒΓ, σχ. 116, εἶναι $AB > B\Gamma > A\Gamma$.

Μὲ τὰ ὄργανά μας* ἂς βροῦμε τὴ διαφορὰ $AB - A\Gamma$, καὶ ἂς τὴ συγκρίνουμε μὲ τὴν πλευρὰ ΒΓ.

Βρίσκουμε ὅτι: $B\Gamma > AB - A\Gamma$

Ὅμοια βρίσκουμε ὅτι $AB > B\Gamma - A\Gamma$ καὶ $A\Gamma > AB - B\Gamma$

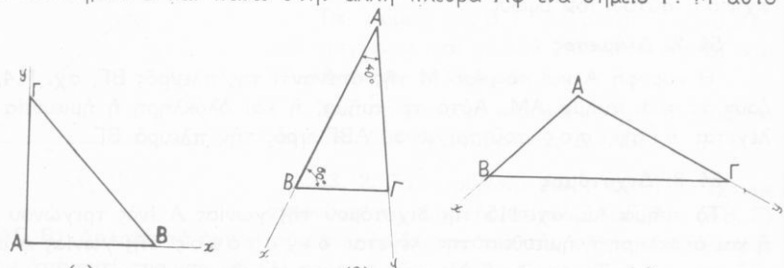
Δηλαδή: **Κάθε πλευρὰ τριγώνου εἶναι μεγαλύτερη ἀπὸ τὴ διαφορὰ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του.**

56. ΕΙΔΗ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

56. 1. Διάκριση τριγώνων ὡς πρὸς τὶς γωνίες.

i) Ὀ ρ θ ο γ ώ ν ι ο   τ ρ ί γ ω ν ο

Κατασκευάζουμε μία ὀρθὴ γωνία χΑψ. Πάνω στὴν πλευρὰ Αχ λαμβάνουμε ἕνα σημεῖο Β καὶ πάνω στὴν ἄλλη πλευρὰ Αψ ἕνα σημεῖο Γ. Μ' αὐτὸ



(α) (β) (γ)

Σχ. 117

τὸν τρόπο ὁρίζουμε τὸ τρίγωνο ΑΒΓ, σχ. 117α, ποὺ ἔχει τὴ γωνία Α ὀρθὴ καί, ὅπως παρατηροῦμε, τὶς δύο ἄλλες γωνίες ὀξεῖες. Γι' αὐτὸ λέγεται ὀ ρ θ ο γ ώ ν ι ο τρίγωνο.

Ἡ πλευρὰ ΒΓ ποὺ εἶναι ἀπέναντι ἀπὸ τὴν ὀρθὴ γωνία Α λέγεται ὑ π ο τ ε ί ν ο υ σ α.

ii) Ὀ ξ υ γ ώ ν ι ο   τ ρ ί γ ω ν ο

Κατασκευάζουμε μία ὀξεία γωνία, π.χ. $\chi A\psi = 40^0$. Ἔπειτα μὲ κορυφὴ ἕνα σημεῖο Β τῆς πλευρᾶς Αχ καὶ μὲ μία πλευρὰ τὴν ἡμιευθεία ΒΑ σχηματίζουμε μία ὀξεία γωνία, π.χ. 60^0, σχ. 117β. Ἡ ἄλλη πλευρὰ αὐτῆς τῆς γωνίας τέμνει τὴν Αψ σ' ἕνα σημεῖο Γ.

Μ' αὐτὸ τὸν τρόπο σχηματίζεται τὸ τρίγωνο ΑΒΓ πού, ὅπως παρατηροῦμε, ἔχει ὅλες τὶς γωνίες του ὀξεῖες. Γι' αὐτὸ λέγεται ὀ ξ υ γ ώ ν ι ο τρίγωνο.

---

* Ἡ θεωρητικὴ ἐξέταση θὰ γίνει σὲ ἄλλη θέση.

iii) Ἀ μ β λ υ γ ώ ν ι ο   τ ρ ί γ ω ν ο

Κατασκευάζουμε μιὰν ἀμβλεία γωνία χΑψ καὶ σημειώνουμε πάνω στὶς πλευρές της Αχ, Αψ τὰ σημεῖα Β καὶ Γ ἀντιστοίχως, σχ. 117γ.

Μ' αὐτὸ τὸν τρόπο ὁρίζεται τὸ τρίγωνο ΑΒΓ, ποὺ ἔχει τὴ μιά του γωνία ἀμβλεία καὶ τὶς ἄλλες ὀξεῖες. Γι' αὐτὸ λέγεται ἀ μ β λ υ γ ώ ν ι ο τρίγωνο.

Δηλαδή, ἀνάλογα μὲ τὶς γωνίες τους, τὰ τρίγωνα διακρίνονται σὲ ὀρθογώνια, ὀξυγώνια καὶ ἀμβλυγώνια.

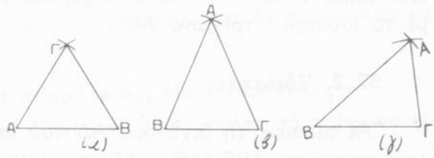
56. 2. Διάκριση τριγώνων ὡς πρὸς τὶς πλευρές.

i) Ἰ σ ό π λ ε υ ρ ο   τ ρ ί γ ω ν ο

Χαράζουμε ἕνα εὐθ. τμῆμα ΑΒ καὶ ἔπειτα δύο κύκλους, μὲ κέντρα τὰ Α καὶ Β καὶ μὲ ἀκτίνα τὴν ΑΒ, σχ. 118α. Τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ δύο σημεῖα τομῆς τῶν δύο κύκλων, τὸ σημεῖο Γ, μαζὶ μὲ τὰ σημεῖα Α καὶ Β ὁρίζει ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ, ὅπου εἶναι

$$AB = A\Gamma = B\Gamma$$

Κάθε τρίγωνο ποὺ ἔχει καὶ τὶς τρεῖς πλευρές του ἴσες λέγεται ἰ σ ό π λ ε υ ρ ο τρίγωνο.



Σχ. 118

ἰσόπλευρο   ἰσοσκελὲς   σκαλινὸ

ii) Ἰ σ ο σ κ ε λ ὲ ς   τ ρ ί γ ω ν ο

Χαράζουμε ἕνα εὐθ. τμῆμα ΒΓ = 2 cm. Ἔπειτα γράφουμε δύο κύκλους, τὸν ἕνα μὲ κέντρο Β καὶ ἀκτίνα 3 cm καὶ τὸν ἄλλο μὲ κέντρο Γ καὶ ἀκτίνα ἐπίσης 3 cm. Τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ σημεῖα τομῆς τῶν δύο κύκλων, π.χ. τὸ σημεῖο Α, μαζὶ μὲ τὰ σημεῖα Β καὶ Γ ὁρίζει τὸ τρίγωνο ΑΒΓ, σχ. 118β. Αὐτὸ τὸ τρίγωνο ἔχει δύο πλευρὲς ἴσες

$$AB = A\Gamma$$

Κάθε τρίγωνο ποὺ ἔχει δύο πλευρὲς ἴσες λέγεται ἰ σ ο σ κ ε λ ὲ ς τρίγωνο.

iii) Σ κ α λ η ν ὸ   τ ρ ί γ ω ν ο

Χαράζουμε εὐθ. τμῆμα ΓΒ = 3 cm καὶ δύο κύκλους μὲ κέντρα Γ, Β καὶ ἀκτίνες 2,5 cm καὶ 5 cm ἀντιστοίχως. Τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ σημεῖα τομῆς τῶν δύο κύκλων, π.χ. τὸ σημεῖο Α, μαζὶ μὲ τὰ σημεῖα Β καὶ Γ ὁρίζει τὸ τρίγωνο ΑΒΓ, ποὺ ἔχει:

$$AB \neq B\Gamma, \; AB \neq A\Gamma \quad \text{καὶ} \quad A\Gamma \neq B\Gamma$$

Κάθε τρίγωνο ποὺ ἔχει τὶς πλευρές του ἄνισες λέγεται σ κ α λ η ν ὸ τρίγωνο, σχ. 118γ.

Ὥστε τὰ τρίγωνα, ἀνάλογα μὲ τὶς πλευρές τους, διακρίνονται σὲ **ἰσόπλευρα, ἰσοσκελῆ καὶ σκαλινά.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

121. Χαράξετε προσεκτικὰ τὰ 3 ὕψη ἑνὸς ὀξυγωνίου τριγώνου. Τί παρατηρεῖτε;

122. Χαράξετε προσεκτικὰ τὶς 3 διαμέσους ἑνὸς ὀξυγωνίου τριγώνου. Τί παρατηρεῖτε;

123. Χαράξετε προσεκτικὰ τὶς 3 διχοτόμους ἑνὸς ὀξυγωνίου τριγώνου. Τί παρατηρεῖτε;

124. Σχεδιάστε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ. Ἐξετάσετε ἂν στὸ ἐπίπεδό του ὑπάρχουν δύο σημεῖα Δ καὶ Ε, τὸ Δ ἐσωτερικὸ καὶ τὸ Ε ἐξωτερικὸ τοῦ τριγώνου, τέτοια ὥστε: $ΔΕ \cap ΑΒΓ = \varnothing$.

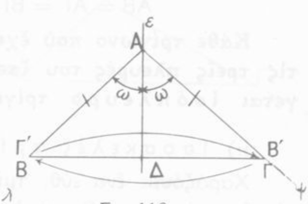
125. Τὰ μήκη δύο πλευρῶν τριγώνου εἶναι 5 cm καὶ 7 cm. Ἀνάμεσα σὲ ποιὲς τιμὲς βρίσκεται τὸ μῆκος τῆς τρίτης πλευρᾶς του;

57. ΤΟ ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟ

57. 1. Κατασκευάζουμε μία γωνία χΑψ καὶ στὶς πλευρές της λαμβάνουμε ἴσα τμήματα ΑΒ = ΑΓ. Ἔπειτα χαράζουμε τὸ εὐθ. τμῆμα ΒΓ, σχ. 119, καὶ ἔχουμε τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνο ΑΒΓ.

57. 2. Ἰδιότητες

Ἂς φέρουμε τὴ διχοτόμο ΑΔ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ, σχ. 119) κι ἂς «διπλώσουμε» τὸ ἐπίπεδο τοῦ τριγώνου γύρω ἀπὸ τὴν εὐθεία ΑΔ.



Σχ. 119

Παρατηροῦμε ὅτι τὸ τρίγωνο ΑΒΔ ἐφαρμόζει στὸ τρίγωνο ΑΔΓ. Τοῦτο σημαίνει ὅτι:

I) Στὴ συμμετρία ὡς πρὸς τὴν εὐθεία ΑΔ τὸ τρίγωνο ΑΒΓ συμπίπτει μὲ τὸ συμμετρικό του ($Α \equiv Α'$, $Β \equiv Γ'$, $Γ \equiv Β'$). Δηλαδὴ ἡ εὐθεία ΑΔ εἶναι ἄξονας συμμετρίας τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ.

II) Οἱ γωνίες Β καὶ Γ τῆς βάσεως ΒΓ εἶναι ἴσες ($\widehat{Β} = \widehat{Γ}$).

III) Τὰ τμήματα ΒΔ καὶ ΔΓ εἶναι ἴσα (ΒΔ = ΔΓ). Δηλαδὴ ἡ διχοτόμος ΑΔ εἶναι καὶ διάμεσος.

IV) Ἡ ΑΔ εἶναι κάθετος πρὸς τὴ ΒΓ ($ΑΔ \perp ΒΓ$). Δηλαδὴ ἡ διχοτόμος ΑΔ εἶναι καὶ ὕψος.

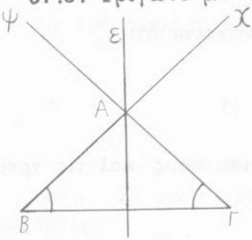
Ὥστε **στὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνο**:

I) Ἡ εὐθεία τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας τῶν ἴσων πλευρῶν εἶναι ἄξονας συμμετρίας τοῦ τριγώνου.

II) Οἱ γωνίες τῆς βάσεως εἶναι ἴσες.

III) Ἡ διχοτόμος, ἡ διάμεσος καὶ τὸ ὕψος πρὸς τὴ βάση συμπίπτουν.

57.3. Τρίγωνο μὲ δύο γωνίες ἴσες.



Σχ. 120

Χαράξετε ἕνα εὐθ. τμῆμα ΒΓ καὶ δύο ἴσες ὀξεῖες γωνίες μὲ κορυφὲς τὰ ἄκρα του. (Οἱ γωνίες νὰ βρίσκονται στὸ ἴδιο ἡμιεπίπεδο μὲ ἀκμὴ ΒΓ καὶ μὲ τὴ διάταξη τοῦ σχ. 120). Παρατηροῦμε ὅτι ὁρίζεται τὸ τρίγωνο ΑΒΓ. Μὲ τὸ διαβήτη μποροῦμε νὰ διαπιστώσουμε ὅτι αὐτὸ εἶναι ἰσοσκελὲς (ΑΒ = ΑΓ).

Ὥστε : **Ἂν ἕνα τρίγωνο ἔχει δύο γωνίες ἴσες, εἶναι ἰσοσκελὲς**

$$\widehat{\Gamma} = \widehat{B} \Rightarrow AB = A\Gamma$$

57.4. Ἄλλες ἰδιότητες τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου.

Μὲ διάφορες κατασκευὲς καὶ συλλογισμοὺς μποροῦμε νὰ ἀνακαλύψουμε καὶ τὶς ἀκόλουθες ἰδιότητες τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου:

i) Ἂν ἕνα τρίγωνο ἔχει ἄξονα συμμετρίας, εἶναι ἰσοσκελές.

ii) Ἂν μία διχοτόμος τριγώνου εἶναι καὶ ὕψος, τότε τὸ τρίγωνο εἶναι ἰσοσκελές.

iii) Ἂν ἕνα ὕψος τριγώνου εἶναι καὶ διάμεσος, τότε τὸ τρίγωνο εἶναι ἰσοσκελές.

iv) Ἂν μία διχοτόμος τριγώνου εἶναι καὶ διάμεσος, τότε τὸ τρίγωνο εἶναι ἰσοσκελές.

ΠΙΝΑΚΑΣ

Μὲ τὶς ἰδιότητες τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων

α) Ἂν τὸ τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελὲς μὲ ἴσες τὶς πλευρὲς ΑΒ καὶ ΑΓ, τότε:

1) Ἔχει ἄξονα συμμετρίας ποὺ διέρχεται ἀπὸ τὴν κορυφή του Α.

2) Οἱ γωνίες τῆς βάσεως εἶναι ἴσες.

3) Ἡ διχοτόμος, τὸ ὕψος καὶ ἡ διάμεσος πρὸς τὴ ΒΓ συμπίπτουν.

β) Ἕνα τρίγωνο εἶναι ἰσοσκελὲς ἄν:

ἔχει ἄξονα συμμετρίας

ἢ ἔχει δύο γωνίες ἴσες

ἢ μία διχοτόμος του εἶναι καὶ διάμεσος

ἢ μία διχοτόμος εἶναι καὶ ὕψος του· (ποιά;)

ἢ μία διάμεσος εἶναι καὶ ὕψος του· (ποιά;)

58. ΤΟ ΙΣΟΠΛΕΥΡΟ ΤΡΙΓΩΝΟ

Ἀπὸ τὶς ἰδιότητες τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων συνάγουμε ὅτι:

1. Στὸ ἰσόπλευρο τρίγωνο:

i) Ὑπάρχουν τρεῖς ἄξονες συμμετρίας (ποιοί ;)

ii) Οἱ τρεῖς γωνίες εἶναι ἴσες.

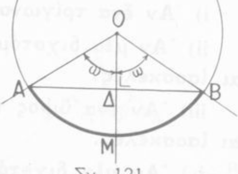
iii) Τὰ τρία ὕψη ταυτίζονται μὲ τὶς τρεῖς διαμέσους καὶ τὶς τρεῖς διχοτόμους.

2. Τὸ ἰσογώνιο τρίγωνο εἶναι καὶ ἰσόπλευρο.

59. ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

59. 1. Νὰ διχοτομηθεῖ ἕνα τόξο ΑΒ σὲ δεδομένο κύκλο.

Χαράζουμε τὴ χορδὴ ΑΒ καὶ φέρνουμε ἔπειτα ἀπὸ τὸ κέντρο Ο τὴν κάθετό της ΟΔ, σχ. 121. Ὅταν προεκταθεῖ ἡ ΟΔ, συναντᾶ τὸ τόξο ΑΒ στὸ μέσο του Μ. (Γιατί; Στὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνο ΟΑΒ, τὸ ὕψος ΟΔ εἶναι καὶ διχοτόμος τῆς ἐπίκεντρης γωνίας Ο...).



Σχ. 121

59.2. Νὰ διχοτομηθεῖ δεδομένη γωνία.

Κάνουμε τὴ γωνία ἐπίκεντρη, σχ. 121, καὶ βρίσκουμε τὸ μέσο Μ στὸ ἀντίστοιχο τόξο της. Ἡ ἡμιευθεία ΟΜ εἶναι ἡ διχοτόμος ποὺ ζητοῦμε. (Γιατί;).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

126. Νὰ συγκρίνετε τὶς γωνίες ποὺ σχηματίζονται ἀπὸ τὶς προεκτάσεις τῶν ἴσων πλευρῶν ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου μὲ τὴ βάση του.

127. Νὰ κατασκευάσετε ἰσοσκελὲς τρίγωνο ΑΒΓ, ποὺ ἡ πλευρά του ΒΓ νὰ ἔχει μῆκος 4 cm καὶ τὸ ὕψος πρὸς αὐτὴ νὰ εἶναι 3 cm.

128. Νὰ κατασκευάσετε ἰσοσκελὲς τρίγωνο ΑΒΓ, ποὺ ἡ γωνία τῶν ἴσων πλευρῶν του ΑΒ καὶ ΑΓ νὰ εἶναι 45^0, καὶ ἡ διχοτόμος της νὰ ἔχει μῆκος 4 cm.

129. Νὰ κατασκευάσετε ἰσοσκελὲς τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ), ὅταν Β = 50^0 καὶ ΒΓ = 4cm.

130. Χαράξετε ἕναν κύκλο καὶ μιὰ χορδή του ΑΒ. Ἂν Μ εἶναι τὸ μέσο τοῦ μικροτέρου τόξου ΑΒ καὶ Μ′ τὸ μέσο τοῦ μεγαλυτέρου, νὰ δικαιολογήσετε ὅτι:
α) Τὰ τρίγωνα ΑΜΒ καὶ ΑΜ′Β εἶναι ἰσοσκελῆ. β) Ἡ ΜΜ′ εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου.

131. Πόσα ἰσοσκελῆ τρίγωνα μπορεῖτε νὰ κατασκευάσετε μὲ βάση ἕνα δεδομένο εὐθ. τμῆμα ΒΓ; Τί παρατηρεῖτε σχετικὰ μὲ τὴ θέση τῆς ἄλλης κορυφῆς τους;

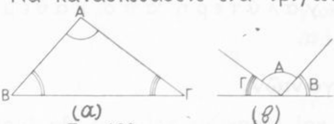
132. Κατασκευάστε δύο ἴσα ὀρθογώνια τρίγωνα (μ' ἕνα διαφανὲς χαρτὶ) καὶ ἔπειτα σχηματίστε μ' αὐτὰ ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνο.

133. Νὰ χαράξετε τὴ διχοτόμο μιᾶς γωνίας xΑψ, καὶ ἔπειτα ἀπὸ ἕνα ἐσωτερικὸ σημεῖο τῆς γωνίας νὰ φέρετε μιὰν εὐθεία ποὺ νὰ τέμνει τὶς πλευρές της μὲ τρόπο, ὥστε τὸ τρίγωνο ποὺ σχηματίζεται νὰ εἶναι ἰσοσκελές.

134. Νὰ διαιρέσετε δεδομένο τόξο σὲ 4 ἴσα μέρη.

60. ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΓΩΝΙΩΝ ΕΝΟΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Νὰ κατασκευάσετε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ. Νὰ ἀποκόψετε ἔπειτα τὶς γωνίες του καὶ νὰ σχηματίσετε τὸ ἄθροισμά τους, σχ. 122β. Τί βρίσκετε;



Σχ. 122

Βρίσκετε ὅτι:

$$\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{\Gamma}=2 \text{ ὀρθές.}$$

Ὥστε: **Σὲ κάθε τρίγωνο τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν του ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθές.**

61. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

61. 1. Ἀπὸ τὴν προηγούμενη πρόταση συνάγουμε ὅτι:

α) Στὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο οἱ ὀξεῖες γωνίες εἶναι συμπληρωματικές.

β) Ἕνα τρίγωνο μπορεῖ νὰ ἔχει μία ὀρθὴ ἢ μία ἀμβλεία γωνία· οἱ ἄλλες δύο εἶναι ὀξεῖες.

61. 2. Ἐξωτερικὴ γωνία τριγώνου.

i) Σχεδιάζουμε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ, σχ. 123, καὶ προεκτείνουμε μιὰ πλευρά του, π.χ. τὴν ΑΒ, ὥστε νὰ λάβουμε τὴν ἡμιευθεία ΑΜ ἀντίθετη πρὸς τὴν ΑΒ. Ἡ γωνία ΓΑΜ $=\omega$ εἶναι ἐφεξῆς καὶ παραπληρωματικὴ τῆς γωνίας Α καὶ λέγεται *ἐξωτερικὴ γωνία* τοῦ τριγώνου ΑΒΓ στὴν κορυφὴ Α. Σύμφωνα μὲ αὐτὸ τὸν ὁρισμό, τὸ τρίγωνο ΑΒΓ ἔχει (6) ἐξωτερικὲς γωνίες. (Ποιὲς εἶναι;).

ii) Θὰ συγκρίνουμε πιὸ κάτω τὴν ἐξωτερικὴ γωνία ω, σχ. 123, μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ.

Μὲ τὸ διαφανὲς χαρτὶ μποροῦμε νὰ διαπιστώσουμε ὅτι:

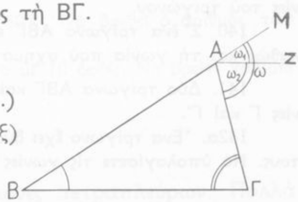
$$\widehat{\omega}=\widehat{B}+\widehat{\Gamma}$$

Στὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα φτάνουμε καὶ ὡς ἑξῆς:

Φέρνουμε ἀπὸ τὸ Α τὴν ΑΖ παράλληλη πρὸς τὴ ΒΓ.

Παρατηροῦμε ὅτι

$$\begin{array}{lll} & \widehat{B}=\widehat{\omega}_1 & \text{(ἐντὸς ἐκτὸς ...)} \\ AZ \parallel B\Gamma \;\Rightarrow & & \\ & \widehat{\Gamma}=\widehat{\omega}_2 & \text{(ἐντὸς ἐναλλάξ)} \\ \hline \text{Ἄρα} & \widehat{B}+\widehat{\Gamma}=\widehat{\omega}_1+\widehat{\omega}_2 & \\ \text{ἢ} & \widehat{\omega}=\widehat{B}+\widehat{\Gamma} & \end{array}$$



Σχ. 123

Ὥστε: **Κάθε ἐξωτερικὴ γωνία τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀπέναντι ἐσωτερικῶν γωνιῶν του.**

Σημείωση

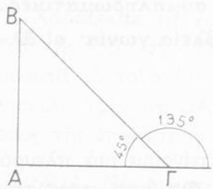
Ἀπὸ τὴν προηγούμενη πρόταση συμπεραίνουμε ὅτι: Κάθε ἐξωτερικὴ γωνία τριγώνου εἶναι μεγαλύτερη ἀπὸ καθεμιὰ ἀπέναντι ἐσωτερική του γωνία.

61.3. Ἐφαρμογὲς στὴν κατασκευὴ γωνιῶν.

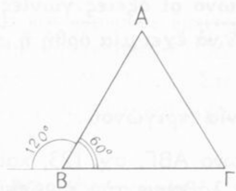
i) Ἂν κατασκευάσουμε ἕνα ὀρθογώνιο καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνο, θὰ ἔχουμε γωνίες 45^0 καὶ 135^0, σχ. 124. (Γιατί;)

ii) Ἂν κατασκευάσουμε ἕνα ἰσόπλευρο τρίγωνο, θὰ ἔχουμε γωνίες 60^0 καὶ 120^0, σχ. 125. (Γιατί;).

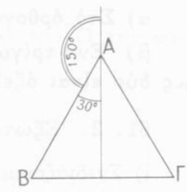
iii) Ἂν στὸ ἰσόπλευρο τρίγωνο φέρουμε ἕνα ὕψος, π.χ. τὸ ΑΔ, θὰ ἔχουμε γωνίες 60^0, 30^0 καὶ 150^0, σχ. 126. (Γιατί;)



Σχ. 124



Σχ. 125



Σχ. 126

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

135. Σ' ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνο ἡ μία ἀπὸ τὶς ἴσες γωνίες εἶναι 52^0. Νὰ ὑπολογίσετε τὶς ὑπόλοιπες.

136. Σ' ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνο ἡ γωνία τῆς κορυφῆς τῶν ἴσων πλευρῶν εἶναι 70^0. Νὰ ὑπολογίσετε τὶς ὑπόλοιπες.

137. Δύο ἀπὸ τὶς γωνίες ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου διαφέρουν κατὰ 20^0. Νὰ ὑπολογίσετε τὶς γωνίες τοῦ τριγώνου. (Νὰ διακρίνετε διάφορες περιπτώσεις).

138. Σ' ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο μιὰ γωνία εἶναι τριπλάσια ἀπὸ μιὰν ἄλλη. Νὰ ὑπολογίσετε ὅλες τὶς γωνίες. (Δύο περιπτώσεις).

139. Σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι $Α = 50^0$, $Γ = 55^0$. Νὰ ὑπολογίσετε τὶς ἐξωτερικὲς γωνίες τοῦ τριγώνου.

140. Σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι $Β = 50^0$ καὶ $Γ = 80^0$. Νὰ ὑπολογίσετε τὴ γωνία Α καθὼς καὶ τὴ γωνία ποὺ σχηματίζουν οἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ.

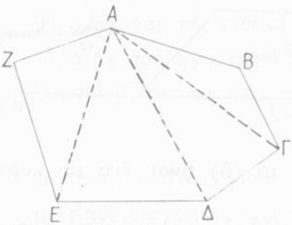
141. Δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' ἔχουν $\widehat{Α} = \widehat{Α'}$ καὶ $\widehat{Β} = \widehat{Β'}$. Νὰ συγκρίνετε τὶς γωνίες Γ καὶ Γ'.

142α. Ἕνα τρίγωνο ἔχει δύο γωνίες ἴσες, ἐνῶ ἡ ἄλλη εἶναι 30^0 μεγαλύτερη ἀπὸ καθεμιά τους. Νὰ ὑπολογίσετε τὶς γωνίες τοῦ τριγώνου.

62. ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΓΩΝΙΩΝ ΕΝΟΣ ΚΥΡΤΟΥ ΠΟΛΥΓΩΝΟΥ

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ κυρτοῦ ἑξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ, σχ. 127, σκεφτόμαστε ὡς ἑξῆς:

Χωρίζουμε τὸ πολύγωνο σὲ τρίγωνα, μὲ τὶς διαγωνίους ποὺ ἄγονται ἀπὸ μιὰ κορυφή του. Τότε τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου θὰ εἶναι ἴσο μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τῶν τριγώνων.



Σχ. 127

Φέρνουμε λοιπὸν ὅλες τὶς διαγωνίους ἀπὸ τὴν κορυφὴ Α: Τὶς ΑΓ, ΑΔ καὶ ΑΕ.

Σχηματίζονται 4 τρίγωνα. Δηλαδὴ τόσα τρίγωνα, ὅσες εἶναι οἱ πλευρὲς τοῦ πολυγώνου πλὴν δύο.

Συνεπῶς: Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς κυρτοῦ ἑξαγώνου εἶναι ἴσο μὲ $4 \cdot 2$ ὀρθές.

Ἐργαζόμενοι μὲ ὅμοιο τρόπο σὲ διάφορα κυρτὰ* πολύγωνα σχηματίζουμε τὸν ἑπόμενο πίνακα.

Ἀριθμὸς πλευρῶν	Ἀριθμὸς τριγώνων	Ἄθροισμα γωνιῶν τῶν τριγώνων σὲ ὀρθὲς	Ἄθροισμα γωνιῶν πολυγώνου σὲ ὀρθὲς
4	$4-2$	$(4-2)\cdot 2$	4
5	$5-2$	$(5-2)\cdot 2$	6
6	$6-2$	$(6-2)\cdot 2$	8
...	...	...	...
ν	$\nu-2$	$(\nu-2)\cdot 2$	$2.(\nu-2)$

Ὥστε: **Τὸ ἄθροισμα Σ τῶν γωνιῶν ἑνὸς κυρτοῦ πολυγώνου μὲ ν πλευρὲς εἶναι ἴσο μὲ $2\cdot(\nu - 2)$ ὀρθὲς γωνίες.**

$$\boxed{\Sigma = 2 \cdot (\nu - 2) \text{ ὀρθὲς}}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

142β. Νὰ ὑπολογίσετε τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν σ' ἕνα κυρτό:
α) 14/γωνο, β) 16/γωνο, γ) 50/γωνο.

143. Ἕνα κυρτὸ πολύγωνο ἔχει ἄθροισμα γωνιῶν 60 L. Νὰ βρεθεῖ ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν του.

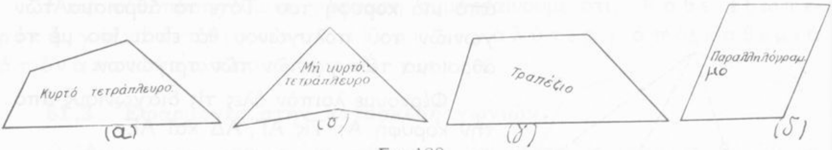
144. Ἕνα κυρτὸ πολύγωνο ἔχει ἄθροισμα γωνιῶν ἴσο μὲ 10 ὀρθές. Νὰ βρεῖτε καθεμιὰ του γωνία, ἂν γνωρίζετε ὅτι ὅλες οἱ γωνίες εἶναι ἴσες.

63. ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ

Στὸ περιβάλλον μας διακρίνουμε πολλὲς εἰκόνες τετραπλεύρων. Πολλὰ γνωστὰ γεωμετρικὰ στερεὰ ἔχουν ὡς ἕδρες τους τετράπλευρα.

* Ἕνα πολύγωνο λέγεται κυρτό, ὅταν ἡ εὐθεία τῆς καθεμιᾶς πλευρᾶς του ἀφήνει τὸ πολύγωνο πρὸς τὸ ἴδιο μέρος της. (Βλέπε καὶ § 8).

Στὸ σχῆμα 128 ἔχουμε σχεδιάσει διαφόρων εἰδῶν τετράπλευρα. Τὸ (α)



Σχ. 128

εἶναι ἕνα κυρτὸ τετράπλευρο ὁποιοδήποτε, ἐνῶ τὸ (β) εἶναι ἕνα μὴ κυρτὸ τετράπλευρο.

Τὸ (γ) ἔχει μόνο τὶς δυό του πλευρὲς παράλληλες καὶ γι' αὐτὸ ὀνομάζεται τ ρ α π έ ζ ι ο.

Τὸ (δ) ἔχει καὶ τὰ δύο ζεύγη τῶν ἀπέναντι πλευρῶν παράλληλα καὶ ὀνομάζεται γι' αὐτὸ π α ρ α λ λ η λ ό γ ρ α μ μ ο.

Πιὸ κάτω θὰ ἐξετάσουμε μόνο κυρτὰ τετράπλευρα.

64. ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ

Χαράζουμε πρῶτα δύο παράλληλες εὐθεῖες, $\alpha \parallel \alpha'$, καὶ ἔπειτα ἄλλες δύο παράλληλες, $\beta \parallel \beta'$, ποὺ νὰ τέμνουν τὶς πρῶτες, σχ. 129. Ὁρίζεται τότε ἕνα τετράπλευρο ΑΒΓΔ ποὺ ἔχει τὶς ἀπέναντι πλευρές του παράλληλες, δηλαδὴ ἕνα παραλληλόγραμμο.

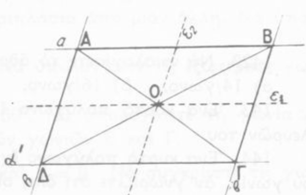
$$\boxed{\text{ΑΒΓΔ παραλ/μο} \Leftrightarrow \text{ΑΒ} \parallel \text{ΓΔ καὶ ΒΓ} \parallel \text{ΑΔ}}$$

65. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΩΝ

65. 1. Σχηματίστε ἕνα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Ἔπειτα μὲ τὰ ὄργανά σας νὰ ἐξετάσετε:

i) Τὶς ἀπέναντι πλευρές, ii) τὶς ἀπέναντι γωνίες, iii) τὴ χαρακτηριστικὴ θέση τοῦ σημείου τομῆς τῶν διαγωνίων ἑνὸς παραλληλογράμμου, σχ. 129. Θὰ βρεῖτε ὅτι:

1. $ΑΒ = ΓΔ$ καὶ $ΑΔ = ΒΓ$
2. $\widehat{Α} = \widehat{Γ}$ καὶ $\widehat{Β} = \widehat{Δ}$
3. $ΑΟ = ΟΓ$ καὶ $ΒΟ = ΟΔ$



Σχ. 129

Τὰ ἴδια ἀποτελέσματα βρίσκουμε καὶ ὡς ἑξῆς:

Καθὼς εἶναι γνωστό, κάθε σημεῖο τῆς μεσοπαραλλήλου ε_1 τῶν δύο παραλλήλων εὐθειῶν ΑΒ, ΓΔ εἶναι κέντρο συμμετρίας τοῦ σχήματός τους. Τὸ ἴδιο ἰσχύει καὶ γιὰ τὰ σημεῖα τῆς μεσοπαραλλήλου ε_2 τῶν ΑΔ καὶ ΒΓ.

Ἂς προσέξουμε τὴ συμμετρία ὡς πρὸς τὴν τομὴ Ο τῶν ε_1 καὶ ε_2.

Παρατηροῦμε ὅτι:

Ἡ ὁμόλογος τῆς εὐθείας α εἶναι ἡ εὐθεία α'.

Ἡ ὁμόλογος τῆς εὐθείας β εἶναι ἡ εὐθεία β'.

Ἄρα τὸ ὁμόλογο τῆς τομῆς Α τῶν α, β εἶναι ἡ τομὴ Γ τῶν α', β'.

Ὅμοια βρίσκουμε ὅτι: τὸ ὁμόλογο τοῦ Β εἶναι τὸ Δ

$$A \rightleftarrows \Gamma \quad \text{καὶ} \quad B \rightleftarrows \Delta$$

Δηλαδή: i) Τὸ Ο εἶναι κέντρο συμμετρίας τοῦ παραλληλογράμμου.

ii) Κάθε διαγώνιος ἔχει τὰ ἄκρα της συμμετρικά. Συνεπῶς διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρο συμμετρίας, τὸ ὁποῖο καὶ τὴ διχοτομεῖ.

iii) Τὰ ἄκρα τῆς πλευρᾶς ΑΒ εἶναι συμμετρικὰ μὲ τὰ ἄκρα τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς ΓΔ. Γι' αὐτὸ ΑΒ = ΓΔ.

Ὅμοια συνάγουμε ὅτι καὶ ΑΔ = ΒΓ.

iv) Οἱ ἀπέναντι γωνίες εἶναι ὁμόλογες. (Γιατί;). Ἄρα εἶναι ἴσες.

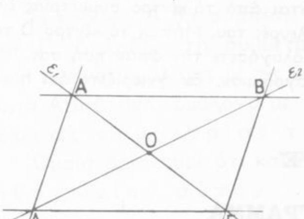
$$\widehat{A} = \widehat{\Gamma} \quad \text{καὶ} \quad \widehat{B} = \widehat{\Delta}$$

Ὥστε **στὸ παραλληλόγραμμο:**

1. **Οἱ ἀπέναντι πλευρὲς εἶναι ἴσες.**
2. **Οἱ ἀπέναντι γωνίες εἶναι ἴσες.**
3. **Κάθε διαγώνιος διχοτομεῖ τὴν ἄλλη.**

65. 2. Ἄλλοι τρόποι κατασκευῆς παραλληλογράμμου.

i) Χαράζουμε δύο εὐθεῖες ε_1, ε_2, ποὺ τέμνονται στὸ σημεῖο Ο, σχ. 130. Ἔπειτα πάνω στὴ μιὰ ἀπὸ αὐτές, π.χ. τὴν ε_1, λαμβάνουμε δύο ἴσα τμήματα ΟΑ = ΟΓ καὶ πάνω στὴν ἄλλη, τὴν ε_2, ἄλλα δύο τμήματα ἴσα μεταξύ τους ΟΒ = ΟΔ. Σχηματίζουμε τὸ τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Αὐτὸ εἶναι ἕνα τετράπλευρο ποὺ οἱ διαγώνιοί του διχοτομοῦνται. Μήπως εἶναι παραλληλόγραμμο;



Σχ. 130

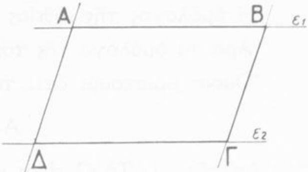
Μὲ παράλληλη μετατόπιση διαπιστώνουμε ὅτι οἱ ἀπέναντι πλευρές του εἶναι παράλληλες.

Δηλαδή: ΑΒ ∥ ΓΔ καὶ ΒΓ ∥ ΑΔ.

Συνεπῶς τὸ τετράπλευρο ΑΒΓΔ εἶναι π α ρ α λ λ η λ ό γ ρ α μ μ ο.

Ὥστε: **Ἂν σ' ἕνα τετράπλευρο οἱ διαγώνιοι διχοτομοῦνται, τότε τὸ τετράπλευρο εἶναι παραλληλόγραμμο.**

ii) Χαράζουμε δύο εὐθεῖες ε_1, ε_2 παράλληλες καὶ λαμβάνουμε πάνω σ' αὐτὲς δύο ἴσα τμήματα ΑΒ = ΓΔ, σχ. 131. Μ' αὐτὸ τὸν τρόπο ὁρίζουμε τὸ κυρτὸ τετράπλευρο ΑΒΓΔ ποὺ ἔχει τὶς δύο ἀπέναντι πλευρές, ΑΒ, ΓΔ ἴσες καὶ παράλληλες. Μήπως εἶναι παραλληλόγραμμο;

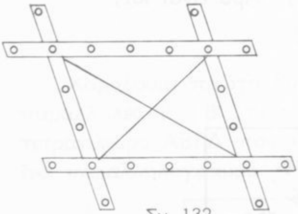


Σχ. 131

Μὲ παράλληλη μετατόπιση μποροῦμε νὰ διαπιστώσουμε ὅτι καὶ οἱ ἄλλες δύο ἀπέναντι πλευρὲς ΑΔ καὶ ΒΓ εἶναι μεταξύ τους παράλληλες. Ἑπομένως τὸ τετράπλευρο ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμο.

Ὥστε: **Ἂν ἕνα κυρτὸ τετράπλευρο ἔχει τὶς δύο ἀπέναντι πλευρὲς ἴσες καὶ παράλληλες, εἶναι παραλληλόγραμμο.**

iii) Σημείωση: Ἕνα ὑλικὸ ἀρθρωτὸ παραλληλόγραμμο (μοντέλο) μὲ πλευρὲς ἀπὸ διάτρητα ἐλάσματα καὶ διαγωνίους ἀπὸ ἐλαστικὰ νήματα, σχ. 132, θὰ μᾶς βοηθήσει νὰ καταλάβουμε τὶς προηγούμενες ἰδιότητες.


Σχ. 132

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

145. Σ' ἕνα παραλληλόγραμμο ἡ μία γωνία εἶναι 75°. Νὰ ὑπολογίσετε τὶς ἄλλες τρεῖς.

146. Σ' ἕνα παραλληλόγραμμο ἡ περίμετρος ἔχει μῆκος 20 cm καὶ ἡ μία πλευρά του ἔχει μῆκος 4 cm. Νὰ ὑπολογίσετε τὰ μήκη τῶν ἄλλων πλευρῶν.

147. Νὰ κατασκευάσετε παραλληλόγραμμο μὲ διαγωνίους 4 cm καὶ 6 cm. Πόσες λύσεις ἔχει τὸ πρόβλημα;

148. Ἂν Μ, Ν εἶναι τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν ΑΒ, ΓΔ ἑνὸς παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, νὰ ἐξετάσετε ἂν εἶναι παραλληλόγραμμο τὸ ΑΜΝΔ.

149. Νὰ χαράξετε ἕνα εὐθ. τμῆμα, ποὺ νὰ διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρο συμμετρίας ἑνὸς παραλληλογράμμου καὶ νὰ τελειώνει σὲ δύο ἀπέναντι πλευρές του. Μήπως τὸ κέντρο Ο τοῦ παραλληλογράμμου διχοτομεῖ τὸ εὐθ. τμῆμα; Νὰ δικαιολογήσετε τὴν ἀπάντησή σας.

150. Νὰ ὑπολογίσετε τὶς γωνίες ἑνὸς παραλληλογράμμου, ἂν γνωρίζετε ὅτι ἡ μία ἀπὸ αὐτὲς εἶναι διπλάσια ἀπὸ μιὰν ἄλλη.

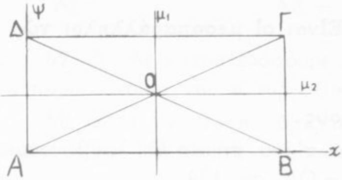
ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ε'

ΕΙΔΙΚΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ

66. ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ

66. 1. Ὁρισμὸς

Ἂς κατασκευάσουμε ἕνα παραλληλόγραμμο μὲ μιά του γωνία ὀρθή. Γι' αὐτὸ τὸ σκοπὸ κατασκευάζουμε μία ὀρθὴ γωνία χΑψ καὶ ἔπειτα φέρνουμε:



Σχ. 133

i) Ἀπὸ ἕνα σημεῖο Β τῆς Αχ τὴν παράλληλο πρὸς τὴν Αψ.

ii) Ἀπὸ ἕνα σημεῖο Δ τῆς Αψ τὴν παράλληλο πρὸς τὴν Αχ.

Μ' αὐτὸ τὸν τρόπο ὁρίζεται τὸ παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, σχ. 133, ποὺ ἔχει τὴ γωνία Α ὀρθή. Ἄς προσέξουμε καὶ τὶς ἄλλες γωνίες τοῦ παραλληλογράμμου αὐτοῦ. Εὔκολα μποροῦμε νὰ διαπιστώσουμε ὅτι ὅλες εἶναι ὀρθές.

$$\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{\Gamma} = \widehat{\Delta} = 1\,L$$

Ὥστε: **Ἂν ἕνα παραλληλόγραμμο ἔχει μία γωνία ὀρθή, θὰ ἔχει καὶ τὶς ἄλλες γωνίες ὀρθές.**

Τὸ παραλληλόγραμμο ποὺ οἱ γωνίες του εἶναι ὀρθὲς λέγεται ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Ὀρθογώνιο παραλ/μο ⇔ Παραλ/μο μὲ ὅλες τὶς γωνίες του ὀρθὲς

66. 2. Ἰδιότητες

Τὸ ὀρθογώνιο, ἀφοῦ εἶναι παραλληλόγραμμο, ἔχει ὅλες τὶς ἰδιότητες τῶν παραλληλογράμμων. Μὲ τὰ ὄργανά μας καὶ μὲ συλλογισμοὺς μποροῦμε νὰ βροῦμε καὶ ἄλλες ἰδιότητες.

i) Ἄξονες συμμετρίας

Ἄς διπλώσουμε τὸ ὀρθογώνιο γύρω ἀπὸ τὴ μεσοπαράλληλο μ_1 τῶν ἀπέναντι πλευρῶν ΑΔ καὶ ΒΓ, σχ. 133.

Ἡ κορυφὴ Α θὰ συμπέσει μὲ τὴν κορυφὴ Β καὶ ἡ κορυφὴ Δ μὲ τὴν κορυφὴ Γ. Δηλαδὴ στὴ συμμετρία ὡς πρὸς τὴ μεσοπαράλληλο μ_1 οἱ κορυφὲς Α καὶ Δ εἶναι ὁμόλογες μὲ τὶς κορυφὲς Β καὶ Γ ἀντιστοίχως. Συνεπῶς τὸ ὀρθογώνιο ΑΒΓΔ εἶναι ὁμόλογο μὲ τὸν ἑαυτό του. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι ἡ μ_1 εἶναι ἄξονας συμμετρίας τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ.

Ὅμοια βρίσκουμε ὅτι καὶ ἡ μ_2 εἶναι ἄξονας συμμετρίας τοῦ ὀρθογωνίου αὐτοῦ.

ii) Ἰσότητα διαγωνίων.

Μὲ τὸ διαβήτη βρίσκουμε ὅτι οἱ διαγώνιοι τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου εἶναι ἴσες μεταξύ τους.

Στὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα φτάνουμε, ἂν σκεφτοῦμε ὅτι, στὴ συμμετρία ὡς πρὸς τὴ μεσοπαράλληλο μ_1, ἡ μία διαγώνιος ἔχει συμμετρικὴ τὴν ἄλλη.

Ὥστε : **Στὸ ὀρθογώνιο :**

1) Ὑπάρχουν δύο ἄξονες συμμετρίας. Εἶναι οἱ μεσοπαράλληλοι τῶν ἀπέναντι πλευρῶν του.

2) Οἱ διαγώνιοι εἶναι ἴσες.

iii) Παραλληλόγραμμο μὲ ἴσες διαγωνίους.

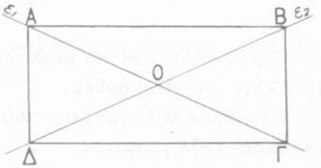
Πάνω σὲ δύο εὐθεῖες $ε_1$, $ε_2$, ποὺ τέμνονται σ' ἕνα σημεῖο Ο, λαμβάνουμε ἴσα τμήματα: $ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ = ΟΔ$, σχ. 134.

Μὲ αὐτὸ τὸν τρόπο ὁρίζεται ἕνα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ ποὺ ἔχει ἴσες διαγωνίους ($ΑΓ = ΒΔ$) .

Μήπως εἶναι ὀρθογώνιο;

Μὲ τὸ γνώμονά μας διαπιστώνουμε ὅτι τὸ παραλληλόγραμμο τοῦτο ἔχει ὀρθὲς τὶς γωνίες. Ἄρα εἶναι ὀρθογώνιο.

Ὥστε: **Ἂν ἕνα παραλληλόγραμμο ἔχει τὶς διαγωνίους ἴσες, εἶναι ὀρθογώνιο.**



Σχ. 134

Σημείωση

Μὲ ἕνα ἀρθρωτὸ παραλληλόγραμμο, ποὺ ἔχει διαγωνίους ἀπὸ ἐλαστικὰ νήματα, μποροῦμε νὰ διαπιστώσουμε ὅτι, ὅταν οἱ διαγώνιοι γίνονται ἴσες, τότε τὸ παραλληλόγραμμο γίνεται ὀρθογώνιο.

67. ΜΙΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΩΝ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ ΤΟΥ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ

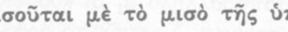
67. 1. Νὰ σχεδιάσετε ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ καὶ μὲ τὸ διαβήτη σας νὰ συγκρίνετε τὴν ὑποτείνουσα ΒΓ μὲ τὴ διάμεσο ΑΜ. Τί παρατηρεῖτε;

Εἶναι: $$ΑΜ = \frac{ΒΓ}{2}$$

Δηλαδή: **Στὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο ἡ διάμεσος πρὸς τὴν ὑποτείνουσα ἰσοῦται μὲ τὸ μισὸ τῆς ὑποτείνουσας.**

Νά πῶς μποροῦμε νὰ δικαιολογήσουμε αὐτὴ τὴν πρόταση:

Στὸ τρίγωνο ΑΒΓ ($Α = 1$ L) τοῦ σχ. 135, ἔχουμε προεκτείνει τὴ διάμεσο ΑΜ ὡς τὸ σημεῖο Δ ποὺ εἶναι συμμετρικὸ τοῦ Α ὡς πρὸς τὸ μέσο Μ τῆς ΒΓ ($ΑΜ = ΜΔ$).



Σχ. 135

Ἂν προσέξουμε στὸ τετράπλευρο ΑΒΓΔ, παρατηροῦμε ὅτι:

$$ΒΜ = ΜΓ \quad \text{καὶ} \quad ΑΜ = ΜΔ$$

Δηλαδὴ στὸ τετράπλευρο ΑΒΓΔ οἱ διαγώνιοι διχοτομοῦνται, ποὺ σημαίνει ὅτι εἶναι παραλληλόγραμμο. Καὶ ἐπειδὴ $Α = 1$ L, εἶναι καὶ ὀρθογώνιο.

Ἄρα: $ΑΔ = ΒΓ$ ἢ $AM = \frac{ΒΓ}{2}$

67. 2. Ἂς κατασκευάσουμε ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνο ΑΜΒ ($AM = MB$) καὶ ἂς προεκτείνουμε τὴν πλευρὰ ΒΜ κατὰ μῆκος $ΜΓ = MB$, σχ. 135.

Μὲ αὐτὸ τὸν τρόπο ὁρίζεται τὸ τρίγωνο ΑΒΓ, στὸ ὁποῖο ἡ ΑΜ εἶναι διάμεσος καὶ ἰσοῦται μὲ τὸ μισὸ τῆς ΒΓ.

$$AM = \frac{ΒΓ}{2}, \quad BM = ΓΜ$$

Μὲ τὸ γνώμονά μας εἶναι εὔκολο νὰ διαπιστώσουμε ὅτι:

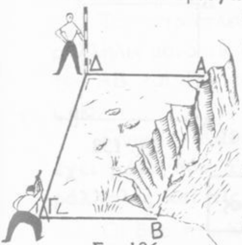
$$\widehat{ΒΑΓ} = 1\ L$$

Δηλαδή: **Ἂν σ' ἕνα τρίγωνο μία διάμεσος εἶναι ἴση μὲ τὸ μισὸ τῆς πλευρᾶς ποὺ διχοτομεῖ, τότε τὸ τρίγωνο θὰ εἶναι ὀρθογώνιο μὲ ὑποτείνουσα αὐτὴ τὴν πλευρά.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

151. Νὰ ἐξηγήσετε πῶς μὲ τὴ διάταξη τοῦ διπλανοῦ σχεδίου ὑπολογίζεται ἡ ἀπόσταση ΑΒ, σχ. 136.

152. Σ' ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο μία διαγώνιος σχηματίζει μὲ μιὰ πλευρά του γωνία 50^0. Νὰ ὑπολογίσετε τὶς ἄλλες γωνίες ποὺ σχηματίζουν οἱ διαγώνιοι μὲ τὶς πλευρὲς τοῦ ὀρθογωνίου.



Σχ. 136

153. Στὴν προηγούμενη ἄσκηση νὰ ὑπολογίσετε τὶς γωνίες τῶν διαγωνίων τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου.

154. Τὸ κυρτὸ τετράπλευρο, ποὺ ἔχει ὡς διαγωνίους δύο διαμέτρους κύκλου, εἶναι ὀρθογώνιο. (Γιατί;)

155. Νὰ χαράξετε ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο μὲ μιὰ διαγώνιο 5 cm καὶ μὲ τὴ μιὰ γωνία τῶν διαγωνίων 60^0.

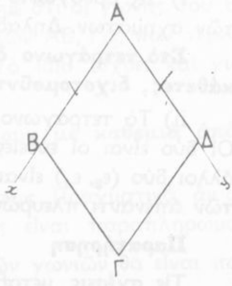
68. ΡΟΜΒΟΣ

68. 1. Ὁρισμός

Πάνω στὶς πλευρὲς μιᾶς γωνίας χΑψ λαμβάνουμε ἴσα τμήματα $AB = ΑΔ$, σχ. 137. Ἀπὸ τὰ σημεῖα Β, Δ φέρνουμε παραλλήλους πρὸς τὶς πλευρὲς τῆς γωνίας. Μὲ αὐτὸ τὸν τρόπο σχηματίζεται ἕνα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, ποὺ ἔχει τὶς δύο διαδοχικὲς πλευρὲς ΑΒ καὶ ΑΔ ἴσες, $AB = ΑΔ$. Καὶ ἂν σκεφτοῦμε ὅτι:

$AB = ΓΔ$ καὶ $ΑΔ = ΒΓ$ (ἀπέναντι πλευρὲς παραλ/μου),

βρίσκουμε ὅτι: $AB = ΑΔ = ΔΓ = ΓΒ$



Σχ. 137

Δηλαδή: **"Αν ένα παραλληλόγραμμο έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες, θα έχει όλες τις πλευρές του ίσες.**

Τὸ παραλληλόγραμμο ποὺ ὅλες του οἱ πλευρὲς εἶναι ἴσες λέγεται ρόμβος.

Ρόμβος ⇔ παραλ/μο μὲ ὅλες του τὶς πλευρὲς ἴσες

68. 2. Ἰδιότητες

Ὁ ρόμβος εἶναι, ὅπως καὶ τὸ ὀρθογώνιο, παραλληλόγραμμο, ἄρα ἔχει ὅλες τὶς ἰδιότητες τῶν παραλληλογράμμων. Ἔχει ὅμως καὶ ἄλλες.

Μὲ τὰ ὄργανά μας καὶ μὲ διπλώσεις γύρω ἀπὸ τὶς εὐθεῖες τῶν διαγωνίων βρίσκουμε ὅτι:

i) Οἱ εὐθεῖες τῶν διαγωνίων τοῦ ρόμβου εἶναι ἄξονες συμμετρίας του.

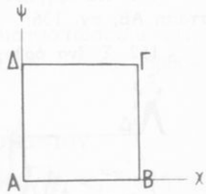
ii) Οἱ διαγώνιοι τοῦ ρόμβου τέμνονται κάθετα καὶ καθεμία διχοτομεῖ τὶς ἀπέναντι γωνίες του.

69. ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ

69. 1. Ὁρισμὸς

Τετράγωνο σχῆμα ἔχουν οἱ ἕδρες ἑνὸς κύβου.

Χαράζουμε μιὰν ὀρθὴ γωνία χΑψ καὶ πάνω στὶς πλευρές της λαμβάνουμε ἴσα τμήματα ΑΒ = ΑΔ, σχ. 138. Στὰ σημεῖα Β καὶ Δ χαράζουμε καθέτους πρὸς τὶς Αχ καὶ Αψ ἀντιστοίχως. Τὸ τετράπλευρο ΑΒΓΔ εἶναι ὀρθογώνιο καὶ ρόμβος, καὶ λέγεται τετράγωνο.



Σχ. 138

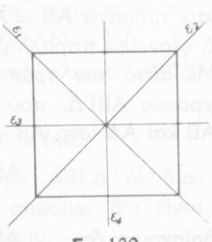
τετράγωνο ⇔ ὀρθογώνιο καὶ ρόμβος

69. 2. Ἰδιότητες

i) Ὡς ὀρθογώνιο καὶ ρόμβος, τὸ τετράγωνο ἔχει ὅλες τὶς ἰδιότητες αὐτῶν τῶν σχημάτων. Δηλαδή:

Στὸ τετράγωνο ὅλες οἱ πλευρὲς εἶναι ἴσες· οἱ διαγώνιοι εἶναι ἴσες, κάθετες, διχοτομοῦνται καὶ διχοτομοῦν τὶς γωνίες.

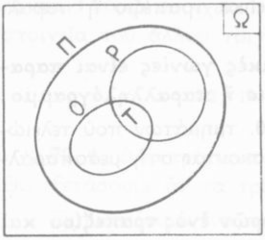
ii) Τὸ τετράγωνο ἔχει τέσσερεις ἄξονες συμμετρίας. Οἱ δύο εἶναι οἱ εὐθεῖες τῶν διαγωνίων (ε_1, ε_2) καὶ οἱ ἄλλοι δύο (ε_3, ε_4) εἶναι οἱ μεσοπαράλληλοι τῶν εὐθειῶν τῶν ἀπέναντι πλευρῶν του.



Σχ. 139

Παρατήρηση

Τὶς σχέσεις μεταξὺ τῶν παραλληλογράμμων (Π), τῶν ὀρθογωνίων (Ο), τῶν ρόμβων (Ρ) καὶ τῶν τετραγώνων (Τ) μποροῦμε νὰ τὶς παραστήσουμε γραφικῶς μὲ διαγράμματα, σχ. 140. Νὰ ἐξηγήσετε καὶ νὰ δικαιολογήσετε τὶς σχετικὲς θέσεις αὐτῶν τῶν συνόλων.



Σχ. 140

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

156. Νὰ κατασκευάσετε δύο ἴσα ἰσοσκελῆ τρίγωνα καὶ ἔπειτα, μὲ αὐτά, ἕνα ρόμβο.

157. Μία διαγώνιος ρόμβου σχηματίζει μὲ μιὰ πλευρά του γωνία 40^0. Νὰ ὑπολογίσετε τὶς γωνίες τοῦ ρόμβου.

158. Νὰ κατασκευάσετε ρόμβο μὲ διαγωνίους 6 cm, 8 cm.

159. Νὰ κατασκευάσετε 4 ἴσα ὀρθογώνια καὶ ἰσοσκελῆ τρίγωνα καὶ ἔπειτα, μὲ αὐτά, ἕνα τετράγωνο.

160. Νὰ κατασκευάσετε ἕνα τετράγωνο μὲ περίμετρο 16 cm.

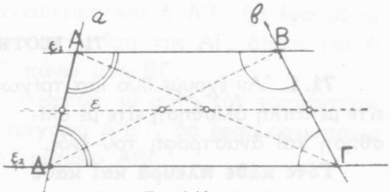
161. Ἕνα τετράπλευρο ποὺ ἔχει ὡς διαγωνίους δύο κάθετες διαμέτρους κύκλου εἶναι τετράγωνο;

70. ΤΡΑΠΕΖΙΟ

70.1. Ὁρισμός

Χαράζουμε δύο εὐθεῖες παράλληλες $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ καὶ δύο ἄλλες μὴ παράλληλες, τὶς α καὶ β. Αὐτὲς τέμνουν τὶς δύο πρῶτες στὰ σημεῖα Α, Δ, Β, Γ, σχ. 141.

Τὸ τετράπλευρο ΑΒΓΔ ἔχει παράλληλες μόνο τὶς δύο ἀπέναντι πλευρές του ΑΒ καὶ ΓΔ καὶ λέγεται τ ρ α π έ ζ ι ο.



Σχ. 141

Γενικά: **Κάθε τετράπλευρο ποὺ ἔχει μόνο δύο ἀπέναντι πλευρὲς παράλληλες καὶ τὶς δύο ἄλλες μὴ παράλληλες λέγεται τραπέζιο.**

Οἱ δύο παράλληλες πλευρὲς (ΑΒ || ΓΔ) εἶναι οἱ β ά σ ε ι ς τοῦ τραπεζίου.

70.2. Ἰδιότητες

i) Στὸ τραπέζιο ΑΒΓΔ τοῦ σχ. 141 παρατηροῦμε ὅτι οἱ γωνίες του Β καὶ Γ εἶναι ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ, ποὺ τέμνονται ἀπὸ τὴ ΒΓ. Συνεπῶς εἶναι παραπληρωματικές. Τὸ ἴδιο ἰσχύει καὶ γιὰ τὶς ἄλλες δύο γωνίες του Α καὶ Δ.

Ὥστε: **Στὸ τραπέζιο οἱ βάσεις σχηματίζουν μὲ καθεμιὰ ἀπὸ τὶς δύο ἄλλες πλευρὲς γωνίες παραπληρωματικές.**

ii) Ἡ πιὸ πάνω πρόταση ἰσχύει καὶ ἀντιστρόφως. Πραγματικά, ἂν σ' ἕνα κυρτὸ τετράπλευρο ΑΒΓΔ δύο διαδοχικὲς γωνίες εἶναι παραπληρωματικὲς ($\widehat{B}+\widehat{\Gamma}=2\,L$), τότε δύο ἀπὸ τὶς πλευρὲς αὐτῶν τῶν γωνιῶν θὰ εἶναι παράλληλες. (Γιατί;) Συνεπῶς αὐτὸ τὸ τετράπλευρο θὰ εἶναι τραπέζιο ἢ παραλληλόγραμμο.

Ὥστε : **Ἂν σ' ἕνα τετράπλευρο δύο διαδοχικὲς γωνίες εἶναι παραπληρωματικές, τότε τὸ τετράπλευρο εἶναι τραπέζιο ἢ παραλληλόγραμμο.**

iii) Καθὼς εἴδαμε στὴν § 48. 2, τὰ μέσα τῶν εὐθ. τμημάτων ποὺ τελειώνουν στὶς παράλληλες πλευρὲς ΑΒ, ΓΔ, σχ. 141, βρίσκονται στὴ μεσοπαράλληλο αὐτῶν τῶν παραλλήλων.

Δηλαδή: **Τὰ μέσα τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν ἑνὸς τραπεζίου καὶ τὰ μέσα τῶν διαγωνίων του βρίσκονται πάνω στὴ μεσοπαράλληλο τῶν βάσεών του.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

162. Εἶναι δυνατὸ σ' ἕνα τραπέζιο οἱ γωνίες οἱ προσκείμενες σὲ καθεμιὰ ἀπὸ τὶς μὴ παράλληλες πλευρές του νὰ εἶναι καὶ οἱ δύο ὀξεῖες;

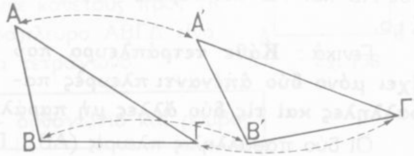
163. Νὰ κατασκευάσετε ἕνα τραπέζιο ΑΒΓΔ μὲ βάσεις ΑΒ, ΓΔ καὶ νὰ διχοτομήσετε τὶς γωνίες Β καὶ Γ. Νὰ ὑπολογίσετε τὶς γωνίες τῶν δύο αὐτῶν διχοτόμων.

164. Νὰ κατασκευάσετε ἕνα τραπέζιο ΑΒΓΔ μὲ βάσεις ΑΒ, ΓΔ, ἂν γνωρίζετε ὅτι ΒΓ = = 3 cm, ΓΔ = 6 cm καὶ Γ = 120°.

71. ΙΣΟΤΗΤΑ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

71. 1. Ἂν ἔχουμε δύο ἴσα τρίγωνα, μποροῦμε νὰ τὰ φέρουμε σὲ σύμπτωση εἴτε μὲ ἁπλὴ ὀλίσθηση εἴτε μὲ ὀλίσθηση καὶ ἀναστροφὴ τοῦ ἑνός.

Τότε κάθε πλευρὰ καὶ κάθε γωνία τοῦ ἑνὸς ἐφαρμόζει σὲ μιὰ πλευρὰ καὶ σὲ μιὰ γωνία τοῦ ἄλλου.



Σχ. 142

Π.χ. γιὰ τὰ ἴσα τρίγωνα τοῦ σχ. 142 ἔχουμε τὶς ἑξῆς ἕξι ἰσότητες:

$\widehat{A} = \widehat{A'}$ $\quad\widehat{B} = \widehat{B'}$ $\quad\widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'}$

$B\Gamma = B'\Gamma'$ $\quad A\Gamma = A'\Gamma'$ $\quad AB = A'B'$

71. 2. Ἕως τώρα ἐξακριβώναμε τὴν ἰσότητα δύο τριγώνων ἐπιθέτοντας τὸ ἕνα πάνω στὸ ἄλλο. Γεννᾶται τὸ ἐρώτημα: Μήπως ἀπὸ τὴν ἰσότητα μ ε ρ ι κ ῶ ν στοιχείων (πλευρῶν καὶ γωνιῶν) τοῦ ἑνὸς τριγώνου μὲ ἀντίστοιχα στοιχεῖα (πλευρὲς καὶ γωνίες) τοῦ ἄλλου τριγώνου μποροῦμε νὰ σ υ μ π ε ρ ά ν ο υ μ ε τὴν ἰσότητα αὐτῶν τῶν τριγώνων;

Καθὼς θὰ δοῦμε πιὸ κάτω, δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα, ἄν, ἀπὸ τὰ 6 κύρια στοιχεῖα (3 πλευρές, 3 γωνίες) τοῦ τριγώνου, τρία κατάλληλα στοιχεῖα τοῦ ἑνὸς εἶναι ἴσα μὲ τρία ἀντίστοιχα στοιχεῖα τοῦ ἄλλου. Συνεπῶς καὶ τὰ ὑπόλοιπα 3 κύρια στοιχεῖα τοῦ πρώτου τριγώνου θὰ εἶναι ἴσα μὲ τὰ 3 ἀντίστοιχα στοιχεῖα τοῦ ἄλλου τριγώνου.

72. 1ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

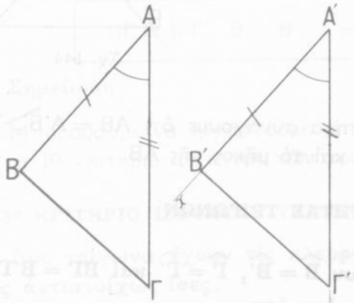
72. 1. Δύο τρίγωνα ΑΒΓ, Α′Β′Γ′ ἔχουν $\widehat{A}=\widehat{A}'$, ΑΒ=Α′Β′ καὶ ΑΓ=Α′Γ′. Θὰ ἐξετάσουμε ἂν τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ἴσα.

Σχηματίζουμε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ καὶ μία γωνία χΑ′ψ ἴση μὲ τὴ γωνία Α, σχ. 143.

Πάνω στὶς πλευρὲς Α′χ, Α′ψ λαμβάνουμε τμήματα Α′Β′ = ΑΒ καὶ Α′Γ′= = ΑΓ. Μὲ αὐτὸ τὸν τρόπο ὁρίζουμε τὸ τρίγωνο Α′Β′Γ′. Τὰ κύρια στοιχεῖα τῶν δύο τριγώνων ΑΒΓ καὶ Α′Β′Γ′ ἔχουν ὡς ἑξῆς:

$$\widehat{A}=\widehat{A}', \quad A'B' = AB \quad \text{καὶ} \quad A'\Gamma' = A\Gamma$$

Φανταζόμαστε ὅτι τὸ τρίγωνο Α′Β′Γ′ τίθεται πάνω στὸ τρίγωνο ΑΒΓ, μὲ τρόπο ποὺ ἡ Α′Β′ νὰ ἐφαρμόσει πάνω στὴν ΑΒ καθὼς καὶ ἡ γωνία Α′ πάνω στὴν ἴση της γωνία Α. Τότε ἀναγκαστικὰ καὶ ἡ Α′Γ′ θὰ ἐφαρμόσει πάνω στὴν ἴση της ΑΓ, ὁπότε καὶ ἡ Β′Γ′ πάνω στὴ ΒΓ.



Σχ. 143

Συνεπῶς, μὲ αὐτὴ τὴν τοποθέτηση τὸ τρίγωνο Α′Β′Γ′ θὰ ἐφαρμόσει πάνω στὸ τρίγωνο ΑΒΓ.

Ὥστε: **Ἂν σὲ δύο τρίγωνα ἡ μία γωνία τοῦ ἑνὸς ἰσοῦται μὲ μιὰ γωνία τοῦ ἄλλου καὶ οἱ πλευρὲς αὐτῆς τῆς γωνίας εἶναι ἀντιστοίχως ἴσες μὲ τὶς πλευρὲς τῆς ἄλλης γωνίας, τότε τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα.**

$$\boxed{(\widehat{A}=\widehat{A}',\ AB = A'B',\ A\Gamma = A'\Gamma') \Rightarrow \Delta\cdot AB\Gamma = \Delta\cdot A'B'\Gamma'}$$

72. 2. Παρατηρήσεις

i) Ἀπὸ τὴν ἰσότητα τῶν δύο τριγώνων προκύπτει ὅτι καὶ $\widehat{B}=\widehat{B}'$, $\widehat{\Gamma}=\widehat{\Gamma}'$ καὶ ΒΓ = Β′Γ′.

Δηλαδή: Στὰ ἴσα τρίγωνα οἱ ἴσες γωνίες βρίσκονται ἀπέναντι ἀπὸ ἴσες πλευρὲς καὶ οἱ ἴσες πλευρὲς βρίσκονται ἀπέναντι ἀπὸ ἴσες γωνίες.

ii) Σύμφωνα μὲ τὰ πιὸ πάνω: Εἶναι δυνατὸ νὰ συμπεράνουμε τὴν ἰσότητα δύο γωνιῶν (ἢ δύο εὐθ. τμημάτων) χωρὶς νὰ τὰ συγκρίνουμε ἀπευθείας

'Αρκεῖ νὰ βροῦμε ὅτι αὐτὲς οἱ δύο γωνίες (ἤ τὰ εὐθ. τμήματα) εἶναι ἀντίστοιχα στοιχεῖα δύο ἴσων τριγώνων.

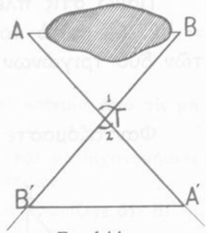
73. ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Νὰ βρεθεῖ ἡ ἀπόσταση δύο σημείων Α καὶ Β, ἂν τὸ τμῆμα ΑΒ εἶναι ἀπρόσιτο.

i) Λαμβάνουμε ἕνα σημεῖο Γ ἔξω ἀπὸ τὴν εὐθεία ΑΒ καὶ μετροῦμε τὶς ἀποστάσεις ΓΑ καὶ ΓΒ, σχ. 144.

ii) Προεκτείνουμε τὶς ΓΑ καὶ ΓΒ σὲ τμήματα ΓΑ′ = = ΓΑ καὶ ΓΒ′ = ΓΒ.

iii) 'Εξετάζουμε μήπως εἶναι ἴσα τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α′Β′Γ′.



Σχ. 144

Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α′Β′Γ′ ἔχουν:

$\widehat{\Gamma}_1 = \widehat{\Gamma}_2$ (ὡς κατακορυφὴν)

ΓΒ = ΓΒ′ (ἀπὸ κατασκευὴ)

ΓΑ = ΓΑ′ (ἀπὸ κατασκευὴ)

Ἄρα εἶναι ἴσα. Ἀπὸ αὐτὴ τὴν ἰσότητα συνάγουμε ὅτι ΑΒ = Α′Β′. Ἂν ἑπομένως μετρήσουμε τὴν Α′Β′, θὰ ἔχουμε καὶ τὸ μῆκος τῆς ΑΒ.

74. 2ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α′Β′Γ′ ἔχουν $\widehat{B} = \widehat{B'}$, $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'}$ καὶ ΒΓ = Β′Γ′.

Θὰ ἐξετάσουμε ἂν τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ἴσα.

Σχηματίζουμε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ καὶ ἕνα εὐθ. τμῆμα Β′Γ′ = ΒΓ. Ἔπειτα στὸ ἴδιο ἡμιεπίπεδο τῆς Β′Γ′ σχηματίζουμε τὶς γωνίες Β′ = Β καὶ Γ′ = Γ, ὅπως στὸ σχ. 145.

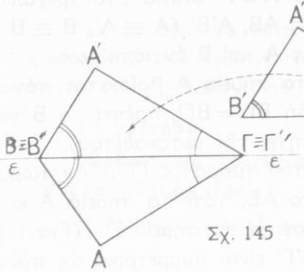
Μὲ αὐτὸ τὸν τρόπο ὁρίζουμε ἕνα ἄλλο τρίγωνο Α′Β′Γ′, ποὺ ἔχει $\widehat{B'}$ = Β, $\widehat{\Gamma'}$ = Γ καὶ Β′Γ′ = ΒΓ. Ἂς συγκρίνουμε αὐτὰ τὰ δύο τρίγωνα.

Γι' αὐτό, τοποθετοῦμε τὸ τρίγωνο Α′Β′Γ′ πάνω στὸ ΑΒΓ, μὲ τρόπο ποὺ νὰ ἐφαρμόσουν οἱ ἴσες πλευρὲς ΒΓ, Β′Γ′ καὶ οἱ ἴσες γωνίες Β, Β′.

Παρατηροῦμε τότε ὅτι καὶ τὰ τρίγωνα ἐφαρμόζουν. Μποροῦμε ὅμως νὰ ἐργαστοῦμε καὶ ὡς ἑξῆς:

Τοποθετοῦμε τὸ τρίγωνο Α′Β′Γ′ δίπλα ἀπὸ τὸ τρίγωνο ΑΒΓ, μὲ τρόπο ποὺ νὰ ἐφαρμόσουν οἱ ἴσες πλευρὲς ΒΓ, Β′Γ′ (Β ≡ Β′, Γ ≡ Γ′) καὶ οἱ γωνίες Β′ καὶ Γ′ νὰ γίνουν ἐφεξῆς μὲ τὶς ἴσες τους Β καὶ Γ ἀντιστοίχως, σχ. 145.

Σ' αὐτὴ τὴ θέση παρατηροῦμε ὅτι ἡ ΒΓ εἶναι κοινὴ διχοτόμος τῶν γωνιῶν ΑΒΑ′ καὶ ΑΓΑ′. (Γιατί;)



Σχ. 145

Συγκεντρώνουμε τὴν προσοχή μας στὴ συμμετρία ὡς πρὸς τὴν εὐθεία ε τῆς κοινῆς διχοτόμου ΒΓ. Ἂν διπλώσουμε τὸ ἐπίπεδο γύρω ἀπὸ τὴν ε, οἱ κορυφὲς Β, Γ θὰ μείνουν ἀκίνητες. Οἱ πλευρὲς τῆς γωνίας ΑΒΑ′ θὰ συμπέσουν. (Γιατί;) Ἐπίσης θὰ συμπέσουν οἱ πλευρὲς τῆς γωνίας ΑΓΑ′.

Ἄρα καὶ ἡ τομὴ Α τῶν πλευρῶν ΒΑ, ΓΑ θὰ συμπέσει μὲ τὴν τομὴ Α′ τῶν ΒΑ′, ΓΑ′.

Ὥστε: **Ἂν σὲ δύο τρίγωνα μιὰ πλευρὰ τοῦ ἑνὸς ἰσοῦται μὲ μιὰ πλευρὰ τοῦ ἄλλου καὶ οἱ προσκείμενες γωνίες στὶς ἴσες πλευρὲς εἶναι ἀντιστοίχως ἴσες, τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα.**

$$\boxed{(\mathrm{B\Gamma} = \mathrm{B'\Gamma'},\ \widehat{\mathrm{B}} = \widehat{\mathrm{B}'},\ \widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'}) \Rightarrow \Delta\cdot \mathrm{AB\Gamma} = \Delta\cdot \mathrm{A'B'\Gamma'}}$$

Σημείωση

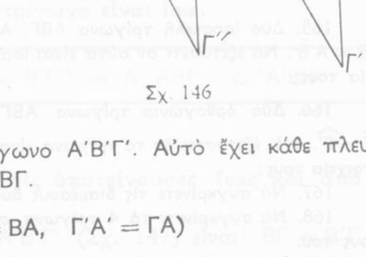
Μπορούσαμε νὰ ἐργαστοῦμε μὲ ἐντελῶς ἀνάλογο τρόπο, γιὰ νὰ βροῦμε καὶ τὸ 1ο κριτήριο ἰσότητας τῶν τριγώνων.

75. 3ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Δύο τρίγωνα ἔχουν τὶς πλευρές τους ἀντιστοίχως ἴσες.

Θὰ ἐξετάσουμε ἂν τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ἴσα.

Σχεδιάζουμε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ καὶ ἕνα εὐθ. τμῆμα Β′Γ′ = ΒΓ, σχ. 146. Ἔπειτα μὲ κέντρα τὰ σημεῖα Β′ καὶ Γ′ καὶ ἀκτίνες ΒΑ καὶ ΓΑ ἀντιστοίχως γράφουμε δύο κύκλους. Ἂν Α′ εἶναι τὸ ἕνα σημεῖο τομῆς τῶν κύκλων, τότε ὁρίζεται τὸ τρίγωνο Α′Β′Γ′. Αὐτὸ ἔχει κάθε πλευρά του ἴση μὲ μιὰ πλευρὰ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.



Σχ. 146

$$(\mathrm{B'\Gamma'} = \mathrm{B\Gamma},\quad \mathrm{B'A'} = \mathrm{BA},\quad \mathrm{\Gamma'A'} = \mathrm{\Gamma A})$$

Θὰ συγκρίνουμε τὰ δύο αὐτὰ τρίγωνα. Μὲ ἕνα διαφανὲς χαρτὶ μποροῦμε νὰ διαπιστώσουμε ὅτι τὰ δύο αὐτὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα.

Στὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα μποροῦμε νὰ φτάσουμε καὶ ὡς ἑξῆς:

Ἂς ὑποθέσουμε ὅτι τοποθετοῦμε τὸ τρίγωνο Α'Β'Γ' δίπλα στὸ τρίγωνο ΑΒΓ, μὲ τρόπο ποὺ νὰ ἐφαρμόσουν οἱ ἴσες πλευρὲς ΑΒ, Α'Β' ($Α \equiv Α'$, $Β \equiv Β'$) καὶ οἱ γωνίες Α', Β' νὰ γίνουν ἐφεξῆς μὲ τὶς γωνίες Α καὶ Β ἀντιστοίχως.

Ἀπὸ τὴν ἰσότητα $ΑΓ = ΑΓ'$ ἐννοοῦμε ὅτι τὸ σημεῖο Α βρίσκεται πάνω στὴ μεσοκάθετο τοῦ τμήματος ΓΓ'. Ὅμοια, ἐπειδὴ $ΒΓ = ΒΓ'$, πρέπει τὸ Β νὰ βρίσκεται πάνω στὴ μεσοκάθετο τοῦ ΓΓ'. (Ἰδιότητες τῆς μεσοκαθέτου).

Δηλαδή: Ἡ εὐθεία ΑΒ εἶναι ἡ μεσοκάθετος τοῦ τμήματος ΓΓ'. Ἂν τώρα διπλώσουμε τὸ ἐπίπεδο γύρω ἀπὸ τὴ μεσοκάθετο ΑΒ, τότε τὰ σημεῖα Α καὶ Β θὰ μείνουν ἀκίνητα, ἐνῶ τὸ σημεῖο Γ θὰ συμπέσει μὲ τὸ σημεῖο Γ'. (Γιατί;)

Αὐτὸ σημαίνει ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν ΑΒ καὶ ἑπομένως ἴσα.

Ὥστε: **Ἂν οἱ τρεῖς πλευρὲς τοῦ τριγώνου εἶναι ἀντιστοίχως ἴσες μὲ τὶς πλευρὲς ἑνὸς ἄλλου τριγώνου, τότε τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα.**

$$\boxed{(ΑΒ = Α'Β',\ ΒΓ = Β'Γ',\ ΓΑ = Γ'Α') \Rightarrow Δ\cdot ΑΒΓ = Δ\cdot Α'Β'Γ'}$$

Παρουσιάζουμε πιὸ κάτω ἕναν πίνακα μὲ τὰ τρία κριτήρια γιὰ τὴν ἰσότητα τῶν τριγώνων:

$$\boxed{\begin{array}{c} \widehat{Α} = \widehat{Α'} \\ ΑΒ = Α'Β' \\ ΑΓ = Α'Γ' \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{Δ\cdot ΑΒΓ = Δ\cdot Α'Β'Γ'} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{c} \widehat{Β} = \widehat{Β'} \\ \widehat{Γ} = \widehat{Γ'} \\ ΒΓ = Β'Γ' \end{array}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{ΑΒ = Α'Β',\ ΒΓ = Β'Γ',\ ΑΓ = Α'Γ'}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

165. Δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΑΒΓ, Α'Β'Γ' ($ΑΒ = ΑΓ$, $Α'Β' = Α'Γ'$) ἔχουν $\widehat{Α} = \widehat{Α'}$ καὶ $ΑΒ = Α'Β'$. Νὰ ἐξετάσετε ἂν αὐτὰ εἶναι ἴσα. Ἂν ναί, τότε ποιὰ εἶναι τὰ ὑπόλοιπα ἴσα στοιχεῖα τους;

166. Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ, Α'Β'Γ' ($\widehat{Α} = \widehat{Α'} = 1L$) ἔχουν $ΑΓ = Α'Γ'$ καὶ $\widehat{Γ} = \widehat{Γ'}$. Νὰ ἐξετάσετε ἂν τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα. Ἂν ναί, τότε ποιὰ εἶναι τὰ ὑπόλοιπα ἴσα στοιχεῖα τους;

167. Νὰ συγκρίνετε τὶς διαμέσους δύο ἴσων τριγώνων.

168. Νὰ συγκρίνετε τὰ 4 τρίγωνα, στὰ ὁποῖα χωρίζεται ἕνας ρόμβος ἀπὸ τὶς διαγωνίους του.

169. Σ' ἕνα κυρτὸ τετράπλευρο ΑΒΓΔ εἶναι $ΑΒ = ΑΔ$ καὶ $ΓΔ = ΓΒ$. Νὰ συγκρίνετε τὶς γωνίες του ΑΔΓ καὶ ΑΒΓ.

170. Νὰ χαράξετε ἕνα παραλληλόγραμμο καὶ νὰ συγκρίνετε τὰ δύο τρίγωνα, στὰ ὁποῖα χωρίζεται τὸ παραλληλόγραμμο ἀπὸ μιὰ του διαγώνιο.

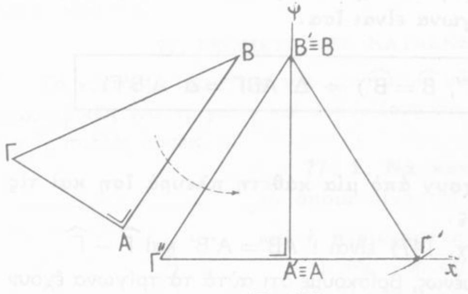
76. ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΣΕ ΟΡΘΟΓΩΝΙΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

Ἐκτὸς ἀπὸ τὰ τρία γενικὰ κριτήρια ἰσότητας τριγώνων, ποὺ ἰσχύουν φυσικὰ καὶ στὰ ὀρθογώνια τρίγωνα, ὑπάρχουν καὶ τρία εἰδικὰ κριτήρια ἰσότητας γιὰ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα.

1ο κριτήριο

Ὀρθογώνια τρίγωνα ποὺ ἔχουν τὶς ὑποτείνουσες ἴσες καὶ ἀπὸ μιὰ κάθετη πλευρὰ ἴση.

i) Σχηματίζουμε ἕνα ὀρθογ. τρίγωνο ΑΒΓ. Ἔπειτα πάνω σὲ μιὰ πλευρὰ μιᾶς ὀρθῆς γωνίας χΑψ λαμβάνουμε Α'Β' = ΑΒ, σχ. 147. Μὲ κέντρο Β' καὶ ἀκτίνα ἴση μὲ ΒΓ γράφουμε κύκλο, ποὺ τέμνει τὴν πλευρὰ Α'χ σ' ἕνα σημεῖο Γ'. Παρατηροῦμε ὅτι τὸ τρίγωνο Α'Β'Γ' εἶναι ὀρθογώνιο καὶ ἔχει Α'Β' = = ΑΒ, Β'Γ' = ΒΓ.



Σχ. 147

ii) Ἂς συγκρίνουμε τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ'.

Γι' αὐτό, τοποθετοῦμε τὸ τρίγωνο ΑΒΓ δίπλα στὸ τρίγωνο Α'Β'Γ', μὲ τρόπο ποὺ νὰ ἐφαρμόσουν οἱ ἴσες πλευρὲς Α'Β' καὶ ΑΒ.

Τότε ἡ ΑΓ θὰ ἔρθει στὴ θέση Α'Γ'', ποὺ εἶναι προέκταση τῆς πλευρᾶς Α'Γ'. (Γιατί; Προσέξετε τὶς γωνίες Α, Α'). Σ' αὐτὴ τὴ θέση τὰ δύο τρίγωνα σχηματίζουν ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνο, τὸ τρίγωνο Γ''Β'Γ', μὲ ἴσες τὶς πλευρὲς Β'Γ' καὶ Β'Γ''.

Ἄρα τὸ ὕψος Β'Α πρὸς τὴ βάση Γ'Γ'' θὰ εἶναι καὶ ἄξονας συμμετρίας.

Ἑπομένως: $\Delta\cdot A'B'\Gamma'' = \Delta\cdot A'B'\Gamma'$ ἢ $\Delta\cdot AB\Gamma = \Delta\cdot A'B'\Gamma'$

Δηλαδή : **Ἂν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχουν τὶς ὑποτείνουσες ἴσες καὶ ἀπὸ μιὰ κάθετη πλευρὰ ἴση, τότε τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα.**

$$\boxed{(\widehat{A} = \widehat{A'} = 1\,L,\ AB = A'B',\ B\Gamma = B'\Gamma') \Rightarrow \Delta\cdot AB\Gamma = \Delta\cdot A'B'\Gamma'}$$

2ο κριτήριο

Ὀρθογώνια τρίγωνα ποὺ ἔχουν τὶς ὑποτείνουσες ἴσες καὶ ἀπὸ μία ὀξεία γωνία ἴση.

Στὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ, Α'Β'Γ' (Σχ. 147) εἶναι: ΒΓ = Β'Γ' καὶ $\widehat{B} = \widehat{B'}$.

Παρατηροῦμε ὅτι ἡ γωνία Γ εἶναι συμπληρωματικὴ τῆς γωνίας Β,

$$\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 1\,L. \quad \text{Δηλαδὴ} \quad \widehat{\Gamma} = 1\,L - \widehat{B} \qquad (1)$$

Ἐπίσης καὶ ἡ γωνία Γ′ εἶναι συμπληρωματικὴ τῆς γωνίας Β′

$\widehat{B'} + \widehat{\Gamma'} = 1\ L.$ Δηλαδὴ $\widehat{\Gamma'} = 1\ L - \widehat{B'}$ (2)

Ἀπὸ τὶς (1) καὶ (2) ἐννοοῦμε ὅτι οἱ γωνίες Γ, Γ′ εἶναι ἴσες (ἀφοῦ $\widehat{B} = \widehat{B'}$).

Ἑπομένως, τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ, Α′Β′Γ′ ἔχουν ΒΓ = Β′Γ′, $\widehat{B} = \widehat{B'}$ καὶ $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'}$ καὶ γι' αὐτὸ εἶναι ἴσα (2ο κριτήριο ἰσότητας γιὰ ὁποιαδήποτε τρίγωνα).

Ὥστε: **Ἂν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχουν τὶς ὑποτείνουσες ἴσες καὶ ἀπὸ μία ὀξεία γωνία ἴση, τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα.**

$$\boxed{(\widehat{A} = \widehat{A'} = 1\ L,\ B\Gamma = B'\Gamma',\ \widehat{B} = \widehat{B'}) \Rightarrow \Delta\cdot AB\Gamma = \Delta\cdot A'B'\Gamma'}$$

3ο κριτήριο

Ὀρθογώνια τρίγωνα ποὺ ἔχουν ἀπὸ μία κάθετη πλευρὰ ἴση καὶ τὶς ἀπέναντί τους ὀξεῖες γωνίες ἴσες.

Στὰ τρίγωνα ΑΒΓ, Α′Β′Γ′ (σχ. 147) εἶναι : ΑΒ = Α′Β′ καὶ $\widehat{\Gamma} - \widehat{\Gamma'}$.

Ἂν σκεφτοῦμε ὅπως προηγουμένως, βρίσκουμε ὅτι αὐτὰ τὰ τρίγωνα ἔχουν καὶ τὶς γωνίες Β καὶ Β′ ἴσες.

Δηλαδὴ ἔχουν ΑΒ = Α′Β′, $\widehat{A} = \widehat{A'}$ (= 1 L) καὶ $\widehat{B} = \widehat{B'}$.

Ἄρα εἶναι ἴσα.

Ὥστε: **Ἂν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχουν ἀπὸ μία κάθετη πλευρὰ ἴση καὶ τὶς ὀξεῖες γωνίες ποὺ βρίσκονται ἀπέναντι στὶς ἴσες πλευρὲς ἴσες, τότε τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα.**

$$\boxed{\widehat{A} = \widehat{A'} = 1\ L,\ \widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'},\ AB = A'B') \Rightarrow \Delta\cdot AB\Gamma = \Delta\cdot A'B'\Gamma'}$$

Παρουσιάζουμε πιὸ κάτω πίνακα μὲ τὰ κριτήρια ἰσότητας τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων:

$\widehat{A} = \widehat{A'} = 1L$ $AB = A'B'$ $B\Gamma = B'\Gamma'$	$\Leftrightarrow$	$\Delta\cdot AB\Gamma = \Delta\cdot A'B'\Gamma'$ $\widehat{A} = 1L,\ \widehat{A'} = 1L$	$\Leftrightarrow$	$\widehat{A} = \widehat{A'} = 1L$ $B\Gamma = B'\Gamma'$ $\widehat{B} = \widehat{B'}$
		$\Updownarrow$		
		$\widehat{A} = \widehat{A'} = 1L$ $\Gamma = \Gamma',\ AB = A'B'$		

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

171. Νὰ δικαιολογήσετε γιατί τὰ μέσα τῶν ἴσων πλευρῶν ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἀπέχουν ἐξίσου ἀπὸ τὴ βάση.

172. Νὰ δικαιολογήσετε γιατί τὰ ὕψη πρὸς τὶς ἴσες πλευρὲς τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι ἴσα.

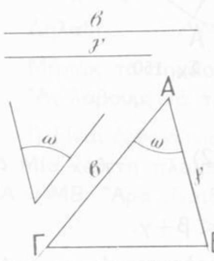
173. Νὰ δικαιολογήσετε τὴν ἑξῆς πρόταση: Ἂν δύο ὕψη ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἴσα, τότε τὸ τρίγωνο εἶναι ἰσοσκελές.

174. Νὰ δικαιολογήσετε γιατί τὰ τρία ὕψη τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι ἴσα.

175. Μὲ τὴ βοήθεια ἴσων τριγώνων νὰ δικαιολογήσετε γιατί οἱ διαγώνιοι τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι ἴσες.

77. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Τὰ κριτήρια ἰσότητας τῶν τριγώνων μᾶς ἐπιτρέπουν νὰ κατασκευάσουμε γεωμετρικῶς ἕνα τρίγωνο καὶ καθορίζουν ἄν, στὴν περίπτωση αὐτή, ὑπάρχει μία ἢ πολλὲς λύσεις.



Σχ. 148

77.1. Νὰ κατασκευαστεῖ τρίγωνο ΑΒΓ, γιὰ τὸ ὁποῖο δίνονται δύο πλευρὲς ΑΒ = γ, ΑΓ = β καὶ ἡ περιεχομένη γωνία $\widehat{A} = \widehat{\omega}$.

i) Μὲ κορυφὴ ἕνα σημεῖο Α κατασκευάζουμε (§ 39. 2) μία γωνία ἴση μὲ τὴ δεδομένη ω, σχ. 148.

ii) Στὶς πλευρὲς τῆς γωνίας λαμβάνουμε τμήματα ΑΒ = γ καὶ ΑΓ = β.

Τὸ τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενο. (Γιατί;)

Ἀπὸ τὴν προηγούμενη κατασκευὴ ἐννοοῦμε ὅτι ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ ὁρίζεται ἀκριβῶς, ὅταν γνωρίζουμε τὶς πλευρὲς ΑΒ, ΑΓ καὶ τὴ γωνία Α. Ἀρκεῖ ἡ Α νὰ εἶναι μικρότερη ἀπὸ μιὰ εὐθεία γωνία.

Ἂν μὲ τὰ ἴδια στοιχεῖα κατασκευάσουμε ἄλλο τρίγωνο Α΄Β΄Γ΄, τότε αὐτὰ τὰ δύο τρίγωνα θὰ εἶναι ἴσα. (Γιατί;)

77.2. Νὰ κατασκευαστεῖ τρίγωνο ΑΒΓ, γιὰ τὸ ὁποῖο δίδεται ἡ μιὰ πλευρὰ ΒΓ = α καὶ οἱ δύο προσκείμενες γωνίες $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$.

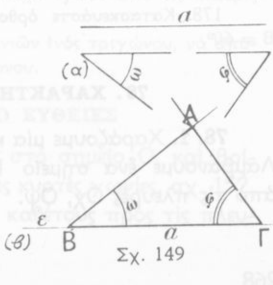
Δεδομένα: Σχ. 149α.

Σὲ μιὰ εὐθεία ε λαμβάνουμε ἕνα τμῆμα ΒΓ = α. Ἔπειτα μὲ κορυφὲς τὰ ἄκρα Β, Γ κατασκευάζουμε δύο γωνίες ἀντιστοίχως ἴσες μὲ τὶς γωνίες ω καὶ φ (κατὰ τὴ διάταξη τοῦ σχ. 149β).

Μὲ αὐτὸ τὸν τρόπο κατασκευάζεται τὸ τρίγωνο ΑΒΓ, ποὺ εἶναι τὸ ζητούμενο. (Γιατί;)

Ἂν παίρναμε τὶς γωνίες ω καὶ φ πρὸς τὸ ἄλλο ἡμιεπίπεδο ὡς πρὸς τὴ ΒΓ, τότε θὰ εἴχαμε ἕνα ἄλλο τρίγωνο ἴσο πρὸς τὸ ΑΒΓ μὲ ἀναστροφή.

Ἀπὸ τὴν προηγούμενη κατασκευὴ ἐννοοῦμε



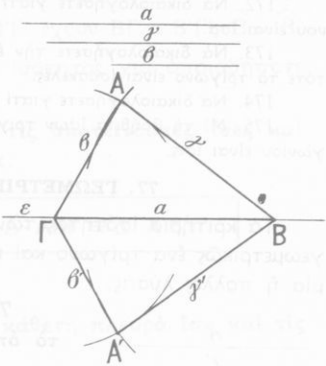
Σχ. 149

ὅτι τὸ τρίγωνο ΑΒΓ ὁρίζεται πλήρως, ὅταν μᾶς δοθοῦν ἡ πλευρὰ ΒΓ καὶ οἱ γωνίες Β, Γ, ἀρκεῖ μόνο νὰ εἶναι $\widehat{B}+\widehat{\Gamma}<2L$.

77.3. Νὰ κατασκευαστεῖ τρίγωνο ἀπὸ τὶς τρεῖς πλευρές του $B\Gamma=\alpha$, $A\Gamma=\beta$, $AB=\gamma$, $\alpha>\gamma>\beta$.

i) Πάνω σὲ μιὰν εὐθεία ε λαμβάνουμε τμῆμα $B\Gamma=\alpha$, σχ. 150.

ii) Μὲ κέντρα τὰ σημεῖα Β καὶ Γ καὶ ἀκτίνες ἴσες μὲ γ καὶ β ἀντιστοίχως γράφουμε δύο κύκλους. Ἂν αὐτοὶ οἱ δύο κύκλοι τέμνονται σὲ δύο διαφορετικὰ σημεῖα Α, Α', τότε τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'ΒΓ, ποὺ εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν εὐθεία ΒΓ, εἶναι λύσεις τοῦ προβλήματος.



Σχ. 150

Παρατήρηση

Εἶναι φανερὸ ὅτι, γιὰ νὰ σχηματιστοῦν τὰ τρίγωνα, πρέπει οἱ δύο κύκλοι νὰ τέμνονται. Πρέπει δηλαδὴ ἀνάμεσα στὴ διάκεντρο $B\Gamma=\alpha$ καὶ στὶς ἀκτίνες β, γ νὰ ἰσχύουν οἱ σχέσεις:

$$\gamma-\beta<\alpha<\beta+\gamma \qquad (1) \qquad (\S\ 38,\ 2)$$

Μάλιστα ἐπειδὴ $\alpha>\gamma>\beta$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha>\gamma-\beta$.

Δηλαδὴ ἡ διπλὴ συνθήκη (1) περιορίζεται στὴν $\alpha<\beta+\gamma$.

Ὥστε: **Τρία τμήματα α, β, γ, γιὰ νὰ εἶναι πλευρές τριγώνου, πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ μεγαλύτερο νὰ εἶναι μικρότερο ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

176. Νὰ κατασκευάσετε γεωμετρικῶς τρίγωνο ΑΒΓ, ὅταν γνωρίζετε ὅτι:
1) $A=30^0$, $AB=4$ cm, $A\Gamma=2$ cm. 2) $A=30^0$, $AB=A\Gamma=4$ cm. 3) $A=60^0$, $B=45^0$ καὶ $AB=4$ cm. 4) $AB=3$ cm, $A\Gamma=4$ cm καὶ $B\Gamma=5$ cm.

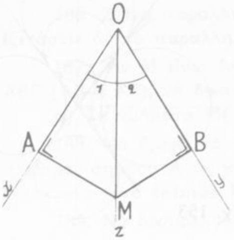
177. Κατασκευάστε ἰσοσκελὲς τρίγωνο ΑΒΓ μὲ βάση ΒΓ ἴση μὲ 5 cm καὶ μὲ ὕψος πρὸς αὐτὴ ἴσο μὲ 4 cm.

178. Κατασκευάστε ὀρθογώνιο τρίγωνο μὲ ὑποτείνουσα $B\Gamma=5$ cm καὶ μὲ γωνία $B=60^0$.

78. ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΤΗΣ ΔΙΧΟΤΟΜΟΥ

78. 1. Χαράζουμε μία κυρτὴ γωνία χΟψ καὶ τὴ διχοτόμο της ΟΖ, σχ. 151. Λαμβάνουμε ἕνα σημεῖο Μ τῆς διχοτόμου καὶ φέρνουμε τὶς ἀποστάσεις του ἀπὸ τὶς πλευρὲς Οχ, Οψ.

$$M A \perp O\chi, \quad M B \perp O\psi$$



Σχ. 151

Θὰ συγκρίνουμε αὐτὲς τὶς ἀποστάσεις.

Ἂς προσέξουμε τὰ τρίγωνα ΟΑΜ καὶ ΟΒΜ. Παρατηροῦμε ὅτι:

i) Εἶναι ὀρθογώνια $A = B = 1\,L$

ii) Ἔχουν κοινὴ τὴν ὑποτείνουσα ΟΜ

iii) Ἔχουν ἴσες τὶς ὀξεῖες γωνίες O_1, O_2. (Γιατί;)

Ἄρα τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα. Ἀπὸ αὐτὴ τὴν ἰσότητα συνάγουμε ὅτι:

$$MA = MB$$

Ὥστε: **Κάθε σημεῖο τῆς διχοτόμου μιᾶς γωνίας ἀπέχει ἐξίσου ἀπὸ τὶς πλευρές της.**

78. 2. Ἔχουμε μιὰ κυρτὴ γωνία χΟψ καὶ ἕνα σημεῖο στὸ ἐσωτερικό της, ποὺ ἀπέχει ἐξίσου ἀπὸ τὶς πλευρὲς τῆς γωνίας.

Δηλαδή: $MA \perp O\chi$, $MB \perp O\psi$, καὶ $MA = MB$, σχ. 151.

Μήπως τὸ σημεῖο Μ βρίσκεται στὴ διχοτόμο τῆς γωνίας;

Ἂς λάβουμε τὰ τρίγωνα ΟΑΜ καὶ ΟΒΜ. Παρατηροῦμε ὅτι:

i) Εἶναι ὀρθογώνια ($\widehat{A} = \widehat{B} = 1\,L$). ii) Ἔχουν τὴν ὑποτείνουσα ΟΜ κοινή. iii) Μία κάθετη πλευρὰ τοῦ ἑνὸς εἶναι ἴση μὲ μιὰ κάθετη πλευρὰ τοῦ ἄλλου: $MA = MB$. Ἄρα εἶναι ἴσα. Ἀπὸ αὐτὴ τὴν ἰσότητα συνάγουμε ὅτι καὶ

$$\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$$

Δηλαδή: **Ἂν ἕνα ἐσωτερικὸ σημεῖο μιᾶς γωνίας ἀπέχει ἐξίσου ἀπὸ τὶς πλευρές της, τότε βρίσκεται στὴ διχοτόμο τῆς γωνίας.**

78. 3. Οἱ δύο προηγούμενες προτάσεις συνοψίζονται στὴν ἀκόλουθη:

Πάνω στὸ ἐπίπεδο, τὰ σημεῖα τῆς διχοτόμου μιᾶς κυρτῆς γωνίας καὶ μόνο αὐτὰ ἀπέχουν ἐξίσου ἀπὸ τὶς πλευρὲς τῆς γωνίας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

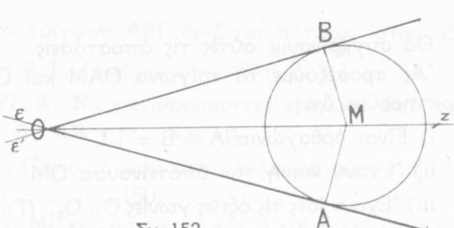
179. Νὰ κατασκευάσετε μιὰ γωνία καὶ μιὰν εὐθεία ε, ποὺ νὰ τέμνει τὶς πλευρὲς τῆς γωνίας. Πάνω στὴν εὐθεία ε νὰ βρεῖτε ἕνα σημεῖο Μ, ποὺ νὰ ἀπέχει ἐξίσου ἀπὸ τὶς πλευρὲς τῆς γωνίας.

180. Ἂν Ο εἶναι τὸ σημεῖο τομῆς τῶν διχοτόμων δύο γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου, νὰ ἀποδείξετε ὅτι αὐτὸ ἀπέχει ἐξίσου ἀπὸ τὶς τρεῖς πλευρὲς τοῦ τριγώνου.

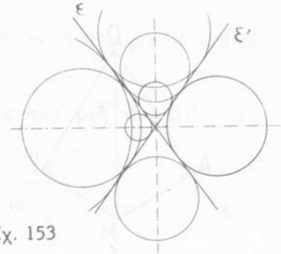
79. ΚΥΚΛΟΙ ΠΟΥ ΕΦΑΠΤΟΝΤΑΙ ΣΕ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΕΣ

79. 1. Χαράζουμε δύο εὐθεῖες ε, ε΄, ποὺ τέμνονται στὸ σημεῖο Ο, καὶ βρίσκουμε τὴ διχοτόμο ΟΖ τῆς μιᾶς ἀπὸ τὶς σχηματιζόμενες κυρτὲς γωνίες, σχ. 152.

Ἀπὸ ἕνα σημεῖο Μ τῆς ΟΖ φέρνουμε τὶς ΜΑ, ΜΒ, καθέτους πρὸς τὶς πλευρὲς τῆς γωνίας. Θὰ εἶναι τότε $MA = MB$.



Σχ. 152



Σχ. 153

Συνεπῶς, ἂν μὲ κέντρο Μ καὶ ἀκτίνα ΜΑ γράψουμε κύκλο, αὐτὸς θὰ ἐφάπτεται καὶ στὶς δύο εὐθεῖες ε, ε΄.

79. 2. Πόσους κύκλους μποροῦμε νὰ γράψουμε, ποὺ νὰ ἐφάπτονται σ᾽ αὐτὲς τὶς δύο εὐθεῖες ε, ε΄;

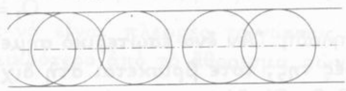
Εἶναι φανερὸ ὅτι, ὅπως ἐργαστήκαμε μὲ τὸ σημεῖο Μ, θὰ ἦταν δυνατὸ νὰ ἐργαστοῦμε καὶ μὲ ὁποιοδήποτε ἄλλο σημεῖο τῆς διχοτόμου καθεμιᾶς ἀπὸ τὶς τέσσερεις κυρτὲς γωνίες τῶν εὐθειῶν ε, ε΄, σχ. 153.

Συνεπῶς ὑπάρχουν ἄπειροι κύκλοι ποὺ ἐφάπτονται στὶς εὐθεῖες ε, ε΄. Τὰ κέντρα ὅλων αὐτῶν τῶν κύκλων βρίσκονται πάνω στὶς διχοτόμους τῶν 4 γωνιῶν, ποὺ σχηματίζουν οἱ εὐθεῖες ε, ε΄.

79. 3. Εἰδικὴ περίπτωση

Ἂν οἱ εὐθεῖες ε, ε΄ εἶναι παράλληλες, ὑπάρχουν πάλι ἄπειροι κύκλοι ποὺ ἐφάπτονται σ᾽ αὐτές.

Αὐτοὶ εἶναι ἴσοι κύκλοι ποὺ ἔχουν τὰ κέντρα τους πάνω στὴ μεσοπαράλληλο τῶν ε, ε΄.



Σχ. 154

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

181. Νὰ χαράξετε κύκλους ποὺ νὰ ἐφάπτονται στὶς πλευρὲς μιᾶς ὀρθῆς γωνίας.

182. Νὰ χαράξετε κύκλο ποὺ νὰ ἐφάπτεται στὶς πλευρὲς ἑνὸς τριγώνου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΓΕΝΙΚΗ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

183. Νὰ κατασκευάσετε ἕνα τετράγωνο, ἂν γνωρίζετε μιὰ διαγώνιό του.

184. Νὰ κατασκευάσετε ἕνα ὀρθογώνιο (παραλληλόγραμμο), ἂν γνωρίζετε μιὰ πλευρά του καὶ μιὰ διαγώνιό του.

185. Νὰ κατασκευάσετε ἕνα ρόμβο, ἂν γνωρίζετε μιὰ διαγώνιό του καὶ μιὰ πλευρά του.

186. Σ' ἕνα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ ἡ διαγώνιος ΑΓ διχοτομεῖ τὴ γωνία ΒΑΔ. Νὰ ἐξετάσετε ἂν τὸ παραλληλόγραμμο εἶναι ρόμβος.

187. Ἂν Μ εἶναι ἕνα σημεῖο στὴ διχοτόμο τῆς γωνίας Α ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ), νὰ δικαιολογήσετε ὅτι:

α) Τὰ τμήματα ΜΓ, ΜΒ εἶναι ἴσα, β) οἱ γωνίες ΓΒΜ καὶ ΒΓΜ εἶναι ἴσες.

188. Νὰ βρεθεῖ τὸ σύνολο τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου Π, ποὺ εἶναι συμμετρικὰ ἑνὸς σταθεροῦ σημείου Α ὡς πρὸς τὶς εὐθεῖες ποὺ διέρχονται ἀπὸ ἕνα ἄλλο σημεῖο Ο. Τὰ Ο καὶ Α βρίσκονται στὸ ἐπίπεδο Π.

189. Νὰ δικαιολογήσετε ὅτι, ἂν σ' ἕνα τρίγωνο δύο ὕψη εἶναι ἴσα, τότε τὸ τρίγωνο εἶναι ἰσοσκελές.

190. Νὰ δικαιολογήσετε ὅτι σὲ κάθε τρίγωνο οἱ μεσοκάθετοι τῶν πλευρῶν διέρχονται ἀπὸ τὸ ἴδιο σημεῖο.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Α'

ΑΠΟ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΣΥΝΟΛΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β'

ΑΠΟ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Γ'

ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Δ'

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ε'

ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΣΤ'

ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΡΗΤΩΝ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ζ΄

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Α΄

ΕΠΙΠΕΔΟΜΕΤΡΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β΄

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Γ'

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Δ'

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ε΄

ΕΙΔΙΚΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ

ΕΚΔΟΣΗ Η΄ 1977 (VII) Ἀντίτυπα 180.000 — Σύμβαση: 2891/20-7-77

ΕΚΤΥΠΩΣΗ: Ε. ΧΑΤΖΑΡΑ. ΒΙΒΛΙΟΔΕΣΙΑ: Ι. ΙΟΡΔΑΝΙΔΗΣ

024000039901

ΟΕ
ΔΒ