ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

## Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΕΩΣ

# ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Ε. ΠΑΠΑΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΟΥ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑ 1977

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

## Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

## ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Μέ ἀπόφαση τῆς Ἑλληνικῆς Κυβερνήσεως τά διδακτικά βιβλία τοῦ Δημοτικοῦ, Γυμνασίου καί Λυκείου τυπώνονται ἀπό τόν Ὀργανισμό Ἐκδόσεως Διδακτικῶν Βιβλίων καί μοιράζονται ΔΩΡΕΑΝ.

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

## Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

### ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΕΩΣ

# ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Ε. ΠΑΠΑΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΟΥ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑ 1977

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

# ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

## 1. Ὁρισμοί καί βασικές ἔννοιες

1.1. Ἀπὸ τὴν Ἄλγεβρα γνωρίζουμε τὸν ὁρισμὸ μιᾶς ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως (ὡς πρὸς χ) $A(\chi) = B(\chi)$, ὅπου A καὶ B εἶναι συναρτήσεις μιᾶς μεταβλητῆς χ. Ἂν ἕνα τουλάχιστον ἀπὸ τὰ μέλη τῆς παραπάνω ἐξισώσεως περιέχει τὴν τιμὴ μιᾶς ἢ περισσοτέρων τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων [1]) στὴ θέση $\varphi(\chi)$, ὅπου φ ὁποιαδήποτε πραγματικὴ συνάρτηση τῆς πραγματικῆς μεταβλητῆς χ, τότε ἡ ἐξίσωση αὐτὴ ὀνομάζεται **τριγωνομετρικὴ ἐξίσωση** ὡς πρὸς χ. Μὲ ἄλλα λόγια, ὀνομάζεται τριγωνομετρικὴ ἐξίσωση ὡς πρὸς χ κάθε ἀλγεβρικὴ ἐξίσωση ὡς πρὸς χ, ποὺ στὸ ἕνα μέλος της, τουλάχιστον, ὑπάρχει ἕνας ἢ περισσότεροι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ χ ἢ τοῦ $\varphi(\chi)$, ὅπου φ ὁποιαδήποτε πραγματικὴ συνάρτηση. Π.χ. οἱ ἐξισώσεις :

$$\text{ημ}^2\chi + \text{συν}\chi = 2, \qquad \text{συν}5\chi = -\frac{1}{2}, \qquad \text{εφ}(\text{συν}\chi) = \text{σφ}(\text{ημ}\chi),$$

$$\text{εφ}\chi = \chi, \qquad \text{ἡμ}^2\chi + \text{συν}^2\chi = 1$$

εἶναι τριγωνομετρικὲς ἐξισώσεις.

Κάθε τόξο $\chi_0$ ποὺ ἐπαληθεύει μιὰ τριγωνομετρικὴ ἐξίσωση λέγεται **μερικὴ λύση** ἢ **μιὰ λύση** αὐτῆς τῆς ἐξισώσεως. Π.χ. τὸ τόξο $\frac{2\pi}{15}$ εἶναι μιὰ μερικὴ λύση τῆς ἐξισώσεως $\text{συν}5\chi = -\frac{1}{2}$. Τὸ σύνολο τῶν μερικῶν λύσεων μιᾶς τριγωνομετρικῆς ἐξισώσεως ὀνομάζεται **γενικὴ λύση** ἢ πιὸ ἁπλὰ **λύση**. Ἡ εὕρεση

[1]). Ὅταν θὰ λέμε «τριγωνομετρικὲς συναρτήσεις» θὰ ἐννοοῦμε τὶς συναρτήσεις ημ, συν, εφ, σφ, τεμ καὶ στεμ. Ὑπενθυμίζουμε ἀκόμα ὅτι οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ ημχ, συνχ, εφχ, σφχ, τεμχ καὶ στεμχ εἶναι οἱ τιμὲς τῶν τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων στὴ θέση $\chi \in \mathbf{R}$.

Ἡ ἀνεξάρτητη μεταβλητή, δηλαδὴ τὸ τόξο, ὅπως λέμε στὴν Τριγωνομετρία, τῶν τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων θὰ θεωρεῖται πάντοτε πραγματικὸς ἀριθμός.

τῆς γενικῆς λύσεως μιᾶς τριγωνομετρικῆς ἐξισώσεως λέγεται **ἐπίλυση** ἢ **λύση** τῆς τριγωνομετρικῆς ἐξισώσεως.

Ἂν κάθε τόξο εἶναι μερικὴ λύση μιᾶς τριγωνομετρικῆς ἐξισώσεως, τότε ἡ ἐξίσωση αὐτὴ εἶναι **τργωνομετρικὴ ταυτότητα.** Π.χ. ἡ ἐξίσωση $\eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi = 1$ εἶναι μία τριγωνομετρικὴ ταυτότητα, γιατὶ ἐπαληθεύεται γιὰ κάθε $\chi \in \mathbf{R}$.

Ὅταν μιὰ τριγωνομετρικὴ ἐξίσωση δὲν ἐπαληθεύεται μὲ κανένα τόξο, τότε θὰ λέμε ὅτι ἡ ἐξίσωση αὐτὴ εἶναι **ἀδύνατη.** Π.χ. ἡ ἐξίσωση $\eta\mu\chi = 2$ εἶναι ἀδύνατη.

Ἡ ἐπίλυση ὁποιασδήποτε τριγωνομετρικῆς ἐξισώσεως ἀνάγεται τελικὰ στὴν ἐφαρμογὴ ἑνὸς ἀπὸ τὰ τέσσερα βασικὰ θεωρήματα, ποὺ διατυπώνονται σύντομα μὲ ἑπόμενες ἰσοδυναμίες :

$$(\Theta_1)\quad \eta\mu\chi = \eta\mu\psi \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \chi = 2\kappa\pi + \psi \text{ ἢ} \\ \chi = (2\lambda+1)\pi - \psi \end{cases} \quad (\kappa,\ \lambda \in \mathbf{Z})$$

$$(\Theta_2)\quad \sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu\psi \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \chi = 2\kappa\pi + \psi \text{ ἢ} \\ \chi = 2\lambda\pi - \psi \end{cases} \quad (\kappa,\ \lambda \in \mathbf{Z})$$

$$(\Theta_3)\quad \varepsilon\varphi\chi = \varepsilon\varphi\psi \quad \underset{\kappa \in \mathbf{Z}}{\Leftrightarrow} \quad \chi = \kappa\pi + \psi \quad (\chi \text{ ἢ } \psi \neq \rho\pi + \frac{\pi}{2},\ \rho \in \mathbf{Z})$$

$$(\Theta_4)\quad \sigma\varphi\chi = \sigma\varphi\psi \quad \underset{\kappa \in \mathbf{Z}}{\Leftrightarrow} \quad \chi = \kappa\pi + \psi \quad (\chi \text{ ἢ } \psi \neq \rho\pi,\ \rho \in \mathbf{Z})$$

Λύνουμε καὶ διερευνοῦμε παρακάτω ὁρισμένες κλασικὲς μορφὲς τριγωνομετρικῶν ἐξισώσεων στὶς ὁποῖες ἀνάγεται κάθε ἄλλη τριγωνομετρικὴ ἐξίσωση.

## 2. Θεμελιώδεις τριγωνομετρικὲς ἐξισώσεις

**2.1. $\eta\mu\chi = \alpha$ ($\alpha \in \mathbf{R}$).** Γιὰ τὴ λύση αὐτῆς τῆς ἐξισώσεως παρατηροῦμε ὅτι :

α) Ἂν $|\alpha| > 1$ ($\Leftrightarrow \alpha > 1$ ἢ $\alpha < -1$), ἡ ἐξίσωση εἶναι ἀδύνατη, γιατὶ $|\eta\mu\chi| \leqslant 1$ γιὰ κάθε τόξο $\chi \in \mathbf{R}$.

β) Ἂν $|\alpha| \leqslant 1$ ($\Leftrightarrow -1 \leqslant \alpha \leqslant 1$), τότε ἡ ἐξίσωση ἔχει λύση, ποὺ τὴ βρίσκουμε ὡς ἑξῆς :

Θὰ ὑπάρχει τόξο $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ τέτοιο, ὥστε $\eta\mu\varphi = \alpha$, ὁπότε ἡ ἐξίσωση ἰσοδύναμα γράφεται :

$$\eta\mu\chi = \eta\mu\varphi \qquad (1)$$

Εἶναι φανερὸ ὅτι τὸ τόξο $\varphi$ εἶναι μιὰ μερικὴ λύση τῆς ἐξισώσεως $\eta\mu\chi = \alpha$.

Σύμφωνα τώρα μὲ τὴν παραπάνω ἰσοδυναμία $(\Theta_1)$, βρίσκουμε τὴ γενικὴ λύση τῆς (1), ποὺ δίνεται ἀπὸ τοὺς τύπους

$$\chi = 2\kappa\pi + \varphi \text{ καὶ } \chi = (2\lambda + 1)\pi - \varphi \qquad (\kappa, \lambda \in \mathbf{Z})$$

Παρατηροῦμε ὅτι γιὰ κάθε ἀκέραιη τιμὴ τοῦ κ ἢ λ βρίσκουμε ἀπὸ τοὺς παραπάνω τύπους καὶ μιὰ μερικὴ λύση. Π.χ. γιὰ $\kappa = 0$ βρίσκουμε τὴ μερικὴ λύση $\chi = \varphi$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.** Νὰ λυθεῖ ἡ ἀξίσωση $\eta\mu 3\chi = -\frac{1}{2}$ καὶ ἀπὸ τὴ γενικὴ της λύση νὰ βρεθεῖ ἡ ἐλάχιστη θετική.

**Λύση.** Ἡ ἐξίσωση γράφεται: $\eta\mu 3\chi = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right)$. Ἡ γενικὴ λύση της δίνεται ἀπὸ τοὺς τύπους:

$$\left.\begin{array}{l} 3\chi_\kappa = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6} \ (\kappa\in\mathbf{Z}) \\ \\ 3\chi_\rho = (2\rho+1)\pi + \frac{\pi}{6} \ (\rho\in\mathbf{Z}) \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \chi_\kappa = \frac{2\kappa\pi}{3} - \frac{\pi}{18} & (1) \\ \\ \chi_\rho = \frac{2\rho\pi}{3} + \frac{7\pi}{18} & (2) \end{array}\right.$$

Ἐξετάζουμε τώρα ποιὲς ἀπὸ τὶς λύσεις ποὺ βρήκαμε εἶναι θετικές. Γιὰ νὰ εἶναι οἱ λύσεις θετικὲς πρέπει καὶ ἀρκεῖ:

$$\left\{\frac{2\kappa\pi}{3} - \frac{\pi}{18} > 0 \text{ καὶ } \frac{2\rho\pi}{3} + \frac{7\pi}{18} > 0\right\} \Leftrightarrow \left\{\kappa > \frac{1}{12} \text{ καὶ } \rho > -\frac{7}{12}\right\}$$

Ἄρα, γιὰ $\kappa = 1,2,3\ldots$ καὶ $\rho = 0,1,2,\ldots$ παίρνουμε ἀπὸ τοὺς τύπους (1) καὶ (2), ἀντιστοίχως, θετικὲς λύσεις. Ἀκόμα παρατηροῦμε ὅτι:

$$\chi_{\kappa+1} > \chi_\kappa \quad \text{καὶ} \quad \chi_{\rho+1} > \chi_\rho, \ \forall \kappa, \rho \in \mathbf{Z}.$$

Ἑπομένως οἱ συναρτήσεις τῶν τύπων (1) καὶ (2) εἶναι αὔξουσες. Ὥστε, ἀπὸ τὶς μερικὲς λύσεις (1) ἡ ἐλάχιστη θετικὴ ἀντιστοιχεῖ στὴν τιμὴ $\kappa = 1$ καὶ εἶναι $\frac{11\pi}{18}$. Ἐπίσης, γιὰ $\rho = 0$, βρίσκουμε τὴν ἐλάχιστη θετικὴ λύση ἀπὸ τὶς μερικὲς λύσεις (2), ποὺ εἶναι $\frac{7\pi}{18}$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.** Νὰ λυθεῖ ἡ ἐξίσωση: $\eta\mu\frac{3\chi}{2} = -\frac{1}{2}$.

**Λύση.** Ἡ ἐξίσωση $\eta\mu\frac{3\chi}{2} = -\frac{1}{2}$ εἶναι ἰσοδύναμη μὲ τήν: $\eta\mu\left(-\frac{3\chi}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

Ἐπίσης εἶναι γνωστὸ ὅτι $\eta\mu\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ καὶ ἑπομένως ἡ ἐξίσωση γράφεται:

$ημ\left(-\frac{3χ}{2}\right)=ημ\frac{π}{6}$. Ἡ γενικὴ λύση της εἶναι:

$$\left|\begin{array}{ll}\frac{-3χ}{2}=2κπ+\frac{π}{6} \quad (κ\in\mathbf{Z}) & (1)\\ \quad ἤ & \\ \frac{-3χ}{2}=(2ρ+1)π-\frac{π}{6} \quad (ρ\in\mathbf{Z}) & (2)\end{array}\right.$$

Λύνοντας ἀλγεβρικὰ ὡς πρὸς χ τὶς (1) καὶ (2) βρίσκουμε:

$$\left\{\begin{array}{l}χ=-\frac{4κπ}{3}-\frac{π}{9} \quad ἤ\\ χ=-\frac{4ρπ}{3}-\frac{5π}{9}\end{array}\right.$$

**2. 2. συνχ = λ (λ∈R).** Ὅπως καὶ στὴν προηγούμενη θεμελιώδη ἐξίσωση ημχ = α, ἔτσι καὶ ἐδῶ διακρίνουμε τὶς παρακάτω περιπτώσεις γιὰ τὴν παράμετρο λ:

α) Ἂν $|λ|>1$, τότε ἡ ἐξίσωση εἶναι ἀδύνατη.

β) Ἂν $|λ|\leqslant 1$, τότε ἡ ἐξίσωση ἔχει λύση καὶ βρίσκεται ὡς ἑξῆς:

Θὰ ὑπάρχει τόξο $φ\in[0,π]$ τέτοιο, ὥστε συνφ = λ καὶ ἐπομένως ἡ ἐξίσωση γράφεται:

$$συνχ = συνφ. \tag{1}$$

Ἡ γενικὴ λύση τῆς (1), σύμφωνα μὲ τὴν παραπάνω ἰσοδυναμία ($Θ_2$), εἶναι:

$$\left\{\begin{array}{ll}χ=2κπ+φ \quad ἤ & (κ\in\mathbf{Z})\\ χ=2ρπ-φ & (ρ\in\mathbf{Z})\end{array}\right.$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.** Νὰ λυθεῖ ἡ ἐξίσωση: $συν3χ=\frac{1}{4}$.

**Λύση.** Ἀπὸ τοὺς λογαριθμικοὺς πίνακες βρίσκουμε τὸ ἐλάχιστο θετικὸ τόξο τ τέτοιο, ὥστε $συντ=\frac{1}{4}$. Τὸ τόξο τ βρίσκεται μὲ λογαρίθμηση τῆς σχέσεως $συντ=\frac{1}{4}$, ὡς ἑξῆς:

$$\lambda o\gamma\sigma\upsilon\nu\tau = \lambda o\gamma \frac{1}{4} \Rightarrow \lambda o\gamma\sigma\upsilon\nu\tau = -\lambda o\gamma 4 \Rightarrow \lambda o\gamma\sigma\upsilon\nu\tau = \bar{1},39794 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \tau = 75^\circ\, 31'\, 21''.$$

Ἑπομένως ἡ ἐξίσωση $\sigma\upsilon\nu 3\chi = \frac{1}{4}$ γράφεται: $\sigma\upsilon\nu 3\chi = \sigma\upsilon\nu\ 75^\circ\, 31'\, 21''$ καὶ ἡ γενικὴ λύση της εἶναι:

$$\left.\begin{array}{l} 3\chi = 360^\circ\kappa + 75^\circ 31' 21'' \\ \text{ἢ}\ \ 3\chi = 360^\circ\lambda - 75^\circ 31' 21'' \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} \chi = 120^\circ\kappa + 25^\circ 10' 27''\ \text{ἢ} & (\kappa \in \mathbf{Z}) \\ \chi = 120^\circ\lambda - 25^\circ 10' 27'' & (\lambda \in \mathbf{Z}) \end{array}\right.$$

**2.3.** $\varepsilon\varphi\chi = \lambda\ (\lambda \in \mathbf{R})$. Ἡ ἐξίσωση αὐτὴ ἔχει πάντοτε λύση, ἐφόσον $\lambda \in \mathbf{R}$. Ὑπάρχει τόξο $\omega \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, ποὺ βρίσκουμε ἀπὸ τοὺς πίνακες, τέτοιο, ὥστε $\varepsilon\varphi\omega = \lambda$. Ἡ ἐξίσωση τώρα γράφεται:

$$\varepsilon\varphi\chi = \varepsilon\varphi\omega \qquad (1)$$

Ἡ γενικὴ λύση τῆς (1), σύμφωνα μὲ τὴν ἰσοδυναμία $(\Theta_3)$, εἶναι $\chi = \kappa\pi + \omega$, $\kappa \in \mathbf{Z}$.

Ὅμοια λύνεται καὶ ἡ παρακάτω θεμελιώδης τριγωνομετρικὴ ἐξίσωση.

**2.4.** $\sigma\varphi\chi = \lambda\ (\lambda \in \mathbf{R})$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.** Νὰ βρεθοῦν μέσα στὸ διάστημα $(0, \frac{3\pi}{4})$ οἱ λύσεις τῆς ἐξισώσεως $\varepsilon\varphi 2\chi = \sqrt{3}$.

**Λύση.** Ἡ ἐξίσωση γράφεται $\varepsilon\varphi 2\chi = \varepsilon\varphi \frac{\pi}{3}$. Ἡ γενικὴ λύση της εἶναι:

$$2\chi = \kappa\pi + \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \chi = \frac{\kappa\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\ (\kappa \in \mathbf{Z}) \qquad (1)$$

Ἀπὸ τὴν ὑπόθεση ὅμως ἔχουμε:

$$0 < \chi < \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow 0 < \frac{\kappa\pi}{2} + \frac{\pi}{6} < \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < \kappa < \frac{7}{6}$$

Οἱ μοναδικὲς ἀκέραιες τιμὲς τοῦ κ μέσα στὸ διάστημα $\left(-\frac{1}{3}, \frac{7}{6}\right)$ εἶναι 0 καὶ 1. Ἀπὸ τὴ γενικὴ λύση (1) μὲ $\kappa = 0$ καὶ $\kappa = 1$ βρίσκουμε $\chi = \frac{\pi}{6}$ καὶ $\chi = \frac{2\pi}{3}$, ποὺ εἶναι οἱ ζητούμενες λύσεις.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.** Νὰ ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση : $\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{18}\right)$(Ε)

**Ἐπίλυση.** Εἶναι :

$$(E) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} \frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}=\kappa\pi+\frac{x}{3}-\frac{\pi}{18}, & \kappa\in\mathbf{Z} \\ \\ \frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\neq\rho\pi+\frac{\pi}{2}, & \rho\in\mathbf{Z} \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{ll} x=6\kappa\pi+\frac{5\pi}{3} & (1) \\ \\ x\neq2\rho\pi+\frac{5\pi}{3} & (2) \end{array}\right.$$

Τὰ τόξα (1) εἶναι τῆς μορφῆς (2) καὶ ἑπομένως ἡ ἐξίσωση (Ε) εἶναι ἀδύνατη. Ἀναφέρουμε παρακάτω ὁρισμένες θεμελιώδεις τριγωνομετρικὲς ἐξισώσεις καὶ τὶς λύσεις τους.

| | |
|---|---|
| $\eta\mu x=0 \Leftrightarrow x=\kappa\pi$ | $\sigma\upsilon\nu x=0 \Leftrightarrow x=\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$ |
| $\eta\mu x=1 \Leftrightarrow x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$ | $\sigma\upsilon\nu x=1 \Leftrightarrow x=2\kappa\pi$ |
| $\eta\mu x=-1 \Leftrightarrow x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{2}$ | $\sigma\upsilon\nu x=-1 \Leftrightarrow x=2\kappa\pi+\pi$ |
| $\varepsilon\varphi x=0 \Leftrightarrow x=\kappa\pi$ | $\sigma\varphi x=0 \Leftrightarrow x=\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$ |

(Σὲ ὅλες τὶς παραπάνω λύσεις ὁ κ εἶναι ἀκέραιος)

## 3. Τριγωνομετρικὲς ἐξισώσεις ποὺ ἀνάγονται σὲ θεμελιώδεις

**3.1. Τριγωνομετρικὴ ἐξίσωση ἀλγεβρικῆς μορφῆς.** Κάθε ἐξίσωση $f(t)=0$, ὅπου τὸ t εἶναι τριγωνομετρικὸς ἀριθμὸς καὶ τὸ $f(t)$ ἀκέραιο πολυώνυμο ὡς πρὸς t, ὀνομάζεται τριγωνομετρικὴ ἐξίσωση ἀλγεβρικῆς μορφῆς. Γιὰ νὰ λύσουμε μιὰ τέτοια ἐξίσωση ἐργαζόμαστε μὲ τὸν ἑξῆς τρόπο :

Λύνουμε πρῶτα τὴν ἀλγεβρικὴ ὡς πρὸς t ἐξίσωση $f(t)=0$. Ἂν ὑποθέσουμε ὅτι $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$ εἶναι οἱ ρίζες τῆς ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως $f(t)=0$, τότε ἡ ἀντίστοιχη τριγωνομετρικὴ ἐξίσωση εἶναι ἰσοδύναμη μὲ τὶς ἑπόμενες θεμελιώδεις τριγωνομετρικὲς ἐξισώσεις :

$$t = t_1, \quad t = t_2, \ldots, \quad t = t_\nu. \tag{1}$$

Οἱ λύσεις ὅλων τῶν ἐξισώσεων (1) εἶναι ἡ (γενική) λύση τῆς $f(t) = 0$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.** Νὰ λυθεῖ ἡ ἐξίσωση : $\varepsilon\varphi^2\chi - (1 + \sqrt{3})\,\varepsilon\varphi\chi + \sqrt{3} = 0$ (Ε)

**Λύση.** Ἡ (Ε) εἶναι δευτεροβάθμια ὡς πρὸς εφχ καὶ ἔχει ρίζες τοὺς ἀριθμοὺς 1, $\sqrt{3}$.
Ἄρα θὰ ἔχουμε :

$$(\text{Ε}) \Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon\varphi\chi = 1 & (\alpha) \\ \text{ἤ} & \\ \varepsilon\varphi\chi = \sqrt{3}. & (\beta) \end{cases}$$

Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ λύσουμε τὶς ἐξισώσεις (α) καὶ (β). Εἶναι :

$$(\alpha) \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\chi = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \chi = \kappa\pi + \frac{\pi}{4},\ \kappa \in \mathbf{Z} \tag{1}$$

$$(\beta) \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\chi = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \chi = \rho\pi + \frac{\pi}{3},\ \rho \in \mathbf{Z}. \tag{2}$$

Ἑπομένως ἡ γενικὴ λύση τῆς (Ε) εἶναι τὰ τόξα (1) καὶ (2).

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.** Νὰ λυθεῖ ἡ ἐξίσωση : $2\eta\mu^2\chi - 5\eta\mu\chi + 2 = 0$ (Ε)

**Λύση.** Ἡ (Ε) εἶναι δευτεροβάθμια ὡς πρὸς ημχ καὶ ἐπειδὴ οἱ ρίζες της εἶναι 2 καὶ $\frac{1}{2}$, θὰ ἔχουμε :

$$(\text{Ε}) \Leftrightarrow \begin{cases} \eta\mu\chi = \dfrac{1}{2} & (1) \\ \text{ἤ} & \\ \eta\mu\chi = 2. & (2) \end{cases}$$

Εἶναι φανερὸ πὼς ἡ (2) εἶναι ἀδύνατη. Ἡ λύση τῆς (1) καὶ ἑπομένως καὶ τῆς (Ε) εἶναι :

$$\left.\begin{aligned} \chi &= 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \\ \text{ἤ } \chi &= (2\kappa + 1)\pi - \frac{\pi}{6} \end{aligned}\right\} \quad (\kappa \in \mathbf{Z})$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.** Νὰ λυθεῖ ἡ ἐξίσωση : $\eta\mu^3\chi + 2\eta\mu^2\chi - \eta\mu\chi - 2 = 0$.
**Λύση.** Ἡ ἐξίσωση γράφεται :

$(ημ^3χ - ημχ) + 2(ημ^2χ - 1) = 0 \Leftrightarrow ημχ\,(ημ^2χ - 1) + 2\,(ημ^2χ - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$(ημχ + 2)(ημ^2χ - 1) = 0 \Leftrightarrow (ημχ + 2)(ημχ + 1)(ημχ - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} ημχ = -2 \text{ ἤ } & (α) \\ ημχ = 1 \text{ ἤ } & (β) \\ ημχ = -1 \text{ ἤ } & (γ) \end{cases}$$

Ἡ ἐξίσωση (α) εἶναι ἀδύνατη. Οἱ λύσεις τῶν (β) καὶ (γ) εἶναι :

$$χ = 2κπ + \frac{π}{2} \quad \text{καὶ} \quad χ = 2λπ - \frac{π}{2} \quad (κ,\ λ \in \mathbf{Z})$$

**Παρατήρηση.** Ἡ διερεύνηση μιᾶς τριγωνομετρικῆς ἐξισώσεως $f(t) = 0$ ἀλγεβρικῆς μορφῆς, ἀνάγεται συνήθως στὴ διερεύνηση τῆς ἀντίστοιχης ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως. Ὅμως, στὴν περίπτωση αὐτή, θὰ πρέπει νὰ προσέχουμε τὰ ὅρια μεταβολῆς τοῦ τριγωνομετρικοῦ ἀριθμοῦ t τῆς ἐξισώσεως $f(t) = 0$. Π.χ. ἡ ἐξίσωση $αεφ^2χ + βεφχ + γ = 0$ $(α \neq 0)$ εἶναι δευτεροβάθμια ὡς πρὸς $εφχ = t$ καὶ ἰσχύει :

$$(E):\ αεφ^2χ + βεφχ + γ = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} εφχ = t_1 \\ εφχ = t_2 \end{cases}$$

ὅπου $t_1$, $t_2$, εἶναι οἱ ρίζες τῆς ἀντίστοιχης ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως $αt^2 + βt + γ = 0$. Ἡ (E) ἔχει λύση τότε καὶ μόνο τότε, ὅταν οἱ ρίζες $t_1$, $t_2$ εἶναι πραγματικοὶ ἀριθμοὶ (βλέπε 2.3). Ἄρα, ἡ (E) ἔχει λύση τότε καὶ μόνο τότε, ὅταν $β^2 - 4αγ \geqslant 0$. Ὅμοια διερευνοῦμε τὴν ἐξίσωση $ασφ^2χ + βσφχ + γ = 0$, $α \neq 0$.

Ἡ διερεύνηση τῆς τριγωνομετρικῆς ἐξισώσεως $αημ^2χ + βημχ + γ = 0$ ἀνάγεται στὴ διερεύνηση τῆς ἀντίστοιχης ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως $αt^2 + βt + γ = 0$ μὲ $-1 \leqslant t \leqslant 1$, γιατὶ θέσαμε $ημχ = t$.

Γιὰ νὰ κατανοήσουμε καλύτερα τὴν παραπάνω παρατήρηση, ἀναφέρουμε τὰ ἀμέσως ἑπόμενα δύο παραδείγματα :

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.** Νὰ λυθεῖ καὶ διερευνηθεῖ ἡ ἐξίσωση: $αημ^2χ + βημχ + γ = 0$, $α \neq 0$ (E).

**Λύση.** Ἰσχύει ἡ ἰσοδυναμία :

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} ημχ = t_1 \text{ ἤ } & (1) \\ ημχ = t_2 & (2) \end{cases}$$

ὅπου $t_1$, $t_2$ εἶναι οἱ ρίζες τῆς ἀντίστοιχης ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως $f(t) = αt^2 + βt + γ = 0$ $(ημχ = t)$. Γιὰ τὴ διερεύνηση τῆς (E) πρέπει νὰ μελετήσουμε προσεκτικὰ τὶς παρακάτω ἰσοδύναμες προτάσεις :

ι) Ἡ ἐξίσωση (E) ἔχει λύση.

ιι) Μία τουλάχιστον ἀπὸ τὶς ἐξισώσεις (1) καὶ (2) ἔχει λύση.

ιιι) Μία τουλάχιστον ρίζα ἀπὸ τὶς $t_1$, $t_2$ εἶναι **δεκτή**, δηλαδὴ ἀνήκει στὸ διάστημα $[-1,\ 1]$.

Σύμφωνα τώρα μὲ τὴν παραπάνω πρόταση ιιι), μποροῦμε νὰ διατυπώσουμε τὶς συνθῆκες γιὰ νὰ ἔχει λύση ἡ (Ε). Διακρίνουμε τὶς ἑπόμενες περιπτώσεις:

1) Ἡ ἐξίσωση $f(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma = 0$ ἔχει **μιὰ μόνο δεκτὴ ρίζα,** ὅταν:

$1_\alpha$) Μιὰ μόνο ρίζα της ἀνήκει στὸ διάστημα $(-1,\ 1)$. Ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη γι' αὐτὸ εἶναι:

$$f(-1)f(+1) < 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{(\alpha + \beta + \gamma)(\alpha - \beta + \gamma) < 0}.$$

$1_\beta$) Ἡ μιὰ ρίζα νὰ εἶναι 1 καὶ ἡ ἄλλη ἔξω ἀπὸ τὸ διάστημα $[-1,\ 1]$. Αὐτὸ ἰσχύει τότε καὶ μόνο τότε, ὅταν:

$$\left(f(1) = 0,\ \left|\frac{\gamma}{\alpha}\right| > 1\right) \Leftrightarrow \left(\boldsymbol{\alpha + \beta + \gamma = 0,\ \left|\frac{\gamma}{\alpha}\right| > 1}\right)$$

γιατί, ἂν $t_1 = 1$, τότε, ἀπὸ τὴ σχέση $t_1 t_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$, βρίσκουμε $t_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$.

$1_\gamma$) Ἡ μιὰ ρίζα νὰ εἶναι τὸ $-1$ καὶ ἡ ἄλλη ἔξω ἀπὸ τὸ διάστημα $[-1,\ 1]$. Αὐτὸ ἰσχύει τότε καὶ μόνο τότε, ὅταν:

$$\left(f(-1) = 0,\ \left|\frac{\gamma}{\alpha}\right| > 1\right) \Leftrightarrow \left(\boldsymbol{\alpha - \beta + \gamma = 0,\ \left|\frac{\gamma}{\alpha}\right| > 1}\right).$$

$1_\delta$) Ἡ ἀντίστοιχη ἀλγεβρικὴ ἐξίσωση νὰ ἔχει διπλὴ ρίζα [1]) δεκτή. Ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη γι' αὐτὸ εἶναι:

$$\left(\Delta = 0,\ \left|-\frac{\beta}{2\alpha}\right| \leqslant 1\right) \Leftrightarrow \left(\boldsymbol{\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0,\ \left|\frac{\beta}{2\alpha}\right| \leqslant 1}\right).$$

2) Ἡ ἐξίσωση $f(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma = 0$ ἔχει δύο δεκτὲς ρίζες τότε καὶ μόνο τότε, ὅταν:

$$\left(\Delta > 0,\ \alpha f(-1) \geqslant 0,\ \alpha f(+1) \geqslant 0,\ -1 + \frac{\beta}{2\alpha} < 0,\ 1 + \frac{\beta}{2\alpha} > 0\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\boldsymbol{\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0,\ \alpha(\alpha - \beta + \gamma) \geqslant 0,\ \alpha(\alpha + \beta + \gamma) \geqslant 0,\ -1 + \frac{\beta}{2\alpha} < 0,\ 1 + \frac{\beta}{2\alpha} > 0}\right).$$

---

[1]) Στὴν περίπτωση αὐτὴ δὲ μᾶς ἐνδιαφέρει ὁ βαθμὸς πολλαπλότητας τῆς ρίζας.

Παραπάνω ἀναφέραμε τὶς ἱκανὲς καὶ ἀναγκαῖες συνθῆκες γιὰ νὰ λύνεται ἡ (Ε) καὶ ἑπομένως σὲ κάθε ἄλλη περίπτωση ἡ (Ε) εἶναι ἀδύνατη. Ὅμοια μποροῦμε νὰ λύσουμε καὶ νὰ διερευνήσουμε τὴν ἐξίσωση:

$$\alpha\text{συν}^2\chi + \beta\text{συν}\chi + \gamma = 0 \quad (\alpha \neq 0).$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.** Γιὰ ποιὲς τιμὲς τοῦ $\lambda \in \mathbf{R}$ ἡ ἐξίσωση $\text{εφ}^2\chi + \lambda\text{εφ}\chi + 1 = 0$ ἔχει μιὰ μόνο λύση μέσα στὸ διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

**Λύση.** Θὰ πρέπει νὰ ἰσχύει: $0 < \chi < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \text{εφ}0 < \text{εφ}\chi < \text{εφ}\,\frac{\pi}{4} \Rightarrow$
$\Rightarrow 0 < \text{εφ}\chi < 1$. Θέτουμε $\text{εφ}\chi = t$ καὶ ἑπομένως ἡ ἐξίσωση γράφεται:

$$\varphi(t) = t^2 + \lambda t + 1 = 0 \qquad (1)$$

$$0 < t < 1$$

Γιὰ νὰ ἔχουμε μιὰ μόνο λύση μέσα στὸ διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, θὰ πρέπει ἡ (1) νὰ ἔχει μιὰ μόνο ρίζα μέσα στὸ διάστημα (0,1). Οἱ συνθῆκες γι' αὐτὸ εἶναι:

α) $\varphi(0)\varphi(1) < 0 \Leftrightarrow 1.(\lambda + 2) < 0 \Leftrightarrow \lambda < -2$

β) $\Delta = 0$ καὶ $0 < -\frac{\beta}{2\alpha} < 1 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4 = 0$ καὶ $0 < -\frac{\lambda}{2} < 1$. Τὸ τελευταῖο σύστημα εἶναι ἀδύνατο καὶ ἑπομένως μόνο γιὰ $\lambda < -2$ ἔχουμε λύση τοῦ προβλήματος.

**3.2. Τριγωνομετρικὲς ἐξισώσεις μὲ περισσότερα ἀπὸ ἕνα ἄγνωστα τόξα.** Ἂν θεωρήσουμε ἀλγεβρικὲς ἐξισώσεις μὲ περισσότερους ἀπὸ ἕνα ἀγνώστους, μποροῦμε νὰ ἐπεκτείνουμε τὸν ὁρισμὸ τῆς τριγωνομετρικῆς ἐξισώσεως 1.1 καὶ σὲ τριγωνομετρικὴ ἐξίσωση μὲ ἄγνωστα τόξα περισσότερα ἀπὸ ἕνα. Π.χ. οἱ ἐξισώσεις

$$\text{ημ}(\chi + \psi) + \text{ημ}(\chi - \psi) = 2, \quad \text{εφ}2\chi = \text{εφ}\psi, \quad \text{συν}3\chi = \text{ημ}\left(\psi + \frac{\pi}{4}\right)$$

εἶναι τριγωνομετρικὲς ἐξισώσεις δύο ἄγνωστων τόξων.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.** Νὰ λυθεῖ ἡ ἐξίσωση: $\text{ημ}\psi = \text{συν}2\chi$ (Ε).

**Λύση.** Ἡ ἐξίσωση (Ε) γράφεται $\text{συν}\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) = \text{συν}2\chi$ καὶ αὐτὴ εἶναι ἰσοδύναμη μὲ τὶς ἑπόμενες δύο ἀλγεβρικὲς ἐξισώσεις:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\pi}{2} - \psi = 2\kappa\pi + 2\chi \\ \text{ἢ}\quad &\frac{\pi}{2} - \psi = 2\lambda\pi - 2\chi \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} &\psi = \frac{\pi}{2} - 2\chi - 2\kappa\pi && (1) \\ &\qquad\quad \text{ἤ} && \qquad (\kappa,\ \lambda \in \mathbf{Z}) \\ &\psi = \frac{\pi}{2} + 2\chi - 2\lambda\pi && (2). \end{aligned}\right.$$

Ὥστε, ἡ γενικὴ λύση τῆς (Ε) εἶναι :

$$\left\{ (\chi,\psi) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} : \psi = \frac{\pi}{2} - 2\chi - 2\kappa\pi,\ \kappa\in\mathbf{Z} \right\} \cup$$

$$\left\{ (\chi,\psi) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} : \psi = \frac{\pi}{2} + 2\chi - 2\lambda\pi,\ \lambda\in\mathbf{Z} \right\}.$$

Ἡ (1) παριστάνει σὲ ὀρθοκανονικὸ σύστημα ἀξόνων, μιὰ οἰκογένεια παράλληλων εὐθειῶν, ὅταν ὁ κ μεταβάλλεται στὸ **Z**. Ὅμοια ἡ (2) παριστάνει μιὰ οἰκογένεια παράλληλων εὐθειῶν. Νὰ παραστήσετε γραφικὰ αὐτὲς τὶς δύο οἰκογένειες παράλληλων εὐθειῶν.

**3.3. Ὁμογενὴς τριγωνομετρικὴ ἐξίσωση.** Κάθε ἐξίσωση τῆς μορφῆς φ(ημχ, συνχ) = 0, ὅπου τὸ πρῶτο μέλος της εἶναι ἀκέραιο ὁμογενὲς πολυώνυμο ὡς πρὸς ημχ καὶ συνχ, λέγεται ὁμογενὴς τριγωνομετρικὴ ἐξίσωση. Π.χ. οἱ ἐξισώσεις :

$ημ^2χ + 3συν^2χ - 2ημχσυνχ = 0, \quad ημ^3χ + συν^3χ + ημ^2χσυνχ - 3ημχσυν^2χ = 0$

εἶναι ὁμογενεῖς.

Γιὰ νὰ λύσουμε μιὰ ὁμογενὴ τριγωνομετρικὴ ἐξίσωση, διαιροῦμε καὶ τὰ δύο μέλη της μὲ $συν^κχ$, ἐφόσον $συνχ \neq 0\ (\Leftrightarrow χ \neq κπ + \frac{π}{2},\ κ\in\mathbf{Z})$, ὅπου $κ\in\mathbf{N}$ ὁ βαθμὸς τῆς ὁμογένειας. Ἔτσι, φτάνουμε σὲ μιὰ τριγωνομετρικὴ ἐξίσωση ἀλγεβρικῆς μορφῆς ὡς πρὸς εφχ, ποὺ εἶναι γνωστὴ ἀπὸ τὴν προηγούμενη κατηγορία. Τονίζουμε ἀκόμα ὅτι, ἂν φ(ημχ, συνχ) = 0 εἶναι μιὰ ὁμογενὴς ἐξίσωση μὲ βαθμὸ κ, τότε αὐτὴ ἰσοδύναμα γράφεται : $συν^κχ.f(εφχ) = 0$ $(συνχ \neq 0)$, ὁπότε ἔχουμε νὰ λύσουμε τὴν ἐξίσωση f (εφχ) = 0. Ἡ τελευταία ὅμως ἐξίσωση εἶναι ἀλγεβρικῆς μορφῆς, γιατὶ τὸ f (εφχ) εἶναι ἀκέραιο πολυώνυμο ὡς πρὸς εφχ καὶ ἑπομένως λύνεται μὲ τὸ γνωστὸ τρόπο.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.** Νὰ λυθεῖ ἡ ἐξίσωση: $ημ^2χ - (1 + \sqrt{3})\ ημχσυνχ + \sqrt{3}\ συν^2χ = 0$ (1).

**Λύση.** Μὲ συνχ = 0 ἡ ἐξίσωση (1) δίνει ημχ = 0, ποὺ εἶναι ἀδύνατο [1]), γιατὶ

---

[1]) Αὐτὸ σημαίνει ὅτι οἱ λύσεις τῆς ἐξισώσεως συνχ = 0, δηλαδὴ τὰ τόξα $κπ + \frac{π}{2}$, $κ \in \mathbf{Z}$, δὲν εἶναι λύσεις τῆς (1). Ἄρα, ὑποθέτοντας $συνχ \neq 0$ δὲν περιορίζουμε τὶς λύσεις τῆς (1), δηλαδὴ δὲν ἔχουμε ἀπώλεια λύσεων.

εἶναι ημχ = 1 ἢ −1, ὅταν συνχ = 0. Ἑπομένως εἶναι συνχ $\neq$ 0, ὁπότε, διαιρώντας μὲ συν$^2$χ καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (1), βρίσκουμε εφ$^2$χ − $(1+\sqrt{3})$ εφχ + $+\sqrt{3}=0$. Ἡ τελευταία ἐξίσωση εἶναι ἀλγεβρικῆς μορφῆς (δευτεροβάθμια ὡς πρὸς εφχ) καὶ εἶναι ἰσοδύναμη μὲ τὶς θεμελιώδεις ἐξισώσεις :

$$\text{εφχ} = 1 \qquad (2)$$

$$\text{εφχ} = \sqrt{3}. \qquad (3)$$

Ἡ λύση τῆς (2) εἶναι : $\{\chi \in \mathbf{R} : \chi = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbf{Z}\}$ καὶ ἡ λύση τῆς (3) εἶναι: $\{\chi \in \mathbf{R} : \chi = \lambda\pi + \frac{\pi}{3}, \lambda \in \mathbf{Z}\}$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.** Νὰ λυθεῖ ἡ ἐξίσωση : αημ$^2$χ + βσυν$^2$χ + γημχσυνχ = δ (1)

**Λύση.** Εἶναι :

$$(1) \Leftrightarrow \alpha\text{ημ}^2\chi + \beta\text{συν}^2\chi + \gamma\text{ημχσυνχ} = \delta(\text{ημ}^2\chi + \text{συν}^2\chi) \Leftrightarrow$$

$$(\alpha-\delta)\text{ημ}^2\chi + (\beta-\delta)\text{συν}^2\chi + \gamma\text{ημχσυνχ} = 0 \qquad (2)$$

Ἡ (2) εἶναι ὁμογενὴς ἐξίσωση καὶ γιὰ τὴ λύση της διακρίνουμε τὶς παρακάτω περιπτώσεις :

1) Ἂν α $\neq$ δ, τότε ἡ (2) δὲ δέχεται ὡς λύσεις τὰ τόξα $\chi = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ $(\kappa \in \mathbf{Z})$, γιατὶ μὲ συνχ = 0 δὲν ἐπαληθεύεται ἡ ἐξίσωση. Στὴν περίπτωση αὐτὴ διαιροῦμε καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (2) μὲ συν$^2$χ καὶ ἔχουμε :

$$(\alpha-\delta)\text{εφ}^2\chi + \gamma\text{εφχ} + \beta-\delta = 0 \qquad (3)$$

Ἡ ἐξίσωση (3) ἔχει λύση, ὅταν καὶ μόνο ὅταν : $\gamma^2 - 4(\alpha-\delta)(\beta-\delta) \geqslant 0$.

2) Ἂν α = δ, ἡ ἐξίσωση (2) γράφεται :

$$(\beta-\delta)\text{συν}^2\chi + \gamma\text{ημχσυνχ} = 0 \Leftrightarrow \text{συνχ}[(\beta-\delta)\text{συνχ} + \gamma\text{ημχ}] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \text{συνχ} = 0 & (\alpha) \\ (\beta-\delta)\,\text{συνχ} + \gamma\text{ημχ} = 0 & (\beta) \end{cases}$$

Ἡ γενικὴ λύση τῆς (α) εἶναι : $\chi = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbf{Z}$

**Λύση τῆς (β).** Διακρίνουμε τὶς παρακάτω περιπτώσεις :

ι) Ἂν γ $\neq$ 0, τότε συνχ $\neq$ 0, ὁπότε, διαιρώντας καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (β) μὲ συνχ ἔχουμε :

$$\gamma\text{εφχ} + \beta - \delta = 0 \Leftrightarrow \text{εφχ} = \frac{\delta-\beta}{\gamma} \text{ (θεμελιώδης).}$$

ιι) Ἂν $\gamma = 0$, τότε ἡ (β) γράφεται: $(\beta-\delta)\sigma\upsilon\nu\chi = 0$. Ἡ τελευταία ἐξίσωση εἶναι ἀόριστη, δηλαδὴ ἐπαληθεύεται γιὰ κάθε $\chi \in \mathbf{R}$, ἂν $\beta = \delta$ καὶ ἔχει λύση τὰ τόξα $\chi = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ $(\kappa \in \mathbf{Z})$, ἂν $\beta \neq \delta$.

Ὅμοια μπορεῖ νὰ λυθεῖ καὶ ἡ ἐξίσωση:

$$\alpha\eta\mu^2\chi + \beta\sigma\upsilon\nu^2\chi + \gamma\eta\mu 2\chi + \delta\sigma\upsilon\nu 2\chi + \varepsilon = 0, \qquad (E)$$

ἀρκεῖ νὰ γραφεῖ ὡς ἑξῆς:

$$\alpha\eta\mu^2\chi + \beta\sigma\upsilon\nu^2\chi + 2\gamma\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi + \delta(\sigma\upsilon\nu^2\chi - \eta\mu^2\chi) + \varepsilon(\eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi) = 0$$

**Παρατήρηση.** Ἡ (Ε) μετασχηματίζεται ἀκόμα καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\alpha\,\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\chi}{2} + \beta\,\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2\chi}{2} + \gamma\eta\mu 2\chi + \delta\sigma\upsilon\nu 2\chi + \varepsilon = 0 \Leftrightarrow$$

$$2\gamma\eta\mu 2\chi + (2\delta + \beta - \alpha)\sigma\upsilon\nu 2\chi = -2\varepsilon - \alpha - \beta.$$

Ἡ τελευταία ἐξίσωση εἶναι μία γραμμικὴ ἐξίσωση, μὲ τὴν ὁποία θὰ ἀσχοληθοῦμε ἀμέσως παρακάτω.

### 3.4. Γραμμικὴ τριγωνομετρικὴ ἐξίσωση.

Ἔτσι ὀνομάζεται κάθε ἐξίσωση τῆς μορφῆς:

$$\alpha\eta\mu\chi + \beta\sigma\upsilon\nu\chi = \gamma,\ \alpha\beta\gamma \neq 0\ ^{1)} \qquad (E)$$

#### 3.4.1. Λύση τῆς γραμμικῆς ἐξισώσεως (α΄ τρόπος).

Ἐπειδὴ ὑπάρχει πάντοτε τόξο $\omega \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ὥστε $\varepsilon\varphi\omega = \frac{\beta}{\alpha}$ $(\mathrm{M}_1)$ ἡ ἐξίσωση γράφεται:

$$(E) \Leftrightarrow \eta\mu\chi + \frac{\beta}{\alpha}\sigma\upsilon\nu\chi = \frac{\gamma}{\alpha} \underset{(\mathrm{M}_1)}{\Leftrightarrow} \eta\mu\chi + \varepsilon\varphi\omega\sigma\upsilon\nu\chi = \frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\omega + \eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\chi = \frac{\gamma}{\alpha}\sigma\upsilon\nu\omega \Leftrightarrow \eta\mu(\chi+\omega) = \frac{\gamma}{\alpha}\sigma\upsilon\nu\omega. \qquad (1)$$

Ἡ ἐξίσωση ὅμως (1) εἶναι θεμελιώδης (βλ. **2.1**) καὶ ἔχει λύση, ὅταν καὶ μόνο ὅταν:

$$\left|\frac{\gamma}{\alpha}\sigma\upsilon\nu\omega\right| \leqslant 1 \Leftrightarrow \frac{\gamma^2}{\alpha^2}\sigma\upsilon\nu^2\omega \leqslant 1 \Leftrightarrow \frac{\gamma^2}{\alpha^2}\cdot\frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega} \leqslant 1 \underset{(\mathrm{M}_1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\,\frac{1}{1+\frac{\beta^2}{\alpha^2}} \leqslant 1 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 \geqslant \gamma^2$$

Ἄρα, ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη γιὰ νὰ ἔχει λύση ἡ γραμμικὴ ἐξίσωση εἶναι: $\boldsymbol{\alpha^2 + \beta^2 \geqslant \gamma^2}$ **(Σ)**.

---

1) Εἶναι εὔκολο νὰ διαπιστώσουμε ὅτι μὲ $\alpha\beta\gamma = 0$ ἡ ἐξίσωση $\alpha\eta\mu\chi + \beta\sigma\upsilon\nu\chi + \gamma = 0$ παίρνει πολὺ ἁπλὴ μορφή.

Ἂν ἡ συνθήκη (Σ) ἱκανοποιεῖται, τότε θέτουμε $\frac{\alpha}{\gamma}$ **συνω=ημθ** **($M_2$)**, ὅπου τὸ θ θεωρεῖται γνωστὸ τόξο μὲ $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Σύμφωνα τώρα μὲ τὸ μετασχηματισμὸ ($M_2$), ἡ (1) γράφεται :

$$\eta\mu(\chi+\omega)=\eta\mu\theta \Leftrightarrow \begin{cases}\chi+\omega=2\kappa\pi+\theta\\ \chi+\omega=(2\lambda+1)\pi-\theta\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\chi=2\kappa\pi+\theta-\omega, & \kappa\in\mathbf{Z}\\ \chi=(2\lambda+1)\pi-\theta-\omega, & \lambda\in\mathbf{Z}.\end{cases}$$

Οἱ δύο τελευταῖες οἰκογένειες λύσεων ἀποτελοῦν τὴ γενικὴ λύση τῆς γραμμικῆς ἐξισώσεως.

**Παρατηρήσεις.** 1) Κάθε ἐξίσωση τῆς μορφῆς $\alpha\varepsilon\varphi\chi+\beta\sigma\varphi\chi=\gamma$, $\alpha\beta\gamma\neq 0$ εἶναι ἰσοδύναμη μὲ τὴ γραμμικὴ ἐξίσωση :

$\gamma\eta\mu\omega+(\alpha-\beta)\sigma\upsilon\nu\omega=\alpha+\beta$, ὅπου $\omega=2\chi$ (γιατί;)

2) Ἂν στὴν παραπάνω συνθήκη (Σ) ἰσχύει τὸ ἴσον, τότε, σύμφωνα καὶ μὲ τοὺς μετασχηματισμοὺς ($M_1$), ($M_2$) θὰ εἶναι $|\eta\mu\theta|=1$.

Ἡ γραμμικὴ τριγωνομετρικὴ ἐξίσωση μπορεῖ νὰ λυθεῖ καὶ μὲ ἄλλο τρόπο, ποὺ περιγράφουμε παρακάτω.

### 3.4.2. Λύση τῆς γραμμικῆς ἐξισώσεως (β' τρόπος).

Εἶναι γνωστοὶ οἱ τύποι :

$$\eta\mu\chi=\frac{2\varepsilon\varphi\frac{\chi}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{\chi}{2}},\quad \sigma\upsilon\nu\chi=\frac{1-\varepsilon\varphi^2\frac{\chi}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{\chi}{2}}\quad \left(\frac{\chi}{2}\neq\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\chi\neq 2\kappa\pi+\pi,\ \kappa\in\mathbf{Z}\right)$$

Σύμφωνα μὲ τοὺς τύπους αὐτοὺς ἡ γραμμικὴ ἐξίσωση γράφεται :

$$\alpha\frac{2\varepsilon\varphi\frac{\chi}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{\chi}{2}}+\beta\frac{1-\varepsilon\varphi^2\frac{\chi}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{\chi}{2}}=\gamma \Leftrightarrow (\beta+\gamma)\varepsilon\varphi^2\frac{\chi}{2}-2\alpha\varepsilon\varphi\frac{\chi}{2}+\gamma-\beta=0 \quad (1)$$

Πρέπει νὰ τονίσουμε ὅτι ἡ γραμμικὴ ἐξίσωση δὲν εἶναι ἰσοδύναμη μὲ τὴν (1). Αὐτὸ ἐξηγεῖται ἀπὸ τὸ γεγονὸς ὅτι τὰ τόξα $\chi=2\kappa\pi+\pi$ δὲν μπορεῖ νὰ εἶναι λύσεις τῆς (1), γιατὶ γι' αὐτὰ τὰ τόξα δὲν ὁρίζεται ἡ $\varepsilon\varphi\frac{\chi}{2}$. Δὲν ἀποκλείεται ὅμως τὰ τόξα αὐτὰ νὰ εἶναι λύσεις τῆς γραμμικῆς ἐξισώσεως. Πρὶν προχωρήσουμε στὴ λύση τῆς (1), ἂς ἐξετάσουμε πότε ἡ γραμμικὴ ἐξίσωση δέχεται γιὰ λύσεις τὰ τόξα $\chi=2\kappa\pi+\pi$. Γιὰ νὰ εἶναι τὰ τόξα αὐτὰ λύσεις τῆς γραμμικῆς ἐξισώσεως πρέπει νὰ ἀρκεῖ νὰ ἰσχύει :

$$\alpha\eta\mu(2\kappa\pi+\pi) + \beta\sigma\upsilon\nu(2\kappa\pi+\pi) = \gamma \Leftrightarrow \alpha.0 + \beta(-1) = \gamma \Leftrightarrow \boldsymbol{\beta + \gamma = 0} \quad (\sigma)$$

Γιὰ τὴ λύση τῆς (1) διακρίνουμε τὶς παρακάτω περιπτώσεις:

1) Ἂν $\beta + \gamma \neq 0$, τότε ἡ (1) εἶναι δευτεροβάθμια ὡς πρὸς $\varepsilon\varphi\frac{\chi}{2}$ καὶ ἔχει λύση, ὅταν καὶ μόνο ὅταν: $\Delta = 4\alpha^2 - 4(\beta + \gamma)(\gamma - \beta) \geqslant 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha^2 + \beta^2 \geqslant \gamma^2}$. Πρέπει νὰ προσέξουμε ἀκόμη ὅτι στὴν περίπτωση αὐτὴ ($\beta + \gamma \neq 0$) ἡ γραμμικὴ ἐξίσωση εἶναι ἰσοδύναμη μὲ τὴν (1), σύμφωνα μὲ τὴν προηγούμενη παρατήρηση ποὺ μᾶς ὁδήγησε στὴν συνθήκη (σ).

2) Ἂν $\beta + \gamma = 0$, τότε ἡ (1) γράφεται:

$$-2\alpha\varepsilon\varphi\frac{\chi}{2} + \gamma - \beta = 0 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\frac{\chi}{2} = \frac{\gamma - \beta}{2\alpha} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\frac{\chi}{2} = -\frac{\beta}{\alpha}. \quad (2)$$

Ἡ λύση τῆς θεμελιώδους ἐξισώσεως (2) καὶ τὰ τόξα $\chi = 2\kappa\pi + \pi$ εἶναι ἡ γενικὴ λύση τῆς γραμμικῆς ἐξισώσεως. Παρατηροῦμε ἀκόμα ὅτι ἡ συνθήκη $\alpha^2 + \beta^2 \geqslant \gamma^2$ ἱκανοποιεῖται πάλι, ἐφόσον $\beta + \gamma = 0$.

**Παρατήρηση.** Ἡ γραμμικὴ ἐξίσωση μὲ $\beta + \gamma = 0$ γράφεται:

$$\alpha\eta\mu\chi + \beta\sigma\upsilon\nu\chi = \gamma \Leftrightarrow \alpha\eta\mu\chi + \beta\sigma\upsilon\nu\chi = -\beta \Leftrightarrow$$

$$\alpha\eta\mu\chi + \beta(1 + \sigma\upsilon\nu\chi) = 0 \Leftrightarrow 2\alpha\eta\mu\frac{\chi}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\chi}{2} + 2\beta\sigma\upsilon\nu^2\frac{\chi}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\frac{\chi}{2}\left(\alpha\eta\mu\frac{\chi}{2} + \beta\sigma\upsilon\nu\frac{\chi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} \sigma\upsilon\nu\frac{\chi}{2} = 0 \Leftrightarrow \chi = 2\kappa\pi + \pi,\ \kappa \in \mathbf{Z} \\ \text{ἤ} \\ \alpha\eta\mu\frac{\chi}{2} + \beta\sigma\upsilon\nu\frac{\chi}{2} = 0 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\frac{\chi}{2} = -\frac{\beta}{\alpha}. \end{array}\right.$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.** Νὰ λυθεῖ ἡ ἐξίσωση: $3\eta\mu\chi - \sqrt{3}\sigma\upsilon\nu\chi = 3$ (Ε)

**Λύση.** Ἡ (Ε) γράφεται:

$$(E) \Leftrightarrow \eta\mu\chi - \frac{\sqrt{3}}{3}\sigma\upsilon\nu\chi = 1 \Leftrightarrow \eta\mu\chi - \frac{\eta\mu 30^\circ}{\sigma\upsilon\nu 30^\circ}\sigma\upsilon\nu\chi = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu 30^\circ - \eta\mu 30^\circ\sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu 30^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu(\chi - 30^\circ) = \eta\mu 60^\circ \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} \chi - 30^\circ = 360^\circ\kappa + 60^\circ,\ \kappa \in \mathbf{Z} \\ \text{ἤ} \\ \chi - 30^\circ = (2\rho + 1)180^\circ - 60^\circ,\ \rho \in \mathbf{Z} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \chi = 360^\circ\kappa + 90^\circ,\ \kappa \in \mathbf{Z} \\ \text{ἤ} \\ \chi = 360^\circ\rho + 150^\circ,\ \rho \in \mathbf{Z} \end{array}\right.$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.** Νὰ λυθεῖ ἡ ἐξίσωση : $ημx + \sqrt{3}\ συνx = 2λ,\ λ \in \mathbf{Z}$.

**Λύση.** Ἡ ἐξίσωση ἔχει λύση ἐφόσον ἰσχύει : $1^2 + (\sqrt{3})^2 \geqslant (2λ)^2 \Leftrightarrow -1 \leqslant λ \leqslant 1$. Ἀπὸ τὴν τελευταία σχέση, καὶ ἐπειδὴ ὁ λ εἶναι ἀκέραιος, συνάγεται ὅτι : $λ = -1$ ἢ $0$ ἢ $1$. Ἄρα, ἡ ἐξίσωση εἶναι ἰσοδύναμη μὲ μιὰ ἀπὸ τὶς παρακάτω ἐξισώσεις :

$ημx + \sqrt{3}συνx = -2$ (α), $ημx + \sqrt{3}\ συνx = 0$ (β), $ημx + \sqrt{3}\ συνx = 2$ (γ).

**Λύση τῆς (α).** Ἡ (α) γράφεται :

$$ημx + εφ\frac{π}{3}\ συνx = -2 \Leftrightarrow ημx + \frac{ημ\frac{π}{3}}{συν\frac{π}{3}}\ συνx = -2 \Leftrightarrow$$

$$ημxσυν\frac{π}{3} + συνxημ\frac{π}{3} = -2συν\frac{π}{3} \Leftrightarrow ημ\left(x + \frac{π}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow$$

$$x + \frac{π}{3} = 2κπ - \frac{π}{2},\ κ \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow x = 2κπ - \frac{5π}{6}.$$

**Λύση τῆς (β).** Ἡ (β) γράφεται : $εφx = -\sqrt{3}$ καὶ ἡ λύση της εἶναι $x = κπ + \frac{2π}{3},\ κ \in \mathbf{Z}$.

**Λύση τῆς (γ).** Ἀκολουθοῦμε τὴν ἴδια ἀκριβῶς πορεία μὲ ἐκείνη τῆς (α) καὶ φτάνουμε στὴν ἐξίσωση $ημ\left(x + \frac{π}{3}\right) = 1$. Ἡ γενικὴ λύση της εἶναι $x = κπ + \frac{π}{6},\ κ \in \mathbf{Z}$.

**3.5. Συμμετρικὴ τριγωνομετρικὴ ἐξίσωση.** Ἔτσι ὀνομάζεται κάθε ἐξίσωση τῆς μορφῆς $f(ημx, συνx) = 0$, ὅπου $f(ημx, συνx)$ εἶναι συμμετρικὸ ἀκέραιο πολυώνυμο ὡς πρὸς ημx καὶ συνx. Ἀπὸ τὴν Ἄλγεβρα γνωρίζουμε ὅτι τὸ πολυώνυμο $f(ημx, συνx)$ μπορεῖ νὰ ἐκφραστεῖ ὡς συνάρτηση μὲ τὸ $ημx + συνx$ καὶ τὸ ημxσυνx. Τελικὰ ἡ συμμετρικὴ ἐξίσωση παίρνει τὴ μορφή :

$$f(ημx + συνx,\ \ ημxσυνx) = 0 \qquad (E).$$

Γιὰ νὰ λύσουμε τὴν (Ε) ἐφαρμόζουμε τὸν μετασχηματισμό :

$\mathbf{ημx + συνx = t}$ $\mathbf{(M_1)}$. Ἀκόμα ἔχουμε :

$$(M_1) \Leftrightarrow (ημx + συνx)^2 = t^2 \Leftrightarrow ημ^2x + συν^2x + 2ημxσυνx = t^2 \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi = \frac{t^2 - 1}{2} \qquad (1)$$

Ὁ μετασχηματισμὸς ($M_1$) ἰσοδύναμα γράφεται: $\sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu\left(\chi - \frac{\pi}{4}\right) = t$ ($M_2$).

Ἀπὸ τὴ σχέση ($M_2$) συμπεραίνουμε ὅτι: $-\sqrt{2} \leqslant t \leqslant \sqrt{2}$ (2).

Σύμφωνα μὲ τὸν ($M_1$) καὶ τὴ σχέση (1), ἡ συμμετρικὴ ἐξίσωση γράφεται:

$$f\left(t, \frac{t^2 - 1}{2}\right) = 0 \qquad (E_1).$$

Ἡ (E ) εἶναι μιὰ ἀλγεβρικὴ ἐξίσωση ὡς πρὸς t. Ἀπὸ τὴν ($E_1$) βρίσκουμε τὸ t καὶ κατόπιν τὸ ἀντικαθιστοῦμε στὴν θεμελιώδη ἐξίσωση ($M_2$), γιὰ νὰ βροῦμε τὸ χ. Ἡ σχέση (2) εἶναι ἀπαραίτητη γιὰ τὴ διερεύνηση τῆς ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως ($E_1$).

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.** Νὰ λυθεῖ ἡ ἐξίσωση:

$$\alpha(\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi) + \beta\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi = \gamma,\ \alpha\beta = \neq 0 \qquad (E)$$

**Λύση.** Ἡ ἐξίσωση (E) εἶναι ἡ ἁπλούστερη μορφὴ συμμετρικῆς ἐξισώσεως. Σύμφωνα μὲ ὅσα ἐκθέσαμε παραπάνω, θέτουμε $\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi = t$, ὁπότε ἡ (E) γράφεται:

$$\alpha t + \beta\frac{t^2 - 1}{2} = \gamma \Leftrightarrow \beta t^2 + 2\alpha t - (\beta + 2\gamma) = 0.$$

Ἄρα, ἰσχύει ἡ ἰσοδυναμία:

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} \beta t^2 + 2\alpha t - (\beta + 2\gamma) = 0 & (1) \\ \sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu\left(\chi - \frac{\pi}{4}\right) = t. & (2) \end{cases}$$

Ἡ (E) ἔχει λύση τότε καὶ μόνο τότε, ὅταν μία τουλάχιστον ἀπὸ τὶς ρίζες τῆς (1) βρίσκεται στὸ διάστημα $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Οἱ ἱκανὲς καὶ ἀναγκαῖες συνθῆκες γι' αὐτὸ εἶναι γνωστὲς ἀπὸ τὴν Ἄλγεβρα (βλ. ἐπίσης 3.1.).

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.** Νὰ λυθεῖ ἡ ἐξίσωση: $\eta\mu^3\chi + \sigma\upsilon\nu^3\chi = 1$.

**Λύση.** Ἡ ἐξίσωση εἶναι συμμετρικὴ γιατὶ δὲν μεταβάλλεται μὲ τὴν ἀντιμετάθεση τῶν ημχ, συνχ. Εἶναι:

$$\eta\mu^3\chi + \sigma\upsilon\nu^3\chi = 1 \Leftrightarrow (\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi)(\eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi - \eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi) = 1 \Leftrightarrow$$

$$(\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi)\ (1 - \eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi) = 1 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} t\left(1 - \dfrac{t^2-1}{2}\right) = 1 & (1) \\ \sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu\left(\chi - \dfrac{\pi}{4}\right) = t. & (2) \end{array}\right.$$

Λύνουμε πρῶτα τὴν ἀλγεβρικὴ ἐξίσωση (1). Ἔχουμε :

$$(1) \Leftrightarrow t\,\frac{3-t^2}{2} = 1 \Leftrightarrow t^3 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow (t^3 - t) - (2t - 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$t(t^2-1) - 2(t-1) = 0 \Leftrightarrow (t-1)\,(t^2 + t - 2) = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t = 1 \\ t^2 + t - 2 = 0. \end{array}\right.$$

Οἱ ρίζες τῆς (1) εἶναι $t_1 = 1$ (διπλή) καὶ $t_2 = -2$. Ἡ ρίζα $t_2 = -2$ εἶναι ἀπαράδεκτη, γιατὶ $-\sqrt{2} \leqslant t \leqslant \sqrt{2}$. Ἄρα, ἔχουμε νὰ λύσουμε τὴν ἐξίσωση (2) μὲ $t = 1$. Εἶναι :

$$\sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu\left(\chi - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(\chi - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(\chi - \frac{\pi}{4}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \chi - \dfrac{\pi}{4} = 2\kappa\pi + \dfrac{\pi}{4} \\ \text{ἤ} \\ \chi - \dfrac{\pi}{4} = 2\lambda\pi - \dfrac{\pi}{4} \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \chi = 2\kappa\pi + \dfrac{\pi}{2},\ \kappa \in \mathbf{Z} \\ \text{ἤ} \\ \chi = 2\lambda\pi,\ \lambda \in \mathbf{Z} \end{array}\right.$$

## 4. Τριγωνομετρικὴ λύση τῆς δευτεροβάθμιας ἐξισώσεως $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0\ \ (\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R})\ \ (1)$

Ἐπειδὴ γιὰ κάθε $\chi \in \mathbf{R}$ ὑπάρχει $\omega \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ὥστε $\varepsilon\varphi\omega = \chi$ $(M_1)$, ἡ ἐξίσωση (1) γράφεται :

$$\alpha\varepsilon\varphi^2\omega + \beta\varepsilon\varphi\omega + \gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha\,\frac{\eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} + \beta\,\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} + \gamma = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha\eta\mu^2\omega + \beta\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\omega + \gamma\sigma\upsilon\nu^2\omega = 0 \Leftrightarrow \alpha(1 - \sigma\upsilon\nu2\omega) + \beta\eta\mu2\omega + \gamma(1 + \sigma\upsilon\nu2\omega) = 0$$

$$\Leftrightarrow \beta\eta\mu2\omega + (\gamma - \alpha)\,\sigma\upsilon\nu2\omega = -(\alpha + \gamma). \qquad (2)$$

Ἔτσι, ἡ λύση τῆς (1) ἀνάγεται, μὲ τὴ βοήθεια τοῦ μετασχηματισμοῦ $(M_1)$, στὴ λύση τῆς (2). Ἡ (2) ὅμως εἶναι μιὰ γραμμικὴ τριγωνομετρικὴ ἐξίσωση καὶ λύνεται μὲ τὸν πρῶτο τρόπο λύσεώς της (βλ. 3.4.1), ὡς ἑξῆς :

1) Ἂν $\beta \neq 0$, θέτουμε $\dfrac{\gamma - \alpha}{\beta} = \varepsilon\varphi\psi$ $(M_1)$ καὶ ἔχουμε:

$$\eta\mu 2\omega + \varepsilon\varphi\psi\sigma\upsilon\nu 2\omega = -\frac{\alpha+\gamma}{\beta} \Leftrightarrow \eta\mu(2\omega+\psi) = -\frac{\alpha+\gamma}{\beta}\sigma\upsilon\nu\psi. \qquad (3)$$

Ὅπως γνωρίζουμε, ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη γιὰ νὰ ἔχει λύση ἡ (2) εἶναι: $\beta^2 + (\gamma-\alpha)^2 \geqslant (\alpha+\gamma)^2 \Leftrightarrow \beta^2 - 4\alpha\gamma \geqslant 0$ (4).

Ἡ (4) εἶναι ἡ γνωστὴ συνθήκη ὑπάρξεως πραγματικῶν ριζῶν τῆς δευτεροβάθμιας ἐξισώσεως (1). Ἐφόσον ἡ συνθήκη (4) ἱκανοποιεῖται, ἡ ἐξίσωση (3) θὰ ἔχει λύση, δηλαδὴ θὰ ὑπάρχει τόξο $\varphi \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ τέτοιο, ὥστε $\eta\mu\varphi = -\dfrac{\alpha+\gamma}{\beta}\sigma\upsilon\nu\psi$ $(M_3)$. Σύμφωνα τώρα μὲ τὸν $(M_3)$, ἡ ἐξίσωση (3) γράφεται $\eta\mu(2\omega+\psi) = \eta\mu\varphi$ καὶ ἔχει τὶς παρακάτω οἰκογένειες λύσεων:

$$\omega_1 = \kappa\pi + \frac{\varphi}{2} - \frac{\psi}{2} \qquad (\kappa \in \mathbf{Z})$$

$$\omega_2 = \lambda\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} - \frac{\psi}{2} \qquad (\lambda \in \mathbf{Z}).$$

Εἶναι:

$$\varepsilon\varphi\omega_1 = \varepsilon\varphi\left(\kappa\pi + \frac{\varphi}{2} - \frac{\psi}{2}\right) = \varepsilon\varphi\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\psi}{2}\right) \text{ καὶ}$$

$$\varepsilon\varphi\omega_2 = \varepsilon\varphi\left(\lambda\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} - \frac{\psi}{2}\right) = \sigma\varphi\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\psi}{2}\right).$$

Ἀπὸ τὶς τελευταῖες σχέσεις καὶ σύμφωνα μὲ τὸν $(M_1)$, οἱ ρίζες τῆς (1) εἶναι:

$$\chi_1 = \varepsilon\varphi\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\psi}{2}\right), \quad \chi_2 = \sigma\varphi\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\psi}{2}\right) \qquad (5)$$

2) Ἂν $\beta = 0$, τότε ἡ (2) γράφεται: $(\gamma - \alpha)\sigma\upsilon\nu 2\omega = -(\alpha+\gamma)$ (6)
Γιὰ τὴ λύση τῆς (6) διακρίνουμε τὶς ἑπόμενες περιπτώσεις:

$2_\alpha$) Ἂν $\gamma = \alpha$, τότε ἡ (6) εἶναι ἀδύνατη, γιατὶ μὲ $\alpha = \gamma$ τὸ δεύτερο μέλος της γίνεται $-2\alpha$ καὶ δὲν μπορεῖ νὰ εἶναι 0.

$2_\beta$) Ἂν $\gamma \neq \alpha$, τότε ἡ ἐξίσωση (6) γράφεται:

$$\sigma\upsilon\nu 2\omega = \frac{\alpha+\gamma}{\alpha-\gamma} \qquad (7).$$

Ἡ (7) εἶναι θεμελιώδης καὶ λύνεται, ὅταν καὶ μόνο ὅταν:

$$\left|\frac{\alpha+\gamma}{\alpha-\gamma}\right| \leqslant 1 \Leftrightarrow (\alpha+\gamma)^2 \leqslant (\alpha-\gamma)^2 \Leftrightarrow \alpha\gamma \leqslant 0$$

Θέτουμε $\dfrac{\alpha+\gamma}{\alpha-\gamma} =$ συνφ καὶ ἑπομένως ἡ (7) γράφεται συν2ω = συνφ. Ἡ λύση τῆς τελευταίας ἐξισώσεως εἶναι:

$$\omega_1 = \kappa\pi + \frac{\varphi}{2},\ \omega_2 = \lambda\pi - \frac{\varphi}{2} \quad (\kappa,\lambda \in \mathbf{Z}).$$

Ἄρα, σύμφωνα καὶ μὲ τὸν $(M_1)$, οἱ ρίζες τῆς (1) εἶναι:

$$\chi_1 = \text{εφ}\,\frac{\varphi}{2},\ \chi_2 = -\text{εφ}\,\frac{\varphi}{2}.$$

**Παρατηρήσεις.** 1) Ἂν ὑποθέσουμε ὅτι οἱ παραπάνω ρίζες (5) εἶναι ἴσες, τότε θὰ ἔχουμε:

$$\text{εφ}\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\psi}{2}\right) = \text{σφ}\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\psi}{2}\right) \Leftrightarrow \text{εφ}\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\psi}{2}\right) = \text{εφ}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}-\frac{\psi}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\varphi}{2}-\frac{\psi}{2} = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}-\frac{\psi}{2} \Leftrightarrow \varphi = \kappa\pi + \frac{\pi}{2},\ \kappa\in\mathbf{Z} \Leftrightarrow$$

ημφ $\in \{-1, 1\}$. Ἀπὸ αὐτὸ καὶ τὸ μετασχηματισμὸ $(M_3)$, συνάγεται ὅτι:

$$\left|\frac{\alpha+\gamma}{\beta}\,\text{συν}\psi\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{(\alpha+\gamma)^2}{\beta^2}\,\text{συν}^2\psi = 1 \Leftrightarrow (\alpha+\gamma)^2\,\frac{1}{1+\text{εφ}^2\psi} = \beta^2.$$

Ἀπ' αὐτὴ καὶ τὸν $(M_2)$ ἔχουμε:

$$(\alpha+\gamma)^2\,\frac{1}{1+\dfrac{(\gamma-\alpha)^2}{\beta^2}} = \beta^2 \Leftrightarrow \beta^2 - 4\alpha\gamma = 0,$$

δηλαδὴ βρίσκουμε τὴ γνωστὴ ἀπὸ τὴν Ἄλγεβρα συνθήκη ὑπάρξεως διπλῆς ρίζας.

2) Ἡ γνωστὴ ἀπὸ τὴν Ἄλγεβρα μέθοδος γιὰ τὴ λύση τῆς δευτεροβάθμιας ἐξισώσεως (1), διαφέρει οὐσιαστικὰ ἀπὸ τὴ μέθοδο ποὺ ἐκθέσαμε παραπάνω, γιατὶ σ' αὐτὴ δὲ χρησιμοποιήσαμε τοὺς γνωστοὺς τύπους τῶν ριζῶν τῆς (1).

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Α' ΟΜΑΔΑ

1) Νὰ λυθοῦν οἱ παρακάτω ἐξισώσεις:

1) $\text{συν}\left(2\chi-\frac{\pi}{3}\right) = \text{συν}\,\frac{5\pi}{6}$

2) $\text{ημ}\left(\chi+\frac{\pi}{6}\right) = \text{ημ}\left(\frac{3\pi}{4}-2\chi\right)$

3) $\text{συν}\left(2\chi+\frac{\pi}{3}\right) = \text{συν}3\chi$

4) $4\text{ημ}^2\chi = 1$

5) $\text{συν}3\chi + 1 = 0$

6) $\text{εφ}\left(\chi+\frac{\pi}{3}\right) = -1$

7) $\text{συν}4\chi + \text{συν}\chi = 0$

8) $\text{συν}\left(2\chi-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{3}$

9) $4\text{ημ}^3\chi - 3\text{ημ}\chi = \frac{1}{2}$

10) $\text{συν}^2 4\chi - \text{ημ}^2 3\chi = 0$

11) $4\text{ημ}^2(2\chi-1) = 1$

12) $\text{εφ}\left(2\chi-\frac{\pi}{3}\right) = \text{σφ}3\chi.$

2) Νὰ λύσετε τὶς ἑπόμενες ἐξισώσεις :

1) $\varepsilon\varphi\left(\chi+\frac{\pi}{3}\right)=2\eta\mu\left(\chi+\frac{\pi}{3}\right)$

2) $\varepsilon\varphi\chi\ \varepsilon\varphi 2\chi=1$

3) $\varepsilon\varphi\left(\chi-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{3}\,\varepsilon\varphi\left(\frac{3\pi}{4}-\chi\right)$

4) $\varepsilon\varphi\left(\chi-\frac{\pi}{3}\right)=3\sigma\varphi\left(\chi-\frac{\pi}{3}\right)$

3) Νὰ λυθεῖ ὡς πρὸς χ ἡ ἐξίσωση : $|\eta\mu\chi|=\eta\mu\alpha\ (\eta\mu\alpha\geqslant 0)$

4) Νὰ λυθοῦν τὰ ἑπόμενα συστήματα :

1) $\begin{cases}\sigma\upsilon\nu\left(2\chi-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\\ -\pi\leqslant\chi\leqslant\pi\end{cases}$

2) $\begin{cases}\varepsilon\varphi\left(2\chi-\frac{\pi}{3}\right)=\sigma\varphi\chi\\ -\frac{\pi}{2}\leqslant\chi\leqslant\pi\end{cases}$

5) Νὰ λυθοῦν οἱ παρακάτω ἐξισώσεις :

1) $4\sigma\upsilon\nu^2\chi-2(1+\sqrt{3})\,\sigma\upsilon\nu\chi+\sqrt{3}=0$

2) $2\eta\mu^2\chi+\sqrt{3}\,\eta\mu\chi-3=0$

3) $3(1-\sigma\upsilon\nu\chi)=\eta\mu^2\chi$

4) $\varepsilon\varphi^2\chi+(\sqrt{3}-1)\varepsilon\varphi\chi-\sqrt{3}=0$

5) $\eta\mu 2\chi=\varepsilon\varphi\chi$

6) $\sigma\upsilon\nu 2\chi-4\sigma\upsilon\nu\chi-5=0$

7) $\varepsilon\varphi 2\chi=3\varepsilon\varphi\chi$

8) $\eta\mu 2\chi=\eta\mu^3\chi$

9) $2\eta\mu\chi\,\eta\mu 3\chi=1$

10) $5\eta\mu^2\chi-2\sigma\upsilon\nu^2\chi-3\eta\mu\chi\,\sigma\upsilon\nu\chi=0$

11) $\sigma\upsilon\nu 2\chi+(1+\sqrt{3})\,\eta\mu 2\chi-2\sqrt{3}\,\sigma\upsilon\nu^2\chi=1$

12) $\eta\mu 2\chi+\eta\mu 6\chi=2\eta\mu 4\chi$

13) $\eta\mu 3\chi+\sigma\upsilon\nu 3\chi=\eta\mu\chi+\sigma\upsilon\nu\chi$

14) $\sigma\upsilon\nu 2\chi-\sigma\upsilon\nu 3\chi+\eta\mu 5\chi=0$

15) $\eta\mu\chi+\eta\mu 3\chi=2\eta\mu 2\chi$

16) $\eta\mu\chi+\eta\mu 2\chi+\eta\mu 3\chi=0$

17) $\sigma\upsilon\nu\chi\,\sigma\upsilon\nu 7\chi=\sigma\upsilon\nu 3\chi\,\sigma\upsilon\nu 5\chi$

18) $\sigma\upsilon\nu\chi+\sigma\upsilon\nu 2\chi=2\eta\mu\chi\,\eta\mu 2\chi$

19) $2\,\sigma\upsilon\nu\frac{3\chi}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\chi}{2}=\sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}-\chi\right)$

6) Νὰ λύσετε τὶς ἐξισώσεις :

1) $\eta\mu\chi+\sqrt{3}\,\sigma\upsilon\nu\chi=\sqrt{2}$

2) $2\eta\mu\chi+3\sigma\upsilon\nu\chi=3$

3) $\sqrt{3}\,\eta\mu 2\chi+\sigma\upsilon\nu 2\chi=1$

4) $\eta\mu\chi-\sigma\upsilon\nu\chi=1$

5) $\eta\mu\chi+\sigma\upsilon\nu\chi=\sqrt{2}$

**Β' ΟΜΑΔΑ**

7) Νὰ λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις :

1) $\varepsilon\varphi 2\chi=\varepsilon\varphi\left(\psi+\frac{\pi}{4}\right)$

2) $\varepsilon\varphi\chi\varepsilon\varphi 2\psi=1$

3) $\eta\mu\left(\chi+\frac{\pi}{4}\right)+\sigma\upsilon\nu\left(\psi-\frac{\pi}{4}\right)=0$

8) Νὰ λυθοῦν καὶ διερευνηθοῦν οἱ παρακάτω ἐξισώσεις :

1) $\lambda\eta\mu^2\chi-2(\lambda-2)\eta\mu\chi+\lambda+2=0$

2) $\eta\mu 2\chi=\lambda\eta\mu 3\chi$

3) $(\mu-1)\eta\mu^2\chi-2(\mu+2)\eta\mu\chi-1=0$

4) $2\eta\mu^2\chi+2\eta\mu\chi\,\sigma\upsilon\nu\chi=\lambda$

5) $2\sigma\upsilon\nu^2\chi-\lambda\eta\mu 2\chi=-\lambda$

6) $\sigma\upsilon\nu\chi+\eta\mu\chi=\kappa\quad(\kappa\in\mathbf{Z})$

7) $(\lambda-1)\eta\mu\chi+(\lambda+1)\sigma\upsilon\nu 2\chi=2\lambda$

8) $\lambda(\eta\mu\chi+\sigma\upsilon\nu\chi)-\eta\mu\chi\,\sigma\upsilon\nu\chi=1$

9) Γιὰ ποιὲς τιμὲς τοῦ $\lambda\in\mathbf{R}$ ἡ ἐξίσωση $\sigma\upsilon\nu 2\chi+\lambda\eta\mu\chi+1=0$ ἔχει δύο μόνο λύσεις στὸ διάστημα $[0,\ 2\pi]$.

10) Νὰ λυθεῖ ἡ ἐξίσωση $ημ2ψ = συν\left(\frac{\pi}{4} - 3χ\right)$ καὶ ἔπειτα νὰ δείξετε ὅτι οἱ λύσεις της ἀποτελοῦν δύο οἰκογένειες παράλληλων εὐθειῶν. Νὰ γίνει γραφικὴ παράσταση τῶν δύο αὐτῶν οἰκογενειῶν.

11) Ἂν $χ \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$, νὰ λυθεῖ καὶ διερευνηθεῖ ἡ ἐξίσωση : $λημχ + συνχ = 1 - 3λ$.

12) Νὰ λυθεῖ ὡς πρὸς χ καὶ διερευνηθεῖ ἡ ἐξίσωση : $συν^2χ + συν^2(α - χ) = λ \quad (α, λ \in \mathbf{R})$.

13) Νὰ λυθοῦν οἱ ἑπόμενες ἐξισώσεις :

1) $εφ(πημχ) = σφ(πσυνχ)$
2) $ημ(πσυνχ) = συν(πημχ)$
3) $8\ συνχσυν2χ\ συν4χ = 1$
4) $ημ3χ = 4ημχ\ ημ2χημ4χ$
5) $εφ\left(\frac{\pi}{4} - χ\right) + εφ\left(\frac{\pi}{4} + χ\right) = \sqrt{\frac{8\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}}$
6) $8ημχ\ συν2χ\ συν4χ = 1$
7) $(ημχ + συνχ + εφχ)^3 = ημ^3χ + συν^3χ + εφ^3χ$
8) $συν7χ = 2ημχημ2χ(5 - 8συν^2χ)$
9) $(ημχ + συνχ)\left(1 + \frac{2}{ημ2χ}\right) + εφχ + σφχ + 2 = 0$
10) $ημχ + συνχ - ημχσυνχ = 1$
11) $ημχ + συν\frac{2χ}{3} = 2ημ^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{χ}{6}\right)$
12) $συνχ - ημχ + ημχ\ συνχ = 1$
13) $εφχ + εφ2χ + εφ3χ = 0$
14) $1 + συνχ + συν2χ + συν3χ = 0$
15) $2ημ^3χ = 3συνχ + συν3χ$
16) $εφχ = 2\sqrt{2}συν2χ - σφ2χ$
17) $2\ συν\frac{χ}{3} - ημ\frac{χ}{2} = 2$.

14) Νὰ λύσετε καὶ διερευνήσετε τὶς παρακάτω ἐξισώσεις :

1) $\sqrt{1 + συν^2χ} + \sqrt{1 + ημ^2χ} = \sqrt{λ}, \quad λ > 0$
2) $(ημχ + συνχ + λεφχ)^3 = ημ^3χ + συν^3χ + λ^3εφ^3χ$
3) $ημχ + συνχ + εφχ + σφχ + τεμχ + στεμχ = λ$
4) $ημ^3χ + συν^3χ = κ,\ κ \in \mathbf{Z}$ (Νὰ δείξετε πρῶτα ὅτι : $-1 \leqslant ημ^3χ + συν^3χ \leqslant 1$).
5) $εφ(αχ)\,εφ(βχ) = -1 \quad (α, β \in \mathbf{R})$

15) Νὰ βρεθοῦν τὰ τόξα μέσα στὸ διάστημα $[0, 2\pi]$, ποὺ ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωση :
$συν2χ = \sqrt{2}(συν^3χ + ημ^3χ - ημχσυν^2χ - συνχημ^2χ)$.

16) Νὰ βρεθεῖ ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, γιὰ νὰ ἔχει ἡ ἐξίσωση $μσυνχ - (2μ + 1)ημχ = μ$ δύο λύσεις $χ_1, χ_2$ $(χ_1 - χ_2 \neq 2κ\pi,\ κ \in \mathbf{Z})$ τέτοιες, ὥστε :

α) $\left|χ_1 - χ_2\right| = \frac{\pi}{2}$

β) $χ_1 + χ_2 = \frac{3\pi}{2}$.

17) Νὰ λυθεῖ ἡ ἐξίσωση : $συν(χ - ψ) + 3συν(χ + ψ) = 4$

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ

# ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

1. Ἕνα σύστημα ἐξισώσεων ποὺ ἔχει μιὰ τουλάχιστον τριγωνομετρικὴ ἐξίσωση λέγεται **τριγωνομετρικὸ σύστημα.** Ἡ λύση καὶ ἡ διερεύνηση ἑνὸς τριγωνομετρικοῦ συστήματος ἀνάγεται πάντοτε στὴ λύση καὶ στὴ διερεύνηση μιᾶς τριγωνομετρικῆς ἐξισώσεως. Δὲν ὑπάρχει μιὰ γενικὴ μέθοδος γιὰ τὴ λύση τῶν τριγωνομετρικῶν συστημάτων. Γι' αὐτὸ γιὰ τὴ λύση ἑνὸς τριγωνομετρικοῦ συστήματος ἐπιδιώκουμε πάντοτε νὰ βροῦμε ἕνα ἰσοδύναμό του ἀλγεβρικὸ γιὰ τὸν προσδιορισμὸ τῶν ἄγνωστων τόξων.

## 2. Συστήματα μὲ δύο ἄγνωστους

Στὰ ἑπόμενα ἀναφέρουμε μερικὲς βασικὲς κατηγορίες τριγωνομετρικῶν συστημάτων μὲ δύο ἄγνωστα τόξα.

**2.1. Ἡ μιὰ ἐξίσωση τοῦ συστήματος εἶναι ἀλγεβρική.** Τὰ κυριότερα συστήματα αὐτῆς τῆς κατηγορίας εἶναι τὰ παρακάτω :

$$(\mathrm{A})\quad \left\{\begin{array}{c} x+\varepsilon_1\psi=\alpha \\ \eta\mu x+\varepsilon_2\eta\mu\psi=\beta \end{array}\right\} \qquad \left\{\begin{array}{c} x+\varepsilon_1\psi=\alpha \\ \sigma\upsilon\nu x+\varepsilon_2\sigma\upsilon\nu\psi=\beta \end{array}\right\}$$

$$(\mathrm{B})\quad \left\{\begin{array}{c} x+\varepsilon_1\psi=\alpha \\ \eta\mu x\,\eta\mu\psi=\beta \end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{c} x+\varepsilon_1\psi=\alpha \\ \sigma\upsilon\nu x\,\sigma\upsilon\nu\psi=\beta \end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{c} x+\varepsilon_1\psi=\alpha \\ \sigma\upsilon\nu x\,\eta\mu\psi=\beta \end{array}\right\}$$

$$(\Gamma)\quad \left\{\begin{array}{c} x+\varepsilon_1\psi=\alpha \\ \varepsilon\varphi x\,\varepsilon\varphi\psi=\beta \end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{c} x+\varepsilon_1\psi=\alpha \\ \sigma\varphi x\,\sigma\varphi\psi=\beta \end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{c} x+\varepsilon_1\psi=\alpha \\ \varepsilon\varphi x\,\sigma\varphi\psi=\beta \end{array}\right\}$$

$$(\Delta)\quad \left\{\begin{array}{c} x+\varepsilon_1\psi=\alpha \\ \varepsilon\varphi x+\varepsilon_2\varepsilon\varphi\psi=\beta \end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{c} x+\varepsilon_1\psi=\alpha \\ \sigma\varphi x+\varepsilon_2\sigma\varphi\psi=\beta \end{array}\right\}$$

$$(\mathrm{E})\quad \left\{\begin{array}{c} x+\varepsilon_1\psi=\alpha \\ \dfrac{\eta\mu x}{\eta\mu\psi}=\beta \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{c} x+\varepsilon_1\psi=\alpha \\ \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu\psi}=\beta \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{c} x+\varepsilon_1\psi=\alpha \\ \dfrac{\varepsilon\varphi x}{\varepsilon\varphi\psi}=\beta \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{c} x+\varepsilon_1\psi=\alpha \\ \dfrac{\sigma\varphi x}{\sigma\varphi\psi}=\beta \end{array}\right\}.$$

Σὲ ὅλα τὰ παραπάνω συστήματα τὸ $\varepsilon_1$ καὶ $\varepsilon_2$ παίρνουν τὶς τιμὲς 1 ἢ −1 καὶ τὰ α, β εἶναι πραγματικοὶ ἀριθμοί.

Γιὰ τὴ λύση ἑνὸς ὁποιουδήποτε συστήματος αὐτῆς τῆς κατηγορίας ἐπιδιώκουμε συνήθως ἀπὸ τὴ δεύτερη ἐξίσωση τοῦ συστήματος νὰ βροῦμε τὸ ἄθροισμα ἢ τὴ διαφορὰ τῶν τόξων, ἐφόσον μᾶς δίνεται ἀντίστοιχα ἡ διαφορὰ ἢ τὸ ἄθροισμά τους.

**2.1.1. Λύση τοῦ συστήματος :** $\begin{cases} \chi + \psi = \alpha \\ \eta\mu\chi + \eta\mu\psi = \beta \end{cases}$ (Σ)

Ἔχουμε :

$$(\Sigma) \Leftrightarrow \left.\begin{cases} \chi + \psi = \alpha \\ 2\eta\mu\dfrac{\chi+\psi}{2}\,\sigma\upsilon\nu\,\dfrac{\chi-\psi}{2} = \beta \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi + \psi = \alpha \\ 2\eta\mu\dfrac{\alpha}{2}\,\sigma\upsilon\nu\,\dfrac{\chi-\psi}{2} = \beta. \end{cases} \quad (1)$$

Γιὰ τὴ λύση τῆς (1) διακρίνουμε τὶς παρακάτω περιπτώσεις :

1) Ἂν $\eta\mu\dfrac{\alpha}{2} \neq 0$ ( $\Leftrightarrow \alpha \neq 2\rho\pi,\ \rho\in\mathbb{Z}$), τότε ἡ (1) γράφεται :

$$\sigma\upsilon\nu\frac{\chi-\psi}{2} = \frac{\beta}{2\eta\mu\dfrac{\alpha}{2}}. \quad (2)$$

Ἡ (2) εἶναι μιὰ θεμελιώδης ἐξίσωση καὶ ἔχει λύση τότε καὶ μόνο τότε, ὅταν : $\left|\dfrac{\beta}{2\eta\mu\dfrac{\alpha}{2}}\right| \leqslant 1$. Στὴν περίπτωση αὐτὴ ὑπάρχει τόξο φ μὲ $\sigma\upsilon\nu\varphi = \dfrac{\beta}{2\eta\mu\dfrac{\alpha}{2}}$ καὶ ἑπομένως ἡ (2) γράφεται :

$$\sigma\upsilon\nu\frac{\chi-\psi}{2} = \sigma\upsilon\nu\varphi \Leftarrow \begin{cases} \chi - \psi = 4\kappa\pi + 2\varphi, & \kappa\in\mathbb{Z} \\ \chi - \psi = 4\lambda\pi - 2\varphi, & \lambda\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ἄρα, τὸ σύστημα (Σ) εἶναι ἰσοδύναμο μὲ τὰ ἑπόμενα ἀλγεβρικὰ συστήματα ποὺ λύνονται εὔκολα :

$$\begin{cases} \chi + \psi = \alpha \\ \chi - \psi = 4\kappa\pi + 2\varphi \end{cases}, \qquad \begin{cases} \chi + \psi = \alpha \\ \chi - \psi = 4\lambda\pi - 2\varphi \end{cases}$$

Ὥστε μὲ $\alpha \neq 2\rho\pi$ ($\rho\in\mathbb{Z}$) τὸ σύστημα (Σ) ἔχει τὶς λύσεις τῶν παραπάνω ἀλγεβρικῶν συστημάτων ποὺ εἶναι :

$$\chi = 2\kappa\pi + \varphi + \frac{\alpha}{2}, \qquad \psi = -2\kappa\pi - \varphi + \frac{\alpha}{2} \quad \text{καὶ}$$

$$\chi = 2\lambda\pi - \varphi + \frac{\alpha}{2}, \qquad \psi = -2\lambda\pi + \varphi + \frac{\alpha}{2}.$$

2) Ἂν $\eta\mu\frac{\alpha}{2} = 0$ ( $\Leftrightarrow$ $\alpha = 2\rho\pi$, $\rho \in \mathbf{Z}$), τότε γιὰ τὴ λύση τῆς (1) διακρίνουμε τὶς περιπτώσεις :

ι) Ἂν $\beta \neq 0$, τότε ἡ ἐξίσωση (1) εἶναι ἀδύνατη καὶ συνεπῶς τὸ σύστημα (Σ) εἶναι ἀδύνατο.

ιι) Ἂν $\beta = 0$, τότε ἡ (1) εἶναι ἀόριστη, δηλαδὴ ἐπαληθεύεται γιὰ ὁποιαδήποτε διαφορὰ $\chi - \psi$. Ἄρα, μὲ $\alpha = 2\rho\pi$ ($\rho \in \mathbf{Z}$) καὶ $\beta = 0$, τὸ σύστημα (Σ) εἶναι ἀόριστο καὶ ἡ λύση του εἶναι : $\chi = \theta$, $\psi = \alpha - \theta$ (θ τυχαῖο τόξο).

Ὅμοια λύνονται τὰ ὑπόλοιπα συστήματα τῆς ὁμάδας (Α).

**Παρατήρηση.** Ἀπὸ τὰ παραπάνω φαίνεται ὅτι γιὰ νὰ ἔχει λύση τὸ σύστημα (Σ) (βλ. 2.2.1) ἡ συνθήκη εἶναι : $\beta^2 \leqslant 4\eta\mu^2\frac{\alpha}{2}$. Τὴ συνθήκη αὐτὴ μποροῦμε νὰ τὴ βροῦμε καὶ ὡς ἑξῆς: Ἀπὸ τὴν πρώτη ἐξίσωση τοῦ συστήματος (Σ) ἔχουμε $\psi = \alpha - \chi$, ὁπότε ἡ δεύτερη ἐξίσωση γράφεται :

$$\eta\mu\chi + \eta\mu(\alpha-\chi) = \beta \Leftrightarrow (1-\sigma\upsilon\nu\alpha)\eta\mu\chi + \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\chi = \beta \quad (\varepsilon).$$

Ἡ ἐξίσωση ὅμως (ε) εἶναι γραμμικὴ (βλ. 3.4) καὶ λύνεται ὅταν καὶ μόνο ὅταν :

$$(1-\sigma\upsilon\nu\alpha)^2 + \eta\mu^2\alpha \geqslant \beta^2 \Leftrightarrow 1 + \sigma\upsilon\nu^2\alpha - 2\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu^2\alpha \geqslant \beta^2 \Leftrightarrow$$

$$2(1-\sigma\upsilon\nu\alpha) \geqslant \beta^2 \Leftrightarrow 4\eta\mu^2\frac{\alpha}{2} \geqslant \beta^2.$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.** Νὰ λυθεῖ τὸ σύστημα : $\begin{cases} \chi - \psi = \dfrac{\pi}{3} \\ \eta\mu\chi - \eta\mu\psi = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

**Λύση.** Τὸ σύστημα ἰσοδύναμα γράφεται :

$$\left.\begin{cases} \chi - \psi = \dfrac{\pi}{3} \\ 2\eta\mu\dfrac{\chi-\psi}{2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{\chi+\psi}{2} = \dfrac{1}{2} \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} \chi - \psi = \dfrac{\pi}{3} \\ 2\eta\mu\dfrac{\pi}{6}\sigma\upsilon\nu\dfrac{\chi+\psi}{2} = \dfrac{1}{2} \end{cases}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{cases} \chi - \psi = \dfrac{\pi}{3} \\ \sigma\upsilon\nu\chi\dfrac{\chi-\psi}{2} = \dfrac{1}{2} \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi - \psi = \dfrac{\pi}{3} \\ \chi + \psi = 4\kappa\pi + \dfrac{2\pi}{3}, \chi+\psi = 4\rho\pi - \dfrac{2\pi}{3} \end{cases} (\kappa, \rho \in \mathbf{Z})$$

Ἄρα ἔχουμε νὰ λύσουμε τὰ παρακάτω ἁπλὰ ἀλγεβρικὰ συστήματα :

$$\left.\begin{cases} \chi - \psi = \dfrac{\pi}{3} \\ \chi + \psi = 4\kappa\pi + \dfrac{2\pi}{3} \end{cases}\right\}, \qquad \left.\begin{cases} \chi - \psi = \dfrac{\pi}{3} \\ \chi + \psi = 4\rho\pi - \dfrac{2\pi}{3} \end{cases}\right\} \quad (\kappa, \rho \in \mathbf{Z})$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.** Νὰ λυθεῖ τὸ σύστημα: $\begin{cases} \chi + \psi = 3\pi \\ \eta\mu\chi + \eta\mu\psi = 1 \end{cases}$ (Σ)

**Λύση.** Ἔχουμε:

$$(\Sigma) \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \psi = 3\pi - \chi \\ \eta\mu\chi + \eta\mu(3\pi - \chi) = 1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \psi = 3\pi - \chi \\ \eta\mu\chi + \eta\mu\chi = 1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{matrix} \psi = 3\pi - \chi \\ \eta\mu\chi = \frac{1}{2} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} \psi = 3\pi - \chi \\ \chi = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}, \ \chi = (2\rho + 1)\pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \quad (\kappa, \rho \in \mathbf{Z}).$$

Ἄρα ἡ λύση τοῦ συστήματος εἶναι:

$$\chi = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}, \ \psi = -2\kappa\pi + \frac{17\pi}{6} \quad (\kappa \in \mathbf{Z})$$

$$\chi = 2\rho\pi + \frac{5\pi}{6}, \ \psi = -2\rho\pi + \frac{13\pi}{6} \quad (\rho \in \mathbf{Z})$$

### 2.1.2. Λύση τοῦ συστήματος: $\begin{cases} \chi + \psi = \alpha \\ \eta\mu\chi\eta\mu\psi = \beta \end{cases}$ (Σ)

Εἶναι:

$$(\Sigma) \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \chi + \psi = \alpha \\ \sigma\upsilon\nu(\chi - \psi) - \sigma\upsilon\nu(\chi + \psi) = 2\beta \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi + \psi = \alpha \\ \sigma\upsilon\nu(\chi - \psi) = 2\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha. \end{cases} \quad (1)$$

Ἡ (1) ἔχει λύση, ὅταν καὶ μόνο ὅταν: $|2\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha| \leqslant 1$. Ἐφόσον ἡ τελευταία συνθήκη ἱκανοποιεῖται, τότε ὑπάρχει τόξο φ τέτοιο, ὥστε $\sigma\upsilon\nu\varphi = 2\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha$ καὶ ἑπομένως ἡ ἐξίσωση (1) γράφεται: $\sigma\upsilon\nu(\chi - \psi) = \sigma\upsilon\nu\varphi$. Ἡ λύση αὐτῆς τῆς ἐξισώσεως εἶναι: $\chi - \psi = 2\kappa\pi + \varphi$ ἢ $\chi - \psi = 2\rho\pi - \varphi$ ($\kappa, \rho \in \mathbf{Z}$). Ἄρα ἡ λύση τοῦ (Σ) εἶναι οἱ λύσεις τῶν παρακάτω ἀλγεβρικῶν συστημάτων:

$$\left\{\begin{matrix} \chi + \psi = \alpha \\ \chi - \psi = 2\kappa\pi + \varphi \end{matrix}\right\} (\Sigma_1), \quad \left\{\begin{matrix} \chi + \psi = \alpha \\ \chi - \psi = 2\rho\pi - \varphi \end{matrix}\right\} (\Sigma_2)$$

Εὔκολα λύνουμε τὰ $(\Sigma_1)$, $(\Sigma_2)$ καὶ βρίσκουμε:

$$\chi = \kappa\pi + \frac{\varphi}{2} + \frac{\alpha}{2}, \ \psi = -\kappa\pi - \frac{\varphi}{2} + \frac{\alpha}{2} \ \text{καὶ} \ \chi = \rho\pi - \frac{\varphi}{2} + \frac{\alpha}{2}, \ \psi = -\rho\pi + \frac{\varphi}{2} + \frac{\alpha}{2}.$$

Ὅμοια λύνονται τὰ ὑπόλοιπα συστήματα τῆς ὁμάδας (Β).

**Παρατήρηση:** Ἡ συνθήκη $|2\beta + \text{συν}\alpha| \leqslant 1$, ποὺ βρήκαμε παραπάνω, μπορεῖ νὰ γραφεῖ καὶ ὡς ἑξῆς:

$$-1 \leqslant 2\beta + \text{συν}\alpha \leqslant 1 \Leftrightarrow -1 - \text{συν}\alpha \leqslant 2\beta \leqslant 1 - \text{συν}\alpha \Leftrightarrow$$

$$-\text{συν}^2\frac{\alpha}{2} \leqslant \beta \leqslant \text{ημ}^2\frac{\alpha}{2}.$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.** Νὰ λυθεῖ τὸ σύστημα: $\left\{\begin{array}{l} \chi + \psi = \dfrac{\pi}{3} \\ \text{ημ}\chi\,\text{ημ}\psi = \dfrac{1}{4} \end{array}\right. \quad (\Sigma)$

**Λύση.** Τὸ σύστημα (Σ) γράφεται:

$$(\Sigma) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \chi + \psi = \dfrac{\pi}{3} \\ \text{συν}(\chi - \psi) - \text{συν}(\chi + \psi) = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \chi + \psi = \dfrac{\pi}{3} \\ \text{συν}(\chi - \psi) = 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} \chi + \psi = \dfrac{\pi}{3} \\ \chi - \psi = 2\kappa\pi, \ \kappa \in \mathbf{Z} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \chi = \kappa\pi + \dfrac{\pi}{6} \\ \psi = -\kappa\pi + \dfrac{\pi}{6} \end{array}\right. \quad (\kappa \in \mathbf{Z})$$

**2.1.3. Λύση τοῦ συστήματος:** $\left\{\begin{array}{l} \chi + \psi = \alpha \\ \text{εφ}\chi\ \text{εφ}\psi = \beta \left( \chi, \psi \neq \kappa\pi + \dfrac{\pi}{2}, \ \kappa \in \mathbf{Z} \right) \end{array}\right. \ (\Sigma)$

Ἡ δεύτερη ἐξίσωση τοῦ συστήματος γίνεται: $\dfrac{\text{ημ}\chi\text{ημ}\psi}{\text{συν}\chi\text{συν}\psi} = \beta \quad (1)$

1) Ἂν $\beta \neq 1$, τότε ἀπὸ τὴν (1) ἔχουμε:

$$\frac{\text{συν}\chi\text{συν}\psi + \text{ημ}\chi\text{ημ}\psi}{\text{συν}\chi\text{συν}\psi - \text{ημ}\chi\text{ημ}\psi} = \frac{1+\beta}{1-\beta} \Leftrightarrow \frac{\text{συν}(\chi - \psi)}{\text{συν}(\chi + \psi)} = \frac{1+\beta}{1-\beta}.$$

$$(\Sigma) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \chi + \psi = \alpha \\ \dfrac{\text{συν}(\chi - \psi)}{\text{συν}(\chi + \psi)} = \dfrac{1+\beta}{1-\beta} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \chi + \psi = \alpha \\ \text{συν}\,(\chi - \psi) = \dfrac{1+\beta}{1-\beta}\,\text{συν}\alpha. \end{array}\right. \quad (2)$$

Ἂν ἡ θεμελιώδης ἐξίσωση (2) λύνεται, βρίσκουμε τὴ διαφορὰ $\chi - \psi$ καὶ τὸ σύστημα εἶναι ἁπλό. Ἡ (2) λύνεται, ὅταν καὶ μόνο ὅταν:

$$\left| \frac{1+\beta}{1-\beta}\,\text{συν}\alpha \right| \leqslant 1$$

2) Ἂν $\beta = 1$, τότε ἡ δεύτερη ἐξίσωση τοῦ (Σ) γράφεται:

$$\text{εφ}\chi\text{εφ}\psi = 1 \Leftrightarrow \text{εφ}\chi = \text{σφ}\psi \Leftrightarrow \text{εφ}\chi = \text{εφ}\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) \Leftrightarrow$$

$$\chi = \kappa\pi + \frac{\pi}{2} - \psi,\ \kappa \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow \chi + \psi = \kappa\pi + \frac{\pi}{2},\ \kappa \in \mathbf{Z}.$$

Ἄρα, ἔχουμε νὰ λύσουμε τὸ σύστημα:

$$\begin{cases} \chi + \psi = \alpha \\ \chi + \psi = \kappa\pi + \dfrac{\pi}{2} \quad (\kappa \in \mathbf{Z}) \end{cases}$$

Τὸ σύστημα τοῦτο εἶναι ἀδύνατο, ὅταν $\alpha \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ γιὰ κάθε $\kappa \in \mathbf{Z}$ καὶ ἔχει λύση μόνο ὅταν ὑπάρχει $\kappa_0 \in \mathbf{Z}$ τέτοιος, ὥστε $\alpha = \kappa_0\pi + \frac{\pi}{2}$. Ἡ λύση τοῦ συστήματος εἶναι: $\chi = \theta,\ \psi = \kappa_0\pi + \frac{\pi}{2} - \theta$, ὅπου θ τυχαῖο τόξο.

Τονίζουμε ἀκόμα πὼς στὴ λύση τοῦ συστήματος ὑπάρχει ὁ περιορισμὸς $\chi, \psi \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2},\ \kappa \in \mathbf{Z}$. Γι' αὐτὸ θὰ πρέπει στὴν παραπάνω λύση νὰ εἶναι $\theta \neq \rho\pi,\ \rho \in \mathbf{Z}$.

Ὅμοια λύνονται καὶ τὰ ὑπόλοιπα συστήματα τῆς ὁμάδας (Γ).

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.** Νὰ λυθεῖ τὸ σύστημα: $\begin{cases} \chi + \psi = \dfrac{\pi}{3} \\ \varepsilon\varphi\chi\,\varepsilon\varphi\psi = 3 \end{cases}$ (Σ)

**Λύση.** Τὸ (Σ) γράφεται:

$$(\Sigma) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \chi + \psi = \dfrac{\pi}{3} \\ \dfrac{\eta\mu\chi\,\eta\mu\psi}{\sigma\upsilon\nu\chi\,\sigma\upsilon\nu\psi} = 3 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \chi + \psi = \dfrac{\pi}{3} \\ \dfrac{\sigma\upsilon\nu\chi\,\sigma\upsilon\nu\psi + \eta\mu\chi\,\eta\mu\psi}{\sigma\upsilon\nu\chi\,\sigma\upsilon\nu\psi - \eta\mu\chi\,\eta\mu\psi} = \dfrac{1+3}{1-3} \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi + \psi = \dfrac{\pi}{3} \\ \dfrac{\sigma\upsilon\nu(\chi-\psi)}{\sigma\upsilon\nu(\chi+\psi)} = -2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \chi + \psi = \dfrac{\pi}{3} \\ \sigma\upsilon\nu(\chi-\psi) = -1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \chi + \psi = \dfrac{\pi}{3} \\ \chi - \psi = 2\kappa\pi + \pi,\ \kappa \in \mathbf{Z}. \end{array} \right.$$

Τὸ τελευταῖο σύστημα εἶναι ἀλγεβρικὸ καὶ λύνεται εὔκολα.

**2.1.4. Λύση τοῦ συστήματος:** $\begin{cases} \chi + \psi = \alpha \\ \varepsilon\varphi\chi + \varepsilon\varphi\psi = \beta\ \left(\chi,\psi \neq \kappa\pi + \dfrac{\pi}{2},\ \kappa \in \mathbf{Z}\right) \end{cases}$ (Σ)

Ἔχουμε :

$$(\Sigma) \Leftrightarrow \begin{cases} \chi+\psi=\alpha \\ \dfrac{\eta\mu(\chi+\psi)}{\sigma\upsilon\nu\chi\sigma\upsilon\nu\psi}=\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi+\psi=\alpha \\ \beta\sigma\upsilon\nu\chi\sigma\upsilon\nu\psi=\eta\mu\alpha \quad (1) \end{cases}$$

1) Ἂν $\beta \neq 0$, τότε ἡ (1) γράφεται $\sigma\upsilon\nu\chi\sigma\upsilon\nu\psi=\dfrac{\eta\mu\alpha}{\beta}$. Ἐπομένως ἔχουμε τὸ σύστημα :

$$\begin{cases} \chi+\psi=\alpha \\ \sigma\upsilon\nu\chi\sigma\upsilon\nu\psi=\dfrac{\eta\mu\alpha}{\beta}, \end{cases}$$

ποὺ λύνεται ὅμοια μὲ τὸ 2.1.2.

2) Ἂν $\beta=0$, τότε ἀπὸ τὴ δεύτερη ἐξίσωση τοῦ (Σ) συνάγεται :

$$\varepsilon\varphi\chi+\varepsilon\varphi\psi=0 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\chi=-\varepsilon\varphi\psi \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\chi=\varepsilon\varphi(-\psi) \Leftrightarrow$$
$$\chi=\lambda\pi-\psi,\ \lambda\in\mathbf{Z} \Leftrightarrow \chi+\psi=\lambda\pi$$

Ἄρα, ἔχουμε νὰ λύσουμε τὸ σύστημα :

$$\begin{cases} \chi+\psi=\alpha \\ \chi+\psi=\lambda\pi \end{cases}$$

Τὸ τελευταῖο σύστημα ἔχει λύση, ὅταν καὶ μόνο ὅταν ὑπάρχει $\lambda_0\in\mathbf{Z}$ τέτοιο, ὥστε $\alpha=\lambda_0\pi$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.** Νὰ λυθεῖ τὸ σύστημα : $\begin{cases} \chi+\psi=\dfrac{\pi}{2} \\ \varepsilon\varphi\chi+\varepsilon\varphi\psi=2 \end{cases} \quad (\Sigma)$

**Λύση.** Τὸ σύστημα γράφεται :

$$(\Sigma) \Leftrightarrow \begin{cases} \chi+\psi=\dfrac{\pi}{2} \\ \eta\mu(\chi+\psi)=2\sigma\upsilon\nu\chi\sigma\upsilon\nu\psi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi+\psi=\dfrac{\pi}{2} \\ 1=2\sigma\upsilon\nu\chi\sigma\upsilon\nu\psi \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \chi+\psi=\dfrac{\pi}{2} \\ \sigma\upsilon\nu(\chi-\psi)+\sigma\upsilon\nu(\chi+\psi)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi+\psi=\dfrac{\pi}{2} \\ \sigma\upsilon\nu(\chi-\psi)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi+\psi=\dfrac{\pi}{2} \\ \chi-\psi=2\kappa\pi,\ \kappa\in\mathbf{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \chi=\kappa\pi+\dfrac{\pi}{4} \\ \psi=-\kappa\pi+\dfrac{\pi}{4} \end{cases} \quad (\kappa\in\mathbf{Z}).$$

**2.1.5. Λύση τοῦ συστήματος :** $\begin{cases} \chi + \psi = \alpha \\ \varepsilon\varphi\chi - \varepsilon\varphi\psi = \beta \ (\chi, \psi \neq \mu\pi + \frac{\pi}{2}, \mu \in \mathbf{Z}) \end{cases}$ (Σ)

Εἶναι :

$$(\Sigma) \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \chi + \psi = \alpha \\ \dfrac{\eta\mu(\chi - \psi)}{\sigma\upsilon\nu\chi\sigma\upsilon\nu\psi} = \beta \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \chi + \psi = \alpha \\ \eta\mu(\chi - \psi) = \beta\sigma\upsilon\nu\chi\sigma\upsilon\nu\psi \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} \chi + \psi = \alpha \\ 2\eta\mu(\chi - \psi) = \beta[(\sigma\upsilon\nu(\chi - \psi) + \sigma\upsilon\nu(\chi + \psi)] \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \chi + \psi = \alpha \\ 2\eta\mu(\chi - \psi) = \beta\sigma\upsilon\nu(\chi - \psi) + \\ + \beta\sigma\upsilon\nu\alpha \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \chi + \psi = \alpha \\ 2\eta\mu(\chi - \psi) - \beta\sigma\upsilon\nu(\chi - \psi) = \beta\sigma\upsilon\nu\alpha. \end{cases} \quad (1)$$

῾Η ἐξίσωση (1) εἶναι γραμμικὴ ὡς πρὸς χ—ψ καὶ ἑπομένως λύνεται μὲ τοὺς γνωστοὺς τρόπους. Τὸ σύστημα (Σ) ἔχει λύση, ὅταν καὶ μόνο ὅταν ἡ ἐξίσωση (1) ἔχει λύση. ῾Η ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη γιὰ νὰ ἔχει λύση ἡ (1) εἶναι :

$$4 + \beta^2 \geqslant \beta^2\sigma\upsilon\nu^2\alpha \Leftrightarrow 4 + \beta^2(1 - \sigma\upsilon\nu^2\alpha) \geqslant 0 \Leftrightarrow 4 + \beta^2\eta\mu^2\alpha \geqslant 0$$

᾿Επειδὴ ὅμως ἡ τελευταία συνθήκη ἱκανοποιεῖται πάντοτε, τὸ παραπάνω σύστημα (Σ) ἔχει πάντοτε λύση.

῞Ομοια μὲ τὴ λύση τῶν δύο παραπάνω συστημάτων 2.1.4. καὶ 2.1.5 εἶναι καὶ ἡ λύση τῶν ὑπόλοιπων συστημάτων τῆς ὁμάδας (Δ).

**2.1.6. Λύση τοῦ συστήματος :** $\begin{cases} \chi + \psi = \alpha \\ \dfrac{\eta\mu\chi}{\eta\mu\psi} = \beta \quad (\psi \neq \rho\pi, \rho \in \mathbf{Z}) \end{cases}$ (Σ)

1) Ἂν $\beta \neq 1$, τότε ἀπὸ τὴ δεύτερη ἐξίσωση τοῦ συστήματος (Σ), ἔχουμε:

$$\frac{\eta\mu\chi + \eta\mu\psi}{\eta\mu\chi - \eta\mu\psi} = \frac{\beta + 1}{\beta - 1} \Leftrightarrow \frac{2\eta\mu\dfrac{\chi + \psi}{2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{\chi - \psi}{2}}{2\eta\mu\dfrac{\chi - \psi}{2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{\chi + \psi}{2}} = \frac{\beta - 1}{\beta + 1} \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon\varphi\frac{\chi + \psi}{2}\sigma\varphi\frac{\chi - \psi}{2} = \frac{\beta + 1}{\beta - 1}.$$

Ἄρα, τὸ σύστημα γράφεται :

$$(\Sigma) \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \chi + \psi = \alpha \\ \varepsilon\varphi\dfrac{\chi + \psi}{2}\sigma\varphi\dfrac{\chi - \psi}{2} = \dfrac{\beta + 1}{\beta - 1} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi + \psi = \alpha \\ \varepsilon\varphi\dfrac{\alpha}{2}\sigma\varphi\dfrac{\chi - \psi}{2} = \dfrac{\beta + 1}{\beta - 1}. \end{cases} \quad (1)$$

ι) Ἂν εφ $\dfrac{\alpha}{2} \neq 0$ ($\Leftrightarrow \alpha \neq 2\kappa\pi, \kappa \in \mathbf{Z}$), τότε ἡ (1) γράφεται σφ $\dfrac{\chi-\psi}{2} = \dfrac{\beta+1}{\beta-1}\cdot$ σφ $\dfrac{\alpha}{2}$ καὶ τὸ σύστημα λύνεται εὔκολα.

ιι) Ἂν εφ $\dfrac{\alpha}{2} = 0$ ($\Leftrightarrow \alpha = 2\kappa\pi, \kappa \in \mathbf{Z}$), τότε, ἡ (1) εἶναι ἀδύνατη, ἐφόσον $\beta \neq -1$, καὶ ἀόριστη, ἐφόσον $\beta = -1$. Στὴν τελευταία περίπτωση εἶναι $\chi - \psi = \theta$, ὅπου θ τυχαῖο τόξο μὲ $\theta \neq 2\rho\pi$, $\rho \in \mathbf{Z}$, ὁπότε ἔχουμε νὰ λύσουμε τὸ ἁπλὸ ἀλγεβρικὸ σύστημα:

$$\begin{cases} \chi + \psi = \alpha \\ \chi - \psi = \theta. \end{cases}$$

2) Ἂν $\beta = 1$, τότε ἡ δεύτερη ἐξίσωση τοῦ (Σ) γίνεται:

$$\frac{\eta\mu\chi}{\eta\mu\psi} = 1 \Leftrightarrow \eta\mu\chi = \eta\mu\psi \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = 2\kappa\pi + \psi & , \ \kappa \in \mathbf{Z} \\ \chi = (2\lambda+1)\pi - \psi, & \lambda \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Ἄρα, ἔχουμε νὰ λύσουμε τὰ ἁπλὰ ἀλγεβρικὰ συστήματα:

$$\left\{\begin{matrix} \chi + \psi = \alpha \\ \chi - \psi = 2\kappa\pi \end{matrix}\right\} \quad \text{καὶ} \quad \left\{\begin{matrix} \chi + \psi = \alpha \\ \chi + \psi = 2\lambda\pi + \pi \end{matrix}\right\}$$

Ὅμοια μὲ τὸ παραπάνω σύστημα 2.1.6 λύνονται καὶ τὰ ὑπόλοιπα συστήματα τῆς ὁμάδας (Ε).

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.** Νὰ λυθεῖ τὸ σύστημα:

$$\begin{cases} \chi - \psi = \dfrac{\pi}{3} \\ \dfrac{\sigma\upsilon\nu\chi}{\sigma\upsilon\nu\psi} = 2 \end{cases} \qquad (\Sigma)$$

**Λύση.** Τὸ σύστημα (Σ) γράφεται:

$$(\Sigma) \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} \chi - \psi = \dfrac{\pi}{3} \\ \dfrac{\sigma\upsilon\nu\chi + \sigma\upsilon\nu\psi}{\sigma\upsilon\nu\chi - \sigma\upsilon\nu\psi} = \dfrac{2+1}{2-1} \end{matrix}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} \chi - \psi = \dfrac{\pi}{3} \\ \dfrac{2\sigma\upsilon\nu\dfrac{\chi+\psi}{2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{\chi-\psi}{2}}{2\eta\mu\dfrac{\chi+\psi}{2}\eta\mu\dfrac{\psi-\chi}{2}} = 3 \end{matrix}\right] \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{matrix} \chi - \psi = \dfrac{\pi}{3} \\ -\sigma\varphi\dfrac{\chi+\psi}{2}\sigma\varphi\dfrac{\chi-\psi}{3} = 3 \end{matrix}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} \chi - \psi = \dfrac{\pi}{3} \\ \sigma\varphi\dfrac{\chi+\psi}{2} = -\sqrt{3} \end{matrix}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \chi-\psi=\dfrac{\pi}{3} \\ \chi+\psi=\kappa\pi-\dfrac{\pi}{3},\ \kappa\in\mathbf{Z} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \chi=\dfrac{\kappa\pi}{2} \\ \psi=\dfrac{\kappa\pi}{2}-\dfrac{\pi}{3}. \end{array}\right. \quad (\kappa\in\mathbf{Z})$$

**2.2. Συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὰ τόξα.** Μερικὰ συστήματα αὐτῆς τῆς κατηγορίας εἶναι τὰ ἀκόλουθα:

$$\left\{\begin{array}{l} \eta\mu\chi+\eta\mu\psi=\alpha \\ \sigma\upsilon\nu\chi\sigma\upsilon\nu\psi=\beta \end{array}\right\},\ \left\{\begin{array}{l} \eta\mu\chi\eta\mu\psi=\alpha \\ \sigma\upsilon\nu\chi+\sigma\upsilon\nu\psi=\beta \end{array}\right\},\ \left\{\begin{array}{l} \eta\mu\chi\mu\eta\psi=\alpha \\ \eta\mu\chi+\eta\mu\psi=\beta \end{array}\right\},$$

$$\left\{\begin{array}{l} \sigma\upsilon\nu\chi\sigma\upsilon\nu\psi=\alpha \\ \sigma\upsilon\nu\chi+\sigma\upsilon\nu\psi=\beta \end{array}\right\},\ \left\{\begin{array}{l} \varepsilon\varphi\chi+\varepsilon\varphi\psi=\alpha \\ \varepsilon\varphi2\chi+\varepsilon\varphi2\psi=\beta \end{array}\right\},\ \left\{\begin{array}{l} \varepsilon\varphi\chi+\varepsilon\varphi\psi=\alpha \\ \sigma\upsilon\nu\chi\sigma\upsilon\nu\psi=\beta \end{array}\right\} \text{ κ.λ.π.}$$

Γιὰ νὰ λύσουμε ἕνα συμμετρικὸ σύστημα, προσπαθοῦμε νὰ τὸ μετασχηματίσουμε μὲ τρόπο, ὥστε νὰ ἐμφανιστοῦν τὰ τόξα $\chi+\psi$, $\chi-\psi$.

**2.2.1. Λύση τοῦ συστήματος:** $\left\{\begin{array}{l} \sigma\upsilon\nu\chi\sigma\upsilon\nu\psi=\alpha \\ \eta\mu\chi\eta\mu\psi=\beta \end{array}\right\}$ $(\Sigma)$

Ἔχουμε:

$$(\Sigma) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \sigma\upsilon\nu\chi\sigma\upsilon\nu\psi+\eta\mu\chi\eta\mu\psi=\alpha+\beta \\ \sigma\upsilon\nu\chi\sigma\upsilon\nu\psi-\eta\mu\chi\eta\mu\psi=\alpha-\beta \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \sigma\upsilon\nu(\chi-\psi)=\alpha+\beta \\ \sigma\upsilon\nu(\chi+\psi)=\alpha-\beta \end{array}\right\}.$$

Τὸ τελευταῖο σύστημα ἔχει λύση, ἂν καὶ μόνο ἄν: $|\alpha+\beta|\leqslant 1$, $|\alpha-\beta|\leqslant 1$. Στὴν περίπτωση αὐτὴ ὑπάρχουν τόξα $\varphi_1, \varphi_2\in[0,\pi]$ τέτοια, ὥστε: $\sigma\upsilon\nu\varphi_1=\alpha+\beta$, $\sigma\upsilon\nu\varphi_2=\alpha-\beta$ καὶ ἑπομένως τὸ σύστημα γράφεται:

$$\begin{array}{l} \sigma\upsilon\nu(\chi+\psi)=\sigma\upsilon\nu\varphi_1 \\ \sigma\upsilon\nu(\chi-\psi)=\sigma\upsilon\nu\varphi_2 \end{array} \quad (\Sigma_1).$$

Τὸ $(\Sigma_1)$ εἶναι ἰσοδύναμο μὲ τὰ ἑπόμενα ἀλγεβρικὰ συστήματα:

$$\left\{\begin{array}{l} \chi-\psi=2\kappa\pi+\varphi_1 \\ \chi+\psi=2\rho\pi+\varphi_2 \end{array}\right\},\ \left\{\begin{array}{l} \chi-\psi=2\lambda\pi-\varphi_1 \\ \chi+\psi=2\rho\pi+\varphi_2 \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \chi-\psi=2\kappa\pi+\varphi_1 \\ \chi+\psi=2\mu\pi+\varphi_2 \end{array}\right\},\ \left\{\begin{array}{l} \chi-\psi=2\lambda\pi-\varphi_1 \\ \chi+\psi=2\mu\pi-\varphi_2 \end{array}\right\}.$$

Ἡ λύση τῶν παραπάνω ἀλγεβρικῶν συστημάτων εἶναι εὔκολη.

**2.2.2. Λύση τοῦ συστήματος:** $\left\{\begin{array}{l} \sigma\upsilon\nu\chi+\sigma\upsilon\nu\psi=\alpha \\ \sigma\upsilon\nu2\chi+\sigma\upsilon\nu2\psi=\beta. \end{array}\right.$ $(\Sigma)$

Ἂν θέσουμε $\sigma\upsilon\nu\chi=\omega$ καὶ $\sigma\upsilon\nu\psi=\varphi$, τὸ σύστημα $(\Sigma)$ ἀνάγεται στὴ λύση τοῦ συμμετρικοῦ ἀλγεβρικοῦ συστήματος:

$$\left\{\begin{array}{l}\omega+\varphi=\alpha\\ 2\omega^2-1+2\varphi^2-1=\beta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\omega+\varphi=\alpha\\ \omega^2+\varphi^2=\dfrac{\beta+2}{2}\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\omega+\varphi=\alpha\\ (\omega+\varphi)^2-2\omega\varphi=\dfrac{\beta+2}{2}\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}\omega+\varphi=\alpha\\ \omega\varphi=\dfrac{2\alpha^2-\beta-2}{4}\end{array}\right\}.$$

Ἄρα, τὰ ω, φ εἶναι ρίζες τῆς ἐξισώσεως : $t^2-\alpha t+\dfrac{2\alpha^2-\beta-2}{4}=0$ (Ε).

Ἐπειδὴ ὅμως εἶναι $|\omega|\leqslant 1$ καὶ $|\varphi|\leqslant 1$, συμπεραίνουμε ὅτι τὸ σύστημα ἔχει λύση, ὅταν καὶ μόνο ὅταν, οἱ δύο ρίζες τῆς (Ε) εἶναι μέσα στὸ διάστημα $[-1, 1]$. Ἑπομένως τὸ θέμα ἀνάγεται στὴ θέση τῶν ἀριθμῶν $-1, 1$ ὡς πρὸς τὶς ρίζες τῆς (Ε), ποὺ εἶναι γνωστὸ ἀπὸ τὴν Ἄλγεβρα.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.** Νὰ λυθεῖ τὸ σύστημα : $\left\{\begin{array}{l}\eta\mu\chi+\eta\mu\psi=1\\ \sigma\upsilon\nu\chi\sigma\upsilon\nu\psi=\dfrac{3}{4}\end{array}\right.$ (Σ)

**Λύση.** Ἔχουμε :

$$(\Sigma)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}2\eta\mu\dfrac{\chi+\psi}{2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{\chi-\psi}{2}=1\\ \sigma\upsilon\nu(\chi-\psi)+\sigma\upsilon\nu(\chi+\psi)=\dfrac{3}{2}\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}\eta\mu\dfrac{\chi+\psi}{2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{\chi-\psi}{2}=\dfrac{1}{2}\\ 2\sigma\upsilon\nu^2\dfrac{\chi-\psi}{2}-1+1-2\eta\mu^2\dfrac{\chi+\psi}{2}=\dfrac{3}{2}\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\eta\mu\dfrac{\chi+\psi}{2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{\chi-\psi}{2}=\dfrac{1}{2}\\ \sigma\upsilon\nu^2\dfrac{\chi-\psi}{2}-\eta\mu^2\dfrac{\chi+\psi}{2}=\dfrac{3}{4}\end{array}\right\}.$$

Θέτουμε $\eta\mu\dfrac{\chi+\psi}{2}=\omega$ καὶ $\sigma\upsilon\nu\dfrac{\chi-\psi}{2}=\varphi$. Ἔχουμε τώρα νὰ λύσουμε τὸ σύστημα : $\omega\varphi=\dfrac{1}{2}$, $\varphi^2-\omega^2=\dfrac{3}{4}$. Ἡ λύση του εἶναι : $\varphi=1$, $\omega=\dfrac{1}{2}$ καὶ $\varphi=-1$, $\omega=-\dfrac{1}{2}$. Ἄρα, τὸ σύστημα (Σ) εἶναι ἰσοδύναμο μὲ τὰ ἑπόμενα ἁπλὰ συστήματα :

$$\left\{\begin{array}{l}\sigma\upsilon\nu\dfrac{\chi-\psi}{2}=1\\ \eta\mu\dfrac{\chi+\psi}{2}=\dfrac{1}{2}\end{array}\right\},\quad\left\{\begin{array}{l}\sigma\upsilon\nu\dfrac{\chi-\psi}{2}=-1\\ \eta\mu\dfrac{\chi+\psi}{2}=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right\}.$$

## 2.3. Μιὰ τουλάχιστον ἐξίσωση εἶναι θεμελιώδης.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.** Νὰ λυθεῖ τὸ σύστημα : $\begin{cases} \sigma\upsilon\nu(\chi+\psi)=1 \\ 2\eta\mu\chi+\eta\mu\psi=0 \end{cases}$ (Σ).

**Λύση.** Εἶναι :

$$\begin{Bmatrix} \sigma\upsilon\nu(\chi+\psi)=\sigma\upsilon\nu 0 \\ 2\eta\mu\chi+\eta\mu\psi=0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \chi+\psi=2\kappa\pi,\ \kappa\in\mathbf{Z} \\ 2\eta\mu\chi+\eta\mu\psi=0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \psi=2\kappa\pi-\chi,\ \kappa\in\mathbf{Z} \\ 2\eta\mu\chi+\eta\mu(2\kappa\pi-\chi)=0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} \psi=2\kappa\pi-\chi,\ \kappa\in\mathbf{Z} \\ 2\eta\mu\chi-\eta\mu\chi=0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \psi=2\kappa\pi-\chi,\ \kappa\in\mathbf{Z} \\ \eta\mu\chi=0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \psi=2\kappa\pi-\rho\pi \\ \chi=\rho\pi \end{Bmatrix} \ (\kappa,\rho\in\mathbf{Z}).$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.** Νὰ λυθεῖ τὸ σύστημα: $\begin{cases} \eta\mu\chi=\eta\mu\left(\psi+\dfrac{\pi}{4}\right) \\ \eta\mu\left(\dfrac{\pi}{4}-\chi\right)=2\eta\mu^2\dfrac{\psi}{2}+\sigma\upsilon\nu\left(\psi+\dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$ (Σ)

**Λύση.** Ἀπὸ τὴν πρώτη ἐξίσωση τοῦ (Σ) βρίσκουμε :

$$\begin{Bmatrix} \chi=2\kappa\pi+\psi+\dfrac{\pi}{4},\ \kappa\in\mathbf{Z} \\ \chi=(2\lambda+1)\pi-\psi-\dfrac{\pi}{4},\ \lambda\in\mathbf{Z} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \chi=2\kappa\pi+\dfrac{\pi}{4}+\psi,\ \kappa\in\mathbf{Z} \\ \chi=2\lambda\pi+\dfrac{3\pi}{4}-\psi,\ \lambda\in\mathbf{Z}. \end{Bmatrix}$$

Ἡ δεύτερη ἐξίσωση τοῦ (Σ) γράφεται : $\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{4}-\chi\right)=1-\sigma\upsilon\nu\psi-\eta\mu\psi$.

Ἑπομένως τὸ σύστημα (Σ) εἶναι ἰσοδύναμο μὲ τὰ ἑπόμενα δύο συστήματα :

$$\begin{Bmatrix} \chi=2\kappa\pi+\dfrac{\pi}{4}+\psi,\ \kappa\in\mathbf{Z} \\ \eta\mu\left(\dfrac{\pi}{4}-\chi\right)=1-\sigma\upsilon\nu\psi-\eta\mu\psi \end{Bmatrix} (\Sigma_1) \text{ καὶ } \begin{Bmatrix} \chi=2\lambda\pi+\dfrac{3\pi}{4}-\psi,\ \lambda\in\mathbf{Z} \\ \eta\mu\left(\dfrac{\pi}{4}-\chi\right)=1\text{-}\sigma\upsilon\nu\psi\text{-}\eta\mu\psi \end{Bmatrix} (\Sigma_2).$$

Λύνουμε τώρα τὸ $(\Sigma_1)$. Εἶναι :

$$(\Sigma_1) \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \chi=2\kappa\pi+\dfrac{\pi}{4}+\psi,\ \kappa\in\mathbf{Z} \\ \eta\mu\left(\dfrac{\pi}{4}-2\kappa\pi-\dfrac{\pi}{4}-\psi\right)=1-\sigma\upsilon\nu\psi-\eta\mu\psi \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} \chi=2\kappa\pi+\dfrac{\pi}{4}+\psi,\ \kappa\in\mathbf{Z} \\ -\eta\mu\psi=1-\sigma\upsilon\nu\psi-\eta\mu\psi \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \chi=2\kappa\pi+\dfrac{\pi}{4}+\psi,\ \kappa\in\mathbf{Z} \\ \sigma\upsilon\nu\psi=1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \chi = 2(\kappa+\rho)\pi + \dfrac{\pi}{4} \\ \psi = 2\rho\pi \end{cases} (\kappa,\ \rho \in \mathbf{Z}).$$

Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο λύνεται τὸ $(\Sigma_2)$ καὶ βρίσκουμε :

$$\begin{cases} \chi = 2(\lambda-\mu)\pi + \dfrac{\pi}{4} \\ \psi = 2\mu\pi + \dfrac{\pi}{2} \end{cases} (\lambda,\ \mu \in \mathbf{Z}).$$

## 3. Συστήματα μὲ τρεῖς ἄγνωστους

Λύνουμε παρακάτω ἕνα χαρακτηριστικὸ σύστημα μὲ τρεῖς ἄγνωστους.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.** Νὰ λυθεῖ τὸ σύστημα : $\begin{cases} \chi+\psi+\omega=\pi \\ \dfrac{\sigma\varphi\chi}{\alpha} = \dfrac{\sigma\varphi\psi}{\beta} = \dfrac{\sigma\varphi\omega}{\gamma}\ (\alpha\beta\gamma \neq 0) \end{cases}$ $(\Sigma)$

**Λύση.** Γνωρίζουμε ὅτι, ἂν $\chi+\psi+\omega=\pi$, τότε : $\sigma\varphi\chi\sigma\varphi\psi + \sigma\varphi\psi\sigma\varphi\omega + \sigma\varphi\omega\sigma\varphi\chi = 1$.
Ἑπομένως ἔχουμε :

$$(\Sigma) \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma\varphi\chi\sigma\varphi\psi + \sigma\varphi\psi\sigma\varphi\omega + \sigma\varphi\omega\sigma\varphi\chi = 1 & (1) \\ \chi+\psi+\omega=\pi & (2) \\ \sigma\varphi\chi = \lambda\alpha & (3) \\ \sigma\varphi\psi = \lambda\beta & (4) \\ \sigma\varphi\omega = \lambda\gamma & (5) \end{cases} \quad (\Sigma').$$

Σύμφωνα μὲ τὶς (3), (4) καὶ (5), ἡ (1) γράφεται : $\lambda^2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=1$. Ἀπὸ τὴν τελευταία σχέση συμπεραίνουμε ὅτι, τὸ σύστημα ἔχει λύση, ὅταν καὶ μόνο ὅταν $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha > 0$. Στὴν περίπτωση αὐτὴ εἶναι :

$$\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}},$$

ὁπότε θέτουμε :

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}} \quad \text{καὶ} \quad \lambda_2 = -\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}}$$

Τὸ σύστημα (Σ') εἶναι ἰσοδύναμο μὲ ἕνα ἀπὸ τὰ παρακάτω συστήματα :

$$\left\{\begin{array}{l} \chi+\psi+\omega=\pi \\ \sigma\varphi\chi=\lambda_1\alpha \\ \sigma\varphi\psi=\lambda_1\beta \\ \sigma\varphi\omega=\lambda_1\gamma \end{array}\right\} \quad (\Sigma_1) \quad \text{ἤ} \quad \left\{\begin{array}{l} \chi+\psi+\omega=\pi \\ \sigma\varphi\chi=\lambda_2\alpha \\ \sigma\varphi\psi=\lambda_2\beta \\ \sigma\varphi\omega=\lambda_2\gamma \end{array}\right\} \quad (\Sigma_2)$$

Ἂς εἶναι $\omega_1$, $\omega_2$ καὶ $\omega_3$ τὰ τόξα μέσα στὸ διάστημα $(0, \pi)$ τέτοια, ὥστε: $\sigma\varphi\omega_1=\lambda_1\alpha$, $\sigma\varphi\omega_2=\lambda_1\beta$ καὶ $\sigma\varphi\omega_3=\lambda_1\gamma$. Ἔχουμε:

$$(\Sigma_1) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \chi+\psi+\omega=\pi \\ \sigma\varphi\chi=\sigma\varphi\omega_1 \\ \sigma\varphi\psi=\sigma\varphi\omega_2 \\ \sigma\varphi\omega=\sigma\varphi\omega_3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \chi+\psi+\omega=\pi \\ \chi=\kappa_1\pi+\omega_1 \\ \psi=\kappa_2\pi+\omega_2 \\ \omega=\kappa_3\pi+\omega_3 \end{array}\right\} \quad (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 \in \mathbf{Z}).$$

Ἀπὸ τὸ τελευταῖο σύστημα προκύπτει: $\pi-(\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3)\pi=\omega_1+\omega_2+\omega_3$. Ἐπειδὴ ὅμως $\omega_i \in (0,\pi)$ μὲ $i=1, 2, 3$, συνάγεται:

$0<\omega_1+\omega_2+\omega_3<3\pi \Leftrightarrow 0<\pi-(\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3)\pi<3\pi \Leftrightarrow -2<\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3<1 \Leftrightarrow (\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3) \in \{-1, 0\}$.

Ἄρα, ἡ γενικὴ λύση τοῦ συστήματος $(\Sigma_1)$ εἶναι:

$$\left.\begin{array}{l} \chi=\kappa_1\pi+\omega_1 \\ \psi=\kappa_2\pi+\omega_2 \\ \omega=\kappa_3\pi+\omega_3 \end{array}\right\} \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 \in \mathbf{Z} \text{ καὶ } \kappa_1+\kappa_2+\kappa_3=-1 \text{ ἢ } 0.$$

Ὅμοια λύνεται τὸ σύστημα $(\Sigma_2)$.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Α΄ ΟΜΑΔΑ

18) Νὰ λυθοῦν τὰ παρακάτω συστήματα:

1) $\left\{\begin{array}{l} \chi+\psi=\dfrac{2\pi}{3} \\ \eta\mu\chi\eta\mu\psi=\dfrac{3}{4} \end{array}\right.$ 2) $\left\{\begin{array}{l} \chi+\psi=\dfrac{\pi}{3} \\ \eta\mu\chi+\eta\mu\psi=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$ 3) $\left\{\begin{array}{l} \chi-\psi=\dfrac{\pi}{6} \\ \dfrac{\varepsilon\varphi\chi}{\varepsilon\varphi\psi}=3 \end{array}\right.$

4) $\left\{\begin{array}{l} \chi+\psi=\dfrac{\pi}{4} \\ \varepsilon\varphi\chi+\varepsilon\varphi\psi=1 \end{array}\right.$ 5) $\left\{\begin{array}{l} \chi-\psi=\dfrac{\pi}{12} \\ \varepsilon\varphi\chi=\sqrt{3}\,\varepsilon\varphi\psi \end{array}\right.$ 6) $\left\{\begin{array}{l} \chi+\psi=\dfrac{4\pi}{3} \\ \dfrac{\sigma\upsilon\nu\chi}{\sigma\upsilon\nu\psi}=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

7) $\left\{\begin{array}{l} \chi+\psi=\dfrac{\pi}{4} \\ \sigma\varphi\chi-\sigma\varphi\psi=2 \end{array}\right.$ 8) $\left\{\begin{array}{l} \chi+\psi=\dfrac{\pi}{6} \\ \eta\mu2\chi+\eta\mu2\psi=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$ 9) $\left\{\begin{array}{l} \chi+\psi=\dfrac{2\pi}{3} \\ \varepsilon\varphi\chi\varepsilon\varphi\psi=\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$

19) Νὰ λύσετε τὰ ἑπόμενα συστήματα:

1) $\begin{cases} \sigma\upsilon\nu\chi\, \eta\mu\psi + \varepsilon\varphi\chi\, \varepsilon\varphi\psi = 0 \\ \varepsilon\varphi\chi\, \varepsilon\varphi\psi = 1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sigma\upsilon\nu\chi + \sigma\upsilon\nu\psi = \sqrt{2} \\ \varepsilon\varphi\chi + \varepsilon\varphi\psi = 2\eta\mu(\chi + \psi) \end{cases}$

3) $\begin{cases} \eta\mu\chi = \eta\mu\left(\psi + \frac{\pi}{4}\right) \\ \eta\mu\left(\frac{\pi}{4} - \chi\right) = 2\eta\mu^2\frac{\psi}{2} + \sigma\upsilon\nu\left(\psi + \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \eta\mu\chi = \sigma\upsilon\nu 2\psi \\ \sigma\upsilon\nu\psi = \eta\mu 2\chi \end{cases}$

5) $\begin{cases} \left(\eta\mu\frac{\chi+\psi}{2} - \sigma\upsilon\nu\frac{\chi-\psi}{2}\right)^2 = 1 - \eta\mu\chi \\ \eta\mu\chi + \eta\mu\psi = \frac{3}{2} \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \chi + 2\psi = \frac{\pi}{2} \\ 3\varepsilon\varphi\chi + 12\varepsilon\varphi\psi = 5\sqrt{3} \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2\eta\mu(\chi - \psi) = 1 \\ 2\sigma\upsilon\nu(\chi + \psi) = 1 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 9\varepsilon\varphi\chi + \varepsilon\varphi\psi = 4 \\ 2\sigma\varphi\chi + 4\sigma\varphi\psi = 1 \end{cases}$ 9) $\begin{cases} \eta\mu\chi\, \eta\mu\psi = \frac{1}{4} \\ \sigma\upsilon\nu\chi\, \sigma\upsilon\nu\psi = \frac{3}{4} \end{cases}$

10) $\begin{cases} \eta\mu\chi + \eta\mu\psi = 0 \\ \sigma\upsilon\nu\chi\, \sigma\upsilon\nu\psi = \frac{3}{4}. \end{cases}$

**Β' ΟΜΑΔΑ**

20) Νὰ λυθοῦν τὰ συστήματα:

1) $\begin{cases} 2\sigma\upsilon\nu\chi\, \sigma\upsilon\nu\psi = 1 \\ \varepsilon\varphi\chi + \varepsilon\varphi\psi = 2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sigma\upsilon\nu 2\chi + \sigma\upsilon\nu 2\psi = \frac{1}{2} \\ 2(\eta\mu\chi + \eta\mu\psi) = 1 + \sqrt{2} \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \varepsilon\varphi\chi + \varepsilon\varphi\psi = 2\sqrt{3} \\ \sigma\varphi\chi + \sigma\varphi\psi = 2\sqrt{3} \end{cases}$

4) $\begin{cases} \eta\mu\chi + \eta\mu\psi = \sqrt{2} \\ \eta\mu 3\chi + \eta\mu 3\psi = \sqrt{2} \end{cases}$ 5) $\begin{cases} \eta\mu\chi\, \eta\mu\psi = \frac{1}{2} \\ \varepsilon\varphi\chi + \varepsilon\varphi\psi = 2 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \eta\mu 2\chi + \eta\mu 2\psi = 1 \\ \varepsilon\varphi\chi + \varepsilon\varphi\psi = 4 \end{cases}$

7) $\begin{cases} \eta\mu\chi - \eta\mu\psi = 1 \\ \sigma\upsilon\nu\chi\, \sigma\upsilon\nu\psi = -\frac{3}{4} \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 2\eta\mu\chi\, \eta\mu\psi = 1 \\ 2(\sigma\upsilon\nu 2\psi - \sigma\upsilon\nu 2\chi) = 1 \end{cases}$ 9) $\begin{cases} \chi - \psi = \frac{\pi}{3} \\ 3(\eta\mu\chi - \eta\mu\psi) + 4\eta\mu\chi\, \eta\mu\psi = 3 \end{cases}$

10) $\begin{cases} \chi - \psi = \frac{\pi}{3} \\ \sigma\upsilon\nu\chi + \sigma\upsilon\nu\psi = 2\sqrt{6}\, \sigma\upsilon\nu\chi\, \sigma\upsilon\nu\psi. \end{cases}$

21) Νὰ λυθοῦν καὶ διερευνηθοῦν τὰ ἀκόλουθα συστήματα:

1) $\begin{cases} \chi + \psi = \alpha \ (\alpha \in \mathbf{R}) \\ \eta\mu^2\chi + \eta\mu^2\psi = 1 - \sigma\upsilon\nu\alpha \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{\eta\mu\chi}{\eta\mu\psi} = \alpha \\ \chi - \psi = \beta \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \chi + \psi = \alpha \\ \eta\mu^2\chi - \eta\mu^2\psi = \beta \end{cases}$

4) $\begin{cases} \chi + \psi = 2\alpha \\ \eta\mu\chi + \eta\mu\psi = \beta\,(\eta\mu\chi - \eta\mu\psi) \end{cases}$ 5) $\begin{cases} \eta\mu\chi + \eta\mu\psi = 2\lambda\eta\mu\alpha \\ \sigma\upsilon\nu\chi + \sigma\upsilon\nu\psi = 2\lambda\sigma\upsilon\nu\alpha \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \eta\mu\chi\, \eta\mu\psi = \alpha \\ \sigma\upsilon\nu\chi + \sigma\upsilon\nu\psi = \beta. \end{cases}$

22) Νὰ λυθοῦν τὰ συστήματα:

1) $\begin{cases} \eta\mu\chi = \eta\mu(\psi + \alpha)\varepsilon\varphi\alpha \\ \eta\mu(\alpha - \chi) = 2\eta\mu^2 \dfrac{\psi}{2} + \sigma\upsilon\nu(\psi + 2\alpha) \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \varepsilon\varphi\chi = \lambda\varepsilon\varphi 2\psi \\ \varepsilon\varphi\psi = \lambda\varepsilon\varphi 2\chi. \end{cases}$

23) Νὰ λυθεῖ καὶ διερευνηθεῖ τὸ σύστημα: $\begin{cases} \sigma\upsilon\nu\chi + \sigma\upsilon\nu\psi = \alpha \\ \varepsilon\varphi \dfrac{\chi}{2} + \varepsilon\varphi \dfrac{\psi}{2} = \beta. \end{cases}$

24) Νὰ λύσετε τὰ συστήματα:

1) $\begin{cases} \chi + \psi + \omega = \pi \\ \varepsilon\varphi\chi + \varepsilon\varphi\psi = 3 \\ \varepsilon\varphi\psi + \varepsilon\varphi\omega = 4 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sigma\upsilon\nu\chi + \sigma\upsilon\nu\psi = \sigma\upsilon\nu\omega \\ \sigma\upsilon\nu 2\chi + \sigma\upsilon\nu 2\psi = \sigma\upsilon\nu 2\omega \\ \sigma\upsilon\nu 3\chi + \sigma\upsilon\nu 3\psi = \sigma\upsilon\nu 3\omega \end{cases}$

3) $\begin{cases} \chi + \psi + \omega = \pi \\ \varepsilon\varphi \dfrac{\chi}{2}\, \varepsilon\varphi \dfrac{\psi}{2} = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{3}}{3} \\ \varepsilon\varphi \dfrac{\psi}{2}\, \varepsilon\varphi \dfrac{\omega}{2} = \sqrt{3} - \sqrt{2} \\ \chi, \psi, \omega \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right). \end{cases}$

25) Νὰ ἀποδείξετε τὴν ἰσοδυναμία:

$$\left.\begin{cases} \sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu(\alpha + \chi) + \sigma\upsilon\nu(\alpha + \psi) = 0 \\ \eta\mu\alpha + \eta\mu(\alpha + \chi) + \eta\mu(\alpha + \psi) = 0 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} 1 + \sigma\upsilon\nu\chi + \sigma\upsilon\nu\psi = 0 \\ \eta\mu\chi + \eta\mu\psi = 0 \end{matrix}\right\} (\alpha \in \mathbf{R}).$$

Ἂν $\chi_0$, $\psi_0$, εἶναι μιὰ λύση τοῦ παραπάνω συστήματος, τότε νὰ δείξετε ὅτι τὰ πέρατα τῶν τόξων $\alpha$, $\alpha + \chi_0$ καὶ $\alpha + \psi_0$, πάνω στὴν περιφέρεια τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου, ἀποτελοῦν κορυφὲς ἰσόπλευρου τριγώνου.

26) Νὰ λυθεῖ τὸ σύστημα:

$$\begin{cases} \chi + \psi + \omega = \pi \\ \dfrac{\eta\mu\chi}{\alpha} = \dfrac{\eta\mu\psi}{\beta} = \dfrac{\eta\mu\omega}{\gamma}, \quad \alpha\beta\gamma \neq 0. \end{cases}$$

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ III

# ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΗ ΑΠΑΛΟΙΦΗ

## 1. Ἡ ἔννοια τῆς ἀπαλοιφῆς

Ἡ ἔννοια τῆς ἀπαλοιφῆς καὶ τῆς ἀπαλείφουσας χρησιμοποιεῖται, ὅπως γνωρίζουμε ἀπὸ τὴν Ἄλγεβρα, σὲ παραμετρικὸ σύστημα μὲ μ ἐξισώσεις καὶ ν ἀγνώστους, ὅπου μ>ν. Τὸ σύστημα αὐτὸ μπορεῖ νὰ ἔχει ἢ νὰ μὴν ἔχει λύση. Ἂν τὸ σύστημα ἔχει λύση, τότε βρίσκουμε μιὰ σχέση μεταξὺ τῶν παραμέτρων, ποὺ λέγεται **ἀπαλείφουσα.** Ἄρα, ἡ ἀπαλείφουσας εἶναι γενικὰ ἡ ἀναγκαία συνθήκη γιὰ νὰ ἔχει τὸ σύστημα λύση. Ἡ διαδικασία ποὺ ἀκολουθοῦμε, γιὰ νὰ βροῦμε τὴν ἀπαλείφουσα, ὀνομάζεται **ἀπαλοιφὴ** τῶν ἀγνώστων ἢ πιὸ ἁπλὰ ἀπαλοιφή.

Παρακάτω ἀναφέρουμε μερικὰ παραδείγματα ἀπαλοιφῆς.

**1.1.1. Νὰ βρεθεῖ ἡ ἀπαλείφουσα τοῦ συστήματος:** $\begin{cases} \alpha\eta\mu\chi = \gamma \\ \beta\sigma\upsilon\nu\chi = \delta \end{cases}$ $(\alpha\beta \neq 0)$

Δεχόμαστε ὅτι τὸ σύστημα ἔχει μία λύση $\chi_0$. Τότε, θὰ ἔχουμε:

$$\left.\begin{aligned} \alpha\eta\mu\chi_0 &= \gamma \\ \beta\sigma\upsilon\nu\chi_0 &= \delta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \eta\mu\chi_0 &= \frac{\gamma}{\alpha} \\ \sigma\upsilon\nu\chi_0 &= \frac{\delta}{\beta} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \eta\mu^2\chi_0 + \sigma\upsilon\nu^2\chi_0 = \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\delta}{\beta}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\gamma^2}{\alpha^2} + \frac{\delta^2}{\beta^2} = 1.$$

Ἡ τελευταία σχέση εἶναι ἡ ζητούμενη ἀπαλείφουσα.

**1.1.2. Νὰ ἀπαλείψετε τὸ χ ἀπὸ τὶς ἐξισώσεις:** $\begin{cases} \sigma\varphi\chi\,(1 + \eta\mu\chi) = 4\alpha \\ \sigma\varphi\chi\,(1 - \eta\mu\chi) = 4\beta \end{cases}$ **(Σ).**

Ἂν $\chi_0$ εἶναι μιὰ λύση τοῦ συστήματος (Σ), τότε θὰ ἔχουμε:

$$\begin{Bmatrix} \sigma\varphi\chi_0\,(1 + \eta\mu\chi_0) = 4\alpha \\ \sigma\varphi\chi_0\,(1 - \eta\mu\chi_0) = 4\beta \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma\varphi\chi_0 + \sigma\upsilon\nu\chi_0 = 4\alpha \\ \sigma\varphi\chi_0 - \sigma\upsilon\nu\chi_0 = 4\beta \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma\varphi\chi_0 = 2\alpha + 2\beta \\ \sigma\upsilon\nu\chi_0 = 2\alpha - 2\beta \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} &\frac{\sigma\upsilon\nu\chi_o}{\eta\mu\chi_o} = 2\alpha + 2\beta \\ &\sigma\upsilon\nu\chi_o = 2\alpha - 2\beta \end{aligned} \right\} (\alpha^2 \neq \beta^2) \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} &\eta\mu\chi_o = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \\ &\sigma\upsilon\nu\chi_o = 2\alpha - 2\beta \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\eta\mu^2\chi_o + \sigma\upsilon\nu^2\chi_o = \left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)^2 + (2\alpha - 2\beta)^2 \Rightarrow \left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)^2 + 4(\alpha-\beta)^2 = 1.$$

Ἡ τελευταία αὐτὴ σχέση εἶναι ἡ ζητούμενη ἀπαλείφουσα.

**1.1.3. Νὰ βρεθεῖ ἡ ἀπαλείφουσα τοῦ συστήματος :**

$$\left\{ \begin{aligned} &\chi + \psi = \alpha \\ &\varepsilon\varphi\chi + \varepsilon\varphi\psi = \varepsilon\varphi\beta \qquad (\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}). \\ &\sigma\varphi\chi + \sigma\varphi\psi = \sigma\varphi\gamma \end{aligned} \right.$$

Ἂν $(\chi_o, \psi_o)$ εἶναι μιὰ λύση τοῦ συστήματος, τότε ἔχουμε :

$$\left\{ \begin{aligned} &\chi_o + \psi_o = \alpha \\ &\varepsilon\varphi\chi_o + \varepsilon\varphi\psi_o = \varepsilon\varphi\beta \\ &\sigma\varphi\chi_o + \sigma\varphi\psi_o = \sigma\varphi\gamma \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} &\chi_o + \psi_o = \alpha \\ &\frac{\eta\mu(\chi_o + \psi_o)}{\sigma\upsilon\nu\chi_o\,\sigma\upsilon\nu\psi_o} = \varepsilon\varphi\beta \\ &\frac{\eta\mu(\chi_o + \psi_o)}{\eta\mu\chi_o\,\eta\mu\psi_o} = \sigma\varphi\gamma \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} &\chi_o + \psi_o = \alpha \\ &\eta\mu\alpha = \varepsilon\varphi\beta\sigma\upsilon\nu\chi_o\,\sigma\upsilon\nu\psi_o \\ &\eta\mu\alpha = \sigma\varphi\gamma\eta\mu\chi_o\eta\mu\psi_o \end{aligned} \right\}$$

Ἀπὸ τὶς τελευταῖες σχέσεις καὶ ἐφόσον $\eta\mu\alpha\varepsilon\varphi\beta\sigma\varphi\gamma \neq 0$, ἔχουμε :

$$\left\{ \begin{aligned} &\chi_o + \psi_o = \alpha \\ &\sigma\upsilon\nu\chi_o\sigma\upsilon\nu\psi_o = \eta\mu\alpha\sigma\varphi\beta \\ &\eta\mu\chi_o\eta\mu\psi_o = \eta\mu\alpha\varepsilon\varphi\gamma \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} &\chi_o + \psi_o = \alpha \\ &\sigma\upsilon\nu\chi_o\sigma\upsilon\nu\psi_o - \eta\mu\chi_o\eta\mu\psi_o = \eta\mu\alpha\sigma\varphi\beta - \eta\mu\alpha\varepsilon\varphi\gamma \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{aligned} &\chi_o + \psi_o = \alpha \\ &\sigma\upsilon\nu(\chi_o + \psi_o) = \eta\mu\alpha(\sigma\varphi\beta - \varepsilon\varphi\gamma) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha = \eta\mu\alpha(\sigma\varphi\beta - \varepsilon\varphi\gamma) \Rightarrow (\sigma\varphi\beta - \varepsilon\varphi\gamma)\varepsilon\varphi\alpha = 1.$$

Ἡ τελευταία σχέση εἶναι ἡ ἀπαλείφουσα.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**Α΄ ΟΜΑΔΑ**

27) Νὰ ἀπαλείψετε τὸ $\chi$ μεταξὺ τῶν παρακάτω ἐξισώσεων :

$$\begin{aligned} &\alpha_1\eta\mu\chi + \beta_1\sigma\upsilon\nu\chi = \gamma_1 \\ &\alpha_2\eta\mu\chi + \beta_2\sigma\upsilon\nu\chi = \gamma_2 \end{aligned} \qquad (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0).$$

28) Νὰ ἀπαλείψετε τὸ χ ἀπὸ τὰ ἑπόμενα συστήματα:

1) $\begin{array}{l} \eta\mu(\chi+\alpha)=\mu \\ \eta\mu(\chi+\beta)=\nu \end{array}$ 2) $\begin{array}{l} \eta\mu\chi+\sigma\upsilon\nu\chi=\alpha \\ \varepsilon\varphi 2\chi+\sigma\varphi 2\chi=\beta \end{array}$

3) $\begin{array}{l} \eta\mu\chi+\sigma\upsilon\nu\chi=\alpha \\ \eta\mu^3\chi+\sigma\upsilon\nu^3\chi=\beta \end{array}$ 4) $\begin{array}{l} \varepsilon\varphi\chi+\sigma\varphi\chi=\alpha \\ \eta\mu^2\chi\sigma\upsilon\nu\chi+\sigma\upsilon\nu^2\chi\eta\mu\chi=\beta \end{array}$ 5) $\begin{array}{l} \lambda\sigma\upsilon\nu 2\chi=\sigma\upsilon\nu(\chi+\alpha) \\ \lambda\eta\mu 2\chi=2\eta\mu(\chi+\alpha) \end{array}$

6) $\begin{array}{l} \alpha\eta\mu^2\chi+\beta\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi+\gamma\sigma\upsilon\nu^2\chi=0 \\ \alpha'\eta\mu^2\chi+\beta'\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi+\gamma'\sigma\upsilon\nu^2\chi=0 \end{array}$ $(\alpha\alpha'\neq 0)$.

**Β΄ ΟΜΑΔΑ**

29) Νὰ ἀπαλείψετε τὸ α ἀπὸ τὶς ἐξισώσεις:

$$\chi^3\eta\mu\alpha+\psi^3\sigma\upsilon\nu\alpha=\lambda^3\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$$
$$\chi^3\sigma\upsilon\nu\alpha-\psi^3\eta\mu\alpha=\lambda^3\sigma\upsilon\nu 2\alpha.$$

30) Νὰ ἀπαλείψετε τὰ χ καὶ ψ ἀπὸ τὰ ἀκόλουθα συστήματα:

1) $\eta\mu\chi+\eta\mu\psi=\alpha,\quad \sigma\upsilon\nu\chi+\sigma\upsilon\nu\psi=\beta,\quad \chi-\psi=\gamma$

2) $\eta\mu\chi+\eta\mu\psi=\alpha,\quad \sigma\upsilon\nu\chi+\sigma\upsilon\nu\psi=\beta,\quad \varepsilon\varphi\frac{\chi}{2}\,\varepsilon\varphi\frac{\psi}{2}=\varepsilon\varphi^2\frac{\theta}{2}$

3) $\varepsilon\varphi\chi+\varepsilon\varphi\psi=\alpha,\quad \sigma\varphi\chi+\sigma\varphi\psi=\beta,\quad \chi+\psi=\gamma.$

31) Ἂν οἱ ἐξισώσεις $\eta\mu\chi+\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu\chi=1$ καὶ $\eta\mu\chi+\sigma\upsilon\nu\chi=\lambda$ ἔχουν κοινὴ λύση, τότε νὰ βρεθεῖ τὸ $\lambda\in\mathbf{R}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV

# ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

## 1. Ὁρισμοὶ καὶ βασικὲς ἔννοιες

Ἂν ἕνα τουλάχιστον ἀπὸ τὰ μέλη μιᾶς ἀλγεβρικῆς ἀνισώσεως, ὡς πρὸς $\chi$, περιέχει ἕνα ἢ περισσότερους τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς τοῦ $\chi \in \mathbf{R}$, τότε ἡ ἀνίσωση ὀνομάζεται **τριγωνομετρικὴ ἀνίσωση** ὡς πρὸς $\chi$. Θὰ περιοριστοῦμε στὴ μελέτη τῶν τριγωνομετρικῶν ἀνισώσεων μὲ ἕνα ἄγνωστο τόξο. Γενικότερα ὅμως, ὅπως ἀκριβῶς καὶ στὶς τριγωνομετρικὲς ἐξισώσεις, μποροῦμε νὰ θεωρήσουμε καὶ ἀνισώσεις μὲ περισσότερα ἀπὸ ἕνα ἄγνωστα τόξα.

Κάθε τόξο $\chi_0$ ποὺ ἐπαληθεύει μιὰ τριγωνομετρικὴ ἀνίσωση λέγεται **μερικὴ λύση** της. Τὸ σύνολο τῶν μερικῶν λύσεων μιᾶς τριγωνομετρικῆς ἀνισώσεως, ὀνομάζεται **γενικὴ λύση** ἢ πιὸ ἁπλὰ **λύση** αὐτῆς τῆς ἀνισώσεως. Τὸ σύνολο τῶν μερικῶν λύσεων μέσα στὸ διάστημα $[0,2\pi)$ μιᾶς τριγωνομετρικῆς ἀνισώσεως ὀνομάζεται **εἰδικὴ λύση**[1]).

Μιὰ τριγωνομετρικὴ ἀνίσωση ποὺ ἐπαληθεύεται γιὰ κάθε τόξο ὀνομάζεται **μόνιμη τριγωνομετρικὴ ἀνίσωση.**

Παρακάτω ἀναφέρουμε ὁρισμένες βασικὲς κατηγορίες τριγωνομετρικῶν ἀνισώσεων.

## 2. Θεμελιώδεις τριγωνομετρικὲς ἀνισώσεις

Ἡ λύση ὁποιασδήποτε τριγωνομετρικῆς ἀνισώσεως ἀνάγεται πάντοτε στὴ λύση μιᾶς ἢ καὶ περισσότερων θεμελιωδῶν ἀνισώσεων. Οἱ θεμελιώδεις ἀνισώσεις εἶναι :

$$\eta\mu\chi > \alpha,\ \sigma\upsilon\nu\chi > \alpha,\ \varepsilon\varphi\chi > \alpha,\ \sigma\varphi\chi > \alpha$$
$$\eta\mu\chi < \alpha,\ \sigma\upsilon\nu\chi < \alpha,\ \varepsilon\varphi\chi < \alpha,\ \sigma\varphi\chi < \alpha.$$

**2.1. $\eta\mu\chi < \alpha$.** Γιὰ νὰ λύσουμε αὐτὴ τὴν ἀνίσωση διακρίνουμε τὶς ἑξῆς περιπτώσεις :

---

[1]) Ἡ εἰδικὴ λύση ἔχει μιὰ ἰδιαίτερη καὶ μεγάλη σημασία γιὰ τὶς τριγωνομετρικὲς ἀνισώσεις. Δὲ θεωροῦμε σκόπιμο νὰ ἐπεκταθοῦμε περισσότερο, γιατὶ τὸ θέμα τῆς εἰδικῆς λύσεως σχετίζεται μὲ τὴν περιοδικότητα τῶν συναρτήσεων.

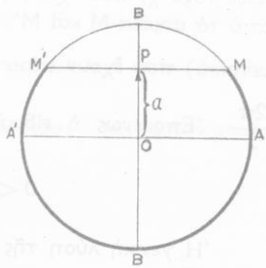
ι) Ἂν $\alpha \leqslant -1$, ἡ ἀνίσωση εἶναι ἀδύνατη, γιατὶ ημχ $\geqslant -1$ γιὰ κάθε $\chi \in \mathbf{R}$.
ιι) Ἂν $\alpha > 1$, ἡ ἀνίσωση εἶναι μόνιμη, γιατὶ ημχ $\leqslant 1$ γιὰ κάθε $\chi \in \mathbf{R}$.
ιιι) Ἂν $\alpha = 1$, τότε ἡ ἀνίσωση ἐπαληθεύεται γιὰ κάθε τόξο, ἐκτὸς ἀπὸ τὰ τόξα ποὺ εἶναι λύσεις τῆς ἐξισώσεως ημχ $= 1$. Ἄρα, ἡ γενικὴ λύση τῆς ἀνισώσεως εἶναι :

$$\mathbf{R} - \{\chi \in \mathbf{R} : \ \eta\mu\chi = 1\} = \mathbf{R} - \{2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} : \kappa \in \mathbf{Z}\}.$$

ιν) Τέλος, ἄς ὑποθέσουμε ὅτι : $-1 < \alpha < 1$. Στὴν περίπτωση αὐτὴ διακρίνουμε ἀκόμα τὶς παρακάτω εἰδικότερες περιπτώσεις :

α) Ἂν $0 < \alpha < 1$, λύνουμε πρῶτα τὴν ἀνίσωση γεωμετρικὰ (γραφικὰ) πάνω στὴν περιφέρεια τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου. Αὐτὸ γίνεται μὲ τὸν ἑξῆς τρόπο : Θεωροῦμε πάνω στὸν ἄξονα BB′ τῶν ἡμιτόνων διάνυσμα $\overline{OP}$ (Σχ. 1) τέτοιο, ὥστε $(\overline{OP}) = \alpha$. Ἀπὸ τὸ P φέρουμε παράλληλη πρὸς τὸν ἄξονα AA′ τῶν συνημιτόνων καὶ σημειώνουμε μὲ M καὶ M′ τὰ κοινὰ σημεῖα της μὲ τὴν περιφέρεια τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου. Εἶναι φανερὸ πὼς κάθε τόξο μὲ πέρας ὁποιοδήποτε σημεῖο τοῦ τόξου $\widehat{M'B'M}$ (Σχ. 1), ἐπαληθεύει τὴν ἀνίσωση. Ἐνδιαφερόμαστε τώρα νὰ βροῦμε ἀναλυτικὰ τὴ λύση τῆς ἀνισώσεως ημχ $< \alpha$ μὲ $0 < \alpha < 1$. Πρῶτα ὅμως θὰ βροῦμε τὴν εἰδικὴ λύση καὶ ἔπειτα μὲ τὴ βοήθειά της τὴ γενικὴ λύση, ὅπως φαίνεται καὶ ἀπὸ τὴν παρακάτω ἰσοδυναμία :

$$\eta\mu\chi < \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \eta\mu\omega < \alpha & (1) \\ \omega \in [0,2\pi) & (2) \\ \chi = 2\kappa\pi + \omega,\ \kappa \in \mathbf{Z} & (3). \end{cases}$$



Σχ. 1.

Ἀπὸ τὴν ἰσοδυναμία αὐτὴ φαίνεται ὅτι, λύνοντας τὴν (1) μποροῦμε ἔπειτα νὰ βροῦμε καὶ τὴ γενικὴ λύση τῆς ημχ $< \alpha$, μὲ τὴ βοήθεια τῆς (3). Τονίζουμε ἀκόμα ὅτι ἡ λύση τῆς (1) μὲ τὸν περιορισμὸ (2) ἀποτελεῖ τὴν εἰδικὴ λύση τῆς ἀνισώσεως ημχ $< \alpha$.

Γιὰ νὰ λύσουμε τὴν (1), ὑποθέτουμε ὅτι φ καὶ $\pi - \varphi$ εἶναι τὰ μοναδικὰ τόξα μέσα στὸ διάστημα $[0,2\pi)$ μὲ ημφ $=$ ημ$(\pi-\varphi) = \alpha \left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$. Ἄρα, τὰ μοναδικὰ ὑποδιαστήματα τοῦ διαστήματος $[0,2\pi)$, ποὺ ἱκανοποιοῦν τὴν ἀνίσωση (1) εἶναι $(\pi-\varphi,\ 2\pi)$ καὶ $[0,\varphi)$. Ἑπομένως ἡ εἰδικὴ λύση τῆς (1) εἶναι :

$$(\pi - \varphi,\ 2\pi) \cup [0,\varphi). \qquad (4)$$

Τὸ σύνολο (4) ἀποτελεῖ τὴν εἰδικὴ λύση τῆς ημχ $< \alpha$, ὁπότε ἡ γενικὴ λύση της, σύμφωνα καὶ μὲ τὴν (3) θὰ εἶναι :

$$\Delta_\kappa = (2\kappa\pi + \pi - \varphi,\ 2\kappa\pi + 2\pi) \cup [2\kappa\pi,\ 2\kappa\pi + \varphi),\ \kappa \in \mathbf{Z}.$$

Μὲ ἄλλα λόγια, ἡ εἰδικὴ λύση τῆς (1) εἶναι τὰ τόξα χ, ποὺ ἱκανοποιοῦν μιὰ ἀπὸ τὶς ἀκόλουθες ἀνισότητες:

$$0 < \chi \leqslant \varphi \quad \text{ἢ} \quad \pi - \varphi < \chi < 2\pi.$$

Ἡ γενικὴ λύση τῆς (1) εἶναι τὰ τόξα χ, ποὺ ἱκανοποιοῦν μιὰ ἀπὸ τὶς ἀνισότητες:

$$2\kappa\pi \leqslant \chi < 2\kappa\pi + \varphi \quad \text{ἢ} \quad 2\kappa\pi + \pi - \varphi < \chi < 2\kappa\pi + 2\pi,$$

ὅπου κ ὁποιοσδήποτε ἀκέραιος.

β) Ἂν $-1 < \alpha \leqslant 0$, ἡ ἀνίσωση λύνεται μὲ ἀνάλογο τρόπο.

Ὅμοια μὲ τὴν παραπάνω ἀνίσωση 2.1. λύνεται καὶ ἡ ἀνίσωση ημχ $> \alpha$. Σημειώνουμε ἀκόμα ὅτι ἡ λύση τῆς ἀνισοεξισώσεως ημχ $\leqslant \alpha$ (ἢ ημχ $\geqslant \alpha$) ἀποτελεῖται ἀπὸ τὴ λύση τῆς ἀνισώσεως ημχ $< \alpha$ (ἢ ημχ $> \alpha$) καὶ τῆς ἐξισώσεως ημχ $= \alpha$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.** Νὰ λυθεῖ ἡ ἀνίσωση: ημχ $< \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (1).

**Λύση.** Ἂς ὑποθέσουμε ὅτι στὸ σχῆμα 1 εἶναι $\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Εἶναι φανερὸ τώρα ὅτι κάθε τόξο χ, ποὺ ἔχει πέρας τὸ ὁποιοδήποτε σημεῖο τοῦ τόξου M′B′M, ἐκτὸς ἀπὸ τὰ σημεῖα M καὶ M′, ἐπαληθεύει τὴν ἀνίσωση (1). Τὰ πρῶτα τόξα (γεωμετρικὰ) ποὺ ἔχουν πέρατα τὰ σημεῖα M καὶ M′ ἀντιστοίχως εἶναι τὰ $\dfrac{\pi}{3}$ καὶ $\dfrac{2\pi}{3}$. Ἑπομένως ἡ εἰδικὴ λύση εἶναι:

$$0 < \chi < \frac{\pi}{3} \ \text{ἢ} \ \frac{2\pi}{3} < \chi < 2\pi.$$

Ἡ γενικὴ λύση τῆς (1) δίνεται ἀπὸ τὰ παρακάτω τόξα χ.

$$2\kappa\pi < \chi < 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} \ \text{ἢ} \ 2\kappa\pi + \frac{2\pi}{3} < \chi < 2\kappa\pi + 2\pi \qquad (\kappa \in \mathbf{Z}).$$

**2. 2. συνχ $< \alpha$.** Γιὰ νὰ λύσουμε αὐτὴ τὴν ἀνίσωση διακρίνουμε, ὅπως καὶ προηγούμενα, τὶς παρακάτω περιπτώσεις:

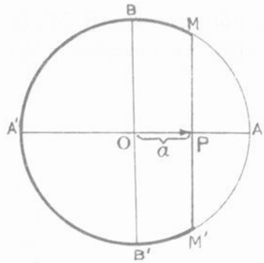
ι) Ἂν $\alpha \leqslant -1$, ἡ ἀνίσωση εἶναι ἀδύνατη.

ιι) Ἂν $\alpha > 1$, ἡ ἀνίσωση εἶναι μόνιμη τριγωνομετρικὴ ἀνίσωση.

ιιι) Ἂν $\alpha = 1$, τότε ἡ ἀνίσωση ἐπαληθεύεται γιὰ κάθε τόξο, ἐκτὸς ἀπὸ τὰ τόξα $\{2\kappa\pi : \kappa \in \mathbf{Z}\}$. Ἑπομένως ἡ γενικὴ λύση εἶναι:

$$\mathbf{R} - \{2\kappa\pi : \kappa \in \mathbf{Z}\}$$

ιν) Ἂν $-1 < \alpha < 1$, λύνουμε τὴν ἀνίσωση γεωμετρικὰ ἐπάνω στὴν περιφέρεια τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου. Θεωροῦμε διάνυσμα $\overline{OP}$ (Σχ. 2) τέτοιο,




*Σχ. 2.*

ὥστε $(\overline{OP}) = \alpha$. Ἀπὸ τὸ P φέρουμε παράλληλη πρὸς τὸν ἄξονα BB′ τῶν ἡμιτόνων καὶ σημειώνουμε μὲ M καὶ M′ τὰ κοινὰ σημεῖα της μὲ τὴν περιφέρεια τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου. Παρατηροῦμε πὼς κάθε τόξο μὲ πέρας ὁποιοδήποτε σημεῖο τοῦ τόξου $\overset{\frown}{MA'M'}$, ἐκτὸς ἀπὸ τὰ σημεῖα M καὶ M′, ἐπαληθεύει τὴν ἀνίσωση. Γιὰ νὰ βροῦμε τώρα τὴν ἀναλυτικὴ λύση τῆς ἀνισώσεως, παριστάνουμε μὲ φ τὸ πρῶτο (γεωμετρικὸ) τόξο, ποὺ ἔχει πέρας τὸ M. Ἡ εἰδικὴ λύση της εἶναι $(\varphi, 2\pi-\varphi)$. Προσθέτοντας στὰ ἄκρα τῆς εἰδικῆς λύσεως τὸ $2\kappa\pi$, $\kappa\in\mathbf{Z}$, βρίσκουμε τὴ γενικὴ λύση, ποὺ εἶναι:

$$(2\kappa\pi + \varphi,\ \ 2\kappa\pi + 2\pi - \varphi),\ \kappa\in\mathbf{Z}.$$

Ὅμοια λύνονται οἱ: συνχ $> \alpha$, συνχ $\leq \alpha$, συνχ $\geq \alpha$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.** Νὰ λυθεῖ ἡ ἀνίσωση: συνχ $\leqslant \dfrac{1}{2}$ (1)

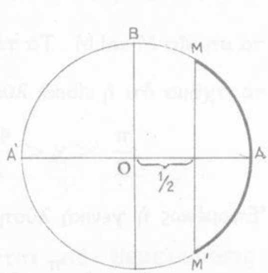
**Λύση.** Βρίσκουμε τὰ δύο καὶ μοναδικὰ τόξα μέσα στὸ $[0,\ 2\pi)$, ποὺ ἔχουν συνημίτονο $\frac{1}{2}$. Αὐτὰ εἶναι τὰ $\frac{\pi}{3}$ καὶ $\frac{5\pi}{3}$. Κάθε τόξο χ, ποὺ ἔχει πέρας ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τοῦ τόξου $\overset{\frown}{MA'M'}$ (Σχ. 3) εἶναι λύση τῆς ἀνισώσεως (1). Εἶναι φανερὸ ὅτι ἡ εἰδικὴ λύση εἶναι:

$$\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right] = \left\{ \chi\in\mathbf{R} : \frac{\pi}{3} \leqslant \chi \leqslant \frac{5\pi}{3}\right\}.$$

Ἡ γενικὴ λύση τῆς (1) εἶναι:

Τὰ τόξα χ, ποὺ ἱκανοποιοῦν μιὰ ἀπὸ τὶς παρακάτω ἀνισότητες:

$$2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} \leqslant \chi \leqslant 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{3},\ \kappa\in\mathbf{Z}.$$




*Σχ. 3.*

**2.3. εφχ $< \alpha$.** Ἡ ἀνίσωση αὐτὴ ἔχει πάντοτε λύση, ἐφόσον $\alpha\in\mathbf{R}$. Ὑποθέτουμε ὅτι $\alpha > 0$. Θεωροῦμε πάνω στὸν ἄξονα τῶν ἐφαπτομένων τὸ διάνυσμα $\overline{AP}$ τέτοιο, ὥστε $(\overline{AP}) = \alpha$ (Σχ. 4). Σημειώνουμε μὲ M καὶ M′ τὰ κοινὰ σημεῖα τῆς εὐθείας OP καὶ τῆς περιφέρειας τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου κέντρου 0. Εἶναι φανερὸ ἀπὸ τὸ Σχ. 4, πὼς κάθε τόξο μὲ πέρας ὁποιοδήποτε σημεῖο τοῦ τόξου $\widehat{BA'M'}$ ἢ $\widehat{MAB'}$, ἐκτὸς τῶν σημείων B, M', B' καὶ M', ἐπαληθεύει τὴν ἀνίσωση. Ὑποθέτουμε ὅτι φ εἶναι τὸ μοναδικὸ τόξο μὲ $\varepsilon\varphi\varphi = \alpha$ καὶ $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Τότε ἡ εἰδικὴ λύση

εἶναι :

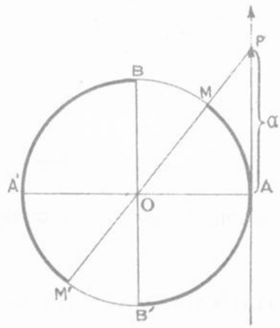
$$\left(\frac{\pi}{2}, \pi + \varphi\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \cup [0,\varphi) \qquad (1)$$

Ἡ γενικὴ λύση βρίσκεται προσθέτοντας στὰ ἄκρα τῶν εἰδικῶν διαστημάτων (1) τὸ 2κπ, $\kappa \in \mathbf{Z}$.

Μποροῦμε ὅμως ἀκόμα νὰ βροῦμε τὴ γενικὴ λύση προσθέτοντας στὰ ἄκρα τοῦ διαστήματος $\left(\frac{\pi}{2}, \pi + \varphi\right)$ τὸ κπ, $\kappa \in \mathbf{Z}$. Ἄρα ἡ γενικὴ λύση

εἶναι :

$$\kappa\pi + \frac{\pi}{2} < \chi < \kappa\pi + \pi + \varphi \qquad (\kappa \in \mathbf{Z}).$$




*Σχ. 4*

Ὅμοια λύνονται καὶ οἱ: $\varepsilon\varphi\chi > \alpha$, $\sigma\varphi\chi < \alpha$, $\sigma\varphi\chi > \alpha$, $\varepsilon\varphi\chi \leqslant \alpha$, $\varepsilon\varphi\chi \geqslant \alpha$, $\sigma\varphi\chi \leqslant \alpha$, $\sigma\varphi\chi \geqslant \alpha$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.** Νὰ λυθεῖ ἡ ἀνίσωση : $\varepsilon\varphi\chi < \sqrt{3}$ (1).

**Λύση.** Ἂς ὑποθέσουμε ὅτι στὸ σχῆμα 4 εἶναι $\alpha = \sqrt{3}$. Τὰ μοναδικὰ τόξα μέσα στὸ διάστημα $[0,2\pi)$ ποὺ ἔχουν ἐφαπτομένη $\sqrt{3}$, εἶναι αὐτὰ ποὺ ἔχουν πέρατα τὰ σημεῖα M καὶ M'. Τὰ τόξα αὐτὰ εἶναι τὰ $\frac{\pi}{3}$ καὶ $\frac{4\pi}{3}$. Εἶναι ἤδη φανερὸ ἀπὸ τὸ σχῆμα ὅτι ἡ εἰδικὴ λύση τῆς (1) εἶναι :

$$\frac{\pi}{2} < \chi < \frac{4\pi}{3} \text{ ἢ } \frac{3\pi}{2} < \chi < 2\pi \text{ ἢ } 0 \leqslant \chi < \frac{\pi}{3}.$$

Ἑπομένως ἡ γενικὴ λύση εἶναι :

$$\kappa\pi + \frac{\pi}{2} < \chi < \kappa\pi + \frac{4\pi}{3} \qquad (\kappa \in \mathbf{Z}).$$

Δίνουμε παρακάτω ἕνα παράδειγμα τριγωνομετρικῆς ἀνισώσεως ἀλγεβρικῆς μορφῆς.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.** Νὰ λυθεῖ ἡ ἀνίσωση: $4συν^2χ + 2(1+\sqrt{3})συνχ + \sqrt{3} < 0$ (1)

**Λύση.** Ἂν θέσουμε συνχ $= t$, τότε ἔχουμε νὰ ἐπιλύσουμε τὴν ἀλγεβρικὴ ἀνίσωση

$$4t^2 + 2(1+\sqrt{3})\,t + \sqrt{3} < 0. \qquad (2).$$

Ἐπειδὴ οἱ ρίζες τοῦ τριωνύμου $4t^2 + 2(1+\sqrt{3})t + \sqrt{3}$ εἶναι οἱ ἀριθμοὶ $-\frac{1}{2}$ καὶ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, ἡ λύση τῆς (2) εἶναι:

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} < t < -\frac{1}{2}.$$

Ἄρα, ἔχουμε νὰ λύσουμε τὶς θεμελιώδεις ἀνισώσεις:

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} < συνχ < -\frac{1}{2} \qquad (3)$$

Μὲ ἄλλα λόγια, ἡ (1) εἶναι ἰσοδύναμη μὲ τὸ σύστημα τῶν ἀνισώσεων (3) Οἱ εἰδικὲς λύσεις αὐτῶν τῶν ἀνισώσεων εἶναι:

$$0 \leqslant χ < \frac{5π}{6} \;\; ἢ \;\; \frac{7π}{6} < χ < 2π \qquad (4)$$

καὶ

$$\frac{2π}{3} < χ < \frac{4π}{3}. \qquad (5)$$

Τὰ τόξα χ γιὰ τὰ ὁποῖα συναληθεύουν οἱ (4) καὶ (5) ἀποτελοῦν τὴν εἰδικὴ λύση τῆς (1), ἡ ὁποία εἶναι:

$$\frac{2π}{3} < χ < \frac{5π}{6} \;\; ἢ \;\; \frac{7π}{6} < χ < \frac{4π}{3}.$$

Ἡ γενικὴ λύση τῆς (1) θὰ εἶναι:

$$2κπ + \frac{2π}{3} < χ < 2κπ + \frac{5π}{6} \;\; ἢ \;\; 2κπ + \frac{7π}{6} < χ < 2κπ + \frac{4π}{3} \qquad (κ \in \mathbf{Z})$$

## 3. Τριγωνομετρικὲς ἀνισώσεις ποὺ ἀνάγονται σὲ θεμελιώδεις

Οἱ βασικὲς μορφὲς τριγωνομετρικῶν ἀνισώσεων, καθὼς καὶ οἱ μέθοδες γιὰ τὴ λύση τους, εἶναι ἀνάλογες μὲ ἐκεῖνες τῶν τριγωνομετρικῶν ἐξισώσεων. Ἔτσι, ἡ λύση μιᾶς ἀνισώσεως ἀνάγεται στὴ λύση θεμελιωδῶν τριγωνομετρικῶν ἀνισώσεων. Π.χ., ἡ ἀνίσωση f(ημx, συνx) >0, ὅπου f(ημx, συνx) ἀκέραιο καὶ συμμετρικὸ πολυώνυμο ὡς πρὸς ημx καὶ συνx, εἶναι μιὰ βασικὴ μορφὴ τριγωνομετρικῆς ἀνισώσεως καὶ λύνεται ὅπως καὶ ἡ ἀντίστοιχη συμμετρικὴ τριγωνομετρικὴ ἐξίσωση. Ἔχουμε :

$$f(\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f\left(t, \dfrac{t^2-1}{2}\right) > 0 & (1) \\ t = \sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right). & (2) \end{cases}$$

Ἡ (1) εἶναι ἀλγεβρικὴ ἀνίσωση ὡς πρὸς t. Ἂς ὑποθέσουμε ὅτι ἡ (1) λύνεται καὶ ἂς εἶναι τὸ διάστημα $(t_o, +\infty)$ κάποια λύση της. Τότε θὰ ἔχουμε νὰ λύσουμε τὴν ἀνίσωση :

$$\sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > t_o \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > \frac{t_o\sqrt{2}}{2},$$

ποὺ εἶναι θεμελιώδης τριγωνομετρικὴ ἀνίσωση.

Παρακάτω ἀναφέρουμε ὁρισμένες χαρακτηριστικὲς μορφὲς τριγωνομετρικῶν ἀνισώσεων καὶ τὸν τρόπο ποὺ λύνονται.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.** Νὰ λυθεῖ ἡ ἀνίσωση: $(2\eta\mu x - \sqrt{3})(2\sigma\upsilon\nu x - 1)(\varepsilon\varphi x - 1) < 0$ (1)

**Λύση.** Γιὰ νὰ λύσουμε τὴν (1) ἀρκεῖ νὰ βροῦμε τὰ σημεῖα τῶν παραγόντων τοῦ πρώτου μέλους της, ὅταν τὸ x διατρέχει τὸ διάστημα $[0, 2\pi)$. Μὲ ἄλλα λόγια, ἀρκεῖ νὰ προσδιορίσουμε τὶς εἰδικὲς λύσεις τῶν παρακάτω ἀνισώσεων :

$$2\eta\mu x - \sqrt{3} > 0 \Leftrightarrow \eta\mu x > \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (2)$$

$$2\sigma\upsilon\nu x - 1 > 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x > \frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\varepsilon\varphi x - 1 > 0 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x > 1. \quad (4)$$

Οἱ ἀνισώσεις (2), (3) καὶ (4) εἶναι θεμελιώδεις καὶ οἱ εἰδικὲς λύσεις τους ἀντίστοιχα εἶναι :

$$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right), \left(\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right) \cup \left[0, \frac{\pi}{3}\right) \text{ καὶ } \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right).$$

Γιὰ νὰ βροῦμε τώρα τὸ σημεῖο τοῦ πρώτου μέλους τῆς (1), τοποθετοῦμε τὰ παραπάνω συμπεράσματα στὸν ἑπόμενο πίνακα :

| x | 0 | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{4}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2\eta\mu x - \sqrt{3}$ | − | − | + | + | − | − | − | − | |
| $2\sigma\upsilon\nu x - 1$ | + | + | − | − | − | − | − | + | |
| $\varepsilon\varphi x - 1$ | − | + | + | − | − | + | − | − | |
| Γ | + | − | − | + | − | + | − | + | |

Είναι : $\Gamma = (2\eta\mu\chi - \sqrt{3})(2\sigma\upsilon\nu\chi - 1)(\varepsilon\varphi\chi - 1)$.

Ἀπὸ τὸν παραπάνω πίνακα φαίνεται πὼς ἡ εἰδικὴ λύση τῆς (1) εἶναι :

$$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right).$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.** Νὰ λυθεῖ ἡ ἀνίσωση $\eta\mu 3\chi > \frac{\sqrt{3}}{2}$ καὶ νὰ σημειωθοῦν πάνω στὴν περιφέρεια τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου τὰ διαστήματα τῶν τόξων μέσα στὰ ὁποῖα καταλήγουν οἱ λύσεις της.

**Λύση.** Θέτουμε $3\chi = \omega$ καὶ λύνουμε τὴν ἀνίσωση $\eta\mu\omega > \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ἡ γενικὴ λύση της εἶναι :

$$\bigcup_{\kappa \in \mathbf{Z}} \left(2\kappa\pi + \frac{\pi}{3},\ 2\kappa\pi + \frac{2\pi}{3}\right).$$

Ἑπομένως εἶναι :

$$2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} < 3\chi < 2\kappa\pi + \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow 2\pi\frac{\kappa}{3} + \frac{\pi}{9} < \chi < 2\pi\frac{\kappa}{3} + \frac{2\pi}{9} \quad (1).$$

Ἐπειδὴ ὅμως εἶναι $\kappa = 3\rho + \upsilon$, $0 \leqslant \upsilon < 3$ $(\rho, \upsilon \in \mathbf{Z})$, ἡ σχέση (1) γράφεται :

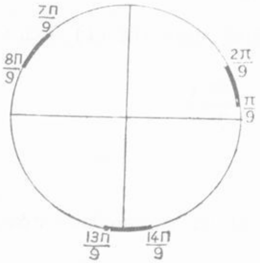
$$2\pi\frac{3\rho + \upsilon}{3} + \frac{\pi}{9} < \chi < 2\pi\frac{3\rho + \upsilon}{3} + \frac{2\pi}{9} \Leftrightarrow$$

$$2\pi\rho + \frac{2\upsilon\pi}{3} + \frac{\pi}{9} < \chi < 2\pi\rho + \frac{2\pi\upsilon}{3} + \frac{2\pi}{9} \quad (2).$$

Ἡ (2) εἶναι μιὰ ἄλλη μορφὴ τῆς γενικῆς λύσεως τῆς ἀνισώσεως $\eta\mu 3\chi > \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ἡ μορφὴ αὐτὴ μᾶς ἐπιτρέπει νὰ βροῦμε τὴν εἰδικὴ λύση τῆς ἀνισώσεως, ἀρκεῖ νὰ παραλείψουμε ἀπὸ τὴ (2) τὸ $2\pi\rho$. Ἄρα, ἡ εἰδικὴ λύση εἶναι :

$$\left(\frac{2\upsilon\pi}{3} + \frac{\pi}{9},\ \frac{2\upsilon\pi}{3} + \frac{2\pi}{9}\right) \text{ μὲ } \upsilon = 0,\ 1,\ 2. \qquad (3)$$

Δίνοντας τώρα στὸ $\upsilon$ τὶς δυνατὲς τιμὲς βρίσκουμε ἀπὸ τὴν (3) τὰ τρία



$\Sigma\chi.\ 5.$

εἰδικὰ διαστήματα μέσα στὰ ὁποῖα καταλήγουν οἱ λύσεις τῆς ἀνισώσεως (Σχ. 5). Τὰ διαστήματα τῆς εἰδικῆς λύσεως εἶναι :

$$\upsilon = 0 \to \left(\frac{\pi}{9}, \frac{2\pi}{9}\right)$$

$$\upsilon = 1 \to \left(\frac{7\pi}{9}, \frac{8\pi}{9}\right)$$

$$\upsilon = 2 \to \left(\frac{13\pi}{9}, \frac{14\pi}{9}\right).$$

### 3.1. Ἀνίσωση τῆς μορφῆς : $\alpha\eta\mu\chi + \beta\sigma\upsilon\nu\chi + \gamma > 0, \quad \alpha\beta\gamma \neq 0 \qquad (1)$

Ἐπειδὴ ἡ ἀντίστοιχη ἐξίσωση $\alpha\eta\mu\chi + \beta\sigma\upsilon\nu\chi + \gamma = 0$, ὅπως ἀναφέραμε στὰ προηγούμενα, λύνεται μὲ δύο τρόπους, ἔτσι καὶ ἡ ἀνίσωση (1) θὰ λυθεῖ μὲ δύο τρόπους.

**α΄ τρόπος**. Μὲ τὸν περιορισμὸ $\chi \neq 2\kappa\pi + \pi (\kappa \in \mathbf{Z})$, ἐκφράζουμε τὰ ημχ καὶ συνχ μὲ τὴν εφ $\frac{\chi}{2}$ καὶ ἔχουμε :

$$(1) \Leftrightarrow \alpha \frac{2\varepsilon\varphi\frac{\chi}{2}}{1 + \varepsilon\varphi^2\frac{\chi}{2}} + \beta \frac{1 - \varepsilon\varphi^2\frac{\chi}{2}}{1 + \varepsilon\varphi^2\frac{\chi}{2}} + \gamma > 0 \Leftrightarrow$$

$$(\gamma - \beta)\,\varepsilon\varphi^2\frac{\chi}{2} + 2\alpha\varepsilon\varphi\frac{\chi}{2} + \beta + \gamma > 0. \qquad (2)$$

Ἡ ἀνίσωση (2) εἶναι ἀλγεβρικῆς μορφῆς ὡς πρὸς $\varepsilon\varphi\frac{\chi}{2}$ καὶ ἑπομένως ἡ λύση της ἀνάγεται στὴ λύση θεμελιωδῶν ἀνισώσεων τῆς μορφῆς : $\varepsilon\varphi\frac{\chi}{2} > \lambda$ ἢ $\varepsilon\varphi\frac{\chi}{2} < \lambda$ μὲ $\lambda \in \mathbf{R}$.

Ἄν $\chi = 2\kappa\pi + \pi$, τότε ἡ (1) γράφεται :

$$\alpha\eta\mu(2\kappa\pi + \pi) + \beta\sigma\upsilon\nu(2\kappa\pi + \pi) + \gamma > 0 \Leftrightarrow -\beta + \gamma > 0 \Leftrightarrow \gamma > \beta.$$

Ἄρα, ἡ (1) ἔχει λύσεις τὰ τόξα $2\kappa\pi + \pi$, $\kappa \in \mathbf{Z}$, μόνο ὅταν $\gamma > \beta$.

**β΄ τρόπος**. Ἡ (1) γράφεται :

$$(1) \Leftrightarrow \alpha\left(\eta\mu\chi + \frac{\beta}{\alpha}\sigma\upsilon\nu\chi + \frac{\gamma}{\alpha}\right) > 0.$$

'Επειδὴ ὅμως $\frac{\beta}{\alpha} \in \mathbf{R}$, ὑπάρχει τόξο $\omega \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ μὲ $\varepsilon\varphi\omega = \frac{\beta}{\alpha}$ καὶ ἑπομένως ἔχουμε:

$$(1) \Leftrightarrow \alpha\left(\eta\mu\chi + \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}\sigma\upsilon\nu\chi + \frac{\gamma}{\alpha}\right) > 0 \overset{\sigma\upsilon\nu\omega>0}{\Leftrightarrow}$$

$$\alpha(\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\omega + \eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\chi + \frac{\gamma}{\alpha}\sigma\upsilon\nu\omega) > 0 \Leftrightarrow \alpha\eta\mu(\chi+\omega) > -\gamma\sigma\upsilon\nu\omega.$$

ι) Ἂν $\alpha>0$, ἔχουμε νὰ λύσουμε τὴ θεμελιώδη ἀνίσωση:

$$\eta\mu(\chi+\omega) > -\frac{\gamma\,\sigma\upsilon\nu\omega}{\alpha}.$$

ιι) Ἂν $\alpha<0$, τότε ἔχουμε τὴν ἀνίσωση: $\eta\mu(\chi+\omega) < -\frac{\gamma\,\sigma\upsilon\nu\omega}{\alpha}$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.** Νὰ λυθεῖ ἡ ἀνίσωση: $\sqrt{3}\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi - \sqrt{2} < 0$. (1)

**Λύση.** Ἔχουμε:

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{3}\left(\eta\mu\chi + \frac{\sqrt{3}}{3}\sigma\upsilon\nu\chi - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) < 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}\left(\eta\mu\chi + \varepsilon\varphi\frac{\pi}{6}\,\sigma\upsilon\nu\chi - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}}\left[\eta\mu\left(\chi+\frac{\pi}{6}\right) - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}\right] < 0 \Leftrightarrow 2\left[\eta\mu\left(\chi+\frac{\pi}{6}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\right] < 0 \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu\left(\chi+\frac{\pi}{6}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Θέτουμε $\chi + \frac{\pi}{6} = \omega$, ὁπότε ἔχουμε νὰ λύσουμε τὴν ἀνίσωση $\eta\mu\omega < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ἡ γενικὴ λύση της εἶναι:

$$2\kappa\pi + \frac{3\pi}{4} < \omega < 2\kappa\pi + 2\pi \quad \text{καὶ} \quad 2\lambda\pi \leqslant \omega < 2\lambda\pi + \frac{\pi}{4} \qquad (\kappa,\ \lambda \in \mathbf{Z}).$$

'Απ' αὐτὴ καὶ ἐπειδὴ $\chi = \omega - \frac{\pi}{6}$, βρίσκουμε τὴ γενικὴ λύση τῆς (1), ποὺ εἶναι:

$$2\kappa\pi + \frac{7\pi}{12} < \chi < 2\kappa\pi + \frac{11\pi}{6} \quad \text{καὶ} \quad 2\lambda\pi - \frac{\pi}{6} \leqslant \chi < 2\lambda\pi + \frac{\pi}{12}.$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Α' ΟΜΑΔΑ

32) Νὰ λυθοῦν οἱ παρακάτω ἀνισώσεις:

1) $\eta\mu\chi > \frac{\sqrt{3}}{2}$ 2) $\varepsilon\varphi\chi \geqslant -\sqrt{3}$ 3) $\sigma\upsilon\nu\chi < -\frac{1}{2}$

4) $\eta\mu\left(\chi - \frac{\pi}{2}\right) < \frac{1}{2}$ 5) $\sigma\upsilon\nu\left(\chi - \frac{\pi}{3}\right) > \frac{1}{2}$ 6) $\sigma\varphi\chi > 0.$

33) Νὰ λύσετε τὶς ἀνισώσεις:

1) $3\eta\mu\chi + 2\sigma\upsilon\nu\chi > 2$ 2) $\varepsilon\varphi\chi + \sigma\varphi\chi > 1$ 3) $\sigma\upsilon\nu 2\chi > \eta\mu^2\chi - 1$

4) $\eta\mu 2\chi > \sigma\upsilon\nu\chi$ 5) $\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi > 1$ 6) $\sigma\upsilon\nu 2\chi + 2 < 3\sigma\upsilon\nu\chi$

7) $\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi < \sqrt{2}$ 8) $\frac{\sigma\upsilon\nu 2\chi - 1}{\sigma\upsilon\nu 2\chi} < 1$ 9) $\eta\mu^2\chi - \eta\mu 2\chi + 3\sigma\upsilon\nu^2\chi > 2$

10) $\frac{\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi}{\eta\mu\chi - \sigma\upsilon\nu\chi} > 1.$

### Β' ΟΜΑΔΑ

34) Νὰ λυθεῖ ἡ ἀνίσωση $\eta\mu 5\chi > \frac{1}{2}$ καὶ νὰ σημειωθοῦν πάνω στὴν περιφέρεια τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου τὰ διαστήματα τῶν τόξων μέσα στὰ ὁποῖα καταλήγουν οἱ λύσεις της.

35) Νὰ βρεῖτε τὶς εἰδικὲς λύσεις τῶν παρακάτω ἀνισώσεων:

1) $\sigma\varphi 3\chi > -1$ 2) $\eta\mu 4\chi < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 3) $\sigma\upsilon\nu 3\chi < \frac{1}{2}$

4) $(\eta\mu\chi - 1)(2\sigma\upsilon\nu\chi - 1)(\varepsilon\varphi\chi - 1) < 0$ 5) $(\sigma\upsilon\nu\chi + 1)(\eta\mu\chi - 2)(\varepsilon\varphi\chi + \sqrt{3}) < 0$

6) $(2\eta\mu\chi - 1)\left(\sigma\upsilon\nu\chi + \frac{1}{2}\right)(\sigma\varphi\chi - \sqrt{3}) \geqslant 0$ 7) $(\sqrt{2}\,\eta\mu\chi - 1)(\varepsilon\varphi 2\chi - 1) \leqslant 0$

8) $(\chi - 2)\,\eta\mu 3\chi < 0$ 9) $\chi\sigma\upsilon\nu\chi > 0.$

36) Νὰ λυθεῖ ἡ ἀνίσωση: $\eta\mu 2\chi > \eta\mu 2\alpha$, $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{4}$.

37) Νὰ λυθεῖ καὶ διερευνηθεῖ ἡ ἐξίσωση ὡς πρὸς $\chi$:

$$(2\sigma\upsilon\nu\varphi - 1)\chi^2 - 4\chi + 2\,(2\sigma\upsilon\nu\varphi + 1) = 0,$$

$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$

38) Νὰ λυθεῖ ἡ ἀνίσωση: $3(\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi) - 5\eta\mu\chi\,\sigma\upsilon\nu\chi > 3$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ V

# ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΕΣ ΚΥΚΛΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

## 1. Ὁρισμοὶ καὶ βασικὲς ἔννοιες

1.1. Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ τοῦ ημχ ($\chi \in \mathbf{R}$) συμπεραίνουμε ὅτι, τὸ ἡμίτονο (σύντομα τὸ ημ) εἶναι μιὰ συνάρτηση μὲ πεδίο ὁρισμοῦ τὸ σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν **R** καὶ πεδίο τιμῶν τὸ $[-1, 1]$. Ἑπομένως τὸ ημ εἶναι μιὰ πραγματικὴ συνάρτηση μιᾶς πραγματικῆς μεταβλητῆς καὶ ἔχει τὸν τύπο $\psi = \eta\mu\chi$. Συμβολικὰ γράφουμε:

$$\eta\mu : \mathbf{R} \longrightarrow [-1, 1] \text{ ἤ}$$

$$\chi \xrightarrow{\eta\mu} \eta\mu(\chi) = \eta\mu\chi.$$

Εἶναι φανερὸ ὅτι ἡ συνάρτηση ημ δὲν εἶναι ἀμφιμονοσήμαντη (ἕνα πρὸς ἕνα), γιατὶ ἡ ἐξίσωση $\eta\mu\chi = \psi$ μὲ $|\psi| \leqslant 1$ δὲν ἔχει μιὰ μόνο λύση. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι κάθε $\psi \in [-1, 1]$ δὲν εἶναι ἀντίστοιχο (εἰκόνα) ἑνὸς μόνο $\chi \in \mathbf{R}$. Π.χ. ἡ λύση τῆς ἐξισώσεως $\eta\mu\chi = 1$ εἶναι $\chi = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbf{Z}$. Ἑπομένως τὰ ἄπειρα τόξα $2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ ἔχουν εἰκόνα μὲ τὴ συνάρτηση ημ τὸ 1, δηλαδὴ εἶναι $\eta\mu\left(2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1$ γιὰ κάθε $\kappa \in \mathbf{Z}$. Τελικά, ἡ συνάρτηση ημ εἶναι μιὰ συνάρτηση τοῦ **R** πάνω στὸ $[-1, 1]$. Ἐπειδὴ ὅμως δὲν εἶναι ἕνα πρὸς ἕνα, δὲν ἔχει ἀντίστροφη συνάρτηση. Μὲ ἄλλα λόγια, ἡ συνάρτηση ημ δὲν ἀντιστρέφεται, δηλαδὴ ἡ ἀντιστοιχία:

$$\eta\mu^{-1} : [-1, 1] \longrightarrow \mathbf{R}$$

δὲν εἶναι συνάρτηση.

Ἂν ὅμως περιορίσουμε τὸ πεδίο ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως ημ σ' ἕνα κατάλληλο ὑποδιάστημα τοῦ **R**, τότε μπορεῖ ἡ συνάρτηση ημ νὰ γίνει ἕνα πρὸς ἕνα καὶ ἑπομένως νὰ εἶναι δυνατὴ ἡ ἀντιστροφή της.

Θὰ δείξουμε ὅτι ἡ συνάρτηση ημ μὲ πεδίο ὁρισμοῦ τὸ σύνολο $\Delta_\kappa = \left[\kappa\pi - \frac{\pi}{2}, \kappa\pi + \frac{\pi}{2}\right]$ ($\kappa \in \mathbf{Z}$) καὶ μὲ πεδίο τιμῶν τὸ $[-1, 1]$ εἶναι ένα πρὸς ένα [1]). Θεωροῦμε δύο τόξα $\chi_1$, $\chi_2$ ἀπὸ τὸ Δκ μὲ $\chi_1 \neq \chi_2$ καὶ ἀρκεῖ νὰ δείξουμε ὅτι $\eta\mu\chi_1 \neq \eta\mu\chi_2$. Ἂν ὑποθέσουμε ὅτι $\eta\mu\chi_1 = \eta\mu\chi_2$, τότε θὰ εἶναι:

$$\chi_1 = 2\rho\pi + \chi_2 \text{ ἢ } \chi_1 = (2\rho + 1)\pi - \chi_2 \quad (\rho \in \mathbf{Z}) \Leftrightarrow$$

$$\chi_1 - \chi_2 = 2\rho\pi \qquad (1)$$

$$\text{ἢ}$$

$$\chi_1 + \chi_2 = 2\rho\pi + \pi \quad (2).$$

Ἐξάλλου, ἐπειδὴ $\chi_1, \chi_2 \in \Delta_\kappa$, συνάγεται ὅτι:

$$\kappa\pi - \frac{\pi}{2} \leqslant \chi_1 \leqslant \kappa\pi + \frac{\pi}{2} \quad \text{καὶ } \kappa\pi - \frac{\pi}{2} \leqslant \chi_2 \leqslant \kappa\pi + \frac{\pi}{2}. \qquad (3)$$

Ἀπὸ τὶς (3) βρίσκουμε:

$$-\pi \leqslant \chi_1 - \chi_2 \leqslant \pi \qquad (4)$$

$$2\kappa\pi - \pi \leqslant \chi_1 + \chi_2 \leqslant 2\kappa\pi + \pi. \qquad (5)$$

Ἀπὸ τὶς (1) καὶ (4) ἔχουμε:

$$-\pi \leqslant 2\rho\pi \leqslant \pi \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leqslant \rho \leqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow \rho = 0.$$

Ἀπὸ τὴν (1) μὲ $\rho = 0$ βρίσκουμε $\chi_1 = \chi_2$, ποὺ εἶναι ἄτοπο.

Συνδυάζοντας τὶς (2) καὶ (5) ἔχουμε:

$$2\kappa\pi - \pi \leqslant 2\rho\pi + \pi \leqslant 2\kappa\pi + \pi \Leftrightarrow \kappa - 1 \leqslant \rho \leqslant \kappa \Leftrightarrow \rho = \kappa \text{ ἢ } \rho = \kappa - 1.$$

Ἀπὸ τὶς σχέσεις (3) καὶ (2) μὲ $\rho = \kappa$ ἢ $\kappa - 1$ συνάγουμε ἀντιστοίχως $\chi_1 = \chi_2 = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ ἢ $\chi_1 = \chi_2 = \kappa\pi - \frac{\pi}{2}$, ποὺ εἶναι ἄτοπο. Ἄρα ἡ συνάρτηση:

$$\eta\mu : \left[\kappa\pi - \frac{\pi}{2}, \kappa\pi + \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$$

εἶναι ἕνα πρὸς ἕνα καὶ ἑπομένως ἀντιστρέφεται. Ἡ ἀντίστροφή της συμβολίζεται μὲ **τοξ$_\kappa$ ημ** καὶ διαβάζεται **«τόξο κάπα ἡμίτονο»**. Τὸ διάστημα $\Delta_\kappa = \left[\kappa\pi - \frac{\pi}{2}, \kappa\pi + \frac{\pi}{2}\right]$ μὲ $\kappa \in \mathbf{Z}$ ὀνομάζεται **γενικὸ διάστημα ἀντιστροφῆς τῆς συναρτήσεως ημ.** Εἰδικότερα, ἂν $\kappa = 0$ ἔχουμε τὴν ἀμφιμονοσήμαντη συνάρτηση:

---

[1]). Μιὰ ἀπεικόνιση $f : A \to B$ εἶναι ἕνα πρὸς ἕνα, ὅταν καὶ μόνο ὅταν:
$\forall\ (\chi_1, \chi_2) \in A \times A$ μὲ $\chi_1 \neq \chi_2 \Longrightarrow f(\chi_1) \neq f(\chi_2)$.

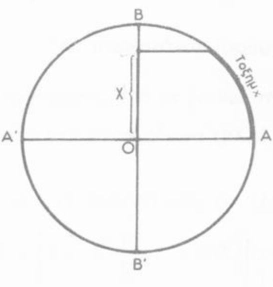
$$\text{τοξ}_0\,\text{ημ} : \left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,\ 1],$$

γιατὶ μὲ κ = 0 εἶναι $\Delta_0 = \left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$. Τὴ συνάρτηση τοξ$_0$ημ θὰ συμβολίζουμε στὰ ἑπόμενα μὲ **Τοξημ.** Τὸ διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ θὰ λέγεται **βασικὸ ἢ πρωτεῦον διάστημα** τῆς συναρτήσεως τοξ$_\kappa$ημ. Ὁ ἀριθμὸς Τοξημχ μὲ $|\chi| \leqslant 1$ θὰ λέγεται **βασικὴ ἢ πρωτεύουσα τιμὴ** τῆς τοξ$_\kappa$ημ καὶ θὰ διαβάζεται «**πρωτεῦον τόξο ἡμιτόνου χ**».

Ὅλα τὰ παραπάνω, ἀποτελοῦν τὴ θεωρητικὴ πλευρὰ τῆς ἀντιστροφῆς τῆς συναρτήσεως ημ. Γιὰ τὴν ἐφαρμογὴ ὅμως τῆς προηγούμενης θεωρίας, εἶναι ἀπαραίτητο νὰ δώσουμε μερικοὺς πιὸ πρακτικοὺς ὁρισμοὺς τῶν ἐννοιῶν ποὺ ὁρίσαμε.

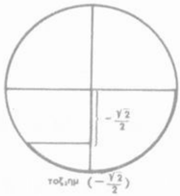
Τὸ σύμβολο **Τοξημχ,** ἢ **τοξ$_0$μηχ,** ἐφόσον $-1 \leqslant \chi \leqslant 1$, διαβάζεται «**τόξο ἡμιτόνου χ**» καὶ **παριστάνει ἕνα καὶ μοναδικὸ τόξο τοῦ διαστήματος** $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ **ποὺ ἔχει ἡμίτονο τὸν ἀριθμὸ χ** (Βλ. Σχ. 6).

Π.χ. τοξ$_0$ημ $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$ καὶ τοξ$_0$ημ $\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$.




*Σχ. 6.*

Τὸ σύμβολο τοξ$_1$ημχ, ἐφόσον $-1 \leqslant \chi \leqslant 1$, παριστάνει ἕνα καὶ μοναδικὸ τόξο τοῦ διαστήματος $\left[\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right]$ ποὺ ἔχει ἡμίτονο τὸ χ. Τὸ διάστημα $\left[\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right]$ τὸ βρήκαμε ἀπὸ τὸ γενικὸ διάστημα ἀντιστροφῆς τῆς συναρτήσεως ημ, δηλαδὴ τὸ $\left[\kappa\pi - \frac{\pi}{2},\ \kappa\pi + \frac{\pi}{2}\right]$ μὲ κ = 1. Ἡ τιμὴ κ = 1 καθορίζεται ἀπὸ τὸ δείκτη τοῦ συμβόλου τοξ$_1$ημχ. Π.χ. εἶναι: τοξ$_1$ημ $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\pi}{4}$ καὶ τοξ$_1$ημ$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{3\pi}{4}$ (Βλ. Σχ. 7)




*Σχ. 7.*

Ἀπὸ τὰ παραπάνω φαίνεται καὶ πάλι ἡ χρήσιμη ἰσοδυναμία :

$$\left.\begin{array}{l}\tau o \xi_0 \eta \mu \chi = \varphi \\ -1 \leqslant \chi \leqslant 1\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\eta \mu \varphi = \chi \\ -\dfrac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2}.\end{array}\right.$$

Ἀναφέρουμε τώρα μερικὰ ἀκόμη παραδείγματα :

$$\text{Τοξ ημ}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}, \quad \text{Τοξ ημ}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}, \quad \text{Τοξ ημ } 1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{τοξ}_1\,\text{ημ}\frac{1}{2} = \frac{5\pi}{6}, \quad \text{τοξ}_1\,\text{ημ}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{4\pi}{3}, \quad \text{τοξ}_1\,\text{ημ } 1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{τοξ}_2\,\text{ημ}\frac{1}{2} = \frac{13\pi}{6}, \quad \text{τοξ}_2\,\text{ημ}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{3}, \quad \text{τοξ}_2\,\text{ημ } 1 = \frac{5\pi}{2}$$

$$\text{τοξ}_{-1}\text{ημ}\frac{1}{2} = -\frac{7\pi}{6}.$$

Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ τῆς συναρτήσεως τοξ$_\kappa$ημ συνάγεται, γιὰ κάθε $\kappa \in \mathbf{Z}$ καὶ γιὰ κάθε $\psi \in [-1,\ 1]$, ὅτι :

α) ημ(τοξ$_\kappa$ημψ) = ψ

β) Τοξημ(− ψ) = − Τοξημψ

γ) τοξ$_\kappa$ημψ = κπ + $(-1)^\kappa$Τοξημψ

δ) $$\boxed{\text{Τοξημψ} = \chi \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\eta\mu\chi = \psi \\ \chi \in \left[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right]\end{array}\right.}$$

ε) $$\text{τοξ}_\kappa\text{ημψ} = \chi \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\eta\mu\chi = \psi \\ \chi \in \left[\kappa\pi - \dfrac{\pi}{2},\ \kappa\pi + \dfrac{\pi}{2}\right]\end{array}\right\}$$

Ἡ παραπάνω ἰσοδυναμία δ) εἶναι χρήσιμη γιὰ τὶς ἐφαρμογές.

**1.2.** Μὲ ἀνάλογο τρόπο μποροῦμε νὰ μελετήσουμε τὸ πρόβλημα ἂν ὑπάρχει ἀντίστροφη συνάρτηση τῆς συναρτήσεως συν(συνημίτονο). Τὸ **γενικὸ διά-**

**στημα ἀντιστροφῆς τῆς συναρτήσεως συν** εἶναι **[κπ, κπ + π]**, κ∈**Z**. Ἡ ἀντίστροφη συνάρτηση τῆς συναρτήσεως συν συμβολίζεται μὲ **τοξ$_κ$συν**. Μὲ κ = 0 βρίσκουμε τὸ **βασικὸ** διάστημα [0, π]. Ἡ συνάρτηση **τοξ$_0$συν** ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὸ βασικὸ διάστημα συμβολίζεται καὶ μὲ **Τοξσυν.** Ἀναφέρουμε μερικὰ παραδείγματα :

$$\text{Τοξ συν}\,\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3},\qquad \text{Τοξ συν}\,(-1)=\pi,\qquad \text{Τοξ συν}0=\frac{\pi}{2},$$

$$\text{τοξ}_1\text{συν}\,\frac{1}{2}=\frac{5\pi}{3},\qquad \text{τοξ}_2\text{συν}\frac{1}{2}=\frac{7\pi}{3},\qquad \text{τοξ}_{-1}\text{συν}\frac{1}{2}=-\frac{\pi}{3}.$$

Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ τῆς συναρτήσεως τοξ$_κ$συν συνάγονται, γιὰ κάθε ψ∈[– 1, 1], τὰ ἑξῆς :

α) συν(τοξ$_κ$συνψ) = ψ, γιὰ κάθε κ∈**Z**

β) Τοξσυν(– ψ) = π – Τοξσυνψ

γ) τοξ$_κ$συνψ = 2κπ + $(-1)^κ$ Τοξσυνψ, γιὰ κάθε κ∈**Z**

δ) $$\boxed{\textbf{Τοξσυνψ} = \chi \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \text{συν}\chi=\psi \\ \chi\in[0,\pi]\end{cases}}$$

ε) $$\text{τοξ}_κ\,\text{συν}\psi=\chi \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}\text{συν}\chi=\psi\\ κ\pi\leqslant\chi\leqslant κ\pi+\pi\end{matrix}\right\}\quad (κ\in\mathbf{Z})$$

Ἡ παραπάνω ἰσοδυναμία δ) εἶναι χρήσιμη γιὰ τὶς ἐφαρμογές.

**Παρατήρηση :** Γιὰ νὰ βροῦμε τὴν ἀντίστροφη τῆς συναρτήσεως συν, μποροῦμε νὰ στηριχθοῦμε στὰ προηγούμενα (βλ. 1. 1.), ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσουμε ὅτι συνχ = ημ$\left(\frac{\pi}{2}-\chi\right)$.

**1.3.** Ἡ συνάρτηση εφ (ἐφαπτομένη) μὲ τύπο ψ = εφχ εἶναι ὁρισμένη στὸ $\mathbf{R}-\left\{κ\pi+\frac{\pi}{2} \;:\; κ\in\mathbf{Z}\right\}$ καὶ ἔχει πεδίο τιμῶν τὸ **R**. Ἡ συνάρτηση εφ δὲν εἶναι ἀμφιμονοσήμαντη καὶ ἐπομένως δὲν ὑπάρχει ἡ ἀντίστροφή της. Θὰ δείξουμε ὅμως ὅτι ἡ συνάρτηση :

$$\text{εφ}:\left(κ\pi-\frac{\pi}{2},\,κ\pi+\frac{\pi}{2}\right)\longrightarrow\mathbf{R}\qquad(\Sigma)$$

εἶναι ἀμφιμονοσήμαντη γιὰ κάθε κ∈**Z**. Θεωροῦμε δύο τόξα $\chi_1$, $\chi_2$ ∈

$\left(\kappa\pi - \frac{\pi}{2}, \kappa\pi + \frac{\pi}{2}\right)$, $\kappa \in \mathbf{Z}$ μὲ $\chi_1 \neq \chi_2$. Ἂν ὑποθέσουμε ὅτι $\varepsilon\varphi\chi_1 = \varepsilon\varphi\chi_2$, τότε θὰ ἔχουμε :

$$\chi_1 - \chi_2 = \rho\pi, \ \rho \in \mathbf{Z}. \qquad (1)$$

Ἐξάλλου εἶναι : $\kappa\pi - \frac{\pi}{2} < \chi_1 < \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ καὶ $\kappa\pi - \frac{\pi}{2} < \chi_2 < \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ καὶ ἀπ' αὐτὲς βρίσκουμε :

$$-\pi < \chi_1 - \chi_2 < \pi. \qquad (2)$$

Συνδυάζοντας τὶς (1) καὶ (2) ἔχουμε :

$$-\pi < \rho\pi < \pi \Leftrightarrow -1 < \rho < 1 \Leftrightarrow \rho = 0.$$

Μὲ $\rho = 0$ ἡ σχέση (1) δίνει $\chi_1 = \chi_2$, ποὺ εἶναι ἄτοπο. Ἄρα, ὑπάρχει ἡ ἀντίστροφη τῆς εφ καὶ συμβολίζεται μὲ **τοξ$_\kappa$ εφ.** Τὸ **γενικὸ διάστημα ἀντιστροφῆς τῆς εφ** εἶναι τὸ $\left(\mathbf{k\pi} - \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}, \mathbf{k\pi} + \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\right)$. Ἀκόμα τὴ συνάρτηση τοξ$_0$ εφ θὰ συμβολίζουμε καὶ μὲ **Τοξεφ.**

Ἡ τιμὴ Τοξεφχ τῆς συναρτήσεως Τοξεφ στὴ θέση $\chi \in \mathbf{R} - \left\{\kappa\pi + \frac{\pi}{2} : \kappa \in \mathbf{Z}\right\}$ ὀνομάζεται **βασικὴ τιμὴ** τιμὴ καὶ τὸ διάστημα $\left(-\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}, \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\right)$ ὀνομάζεται **βασικὸ διάστημα.**

Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ τῆς συναρτήσεως τοξ$_\kappa$εφ προκύπτουν τὰ παρακάτω :

α) εφ(τοξ$_\kappa$ εφχ) = χ, γιὰ κάθε $(\chi, \kappa) \in \mathbf{R} \times \mathbf{Z}$.

β) Τοξεφ(− χ) = − Τοξεφχ, γιὰ κάθε $\chi \in \mathbf{R}$.

γ) τοξ$_\kappa$εφχ = κπ + Τοξεφχ, γιὰ κάθε $(\chi, \kappa) \in \mathbf{R} \times \mathbf{Z}$.

δ) $\text{τοξ}_\kappa\text{εφ}\chi = \omega \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{εφ}\omega = \chi \\ \kappa\pi - \frac{\pi}{2} < \chi < \kappa\pi + \frac{\pi}{2} \end{array}\right\}$ $(\kappa \in \mathbf{Z}, \ \chi \in \mathbf{R})$.

Ἀνάλογα συμπεράσματα ἔχουμε καὶ γιὰ τὴν ἀντίστροφη συνάρτηση τῆς σφ (συνεφαπτομένης), ἀρκεῖ νὰ τονίσουμε ὅτι τὸ **γενικὸ διάστημα ἀντιστροφῆς τῆς συναρτήσεως σφ** εἶναι τὸ **(kπ, kπ + π).**

Εὔκολα μποροῦμε νὰ δείξουμε τὰ ἑπόμενα :

α) Τοξεφχ = Τοξσφ $\frac{1}{\chi}$, $\chi > 0$.

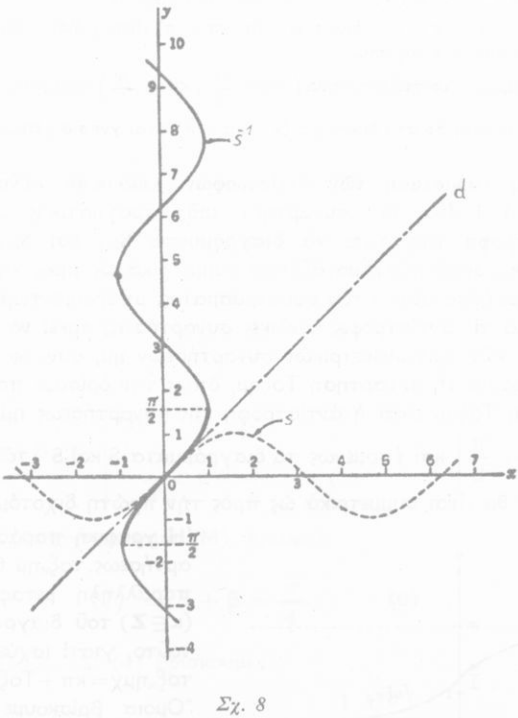
β) $\text{Τοξεφ}x = -\pi + \text{Τοξσφ}\,\dfrac{1}{x},\ x < 0.$

γ) $\text{Τοξεφ}x + \text{Τοξεφ}\,\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2},\ x > 0.$

δ) $\text{Τοξεφ}x + \text{Τοξεφ}\,\dfrac{1}{x} = -\dfrac{\pi}{2},\ x < 0.$

ε) $\text{Τοξσφ}x + \text{Τοξσφ}\,\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2},\ x > 0.$

στ) $\text{Τοξσφ}x + \text{Τοξσφ}\,\dfrac{1}{x} = -\dfrac{\pi}{2},\ x < 0.$




*Σχ. 8*

Οἱ συναρτήσεις **τοξ$_\kappa$ημ, τοξ$_\kappa$συν, τοξ$_\kappa$εφ** καὶ **τοξ$_\kappa$σφ** ὀνομάζονται **ἀντίστροφες κυκλικὲς συναρτήσεις**.

Χρήσιμες γιὰ τὶς ἐφαρμογὲς εἶναι καὶ οἱ ἑπόμενες ἰσοδυναμίες :

$$\text{Τοξεφχ} = \omega \Leftrightarrow \begin{cases} \text{εφω} = \chi \\ -\dfrac{\pi}{2} < \omega < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\text{Τοξσφχ} = \omega \Leftrightarrow \begin{cases} \text{σφω} = \chi \\ -\dfrac{\pi}{2} < \omega < \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

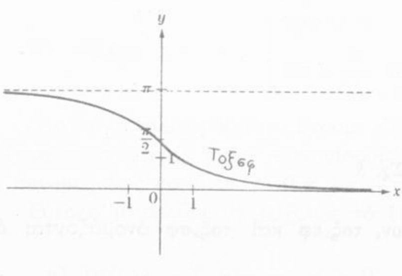
**Παρατήρηση.** α) Ἡ συνάρτηση ημ στὸ διάστημα $\left[\kappa\pi - \dfrac{\pi}{2}, \kappa\pi + \dfrac{\pi}{2}\right]$ εἶναι «γνήσια αὔξουσα» μὲ κ ἄρτιο καὶ «γνήσια φθίνουσα» μὲ κ περιττό.

β) Ἡ συνάρτηση συν στὸ διάστημα $[\kappa\pi, \kappa\pi + \pi]$ εἶναι γνήσια φθίνουσα μὲ κ ἄρτιο καὶ γνήσια αὔξουσα μὲ κ περιττό.

γ) Ἡ συνάρτηση εφ στὸ διάστημα $\left(\kappa\pi - \dfrac{\pi}{2}, \kappa\pi + \dfrac{\pi}{2}\right)$ εἶναι γνήσια αὔξουσα μὲ $\kappa \in \mathbf{Z}$

δ) Ἡ συνάρτηση σφ στὸ διάστημα $(\kappa\pi, \kappa\pi + \pi)$ εἶναι γνήσια φθίνουσα μὲ $\kappa \in \mathbf{Z}$.

**1. 4. Γραφικὴ παράσταση τῶν ἀντίστροφων κυκλικῶν συναρτήσεων** Γνωρίζουμε ὅτι, ἂν f εἶναι μιὰ συνάρτηση μιᾶς πραγματικῆς μεταβλητῆς καὶ $f^{-1}$ ἡ ἀντίστροφή της, τότε τὰ διαγράμματα $S_{f^{-1}}$ καὶ $S_{f^{-1}}$ τῶν f καὶ $f^{-1}$ εἶναι σὲ ὀρθοκανονικὸ σύστημα ἀξόνων συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν πρώτη διχοτόμο. Μὲ τὴ βοήθεια αὐτοῦ τοῦ συμπεράσματος, μποροῦμε τώρα νὰ παραστήσουμε γραφικὰ τὶς ἀντίστροφες κυκλικὲς συναρτήσεις, ἀρκεῖ νὰ γνωρίζουμε τὰ διαγράμματα τῶν τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων ημ, συν, εφ καὶ σφ. Συγκεκριμμένα θεωροῦμε τὴ συνάρτηση Τοξημ, ὅπως τὴν ὁρίσαμε παραπάνω (1.1). Ἡ συνάρτηση Τοξημ εἶναι ἡ ἀντίστροφη τῆς συναρτήσεως ημ μέσα στὸ διάστημα $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ καὶ ἑπομένως τὰ διαγράμματα S καὶ $S^{-1}$ τῶν συναρτήσεων ημ καὶ Τοξημ θὰ εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν πρώτη διχοτόμο d (Σχ. 6).

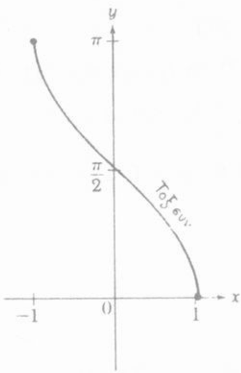



*Σχ. 9.*

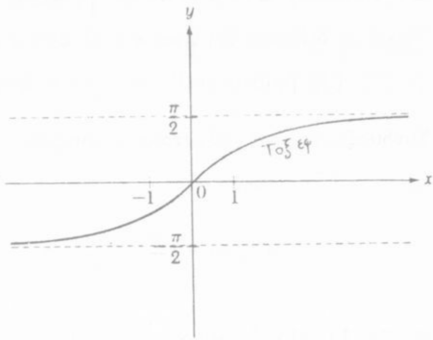
Ἡ γραφικὴ παράσταση τῆς συναρτήσεως τοξ$_\kappa$ημ θὰ προκύψει μὲ παράλληλη μεταφορὰ κατὰ κπ ($\kappa \in \mathbf{Z}$) τοῦ διαγράμματος $S^{-1}$ καὶ τοῦτο, γιατὶ ἰσχύει :

τοξ$_\kappa$ημχ$=\kappa\pi+$Τοξημχ$(|\chi|<1)$.

Ὅμοια βρίσκουμε τὰ διαγράμματα τῶν ὑπόλοιπων ἀντίστροφων κυκλικῶν συναρτήσεων (βλ. σχήματα 7, 8 καὶ 9).




*Σχ. 10.*




*Σχ. 11.*

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.** Νὰ δείξετε ὅτι : $\text{Τοξεφ}\,\frac{1}{2} + \text{Τοξεφ}\,\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$ (1)

**Ἀπόδειξη.** Ἂν θέσουμε $\text{Τοξεφ}\,\frac{1}{2} = \alpha$ καὶ $\text{Τοξεφ}\,\frac{1}{3} = \beta$, τότε ἔχουμε τὶς παρακάτω ἰσοδυναμίες :

$$\text{Τοξεφ}\frac{1}{2} = \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \text{εφ}\alpha = \dfrac{1}{2} & (2) \\ -\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2} & (3) \end{cases}$$

$$\text{Τοξεφ}\frac{1}{3} = \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \text{εφ}\beta = \dfrac{1}{3} & (4) \\ -\dfrac{\pi}{2} < \beta < \dfrac{\pi}{2}. & (5) \end{cases} \qquad (\text{M})$$

Σύμφωνα μὲ τὸ μετασχηματισμὸ (Μ), ἔχουμε :

$$(1) \Leftrightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{4} \qquad (6)$$

Ἀπὸ τὶς σχέσεις (2) καὶ (4) βρίσκουμε :

$$\text{εφ}\,(\alpha + \beta) = \frac{\text{εφ}\alpha + \text{εφ}\beta}{1 - \text{εφ}\alpha\text{εφ}\beta} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = 1$$

καὶ ἐπομένως $\alpha+\beta=\kappa\pi+\frac{\pi}{4}$, $\kappa\in\mathbf{Z}$ (7)

Ἀρκεῖ νὰ δείξουμε ὅτι εἶναι $\kappa=0$, ὁπότε ἀπὸ τὴν (7) θὰ ἔχουμε τὴν (6). Ἀπὸ τὶς (2), (3) βρίσκουμε $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$ καὶ ἀπὸ τὶς (4), (5) βρίσκουμε $0<\beta<\frac{\pi}{4}$.

Συνδυάζοντας τὰ τελευταῖα συμπεράσματα, ἔχουμε $0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$. Ἀπ' αὐτὴ καὶ τὴν (7) προκύπτει:

$$0<\kappa\pi+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{4}<\kappa<\frac{1}{4} \Leftrightarrow \kappa=0.$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.** Ἂν $\chi>0$, $\psi>0$ καὶ $\chi\psi<1$, τότε νὰ δείξετε ὅτι:

$$\text{Τοξεφ}\chi+\text{Τοξεφ}\psi=\text{Τοξεφ}\frac{\chi+\psi}{1-\chi\psi}$$

**Ἀπόδειξη.** Θέτουμε:

$$\text{Τοξεφ}\chi=\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \text{εφ}\alpha=\chi & (1)\\ -\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2} & (2)\end{cases}$$

$$\text{Τοξεφ}\psi=\beta \Leftrightarrow \begin{cases} \text{εφ}\beta=\psi & (3)\\ -\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{\pi}{2} & (4)\end{cases}$$

$$\text{Τοξεφ}\,\frac{\chi+\psi}{1-\chi\psi}=\gamma \Leftrightarrow \begin{cases} \text{εφ}\gamma=\frac{\chi+\psi}{1-\chi\psi} & (5)\\ -\frac{\pi}{2}<\gamma<\frac{\pi}{2}. & (6)\end{cases}$$

Σύμφωνα μὲ τὰ παραπάνω, ἀρκεῖ νὰ δείξουμε ὅτι: $\alpha+\beta=\gamma$ (7)

Ἀπὸ τὶς σχέσεις (1), (2) καὶ (3) ἔχουμε:

$$\text{εφ}(\alpha+\beta)=\frac{\text{εφ}\alpha+\text{εφ}\beta}{1-\text{εφ}\alpha\,\text{εφ}\beta}=\frac{\chi+\psi}{1-\chi\psi}=\text{εφ}\gamma$$

καὶ ἐπομένως: $\alpha+\beta=\kappa\pi+\gamma$, $\kappa\in\mathbf{Z}$. Ἀρκεῖ τώρα νὰ δείξουμε ὅτι $\kappa=0$, ὁπότε ἀπὸ τὴν τελευταία σχέση θὰ ἔχουμε τὴν (7).

Ἀπὸ τὶς σχέσεις (1), (2) καὶ ἐπειδὴ $\chi>0$, συνάγεται ὅτι: $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ (8)

Ἀπὸ τὶς (3), (4) καὶ ἐπειδὴ $\psi>0$, προκύπτει: $0<\beta<\frac{\pi}{2}$ (9)

'Ακόμα $\dfrac{\chi+\psi}{1-\chi\psi}>0$, γιατὶ $\chi\psi<1$, ὁπότε, σύμφωνα μὲ τὶς (5) καὶ (6), ἔχουμε: $0<\gamma<\dfrac{\pi}{2}$ ἢ $0>-\gamma>-\dfrac{\pi}{2}$ ἢ $-\dfrac{\pi}{2}<-\gamma<0$. Ἡ τελευταία σχέση σὲ συνδυασμὸ καὶ μὲ τὶς σχέσεις (8), (9) μᾶς δίνει: $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha+\beta-\gamma<\pi$. 'Απ' αὐτὴ καὶ τὴν $\alpha+\beta=\kappa\pi+\gamma$ ἔχουμε:

$$-\frac{\pi}{2}<\kappa\pi<\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{2}<\kappa<1 \Leftrightarrow \kappa=0.$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.** Νὰ δείξετε ὅτι: $\text{Τοξημ}\,\dfrac{1}{3}+\text{Τοξημ}\,\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=\dfrac{\pi}{2}$ (1)

**'Απόδειξη.** Ἔχουμε τὶς ἑπόμενες ἰσοδυναμίες:

$$\text{Τοξημ}\,\frac{1}{3}=\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \eta\mu\alpha=\dfrac{1}{3} & (2) \\ -\dfrac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\dfrac{\pi}{2} & (3) \end{cases}$$

$$\text{Τοξημ}\,\frac{2\sqrt{2}}{3}=\beta \Leftrightarrow \begin{cases} \eta\mu\beta=\dfrac{2\sqrt{2}}{3} & (4) \\ -\dfrac{\pi}{2}\leqslant\beta\leqslant\dfrac{\pi}{2} & (5) \end{cases}$$

Ἡ (1) γράφεται:

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \alpha=\frac{\pi}{2}-\beta \quad (6).$$

Βρίσκουμε τὰ ὅρια μεταβολῆς τοῦ τόξου $\dfrac{\pi}{2}-\beta$. Εἶναι $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}>\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ καὶ ἑπομένως, σύμφωνα μὲ τὴν (4), ἔχουμε $\eta\mu\beta>\eta\mu\dfrac{\pi}{3}$. 'Απὸ τὴν τελευταία σχέση καὶ τὴν (5), συνάγεται:

$$\frac{\pi}{3}<\beta<\frac{\pi}{2} \text{ ἢ } 0<\frac{\pi}{2}-\beta<\frac{\pi}{6} \quad (8).$$

'Απὸ τὶς (3) καὶ (8) προκύπτει ὅτι:

$$(6) \Leftrightarrow \eta\mu\alpha=\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) \Leftrightarrow \eta\mu\alpha=\sigma\upsilon\nu\beta \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu\alpha=\pm\sqrt{1-\eta\mu^2\beta} \underset{(5)}{\Leftrightarrow} \eta\mu\alpha=\sqrt{1-\eta\mu^2\beta} \overset{(2)}{\underset{(4)}{\Leftrightarrow}}$$

$$\frac{1}{3}=\sqrt{1-\frac{8}{9}} \Leftrightarrow \frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.** Νὰ λυθεῖ ἡ ἐξίσωση $\text{Τοξημ}x+\text{Τοξημ}x\sqrt{3}=\frac{\pi}{2}$. (1)

**Λύση.** Τὸ πρῶτο μέλος τῆς (1) ἔχει ἔννοια (ὁρίζεται), ἐφόσον εἶναι :

$$\left.\begin{cases}-1 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq x\sqrt{3} \leq 1\end{cases}\right\} \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3} \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad (2)$$

Θέτουμε :

$$\left.\begin{array}{l}\text{Τοξημ}x=\alpha \Leftrightarrow \begin{cases}\eta\mu\alpha = x & (3)\\ -\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2} & (4)\end{cases}\\[2ex] \text{Τοξημ}x\sqrt{3}=\beta \Leftrightarrow \begin{cases}\eta\mu\beta = x\sqrt{3} & (5)\\ -\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{\pi}{2} & (6)\end{cases}\end{array}\right. \qquad (M)$$

Ἄρα, ἔχουμε :

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha+\beta=\frac{\pi}{2} & (7)\\ (M) & \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{3} & (\pi).\end{cases}$$

Ἀρκεῖ νὰ λύσουμε τὴν ἐξίσωση (7) $\Leftrightarrow \alpha=\frac{\pi}{2}-\beta$. (8)

Θεωροῦμε τὴν ἐξίσωση $\eta\mu\alpha=\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$. (9)

Ἡ (9) δὲν εἶναι ἰσοδύναμη μὲ τὴν (8), ἀλλὰ κάθε λύση τῆς (8) εἶναι καὶ τῆς (9). Θὰ λύσουμε ἑπομένως τὴν (9) καὶ θὰ ἐξετάσουμε κατόπιν ποιὲς ἀπὸ τὶς λύσεις της εἶναι λύσεις καὶ τῆς (8). Ἔχουμε :

$$(9) \Leftrightarrow \eta\mu\alpha=\sigma\upsilon\nu\beta \Leftrightarrow \eta\mu\alpha=\pm\sqrt{1-\eta\mu^2\beta}.$$

Ἡ τελευταία ἐξίσωση, σύμφωνα μὲ τὶς σχέσεις (3) καὶ (5), γράφεται :

$$\chi = \pm \sqrt{1-3\chi^2} \Rightarrow \chi = \frac{1}{2}, \ \chi = -\frac{1}{2} \qquad (10)$$

Ὁ περιορισμὸς (π) δὲν ἀποκλείει τὶς ρίζες (10). Ἐξετάζουμε ὅμως τώρα ποιὰ ρίζα ἀπὸ τὶς (10) εἶναι καὶ ρίζα τῆς (8).

1) Ἂν $\chi = \frac{1}{2}$, τότε, ἀπὸ τὶς (3) καὶ (5), ἔχουμε $\eta\mu\alpha = \frac{1}{2}$ καὶ $\eta\mu\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ἀπ' αὐτὲς καὶ τὶς (4), (6) προκύπτει $\alpha = \frac{\pi}{6}$ καὶ $\beta = \frac{\pi}{3}$. Τὰ τόξα αὐτὰ ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωση (8) καὶ ἑπομένως ἡ ρίζα $\chi = \frac{1}{2}$ εἶναι καὶ ρίζα τῆς (1).

2) Ἂν $\chi = -\frac{1}{2}$, τότε, μὲ τὸν ἴδιο ἀκριβῶς τρόπο, θὰ βροῦμε $\alpha = -\frac{\pi}{6}$ καὶ $\beta = -\frac{\pi}{3}$. Τὰ τόξα ὅμως αὐτὰ δὲν ἐπαληθεύουν τὴν (8) καὶ ἑπομένως ἡ ρίζα $\chi = -\frac{1}{2}$ δὲν εἶναι ρίζα τῆς (1).

**Παρατήρηση:** Τονίσαμε παραπάνω ὅτι οἱ ἐξισώσεις (8) καὶ (9) δὲν εἶναι ἰσοδύναμες. Τοῦτο φαίνεται ἀπὸ τὴν ἑπόμενη ἰσοδυναμία:

$$\eta\mu\alpha = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} - \beta & (E) \\ \alpha = (2\lambda+1)\pi - \frac{\pi}{2} + \beta \end{cases} \quad (\kappa,\ \lambda \in \mathbf{Z})$$

Μόνο ἀπὸ τὴν (E), μὲ $\kappa = 0$, βρίσκουμε τὴν (8).

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.** Ἂν $\chi > 0$, $\psi > 0$ καὶ $\chi^2 + \psi^2 < 1$, νὰ δείξετε ὅτι:

$$\text{Τοξημ}\chi + \text{Τοξημ}\psi = \text{Τοξημ}(\chi\sqrt{1-\psi^2} + \psi\sqrt{1-\chi^2}). \qquad (1)$$

**Ἀπόδειξη.** Ἀπὸ τὴ σχέση $\chi^2 + \psi^2 < 1$ συνάγεται ὅτι $\chi < 1$ καὶ $\psi < 1$. Θέτουμε Τοξημ$\chi = \alpha$ καὶ Τοξημ$\psi = \beta$, ὁπότε ἔχουμε:

$$\begin{cases} \eta\mu\alpha = \chi & (2) \\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} & (3) \end{cases}$$

καὶ

$$\begin{cases} \eta\mu\beta = \gamma & (4) \\ 0 < \beta < \frac{\pi}{2}. & (5) \end{cases}$$

'Εξάλλου εἶναι:

$$\chi^2 + \psi^2 < 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\alpha + \eta\mu^2\beta < 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\alpha < 1 - \eta\mu^2\beta \Leftrightarrow \eta\mu^2\alpha < \sigma\upsilon\nu^2\beta$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu\alpha < \sigma\upsilon\nu\beta \Leftrightarrow \eta\mu\alpha < \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right).$$

'Από τὴν τελευταία σχέση καὶ ἐπειδὴ $0 < \frac{\pi}{2} - \beta < \frac{\pi}{2}$, προκύπτει $\alpha < \frac{\pi}{2} - \beta$ ἢ $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$. 'Ακόμα ἔχουμε:

$$\eta\mu(\alpha+\beta) = \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\alpha \Leftrightarrow \eta\mu(\alpha+\beta) = \chi\sqrt{1-\psi^2} + \psi\sqrt{1-\chi^2}$$

$$\Leftrightarrow \alpha + \beta = \text{Τοξημ}(\chi\sqrt{1-\psi^2} + \psi\sqrt{1-\chi^2}) \Leftrightarrow (1).$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.** Νὰ λυθεῖ ἡ ἀνίσωση: $2\text{Τοξημ}\,\frac{1}{3} + \text{Τοξημ}\chi < \frac{\pi}{2}$. (1)

**Λύση.** Τὸ πρῶτο μέλος τῆς (1) ὁρίζεται, ἐφόσον $|\chi| \leqslant 1$. Θέτουμε:

$$\text{Τοξημ}\,\frac{1}{3} = \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \eta\mu\alpha = \frac{1}{3} & (2) \\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{6} & (3) \end{cases}$$

$$(\text{M})$$

$$\text{Τοξημ}\chi = \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \eta\mu\beta = \chi & (4) \\ -\frac{\pi}{2} \leqslant \beta \leqslant \frac{\pi}{2}. & (5) \end{cases}$$

'Επομένως ἔχουμε:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta < \frac{\pi}{2} \\ |\chi| \leqslant 1 \\ (\text{M}) \end{cases}$$

Εἶναι: $0 < \alpha < \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 0 < 2\alpha < \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} < -2\alpha < 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2} - 2\alpha < \frac{\pi}{2}$.

'Από τὴν τελευταία σχέση καὶ σύμφωνα μὲ τὴν (5) ἔχουμε:

$$(1) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \beta < \frac{\pi}{2} - 2\alpha \\ |\chi| \leqslant 1 \\ (\text{M}) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \eta\mu\beta < \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) \\ |\chi| \leqslant 1 \\ (\text{M}) \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{matrix} \eta\mu\beta < \sigma\upsilon\nu 2\alpha \\ |\chi| \leq 1 \\ (M) \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \eta\mu\beta < 1 - 2\eta\mu^2\alpha \\ -1 \leq \chi \leq 1 \\ (M) \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \chi < 1 - \frac{2}{9} \\ -1 \leq \chi \leq 1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$-1 \leq \chi \leq \frac{7}{9}.$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Α' ΟΜΑΔΑ

39) Νὰ βρεθοῦν οἱ τιμὲς τῶν παρακάτω παραστάσεων :

1) $\text{Τοξ ημ}\frac{\sqrt{3}}{2}$ 2) $\text{ημ}\left(\text{Τοξ ημ}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 3) $\text{συν}\left(\text{Τοξ ημ}\frac{4}{5}\right)$

4) $\text{συν}\left(2\,\text{Τοξ συν}\frac{3}{5}\right)$ 5) $\text{Τοξ ημ}\left(\text{ημ}\frac{8\pi}{9}\right)$ 6) $\text{εφ}\left[\text{Τοξ συν}\left(-\frac{4}{5}\right)\right]$

7) $\text{Τοξ εφ}\sqrt{3} + \text{Τοξεφ}\,1$ 8) $2\text{Τοξ εφ}\frac{1}{3} + \text{Τοξ εφ}\frac{1}{7}$.

40) Νὰ δείξετε τὶς ἰσότητες :

1) $\text{Τοξ εφ}\frac{1}{2} + \text{Τοξ εφ}\frac{1}{5} + \text{Τοξ εφ}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$

2) $\text{Τοξ σφ}\,7 + \text{Τοξ σφ}\,8 + \text{Τοξ σφ}\,18 = \text{Τοξ σφ}\,3$

3) $\text{συν}\left(2\,\text{Τοξ εφ}\frac{1}{7}\right) = \text{ημ}\left(4\,\text{Τοξ εφ}\frac{1}{3}\right)$.

41) Νὰ ἀποδειχθεῖ ἡ ταυτότητα: $\text{Τοξεφ}\frac{\alpha}{\alpha+1} + \text{Τοξ εφ}\frac{1}{2\alpha+1} = \frac{\pi}{4}$ $(\alpha > 0)$.

42) Νὰ δείξετε ὅτι: $\text{Τοξεφ}\chi + \text{Τοξεφ}\frac{1-\chi}{1+\chi} = \frac{\pi}{4}$, ἂν $\chi > -1$ καὶ

$$\text{Τοξεφ}\chi + \text{Τοξεφ}\frac{1-\chi}{1+\chi} = -\frac{3\pi}{4}, \text{ ἂν } \chi < -1.$$

43) Ἂν $\chi > 0$, $\psi > 0$ καὶ $\chi\psi > 1$, τότε ἰσχύει ἡ σχέση :

$$\text{Τοξεφ}\chi + \text{Τοξεφ}\psi = \pi + \text{Τοξεφ}\frac{\chi+\psi}{1-\chi\psi}.$$

44) Νὰ δείξετε ὅτι: $\text{Τοξεφ}\chi + \text{Τοξεφ}\psi = \kappa\pi + \text{Τοξεφ}\frac{\chi+\psi}{1-\chi\psi}$ $(\chi,\psi \in \mathbf{R},\ \kappa \in \mathbf{Z})$.

45) Ἂν $\chi > 0$ καὶ $\psi > 0$, τότε ἰσχύει: $\text{Τοξσφ}\chi + \text{Τοξσφ}\psi = \text{Τοξσφ}\frac{\chi\psi - 1}{\chi+\psi}$.

## Β' ΟΜΑΔΑ

46) Νὰ λύσετε τὶς ἑπόμενες ἐξισώσεις:

1) $Τοξεφ\,\frac{3χ}{2} + Τοξσφ\,\frac{1}{χ} = \frac{π}{4}$  2) $Τοξημχ + Τοξημ2χ = \frac{π}{2}$

3) $Τοξεφ\,\frac{2}{5} - Τοξεφχ = \frac{π}{4}$  4) $ημ\left(Τοξεφ\,\frac{1}{2}\right) = εφ(Τοξσυν\sqrt{χ})$

5) $ημ\,[2Τοξημχ] = χ$.

47) Νὰ προσδιορίσετε τὸν ἀκέραιο κ, ὥστε ἡ ἀκόλουθη ἐξίσωση νὰ ἔχει λύση:

$$Τοξεφ\,\frac{χ+1}{χ-1} + Τοξεφ\,\frac{χ-1}{χ} = κπ + Τοξεφ(-7).$$

48) Νὰ λυθεῖ ἡ ἀνίσωση:

$$Τοξεφχ + Τοξσφ(χ-1) < \frac{π}{2}.$$

49) Νὰ λυθεῖ ἡ ἀνίσωση: $ημ[Τοξσφ\{συν(Τοξεφχ)\}] > χ$.

50) Νὰ λυθεῖ ἡ ἐξίσωση: $Τοξεφχ + Τοξεφ\,\frac{2χ+1}{2χ-23} = \frac{π}{4}$.

51) Νὰ βρεῖτε γιὰ ποιὲς τιμὲς τοῦ ν ἰσχύει ἡ σχέση:

$$Τοξεφ\,\frac{ν}{ν+1} + Τοξεφ\,\frac{1}{2ν+1} = \frac{π}{4}.$$

52) Ἂν $χ,ψ,ω > 0$, νὰ δείξετε ὅτι:

$$Τοξεφχ + Τοξεφψ + Τοξεφω = \frac{π}{2} \Leftrightarrow χψ + ψω + ωχ = 1.$$

53) Ἂν $χ,ψ,ω > 0$, νὰ δειχθεῖ ὅτι:

$$Τοξσυνχ + Τοξσυνψ + Τοξσυνω = π \Leftrightarrow χ^2 + ψ^2 + ω^2 + 2χψω = 1.$$

54) Ἂν $χ > 0$, $ψ > 0$ καὶ $Τοξημχ + Τοξημψ < \frac{π}{2}$, τότε ἰσχύει ἡ σχέση (1) τοῦ παραδείγματος 4 (Ἀρκεῖ νὰ δειχθεῖ ὅτι: $Τοξημχ + Τοξημψ < \frac{π}{2} \Leftrightarrow χ^2 + ψ^2 < 1$).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VI

# ΚΛΑΣΙΚΕΣ ΕΠΙΛΥΣΕΙΣ

# ΤΟΠΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

## 1. Σχέσεις μεταξὺ τῶν κύριων στοιχείων ἑνὸς τριγώνου

**1.1.** Τὰ **κύρια** στοιχεῖα ἑνὸς τριγώνου εἶναι οἱ γωνίες του καὶ οἱ πλευρές του. Τὰ **δευτερεύοντα** εἶναι ἡ ἀκτίνα τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου, τὸ ἐμβαδό, τὰ ὕψη, ἡ ἀκτίνα τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου, ἡ ἡμιπερίμετρος, οἱ διάμεσες, οἱ ἐσωτερικὲς διχοτόμοι, οἱ ἐξωτερικὲς διχοτόμοι.

Μᾶς εἶναι ἤδη γνωστοὶ ὁρισμένοι τύποι, ποὺ ἀναφέρονται στὰ κύρια στοιχεῖα ἑνὸς τριγώνου. Τοὺς τύπους αὐτοὺς ὑπενθυμίζουμε ἀμέσως στὰ ἑπόμενα (Βλ. 1.2.).

Συμβολίζουμε μὲ **α,β,γ** τὰ μήκη τῶν πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ καὶ μὲ **Α,Β,Γ** τὰ μέτρα τῶν γωνιῶν του (βλ. Σχ. 10). Στὸ ἑξῆς, ὅταν θὰ λέμε ἡ «πλευρὰ α» θὰ ἐννοοῦμε τὸ «μῆκος τῆς πλευρᾶς α» καὶ ὅταν θὰ λέμε ἡ «γωνία Α» θὰ ἐννοοῦμε τὸ «μέτρο τῆς γωνίας Α». Τὸ ἴδιο θὰ ἰσχύει καὶ γιὰ ὅλα τὰ γωνιακὰ καὶ γραμμικὰ στοιχεῖα[1]) τοῦ τριγώνου.

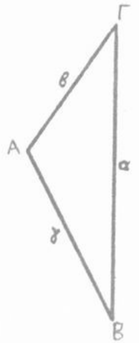
**1.2. Θεμελιώδεις ὁμάδες τύπων.** Μεταξὺ τῶν **κύριων στοιχείων** (α,β,γ, Α,Β,Γ) ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ ὑπάρχουν τρεῖς θεμελιώδεις ὁμάδες τύπων, ὅπως θὰ δοῦμε ἀμέσως παρακάτω. Γνωρίζουμε ὅτι τὸ **Θεώρημα τῶν ἡμιτόνων** (Νόμος τῶν ἡμιτόνων) ἐκφράζεται ἀπὸ τὸν τύπο:

$$\boxed{\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} = 2\,R.}$$

---

[1]) Ὅταν θὰ λέμε «γραμμικὸ στοιχεῖο» ἑνὸς τριγώνου, θὰ ἐννοοῦμε τὸ μῆκος ὁποιουδήποτε εὐθύγραμμου τμήματος, ποὺ ἔχει σχέση μὲ τὸ τρίγωνο. Π.χ. οἱ πλευρές, τὰ ὕψη, οἱ διχοτόμοι, κλπ. ἑνὸς τριγώνου εἶναι γραμμικὰ στοιχεῖα του. Τὸ ἐμβαδὸ ἑνὸς τριγώνου θὰ θεωρεῖται καὶ αὐτὸ γραμμικὸ στοιχεῖο. Ὅταν θὰ λέμε «γωνιακὸ στοιχεῖο» ἑνὸς τριγώνου, θὰ ἐννοοῦμε ὄχι μόνο μιὰ ἀκέραια ἔκφραση τῶν γωνιῶν του, ἀλλὰ καὶ τριγωνομετρικὴ ἐξίσωση τέτοιων ἐκφράσεων.

Ἡ πρώτη θεμελιώδης ὁμάδα τύπων εἶναι :




*Σχ. 12.*

$$(\mathrm{A})\quad \boxed{\begin{aligned} &\frac{\alpha}{\eta\mu A}=\frac{\beta}{\eta\mu B}=\frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} \qquad (1)\\ &A+B+\Gamma=\pi \qquad (2)\end{aligned}}$$

Ἡ δεύτερη θεμελιώδης ὁμάδα τύπων ἀποτελεῖται ἀπὸ τοὺς γνωστοὺς τύπους ποὺ ἐκφράζουν τὸ **θεώρημα τῶν συνημιτόνων**. Δηλαδή :

$$(\mathrm{B})\quad \boxed{\begin{aligned} \alpha^2&=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\,\sigma\upsilon\nu A \qquad (3)\\ \beta^2&=\gamma^2+\alpha^2-2\gamma\alpha\,\sigma\upsilon\nu B \qquad (4)\\ \gamma^2&=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\,\sigma\upsilon\nu \Gamma \qquad (5)\end{aligned}}$$

Σὲ κάθε τρίγωνο ἰσχύει $\eta\mu A=\eta\mu(B+\Gamma)$ καὶ ἑπομένως ἔχουμε :

$$\eta\mu A=\eta\mu B\,\sigma\upsilon\nu\Gamma+\eta\mu\Gamma\,\sigma\upsilon\nu B \Leftrightarrow 2R\eta\mu A=(2R\eta\mu B)\sigma\upsilon\nu\Gamma+(2R\eta\mu\Gamma)\sigma\upsilon\nu B$$

$$\Leftrightarrow \alpha=\beta\,\sigma\upsilon\nu\Gamma+\gamma\,\sigma\upsilon\nu B.$$

Μὲ κυκλικὴ ἐναλλαγὴ τῶν α, β, γ καὶ A, B, Γ ἔχουμε τὴν ἀκόλουθη ὁμάδα τύπων, ποὺ ἐκφράζει τὸ **θεώρημα τῶν προβολῶν** :

$$(\Gamma)\quad \boxed{\begin{aligned} \alpha&=\beta\,\sigma\upsilon\nu\Gamma+\gamma\,\sigma\upsilon\nu B \qquad (6)\\ \beta&=\gamma\,\sigma\upsilon\nu A+\alpha\,\sigma\upsilon\nu\Gamma \qquad (7)\\ \gamma&=\alpha\,\sigma\upsilon\nu B+\beta\,\sigma\upsilon\nu A \qquad (8)\end{aligned}}$$

**Σημείωση.** Οἱ τρεῖς ὁμάδες τύπων (A), (B) καὶ (Γ) εἶναι ἀνὰ δύο ἰσοδύναμες. Ἡ ἀπόδειξη αὐτῆς τῆς προτάσεως δίνεται ὡς ἄσκηση (Βλ. ἄσκ. 74).

Χρήσιμοι γιὰ τὰ ἑπόμενα εἶναι καὶ οἱ παρακάτω γνωστοὶ τύποι.

### 1.3. Τύποι τοῦ Mollweide.

$$\frac{\alpha-\beta}{\gamma}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}=\eta\mu\frac{A-B}{2} \qquad\qquad \frac{\beta+\gamma}{\alpha}\,\eta\mu\frac{A}{2}=\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2} \qquad 9$$

$$\frac{\beta-\gamma}{\alpha}\,\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}=\eta\mu\frac{B-\Gamma}{2} \qquad\qquad \frac{\gamma+\alpha}{\beta}\,\eta\mu\frac{B}{2}=\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma-A}{2} \qquad 10$$

$$\frac{\alpha-\gamma}{\beta}\,\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}=\eta\mu\frac{A-\Gamma}{2} \qquad\qquad \frac{\alpha+\beta}{\gamma}\,\eta\mu\frac{\Gamma}{2}=\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2} \qquad 11$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}=\varepsilon\varphi\frac{A-B}{2}$ | $\frac{\beta-\gamma}{\beta+\gamma}\sigma\varphi\frac{A}{2}=\varepsilon\varphi\frac{B-\Gamma}{2}$ | $\frac{\gamma-\alpha}{\alpha+\gamma}\sigma\varphi\frac{A}{2}=\varepsilon\varphi\frac{\Gamma-A}{2}$ | 12 |

Οἱ τύποι **12** ἀποτελοῦν τὸ **θεώρημα τῶν ἐφαπτομένων** (Νόμος τῶν ἐφαπτομένων)

### 1.4. Τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῶν μισῶν γωνιῶν τριγώνου ὡς συναρτήσεις τῶν πλευρῶν του.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\eta\mu\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\beta\gamma}}$ | $\eta\mu\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-\gamma)(\tau-\alpha)}{\gamma\alpha}}$ | $\eta\mu\frac{\Gamma}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}{\alpha\beta}}$ | 13 |
| $\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\tau(\tau-\alpha)}{\beta\gamma}}$ | $\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\tau(\tau-\beta)}{\gamma\alpha}}$ | $\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}=\sqrt{\frac{\tau(\tau-\gamma)}{\alpha\beta}}$ | 14 |
| $\varepsilon\varphi\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-\beta(\tau-\gamma)}{\tau(\tau-\alpha)}}$ | $\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-\gamma)(\tau-\alpha)}{\tau(\tau-\beta)}}$ | $\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}{\tau(\tau-\gamma)}}$ | 15 |

### 1.5. Τύποι τοῦ ἐμβαδοῦ τριγώνου.

| | |
|---|---|
| $E=\frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A=\frac{1}{2}\gamma\alpha\eta\mu B=\frac{1}{2}\alpha\beta\eta\mu\Gamma$ | 16 |
| $E=\frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$ | 17 |
| $E=\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$ | 18 |
| $E=2R^2\,\eta\mu A\,\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma$ | 19 |

### 1.6 Ἡ ἀκτίνα R ὡς συνάρτηση τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου.

$$R=\frac{\alpha\beta\gamma}{4\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}}$$

## 2. Κλασικὲς ἐπιλύσεις

Ὅπως θὰ δοῦμε στὰ ἑπόμενα, χρησιμοποιώντας τοὺς προηγούμενους τύπους (Βλ. § 1) μποροῦμε νὰ ὑπολογίζουμε τὰ ἄγνωστα στοιχεῖα ἑνὸς τριγώνου, ἐφόσον βεβαίως δίνονται ἀρκετὰ ἄλλα στοιχεῖα του. Ἡ ἐργασία ποὺ γίνεται γιὰ νὰ ὑπολογίσουμε τὰ ἄγνωστα κύρια στοιχεῖα ἑνὸς τριγώνου λέγεται ἐπί-

**λυση τοῦ τριγώνου.** Ἂν τὰ γνωστὰ στοιχεῖα γιὰ τὴν ἐπίλυση ἑνὸς τριγώνου εἶναι κύρια, τότε ἡ ἐπίλυση λέγεται **κλασικὴ ἐπίλυση.** Τὸ θέμα τῆς ἐπιλύσεως τοῦ τριγώνου ἐξαντλεῖται στὸ κεφάλαιο VII (Βλ. § 2), ὅπου περιγράφουμε μιὰ γενικὴ μέθοδο γιὰ τὴν ἐπίλυση ὁποιουδήποτε τριγώνου καὶ δίνουμε παραδείγματα καὶ μὲ δευτερεύοντα στοιχεῖα τοῦ τριγώνου.

Θὰ πρέπει ἀκόμα νὰ τονίσουμε πὼς σήμερα ὁ σκοπὸς τῆς Τριγωνομετρίας εἶναι διπλός: νὰ μελετήσει τὶς κυκλικὲς συναρτήσεις καὶ νὰ ὑπολογίσει ἀποστάσεις ἢ γωνίες. Ἰδιαίτερο μάλιστα ἐνδιαφέρον παρουσιάζουν οἱ ἀπρόσιτες ἀποστάσεις (τοπογραφικὲς ἐφαρμογές).

Ἀμέσως παρακάτω θὰ ἀσχοληθοῦμε μὲ ὅλες τὶς κλασικὲς ἐπιλύσεις καὶ μερικὲς χαρακτηριστικὲς τοπογραφικὲς ἐφαρμογές. Πολλὰ παραδείγματα ποὺ θὰ θὰ ἀκολουθήσουν θὰ ἀντιμετωπιστοῦν μὲ τὴ βοήθεια τῶν λογαρίθμων. Ἔτσι, μὲ αὐτὰ τὰ παραδείγματα, θὰ διαπιστώσουμε καὶ τὴ σημασία τῶν λογαρίθμων γιὰ τὶς πολύπλοκες ὑπολογιστικὲς ἐργασίες. Οἱ κλασικὲς ἐπιλύσεις εἶναι τέσσερις. Κάθε μιά, ὅπως θὰ δοῦμε, ἀντιμετωπίζεται μὲ ὁρισμένο τρόπο καὶ ἑπομένως λίγα παραδείγματα εἶναι ἀρκετὰ γιὰ νὰ κατανοήσουμε τὴ μέθοδο ἐπιλύσεως καὶ τὸν τρόπο ποὺ χρησιμοποιοῦνται οἱ λογάριθμοι.

## 2.1. Νὰ ἐπιλυθεῖ τρίγωνο ἀπὸ τὶς πλευρές του α,β καὶ γ.

**Ἐπίλυση.** Τὰ ἄγνωστα κύρια στοιχεῖα τοῦ τριγώνου εἶναι οἱ γωνίες του Α,Β καὶ Γ. Αὐτὲς μποροῦμε νὰ τὶς βροῦμε μὲ τὸ θεώρημα τῶν συνημιτόνων. Π.χ. ἔχουμε:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\,\text{συν}A.$$

Ἑπομένως θὰ εἶναι:

$$\text{συν}A = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma}. \qquad (1)$$

Ὁ τύπος (1) δὲν εἶναι πάντοτε ὁ πιὸ κατάλληλος γιὰ τὸν ὑπολογισμὸ τῆς γωνίας Α, γιατὶ δὲν εἶναι λογιστὸς μὲ τοὺς λογάριθμους. Τὸν ἐφαρμόζουμε, ὅταν τὰ δεδομένα γιὰ τὸν ὑπολογισμὸ τοῦ συνΑ εἶναι ἁπλά. Στὴν ἀντίθετη περίπτωση χρησιμοποιοῦμε τὸν τύπο:

$$\text{εφ}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau(\tau-\alpha)}}.$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.** Νὰ ἐπιλυθεῖ τρίγωνο ἀπὸ τὰ στοιχεῖα: $\alpha = 147$, $\beta = 342$, $\gamma = 409$.

**Ἐπίλυση.** Εἶναι:

$$\tau = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} = \frac{147 + 342 + 409}{2} = 449$$

καὶ ἐπομένως ἔχουμε:

$$\tau - \alpha = 302,\ \tau - \beta = 107,\ \tau - \gamma = 40.$$

Θεωροῦμε τὸν τύπο:

$$\varepsilon\varphi\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau(\tau-\alpha)}} =$$

$$= \frac{1}{\tau-\alpha}\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau}} = \frac{\kappa}{\tau-\alpha},$$

ὅπου

$$\kappa = \sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau}}.$$

Ὑπολογίζουμε πρῶτα τὸ κ. Εἶναι:

$$\kappa = \sqrt{\frac{(302)(107)(40)}{449}}. \qquad (1)$$

Ἂν λογαριθμίσουμε τὴν (1), θὰ βροῦμε:

$$\lambda o\gamma\kappa = \frac{1}{2}(\lambda o\gamma 302 + \lambda o\gamma 107 + \lambda o\gamma 40 - \lambda o\gamma 449).$$

Εἶναι:

$$\begin{aligned} \lambda o\gamma 302 &= 2.48001 \\ \lambda o\gamma 107 &= 2.02938 \\ \lambda o\gamma\ 40 &= 1.60206 \\ &\phantom{=}\ 6.11145 \\ -\lambda o\gamma 449 &= -2.65225 \\ \lambda o\gamma\kappa^2 &= 3.45920 \\ \lambda o\gamma\kappa &= 1.72960. \end{aligned}$$

Ἑπομένως θὰ ἔχουμε:

$$\begin{aligned} \lambda o\gamma\kappa &= 1.72960 \\ -\lambda o\gamma(\tau-\alpha) = -\lambda o\gamma 302 &= -2.48001 \\ \lambda o\gamma\varepsilon\varphi\frac{A}{2} &= \overline{1}.24959 \\ \frac{A}{2} &= 10^\circ\, 4' \\ \mathbf{A} &= \mathbf{20^\circ\, 8'}. \qquad (2) \end{aligned}$$

Ἐπίσης εἶναι:

$$\varepsilon\varphi\frac{B}{2} = \frac{\kappa}{\tau-\beta}$$

καὶ ἑπομένως ἔχουμε :

$$\lambda o\gamma\kappa = \quad 1.72960$$

$$-\lambda o\gamma(\tau-\beta) = -\lambda o\gamma 107 = -2.02938$$

$$\lambda o\gamma\varepsilon\varphi\frac{B}{2} = \bar{1}.70022$$

$$\frac{B}{2} = 26^\circ\ 38'$$

$$\mathbf{B = 53^\circ\ 16'.} \qquad (3)$$

Τέλος, ἀπὸ τὸν τύπο

$$\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2} = \frac{\kappa}{\tau-\gamma}$$

ἔχουμε :

$$\lambda o\gamma\kappa = \quad 1.72960$$

$$-\lambda o\gamma(\tau-\gamma) = -\lambda o\gamma 40 = -1.60206$$

$$\lambda o\gamma\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2} = 0.12754$$

$$\frac{\Gamma}{2} = 53^\circ\ 18'$$

$$\mathbf{\Gamma = 106^\circ\ 36'.} \qquad (4)$$

Ἀπὸ τὶς (2), (3) καὶ (4) διαπιστώνουμε ὅτι $A + B + \Gamma = 180^\circ$.

**2.2. Νὰ ἐπιλυθεῖ τρίγωνο ἀπὸ τὰ στοιχεῖα: α,γ,Α (ἀμφίβολη περίπτωση).**

**Ἐπίλυση.** Ἀπὸ τὸ θεώρημα τῶν ἡμιτόνων:

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}$$

ἔχουμε :

$$\eta\mu\Gamma = \frac{\gamma\eta\mu A}{\alpha} \qquad (1)$$

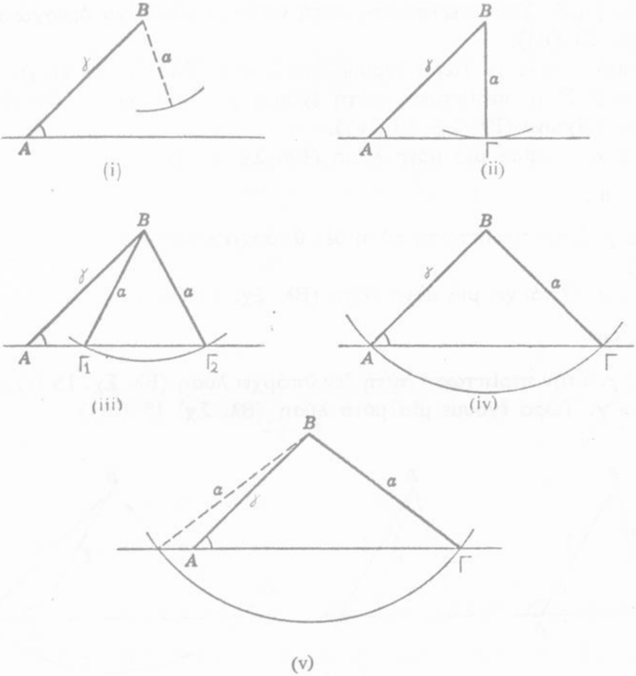
$$\beta = \frac{\alpha\eta\mu B}{\eta\mu A} \qquad (2)$$

Ἐπίσης εἶναι :

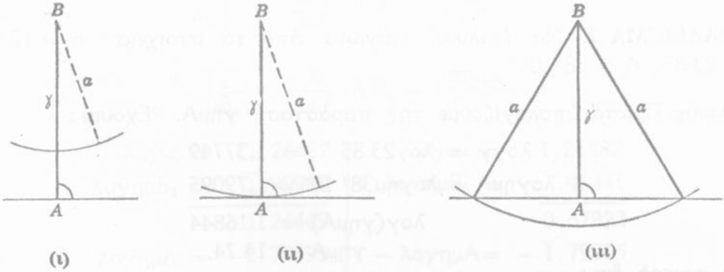
$$B = 180^\circ - (A+\Gamma) \qquad (3)$$

Ἀπὸ τὴν (1) μποροῦμε νὰ βροῦμε τὴ γωνία Γ καὶ μετά, ἀπὸ τὴ σχέση (3), τὴ γωνία Β. Τέλος, ἀπὸ τὴ σχέση (2), μποροῦμε νὰ βροῦμε τὴν πλευρά β.

Ἡ ἐπίλυση ὅμως τοῦ τριγώνου δὲν εἶναι πάντοτε δυνατή. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι δὲν ὑπάρχει πάντοτε τρίγωνο μὲ στοιχεῖα τὰ α, γ καὶ Α. Γιὰ νὰ εἶναι δυνατὴ ἡ ἐπίλυση θὰ πρέπει νὰ ὑπάρχει γωνία Γ ἀπὸ τὴ σχέση (1), ποὺ νὰ ἱκανοποιεῖ καὶ τὴ σχέση (3).




*Σχ. 13 (A<90°)*




*Σχ. 14 (A = 90°)*

Διακρίνουμε τὶς ἑπόμενες περιπτώσεις.

**1. A<90°.**

(ι) $\alpha < \gamma\eta\mu A$. Στὴν περίπτωση αὐτὴ δὲν ὑπάρχει τρίγωνο (Βλ. Σχ. 13 (ι)).

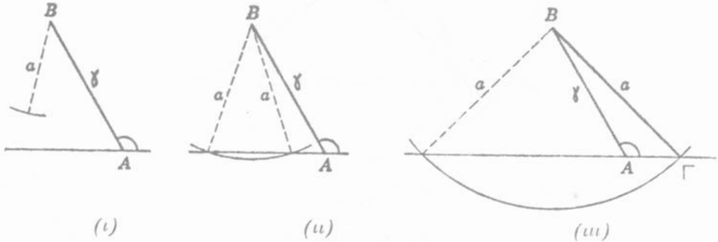
(ιι) $\alpha = \gamma$ημA. Στὴν περίπτωση αὐτὴ ὑπάρχει μόνο ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο (Βλ. Σχ. 13 (ιι)).
(ιιι) γημA $< \alpha < \gamma$. Τώρα ἔχουμε δύο λύσεις (βλ. Σχ. 13 (ιιι)).
(ιv) $\alpha = \gamma$. Στὴν περίπτωση αὐτὴ ἔχουμε μιὰ μόνο λύση, δηλαδὴ ὑπάρχει μόνο ἕνα τρίγωνο (Βλ. Σχ. 13 (iv)).
(v) $\alpha > \gamma$. Ἔχουμε μιὰ μόνο λύση (Βλ. Σχ. 13 (v)).

**2. $A = 90°$.**

(ι) $\alpha \leq \gamma$. Στὴν περίπτωση αὐτὴ δὲν ὑπάρχει καμιὰ λύση (Βλ. Σχ. 14 (ι) καὶ 14 (ιι)).
(ιι) $\alpha > \gamma$. Ὑπάρχει μιὰ μόνο λύση (Βλ. Σχ. 14 (ιιι)).

**3. $A > 90°$.**

(ι) $\alpha \leqslant \gamma$. Στὴν περίπτωση αὐτὴ δὲν ὑπάρχει λύση (Βλ. Σχ. 15 (ι) καὶ 15 (ιι))
(ιι) $\alpha > \gamma$. Τώρα ἔχουμε μία μόνο λύση (Βλ. Σχ. 15 (ιιι)).




*Σχ. 15 (A > 90°)*

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.** Νὰ ἐπιλυθεῖ τρίγωνο ἀπὸ τὰ στοιχεῖα: $\alpha = 18.40$, $\gamma = 23.85$, $A = 38°10'$.

**Ἐπίλυση.** Πρῶτα ὑπολογίζουμε τὴν παράσταση γημA. Ἔχουμε:

$$\begin{aligned} \lambda o\gamma\gamma &= \lambda o\gamma 23.85 = 1.37749 \\ \lambda o\gamma\eta\mu A &= \lambda o\gamma\eta\mu 38^0\ 10' = \bar{1}.79095 \\ \hline \lambda o\gamma(\gamma\eta\mu A) &= 1.16844 \\ \gamma\eta\mu A &= 14.74. \end{aligned}$$

Εἶναι φανερὸ ὅτι:

$$14.74 < 18.40 < 23.85 \Leftrightarrow \gamma\eta\mu A < \alpha < \gamma.$$

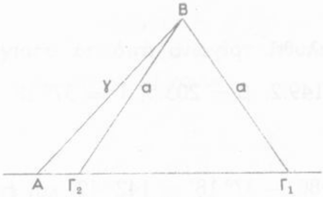
Ἄρα, σύμφωνα μὲ τὰ προηγούμενα, ὑπάρχουν δύο λύσεις, δηλαδὴ δύο τρίγωνα. Γιὰ νὰ βροῦμε τὶς δύο γωνίες $\Gamma_1$ καὶ $\Gamma_2$ χρησιμοποιοῦμε τὴ σχέση

$$\eta\mu\Gamma = \frac{\gamma\eta\mu A}{\alpha}.$$

῎Εχουμε :

$$\begin{array}{rcr} \lambda o\gamma(\gamma \eta\mu A) & = & 1.16844 \\ -\lambda o\gamma \alpha & = & -\,1.26482 \\ \hline \lambda o\gamma \eta\mu\Gamma & = & \overline{1}.90362. \end{array}$$

῾Υπάρχουν δύο γωνίες ποὺ ὁρίζονται ἀπὸ τὴν τιμὴ αὐτὴ τοῦ λογημΓ. Οἱ γωνίες αὐτὲς εἶναι βεβαίως παραπληρωματικὲς (Βλ. Σχ. 16).




*Σχ. 16*

Εἶναι :

$$\Gamma_1 = 53^\circ\, 13' \quad \text{καὶ} \quad \Gamma_2 = 180^\circ - \Gamma_1 = 126^\circ\, 47'$$

῾Η τρίτη γωνία Β βρίσκεται ὡς ἑξῆς :

$$B_1 = 180^\circ - (A + \Gamma_1) = 180^\circ - 38^\circ\, 10' - 53^\circ\, 13' = \ 88^\circ\, 37'$$
$$B_2 = 180^\circ - (A + \Gamma_2) = 180^\circ - 38^\circ\, 10' - 126^\circ\, 47' = 15^\circ\, 3'.$$

Γιὰ νὰ βροῦμε τὴν τρίτη πλευρὰ β χρησιμοποιοῦμε τὸ θεώρημα τῶν ἡμιτόνων καὶ στὶς δυὸ περιπτώσεις. Δηλαδὴ ἔχουμε :

$$\frac{\beta_1}{\eta\mu B_1} = \frac{\alpha}{\eta\mu A} \ \text{ἢ} \ \beta_1 = \frac{\alpha\eta\mu B_1}{\eta\mu A}$$

καὶ

$$\frac{\beta_2}{\eta\mu B_2} = \frac{\alpha}{\eta\mu A} \ \text{ἢ} \ \beta_2 = \frac{\alpha\eta\mu B_2}{\eta\mu A}$$

$$\begin{array}{rcr|rcr} \lambda o\gamma\alpha & = & 1.26482 & \lambda o\gamma\alpha & = & 1.26482 \\ \lambda o\gamma\eta\mu B_1 & = & \overline{1}.99987 & \lambda o\gamma\eta\mu B_1 & = & \overline{1}.41441 \\ \cline{3-3}\cline{6-6} & & 1.26469 & & & 0.67923 \\ -\lambda o\gamma\eta\mu A & = & -\,\overline{1}.79095 & -\lambda o\gamma\eta\mu A & = & -\,\overline{1}.79095 \\ \cline{3-3}\cline{6-6} \lambda o\gamma\beta_1 & = & 1.47374 & \lambda o\gamma\beta_2 & = & 0.88828 \\ \beta_1 & = & 29.77 & \beta_2 & = & 7.732. \end{array}$$

**2.3. Νὰ ἐπιλυθεῖ τρίγωνο ἀπὸ τὰ στοιχεῖα α,β καὶ Γ.**

**᾿Επίλυση.** ᾿Απὸ τὸ Θεώρημα τῶν ἐφαπτομένων ἔχουμε :

$$εφ\frac{A-B}{2} = \frac{α-β}{α+β} σφ \frac{Γ}{2}$$

Ἀπὸ τὴ σχέση αὐτὴ μποροῦμε νὰ βροῦμε τὴ διαφορὰ A–B. Ἐξάλλου, ἔχουμε $A+B = 180^\circ - Γ$ καὶ ἑπομένως εἶναι εὔκολος ὁ προσδιορισμὸς τῶν γωνιῶν A καὶ B. Τὴν τρίτη πλευρὰ γ μποροῦμε νὰ βροῦμε ἀπὸ τὴ σχέση $γ^2 = α^2 + β^2 - 2αβσυνΓ$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.** Νὰ ἐπιλυθεῖ τρίγωνο ἀπὸ τὰ στοιχεῖα:

$$α = 149.2,\ β = 203.5,\ Γ = 37^\circ\, 18'.$$

**Ἐπίλυση.** Εἶναι:

$$A + B = 180^\circ - 37^\circ\, 18' = 142^\circ\, 42' \text{ καὶ ἑπομένως}$$

$$\frac{A+B}{2} = 71^\circ\, 21'. \tag{1}$$

Ἀκόμα ἔχουμε:

$$α + β = 352.7 \text{ καὶ } β - α = 54.3. \tag{2}$$

Ἀπὸ τὸν τύπο

$$εφ\frac{B-A}{2} = \frac{β-α}{β+α} εφ\frac{B+A}{2}$$

καὶ τὶς σχέσεις (1), (2), βρίσκουμε:

$$εφ\frac{B-A}{2} = \frac{54.3}{352.7} εφ 71^\circ\, 21' \Rightarrow$$

$$λογ\, εφ\frac{B-A}{2} = λογ\, 54.3 + λογ\, εφ\, 71^\circ\, 21' - λογ\, 352.7$$

$$\begin{aligned} λογ 54.3 &= \quad 1.73480 \\ λογεφ 71^\circ\, 21' &= \quad \underline{0.47171} \\ & \quad\ \ 2.20651 \\ -λογ 352.7 &= -\underline{2.54741} \\ λογεφ\frac{B-A}{2} &= \quad \bar{1}.65910 \end{aligned}$$

$$\frac{B-A}{2} = 24^\circ\, 31'$$

$$B - A = 49^\circ\, 2'.$$

Συνδυάζοντας τώρα τὴ διαφορὰ $B-A = 49^\circ 2'$ μὲ τὸ ἄθροισμα $B + A = 142^\circ 42'$ (Βλ. (1)), προκύπτει:

$$A = 45^\circ 50' \text{ καὶ } B = 95^\circ 52'.$$

Τέλος, ἀπὸ τὴ σχέση $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma$, βρίσκουμε τὴν πλευρὰ $\gamma$.

**2.4. Νὰ ἐπιλυθεῖ τρίγωνο ἀπὸ τὰ στοιχεῖα Β,Γ καὶ α.**

**Ἐπίλυση.** Ἄγνωστα εἶναι τὰ στοιχεῖα Α, β καὶ γ. Ἡ γωνία Α ὑπολογίζεται ἀμέσως ἀπὸ τὴ σχέση $A = 180^\circ - (B + \Gamma)$. Οἱ πλευρὲς β καὶ γ θὰ βρεθοῦν ἀπὸ τὸ Θεώρημα τῶν ἡμιτόνων. Ἔχουμε

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}$$

καὶ ἑπομένως βρίσκουμε:

$$\beta = \frac{\alpha\eta\mu B}{\eta\mu A} \text{ καὶ } \gamma = \frac{\alpha\eta\mu \Gamma}{\eta\mu A}.$$

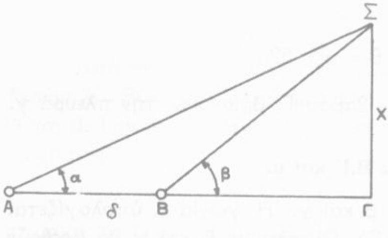
## 3. Τοπογραφικὲς ἐφαρμογές.

Ὅπως τονίσαμε καὶ στὴν ἀρχὴ αὐτοῦ τοῦ κεφαλαίου, ἕνας ἀπὸ τοὺς πρακτικοὺς σκοποὺς τῆς Τριγωνομετρίας εἶναι καὶ ὁ ὑπολογισμὸς ἀποστάσεων μεταξὺ σημείων ποὺ δὲν εἶναι προσιτά. Γιὰ νὰ ὑπολογίσουμε μιὰ τέτοια ἀπόσταση, γενικὰ προσπαθοῦμε νὰ βροῦμε ἕνα τρίγωνο μὲ γνωστὰ ἀρκετὰ στοιχεῖα του καὶ τέτοιο, ὥστε κάποια πλευρά του νὰ εἶναι ἡ ἄγνωστη ἀπόσταση." Αν ἐπιλύσουμε τὸ τρίγωνο αὐτό, θὰ βροῦμε τὶς ἄγνωστες πλευρές του καὶ ἑπομένως τὴ ζητούμενη ἀπόσταση. Ἔτσι, ἀπὸ τὸν τρόπο ποὺ βρίσκουμε τὶς ἀποστάσεις, φαίνεται καὶ ἡ σπουδαιότητα τῆς ἐπιλύσεως τοῦ τριγώνου. Γιὰ τὶς τοπογραφικὲς ἐφαρμογὲς ὑπάρχουν εἰδικὰ ὄργανα (γωνιόμετρα) μὲ τὰ ὁποῖα μποροῦμε νὰ μετρήσουμε ὁριζόντιες καὶ κατακόρυφες γωνίες.

Ἀναφέρουμε μερικὰ παραδείγματα τοπογραφικῶν ἐφαρμογῶν.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.** Νὰ βρεθεῖ τὸ ὕψος ἑνὸς ὁρατοῦ σημείου τοῦ χώρου ἀπὸ τὸ ὁριζόντιο ἐπίπεδο.

**Λύση.** Ὑποθέτουμε ὅτι Σ εἶναι τὸ ὁρατὸ σημεῖο καὶ Γ ἡ προβολή του πάνω στὸ ὁριζόντιο ἐπίπεδο (Βλ. Σχ. 17). Βρίσκουμε δύο σημεῖα Α καὶ Β πάνω στὸ ὁριζόντιο ἐπίπεδο τέτοια, ὥστε νὰ εἶναι στὸ ἴδιο ἐπίπεδο μὲ τὰ Σ καὶ Γ. Μὲ τὴ μετροταινία βρίσκουμε τὴν ἀπόσταση τῶν Α,Β καὶ μὲ τὸ ταχύμετρο (εἶδος γωνιόμετρου) τὶς γωνίες $\widehat{\Sigma A \Gamma}$, $\widehat{\Sigma B \Gamma}$.




*Σχ. 17.*

Ἂς ὑποθέσουμε ὅτι $\widehat{ΣΑΓ} = α$, $\widehat{ΣΒΓ} = β$ καὶ $(ΑΒ) = δ$. Ἂν ἐφαρμόσουμε τὸ θεώρημα τῶν ἡμιτόνων στὸ τρίγωνο ΣΑΒ, θὰ βροῦμε:

$$\frac{(ΣΒ)}{ημα} = \frac{δ}{ημ(β-α)} \quad ἢ$$

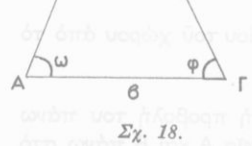
$$(ΣΒ) = \frac{δημα}{ημ(β-α)}. \qquad (1)$$

Ἐξάλλου εἶναι $χ = (ΣΒ)ημΒ$. Ἀπ' αὐτὴ καὶ τὴν (1) συνάγεται:

$$χ = \frac{δημαημβ}{ημ(β-α)}.$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.** Νὰ ὑπολογίσετε τὴν ἀπόσταση ἑνὸς σημείου Α ἀπὸ ἕνα ἄλλο ἀπρόσιτο Β (π.χ. τὸ Α εἶναι στὴ στεριὰ καὶ τὸ Β στὴ θάλασσα).

**Λύση.** Ἐκλέγουμε ἕνα σημεῖο Γ τέτοιο, ὥστε ἡ ἀπόστασή του ἀπὸ τὸ Α νὰ εἶναι β (Βλ. Σχ. 18). Μὲ τὸ γωνιόμετρο βρίσκουμε τὶς γωνίες $\widehat{ΒΑΓ}$ καὶ $\widehat{ΒΓΑ}$. Ὑποθέτουμε ὅτι εἶναι $\widehat{ΒΑΓ} = ω$ καὶ $\widehat{ΒΓΑ} = φ$. Τὸ πρόβλημα τώρα ἀνάγεται στὴν ἐπίλυση τοῦ τριγώνου (ΑΒΓ). Ἔχουμε:




*Σχ. 18.*

$$\frac{χ}{ημ\,φ} = \frac{β}{ημ\,Β} \quad ἢ \quad \frac{χ}{ημ\,φ} = \frac{β}{ημ\,(ω+φ)} \quad ἢ$$

$$χ = \frac{βημφ}{ημ(ω+φ)}.$$

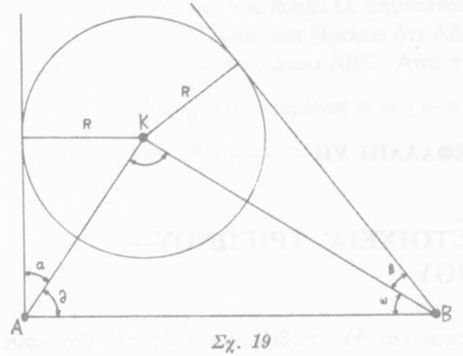
**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.** Νὰ βρεθεῖ ἡ ἀκτίνα μιᾶς κυλινδρικῆς ἀπρόσιτης δεξαμενῆς, ὅταν:

(α) Ἡ ἀπόσταση δύο σημείων Α καὶ Β εἶναι δ (Βλ. Σχ. 19).

(β) Τὰ σημεῖα Α καὶ Β ἀνήκουν στὸ ἐπίπεδο ποὺ εἶναι κάθετο πάνω στὸν ἄξονα τῆς δεξαμενῆς.

(γ) Ἡ δεξαμενὴ φαίνεται μὲ γωνίες α καὶ β ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Β ἀντιστοίχως.

**Λύση.** Ὅταν σκοπεύουμε μὲ τὸ γωνιόμετρο γιὰ νὰ βροῦμε τὶς γωνίες α καὶ β, βρίσκουμε συγχρόνως καὶ τὶς γωνίες θ καὶ ω (Βλ. Σχ. 19). Ὑποθέτουμε ὅτι ἡ ἀκτίνα τῆς δεξαμενῆς εἶναι R. Ἂν ἐφαρμόσουμε τὸ θεώρημα τῶν συνημιτόνων στὸ τρίγωνο (ΚΑΒ), θὰ ἔχουμε:




*Σχ. 19*

$$\delta^2 = (KA)^2 + (KB)^2 - 2(KA)(KB)\text{συν}\widehat{AKB} \quad (1)$$

Ἐπειδὴ ὅμως εἶναι: $\text{συν}\widehat{AKB} = -\text{συν}(\theta + \omega)$ καὶ

$$(KA) = \frac{R}{\text{ημ}\alpha}, \quad (KB) = \frac{R}{\text{ημ}\beta}$$

ἡ σχέση (1) γράφεται:

$$\delta^2 = \frac{R^2}{\text{ημ}^2\alpha} + \frac{R^2}{\text{ημ}^2\beta} + 2\,\frac{R^2}{\text{ημ}\alpha\,\text{ημ}\beta}\,\text{συν}(\theta+\omega) \quad \text{ἢ}$$

$$R = \frac{\delta\,\text{ημ}\alpha\,\text{ημ}\beta}{\sqrt{\text{ημ}^2\alpha + \text{ημ}^2\beta + 2\,\text{ημ}\alpha\,\text{ημ}\beta\,\text{συν}(\theta+\omega)}}\,.$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

55) Νὰ ἐπιλυθεῖ τρίγωνο ἀπὸ τὰ στοιχεῖα:

1) $B = \frac{\pi}{9}$, $\Gamma = \frac{2\pi}{5}$, $\alpha = 180$ 2) $\beta = 20$, $\gamma = 10$, $\Gamma = \frac{\pi}{3}$

3) $\alpha = 1$, $\beta = \sqrt{3} + 1$, $A = \frac{\pi}{12}$ 4) $\beta = 2$, $\gamma = \sqrt{2}$, $\Gamma = \frac{\pi}{6}$

56) Νὰ ἐπιλυθεῖ τρίγωνο ἀπὸ τὰ στοιχεῖα:

1) $\beta = 2$, $\gamma = \sqrt{3}$, $\Gamma = \frac{\pi}{3}$ 2) $\gamma = 4$, $A = 2\Gamma$, $\text{συν}\Gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VII

# ΔΕΥΤΕΡΕΥΟΝΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΡΙΓΩΝΟΥ— ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

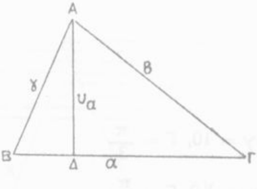
Στὸ κεφάλαιο αὐτὸ θὰ δώσουμε καὶ θὰ ἀποδείξουμε τοὺς πιὸ βασικοὺς τύπους, ποὺ ἀναφέρονται στὰ δευτερεύοντα στοιχεῖα ἑνὸς τριγώνου (Βλ. κεφ. VI, § 1). Οἱ περισσότεροι ἀπὸ τοὺς τύπους αὐτοὺς ἐκφράζουν τὰ δευτερεύοντα στοιχεῖα ἑνὸς τριγώνου, ὡς συναρτήσεις τῶν γωνιῶν του καὶ τοῦ R. Τὸ γεγονὸς αὐτὸ μᾶς ἐπιτρέπει νὰ περιγράψουμε στὴν ἑπόμενη παράγραφο μιὰ γενικὴ μέθοδο ἐπιλύσεως τοῦ τριγώνου .(Βλ. Παρατ. 1.7.).

## 1. Δευτερεύοντα στοιχεῖα τριγώνου

**1.1. Ὕψη τριγώνου.** Θεωροῦμε τρίγωνο ΑΒΓ καὶ τὸ ὕψος του $ΑΔ = υ_α$ (Σχ. 20). Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ ἔχουμε:

$υ_α = γημΒ$ ἢ $υ_α = 2RημΒημΓ$. Ἄρα, προκύπτουν οἱ τύποι:

| | |
|---|---|
| $υ_α = 2RημΓημΒ$ | **21** |
| $υ_β = 2RημΑημΓ$ | **22** |
| $υ_γ = 2RημΒημΑ$ | **23** |




*Σχ. 20*

Στὸ παραπάνω σχῆμα 20 εἶναι: Β, $Γ < \frac{π}{2}$. Ἂν $Β \geqslant \frac{π}{2}$ ἢ $Γ \geqslant \frac{π}{2}$, τότε οἱ τύποι **21**, **22** καὶ **23** ἰσχύουν πάλι.

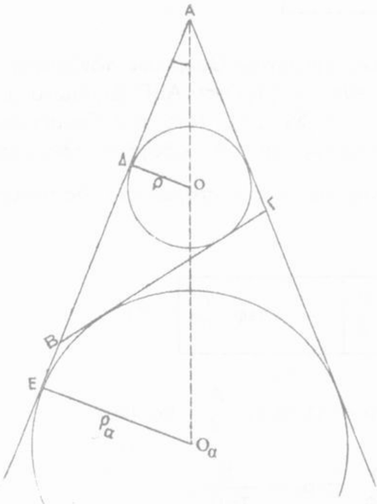
Χρησιμοποιοῦμε ἀκόμα καὶ τοὺς ἀκόλουθους τύπους, ποὺ εἶναι γνωστοὶ ἀπὸ τὴ Γεωμετρία:

$$\boxed{αυ_α = βυ_β = γυ_γ = 2Ε} \quad \textbf{24}$$

**1.2. Ἀκτίνα τοῦ ἐγγεγραμμένου σὲ τρίγωνο κύκλου.** Θεωροῦμε τρίγωνο ΑΒΓ καὶ τὸν ἐγγεγραμμένο του κύκλο Ο. Σημειώνουμε μὲ ρ τὴν ἀκτίνα τοῦ κύκλου Ο (Σχ. 21). Ἀπὸ τὴ Γεωμετρία ξέρουμε ὅτι $ΑΔ = τ - α$ (βλ. Σχ. 21), ὅπου τ εἶναι ἡ ἡμιπερίμετρος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΔΟ ἔχουμε $(ΔΟ) = (ΑΔ)\,εφ\frac{A}{2}$ καὶ ἐπομένως $ρ = (τ-α)\,εφ\frac{A}{2}$. Ἀπ' αὐτὸν καὶ μὲ τὴ βοήθεια τοῦ τύπου **14** προκύπτει:

$$ρ = (τ-α)\sqrt{\frac{(τ-β)(τ-γ)}{τ(τ-α)}} \Rightarrow$$

$$ρ = \sqrt{\frac{τ(τ-α)(τ-β)(τ-γ)}{τ^2}} \Rightarrow ρ = \frac{E}{τ}.$$




*Σχ. 21.*

Τελικὰ ἔχουμε τοὺς παρακάτω βασικοὺς τύπους:

$$\boxed{ρ = (τ-α)εφ\frac{A}{2} = (τ-β)εφ\frac{B}{2} = (τ-γ)\,εφ\frac{Γ}{2}} \qquad 25$$

$$\boxed{ρ = \sqrt{\frac{(τ-α)(τ-β)(τ-γ)}{τ}} = \frac{E}{τ}} \qquad 26$$

Ἀπὸ τοὺς **25** ἔχουμε:

$$ρ^3 = (τ-α)(τ-β)(τ-γ)εφ\frac{A}{2}\,εφ\frac{B}{2}\,εφ\frac{Γ}{2}$$

$$\Rightarrow (τρ)^3 = τ(τ-α)(τ-β)(τ-γ)τ^2\,εφ\frac{A}{2}\,εφ\frac{B}{2}\,εφ\frac{Γ}{2} \Rightarrow$$

$$E^3 = E^2τ^2εφ\frac{A}{2}\,εφ\frac{B}{2}\,εφ\frac{Γ}{2} \Rightarrow E = τ^2εφ\frac{A}{2}\,εφ\frac{B}{2}\,εφ\frac{Γ}{2} \Rightarrow$$

$$τρ = τ^2\,εφ\frac{A}{2}\,εφ\frac{B}{2}\,εφ\frac{Γ}{2} \Rightarrow \boxed{\mathbf{ρ = τ\,εφ\frac{A}{2}\,εφ\frac{B}{2}\,εφ\frac{Γ}{2}}} \qquad 27$$

᾽Από τὸν τελευταῖο τύπο προκύπτουν εὔκολα καὶ οἱ ἑπόμενοι:

| | |
|---|---|
| $\tau = \rho \sigma\varphi \frac{A}{2} \sigma\varphi \frac{B}{2} \sigma\varphi \frac{\Gamma}{2}$ | 28 |
| $E = \tau^2 \varepsilon\varphi \frac{A}{2} \varepsilon\varphi \frac{B}{2} \varepsilon\varphi \frac{\Gamma}{2}$ | 29 |
| $E = \rho^2 \sigma\varphi \frac{A}{2} \sigma\varphi \frac{B}{2} \sigma\varphi \frac{\Gamma}{2}$ | 30 |

**1.3. ᾽Ακτίνα τοῦ παρεγγεγραμμένου κύκλου τριγώνου.** Θεωροῦμε τὸν παρεγγεγραμμένο κύκλο ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴν πλευρὰ α τριγώνου ΑΒΓ. Σημειώνουμε μὲ $O_\alpha$ τὸ κέντρο του καὶ μὲ $\rho_\alpha$ τὴν ἀκτίνα του (Σχ. 21). ᾽Από τὴν Γεωμετρία ξέρουμε ὅτι (ΑΕ) = τ (βλ. Σχ. 21) καὶ ἑπομένως, ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο $AEO_\alpha$, ἔχουμε $\rho_\alpha = \tau\varepsilon\varphi \frac{A}{2}$. Ἔτσι καταλήγουμε στοὺς παρακάτω βασικοὺς τύπους:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\rho_\alpha = \tau\varepsilon\varphi \frac{A}{2}$ | $\rho_\beta = \tau\varepsilon\varphi \frac{B}{2}$ | $\rho_\gamma = \tau\varepsilon\varphi \frac{\Gamma}{2}$ | 31 |

Διαιρώντας τοὺς τύπους $\rho_\alpha = \tau\varepsilon\varphi \frac{A}{2}$ καὶ $\rho = (\tau - \alpha)\varepsilon\varphi \frac{A}{2}$, ἔχουμε:

$$\frac{\rho_\alpha}{\rho} = \frac{\tau}{\tau-\alpha} \Leftrightarrow \rho_\alpha = \frac{\tau\rho}{\tau-\alpha} \Leftrightarrow \rho_\alpha = \frac{E}{\tau-\alpha}.$$

Ἄρα, ἔχουμε τοὺς γνωστοὺς ἀπὸ τὴ Γεωμετρία τύπους:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\rho_\alpha = \frac{E}{\tau-\alpha}$ | $\rho_\beta = \frac{E}{\tau-\beta}$ | $\rho_\gamma = \frac{E}{\tau-\gamma}$ | 32 |

**ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1. Σὲ κάθε τρίγωνο νὰ δειχθεῖ ὅτι: $E = \sqrt{\rho\rho_\alpha\rho_\beta\rho_\gamma}$.**

**᾽Απόδειξη.** Ἂν πολλαπλασιάσουμε τοὺς τύπους **26** καὶ **32** προκύπτει:

$$\rho_\alpha\rho_\beta\rho_\gamma\rho = \frac{E^4}{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)\tau} \Rightarrow \rho_\alpha\rho_\beta\rho_\gamma\rho = \frac{E^4}{E^2}$$

$$E^2 = \rho_\alpha\rho_\beta\rho_\gamma\rho \Rightarrow E = \sqrt{\rho\rho_\alpha\rho_\beta\rho_\gamma}.$$

**ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2.** Νὰ δείξετε ὅτι σὲ κάθε τρίγωνο ἰσχύει :

$$\frac{1}{\rho_\alpha}+\frac{1}{\rho_\beta}+\frac{1}{\rho_\gamma}=\frac{1}{\upsilon_\alpha}+\frac{1}{\upsilon_\beta}+\frac{1}{\upsilon_\gamma}=\frac{1}{\rho}$$

**Ἀπόδειξη.** Σύμφωνα μὲ τοὺς τύπους **32** ἔχουμε :

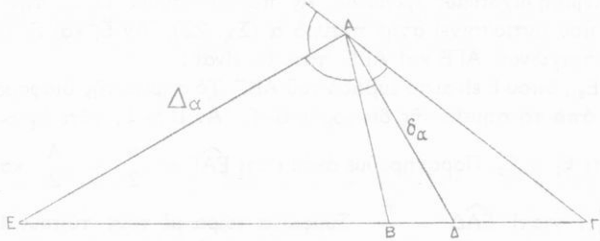
$$\frac{1}{\rho_\alpha}+\frac{1}{\rho_\beta}+\frac{1}{\rho_\gamma}=\frac{\tau-\alpha}{E}+\frac{\tau-\beta}{E}+\frac{\tau-\gamma}{E}=\frac{3\tau-(\alpha+\beta+\gamma)}{E}=$$

$$\frac{3\tau-2\tau}{E}=\frac{\tau}{E}=\frac{\tau}{\tau\rho}=\frac{1}{\rho}.$$

Ἐξάλλου, σύμφωνα μὲ τοὺς τύπους **24**, εἶναι :

$$\frac{1}{\upsilon_\alpha}+\frac{1}{\upsilon_\beta}+\frac{1}{\upsilon_\gamma}=\frac{\alpha}{2E}+\frac{\beta}{2E}+\frac{\gamma}{2E}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2E}=\frac{2\tau}{2E}=\frac{\tau}{\tau\rho}=\frac{1}{\rho}.$$

**1.4. Ἐσωτερικὴ διχοτόμος τριγώνου.** Ἂς συμβολίσουμε μὲ $\delta_\alpha$ τὴν ἐσωτερικὴ διχοτόμο, ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴν πλευρὰ α τριγώνου ΑΒΓ (Σχ. 22). Ἂν Ε εἶναι τὸ ἐμβαδὸ τοῦ ΑΒΓ καὶ $E_1$, $E_2$ τὰ ἀντίστοιχα ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων ΑΒΔ, ΑΓΔ (Σχ. 22), τότε θὰ ἔχουμε :




*Σχ. 22.*

$$E=E_1+E_2 \Rightarrow \frac{1}{2}\beta\gamma\ \eta\mu A=\frac{1}{2}\gamma\delta_\alpha\ \eta\mu\frac{A}{2}+\frac{1}{2}\beta\delta_\alpha\ \eta\mu\frac{A}{2}\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\beta\gamma\left(2\eta\mu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\right)=\frac{1}{2}\delta_\alpha(\beta+\gamma)\eta\mu\frac{A}{2}\Rightarrow 2\beta\gamma\ \sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}=(\beta+\gamma)\delta_\alpha\Rightarrow$$

$$\delta_\alpha=\frac{2\beta\gamma}{\beta+\gamma}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\Rightarrow\delta_\alpha=\frac{2.2R\eta\mu B.\,2R\eta\mu\Gamma}{2R\eta\mu B+2R\eta\mu\Gamma}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\Rightarrow$$

$$\delta_\alpha=\frac{4R\eta\mu B\eta\mu\Gamma}{\eta\mu B+\eta\mu\Gamma}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\Rightarrow\delta_\alpha=\frac{4R\eta\mu B\eta\mu\Gamma}{2\eta\mu\frac{B+\Gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\Rightarrow$$

$$\delta_\alpha = \frac{2R\eta\mu B\eta\mu\Gamma}{\sigma\upsilon\nu\dfrac{B-\Gamma}{2}}.$$

Ἄρα, ἔχουμε τελικὰ τοὺς ἑπόμενους βασικοὺς τύπους :

| | |
|---|---|
| $\delta_\alpha = \dfrac{2\beta\gamma}{\beta+\gamma}\sigma\upsilon\nu\dfrac{A}{2} = \dfrac{2R\eta\mu B\eta\mu\Gamma}{\sigma\upsilon\nu\dfrac{B-\Gamma}{2}}$ | 33 |
| $\delta_\beta = \dfrac{2\gamma\alpha}{\gamma+\alpha}\sigma\upsilon\nu\dfrac{B}{2} = \dfrac{2R\eta\mu\Gamma\eta\mu A}{\sigma\upsilon\nu\dfrac{\Gamma-A}{2}}$ | 34 |
| $\delta_\gamma = \dfrac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}\sigma\upsilon\nu\dfrac{\Gamma}{2} = \dfrac{2R\eta\mu A\eta\mu B}{\sigma\upsilon\nu\dfrac{A-B}{2}}$ | 35 |

**1.5. Ἐξωτερικὴ διχοτόμος τριγώνου.** Ἂς παραστήσουμε μὲ $\Delta_\alpha$ τὴν ἐξωτερικὴ διχοτόμο, ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴν πλευρὰ α (Σχ. 22). Ἂν $E_1$ καὶ $E_2$ εἶναι τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων ΑΓΕ καὶ ΑΒΕ, τότε θὰ εἶναι :
$E = |E_1 - E_2|$, ὅπου Ε εἶναι τὸ ἐμβαδὸ τοῦ ΑΒΓ. Τὸ σημεῖο τῆς διαφορᾶς $E_1 - E_2$ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ σημεῖο τῆς διαφορᾶς Β—Γ. Ἂν $B > \Gamma$, τότε $E_1 > E_2$ καὶ ἂν $B < \Gamma$, τότε $E_1 < E_2$. Παρατηροῦμε ἀκόμα ὅτι $\widehat{EA\Gamma} = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{A}{2}$ καὶ $\widehat{EAB} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{A}{2}$, γιατὶ $\widehat{EA\Delta} = \dfrac{\pi}{2}$. Σύμφωνα τώρα μὲ τοὺς τύπους **16** ἔχουμε :

$$E = |E_1 - E_2| \Longrightarrow \frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A = \left|\frac{1}{2}\beta\Delta_\alpha\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+\frac{A}{2}\right) - \frac{1}{2}\gamma\Delta_\alpha\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)\right|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\beta\gamma.2\eta\mu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2} = \left|\frac{1}{2}\beta\Delta_\alpha\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2} - \frac{1}{2}\gamma\Delta_\alpha\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\right|^{1)} \Longrightarrow$$

$$\Delta_\alpha = \frac{2\beta\gamma}{|\beta-\gamma|}\eta\mu\frac{A}{2} \Rightarrow \Delta_\alpha = \frac{2.2R\eta\mu B.2R\eta\mu\Gamma}{2R|\eta\mu B - \eta\mu\Gamma|}\eta\mu\frac{A}{2} \Longrightarrow$$

$$\Delta_\alpha = \frac{4R\eta\mu B\eta\mu\Gamma}{\left|2\eta\mu\dfrac{B-\Gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{B+\Gamma}{2}\right|}\eta\mu\frac{A}{2} \Longrightarrow \Delta_\alpha = \frac{2R\eta\mu B\eta\mu\Gamma}{\left|\eta\mu\dfrac{B-\Gamma}{2}\right|\left|\eta\mu\dfrac{A}{2}\right|}\eta\mu\frac{A}{2} \Rightarrow$$

[1]) Ὑποθέτουμε $\beta \neq \gamma$ ($\Leftrightarrow B \neq \Gamma$), γιὰ νὰ ὁρίζεται ἡ ἐξωτερικὴ διχοτόμος Δα.

$$\Delta_\alpha = \frac{2R\eta\mu B\eta\mu\Gamma}{\eta\mu\left|\dfrac{B-\Gamma}{2}\right|} \quad (\gamma\iota\alpha\tau\grave{\iota}\ \eta\mu\frac{A}{2} > 0).$$

Ἑπομένως συνάγονται οἱ ἀκόλουθοι βασικοὶ τύποι:

| | |
|---|---|
| $\Delta_\alpha = \dfrac{2\beta\gamma}{\lvert\beta-\gamma\rvert}\eta\mu\dfrac{A}{2} = \dfrac{2R\eta\mu B\eta\mu\Gamma}{\eta\mu\left\lvert\dfrac{B-\Gamma}{2}\right\rvert}$ | **36** |
| $\Delta_\beta = \dfrac{2\gamma\alpha}{\lvert\gamma-\alpha\rvert}\eta\mu\dfrac{B}{2} = \dfrac{2R\eta\mu\Gamma\eta\mu A}{\eta\mu\left\lvert\dfrac{\Gamma-A}{2}\right\rvert}$ | **37** |
| $\Delta_\gamma = \dfrac{2\alpha\beta}{\lvert\alpha-\beta\rvert}\eta\mu\dfrac{\Gamma}{2} = \dfrac{2R\eta\mu A\eta\mu B}{\eta\mu\left\lvert\dfrac{A-B}{2}\right\rvert}$ | **38** |

**1.6. Διάμεσος τριγώνου.** Ἂν $\mu_\alpha$ εἶναι ἡ διάμεσος ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴν πλευρὰ α τριγώνου ΑΒΓ, τότε, σύμφωνα μὲ τὸ θεώρημα τῆς διαμέσου, ἔχουμε:

$$\beta^2+\gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2} \Rightarrow 2(\beta^2+\gamma^2) = 4\mu_\alpha^2 + \alpha^2 \Rightarrow$$

$$2(\beta^2+\gamma^2) = 4\mu_\alpha^2 + \beta^2+\gamma^2 - 2\beta\gamma\,\sigma\upsilon\nu A \Rightarrow 4\mu_\alpha^2 = \beta^2+\gamma^2+2\beta\gamma\,\sigma\upsilon\nu A \Rightarrow$$

$$4\mu_\alpha^2 = \beta^2+\gamma^2+4\left(\frac{1}{2}\beta\gamma\,\eta\mu A\right)\sigma\varphi A \Rightarrow 4\mu_\alpha^2 = \beta^2+\gamma^2+4E\sigma\varphi A.$$

Ἐξάλλου ἀπὸ τοὺς τύπους: $4\mu_\alpha^2 = \beta^2+\gamma^2+2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$ καὶ $\alpha^2 = \beta^2+\gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$, προκύπτει: $4\mu_\alpha^2 = \alpha^2 + 4\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$. Ἔτσι, ἔχουμε τοὺς τύπους:

| | |
|---|---|
| $4\mu_\alpha^2 = \beta^2+\gamma^2+2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A = \beta^2+\gamma^2+4E\sigma\varphi A = \alpha^2+4\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$ | |
| $4\mu_\beta^2 = \gamma^2+\alpha^2+2\gamma\alpha\sigma\upsilon\nu B = \gamma^2+\alpha^2+4E\sigma\varphi B = \beta^2+4\gamma\alpha\sigma\upsilon\nu B$ | **39** |
| $4\mu_\gamma^2 = \alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma = \alpha^2+\beta^2+4E\sigma\varphi\Gamma = \gamma^2+4\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma$ | |

**Παρατήρηση.** Ὁ τύπος $4\mu_\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$ μπορεῖ νὰ μετασχηματιστεῖ, ἂν χρησιμοποιήσουμε βοηθητικὴ γωνία, ὥστε νὰ εἶναι λογιστὴ μὲ τοὺς λογάριθμους ἡ διάμεσος $\mu_\alpha$. Πραγματικά, ὁ τύπος αὐτὸς διαδοχικὰ γράφεται :

$$4\mu_\alpha{}^2 = (\beta^2 + \gamma^2)\left(\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2} + \eta\mu^2\frac{A}{2}\right) + 2\beta\gamma\left(\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2} - \eta\mu^2\frac{A}{2}\right) =$$

$$(\beta + \gamma)^2\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2} + (\beta-\gamma)^2\eta\mu^2\frac{A}{2} = (\beta + \gamma)^2\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2}\left[1 + \left(\frac{\beta-\gamma}{\beta+\gamma}\right)^2 \varepsilon\varphi^2\frac{A}{2}\right] \Rightarrow$$

$$2\mu_\alpha = (\beta + \gamma)\,\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\sqrt{1 + \left(\frac{\beta-\gamma}{\beta+\gamma}\right)^2 \varepsilon\varphi^2\frac{A}{2}}$$

Ἂν θέσουμε : $\dfrac{\beta-\gamma}{\beta+\gamma}\varepsilon\varphi\dfrac{A}{2} = \varepsilon\varphi\omega\left(-\dfrac{\pi}{2} < \omega < \dfrac{\pi}{2}\right)$, τότε θὰ ἔχουμε :

$$2\mu_\alpha = (\beta + \gamma)\,\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\sqrt{1 + \varepsilon\varphi^2\omega} \Rightarrow 2\mu_\alpha = (\beta + \gamma)\,\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\,|\tau\varepsilon\mu\omega|$$

$$\Rightarrow \mu_\alpha = \frac{\beta+\gamma}{2\sigma\upsilon\nu\omega}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2} \Rightarrow \mu_\alpha = \frac{2R\,(\eta\mu B + \eta\mu\Gamma)}{2\sigma\upsilon\nu\omega}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2} =$$

$$\frac{2R\,\eta\mu\dfrac{B+\Gamma}{2}\,\sigma\upsilon\nu\dfrac{B-\Gamma}{2}}{\sigma\upsilon\nu\omega}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2} = \frac{2R\,\sigma\upsilon\nu^2\dfrac{A}{2}\,\sigma\upsilon\nu\dfrac{B-\Gamma}{2}}{\sigma\upsilon\nu\omega}.$$

**ΕΦΑΡΜΟΓΗ. Νὰ ἐκφραστοῦν τὰ στοιχεῖα τ,ρ καὶ $\rho_\alpha$ ἑνὸς τριγώνου μὲ τὴν ἀκτίνα του R καὶ τὶς γωνίες του.**

**Λύση.** Εἶναι : $\tau = \dfrac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) = \dfrac{1}{2}(2R\eta\mu A + 2R\eta\mu B + 2R\eta\mu\Gamma) \Rightarrow$

$$\tau = R(\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu\Gamma) \Rightarrow \tau = 4R\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}.$$

Ἀπὸ τὸν τελευταῖο τύπο καὶ τοὺς τύπους **19, 26,** ἔχουμε :

$$\rho = \frac{E}{\tau} = \frac{2R^2\eta\mu A\eta\mu B\eta\mu\Gamma}{4R\sigma\upsilon\nu\dfrac{A}{2}\,\sigma\upsilon\nu\dfrac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{\Gamma}{2}} =$$

$$\frac{2R^2\left(2\eta\mu\dfrac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{A}{2}\right)\left(2\eta\mu\dfrac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{B}{2}\right)\left(2\eta\mu\dfrac{\Gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{\Gamma}{2}\right)}{4R\sigma\upsilon\nu\dfrac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{\Gamma}{2}} =$$

$$= 4R\eta\mu\frac{A}{2}\,\eta\mu\frac{B}{2}\,\eta\mu\frac{\Gamma}{2}.$$

'Από τοὺς τύπους $\rho_\alpha = \tau \varepsilon \varphi \dfrac{A}{2}$ καὶ $\tau = 4R\sigma\upsilon\nu \dfrac{A}{2} \sigma\upsilon\nu \dfrac{B}{2} \sigma\upsilon\nu \dfrac{\Gamma}{2}$, συνάγεται :

$$\rho_\alpha = 4R\sigma\upsilon\nu \frac{A}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma}{2} \; \frac{\eta\mu \frac{A}{2}}{\sigma\upsilon\nu \frac{A}{2}} \Rightarrow \rho_\alpha = 4R\eta\mu \frac{A}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma}{2}.$$

Ὥστε, ἔχουμε τοὺς ἀκόλουθους χρήσιμους τύπους :

| | |
|---|---|
| $\tau = 4R\ \sigma\upsilon\nu \dfrac{A}{2} \sigma\upsilon\nu \dfrac{B}{2} \sigma\upsilon\nu \dfrac{\Gamma}{2}$ | 40 |
| $\rho = 4R\ \eta\mu \dfrac{A}{2}\ \eta\mu \dfrac{B}{2}\ \eta\mu \dfrac{\Gamma}{2}$ | 41 |
| $\rho_\alpha = 4R\ \eta\mu \dfrac{A}{2} \sigma\upsilon\nu \dfrac{B}{2} \sigma\upsilon\nu \dfrac{\Gamma}{2}$ | 42 |

**1.7. Χρήσιμη παρατήρηση.** Ὅλα τὰ γνωστὰ γραμμικὰ στοιχεῖα ἑνὸς τριγώνου ἐκφράζονται μόνο μὲ τὴν ἀκτίνα R καὶ τὶς γωνίες [1]) του. Αὐτὸ φαίνεται ἀπὸ τοὺς τύπους : **19, 21, 22, 23, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 40, 41, 42.**

Ἡ παραπάνω παρατήρηση 1.7. θὰ παίξει σπουδαιότατο ρόλο στὴν ἐπίλυση τοῦ τριγώνου, ὅπως θὰ δοῦμε στὰ ἑπόμενα.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Α΄ ΟΜΑΔΑ

57) Σὲ κάθε τρίγωνο νὰ δείξετε ὅτι :

1) $\alpha\eta\mu(B-\Gamma) + \beta\eta\mu(\Gamma-A) + \gamma\eta\mu(A-B) = 0$
2) $\alpha\sigma\upsilon\nu A + \beta\sigma\upsilon\nu B + \gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma = 4R\eta\mu A\eta\mu B\eta\mu\Gamma$
3) $(\beta+\gamma)\sigma\upsilon\nu A + (\gamma+\alpha)\sigma\upsilon\nu B + (\alpha+\beta)\sigma\upsilon\nu\Gamma = 2\tau$
4) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 8R^2(1 + \sigma\upsilon\nu A\ \sigma\upsilon\nu B\ \sigma\upsilon\nu\Gamma)$
5) $\alpha(\sigma\upsilon\nu B - \sigma\upsilon\nu\Gamma) = 2(\gamma-\beta)\sigma\upsilon\nu^2 \dfrac{A}{2}$
6) $(\beta-\gamma)^2\sigma\upsilon\nu^2 \dfrac{A}{2} + (\beta+\gamma)^2\eta\mu^2\dfrac{A}{2} = \alpha^2$
7) $\gamma^2 = (\alpha-\beta)^2 + 4\alpha\beta\eta\mu^2 \dfrac{\Gamma}{2}$

---

[1]) Στὴν περίπτωση αὐτὴ ὅταν λέμε «γωνίες» ἐννοοῦμε τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς τῶν γωνιῶν.

8) $E = \dfrac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{4\varepsilon\varphi \dfrac{A + B - \Gamma}{2}}$

9) $E = \dfrac{(\alpha^2 - \beta^2)\eta\mu A \eta\mu B}{2\eta\mu(A-B)} = \sqrt{\beta\gamma\,(\tau-\beta)\,(\tau-\gamma)}\;\sigma\upsilon\nu \dfrac{A}{2} \quad (B \neq A)$

10) $E = \rho_\beta \rho_\gamma \varepsilon\varphi \dfrac{A}{2} = \dfrac{\rho_\alpha \rho_\beta \rho_\gamma}{\tau}$

11) $\alpha\sigma\varphi A + \beta\sigma\varphi B + \gamma\sigma\varphi \Gamma = 2(R + \rho)$

12) $\eta\mu^2 \dfrac{A}{2} + \eta\mu^2 \dfrac{B}{2} + \eta\mu^2 \dfrac{\Gamma}{2} = 1 - \dfrac{\rho}{2R}$

13) $E = R\rho(\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu\Gamma) = \dfrac{1}{2} \sqrt[3]{\alpha^2\beta^2\gamma^2\, \eta\mu A\, \eta\mu B\, \eta\mu\Gamma}$

14) $E = 2R^2 \dfrac{\upsilon_\alpha \upsilon_\beta \upsilon_\gamma}{\alpha\beta\gamma} = \alpha \dfrac{\rho_\beta \rho_\gamma}{\rho_\beta + \rho_\gamma} = \dfrac{(\alpha + \beta)\rho\rho_\gamma}{\rho + \rho_\gamma}$

15) $\upsilon_\alpha + \upsilon_\beta + \upsilon_\gamma = \dfrac{\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta}{2R}$

16) $\dfrac{\eta\mu^2 A}{\upsilon_\alpha^2} = \dfrac{1}{\beta^2} + \dfrac{1}{\gamma^2} - \dfrac{2\sigma\upsilon\nu A}{\beta\gamma}$

17) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 4E(\sigma\varphi A + \sigma\varphi B + \sigma\varphi\Gamma)$

58) Ἂν σὲ τρίγωνο ΑΒΓ ἰσχύει ἡ σχέση $R\,\sigma\upsilon\nu\,(B-\Gamma) = \delta_\alpha \sigma\upsilon\nu \dfrac{B-\Gamma}{2}$, τότε τὸ τρίγωνο εἶναι ὀρθογώνιο.

59) Ἂν σὲ τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι $\mu_\alpha = \gamma$, τότε ἰσχύει:

$$\varepsilon\varphi \frac{A}{2} = \left(1 + \varepsilon\varphi^2 \frac{A}{2}\right) \eta\mu\,(B - \Gamma)$$

καὶ ἀντίστροφα.

60) Ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές, ὅταν ἰσχύει μιὰ ἀπὸ τὶς παρακάτω σχέσεις:

1) $\sigma\upsilon\nu^2 \dfrac{A}{2} = \eta\mu B\, \eta\mu\Gamma$ 2) $\alpha = 2\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma$ 3) $(\tau - \beta)\sigma\varphi \dfrac{\Gamma}{2} = \tau\varepsilon\varphi \dfrac{B}{2}$

4) $2\upsilon_\alpha = \alpha\sigma\varphi \dfrac{A}{2}$ 5) $4\tau\rho = \alpha^2 \sigma\varphi \dfrac{A}{2}$

61) Σὲ κάθε τρίγωνο νὰ δειχθεῖ ὅτι:

1) $\delta_\alpha \sigma\upsilon\nu \dfrac{B-\Gamma}{2} = \upsilon_\alpha$ 2) $\delta_\alpha \Delta_\alpha(\beta^2 - \gamma^2) = 4\beta\gamma E \quad (\beta > \gamma)$

3) $\varepsilon\varphi \dfrac{B}{2} + \varepsilon\varphi \dfrac{\Gamma}{2} = \dfrac{\alpha}{\rho_\alpha}$

4) $\varepsilon\varphi \dfrac{B}{2}\, \varepsilon\varphi \dfrac{\Gamma}{2} = \dfrac{\rho}{\rho_\alpha}$ 5) $\alpha^2 \geqslant 4\rho\rho_\alpha$ 6) $\rho_\alpha + \rho_\beta = 4R\sigma\upsilon\nu^2 \dfrac{\Gamma}{2}$

7) $\rho_\alpha \rho_\beta + \rho\rho_\gamma = \alpha\beta$

8) $\frac{1}{\rho_\alpha}+\frac{1}{\rho_\beta}=\frac{2}{\upsilon_\gamma}$ 10) $\upsilon_\alpha\upsilon_\beta+\upsilon_\beta\upsilon_\gamma+\upsilon_\gamma\upsilon_\alpha=\frac{2\rho\tau^2}{R}$

9) $\rho_\alpha\rho_\beta+\rho_\beta\rho_\gamma+\rho_\gamma\rho_\alpha=\tau^2$

62) Ἄν οἱ πλευρὲς ἑνὸς τριγώνου εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου καὶ ἡ μεγαλύτερη γωνία του εἶναι διπλάσια ἀπὸ τὴ μικρότερη, τότε οἱ πλευρές του εἶναι ἀνάλογες μὲ τοὺς ἀριθμοὺς 4,5,6 καὶ ἀντίστροφα.

63) Ἄν σὲ τρίγωνο ἰσχύει μιὰ ἀπὸ τὶς ἀκόλουθες σχέσεις, τὸ τρίγωνο εἶναι ὀρθογώνιο :

1) $\eta\mu^2 A+\eta\mu^2 B+\eta\mu^2\Gamma=2$ 2) $E=\tau(\tau-\alpha)$ 3) $E=\rho\rho_\alpha$

4) $E=\rho_\beta\rho_\gamma$ 5) $\rho_\beta+\rho_\gamma=\alpha$ 6) $\rho_\beta+\rho_\gamma=2R$

7) $\varepsilon\varphi B+\varepsilon\varphi\Gamma=\frac{\alpha^2}{2E}$ 8) $\sigma\varphi\frac{B}{2}=\frac{\alpha+\gamma}{\beta}$

64) Ἄν οἱ διάμεσοι $\mu_\beta$ καὶ $\mu_\gamma$ τέμνονται κάθετα, νὰ δειχθεῖ ὅτι :

1) $2(\sigma\varphi B+\sigma\varphi\Gamma)=\sigma\varphi A$ 2) $\sigma\upsilon\nu A\geqslant\frac{4}{5}$

65) Νὰ δείξετε ὅτι $\upsilon_\alpha=4\rho$, ὅταν καὶ μόνο ὅταν : $3\eta\mu\frac{A}{2}=\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}$

66) Νὰ δείξετε ὅτι οἱ πλευρὲς ἑνὸς τριγώνου δὲν μπορεῖ νὰ ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴ ἢ γεωμετρικὴ πρόοδο, ὅταν οἱ γωνίες του ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴ πρόοδο.

## Β΄ ΟΜΑΔΑ

67) Ἄν σὲ τρίγωνο εἶναι $\alpha=\upsilon_\alpha$, τότε νὰ δείξετε ὅτι :

$$\frac{\gamma}{2}(\sqrt{5}-1)\leqslant\beta\leqslant\frac{\gamma}{2}(\sqrt{5}+1)$$

68) Ἄν σὲ τρίγωνο ἰσχύει $R=\sqrt{\rho\rho_\alpha}$, τότε τὸ τρίγωνο εἶναι ὀρθογώνιο καὶ ἰσοσκελές.

69) Νὰ καθορίσετε τὸ εἶδος τοῦ τριγώνου ἀπὸ τὴ σχέση $\tau>2R+\rho$.

70) Σὲ τρίγωνο ἰσχύει $\alpha^4+\beta^4=\gamma^4$, ὅταν καὶ μόνο ὅταν $2\eta\mu^2\Gamma=\varepsilon\varphi A\varepsilon\varphi B$.

71) Ἄν ω,φ καὶ θ εἶναι ἀντίστοιχα οἱ γωνίες ποὺ σχηματίζει ἡ διάμεσος $\mu_\alpha$ ὀξυγώνιου τριγώνου ΑΒΓ μὲ τὶς πλευρὲς α,β καὶ γ, τότε νὰ δείξετε ὅτι :

α) $\sigma\varphi\theta=2\sigma\varphi A+\sigma\varphi B$

β) $\sigma\varphi\varphi=2\sigma\varphi A+\sigma\varphi\Gamma$

γ) $2\sigma\varphi\omega=|\sigma\varphi B-\sigma\varphi\Gamma|$ $\left(\omega\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$

δ) $\sigma\varphi A=\frac{4\mu_\alpha^2-\alpha^2}{4\alpha\mu_\alpha\eta\mu\omega}$

72) Ἄν Ο εἶναι ἐσωτερικὸ σημεῖο τριγώνου ΑΒΓ τέτοιο, ὥστε : $\widehat{OAB}=\widehat{OB\Gamma}=\widehat{O\Gamma A}=\omega$, τότε νὰ δειχθεῖ ὅτι :

α) $\sigma\varphi\omega=\sigma\varphi A+\sigma\varphi B+\sigma\varphi\Gamma$

β) $\sigma\tau\epsilon\mu^2\omega = \sigma\tau\epsilon\mu^2 A + \sigma\tau\epsilon\mu^2 A + \sigma\tau\epsilon\mu^2 \Gamma$

γ) $\omega \leqslant \frac{\pi}{6}$

73) Θεωροῦμε τρίγωνο ΑΒΓ, τὸ ὀρθικό του τρίγωνο Α'Β'Γ' καὶ σημειώνουμε μὲ Ο, Η τὸ περίκεντρο καὶ τὸ ὀρθόκεντρο ἀντίστοιχα τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἂν ΟΚ εἶναι ἡ ἀπόσταση τοῦ Ο ἀπὸ τὴν πλευρὰ ΒΓ, τότε νὰ δείξετε ὅτι :

1) $(OK) = R\sigma\upsilon\nu A$

2) $(HA) = 2R\sigma\upsilon\nu A$

3) $(HA') = 2R\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma$

4) $A' = \pi - 2A,\ B' = \pi - 2B,\ \Gamma' = \pi - 2\Gamma$.

5) $(B'\Gamma') = R\eta\mu 2A = \alpha\sigma\upsilon\nu A$

6) $(A'B'\Gamma') = 2E\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma$

7) $(OH)^2 = R^2(1 - 8\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma)$

8) $\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma \leqslant \frac{1}{8}$

Ποιὰ εἶναι ἡ μορφὴ τῶν παραπάνω σχέσεων, ὅταν τὸ τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι ἀμβλυγώνιο;

74) Ἂν $\alpha,\beta,\gamma > 0$ καὶ $A,B,\Gamma \in (0,\ \pi)$, τότε οἱ τρεῖς θεμελιώδεις ὁμάδες τύπων (Α), (Β) καὶ (Γ) εἶναι ἀνὰ δύο ἰσοδύναμες.

## 2. Γενικὴ μέθοδος ἐπιλύσεως τριγώνου

**2.1. Ὁρισμοὶ καὶ βασικὲς ἔννοιες.** Ὅπως εἴδαμε στὴν § 2 τοῦ κεφ. VI, ὀνομάζεται **ἐπίλυση τριγώνου** ὁ ὑπολογισμὸς τῶν κύριων στοιχείων του, ὅταν δοθοῦν ἀρκετὰ ἄλλα στοιχεῖα του [1]).

Θὰ λέμε ὅτι **ἡ ἐπίλυση εἶναι δυνατή,** ἐφόσον ὑπάρχει τρίγωνο τέτοιο, ὥστε τὰ στοιχεῖα ποὺ βρίσκουμε ἀπὸ τὴν ἐπίλυση καὶ τὰ δοσμένα νὰ εἶναι στοιχεῖα του. Στὴν ἀντίθετη περίπτωση **ἡ ἐπίλυση εἶναι ἀδύνατη.**

Ὀνομάζεται **διερεύνηση τῆς ἐπιλύσεως,** ἡ εὕρεση τῶν ἱκανῶν καὶ ἀναγκαίων συνθηκῶν, ὥστε ἡ ἐπίλυση νὰ εἶναι δυνατὴ ἢ ἀδύνατη.

Στὰ ἑπόμενα, ὅταν λέμε **γωνιακὴ σχέση** θὰ ἐννοοῦμε μιὰ σχέση μεταξὺ τῶν γωνιῶν Α,Β,Γ ἢ τῶν τριγωνομετρικῶν τους ἀριθμῶν. Ὅταν θὰ λέμε **γραμμικὴ σχέση** θὰ ἐννοοῦμε μιὰ σχέση μεταξὺ τῶν γραμμικῶν στοιχείων ἑνὸς τριγώνου.

Τὰ στοιχεῖα ποὺ δίνονται γιὰ μιὰ ἐπίλυση μπορεῖ νὰ εἶναι γραμμικὲς ἢ γωνιακὲς σχέσεις.

**2.2. Παρατηρήσεις: 1) Κάθε γραμμικὴ (καὶ ὁμογενὴς) σχέση σ' ἕνα τρίγωνο εἶναι ἰσοδύναμη μὲ μιὰ γωνιακὴ σχέση.** Αὐτὸ συνάγεται ἀπὸ τὴν παρατήρηση 1.7., ὅτι ὅλα τὰ γραμμικὰ

---

[1]) Γιὰ τὴν ἐπίλυση ἑνὸς τριγώνου χρειάζονται τρία στοιχεῖα, ἀπὸ τὰ ὁποῖα τὸ ἕνα τουλάχιστον πρέπει νὰ εἶναι γραμμικό.

στοιχεῖα ἑνὸς τριγώνου ἐκφράζονται μὲ τὴν ἀκτίνα R καὶ τὶς γωνίες του. Ἑπομένως, ἂν ἐκφράσουμε τὰ γραμμικὰ στοιχεῖα τῆς γραμμικῆς καὶ ὁμογενοῦς σχέσεως μὲ R καὶ γωνίες καὶ ἔπειτα ἀπαλείψουμε τὸ R, θὰ προκύψει μιὰ γωνιακὴ σχέση. Π.χ., ἀπὸ τὴ σχέση $αυ_α = βγ$ θὰ ἔχουμε :

$$αυ_α = βγ \Leftrightarrow (2Rημ A)(2Rημ B ημ Γ) = (2Rημ B)(2Rημ Γ) \Leftrightarrow$$

$$4R^2 ημ A ημ B ημ Γ = 4R^2 ημ B ημ Γ \Leftrightarrow ημ A = 1 \Leftrightarrow A = \frac{π}{2}.$$

2) **Ἀπὸ 2 γραμμικὲς ὄχι ὁμογενεῖς ἐκφράσεις προκύπτει μιὰ γωνιακὴ ἔκφραση.** Θεωροῦμε τὶς γραμμικὲς σχέσεις : $β - γ = κ > 0$ καὶ $E = λ^2$. Ἔχουμε :

$$β - γ = κ \Leftrightarrow 2R(ημ B - ημ Γ) = κ \Leftrightarrow 4Rημ\frac{B-Γ}{2}συν\frac{B+Γ}{2} = κ \Leftrightarrow$$

$$4Rημ\frac{B-Γ}{2}ημ\frac{A}{2} = κ \Leftrightarrow 16R^2 ημ^2\frac{B-Γ}{2}ημ^2\frac{A}{2} = κ^2 \quad (1).$$

$$E = λ^2 \Leftrightarrow 2R^2 ημ A\, ημ B\, ημ Γ = λ^2 \Leftrightarrow 4R^2 ημ\frac{A}{2}συν\frac{A}{2}ημ B\, ημ Γ = λ^2 \quad (2)$$

Διαιρώντας τὶς (1) καὶ (2) βρίσκουμε τὴ γωνιακὴ σχέση :

$$\frac{4ημ^2\frac{B-Γ}{2}ημ\frac{A}{2}}{συν\frac{A}{2}ημ B\, ημ Γ} = \frac{κ^2}{λ^2}$$

3) Θεωροῦμε τρεῖς γωνίες Α,Β,Γ καὶ ἕναν ἀριθμὸ R. Ἀπὸ τὴ Γεωμετρία γνωρίζουμε ὅτι, οἱ ἱκανὲς καὶ ἀναγκαῖες συνθῆκες, γιὰ νὰ ὑπάρχει τρίγωνο μὲ γωνίες τὶς Α,Β,Γ καὶ ἀκτίνα περιγεγραμμένης περιφερείας τὸ R, εἶναι :

$$A > 0,\ B > 0,\ Γ > 0,\ A + B + Γ = π,\ R > 0.$$

Ἄρα, ἔχουμε τὴν ἀκόλουθη βασικὴ ἐπίλυση :

## 2.3. Βασικὴ ἐπίλυση. Νὰ ἐπιλυθεῖ τρίγωνο ἀπὸ δύο γωνίες του καὶ τὴν ἀκτίνα τῆς περιγεγραμμένης του περιφέρειας.

**2.3. Βασικὴ ἐπίλυση. Νὰ ἐπιλυθεῖ τρίγωνο ἀπὸ δύο γωνίες του καὶ τὴν ἀκτίνα τῆς περιγεγραμμένης του περιφέρειας.** Δημαδὴ δίνονται τὰ στοιχεῖα : $A = θ_1$, $B = θ_2$, $P = κ$ ($θ_1$, $θ_2$, κ δοσμένοι ἀριθμοί).

Θεωροῦμε τὸ σύστημα :

$$\left.\begin{array}{l} A = θ_1 \\ B = θ_2 \\ A + B + Γ = π \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} A = θ_1 \\ B = θ_2 \\ Γ = π - (θ_1 + θ_2). \end{array}\right.$$

Τὸ παραπάνω σύστημα ἔχει θετικὴ λύση, ὅταν καὶ μόνο ὅταν :

$$\{θ_1 > 0,\ θ_2 > 0,\ π - (θ_1 + θ_2) > 0\} \Leftrightarrow \{θ_1 > 0,\ θ_2 > 0,\ θ_1 + θ_2 < π\}.$$

Ἄρα, ἡ ἐπίλυση τοῦ τριγώνου εἶναι δυνατή, ὅταν :

$$θ_1 > 0,\ θ_2 > 0,\ θ_1 + θ_1 < π,\ κ > 0.$$

Κατόπιν, ἀπὸ τοὺς τύπους (II), βρίσκουμε τὶς πλευρὲς τοῦ τριγώνου, ποὺ εἶναι :

$$\alpha = 2R\eta\mu\theta_1, \quad \beta = 2R\eta\mu\theta_2, \quad \gamma = 2R\eta\mu(\theta_1 + \theta_2).$$

**2.4.** Σύμφωνα μὲ ὅλα τὰ παραπάνω μποροῦμε νὰ διακρίνουμε τρεῖς κατηγορίες ἐπιλύσεως τριγώνων. Αὐτὲς φαίνονται ἀπὸ τὴν παρακάτω γενικὴ διατύπωση :

Νὰ ἐπιλυθεῖ τρίγωνο, ὅταν δίνονται :

α) δυὸ γωνιακὲς σχέσεις καὶ μιὰ γραμμικὴ ὄχι ὁμογενής.

β) δυὸ γραμμικὲς σχέσεις ἀπὸ τὶς ὁποῖες μιὰ τουλάχιστον ὄχι ὁμογενὴς καὶ μιὰ γωνιακή.

γ) τρεῖς γραμμικὲς σχέσεις ἀπὸ τὶς ὁποῖες μιὰ τουλάχιστον εἶναι ὄχι ὁμογενής.

Οἱ περιπτώσεις β) καὶ γ) ἀνάγονται, σύμφωνα μὲ τὶς παραπάνω παρατηρήσεις 1 καὶ 2, στὴν περίπτωση α).

Γιὰ νὰ ἐπιλύσουμε τὸ τρίγωνο στὴν α) περίπτωση ἀκολουθοῦμε τὴν ἑξῆς πορεία : Λύνουμε τὸ τριγωνομετρικὸ σύστημα, ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ τὶς δυὸ γραμμικὲς σχέσεις καὶ τὴν $A + B + \Gamma = \pi$. Τὸ σύστημα αὐτὸ ἂς καλέσουμε (Σ). Ὥστε, ἡ ἐπίλυση ἑνὸς τριγώνου ἀρχίζει σχεδὸν πάντοτε μὲ τὸν προσδιορισμὸ τῶν γωνιῶν του ἀπὸ τὴν λύση τοῦ συστήματος (Σ). Ἂν τὸ σύστημα (Σ) ἔχει θετικὴ λύση, τότε προσδιορίζουμε τὶς γωνίες. Ἔπειτα, ἀπὸ τὴ δοσμένη γραμμικὴ σχέση βρίσκουμε τὸ R, ἀφοῦ προηγούμενα ἐκφράσουμε τὰ γραμμικὰ στοιχεῖα της μὲ τὸ R καὶ τὶς γωνίες. Ἔτσι, ἔχουμε ἀναχθεῖ στὴ βασικὴ ἐπίλυση 2.3.

Τονίζουμε ἀκόμα ὅτι, ἂν τὸ σύστημα ἔχει θετικὴ λύση καὶ εἶναι $R>0$, τότε εἶναι δυνατὴ ἡ ἐπίλυση. Ἄρα, οἱ συνθῆκες γιὰ νὰ ἔχει θετικὴ λύση τὸ (Σ), ἐφόσον $R > 0$, εἶναι οἱ συνθῆκες γιὰ νὰ εἶναι δυνατὴ ἡ ἐπίλυση.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.** Νὰ ἐπιλυθεῖ τρίγωνο ἀπὸ τὰ στοιχεῖα :

$B - \Gamma = \omega > 0$, $\beta + \gamma = \kappa\upsilon_\alpha$ καὶ $\rho = \lambda$, ὅπου κ,λ καὶ ω γνωστοὶ ἀριθμοί.

**Ἐπίλυση.** Ἔχουμε :

$$\beta + \gamma \Leftrightarrow \kappa\upsilon_\alpha \Leftrightarrow 2R(\eta\mu B + \eta\mu\Gamma) = 2\kappa R\eta\mu B\eta\mu\Gamma$$

$$4\eta\mu\,\frac{B+\Gamma}{2}\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{B-\Gamma}{2} = \kappa\,(2\eta\mu B\eta\mu\Gamma) \Leftrightarrow$$

$$4\eta\mu\,\frac{B+\Gamma}{2}\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{B-\Gamma}{2} = \kappa\{\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma) - \sigma\upsilon\nu(B+\Gamma)\} \quad (1)$$

Ἄρα, ἔχουμε νὰ λύσουμε τὸ σύστημα :

$$\left.\begin{array}{l} B-\Gamma=\omega \\ (1) \\ A+B+\Gamma=\pi \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} B-\Gamma=\omega \\ 4\sigma\upsilon\nu\dfrac{A}{2}\,\sigma\upsilon\nu\dfrac{\omega}{2}=\kappa\,(\sigma\upsilon\nu\omega+\sigma\upsilon\nu A) \qquad (2) \\ A+B+\Gamma=\pi \end{array}\right.$$

Ἡ ἐξίσωση (2) ἰσοδύναμα γράφεται :

$$(2) \Leftrightarrow 4\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2}=\kappa\left(\sigma\upsilon\nu\omega+2\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2}-1\right) \Leftrightarrow$$

$$2\kappa\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2}-4\sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}+\kappa\sigma\upsilon\nu\omega-\kappa=0 \Leftrightarrow$$

$$f\left(\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\right)=\kappa\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2}-2\sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}-\kappa\eta\mu^2\frac{\omega}{2}=0. \quad (3)$$

Ἐξάλλου εἶναι :

$$\Gamma>0 \Leftrightarrow 2\Gamma>0 \Leftrightarrow (A+B+\Gamma)-(B-\Gamma)>A \Leftrightarrow \pi-\omega>A.$$

Ἀπ' αὐτὴ καὶ ἐπειδὴ $B-\Gamma=\omega>0$, συμπεραίνουμε ὅτι, ἂν τὸ παραπάνω σύστημα ἔχει λύση, αὐτὴ θὰ εἶναι θετική, ὅταν καὶ μόνον ὅταν :

$$0<A<\pi-\omega \Leftrightarrow 0<\frac{A}{2}<\frac{\pi}{2}-\frac{\omega}{2}<\frac{\pi}{2} \overset{\omega<\pi}{\Leftrightarrow}$$

$$\sigma\upsilon\nu 0>\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}>\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\omega}{2}\right) \Leftrightarrow 1>\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}>\eta\mu\frac{\omega}{2}. \quad (4)$$

Ἑπομένως οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως (3) εἶναι δεκτές, ἐφόσον ἱκανοποιοῦν τὴ συνθήκη (4). Διακρίνουμε τὶς παρακάτω περιπτώσεις :

α) Ἐφόσον $\Delta=4\sigma\upsilon\nu^2\frac{\omega}{2}+4\kappa^2\eta\mu^2\frac{\omega}{2}\neq 0$, ἡ (3) ἔχει μιὰ μόνο δεκτὴ ρίζα, ὅταν καὶ μόνον ὅταν :

$$f\left(\eta\mu\frac{\omega}{2}\right)f(1)<0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\kappa\eta\mu^2\frac{\omega}{2}-2\sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2}\,\eta\mu\frac{\omega}{2}-\kappa\eta\mu^2\frac{\omega}{2}\right)\left(\kappa-2\sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2}-\kappa\eta\mu^2\frac{\omega}{2}\right)<0 \Leftrightarrow$$

$$-2\eta\mu\frac{\omega}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2}\left(\kappa\sigma\upsilon\nu^2\frac{\omega}{2}-2\sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2}\right)<0 \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu\omega\ \sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2}\left(\kappa\ \sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2}-2\right)>0 \Leftrightarrow \kappa\ \sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2}-2>0 \quad (5)$$

β) Ἡ (3) ἔχει δυὸ δεκτὲς ρίζες, ὅταν καὶ μόνο ὅταν:

$$\Delta>0,\ \alpha f\left(\eta\mu\frac{\omega}{2}\right)>0,\ \alpha f(1)>0,\ \eta\mu\frac{\omega}{2}+\frac{\beta}{2\alpha}<0,\ 1+\frac{\beta}{2\alpha}>0.$$

Τώρα, ἀπὸ τὴ σχέση $\rho=\lambda$ καὶ σύμφωνα μὲ τὸν τύπο **41**, ἔχουμε:

$\lambda = 4R\,\eta\mu\frac{A}{2}\,\eta\mu\frac{B}{2}\,\eta\mu\frac{\Gamma}{2}$. Ἀπ' αὐτὴ βρίσκουμε τὸ R καὶ ἐπομένως ἔχουμε ἀναχθεῖ στὴ βασικὴ ἐπίλυση. Ἀκόμα, τὸ R εἶναι θετικό, ἐφόσον $\lambda>0$. Ἐξάλλου, ἀπὸ τὴ σχέση $\beta+\gamma=\kappa\upsilon_\alpha$ προκύπτει $\kappa>0$. Ἡ συνθήκη (5) μὲ $\kappa>0$ γράφεται: $\sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2}>\frac{2}{\kappa}$. Εἶναι:

$$\alpha f\left(\eta\mu\frac{\omega}{2}\right)=\kappa\left(-2\sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2}\,\eta\mu\frac{\omega}{2}\right)=-\kappa\eta\mu\omega<0$$

καὶ ἐπομένως ἡ (3) ἀποκλείεται νὰ ἔχει δυὸ δεκτὲς ρίζες.

Τελικά, σύμφωνα μὲ ὅλα τὰ παραπάνω, βρίσκουμε ὅτι ἡ ἐπίλυση εἶναι δυνατή, ὅταν: $\lambda>0,\ \kappa>0,\ \sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2}>\frac{2}{\kappa},\ \omega<\pi$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.** Νὰ ἐπιλυθεῖ τρίγωνο ἀπὸ τὰ στοιχεῖα: $B-\Gamma=\omega$, $\frac{\beta}{\gamma}=\kappa$ καὶ $\delta_\alpha=\lambda$, ὅπου $\kappa,\lambda,\omega$ γνωστοὶ ἀριθμοὶ καὶ $0<\omega<\frac{\pi}{2}$.

**Ἐπίλυση.** Ἀπὸ τὴ σχέση $\frac{\beta}{\gamma}=\kappa$, συνάγεται $\kappa\neq 1$, γιατί, ἂν $\kappa=1$, τότε θὰ εἶναι $\beta=\gamma$ καὶ ἐπομένως $B=\Gamma$ ἢ $B-\Gamma=0$, ποὺ εἶναι ἄτοπο. Ἔχουμε:

$$\frac{\beta}{\gamma}=\kappa \Leftrightarrow \frac{2R\,\eta\mu B}{2R\,\eta\mu\Gamma}=\kappa \Leftrightarrow \frac{\eta\mu B}{\eta\mu\Gamma}=\kappa \Leftrightarrow \frac{\eta\mu B+\eta\mu\Gamma}{\eta\mu B-\eta\mu\Gamma}=\frac{\kappa+1}{\kappa-1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{2\eta\mu\frac{B+\Gamma}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}}{2\eta\mu\frac{B-\Gamma}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{B+\Gamma}{2}}=\frac{\kappa+1}{\kappa-1} \Leftrightarrow \epsilon\varphi\frac{B+\Gamma}{2}\,\sigma\varphi\frac{B-\Gamma}{2}=\frac{\kappa+1}{\kappa-1}.$$

Ἐπομένως, ἔχουμε νὰ ἐπιλύσουμε τὸ σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l} B-\Gamma=\omega \\ A+B+\Gamma=\pi \\ \varepsilon\varphi\,\dfrac{B+\Gamma}{2}\,\sigma\varphi\dfrac{B-\Gamma}{2}=\dfrac{\kappa+1}{\kappa-1} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} B-\Gamma=\omega \\ A+B+\Gamma=\pi \\ \sigma\varphi\,\dfrac{A}{2}=\dfrac{\kappa+1}{\kappa-1}\,\varepsilon\varphi\,\dfrac{\omega}{2} \quad (1) \end{array}\right.$$

Ἂν τὸ παραπάνω σύστημα ἔχει λύση, αὐτὴ θὰ εἶναι θετική, ὅταν καὶ μόνο ὅταν :

$$0<\frac{A}{2}<\frac{\pi}{2}-\frac{\omega}{2} \Leftrightarrow \sigma\varphi\,\frac{A}{2}>\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\omega}{2}\right) \Leftrightarrow \sigma\varphi\,\frac{A}{2}>\varepsilon\varphi\,\frac{\omega}{2}.$$

Ἄρα, ἡ ἐξίσωση (1) ἔχει λύση, ὅταν καὶ μόνο ὅταν :

$$\frac{\kappa+1}{\kappa-1}\,\varepsilon\varphi\,\frac{\omega}{2}>\varepsilon\varphi\,\frac{\omega}{2} \Leftrightarrow \frac{\kappa+1}{\kappa-1}>1 \Leftrightarrow \kappa>1.$$

Ἀκόμα, ἀπὸ τὴ γραμμικὴ σχέση $\delta_\alpha=\lambda$, εἶναι : $\dfrac{2R\eta\mu B\eta\mu\Gamma}{\sigma\upsilon\nu\,\dfrac{B-\Gamma}{2}}=\lambda$. Ἀπὸ τὴν τελευταία σχέση βρίσκουμε τὸ R καὶ ἑπομένως καταλήγουμε στὴ βασικὴ ἐπίλυση.

Τὰ ἑπόμενα παραδείγματα εἶναι δύο κλασικὲς ἐπιλύσεις (Βλ. κεφ. VI, § 2), τὶς ὁποῖες ἀναφέρουμε καὶ ἐδῶ γιὰ νὰ τὶς μελετήσουμε μὲ τὴ βοήθεια τῆς γενικῆς μεθόδου ἐπιλύσεως.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. Νὰ ἐπιλυθεῖ τρίγωνο ἀπὸ τὰ στοιχεῖα: $A=\theta_1, B=\theta_2$, $\alpha=k$, ὅπου $\theta_1$, $\theta_2$ καὶ k γνωστοὶ ἀριθμοί.** Θεωροῦμε τὸ σύστημα :

$$\left.\begin{array}{l} A=\theta_1 \\ B=\theta_2 \\ A+B+\Gamma=\pi \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} A=\theta_1 \\ B=\theta_2 \\ \Gamma=\pi-(\theta_1+\theta_2) \end{array}\right.$$

Τὸ σύστημα, ἔχει θετικὴ λύση, ὅταν καὶ μόνο ὅταν : $\theta_1>0$, $\theta_2>0$, $\theta_1+\theta_2<\pi$. Ἀπὸ τὴ σχέση $\alpha=\kappa$ ἔχουμε: $2R\eta\mu\theta_1=\kappa$ καὶ ἑπομένως $R=\dfrac{\kappa}{2\eta\mu\theta_1}$. Ἄρα, τὰ στοιχεῖα Α,Β,Γ, καὶ R μᾶς εἶναι γνωστὰ καὶ συνεπῶς ἔχουμε φτάσει στὴ βασικὴ ἐπίλυση. Ἀκόμα εἶναι :

$$R>0 \Leftrightarrow \frac{\kappa}{2\eta\mu\theta_1}>0 \Leftrightarrow \kappa>0.$$

Ἑπομένως ἡ ἐπίλυση εἶναι δυνατή, ὅταν καὶ μόνο ὅταν : $\theta_1>0$, $\theta_2>0$, $\theta_1+\theta_2<\pi$, $\kappa>0$.

Ἂν $\beta < \gamma$ ($\Leftrightarrow \kappa < \lambda$), τότε ἡ ἐπίλυση προχωρεῖ μὲ τὸν ἴδιο, ὅπως καὶ παραπάνω, τρόπο. Ἂν ὅμως εἶναι $\beta = \gamma$ ($\Leftrightarrow \kappa = \lambda$), τότε ἡ ἐπίλυση τοῦ τριγώνου εἶναι ἁπλή, γιατὶ $B = \Gamma = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4. Νὰ ἐπιλυθεῖ τρίγωνο ἀπὸ τὶς πλευρές του.** Τὰ στοιχεῖα γιὰ τὴν ἐπίλυση εἶναι: $\alpha = \kappa$, $\beta = \lambda$, $\gamma = \mu$, ὅπου $\kappa, \lambda, \mu$ γνωστοὶ θετικοὶ ἀριθμοί. Οἱ γωνίες τοῦ τριγώνου προσδιορίζονται ἀπὸ τὸ παρακάτω σύστημα (βλ. **15**):

$$\varepsilon\varphi \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-\lambda)(s-\mu)}{s(s-\kappa)}}$$

$$\varepsilon\varphi \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-\mu)(s-\kappa)}{s(s-\lambda)}} \qquad (\Sigma)$$

$$\varepsilon\varphi \frac{\Gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-\kappa)(s-\lambda)}{s(s-\mu)}} \qquad (2s = \kappa + \lambda + \mu)$$

Ἡ γωνία $A$ προσδιορίζεται, ὅταν καὶ μόνον ὅταν:

$$\frac{(s-\lambda)(s-\mu)}{s(s-\kappa)} > 0 \Leftrightarrow |\lambda - \mu| < \kappa < \lambda + \mu \qquad (1)$$

Ἂν ἡ συνθήκη (1) ἱκανοποιεῖται, τότε ὑπάρχει γωνία $\theta_1 \in (0, \pi)$ τέτοια ὥστε:

$$\varepsilon\varphi \frac{\theta_1}{2} = \sqrt{\frac{(s-\lambda)(s-\mu)}{s(s-\kappa)}}.$$

Ἑπομένως θὰ εἶναι $\varepsilon\varphi \frac{A}{2} = \varepsilon\varphi \frac{\theta_1}{2}$ καὶ τότε βρίσκουμε $A = \theta_1$. Ἄρα, τὸ παραπάνω σύστημα $(\Sigma)$ ἔχει μιὰ μόνο λύση μέσα στὸ διάστημα $(0, \pi)$, ὅταν καὶ μόνον ὅταν:

$$|\lambda - \mu| < \kappa < \lambda + \mu, \ |\mu - \kappa| < \lambda < \mu + \kappa, \ |\kappa - \lambda| < \mu < \kappa + \lambda. \quad (2)$$

Ὑποθέτουμε ὅτι: $A = \theta_1$, $B = \theta_2$ καὶ $\Gamma = \theta_3$ εἶναι ἡ λύση τοῦ συστήματος $(\Sigma)$. Γιὰ νὰ εἶναι ἡ ἐπίλυση δυνατὴ θὰ πρέπει $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \pi$. Θὰ δείξουμε ὅτι αὐτὸ ἰσχύει. Γνωρίζουμε ὅτι:

$$\kappa^2 = \lambda^2 + \mu^2 - 2\lambda\mu\,\sigma\upsilon\nu\theta_1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi \frac{\theta_1}{2} = \sqrt{\frac{(s-\lambda)(s-\mu)}{s(s-\kappa)}}.$$

Ἀκόμα, οἱ ἀριθμοὶ $\kappa, \lambda, \mu$ καὶ $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ ἱκανοποιοῦν τὶς ὑποθέσεις τῆς ἀσκήσεως 77 καὶ ἑπομένως εἶναι στοιχεῖα ἑνὸς τριγώνου. Τέλος, ἡ ἐπίλυση εἶναι δυνατή, ἐφόσον ἱκανοποιοῦνται οἱ παραπάνω συνθῆκες (1).

**Παρατήρηση.** Ἡ σχέση $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \pi$, ποὺ ἀναφέρεται παραπάνω, μπορεῖ νὰ ἀποδειχθεῖ καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\text{Εἶναι}: \text{εφ}\frac{\theta_1}{2}\,\text{εφ}\frac{\theta_2}{2} + \text{εφ}\frac{\theta_2}{2}\,\text{εφ}\frac{\theta_3}{2} + \text{εφ}\frac{\theta_3}{2}\,\text{εφ}\frac{\theta_1}{2} =$$

$$= \sqrt{\frac{(s-\lambda)(s-\kappa)(s-\mu)^2}{s^2(s-\kappa)(s-\mu)}} + \sqrt{\frac{(s-\kappa)^2(s-\lambda)(s-\mu)}{s^2(s-\lambda)(s-\mu)}} + \sqrt{\frac{(s-\lambda)^2(s-\kappa)(s-\mu)}{s^2(s-\mu)(s-\kappa)}} = 1.$$

Ἀπὸ τὴν τελευταία σχέση, ὅπως γνωρίζουμε, συνάγεται $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 2\rho\pi + \pi,\ \rho \in \mathbf{Z}$. Ἐπειδὴ ὅμως εἶναι $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in (0, \pi)$, προκύπτει $0 < \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 < 3\pi$ καὶ ἑπομένως ἔχουμε:

$$0 < 2\rho\pi + \pi < 3\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < \rho < 1 \Leftrightarrow \rho = 0 \Leftrightarrow \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \pi$$

**2.5. Ἐπίλυση ὀρθογώνιου τριγώνου.** Στὴν περίπτωση ποὺ ἔχουμε νὰ ἐπιλύσουμε ὀρθογώνιο τρίγωνο, θὰ θεωροῦμε πάντοτε ὅτι Α εἶναι ἡ ὀρθὴ γωνία. Ἀναφέρουμε μερικὰ παραδείγματα:

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.** Νὰ ἐπιλυθεῖ ὀρθογώνιο τρίγωνο ἀπὸ τὰ στοιχεῖα: $\alpha = \kappa$, $\rho = \lambda$.

**Ἐπίλυση.** Οἱ ἀρχικοὶ περιορισμοὶ εἶναι: $\kappa > 0$, $\lambda > 0$. Ἀπὸ τοὺς τύπους **41** ἔχουμε:

$$\frac{\rho}{\alpha} = \frac{4R\,\text{ημ}\frac{A}{2}\,\text{ημ}\frac{B}{2}\,\text{ημ}\frac{\Gamma}{2}}{2R\,\text{ημ}A} \Leftrightarrow \frac{\lambda}{\kappa} = \frac{2\,\text{ημ}\frac{\pi}{4}\,\text{ημ}\frac{B}{2}\,\text{ημ}\frac{\Gamma}{2}}{\text{ημ}\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\lambda}{\kappa} = \sqrt{2}\,\text{ημ}\frac{B}{2}\,\text{ημ}\frac{\Gamma}{2} \Leftrightarrow 2\,\text{ημ}\frac{B}{2}\,\text{ημ}\frac{\Gamma}{2} = \frac{2\lambda}{\kappa\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\text{συν}\frac{B-\Gamma}{2} - \text{συν}\frac{B+\Gamma}{2} = \frac{\lambda\sqrt{2}}{\kappa} \Leftrightarrow \text{συν}\frac{B-\Gamma}{2} - \text{συν}\frac{\pi}{4} = \frac{\lambda\sqrt{2}}{\kappa} \Leftrightarrow$$

$$\text{συν}\frac{B-\Gamma}{2} = \frac{\lambda\sqrt{2}}{\kappa} + \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \text{συν}\frac{B-\Gamma}{2} = \frac{\sqrt{2}(2\lambda+\kappa)}{2\kappa}.$$

Ἄρα, ἔχουμε νὰ λύσουμε τὸ σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{l} B + \Gamma = \dfrac{\pi}{2} \\ \text{συν}\dfrac{B-\Gamma}{2} = \dfrac{\sqrt{2}(2\lambda+\kappa)}{2\kappa} \end{array}\right. \qquad (1)$$

Ἂν τὸ σύστημα αὐτὸ ἔχει λύση, αὐτὴ θὰ εἶναι θετική, ὅταν καὶ μόνο ὅταν:

$$0 \leq |B - \Gamma| < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \leqslant \left|\frac{B-\Gamma}{2}\right| < \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu 0 \geqslant \sigma\upsilon\nu \frac{B-\Gamma}{2} > \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 1 \geqslant \sigma\upsilon\nu \frac{B-\Gamma}{2} > \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2).$$

Ἐξάλλου, ἡ ἐξίσωση (1) ἔχει λύση, ὅταν καὶ μόνο ὅταν:

$$1 \geqslant \frac{\sqrt{2}(2\lambda + \kappa)}{2\kappa} > \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}(2\lambda+\kappa)}{2\kappa} \leq 1 \Leftrightarrow \lambda \leq \frac{\kappa(\sqrt{2}-1)}{2} \quad (3).$$

Ἂν ἱκανοποιεῖται ἡ συνθήκη (3), ἡ ἐξίσωση (1) ἔχει λύση καὶ ἐπομένως βρίσκουμε τὴ διαφορὰ $B - \Gamma$. Ἀπὸ τὴ διαφορὰ καὶ τὴ σχέση $B + \Gamma = \frac{\pi}{2}$, βρίσκουμε τὶς γωνίες $B$ καὶ $\Gamma$.

Τελικὰ οἱ συνθῆκες, γιὰ νὰ εἶναι δυνατὴ ἡ ἐπίλυση, εἶναι:

$$\kappa > 0, \quad 0 < \lambda \leq \frac{\kappa(\sqrt{2}-1)}{2}.$$

Ἂν $\lambda = \frac{\kappa(\sqrt{2}-1)}{2}$, τὸ τρίγωνο εἶναι ἰσοσκελές.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.** Νὰ ἐπιλυθεῖ ὀρθογώνιο τρίγωνο ἀπὸ τὰ στοιχεῖα:

$$\alpha = \kappa, \quad \delta_\beta \delta_\gamma = \lambda^2 \quad (\kappa, \lambda \in \mathbf{R})$$

**Ἐπίλυση:** Ἀρχικοὶ περιορισμοί: $\kappa > 0$, $\lambda > 0$. Ἔχουμε:

$$\delta_\beta\, \delta_\gamma = \frac{\gamma}{\sigma\upsilon\nu \frac{B}{2}} \cdot \frac{\beta}{\sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma}{2}} \Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{4R^2\, \eta\mu\Gamma\, \eta\mu B}{\sigma\upsilon\nu \frac{B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 = 16R^2 \eta\mu \frac{B}{2} \eta\mu \frac{\Gamma}{2}. \quad (1)$$

Ἐξάλλου, εἶναι: $\alpha = 2R \Leftrightarrow \kappa = 2R \Leftrightarrow \kappa^2 = 4R^2$. (2)

Ἀπὸ τὶς (1) καὶ (2) συνάγεται:

$$\lambda^2 = 4\kappa^2 \eta\mu \frac{B}{2} \eta\mu \frac{\Gamma}{2} \Leftrightarrow \lambda^2 = 2\kappa^2 \left[\sigma\upsilon\nu \frac{B-\Gamma}{2} - \sigma\upsilon\nu \frac{B+\Gamma}{2}\right] \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 = 2\kappa^2 \left[\sigma\upsilon\nu \frac{B-\Gamma}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu \frac{B-\Gamma}{2} = \frac{\lambda^2}{2\kappa^2} + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ἄρα, ἔχουμε νὰ λύσουμε τὸ σύστημα:

$$B + \Gamma = \frac{\pi}{2} \qquad (3)$$

$$\sigma\upsilon\nu\, \frac{B-\Gamma}{2} = \frac{\lambda^2}{2\kappa^2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad (4)$$

Ἂν τὸ παραπάνω σύστημα ἔχει λύση, αὐτὴ θὰ εἶναι θετική, ὅταν καὶ μόνον ὅταν:

$$0 \leq |B - \Gamma| < \pi - A \Leftrightarrow 0 \leq |B - \Gamma| < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \left|\frac{B-\Gamma}{2}\right| < \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu 0 \geqslant \sigma\upsilon\nu \left|\frac{B-\Gamma}{2}\right| > \sigma\upsilon\nu\, \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 1 \geqslant \sigma\upsilon\nu \frac{B-\Gamma}{2} > \frac{\sqrt{2}}{2}. \qquad (5)$$

Ἐξάλλου, ἡ ἐξίσωση (4) γιὰ νὰ ἔχει δεκτὴ λύση πρέπει καὶ ἀρκεῖ:

$$1 \geqslant \frac{\lambda^2}{2\kappa^2} + \frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{\lambda^2}{2\kappa^2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{\lambda^2}{\kappa^2} \leq 2 - \sqrt{2}. \qquad (6)$$

Ἐφόσον ἱκανοποιεῖται ἡ συνθήκη (6), τότε ἡ ἐξίσωση (4) ἔχει λύση καὶ ἑπομένως βρίσκουμε τὴ διαφορὰ B − Γ. Κατόπιν προχωροῦμε κατὰ τὰ γνωστά. Τελικὰ οἱ συνθῆκες, γιὰ νὰ εἶναι δυνατὴ ἡ ἐπίλυση, εἶναι:

$$\kappa > 0, \qquad \frac{\lambda^2}{\kappa^2} \leqslant 2 - \sqrt{2}.$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Α΄ ΟΜΑΔΑ

75) Νὰ ἐπιλυθεῖ τρίγωνο ἀπὸ τὰ στοιχεῖα:

1) $\alpha = 2\beta$, $\Gamma = \frac{\pi}{3}$, $E = 2\sqrt{3}$ 2) $\alpha$, R, $A = 2\Gamma$

3) $\alpha$, $\beta - \gamma = \lambda$, $B = 2\Gamma$ 4) $\alpha$,A, $\frac{\beta}{\gamma} = \lambda$

76) Νὰ ἐπιλύσετε τρίγωνο ἀπὸ τὰ ἑπόμενα στοιχεῖα:

1) $\alpha$,A,$\tau$ 2) $\alpha$,B, $\beta - \gamma = \lambda$ 3) $\alpha$,A,E

4) $\alpha$, $\upsilon_\alpha$, $B = 2\Gamma$ 5) $\alpha$,A,$\mu_\alpha$ 6) A,$\beta + \gamma = \lambda$, $\upsilon_\alpha = \alpha$

7) A, $\upsilon_\alpha$, $\beta + \gamma = 2\alpha$ 8) $\alpha$, $\tau$, $B = 2\Gamma$ 9) $\alpha$, A, $\beta^2 + \gamma^2 = \lambda^2$

77) Νὰ ἐπιλυθεῖ ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(A = \frac{\pi}{2}\right)$ ἀπὸ τὰ παρακάτω στοιχεῖα:

1) $\alpha, \rho$ 2) $\upsilon_\alpha, \mu_\beta$ 3) $B, \beta + \gamma = \kappa$ 4) $\upsilon_\alpha, \mu_\alpha$ 5) $\rho, B$
6) $\alpha, \delta_\beta$ 7) $\tau, R$ 8) $2\tau, \upsilon_\alpha$ 9) $B, \alpha + \upsilon_\alpha = \lambda$.

78) Νὰ ἐπιλυθεῖ τρίγωνο ἀπὸ τὰ ἀκόλουθα στοιχεῖα:

1) $\alpha,\ B - \Gamma = \omega,\ \frac{\varepsilon\varphi B}{\varepsilon\varphi \Gamma} = \lambda$ 2) $\alpha,\ E = \lambda^2,\ \varepsilon\varphi \frac{B}{2} + \varepsilon\varphi \frac{\Gamma}{2} = \nu$

3) $\alpha, A, \beta - \gamma + \upsilon_\alpha = \lambda$ 4) $\alpha, A, \upsilon_\beta + \upsilon_\gamma = \mu$

5) $\alpha, \mu_\alpha, B - \Gamma = \omega > 0$ 6) $\alpha, \frac{\upsilon_\alpha}{\rho_\beta} = \lambda,\ B = 2\Gamma$.

## Β' ΟΜΑΔΑ

79) Νὰ βρεθοῦν οἱ τρεῖς πλευρὲς ἑνὸς τριγώνου, ὅταν γνωρίζουμε ὅτι εἶναι τρεῖς διαδοχικοὶ φυσικοὶ ἀριθμοὶ καὶ ὅτι ἡ μεγαλύτερη γωνία του εἶναι διπλάσια ἀπὸ τὴ μικρότερη.

80) Σὲ ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ δίνονται τὰ τμήματα $B\Delta = \mu$ καὶ $\Gamma\Delta = \nu$, ὅπου $A\Delta = \delta_\alpha$ ἡ διχοτόμος τῆς ὀρθῆς γωνίας Α. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ στοιχεῖα $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta_\alpha$ καὶ $\upsilon_\alpha$.

81) Ἂν οἱ πλευρὲς ἑνὸς τριγώνου ἀποτελοῦν διαδοχικοὺς ὅρους ἀριθμητικῆς προόδου καὶ εἶναι γνωστὴ ἡ γωνία Α τοῦ τριγώνου, νὰ βρεθοῦν οἱ ἄλλες γωνίες του.

82) Ἂν σὲ τρίγωνο δίνονται τὰ στοιχεῖα R, ρ καὶ ἰσχύει $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 8R^2$, νὰ ὑπολογιστοῦν οἱ πλευρές του.

83) Ἂν σὲ τρίγωνο εἶναι $\sigma\varphi A = 2$ καὶ $\sigma\varphi B = 3$, νὰ ὑπολογισθεῖ ἡ γωνία Γ (χωρὶς πίνακες).

84) Νὰ ἐκφραστεῖ μὲ τὶς πλευρὲς τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ἡ ἐφαπτομένη τῆς γωνίας τῶν διαμέσων $\mu_\beta$ καὶ $\mu_\gamma$.

85) Οἱ πλευρὲς τριγώνου ἀποτελοῦν ἀριθ. πρόοδο καὶ ἡ διαφορὰ τῆς μικρότερης γωνίας του ἀπὸ τὴ μεγαλύτερή του εἶναι $\frac{\pi}{2}$. Νὰ δειχθεῖ ὅτι οἱ πλευρὲς τοῦ τριγώνου εἶναι ἀνάλογες μὲ τοὺς ἀριθμοὺς $\sqrt{7} - 1, \sqrt{7}, \sqrt{7} + 1$.

86) Ἂν σὲ τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι $\Gamma = \frac{\pi}{3}$, τότε νὰ δείξετε ὅτι:

$$\frac{1}{\alpha + \gamma} + \frac{1}{\beta + \gamma} = \frac{3}{2\tau}$$

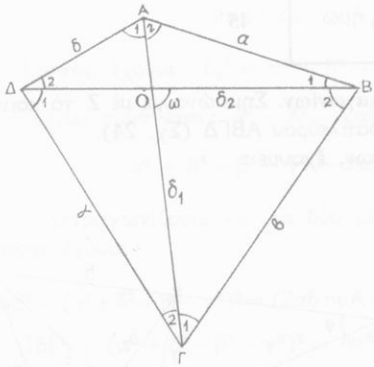
87) Ἂν σὲ τρίγωνο εἶναι $E = \frac{4}{3}$, $\beta^2 + \gamma^2 = \frac{20}{3}$ καὶ $\varepsilon\varphi B \varepsilon\varphi \Gamma = 4$, τότε νὰ ὑπολογιστοῦν τὰ $\alpha$, $\varepsilon\varphi A$.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ VIII

# ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟ

## 1. Κυρτὸ τετράπλευρο

**1.1.** Οἱ γωνίες Α,Β,Γ,Δ καὶ οἱ πλευρὲς α,β,γ,δ ἑνὸς κυρτοῦ τετραπλεύρου (Σχ. 23), χαρακτηρίζονται, ὅπως καὶ στὸ τρίγωνο, ὡς **κύρια** στοιχεῖα τοῦ τετραπλεύρου, ἐνῶ τὰ ἄλλα στοιχεῖα του **δευτερεύοντα**. Δευτερεύοντα στοιχεῖα τοῦ ΑΒΓΔ (Σχ. 23) εἶναι : οἱ διαγώνιες $\delta_1$ καὶ $\delta_2$, τὸ ἐμβαδὸ Ε, ἡ περίμετρος 2S, ἡ γωνία ω τῶν διαγωνίων, ὅπως καὶ κάθε ἄλλο στοιχεῖο (γραμμικὸ ἢ γωνιακὸ) ποὺ ἔχει σχέση μὲ τὸ τετράπλευρο.




*Σχ. 23*

**1.2. Σχέσεις μεταξὺ τῶν στοιχείων τετραπλεύρου.** Ἀναφέρουμε παρακάτω ὁρισμένες βασικὲς σχέσεις μεταξὺ τῶν στοιχείων ἑνὸς κυρτοῦ τετραπλεύρου.

**1.2.1. Γωνίες πλευρῶν καὶ διαγωνίων.** Ἀπὸ τὸ θεώρημα τῶν ἡμιτόνων καὶ τὴ φανερὴ σχέση :

$$\frac{(\text{ΑΔ})}{(\text{ΑΓ})}\cdot\frac{(\text{ΑΓ})}{(\text{ΑΒ})}\cdot\frac{(\text{ΑΒ})}{(\text{ΑΔ})}=1,$$

βρίσκουμε ἀμέσως τὸν τύπο : $\dfrac{\text{ημ}\Gamma_2}{\text{ημ}\Delta}\cdot\dfrac{\text{ημ}B}{\text{ημ}\Gamma_1}\cdot\dfrac{\text{ημ}\Delta_2}{\text{ημ}B_1}=1.$

Ὅμοια καταλήγουμε στοὺς τύπους :

$$\boxed{\begin{array}{l}\dfrac{\text{ημ}\Gamma_2}{\text{ημ}\Delta}\cdot\dfrac{\text{ημ}B}{\text{ημ}\Gamma_1}\cdot\dfrac{\text{ημ}\Delta_2}{\text{ημ}B_1}=1,\ \dfrac{\text{ημ}\Delta_2}{\text{ημ}A}\cdot\dfrac{\text{ημ}\Gamma}{\text{ημ}\Delta_1}\cdot\dfrac{\text{ημ}A_2}{\text{ημ}\Gamma_1}=1,\\[2ex] \dfrac{\text{ημ}A_2}{\text{ημ}B}\cdot\dfrac{\text{ημ}\Delta}{\text{ημ}A_1}\cdot\dfrac{\text{ημ}B_2}{\text{ημ}\Delta_1}=1,\ \dfrac{\text{ημ}B_2}{\text{ημ}\Gamma}\cdot\dfrac{\text{ημ}A}{\text{ημ}B_1}\cdot\dfrac{\text{ημ}\Gamma_2}{\text{ημ}A_1}=1.\end{array}} \quad 43$$

Ἀπὸ τὴ σχέση $\frac{(AB)}{(B\Gamma)} \cdot \frac{(B\Gamma)}{(\Gamma\Delta)} \cdot \frac{(\Gamma\Delta)}{(\Delta A)} \cdot \frac{(\Delta A)}{(AB)} = 1$, ἔχουμε τὸν τύπο:

$$\boxed{\etaμA_1\etaμB_1\etaμ\Gamma_1\etaμ\Delta_1 = \etaμA_2\etaμB_2\etaμ\Gamma_2\etaμ\Delta_2} \qquad 44$$

**1.2.2. Ἐμβαδό.** Ἔχουμε (Σχ. 23):

$$E = (AOB) + (BO\Gamma) + (\Gamma O\Delta) + (AO\Delta) \Rightarrow E = \frac{1}{2}(AO)(BO)\etaμω +$$

$$+ \frac{1}{2}(BO)(\Gamma O)\,\etaμω + \frac{1}{2}(\Gamma O)(\Delta O)\,\etaμω + \frac{1}{2}(\Delta O)(AO)\,\etaμω \Rightarrow$$

$$E = \frac{1}{2}[(AO)+(O\Gamma)][(BO)+(O\Delta)]\,\etaμω \Rightarrow E = \frac{1}{2}(A\Gamma)(B\Delta)\,\etaμω.$$

Ἑπομένως καταλήγουμε στὸν τύπο:

$$\boxed{E = \frac{1}{2}\delta_1\delta_2\,\etaμω} \qquad 45$$

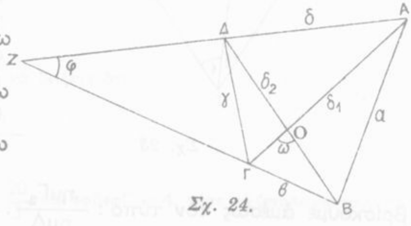
**1.2.3. Πλευρές, διαγώνιες καὶ γωνία διαγωνίων.** Σημειώνουμε μὲ Ζ τὸ κοινὸ σημεῖο τῶν πλευρῶν β καὶ δ κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ (Σχ. 24). Σύμφωνα μὲ τὸ θεώρημα τῶν συνημιτόνων, ἔχουμε:

$$\alpha^2 = (OA)^2 + (OB)^2 + 2(AO)(OB)συνω$$

$$\beta^2 = (OB)^2 + (O\Gamma)^2 - 2(OB)(O\Gamma)συνω$$

$$\gamma^2 = (O\Delta)^2 + (O\Gamma)^2 + 2(O\Delta)(O\Gamma)συνω$$

$$\delta^2 = (OA)^2 + (O\Delta)^2 - 2(OA)(O\Delta)συνω$$



Σχ. 24.

Ἀπ' αὐτὲς βρίσκουμε:

$$\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 - \delta^2 = 2[(OA)(OB) + (OB)(O\Gamma) + (O\Gamma)(O\Delta) + (O\Delta)(OA)]\,συνω \Rightarrow$$

$$\boxed{(\alpha^2 + \gamma^2) - (\beta^2 + \delta^2) = 2\delta_1\,\delta_2\,συνω} \qquad 46$$

Ὅμοια ἔχουμε: $\delta^2_1 = (AZ)^2 + (Z\Gamma)^2 - 2(AZ)(Z\Gamma)συνφ$,

$\delta^2_2 = (ZB)^2 + (Z\Delta)^2 - 2(ZB)(Z\Delta)συνφ$, $\alpha^2 = (ZB)^2 + (ZA)^2 - 2(ZB)(ZA)συνφ$

καὶ $\gamma^2 = (Z\Delta)^2 + (Z\Gamma)^2 - 2(Z\Delta)(Z\Gamma)\sigma\upsilon\nu\varphi$.

Ἀπ' αὐτὲς καὶ τὶς σχέσεις $(ZA) = (Z\Delta) + (\Delta A)$, $(ZB) = (Z\Gamma) + (\Gamma B)$, προκύπτει ὁ τύπος:

$$\boxed{(\delta_1^2 + \delta_2^2) - (\alpha^2 + \gamma^2) = 2\beta\delta\sigma\upsilon\nu\varphi} \qquad \textbf{47}$$

**1.2.4. Ἐμβαδὸ σὲ συνάρτηση μὲ περίμετρο καὶ καὶ γωνίες.** Ἀπὸ τοὺς τύπους 45 καὶ 46 συνάγεται ἀμέσως ὁ τύπος:

$$\boxed{E = \frac{1}{4}(\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 - \delta^2)\ \varepsilon\varphi\omega} \qquad \textbf{48}$$

Ἐξάλλου, εἶναι: $E = (\Delta AB) + (\Delta\Gamma B) = \frac{1}{2}\alpha\delta\ \eta\mu A + \frac{1}{2}\beta\gamma\ \eta\mu\Gamma \Rightarrow$

$$4E = 2\alpha\delta\ \eta\mu A + 2\beta\gamma\ \eta\mu\Gamma \qquad (1)$$

Ἐπίσης, ἔχουμε: $\delta_2^2 = \alpha^2 + \delta^2 - 2\alpha\delta\sigma\upsilon\nu A$ καὶ $\delta_2^2 = \beta + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma$.

Ἑπομένως συνάγεται: $\alpha^2 + \delta^2 - 2\alpha\delta\ \sigma\upsilon\nu A = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\ \sigma\upsilon\nu\Gamma \Rightarrow$

$$\alpha^2 + \delta^2 - \beta^2 - \gamma^2 = 2\alpha\delta\ \sigma\upsilon\nu A - 2\beta\gamma\ \sigma\upsilon\nu\Gamma \qquad (2).$$

Τετραγωνίζουμε καὶ τὰ δύο μέλη τῶν (1), (2) καὶ μετὰ προσθέτουμε, ὁπότε ἔχουμε:

$$16E^2 + (\alpha^2 + \delta^2 - \beta^2 - \gamma^2)^2 = (2\alpha\delta\ \eta\mu A + 2\beta\gamma\ \eta\mu\Gamma)^2 + (2\alpha\delta\ \sigma\upsilon\nu A - 2\beta\gamma\ \sigma\upsilon\nu\Gamma)^2 \Rightarrow$$

$$16E^2 + (\alpha^2 + \delta^2 - \beta^2 - \gamma^2)^2 = 4\alpha^2\delta^2 + 4\beta^2\gamma^2 - 8\alpha\beta\gamma\delta\ \sigma\upsilon\nu(A + \Gamma) \Rightarrow$$

$$16E^2 + (\alpha^2 + \delta^2 - \beta^2 - \gamma^2)^2 = (2\alpha\delta + 2\beta\gamma)^2 - 8\alpha\beta\gamma\delta[1 + \sigma\upsilon\nu(A + \Gamma)] \Rightarrow$$

$$16E^2 + (\alpha^2 + \delta^2 - \beta^2 - \gamma^2)^2 = (2\alpha\delta + 2\beta\gamma)^2 - 16\alpha\beta\gamma\delta\ \sigma\upsilon\nu^2\frac{A + \Gamma}{2} \Rightarrow$$

$$16E^2 = (2\alpha\delta + 2\beta\gamma)^2 - (\alpha^2 + \delta^2 - \beta^2 - \gamma^2)^2 - 16\alpha\beta\gamma\delta\ \sigma\upsilon\nu^2\frac{A + \Gamma}{2} \Rightarrow$$

$$16E^2 = [(\alpha + \delta)^2 - (\beta - \gamma)^2][(\beta + \gamma)^2 - (\alpha - \delta)^2] - 16\alpha\beta\gamma\delta\ \sigma\upsilon\nu^2\frac{A + \Gamma}{2} \Rightarrow$$

$$16E^2 = 16(s - \alpha)(s - \beta)(s - \gamma)(s - \delta) - 16\alpha\beta\gamma\delta\ \sigma\upsilon\nu^2\frac{A + \Gamma}{2} \Rightarrow$$

$$(2s = \alpha + \beta + \gamma + \delta).$$

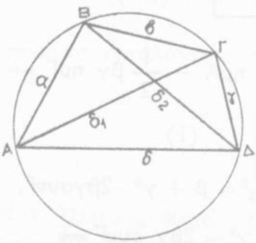
Ἔτσι βρίσκουμε τὸν τύπο :

$$E = \sqrt{(s-\alpha)\,(s-\beta)\,(s-\gamma)\,(s-\delta) - \alpha\beta\gamma\delta\ \text{συν}^2\frac{A+\Gamma}{2}} \qquad \textbf{49}$$

**1.3. Κυρτὸ τετράπλευρο ἐγγεγραμμένο σὲ κύκλο.** Θεωροῦμε ἐγγεγραμμένο σὲ κύκλο τετράπλευρο ΑΒΓΔ (Σχ. 25). Ἀπὸ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΓΔ, σύμφωνα μὲ τὸ θεώρημα τοῦ συνημιτόνου, ἔχουμε :

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\ \text{συν}B = \gamma^2 + \delta^2 - 2\gamma\delta\ \text{συν}\Delta \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ ὅμως εἶναι $B + \Delta = \pi$, προκύπτει $\text{συν}B = -\text{συν}\Delta$. Ἀπ' αὐτὴ καὶ τὴν (1) ἔχουμε :



*Σχ. 25.*

$$\text{συν}B = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - \delta^2}{2(\alpha\beta + \gamma\delta)} \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὴ σχέση (2) καὶ τοὺς τύπους

$$\text{ημ}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{1-\text{συν}B}{2}}, \quad \text{συν}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{1+\text{συν}B}{2}},$$

προκύπτει :

$$\text{ημ}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-\alpha)(s-\beta)}{\alpha\beta+\gamma\delta}}, \quad \text{συν}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-\gamma)\,(s-\delta)}{\alpha\beta+\gamma\delta}} \quad (2s = \alpha+\beta+\gamma+\delta)$$

Ἂν διαιρέσουμε τοὺς τελευταίους τύπους, συνάγεται : $\text{εφ}\dfrac{B}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-\alpha)(s-\beta)}{(s-\gamma)(s-\delta)}}$

Τελικά, ἔχουμε τοὺς ἑπόμενους βασικοὺς τύπους :

$$\text{ημ}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-\alpha)\,(s-\beta)}{\alpha\beta+\gamma\delta}}, \quad \text{συν}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-\gamma)\,(s-\delta)}{\alpha\beta+\gamma\delta}},$$
$$\text{εφ}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-\alpha)(s-\beta)}{(s-\gamma)(s-\delta)}} \qquad \textbf{50}$$

Εἶναι $A + \Gamma = \pi$, ὁπότε $\text{συν}\dfrac{A+\Gamma}{2} = 0$ καὶ ἑπομένως ἀπὸ τὸν τύπο 7 συνάγεται :

$$E = \sqrt{(s-\alpha)\,(s-\beta)\,(s-\gamma)\,(s-\delta)} \qquad \textbf{51}$$

Οἱ διαγώνιες $\delta_1$ καὶ $\delta_2$ τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ (Σχ. 25) ὑπολογίζονται σὲ συνάρτηση μὲ τὶς πλευρές του ὡς ἑξῆς :

Ἀπὸ τὸν τύπο $\delta_1^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu B$ καὶ τὴν τιμὴ τοῦ συνΒ (βλ. 1.3, σχέση (2)), προκύπτει :

$$\delta_1^2 = \frac{(\alpha\gamma + \beta\delta)(\alpha\delta + \beta\gamma)}{\alpha\beta + \gamma\delta}.$$

Ἄρα, ἔχουμε τοὺς παρακάτω τύπους :

$$\boxed{\delta_1 = \sqrt{\frac{(\alpha\gamma + \beta\delta)(\alpha\delta + \beta\gamma)}{\alpha\beta + \gamma\delta}},\ \delta_2 = \sqrt{\frac{(\alpha\gamma + \beta\delta)(\alpha\beta + \gamma\delta)}{\alpha\delta + \beta\gamma}}} \qquad \mathbf{52}$$

Ἀπὸ τὸ τρίγωνο ΑΒΓ (Σχ. 25) ἔχουμε :

$$\delta_1 = 2R\eta\mu B \ \text{ἢ}\ \delta_1 = 4R\eta\mu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2},$$

ὁπότε, σύμφωνα καὶ μὲ τούς τύπους **50, 51** καὶ **53**, προκύπτει :

$$\boxed{\begin{aligned} R &= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{(\alpha\beta + \gamma\delta)(\alpha\gamma + \beta\delta)(\alpha\delta + \beta\gamma)}{(s-\alpha)(s-\beta)(s-\gamma)(s-\delta)}} \\ &= \frac{1}{4E}\sqrt{(\alpha\beta + \gamma\delta)(\alpha\gamma + \beta\delta)(\alpha\delta + \beta\gamma)} \end{aligned}} \qquad \mathbf{53}$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

96) Σὲ κυρτὸ τετράπλευρο ΑΒΓΔ νὰ δείξετε ὅτι :

$$\alpha)\ \frac{\eta\mu A}{\eta\mu \Gamma} = \frac{\eta\mu B_1\, \eta\mu A_1}{\eta\mu B_2\, \eta\mu \Gamma_2} = \frac{\eta\mu \Delta_2\, \eta\mu A_2}{\eta\mu \Delta_1\, \eta\mu \Gamma_1} \qquad \beta)\ \frac{\eta\mu A\, \eta\mu B}{\eta\mu \Gamma\, \eta\mu \Delta} = \frac{\eta\mu A_2\, \eta\mu B_1}{\eta\mu \Gamma_2\, \eta\mu \Delta_1}$$

97) Σὲ κυρτὸ τετράπλευρο ΑΒΓΔ δίνονται οἱ πλευρὲς α,β,γ καὶ οἱ γωνίες Β καὶ Γ. Νὰ βρεθοῦν οἱ γωνίες Α,Δ καὶ ἡ πλευρὰ δ.

98) Ἂν οἱ πλευρὲς κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ εἶναι 3,4,5,6 καὶ δύο ἀπέναντι γωνίες του ἔχουν ἄθροισμα π, τότε νὰ βρεθεῖ τὸ ἐμβαδὸ τοῦ τετραπλεύρου.

99) Ἂν τὸ τετράπλευρο ΑΒΓΔ εἶναι περιγεγραμμένο σὲ κύκλο, τότε τὸ ἐμβαδό του δίνεται ἀπὸ τὸν τύπο : $E = \sqrt{\alpha\beta\gamma\delta}\ \eta\mu\frac{B+\Delta}{2}$.

100) Ἂν τὸ τετράπλευρο ΑΒΓΔ εἶναι περιγεγραμμένο σὲ κύκλο, τότε ἰσχύει:

$$\alpha \eta\mu \frac{A}{2} \eta\mu \frac{B}{2} = \gamma \eta\mu \frac{\Gamma}{2} \eta\mu \frac{\Delta}{2}.$$

101) Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ. Ἂν $\widehat{B A \Gamma} = \chi$ καὶ $\widehat{A B \Delta} = \psi$, τότε νὰ δείξετε ὅτι:

α) $\sigma\varphi\chi - \sigma\varphi\psi = \sigma\varphi A - \sigma\varphi B$ β) $\frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{\eta\mu\chi}{\eta\mu\psi}$.

102) Ἂν τὸ τετράπλευρο ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγράψιμο καὶ περιγράψιμο σὲ κύκλο, νὰ δειχθεῖ ὅτι:

α) $\varepsilon\varphi \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\beta\gamma}{\alpha\delta}}$ β) $E = \alpha\beta\varepsilon\varphi \frac{B}{2}$ γ) $\sigma\upsilon\nu A = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\alpha\delta + \beta\gamma}$

δ) $\varepsilon\varphi^2 \frac{\omega}{2} = \frac{\beta\delta}{\alpha\gamma}$ ε) $\eta\mu\omega = \frac{2\sqrt{\alpha\beta\gamma\delta}}{\alpha\gamma + \beta\delta}$ (ω εἶναι ἡ γωνία τῶν διαγωνίων)

103) Σὲ κάθε ἐγγράψιμο τετράπλευρο ἰσχύει:

$$\varepsilon\varphi \frac{\omega}{2} = \sqrt{\frac{(s-\beta)(s-\delta)}{(s-\alpha)(s-\gamma)}},$$

ὅπου ω εἶναι ἡ γωνία τῶν διαγωνίων του καὶ 2s ἡ περίμετρός του.

## 2. Ἐπίλυση τετραπλεύρου

**2.1.** Οἱ διαγώνιες ἑνὸς κυρτοῦ τετραπλεύρου χωρίζουν αὐτὸ σὲ τέσσερα τρίγωνα ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΑ καὶ ΔΑΒ, ποὺ ὀνομάζονται **μερικὰ τρίγωνα**. Τὰ τρίγωνα αὐτὰ διευκολύνουν ὄχι μόνο τὴ μελέτη τοῦ τετραπλεύρου ἀλλὰ καὶ τὴν ἐπίλυσή του. Συνήθως ἡ ἐπίλυση ἑνὸς κυρτοῦ τετραπλεύρου γίνεται μὲ τὴν ἐπίλυση τὴν μερικῶν του τριγώνων. Ὑπάρχουν ὅμως καὶ περιπτώσεις στὶς ὁποῖες κανένα μερικὸ τρίγωνο δὲν ἐπιλύεται.

Ἀναφέρουμε μερικὰ παραδείγματα:

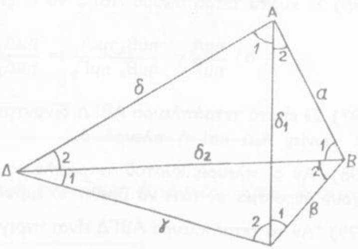
**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.** Νὰ ἐπιλυθεῖ κυρτὸ τετράπλευρο ἀπὸ τὰ στοιχεῖα $A_1$, $B_1$, β,γ καὶ $\delta_2$ (Σχ. 26).

**Ἐπίλυση.** Ἀπὸ τὴν ἐπίλυση τοῦ τριγώνου ΒΓΔ ὑπολογίζουμε τὶς γωνίες $B_2$, Γ καὶ Δ. Ἄρα, ἡ γωνία $B = B_1 + B_2$ ὑπολογίζεται. Ἐξάλλου ἔχουμε:

$$A_2 + B + \Gamma_1 = \pi \Rightarrow (A - A_1) + B + (\Gamma - \Gamma_2) = \pi \Rightarrow$$

$$A - \Gamma_2 = \pi - A_1 - (B + \Gamma) \quad (1)$$

Ὁ τελευταῖος ἀπὸ τοὺς τύπους **1** μᾶς δίνει:




*Σχ. 26*

$$\eta\mu A \eta\mu \Gamma_2 = \frac{\eta\mu B_1 \eta\mu \Gamma \eta\mu A_1}{\eta\mu B_2}. \quad (2)$$

Οἱ σχέσεις (1), (2) ἀποτελοῦν ἕνα ἁπλὸ τριγωνομετρικὸ σύστημα μὲ ἄγνωστες γωνίες τὶς Α καὶ $\Gamma_2$. Ἀπὸ τὴ λύση τοῦ συστήματος αὐτοῦ βρίσκουμε τὶς γωνίες Α καὶ $\Gamma_2$. Ἑπομένως, ἔχουμε προσδιορίσει καὶ τὶς γωνίες $\Delta = 2\pi - (A + B + \Gamma)$ καὶ $\Delta_2 = \Delta - \Delta_1$. Κατόπιν, ἀπὸ τὴν ἐπίλυση τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΑΒΔ ὑπολογίζουμε καὶ τὰ ὑπόλοιπα στοιχεῖα τοῦ τετραπλεύρου.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.** Νὰ ἐπιλυθεῖ κυρτὸ τετράπλευρο ἀπὸ τὰ στοιχεῖα α, $A_1$, $A_2$, $B_2$ καὶ $\Delta_1$.

**Ἐπίλυση.** Εἶναι φανερὸ (Σχ. 26) πὼς ἀπὸ τὶς σχέσεις $A = A_1 + A_2$ καὶ $\Gamma = \pi - (B_2 + \Delta_1)$ μποροῦμε νὰ προσδιορίσουμε τὶς γωνίες Α καὶ Γ. Ἄρα, ἔχουμε :

$$B + \Delta = 2\pi - (A + \Gamma). \quad (1)$$

Ἐξάλλου, ἀπὸ τοὺς τύπους **1** προκύπτει

$$\frac{\eta\mu B}{\eta\mu \Delta} = \frac{\eta\mu A_2 \eta\mu B_2}{\eta\mu A_1 \eta\mu \Delta_1} \quad (2)$$

Οἱ γωνίες Β καὶ Δ βρίσκονται εὔκολα ἀπὸ τὴ λύση τοῦ συστήματος τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2). Ἔπειτα, μὲ ἐπίλυση τῶν μερικῶν τριγώνων, βρίσκουμε τὰ ὑπόλοιπα ἄγνωστα κύρια στοιχεῖα τοῦ τετραπλεύρου. :

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.** Νὰ ἐπιλυθεῖ κυρτὸ τετράπλευρο ἀπὸ τὶς πλευρές του α, β, γ, δ καὶ τὸ ἐμβαδό του $E = \kappa^2$ (κ γνωστὸς ἀριθμός).

**Ἐπίλυση.** Ἀπὸ τὰ τρίγωνα ΔΑΒ καὶ ΔΓΒ (Σχ. 23), σύμφωνα καὶ μὲ τὸ θεώρημα τῶν συνημιτόνων, ἔχουμε :

$$\left.\begin{array}{l} \delta^2 = \alpha^2 + \delta^2 - 2\alpha\delta\sigma\upsilon\nu A \\ \delta^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha\delta\sigma\upsilon\nu A - \beta\gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma = \frac{\alpha^2+\delta^2-\beta^2-\gamma^2}{2} \quad (1)$$

Θέτουμε $\dfrac{\alpha^2 + \delta^2 - \beta^2 - \gamma^2}{2} = \lambda^2$, ὁπότε ἡ (1) γράφεται :

$$\alpha\delta\sigma\upsilon\nu A - \beta\gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma = \lambda^2.$$

Ἀκόμα, ἀπὸ τὴ σχέση $E = (\Delta AB) + (\Delta\Gamma B)$, ἔχουμε :

$$\kappa^2 = \frac{1}{2}\alpha\delta\eta\mu A + \frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu\Gamma \Rightarrow \alpha\delta\eta\mu A + \beta\gamma\eta\mu\Gamma = 2\kappa^2.$$

Ἄρα οἱ γωνίες Α καὶ Γ θὰ βρεθοῦν ἀπὸ τὴ λύση τοῦ συστήματος :

$$\left.\begin{array}{l} \alpha\delta\sigma\upsilon\nu A - \beta\gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma = \lambda^2 \\ \alpha\delta\eta\mu A + \beta\gamma\eta\mu\Gamma = 2\kappa^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} \beta\gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma = \alpha\delta\sigma\upsilon\nu A - \lambda^2 & (2) \\ \beta\gamma\eta\mu\Gamma = 2\kappa^2 - \alpha\delta\eta\mu A. & (3) \end{array}\right.$$

'Από τὶς (2) καὶ (3) προκύπτει :

$$(\beta\gamma)^2 (\sigma\upsilon\nu^2\Gamma + \eta\mu^2\Gamma) = (\alpha\delta\ \sigma\upsilon\nu A - \lambda^2)^2 + (2\kappa^2 - \alpha\delta\eta\mu A)^2 \Leftrightarrow$$
$$4\kappa^2\alpha\delta\ \eta\mu A + 2\lambda^2\alpha\delta\ \sigma\upsilon\nu A = \alpha^2\delta^2 + \lambda^4 + 4\kappa^4 - \beta^2\gamma^2.$$

Ἡ τελευταία ἐξίσωση εἶναι γραμμικὴ ὡς πρὸς τὴ γωνία Α καὶ ἑπομένως λύνεται εὔκολα. Μετὰ ἀπὸ τὸν προσδιορισμὸ τῆς γωνίας Α, εἶναι δυνατὴ ἡ ἐπίλυση τοῦ τριγώνου ΔΑΒ. 'Από τὴν ἐπίλυση αὐτοῦ βρίσκουμε τὰ στοιχεῖα $B_1, \Delta_2$ καὶ $\delta_2$. Τέλος, μποροῦμε νὰ ἐπιλύσουμε τὸ τρίγωνο ΔΓΒ καὶ νὰ βροῦμε τὶς γωνίες $\Delta_1$, $B_2$, Γ. Ἔτσι, ἔχουμε ὑπολογίσει τὶς γωνίες τοῦ τετραπλεύρου.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

104) Νὰ ἐπιλυθεῖ κυρτὸ τετράπλευρο ΑΒΓΔ ἀπὸ τὰ στοιχεῖα $\delta_1$, $A_1$, $B_1$, $\Gamma_1$ καὶ $\Gamma_2$.

105) Νὰ ἐπιλυθεῖ ἐγγράψιμο τετράπλευρο ἀπὸ τὶς πλευρές του.

106) Νὰ βρεθοῦν οἱ γωνίες κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, ὅταν δίνονται οἱ γωνίες $A_1$, $B_1$, $B_2$ καὶ $\Delta_1$.

107) Νὰ ἐπιλυθεῖ κυρτὸ τετράπλευρο ἀπὸ τὶς πλευρές του καὶ μιὰ γωνία του.

108) Νὰ ἐπιλυθεῖ τραπέζιο ἀπὸ τὶς διαγώνιές του καὶ τὶς γωνίες του.

109) Νὰ ἐπιλυθεῖ παραλληλόγραμμο ἀπὸ τὰ στοιχεῖα : Ε (ἐμβαδό), 2s (περίμετρος) καὶ μιὰ διαγώνιο δ.

110) Θεωροῦμε κυρτὸ τετράπλευρο ΑΒΓΔ ἐγγεγραμμένο σὲ κύκλο. Ἂν οἱ πλευρές του α, β, γ, δ εἶναι ἀνάλογες μὲ τοὺς ἀριθμοὺς 5, 6, 7, 8 καὶ τὸ ἐμβαδό του Ε = 100, τότε νὰ βρεθοῦν οἱ πλευρές του καὶ ἡ ἀκτίνα τοῦ περιγεγραμμένου του κύκλου.

111) Νὰ ὑπολογιστοῦν οἱ διαγώνιες τραπεζίου, ὅταν γνωρίζουμε τὶς πλευρές τού.

112) Νὰ ἐπιλυθεῖ παραλληλόγραμμο ἀπὸ τὰ στοιχεῖα :

$$2s,\ \frac{\delta_1}{\delta_2} = \lambda,\ \omega.$$

ὅπου $\delta_1$, $\delta_2$ εἶναι οἱ διαγώνιές του καὶ ω ἡ γωνία τῶν διαγωνίων του.

113) Νὰ ἐπιλυθεῖ τετράπλευρο ἐγγράψιμο καὶ περιγράψιμο σὲ κύκλο, ὅταν δίνονται ἡ πλευρά του α καὶ οἱ γωνίες του Α,Β.

114) Κυρτὸ τετράπλευρο εἶναι περιγεγραμμένο σὲ κύκλο ἀκτίνας R. Νὰ βρεθοῦν οἱ γωνίες του, ὅταν ξέρουμε τὶς πλευρές του α,β καὶ γ. Ἔπειτα, νὰ βρεθεῖ ἡ συνθήκη, ὥστε νὰ ἔχει λύση τὸ πρόβλημα.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ IX

# ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΕΙΡΕΣ

## 1. Ὁρισμοὶ καὶ βασικὲς ἔννοιες

**1.1.** Ὑπενθυμίζουμε τὸν ὁρισμὸ μιᾶς σειρᾶς. Ὑποθέτουμε ὅτι: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \ldots$ εἶναι μία ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν. Θεωροῦμε ἀκόμα τὴν ἀκολουθία $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\nu, \ldots$ μέ:

$$\sigma_1 = \alpha_1$$

$$\sigma_2 = \alpha_1 + \alpha_2$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\sigma_\nu = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu \qquad (\nu \in \mathbf{N})$$

Ἔτσι σχηματίζεται μιὰ νέα ἀκολουθία μὲ ὅρους ποὺ εἶναι ἀθροίσματα τῶν ὅρων τῆς $(\alpha_\nu)$, $\nu \in \mathbf{N}$. Ἡ ἀκολουθία $(\sigma_\nu)$ λέγεται καὶ **ἀκολουθία τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων τῆς $(\alpha_\nu)$.** Ὀνομάζεται **σειρὰ πραγματικῶν ἀριθμῶν** τὸ διατεταγμένο ζεῦγος $((\alpha_\nu), (\sigma_\nu))$ καὶ συμβολίζεται μὲ $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ ἢ μὲ $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu + \ldots$. Ὁ ὅροι τῆς ἀκολουθίας $(\alpha_\nu)$ λέγονται καὶ **ὅροι τῆς σειρᾶς** $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$.

Ἂν ἡ ἀκολουθία τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων $(\sigma_\nu)$ συγκλίνει σ' ἕνα πραγματικὸ ἀριθμὸ $\eta \in \mathbf{R}$, τότε θὰ λέμε ὅτι τὸ **ἄθροισμα τῆς σειρᾶς** $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ εἶναι η καὶ θὰ γράφουμε $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu = \eta$.

Εἰδικότερα, ἂν οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας $(\alpha_\nu)$ περιέχουν τριγωνομετρικοὺς ἀριθμούς, τότε ἡ σειρὰ θὰ λέγεται **τριγωνομετρικὴ σειρά.**

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἄθροισμα μιᾶς σειρᾶς, πρέπει πρῶτα νὰ ὑπολογίσουμε τὸ ἄθροισμα $\sigma_\nu$ τῶν $\nu$ πρώτων ὅρων της καὶ ἔπειτα νὰ βροῦμε τὸ ὅριό του. Τονίζουμε ὅτι στὶς περισσότερες περιπτώσεις τὸ ἄθροισμα αὐτὸ $\sigma_\nu$ δὲν ὑπολογίζεται καὶ ἑπομένως δὲν μποροῦμε εὔκολα νὰ βροῦμε τὸ ἄθροισμα τῆς σειρᾶς.

Ἀναφέρουμε ἀμέσως μιὰ πρόταση ποὺ θὰ μᾶς βοηθήσει στὴν εὕρεση τοῦ ἀθροίσματος $\sigma_\nu$ τῶν $\nu$ πρώτων ὅρων σειρᾶς.

**1.2. Πρόταση.** Ἂν ὁ γενικὸς ὅρος $\alpha_\nu$ μιᾶς σειρᾶς $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ μπορεῖ νὰ πάρει τὴ μορφή :

$$\alpha_\nu = f(\nu) - f(\nu+1), \qquad (1)$$

ὅπου f εἶναι μιὰ συνάρτηση ὁρισμένη γιὰ κάθε $\nu \in \mathbf{N}$, τότε τὸ ἄθροισμα $\sigma_\nu = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu$ δίνεται ἀπὸ τὸν τύπο :

$$\sigma_\nu = f(1) - f(\nu+1).$$

**Ἀπόδειξη.** Ἀπὸ τὴν σχέση (1) μὲ $\nu = 1, 2, \ldots \nu$, ἔχουμε :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= f(1) - f(2) \\ \alpha_2 &= f(2) - f(3) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_\nu &= f(\nu) - f(\nu+1) \end{aligned}$$

Ἂν προσθέσουμε τὶς παραπάνω ἰσότητες, βρίσκουμε :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu = f(1) - f(\nu+1) \quad \text{ἢ}$$

$$\sigma_\nu = f(1) - f(\nu+1).$$

Παρακάτω θὰ ἀναφέρουμε μερικὰ παραδείγματα τριγωνομετρικῶν σειρῶν, ποὺ τὸ ἄθροισμά τους ὑπολογίζεται.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.** Ἂν $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right)$, τότε νὰ βρεθεῖ τὸ ἄθροισμα τῆς σειρᾶς :

$$\eta\mu\alpha + 2\eta\mu^2\alpha + 4\eta\mu^3\alpha + \ldots + 2^{\nu-1}\eta\mu^\nu\alpha + \ldots$$

**Λύση.** Οἱ ὅροι τῆς σειρᾶς εἶναι ὅροι φθίνουσας γεωμετρικῆς προόδου καὶ ἑπομένως ἔχουμε :

$$\sigma_\nu = \frac{(2\eta\mu\alpha)^\nu - 1}{2\eta\mu\alpha - 1}\eta\mu\alpha \Leftrightarrow \sigma_\nu = \frac{\eta\mu\alpha}{2\eta\mu\alpha - 1}(2\eta\mu\alpha)^\nu + \frac{\eta\mu\alpha}{1 - 2\eta\mu\alpha}. \qquad (1)$$

Ἐξάλλου, εἶναι :

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{6} \Rightarrow 0 < \eta\mu\alpha < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < 2\eta\mu\alpha < 1 \Rightarrow$$

$$\lim_{\nu \to \infty}(2\eta\mu\alpha)^\nu = 0 \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὶς (1) καὶ (2) ἔχουμε :

$$\lim \sigma_\nu = \frac{\eta\mu\alpha}{2\eta\mu\alpha - 1} \lim_{\nu\to\infty} (2\eta\mu\alpha)^\nu + \frac{\eta\mu\alpha}{1-2\eta\mu\alpha} = \frac{\eta\mu\alpha}{1-2\eta\mu\alpha}.$$

Ἄρα, τὸ ἄθροισμα τῆς σειρᾶς εἶναι $\frac{\eta\mu\alpha}{1-2\eta\mu\alpha}$ καὶ ἑπομένως γράφουμε:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{\nu-1}\,\eta\mu^\nu\alpha = \frac{\eta\mu\alpha}{1-2\eta\mu\alpha}.$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.** Νὰ βρεθεῖ τὸ ἄθροισμα τῆς σειρᾶς $\sum_{\nu=1}^{\infty} \eta\mu \frac{\pi}{2^{\nu+2}} \sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{2^{\nu+2}}$

**Λύση.** Ἔχουμε:

$$\alpha_\nu = \eta\mu \frac{\pi}{2^{\nu+2}} \sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{2^{\nu+2}} \Rightarrow 2\alpha_\nu = \eta\mu \frac{\pi}{2^\nu} - \eta\mu \frac{\pi}{2^{\nu+1}} \Rightarrow$$

$$\alpha_\nu = \frac{1}{2}\eta\mu \frac{\pi}{2^\nu} - \frac{1}{2}\eta\mu \frac{\pi}{2^{\nu+1}}.$$

Παρατηροῦμε ὅτι: $\alpha_\nu = f(\nu) - f(\nu+1)$, ὅπου $f(\nu) = \frac{1}{2}\eta\mu\frac{\pi}{2^\nu}$.

Ἑπομένως θὰ ἔχουμε:

$$\sigma_\nu = f(1) - f(\nu+1) = \frac{1}{2}\eta\mu\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\eta\mu\frac{\pi}{2^{\nu+1}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\eta\mu\frac{\pi}{2^{\nu+1}}$$

Εἶναι: $\lim_{\nu\to+\infty} \sigma_\nu = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lim_{\nu\to+\infty}\eta\mu\frac{\pi}{2^{\nu+1}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}0 = \frac{1}{2}.$

Ἄρα, τὸ ἄθροισμα τῆς σειρᾶς εἶναι $\frac{1}{2}$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.** Νὰ βρεθεῖ τὸ ἄθροισμα τῆς σειρᾶς: $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^\nu}\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2^\nu}$.

**Λύση.** Ἀπὸ τὴν ταυτότητα $\varepsilon\varphi\chi = \sigma\varphi\chi - 2\sigma\varphi 2\chi$ μὲ $\chi = \frac{\alpha}{2^\nu}$ ἔχουμε:

$$\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2^\nu} = \sigma\varphi\frac{\alpha}{2^\nu} - 2\sigma\varphi\frac{\alpha}{2^{\nu-1}} \Rightarrow \frac{1}{2^\nu}\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2^\nu} = \frac{1}{2^\nu}\sigma\varphi\frac{\alpha}{2^\nu} - \frac{1}{2^{\nu-1}}\sigma\varphi\frac{\alpha}{2^{\nu-1}} \Rightarrow$$

$$\alpha_\nu = \frac{1}{2^\nu}\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2^\nu} = f(\nu+1) - f(\nu),$$

ὅπου $f(\nu) = \frac{1}{2^{\nu-1}} \sigma\varphi \frac{\alpha}{2^{\nu-1}}$.

Ἑπομένως θὰ εἶναι:

$$\sigma_\nu = f(\nu+1) - f(1) = \frac{1}{2^\nu} \sigma\varphi \frac{\alpha}{2^\nu} - \frac{1}{2^0}\sigma\varphi \frac{\alpha}{2^0} = \frac{1}{2^\nu}\sigma\varphi\frac{\alpha}{2^\nu} - \sigma\varphi\alpha =$$

$$= \sigma\upsilon\nu \frac{\alpha}{2^\nu} \cdot \frac{\frac{1}{2^\nu}}{\eta\mu\frac{\alpha}{2^\nu}} - \sigma\varphi\alpha = \frac{1}{\alpha}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2^\nu} \cdot \frac{\frac{\alpha}{2^\nu}}{\eta\mu\frac{\alpha}{2^\nu}} - \sigma\varphi\alpha \cdot$$

$$\text{Εἶναι}: \lim_{\nu\to+\infty} \sigma_\nu = \frac{1}{\alpha}\lim_{\nu\to+\infty}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2^\nu} . \lim_{\nu\to+\infty}\frac{\frac{\alpha}{2^\nu}}{\eta\mu\alpha\frac{\alpha}{2^\nu}} - \sigma\varphi\alpha =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\sigma\upsilon\nu 0 . 1 - \sigma\varphi\alpha = \frac{1}{\alpha} - \sigma\varphi\alpha$$

(εἶναι γνωστὸν ὅτι: $\lim_{\chi\to0}\frac{\chi}{\eta\mu\chi} = \lim_{\chi\to0}\frac{\eta\mu\chi}{\chi} = 1$ καὶ $\lim_{\nu\to+\infty}\frac{\alpha}{2^\nu} = 0$).

Ἄρα, τὸ ἄθροισμα τῆς σειρᾶς εἶναι $\frac{1}{\alpha} - \sigma\varphi\alpha$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.** Ἂν $\alpha > 0$, νὰ βρεθεῖ τὸ ἄθροισμα τῆς σειρᾶς:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \text{Τοξεφ} \frac{\alpha}{1+\nu(\nu+1)\alpha^2}.$$

**Λύση.** Γνωρίζουμε ὅτι (βλ. Κεφ. V, Παραδ. 2):

$$\text{Ἂν } \chi,\psi > 0 \Rightarrow \text{Τοξεφ}\chi - \text{Τοξεφ}\psi = \text{Τοξεφ}\frac{\chi-\psi}{1+\chi\psi} \quad (1).$$

Εἶναι: $\nu\alpha > 0$ καὶ $(\nu+1)\alpha > 0$, γιὰ κάθε $\nu \in \mathbf{N}$, γιατὶ $\alpha > 0$. Ἑπομένως ἀπὸ τὴν (1) μὲ $\chi = (\nu+1)\alpha$ καὶ $\psi = \nu\alpha$, ἔχουμε:

$$\text{Τοξεφ}(\nu+1)\alpha - \text{Τοξεφ}\nu\alpha = \text{Τοξεφ}\frac{(\nu+1)\alpha - \nu\alpha}{1+\nu(\nu+1)\alpha^2} \Leftrightarrow$$

$$\text{Τοξεφ}(\nu+1)\alpha - \text{Τοξεφ}\nu\alpha = \text{Τρξεφ}\frac{\alpha}{1+\nu(\nu+1)\alpha^2} \quad (2)$$

Ὁ νιοστὸς ὅρος τῆς σειρᾶς εἶναι:

$$\alpha_\nu = \text{Τοξεφ}\,\frac{\alpha}{1+\nu(\nu+1)\alpha^2} = \text{Τοξεφ}\,(\nu+1)\alpha - \text{Τοξεφ}\,\nu\alpha = f(\nu+1) - f(\nu),$$

ὅπου $f(\nu) = \text{Τοξεφ}\,\nu\alpha$.

Ἑπομένως, ἔχουμε : $\sigma_\nu = (f\nu + 1) - \varphi(1) = \text{Τοξεφ}(\nu+1)\alpha - \text{Τοξεφ}\alpha$.

Ἄρα σύμφωνα καὶ μὲ τὴν (1) προκύπτει :

$$\sigma_\nu = \text{Τοξεφ}\,\frac{(\nu+1)\alpha - \alpha}{1+(\nu+1)\alpha^2} = \text{Τοξεφ}\,\frac{\nu\alpha}{\nu\alpha^2+1+\alpha^2} = \text{Τοξεφ}\,\frac{\alpha}{\alpha^2 + \frac{1+\alpha^2}{\nu}}.$$

Εἶναι : $\lim\limits_{\nu\to+\infty} \sigma_\nu = \lim\limits_{\nu\to+\infty} \text{Τοξεφ}\,\dfrac{\alpha}{\alpha^2 + \frac{1+\alpha^2}{\nu}} = \text{Τοξεφ}\left(\lim\limits_{\nu\to+\infty} \dfrac{\alpha}{\alpha^2+\frac{1+\alpha^2}{\nu}}\right) =$

$$= \text{Τοξεφ}\,\frac{\alpha}{\alpha^2+0} = \text{Τοξεφ}\,\frac{1}{\alpha}.$$

Ἄρα, τὸ ἄθροισμα τῆς σειρᾶς εἶναι Τοξεφ $\frac{1}{\alpha}$, δηλαδή :

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \text{Τοξεφ}\,\frac{\alpha}{1+\nu(\nu+1)\alpha^2} = \text{Τοξεφ}\,\frac{1}{\alpha}.$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

115) Νὰ βρεθεῖ τὸ ἄθροισμα τῆς σειρᾶς : $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \dfrac{1}{4^\nu \text{συν}\,\frac{\alpha}{2^\nu}}$

116) Νὰ βρεθεῖ τὸ ἄθροισμα τῆς σειρᾶς : $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \text{Τοξσφ}(1+\nu+\nu^2)$

(Ὑπόδειξη : Ἂν $\chi,\psi > 0 \Longrightarrow \text{Τοξσφ}\psi - \text{Τοσφ}\chi = \text{Τοξσφ}\,\dfrac{\chi\psi+1}{\chi-\psi}$)

117) Νὰ δείξετε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῆς σειρᾶς : $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \text{ημ}\,\dfrac{\alpha}{3^\nu}\,\text{τεμ}\,\dfrac{\alpha}{3^{\nu=1}}$ εἶναι 0.

118) Νὰ βρεθοῦν τὰ ἀθροίσματα τῶν παρακάτω σειρῶν :

α) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2^\nu}\,\text{εφ}\,\dfrac{\alpha}{2^\nu}\right)^2$ β) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \text{εφ}\,\dfrac{\alpha}{2^\nu}\,\text{τεμ}\,\dfrac{\alpha}{2^{\nu-1}}$ γ) $\sum\limits_{\nu-1}^{\infty} 2^{\nu-1}\,\text{εφ}^2\,\dfrac{\alpha}{2^\nu}\,\text{εφ}\,\dfrac{\alpha}{2^{\nu-1}}$

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

### ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ



ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ

### ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ



ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙΙ

### ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΗ ΑΠΑΛΟΙΦΗ



ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV

### ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ V

## ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΕΣ ΚΥΚΛΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ



ΚΕΦΑΛΑΙΟ VI

## ΚΛΑΣΙΚΕΣ ΕΠΙΛΥΣΕΙΣ — ΤΟΠΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ



ΚΕΦΑΛΑΙΟ VII

## ΔΕΥΤΕΡΕΥΟΝΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΡΙΓΩΝΟΥ — ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VIII

## ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟ



ΚΕΦΑΛΑΙΟ IX

## ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΕΙΡΕΣ

ΕΚΔΟΣΗ Η', 1977 (IX) — ΑΝΤΙΤ. 35.000 — ΣΥΜΒΑΣΗ: 2882/13-7-77

ΣΤΟΙΧΕΙΟΘΕΣΙΑ - ΕΚΤΥΠΩΣΗ - ΒΙΒΛΙΟΔΕΣΙΑ:
«ΑΤΛΑΝΤΙΣ - Μ. ΠΕΧΛΙΒΑΝΙΔΗΣ & ΣΙΑ» Α.Ε.

ΟΕ
ΔΒ