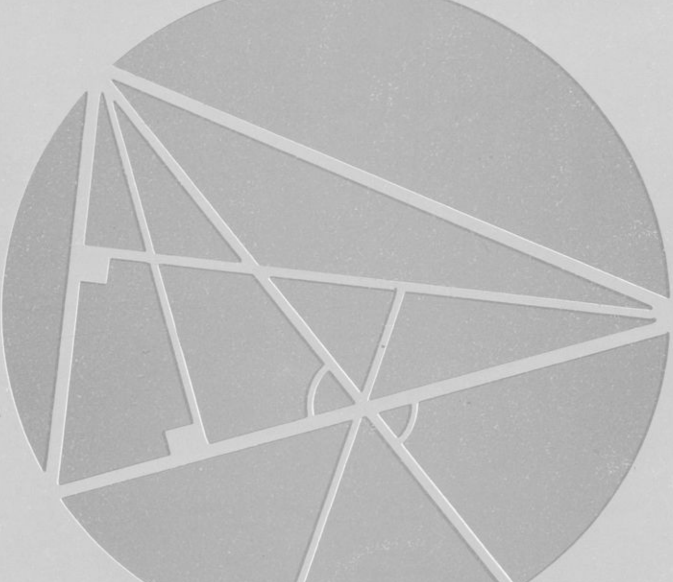
Δ. ΠΑΠΑΜΙΧΑΗΛ - Α. ΣΚΙΑΔΑ

βοήθημα
θεωρητικής γεωμετρίας



Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΕΥΧΟΣ III

gutenberg

ΒΟΗΘΗΜΑ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΣΤΑΥΡΟΠΟΥΛΟΣ
ΣΩΤΗΡΗΣ.

Δ. ΠΑΠΑΜΙΧΑΗΛ - Α. ΣΚΙΑΔΑΣ

ΒΟΗΘΗΜΑ
ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Α
λυκείου

ΤΕΥΧΟΣ III

Gutenberg

ΣΟΛΩΝΟΣ 103 - ΤΗΛ. 3626.684, 3624.606, 3600.127 - ΑΘΗΝΑ

Τά γνήσια ἀντίτυπα ἔχουν τήν ἰδιόχειρη ὑπογραφή ἑνός ἀπό τούς συγγραφεῖς, τή σφραγίδα τῆς ἑταιρίας Gutenberg, καί εἶναι ἀριθμημένα.

2299

Γραφικές Τέχνες «GUTENBERG»
Διδότου 55 - 57, τηλ. 3629.402, Ἀθήνα
Ὑπεύθυνος τυπογραφείου : Γιῶργος Καραγιάννης
Τεχνική ἐπιμέλεια - Μορφολογία : Γιῶργος Δαρδανός
Ἐπιμέλεια βιβλιοδεσίας : Χ. Καρακατσάνης

Films : Θ. & Κ. Πίνας

Γιά τό μαθητή

● Τό βιβλίο μας αὐτό ἔχει γιά σκοπό, νά βοηθήσει τό μαθητή τῆς Α΄ Λυκείου ν᾽ ἀποκτήσει τήν ἱκανότητα ἐκείνη, πού θά τοῦ ἐπιτρέψει ν᾽ ἀντιμετωπίζει μέ ἐπιτυχία τά διάφορα προβλήματα τῆς Θεωρητικῆς Γεωμετρίας.

● Δέν εἶναι ἕνα βιβλίο «ΛΥΣΕΩΝ» γιά τίς ἀσκήσεις τοῦ Σχολικοῦ ἐγχειριδίου, τῶν ὁποίων ἄλλωστε διεξοδικές ὑποδείξεις ὑπάρχουν ἐκεῖ, ἀλλά ἕνα συμπλήρωμα γιά τήν ἐμπέδωση τῶν σχολικῶν γνώσεων.

● Περιλαμβάνει τρία μέρη: Ι. ΘΕΜΑΤΑ ΘΕΩΡΙΑΣ, ΙΙ. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ, ΙΙΙ. ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ.

Τά δύο πρῶτα μέρη ἀποσκοποῦν στήν ἐμπέδωση τῆς θεωρίας. Ἰδιαίτερα τό πρῶτο μέρος πρέπει ὁ μαθητής νά τό μελετᾶ μέ προσοχή γιατί μ᾽ αὐτό ἀποσαφηνίζει τίς διάφορες γεωμετρικές ἔννοιες καί βλέπει τόν τρόπο μέ τόν ὁποῖο πρέπει νά διαπραγματεύεται ἕνα θέμα θεωρίας.

Τέλος οἱ ἀσκήσεις ἔχουν λυθεῖ κατά τρόπο, πού δείχνει τή λογική ἀναγκαιότητα τῶν διαφόρων σχέσεων καί τή μεθοδολογία τῆς ἀποδείξεως.

● Ἀκόμα γιά τό μαθητή πού θέλει ν᾽ ἀσχοληθεῖ μέ περαιτέρω ἀσκήσεις, θά ὑπάρχουν γιά λύση στό τέλος τοῦ βιβλίου.

Οἱ συγγραφεῖς

ΟΔΗΓΙΕΣ
ΓΙΑ ΤΗ ΛΥΣΗ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ
ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Ι. Γενικά: Ἡ λύση μιᾶς γεωμετρικῆς ἀσκήσεως συνίσταται στήν εὕρεση τῶν καταλλήλων προτάσεων, πού συνδεόμενες λογικά μεταξύ τους, μᾶς ὁδηγοῦν ἀπό τίς ὑποθέσεις στό συμπέρασμα.

Γιά ν' ἀποκτήσει ὁ μαθητής εὐχέρεια στή λύση τῶν ἀσκήσεων, ἀπαιτοῦνται δύο βασικές προϋποθέσεις:

α) Εὐσυνείδητη καί συστηματική μελέτη.

β) Ἐπιμονή καί συγκέντρωση στό γεωμετρικό πρόβλημα, πού μᾶς τέθηκε γιά λύση.

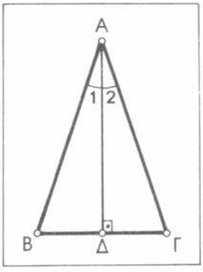
ΙΙ. Ἡ θεωρία: Τίς διάφορες γεωμετρικές προτάσεις (ἀξιώματα-θεωρήματα - πορίσματα) πρέπει νά τίς γνωρίζουμε καλά.
Γνωρίζω μιά πρόταση σημαίνει:

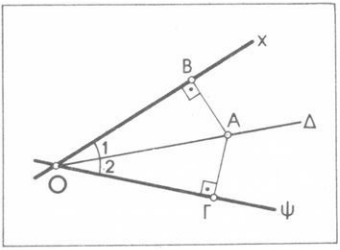
★ Γνωρίζω καλά τή σημασία κάθε ὅρου πού περιέχει ἡ πρόταση,

★ Μπορῶ νά μετατρέπω τούς ὅρους σέ μαθηματικές ἐκφράσεις.

Ἔτσι π.χ.

— Στή πρόταση: «Τό ὕψος πρός τή βάση σ' ἕνα ἰσοσκελές τριγ ΑΒΓ





εἶναι διχοτόμος καί διάμεσος», οἱ ὅροι σημαίνουν:

— Τό ὕψος: $ΑΔ \perp ΒΓ$ καί $\widehat{ΑΔΒ} = \widehat{ΑΔΓ} = 90°$.

— Ἰσοσκελές: $ΑΒ = ΑΓ$ καί $\widehat{Β} = \widehat{Γ}$.

— Ἡ διχοτόμος: $\widehat{Α}_1 = \widehat{Α}_2$.

— Ἡ διάμεσος: $ΒΔ = ΔΓ$.

— Στή πρόταση: «Τά σημεῖα τῆς διχοτόμου μιᾶς γωνίας ἰσαπέχουν τῶν πλευρῶν της», οἱ ὅροι σημαίνουν:

— Ἡ διχοτόμος: $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$

— Τά σημεῖα τῆς διχοτόμου: ὅτι ἄν πάρουμε ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Α στή διχοτόμο ἤ ἄν μᾶς δίνουν ἕνα σημεῖο στή διχοτόμο.

— Ἰσαπέχει τῶν πλευρῶν, σημαίνει: νά φέρουμε τίς ἀποστάσεις (δηλαδή τά κάθετα τμήματα) ΑΒ καί ΑΓ στίς πλευρές (δηλαδή $\widehat{B} = \widehat{\Gamma} = 90^\circ$) καί νά εἶναι ΑΒ = ΑΓ.

ΙΙΙ. Τό σχῆμα: Τό σχῆμα μιᾶς γεωμετρικῆς ἀσκήσεως, πρέπει νά εἶναι σχεδιασμένο μέ ἀκρίβεια καί μέ τή βοήθεια τῶν γεωμετρικῶν ὀργάνων. Στό καλό σχῆμα οἱ εἰκόνες τῶν ἐπιμέρους γεωμετρικῶν σχημάτων πρέπει καί νά «φαίνονται» σωστές.

Ἔτσι π.χ.

— Ἑνός ἰσοσκελοῦς τριγώνου νά διακρίνονται οἱ ἴσες πλευρές.

— Δυό εὐθεῖες παράλληλες νά «φαίνονται».

Τό κατάλληλο καί μέ ἀκρίβεια χαραγμένο σχῆμα:

* Μᾶς ὑπενθυμίζει τίς ἰδιότητες τῶν γεωμετρικῶν σχημάτων.
* Μᾶς προτρέπει νά ἀνακαλύψουμε τίς ἀναγκαῖες γιά τή λύση σχέσεις.

Στήν ἀρχή τῆς προσπάθειάς μας γιά τή λύση μιᾶς ἀσκήσεως μελετᾶμε τό σχῆμα, ὅπως προέκυψε ἀπό τήν ἐκφώνηση. Ἄν οἱ προσπάθειες δέ δίνουν ἀποτέλεσμα, τότε χαράσσουμε καινούργιες (βοηθητικές) γραμμές. Οἱ γραμμές αὐτές πρέπει νά εἶναι διαδοχικά οἱ πιό ἄμεσα συνδεόμενες μέ τά σχήματα.

Ἔτσι π.χ.

— Σ' ἕνα παραλληλόγραμμο θά φέρουμε τίς διαγώνιες.

— Ὅταν ἔχουμε δύο κύκλους θά φέρουμε τή διάκεντρό τους, τίς κοινές ἐφαπτόμενές τους κ.λ.π.

— Σ' ἕνα ἰσοσκελές τρίγωνο θά φέρουμε τό ὕψος πρός τή βάση.

Κάθε φορά πού θά χαράσσουμε μιά καινούργια (βοηθητική) γραμμή, θά πρέπει:

* Νά ἐρευνᾶμε τίς ὠφέλειες πού προέκυψαν.
* Νά βρίσκουμε τίς καινούργιες ἰδιότητες πού ἀπέκτησε τό σχῆμα μας.

IV. Ἡ ὑπόθεση: Τά δεδομένα μιᾶς ἀσκήσεως ἀποτελοῦν τήν ὑπόθεση.

Μιά ὑπόθεση περιλαμβάνει ὅ ρ ο υ ς κ α ί σ χ έ σ ε ι ς. Ἀφοῦ μελετήσουμε καλά τήν ἐκφώνηση, πρέπει:

- Οἱ ὅροι νά «μεταφράζονται» σέ σχέσεις καί ἰδιότητες τοῦ σχήματος.
- Οἱ σχέσεις νά μετατρέπονται, ἄν ὑπάρχουν, σέ ἰσοδύναμες προτάσεις.

Ἔτσι π.χ.

— Ἔχουμε γιά ὑπόθεση: «Δίνεται τό παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ».

Ὁ ὅρος «παραλληλόγραμμο» μεταφράζεται στίς σχέσεις:

i) $AB \parallel \Gamma\Delta$, $\quad B\Gamma \parallel \Delta A$

ii) $AB = \Gamma\Delta$, $\quad B\Gamma = \Delta A$

iii) $\widehat{A} = \widehat{\Gamma}$ καί $\widehat{B} = \widehat{\Delta}$

iv) Ἄν οἱ διαγώνιοι τέμνονται στό Ο: $AO = O\Gamma$, $BO = O\Delta$.

v) Τό Ο εἶναι κέντρο συμμετρίας.

— Ἄν ἔχουμε γιά ὑπόθεση: «Σ' ἕνα κύκλο δίνονται δύο ἴσες χορδές» αὐτή εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν: «Δίνονται δύο χορδές μέ ἴσα ἀποστήματα».

— Στήν ὑπόθεση: «Δίνεται ἕνα ὀρθογώνιο τριγ. ΑΒΓ ($\widehat{A} = 90°$) πού ἔχει $\widehat{B} = 30°$». Ἡ σχέση $\widehat{B} = 30°$ μετατρέπεται στήν ἰσοδύναμη: $A\Gamma = \dfrac{B\Gamma}{2}$.

V. Τό συμπέρασμα: Τό συμπέρασμα μιᾶς ἀσκήσεως εἶναι μιά πρόταση πού ἡ ἀπόδειξή της μπορεῖ νά γίνει:

- Ἀποδεικνύοντας ἄμεσα τήν ἴδια τήν πρόταση.
- Ἀποδεικνύοντας μιά ἰσοδύναμη πρόταση.
- Ἀποδεικνύοντας μιά εἰδικώτερη σχέση.

Ἔτσι πρέπει γιά τό συμπέρασμα νά θέτουμε τό ἐρώτημα:

«Τί ἀρκεῖ νά ἀποδείξουμε;»

Τό ἐρώτημα αὐτό μπορεῖ νά ἔχει πολλές ἀπαντήσεις, θά τίς θέσουμε ὅλες καί θά ἐρευνήσουμε ποιά συνδέεται περισσότερο μέ τίς ὑποθέσεις.

Ἔτσι π.χ.

— Μᾶς ζητοῦν ν' ἀποδείξουμε ὅτι: ἕνα τρίγωνο εἶναι ἰσοσκελές.

'Αρκεῖ ν' ἀποδείξουμε ὅτι:

i) Οἱ πλευρές ΑΒ καί ΑΓ εἶναι ἴσες (ἄμεση ἀπό τόν ὁρισμό τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου).

ἤ ii) Οἱ γωνίες $\widehat{B}$ καί $\widehat{\Gamma}$ εἶναι ἴσες (ἰσοδύναμη πρόταση)

ἤ iii) Τό ὕψος ΑΔ εἶναι διάμεσος ἤ διχοτόμος κ.λ.π. (εἰδικώτερη σχέση).

— Ἔστω ὅτι ζητᾶμε ν' ἀποδείξουμε: «Δύο χορδές ἑνός κύκλου εἶναι ἴσες». Στό ἐρώτημα «τί ἀρκεῖ νά ἀποδείξουμε;», ἀπαντᾶμε:

i) Εὐθέως: ὅτι οἱ χορδές εἶναι ἴσες (π.χ. μέ δύο ἴσα τρίγωνα πού οἱ χορδές εἶναι πλευρές).

ἤ ii) Μέ ἰσοδύναμη πρόταση: ὅτι τά ἀποστήματά τους εἶναι ἴσα.

ἤ iii) Μέ εἰδικώτερη σχέση: ὅτι οἱ ἐγγεγραμμένες στίς χορδές γωνίες εἶναι ἴσες.

Κεφάλαιο 9

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ ΚΑΙ ΓΕΩΜ. ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ

Ι. ΘΕΜΑΤΑ ΘΕΩΡΙΑΣ

1. **α) Τί ἐννοοῦμε ὅταν λέμε «ὁ γεωμετρικός τόπος τῶν σημείων πού ἔχουν μιά ἰδιότητα I» (ἤ σύντομα «ὁ γ.τ/I»); Τί πρέπει νά δείξουμε γιά νά ἐξασφαλισθοῦμε ὅτι ἕνα σημειοσύνολο G εἶναι ὁ γ.τ/I;**

β) Ἄν ὅλα τά σημεῖα ἑνός σημειοσυνόλου G ἔχουν μιά ἰδιότητα I, τό G εἶναι ἀπαραιτήτως ὁ γ.τ/I;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Ὅταν λέμε «ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων πού ἔχουν μιά ἰδιότητα I» ἐννοοῦμε τό σημειοσύνολο πού ὅλα τά στοιχεῖα του (καί μόνον αὐτά) ἔχουν τήν ἰδιότητα I.
Γιά νά ἐξασφαλισθοῦμε λοιπόν ὅτι ἕνα σημειοσύνολο G εἶναι ὁ γ. τ/I, θά πρέπει νά δείξουμε ὅτι:

- Κάθε σημεῖο πού ἔχει τήν ἰδιότητα I ἀνήκει στό G.
- Κάθε σημεῖο τοῦ G ἔχει τήν ἰδιότητα I.

β) Ἄν ὅλα τά σημεῖα ἑνός σημειοσυνόλου G ἔχουν μιά ἰδιότητα I, τό G δέν εἶναι ἀπαραιτήτως ὁ γ.τ./I γιατί μπορεῖ νά ὑπάρχουν καί ἄλλα σημεῖα πού δέν ἀνήκουν στό G καί ἔχουν τήν ἰδιότητα I.

---

2. **Ποιός εἶναι ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων πού ἔχουν μιά ἀπό τίς ἑπόμενες ἰδιότητες;**

I_1: ἔχουν ἀπόσταση λ ἀπό ὁρισμένο σημεῖο O.

I_2: ἔχουν ἀπόσταση λ ἀπό ὁρισμένη εὐθεία ε.

I_3: ἰσαπέχουν ἀπό δύο σημεῖα A καί B.

I_4: ἰσαπέχουν ἀπό δύο τεμνόμενες εὐθεῖες ε_1 καί ε_2.

I_5: ἰσαπέχουν ἀπό δύο παράλληλες εὐθεῖες ε_1 καί ε_2.

I_6: βλέπουν ἕνα δεδομένο τμῆμα AB ὑπό ὁρισμένη γωνία $\widehat{\varphi}$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

— Ὁ γ.τ/I_1 εἶναι ὁ κύκλος (0,λ).

— Ὁ γ.τ/I_2 εἶναι δύο εὐθεῖες παράλληλες πρός τήν ε πού βρίσκονται ἑκατέρωθεν τῆς ε καί ἡ ἀπόσταση κάθε μιᾶς ἀπό τήν ε εἶναι λ.

— Ὁ γ.τ/I_3 εἶναι ἡ μεσοκάθετος τοῦ τμήματος ΑΒ.

— Ὁ γ.τ/I_4 εἶναι δύο εὐθεῖες πού διχοτομοῦν τίς τέσσερες γωνίες τίς ὁποῖες σχηματίζουν οἱ $ε_1$ καί $ε_2$.

— Ὁ γ.τ/I_5 εἶναι ἡ μεσοπαράλληλη εὐθεία τῶν $ε_1$ καί $ε_2$.

— Ὁ γ.τ/I_6 εἶναι δύο τόξα (συμμετρικά ὡς πρός τήν ΑΒ) πού ἔχουν χορδή τό τμῆμα ΑΒ καί τό καθένα ἀπό τά τόξα αὐτά δέχεται ἐγγεγραμμένη γωνία ἴση μέ τή $\widehat{φ}$.

---

3. **α) Πῶς ἐργαζόμαστε συνήθως γιά νά βροῦμε τό γ.τ/Ι;**

β) Ποιός εἶναι ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων πού «βλέπουν» ἕνα δεδομένο τμῆμα ΑΒ ὑπό ὀρθή γωνία;

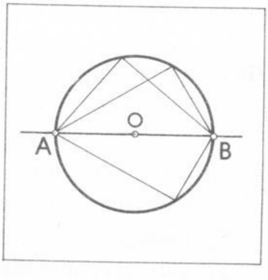
ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Γιά νά βροῦμε τό γεωμ. τόπο G τῶν σημείων πού ἔχουν μιά ἰδιότητα Ι ἐργαζόμαστε συνήθως ὡς ἑξῆς:

— Θεωροῦμε ἕνα «κινητὸ» σημεῖο Μ πού ἔχει τήν ἰδιότητα Ι.

— Προσπαθοῦμε νά δείξουμε ὅτι γιά τό Μ ἰσχύει μία ἀπό τίς «βασικές» ἰδιότητες I_1 ἕως I_5 τῆς προηγούμενης ἐρωτήσεως 2. Τότε ὁ ζητούμενος τόπος G θά εἶναι γενικά ἕνα ὑποσύνολο τοῦ γεωμετρικοῦ τόπου G΄ τῆς βασικῆς ἰδιότητας.

— Κατασκευάζουμε τό γεωμ. τόπο G΄ (πού ἀντιστοιχεῖ στή «βασική» ἰδιότητα) καί ἐξετάζουμε ἄν ὅλα τά σημεῖα τοῦ G΄ ἔχουν τήν ἰδιότητα Ι.



β) Ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων πού βλέπουν ἕνα δεδομένο τμῆμα ΑΒ ὑπό ὀρθή γωνία εἶναι ὁ κύκλος πού ἔχει διάμετρο τήν ΑΒ.

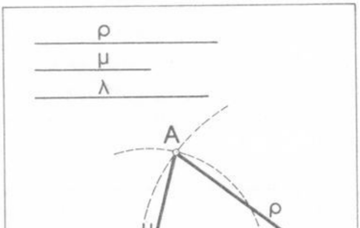
4.α) Ἀπό τί ἀποτελεῖται μιά γεωμετρική κατασκευή πού γίνεται μέ τήν «ἀναλυτική καί συνθετική μέθοδο»;

β) Ἐφαρμόστε «τήν ἀναλυτική καί συνθετική μέθοδο» στήν κατασκευή ἑνός τριγώνου ΑΒΓ τοῦ ὁποίου οἱ τρεῖς πλευρές ΒΓ, ΑΒ,ΑΓ εἶναι ἴσες ἀντιστοίχως μέ τρία τμήματα λ,μ,ρ.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Μιά γεωμετρική κατασκευή πού γίνεται μέ τήν «ἀναλυτική καί συνθετική μέθοδο» ἀποτελεῖται ἀπό τήν ἀνάλυση, τή σύνθεση, τήν ἀπόδειξη καί τή διερεύνηση.
Στήν **ἀνάλυση** ὑποθέτουμε ὅτι λύνεται τό πρόβλημά μας καί ὅτι κατασκευάσαμε ἕνα σχῆμα πού ἱκανοποιεῖ ὅλα τά δεδομένα τοῦ προβλήματος. Μετά προσπαθοῦμε νά διακρίνουμε μέρη τοῦ σχήματός μας πού μποροῦν νά κατασκευασθοῦν μέ ἁπλό καί γνωστό τρόπο καί νά μᾶς ὁδηγήσουν, μέ ἄλλες διαδοχικές κατασκευές, στό ζητούμενο σχῆμα.
Στή **σύνθεση** ἀκολουθοῦμε τήν ἀντίστροφη πορεία τῆς ἀναλύσεως πραγματοποιώντας τίς διαδοχικές κατασκευές πού ἐντοπίσαμε στήν ἀνάλυση, γιά νά καταλήξουμε στό ζητούμενο σχῆμα. Ἡ σύνθεση εἶναι οὐσιαστικά ἡ λύση τοῦ προβλήματος.
Στήν **ἀπόδειξη** δείχνουμε ὅτι τό σχῆμα πού κατασκευάσαμε ἔχει ὅλα τά στοιχεῖα καί τίς ἰδιότητες πού θέλουμε.
Στή **διερεύνηση** προσπαθοῦμε νά βροῦμε τίς συνθῆκες πού πρέπει νά ἔχουν τά δεδομένα τοῦ προβλήματος γιά νά ἔχουμε λύση καί ἐπίσης προσπαθοῦμε νά προσδιορίσουμε πόσες συνολικά λύσεις ἔχουμε.

β) Γιά νά κατασκευάσουμε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ τό ὁποῖο νά ἔχει τίς πλευρές του ΒΓ, ΑΒ, ΑΓ ἴσες μέ δεδομένα τμήματα λ,μ,ρ ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:



Ἀνάλυση: Ὑποθέτουμε ὅτι κατασκευάσαμε ἕνα τρίγωνο σάν αὐτό πού θέλουμε καί παρατηροῦμε ὅτι, μποροῦμε νά θεωρήσουμε τά σημεῖα Β καί Γ γνωστά (γιατί εἶναι ἄκρα ἑνός τμήματος πού ἔχει γνωστό μῆκος λ). Τότε τό Α ἀπέχει ἀπό τά Β καί Γ ἀποστάσεις μ καί ρ, ὁπότε θά βρίσκεται στούς κύκλους (Β,μ) καί (Γ,ρ). Ἔτσι τό Α θά εἶναι τομή δύο γνωστῶν κύκλων.

Σύνθεση: Παίρνουμε ἕνα τμῆμα ἴσο μέ λ καί ὀνομάζουμε τά ἄκρα του Β καί Γ. Γράφουμε τούς κύκλους (Β,μ) καί (Γ,ρ) καί ὀνομάζουμε Α τό ἕνα ἀπό τά σημεῖα τομῆς τους. Τό ΑΒΓ εἶναι τό ζητούμενο τρίγωνο.

Ἀπόδειξη: Ἔχουμε ἀπό τήν κατασκευή μας ΒΓ = λ καί ἀκόμη ΑΒ = μ (ὡς ἀκτίνα τοῦ πρώτου κύκλου) καί ΑΓ = ρ (ὡς ἀκτίνα τοῦ δεύτερου κύκλου).

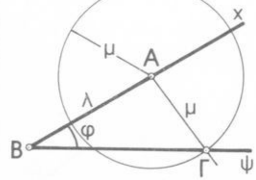
Διερεύνηση: Γιά νά κατασκευάζεται τό τρίγωνο πρέπει νά τέμνονται οἱ δύο κύκλοι, δηλαδή πρέπει νά ἔχουμε $\rho - \mu < \lambda < \rho + \mu$. Ὅταν συμβαίνει αὐτό οἱ κύκλοι τέμνονται σέ δύο σημεῖα Α καί Α΄, τά τρίγωνα ὅμως ΑΒΓ καί Α΄ΒΓ εἶναι ἴσα (ἀφοῦ ἔχουν ἴσες μία πρός μία τίς πλευρές τους). Συνεπῶς ἔχουμε μιά λύση.

5.α) **Πῶς κατασκευάζεται τρίγωνο ΑΒΓ τό ὁποῖο νά ἔχει τίς πλευρές του ΑΒ καί ΑΓ ἴσες πρός δύο τμήματα λ καί μ ἀντιστοίχως καί τή γωνία του $\widehat{B}$ ἴση μέ γνωστή γωνία $\widehat{\varphi}$; Πόσες τό πολύ λύσεις μπορεῖ νά ἔχουμε;**

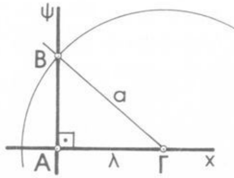
β) **Πῶς κατασκευάζεται ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ τό ὁποῖο νά ἔχει τήν κάθετη πλευρά του ΑΓ ἴση μέ ἕνα τμῆμα λ καί τήν ὑποτείνουσά του ΒΓ ἴση μέ ἕνα τμῆμα α;**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Παίρνουμε μιά γωνία ἴση μέ τή $\widehat{\varphi}$ καί ὀνομάζουμε Β τήν κορυφή της (σχ. 1). Στή μία πλευρά της ΒΧ παίρνουμε τμῆμα ΒΑ = λ καί



Σχ. 1



Σχ. 2

μέ κέντρο τό Α καί ἀκτίνα μ γράφουμε τόν κύκλο (Α,μ). Ἄν ὁ κύκλος αὐτός τέμνει τήν ἄλλη πλευρά ΒΨ τῆς γωνίας, ὀνομάζουμε

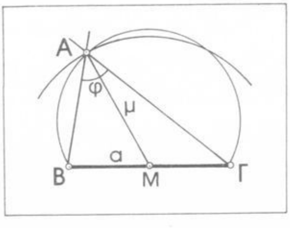
Γ τό σημεῖο τομῆς, ὁπότε τό ζητούμενο τρίγωνο εἶναι τό ΑΒΓ. Ἐπειδή ὁ κύκλος τέμνει γενικά τήν ἡμιευθεία ΒΨ σέ δύο σημεῖα Γ καί Γ′ (καί τά τρίγωνα ΑΒΓ καί ΑΒΓ′ εἶναι ἄνισα) ἔχουμε τό πολύ δύο λύσεις.

β) Παίρνουμε μία ὀρθή γωνία ΧΑΨ καί στήν πλευρά της ΑΧ παίρνουμε τμῆμα ΑΓ = λ (σχ. 2). Μετά, μέ κορυφή τό Γ γράφουμε τόν κύκλο (Γ,α). Ἄν ὁ κύκλος αὐτός τέμνει τήν ΑΨ στό Β, τό ΑΒΓ εἶναι τό ζητούμενο τρίγωνο.

6 **Πῶς χρησιμοποιοῦμε τούς γεωμετρικούς τόπους στή λύση τῶν γεωμετρικῶν προβλημάτων; Νά ἀναφέρετε ἕνα παράδειγμα.**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Γιά νά λύσουμε ἕνα πρόβλημα (δηλαδή γιά νά κατασκευάσουμε ἕνα σχῆμα ἀπό ὁρισμένα στοιχεῖα του ἤ ἀπό ὁρισμένες ἰδιότητές τους) ξεκινᾶμε συνήθως ἀπό μερικά, σημεῖα του τά ὁποῖα θεωροῦμε γνωστά γιατί ἤ δίνονται ἤ προκύπτουν ἀπό γνωστές κατασκευές ἁπλῶν σχημάτων. Ἔτσι ἡ λύση τοῦ προβλήματος ἀνάγεται στόν προσδιορισμό τῆς θέσεως τῶν ἄλλων σημείων τοῦ ζητούμενου σχήματος ὡς πρός τά γνωστά αὐτά σημεῖα. Γιά τόν προσδιορισμό τῆς θέσεως ἑνός τέτοιου σημείου Ζ, βρίσκουμε συνήθως δύο ἰδιότητες τοῦ Ζ οἱ ὁποῖες ἐντοπίζουν δύο γεωμετρικούς τόπους G_1 καί G_2 στούς ὁποίους ἀνήκει τό Ζ. Ἔτσι τελικά τό Ζ εἶναι σημεῖο τοῦ συνόλου $G_1 \cap G_2$.



Ἔστω π.χ. ὅτι θέλουμε νά κατασκευάσουμε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ στό ὁποῖο ἡ πλευρά ΒΓ καί ἡ διάμεσος ΑΜ νά εἶναι ἴσες μέ γνωστά τμήματα α καί μ ἀντιστοίχως καί ἡ γωνία $\widehat{A}$ νά εἶναι ἴση μέ γνωστή γωνία $\widehat{\varphi}$. Ἄν πάρουμε ἕνα τμῆμα ἴσο μέ α καί τοποθετήσουμε στά ἄκρα του τά σημεῖα Β καί Γ, ἀρκεῖ νά προσδιορίσουμε τήν κορυφή Α. Τό Α ὅμως ἔχει δύο ἰδιότητες.

α) ἀπέχει ἀπό τό γνωστό σημεῖο Μ (μέσο τῆς ΒΓ) ἀπόσταση μ καί συνεπῶς ἀνήκει στόν κύκλο (Μ,μ).

β) βλέπει τή ΒΓ ὑπό γνωστή γωνία $\widehat{\varphi}$ καί συνεπῶς ἀνήκει καί σ᾽ ἕνα γνωστό τόξο πού ἔχει χορδή τή ΒΓ καί δέχεται ἐγγεγραμμένη γωνία ἴση μέ τή $\widehat{\varphi}$.

Ἔτσι τό Α βρίσκεται ὡς τομή δύο γεωμετρικῶν τόπων.

II. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Ἀπαντεῖστε στίς ἑπόμενες ἐρωτήσεις βάζοντας ΝΑΙ ἤ ΟΧΙ στό ἀντίστοιχο πλαίσιο:

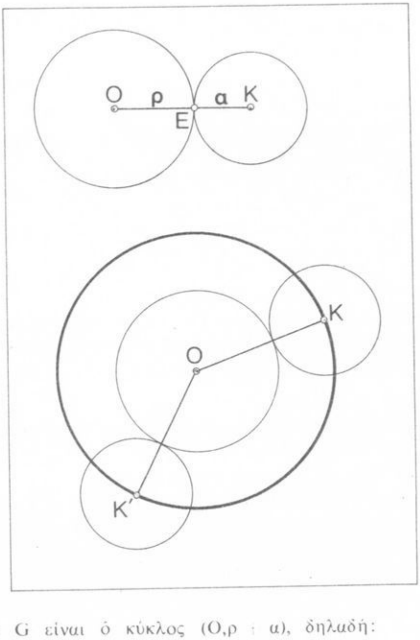
1. Ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων πού ἰσαπέχουν ἀπό τίς πλευρές μιᾶς γωνίας εἶναι ἡμιευθεία; .... ☐
2. Ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων πού ἰσαπέχουν ἀπό τίς κορυφές ἑνός τριγώνου εἶναι σημειοσύνολο μέ ἕνα στοιχεῖο; .... ☐
3. Ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων πού ἰσαπέχουν ἀπό τίς πλευρές ἑνός τριγώνου εἶναι εὐθεία; .... ☐
4. Ἄν ἕνα «κινητό» σημεῖο Μ βλέπει ἕνα τμῆμα ΑΒ ὑπό γωνία 60°, ὁ γεωμετρικός τόπος τοῦ Μ βρίσκεται σέ κύκλο πού ἔχει τό κέντρο του στό τμῆμα ΑΒ; .... ☐
5. Ἄν Α εἶναι σταθερό σημεῖο καί Β εἶναι ἕνα σημεῖο πού κινεῖται πάνω σέ εὐθεία, τό μέσο Μ τῆς ΑΒ κινεῖται πάνω σέ εὐθεία; .... ☐
6. Ἄν Α εἶναι σταθερό σημεῖο καί Β εἶναι ἕνα σημεῖο πού κινεῖται πάνω σέ κύκλο, τό μέσο Μ τοῦ ΑΒ κινεῖται πάνω σέ κύκλο; .... ☐
7. Μποροῦμε νά κατασκευάσουμε δύο διαφορετικά ὀρθογώνια τρίγωνα πού νά ἔχουν ὑποτείνουσα ἴση μέ α καί μιά ὀξεία γωνία 50°; .... ☐
8. Μποροῦμε νά κατασκευάσουμε ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο ἄν ξέρουμε μόνο τό μῆκος τῆς διαγωνίου του; .... ☐
9. Μποροῦμε νά κατασκευάσουμε τετράγωνο ἄν ξέρουμε μόνο τό μῆκος τῆς διαγωνίου του; .... ☐
10. Μποροῦμε νά κατασκευάσουμε ρόμβο ἄν ξέρουμε μόνο τό μῆκος τῆς πλευρᾶς του; .... ☐
11. Ὑπάρχει ἕνα μόνο σημεῖο πού «βλέπει» τίς πλευρές ἑνός τριγώνου μέ τήν ἴδια γωνία; .... ☐

(Οἱ ἀπαντήσεις στή σελ. 98)

III. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. **Δίνεται ἕνας κύκλος (Ο,ρ). Νά βρεθεῖ ὁ γ.τ. τῶν κέντρων τῶν κύκλων πού ἔχουν ἀκτίνα ἴση μέ ἕνα γνωστό εὐθ. τμῆμα α καί ἐφάπτονται ἐξωτερικά στόν κύκλο (Ο,ρ).**

Λύση: Ἔστω ὁ κύκλος (Ο,ρ) καί ἕνας κύκλος (Κ,α) πού ἐφάπτεται ἐξωτερικά τοῦ (Ο,ρ). Ζητᾶμε τό γεωμετρικό τόπου τοῦ **Κ**.



Ἐπειδή οἱ κύκλοι ἐφάπτονται ἐξωτερικά θά εἶναι:

$$OK = \rho + \alpha = \text{σταθερό}.$$

Παρατηροῦμε δηλαδή ὅτι τό Κ ἀπέχει ἀπό τό σταθερό σημεῖο Ο σταθερή ἀπόσταση ρ+α, ἄρα ὁ γεωμετρικός τόπος τοῦ **Κ** θά ἀνήκει στό κύκλο (Ο,ρ+α).

Παίρνουμε τώρα ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Κ′ τοῦ (Ο,ρ + α) καί γράφουμε τόν κύκλο (Κ′,α). θά δείξουμε ὅτι αὐτός ἐφάπτεται ἐξωτερικά τοῦ (Ο,ρ).

Πράγματι ἐπειδή ἡ ΟΚ′ εἶναι ἀκτίνα τοῦ (Ο,ρ + α) θά εἶναι ΟΚ′=ρ+α, δηλ. ἡ διάκεντρος ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων, ἄρα οἱ κύκλοι (Ο,ρ) καί (Κ′,α) θά ἐφάπτονται.

Ἔτσι ἀποδείξαμε ὅτι καί κάθε σημεῖο τοῦ κύκλου (Ο,ρ + α) εἶναι κέντρο ἑνός κύκλου πού ἐφάπτεται τοῦ (Ο,ρ), ἄρα ὁ ζητούμενος γεωμετρικός τόπος G εἶναι ὁ κύκλος (Ο,ρ + α), δηλαδή:

$$G = \text{κύκλος } (O, \rho + \alpha).$$

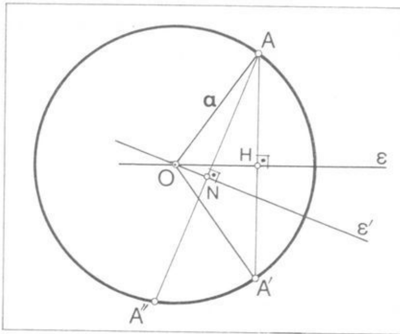
---

2. **Δίνονται δύο σταθερά σημεῖα Α καί Ο. Νά βρεθεῖ ὁ γ.τ. τοῦ συμμετρικοῦ τοῦ Α ὡς πρός τίς εὐθεῖες πού διέρχονται ἀπό τό 0.**

Λύση: Θεωροῦμε τά δύο σημεῖα Α καί Ο καί ἔστω μιά τυχαία εὐθεία ε πού διέρχεται ἀπό τό Ο. Σχηματίζουμε τό συμμετρικό τοῦ Α, τό Α′, ὡς πρός ἄξονα τήν ε (δηλαδή φέρνουμε ΑΗ ⊥ ε καί παίρνουμε ΗΑ′ = ΗΑ).

Στό τριγΑΟΑ′ ἡ ΟΗ εἶναι ὕψος καί διάμεσος ἄρα αὐτό εἶναι ἰσοσκελές, δηλαδή ΟΑ′ = ΟΑ.

Ἐπειδή τό ΟΑ = α ἔχει σταθερό μῆκος, παρατηροῦμε ὅτι τό Α΄ ἀπέχει ἀπό τό σταθερό σημεῖο Ο σταθερή ἀπόσταση α, ἄρα ὁ γεωμ. τόπος θά ἀνήκει στόν κύκλο (Ο,α). Γράφουμε λοιπόν τόν κύκλο (Ο,α).



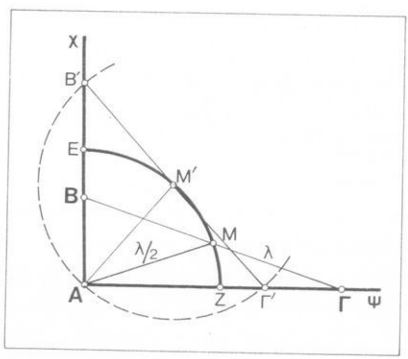
Παίρνουμε τώρα ἕνα σημεῖο Α΄΄ πάνω στόν κύκλο (Ο,α) καί θά δείξουμε ὅτι αὐτό εἶναι συμμετρικό τοῦ Α ὡς πρός μιά εὐθεία πού περνάει ἀπό τό Ο. Φέρνουμε τήν ΑΑ΄΄ καί ἀπό τό Ο φέρνουμε τήν ΟΝ ⊥ ΑΑ΄΄. Ἐπειδή ἡ ΟΝ εἶναι κάθετη στή χορδή ΑΑ΄΄ θά εἶναι ΑΝ = ΝΑ΄΄, ἔτσι τό Α΄΄ εἶναι τό συμμετρικό τοῦ Α ὡς πρός τήν ε΄, δηλ. καί κάθε σημεῖο τοῦ (Ο,α) εἶναι συμμετρικό τοῦ Α. Ἑπομένως γ.τ. εἶναι G = κύκλος (Ο,α).

---

3. **Δίνεται μιά ὀρθή γωνία $\widehat{\chi A \psi}$ καί δύο σημεῖα Β καί Γ πού κινοῦνται στίς πλευρές της ἀντίστοιχα κατά τέτοιο τρόπο, ὥστε τό τμῆμα ΒΓ νά ἔχει ὁρισμένο μῆκος λ. Νά βρεθεῖ ὁ γ.τ. τοῦ μέσου Μ τοῦ ΒΓ.**

Λύση: Ἔστω ἡ ὀρθή γωνία $\widehat{XA\Psi}$ καί θεωροῦμε μία θέση τῶν Β καί Γ στίς πλευρές ἔτσι ὥστε τό τμῆμα ΒΓ = λ. Ἄν Μ εἶναι τό μέσο τοῦ ΒΓ ζητᾶμε τό γ.τ. τοῦ Μ. Φέρνουμε τή διάμεσο ΑΜ καί ἐπειδή στό ὀρθογώνιο τρίγωνο ἡ διάμεσος εἶναι τό μισό τῆς ὑποτείνουσας, θά ἔχουμε:

$$AM = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{\lambda}{2}$$



Αὐτό φανερώνει ὅτι τό Μ ἀπέχει ἀπό τό σταθερό σημεῖο Α σταθερή ἀπόσταση λ/2 ἄρα ὁ γεωμετρικός του τόπος θά ἀνήκει στό κύκλο (Α, λ/2).

Γράφουμε τό κύκλο (Α, λ/2) καί ἐπειδή τό Μ θά εἶναι πάντοτε στό ἐσωτερικό τῆς γωνίας παίρνουμε τό τόξο του ΕΜΖ.

Παίρνουμε τώρα ἕνα σημεῖο Μ΄ στό τόξο ΕΜΖ καί θά δείξουμε ὅτι αὐτό εἶναι τό μέσο ἑνός τμήματος Β΄Γ΄ πού τό Β΄ εἶναι στήν ΑΧ, τό Γ΄ στήν ΑΨ καί Β΄Γ΄ = λ.

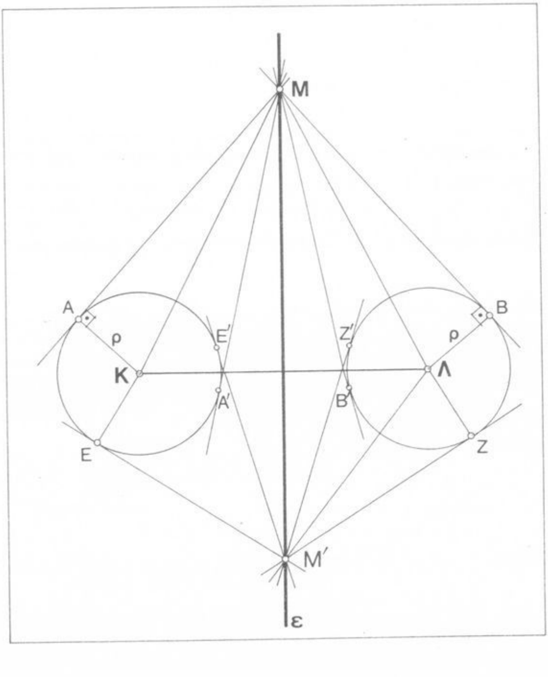
Γιά τοῦτο μέ κέντρο τό Μ΄ καί ἀκτίνα $AM' = \lambda/2$ γράφουμε κύκλο πού τέμνει τήν ΑΨ στό Γ΄ καί τήν ΑΧ στό Β΄. Ἐπειδή ἡ $\widehat{B'A\Gamma'} = 90^\circ$ ἡ Β΄Γ΄ θά εἶναι διάμετρος αὐτοῦ τοῦ κύκλου καί ἄρα θά περάσει ἀπό τό Μ΄, ἄρα $B'\Gamma' = 2(AM') = 2\cdot\lambda/2 = \lambda$ καί Μ΄ εἶναι τό μέσο.

Ἄρα γ.τ. εἶναι τό τόξο $\widehat{EMZ}$ τοῦ κύκλου $(A, \lambda/2)$.

---

4. **Δίδονται δύο ἴσοι κύκλοι (Κ,ρ) καί (Λ,ρ). Νά βρεθεῖ ὁ γ.τ. τῶν σημείων Μ πού ἔχουν τήν ἰδιότητα: ἄν φέρουμε τίς ἐφαπτόμενες ΜΑ, ΜΑ΄ πρός τόν (Κ,ρ) καί τίς ἐφαπτόμενες ΜΒ, ΜΒ΄ πρός τόν (Λ,ρ), νά εἶναι: $\widehat{AMA'} = \widehat{BMB'}$.**

Λύση: Ἔστωσαν οἱ δύο κύκλοι (Κ,ρ) καί (Λ,ρ) καί θεωροῦμε ἕνα σημεῖο Μ τέτοιο,



ὥστε ἄν φέρουμε τίς ἐφαπτόμενες νά εἶναι:

$$\widehat{AMA'} = \widehat{B'MB}$$

Γνωρίζουμε ὅτι ἄν φέρουμε τήν ΚΜ αὐτή διχοτομεῖ τή γωνία ΑΜΑ΄ δηλαδή

$$\widehat{KMA} = \frac{\widehat{AMA'}}{2}$$

$$\text{῞Ομοια} \quad \widehat{\Lambda MB} = \frac{\widehat{BMB'}}{2}$$

῾Οπότε χρησιμοποιώντας τήν ὑπόθεση ἔχουμε: $\widehat{KMA} = \widehat{\Lambda MB}$.

Τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΚΜΑ καί ΛΜΒ ἔχουν ΚΑ=ΛΒ=ρ καί $\widehat{KMA} = \widehat{\Lambda MB}$ ἄρα εἶναι ἴσα, ἑπομένως: ΜΚ = ΜΛ.

Δηλαδή τό Μ ἰσαπέχει τῶν Κ,Λ ἄρα ὁ γεωμετρικός του τόπος θά ἀνήκει στή μεσοκάθετο τοῦ ΚΛ.

Κατασκευάζουμε τή μεσοκάθετο ε τοῦ ΚΛ.

῎Ας πάρουμε τώρα ἕνα σημεῖο Μ΄ στή μεσοκάθετο ε καί ἄς φέρουμε τίς ἐφαπτόμενες Μ΄Ε, Μ΄Ε΄ καί Μ΄Ζ, Μ΄Ζ΄.

Θά δείξουμε ὅτι

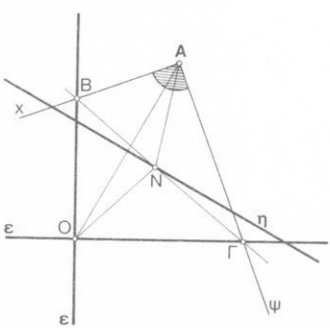
$$\widehat{EM'E'} = \widehat{ZM'Z'}$$

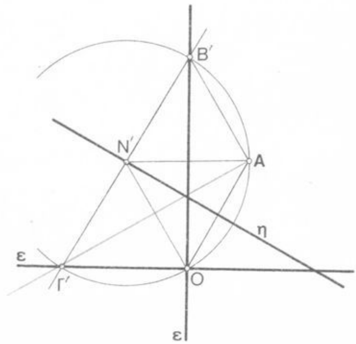
Τά ὀρθογώνια τρίγωνα Μ΄ΕΚ καί Μ΄ΖΛ ἔχουν: ΚΕ = ΛΖ = ρ καί Μ΄Κ = Μ΄Λ (ἀπό τή μεσοκάθετο) ἄρα εἶναι ἴσα καί

ἄρα: $\widehat{EM'K} = \widehat{ZM'\Lambda} \Rightarrow \widehat{EM'E'} = \widehat{ZMZ'}$.

5. Δίδονται δύο κάθετες εὐθεῖες ε καί ε΄ καί ἕνα σταθερό σημεῖο Α. Δύο ἡμιευθεῖες Αχ καί Αψ στρέφονται γύρω στό Α ὥστε ἡ $\widehat{\chi A\psi} = 90^\circ$. ῍Αν ἡ Αχ τέμνει τήν ε στό Β καί ἡ Αψ τέμνει τήν ε΄ στό Γ, νά βρεθεῖ ὁ γ.τ. τοῦ μέσου Ν τοῦ ΒΓ.

Λύση: ῎Εχουμε τήν ὀρθή γωνία $\widehat{XAy}$ πού οἱ πλευρές της τέμνουν τήν ε στό Β καί





τήν ε΄ στό Γ, ζητᾶμε τό γ.τ. τοῦ μέσου Ν τοῦ ΒΓ.

Στό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΒΟΓ ἡ ΟΝ διάμεσος ἄρα: $ON = \frac{B\Gamma}{2}$ (1)

Ἐπίσης ἀπό τό ὀρθογώνιο τριγ ΒΑΓ ἔχουμε: $AN = \frac{B\Gamma}{2}$ (2)

Ἀπό τίς (1), (2) προκύπτει ΟΝ = ΝΑ, πού σημαίνει ὅτι τό Ν ἰσαπέχει τῶν σταθερῶν σημείων Ο,Α ἄρα ὁ γεωμετρικός του τόπος ἀνήκει στή μεσοκάθετο τοῦ ΑΟ.
Κατασκευάζουμε τή μεσοκάθετο η τοῦ ΑΟ.
Ἔστω Ν΄ ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τῆς μεσοκαθέτου η τοῦ ΟΑ (σχῆμα II).
Μέ κέντρο τό Ν΄ καί ἀκτίνα Ν΄Ο γράφουμε κύκλο πού τέμνει τήν ε στό Β΄ καί τήν ε΄ στό Γ΄. Ἐπειδή $B'\widehat{O}\Gamma' = 90°$ ἡ Β΄Γ΄ θά περάσει ἀπό τό Ν΄ καί θά εἶναι:

i) Β΄Ν΄ = Ν΄Γ΄ δηλαδή τό Ν΄ μέσο τοῦ Β΄Γ΄.

ii) Ἐπειδή τό Ν΄ ἀνήκει στή μεσοκάθετο θά ἔχουμε: $N'A = N'O = \frac{B'\Gamma'}{2}$ (γιατί ἡ ΟΝ΄ εἶναι διάμεσος τοῦ ὀρθογωνίου τριγ$B'\widehat{O}\Gamma'$), ἄρα καί ἡ $B'\widehat{A}\Gamma' = 90°$.

Ἀπό τά παραπάνω προκύπτει ὅτι τό Ν΄ εἶναι σημεῖο τοῦ γ. τόπου.
Ἄρα γεωμετρικός τόπος εἶναι ἡ μεσοκάθετος η τοῦ τμήματος ΑΟ.

---

6. Δίνεται ἕνα ἡμικύκλιο ΑΕΒ κύκλου (Ο,ρ) καί σημεῖο Γ, τό ὁποῖο κινεῖται στό ἡμικύκλιο. Φέρνουμε τή ΓΔ ⊥ ΑΒ. Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος ἑνός σημείου Μ τῆς ΟΓ, ὅταν εἶναι: α) ΟΜ = ΓΔ ἤ β) ΟΜ = ΟΔ.

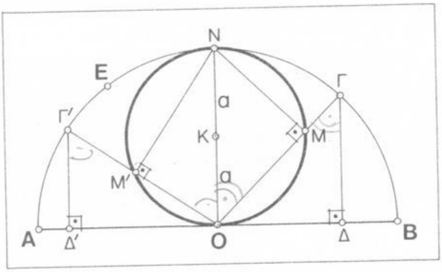
Λύση: α) Ἔστω Μ τό σημεῖο τῆς ΟΓ γιά τό ὁποῖο ΟΜ = ΓΔ καί τοῦ ὁποίου Μ ζητᾶμε τό γεωμετρικό τόπο.

Φέρνουμε ΟΝ ⊥ ΑΒ καί τήν ΝΜ. Τά τριγΟΔΓ καί ΟΜΝ ἔχουν:

ΟΓ = ΟΝ, ΓΔ = ΟΜ

καί $O\widehat{\Gamma}\Delta = N\widehat{O}M$ (ὡς ἐντός ἐναλλάξ τῶν παραλλήλων ΟΝ, ΓΔ), ἄρα:

τριγΟΓΔ = ΟΜΝ



ἑπομένως,

$O\widehat{M}N = O\widehat{\Delta}\Gamma = 90°$.

Δηλαδή τό Μ βλέπει τό σταθερό εὐθ. τμῆμα ΟΝ ὑπό ὀρθή γωνία, ἄρα ὁ γεωμετρικός του τόπος, ἀνήκει στό κύκλο μέ διάμετρο τό ΟΝ, ἄς τόν ὀνομάσουμε (Κ, α).
Γράφουμε τόν κύκλο (Κ,α) μέ διάμετρο ΟΝ.
Ἔστω Μ΄ ἕνα σημεῖο τοῦ (Κ,α), φέρνουμε τήν ΟΜ΄ πού τέμνει τό ἡμικύκλιο ΑΕΒ στό Γ΄ καί φέρνουμε Γ΄Δ΄ ⊥ ΑΒ. Ἔχουμε τριγΟΝΜ΄ = ΟΓ΄Δ΄ (ΟΝ = ΟΓ΄, ὀρθογώνια καί $N\widehat{O}\Gamma' = \Delta'\widehat{\Gamma'}O$) ἄρα: ΟΜ΄ = Γ΄Δ΄. Δηλαδή καί τό ὁποιοδήποτε σημεῖο τοῦ (Κ,α) ἔχει τήν ἰδιότητα νά ἀνήκει σέ μιά ἀκτίνα καί νά εἶναι: ΟΜ΄ = Γ΄Δ΄.
Ἄρα γ.τ. τοῦ Μ εἶναι ὁ κύκλος (Κ,α).

β) Ἔστω τό σημεῖο Μ τῆς ΟΓ γιά τό ὁποῖο

ΟΜ = ΟΔ.

Φέρνουμε τή ΜΒ καί παρατηροῦμε ὅτι:

$$\text{τριγ}Ο\Delta\Gamma = ΟΜΒ$$

γιατί ἔχουν: $Ο\Gamma = ΟΒ$, $Ο\Delta = ΟΜ$ καί $\widehat{Ο_1} = \widehat{Ο_1}$.

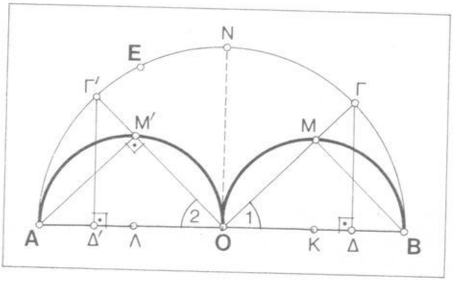
Ἀπό τήν ἰσότητα τῶν τριγώνων αὐτῶν ἔχουμε:

$$\widehat{ΟΜΒ} = \widehat{Ο\Delta\Gamma} = 90^\circ$$

αὐτό σημαίνει ὅτι τό Μ βλέπει τό σταθερό εὐθύγραμμο τμῆμα ΟΒ ὑπό ὀρθή γωνία, ἄρα ὁ γ.τ. τοῦ Μ ἀνήκει στό κύκλο μέ διάμετρο τό ΟΒ.

Παρατηροῦμε ὅτι, ὅταν τό Γ διαγράφει τό τεταρτοκύκλιο ΝΒ, τό Μ γράφει τό ἡμικύκλιο ΟΜΒ, ἐνῶ ὅταν τό Γ γράφει τό τεταρτοκύκλιο ΝΑ τό Μ γράφει τό ἡμικύκλιο διαμέτρου ΑΟ.

Ἔτσι ἄς πάρουμε ἕνα σημεῖο Μ΄ τοῦ ἡμικυκλίου διαμέτρου ΟΑ, φέρνουμε τήν ΟΜ΄Γ΄ καί τήν $\Gamma'\Delta' \perp ΑΒ$.



Τά τρίγωνα ΟΜ΄Α καί ΟΔ΄Γ΄ εἶναι ὀρθογώνια (ἡ $\widehat{ΟΜ'Α} = 90^\circ$ γιατί βαίνει σέ ἡμικύκλιο), $ΟΑ = Ο\Gamma'$ καί $\widehat{Ο_2} = \widehat{Ο_2}$, ἄρα:

$$\text{τριγ}ΟΜ'Α = \text{τριγ}Ο\Delta'\Gamma' \Longrightarrow ΟΜ' = Ο\Delta'.$$

Ἐπομένως ὁ γ.τ. G εἶναι:

$$G = (\text{ἡμικύκλιο ΟΒ}) \cup (\text{ἡμικύκλιο ΟΑ}).$$

---

7. **Δίνονται τρία ὁρισμένα σημεῖα Α,Β,Γ μέ ΑΒ < ΑΓ. Νά βρεθεῖ ὁ γ.τ. τῶν σημείων Ρ πού ἱκανοποιοῦν καί τίς δύο συνθῆκες: ΡΒ = ΡΓ καί ΡΑ < ΑΓ.**

Λύση: Ἔστω ἕνα σημεῖο Ρ γιά τό ὁποῖο ἔχουμε

$$Ρ Β = Ρ\Gamma \qquad (1)$$

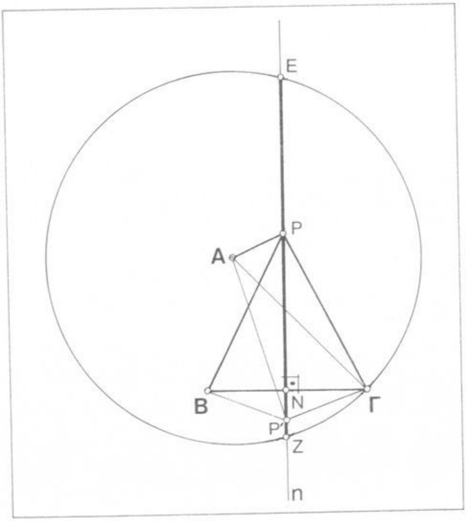
$$ΡΑ < Α\Gamma \qquad (2)$$

Ἡ συνθήκη (1) μᾶς πληροφορεῖ ὅτι τό Ρ ἰσαπέχει τῶν Β καί Γ, ἄρα ἀνήκει στή μεσοκάθετο τοῦ ΒΓ, δηλαδή τήν η.

Ἡ συνθήκη (2) μᾶς πληροφορεῖ ὅτι ἡ ἀπόσταση τοῦ Ρ ἀπό τό σταθερό σημεῖο Α εἶναι μικρότερη ἀπό τό σταθερό τμῆμα ΑΓ, ἄρα τό Ρ θά ἀνήκει στό ἐσωτερικό τοῦ κυκλικοῦ δίσκου (Α, ΑΓ).

Ἔτσι τό Ρ θά βρίσκεται καί στή μεσοκάθετο η καί στό ἐσωτερικό τοῦ κυκλικοῦ δίσκου (Α,ΑΓ) δηλαδή ὁ γεωμετρικός του τόπος θά εἶναι τό τμῆμα ΕΖ τῆς μεσοκαθέτου η πού βρίσκεται στό ἐσωτερικό τοῦ κδισκ (Α,ΑΓ), ἐκτός τῶν Ε καί Ζ.

Κατασκευάζουμε λοιπόν τήν μεσοκάθετη τοῦ ΒΓ καί τόν κύκλο (Α,ΑΓ).
Γιά τό ἀντίστροφο φαίνεται ἀμέσως ὅτι ἄν πάρουμε ἕνα σημεῖο Ρ΄ στό ΕΖ θά ἔχουμε:



Ἐπειδή τό Ρ΄ ἀνήκει στήν η θά εἶναι: Ρ΄Β = Ρ΄Γ καί ἐπειδή τό Ρ΄ εἶναι στό ἐσωτερικό τοῦ κδισκ (Α,ΑΓ) θά εἶναι: Ρ΄Α < ΑΓ.
Ἄρα γ.τ. G = εὐθ. τμῆμα ΕΖ — {Ε,Ζ}.

8. **Δίνονται δύο ὁρισμένα σημεῖα Α,Β. Νά βρεθεῖ ὁ γ.τ. τῶν σημείων Ρ πού ἱκανοποιοῦν καί τίς δύο συνθῆκες: ΑΡ $\leqslant$ ΑΒ καί ΡΑ $\geqslant$ ΡΒ.**

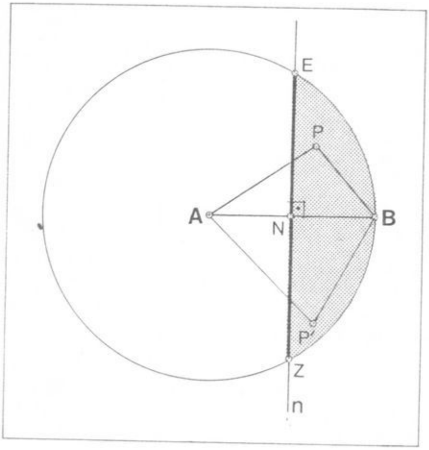
Λύση: Ἔστω Ρ ἕνα σημεῖο πού ἱκανοποιεῖ τίς συνθῆκες

$$AP \leqslant AB \qquad (1)$$
$$PA \geqslant PB \qquad (2)$$

Ἡ συνθήκη (1) μᾶς πληροφορεῖ ὅτι τό Ρ ἀπέχει ἀπό τό σταθερό σημεῖο Α ἀπόσταση μικρότερη ἤ ἴση ἀπό τό σταθερό τμῆμα ΑΒ, ἑπομένως τό Ρ θά ἀνήκει στό κυκλικό δίσκο (Α,ΑΒ).

Ἡ συνθήκη (2) μᾶς πληροφορεῖ (βλέπε ἄσκηση 1 τῆς § 5.14) ὅτι τό Ρ ἀνήκει στό ἡμιεπίπεδο πού ὁρίζει ἡ μεσοκάθετος η τοῦ ΑΒ καί τό Β δηλ. στό ἡμιεπίπεδο (η,Β))
Ἄρα τό Ρ ἀνήκει στό χωρίο πού ὁρίζει τό τόξο ΕΒΖ τοῦ κύκλου (Α,ΑΒ) καί ἡ χορδή ΕΖ ὅπου ἡ ΕΖ εἶναι μεσοκάθετος στό ΑΒ.
Γιά τό ἀντίστροφο ἄς πάρουμε ἕνα σημεῖο Ρ΄ στό χωρίο πού ὁρίζει ἡ μεσοκάθετος η τοῦ ΑΒ καί ὁ κδσκ (Α,ΑΒ):

Ἐπειδή τό P′ ἀνήκει στό κδισκ (A,AB) θά εἶναι $P'A \leqslant AB$ καί ἐπειδή βρίσκεται στό ἡμιεπίπεδο (η, B) θά εἶναι: $P'A \geqslant P'B$.
Ἄρα γ.τ. τοῦ P τό χωρίο: EZB.



9. **Δίνεται ἕνας κύκλος (O,ρ) καί ἡ ἐφαπτομένη του ε σ' ἕνα ὁρισμένο σημεῖο του B. Ἕνα σημεῖο A κινεῖται στήν ε. Ἀπό τό A φέρνουμε τήν ἄλλη ἐφαπτομένη AΓ τοῦ κύκλου. α) Ἄν H τό ὀρθόκεντρο τοῦ τριγ. ABΓ, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τό OBHΓ εἶναι ρόμβος. β) Νά βρεθεῖ ὁ γ.τ. τοῦ H. γ) Να βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τοῦ περικέντρου τοῦ τριγ ABΓ, ἀφοῦ δειχθεῖ πρῶτα ὅτι τοῦτο εἶναι τό μέσο τοῦ AO. δ) Νά βρεθεῖ ὁ γ.τ. τοῦ ἐγκέντρου τοῦ τριγ. ABΓ.**

Λύση: α) Τό ὀρθόκεντρο H εἶναι ἡ τομή τῶν ὑψῶν τοῦ τριγ. ABΓ. Ἔτσι γιά τά ὕψη ἔχουμε:

$$BE \perp A\Gamma \quad (1)$$

καί

$$\Gamma Z \perp AB \quad (2)$$

Ἐπίσης οἱ ἀκτίνες εἶναι κάθετες στίς ἐφαπτόμενες δηλαδή:

$$O\Gamma \perp A\Gamma \quad (3)$$

καί

$$OB \perp AB \quad (4)$$

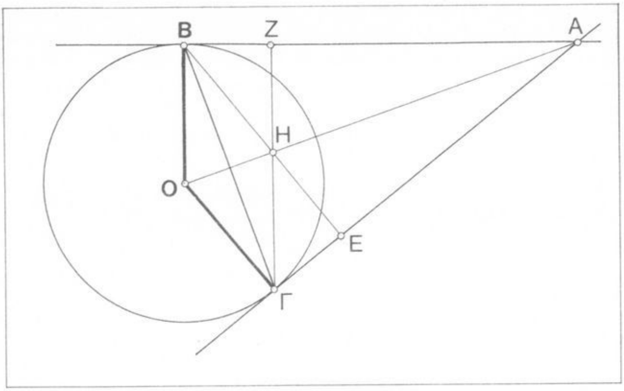
Ἀπό τίς (1), (3) ἔχουμε:

$$BE \parallel O\Gamma$$

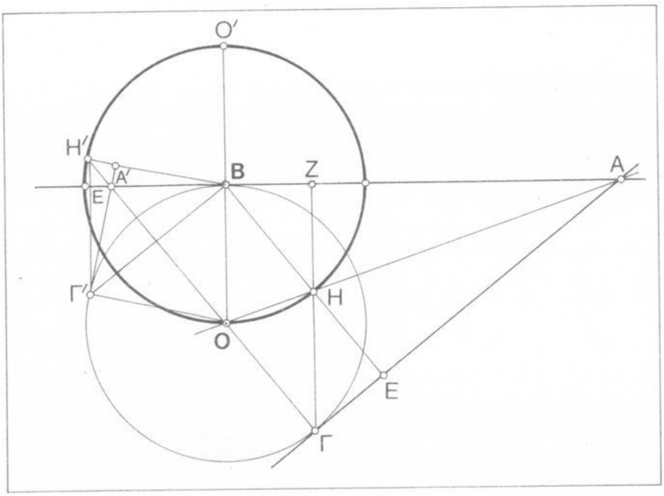
καί ἀπό τίς (2), (4) ἔχουμε:

$$\Gamma Z \parallel OB$$

Ἄρα τό ΒΗΓΟ εἶναι παρ/μο καί ἐπειδή ΟΒ = ΟΓ θά εἶναι ρόμβος.



β) Στό προηγούμενο ἐρώτημα ἀποδείξαμε ὅτι τό ΟΒΗΓ εἶναι ρόμβος, ἄρα:
ΒΗ = ΟΒ = ρ



Ἄρα παρατηροῦμε ὅτι τό Η ἀπέχει ἀπό τό σταθερό σημεῖο Β σταθερή ἀπόσταση ρ, ἑπομένως ὁ γ.τ. τοῦ Η ἀνήκει στό κύκλο (Β,ρ).
Γράφουμε τό κύκλο (Β, ρ).

Γεωμετρικός τόπος εἶναι ὁλόκληρος ὁ κύκλος (Β,ρ) καί τοῦτο τό βλέπουμε, ἄν ἀντίστροφα πάρουμε ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Η΄ τοῦ (Β,ρ).
Θά δείξουμε ὅτι τό Η΄ εἶναι ὀρθόκεντρο ἑνός καταλλήλου τριγΑ΄ΒΓ΄. Γι᾽ αὐτό φέρνουμε τήν ΟΗ΄ πού τέμνει τήν ἐφαπτομένη ε στό Α΄ καί ἀπό τό Α΄ φέρνουμε τήν ἄλλη ἐφαπτομένη Α΄Γ΄. Γνωρίζουμε ὅτι ἡ Α΄Ο εἶναι μεσοκάθετος (βιβλίο § 7.4) τοῦ Γ΄Β, ἄρα Η΄Β = Η΄Γ΄ καί ἐπειδή ΟΒ = ΟΓ΄ = ΒΗ΄ = Η΄Γ΄ τό ΟΒΗ΄Γ΄ εἶναι ρόμβος. Ἐπειδή ΟΒ ⊥ ΒΕ καί ΟΒ ∥ Η΄Γ΄ θά εἶναι Γ΄Η΄ ⊥ ΒΑ΄ δηλαδή τό Γ΄Η΄ εἶναι ὕψος. Ὅμοια ΒΗ΄ ⊥ Γ΄Α΄. Ἄρα τό Η΄ εἶναι τό ὀρθόκεντρο τοῦ τριγΑ΄Γ΄Β.
Ἑπομένως γ.τ. τοῦ Η ὁ κύκλος (Β,ρ).

Σημ. Στά Ο καί Ο΄ ἔρχεται τό Η ὅταν τό Α ἔλθει στό Β καί ἡ ΑΓ ∥ ε.

γ) Ἔστω Κ τό μέσο τοῦ ΟΑ, τότε ἐπειδή τά τρίγωνα ΟΒΑ καί ΟΓΑ εἶναι ὀρθογώνια θά ἔχουμε:

$$ΚΒ = \frac{ΟΑ}{2} = ΟΚ = ΚΑ$$

καί

$$ΓΚ = \frac{ΟΑ}{2} = ΟΚ$$

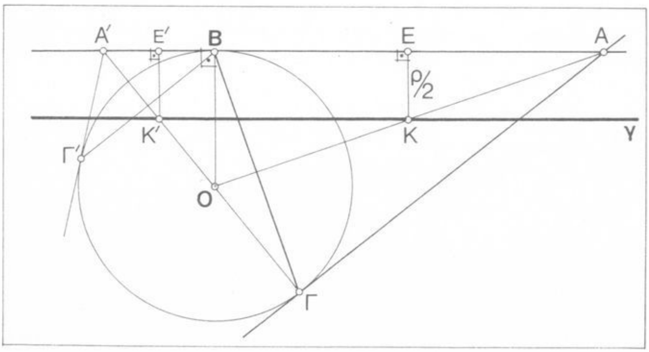
ἄρα:

$$ΚΒ = ΚΟ = ΚΑ = ΚΓ$$

δηλαδή ὁ κύκλος (Κ,ΚΑ) θά περάσει καί ἀπό τά Β καί Γ, δηλαδή εἶναι ὁ περιγεγραμμένος στό τριγΑΒΓ.
Φέρνουμε ΚΕ ⊥ ΒΑ. Στό τριγ ΟΒΑ ἡ ΚΕ εἶναι παράλληλη πρός τήν ΟΒ καί τό Κ μέσο τοῦ ΟΑ,

$$\text{ἄρα:}\quad ΚΕ = \frac{ΟΒ}{2} = \frac{ρ}{2}.$$

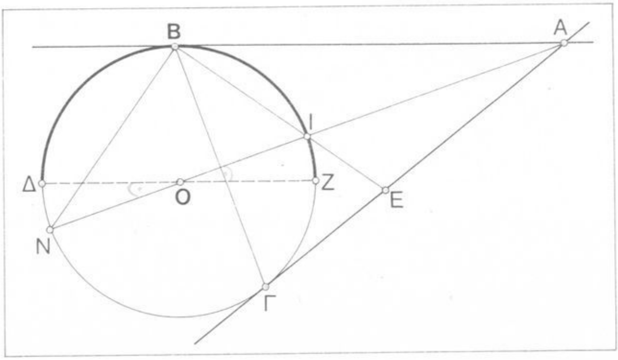
Τό Κ λοιπόν ἀπέχει ἀπό τήν ἐφαπτομένη σταθερή ἀπόσταση ρ/2 ἄρα ὁ γ.τ. θά ἀνή-



κει στή παράλληλη γ πρός τήν ἐφαπτομένη σέ ἀπόσταση ρ/2. (Αὐτή ἡ γ εἶναι ἡ μεσοκάθετη τῆς ΟΒ).
Ἀντίστροφα παίρνουμε ἕνα σημεῖο Κ΄ στή γ, φέρνουμε τήν ΟΚ΄ πού τέμνει τήν

ἐφαπτομένη στό Α΄ καί τήν ἐφαπτομένη Α΄Γ΄ θά δείξουμε ὅτι τό Κ΄ εἶναι τό περίκεντρο τοῦ Α΄ΒΓ΄.
Ἄν φέρουμε $K'E' \perp A'B$ θά εἶναι $K'E' = \rho/2$ καί $KE'' \parallel OB$ ἄρα τό Κ΄ εἶναι τό μέσο τοῦ ΟΑ΄ καί ὅπως δείξαμε παραπάνω τό Κ΄ θά εἶναι τό περίκεντρο τοῦ Α΄ΒΓ΄.
Ἄρα γ.τ. τοῦ Κ, ἡ εὐθεία γ.

δ) Φέρνουμε τήν ΑΟ πού τέμνει τόν κύκλο (Ο,ρ) στό Ι.
Ἀπό τήν § 7.4 γνωρίζουμε ὅτι ἡ ΑΟ εἶναι διχοτόμος τῆς $\widehat{BA\Gamma}$.
Ἀκόμα, ἄν Ν τό ἀντιδιαμετρικό τοῦ Ι, ἔχουμε:



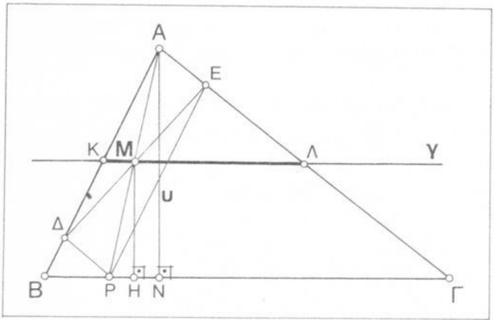
$\widehat{ABI} = \widehat{BNI}$ (ἀπό χορδή καί ἐφαπτομένη καί ἐγγεγραμμένη)
$\widehat{IB\Gamma} = \widehat{BNI}$ (γιατί ἔχουν τίς πλευρές του κάθετες ἡ $IB \perp BN$ καί $B\Gamma \perp NI$)
ἄρα $\widehat{ABI} = \widehat{IB\Gamma}$ δηλαδή ἡ ΒΙ εἶναι διχοτόμος τῆς $\widehat{AB\Gamma}$.
Στό τριγΑΒΓ λοιπόν οἱ ΑΟ καί ΒΙΕ εἶναι διχοτόμοι, ἄρα τό Ι εἶναι τό ἔγκεντρο τοῦ ΑΒΓ.
Ἀφοῦ λοιπόν τό Ι ἀνήκει στόν (Ο,ρ) ὁ γεωμετρικός του τόπος θά ἀνήκει στόν (Ο,ρ).
Γιά νά δοῦμε ἄν εἶναι ὁλόκληρος ὁ (Ο,ρ) σκεπτόμαστε ὡς ἑξῆς: Τό Ι ἀνήκει στόν (Ο,ρ) καί στήν ΟΑ. Τό Α γράφει τήν ἐφαπτομένη ἄρα τό Ι θά γράφει τό ἡμικύκλιο ΔΒΖ.
Ἄρα γ.τ. τοῦ Ι τό ἡμικύκλιο ΔΒΖ.

10. **Ἀπό ἕνα κινητό σημεῖο Ρ τῆς πλευρᾶς ΒΓ ἑνός τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε εὐθεῖες παράλληλες πρός τίς πλευρές ΑΓ καί ΑΒ οἱ ὁποῖες τέμνουν τίς ΑΒ καί ΑΓ στά σημεῖα Δ καί Ε ἀντιστοίχως. Νά βρεθεῖ ὁ γ.τ. τοῦ μέσου Μ τοῦ ΔΕ.**

Λύση: Ἔστω Ρ ἕνα σημεῖο τῆς ΒΓ καί $P\Delta \parallel A\Gamma$, $PE \parallel AB$, ζητᾶμε τό γ.τ. τοῦ μέσου Μ τοῦ ΔΕ.
Ἐπειδή τό ΑΔΡΕ εἶναι παρ/μο, οἱ διαγώνιές του διχοτομοῦνται, ἄρα ἡ ΑΡ θά περάσει ἀπό τό μέσο τῆς ΔΕ δηλ. τό Μ καί θά εἶναι $AM = MP$.

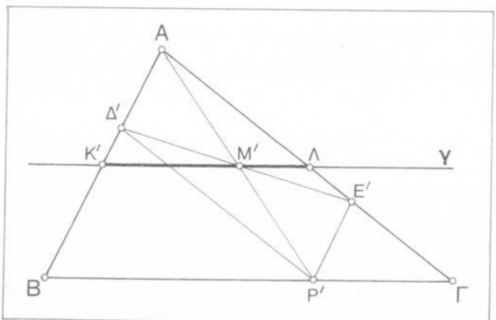
Φέρνουμε τό ὕψος ΑΝ = υ καί τό ΜΗ ⊥ ΒΓ. Στό τριγΑΡΝ ἡ ΜΗ εἶναι παρ/λη πρός τήν ΑΝ καί διέρχεται ἀπό τό μέσο τῆς ΑΡ, ἄρα: $ΜΗ = \frac{ΑΝ}{2} = \frac{υ}{2}$.

Ἐπομένως, παρατηροῦμε ὅτι τό Μ ἀπέχει ἀπό τή ΒΓ σταθερή ἀπόσταση $\frac{υ}{2}$, ἄρα



ὁ γ.τ. τοῦ Μ θά ἀνήκει σέ μιά εὐθεία γ παράλληλη πρός τή ΒΓ σέ ἀπόσταση ἀπ᾽ αὐτή $\frac{υ}{2}$.

Τό Ρ κινεῖται στή πλευρά ΒΓ, ἄρα οἱ ὁριακές θέσεις τοῦ ΑΡ εἶναι οἱ ΑΒ καί ΑΓ καί ἑπομένως τό Μ θά κινεῖται στό τμῆμα ΚΛ.



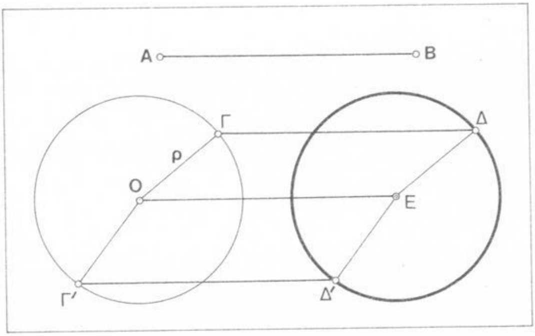
Ἐπειδή τό Μ εἶναι τό μέσο τοῦ ΑΡ καί ΚΛ ∥ ΒΓ τά Κ,Λ θά εἶναι τά μέσα τῶν ΑΒ καί ΑΓ.

Γιά τό ἀντίστροφο, παίρνουμε ἕνα σημεῖο Μ΄ στό ΚΛ, φέρνουμε τήν ΑΜ΄ πού τέμνει τή ΒΓ στό Ρ΄ καί τίς παράλληλες Ρ΄Δ΄ ∥ ΑΓ, Ρ΄Ε΄ ∥ ΑΒ. Ἐπειδή ἡ ΚΛ ∥ ΒΓ καί τό Κ μέσο τοῦ ΑΒ θά εἶναι καί τό Μ΄ μέσο τοῦ ΑΡ΄, ὁπότε ἀπό τό παρ/μο

ΑΔ΄Ρ΄Ε΄ καί ἡ Δ΄Ε΄ θά περάσει ἀπό τό Μ΄ καί θά εἶναι αὐτό μέσο τοῦ Δ΄Ε΄. Ἄρα γ.τ. τοῦ Μ εἶναι τό τμῆμα ΚΛ.

11. **Δίνονται δύο ὁρισμένα σημεῖα Α,Β καί ἕνας κύκλος (Ο,ρ). Ἀπό ἕνα κινητό σημεῖο Γ τοῦ κύκλου φέρνουμε τμῆμα ΓΔ || = ΑΒ. Νά βρεθεῖ ὁ γ.τ. τοῦ Δ.**

Λύση: Τό τμῆμα ΓΔ εἶναι παρ/λο καί ἴσο πρός τό ΑΒ, ἔτσι πού τό ΑΒΔΓ νά εἶναι τό παρ/μο πού σχηματίζεται. Ζητᾶμε τό γ.τ. τοῦ Δ ὅταν τό Γ κινεῖται στόν κύκλο



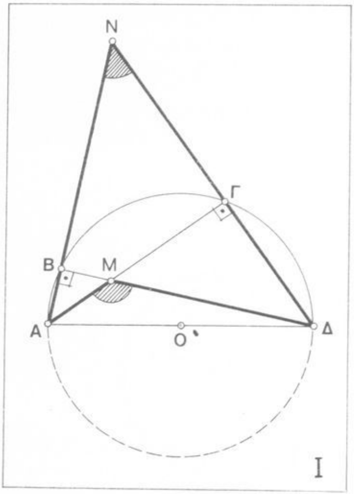
(Ο,ρ). Φέρνουμε τήν ΟΕ || = ΑΒ, τότε τό Ε εἶναι ὁρισμένο σημεῖο (γιατί τό τμῆμα ΑΒ εἶναι ὁρισμένο).
Ἀπό τό παρ/μο ΟΓΔΕ ἔχουμε: ΕΔ = ρ.
Παρατηροῦμε λοιπόν ὅτι τό Δ ἀπέχει ἀπό τό σταθερό σημεῖο Ε σταθερή ἀπόσταση ρ, ἄρα ὁ γ.τ. θά ἀνήκει στόν κύκλο (Ε, ρ).
Γιά τό ἀντίστροφο παίρνουμε ἕνα σημεῖο Δ΄ στόν (Ε,ρ) καί φέρνουμε Δ΄Γ΄ || = ΒΑ.
Ἀπό τό παρ/μο ΟΕΔ΄Γ΄ ἔχουμε ΟΓ΄ = ΕΔ΄ = ρ, ἄρα τό Γ΄ ἀνήκει στόν (Ο,ρ).
Ἑπομένως γ.τ τοῦ Δ, ὁ κύκλος (Ε,ρ).
Σημ. Ἄν φέρουμε τή ΓΔ || = ΑΒ ὥστε τό ΑΒΓΔ νά εἶναι παρ/μο, ὁ γ.τ. εἶναι πάλι ἕνας κύκλος.

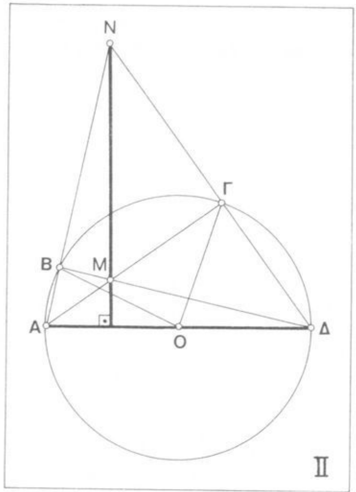
12. **Δίνεται ἕνα ἡμικύκλιο κέντρου Ο καί διαμέτρου ΑΔ = 2ρ. Δύο σημεῖα Β,Γ κινοῦνται στό ἡμικύκλιο ἔτσι, ὥστε $\widehat{\text{ΒΟΓ}} = 90^\circ$. Ὀνομάζουμε Ν τό σημεῖο πού τέμνονται οἱ ΑΒ καί ΓΔ καί Μ τό σημεῖο πού τέμνονται οἱ ΑΓ, ΒΔ. α) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι οἱ γωνίες ΑΝΔ καί ΑΜΔ εἶναι σταθεροῦ μέτρου. β) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τό Μ εἶναι τό ὀρθόκεντρο τοῦ τριγώνου ΑΝΔ. γ) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ ΜΝ εἶναι κάθετη στήν ΑΔ. δ) Νά βρεθεῖ ὁ γ.τ. τοῦ Μ καί τοῦ Ν. ε) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τό ΜΝ ἔχει σταθερό μῆκος.**

Λύση: α) Ἡ γωνία $\widehat{\text{ΒΔΓ}}$ εἶναι ἐγγεγραμμένη στό τόξο $\overset{\frown}{\text{ΒΓ}}$, ἄρα:

$$\widehat{\text{ΒΔΓ}} = \frac{\widehat{\text{ΒΟΓ}}}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$

Οἱ γωνίες ΑΓΔ καί ΑΒΔ εἶναι ἐγγεγραμμένες σέ ἡμικύκλιο, ἄρα εἶναι ὀρθές δηλαδή:





$$\mathrm{A}\Gamma \perp \mathrm{N}\Delta \quad \text{καί} \quad \Delta\mathrm{B} \perp \mathrm{AN}$$

Ἀπό τό ὀρθογώνιο τριγΝΒΔ ἔχουμε:

$$\widehat{\mathrm{AN}\Delta} = 90^\circ - \widehat{\mathrm{B}\Delta\mathrm{N}} = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ.$$

Ἀπό τό ὀρθογώνιο τριγ ΜΓΔ, ὅπου ἡ $\widehat{\mathrm{AM}\Delta}$ εἶναι ἐξωτερική, ἔχουμε:

$$\widehat{\mathrm{AM}\Delta} = 90^\circ + \widehat{\mathrm{B}\Delta\mathrm{N}} = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ.$$

β) Εἴπαμε παραπάνω ὅτι

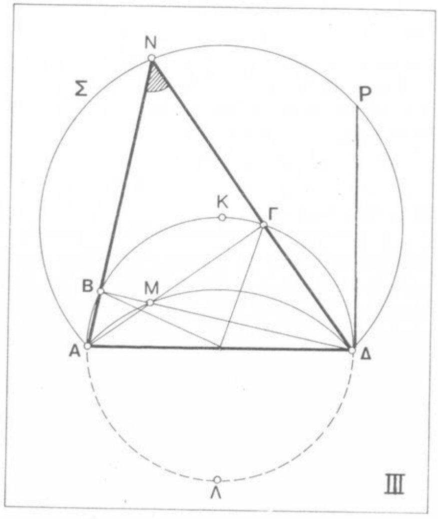
$\mathrm{A}\Gamma \perp \mathrm{N}\Delta$ καί $\Delta\mathrm{B} \perp \mathrm{AN}$

ἄρα τά ΑΓ καί ΔΒ εἶναι ὕψη τοῦ τριγΑΝΔ καί ἑπομένως τό Μ τό ὀρθόκεντρό του.

γ) Ἀφοῦ τό Μ εἶναι τό ὀρθόκεντρο τοῦ τριγΝΑΔ (σχ. II), τό ΝΜ θά εἶναι τό τρίτο ὕψος του, ἄρα

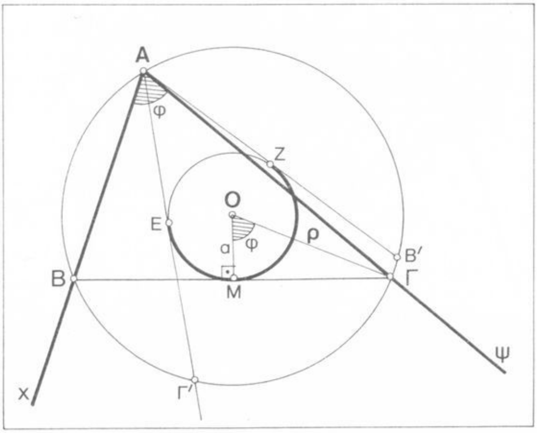
$$\mathrm{NM} \perp \mathrm{A}\Delta.$$

δ) Στό πρῶτο ἐρώτημα ἀποδείξαμε ὅτι $\widehat{\mathrm{AN}\Delta} = 45^\circ$



ἔτσι τό Ν βλέπει τό σταθερό τμῆμα ΑΔ ὑπό σταθερή γωνία ἄρα ἀνήκει στό τόξο πού ἔχει χορδή τό ΑΔ καί γωνία 45° (σχ. III).
Τό τόξο αὐτό κατασκευάζεται μέ τό γνωστό τρόπο (βιβλίο § 8,6) καί ἔχει κέντρο τό μέσο Κ τοῦ ἡμικυκλίου $\widehat{ΑΒΔ}$ (γιατί $\widehat{ΑΚΔ} = 90° = 2\cdot\widehat{ΑΝΔ}$).
Γιά τό ἀντίστροφο θά πάρουμε ἕνα σημεῖο Ν΄ στό τόξο $\widehat{ΑΝΔ}$ θά φέρουμε τίς Ν΄Α καί Ν΄Δ πού θά τμήσουν τό ἡμικύκλιο στά Β΄,Γ΄ καί θά εἶναι τότε $\widehat{Β'ΟΓ'} = 90°$.
Ὅταν τό Β ἔρθει στό Α τότε ἡ ΑΒ θά γίνει ἐφαπτομένη στό Α τοῦ ἡμικυκλίου, ἡ ὁποία θά τμήσει τό τόξο $\widehat{ΑΝΔ}$ στό Ρ. Ὅμοια ὅταν τό Γ ἔρθει στό Δ ἡ ΔΓ θά γίνει ἐφαπτομένη καί θά τμήσει τό τόξο $\widehat{ΑΝΔ}$ στό Σ.
Ἄρα γ.τ. τοῦ Ν εἶναι τό μέρος ΡΣ τοῦ τόξου ΑΝΔ πού ἔχει χορδή ΑΔ καί γωνία 45°.
Γιά τό γ.τ. τοῦ Μ, ὅπως ἀποδείξαμε στό πρῶτο ἐρώτημα ἡ γωνία $\widehat{ΑΜΔ} = 135°$, ἄρα τό Μ βλέπει τό ΑΔ ὑπό σταθερή γωνία 135°.
Ἑπομένως ὁ γ.τ. τοῦ Μ εἶναι τόξο χορδῆς ΑΔ καί γωνίας 135°. Τό κέντρο αὐτοῦ τοῦ τόξου εἶναι τό μέσο Λ τοῦ ἄλλου ἡμικυκλίου.
ε) Γιά νά δείξουμε ὅτι τό ΜΝ ἔχει σταθερό μῆκος θά τό συγκρίνουμε μέ ἕνα σταθερό μῆκος. Γιά τοῦτο συγκρίνουμε τά τρίγωνα ΝΜΓ καί ΑΓΔ (σχῆμα II).
Ἔχουν i) $\widehat{ΜΓΝ} = \widehat{ΑΓΔ} = 90°$.
ii) Ἐπειδή $\widehat{ΑΜΔ} = 135° \Longrightarrow \widehat{ΓΜΔ} = 45°$ καί ἀκόμα $\widehat{ΜΔΓ} = 45°$ θά ἔχουμε ΜΓ = ΓΔ.
iii) $\widehat{ΜΝΓ} = \widehat{ΓΑΔ}$ γιατί ἔχουν τίς πλευρές κάθετες (ΝΜ ⊥ ΑΔ καί ΝΓ ⊥ ΑΓ).
Ἑπομένως, τριγΝΜΓ = ΑΓΔ ⟹ ΝΜ = ΑΔ = σταθερό

13. Δίνεται ἕνας κύκλος (Ο,ρ) καί ἕνα σταθερό σημεῖο του Α. Γωνία $\widehat{χΑψ}$ ὁρισμένου μέ-



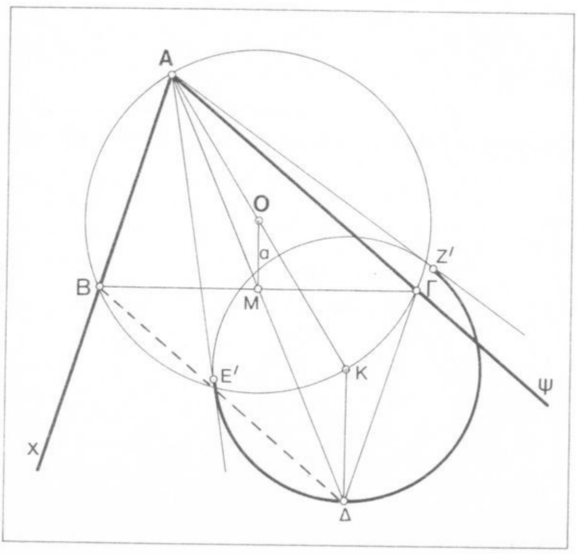
τρου $\widehat{φ}$ «στρέφεται» γύρω στό Α καί οἱ πλευρές της τέμνουν τόν κύκλο στά Β καί Γ.

Νά βρεθεῖ ὁ γ.τ. α) Τοῦ μέσου Μ τοῦ τμήματος ΒΓ. β) Τῆς κορυφῆς Δ τοῦ παρ/μου ΑΒΔΓ. γ) Τοῦ περικέντρου Ω τοῦ τριγώνου ΒΓΔ.

Λύση: α) Ἔστω μιά θέση τῆς γωνίας $\widehat{xAy} = \widehat{\varphi}$ πού οἱ πλευρές της τέμνουν τόν (Ο,ρ) στά Β καί Γ. Ζητᾶμε τό γ.τ. τοῦ μέσου Μ τοῦ ΒΓ.
Ἐπειδή τό Μ μέσο τοῦ ΒΓ θά εἶναι ΟΜ ⊥ ΒΓ.
Παρατηροῦμε ὅτι σέ ὅποια θέση καί ἄν ἔρθει ἡ γωνία xAy τό ὀρθογώνιο τριγΟΜΓ πού θά σχηματίζεται θά ἔχει:

$$ΟΓ = ρ \quad καί \quad \widehat{ΜΟΓ} = \widehat{\varphi}$$

(γιατί ἡ $\widehat{ΜΟΓ}$ εἶναι τό μισό τῆς ἐπίκεντρης $\widehat{ΒΟΓ}$).
Ἄρα τά σχηματιζόμενα ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΜΓ θά εἶναι ἴσα μεταξύ τους καί ἑπομένως ἡ ΟΜ θά εἶναι ἡ ἴδια πάντα, ΟΜ = α.
Ἀφοῦ λοιπόν τό Μ ἀπέχει ἀπό τό σταθερό σημεῖο Ο τήν ἀπόσταση α, ὁ γ.τ. θά ἀνήκει στό κύκλο (Ο,α). Ὅταν ἡ γωνία $\widehat{xAψ}$ στρέφεται περί τό Α καί ἔρθει τό Β στό Α τότε ἡ ΒΓ ἐπειδή πρέπει νά ἐφάπτεται τοῦ (Ο,α) θά ἔρθει στή θέση ΑΕΓ΄. Ὅμοια ὅταν τό Γ ἔρθει στό Α ἡ ΒΓ θά ἔρθει στή θέση ΑΖΒ΄.
Ἄρα ὁ γ.τ. τοῦ Μ εἶναι τό τόξο $\widehat{ΕΜΖ}$ τοῦ κύκλου (Ο,α).
β) Ἔστω μία θέση τῆς γωνίας $\widehat{xAψ}$ καί φέραμε ἀπό τά Β,Γ τίς παράλληλες πρός τίς



ΑΓ καί ΑΒ καί σχηματίστηκε τό παρ/μο ΑΒΔΓ. Ἐπειδή οἱ διαγώνιες παρ/μου διχοτομοῦνται ἡ ΑΔ θά περάσει ἀπό τό Μ καί θά εἶναι:

$$ΑΜ = ΜΔ$$

Ἂν Κ εἶναι τό ἀντιδιαμετρικό τοῦ Α, στό τριγΑΔΚ ἡ ΟΜ συνδέει τά μέσα δύο πλευρῶν του, ἄρα

$$K\Delta = 2\cdot OM = 2\alpha = \text{σταθερό}.$$

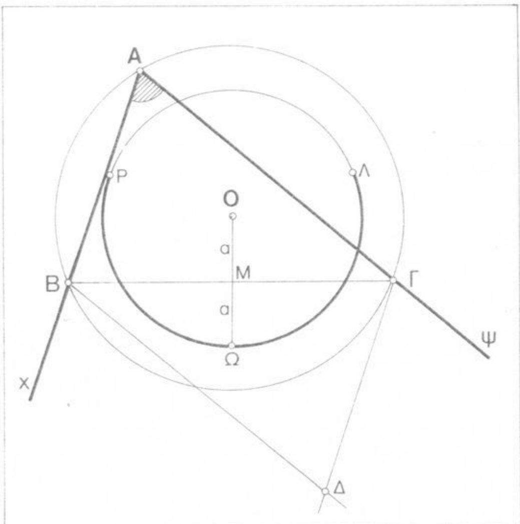
Ἑπομένως τό Δ ἀπέχει ἀπό τό σταθερό σημεῖο Κ σταθερή ἀπόσταση 2α, ἄρα ὁ γ.τ. θά ἀνήκει στό κύκλο (Κ, 2α).

Σκεπτόμενοι ὅπως στό πρῶτο ἐρώτημα βρίσκουμε ὅτι ὁ γ.τ. τοῦ Δ εἶναι τό τόξο $E'\overset{\frown}{\Delta Z'}$ τοῦ κύκλου (Κ, 2α).

γ) Ἐπειδή τό ΑΒΔΓ εἶναι παρ/μο, θά εἶναι:

$$\text{τριγ } B\Delta\Gamma = \text{τριγ } AB\Gamma$$

Τό περίκεντρο Ω θά βρίσκεται στή μεσοκάθετο τοῦ ΒΓ δηλαδή στήν ΟΜ καί ἐπει-



δή τά τρίγωνα ΒΔΓ καί ΑΒΓ εἶναι ἴσα, θα εἶναι $M\Omega = MO = \alpha$.

Ἄρα $O\Omega = 2\alpha$.

Ἑπομένως ὁ γ.τ. τοῦ Ω θά ἀνήκει στό κύκλο (Ο, 2α) καί θά εἶναι τό τόξο $\overset{\frown}{P\Omega\Lambda}$, ὅπου τά Ρ καί Λ προσδιορίζονται ἀπό τίς ὁριακές θέσεις τῆς ΟΜ.

---

14. Νά κατασκευαστεῖ τριγΑΒΓ τοῦ ὁποίου δίνονται τά στοιχεῖα:

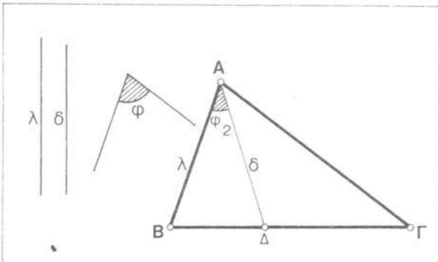
α) Ἡ γωνία $\widehat{A} = \widehat{\varphi}$, ἡ πλευρά $AB = \lambda$ καί ἡ διχοτόμος $A\Delta = \delta$.

β) Ἡ πλευρά $B\Gamma = \lambda$, ἡ πλευρά $AB = \mu$ καί ἡ διάμεσος $AM = \kappa$.

Λύση: α) **᾿Ανάλυση:** Ἔστω ΑΒΓ τό τρίγωνο πού ζητᾶμε νά κατασκευάσουμε καί πού ἔχει:

$$AB = \lambda,\ A\Delta = \delta \quad \text{καί} \quad \widehat{A} = \widehat{\varphi}$$

Παρατηροῦμε ὅτι ἄν πάρουμε μιά γωνία ἴση μέ $\widehat{\varphi}$, ἀρκεῖ νά πάρουμε στή μιά πλευρά



της τμῆμα ΑΒ = λ καί στή διχοτόμο της ΑΔ = δ καί νά φέρουμε τή ΒΔ.

Σύνθεση: Κατασκευάζουμε γωνία $\widehat{XA\Psi} = \widehat{\varphi}$ μέ κορυφή ἕνα σημεῖο Α, καί φέρνουμε τή διχοτόμο της.

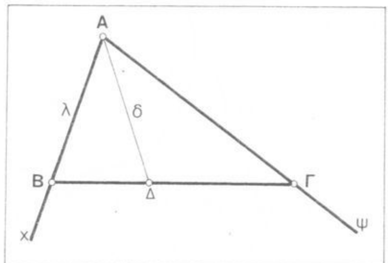
Στή πλευρά της ΑΧ παίρνουμε τμῆμα ΑΒ = λ καί στή διχοτόμο τμῆμα ΑΔ = δ.

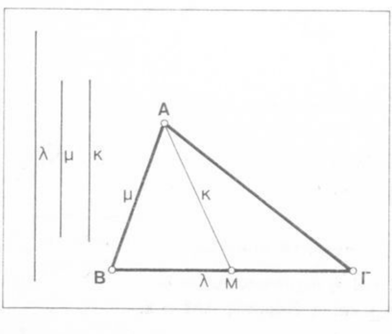
Τέλος ἡ ΒΔ τέμνει τήν ΑΨ στό Γ καί ἔχουμε τό τρίγωνο ΑΒΓ.

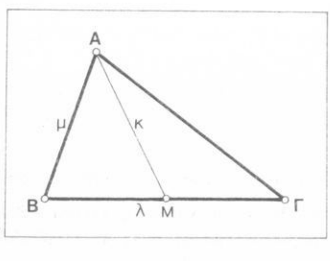
᾿Απόδειξη: ᾿Από τή κατασκευή τό τριγΑΒΓ ἔχει τά στοιχεῖα πού μᾶς ἔδωσαν:

$$AB = \lambda,\ A\Delta = \delta \quad \text{καί} \quad \widehat{A} = \widehat{\varphi}.$$

Διερεύνηση: Πρέπει $\widehat{\varphi} < 2$ ὀρθ. καί ἡ ΒΔ νά τέμνει τήν ΑΨ.







β) **Ἀνάλυση:** Ἔστω ΑΒΓ τό ζητούμενο τρίγωνο. Παρατηροῦμε ὅτι:

$$BM = \frac{B\Gamma}{2} = \lambda/2.$$

Τοῦ τριγώνου ΑΒΜ γνωρίζουμε τίς τρεῖς πλευρές, $AB = \mu$, $AM = k$ καί $BM = \lambda/2$, ἄρα κατασκευάζεται (§ 9.7 περιπτ. 3).

Κατασκευή. Παίρνουμε ἕνα τμῆμα $B\Gamma = \lambda$ καί βρίσκουμε τό μέσο του Μ. Γράφουμε τούς κύκλους (Β,μ) καί (Μ,k) πού τέμνονται στό Α. Τό ΑΒΓ εἶναι τό ζητούμενο.
Ἀπόδειξη: Ἔχει $B\Gamma = \lambda$ καί ἀπό τούς κύκλους πού γράψαμε $AB = \mu$ καί $AM = k$, ἀκόμα ἡ ΑΜ εἶναι διάμεσος.
Διερεύνηση: Πρέπει τό ΑΒΜ νά κατασκευάζεται, ἄρα:

$$|AB - AM| < BM < AB + AM \iff |\mu - k| < \lambda/2 < \mu + k$$
$$\iff |2\mu - 2k| < \lambda < 2\mu + 2k$$

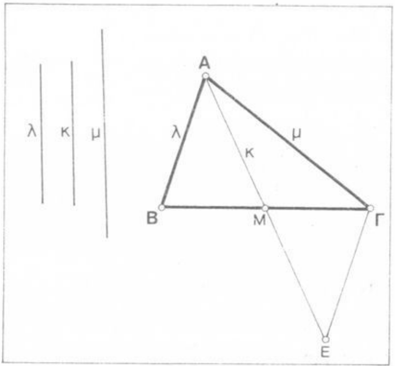
---

15. **Νά κατασκευαστεῖ ἕνα τριγ. ΑΒΓ τοῦ ὁποίου δίνονται τά στοιχεῖα:**
α) Οἱ πλευρές $AB = \lambda$, $A\Gamma = \mu$ καί ἡ διάμεσος $AM = \kappa$.
β) Οἱ τρεῖς διάμεσοί του.

Λύση: α) **Ἀνάλυση:** Ἔστω ΑΒΓ τό ζητούμενο τρίγωνο πού ἔχει τά στοιχεῖα πού μᾶς ἔδωσαν.

Προεκτείνουμε τήν ΑΜ καί παίρνουμε τμῆμα $ME = AM = k$. Ἐπειδή τό ΑΒΕΓ εἶναι παρ/μο (γιατί οἱ διαγώνιες διχοτομοῦνται) θά εἶναι:

$$\Gamma E = AB = \lambda.$$



Τοῦ τριγώνου ΑΓΕ γνωρίζουμε τίς τρεῖς πλευρές

$$A\Gamma = \mu, \quad \Gamma E = \lambda, \quad AE = 2k$$

ἄρα κατασκευάζεται.
Σύνθεση: Κατασκευάζουμε τό τριγ. ΑΕΓ (§ 9.7 περιπτ.3) μέ τίς παραπάνω τρεῖς πλευρές. Βρίσκουμε τό μέσο Μ τῆς ΑΕ καί φέρνουμε τήν ΓΜ καί παίρνουμε $MB = M\Gamma$. Τό τριγ.ΑΒΓ εἶναι τό ζητούμενο.
Ἀπόδειξη: Ἀπό τό παρ/μο ΑΒΕΓ ἔχουμε $AB = \Gamma E = \lambda$. Τά ὑπόλοιπα στοιχεῖα εἶναι ἀπό κατασκευῆς.

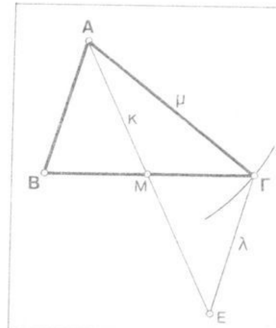
Διερεύνηση: Πρέπει νά κατασκευάζεται τό τριγΑΓΕ, ἔτσι πρέπει:

$$|\mu - \lambda| < 2k < \mu + \lambda.$$

β) **Ἀνάλυση:** Ἔστω ΑΒΓ τό ζητούμενο τρίγωνο πού ἔχει τίς διαμέσους του

$$AM = \lambda, \quad BN = \mu, \quad \Gamma\Lambda = k$$

Ἀπό τήν ἰδιότητα τοῦ βαρυκέντρου Θ γνωρίζουμε ὅτι:



$$ΒΘ = \frac{2}{3}ΒΝ = \frac{2}{3}μ$$

$$ΓΘ = \frac{2}{3}ΓΛ = \frac{2}{3}k$$

$$ΘΜ = \frac{1}{3}ΑΜ = \frac{1}{3}λ$$

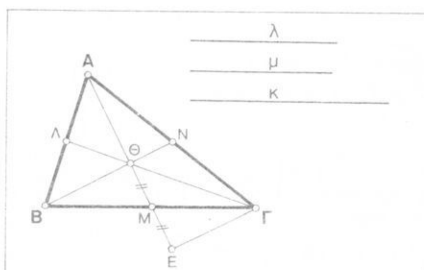
Τοῦ τριγΒΘΓ γνωρίζουμε τίς δύο πλευρές καί τήν περιεχομένη διάμεσο, ἄρα κατασκευάζεται (ὅπως στό α΄ ἐρώτημα).

Σύνθεση: Κατασκευάζουμε [πρῶτα ἕνα τρίγωνο

$ΘΕΓ$ μέ $ΘΕ = \frac{2}{3}λ$, $ΕΓ = \frac{2}{3}μ$

καί $ΓΘ = \frac{2}{3}k$.

Στή συνέχεια βρίσκουμε τό μέσο Μ τοῦ ΘΕ καί φέρνουμε τή ΓΜ καί παίρνουμε τμῆμα ΒΜ = ΜΓ, ἔτσι ἔχουμε τό ΒΘΓ. Τέλος προεκτείνουμε τό ΜΘ κατά τμῆμα $ΘΑ = \frac{2}{3}λ$.



Τό ΑΒΓ εἶναι τό ζητούμενο.

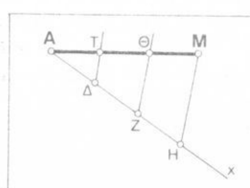
Ἀπόδειξη: Ἐπειδή Μ μέσο τοῦ ΒΓ ἡ ΑΜ διάμεσος καί πήραμε

$ΘΜ = \frac{1}{3}λ$ καί $ΘΑ = \frac{2}{3}λ$

ἄρα $ΑΜ = λ$.

Ἐπειδή τό Θ ἀπέχει ἀπό τή κορυφή τά $\frac{2}{3}ΑΜ$ εἶναι τό βαρύκεντρο τοῦ ΑΒΓ, ἄρα οἱ ΒΘΝ καί ΓΘΛ εἶναι διάμεσοι. Ὁπότε, ἐπειδή $ΒΘ = \frac{2}{3}μ \Longrightarrow ΒΝ = μ$ καί $ΓΘ = \frac{2}{3}k \Longrightarrow ΓΛ = k$.

Διερεύνηση: Γιά νά ἔχουμε λύση πρέπει νά κατασκευάζεται τό τριγ ΘΕΓ, δηλαδή



$$|ΘΓ - ΓΕ| < ΘΕ < ΘΓ + ΓΕ \Longrightarrow$$

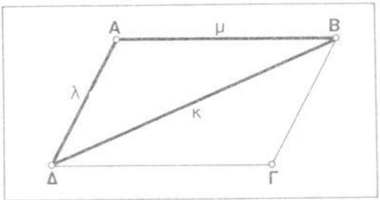
$$\left|\frac{2}{3}k - \frac{2}{3}μ\right| < \frac{2}{3}λ < \frac{2}{3}k + \frac{2}{3}μ \Longrightarrow$$

$$|k - μ| < λ < k + μ.$$

Σημείωση: Γιά νά βροῦμε, στά τμήματα τῶν διαμέσων τά $\frac{2}{3}$ καί τό $\frac{1}{3}$ τά διαιροῦμε μέ τό γνωστό τρόπο (§ 6.4) σέ τρία ἴσα μέρη. Π.χ. Γιά τό ΑΜ = λ, ἔχουμε, $ΑΘ = \frac{2}{3}λ$ καί $ΘΜ = \frac{1}{3}λ$.

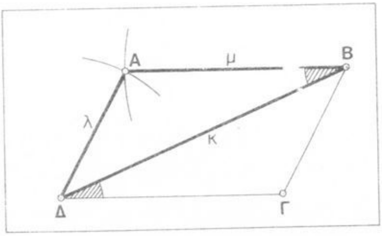
16. **Νά κατασκευαστεῖ ἕνα παρ/μο τοῦ ὁποίου δίδονται δύο διαδοχικές πλευρές καί μία διαγώνιός του.**

Λύση: Ἀνάλυση: Ἔστω ὅτι γνωρίζουμε τίς ΑΔ = λ, ΑΒ = μ, ΔΒ = k. καί ὅτι ΑΒΓΔ εἶναι τό ζητούμενο παρ/μο.



Παρατηροῦμε ὅτι τό τριγΑΔΒ κατασκευάζεται γιατί γνωρίζουμε τίς πλευρές του. Ὁπότε, ἀρκεῖ νά φέρουμε ἀπό τό Δ παρ/λο πρός τήν ΑΒ καί νά πάρουμε τμῆμα ΔΓ = ΑΒ = μ ὁπότε ἔχουμε καί τό Γ.

Σύνθεση: Κατασκευάζουμε τό τριγΑΔΒ, ἀπό τίς τρεῖς πλευρές του. (§ 9. 7 ἤ περιπτ 3). Ἀπό τό Δ φέρνουμε τήν παρ/λο πρός τήν ΑΒ (μέ τό γνωστό τρόπο τῶν ἴσων γωνιῶν § 5.8). Τέλος παίρνουμε τμῆμα ΔΓ = ΑΒ = μ.



Ἀπόδεξη: Ἐπειδή ΔΓ ∥ = ΑΒ τό ΑΒΓΔ εἶναι παρ/μο καί ἔχει τά τμήματα πού μᾶς ἔδοσαν.

Διερεύνηση: Γιά νά κατασκευάζεται τό τριγΑΔΒ πρέπει: $|\lambda - \mu| < k < \lambda + \mu$.

Σημείωση: Ἄν γνωρίζουμε τίς πλευρές ΑΒ, ΒΓ καί τή διαγώνιο ΒΔ, παίρνουμε τό ΑΔ = ΒΓ καί ἔχουμε τήν ἴδια περίπτωση μέ τήν παραπάνω.

---

17. **Νά κατασκευαστεῖ ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ τοῦ ὁποίου δίνονται:**

α) Ἡ πλευρά ΒΓ = λ, ἡ γωνία $\widehat{A} = \widehat{\varphi}$ καί τό ἄθροισμα ΑΒ+ΑΓ = κ, ὅπου κ ἕνα δεδομένο τμῆμα.

β) Ἡ πλευρά ΒΓ = λ, ἡ γωνία $\widehat{A} = \widehat{\varphi}$ καί ἡ διαφορά ΑΒ — ΑΓ = μ.

Λύση: α) **Ἀνάλυση:** Ἔστω ΑΒΓ τό ζητούμενο τρίγωνο.

Ἄν στή προέκταση τῆς ΒΑ πάρουμε τμῆμα ΑΕ = ΑΓ, παρατηροῦμε τά ἑξῆς:

$$BE = BA + AE = BA + A\Gamma = k$$

Ἐπειδή τό τριγ.ΑΕΓ εἶναι ἰσοσκελές, θά εἶναι $\widehat{E} = \widehat{\Gamma_1}$

ὁπότε: $\widehat{\varphi} = \widehat{E} + \widehat{\Gamma_1} = 2 \cdot \widehat{E} \Longrightarrow \widehat{E} = \dfrac{\widehat{\varphi}}{2}$.

Τό τρίγωνο ΕΒΓ εἶναι κατασκευάσιμο γιατί ξέρουμε

$$EB = k, \quad B\Gamma = \lambda \quad \text{καί} \quad E = \widehat{\varphi}/2$$

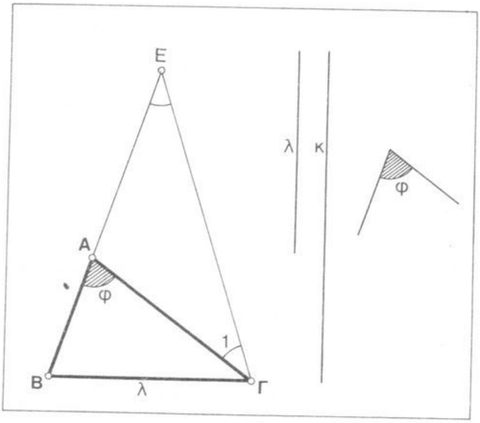
καί γίνεται ὅπως στή § 9.7 ἤ περίπτωση 4.

Ἔχοντες τό τριγ. ΕΒΓ, θά φέρουμε, ἀπό τό Γ τήν ΓΑ πού νά σχηματίσει γωνία $\widehat{\Gamma_1} = \widehat{E}$.

Σύνθεση: Παίρνουμε ἕνα σημεῖο Ε καί μέ κορυφή αὐτό σχηματίζουμε γωνία:

$$X\widehat{E}\Psi = \frac{\widehat{\varphi}}{2}.$$

Στήν ΕΧ παίρνουμε τμῆμα ΕΒ = k καί γράφουμε τό κύκλο (Β,λ), ὅπου τμήσει τήν



ΕΨ ἔχουμε τό Γ. Τέλος φτιάχνουμε γωνία $\widehat{\Gamma_1} = \widehat{E}$ πού ἡ ἄλλη πλευρά της τέμνει τήν ΕΧ στό Α.

Τό ΑΒΓ εἶναι τό ζητούμενο.

Ἀπόδειξη: Ἡ ΒΓ = λ γιατί εἶναι ἀκτίνα τοῦ κύκλου (Β,λ).

Ἐπειδή $\widehat{\Gamma_1} = \widehat{E} = \widehat{\varphi}/2$ θά εἶναι:

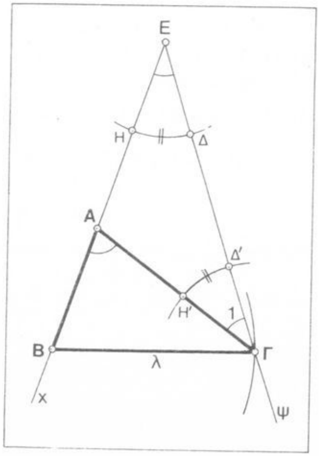
i) $B\widehat{A}\Gamma = \widehat{E} + \widehat{\Gamma_1} = \frac{\widehat{\varphi}}{2} + \frac{\widehat{\varphi}}{2} = \widehat{\varphi}$.

ii) ΑΓ = ΑΕ ἄρα ΑΒ+ΑΓ = ΑΒ + ΑΕ = ΕΒ = k.

Διερεύνηση: Πρέπει $\widehat{\varphi} < 2$ ὀρθ. Ἐπίσης ὁ κύκλος (Β,λ) μπορεῖ νά τέμνει τήν ΕΨ σέ δύο σημεῖα, ὁπότε ἔχουμε δύο λύσεις, νά ἐφάπτεται ὁπότε ἔχουμε μία λύση ἤ τέλος νά μή τέμνει τήν ΕΨ ὁπότε τό πρόβλημα δέν ἔχει λύση.

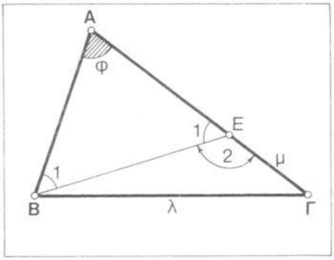
β) **Ἀνάλυση:** Ἔστω ΑΒΓ τό ζητούμενο τρίγωνο πού ἔχει

$$\widehat{A} = \widehat{\varphi},\ B\Gamma = \lambda,\ A\Gamma - AB = \mu.$$



Ἄν στή πλευρά ΑΓ πάρουμε ΑΕ = ΑΒ παρατηροῦμε ὅτι:

$$ΕΓ = ΑΓ - ΑΕ = ΑΓ - ΑΒ = μ$$



Ἐπειδή τό τριγΑΒΕ εἶναι ἰσοσκελές θά ἔχουμε:

$$\widehat{B_1} = \widehat{E_1} \quad \text{καί} \quad \widehat{B_1} + \widehat{E_1} + \widehat{\varphi} = 2\text{ὀρθ.} \Rightarrow$$

$$2\widehat{E_1} + \widehat{\varphi} = 2 \text{ ὀρθ.} \Rightarrow$$

$$2\widehat{E_1} = 2\text{ὀρθ.} - \widehat{\varphi} \Rightarrow$$

$$\widehat{E_1} = 1\text{ορθ} - \frac{\widehat{\varphi}}{2}.$$

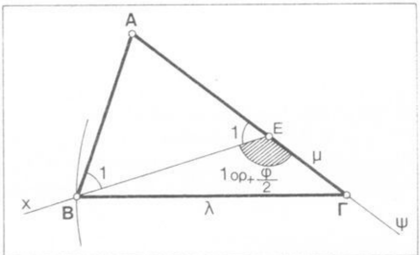
Καί γιά τήν E_2 ἔχουμε:

$$\widehat{E_2} = 2\text{ορθ.} - E_1 = 2 \text{ ορθ} - \left(1\text{ὀρθ} - \frac{\widehat{\varphi}}{2}\right) = 1\text{ορθ} + \frac{\widehat{\varphi}}{2}.$$

Ἔτσι στό τριγΒΕΓ γνωρίζουμε

$$ΒΓ = λ, \quad ΕΓ = μ$$

$$\text{καί} \quad \widehat{E_2} = 1\text{ορθ.} + \frac{\widehat{\varphi}}{2}$$



Σύνθεση: Κατασκευάζουμε τό τριγΕΒΓ ὅπως καί στό α΄ ἐρώτημα. Στή συνέχεια μέ κορυφή τό Β καί πλευρά ΒΕ κατασκευάζουμε γωνία $\widehat{B_1} = E_1$ καί ὅπου ἡ ἄλλη πλευρά της τμήσει τήν ΕΓ ἔχουμε τό Α. Τό ΑΒΓ εἶναι τό ζητούμενο.

Ἀπόδειξη: Ἡ ΒΓ = λ. Ἐπειδή $\widehat{B_1} = \widehat{E_1}$ ἔχουμε

i) $\widehat{A} = 2\text{ορθ.} - (\widehat{B_1} + \widehat{E_1}) = 2\text{ορθ.} - 2\widehat{E_1}$

Ἀλλά $\widehat{E_1} = 2\text{ορθ} - \widehat{E_2} = 2\text{ὀρθ.} - \left(1\text{ὀρθ.} + \frac{\widehat{\varphi}}{2}\right) = 1\text{ὀρθ.} - \frac{\widehat{\varphi}}{2}$ ὁπότε:

$$\widehat{A} = 2\text{ὀρθ.} - 2\left(1\text{ὀρθ.} - \frac{\widehat{\varphi}}{2}\right) = \widehat{\varphi}.$$

ii) ΑΒ = ΑΕ, ἄρα ΑΓ — ΑΒ = ΑΓ — ΑΕ = ΓΕ = μ.

Διερεύνηση: Ἔχουμε δύο, μία, ἤ μηδέν λύσεις.

---

18. **Νά κατασκευαστεῖ ἕνα ἰσοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ τοῦ ὁποίου δίνονται:**

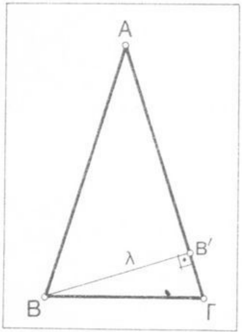
α) Ἡ γωνία $\widehat{B} = \widehat{\varphi}$ καί τό ὕψος του ΒΒ΄ = λ.

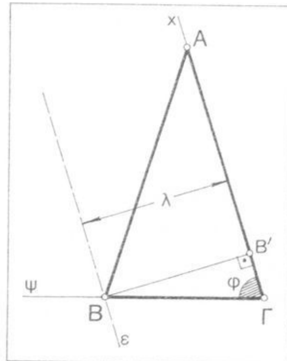
β) Ἡ πλευρά ΒΓ = λ καί τό ὕψος του ΒΒ΄ = μ.

Λύση: α) **Ἀνάλυση:** Ἔστω ΑΒΓ τό ζητούμενο τρίγωνο πού ἔχει ΑΒ = ΑΓ, $\widehat{B} = \widehat{\varphi}$ καί τό ὕψος ΒΒ΄ = λ.

Ἐπειδή τό τριγΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές, θά εἶναι $\widehat{Γ} = \widehat{Β} = \widehat{φ}$.
Τοῦ ὀρθογωνίου τριγ.ΒΒ΄Γ γνωρίζουμε τή ΒΒ΄ $= λ$ καί $\widehat{Γ} = \widehat{φ}$ ἄρα κατασκευάζεται (§ 9.7 περιπ.5).

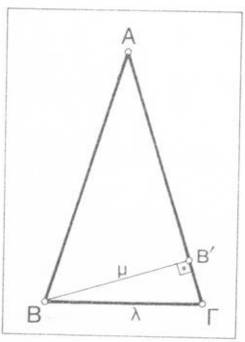
Σύνθεση: Μέ κορυφή ἕνα σημεῖο Γ κατασκευάζουμε γωνία $\widehat{ΧΓΨ} = \widehat{φ}$.

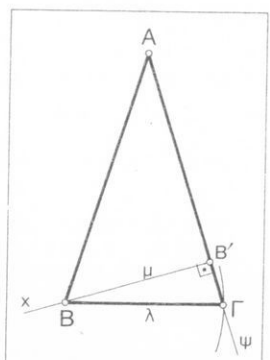




Σέ ἀπόσταση λ φέρνουμε εὐθεία ε παράλληλη πρός τήν ΧΓ, ἡ ὁποία τέμνει τήν ΓΨ στό Β. Τέλος μέ κορυφή τό Β καί πλευρά ΒΓ κατασκευάζουμε γωνία ἴση μέ φ, ὅπου ἡ ἄλλη πλευρά της τμήσει τήν ΓΧ ἔχουμε τό Α.

Ἀπόδειξη: Ἐπειδή $\widehat{Γ} = \widehat{Β} = \widehat{φ}$ τό τριγΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές. Ἄν φέρουμε τό ὕψος





ΒΒ΄ θά εἶναι ἴσο μέ τήν ἀπόσταση τοῦ ΑΓ καί ε, δηλαδή λ.

Διερεύνηση: Πρέπει $\widehat{φ} < 1$ ὀρθ.

β) **Ἀνάλυση:** Ἔστω ΑΒΓ τό ζητούμενο τρίγωνο. Παρατηροῦμε ὅτι τό ὀρθογώνιο

ΒΒ΄Γ εἶναι κατασκευάσιμο. Ἔχοντας τό ΒΒ΄Γ, σχηματίζουμε στό Β μέ πλευρά ΒΓ γωνία ἴση μέ Γ καί ἐκεῖ πού θά τμήσει ἡ ἄλλη της πλευρά τή ΒΓ΄ ἔχουμε τό Α.

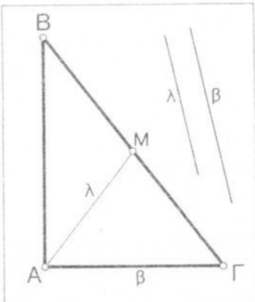
Σύνθεση: Σχηματίζουμε μιά ὀρθή γωνία $\widehat{XB'\Psi}$. Στή Β΄Χ παίρνουμε τμῆμα Β΄Β = μ. καί γράφουμε τό κύκλο (Β,λ) ὁ ὁποῖος θά τμήσει τή Β΄Ψ στό Γ. Μέ κορυφή τό Β καί πλευρά ΒΓ κατασκευάζουμε γωνία ἴση μέ τή $\widehat{\Gamma}$, ὅπου ἡ ἄλλη πλευρά της τμήσει τή Β΄Ψ ἔχουμε τό Α.

Ἀπόδειξη: Ἔχει $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$, ΒΓ = λ καί ΒΒ΄ = μ.

Διερεύνηση: Πρέπει $\mu < \lambda$.

---

19. **Νά κατασκευαστεῖ ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A}$ = 1 ὀρθ.) τοῦ ὁποίου δίνονται:**
α) Ἡ διάμεσος ΑΜ = λ καί μία κάθετη πλευρά.
β) Ἡ διάμεσος ΑΜ = λ καί τό ὕψος του ΑΔ = μ.



Λύση: α) Ἔστω ὅτι θέλουμε νά κατασκευάσουμε τό ὀρθογώνιο τριγΑΒΓ πού ἔχει:

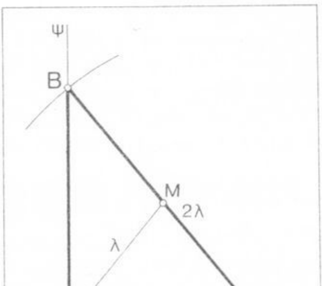
$$\widehat{A} = 1 \text{ ὀρθ.},\quad A\Gamma = \beta,\quad AM = \lambda.$$

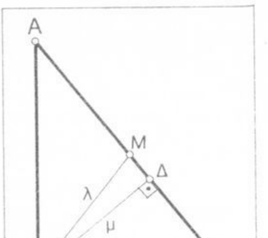
Γνωρίζουμε ὅτι

$$B\Gamma = 2\cdot AM = 2\lambda$$

Ὁπότε ἔχουμε νά κατασκευάσουμε ὀρθογώνιο τρίγωνο, ἀπό τήν ὑποτείνουσα καί μιά κάθετη πλευρά (§ 9.7 περιπτ. 5, δ)).

Γιά σύνθεση: Κατασκευάζουμε μιά ὀρθή γωνία $\widehat{XA\Psi}$ = 1 ὀρθ., στήν ΑΧ παίρνουμε τμῆμα ΑΓ = β καί γράφουμε τό κύκλο (Γ,2λ) ὁπότε ἔχουμε καί τό Β.





Γιά νά ἔχουμε λύση πρέπει $\beta < 2\lambda$.

β) Παρατηροῦμε ὅτι τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΔΜ εἶναι κατασκευάσιμο (γνωρίζουμε τήν ὑποτείνουσά του καί μιά κάθετη πλευρά, § 9.7.)

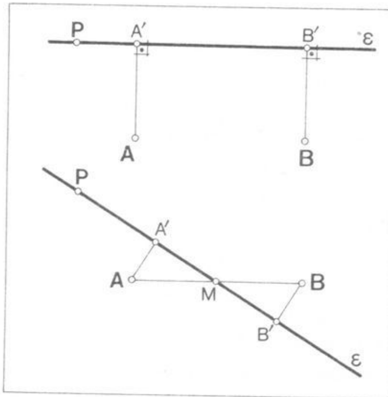
Ἔχοντες τό ΑΔΜ παίρνουμε στή ΜΔ ἑκατέρωθεν τοῦ Μ τμήματα ΜΒ = ΜΓ = λ.
Γιά νά ἔχουμε λύση πρέπει: $\lambda > \mu$.

---

20. **Δίνονται τρία σημεῖα Ρ,Α,Β. Νά χαράξετε ἀπό τό Ρ μιά εὐθεία πού νά ἰσαπέχει ἀπό τό Α καί Β.**

Λύση: Ἀνάλυση: Ἔστωσαν τά σημεῖα Ρ,Α,Β καί θέλουμε νά χαράξουμε μιά εὐθεία ε, πού νά διέρχεται ἀπό τό Ρ καί ἔτσι ὥστε, ἄν ΑΑ΄ ⊥ ε καί ΒΒ΄ ⊥ ε νά εἶναι:

$$AA' = BB'.$$



Παρατηροῦμε ὅτι τά τμήματα ΑΑ΄ καί ΒΒ΄ εἶναι παρ/λα καί ἴσα ἄρα ὁρίζουν ἕνα παρ/μο, ἀπό τό ὁποῖο ἔχουμε:
ἤ α) ἡ Α΄Β΄ ∥ ΑΒ δηλ. ἡ ε ∥ ΑΒ
ἤ β) ἡ Α΄Β΄ καί ΑΒ θά εἶναι διαγώνιοι, ἄρα θά διχοτομοῦνται δηλαδή ἡ ε θά περάσει καί ἀπό τό μέσο Μ τοῦ ΑΒ.

Σύνθεση: α) Φέρνουμε ἀπό τό Ρ τήν ε ∥ ΑΒ. ἤ β) Βρίσκουμε τό μέσο Μ τοῦ ΑΒ καί φέρνουμε τή ΡΜ.

Ἀπόδειξη: Ὅταν ε ∥ ΑΒ θά εἶναι ΑΑ΄ = ΒΒ΄ γιατί εἶναι τμήματα κάθετα μεταξύ παραλλήλων.

Ὅταν ἡ ε διέρχεται ἀπό τό μέσο Μ τοῦ ΑΒ θά εἶναι: τριγΑΑ΄Μ = ΜΒΒ΄ (γιατί ΑΜ = ΜΒ, ὀρθογώνια καί $A\widehat{M}A' = B\widehat{M}B'$) ἄρα πάλι ΑΑ΄ = ΒΒ΄.

Διερεύνηση: Τό πρόβλημα ἔχει πάντα δύο λύσεις. Ἄν τό Ρ βρεθεῖ στήν εὐθεία ΑΒ οἱ δύο λύσεις συμπίπτουν σέ μία, τήν εὐθεία ΑΒ.

---

21. **Δίνεται ἕνα τριγ. ΑΒΓ. Στίς πλευρές ΑΒ καί ΑΓ ἀντίστοιχα νά βρεθοῦν τά σημεῖα Μ καί Ν, ὥστε ΑΜ = ΜΝ = ΝΓ.**

Λύση: Ἀνάλυση. Ἔστω ὅτι βρέθηκαν τά σημεῖα Μ,Ν καί εἶναι:

$$AM = MN = N\Gamma.$$

Παρατηροῦμε ὅτι τό τρίγωνο ΑΜΝ εἶναι ἰσοσκελές, ἄρα:

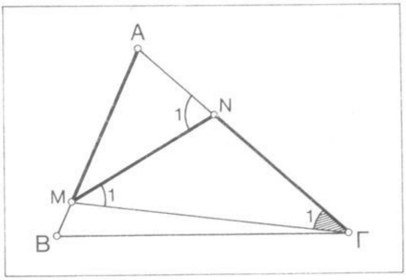
$$\widehat{N}_1 = \widehat{A} \qquad (1)$$

Ἐπίσης τό τριγ.ΝΜΓ εἶναι ἰσοσκελές, ἄρα $\widehat{\Gamma}_1 = \widehat{M}_1$ καί ἡ $\widehat{N}_1$ εἶναι ἐξωτερική του γωνία, ἄρα:

$$\widehat{N}_1 = \widehat{M}_1 + \widehat{\Gamma}_1 = \widehat{\Gamma}_1 + \widehat{\Gamma}_1 = 2\widehat{\Gamma}_1 \qquad (2)$$

Ἀπό τίς (1), (2) ἔχουμε: $2\widehat{\Gamma}_1 = \widehat{A} \Rightarrow \widehat{\Gamma}_1 = \dfrac{\widehat{A}}{2}$.

Ἡ τελευταία σχέση μᾶς φανερώνει ὅτι ἡ ΓΜ εἶναι γνωστή εὐθεία γιατί σχηματίζει μέ τήν ΑΓ τή γνωστή γωνία $\frac{\widehat{A}}{2}$.



Ἔχοντας τό Μ μποροῦμε νά βροῦμε καί τό Ν.

Σύνθεση: Μέ κορυφή τό Γ καί πλευρά τή ΓΑ κατασκευάζουμε γωνία ἴση μέ $\frac{\widehat{A}}{2}$ (δηλ. διχοτομοῦμε τήν $\widehat{A}$ καί ἔχουμε τήν $\frac{\widehat{A}}{2}$). Ἡ ἄλλη πλευρά τῆς γωνίας αὐτῆς τέμνει τήν ΑΒ στό Μ. Μέ κέντρο τό Μ καί ἀκτίνα ΜΑ γράφουμε κύκλο πού τέμνει τήν ΑΓ στό Ν. Τά σημεῖα Μ,Ν εἶναι τά ζητούμενα.

Ἀπόδειξη: Ἐπειδή ΜΑ = ΜΝ (ἀκτίνες τοῦ κύκλου πού γράψαμε) θά εἶναι

$$\widehat{N}_1 = \widehat{A}. \qquad (1)$$

Ἡ $\widehat{N}_1$ εἶναι ἐξωτερική στό τριγΝΜΓ, ἄρα:

$$\widehat{N}_1 = \widehat{M}_1 + \widehat{\Gamma}_1 \qquad (2)$$

Ἀπό τήν (1) καί ἐπειδή $\widehat{\Gamma}_1 = \frac{\widehat{A}}{2}$, ἡ (2) μᾶς δίδει:

$$\widehat{A} = \widehat{M}_1 + \frac{\widehat{A}}{2} \Rightarrow \widehat{M}_1 = \widehat{A} - \frac{\widehat{A}}{2} = \frac{\widehat{A}}{2} \text{ δηλαδή } \widehat{M}_1 = \widehat{\Gamma}_1 \text{ ἄρα καί } MN = N\Gamma.$$

Διερεύνηση: Γιά νά βρίσκονται τά Μ,Ν στίς πλευρές πρέπει: $\frac{\widehat{A}}{2} < \widehat{\Gamma}$.

---

22. **Δίνονται δύο κύκλοι (Κ), (Λ) πού τέμνονται στά Α καί Β. Νά φέρετε ἀπό τό Α μιά εὐθεία πού νά τέμνει τούς κύκλους στά Ε καί Ζ, ὥστε ΑΕ+ΑΖ = λ, ὅπου λ ἕνα γνωστό τμῆμα.**

Λύση: Ἀνάλυση. Ἔστω ὅτι φέραμε τήν εὐθεία ἀπό τό Α πού τέμνει τούς κύκλους στά Ε,Ζ ὥστε $AE + AZ = \lambda$.

Ἄν φέρουμε τίς $KM \perp EA$ καί $\Lambda N \perp AZ$ παρατηροῦμε ὅτι:

$$EM = MA \quad \text{καί} \quad NA = NZ$$

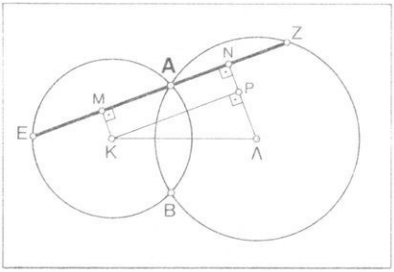
ἄρα, $EZ = EM + MN + NZ = MA + MN + AN = MA + AN + MN \Rightarrow$

$$EZ = 2MN \Rightarrow \lambda = 2 \cdot MN \Rightarrow MN = \frac{\lambda}{2} \qquad (1)$$

Φέρνουμε ἀκόμα τήν $KP \parallel MN$, ὁπότε ἀπό τό παρ/μο ΜΚΡΝ ἔχουμε:

$$KP = MN = \frac{\lambda}{2} \qquad (2)$$

Τώρα παρατηροῦμε ὅτι τό σημεῖο Ρ ἀπέχει ἀπό τό Κ ἀπόσταση $\lambda/2$, ἄρα ἀνήκει στό κύκλο $(K, \lambda/2)$ καί βλέπει τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΚΛ ὑπό ὀρθή γωνία, ἄρα ἀνήκει στό κύκλο μέ διάμετρο τό ΚΛ.



Ἔχοντες τό Ρ, ἡ παράλληλη ἀπό τό Α, πρός τήν ΚΡ μᾶς δίνει τήν ΕΖ.

Σύνθεση: Γράφουμε τό κύκλο μέ διάμετρο ΚΛ, ἔστω αὐτός

$$\left(\Omega, \frac{K\Lambda}{2}\right)$$

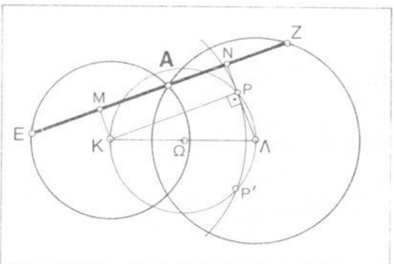
καί τό κύκλο

$$(K, \lambda/2)$$

οἱ ὁποῖοι τέμνονται στό Ρ.

Φέρνουμε τήν ΚΡ καί ἀπό τό Α τήν παράλληλη πρός τήν ΚΡ πού τέμνει τούς κύκλους στά Ε,Ζ.

Ἡ ΕΖ εἶναι ἡ ζητουμένη.



Ἀπόδειξη: Ἡ $K\widehat{P}\Lambda = 1$ ὀρθ., γιατί βαίνει σέ ἡμικύκλιο δηλαδή $\Lambda P \perp KP \Longrightarrow \Lambda P \perp EZ$, ὁπότε $AN = NZ$.

Φέρνουμε καί $KM \perp EZ$ ὁπότε $EM = MA$.

Ἀπό τό παρ/μο ΚΜΝΡ ἔχουμε: $MN = KP = \lambda/2$ (γιατί τό ΚΡ εἶναι ἀκτίνα τοῦ κύκλου $(K, \lambda/2)$.

Ἀλλά $EZ = 2 \cdot MN = 2 \cdot \frac{\lambda}{2} = \lambda$.

Διερεύνηση: Ἄν τό $\lambda/2 < K\Lambda$ ὁ κύκλος $(K, \lambda/2)$ τέμνει σέ δύο σημεῖα Ρ καί Ρ′ τόν κύκλο $\left(\Omega, \frac{K\Lambda}{2}\right)$ ἄρα ἔχουμε δύο λύσεις.

Ἄν $\frac{\lambda}{2} = K\Lambda$ τό Ρ συμπίπτει μέ τό Λ καί ἔχουμε μιά λύση.

Ἄν $\frac{\lambda}{2} > K\Lambda$ ὁ $(K, \lambda/2)$ δέν τέμνει τόν $\left(\Omega, \frac{K\Lambda}{2}\right)$ καί δέν ἔχουμε λύση.

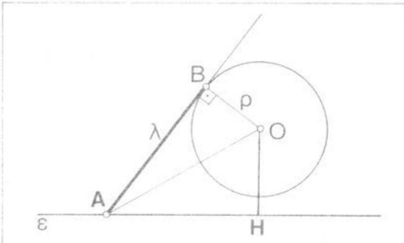
---

23. Δίνονται ἕνας κύκλος (Ο,ρ) καί μία εὐθεία ε. Νά βρεθεῖ πάνω στήν ε ἕνα σημεῖο Α, ὥστε, ἄν φέρουμε τήν ἐφαπτομένη ΑΒ στόν (Ο,ρ), νά εἶναι ΑΒ = λ, ὅπου λ ἕνα γνωστό εὐθ. τμῆμα.

Λύση: Ἀνάλυση: Ἔστω ὅτι τό ζητούμενο σημεῖο Α βρέθηκε ὥστε ἄν φέρουμε τήν ἐφαπτομένη ΑΒ νά εἶναι $AB = \lambda$.

Παρατηροῦμε ὅτι τό τριγ ΟΒΑ εἶναι κατασκευάσιμο, γιατί γνωρίζουμε: $OB = \rho$, $AB = \lambda$ καί ὀρθογώνιο.

Ἄρα καί τό ΟΑ = R εἶναι γνωστό. Ὁπότε τό Α θά ἀνήκει καί στό κύκλο (Ο,R), ὁ ὁποῖος ὅπου τμήσει τήν ε ἔχουμε τό Α.



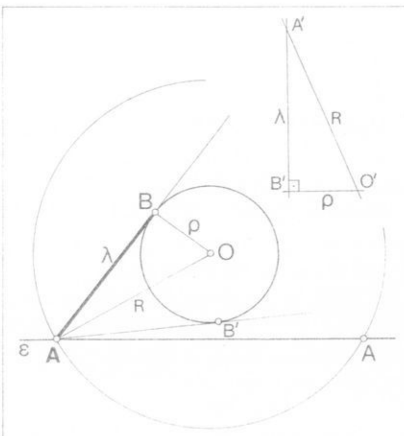
Βοηθητική κατασκευή: Κατασκευάζουμε ὀρθογώνιο τρίγωνο, Ο΄Β΄Α΄ μέ $\widehat{B'} = 90^\circ$,

$O'B' = \rho$,

$A'B' = \lambda$.

Ὁπότε ἡ ὑποτείνουσά του εἶναι γνωστό τμῆμα R.

Σύνθεση: Γράφουμε τό κύκλο (Ο,R) καί ὀνομάζουμε Α τό σημεῖο πού αὐτός τέμνει τήν ε. Ἀπό τό Α φέρνουμε τήν ἐφαπτομένη ΑΒ.



Ἀπόδειξη: Τά τρίγωνα ΑΒΟ καί Α΄Β΄Ο΄ εἶναι ὀρθογώνια καί ἔχουν,

$OB = O'B' = \rho$,

$AO = A'O' = R$

ἄρα εἶναι ἴσα καί ἄρα:

$AB = A'B' = \lambda$.

Διερεύνηση: Ἔστω ΟΗ ⊥ ε τότε:

α) Ἄν R > ΟΗ ὁ κύκλος (Ο,R) θά τέμνει τήν ε σέ δύο σημεῖα Α καί Α΄ καί θά ἔχουμε τέσσερες ἐφαπτόμενες, δηλαδή τέσσερες λύσεις.

β) Ἄν R = ΟΗ ὁ κύκλος (Ο,R) ἐφάπτεται στήν ε καί ἔχουμε ἕνα Α καί ἄρα δύο ἐφαπτόμενες.

γ) Ἄν R < ΟΗ ὁ κύκλος (Ο,R) δέν τέμνει τήν ε καί ἄρα δέν ἔχουμε λύση.

---

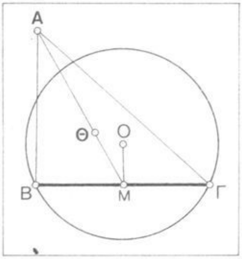
24. Δίνεται ἕνας κύκλος (Ο,ρ), ἕνα σημεῖο Α καί ἕνα σημεῖο Θ ἐσωτερικό τοῦ κδισκ (Ο,ρ). Νά φέρετε μιά χορδή ΒΓ, ὥστε τό τριγΑΒΓ νά ἔχει τό Θ γιά βαρύκεντρο.

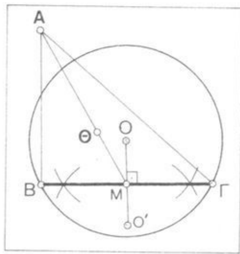
Λύση: Ἀνάλυση: Ἔστω ΒΓ ἡ ζητουμένη χορδή καί τό τριγΑΒΓ ἔχει τό Θ γιά βαρύκεντρο.

Ἄν φέρουμε τήν ΑΘ αὐτή εἶναι διάμεσος καί ἄρα θά περάσει ἀπό τό μέσο Μ τῆς ΒΓ. Ἀκόμα $\Theta M = \frac{1}{2} A\Theta$

Ἀπό αὐτά παρατηροῦμε ὅτι μποροῦμε νά προσδιορίσουμε τό Μ, ὁπότε ἡ χορδή θά εἶναι κάθετη στήν ΟΜ.

Σύνθεση: Στή προέκταση τῆς ΑΘ παίρνουμε τμῆμα $ΘΜ = \frac{1}{2}ΑΘ$. Φέρνουμε τήν ΟΜ καί τήν κάθετη σ᾿ αὐτή στό Μ. Ἡ κάθετη αὐτή χαράσσεται ὡς ἑξῆς: Στή ΟΜ





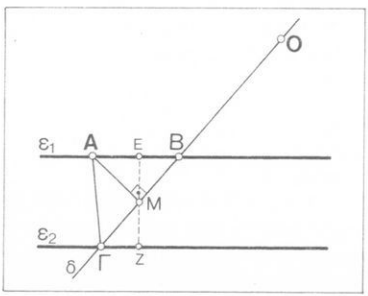
παίρνουμε ΜΟ΄ = ΜΟ καί φέρνουμε τή μεσοκάθετο τοῦ ΟΟ΄ καί ἔχουμε τή χορδή ΒΓ.

Ἀπόδειξη: Ἐπειδή $ΒΓ \perp ΟΜ$ τό Μ εἶναι μέσο τῆς ΒΓ δηλαδή ἡ ΑΜ διάμεσος καί ἐπειδή $ΘΜ = \frac{1}{2}ΑΘ$ τό Θ εἶναι βαρύκεντρο.

Διερεύνηση: Τό Μ πρέπει νά βρεθεῖ στό ἐσωτερικό τοῦ κδισκ (Ο,ρ), ἄρα πρέπει $ΟΜ < ρ$ γιά νά ἔχουμε λύση.

---

25 **Δίδονται δύο παρ/λες εὐθεῖες, $ε_1$,$ε_2$, ἕνα σημεῖο Α τῆς $ε_1$ καί ἕνα σημεῖο Ο ἔξω ἀπό τή ζώνη τῶν $ε_1$, $ε_2$. Νά φέρετε ἀπό τό Ο μιά εὐθεία πού νά τέμνει τίς $ε_1$, $ε_2$ στά Β καί Γ, ὥστε νά εἶναι ΑΒ = ΑΓ.**



Λύση: Ἀνάλυση: Ἔστω δ ἡ ζητούμενη εὐθεία καί εἶναι:

$$ΑΒ = ΑΓ$$

Ἄν πάρουμε τό μέσο Μ τοῦ ΒΓ, τότε παρατηροῦμε τά ἑξῆς

i) Ἐπειδή τό ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές, ἡ $\widehat{ΑΜΟ} = 90°$, πού σημαίνει ὅτι τό Μ ἀνήκει στό κύκλο μέ διάμετρο τό ΑΟ.

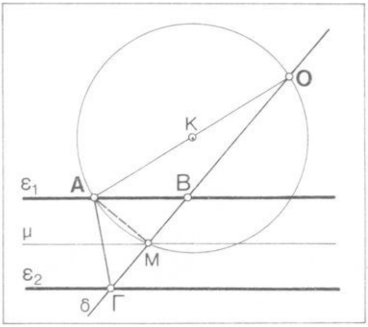
ii) Ἄν φέρουμε $ΕΜΖ \perp ε_1$ ἀπό τά ἴσα τριγ ΕΜΒ καί ΜΓΖ (ἔχουν ΜΒ = ΜΓ, ὀρθογώνια καί $\widehat{ΕΜΒ} = \widehat{ΓΜΖ}$) εἶναι ΜΕ = ΜΖ δηλαδή τό Μ ἰσαπέχει τῶν δύο παραλλήλων, ἄρα (Βιβλίο § 6.7) ἀνήκει στή μεσοπαράλληλό τους.

Ἔτσι μποροῦμε νά προσδιορίσουμε τό Μ καί ἄρα τήν ΟΜ.

Σύνθεση: Γράφουμε τόν κύκλο μέ διάμετρο τό ΑΟ, ἔστω $\left(K, \frac{AO}{2}\right)$ αὐτός.

Φέρνουμε τή μεσοπαράλληλο μ τῶν ε_1, ε_2.

Τό σημεῖο πού τέμνονται ὁ $\left(K, \frac{AO}{2}\right)$ καί ἡ μ εἶναι τό Μ. Φέρνουμε τήν ΟΜ, πού εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεία.



Ἀπόδειξη: Ἡ γωνία $\widehat{AMO} = 90^\circ$, ἄρα $AM \perp B\Gamma$.

Ἐπειδή τό Μ ἀνήκει στή μεσοπαράλληλη μ θά ἰσαπέχει τῶν ε_1, ε_2 καί θά εἶναι ΜΒ = ΜΓ. Ἄρα στό τριγΑΒΓ ἡ ΑΜ εἶναι ὕψος καί διάμεσος, ἐπομένως αὐτό εἶναι ἰσοσκελές καί ἄρα

$$AB = A\Gamma.$$

Διερεύνηση: Ὁ κύκλος $\left(K, \frac{AO}{2}\right)$ καί ἡ μ:

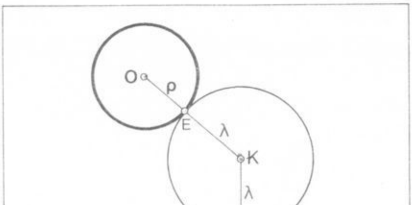
ἤ τέμνονται σέ δύο σημεῖα Μ,Μ′ καί ἔχουμε δύο λύσεις,

ἤ ἐφάπτονται καί ἔχουμε μία λύση,

ἤ δέν τέμνονται καί δέν ἔχουμε λύση.

---

26 **Νά κατασκευαστεῖ ἕνας κύκλος, πού νά ἔχει ἀκτίνα ἕνα δεδομένο τμῆμα λ καί νά ἐφάπτεται σέ μιά δεδομένη εὐθεία καί ἕνα δεδομένο κύκλο (Ο,ρ).**



Λύση: Ἀνάλυση: Ἔστω (Κ,λ) ὁ ζητούμενος κύκλος, πού ἐφάπτεται τοῦ (Ο,ρ) καί τῆς δεδομένης εὐθείας ε.

Παρατηροῦμε ὅτι $OK = \rho + \lambda$ ἄρα τό Κ ἀνήκει στό κύκλο

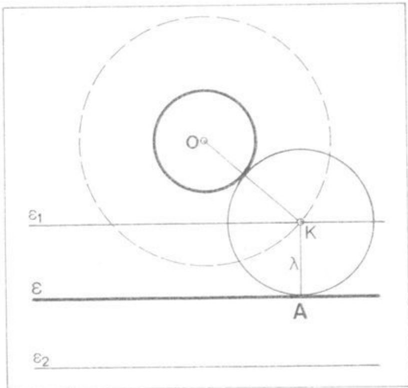
$$(O, \rho + \lambda).$$

Ἐπίσης ἐπειδή $K\Lambda \perp \varepsilon$ καί $K\Lambda = \lambda$ δηλαδή τό Κ ἀπέχει ἀπό τήν ε σταθερή ἀπόσταση, ἄρα θά ἀνήκει σέ εὐθεία παράλληλη πρός τήν ε σέ ἀπόσταση λ (Βιβλίο § 6.6).

Σύνθεση: Γράφουμε τόν κύκλο (Ο,ρ + λ) καί φέρνουμε εὐθεία $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon$ σέ ἀπόσταση λ. Ἡ ε_1 καί ὁ (Ο,ρ+λ) τέμνονται στό Κ. Ὁ κύκλος (Κ,λ) εἶναι ὁ ζητούμενος.

Ἀπόδειξη. Ἐπειδή $OK = \rho + \lambda$ οἱ κύκλοι (Ο,ρ) καί (Κ,λ) ἐφάπτονται. Ἐπίσης ἐπειδή $K\Lambda = \lambda$ ὁ κύκλος (Κ,λ) θά ἐφάπτεται τῆς ε.

Διερεύνηση: Ὑπάρχουν δύο εὐθεῖες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ παρ/λες πρός τήν ε σέ ἀπόσταση λ,



ὁπότε ὁ (O,ρ + λ) μπορεῖ νά τίς τέμνει καί τίς δύο σέ τέσσερα σημεῖα, ἄρα ἔχουμε τό πολύ 4 λύσεις.

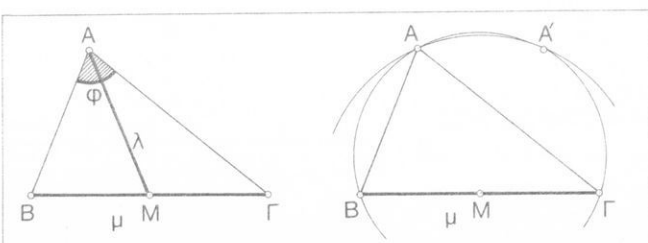
27. **Νά κατασκευαστεῖ ἕνα τριγΑΒΓ ἀπό τά στοιχεῖα:**

α) Τήν πλευρά ΒΓ = μ, τή γωνία $\widehat{A} = \widehat{\varphi}$ καί τή διάμεσο ΑΜ = λ.

β) Τήν πλευρά ΒΓ = μ, τή γωνία $\widehat{A} = \widehat{\varphi}$ καί τή διάμεσο ΒΝ = λ.

γ) Τήν πλευρά ΒΓ = μ, τή γωνία $\widehat{A} = \widehat{\varphi}$ καί τήν ἀκτίνα ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου του κύκλου.

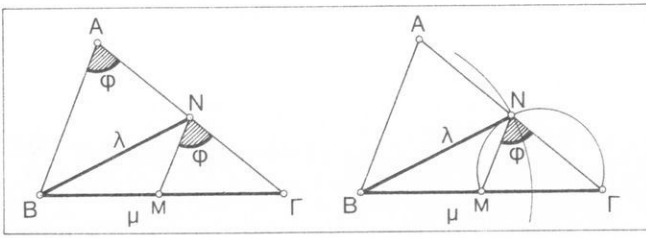
Λύση: α) **Ἀνάλυση:** Ἔστω ΑΒΓ τό ζητούμενο τρίγωνο. Ἐπειδή $\widehat{A} = \widehat{\varphi}$, τό Α βλέ-



πει τό ΒΓ ὑπό σταθερή γωνία, ἄρα θά ἀνήκει σέ τόξο χορδῆς ΒΓ καί γωνίας $\widehat{\varphi}$.
Ἀκόμα ἐπειδή ΑΜ = λ τό Α ἀπέχει ἀπό τό μέσο Μ τοῦ ΒΓ γνωστή ἀπόσταση ἄρα θά ἀνήκει στό κύκλο (Μ, λ).
Ἡ τομή τοῦ τόξου καί τοῦ κύκλου εἶναι τό Α.

Σύνθεση: Παίρνουμε ἕνα τμῆμα ΒΓ = μ, καί βρίσκουμε τό μέσο του Μ. Μέ χορδή ΒΓ καί γωνία $\widehat{\varphi}$ γράφουμε τόξο (Βιβλίο § 8.6) καί τόν κύκλο (Μ,λ). Τό σημεῖο πού τέμνονται ἔχουμε τό σημεῖο Α. Τό ΑΒΓ εἶναι τό ζητούμενο.

Ἀπόδειξη: Τό τριγΑΒΓ ἔχει: ΒΓ = μ, $\widehat{A} = \widehat{\varphi}$ γιατί εἶναι ἐγγεγραμμένη στό τόξο πού γράψαμε μέ γωνία $\widehat{\varphi}$ καί ΑΜ = λ γιατί εἶναι ἀκτίνα τοῦ κύκλου (Μ,λ).



Διερεύνηση: Γιά νά ὑπάρχει λύση πρέπει νά τέμνονται τό τόξο καί ὁ κύκλος. Τό δεύτερο σημεῖο πού τέμνονται, τό Α΄, δίδει τρίγΑ΄ΒΓ ἴσο μέ τό ΑΒΓ καί δέν θεωρεῖται σάν δεύτερη λύση.

β) **Ἀνάλυση:** Ἔστω ΑΒΓ τό ζητούμενο τρίγωνο.

Ἄν Μ εἶναι τό μέσο τῆς ΒΓ, παρατηροῦμε τά ἑξῆς:

Ἐπειδή ΜΝ ∥ ΑΒ ἡ $\widehat{M N \Gamma} = \widehat{A} = \widehat{\varphi}$ δηλαδή τό Ν βλέπει τό ΜΓ ὑπό σταθερή γωνία, ἄρα ἀνήκει σ᾽ ἕνα τόξο χορδῆς ΜΓ καί γωνίας $\widehat{\varphi}$.

Ἐπειδή ΝΒ = λ τό Ν ἀνήκει στό κύκλο (Β,λ). Στή τομή τοῦ τόξου καί τοῦ κύκλου ἔχουμε τό Ν καί παίρνοντας ΝΑ = ΝΓ ἔχουμε τό Α.

Σύνθεση: Παίρνουμε ἕνα τμῆμα ΒΓ = μ καί βρίσκουμε τό μέσο του Μ. Μέ χορδή ΜΓ καί γωνία φ κατασκευάζουμε τόξο. Γράφουμε τό κύκλο (Β,λ). Τό σημεῖο πού τέμνονται τό τόξο καί ὁ κύκλος εἶναι τό Ν. Στή προέκταση τοῦ ΓΝ παίρνουμε τμῆμα ΑΝ = ΓΝ.

Τό τριγ.ΑΒΓ εἶναι τό ζητούμενο.

Ἀπόδειξη: Ἔχει ΒΓ = μ. Ἐπειδή ΜΝ ∥ ΑΒ εἶναι $\widehat{A} = \widehat{M N \Gamma} = \widehat{\varphi}$ γιατί ἡ $\widehat{M N \Gamma}$ εἶναι ἐγγεγραμμένη στό τόξο πού γράψαμε μέ γωνία $\widehat{\varphi}$. Τέλος ἡ διάμεσος ΒΝ = λ γιατί τό Ν ἀνήκει στό κύκλο, πού γράψαμε μέ ἀκτίνα λ.

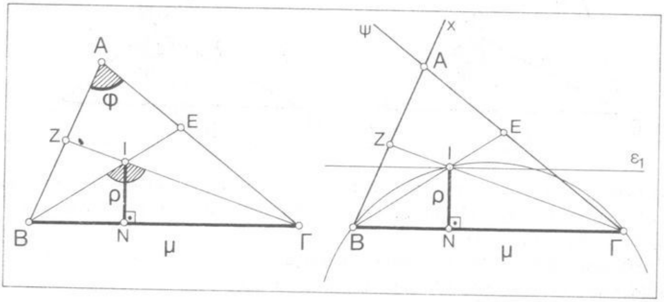
Διερεύνηση: Πρέπει τό τόξο καί ὁ κύκλος (Β,λ) νά τέμνονται.

γ) **Ἀνάλυση:** Ἔστω ΑΒΓ τό ζητούμενο τρίγωνο. Ὁ ἐγγεγραμμένος κύκλος ἔχει κέντρο τό σημεῖο τομῆς τῶν διχοτόμων (ἔγκεντρο) καί ἄν ΙΝ ⊥ ΒΓ τότε ΙΝ = ρ.

Ἀκόμα γνωρίζουμε (βιβλίο § 5.13 ἐφαρμ. 3) ὅτι $\widehat{B I \Gamma} = 90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2} = 90^\circ + \frac{\widehat{\varphi}}{2}$.

Γιά τό Ι παρατηροῦμε λοιπόν ὅτι: βλέπει τό ΒΓ ὑπό σταθερή γωνία $90^\circ + \frac{\widehat{\varphi}}{2}$, ἄρα ἀνήκει στό τόξο χορδῆς ΒΓ καί γωνίας $90^\circ + \frac{\widehat{\varphi}}{2}$. Ἐπίσης ἀπέχει ἀπό τή ΒΓ

σταθερή ἀπόσταση ρ, ἄρα ἀνήκει σέ εὐθεία παράλληλη πρός τή ΒΓ σέ ἀπόσταση ρ. Ἔχοντας τό Ι σχηματίζουμε γωνίες $\widehat{ZBI} = \widehat{IB\Gamma}$ καί $\widehat{E\Gamma I} = \widehat{I\Gamma B}$ καί ἔχουμε τό Α.
Σύνθεση: Παίρνουμε ἕνα τμῆμα $B\Gamma = \mu$ καί γράφουμε τόξο χορδῆς ΒΓ καί γωνίας $90^\circ + \frac{\widehat{\varphi}}{2}$. Φέρνουμε παράλληλη ε_1 σέ ἀπόσταση ρ. Τό τόξο καί ἡ εὐθεία τέμνονται στό Ι. Σχηματίζουμε γωνίες $\widehat{XBI} = \widehat{IB\Gamma}$ καί $\widehat{\Psi\Gamma I} = \widehat{I\Gamma B}$ πού τέμνονται στό Α. Τό τριγ.ΑΒΓ εἶναι τό ζητούμενο.
Ἀπόδειξη: Τό τριγΑΒΓ, ἔχει $B\Gamma = \mu$. Ἐπειδή οἱ ΒΙ καί ΓΙ εἶναι διχοτόμοι τό Ι



εἶναι ἔγκεντρο καί ἡ ἀπόσταση $IN = \rho$, δηλαδή ἡ ἀκτίνα τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου. Τέλος γιά τή γωνία $\widehat{A}$ ἔχουμε: ἡ $\widehat{BI\Gamma} = 90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2}$ ἀφοῦ τό Ι εἶναι ἔγκεντρο, ἀλλά καί $\widehat{BI\Gamma} = 90^\circ + \frac{\widehat{\varphi}}{2}$ ἐπειδή εἶναι ἐγγεγραμμένη στό τόξο, ἄρα

$$90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2} = 90^\circ + \frac{\widehat{\varphi}}{2} \Rightarrow \widehat{A} = \widehat{\varphi}.$$

Διερεύνηση: Πρέπει $\widehat{A} = \widehat{\varphi} < 180^\circ$ καί τό τόξο καί ἡ ε_1 νά τέμνονται.

28 **Νά κατασκευαστεῖ ἕνα τριγΑΒΓ ἀπό τά στοιχεῖα:**

α) Τό ὕψος $A\Delta = \lambda$, τή διχοτόμο $AE = \mu$ καί τή διάμεσο $AM = \kappa$.

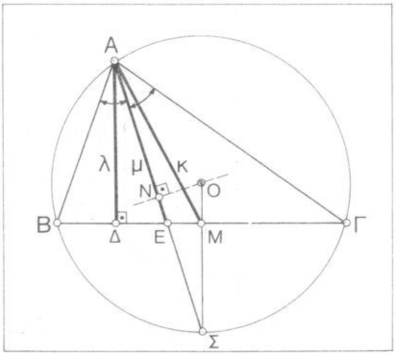
β) Τό ὕψος $A\Delta = \lambda$, τή διχοτόμο $AE = \mu$ καί τήν ἀκτίνα R τοῦ περιγεγραμμένου του κύκλου (Ο).

Λύση: α) **Ἀνάλυση:** Ἔστω ΑΒΓ τό ζητούμενο τρίγωνο, πού ἔχει τά στοιχεῖα πού μᾶς ἔδωσαν.
Ἄν θεωρήσουμε τόν περιγεγραμμένο κύκλο του (O,R) καί φέρουμε τήν $OM \perp B\Gamma$, τότε παρατηροῦμε τά ἑξῆς:
Τό τριγΑΔΕ εἶναι κατασκευάσιμο (ὀρθογώνιο καί $A\Delta = \lambda$, $AE = \mu$) καί ὁ κύκλος (A,k) θά τμήσει τή ΒΓ στό μέσο της Μ.

Ἡ ΟΜ θά περάσει ἀπό τό μέσο Σ τοῦ τόξου ΒΓ ἀπό τό ὁποῖο θά περάσει καί ἡ διχοτόμος ΑΕ.

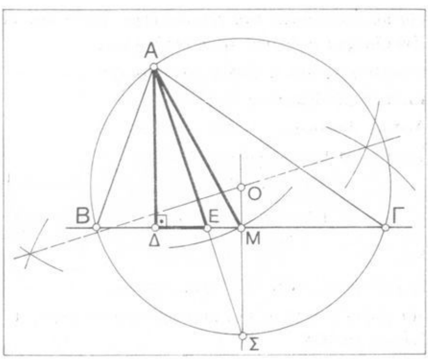
Τό Ο λοιπόν προσδιορίζεται: εἶναι ἡ τομή τῆς καθέτου στό Μ στή ΒΓ καί τῆς μεσοκαθέτου τῆς ΑΣ.

Ἔχοντες τό Ο, ὁ κύκλος (Ο,ΟΑ) θά μᾶς δώσει τά Β,Γ.



Σύνθεση: Κατασκευάζουμε τό ὀρθογώνιο τριγ.ΑΔΕ μέ ΑΔ = λ καί ΑΕ = μ. Γράφουμε τό κύκλο (Α,k) πού τέμνει τήν ΔΕ στό Μ. Φέρνουμε τήν κάθετη στή ΒΓ στό Μ πού τέμνει τήν προέκταση τῆς ΑΕ στό Σ. Στή συνέχεια φέρνουμε τήν μεσοκάθετο τοῦ ΑΣ πού τέμνει τήν ΜΣ στό Ο. Τέλος γράφουμε τό κύκλο (Ο,ΟΑ) πού τέμνει τήν ΔΕ στά Β καί Γ. Τό ΑΒΓ εἶναι τό ζητούμενο.

Απόδειξη: Τό ΑΔ εἶναι ὕψος καί λ. Ἐπειδή ΟΜ ⊥ ΒΓ τό Σ θά εἶναι μέσο τοῦ τόξου, ἄρα ἡ ΑΕ διχοτόμος καί τήν πήραμε μ. Τέλος ἐπειδή ΟΜ ⊥ ΒΓ τό Μ εἶναιτό μέσο τοῦ ΒΓ, ἄρα ἡ ΑΜ διάμεσος καί εἶναι καί k.



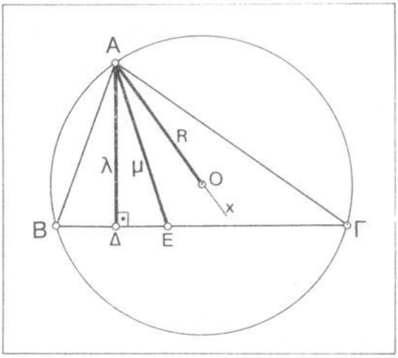
Διερεύνηση: Γιά νά ἔχει λύση τό πρόβλημα πρέπει: ΑΔ < ΑΕ < ΑΜ δηλ. $\lambda < \mu < k$ (βιβλίο, ἄσκηση 18, IV τῆς § 5.15).

β) **Ἀνάλυση:** Ἔστω ΑΒΓ τό ζητούμενο τρίγωνο πού ἔχει τά στοιχεῖα πού μᾶς ἔδωσαν. Παρατηροῦμε, ὅτι τό τριγΑΔΕ εἶναι κατασκευάσιμο (ὀρθογώνιο, ΑΔ = λ καί ΑΕ = μ).

Γνωρίζουμε ὅτι (βιβλίο, § 8.12 ἄσκ. 9) ἡ $\widehat{\Delta A E} = \widehat{E A O}$. Μποροῦμε λοιπόν νά σχηματίσουμε μέ κορυφή τό Α καί πλευρά ΑΕ γωνία ἴση μέ τήν $\widehat{\Delta A E}$ καί στήν ἄλλη της πλευρά παίρνουμε τμῆμα ΑΟ = R ὁπότε ἔχουμε τό Ο. Ὁ κύκλος (Ο,R) θά μᾶς δώσει τά Β καί Γ.

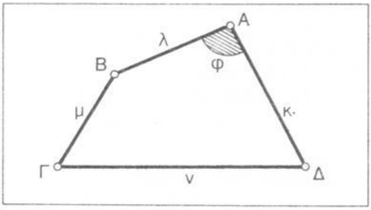
Σύνθεση: Κατασκευάζουμε τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΔΕ, μέ ΑΔ = λ καί ΑΕ = μ. Κατασκευάζουμε γωνία $\widehat{XAE} = \widehat{\Delta A E}$ καί στήν ΑΧ παίρνουμε τμῆμα ΑΟ = R. Τέλος γράφουμε τό κύκλο (Ο,ΟΑ = R) καί ἐκεῖ πού θά τμήσει τήν ΔΕ ἔχουμε τά Β καί Γ. Τό τρίγ. ΑΒΓ εἶναι τό ζητούμενο.

Απόδειξη: Τό ΑΔ είναι ΰψος καί λ. Ή άκτίνα ΟΑ = R. Ή ΑΕ έπειδή διχοτομεῖ



τήν ΔΑΟ είναι καί διχοτόμος τῆς $\widehat{A}$ καί έχει μῆκος μ.
Διερεύνηση: Γιά νά έχει τό πρόβλημα λύση, πρέπει, ΑΔ $\leqslant$ ΑΕ δηλαδή λ $\leqslant$ μ.

29. **Νά κατασκευαστεῖ ἕνα τετράπλευρο ΑΒΓΔ πού οἱ πλευρές του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ νά εἶναι ἴσες μέ δεδομένα τμήματα λ,μ,ν,κ, ἀντιστοίχως καί ἡ γωνία του Α νά εἶναι ἴση μέ δεδομένη γωνία $\widehat{\varphi}$.**



Λύση: **Ἀνάλυση:** Ἔστω ΑΒΓΔ τό ζητούμενο τετράπλευρο πού ἔχει:

$$AB = \lambda,\quad B\Gamma = \mu,$$
$$\Gamma\Delta = \nu,\quad \Delta A = k$$

καί $\widehat{A} = \widehat{\varphi}$.

Παρατηροῦμε ὅτι ἄν σχηματίσουμε μιά γωνία ἴση μέ $\widehat{\varphi}$ καί πάρουμε στίς πλευρές της τμήματα ΑΒ = λ καί ΑΔ = k ἔχουμε τά Β,Δ.

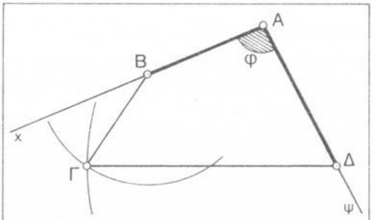
Ὁπότε τό Γ βρίσκεται στήν τομή τῶν κύκλων (Β,μ) καί (Δ,ν).

Σύνθεση: Μέ κορυφή ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Α κατασκευάζουμε γωνία

$$\widehat{XA\Psi} = \widehat{\varphi}$$

στίς πλευρές της παίρνουμε τά τμήματα ΑΒ = λ καί ΑΔ = k.

Στή συνέχεια γράφουμε τούς κύκλους (Β,μ) καί (Δ,ν) πού ἡ τομή τους εἶναι τό Γ. Ἔτσι τό ΑΒΓΔ εἶναι τό ζητούμενο.

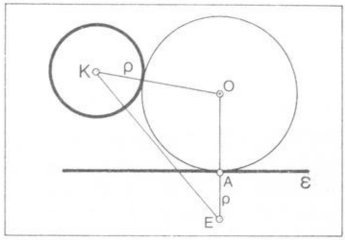


Ἀπόδειξη: Ἔχει τά στοιχεῖα πού μᾶς ἔδωσαν.

Διερεύνηση: Ἐπειδή τό ζητούμενο τετράπλευρο πρέπει νά εἶναι κυρτό, πρέπει $\widehat{\varphi} < 2$ὀρθ. Ἀκόμα πρέπει οἱ κύκλοι (Β,μ), (Δ,ν) νά τέμνονται.

---

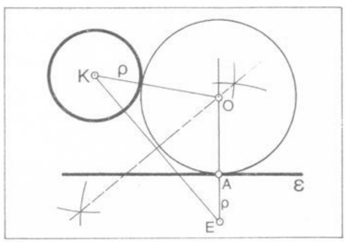
30. **Δίδονται μία εὐθεία ε, ἕνα σημεῖο της Α καί ἕνας κύκλος (Κ,ρ). Νά κατασκευαστεῖ ἕνας κύκλος πού νά ἐφάπτεται στήν ε στό Α καί νά ἐφάπτεται στόν (Κ, ρ).**



Λύση: **Ἀνάλυση:** Ἔστω (Ο) ὁ κύκλος πού ἐφάπτεται τοῦ (Κ,ρ) καί τῆς ε στό Α. Παρατηροῦμε ὅτι ἡ ΟΑ $\perp$ ε, ἄρα εἶναι γνωστή εὐθεία ἡ ΟΑ.

Ἄν τώρα πάρουμε στήν ΟΑ τμῆμα ΑΕ = ρ θά εἶναι ΟΚ = ΟΕ, δηλαδή τό Ο ἀνήκει στή μεσοκάθετο τοῦ ΚΕ. Ἔχοντας τό Ο καί τήν ἀκτίνα ΟΑ μποροῦμε νά γράψουμε τό ζητούμενο κύκλο.

Σύνθεση: Φέρνουμε τήν ΑΧ $\perp$ ε. Παίρνουμε σ' αὐτή τμῆμα ΑΕ = ρ. Στή συνέχεια φέρνουμε τή μεσοκάθετο τοῦ ΚΕ πού τέμνει τήν ΑΧ στό Ο. Ὁ κύκλος (Ο,ΟΑ) εἶναι ὁ ζητούμενος.



Ἀπόδειξη: Ἐπειδή ε $\perp$ ΟΑ στό Α ἡ ε ἐφάπτεται τοῦ (Ο,ΟΑ). Ἐπειδή

$$OK = OE = OA + \rho$$

οἱ κύκλοι (Ο,ΟΑ) καί (Κ,ρ) ἐφάπτονται.

Διερεύνηση: Γιά νά ἔχουμε λύση δέν πρέπει τό Κ νά ἀνήκει στήν εὐθεία πού εἶναι παρ/λη πρός τήν ε ἀπό τό Ε.

Ὑπάρχει καί μιά δεύτερη λύση ὅταν πάρουμε στήν ΟΑ καί Ε' πού εἶναι ΑΕ' = ρ.

---

31. **Νά κατασκευαστεῖ ἕνα τετράγωνο ΑΒΓΔ ἀπό τά στοιχεῖα:**

α) Τό ἄθροισμα τῆς πλευρᾶς καί τῆς διαγωνίου.

β) Ἡ ἀπόσταση τοῦ μέσου μιᾶς πλευρᾶς ἀπό μία διαγώνιο νά εἶναι δεδομένη λ.

Λύση: α) **Ἀνάλυση.** Ἔστω ΑΒΓΔ τό ζητούμενο τετράγωνο πού ἔχει, ΑΔ + ΔΒ = λ ὅπου λ γνωστό εὐθύγραμμο τμῆμα.

Στή προέκταση τῆς ΒΔ παίρνουμε τμῆμα ΔΕ = ΔΑ, τότε

$$ΒΕ = ΒΔ + ΔΕ = ΒΔ + ΔΑ = λ$$

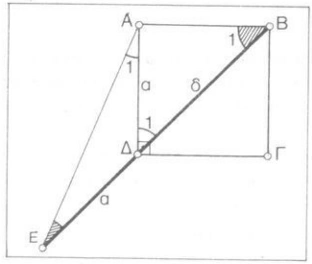
δηλ. δημιουργήσαμε τό ἄθροισμα πού μᾶς ἔδωσαν.

Τώρα παρατηροῦμε ὅτι: $\widehat{B_1} = 45^\circ$.

Ἐπειδή ἡ $\widehat{\Delta_1} = 45^\circ$ εἶναι ἐξωτερική στό ἰσοσκελές τριγΑΔΕ ἔχουμε:

$$\widehat{\Delta_1} = \widehat{A_1} + \widehat{E} \Rightarrow \widehat{\Delta_1} = 2 \cdot \widehat{E} \Rightarrow \widehat{E} = \frac{\widehat{\Delta_1}}{2} = \frac{45^\circ}{2} = 22{,}5^\circ.$$

Ἔτσι τό τριγΑΕΒ εἶναι κατασκευάσιμο, γιατί γνωρίζουμε

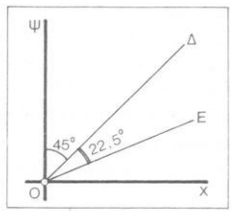


$$EB = \lambda, \quad \widehat{B_1} = 45^\circ, \quad \widehat{E} = 22{,}5^\circ$$

Κατασκευάζοντας τό τριγΑΕΒ, ἔχουμε τήν πλευρά ΑΒ τοῦ τετραγώνου καί ἀπ' αὐτή τό τετράγωνο.

Βοηθητική κατασκευή: Ἡ γωνία τῶν 45° καί 22,5° κατασκευάζονται ἄν διχοτομήσουμε τήν ὀρθή γωνία καί ξανά τή γωνία τῶν 45°.

Σύνθεση: Κατασκευάζουμε μιά ὀρθή γωνία $\widehat{X B \Psi}$ καί τήν διχοτομοῦμε. Στή διχοτόμο παίρνουμε τμῆμα ΒΕ = λ. Μέ κορυφή τό Ε καί πλευρά τήν ΕΒ σχηματίζουμε γωνία 22,5° τῆς ὁποίας ἡ ἄλλη πλευρά τέμνει τήν ΒΧ στό Α. Στό Α φέρνουμε κάθετο στήν ΒΧ πού τέμνει τήν ΒΕ στό Δ.



Τέλος ἀπό τό Δ φέρνουμε ΔΓ ∥ ΑΒ.

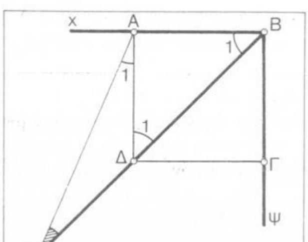
Τό ΑΒΓΔ εἶναι τό ζητούμενο.

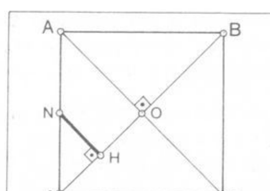
Ἀπόδειξη: Ἐπειδή ΑΒ ∥ ΔΓ καί ΑΔ ∥ ΒΓ καί $\widehat{B} = 90^\circ$ τό ΑΒΓΔ εἶναι ὀρθογώνιο. Καί ἐπειδή ἀκόμα ἡ ΒΔ διχοτομεῖ τήν $\widehat{B}$ εἶναι τετράγωνο.

Ἐπειδή $\widehat{\Delta_1} = 45^\circ$ καί $\widehat{\Delta_1} = \widehat{A_1} + E \Rightarrow 45^\circ = \widehat{A_1} + 22{,}5^\circ \Rightarrow \widehat{A_1} = 22{,}5^\circ$ δηλαδή τό ΑΔΕ ἰσοσκελές, ἄρα ΑΔ = ΔΕ.

Ὁπότε: ΑΔ + ΔΒ = ΕΔ + ΔΒ = ΕΒ = λ.

Διερεύνηση: Τό πρόβλημα ἔχει πάντα λύση.





β) **Ἀνάλυση:** Ἔστω ΑΒΓΔ τό ζητούμενο τετράγωνο, πού ἡ ΝΗ = λ, ὅπου Ν τό μέσο τῆς ΑΔ καί ΝΗ ⊥ ΔΒ.

Ἐπειδή οἱ διαγώνιες τέμνονται κάθετα, θά εἶναι ΝΗ || ΑΓ, ὁπότε ἀπό τό τριγΑΔΟ ἡ ΝΗ εἶναι παρ/λη πρός τήν ΑΟ καί διέρχεται ἀπό τό μέσο μιᾶς πλευρᾶς, ἄρα:

$$ΑΟ = 2 \cdot ΝΗ = 2λ. \text{ Καί ἄρα } ΑΓ = 2 \cdot ΑΟ = 4λ.$$

Δηλαδή οἱ διαγώνιες τοῦ τετραγώνου εἶναι γνωστές, ἄρα μποροῦμε νά τό κατασκευάσουμε.

Σύνθεση: Φέρνουμε δύο εὐθεῖες κάθετες πού τέμνονται στό Ο. Πάνω σ᾽ αὐτές παίρνουμε: ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ = ΟΔ = 2λ.

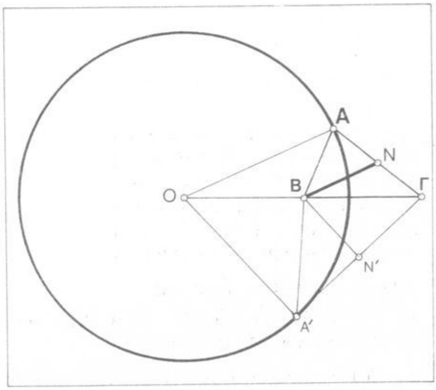
Τό ΑΒΓΔ εἶναι τό ζητούμενο τετράγωνο.

Ἀπόδειξη: Ἐπειδή οἱ διαγώνιες διχοτομοῦνται, εἶναι ἴσες καί τέμνονται κάθετα εἶναι τετράγωνο. Ἀκόμα ἄν φέρουμε ΝΗ ⊥ ΒΔ τότε $ΝΗ = \frac{ΑΟ}{2} = \frac{2λ}{2} = λ$.

Διερεύνηση: Τό πρόβλημα ἔχει πάντα λύση.

---

32. **Τριγώνου ΑΒΓ οἱ κορυφές Β,Γ εἶναι δύο ὁρισμένα σημεῖα καί ἡ κορυφή Α κινεῖται, ὥστε ἡ διάμεσος ΒΝ νά εἶναι ἴση μέ ἕνα ὁρισμένο τμῆμα λ. Νά βρεθεῖ ὁ γ.τ. τῆς κορυφῆς Α.**



Λύση: Ἄς θεωρήσουμε μιά θέση τῆς κορυφῆς Α, ὅπου τοῦ τριγώνου ΑΒΓ οἱ κορυφές Β καί Γ εἶναι σταθερές καί ἡ διάμεσος ΒΝ = λ.

Ἄν στή προέκταση τοῦ ΒΓ πάρουμε τμῆμα ΒΟ = ΒΓ τότε παρατηροῦμε τά ἑξῆς: Τό Ο εἶναι ὁρισμένο σημεῖο. Στό τριγΑΓΟ ἡ ΒΝ συνδέει τά μέσα δύο πλευρῶν, ἄρα

$$ΟΑ = 2 \cdot ΒΝ = 2\,λ$$

Ἄρα τό Α ἀπέχει ἀπό τό σταθερό σημεῖο Ο σταθερή ἀπόσταση 2λ· ἄρα ὁ γ.τ. ἀνήκει στόν κύκλο (Ο,2λ). Γιά τό ἀντίστροφο, ἄς πάρουμε ἕνα σημεῖο Α′ στόν κύκλο (Ο,2λ), ἄς σχηματίσουμε τό τρίγωνο Α′ΒΓ καί ἄς φέρουμε τή διάμεσο ΒΝ′. Ἀπό τό τριγΟΓΑ′ ἔχουμε

$$ΒΝ' = \frac{ΟΑ'}{2} = \frac{2λ}{2} = λ$$

Ἄρα γ.τ. τῆς κορυφῆς Α εἶναι ὁ κύκλος (Ο,2λ).

33. **Δίνεται κύκλος (Ο,ρ) καί χορδή του ΑΒ. Σημεῖο Γ γράφει τόν κύκλο καί σέ κάθε θέση του πάνω στήν ΑΓ παίρνουμε τό σημεῖο Ρ ἔτσι, ὥστε ΑΡ = ΓΒ. Νά βρεθεῖ ὁ γ.τ. τοῦ Ρ.**

Λύση: Ἔστω μιά θέση τοῦ Γ καί τό σημεῖο Ρ τοῦ ΑΓ γιά τό ὁποῖο ἔχουμε ΑΡ = ΓΒ. Παρατηροῦμε ὅτι ὅταν τό Γ κινούμενο στό κύκλο (Ο,ρ) ἔρθει στό Α ἡ ΑΓ θά γίνει ἡ ἐφαπτομένη ΑΧ, πού εἶναι ὁρισμένη.

Παίρνουμε λοιπόν πάνω στήν ἐφαπτομένη ΑΧ τμῆμα ΑΕ = ΑΒ, ὁπότε τό Ε εἶναι σταθερό σημεῖο. Τά τρίγωνα ΑΓΒ καί ΑΡΕ ἔχουν:

i) ΒΓ = ΑΡ ἀπό τήν ὑπόθεση

ii) ΑΒ = ΑΕ ἀπό κατασκευή

iii) $\widehat{ΓΒΑ} = \widehat{ΓΑΕ}$, γιατί ἡ μία εἶναι ἐγγεγραμμένη καί ἡ ἄλλη ἀπό χορδή καί ἐφαπτομένη.

Ἄρα τριγΑΓΒ = ΑΡΕ καί ἐπομένως

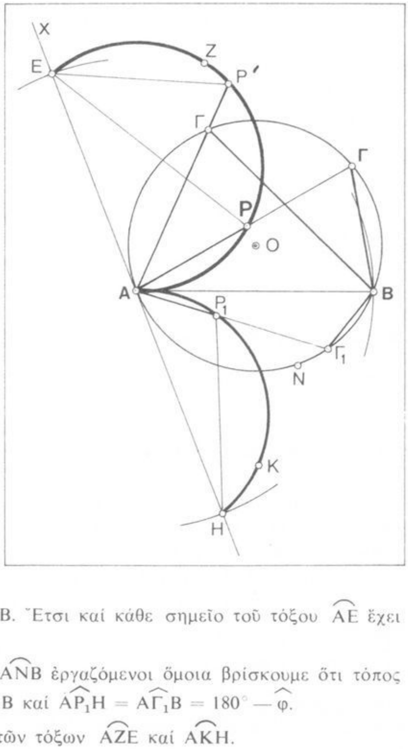
$$\widehat{ΑΡΕ} = \widehat{ΑΓΒ} = \text{σταθερή } (= \widehat{φ})$$

γιατί $\widehat{φ} = \dfrac{\widehat{ΑΝΒ}}{2}$ πού τό $\widehat{ΑΝΒ}$ εἶναι σταθερό.

Ἐπομένως τό Ρ βλέπει τό σταθερό εὐθ. τμῆμα ΑΕ ὑπό σταθερή γωνία $\widehat{φ}$, ἄρα ὁ γ.τ. θά ἀνήκει στό τόξο χορδῆς ΑΕ καί γωνίες $\widehat{φ}$.

Γιά τό ἀντίστροφο παίρνουμε ἕνα σημεῖο Ρ΄ στό τόξο πού βρήκαμε, φέρνουμε τήν ΑΡ΄ πού τέμνει τόν (Ο,ρ) στό Γ΄, πρέπει νά ἀποδείξουμε ὅτι: ΑΡ΄ = Γ΄Β·

Πράγματι τριγΑΒΓ΄ = τριγΑΡ΄Ε



(ΑΕ = ΑΒ, $\widehat{ΑΒΓ΄} = \widehat{ΕΑΡ΄}$ καί $\widehat{ΑΓ΄Β} = \widehat{ΑΡ΄Ε} = \widehat{φ}$) ἄρα ΑΡ΄ = Γ΄Β. Ἔτσι καί κάθε σημεῖο τοῦ τόξου $\widehat{ΑΕ}$ ἔχει τήν ἰδιότητα πού μᾶς ἔθεσαν.

Ἄν τό Γ κινεῖται στό ἄλλο τόξο $\widehat{ΑΝΒ}$ ἐργαζόμενοι ὅμοια βρίσκουμε ὅτι τόπος εἶναι τό τόξο $\widehat{ΑΗΚ}$ ὅπου ΑΗ = ΑΒ καί $\widehat{ΑΡ_1Η} = \widehat{ΑΓ_1Β} = 180^\circ - \widehat{φ}$.

Ἄρα ὁ γ.τ. τοῦ Ρ εἶναι ἡ ἕνωση τῶν τόξων $\widehat{ΑΖΕ}$ καί $\widehat{ΑΚΗ}$.

---

34 **Δίνεται κύκλος (Ο,ρ) καί μία διάμετρός του ΑΒ. Σημεῖο Γ γράφει τόν κύκλο καί φέρνουμε ΓΔ ⊥ ΑΒ. Νά βρεθεῖ ὁ γ.τ. τοῦ ἐγκέντρου Ι τοῦ τριγΟΓΔ.**

Λύση: Φέρνουμε καί τή διάμετρο ΗΖ ⊥ ΑΒ καί θά ἐξετάσουμε τίς περιπτώσεις πού τό Γ κινεῖται σέ καθένα ἀπό τά τεταρτοκύκλια $\widehat{ΗΒ}$, $\widehat{ΒΖ}$, $\widehat{ΖΑ}$, $\widehat{ΑΗ}$.

Γιά νά βροῦμε τό ἔγκεντρο τοῦ τριγΟΓΔ πρέπει νά φέρουμε τίς διχοτόμους τῶν γωνιῶν του.

Ἔστω ΟΕ ἡ μία διχοτόμος. Παρατηροῦμε ὅτι ἄν φέρουμε τήν ΓΖ θά εἶναι:

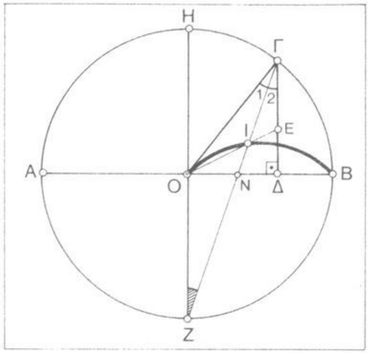
$$\widehat{Γ}_1 = \widehat{Ζ} \text{ (γιατί ΟΓ = ΟΖ) καί } \widehat{Γ}_2 = \widehat{Ζ} \text{ (γιατί ΓΔ} \parallel \text{ΟΖ)}$$

ἄρα $\widehat{\Gamma_1} = \widehat{\Gamma_2}$, δηλαδή ἡ ἄλλη διχοτόμος εἶναι ἡ ΓΝΖ, πού περνάει ἀπό τό ὁρισμένο σημεῖο Ζ.

Γνωρίζουμε (Βιβλίο § 5.13 ἐφαρμ. 3) ὅτι

$$\widehat{OI\Gamma} = 90^\circ + \frac{\widehat{\Delta}}{2} = 90^\circ + 45^\circ = 135$$

$$\text{ἄρα } \widehat{OIZ} = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ.$$



Τό Ι λοιπόν βλέπει τό σταθερό εὐθύγραμμο τμῆμα ΟΖ ὑπό σταθερή γωνία 45°, ἄρα ὁ γ.τ. ἀνήκει στό τόξο χορδῆς ΟΖ καί γωνίας 45°.

Σημ. Ἐπειδή $\widehat{OBZ} = 45^\circ$ τό τόξο αὐτό θά περάσει καί ἀπό τό Β.

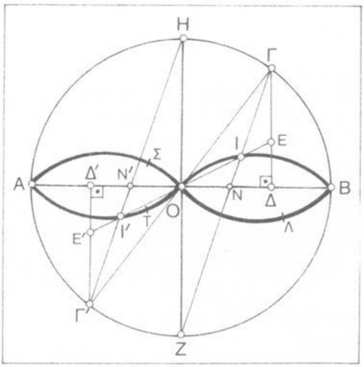
Κατασκευάζουμε λοιπόν τό τόξο χορδῆς ΟΖ καί γωνίας 45°.

Ὅμοια ὅταν τό Γ κινεῖται στά ἄλλα τεταρτοκύκλια τό ἔγκεντρο Ι θά κινεῖται στ' ἀντίστοιχα τόξα $\widehat{O\Lambda B}$, $\widehat{OTA}$ καί $\widehat{O\Sigma A}$.

Γιά τό ἀντίστροφο, ἄς πάρουμε ἕνα σημεῖο Ι' στό τόξο $\widehat{ATO}$, θά δείξουμε ὅτι αὐτό εἶναι τό ἔγκεντρο ἑνός τριγώνου ΟΓ'Δ'. Φέρνουμε τήν ΗΙ' πού τέμνει τόν (Ο,ρ) στό Γ' καί τήν Γ'Δ' ⊥ ΟΑ.

Ἡ $\widehat{HI'O} = 45^\circ$, ἀπό κατασκευή, ἄρα

$\widehat{\Gamma' I' O} = 135^\circ$ καί ἐπειδή Γ'Ι'Ν' διχοτόμος τό Ι' εἶναι τό ἔγκεντρο τοῦ τριγΟΓ'Δ'.



Ἄρα ὁ γ.τ. τοῦ Ι εἶναι ἡ ἕνωση τῶν τεσσάρων τόξων:

ΟΙΒ, ΒΛΟ, ΟΤΑ, ΑΣΟ.

35. **Ἕνα τετράπλευρο ΑΒΓΔ ἔχει τίς κορυφές του Α,Β,Γ τρία ὁρισμένα σημεῖα. Ἡ κορυφή του Δ κινεῖται ἔτσι, ὥστε ἡ πλευρά ΓΔ νά εἶναι ἴση μέ ὁρισμένο τμῆμα λ. Νά βρεθεῖ ὁ γ.τ. α) Τοῦ μέσου τῆς διαγωνίου ΒΔ, β) τοῦ μέσου τοῦ εὐθ. τμήματος ΕΖ πού ἑνώνει τά μέσα τῶν διαγωνίων.**

Λύση: α) Ἔστω μία θέση τῆς κορυφῆς Δ πού εἶναι ΓΔ = λ, καί Ν τό μέσο τῆς ΒΔ, τοῦ ὁποίου ζητᾶμε τό γεωμετρικό τόπο.

Ἄν Ο τό μέσο τοῦ ΒΓ, πού εἶναι ὁρισμένο, ἀπό τό τριγΒΔΓ ἔχουμε

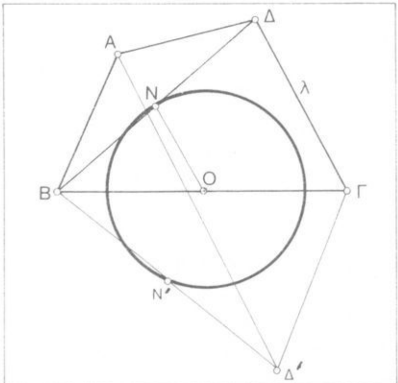
$$ON = \frac{\Gamma\Delta}{2} = \frac{\lambda}{2}.$$

Ἔτσι τό Ν ἀπέχει ἀπό τό σταθερό σημεῖο Ο σταθερή ἀπόσταση λ/2, ἄρα ὁ γ.τ. ἀνήκει στό κύκλο (Ο,λ/2).

Ἔστω Ν΄ ἕνα σημεῖο τοῦ (Ο, λ/2). Φέρνουμε τήν ΒΝ΄ καί παίρνουμε τμῆμα Ν΄Δ΄ = ΒΝ΄. Σχηματίστηκε τό (μή κυρτό) τετράπλευρο ΑΒΓΔ΄.

Ἀπό τό τρίγωνο ΒΓΔ΄ ἔχουμε:

$$Γ Δ' = 2 \cdot ΟΝ' = 2 \cdot λ/2 = λ.$$



Δηλαδή τό ΑΒΓΔ΄ ἔχει τή πλευρά του ΓΔ΄ = λ.

Ἄρα γ.τ. τοῦ Ν εἶναι ὁ κύκλος (Ο,λ/2).

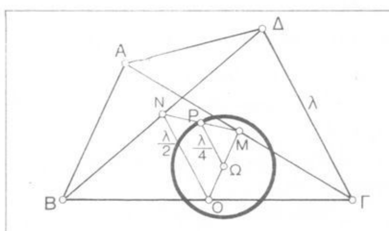
β) Ἄς εἶναι Ν καί Μ τά μέσα τῶν ΒΔ καί ΑΓ καί Ρ τό μέσο τοῦ ΝΜ. Τό Μ εἶναι σταθερό σημεῖο (γιατί εἶναι σταθερά καί τά Α καί Γ) καί τό ΟΝ = λ/2.

Ἄν Ω εἶναι τό μέσο τοῦ ΜΟ, ἀπό τό τριγ.ΝΜΟ ἔχουμε $ΩΡ = \frac{ΟΝ}{2} = \frac{λ}{4}$.

Ἄρα ὁ γ.τ. τοῦ Ρ ἀνήκει στό κύκλο (Ω, λ/4).

Γιά τό ἀντίστροφο, θά πάρουμε ἕνα σημεῖο Ρ΄ τοῦ κύκλου (Ω, λ/4), θά φέρουμε τήν ΜΡ΄ καί θά πάρουμε σ᾽ αὐτή τμῆμα Ρ΄Ν΄ = Ρ΄Μ. Τέλος θά φέρουμε τήν ΒΝ΄ καί θά πάρουμε τμῆμα Ν΄Δ΄ = ΒΝ΄. Τό ΑΒΓΔ΄ ἔχει τότε:

$$Γ Δ' = 2 \cdot ΟΝ' = 2 \cdot 2\ ΩΡ' =$$
$$= 4 \cdot λ/4 = λ.$$



Ἄρα γ.τ. τοῦ Ρ εἶναι ὁ κύκλος (Ω, λ/4).

36. **Μέ κέντρο τήν κορυφή Α ἑνός δεδομένου ἰσοσκελοῦς τριγΑΒΓ καί μεταβλητή ἀκτίνα γράφουμε κύκλο. Ἀπό τά Β καί Γ φέρνουμε τίς ἐφαπτόμενες αὐτοῦ τοῦ κύκλου. Νά βρεθεῖ ὁ γ.τ. τοῦ σημείου πού τέμνονται οἱ ἐφαπτόμενες αὐτές.**

Λύση: Ἔστω τό ἰσοσκελές τριγΑΒΓ καί ἕνας κύκλος κέντρου Α.

Ἄς φέρουμε πρῶτα τίς ἐφαπτόμενες ΒΕ καί ΓΖ πού τέμνονται στό Ρ. Ἔχουμε τότε:

i) ΡΕ = ΡΖ (1)

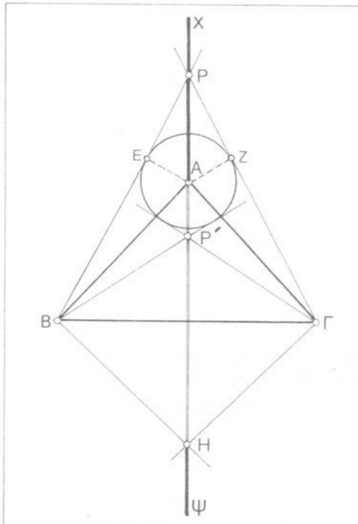
ii) τριγΑΕΒ = τριγΑΖΓ (ὀρθογώνια, ΑΕ = ΑΖ καί ΑΒ = ΑΓ)

Ἄρα ΕΒ = ΖΓ (2)

Προσθέτοντες τίς (1), (2) βρίσκουμε:

$$ΡΒ = ΡΓ$$

δηλαδή τό Ρ ἰσαπέχει τῶν Β καί Γ ἄρα ἀνήκει στή μεσοκάθετο τοῦ ΒΓ.
Παρατηροῦμε τώρα, ὅταν ἡ ἀκτίνα τοῦ κύκλου μικραίνει συνεχῶς τό Ρ πλησιάζει στό Α. Ὅταν μεγαλώνει ἡ ἀκτίνα, γιά νά μποροῦμε νά φέρνουμε ἐφαπτόμενες, πρέπει τό πολύ νά γίνει ἴση μέ τήν ΑΒ, τότε οἱ ἐφαπτόμενες θά εἶναι κάθετες στίς ΑΒ καί ΑΓ, πού θά τέμνονται στό Ε.



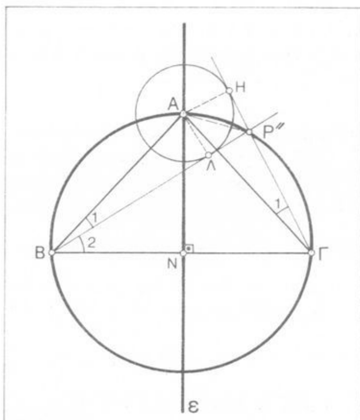
Ἄρα γ.τ. τοῦ Ρ εἶναι οἱ ἡμιευθεῖες ΑΧ, ΕΨ πού ἀνήκουν στή μεσοκάθετο τοῦ ΒΓ.
Ἄν στή συνέχεια φέρουμε τίς ἐφαπτόμενες ΒΕ′ καί ΓΖ′, πού τέμνονται στό Ρ′, ὅμοια ἐργαζόμενοι βλέπουμε ὅτι γ.τ. τοῦ Ρ′ εἶναι τό ΑΕ.
Τέλος ἄς φέρουμε τίς ἐφαπτόμενες ΓΗ καί ΒΛ πού τέμνονται στό Ρ′′, ἀπό τά ἴσα τριγ.ΒΑΛ καί ΓΑΗ (εἶναι ὀρθογώνια, ΑΒ = ΑΓ καί ΑΛ = ΑΗ) ἔχουμε

$$\widehat{\mathrm{B}}_1 = \widehat{\Gamma}_1$$

Ὁπότε

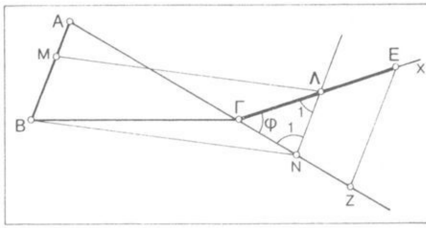
$$\widehat{\mathrm{B}\mathrm{P}''\Gamma} = 180^\circ - (\widehat{\Gamma}_1 + \widehat{\Gamma} + \widehat{\mathrm{B}}_2)$$
$$= 180^\circ - (\widehat{\mathrm{B}}_1 + \widehat{\Gamma} + \widehat{\mathrm{B}}_2)$$
$$= 180^\circ - (\widehat{\mathrm{B}} + \widehat{\Gamma})$$
$$= \widehat{\mathrm{A}} = \text{σταθερή}$$

δηλαδή τό Ρ′′ βλέπει τό ΒΓ ὑπό σταθερή γωνία ἄρα ἀνήκει στό κύκλο χορδῆς ΒΓ καί γωνίας Α, πού αὐτός ὁ κύκλος εἶναι ὁ περιγεγραμμένος στό τριγ. ΑΒΓ.
Ἄρα ὁ γ.τ. τῶν σημείων πού τέμνονται ὅλες οἱ ἐφαπτόμενες ἀπό τά Β καί Γ εἶναι ἡ μεσοκάθετος ε τοῦ ΒΓ καί ὁ περιγεγραμμένος κύκλος στό ΑΒΓ.



37 **Δίνεται ἕνα τριγ.ΑΒΓ. Σημεῖο Μ κινεῖται στήν πλευρά ΑΒ. Στήν προέκταση τῆς ΑΓ (πρός τό Γ) καί γιά κάθε θέση τοῦ Μ παίρνουμε σημεῖο Ν, ὥστε ΓΝ = ΒΜ. Σχηματίζουμε τό παραλληλόγραμμο ΜΒΝΛ. Νά βρεθεῖ ὁ γ.τ. τοῦ Λ.**

Λύση: Ἔστω Μ ἕνα τυχαῖο σημεῖο τῆς ΑΒ. Παίρνουμε στήν ΑΓ τμῆμα ΓΝ = ΒΜ καί σχηματίζουμε (φέρνοντας τίς παράλληλες) τό παρ/μο ΜΒΝΛ.



Ἀπό τό παρ/μο ἔχουμε ΝΛ = ΒΜ καί ἀπό τήν ὑπόθεση ΓΝ = ΒΜ δηλαδή ΝΛ = ΓΝ, ἄρα τό τριγΝΓΛ ἰσοσκελές $\Longrightarrow \widehat{\Lambda}_1 = \widehat{\varphi}$.

Ἄρα:

$$\widehat{N}_1 = 180^\circ - (\widehat{\varphi} + \widehat{\Lambda}_1) =$$

$$= 180^\circ - (\widehat{\varphi} + \widehat{\varphi}) \Longrightarrow$$

$$\widehat{N}_1 = 180^\circ - 2\widehat{\varphi} \qquad (1)$$

Ἐπειδή

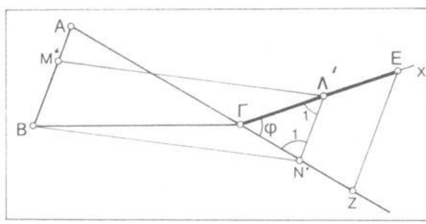
$$N\Lambda \parallel AB \Longrightarrow \widehat{N}_1 = \widehat{A} \qquad (2)$$

Ἀπό τίς (1), (2) ἔχουμε:

$$\widehat{A} = 180^\circ - 2\widehat{\varphi} \Longrightarrow$$

$$2\widehat{\varphi} = 180^\circ - \widehat{A} \Longrightarrow$$

$$\widehat{\varphi} = 90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2}$$



πού σημαίνει ὅτι ἡ $\widehat{\varphi}$ εἶναι σταθερή καί ἄρα ἡ ΓΛ σχηματίζει μέ τήν ΑΓ σταθερή γωνία, ὁπότε ἡ ΓΛ εἶναι σταθερή εὐθεία.

Τό Λ λοιπόν ἀνήκει στή σταθερή εὐθεία ΓΧ, πού σχηματίζει μέ τήν ΑΓ γωνία $90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2}$

Παρατηροῦμε ὅτι, ὅταν τό Μ συμπέσει μέ τό Α τό Ν θά ἔλθει στό Ζ ὅπου ΓΖ = ΑΒ καί τό Λ στή θέση Ε (ὅπου ΖΕ ∥ ΑΒ).

Γιά τό ἀντίστροφο θά πάρουμε ἕνα σημεῖο Λ΄ στήν ΓΕ. Φέρνουμε Λ΄Ν΄ ∥ ΑΒ καί Λ΄Μ΄ ∥ ΒΝ΄ πρέπει νά δείξουμε ὅτι: ΒΜ΄ = ΓΝ΄.

Ἔχουμε $\widehat{\omega} = \widehat{A}$ καί $\widehat{\varphi} = 90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2}$ ἄρα

$$\widehat{\Lambda'}_1 = 180^\circ - (\widehat{\varphi} + \widehat{\omega}) = 180^\circ - (90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2} + \widehat{A}) = 180^\circ - 90 - \frac{\widehat{A}}{2}$$

$$\Longrightarrow \widehat{\Lambda}_1 = 90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2} = \widehat{\varphi} \text{ ὁπότε } \Gamma N' = N'\Lambda'.$$

Ἀλλά ἀπό τό παρ/μο ΒΜ΄Λ΄Ν΄ ἔχουμε καί ΒΜ΄ = Ν΄Λ΄ ἄρα: ΓΝ΄ = ΒΜ΄.

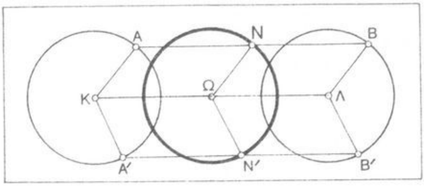
Ἄρα γ.τ. τοῦ Λ εἶναι τό τμῆμα ΓΕ.

38. **Δίνονται δύο ἴσοι κύκλοι (Κ, ρ) καί (Λ,ρ). Νά βρεθεῖ ὁ γ.τ. τοῦ μέσου Ν τῶν τμημάτων πού ἑνώνουν ἕνα σημεῖο Α τοῦ (Κ,ρ) καί ἕνα σημεῖο Β τοῦ (Λ,ρ), ὥστε ΚΑ ∥ ΑΒ.**

Λύση: Ἔστω Ν τό μέσο τοῦ ΑΒ ὅπου ΚΑ || ΛΒ. Ἐπειδή καί ΚΑ = ΛΒ τό ΑΚΛΒ εἶναι παρ/μο.

Ἄν πάρουμε τό μέσο Ω τοῦ ΚΛ τότε, ἐπειδή ΑΝ || = ΚΩ τό ΑΝΩΚ εἶναι παρ/μο, ἄρα

$$\Omega N = KA = \rho.$$



Ἐπομένως τό Ν ἀπέχει ἀπό τό σταθερό σημεῖο Ω σταθερή ἀπόσταση ρ, ἄρα ὁ γ.τ. ἀνήκει στό κύκλο (Ω, ρ).

Ἄς πάρουμε ἕνα σημεῖο Ν′ στόν (Ω,ρ). Φέρνουμε τήν ΚΑ′ || ΩΝ′ καί τήν Α′Ν′ καί σ᾽ αὐτή παίρνουμε Ν′Β′ = Ν′Α′. Θά δείξουμε ὅτι τό Β′ ἀνήκει στόν (Λ,ρ). Πράγματι ἐπειδή ΩΝ′ || = ΚΑ′ τό ΚΩΝ′Α′ εἶναι παρ/μο καί ἄρα

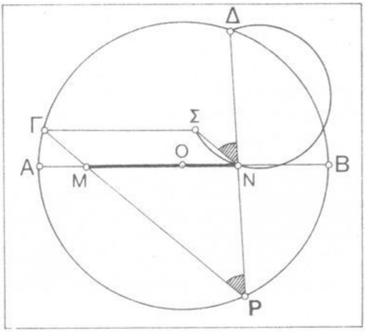
$$\Omega\Lambda \parallel = N'B' \implies \Lambda B' = \Omega N' = \rho.$$

Ἄρα ὁ γ.τ. τοῦ Ν εἶναι ὁ κύκλος (Ω,ρ).

39. **Δίνεται ἕνας κύκλος (Ο,ρ), μιά διάμετρός του ΑΒ καί δύο σημεῖα Γ,Δ τοῦ ἑνός ἡμικυκλίου. Νά βρεθεῖ ἕνα σημεῖο Ρ τοῦ ἄλλου ἡμικυκλίου, ὥστε ἄν οἱ ΡΓ καί ΡΔ τέμνουν τήν ΑΒ στά Μ καί Ν, νά εἶναι τό ΜΝ ἴσο μέ ἕνα γνωστό τμῆμα λ.**

Λύση: **Ἀνάλυση:** Ἔστω Ρ τό ζητούμενο σημεῖο τέτοιο, ὥστε ἄν οἱ ΡΓ καί ΡΔ τέμνουν τήν ΑΒ στά Μ καί Ν νά εἶναι

$$MN = \lambda.$$



Φέρνουμε ΓΣ || = ΜΝ ὁπότε τό Σ εἶναι ὁρισμένο σημεῖο.

Ἐπειδή ΣΝ || ΓΡ ἡ $\widehat{\Sigma N\Delta} = \widehat{\varphi}$ = σταθερή γιατί ἡ $\widehat{\varphi} = \dfrac{\widehat{\Gamma\Delta}}{2}$ πού εἶναι σταθερό τόξο.

Τό Ν λοιπόν βλέπει τό σταθερό εὐθ. τμῆμα ΣΔ ὑπό σταθερή γωνία, ἄρα ἀνήκει καί στό τόξο χορδῆς ΣΔ καί γωνίας $\widehat{\varphi}$. Ἡ ΔΝ θά τμήσει τόν κύκλο στό Ρ.

Σύνθεση: Φέρνουμε ἀπό τό Γ εὐθεία παράλληλη πρός τήν ΑΒ καί παίρνουμε σ᾽ αὐτή τμῆμα ΓΣ = λ. Γράφουμε τό τόξο πού ἔχει χορδή τό ΣΔ καί γωνία $\widehat{\varphi}$, ὅπου $\widehat{\varphi} = \dfrac{\widehat{\Gamma\Delta}}{2}$. Ὀνομάζουμε Ν τό σημεῖο πού τό τόξο αὐτό τέμνει τήν ΑΒ. Στή συνέχεια φέρνουμε τή ΔΝ πού τέμνει τό ἡμικύκλιο στό Ρ καί τήν ΡΓ πού τέμνει τή διάμετρο στό Μ. Τό ΜΝ εἶναι τό ζητούμενο τμῆμα.

Ἀπόδειξη: Ἡ $\widehat{\Sigma N\Delta} = \widehat{\varphi} = \widehat{\Gamma P\Delta}$ ἄρα ΣΝ || ΓΡ καί ἐπειδή ΓΣ || ΑΒ τό ΓΣΝΜ εἶναι παρ/μο, ἄρα ΜΝ = ΓΣ = λ.

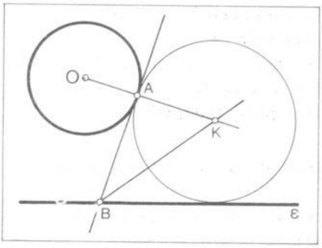
Διερεύνηση: Ἀνάλογα ἄν τό τόξο ΣΝΔ τέμνει τήν ΑΒ σέ δύο ἤ ἕνα σημεῖο ἔχουμε δύο ἤ μία λύσεις. Ἄν τό τόξο δέν τέμνει τήν ΑΒ δέν ἔχουμε λύση.

---

40. **Νά κατασκευαστεῖ ἕνας κύκλος, πού νά ἐφάπτεται σ' ἕναν κύκλο (Ο,ρ) σ' ἕνα σημεῖο του Α καί σέ μιά εὐθεία ε.**

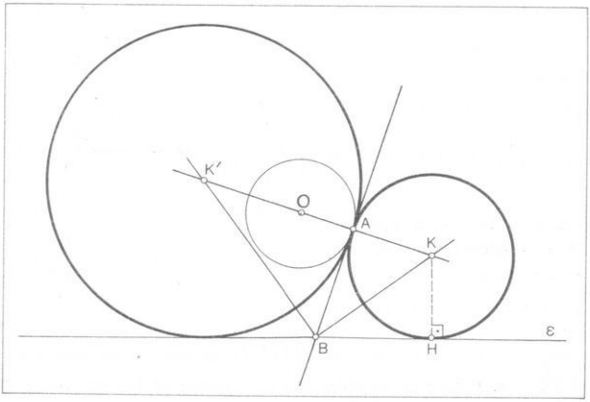
Λύση: **Ἀνάλυση:** Ἔστω (Κ,α) ὁ ζητούμενος κύκλος πού ἐφάπτεται τοῦ (Ο,ρ) στό Α καί τῆς εὐθείας ε.

Γνωρίζουμε ὅτι ἡ ΟΚ διέρχεται ἀπό τό Α δηλαδή τό Κ ἀνήκει στήν εὐθεία ΟΑ. Ἄν φέρουμε τή κοινή τους ἐφαπτομένη στό Α, πού εἶναι γνωστή εὐθεία καί ἡ ὁποία τέμνει τήν ε στό Β, τότε ἡ ΒΚ εἶναι διχοτόμος τῆς $\widehat{B}$. Ἄρα τό Κ ἀνήκει καί σ' ἄλλη γνωστή εὐθεία, τή διχοτόμο τῆς γωνίας $\widehat{B}$. Ἔχοντες τό Κ θά γράψουμε τό κύκλο (Κ,ΚΑ).



Σύνθεση: Ἔχουμε τό κύκλο (Ο,ρ) τό σημεῖο Α καί τήν ε. Φέρνουμε τήν ΟΑ καί τήν ἐφαπτομένη τοῦ (Ο,ρ) στό Α ἡ ὁποία τέμνει τήν ε στό Β. Διχοτομοῦμε τή γωνία Β καί ἡ διχοτόμος τέμνει τήν ΟΑ στό Κ. Ὁ κύκλος εἶναι ὁ ζητούμενος.

40β



Ἀπόδειξη: Ἐπειδή ΟΚ = ρ + ΑΚ οἱ κύκλοι (Ο,ρ) καί (Κ,ΚΑ) ἐφάπτονται. Ἐπειδή τό Κ ἀνήκει στή διχοτόμο τῆς Β θά εἶναι ΚΑ = ΚΗ δηλαδή ἡ ε ἐφάπτεται τοῦ κύκλου (Κ, ΚΑ).

Διερεύνηση: Ἐπειδή ὑπάρχει καί ἄλλη διχοτόμος τῆς $\widehat{B}$ ἐν γένει ἔχουμε δύο λύσεις, τούς κύκλους (Κ,ΚΑ) καί (Κ', Κ'Α).

---

41 **Δίνεται μιά γωνία $\widehat{\chi o \psi}$ καί ἕνα σημεῖο Α τῆς Οχ. Νά βρεθεῖ ἕνα σημεῖο Ρ τῆς Οχ τέτοιο, ὥστε ἄν φέρουμε τήν ΡΒ ⊥ ΟΨ, νά εἶναι ΟΒ = ΡΑ.**

Λύση: Ἀνάλυση: Ἔστω ὅτι βρήκαμε τό σημεῖο Ρ πού ἄν φέρουμε ΡΒ ⊥ ΟΨ νά εἶναι

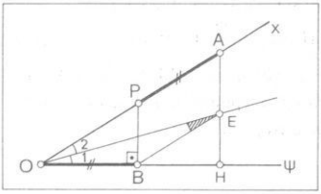
$$OB = PA.$$

Ἄν φέρουμε τήν ΑΗ⊥ΟΨ καί ΒΕ ∥ ΡΑ, παρατηροῦμε τά ἑξῆς: τό ΡΑΕΒ εἶναι παρ/μο καί ἄρα:

$$BE = PA$$

καί ἐπειδή ΟΒ = ΡΑ θά εἶναι:

$$BE = OB \Longrightarrow \widehat{E} = \widehat{O}_1 \qquad (1)$$

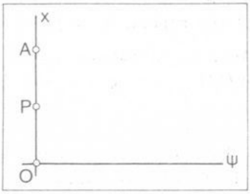


Ἀκόμα ἐπειδή ΒΕ ∥ ΟΡ θά εἶναι

$$\widehat{E} = \widehat{O}_2 \qquad (2)$$

Ἀπό τίς (1), (2) προκύπτει ὅτι ἡ ΟΕ εἶναι διχοτόμος καί ἄρα τό Ε εἶναι γνωστό σημεῖο. Ἔχοντες τό Ε ἄν φέρουμε ΕΒ ∥ ΟΑ ἔχουμε τό Β καί ἡ ΒΡ⊥ΟΨ μᾶς δίδει τό Ρ.

Σύνθεση: Φέρνουμε τήν ΑΗ⊥ΟΨ καί τή διχοτόμο τῆς γωνίας πού τέμνονται στό Ε. Ἀπό τό Ε φέρνουμε παράλληλη πρός τήν ΟΧ πού τέμνει τήν ΟΨ στό Β. Στό Β ὑψώνουμε κάθετη στήν ΟΨ πού τέμνει τήν ΟΧ στό Ρ, πού εἶναι τό ζητούμενο.



Ἀπόδειξη: Τό ΡΑΕΒ εἶναι παρ/μο (ΑΕ ∥ ΡΒ καί ΕΒ ∥ ΡΑ) ἄρα ΒΕ = ΡΑ. Ἐπειδή ΕΒ ∥ ΟΡ ⟹ $\widehat{E} = \widehat{O}_2 = \widehat{O}_1$ ἑπομένως ΒΕ = ΟΒ, ὁπότε:

$$PA = OB.$$

Διερεύνηση: Ὅταν ἡ γωνία εἶναι ὀξεία φέρνοντας καί τήν διχοτόμο τῆς παραπληρωματικῆς της, ἔχουμε καί μιά δεύτερη λύση. Ἄν ἡ γωνία $\widehat{XO\Psi}$ εἶναι ὀρθή, τότε τό Ρ εἶναι τό μέσο τοῦ ΑΟ.

Τέλος ὅταν ἡ γωνία $\widehat{XO\Psi}$ εἶναι ἀμβλεία τό Ρ θά προσδιοριστεῖ στήν ἀντικειμένη ἡμιευθεία τῆς ΟΧ.

---

42 **Δίνεται ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ. Νά βρεθεῖ ἕνα σημεῖο Ρ στό ἐσωτερικό τοῦ τριγώνου τέτοιο ὥστε: $\widehat{P B \Gamma} = \widehat{P \Gamma A} = \widehat{P A B}$.**

Λύση: Ἔστω Ρ τό ζητούμενο σημεῖο γιά τό ὁποῖο ἔχουμε:

$$\widehat{P B \Gamma} = \widehat{P \Gamma A} = \widehat{P A B}. \qquad (1)$$

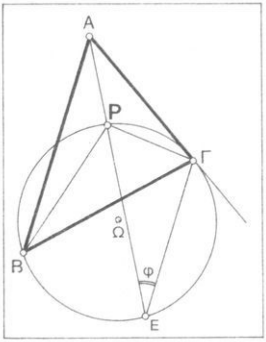
Ἄς θεωρήσουμε τόν περιγεγραμμένο κύκλο στό τριγΒΡΓ, τόν (Ω) καί ἄς ὀνομάσουμε Ε τό σημεῖο πού τέμνει τήν ΑΡ. Τότε παρατηροῦμε τά ἑξῆς:

ἡ $\widehat{P B \Gamma} = \widehat{\varphi}$ (ὡς ἐγγεγραμμένες στό ἴδιο τόξο) καί ἀπό τίς (1) ἔχουμε:

$$\widehat{P A B} = \widehat{\varphi} \Longrightarrow \Gamma E \parallel AB$$

καί $\widehat{P \Gamma A} = \widehat{\varphi}$ πού σημαίνει ὅτι ἡ ΑΓ ἐφάπτεται τοῦ (Ω).

Σύνθεση: Γράφουμε τόν κύκλο (Ω) πού διέρχεται ἀπό τό Β καί ἐφάπτεται τῆς ΑΓ στό Γ*. Ἀπό τό Γ φέρνουμε ΓΕ || ΑΒ (τό Ε ἀνήκει στόν (Ω)). Ἡ ΑΕ τέμνει τόν κύκλο στό Ρ, πού εἶναι τό ζητούμενο.



Ἀπόδειξη: Ἐπειδή ΓΕ || ΑΒ $\Longrightarrow \widehat{PAB} = \widehat{\varphi}$ (1)

Ἡ $\widehat{PB\Gamma} = \widehat{\varphi}$ (2) (γιατί εἶναι ἐγγεγραμμένες στό ἴδιο τόξο) τέλος $\widehat{P\Gamma A} = \widehat{\varphi}$ (3) (γιατί ἡ μία εἶναι ἐγγεγραμμένη καί ἡ ἄλλη ἀπό χορδή καί ἐφαπτομένη).

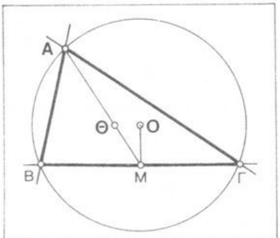
43. **Νά κατασκευαστεῖ ἕνα τρίγωνο, ὅταν γνωρίζουμε στό ἐπίπεδο τά σημεῖα:**
α) τήν κορυφή Α, τό βαρύκεντρο Θ καί τό περίκεντρο Ο.
β) τήν κορυφή Β, τό βαρύκεντρο Θ καί τό ὀρθόκεντρο Η.

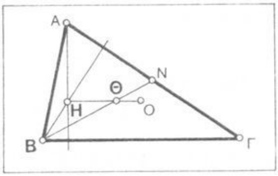
Λύση: α) **Ἀνάλυση:** Ἔστω ΑΒΓ τό ζητούμενο τρίγωνο πού ἔχει τά τρία σημεῖα Α,Θ,Ο γιά κορυφή, βαρύκεντρο καί περίκεντρο. Ἄν Μ εἶναι τό μέσο τῆς ΒΓ τότε τό

$$\Theta M = \frac{1}{2} A\Theta$$

δηλαδή τό Μ εἶναι γνωστό σημεῖο.
Ἡ ΒΓ εἶναι τότε κάθετη στήν ΟΜ.

Σύνθεση: Ἔχουμε τά τρία σημεῖα Α,Θ,Ο. Στήν ΑΘ παίρνουμε τμῆμα $\Theta M = \frac{1}{2} A\Theta$.





Γράφουμε τό περιγεγραμμένο κύκλο (Ο,ΟΑ) καί φέρνουμε τήν κάθετη στήν ΟΜ

* Ὁ κύκλος αὐτός κατασκευάζεται ὡς ἑξῆς: Φέρνουμε τή μεσοκάθετο τοῦ ΒΓ καί τή κάθετο στήν ΑΓ στό Γ πού τέμνονται στό Ω καί ὁ ζητούμενος κύκλος εἶναι (Ω, ΩΒ).

στό Μ πού τέμνει τόν κύκλο στά Β καί Γ. Τό ΑΒΓ εἶναι τό ζητούμενο.

Ἀπόδειξη: Ἐπειδή ΒΓ $\perp$ ΟΜ τό Μ εἶναι τό μέσο τῆς ΒΓ καί ἐπειδή ΘΜ $= \frac{1}{2}$ ΑΘ τό Θ εἶναι τό βαρύκεντρο τοῦ τριγώνου.

Διερεύνηση: Τό Θ πρέπει νά εἶναι ἐσωτερικό σημεῖο τοῦ κύκλου (Ο,ΟΑ).

β) Ἀπό τήν ἐφαρμογή 4 τῆς § 8.11 γνωρίζουμε ὅτι, τό περίκεντρο Ο τοῦ τριγώνου βρίσκεται στήν ΗΘ καί εἶναι ΘΟ $= \frac{1}{2}$ ΘΗ.

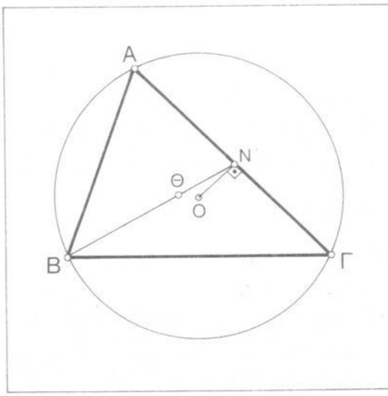
Ἔτσι ἔχουμε καί τό περίκεντρο Ο τοῦ τριγώνου. Καί ἡ κατασκευή ἀνάγεται στή προηγούμενη πού γνωρίζουμε μιά κορυφή, τό βαρύκεντρο καί τό περίκεντρο.

Δηλαδή θά φέρουμε τήν ΒΘ, θά πάρουμε

$$\Theta N = \frac{1}{2} B\Theta$$

καί ἔχουμε τό Ν.

Κατόπιν φέρνουμε τήν κάθετη στήν ΟΝ πού θά τμήσει τόν κύκλο (Ο,ΟΒ) στά Α καί Γ.



Κεφάλαιο 10

ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΚΑΙ ΠΕΡΙΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ

I. ΘΕΜΑΤΑ ΘΕΩΡΙΑΣ

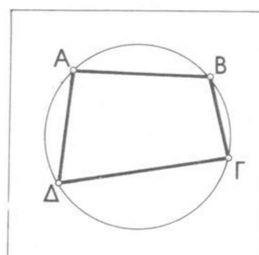
1. **α) Πότε ἕνα τετράπλευρο λέγεται «ἐγγεγραμμένο» σ' ἕνα κύκλο; Τί ἰδιότητες ἔχει ἕνα ἐγγεγραμμένο τετράπλευρο;**

β) Γιατί κάθε ἐγγεγραμμένο τραπέζιο εἶναι ἰσοσκελές;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Ἕνα τετράπλευρο θά λέγεται **ἐγγεγραμμένο** σ' ἕνα κύκλο (Ο,ρ) ὅταν οἱ κορυφές του εἶναι σημεῖα τοῦ κύκλου.
Ἕνα ἐγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΒΓΔ ἔχει τίς ἑξῆς ἰδιότητες:

- οἱ ἀπέναντι γωνίες του εἶναι παραπληρωματικές
- κάθε ἐξωτερική γωνία του εἶναι ἴση μέ τήν ἀπέναντι ἐσωτερική γωνία του
- κάθε πλευρά του φαίνεται ἀπό τίς δύο ἄλλες κορυφές του ὑπό ἴσες γωνίες.



β) Ἄν ΑΒ καί ΓΔ εἶναι οἱ βάσεις ἑνός ἐγγεγραμμένου τραπεζίου ΑΒΓΔ ἀπό τήν παραλληλία τῶν χορδῶν ΑΒ καί ΓΔ συμπεραίνουμε ὅτι τά τόξα $\overset{\frown}{ΑΔ}$ καί $\overset{\frown}{ΒΓ}$ εἶναι ἴσα. Τότε ὅμως καί οἱ ἀντίστοιχες χορδές θά εἶναι ἴσες, δηλ.

$$ΑΔ = ΒΓ.$$

2. **α) Πότε ἕνα τετράπλευρο ΑΒΓΔ εἶναι «ἐγγράψιμο» σέ κύκλο;**

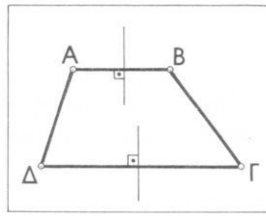
β) Ἕνα μή ἰσοσκελές τραπέζιο εἶναι ἐγγράψιμο σέ κύκλο; Δικαιολογεῖστε τήν ἀπάντησή σας.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Ἕνα τετράπλευρο εἶναι **ἐγγράψιμο** σέ κύκλο ὅταν ἔχει μιά ἀπό τίς ἑπόμενες ἰδιότητες:

- δύο ἀπέναντι γωνίες του εἶναι παραπληρωματικές
- μιά ἐξωτερική γωνία του εἶναι ἴση μέ τήν ἀπέναντί της ἐσωτερική
- μιά πλευρά του φαίνεται ἀπό τίς δύο ἄλλες κορυφές του ὑπό ἴσες γωνίες

β) Γιά νά εἶναι ἕνα τετράπλευρο ἐγγράψιμο σέ ἕνα κύκλο (Ο,ρ) θά πρέπει ὅλες οἱ κορυφές του νά ἰσαπέχουν ἀπό τό Ο, δηλαδή θά πρέπει οἱ μεσοκάθετοι ὅλων τῶν πλευρῶν του νά διέρχονται ἀπό τό ἴδιο σημεῖο Ο. Σ' ἕνα μή ἰσοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ αὐτό δέ μπορεῖ νά συμβαίνει γιατί οἱ μεσοκάθετοι τῶν δύο βάσεων εἶναι εὐθεῖες παράλληλες.



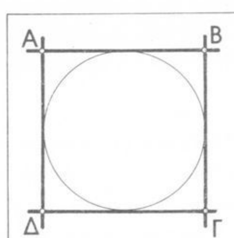
3. **α) Πότε ἕνα τετράπλευρο λέγεται «περιγεγραμμένο» σ' ἕνα κύκλο (Ο,ρ); Τί ἰδιότητες ἔχει ἕνα περιγεγραμμένο τετράπλευρο;**

β) Γιατί κάθε περιγεγραμμένο ὀρθογώνιο εἶναι τετράγωνο;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Ἕνα τετράπλευρο θά λέγεται **περιγεγραμμένο** σ' ἕνα κύκλο (Ο,ρ) ὅταν οἱ πλευρές του εἶναι ἐφαπτόμενες τοῦ κύκλου αὐτοῦ. Ἕνα περιγεγραμμένο τετράπλευρο ἔχει τίς ἑξῆς ἰδιότητες:

- οἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν του διέρχονται ἀπὸ τὸ ἴδιο σημεῖο
- τά ἀθροίσματα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν του εἶναι ἴσα



β) Ἄν ΑΒΓΔ εἶναι ἕνα περιγεγραμμένο ὀρθογώνιο, θά ἔχουμε

$$ΑΒ + ΓΔ = ΑΔ + ΒΓ$$

Ἐπειδή ὅμως εἶναι ΓΔ = ΑΒ καί ΒΓ = ΑΔ, ἡ ἰσότητα αὐτή γράφεται 2ΑΒ = 2ΑΔ ἤ ΑΒ = ΑΔ. Ἔτσι τό ΑΒΓΔ εἶναι τετράγωνο γιατί δύο διαδοχικές πλευρές του εἶναι ἴσες.

4. **α) Πότε ἕνα τετράπλευρο εἶναι «περιγράψιμο» σέ κύκλο;**

β) Ὁ ρόμβος εἶναι τετράπλευρο περιγράψιμο σέ κύκλο; Δικαιολογεῖστε τήν ἀπάντησή σας.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Ἕνα τετράπλευρο εἶναι **περιγράψιμο** σέ κύκλο ὅταν ἔχει μιά ἀπό τίς ἑπόμενες ἰδιότητες:

- οἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν του διέρχονται ἀπό τό ἴδιο σημεῖο
- τά ἀθροίσματα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν του εἶναι ἴσα.

β) Σ' ἕνα ρόμβο οἱ διαγώνιοι διχοτομοῦν τίς γωνίες του καί ἔτσι οἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν του διέρχονται ἀπό τό ἴδιο σημεῖο (τό σημεῖο τομῆς τῶν διαγωνίων του). Συνεπῶς ὁ ρόμβος εἶναι περιγράψιμο τετράπλευρο.

---

5. **α) Τί λέγεται «κανονικό» πολύγωνο; Ἄν ἕνα κανονικό πολύγωνο ἔχει 15 πλευρές πόσο εἶναι τό μέτρο κάθε γωνίας του σέ μοῖρες;**

β) Τί λέγεται «κέντρο», «ἀκτίνα» καί «ἀπόστημα» ἑνός κανονικοῦ πολυγώνου; Τί λέγεται «κεντρική γωνία» ἑνός κανονικοῦ πολυγώνου καί πόσο εἶναι τό μέτρο της σέ μοῖρες;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Ἕνα πολύγωνο λέγεται **κανονικό** ὅταν ὅλες οἱ πλευρές του εἶναι ἴσες καί ὅλες οἱ γωνίες του εἶναι ἐπίσης ἴσες.

Ἀφοῦ οἱ γωνίες ἑνός πολυγώνου μέ ν πλευρές ἔχουν, ὅπως ξέρουμε, ἄθροισμα 2ν–4 ὀρθές, κάθε μία ἀπό τίς ἴσες γωνίες ἑνός κανονικοῦ πολυγώνου θά εἶναι

$$\widehat{\omega} = \frac{2\nu - 4}{\nu} \text{ ὀρθές}$$

Ἔτσι στό κανονικό δεκαπεντάγωνο ($\nu = 15$) ἔχουμε

$$\widehat{\omega} = \frac{2\cdot 15 - 4}{15} = \frac{26}{15} \text{ ὀρθές} = \frac{26}{15}\, 90^\circ = 156^\circ$$

β) Ἀποδεικνύεται ὅτι γιά κάθε κανονικό πολύγωνο ὑπάρχουν δύο ὁμόκεντροι κύκλοι ἀπό τούς ὁποίους ὁ ἕνας διέρχεται ἀπό ὅλες τίς κορυφές του (καί λέγεται **περιγεγραμμένος κύκλος** στό πολύγωνο) καί ὁ ἄλλος ἐφάπτεται σέ ὅλες τίς πλευρές του (καί λέγεται **ἐγγεγραμμένος κύκλος** στό πολύγωνο).

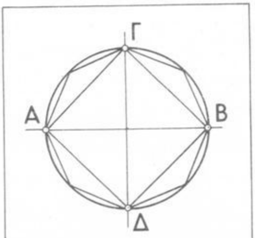
Τό κοινό κέντρο τῶν δύο κύκλων λέγεται **κέντρο** τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου. Ἐπίσης, ἡ ἀκτίνα τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου λέγεται καί **ἀκτίνα** τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου, ἐνῶ ἡ ἀκτίνα τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου λέγεται **ἀπόστημα** τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου. Τό κέντρο ἑνός κανονικοῦ πολυγώνου βλέπει ὅλες τίς πλευρές του μέ τήν ἴδια γωνία ἡ ὁποία λέγεται **κεντρική γωνία** τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου καί εἶναι ἴση μέ

$$\widehat{\varphi} = \frac{360^\circ}{\nu}$$

6. Πῶς ἐγγράφεται σ' ἕνα κύκλο κανονικό πολύγωνο μέ ν πλευρές; Νά ἐξηγήσετε πῶς ἐγγράφουμε σ' ἕνα κύκλο κανονικό τετράπλευρο (δηλαδή τετράγωνο), κανονικό ὀκτάγωνο, κανονικό 16γωνο, κ.ο.κ.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Γιά νά ἐγγράψουμε σ' ἕνα κύκλο κανονικό πολύγωνο μέ ν πλευρές ἀρκεῖ νά βροῦμε ν σημεῖα του $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ πού νά χωρίζουν τόν κύκλο σέ ν ἴσα τόξα.



Γιά νά ἐγγράψουμε ἕνα τετράγωνο σέ κυκλ (Ο,ρ) φέρνουμε δύο κάθετες διαμέτρους του ΑΒ καί ΓΔ.

Ἄν πάρουμε τά μέσα τῶν τόξων πού ὁρίζουν οἱ κορυφές τοῦ τετραγώνου, τά μέσα αὐτά καί οἱ κορυφές τοῦ τετραγώνου χωρίζουν τόν κύκλο σέ 8 ἴσα μέρη καί συνεπῶς εἶναι κορυφές κανονικοῦ ὀκταγώνου.

Συνεχίζοντας μέ τόν ἴδιο τρόπο (παίρνοντας δηλαδή τά μέσα τῶν τόξων πού ὁρίζουν οἱ ξορυφές τοῦ ὀκταγώνου) μποροῦμε νά ἐγγράψουμε στόν ἴδιο κύκλο 16γωνο, 32γωνο, κ.λ.π.

7. α) Γιατί ἡ πλευρά ἑνός κανονικοῦ ἑξαγώνου ἐγγεγραμμένου σέ κύκλο (Ο,ρ) εἶναι ἴση μέ ρ; Πῶς ἐγγράφουμε κανονικό ἑξάγωνο σέ κύκλο;

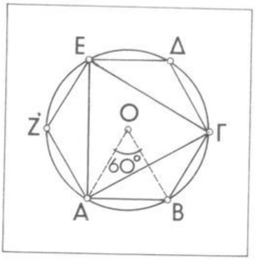
β) Πῶς ἐγγράφουμε σέ κύκλο ἰσόπλευρο τρίγωνο καί πῶς ἐγγράφουμε κανονικό δωδεκάγωνο;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Ἡ κεντρική γωνία ἑνός κανονικοῦ ἑξαγώνου εἶναι $\widehat{\varphi} = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$.

Ἔτσι τό ἰσοσκελές τρίγωνο ΑΟΒ εἶναι καί ἰσόπλευρο, ὁπότε

$$AB = OA = \rho$$



Μέ τήν παρατήρηση αὐτή καταλαβαίνουμε ὅτι γιά νά ἐγγράψουμε κανονικό ἑξάγωνο, ἀρκεῖ νά ξεκινήσουμε ἀπό ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Α τοῦ κύκλου καί να παίρνουμε (μέ τό διαβήτη μας) διαδοχικές χορδές ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ,... ἴσες μέ ρ.

β) Γιά νά ἐγγράψουμε σέ κύκλο ἰσόπλευρο τρίγωνο, ἐγγράφουμε πρῶτα ἕνα κανονικό ἑξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ καί μετά συνδέουμε μία παρά μία τίς κορυφές του, π.χ. τίς Α,Γ,Ε.
Γιά νά ἐγγράψουμε σέ κύκλο κανονικό δωδεκάγωνο, ἐγγράφουμε πάλι πρῶτα ἕνα κανονικό ἑξάγωνο καί βρίσκουμε τά μέσα τῶν τόξων ποῦ ὁρίζουν οἱ κορυφές του. Ἔτσι, τό πολύγωνο πού ἔχει κορυφές τίς κορυφές τοῦ ἑξαγώνου καί τά μέσα τῶν τόξων πού βρήκαμε εἶναι κανονικό δωδεκάγωνο.

II. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Ἀπαντεῖστε στίς ἑπόμενες ἐρωτήσεις βάζοντας ΝΑΙ ἤ ΟΧΙ στό ἀντίστοιχο πλαίσιο.

1. Σέ κάθε ἐγγεγραμμένο τετράπλευρο οἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν του διέρχονται ἀπό τό ἴδιο σημεῖο; .... ☐
2. Ἄν οἱ μεσοκάθετοι τῶν πλευρῶν ἑνός τετραπλεύρου διέρχονται ἀπό τό ἴδιο σημεῖο, τό τετράπλευρο εἶναι ἐγγράψιμο σέ κύκλο; .... ☐
3. Τό ἰσοσκελές τραπέζιο εἶναι ἐγγράψιμο σέ κύκλο; . ☐
4. Ἕνα ὁποιοδήποτε παραλληλόγραμμο εἶναι ἐγγράψιμο σέ κύκλο; .... ☐
5. Ὁ ρόμβος εἶναι τετράπλευρο ἐγγράψιμο σέ κύκλο; ☐
6. Ἕνα ὁποιοδήποτε ὀρθογώνιο εἶναι περιγράψιμο σέ κύκλο; .... ☐
7. Ἕνα περιγεγραμμένο τραπέζιο εἶναι ὑποχρεωτικά ἰσοσκελές; .... ☐
8. Ἕνα ἰσοσκελές τραπέζιο εἶναι πάντα περιγράψιμο σέ κύκλο; .... ☐
9. Τό ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο εἶναι κανονικό πολύγωνο; .... ☐
10. Ὁ ρόμβος εἶναι κανονικό πολύγωνο; .... ☐
11. Ἕνα κανονικό πολύγωνο πού ἔχει κεντρική γωνία 36° εἶναι δεκάγωνο; .... ☐
12. Ὑπάρχει κανονικό πολύγωνο πού κάθε γωνία του νά εἶναι $\frac{1}{5}$ τῆς ὀρθῆς; .... ☐
13. Τό ἀπόστημα ἑνός κανονικοῦ πολυγώνου εἶναι μικρότερο ἀπό τήν ἀκτίνα του; .... ☐
14. Ἡ πλευρά ἑνός κανονικοῦ δωδεκαγώνου ἐγγεγραμμένου σέ κύκλο (Ο,ρ) εἶναι $\frac{\rho}{2}$; .... ☐

(Οἱ ἀπαντήσεις στή σελ. 99)

III. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. **Κάθε ἐγγεγραμμένος ρόμβος εἶναι τετράγωνο.**

Λύση: Ἐπειδή εἶναι ρόμβος θά εἶναι $\widehat{A} = \widehat{\Gamma}$ καί ἐπειδή εἶναι ἐγγεγραμμένος θά εἶναι

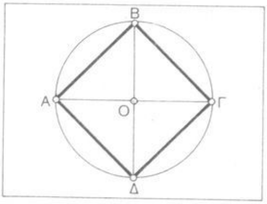
$$\widehat{A} + \widehat{\Gamma} = 180^\circ$$

ἄρα

$$2\widehat{A} = 180^\circ$$

$$\Longrightarrow \widehat{A} = 90^\circ$$

Ὁπότε ἐπειδή εἶναι ρόμβος καί ἔχει μιά γωνία ὀρθή εἶναι τετράγωνο.



2. **Δύο κύκλοι τέμνονται στά σημεῖα Α καί Β. Ἀπό τά Α καί Β φέρνουμε εὐθεῖες πού τέμνουν τόν ἕναν κύκλο στά Γ καί Γ΄ καί τόν ἄλλο στά Δ καί Δ΄. Νά δειχθεῖ ὅτι ΓΓ΄ || ΔΔ΄.**

Λύση: Ἄς φέρουμε καί τήν ΑΒ. Ἐπειδή τό ΑΒΓ΄Γ εἶναι ἐγγεγραμμένο θά ἔχουμε:

$$\widehat{\Gamma} = \widehat{\varphi} \qquad (1)$$

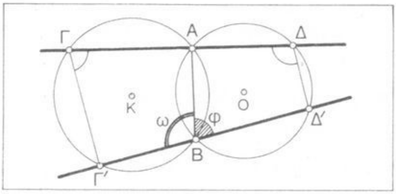
καί ἐπειδή τό ΑΒΔ΄Δ εἶναι ἐγγεγραμμένο θά ἔχουμε:

$$\widehat{\Delta} = \widehat{\omega} \qquad (2)$$

Προσθέτοντες τίς (1), (2) ἔχουμε:

$$\widehat{\Gamma} + \widehat{\Delta} = \widehat{\varphi} + \widehat{\omega} = 180^\circ$$

γιατί οἱ $\widehat{\varphi}$, $\widehat{\omega}$ εἶναι παραπληρωματικές.



Ἄρα ΓΓ΄ || ΔΔ΄ γιατί σχηματίζουν τίς ἐντός καί ἐπί τά αὐτά μέρη γωνίες παραπληρωματικές.

3. **Δίνονται δύο κύκλοι πού τέμνονται στό Α καί Β. Φέρνουμε τήν εὐθεία ε πού διέρχεται ἀπό τό Β καί εἶναι κάθετη στήν ΑΒ καί ὀνομάζουμε Ε,Ζ τά σημεῖα, στά ὁποῖα ἡ ε τέμνει τούς κύκλους, καί Ρ τό μέσο τοῦ τμήματος ΕΖ. Φέρνουμε ἀκόμη μιά ὁποιαδήποτε εὐθεία πού διέρχεται ἀπό τό Α καί ὀνομάζουμε Γ,Δ τά σημεῖα, στά ὁποῖα τέμνει τούς κύκλους. Ἄν Μ εἶναι τό μέσο τοῦ τμήματος ΓΔ, νά δείξετε ὅτι ΡΜ ⊥ ΓΔ.**

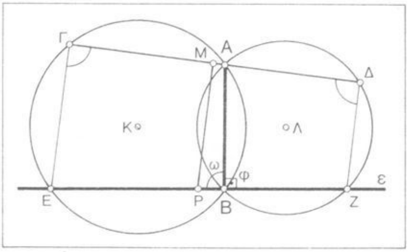
Λύση: Ἀπό τήν ὑπόθεση ἔχουμε ΕΖ ⊥ ΑΒ ἄρα $\widehat{\omega} = \widehat{\varphi} = 90^\circ$. Ἀπό τό ἐγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΒΕΓ ἔχουμε

$$\widehat{\Gamma} = \widehat{\varphi} = 90^\circ \quad \text{ἄρα} \quad E\Gamma \perp \Gamma\Delta \qquad (1)$$

Ἀπό τό ἐγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΒΖΔ ἔχουμε

$$\widehat{\Delta} = \widehat{\omega} = 90^\circ \Longrightarrow Z\Delta \perp \Gamma\Delta \qquad (2)$$

Ἀπό τίς (1), (2) προκύπτει ὅτι: ΕΓ ∥ ΖΔ πού σημαίνει ὅτι τό ΕΓΔΖ εἶναι τραπέζιο.

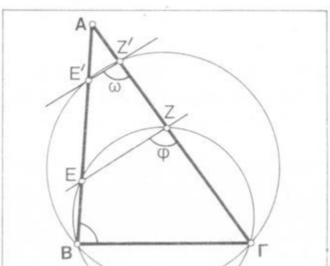


Στό τραπέζιο ΕΓΔΖ ἡ ΡΜ ἑνώνει τά μέσα τῶν μή παραλλήλων πλευρῶν (δηλαδή εἶναι διάμεσος τοῦ τραπεζίου) ἄρα

$$PM \parallel E\Gamma \Rightarrow PM \perp \Gamma\Delta.$$

---

4. Θεωροῦμε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ καί δύο κύκλους πού διέρχονται ἀπό τίς κορυφές του Β καί Γ καί τέμνουν τίς πλευρές ΑΒ καί ΑΓ ὁ ἕνας στά σημεῖα Ε,Ζ καί ὁ ἄλλος στά σημεῖα Ε΄, Ζ΄. Νά δείξετε ὅτι ΕΖ ∥ Ε΄Ζ΄.



Λύση: (Γιά νά γράψουμε τούς κύκλους πού διέρχονται ἀπό τά Β καί Γ, φέρνουμε τή μεσοκάθετο τοῦ ΒΓ καί παίρνουμε δύο σημεῖα Ο,Κ πάνω σ᾽ αὐτή καί γράφουμε τούς κύκλους

(Ο,ΟΒ), (Κ,ΚΒ).)

Τό ΕΖΓΒ εἶναι ἐγγεγραμμένο, ἄρα

$$\widehat{\varphi} + \widehat{B} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{\varphi} = 180^\circ - \widehat{B} \quad (1)$$

Ἐπίσης τό Ε΄Ζ΄ΓΒ εἶναι ἐγγεγραμμένο, ἄρα

$$\widehat{\omega} + \widehat{B} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{\omega} = 180^\circ - \widehat{B} \quad (2)$$

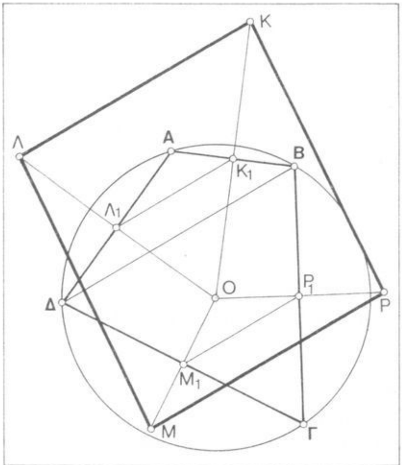
Ἀπό τίς (1), (2) ἔχουμε: $\widehat{\omega} = \widehat{\varphi}$ δηλαδή οἱ ἐντός ἐκτός καί ἐπί τά αὐτά γωνίες ἴσες, ἄρα Ε΄Ζ΄ ∥ ΕΖ.

---

5. Δίνεται ἕνα τετράπλευρο ΑΒΓΔ ἐγγεγραμμένο σέ κύκλ(Ο,ρ) καί παίρνουμε τά σημεῖα Κ,Λ,Μ,Ρ συμμετρικά τοῦ κέντρου Ο ὡς πρός τίς πλευρές τοῦ ΑΒΓΔ. Νά δείξετε ὅτι τό ΚΛΜΡ εἶναι παραλληλόγραμμο.

Λύση: Γιά νά δείξουμε ὅτι τό ΚΛΜΡ εἶναι παρ/μο, ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι δύο ἀπέναντι πλευρές του εἶναι παράλληλες καί ἴσες.

Ἐπειδή ΟΚ ⊥ ΑΒ δηλαδή ἡ ΟΚ εἶναι κάθετη σέ μιά χορδή ἀπό τό κέντρο, θά διέρχεται ἀπό τό μέσο K_1, τῆς ΑΒ. Ὅμοια τά $Λ_1$, M_1, P_1 εἶναι τά μέσα τῶν χορδῶν ΑΔ, ΔΓ, ΓΒ.



Τότε, ὅμως $Λ_1K_1 \parallel = \frac{ΔB}{2}$ (1)

(γιατί ἡ $Λ_1K_1$ διέρχεται ἀπό τά μέσα τῶν πλευρῶν στό τριγ ΑΒΔ).

Ὅμοια $M_1P_1 \parallel = \frac{ΔB}{2}$ (2)

Ἀπό τίς (1), (2) ἔχουμε

$Λ_1K_1 \parallel = M_1P_1$ (3)

Ἐπειδή τό Κ εἶναι τό συμμετρικό τοῦ Ο τό K_1 εἶναι τό μέσο τοῦ ΟΚ. Ὅμοια τό $Λ_1$ εἶναι τό μέσο τοῦ ΟΛ.

Ἀπό τό τριγΟΚΛ ἔχουμε λοιπόν

$Λ_1K_1 \parallel = \frac{ΛK}{2}$ (4)

Ἐπίσης ἀπό τό τριγ ΟΜΡ ἔχουμε

$M_1P_1 \parallel = \frac{MP}{2}$ (5)

Ἀπό τίς (4), (5) ἔχουμε, λόγῳ τίς (3), ὅτι

ΛΚ $\parallel =$ ΜΡ δηλ. τό ΚΛΜΡ εἶναι παρ/μο.

6. **Δίνεται μία γωνία $\widehat{XOΨ}$ καί ὁρισμένο σημεῖο Σ τῆς διχοτόμου της. Γράφουμε δύο κύκλους πού διέρχονται ἀπό τά σημεῖα Ο καί Σ καί τέμνουν τήν πλευρά ΟΧ στά σημεῖα Α καί Α΄ καί τήν πλευρά ΟΨ στά σημεῖα Β καί Β΄. Νά δείξετε ὅτι ΑΑ΄= ΒΒ΄.**

Λύση: Ἔστω ὁ κύκλος (O_1) πού διέρχεται ἀπό τά Ο,Σ καί τέμνει τήν ΟΧ στό Α καί τήν ΟΨ στό Β. Ἐπίσης ἔστω ὁ κύκλος (O_2) πού διέρχεται ἀπό τά Ο καί Σ καί τέμνει τήν ΟΧ στό Α΄, τήν ΟΨ στό Β΄.

Γιά νά δείξουμε ὅτι

ΑΑ΄ = ΒΒ΄

θά συγκρίνουμε τά τρίγωνα ΣΑΑ΄ καί ΣΒΒ΄.

Ἐπειδή ἡ ΟΣ εἶναι διχοτόμος θά διέρχεται ἀπό τό μέσο τοῦ τόξου ΑΣΒ στό κύκλο (O_1) δηλαδή:

$\widehat{AΣ} = \widehat{ΣB} \Longrightarrow AΣ = ΣB.$ (1)

Ἐπίσης στόν κύκλο (O_2) ἡ διχοτόμος ΟΣ θά περάσει ἀπό τό μέσο τοῦ τόξου Α΄ΣΒ΄ δηλαδή:

$\widehat{A'Σ} = \widehat{ΣB'} \Longrightarrow A'Σ = ΣB'$ (2)

Ἀπό τό ἐγγεγραμμένο τετράπλευρο ΟΑΣΒ ἔχουμε:

$$\widehat{\mathrm{A\Sigma B}} + \widehat{\mathrm{O}} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{\mathrm{A\Sigma B}} = 180^\circ - \widehat{\mathrm{O}} \quad (3)$$

καί ἀπό τό ἐγγεγραμμένο τετράπλευρο ΟΑ΄ΣΒ΄ ἔχουμε:

$$\widehat{\mathrm{A'\Sigma B'}} + \widehat{\mathrm{O}} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{\mathrm{A'\Sigma B'}} = 180^\circ - \widehat{\mathrm{O}} \quad (4)$$

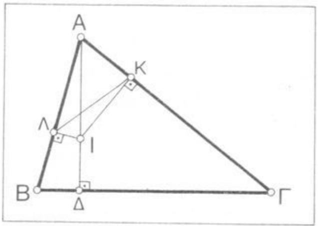
Ἀπό τίς (3), (4) προκύπτει:

$$\widehat{\mathrm{A\Sigma B}} = \widehat{\mathrm{A'\Sigma B'}} \Rightarrow \widehat{\mathrm{A\Sigma B'}} + \widehat{\mathrm{B'\Sigma B}} = \widehat{\mathrm{A\Sigma B'}} + \widehat{\mathrm{A\Sigma A'}} \Rightarrow \widehat{\mathrm{B'\Sigma B}} = \widehat{\mathrm{A\Sigma A'}} \quad (5)$$

Ἀπό τίς (1), (2), (5) προκύπτει ὅτι:

$$\text{τριγ}\ \mathrm{A\Sigma A'} = \widehat{\mathrm{B\Sigma B'}} \Rightarrow \mathrm{AA'} = \mathrm{BB'}.$$

7. **Ἀπό ἕνα σημεῖο Ι τοῦ ὕψους ΑΔ ἑνός τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε τά τμήματα ΙΚ καί ΙΛ κάθετα στίς πλευρές ΑΓ καί ΑΒ ἀντιστοίχως.** Νά δείξετε ὅτι τό τετράπλευρο **ΒΓΚΛ εἶναι ἐγγράψιμο σέ κύκλο.**



Λύση: Ἐπειδή ΙΛ $\perp$ ΑΒ $\Rightarrow \widehat{\mathrm{I\Lambda A}} = 90^\circ$

καί ἐπειδή ΙΚ $\perp$ ΑΓ $\Rightarrow \widehat{\mathrm{IKA}} = 90^\circ$

ἄρα $\widehat{\mathrm{I\Lambda A}} + \widehat{\mathrm{IKA}} = 180^\circ$

ἑπομένως τό ΑΛΙΚ εἶναι ἐγγράψιμο, ἄρα:

$$\widehat{\mathrm{A\Lambda K}} = \widehat{\mathrm{AIK}} \quad (1)$$

Ἐπίσης ἐπειδή οἱ γωνίες $\widehat{\mathrm{A\Delta\Gamma}}$ καί $\widehat{\mathrm{IK\Gamma}}$ εἶναι ὀρθές δηλαδή ἔχουν ἄθροισμα 180°, τό ΙΔΓΚ εἶναι ἐγγράψιμο, ἑπομένως:

$$\widehat{\Gamma} = \widehat{\mathrm{AIK}} \quad (2).$$

Ἀπό τίς (1), (2) προκύπτει ὅτι:

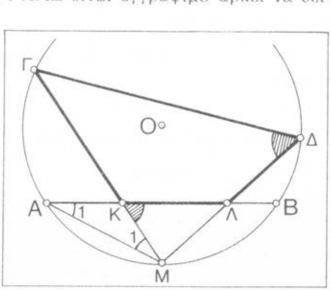
$$\widehat{\mathrm{A\Lambda K}} = \widehat{\Gamma}$$

πού σημαίνει ὅτι τό ΒΓΚΛ εἶναι ἐγγράψιμο.

8. **Θεωροῦμε μία χορδή ΑΒ ἑνός κυκλ (Ο,ρ) καί τό μέσο Μ τοῦ κυρτογώνιου τόξου $\widehat{\mathrm{AB}}$. Ἄν Γ καί Δ εἶναι δύο ὁποιαδήποτε σημεῖα τοῦ μή κυρτογώνιου τόξου $\widehat{\mathrm{AB}}$ καί οἱ χορδές ΜΓ καί ΜΔ τέμνουν τήν ΑΒ στά σημεῖα Κ καί Λ, νά δείξετε ὅτι τό τετράπλευρο ΓΚΛΔ εἶναι ἐγγράψιμο.**

Λύση: Γιά νά δείξουμε ὅτι τό τετράπλευρο ΓΚΛΔ εἶναι ἐγγράψιμο ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι μιά ἐσωτερική του γωνία εἶναι ἴση μέ τήν ἀπέναντι ἐξωτερική π.χ. θά δείξουμε ὅτι

$$\widehat{\mathrm{MK\Lambda}} = \widehat{\Delta}.$$



Ἄν φέρουμε τήν ΑΜ ἀπό τό τριγ. ΑΚΜ ἔχουμε:

$$\widehat{\mathrm{MK\Lambda}} = \widehat{\mathrm{A}}_1 + \widehat{\mathrm{M}}_1 = \frac{\widehat{\mathrm{MB}}}{2} + \frac{\widehat{\mathrm{A\Gamma}}}{2} \quad (1)$$

(γιατί ἡ $\widehat{\mathrm{A}}_1$ εἶναι ἐγγεγραμμένη στό τόξο $\widehat{\mathrm{MB}}$ καί ἡ M_1 στό $\widehat{\mathrm{A\Gamma}}$).

Ἐπειδή ἡ $\widehat{\Delta}$ εἶναι ἐγγεγραμμένη στό τόξο $\widehat{\Gamma A M}$ ἔχουμε:

$$\widehat{\Delta} = \frac{\widehat{\Gamma A M}}{2} = \frac{\widehat{MA}}{2} + \frac{\widehat{A\Gamma}}{2} = \frac{\widehat{MB}}{2} + \frac{\widehat{A\Gamma}}{2} \qquad (2)$$

(γιατί $\widehat{AM} = \widehat{MB}$).
Ἀπό τίς (1), (2) ἔχουμε:

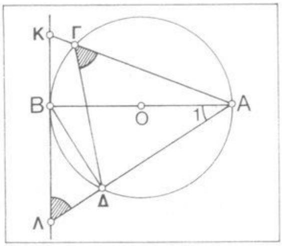
$$\widehat{MK\Lambda} = \widehat{\Delta}$$

---

9. **Δίνεται μία διάμετρος ΑΒ ἑνός κύκλ(Ο,ρ) καί δύο χορδές ΑΓ καί ΑΔ τοῦ κύκλου ἑκατέρωθεν τῆς διαμέτρου ΑΒ. Ἄν ἡ ἐφαπτομένη στό Β τέμνει τίς προεκτάσεις τῶν ΑΓ καί ΑΔ στά σημεῖα Κ καί Λ, νά δείξετε ὅτι τά σημεῖα Γ,Δ,Κ,Λ εἶναι ὁμοκυκλικά.**

Λύση: Οἱ γωνίες $\widehat{A\Gamma\Delta}$ καί $\widehat{AB\Delta}$ εἶναι ἐγγεγραμμένες στό τόξο $\widehat{A\Delta}$ ἄρα:

$$\widehat{A\Gamma\Delta} = \widehat{AB\Delta}$$



καί ἐπειδή ἡ $\widehat{B\Delta A} = 90^\circ$ θά εἶναι:

$$\widehat{A\Gamma\Delta} = \widehat{AB\Delta} = 90^\circ - \widehat{A}_1 \qquad (1)$$

Ἀπό τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΒΔΛ ἔχουμε:

$$\widehat{\Lambda} = 90^\circ - \widehat{\Lambda B\Delta}$$

καί ἐπειδή $\widehat{A}_1 = \widehat{\Lambda B\Delta}$ (ἡ μία εἶναι ἐγγεγραμμένη καί ἡ ἄλλη ἀπό χορδή καί ἐφαπτομένη) ἔχουμε:

$$\widehat{\Lambda} = 90^\circ - \widehat{A}_1 \qquad (2)$$

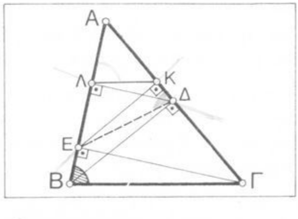
Ἀπό τίς (1), (2) προκύπτει:

$$\widehat{A\Gamma\Delta} = \widehat{\Lambda}$$

πού σημαίνει ὅτι τό ΚΓΔΛ εἶναι ἐγγράψιμο, δηλαδή τά Κ,Γ,Δ,Λ εἶναι ὁμοκυκλικά.

---

10. **Θεωροῦμε τά ὕψη ΒΔ καί ΓΕ ἑνός τριγώνου ΑΒΓ. Ἀπό τό Ε φέρνουμε παράλληλη πρός τό ΒΔ, ἡ ὁποία τέμνει τήν ΑΓ στό Κ, καί ἀπό τό Δ φέρνουμε παράλληλη πρός τό ΓΕ, ἡ ὁποία τέμνει τήν ΑΒ στό Λ. Νά δείξετε ὅτι ΚΛ || ΒΓ.**



Λύση: Ἐπειδή $\widehat{BE\Gamma} = \widehat{B\Delta\Gamma} = 90^\circ$ τό ΒΕΔΓ εἶναι ἐγγράψιμο, ἄρα

$$\widehat{K\Delta E} = \widehat{B} \qquad (1)$$

Ἐπειδή

$$\widehat{E\Lambda\Delta} = \widehat{EK\Delta} = 90^\circ$$

τό ΕΛΚΔ εἶναι ἐγγράψιμο, ἄρα: $\widehat{K\Delta E} = \widehat{A\Lambda K}$ (2)

Ἀπό τίς (1), (2) ἔχουμε: $\widehat{B} = \widehat{A\Lambda K}$
πού σημαίνει ὅτι ΛΚ || ΒΓ.

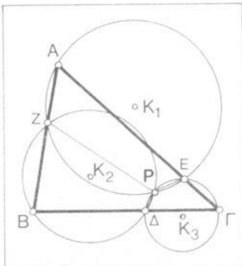
---

11. **Θεωροῦμε τρία ὁποιαδήποτε σημεῖα Δ,Ε,Ζ τῶν πλευρῶν ΒΓ,ΓΑ,ΑΒ ἐντός τριγώνου ΑΒΓ. Γράφουμε τόν κύκλο κ_1 πού διέρχεται ἀπό τά Α,Ζ,Ε, τόν κύκλο κ_2 πού διέρχεται**

ἀπό τά Ζ,Β,Δ καί τόν κύκλο $κ_3$ πού διέρχεται ἀπό τά Δ,Γ,Ε. Νά δείξετε ὅτι οἱ κύκλοι $κ_1$, $κ_2$, $κ_3$ διέρχονται ἀπό τό ἴδιο σημεῖο.

Λύση: Θεωροῦμε τούς κύκλους $κ_1$ πού διέρχεται ἀπό τά Α,Ζ,Ε καί $κ_2$ πού διέρχεται ἀπό τά Β,Ζ,Δ, οἱ ὁποῖοι τέμνονται στό σημεῖο Ρ.

Γιά νά δείξουμε ὅτι καί ὁ κύκλος $κ_3$ διέρχεται ἀπό τό Ρ ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι τό τετράπλευρο ΔΡΕΓ εἶναι ἐγγράψιμο.



Ἀπό τό ἐγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΖΡΕ ἔχουμε

$$\widehat{A} + \widehat{ZPE} = 180^\circ \quad (1)$$

Ἀπό τό ἐγγεγραμμένο τετράπλευρο ΒΖΡΔ ἔχουμε:

$$\widehat{B} + \widehat{ZP\Delta} = 180^\circ \quad (2)$$

Προσθέτοντες τίς (1), (2) κατά μέλη ἔχουμε:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{ZPE} + \widehat{ZP\Delta} = 360^\circ \quad (3)$$

Ἀπό τό σχῆμα ὅμως ἔχουμε:

$$\widehat{ZPE} + \widehat{ZP\Delta} + \widehat{\Delta PE} = 360^\circ \Longrightarrow \widehat{ZPE} + \widehat{ZP\Delta} = 360^\circ - \widehat{\Delta PE} \quad (4)$$

Καί ἀπό τό τριγΑΒΓ εἶναι:

$$\widehat{A} + \widehat{B} = 180^\circ - \widehat{\Gamma} \quad (5)$$

Ἀντικαθιστώντας στή (3) τίς (4), (5) ἔχουμε:

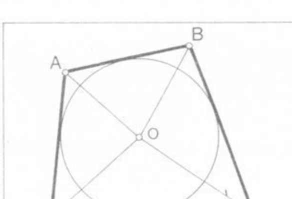
$$180^\circ - \widehat{\Gamma} + 360^\circ - \widehat{\Delta PE} = 360^\circ \Longrightarrow \widehat{\Gamma} + \widehat{\Delta PE} = 180^\circ$$

πού σημαίνει ὅτι τό ΔΡΕΓ εἶναι ἐγγράψιμο, δηλαδή ὁ κύκλος $κ_3$ διέρχεται καί ἀπό τό Ρ.

---

12. **Σ' ἕνα τετράπλευρο ΑΒΓΔ περιγεγραμμένο στόν κύκλ(Ο,ρ) ἔχουμε πάντοτε $\widehat{AOB} + \widehat{\Gamma O\Delta} = 180^0$.**

Λύση: Ὅπως γνωρίζουμε οἱ ΟΑ,ΟΒ εἶναι διχοτόμοι τῶν γωνιῶν $\widehat{A}$ καί $\widehat{B}$. Ἀπό τό τριγ. ΟΑΒ ἔχουμε:



$$\widehat{AOB} = 180^\circ - \left(\frac{\widehat{A}}{2} + \frac{\widehat{B}}{2}\right) \quad (1)$$

Ὅμοια οἱ ΟΔ,ΟΓ εἶναι διχοτόμοι, ἄρα

$$\widehat{\Gamma O\Delta} = 180^\circ - \left(\frac{\widehat{\Delta}}{2} + \frac{\widehat{\Gamma}}{2}\right) \quad (2)$$

Προσθέτοντες τίς (1), (2) βρίσκουμε:

$$\widehat{AOB} + \widehat{\Gamma O\Delta} = 360^\circ - \left(\frac{\widehat{A}}{2} + \frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{\Gamma}}{2} + \frac{\widehat{\Delta}}{2}\right)$$

Ἀπό τό τετράπλευρο ΑΒΓΔ ἔχουμε:

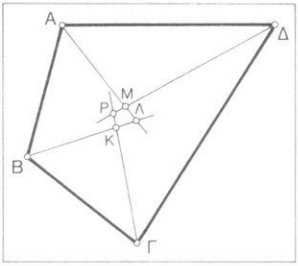
$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} + \widehat{\Delta} = 360^\circ \Longrightarrow \frac{\widehat{A}}{2} + \frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{\Gamma}}{2} + \frac{\widehat{\Delta}}{2} = 180^\circ$$

Ὁπότε: $\widehat{AOB} + \widehat{\Gamma O\Delta} = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$.

---

13. **Θεωροῦμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ (μή περιγράψιμο) καί ὀνομάζουμε Κ,Λ,Μ,Ρ τά σημεῖα ὅπου τέμνονται οἱ διχοτόμοι τῶν διαδοχικῶν γωνιῶν του. Νά δείξετε ὅτι τά σημεῖα αὐτά εἶναι ὁμοκυκλικά.**

Λύση: Γιά νά δείξουμε ὅτι τά σημεῖα Κ,Λ,Μ,Ρ εἶναι ὁμοκυκλικά, ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι τό ΡΜΛΚ εἶναι ἐγγράψιμο.



Ἀπό τό τριγ ΑΛΒ ἔχουμε

$$\widehat{A\Lambda B} = 180^\circ - \left(\frac{\widehat{A}}{2} + \frac{\widehat{B}}{2}\right) \qquad (1)$$

(γιατί οἱ ΑΛ καί ΒΛ εἶναι διχοτόμοι).

Ἐπίσης ἀπό τό τριγΡΔΓ ἔχουμε:

$$\widehat{\Gamma P \Delta} = 180^\circ - \left(\frac{\widehat{\Gamma}}{2} + \frac{\widehat{\Delta}}{2}\right) \qquad (2)$$

Προσθέτοντες τίς (1), (2) βρίσκουμε:

$$\widehat{A\Lambda B} + \widehat{\Gamma P \Delta} = 360^\circ - \left(\frac{\widehat{A}}{2} + \frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{\Gamma}}{2} + \frac{\widehat{\Delta}}{2}\right)$$

Καί ἐπειδή ἀπό τό τετράπλευρο ΑΒΓΔ ἔχουμε $\frac{\widehat{A}}{2} + \frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{\Gamma}}{2} + \frac{\widehat{\Delta}}{2} = 180^\circ$

βρίσκουμε:

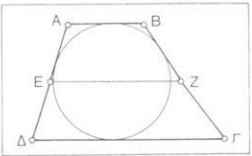
$$\widehat{A\Lambda B} + \widehat{\Gamma P \Delta} = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$$

πού σημαίνει ὅτι τό ΡΜΛΚ εἶναι ἐγγράψιμο.

---

14. **Ἡ διάμεσος περιγεγραμμένου τραπεζίου εἶναι ἴση μέ τό $\frac{1}{4}$ τῆς περιμέτρου του.**

Λύση: Γνωρίζουμε ὅτι ἡ διάμεσος τραπεζίου εἶναι



$$EZ = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2} \qquad (1)$$

Ἐπειδή τό ΑΒΓΔ εἶναι περιγεγραμμένο ἔχουμε:

$$AB + \Gamma\Delta = A\Delta + B\Gamma$$

Ὁπότε ἡ (1) δίδει καί

$$EZ = \frac{A\Delta + B\Gamma}{2} \qquad (2)$$

Προσθέτοντες τίς (1), (2) ἔχουμε:

$$2 \cdot EZ = \frac{AB + \Gamma\Delta + A\Delta + B\Gamma}{2} \Rightarrow EZ = \frac{AB + \Gamma\Delta + A\Delta + B\Gamma}{4}$$

---

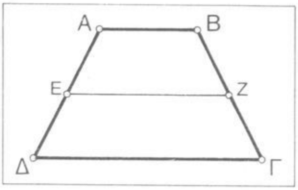
15. **Σ' ἕνα ἰσοσκελές τραπέζιο ἡ διάμεσός του εἶναι ἴση μέ μία ἀπό τίς μή παράλληλες πλευρές του. Νά δείξετε ὅτι τό τραπέζιο εἶναι περιγράψιμο σέ κύκλο.**

Λύση: Ἔστω τό ἰσοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ, δηλαδή

$$ΑΔ = ΒΓ$$

γιά τό ὁποῖο ἔχουμε:

$$ΕΖ = ΑΔ = ΒΓ \quad (1)$$



Γνωρίζουμε ὅτι

$$ΕΖ = \frac{ΑΒ + ΓΔ}{2}$$

$$\Longrightarrow 2 \cdot ΕΖ = ΑΒ + ΓΔ \Longrightarrow ΕΖ + ΕΖ = ΑΒ + ΓΔ$$

Καί ἀπό τήν (1) ἔχουμε:

$$ΑΔ + ΒΓ = ΑΒ + ΓΔ$$

δηλαδή τό τετράπλευρο ἔχει τό ἄθροισμα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν τό ἴδιο, ἄρα εἶναι περιγράψιμο.

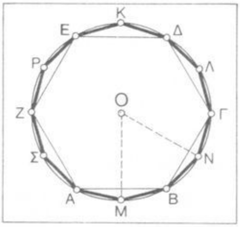
---

16. **Σέ κύκλο (Ο,ρ) νά ἐγγραφεῖ κανονικό δωδεκάγωνο καί κανονικό εἰκοσιτετράγωνο.**

Λύση: α) Ἐγγράφουμε τό κανονικό ἑξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ μέ τό γνωστό τρόπο (βιβλίο § 10.6) καί παίρνουμε τά μέσα τῶν τόξων $\overset{\frown}{ΑΒ}, \overset{\frown}{ΒΓ}, \overset{\frown}{ΓΔ}, \overset{\frown}{ΔΕ}, \overset{\frown}{ΕΖ}, \overset{\frown}{ΖΑ}$ ὁπότε τό ΑΜΒΝΓΛΔΚΕΡΖΣ εἶναι τό κανονικό δωδεκάγωνο.

Γιά τά μέσα τῶν τόξων ἀρκεῖ νά φέρουμε $ΟΜ \perp ΑΒ$, $ΟΝ \perp ΓΒ, \ldots$

β) Γιά τό κανονικό εἰκοσιτετράγωνο ἀρκεῖ νά γράψουμε τό κανονικό δωδεκάγωνο καί νά βροῦμε τά μέσα τῶν τόξων.



---

17. **Νά ὑπολογισθεῖ τό πλῆθος τῶν πλευρῶν ἑνός κανονικοῦ πολυγώνου τοῦ ὁποίου, ἡ γωνία εἶναι: α) 135° β) 144°.**

Λύση: Γνωρίζουμε ὅτι ἡ γωνία ἑνός κανονικοῦ πολυγώνου μέ ν πλευρές εἶναι

$$\widehat{\omega} = \frac{2\nu - 4}{\nu} \text{ ὀρθές ἤ } \widehat{\omega} = \left(\frac{2\nu - 4}{\nu} \cdot 90\right)^\circ$$

Πρέπει λοιπόν

$$α)\ \frac{2\nu - 4}{\nu} \cdot 90 = 135 \Longrightarrow (2\nu - 4) \cdot 90 = 135 \cdot \nu \Longrightarrow 180\nu - 135\nu = 360 \Longrightarrow$$

$$45\nu = 360^\circ \Longrightarrow \nu = 8.$$

δηλαδή τό κανονικό ὀκτάγωνο.

$$β)\ \frac{2\nu - 4}{\nu} \cdot 90 = 144 \Longrightarrow (2\nu - 4) \cdot 90 = 144\nu \Longrightarrow 180\nu - 144\nu = 360^\circ \Longrightarrow$$

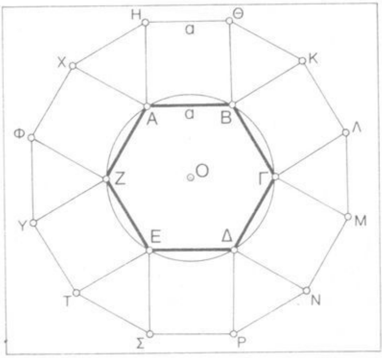
$$36\nu = 360 \Longrightarrow \nu = 10$$

δηλαδή τό κανονικό δεκάγωνο.

---

18. **Στίς πλευρές ἑνός κανονικοῦ ἑξαγώνου καί στό ἐξωτερικό του κατασκευάζουμε τετράγωνα. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι οἱ ἄλλες κορυφές τῶν τετραγώνων, σχηματίζουν κανονικό πολύγωνο.**

Λύση: Ἔστω τό κανονικό ἑξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ, καί τά τετράγωνα στό ἐξωτερικό του. Θέλουμε νά ἀποδείξουμε ὅτι τό ΗΘΚΛ...Χ εἶναι κανονικό δωδεκάγωνο.



Γιά νά τό δείξουμε αὐτό πρέπει νά δείξουμε ὅτι εἶναι ἰσογώνιο καί ἰσόπλευρο.

Ἔστω $AB = \alpha$, τότε ἀπό τό τετράγωνο ΑΒΘΗ εἶναι:

$$H\Theta = B\Theta = \alpha \qquad (1)$$

καί ἀπό τό ΒΓΛΚ εἶναι:

$$B\Gamma = BK = K\Lambda = \alpha \qquad (2)$$

Ἐπειδή τό ΑΒΓΔΕΖ εἶναι κανονικό ἑξάγωνο ἡ

$$\widehat{AB\Gamma} = 120^\circ$$

ἄρα $\widehat{\Theta BK} = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + 120^\circ) = 60^\circ$

Ἔτσι τό τριγΘΒΚ εἶναι ἰσοσκελές καί ἔχει μιά γωνία 60° ἄρα εἶναι ἰσόπλευρο, δηλαδή $B\Theta = \Theta K = BK = \alpha \qquad (3)$

Ἀπό τίς (1), (2), (3) ἔχουμε λοιπόν

$$H\Theta = \Theta K = K\Lambda = \ldots = \alpha.$$

Ἡ γωνία $\widehat{H\Theta K} = \widehat{H\Theta B} + \widehat{B\Theta K} = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$.

Ὅμοια καί οἱ ἄλλες γωνίες $\widehat{\Theta K\Lambda} = \widehat{K\Lambda M} = \ldots = 150^\circ$.

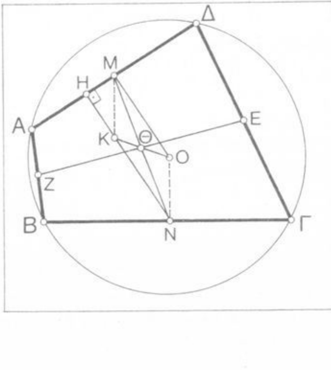
Ἄρα τό ΗΘΚΛ...Χ εἶναι ἰσόπλευρο καί ἰσογώνιο δηλ. κανονικό πολύγωνο.

---

19. **Σ' ἕνα τετράπλευρο ΑΒΓΔ ἐγγεγραμμένο στόν κυκλ(Ο,ρ) ὀνομάζουμε Θ τό σημεῖο στό ὁποῖο τέμνονται οἱ εὐθεῖες πού ἑνώνουν τά μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν του. Ἄν εἶναι Κ = συμμ$_\Theta$Ο, νά δείξετε ὅτι:**

α) Ἡ εὐθεία πού ἑνώνει τό μέσο μιᾶς πλευρᾶς τοῦ τετραπλεύρου μέ τό Κ εἶναι κάθετη στήν ἀπέναντι πλευρά του.

β) Οἱ εὐθεῖες πού διέρχονται ἀπό τά μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου καί εἶναι κάθετες στίς ἀπέναντι πλευρές του διέρχονται ἀπό τό ἴδιο σημεῖο.



Λύση: α) Ἄν εἶναι Μ,Ζ,Ν,Ε τά μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου, ὅπως γνωρίζουμε (βιβλίο § 6.3 τό β) τό ΜΖΝΕ εἶναι παρ/μο, ἄρα οἱ διαγώνιές του ΜΝ καί ΖΕ διχοτομοῦνται, δηλαδή τό Θ εἶναι τό μέσο τῆς ΜΝ καί τῆς ΖΕ.

Ἐπειδή τό Κ εἶναι τό συμμετρικό τοῦ Ο

ώς πρός τό Θ τό Θ εἶναι τό μέσο τοῦ ΟΚ. Ἔτσι τό ΜΚΝΟ εἶναι παρ/μο γιατί οἱ διαγώνιές του διχοτομοῦνται, ἄρα:

$$NK \parallel OM$$

Ἀλλά, ἐπειδή Μ μέσο τοῦ ΑΔ, τότε

$$OM \perp A\Delta$$

ἄρα καί γιά τή παράλληλό της, ΚΝ θά ἔχουμε

$$NKH \perp A\Delta.$$

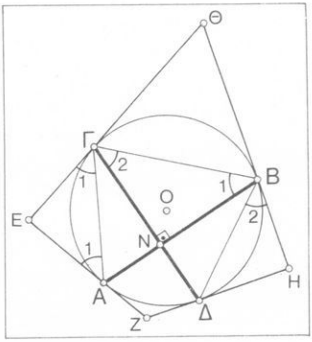
β) Στό προηγούμενο ἐρώτημα ἀποδείξαμε ἡ κάθετη ΝΗ περιέχει τό Κ, δηλαδή ἡ κάθετη ἀπό τό μέσο μιᾶς πλευρᾶς στήν ἀπέναντι πλευρά περιέχει τό Κ. Αὐτό γίνεται γιά τήν κάθε κάθετη ἄρα ὅλες περιέχουν τό **Κ**, δηλαδή διέρχονται ἀπό τό ἴδιο σημεῖο.

---

20. **Θεωροῦμε κυκλ(Ο,ρ) καί δύο κάθετες χορδές του ΑΒ καί ΓΔ. Νά δείξετε ὅτι οἱ ἐφαπτόμενες τοῦ κύκλου στά Α,Β,Γ,Δ σχηματίζουν ἐγγράψιμο τετράπλευρο.**

Λύση: Ἔστω ὅτι σχηματίστηκε τό τετράπλευρο ΕΖΗΘ, γιά νά δείξουμε ὅτι εἶναι ἐγγράψιμο θά δείξουμε ὅτι

$$\widehat{E} + \widehat{H} = 180^\circ.$$



Ἀπό τό ἰσοσκελές τρίγ.ΕΑΓ (εἶναι

$EA = E\Gamma$, ἄρα $\widehat{\Gamma_1} = \widehat{A_1}$) ἔχουμε:

$$\widehat{E} = 180^\circ - (\widehat{A_1} + \widehat{\Gamma_1}) = 180^\circ - 2\widehat{\Gamma_1} \quad (1)$$

Ἀλλά $\widehat{\Gamma_1} = \widehat{B_1}$ (γιατί ἡ μία εἶναι ἐγγεγραμμένη καί ἡ ἄλλη ἀπό χορδή καί ἐφαπτομένη).

Ἄρα, ἡ (1) μᾶς δίνει:

$$\widehat{E} = 180^\circ - 2\widehat{B_1} \quad (2)$$

Ὅμοια γιά τήν $\widehat{H}$ ἔχουμε:

$$\widehat{H} = 180^\circ - 2\widehat{B_2} = 180^\circ - 2\widehat{\Gamma_2} \quad (3)$$

Προσθέτοντες τίς (2), (3) ἔχουμε:

$$\widehat{E} + \widehat{H} = 360^\circ - 2(\widehat{B_1} + \widehat{\Gamma_2}) \quad (4)$$

Ἀλλά ἀπό τό ὀρθογώνιο τριγ. ΓΝΒ ἔχουμε: $\widehat{B_1} + \widehat{\Gamma_2} = 90^\circ$

Ὁπότε ἡ (4) δίδει:

$$\widehat{E} + \widehat{H} = 360^\circ - 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ$$

πού σημαίνει ὅτι τό ΕΖΗΘ εἶναι ἐγγράψιμο.

---

21. **Ἡ ἐγγεγραμμένη περιφέρεια ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ($\widehat{A} = 90^\circ$) ἐφάπτεται στίς πλευρές του ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ στά σημεῖα Δ,Ε,Ζ. Ἄν Ι εἶναι ἡ προβολή τοῦ Ε στή ΔΖ, νά δείξετε ὅτι: α) Τό τρίγωνο ΕΙΔ εἶναι ἰσοσκελές β) Ἡ ΙΓ διχοτομεῖ τή γωνία $\widehat{EI\Delta}$ γ) Ἡ γωνία $\widehat{AI\Gamma}$ εἶναι ἴση μέ 90°.**

Λύση: α) Ἐπειδή ΑΕ = ΑΖ (ὡς ἐφαπτόμενες) καί ἐπειδή $\widehat{Α} = 90°$ θά ἔχουμε:

$$\widehat{ΑΕΖ} = \widehat{ΑΖΕ} = 45° \quad (1)$$

Ἀκόμα ἔχουμε

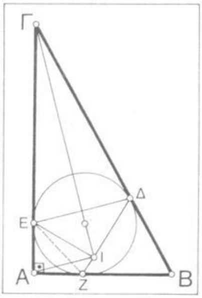
$$\widehat{ΕΔΙ} = \widehat{ΖΕΑ} = 45°$$

(γιατί ἡ μία εἶναι ἐγγεγραμμένη καί ἡ ἄλλη ἀπό χορδή καί ἐφαπτομένη).

Ἐπειδή τό ΕΙΔ εἶναι ὀρθογώνιο, θά εἶναι καί

$$\widehat{ΙΕΔ} = 45°$$

Ἄρα τό ΕΙΔ εἶναι ἰσοσκελές.



β) Συγκρίνουμε τά τρίγωνα ΓΕΙ καί ΓΔΙ ἔχουν

i) ΓΙ = ΓΙ

ii) ΙΕ = ΙΔ (γιατί τό τριγΕΙΔ εἶναι ἰσοσκελές)

iii) $\widehat{ΙΕΓ} = \widehat{ΙΔΓ}$

(γιατί $\widehat{ΙΕΓ} = 45° + \widehat{ΔΕΓ} = 45° + \widehat{ΕΔΓ} = \widehat{ΙΔΓ}$)

ἄρα τριγΓΕΙ = τριγΓΔΙ $\Longrightarrow$ $\widehat{ΕΙΓ} = \widehat{ΓΙΔ}$ πού σημαίνει ὅτι ἡ ΓΙ εἶναι διχοτόμος τῆς ΕΙΔ.

γ) Ἐπειδή ἡ ΓΙ εἶναι διχοτόμος καί ἡ $\widehat{ΕΙΔ} = 90°$, ἔχουμε:

$$\widehat{ΓΙΕ} = 45° \quad (2)$$

Ἐπειδή $\widehat{ΕΙΖ} = \widehat{ΕΑΖ} = 90°$ τό ΕΑΖΙ εἶναι ἐγγράψιμο θά ἔχουμε:

$$\widehat{ΕΙΑ} = \widehat{ΕΖΑ} = 45° \quad (3) \text{ (ἀπό τήν (1))}$$

Προσθέτοντες τίς (2), (3) ἔχουμε:

$$\widehat{ΓΙΕ} + \widehat{ΕΙΑ} = 90° \Longrightarrow \widehat{ΓΙΑ} = 90°.$$

---

22 **Δίνεται μία χορδή ΒΓ ἑνός κυκλ(Ο,ρ) καί οἱ ἐφαπτόμενες $ε_1$ καί $ε_2$ στά ἄκρα της. Ἀπό ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Μ τῆς ΒΓ φέρνουμε κάθετη στήν ΟΜ, ἡ ὁποία τέμνει τίς $ε_1$ καί $ε_2$ στά σημεῖα Ε καί Ζ. Νά δείξετε ὅτι ΕΜ = ΜΖ.**

Λύση: Ἐπειδή ΟΜ $\perp$ ΕΖ, εἶναι:

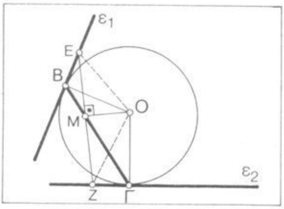
$$\widehat{ΟΜΖ} = 90°$$

καί ἐπειδή ΟΓ $\perp$ $ε_2$ εἶναι

$$\widehat{ΟΓΖ} = 90°$$

Ἄρα τό ΟΜΖΓ εἶναι ἐγγράψιμο, ἄρα

$$\widehat{ΟΖΜ} = \widehat{ΟΓΜ} \quad (1)$$



Ἐπίσης, ἐπειδή

$$\widehat{ΟΜΕ} = \widehat{ΟΒΕ} = 90°$$

τό ΟΜΒΕ εἶναι ἐγγράψιμο, ἄρα: $\widehat{ΟΕΜ} = \widehat{ΟΒΓ}$ (2)

Ἐπειδή τό τριγ ΟΒΓ εἶναι ἰσοσκελές, δηλαδή $\widehat{ΟΓΜ} = \widehat{ΟΒΜ}$ ἀπό τίς (1), (2) ἔχουμε:

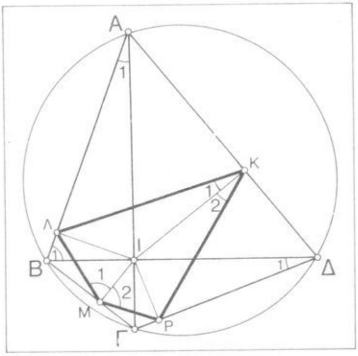
$$\widehat{ΟΖΜ} = \widehat{ΟΕΜ}$$

δηλαδή τό τριγΟΕΖ εἶναι ἰσοσκελές καί ἐπειδή ΟΜ ὕψος, θά εἶναι καί διάμεσος, δηλαδή ΕΜ = ΜΖ.

---

23. Ἕνα τετράπλευρο ΑΒΓΔ ἐγγεγραμμένο σέ κυκλ(Ο,ρ) ἔχει κάθετες διαγωνίους πού τέμνονται στό Ι. Ἄν Κ,Λ,Μ,Ρ εἶναι οἱ προβολές τοῦ Ι στίς πλευρές τοῦ ΑΒΓΔ, νά δείξετε ὅτι τό ΚΛΜΡ εἶναι ἐγγράψιμο καί περιγράψιμο.

Λύση: Θά δείξουμε πρῶτα ὅτι τό ΚΛΜΡ εἶναι περιγράψιμο καί γιά τοῦτο ἀρκεῖ ὅτι οἱ ΚΙ, ΛΙ, ΜΙ, ΡΙ εἶναι διχοτόμοι τῶν γωνιῶν του.



Ἐπειδή

$$\widehat{I\Lambda A} = \widehat{IKA} = 90^\circ$$

τό ΙΛΑΚ εἶναι ἐγγράψιμο, ἄρα

$$\widehat{K}_1 = \widehat{A}_1 \qquad (1)$$

Ἐπίσης ἐπειδή τό ΙΚΔΡ εἶναι ἐγγράψιμο θά ἔχουμε

$$\widehat{K}_2 = \widehat{\Delta}_1 \qquad (2)$$

Ἀλλά $\widehat{A}_1 = \widehat{\Delta}_1$ γιατί εἶναι ἐγγεγραμμένες στό ἴδιο τόξο, ὁπότε ἀπό τίς (1), (2) εἶναι

$$\widehat{K}_1 = \widehat{K}_2$$

πού σημαίνει ὅτι ἡ ΚΙ εἶναι διχοτόμος.

Ὅμοια οἱ ΛΙ, ΜΙ, ΡΙ εἶναι διχοτόμοι, ἄρα τό ΚΛΜΡ εἶναι ἐγγράψιμο.

Προηγουμένως ἀποδείξαμε ὅτι:

$$\widehat{\Lambda K P} = \widehat{K}_1 + \widehat{K}_2 = 2 \cdot \widehat{K}_1 = 2\widehat{A}_1 \qquad (3)$$

Ὅμοια ἀπό τό ἐγγράψιμο τετράπλευρο ΙΛΒΜ ἔχουμε:

$$\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2 = \widehat{B}_1$$

ἄρα:

$$\widehat{\Lambda M P} = \widehat{M}_1 + \widehat{M}_2 = 2\widehat{M}_1 = 2 \cdot \widehat{B}_1 \qquad (4)$$

Προσθέτοντες τίς (3), (4) βρίσκουμε:

$$\widehat{\Lambda K P} + \widehat{\Lambda M P} = 2\,(\widehat{A}_1 + \widehat{B}_1) = 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ$$

(γιατί τό τριγ ΑΙΒ εἶναι ὀρθογώνιο).

Ἄρα τό ΚΛΜΡ εἶναι ἐγγράψιμο.

---

24. Οἱ πλευρές ΑΒ καί ΓΔ ἑνός ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου ΑΒΓΔ τέμνονται στό Ε καί οἱ πλευρές του ΑΔ καί ΒΓ τέμνονται στό Ζ. Φέρνουμε τή διχοτόμο τῆς γωνίας $\widehat{E}$ πού τέμνει τίς πλευρές ΒΓ, ΑΔ στά σημεῖα Κ,Μ καί τή διχοτόμο τῆς $\widehat{Z}$ πού τέμνει τίς πλευρές ΓΔ καί ΑΒ στά σημεῖα Λ,Ρ. Νά δείξετε ὅτι:

α) Οἱ διχοτόμοι τῶν $\widehat{E}$ καί $\widehat{Z}$ τέμνονται καθέτως.

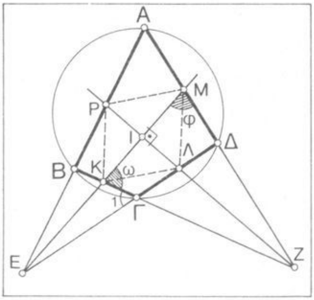
β) Τό τετράπλευρο ΚΛΜΡ εἶναι ρόμβος.

Λύση: α) Στό τριγ ΑΜΕ ἡ $\widehat{\varphi}$ εἶναι ἐξωτερική γωνία ἄρα:

$$\widehat{\varphi} = \widehat{A} + \frac{\widehat{E}}{2} \qquad (1)$$

Στο τριγΚΓΕ ή $\widehat{\omega}$ εἶναι ἐξωτερική γωνία, ἄρα $\widehat{\omega} = \widehat{\Gamma}_1 + \dfrac{\widehat{E}}{2}$ (2)

Ἀλλά ἀπό τό ἐγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΒΓΔ ἔχουμε: $\widehat{A} = \widehat{\Gamma}_1$



ὁπότε ἀπό τίς (1), (2) ἔχουμε: $\widehat{\varphi} = \widehat{\omega}$.
Ἄρα τό τριγ ΖΜΚ εἶναι ἰσοσκελές καί ἐπειδή ἡ ΖΙ εἶναι διχοτόμος θά εἶναι καί

$$ZI \perp EM.$$

β) Γιά νά δείξουμε ὅτι τό ΚΛΜΡ εἶναι ρόμβος, πρέπει οἱ διαγώνιες νά τέμνονται κάθετα καί νά διχοτομοῦνται.
Στό προηγούμενο ἐρώτημα ἀποδείξαμε ὅτι $ZI \perp KM$ δηλαδή οἱ διαγώνιες τέμνονται κάθετα. Ἐπειδή τό ΖΜΚ εἶναι ἰσοσκελές καί ἡ ΖΙ διχοτόμος, τότε θά εἶναι καί διάμεσος δηλ.

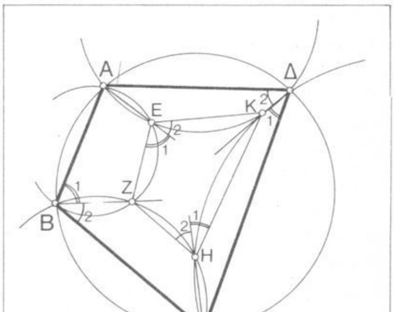
$$KI = IM$$

καί ὅμοια $PI = I\Lambda$ δηλαδή οἱ διαγώνιες τοῦ ΚΛΜΡ διχοτομοῦνται.

---

25. Θεωροῦμε ἕνα ἐγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΒΓΔ καί γράφουμε τόξα πού ἔχουν χορδές τίς πλευρές του καί ἀνά δύο διαδοχικά τέμνονται σέ σημεῖα Κ,Λ,Μ,Ρ πού βρίσκονται ὅλα μέσα (ἤ ἔξω) στό τετράπλευρο. Νά δείξετε ὅτι τά σημεῖα αὐτά εἶναι ὁμοκυκλικά

Λύση: Ἔστω τό ἐγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΒΓΔ καί τά τόξα χορδῆς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ πού τέμνονται ἀνά δύο στά σημεῖα Ε,Ζ,Η,Κ.



Γιά νά δείξουμε ὅτι τό ΕΖΗΚ εἶναι ἐγγράψιμο, θά δείξουμε ὅτι δύο ἀπέναντι γωνίες τους εἶναι παραπληρωματικές.
Ἐπειδή τό ΑΕΖΒ εἶναι ἐγγεγραμμένο θά ἔχουμε

$$\widehat{E}_1 = \widehat{B}_1 \quad (1)$$

Ἐπίσης ἀπό τό ἐγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΕΚΔ ἔχουμε:

$$\widehat{E}_2 = \widehat{\Delta}_2 \quad (2)$$

Ἀπό τό ἐγγεγραμμένο τετράπλευρο ΔΚΗΓ ἔχουμε

$$\widehat{H}_1 = \widehat{\Delta}_1 \quad (3)$$

Τέλος ἀπό τό ἐγγεγραμμένο τετράπλευρο ΒΖΗΓ ἔχουμε

$$\widehat{H}_2 = \widehat{B}_2 \quad (4)$$

Προσθέτοντες τίς (1), (2), (3), (4) ἔχουμε:

$$\widehat{E}_1 + \widehat{E}_2 + \widehat{H}_1 + \widehat{H}_2 = \widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 + \widehat{\Delta}_1 + \widehat{\Delta}_2 \Longrightarrow \widehat{KEZ} + \widehat{KHZ} = \widehat{B} + \widehat{\Delta} \quad (5)$$

Ἐπειδή τό ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγράψιμο ἔχουμε

$$\widehat{B} + \widehat{\Delta} = 180^\circ$$

ἀπό τήν (5) ἔχουμε:

$$\widehat{KEZ} + \widehat{KHZ} = 180^\circ$$

πού σημαίνει ὅτι τό ΕΖΗΚ εἶναι ἐγγράψιμο.

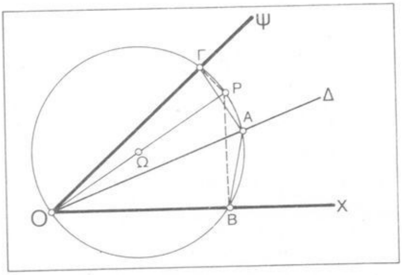
---

26. **Θεωροῦμε γωνία $\widehat{X O \Psi}$, τή διχοτόμο της ΟΔ καί ἕνα σημεῖο Ρ ἐσωτερικό τῆς γωνίας $\Delta\widehat{O}\Psi$. Ἄν Α,Β,Γ εἶναι οἱ προβολές τοῦ Ρ στίς ἡμιευθεῖες ΟΔ,ΟΧ,ΟΨ, νά δείξετε ὅτι:**

α) Τά σημεῖα Ο,Β,Α,Ρ,Γ εἶναι ὁμοκυκλικά.

β) Τά τμήματα ΑΒ καί ΑΓ εἶναι ἴσα.

Λύση: α) Ἄς θεωρήσουμε τό κύκλο μέ διάμετρο τό ΟΡ, τόν $\left(\Omega, \frac{OP}{2}\right)$.



Ἐπειδή $\widehat{OAP} = 90^\circ$, δηλαδή τό Α βλέπει τή διάμετρο ὑπό ὀρθή γωνία, ἄρα θ' ἀνήκει στό κύκλο αὐτό. Ὅμοια ἐπειδή

$$\widehat{OBP} = \widehat{O\Gamma P} = 90^\circ$$

τά Β καί Γ θ' ἀνήκουν στόν κύκλο $\left(\Omega, \frac{OP}{2}\right)$.

Ἑπομένως καί τά πέντε σημεῖα Ο,Γ,Ρ,Α,Β ἀνήκουν στόν κύκλο $\left(\Omega, \frac{OP}{2}\right)$ δηλαδή εἶναι ὁμοκυκλικά.

β) Ἐπειδή ἡ ΟΔ εἶναι διχοτόμος θά διέρχεται ἀπό τό μέσο τοῦ τόξου $\widehat{\Gamma A B}$, δηλαδή τό Α εἶναι τό μέσο τοῦ τόξου αὐτοῦ, στόν κύκλο $\left(\Omega, \frac{OP}{2}\right)$, δηλαδή

$$\widehat{A\Gamma} = \widehat{AB}$$

ὁπότε καί οἱ χορδές θά εἶναι ἴσες, ἑπομένως

$$A\Gamma = AB.$$

---

27. **Δύο κύκλοι κ_1 καί κ_2 μέ κέντρα Κ καί Λ τέμνονται στά Α καί Β. Ἄν οἱ ἀκτίνες ΚΑ καί ΛΑ τέμνουν τούς κύκλους κ_2 καί κ_1 στά σημεῖα Δ καί Γ, νά δείξετε ὅτι τά σημεῖα Γ,Κ,Β,Λ,Δ εἶναι ὁμοκυκλικά.**

Λύση: Γιά νά ἀποδείξουμε ὅτι τά πέντε σημεῖα Γ,Κ,Β,Λ,Δ εἶναι ὁμοκυκλικά θά δείξουμε ὅτι ἀνά τέσσερα σχηματίζουν ἐγγράψιμα τετράπλευρα.

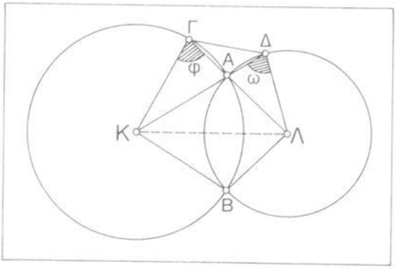
Παρατηροῦμε τά ἑξῆς:

i) Τό τριγΚΑΛ = ΚΒΛ (ΚΛ = ΚΛ, ΚΑ = ΚΒ, ΛΑ = ΛΒ) ἄρα:

$$\widehat{KA\Lambda} = \widehat{KB\Lambda} \qquad (1)$$

ii) Ἐπειδή τό τριγΚΓΑ εἶναι ἰσοσκελές, ἄν $\widehat{K\Gamma A} = \widehat{\varphi}$ τότε ἡ $\widehat{AK\Gamma} = 180 - 2\widehat{\varphi}$.

iii) Ἡ $\widehat{KA\Lambda}$ εἶναι ἐξωτερική στό τριγΚΑΓ ἄρα:



$$\widehat{KA\Lambda} = \widehat{\varphi} + \widehat{AK\Gamma} =$$

$$= \varphi + 180^\circ - 2\widehat{\varphi} = 180^\circ - \widehat{\varphi}$$

$$\Longrightarrow \widehat{KA\Lambda} + \widehat{\varphi} = 180^\circ \qquad (2)$$

Ἀπό τήν (1) ἤ (2) γίνεται:

$$\widehat{KB\Lambda} + \widehat{\varphi} = 180^\circ$$

πού σημαίνει ὅτι τό ΓΚΒΛ εἶναι ἐγγράψιμο.

Ὅμοια δείχνουμε ὅτι:

$$\widehat{KB\Lambda} + \widehat{\omega} = 180^\circ$$

πού σημαίνει ὅτι τό ΔΚΒΛ εἶναι ἐγγράψιμο.

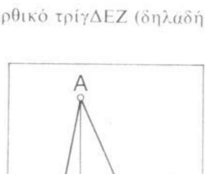
Ἑπομένως οἱ κύκλοι πού παιρνοῦν ἀπό τά Γ,Κ,Β,Λ καί ἀπό τά Δ,Κ,Β,Λ ἔχουν τρία κοινά σημεῖα, ἄρα ταυτίζονται, δηλαδή καί τά πέντε σημεῖα ἀνήκουν στόν ἴδιο κύκλο.

---

28. **Νά δείξετε ὅτι τά ὕψη ἑνός τριγώνου ΑΒΓ διχοτομοῦν τίς γωνίες τοῦ ὀρθικοῦ τριγώνου του.**

Λύση: Ἔστω ἕνα τριγΑΒΓ, τά ὕψη του ΑΔ,ΒΕ,ΓΖ καί τό ὀρθικό τρίγΔΕΖ (δηλαδή τό τρίγωνο πού ἔχει κορυφές τά ἴχνη τῶν ὑψῶν).

Θά δείξουμε ὅτι τό ΑΔ διχοτομεῖ τή γωνία $\widehat{E\Delta Z}$, δηλαδή θά δείξουμε ὅτι:



$$\widehat{Z\Delta H} = \widehat{H\Delta E}$$

Ἐπειδή $\widehat{HZB} + \widehat{H\Delta B} = 180^\circ$ (γιατί ἡ καθεμιά εἶναι μιά ὀρθή) τό τετράπλευρο ΗΖΒΔ εἶναι ἐγγράψιμο, ἄρα.

$$\widehat{Z\Delta H} = \widehat{ZBH} \qquad (1)$$

Ἐπειδή $\widehat{H\Delta\Gamma} + \widehat{HE\Gamma} = 180^\circ$ τό τετράπλευρο ΗΔΓΕ εἶναι ἐγγράψιμο, ἄρα:

$$\widehat{H\Delta E} = \widehat{H\Gamma E} \qquad (2)$$

Τέλος ἐπειδή $\widehat{BZ\Gamma} = \widehat{BE\Gamma} = 90^\circ$ τό τετράπλευρο ΒΖΕΓ εἶναι ἐγγράψιμο, ἄρα:

$$\widehat{ZBE} = \widehat{Z\Gamma E}$$

ὁπότε τά δεύτερα μέλη τῶν (1), (2) εἶναι ἴσα, ἄρα:

$$\widehat{Z\Delta H} = \widehat{H\Delta E}$$

Ὅμοια δείχνουμε ὅτι ἡ ΒΕ καί ΓΖ εἶναι διχοτόμοι τῶν γωνιῶν $\widehat{E}$ καί $\widehat{Z}$.

Σημ. Ἔτσι τό ὀρθόκεντρο Η τοῦ τριγ.ΑΒΓ εἶναι τό ἔγκεντρο τοῦ ὀρθικοῦ τριγ.ΖΔΕ.

---

29. Δίνεται ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ καί οἱ ἐφαπτόμενες τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου του στά Β καί Γ οἱ ὁποῖες τέμνονται στό Κ. Ἄν Δ,Ε,Ζ εἶναι οἱ προβολές τοῦ Κ στίς εὐθεῖες ΑΒ,ΒΓ,ΓΑ, νά δειχθεῖ ὅτι τό ΚΔΕΖ εἶναι παραλληλόγραμμο.

Λύση: Ἐπειδή $\widehat{KEB} + \widehat{K\Delta B} = 180^\circ$ (γιατί ἡ καθεμιά εἶναι 90°) τό τετράπλευρο ΚΕΒΔ εἶναι ἐγγράψιμο,ἄρα:

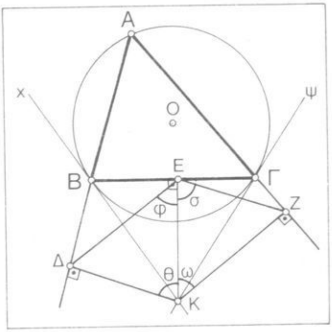
$$\widehat{\varphi} = \widehat{KB\Delta} = \widehat{ABX} \quad (1)$$

Ἐπίσης, ἐπειδή

$$\widehat{KE\Gamma} + \widehat{KZ\Gamma} = 180^\circ$$

τό ΚΕΓΖ εἶναι ἐγγράψιμο, ἄρα:

$$\widehat{\omega} = \widehat{B\Gamma A} \quad (2)$$



Ἀλλά $\widehat{B\Gamma A} = \widehat{ABX}$ (γιατί ἡ μία εἶναι ἐγγεγραμμένη καί ἡ ἄλλη ἀπό χορδή καί ἐφαπτομένη), τά δεύτερα μέλη λοιπόν τῶν (1), (2) εἶναι ἴσα, ἄρα

$$\widehat{\varphi} = \widehat{\omega}$$

πού συνεπάγεται ὅτι ΕΔ ∥ ΚΖ.

Ὅμοια ἔχουμε:

$$\widehat{\sigma} = \widehat{K\Gamma Z} = \widehat{A\Gamma\Psi} \quad \text{καί} \quad \widehat{\theta} = \widehat{AB\Gamma}$$

καί ἐπειδή $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{A\Gamma\Psi}$ εἶναι $\widehat{\sigma} = \widehat{\theta}$

πού συνεπάγεται ὅτι ΕΖ ∥ ΔΚ.

Τό ΕΔΚΖ ἔχει λοιπόν τίς ἀπέναντι πλευρές παράλληλες ἄρα εἶναι παραλληλόγραμμο

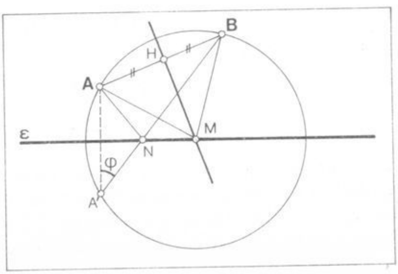
---

30. Θεωροῦμε μία εὐθεία ε καί δύο σημεῖα Α καί Β πρός τό ἴδιο μέρος της. Παίρνουμε τό σημεῖο Α΄= συμμ$_\varepsilon$ Α καί φέρνουμε τήν εὐθεία Α΄Β, πού τέμνει τήν ε στό Ν, καί τή μεσοκάθετο τοῦ τμήματος ΑΒ, πού τέμνει τήν ε στό Μ. Νά δείξετε ὅτι τά σημεῖα Α,Β,Μ,Ν εἶναι ὁμοκυκλικά.

Λύση: Γιά νά δείξουμε ὅτι τά Α,Β,Μ,Ν εἶναι ὁμοκυκλικά, θά δείξουμε ὅτι τό ΑΝΜΒ εἶναι ἐγγράψιμο.

Παρατηροῦμε τά ἑξῆς:

i) Ἡ ε εἶναι μεσοκάθετος τοῦ ΑΑ΄ (ἀπό τή συμμετρία) καί ἡ ΜΗ μεσοκάθετος τοῦ ΑΒ, ἄρα τό Μ εἶναι τό σημεῖο τομῆς τῶν μεσοκαθέτων τῶν πλευρῶν τοῦ τριγΑΒΑ΄



Τότε ἡ ΑΜΒ εἶναι ἐπίκεντρη καί ἡ $\widehat{AA'B} = \widehat{\varphi}$ εἶναι ἐγγεγραμμένη στό ἴδιο τόξο, ἄρα:

$$\widehat{AMB} = 2\widehat{\varphi}. \quad (1)$$

ii) Ἐπειδή τό τριγ ΝΑΑ΄ εἶναι ἰσοσκελές, θά εἶναι:

$$\widehat{NAA'} = \widehat{NA'A} = \widehat{\varphi}$$

καί ἡ ΑΝΒ ὡς ἐξωτερική γωνία, θά εἶναι:

$$\widehat{ANB} = \widehat{NAA'} + \widehat{NA'A} = 2\cdot\widehat{\varphi} \qquad (2)$$

Ἀπό τίς (1), (2) ἔχουμε

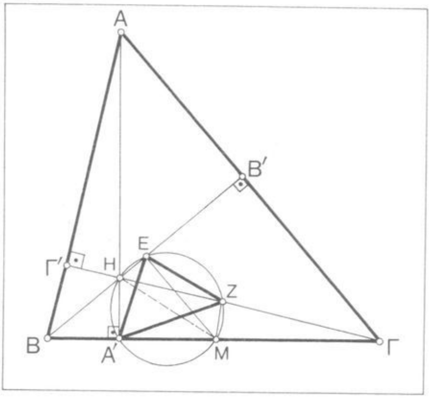
$$\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$$

πού συνεπάγεται ὅτι τό ΑΝΜΒ εἶναι ἐγγράψιμο.

---

31. **Θεωροῦμε τά ὕψη ΑΑ΄,ΒΒ΄,ΓΓ΄ ἑνός τριγώνου ΑΒΓ καί τά μέσα Ε,Ζ τῶν δύο ὑψῶν ΒΒ΄ καί ΓΓ΄. Νά δειχθεῖ ὅτι τό τρίγωνο Α΄ΕΖ εἶναι ἰσογώνιο μέ τό ΑΒΓ.**

Λύση: Θεωροῦμε καί τό μέσο Μ τῆς ΒΓ καί φέρνουμε τίς ΜΕ, ΜΖ, ΜΗ.



Ἐπειδή ἡ ΜΖ συνδέει τά μέσα δύο πλευρῶν στό τριγ Γ΄ΓΒ θά εἶναι:

$$MZ \parallel B\Gamma' \Rightarrow MZ \perp \Gamma\Gamma'$$
$$\Rightarrow \widehat{MZH} = 90^\circ$$

Ἐπίσης

$$ME \parallel \Gamma B' \Rightarrow ME \perp BB'$$
$$\Rightarrow \widehat{MEH} = 90^\circ.$$

Ἄν θεωρήσουμε τό κύκλο μέ διάμετρο ΗΜ, ἐπειδή τά σημεῖα Ε,Ζ,Α΄ βλέπουν τό ΗΜ ὑπό ὀρθή γωνία, αὐτά θά ἀνήκουν στό κύκλο αὐτό.

Δηλαδή τά σημεῖα Α΄,Η,Ε,Ζ,Μ ἀνήκουν στόν ἴδιο κύκλο.

Τό Α΄ΕΖΜ εἶναι ἐγγράψιμο,

ἄρα:

$$\widehat{A'EZ} = \widehat{ZM\Gamma} = \widehat{B}$$

(γιατί ΖΜ ∥ ΑΒ).

Τό Α΄ΕΖΜ εἶναι ἐγγράψιμο, ἄρα:

$$\widehat{A'ZE} = \widehat{A'ME} = \widehat{\Gamma}$$

(γιατί ΕΜ ∥ ΓΑ).

Ἀφοῦ τά τρίγωνα ΑΒΓ καί Α΄ΕΖ ἔχουν δύο γωνίες ἴσες θά ἔχουν καί τή τρίτη, δηλαδή καί

$$\widehat{EA'Z} = \widehat{A}.$$

---

32. **Θεωροῦμε ἕνα ἡμιεπίπεδο ἀκμῆς ε τρία (κυκλικά) τόξα τοῦ ἡμιεπιπέδου, πού διέρχονται ἀπό δύο ὁρισμένα σημεῖα Β καί Γ τῆς ε καί μία ἡμιευθεία ΒΧ τοῦ ἡμιεπιπέδου, πού τέμνει τά τόξα αὐτά στά σημεῖα Δ,Ε,Ζ. Ἄν οἱ ἐφαπτόμενες τῶν τόξων στά Δ,Ε,Ζ τέμνονται ἀνά δύο στά σημεῖα Κ,Λ,Ρ, νά δείξετε ὅτι τά σημεῖα Γ,Κ,Λ,Ρ εἶναι ὁμοκυκλικά.**

Λύση: Γιά νά δείξουμε ὅτι τά Γ,Κ,Λ,Ρ εἶναι ὁμοκυκλικά θά δείξουμε ὅτι τό ΚΛΡΓ εἶναι ἐγγράψιμο σέ κύκλο.

Ἡ $\widehat{\Delta_1} = \widehat{\varphi}$ γιατί εἶναι ὑπό χορδῆς καί ἐφαπτομένης καί ἐγγεγραμμένη.

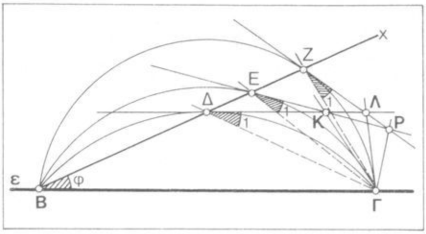
Ὅμοια $\widehat{E_1} = \widehat{\varphi}$ καί $\widehat{Z_1} = \widehat{\varphi}$.

Ἐπειδή $\widehat{E_1} = \widehat{Z_1}$ τό ΕΖΡΓ εἶναι ἐγγράψιμο, ἄρα:

$$\widehat{E P \Gamma} = \widehat{E Z \Gamma} \quad (1)$$

Ἐπειδή $\widehat{\Delta_1} = \widehat{Z_1}$ τό ΔΖΛΓ εἶναι ἐγγράψιμο, ἄρα:

$$\widehat{\Delta \Lambda \Gamma} = \widehat{\Delta Z \Gamma} \quad (2)$$



Τά δεύτερα μέλη τῶν (1), (2) εἶναι ἴσα, ἄρα:

$$\widehat{E P \Gamma} = \widehat{\Delta \Lambda \Gamma}$$

ἤ

$$\widehat{K P \Gamma} = \widehat{K \Lambda \Gamma}$$

πού συνεπάγεται ὅτι τό ΚΛΡΓ εἶναι ἐγγράψιμο σέ κύκλο.

---

33. **Δίνεται ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ ἐγγεγραμμένο σέ κύκλο καί ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Μ τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου του. Νά δείξετε ὅτι οἱ προβολές τοῦ Μ στίς πλευρές τοῦ τριγώνου βρίσκονται στήν ἴδια εὐθεία (εὐθεία τοῦ Simpson).**

Λύση: Ἔστωσαν Δ,Ε,Ζ οἱ προβολές τοῦ Μ στίς πλευρές ΑΒ,ΑΓ καί ΒΓ.
Γιά νά δείξουμε ὅτι τά σημεῖα Δ,Ε,Ζ εἶναι συνευθειακά, ἀρκεῖ νά δείξουμε, ὅτι:

$$\widehat{A E \Delta} = \widehat{Z E \Gamma}$$

(γιατί ἡ ΑΕΓ εἶναι εὐθεία ὁπότε καί ἡ ΔΕΖ θά πρέπει νά εἶναι εὐθεία).

Ἐπειδή $\widehat{M E \Gamma} = \widehat{M Z \Gamma} = 90^\circ$ τό τετράπλευρο ΜΕΖΓ εἶναι ἐγγράψιμο, ἄρα:

$$\widehat{Z E \Gamma} = \widehat{Z M \Gamma} = 90^\circ - \widehat{M \Gamma Z} \quad (1)$$

(γιατί τό τριγΜΖΓ εἶναι ὀρθογώνιο).

Ἐπειδή $\widehat{M \Delta A} + \widehat{M E A} = 180^\circ$

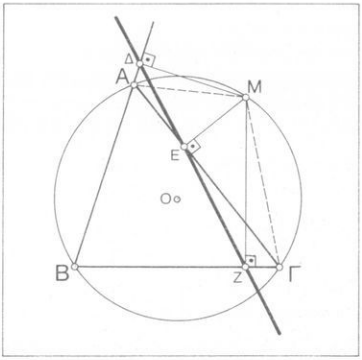
(γιατί καθεμιά εἶναι 90°)

Τό τετράπλευρο ΜΔΑΕ εἶναι ἐγγράψιμο, ἄρα:

$$\widehat{A E \Delta} = \widehat{A M \Delta} = 90^\circ - \widehat{\Delta A M} \quad (2)$$

(γιατί τό τριγΜΔΑ εἶναι ὀρθογώνιο).

Ἐπειδή τό ΑΒΓΜ εἶναι ἐγγεγραμμένο, θά εἶναι:



$$\widehat{M \Gamma B} = \widehat{\Delta A M}$$

ἄρα τά δεύτερα μέλη τῶν (1), (2) εἶναι ἴσα, ἄρα καί

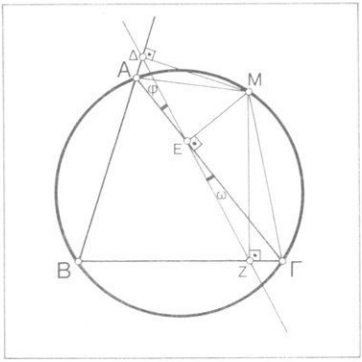
$$\widehat{Z E \Gamma} = \widehat{A E \Delta}$$

πού σημαίνει ὅτι ἡ ΔΕΖ εἶναι εὐθεία.

34. **Δίνεται ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ καί ἕνα σημεῖο Μ τέτοιο ὥστε οἱ τρεῖς προβολές του στίς πλευρές τοῦ τριγώνου νά βρίσκονται στήν ἴδια εὐθεία. Νά δείξετε ὅτι τό Μ βρίσκεται στόν περιγεγραμμένο κύκλο τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.**

Λύση: Ἔστω ἕνα σημεῖο Μ τοῦ ὁποίου οἱ προβολές Δ,Ε,Ζ στίς πλευρές ΑΒ,ΑΓ, ΒΓ τοῦ τριγώνου ἀνήκουν στήν ἴδια εὐθεία, δηλαδή ἡ ΔΕΖ εἶναι εὐθεία, καί ἄρα:

$$\widehat{\varphi} = \widehat{\omega}.$$



Ἐπειδή $ΜΕΓ = ΜΖΓ = 90^\circ$ τό ΜΕΖΓ εἶναι ἐγγράψιμο, ἄρα:

$$\widehat{ΖΜΓ} = \widehat{\omega}$$

καί ἐπειδή, ἀπό τό ὀρθογώνιο τριγΜΖΓ

ἡ $\widehat{ΜΓΖ} = 90^\circ - \widehat{ΖΜΓ} = 90^\circ - \widehat{\omega}$ (1)

Ἐπίσης, ἐπειδή

$$\widehat{ΜΔΑ} + \widehat{ΜΕΑ} = 180^\circ$$

(γιατί ἡ καθεμιά εἶναι 90°)

τό ΜΔΑΕ εἶναι ἐγγράψιμο, ἄρα

$$\widehat{ΑΜΔ} = \widehat{\varphi}$$

καί ἀπό τό ὀρθογώνιο τριγΜΔΑ εἶναι:

$\widehat{ΜΑΔ} = 90^\circ - \widehat{ΑΜΔ} = 90^\circ - \widehat{\varphi}$ (2)

Τά δεύτερα μέλη τῶν (1), (2) εἶναι ἴσα,

ἄρα $\widehat{ΜΓΖ} = \widehat{ΜΑΔ}$

πού συνεπάγεται ὅτι τό ΑΒΓΜ εἶναι ἐγγράψιμο, δηλαδή ὁ κύκλος (Α, Β, Γ) περνάει καί ἀπό τό Μ.

---

35. **Νά δείξετε ὅτι σέ κάθε τρίγωνο τά μέσα τῶν τριῶν πλευρῶν του, τά ἴχνη τῶν τριῶν ὑψῶν του καί τά μέσα τῶν ἀποστάσεων τοῦ ὀρθόκεντρου ἀπό τίς κορυφές του βρίσκονται στόν ἴδιο κύκλο (κύκλος τῶν 9 σημείων ἤ κύκλος τοῦ Euler). Νά δείξετε ἀκόμη ὅτι ὁ κύκλος αὐτός ἔχει κέντρο τό μέσο τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος πού συνδέει τό ὀρθόκεντρο καί τό περίκεντρο τοῦ τριγώνου καί ἀκτίνα ἴση μέ τό μισό τῆς ἀκτίνας τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου του.**

Λύση: Ἔστω ἕνα τριγΑΒΓ καί $Μ_1,Μ_2,Μ_3$ τά μέσα τῶν πλευρῶν του, $Θ_1,Θ_2,Θ_3$ τά ἴχνη τῶν ὑψῶν του καί $Λ_1,Λ_2,Λ_3$ τά μέσα τῶν ΗΑ, ΗΒ, ΗΓ ὅπου Η τό ὀρθόκεντρο τοῦ τριγώνου.

Γιά νά δείξουμε ὅτι τά ἐννέα αὐτά σημεῖα ἀνήκουν στόν ἴδιο κύκλο, θά δείξουμε ὅτι κάθε τέσσερα σημεῖα ἀπ᾽ αὐτά σχηματίζουν ἐγγράψιμο τετράπλευρο.

Ἔχουμε λοιπόν:

Ἡ $Μ_2Μ_3 \parallel ΒΓ$ (γιατί συνδέει τά μέσα τῶν πλευρῶν), ὁπότε τό $Μ_3Μ_2Μ_1Θ_1$ εἶναι τραπέζιο καί ἐπειδή $Μ_1Μ_2 = \dfrac{ΑΒ}{2}$ καί $Θ_1Μ_3 = \dfrac{ΑΒ}{2}$ (γιατί εἶναι διάμεσος στό ὀρθογώνιο τριγ$ΑΘ_1Β$) ἄρα $Μ_1Μ_2 = Θ_1Μ_3$.

Τό $Μ_1Μ_2Μ_3Θ_1$ εἶναι ἰσοσκελές τραπέζιο, ἄρα (βιβλίο ἄσκηση 8 § 6.13) εἶναι ἐγγράψιμο σέ κύκλο.

Ὅμοια τώρα τό $Μ_1Μ_2Μ_3Θ_3$ καί τό $Μ_1Μ_3Μ_2Θ_2$ εἶναι ἐγγράψιμα σέ κύκλο.

Οἱ τρεῖς αὐτοί κύκλοι ἔχουν κοινά τά σημεῖα M_1, M_2,M_3 ἄρα ταυτίζονται, ἐπομένως τά σημεῖα

$M_1,M_2,M_3,\Theta_1,\Theta_2,\Theta_3$

εἶναι ὁμοκυκλικά. (Βλέπε καί τήν ἐφαρμ. 3 τῆς § 10.7).

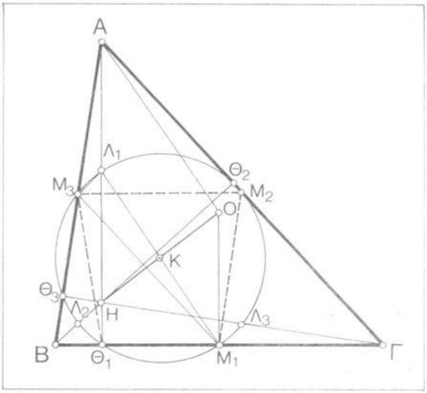
Θά δείξουμε τώρα ὅτι τό $\Lambda_1M_3\Theta_1M_1$ εἶναι ἐγγράψιμο.

Ἐπειδή $A\Theta_1$ ὕψος θά εἶναι:

$$\Lambda_1\widehat{\Theta_1}M_1 = 90°. \quad (1)$$

Στό τριγΑΒΗ ἡ $M_3\Lambda_1 \parallel BH$ (διέρχεται ἀπό τά μέσα δύο πλευρῶν) καί $M_3M_1 \parallel A\Gamma$.

Ἄρα $\Lambda_1\widehat{M_3}M_1 = B\widehat{\Theta_2}\Gamma = 90°$ (2) (γιατί ἔχουν τίς πλευρές τους παράλληλες).



Ἀπό τήν (1), (2) προκύπτει ὅτι τό $\Lambda_1M_3\Theta_1M_1$ εἶναι ἐγγράψιμο. Ἐπομένως καί τό Λ_1 ἀνήκει στό κύκλο τῶν προηγουμένων ἕξι σημείων. Ὅμοια καί τό Λ_2 καί τό Λ_3.

Γιά τό κέντρο καί τήν ἀκτίνα τοῦ κύκλου αὐτοῦ, παρατηροῦμε τά ἑξῆς:

Ἐπειδή ἡ $\Lambda_1\widehat{\Theta_1}M_1 = 90°$ ἡ Λ_1M_1 εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου.

Γνωρίζουμε (βιβλίο § 8.11 ἐφαρμ. 3) ὅτι

$$OM_1 \parallel = \frac{HA}{2} = H\Lambda_1$$

ἔτσι τό Λ_1HM_1O εἶναι παρ/μο, ἄρα οἱ διαγώνιες διχοτομοῦνται, δηλαδή τό σημεῖο Κ πού τέμνονται, εἶναι:

α) μέσο τοῦ Λ_1M_1 δηλαδή κέντρο τοῦ κύκλου τῶν ἐννέα σημείων.

β) μέσο τοῦ ΗΟ δηλαδή τοῦ τμήματος πού συνδέει τό ὀρθόκεντρο καί τό περίκεντρο

Ἀκτίνα τοῦ κύκλου εἶναι τό $K\Lambda_1$. Ἀπό τό τριγ ΑΗΟ, ἔχουμε: $\Lambda_1K = \frac{OA}{2}$ (γιατί τό Λ_1K συνδέει τά μέσα δύο πλευρῶν), ἀλλά τό $OA = R$ εἶναι ἡ ἀκτίνα τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου στό τριγΑΒΓ, δηλαδή $\Lambda_1K = \frac{R}{2}$.

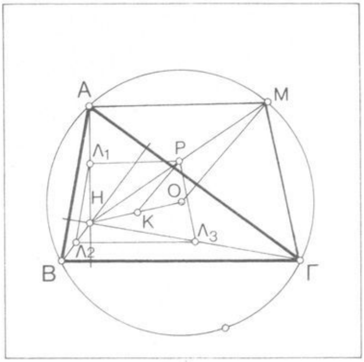
---

36. **Δίνεται ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ, τό ὀρθόκεντρό του Η καί ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Μ τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου του. Νά δείξετε ὅτι, ὅταν τό Μ κινεῖται στόν περιγεγραμμένο κύκλο τοῦ ΑΒΓ, τό μέσο Ρ τοῦ τμήματος ΗΜ κινεῖται στόν κύκλο τοῦ Euler (βλ. ἄσκ. 35).**

Λύση: Ἔστω Μ ἕνα σημεῖο τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου καί Ρ τό μέσο τοῦ ΗΜ. Εἴδαμε στήν ἄσκηση 35 ὅτι ὁ κύκλος τοῦ Euler διέρχεται ἀπό τά μέσα $\Lambda_1,\Lambda_2,\Lambda_3$ τῶν ΗΑ, ΗΒ, ΓΗ. Γιά νά δείξουμε λοιπόν ὅτι ὁ κύκλος τοῦ Euler διέρχεται ἀπό τό Ρ, ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι τό $\Lambda_1P\Lambda_3\Lambda_2$ εἶναι ἐγγράψιμο σέ κύκλο.

᾿Από τό τριγΗΑΒ ἔχουμε: $\Lambda_1\Lambda_2 \parallel AB$ καί ἀπό τό τριγΗΒΓ ἔχουμε: $\Lambda_2\Lambda_3 \parallel B\Gamma$ ἄρα $\Lambda_1\widehat{\Lambda_2}\Lambda_3 = \widehat{B}$ (γιατί οἱ πλευρές τους εἶναι παρ/λες).

᾿Από τό τριγ ΗΜΓ ἔχουμε: $P\Lambda_3 \parallel M\Gamma$ καί ἀπό τό τριγΗΑΜ ἔχουμε: $\Lambda_1 P \parallel AM$ ἄρα $\Lambda_1\widehat{P}\Lambda_3 = A\widehat{M}\Gamma$ (οἱ πλευρές τους παρ/λες).



᾿Από τό ἐγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΒΓΜ ἔχουμε

$$\widehat{B} + A\widehat{M}\Gamma = 180^\circ \Longrightarrow$$

$$\Lambda_1\widehat{\Lambda_2}\Lambda_3 + \Lambda_1\widehat{P}\Lambda_3 = 180^\circ$$

πού συνεπάγεται ὅτι τό $\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3P$ εἶναι ἐγγράψιμο.

῎Αλλος τρόπος: Εἴδαμε στήν ἄσκηση 35 ὅτι κέντρο τοῦ κύκλου τοῦ Euler εἶναι τό μέσο Κ τοῦ Η Ο καί ἀκτίνα $\frac{R}{2}$, ὅπου R ἡ ἀκτίνα τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου στό ΑΒΓ.

᾿Από τό τριγΗΜΟ ἔχουμε

$$KP = \frac{OM}{2} = \frac{R}{2}$$

δηλαδή τό Ρ ἀπέχει ἀπό τό κέντρο Κ ἀπόσταση ἴση μέ τήν ἀκτίνα, ἄρα ἀνήκει στόν κύκλο τοῦ Euler.

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ι. Ἀσκήσεις γιά ἐπανάληψη τοῦ Κεφαλαίου 9.

1 Δίνεται μιά εὐθεία ε καί δύο ὁρισμένα σημεῖα της Α καί Β. Θεωροῦμε δύο κύκλους πού ἐφάπτονται τῆς ε στά Α καί Β ἀντίστοιχα καί ἐφάπτονται ἐξωτερικά μεταξύ τους στό Ρ. Νά βρεθεῖ ὁ γ.τ. τοῦ Ρ.

2 Δίνεται ἕνας κύκλος (Ο,ρ). Θεωροῦμε τά σημεῖα Ρ, γιά τά ὁποῖα, ἄν φέρουμε τίς ἐφαπτόμενες ΡΑ καί ΡΒ πρός τόν κύκλο, ἡ γωνία $\widehat{ΑΡΒ}$ νά εἶναι ὀρθή. Νά βρεθεῖ ὁ γ.τ. τοῦ Ρ.

3 Θεωροῦμε κύκλο (Ο,ρ) καί δύο σημεῖα του Β καί Γ. Ἕνα σημεῖο Α κινεῖται σ᾽ ἕνα ἀπό τά δύο τόξα $\widehat{ΒΓ}$. Φέρνουμε τήν διχοτόμο ΑΔ τοῦ τριγ.ΑΒΓ καί τό ὕψος του ΒΕ πού τέμνει τή διχοτόμο στό Ρ. Νά βρεθεῖ ὁ γ.τ. τοῦ Ρ.

4 Ἔστω ἕνα ὀρθογώνιο τριγ.ΑΒΓ ($\widehat{Α} = 90°$). Σημεῖο Ε κινεῖται στήν ὑποτείνουσά του. Φέρνουμε στό Ε τήν κάθετη στή ΒΓ πού τέμνει τίς ΑΓ καί ΑΒ στά Δ καί Ζ ἀντίστοιχα. Ἄν οἱ ΒΔ καί ΓΖ τέμνονται στό Ρ νά βρεθεῖ ὁ γ.τ. τοῦ Ρ.

5 Τριγώνου ΑΒΓ ἡ βάση ΒΓ εἶναι ὁρισμένη, ἐνῶ ἡ κορυφή του Α κινεῖται ὥστε ἡ γωνία $\widehat{Α}$ νά ἔχει πάντα ὁρισμένο μέτρο $\widehat{φ}$. Ἄν Ε καί Ζ εἶναι τά μέσα τῶν ΑΒ καί ΑΓ νά βρεθεῖ ὁ γ.τ. τοῦ μέσου Ρ τοῦ ΕΖ.

6 Δίνεται ἕνας κύκλος (Ο,ρ) καί μία διάμετρος ΑΒ αὐτοῦ. Μιά μεταβλητή εὐθεία ε ἐφάπτεται τοῦ κύκλου καί τέμνει τήν εὐθεία ΑΒ στό Ν. Ἄν Ρ καί Ρ′ εἶναι οἱ προβολές τοῦ Ο στίς διχοτόμους τῶν γωνιῶν $\widehat{Ν}$, νά βρεθεῖ ὁ γ.τ. τῶν Ρ καί Ρ′.

7 Θεωροῦμε δύο εὐθεῖες κάθετες $ε_1$ καί $ε_2$ καί δύο σταθερά σημεῖα Α,Β τῆς $ε_2$. Ἕνα σημεῖο Ρ κινεῖται στήν $ε_1$. Φέρνουμε τίς ΡΑ, ΡΒ καί τίς κάθετες σ᾽ αὐτές στά Α καί Β ἀντίστοιχα. Ἄν οἱ κάθετες αὐτές τέμνονται στό Μ νά βρεθεῖ ὁ γ.τ. τοῦ Μ.

8 Δίδονται δύο κύκλοι (Κ,R) καί (Λ,ρ) καί ἕνα σημεῖο Ρ. Νά φέρετε ἀπό τό Ρ μιά εὐθεία πού νά τέμνει τούς κύκλους στά Α καί Β ἀντίστοιχα, ὥστε ΡΑ = ΡΒ.

9 Δίδονται δύο κύκλοι (Κ,R) καί (Λ,ρ) πού τέμνονται στό Α καί τό Β. Νά φέρετε ἀπό τό Α μία εὐθεία, πού νά τέμνει τούς κύκλους στά Ε καί Ζ ὥστε: ΑΕ — ΑΖ = λ, ὅπου λ ἕνα γνωστό εὐθ. τμῆμα.

10 Νά κατασκευαστεῖ ἕνα τριγ. ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου ἡ γωνία $\widehat{Β} = \widehat{φ}$, ἡ περίμετρος εἶναι 2λ καί τό ὕψος του ΑΔ = k.

11 Νά κατασκευαστεῖ ἕνα τριγΑΒΓ, ὅταν γνωρίζουμε τήν πλευρά του ΑΒ = λ, τή γωνία του $\widehat{Α} = \widehat{φ}$ καί τήν ἀκτίνα ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου του κύκλου.

12 Δίνεται ἕνα τριγ. ΑΒΓ νά βρεθοῦν στίς πλευρές ΑΒ καί ΑΓ τά σημεῖα Ε καί Ζ ὥστε, ΕΖ = λ καί ΒΕ = ΑΖ.

13 Νά γραφεῖ ἕνας κύκλος, πού νά διέρχεται ἀπό ἕνα ὁρισμένο σημεῖο Α καί νά ἐφάπτεται σέ δύο παράλληλες εὐθεῖες.

14 Νά κατασκευαστεῖ ἕνα ἰσοσκελές τραπέζιο, ὅταν γνωρίζουμε μία διαγώνιό του ἴση μέ λ καί τή γωνία τῶν διαγωνίων του ἴση μέ $\widehat{\varphi}$.

15 Νά κατασκευασθεῖ ἕνα τριγ.ΑΒΓ, ὅταν γνωρίζουμε τή γωνία του $\widehat{A} = \widehat{\varphi}$, τήν περίμετρό του ἴση μέ 2λ καί τό ὕψος του $ΑΔ = k$.

16 Νά κατασκευαστεῖ ἕνα τριγ.ΑΒΓ, ὅταν γνωρίζουμε τή γωνία $\widehat{B} = \widehat{\varphi}$ καί δύο διαμέσους του.

ΙΙ. Ἀσκήσεις γιά ἐπανάληψη τοῦ Κεφαλαίου 10.

17 Θεωροῦμε ἕνα τριγ.ΑΒΓ ἐγγεγραμμένο σέ κύκλο (Ο,R) καί τήν ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου στό ἀντιδιαμετρικό τοῦ Α, ἡ ὁποία τέμνει τίς ΑΒ καί ΑΓ στά Δ καί Ε. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τό ΒΓΕΔ εἶναι ἐγγράψιμο.

18 Θεωροῦμε ἕνα περιγεγραμμένο σέ κύκλο τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι οἱ ἐγγεγραμμένοι κύκλοι στά τριγ. ΑΓΒ καί ΑΓΔ ἐφάπτονται στό ἴδιο σημεῖο τῆς ΑΓ.

19 Θεωροῦμε ἕνα τετράπλευρο ΑΒΓΔ καί Ε,Ζ τά σημεῖα τομῆς τῶν ἀπέναντι πλευρῶν του ΑΒ,ΓΔ καί ΑΔ, ΒΓ. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι οἱ περιγεγραμμένοι κύκλοι στά τρίγωνα ΑΕΔ, ΑΒΖ, ΕΒΓ, ΖΓΔ διέρχονται ἀπό τό ἴδιο σημεῖο Ρ.

20 Θεωροῦμε ἕνα τριγ.ΑΒΓ καί στό ἐξωτερικό του κατασκευάζουμε τά ἰσόπλευρα τρίγωνα Α΄ΒΓ, Β΄ΑΓ καί Γ΄ΑΒ. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι οἱ περιγεγραμμένοι κύκλοι στά ἰσόπλευρα τρίγωνα διέρχονται ἀπό τό ἴδιο σημεῖο.

21 Σ᾽ ἕνα τριγ.ΑΒΓ φέρνουμε τίς διχοτόμους του ΒΔ, ΓΕ καί τίς ΕΖ,ΔΛ παράλληλες πρός τίς ΒΔ καί ΓΕ ἀντίστοιχα, πού τέμνουν τήν ἐξωτερική διχοτόμο τῆς γωνίας $\widehat{A}$ στά Ζ καί Λ. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τά σημεῖα Β,Γ,Ζ,Λ εἶναι ὁμοκυκλικά.

22 Θεωροῦμε ἕνα κύκλο (Ο,R) μιά διάμετρο ΑΒ αὐτοῦ καί μιά εὐθεία ε κάθετη στήν εὐθεία ΑΒ σέ σημεῖο της Γ. Σέ σημεῖο Δ τοῦ κύκλου φέρνουμε τήν ἐφαπτομένη, πού τέμνει τήν ε στό Ε. Τέλος θεωροῦμε τό περιγεγραμμένο κύκλο στό τριγΓΒΔ πού τέμνει τήν ε στό Ζ. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι: α) τά σημεῖα Α,Ζ,Δ εἶναι συνευθειακά. β) $ΕΔ = ΕΖ$.

23 Θεωροῦμε τριγ.ΑΒΓ, τόν περιγεγραμμένο του κύκλο (Ο,R) καί τά ὕψη του ΒΕ καί ΓΖ. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι $ΟΑ \perp ΕΖ$.

ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗ ΛΥΣΗ ΤΩΝ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1 Φέρτε τήν κοινή ἐφαπτομένη τῶν δύο κύκλων στό Ρ πού τέμνει τό ΑΒ στό μέσο του.

2 Ἄν φέρουμε τήν ΡΟ τό τριγ.ΡΑΟ εἶναι κατασκευάσιμο, ἄρα ἡ ΡΟ εἶναι ὁρισμένη.

3 Ἡ διχοτόμος ΑΔ τέμνει τό ἄλλο τόξο ΑΒ στό Ν, πού εἶναι ὁρισμένο σημεῖο.

4 Ἡ γωνία $\widehat{\mathrm{B}\mathrm{P}\Gamma} = 90°$

5 Φέρτε τήν ΡΚ ∥ ΑΒ καί ΡΛ ∥ ΑΓ καί δεῖξτε ὅτι ἡ $\widehat{\mathrm{K}\mathrm{P}\Lambda}$ εἶναι σταθερή.

6 Ἡ κάθετη ἀπό τό Ο στή διχοτόμο τέμνει τήν ἐφαπτομένη στό Ε, τό τριγ.ΝΟΕ εἶναι ἰσοσκελές. Ἀποδεῖξτε ὅτι τό Ρ ἀπέχει ἀπό τήν ΑΒ ἀπόσταση $\rho/2$.

7 Φέρτε ἀπό τό Μ τήν κάθετη στήν ε_2 καί ἀποδεῖξτε ὅτι αὐτή διέρχεται ἀπό σταθερό σημεῖο τῆς ε_2, γιά τοῦτο θεωρῆστε τόν κύκλο διαμέτρου ΜΡ.

8 Παρατηρῆστε ὅτι τό Β εἶναι τό συμμετρικό τοῦ Α ὡς πρός τό Ρ.

9 Φέρτε: ΚΕ ⊥ ΕΖ, τό Λ΄ συμμετρικό τοῦ Λ ὡς πρός τό Α καί Λ΄Η ∥ ΕΖ.

10 Στή προέκταση τῆς ΒΓ, πάρτε τμήματα ΒΕ = ΑΒ καί ΓΖ = ΑΓ, ὁπότε $\widehat{\mathrm{AEB}} = \dfrac{\widehat{\mathrm{B}}}{2}$

11 Τό κέντρο Ι τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου, βρίσκεται στή διχοτόμο τῆς $\widehat{\mathrm{A}}$ καί σέ μιά παράλληλη πρός τήν ΑΒ σέ ἀπόσταση ρ.

12 Φέρτε ΒΝ ∥ = ΕΖ καί προσδιορίστε τό Ν.

13 Τό κέντρο τοῦ κύκλου θά βρίσκεται στή μεσοπαράλληλο καί ἄρα ἔχει γνωστή ἀκτίνα

14 Φέρτε ἀπό μιά κορυφή τῆς βάσεως παράλληλη πρός τήν ἄλλη διαγώνιο.

15 Στή προέκταση τῆς ΒΓ πάρτε τμήματα ΒΕ = ΑΒ καί ΓΖ = ΑΓ.

16 Ξεκινώντας ἀπό μία διάμεσο, προσδιορίζεται τό Β, ὡς τομή δύο γεωμετρικῶν τόπων.

17 Χρησιμοποιῆστε γωνίες ἀπό χορδή καί ἐφαπτομένη.

18 Ἔστω ὅτι ὁ ἕνας κύκλος ἐφάπτεται τῆς ΑΓ στό Ε καί ὁ ἄλλος στό Ε΄, ἀποδεῖξτε ὅτι ΑΕ = ΑΕ΄.

19 Ἄν οἱ κύκλοι στά ΑΕΔ καί ΑΒΖ τέμνονται στό Ρ, δείξατε ὅτι τά ΡΕΒΓ καί ΡΓΔΖ εἶναι ἐγγράψιμα.

20 Ἐργασθεῖτε ὅπως στήν ἄσκηση 19.

21 Ἀποδεῖξτε ὅτι ἡ $\widehat{\mathrm{Z}} = \dfrac{\widehat{\Gamma}}{2}$.

22 Παρατηρῆστε ὅτι $\widehat{\mathrm{Z}\Delta\mathrm{B}} = 90°$ καί $\widehat{\mathrm{A}\Delta\mathrm{B}} = 90°$.

23 Φέρτε τήν ἐφαπτομένη στό Α.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Ἀπαντεῖστε στίς ἐπόμενες ἐρωτήσεις βάζοντας ΝΑΙ ἤ ΟΧΙ στό ἀντίστοιχο πλαίσιο:

1. Ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων πού ἰσαπέχουν ἀπό τίς πλευρές μιᾶς γωνίας εἶναι ἡμιευθεία;	ΝΑΙ
2. Ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων πού ἰσαπέχουν ἀπό τίς κορυφές ἑνός τριγώνου εἶναι σημειοσύνολο μέ ἕνα στοιχεῖο;	ΝΑΙ
3. Ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων πού ἰσαπέχουν ἀπό τίς πλευρές ἑνός τριγώνου εἶναι εὐθεία;	ΟΧΙ
4. Ἄν ἕνα «κινητό» σημεῖο Μ βλέπει ἕνα τμῆμα ΑΒ ὑπό γωνία 60°, ὁ γεωμετρικός τόπος τοῦ Μ βρίσκεται σέ κύκλο πού ἔχει τό κέντρο του στό τμῆμα ΑΒ;	ΟΧΙ
5. Ἄν Α εἶναι σταθερό σημεῖο καί Β εἶναι ἕνα σημεῖο πού κινεῖται πάνω σέ εὐθεία, τό μέσο Μ τῆς ΑΒ κινεῖται πάνω σέ εὐθεία;	ΝΑΙ
6. Ἄν Α εἶναι σταθερό σημεῖο καί Β εἶναι ἕνα σημεῖο πού κινεῖται πάνω σέ κύκλο, τό μέσο Μ τοῦ ΑΒ κινεῖται πάνω σέ κύκλο;	ΝΑΙ
7. Μποροῦμε νά κατασκευάσουμε δύο διαφορετικά ὀρθογώνια τρίγωνα πού νά ἔχουν ὑποτείνουσα ἴση μέ α καί μιά ὀξεία γωνία 50°;	ΟΧΙ
8. Μποροῦμε νά κατασκευάσουμε ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο ἄν ξέρουμε μόνο τό μῆκος τῆς διαγωνίου του;	ΟΧΙ
9. Μποροῦμε νά κατασκευάσουμε τετράγωνο ἄν ξέρουμε μόνο τό μῆκος τῆς διαγωνίου του;	ΝΑΙ
10. Μποροῦμε νά κατασκευάσουμε ρόμβο ἄν ξέρουμε μόνο τό μῆκος τῆς πλευρᾶς του;	ΟΧΙ
11. Ὑπάρχει ἕνα μόνο σημεῖο πού «βλέπει» τίς πλευρές ἑνός τριγώνου μέ τήν ἴδια γωνία;	ΝΑΙ

Ἀπαντεῖστε στίς ἑπόμενες ἐρωτήσεις βάζοντας ΝΑΙ ἤ ΟΧΙ στό ἀντίστοιχο πλαίσιο.

1. Σέ κάθε ἐγγεγραμμένο τετράπλευρο οἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν του διέρχονται ἀπό τό ἴδιο σημεῖο; .... ΟΧΙ
2. Ἄν οἱ μεσοκάθετοι τῶν πλευρῶν ἑνός τετραπλεύρου διέρχονται ἀπό τό ἴδιο σημεῖο, τό τετράπλευρο εἶναι ἐγγράψιμο σέ κύκλο; .... ΝΑΙ
3. Τό ἰσοσκελές τραπέζιο εἶναι ἐγγράψιμο σέ κύκλο; . ΝΑΙ
4. Ἕνα ὁποιοδήποτε παραλληλόγραμμο εἶναι ἐγγράψιμο σέ κύκλο; .... ΟΧΙ
5. Ὁ ρόμβος εἶναι τετράπλευρο ἐγγράψιμο σέ κύκλο; ΟΧΙ
6. Ἕνα ὁποιοδήποτε ὀρθογώνιο εἶναι περιγράψιμο σέ κύκλο; .... ΟΧΙ
7. Ἕνα περιγεγραμμένο τραπέζιο εἶναι ὑποχρεωτικά ἰσοσκελές; .... ΟΧΙ
8. Ἕνα ἰσοσκελές τραπέζιο εἶναι πάντα περιγράψιμο σέ κύκλο; .... ΟΧΙ
9. Τό ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο εἶναι κανονικό πολύγωνο; .... ΟΧΙ
10. Ὁ ρόμβος εἶναι κανονικό πολύγωνο; .... ΟΧΙ
11. Ἕνα κανονικό πολύγωνο πού ἔχει κεντρική γωνία 36° εἶναι δεκάγωνο; .... ΝΑΙ
12. Ὑπάρχει κανονικό πολύγωνο πού κάθε γωνία του νά εἶναι $\frac{1}{5}$ τῆς ὀρθῆς; .... ΟΧΙ
13. Τό ἀπόστημα ἑνός κανονικοῦ πολυγώνου εἶναι μικρότερο ἀπό τήν ἀκτίνα του; .... ΝΑΙ
14. Ἡ πλευρά ἑνός κανονικοῦ δωδεκαγώνου ἐγγεγραμμένου σέ κύκλο (Ο,ρ) εἶναι $\frac{\rho}{2}$; .... ΟΧΙ

170

ΕΚΔΟΣΗ : GUTENBERG

Εξώφυλλο: Στέλιος Κουτριας