Δ. Παπαμιχαήλ
Σ. Μπαλής
Χρ. Γιαννίκος
Δ. Νοταρᾶς
Κ. Σολδάτος

μαθηματικά
γ΄ γυμνασίου

Ὀργανισμός
Ἐκδόσεως
Διδακτικῶν
Βιβλίων
Ἀθήνα 1979

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Δ. ΠΑΠΑΜΙΧΑΗΛ - Σ. ΜΠΑΛΗΣ
ΧΡ. ΓΙΑΝΝΙΚΟΣ - Δ. ΝΟΤΑΡΑΣ - Κ. ΣΟΛΔΑΤΟΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

γ΄

ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑ 1979

ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΥΜΒΟΛΩΝ

ΣΥΜΒΟΛΟ	ΣΗΜΑΣΙΑ
N, N^*	$N = \{0,1,2,3,\ldots\}$, $N^* = \{1, 2, 3,\ldots\}$
Z, Z^*	$Z = \{0, \pm 1, \pm 2,\ldots\}$, $Z^* = \{\pm 1, \pm 2,\ldots\}$
Q, Q^*	$Q = \left\{x \mid x = \frac{\alpha}{\beta}, \alpha\in Z, \beta\in Z^*\right\}$, $Q^* = Q - \{0\}$
R, R^*	R : τό σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, $R^* = R - \{0\}$
$\in, \notin$	ἀνήκει, δέν ἀνήκει
$\Leftrightarrow$	ἰσοδυναμεῖ μέ...
$\Rightarrow$	συνεπάγεται
$<, >$	μικρότερο, μεγαλύτερο
$\leqq, \geqq$	μικρότερο ἤ ἴσο, μεγαλύτερο ἤ ἴσο
$\simeq$	ἴσο μέ προσέγγιση
$\cap, \cup$	τομή, ἕνωση
$\subseteq, \subset$	ὑποσύνολο, γνήσιο ὑποσύνολο
$A \times B$	καρτεσιανό γινόμενο τοῦ A ἐπί τό B
$\varphi: A \to B$	ἀπεικόνιση τοῦ συνόλου A στό σύνολο B ἤ συνάρτηση μέ πεδίο ὁρισμοῦ $A \subseteq R$ καί τιμές στό B
$\varphi(\chi)$	εἰκόνα τοῦ x στὴν ἀπεικόνιση φ ἤ τιμή τῆς συναρτήσεως φ ἀντίστοιχη τοῦ x
$\overrightarrow{AB}$	διάνυσμα μέ ἀρχή τό A καί τέλος τό B
$\overline{AB}$, $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$	ἀλγεβρική τιμή τοῦ $\overrightarrow{AB}$, μέτρο τοῦ $\overrightarrow{AB}$
(AB)	μῆκος τοῦ εὐθ. τμήματος AB
$M(\alpha,\beta)$	σημεῖο M, πού ἔχει συντεταγμένες α καί β
$\overrightarrow{\delta} = (\alpha, \beta)$	διάνυσμα $\overrightarrow{\delta}$, πού ἔχει συντεταγμένες α καί β
ημθ, συνθ, εφθ	ἡμίτονο, συνημίτονο, ἐφαπτομένη τῆς γωνίας θ
π	τό πηλίκο τοῦ μήκους ἑνός κύκλου πρός τό μῆκος μιᾶς διαμέτρου του, $\pi \simeq 3{,}14$
$A\hat{O}B$	γωνία μέ κορυφή τό O καί πλευρές OA, OB
$\overset{\frown}{AB}$	τόξο μέ ἄκρα τά A καί B

1ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Εἰσαγωγή.

1.1. Στήν Α' καί τή Β' τάξη μάθαμε τά βασικά σύνολα ἀριθμῶν. Ξεκινήσαμε ἀπό τό *σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν*

$$\mathbf{N} = \{0,1,2,3\ldots\}$$

στό ὁποῖο ὁρίσαμε τίς βασικές πράξεις, πρόσθεση καί πολλαπλασιασμό, καί μέ τή βοήθεια αὐτῶν τήν ἀφαίρεση καί τή διαίρεση. Διαπιστώσαμε ὅτι ἡ ἀφαίρεση καί ἡ διαίρεση δέν εἶναι πάντοτε δυνατές μέσα στό σύνολο τῶν φυσικῶν.

Γιά νά ἔχει πάντοτε νόημα ἡ διαφορά δύο φυσικῶν ἀριθμῶν «ἐπεκτείναμε» τό σύνολο τῶν φυσικῶν καί δημιουργήσαμε τό *σύνολο τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν*

$$\mathbf{Z} = \{\ldots-2,-1,0,1,2\ldots\}$$

Διαπιστώσαμε ὅτι:

- *Τό σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν περιέχεται στό σύνολο τῶν ἀκεραίων.*
- *Οἱ ἰδιότητες τῶν πράξεων τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ἰσχύουν καί στό σύνολο τῶν ἀκεραίων.*
- *Ἡ διάταξη τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν «ἐπεκτείνεται» καὶ στὸ σύνολο τῶν ἀκεραίων.*
- *Στό σύνολο τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἔχει πάντοτε νόημα ἡ διαφορά. $\alpha-\beta$.*

Στό νέο σύνολο τῶν ἀκεραίων Z δέν ἔχει πάντοτε νόημα τό πηλίκο $\alpha : \beta$. Ἔτσι π.χ. δέν ἔχει νόημα τό πηλίκο $5 : 3$ ἤ τό $8 : (-5)$. Γιά νά εἶναι πάντοτε δυνατή ἡ διαίρεση $\alpha : \beta$ $(\beta \neq 0)$, κάναμε δύο νέες «ἐπεκτάσεις». Ἀπό τό σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν δημιουργήσαμε τό «σύνολο τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν» καί ἀπό τό σύνολο τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν δημιουργήσαμε τό «σύνολο τῶν σχετικῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν». Τότε ἡ διαίρεση π.χ. 5:3 μᾶς δίνει πηλίκο τό κλάσμα $\frac{5}{3}$ καί ἡ διαίρεση $8 : (-5)$ μᾶς δίνει πηλίκο τό σχετικό κλάσμα $-\frac{8}{5}$.

Μετά ἀπό αὐτές τίς «ἐπεκτάσεις» δημιουργήσαμε τό *σύνολο τῶν ρητῶν ἀριθμῶν*

$$Q = \left\{ x | x = \frac{\alpha}{\beta},\ \alpha \in Z,\ \beta \in Z^* \right\},$$

πού ἔχει ὡς στοιχεῖα του ὅλα τά ἀνάγωγα σχετικά κλάσματα.

(Συνηθίζουμε ὅμως νά λέμε ρητό ἀριθμό καί κάθε μή ἀνάγωγο σχετικό κλάσμα, γιατί ὑπάρχει πάντα ἕνα στοιχεῖο τοῦ Q ἴσο μ' αὐτό).

Γιά τό σύνολο Q διαπιστώσαμε ὅτι:

- *Τό σύνολο Z τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν περιέχεται στό σύνολο τῶν ρητῶν.*
- *Οἱ ἰδιότητες τῶν πράξεων τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἰσχύουν καί στό σύνολο τῶν ρητῶν ἀριθμῶν.*
- *Ἡ διάταξη τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν «ἐπεκτείνεται» καί στό σύνολο τῶν ρητῶν ἀριθμῶν.*
- *Στό σύνολο τῶν ρητῶν ἀριθμῶν ἔχει πάντοτε νόημα τό πηλίκο $\alpha : \beta\ (\beta \neq 0)$.*

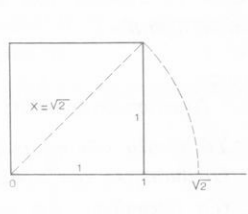
Τό σύνολο τῶν ἄρρητων ἀριθμῶν.

1.2. Διαπιστώθηκε ὅτι καί μέ τό νέο σύνολο Q τῶν ρητῶν ἀριθμῶν δέ μποροῦμε νά λύσουμε ὁρισμένα προβλήματα, ὅπως π.χ. τό *«νά ὑπολογισθεῖ τό μῆκος τῆς διαγωνίου ἑνός τετραγώνου μέ πλευρά 1 μονάδα μήκους»*.

Ἄν τό μῆκος τῆς διαγωνίου εἶναι x μονάδες μήκους, τότε σύμφωνα μέ τό πυθαγόρειο θεώρημα ἔχουμε (σχ. 1).

$$x^2 = 1^2 + 1^2 = 2.$$

Βλέπουμε δηλαδή ὅτι ὁ ἀριθμός x ἐπαληθεύει τή συνθήκη *«τό τετράγωνο τοῦ x ἰσοῦται μέ δύο»* καί, ὅπως ξέρουμε, σημειώνεται μέ $\sqrt{2}$.



(σχ. 1)

Μποροῦμε νά βεβαιωθοῦμε ὅτι ὁ $x = \sqrt{2}$ δέν εἶναι ρητός ἀριθμός, δηλαδή δέν εἶναι οὔτε ἀκέραιος οὔτε κλάσμα. Εἶναι φανερό ὅτι ὁ x δέν εἶναι ἀκέραιος, γιατί $1^2 = 1 < 2$ καί $2^2 = 4 > 2$. Ὥστε:

$$1 < \sqrt{2} < 2$$

Θά ἐξετάσουμε τώρα ἄν ὁ $\sqrt{2}$ εἶναι κλάσμα(1).

Ὑποθέτουμε ὅτι ὑπάρχει κλασματικός ἀριθμός $\frac{\mu}{\nu}$ τέτοιος, ὥστε

$$\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2 = \frac{\mu^2}{\nu^2} = 2, \qquad \mu, \nu \in N^*$$

---

(1). Θά ἀκολουθήσουμε μία μέθοδο συλλογισμοῦ πού, ὅπως θά μάθουμε ἀργότερα, λέγεται «ἀπαγωγή σέ ἄτοπο».

Ὑποθέτουμε ἀκόμη ὅτι τό κλάσμα $\frac{\mu}{\nu}$. εἶναι ἀνάγωγο, γιατί, ἄν δέν εἶναι, μποροῦμε νά τό κάνουμε διαιρώντας τούς ὅρους του μέ τό μ.κ.δ τῶν μ καί ν. Τότε ἔχουμε:

$$\frac{\mu^2}{\nu^2} = 2 \Leftrightarrow \mu^2 = 2\nu^2 \Leftrightarrow \mu \cdot \mu = 2\nu^2 \qquad (1)$$

Ἡ ἰσότητα (1) φανερώνει ὅτι ὁ 2, πού εἶναι πρῶτος ἀριθμός, διαιρεῖ τόν μ.μ (γιατί διαιρεῖ τόν ἴσο του $2\nu^2$) συνεπῶς καί τό φυσικό ἀριθμό μ. Τότε ὅμως ὁ μ εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 2 καί μποροῦμε νά τόν γράψουμε $\mu = 2\lambda$, $\lambda \in N^*$. Ἄν στήν ἰσότητα (1) ἀντικαταστήσουμε τόν μ μέ 2λ, βρίσκουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned} (2\lambda)^2 &= 2\nu^2 \\ 4\lambda^2 &= 2\nu^2 \\ 2\lambda^2 &= \nu^2 \\ 2\lambda^2 &= \nu \cdot \nu. \qquad (2) \end{aligned}$$

Ἀπό τήν ἰσότητα (2) καταλαβαίνουμε ἐπίσης ὅτι ὁ 2 διαιρεῖ τό ν. Καταλήξαμε λοιπόν στό συμπέρασμα ὅτι οἱ ἀριθμοί μ καί ν ἔχουν κοινό διαιρέτη τό 2, πράγμα πού δέν εἶναι σωστό, γιατί ὑποθέσαμε ὅτι ὁ μ καί ὁ ν δέν ἔχουν κοινό διαιρέτη διαφορετικό ἀπό τόν 1. Αὐτή ἡ ἀντίφαση, στήν ὁποία καταλήξαμε, μᾶς βεβαιώνει ὅτι ἡ ἀρχική ὑπόθεσή μας (ὁ x εἶναι ρητός) δέν εἶναι ἀληθής, δηλαδή δέν ὑπάρχει ρητός ἀριθμός x τέτοιος, ὥστε:

$$x^2 = 2.$$

Ἑπομένως ὁ $\sqrt{2}$ δέν εἶναι ρητός ἀριθμός. Βλέπουμε λοιπόν ὅτι:
ἀπό τή μιά μεριά δέν ὑπάρχει ρητός x τέτοιος, ὥστε $x^2 = 2$, ἀπό τήν ἄλλη ὅμως τό μῆκος x τῆς διαγωνίου τοῦ παραπάνω τετραγώνου εἶναι τέτοιο, ὥστε $x^2 = 2$. Διαπιστώνουμε ἔτσι τήν ἀνεπάρκεια τῶν ρητῶν ἀριθμῶν νά παραστήσουν ὁρισμένα μήκη, ὅπως εἶναι ἡ διαγώνιος τοῦ τετραγώνου πού ἔχει πλευρά 1 καί συνεπῶς:

Ὑπάρχουν ἀριθμοί πού δέν εἶναι ρητοί

Οἱ ἀριθμοί αὐτοί λέγονται **ἄρρητοι** ἤ **ἀσύμμετροι**[1] καί τό σύνολο ὅλων αὐτῶν λέγεται **σύνολο τῶν ἄρρητων ἀριθμῶν.**

Τό σύνολο, πού ἔχει γιά στοιχεῖα του ὅλους τούς ρητούς καί ὅλους

1. **Ἱστορική σημείωση.** Τήν ἔννοια τοῦ ἄρρητου ἀριθμοῦ ἀνακάλυψαν οἱ Πυθαγόρειοι φιλόσοφοι (Ἵππασος) καί τή μελέτησε διεξοδικά ὁ Θεαίτητος καί ὁ Εὔδοξος ἀπό τήν Κνίδο. Ὁ ἄρρητος ἀριθμός, ὡς δεκαδικός μή περιοδικός, ὁρίστηκε τό 1886 (Otto Stolz), ἐνῶ τό 1696 εἶχε ὁρισθεῖ ὁ ρητός ὡς δεκαδικός περιοδικός (Wallis).

τούς ἄρρητους ἀριθμούς, λέγεται **σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν** καί συμβολίζεται μέ **R.** Τό R δηλαδή εἶναι ἕνωση τοῦ συνόλου τῶν ρητῶν Q καί τοῦ συνόλου τῶν ἄρρητων.

Κάθε στοιχεῖο τοῦ R λέγεται ἁπλῶς «πραγματικός ἀριθμός». Ἔτσι ὅταν λέμε ὅτι *ὁ ἀριθμός α εἶναι πραγματικός* ἤ ὅταν γράφουμε $\alpha \in R$, θά ἐννοοῦμε ὅτι ὁ α μπορεῖ νά εἶναι ρητός ἤ ἄρρητος.

Ρητή προσέγγιση ἄρρητου ἀριθμοῦ.

1.3. Ἄς πάρουμε πάλι τόν ἄρρητο ἀριθμό $\sqrt{2}$ πού εἶναι, ὅπως εἴδαμε, ρίζα τῆς ἐξισώσεως $x^2 = 2$, δηλαδή εἶναι τέτοιος, ὥστε $(\sqrt{2})^2 = 2$. Γιά τόν ἀριθμό αὐτό βρήκαμε στήν Β' Τάξη τίς ἀνισότητες

$$\begin{aligned} 1 &< \sqrt{2} < 2 \\ 1,4 &< \sqrt{2} < 1,5 \\ 1,41 &< \sqrt{2} < 1,42 \\ 1,414 &< \sqrt{2} < 1,415 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Βλέπουμε δηλαδή ὅτι μποροῦμε νά βροῦμε πάντοτε δύο δεκαδικούς ἀριθμούς μέ ὅσα θέλουμε δεκαδικά ψηφία, οἱ ὁποῖοι νά διαφέρουν μόνο κατά τό τελευταῖο δεκαδικό ψηφίο καί μεταξύ τῶν ὁποίων περιέχεται ὁ ἄρρητος ἀριθμός $\sqrt{2}$. Ἀπ' αὐτούς ὁ μικρότερος λέγεται **προσέγγιση μέ ἔλλειψη** τοῦ $\sqrt{2}$ καί ὁ μεγαλύτερος λέγεται **προσέγγιση μέ ὑπεροχή** τοῦ $\sqrt{2}$.

Ἔτσι π.χ. ἀπό τίς ἀνισότητες $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$ καταλαβαίνουμε ὅτι ὁ δεκαδικός ἀριθμός 1,414 εἶναι *«προσέγγιση χιλιοστοῦ μέ ἔλλειψη»* τοῦ $\sqrt{2}$, ἐνῶ ὁ 1,415 εἶναι *«προσέγγιση χιλιοστοῦ μέ ὑπεροχή»* τοῦ $\sqrt{2}$. Ὅταν χρησιμοποιοῦμε τήν προσέγγιση μέ ἔλλειψη τοῦ $\sqrt{2}$, μποροῦμε νά γράφουμε

$$\sqrt{2} = 1,414\ldots \quad \text{ἤ} \quad \sqrt{2} \simeq 1,414$$

Παράδειγμα : Νά βρεθεῖ ἡ προσέγγιση ἑκατοστοῦ μέ ἔλλειψη τῆς ρίζας τῆς ἐξισώσεως $x^2 = 5$ (ἡ ὁποία σημειώνεται μέ $\sqrt{5}$).

Λύση: Ἡ ρίζα τῆς ἐξισώσεώς μας δέν εἶναι ἀκέραιος, ἀφοῦ $2^2 = 4 < 5$ καί $3^2 = 9 > 5$. Ἔχουμε λοιπόν

$$2 < \sqrt{5} < 3.$$

Οἱ δεκαδικοί ἀριθμοί μέ ἕνα δεκαδικό ψηφίο, πού περιέχονται μεταξύ 2 καί 3, δηλ. οἱ 2,1, 2,2...2,9, ἔχουν τετράγωνα $(2,1)^2 = 4,41$, $(2,2)^2 = 4,84$, $(2,3)^2 = 5,29, \ldots$ Συνεπῶς

$$2,2 < \sqrt{5} < 2,3$$

Οἱ δεκαδικοί ἀριθμοί μέ δύο δεκαδικά ψηφία, πού περιέχονται μεταξύ 2,2 καί 2,3, ἔχουν τετράγωνα $(2,21)^2 = 4,8841$, $(2,22)^2 = 4,9284$, $(2,23)^2 = 4,9729$, $(2,24)^2 = 5,0176\ldots$ Ὥστε

$$2,23 < \sqrt{5} < 2,24$$

καί μποροῦμε, ὕστερα ἀπό ὅσα εἴπαμε παραπάνω, νά γράψουμε

$$\sqrt{5} \simeq 2,23$$

Δηλαδή ὁ ἀριθμός 2,23 εἶναι ἡ προσέγγιση ἑκατοστοῦ μέ ἔλλειψη τοῦ $\sqrt{5}$. Συνεχίζοντας τήν κοπιαστική αὐτή ἐργασία μποροῦμε νά βροῦμε προσεγγίσεις τοῦ $\sqrt{5}$ μέ περισσότερα δεκαδικά ψηφία. Τά συνηθισμένα *«κομπιουτεράκια»*(1) μᾶς δίνουν τέτοιες προσεγγίσεις μέ ἑπτά δεκαδικά ψηφία.

1.4. Ὅπως ξέρουμε ἀπό τή Β' τάξη κάθε ρητός μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς *ἁπλός δεκαδικός* ἀριθμός ἤ ὡς *περιοδικός ἀπειροψήφιος δεκαδικός* ἀριθμός, π.χ.

$$+\frac{17}{80} = 0,2125\,, \quad -\frac{431}{250} = -1,724, \quad \frac{5}{12} = 0,4166\ldots$$

Ἐπειδή ὅμως κάθε ἁπλός δεκαδικός μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς περιοδικός ἀπειροψήφιος δεκαδικός μέ περίοδο τό 0, ὅπως π.χ.

$$+\frac{17}{80} = +0,2125000\ldots, \quad -\frac{431}{250} = -1,724000\ldots,$$

καταλαβαίνουμε ὅτι κάθε ρητός ἀριθμός γράφεται ὡς περιοδικός ἀπειροψήφιος δεκαδικός. Ἀντίστροφα, κάθε περιοδικός ἀπειροψήφιος δεκαδικός παριστάνει ἕνα ρητό ἀριθμό.

Ὅπως εἴδαμε παραπάνω γιά κάθε ἕναν ἀπό τούς ἄρρητους ἀριθμούς $\sqrt{2}$ καί $\sqrt{5}$, μποροῦμε νά ἔχουμε μιά δεκαδική προσέγγιση **μέ ὅσα δεκαδικά ψηφία θέλουμε**, π.χ.

$$\sqrt{2} = 1,41421\ldots \qquad \sqrt{5} = 2,23\ldots$$

Ἀκόμη γιά τό γνωστό μας ἀπό τή γεωμετρία ἄρρητο π (λόγος τοῦ μήκους τοῦ κύκλου πρός τή διάμετρό του) ἔχουμε

$$\pi = 3,1415926536\ldots$$

Οἱ δεκαδικοί ὅμως ἀριθμοί, πού παριστάνουν ἄρρητους ἀριθμούς, δέν μπορεῖ νά εἶναι περιοδικοί (γιατί οἱ περιοδικοί δεκαδικοί παριστάνουν ρητούς). Συνεπῶς:

> Ἄρρητος ἀριθμός εἶναι αὐτός ὁ ὁποῖος στή δεκαδική του μορφή ἔχει ἄπειρα δεκαδικά ψηφία μή περιοδικά.

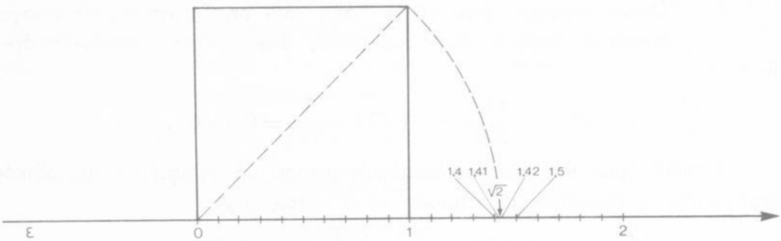
Ὥστε **ὅλοι οἱ πραγματικοί ἀριθμοί μποροῦν νά παρασταθοῦν μέ ἀπειροψήφιους δεκαδικούς· οἱ ρητοί μέ περιοδικούς δεκαδικούς καί οἱ ἄρρητοι μέ μή περιοδικούς.**

1. Μικροί φορητοί ἠλεκτρονικοί ὑπολογιστές.

Ἡ εὐθεία τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

1.5. Ἐπάνω στή γνωστή μας εὐθεία τῶν ρητῶν ἀριθμῶν μποροῦμε νά ἀπεικονίσουμε καί τούς ἄρρητους.

Ὅπως εἴδαμε ὁ ἄρρητος $\sqrt{2}$ παριστάνει τό μῆκος τῆς διαγωνίου ἑνός τετραγώνου πού ἔχει πλευρά ἴση μέ μιά μονάδα μήκους (σχ. 2). Ἑπομένως ὁ $\sqrt{2}$ θά ἔχει τήν εἰκόνα του ἐπάνω στό θετικό ἡμιάξονα τῶν ρητῶν πού ἀπέχει ἀπό τήν ἀρχή ἀπόσταση ἴση μέ τή διαγώνιο τοῦ τετραγώνου πού ἀναφέραμε.



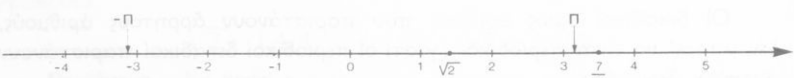
(σχ. 2)

Γενικά ὅμως ἕναν ἄρρητο ἀριθμό μποροῦμε νά τόν ἀπεικονίσουμε στήν εὐθεία ε καί μέ τή βοήθεια τῶν διαδοχικῶν προσεγγίσεών του. Τό σχ. 2 δείχνει πῶς κάνουμε τήν ἀπεικόνιση αὐτή βρίσκοντας κάθε φορά ἕνα πιό μικρό διάστημα, μέσα στό ὁποῖο περιέχεται ὁ ἀριθμός $\sqrt{2}$.

Ὁ τρόπος μέ τόν ὁποῖο ἀπεικονίσαμε τό $\sqrt{2}$ στήν εὐθεία ε μπορεῖ νά ἐφαρμοσθεῖ καί γιά ὁποιονδήποτε ἄλλο ἄρρητο ἀριθμό, καί ἔτσι:

- **Κάθε πραγματικός ἀριθμός ἀπεικονίζεται σέ ἕνα μόνο σημεῖο τῆς εὐθείας ε.**
- **Κάθε σημεῖο τῆς εὐθείας ε εἶναι εἰκόνα ἑνός μόνο πραγματικοῦ ἀριθμοῦ.**

Δηλαδή ὑπάρχει ἀντιστοιχία «ἕνα μέ ἕνα» τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου R μέ τά σημεῖα μιᾶς εὐθείας. Μιά τέτοια εὐθεία, στήν ὁποία ἀπεικονί-



(σχ. 3)

ζουμε ὅλους τούς πραγματικούς ἀριθμούς, τή λέμε **εὐθεία τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.**

Πράξεις στό σύνολο R.

1.6. Τό σύνολο R τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ἀποτελεῖται, ὅπως εἴπαμε, ἀπό τούς ρητούς καί τούς ἄρρητους ἀριθμούς. Ὅλες οἱ πράξεις, πού μάθαμε μέχρι τώρα, ἀφοροῦσαν τούς ρητούς ἀριθμούς. Τώρα θά δοῦμε πῶς γίνονται οἱ πράξεις μεταξύ ρητῶν καί ἄρρητων ἀριθμῶν ἤ μεταξύ ἄρρητων ἀριθμῶν.

Εἴδαμε ὅτι κάθε ἄρρητος προσεγγίζεται ὅσο θέλουμε μέ ἕνα ρητό ἀριθμό. Μποροῦμε λοιπόν νά συμφωνήσουμε ὅτι κάθε φορά, πού θά ἐμφανίζεται σέ μιά πράξη ἕνας ἄρρητος, θά παίρνουμε στή θέση του μιά «καλή» (μέ ὅσα δεκαδικά ψηφία θέλουμε) προσέγγισή του. Ἔτσι π.χ.

$$7+\sqrt{2} \simeq 7+1{,}414 = 8{,}414, \qquad 3\sqrt{5} \simeq 3.(2{,}236) = 6.708$$

Ἀφοῦ λοιπόν οἱ πράξεις μέ ἄρρητους ἀριθμούς ἀνάγονται στίς πράξεις τῶν ρητῶν ἀριθμῶν, μποροῦμε νά δεχτοῦμε ὅτι **ὅλες οἱ ἰδιότητες τῶν πράξεων, πού ἰσχύουν στούς ρητούς, ἰσχύουν καί στούς πραγματικούς ἀριθμούς**.

Ἔτσι, ἄν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{R}$, θά ἔχουμε τίς ἑξῆς ἰδιότητες:

1. Τό ἄθροισμα $\alpha+\beta$ εἶναι πάντοτε ἕνας μοναδικός πραγματικός ἀριθμός, καθώς καί τό γινόμενο $\alpha.\beta$.
2. $\left.\begin{array}{l}\alpha+\beta=\beta+\alpha \\ \alpha.\beta=\beta.\alpha\end{array}\right\}$ Ἀντιμεταθετική ἰδιότητα
3. $\left.\begin{array}{l}(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma) \\ (\alpha.\beta).\gamma=\alpha.(\beta.\gamma)\end{array}\right\}$ Προσεταιριστική ἰδιότητα
4. $\alpha.(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$ Ἐπιμεριστική ἰδιότητα
5. Γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό α εἶναι $\alpha+0=\alpha$ καί $\alpha.1=\alpha$
6. Γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό α ὑπάρχει ὁ *«ἀντίθετός»* του $-\alpha$ τέτοιος, ὥστε $\alpha+(-\alpha)=0$.
   Γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό $\alpha \neq 0$ ὑπάρχει ὁ *«ἀντίστροφός»* του $\frac{1}{\alpha}$ τέτοιος, ὥστε $\alpha.\frac{1}{\alpha}=1$.

Ἡ διαφορά $\alpha-\beta$ δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν α καί β ὁρίζεται ἀπό τήν ἰσότητα $\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$.

Τό πηλίκο $\frac{\alpha}{\beta}$ δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν α καί $\beta \neq 0$ ὁρίζεται ἀπό τήν ἰσότητα $\frac{\alpha}{\beta}=\alpha\cdot\frac{1}{\beta}$.

Παράδειγμα: Νά ἐκτελεσθοῦν οἱ πράξεις

α) $5\sqrt{2}+7\sqrt{2}-3\sqrt{2}$ β) $5\sqrt{2}-(5\sqrt{2}+2\beta)$ γ) $5\sqrt{2} : \frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$

Λύση: α) $5\sqrt{2}+7\sqrt{2}-3\sqrt{2} = (5+7-3)\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$ (ἰδιότητα 4)

β) $5\sqrt{2}-(5\sqrt{2}+2\beta) = 5\sqrt{2}+(-5\sqrt{2}-2\beta)$ (ἰδιότητα 6)

$= [5\sqrt{2}+(-5\sqrt{2})]-2\beta$ (ἰδιότητα 3)

$= 0-2\beta = -2\beta$ (ἰδιότητα 6, 5)

γ) $5\sqrt{2} : \dfrac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = 5\sqrt{2} \cdot \dfrac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$

$= \dfrac{10\sqrt{2}+5 \cdot 2}{1+\sqrt{2}}$ (ἰδιότητα 4)

$= \dfrac{10(\sqrt{2}+1)}{1+\sqrt{2}}$ (ἰδιότητα 4)

$= 10$

Ἀπόλυτη τιμή πραγματικοῦ ἀριθμοῦ.

1.7. Ἄν α εἶναι ἕνας πραγματικός ἀριθμός, **ἡ ἀπόλυτη τιμή τοῦ α** συμβολίζεται μέ $|\alpha|$ καί ὁρίζεται (ὅπως καί στούς ρητούς ἀριθμούς) ἀπό τίς ἰσότητες:

$$\boxed{\begin{array}{ll} |\alpha| = \alpha, & \text{ἄν } \alpha \geqq 0 \\ |\alpha| = -\alpha, & \text{ἄν } \alpha < 0 \end{array}}$$

Ἔτσι π.χ. $|+\sqrt{2}| = \sqrt{2}$, $|-\sqrt{2}| = -(-\sqrt{2}) = \sqrt{2}$,

$$\left|-\frac{3}{\sqrt{2}}\right| = -\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = +\frac{3}{\sqrt{2}}$$

Βλέπουμε λοιπόν ὅτι **ἡ ἀπόλυτη τιμή ἑνός πραγματικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι πάντα θετικός ἀριθμός ἤ μηδέν.**

Ἐπειδή εἶναι π.χ. $|(-3)(-\sqrt{2})| = |3\sqrt{2}| = 3\sqrt{2}$ καί $|-3| \cdot |-\sqrt{2}| = 3 \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$, θά ἔχουμε $|(-3)(-\sqrt{2})| = |-3| \cdot |-\sqrt{2}|$. Γενικά ἔχουμε

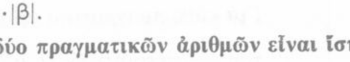
$$|\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta|.$$

Δηλαδή **ἡ ἀπόλυτη τιμή τοῦ γινομένου δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἴση μέ τό γινόμενο τῶν ἀπόλυτων τιμῶν τους.**

Διάταξη στό R.

1.8. Ἄν ἔχουμε δύο πραγματικούς ἀριθμούς α καί β, θά λέμε (ὅπως καί στούς ρητούς ἀριθμούς) ὅτι ὁ α **εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τό β**, ὅταν ἡ διαφορά α—β εἶναι θετικός ἀριθμός. Στήν περίπτωση αὐτή γράφουμε πάλι τίς «ἀνισότητες»

$\alpha > \beta$ ἤ $\beta < \alpha$



(σχ. 4)

καί ἄν τοποθετήσουμε τούς ἀριθμούς α καί β πάνω στόν ἄξονα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν (Σχ. 4), ὁ α θά βρίσκεται δεξιά τοῦ β. Ἔτσι π.χ. ἔχουμε

$\sqrt{2} > 1$, γιατί $\sqrt{2}-1 \simeq 1{,}414-1 = 0{,}414$ (θετικός ἀριθμός)

$\sqrt{2} < 2$, γιατί $\sqrt{2}-2 \simeq 1{,}414-2 = -0{,}586$ (ἀρνητικός ἀριθμός).

Ἀπό τόν παραπάνω ὁρισμό προκύπτει ἀμέσως ὅτι:

- *Κάθε θετικός ἀριθμός εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τό μηδέν καί κάθε ἀρνητικός εἶναι μικρότερος ἀπό τό μηδέν.*
- *Κάθε θετικός ἀριθμός εἶναι μεγαλύτερος ἀπό κάθε ἀρνητικό ἀριθμό.*
- *Ἄν $\alpha > \beta$, τότε θά εἶναι $-\alpha < -\beta$.*
- *Ἄν $\alpha > \beta$ καί $\beta > \gamma$, τότε θά εἶναι καί $\alpha > \gamma$ (μεταβατική ἰδιότητα).*

Ἰσχύουν ἐπίσης (καί δείχνονται μέ τόν ἴδιο τρόπο) ὅλες γενικά οἱ ἰδιότητες, πού μάθαμε στίς ἀνισότητες τῶν ρητῶν ἀριθμῶν:

I. *Ἄν στά μέλη μιᾶς ἀνισότητας προσθέσουμε ἤ ἀφαιρέσουμε τόν ἴδιο πραγματικό ἀριθμό, ἡ φορά τῆς ἀνισότητας διατηρεῖται.*

Ἔτσι, ἄν εἶναι $\alpha > \beta$, θά ἔχουμε καί

$$\alpha+\gamma > \beta+\gamma, \qquad \alpha-\gamma > \beta-\gamma.$$

II. ***Ἄν πολλαπλασιάσουμε (ἤ διαιρέσουμε) τά μέλη μιᾶς ἀνισότητας μέ ἕνα θετικό πραγματικό ἀριθμό, ἡ φορά τῆς ἀνισότητας διατηρεῖται, ἐνῶ ἄν πολλαπλασιάσουμε (ἤ διαιρέσουμε) τά μέλη της μέ ἕναν ἀρνητικό πραγματικό ἀριθμό ἡ ἀνισότητα ἀλλάζει φορά.***

Ἔτσι, ἄν εἶναι $\alpha > \beta$, θά ἔχουμε

$$\alpha\gamma > \beta\gamma, \text{ ὅταν } \gamma > 0 \quad \text{καί} \quad \alpha\gamma < \beta\gamma, \text{ ὅταν } \gamma < 0.$$

III. *Ἄν προσθέσουμε κατά μέλη ἀνισότητες μέ τήν ἴδια φορά, προκύπτει ἀνισότητα μέ τήν ἴδια φορά.*

Δηλαδή, ἄν ἔχουμε $\alpha > \beta$ καί $\gamma > \delta$, τότε ἰσχύει καί ἡ ἀνισότητα

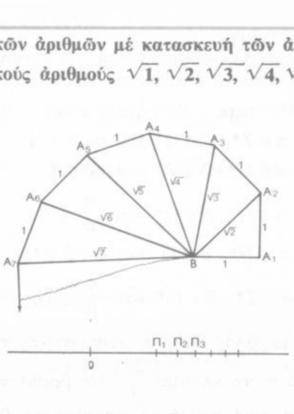
$$\alpha+\gamma > \beta+\delta.$$

Τονίζεται ὅτι **δέν μποροῦμε νά προσθέσουμε κατά μέλη ἀνισότητες, πού δέν ἔχουν τήν ἴδια φορά, οὔτε καί νά ἀφαιρέσουμε κατά μέλη ἀνισότητες.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά ἀπεικονίσετε στήν εὐθεία τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν μέ κατασκευή τῶν ἀντίστοιχων εὐθύγραμμων τμημάτων τούς πραγματικούς ἀριθμούς $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}\ldots$**

Λύση. Στό σχῆμα 5 τά τμήματα $BA_2, BA_3\ldots$ τά ὁποῖα κατασκευάσαμε μέ τήν βοήθεια τῶν ὀρθογώνιων τριγώνων $BA_1A_2, BA_2A_3, BA_3A_4 \ldots$, ἔχουν μήκη $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots$ Παίρνοντας στήν εὐθεία τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν τά τμήματα $O\Pi_1 = BA_1$, $O\Pi_2 = BA_2$, $O\Pi_3 = BA_3\ldots$, ἔχουμε τά σημεῖα $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3\ldots$, πού εἶναι εἰκόνες τῶν ἀριθμῶν $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}\ldots$



(σχ: 5)

2. **Τί ἀριθμός εἶναι ὁ $\alpha = 0{,}101001000100001\ldots$**

Λύση. Παρατηροῦμε ὅτι τό δεκαδικό του μέρος ἔχει μετά τήν πρώτη μονάδα ἕνα μηδενικό, μετά τή δεύτερη μονάδα δύο μηδενικά, μετά τήν τρίτη τρία κ.ο.κ. Ὁ ἀριθμός αὐτός δέν εἶναι περιοδικός, γιατί δέν μπορεῖ π.χ. νά ἔχει περίοδο μέ δέκα ψηφία, ἀφοῦ ὑπάρχουν στό δεκαδικό του μέρος, ἀπό κάποιο ψηφίο του 1 καί πέρα, περισσότερα ἀπό 10 μηδενικά.

Ἑπομένως θά εἶναι ἀριθμός μέ ἄπειρα δεκαδικά ψηφία, πού δέν εἶναι περιοδικά, καί συνεπῶς εἶναι ἕνας ἄρρητος ἀριθμός.

---

3. **Ἄν α,β,γ εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί, νά βρεθεῖ τό ἄθροισμα**

$$\Sigma = (3\alpha-2\beta+5\gamma) + (4\alpha+3\beta-2\gamma) - (2\alpha-4\beta+2\gamma).$$

Λύση. $\Sigma = (3\alpha-2\beta+5\gamma)+(4\alpha+3\beta-2\gamma)+(-2\alpha+4\beta-2\gamma)$

(ἀφαίρεση εἶναι πρόσθεση τοῦ ἀντιθέτου)

$= (3\alpha+4\alpha-2\alpha)+(-2\beta+3\beta+4\beta)+(5\gamma-2\gamma-2\gamma)$ (ἰδιότητες 2,3)

$= (3+4-2)\alpha+(-2+3+4)\beta+(5-2-2)\gamma$ (ἰδιότητα 4)

$= 5\alpha+5\beta+1\gamma \quad = 5\alpha+5\beta+\gamma$ (ἰδιότητα 5).

---

4. **Ἄν $\alpha,\beta,\gamma \in R$ καί $\alpha>\beta$, συγκρίνετε τούς ἀριθμούς $2\alpha+3\gamma$, $2\beta+3\gamma$.**

Λύση. Ἀφοῦ $\alpha>\beta$, θά εἶναι $2\alpha>2\beta$ (§1.8,II) καί συνεπῶς (§1,8,I)

$$2\alpha+3\gamma>2\beta+3\gamma$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ποιές ἀπό τίς παρακάτω προτάσεις εἶναι ἀληθεῖς καί ποιές ψευδεῖς;

α) $\frac{2}{3} \in Q$ β) $-3 \in Z$ γ) $-2 \in Q$ δ) $\sqrt{2} \in Q$ ε) $0{,}12323\ldots \in Q$

στ) $-7 \in N$ ζ) $1 \in R$ η) $\sqrt{-4} \in R$ θ) $1{,}30\underbrace{330}_{2}\underbrace{3330}_{3}\ldots \in Q$

2. Ποιοί ἀπό τούς παρακάτω ἀριθμούς εἶναι ρητοί καί ποιοί ἄρρητοι;

$$\sqrt{5},\quad 0{,}232727\ldots,\quad 0{,}38,\quad 2+\sqrt{3},\quad 3\pi.$$

3. Ἄν μέ Q' συμβολίσουμε τό σύνολο τῶν ἄρρητων ἀριθμῶν, ἐξηγῆστε γιά κάθε μία ἀπό τίς παρακάτω προτάσεις ἄν εἶναι ἀληθής:

I) Πάντοτε II) μερικές φορές III) ποτέ.

α) $\alpha \in Z^*$, $\beta \in Q^*$ καί $\alpha-\beta \in N$

β) $\alpha \in N^*$, $\beta \in Z^*$ καί $\alpha\beta \in Z$.

γ) $\alpha \in Q'$, $\beta \in Q^*$ καί $\frac{\alpha}{\beta} \in Q$.

δ) $\alpha \in N^*$, $\beta \in Q'$ καί $\alpha+\beta \in Q'$

ε) $\alpha \in Z^*$, $\beta \in Q^*$ καί $\frac{\alpha}{\beta} \in N$.

4. Ὁ μεγάλος ἕλληνας μαθηματικός τῆς ἀρχαιότητας Ἀρχιμήδης ἔπαιρνε γιά τιμή τοῦ π τό κλάσμα $\frac{22}{7}$. Νά βρεθεῖ πόσο «ἀπέχει» ἡ τιμή αὐτή ἀπό τήν πραγματική τιμή τοῦ π μέ προσέγγιση 0,001.

5. Νά ἀντικαταστήσετε τό ; μέ ἕνα ἀπό τά σύμβολα $<, >$ ἔτσι, ὥστε οἱ παρακάτω προτάσεις νά εἶναι ἀληθεῖς.

α) $7+\sqrt{5}$; $7+\sqrt{6}$ β) $3\sqrt{17}$; 12. γ) $-5\sqrt{26}$; -25

δ) $\frac{1}{3}\pi$; 1 ε) $2(\sqrt{2}-2)$; $3(\sqrt{2}-2)$.

6. Νά βρεθοῦν τά ἐξαγόμενα

α) $12+|-1-4|-|-8+3|$ β) $-2+|-5-1|-|+3-1|-|3-5|$

Δυνάμεις πραγματικῶν ἀριθμῶν.

1.9. Ἡ δύναμη ἑνός πραγματικοῦ ἀριθμοῦ α ὁρίζεται ὅπως καί ἡ δύναμη ἑνός ρητοῦ ἀριθμοῦ. Δηλαδή, ἄν ἔχουμε ἕνα φυσικό ἀριθμό $\nu \geqq 2$ καί $\alpha \in \mathbb{R}$, ὁρίζουμε ὅτι

$$\boxed{\alpha^{\nu} = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \ldots \alpha}_{\nu \text{ παράγοντες}}}$$

Ἔτσι π.χ. $(-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = -8$, $(\sqrt{2})^3 = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = (\sqrt{2})^2\cdot\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

Ἀπό τόν ὁρισμό τῆς δυνάμεως πραγματικοῦ ἀριθμοῦ α ἀποδεικνύονται, ὅπως ἀκριβῶς καί στούς ρητούς ἀριθμούς, οἱ ἰδιότητες:

$$\begin{array}{|ll|}\hline \mathrm{I} & \alpha^{\mu}\cdot\alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu} \\ \mathrm{II} & \dfrac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\nu}} = \alpha^{\mu-\nu},\ \alpha \neq 0 \text{ καί } \mu > \nu+1 \\ \mathrm{III} & (\alpha\beta)^{\mu} = \alpha^{\mu}\beta^{\mu} \\ \mathrm{IV} & (\alpha^{\mu})^{\nu} = \alpha^{\mu\nu} \\ \hline\end{array}$$

Γιά τούς ἴδιους λόγους, πού ἀναφέραμε στούς ρητούς, δίνουμε καί στούς πραγματικούς ἀριθμούς ἔννοια στά σύμβολα α^0, α^1, καί $\alpha^{-\nu}$ ὁρίζοντας ὅτι:

$$\boldsymbol{\alpha^0 = 1\ (\alpha \neq 0), \qquad \alpha^1 = \alpha, \qquad \alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^{\nu}} \quad \alpha \neq 0.}$$

Παραδείγματα : α) $(\sqrt{2})^3\cdot\sqrt{2} = (\sqrt{2})^{3+1} = (\sqrt{2})^4 = [(\sqrt{2})^2]^2 = 2^2 = 4$

β) $\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2})^2}{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^1 = \sqrt{2}$

γ) $(5\sqrt{2})^2 = 5^2(\sqrt{2})^2 = 25\cdot 2 = 50$

δ) $(-2)^{-2} + (\sqrt{2})^{-2} = \frac{1}{(-2)^2} + \frac{1}{(\sqrt{2})^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

Τετραγωνική ρίζα θετικοῦ ἀριθμοῦ.

1.10. Ἡ τετραγωνική ρίζα ἑνός θετικοῦ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ α ὁρίζεται ὅπως στούς ρητούς. Ἔτσι, ἄν ἔχουμε ἕνα θετικό ἀριθμό α, ὀνομάζουμε **τετραγωνική ρίζα τοῦ α** κάθε πραγματικό x τέτοιον, ὥστε

$$x^2 = \alpha.$$

Π.χ. ὁ 25 ἔχει δύο τετραγωνικές ρίζες, τόν $+5$ καί -5, γιατί $5^2 = 25$ καί $(-5)^2 = 25$.

Γενικά κάθε θετικός ἀριθμός ἔχει δύο τετραγωνικές ρίζες, πού εἶναι ἀντίθετοι ἀριθμοί. **Τή θετική τετραγωνική ρίζα τοῦ α τήν παριστάνουμε μέ τό σύμβολο $\sqrt{\alpha}$**, τό ὁποῖο διαβάζεται «τετραγωνική ρίζα τοῦ α». Μέ τόν συμβολισμό αὐτό οἱ ρίζες τοῦ 25 εἶναι:

$$\sqrt{25} = 5 \quad \text{καί} \quad -\sqrt{25} = -5.$$

Ἀπό τόν ὁρισμό τοῦ $\sqrt{\alpha}$ καταλαβαίνουμε ὅτι ὁ α δέν μπορεῖ νά εἶναι ἀρνητικός ἀριθμός, γιατί δέν μπορεῖ νά ὑπάρχει ἀριθμός x^2, πού νά εἶναι ἀρνητικός. Ἔτσι, **οἱ ἀρνητικοί ἀριθμοί δέν ἔχουν τετραγωνική ρίζα,** δηλαδή δέν ἔχουν νόημα π.χ. οἱ συμβολισμοί $\sqrt{-25}$, $\sqrt{-3}$, κ.λ.π.

Στίς τετραγωνικές ρίζες ἰσχύουν οἱ παρακάτω δύο βασικές ἰδιότητες:

> Ἄν α,β εἶναι θετικοί ἀριθμοί, τότε
>
> I $\quad \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\beta}$
>
> II $\quad \dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$

Δηλαδή **τό γινόμενο (ἤ τό πηλίκο) τῶν τετραγωνικῶν ριζῶν δύο ἀριθμῶν εἶναι ἴσο μέ τήν τετραγωνική ρίζα τοῦ γινομένου (ἤ τοῦ πηλίκου) τους.**

Γιά νά δείξουμε π.χ. ὅτι ἰσχύει ἡ ἰδιότητα I θέτουμε $\sqrt{\alpha} = x$ καί $\sqrt{\beta} = y$. Τότε ἔχουμε

$$\alpha = x^2 \qquad (1)$$
$$\beta = y^2 \qquad (2).$$

Πολλαπλασιάζοντας τίς ἰσότητες (1) καί (2) κατά μέλη βρίσκουμε τήν ἰσότητα

$$\alpha\beta = x^2y^2 = (xy)^2 \qquad (3)$$

ἡ ὁποία, ἀπό τόν ὁρισμό τῆς τετραγωνικῆς ρίζας, εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν

$$\sqrt{\alpha\beta} = xy = \sqrt{\alpha}\,.\,\sqrt{\beta}.$$

Οἱ ἰσότητες **I** καί **II** χρησιμοποιοῦνται συνήθως γιά τήν ἁπλοποίηση ὁρισμένων παραστάσεων.

Παραδείγματα : α) $\sqrt{12} = \sqrt{4.3} = \sqrt{4}\,.\,\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

β) $\sqrt{12}-\sqrt{147}=\sqrt{4\cdot 3}-\sqrt{49\cdot 3}=2\sqrt{3}-7\sqrt{3}=-5\sqrt{3}$

γ) $\sqrt{\dfrac{3}{5}}=\sqrt{\dfrac{3\cdot 5}{5\cdot 5}}=\sqrt{\dfrac{15}{25}}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}.$

Τονίζεται ὅτι **τό ἄθροισμα τῶν τετραγωνικῶν ριζῶν δέν μποροῦμε νά τό συμπτύξουμε παρά μόνο ὅταν ἔχουν τό ἴδιο ὑπόρριζο**. Δηλαδή μποροῦμε νά γράψουμε $\sqrt{5}+\sqrt{5}=2\sqrt{5}$, ἐνῶ δέν ὑπάρχει πιό ἁπλή μορφή, γιά νά γράψουμε τό ἄθροισμα $\sqrt{5}+\sqrt{7}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Ἄν $\alpha=-5$, $\beta=2$, βρεῖτε τίς τιμές τῶν $(\alpha+\beta)^2$ καί $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$. Νά συγκρίνετε τά ἐξαγόμενα. Νά κάμετε τήν ἴδια ἐργασία γενικά μέ τούς πραγματικούς α καί β.**

Λύση: $(\alpha+\beta)^2=[(-5)+2]^2=(-3)^2=9$

$\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=(-5)^2+2(-5).2+2^2=25-20+4=9$

Δηλαδή βλέπουμε ὅτι $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$

Γενικά ἔχουμε

$(\alpha+\beta)^2=(\alpha+\beta).(\alpha+\beta)$	(ὁρισμός δυνάμεως)
$=(\alpha+\beta)\alpha+(\alpha+\beta)\beta$	(ἐπιμεριστική ἰδιότητα)
$=\alpha^2+\beta\alpha+\alpha\beta+\beta^2$	(ἐπιμεριστική ἰδιότητα)
$=\alpha^2+\alpha\beta+\alpha\beta+\beta^2$	(ἀντιμεταθετική ἰδιότητα)
$=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$	

Ὥστε ἰσχύει πάντοτε ἡ ἰσότητα

$$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$$

2. **Νά ὑπολογισθοῦν τά γινόμενα α) $(8+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})$ β) $(2-\sqrt{3})(1+\sqrt{2})$**

Λύση: α) $(8+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})=(8+\sqrt{2}).3+(8+\sqrt{2})(-\sqrt{2})$

$=24+3\sqrt{2}+[-8\sqrt{2}-(\sqrt{2})^2]$

$=24+3\sqrt{2}-8\sqrt{2}-2=22+(3-8)\sqrt{2}$

$=22-5\sqrt{2}$

β) $(2-\sqrt{3})(1+\sqrt{2})=2-\sqrt{3}+2\sqrt{2}-\sqrt{3}\sqrt{2}=2-\sqrt{3}+2\sqrt{2}-\sqrt{6}.$

3. **Νά ἁπλοποιηθεῖ ἡ παράσταση $\sqrt{12}-2\sqrt{27}+2\sqrt{75}-\sqrt{48}$.**

Λύση: $\sqrt{12}-2\sqrt{27}+2\sqrt{75}-\sqrt{48}=\sqrt{2^2.3}-2\sqrt{3^3}+2\sqrt{3.5^2}-\sqrt{2^4.3}=$

$=\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{3}-2\sqrt{3^2}\sqrt{3}+2\sqrt{3}.\sqrt{5^2}-\sqrt{2^4}\sqrt{3}$

$=2\sqrt{3}-6\sqrt{3}+10\sqrt{3}-2^2\sqrt{3}=$

$=(2-6+10-2^2)\sqrt{3}=2\sqrt{3}.$

4. **Νά βρεθεῖ τό ἐξαγόμενο $\sqrt{\dfrac{3}{2}}+2\sqrt{6}$.**

Λύση: $\sqrt{\dfrac{3}{2}}+2\sqrt{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+2\sqrt{6}=\dfrac{\sqrt{3}.\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}+2\sqrt{6}=$

$=\dfrac{\sqrt{6}}{2}+\dfrac{2\sqrt{6}}{1}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}+\dfrac{4\sqrt{6}}{2}=\dfrac{5\sqrt{6}}{2}$

7. Ἂν α εἶναι πραγματικός ἀριθμός διαφορετικός ἀπό τό μηδέν, νά γράψετε σέ μορφή μιᾶς δυνάμεως τίς ἐκφράσεις :

α) $\alpha^{-5}\,.\,\alpha$, $\quad (\alpha^{-2})^2\,.\,(\alpha^2)^3$, $\quad \dfrac{\alpha^{-2}}{\alpha^{-4}}\cdot\dfrac{\alpha^2}{\alpha^{-3}}$, $\quad \dfrac{\alpha^3}{\dfrac{1}{\alpha^{-2}}}\,.\,\alpha$

8. Ἂν $\alpha,\beta,\gamma \in \mathrm{R}$ καί $\alpha\beta\gamma \neq 0$, νά γραφοῦν σέ μορφή γινομένου δυνάμεων τῶν α,β,γ:

$$(\alpha^2\beta^2\gamma)^2,\quad (\alpha^{-1}\beta^{-1}\gamma)^{-2},\quad \frac{(\alpha^{-2}\beta\,.\,\gamma)^4}{\alpha^{-2}\beta^{-2}},\quad \frac{\alpha^{-3}\beta^4\gamma^2}{\alpha\beta^{-1}\gamma}$$

9. Νά ὑπολογιστοῦν οἱ τετραγωνικές ρίζες :

$$\sqrt{2500}\,,\ \sqrt{0{,}81}\,,\ \sqrt{0{,}0049}\,,\ \sqrt{\frac{81}{49}}\,,\ \sqrt{\frac{0{,}01}{0{,}16}}\,,\ \sqrt{\frac{8\,.\,10^{-1}}{2\,.\,10^3}}$$

10. Νά βρεῖτε τά γινόμενα καί τά πηλίκα:

α) $\sqrt{7}\,.\,\sqrt{28}$, $\quad 2\sqrt{75}\,.\,\sqrt{243}\quad \sqrt{3\,.\,10^3}\,.\,\sqrt{27\,.\,10^{-5}}$

β) $\dfrac{\sqrt{14}}{\sqrt{18}}$, $\quad \dfrac{\sqrt{0{,}32}\,.\,\sqrt{0{,}2}}{\sqrt{3{,}6}}$, $\quad \sqrt{2}\,.\,\sqrt{\dfrac{2}{9}}$

11. Νά βρεῖτε τά γινόμενα:

α) $(1-\sqrt{2})\,(1+\sqrt{2})$ $\quad$ β) $(2\sqrt{3}+5)\,(2+\sqrt{3})$, $\quad$ γ) $(\sqrt{18}-\sqrt{2}):\sqrt{2}$

δ) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$ $\quad$ ε) $(2\sqrt{3}+5)^2$

12. Ὑπολογίστε: $\quad$ α) $\sqrt{9}+\sqrt{16}$ καί $\sqrt{9+16}$ $\quad$ β) $\sqrt{36}+\sqrt{64}$ καί $\sqrt{36+64}$.
Τί παρατηρεῖτε;

13. Νά συμπτύξετε τά παρακάτω ἀθροίσματα:

α) $\sqrt{5}+\sqrt{45}-2\sqrt{125}$ $\quad$ β) $\sqrt{27}-2\sqrt{243}+5\sqrt{147}+\sqrt{12}$

γ) $3\sqrt{2}-4\sqrt{8}+3\sqrt{32}$ $\quad$ δ) $\sqrt{45\alpha^3}-\sqrt{5\alpha^3}+\sqrt{80\alpha}$

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 1

1. Ἡ ἀνεπάρκεια τῶν ρητῶν ἀριθμῶν νά παραστήσουν ὁρισμένα μήκη εὐθύγραμμων τμημάτων μᾶς ὁδήγησε στή διαπίστωση πώς ὑπάρχουν κι ἄλλοι ἀριθμοί, πού τούς ὀνομάσαμε **ἄρρητους**. **Ὁ ἄρρητος ἀριθμός στή δεκαδική του μορφή ἔχει ἄπειρα δεκαδικά ψηφία μή περιοδικά**. Τό νέο σύνολο, πού περιέχει ὡς στοιχεῖα τούς ρητούς καί τούς ἄρρητους, τό ὀνομάσαμε **σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν** καί τό συμβολίσαμε μέ **R**.

Γιά τούς πραγματικούς ἀριθμούς ἰσχύουν τά ἑξῆς:

- Οἱ ἀριθμητικές πράξεις καί ἡ διάταξη ὁρίζονται ὅπως καί στούς ρητούς ἀριθμούς.
- Οἱ ἰδιότητες τῶν πράξεων καί τῶν ἀνισοτήτων εἶναι ἴδιες μέ ἐκεῖνες τῶν ρητῶν ἀριθμῶν.

Γιά τά σύνολα N,Z,Q,R ἰσχύει:

$$\mathrm{N} \subset \mathrm{Z} \subset \mathrm{Q} \subset \mathrm{R}.$$

Ὑπάρχει ἀντιστοιχία «**ἕνα μέ ἕνα**» τῶν στοιχείων τοῦ R μέ τά σημεῖα μιᾶς εὐθείας ἡ ὁποία ὀνομάζεται **εὐθεία τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν**.

2. **Ἡ τετραγωνική ρίζα** ἑνός θετικοῦ πραγματικοῦ α συμβολίζεται μέ $\sqrt{\alpha}$ καί ὁρίζεται ἀπό τήν ἰσοδυναμία:

$$\sqrt{\alpha} = x \Leftrightarrow \alpha = x^2 \text{ καί } x > 0$$

Ἄν α καί β εἶναι πραγματικοί θετικοί ἀριθμοί ἰσχύουν οἱ ἰδιότητες:

$$\text{I} . \quad \sqrt{\alpha}\,\sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\beta}$$

$$\text{II} . \quad \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ*

14. Νά βρεῖτε τό γινόμενο $(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})$ μέ δύο τρόπους:
α) μέ τίς ἰδιότητες τῶν τετραγωνικῶν ριζῶν
β) μέ προσέγγιση τῶν ἄρρητων $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$.
Νά συγκρίνετε τά ἀποτελέσματα.

15. Νά βρεῖτε τήν τιμή τῆς ἐκφράσεως $x-\sqrt{x^2}$
ἄν $x = +2$, $x = -1$, $x = -\frac{3}{2}$

16. Νά βρεθεῖ τό ἐξαγόμενο $\left(2\sqrt{\frac{3}{2}} - 3\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2$.

17. Ἄν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ καί $\alpha > \beta$, συγκρίνετε τούς ἀριθμούς
α) $2\alpha-3\gamma$ καί $2\beta-3\gamma$ β) $2\gamma-3\alpha$ καί $2\gamma-3\beta$.

18. Δεῖξτε τήν ἰδιότητα ΙΙ τῆς § 1.10.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ**

19. Ἕνα ὑποσύνολο Β τοῦ Α λέγεται *κλειστό* ὡς πρός μία πράξη τοῦ Α, ὅταν τό ἀποτέλεσμα τῆς πράξεως, γιά δύο ὁποιαδήποτε στοιχεῖα τοῦ Β, ἀνήκει στό Β. Ἔτσι π.χ. τό σύνολο $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$ εἶναι κλειστό ὡς πρός τήν πρόσθεση τοῦ $\mathbb{Q}$, ἀλλά δέν εἶναι κλειστό ὡς πρός τή διαίρεση τοῦ $\mathbb{Q}$.
Νά ἐξετάσετε ἄν εἶναι κλειστό ὡς πρός τήν πρόσθεση καί τόν πολλαπλασιασμό τό σύνολο α) τῶν ἄρτιων ἀριθμῶν β) τῶν περιττῶν ἀριθμῶν.

20. Θεωροῦμε τά σύνολα $A \subset \mathbb{N}$, $B \subset \mathbb{N}$, $\Gamma \subset \mathbb{Z}$ ὅπου

$$A = \{x \mid x = 2^\nu,\ \nu \in \mathbb{N}\}$$
$$B = \{x \mid x = 3\nu,\ \nu \in \mathbb{N}\}$$
$$\Gamma = \{x \mid x = 3\nu,\ \nu \in \mathbb{Z}\}$$

Εἶναι καθένα ἀπό τά παραπάνω σύνολα κλειστό ὡς πρός τίς πράξεις α) πρόσθεση β) ἀφαίρεση γ) πολλαπλασιασμό;

21. Νά δείξετε ὅτι τό 0 εἶναι ὁ μοναδικός πραγματικός ἀριθμός πού ὑπάρχει τέτοιος, ὥστε γιά κάθε πραγματικό α νά ἰσχύει $\alpha+0=\alpha$.

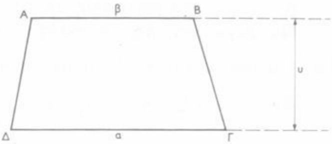
2ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

Ἀρχικές ἔννοιες καί ὁρισμοί.

2.1. Στή Β' τάξη μάθαμε ὅτι τό ἐμβαδό ἑνός τραπεζίου μέ βάσεις α,β καί ὕψος υ δίνεται ἀπό τόν τύπο

$$E = \frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cdot\upsilon.$$



(σχ. 1)

Ἡ ἔκφραση $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\upsilon$, ἡ ὁποία δηλώνει τίς πράξεις, πού πρέπει νά κάνουμε, γιά νά βροῦμε τό ἐμβαδό τραπεζίου, λέγεται **ἀλγεβρική παράσταση.** Μέ αὐτή βρίσκουμε ὅτι τό ἐμβαδό ἑνός τραπεζίου μέ $\alpha = 4$ cm, $\beta = 3$ cm καί $\upsilon = 2$ cm εἶναι

$$\frac{1}{2}(4+3)\cdot 2 = 7 \text{ cm}^2.$$

Ὁ ἀριθμός 7 λέγεται ἀριθμητική τιμή τῆς ἀλγεβρικῆς παραστάσεως $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\upsilon$ γιά $\alpha = 4$, $\beta = 3$, $\upsilon = 2$. Γενικά:

> Ἀλγεβρική παράσταση λέγεται μιά ἔκφραση, πού δηλώνει μιά σειρά πράξεων μεταξύ ἀριθμῶν, ὁρισμένοι ἀπό τούς ὁποίους παριστάνονται μέ γράμματα.

Ἄν ἀντικαταστήσουμε τά γράμματα μιᾶς ἀλγεβρικῆς παραστάσεως μέ συγκεκριμένους ἀριθμούς καί μετά ἐκτελέσουμε τίς πράξεις, πού εἶναι σημειωμένες, θά προκύψει τελικά ἕνας ἀριθμός, πού λέγεται **ἀριθμητική τιμή** τῆς ἀλγεβρικῆς παραστάσεως. Ἔτσι π.χ. ἡ ἀλγεβρική παράσταση $3\alpha^2 + 5\alpha\beta$ γιά $\alpha = -2$ καί $\beta = 4$ ἔχει ἀριθμητική τιμή τήν $3(-2)^2+5(-2)\cdot 4 = 12-40 = -28$.

Μία ἀλγεβρική παράσταση δέν ἔχει ὑποχρεωτικά ἀριθμητική τιμή γιά ὁποιεσδήποτε τιμές τῶν γραμμάτων της. Ἔτσι π.χ. ἡ ἀλγεβρική παράσταση $3x^2 + \sqrt{y-3}$ δέν ἔχει ἀριθμητική τιμή γιά $y < 3$, γιατί δέν ὑπάρχει τετραγωνική ρίζα ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ. Ἐπίσης ἡ $2\alpha x + \dfrac{3x^2}{\alpha-1}$ δέν ἔχει ἀριθμητική τιμή γιά $\alpha = 1$.

2.2. Μία ἀλγεβρική παράσταση λέγεται εἰδικότερα:

- **Ἄρρητη,** ὅταν περιέχει γράμμα κάτω ἀπό σύμβολο τετραγωνικῆς ρίζας, ὅπως π.χ. ἡ $3x^2 + \sqrt{y-3}$.
- **Κλασματική,** ὅταν περιέχει γράμμα σέ παρονομαστή, ὅπως π.χ. οἱ
$$2\alpha x + \frac{3x}{\alpha-1}, \quad \frac{x^2+y^2}{x^2}.$$
- **Ἀκεραία,** ὅταν δέν εἶναι οὔτε ἄρρητη οὔτε κλασματική, ὅπως πχ. οἱ
$$-\frac{5}{3}x^4y^2, \quad x^2y-2x+\frac{3}{2}xy^2, \quad 3x^2-2x+1.$$

Οἱ πράξεις πού κάνουμε, γιά νά βροῦμε τήν ἀριθμητική τιμή μιᾶς ἀκεραίας ἀλγεβρικῆς παραστάσεως, ἡ ὁποία δέν περιέχει παρενθέσεις, γίνονται μέ τήν ἑξῆς σειρά:

- **Ὑπολογισμός δυνάμεων.**
- **Πολλαπλασιασμοί καί διαιρέσεις.**
- **Προσθέσεις καί ἀφαιρέσεις.**

Ἔτσι π.χ. γιά $x = -2$ καί $y = 3$ ἔχουμε

$$x^2y-2x+\frac{3}{2}xy^2 = (-2)^2\cdot 3-2(-2)+\frac{3}{2}(-2)3^2 =$$
$$= 4\cdot 3-2(-2)+\frac{3}{2}(-2)\cdot 9 = 12+4-27 = 16-27 = -11.$$

Ἄν ἡ ἀλγεβρική παράσταση περιέχει παρενθέσεις, **κάνουμε πρῶτα τίς πράξεις πού εἶναι σημειωμένες μέσα στίς παρενθέσεις.** Ἔτσι π.χ. γιά $\alpha = -2$, $\beta = 3$ καί $\gamma = 2$ ἔχουμε.

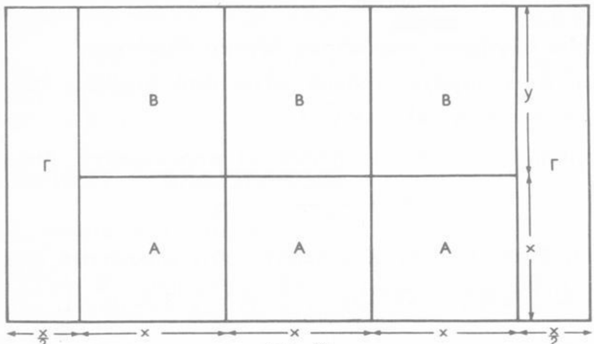
$$\begin{aligned}(\alpha^2\beta-\gamma)\alpha+4\gamma^2\beta &= [(-2)^2\cdot 3-2](-2)+4\cdot 2^2\cdot 3 = \\ &= (4\cdot 3-2)(-2)+4\cdot 4\cdot 3 = \\ &= (12-2)(-2)+48 = \\ &= 10(-2)+48 = -20+48 = 28.\end{aligned}$$

Τέλος, ἄν ἡ ἀλγεβρική παράσταση περιέχει παρενθέσεις μέσα σέ ἄλλες παρενθέσεις ἤ ἀγκύλες, ἀρχίζουμε συνήθως τίς πράξεις ἀπό τίς ἐσωτερικές παρενθέσεις. Ἔτσι π.χ. γιά $\alpha = -2$, $\beta = 3$ καί $\gamma = 2$ ἔχουμε

$$\begin{aligned}\beta+[\alpha^2-(\beta+\gamma)^3]\alpha+(\alpha-\gamma^2)\beta &= 3+[(-2)^2-(3+2)^3](-2)+(-2-2^2)\cdot 3 = \\ &= 3+(4-5^3)(-2)+(-2-4)\cdot 3 = \\ &= 3+242-18 = 245-18 = 227.\end{aligned}$$

Παράδειγμα: Γιά νά ἀξιοποιηθεῖ ἕνα κτῆμα, χωρίσθηκε σέ οἰκόπεδα, ὅπως δείχνει τό παρακάτω σχῆμα, καί κάθε ἕνα ἀπό τά οἰκόπεδα Α,Β,Γ πουλήθηκε μέ α,β,γ δρχ.

ἀντιστοίχως τό m^2. Νά βρεθεῖ μία ἀλγεβρική παράσταση, πού νά παριστάνει τό ποσό πού εἰσέπραξε ὁ ἰδιοκτήτης τοῦ κτήματος.



(σχ. 2)

Λύση: Τό ἐμβαδό κάθε ἑνός οἰκοπέδου ἀπό τά Α,Β,Γ σέ m^2 σύμφωνα μέ τό σχῆμα εἶναι $x^2, xy, \frac{x}{2}(x+y)$ ἀντιστοίχως. Συνεπῶς ἡ ἀξία κάθε οἰκοπέδου ἀπό τά Α,Β,Γ εἶναι ἀντιστοίχως $x^2\alpha$, $xy\beta$, $\frac{x}{2}(x+y)\gamma$ δραχμές καί τό ποσό πού εἰσέπραξε ὁ ἰδιοκτήτης εἶναι:

$$p = 3x^2\alpha + 3xy\beta + 2 \cdot \frac{x}{2}(x+y)\gamma = 3x^2\alpha + 3xy\beta + x(x+y)\gamma \text{ δραχμές}$$

Ἀκέραια μονώνυμα.

2.3. Ἄν καταθέσουμε ἕνα κεφάλαιο κ δραχμῶν σέ μία τράπεζα γιά t χρόνια μέ ἐπιτόκιο 7%, ὁ τόκος, πού θά πάρουμε, εἶναι

$$T = \frac{7}{100}\kappa t.$$

Βλέπουμε δηλαδή ὅτι ὁ τόκος δίνεται ἀπό μία ἁπλή ἀκεραία παράσταση, τήν $\frac{7}{100}\kappa t$, στήν ὁποία σημειώνονται μεταξύ τῶν γραμμάτων μόνο πολλαπλασιασμοί. Μιά τέτοια ἀλγεβρική παράσταση λέγεται **ἀκέραιο μονώνυμο** ἤ ἁπλῶς **μονώνυμο.** Γενικά

> Μονώνυμο εἶναι μία ἀλγεβρική παράσταση, πού περιέχει μόνο πολλαπλασιασμούς μεταξύ γραμμάτων καί ἀριθμῶν.

Ἔτσι κάθε μονώνυμο, ὅπως π.χ. τό $x(-4)yxy\cdot\alpha\cdot\frac{5}{2}\,y\,\alpha\,y\cdot x$,

εἶναι οὐσιαστικά ἕνα γινόμενο παραγόντων καί συνεπῶς (ἀφοῦ ἰσχύει ἡ ἀντιμεταθετική καί ἡ προσεταιριστική ἰδιότητα) μποροῦμε νά ἀντικαταστήσουμε ὁρισμένους ἀπό τούς παράγοντές του μέ τό γινόμενό τους. Ἄν λοιπόν στό παραπάνω μονώνυμο ἀντικαταστήσουμε μέ τό γινόμενό τους τούς ἀριθμητικούς παράγοντες, τούς παράγοντες x, τούς παράγοντες y καί τούς παράγοντες α, καταλήγουμε στήν *«τελική μορφή»* τοῦ μονωνύμου

$$-10x^3y^4\alpha^2.$$

Εἶναι φανερό ὅτι στήν τελική μορφή ἑνός μονωνύμου ἔχουμε μόνο ἕναν ἀριθμητικό παράγοντα. Ὁ παράγοντας αὐτός γράφεται πρῶτος καί λέγεται **συντελεστής** τοῦ μονωνύμου, ἐνῶ ὅλοι οἱ ἄλλοι παράγοντες, ἀποτελοῦν τό **κύριο μέρος** τοῦ μονωνύμου. Ἔτσι τό παραπάνω μονώνυμο ἔχει συντελεστή -10 καί κύριο μέρος $x^3y^4\alpha^2$. Ἐπίσης τά μονώνυμα $-\alpha^2\beta$ καί $\alpha^3\beta x^2$ ἔχουν ἀντιστοίχως συντελεστές -1 καί $+1$.

Ἄν ἔχουμε ἕνα ὁποιοδήποτε μονώνυμο, ὁ ἐκθέτης ἑνός γράμματός του λέγεται **«βαθμός τοῦ μονωνύμου» ὡς πρός τό γράμμα αὐτό,** ἐνῶ τό ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν δύο ἤ περισσοτέρων γραμμάτων του λέγεται **«βαθμός τοῦ μονωνύμου» ὡς πρός τά γράμματα αὐτά.** Ἔτσι π.χ. τό μονώνυμο $-0{,}2\,x^3y^2\omega$ εἶναι 3ου βαθμοῦ ὡς πρός x, 2ου βαθμοῦ ὡς πρός y, 1ου βαθμοῦ ὡς πρός ω, μηδενικοῦ βαθμοῦ ὡς πρός α καί 6ου βαθμοῦ ὡς πρός x,y,ω (γιατί $3+2+1=6$).

Κάθε μονώνυμο, πού ἔχει συντελεστή τό 0, ὅπως π.χ. τό $0x^3y$, λέγεται **μηδενικό μονώνυμο.** Ἡ ἀριθμητική τιμή τοῦ μηδενικοῦ μονωνύμου εἶναι πάντοτε (γιά ὁποιεσδήποτε τιμές τῶν γραμμάτων του) ἴση μέ 0, γι' αὐτό καί γράφουμε:

$$0x^3y=0$$

Τά μονώνυμα, πού ἔχουν τό ἴδιο κύριο μέρος, λέγονται **ὅμοια.** Ἔτσι π.χ. ὅμοια μονώνυμα εἶναι τά

$$9x^3y^4\alpha^2, \qquad -\frac{3}{2}x^3y^4\alpha^2, \qquad -\alpha^2x^3y^4, \qquad -\frac{1}{2}x^3y^4\alpha^2$$

Δύο ὅμοια μονώνυμα μέ ἀντίθετους συντελεστές, ὅπως π.χ. τά $2x^3y^2$ καί $-2x^3y^2$, λέγονται **ἀντίθετα.**

Ἐπειδή ὁ πολλαπλασιασμός ἐπιμερίζει τήν πρόσθεση, μποροῦμε νά γράψουμε

$$\begin{aligned}(9x^3y^4\alpha^2)+\left(-\frac{3}{2}x^3y^4\alpha^2\right)+(-x^3y^4\alpha^2) &= 9x^3y^4\alpha^2-\frac{3}{2}x^3y^4\alpha^2-x^3y^4\alpha^2\\ &= \left(9-\frac{3}{2}-1\right)x^3y^4\alpha^2\\ &= \left(\frac{18}{2}-\frac{3}{2}-\frac{2}{2}\right)x^3y^4\alpha^2\\ &= \frac{13}{2}x^3y^4\alpha^2\end{aligned}$$

Βλέπουμε δηλαδή ὅτι:

> Τό ἄθροισμα ὅμοιων μονωνύμων εἶναι ἕνα μονώνυμο ὅμοιο μέ αὐτά, πού ἔχει συντελεστή τό ἄθροισμα τῶν συντελεστῶν τους.

Εἶναι φανερό ὅτι τό ἄθροισμα δύο ἀντίθετων μονωνύμων εἶναι μηδενικό μονώνυμο.

Ἄν τά μονώνυμα δέν εἶναι ὅμοια, τό ἄθροισμά τους δέν εἶναι μονώνυμο, ἀλλά εἶναι μία ἀλγεβρική παράσταση, πού λέγεται **πολυώνυμο.**

Ἀκέραια πολυώνυμα

2.4. Ἕνα ἄθροισμα, πού οἱ ὅροι του εἶναι ἀκέραια μονώνυμα, λέγεται **ἀκέραιο πολυώνυμο** ἤ ἁπλῶς **πολυώνυμο.** Ἔτσι π.χ. ἡ ἀλγεβρική παράσταση

$$4x^2y - \frac{3}{2}xy + 5x^2 + 7y$$

εἶναι ἕνα πολυώνυμο, γιατί εἶναι ἄθροισμα τῶν μονωνύμων $4x^2y, -\frac{3}{2}xy$, $5x^2$, $7y$. Τά μονώνυμα αὐτά ἀποτελοῦν τούς **ὅρους** τοῦ πολυωνύμου καί οἱ συντελεστές τους ὀνομάζονται τώρα **συντελεστές** τοῦ πολυωνύμου.

Ἐπειδή σ' ἕνα ἄθροισμα ἰσχύει ἡ ἀντιμεταθετική καί ἡ προσεταιριστική ἰδιότητα, μποροῦμε σ' ἕνα πολυώνυμο νά ἀντικαταστήσουμε τά ὅμοια μονώνυμα (ἄν ὑπάρχουν) μέ τό ἄθροισμά τους. Ἡ ἐργασία αὐτή λέγεται **ἀναγωγή ὅμοιων ὅρων.** Ἔτσι π.χ. τό πολυώνυμο

$$2x^3y - 5xy^2 + x^3y + 9xy^2 - 7x^3 - 8x^3y$$

μπορεῖ νά γραφεῖ

$$(2+1-8)x^3y + (-5+9)xy^2 - 7x^3$$

ἤ τελικά $\quad -5x^3y + 4xy^2 - 7x^3$

Ἡ τελική αὐτή μορφή ἡ ὁποία δέν ἔχει ὅμοιους ὅρους, λέγεται **ἀνηγμένη μορφή** τοῦ πολυωνύμου. Ἀπό ἐδῶ καί πέρα, ὅταν λέμε *«πολυώνυμο»*, θά ἐννοοῦμε τήν ἀνηγμένη μορφή του. Ἕνα πολυώνυμο μέ δύο ὅρους λέγεται εἰδικότερα **διώνυμο,** ἐνῶ ἕνα πολυώνυμο μέ τρεῖς ὅρους λέγεται εἰδικότερα **τριώνυμο.** Τά μονώνυμα μποροῦμε νά τά θεωρήσουμε σάν πολυώνυμα πού ἀποτελοῦνται ἀπό ἕνα μόνο ὅρο.

> **Βαθμός πολυωνύμου** ὡς πρός ἕνα γράμμα του (ἤ ὡς πρός περισσότερα γράμματά του) λέγεται ὁ πιό μεγάλος βαθμός ὅλων τῶν ὅρων του ὡς πρός τό γράμμα αὐτό (ἤ ὡς πρός τά γράμματα αὐτά).

Ἔτσι π.χ. τό τριώνυμο $-5x^3y+4xy^2-7x^3$ εἶναι 3ου βαθμοῦ ὡς πρός x, 2ου βαθμοῦ ὡς πρός y καί 4ου βαθμοῦ ὡς πρός x,y.

Ὁμοίως τό διώνυμο $4x^4y^2\alpha-3x^2y^7\alpha^3$ εἶναι 4ου βαθμοῦ ὡς πρός x, 7ου βαθμοῦ ὡς πρός y, 9ου βαθμοῦ ὡς πρός x,y, καί 12ου βαθμοῦ ὡς πρός x,y,α.

2.5. Ἄν ὅλοι οἱ ὅροι ἑνός πολυωνύμου ἔχουν τόν ἴδιο βαθμό ὡς πρός ὁρισμένα γράμματα x,y..., τότε τό πολυώνυμο λέγεται **ὁμογενές** πρός τά γράμματα αὐτά. Ἔτσι π.χ. τό πολυώνυμο

$$2x^3y - 5x^2y^2 + 4y^4$$

εἶναι ὁμογενές πολυώνυμο τετάρτου βαθμοῦ ὡς πρός x καί y, ἐνῶ τό πολυώνυμο $2x^3y^5-5xy\alpha^4+4y^3\alpha^2$ δέν εἶναι ὁμογενές ὡς πρός x καί y, εἶναι ὅμως ὁμογενές πέμπτου βαθμοῦ ὡς πρός y καί α.

Ἀκέραια πολυώνυμα μιᾶς μεταβλητῆς.

2.6. Ἄς θεωρήσουμε τό πολυώνυμο

$$5x^2+2x^5-6x^3+11x-3+7x^5+8-7x-x^5$$

τοῦ ὁποίου κάθε ὅρος περιέχει ἕνα μόνο γράμμα x ἤ εἶναι σταθερός ἀριθμός. Ἕνα τέτοιο πολυώνυμο γράφεται συνήθως στήν ἀνηγμένη του μορφή κατά τέτοιο τρόπο, ὥστε οἱ ἐκθέτες τοῦ γράμματος x νά ἐλαττώνονται, δηλαδή γράφεται

$$8x^5 - 6x^3 + 5x^2 + 4x + 5,$$

καί τότε λέμε ὅτι τό πολυώνυμο εἶναι **διατεταγμένο κατά τίς φθίνουσες δυνάμεις τοῦ x.** Θά μπορούσαμε νά διατάξουμε τούς ὅρους του κατά τρόπο, πού οἱ ἐκθέτες τοῦ x νά αὐξάνονται καί τότε θά λέγαμε ὅτι τό πολυώνυμο εἶναι **διατεταγμένο κατά τίς αὔξουσες δυνάμεις τοῦ x.**

Τό μοναδικό γράμμα x, πού περιέχεται στούς ὅρους τοῦ πολυωνύμου, λέγεται **μεταβλητή** τοῦ πολυωνύμου καί ὁ μεγαλύτερος ἐκθέτης τοῦ x λέγεται ἁπλῶς **βαθμός τοῦ πολυωνύμου.** Ἔτσι τό παραπάνω πολυώνυμο εἶναι 5ου βαθμοῦ καί ἔχει ὡς ὅρο 3ου βαθμοῦ τό $-6x^3$, δευτέρου βαθμοῦ τό $5x^2$, πρώτου βαθμοῦ τό 4x· ὁ ἀριθμός 5 λέγεται **σταθερός ὅρος** τοῦ πολυωνύμου καί θεωρεῖται σάν ὅρος του μηδενικοῦ βαθμοῦ, γιατί γράφεται καί $5x^0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Ἄν τό x παριστάνει στοιχεῖο τοῦ συνόλου {1,2,3} καί τό y παριστάνει στοιχεῖο τοῦ {1,3,7}, νά βρεθεῖ τό ἄθροισμα ὅλων τῶν ἀριθμητικῶν τιμῶν τῆς ἀλγεβρικῆς παραστάσεως**

$$K = 2x^3+xy^2-3y.$$

Λύση: Γιά νά βροῦμε ὅλες τίς ἀριθμητικές τιμές τῆς Κ, σχηματίζουμε τόν παρακάτω πίνακα.

x	y	x^3	y^2	$2x^3$	xy^2	$-3y$	$K = 2x^3 + xy^2 - 3y$
1	1	1	1	2	1	-3	0
1	3	1	9	2	9	-9	2
1	7	1	49	2	49	-21	30
2	1	8	1	16	2	-3	15
2	3	8	9	16	18	-9	25
2	7	8	49	16	98	-21	93
3	1	27	1	54	3	-3	54
3	3	27	9	54	27	-9	72
3	7	27	49	54	147	-21	266
					ἄθροισμα		557

2. Νά ἀντικαταστήσετε τά ἀστεράκια μέ τά κατάλληλα μονώνυμα στήν ἰσότητα

$$3\alpha x^2y - 7\alpha x^2y - 5x^3y^5 + 7\alpha x^2y + * + * = 5\alpha x^2y.$$

Λύση: Ἐπειδή τό δεύτερο μέλος εἶναι μονώνυμο μέ κύριο μέρος τό αx^2y, θά πρέπει στό πρῶτο μέλος νά ἔχουμε ὅμοια μονώνυμα μέ τό ἴδιο κύριο μέρος.

Θά πρέπει λοιπόν πρῶτα νά βάλουμε τό $5x^3y^5$, δηλαδή τό ἀντίθετο μονώνυμο τοῦ $-5x^3y^5$, ὥστε νά ἔχουμε

$$-5x^3y^5 + 5x^3y^5 = 0.$$

Ἀφοῦ ὅμως εἶναι καί $-7\alpha x^2y + 7\alpha x^2y = 0$, στό πρῶτο μέλος μένει μόνο τό $3\alpha x^2y$. Συνεπῶς θά πρέπει τό δεύτερο μονώνυμο νά εἶναι τό $2\alpha x^2y$, ὥστε νά ἔχει μέ τό $3\alpha x^2y$, ἄθροισμα τό $5\alpha x^2y$. Ἔτσι ἡ πλήρης ἰσότητα γράφεται:

$$3\alpha x^2y - 7\alpha x^2y - 5x^3y^5 + 7\alpha x^2y + 5x^3y^5 + 2\alpha x^2y = 5\alpha x^2y.$$

3. Νά προσδιορισθοῦν οἱ ἀκέραιοι λ καί μ, ὥστε νά εἶναι μονώνυμο ἡ ἀλγεβρική παράσταση $-3\alpha^2x^2y^{\mu+7} + 2\alpha^2x^{\lambda+1}y^{12}$.

Λύση. Θά πρέπει οἱ ὅροι της νά εἶναι ὅμοια μονώνυμα, δηλαδή θά πρέπει

$$\lambda + 1 = 2 \quad \text{καί} \quad \mu + 7 = 12.$$

Ἀπό τίς ἰσότητες αὐτές βρίσκουμε $\lambda = 1$ καί $\mu = 5$ καί τότε ἡ ἀλγεβρική παράσταση γράφεται

$$-3\alpha^2x^2y^{12} + 2\alpha^2x^2y^{12} = -\alpha^2x^2y^{12}$$

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Νά βρεθεῖ ποιές ἀπό τίς παρακάτω παραστάσεις εἶναι ἄρρητες, ποιές κλασματικές καί ποιές ἀκέραιες:

$$x - \frac{1}{x}, \quad x^2 - 2xy + y^2, \quad \sqrt{x-3} + 1, \quad 2\alpha x, \quad \frac{3\alpha^2 + 1}{2}$$

2. Νά βρεθεῖ ἡ ἀριθμητική τιμή τῆς παραστάσεως

$$\frac{2\alpha^3 - 3\alpha\beta + \beta^3}{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \text{ἄν} \quad \alpha = -2, \quad \beta = -1$$

3. Νά συμπληρώσετε τόν παρακάτω πίνακα μέ τίς ἀριθμητικές τιμές τῆς παραστάσεως $\frac{2x^2-5x+1}{2}$

x	-3	-2	-1	0	1	$0{,}2$
$\frac{2x^2-5x+1}{2}$						

4. Νά συμπληρώσετε τόν παρακάτω πίνακα μέ τίς ἀριθμητικές τιμές τῆς παραστάσεως $x^2-2xy+y^2$.

y \ x	-1	0	1	2
-1				
0				
1				
2				

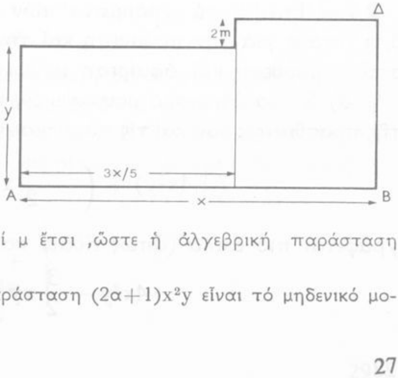
5. Νά συμπληρώσετε τόν παρακάτω πίνακα μέ τίς ἀριθμητικές τιμές τῶν παραστάσεων $α^2-2αβ$ καί $α\,(α-2β)$ γιά τίς τιμές τῶν α καί β, πού δίνονται σέ αὐτόν.

$α$	$β$	$α^2-2αβ$	$α\,(α-2β)$
-2	0		
10	$-0{,}25$		
-3	-1		

Τί παρατηρεῖτε;

6. Ἕνας ποδηλάτης καί ἕνας πεζός ξεκινοῦν ἀπό τήν ἴδια πόλη Α καί κινοῦνται πρός τήν ἴδια κατεύθυνση.
α) Ἄν ὁ ποδηλάτης ἔχει ταχύτητα $υ$ km/h καί ὁ πεζός $τ$ km/h, νά βρεῖτε μιά ἀλγεβρική παράσταση, πού νά παριστάνει πόσο θά ἀπέχουν μεταξύ τους μετά ἀπό 5 ὧρες.
β) Ἄν ὁ ποδηλάτης ἔτρεξε 5 ὧρες μέ ταχύτητα $α$ km/h καί 3 ὧρες μέ ταχύτητα $β$ km/h, νά βρεῖτε μιά ἀλγεβρική παράσταση, πού νά ἐκφράζει τή μέση ταχύτητα τοῦ ποδηλάτη.

7. Νά βρεθεῖ μία ἀλγεβρική παράσταση, πού νά δίνει τό ἐμβαδό τοῦ διπλανοῦ σχήματος τό ὁποῖο παριστάνει ἕνα οἰκόπεδο μιᾶς ἀγροτικῆς περιοχῆς.
Πόσα τετραγωνικά μέτρα εἶναι τό ἐμβαδό του, ὅταν ἡ πρόσοψη τοῦ οἰκοπέδου εἶναι (ΑΒ)=25 m καί τό βάθος του (ΒΔ) = 12 m;



8. Νά προσδιορισθοῦν οἱ ἀκέραιοι λ καί μ ἔτσι, ὥστε ἡ ἀλγεβρική παράσταση $2α^{λ+1}x^2+3α^3x^{μ+2}$ νά εἶναι μονώνυμο.

9. Γιά ποιά τιμή τοῦ α ἡ ἀλγεβρική παράσταση $(2α+1)x^2y$ εἶναι τό μηδενικό μονώνυμο;

10. Θεωροῦμε τά μονώνυμα

$$A = \frac{2}{3}x^2y, \quad B = -x^2y^3\omega, \quad \Gamma = xy^2\omega^3$$

α) Νά βρεῖτε τό συντελεστή καί τό κύριο μέρος καθενός ἀπό αὐτά.

β) Νά βρεῖτε τό βαθμό τοῦ A ὡς πρός x καί ὡς πρός y, τό βαθμό τοῦ B ὡς πρός y, ὡς πρός ω, ὡς πρός x καί y.

γ) Νά βρεῖτε τό βαθμό τοῦ Γ ὡς πρός x,y,ω.

11. Δίνεται τό σύνολο

$$A = \left\{-2x^2, \ \frac{1}{2}xy^2, \ -x^2y, \ yx^2, 2x^2y^2, \ -\frac{x^2}{3}, \ -\frac{1}{2}x^2\right\}.$$

Νά βρεῖτε τά ὑποσύνολα τοῦ A, πού τά στοιχεῖα τους εἶναι ὅμοια μονώνυμα.

12. Νά βρεῖτε τό ἄθροισμα τῶν μονωνύμων:

α) $-2\alpha^2$, $\quad -3\alpha^2$, $\quad \alpha^2$, $\quad 3\alpha^2$

β) $2x^2y$, $\quad -3x^2y$, $\quad -x^2y$, $\quad \frac{1}{2}x^2y$

γ) $-\frac{1}{3}xy\omega$, $\quad -xy\omega$, $\quad -\frac{2}{3}xy\omega$, $\quad \frac{5}{6}xy\omega$

13. Νά γράψετε τά παρακάτω πολυώνυμα μέ τήν ἀνηγμένη μορφή τους, νά τά κατατάξετε κατά τίς φθίνουσες δυνάμεις τοῦ x καί νά βρεῖτε τό βαθμό τους ὡς πρός x·

α) $4x^2-3x^3+5x-2x^2+7-x-2+3x^2+4x^3$

β) $5x^4-3x^2+2x-7x^4-3x^3-1-2x+4-5x^2$

γ) $\alpha x^2+2x+3\alpha x^2-x+5-4x$

δ) $2\alpha^3x-6\alpha^2x^2+5\alpha^3x+\alpha^3-2\alpha^4+x^4$

14. Νά βρεῖτε τό βαθμό τῶν παρακάτω πολυωνύμων, ὡς πρός x, ὡς πρός α, ὡς πρός α καί x.

α) $2\alpha^3x-\alpha^2x^2+3\alpha x^3$

β) $2\alpha^4x-\alpha^3x^2-5\alpha^2x^3-7\alpha x^4-2x^5+\alpha$

γ) $2\alpha^3-\alpha^2x+2\alpha x^2-x^3$

Ποιά ἀπό τά πολυώνυμα αὐτά εἶναι ὁμογενή ὡς πρός α καί x;

ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΤΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

Ἀλγεβρικό ἄθροισμα μονωνύμων

2.7. Ἐπειδή τά γράμματα τῶν μονωνύμων παριστάνουν ἀριθμούς, ὅ,τι εἴπαμε γιά τήν πρόσθεση καί τήν ἀφαίρεση ἀριθμῶν, θά ἰσχύουν καί στήν πρόσθεση καί ἀφαίρεση μονωνύμων. Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι:

α) Σ' ἕνα ἄθροισμα μονωνύμων, θά παραλείπουμε τόσο τά σημεῖα + τῆς προσθέσεως ὅσο καί τίς παρενθέσεις τῶν προσθετέων. Ἔτσι τό ἄθροισμα

$$(+4x^2y) + \left(-\frac{3}{2}xy\right) + (5x^2) + (+7y)$$

γράφεται πιό ἁπλά (ὅπως εἴδαμε καί στήν § 2.4)

$$4x^2y - \frac{3}{2}xy + 5x^2 + 7y.$$

β) Γιά νά ἀφαιρέσουμε ἕνα μονώνυμο ἀπό ἕνα ἄλλο, προσθέτουμε τό ἀντίθετό του. Ἔτσι π.χ. ἔχουμε

$$4x^2y-(+7\alpha y^2x) = 4x^2y+(-7\alpha y^2x) = 4x^2y-7\alpha y^2x$$

$$4x^2y-(-7\alpha y^2x) = 4x^2y+(+7\alpha y^2x) = 4x^2y+7\alpha y^2x$$

Δηλαδή, ἡ ἀφαίρεση τῶν μονωνύμων ἀνάγεται πάλι σέ πρόσθεση.

Ὅταν λέμε **ἀλγεβρικό ἄθροισμα** μονωνύμων, ἐννοοῦμε μιά σειρά ἀπό προσθέσεις καί ἀφαιρέσεις μονωνύμων. Ἕνα τέτοιο ἀλγεβρικό ἄθροισμα εἶναι π.χ. τό

$$(-3x^2y)+(-4x^2)-(-2x^2y)+(+5xy),$$

πού, μετά ἀπό ὅσα εἴπαμε παραπάνω, γράφεται

$$\begin{aligned}(-3x^2y)+(-4x^2)-(-2x^2y)+(+5xy) &= (-3x^2y)+(-4x^2)+(+2x^2y)+\\ &\qquad +(+5xy)\\ &= -3x^2y-4x^2+2x^2y+5xy\\ &= -x^2y-4x^2+5xy.\end{aligned}$$

Βλέπουμε δηλαδή ὅτι ἕνα ἀλγεβρικό ἄθροισμα μονωνύμων καταλήγει πάλι σ' ἕνα πολυώνυμο.

Πρόσθεση πολυωνύμων

2.8. Ἀφοῦ τά πολυώνυμα εἶναι ἀθροίσματα μονωνύμων καί τά μονώνυμα παριστάνουν ἀριθμούς, ἡ πρόσθεση τῶν πολυωνύμων θά γίνεται ὅπως καί ἡ πρόσθεση τῶν ἀριθμητικῶν ἀθροισμάτων.

Παράδειγμα 1:
$$\begin{aligned}(3x^2y-2xy+y^2)+(6xy-x^2y-4y^2) &=\\ &= 3x^2y-2xy+y^2+6xy-x^2y-4y^2=\\ &= 3x^2y-x^2y-2xy+6xy+y^2-4y^2=\\ &= (3-1)x^2y+(-2+6)xy+(1-4)y^2=\\ &= 2x^2y+4xy-3y^2\end{aligned}$$

Παράδειγμα 2:
$$\begin{aligned}(x^3-2x^2-1)+(-3x^3+4x-7)+(x^4-5x^2+3) &=\\ &= x^3-2x^2-1-3x^3+4x-7+x^4-5x^2+3=\\ &= x^4+x^3-3x^3-2x^2-5x^2+4x-1-7+3=\\ &= x^4-2x^3-7x^2+4x-5\end{aligned}$$

Πρακτικά ἡ πρόσθεση τῶν πολυωνύμων γίνεται πιό εὔκολα, ἄν τοποθετήσουμε τά πολυώνυμα τό ἕνα κάτω ἀπό τό ἄλλο βάζοντας τούς ὅμοιους ὅρους στήν ἴδια στήλη. Ἔτσι π.χ. ἄν Α,Β,Γ εἶναι τά πολυώνυμα τοῦ παραδείγματος 2, τό ἀθροισμά τους βρίσκεται μέ τήν ἑξῆς διάταξη:

$$\mathrm{A}+\mathrm{B}+\Gamma = (x^3-2x^2-1)+(-3x^3+4x-7)+(x^4-5x^2+3)=$$

$$\left.\begin{array}{rrrrr} = & x^3 & -2x^2 & & -1-\\ & -3x^3 & & +4x & -7+\\ +x^4 & & -5x^2 & & +3=\end{array}\right\}$$
$$= x^4-2x^3-7x^2+4x-5.$$

Ἄς θεωρήσουμε τώρα δύο πολυώνυμα πού οἱ ὅροι τους εἶναι ἀντίθετα μονώνυμα ὅπως π.χ τὰ

$$3x^2y-2xy+y^2,\ -3x^2y+2xy-y^2$$

Δύο τέτοια πολυώνυμα λέγονται **ἀντίθετα** καί τό ἄθροισμά τους εἶναι πάντοτε ἕνα πολυώνυμο, πού οἱ συντελεστές του εἶναι μηδέν **(μηδενικό πολυώνυμο)** καί συμβολίζεται μέ 0. Πραγματικά τά παραπάνω πολυώνυμα ἔχουν ἄθροισμα

$$\begin{aligned}(3x^2y-2xy+y^2)+(-3x^2y+2xy-y^2) &= 3x^2y-2xy+y^2-3x^2y+2xy-y^2 = \\ &= 3x^2y-3x^2y-2xy+2xy+y^2-y^2 = \\ &= 0x^2y+0xy+0y^2 = \\ &= 0.\end{aligned}$$

Ἄν ἕνα πολυώνυμο σημειωθεῖ μέ Α, τό ἀντίθετο του σημειώνεται μέ –Α. Ἔτσι π.χ. ἄν εἶναι $A=3x^2y-2xy+y^2$, θά ἔχουμε $-A=-3x^2y+2xy-y^2$, δηλαδή

$$-(3x^2y-2xy+y^2)=-3x^2y+2xy-y^2$$

Ἀφαίρεση πολυωνύμων

2.9. Ἡ ἀφαίρεση πολυωνύμων γίνεται ὅπως καί ἡ ἀφαίρεση τῶν ἀλγεβρικῶν ἀθροισμάτων μέ ἀριθμητικούς ὅρους, δηλαδή:

> Γιά νά ἀφαιρέσουμε ἕνα πολυώνυμο Β ἀπό ἕνα πολυώνυμο Α, προσθέτουμε στό Α τό ἀντίθετο τοῦ Β.

Παράδειγμα 1: Ἄν $A=3x^2y-2xy+y^2$ καί $B=6xy-x^2y-4y^2$, τότε

$$\begin{aligned}A-B &= (3x^2y-2xy+y^2)-(6xy-x^2y-4y^2) = \\ &= (3x^2y-2xy+y^2)+(-6xy+x^2y+4y^2) = \\ &= 3x^2y-2xy+y^2-6xy+x^2y+4y^2 = \\ &= 3x^2y+x^2y-2xy-6xy+y^2+4y^2 = \\ &= 4x^2y-8xy+5y^2\end{aligned}$$

Παράδειγμα 2: Ἄν $A=x^3-2x^2-1$ καί $B=-3x^3+4x+7$ τότε εἶναι

$$\begin{aligned}A-B &= (x^3-2x^2-1)-(-3x^3+4x+7) = \\ &= (x^3-2x^2-1)+(3x^3-4x-7) = \\ &= x^3+3x^3-2x^2-4x-1-7 = \\ &= 4x^3-2x^2-4x-8.\end{aligned}$$

Πρακτικά ἡ διαφορά Α–Β δύο πολυωνύμων βρίσκεται μέ τή διάταξη πού μάθαμε στήν πρόσθεση, δηλαδή θέτουμε τό –Β κάτω ἀπό τό Α. Ἔτσι ἄν εἶναι $A=5x^4-x^3-2x+1$ καί $B=2x^4+3x^3+x^2-8$, γράφουμε

$$\begin{aligned} A-B &= (5x^4-x^3-2x+1)-(2x^4+3x^3+x^2-8) \\ &= \left.\begin{aligned} &5x^4-x^3 \quad -2x+1- \\ -&2x^4-3x^3-x^2 \quad +8= \end{aligned}\right\} \\ &= 3x^4-4x^3-x^2-2x+9. \end{aligned}$$

Γενικά, ὅταν λέμε ἀλγεβρικό ἄθροισμα πολυωνύμων, ἐννοοῦμε μιά σειρά ἀπό προσθέσεις καί ἀφαιρέσεις πολυωνύμων. Ἕνα τέτοιο ἄθροισμα εἶναι π.χ. τό

$$(4x^2-3x)+(-2x^2-4x+3)-(5x^3-6x^2+x-1)$$

Μετά ἀπό ὅσα εἴπαμε, καταλαβαίνουμε ὅτι μποροῦμε νά βγάλουμε τίς παρενθέσεις ἀκολουθώντας τούς ἑξῆς κανόνες:

- Ἄν μπροστά ἀπό μία παρένθεση ὑπάρχει τό $+$, παραλείπουμε τό πρόσημο αὐτό καί τήν παρένθεση γράφοντας τούς ὅρους της ὅπως εἶναι.
- Ἄν μπροστά ἀπό μία παρένθεση ὑπάρχει τό $-$, παραλείπουμε τό πρόσημο αὐτό καί τήν παρένθεση γράφοντας τούς ὅρους της μέ ἀντίθετα πρόσημα.

Ἔτσι π.χ. ἄν $A=4x^2-3x$, $B=-2x^2-4x+3$, $\Gamma=5x^3-6x^2+x-1$, ἔχουμε

$$\begin{aligned} A+B-\Gamma &= (4x^2-3x)+(-2x^2-4x+3)-(5x^3-6x^2+x-1) \\ &= 4x^2-3x-2x^2-4x+3-5x^3+6x^2-x+1 \\ &= -5x^3+8x^2-8x+4. \end{aligned}$$

Τό πολυώνυμο αὐτό $A+B-\Gamma$ βρίσκεται ἀκόμη καί μέ τή γνωστή διάταξη:

$$\begin{aligned} A+B-\Gamma = &\left.\begin{aligned} 4x^2-3x&- \\ -2x^2-4x+3&- \\ -5x^3+6x^2-\ x+1&= \end{aligned}\right\} \\ = &\ -5x^3+8x^2-8x+4 \end{aligned}$$

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

15. Νά βρεῖτε τά ἀθροίσματα τῶν μονωνύμων:

α) $2x,\ y,\ -3x,\ -2y,\ -x$

β) $-2x^2,\ -3x,\ x,\ 2x^2,\ -1$

γ) $3x^2y,\ -2xy^2,\ 4x^2y,\ -xy^2,\ y^2x$.

16. Ἄν $A=-3x^2y$, $B=-x^2y$, $\Gamma=-\frac{1}{2}xy$, $\Delta=12xy$, νά βρεθοῦν οἱ διαφορές

α) $A-B$ β) $B-\Gamma$ γ) $\Gamma-\Delta$

17. Νά ἐκτελέσετε τίς πράξεις:

α) $4x^2 + (+2x^2) - (-3x^2) + (-6x^2) - (+4x^2)$
β) $\alpha - (-2\beta) + (-3\alpha) - (-2\alpha) + (-3\beta)$

18. Ἐπίσης τίς πράξεις:
α) $(-2x^2y^3) - (-3x^3y^2) + (+x^3y^2) - (-7x^2y^3) + (-x^2y^3)$
β) $\left(-\frac{2}{3}xy^2\right) - \left(-\frac{1}{2}xy^2\right) + \left(-\frac{3}{2}x^2y\right) - \left(+\frac{1}{4}xy\right) - \left(-\frac{1}{3}x^2\right)$

• 19. Ἄν $A = x^3-4x^2+3x-1$, $B = 2x^3-5x^2-2x+3$, $\Gamma = 4x^3+x^2-x-2$, νά βρεῖτε τά πολυώνυμα:
α) Α+Β β) Α+Β+Γ γ) Α–Β δ) Α–Β+Γ ε) Γ–Α–Β.

20. Νά ἐκτελεσθοῦν οἱ πράξεις:
α) $(2x+3y) - (-x-2y+1) + (3y-2)$
β) $(5\alpha^3-2\beta^2+1)-(2\alpha^2-3\beta+3) - (-2\alpha^2+4)$
γ) $(\alpha^2x^2-3\alpha x^3) + (2x^3-2\alpha^3+\alpha^3x) - (-\alpha^2x^2+\alpha^3)$

21. Στό πολυώνυμο $4x^4-5x^3-3x^2+7x-1$ νά βάλετε μέσα σέ παρένθεση: α) τούς τρεῖς τελευταίους ὅρους μέ τό πρόσημο (–) μπροστά ἀπό τήν παρένθεση β) τόν πρῶτο, τρίτο, πέμπτο ὅρο μέ τό πρόσημο (+) μπροστά ἀπό τήν παρένθεση.

22. Νά ἐκτελέσετε τίς πράξεις:
α) $\alpha-2\beta-[2\alpha-(\beta-3\gamma)]-2\gamma$
β) $3x^2-[(5x^3-x) + 4x^2-(2x^2+6)] + (-2x^2-5x)$
γ) $x^2-(y^2-xy) + [2y^2+3xy - (x^2+y^2)]$
δ) $-3\alpha\beta + (2\beta^2-\alpha^2) - [\alpha\beta-(\alpha^2+\beta^2) + 3\alpha^2] - (2\beta^2-\alpha^2)$

23. Νά ἐκτελέσετε τίς πράξεις:
α) $(2x-3) - [-2x - (x^2-2)] - \{x^2-[3x+4-(x^2-1)]\}$
β) $\alpha^2-2\alpha\beta- \{2\alpha^2- [3\beta^2-(\alpha^2+\beta^2)-3\alpha^2]-\alpha\beta\}$
γ) $3x^2- \{x^2- [x- (1-x^3)] + 2x\}- \{2x^3+[x+(x^2-3)-3x^2]-1\}-4$

Πολλαπλασιασμός πολυωνύμου ἐπί μονώνυμο.

2.10. Ἄς δοῦμε πρῶτα πῶς βρίσκουμε ἕνα γινόμενο μονωνύμων, π.χ. τό

$$(3x^2y) \cdot (-5x^2) \cdot (-xy^3\alpha)$$

Ἐπειδή τά γράμματα παριστάνουν ἀριθμούς, ἔχουμε οὐσιαστικά ἕνα γινόμενο παραγόντων, στό ὁποῖο ἰσχύει ἡ ἀντιμεταθετική καί ἡ προσεταιριστική ἰδιότητα. Ἔτσι τό γινόμενο αὐτό γράφεται

$$\begin{aligned}(3x^2y)\cdot(-5x^2)\cdot(-xy^3\alpha) &= 3x^2y(-5)x^2(-1)xy^3\alpha \\ &= 3(-5)\ (-1)\ x^2x^2xyy^3\alpha \\ &= 15x^5y^4\alpha.\end{aligned}$$

Βλέπουμε δηλαδή ὅτι:

> Τό γινόμενο μονωνύμων εἶναι ἕνα μονώνυμο, πού ἔχει συντελεστή τό γινόμενο τῶν συντελεστῶν καί πού τό κύριο μέρος του περιέχει ὅλα τά γράμματα, τά ὁποῖα ὑπάρχουν στούς παράγοντές του, καί τό καθένα μέ ἐκθέτη τό ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν του.

Ἄς ἐφαρμόσουμε τόν κανόνα αὐτό, γιά νά βροῦμε τό τετράγωνο ἤ τόν κύβο ἑνός μονωνύμου, π.χ. τοῦ $-3\alpha x^2y$. Ἔχουμε

$(-3\alpha x^2y)^2=(-3\alpha x^2y)(-3\alpha x^2y)=(-3)^2\alpha^2x^4y^2=9\alpha^2x^4y^2$

$(-3\alpha x^2y)^3=(-3\alpha x^2y)(-3\alpha x^2y)(-3\alpha x^2y)=(-3)^3\alpha^3x^6y^3=-27\alpha^3x^6y^3$.

Γενικά:

> Γιά νά ὑψώσουμε ἕνα μονώνυμο σέ μιά δύναμη λ, ὑψώνουμε τό συντελεστή του στήν λ δύναμη καί πολλαπλασιάζουμε ἐπί λ τούς ἐκθέτες τῶν γραμμάτων του.

Ἄς θεωρήσουμε τώρα τό γινόμενο ἑνός πολυωνύμου ἐπί ἕνα μονώνυμο, π.χ.

$$(2x^2y-3xy+5)\cdot(-4x^3y)$$

Ἐπειδή τό πολυώνυμο εἶναι ἄθροισμα μονωνύμων, μποροῦμε νά ἐφαρμόσουμε τήν ἐπιμεριστική ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὡς πρός τήν πρόσθεση, ὁπότε ἔχουμε

$$\begin{aligned}(2x^2y-3xy+5)\cdot(-4x^3y)&=(2x^2y)(-4x^3y)+(-3xy)(-4x^3y)+5(-4x^3y)\\&=-8x^5y^2+12x^4y^2-20x^3y.\end{aligned}$$

Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι:

> Γιά νά πολλαπλασιάσουμε ἕνα πολυώνυμο ἐπί ἕνα μονώνυμο, πολλαπλασιάζουμε κάθε ὅρο τοῦ πολυωνύμου ἐπί τό μονώνυμο καί προσθέτουμε τά γινόμενα πού προκύπτουν.

Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων

2.11. Ἀφοῦ τά πολυώνυμα εἶναι ἀθροίσματα (μονωνύμων), τό γινόμενο δύο πολυωνύμων θά βρίσκεται ὅπως τό γινόμενο δύο ἀριθμητικῶν ἀθροισμάτων, δηλαδή:

> Γιά νά πολλαπλασιάσουμε ἕνα πολυώνυμο ἐπί ἕνα ἄλλο πολυώνυμο, πολλαπλασιάζουμε κάθε ὅρο τοῦ πρώτου μέ κάθε ὅρο τοῦ δευτέρου καί προσθέτουμε τά γινόμενα πού προκύπτουν.

Ἔτσι π.χ. ἔχουμε: $(3x^2y+2xy^2-x^3)(2x-3y)=$

$$\begin{aligned}&=(3x^2y+2xy^2-x^3)(2x)+(3x^2y+2xy^2-x^3)(-3y)=\\&=6x^3y+4x^2y^2-2x^4-9x^2y^2-6xy^3+3x^3y=\\&=9x^3y-5x^2y^2-6xy^3-2x^4.\end{aligned}$$

$(2x^3-x^2+3x+5)(x^2-3x+1)=$

$$\begin{aligned}&=(2x^3-x^2+3x+5)x^2+(2x^3-x^2+3x+5)(-3x)+\\&\quad+(2x^3-x^2+3x+5)\cdot 1=\end{aligned}$$

$$= 2x^5 - x^4 + 3x^3 + 5x^2 - 6x^4 + 3x^3 - 9x^2 - 15x + 2x^3 -$$
$$- x^2 + 3x + 5 =$$
$$= 2x^5 - 7x^4 + 8x^3 - 5x^2 - 12x + 5.$$

Ὅταν ἔχουμε δύο πολυώνυμα μιᾶς μεταβλητῆς, τά ὁποῖα εἶναι διατεταγμένα κατά τίς φθίνουσες δυνάμεις, τό γινόμενό τους μπορεῖ νά βρεθεῖ καί ἄν διατάξουμε τά «μερικά γινόμενα» σέ στήλες, ὅπως μάθαμε στήν πρόσθεση τῶν πολυωνύμων. Ἔτσι π.χ.

$$(5x^3 - x^2 + 2x - 3) \cdot (4x^2 - x + 2) =$$

$$\left.\begin{array}{rl} = 20x^5 - 4x^4 + 8x^3 - 12x^2 - & \\ - 5x^4 + x^3 - 2x^2 + 3x + & \\ + 10x^3 - 2x^2 + 4x - 6 = & \end{array}\right\} \begin{array}{l} \leftarrow \text{α' μερικό γινόμενο} \\ \leftarrow \text{β' μερικό γινόμενο} \\ \leftarrow \text{γ' μερικό γινόμενο} \end{array}$$

$$= 20x^5 - 9x^4 + 19x^3 - 16x^2 + 7x - 6.$$

Ἀπό τό παραπάνω παράδειγμα βλέπουμε ὅτι ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ γινομένου εἶναι ἴσος μέ τό γινόμενο τῶν πρώτων ὅρων τῶν δύο πολυωνύμων, δηλαδή

$$20x^5 = (5x^3)\,(4x^2)$$

καί συνεπῶς **ὁ βαθμός τοῦ γινομένου δύο πολυωνύμων εἶναι ἴσος μέ τό ἄθροισμα τῶν βαθμῶν τῶν δύο πολυωνύμων.**

Σέ πολυώνυμα μέ περισσότερα γράμματα ἡ ἰδιότητα αὐτή ἰσχύει γιά κάθε γράμμα τους. Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι, ἄν ἔχουμε δύο ὁμογενή πολυώνυμα καί βροῦμε τό γινόμενό τους, τό γινόμενο αὐτό θά εἶναι ἐπίσης ὁμογενές πολυώνυμο. Ἡ ἰσότητα π.χ.

$$(3x^2y + 2xy^2 - x^3)\,(2x - 3y) = 9x^3y - 5x^2y^2 - 6xy^3 - 2x^4$$

δείχνει ὅτι τό γινόμενο δύο ὁμογενῶν πολυωνύμων 3ου καί 1ου βαθμοῦ ὡς πρός x καί y εἶναι ὁμογενές πολυώνυμο 4ου $(3+1=4)$ βαθμοῦ ὡς πρός x καί y.

Γιά νά βροῦμε τό γινόμενο τριῶν πολυωνύμων, πολλαπλασιάζουμε πρῶτα τά δύο πρῶτα καί τό γινόμενο πού βρίσκουμε τό πολλαπλασιάζουμε ἐπί τό τρίτο πολυώνυμο. Ἔτσι π.χ. ἔχουμε

$$\begin{aligned}(x^2+2)\,(2x+3)\,(x-1) &= (2x^3 + 4x + 3x^2 + 6)\,(x-1) = \\ &= 2x^4 + 4x^2 + 3x^3 + 6x - 2x^3 - 4x - 3x^2 - 6 = \\ &= 2x^4 + x^3 + x^2 + 2x - 6.\end{aligned}$$

Εἶναι φανερό ὅτι μέ ἀνάλογη διαδικασία θά βρίσκουμε καί τό γινόμενο περισσότερων ἀπό τρία πολυωνύμων.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

24 Νά βρεῖτε τά γινόμενα:

α) $(-2x)\,(-3x^2)$ β) $2xy^2 \cdot (-x^2y^2)$ γ) $\left(\frac{2}{3}\alpha^2\right) \cdot \left(\frac{3}{4}\alpha y^2\right)$

δ) $(-3\alpha^2)(-5\beta^3)$ ε) $\frac{2}{5}x^2y^3z\left(-\frac{15}{8}x^3y^2z\right)$

25. Νά βρεῖτε τά γινόμενα:

α) $(-2\alpha^2)\cdot 3\alpha^3\cdot(-4\alpha^5)$ β) $2xy^2\cdot(-4x^3y)\cdot(-x^2y^2)$

γ) $xy\cdot(-x^2y^2z)\cdot 4xz^2\cdot(-4x^3y^3z^3)$ δ) $\left(-\frac{4}{5}\alpha^3\beta\right)\cdot\left(\frac{5}{12}\beta^3\right)\cdot(-3\alpha)\cdot(-1)$

ε) $\alpha^{\mu-2}\cdot\alpha^{\mu+3}\cdot\alpha^{2\mu-1}$ στ) $\alpha^x\beta^{y-1}\cdot(-3\alpha^{x+1}\beta^{y-2})\cdot(-\alpha\beta)\cdot\beta^2$

26. Νά ὑπολογισθοῦν οἱ δυνάμεις:

α) $\left(-\frac{1}{2}\alpha^2\beta^3\gamma\right)^3$ β) $(+3\alpha^4x^3y^2)^3$ γ) $\left(-\frac{3}{4}\alpha^3\beta\right)^3$

δ) $(-\alpha\beta)^{2\nu+1}$ ε) $(\alpha^x\beta^{y-1})^2$ στ) $(-\alpha\beta^2)^{2\mu}$

27. Νά κάμετε τίς πράξεις:

α) $\left(-\frac{1}{2}x^2y\right)^3\cdot(-2x)\cdot(4xy^3)^2$ β) $(-2x^3y^2\omega)^2\cdot\left(\frac{1}{2}xy\right)^3$

γ) $(\alpha^\mu\cdot\beta^\nu)^2\cdot(-\alpha^{\mu-2}\cdot\beta^{\nu-1})^2$ δ) $\left(\frac{1}{3}x^2y\right)(-1)\left(-\frac{1}{2}xy^3z\right)^2$

28. Νά κάμετε τίς πράξεις:

α) $(-3x^3-2x^2+5)(-2x^2)$ β) $-3\alpha^2\beta(\alpha^2\beta^2-2\alpha\beta+3\alpha^2\beta^3-1)$

γ) $\left(\frac{x^3}{4}-\frac{x^2}{2}-5x-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{6}{5}x^2\right)$ δ) $\left(\frac{3}{2}\alpha x^2y-4\alpha^2x-5xy^2\right)(-3xy)$

29. Νά γίνουν οἱ πράξεις:

α) $3x(x^2-1)-4x^2(x+2)-3x+4(x^2-1)$

β) $-5x^2(x^3-2x^2+4)+(1-2x)(-4x^3)-x(x-1)-2x$

γ) $2\alpha(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)-\beta^3-(\alpha-\beta)(-3\alpha\beta)-4\alpha^2\beta$

δ) $3[x^2-(x+4)-3]-2x^2[x^2+(x-2)]-5$

ε) $2\alpha\{\alpha\beta-[\alpha^2-(-\alpha\beta+4)]+2\}-3\alpha(\alpha^2-2)$

30. Νά ἀντικατασταθοῦν οἱ παρακάτω ἀστερίσκοι ἔτσι, ὥστε νά ἰσχύει κάθε μιά ἀπό τίς παρακάτω ἰσότητες:

α) $*\cdot(4\beta^2-7\beta+8)=28\beta^3-49\beta^2+56\beta$

β) $*\cdot(3x^2+8x-7)=36x^5+*-*$

γ) $5\alpha^2\beta^3(*-9\beta^2+*)=20\alpha^5\beta^7-*+\alpha^4\beta^9$

31. Νά ἐκτελέσετε τούς πολλαπλασιασμούς:

α) $(3x+1)(2x-3)$ β) $(3x^2-2x+4)(2x-5)$

γ) $(-2x^3-4x^4+x^2-2x+1)\cdot(-x+2x^2+3)$ δ) $(x-1)(2x^4-3x^2+2x-5)$

ε) $(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)(\alpha+\beta)$ στ) $(2x^3+2y^3+xy^2)(2x^2-xy+y^2)$

ζ) $(x^4-2x^2-3)(-2x^3-1+2x)$ η) $\left(\frac{2}{3}xy-x^2+\frac{y^2}{2}\right)\left(y^2-3xy-\frac{x^2}{2}\right)$

32. Νά ἐκτελέσετε τίς παρακάτω πράξεις καί μετά νά βρεῖτε τήν ἀριθμητική τιμή τῆς ἀρχικῆς παραστάσεως καί τοῦ ἐξαγομένου γιά τίς τιμές τῶν γραμμάτων πού ἀναφέρονται.

α) $(2x+3)(x^2+x-1)-(x^2-1)(x+2)-2x^3$, $x=-2$

β) $(x^2y-2xy^2)(2x-y)-2x^3(x+y)-(x-y)(-2y^3)$, $x=-1$, $y=2$

γ) $\alpha^2+\alpha\beta^2-[\alpha^3-(\alpha+\beta)\ (\alpha^2+\beta^2)]$, $\alpha=-2$, $\beta=\frac{1}{2}$

δ) $x(x^2-2)-(x+2)\ [x^2-(1-x)]$, $x=-3$.

33. Νά βρεθοῦν τά γινόμενα:

α) $(x+1)\ (x-1)\ (x+3)$ β) $(x^2+xy+y^2)\ (x-y)\ (x^2+y^2)$

34. Ἄν $A=2x+3$, $B=3x-2$ καί $\Gamma=x-1$, νά ἐπαληθεύσετε:

α) τήν προσεταιριστική ἰδιότητα $(A.B).\Gamma=A.(B.\Gamma)$

β) τήν ἐπιμεριστική ἰδιότητα $A.(B+\Gamma)=A.B+A.\Gamma$.

Ἀξιοσημείωτοι πολλαπλασιασμοί

2.12. Ὑπάρχουν ὁρισμένα ἁπλά γινόμενα, τά ὁποῖα συναντᾶμε συχνά καί γι' αὐτό εἶναι χρήσιμο νά ἔχουμε μνημονικούς κανόνες, πού δίνουν τά ἐξαγόμενά τους. Τά πιό βασικά ἀπό τά γινόμενα αὐτά εἶναι:

I. Τό τετράγωνο ἑνός διωνύμου.

Ἐπειδή ἔχουμε

$$(\alpha+\beta)^2=(\alpha+\beta)\ (\alpha+\beta)=\alpha^2+\alpha\beta+\alpha\beta+\beta^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$$
$$(\alpha-\beta)^2=(\alpha-\beta)\ (\alpha-\beta)\ =\alpha^2-\alpha\beta-\alpha\beta+\beta^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$$

ἤ τελικά

$$\boxed{\begin{aligned}(\alpha+\beta)^2&=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\\(\alpha-\beta)^2&=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\end{aligned}}$$

βλέπουμε ὅτι **τό τετράγωνο τοῦ ἀθροίσματος (τῆς διαφορᾶς) δύο μονωνύμων(1) εἶναι ἴσο μέ τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τους σύν (μεῖον) τό διπλάσιο γινόμενό τους.**

Τό ἐξαγόμενο τοῦ $(\alpha+\beta)^2$ ἤ τοῦ $(\alpha-\beta)^2$ ἤ ὁποιασδήποτε δυνάμεως ἑνός πολυωνύμου λέγεται καί **ἀνάπτυγμά του**.

Παράδειγμα 1. Νά βρεθοῦν τά ἀναπτύγματα $(3x+2y)^2$ καί $(3xy-2)^2$.

$$\begin{array}{l}(3x\ +\ 2y)^2=(3x)^2\ +\ 2(3x)\ (2y)\ +\ (2y)^2=9x^2+12xy+4y^2\\ \ \downarrow\quad\ \downarrow\qquad\quad\uparrow\qquad\quad\uparrow\quad\ \ \uparrow\quad\ \ \uparrow\\(\alpha\ +\ \beta)^2\ =\ \alpha^2\ +\ 2\ \alpha\quad\ \beta\ +\ \beta^2\end{array}$$

$$\begin{array}{l}(3xy-2)^2=(3xy)^2-2(3xy)\ .\ 2\ +\ 2^2=9x^2y^2-12xy+4\\ \ \downarrow\qquad\downarrow\qquad\quad\uparrow\qquad\quad\uparrow\quad\ \uparrow\quad\ \uparrow\\(\alpha-\quad\beta)^2\ =\ \alpha^2-2\quad\ \alpha\quad\ \beta\ +\ \beta^2\end{array}$$

Παράδειγμα 2. Ποιοῦ διωνύμου ἀνάπτυγμα εἶναι τό πολυώνυμο $4x^2-28x+49$;

Εἶναι ἀνάπτυγμα τοῦ τετραγώνου τοῦ $2x-7$ γιατί

$$\begin{array}{l}4x^2-28x\ +\ 49=(2x)^2-2.(2x).7\ +\ 7^2=(2x\ -\ 7)^2\\ \qquad\qquad\qquad\quad\downarrow\qquad\ \ \downarrow\quad\downarrow\qquad\downarrow\qquad\ \uparrow\qquad\uparrow\\ \qquad\qquad\qquad\quad\alpha^2\ -\ 2\quad\ \alpha\quad\ \beta\ +\ \beta^2=(\alpha\ -\ \beta)^2\end{array}$$

Παράδειγμα 3. Νά βρεθεῖ ὁ ὅρος πού λείπει στά παρακάτω πολυώνυμα, γιά νά γίνουν ἀναπτύγματα τέλειων τετραγώνων διωνύμων:

(1) Τά α καί β μπορεῖ νά εἶναι καί ὁποιεσδήποτε ἀλγεβρικές παραστάσεις.

$1 - 6x + *$, $x^4 + 16y^2 + *$

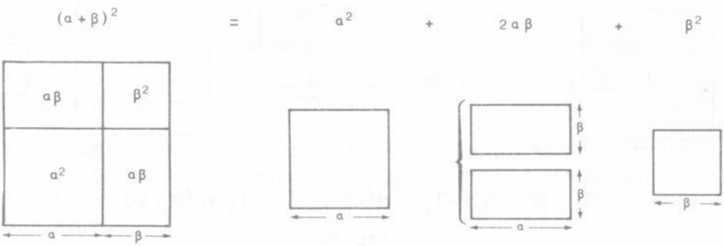
Ἐπειδή εἶναι $1-6x = 1^2 - 2(3x).1$, τό πολυώνυμο $1-6x$ γίνεται ἀνάπτυγμα τοῦ $(1-3x)^2$ ἄν συμπληρωθεῖ μέ τό τετράγωνο τοῦ $3x$, δηλαδή μέ τό $9x^2$. Ἔχουμε τότε

$$\begin{array}{ccccccc} 1^2 - & 2 \,.\, 1 \,. & (3x) & + & (3x)^2 & = & (1 - 3x)^2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \uparrow \quad \uparrow \\ \alpha^2 - & 2\alpha & \beta & + & \beta^2 & = & (\alpha - \beta)^2 \end{array}$$

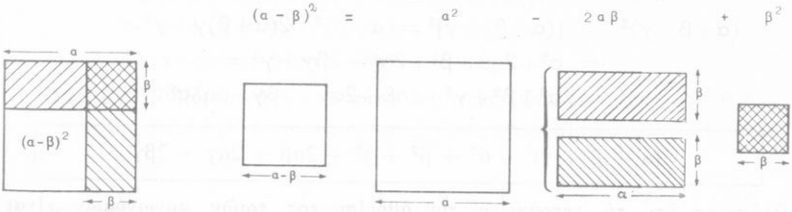
Ἐπειδή εἶναι $x^4 + 16y^2 = (x^2)^2 + (4y)^2$, τό πολυώνυμο x^4+16y^2 γίνεται ἀνάπτυγμα τοῦ $(x^2+4y)^2$ ἄν συμπληρωθεῖ μέ τό διπλάσιο γινόμενο τῶν x^2 καί $4y$ δηλαδή μέ τό $2x^2.4y$. Ἔχουμε τότε

$$\begin{array}{ccccccc} (x^2)^2 + & 2x^2 & (4y) & + & (4y)^2 & = & (x^2 + 4y)^2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \uparrow \quad \uparrow \\ (\alpha^2 + & 2\alpha & \beta & + & \beta^2) & = & (\alpha + \beta)^2. \end{array}$$

Τά παρακάτω σχήματα 3 καί 4 δίνουν γεωμετρική ἑρμηνεία τῶν ἰσοτήτων $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ καί $(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$ ὅταν τά α καί β παριστάνουν μήκη τμημάτων.



(σχ. 3)



(σχ. 4)

ΙΙ. Τό ἄθροισμα δύο μονωνύμων ἐπί τή διαφορά τους.

Ἐπειδή ἔχουμε $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) = \alpha^2+\alpha\beta-\alpha\beta-\beta^2 = \alpha^2-\beta^2$, δηλαδή

$$\boxed{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) = \alpha^2-\beta^2}$$

βλέπουμε ὅτι **τό γινόμενο τοῦ ἀθροίσματος δύο μονωνύμων ἐπί τή διαφορά τους εἶναι ἴσο μέ τό τετράγωνο τοῦ μειωτέου τῆς διαφορᾶς μεῖον τό τετράγωνο τοῦ ἀφαιρετέου.**

Παράδειγμα 4. Νά βρεθοῦν τά γινόμενα $(2x+3y)\,(2x-3y)$ καί $(5\alpha^2\beta+x)\,(x-5\alpha^2\beta)$

$$\begin{array}{ccccc} (2x+3y) & (2x-3y) & = (2x)^2 & - & (3y)^2 = 4x^2-9y^2 \\ \downarrow\ \ \downarrow & \downarrow\ \ \downarrow & \uparrow & & \uparrow \\ (\alpha+\beta) & (\alpha-\beta) & = \alpha^2 & - & \beta^2 \end{array}$$

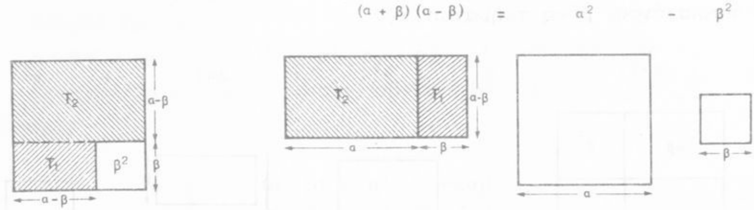
$$(5\alpha^2\beta+x)\,(x-5\alpha^2\beta) = x^2-(5\alpha^2\beta)^2 = x^2-25\alpha^4\beta^2$$

Παράδειγμα 5. Νά γραφοῦν σέ μορφή γινομένου δύο διωνύμων τά διώνυμα
α) x^2-9 β) $\alpha^2\beta^2-4y^2$

$$\begin{array}{lccccc} \text{α)} & x^2-9 = x^2 & - & 3^2 & = (x+3) & (x-3) \\ & \downarrow & & \downarrow & \uparrow\quad\uparrow & \uparrow\quad\uparrow \\ & \alpha^2 & - & \beta^2 & = (\alpha+\beta) & (\alpha-\beta) \end{array}$$

β) $\alpha^2\beta^2-4y^2 = (\alpha\beta)^2-(2y)^2 = (\alpha\beta+2y)\,(\alpha\beta-2y)$

Τό παρακάτω σχῆμα δίνει τή γεωμετρική ἑρμηνεία τῆς ἰσότητας $(\alpha+\beta)\,(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$ ὅταν τά α καί β παριστάνουν μήκη τμημάτων.



$$\alpha^2 = T_1+T_2+\beta^2,\quad T_1+T_2=\alpha^2-\beta^2,\quad T_1+T_2=(\alpha+\beta)\,(\alpha-\beta)$$

(σχ. 5)

III. Τό τετράγωνο ἑνός τριωνύμου. Ἐπειδή ἔχουμε

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta+\gamma)^2 &= [(\alpha+\beta)+\gamma]^2 = (\alpha+\beta)^2+2(\alpha+\beta)\gamma+\gamma^2 = \\ &= \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2+2\alpha\gamma+2\beta\gamma+\gamma^2 = \\ &= \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma,\ \text{δηλαδή}\end{aligned}$$

$$\boxed{(\alpha+\beta+\gamma)^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma}$$

βλέπουμε ὅτι **τό τετράγωνο τοῦ ἀθροίσματος τριῶν μονωνύμων εἶναι ἴσο μέ τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τους σύν ὅλα τά διπλάσια γινόμενά τους ἀνά δύο.** Ἔτσι π.χ.

$$\begin{aligned}(2x+3y+z)^2 &= (2x)^2+(3y)^2+z^2+2(2x)\,(3y)+2(2x)z+2(3y)z = \\ &= 4x^2+9y^2+z^2+12xy+4xz+6yz.\\ (x^2-3y+2\alpha z)^2 &= [x^2+(-3y)+2\alpha z]^2 = \\ &= (x^2)^2+(-3y)^2+(2\alpha z)^2+2x^2(-3y)+2x^2(2\alpha z)+ \\ &\qquad +2(-3y)\,(2\alpha z) = \\ &= x^4+9y^2+4\alpha^2z^2-6x^2y+4\alpha x^2z-12\alpha yz.\end{aligned}$$

Ὁ κανόνας ἰσχύει καί γιά τό τετράγωνο ἀθροίσματος ὁσωνδήποτε προσθετέων.

IV. **Ὁ κύβος διωνύμου.** Ἐπειδή εἶναι

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)^3 &= (\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta) = (\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta)(\alpha+\beta) = \\ &= \alpha^3+\alpha\beta^2+2\alpha^2\beta+\alpha^2\beta+\beta^3+2\alpha\beta^2 = \\ &= \alpha^3+\beta^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2, \\ (\alpha-\beta)^3 &= (\alpha-\beta)^2(\alpha-\beta) = (\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta)(\alpha-\beta) = \\ &= \alpha^3+\alpha\beta^2-2\alpha^2\beta-\alpha^2\beta-\beta^3+2\alpha\beta^2 = \\ &= \alpha^3-\beta^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2,\end{aligned}$$

ἔχουμε τελικά (1)

$$\boxed{\begin{aligned}(\alpha+\beta)^3 &= \alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3 \\ (\alpha-\beta)^3 &= \alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3\end{aligned}}$$

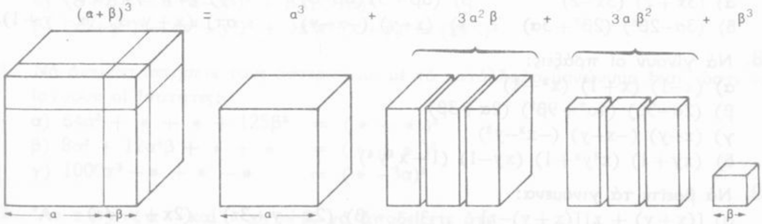
Παρατηροῦμε ὅτι ὁ δεύτερος τύπος προκύπτει ἀπό τόν πρῶτο, ἄν γράψουμε τό πρῶτο μέλος του $(\alpha-\beta)^3$ ὡς $[\alpha+(-\beta)]^3$. Ἀρκεῖ λοιπόν νά θυμόμαστε μόνο τόν πρῶτο τύπο.

Παράδειγμα 6: Νά βρεθοῦν τά ἀναπτύγματα $(2x+3y)^3$ καί $(x^2-3y)^3$

$$\begin{array}{l}(2x+3y)^3 = (2x)^3+3(2x)^2(3y)+3(2x)(3y)^2+(3y)^3 = 8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3 \\ \;\downarrow\quad\;\downarrow\qquad\;\uparrow\qquad\;\;\uparrow\quad\;\uparrow\qquad\;\uparrow\quad\;\uparrow\qquad\uparrow \\ (\alpha+\beta)^3 = \alpha^3+3\alpha^2\quad\beta\;+3\alpha\quad\beta^2+\beta^3\end{array}$$

$$\begin{aligned}(x^2-3y)^3 &= [x^2+(-3y)]^3 = \\ &= (x^2)^3+3(x^2)^2(-3y)+3x^2(-3y)^2+(-3y)^3 = \\ &= x^6+3x^4(-3y)+3x^2(9y^2)+(-27y^3) = \\ &= x^6-9x^4y+27x^2y^2-27y^3\end{aligned}$$

Στό σχ. 6 δίνεται ἡ γεωμετρική ἑρμηνεία τῆς ἰσότητας $(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$ ὅταν τά α καί β εἶναι μήκη τμημάτων. Ἕνας κύ-



(σχ. 6)

βος, πού ἔχει ἀκμή α+β, χωρίζεται σέ δύο κύβους μέ ἀκμές α καί β ἀντι-

(1). Νά διατυπώσετε μέ λόγια τόν σχετικό κανόνα στοίχως καί σέ δύο τριάδες ὀρθογώνιων παραλληλεπιπέδων, τῶν ὁποίων οἱ διαστάσεις εἶναι β,α,α καί β,β,α ἀντιστοίχως.

V. Ἄν κάνουμε τούς πολλαπλασιασμούς στά πρῶτα μέλη τους, βρίσκουμε ἐπίσης ὅτι ἰσχύουν οἱ ἰσότητες

$$\boxed{\begin{aligned}(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)&=\alpha^3+\beta^3\\(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)&=\alpha^3-\beta^3\end{aligned}}$$

Ἔτσι π.χ. ἔχουμε:

$$\begin{array}{lcl}(x+3)(x^2-3x+9)=(x+3)(x^2-x\cdot 3+3^2) & = & x^3+3^3=x^3+27\\ \qquad\qquad\qquad\quad\ \ \downarrow\ \downarrow\ \ \downarrow\ \ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow & & \ \uparrow\quad \uparrow\\ \qquad\qquad\qquad\quad(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\ \beta+\beta^2) & = & \alpha^3+\beta^3\end{array}$$

$$(2x-1)(4x^2+2x+1)=[(2x)-1]\cdot[(2x)^2+2x\cdot 1+1^2]=(2x)^3-1^3=8x^3-1$$

Οἱ ἰσότητες, πού προκύπτουν ἀπό τούς παραπάνω ἀξιοσημείωτους πολλαπλασιασμούς, ἐπαληθεύονται γιά ὅλες τίς ἀριθμητικές τιμές τῶν γραμμάτων τους. Κάθε ἰσότητα ὅμως, πού ἐπαληθεύεται γιά ὅλες τίς τιμές τῶν γραμμάτων της, λέγεται **ταυτότητα**· γι' αὐτό τούς παραπάνω ἀξιοσημείωτους πολλαπλασιασμούς τούς λέμε καί **ταυτότητες**.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

35. Νά βρεῖτε τά ἀναπτύγματα:

α) $(x+2)^2$ β) $(2x-3)^2$ γ) $(3\alpha-2\beta)^2$
δ) $(3xy+1)^2$ ε) $(-3x+2y)^2$ στ) $(x^2-3y)^2$
ζ) $(3x^3-xy^2)^2$ η) $(\alpha^3\beta^2-3\alpha\gamma^2)^2$ θ) $(5\alpha^2x+3\beta^2xy)^2$

36. Νά βρεῖτε τά ἀναπτύγματα:

α) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$ β) $\left(\alpha^3-\frac{1}{2}\right)^2$ γ) $\left(\frac{2\alpha}{3}-\frac{\beta^2}{2}\right)^2$
δ) $(-\alpha^3-\alpha)^2$ ε) $(\alpha^x+\beta^\nu)^2$ στ) $(\alpha^{x-1}+2\alpha\beta)^2$

37. Νά βρεῖτε τά γινόμενα:

α) $(3x+2)(3x-2)$ β) $(\alpha\beta+3)(\alpha\beta-3)$ γ) $(\alpha^2\beta-\gamma)(\alpha^2\beta+\gamma)$
δ) $(3\alpha-2\beta^3)(2\beta^3+3\alpha)$ ε) $(x-y)(-x-y)$ στ) $(x+y-1)(x+y+1)$.

38. Νά γίνουν οἱ πράξεις:

α) $(x-1)(x+1)(x^2+1)$
β) $(2\alpha-3\beta)(4\alpha^2+9\beta^2)(2\alpha+3\beta)$
γ) $(x-y)(-x-y)(-x^2-y^2)$
δ) $(xy+1)(x^2y^2+1)(xy-1)(1+x^4y^4)$

39. Νά βρεῖτε τά γινόμενα:

α) $[(x+y)+z][(x+y)-z]$ β) $(2x+y+3z)\,.\,(2x+y-3z)$
γ) $(2\alpha+\beta-3\gamma)(2\alpha-\beta+3\gamma)$ δ) $(\alpha-x+\beta-y)(\alpha+x+\beta+y)$.

40. Νά βρεῖτε τά ἀναπτύγματα:

α) $(2\alpha+3\beta-1)^2$ β) $(x^2-x+1)^2$

41. Νά βρεῖτε τά ἀναπτύγματα:

α) $(\alpha+2)^3$ β) $(2x-1)^3$ γ) $(-\alpha+3)^3$

δ) $(2\alpha^2+3)^3$ ε) $\left(x^2+\frac{y}{3}\right)^3$ στ) $(2x^2y-x^3y^2)^3$

42. Νά βρεῖτε τά γινόμενα:

α) $(x-1)(x^2+x+1)$ β) $(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)$

43. Νά βρεῖτε ποιῶν διωνύμων τέλεια τετράγωνα εἶναι τά τριώνυμα:

α) x^2-4x+4 β) $25x^2+10x+1$ γ) $9x^4+4-12x^2$

δ) $\alpha^2-6\alpha\beta+9\beta^2$ ε) $x^6+y^2-2x^3y$ στ) $(\alpha+1)^2-6(\alpha+1)+9$

44. Νά ἀντικαταστήσετε τόν ἀστερίσκο ἔτσι, ὥστε νά προκύψουν τριώνυμα, πού νά εἶναι τέλεια τετράγωνα διωνύμων:

α) x^2+2x+* β) x^2-6x+* γ) $\alpha^2-\alpha\beta+*$

δ) $9x^2+4y^2+*$ ε) $\alpha^2+\frac{1}{4}+*$ στ) $x^2+\frac{6}{5}x+*$

ζ) $\alpha^4+2\alpha^2+*$ η) $25x^2+1+*$ θ) $49\alpha^6+\beta^8+*$

45. Νά ἐκτελεσθοῦν οἱ πράξεις:

1) $(x+2)^2-(x+3)(x-3)-2(2x-3)$

2) $(2x+1)^2-(3x-2)^2-(2x+5)(5-2x)$

3) $2(\alpha-2\beta)^2-3(\alpha+3\beta)^2-(2\alpha+3\beta)(3\alpha-2\beta)$

4) $(2x^2+x-1)(2x^2-x+1)+(x-3)(x+1)-4(x-1)(x+1)(x^2+1)$.

46. Νά ἀποδείξετε τίς ἰσότητες:

1) $(\alpha-\beta)^2-(\beta-\alpha)^2=0$

2) $(\alpha+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2=4\alpha\beta$

3) $(\alpha^2+4)(x^2+1)-(\alpha x+2)^2=(2x-\alpha)^2$

4) $(\alpha+\beta)^2-2(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)+(\alpha-\beta)^2=4\beta^2$

47. Νά ἐκτελεσθοῦν οἱ πράξεις:

α) $(2x^2-x+1)^2-(x^2+x-1)^2-2(x-1)^2$

β) $(2\alpha-3\beta+1)^2-(\alpha-3\beta)(\alpha+3\beta)-\alpha(2\alpha-\beta)$

γ) $(x^2-3x+1)^2-(x^2+1)^2+3x(2x-1)(x-2)+6x^2$

48. Νά ἐκτελεσθοῦν οἱ πράξεις:

α) $(x-1)^3-2(3x+2)^3-x(x+2)(x-2)$

β) $(x+y)^3-y(x-y)(x+y)+x(x-y)^2$

γ) $(x+2)^3-3x(x-1)^2+(x-1)(x+1)(x-2)$

49. Νά ἀποδείξετε τίς ἰσότητες:

α) $(\alpha+\beta)^3=\alpha(\alpha-3\beta)^2+\beta(\beta-3\alpha)^2$

β) $(x^3+y^3)^2-(x^2+y^2)^3+3x^2y^2(x+y)^2=(2xy)^3$

50. Νά ἀντικαταστήσετε τούς ἀστερίσκους μέ τά κατάλληλα μονώνυμα ἔτσι, ὥστε νά ἰσχύουν οἱ ἰσότητες:

α) $64\alpha^3+*+*+125\beta^3=(*+*)^3$

β) $8\alpha^3+12\alpha^2\beta+*+*=(*+*)^3$

γ) $1000x^3-*+*-*=(*-3\alpha)^3$

51. Ἄν $x+y=\alpha$ καί $xy=\beta$, νά ἀποδείξετε ὅτι

α) $x^2+y^2=\alpha^2-2\beta$,

β) $x^3+y^3=\alpha^3-3\alpha\beta$.

Διαίρεση πολυωνύμου μέ μονώνυμο.

2.13. Ἄς δοῦμε πρῶτα πῶς βρίσκουμε τό πηλίκο δύο μονωνύμων, π.χ. τοῦ $A = 15x^3y^4\omega$ μέ τό $B = 3x^2y$.

Σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό τοῦ πηλίκου δύο ἀριθμῶν, τό πηλίκο τοῦ Α διά τοῦ Β θά εἶναι ἕνα μονώνυμο Γ τέτοιο, ὥστε $B \cdot \Gamma = A$ ἤ $3x^2y \cdot \Gamma = 15x^3y^4\omega$. Τότε ὅμως Γ εἶναι τό μονώνυμο $5xy^3\omega$, γιατί

$$\underset{\displaystyle B}{\underset{\uparrow}{(3x^2y)}} \cdot \underset{\displaystyle \Gamma}{\underset{\uparrow}{(5xy^3\omega)}} = \underset{\displaystyle A}{\underset{\uparrow}{15x^3y^4\omega}}$$

Τό πηλίκο δύο μονωνύμων Α καί Β σημειώνεται μέ $A : B$ ἤ $\frac{A}{B}$.

Ἔτσι γράφουμε

$$15x^3y^4\omega : 3x^2y = 5xy^3\omega \quad \text{ἤ} \quad \frac{15x^3y^4\omega}{3x^2y} = 5xy^3\omega$$

Βλέπουμε δηλαδή ὅτι:

> Τό πηλίκο $A : B$ δύο μονωνύμων εἶναι ἕνα μονώνυμο, πού ἔχει ὡς συντελεστή τό πηλίκο τῶν συντελεστῶν καί ὡς κύριο μέρος ὅλα τά γράμματα τοῦ διαιρετέου Α καί τό καθένα μέ ἐκθέτη τή διαφορά πού βρίσκομε, ἄν ἀπό τόν ἐκθέτη του στό Α ἀφαιρέσουμε τόν ἐκθέτη του στό Β.

Ἔτσι π.χ.

$$7\alpha^5\beta : (-5\alpha^2\beta) = -\frac{7}{5}\alpha^3$$

$$(-6\alpha^4xy^2) : (-2\alpha xy) = +3\alpha^3y$$

Παρατηροῦμε ὅτι **τό πηλίκο Α : Β δύο ἀκεραίων μονωνύμων εἶναι ἀκέραιο μονώνυμο, μόνο ὅταν κάθε γράμμα τοῦ διαιρέτη Β ὑπάρχει καί στό διαιρετέο Α καί ὁ ἐκθέτης του στό Α εἶναι μεγαλύτερος ἤ ἴσος ἀπό τόν ἐκθέτη του στό Β.** Ὅταν συμβαίνει αὐτό, λέμε ὅτι τό μονώνυμο Α *«εἶναι διαιρετό»* διά τοῦ Β.(1)

Ἄς ζητήσουμε τώρα τό πηλίκο $A : B$, ὅπου Α εἶναι ἕνα πολυώνυμο καί Β ἕνα μονώνυμο, π.χ.

$$A = 9x^3y - 6x^4y^3 + 12x^2y^2, \quad B = -3x^2y$$

---

(1). Ὅταν τό μονώνυμο Α δέν εἶναι διαιρετό διά τοῦ Β, τό πηλίκο $A : B$ εἶναι «κλασματικό μονώνυμο». Ἔτσι π.χ., ἄν $A = 15x^3y^4\alpha$ καί $B = 3x^2y\alpha^2$, τό πηλίκο εἶναι $A : B = 5\,\frac{xy^3}{\alpha}$.

Ἐπειδή κάθε πολυώνυμο εἶναι ἄθροισμα (μονωνύμων), ἡ διαίρεση του μέ μονώνυμο θά ἀκολουθεῖ τόν ἑξῆς κανόνα:

> Γιά νά διαιρέσουμε ἕνα πολυώνυμο μέ ἕνα μονώνυμο, διαιροῦμε κάθε ὅρο τοῦ πολυωνύμου μέ τό μονώνυμο καί προσθέτουμε τά πηλίκα πού βρίσκουμε.

Ἔχουμε λοιπόν

$$(9x^3y-6x^4y^3+12x^2y^2):(-3x^2y)=-3x+2x^2y^2-4y$$

Εἶναι φανερό ὅτι τό πηλίκο, πού προκύπτει, εἶναι ἀκέραιο πολυώνυμο, μόνο ὅταν κάθε ὅρος τοῦ διαιρετέου εἶναι «διαιρετός» μέ τό μονώνυμο τοῦ διαιρέτη. Ἔτσι π.χ. ἔχουμε καί

$$(20x^4-16x^3-7x^2):(-2x^2)=-10x^2+8x+\frac{7}{2}.$$

Ἄν ὅλοι οἱ ὅροι ἑνός πολυωνύμου περιέχουν δυνάμεις τοῦ ἴδιου γράμματος, τότε ἡ δύναμη τοῦ γράμματος αὐτοῦ μέ τό μικρότερο ἐκθέτη εἶναι **κοινός παράγοντας** ὅλων τῶν ὅρων τοῦ πολυωνύμου. Ἔτσι π.χ. τό πολυώνυμο

$$A=5x^3y\alpha-6x^4y^3+12x^2y^2\beta$$

ἔχει κοινούς παράγοντες τό x^2 καί τό y. Ἄν διαιρέσουμε τό Α μέ τό μονώνυμο x^2y (πού εἶναι κι αὐτό ἕνας κοινός παράγοντας), βρίσκουμε

$$(5x^3y\alpha-6x^4y^3+12x^2y^2\beta):x^2y=5x\alpha-6x^2y^2+12y\beta$$

καί συνεπῶς μποροῦμε νά γράψουμε

$$5x^3y\alpha-6x^4y^3+12x^2y^2\beta=x^2y(5x\alpha-6x^2y^2+12y\beta).$$

Ἀκόμη κοινός παράγοντας εἶναι κάθε ἀκέραιος διαιρέτης τῶν συντελεστῶν τῶν ὅρων τοῦ πολυωνύμου. Βλέπουμε λοιπόν ὅτι:

Κάθε πολυώνυμο Α πού ὅλοι οἱ ὅροι του ἔχουν κοινό παράγοντα ἕνα μονώνυμο Β, γράφεται ὡς γινόμενο τοῦ Β ἐπί τό πηλίκο Α : Β. Ἔτσι π.χ. εἶναι

$$x^2y+xy^2=xy\,(x+y)$$

$$12\alpha^3\beta^2x-18\alpha^2\beta^3+24\alpha^3\beta^3=6\alpha^2\beta^2\,(2\alpha x-3\beta+4\alpha\beta)$$

Ὅταν κάνουμε τήν ἐργασία αὐτή σ' ἕνα πολυώνυμο, λέμε ὅτι *βγάζουμε ἐκτός παρενθέσεως τούς κοινούς παράγοντες* τῶν ὅρων του.

Διαίρεση πολυωνύμου μέ πολυώνυμο.

2.14. Ἄς θεωρήσουμε δύο πολυώνυμα μιᾶς μεταβλητῆς x, π.χ. τά $B=5x+2$ καί $\Pi=3x^2-4x+3$. Βρίσκουμε εὔκολα ὅτι γινόμενο τῶν Β καί Π εἶναι τό πολυώνυμο $A=15x^3-14x^2+7x+6$ καί ἔτσι μποροῦμε νά γράψουμε

$$15x^3-14x^2+7x+6 = (5x+2)\ (3x^2-4x+3)$$

$$\begin{array}{ccccc} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A & = & B & \cdot & \Pi \end{array}$$

Ἀπό τήν ἰσότητα αὐτή βλέπουμε ὅτι, ἄν δίνονται τά πολυώνυμα A καί B, ὑπάρχει ἕνα πολυώνυμο Π τέτοιο, ὥστε $A = B \cdot \Pi$. Στήν περίπτωση αὐτή (πού ὑπάρχει τό πολυώνυμο Π) λέμε ὅτι *τό πολυώνυμο A εἶναι «διαιρετό» μέ τό πολυώνυμο B* καί τό πολυώνυμο Π λέγεται **πηλίκο** τῆς διαιρέσεως τοῦ A διά τοῦ B.

Προκύπτει τώρα τό ἐρώτημα: **Ἄν δίνονται τά παραπάνω πολυώνυμα A καί B καί ξέρουμε ὅτι τό πολυώνυμο A εἶναι διαιρετό μέ τό πολυώνυμο B, πῶς θά βροῦμε τό πηλίκο Π;**

Τό πρῶτο πράγμα πού διακρίνουμε εἶναι ὅτι τό Π θά εἶναι δευτέρου βαθμοῦ (γιατί τό B εἶναι πρώτου βαθμοῦ, ἐνῶ τό ἄθροισμα τῶν βαθμῶν τῶν B καί Π πρέπει νά εἶναι ἴσο μέ τό βαθμό 3 τοῦ πολυωνύμου A). Ἔτσι μποροῦμε νά γράψουμε

$$15x^3-14x^2+7x+6 = (5x+2)\ (q_0x^2+q_1x+q_2)$$

καί θά πρέπει νά προσδιορίσουμε τούς συντελεστές q_0, q_1, q_2 τοῦ πολυωνύμου Π.

Ὁ πρῶτος συντελεστής q_0 βρίσκεται ἀμέσως, γιατί ξέρουμε ὅτι τό γινόμενο τῶν συντελεστῶν τῶν πρώτων ὅρων τῶν B καί Π εἶναι ἴσο μέ τό συντελεστή τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ A. Ἔχουμε δηλαδή $15 = 5\,q_0$, ὁπότε εἶναι $q_0 = \dfrac{15}{5} = 3$.

Ἡ παραπάνω λοιπόν ἰσότητα γράφεται διαδοχικά

$$\begin{aligned} 15x^3-14x^2+7x+6 &= (5x+2)\ (3x^2+q_1x+q_2) \\ 15x^3-14x^2+7x+6 &= (5x+2)\cdot 3x^2+(5x+2)\ (q_1x+q_2) \\ 15x^3-14x^2+7x+6-(5x+2)\cdot 3x^2 &= (5x+2)\ (q_1x+q_2) \\ -20x^2+7x+6 &= (5x+2)\ \ (q_1x+q_2) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccc} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A_1 & = & B & \cdot & \Pi_1 \end{array}$$

Ἀπό τήν παραπάνω ἰσότητα καταλαβαίνουμε ὅτι τό q_1x εἶναι πρῶτος ὅρος τοῦ πηλίκου τῆς διαιρέσεως ἑνός ἄλλου πολυωνύμου A_1 μέ τό ἴδιο πολυώνυμο B. Τότε ὅμως τό q_1 θά βρίσκεται πάλι ὡς πηλίκο τῆς διαιρέσεως τοῦ πρώτου συντελεστῆ -20 τοῦ A_1 μέ τόν πρῶτο συντελεστή 5 τοῦ B, δηλαδή θά εἶναι $q_1 = (-20) : 5 = -4$. Ἀφοῦ βρήκαμε καί τό q_1, μποροῦμε νά ἐπαναλάβουμε τήν ἴδια ἐργασία, γιά νά βροῦμε τόν ἑπόμενο συντελεστή q_2, κ.ο.κ.

Όλη αὐτή ἡ διαδικασία γίνεται μέ τήν παρακάτω διάταξη:

$$\begin{array}{l|l}
\boxed{\text{Διαιρετέος A}} & \boxed{\text{Διαιρέτης B}} \\
\uparrow & \uparrow \\
15x^3-14x^2+7x+6 & 5x+2 \\ \cline{2-2}
-15x^3-6x^2 & 3x^2-4x+3 \rightarrow \boxed{\text{Πηλίκο Π}} \\ \cline{1-1}
\quad -20x^2+7x+6 \rightarrow & \boxed{\text{πρῶτο μερικό ὑπόλοιπο } A_1} \\
\quad +20x^2+8x & \\ \cline{1-1}
\qquad 15x+6 \rightarrow & \boxed{\text{δεύτερο μερικό ὑπόλοιπο } A_2} \\
\qquad -15x-6 & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι, γιά νά διαιρέσουμε ἕνα πολυώνυμο A μέ ἕνα πολυώνυμο B, ἀκολουθοῦμε τήν ἑξῆς διαδικασία (ἡ ὁποία ἀποτελεῖ τήν περιγραφή τῆς παραπάνω διατάξεως):

— Γράφουμε τόσο τό διαιρετέο A ὅσο καί τό διαιρέτη B κατά τίς φθίνουσες δυνάμεις τοῦ γράμματος x.

— Διαιρώντας τόν πρῶτο ὅρο τοῦ διαιρετέου A μέ τόν πρῶτο ὅρο τοῦ διαιρέτη B βρίσκουμε $15x^3 : 5x = 3x^2$ καί τό μονώνυμο αὐτό εἶναι ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ πηλίκου Π.

— Πολλαπλασιάζουμε τό διαιρέτη B μέ τόν πρῶτο ὅρο τοῦ πηλίκου καί τό γινόμενο αὐτό $3x^2(5x+2) = 15x^3+6x^2$ τό ἀφαιροῦμε ἀπό τό διαιρετέο A. Βρίσκουμε ἔτσι τό πολυώνυμο $A_1 = -20x^2+7x+6$, πού λέγεται **πρῶτο μερικό ὑπόλοιπο**.

— Διαιροῦμε τόν πρῶτο ὅρο τοῦ A_1 μέ τόν πρῶτο ὅρο τοῦ διαιρέτη B καί τό μονώνυμο $-20x^2 : 5x = -4x$ πού βρίσκουμε ἀποτελεῖ τό δεύτερο ὅρο τοῦ πηλίκου Π.

— Πολλαπλασιάζουμε τό διαιρέτη B μέ τό δεύτερο ὅρο τοῦ πηλίκου καί τό γινόμενο αὐτό $-4x(5x+2) = -20x^2-8x$ τό ἀφαιροῦμε ἀπό τό πρῶτο μερικό ὑπόλοιπο A_1. Βρίσκουμε ἔτσι τό πολυώνυμο $A_2 = 15x+6$, πού λέγεται **δεύτερο μερικό ὑπόλοιπο**.

— Συνεχίζουμε μέ τόν ἴδιο τρόπο καί βρίσκουμε ὅλους τούς ὅρους τοῦ πηλίκου Π.

Ἄς δοῦμε ἕνα ἀκόμη παράδειγμα:

$$\begin{array}{r|l}
-2x^4+8x^3 \qquad -16x+8 & 2x^2-4 \\ \cline{2-2}
+2x^4 \qquad -4x^2 \qquad\qquad & -x^2+4x-2 \\ \cline{1-1}
8x^3-4x^2-16x+8 & \\
-8x^3 \qquad +16x \quad & \\ \cline{1-1}
-4x^2 \qquad +8 & \\
+4x^2 \qquad -8 & \\ \cline{1-1}
0 \qquad\quad &
\end{array}$$

Καί στά δύο παραδείγματα πού ἀναφέραμε ὁ διαιρετέος Α εἶναι πολυώνυμο «διαιρετό» μέ τό διαιρέτη Β καί μποροῦμε νά γράψουμε

$$A = B \cdot \Pi$$

Σέ μιά τέτοια περίπτωση λέμε ὅτι ἔχουμε **τελεία διαίρεση** καί καταλήγουμε πάντοτε σέ κάποιο μερικό ὑπόλοιπο, πού εἶναι ἴσο μέ μηδέν.

Ἄς προσπαθήσουμε τώρα νά ἐφαρμόσουμε τήν παραπάνω διαδικασία στή διαίρεση δύο ὁποιωνδήποτε πολυωνύμων, π.χ. τῶν

$$A = 6x^4 - 2x^3 + 9x^2 - 2x - 2 \quad \text{καί} \quad B = x^2 + 2$$

Ἡ γνωστή μας διάταξη δίνει

$$\begin{array}{rl}
\boxed{\text{Διαιρετέος Α}} & \boxed{\text{Διαιρέτης Β}} \\
\uparrow & \uparrow \\
6x^4 - 2x^3 + 9x^2 - 2x - 2 & \left| \; x^2 + 2 \right. \\
-6x^4 \qquad -12x^2 \qquad\qquad & \left| \; \overline{6x^2 - 2x - 3} \right. \rightarrow \boxed{\text{Πηλίκο Π}} \\
\hline
-2x^3 - 3x^2 - 2x - 2 & \\
2x^3 \qquad + 4x \qquad & \\
\hline
-3x^2 + 2x - 2 & \\
+3x^2 \qquad + 6 & \\
\hline
2x + 4 & \rightarrow \boxed{\text{Ὑπόλοιπο Υ}}
\end{array}$$

Βλέπουμε δηλαδή ὅτι φθάνουμε σ' ἕνα μερικό ὑπόλοιπο $A_3 = 2x + 4$, τό ὁποῖο ἔχει βαθμό **μικρότερο ἀπό τό βαθμό τοῦ διαιρέτη Β** καί ἔτσι δέ μπορεῖ νά συνεχισθεῖ ἄλλο ἡ διαίρεση.

Στήν περίπτωση αὐτή τό πολυώνυμο $\Pi = 6x^2 - 2x - 3$ λέγεται πάλι *πηλίκο* τῆς διαιρέσεως τοῦ Α διά τοῦ Β, ἐνῶ τό τελευταῖο μερικό ὑπόλοιπο $2x + 4$ λέγεται **ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως** καί θά σημειώνεται μέ Υ. Παρατηροῦμε ἀκόμη ὅτι

$$\begin{aligned}
B \cdot \Pi + Y &= (x^2 + 2)\,(6x^2 - 2x - 3) + (2x + 4) = \\
&= (6x^4 + 12x^2 - 2x^3 - 4x - 3x^2 - 6) + (2x + 4) = \\
&= (6x^4 - 2x^3 + 9x^2 - 4x - 6) + (2x + 4) = \\
&= 6x^4 - 2x^3 + 9x^2 - 2x - 2 = A
\end{aligned}$$

καί συνεπῶς μποροῦμε νά γράφουμε πάντοτε τήν ἰσότητα

$$\boxed{A = B \cdot \Pi + Y}$$

ἡ ὁποία λέγεται *«ταυτότητα τῆς διαιρέσεως»* καί ἐκφράζει ὅτι:

> Ἄν ἔχουμε δύο ὁποιαδήποτε πολυώνυμα Α καί Β, ὅπου ὁ βαθμός τοῦ Β εἶναι μικρότερος ἤ ἴσος ἀπό τό βαθμό τοῦ Α, ὑπάρχουν πάντοτε δύο πολυώνυμα Π καί Υ, ὅπου ὁ βαθμός τοῦ Υ εἶναι μικρότερος ἀπό τό βαθμό τοῦ Β, τέτοια ὥστε $A = B \cdot \Pi + Y$.

῞Οταν λοιπόν λέμε ὅτι *«διαιροῦμε τό πολυώνυμο Α μέ τό πολυώνυμο Β»*, ἐννοοῦμε ἀκριβῶς ὅτι βρίσκουμε, μέ τήν παραπάνω διαδικασία, τά δύο πολυώνυμα Π καί Υ τῆς ἰσότητας $A = B \cdot \Pi + Y$.

Γιά τά δύο αὐτά πολυώνυμα πρέπει νά θυμόμαστε ὅτι:

- **Τό Π λέγεται «πηλίκο» τῆς διαιρέσεως τοῦ Α διά τοῦ Β καί ὁ βαθμός του εἶναι ἴσος μέ τή διαφορά τοῦ βαθμοῦ τοῦ Β ἀπό τό βαθμό τοῦ Α. Ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ Π εἶναι τό πηλίκο τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ Α διά τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ Β.**
- **Τό Υ λέγεται «ὑπόλοιπο» τῆς διαιρέσεως τοῦ Α διά τοῦ Β καί ὁ βαθμός του εἶναι μικρότερος ἀπό τό βαθμό τοῦ Β.**

Ἄν βροῦμε $Y = 0$, αὐτό σημαίνει ὅτι ἡ διαίρεση τοῦ Α διά τοῦ Β εἶναι τελεία καί τότε τό Α εἶναι «διαιρετό» μέ τό Β, γιατί ἰσχύει ἡ ἰσότητα $A = B \cdot \Pi$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Νά ὑπολογισθεῖ τό ἄθροισμα

$$A = (4\alpha^2 - 3\alpha) + [2 - (\alpha + \alpha^2) - 3\alpha^3] - [(2\alpha - 1) - \alpha^3].$$

Λύση. Ἀφοῦ ὑπάρχουν παρενθέσεις καί ἀγκύλες, βγάζουμε πρῶτα τίς ἀγκύλες καί ἔχουμε

$$\begin{aligned} A &= (4\alpha^2 - 3\alpha) + 2 - (\alpha + \alpha^2) - 3\alpha^3 - (2\alpha - 1) + \alpha^3 = \\ &= 4\alpha^2 - 3\alpha + 2 - \alpha - \alpha^2 - 3\alpha^3 - 2\alpha + 1 + \alpha^3 = \\ &= -2\alpha^3 + 3\alpha^2 - 6\alpha + 3. \end{aligned}$$

2. Ἄν ἔχουμε τά δύο πολυώνυμα ν βαθμοῦ τῆς μεταβλητῆς x

$$A = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$$
$$B = \beta_\nu x^\nu + \beta_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + \beta_1 x + \beta_0$$

νά ὑπολογισθεῖ τό ἄθροισμα Α+Β καί ἡ διαφορά Α—Β.

Λύση. α)
$$\begin{aligned} A + B &= \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0 + \\ &\quad + \beta_\nu x^\nu + \beta_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + \beta_1 x + \beta_0 \\ &= (\alpha_\nu + \beta_\nu) x^\nu + (\alpha_{\nu-1} + \beta_{\nu-1}) x^{\nu-1} + \ldots + (\alpha_1 + \beta_1) x + (\alpha_0 + \beta_0) \end{aligned}$$

β)
$$\begin{aligned} A - B &= (\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0) - \\ &\quad - (\beta_\nu x^\nu + \beta_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + \beta_1 x + \beta_0) \\ &= (\alpha_\nu - \beta_\nu) x^\nu + (\alpha_{\nu-1} - \beta_{\nu-1}) x^{\nu-1} + \ldots + (\alpha_1 - \beta_1) x + (\alpha_0 - \beta_0) \end{aligned}$$

3. Ἄς πάρουμε τά πολυώνυμα $A = \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$ καί $B = \beta_2 x^2 + \beta_1 x + \beta_0$ πού τό γινόμενό τους εἶναι 5ου βαθμοῦ. Νά βρεθοῦν οἱ συντελεστές τοῦ Α·Β.

Λύση. Ἄν κάνουμε κανονικά τόν πολλαπλασιασμό, βλέπουμε ὅτι οἱ συντελεστές τοῦ Α.Β μποροῦν νά βρεθοῦν μέ τήν βοήθεια τοῦ παρακάτω πίνακα, πού ἔχει στά περιθώριά του τούς συντελεστές τῶν δύο πολυωνύμων καί στό ἐσωτερικό του τά γινόμενα τῶν συντελεστῶν.

	α_3	α_2	α_1	α_0	
	$\alpha_3\beta_2$	$\alpha_2\beta_2$	$\alpha_1\beta_2$	$\alpha_0\beta_2$	β_2
	$\alpha_3\beta_1$	$\alpha_2\beta_1$	$\alpha_1\beta_1$	$\alpha_0\beta_1$	β_1
	$\alpha_3\beta_0$	$\alpha_2\beta_0$	$\alpha_1\beta_0$	$\alpha_0\beta_0$	β_0
x^5	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0

Τά ἀθροίσματα τῶν γινομένων, πού βρίσκονται στίς διαγώνιες γραμμές τοῦ σχήματος, εἶναι οἱ συντελεστές τῶν δυνάμεων $x^5, x^4, x^3 \ldots$ τοῦ γινομένου Α.Β. Ἔτσι ἔχουμε

$$A \cdot B = \alpha_3\beta_2 x^5 + (\alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_1)x^4 + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_3\beta_0)x^3 +$$
$$+ (\alpha_0\beta_2 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_0)x^2 + (\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0)x + \alpha_0\beta_0.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

52. Νά βρεῖτε τό πηλίκο στίς διαιρέσεις:

α) $(-12x^5) : (-6x^3)$ β) $(-2\alpha^2\beta) : \alpha\beta$ γ) $(7x^3y^2) : (-7x^3y)$

δ) $(-15x^3y) : (-3x^3)$ ε) $-18x^3y^2 : (-6x^3y)$ στ) $\frac{1}{2}xy^3 : \left(-\frac{1}{3}xy^2\right)$

53. Νά βρεῖτε τό πηλίκο στίς διαιρέσεις:

α) $(-2x^3y^2\omega)^2 : (-x^4y^3\omega)$ β) $\left(-\frac{2}{3}x^2y^3\omega\right)^2 . (xy\omega) : (x^2y^2\omega^2)$

γ) $(6\alpha^{x+1}\beta^2)(-2\alpha^3\beta^x) : (\alpha^x\beta^x)$ δ) $\alpha^{x+1}\beta^y : (-\alpha^{x+1}p^{y-1})$

54. Νά ἐκτελέσετε τίς πράξεις:

α) $(12x^5 - 6x^4 - 3x^3) : (-3x^3)$ β) $(10x^2y^2 + 15x^5y^2 + 20x^3y^4) : (-5x^2y^2)$

γ) $(2x^3y^2 - 6x^2y^3 + 3x^2y^2) : (3x^2y^2)$ δ) $(\alpha^2\beta^3x - 3\alpha^3\beta^2x + \alpha^2\beta x) : (-\alpha^2\beta x)$

ε) $\left(\frac{2}{3}x^5y^2 - \frac{3}{2}x^2y^4 - x^3y^2\right) : \left(-\frac{1}{2}x^2y\right)$

στ) $(12\alpha^{\mu+1}\beta^{\nu} - 3\alpha^{\mu}\beta^{\nu+1} - 6\alpha^{\mu+1}\beta^{\nu+1}) : (2\alpha^{\mu}\beta^{\nu-1})$

55. Νά βγάλετε ἐκτός παρενθέσεως τούς κοινούς παράγοντες τῶν πολυωνύμων:

α) $2\alpha x + 2\alpha y$ β) $12\alpha^2\beta - 6\alpha\beta\gamma$

γ) $2\alpha^2y - 4x^3y^2 + xy^2$ δ) $6\alpha^3\beta^2\gamma - 12\alpha^4\beta^3\gamma^3 - 3\alpha^4\beta^2$

56. Νά γίνουν οἱ πράξεις καί οἱ ἐπαληθεύσεις:

α) $(2x^2 + 13x - 27) : (x + 6)$ β) $(3x^3 - 8x^2 + 7x - 2) : (3x - 2)$

γ) $(-3x^2 + 5x + x^3 - 6) : (x^2 - x + 3)$ δ) $(15x^4 + 2x^3 - 39x^2 - 16x + 10) : (3x^2 - 2x - 5)$

ε) $(2x^5 + 4x^6 + x^2 - 6 + 5x - 3x^3) : (x - 3 + x^2 + 2x^3)$

57. Ἀφοῦ διατάξετε τά πολυώνυμα κατά τίς φθίνουσες δυνάμεις ἑνός γράμματος, π.χ. τοῦ x, νά κάμετε τίς πράξεις:

α) $(x^2 + 7\alpha x + 12\alpha^2) : (x + 4\alpha)$

β) $(6x^3 - 29x^2y + 17xy^2 + 42y^3) : (3x - 7y)$

γ) $(28xy^3 + 3x^4 - 7x^3y + 24y^4 - 18x^2y^2) : (8xy + 4y^2 + 3x^2)$

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 2

1. Μία ἀλγεβρική παράσταση, πού ἔχει π.χ. τή μορφή $8x^{\mu}y^{\nu}z^{\rho}$, ὅπου $\mu, \nu, \rho \in \mathbb{N}$ καί $x, y, z \in \mathbb{R}$, ὀνομάζεται **ἀκέραιο μονώνυμο** μέ **συντελεστή** τό 8, **μεταβλητές** τά x,y,z καί **κύριο μέρος** τό γινόμενο $x^{\mu}y^{\nu}z^{\rho}$.
Ὅμοια μονώνυμα λέγονται αὐτά πού ἔχουν τό **ἴδιο** κύριο μέρος. Τό ἄθροισμα **ὁμοίων** μονωνύμων εἶναι ἕνα ὅμοιο μονώνυμο πού ἔχει συντελεστή τό ἄθροισμα τῶν συντελεστῶν τους.

2. Τό ἄθροισμα, πού οἱ ὅροι του εἶναι ἀκέραια μονώνυμα, λέγεται **ἀκέραιο πολυώνυμο.** Ἄν κάνουμε σ' ἕνα πολυώνυμο **«ἀναγωγή ὁμοίων ὅρων»** καταλήγουμε στήν ἀνηγμένη μορφή του πού δέν ἔχει ὅμοια μονώνυμα.

Οἱ πράξεις στά πολυώνυμα γίνονται ὅπως καί στά ἀριθμητικά ἀθροίσματα. Ἔτσι π.χ. ἄν Α καί Β εἶναι δύο πολυώνυμα, ὁρίσαμε ὡς ἄθροισμα $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ τό πολυώνυμο πού ἔχει ὅρους ὅλους τούς ὅρους τῶν Α καί Β. Ἐπίσης ὁρίσαμε ὡς γινόμενο $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ τό πολυώνυμο, πού προκύπτει ὅταν πολλαπλασιάσουμε κάθε ὅρο τοῦ Α μέ κάθε ὅρο τοῦ Β. Ἰσχύουν οἱ ἀξιοσημείωτοι πολλαπλασιασμοί (ταυτότητες):

$$(\alpha \pm \beta)^2 = \alpha^2 \pm 2\alpha\beta + \beta^2$$
$$(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$$
$$(\alpha \pm \beta)^3 = \alpha^3 \pm 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 \pm \beta^3$$
$$\alpha^3 \mp \beta^3 = (\alpha \mp \beta)(\alpha^2 \pm \alpha\beta + \beta^2)$$

3. Τό πηλίκο $\mathbf{A} : \mathbf{B}$ δύο πολυωνύμων βρίσκεται μέ τήν *«τεχνική»* πού ἐκτελοῦμε τή διαίρεση τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν καί ἰσχύει ἡ ταυτότητα τῆς διαιρέσεως

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{\Pi} + \mathbf{Y},$$

ὅπου Π καί Υ εἶναι πολυώνυμα καί τό Π λέγεται **πηλίκο**, ἐνῶ τό Υ λέγεται **ὑπόλοιπο**. Στήν ταυτότητα τῆς διαιρέσεως ὁ βαθμός τοῦ Υ εἶναι μικρότερος ἀπό τόν βαθμό τοῦ Β.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ*

58. Νά ἐκτελέσετε τίς πράξεις:
α) $x^2-[3xy-(x^2-2y^2+1)]-\{y^2-[2xy-3x^2-(x^2-y^2+1)]\}$
β) $3(x-2)-[2x-(x^2-1)]\,.\,2x^2+x^2$
γ) $[(x^2+1)-3x(x+2)][x-(x^2+1)]+2x$

59. Νά ἐκτελέσετε τίς πράξεις:
α) $(1+xy)(x^2y^2+1)(xy-1)(1-x^4y^4)+(x^4y^4-1)^2$
β) $(x-y)^3+y(y-x)(-x-y)-x(x-y)^2$
γ) $(x-1)^3-2x(x-1)^2+(x-1)(x+1)(x-2)$.

60. Νά βρεῖτε τά γινόμενα:
α) $(x-1)(x^2+x+1)$ β) $(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)$
γ) $(1-xy)(1+xy+x^2y^2)$ δ) $(\alpha^3-x)(\alpha^6+\alpha^3x+x^2)$.

61. Νά ἀντικαταστήσετε τούς ἀστερίσκους μέ τά κατάλληλα μονώνυμα ἔτσι, ὥστε νά ἰσχύουν οἱ ἰσότητες:
α) $(5x+4y)(*-*+*)=125x^3+64y^3$
$(*-*)(36\alpha^2+*+49\beta^2)=216\alpha^3-343\beta^3$.

62. Νά ἀποδείξετε τίς ἰσότητες:
α) $(\kappa x+\kappa y)^2=\kappa^2(x+y)^2$
β) $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2-\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2=\alpha\beta$.
γ) $(2\alpha+\beta)^2+\beta^2=2[\alpha^2+(\alpha+\beta)^2]$
δ) $(\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2)=(\alpha x+\beta y)^2+(\alpha y-\beta x)^2$

63. Νά ἐκτελεσθοῦν οἱ πράξεις:
α) $\left(x^4-\frac{13}{6}x^3+x^2+\frac{4}{3}x-2\right):\left(\frac{4}{3}x-2\right)$
β) $[2x^3+7x^2y-9y^2(x+y)]:(2x-3y)$

64. Νά ἀποδειχθοῦν οἱ ἰσότητες:
α) $(2\mu\nu)^2 + (\mu^2-\nu^2)^2 = (\mu^2+\nu^2)^2$
β) $\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3) + 1 = (\alpha^2+3\alpha+1)^2$
γ) $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(x^2+y^2+z^2)-(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2=(\beta z-\gamma y)^2+(\gamma x-\alpha z)^2+(\alpha y-\beta x)^2$.

65. Ἄν εἶναι $x = \alpha^2-\beta^2$, $y = 2\alpha\beta$, $z = \alpha^2+\beta^2$, ὅπου $\alpha,\beta \in N^*$ καί $\alpha > \beta$, νά δείξετε ὅτι τά x,y,z εἶναι πλευρές ὀρθογώνιου τριγώνου.
Ὅταν συμβαίνει τοῦτο, λέμε ὅτι τά x,y,z ἀποτελοῦν «πυθαγορική τριάδα». Νά βρεῖτε πυθαγορικές τριάδες μέ τά ζεύγη τῶν ἀριθμῶν $(\alpha = 2, \beta = 1)$, $(\alpha = 3, \beta = 2)$, $(\alpha = 4, \beta = 1)$.

66. Δίδονται τά πολυώνυμα:
$A = \alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_0, \quad \alpha_\nu \neq 0$
$B = \beta_\mu x^\mu+\beta_{\mu-1}x^{\mu-1}+\ldots+\beta_2x^2+\beta_1x+\beta_0, \quad \beta_\mu \neq 0$
$\Gamma = \gamma_\kappa x^\kappa+\gamma_{\kappa-1}x^{\kappa-1}+\ldots+\gamma_2x^2+\gamma_1x+\gamma_0, \quad \gamma_\kappa \neq 0$
καί ξέρουμε ὅτι τό Γ εἶναι γινόμενο τῶν Α καί Β.
α) Ποιά σχέση συνδέει τά ν,μ καί κ;
β) Ἄν $\nu = 4$ καί $\mu = 5$, νά βρεθοῦν οἱ συντελεστές γ_3, γ_5, γ_7 τοῦ πολυωνύμου Γ ἀπό τούς συντελεστάς τῶν Α καί Β.
γ) Ἄν $\nu = 5$, $\mu = 4$ καί $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\alpha_3 \neq 0$, $\beta_0 = \beta_1 = 0$, $\beta_2 \neq 0$, νά βρεθοῦν ποιοί ἀπό τούς συντελεστές $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \ldots$ εἶναι μηδέν.
δ) Ἄν $\nu = 4$, $\mu = 2$ καί $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = 0$, $\alpha_4 = 2$, $\beta_0 = 2$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = -3$, νά βρεθεῖ τό πολυώνυμο Γ.
(Νά χρησιμοποιήσετε τή μέθοδο τοῦ «πολλαπλασιαστικοῦ πίνακα» πού εἴδαμε στό Πρδ. 3 τῆς σελ. 47).

67. Νά δώσετε στό γινόμενο $(\alpha^2+\beta^2)(\gamma^2+\delta^2)$ μορφή ἀθροίσματος δύο τετραγώνων.

3ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ ΡΗΤΕΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

Διαίρεση πολυωνύμου μέ x–α.

3.1. Ἕνα πολυώνυμο μιᾶς μεταβλητῆς x σημειώνεται σύντομα Π(x) ἤ P(x) ἤ Q(x) ἤ... καί τότε ἡ ἀριθμητική τιμή του γιά $x = \alpha$ σημειώνεται ἀντιστοίχως Π(α) ἤ P(α) ἤ Q(α) ἤ...

Ἄς θεωρήσουμε τό πολυώνυμο

$$P(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$$

Ἄν κάνουμε τή διαίρεση τοῦ P(x) μέ τό πρωτοβάθμιο διώνυμο $x-3$, βρίσκουμε πηλίκο $\Pi_1(x) = x^2 - 2x + 1$ καί ὑπόλοιπο 0. Ἔτσι τό P(x) γράφεται

$$P(x) = (x-3)\ \Pi_1(x).$$

Ἐπειδή ἡ ἰσότητα αὐτή γιά $x = 3$ δίνει $P(3) = (3-3)\Pi_1(3) = 0.\Pi_1(3) = 0$,καταλαβαίνουμε ὅτι ἡ ἀριθμητική τιμή τοῦ πολυωνύμου P(x) γιά $x = 3$ εἶναι ἴση μέ μηδέν, δηλαδή ἴση μέ τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεώς του μέ $x-3$.

Ἄν διαιρέσουμε τό P(x) μέ τό $x-2$, βρίσκουμε πηλίκο $\Pi_2(x) = x^2 - 3x + 1$ καί ὑπόλοιπο $Y = -1$. Ἀπό τήν ταυτότητα τῆς διαιρέσεως ἔχουμε πάλι

$$P(x) = (x-2) \cdot \Pi_2(x) + (-1)$$

Ἐπειδή ἡ ἰσότητα αὐτή γιά $x=2$ δίνει $P(2) = (2-2) \cdot \Pi_2(2) + (-1) = 0.\Pi_2(2) + (-1) = -1$, καταλαβαίνουμε πάλι ὅτι ἡ ἀριθμητική τιμή τοῦ πολυωνύμου P(x) γιά $x=2$ εἶναι ἴση μέ τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεώς του μέ $x-2$

Βλέπουμε δηλαδή ὅτι ἡ διαίρεση τοῦ P(x) μέ $x-3$ δίνει ὑπόλοιπο τό P(3) καί ἡ διαίρεση μέ $x-2$ τό P(2). Ἔτσι π.χ. γιά νά βροῦμε τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ P(x) μέ $x-2$ δέ χρειάζεται νά κάνουμε τή διαίρεση, ἀλλά νά βροῦμε ἁπλῶς τήν ἀριθμητική τιμή τοῦ P(x) γιά $x=2$.

Γενικά, ἄν διαιρέσουμε ἕνα πολυώνυμο P(x) μέ τό $x-\alpha$, θά βροῦμε ὡς πηλίκο ἕνα πολυώνυμο Π(x) καί ὡς ὑπόλοιπο Y ἕνα σταθερό ἀριθμό (πολυώνυμο μηδενικοῦ βαθμοῦ, ἀφοῦ ὁ διαιρέτης $x-\alpha$ εἶναι πρώτου βαθμοῦ). Ἂν τώρα στήν ταυτότητα τῆς διαιρέσεως

$$P(x) = (x-\alpha)\ \Pi(x) + Y,$$

ἡ ὁποία ἀληθεύει γιά κάθε τιμή $x \in R$, βάλουμε τήν τιμή $x = \alpha$ πού μηδενίζει τό διαιρέτη $x-\alpha$, βρίσκουμε

$P(\alpha) = 0 \cdot \Pi(\alpha) + Y$ ἤ τελικά

$$\boxed{P(\alpha) = Y}$$

Συνεπῶς:

> Τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως ἑνός πολυωνύμου $P(x)$ μέ τό διώνυμο $x-\alpha$ εἶναι ἴσο μέ τήν ἀριθμητική τιμή $P(\alpha)$ τοῦ πολυωνύμου γιά $x = \alpha$.

Ἔτσι π.χ. τά ὑπόλοιπα τῆς διαιρέσεως τοῦ

$P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 + 3x - 18$ μέ $x+2$ καί $x-2$ εἶναι ἀντιστοίχως

$Y_1 = P(-2) = (-2)^4 + (-2)^3 - 3(-2)^2 + 3(-2) - 18 = -28$

$Y_2 = P(2) = 2^4 + 2^3 - 3\cdot 2^2 + 3\cdot 2 - 18 = 0$

Ἐπειδή ἡ διαίρεση τοῦ $P(x)$ μέ $x-2$ δίνει ὑπόλοιπο μηδέν, καταλαβαίνουμε ὅτι τό πολυώνυμο $P(x)$ εἶναι *«διαιρετό»* μέ $x-2$. Γενικά ἀπό τήν προηγούμενη πρόταση συμπεραίνουμε ὅτι:

> Ἕνα πολυώνυμο $P(x)$ θά διαιρεῖται ἀκριβῶς μέ τό διώνυμο $x-\alpha$, ὅταν ἡ ἀριθμητική τιμή του γιά $x = \alpha$ εἶναι μηδέν, δηλαδή ὅταν $P(\alpha) = 0$.

Τό πολυώνυμο λοιπόν $x^4 + x^3 - 3x^2 + 3x - 18$ διαιρεῖται μέ $x-2$ καί συνεπῶς γράφεται

$$x^4 + x^3 - 3x^2 + 3x - 18 = (x-2)(x^3 + 3x^2 + 3x + 9)$$

ὅπου $x^3 + 3x^2 + 3x + 9$ εἶναι τό πηλίκο τῆς διαιρέσεως αὐτῆς.

Εὕρεση πρωτοβάθμιων παραγόντων ἑνός πολυωνύμου.

3.2. Πολλές φορές μᾶς εἶναι χρήσιμο, ὅπως θά δοῦμε, νά γράφουμε ἕνα πολυώνυμο $P(x)$ ὡς γινόμενο ἑνός πρωτοβάθμιου παράγοντα $x-\alpha$ καί ἑνός πολυωνύμου $\Pi(x)$, πού ὁ βαθμός του εἶναι κατά μονάδα μικρότερος ἀπό τό βαθμό τοῦ $P(x)$. Αὐτό βέβαια δέν εἶναι πάντα δυνατό καί γίνεται μόνο ὅταν τό πολυώνυμο $P(x)$ εἶναι διαιρετό μέ $x-\alpha$, δηλαδή ὅταν $P(\alpha) = 0$.

Ἔτσι π.χ. εἴδαμε ὅτι τό πολυώνυμο $P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 + 3x - 18$ εἶναι διαιρετό μέ $x-2$ καί γράφεται

$$x^4 + x^3 - 3x^2 + 3x - 18 = (x-2)(x^3 + 3x^2 + 3x + 9).$$

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι καί τό $\Pi(x) = x^3+3x^2+3x+9$ εἶναι διαιρετό μέ τό $x+3$, γιατί $\Pi(-3) = (-3)^3+3(-3)^2+3(-3)+9 = 0$. Ἄν κάνουμε τήν διαίρεση αὐτή βρίσκουμε $(x^3+3x^2+3x+9) : (x+3) = x^2+3$, δηλαδή $\Pi(x)=(x+3)(x^2+3)$. Ἔτσι τό $P(x)$ γράφεται τελικά

$$P(x) = x^4+x^3-3x^2+3x-18 = (x-2)\,(x+3)\,(x^2+3).$$

Ὅταν κάνουμε τήν ἐργασία αὐτή, λέμε ὅτι *«βρίσκουμε τούς πρωτοβάθμιους παράγοντες»* τοῦ πολυωνύμου.

Εὔκολα διακρίνουμε ὅτι κάθε ἕνα ἀπό τά πολυώνυμα

$$P_1(x) = x^3-\alpha^3, \qquad P_2(x) = x^3+\alpha^3$$

ἔχει πρωτοβάθμιο παράγοντα, γιατί τό πρῶτο εἶναι διαιρετό μέ $x-\alpha$, ἀφοῦ $P_1(\alpha) = \alpha^3-\alpha^3 = 0$, καί τό δεύτερο εἶναι διαιρετό μέ $x+\alpha$, ἀφοῦ $P_2(-\alpha) = (-\alpha)^3+\alpha^3 = -\alpha^3+\alpha^3 = 0$. Ἀπό τίς δύο διαιρέσεις

$$\begin{array}{rr|l} x^3 & -\alpha^3 & x-\alpha \\ \cline{3-3} -x^3+\alpha x^2 & & x^2+\alpha x+\alpha^2 \\ \hline +\alpha x^2 & -\alpha^3 & \\ -\alpha x^2+\alpha^2 x & & \\ \hline +\alpha^2 x & -\alpha^3 & \\ -\alpha^2 x & +\alpha^3 & \\ \hline & 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{rr|l} x^3 & +\alpha^3 & x+\alpha \\ \cline{3-3} -x^3-\alpha x^2 & & x^2-\alpha x+\alpha^2 \\ \hline -\alpha x^2 & +\alpha^3 & \\ +\alpha x^2+\alpha^2 x & & \\ \hline \alpha^2 x & +\alpha^3 & \\ -\alpha^2 x & -\alpha^3 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

βρίσκουμε πάλι τίς ἰσότητες (πού εἴχαμε συναντήσει στήν §2.12,V)

$$\mathbf{x^3+\alpha^3 = (x+\alpha)\,(x^2-\alpha x+\alpha^2)}$$
$$\mathbf{x^3-\alpha^3 = (x-\alpha)\,(x^2+\alpha x+\alpha^2)}$$

Παράδειγμα : Νά γίνουν γινόμενα τά διώνυμα x^3-1 καί $8x^3+\alpha^6$.

Λύση: $x^3-1 = x^3-1^3 = (x-1)\,(x^2+x.1+1^2) = (x-1)\,(x^2+x+1)$

$8x^3+\alpha^6 = (2x)^3+(\alpha^2)^3 = (2x+\alpha^2)\,[(2x)^2-2x.\alpha^2+(\alpha^2)^2] =$
$= (2x+\alpha^2)\,(4x^2-2\alpha^2x+\alpha^4)$.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Νά βρεθεῖ τό ὑπόλοιπο, χωρίς νά γίνει ἡ πράξη, στίς ἀκόλουθες διαιρέσεις:
   α) $(x^2-3x+2) : (x-2)$ β) $(x^2-3x-10) : (x+2)$
   γ) $(x^3+3x^2-7x+3) : (x-1)$ δ) $(5x^2-2x^3-3+4x) : (x-3)$
   ε) $(-x^6+2x^5+2x-3-2x^4) : (1-x)$ στ) $(\alpha^2+\alpha\beta-2\beta^2) : (\alpha-\beta)$
   ζ) $(32x^5+1) : (2x+1)$ η) $(8x+3x^2+4) : \left(x+\frac{2}{3}\right)$.
2. Νά προσδιορίσετε τό λ ἔτσι, ὥστε τό πολυώνυμο $P(x) = x^2-5x+2\lambda$ νά εἶναι διαιρετό μέ τό $x-2$.
3. Ὁμοίως γιά τό πολυώνυμο $2\lambda x^3-4x^2+\lambda x-2\lambda$.
4. Δίνεται τό πολυώνυμο $P(x) = 2x^3-7x^2-12x+45$.
   α) Νά βρεῖτε τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως του μέ $x-3$.

β) Νά τό ἐκφράσετε σάν γινόμενο δύο παραγόντων, ἀπό τούς ὁποίους ὁ ἕνας εἶναι πρωτοβάθμιος.

5. Νά γίνουν γινόμενα τά διώνυμα:

α) $8x^3+27$ β) x^3-8

γ) x^6-y^3 δ) x^6+y^6

Παραγοντοποίηση πολυωνύμων.

3.3. Ὅταν γράφουμε ἕναν ἀκέραιο ἀριθμό ὡς γινόμενο δύο ἤ περισσότερων ἀκεραίων, ὅπως π.χ. $12=4\cdot3=2\cdot2\cdot3$, λέμε ὅτι *«ἀναλύσαμε»* τόν ἀκέραιο σέ γινόμενο παραγόντων καί εἴδαμε πόσο χρήσιμη εἶναι μιά τέτοια ἀνάλυση στίς πράξεις τῶν κλασμάτων. Ἀνάλογα τώρα, ὅταν γράφουμε π.χ.

$$x^3-\alpha^3=(x-\alpha)(x^2+\alpha x+\alpha^2)$$

λέμε ὅτι *«ἀναλύσαμε»* τό πολυώνυμο $x^3-\alpha^3$ σέ γινόμενο παραγόντων. Μία τέτοια ἀνάλυση λέγεται **παραγοντοποίηση τοῦ πολυωνύμου** καί εἶναι χρήσιμη στίς πράξεις τῶν κλασμάτων, πού οἱ ὅροι τους εἶναι πολυώνυμα, στήν ἐπίλυση ἐξισώσεων βαθμοῦ ἀνώτερου ἀπό πρῶτο καί ἀλλοῦ.

Ἕνα ὁποιοδήποτε πολυώνυμο δέν ἀναλύεται πάντοτε σέ γινόμενο παραγόντων. Ἄν καί στά προηγούμενα εἴδαμε μερικές περιπτώσεις, πού μιά τέτοια ἀνάλυση εἶναι δυνατή, ὅπως π.χ. στήν περίπτωση $\alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$, ἐδῶ θά ἀναφέρουμε πιό συστηματικά τίς χαρακτηριστικές περιπτώσεις παραγοντοποιήσεως ἑνός πολυωνύμου. Αὐτές εἶναι:

I) Οἱ ὅροι τοῦ πολυωνύμου ἔχουν κοινούς παράγοντες. Τότε βγάζουμε τούς κοινούς παράγοντες ἐκτός παρενθέσεως (βλ. καί § 2.13) ἐφαρμόζοντας τήν ἐπιμεριστική ἰδιότητα

$$\mu\alpha+\mu\beta+\mu\gamma=\mu(\alpha+\beta+\gamma).$$

Παραδείγματα:

α) $3\alpha^2+3\alpha\beta-3\alpha\gamma=3\alpha(\alpha+\beta-\gamma)$

β) $6\alpha^3\beta^2-3\alpha^2\beta^3=3\alpha^2\beta^2(2\alpha-\beta)$

γ) $\alpha(x^2+2)+\beta(x^2+2)=(x^2+2)(\alpha+\beta)$.

II) Μία ὁμαδοποίηση τῶν ὅρων τοῦ πολυωνύμου ἐμφανίζει κοινούς παράγοντες. Χωρίζοντας τούς ὅρους τοῦ πολυωνύμου σέ ὁμάδες (πολυώνυμα) μέ ἴσο πλῆθος ὅρων, βλέπουμε πολλές φορές ὅτι, ἄν βγάλουμε ἀπό τούς ὅρους κάθε ὁμάδας τούς κοινούς παράγοντές τους ἐκτός παρενθέσεως, ἐμφανίζεται τό ἴδιο πολυώνυμο μέσα στίς παρενθέσεις ὅλων τῶν ὁμάδων. Τότε τό πολυώνυμο τῶν παρενθέσεων εἶναι κοινός παράγοντας ὅλων τῶν ὁμάδων καί μπορεῖ νά γραφεῖ μπροστά ἀπό μιά νέα παρένθεση.

Ἡ δυσκολία στήν περίπτωση αὐτή εἶναι νά διακρίνουμε τήν κατάλληλη ὁμαδοποίηση τῶν ὅρων.

Παραδείγματα:

α) $\alpha x+\beta x+\alpha y+\beta y=x(\alpha+\beta)+y(\alpha+\beta)=(\alpha+\beta)(x+y)$

β) $5x^3y - 2x^2y^2\beta + 15\alpha x - 6\alpha\beta y =$

$= (5x^3y + 15\alpha x) - (2x^2y^2\beta + 6\alpha\beta y) =$

$= 5x(x^2y + 3\alpha) - 2\beta y\,(x^2y + 3\alpha) =$

$= (x^2y + 3\alpha)\,(5x - 2\beta y).$

III) Τό πολυώνυμο εἶναι ἀνάπτυγμα τοῦ τετραγώνου ἑνός διωνύμου. Δηλαδή εἶναι ἕνα τριώνυμο τῆς μορφῆς $\alpha^2 \pm 2\alpha\beta + \beta^2$, ὁπότε εἶναι

$$\alpha^2 \pm 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha \pm \beta)^2$$

Παραδείγματα:

α) $x^2 + 2x + 1 = x^2 + 2\cdot x\cdot 1 + 1^2 = (x+1)^2$

β) $25x^2 - 20xy + 4y^2 = (5x)^2 - 2(5x)\,(2y) + (2y)^2 = (5x - 2y)^2$

γ) $4\alpha^2y^2 - 12\alpha\beta y + 9\beta^2 = (2\alpha y)^2 - 2\cdot 2\alpha y\cdot 3\beta + (3\beta)^2 = (2\alpha y - 3\beta)^2$

δ) $4x^4 + 4x^2y + y^2 = (2x^2)^2 + 2\cdot 2x^2y + y^2 = (2x^2 + y)^2$

IV) Τό πολυώνυμο εἶναι διαφορά δύο τετραγώνων. Τότε χρησιμοποιοῦμε τήν ταυτότητα:

$$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)\,(\alpha - \beta)$$

Παραδείγματα:

α) $x^2 - 1 = x^2 - 1^2 = (x+1)\,(x-1)$

β) $4x^2 - 9y^2 = (2x)^2 - (3y)^2 = (2x + 3y)\,(2x - 3y)$

V) Τό πολυώνυμο εἶναι ἄθροισμα ἤ διαφορά δύο κύβων. Τότε χρησιμοποιοῦμε τίς ἰσότητες τῆς § 3.2, δηλαδή τίς

$$x^3 + \alpha^3 = (x + \alpha)\,(x^2 - \alpha x + \alpha^2)$$
$$x^3 - \alpha^3 = (x - \alpha)\,(x^2 + \alpha x + \alpha^2)$$

Παραδείγματα:

α) $\alpha^3 + 8 = \alpha^3 + 2^3 = (\alpha + 2)\,(\alpha^2 - \alpha\cdot 2 + 2^2) = (\alpha + 2)\,(\alpha^2 - 2\alpha + 4)$

β) $\alpha^3 - 8 = \alpha^3 - 2^3 = (\alpha - 2)\cdot(\alpha^2 + \alpha\cdot 2 + 2^2) = (\alpha - 2)\,(\alpha^2 + 2\alpha + 4)$

VI) Συνδυασμός διαφόρων περιπτώσεων. Πολλές φορές γιά τήν παραγοντοποίηση ἑνός πολυωνύμου χρησιμοποιοῦμε συνδυασμό τῶν παραπάνω περιπτώσεων.

Παραδείγματα:

α) $x^3 + 2x^2 + x = x(x^2 + 2x + 1) = x(x+1)^2$

β) $x^3 - 9x + 2x^2y - 18y = x(x^2 - 9) + 2y(x^2 - 9) =$

$= (x^2 - 9)\,(x + 2y) = (x+3)\,(x-3)\,(x+2y)$

γ) $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - \gamma^2 = (\alpha + \beta)^2 - \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)\,(\alpha + \beta - \gamma)$

δ) $x^4 + y^4 + x^2y^2 = x^4 + y^4 + x^2y^2 + x^2y^2 - x^2y^2 = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - x^2y^2$

$= (x^2 + y^2)^2 - (xy)^2 = (x^2 + y^2 + xy)\,(x^2 + y^2 - xy)$

Παραγοντοποίηση τριωνύμου.

3.4. Θά δοῦμε τώρα πῶς ἀναλύεται ἕνα τριώνυμο μιᾶς μεταβλητῆς σέ γινόμενο παραγόντων, π.χ. τό

$$x^2 - 8x + 15$$

Σ' ἕνα τέτοιο τριώνυμο γράφουμε πάντοτε τό συντελεστή τοῦ πρωτοβάθμιου ὅρου του ὡς γινόμενο τοῦ 2 (γράφουμε δηλαδή τό 8 ὡς 2.4) καί μετά προσθέτουμε καί ἀφαιροῦμε τό τετράγωνο τοῦ ἄλλου παράγοντα (δηλαδή τό τετράγωνο τοῦ 4). Ἔχουμε ἔτσι

$$\begin{aligned} x^2 - 8x + 15 &= \underbrace{x^2 - 2\cdot 4x + 4^2} - 4^2 + 15 \\ &= (x-4)^2 - 1 \\ &= (x-4+1)\,(x-4-1) \\ &= (x-3)\,(x-5). \end{aligned}$$

Βλέπουμε δηλαδή ὅτι μετά τήν πρόσθεση καί τήν ἀφαίρεση τοῦ 4^2 οἱ τρεῖς ὅροι ἀποτελοῦν τό τετράγωνο ἑνός διωνύμου καί ἔτσι τό τριώνυμο ἔγινε διαφορά τετραγώνων. Μέ τόν ἴδιο τρόπο βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} x^2 + 5x - 24 &= x^2 + 2\cdot\frac{5}{2}\,x - 24 \\ &= \underbrace{x^2 + 2\cdot\frac{5}{2}x + \left(\frac{5}{2}\right)^2} - \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 24 \\ &= \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{121}{4} = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{11}{2}\right)^2 \\ &= \left(x + \frac{5}{2} + \frac{11}{2}\right)\left(x + \frac{5}{2} - \frac{11}{2}\right) \\ &= (x+8)\,(x-3). \end{aligned}$$

Ἄν ὁ συντελεστής τοῦ δευτεραβάθμιου ὅρου εἶναι διαφορετικός ἀπό τή μονάδα, βγαίνει ἐκτός παρενθέσεως ἀπό τήν ἀρχή. Ἔτσι π.χ. εἶναι

$$\begin{aligned} 3x^2 - 9x - 30 = 3(x^2 - 3x - 10) &= 3\left(x^2 - 2\cdot\frac{3}{2}\,x - 10\right) \\ &= 3\left(\underbrace{x^2 - 2\cdot\frac{3}{2}x + \frac{9}{4}} - \frac{9}{4} - 10\right) \\ &= 3\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{49}{4}\right] \\ &= 3\left(x - \frac{3}{2} + \frac{7}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2} - \frac{7}{2}\right) \\ &= 3(x+2)\,(x-5) \end{aligned}$$

Ἐπίσης εἶναι

$$\begin{aligned}
2x^2+3x-5 &= 2\left(x^2+\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}\right) \\
&= 2\left[\underbrace{x^2+2\cdot\frac{3}{4}x+\left(\frac{3}{4}\right)^2}-\left(\frac{3}{4}\right)^2-\frac{5}{2}\right] \\
&= 2\left[\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{49}{16}\right] \\
&= 2\left(x+\frac{3}{4}+\frac{7}{4}\right)\cdot\left(x+\frac{3}{4}-\frac{7}{4}\right) \\
&= 2\left(x+\frac{10}{4}\right)\cdot(x-1) \\
&= (2x+5)(x-1)
\end{aligned}$$

Ἄν προσπαθήσουμε μέ τόν ἴδιο τρόπο νά ἀναλύσουμε τό τριώνυμο x^2+4x+7, βρίσκουμε ὅτι

$$\begin{aligned}
x^2+4x+7 &= x^2+2\cdot 2x+7 \\
&= \underbrace{x^2+2\cdot 2x+2^2}-2^2+7 \\
&= (x+2)^2+3
\end{aligned}$$

Βλέπουμε δηλαδή ὅτι μετά τή σύμπτυξη τῶν τριῶν πρώτων ὅρων σέ τετράγωνο ἑνός διωνύμου, δέν παρουσιάζεται διαφορά τετραγώνων, ἀλλά ἕνα ἄθροισμα τοῦ τετραγώνου τοῦ διωνύμου μέ ἕνα θετικό ἀριθμό. Ἔτσι τό τριώνυμο πού πήραμε δέν ἀναλύεται σέ γινόμενο παραγόντων. Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι ἕνα τριώνυμο δέν ἀναλύεται πάντοτε σέ γινόμενο παραγόντων.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

6. Νά τραποῦν σέ γινόμενα παραγόντων τά πολυώνυμα:
α) $2\alpha\beta-2\alpha\gamma$ β) $6x^2+3x$
γ) $12x^2y+6xy^2-3xy$ δ) $15\alpha^3\beta^2\gamma-5\alpha^2\beta^3\gamma^2-20\alpha^4\beta^4\gamma^3x$
ε) $\alpha(x+y)-\beta(x+y)$ στ) $x(2\alpha-\beta)+y(\beta-2\alpha)$
ζ) $\alpha(x-1)-x+1$ η) $\alpha(x-y)-(y-x)$.

7. Νά τραποῦν σέ γινόμενα παραγόντων τά πολυώνυμα:
α) $(\alpha+\beta)(x-3y)-2\alpha(x-3y)$ β) $(4\alpha-2\beta)(2x-3y)+(3y-2x)(\beta-2\alpha)$
γ) $\alpha^2(x-1)(\alpha+\beta)+\alpha^2(1-x)$ δ) $\alpha(x-y)^2-\beta(x-y)$
ε) $(2x+y)-\alpha(2x+y)-(2x+y)^2$ στ) $(x+y)^3-(x+y)^2$

8. Νά τραποῦν σέ γινόμενα παραγόντων τά πολυώνυμα:
α) $\alpha x+\alpha y+3x+3y$ β) $x^2+xy-x-y$
γ) x^3+x^2+x+1 δ) $3\alpha^3-6\alpha^2+5\alpha-10$

ε) $2x^4-2x^3+3x-3$ στ) $\alpha^3-\alpha^2\beta-\alpha\beta^2+\beta^3$
ζ) $6x^2+xy+18x\omega+3y\omega$ η) $8xy^3-24y^2-7\alpha xy+21\alpha$.

9. Νά ἀναλυθοῦν σέ γινόμενα παραγόντων τά πολυώνυμα:
α) x^2-9 β) $25x^2-4$ γ) $\alpha^2\beta^2-\gamma^2$
δ) $81\alpha^2-49\beta^2$ ε) $16\alpha^2-x^2y^2$ στ) $4\alpha^4-9\beta^2$
ζ) $25\alpha^2x^4-9\beta^2$ η) $\frac{x^2y^2}{9}-\frac{1}{4}$ θ) $(x-y)^2-1$
ι) $(\alpha-2\beta)^2-4\beta^2$ ια) $(\alpha+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2$ ιβ) $(4x+2y)^2-(2x-3y)^2$

10. Νά ἀναλυθοῦν σέ γινόμενα παραγόντων τά πολυώνυμα:
α) $3x^3-3x$ β) $3\alpha^3\beta-27\alpha\beta^3$ γ) $5x^5y-20xy^3$
δ) $x^{\mu+2}-x^{\mu}$ ε) $(x-y)-(\alpha+\beta)^2(x-y)$ στ) x^4-y^4
ζ) $(\alpha^2-12)^2-4$ η) x^5y^4-x θ) $(5\alpha^2+2\alpha-3)^2-$
$-(\alpha^2-2\alpha-3)^2$

11. Νά ἀναλυθοῦν σέ γινόμενα παραγόντων τά πολυώνυμα:
α) $\alpha x^2-\alpha y^2+\beta x^2-\beta y^2$ β) $\alpha^2x-\alpha^2y+y-x$
γ) $x^2y^2-9y^2-x^2+9$ δ) $\alpha^5-1+\alpha^4-\alpha$
ε) $5(4-x^2)-(x-2)^2$ στ) $(5-3x)(x+4)+(3x-5)(2x-3)+9x^2-25$

12. Ἐπίσης τά πολυώνυμα:
α) α^3-8 β) $8x^3+27$ γ) x^3y^3-1
δ) $1-64x^3$ ε) $\alpha^3-(\beta-\gamma)^3$ στ) $\alpha^4\beta-\alpha\beta^4$
ζ) $\alpha^6-\beta^6$ η) $-3x^6+3$ θ) $\alpha^7-\alpha$.

13. Νά τραποῦν σέ γινόμενα οἱ παραστάσεις:
α) $\alpha^3x^3-\beta^3x^3+\alpha^3-\beta^3$ β) $\alpha^3+\beta^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$
γ) $(x-1)^3(x^2-4)-(x^2-4)$ δ) $(\alpha^3-1)-2(\alpha^2-1)-(\alpha-1)^2$

14. Νά ἀναλυθοῦν σέ γινόμενα τά πολυώνυμα:
α) $x^2+10x+25$ β) $9x^2+4-12x$ γ) $9x^2+4y^2-12xy$
δ) $4x^4+1+4x^2$ ε) $\alpha^4+9\beta^2-6\alpha^2\beta$ στ) $4x^6-4x^3+1$
ζ) $25x^2y^2-20xy+4$ η) $x^2-x+\frac{1}{4}$ θ) $\frac{xy}{3}+\frac{y^2}{9}+\frac{x^2}{4}$

15. Νά τραποῦν σέ γινόμενα παραγόντων τά πολυώνυμα:
α) $(\alpha+\beta)^2-2(\alpha+\beta)+1$ β) $9(x+y)^2-6y(x+y)+y^2$
γ) $x^2-4x^3+4x^4$ δ) $x^3+2x^2+x+xy+y$

16. Νά τραποῦν σέ γινόμενο δύο πρωτοβάθμιων παραγόντων τά τριώνυμα:
α) x^2-4x+3 β) $x^2-3x-10$ γ) x^2-3x+7
δ) x^2+5x+4 ε) $\alpha^2-3\alpha\beta+2\beta^2$ στ) $x^2-3xy-4y^2$

17. Ἐπίσης τά τριώνυμα:
α) $2x^2-5x-3$ β) $6x^2+7x-3$ γ) $6x^2+x-2$
δ) $3x^2-4x+2$ ε) $2\alpha^2+3\alpha\beta-5\beta^2$ στ) $11xy-6y^2+10x^2$

18. Νά τραποῦν σέ γινόμενα οἱ παραστάσεις:
α) $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2-\gamma^2$ β) y^2+2x-x^2-1
γ) $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2-\alpha+\beta$ δ) $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-x^2+4x-4$
ε) $(\alpha^2+1)^2-4\alpha^2$ στ) $(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)^2-4\alpha^2\beta^2$
ζ) $x^4+5x^2y^2+9y^4$ η) $\alpha^4+4\beta^4-13\alpha^2\beta^2$

19. Ἐπίσης οἱ παραστάσεις:
α) $(3x-6)(x^2-1)-(5x-10)(x-1)^2$ β) $(\alpha^2-9)^2-(\alpha+3)^2$

Ἐπίλυση ἐξισώσεων.

3.5. Στή Β' τάξη μάθαμε ὅτι **ἐξίσωση** λέγεται γενικά κάθε προτασιακός τύπος, πού περιέχει τό σύμβολο τῆς ἰσότητας. Εἰδικότερα, ἕνας τέτοιος προτασιακός τύπος μέ μιά, δυό, τρεῖς,... μεταβλητές λέγεται ἀντίστοιχα ἐξίσωση μέ ἕναν, δύο, τρεῖς,... ἀγνώστους. Ἔτσι π.χ. ἀπό τίς ἐξισώσεις

$$2x+3=7 \quad , \quad x^2-1=5(x-1) \quad , \quad x^2+y=12$$

οἱ δύο πρῶτες εἶναι ἐξισώσεις μέ ἕναν ἄγνωστο (τόν x) καί ἡ τρίτη εἶναι ἐξίσωση μέ δύο ἀγνώστους (τούς x καί y). Ἄν ἡ ἐξίσωση *«καταλήγει»* (μετά τήν ἐκτέλεση τῶν πράξεων) σέ μιά ἰσότητα τῆς μορφῆς $A=0$, ὅπου A εἶναι πολυώνυμο μ βαθμοῦ ὡς πρός τούς ἀγνώστους του, ἡ ἐξίσωση λέγεται ἐπίσης «μ βαθμοῦ». Ἔτσι π.χ. ἀπό τίς παραπάνω ἐξισώσεις ἡ πρώτη εἶναι πρώτου βαθμοῦ, ἐνῶ οἱ δύο ἄλλες εἶναι δευτέρου βαθμοῦ.

Ἀφοῦ μιά ἐξίσωση εἶναι προτασιακός τύπος, θά ἔχει ἕνα σύνολο ἀλήθειας, τό ὁποῖο λέγεται τώρα **σύνολο λύσεων** τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς καί κάθε στοιχεῖο του λέγεται **λύση** τῆς ἐξισώσεως. Κάθε λύση μιᾶς ἐξισώσεως μέ ἕναν ἄγνωστο λέγεται καί **ρίζα** τῆς ἐξισώσεως. Ἔτσι π.χ. μιά λύση (ρίζα) τῆς $x^2-1=5(x-1)$ εἶναι ὁ ἀριθμός $x=4$, ἐνῶ μιά λύση τῆς $x^2+y=12$ εἶναι τό ζεῦγος $(x=2, y=8)$. Ἡ εὕρεση τοῦ συνόλου λύσεων μιᾶς ἐξισώσεως λέγεται **ἐπίλυση** (ἤ καί ἁπλῶς *«λύση»*) τῆς ἐξισώσεως.

Μποροῦμε λοιπόν γενικά νά λέμε ὅτι **ἐξίσωση εἶναι μιά ἰσότητα, ἡ ὁποία ἀληθεύει γιά ὁρισμένες τιμές τῶν γραμμάτων της.**

Στή Β' τάξη μάθαμε ἀκόμη πῶς λύνεται μιά ἐξίσωση πρώτου βαθμοῦ μέ ἕναν ἄγνωστο, ὅπως π.χ. ἡ

$$\frac{x+2}{3}+1=\frac{1}{2}-\frac{x}{4}$$

Εἴδαμε ὅτι ἡ ἐξίσωση αὐτή καταλήγει (μετά τήν ἀπαλοιφή τῶν παρονομαστῶν της, τήν ἐκτέλεση τῶν πράξεων, τό χωρισμό γνωστῶν καί ἄγνωστων ὅρων της καί τήν ἀναγωγή τῶν ὅμοιων ὅρων) σέ μιά τελική μορφή

$$7x=-14,$$

ἀπό τήν ὁποία βρίσκουμε τή μοναδική της ρίζα $x=-\frac{14}{7}=-2$.

Σέ ὁρισμένες περιπτώσεις, μέ τή βοήθεια τῆς παραγοντοποιήσεως πολυωνύμου, μποροῦμε νά λύσουμε ἐξισώσεις μεγαλύτερου ἀπό τόν πρῶτο βαθμοῦ. Ἄς θεωρήσουμε π.χ μία ἐξίσωση, τῆς ὁποίας τό πρῶτο μέλος εἶναι γινόμενο μέ πρωτοβάθμιους παράγοντες καί τό δεύτερο μέλος της εἶναι μηδέν, ὅπως ἡ

$$(x-3)(2x+1)x=0$$

Ἐπειδή ἕνα γινόμενο εἶναι μηδέν, ὅταν τουλάχιστον ὁ ἕνας του παράγοντας εἶναι μηδέν, ἡ λύση τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς θά ἀνάγεται στή λύση τῶν ἐξισώσεων:

$$x-3=0, \quad 2x+1=0, \quad x=0,$$

οἱ ὁποῖες ἔχουν ρίζες ἀντίστοιχα $x=3$, $x=-\frac{1}{2}$, $x=0$. Ἔτσι ρίζες τῆς ἐξισώσεως $(x-3)(2x+1)x=0$ εἶναι οἱ ἀριθμοί $3, -\frac{1}{2}, 0$.

Γενικά λοιπόν **οἱ ρίζες μιᾶς ἐξισώσεως τῆς μορφῆς $A.B.\Gamma=0$ εἶναι οἱ ρίζες τῶν ἐξισώσεων $A=0$, $B=0$, $\Gamma=0$.**

Πολλές φορές καταλήγουμε στή μορφή αὐτή, ἀφοῦ μεταφέρουμε ὅλους τούς ὅρους τῆς ἐξισώσεως στό πρῶτο μέλος της καί μετά ἀναλύσουμε τό πρῶτο μέλος της σέ γινόμενο παραγόντων (ἄν φυσικά μιά τέτοια ἀνάλυση εἶναι δυνατή). Ἄς παρακολουθήσουμε τή διαδικασία αὐτή στά παρακάτω παραδείγματα.

Παράδειγμα 1: Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση $9x^2-1=0$

Λύση: Τό πολυώνυμο $9x^2-1$ ἀναλύεται σέ γινόμενο καί εἶναι $9x^2-1=(3x+1)(3x-1)$. Ἔχουμε λοιπόν τήν ἰσοδύναμη ἐξίσωση

$$(3x+1)(3x-1)=0$$

ρίζες τῆς ὁποίας εἶναι οἱ ρίζες τῶν ἐξισώσεων

$$3x+1=0, \quad 3x-1=0,$$

δηλαδή οἱ ἀριθμοί $-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$.

Παράδειγμα 2: Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση $x^2-8x+15=0$

Λύση: Εἴδαμε στήν §3.4 ὅτι τό πρῶτο μέλος της ἀναλύεται σέ γινόμενο δύο πρωτοβάθμιων παραγόντων καί εἶναι $x^2-8x+15=(x-3)(x-5)$.
Ἡ ἐξίσωση λοιπόν γράφεται

$$(x-3)(x-5)=0$$

καί συνεπῶς ἔχει ρίζες τούς ἀριθμούς 3 καί 5.

Παράδειγμα 3: Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση $11x^2+3=14x$

Λύση: Ἄν μεταφέρουμε τούς ὅρους της στό πρῶτο μέλος ἔχουμε διαδοχικά

$$11x^2-14x+3=0$$

$$11\left(x^2-\frac{14}{11}x+\frac{3}{11}\right)=0$$

$$x^2-\frac{14}{11}x+\frac{3}{11}=0$$

$$x^2-2.\frac{7}{11}x+\left(\frac{7}{11}\right)^2-\left(\frac{7}{11}\right)^2+\frac{3}{11}=0$$

$$\left(x-\frac{7}{11}\right)^2-\frac{49}{121}+\frac{3}{11}=0$$

$$\left(x-\frac{7}{11}\right)^2-\left(\frac{4}{11}\right)^2=0$$

$$\left(x-\frac{7}{11}+\frac{4}{11}\right)\left(x-\frac{7}{11}-\frac{4}{11}\right)=0$$

$$\left(x-\frac{3}{11}\right)(x-1)=0$$

Συνεπῶς ἡ ἐξίσωση ἔχει ρίζες τούς ἀριθμούς $x=\frac{3}{11}$, $x=1$.

Παράδειγμα 4: Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση $x^2(x+1)-4(x+1)=3(x-2)(x+1)$

Λύση: Μεταφέροντας ὅλους τούς ὅρους της στό πρῶτο μέλος ἔχουμε διαδοχικά

$$x^2(x+1)-4(x+1)-3(x-2)(x+1)=0$$
$$(x+1)(x^2-4)-3(x-2)(x+1)=0$$
$$(x+1)(x-2)(x+2)-3(x-2)(x+1)=0$$
$$(x+1)(x-2)(x+2-3)=0$$
$$(x+1)(x-2)(x-1)=0$$

Συνεπῶς ἡ ἐξίσωση ἔχει ρίζες τούς ἀριθμούς $x=-1$, $x=2$, $x=1$

Παράδειγμα 5: Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση $x^2+4x+7=0$

Λύση: Ἡ ἐξίσωση αὐτή δέν ἔχει ρίζες, γιατί, ὅπως εἴδαμε στήν §3.4, τό τριώνυμο x^2+4x+7 δέν ἀναλύεται σέ γινόμενο δύο πρωτοβάθμιων παραγόντων.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

20. Νά λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:

α) $4x^2-9=0$ β) $x^2-x-2=0$

γ) $3x^2+5x+2=0$ δ) $9x^2=2x$

ε) $4x^3-4\sqrt{3}x^2-x+\sqrt{3}=0$ στ) $2x^3-4x^2-5x+10=0$

ζ) $(x+1)(x^2-4)=3(x-2)(x+1)$ η) $x^5-x=0$

θ) $x^3-x=\sqrt{2}(x^2-1)$ i) $(x^2+1)^2+1=0$

21. Νά λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:

α) $(x+2)^2+(x+5)^2=0$ β) $(x-2)^2+(2x-4)^2=0$

Μ.Κ.Δ καί Ε.Κ.Π πολυωνύμων.

3.6. Ὅπως εἴδαμε στήν §3.3 ἕνα πολυώνυμο δέν ἀναλύεται πάντα σέ γινόμενο παραγόντων. Τέτοια πολυώνυμα εἶναι π.χ.τά

$$x+2,\quad 2x+1,\quad x^2+\alpha^2,\quad (x+1)^2+11,\quad (3x-2)^2+7,\quad x^2+xy+y^2$$

καί λέγονται (ἀναλογικά μέ τούς ἀριθμούς πού δέν ἀναλύονται σέ γινόμενα) *«πρῶτα πολυώνυμα»*.

Κάθε πολυώνυμο λοιπόν ἤ εἶναι πρῶτο ἤ μπορεῖ νά ἀναλυθεῖ σέ γινόμενο, πού οἱ ἐγγράμματοι ὅροι του εἶναι πρῶτα πολυώνυμα. Ἡ ἀνάλυση ἑνός πολυωνύμου πρέπει νά φθάνει μέχρι τήν εὕρεση τῶν «πρώτων» παραγόντων του.

Ἄν ἔχουμε δύο ἤ περισσότερα πολυώνυμα, πού ἔχουν ἀναλυθεῖ σέ γινόμενα «πρώτων παραγόντων», ὁ Μ.Κ.Δ καί τό Ε.Κ.Π τους, βρίσκονται ὅπως ἀκριβῶς καί στούς ἀκέραιους ἀριθμούς, δηλαδή:

● **Μέγιστος κοινός διαιρέτης (Μ.Κ.Δ) τους εἶναι τό γινόμενο πού σχηματίζεται ἀπό τούς κοινούς πρώτους παράγοντές τους, στό ὁποῖο ὁ καθένας παίρνεται μέ τό μικρότερο ἐκθέτη.** (Ἀριθμητικός παράγοντας τοῦ γινομένου αὐτοῦ παίρνεται συνήθως ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν ἀριθμητικῶν παραγόντων τῶν ἀναλυμένων πολυωνύμων)

● **Ἐλάχιστο κοινό πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π) τους εἶναι τό γινόμενο πού σχηματίζεται ἀπό τούς κοινούς καί τούς μή κοινούς πρώτους παράγοντές τους, στό ὁποῖο ὁ καθένας παίρνεται μέ τό μεγαλύτερο ἐκθέτη.**
(Ἀριθμητικός παράγοντας τοῦ γινομένου αὐτοῦ παίρνεται συνήθως τό Ε.Κ.Π. τῶν ἀριθμητικῶν παραγόντων τῶν ἀναλυμένων πολυωνύμων).
Ἔτσι π.χ. τά μονώνυμα $18\alpha^3\beta^2\gamma$, $12\alpha^4\beta\gamma^2$, $6\alpha^5\beta^2$ ἔχουν

$$\text{Μ.Κ.Δ}: 6\alpha^3\beta, \quad \text{Ε.Κ.Π}: 36\alpha^5\beta^2\gamma^2$$

Ἐπίσης τά πολυώνυμα $2x(x+1)$, $6x^2(x+1)(x-1)$, $4x(x+1)^2$, ἔχουν

$$\text{Μ.Κ.Δ}: 2x(x+1), \quad \text{Ε.Κ.Π}: 12x^2(x+1)^2(x-1)$$

● **ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

22. Νά βρεῖτε τό Μ.Κ.Δ καί τό Ε.Κ.Π τῶν παραστάσεων:
α) $12\alpha^3\beta^2\gamma$, $15\alpha^2\beta^3\gamma$, $6\alpha^4\beta^3$
β) $8\alpha^2x^3$, $4\alpha^3x^5$, $12\alpha^3x^3$
γ) $3\alpha^2(\alpha-\beta)^2$, $6\alpha^2\beta(\alpha-\beta)^2(\alpha+\beta)$

23. Νά βρεῖτε τό Μ.Κ.Δ καί τό Ε.Κ.Π τῶν παραστάσεων:
α) $4(x^2-y^2)$, $6(x+y)^2$, $3(x-y)^2$
β) $\alpha^2-\beta^2$, $(\alpha-\beta)^2$, $\alpha^3-\beta^3$
γ) $\alpha^3-6\alpha^2+12\alpha-8$, α^2-4, $\alpha^2-2\alpha$
δ) $\alpha^2-3\alpha+2$, $\alpha^2+3\alpha-4$, $\alpha^3-\alpha$, $\alpha^2-2\alpha+1$.

Ρητές ἀλγεβρικές παραστάσεις.

3.7. Κάθε κλάσμα, πού οἱ δύο ὅροι του εἶναι ἀκέραια πολυώνυμα, λέγεται **ρητό ἀλγεβρικό κλάσμα** ἤ **ρητή ἀλγεβρική παράσταση** ἤ ἁπλῶς **ρητή παράσταση**. Ἔτσι π.χ. ρητές ἀλγεβρικές παραστάσεις εἶναι οἱ:

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}, \quad \frac{2x^2+4x-5}{x+3}, \quad \frac{4x^2-3xy+y^2}{(x-1)(y+2)}, \quad \frac{5}{x^2+1}$$

Σέ μία ρητή ἀλγεβρική παράσταση τά γράμματά της δέν μποροῦν νά πάρουν τιμές πού μηδενίζουν τόν παρονομαστή της (γιατί ἕνα κλάσμα ἔχει νόημα, μόνο ὅταν ὁ παρονομαστής του εἶναι διαφορετικός ἀπό τό μηδέν). Ἔτσι, γιά τίς παραπάνω παραστάσεις ὑποθέτουμε ὅτι στήν πρώτη ἔχουμε $\alpha \neq \beta$, στή δεύτερη $x \neq -3$ καί στήν τρίτη $x \neq 1$ καί $y \neq -2$. Γενικά λοιπόν ἀπό ἐδῶ καί πέρα, **ὅταν γράφουμε μιά ρητή ἀλγεβρική παράσταση, θά ὑποθέτουμε ὅτι τά γράμματά της δέν παίρνουν τιμές πού μηδενίζουν τόν παρονομαστή της.**

Όπως καί στά ἀριθμητικά κλάσματα, ἔτσι κι ἐδῶ, γιά νά ἁπλοποιήσουμε μιά ρητή ἀλγεβρική παράσταση, πρέπει νά διαιρέσουμε τούς ὅρους της μέ τό ἴδιο πολυώνυμο. Τοῦτο γίνεται ἄν:

- *Ἀναλύσουμε καί τούς δύο ὅρους της σέ γινόμενα παραγόντων.*
- *Διαγράψουμε τούς κοινούς παράγοντές τους* (πράγμα πού σημαίνει διαίρεση τῶν ὅρων της μ' αὐτούς).

Παράδειγμα: Νά ἁπλοποιηθοῦν οἱ παραστάσεις:

I) $\frac{4\alpha x^2 y}{6\alpha^3 x^2}$ II) $\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2+xy}$

Λύση : I) Ἔχουμε ἀμέσως ὅτι $\frac{4\alpha x^2 y}{6\alpha^3 x^2} = \frac{2y}{3\alpha^2}$

(Διαιρέσαμε καί τούς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος μέ τό μονώνυμο $2\alpha x^2$).

II) Βρίσκουμε εὔκολα ὅτι $\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2+xy} = \frac{(x+y)^2}{x(x+y)} = \frac{x+y}{x}$

(Διαγράψαμε τόν κοινό παράγοντα $x+y$ τῶν δύο ὅρων).

Γιά νά μετατρέψουμε ρητές ἀλγεβρικές παραστάσεις σέ ἄλλες μέ ἴδιους παρονομαστές, ἐργαζόμαστε ὅπως ὅταν μετατρέπουμε ἑτερώνυμα ἀριθμητικά κλάσματα σέ ἄλλα ὁμώνυμα, δηλαδή :

- *Ἀναλύουμε τούς δύο ὅρους κάθε μιᾶς σέ γινόμενα παραγόντων.*
- *Βρίσκουμε τό Ε.Κ.Π τῶν παρονομαστῶν.*
- *Πολλαπλασιάζουμε τούς δύο ὅρους κάθε μιᾶς μέ τό πηλίκο πού βρίσκουμε, ἄν διαιρέσουμε τό Ε.Κ.Π μέ τόν παρονομαστή της.*

Στό παρακάτω παράδειγμα φαίνεται ἡ πλήρης ἀντιστοιχία τῶν ἐργασιῶν πού κάνουμε ὅταν τρέπουμε σέ ὁμώνυμα ἀριθμητικά κλάσματα καί ρητά ἀλγεβρικά κλάσματα.

Νά γίνουν ὁμώνυμα κλάσματα:	$\frac{5}{12}, \frac{3}{56}$	$\frac{3}{2x^2-6x}, \frac{5}{x^2-6x+9}$
Ἀναλύουμε τούς παρονομαστές σέ γινόμενα παραγόντων	$12 = 2^2.3$ $56 = 2^3.7$	$2x^2-6x = 2x\,(x-3)$ $x^2-6x+9 = (\,x-3)^2$
Ε.Κ.Π. παρανομαστῶν	$2^3 . 3 . 7$	$2x\,(x-3)^2 \neq 0$
Πολλαπλασιάζουμε τούς ὅρους κάθε κλάσματος μέ τό πηλίκο τοῦ Ε.Κ.Π διά τοῦ παρονομαστῆ του	$\frac{5.14}{12.14}, \frac{3.3}{56.3}$	$\frac{3\,(x-3)}{2x\,(x-3)\,(x-3)}, \frac{5.2x}{(x-3)^2.2x}$
Τελική μορφή τῶν κλασμάτων	$\frac{70}{168}, \frac{9}{168}$	$\frac{3(x-3)}{2x(x-3)^2}, \frac{10x}{2x\,(x-3)^2}$

ΠΡΑΞΕΙΣ ΡΗΤΩΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ.

3.8. Οἱ πράξεις μεταξύ τῶν ρητῶν ἀλγεβρικῶν παραστάσεων γίνονται ὅπως καί οἱ πράξεις τῶν ἀριθμητικῶν κλασμάτων. Ἔτσι θά ἀναφέρουμε ἁπλῶς τόν κανόνα κάθε πράξεως καί θά δείχνουμε μέ ἕνα παράδειγμα τήν ὁμοιότητά της μέ τήν ἀντίστοιχη πράξη τῶν ἀριθμητικῶν κλασμάτων.

I. Πρόσθεση καί ἀφαίρεση

Γιά νά ὑπολογίσουμε ἕνα ἀλγεβρικό ἄθροισμα ρητῶν παραστάσεων

- *μετατρέπουμε ὅλες τίς παραστάσεις σέ ἄλλες πού ἔχουν τόν ἴδιο παρονομαστή,*
- *σχηματίζουμε μία ρητή παράσταση, πού ἔχει τόν ἴδιο παρονομαστή καί ἀριθμητή τό ἀλγεβρικό ἄθροισμα τῶν ἀριθμητῶν.*

Παράδειγμα 1:

Νά ὑπολογισθεῖ τό ἀλγεβρικό ἄθροισμα	$\frac{7}{12}-\frac{1}{15}-\frac{1}{6}$	$\frac{2}{x-y}-\frac{x}{x+y}-\frac{4x}{x^2-y^2}$
Ἀναλύομε τούς παρονομαστές σέ γινόμενα	$12=2^2.3$ $15=3.5$ $6=2.3$	τό $x-y$ εἶναι πρῶτο τό $x+y$ εἶναι πρῶτο $x^2-y^2=(x+y)\,(x-y)$
Ε.Κ.Π. παρονομαστῶν	$2^2.3.5$	$(x+y)\,(x-y)\neq 0$
Πολλαπλασιάζουμε καί τούς δύο ὅρους κάθε κλάσματος μέ τό πηλίκο τοῦ Ε.Κ.Π διά τοῦ παρονομαστῆ του	$\frac{7.5}{2^2.3.5}-\frac{1.4}{3.5.2^2}-\frac{1.10}{2^2.3.5}$	$\frac{2.(x+y)}{(x-y)\,(x+y)}-\frac{x(x-y)}{(x+y)(x-y)}-\frac{4x}{(x+y)\,(x-y)}$
Ἀθροίζουμε τούς ἀριθμητές	$\frac{7.5-1.4-1.10}{2^2.3.5}$	$\frac{2(x+y)-x(x-y)-4x}{(x+y)\,(x-y)}$
Ἐκτελοῦμε τίς πράξεις στόν ἀριθμητή καί τόν ἀναλύουμε σέ γινόμενο	$\frac{35-4-10}{2^2.3.5}$ $\frac{21}{2^2.3.5}$ $\frac{3.7}{2^2.3.5}$	$\frac{2x+2y-x(x-y)-4x}{(x+y)\,(x-y)}$ $\frac{-2\,(x-y)-x(x-y)}{(x+y)\,(x-y)}$ $\frac{-(x-y)\,(2+x)}{(x+y)\,(x-y)}$
Τελική μορφή ἀθροίσματος	$\frac{7}{2^2.5}$	$-\frac{2+x}{x+y}$

II. Πολλαπλασιασμός

Γιά νά πολλαπλασιάσουμε ρητές ἀλγεβρικές παραστάσεις, σχηματίζουμε μία ρητή ἀλγεβρική παράσταση πού ἔχει ἀριθμητή τό γινόμενο τῶν ἀριθμητῶν τους καί παρονομαστή τό γινόμενο τῶν παρονομαστῶν τους.

Στό γινόμενο πού βρίσκουμε πρέπει νά κάνουμε ὅλες τίς δυνατές ἁπλοποιήσεις.

Παράδειγμα 2

Νά βρεθεῖ τό γινόμενο:	$\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4}$	$\frac{2x}{x-3} \cdot \frac{x^2-9}{2x^2+4x}$
Ἀναλύουμε τούς ὅρους σέ γινόμενα	$\frac{2}{3} \cdot \frac{3^2}{2^2}$	$\frac{2x}{x-3} \cdot \frac{(x+3)(x-3)}{2x(x+2)}$
Σχηματίζουμε τά γινόμενα ἀριθμητῶν καί παρονομαστῶν	$\frac{2.3^2}{3.2^2}$	$\frac{2x(x+3)(x-3)}{2x(x-3)(x+2)}$
Τελική μορφή γινομένου (μετά τίς ἁπλοποιήσεις)	$\frac{3}{2}$	$\frac{x+3}{x+2}$

III. Διαίρεση

Γιά νά διαιρέσουμε μία ρητή παράσταση Α μέ μιά ρητή παράσταση Β, πολλαπλασιάζουμε τήν Α μέ τή ρητή παράσταση πού βρίσκεται, ἄν ἀντιστρέψουμε τούς ὅρους τῆς Β.

Παράδειγμα 3

Νά βρεθεῖ τό πηλίκο	$\frac{15}{8} : \frac{25}{12}$	$\frac{4\alpha^2-2\alpha\beta}{x+y} : \frac{4\alpha^2}{x^2-y^2}$
Τό γράφουμε ὡς γινόμενο μέ τήν ἀντίστροφη παράσταση	$\frac{15}{8} \cdot \frac{12}{25}$	$\frac{4\alpha^2-2\alpha\beta}{x+y} \cdot \frac{x^2-y^2}{4\alpha^2}$
Πολλαπλασιάζουμε τούς ἀριθμητές καί τούς παρονομαστές	$\frac{15 \,.\, 12}{8 \,.\, 25}$	$\frac{(4\alpha^2-2\alpha\beta)(x^2-y^2)}{4\alpha^2(x+y)}$
Ἀναλύουμε τούς ὅρους σέ γινόμενα	$\frac{3.5.2^2.3}{2^3 \,.\, 5^2}$	$\frac{2\alpha(2\alpha-\beta)(x+y)(x-y)}{4\alpha^2(x+y)}$
Τελική μορφή πηλίκου (μετά τίς ἁπλοποιήσεις)	$\frac{9}{10}$	$\frac{(2\alpha-\beta)(x-y)}{2\alpha}$

Εἶναι τώρα φανερό ὅτι καί κάθε «κλασματική» ἀλγεβρική παράσταση μπορεῖ νά γραφεῖ σάν ρητή ἀλγεβρική παράσταση, π.χ.

$$x+\frac{1}{x}-\frac{x^2}{x+1}=\frac{x^2(x+1)+(x+1)-x^3}{x(x+1)}=\frac{x^2+x+1}{x^2+x}$$

IV. Σύνθετα κλάσματα

Τό πηλίκο δύο ρητῶν ἀλγεβρικῶν παραστάσεων, ὅπως π.χ. τό $\frac{2x+2}{x}:\frac{(x+1)^2}{x^2}$ γράφεται καί μέ τή μορφή

$$\frac{\frac{2x+2}{x}}{\frac{(x+1)^2}{x^2}}$$

καί τότε λέγεται **σύνθετο ρητό κλάσμα** πού ἔχει ὅρους, ἀριθμητή καί παρονομαστή, τίς ρητές παραστάσεις $\frac{2x+2}{x}$ καί $\frac{(x+1)^2}{x^2}$ ἀντιστοίχως. Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι:

Ἕνα σύνθετο κλάσμα τρέπεται σέ ἁπλό, ἄν διαιρέσουμε τόν ἀριθμητή του μέ τόν παρονομαστή του.

Ἔτσι π.χ. τό προηγούμενο σύνθετο ρητό κλάσμα γράφεται:

$$\frac{\frac{2x+2}{x}}{\frac{(x+1)^2}{x^2}}=\frac{2x+2}{x}:\frac{(x+1)^2}{x^2}=\frac{2(x+1)}{x}\cdot\frac{x^2}{(x+1)^2}=\frac{2x}{x+1}$$

Πολλές φορές οἱ ὅροι ἑνός σύνθετου ρητοῦ κλάσματος παίρνουν τή μορφή ρητῆς ἀλγεβρικῆς παραστάσεως, ἀφοῦ πρῶτα κάνουμε τίς πράξεις πού εἶναι σημειωμένες σ' αὐτούς. Ἄς θεωρήσουμε π.χ. τό

$$K=\frac{\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}-2}{\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\beta^2}}$$

Ὁ ἀριθμητής καί ὁ παρονομαστής του γράφονται ἀντιστοίχως:

$$\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}-2=\frac{\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta},$$

$$\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\beta^2}=\frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha^2\beta^2},$$

καί συνεπῶς $K=\frac{\frac{\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}}{\frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha^2\beta^2}}=\frac{\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}\cdot\frac{\alpha^2\beta^2}{\beta^2-\alpha^2}=$

$$=\frac{(\alpha-\beta)^2}{\alpha\beta}\cdot\frac{\alpha^2\beta^2}{(\beta+\alpha)(\beta-\alpha)}=-\frac{\alpha\beta(\alpha-\beta)}{\alpha+\beta}$$

Τονίζεται πάλι ὅτι **στό ἀποτέλεσμα μιᾶς πράξεως πρέπει πάντοτε νά κάνουμε ὅλες τίς δυνατές ἁπλοποιήσεις καί νά τό φέρνουμε σέ μιά ὅσο τό δυνατό πιό ἁπλή μορφή.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά ἐκτελεσθοῦν οἱ πράξεις**

$$\frac{1-x^2}{1+y+y^2}\cdot\frac{1-y^3}{y^2-2xy+x^2}\cdot\left(\frac{x}{1-x}-\frac{y}{1-y}\right)$$

Λύση: Ἄν ὀνομάσουμε Α τήν παράσταση ἔχουμε:

$$A=\frac{1-x^2}{1+y+y^2}\cdot\frac{1-y^3}{y^2-2xy+x^2}\cdot\left(\frac{x}{1-x}-\frac{y}{1-y}\right)=$$

$$=\frac{(1+x)(1-x)}{1+y+y^2}\cdot\frac{(1-y)(1+y+y^2)}{(x-y)^2}\cdot\frac{x(1-y)-y(1-x)}{(1-x)(1-y)}=$$

$$=\frac{(1+x)(1-x)(1-y)(1+y+y^2)(x-y)}{(1+y+y^2)(x-y)^2(1-x)(1-y)}=$$

$$=\frac{1+x}{x-y}$$

2. **Νά ὑπολογισθεῖ ἡ παράσταση** $A=\dfrac{x^3+y^3}{x^2-y^2}\cdot\dfrac{\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}}{\dfrac{x^2+y^2}{y}-x}$

Λύση: $$A=\frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{(x+y)(x-y)}\cdot\frac{\dfrac{x-y}{xy}}{\dfrac{x^2+y^2-xy}{y}}=$$

$$=\frac{x^2-xy+y^2}{x-y}\cdot\frac{x-y}{x(x^2+y^2-xy)}=\frac{1}{x}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

24. Νά ἁπλοποιηθοῦν τά κλάσματα:

α) $\dfrac{6x^2}{9x}$ β) $\dfrac{6\alpha^2\beta}{2\alpha^3\beta\gamma}$ γ) $\dfrac{-12\alpha^4x^2y}{-15\alpha^4y^2}$

δ) $\dfrac{3\alpha-3\beta}{4\alpha-4\beta}$ ε) $\dfrac{4x^2-xy}{12xy-3y^2}$ στ) $\dfrac{x^3-x}{x^2+x}$

ζ) $\dfrac{x^2-9}{x^2-4x+3}$ η) $\dfrac{(3x-2y)^2}{4y^2-9x^2}$ θ) $\dfrac{3\alpha\beta^3+3\alpha^3\beta-6\alpha^2\beta^2}{6\alpha\beta^3-6\alpha^3\beta}$

ι) $\dfrac{x^3+2x^2-2-x}{x^2+3x+2}$ ια) $\dfrac{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta}{\alpha^3\beta-\beta^4}$ ιβ) $\dfrac{\alpha^4x-\beta^4x}{2\alpha^3+2\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2+2\beta^3}$

25. Νά ἐκτελέσετε τίς πράξεις:

α) $\dfrac{3}{2x}+\dfrac{5}{2x}$ β) $\dfrac{5}{-3\alpha}+\dfrac{2}{3\alpha}$

γ) $\dfrac{2x-4}{2}+\dfrac{x-3}{6}-\dfrac{4x-5}{3}$ δ) $\dfrac{x-2}{4xy}-\dfrac{2-x}{6xy}$

ε) $x-\dfrac{3-x^2}{x}$ στ) $\dfrac{\alpha}{\beta\gamma}-\dfrac{\beta}{\alpha\gamma}-\dfrac{\gamma}{\alpha\beta}$

ζ) $\dfrac{3}{2\alpha+2}-\dfrac{2}{3\alpha-3}+\dfrac{5\alpha+3}{6\alpha^2-6}$ η) $\dfrac{2\beta}{\alpha-2\beta}+\dfrac{\alpha}{2\beta+\alpha}-\dfrac{4\alpha\beta}{\alpha^2-4\beta^2}$

θ) $\dfrac{1}{\alpha^2-\beta^2}+\dfrac{1}{\alpha^2+\alpha\beta}-\dfrac{1}{2\alpha^2-2\alpha\beta}$ ι) $\dfrac{2xy}{x^3+y^3}-\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}+\dfrac{1}{x+y}$

ια) $\dfrac{1}{x^2-3x+2}+\dfrac{3}{x^2+x-2}+\dfrac{1}{x^2-4}$ ιβ) $\dfrac{2x-1}{x^2-x-2}-\dfrac{2x+1}{x^2+x-6}+\dfrac{2x+4}{x^2-4x+4}$

26. Νά έκτελεσθοῦν οἱ πράξεις:

α) $\dfrac{-4\alpha}{3\beta\gamma}\cdot\dfrac{6\beta^2\gamma}{5\alpha^2}$ β) $12xy\cdot\dfrac{x^2}{6y^3}$

γ) $\dfrac{-\alpha^2}{12\beta}\cdot\dfrac{-2\alpha\beta}{3\gamma^2\delta}\cdot\dfrac{9\beta\gamma\delta}{-\alpha^4}$ δ) $(\alpha+3)\cdot\dfrac{\alpha^2\beta}{\alpha^2-9}$

ε) $\dfrac{\alpha+2}{\beta-4}\cdot\dfrac{\beta^2-\alpha\beta}{4-\alpha^2}$ στ) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+7x+12}\cdot\dfrac{x+3}{x-3}$

ζ) $\dfrac{x^4-x^2-4x+4}{x^3+8}\cdot\dfrac{x^2-4x+4}{x^3-4x}$ η) $\dfrac{\alpha^{2\nu}-1}{x^2}\cdot\dfrac{x^2}{\alpha^\nu+1}$

θ) $\dfrac{x^2-x}{x^2+4x+4}\cdot\dfrac{x^2+3x+2}{2-x}\cdot\dfrac{x^2-4}{x^2-1}$

ι) $\dfrac{3\alpha-5\beta}{7\gamma^2}\cdot\dfrac{42\alpha\gamma-42\beta\gamma}{3\alpha x-5\beta x+3\alpha y-5\beta y}\cdot(x+y)$

27. Νά γίνουν οἱ πράξεις:

α) $\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}\right)\dfrac{x^2y^2}{x^2-y^2}$ β) $\left(\dfrac{2}{3x}-x+\dfrac{x}{3}\right)\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1+x}\right)$

γ) $\left(\dfrac{x}{y}-1\right)\left(\dfrac{x}{y}+1\right)\left(1-\dfrac{x^2}{x^2-y^2}\right)$

δ) $\dfrac{y}{2}\left(\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{x-y}\right)\cdot\dfrac{x^2-y^2}{x^2y+xy^2}\cdot(x+y)$

28. Νά κάνετε τίς πράξεις:

α) $\dfrac{2x^2}{3y^2}:\dfrac{4x^2}{9y^3}$ β) $\left(\dfrac{-3x^2}{4\alpha y^2}:\dfrac{-5y}{6\alpha}\right):\dfrac{4x}{5y^3}$

γ) $\dfrac{x^2-2x}{\alpha^3}:(x^2-4)$ δ) $(\alpha^3+\beta^3):\dfrac{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2}{\alpha-\beta}$

ε) $\left(\dfrac{6x^3}{7\alpha\beta}-\dfrac{9x^2}{14\beta^2}+\dfrac{3x}{21\alpha^2}\right):\dfrac{3x}{7\alpha}$ στ) $\dfrac{x^2-4}{x-3}\cdot\dfrac{x^2-6x+9}{x^3-8}:\dfrac{x^2-x-6}{x^2+x}$

29. Νά άπλοποιηθοῦν οἱ παραστάσεις:

α) $\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{xy}\right):(x^3-y^3)$ β) $\left[\dfrac{x^2}{4}+y(x+4y)\right]:\dfrac{\alpha x+2\alpha y-x-2y}{\alpha^2-1}$

γ) $\left(\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\beta}-\alpha\right)\cdot\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^3+\beta^3}:\left(\dfrac{1}{\beta}-\dfrac{1}{\alpha}\right)$

δ) $\left(1-2x+x^2+\dfrac{1-x^4}{1+2x+x^2}\right):\dfrac{1-x}{1+x}$

30. Νά άπλοποιηθοῦν οἱ παραστάσεις:

α) $\dfrac{1+x}{1+\dfrac{1}{x}}$ β) $\dfrac{1-\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x}}$

γ) $\dfrac{\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\alpha\beta^3}}{\beta-1+\dfrac{1}{\beta}}$ δ) $\dfrac{\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}-2}{\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\beta}}$

ε) $\dfrac{\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{1}{y^2}}-\left(y\cdot\dfrac{1}{x}\right)^2$ στ) $\dfrac{1}{1+\dfrac{3}{x}}+\dfrac{1}{\dfrac{x}{3}-1}-\dfrac{2}{\dfrac{x}{3}-\dfrac{3}{x}}$

Ἐπίλυση κλασματικῶν ἐξισώσεων.

3.9. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι θέλουμε νά βροῦμε τίς ρίζες τῆς ἐξισώσεως

$$\frac{x-2}{x}+\frac{4}{x-2}-\frac{8}{x^2-2x}=0$$

Γιά νά ἔχει νόημα ἡ ἐξίσωση, θά πρέπει οἱ παρονομαστές ὅλων τῶν κλασμάτων νά εἶναι διάφοροι τοῦ μηδενός, δηλαδή θά πρέπει νά εἶναι $x\neq 0$, $x\neq 2$ καί $x^2-2x\neq 0$. Ἐπειδή τό Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν $x(x-2)$ περιέχει ὅλους τούς παράγοντές τους, καταλαβαίνουμε ὅτι γιά νά ἔχει νόημα ἡ ἐξίσωση ἀρκεῖ τό Ε.Κ.Π. νά εἶναι διαφορετικό ἀπό τό μηδέν. Ὑποθέτουμε λοιπόν ὅτι $x(x-2)\neq 0$ καί ἀπαλείφουμε τούς παρονομαστές πολλαπλασιάζοντας καί τά δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως μέ τό Ε.Κ.Π. Ἔχουμε τότε διαδοχικά

$$(x-2)^2+4x-8=0$$
$$(x-2)^2+4(x-2)=0$$
$$(x-2)(x-2+4)=0$$
$$(x-2)(x+2)=0.$$

Ἔτσι ἡ ἀρχική μας ἐξίσωση «ἀναλύεται» στίς δύο ἐξισώσεις

$$x-2=0 \quad \text{καί} \quad x+2=0,$$

οἱ ὁποῖες ἔχουν ρίζες τούς ἀριθμούς 2 καί -2. Ὁ ἀριθμός 2 ὅμως ἀπορρίπτεται ἀπό τήν ἀρχική ὑπόθεση $x(x-2)\neq 0$ καί μένει ὡς μοναδική ρίζα τῆς ἐξισώσεως ὁ ἀριθμός -2.

Βλέπουμε δηλαδή ὅτι **στήν ἐπίλυση μιᾶς κλασματικῆς ἐξισώσεως πρέπει νά ἀπορρίπτουμε ἀπό τίς ρίζες πού βρίσκουμε ἐκεῖνες πού μηδενίζουν τούς παρονομαστές τῆς ἀρχικῆς ἐξισώσεως.**

31 Νά ἐπιλυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:

α) $\frac{2x}{x+2} + \frac{x+2}{2x} = 2$

β) $\frac{x-1}{x} - \frac{x}{x-2} + \frac{1}{x^2-2x} = 0$

γ) $\frac{2x-3}{x} + \frac{5x-3}{x^2} = \frac{2x^2+x-6}{x^3} + 2$

δ) $\frac{1}{x-2} - \frac{2}{x+1} = \frac{3}{x^2-x-2}$

ε) $1-\frac{1}{x+2} - \frac{1}{2-x} = \frac{2x}{x^2-4}$

στ) $\frac{12}{3x-2} - \frac{8}{3x+2} = \frac{2-33x}{4-9x^2}$.

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 3

1. Τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως ἑνός πολυωνύμου $p(x)$ μέ τό διώνυμο $x-\alpha$ βρίσκεται καί χωρίς νά κάνουμε τή διαίρεση γιατί εἶναι ἴσο μέ τήν ἀριθμητική τιμή $p(\alpha)$ τοῦ πολυωνύμου γιά $x=\alpha$.
"Αν εἶναι $p(\alpha) = 0$, ἡ διαίρεση $p(x) : (x-\alpha)$ εἶναι τελεία καί μποροῦμε νά γράψουμε
$$p(x) = (x - \alpha)\pi(x)$$
2. Εἶναι πολύ χρήσιμο νά ἀναλύουμε τά πολυώνυμα σέ γινόμενα παραγόντων.
"Ενα πολυώνυμο ἀναλύεται σέ γινόμενο παραγόντων ὅταν:
- Οἱ ὅροι του ἔχουν κοινό παράγοντα, π.χ. $\mu\alpha+\mu\beta+\mu\gamma = \mu(\alpha+\beta+\gamma)$.
- Οἱ ὅροι του χωρίζονται σέ ὁμάδες κατά τέτοιο τρόπο, ὥστε ὅλες οἱ ὁμάδες, ὅταν τραποῦν σέ γινόμενα, νά ἔχουν κοινό παράγοντα, π.χ.
$$\alpha x+\alpha y+\beta x+\beta y = \alpha(x+y) + \beta(x+y) = (x+y)(\alpha+\beta).$$
- Εἶναι ἀνάπτυγμα τετραγώνου διωνύμου, δηλ. $\alpha^2\pm2\alpha\beta+\beta^2 = (\alpha\pm\beta)^2$.
- Εἶναι διαφορά τετραγώνων, δηλ. $\alpha^2-\beta^2 = (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$.
- Εἶναι διαφορά ἤ ἄθροισμα κύβων, δηλ. $\alpha^3\mp\beta^3 = (\alpha\mp\beta)(\alpha^2\pm\alpha\beta+\beta^2)$.
- Εἶναι τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ $(\alpha\neq0)$ τό ὁποῖο μετασχηματίζεται σέ διαφορά τετραγώνων.
"Ενα τριώνυμο πού μετασχηματίζεται σέ ἄθροισμα τετραγώνων δέν ἀναλύεται σέ γινόμενο παραγόντων.

3. "Αν ἔχουμε μία ἐξίσωση ἀνώτερου βαθμοῦ, τῆς ὁποίας τό δεύτερο μέλος εἶναι μηδέν, αὐτή μπορεῖ νά ἐπιλυθεῖ μόνον, ὅταν τό πρῶτο μέλος της ἀναλύεται σέ γινόμενο παραγόντων πρώτου βαθμοῦ. Τότε γράφεται π.χ.
$$\text{Α.Β.Γ} = 0$$
καί ἔχει ρίζες τίς ρίζες τῶν ἐξισώσεων $\text{Α} = 0$, $\text{Β} = 0$, $\Gamma = 0$.

4. Κάθε παράσταση τῆς μορφῆς $\frac{\text{Α}}{\text{Β}}$, ὅπου τά Α καί Β εἶναι ἀκέραια πολυώνυμα, λέγεται **ρητή ἀλγεβρική παράσταση** ἤ **ρητό ἀλγεβρικό κλάσμα**. Τά γράμματα μιᾶς ρητῆς ἀλγεβρικῆς παραστάσεως δέν μποροῦν νά πάρουν τιμές πού μηδενίζουν τόν παρονομαστή της.

Μία ρητή ἀλγεβρική παράσταση μποροῦμε νά τήν ἁπλοποιήσουμε ἀναλύοντας τούς ὅρους της σέ γινόμενο καί διαγράφοντας τούς κοινούς παράγοντες (ἄν ὑπάρχουν).

Οἱ πράξεις μεταξύ ρητῶν ἀλγεβρικῶν παραστάσεων γίνονται ὅπως οἱ πράξεις τῶν ρητῶν ἀριθμῶν. Πρέπει πάντοτε νά **ἁπλοποιοῦμε** τό ἀποτέλεσμα πού προκύπτει ἀπό τίς πράξεις ρητῶν ἀλγεβρικῶν παραστάσεων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ*

32. Νά προσδιορίσετε τό λ ἔτσι, ὥστε τό πολυώνυμο

$$x^3-3x^2-2\lambda x+6\lambda$$

νά εἶναι διαιρετό διά $x-2$. Τό πολυώνυμο πού προκύπτει γιά τήν τιμή τοῦ λ πού βρήκατε νά τό ἀναλύσετε σέ γινόμενο τριῶν πρωτοβάθμιων παραγόντων.

33. Νά δείξετε ὅτι τό πολυώνυμο $(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$ εἶναι διαιρετό μέ κάθε ἕνα ἀπό τά $x+y$, $y+z$, $z+x$.

34. Ἄν εἶναι $A=\frac{y}{z}+\frac{z}{y}$, $B=\frac{z}{x}+\frac{x}{z}$ $\Gamma=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$, νά ὑπολογιστεῖ ἡ παράσταση $A^2+B^2+\Gamma^2-AB\Gamma$.

35. Δίνεται τό πολυώνυμο $A=9x^2-(2x+1)^2$

α) Νά δώσετε τό Α μέ τήν ἀνηγμένη του μορφή.

β) Νά τό ἀναλύσετε σέ γινόμενο.

γ) Νά λύσετε τήν ἐξίσωση $A=0$.

36. Δίνεται τό πολυώνυμο $A=(17x^2-1)^2-64x^4$

α) Νά δώσετε τό Α μέ τήν ἀνηγμένη του μορφή.

β) Νά τό ἀναλύσετε σέ γινόμενο.

γ) Νά λύσετε τήν ἐξίσωση $A=0$.

37. α) Νά ἀναλύσετε σέ γινόμενα παραγόντων τά πολυώνυμα

$$3x^2-6x,\quad x^2+4x+4,\quad 2x^2-8,\quad 9(2x+1)^2-(4x-1)^2$$

β) Νά ἁπλοποιήσετε τά κλάσματα

$$A=\frac{3x^2-6x}{2x^2-8}\qquad B=\frac{9(2x+1)^2-(4x-1)^2}{4(x^2+4x+4)}$$

γ) Νά λύσετε τήν ἐξίσωση $A-B=0$.

38. Νά ἐκτελέσετε τίς πράξεις:

α) $\left[\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha\beta}\right)(\alpha+\beta+1)\right]:(\alpha^2+2\alpha\beta-1+\beta^2)$

β) $\left[\left(x^2-2+\frac{1}{x^2}\right):\left(\frac{1}{x}-1\right)^2\right]-x^2-1$

γ) $\dfrac{1-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}-\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}$ δ) $\dfrac{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$

39. Νά ἐκτελεσθοῦν οἱ πράξεις:

α) $\dfrac{1}{(\alpha-\beta)\,(\alpha-\gamma)} + \dfrac{1}{(\beta-\gamma)\,(\beta-\alpha)} + \dfrac{1}{(\gamma-\alpha)\,(\gamma-\beta)}$

β) $\dfrac{\beta\gamma}{(\alpha-\beta)\,(\alpha-\gamma)} + \dfrac{\gamma\alpha}{(\beta-\gamma)\,(\beta-\alpha)} + \dfrac{\alpha\beta}{(\gamma-\alpha)\,(\gamma-\beta)}$

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ**

40. Νά ἀποδειχθοῦν οἱ ταυτότητες:

α) $(\alpha+\beta)^2-(\gamma+\delta)^2+(\alpha+\gamma)^2-(\beta+\delta)^2=2(\alpha-\delta)\,(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$.

β) $(\alpha^2+\beta^2)^2+4\alpha\beta(\alpha^2-\beta^2)=(\alpha^2-\beta^2+2\alpha\beta)^2$.

γ) $x^3+(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)x+\alpha\beta\gamma=(x+\alpha)\,(x+\beta)\,(x+\gamma)$.

41. Θεωροῦμε τά πολυώνυμα

$$A=25x^2+20x+4,\quad B=9x^2-24x+16 \quad \text{καί} \quad \Gamma=A-B.$$

α) Νά βρεῖτε τό πολυώνυμο Γ νά τό διατάξετε κατά τίς φθίνουσες δυνάμεις τοῦ x καί νά βρεῖτε τήν ἀριθμητική τιμή του γιά $x=\sqrt{2}$.

β) Νά γράψετε τό καθένα ἀπό τά πολυώνυμα Α καί Β σέ μορφή τετραγώνου ἑνός διωνύμου ὡς πρός x καί ἔπειτα νά ἀναλύσετε τό Γ σέ γινόμενο παραγόντων.

γ) Νά λύσετε τήν ἐξίσωση $\Gamma=0$.

42. Νά ἐκτελεσθοῦν οἱ πράξεις:

$$\left(1+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^3}\right)\cdot\frac{\alpha^4-\alpha^3}{\alpha^4-1}.$$

43. Νά ἐκτελεσθοῦν οἱ πράξεις:

α) $\dfrac{1}{(x+y)^2}\cdot\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}\right)+\dfrac{2}{(x+y)^3}\cdot\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)$

β) $\dfrac{\alpha-\gamma}{\alpha^2+\alpha\gamma+\gamma^2}\cdot\dfrac{\alpha^3-\gamma^3}{\alpha^2\beta-\beta\gamma^2}\cdot\left(1+\dfrac{\gamma}{\alpha-\gamma}-\dfrac{1+\gamma}{\gamma}\right):\dfrac{\gamma(1+\gamma)-\alpha}{\beta\gamma}$

γ) $\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}-\dfrac{x}{\alpha\beta}\right)(\alpha+\beta+x):\left(\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}+\dfrac{2}{\alpha\beta}-\dfrac{x^2}{\alpha^2\beta^2}\right)$

δ) $\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}\cdot\dfrac{x-1+\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}:\dfrac{x^2+\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}$

ε) $\dfrac{1-\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}}{\dfrac{x}{y^2}+\dfrac{y}{x^2}}\cdot\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)$

44. Ἄν εἶναι $y=x+\dfrac{1}{x}$, νά ἐκφρασθοῦν οἱ παραστάσεις $A=x^2+\dfrac{1}{x^2}$, $B=x^3+\dfrac{1}{x^3}$ σάν πολυώνυμα τοῦ y

4° ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΕΥΘΕΙΕΣ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΑ ΣΤΟ ΧΩΡΟ

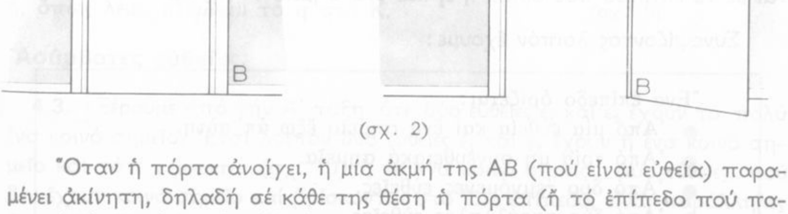
Πῶς ὁρίζεται ἕνα ἐπίπεδο.

4.1. Στήν Α' τάξη μάθαμε ὅτι **ἐπίπεδο** εἶναι μία ἐπιφάνεια, στήν ὁποία ὁ χάρακας ἐφαρμόζει ἐντελῶς κατά ὁποιαδήποτε διεύθυνση κι ἄν τοποθετηθεῖ πάνω σ' αὐτή.

Φυσική εἰκόνα ἑνός ἐπιπέδου μᾶς δίνει ἡ ἐπιφάνεια ἑνός τραπεζιοῦ, ὁ μαυροπίνακας τῆς τάξεώς μας, ἕνας τοῖχος ἑνός δωματίου χωρίς προεξοχές, μία σελίδα ἑνός βιβλίου, κ.λ.π. (ἄν φαντασθοῦμε ὅτι κάθε μία ἀπ' αὐτές τίς ἐπιφάνειες προεκτείνεται ἀπεριόριστα πρός ὅλες τίς μεριές της). Τό ἐπίπεδο δέν ἔχει πάχος (ὕψος) καί ἔχει μόνο δύο διαστάσεις, μῆκος καί πλάτος.

σχ. 1

Φυσική εἰκόνα ἑνός ἐπιπέδου μᾶς δίνει ἐπίσης μία πόρτα, πού βρίσκεται στόν τοῖχο ἑνός δωματίου, ἄν φανταστοῦμε ὅτι εἶναι λεπτή χωρίς προεξοχές καί ἐκτείνεται ἀπεριόριστα.



(σχ. 2)

Ὅταν ἡ πόρτα ἀνοίγει, ἡ μία ἀκμή της ΑΒ (πού εἶναι εὐθεία) παραμένει ἀκίνητη, δηλαδή σέ κάθε της θέση ἡ πόρτα (ἤ τό ἐπίπεδο πού παριστάνει) περιέχει τήν ΑΒ (σχ. 2). Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι

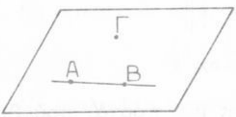
Ἀπό μία εὐθεία AB διέρχονται ἄπειρα ἐπίπεδα.

Ἄν φανταστοῦμε τώρα καί ἕνα σημεῖο Γ στό χῶρο τοῦ δωματίου, ἡ πόρτα σέ μιά μόνο θέση της θά «περάσει» ἀπό τό σημεῖο Γ. Ἔτσι βλέπουμε ὅτι:

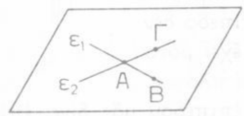
Ἀπό μία εὐθεία AB καί ἕνα σημεῖο ἔξω ἀπ' αὐτή διέρχεται ἕνα καί μόνο ἐπίπεδο.

Αὐτό σημαίνει ὅτι, ἄν δύο ἐπίπεδα ἔχουν κοινή τήν εὐθεία AB καί κοινό ἕνα σημεῖο Γ, πού βρίσκεται ἔξω ἀπ' αὐτή, τότε τά δύο ἐπίπεδα ταυτίζονται, δηλαδή ἀποτελοῦν ἕνα καί μοναδικό ἐπίπεδο. Τό ἐπίπεδο αὐτό θεωρεῖται ἐντελῶς γνωστό, ὅταν ξέρουμε τήν εὐθεία AB καί τό σημεῖο Γ ,γι' αὐτό λέμε ὅτι **μία εὐθεία καί ἕνα σημεῖο ἔξω ἀπ' αὐτή ὁρίζουν ἕνα ἐπίπεδο.**

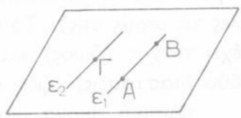
Τρία μή συνευθειακά σημεῖα A,B,Γ ὁρίζουν ἐπίσης ἕνα ἐπίπεδο (βλ. σχ. 3), αὐτό πού διέρχεται ἀπό τήν εὐθεία AB καί ἀπό τό σημεῖο Γ. Ἐπί-



(σχ. 3)



(σχ. 4)



(σχ. 5)

σης καί δύο τεμνόμενες εὐθεῖες ε_1 καί ε_2 θά ὁρίζουν ἐπίπεδο, (βλ. σχ. 4), αὐτό πού διέρχεται ἀπό τήν ε_1 καί ἀπό ἕνα σημεῖο Γ τῆς ε_2, διαφορετικό ἀπό τό σημεῖο τομῆς A τῶν ε_1 καί ε_2. Τέλος, στόν ὁρισμό τῶν παράλληλων εὐθειῶν εἴδαμε ὅτι δύο εὐθεῖες ε_1 καί ε_2 εἶναι παράλληλες, ὅταν βρίσκονται στό ἴδιο ἐπίπεδο καί δέν ἔχουν κοινό σημεῖο (βλ. σχ. 5). Τό ἐπίπεδο τῶν δύο παράλληλων εὐθειῶν ε_1 καί ε_2 εἶναι ἐντελῶς ὁρισμένο, ἀφοῦ ταυτίζεται μέ τό ἐπίπεδο πού ὁρίζει ἡ ε_1 καί ἕνα σημεῖο Γ τῆς ε_2.

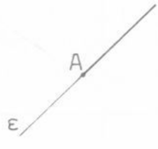
Συνοψίζοντας λοιπόν ἔχουμε:

Ἕνα ἐπίπεδο ὁρίζεται:

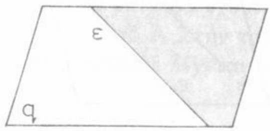
- Ἀπό μία εὐθεία καί ἕνα σημεῖο ἔξω ἀπ' αὐτή.
- Ἀπό τρία μή συνευθειακά σημεῖα.
- Ἀπό δύο τεμνόμενες εὐθεῖες.
- Ἀπό δύο παράλληλες εὐθεῖες.

Οἱ ἡμιχῶροι.

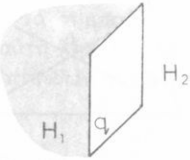
4.2. Στήν Α' τάξη μάθαμε ὅτι κάθε σημεῖο Α μιᾶς εὐθείας ε διαχωρίζει ὅλα τά ἄλλα σημεῖα τῆς εὐθείας σέ δύο μέρη (σχ. 6). Τά σημεῖα πού ἀνήκουν σέ κάθε ἕνα ἀπό τά μέρη αὐτά καί τό Α ἀποτελοῦν ἕνα σημειοσύ-



(σχ. 6)



(σχ. 7)



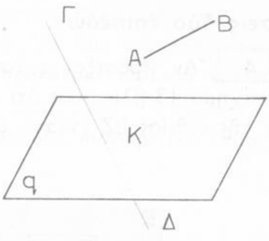
(σχ. 8)

νολο, πού λέγεται *«ἡμιευθεία»*. Μάθαμε ἐπίσης ὅτι κάθε εὐθεία ε ἑνός ἐπιπέδου q διαχωρίζει ὅλα τά ἄλλα σημεῖα τοῦ q σέ δύο μέρη (σχ. 7). Τά σημεῖα πού ἀνήκουν σέ κάθε ἕνα ἀπό τά μέρη αὐτά καί τά σημεῖα τῆς ε ἀποτελοῦν ἕνα σημειοσύνολο, πού λέγεται *«ἡμιεπίπεδο»*.

Ἐντελῶς ὅμοια, κάθε ἐπίπεδο q διαχωρίζει ὅλα τά ἄλλα σημεῖα τοῦ χώρου σέ δύο μέρη (σχ. 8). Τά σημεῖα πού ἀνήκουν σέ κάθε ἕνα ἀπό τά μέρη αὐτά καί τά σημεῖα τοῦ q ἀποτελοῦν ἕνα σημειοσύνολο, πού λέγεται **ἡμιχῶρος**. Ἔχουμε λοιπόν γιά κάθε ἐπίπεδο q δύο ἡμιχώρους H_1 καί H_2 καί, ὅπως εἶναι φανερό,

$$\mathbf{H_1 \cap H_2 = q}, \qquad \mathbf{H_1 \cup H_2 = \text{χῶρος}}.$$

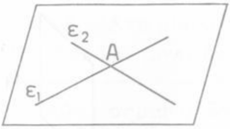
Ἄν πάρουμε δύο σημεῖα Α καί Β τοῦ ἴδιου ἡμιχώρου, πού νά μή βρίσκονται στό ἐπίπεδο q, βλέπουμε ὅτι τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ δέν ἔχει κοινό σημεῖο μέ τό q. Ἀντίθετα, κάθε εὐθύγραμμο τμῆμα ΓΔ, πού ἔχει τά ἄκρα του στούς διαφορετικούς ἡμιχώρους, ἔχει ἕνα κοινό σημεῖο Κ μέ τό ἐπίπεδο q (βλ. σχ. 9) ἤ, ὅπως λέμε, *«τέμνει»* τό q στό Κ.



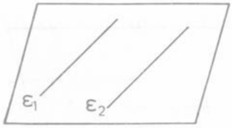
(σχ. 9)

Ἀσύμβατες εὐθεῖες.

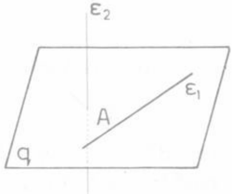
4.3. Ξέρουμε ἀπό τήν Α' τάξη ὅτι δύο εὐθεῖες $ε_1$ καί $ε_2$ ἔχουν τό πολύ ἕνα κοινό σημεῖο. Ἔτσι λοιπόν δύο εὐθεῖες $ε_1$ καί $ε_2$ ἔχουν ἤ ἕνα κοινό σημεῖο καί τότε *τέμνονται* (σχ. 10) ἤ κανένα κοινό σημεῖο. Δύο εὐθεῖες, πού δέν ἔχουν κοινό σημεῖο καί βρίσκονται στό ἴδιο ἐπίπεδο, εἶναι παράλληλες (σχ. 11). Εἶναι δυνατό ὅμως οἱ δύο εὐθεῖες $ε_1$ καί $ε_2$ νά μήν ἔχουν κοινό σημεῖο καί νά μή βρίσκονται στό ἴδιο ἐπίπεδο, ὅπως π.χ. ὅταν ἡ $ε_1$ βρίσκεται σ' ἕνα ἐπίπεδο q καί ἡ $ε_2$ «τέμνει» τό q σέ σημεῖο Α, πού δέν ἀνήκει



(σχ. 10)



(σχ. 11)



(σχ. 12)

στήν $ε_1$ (βλ. σχ. 12). Δύο τέτοιες εὐθεῖες, πού δέν ἔχουν κοινό σημεῖο καί δέν εἶναι παράλληλες, λέγονται **ἀσύμβατες** (ἤ καί **στρεβλές**). Βλέπουμε λοιπόν ὅτι:

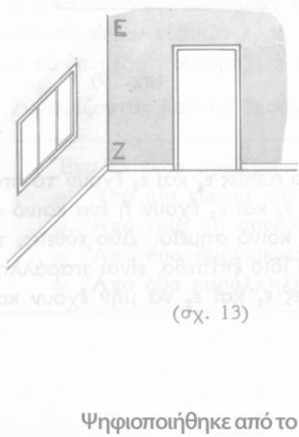
Οἱ μόνες δυνατές θέσεις, πού μπορεῖ νά ἔχουν δυό διαφορετικές εὐθεῖες τοῦ χώρου, εἶναι:

- **Νά τέμνονται.**
- **Νά εἶναι παράλληλες.**
- **Νά εἶναι ἀσύμβατες.**

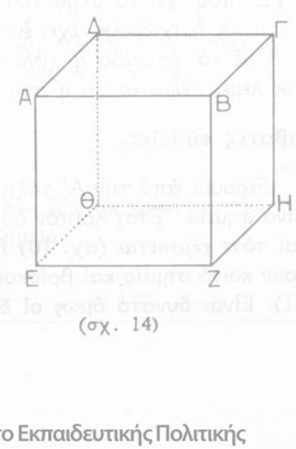
Στίς δύο πρῶτες περιπτώσεις οἱ εὐθεῖες, ὅπως εἴδαμε, ὁρίζουν τή θέση ἑνός ἐπιπέδου.

Θέσεις δύο ἐπιπέδων.

4.4. Ἄν προσέξουμε τούς δύο συνεχόμενους τοίχους τῆς αἴθουσας στό σχῆμα 13 βλέπουμε ὅτι οἱ δύο αὐτοί τοῖχοι ἔχουν κοινά μόνο τά σημεῖα τῆς εὐθείας ΕΖ (γιατί, ἄν εἶχαν καί ἄλλο κοινό σημεῖο ἔξω ἀπό τήν



(σχ. 13)



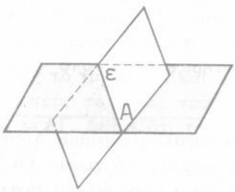
(σχ. 14)

ΕΖ, τά ἐπίπεδά τους θά ταυτίζονταν). Ἐπίσης, γιά τόν ἴδιο λόγο οἱ δύο ἕδρες ΑΒΓΔ καί ΒΖΗΓ στόν κύβο τοῦ σχήματος 14 ἔχουν κοινά μόνο τά σημεῖα τῆς ἀκμῆς ΒΓ.

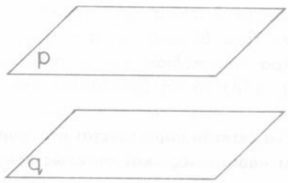
Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι:

Τά κοινά σημεῖα δύο ἐπιπέδων βρίσκονται πάνω σέ μία εὐθεία.

Γενικά, ὅταν ἔχουμε δύο διαφορετικά ἐπίπεδα, πού ἔχουν ἕνα κοινό σημεῖο Α (σχ. 15), τότε τά δύο ἐπίπεδα ἔχουν κοινά ὅλα τά σημεῖα μιᾶς εὐθείας ε, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπό τό Α. Στήν περίπτωση αὐτή λέμε ὅτι τά δύο ἐπίπεδα **τέμνονται** καί ἡ εὐθεία ε λέγεται **τομή** τῶν ἐπιπέδων αὐτῶν.



(σχ. 15)



(σχ. 16)

Εἶναι δυνατό ὅμως δύο ἐπίπεδα p καί q νά μήν ἔχουν κοινά σημεῖα, ὅπως π.χ. ἡ ὀροφή καί τό πάτωμα ἑνός δωματίου ἤ οἱ *«ἀπέναντι»* ἕδρες ΑΒΓΔ καί ΕΖΗΘ στόν κύβο τοῦ σχήματος 14. Ἄν δύο ἐπίπεδα p καί q δέν ἔχουν κοινό σημεῖο (σχ. 16) λέγονται **παράλληλα ἐπίπεδα** καί τότε γράφουμε p // q. Βλέπουμε δηλαδή ὅτι:

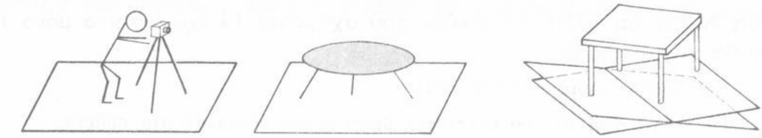
Οἱ μόνες δυνατές θέσεις, πού μπορεῖ νά ἔχουν δύο διαφορετικά ἐπίπεδα, εἶναι:

- **Νά τέμνονται κατά μία εὐθεία.**
- **Νά εἶναι παράλληλα.**

Ὅταν δύο ἐπίπεδα εἶναι γνωστά (δεδομένα), τότε καί ἡ τομή τους θεωρεῖται γνωστή (δεδομένη) εὐθεία.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

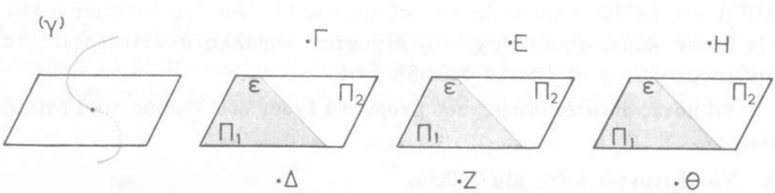
1. **Νά ἐξηγήσετε γιατί οἱ φωτογράφοι στηρίζουν τίς μηχανές τους σέ τρίποδα ἤ γιατί ἕνα τραπέζι μέ τρία πόδια στηρίζεται πάντοτε σταθερά (ἐνῶ ἕνα τραπέζι μέ τέσσερα πόδια δέν στηρίζεται πάντοτε σταθερά).**



(σχ. 17) (σχ. 17α) (σχ. 17β)

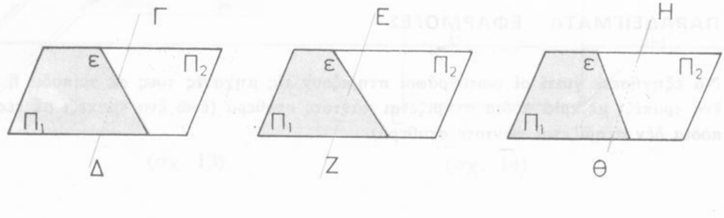
Λύση: Ἐπειδή τρία μή συνευθειακά σημεῖα ὁρίζουν ἕνα ἐπίπεδο, τά τρία σημεῖα-ἀκίδες τοῦ τρίποδα (ἀνεξάρτητα ἀπό τήν ἐπιφάνεια στήν ὁποία στηρίζονται) ἀνήκουν στό ἴδιο ἐπίπεδο. Τό ἐπίπεδο αὐτό ταυτίζεται τώρα μέ τό ἐπίπεδο πού διέρχεται ἀπό τά τρία σημεῖα τῆς ἐπιφάνειας στήν ὁποία στηρίζεται ὁ τρίποδας (βλ. σχ. 17). Τό ἴδιο συμβαίνει καί μέ ἕνα τραπέζι πού ἔχει 3 πόδια (βλ. σχ. 17α). Ἕνα τραπέζι ὅμως μέ 4 πόδια δέ στηρίζεται πάντοτε σταθερά, γιατί 4 σημεῖα, μή συνευθειακά ἀνά τρία, δέ βρίσκονται πάντοτε στό ἴδιο ἐπίπεδο. Ἑπομένως εἶναι δυνατό τά 4 ἄκρα τῶν ποδιῶν τοῦ τραπεζιοῦ ἤ τά 4 σημεῖα στηρίξεώς του στό δάπεδο (βλ. σχ. 17β) νά μή βρίσκονται στό ἴδιο ἐπίπεδο.

2. **Ἕνα ἐπίπεδο παριστάνεται στό χῶρο, ὅπως εἴδαμε, μέ παραλληλόγραμμο. Αὐτό θεωρεῖται «ἀδιαφανές» καί συνεπῶς «σκεπάζει» ὁρισμένες γραμμές τοῦ χώρου. Οἱ γραμμές αὐτές πού δέ φαίνονται, σχεδιάζονται μέ στιγμές (τελεῖες), ὅπως δείχνει τό σχῆμα 18. Στά σχήματα 19-20-21 νά σχεδιάσετε τά εὐθύγραμμα τμήματα ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ἄν ξέρετε ὅτι τό ΓΔ τέμνει τήν εὐθεία ε, τό ΕΖ δέν τέμνει τήν ε καί τέμνει τό ἡμιεπίπεδο $Π_1$, τό ΗΘ δέν τέμνει τήν ε καί τέμνει τό ἡμιεπίπεδο $Π_2$.**



σχ. 18 σχ. 19 σχ. 20 σχ. 21

Λύση: Ἡ ἀπάντηση δίνεται μέ τά παρακάτω σχήματα.



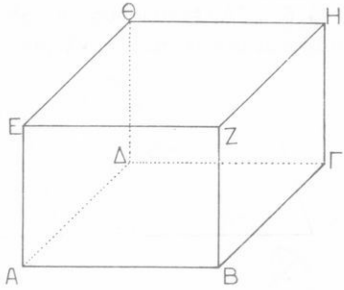
1. Στό διπλανό κύβο θεωροῦμε τά ζεύγη τῶν εὐθειῶν πού ὁρίζονται ἀπό τά ζεύγη τῶν εὐθύγραμμων τμημάτων:

α) ΑΒ, ΓΔ δ) ΕΒ, ΘΓ

β) ΑΒ, ΗΘ ε) ΗΖ, ΔΓ

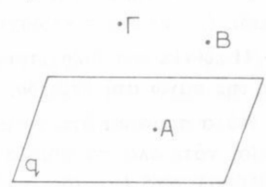
γ) ΑΒ, ΗΓ στ) ΗΒ, ΕΔ

Ξεχωρίστε τά ζεύγη τῶν εὐθειῶν πού ὁρίζουν ἐπίπεδο καί τά ζεύγη πού ἀποτελοῦνται ἀπό ἀσύμβατες εὐθεῖες.



2. Στόν παραπάνω κύβο δεῖξτε ὅτι οἱ δύο εὐθεῖες ΘΒ καί ΖΔ τέμνονται, ἐνῶ οἱ δύο εὐθεῖες ΑΗ καί ΕΖ δέν τέμνονται.

3. Στό διπλανό σχῆμα δίνεται ἕνα ἐπίπεδο q, ἕνα σημεῖο του Α καί δύο σημεῖα Β καί Γ ἔξω ἀπό τό q. Νά φέρετε τό τμῆμα ΒΑ καί νά τό προεκτείνετε πρός τό μέρος τοῦ Α κατά τμῆμα ΑΒ′ = ΑΒ. Νά φέρετε ἐπίσης τό τμῆμα ΓΑ καί νά τό προεκτείνετε πρός τό μέρος τοῦ Α κατά τμῆμα ΑΓ′ = ΑΓ. Δεῖξτε ὅτι τά σημεῖα Β,Γ,Γ′,Β′ βρίσκονται σ' ἕνα ἐπίπεδο καί ὅτι τά τμήματα ΒΓ καί Β′Γ′ εἶναι ἴσα.

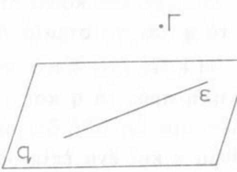


4. Στό διπλανό σχῆμα δίνεται ἕνα ἐπίπεδο q, μία εὐθεία του ε καί ἕνα σημεῖο Γ ἔξω ἀπό τό q. Ἄν ὀνομάσουμε p τό ἐπίπεδο πού ὁρίζεται ἀπό τό σημεῖο Γ καί τήν εὐθεία ε,

α) νά βρεῖτε τήν τομή τῶν p καί q,

β) νά σχεδιάσετε τό p,

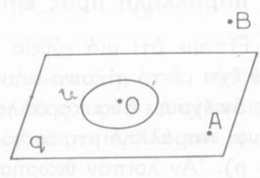
γ) νά δείξετε ὅτι, ἄν μία εὐθεία τοῦ p διέρχεται ἀπό τό Γ καί τέμνει τό q, τό τέμνει σέ σημεῖο τῆς εὐθείας ε.



5. Στόν κύβο τῆς ἀσκήσεως 1 δεῖξτε ὅτι οἱ εὐθεῖες ΘΖ καί ΔΒ βρίσκονται στό ἴδιο ἐπίπεδο καί ὀνομάστε το p. Δεῖξτε ἐπίσης ὅτι οἱ εὐθεῖες ΕΗ καί ΑΓ βρίσκονται στό ἴδιο ἐπίπεδο καί ὀνομάστε το q. Νά βρεῖτε τήν τομή τῶν p καί q.

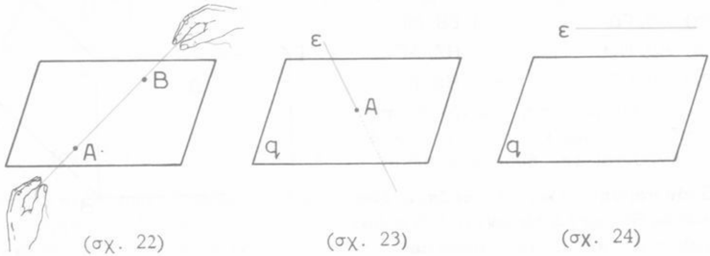
6. Πάρτε ἕνα ἐπίπεδο q, δύο εὐθεῖες του ε_1 καί ε_2, πού τέμνονται στό Α, καί ἕνα σημεῖο Β ἔξω ἀπό τό q. Ὀνομάστε p_1 καί p_2 τά δύο ἐπίπεδα, πού ὁρίζει τό σημεῖο Β μέ κάθε μία ἀπό τίς εὐθεῖες ε_1 καί ε_2. Βρεῖτε τήν τομή τῶν p_1 καί p_2.

7. Δίνεται ἕνα ἐπίπεδο q, ἕνας κύκλος του κ μέ κέντρο Ο καί ἕνα σημεῖο του Α. Δίνεται ἐπίσης ἕνα σημεῖο Β ἔξω ἀπό τό q. Ἄν p εἶναι τό ἐπίπεδο πού ὁρίζεται ἀπό τά τρία σημεῖα Α, Β, Ο, νά βρεῖτε ποῦ τό ἐπίπεδο p τέμνει τόν κύκλο κ.



Θέσεις εὐθείας καί ἐπιπέδου.

4·5· Ἄν ἔχουμε δύο ὁποιαδήποτε σημεῖα Α καί Β ἑνός ἐπιπέδου καί πάρουμε μιά τεντωμένη κλωστή, πού νά περνάει ἀπό τά Α καί Β, βλέπου-



(σχ. 22) (σχ. 23) (σχ. 24)

με ὅτι ὅλα τά σημεῖα τῆς κλωστῆς «ἀκουμπᾶνε» πάνω στό ἐπίπεδο (σχ. 22). Ἐπειδή ἡ τεντωμένη κλωστή παριστάνει μία εὐθεία, καταλαβαίνουμε ὅτι:

Ἡ εὐθεία ,πού διέρχεται ἀπό δύο σημεῖα ἑνός ἐπιπέδου, ἔχει ὅλα τά σημεῖα της πάνω στό ἐπίπεδο.

Αὐτό σημαίνει ὅτι, ἄν μιά εὐθεία ε καί ἕνα ἐπίπεδο q ἔχουν δυό κοινά σημεῖα, τότε ὅλα τά σημεῖα τῆς ε ἀνήκουν στό q καί ἡ εὐθεία *περιέχεται* (ἤ *ἀνήκει*) στό ἐπίπεδο q. Ἔτσι μία εὐθεία, πού δέν περιέχεται στό q, ἔχει τό πολύ ἕνα κοινό σημεῖο μέ τό q. Γιά μιά τέτοια εὐθεία ἔχουμε μία ἀπό τίς παρακάτω περιπτώσεις:

I. Ἡ ε ἔχει ἕνα κοινό σημεῖο Α μέ τό q (σχ. 23). Τότε λέμε ὅτι **ἡ ε τέμνει τό q** καί τό σημεῖο Α λέγεται **ἴχνος** τῆς ε στό q.

II. Ἡ ε δέν ἔχει κοινό σημεῖο μέ τό q (σχ. 24). Τότε λέμε ὅτι **ἡ ε εἶναι παράλληλη πρός τό q** καί γράφουμε ε||q.

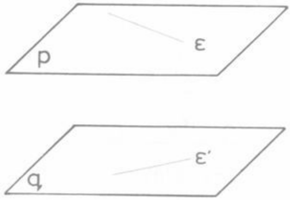
Βλέπουμε δηλαδή ὅτι **οἱ μόνες δυνατές θέσεις, πού μποροῦν νά ἔχουν μιά εὐθεία ε καί ἕνα ἐπίπεδο q, εἶναι:**

- **Ἡ ε νά περιέχεται στό q.**
- **Ἡ ε νά τέμνει τό q σ' ἕνα σημεῖο.**
- **Ἡ ε νά εἶναι παράλληλη πρός τό q.**

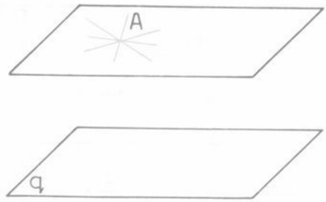
Στήν περίπτωση πού ἡ εὐθεία ε εἶναι γνωστή καί τέμνει γνωστό ἐπίπεδο q, τό ἴχνος της Α θεωρεῖται ἐπίσης γνωστό.

Εὐθεία παράλληλη πρός ἐπίπεδο.

4.6. Εἴπαμε ὅτι μιά εὐθεία ε λέγεται παράλληλη πρός ἐπίπεδο q, ὅταν δέν ἔχει μέ τό q κοινό σημεῖο. Ἀπό τόν ὁρισμό καταλαβαίνουμε ἀμέσως ὅτι, ἄν ἔχουμε δύο παράλληλα ἐπίπεδα p καί q (σχ. 25), κάθε εὐθεία ε τοῦ p εἶναι παράλληλη πρός τό q (καί κάθε εὐθεία τοῦ q εἶναι παράλληλη πρός τό p). Ἄν λοιπόν θεωρήσουμε ὅλες τίς εὐθεῖες τοῦ ἐπιπέδου p, πού διέρχονται ἀπό ἕνα σημεῖο Α, οἱ εὐθεῖες αὐτές εἶναι παράλληλες πρός τό ἐπίπεδο q. Βλέπουμε δηλαδή ὅτι:



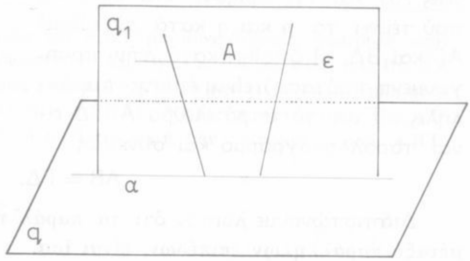
(σχ. 25)



(σχ. 26)

Ἀπό ἕνα σημεῖο Α, πού βρίσκεται ἔξω ἀπό ἕνα ἐπίπεδο q, μποροῦμε νά φέρουμε ἄπειρες εὐθεῖες παράλληλες πρός τό q καί ὅλες αὐτές οἱ παράλληλες περιέχονται σέ ἐπίπεδο p παράλληλο πρός τό q.

Ἄς ὑποθέσουμε τώρα ὅτι ἔχουμε μία εὐθεία ε παράλληλη πρός μία εὐθεία α ἑνός ἐπιπέδου q. Οἱ δύο παράλληλες εὐθεῖες ε καί α ὁρίζουν ἕνα ἐπίπεδο q_1 (βλ. σχ. 27), τό ὁποῖο τέμνει τό q κατά τήν ἴδια τήν εὐθεία α. Ἔτσι, ἄν μία ὁποιαδήποτε εὐθεία τοῦ q_1 τέμνει τό q, θά τό τέμνει σέ σημεῖο τῆς εὐθείας α. Ἀφοῦ λοιπόν ἡ ε δέν τέμνει τήν α, δέν θά τέμνει οὔτε τό q καί συνεπῶς θά εἶναι παράλληλη πρός τό q. Ὥστε:



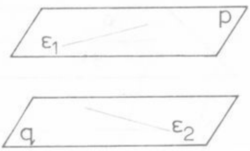
(σχ. 27)

Ἄν μία εὐθεία ε εἶναι παράλληλη πρός μία εὐθεία ἑνός ἐπιπέδου, τότε εἶναι παράλληλη καί πρός τό ἐπίπεδο.

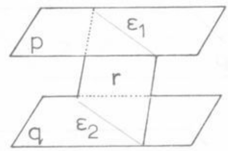
Ἀπό τήν πρόταση αὐτή καταλαβαίνουμε ὅτι, γιά νά φέρουμε ἀπό ἕνα σημεῖο Α μία εὐθεία παράλληλη πρός τό q, ἀρκεῖ νά φέρουμε ἀπό τό Α μία εὐθεία ε παράλληλη πρός μία ὁποιαδήποτε εὐθεία τοῦ q.

Παράλληλα ἐπίπεδα.

4.7. Δύο ὁποιεσδήποτε εὐθεῖες ε_1 καί ε_2, πού περιέχονται σέ δύο παράλληλα ἐπίπεδα p καί q, δέν ἔχουν κοινό σημεῖο καί συνεπῶς εἶναι ἤ ἀσύμβατες (σχ. 27α) ἤ παράλληλες. Οἱ εὐθεῖες ε_1 καί ε_2 θά εἶναι παράλληλες,



(σχ. 27α)



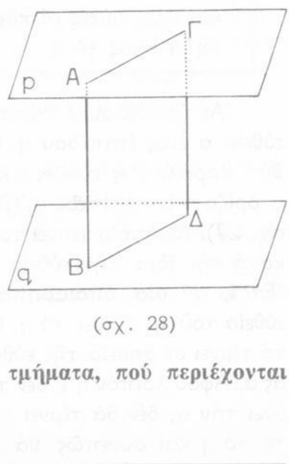
(σχ. 27β)

μόνο ὅταν ἀνήκουν σ' ἕνα τρίτο ἐπίπεδο r (σχ. 27β), ὁπότε κάθε μία ἀπ' αὐτές θά εἶναι ἡ τομή τοῦ r μέ ἕνα ἀπό τά ἐπίπεδα p καί q. Ἔτσι λοιπόν:

> Δύο παράλληλα ἐπίπεδα τέμνονται ἀπό ἕνα τρίτο ἐπίπεδο κατά εὐθεῖες παράλληλες.

Ἄς θεωρήσουμε τώρα δύο ὁποιαδήποτε παράλληλα εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καί ΓΔ, τά ὁποῖα ἔχουν τά ἄκρα τους σέ δύο παράλληλα ἐπίπεδα p καί q (σχ. 28). Τότε οἱ παράλληλες εὐθεῖες ΑΒ καί ΓΔ ὁρίζουν ἕνα ἐπίπεδο, πού τέμνει τά p καί q κατά τίς εὐθεῖες ΑΓ καί ΒΔ, οἱ ὁποῖες (κατά τήν προηγούμενη πρόταση) εἶναι ἐπίσης παράλληλες. Ἔτσι τό τετράπλευρο ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμο καί συνεπῶς

$$ΑΒ = ΓΔ.$$

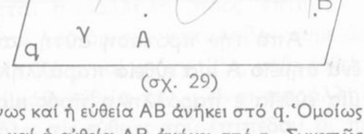


(σχ. 28)

Διαπιστώνουμε λοιπόν ὅτι **τά παράλληλα τμήματα, πού περιέχονται μεταξύ παράλληλων ἐπιπέδων, εἶναι ἴσα.**

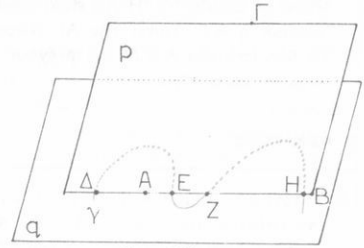
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Στό διπλανό σχῆμα ἡ γραμμή γ καί τά σημεῖα Α καί Β βρίσκονται πάνω στό ἐπίπεδο q, ἐνῶ τό σημεῖο Γ βρίσκεται ἔξω ἀπό τό q. Νά σχεδιασθεῖ τό ἐπίπεδο p, πού διέρχεται ἀπό τά Α,Β,Γ, καί νά βρεθοῦν τά σημεῖα, στά ὁποῖα τό p τέμνει τή γραμμή γ.**



(σχ. 29)

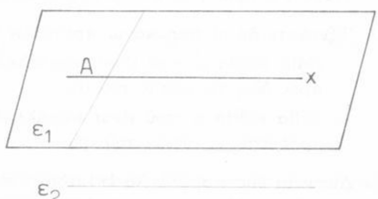
Λύση: Τά σημεῖα Α καί Β ἀνήκουν στό q, ἑπομένως καί ἡ εὐθεία ΑΒ ἀνήκει στό q. Ὁμοίως τά σημεῖα Α καί Β ἀνήκουν στό p, ἑπομένως καί ἡ εὐθεία ΑΒ ἀνήκει στό p. Συνεπῶς ἡ AB εἶναι κοινή εὐθεία τῶν δύο ἐπιπέδων p καί q, δηλαδή εἶναι ἡ τομή τους. Ἡ εὐθεία AB τέμνει τή γ (σχ. 30) στά σημεῖα Δ,Ε,Ζ,Η, ἀφοῦ βρίσκεται στό ἴδιο ἐπίπεδο q μέ αὐτή.



(σχ. 30)

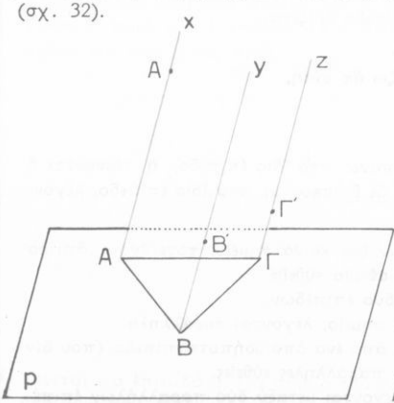
2. **Δίνονται δύο ἀσύμβατες εὐθεῖες ε_1 καί ε_2. Νά σχεδιάσετε ἕνα ἐπίπεδο, πού νά διέρχεται ἀπό τήν ε_1 καί νά εἶναι παράλληλο πρός τήν ε_2.**

Λύση: Γιά νά εἶναι ἕνα ἐπίπεδο παράλληλο πρός τήν εὐθεία ε_2 ἀρκεῖ μιά εὐθεία του νά εἶναι παράλληλη πρός τήν εὐθεία ε_2. Ἄν λοιπόν ἀπό ἕνα σημεῖο A τῆς εὐθείας ε_1 φέρουμε μιά εὐθεία Ax παράλληλη πρός τήν ε_2, οἱ εὐθεῖες ε_1 καί Ax ὁρίζουν ἕνα ἐπίπεδο p (σχ. 31) τό ὁποῖο εἶναι παράλληλο πρός τήν ε_2 (ἀφοῦ ἡ ε_2 εἶναι παράλληλη πρός τήν εὐθεία του Ax).

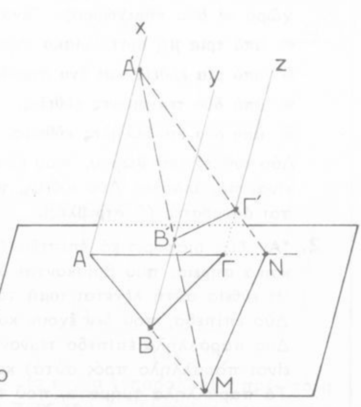


(σχ. 31)

3. **Δίνονται ἕνα ἐπίπεδο p καί τρία σημεῖα του A,B,Γ μή συνευθειακά. Φέρνουμε στόν ἴδιο ἡμιχῶρο τρεῖς παράλληλες ἡμιευθεῖες Ax, By, Γz. Πάνω στίς Ax, By, Γz, παίρνουμε σημεῖα A΄,B΄,Γ΄ ἀντιστοίχως ἔτσι, πού ἡ A΄B΄ νά μήν εἶναι παράλληλη στήν AB καί ἡ A΄Γ΄ νά μήν εἶναι παράλληλη στήν AΓ. Νά βρεῖτε α) τήν τομή τῆς A΄B΄ μέ τό p, β) τήν τομή τῆς A΄Γ΄ μέ τό p γ) τήν τομή τῶν ἐπιπέδων p καί A΄B΄Γ΄** (σχ. 32).



(σχ. 32)



(σχ. 33)

Λύση: Ἡ Α'Β' εἶναι συνεπίπεδη μέ τήν ΑΒ καί δέν εἶναι παράλληλη πρός αὐτή, ἄρα τήν τέμνει σέ σημεῖο Μ. Ἡ ΑΒ εἶναι εὐθεία τοῦ p, ἑπομένως ἡ Α'Β' τέμνει τό p στό Μ. Ὁμοίως ἡ Α'Γ' τέμνει τήν ΑΓ (ἑπομένως καί τό p) στό Ν.
Τά δύο ἐπίπεδα Α'Β'Γ' καί p ἔχουν κοινά τά σημεῖα Μ,Ν καί συνεπῶς τομή τους εἶναι ἡ εὐθεία ΜΝ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

8. Πάρτε δύο σημεῖα Α,Β πάνω σέ ἕνα ἐπίπεδο q καί ἕνα σημεῖο Γ ἔξω ἀπό τό q. Ἄν τό ἐπίπεδο πού ὁρίζεται ἀπό τά Α,Β,Γ εἶναι τό p, Δ εἶναι τό μέσο τοῦ τμήματος ΓΒ καί Μ εἶναι τό μέσο τοῦ ΑΔ, νά δικαιολογήσετε γιατί οἱ εὐθεῖες ΑΔ καί ΓΜ βρίσκονται πάνω στό ἐπίπεδο p καί να βρεῖτε τήν τομή τῆς εὐθείας ΓΜ μέ τό ἐπίπεδο q.

9. Δίνονται δύο ἐπίπεδα p καί q, πού τέμνονται κατά τήν εὐθεία ε. Ἀπό ἕνα σημεῖο Α τοῦ ἐπιπέδου p φέρνουμε εὐθεία α παράλληλη πρός τήν ε. Νά δικαιολογήσετε γιατί ἡ α βρίσκεται στό p καί νά δείξετε ὅτι ἡ α **εἶναι** παράλληλη πρός τό q.

10. Ἐξετάστε ἄν οἱ παρακάτω προτάσεις εἶναι ἀληθεῖς:
- «Μία εὐθεία ε, πού εἶναι παράλληλη πρός ἕνα ἐπίπεδο q, εἶναι παράλληλη πρός ὅλες τίς εὐθεῖες τοῦ q».
- «Μία εὐθεία ε, πού εἶναι παράλληλη πρός ἕνα ἐπίπεδο q, εἶναι παράλληλη πρός ἄπειρες εὐθεῖες τοῦ q».

11. Δίνονται δύο παράλληλα ἐπίπεδα p καί q καί ἕνα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ τοῦ ἐπιπέδου p. Ἀπό τά σημεῖα Α,Β,Γ,Δ φέρνουμε παράλληλες εὐθεῖες, πού τέμνουν τό q στά σημεῖα Α',Β',Γ'Δ' ἀντιστοίχως. Νά δείξετε ὅτι: α) Τά τετράπλευρα ΑΒΒ'Α', ΒΓΓ'Β', ΓΔΔ'Γ', ΔΑΑ'Δ' εἶναι παραλληλόγραμμα. β) Τό τετράπλευρο Α'Β'Γ'Δ' εἶναι ἐπίσης παραλληλόγραμμο.

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 4

1. Βασικό γεωμετρικό σχῆμα τοῦ χώρου εἶναι τό **ἐπίπεδο**, πού χωρίζει τό χῶρο σέ δύο «**ἡμιχώρους**». Ἕνα ἐπίπεδο ὁρίζεται:
- **ἀπό τρία μή συνευθειακά σημεῖα,**
- **ἀπό μία εὐθεία καί ἕνα σημεῖο ἔξω ἀπ' αὐτή,**
- **ἀπό δύο τεμνόμενες εὐθεῖες,**
- **ἀπό δύο παράλληλες εὐθεῖες.**

Δύο εὐθεῖες τοῦ χώρου, πού εἶναι πάνω στό ἴδιο ἐπίπεδο, ἤ τέμνονται ἤ εἶναι παράλληλες. Δύο εὐθεῖες, πού δέ βρίσκονται στό ἴδιο ἐπίπεδο, λέγονται **ἀσύμβατες** (ἤ **στρεβλές**).

2. Ἄν δύο διαφορετικά ἐπίπεδα ἔχουν ἕνα κοινό σημεῖο, τότε ἔχουν ἄπειρα κοινά σημεῖα, πού βρίσκονται ὅλα σέ μία εὐθεία.
Ἡ εὐθεία αὐτή λέγεται **τομή** τῶν δύο ἐπιπέδων.
Δύο ἐπίπεδα, πού δέν ἔχουν κοινό σημεῖο, λέγονται **παράλληλα.**
Δύο παράλληλα ἐπίπεδα τέμνονται ἀπό ἕνα ὁποιοδήποτε ἐπίπεδο (πού δέν εἶναι παράλληλο πρός αὐτά) κατά παράλληλες εὐθεῖες.
Τά παράλληλα τμήματα, πού περιέχονται μεταξύ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων, εἶναι ἴσα.

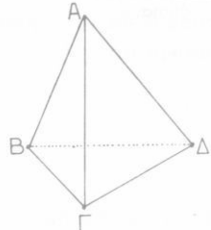
3. Μία εὐθεία ε, πού διέρχεται ἀπό δύο σημεῖα ἑνός ἐπιπέδου q, βρίσκεται πάνω στό ἐπίπεδο. Ἔτσι κάθε εὐθεία τοῦ χώρου, πού δέν περιέχεται σ' ἕνα ἐπίπεδο q,

- ἤ ἔχει ἕνα κοινό σημεῖο μέ τό q καί τότε **τέμνει** τό q,
- ἤ δέν ἔχει κοινό σημεῖο μέ τό q καί τότε λέγεται **παράλληλη πρός τό q**.

Μία εὐθεία εἶναι παράλληλη πρός τό q, ὅταν εἶναι παράλληλη πρός μία εὐθεία τοῦ q. Ἔτσι ἀπό σημεῖο Α ἔξω ἀπό τό q μποροῦμε νά φέρουμε ἄπειρες εὐθεῖες παράλληλες πρός τό q καί ὅλες αὐτές βρίσκονται σέ ἕνα ἐπίπεδο παράλληλο πρός τό ἐπίπεδο q.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ*

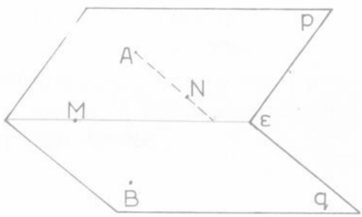
12. Δίνονται τέσσερα σημεῖα Α,Β,Γ,Δ πού δέν εἶναι συνεπίπεδα. Ὀνομάστε τά ἐπίπεδα, πού ὁρίζουν ἀνά τρία, καθώς καί τά ζεύγη τῶν ἀσύμβατων εὐθειῶν, πού τά σημεῖα αὐτά ὁρίζουν.



(σχ. 34)

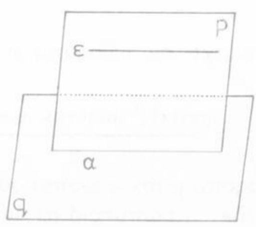
13. Τρεῖς εὐθεῖες τέμνονται ἀνά δύο σέ διαφορετικά σημεῖα. Νά δικαιολογήσετε γιατί οἱ εὐθεῖες αὐτές ἀνήκουν στό ἴδιο ἐπίπεδο.

14. Δίνονται δύο ἐπίπεδα p καί q, πού τέμνονται κατά τήν εὐθεία ε (σχ. 35) καί τά σημεῖα Α ∈ p καί Β ∈ q. Ἄν Μ εἶναι ἕνα σημεῖο τῆς ε, νά βρεθεῖ ἡ τομή τῶν ἐπιπέδων p καί ΑΜΒ, καθώς καί τῶν q καί ΑΜΒ. Ἄν Ν εἶναι ἕνα σημεῖο τοῦ p, νά βρεθεῖ ἡ τομή τῶν ἐπιπέδων q καί ΑΝΒ, καθώς καί τῶν p καί ΑΝΒ.



(σχ. 35)

15. Δίνεται ἕνα ἐπίπεδο q καί μία εὐθεία ε παράλληλη πρός αὐτό. Ἀπό τήν ε φέρνουμε ἕνα ὁποιοδήποτε ἐπίπεδο p, πού τέμνει τό q κατά εὐθεία α. Ἐξηγεῖστε γιατί ἡ ε εἶναι παράλληλη πρός τήν α.

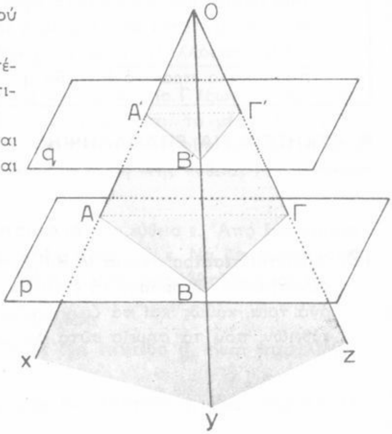


(σχ. 36)

16. Δίνεται ἕνα ἐπίπεδο q, ἕνα σημεῖο του Α καί μία εὐθεία ε παράλληλη πρός τό q. Φέρνουμε ἀπό τό Α μία εὐθεία α παράλληλη πρός τήν ε. Ἐξηγεῖστε γιατί ἡ α βρίσκεται πάνω στό ἐπίπεδο q.

17. Δίνονται δύο ἀσύμβατες εὐθεῖες ε_1 καί ε_2. Νά φέρετε δύο παράλληλα ἐπίπεδα, πού νά διέρχονται ἀπ' αὐτές.

18. Δίνονται τρεῖς ἡμιευθεῖες Ox, Oy, Oz, πού δέν εἶναι συνεπίπεδες.
Δύο παράλληλα ἐπίπεδα p καί q τίς τέμνουν στά σημεῖα Α,Β,Γ καί Α'Β',Γ' ἀντιστοίχως (σχ. 37). Νά δικαιολογήσετε
α) γιατί τά τρίγωνα ΟΑ'Β' καί ΟΑΒ εἶναι ὅμοια β) γιατί τά ΑΒΓ καί Α'Β'Γ' εἶναι ὅμοια.



(σχ. 37)

5ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Σύνθεση προτάσεων.

5.1. Στή Β' τάξη μάθαμε ὅτι ἕνα σύνολο ἀπό λέξεις καί σύμβολα, πού ἔχει κάποιο νοητικό περιεχόμενο, λέγεται **ἔκφραση** καί κάθε ἔκφραση, πού μπορεῖ νά χαρακτηρισθεῖ ὡς «ἀληθής» ἤ «ψευδής», λέγεται **πρόταση.** Ἄς δοῦμε μερικές προτάσεις:

«ὁ 8 εἶναι ἄρτιος» (ἀληθής)
«ὁ 5 εἶναι περιττός» (ἀληθής)
«ὁ 5 διαιρεῖ τόν 8» (ψευδής)

Ἄν συνδέσουμε δυό προτάσεις μέ ὁρισμένες λέξεις, μποροῦμε νά σχηματίσουμε ἄλλες *πιό σύνθετες* προτάσεις. Ἔτσι π.χ. ἑνώνοντας δύο ἀπό τίς παραπάνω προτάσεις μέ τή λέξη **«καί»** σχηματίζουμε τίς προτάσεις:

«ὁ 8 εἶναι ἄρτιος καί ὁ 5 εἶναι περιττός» (ἀληθής)
«ὁ 8 εἶναι ἄρτιος καί ὁ 5 διαιρεῖ τόν 8» (ψευδής)
«ὁ 5 εἶναι περιττός καί ὁ 5 διαιρεῖ τόν 8» (ψευδής)

Βλέπουμε λοιπόν ὅτι ἀπό δύο ὁποιεσδήποτε προτάσεις p καί q μποροῦμε νά σχηματίσουμε τήν πρόταση *«p καί q»*, ἡ ὁποία εἶναι ἀληθής, μόνο ὅταν καί οἱ δυό προτάσεις p καί q εἶναι ἀληθεῖς.

Ἡ συνεπαγωγή.

5.2. Ἄς θεωρήσουμε τούς δύο προτασιακούς τύπους:

p : ὁ x εἶναι κάτοικος Ἀθηνῶν.
q : ὁ x εἶναι κάτοικος Ἀττικῆς.

Μέ τούς δύο αὐτούς προτασιακούς τύπους μποροῦμε νά σχηματίσουμε τόν προτασιακό τύπο:

$$\text{ἄν } \underbrace{\text{ὁ } x \text{ εἶναι κάτοικος Ἀθηνῶν}}_{p}, \text{ τότε } \underbrace{\text{ὁ } x \text{ εἶναι κάτοικος Ἀττικῆς}}_{q}.$$

Βλέπουμε δηλαδή ὅτι ἀπό δύο προτασιακούς τύπους p καί q μποροῦμε νά σχηματίσουμε ἕνα νέο προτασιακό τύπο μέ τή διατύπωση: «ἄν p τότε q». Αὐτός ὁ προτασιακός τύπος λέγεται **συνεπαγωγή** καί σημειώνεται

$$\mathbf{p \Rightarrow q}$$

Σέ μιά συνεπαγωγή $p \Rightarrow q$ ὁ προτασιακός τύπος p λέγεται **ὑπόθεση** καί ὁ προτασιακός τύπος q λέγεται **συμπέρασμα.**

Ἐπειδή κάθε κάτοικος Ἀθηνῶν εἶναι καί κάτοικος Ἀττικῆς, τό σύνολο ἀλήθειας τοῦ p εἶναι ὑποσύνολο τοῦ συνόλου ἀλήθειας τοῦ q καὶ τότε λέμε ὅτι ἡ συνεπαγωγή $p \Rightarrow q$ εἶναι **ἀληθής.** Ἐπίσης ἡ συνεπαγωγή

$$\underbrace{\text{ἄν οἱ γωνίες } x \text{ καί } y \text{ εἶναι κατακορυφήν}}_{p}, \text{ τότε } \underbrace{x = y}_{q}$$

εἶναι «ἀληθής», γιατί τό σύνολο ἀλήθειας A τοῦ p εἶναι ὑποσύνολο τοῦ συνόλου ἀλήθειας B τοῦ q, (ἀφοῦ τὸ A ἀποτελεῖται ἀπό ὅλα τά ζεύγη τῶν κατακορυφήν γωνιῶν καί τά ζεύγη αὐτά περιέχονται στό σύνολο B τό ὁποῖο ἀποτελεῖται ἀπό ὅλα τά ζεύγη τῶν ἴσων γωνιῶν). Γενικά λοιπόν θά λέμε ὅτι:

> Μία συνεπαγωγή $p \Rightarrow q$ στήν ὁποία τά p καί q εἶναι προτασιακοί τύποι μέ σύνολα ἀλήθειας A καί B ἀντιστοίχως, εἶναι **ἀληθής**, ὅταν $A \subseteq B$.

Παράδειγμα 1. Ἄν ΑΒΓΔ εἶναι τετράπλευρο, τότε ἀληθεύουν οἱ συνεπαγωγές :

I. (ΑΒΓΔ εἶναι τετράγωνο) $\Rightarrow$ (ΑΒΓΔ εἶναι ρόμβος)

II. (ΑΒΓΔ εἶναι ρόμβος) $\Rightarrow$ (τό ΑΒΓΔ ἔχει ΑΓ $\perp$ ΒΔ).

Παράδειγμα 2. Ἄν $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ εἶναι εὐθεῖες τοῦ ἐπιπέδου, τότε ἀληθεύουν οἱ συνεπαγωγές:

I $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ καί $\varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3 \Rightarrow \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_3$

II $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$ καί $\varepsilon_2 \perp \varepsilon_3 \Rightarrow \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_3$

Ἐπειδή καί οἱ ἐξισώσεις εἶναι προτασιακοί τύποι, καταλαβαίνουμε ὅτι, ἄν τά σύνολα ἀλήθειας A καί B δύο ἐξισώσεων $P_1 = 0$ καί $P_2 = 0$ εἶναι τέτοια ὥστε $A \subseteq B$, μποροῦμε νά γράφουμε

$$P_1 = 0 \Rightarrow P_2 = 0$$

Ἔτσι π.χ. οἱ δύο ἐξισώσεις $x - 2 = 0$ καί $x^2 - 4 = 0$ ἔχουν σύνολα ἀλήθειας τά $A = \{2\}$ καί $B = \{-2, 2\}$ ἀντιστοίχως καί εἶναι $A \subseteq B$. Συνεπῶς μποροῦμε νά γράψουμε

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0$$

Ἄς θεωρήσουμε τέλος τρεῖς προτασιακούς τύπους p, q, r μέ σύνολα ἀλήθειας A,B,Γ ἀντιστοίχως καί ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ἀληθεύουν οἱ συνεπαγωγές $p \Rightarrow q$ καί $q \Rightarrow r$. Ἀφοῦ ἀληθεύει ἡ $p \Rightarrow q$, θά ἔχουμε $A \subseteq B$ καί, ἀφοῦ ἀληθεύει ἡ $q \Rightarrow r$, θά ἔχουμε $B \subseteq \Gamma$. Τότε ὅμως θά εἶναι καί $A \subseteq \Gamma$, ὁπότε ἀληθεύει καί ἡ συνεπαγωγή $p \Rightarrow r$. Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι:

> Ἄν ἀληθεύουν οἱ συνεπαγωγές $p \Rightarrow q$ καί $q \Rightarrow r$, τότε ἀληθεύει καί ἡ συνεπαγωγή $p \Rightarrow r$.

Βλέπουμε δηλαδή ὅτι στή *συνεπαγωγή* ἰσχύει ἡ μεταβατική ἰδιότητα.

Ἀντίστροφη πρόταση (1)

5.3. Ἀπό τίς ἀνοικτές προτάσεις

p : ὁ x εἶναι κάτοικος Ἀθηνῶν.

q : ὁ x εἶναι κάτοικος Ἀττικῆς.

σχηματίσαμε τή συνεπαγωγή

$$p \Rightarrow q : \text{ἄν } \underbrace{\text{ὁ } x \text{ εἶναι κάτοικος Ἀθηνῶν}}_{p}, \text{ τότε } \underbrace{\text{ὁ } x \text{ εἶναι κάτοικος Ἀττικῆς}}_{q}$$

Μέ τίς ἴδιες ἀνοικτές προτάσεις p καί q μποροῦμε νά σχηματίσουμε καί μία ἄλλη συνεπαγωγή παίρνοντας τήν q γιά ὑπόθεση καί τήν p γιά συμπέρασμα. Ἡ συνεπαγωγή αὐτή

$$q \Rightarrow p : \underbrace{\text{ἄν ὁ } x \text{ εἶναι κάτοικος Ἀττικῆς}}_{q}, \text{ τότε } \underbrace{\text{ὁ } x \text{ εἶναι κάτοικος Ἀθηνῶν}}_{p}$$

λέγεται **ἀντίστροφη πρόταση** τῆς $p \Rightarrow q$. Εἶναι φανερό ὅτι ἡ ἀντίστροφη αὐτή πρόταση $q \Rightarrow p$ δέν ἀληθεύει, ἐνῶ ἀληθεύει ἡ $p \Rightarrow q$.

Ἐπίσης, ἀπό τίς δύο ἀνοικτές προτάσεις

p : *ὁ α εἶναι ἄρτιος* , q : *ὁ α διαιρεῖται διά 4*

μποροῦμε νά σχηματίσουμε τίς «ἀντίστροφες» προτάσεις:

$p \Rightarrow q$: *Ἄν ὁ α εἶναι ἄρτιος, τότε ὁ α διαιρεῖται διά 4*

$q \Rightarrow p$: *Ἄν ὁ α διαιρεῖται διά 4, τότε ὁ α εἶναι ἄρτιος.*

Ἀπό τίς προτάσεις αὐτές ἡ $p \Rightarrow q$ δέν ἀληθεύει, ἐνῶ ἀληθεύει ἡ ἀντίστροφή της $q \Rightarrow p$.

Ἰσοδύναμες προτάσεις.

5.4. Ἄς θεωρήσουμε τώρα τίς δύο ἀνοικτές προτάσεις

p : *ὁ α εἶναι ἄρτιος*

q : *ὁ α εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 2*

καί ἄς σχηματίσουμε μ' αὐτές τίς δύο ἀντίστροφες προτάσεις (συνεπαγωγές)

$p \Rightarrow q$: *Ἄν ὁ α εἶναι ἄρτιος, τότε ὁ α εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 2*

$q \Rightarrow p$: *Ἄν ὁ α εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 2, τότε ὁ α εἶναι ἄρτιος.*

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι ἀληθεύουν καί οἱ δύο προτάσεις $p \Rightarrow q$ καί $q \Rightarrow p$. Σέ μιά τέτοια περίπτωση λέμε ὅτι **οἱ ἀνοικτές προτάσεις p καί q εἶναι «ἰσοδύναμες»** καί γράφουμε

$$p \Leftrightarrow q$$

ὁ συμβολισμός $p \Leftrightarrow q$ παριστάνει μιά καινούργια πρόταση, πού λέγεται **ἰσοδυναμία,** καί διαβάζεται:

1. Στίς παραγράφους πού ἀκολουθοῦν οἱ προτασιακοί τύποι p, q, $p \Rightarrow q$... ἀναφέρονται ὡς «ἀνοικτές προτάσεις», ἤ καί ἁπλῶς ὡς «προτάσεις».

«$\underbrace{\text{ὁ α εἶναι ἄρτιος}}_{p}$, ἄν καί μόνο ἄν $\underbrace{\text{ὁ α εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 2}}_{q}$»

ἤ ἀκόμη

«$\underbrace{\text{ὁ α εἶναι ἄρτιος}}_{p}$, ὅταν καί μόνο ὅταν $\underbrace{\text{ὁ α εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 2}}_{q}$»

Βλέπουμε δηλαδή ὅτι τό σύμβολο τῆς ἰσοδυναμίας «$\Leftrightarrow$» διαβάζεται **«ἄν καί μόνο ἄν»** ἤ **«ὅταν καί μόνο ὅταν»**. Ἐπίσης, καταλαβαίνουμε ὅτι ἡ ἰσοδυναμία $p \Leftrightarrow q$ εἶναι μία πρόταση, πού ἀντικαθιστᾶ τίς δύο συνεπαγωγές $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow p$ καί γι' αὐτό πολλές φορές διαβάζεται

«ἄν p τότε q καί ἀντιστρόφως»

Γιά τόν ἴδιο λόγο τό σύμβολο τῆς ἰσοδυναμίας «$\Leftrightarrow$» λέγεται καί σύμβολο **«διπλῆς συνεπαγωγῆς»**.

5.5. Εἶναι φανερό ὅτι μία ἰσοδυναμία $p \Leftrightarrow q$ θά ἀληθεύει, μόνο ὅταν ἀληθεύουν καί οἱ δύο συνεπαγωγές

$$p \Rightarrow q \quad , \quad q \Rightarrow p$$

Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι οἱ δύο ἀνοικτές προτάσεις (προτασιακοί τύποι) p καί q ἔχουν σύνολα ἀλήθειας Α καί Β ἀντιστοίχως. Γιά νά ἀληθεύει ἡ συνεπαγωγή $p \Rightarrow q$, θά πρέπει νά ἔχουμε $A \subseteq B$, ἐνῶ γιά νά ἀληθεύει ἡ $q \Rightarrow p$, θά πρέπει νά ἔχουμε $B \subseteq A$. Ἔτσι, γιά νά ἀληθεύουν συγχρόνως οἱ συνεπαγωγές $p \Rightarrow q$ καί $q \Rightarrow p$, θά πρέπει νά ἔχουμε $A = B$ (ἀφοῦ, ἀπό τήν ἀντισυμμετρική ἰδιότητα τῆς σχέσεως $\subseteq$, οἱ $A \subseteq B$ καί $B \subseteq A$ δίνουν $A = B$). Βλέπουμε δηλαδή ὅτι:

> Μία ἰσοδυναμία $p \Leftrightarrow q$ ἀληθεύει μόνο ὅταν οἱ προτασιακοί τύποι p καί q ἔχουν τό ἴδιο σύνολο ἀλήθειας.

Παράδειγμα 1. Ἄν x εἶναι πραγματικός ἀριθμός, ἀληθεύουν οἱ ἰσοδυναμίες:

I. $x \geq 0 \Leftrightarrow |x| = x$

II. $x \leq 0 \Leftrightarrow |x| = -x$

Παράδειγμα 2. Σέ ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ ἔχουμε τίς ἰσοδυναμίες:

I. $AB = A\Gamma \Leftrightarrow \widehat{B} = \widehat{\Gamma}$

II. $\widehat{A} = 90^0 \Leftrightarrow (B\Gamma)^2 = (A\Gamma)^2 + (AB)^2$

Ἐπειδή καί οἱ ἐξισώσεις (ἤ ἀνισώσεις) εἶναι προτασιακοί τύποι, καταλαβαίνουμε ὅτι, ἄν δύο ἐξισώσεις $P_1 = 0$ καί $P_2 = 0$ ἔχουν τό ἴδιο σύνολο ἀλήθειας, μποροῦμε νά γράφουμε

$$P_1 = 0 \Leftrightarrow P_2 = 0$$

Ἔτσι π.χ. οἱ δύο ἐξισώσεις $2x + 7 = 5$ καί $2x = 5 - 7$ ἔχουν τό ἴδιο σύνολο ἀλήθειας καί συνεπῶς μποροῦμε νά γράψουμε:

$$2x + 7 = 5 \Leftrightarrow 2x = 5 - 7.$$

1. Ποιές ἀπό τίς παρακάτω προτάσεις εἶναι ἀληθεῖς καί ποιές ὄχι.
α) «ὁ 5 διαιρεῖ τόν 12» β) «ὁ 12 εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 6»
γ) «ὁ 2 εἶναι ἄρτιος καί ὁ 4 περιττός» δ) «$\alpha \in N$ καί $\alpha \notin N$»
ε) «ὁ x εἶναι ἄρρητος ἀριθμός».

2. Θεωροῦμε τή συνεπαγωγή: *Ἄν δύο γωνίες εἶναι κατακορυφήν, τότε εἶναι ἴσες.* Νά διατυπώσετε τήν ἀντίστροφη συνεπαγωγή καί νά ἐξετάσετε ἄν εἶναι ἀληθής.

3. Θεωροῦμε τή συνεπαγωγή: $x > 1 \Rightarrow x > 0$. Νά διατυπώσετε τήν ἀντίστροφη συνεπαγωγή καί νά ἐξετάσετε ἄν ἀληθεύει.

4. Ποιές ἀπό τίς παρακάτω συνεπαγωγές εἶναι ἀληθεῖς;
α) $x+1>3 \Rightarrow x>2$
β) $x^2=9 \Rightarrow x=3$
γ) $x=3 \Rightarrow x^2=9$
δ) $x>-1 \Rightarrow x>0$

5. Ποιές ἀπό τίς παρακάτω ἰσοδυναμίες εἶναι ἀληθεῖς;
α) $\alpha+3=\beta+3 \Leftrightarrow \alpha=\beta$
β) $2\alpha=2\beta \Leftrightarrow \alpha=\beta$
γ) $\alpha^2=1 \Leftrightarrow \alpha=1$

6. Σέ τρίγωνο ΑΒΓ, ποιές ἀπό τίς παρακάτω προτάσεις εἶναι ἀληθεῖς καί ποιές ὄχι.
α) $(AB=A\Gamma=B\Gamma) \Rightarrow (\widehat{A}=\widehat{B}=\widehat{\Gamma})$
β) $\widehat{A}+\widehat{B}=90^\circ \Leftrightarrow \widehat{\Gamma}=90^\circ$

Ἀπόδειξη μιᾶς συνεπαγωγῆς.

5·6· Πολλές φορές ἡ ἀλήθεια μιᾶς συνεπαγωγῆς $p \Rightarrow q$ εἶναι φανερή ἀπό κάποιο ὁρισμό. Τέτοιες συνεπαγωγές π.χ. εἶναι οἱ

«*Ἄν ὁ α εἶναι ἄρτιος, τότε ὁ α εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 2*»
«*Ἄν ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμο, τότε $AB \parallel \Gamma\Delta$ καί $B\Gamma \parallel A\Delta$*».

Σέ ἄλλες περιπτώσεις ἡ ἀλήθεια μιᾶς συνεπαγωγῆς δέν εἶναι φανερή, ἀλλά προκύπτει ἀπό μιά σειρά συλλογισμῶν. Οἱ συλλογισμοί, μέ τούς ὁποίους προκύπτει ἡ ἀλήθεια μιᾶς συνεπαγωγῆς, ἀποτελοῦν τήν **ἀπόδειξή** της.

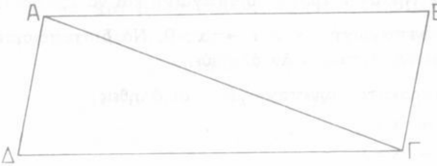
Γιά νά ἀποδείξουμε μιά συνεπαγωγή $p \Rightarrow q$, δεχόμαστε τήν ἀλήθεια τῆς ὑποθέσεώς της p καί προσπαθοῦμε νά καταλήξουμε μέ συλλογισμούς στήν ἀλήθεια τοῦ συμπεράσματός της.

Παράδειγμα: Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι, ἄν τό τετράπλευρο ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμο, τότε οἱ ἀπέναντι πλευρές του εἶναι ἴσες.

Ἄς θεωρήσουμε τίς δύο προτάσεις:

p : «*τό ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμο*»
q : «*οἱ ἀπέναντι πλευρές τοῦ ΑΒΓΔ εἶναι ἴσες*».

Θέλουμε νά ἀποδείξουμε τή συνεπαγωγή $p \Rightarrow q$. Ἡ ἀπόδειξή της θά προκύψει ἀπό μιά σειρά συλλογισμῶν στήν ὁποία κάθε πρόταση εἶναι λογική συνέπεια τῶν προηγουμένων ἤ ἄλλων γνωστῶν προτάσεων. Ἡ σειρά αὐτή τῶν συλλογισμῶν φαίνεται στήν παρακάτω διάταξη ὅπου χωρίσαμε τή σελίδα σέ δύο στῆλες. Στήν πρώτη στήλη γράψαμε τίς προτάσεις τοῦ συλλογισμοῦ, ἐνῶ στή δεύτερη στήλη γράψαμε τίς αἰτιολογήσεις τους.



(σχ. 1)

Ἀπόδειξη

Προτάσεις	*Αἰτιολογήσεις*
1. Τό τετράπλευρο ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμο.	1. Ὑπόθεση.
2. Φέρνουμε τή διαγώνιο ΑΓ	2. Ὑπάρχει μιά μόνο εὐθεία, πού συνδέει τά σημεῖα Α καί Β.
3. $AB \parallel \Delta\Gamma$ καί $A\Delta \parallel B\Gamma$	3. Ὁρισμός παραλληλογράμμου.
4. $B\widehat{\Gamma A} = \Delta\widehat{A\Gamma}$	4. Δύο παράλληλες εὐθεῖες πού τέμνονται ἀπό ἀπό μιά τρίτη σχηματίζουν τίς ἐντός ἐναλλάξ γωνίες τους ἴσες.
5. $B\widehat{A\Gamma} = \Delta\widehat{\Gamma A}$	5. Ὁμοίως μέ 4.
6. $A\Gamma = A\Gamma$	6. Ταυτότητα.
7. $\overset{\triangle}{AB\Gamma} = \overset{\triangle}{A\Delta\Gamma}$	7. Ἀπό τίς 4,5,6 (κριτήριο ἰσότητας τριγώνων).
8. $AB = \Delta\Gamma$ καί $A\Delta = B\Gamma$	8. Ἀπό τήν 7 τά τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΔΓ εἶναι ἴσα καί θά ἔχουν τίς ἀντίστοιχες πλευρές τους ἴσες.

Ἀπό τό παράδειγμά μας αὐτό καταλαβαίνουμε ὅτι, γιά νά ἀποδείξουμε μιά συνεπαγωγή $p \Rightarrow q$, δεχόμαστε τήν ἀλήθεια τῆς ὑποθέσεως p καί βρίσκουμε, μέ τή βοήθεια ὁρισμῶν ἤ γνωστῶν ἰδιοτήτων ἤ πράξεων, διαδοχικές προτάσεις πού ἀληθεύουν. Ἡ τελευταία ἀπό τίς διαδοχικές αὐτές προτάσεις εἶναι τό συμπέρασμα q. Βλέπουμε λοιπόν ὅτι γιά νά φθάσουμε στό συμπέρασμα q κάνουμε ὁρισμένα *λογικά βήματα*, πού καθένα τους μᾶς φέρνει πιό κοντά στό σκοπό μας, δηλαδή πιό κοντά στήν ἀλήθεια τῆς q. Κάθε τέτοιο *λογικό βῆμα* εἶναι μιά ἐνδιάμεση πρόταση τῆς ὁποίας ἡ ἀλήθεια πρέπει νά αἰτιολογεῖται. Πολλές φορές μία πρόταση, πού θέλουμε νά ἀποδείξουμε, δέν εἶναι διατυπωμένη μέ τή μορφή «συνεπαγωγῆς» καί τότε ἡ διατύπωση αὐτή πρέπει νά γίνει ἀπό ἐμᾶς. Ἔτσι π.χ. γιά νά ἀποδείξουμε τήν πρόταση:

«Σ' ἕνα παραλληλόγραμμο οἱ ἀπέναντι πλευρές εἶναι ἴσες», θά πρέπει πρῶτα νά τή διατυπώσουμε μέ τή μορφή «συνεπαγωγῆς», ὅπως ἀκριβῶς κάναμε στό προηγούμενο παράδειγμα.

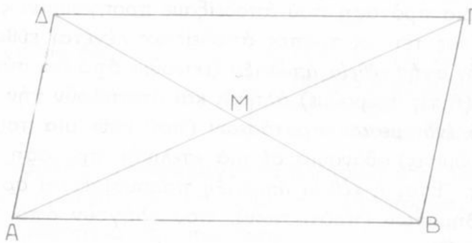
Εἶναι φανερό ὅτι μιά πρόταση πού ἀποδείχτηκε, μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ σάν λογικό βῆμα (ἐνδιάμεση πρόταση) στήν ἀπόδειξη μιᾶς ἄλλης προτάσεως.

Εὐθεία ἀπόδειξη.

5.7. Ἄς προσπαθήσουμε νά ἀποδείξουμε τήν πρόταση:

«Οἱ διαγώνιοι τοῦ παραλληλογράμμου διχοτομοῦνται».

Ἀφοῦ σχεδιάσουμε ἕνα παραλληλόγραμμο καί βάλουμε τά γράμματα Α,Β,Γ,Δ στίς κορυφές του (βλ. σχ. 2), ξεχωρίζουμε τήν ὑπόθεση ἀπό τό συμπέρασμα.



(σχ. 2)

Ὑπόθεση: Τό ΑΒΓΔ εἶναι ἕνα παραλληλόγραμμο πού οἱ διαγώνιες του ΑΓ καί ΒΔ τέμνονται στό Μ.

Συμπέρασμα: ΑΜ = ΜΓ καί ΒΜ = ΜΔ.

Ἡ σειρά τῶν συλλογισμῶν πού ἀποτελεῖ τήν ἀπόδειξη τῆς προτάσεως φαίνεται στήν παρακάτω διάταξη:

ʼΑπόδειξη

Προτάσεις	Αἰτιολογήσεις
1. ΑΒΓΔ εἶναι ἕνα παραλληλόγραμμο μέ ἀπέναντι πλευρές ΑΒ καί ΔΓ	1. ʻΥπόθεση.
2. $AB \parallel \Delta\Gamma$	2. ʻΟρισμός παραλληλογράμμου.
3. $\widehat{\Gamma AB} = \widehat{A\Gamma\Delta}$	3. Δύο παράλληλες εὐθεῖες πού τέμνονται ἀπό μία τρίτη ἔχουν τίς ἐντός ἐναλλάξ γωνίες ἴσες.
4. ʻΟμοίως $\widehat{AB\Delta} = \widehat{B\Delta\Gamma}$	4. Βλ. βῆμα 3.
5. $AB = \Delta\Gamma$	5. Οἱ ἀπέναντι πλευρές τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι ἴσες.
6. $\overset{\Delta}{ABM} = \overset{\Delta}{\Delta\Gamma M}$	6. ʼΑπό κριτήριο ἰσότητας δύο τριγώνων (βλ. βήματα 3,4,5).
7. $\therefore$(1) $AM = M\Gamma$, $BM = M\Delta$	7. Τά ἴσα τρίγωνα ἔχουν ἴσες τίς ἀντίστοιχες πλευρές τους (βῆμα 6).

Βλέπουμε λοιπόν ὅτι, γιά νά ἀποδείξουμε τήν παραπάνω πρόταση, ξεκινήσαμε πάλι ἀπό τήν ὑπόθεσή μας (πρόταση 1) καί μέ *λογικά βήματα* (προτάσεις 2,3,4,...) φθάσαμε στό συμπέρασμά μας (πρόταση 7). Κάθε «*βῆμα*» γινόταν, ἀφοῦ μᾶς τό ἐπέτρεπε κάποιος ὁρισμός ἤ κάποια γνωστή πρόταση ἤ κάποια πρόταση πού ἀποδείξαμε προηγουμένως (ὅπως π.χ. στό βῆμα 5). ῞Ενας τέτοιος τρόπος ἀποδείξεως λέγεται **εὐθεία ἀπόδειξη.**

Γενικά λοιπόν στήν *εὐθεία ἀπόδειξη* ξεκινοῦμε ἀπό ἕνα σύνολο προτάσεων, πού εἶναι (ἤ τίς θεωροῦμε) ἀληθεῖς καί ἀποτελοῦν τήν *ὑπόθεσή* μας, καί μέ μιά σειρά ἐνδιάμεσων προτάσεων (πού κάθε μία τους προκύπτει ἀπό τίς προηγούμενες) φθάνουμε σέ μιά «τελική» πρόταση, πού εἶναι τό συμπέρασμά μας. ῎Ετσι ἡ *εὐθεία ἀπόδειξη* παρουσιάζεται σάν μιά «συνέχεια» λογικῶν βημάτων (προτάσεων), πού ὁδηγοῦν ἀπό τήν ὑπόθεση στό συμπέρασμα.(2)

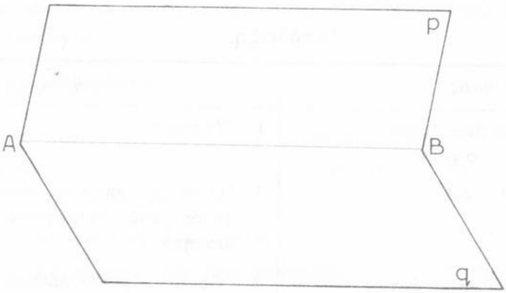
1. Πολλές φορές τό συμπέρασμα σημειώνεται μέ τό σύμβολο $\therefore$

2. ʻΟ μεγάλος Γερμανός μαθηματικός D. Hilbert (1862-1943) εἶχε πεῖ ὅτι: «*Τά μαθηματικά δέν εἶναι τίποτα περισσότερο ἀπό ἕνα παιγνίδι, τό ὁποῖο παίζεται ἐπάνω σ᾽ ἕνα φύλλο χαρτί μέ μερικούς ἁπλούς κανόνες καί σύμβολα*».

῎Ετσι μποροῦμε νά ποῦμε ὅτι καί ἡ «ἀπόδειξη» εἶναι ἕνα παιγνίδι λογικῶν βημάτων πού παίζεται μέ προτάσεις. ʼΑφετηρία τοῦ παιγνιδιοῦ εἶναι ἡ «ὑπόθεση» μας, ἐνῶ κάθε λογικό βῆμα εἶναι μία πρόταση, πού προκύπτει ἀπό τίς προηγούμενες μέ κάποιον κανόνα καί μᾶς φέρνει πιό κοντά στόν τελικό σκοπό μας. Τό παιγνίδι τελειώνει ὅταν φθάσουμε στό «συμπέρασμά» μας.

5.8. Ἄς δοῦμε τήν ἀπόδειξη μιᾶς ἀκόμη προτάσεως τῆς γεωμετρίας ἀπό τό κεφ. 4.

«Ἡ τομή δύο διαφορετικῶν ἐπιπέδων, πού ἔχουν δύο κοινά σημεῖα, εἶναι εὐθεία».



Ὑπόθεση: Τά ἐπίπεδα p καί q ἔχουν κοινά τά σημεῖα A καί B.
Συμπέρασμα: Ἡ τομή τους εἶναι εὐθεία.

Ἀπόδειξη

Προτάσεις	*Αἰτιολογήσεις*
1. p καί q ἐπίπεδα	1. Ὑπόθεση.
2. $A \in (p \cap q)$ καί $B \in (p \cap q)$	2. Ὑπόθεση.
3. Ἡ AB ἀνήκει καί στό p καί στό q	3. Ἄν A καί B εἶναι δύο σημεῖα ἑνός ἐπιπέδου, τότε ἡ εὐθεία AB ἀνήκει στό ἐπίπεδο.
4. $\therefore\ p \cap q =$ εὐθεία AB	4. Ἀπό τήν (3) καί τή σκέψη πώς τά ἐπίπεδα p καί q δέν ἔχουν ἄλλο κοινό σημεῖο ἔξω ἀπό τήν AB (γιατί, ἄν εἶχαν, θά ταυτίζονταν).

Ἀπό τά παραπάνω παραδείγματα βλέπουμε ὅτι γιά νά ἀποδείξουμε μιά γεωμετρική πρόταση, ἀκολουθοῦμε τήν ἑξῆς πορεία:

- Μελετοῦμε προσεκτικά τήν πρόταση.
- Σχεδιάζουμε τό σχετικό σχῆμα καί ὀνομάζουμε τά διάφορα στοιχεῖα του.
- Μεταφέρουμε τήν πρόταση στό σχῆμα πού σχεδιάσαμε· ξεχωρίζουμε τήν ὑπόθεσή της p, ἀπό τό συμπέρασμά της q γράφοντας:
  Ὑπόθεση: p
  Συμπέρασμα: q
  ἤ διατυπώνουμε τήν πρόταση μέ μορφή συνεπαγωγῆς $p \Rightarrow q$.
- Ἀρχίζοντας ἀπό τήν πρόταση p φθάνουμε στήν πρόταση q μέ μιά σειρά λογικῶν βημάτων.

5.9. Ἄς δοῦμε τέλος καί δύο παραδείγματα ἀπό τήν Ἄλγεβρα.

1. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι, ἄν ἕνας ἀριθμός εἶναι ἄρτιος, τότε καί τό τετράγωνό του εἶναι ἄρτιος ἀριθμός.

Ὑπόθεση: $\alpha=2\nu$ (ἄρτιος), $\nu\in N$

Συμπέρασμα: α^2 εἶναι ἄρτιος

Ἀπόδειξη.

Προτάσεις	*Αἰτιολογήσεις*
1. ὁ ἀριθμός α εἶναι ἄρτιος: $\alpha = 2\nu$	1. Ὑπόθεση.
2. $\alpha^2 = (2\nu)^2 = 4\nu^2$	2. Ὅταν ὑψώνουμε τά δύο μέλη μιᾶς ἰσότητας στό τετράγωνο, προκύπτει ἰσότητα.
3. $\therefore\ \alpha^2 = 2.(2\nu^2) =$ ἄρτιος	3. Ὁρισμός ἄρτιου ἀριθμοῦ (ὅταν $\nu\in N$ καί $2\nu^2\in N$).

Ἡ παραπάνω ἀπόδειξη γράφεται πιό σύντομα μέ διαδοχικές συνεπαγωγές:

$$\alpha = \text{ἄρτιος} \Rightarrow \alpha = 2\nu \Rightarrow \alpha^2 = 4\nu^2 \Rightarrow \alpha^2 = 2(2\nu^2) \Rightarrow \alpha^2 = \text{ἄρτιος}$$

2. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ὁ ἀριθμός $\nu^3-\nu$, ὅπου $\nu \in N^*$, διαιρεῖται μέ τόν 6.

Ὑπόθεση: $\nu\in N^*$

Συμπέρασμα: Ὁ 6 διαιρεῖ τόν φυσικό $\nu^3-\nu$

Ἀπόδειξη

Προτάσεις	*Αἰτιολογήσεις*
1. $\nu^3-\nu = \nu\ (\nu^2-1)$	1. Ἐπιμεριστική ἰδιότητα.
2. $\nu^3-\nu = \nu\ (\nu+1)\ (\nu-1)$	2. Ἀπό τήν (1) καί τήν ταυτότητα $\alpha^2-\beta^2 = (\alpha+\beta)\ (\alpha-\beta)$.
3. ὁ 2 διαιρεῖ τόν ν ἤ τόν $\nu+1$	3. Ἀπό δύο διαδοχικούς φυσικούς ἀριθμούς ὁ ἕνας εἶναι ἄρτιος.
4. ὁ 3 διαιρεῖ τόν $\nu-1$ ἤ τόν ν ἤ τόν $\nu+1$	4. Ἀπό τούς τρεῖς διαδοχικούς φυσικούς ἀριθμούς $\nu-1$, ν, $\nu+1$, ὁ ἕνας εἶναι ὁπωσδήποτε πολλαπλάσιο τοῦ 3.
5. ὁ 2 διαιρεῖ τό γινόμενο $(\nu-1)\ \nu\ (\nu+1)$	5. Ὅταν ἕνας φυσικός ἀριθμός διαιρεῖ ἕναν παράγοντα ἑνός γινομένου, τότε διαιρεῖ καί τό γινόμενο.
6. ὁ 3 διαιρεῖ τό γινόμενο $(\nu-1)\ \nu\ (\nu+1)$	6. Ὁμοίως μέ τήν (5).
7. ὁ $6=2.3$ διαιρεῖ τόν ἀκέραιο $\nu^3-\nu = (\nu-1)\ \nu\ (\nu+1)$	7. Ὅταν ἕνας ἀκέραιος ἀριθμός διαιρεῖται ἀπό δύο πρώτους μεταξύ τους ἀριθμούς, διαιρεῖται καί ἀπό τό γινόμενό τους.

Στά προηγούμενα παραδείγματα γράψαμε τίς ἀποδείξεις τους μέ μιά διάταξη, ἡ ὁποία ἐπισημαίνει τήν αἰτιολόγηση κάθε προτάσεως πού χρησιμοποιήσαμε. Συνήθως ὅμως γράφουμε ἤ διατυπώνουμε τίς ἀποδείξεις σέ «συνεχή» λόγο (βλ. § 1.10,I) καί τότε πρέπει νά εἴμαστε πολύ προσεκτικοί, γιά νά μή μένει καμιά πρόταση, ἀπό ἐκεῖνες πού χρησιμοποιοῦμε, δίχως αἰτιολογία.

Ἀντίθετες προτάσεις

5.10. Δύο προτάσεις λέγονται **ἀντίθετες,** ἄν εἶναι τέτοιες, ὥστε, ὅταν ἡ μία εἶναι ἀληθής, ἡ ἄλλη νά εἶναι ψευδής καί ἀντιστρόφως. Ἔτσι π.χ. ἀντίθετες προτάσεις εἶναι οἱ

«ὁ οὐρανός ἔχει σύννεφα»

«ὁ οὐρανός δέν ἔχει σύννεφα».

Ὅταν ἔχουμε δύο τέτοιες προτάσεις, ἡ κάθε μία λέγεται **ἀντίθετη πρόταση** ἤ **ἄρνηση** τῆς ἄλλης καί, ἄν ἡ μία σημειωθεῖ μέ p, ἡ ἄλλη σημειώνεται μέ p' ἤ $\sim p$ καί διαβάζεται **«ὄχι p»**.

Δύο ἄλλες ἀντίθετες προτάσεις εἶναι οἱ

p : *«ὁ α εἶναι ἄρτιος»*, p' : *«ὁ α δέν εἶναι ἄρτιος».*

Ἄν σχηματίσουμε τή σύνθετη πρόταση «p καί p'», δηλαδή τήν

«ὁ α εἶναι ἄρτιος καί ὁ α δέν εἶναι ἄρτιος»,

βλέπουμε ὅτι αὐτή εἶναι μιά ψευδής πρόταση. Γενικά:

Ἡ σύνθετη πρόταση, πού προκύπτει, ὅταν συνδέουμε δύο ἀντίθετες προτάσεις μέ τό «καί», εἶναι πάντοτε ψευδής.

Ἔμμεση ἀπόδειξη.

5.11. Στήν § 1.2 εἴχαμε μιά πρώτη ἐπαφή μέ μιά ἀποδεικτική μέθοδο, πού λέγεται *«ἀπαγωγή σέ ἄτοπο».* Συγκεκριμένα ἀποδείξαμε ὅτι «ὁ $\sqrt{2}$ δέν εἶναι ρητός ἀριθμός» μέ τόν ἑξῆς τρόπο: Δεχτήκαμε τό ἀντίθετο· δηλαδή δεχτήκαμε ὅτι «ὁ $\sqrt{2}$ ἰσοῦται μέ τό ρητό $\frac{\alpha}{\beta}$» καί καταλήξαμε σέ *«ἀντίφαση»* ἤ ὅπως λέμε σέ *«ἄτοπο».* Ἔτσι βγάλαμε τό συμπέρασμα πώς ὁ $\sqrt{2}$ δέν εἶναι ἴσος μέ ρητό ἀριθμό.

Ἄς ἐφαρμόσουμε τώρα τήν ἴδια μέθοδο στήν ἀπόδειξη τῆς προτάσεως:

«Τό ἄθροισμα ἑνός ρητοῦ ἀριθμοῦ x καί ἑνός ἄρρητου ἀριθμοῦ y εἶναι ἀριθμός ἄρρητος».

Ἄν θεωρήσουμε τίς προτάσεις A: *«ὁ x εἶναι ρητός ἀριθμός»*, B: *«ὁ* *y εἶναι ἄρρητος ἀριθμός»* καί *Γ: «ὁ $x+y$ εἶναι ἄρρητος ἀριθμός»*, θέλουμε νά ἀποδείξουμε τή συνεπαγωγή

$$(\text{Α καί Β}) \Rightarrow \Gamma$$

Ἀρχίζουμε τήν ἀπόδειξη μέ τήν ἄρνηση τοῦ συμπεράσματος, δηλαδή δεχόμαστε ὅτι *«ὁ $x+y$ δέν εἶναι ἄρρητος ἀριθμός»*, δηλαδή ὅτι ὁ $x+y$ εἶναι ἕνας ρητός ἀριθμός ρ καί τότε ἔχουμε

$$x+y=\rho \Rightarrow y=\rho-x$$

Βλέπουμε τώρα ὅτι ὁ y ἰσοῦται μέ τή διαφορά $\rho-x$ δύο ρητῶν ἀριθμῶν καί συνεπῶς (ἀφοῦ ἡ διαφορά δύο ρητῶν εἶναι πάντοτε ρητός) ὁ y εἶναι ρητός ἀριθμός. Αὐτό ὅμως εἶναι ἀντιφατικό (ἄτοπο), γιατί ἀπό τήν ὑπόθεσή μας ἔχουμε δεδομένο ὅτι ὁ y εἶναι ἄρρητος. Ἔτσι, ἡ παραδοχή *«ὁ $x+y$ δέν εἶναι ἄρρητος»*, δέν εἶναι σωστή, γιατί ὁδηγεῖ σέ ἄτοπο καί ἑπομένως ὁ ἀριθμός $x+y$ εἶναι ἄρρητος.

Ἡ μέθοδος, πού χρησιμοποιήσαμε, γιά νά ἀποδείξουμε τήν παραπάνω πρόταση, λέγεται **«μέθοδος τῆς ἀπαγωγῆς σέ ἄτοπο»**. Γενικά, ὅταν θέλουμε νά ἀποδείξουμε μιά συνεπαγωγή $p \Rightarrow q$ μέ τή μέθοδο τῆς *«ἀπαγωγῆς σέ ἄτοπο»* ἀκολουθοῦμε τήν παρακάτω πορεία:

- Δεχόμαστε τήν ἄρνηση τοῦ συμπεράσματός μας q, δηλαδή δεχόμαστε ὅτι ἀληθεύει ἡ ἀντίθετη πρόταση q'.
- Μέ τήν παραδοχή αὐτή καί μέ μιά σειρά λογικῶν βημάτων ὁδηγούμαστε σέ μιά ἀντίφαση (ἄτοπο), δηλαδή σέ μιά πρόταση πού εἶναι ἀντίθετη πρός τήν ὑπόθεσή μας ἤ πρός μιά ἄλλη ἀληθή πρόταση.
- Ἀπό τό ἄτοπο, στό ὁποῖο καταλήγουμε, συμπεραίνουμε ὅτι ἡ παραδοχή μας q' δέν εἶναι ἀληθής καί ἑπομένως εἶναι ἀληθές τό συμπέρασμά μας q.

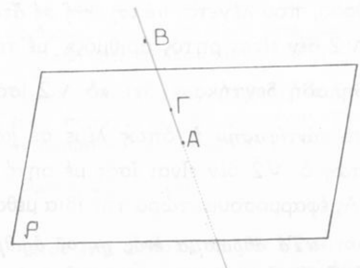
Ἄς δοῦμε ἕνα ἀκόμα παράδειγμα ἀπό τή Γεωμετρία.

«Ἄν Α εἶναι ἕνα σημεῖο ἑνός ἐπιπέδου p καί Β εἶναι σημεῖο ἔξω ἀπό τό p, τότε ἡ εὐθεία ΑΒ ἔχει μέ τό ἐπίπεδο p κοινό μόνο τό σημεῖο Α.»

Ὑπόθεση: p ἐπίπεδο , $A \in p$, $B \notin p$

Συμπέρασμα : $AB \cap p = \{A\}$

Ἀπόδειξη : Δεχόμαστε ὅτι ἡ ΑΒ δέν ἔχει κοινό σημεῖο μέ τό p μόνο τό Α, ἀλλά ἔχει καί ἕνα δεύτερο κοινό σημεῖο Γ. Τότε ἡ ΑΒ ἔχει μέ τό p δύο κοινά σημεῖα (τά Α καί Γ) καί ἑπομένως εἶναι εὐθεία τοῦ ἐπιπέδου p, ὁπότε καί τό Β εἶναι σημεῖο τοῦ p. Ἀλλ' αὐτό εἶναι ἄτοπο, γιατί τό Β, ἀπό τήν



(σχ. 7)

ὑπόθεση μας, δέν ἀνήκει στό p. Ἑπομένως ἡ ΒΑ δέν ἔχει ἄλλο κοινό σημεῖο μέ τό p ἐκτός ἀπό τό Α.

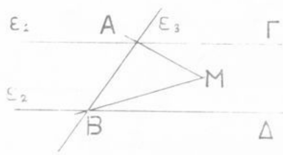
Ἡ μέθοδος τῆς ἀπαγωγῆς σέ ἄτοπο λέγεται καί **«ἔμμεση ἀπόδειξη»**, ὅταν ἡ ἄρνηση τοῦ συμπεράσματός μας ὁδηγεῖ σέ ἄρνηση τῆς ὑποθέσεως.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

7. Νά ἀποδείξετε ὅτι
   α) τό ἄθροισμα δύο ἄρτιων ἀριθμῶν εἶναι ἄρτιος,
   β) τό ἄθροισμα δύο περιττῶν ἀριθμῶν εἶναι ἄρτιος,
   γ) τό ἄθροισμα ἑνός ἄρτιου ἀριθμοῦ καί ἑνός περιττοῦ εἶναι περιττός.

8. Ἄν $\nu \in N$, νά ἀποδείξετε ὅτι
   α) ὁ ἀκέραιος $\nu^2 - \nu$ διαιρεῖται διά 2,
   β) ὁ ἀκέραιος $\nu^3 + 11\nu$ διαιρεῖται διά 6.

9. Στίς πλευρές ΟΧ καί ΟΨ μιᾶς γωνίας $X\widehat{O}\Psi$ παίρνουμε ἀντιστοίχως τά σημεῖα Α,Β καί Α′, Β′ ἔτσι, ὥστε $OA = OA'$ καί $OB = OB'$.
   Φέρνουμε τίς ΑΒ′ καί Α′Β, πού τέμνονται στό Ι.
   Νά ἀποδείξετε ὅτι:
   α) Τά τρίγωνα ΟΑΒ′ καί ΟΑ′Β εἶναι ἴσα.
   β) Τά τρίγωνα ΙΑΒ καί ΙΑ′Β′ εἶναι ἴσα.
   γ) Ἡ ΟΙ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας $X\widehat{O}\Psi$



10. Στό διπλανό σχῆμα ἔχουμε δύο παράλληλες εὐθεῖες ε_1 καί ε_2, μία εὐθεία ε_3 πού τίς τέμνει στά σημεῖα Α καί Β καί ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Μ μέσα στή ζώνη τῶν παραλλήλων ε_1 καί ε_2. Νά ἀποδείξετε ὅτι $A\widehat{M}B = M\widehat{A}\Gamma + M\widehat{B}\Delta$.

11. Ἄν ρ εἶναι ρητός ἀριθμός καί α ἄρρητος, νά δείξετε ὅτι τό γινόμενο ρα εἶναι ἄρρητος ἀριθμός.

12. Δίνονται δύο ἀσύμβατες εὐθεῖες ε_1, ε_2 καί παίρνουμε δύο σημεῖα Α,Β τῆς ε_1 καί δύο σημεῖα Γ,Δ τῆς ε_2. Νά δείξετε ὅτι οἱ εὐθεῖες ΑΓ καί ΒΔ εἶναι ἀσύμβατες.

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 5

1. Μία ἔκφραση, πού μπορεῖ νά χαρακτηρισθεῖ ὡς *«ἀληθής»* ἤ *«ψευδής»*, λέγεται **πρόταση**. Ἄν p καί q εἶναι δύο προτασιακοί τύποι μέ σύνολα ἀλήθειας Α καί Β, τότε:

α) Ἡ πρόταση **«ἄν p τότε q»** συμβολίζεται μέ

$$p \Rightarrow q$$

καί λέγεται **συνεπαγωγή**. Ἡ συνεπαγωγή αὐτή εἶναι ἀληθής, μόνο ὅταν $A \subseteq B$.

β) Ἡ πρόταση **«p ἄν καί μόνο ἄν q»** συμβολίζεται μέ

$$p \Leftrightarrow q$$

καί λέγεται **ἰσοδυναμία**. Ἡ ἰσοδυναμία ἀντικαθιστᾶ τίς δύο συνεπαγωγές $p \Rightarrow q$ καί $q \Rightarrow p$ καί ἀληθεύει, μόνο ὅταν $A = B$.

2. Γιά τήν ἀπόδειξη μιᾶς συνεπαγωγῆς $p \Rightarrow q$ ἔχουμε δύο μεθόδους:

- **Τήν εὐθεία ἀπόδειξη,** στήν ὁποία ξεκινᾶμε ἀπό τήν ὑπόθεσή μας p καί μέ μιά σειρά λογικῶν βημάτων καταλήγουμε στό συμπέρασμα q.
- **Τήν ἀπαγωγή σέ ἄτοπο,** στήν ὁποία δεχόμαστε τήν ἄρνηση q' τοῦ συμπεράσματός μας καί μέ μιά σειρά λογικῶν βημάτων φθάνουμε σέ ἀντίφαση πρός τήν ὑπόθεσή μας ἤ πρός ἄλλη ἀληθή πρόταση.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ *

13. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό τετράγωνο ἑνός περιττοῦ ἀριθμοῦ εἶναι περιττός.

14. Νά ἀποδείξετε ὅτι ὁ $\sqrt{3}$ εἶναι ἄρρητος ἀριθμός.

15. Ἄν γνωρίζουμε ὅτι σέ τρίγωνο ΑΒΓ ἰσχύει ἡ πρόταση

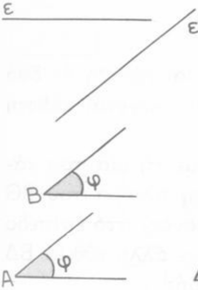
$\widehat{A} > \widehat{B} \Rightarrow \alpha > \beta$, νά δείξετε ὅτι ἰσχύει καί ἡ $\alpha > \beta \Rightarrow \widehat{A} > \widehat{B}$.

6ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

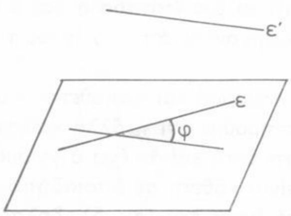
ΚΑΘΕΤΟΤΗΤΑ ΣΤΟ ΧΩΡΟ

Γωνία δύο ἀσύμβατων εὐθειῶν.

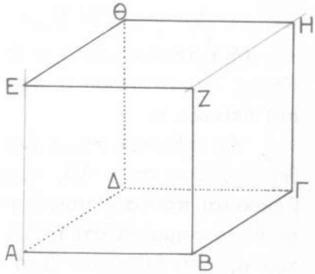
6.1. Ἄς πάρουμε δυό ἀσύμβατες εὐθεῖες ε καί ε' καί ἄς φέρουμε ἀπό δύο ὁποιαδήποτε σημεῖα Α καί Β τοῦ χώρου παράλληλες πρός αὐτές



(σχ. 1)



(σχ. 2)



(σχ. 3)

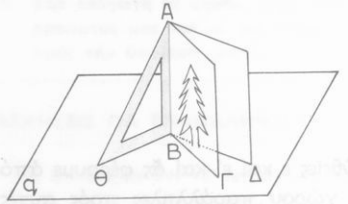
(σχ. 1). Ἄν μετρήσουμε τίς ὀξεῖες γωνίες μέ κορυφές τά Α καί Β πού σχηματίσθηκαν, βλέπουμε ὅτι αὐτές εἶναι ἴσες.

Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι, ἄν φέρουμε ἀπό ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τοῦ χώρου δύο εὐθεῖες παράλληλες πρός τίς ἀσύμβατες ε καί ε', σχηματίζουν πάντα τήν ἴδια ὀξεία γωνία $\widehat{\varphi}$, πού λέγεται **γωνία τῶν ἀσύμβατων εὐθειῶν ε καί ε'**. Συνήθως γιά νά βροῦμε τή $\widehat{\varphi}$ φέρνουμε ἀπό ἕνα σημεῖο τῆς μιᾶς εὐθεία παράλληλη πρός τήν ἄλλη (βλ. σχ. 2).

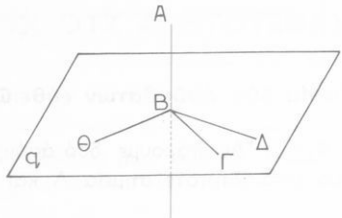
Δύο ἀσύμβατες εὐθεῖες θά λέγονται **ὀρθογώνιες**, ὅταν ἡ γωνία τους $\widehat{\varphi}$ εἶναι ὀρθή. Τέτοιες ὀρθογώνιες εὐθεῖες εἶναι π.χ. οἱ ἀκμές ΑΕ καί ΖΗ στόν κύβο τοῦ σχήματος 3.

Εὐθεία κάθετη σέ ἐπίπεδο.

6.2. Ἄς πάρουμε μία δίφυλλη χριστουγεννιάτικη κάρτα καί ἄς τήν τοποθετήσουμε πάνω σέ ἐπίπεδο q (σχ. 4). Ἐπειδή τά φύλλα τῆς κάρτας εἶναι ὀρθογώνια, οἱ γωνίες $\widehat{ΑΒΓ}$ καί $\widehat{ΑΒΔ}$ εἶναι ὀρθές. Βλέπουμε δηλαδή ὅτι ἡ εὐθεία AB εἶναι κάθετη σέ δύο εὐθεῖες τοῦ ἐπιπέδου q, πού διέρχονται ἀπό τό ἴχνος της, τίς ΒΓ καί ΒΔ.



(σχ. 4)



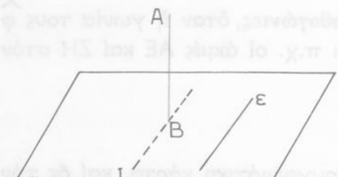
(σχ. 5)

Μιά τέτοια εὐθεία, πού τέμνει ἕνα ἐπίπεδο q καί εἶναι κάθετη σέ δυό εὐθεῖες τοῦ ἐπιπέδου q πού διέρχονται ἀπό τό ἴχνος της, λέγεται **κάθετη στό ἐπίπεδο q**.

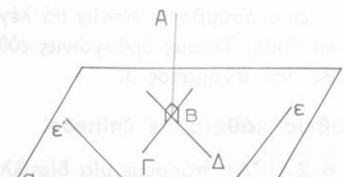
Ἄν πάρουμε τώρα ἕνα γνώμονα καί τοποθετήσουμε τή μία του κάθετη πλευρά στήν AB, παρατηροῦμε ὅτι ἡ ἄλλη κάθετη πλευρά του ΒΘ βρίσκεται πάντα (ὁποιαδήποτε θέση καί ἄν ἔχει ὁ γνώμονας) στό ἐπίπεδο q. Αὐτό σημαίνει ὅτι ἡ AB εἶναι κάθετη σέ ὁποιαδήποτε ἄλλη εὐθεία ΒΔ τοῦ q, πού διέρχεται ἀπό τό ἴχνος της (σχ. 5), δηλαδή:

> Ἄν μία εὐθεία εἶναι κάθετη σ' ἕνα ἐπίπεδο, εἶναι κάθετη σέ ὅλες τίς εὐθεῖες τοῦ ἐπιπέδου, πού διέρχονται ἀπό τό ἴχνος της.

Μία εὐθεία AB, πού τέμνει ἕνα ἐπίπεδο q στό σημεῖο B, εἶναι ἀσύμβατη μέ κάθε εὐθεία ε τοῦ q, πού δέ διέρχεται ἀπό τό ἴχνος της B (σχ. 6). Ἄν ἡ εὐθεία AB εἶναι κάθετη στό q, θά εἶναι κάθετη καί στήν εὐθεία BI τοῦ q, πού διέρχεται ἀπό τό B καί εἶναι παράλληλη πρός μία ὁποιαδήποτε εὐθεία ε τοῦ q. Ἡ γωνία ὅμως $\widehat{ABI}$ εἶναι ἡ γωνία τῶν ἀσύμβατων



(σχ. 6)



(σχ. 7)

εὐθειῶν AB καί ε. Ἔτσι λοιπόν:

> Μία εὐθεία, πού εἶναι κάθετη σ' ἕνα ἐπίπεδο, εἶναι ὀρθογώνια πρός κάθε εὐθεία τοῦ ἐπιπέδου.

Ἄς πάρουμε τώρα μία εὐθεία ΑΒ, πού νά εἶναι ὀρθογώνια πρός δύο μή παράλληλες εὐθεῖες ε καί ε' τοῦ ἐπιπέδου q (σχ. 7) καί ἄς φέρουμε ἀπό τό ἴχνος της Β τίς εὐθεῖες ΒΓ καί ΒΔ τοῦ ἐπιπέδου q, παράλληλες πρός τίς ε καί ε' ἀντιστοίχως. Ἐπειδή ἡ ΑΒ εἶναι ὀρθογώνια πρός τίς ε καί ε', θά εἶναι $\widehat{ΑΒΓ} = \widehat{ΑΒΔ} = 1$ ὀρθή. Βλέπουμε λοιπόν ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι κάθετη σέ δύο εὐθεῖες τοῦ ἐπιπέδου q, πού διέρχονται ἀπό τό ἴχνος της (τίς ΒΓ καί ΒΔ) καί συνεπῶς εἶναι κάθετη στό ἐπίπεδο q. Ἔτσι καταλαβαίνουμε ὅτι:

> Μία εὐθεία εἶναι κάθετη σέ ἕνα ἐπίπεδο, ὅταν εἶναι ὀρθογώνια πρός δύο μή παράλληλες εὐθεῖες τοῦ ἐπιπέδου.

6.3. Γιά νά φέρουμε μιά εὐθεία κάθετη σ' ἕνα ἐπίπεδο q ἀπό ἕνα σημεῖο Α, πού βρίσκεται ἔξω ἀπό τό q, παίρνουμε μιά χριστουγεννιάτικη

(σχ. 8)

(σχ. 9)

κάρτα καί τήν τοποθετοῦμε πάνω στό ἐπίπεδο ἔτσι, ὥστε ἡ «ράχη» της νά περάσει ἀπό τό Α (σχ. 8). Ἡ εὐθεία, τήν ὁποία ὁρίζει ἡ ράχη τῆς κάρτας, εἶναι ἡ ζητούμενη. Βλέπουμε τώρα ὅτι, ἄν πάρουμε καί μιά ὁποιαδήποτε ἄλλη χριστουγεννιάτικη κάρτα καί κάνουμε τήν ἴδια ἐργασία, θά καταλήξουμε πάλι στήν ἴδια εὐθεία. Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι:

> Ἀπό ἕνα σημεῖο Α, πού βρίσκεται ἔξω ἀπό ἕνα ἐπίπεδο q, μόνο μία κάθετη εὐθεία στό q μποροῦμε νά φέρουμε.

Μέ τόν ἴδιο ἀκριβῶς τρόπο βλέπουμε ὅτι **ἀπό ἕνα σημεῖο Κ τοῦ ἐπιπέδου q μόνο μία κάθετη στό ἐπίπεδο μποροῦμε νά φέρουμε.**

Ἄς φέρουμε τώρα ἀπό δύο διαφορετικά σημεῖα Κ καί Λ τοῦ ἐπιπέδου q δύο εὐθεῖες κάθετες στό q (σχ. 9). Ἐπειδή οἱ εὐθεῖες αὐτές εἶναι κάθετες στήν ΚΛ καί βρίσκονται στό ἴδιο ἐπίπεδο (ὅπως διαπιστώνουμε, ἄν πλησιάσουμε τό ἕνα φύλλο τῆς κάρτας), θά εἶναι παράλληλες, δηλαδή:

Δύο εὐθεῖες κάθετες στό ἴδιο ἐπίπεδο εἶναι μεταξύ τους παράλληλες.

Ἀπό τήν πρόταση αὐτή καταλαβαίνουμε ὅτι:

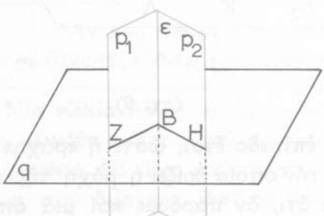
α) Ἄν ἔχουμε δύο παράλληλες εὐθεῖες ε_1 *καί* ε_2 *καί ἡ μία εἶναι κάθετη σέ ἕνα ἐπίπεδο* q, *τότε καί ἡ ἄλλη θά εἶναι κάθετη στό* q.

β) Ἄν ἔχουμε δύο ὁποιεσδήποτε εὐθεῖες ε_1 *καί* ε_2 *καί κάθε μιά τους εἶναι παράλληλη πρός μιά τρίτη εὐθεία* ε_3, *τότε οἱ* ε_1 *καί* ε_2 *θά εἶναι μεταξύ τους παράλληλες* (γιατί, ἄν ὑποθέσουμε ὅτι ἡ ε_3 εἶναι κάθετη σ' ἕνα ἐπίπεδο q, τότε (βλ. σχ. 9) καί οἱ ε_1 καί ε_2 εἶναι κάθετες στό q).

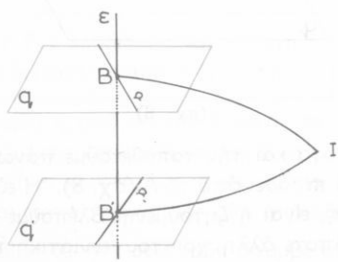
Ἐπίπεδα κάθετα σέ εὐθεία.

6.4. Στό σχῆμα 5 βλέπουμε ὅτι ὑπάρχουν ἄπειρες εὐθεῖες τοῦ χώρου, πού εἶναι κάθετες πρός μιά εὐθεία ε σ' ἕνα ὁρισμένο σημεῖο της Β καί μάλιστα ὅλες βρίσκονται στό ἴδιο ἐπίπεδο q.

Γενικά, ὅλες οἱ εὐθεῖες τοῦ χώρου, πού εἶναι κάθετες σέ μία εὐθεία ε σ' ἕνα ὁρισμένο σημεῖο της Β, βρίσκονται σ' ἕνα καί μοναδικό ἐπίπεδο q, τό ὁποῖο λέγεται **κάθετο ἐπίπεδο** πρός τήν ε στό σημεῖο της Β.



(σχ. 10)



(σχ. 11)

Γιά νά κατασκευάσουμε τό ἐπίπεδο q, ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς: Φέρνουμε ἕνα ὁποιοδήποτε ἐπίπεδο p_1, πού διέρχεται ἀπό τήν ε, καί πάνω σ' αὐτό φέρνουμε τήν εὐθεία ΒΖ κάθετη στήν ε (σχ. 10). Ἔπειτα φέρνουμε ἕνα ἄλλο ἐπίπεδο p_2, πού διέρχεται ἀπό τήν ε καί πάνω σ' αὐτό φέρνουμε τήν εὐθεία ΒΗ κάθετη στήν ε. Τό ἐπίπεδο πού ὁρίζουν οἱ δύο εὐθεῖες ΒΖ καί ΒΗ εἶναι τό q.

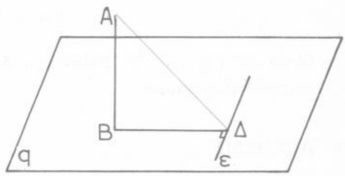
Ἄς φέρουμε τώρα τά κάθετα ἐπίπεδα q καί q' (σχ. 11) σέ δύο σημεῖα Β καί Β' μιᾶς εὐθείας ε. Τά ἐπίπεδα αὐτά δέν ἔχουν κοινό σημεῖο (γιατί, ἄν εἶχαν ἕνα κοινό σημεῖο Ι, τό τρίγωνο ΙΒΒ' θά εἶχε δύο γωνίες ὀρθές) καί συνεπῶς εἶναι παράλληλα. Ἔτσι λοιπόν:

Δύο ἐπίπεδα κάθετα στήν ἴδια εὐθεία εἶναι παράλληλα.

Ἄς θεωρήσουμε τώρα μιά ὁποιαδήποτε εὐθεία α τοῦ ἐπιπέδου q, πού διέρχεται ἀπό τό Β, καί μιά ὁποιαδήποτε εὐθεία α' τοῦ ἐπιπέδου q', πού διέρχεται ἀπό τό Β'. Οἱ εὐθεῖες αὐτές εἶναι γενικά ἀσύμβατες, ἐνῶ εἶναι κάθετες στήν ε. Βλέπουμε δηλαδή ὅτι δύο εὐθεῖες τοῦ χώρου, πού εἶναι κάθετες στήν ἴδια εὐθεία, δέν εἶναι ἀπαραίτητα παράλληλες, ὅπως εἶναι στό ἐπίπεδο.

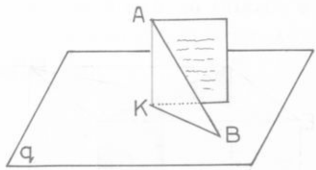
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Μία εὐθεία ΑΒ εἶναι κάθετη σ' ἕνα ἐπίπεδο q. Ἄν φέρουμε ἀπό τό Β τήν εὐθεία ΒΔ κάθετη σέ μιά εὐθεία ε τοῦ q, ἀποδεῖξτε ὅτι καί ἡ ΑΔ εἶναι κάθετη στήν ε.**

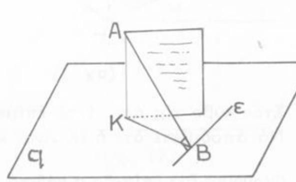


Λύση: Ἐπειδή $AB \perp q$, ἡ ΑΒ εἶναι ὀρθογώνια πρός τήν ε. Ἔτσι ἡ ε εἶναι κάθετη πρός τήν εὐθεία ΒΔ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΔ καί ὀρθογώνια πρός τήν ΑΒ. Συνεπῶς εἶναι κάθετη στό ἐπίπεδο ΑΒΔ, ὁπότε εἶναι κάθετη καί στήν ΑΔ.

2. **Τό διπλανό σχῆμα δείχνει μιά κομμένη χριστουγεννιάτικη κάρτα πάνω σ' ἕνα τραπέζι.**
Νά βρεῖτε εὐθεία τοῦ ἐπιπέδου q, πού νά διέρχεται ἀπό τό Β καί νά εἶναι κάθετη στήν ΑΒ. Πόσες τέτοιες εὐθεῖες ὑπάρχουν;

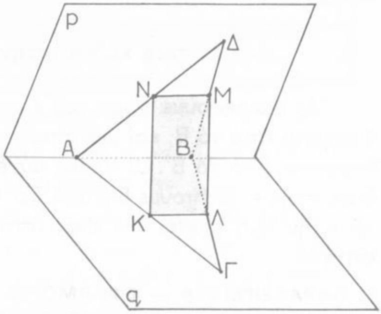


Λύση: Φέρνουμε τήν εὐθεία ε τοῦ ἐπιπέδου q, πού εἶναι κάθετη στήν ΚΒ στό σημεῖο Β. Αὐτή εἶναι ἡ εὐθεία πού ζητούσαμε.
Πραγματικά, ὅπως εἴδαμε παραπάνω (πρβ. 1), ἐπειδή $AK \perp q$ καί $KB \perp ε$, θά εἶναι καί $AB \perp ε$.
Ἡ ε εἶναι μοναδική, γιατί, ἄν ὑπῆρχε καί ἄλλη κάθετη, π.χ. ἡ $ε_1$, τότε ἡ $ε_1$ θά ἦταν κάθετη στό ἐπίπεδο ΑΚΒ. Αὐτό ὅμως εἶναι ἄτοπο, γιατί θά εἴχαμε δύο κάθετες πρός τό ἐπίπεδο ΑΚΒ στό ἴδιο σημεῖο του Β.



3. **Δίνονται δύο ἐπίπεδα p καί q καί δύο σημεῖα A καί B τῆς τομῆς τους. Ἄν Γ εἶναι ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τοῦ q καί Δ εἶναι ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τοῦ p, τό σχῆμα ΑΔΒΓ λέγεται «στρεβλό τετράπλευρο» μέ πλευρές ΑΔ,ΔΒ,ΒΓ,ΓΑ.**

Ἀποδεῖξτε ὅτι τά μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ στρεβλοῦ τετραπλεύρου εἶναι κορυφές παραλληλογράμμου.



Λύση: Ἐπειδή τό εὐθύγραμμο τμῆμα MN συνδέει τά μέσα τῶν πλευρῶν ΔA καί ΔB τοῦ τριγώνου ΔAB, θά ἔχουμε :

$$MN = \parallel \frac{AB}{2} \qquad (1)$$

Γιά τόν ἴδιο λόγο ἀπό τό τρίγωνο ΓAB θά ἔχουμε:

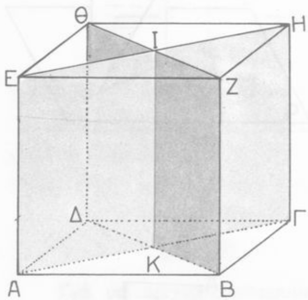
$$K\Lambda = \parallel \frac{AB}{2} \qquad (2)$$

Ἀπό τίς (1) καί (2) βρίσκουμε ὅτι $MN = \parallel K\Lambda$ καί συνεπῶς τό ΚΛΜΝ εἶναι παραλληλόγραμμο.

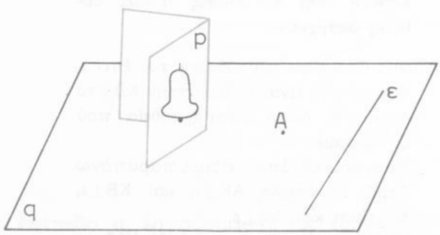
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Νά βρεθοῦν οἱ γωνίες τίς ὁποῖες σχηματίζουν στόν παρακάτω κύβο τά ζεύγη τῶν εὐθειῶν:

α) EZ καί ΒΓ β) EH καί ΓB γ) ΑΓ καί ΘZ δ) ΔB καί ΘH



(σχ. I)



(σχ. II)

2. Στόν κύβο τῆς ἀσκ. 1 τά ἐπίπεδα ΕΑΓΗ καί ΘΖΒΔ τέμνονται κατά τήν εὐθεία IK. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ IK εἶναι κάθετη στά ἐπίπεδα ΑΒΓΔ καί ΕΖΗΘ.

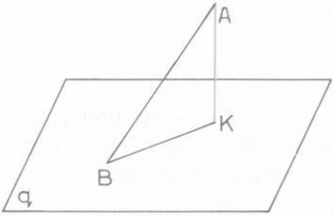
3. Φέρνουμε ἕνα ἐπίπεδο q κάθετο στό μέσο K ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος AB. Ἀποδεῖξτε ὅτι κάθε σημεῖο M τοῦ q ἀπέχει ἴσα ἀπό τά σημεῖα A καί B.

4. Δίνεται μία εὐθεία ε καί ἕνα σημεῖο Α ἑνός ἐπιπέδου q. Τοποθετῆστε τήν κάρτα, πού εἶναι ἐπάνω στό ἐπίπεδο q, ἔτσι ὥστε τό ἕνα φύλλο της p νά παριστάνει ἐπίπεδο, πού νά διέρχεται ἀπό τό Α καί νά εἶναι κάθετο στήν ε (σχ. ΙΙ).

5. Τά ἴχνη τῶν καθέτων εὐθειῶν, πού φέρνουμε πρός ἕνα ἐπίπεδο p ἀπό δύο σημεῖα Α καί Β ἔξω ἀπό τό p, συμπίπτουν στό ἴδιο σημεῖο Κ τοῦ p. Νά βρεῖτε:
α) Ποιά εἶναι ἡ θέση τῶν σημείων Α,Β,Κ;
β) Ἄν εἶναι (ΑΚ) = 12 cm καί (ΒΚ) = 6 cm, ποιά εἶναι ἡ ἀπόσταση ΑΒ;

Ἀπόσταση σημείου ἀπό ἐπίπεδο.

6.5. Ἄς φέρουμε ἀπό ἕνα σημεῖο Α, πού βρίσκεται ἔξω ἀπό ἕνα ἐπίπεδο q, τήν κάθετη εὐθεία στό ἐπίπεδο q καί μία πλάγια εὐθεία. Ἄν οἱ εὐθεῖες αὐτές τέμνουν τό q στά σημεῖα Κ καί Β ἀντιστοίχως, τό τρίγωνο ΑΚΒ εἶναι ὀρθογώνιο μέ ὑποτείνουσα τήν ΑΒ καί συνεπῶς ΑΚ $<$ ΑΒ. Βλέπουμε λοιπόν ὅτι:



(σχ. 11)

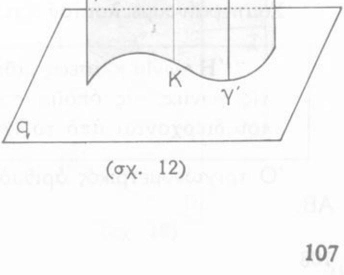
> Τό κάθετο τμῆμα ΑΚ, πού φέρνουμε πρός ἕνα ἐπίπεδο q ἀπό ἕνα σημεῖο Α ἔξω ἀπό τό ἐπίπεδο, εἶναι μικρότερο ἀπό κάθε πλάγιο τμῆμα ΑΒ.

Τό τμῆμα αὐτό λέγεται **ἀπόσταση τοῦ σημείου Α ἀπό τό ἐπίπεδο q**. Συνήθως ἡ ἀπόσταση αὐτή ἐκφράζεται μέ τό μῆκος τοῦ ΑΚ, δηλαδή λέμε π.χ. ὅτι ἡ ἀπόσταση τοῦ Α ἀπό τό q εἶναι 11 cm.

Προβολή σχήματος. Κλίση εὐθείας.

6·6· Ἄν φέρουμε ἀπό ἕνα σημεῖο Α τό κάθετο τμῆμα ΑΚ πρός ἕνα ἐπίπεδο q, τό ἴχνος του Κ λέγεται ἐπίσης καί **προβολή τοῦ Α** (ἤ **ὀρθή προβολή τοῦ Α**) στό ἐπίπεδο q (σχ. 12).

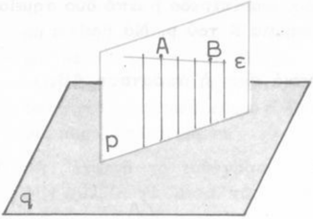
Ἄς θεωρήσουμε τώρα μιά γραμμή γ (ἤ γενικότερα ἕνα σχῆμα) τοῦ χώρου. Οἱ προβολές ὅλων τῶν σημείων τῆς γραμμῆς (ἤ τοῦ σχήματος) στό ἐπίπεδο q ἀποτελοῦν μιά ἄλλη γραμμή γ′ (ἤ ἕνα ἄλλο σχῆμα) πού βρίσκεται στό ἐ-



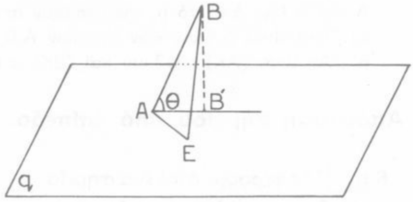
(σχ. 12)

πίπεδο q καί λέγεται **προβολή τῆς γραμμῆς γ (ἤ προβολή τοῦ σχήματος)** στό ἐπίπεδο q.

Ἄς ἐξετάσουμε τώρα πιό εἰδικά τήν προβολή μιᾶς εὐθείας ε.



(σχ. 13)



(σχ. 14)

Ὅλες οἱ κάθετες, πού φέρνουμε ἀπό τά σημεῖα τῆς εὐθείας ε (σχ. 13) στό ἐπίπεδο q, βρίσκονται στό ἴδιο ἐπίπεδο p καί συνεπῶς οἱ προβολές τῶν σημείων της AB θά εἶναι σημεῖα τῆς τομῆς τῶν δύο ἐπιπέδων p καί q. Αὐτό σημαίνει ὅτι:

Ἡ προβολή μιᾶς εὐθείας πάνω σέ ἐπίπεδο εἶναι εὐθεία.

Ἔτσι, γιά νά βροῦμε τήν προβολή μιᾶς εὐθείας σέ ἕνα ἐπίπεδο q, δέ χρειάζεται νά παίρνουμε τίς προβολές ὅλων τῶν σημείων της, ἀλλά μόνο δύο σημείων της, π.χ. τῶν A καί B.

Στήν περίπτωση πού ἡ εὐθεία AB τέμνει τό ἐπίπεδο q στό σημεῖο A (σχ. 14), τότε τό A συμπίπτει μέ τήν προβολή του, καί συνεπῶς, ἄν βροῦμε μόνο τήν προβολή B′ τοῦ B, ἡ AB′ θά εἶναι ἡ προβολή τῆς AB.

Ἡ ὀξεία γωνία θ, πού σχηματίζει μία εὐθεία AB μέ τήν προβολή της σ' ἕνα ἐπίπεδο q, λέγεται **γωνία τῆς εὐθείας AB καί τοῦ ἐπιπέδου q** ἤ καί **γωνία κλίσεως τῆς εὐθείας AB ὡς πρός τό ἐπίπεδο q.**

Ἄς φέρουμε τώρα καί μία ἄλλη ὁποιαδήποτε εὐθεία τοῦ q, πού νά διέρχεται ἀπό τό A καί ἄς πάρουμε πάνω σ' αὐτή ἕνα τμῆμα $AE = AB'$. Ἐπειδή τά τρίγωνα ABB′ καί ABE ἔχουν $AB=AB$, $AB'=AE$ καί $BB'<BE$, θά ἔχουν καί

$$\widehat{\theta} < B\widehat{A}E$$

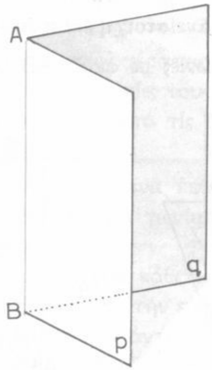
Συμπεραίνουμε λοιπόν ὅτι:

Ἡ γωνία κλίσεως μιᾶς εὐθείας AB εἶναι μικρότερη ἀπό ὅλες τίς γωνίες, τίς ὁποῖες σχηματίζει ἡ AB μέ τίς εὐθεῖες τοῦ q πού διέρχονται ἀπό τό ἴχνος της.

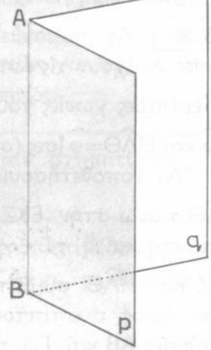
Ὁ τριγωνομετρικός ἀριθμός εφθ λέγεται συνήθως «κλίση» τῆς εὐθείας AB.

Δίεδρες γωνίες.

6.7. Δύο διαφορετικά ἡμιεπίπεδα p καί q, πού ἔχουν κοινή ἀκμή AB, διαχωρίζουν ὅλα τά ἄλλα σημεῖα τοῦ χώρου σέ δύο μέρη. Τά σημεῖα τοῦ κάθε μέρους μαζί μέ τά σημεῖα τῶν ἡμιεπιπέδων αὐτῶν ἀποτελοῦν ἕνα σχῆμα, πού λέγεται **δίεδρη γωνία** (σχ. 15). Ἡ κοινή εὐθεία AB τῶν δύο ἡμιεπιπέδων λέγεται **ἀκμή** τῆς δίεδρης γωνίας, ἐνῶ τά ἡμιεπίπεδα p καί q λέγονται **ἕδρες** της.



(σχ. 15)

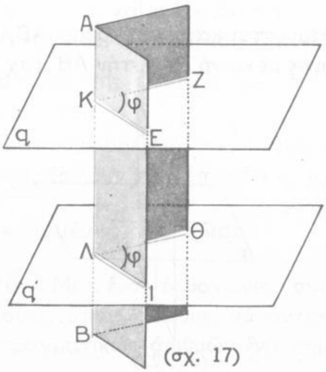


(σχ. 16)

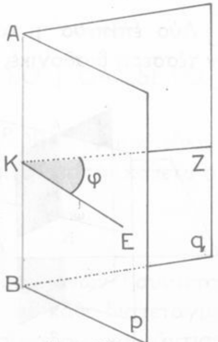
Μία δίεδρη γωνία λέγεται εἰδικότερα:

- **Κυρτή,** ἄν κάθε ἕδρα της, ὅταν προεκταθεῖ, ἀφήνει ὅλη τή δίεδρη γωνία πρός τό ἕνα μέρος της (σχ. 15).
- **Μή κυρτή,** ἄν κάθε ἕδρα της, ὅταν προεκταθεῖ, «κόβει» τή δίεδρη γωνία (σχ. 16).

Ἄν φέρουμε τώρα δύο ἐπίπεδα κάθετα πρός τήν ἀκμή AB μιᾶς δίεδρης γωνίας σέ δύο διαφορετικά σημεῖα της K καί Λ (σχ. 17), βλέπουμε ὅτι οἱ ἐπίπεδες γωνίες $E\widehat{K}Z$ καί $I\widehat{\Lambda}\Theta$, πού σχηματίζονται, εἶναι ἴσες.



(σχ. 17)

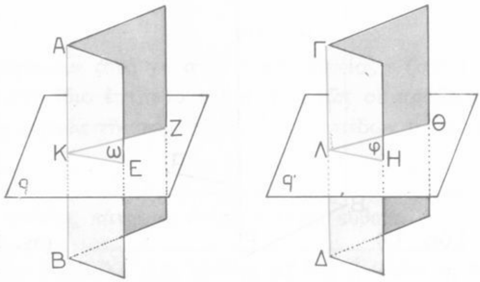


(σχ. 18)

Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι, ἄν φέρουμε ἕνα ἐπίπεδο κάθετο στήν ἀκμή ΑΒ μιᾶς δίεδρης γωνίας καί σέ ὁποιοδήποτε σημεῖο της Κ, σχηματίζεται πάνω στό ἐπίπεδο πάντα ἡ ἴδια ἐπίπεδη γωνία $\widehat{\varphi}$, πού λέγεται **ἀντίστοιχη ἐπίπεδη** τῆς δίεδρης. Συνήθως κατασκευάζουμε τή γωνία $\widehat{\varphi}$ φέρνοντας σέ ἕνα σημεῖο Κ τῆς ἀκμῆς ΑΒ τήν εὐθεία ΚΕ τοῦ p κάθετη στήν ΑΒ καί τήν εὐθεία ΚΖ τοῦ q κάθετη στήν ΑΒ (σχ. 18). Ἡ ὀξεία γωνία $\widehat{\varphi}$ λέγεται καί **γωνία τῶν ἐπιπέδων p καί q.**

Μία δίεδρη γωνία λέγεται «ὀρθή», ὅταν ἡ ἀντίστοιχη ἐπίπεδη εἶναι ὀρθή.

6.8. Ἄς πάρουμε τώρα δύο δίεδρες γωνίες μέ ἀκμές ΑΒ καί ΓΔ, οἱ ὁποῖες νά ἔχουν τίς ἀντίστοιχες ἐπίπεδες γωνίες τους $E\widehat{K}Z = \widehat{\omega}$ καί $H\widehat{\Lambda}\Theta = \widehat{\varphi}$ ἴσες (σχ.19). Ἄν τοποθετήσουμε τήν $H\widehat{\Lambda}\Theta$ πάνω στήν $E\widehat{K}Z$, τά ἐπίπεδα q καί q′ τῶν γωνιῶν $E\widehat{K}Z$ καί $H\widehat{\Lambda}\Theta$ συμπίπτουν. Τότε ὅμως συμπίπτουν καί οἱ εὐθεῖες ΑΒ καί ΓΔ πού εἶναι κάθετες πρός αὐτά, καί συνεπῶς οἱ δύο δίεδρες γωνίες εἶναι ἴσες, γιατί ἐφαρμόζουν. Ἔτσι:



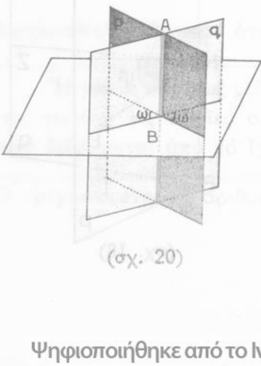
(σχ. 19)

> Δύο δίεδρες γωνίες εἶναι ἴσες, ὅταν ἔχουν τίς ἀντίστοιχες ἐπίπεδες γωνίες τους ἴσες.

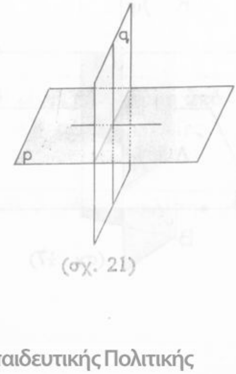
Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι ἡ σύγκριση ἤ γενικά ἡ μελέτη τῶν δίεδρων γωνιῶν ἀνάγεται στή σύγκριση ἤ τή μελέτη τῶν ἀντίστοιχων ἐπίπεδων γωνιῶν τους.

Κάθετα ἐπίπεδα.

6.9. Δύο ἐπίπεδα p καί q, πού τέμνονται κατά μία εὐθεία ΑΒ, σχηματίζουν τέσσερις διαδοχικές δίεδρες γωνίες μέ κοινή ἀκμή τήν ΑΒ (σχ. 20).



(σχ. 20)



(σχ. 21)

Δύο όποιεσδήποτε άπέναντι άπ' αὐτές εἶναι ἴσες, γιατί οἱ ἀντίστοιχες ἐπίπεδες γωνίες τους εἶναι κατακορυφήν.

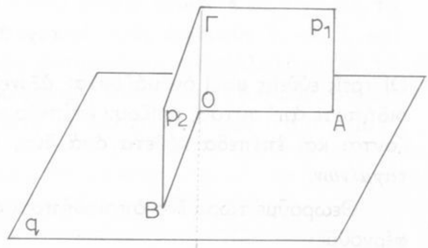
Ἄν συμβεῖ τώρα καί οἱ τέσσερις διαδοχικές δίεδρες γωνίες νά εἶναι ἴσες (σχ. 21), τότε τά p καί q λέγονται **κάθετα ἐπίπεδα**. Δηλαδή:

> Δύο ἐπίπεδα p καί q λέγονται κάθετα, ὅταν σχηματίζουν τέσσερις δίεδρες γωνίες ἴσες.

Ἐπειδή ὅμως οἱ τέσσερις ἴσες δίεδρες γωνίες θά ἔχουν ἴσες καί τίς ἀντίστοιχες ἐπίπεδες γωνίες τους, κάθε μία ἀπό τίς ἐπίπεδες γωνίες εἶναι ὀρθή, ὁπότε καί κάθε μία ἀπό τίς δίεδρες εἶναι ὀρθή. Συνεπῶς:

> Δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα εἶναι κάθετα, ὅταν σχηματίζουν μία ὀρθή δίεδρη γωνία.

Ἄς πάρουμε δύο κάθετες εὐθεῖες ΟΑ καί ΟΒ ἑνός ἐπιπέδου q, κι ἄς φέρουμε στό σημεῖο Ο τήν εὐθεία ΟΓ κάθετη στό q. Ἄν p_1, p_2 εἶναι τά ἐπίπεδα πού ὁρίζονται ἀντιστοίχως ἀπό τίς εὐθεῖες ΟΑ, ΟΓ καί ΟΒ, ΟΓ (βλ. σχ. 22), παρατηροῦμε ὅτι:



(σχ. 22)

- Τά ἐπίπεδα p_1 καί p_2 εἶναι κάθετα, γιατί ἡ ἀντίστοιχη ἐπίπεδη γωνία $B\widehat{O}A$ μιᾶς δίεδρης, πού σχηματίζουν, εἶναι ὀρθή.
- Κάθε ἕνα ἀπό τά ἐπίπεδα p_1 καί p_2 εἶναι κάθετο στό q, γιατί σχηματίζει μέ τό q μιά ὀρθή δίεδρη γωνία· μιά δίεδρη γωνία π.χ. τῶν p_1 καί q ἔχει ἀκμή τήν ΟΑ καί εἶναι ὀρθή, ἐπειδή ἡ ἀντίστοιχή της ἐπίπεδη γωνία $\Gamma\widehat{O}B$ (ἀφοῦ $BO \perp OA$ καί $\Gamma O \perp OA$) εἶναι ὀρθή,

Βλέπουμε δηλαδή ὅτι οἱ τρεῖς εὐθεῖες ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, πού εἶναι κάθετες ἀνά δύο, ὁρίζουν τρία ἐπίπεδα q, p_1, p_2, πού εἶναι ἐπίσης κάθετα ἀνά δύο.

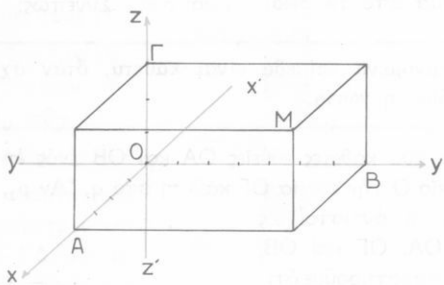
Συντεταγμένες στό χῶρο.

6.10. Μέ ἕνα ὀρθογώνιο σύστημα καρτεσιανῶν συντεταγμένων μποροῦμε, ὅπως ξέρουμε, νά ἀντιστοιχίσουμε σέ κάθε διατεταγμένο ζεῦγος πραγματικῶν ἀριθμῶν ἕνα σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου καί ἀντιστρόφως.

Ὑπάρχει δηλαδή μία ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία μεταξύ τῶν στοιχείων τοῦ $R \times R$ καί τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου.

Ἡ ἔννοια τῶν καρτεσιανῶν συντεταγμένων *«ἐπεκτείνεται»* καί στό χῶρο ὡς ἑξῆς: Παίρνουμε τρεῖς ὁρισμένες εὐθεῖες τοῦ χώρου xx', yy', zz', πού διέρχονται ἀπό ἴδιο σημεῖο Ο καί εἶναι κάθετες ἀνά δύο. Θεωροῦμε ὅτι κάθε μία ἀπ' αὐτές εἶναι «ἄξονας» καί ὀνομάζουμε:

- **ἄξονα τετμημένων** τήν xx'
- **ἄξονα τεταγμένων** τήν yy'
- **ἄξονα κατηγμένων** τήν zz'



(σχ. 23)

Οἱ τρεῖς εὐθεῖες μαζί ὀνομάζονται *ἄξονες τῶν συντεταγμένων* καί δυό ὁποιοιδήποτε ἀπ' αὐτούς ὁρίζουν ἐπίπεδο κάθετο στόν τρίτο ἄξονα. Ἔτσι ὁρίζονται καί ἐπίπεδα κάθετα ἀνά δύο, πού λέγονται *ἐπίπεδα τῶν συντεταγμένων.*

Θεωροῦμε τώρα ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Μ τοῦ χώρου καί ἀπ' αὐτό φέρνουμε:

— Ἕνα ἐπίπεδο παράλληλο πρός τό yOz, πού τέμνει τόν ἄξονα $x'x$ στό σημεῖο Α. Ὁ ἀριθμός x, πού ἀντιπροσωπεύει τό Α πάνω στόν ἄξονα $x'x$, λέγεται **τετμημένη τοῦ σημείου Μ.**

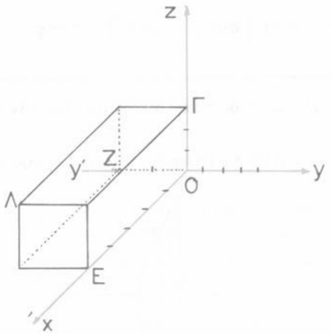
— Ἕνα ἐπίπεδο παράλληλο πρός τό xOz, πού τέμνει τόν ἄξονα $y'y$ στό σημεῖο Β. Ὁ ἀριθμός y, πού ἀντιπροσωπεύει τό Β πάνω στόν ἄξονα $y'y$, λέγεται **τεταγμένη τοῦ σημείου Μ.**

— Ἕνα ἐπίπεδο παράλληλο πρός τό xOy, πού τέμνει τόν ἄξονα $z'z$ στό σημεῖο Γ. Ὁ ἀριθμός z, πού ἀντιπροσωπεύει τό Γ πάνω στόν ἄξονα $z'z$, λέγεται **κατηγμένη τοῦ σημείου Μ.**

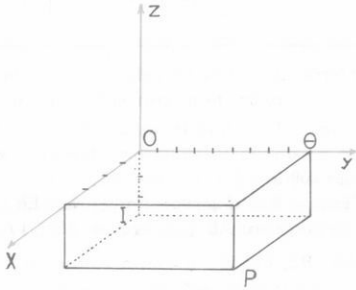
Οἱ τρεῖς ἀριθμοί x,y,z, ὅταν τούς παίρνουμε ὡς διατεταγμένη τριάδα (x,y,z), λέγονται **συντεταγμένες τοῦ Μ.**

Ἔτσι π.χ. ἄν τά Α,Β,Γ ἀντιπροσωπεύονται στούς ἄξονες ἀπό τούς ἀριθμούς 4,7,3 (σχ. 23), οἱ συντεταγμένες τοῦ Μ δίνονται ἀπό τή διατεταγμένη τριάδα (4,7,3) καί γράφουμε Μ (4,7,3).

Βλέπουμε λοιπόν ὅτι σέ κάθε σημεῖο Μ τοῦ χώρου ἀντιστοιχίζεται μιά ὁρισμένη διατεταγμένη τριάδα ἀριθμῶν.



(σχ. 24)

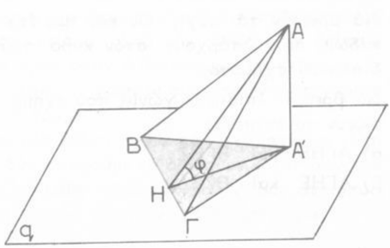


(σχ. 25)

Ἀντιστρόφως, σέ κάθε διατεταγμένη τριάδα ἀριθμῶν, π.χ. τήν (5,–2,3), ἀντιστοιχίζεται ἕνα ὁρισμένο σημεῖο τοῦ χώρου (βλ. σχ. 24). Τό σημεῖο αὐτό βρίσκεται, ἄν πάρουμε πάνω στούς ἄξονες x′x, y′y, z′z τά σημεῖα Ε,Ζ,Γ, πού ἀντιπροσωπεύονται ἀπό τούς ἀριθμούς 5, –2, 3, καί φέρουμε ἀπό τά σημεῖα αὐτά ἐπίπεδα ἀντιστοίχως παράλληλα πρός τά yOz, xOz, xOy. Τά τρία ἐπίπεδα, πού φέραμε, τέμνονται σέ ἕνα μόνο σημεῖο Λ, πού ἔχει συντεταγμένες (5,–2,3). Στό σχῆμα 25 βλέπουμε ἕνα σημεῖο Ρ, πού ἔχει συντεταγμένες (4,9–3).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Δίνεται ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρά ΒΓ βρίσκεται σέ δεδομένο ἐπίπεδο q καί ἡ κορυφή του Α εἶναι ἔξω ἀπό τό q. Παίρνουμε τήν προβολή Α′ τοῦ Α στό ἐπίπεδο q καί τό ὕψος Α′Η τοῦ τριγώνου Α′ΒΓ.**
Νά ἀποδείξετε ὅτι:
α) Τό ΑΗ εἶναι τό ὕψος τοῦ ΑΒΓ.
β) Ἡ γωνία $\widehat{A'HA} = \widehat{\varphi}$ εἶναι ἡ γωνία τῶν δύο ἐπιπέδων ΑΒΓ καί q.



γ) Γιά τά ἐμβαδά (ΑΒΓ) καί (Α′ΒΓ) ἰσχύει ἡ ἰσότητα (Α′ΒΓ) = (ΑΒΓ) συνφ.

Λύση: α) Ἐπειδή ΑΑ′ ⊥ q καί Α′ Η ⊥ ΒΓ (ΒΓ∈q), θά εἶναι καί ΑΗ ⊥ ΒΓ (βλ. στά παραδείγματα καί ἐφαρμογές τῆς § 6.4 τό 1) β) Ἀφοῦ εἶναι $A'H \perp B\Gamma$ καί $AH \perp B\Gamma$, ἡ $\widehat{A'HA} = \widehat{\varphi}$ εἶναι ἡ ἀντίστοιχη ἐπίπεδη γωνία μιᾶς δίεδρης, πού σχηματίζουν τά ἐπίπεδα ΑΒΓ καί q, δηλ. εἶναι ἡ γωνία τῶν δύο ἐπιπέδων.

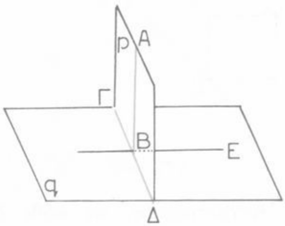
γ) Τό τρίγωνο ΑΑ'Η εἶναι ὀρθογώνιο στό Α' καί ἑπομένως $(A'H) = (AH)\ .\ \text{συνφ}$. Τότε ὅμως

$$(A'B\Gamma) = \frac{1}{2}(B\Gamma)\ (A'H) = \left[\frac{1}{2}(B\Gamma)\ .\ (AH)\right]\text{συν}\,\varphi = (AB\Gamma)\ .\ \text{συν}\,\varphi$$

---

2. **Δίνεται μία εὐθεία ΑΒ κάθετη στό ἐπίπεδο q καί ἕνα ἐπίπεδο p πού διέρχεται ἀπό τήν ΑΒ. Ἀποδεῖξτε ὅτι τό p εἶναι κάθετο στό q.**

Λύση: Ἐπειδή τό ἐπίπεδο p διέρχεται ἀπό τήν ΑΒ, τά ἐπίπεδα p καί q ἔχουν κοινό τό σημεῖο Β, ἑπομένως τέμνονται κατά μία εὐθεία ΓΔ.



Ἐπάνω στό q φέρνουμε τήν εὐθεία $EB \perp \Gamma\Delta$.
Ἐπειδή εἶναι $AB \perp q$, ἔχουμε $AB \perp \Gamma\Delta$ καί $AB \perp BE$, δηλαδή ἡ γωνία $\widehat{ABE}$ εἶναι ὀρθή.

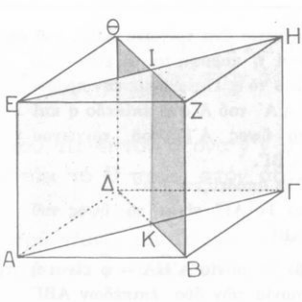
Ἡ γωνία ὅμως $\widehat{ABE}$ εἶναι ἡ ἀντίστοιχη ἐπίπεδη μιᾶς δίεδρης, πού σχηματίζεται ἀπό τά ἐπίπεδα p καί q. Συνεπῶς τά ἐπίπεδα p καί q εἶναι κάθετα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

6. Δίνεται ἕνα ἐπίπεδο q καί ἕνα τμῆμα ΑΒ μέ $B \in q$. Ἄν εἶναι $(AB) = 10$ cm καί ἡ προβολή Α'Β τοῦ τμήματος ΑΒ στό ἐπίπεδο q ἔχει μῆκος $(A'B) = 6$ cm, νά ὑπολογισθεῖ ἡ ἀπόσταση τοῦ Α ἀπό τό ἐπίπεδο q.

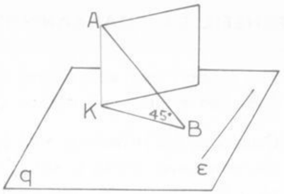
7. Ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ μέ $B \in p$ σχηματίζει μέ τό ἐπίπεδο p γωνία 30°. Ἄν εἶναι $(AB) = 8$ cm, νά ὑπολογισθεῖ τό μῆκος τῆς προβολῆς τοῦ ΑΒ στό ἐπίπεδο p καί ἡ ἀπόσταση τοῦ Α ἀπό τό p.

8. Νά βρεθοῦν τά ζεύγη τῶν κάθετων ἐπιπέδων, πού ὑπάρχουν στόν κύβο τοῦ διπλανοῦ σχήματος.
Νά βρεθοῦν ἐπίσης οἱ γωνίες πού σχηματίζουν τά ἐπίπεδα:
α) ΑΓΗΕ καί ΒΓΗΖ
β) ΑΓΗΕ καί ΘΖΒΔ.



9. Δίνεται ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\widehat{A} = 90°)$, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρά ΑΒ βρίσκεται σέ δεδομένο ἐπίπεδο p. Ἄν $(AB) = 5$ cm, $(B\Gamma) = 13$ cm καί ἡ γωνία τῶν ἐπιπέδων ΑΒΓ καί p εἶναι 60°, νά βρεθεῖ τό ἐμβαδό τῆς προβολῆς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ στό ἐπίπεδο p.

10. Τό διπλανό σχῆμα δείχνει μία κομμένη κάρτα πάνω σ' ἕνα τραπέζι (ἐπίπεδο) q καί μία εὐθεία ε τοῦ q. Τοποθετῆστε τήν κάρτα κατά τέτοιο τρόπο πάνω στό q, ὥστε τό σημεῖο Β νά εἶναι πάνω στήν ε καί τό ἐπίπεδο τῶν ΑΒ καί ε νά σχηματίζει μέ τό q γωνία 45°.



11. Νά βρεθοῦν τά σημεῖα τοῦ χώρου: Α (–2,3,2), Β(0,0,0), Γ(1,1,1), Δ(0,0,2), Ε (1,0,3).

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 6

1. Ὁρίζουμε ὅτι **γωνία τῶν ἀσύμβατων εὐθειῶν ε καί ε'** λέγεται ἡ ὀξεία γωνία, πού σχηματίζεται, ὅταν φέρουμε ἀπό ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τοῦ χώρου δύο εὐθεῖες παράλληλες πρός τίς ε καί ε'. Ἄν ἡ γωνία αὐτή εἶναι ὀρθή, οἱ ἀσύμβατες λέγονται ὀρθογώνιες ἤ κάθετες.

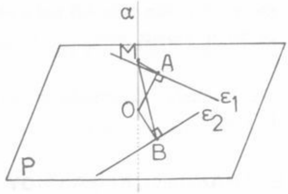
2. Μία εὐθεία πού τέμνει ἕνα ἐπίπεδο p καί εἶναι κάθετη σέ **δύο** εὐθεῖες τοῦ p, πού διέρχονται ἀπό τό ἴχνος της, (ἤ εἶναι ὀρθογώνια πρός δύο μή παράλληλες εὐθεῖες τοῦ p) λέγεται **κάθετη στό p.** Ὅταν μία εὐθεία εἶναι κάθετη σ' ἕνα ἐπίπεδο p, εἶναι κάθετη σέ **ὅλες** τίς εὐθεῖες τοῦ p, πού διέρχονται ἀπό τό ἴχνος της. Τονίζεται ὅτι:
   - Σέ ἕνα σημεῖο ἑνός ἐπιπέδου p (ἤ ἀπό ἕνα σημεῖο πού βρίσκεται ἔξω ἀπό τό p) μποροῦμε νά φέρουμε **μία μόνο** κάθετη εὐθεία στό p.
   - Δύο εὐθεῖες κάθετες στό ἴδιο ἐπίπεδο εἶναι παράλληλες.

3. Τό τμῆμα ΑΒ, πού φέρνουμε κάθετο πρός ἕνα ἐπίπεδο p, ἀπό ἕνα σημεῖο Α, τό ὁποῖο βρίσκεται ἔξω ἀπό τό p, λέγεται **ἀπόσταση** τοῦ σημείου Α ἀπό τό ἐπίπεδο p, ἐνῶ τό ἴχνος του Β λέγεται καί **προβολή τοῦ Α** πάνω στό p. Ἡ ἀπόσταση ΑΒ εἶναι μικρότερη ἀπό κάθε ἄλλο τμῆμα, πού συνδέει τό σημεῖο Α μέ ὁποιοδήποτε ἄλλο σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου p.
   Τό σύνολο τῶν προβολῶν ὅλων τῶν σημείων ἑνός σχήματος σ σ' ἕνα ἐπίπεδο p ἀποτελεῖ ἕνα σχῆμα τοῦ p, πού λέγεται **προβολή τοῦ σ** στό ἐπίπεδο p. **Ἡ προβολή μιᾶς εὐθείας πάνω σέ ἐπίπεδο εἶναι εὐθεία.**

4. Δύο ἡμιεπίπεδα, πού διέρχονται ἀπό μιά εὐθεία ε, χωρίζουν τό χῶρο σέ δύο **δίεδρες γωνίες**. Κάθε μία ἀπ' αὐτές ἔχει ἕδρες τά δύο ἡμιεπίπεδα καί ἀκμή τήν ε. Κάθε δίεδρη γωνία ἀντιπροσωπεύεται ἀπό τήν **ἀντίστοιχη ἐπίπεδη** γωνία της. Ἔτσι, μιά δίεδρη εἶναι ὀρθή, ὅταν ἡ ἀντίστοιχη ἐπίπεδη γωνία εἶναι ὀρθή. Γενικά, ἡ σύγκριση τῶν δίεδρων γωνιῶν ἀνάγεται στή σύγκριση τῶν ἀντίστοιχων ἐπιπέδων γωνιῶν τους.
   Δύο ἐπίπεδα λέγονται **κάθετα**, ὅταν μία δίεδρη γωνία πού σχηματίζουν εἶναι ὀρθή. Μέ τρία ἐπίπεδα κάθετα ἀνά δύο μποροῦμε νά ὁρίσουμε καί στό χῶρο ἕνα **σύστημα συντεταγμένων**. Τότε, σέ κάθε σημεῖο Μ τοῦ χώρου ἀντιστοιχίζεται μία ὁρισμένη διατεταγμένη τριάδα ἀριθμῶν καί ἀντιστρόφως.

12. Μιά εὐθεία ε εἶναι κάθετη στό κέντρο Ο ἑνός κυκλικοῦ δίσκου (O,R). Ἄν Α καί Β εἶναι δύο σημεῖα τοῦ κύκλου (O,R) καί $M \in \varepsilon$, νά ἀποδείξετε ὅτι $MA = MB$.

13. Θεωροῦμε ἕνα ἐπίπεδο p, πού ὁρίζεται ἀπό δύο τεμνόμενες εὐθεῖες ε_1 καί ε_2 καί ἔξω ἀπό τό p ἕνα σημεῖο Μ τοῦ ὁποίου οἱ ἀποστάσεις ΜΑ καί ΜΒ ἀπό τίς εὐθεῖες ε_1 καί ε_2 εἶναι ἴσες. Φέρνουμε ἀπό τό Μ τήν κάθετη εὐθεία πρός τό p καί ὀνομάζουμε Ο τό ἴχνος της καί Σ ἕνα ὁποιοδήποτε ἄλλο σημεῖο της. Νά ἀποδείξετε ὅτι:
α) $OA = OB$ β) $\Sigma A = \Sigma B$.



14. Οἱ ἀποστάσεις δύο σημείων Α καί Β ἀπό ἕνα ἐπίπεδο p εἶναι $(AA') = 6$ cm καί $(BB') = 9$ cm. Ἄν εἶναι $(AB) = 5$ cm, νά βρεῖτε τό μῆκος τῆς προβολῆς τοῦ ΑΒ στό p.

15. Τό ἐπίπεδο ἑνός τριγώνου ΑΒΓ εἶναι παράλληλο πρός ἕνα ἐπίπεδο p. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ προβολή Α'Β'Γ' τοῦ τριγώνου ΑΒΓ στό p εἶναι τρίγωνο ἴσο μέ τό ΑΒΓ.

16. Ἕνα ἰσόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ μέ πλευρά α ἔχει τήν πλευρά του ΒΓ ἐπάνω σέ δεδομένο ἐπίπεδο q. Ἄν ἡ γωνία τῶν ἐπιπέδων ΑΒΓ καί q εἶναι 30°, νά βρεῖτε τό ἐμβαδό τῆς προβολῆς τοῦ ΑΒΓ στό ἐπίπεδο q.

7ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

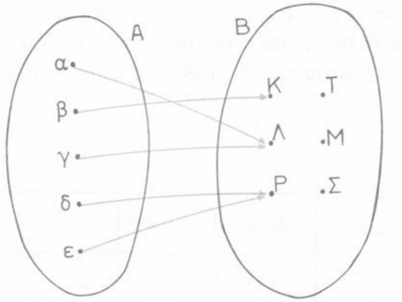
ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Συνάρτηση μιᾶς μεταβλητῆς.

7·1. Στή Β' τάξη μάθαμε ὅτι κάθε διμελής σχέση φ, ἀπό ἕνα σύνολο Α σ' ἕνα σύνολο Β, ἡ ὁποία σέ κάθε στοιχεῖο τοῦ Α ἀντιστοιχίζει ἕνα μόνο στοιχεῖο τοῦ Β, λέγεται **ἀπεικόνιση ἀπό τό Α στό Β** καί σημειώνεται

$$φ: A \to B$$

Τό σύνολο Α λέγεται **σύνολο ἀφετηρίας** (ἤ **σύνολο ὁρισμοῦ**) τῆς ἀπεικονίσεως φ καί τό Β λέγεται **σύνολο ἀφίξεως.** Στό διπλανό σχῆμα βλέπουμε μιά ἀπεικόνιση τοῦ συνόλου $A = \{α,β,γ,δ,ε\}$ στό σύνολο $B = \{K,Λ,M,P,Σ,T\}$.



(σχ. 1)

Ἄν στό στοιχεῖο x τοῦ συνόλου Α ἀντιστοιχίζεται (ἀπό τήν ἀπεικόνιση φ) τό στοιχεῖο y τοῦ συνόλου Β, τότε τό y λέγεται **εἰκόνα τοῦ x** καί σημειώνεται φ(x).

Μάθαμε ἀκόμη ὅτι, ἄν τά Α καί Β εἶναι ἀριθμητικά σύνολα, ἡ ἀπεικόνιση $φ: A \to B$ λέγεται καί **συνάρτηση μέ πεδίο ὁρισμοῦ Α** πού παίρνει **τιμές** στό Β. Συνήθως θεωροῦμε ὅτι μιά συνάρτηση παίρνει τιμές σέ ὅλο τό σύνολο R τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, δηλαδή θεωροῦμε ὅτι εἶναι

$$φ: A \to R$$

Γιά νά προσδιορίσουμε λοιπόν μιά συνάρτηση, πρέπει νά ξέρουμε

- τό πεδίο ὁρισμοῦ της Α, τό ὁποῖο εἶναι ὑποσύνολο τοῦ R,
- τόν «κανόνα» μέ τόν ὁποῖο θά ἀντιστοιχίζεται σέ κάθε $x \in A$ ἕνας πραγματικός ἀριθμός.

Ἔτσι π.χ. γιά νά προσδιορίσουμε μιά συνάρτηση φ μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό $A = \{1,2,4,6,7\}$, θά πρέπει νά ὁρίσουμε ἕναν *κανόνα*, ὁ ὁποῖος θά ἀντιστοιχίζει σέ κάθε $x \in A$ έναν πραγματικό ἀριθμό $\varphi(x)$. Ἕνας τέτοιος κανόνας ὁρίζεται π.χ. μέ τήν ἰσότητα

$$(1) \qquad \varphi(x) = \frac{8}{x}$$

ἡ ὁποία λέγεται **τύπος** τῆς συναρτήσεως φ. Στή συνάρτηση αὐτή εἰκόνες τῶν στοιχείων 1,2,4,... τοῦ Α εἶναι ἀντιστοίχως οἱ ἀριθμοί

$$\varphi(1) = \frac{8}{1} = 8, \quad \varphi(2) = \frac{8}{2} = 4, \quad \varphi(4) = \frac{8}{4} = 2, \ldots,$$

οἱ ὁποῖοι λέγονται τώρα **τιμές** τῆς συναρτήσεως φ γιά $x = 1$, $x = 2$, $x = 4, \ldots$

7·2. Ἀφοῦ μιά συνάρτηση φ εἶναι ἀπεικόνιση (δηλαδή διμελής σχέση), ἔχει γράφημα τό ὁποῖο ἀποτελεῖται ἀπό ὅλα τά ζεύγη $(x, \varphi(x))$ μέ $x \in A$. Τό γράφημα π.χ. τῆς παραπάνω συναρτήσεως ἀποτελεῖται ἀπό τά ζεύγη

$$(1,8),\ (2,4),\ (4,2),\ \left(6, \frac{8}{6}\right),\ \left(7, \frac{8}{7}\right)$$

καί μπορεῖ νά δοθεῖ καί μέ τή μορφή ἑνός πίνακα μέ δύο γραμμές (ἤ δύο στῆλες), πού στή μιά γράφουμε τίς τιμές τοῦ Α καί στήν ἄλλη γράφουμε τίς ἀντίστοιχες τιμές τῆς συναρτήσεως.

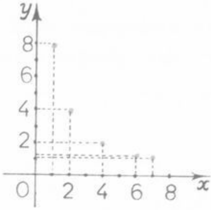
x	1	2	4	6	7
φ(x)	8	4	2	$\frac{8}{6}$	$\frac{8}{7}$

x	φ(x)
1	8
2	4
4	2
6	$\frac{8}{6}$
7	$\frac{8}{7}$

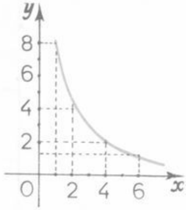
Κάθε ἕνας ἀπό τούς πίνακες αὐτούς λέγεται **πίνακας τιμῶν** τῆς συναρτήσεως φ.

Ἄς πάρουμε ἕνα σύστημα συντεταγμένων καί ἄς σημειώσουμε ὅλα τά σημεῖα πού ἔχουν συντεταγμένες τά ζεύγη τοῦ γραφήματος τῆς φ. Τό σύνολο τῶν σημείων αὐτῶν δίνει τή γεωμετρική εἰκόνα τοῦ γραφήματος καί λέγεται **γραφική παράσταση** τῆς συναρτήσεως φ. Στό σχῆμα 2 δίνεται ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως, πού ἔχει τύπο τόν

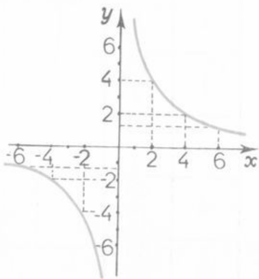
(1) καί πεδίο ὁρισμοῦ τό $A = \{1,2,4,6,7\}$, ἐνῶ στά σχήματα 3 καί 4



(σχ. 2)



(σχ. 3)



(σχ. 4)

δίνονται οἱ γραφικές παραστάσεις τῶν συναρτήσεων, πού ἔχουν τόν ἴδιο τύπο καί πεδία ὁρισμοῦ τά R^+ καί $R-\{0\}$ ἀντιστοίχως.[1]

Ἄν ὀνομάσουμε y τήν τιμή τῆς συναρτήσεως, πού ἀντιστοιχεῖ στό $x \in A$, ὁ τύπος τῆς παραπάνω συναρτήσεως γράφεται

$$(2) \qquad y = \frac{8}{x}$$

Εἶναι φανερό ὅτι ἡ ἰσότητα αὐτή ἐπαληθεύεται ἀπό τίς συντεταγμένες ὅλων τῶν σημείων τῆς γραφικῆς παραστάσεως.

Συναρτήσεις πού ὁρίζονται μέ ἀλγεβρικές παραστάσεις.

7.3. Ἄς θεωρήσουμε μιά ἀλγεβρική παράσταση, πού περιέχει μόνο ἕνα γράμμα x, π.χ. τήν

$$\frac{2x^2+11}{x^2+1}$$

καί ἄς ὑποθέσουμε ὅτι τό x παίρνει τιμές στό σύνολο $A = \{1,2,4,6,7\}$.

Μέ τήν ἀλγεβρική αὐτή παράσταση μποροῦμε νά ὁρίσουμε μιά συνάρτηση φ, ἡ ὁποία ἔχει πεδίο ὁρισμοῦ τό A καί τύπο

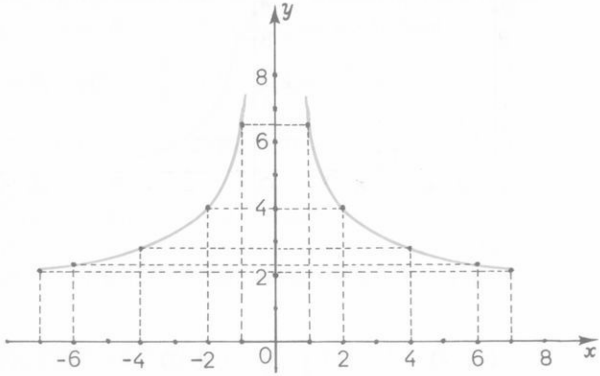
$$(3) \qquad y = \frac{2x^2+11}{x^2+1}$$

---

1. Μέ R^+ σημειώνουμε τό σύνολο τῶν θετικῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Μέ τό σύμβολο $R-\{0\}$ σημειώνουμε τό σύνολο, πού ἔχει στοιχεῖα ὅλους τούς πραγματικούς ἀριθμούς ἐκτός ἀπό τό μηδέν.

Δηλαδή ἡ συνάρτηση φ εἶναι τέτοια, ὥστε σέ κάθε τιμή $x \in A$, π.χ. τήν $x = 1$, ἀντιστοιχίζεται ἡ ἀριθμητική τιμή τῆς ἀλγεβρικῆς παραστάσεως γιά $x = 1$. Ἄν βροῦμε τίς ἀριθμητικές τιμές τῆς παραστάσεως γιά ὅλες τίς τιμές τοῦ x, σχηματίζουμε τόν παρακάτω πίνακα τιμῶν της καί

x	y
1	$\frac{13}{2}$
2	$\frac{19}{5}$
4	$\frac{43}{17}$
6	$\frac{83}{37}$
7	$\frac{109}{50}$



(σχ. 5)

τή γραφική της παράσταση, ἡ ὁποία θά ἀποτελεῖται ἀπό τά σημεῖα $\left(1, \frac{13}{2}\right)$, $\left(2, \frac{19}{5}\right)$, $\left(4, \frac{43}{17}\right)$,.... Βλέπουμε λοιπόν ὅτι:

> Κάθε ἀλγεβρική παράσταση, πού περιέχει ἕνα γράμμα x, ὁρίζει μιά συνάρτηση, ἡ ὁποία ἔχει πεδίο ὁρισμοῦ τό σύνολο στό ὁποῖο παίρνει τιμές τό γράμμα x.

Ἄν σέ μιά τέτοια συνάρτηση δέ δίνεται τό σύνολο στό ὁποῖο παίρνει τιμές τό γράμμα x, τότε παίρνουμε γιά πεδίο ὁρισμοῦ της τό σύνολο ὅλων τῶν τιμῶν τοῦ x, γιά τίς ὁποῖες ἡ ἀλγεβρική παράσταση ἔχει νόημα πραγματικοῦ ἀριθμοῦ. Ἔτσι π.χ. ἄν δίνεται ἡ συνάρτηση φ πού ἔχει τύπο τόν (3), δίχως νά δίνεται τό πεδίο ὁρισμοῦ της, τότε παίρνουμε γιά πεδίο ὁρισμοῦ τῆς φ τό σύνολο R, γιατί τό δεύτερο μέλος τῆς (3) ἔχει νόημα πραγματικοῦ ἀριθμοῦ γιά κάθε $x \in R$. Ἡ συνάρτηση αὐτή ἔχει γραφική παράσταση μιά «συνεχή» γραμμή, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπό τά σημεῖα τοῦ σχήματος 5.

Ἐπίσης, ἄν δίνεται ἡ συνάρτηση μέ τύπο

$$(4) \qquad y = \frac{2x+3}{(x-1)(x-5)}$$

παίρνουμε γιά πεδίο ὁρισμοῦ της τό $A = R-\{1,5\}$, γιατί τό δεύτερο μέλος τῆς (4) δέν ἔχει νόημα πραγματικοῦ ἀριθμοῦ γιά $x=1$ καί $x=5$.

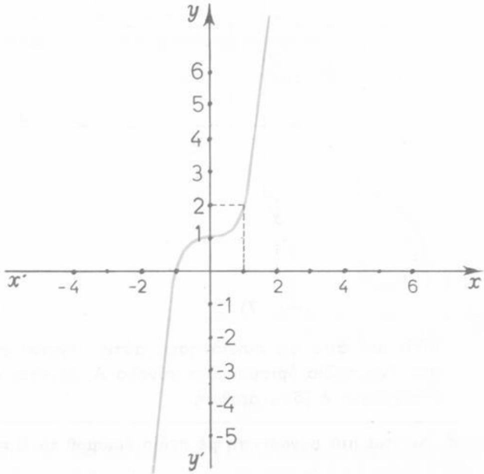
7.4. Ἄν ἡ ἀλγεβρική παράσταση, ἡ ὁποία ὁρίζει μιά συνάρτηση, εἶναι πολυώνυμο ὡς πρός x, τότε ἡ συνάρτηση λέγεται **πολυωνυμική.** Μιά τέτοια συνάρτηση εἶναι π.χ. αὐτή πού ἔχει τύπο

$$y = x^3 + 1$$

Στόν παρακάτω πίνακα δίνονται μερικές τιμές της καί

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
y	-7	0	$\frac{7}{8}$	1	$\frac{9}{8}$	2	9

ἀπ' αὐτές βλέπουμε ὅτι ἡ γραφική της παράσταση θά εἶναι μιά *συνεχής* γραμμή, πού διέρχεται ἀπό τά σημεῖα $(-2,-7)$, $(-1,0)$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{8}\right)$, $(0,1), \ldots$



(σχ. 6)

Εἶναι φανερό ὅτι σέ κάθε πολυωνυμική συνάρτηση, πού δέ δίνεται τό πεδίο ὁρισμοῦ της, παίρνουμε γιά πεδίο ὁρισμοῦ τό σύνολο R.

Ἄν ἡ ἀλγεβρική παράσταση, ἡ ὁποία ὁρίζει μιά συνάρτηση, εἶναι πηλίκο δύο ἀκέραιων πολυωνύμων ὡς πρός x, τότε ἡ συνάρτηση λέγεται **ρητή.** Μιά τέτοια συνάρτηση εἶναι π.χ. αὐτή πού ἔχει τύπο

$$y = \frac{x^2+3}{x+1}$$

καί πεδίο ὁρισμοῦ τό $A = R-\{-1\}$. Ἐπίσης ἡ συνάρτηση, πού ἔχει τύπο τόν (4), εἶναι ρητή καί ἔχει, ὅπως εἴπαμε, πεδίο ὁρισμοῦ τό $A = R-\{1,5\}$.

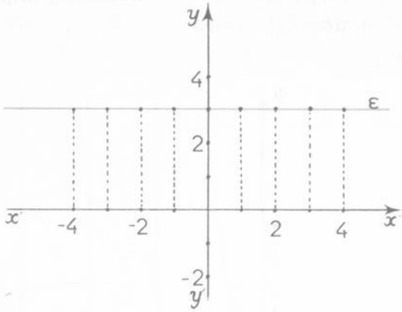
Γενικά, σέ κάθε ρητή συνάρτηση φ, πού δέ δίνεται τό πεδίο ὁρισμοῦ της, παίρνουμε γιά πεδίο ὁρισμοῦ τό $A = R - \{\rho_1, \rho_2, \ldots\}$, ὅπου $\rho_1, \rho_2, \ldots$ εἶναι οἱ ρίζες τοῦ παρονομαστῆ της.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

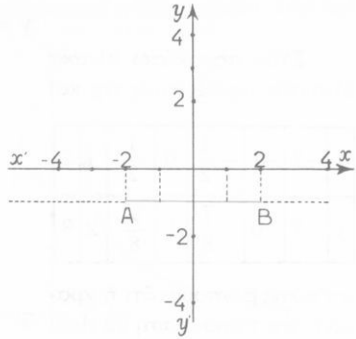
1. **Νά βρεθεῖ ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως, πού ἔχει πεδίο ὁρισμοῦ τό R καί τύπο τόν $y = 3$. Ἐπίσης, νά βρεθεῖ ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως, πού ἔχει πεδίο ὁρισμοῦ τό $E = \{x: -2 \leqslant x \leqslant 2\}$ καί τύπο $y = -1$.**

Λύση. Ἡ γραφική παράσταση τῆς πρώτης συναρτήσεως εἶναι μιά εὐθεία παράλληλη πρός τόν ἄξονα Ox (σχ. 7).

Ἡ γραφική παράσταση τῆς δεύτερης συναρτήσεως εἶναι ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα AB παράλληλο πρός τόν ἄξονα Ox (σχ. 8).



(σχ. 7)



(σχ. 8)

Κάθε μιά ἀπό τίς συναρτήσεις αὐτές λέγεται *σταθερή*. Γενικά, μία συνάρτηση φ, πού ἔχει πεδίο ὁρισμοῦ ἕνα σύνολο A, λέγεται **σταθερή**, ὅταν σέ κάθε $x \in A$ ἀντιστοιχίζεται ὁ ἴδιος ἀριθμός.

2. **Δίνεται μιά συνάρτηση μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό $E = \{x: -2 \leqslant x \leqslant 2\}$ καί τύπο**

$$y = \frac{x}{4}(x^2+1)$$

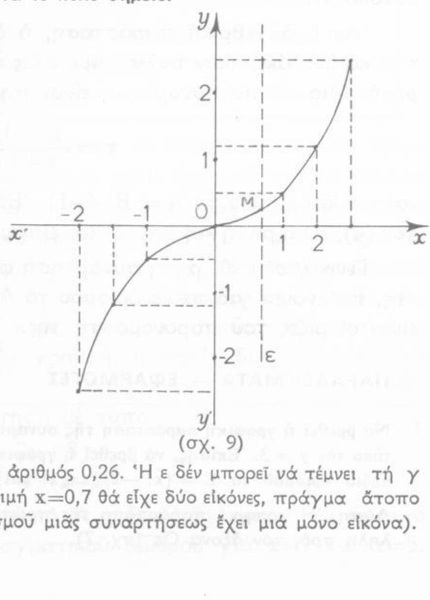
Νά βρεθεῖ ἡ γραφική της παράσταση γ καί νά ἀποδειχθεῖ ὅτι κάθε εὐθεία ε παράλληλη πρός τόν ἄξονα Oy τέμνει τήν γ σέ ἕνα τό πολύ σημεῖο.

Λύση: Ὁ παρακάτω πίνακας δίνει μερικές τιμές τῆς συναρτήσεως, μέ τή βοήθεια τῶν ὁποίων κατασκευάζουμε τή γραφική της παράσταση γ.

x	-2	$-1{,}5$	-1	0	1	1,5	2
y	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{39}{32}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{39}{32}$	$\frac{5}{2}$

Ἄς φέρουμε τώρα μιά εὐθεία ε παράλληλη πρός τόν ἄξονα Oy, ἡ ὁποία τέμνει τόν ἄξονα Ox στό σημεῖο x=0,7. Ἡ ε τέμνει καί τή γ σέ ἕνα σημεῖο M πού ἔχει συντεταγμένες

$$x = 0{,}7 \quad , \quad y = 0{,}26$$



(σχ. 9)

γιατί εἰκόνα τῆς τιμῆς x = 0,7 εἶναι ὁ ἀριθμός 0,26. Ἡ ε δέν μπορεῖ νά τέμνει τή γ καί σέ ἄλλο σημεῖο M′, γιατί τότε ἡ τιμή x=0,7 θά εἶχε δύο εἰκόνες, πράγμα ἄτοπο (ἀφοῦ κάθε στοιχεῖο τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ μιᾶς συναρτήσεως ἔχει μιά μόνο εἰκόνα).

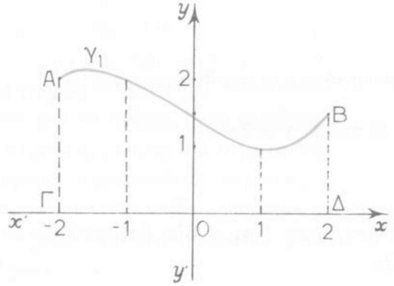
3. Στά παρακάτω σχήματα δίνονται δύο γραμμές γ_1 καί γ_2, πού οἱ προβολές τους στόν ἄξονα Ox εἶναι τό ἴδιο σύνολο $E = \{x: -2 \leqslant x \leqslant 2\}$.

Νά δικαιολογήσετε ὅτι:

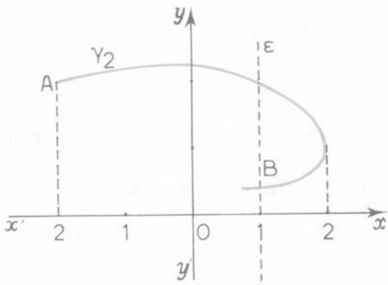
— Ἡ γραμμή γ_1 εἶναι γραφική παράσταση μιᾶς συναρτήσεως, πού ἔχει πεδίο ὁρισμοῦ τό E, καί νά βρεῖτε τίς τιμές της γιά $x = -1, 0, 1$.

— Ἡ γραμμή γ_2 δέν μπορεῖ νά εἶναι γραφική παράσταση συναρτήσεως.

Λύση: Ἡ γ_1 εἶναι γραφική παράσταση μιᾶς συναρτήσεως, πού ἔχει πεδίο ὁρισμοῦ τό E,



(σχ. 10)



(σχ. 11)

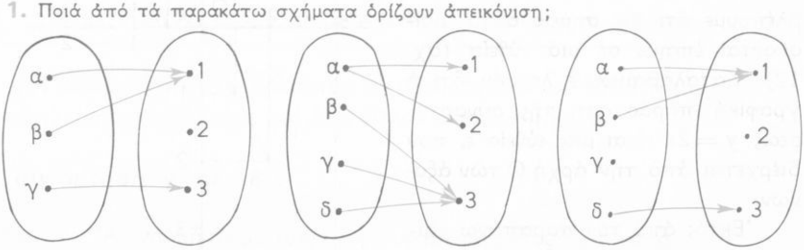
γιατί κάθε στοιχεῖο $x \in E$ ἔχει μιά μόνο εἰκόνα. Αὐτό τό διαπιστώνουμε εὔκολα, γιατί κάθε εὐθεία παράλληλη πρός τόν ἄξονα Oy, ἡ ὁποία περνάει ἀπό ἕνα σημεῖο τοῦ ΓΔ, τέμνει τή γ_1 σέ ἕνα μόνο σημεῖο. Ἄν παραστήσουμε μέ φ τή συνάρτηση αὐτή, θά ἔχουμε

$$\varphi(-1) = 2, \quad \varphi(0) = 1{,}5, \quad \varphi(1) = 1$$

Ἡ γ_2 δέν εἶναι γραφική παράσταση συναρτήσεως, γιατί π.χ. ἡ εὐθεία ε, πού περνάει ἀπό τό σημεῖο 1 καί εἶναι παράλληλη πρός τόν Oy, τέμνει τή γ_2 σέ δύο σημεῖα καί ἑπομένως τό στοιχεῖο 1 ἔχει δύο εἰκόνες.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ποιά ἀπό τά παρακάτω σχήματα ὁρίζουν ἀπεικόνιση;



(α) (β) (γ)

2. Ἄν ἡ συνάρτηση φ ἔχει τύπο $\varphi(x) = \dfrac{4}{x-1}$ καί πεδίο ὁρισμοῦ τό $A = \{0, 2, 3, 4, 5, 6\}$, νά βρεῖτε τό γράφημά της, νά γράψετε τόν πίνακα τιμῶν της καί νά κάνετε τή γραφική της παράσταση.

3. Τό ἴδιο γιά τή συνάρτηση f, πού ἔχει τύπο $f(x)=x^3-1$ καί πεδίο ὁρισμοῦ τό $A=\left\{-2,-\frac{3}{2},-1,0,1,\frac{3}{2},2\right\}$.

4. Νά βρεῖτε τά πεδία ὁρισμοῦ τῶν συναρτήσεων, πού ἔχουν τύπους

$$y=x^2-2x,\quad y=\frac{2x+3}{x^2-4x+3},\quad y=\frac{1}{x^2-1},\quad y=\sqrt{2x-1}$$

5. Ἄν εἶναι $\varphi(x)=-x^2+\frac{1}{2}$, νά βρεῖτε τίς εἰκόνες $\varphi(0)$, $\varphi(-2)$, $\varphi\left(-\frac{1}{2}\right)$, $\varphi(1)$, $\varphi\left(\frac{3}{2}\right)$.

6. Νά κάνετε τή γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως φ, πού ἔχει τύπο $y=\frac{x+1}{x^2+1}$

7. Νά κάνετε τό ἴδιο γιά τή συνάρτηση μέ τύπο $y=2x^3-4$

Ἡ συνάρτηση y=αx

7.5. Ἄς θεωρήσουμε τή συνάρτηση, πού ἔχει πεδίο ὁρισμοῦ τό R καί τύπο $y=2x$

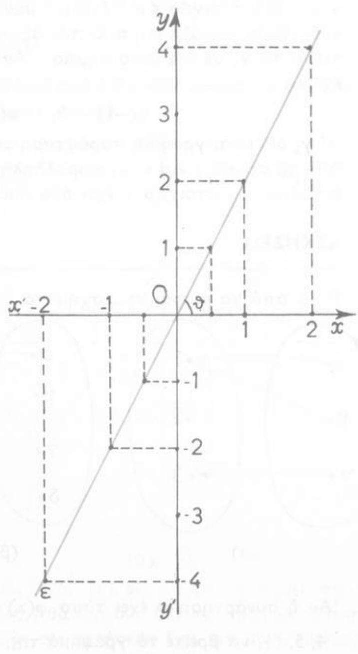
καί ἄς καταρτίσουμε τόν παρακάτω πίνακα

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
y	-4	-2	-1	0	1	2	4

πού δίνει μερικές τιμές της. Ἄν κατασκευάσουμε σέ ἕνα ὀρθογώνιο σύστημα ἀξόνων τά σημεῖα... $(-1,-2)$, $\left(-\frac{1}{2},-1\right)$ $(0,0)$, $\left(\frac{1}{2},1\right)$, . . . ,

βλέπουμε ὅτι τά σημεῖα αὐτά βρίσκονται ἐπάνω σέ μιά εὐθεία (σχ. 12). Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως $y=2x$ εἶναι μία εὐθεία ε, πού διέρχεται ἀπό τήν ἀρχή O τῶν ἀξόνων.

Ἐκτός ἀπό τόν παραπάνω «ἐμπειρικό» τρόπο, μποροῦμε νά ἀποδείξουμε καί θεωρητικά ὅτι ἡ γραφική παράσταση τῆς $y=2x$ εἶναι εὐθεία. Πραγματικά, ἡ $y=2x$ γιά $x=0$ δίνει $y=2.0=0$ καί αὐτό σημαίνει

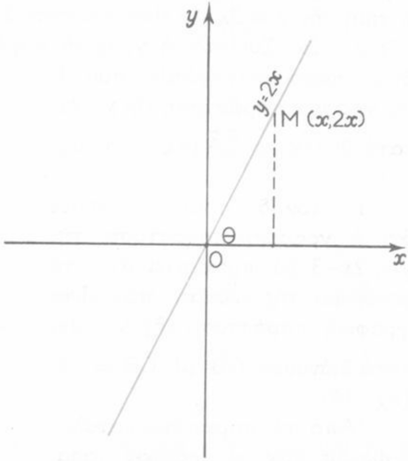


(σχ. 12)

ὅτι τό σημεῖο (0,0) ἀνήκει στή γραφική παράσταση τῆς $y=2x$. Ἄς θεωρήσουμε τώρα ἕνα ὁποιοδήποτε ἄλλο σημεῖο $M(x,y)$ τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῆς $y=2x$ καί ἄς ὀνομάσουμε θ τήν γωνία $x\widehat{O}M$. Ἐπειδή τό Μ ἔχει συντεταγμένες $(x,2x)$, θά ἔχουμε

$$\varepsilon\varphi\theta=\frac{y}{x}=\frac{2x}{x}=2,$$

δηλαδή ἡ εὐθεία ΟΜ σχηματίζει μέ τόν ἄξονα Ox ὁρισμένη γωνία θ, πού ἔχει ἐφαπτομένη 2. Αὐτό σημαίνει ὅτι οἱ εὐθεῖες, πού συνδέουν τό σημεῖο Ο μέ ὅλα τά σημεῖα τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῆς $y=2x$, σχηματίζουν τήν ἴδια γωνία μέ τόν ἄξονα Ox καί συνεπῶς συμπίπτουν.



(σχ. 13)

Δείξαμε λοιπόν ὅτι κάθε σημεῖο Μ, πού οἱ συντεταγμένες του ἐπαληθεύουν τήν $y=2x$, βρίσκεται ἐπάνω σέ μία εὐθεία πού σχηματίζει μέ τόν ἄξονα Ox γωνία θ τέτοια, ὥστε $\varepsilon\varphi\theta=2$. Ἀντιστρόφως, οἱ συντεταγμένες κάθε σημείου $M(x,y)$ τῆς εὐθείας αὐτῆς ἐπαληθεύουν τήν $y=2x$, γιατί $\frac{y}{x}=\varepsilon\varphi\theta \Leftrightarrow \frac{y}{x}=2 \Leftrightarrow y=2x$. Ἔτσι ἡ εὐθεία αὐτή εἶναι γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως πού ἔχει τύπο $y=2x$.

Γενικά, ἀποδεικνύεται ὅτι:

> Ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως, πού ἔχει τύπο $y=\alpha x$, εἶναι μία εὐθεία, πού διέρχεται ἀπό τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων.

Ἡ εὐθεία αὐτή κατασκευάζεται, ἄν βροῦμε (ἀπό τόν τύπο τῆς συναρτήσεως) τίς συντεταγμένες καί ἑνός ἄλλου σημείου της Μ.

Ἡ συνάρτηση $y=\alpha x+\beta$

7.6. Ἄς θεωρήσουμε τώρα τή συνάρτηση, πού ἔχει τύπο

$$y=2x+3$$

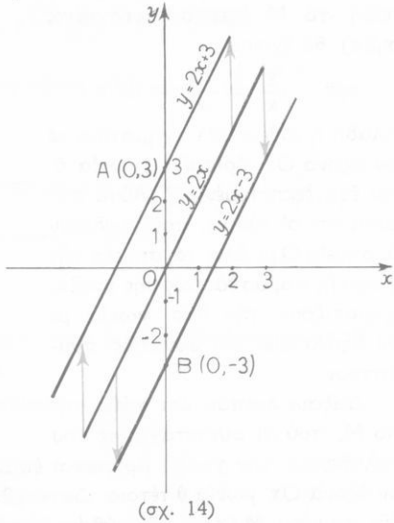
καί ἄς συγκρίνουμε τίς τιμές της μέ τίς τιμές τῆς συναρτήσεως $y=2x$. Παίρνοντας π.χ. $x=1$, βλέπουμε ὅτι ἡ τιμή τῆς $y=2x$ εἶναι $y=2\cdot1=2$, ἐνῶ ἡ τιμή τῆς $y = 2x+3$ εἶναι $y = 2\cdot 1+3 = 5$, δηλαδή εἶναι 3 μονάδες μεγαλύτερη. Γενικά, διαπιστώνουμε εὔκολα ὅτι γιά ὁποιοδήποτε $x \in R$ ἡ τιμή τῆς $y = 2x+3$ εἶναι πάντοτε 3 μονάδες μεγαλύτερη ἀπό τήν τιμή τῆς $y = 2x$. Συνεπῶς ἡ γραφική παράσταση τῆς $y = 2x+3$ προκύπτει, ἄν μεταφέρουμε τήν εὐθεία, πού εἶναι γραφική παράσταση τῆς $y=2x$, κατά διάνυσμα $\overrightarrow{OA}$ μέ $\overline{OA}=3$ (σχ. 14).

Μέ τόν ἴδιο τρόπο βρίσκουμε ὅτι ἡ γραφική παράσταση τῆς $y = 2x-3$ θά προκύπτει ἀπό τή μεταφορά τῆς εὐθείας, πού εἶναι γραφική παράσταση τῆς $y = 2x$, κατά διάνυσμα $\overrightarrow{OB}$ μέ $\overline{OB} = -3$ (σχ. 14)

Ἀπό τά παραπάνω καταλαβαίνουμε πώς οἱ γραφικές παραστάσεις τῶν συναρτήσεων πού ἔχουν τύπους

$y = 2x, \quad y = 2x+3, \quad y = 2x-3,$

εἶναι εὐθεῖες παράλληλες.



(σχ. 14)

Γενικά ἀποδεικνύεται μέ τόν ἴδιο τρόπο ὅτι:

Ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως $y = \alpha x+\beta$ εἶναι μιά εὐθεία παράλληλη πρός τή γραφική παράσταση τῆς $y = \alpha x$.

Ὅταν $\beta \neq 0$, ἡ εὐθεία αὐτή δέ διέρχεται ἀπό τήν ἀρχή O τῶν ἀξόνων καί τέμνει τόν ἄξονα Oy στό σημεῖο $(0,\beta)$.

Ἄς θεωρήσουμε τέλος δύο συναρτήσεις, πού ἔχουν τύπους

$$y = \alpha x+\beta \quad , \quad y = \alpha' x+\beta'$$

καί ἄς ὀνομάσουμε ε καί ε' τίς δύο εὐθεῖες, πού εἶναι γραφικές παραστάσεις τους. Ἀπό τά προηγούμενα εἶναι φανερό ὅτι

— *ὅταν $\alpha = \alpha'$, οἱ εὐθεῖες ε καί ε' εἶναι παράλληλες,*

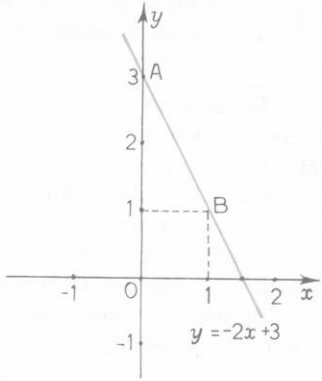
— *ὅταν $\alpha = \alpha'$ καί $\beta=\beta'$, οἱ εὐθεῖες ε καί ε' συμπίπτουν,* γιατί ἔχουν κοινό τό σημεῖο $(0,\beta)$

Παράδειγμα. Νά γίνει ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως, πού ἔχει τύπο y = —2x+3.

Λύση: Δίνουμε δύο τιμές στό x, π.χ. τίς x=0 καί x=1, καί βρίσκουμε τίς ἀντίστοιχες τιμές τῆς συναρτήσεως, πού εἶναι ψ=3 καί ψ = 1.

Ἔτσι ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως εἶναι μιά εὐθεία AB (βλ. σχ. 15), πού διέρχεται ἀπό τά σημεῖα

A(0,3) καί B(1,1)



(σχ. 15)

Ἐξίσωση εὐθείας.

7.7. Ἄς θεωρήσουμε τή συνάρτηση, πού ἔχει πεδίο ὁρισμοῦ τό R καί τύπο τόν

(5) $\quad y = 2x+3$

Ἡ γραφική παράστασή της εἶναι, ὅπως εἴδαμε, μία εὐθεία ε, ἡ ὁποία κατασκευάζεται ἄν βροῦμε δύο σημεῖα της, π.χ. τά T (0,3) καί A (1,5). Παρατηροῦμε τώρα ὅτι:

—Ἡ ἰσότητα (5) εἶναι μία ἐξίσωση μέ δύο ἀγνώστους x καί y καί κάθε διατεταγμένο ζεῦγος (x,y), πού τήν ἐπαληθεύει (ὅπως π.χ. τό $x = \frac{1}{2}$, $y = 4$), παριστάνει τίς συντεταγμένες ἑνός σημείου M, πού βρίσκεται πάνω στήν εὐθεία ε.

σχ. 16

—Ἀντιστρόφως, ἄν πάρουμε ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τῆς ε, π.χ. τό Λ (—2, —1) ,οἱ συντεταγμένες του ἐπαληθεύουν τήν ἐξίσωση (5).

Συνεπῶς, ἡ ἐξίσωση (5) ἐπαληθεύεται ἀπό τίς συντεταγμένες ὅλων τῶν σημείων τῆς ε καί μόνο ἀπ' αὐτές. Γιά τό λόγο αὐτό λέμε ὅτι *«ἡ $y = 2x+3$ εἶναι ἐξίσωση τῆς εὐθείας ε»*.

Γενικά λοιπόν καταλαβαίνουμε ὅτι:

Κάθε ἐξίσωση τῆς μορφῆς $y = \alpha x + \beta$ παριστάνει μιά εὐθεία καί λέγεται ἐξίσωση τῆς εὐθείας αὐτῆς.

Πολλές φορές ταυτίζουμε τήν ἐξίσωση $y = \alpha x + \beta$ μέ τήν εὐθεία πού παριστάνει καί λέμε *«ἡ εὐθεία $y = 2x+3$»* ἐννοώντας τήν εὐθεία, πού ἔχει ἐξίσωση τήν $y = 2x+3$. Εἶναι φανερό ὅτι μποροῦμε πάντοτε νά κατασκευάσουμε τήν εὐθεία πού παριστάνει μιά ἐξίσωση $y = \alpha x + \beta$ βρίσκοντας δύο σημεῖα της.

Ἐπειδή ἡ ἐξίσωση $y = \alpha x + \beta$ ἔχει στό πρῶτο μέλος της μόνο τόν ἄγνωστο y, λέμε ὅτι εἶναι *«λυμένη»* ὡς πρός y.

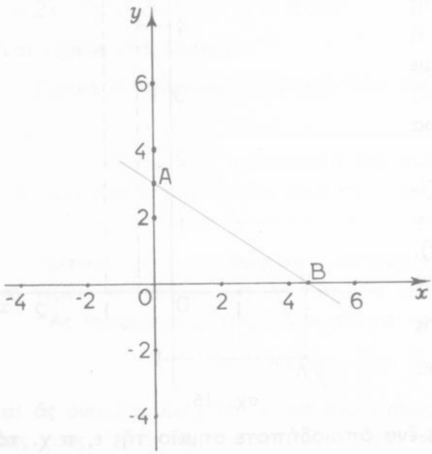
Ἄς πάρουμε τώρα πιό γενικά μιά ἐξίσωση πρώτου βαθμοῦ ὡς πρός x καί y, πού νά μήν εἶναι «λυμένη» ὡς πρός y, π.χ. τήν

$$2x+3y = 9 \tag{6}$$

Ἡ ἐξίσωση αὐτή παριστάνει πάλι μία ὁρισμένη εὐθεία, γιατί γράφεται $3y = -2x+9$ ἤ τελικά

$$y = -\frac{2}{3}x+3 \tag{7}$$

Μποροῦμε λοιπόν νά κατασκευάσουμε τήν εὐθεία (6) βρίσκοντας ὅπως καί προηγουμένως δύο σημεῖα της ἀπό τήν ἐξίσωση (7). Συνήθως ὅμως κατασκευάζουμε τήν εὐθεία αὐτή βρίσκοντας κατευθείαν ἀπό τήν ἐξίσωση (6) τά σημεῖα Α καί Β (σχ. 17), στά ὁποῖα τέμνει τούς ἄξονες Οψ καί Οx. Αὐτό γίνεται ὡς ἑξῆς:



(σχ. 17)

— Γιά νά βροῦμε τό Α, βάζουμε στήν ἐξίσωση (6) $x=0$ (ἀφοῦ τό Α ἔχει τετμημένη μηδέν) καί βρίσκουμε τήν τεταγμένη του $y = \frac{9}{3} = 3$.

— Γιά νά βροῦμε τό Β, βάζουμε στήν ἐξίσωση (6) $y=0$ (ἀφοῦ τό Β ἔχει τεταγμένη μηδέν) καί βρίσκουμε τήν τετμημένη του $x = \frac{9}{2}$.

Γενικά λοιπόν:

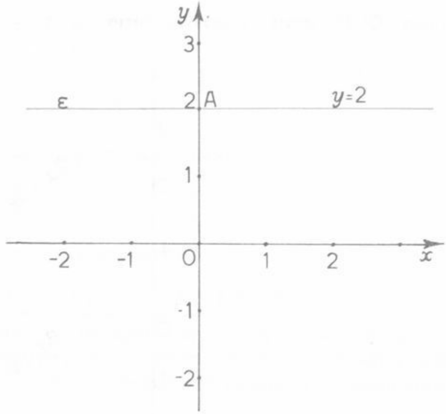
> Κάθε ἐξίσωση $\alpha x+\beta y=\gamma$ πρώτου βαθμοῦ ὡς πρός x καί y παριστάνει μιά εὐθεία ε.

Ἡ ἐξίσωση αὐτή λέγεται πάλι «ἐξίσωση τῆς εὐθείας ε».

Μία μερική περίπτωση ἔχουμε, ὅταν $\alpha=0$ καί $\beta=1$. Τότε ἡ ἐξίσωση ἔχει τή μορφή

$$y=\gamma$$

καί παριστάνει μία εὐθεία ε ἡ ὁποία εἶναι παράλληλη πρός τόν ἄξονα Ox. Ἔτσι π.χ. γιά $\gamma=2$, ἔχουμε τήν ἐξίσωση $y=2$ ἡ ὁποία παριστάνει μιά εὐθεία ε παράλληλη πρός τόν ἄξονα Ox πού τέμνει τόν ἄξονα Oy (σχ. 18) στό σημεῖο (0,2) (γιατί ὅλα τά σημεῖα τῆς ε καί μόνο αὐτά ἔχουν τεταγμένη 2).

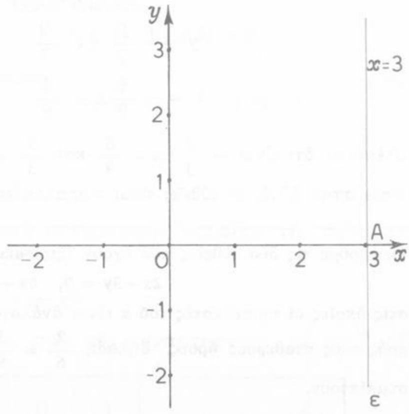


(σχ. 18)

Μιά ἄλλη μερική περίπτωση ἔχουμε, ὅταν $\alpha=1$ καί $\beta=0$. Τότε ἡ ἐξίσωση ἔχει τή μορφή

$$x=\gamma$$

καί παριστάνει μιά εὐθεία ἡ ὁποία εἶναι παράλληλη πρός τόν ἄξονα Oy. Ἔτσι π.χ. γιά $\gamma=3$ ἔχουμε τήν ἐξίσωση $x=3$ ἡ ὁποία παριστάνει μιά εὐθεία ε παράλληλη πρός τόν ἄξονα Oy (σχ. 19), πού τέμνει τόν Ox στό σημεῖο (3,0) (γιατί ὅλα τά σημεῖα τῆς ε καί μόνο αὐτά ἔχουν τετμημένη 3).



(σχ. 19)

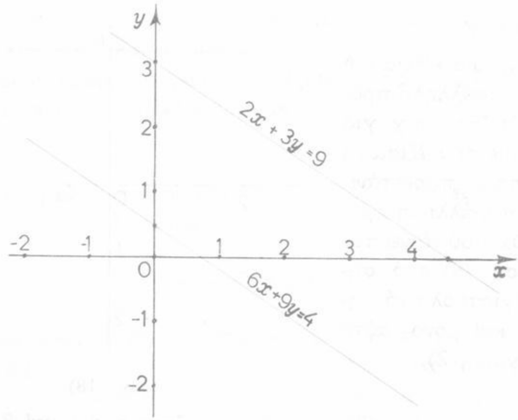
1. **Θεωροῦμε τίς δύο εὐθεῖες πού ἔχουν ἐξισώσεις**

$$2x + 3y = 9, \qquad 6x+9y = 4$$

Στίς ἐξισώσεις αὐτές οἱ συντελεστές τοῦ x εἶναι ἀνάλογοι πρός τούς συντελεστές τοῦ y, ἐνῶ δέν εἶναι ἀνάλογοι πρός τούς γνωστούς ὅρους $\left(\frac{2}{6} = \frac{3}{9} \neq \frac{9}{4}\right)$.

Νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ εὐθεῖες εἶναι παράλληλες.

Λύση: Οἱ ἐξισώσεις γράφονται ἀντιστοίχως



(σχ. 20)

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{9}{3}$$

$$y = -\frac{6}{9}x + \frac{4}{9}$$

Βλέπουμε ὅτι εἶναι $-\frac{2}{3} = -\frac{6}{9}$ καί $\frac{9}{3} \neq \frac{4}{9}$, ὁπότε σύμφωνα μ' αὐτά πού εἴπαμε στήν § 7.6, οἱ εὐθεῖες εἶναι παράλληλες.

2. **Θεωροῦμε τίς δύο εὐθεῖες πού ἔχουν ἐξισώσεις**

$$2x+3y = 9, \quad 6x+9y = 27,$$

στίς ὁποῖες οἱ συντελεστές τοῦ x εἶναι ἀνάλογοι καί πρός τούς συντελεστές τοῦ y καί πρός τούς σταθερούς ὅρους, δηλαδή $\frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{9}{27}$. **Νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ εὐθεῖες συμπίπτουν.**

Λύση: Οἱ ἐξισώσεις γράφονται ἀντιστοίχως

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{9}{3}, \quad y = -\frac{6}{9}x + \frac{27}{9}$$

Όπως είδαμε προηγουμένως, οἱ εὐθεῖες εἶναι παράλληλες καί ἔχουν κοινό τό σημεῖο (0,3), ἀφοῦ γιά $x = 0$ καί οἱ δύο δίνουν τήν τιμή $y = 3$. Ἑπομένως οἱ εὐθεῖες συμπίπτουν.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

8. Νά ἐξετάσετε ἄν τά σημεῖα

α) Α(−15, 50) β) Β (1,8 , 0,4) γ) Γ(1/3, 4) δ) Δ (1, 3)

ἀνήκουν στή γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως $y = -3x+5$.

9. Νά γίνουν οἱ γραφικές παραστάσεις τῶν συναρτήσεων

α) $y = 3x$ β) $y = 0{,}5x$ γ) $y = \frac{2}{3}x$

10. Νά συγκριθοῦν οἱ γραφικές παραστάσεις τῶν συναρτήσεων

$$y = \frac{3}{4}x, \quad y = x, \quad y = \frac{4}{3}x$$

11. Νά γίνουν οἱ γραφικές παραστάσεις τῶν συναρτήσεων

$$y = -3x+1, \quad y = -3x-2, \quad y = -3x+4$$

12. α) Νά γίνει ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως $y = \alpha x+2$, ἄν ξέρουμε ὅτι τό σημεῖο Α (−7, −12) ἀνήκει στή γραφική παράσταση. β) Τό ἴδιο νά κάνετε καί μέ τή συνάρτηση $y = -3x+\beta$, ἄν τό Β(−2,4) ἀνήκει στή γραφική της παράσταση.

13. Δίνονται οἱ εὐθεῖες πού ἔχουν ἐξισώσεις

$$y = \frac{1}{2}x+1, \quad y = 3x+2, \quad y = 0{,}5x, \quad y = x+3, \quad y = 3x-2$$

Ποιές ἀπ' αὐτές εἶναι παράλληλες;

14. Νά κατασκευάσετε τίς εὐθεῖες πού ἔχουν ἐξισώσεις:

α) $-2x+3y = 1$ β) $x-y = 1$ γ) $2(x-1)-3(y+2) = 0$.

15. Δίνονται οἱ εὐθεῖες πού ἔχουν ἐξισώσεις:

$3x+2y = 1$, $6x-4y = 4$, $2x-5y = 1$, $-4x+10y = 4$, $1{,}5x+y = 2$

Ποιές ἀπ' αὐτές εἶναι παράλληλες;

Ἡ τετραγωνική συνάρτηση.

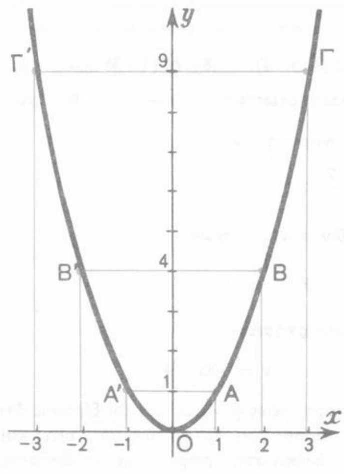
7.8. Μέ τόν ὅρο **τετραγωνική συνάρτηση** ἐννοοῦμε τή συνάρτηση πού ἔχει πεδίο ὁρισμοῦ τό R καί τύπο

$$y = x^2$$

Ὁ παρακάτω πίνακας δίνει μερικές τιμές τῆς συναρτήσεως, μέ τή βοήθεια

x	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	9	4	1	0	1	4	9	16

τῶν ὁποίων κατασκευάζεται ἡ γραφική της παράσταση. (σχ. 21).



(σχ. 21)

Ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως αὐτῆς, εἶναι μία *«συνεχής»* καμπύλη γραμμή γ, πού λέγεται *παραβολή*. Παρατηροῦμε ὅτι:

- Ἡ συνάρτηση παίρνει ὁμόσημες (θετικές) τιμές.
- Γιά ἀντίθετες τιμές τοῦ x ἔχουμε τήν ἴδια τιμή τῆς συναρτήσεως.

Διακρίνουμε λοιπόν εὔκολα ὅτι ἡ γραμμή γ ἔχει ἄξονα συμμετρίας τόν Oy, δηλαδή εἶναι, ὅπως λέμε, *συμμετρική ὡς πρός τόν ἄξονα Oy*. Τό σημεῖο O, πού εἶναι ἡ τομή τῆς γ καί τοῦ ἄξονα συμμετρίας της, λέγεται *κορυφή* τῆς παραβολῆς.

Πιό γενικά ὀνομάζουμε **παραβολή** τή γραφική παράσταση κάθε συναρτήσεως πού ἔχει τύπο

$$(8) \qquad y = \alpha x^2$$

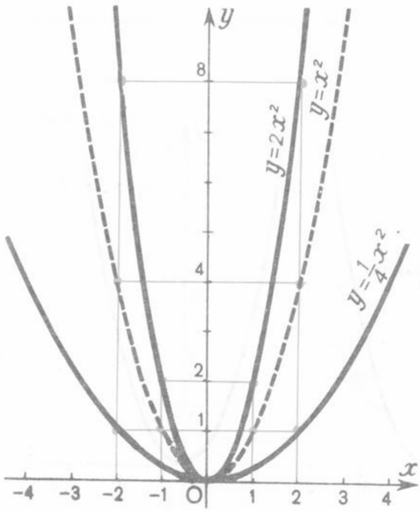
Ἐπειδή γιά $x = 0$ ἔχουμε καί $y = 0$, καταλαβαίνουμε ὅτι ἡ ἐξίσωση (8) ἐπαληθεύεται ἀπό τό ζεῦγος $x=0$, $y = 0$ καί ἑπομένως ἡ γραμμή διέρχεται ἀπό τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων.

Ἄν εἶναι $\alpha > 0$, τότε γιά κάθε $x \neq 0$ ἔχουμε $y > 0$ καί συνεπῶς ὁλόκληρη ἡ παραβολή βρίσκεται στό ἡμιεπίπεδο, πού ἔχει ἀκμή τόν ἄξονα τῶν x καί περιέχει τό θετικό ἡμιάξονα Oy. Ὅταν τό $|x|$ αὐξάνει, αὐξάνει καί τό y, ἑπομένως ἡ παραβολή «πορεύεται» μεταξύ τῶν ἡμιαξόνων Ox καί Oy στό 1ο τεταρτημόριο καθώς καί μεταξύ τῶν Ox' καί Oy στό 2ο τεταρτημόριο (σχ. 22).

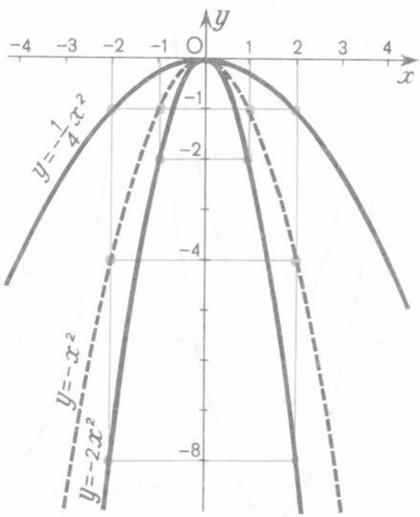
Ἄν εἶναι $\alpha < 0$, τότε γιά κάθε $x \neq 0$ ἔχουμε $y < 0$ καί συνεπῶς ὁλόκληρη ἡ παραβολή βρίσκεται στό ἡμιεπίπεδο πού ἔχει ἀκμή τόν ἄξονα τῶν x καί περιέχει τόν ἀρνητικό ἡμιάξονα τῶν y. Ἐπειδή, ὅταν τό $|x|$ αὐξάνει, τό y ἐλαττώνεται, ἡ καμπύλη βρίσκεται στό 3ο καί 4ο τεταρτημόριο (σχ. 23).

Στά σχήματα 22 καί 23 δίνονται οἱ γραφικές παραστάσεις τῶν συναρτήσεων, πού ἔχουν τύπο $y=\alpha x^2$, γιά διάφορες τιμές τοῦ α.

Θεωροῦμε τώρα τίς συναρτήσεις, πού ἔχουν τύπους $y = 2x^2$ καί $y = -2x^2$. Γιά μιά ὁποιαδήποτε τιμή τοῦ x, π.χ. τήν $x = 3$, οἱ ἀντίστοιχες τιμές τῶν δύο αὐτῶν συναρτήσεων εἶναι: $y = 2.3^2 = 18$ καί $y = -2.3^2 = -18$. Ἀπό αὐτό καταλαβαίνουμε ὅτι οἱ δύο παραβολές, όταν σχεδιαστοῦν στό ἴδιο σύστημα ἀξόνων, εἶναι συμμετρικές ὡς πρός τόν ἄξονα τῶν x.



(σχ. 22)



(σχ. 23)

Γενικότερα οἱ παραβολές, τίς ὁποῖες παριστάνουν οἱ συναρτήσεις $y = \alpha x^2$ καί $y = -\alpha x^2$, εἶναι πάντοτε συμμετρικές ὡς πρός τόν ἄξονα τῶν x.

Ἡ συνάρτηση $y=\alpha x^2+\gamma$.

7.9. Ἄς θεωρήσουμε τώρα τή συνάρτηση πού ἔχει τύπο

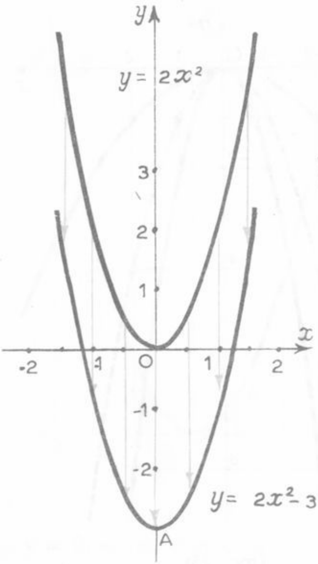
$$y = 2x^2 - 3$$

Παρατηροῦμε ὅτι ἡ τιμή τῆς συναρτήσεως αὐτῆς γιά κάθε x εἶναι 3 μονάδες μικρότερη ἀπό τήν ἀντίστοιχη τιμή τῆς συναρτήσεως $y = 2x^2$. Συνεπῶς ἡ γραφική παράσταση τῆς $y = 2x^2-3$ θά προκύπτει ἀπό τή μεταφορά τῆς παραβολῆς, πού παριστάνει ἡ $y=2x^2$, κατά ἕνα διάνυσμα $\overrightarrow{OA}$ πού ἔχει φορέα τόν Oy καί $\overline{OA} = -3$ (σχ. 24). Ἔτσι καί ἡ γραφική παράσταση τῆς $y = 2x^2-3$ εἶναι ἐπίσης μία *παραβολή* πού ἔχει κορυφή τό σημεῖο (0, −3). Γενικά λοιπόν:

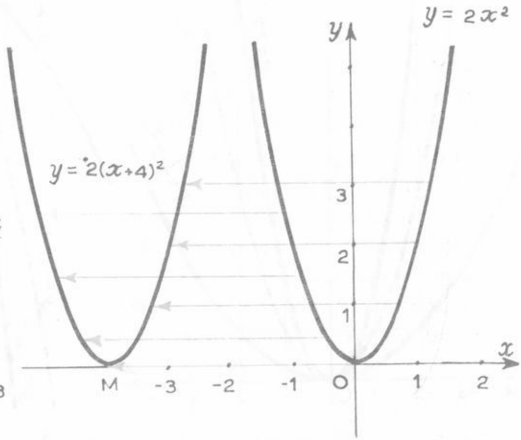
> Ἡ γραφική παράσταση τῆς $y = \alpha x^2+\gamma$ προκύπτει, ἄν μετατοπίσουμε τή γραφική παράσταση τῆς $y = \alpha x^2$ παραλλήλως πρός τόν ἄξονα Oy κατά διάνυσμα $\overrightarrow{OA}$ μέ $\overline{OA} = \gamma$.

Θεωροῦμε τώρα τή συνάρτηση πού ἔχει τύπο

$$y = 2(x+4)^2$$



(σχ. 24)



(σχ. 25)

Ἄν θέσουμε $x' = x+4$ ὁ τύπος της γίνεται

$$y = 2x'^2$$

δηλαδή γίνεται τύπος μιᾶς συναρτήσεως τῆς ὁποίας ἡ γραφική παράσταση εἶναι παραβολή (1).

Ἀπό τή σχέση ὅμως $x' = x+4$ ἤ $x = x'-4$ βλέπουμε ὅτι σέ κάθε τιμή τοῦ x' ἀντιστοιχίζεται μιά τιμή τοῦ x, πού εἶναι 4 μονάδες μικρότερη. Αὐτό σημαίνει ὅτι ἡ γραφική παράσταση τῆς $y = 2(x+4)^2$ θά προκύπτει μέ τή μετατόπιση τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῆς $y = 2x^2$ παραλλήλως πρός τόν ἄξονα Ox κατά διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ μέ $\overline{OM} = -4$ (σχ. 25). Ἔτσι καί ἡ γραφική παράσταση τῆς $y = 2(x+4)^2$ εἶναι ἐπίσης μία *παραβολή* πού ἔχει κορυφή τό σημεῖο (–4,0). Γενικά λοιπόν:

Ἡ γραφική παράσταση τῆς $y = \alpha(x-p)^2$ προκύπτει, ἄν μετατοπίσουμε τή γραφική παράστασή τῆς $y = \alpha x^2$, παραλλήλως πρός τόν ἄξονα Ox κατά διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ μέ $\overline{OM} = p$.

1. Ἡ ἀλλαγή τῆς μεταβλητῆς ἀπό x σέ x΄ δέν ἔχει σημασία

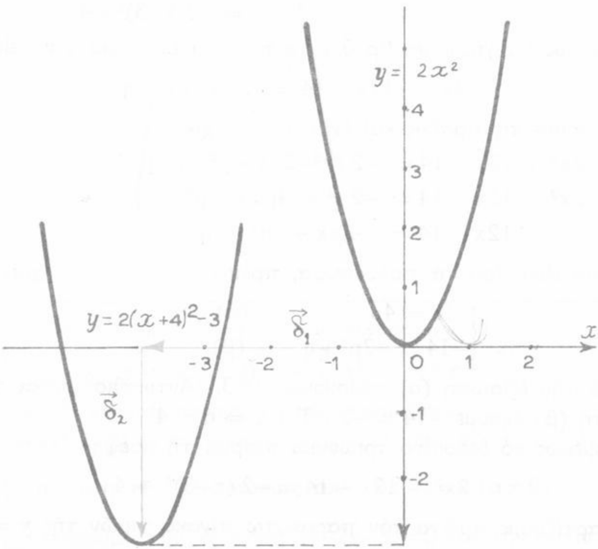
Ἡ συνάρτηση $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$.

7.10. Ἄς θεωρήσουμε τέλος τή συνάρτηση πού ἔχει τύπο

$$y=2(x+4)^2-3$$

Σύμφωνα μέ τά προηγούμενα καταλαβαίνουμε ὅτι ἡ γραφική της παράσταση θά βρίσκεται, ἄν κάνουμε διαδοχικά τίς ἑξῆς ἐργασίες (σχ. 26):

- Μεταφέρουμε τήν παραβολή, πού παριστάνει ἡ $y=2x^2$, παραλλήλως πρός τόν ἄξονα Ox κατά διάνυσμα $\vec{\delta_1}$ μέ $\overline{\delta_1}=-4$.
- Μεταφέρουμε τή νέα αὐτή παραβολή παραλλήλως πρός τόν Oy κατά διάνυσμα $\vec{\delta_2}$ μέ $\overline{\delta_2}=-3$.



(σχ. 26)

Συμπεραίνουμε λοιπόν γενικά ὅτι:

> Ἡ συνάρτηση $y=\alpha(x-p)^2+q$ $(\alpha\neq 0)$ παριστάνει μιά παραβολή, πού βρίσκεται, ἄν μετατοπίσουμε διαδοχικά τήν παραβολή $y=\alpha x^2$ κατά διάνυσμα $\vec{\delta_1}$, μέ $\overline{\delta_1}=p$, παραλλήλως πρός τόν ἄξονα Ox καί κατά διάνυσμα $\vec{\delta_2}$, μέ $\overline{\delta_2}=q$, παραλλήλως πρός τόν ἄξονα Oy.

Εἶναι φανερό ὅτι, γιά νά βροῦμε τή γραφική παράσταση μιᾶς συναρτήσεως πού ἔχει τύπο

$$y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,$$

θά πρέπει νά φέρουμε τόν τύπο της στή μορφή $y = \alpha(x-p)^2 + q$ καί νά ἐργασθοῦμε ὅπως προηγουμένως. Ἔτσι, κάθε συνάρτηση τῆς μορφῆς $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ μέ $\alpha \neq 0$ παριστάνει *παραβολή*.

Παράδειγμα: Νά φέρετε τή συνάρτηση $y = -2x^2 + 12x - 14$ στή μορφή $y = \alpha(x-p)^2 + q$ καί νά κάνετε τή γραφική της παράσταση.

Α΄ τρόπος : Ἔχουμε

$$\begin{aligned} -2x^2+12x-14 &= -2(x^2-6x+7) = \\ &= -2[x^2-2\cdot 3x+3^2-3^2+7] \\ &= -2[(x-3)^2-2] \\ &= -2(x-3)^2+4. \end{aligned}$$

Β΄ τρόπος : Ζητᾶμε νά βροῦμε τά p καί q ἔτσι, ὥστε νά εἶναι:

$$-2x^2 + 12x - 14 = -2\,(x-p)^2 + q$$

Ἐκτελοῦμε τίς πράξεις καί ἔχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} -2x^2 + 12x - 14 &= -2\,(x^2-2px+p^2) + q \\ -2x^2 + 12x - 14 &= -2x^2 + 4px - 2p^2 + q \\ 12x - 14 &= 4\,px - 2p^2 + q \end{aligned}$$

Γιά νά εἶναι ἴσα τά πολυώνυμα, πρέπει

$$\begin{cases} 12 = 4p & (\alpha) \\ -14 = -2p^2 + q & (\beta) \end{cases}$$

Ἀπό τήν ἐξίσωση (α) παίρνουμε $p=3$. Ἀντικαθιστώντας τήν τιμή τοῦ p στή (β) ἔχουμε $-14 = -2\,.\,3^2 + q \Leftrightarrow q = 4$

Ἑπομένως τό δεδομένο τριώνυμο παίρνει τή μορφή

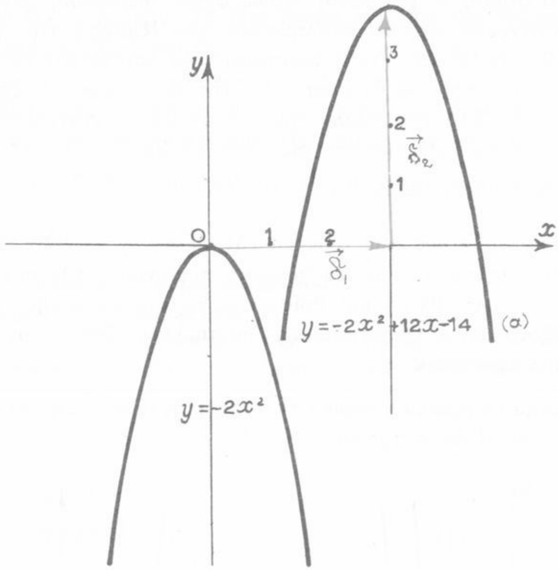
$$-2x^2 + 12x - 14 = -2\,(x-3)^2 + 4$$

Καταρτίζουμε πρῶτα τόν παρακάτω πίνακα τιμῶν τῆς $y = -2x^2$

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$y=-2x^2$	-8	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2	-8

Κατασκευάζουμε τώρα τήν παραβολή, πού παριστάνει ἡ $y = -2x^2$, καί τή μεταφέρουμε διαδοχικά κατά διάνυσμα $\vec{\delta}_1$ ($\overline{\delta}_1 = 3$) παράλληλο πρός τόν Ox καί κατά διάνυσμα $\vec{\delta}_2$ ($\overline{\delta}_2 = 4$) παράλληλο πρός τόν ἄξονα Oy.

Ἔτσι, παίρνουμε τήν παραβολή (α) (σχ. 27), πού εἶναι ἡ γραφική παράσταση τῆς $y = -2x^2 + 12x - 14$.



(σχ. 27)

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

16. Νά γίνουν οἱ γραφικές παραστάσεις τῶν συναρτήσεων

$$\alpha)\ \ y = 3x^2 \qquad \beta)\ y = \frac{2}{5}x^2 \qquad \gamma)\ y = \frac{x^2}{4}$$

17. Νά γίνουν οἱ γραφικές παραστάσεις τῶν συναρτήσεων.

α) $y = 2x^2-5$ β) $y = x^2-4x+3$ γ) $y=2x^2-16x+27$ δ) $y=-3x^2-24x-53$

Γραφική ἐπίλυση τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ $(\alpha\neq 0)$.

7.11. Θεωροῦμε τήν ἐξίσωση $x^2-2x-3=0$ καί τήν ἀντίστοιχη πολυωνυμική συνάρτηση $y = x^2-2x-3$.

Γιά νά κατασκευάσουμε τή γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως αὐτῆς:

— Δίνουμε στή συνάρτηση τή μορφή $y=\alpha(x-p)^2+q$ γράφοντας.

$$y = x^2-2\cdot 1\ x + 1^2 - 1^2-3 = (x-1)^2-4$$

— Κατασκευάζουμε τήν παραβολή $y = x^2$ (βλ. πίνακα § 7.8) καί τή μεταφέρουμε διαδοχικά κατά διανύσματα $\overrightarrow{\delta_1}\ ||Ox\,(\overline{\delta_1} = 1)$ καί $\overrightarrow{\delta_2}\ ||\ Oy$ $(\overline{\delta_2} = -4)$ (σχ. 28).

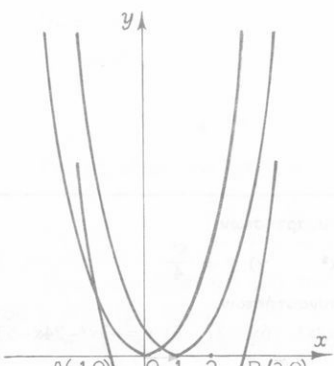
Παίρνουμε ἔτσι τήν παραβολή $y = x^2-2x-3$ ἡ ὁποία τέμνει τόν ἄξονα τῶν x στά σημεῖα A(–1,0) καί B(3,0).

Ἀφοῦ τό σημεῖο Α βρίσκεται πάνω στήν παραβολή $y = x^2-2x-3$, οἱ συντεταγμένες του θά ἐπαληθεύουν τήν ἐξίσωσή της (καί πραγματικά $0 = (-1)^2-2(-1)-3$). Συμπεραίνουμε λοιπόν ὅτι τό -1 (δηλ. ἡ τετμημένη τοῦ σημείου Α) εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως $x^2-2x-3 = 0$. Ὁμοίως, τό (3,0) ἐπαληθεύει τήν $y = x^2-2x-3$, γιατί $0 = 3^2-2.3-3$, καί συνεπῶς τό 3 εἶναι ἐπίσης ρίζα τῆς $x^2-2x-3 = 0$.

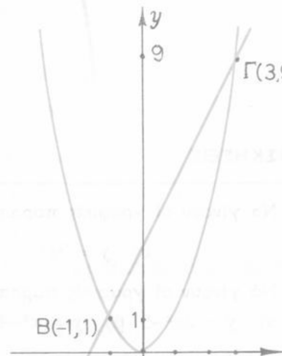
Ἔτσι βρήκαμε γραφικά τίς ρίζες τῆς ἐξισώσεως $x^2-2x-3 = 0$. Γενικά:

> Γιά νά ἐπιλύσουμε γραφικά τήν ἐξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma = 0$ $(\alpha\neq 0)$, κατασκευάζουμε τή γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως $y = \alpha x^2+\beta x+\gamma$ καί βρίσκουμε τά σημεῖα τομῆς της μέ τόν ἄξονα τῶν x. Οἱ τετμημένες τῶν σημείων αὐτῶν εἶναι οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως.

Μποροῦμε νά βροῦμε γραφικά τίς λύσεις τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2 + \beta x+\gamma = 0$ $(\alpha\neq 0)$ καί μέ ἄλλο τρόπο.



(σχ. 28)



(σχ. 29)

Ἡ ἐξίσωση $x^2-2x-3 = 0$ γράφεται $x^2 = 2x+3$. Συνεπῶς ρίζα της θά εἶναι κάθε πραγματικός ἀριθμός, πού, ὅταν τόν θέσουμε στή θέση τοῦ x στίς συναρτήσεις $y = x^2$ καί $y = 2x+3$, δίνει τιμές τοῦ y ἴσες.

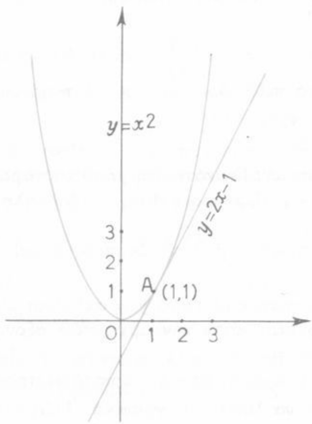
Κατασκευάζουμε λοιπόν τήν παραβολή, πού παριστάνει ἡ συνάρτηση $y = x^2$, καί τήν εὐθεία $y=2x+3$. Αὐτές τέμνονται στά σημεῖα Β(−1,1) καί Γ(3,9) (σχ. 29). Οἱ τετμημένες −1 καί 3 τῶν σημείων αὐτῶν εἶναι οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως $x^2-2x-3 = 0$. Πραγματικά, ὅταν $x = -1$, οἱ τιμές τῆς $y=x^2$ καί τῆς $y=2x+3$ εἶναι ἴσες, ἀφοῦ τό Β(−1,1) εἶναι κοινό σημεῖο τῶν δύο γραμμῶν. Τό ἴδιο ἰσχύει καί γιά τήν τετμημένη 3 τοῦ κοινοῦ σημείου (3,9). Συνεπῶς:

> Ρίζες τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ $(\alpha\neq 0)$ εἶναι οἱ τετμημένες τῶν κοινῶν σημείων τῆς παραβολῆς $y=\alpha x^2$ καί τῆς εὐθείας $y=-\beta x-\gamma$.

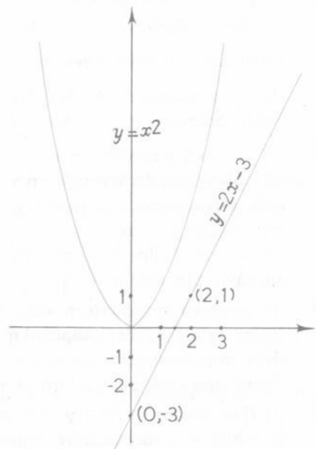
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά ἐπιλυθεῖ γραφικά ἡ ἐξίσωση $x^2-2x+1=0$.**

Λύση: Ἔχουμε $x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow x^2=2x-1$.
Κατασκευάζουμε σέ τετραγωνισμένο χαρτί τήν παραβολή $y=x^2$ καί τήν εὐθεία $y=2x-1$ καί βλέπουμε (σχ. 30) ὅτι ἔχουν ἕνα μόνο κοινό σημεῖο (ἐφάπτονται),



(σχ. 30)



(σχ. 31)

τό Α(1,1). Ἡ τετμημένη 1 τοῦ σημείου Α εἶναι ἡ λύση τῆς ἐξισώσεως $x^2-2x+1=0$ (1). Ἐπειδή ἡ (1) εἶναι δευτέρου βαθμοῦ καί ἔχει μιά μόνο ρίζα, λέμε πώς ἔχει *διπλή ρίζα* τό 1.

2. **Νά ἐπιλυθεῖ γραφικά ἡ ἐξίσωση $x^2-2x+3=0$.**

Λύση: Ἐπειδή $x^2-2x+3=0 \Leftrightarrow x^2=2x-3$, κατασκευάζουμε τήν παραβολή $y=x^2$ καί τήν εὐθεία $y=2x-3$. Βλέπουμε (σχ. 31) πώς αὐτές δέν ἔχουν κοινά σημεῖα (δέν τέμνονται).
Συνεπῶς ἡ ἐξίσωση $x^2-2x+3=0$ δέν ἔχει καμιά ρίζα στό σύνολο $\mathbb{R}$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.
Ἀπό τά παραπάνω γίνεται φανερό ὅτι ἡ ἐξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ $(\alpha\neq 0)$ ἔχει στό $\mathbb{R}$ δύο ρίζες ἤ μιά ρίζα (διπλή) ἤ καμμία ρίζα, ἀνάλογα μέ τό πλῆθος τῶν κοινῶν σημείων τῆς παραβολῆς $y=\alpha x^2$ καί τῆς εὐθείας $y=-\beta x-\gamma$.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

18. Νά ἐπιλυθοῦν γραφικά οἱ ἐξισώσεις

α) $x^2-9=0$ β) $x^2+4=0$ γ) $x^2-4x-5=0$

δ) $2x^2-3x+4=0$ ε) $2x^2-x-3=0$ στ) $x^2-4x+4=0$

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 7

1. Ἄν Α καί Β εἶναι δύο ἀριθμητικά σύνολα, ἡ ἀπεικόνιση $\varphi : A \to B$ λέγεται **συνάρτηση** μέ πεδίο ὁρισμοῦ Α καί τιμές στό Β.
Γιά νά προσδιορίσουμε μιά συνάρτηση $\varphi: A \to R$ πρέπει νά ξέρουμε:

- Τό **πεδίο ὁρισμοῦ** Α, τό ὁποῖο εἶναι ὑποσύνολο τοῦ R.
- Τόν «**κανόνα**» μέ τόν ὁποῖο ἀντιστοιχίζεται σέ κάθε $x \in A$ ἕνας πραγματικός ἀριθμός.

Τό σύνολο τῶν σημείων, πού ἔχουν συντεταγμένες τά ζεύγη τοῦ γραφήματος, μᾶς δίνουν τή **γραφική παράσταση** τῆς συναρτήσεως.

2. Μία συνάρτηση μέ τύπο $y = f(x)$ λέγεται **πολυωνυμική**, ὅταν τό $f(x)$ εἶναι ἕνα πολυώνυμο ὡς πρός x.
Ρητή λέγεται κάθε συνάρτηση μέ τύπο $y = \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$, ὅπου $f(x)$ καί $\varphi(x)$ εἶναι πολυώνυμα. Ἄν δέν δίνεται τό πεδίο ὁρισμοῦ της, θά παίρνουμε σάν πεδίο ὁρισμοῦ τό σύνολο $R - \{x|\varphi(x) = 0\}$

3. Ἡ γραφική παράσταση κάθε συναρτήσεως μέ τύπο $y = \alpha x$ εἶναι μιά εὐθεία, πού διέρχεται ἀπό τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων. Γενικότερα ἡ γραφική παράσταση κάθε συναρτήσεως μέ τύπο $y = \alpha x + \beta$ εἶναι μιά εὐθεία, παράλληλη πρός τήν εὐθεία $y = \alpha x$.
Γενικά κάθε ἐξίσωση $\alpha x + \beta y = \gamma$, πρώτου βαθμοῦ ὡς πρός x καί y, παριστάνει μία εὐθεία.

4. Ἡ γραφική παράσταση κάθε συναρτήσεως μέ τύπο $y = \alpha x^2$ εἶναι μία καμπύλη, πού λέγεται **παραβολή**, διέρχεται ἀπό τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων καί εἶναι συμμετρική ὡς πρός τόν ἄξονα τῶν y.
Γενικότερα κάθε συνάρτηση μέ τύπο $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ παριστάνει παραβολή.

5. Ἡ ἐξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ μπορεῖ νά λυθεῖ καί γραφικά. Ρίζες της εἶναι οἱ τετμημένες τῶν κοινῶν σημείων τῆς παραβολῆς $y = \alpha x^2$ καί τῆς εὐθείας $y = -\beta x - \gamma$.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ*

19. Ἔστω ἡ συνάρτηση $f : R \to R$ μέ τύπο

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ἄν } x \text{ εἶναι ρητός} \\ -1 & \text{ἄν } x \text{ εἶναι ἄρρητος} \end{cases}$$

Νά βρεῖτε τά $f(-2)$, $f(\sqrt{2})$, $f(0{,}5)$, $f(0{,}4545\ldots)$, $f(\pi)$, $f(5)$.

20. Γιά ποιά τιμή τοῦ α οἱ εὐθεῖες $y = (\alpha-1)x+3$ καί $y = 3x-2$ εἶναι παράλληλες;

21. Νά γίνει ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως $y = \frac{1}{2}x + \beta$, ἄν ξέρουμε ὅτι διέρχεται ἀπό τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων.

22. Νά γίνει ἡ γραφική παράσταση τῆς παραβολῆς $y = x^2 + \alpha x + \beta$, ἄν γνωρίζετε ὅτι διέρχεται ἀπό τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων καί ἀπό τό σημεῖο (1,3).

8ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ

Ἐξισώσεις μέ δύο ἀγνώστους.

8.1. Στό κεφάλαιο 3 (§3.5, §3.9) ἀσχοληθήκαμε γενικά μέ τίς ἐξισώσεις καί εἰδικότερα μέ ἐξισώσεις, πού ἔχουν ἕναν ἄγνωστο. Ἐδῶ θά περιορισθοῦμε σέ ἐξισώσεις πού ἔχουν δύο ἀγνώστους, τούς ὁποίους σημειώνουμε συνήθως μέ x καί y. Τέτοιες ἐξισώσεις εἶναι π.χ. οἱ

$$y^2 = 4x+5, \quad xy = 4, \quad 2x^3 = xy+4, \quad 2x+y = 10$$

Ἄς θεωρήσουμε τήν πρώτη ἐξίσωση

$$(1) \qquad y^2 = 4x+5,$$

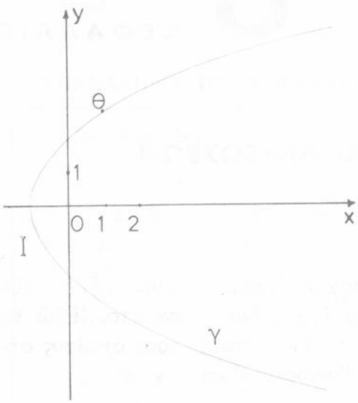
στήν ὁποία τά x καί y παριστάνουν πραγματικούς ἀριθμούς. Ἐπειδή ἡ ἐξίσωση αὐτή ἐπαληθεύεται γιά $x = 1$ καί $y=3$, λέμε ὅτι τό διατεταγμένο ζεῦγος (1,3) εἶναι μία **λύση** τῆς ἐξισώσεως (1). Εἶναι φανερό ὅτι ἡ (1) ἔχει καί ἄλλες λύσεις, π.χ. τίς $(-1, -1)$, $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{7}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, -\sqrt{7}\right)$, $(5,-5)$,... Ὅλα τά διατεταγμένα ζεύγη, πού ἐπαληθεύουν τήν (1), ἀποτελοῦν τό **σύνολο λύσεών της**.

Γιά νά βροῦμε μιά λύση τῆς (1), δίνουμε μιά ὁποιαδήποτε τιμή στόν ἄγνωστο x, π.χ. τή $x = \frac{11}{4}$, καί λύνουμε τήν ἐξίσωση $y^2 = 4\cdot\frac{11}{4} + 5$, πού προκύπτει, ὡς πρός τό μοναδικό ἄγνωστο y. Ἡ ἐξίσωση γράφεται

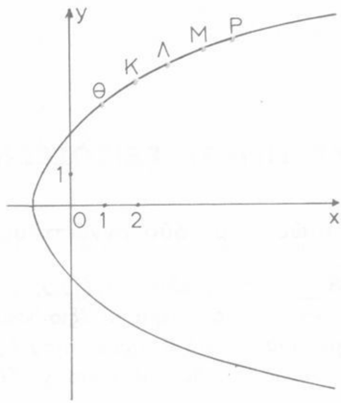
$$y^2 = 16$$

καί ἔχει ρίζες $y = 4$ καί $y = -4$. Ἔτσι τά διατεταγμένα ζεύγη $\left(\frac{11}{4}, 4\right)$ καί $\left(\frac{11}{4}, -4\right)$ ἐπαληθεύουν τήν (1) καί ἑπομένως εἶναι λύσεις της. Μέ τόν ἴδιο τρόπο βρίσκουμε ὅσα διατεταγμένα ζεύγη θέλουμε, πού ἐπαληθεύουν τήν (1). Ὥστε ἡ ἐξίσωση (1) ἔχει ἄπειρες λύσεις καί κάθε μιά τους θά παριστάνεται (ἄν θεωρήσουμε ἕνα ὀρθογώνιο σύστημα ἀξόνων) μέ ἕνα σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου. Ἔτσι π.χ. ἡ λύση (1,3) παριστάνεται μέ τό σημεῖο Θ, ἡ λύση $(-1, -1)$ μέ τό σημεῖο Ι, κ.λ.π.

Στήν περίπτωση αὐτή τό σύνολο λύσεων τῆς (1) παριστάνεται μέ ὅλα



(σχ. 1)



(σχ. 2)

τά σημεῖα μιᾶς γραμμῆς γ τοῦ ἐπιπέδου (βλ. σχ. 1).

Ἄς ὑποθέσουμε τώρα ὅτι τό x παίρνει τιμές ἀπό τό σύνολο $A = \{1,2,3,4,5\}$ καί τό y παίρνει τιμές ἀπό τό σύνολο $B = \{y | y \geq 0\}$. Τότε, μόνο τά ζεύγη

$$(1,3),\ (2, \sqrt{13}),\ (3, \sqrt{17}),\ (4, \sqrt{21}),\ (5,5)$$

εἶναι λύσεις τῆς (1) καί τό σύνολο λύσεων παριστάνεται μέ τά σημεῖα Θ,Κ,Λ,Μ,Ρ (σχ. 2).

Εἶναι φανερό ὅτι τό σύνολο λύσεων εἶναι ὑποσύνολο τοῦ $A \times B$.

(σχ. 3)

Γενικά λοιπόν, **ἄν σέ μιά ἐξίσωση μέ δύο ἀγνώστους x καί y τό x παίρνει τιμές ἀπό ἕνα σύνολο A καί τό y παίρνει τιμές ἀπό ἕνα σύνολο B, τό σύνολο λύσεων εἶναι ὑποσύνολο τοῦ $A \times B$.**

Ἐξισώσεις πρώτου βαθμοῦ μέ δύο ἀγνώστους.

8.2. Ἄς πάρουμε τώρα μία ἐξίσωση πρώτου βαθμοῦ μέ δύο ἀγνώστους, π.χ. τή

(2) $$2x + y = 10$$

Στήν § 7.7 εἴδαμε ὅτι μιά τέτοια ἐξίσωση ἔχει ἄπειρες λύσεις καί τό σύνολό τους παριστάνεται μέ ὅλα τά σημεῖα τῆς εὐθείας, πού ἔχει ὡς ἐξίσωση τή (2) (σχ. 3).

§ 3. Ὑπάρχουν πολλά προβλήματα, τῶν ὁποίων ἡ λύση ἀνάγεται στή λύση μιᾶς ἐξισώσεως πρώτου βαθμοῦ μέ δύο ἀγνώστους. Σέ κάθε τέτοιο πρόβλημα ὅμως θά πρέπει νά διακρίνουμε ἀπό τήν ἀρχή τά σύνολα A καί B, ἀπό τά ὁποῖα παίρνουν τιμές οἱ μεταβλητές x καί y (ὁπότε τό σύνολο λύσεων θά εἶναι ὑποσύνολο τοῦ $A \times B$).

Παράδειγμα: Ἕνας μαθητής ἔχει 80 δρχ. καί θέλει νά ἀγοράσει τετράδια καί μολύβια. Ἄν κάθε τετράδιο ἔχει 16 δρχ. καί κάθε μολύβι 8 δρχ., πόσα τετράδια καί πόσα μολύβια μπορεῖ νά ἀγοράσει ξοδεύοντας ὅλα τά χρήματά του;

Ἄν ἀγοράσει x τετράδια καί y μολύβια, θά δώσει γιά τά τετράδια $16x$ δρχ. καί γιά τά μολύβια $8y$ δρχ. Ἔτσι τό ἄθροισμα $16x+8y$ πρέπει νά εἶναι ἴσο μέ τό ποσό πού διαθέτει, δηλαδή

$$(3) \qquad 16x + 8y = 80\,.$$

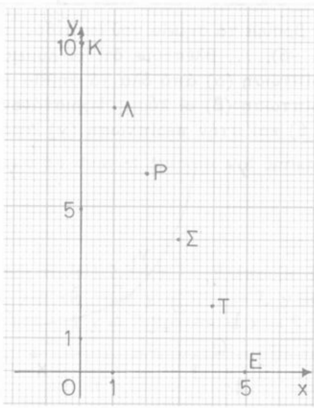
Βλέπουμε λοιπόν ὅτι ἡ λύση τοῦ προβλήματος ἀνάγεται στή λύση τῆς ἐξισώσεως (3), πού γράφεται διαδοχικά

$$8y = 80 - 16x$$

$$y = \frac{80 - 16x}{8}$$

$$(3') \qquad y = 10 - 2x$$

Τά x καί y εἶναι φυσικοί ἀριθμοί (ἀριθμοί τετραδίων καί μολυβιῶν) καί συνεπῶς ἀπό τίς λύσεις τῆς (3′) θά δεχθοῦμε μόνο ἐκεῖνες, πού εἶναι διατεταγμένα ζεύγη φυσικῶν ἀριθμῶν. Ἄν δώσουμε λοιπόν στό x τίς τιμές 0,1,2, 3,4,5 (γιά $x = 6,7,8,\ldots$, ἡ (3′) δίνει ἀρνητικές τιμές τοῦ y πού δέν εἶναι παραδεκτές), βρίσκουμε ὅτι οἱ λύσεις τῆς (3′) εἶναι τά ζεύγη



(σχ. 4)

$$(0,10),\ (1,8),\ (2,6),\ (3,4),\ (4,2),\ (5,0)$$

καί ἔτσι τό σύνολο λύσεων τῆς (3′) παριστάνεται μέ τά σημεῖα Κ, Λ, Ρ, Σ, Τ, Ε (βλ. σχ. 4).

1. **Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι οἱ λύσεις τῆς ἐξισώσεως**

$$xy = 6$$

ἀποτελοῦνται ἀπό ζεύγη ὁμόσημων ἀριθμῶν. Νά σχεδιαστεῖ τό σύνολο λύσεών της ὅταν:

α) Τά x καί y μποροῦν νά πάρουν ὁποιεσδήποτε πραγματικές τιμές.
β) Τά x καί y μποροῦν νά πάρουν μόνο θετικές πραγματικές τιμές.
γ) Τά x καί y παριστάνουν φυσικούς ἀριθμούς.

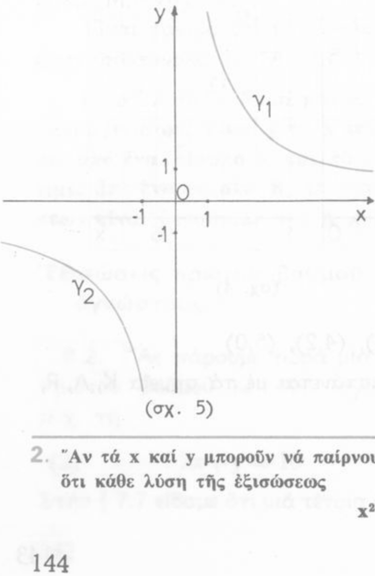
Λύση: Τό γινόμενο δύο ἑτερόσημων ἀριθμῶν εἶναι πάντοτε ἀρνητικός ἀριθμός καί ἑπομένως δέν μπορεῖ νά εἶναι ἴσο μέ 6. Ἔτσι, ὁποιοδήποτε ζεῦγος ἀποτελεῖται ἀπό ἑτερόσημους ἀριθμούς δέν μπορεῖ νά εἶναι λύση τῆς $xy = 6$. Γράφουμε τώρα τήν ἰσοδύναμη ἐξίσωση

$$y = \frac{6}{x}$$

καί δίνουμε στό x διάφορες τιμές (ἐκτός ἀπό τήν τιμή 0) σχηματίζοντας ἕναν πίνακα, π.χ. τόν

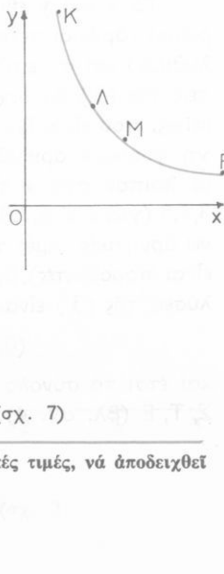
x	...	-3	-2	-1	$1/2$	1	$3/2$	2	...
$y=\frac{6}{x}$	...	-2	-3	-6	12	6	4	3	...

Ἄν βροῦμε τά σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου, πού παριστάνουν τίς λύσεις $(-3,-2)$, $(-2,-3)$, $(-1,-6)$, ..., βλέπουμε ὅτι οἱ λύσεις τῆς ἐξισώσεως $xy = 6$ παριστάνονται στήν περίπτωση (α) ἀπό ὅλα τά σημεῖα τῶν δύο γραμμῶν γ_1 καί γ_2 (βλ. σχ. 5). Στήν περίπτωση (β) οἱ λύσεις παριστάνονται ἀπό ὅλα τά σημεῖα τῆς γραμμῆς γ_1 (βλ. σχ. 6) καί στήν περίπτωση (γ) ἀπό τά τέσσερα σημεῖα Κ, Λ, Μ, Ρ (βλ. σχ. 7).



(σχ. 5)

(σχ. 6)



(σχ. 7)

2. **Ἄν τά x καί y μποροῦν νά παίρνουν ὁποιεσδήποτε πραγματικές τιμές, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι κάθε λύση τῆς ἐξισώσεως**

$$x^2 + y^2 = 25$$

παριστάνεται μέ ἕνα σημεῖο τοῦ κύκλου, πού ἔχει κέντρο τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων καί ἀκτίνα 5.

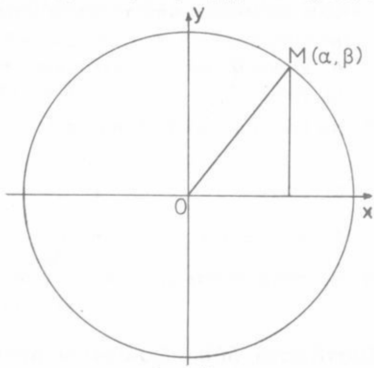
Λύση: Ἄν θεωρήσουμε μία ὁποιαδήποτε λύση (α,β) τῆς ἐξισώσεως, τότε θά εἶναι

$$\alpha^2 + \beta^2 = 25$$

Ἐπομένως, ἄν Μ εἶναι τό σημεῖο πού παριστάνει τή λύση αὐτή, τό διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ θά ἔχει μέτρο (βλ. σχ. 8)

$$|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = 5$$

Ἔτσι τό Μ ἀπέχει ἀπό τήν ἀρχή Ο ἀπόσταση 5 καί ἑπομένως βρίσκεται στόν κύκλο (Ο,5).



(σχ. 8)

3. **Νά βρεθοῦν δύο κλάσματα μέ ὅρους ἀκέραιους θετικούς ἀριθμούς, τά ὁποῖα γίνονται ἴσα μέ τό κλάσμα $\frac{3}{4}$, ὅταν ὁ ἀριθμητής τους αὐξηθεῖ κατά 4 καί ὁ παρονομαστής τους αὐξηθεῖ κατά 5.**

Λύση : Ἄν $\frac{x}{y}$ εἶναι ἕνα τέτοιο κλάσμα, θά ἔχουμε

$$\frac{x+4}{y+5} = \frac{3}{4}$$

Ἀπό αὐτή βρίσκουμε $4(x+4) = 3(y+5) \Leftrightarrow 4x + 16 = 3y + 15 \Leftrightarrow$

$$(\alpha) \qquad 4x - 3y = -1$$

Ἑπομένως ὅροι τῶν ζητούμενων κλασμάτων θά εἶναι οἱ ἀκέραιες καί θετικές λύσεις τῆς (α), ἡ ὁποία γράφεται

$$x = \frac{3y-1}{4}$$

Δίνοντας στό y διάφορες ἀκέραιες καί θετικές τιμές 1,2,3,4,5,... βλέπουμε ὅτι προκύπτουν ἀκέραιες καί θετικές τιμές τοῦ x γιά τίς τιμές $y = 3$, $y = 7$, $y = 11, \ldots$ Ἔτσι, ἀφοῦ γιά $y = 3$ βρίσκουμε $x = 2$ καί γιά $y = 7$ βρίσκουμε $x = 5$, δύο τέτοια κλάσματα εἶναι τά $\frac{2}{3}$ καί $\frac{5}{7}$.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Στήν καθεμία ἀπό τίς ἑπόμενες ἐρωτήσεις ὑπάρχει μία ἐξίσωση καί μερικά διατεταγμένα ζεύγη. Νά ἐξετάσετε ἄν αὐτά ἀνήκουν στό σύνολο λύσεων τῆς ἀντίστοιχης ἐξισώσεως καί μετά σέ τετραγωνισμένο χαρτί νά κατασκευάσετε ὀρθογώνιο σύστημα ἀξόνων καί νά σημειώσετε μέ ● τή θέση κάθε ζεύγους, πού ἐπαληθεύει τήν ἐξίσωση, καί μέ ο τή θέση κάθε ζεύγους, πού δέν τήν ἐπαληθεύει.
α) $x+y=4$, $x,y \in N$: (0,4), (1,3), (2,2), (3,1), (4,0), (1,1), (3,3)
β) $2x+y=4$, $x, y \in N$: (0,4), (0,1), (2,0), (2,3), (1,2)
γ) $2x-y=2$, $x, y \in R$: (0,–2), (0,2), (2,2), (2,1), (3,4), (3,2), $\left(\frac{1}{2},-1\right)$.

2. Νά δείξετε γραφικά τό σύνολο λύσεων τῶν ἑπόμενων ἐξισώσεων (N, Z, R δηλώνουν τά σύνολα, ἀπό τά ὁποῖα μποροῦν νά πάρουν τιμές οἱ μεταβλητές).

α) $x+y=6 \mid N$ β) $x+y=6 \mid R$ γ) $x-y=0 \mid N$

δ) $x-y=0 \mid R$ ε) $2x+y=8 \mid N$ στ) $2x+y=8 \mid R$

ζ) $y=2 \mid Z$ η) $y=2 \mid R$ θ) $x=4 \mid R$

3. Νά δείξετε γραφικά τό σύνολο λύσεων τῶν παρακάτω ἐξισώσεων μέ $x,y \in R$:

α) $2x+y-4=0$ β) $2x-y-1=0$ γ) $x+3y-6=0$

δ) $x+2y=3$ ε) $x-y=5$ στ) $2x-y=-1$

ζ) $y=-\frac{1}{2}x+1$ η) $x=-2$ θ) $y=3$

4. Νά παραστήσετε γραφικά τό σύνολο λύσεων τῆς ἐξισώσεως

$$x^2+15=y-8x$$

Συστήματα δύο ἐξισώσεων πρώτου βαθμοῦ.

8.4. Πολλές φορές θέλουμε νά βροῦμε τίς κοινές λύσεις (ἄν ὑπάρχουν) δύο ἐξισώσεων πρώτου βαθμοῦ, π.χ. τῶν

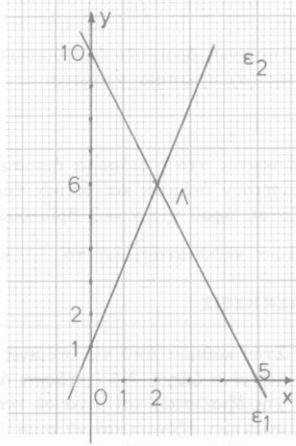
$$(4) \quad \begin{aligned} 2x+y&=10 \\ 5x-2y&=-2 \end{aligned}$$

Τότε λέμε ὅτι οἱ ἐξισώσεις αὐτές ἀποτελοῦν **σύστημα δύο ἐξισώσεων** καί κάθε κοινή λύση τους λέγεται **λύση τοῦ συστήματος.** Στά ἑπόμενα, ἐφόσον δέν ἀναφέρεται τίποτε διαφορετικό, θά ὑποθέτουμε ὅτι καί στίς δύο ἐξισώσεις ἑνός τέτοιου συστήματος τά x καί y μποροῦν νά πάρουν ὁποιεσδήποτε πραγματικές τιμές.

Ἄν θεωρήσουμε ἕνα ὀρθογώνιο σύστημα ἀξόνων, τά σύνολα λύσεων τῶν δύο ἐξισώσεων παριστάνονται μέ δύο εὐθεῖες ε_1 καί ε_2, οἱ ὁποῖες τέμνονται γενικά σ' ἕνα σημεῖο Λ. Τότε ὅμως τό κοινό σημεῖο Λ τῶν ε_1 καί ε_2 παριστάνει κοινή λύση τῶν δύο ἐξισώσεων, δηλαδή παριστάνει μία λύση τοῦ συστήματος. Στήν περίπτωση τοῦ συστήματος (4), ἄν μετρήσουμε τίς συντεταγμένες τοῦ Λ, βρίσκουμε (σχ. 9)

$$x=2, \quad y=6$$

καί ἑπομένως λύση τοῦ συστήματος εἶναι τό διατεταγμένο ζεῦγος (2,6).



(σχ. 9)

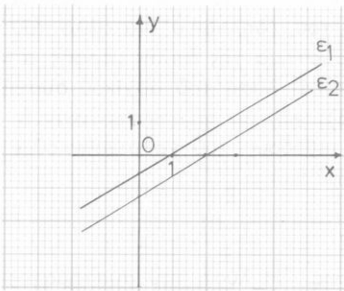
Ἐπειδή οἱ **δύο** εὐθεῖες ε_1 καί ε_2 ἔχουν τό πολύ ἕνα κοινό σημεῖο, συμπεραίνουμε ἀμέσως ὅτι **ἕνα σύστημα δύο πρωτοβάθμιων ἐξισώσεων ἔχει τό πολύ μία λύση.**

Καταλαβαίνουμε τώρα ὅτι ἕνα σύστημα δέ θά ἔχει λύση, ἄν οἱ ἀντίστοιχες εὐθεῖες του ε_1 καί ε_2 εἶναι παράλληλες. Αὐτό συμβαίνει, ὅταν οἱ λόγοι τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων x καί y στίς δύο ἐξισώσεις εἶναι ἴσοι μεταξύ τους καί διαφορετικοί ἀπό τό λόγο τῶν γνωστῶν ὅρων (βλ. παράδείγματα – ἐφαρμογές § 7.7).

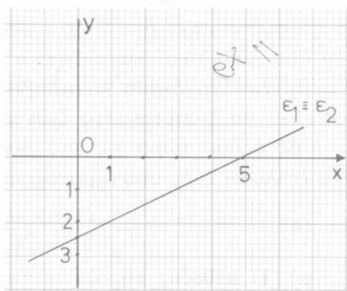
Ἔτσι τό σύστημα

$$x - 2y = 1$$
$$3x - 6y = 8$$

δέν ἔχει λύση (βλ. σχ. 10), γιατί $\frac{1}{3} = \frac{-2}{-6} \neq \frac{1}{8}$.



(σχ. 10)



(σχ. 11)

Στή μερική περίπτωση πού οἱ δύο ἐξισώσεις ἑνός συστήματος εἶναι ἰσοδύναμες, τό σύστημα ἔχει ἄπειρες λύσεις, γιατί οἱ δύο ἐξισώσεις ἔχουν τό ἴδιο σύνολο λύσεων καί οἱ εὐθεῖες ε_1 καί ε_2 συμπίπτουν. Αὐτό συμβαίνει, ὅταν οἱ τρεῖς λόγοι τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων x καί y καί τῶν σταθερῶν ὅρων στίς δύο ἐξισώσεις εἶναι ἴσοι (βλ. παραδείγματα — ἐφαρμογές § 7.7). Ἔτσι π.χ. τό σύστημα

$$x - 2y = 5$$
$$3x - 6y = 15$$

ἔχει ἄπειρες λύσεις (βλ. σχ. 11), γιατί $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{5}{15}$.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

5. Νά χρησιμοποιήσετε τετραγωνισμένο χαρτί, γιά νά βρεῖτε γραφικά τό σύνολο λύσεων καθενός ἀπό τά ἑπόμενα συστήματα:

α) $x = 3$, $y = 4$ β) $x = 0$, $y = -2$ γ) $x + y = 7$, $y = 3$

δ) $x+y=6$ ε) $x+y=8$ στ) $y=x+2$
$x=-3$ $y=x$ $y=4-x$

ζ) $y=x+5$ η) $x-2y=3$ θ) $5x+3y=7$
$y=x-5$ $x+y=0$ $3x-5y=0$

Ἐπίλυση συστήματος δύο ἐξισώσεων.

8.5. Εἶναι φανερό ὅτι ἡ *«γραφική ἐπίλυση»*, πού κάναμε στό σύστημα (4), προϋποθέτει ὄχι μόνο ἰδανική κατασκευή τῶν εὐθειῶν ε_1 καί ε_2 ἀλλά καί δυνατότητα μετρήσεως μέ μεγάλη ἀκρίβεια τῶν συντεταγμένων τοῦ Λ. Ἐπειδή δέν ἰσχύουν πάντα οἱ προϋποθέσεις αὐτές, εἴμαστε ὑποχρεωμένοι νά βροῦμε ἀριθμητικές μεθόδους γιά τήν ἐπίλυση τῶν συστημάτων.

Μιά τέτοια μέθοδος εἶναι διαδικασία, ἡ ὁποία μετατρέπει κάθε φορά τό σύστημα σ' ἕνα ἄλλο *ἰσοδύναμό* του, (δηλαδή σ' ἕνα ἄλλο πού ἔχει τήν ἴδια λύση) καί καταλήγει σ' ἕνα σύστημα τῆς ἁπλῆς μορφῆς $x=\alpha$, $y=\beta$, ἀπό τό ὁποῖο καταλαβαίνουμε ὅτι λύση τοῦ ἀρχικοῦ συστήματος εἶναι τό διατεταγμένο ζεῦγος (α,β).

Ἄς δοῦμε τώρα τίς πιό βασικές μεθόδους πού χρησιμοποιοῦμε γιά τήν ἐπίλυση ἑνός συστήματος, π.χ. τοῦ

$$(4)\qquad \begin{aligned} 2x+y&=10\\ 5x-2y&=-2 \end{aligned}$$

α) **Ἡ μέθοδος τῆς ἀντικαταστάσεως.** Ἡ λύση τοῦ συστήματος (4) βρίσκεται ἄν λύσουμε ἀρχικά μόνο τή μία ἐξίσωσή του ὡς πρός ἕναν ἄγνωστό της. Ἔτσι, ἄν λύσουμε τήν πρώτη ἐξίσωσή του ὡς πρός τόν ἄγνωστο x, βρίσκουμε τό ἰσοδύναμο σύστημα

$$(5)\qquad x=\frac{10-y}{2}\ ,\quad 5x-2y=-2$$

Ἄν τώρα στή δεύτερη ἐξίσωση ἀντικαταστήσουμε τό x μέ τό ἴσο του $\frac{10-y}{2}$, θά προκύψει ἕνα νέο ἰσοδύναμο σύστημα, τό

$$(6)\qquad x=\frac{10-y}{2}\ ,\quad 5\cdot\frac{10-y}{2}-2y=-2$$

Στό σύστημα ὅμως αὐτό ἡ δεύτερη ἐξίσωση περιέχει μόνο τόν ἄγνωστο y καί γράφεται διαδοχικά

$$\begin{aligned} 5(10-y)-2\cdot 2y&=-2\cdot 2\\ 50-5y-4y&=-4\\ -9y&=-54\\ y&=6 \end{aligned}$$

Ἔτσι τό σύστημα (6) ἀποτελεῖται οὐσιαστικά ἀπό τίς δύο ἐξισώσεις

$$x = \frac{10-y}{2} \quad , \quad y = 6$$

καί συνεπῶς, ἄν ἀντικαταστήσουμε στήν πρώτη του ἐξίσωση τόν ἄγνωστο y μέ τήν τιμή του 6, βρίσκουμε τελικά τό σύστημα

$$x = 2 \quad , \quad y = 6$$

τό ὁποῖο μᾶς δίνει τή λύση (2,6) τοῦ συστήματος (4).

β) **Ἡ μέθοδος τῆς συγκρίσεως.** Γιά νά βροῦμε τή λύση τοῦ συστήματος αὐτοῦ, λύνουμε κάθε ἐξίσωσή του ὡς πρός τόν ἴδιο ἄγνωστο, π.χ. τόν x. Βρίσκουμε τότε τό ἰσοδύναμο σύστημα

$$(7) \qquad x = \frac{10-y}{2} \quad , \quad x = \frac{2y-2}{5}$$

Συγκρίνοντας τίς δύο ἐξισώσεις του βλέπουμε ὅτι οἱ παραστάσεις $\frac{10-y}{2}$ καί $\frac{2y-2}{5}$ εἶναι ἴσες (ἀφοῦ παριστάνουν τόν ἴδιο ἀριθμό x) καί συνεπῶς τό σύστημα (7) εἶναι ἰσοδύναμο μέ τό σύστημα πού προκύπτει, ἄν ἀντικαταστήσουμε τή μιά ἐξίσωσή του μέ τήν ἐξίσωση

$$\frac{10-y}{2} = \frac{2y-2}{5}, \text{ δηλαδή μέ τό}$$

$$(8) \qquad x = \frac{10-y}{2} \quad , \quad \frac{10-y}{2} = \frac{2y-2}{5}$$

Ἡ δεύτερη ἐξίσωση τοῦ (8) περιέχει μόνο τόν ἄγνωστο y καί γράφεται διαδοχικά

$$5(10-y) = 2(2y-2)$$
$$50-5y = 4y-4$$
$$-9y = -54$$
$$y = 6$$

Ἔτσι τό σύστημα (8) ἀποτελεῖται οὐσιαστικά ἀπό τίς δύο ἐξισώσεις

$$x = \frac{10-y}{2} \quad , \quad y = 6$$

Ἄν τώρα ἀντικαταστήσουμε στήν πρώτη του ἐξίσωση τόν ἄγνωστο y μέ τήν τιμή του 6, βρίσκουμε τελικά τό ἰσοδύναμο σύστημα

$$x = 2 \quad , \quad y = 6,$$

τό ὁποῖο μᾶς δίνει τή λύση (2,6) τοῦ ἀρχικοῦ συστήματος (4).

γ) **Ἡ μέθοδος τῶν ἀντίθετων συντελεστῶν.** Ἄς θεωρήσουμε πρῶτα τό σύστημα

$$(9) \qquad \begin{aligned} 2x - 3y &= 5 \\ -2x + 6y &= 4, \end{aligned}$$

στό ὁποῖο οἱ συντελεστές τοῦ x εἶναι ἀντίθετοι ἀριθμοί. Στήν περίπτωση αὐτή ἕνα ἰσοδύναμο σύστημα τοῦ (9) εἶναι τό σύστημα, τό ὁποῖο προκύπτει, ἄν ἀντικαταστήσουμε μιά ὁποιαδήποτε ἐξίσωσή του μέ ἐκείνη πού βρίσκουμε, ὅταν προσθέσουμε κατά μέλη τίς δύο ἐξισώσεις του. Προσθέτοντας ὅμως κατά μέλη τίς δύο ἐξισώσεις τοῦ (9) βρίσκουμε τήν ἐξίσωση

$$3y = 9,$$

δηλαδή τήν $y = 3$. Ἔτσι τό σύστημα (9) εἶναι ἰσοδύναμο μέ τό

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 5 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

καί αὐτό, ὅπως φαίνεται εὔκολα (ἄν ἀντικαταστήσουμε στήν πρώτη ἐξίσωσή του ὅπου y τό 3), εἶναι ἰσοδύναμο μέ τό σύστημα

$$x = 7 \quad , \quad y = 3$$

τό ὁποῖο δίνει καί τή λύση (7,3) τοῦ ἀρχικοῦ συστήματος (9).

Ἄς πάρουμε τώρα πάλι τό ἀρχικό μας σύστημα

$$\begin{aligned} 2x + y &= 10 \\ 5x - 2y &= -2, \end{aligned}$$

στό ὁποῖο οὔτε οἱ συντελεστές τοῦ x οὔτε οἱ συντελεστές τοῦ y εἶναι ἀντίθετοι ἀριθμοί. Πολλαπλασιάζοντας καί τά δύο μέλη κάθε ἐξισώσεώς του μέ κατάλληλο ἀριθμό μποροῦμε πάντοτε νά κάνουμε ἀντίθετους τούς συντελεστές ἑνός ἀγνώστου. Οἱ συντελεστές π.χ. τοῦ ἀγνώστου x γίνονται ἀντίθετοι, ἄν πολλαπλασιάσουμε τά μέλη τῆς πρώτης ἐξισώσεως μέ 5 καί τά μέλη τῆς δεύτερης μέ –2. Οἱ συντελεστές ὅμως τοῦ ἀγνώστου y γίνονται εὐκολότερα ἀντίθετοι, ἄν πολλαπλασιάσουμε μόνο τά μέλη τῆς πρώτης ἐξισώσεως μέ 2. Ἔτσι βρίσκουμε τό ἰσοδύναμο σύστημα

$$\begin{aligned} 2(2x+y) &= 2\cdot 10 \\ 5x-2y &= -2 \end{aligned} \quad \text{ἤ} \quad \begin{aligned} 4x+2y &= 20 \\ 5x-2y &= -2, \end{aligned}$$

τό ὁποῖο ἔχει ἀντίθετους τούς συντελεστές τοῦ y. Ἐργαζόμαστε ὅπως καί στό προηγούμενο σύστημα καί καταλήγουμε στό

$$\begin{aligned} 4x+2y &= 20 \\ 9x &= 18 \end{aligned} \quad \text{ἤ} \quad \begin{aligned} 4x+2y &= 20 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Ἀπό αὐτό βρίσκουμε (ἄν ἀντικαταστήσουμε στήν πρώτη ἐξίσωση τό x μέ τό 2) τό σύστημα

$$x = 2, \quad y = 6,$$

τό ὁποῖο μᾶς δίνει ἀπευθείας τή λύση (2,6) τοῦ συστήματος (4).

8.6. Ἀπό τήν ἀνάπτυξη τῶν διάφορων μεθόδων ἐπιλύσεως ἑνός συστήματος καταλαβαίνουμε ὅτι κάθε τέτοια μέθοδος χωρίζεται οὐσιαστικά στά ἑξῆς τρία στάδια:

- Βρίσκουμε ἕνα ἰσοδύναμο σύστημα, στό ὁποῖο ἡ μία του ἐξίσωση περιέχει μόνο ἕναν ἄγνωστο, π.χ. τόν y.
- Λύνουμε τήν ἐξίσωση, πού περιέχει μόνο τόν ἄγνωστο y.
- Τήν τιμή πού βρήκαμε γιά τό y τή βάζουμε στήν ἄλλη ἐξίσωση καί ὑπολογίζουμε ἀπ' αὐτή τήν τιμή τοῦ ἄλλου ἀγνώστου x.

Οἱ μέθοδοι διαφέρουν μόνο στό πρῶτο στάδιο, ἐνῶ στά δύο ἄλλα στάδια ἐργαζόμαστε μέ τόν ἴδιο τρόπο σέ ὅλες τίς μεθόδους. Ἄν καί πιό συχνά ἐφαρμόζεται ἡ μέθοδος τῆς ἀντικαταστάσεως, δέν ὑπάρχουν κανόνες γιά τήν ἐπιλογή τῆς μεθόδου καί μόνο ἡ μορφή τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος μᾶς δείχνει στήν κάθε περίπτωση ποιά μέθοδο θά χρησιμοποιήσουμε.

Παράδειγμα 1. Νά βρεθεῖ ἡ λύση τοῦ συστήματος

$$\begin{aligned} 5x - 7y &= 2 \\ y &= 2x+1 \end{aligned}$$

Ἐδῶ βέβαια θά προτιμήσουμε τή μέθοδο τῆς ἀντικαταστάσεως, γιατί ἡ μιά ἐξίσωσή του εἶναι λυμένη ὡς πρός y. Ἔτσι ἡ πρώτη ἐξίσωση γράφεται

$$5x - 7(2x+1) = 2 \Leftrightarrow 5x - 14x - 7 = 2 \Leftrightarrow -9x = 9 \Leftrightarrow x = -1$$

καί συνεπῶς τό σύστημά μας εἶναι ἰσοδύναμο μέ τό

$$\begin{aligned} x &= -1 \\ y &= 2x+1, \end{aligned}$$

ἀπό τό ὁποῖο βρίσκουμε ἀμέσως

$$x = -1, \quad y = -1.$$

Παράδειγμα 2. Νά βρεθεῖ ἡ λύση τοῦ συστήματος

$$\begin{aligned} y &= 3x + 10 \\ y &= \ x + 6 \end{aligned}$$

Ἐπειδή καί οἱ δύο ἐξισώσεις εἶναι λυμένες ὡς πρός τόν ἴδιο ἄγνωστο, θά χρησιμοποιήσουμε τή μέθοδο τῆς συγκρίσεως. Ἔχουμε λοιπόν

$$3x + 10 = x + 6 \Leftrightarrow 2x = -4 \Leftrightarrow x = -2$$

καί συνεπῶς τό σύστημα εἶναι ἰσοδύναμο μέ τό

$$x = -2, \quad y = x+6,$$

ἀπό τό ὁποῖο βρίσκουμε ἀμέσως

$$x = -2, \quad y = 4$$

Παράδειγμα 3. Νά βρεθεῖ ἡ λύση τοῦ συστήματος

$$\begin{aligned} 4x + \ 7y &= \ 11 \\ 6x - 10y &= -4 \end{aligned}$$

Χρησιμοποιοῦμε τή μέθοδο τῶν ἀντίθετων συντελεστῶν. Γιά νά γίνουν οἱ συντελεστές τοῦ x ἀντίθετοι, βρίσκουμε τό Ε.Κ.Π τῶν 4 καί 6 (πού εἶναι 12) καί πολλαπλασιάζουμε τά μέλη τῆς πρώτης ἐξισώσεως μέ τό 3 (ἐπειδή 12 : 4=3), καί τά μέλη τῆς δεύτερης μέ τό –2 (ἐπειδή 12:6=2). Βρίσκουμε ἔτσι τό ἰσοδύναμο σύστημα

$$\begin{aligned} 3(4x+7y) &= 3.11 \\ -2(6x-10y) &= -2\cdot(-4) \end{aligned} \qquad \text{ἤ} \qquad \begin{aligned} 12x + 21y &= 33 \\ -12x + 20y &= 8 \\ \hline 41y &= 41 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

Συνεπῶς τό ἀρχικό σύστημα εἶναι ἰσοδύναμο μέ τό σύστημα

$$\begin{aligned} 4x + 7y &= 11 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

καί ἀπ' αὐτό βρίσκουμε εὔκολα

$$x = 1, \quad y = 1$$

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

6. Νά λύσετε μέ τή μέθοδο τῶν ἀντίθετων συντελεστῶν τά συστήματα:

α) $\begin{aligned} 2x-y &= 4 \\ -2x-3y &= -4 \end{aligned}$ β) $\begin{aligned} -3x+4y &= 7 \\ 3x+y &= -2 \end{aligned}$ γ) $\begin{aligned} 2x-y &= 5 \\ x-2y &= 4 \end{aligned}$

7. Νά λύσετε μέ ὅποια μέθοδο θέλετε τά συστήματα:

α) $\begin{aligned} y &= x \\ 2x-y &= 5 \end{aligned}$ β) $\begin{aligned} y &= 2x \\ 6x-y &= 8 \end{aligned}$ γ) $\begin{aligned} y &= 2x-1 \\ 3y-2x &= 5 \end{aligned}$ δ) $\begin{aligned} \varphi &= 2\omega+3 \\ 5\varphi-2\omega+1 &= 0 \end{aligned}$

ε) $\begin{aligned} t &= 2p-2 \\ 5p-4t+1 &= 0 \end{aligned}$ στ) $\begin{aligned} y+2x &= 0 \\ 4x+y &= 3 \end{aligned}$ ζ) $\begin{aligned} \frac{2x+y}{3} &= 5 \\ \frac{3x-y}{5} &= 1 \end{aligned}$ η) $\begin{aligned} 0{,}3x+0{,}5y &= 4{,}7 \\ 0{,}9x-0{,}2y &= 2{,}2 \end{aligned}$

8. Νά λύσετε τά ἑπόμενα συστήματα ἀντικαθιστώντας τό $1/x$ μέ φ καί τό $1/y$ μέ ω:

α) $\begin{aligned} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} &= 2 \\ \frac{8}{x} - \frac{9}{y} &= 1 \end{aligned}$ β) $\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= \frac{3}{4} \\ \frac{2}{x} + \frac{3}{y} &= \frac{5}{2} \end{aligned}$ γ) $\begin{aligned} \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{y} &= \gamma \\ \frac{\delta}{x} + \frac{\varepsilon}{y} &= \zeta \end{aligned}$ μέ $\alpha\varepsilon-\beta\delta \neq 0$

9. Πῶς θά ἀντιμετωπίσετε τό σύστημα γ) τῆς ἄσκ. 8, ὅταν $\alpha\varepsilon-\beta\delta = 0$;

Συστήματα μιᾶς δευτεροβάθμιας καί μιᾶς πρωτοβάθμιας ἐξισώσεως μέ δύο ἀγνώστους.

8.7. Θά ἀσχοληθοῦμε τώρα μέ συστήματα μιᾶς δευτεροβάθμιας καί μιᾶς πρωτοβάθμιας ἐξισώσεως μέ δύο ἀγνώστους. Ἕνα τέτοιο σύστημα εἶναι π.χ. τό

$$(10)\qquad \begin{aligned} y^2 &= 4x + 5 \\ x - y &= -2, \end{aligned}$$

τό ὁποῖο λύνεται σχεδόν πάντοτε μέ τή μέθοδο τῆς ἀντικαταστάσεως. Δηλαδή λύνουμε τήν πρωτοβάθμια ἐξίσωσή του ὡς πρός ἕναν ἄγνωστο, π.χ. τόν y, καί κάνουμε ἀντικατάσταση τοῦ ἀγνώστου αὐτοῦ στήν ἄλλη ἐξίσωση. Ἔτσι τό σύστημα (10) γράφεται

$$\begin{aligned} y^2 &= 4x + 5 \\ y &= x+2 \end{aligned}$$

ἤ, ἄν ἀντικαταστήσουμε τό y στήν πρώτη ἐξίσωση,

$$(11)\qquad \begin{aligned} (x+2)^2 &= 4x+5 \\ y &= x+2 \end{aligned}$$

Στό ἰσοδύναμο αὐτό σύστημα ἡ πρώτη ἐξίσωση περιέχει μόνο τόν ἄγνωστο x καί γράφεται διαδοχικά

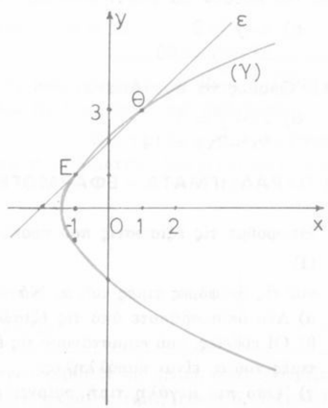
$$x^2+4x+4 = 4x+5 \Leftrightarrow x^2 = 5-4 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \quad ἤ \quad x = -1.$$

Ἡ δεύτερη ἐξίσωση τοῦ (11) γιά $x = 1$ δίνει $y = 3$ καί γιά $x = -1$ δίνει $y = 1$. Συνεπῶς τό σύνολο λύσεων τοῦ συστήματος (10) ἀποτελεῖται τώρα ἀπό τά δύο διατεταγμένα ζεύγη

$$(1,3), \qquad (-1,1)$$

Βλέπουμε δηλαδή ὅτι ἕνα τέτοιο σύστημα **ἔχει τό πολύ δύο λύσεις.**

Ἄς θεωρήσουμε τώρα ἕνα σύστημα ὀρθογώνιων ἀξόνων καί ἄς κατασκευάσουμε τίς γραμμές, πού παριστάνουν τίς λύσεις κάθε μιᾶς ἀπό τίς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος (10). Ἡ πρώτη ἐξίσωση τοῦ (10) παριστάνεται (σχ.12) μέ μία γραμμή γ (βλ. καί σχ. 1) καί ἡ δεύτερη μέ μία εὐθεία ε. Οἱ γραμμές αὐτές τέμνονται σέ δύο σημεῖα Ε $(-1,1)$ καί $\Theta(1,3)$, πού παριστάνουν τίς λύσεις τοῦ συστήματος (10).



(σχ. 12)

Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι μποροῦμε γενικά νά κάνουμε *«γραφική ἐπίλυση»* ἑνός τέτοιου συστήματος, ἄν κατασκευάσουμε τίς γραμμές, πού παριστάνουν τίς λύσεις τῆς κάθε μιᾶς ἐξισώσεως, καί μετρήσουμε τίς συντεταγμένες τῶν κοινῶν σημείων τους.

Ἄς δοῦμε ἀκόμη ἕνα παράδειγμα ἀριθμητικῆς ἐπιλύσεως.

Γιά νά βροῦμε τό σύνολο λύσεων τοῦ συστήματος

$$x+y=1$$
$$3x^2-xy+y^2=37$$

λύνουμε τήν πρώτη ἐξίσωση ὡς πρός y καί τήν τιμή του ἀντικαθιστοῦμε στή δεύτερη· ἔτσι ἔχουμε τό ἰσοδύναμο σύστημα

$$y=1-x$$
$$3x^2-x(1-x)+(1-x)^2=37$$

Ἡ δεύτερη ἐξίσωση γράφεται

$$3x^2-x+x^2+1-2x+x^2=37 \Leftrightarrow 5x^2-3x-36=0 \Leftrightarrow$$

$$5\left(x^2-\frac{3}{5}x-\frac{36}{5}\right)=0 \Leftrightarrow 5\left[x^2-2\cdot\frac{3}{10}x+\left(\frac{3}{10}\right)^2-\left(\frac{3}{10}\right)^2-\frac{36}{5}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow 5\left[x^2-2\cdot\frac{3}{10}x+\left(\frac{3}{10}\right)^2-\frac{9}{100}-\frac{36}{5}\right]=0 \Leftrightarrow 5\left[\left(x-\frac{3}{10}\right)^2-\frac{9+720}{100}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow 5\left[\left(x-\frac{3}{10}\right)^2-\left(\frac{27}{10}\right)^2\right]=0 \Leftrightarrow 5\left(x-\frac{3}{10}+\frac{27}{10}\right)\left(x-\frac{3}{10}-\frac{27}{10}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 5\,(x+2{,}4)\,(x-3)=0 \Leftrightarrow x=-2{,}4 \text{ ἤ } x=3$$

Ἡ πρώτη ἐξίσωση τοῦ συστήματος γιά $x=-2{,}4$ δίνει $y=3{,}4$ καί γιά $x=3$ δίνει $y=-2$. Συνεπῶς τό σύνολο λύσεων τοῦ συστήματος εἶναι

$$\{(-2{,}4,\ 3{,}4),\ \ (3,-2)\}$$

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

10. Νά λυθοῦν τά συστήματα:

α) $x-y=2$, $x^2+xy=60$ β) $x+y=7$, $3x^2+xy-y^2=81$

11. Ὁμοίως τά συστήματα:

α) $2x+y=5$, $5x^2-3xy=14$ β) $x+y+1=0$, $3x^2-5y^2-7=0$

■ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Θεωροῦμε τίς ἐξισώσεις πού προκύπτουν ἀπό τήν ἰσότητα**

(I) $$5x+2y=\alpha$$

γιά τίς διάφορες τιμές τοῦ α. Νά ἀποδείξετε ὅτι:

α) Δύο ὁποιεσδήποτε ἀπό τίς ἐξισώσεις αὐτές δέν ἔχουν κοινή λύση.

β) Οἱ εὐθεῖες, πού παριστάνουν τίς ἐξισώσεις πού προκύπτουν ἀπό τήν (I) γιά ὅλες τίς τιμές τοῦ α, εἶναι παράλληλες.

γ) Ὅσο πιό μεγάλη τιμή παίρνει ὁ ἀριθμός |α|, τόσο περισσότερο «ἀπομακρύνεται» ἡ εὐθεία ἀπό τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων.

Νά προσδιοριστεῖ ὁ α, ὥστε ἡ ἐξίσωση (I) νά ἔχει λύση τό ζεῦγος (4,7).

Λύση: α) Δίνουμε στό α δύο ὁποιεσδήποτε τιμές π.χ. 5 καί 10. Τότε ἀπό τήν (I) προκύπτει τό σύστημα

(II) $$5x+2y=5$$
$$5x+2y=10$$

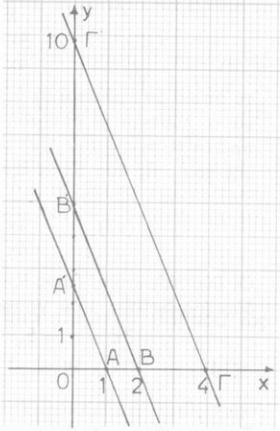
Παρατηροῦμε ὅτι μόνο οἱ λόγοι $\frac{5}{5}$ καί $\frac{2}{2}$ τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων εἶναι ἴσοι. Ἑπομένως τό σύστημα δέν ἔχει λύση.

β) Ἄν παραστήσουμε γραφικά τό σύνολο λύσεων κάθε μιᾶς ἀπό τίς ἐξισώσεις τοῦ (ΙΙ) σέ ὀρθογώνιο σύστημα ἀξόνων (σχ. 13), βλέπουμε ὅτι στήν πρώτη ἐξίσωση ἀντιστοιχεῖ ἡ εὐθεία ΑΑ′, ὅπου Α(1,0) καί Α′ (0, 2,5), ἐνῶ στή δεύτερη ἡ εὐθεία ΒΒ′, ὅπου Β(2,0) καί Β′ (0,5). Παρατηροῦμε ὅτι

$$(ΟΑ) : (ΟΒ) = (ΟΑ') : (ΟΒ')$$

(γιατί 1 : 2 = 2,5 : 5). Τότε ὅμως σύμφωνα μέ τό θεώρημα τοῦ Θαλῆ (Β′ τάξη) θά εἶναι ΑΑ′ ∥ ΒΒ′. Τό ἴδιο ἰσχύει γιά ὅλες τίς εὐθεῖες, πού παριστάνουν τά σύνολα λύσεων τῶν ἐξισώσεων πού προκύπτουν ἀπό τήν (Ι), καί συνεπῶς ὅλες αὐτές εἶναι παράλληλες μεταξύ τους.

Στό ἴδιο συμπέρασμα φθάνουμε, ἄν ἐργαστοῦμε ὅπως στό πρβ. 1 μετά τήν § 7.7.



(σχ. 13)

γ) Παρατηροῦμε ὅτι, ὅταν ἡ τιμή τοῦ α αὐξάνεται, π.χ. γίνεται α = 20, τότε ἡ εὐθεία, πού παριστάνει τό σύνολο λύσεων τῆς ἐξισώσεως

$$5x + 2y = 20,$$

τέμνει τούς ἄξονες Οx, Οy ἀντίστοιχα στά σημεῖα Γ,Γ′ ὅπου (ΟΓ) = 4 καί (ΟΓ′)=10. Δηλαδή αὐξάνουν οἱ ἀποστάσεις τῶν σημείων τομῆς τῆς εὐθείας ἀπό τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων καί ἔτσι «ἀπομακρύνεται» ἡ εὐθεία ἀπό τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων.

Τέλος, γιά νά ἔχει ἡ (Ι) λύση τό διατεταγμένο ζεῦγος (4,7), πρέπει νά ἐπαληθεύεται, ἄν θέσουμε ὅπου x τό 4 καί y τό 7. Τότε ἔχουμε

$$5 \cdot 4 + 2 \cdot 7 = α, \quad \text{ἀπ' ὅπου} \quad α = 34$$

2. **Ἕνα ὀρθογώνιο ἔχει περίμετρο 75 cm. Τό μῆκος μιᾶς πλευρᾶς του εἶναι κατά 13 cm μεγαλύτερο ἀπό τό μῆκος τῆς ἄλλης. Νά βρεῖτε τίς διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου.**

Λύση: Ἄν x εἶναι τό μῆκος τῆς μεγαλύτερης διαστάσεως καί y τό μῆκος τῆς μικρότερης, τότε εὔκολα καταλαβαίνουμε ὅτι ἡ λύση τοῦ προβλήματος ἀνάγεται στή λύση τοῦ συστήματος

$$x = y + 13$$
$$2x + 2y = 75$$

τό ὁποῖο μέ τή μέθοδο ἀντικαταστάσεως δίνει $x = 25\frac{1}{4}$, $y = 12\frac{1}{4}$. Ὥστε οἱ ζητούμενες διαστάσεις εἶναι 25,25 cm καί 12,25 cm.

3. **Δίνεται τό πολυώνυμο $f(t) = xt^2 + yt + ω$. Νά προσδιορίσετε τά x,y,ω, ὅταν γνωρίζετε ὅτι γιά t ἴσο μέ 1,2, —2 τό πολυώνυμο παίρνει ἀντίστοιχα τίς τιμές f(1) = 6, f(2) = 11, f(—2) = 3.**

Λύση: Δίνοντας στό t τίς τιμές 1,2,–2 ἔχομε

$$f(1) = x \cdot 1^2 + y \cdot 1 + ω = 6,$$
$$f(2) = x \cdot 2^2 + y \cdot 2 + ω = 11$$
$$f(-2) = x \cdot (-2)^2 + y \cdot (-2) + ω = 3$$

Ἡ λύση λοιπόν τοῦ προβλήματος ἀνάγεται στή λύση τοῦ συστήματος

$$(12)\qquad \begin{aligned} x + y + \omega &= 6 \\ 4x + 2y + \omega &= 11 \\ 4x - 2y + \omega &= 3, \end{aligned}$$

τό ὁποῖο ἀποτελεῖται ἀπό 3 ἐξισώσεις μέ 3 ἀγνώστους. Τό σύστημα αὐτό μποροῦμε νά τό λύσουμε μέ ὁποιαδήποτε ἀπό τίς μεθόδους πού μάθαμε. Ἔτσι, λύνουμε τήν πρώτη ἐξίσωση τοῦ (12) ὡς πρός ω καί ἔχουμε, μετά τήν ἀντικατάσταση τῆς τιμῆς του στίς δύο ἄλλες ἐξισώσεις, τό ἰσοδύναμο σύστημα

$$(13)\qquad \begin{aligned} \omega &= 6 - x - y \\ 4x + 2y + 6-x-y &= 11 \\ 4x - 2y + 6 - x - y &= 3 \end{aligned}$$

Οἱ δύο τελευταῖες ὅμως ἐξισώσεις τοῦ (13) ἀποτελοῦν σύστημα δύο ἐξισώσεων μέ δύο ἀγνώστους, πού γράφεται

$$(14)\qquad \begin{aligned} 3x + y &= 5 \\ 3x - 3y &= -3 \end{aligned} \qquad \text{ἤ} \qquad \begin{aligned} 3x + y &= 5 \\ x - y &= -1 \\ \hline 4x = 4 &\Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

Συνεπῶς ἡ πρώτη ἐξίσωση τοῦ (14) δίνει $3 \,.\, 1 + y = 5 \Leftrightarrow y = 2$.
Ἡ λύση τοῦ συστήματος (14) εἶναι λοιπόν $x = 1$, $y = 2$.
Ἄν θέσουμε τίς τιμές τῶν x,y στήν πρώτη ἐξίσωση τοῦ (13), ἔχουμε

$$\omega = 6 - 1 - 2 \quad \text{ἤ} \quad \omega = 3$$

Οἱ ζητούμενοι λοιπόν ἀριθμοί εἶναι $x = 1$, $y = 2$ καί $\omega = 3$.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

12. Νά βρεῖτε δύο ρητούς ἀριθμούς, πού ἔχουν ἄθροισμα 63 καί διαφορά 12.

13. Μία εὐθεία ἔχει ὡς ἐξίσωση τήν $y = mx + c$. Τά σημεῖα (2,2) καί (3,6) ἀνήκουν στήν εὐθεία αὐτή. α) Νά βρεῖτε τά m καί c. β) Ἄν τό σημεῖο (α,14) ἀνήκει στήν ἴδια εὐθεία, νά βρεῖτε τό α.

14. Στό ἄθροισμα

$$3 + 9 + 15 + 21 + \ldots$$

ὁ ὅρος ν τάξεως (νιοστός) εἶναι $\nu \,.\, \alpha + \beta$ (ὅπου α,β σταθεροί).

α) Χρησιμοποιώντας τόν πρῶτο καί δεύτερο ὅρο τοῦ ἀθροίσματος νά σχηματίσετε δύο ἐξισώσεις ,ἀπό τίς ὁποῖες νά ὑπολογίσετε τά α καί β.

β) Μετά, ἐφαρμόζοντας τό ἀποτέλεσμα πού βρήκατε, νά ὑπολογίσετε τόν ἑκατοστό ὅρο τοῦ ἀθροίσματος.

15. Ὅταν ὁ ὁδηγός ἑνός τραίνου βάλει φρένο, τό τραῖνο ἐξακολουθεῖ νά κινεῖται μέ ταχύτητα $\upsilon = \alpha t + \beta$, ὅπου t ὁ χρόνος πού πέρασε ἀπό τή στιγμή πού μπῆκε τό φρένο (α,β σταθεροί ἀριθμοί). Ἄν τό τραῖνο ἔχει τή στιγμή τοῦ φρεναρίσματος $(t = 0)$ ταχύτητα $\upsilon = 16$ m/sec καί μετά 8 sec ἔχει ταχύτητα $\upsilon = 10$ m/sec, νά βρεῖτε α) τά α,β β) τήν ταχύτητα τοῦ τραίνου 10 sec μετά τό φρενάρισμα γ) Μετά πόσα sec θά σταματήσει τό τραῖνο;

16. Ἄν ἕνα πυροβόλο ἐκτοξεύει ἕνα βλῆμα, τό ὕψος h τοῦ βλήματος σέ χρόνο t sec δίνεται ἀπό τόν τύπο $h = \alpha t + \beta t^2$.

α) Νά βρεῖτε τά α,β, ὅταν γνωρίζετε ὅτι τό βλῆμα σέ 1 sec φτάνει σέ ὕψος 19 m καί σέ 2 sec σέ ὕψος 28 m. β) Νά βρεῖτε τό ὕψος τοῦ βλήματος σέ χρόνο $t = 4$ sec γ) Ποῦ θά βρίσκεται τό βλῆμα μετά 4,8 sec;

17. Μοτοσυκλετιστής ἔκανε ταξίδι x km σέ t ὥρες μέ μέση ταχύτητα 68 km/h. Ἄν ἔτρεχε μέ ταχύτητα 72 km/h, θά ἔφθανε 10 min (λεπτά) ἐνωρίτερα. Νά βρεῖτε τό χρόνο t πού ταξίδεψε καί τήν ἀπόσταση x.

18. Μία μηχανή Α παράγει 30 ἀντικείμενα τήν ὥρα, μία ἄλλη μηχανή Β παράγει 40 ἴδια ἀντικείμενα τήν ὥρα. Μιά μέρα οἱ δύο μηχανές δούλεψαν πρῶτα ἡ Α καί ὕστερα ἡ Β συνολικά 18 ὧρες καί κατασκεύασαν 600 ἀντικείμενα. Νά βρεῖτε πόσες ὧρες δούλεψε κάθε μηχανή.

19. Δύο αὐτοκίνητα φεύγουν μαζί, γιά νά κάνουν μιά διαδρομή 270 km. Τό πρῶτο τρέχει μέ ταχύτητα κατά 12 km/h μεγαλύτερη ἀπό τήν ταχύτητα τοῦ δεύτερου καί φτάνει στό τέρμα 45 min ἐνωρίτερα ἀπό τό δεύτερο. Νά ὑπολογίσετε τήν ταχύτητα κάθε αὐτοκινήτου.

Ἀνισώσεις πρώτου βαθμοῦ.

8.8. Ἄς θεωρήσουμε ἕνα ὁρισμένο πολυώνυμο πρώτου βαθμοῦ ὡς πρός x καί y, π.χ. τό

$$2x + 3y - 6 \tag{1}$$

Ξέρουμε ὅτι τό πολυώνυμο αὐτό παίρνει μιά ὁρισμένη ἀριθμητική τιμή γιά κάθε διατεταγμένο ζεῦγος τιμῶν τῶν μεταβλητῶν του x καί y. Εἶναι φανερό ὅτι τό πολυώνυμο (1) παίρνει ἀριθμητική τιμή μηδέν μόνο γιά τά διατεταγμένα ζεύγη, πού εἶναι λύσεις τῆς ἐξισώσεως

$$2x + 3y - 6 = 0,$$

ἐνῶ γιά κάθε ἄλλο ζεῦγος τιμῶν τῶν x καί y παίρνει θετική ἤ ἀρνητική τιμή.

Ὁρίζουμε τώρα ὅτι:

- Κάθε διατεταγμένο ζεῦγος τιμῶν τῶν x καί y, γιά τό ὁποῖο τό πολυώνυμο (1) παίρνει **θετική** τιμή, λέγεται **λύση τῆς ἀνισώσεως $2x+3y-6>0$.**

  Ἕνα τέτοιο ζεῦγος εἶναι π.χ. τό (3,7), γιατί ἔχουμε

  $$2 \cdot 3 + 3 \cdot 7 - 6 = 6+21-6 = 21 > 0.$$

- Κάθε διατεταγμένο ζεῦγος τιμῶν τῶν x καί y, γιά τό ὁποῖο τό πολυώνυμο (1) παίρνει **ἀρνητική** τιμή, λέγεται **λύση τῆς ἀνισώσεως $2x+3y-6<0$.**

  Ἕνα τέτοιο ζεῦγος εἶναι π.χ. τό (1,0), γιατί ἔχουμε

  $$2.1+3.0-6 = 2-6 = -4<0.$$

Ἔτσι, ὅταν λέμε *«ἐπίλυση»* μιᾶς ἀνισώσεως, ἐννοοῦμε τόν προσδιορισμό ὅλων τῶν λύσεών της, δηλαδή τόν προσδιορισμό τοῦ **συνόλου λύσεών** της.

Ἐπίσης, ὅταν λέμε *ἐπίλυση* τῆς ἀνισώσεως $2x+3y-6 \geq 0$ (ἤ ἀντίστοιχα τῆς $2x+3y-6 \leq 0$), ἐννοοῦμε τόν προσδιορισμό τοῦ συνόλου λύσεων τόσο τῆς ἐξισώσεως $2x+3y-6=0$ ὅσο καί τῆς ἀνισώσεως $2x+3y-6>0$ (ἤ ἀντίστοιχα τῆς $2x+3y-6<0$).

8.9. Ἄς πάρουμε τώρα ἕνα σύστημα ὀρθογώνιων ἀξόνων καί ἄς κατασκευάσουμε τήν εὐθεία ε, πού παριστάνει τό σύνολο λύσεων τῆς ἐξισώσεως

$$2x+3y-6=0$$

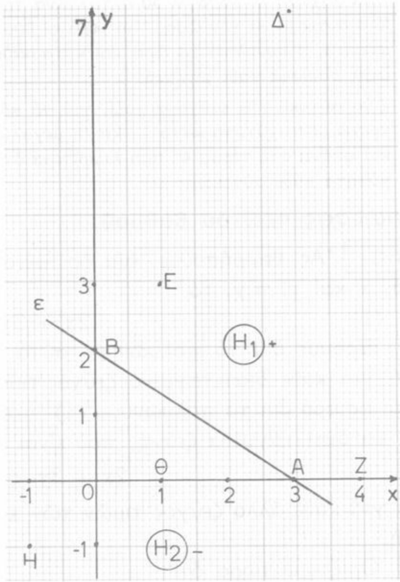
Ἡ εὐθεία ε χωρίζει τό ἐπίπεδο σέ δύο ἡμιεπίπεδα H_1 καί H_2, γιά τά ὁποῖα παρατηροῦμε τά ἑξῆς:

α) Οἱ συντεταγμένες κάθε σημείου τοῦ ἡμιεπιπέδου H_1 ἀποτελοῦν λύση τῆς ἀνισώσεως

$$2x+3y-6 \geq 0.$$

β) Οἱ συντεταγμένες κάθε σημείου τοῦ ἡμιεπιπέδου H_2 ἀποτελοῦν λύση τῆς ἀνισώσεως

$$2x+3y-6 \leq 0$$



(σχ. 14)

Πραγματικά, ἄν πάρουμε ὁποιαδήποτε σημεῖα τοῦ ἡμιεπιπέδου H_1, π.χ. τά Δ(3,7), Ε(1,3), Ζ(4,0),... καί ἀντικαταστήσουμε τίς μεταβλητές τοῦ πολυωνύμου $2x+3y-6$ μέ τίς συντεταγμένες τους, ἔχουμε ἀντίστοιχα

$$2\cdot3+3\cdot7-6=6+21-6=21>0$$
$$2\cdot1+3\cdot3-6=2+9-6=5>0$$
$$2\cdot4+3\cdot0-6=8+0-6=2>0$$

....

Γιά τά σημεῖα τῆς εὐθείας ε (πού ἀνήκουν ἐπίσης στό H_1) ἔχουμε $2x+3y-6=0$.

Ἐπίσης, ἄν πάρουμε ὁποιαδήποτε σημεῖα τοῦ ἡμιεπιπέδου H_2, π.χ. τά Η(−1,1), Ο(0,0), Θ(1,0)... καί ἀντικαταστήσουμε τίς μεταβλητές τοῦ πολυωνύμου $2x+3y-6$ μέ τίς συντεταγμένες τους, ἔχουμε ἀντίστοιχα

$$2\cdot(-1)+3\cdot1-6=-2+3-6=-5<0$$
$$2\cdot0+1\cdot0-6=0+0-6=-6<0$$
$$2\cdot1+3\cdot0-6=2+0-6=-4<0$$

....

ἐνῶ πάλι γιά τά σημεῖα τῆς ε (πού ἀνήκουν καί στό H_2) ἔχουμε

$$2x+3y-6=0$$

Εἶναι τώρα φανερό ὅτι ὅλα τά σημεῖα τοῦ ἡμιεπιπέδου H_1, πού δέν ἀνήκουν στήν ε, ἀποτελοῦν τή γραφική παράσταση τοῦ συνόλου λύσεων τῆς ἀνισώσεως $2x+3y-6>0$, ἐνῶ ὅλα τά σημεῖα τοῦ ἡμιεπιπέδου H_2, πού δέν ἀνήκουν στήν ε, ἀποτελοῦν τή γραφική παράσταση τοῦ συνόλου λύσεων τῆς $2x+3y-6<0$.

Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι, γιά νά ἐπιλύσουμε γραφικῶς τήν ἀνίσωση $2x+3y-6\geq 0$, πρέπει νά κάνουμε τίς ἑξῆς ἐργασίες:

- **Νά κατασκευάσουμε τήν εὐθεία ε, πού ἔχει ἐξίσωση τήν**

$$2x + 3y - 6 = 0.$$

- **Νά ἐντοπίσουμε τό ἕνα ἀπό τά δύο ἡμιεπίπεδα H_1 καί H_2 πού οἱ συντεταγμένες κάθε σημείου του ἀποτελοῦν λύσεις τῆς**

$$2x + 3y - 6 \geq 0$$

Τό ἡμιεπίπεδο αὐτό ἐντοπίζεται ἀμέσως, ἄν βροῦμε τήν ἀριθμητική τιμή τοῦ πολυωνύμου $2x+3y-6$ γιά τίς συντεταγμένες ἑνός ὁποιουδήποτε σημείου τοῦ ἑνός ἡμιεπιπέδου, π.χ. τοῦ H_1, ἀρκεῖ τό σημεῖο αὐτό νά μήν ἀνήκει στήν ε. Ἄν προκύψει θετική ἀριθμητική τιμή, τότε τό σύνολο λύσεων τῆς ἀνισώσεως ἔχει στοιχεῖα τίς συντεταγμένες τῶν σημείων τοῦ ἡμιεπιπέδου H_1, ἐνῶ, ἄν προκύψει ἀρνητική ἀριθμητική τιμή, τό σύνολο λύσεων ἔχει στοιχεῖα τίς συντεταγμένες τῶν σημείων τοῦ H_2. Στό παράδειγμά μας εἴδαμε ὅτι οἱ συντεταγμένες ἑνός ὁποιουδήποτε σημείου τοῦ ἡμιεπιπέδου H_1 δίνουν θετική ἀριθμητική τιμή καί συνεπῶς ἰσχύει ἡ πρώτη περίπτωση.

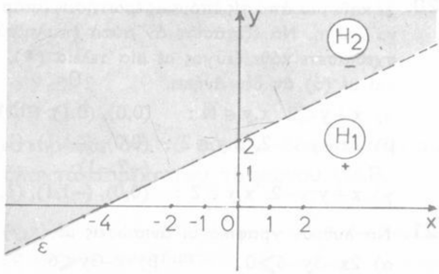
Συνήθως βρίσκουμε τήν ἀριθμητική τιμή τοῦ πολυωνύμου γιά τίς συντεταγμένες (0,0) τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων.

Παράδειγμα 1. Νά βρεθεῖ τό σύνολο λύσεων τῆς ἀνισώσεως

(1) $$x-2y + 4 > 0.$$

Λύση. Κατασκευάζουμε πρῶτα τήν εὐθεία ε (σχ. 15), πού ἔχει ἐξίσωση $x-2y+4=0$. Μετά βρίσκουμε τήν ἀριθμητική τιμή τοῦ πολυωνύμου $x-2y+4$ γιά $x=0$ καί $y=0$, πού εἶναι $0-2\cdot 0+4=4>0$.

Αὐτό σημαίνει ὅτι οἱ συντεταγμένες τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων εἶναι μία λύση τῆς (1). Συνεπῶς ὅλα τά σημεῖα τοῦ ἡμιεπιπέδου H_1, ἐκτός ἀπό τά σημεῖα τῆς ε, ἀποτελοῦν τή γραφική παράσταση τοῦ συνόλου λύσεων τῆς (1).



(σχ. 15)

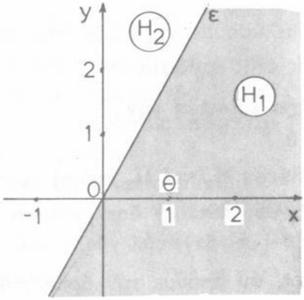
Στό σχῆμα δείχνεται αὐτό, ἄν διαγράψουμε τό ἡμιεπίπεδο H_2, πού δέ μᾶς χρειάζεται, καί κατασκευάσουμε τήν ε «διακεκομμένη»

Παράδειγμα 2. Νά ἐπιλυθεῖ (γραφικά) ἡ ἀνίσωση $y \geq 2x$ (2)

Λύση. Ἐπειδή ἡ ἀνίσωση (2) γράφεται $-2x+y \geq 0$, κατασκευάζουμε πρῶτα τήν εὐθεία $-2x+y=0$ καί μετά βρίσκουμε τήν ἀριθμητική τιμή τοῦ πολυωνύμου $-2x+y$ γιά $x=1$ καί $y=0$, πού εἶναι

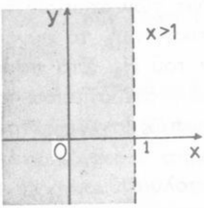
$$-2.1+0=-2<0$$

Αὐτό σημαίνει ὅτι τό σημεῖο Θ (1,0), συνεπῶς καί κάθε ἄλλο σημεῖο τοῦ H_1, πού δέν ἀνήκει στήν ε, δέν παριστάνει λύση τῆς (2). Ἔτσι τό σύνολο λύσεων τῆς (2) παριστάνεται μέ τά σημεῖα τοῦ ἡμιεπιπέδου H_2.

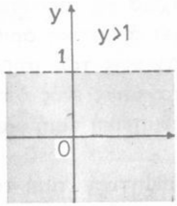


(σχ. 16)

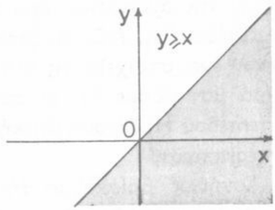
Στά παρακάτω σχήματα «διαγράφουμε» τά ἡμιεπίπεδα, στά ὁποῖα



(σχ. 17)



(σχ. 18)



(σχ. 19)

δέν ἔχουν λύση οἱ ἀντίστοιχες ἀνισώσεις.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

20. Σέ κάθε μία ἀπό τίς ἑπόμενες ἐρωτήσεις ὑπάρχει μία ἀνίσωση καί μερικά διατεταγμένα ζεύγη. Νά ἐξετάσετε ἄν αὐτά ἐπαληθεύουν τίς ἀντίστοιχες ἀνισώσεις καί νά σχεδιάσετε κάθε ζεῦγος μέ μία τελεία (●), ἄν αὐτό ἀνήκει στό σύνολο λύσεων, καί μέ (ο) ἄν δέν ἀνήκει.

α) $x+y \leqslant 2,\ x,y \in N$: (0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (3,0), (2,0), (1,1), (1,0)

β) $2x+y<-2,\ x,y \in Z$: (0,0), (–1,1), (1,–1), (–2,0), (0,–2), (2,–2), (–2,1), (–2,–1)

γ) $x+y>-2,\ x,y \in Z$: (0,0), (–1,1), (1,–1), (–2,0), (2,0), (2,1), (0,2), (1,0)

21. Νά λυθοῦν γραφικά οἱ ἀνισώσεις μέ $(x,y) \in R^2$.

α) $2x-3y-6 \geqslant 0$ β) $x-3y \leqslant 6$ γ) $2x+y \geqslant 4$

δ) $x-3y<6$ ε) $2x+y>4$ στ) $2x-3y-6<0$

ζ) $x \geqslant -2$ η) $x-y<8$ θ) $x-y<0$

Συστήματα ἀνισώσεων πρώτου βαθμοῦ.

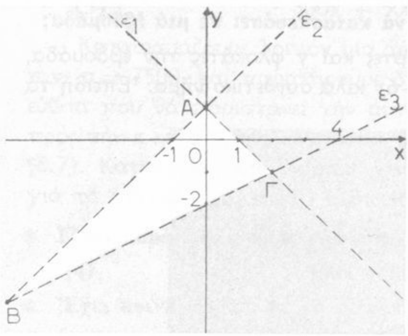
8. 10. Ὅπως καί στίς ἐξισώσεις ἔτσι καί ἐδῶ θέλουμε πολλές φορές νά βροῦμε τίς κοινές λύσεις δύο ἤ περισσότερων ἀνισώσεων, ὅπως π.χ. τῶν

$$(1) \qquad \begin{aligned} x+y-1 &< 0 \\ x-y+1 &> 0 \\ 2x-4y-8 &< 0 \end{aligned}$$

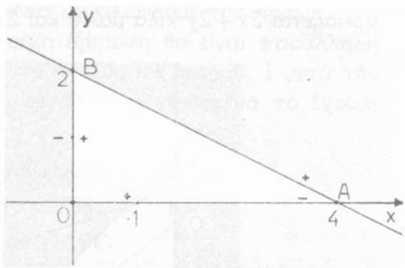
Στήν περίπτωση αὐτή λέμε ὅτι οἱ ἀνισώσεις ἀποτελοῦν **σύστημα** καί **τό σύνολο λύσεων τοῦ συστήματος εἶναι ἡ τομή τῶν συνόλων λύσεων τῶν τριῶν ἀνισώσεων.** Ἔτσι, ἄν $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ εἶναι οἱ εὐθεῖες πού παριστάνουν τά σύνολα λύσεων τῶν ἐξισώσεων

$$\begin{aligned} x+y-1 &= 0 \\ x-y+1 &= 0 \\ 2x-4y-8 &= 0, \end{aligned}$$

τό σύνολο λύσεων τοῦ συστήματος (1) παριστάνεται γραφικά ἀπό ὅλα τά



(σχ. 20)



(σχ. 21)

ἐσωτερικά σημεῖα τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ὅπως φαίνεται στό σχῆμα 20.

Στό σχῆμα 21 δείχνουμε τή γραφική παράσταση τοῦ συνόλου λύσεων τοῦ συστήματος

$$(2) \qquad \begin{aligned} x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \\ x+2y &\leq 4 \end{aligned}$$

Στήν περίπτωση αὐτή παρατηροῦμε ὅτι τό σύνολο λύσεων τοῦ συστήματος (2) παριστάνεται μέ ὅλα τά σημεῖα τοῦ τριγώνου ΟΑΒ.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

22. Μέ $x, y \in \mathbb{R}$ νά λύσετε γραφικά τά ἑπόμενα συστήματα:

α) $\begin{aligned} x &\geqslant 0 \\ y &\geqslant 0 \\ x+y &\leq 5 \end{aligned}$ β) $\begin{aligned} x &> 0 \\ y &> 0 \\ x+y &< 8 \end{aligned}$ γ) $\begin{aligned} x &> 0 \\ y &< 0 \\ x+2y &> 8 \end{aligned}$

δ) $y \geq 2$
$x+y \leqslant 6$

ε) $y \leqslant 6$
$y \geq x$
$y \geq -x$

στ) $y \geq 0$
$y \leqslant x$
$x+y \leqslant 5$

ζ) $x < 10$
$y < x$
$y > -x$

η) $x \geq 0$
$y \geq 0$
$y \leqslant 8-x$

θ) $x+y \leqslant 2$
$y \geqq x-4$

ι) $y > 2x-1$
$x+2y \geq 6$
$y \leqslant 5$

ια) $2x-5y > 1$
$2x+y > -5$
$x-2 < 0$

ιβ) $x-y > 0$
$x-3y+3 < 0$
$x+y-5 > 0$

Γραμμικός προγραμματισμός.

8.11. Ἄς δοῦμε πρῶτα ἕνα πρόβλημα, πού ἡ λύση του ἀνάγεται στήν ἐπίλυση ἑνός συστήματος ἀνισώσεων.

Μία βιοτεχνία κατασκευάζει κουβέρτες καί φλοκάτες χρησιμοποιώντας γιά κάθε κουβέρτα 2 κιλά μαλλί καί 2 κιλά συνθετικό νῆμα καί γιά κάθε φλοκάτη 2 κιλά μαλλί καί 6 κιλά συνθετικό νῆμα. Ἄν ἡ βιοτεχνία προμηθεύεται 100 κιλά μαλλί καί 240 κιλά συνθετικό νῆμα τήν ἑβδομάδα, πόσες κουβέρτες καί πόσες φλοκάτες μπορεῖ νά κατασκευάσει σέ μιά ἑβδομάδα;

Λύση. Ἄν κατασκευάζει x κουβέρτες καί y φλοκάτες τήν ἑβδομάδα, χρειάζεται $2x+2y$ κιλά μαλλί καί $2x+6y$ κιλά συνθετικό νῆμα. Ἐπειδή τά

(σχ. 22)

x καί y εἶναι φυσικοί ἀριθμοί, θά πρέπει νά ἰσχύουν οἱ ἀνισώσεις,

$$
(1) \qquad
\begin{aligned}
x &\geq 0 \\
y &\geq 0 \\
2x+2y &\leq 100 \\
2x+6y &\leq 240
\end{aligned}
$$

Τό σύνολο λύσεων τοῦ συστήματος αὐτοῦ παριστάνεται μέ ὅλα τά σημεῖα τοῦ τετραπλεύρου ΟΑΒΓ καί ἑπομένως κάθε σημεῖο του μέ συντεταγμένες φυσικούς ἀριθμούς δίνει μιά λύση τοῦ προβλήματος.

8.12. Ἄς συμπληρώσουμε τώρα τό προηγούμενο πρόβλημα μέ τό ἑξῆς ἐρώτημα:

Ἄν ἡ βιοτεχνία κερδίζει ἀπό κάθε κουβέρτα 300 δρχ. καί ἀπό κάθε φλοκάτη 500 δρχ., πόσες κουβέρτες καί πόσες φλοκάτες πρέπει νά κατασκευάσει τήν ἑβδομάδα, γιά νά ἔχει τό μεγαλύτερο δυνατό κέρδος;

Λύση. Ὅταν ἡ βιοτεχνία κατασκευάζει x κουβέρτες καί y φλοκάτες τήν ἑβδομάδα, κερδίζει

$$(2) \qquad 300x + 500y$$

δραχμές. Συνεπῶς πρέπει νά βροῦμε τή λύση τοῦ συστήματος (1) γιά τήν ὁποία τό πολυώνυμο (2) παίρνει τήν πιό μεγάλη τιμή του. Γιά νά βροῦμε τή λύση αὐτή, σκεφτόμαστε ὡς ἑξῆς: Γιά νά κερδίζει ἡ βιοτεχνία α δρχ., θά πρέπει ἡ λύση τοῦ συστήματος νά εἶναι ἕνα ἀπό τά σημεῖα τῆς εὐθείας, πού παριστάνουν τό σύνολο λύσεων (ὑποσύνολο τοῦ $N \times N$) τῆς ἐξισώσεως

$$(3) \qquad 300x + 500y = \alpha$$

Κατασκευάζουμε λοιπόν μία τέτοια εὐθεία ε γιά κάποια τιμή τοῦ α, π.χ. $\alpha = 7500$, καί παρατηροῦμε ὅτι, ὅσο μεγαλώνουμε τόν ἀριθμό α, ἡ εὐθεία πού θά παριστάνει τήν ἀντίστοιχη ἐξίσωση θά εἶναι παράλληλη πρός τήν ε καί θά ἀπομακρύνεται ἀπό τό O (βλ. καί παράδ. 1 μετά τήν §8.7). Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι τό μεγαλύτερο κέρδος θά τό ἔχουμε γιά τά σημεῖα τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία:

- **Εἶναι παράλληλη πρός τήν ε πού ἔχει ἐξίσωση τήν**

$$(4) \qquad 300x + 500y = 7500$$

- **Ἔχει κοινά σημεῖα μέ τό τετράπλευρο ΟΑΒΓ.**
- **Ἀπέχει ὅσο τό δυνατό περισσότερο ἀπό τήν ἀρχή Ο** (σχ. 22).

Τέτοια εὐθεία ὅμως εἶναι (ὅπως βλέπουμε, ἄν κάνουμε παράλληλη μετατόπιση τῆς ε) ἡ εὐθεία, πού διέρχεται ἀπό τήν κορυφή Β. Ἔτσι, λύση τοῦ προβλήματος εἶναι οἱ συντεταγμένες (15,35) τῆς κορυφῆς Β καί συνεπῶς ἡ βιοτεχνία ἔχει τό πιό μεγάλο κέρδος, ὅταν κατασκευάσει 15 κουβέρτες καί 35 φλοκάτες. Τό κέρδος αὐτό εἶναι, ὅπως προκύπτει ἀπό τή (2)

$$300 \cdot 15 + 500 \cdot 35 = 22000 \text{ δρχ.}$$

Στό πρόβλημα αὐτό οὐσιαστικά θέλαμε νά βροῦμε τήν πιό μεγάλη ἀριθμητική τιμή τῆς παραστάσεως (2) (πού λέγεται *γραμμική* ὡς πρός x καί y, γιατί εἶναι πολυώνυμο πρώτου βαθμοῦ ὡς πρός x,y), ὅταν οἱ μεταβλητές της ἔχουν ὁρισμένους περιορισμούς, πού ἐκφράζονται μέ τίς ἀνισώσεις τοῦ συστήματος (1). Μέ τέτοια προβλήματα ἀσχολεῖται ἕνας ἰδιαίτερος κλάδος τῶν μαθηματικῶν, πού λέγεται **γραμμικός προγραμ-**

ματισμός[1]. Τό γενικό λοιπόν πρόβλημα τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ διατυπώνεται ὡς ἑξῆς:

Νά βρεθεῖ ἡ πιό μεγάλη ἤ ἡ πιό μικρή τιμή (μέγιστο ἤ ἐλάχιστο) μιᾶς γραμμικῆς συναρτήσεως δύο μεταβλητῶν[2] x καί y, ὅταν οἱ μεταβλητές x καί y ἔχουν ὁρισμένους περιορισμούς, οἱ ὁποῖοι ἐκφράζονται μέ ἕνα σύστημα ἀνισώσεων.

Τό σύνολο λύσεων τοῦ συστήματος ἀνισώσεων εἶναι μία περιοχή τοῦ ἐπιπέδου xOy, ἡ ὁποία περιορίζεται ἀπό μία κυρτή πολυγωνική γραμμή. **Ἡ λύση τοῦ συστήματος, γιά τήν ὁποία ἔχουμε τό μέγιστο ἤ ἐλάχιστο τῆς γραμμικῆς συναρτήσεως, εἶναι πάντοτε, ὅπως εἴδαμε καί στό παράδειγμά μας, οἱ συντεταγμένες κάποιας κορυφῆς τῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς.**

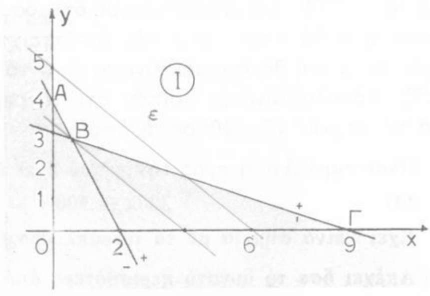
Παράδειγμα 1. Ὅταν οἱ ἀριθμοί $x(x \geq 0)$ καί $y(y \geq 0)$ εἶναι τέτοιοι, ὥστε $4x+2y \geq 8$ καί $x+3y \geq 9$, νά βρεθεῖ ἡ ἐλάχιστη τιμή τῆς παραστάσεως

(5) $$5x+6y$$

Λύση: Βρίσκουμε τό σύνολο λύσεων τοῦ συστήματος τῶν ἀνισώσεων

$$\begin{aligned} x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \\ 4x+2y &\geq 8 \\ x+3y &\geq 9 \end{aligned}$$

Βλέπουμε ὅτι ἡ πολυγωνική γραμμή, πού περικλείει τό σύνολο λύσεων, εἶναι «ἀνοικτή» καί ἔχει κορυφές τά σημεῖα Α, Β, Γ. Σχεδιάζουμε τώρα μία εὐθεία $5x+6y = \alpha$ γιά κάποια τιμή τοῦ α, π.χ. τήν $\alpha = 30$.



(σχ. 23)

Παρατηροῦμε ὅτι ἀπό ὅλες τίς παράλληλες πρός τήν ε, πού τέμνουν τήν περιοχή λύσεων (I), ἡ πιό κοντινή πρός τήν ἀρχή O εἶναι ἐκείνη πού

---

1. Ὁ κλάδος αὐτός ἐμφανίστηκε τό 1947 ἀπό τόν G. Dantzing καί ταυτόχρονα ἐφαρμόστηκε ἀπό τόν ἴδιο καί τούς συνεργάτες του στή λύση στρατιωτικῶν προβλημάτων. Γρήγορα ὅμως φάνηκαν οἱ δυνατότητες τοῦ κλάδου αὐτοῦ καί γιά τή λύση πολλῶν ἄλλων προβλημάτων τεχνολογικῆς καί οἰκονομικῆς φύσεως, πού ἐνδιέφεραν τή βιομηχανία. Ἔτσι ἄρχισε μιά συστηματική ἐφαρμογή του, πού πῆρε ἐκπληκτικές διαστάσεις μέ τήν ἀνάπτυξη τῶν ἠλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν. Ὁ γραμμικός προγραμματισμός εἶναι ἴσως μοναδικό παράδειγμα σύγχρονης μαθηματικῆς θεωρίας, πού βρῆκε τόσες πρακτικές ἐφαρμογές.

2. Ἤ γενικότερα ν μεταβλητῶν $x_1, x_2, \ldots x_\nu$. Στή γενική αὐτή μορφή τους τά προβλήματα τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ λύνονται ἀκόμη καί σήμερα μέ τή μέθοδο simplex τοῦ G. Dantzing.

διέρχεται ἀπό τήν κορυφή Β. Οἱ συντεταγμένες τοῦ Β εἶναι (ὅπως διαπιστώνουμε ἀπό τό σχῆμα) τό ζεῦγος $\left(\frac{3}{5}, \frac{14}{5}\right)$καί συνεπῶς ἡ παράσταση (5) παίρνει τήν ἐλάχιστη τιμή της ὅταν εἶναι $x = \frac{3}{5}$ καί $y = \frac{14}{5}$

Ἔτσι, ἡ ἐλάχιστη τιμή τῆς (5) εἶναι

$$5 \cdot \frac{3}{5} + 6 \cdot \frac{14}{5} = 3 + 16{,}8 = 19{,}8$$

(Τίς συντεταγμένες τῆς κορυφῆς Β μποροῦμε νά τίς βροῦμε μέ ἀπόλυτη ἀκρίβεια, ἄν λύσουμε τό σύστημα $4x+2y = 8$, $x+3y = 9$)

Παράδειγμα 2. Σέ μία βιομηχανία κατασκευάζονται δύο τύποι αὐτοκινήτων Α καί Β. Κάθε αὐτοκίνητο τύπου Α δίνει κέρδος 20000 δρχ. καί θέλει 50 ὧρες γιά συναρμολόγηση, 40 ὧρες γιά βάψιμο καί 30 ὧρες γιά ἔλεγχο καί δοκιμή. Κάθε αὐτοκίνητο τύπου Β δίνει κέρδος 25000 δρχ. καί θέλει 100 ὧρες γιά συναρμολόγηση, 32 ὧρες γιά βάψιμο καί 10 ὧρες γιά ἔλεγχο καί δοκιμή. Ἄν τό ἐργοστάσιο γιά ἕνα χρονικό διάστημα διαθέτει μέχρι 36000 ὧρες γιά συναρμολόγηση, 14400 ὧρες γιά βάψιμο καί μέχρι 9000 ὧρες γιά ἔλεγχο καί δοκιμή, πόσα αὐτοκίνητα τύπου Α καί πόσα τύπου Β πρέπει νά κατασκευάσει στό χρονικό αὐτό διάστημα, γιά νά ἔχει τό μέγιστο κέρδος;

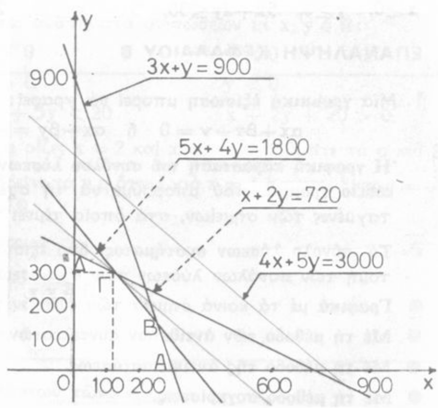
Λύση. Ἔστω ὅτι πρέπει νά κατασκευάσει x αὐτοκίνητα τύπου Α καί y τύπου Β $(x, y \in N)$.

Τό κέρδος θά εἶναι $20000x + 25000y$

Οἱ ὧρες, πού χρειάζονται γιά συναρμολόγηση καί τῶν δύο τύπων, εἶναι $50x + 100y$, ἄρα πρέπει $50x+100y \leq 36000$ ἤ $x+2y \leq 720$.

Οἱ ὧρες γιά βάψιμο εἶναι $40x + 32y$, ἄρα πρέπει $40x+32y \leq 14400$ ἤ $5x+4y \leq 1800$. Γιά τίς ὧρες ἐλέγχου μέ τόν ἴδιο τρόπο ἔχουμε $3x+y \leq 900$. Ζητᾶμε λοιπόν νά βροῦμε τό μέγιστο τῆς παραστάσεως $20\,000x + 25000y$, ὅταν οἱ φυσικοί ἀριθμοί x καί y ἐπαληθεύουν τό σύστημα:

$$\begin{aligned} x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \\ x+2y &\leq 720 \\ 5x+4y &\leq 1800 \\ 3x+y &\leq 900 \end{aligned}$$



(σχ. 24)

Σχεδιάζουμε τώρα μιά εὐθεία $20\,000x+25\,000y = \alpha$ γιά κάποια τιμή τοῦ α, π.χ. $\alpha = 15000000$, ὁπότε ἡ ἐξίσωση μετά τίς ἁπλοποιήσεις γίνεται

$$4x + 5y = 3000$$

καί βλέπουμε ὅτι τό μέγιστο τῆς παραστάσεως $20000x + 25000y$ βρίσκεται στήν κορυφή Γ (120,300) καί εἶναι ἴσο μέ

$$20000 \cdot 120 + 25000 \cdot 300 = 9900000 \text{ δρχ. (μέγιστο κέρδος)}$$

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

23. Νά βρεῖτε τό μέγιστο τῆς παραστάσεως $5x+3y$ μέ περιορισμούς: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $4x+y \leq 16$, $6x+5y \leq 30$, $x+2y \leq 10$, ὅπου $x,y \in R$

24. Νά βρεθοῦν οἱ πραγματικοί ἀριθμοί x,y, πού ἐπαληθεύουν τό σύστημα $-5 \leq x \leq 0$, $x-y-8 \leq 0$, $y-5 \leq 0$, $x+y-8| \leq 0$ ὥστε τό ἄθροισμα $2x + 3y$ νά εἶναι μέγιστο

25. Νά βρεθοῦν οἱ ἀριθμοί $x,y \in N$, πού ἐπαληθεύουν τό σύστημα $0 \leq x \leq 7$, $0 \leq y \leq 5$, $x + 2y - 13 \leq 0$ ὥστε τό $x+y$ νά εἶναι μέγιστο.

26. Φαρμακοβιομηχανία παρασκευάζει δύο εἰδῶν χάπια Π καί Τ. Τό Π περιέχει 40 μονάδες βιταμίνης Β καί 25 μονάδες βιταμίνης C. Τό Τ περιέχει 35 μονάδες βιταμίνης Β καί 30 μονάδες βιταμίνης C. Ποιός εἶναι ὁ ἐλάχιστος ἀριθμός χαπιῶν ἀπό κάθε εἶδος, ὥστε νά ἐξασφαλίσουμε 6800 μονάδες βιταμίνης Β καί 4900 μονάδες βιταμίνης C;

27. Νά βρεθοῦν δυό φυσικοί ἀριθμοί x καί y, πού ἐπαληθεύουν τό σύστημα

$$0 \leq x \leq 11, \quad 2x+3y \geq 15, \quad y \geq 3,\ 2y \geq x-1,$$

ὥστε τό $3x+\psi$ νά εἶναι ἐλάχιστο.

28. Νά βρεῖτε τό μέγιστο τῆς παραστάσεως

$$40x + 50y,$$

ὅταν οἱ πραγματικοί ἀριθμοί x καί y ἐπαληθεύουν τό σύστημα:

$x \geq 0$, $y \geq 0$, $5x+2y \leq 30$, $5x+7y \leq 35$, $2x+5y \leq 20$

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 8

1. Μία **γραμμική ἐξίσωση** μπορεῖ νά γραφεῖ:

$$\alpha x+\beta y+\gamma = 0 \quad ἤ \quad \alpha x+\beta y = -\gamma \quad ἤ \quad y = mx+c$$

Ἡ γραφική παράσταση τοῦ συνόλου λύσεων μιᾶς γραμμικῆς ἐξισώσεως εἶναι εὐθεία γραμμή, πού μποροῦμε νά τή σχεδιάσουμε βρίσκοντας τίς συντεταγμένες τῶν σημείων, στά ὁποῖα τέμνει τούς ἄξονες.

2. **Τό σύνολο λύσεων συστήματος** δύο ἐξισώσεων μέ δύο ἀγνώστους εἶναι ἡ τομή τῶν συνόλων λύσεων τῶν ἐξισώσεων καί βρίσκεται:

- **Γραφικά** μέ τά κοινά σημεῖα τῶν εὐθειῶν πού ὁρίζουν οἱ ἐξισώσεις.
- **Μέ τή μέθοδο τῶν ἀντίθετων συντελεστῶν.**
- **Μέ τή μέθοδο τῆς ἀντικαταστάσεως.**
- **Μέ τή μέθοδο συγκρίσεως.**

Μέ τή μέθοδο τῆς ἀντικαταστάσεως λύνεται καί ἕνα σύστημα μιᾶς δευτεροβάθμιας καί μιᾶς πρωτοβάθμιας ἐξισώσεως.

3. Ἡ γραφική παράσταση τῆς γραμμικῆς ἐξισώσεως $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ χωρίζει τό ἐπίπεδο τῶν συντεταγμένων σέ δύο **ἡμιεπίπεδα,** ἀπό τά ὁποῖα τό ἕνα παριστάνει τό σύνολο λύσεων τῆς ἀνισώσεως $\alpha x+\beta y+\gamma \geq 0$ καί τό ἄλλο τῆς $\alpha x+\beta y+\gamma \leq 0$.

4. **Ἡ γραφική παράσταση τοῦ συνόλου λύσεων ἑνός συστήματος ἀνισώσεων** εἶναι **ἡ τομή τῶν ἡμιεπιπέδων,** τῶν ὁποίων τά σημεῖα ἔχουν συντεταγμένες, πού ἐπαληθεύουν τίς ἀντίστοιχες ἀνισώσεις.

5. Στά προβλήματα τοῦ **γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ** γενικά ζητᾶμε **τό μέγιστο ἤ ἐλάχιστο τῆς γραμμικῆς παραστάσεως $\alpha x + \beta y$,** ὅταν οἱ μεταβλητές x καί y ἔχουν περιορισμούς, πού ἐκφράζονται μέ ἕνα σύστημα ἀνισώσεων. Ἡ λύση τοῦ προβλήματος βρίσκεται πάντοτε μέ τή βοήθεια **μιᾶς κορυφῆς τῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς,** πού περικλείει τό σύνολο λύσεων τοῦ συστήματος τῶν ἀνισώσεων.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ*

29. Νά γράψετε τό σύνολο τῶν διατεταγμένων ζευγῶν, πού ἐπαληθεύουν μέσα στό σύνολο N τήν ἐξίσωση $2x+y=7$. Νά δείξετε τό σύνολο αὐτό γραφικά.

30. Ἡ ἴδια ἐρώτηση γιά τήν ἀνίσωση $x+2y \leqslant 4$.

31. Νά δείξετε γραφικά τό σύνολο λύσεων μέσα στό R τῶν:
α) $2x-y=8$ β) $x+y \leqslant 10$ γ) $3x+4y=24$

32. Νά λύσετε γραφικά τά παρακάτω συστήματα ἐξισώσεων, ὅπου $x, y \in R$:
α) $x=7$, $4x-3y=36$ β) $x-y=5$, $2x+5y=10$

33. Νά λύσετε μέ μία ἀπό τίς ἀριθμητικές μεθόδους τά συστήματα:
α) $x-y=2$, $2x+3y=4$ β) $x+y+1=0$, $x-5y+7=0$ γ) $y=2x+3$, $3x+4y=1$

34. Νά λύσετε γραφικά τά παρακάτω συστήματα ἀνισώσεων μέ $x, y \in R$:
α) $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x+y \leqslant 10$ β) $x>0$, $y>0$, $2x+5y<20$ γ) $x<0$, $y<0$, $x+2y+20>0$

35. Ἡ ἐξίσωση $x^2+\alpha x+\beta=0$ ἔχει ρίζες $x=2$ καί $x=-1$. Νά βρεῖτε τά α καί β.

36. Δίνεται ὁ τύπος $y=px+q$. Νά βρεῖτε τά p,q ὅταν, γιά $x=1$ ὁ τύπος δίνει $y=-3$ καί γιά $x=3$ ὁ τύπος δίνει $y=9$.

37. Νά βρεῖτε τό σύνολο $A \cap B$, ὅταν:
$A=\{(x,y) \mid 2x+3y=0\}$
$B=\{(x,y) \mid 4x-y=7\}$ καί $x,y \in R$.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ**

38. Νά βρεῖτε γραφικά τά σύνολα λύσεων τῶν:
α) $0 \leq x \leq 5$ β) $x+y<12$ γ) $y \leq 3x-15$ δ) $-2 \leq y \leq 2$
ὅπου $x, y \in R$.

39. Νά λύσετε τά ἑπόμενα συστήματα μέ $x, y \in R$

α) $x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad 2x+y \leq 10, \quad x + 2y \leq 10$

β) $x \leq 8, \quad y \geq 5, \quad y \leq x+5$

40. Νά λύσετε μέ ὁποιαδήποτε ἀριθμητική μέθοδο τά συστήματα, ὅπου $x,y \in R$:

α) $\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1$ β) $\frac{x-1}{4} + y = 8$ γ) $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 1$

$4x-y = 5$ $\frac{1}{6}(y-1)+x = 6$ $\frac{1}{5}(2x+4y)- \frac{x-y}{3} = -2$

41. Ὁ τύπος $A = \frac{22}{7}(R+r)(R-r)$ δίνει τό ἐμβαδό ἑνός κυκλικοῦ στίβου. Ἄν $A = 44$ καί $R + r = 7$, νά βρεῖτε τά R καί r.

42. Ἕνας φρουτέμπορος ἔχει ἄγνωστο ἀριθμό κιλῶν πορτοκάλια. Μέ αὐτά γέμισε 63 ὁμοιόμορφα καφάσια μέ ἴδιο ἀριθμό κιλῶν στό κάθε ἕνα καί τοῦ περίσσεψε 1 κιλό. Ἄν εἶχε ἀκόμη 47 κιλά πορτοκάλια, θά γέμιζε 67 καφάσια ἀκριβῶς. Πόσα κιλά πορτοκάλια εἶχε καί πόσα κιλά χωράει κάθε καφάσι;

43. Σέ ἕνα ἐργοστάσιο κατασκευάζονται δύο τύποι ψυγείων, Α καί Β. Κάθε ψυγεῖο τύπου Α δίνει κέρδος 600 δρχ. καί χρειάζεται 20 ὧρες γιά συναρμολόγηση, 6 ὧρες γιά βάψιμο καί 3 ὧρες γιά δοκιμή. Κάθε ψυγεῖο τύπου Β δίνει κέρδος 400 δρχ. καί χρειάζεται 30 ὧρες γιά συναρμολόγηση, 5 ὧρες γιά βάψιμο καί 2 ὧρες γιά δοκιμή. Ἄν σέ ἕνα μήνα τό ἐργοστάσιο μπορεῖ νά διαθέσει 6000 ὧρες γιά συναρμολόγηση, 3000 ὧρες γιά βάψιμο καί 600 ὧρες γιά δοκιμή, πόσα ψυγεῖα τύπου Α καί πόσα τύπου Β πρέπει νά κατασκευάσει, γιά νά ἔχει τό μέγιστο κέρδος;

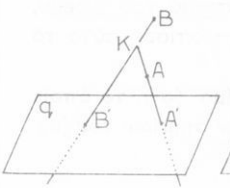
9ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΣΤΟ ΧΩΡΟ

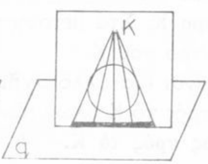
Σημειακός μετασχηματισμός.

9. 1. Στή Β′ τάξη μάθαμε ἀπεικονίσεις, πού ἀντιστοιχίζουν σέ κάθε σημεῖο ἑνός ἐπιπέδου ἕνα ἄλλο σημεῖο τοῦ ἴδιου ἐπιπέδου. Αὐτές οἱ ἀπεικονίσεις λέγονται **μετασχηματισμοί τοῦ ἐπιπέδου** καί τέτοιες εἶναι π.χ. ἡ κεντρική καί ἀξονική συμμετρία, ἡ ὁμοιοθεσία κ.λ.π. Γενικότερα μποροῦμε νά ὁρίσουμε ἀπεικονίσεις, οἱ ὁποῖες ἀντιστοιχίζουν σέ κάθε σημεῖο τοῦ χώρου ἕνα ἄλλο σημεῖο του. Μιά τέτοια ἀπεικόνιση λέγεται **σημειακός μετασχηματισμός τοῦ χώρου.** Ἄς δοῦμε ἕνα παράδειγμα:

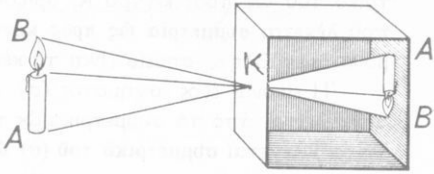
Παίρνουμε ἕνα ὁρισμένο ἐπίπεδο q, ἕνα ὁρισμένο σημεῖο Κ ἔξω ἀπό τό q καί ἀντιστοιχίζουμε σέ κάθε σημεῖο Α τοῦ χώρου τό σημεῖο Α′ (σχ. 1) στό ὁποῖο ἡ εὐθεία ΑΚ τέμνει τό ἐπίπεδο q (ἄν τό τέμνει).



(σχ. 1)



(σχ. 2)



(σχ. 3)

Ὁρίζεται ἔτσι ἕνας μετασχηματισμός μέσα στό χῶρο[1]. Στό μετασχηματισμό αὐτό ἕνας κύκλος, τοῦ ὁποίου τό ἐπίπεδο περνᾶ ἀπό τό Κ, *«μετασχηματίζεται»* σέ εὐθ. τμῆμα (σχ. 2). Τέτοιος μετασχηματισμός εἶναι ἡ *«φωτογράφιση»* (σχ. 3), ὅπου τό ρόλο τοῦ σημείου Κ παίζει ὁ φακός καί τό ρόλο τοῦ ἐπιπέδου q παίζει ἡ φωτογραφική πλάκα (τό φίλμ).

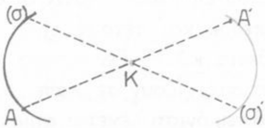
Στό κεφάλαιο αὐτό θά ἀσχοληθοῦμε εἰδικά μέ σημειακούς μετασχηματισμούς τοῦ χώρου.

1. Τά σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου, πού εἶναι παράλληλο πρός τό q καί περνάει ἀπό τό σημεῖο Κ, δέν ἔχουν ἀντίστοιχα σημεῖα.

Ἄν σ' ἕνα σημειακό μετασχηματισμό ὑπάρχει σημεῖο, πού ἀπεικονίζεται στόν ἑαυτό του, τότε αὐτό λέγεται **ἀμετάβλητο σημεῖο** τοῦ μετασχηματισμοῦ. Στόν προηγούμενο μετασχηματισμό ὅλα τά σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου q εἶναι ἀμετάβλητα.

Συμμετρία ὡς πρός κέντρο.

9.2. Μέ τή βοήθεια ἑνός ὁρισμένου σημείου Κ, πού τό λέμε *κέντρο*, μποροῦμε νά ὁρίσουμε μιά ἀντιστοιχία μεταξύ τῶν σημείων τοῦ χώρου ὡς ἑξῆς: Σέ κάθε σημεῖο Α τοῦ χώρου ἀντιστοιχίζουμε τό σημεῖο Α', πού βρίσκουμε, ἄν προεκτείνουμε τό εὐθ. τμῆμα ΑΚ πρός τό μέρος τοῦ Κ καί πάρουμε στήν προέκτασή του τμῆμα ΚΑ' = ΚΑ (σχ. 4). Τό σημεῖο Α' λέγεται **συμμετρικό τοῦ Α ὡς πρός τό Κ.**



(σχ. 4)

Εἶναι φανερό ὅτι, ἄν τό Α' εἶναι συμμετρικό τοῦ Α ὡς πρός τό Κ, τότε καί τό Α θά εἶναι συμμετρικό τοῦ Α' ὡς πρός τό Κ. Γι' αὐτό τά δύο σημεῖα Α καί Α' λέγονται ἁπλῶς **«συμμετρικά ὡς πρός τό Κ»**. Ὥστε:

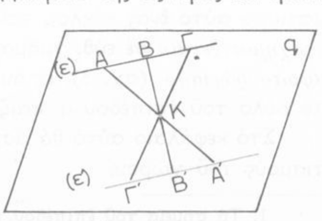
> Δύο σημεῖα Α καί Α' εἶναι συμμετρικά ὡς πρός κέντρο Κ, ὅταν τό Κ εἶναι μέσο τοῦ τμήματος ΑΑ'.

Ἄν λοιπόν ἀντιστοιχίζουμε σέ κάθε σημεῖο Α τοῦ χώρου τό συμμετρικό του ὡς πρός κέντρο Κ, ὁρίζουμε ἕνα μετασχηματισμό τοῦ χώρου, πού λέγεται **συμμετρία ὡς πρός κέντρο Κ.** Στό μετασχηματισμό αὐτό τό μόνο ἀμετάβλητο σημεῖο εἶναι τό κέντρο του Κ.

Ἡ εἰκόνα ἑνός σχήματος (σ) εἶναι ἕνα ἄλλο σχῆμα (σ'), τό ὁποῖο ἀποτελεῖται ἀπό τά συμμετρικά ὡς πρός τό Κ ὅλων τῶν σημείων τοῦ (σ). Τό (σ') λέγεται **συμμετρικό τοῦ (σ) ὡς πρός τό Κ.**

9.3. Θά βροῦμε τώρα τά συμμετρικά ὡς πρός σημεῖο Κ μερικῶν ἁπλῶν γεωμετρικῶν σχημάτων.

Ἄς πάρουμε πρῶτα μιά εὐθεία ε. Τό συμμετρικό της ὡς πρός κέντρο Κ θά ἀποτελεῖται ἀπό τά συμμετρικά ὅλων τῶν σημείων της Α,Β,Γ,.. ὡς πρός τό Κ. Ἐπειδή ὅμως ὅλες οἱ εὐθεῖες ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ,... βρίσκονται στό ἴδιο ἐπίπεδο q (πού ὁρίζεται ἀπό τήν ε καί τό σημεῖο Κ), τά συμμετρικά τῶν Α, Β, Γ,... θά βρίσκονται ἐπίσης στό q. Ἔτσι, εἰδικά γιά τήν εὐθεία, θά ἰσχύουν



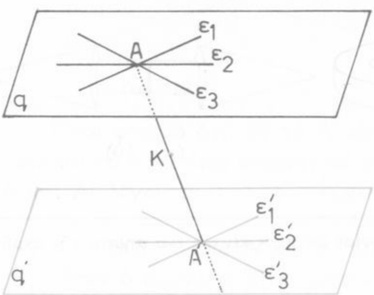
(σχ. 5)

(καί θά δείχνονται μέ τόν ἴδιο τρόπο) ὅλα τά συμπεράσματα, πού μάθαμε στήν ἐπίπεδη συμμετρία, καί αὐτά εἶναι:

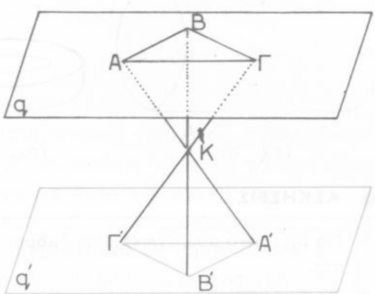
- Τό συμμετρικό μιᾶς εὐθείας ε ὡς πρός κέντρο Κ εἶναι μία εὐθεία ε΄ παράλληλη πρός τήν ε πού βρίσκεται στό ἐπίπεδο (ε, Κ).
- Τό συμμετρικό ἑνός εὐθ. τμήματος ΑΒ ὡς πρός κέντρο Κ εἶναι εὐθ. τμῆμα Α΄Β΄ ἴσο καί παράλληλο μέ τό ΑΒ.

Ἀπό τήν πρώτη πρόταση καταλαβαίνουμε ὅτι, γιά νά βροῦμε τό συμμετρικό μιᾶς εὐθείας ε ὡς πρός τό Κ, ἀρκεῖ νά βροῦμε τά συμμετρικά μόνο δύο σημείων της, π.χ. τῶν Α καί Β, ὡς πρός τό Κ. Ἄν Α΄ καί Β΄ εἶναι τά σημεῖα αὐτά, ἡ εὐθεία Α΄Β΄ θά εἶναι τό συμμετρικό σχῆμα τῆς εὐθείας ε.

Θά βροῦμε τώρα τό συμμετρικό ἑνός ἐπιπέδου q ὡς πρός κέντρο Κ. Ἄς πάρουμε ἕνα ὁρισμένο σημεῖο Α τοῦ q καί ἄς ὑποθέσουμε ὅτι τό q ἀποτελεῖται ἀπό ὅλες τίς εὐθεῖες του $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$, πού διέρχονται ἀπό τό Α (σχ. 6). Τό συμμετρικό σχῆμα τοῦ q θά περιέχει τό συμμετρικό σημεῖο Α΄ τοῦ Α καί ὅλες τίς εὐθεῖες $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \varepsilon'_3, \ldots$, πού εἶναι συμμετρικές τῶν $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ ὡς πρός τό Κ. Οἱ εὐθεῖες ὅμως $\varepsilon_1', \varepsilon_2', \varepsilon_3', \ldots$ εἶναι παράλληλες πρός τίς $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ ἀντιστοίχως καί συνεπῶς βρίσκονται στό μοναδικό ἐπίπεδο q΄, τό ὁποῖο εἶναι παράλληλο πρός τό q καί διέρχεται ἀπό τό Α΄.



(σχ. 6)



(σχ. 7)

Ἀποδείξαμε λοιπόν ὅτι:

> Τό συμμετρικό ἑνός ἐπιπέδου q ὡς πρός κέντρο Κ εἶναι ἕνα ἐπίπεδο παράλληλο πρός τό q.

Ἀπ' αὐτό καταλαβαίνουμε ὅτι, γιά νά βροῦμε τό συμμετρικό ἑνός ἐπιπέδου q ὡς πρός τό Κ, ἀρκεῖ νά βροῦμε τά συμμετρικά ὡς πρός τό Κ μόνο τριῶν σημείων του Α,Β,Γ πού δέν εἶναι συνευθειακά (σχ. 7). Ἄν Α΄, Β΄,Γ΄ εἶναι τά σημεῖα αὐτά, τό ἐπίπεδο (Α΄,Β΄,Γ΄) θά εἶναι τό συμμετρικό τοῦ q.

Ἀπό τό σχῆμα 7 καταλαβαίνουμε ἀμέσως ὅτι:

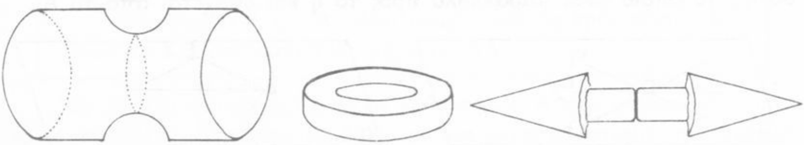
- Τό συμμετρικό ἑνός τριγώνου ΑΒΓ ὡς πρός τό Κ εἶναι ἕνα τρίγωνο Α'Β'Γ', τό ὁποῖο εἶναι ἴσο πρός τό ΑΒΓ καί βρίσκεται σέ ἐπίπεδο παράλληλο πρός τό ἐπίπεδο τοῦ ΑΒΓ.
- Τό συμμετρικό μιᾶς γωνίας $\widehat{ΒΑΓ}$ ὡς πρός κέντρο Κ εἶναι μία γωνία $\widehat{Β'Α'Γ'}$, ἡ ὁποία εἶναι ἴση πρός τή $\widehat{ΒΑΓ}$ καί βρίσκεται σέ ἐπίπεδο παράλληλο πρός τό ἐπίπεδο τῆς $\widehat{ΒΑΓ}$.

Σχήματα μέ κέντρο συμμετρίας.

9.4. Ἕνα σχῆμα (σ) θά λέμε ὅτι ἔχει **κέντρο συμμετρίας** ἕνα ὁρισμένο σημεῖο Κ, ὅταν ὅλα τά σημεῖα τοῦ (σ) χωρίζονται σέ ζεύγη, πού τά μέλη τους εἶναι συμμετρικά ὡς πρός τό Κ.

Ἔτσι, γιά νά ἐλέγξουμε ἄν ἕνα σχῆμα (σ) ἔχει κέντρο συμμετρίας ἕνα σημεῖο Κ, θά πρέπει παίρνοντας ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Α τοῦ (σ) νά δείχνουμε ὅτι τό συμμετρικό τοῦ Α εἶναι ἐπίσης σημεῖο τοῦ (σ).

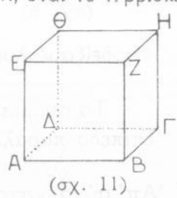
Ὅλα τά παρακάτω σχήματα ἔχουν κέντρο συμμετρίας.



(σχ. 8) (σχ. 9) (σχ. 10)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Νά βρεῖτε τό συμμετρικό μιᾶς δίεδρης γωνίας ὡς πρός κέντρο ἕνα σημεῖο τῆς ἀκμῆς της.
2. Νά βρεῖτε τό συμμετρικό ἑνός κύκλου (Ο,ρ) ὡς πρός σημεῖο Κ, ὅταν τό Κ βρίσκεται ἔξω ἀπό τό ἐπίπεδο τοῦ κύκλου (Ο,ρ).
3. Νά σχεδιάσετε τό συμμετρικό τοῦ ἀπέναντι σχήματος (κύβου) ὡς πρός κέντρο: α) τήν κορυφή του Α. β) τό μέσο τῆς πλευρᾶς του ΒΓ.



(σχ. 11)

4. Παίρνουμε ἕνα ὁρισμένο ἐπίπεδο q καί σέ κάθε σημεῖο Α τοῦ χώρου ἀντιστοιχίζουμε τήν προβολή του Α' στό ἐπίπεδο q.

α) Νά ἐξηγήσετε ὅτι μέ αὐτό τόν τρόπο ὁρίζουμε ἕνα σημειακό μετασχηματισμό τοῦ χώρου καί νά βρεῖτε τά ἀμετάβλητα σημεῖα τοῦ μετασχηματισμοῦ.

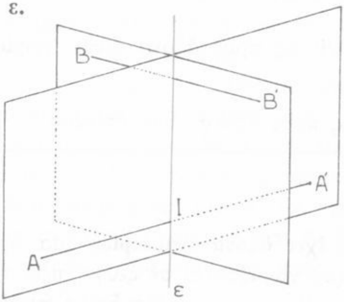
β) Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ εἰκόνα ἑνός εὐθ. τμήματος ΑΒ εἶναι εὐθύγραμμο τμῆμα Α'Β' μικρότερο ἤ ἴσο μέ τό ΑΒ. Τί ἔχετε νά πεῖτε, ὅταν $ΑΒ \perp q$;

5. Δίνεται ἕνα ἐπίπεδο q καί ἀπό κάθε σημεῖο A τοῦ χώρου φέρουμε τήν $AK \perp q$. Ἄν A' εἶναι τό μέσο τοῦ εὐθ. τμήματος AK, νά ἐξηγήσετε ὅτι ἡ ἀντιστοιχία $A \to A'$ ὁρίζει ἕνα σημειακό μετασχηματισμό τοῦ χώρου. Νά βρεῖτε τά ἀμετάβλητα σημεῖα του καί τήν εἰκόνα ἑνός εὐθ. τμήματος AB.

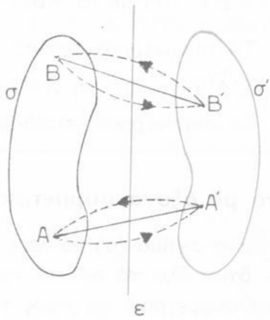
Συμμετρία ὡς πρός ἄξονα.

9.5. Μέ τή βοήθεια μιᾶς ὁρισμένης εὐθείας ε, πού θά τή λέμε **ἄξονα**, μποροῦμε νά ὁρίσουμε μιά ἄλλη ἀντιστοιχία μεταξύ τῶν σημείων τοῦ χώρου ὡς ἑξῆς:

Σέ κάθε σημεῖο A τοῦ χώρου ἀντιστοιχίζουμε τό σημεῖο A', πού βρίσκουμε, ἄν φέρουμε τήν $AI \perp ε$ καί στήν προέκτασή της πρός τό I πάρουμε τμῆμα IA' = IA (σχ. 12). Τό σημεῖο A' λέγεται **συμμετρικό τοῦ A ὡς πρός ἄξονα ε.**



(σχ. 12)



(σχ. 13)

Εἶναι φανερό ὅτι, ἄν τό A' εἶναι συμμετρικό τοῦ A ὡς πρός ἄξονα ε, τότε καί τό A θά εἶναι συμμετρικό τοῦ A' ὡς πρός ε, γι' αὐτό τά δύο σημεῖα A καί A' λέγονται ἁπλῶς **«συμμετρικά ὡς πρός τήν ε»**. Ἔτσι:

> Δύο σημεῖα A καί A' εἶναι συμμετρικά ὡς πρός ἄξονα ε, ὅταν ὁ ἄξονας ε εἶναι μεσοκάθετος τοῦ εὐθ. τμήματος AA'.

Ἄν λοιπόν ἀντιστοιχίζουμε σέ κάθε σημεῖο A τοῦ χώρου τό συμμετρικό του ὡς πρός ἄξονα ε, ὁρίζουμε ἕνα μετασχηματισμό τοῦ χώρου, πού λέγεται **συμμετρία ὡς πρός τόν ἄξονα ε.** Στό μετασχηματισμό αὐτό ὅλα τά σημεῖα τοῦ ἄξονα εἶναι ἀμετάβλητα, ἐνῶ ἡ εἰκόνα ἑνός σχήματος (σ) εἶναι ἕνα ἄλλο σχῆμα (σ'), τό ὁποῖο ἀποτελεῖται (σχ. 13) ἀπό τά συμμετρικά ὅλων τῶν σημείων τοῦ (σ). Τό (σ') λέγεται **συμμετρικό τοῦ (σ) ὡς πρός τόν ἄξονα ε.**

9.6. Παρατηροῦμε ὅτι, ἄν τό σχῆμα (σ) περιστραφεῖ γύρω ἀπό τόν ἄξονα ε κατά γωνία 180°, κάθε σημεῖο τοῦ (σ) θά πέσει στό συμμετρικό του ὡς πρός τόν ἄξονα ε (γιατί π.χ. τό τμῆμα AI, τό ὁποῖο κατά τήν περιστροφή παραμένει διαρκῶς κάθετο στήν ε καί διατηρεῖ τό μῆκος του, θά πέσει στό ΙΑ'). Συμπεραίνουμε λοιπόν ὅτι:

Ὅταν ἕνα σχῆμα (σ) στρέφεται γύρω ἀπό ἄξονα ε κατά γωνία 180^0, ἐφαρμόζει μέ τό συμμετρικό του ὡς πρός ἄξονα ε.

Ἀφοῦ ὅμως κάθε σχῆμα σέ ὁποιαδήποτε μετακίνησή του διατηρεῖται ἀμετάβλητο, καταλαβαίνουμε ὅτι:

- Τό συμμετρικό μιᾶς εὐθείας ὡς πρός ἄξονα εἶναι εὐθεία.
- Τό συμμετρικό εὐθ. τμήματος ΑΒ ὡς πρός ἄξονα εἶναι εὐθύγραμμο τμῆμα Α'Β' ἴσο μέ τό ΑΒ.
- Τό συμμετρικό τριγώνου ΑΒΓ ὡς πρός ἄξονα εἶναι τρίγωνο Α'Β'Γ' ἴσο μέ τό ΑΒΓ.
- Τό συμμετρικό γωνίας $X\widehat{A}\Psi$ ὡς πρός ἄξονα εἶναι γωνία $X'\widehat{A'}\Psi'$ ἴση μέ τή $X\widehat{A}\Psi$.
- Τό συμμετρικό ἐπιπέδου ὡς πρός ἄξονα εἶναι ἐπίπεδο.

Σχήματα μέ ἄξονα συμμετρίας.

9.7. Ἕνα σχῆμα (σ) θά λέμε ὅτι ἔχει **ἄξονα συμμετρίας** μία ὁρισμένη εὐθεία ε, ὅταν ὅλα τά σημεῖα τοῦ (σ) χωρίζονται σέ ζεύγη πού τά μέλη τους εἶναι συμμετρικά ὡς πρός τήν ε. Ἔτσι, γιά νά ἐλέγξουμε ἄν ἕνα σχῆμα (σ) ἔχει μία εὐθεία ε ὡς ἄξονα συμμετρίας, θά πρέπει παίρνοντας ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο του Α νά δείχνουμε ὅτι τό συμμετρικό τοῦ Α ὡς πρός τήν ε εἶναι ἐπίσης σημεῖο τοῦ (σ). Ὅλα τά παρακάτω σχήματα ἔχουν ἄξονα συμμετρίας.

(σχ. 14)

(σχ. 15)

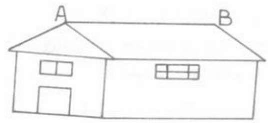
(σχ. 16)

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

6. Νά βρεῖτε τό συμμετρικό μιᾶς δίεδρης γωνίας ὡς πρός ἄξονα τήν ἀκμή της.
7. Νά βρεῖτε τό συμμετρικό ἑνός κυκλικοῦ δίσκου ὡς πρός ἄξονα τήν εὐθεία τήν κάθετη πρός τό ἐπίπεδο τοῦ δίσκου στό κέντρο του ἤ σέ ἕνα σημεῖο τοῦ κύκλου του.

8. Νά ἐξετάσετε ἄν τό σχῆμα, πού ἔχει ἕνα κουτί σπίρτα, ἔχει ἄξονες συμμετρίας καί πόσους. Νά σχεδιάσετε τό γεωμετρικό ἀντίστοιχο σχῆμα, πού λέγεται *ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο*, καί τούς ἄξονες συμμετρίας του.

9. Νά σχεδιάσετε τό συμμετρικό τοῦ ἀπέναντι σχήματος (17) ὡς πρός ἄξονα τήν εὐθεία ΑΒ.

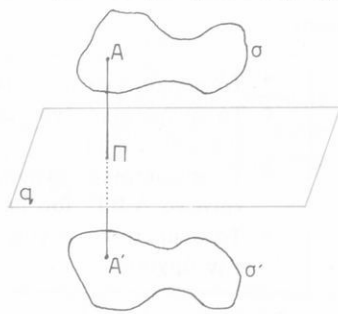


(σχ. 17)

Συμμετρία ὡς πρός ἐπίπεδο.

9. 8. Μέ τή βοήθεια ἑνός ὁρισμένου ἐπιπέδου q μποροῦμε νά ὁρίσουμε μία ἄλλη ἀντιστοιχία μεταξύ τῶν σημείων τοῦ χώρου ὡς ἑξῆς: Σέ κάθε σημεῖο Α τοῦ χώρου ἀντιστοιχίζουμε τό σημεῖο Α′, πού βρίσκουμε, ἄν φέρουμε τήν ΑΠ κάθετη πρός τό ἐπίπεδο q καί στήν προέκτασή της πρός τό Π πάρουμε τμῆμα ΠΑ′ = ΠΑ (σχ. 18). Τό σημεῖο Α′ λέγεται **συμμετρικό τοῦ Α ὡς πρός τό ἐπίπεδο q.**

Παρατηροῦμε ὅτι, ἄν τό Α′ εἶναι συμμετρικό τοῦ Α ὡς πρός τό q, τότε καί τό Α εἶναι συμμετρικό τοῦ Α′ ὡς πρός τό q, γι᾽ αὐτό τά σημεῖα Α καί Α′ λέγονται ἁπλῶς **συμμετρικά ὡς πρός τό ἐπίπεδο q.** Ἔτσι:



(σχ. 18)

> Δύο σημεῖα Α καί Α′ εἶναι συμμετρικά ὡς πρός ἐπίπεδο q, ὅταν τό q εἶναι μεσοκάθετο ἐπίπεδο τοῦ ΑΑ′.

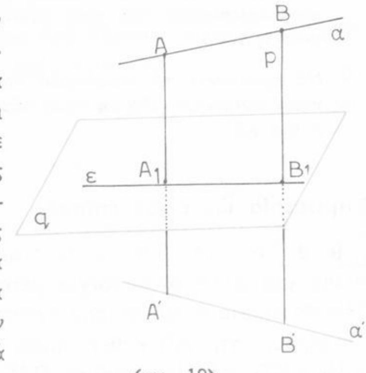
Ἄν λοιπόν ἀντιστοιχίσουμε σέ κάθε σημεῖο Α τοῦ χώρου τό συμμετρικό του ὡς πρός ἐπίπεδο q, ὁρίζουμε ἕνα μετασχηματισμό τοῦ χώρου, πού λέγεται **συμμετρία ὡς πρός τό ἐπίπεδο q.**

Στό μετασχηματισμό αὐτό ὅλα τά σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου q εἶναι ἀμετάβλητα, ἐνῶ ἡ εἰκόνα ἑνός σχήματος (σ) εἶναι ἕνα ἄλλο σχῆμα (σ′), πού ἀποτελεῖται ἀπό τά συμμετρικά ὅλων τῶν σημείων τοῦ (σ). Τό (σ′) λέγεται **συμμετρικό τοῦ (σ) ὡς πρός τό ἐπίπεδο q.**

9. 9. Θά βροῦμε τώρα τά συμμετρικά ὡς πρός ἐπίπεδο q μερικῶν ἁπλῶν σχημάτων.

Ἄς πάρουμε πρῶτα μία εὐθεία α. Τό συμμετρικό της ὡς πρός ἐπίπεδο q θά ἀποτελεῖται ἀπό τά συμμετρικά ὅλων τῶν σημείων Α,Β,Γ,... τῆς εὐθείας ὡς πρός τό ἐπίπεδο q. Ἐπειδή ὅμως ὅλες οἱ εὐθεῖες $ΑΑ_1$, $ΒΒ_1$,...

εἶναι κάθετες πρός τό q, θά βρίσκονται πάνω στό ἴδιο ἐπίπεδο p (αὐτό πού περιέχει τήν εὐθεία α καί εἶναι κάθετο πρός τό q) καί θά εἶναι κάθετες στήν τομή ε τῶν ἐπιπέδων p καί q. Συνεπῶς τά συμμετρικά σημεῖα A',B',... θά βρίσκονται στό ἐπίπεδο p καί ἡ ε εἶναι μεσοκάθετος τῶν AA', BB',... Βλέπουμε λοιπόν ὅτι τό συμμετρικό τῆς α ὡς πρός τό ἐπίπεδο q εἶναι τό ἴδιο μέ τό συμμετρικό τῆς α ὡς πρός ἄξονα ε. Ἑπομένως εἰδικά γιά τήν εὐθεία θά ἰσχύουν (καί θά ἀποδεικνύονται μέ τόν ἴδιο τρόπο) ὅλα τά συμπεράσματα, πού ἰσχύουν στήν ἐπίπεδη συμμετρία ὡς πρός ἄξονα. Αὐτά εἶναι:

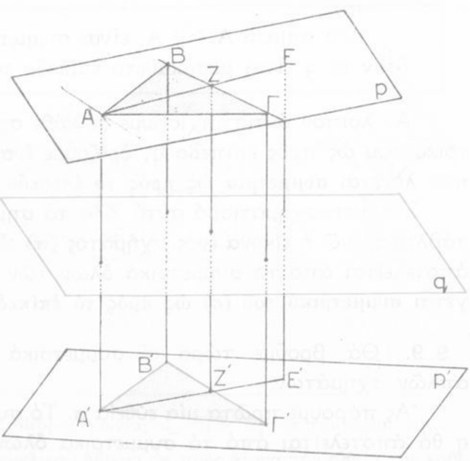


(σχ. 19)

- Τό συμμετρικό μιᾶς εὐθείας ὡς πρός ἐπίπεδο εἶναι εὐθεία.
- Τό συμμετρικό ἑνός εὐθ. τμήματος ὡς πρός ἐπίπεδο εἶναι ἕνα εὐθ. τμῆμα ἴσο μέ αὐτό.
- Τό συμμετρικό τριγώνου ΑΒΓ ὡς πρός ἐπίπεδο εἶναι ἕνα τρίγωνο Α'Β'Γ' ἴσο μέ τό ΑΒΓ.
- Τό συμμετρικό γωνίας ὡς πρός ἐπίπεδο εἶναι γωνία ἴση μέ τήν ἀρχική.

Θά βροῦμε τώρα τό συμμετρικό ἑνός ἐπιπέδου p ὡς πρός ἕνα ἐπίπεδο q. Ἄς πάρουμε τρία σημεῖα Α,Β,Γ τοῦ p μή συνευθειακά καί τά συμμετρικά τους Α', Β',Γ' ὡς πρός τό q καί ἄς ὀνομάσουμε p' τό ἐπίπεδο (Α',Β',Γ').

Ἄν πάρουμε καί ἕνα ἄλλο ὁποιοδήποτε σημεῖο Ε τοῦ p, τότε ἡ ΑΕ θά τέμνει τήν εὐθεία ΒΓ ἤ θά εἶναι παράλληλη σ' αὐτή. Ἄν ἡ ΑΕ τέμνει τή ΒΓ στό Ζ, παρατηροῦμε ὅτι ἡ εὐθεία Α'Ζ', πού εἶναι συμμετρική τῆς εὐθείας ΑΖ, βρίσκεται στό ἐπίπεδο p' (ἀφοῦ τό σημεῖο Ζ', πού εἶναι συμμετρικό τοῦ Ζ, εἶναι



(σχ. 20)

σημεῖο τῆς εὐθείας Β'Γ'). Τότε ὅμως τό σημεῖο Ε', πού εἶναι συμμετρικό τοῦ Ε ὡς πρός τό q, θά εἶναι σημεῖο τῆς Α'Ζ', (ἀφοῦ τό Ε εἶναι σημεῖο τῆς ΑΖ) καί ἑπομένως θά βρίσκεται στό ἐπίπεδο p'. Στήν περίπτωση πού εἶναι ΑΕ||ΒΓ ἐργαζόμαστε μέ τή ΒΕ ἤ τὴ ΓΕ ὅπως στὴν προηγούμενη περίπτωση. Ἀποδείξαμε λοιπόν ὅτι τό συμμετρικό ὡς πρός ἐπίπεδο q ἑνός ὁποιουδήποτε σημείου Ε τοῦ ἐπιπέδου p ἀνήκει στό ἐπίπεδο p' καί συνεπῶς:

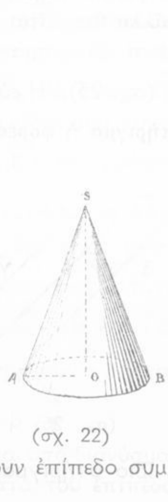
Τό συμμετρικό ἐπιπέδου ὡς πρός ἐπίπεδο q εἶναι ἐπίπεδο.

Ἀπό τήν πρόταση αὐτή καταλαβαίνουμε ὅτι, γιά νά βροῦμε τό συμμετρικό ἑνός ἐπιπέδου ὡς πρός ἐπίπεδο q, ἀρκεῖ νά βροῦμε τά συμμετρικά μόνο τριῶν μή συνευθειακῶν σημείων του ὡς πρός τό ἐπίπεδο q.

Σχήματα μέ ἐπίπεδο συμμετρίας.

9. 10. Ἕνα σχῆμα (σ) θά λέμε ὅτι ἔχει **ἐπίπεδο συμμετρίας** ἕνα ὁρισμένο ἐπίπεδο q, ὅταν ὅλα τά σημεῖα τοῦ (σ) χωρίζονται σέ ζεύγη, πού τά μέλη τους εἶναι συμμετρικά ὡς πρός τό q. Γιά νά ἐλέγξουμε λοιπόν ἄν ἕνα σχῆμα (σ) ἔχει ἕνα ἐπίπεδο q ὡς ἐπίπεδο συμμετρίας, θά πρέπει παίρνοντας ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο του Α νά δείχνουμε ὅτι τό συμμετρικό τοῦ Α ὡς πρός τό q εἶναι ἐπίσης σημεῖο τοῦ (σ).

(σχ. 21)



(σχ. 22)

(σχ. 23)

Ὅλα τά παραπάνω σχήματα ἔχουν ἐπίπεδο συμμετρίας.

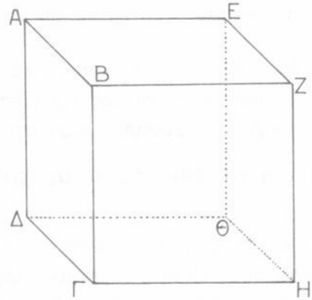
10. Νά βρεῖτε τό συμμετρικό μιᾶς δίεδρης γωνίας ὡς πρός τό ἐπίπεδο μιᾶς κάθετης τομῆς της.

11. Ποιό εἶναι τό συμμετρικό μιᾶς δίεδρης γωνίας ὡς πρός τό ἐπίπεδο μιᾶς ἕδρας της;

12. Γνωρίζετε φυσικά στερεά, πού τά ἀντίστοιχά τους γεωμετρικά στερεά ἔχουν ἐπίπεδα συμμετρίας; Νά ἀναφέρετε μερικά.

13. Νά σχεδιάσετε τό συμμετρικό τοῦ ἀπέναντι στερεοῦ ὡς πρός τό ἐπίπεδο ΑΒΓΔ (τό ΑΒΓΔΕΖΗΘ εἶναι ὀρθογώνιο παρραλληλεπίπεδο).

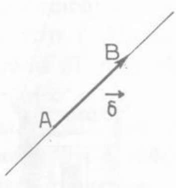
14. Καθώς κοιτάζετε μέσα στόν καθρέφτη τόν ἑαυτό σας, ποιός γεωμετρικός μετασχηματισμός ἔρχεται στό νοῦ σας;



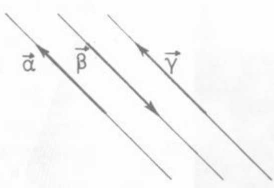
(σχ. 24)

Διανύσματα στό χῶρο.

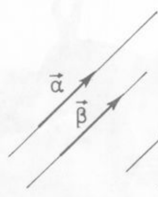
9.11. Στή Β' τάξη μάθαμε τήν ἔννοια τοῦ διανύσματος στό ἐπίπεδο. Μέ τόν ἴδιο τρόπο ὁρίζεται τό διάνυσμα καί στό χῶρο. Δηλαδή, **διάνυσμα εἶναι ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα, τοῦ ὁποίου τό ἕνα ἄκρο θεωρεῖται ὡς «ἀρχή» του καί τό ἄλλο θεωρεῖται ὡς «τέλος» του.** Γιά νά δηλώσουμε ὅτι τό τμῆμα ΑΒ θεωρεῖται «διάνυσμα» μέ ἀρχή τό Α καί τέλος τό Β, γράφουμε $\overrightarrow{AB}$ ἤ ἁπλά $\vec{\delta}$ (σχ. 25). Ἡ εὐθεία, πού διέρχεται ἀπό τά δύο σημεῖα Α καί Β, λέγεται **στήριγμα** ἤ **φορέας** τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{AB}$. Τά διανύσματα, πού ἔχουν τό ἴδιο στήριγμα ἤ παράλληλα στηρίγματα, λέγονται



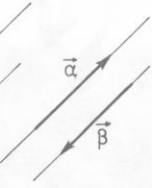
(σχ. 25)



(σχ. 26)



(σχ. 27)



(σχ. 28)

παράλληλα διανύσματα καί λέμε ἀκόμη γι' αὐτά ὅτι ἔχουν τήν ἴδια «διεύθυνση». Ἔτσι π.χ. ὅλα τά παράλληλα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \ldots$ τοῦ σχήματος 26 ἔχουν τήν ἴδια διεύθυνση. Σέ κάθε διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ διακρίνουμε:

- Τή **διεύθυνσή** του, πού εἶναι ἡ διεύθυνση τοῦ φορέα του.
- Τή **φορά** του, πού εἶναι ἡ φορά ἑνός κινητοῦ, τό ὁποῖο κινεῖται ἀπό τό A πρός τό B.
- Τό **μέτρο** του, πού εἶναι τό μῆκος τοῦ τμήματος AB.

Δύο παράλληλα διανύσματα, πού ἔχουν τήν ἴδια φορά, λέγονται **ὁμόρροπα,** ἐνῶ δύο παράλληλα διανύσματα, πού ἔχουν ἀντίθετη φορά, λέγονται **ἀντίρροπα.** Ἔτσι π.χ. τά $\vec{\alpha}$ καί $\vec{\gamma}$ τοῦ σχήματος 26 εἶναι ὁμόρροπα, ἐνῶ τά $\vec{\alpha}$ καί $\vec{\beta}$ εἶναι ἀντίρροπα.

Δύο ὁμόρροπα διανύσματα $\vec{\alpha}$ καί $\vec{\beta}$, πού ἔχουν ἴσα μέτρα, λέγονται ἴσα (σχ. 27) καί γράφουμε

$$\vec{\alpha} = \vec{\beta}.$$

Δύο ἀντίρροπα διανύσματα $\vec{\alpha}$ καί $\vec{\beta}$, πού ἔχουν ἴσα μέτρα, λέγονται **ἀντίθετα** (σχ. 28) καί γράφουμε

$$\vec{\alpha} = -\vec{\beta}.$$

Εἶναι φανερό ὅτι ἀπό κάθε εὐθ. τμῆμα AB προκύπτουν δύο ἀντίθετα διανύσματα, τά $\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{BA}$. Ἔτσι ἔχουμε πάντοτε

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}.$$

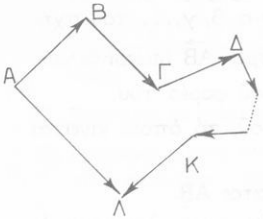
9.12. Τά διανύσματα $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B\Gamma}, \overrightarrow{\Gamma\Delta}, \ldots, \overrightarrow{K\Lambda}$, τά ὁποῖα εἶναι τέτοια, ὥστε τό τέλος καθενός νά συμπίπτει μέ τήν ἀρχή τοῦ ἑπομένου του, λέγονται **διαδοχικά διανύσματα**. Τό διάνυσμα $\overrightarrow{A\Lambda}$, τό ὁποῖο ἔχει ἀρχή τήν ἀρχή τοῦ πρώτου διανύσματος καί τέλος τό τέλος τοῦ τελευταίου διανύσματος, λέγεται **ἄθροισμα τῶν $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B\Gamma}, \overrightarrow{\Gamma\Delta}, \ldots, \overrightarrow{K\Lambda}$** καί γράφουμε (σχ. 29)

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} + \ldots + \overrightarrow{K\Lambda} = \overrightarrow{A\Lambda}$$

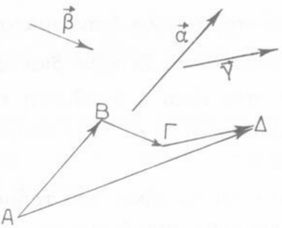
(Ἡ τεθλασμένη γραμμή ΑΒΓΔ...ΚΛ δέν εἶναι ὑποχρεωτικά ἐπίπεδη). Γενικότερα, ἄν ἔχουμε ὁποιαδήποτε διανύσματα, π.χ. τά $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ καί πάρουμε διαδοχικά διανύσματα $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{B\Gamma} = \vec{\beta}$ καί $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = \vec{\gamma}$, τό ἄθροισμα $\overrightarrow{A\Delta}$ τῶν $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B\Gamma}, \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ λέγεται καί ἄθροισμα τῶν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ καί γράφουμε (σχ. 30)

$$\overrightarrow{A\Delta} = \vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$$

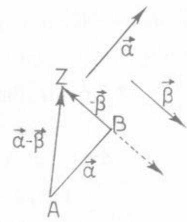
Βλέπουμε δηλαδή ὅτι τό ἄθροισμα στά διανύσματα τοῦ χώρου ὁρίζεται ὅπως ἀκριβῶς καί στά διανύσματα τοῦ ἐπιπέδου, καί συνεπῶς θά



(σχ. 29)



(σχ. 30)



(σχ. 31)

ἰσχύει πάλι τόσο ἡ *ἀντιμεταθετική* ὅσο καί ἡ *προσεταιριστική* ἰδιότητα.

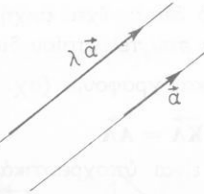
Ἄν ἔχουμε δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ καί $\vec{\beta}$, τό διάνυσμα $\vec{\alpha}+(-\vec{\beta})$ λέγεται **διαφορά τῶν $\vec{\alpha}$ καί $\vec{\beta}$** καί σημειώνεται $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$. Δηλαδή ἔχουμε

$$\boxed{\vec{\alpha}-\vec{\beta}=\vec{\alpha}+(-\vec{\beta})}$$

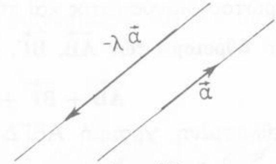
Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι, γιά νά ἀφαιρέσουμε ἕνα διάνυσμα $\vec{\beta}$ ἀπό ἕνα διάνυσμα $\vec{\alpha}$, ἀρκεῖ νά προσθέσουμε στό $\vec{\alpha}$ τό ἀντίθετο τοῦ $\vec{\beta}$. Ἡ ἐργασία αὐτή φαίνεται στό σχῆμα 31, ὅπου εἶναι $\overrightarrow{AZ}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$.

Τέλος, ἄν δίνονται ἕνα διάνυσμα $\vec{\alpha}$ καί ἕνας θετικός ἀριθμός λ, τότε:

- **Τό σύμβολο $\lambda.\vec{\alpha}$ παριστάνει ἕνα διάνυσμα ὁμόρροπο πρός τό $\vec{\alpha}$, πού τό μέτρο του εἶναι λ φορές τό μέτρο τοῦ $\vec{\alpha}$** (σχ. 32).
- **Τό σύμβολο $-\lambda.\vec{\alpha}$ παριστάνει ἕνα διάνυσμα ἀντίρροπο πρός τό $\vec{\alpha}$, πού τό μέτρο του εἶναι λ φορές τό μέτρο τοῦ $\vec{\alpha}$ (σχ. 33).**



(σχ. 32)



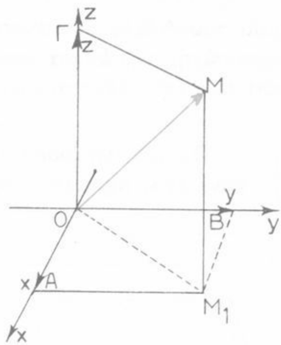
(σχ. 33)

Ὅταν λοιπόν βλέπουμε μία ἰσότητα τῆς μορφῆς $\vec{\beta}=3\vec{\alpha}$, καταλαβαίνουμε ὅτι τό $\vec{\beta}$ εἶναι διάνυσμα ὁμόρροπο πρός τό $\vec{\alpha}$ καί ἔχει τριπλάσιο μέτρο, ἐνῶ ἀπό μία ἰσότητα τῆς μορφῆς $\vec{\gamma}=-3\vec{\alpha}$ καταλαβαίνουμε ὅτι τό $\vec{\gamma}$ εἶναι ἀντίρροπο πρός τό $\vec{\alpha}$ καί ἔχει πάλι τριπλάσιο μέτρο.

15. Ἄν Oz εἶναι ἄξονας κάθετος στό ἐπίπεδο δύο ὀρθογώνιων ἀξόνων (Ox, Oy) στό O καί M εἶναι ὁποιοδήποτε σημεῖο τοῦ χώρου (σχ. 34), νά ἀποδείξετε ὅτι τό μέτρο τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{OM}$ δίνεται ἀπό τή σχέση

$$|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

(M_1 εἶναι ἡ ὀρθή προβολή τοῦ M στό ἐπίπεδο (Ox, Oy) καί z ἡ ἀλγεβρική τιμή τοῦ $\overrightarrow{M_1M}$, πού λέγεται *κατηγμένη* τοῦ M. Ἐπίσης $x = \overline{OA}$ καί $y = \overline{OB}$).



(σχ. 34)

16. Ἄν $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ καί $\vec{\alpha}$ εἶναι δεδομένο διάνυσμα, νά ἀποδείξετε ὅτι

$$\kappa(\lambda\vec{\alpha}) = (\kappa\lambda)\vec{\alpha}$$

17. Ἄν $\kappa \in \mathbb{R}$ καί $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ εἶναι διανύσματα τοῦ χώρου, νά ἀποδείξετε ὅτι $\kappa(\vec{\alpha}+\vec{\beta}) = \kappa\vec{\alpha} + \kappa\vec{\beta}$.

18. Στόν ἀπέναντι κύβο νά βρεῖτε τά ἀθροίσματα τῶν διανυσμάτων:

α) $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EZ} + \overrightarrow{ZH}$

β) $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EZ} + \overrightarrow{ZB} + \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma H}$

Τί παρατηρεῖτε;

(σχ. 35)

19. Στό ἴδιο σχῆμα νά ἀποδείξετε ὅτι

$$(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{AE} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Delta})$$

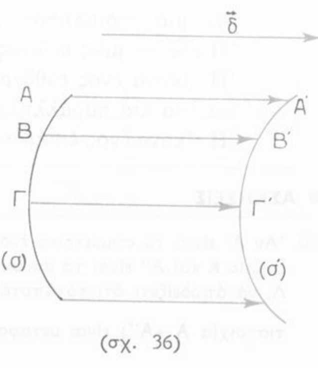
Μεταφορά.

9. 13. Μέ τή βοήθεια ἑνός διανύσματος $\vec{\delta}$ μποροῦμε νά ὁρίσουμε ἕνα σημειακό μετασχηματισμό τοῦ χώρου ἀντιστοιχίζοντας σέ κάθε σημεῖο του A ἕνα ἄλλο σημεῖο A′ τέτοιο, ὥστε

$$\overrightarrow{AA'} = \vec{\delta}.$$

Ὁ μετασχηματισμός αὐτός λέγεται **μεταφορά κατά τό διάνυσμα $\vec{\delta}$.**

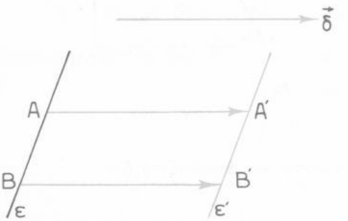
Στό μετασχηματισμό αὐτό οἱ εἰκόνες ὅλων τῶν σημείων ἑνός σχήματος (σ) ἀποτελοῦν ἕνα ἄλλο σχῆμα (σ′), πού εἶναι ἡ ***εἰκόνα*** τοῦ (σ).



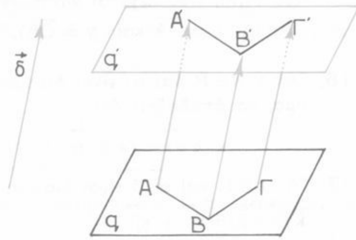
(σχ. 36)

Ἄν $\vec{\delta} = \vec{0}$, τότε ἡ εἰκόνα τοῦ (σ) εἶναι τό ἴδιο τό σχῆμα (σ). Ἄν $\vec{\delta} \neq \vec{0}$ (σχ. 36), μποροῦμε νά θεωρήσουμε ὅτι ἡ εἰκόνα (σ') εἶναι τό ἴδιο τό σχῆμα (σ) σέ ἄλλη θέση, στήν ὁποία «μεταφέρθηκε», ἀφοῦ κινήθηκε κατά τέτοιο τρόπο, ὥστε ὅλα τά σημεῖα του Α,Β,Γ,... διέγραψαν ἴσα διανύσματα $\vec{AA'}$, $\vec{BB'}$, $\vec{\Gamma\Gamma'}$, ... Ἡ κίνηση αὐτή, τήν ὁποία φανταζόμαστε ὅτι ἔκανε τό (σ), γιά νά μεταφερθεῖ στό (σ'), λέγεται «μεταφορά» τοῦ (σ). Ἔτσι ἔχουμε τήν πρόταση:

> Σέ μιά μεταφορά κατά ἕνα ὁποιοδήποτε διάνυσμα $\vec{\delta}$ ἡ εἰκόνα ἑνός σχήματος (σ) εἶναι ἕνα σχῆμα (σ') ἴσο μέ τό (σ).



(σχ. 37)



(σχ. 38)

Ἐπειδή σέ μιά ὁποιαδήποτε μεταφορά ἡ εἰκόνα ἑνός σχήματος εἶναι τό ἴδιο σχῆμα σέ ἄλλη θέση, εἶναι φανερό ὅτι ἡ εἰκόνα μιᾶς εὐθείας ε θά εἶναι εὐθεία (σχ. 37) καί μάλιστα παράλληλη πρός τήν ε, γιατί τό σχῆμα ΑΑ'Β'Β εἶναι παραλληλόγραμμο. Στό παραλληλόγραμμο αὐτό βλέπουμε ὅτι Α'Β' = ΑΒ, δηλαδή ὅτι ἡ εἰκόνα ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος εἶναι ἕνα παράλληλο καί ἴσο μέ αὐτό εὐθ. τμῆμα. Ἐπίσης εἶναι φανερό ὅτι ἡ εἰκόνα ἑνός ἐπιπέδου q θά εἶναι ἐπίπεδο (σχ. 38) καί μάλιστα ἐπίπεδο παράλληλο πρός τό q, γιατί θά εἶναι Β'Α' || ΒΑ καί Β'Γ'||ΒΓ. Ἀποδείξαμε λοιπόν ὅτι:

> Σέ μιά ὁποιαδήποτε μεταφορά κατά διάνυσμα $\vec{\delta}$:
> - Ἡ εἰκόνα μιᾶς εὐθείας εἶναι εὐθεία παράλληλη πρός αὐτή.
> - Ἡ εἰκόνα ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος εἶναι εὐθύγραμμο τμῆμα ἴσο καί παράλληλο μέ αὐτό.
> - Ἡ εἰκόνα ἑνός ἐπιπέδου εἶναι ἐπίπεδο παράλληλο πρός αὐτό.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

20. Ἄν Α' εἶναι τό συμμετρικό ἑνός σημείου Α τοῦ χώρου ὡς πρός κέντρο δεδομένο σημεῖο Κ καί Α'' εἶναι τό συμμετρικό τοῦ Α' ὡς πρός κέντρο ἄλλο δεδομένο σημεῖο Λ, νά ἀποδείξετε ὅτι τό ἀποτέλεσμα αὐτῶν τῶν δύο συμμετριῶν (δηλαδή ἡ ἀντιστοιχία Α→Α'') εἶναι μεταφορά κατά διάνυσμα $2\vec{K\Lambda}$.

21. Νά βρεῖτε τήν εἰκόνα μιᾶς γωνίας στή μεταφορά κατά διάνυσμα $\vec{\alpha}$ κάθετο πρός τό ἐπίπεδό της.

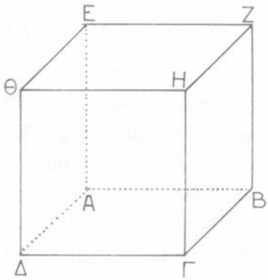
22. Νά βρεῖτε τήν εἰκόνα ἑνός τριγώνου ΑΒΓ στή μεταφορά κατά διάνυσμα $\vec{\alpha}$, τοῦ ὁποίου ἡ διεύθυνση ἔχει κλίση 45° πρός τό ἐπίπεδο τοῦ τριγώνου.

23. Νά βρεῖτε τή μεταφορά, πού προκύπτει μετά ἀπό δύο διαδοχικές μεταφορές (ἡ μία ἀκολουθεῖ τήν ἄλλη) κατά διανύσματα ἀντιστοίχως $\vec{\alpha}$ καί $\vec{\beta}$, ὅταν:

α) Τά $\vec{\alpha}$ καί $\vec{\beta}$ ἔχουν τήν ἴδια διεύθυνση (δύο περιπτώσεις).

β) Τά $\vec{\alpha}$ καί $\vec{\beta}$ ἔχουν κάθετες διευθύνσεις.

24. Νά γίνει ἡ μεταφορά τοῦ κύβου (σχ. 39) διαδοχικά κατά τά διανύσματα $\vec{AB}$, $\vec{A\Delta}$, $\vec{AE}$. Ποιό διάνυσμα παριστάνει τή μεταφορά πού προκύπτει;

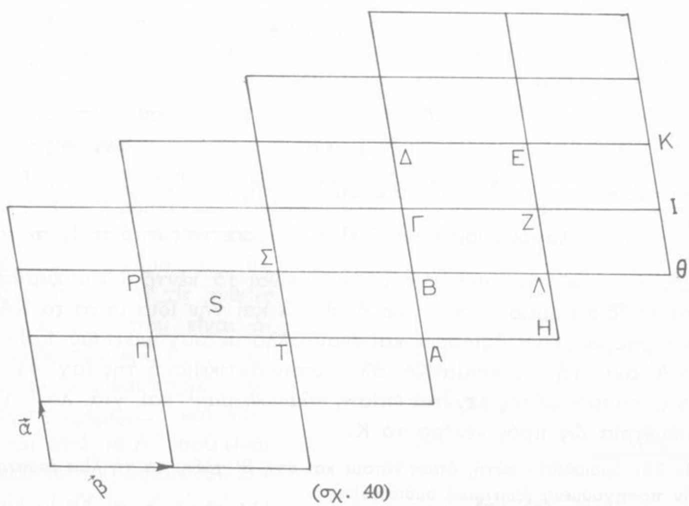


(σχ. 39)

25. Ἄν τό σχῆμα 39 παριστάνει τό δωμάτιό σας, νά κάνετε «τό μαθηματικό πέταγμα» ἀπό τήν κορυφή Α στήν ἀπέναντι Η ἀντί νά ἀκολουθήσετε τό δρόμο κατά μῆκος τῶν ἀκμῶν $\vec{AB}$, $\vec{BZ}$ καί $\vec{ZH}$. Μέ τίς μεταφορές κατά μῆκος τῶν ἀκμῶν τοῦ κύβου μπορεῖτε νά πᾶτε ἀπό τό Α στό Η χωρίς νά περάσετε δύο φορές ἀπό τό ἴδιο σημεῖο χρησιμοποιώντας α) 3 ἀκμές β) 5 ἀκμές γ) 7 ἀκμές;

26. Στό παρακάτω σχῆμα τό παραλληλόγραμμο S μεταφέρεται κατά τά διανύσματα $\vec{\Delta K}$, $\vec{BK}$, $\vec{\Pi Z}$, $\vec{ZI}$. Ποῦ θά βρίσκεται τό S μετά ἀπό κάθε μεταφορά;

27. Στό ἴδιο σχῆμα νά ὀνομάσετε τά διανύσματα, κατά τά ὁποῖα γίνονται οἱ μετα-



(σχ. 40)

φορές, ὅταν οἱ εἰκόνες τοῦ S εἶναι ἀντίστοιχα α) ΣΒΑΤ β) ΛΖΓΒ γ) ΖΙΚΕ δ) ΔΕΖΓ.

28. Στό ἴδιο σχῆμα, ἄν μεταφέρετε τό S κατά διάνυσμα $\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$, ποῦ θά βρίσκεται τό S; Ἐπίσης ποιά θά εἶναι ἡ εἰκόνα τοῦ S στή μεταφορά κατά διανύσματα: α) $3\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ β) $2\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$ γ) $2\vec{\alpha}+(-\vec{\beta})$ δ) $\vec{\beta}+(-\vec{\alpha})$;

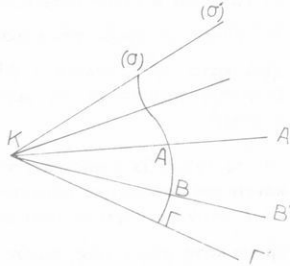
Ὁμοιοθεσία.

9. 14. Ἄς θεωρήσουμε ἕνα ὁρισμένο σημεῖο Κ τοῦ χώρου καί ἕνα θετικό πραγματικό ἀριθμό λ καί ἄς ἀντιστοιχίσουμε σέ κάθε σημεῖο Α τοῦ χώρου τό σημεῖο Α′ τῆς ἡμιευθείας ΚΑ, πού εἶναι τέτοιο, ὥστε

$$KA' = \lambda \cdot KA$$

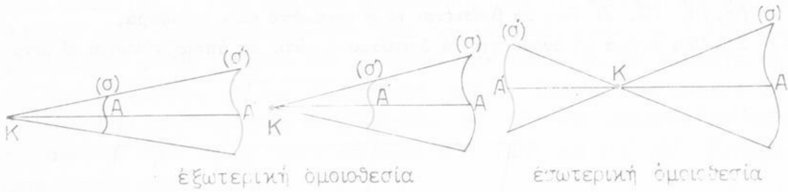
Ἡ ἀντιστοιχία αὐτή ὁρίζει ἕνα μετασχηματισμό τοῦ χώρου, πού λέγεται **ὁμοιοθεσία μέ κέντρο Κ καί λόγο λ.** Τό σημεῖο Α′ λέγεται **ὁμοιόθετο τοῦ Α.**

Ἄν πάρουμε τά ὁμοιόθετα ὅλων τῶν σημείων Α, Β, Γ,... ἑνός σχήματος (σ), σχηματίζεται ἕνα νέο σχῆμα (σ′), τό ὁποῖο λέγεται **ὁμοιόθετο τοῦ (σ)** (σχ. 41).



(σχ. 41)

Στό σχῆμα 42 δίνεται τό ὁμοιόθετο μιᾶς καμπύλης (σ) τοῦ χώρου,



(σχ. 42) (σχ. 43) (σχ. 44)

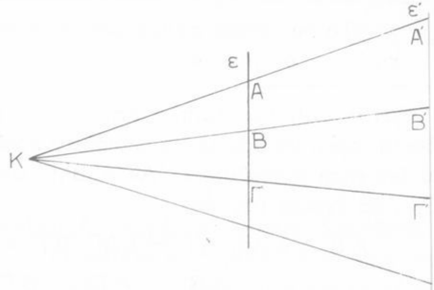
ὅταν λ = 2, καί στό σχῆμα 43 τό ὁμοιόθετο τῆς ἴδιας καμπύλης (σ), ὅταν $\lambda = \frac{1}{2}$. Ὅταν ὁ λόγος ὁμοιοθεσίας λ εἶναι διαφορετικός ἀπό τό 1, τό μόνο ἀμετάβλητο σημεῖο τοῦ μετασχηματισμοῦ εἶναι τό κέντρο ὁμοιοθεσίας Κ.

Μέ τό ἴδιο σημεῖο Κ, τόν ἴδιο ἀριθμό λ καί τήν ἴδια ἰσότητα $KA' = \lambda \cdot KA$ μποροῦμε νά ὁρίσουμε καί ἕναν ἄλλο μετασχηματισμό παίρνοντας τό Α′ ὄχι στήν ἡμιευθεία ΚΑ, ἀλλά στήν ἀντικείμενή της (σχ. 44). Ὁ μετασχηματισμός αὐτός λέγεται ἐπίσης *«ὁμοιοθεσία»*[1] καί γιά λ=1 εἶναι μία συμμετρία ὡς πρός κέντρο τό Κ.

1. Τήν ὁμοιοθεσία αὐτή, ὅπως εἴπαμε καί στή Β′ τάξη, θά τή λέμε *ἐσωτερική*, ἐνῶ τήν προηγούμενη *ἐξωτερική* ὁμοιοθεσία.

9. 15. Θά βροῦμε τώρα τά ὁμοιόθετα μερικῶν ἁπλῶν σχημάτων σέ μιά ὁμοιοθεσία μέ κέντρο Κ καί λόγο λ.

Ἄς βροῦμε πρῶτα τό ὁμοιόθετο μιᾶς εὐθείας ε. Τά ὁμοιόθετα ὅλων τῶν σημείων της Α,Β,Γ, ... βρίσκονται στίς ἡμιευθεῖες ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ, ··· (σχ. 45) καί ὅλες αὐτές οἱ ἡμιευθεῖες βρίσκονται στό ἴδιο ἐπίπεδο (αὐτό πού ὁρίζεται ἀπό τό σημεῖο Κ καί τήν εὐθεία ε). Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι γιά τήν εὐθεία ἤ τό εὐθ. τμῆμα θά ἰσχύουν τά ἴδια συμπεράσματα, πού ἰσχύουν καί στήν ἐπίπεδη ὁμοιοθεσία καί αὐτά εἶναι:

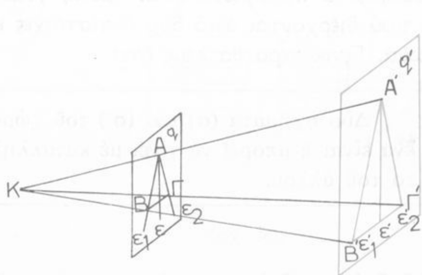


(σχ. 45)

- Τό ὁμοιόθετο σχῆμα μιᾶς εὐθείας ε εἶναι μία εὐθεία ε΄ παράλληλη πρός τήν ε.
- Τό ὁμοιόθετο σχῆμα ἑνός εὐθ. τμήματος ΑΒ εἶναι εὐθύγραμμο τμῆμα Α΄Β΄ παράλληλο πρός τό ΑΒ καί τέτοιο, ὥστε $A'B' = \lambda \cdot AB$.

Ἀπό τήν πρώτη πρόταση προκύπτει ὅτι, γιά νά βροῦμε τό ὁμοιόθετο μιᾶς εὐθείας, ἀρκεῖ νά βροῦμε τά ὁμοιόθετα μόνο δύο σημείων της. Ἀπό τή δεύτερη πρόταση βλέπουμε ὅτι, ἄν $\lambda > 1$, ἡ εἰκόνα Α΄Β΄ ἑνός εὐθ. τμήματος ΑΒ εἶναι μεγαλύτερη ἀπό τό ΑΒ, γι' αὐτό καί ἡ ὁμοιοθεσία λέγεται **διαστολή**, ἐνῶ ἄν $\lambda < 1$, ἡ εἰκόνα Α΄Β΄ εἶναι μικρότερη ἀπό τό ΑΒ, γι' αὐτό καί ἡ ὁμοιοθεσία λέγεται **συστολή**.

Ἄς βροῦμε τώρα τό ὁμοιόθετο ἑνός ἐπιπέδου q. Ἄν Α εἶναι ἕνα σημεῖο τοῦ q, μποροῦμε νά θεωρήσουμε ὅτι τό q ἀποτελεῖται ἀπό ὅλες τίς εὐθεῖες του $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \ldots$, πού διέρχονται ἀπό τό Α. Τότε τό ὁμοιόθετο σχῆμα τοῦ q θά ἀποτελεῖται ἀπό τίς εὐθεῖες $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \varepsilon_3', \ldots$, πού εἶναι ὁμοιόθετες τῶν $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$. Οἱ $\varepsilon_1', \varepsilon_2', \varepsilon_3', \cdots$ εἶναι παράλληλες πρός τίς $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ καί διέρχονται ἀπό τό Α΄, πού εἶναι ὁμοιόθετο τοῦ σημείου Α. Συνεπῶς οἱ εὐθεῖες $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \varepsilon_3', \cdots$



(σχ. 46)

βρίσκονται στό μοναδικό ἐπίπεδο q', πού διέρχεται ἀπό τό Α' καί εἶναι παράλληλο πρός τό q. Ἔτσι τό ἐπίπεδο q' εἶναι τό ὁμοιόθετο σχῆμα τοῦ q, δηλαδή :

> Τό ὁμοιόθετο σχῆμα ἑνός ἐπιπέδου q εἶναι ἕνα ἐπίπεδο q' παράλληλο πρός τό q.

Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι, γιά νά βροῦμε τό ὁμοιόθετο ἑνός ἐπιπέδου q, ἀρκεῖ νά βροῦμε τά ὁμοιόθετα τριῶν σημείων του, π.χ τῶν Α,Β,Γ πού δέν εἶναι συνευθειακά. Ἄν Α',Β',Γ' εἶναι τά ὁμοιόθετα τῶν σημείων Α,Β,Γ, θά ἔχουμε (σχ. 46).

$$A'B' = \lambda AB, \quad A'\Gamma' = \lambda A\Gamma, \quad B'\Gamma' = \lambda B\Gamma \text{ καί ἑπομένως}$$

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'\Gamma'}{A\Gamma} = \frac{B'\Gamma'}{B\Gamma} = \lambda.$$

Ἀπό τίς ἰσότητες αὐτές καταλαβαίνουμε ὅτι:

> Τό ὁμοιόθετο σχῆμα τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ἕνα τρίγωνο Α'Β'Γ' ὅμοιο πρός τό ΑΒΓ καί ὁ λόγος ὁμοιότητας τῶν δύο τριγώνων εἶναι ἴσος μέ τό λόγο λ τῆς ὁμοιοθεσίας.

Ἐπειδή τώρα κάθε γωνία $X\widehat{A}\Psi$ μπορεῖ νά θεωρηθεῖ γωνία ἑνός τριγώνου ΒΑΓ (ἄν πάρουμε στίς πλευρές της τά σημεῖα Β καί Γ), καταλαβαίνουμε ἀκόμη ὅτι:

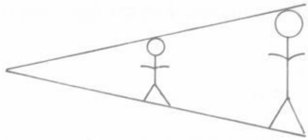
> Τό ὁμοιόθετο γωνίας $\widehat{\varphi}$ εἶναι γωνία ἴση μέ τή $\widehat{\varphi}$.

Ὅμοια σχήματα.

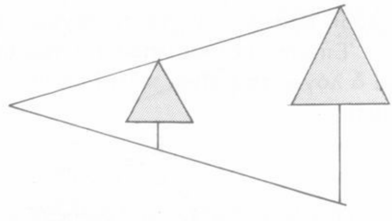
9. 16. Εἴδαμε ὅτι δύο ὁμοιόθετα τρίγωνα εἶναι ὅμοια. Ἐπίσης καί δύο ὁμοιόθετα πολύγωνα εἶναι ὅμοια, γιατί, ἄν φέρουμε τίς διαγωνίους τους, πού διέρχονται ἀπό δύο ἀντίστοιχες κορυφές, χωρίζονται σέ ὅμοια τρίγωνα. Γενικότερα θά λέμε ὅτι:

> Δύο σχήματα (σ) καί (σ') τοῦ χώρου εἶναι ὅμοια, ὅταν τό ἕνα εἶναι ἤ μπορεῖ νά γίνει μέ κατάλληλη μετακίνηση ὁμοιόθετο τοῦ ἄλλου.

Στίς παρακάτω εἰκόνες βλέπουμε τέτοια ὅμοια σχήματα.



(σχ. 47)

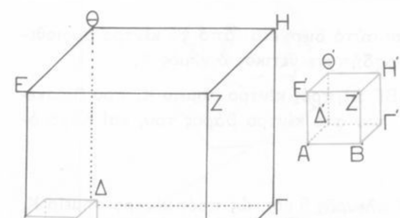


(σχ. 48)

Ἐπειδή τά ὅμοια σχήματα εἶναι ἤ μπορεῖ νά γίνουν ὁμοιόθετα, ὁ λόγος λ τῆς ἀποστάσεως δύο ὁποιωνδήποτε σημείων τοῦ ἑνός πρός τήν ἀπόσταση τῶν ἀντίστοιχων σημείων τοῦ ἄλλου εἶναι πάντοτε ὁ ἴδιος (γιατί εἶναι ἴσος μέ τό λόγο τῆς ὁμοιοθεσίας). Ὁ λόγος αὐτός λέγεται τώρα **«λόγος ὁμοιότητας»** τῶν δύο σχημάτων. Γιά $\lambda \neq 1$ διακρίνουμε ὅτι, **ἄν δύο σχήματα εἶναι ὅμοια, τό ἕνα εἶναι «μεγέθυνση» ἤ «σμίκρυνση» τοῦ ἄλλου.**

Λόγος τῶν ἐμβαδῶν καί ὄγκων ὅμοιων σχημάτων.

9. 17. Ἄς θεωρήσουμε τώρα δύο ὁποιουσδήποτε κύβους μέ ἀκμές $(AB) = \alpha$ καί $(A'B') = \alpha'$. Οἱ κύβοι αὐτοί μποροῦν νά γίνουν ὁμοιόθετα σχήματα, ἄν πάρουμε στίς ἀκμές ΑΒ, ΑΕ, ΑΔ τοῦ ἑνός τμήματα $(AB_1) = (AE_1) = (A\Delta_1) = \alpha'$ (σχ. 49). Συνεπῶς οἱ δύο αὐτοί κύβοι εἶναι ὅμοια σχήματα μέ λόγο ὁμοιότητας $\frac{\alpha}{\alpha'} = \lambda$. Δύο ἀντίστοιχες ἕδρες, π.χ. οἱ



(σχ. 49)

(σχ. 50)

ΑΒΓΔ καί Α′Β′Γ′Δ′, εἶναι ἐπίσης ὅμοια σχήματα καί ἔχουν ἐμβαδά α^2 καί α'^2 ἀντιστοίχως, ὁπότε ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τους εἶναι

$$\frac{(ΑΒΓΔ)}{(Α'Β'Γ'Δ')} = \frac{\alpha^2}{\alpha'^2} = \left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right)^2 = \lambda^2,$$

δηλαδή εἶναι ἴσος μέ τό τετράγωνο τοῦ λόγου ὁμοιότητας.

Ἐπίσης οἱ ὁλικές ἐπιφάνειες τῶν δύο κύβων εἶναι $E = 6\alpha^2$ καί $E' = 6\alpha'^2$ καί ὁ λόγος τους εἶναι πάλι ἴσος μέ τό τετράγωνο τοῦ λόγου ὁμοιότητας, γιατί

$$\frac{E}{E'} = \frac{6\alpha^2}{6\alpha'^2} = \left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right)^2 = \lambda^2.$$

Οἱ δύο κύβοι ἔχουν ὄγκους $V = \alpha^3$ καί $V' = \alpha'^3$ ἀντιστοίχως καί ὁ λόγος τῶν ὄγκων εἶναι

$$\frac{V}{V'} = \frac{\alpha^3}{\alpha'^3} = \left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right)^3 = \lambda^3,$$

δηλαδή εἶναι ἴσος μέ τόν κύβο τοῦ λόγου ὁμοιότητάς τους.

Τά συμπεράσματα αὐτά, πού ἀποδείξαμε στόν κύβο, ἰσχύουν καί σέ ὁποιαδήποτε ὅμοια σχήματα. Ἔτσι ἔχουμε τίς προτάσεις:

- Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἐπιφανειῶν δύο ὅμοιων σχημάτων εἶναι ἴσος μέ τό τετράγωνο τοῦ λόγου ὁμοιότητας.
- Ὁ λόγος τῶν ὄγκων δύο ὅμοιων σχημάτων εἶναι ἴσος μέ τόν κύβο τοῦ λόγου ὁμοιότητας.

Στό σχῆμα 50 ἔχουμε δύο ἐντελῶς ὅμοια σπίτια Α καί Β, πού τό ὕψος τοῦ Α εἶναι διπλάσιο ἀπό τό ὕψος τοῦ Β. Τότε ἡ ἔκταση, πού πιάνει τό σπίτι Α, θά εἶναι τετραπλάσια ἀπό τήν ἔκταση, πού πιάνει τό σπίτι Β, ἐνῶ ὁ ὄγκος τοῦ Α θά εἶναι ὀκταπλάσιος ἀπό τόν ὄγκο τοῦ Β.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

29. Ποιό εἶναι τό ὁμοιόθετο ἐπιπέδου q, ὅταν αὐτό διέρχεται ἀπό τό κέντρο ὁμοιοθεσίας Κ καί λόγος ὁμοιοθεσίας εἶναι ὁποιοσδήποτε θετικός ἀριθμός λ;

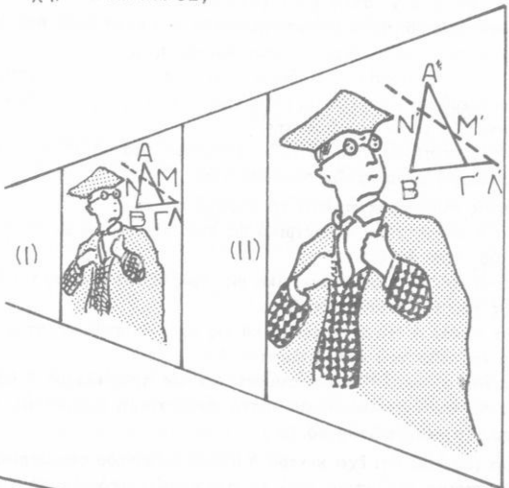
30. Νά σχεδιάσετε τό ὁμοιόθετο τριγώνου ΑΒΓ ὡς πρός κέντρο σημεῖο Κ, πού βρίσκεται πάνω στήν κάθετο πρός τό ἐπίπεδό του στό κέντρο βάρος του, καί λόγο ὁμοιοθεσίας $\lambda = \frac{2}{3}$.

31. Νά σχεδιάσετε τό ὁμοιόθετο τετραγώνου πλευρᾶς 5 cm, ὡς πρός κέντρο σημεῖο Κ, πού βρίσκεται πάνω στήν κάθετη εὐθεία στό ἐπίπεδό του καί στό κέντρο συμμετρίας του καί λόγο ὁμοιοθεσίας 4. Πόσο εἶναι τό ἐμβαδό τῆς εἰκόνας τοῦ τετραγώνου πού δόθηκε;

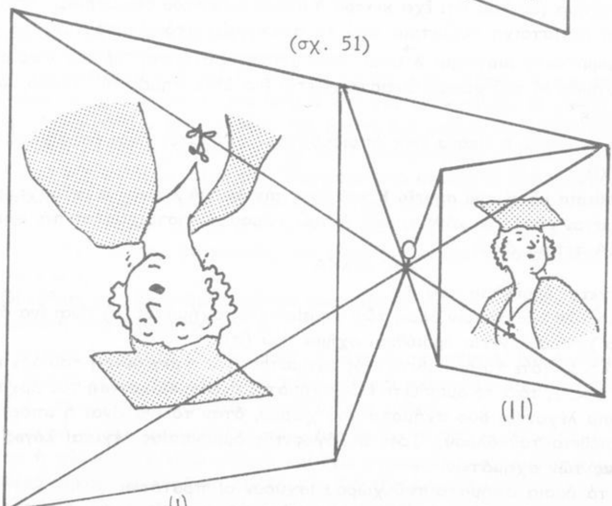
32. Πῶς μεταβάλλεται τό ἐμβαδό τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας καί ὁ ὄγκος ἑνός κύβου, ἄν τριπλασιάσουμε τήν πλευρά του;

33. Στό σχῆμα 51 δείχνουμε ἕνα δάσκαλο (εἰκόνα (i)) καί τή μεγέθυνσή του (εἰκόνα (ii)). Ἀπό ποιό σημεῖο περνοῦν οἱ εὐθεῖες, πού ἑνώνουν δύο ἀντίστοιχα σημεῖα;

Ἄν O εἶναι τό σημεῖο αὐτό, νά πάρετε ὁποιοδήποτε σημεῖο A στήν εἰκόνα (i) καί τό ἀντίστοιχό του A′ στή (ii). Νά μετρήσετε μέ προσέγγιση ἑνός δεκάτου τίς ἀποστάσεις OA, OA′ καί νά ὑπολογίσετε τό λόγο ὁμοιοθεσίας. Ἄν θεωρήσετε τό (ii) ὡς ἀρχικό, ποιός εἶναι τότε ὁ λόγος ὁμοιοθεσίας; Κατά τί διαφέρει ἡ ὁμοιοθεσία στά σχήματα 51 καί 52;



(σχ. 51)



(σχ. 52)

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 9

1. Οἱ **μετασχηματισμοί** στό χῶρο ειναι ἀπεικονίσεις, πού ἀντιστοιχίζουν σέ κάθε σημεῖο τοῦ χώρου ἕνα ἄλλο σημεῖο τοῦ χώρου. Τέτοιοι μετασχηματισμοί εἶναι π.χ. οἱ **συμμετρίες** (κεντρική, ἀξονική, ὡς πρός ἐπίπεδο), ἡ **μεταφορά** κατά διάνυσμα $\vec{\delta}$ καί ἡ **ὁμοιοθεσία.**

Οἱ συμμετρίες καί ἡ μεταφορά εἶναι μετασχηματισμοί, στούς ὁποίους σέ κάθε τμῆμα ἀντιστοιχίζεται ἕνα τμῆμα ἴσο του, δηλαδή διατηροῦν τά μήκη, γι' αὐτό λέγονται καί **ἰσομετρικοί** μετασχηματισμοί. Ὑπάρχουν ὅμως μετασχηματισμοί, στούς ὁποίους ἕνα σχῆμα μετασχηματίζεται σέ ἄλλο διαφορετικό ἀπό τό ἀρχικό, ὅπως π.χ. στήν § 9.1 (σχῆμα 2).

Ἄν σέ ἕναν ὁποιοδήποτε μετασχηματισμό ἡ εἰκόνα ἑνός σημείου εἶναι ὁ ἑαυτός του, τότε τό σημεῖο αὐτό λέγεται **ἀμετάβλητο.**

Οἱ συμμετρίες, ἡ μεταφορά καί ἡ ὁμοιοθεσία εἶναι μετασχηματισμοί, στούς ὁποίους:

- Ἡ εἰκόνα μιᾶς εὐθείας εἶναι εὐθεία, ἑπομένως γιά νά τή βροῦμε, ἀρκεῖ νά βροῦμε τίς εἰκόνες δύο μόνο σημείων της.
- Ἡ εἰκόνα ἑνός ἐπιπέδου εἶναι ἐπίπεδο, ἑπομένως γιά νά τό βροῦμε, ἀρκεῖ νά βροῦμε τίς εἰκόνες μόνο τριῶν σημείων του.

2. Εἰδικά γιά τίς συμμετρίες πρέπει νά θυμόμαστε ὅτι:

- Δύο σημεῖα Α καί Α' εἶναι **συμμετρικά ὡς πρός κέντρο τό Κ,** ὅταν τό Κ εἶναι μέσο τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΑ'.
- Δύο σημεῖα Α καί Α' εἶναι **συμμετρικά ὡς πρός ἄξονα ε,** ὅταν ἡ εὐθεία ε εἶναι μεσοκάθετος τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΑ'.
- Δύο σημεῖα Α καί Α' εἶναι **συμμετρικά ὡς πρός ἐπίπεδο q,** ὅταν τό q εἶναι μεσοκάθετο ἐπίπεδο τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΑ'.
- Δύο σχήματα (σ) καί (σ') εἶναι συμμετρικά ὡς πρός **κέντρο** ἤ **ἄξονα** ἤ **ἐπίπεδο,** ὅταν τά συμμετρικά σημεῖα, στήν ἀντίστοιχη συμμετρία, ὅλων τῶν σημείων τοῦ (σ) ἀποτελοῦν τό (σ')
- Ἕνα σχῆμα (σ) λέμε ὅτι ἔχει **κέντρο** ἤ **ἄξονα** ἤ **ἐπίπεδο συμμετρίας,** ὅταν ὑπάρχει ἀντίστοιχη συμμετρία πού τό ἀπεικονίζει στόν ἑαυτό του.

3. **Μεταφορά κατά διάνυσμα $\vec{\delta}$** εἶναι ἕνας μετασχηματισμός, μέ τόν ὁποῖο σέ κάθε σημεῖο Μ τοῦ χώρου ἀντιστοιχίζεται ἕνα ἄλλο σημεῖο Μ' τέτοιο, ὥστε $\overrightarrow{MM'} = \vec{\delta}$.

Στή μεταφορά, ἡ εἰκόνα ἑνός ὁποιουδήποτε σχήματος εἶναι ἕνα σχῆμα ἴσο μέ τό ἀρχικό.

4. **Ὁμοιοθεσία μέ κέντρο σημεῖο Κ καί λόγο τόν ἀριθμό λ** εἶναι ὁ μετασχηματισμός, στόν ὁποῖο σέ κάθε σημεῖο Α τοῦ χώρου ἀντιστοιχίζεται τό σημεῖο Α' τῆς ΚΑ τέτοιο, ὥστε

$$KA' = \lambda KA$$

Τό Α' λέγεται **ὁμοιόθετο** τοῦ Α.

Τό σύνολο τῶν ὁμοιόθετων ὅλων τῶν σημείων ἑνός σχήματος (σ) εἶναι ἕνα ἄλλο σχῆμα (σ'), πού λέγεται **ὁμοιόθετο σχῆμα** τοῦ (σ).

Ἄν $\lambda > 1$, τότε τό ὁμοιόθετο ἑνός σχήματος εἶναι ἡ **μεγέθυνση** τοῦ ἀρχικοῦ.

Ἄν $\lambda < 1$, τότε τό ὁμοιόθετο ἑνός σχήματος εἶναι ἡ **σμίκρυνση** τοῦ ἀρχικοῦ.

Ὅμοια λέγονται δύο σχήματα τοῦ χώρου, ὅταν τό ἕνα εἶναι ἤ μπορεῖ νά γίνει ὁμοιόθετο τοῦ ἄλλου. Τότε ὁ λόγος τῆς ὁμοιοθεσίας λέγεται **λόγος τῆς ὁμοιότητας** τῶν σχημάτων.

Γιά τά ὅμοια σχήματα τοῦ χώρου ἰσχύουν οἱ προτάσεις:

- **Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἐπιφανειῶν δύο ὅμοιων σχημάτων εἶναι ἴσος μέ τό τετράγωνο τοῦ λόγου τῆς ὁμοιότητάς τους,** δηλ.

$$\frac{E_1}{E_2} = \lambda^2$$

- **Ὁ λόγος τῶν ὄγκων δύο ὅμοιων στερεῶν εἶναι ἴσος μέ τόν κύβο τοῦ λόγου τῆς ὁμοιότητάς τους,** δηλ.

$$\frac{V_1}{V_2} = \lambda^3$$

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΗΛΗΨΗ *

34. Νά πάρετε τέσσερα σημεῖα Α, Β, Γ,Δ στό χῶρο τέτοια, ὥστε τό Α νά εἶναι ἔξω ἀπό τό ἐπίπεδο (Β,Γ,Δ) τῶν τριῶν ἄλλων. Νά σχεδιάσετε τό συμμετρικό τοῦ σχήματος ΑΒΓΔ ὡς πρός τό ἐπίπεδο (Β,Γ,Δ).

35. Νά σχεδιάσετε τό στερεό πού παράγεται, ὅταν ἕνα τετράγωνο πλευρᾶς α μεταφέρεται κατά διάνυσμα $\vec{\delta}$, πού ἔχει διεύθυνση κάθετη πρός τό ἐπίπεδο τοῦ τετραγώνου καί μέτρο α. Τί στερεό εἶναι αὐτό;

36. Νά σχεδιάσετε τά στερεά πού παράγονται, ὅταν ἕνας κύκλος καί ἕνα κανονικό ἑξάγωνο ἐγγεγραμμένο στόν κύκλο μεταφέρονται κατά διάνυσμα $\vec{\delta}$, τοῦ ὁποίου ἡ διεύθυνση εἶναι κάθετη πρός τό ἐπίπεδο τοῦ κύκλου.

37. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ καί σημεῖο Σ πάνω στήν κάθετη πρός τό ἐπίπεδο τοῦ τετραγώνου στό σημεῖο τομῆς Ο τῶν διαγωνίων του. Ἀπό τό μέσο τοῦ ΣΟ φέρουμε ἐπίπεδο παράλληλο πρός τό ἐπίπεδο τοῦ τετραγώνου. Ἄν Α',Β',Γ',Δ' εἶναι τά σημεῖα, στά ὁποῖα τέμνουν τό ἐπίπεδο αὐτό τά ΣΑ, ΣΒ, ΣΓ, ΣΔ ἀντιστοίχως, νά ἀποδείξετε ὅτι τά ΑΒΓΔ καί Α'Β'Γ'Δ' εἶναι ὁμοιόθετα μέ κέντρο τό Σ καί λόγο ὁμοιοθεσίας $\lambda = \frac{1}{2}$.

38. Δύο ὁμόλογες ἀκμές δύο ὅμοιων στερεῶν ἔχουν μήκη 3 cm καί 6 cm ἀντίστοιχα. Νά βρεῖτε τό λόγο τῶν ἐμβαδῶν τους καί τό λόγο τῶν ὄγκων τους.

39. Ὁ ὄγκος ἑνός στερεοῦ εἶναι 84 cm^3 καί μία ἀκμή του 7 cm. Νά βρεῖτε τόν ὄγκο ὅμοιου στερεοῦ μέ ὁμόλογη ἀκμή 14 cm.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ**

40. Δίνονται δύο σημεῖα Α καί Α' συμμετρικά ὡς πρός ἐπίπεδο q καί σημεῖο Β στόν ἡμίχωρο, πού εἶναι τό Α. Νά δείξετε ὅτι γιά κάθε σημεῖο Μ τοῦ q ἔχουμε:
$MA + MB = MA' + MB$. Νά βρεῖτε ἕνα σημεῖο Μ τοῦ q τέτοιο ὥστε
$MA + MB < NA + NB$, ὅπου Ν ὁποιοδήποτε σημεῖο τοῦ q.

41. Δίνονται δύο εὐθεῖες ε καί ε_1 πού τέμνονται στό σημεῖο Ο. Νά ἐξηγήσετε ὅτι:
α) Τό ἐπίπεδο τῶν δύο εὐθειῶν ε καί ε_1 εἶναι ἐπίπεδο συμμετρίας τοῦ σχήματος $\varepsilon \cup \varepsilon_1$.
β) Τά ἐπίπεδα p καί q πού εἶναι κάθετα πρός τό ἐπίπεδο τῶν εὐθειῶν, καί περιέχουν τίς διχοτόμους τῶν γωνιῶν τῶν ε καί ε_1, εἶναι ἐπίπεδα συμμετρίας τοῦ σχήματος $\varepsilon \cup \varepsilon_1$.
γ) Οἱ εὐθεῖες τῶν διχοτόμων αὐτῶν εἶναι ἄξονες συμμετρίας καί τό Ο εἶναι κέντρο συμμετρίας τοῦ σχήματος $\varepsilon \cup \varepsilon_1$.

42. Δύο στερεά (σ) καί (σ') εἶναι ὅμοια μέ λόγο ὁμοιότητας λ. Νά ἀποδείξετε ὅτι, ἄν τρία σημεῖα Α,Β,Γ τοῦ (σ) εἶναι πάνω σέ μία εὐθεία, τότε καί τά ὁμολογά τους Α',Β',Γ' σημεῖα τοῦ (σ') εἶναι πάνω σέ μία εὐθεία.

43. Ἡ κορυφή Α τριγώνου ΑΒΓ γράφει ἕνα κύκλο (Κ, R), πρός τό ἐπίπεδο τοῦ ὁποίου ἡ πλευρά ΑΒ εἶναι κάθετη καί ἔχει σταθερό μῆκος, ἐνῶ ἡ πλευρά ΑΓ ἔχει σταθερό μῆκος καί σταθερή διεύθυνση. Νά ἐξετάσετε ἄν:
α) Τό ΑΒΓ μετακινεῖται παράλληλα πρός τόν ἑαυτό του.
β) Δύο θέσεις του $A_1B_1\Gamma_1$ καί $A_2B_2\Gamma_2$ μπορεῖ νά θεωρηθοῦν ἀντίστοιχες σέ μεταφορά.
γ) Ἡ ΒΓ ἔχει ὁρισμένο μῆκος καί διεύθυνση.

44. Δίνονται δύο ἐπίπεδα p καί q, ἕνα σημεῖο Μ τοῦ p καί ἕνα σημεῖο Μ' τοῦ q. Νά βρεῖτε τί εἶναι τά σχήματα πού γράφουν τά σημεῖα Μ καί Μ', ὅταν κινοῦνται στά ἐπίπεδά τους κατά τέτοιο τρόπο, ὥστε τό διάνυσμα $\overrightarrow{MM'}$ νά εἶναι ἴσο μέ δεδομένο διάνυσμα $\vec{\alpha}$.

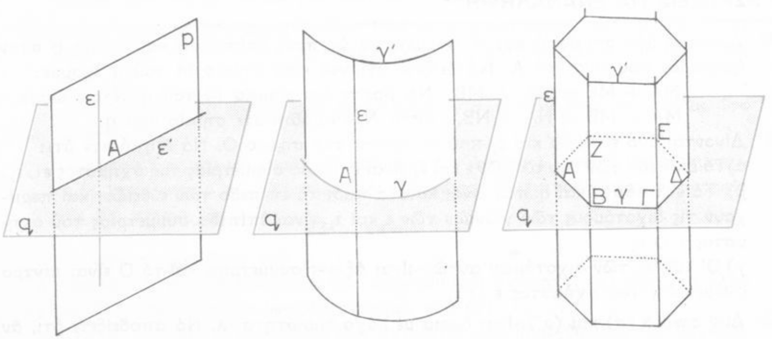
10°

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΒΑΣΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ ΣΤΟ ΧΩΡΟ

Κυλινδρικές ἐπιφάνειες.

10.1. Ἄς θεωρήσουμε ἕνα ἐπίπεδο q καί μία εὐθεία ε, πού τέμνει τό q σ' ἕνα σημεῖο Α. Ὅταν ἡ εὐθεία ε κινεῖται παράλληλα πρός τόν ἑαυτό της κατά τέτοιο τρόπο, ὥστε τό σημεῖο Α νά διαγράφει μία εὐθεία ε' τοῦ ἐπιπέδου q (βλ. σχ. 1), τότε ἀπό τήν κίνηση τῆς ε παράγεται ἕνα ἄλλο ἐπίπεδο p (αὐτό πού ὁρίζουν οἱ ε καί ε'). Ὅταν ἡ ε κινεῖται μέ τόν ἴδιο τρόπο καί τό σημεῖο Α διαγράφει μιά γραμμή γ τοῦ ἐπιπέδου (βλ. σχ. 2), τότε ἀπό τήν κίνηση τῆς ε παράγεται μιά ἐπιφάνεια, πού λέγεται **κυλινδρική ἐπιφάνεια**.



(σχ. 1) (σχ. 2) (σχ. 3)

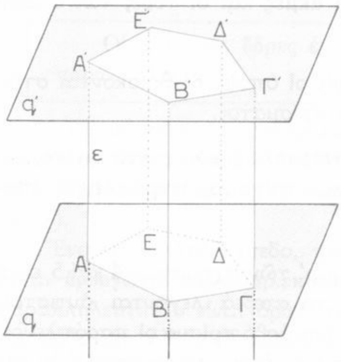
Ἡ εὐθεία ε, πού παράγει τήν ἐπιφάνεια, λέγεται **γενέτειρα**, καί ἡ γραμμή γ, πού διαγράφεται ἀπό τό Α, λέγεται **ὁδηγός** τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφάνειας.

Μιά κυλινδρική ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία ἔχει ὁδηγό τήν περίμετρο ἑνός πολυγώνου, λέγεται εἰδικότερα **πρισματική ἐπιφάνεια** (βλ. σχ. 3). Εἶναι φανερό ὅτι μία πρισματική ἐπιφάνεια ἀποτελεῖται ἀπό ἐπίπεδα μέρη.

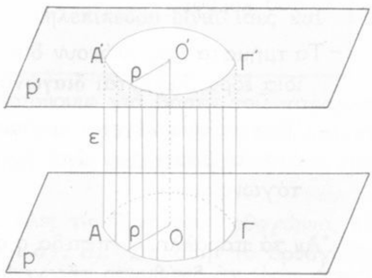
10.2. Ἄν ἕνα ἐπίπεδο εἶναι κάθετο πρός μιά γενέτειρα τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφάνειας, τότε τό σύνολο τῶν κοινῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου καί τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφάνειας λέγεται **κάθετη τομή**. Ἔτσι, π.χ. ἄν ἡ εὐθεία ε εἶναι κάθετη στό ἐπίπεδο q (βλ. σχ. 2 ἤ 3), ἡ γραμμή γ (ὁδηγός) εἶναι κάθετη τομή. Ἐπίσης κάθετη τομή θά εἶναι καί ἡ γραμμή γ', πού ὁρίζεται ἀπό τά κοινά σημεῖα τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφάνειας καί ἑνός ἐπιπέδου παράλληλου πρός τό q.

Πρίσμα καί κύλινδρος.

10. 3. Ἄς θεωρήσουμε τώρα μιά πρισματική ἐπιφάνεια μέ ὁδηγό τήν περίμετρο τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕ (βλ. σχ. 4) ἤ μιά κυλινδρική ἐπιφάνεια μέ ὁδηγό τόν κύκλο (Ο,ρ) (βλ. σχ. 5).



(σχ. 4)



(σχ. 5)

Ἄν φέρουμε τά ἐπίπεδα q' καί p' ἀντιστοίχως παράλληλα πρός τά q καί p, τότε ἡ πρισματική ἐπιφάνεια τέμνεται ἀπό τό q' κατά τήν περίμετρο ἑνός πολυγώνου Α'Β'Γ'Δ'Ε', ἐνῶ ἡ κυλινδρική τέμνεται ἀπό τό p' κατά ἕναν κύκλο (Ο', ρ).

Τό στερεό, πού περικλείεται ἀπό τά παράλληλα ἐπίπεδα q καί q' καί τήν πρισματική ἐπιφάνεια, λέγεται **πρίσμα,** ἐνῶ τό στερεό τοῦ σχήματος 5 λέγεται **κύλινδρος.** Τά πολύγωνα καί οἱ κυκλικοί δίσκοι ὀνομάζονται **βάσεις** τῶν ἀντίστοιχων στερεῶν. Ἡ ἀπόσταση τῶν δύο βάσεων λέγεται **ὕψος** τοῦ πρίσματος ἤ τοῦ κυλίνδρου ἀντιστοίχως. Ἡ ἐπιφάνεια ἐκτός ἀπό τίς δύο βάσεις λέγεται **παράπλευρη** ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος ἤ τοῦ κυλίνδρου.

Τά εὐθύγραμμα τμήματα ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ',... εἶναι ὄχι μόνο παράλληλα (γιατί ἀνήκουν σέ γενέτειρες) ἀλλά καί ἴσα (γιατί περιέχονται μεταξύ παράλληλων ἐπιπέδων). Ἔτσι τά διανύσματα $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{\Gamma\Gamma'}$,... εἶναι ἴσα. Τότε ὅμως ἡ βάση Α'Β'Γ'... θά εἶναι εἰκόνα τῆς βάσεως ΑΒΓ... σέ μιά μεταφορά κατά διάνυσμα $\overrightarrow{AA'}$. Συνεπῶς:

- Οἱ βάσεις ἑνός πρίσματος (ἤ ἑνός κυλίνδρου) εἶναι ἴσα πολύγωνα (ἤ ἴσοι κυκλ. δίσκοι) καί οἱ πλευρές τῶν βάσεων τοῦ πρίσματος εἶναι μία πρός μία παράλληλες.
- Ἡ παράπλευρη ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος ἀποτελεῖται ἀπό παραλληλόγραμμα.

Τά παραλληλόγραμμα τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας καί οἱ βάσεις ἑνός πρίσματος λέγονται **ἕδρες** του.

Ἀκόμη σέ κάθε πρίσμα ὁρίζουμε ὅτι:

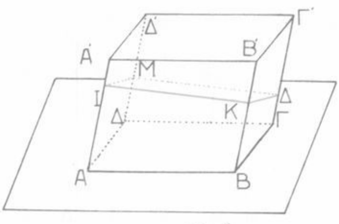
- Οἱ τομές τῶν ἑδρῶν του λέγονται **ἀκμές** καί οἱ τομές τῶν ἀκμῶν του **κορυφές.**
- Τά τμήματα πού ἑνώνουν δύο κορυφές οἱ ὁποῖες δέ βρίσκονται στήν ἴδια ἕδρα, λέγονται **διαγώνιοι** τοῦ πρίσματος.
- Ἕνα πρίσμα λέγεται **τριγωνικό, τετραπλευρικό, πενταγωνικό,...** ὅταν οἱ βάσεις του εἶναι ἀντιστοίχως τρίγωνα, τετράπλευρα, πεντάγωνα,...

Ἄν τά παράλληλα ἐπίπεδα q, q' καί p, p' τῶν σχημάτων 4 καί 5 εἶναι κάθετα πρός τή διεύθυνση τῆς γενέτειρας, τά στερεά λέγονται ἀντιστοίχως **ὀρθό πρίσμα** καί **ὀρθός κύλινδρος.** Σέ ἕνα ὀρθό πρίσμα οἱ παράπλευρες ἕδρες του εἶναι ὀρθογώνια. Ἔτσι τό ὕψος ἑνός ὀρθοῦ πρίσματος εἶναι ἴσο μέ μιά ὁποιαδήποτε παράπλευρη ἀκμή του.

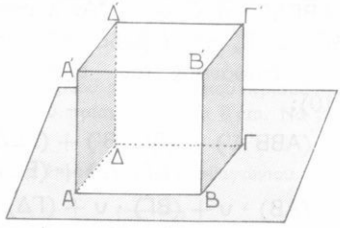
Κάθε πρίσμα, πού δέν εἶναι ὀρθό, λέγεται **πλάγιο.** Σ' ἕνα πλάγιο πρίσμα ἄς φέρουμε ἐπίπεδο κάθετο πρός μιά παράπλευρη ἀκμή του, π.χ. τήν ΑΑ', ἀπό ἕνα σημεῖο της Ι (βλ. σχ. 6). Τό ἐπίπεδο αὐτό τέμνει τίς ἄλλες παράπλευρες ἀκμές στά σημεῖα Κ,Λ,Μ. Τό πολύγωνο ΙΚΛΜ λέγεται **κάθετη τομή** τοῦ πρίσματος. Εἶναι φανερό, ὅτι τό ἐπίπεδο τῆς κάθετης τομῆς εἶναι κάθετο σέ κάθε παράπλευρη ἀκμή τοῦ πρίσματος.

Τά παραλληλεπίπεδα.

10.4. Ἕνα πρίσμα, πού καί οἱ βάσεις του εἶναι παραλληλόγραμμα, λέγεται **παραλληλεπίπεδο.** Ἔτσι κάθε παραλληλεπίπεδο ἔχει συνολικά ἕξι ἕδρες, πού εἶναι παραλληλόγραμμα (βλ. σχ. 6). Ἡ παράπλευρη ἐπιφάνεια ἀποτελεῖται τώρα ἀπό 4 παραλληλόγραμμα, πού ἀνά δύο εἶναι «ἀπέναντι», ὅπως π.χ. τά ΑΔΔ'Α' καί ΒΓΓ'Β'. Ἄν μεταφέρουμε τό παραλληλόγραμμο ΑΔΔ'Α' κατά τό διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$, θά συμπέσει μέ τό ἀπέναντί του ΒΓΓ'Β' (γιατί ὅλα τά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$, $\overrightarrow{\Delta'\Gamma'}$, $\overrightarrow{A'B'}$ εἶναι ἴσα μεταξύ τους). Ἔτσι λοιπόν:



σχ. 6

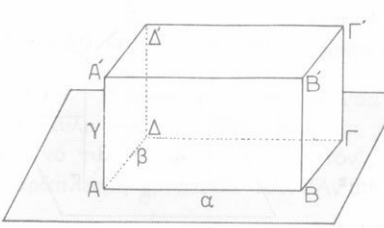


σχ. 7

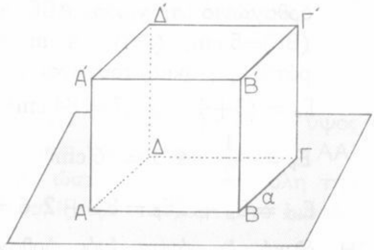
> **Οἱ ἀπέναντι ἕδρες ἑνός παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσες καί παράλληλες.**

Αὐτό σημαίνει ὅτι μποροῦμε νά παίρνουμε γιά βάσεις τοῦ παραλληλεπιπέδου δύο ὁποιεσδήποτε ἀπέναντι ἕδρες του. Ἄν ἕνα παραλληλεπίπεδο εἶναι ὀρθό πρίσμα, οἱ παράπλευρες ἕδρες του εἶναι ὀρθογώνια (βλ. σχ. 7).

Ἕνα παραλληλεπίπεδο, πού ἔχει ὅλες τίς ἕδρες του ὀρθογώνια, λέγεται **ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο** (βλ. σχ. 8). Δηλαδή τό ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο εἶναι ὀρθό παραλληλεπίπεδο, πού ἔχει καί τίς βάσεις του ὀρθογώνια. Ἄν ὀνομάσουμε α,β,γ τά μήκη τῶν ἀκμῶν του, πού διέρχονται ἀπό μιά κορυφή, π.χ. τήν Α, οἱ ἀριθμοί α,β,γ λέγονται **διαστάσεις** τοῦ ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου.



(σχ. 8)



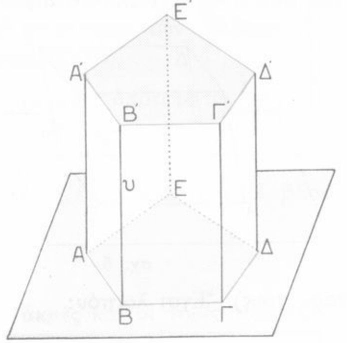
(σχ. 9)

Τό ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο, πού ὅλες οἱ ἕδρες του εἶναι τετράγωνα, εἶναι ὁ γνωστός μας **κύβος** (βλ. σχ. 9).

Ἐμβαδό ἐπιφάνειας πρίσματος.

10.5. Ἄς θεωρήσουμε ἕνα ὀρθό πρίσμα, πού ἔχει βάση τό πολύγωνο ΑΒΓΔΕ καί ὕψος υ. Ἐπειδή τό πρίσμα εἶναι ὀρθό, ὅλες οἱ παράπλευρες ἀκμές του εἶναι ἴσες μέ υ καί συνεπῶς οἱ παράπλευρες ἕδρες του εἶναι ὀρθογώνια, πού ἔχουν βάσεις τίς πλευρές τοῦ ΑΒΓΔΕ καί ὕψος υ. Ἄν λοιπόν ὀνομάσουμε E_π τό ἐμβαδό τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειάς του, ἔχουμε (βλ. σχ. 10):

$$\begin{aligned} E_\pi &= (ABB'A') + (B\Gamma\Gamma'B') + (\Gamma\Delta\Delta'\Gamma') \\ &\quad + (\Delta EE'\Delta') + (EE'A'A) \\ &= (AB)\cdot\upsilon + (B\Gamma)\cdot\upsilon + (\Gamma\Delta)\cdot\upsilon \\ &\quad + (\Delta E)\cdot\upsilon + (EA)\cdot\upsilon \\ &= [(AB) + (B\Gamma) + (\Gamma\Delta) + (\Delta E) + \\ &\quad + (EA)]\cdot\upsilon \end{aligned}$$



(σχ. 10)

ἤ τελικά

(1) $$\boxed{E_\pi = (\text{Περίμετρος βάσεως}) \times (\text{ὕψος})}$$

Δηλαδή **τό ἐμβαδό τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας ἑνός ὀρθοῦ πρίσματος βρίσκεται, ἄν πολλαπλασιάσουμε τήν περίμετρο τῆς βάσεώς του μέ τό ὕψος του (ἤ μέ τήν παράπλευρη ἀκμή του).**

Συνεπῶς, ἄν ὀνομάσουμε $E_{o\lambda}$ τό ἐμβαδό τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειάς του καί E_β τό ἐμβαδό μιᾶς βάσεώς του, θά εἶναι

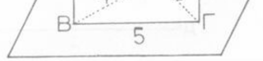
(2) $$\boxed{E_{o\lambda} = E_\pi + 2\,E_\beta}$$

Παράδειγμα. Σέ ἕνα ὀρθό τριγωνικό πρίσμα, πού ἡ βάση του εἶναι ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ μέ πλευρές (ΑΓ)=3 cm, (ΒΓ)=5 cm, (ΑΒ) = 4 cm καί ἡ παράπλευρη ἀκμή του εἶναι 7 cm, ἔχουμε

$E_\pi = (3+4+5)\,.\,7 = 84\ \text{cm}^2$

$E_\beta = \dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 3 = 6\ \text{cm}^2$

$E_{o\lambda} = E_\pi + 2E_\beta = 84 + 2\cdot 6 = 96\ \text{cm}^2.$



(σχ. 11)

Ἡ ὁλική ἐπιφάνεια ἑνός ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου, πού ἔχει διαστάσεις α,β,γ (βλ. σχ. 8), θά ἀποτελεῖται ἀπό 2 ὀρθογώνια μέ πλευρές α καί β, ἀπό δύο ὀρθογώνια μέ πλευρές β καί γ καί ἀπό δύο ὀρθογώνια μέ πλευρές α καί γ. Ἔτσι θά εἶναι

$$\boxed{E_{o\lambda} = 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\alpha\gamma = 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma)}$$

Εἶναι φανερό ὅτι ἡ ὁλική ἐπιφάνεια ἑνός κύβου ἀκμῆς α εἶναι

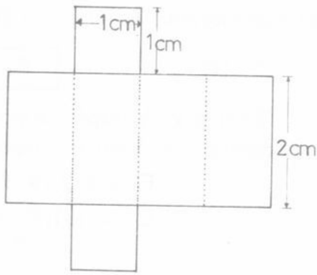
$$\boxed{E_{o\lambda} = 6\,\alpha^2}$$

1. Τό ἐμβαδό τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας κύβου εἶναι 96 cm^2. Ποιό εἶναι τό μῆκος μιᾶς ἀκμῆς του;

2. Τό ἐμβαδό τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας ἑνός ὀρθοῦ τετραγωνικοῦ πρίσματος μέ βάση ρόμβο εἶναι $E_\pi = 276$ cm^2. Τό ὕψος τοῦ πρίσματος εἶναι 8 cm. Νά βρεῖτε τό μῆκος τῆς πλευρᾶς τοῦ ρόμβου.

3. Στό σχῆμα 12 ἔχουμε τό ἀνάπτυγμα ὅλης τῆς ἐπιφάνειας ἑνός ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου. α) Νά τό κατασκευάσετε μέ χαρτόνι. β) Νά ὑπολογίσετε τήν ὁλική του ἐπιφάνεια σέ cm^2, ἄν ἡ πλευρά τῆς τετραγωνικῆς βάσεώς του εἶναι 1cm καί τό ὕψος του 2cm, ὅπως δείχνει τό σχῆμα.

4. Οἱ διαστάσεις ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου εἶναι $\alpha = 7$ cm, $\beta = 3$ cm καί $\gamma = 5$ cm α) Νά σχεδιάσετε σέ χαρτόνι τό ἀνάπτυγμά του β) Νά ὑπολογίσετε τό ἐμβαδό τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειάς του.



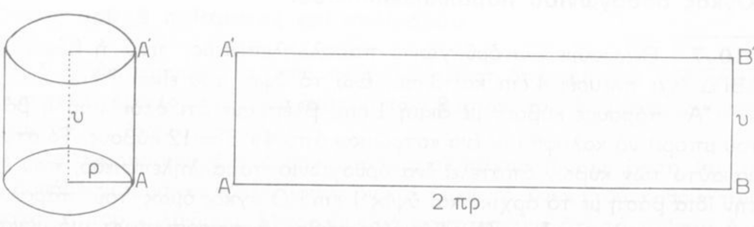
(σχ. 12)

5. Δίνεται ὀρθό τετραπλευρικό πρίσμα μέ βάση ρόμβο ΑΒΓΔ, ὁ ὁποῖος ἔχει διαγωνίους (ΑΓ) = 4,5 cm, (ΒΔ)=6 cm. Ἄν τό πρίσμα ἔχει παράπλευρη ἀκμή 7 cm, νά βρεῖτε α) τήν πλευρά τοῦ ρόμβου β) τό ἐμβαδό τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας τοῦ πρίσματος καί γ) τό ἐμβαδό τῆς ὁλικῆς του ἐπιφάνειας.

6. Σέ ἕνα ἑξαγωνικό πρίσμα, πού ἔχει βάση κανονικό ἑξάγωνο, τό ἀπόστημα τῆς βάσεώς του εἶναι $2\sqrt{3}$ cm καί τό ὕψος τοῦ πρίσματος εἶναι τριπλάσιο ἀπό τήν πλευρά τῆς βάσεώς του. α) Νά ὑπολογίσετε τήν πλευρά καί τό ἐμβαδό τῆς βάσεώς του. β) Νά ὑπολογίσετε τό ἐμβαδό τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας τοῦ πρίσματος.

Ἐμβαδό ἐπιφάνειας κυλίνδρου.

10.6. Παίρνουμε ἕνα φύλλο χαρτί πού ἔχει πλάτος ἴσο μέ τό ὕψος ἑνός κυλινδρικοῦ δοχείου. Βάζουμε τή μιά ἄκρη του σέ μιά γενέτειρα ΑΑ' καί τό τυλίγουμε γύρω ἀπό τόν κύλινδρο, ὥστε νά καλύψει ὅλη τήν παράπλευρη ἐπιφάνειά του. Ἄν τώρα ξετυλίξουμε τό χαρτί, τό ἐμβαδό



(σχ. 13)

του παριστάνει τό ἐμβαδό τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας τοῦ κυλίνδρου (βλ. σχ. 13). Τό χαρτί ὅμως ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου, τοῦ ὁποίου ἡ μιά πλευρά ἔχει μῆκος ἴσο μέ τό μῆκος 2πρ τοῦ κύκλου τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου καί ἡ ἄλλη πλευρά του εἶναι ἴση μέ τό ὕψος υ τοῦ κυλίνδρου. Ἔτσι τό ἐμβαδό τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας τοῦ κυλίνδρου εἶναι

$$(3) \qquad \boxed{E_\pi = 2\,\pi\rho\,.\,\upsilon}$$

Συνεπῶς τό ἐμβαδό $E_{o\lambda}$ τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας τοῦ κυλίνδρου θά εἶναι, ἄν προσθέσουμε καί τίς δύο βάσεις,

$$(4) \qquad \boxed{E_{o\lambda} = 2\pi\rho\upsilon + 2\pi\rho^2}$$

Ἔτσι π.χ. ἡ παράπλευρη καί ἡ ὁλική ἐπιφάνεια ἑνός κυλίνδρου, πού ἔχει ἀκτίνα $\rho = 3$ cm καί ὕψος $\upsilon = 7$ cm, εἶναι

$$E_\pi = 2\cdot 3{,}14\cdot 3\cdot 7 = 131{,}88\ \text{cm}^2$$
$$E_{o\lambda} = 131{,}88 + 2\cdot 3{,}14\cdot 3^2 = 188{,}40\ \text{cm}^2$$

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

7. Ποιό εἶναι τό ἐμβαδό τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας κυλίνδρου πού ἔχει ὕψος 5 m καί ἀκτίνα βάσεως 0,20 m;

8. Ποιό εἶναι τό ἐμβαδό τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας κυλίνδρου, πού ἔχει διάμετρο 1,60 m καί ὕψος 4 m;

9. Ἡ παράπλευρη ἐπιφάνεια κυλίνδρου εἶναι 12,68 m^2. Ἡ ἀκτίνα τῆς βάσεως εἶναι 1,60 m. Νά βρεῖτε τό ὕψος τοῦ κυλίνδρου.

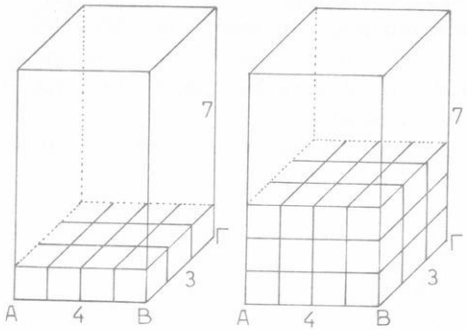
10. Πόσο πρέπει νά πληρώσουμε ,γιά νά βάψουμε ἐξωτερικά 40 σωλῆνες, πού ἔχουν ὁ καθένας μῆκος 1,60 m καί ἐξωτερική διάμετρο 0,20 m, ἄν τό βάψιμο κοστίζει 240 δρχ. τό τετραγωνικό μέτρο;

11. Θέλουμε νά κατασκευάσουμε 1 000 κυλινδρικά δοχεῖα μέ ὕψος 3,5 m καί ἀκτίνα βάσεως 1,5 m. Πόση ἐπιφάνεια λαμαρίνας χρειαζόμαστε σέ km^2 (κατά προσέγγιση χιλιοστοῦ), ἄν ἔχουμε κατά τό κόψιμο ἀπώλεια 10%;

Ὄγκος ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου.

10.7. Θεωροῦμε ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο, πού ἡ βάση του ΑΒΓΔ ἔχει πλευρές 4 cm καί 3 cm, ἐνῶ τό ὕψος του εἶναι 7 cm.

Ἄν πάρουμε κύβους μέ ἀκμή 1 cm, βλέπουμε ὅτι ὁλόκληρη ἡ βάση του μπορεῖ νά καλυφθεῖ μέ ἕνα «στρῶμα» ἀπό $4\times 3 = 12$ κύβους. Τό στρῶμα αὐτό τῶν κύβων ἀποτελεῖ ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο, πού ἔχει τήν ἴδια βάση μέ τό ἀρχικό καί ὕψος 1 cm. Ὁ ὄγκος ὅμως τοῦ παραλληλεπιπέδου αὐτοῦ εἶναι (ἐπειδή κάθε κύβος ἀντιπροσωπεύει μιά μονάδα ὄγκου) 4×3 cm^3. Ἄν πάρουμε τώρα ἕνα δεύτερο, τρίτο,... στρῶμα κύβων, τό ἀρχικό παραλληλεπίπεδο θά «γεμίσει» μέ ἑπτά τέτοια στρώματα



(σχ. 14)

καί ἑπομένως ὁ ὄγκος του θά εἶναι

$$V = 4 \times 3 \times 7 \text{ cm}^3.$$

Γενικά ἀποδεικνύεται ὅτι:

Ἄν ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο ἔχει διαστάσεις α,β,γ, ὁ ὄγκος του V εἶναι ἴσος μέ τό γινόμενο τῶν διαστάσεών του, δηλαδή εἶναι

$$\boxed{V = \alpha . \beta . \gamma} \tag{5}$$

Ἄν α,β εἶναι τά μήκη τῶν πλευρῶν τῆς βάσεώς του, τό γινόμενο $\alpha \cdot \beta$ παριστάνει τό ἐμβαδό τῆς βάσεως καί τό γ παριστάνει τό μῆκος τοῦ ὕψους του. Ἔτσι ἔχουμε

$$\boxed{V = (\text{Βάση}) \times (\text{ὕψος})} \tag{6}$$

Εἶναι φανερό ὅτι, ἄν τό πρίσμα εἶναι κύβος, τότε ὁ ὄγκος του, ἄν α εἶναι τό μῆκος τῆς ἀκμῆς του, θά δίνεται ἀπό τόν τύπο

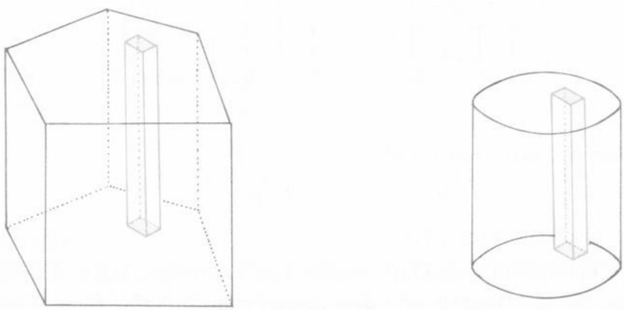
$$\boxed{V = \alpha^3} \tag{7}$$

Ὄγκος ὀρθοῦ πρίσματος καί κυλίνδρου.

10. 8. Ἄς πάρουμε ἕνα ὀρθό πρίσμα μέ βάση ὁποιοδήποτε πολύγωνο ἤ ἕναν κύλινδρο (σχ. 15). Τά ἐμβαδά τῶν βάσεων τῶν δύο στερεῶν μποροῦμε νά τά ὑπολογίσουμε.

Ἄς θεωρήσουμε ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο μέ βάση ἴση μέ τή μονάδα μετρήσεως τῶν ἐπιφανειῶν καί ὕψος τό ὕψος τοῦ ὀρθοῦ πρίσματος ἤ τοῦ κυλίνδρου. Μποροῦμε νά φανταστοῦμε ὅτι τό πρίσμα ἤ ὁ κύλινδρος εἶναι ἄθροισμα τέτοιων «μικρῶν» ὀρθογώνιων παραλληλεπιπέδων. Ὁ ὄγκος λοιπόν τοῦ ὀρθοῦ πρίσματος ἤ τοῦ κυλίνδρου θά εἶναι ἴσος μέ τό ἄθροισμα τῶν ὄγκων αὐτῶν τῶν ὀρθογώνιων παραλληλεπιπέδων πού ἔχουν γιά βάση τή μονάδα μετρήσεως τῶν ἐπιφανειῶν. Ὁ ὄγκος ὅμως κάθε ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου, σύμφωνα μέ τόν τύπο (6), εἶναι (βάση) $\times$ (ὕψος). Συνεπῶς ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος ἤ τοῦ κυλίνδρου θά εἶναι ἴσος μέ

(ἄθροισμα τῶν μοναδιαίων βάσεων) $\times$ (ὕψος).



(σχ. 15)

Ἐπειδή ὅμως τό ἄθροισμα τῶν μοναδιαίων βάσεων εἶναι τό ἐμβαδό τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος ἤ τοῦ κυλίνδρου, ὁ ζητούμενος ὄγκος θά εἶναι

$$\boxed{V = (\text{Βάση}) \times (\text{ὕψος})}$$

Βλέπουμε λοιπόν ὅτι ὁ τύπος (6) ἰσχύει γιά κάθε ὀρθό πρίσμα ὅπως καί γιά τόν κύλινδρο, γιά τόν ὁποῖο, ἐπειδή τό ἐμβαδό τῆς βάσεως εἶναι $\pi\rho^2$, ἔχουμε (ἄν ρ εἶναι ἡ ἀκτίνα τῆς βάσεως καί υ τό ὕψος του)

$$\boxed{V = \pi\rho^2 \,.\, \upsilon} \tag{8}$$

Ἀποδεικνύεται ὅτι ὁ τύπος (6) ἰσχύει ἀκόμη καί γιά τά πλάγια πρίσματα. Αὐτό μποροῦμε νά τό ἐπαληθεύσουμε εὔκολα παίρνοντας δύο δοχεῖα μέ ἴσα ὕψη καί ἰσοδύναμες βάσεις, ἀπό τά ὁποῖα τό ἕνα ἔχει σχῆμα ὀρθοῦ καί τό ἄλλο πλάγιου πρίσματος. Ἄν γεμίσουμε τά δοχεῖα μέ νερό, βλέπουμε ὅτι παίρνουν τήν ἴδια ἀκριβῶς ποσότητα. Αὐτό σημαίνει ὅτι ἔχουν τόν ἴδιο ὄγκο.

Γιά νά βροῦμε λοιπόν τόν ὄγκο ὁποιουδήποτε πρίσματος ἤ κυλίνδρου, πολλαπλασιάζουμε τό ἐμβαδό τῆς βάσεώς του μέ τό ὕψος του.

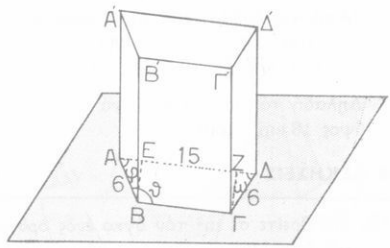
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Στό ὀρθό τετραπλευρικό πρίσμα τοῦ σχήματος 16 δίνονται (ΑΑ΄) = 20 cm, (ΑΔ) = 15 cm, (ΑΒ) = 6cm καί $(\widehat{\Delta AB})=60^0$, $(\widehat{A\Delta\Gamma})=60^0$, $(\widehat{AB\Gamma})=120^0$. Νά ὑπολογισθεῖ ἡ ὀλική του ἐπιφάνεια καί ὁ ὄγκος του.**

Λύση. Ἐπειδή $\widehat{\varphi}+\widehat{\theta}=60°+120°=$ $=180°$, θά εἶναι ΑΔ // ΒΓ, δηλαδή τό τετράπλευρο ΑΒΓΔ εἶναι τραπέζιο καί μάλιστα ἰσοσκελές, ἀφοῦ $\widehat{\varphi}=$ $=\widehat{\omega}$. Συνεπῶς εἶναι

$$(\Gamma\Delta) = 6 \text{ cm}.$$

Φέρνουμε τήν ΒΕ ⊥ ΑΔ καί τήν ΓΖ⊥ΑΔ. Ἀπό τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΕΒ καί ΓΖΔ ἔχουμε (ΑΕ) = $=(\Delta Z) = 6.\eta\mu 30°=6.\frac{1}{2}=3$ cm.



(σχ. 16)

Τότε εἶναι (ΒΓ) = (ΕΖ) = 15 − (3+3) = 9 cm. Τό ὕψος ΒΕ τοῦ τραπεζίου θά εἶναι

$$(BE) = 6 \,.\, \eta\mu\, 60° = 6 \,.\, \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}\text{cm}.$$

Ἡ βάση λοιπόν τοῦ πρίσματος ἔχει περίμετρο 15+6+9+6 = 36 cm καί ἐμβαδό

$$E_\beta = \frac{9+15}{2} \,.\, 3\sqrt{3} = 36\sqrt{3}\text{ cm}^2.$$

Ἀπό τόν τύπο (2) βρίσκουμε τώρα

$$E_{o\lambda} = 36 \,.\, 20 + 2.36\sqrt{3} = 72\,(10+\sqrt{3})\text{ cm}^2$$

ἤ μέ προσέγγιση ἑκατοστοῦ (ἄν πάρουμε $\sqrt{3}\simeq 1{,}73$), $E_{o\lambda}\simeq 844{,}56$ cm². Τέλος ἀπό τόν τύπο (6) ἔχουμε

$$V=36\sqrt{3} \,.\, 20 = 720\sqrt{3}\text{cm}^3 \quad \text{ἤ} \quad V\simeq 1245{,}6\text{ cm}^3$$

2. **Σ' ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο οἱ διαστάσεις εἶναι 2,3,6 cm. Νά ὑπολογισθεῖ μιά ὁποιαδήποτε διαγώνιός του.**

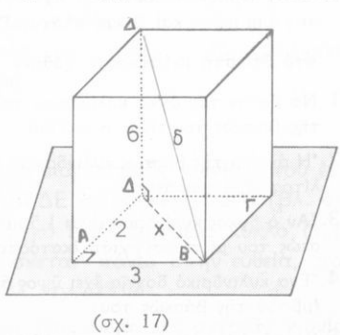
Λύση. Ἐφαρμόζοντας τό πυθαγόρειο θεώρημα στά ὀρθογώνια τρίγωνα ΔΑΒ καί ΒΔΔ΄ (βλ. σχ. 17), ἔχουμε

$$\left.\begin{aligned} \delta^2 &= 6^2 + x^2 \\ x^2 &= 2^2 + 3^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \delta^2 = 6^2+2^2+3^2$$

Συνεπῶς

$$\delta=\sqrt{6^2+2^2+3^2}=\sqrt{36+4+9}=\sqrt{49}=7\text{cm}.$$

Τό ἴδιο βρίσκουμε, ἄν ὑπολογίσουμε τό μῆκος μιᾶς ἄλλης διαγωνίου.



(σχ. 17)

3. **Θέλουμε νά κατασκευάσουμε ἕνα ράφι, πού νά χωράει ὁρισμένα κουτιά γάλα περιε-**

κτικότητας ἑνός λίτρου. Ἂν ἡ διάμετρος τοῦ κουτιοῦ εἶναι 8,5 cm, πόσο ὕψος πρέπει νά ἔχει τό ράφι; (1 λίτρο = 1000 cm³).

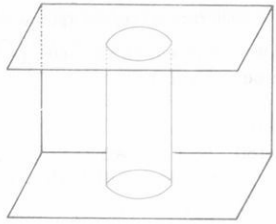
Λύση. Ἂν υ εἶναι τό ὕψος τοῦ ραφιοῦ, θά πρέπει νά εἶναι

$$1000 = 3{,}14 \cdot \left(\frac{8{,}5}{2}\right)^2 \cdot υ$$

Ἀπό τήν ἰσότητα αὐτή βρίσκουμε

$$υ = \frac{1000 \cdot 4}{3{,}14 \cdot (8{,}5)^2} = \frac{4000}{3{,}14 \cdot 72{,}25} \simeq 17{,}63\text{cm}$$

Δηλαδή τό ράφι πρέπει νά ἔχει ὠφέλιμο ὕψος 18 cm περίπου.



(σχ. 18)

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

12. Νά βρεῖτε σέ m³ τόν ὄγκο ἑνός ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου μέ βάση 40 cm² καί ὕψος 180 m.

13. Ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο κατασκευασμένο ἀπό μέταλλο ἔχει διαστάσεις 11 cm, 9 cm, 7 cm. Νά βρεῖτε σέ γραμμάρια βάρους (gr*) τό βάρος του, ἄν 1 cm³ τοῦ μετάλλου ζυγίζει 4,18 gr*.

14. Ποιός εἶναι ὁ ὄγκος κύβου, τοῦ ὁποίου ἡ ὁλική ἐπιφάνεια εἶναι 24 m²;

15. Ποιός εἶναι ὁ ὄγκος κύβου, τοῦ ὁποίου τό ἄθροισμα ὅλων τῶν ἀκμῶν εἶναι 48 m;

16. Νά ὑπολογίσετε τόν ὄγκο ὀρθοῦ πρίσματος, τοῦ ὁποίου ἡ βάση εἶναι τρίγωνο μέ μιά πλευρά 0,52 m καί ἀντίστοιχο ὕψος 0,36 m, ἄν τό ὕψος τοῦ πρίσματος εἶναι 3,20 m.

17. Ποιός εἶναι ὁ ὄγκος ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου μέ βάση τετράγωνο, ἄν τό ἐμβαδό τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειάς του εἶναι 3,4720 m² καί τό ὕψος του 1,40m;

18. Νά ὑπολογίσετε τό ὕψος ὀρθοῦ πρίσματος, τοῦ ὁποίου ἡ παράπλευρη ἐπιφάνεια ἔχει ἐμβαδό 10,40 m² καί ἡ κανονική πενταγωνική βάση ἔχει πλευρά μήκους 2,60 m.

19. Μιά ἀντλία ἀντλεῖ 6 ἑκατόλιτρα νερό στό λεπτό. Πόσο χρόνο θά χρειαστεῖ, γιά νά ἀντλήσει τό νερό πού ἔχει ἀνεβεῖ στό 1,5 m μέσα σέ ἕνα ὑπόγειο, ἄν τό πάτωμα τοῦ ὑπογείου εἶναι ὀρθογώνιο μέ διαστάσεις 15,90 m καί 7 m;

20. Ἕνας κορμός δένδρου, πού εἶχε ὄγκο 640 dm³, μετατράπηκε σέ δοκάρι μέ διαστάσεις 4 m μῆκος καί 30 cm πλάτος. Ποιό εἶναι τό πάχος τοῦ δοκαριοῦ, ἄν εἶναι γνωστό ὅτι στή μετατροπή χάθηκε τό $\frac{1}{4}$ τοῦ ὄγκου τοῦ κορμοῦ;

21. Νά βρεῖτε τόν ὄγκο κυλίνδρου, τοῦ ὁποίου τό ὕψος εἶναι $υ = 4$ cm καί ἡ ἀκτίνα τῆς βάσεώς του εἶναι $ρ = 2$ cm.

22. Ἡ ἀκτίνα τῆς βάσεως κυλινδρικοῦ δοχείου εἶναι 1,4 m καί τό ὕψος του 2 m. Πόσα λίτρα νερό χωράει;

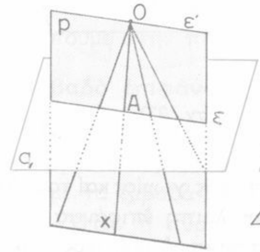
23. Ἂν ὁ ὄγκος κυλίνδρου εἶναι 1,5 m³ καί τό ὕψος 3 m, ποιά εἶναι ἡ ἀκτίνα τῆς βάσεώς του μέ προσέγγιση ἑκατοστοῦ;

24. Ἕνα κυλινδρικό δοχεῖο ἔχει ὕψος 50 mm καί χωράει 305 mm³ νερό. Ποιό εἶναι τό ἐμβαδό τῆς βάσεώς του;

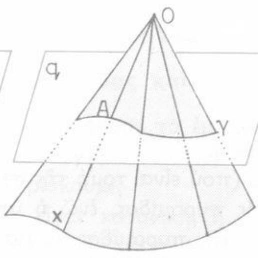
25. Ἡ παράπλευρη ἐπιφάνεια κυλίνδρου ἔχει ἐμβαδό 456,16 cm² καί τό ὕψος του εἶναι 6 cm. Νά βρεθεῖ ὁ ὄγκος του ($π \simeq 3{,}14$).

Κωνικές ἐπιφάνειες. Στερεές γωνίες.

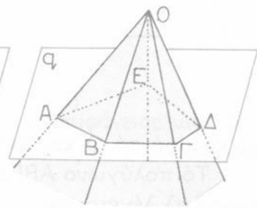
10. 9. Ἄς θεωρήσουμε ἕνα ἐπίπεδο q, ἕνα σταθερό σημεῖο O ἔξω ἀπό τό q καί μιά ἡμιευθεία Ox, ἡ ὁποία τέμνει τό q στό σημεῖο A. Ὅταν ἡ ἡμιευθεία κινεῖται κατά τέτοιο τρόπο, ὥστε τό σημεῖο A νά γράφει μιά εὐθεία ε τοῦ q (βλ. σχ. 19), ἀπό τήν κίνηση τῆς Ox παράγεται ἕνα ἡμι-



(σχ. 19)



(σχ. 20)



(σχ. 21)

επίπεδο p (πού ἔχει ἀκμή μιά εὐθεία ε′||ε). Ὅταν ἡ ἡμιευθεία κινεῖται ἔτσι, ὥστε τό A νά γράφει μιά γραμμή γ τοῦ q (βλ. σχ. 20), τότε ἀπό τήν κίνηση τῆς Ox παράγεται μιά ἐπιφάνεια, πού λέγεται **κωνική ἐπιφάνεια μέ κορυφή τό O.**

Ἡ ἡμιευθεία Ox, πού παράγει τήν κωνική ἐπιφάνεια, λέγεται **γενέτειρα**, καί ἡ γραμμή γ, πού διαγράφεται ἀπό τό A, λέγεται **ὁδηγός** τῆς κωνικῆς ἐπιφάνειας.

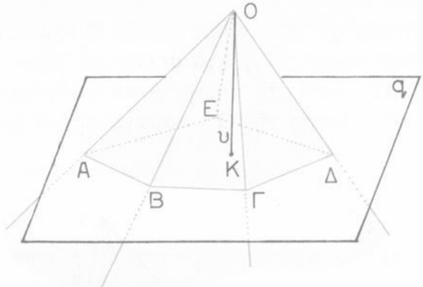
10. 10. Κάθε κωνική ἐπιφάνεια, πού ἔχει ὁδηγό τήν περίμετρο ἑνός πολυγώνου ΑΒΓΔΕ (βλ. σχ. 21), περικλείει ἕνα μέρος τοῦ χώρου, τό ὁποῖο λέγεται **στερεά γωνία.** Ἡ ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία περικλείει μιά στερεά γωνία, ἀποτελεῖται ἀπό ἐπίπεδες γωνίες, πού λέγονται **ἕδρες** τῆς στερεᾶς γωνίας καί τό σημεῖο O εἶναι **κορυφή** τῆς στερεᾶς γωνίας.

Μιά στερεά γωνία, πού ἔχει τρεῖς, τέσσερες, πέντε,... ἕδρες, λέγεται ἀντίστοιχα **τρίεδρη, τετράεδρη, πεντάεδρη,...**

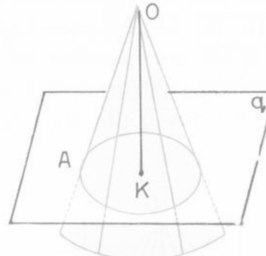
Πυραμίδα καί κῶνος.

10. 11. Ἄς θεωρήσουμε τήν ἐπιφάνεια μιᾶς στερεᾶς γωνίας, πού ἔχει ὁδηγό τήν περίμετρο ἑνός πολυγώνου ΑΒΓΔΕ καί κορυφή τό O (βλ. σχ. 22) ἤ μιά κωνική ἐπιφάνεια, πού ἔχει ὁδηγό ἕναν ὁρισμένο κύκλο (K,ρ) ἑνός ἐπιπέδου q καί ἡ κορυφή της O βρίσκεται πάνω στήν εὐθεία, πού εἶναι κάθετη πρός τό q στό σημεῖο K (βλ. σχ. 23).

Τό στερεό, πού περικλείεται ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς στερεᾶς γωνίας καί τό ἐπίπεδο q, λέγεται **πυραμίδα** μέ κορυφή τό O, ἐνῶ τό στερεό, πού περικλείεται ἀπό τήν κωνική ἐπιφάνεια καί τό ἐπίπεδο q, λέγεται **κῶνος**



(σχ. 22)



(σχ. 23)

μέ κορυφή τό O καί ἀκτίνα ρ.

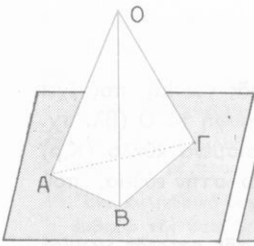
Τό πολύγωνο ΑΒΓΔΕ (πού εἶναι τομή τῆς στερεᾶς γωνίας καί τοῦ ἐπιπέδου q) λέγεται **βάση** τῆς πυραμίδας, ἐνῶ ἡ ὑπόλοιπη ἐπιφάνεια λέγεται **παράπλευρη ἐπιφάνεια** τῆς πυραμίδας. Ἀντίστοιχα, ὁ κυκλικός δίσκος (K,ρ) λέγεται **βάση** τοῦ κώνου, ἐνῶ ἡ ὑπόλοιπη ἐπιφάνειά του λέγεται **παράπλευρη ἐπιφάνεια** τοῦ κώνου.

Ἡ ἀπόσταση τῆς κορυφῆς O ἀπό τή βάση τῆς πυραμίδας ἤ τοῦ κώνου λέγεται **ὕψος.**

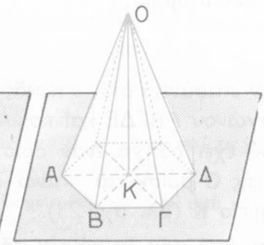
Σέ κάθε πυραμίδα παρατηροῦμε ὅτι:

- Ἡ παράπλευρη ἐπιφάνεια ἀποτελεῖται ἀπό τρίγωνα, τά ὁποῖα μαζί μέ τή βάση της ἀποτελοῦν τίς **ἕδρες** τῆς πυραμίδας.
- Οἱ πλευρές τῶν ἑδρῶν τῆς πυραμίδας ἀποτελοῦν τίς **ἀκμές** της. Ἔχουμε λοιπόν τίς «παράπλευρες» ἀκμές ΟΑ, ΟΒ,ΟΓ,... καί τίς ἀκμές τῆς βάσεως ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ,...

Μία πυραμίδα, πού ἔχει βάση τρίγωνο, τετράπλευρο, πεντάγωνο,... λέγεται ἀντίστοιχα **τριγωνική, τετραπλευρική, πενταγωνική,** ... Ἡ τριγωνική πυραμίδα ἔχει συνολικά 4 ἕδρες, γι' αὐτό λέγεται καί **τετράεδρο** (βλέπε σχ. 24).



σχ. 24



σχ. 25

Μιά πυραμίδα λέγεται **κανονική**, ὅταν ἡ βάση της εἶναι κανονικό πολύγωνο καί τό ἴχνος τοῦ ὕψους της εἶναι τό κέντρο τῆς βάσεως.

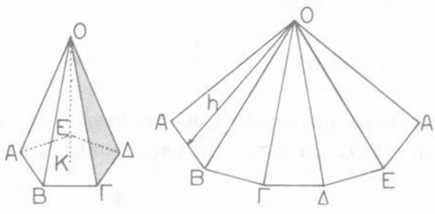
Ἄν Κ εἶναι τό κέντρο τῆς βάσεως μιᾶς κανονικῆς πυραμίδας (βλ. σχ. 25), θά ἔχουμε ΚΑ = ΚΒ = ΚΓ = ... Τότε ὅμως καί τά πλάγια τμήματα ΟΑ, ΟΒ,ΟΓ,... εἶναι ἴσα καί συνεπῶς **οἱ παράπλευρες ἕδρες κανονικῆς πυραμίδας εἶναι ἴσα ἰσοσκελῆ τρίγωνα** (γιατί ἔχουν τίς πλευρές τους μία πρός μία ἴσες).

Γνωστές σ' ὅλο τόν κόσμο εἶναι οἱ πυραμίδες τῆς Αἰγύπτου, πού βλέπουμε στήν πιό πάνω φωτογραφία.

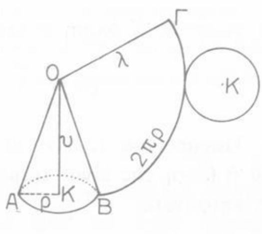
Ἐμβαδὸ ἐπιφάνειας πυραμίδας καὶ κώνου.

10. 12. Γιά νά ὑπολογίσουμε τό ἐμβαδό τῆς ἐπιφάνειας μιᾶς ὁποιασδήποτε πυραμίδας, ὑπολογίζουμε τό ἐμβαδό κάθε ἕδρας της καί προσθέτουμε τά ἐμβαδά πού βρίσκουμε.

Ὅταν ἡ πυραμίδα εἶναι κανονική, ἡ παράπλευρη ἐπιφάνειά της ἀποτελεῖται ἀπό ἴσα ἰσοσκελῆ τρίγωνα (βλ. σχ. 26), τά ὁποῖα ἔχουν



(σχ. 26)



(σχ. 27)

ἴσα ὕψη ἀπό τό Ο. Ἄν λοιπόν ὀνομάσουμε h τό ὕψος[1] καθενός ἀπό αὐτά τά τρίγωνα, ἡ παράπλευρη ἐπιφάνεια θά ἔχει ἐμβαδό

$$
\begin{aligned}
E_\pi &= (\mathrm{AOB}) + (\mathrm{BO\Gamma}) + (\Gamma\mathrm{O}\Delta) + (\Delta\mathrm{OE}) + (\mathrm{EOA}) \\
&= \frac{1}{2}(\mathrm{AB})h + \frac{1}{2}(\mathrm{B\Gamma})\,h + \frac{1}{2}(\Gamma\Delta)\,h + \frac{1}{2}(\Delta\mathrm{E})h + \frac{1}{2}(\mathrm{EA})h \\
&= \frac{1}{2}[(\mathrm{AB}) + (\mathrm{B\Gamma}) + (\Gamma\Delta) + (\Delta\mathrm{E}) + (\mathrm{EA})]h
\end{aligned}
$$

ἤ τελικά

$$
(9) \qquad \boxed{E_\pi = \frac{1}{2}\ (\text{Περίμετρος βάσεως}) \cdot h}
$$

1. Τό ὕψος h τό λέμε καί *ἀπόστημα* τῆς κανονικῆς πυραμίδας.

Συνεπῶς, ἄν ὀνομάσουμε E_β τό ἐμβαδό τῆς βάσεως τῆς πυραμίδας, τό ἐμβαδό τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειάς της θά εἶναι

$$\boxed{E_{o\lambda} = E_\pi + E_\beta}$$

10. 13. Γιά νά μετρήσουμε τήν παράπλευρη ἐπιφάνεια ἑνός κώνου, κόβουμε ἕνα χαρτί (βλ. σχ. 27) σέ σχῆμα κυκλικοῦ τομέα μέ ἀκτίνα ἴση μέ τή γενέτειρα τοῦ κώνου καί τό τυλίγουμε γύρω ἀπό τόν κῶνο, μέχρι νά καλύψουμε ὁλόκληρη τήν παράπλευρη ἐπιφάνειά του. Ἄν τώρα ξετυλίξουμε τό χαρτί, ὁ κυκλικός τομέας παριστάνει τήν παράπλευρη ἐπιφάνεια τοῦ κώνου. Ἐπειδή ὅμως ἡ ἀκτίνα τοῦ κυκλικοῦ τομέα εἶναι ἴση, ὅπως εἴπαμε, μέ τή γενέτειρα λ τοῦ κώνου, ἐνῶ τό μῆκος τοῦ τόξου ΒΓ εἶναι ἴσο μέ τό μῆκος 2πρ τοῦ κύκλου τῆς βάσεως τοῦ κώνου, τό ἐμβαδό τοῦ κυκλικοῦ τομέα εἶναι $\frac{1}{2}$ (μῆκος ΒΓ)$\cdot\lambda = \frac{1}{2}(2\pi\rho)\cdot\lambda$. Ἔτσι ἡ παράπλευρη ἐπιφάνεια τοῦ κώνου θά ἔχει ἐμβαδό

$$(10) \qquad \boxed{E_\pi = \pi\rho\lambda}$$

καί συνεπῶς ἡ ὁλική ἐπιφάνειά του θά εἶναι

$$(11) \qquad \boxed{E_{o\lambda} = \pi\rho\lambda + \pi\rho^2}$$

Παράδειγμα 1. Δίνεται μιά κανονική πυραμίδα, πού ἔχει ὕψος $\upsilon = 7$ cm, ἐνῶ ἡ βάση της εἶναι τετράγωνο μέ πλευρά 4 cm. Νά ὑπολογισθεῖ ἡ ὁλική της ἐπιφάνεια.

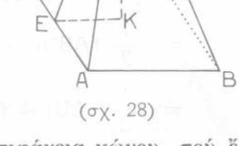
Λύση. Ἐπειδή ἡ βάση της εἶναι τετράγωνο, θά ἔχουμε (ΚΕ)=(ΕΑ)=2cm. Ἀπό τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΟΚΕ παίρνουμε

$$h = \sqrt{7^2+2^2} = \sqrt{53} \simeq 7{,}28 \text{ cm}$$

καί συνεπῶς

$$E_\pi = \frac{1}{2}(4.4)\cdot 7{,}28 = 58{,}24 \text{ cm}^2$$

$$E_{o\lambda} = E_\pi + E_\beta = 58{,}24 + 16 = 74{,}24 \text{ cm}^2$$



(σχ. 28)

Παράδειγμα 2. Νά ὑπολογισθεῖ ἡ ὁλική ἐπιφάνεια κώνου, πού ἔχει ἀκτίνα $\rho = 3$ cm καί ὕψος $\upsilon = 4$ cm.

Λύση. Ἡ γενέτειρα τοῦ κώνου εἶναι $\lambda = \sqrt{3^2+4^2} = 5$ cm καί συνεπῶς

$$E_\pi = 3{,}14\cdot 3\cdot 5 = 47{,}1 \text{ cm}^2$$

$$E_{o\lambda} = 47{,}1 + 3{,}14\cdot 9 = 47{,}1 + 28{,}26 = 75{,}36 \text{ cm}^2$$

26. Μιά κανονική τετραπλευρική πυραμίδα ἔχει ὕψος 12 m καί πλευρά βάσεως μήκους 6 m. Νά βρεῖτε τήν ὁλική της ἐπιφάνεια.

27. Μιά κανονική τετραπλευρική πυραμίδα τῆς Αἰγύπτου ἔχει πλευρά βάσεως μέ μῆκος 746m καί τό ὕψος της εἶναι 450m. Νά βρεῖτε α) τό μῆκος μιᾶς παράπλευρης ἀκμῆς, β) τό ὕψος μιᾶς παράπλευρης ἕδρας της (ἀπόστημα), γ) τό ἐμβαδό τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειάς της.

28. Τό ἐμβαδό τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας μιᾶς κανονικῆς τριγωνικῆς πυραμίδας εἶναι 15 m^2 καί τό ἀπόστημά της 3,8 m. Νά βρεῖτε τό μῆκος μιᾶς παράπλευρης ἀκμῆς της.

29. Μιά κανονική πενταγωνική πυραμίδα ἔχει πλευρά βάσεως 2,5 m καί ἀπόστημα 4,20 m. Ποιό εἶναι τό ἐμβαδό τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειάς της;

30. Νά ὑπολογίσετε τό ἐμβαδό τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας κώνου πού ἔχει ὕψος 9 mm καί ἀκτίνα βάσεως 4,5 mm.

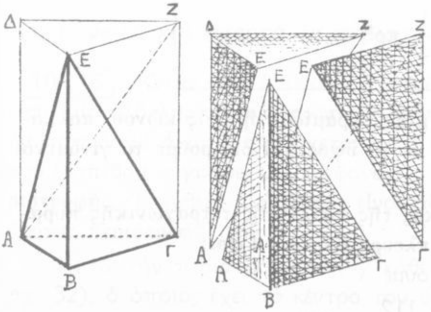
31. Τό ἐμβαδό τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας ἑνός κώνου εἶναι 22,4 m^2 καί ἡ γενέτειρά του λ ἔχει μῆκος 8 m. Νά βρεῖτε τό ἐμβαδό τῆς βάσεως τοῦ κώνου.

32. Μιά κυλινδρική κολώνα μέ διάμετρο 4 m καί ὕψος 6 m ἔχει στό πάνω μέρος της ἕναν κῶνο μέ τήν ἴδια βάση καί ὕψος 3 m. Νά βρεῖτε τό ἐμβαδό τοῦ μεταλλικοῦ φύλλου, πού χρειάζεται, γιά νά καλυφθεῖ ὁλόκληρη ἡ παράπλευρη ἐπιφάνεια.

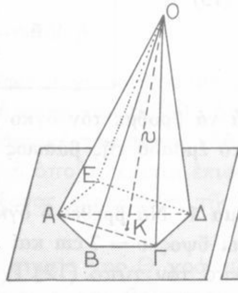
33. Νά ὑπολογίσετε τό ἐμβαδό τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας κώνου, πού ἔχει ἀκτίνα βάσεως $\rho = 4$ cm, ἄν γνωρίζετε ὅτι τό ἡμίτονο τῆς γωνίας $\widehat{\varphi}$ μιᾶς γενέτειρας καί τοῦ ὕψους εἶναι $\eta\mu\varphi = 0{,}54$.

Ὄγκος πυραμίδας καί κώνου.

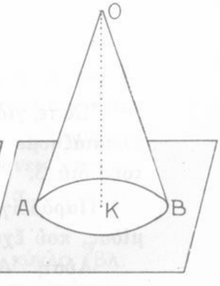
10. 14. Ἄς θεωρήσουμε ἕνα ὁποιοδήποτε τριγωνικό πρίσμα ΑΒΓΔΕΖ, τό ὁποῖο χωρίζεται ἀπό τά ἐπίπεδα ΕΑΓ καί ΕΑΖ σέ τρεῖς πυραμίδες (βλ. σχ. 29). Σέ μεγαλύτερη τάξη θά ἀποδείξουμε ὅτι οἱ τρεῖς αὐτές πυραμίδες ἔχουν ἴσους ὄγκους. Συνεπῶς κάθε μία ἀπό αὐτές θά ἔχει ὄγκο ἴσο μέ τό $\frac{1}{3}$ τοῦ ὄγκου τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος. Ἡ πυραμίδα ὅμως Ε·ΑΒΓ



(σχ. 29)



(σχ. 30)



(σχ. 31)

ἔχει τήν ἴδια βάση ΑΒΓ καί τό ἴδιο ὕψος υ μέ τό πρίσμα. Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι ὁ ὄγκος μιᾶς τριγωνικῆς πυραμίδας εἶναι

$$\boxed{V = \frac{1}{3}\,(\text{Βάση}) \times (\text{ὕψος})}$$

Κάθε πυραμίδα ὅμως, π.χ. ἡ Ο.ΑΒΓΔΕ, χωρίζεται σέ τριγωνικές πυραμίδες, πού ἔχουν ὅλες τό ἴδιο ὕψος υ (βλ. σχ. 30). Τό ἄθροισμα τῶν βάσεων ὅλων τῶν τριγωνικῶν πυραμίδων ἀποτελεῖ τή βάση τῆς πενταγωνικῆς πυραμίδας Ο.ΑΒΓΔΕ. Συνεπῶς ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδας αὐτῆς εἶναι

$$V = \frac{1}{3}(\text{ΑΒΓ})\cdot υ + \frac{1}{3}\,(\text{ΓΑΔ})υ + \frac{1}{3}\,(\text{ΔΕΑ})\cdot υ$$

$$= \frac{1}{3}\,[(\text{ΑΒΓ}) + (\text{ΓΑΔ}) + \text{ΔΑΕ})]υ$$

ἤ τελικά

$$(12) \qquad \boxed{V = \frac{1}{3}\,(\text{Βάση}) \times \text{ὕψος})}$$

10. 15. Γιά νά βροῦμε τώρα τόν ὄγκο ἑνός κώνου (βλ. σχ. 31), μποροῦμε νά τόν φανταστοῦμε σάν μιά κανονική πυραμίδα, πού ἔχει τό ἴδιο ὕψος καί ἀμέτρητο ἀριθμό πλευρῶν. Οἱ κορυφές τῆς βάσεως αὐτῆς τῆς πυραμίδας θά εἶναι τόσο πολύ κοντά ἡ μία στήν ἄλλη, ὥστε τό ἐμβαδό τῆς βάσεώς της θά εἶναι σχεδόν ὅσο τό ἐμβαδό τοῦ κυκλικοῦ δίσκου. Τότε ὅμως καί ὁ ὄγκος τοῦ κώνου θά εἶναι σχεδόν ἴσος μέ τόν ὄγκο τῆς πυραμίδας αὐτῆς, δηλαδή:

$$(13) \qquad \boxed{\begin{array}{l} V = \dfrac{1}{3}\,(\text{Βάση}) \times (\text{ὕψος}) \\[2ex] \text{ἤ } V = \dfrac{1}{3}\,\pi\rho^2.υ \end{array}}$$

Ὥστε, **γιά νά βροῦμε τόν ὄγκο μιᾶς πυραμίδας ἤ ἑνός κώνου, πολλαπλασιάζουμε τό ἐμβαδό τῆς βάσεως μέ τό ὕψος καί διαιροῦμε τό γινόμενό τους διά 3.**

Παράδειγμα 1. Νά βρεθεῖ ὁ ὄγκος τῆς κανονικῆς τετραγωνικῆς πυραμίδας, πού ἔχει ὕψος υ = 7 cm καί πλευρά βάσεως 4 cm.

Λύση. Ἀπό τόν τύπο (12) ἔχουμε

$$V = \frac{1}{3}\cdot 4^2\cdot 7 = \frac{112}{3} = 37\,{}^1/_3\ \text{cm}^2$$

Παράδειγμα 2. Νά ὑπολογισθεῖ ὁ ὄγκος κώνου πού ἔχει ἀκτίνα βάσεως $\rho = 3$ cm καί ὕψος $\upsilon = 4$ cm.

Λύση. Ἀπό τόν τύπο (13) ἔχουμε :

$$V = \frac{1}{3}(3{,}14)\cdot 3^2 \cdot 4 = 12\cdot 3{,}14 = 37{,}68 \text{ cm}^3$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

34. Μιά κανονική τετραπλευρική πυραμίδα ἔχει ὕψος 12 m καί πλευρά βάσεως 6 m. Νά ὑπολογίσετε τόν ὄγκο της.

35. Μιά τριγωνική πυραμίδα ἔχει ὕψος 2,55 m. Ἡ βάση της εἶναι τρίγωνο μέ μιά πλευρά 0,72 m καί ἀντίστοιχο ὕψος 0,80 m. Νά ὑπολογισθεῖ ὁ ὄγκος της.

36. Νά ὑπολογίσετε τόν ὄγκο μιᾶς κανονικῆς πυραμίδας, πού ἔχει βάση τετράγωνο μέ πλευρά 2,30 m καί ἀπόστημα 4,10 m.

37. Νά ὑπολογίσετε τόν ὄγκο κανονικῆς ἑξαγωνικῆς πυραμίδας, πού ἔχει πλευρά βάσεως 1,5 m καί ὕψος 8 m.

38. Ποιό εἶναι τό ἐμβαδό τῆς βάσεως μιᾶς πυραμίδας, τῆς ὁποίας ὁ ὄγκος εἶναι 5,445 m^3 καί τό ὕψος 3,63 m;

39. Νά ὑπολογίσετε τόν ὄγκο κανονικῆς τετραπλευρικῆς πυραμίδας, πού ἔχει πλευρά βάσεως 6 m καί παράπλευρη ἀκμή 9,16 m.

40. Ἡ παράπλευρη ἐπιφάνεια ἑνός κώνου ἔχει ἐμβαδό 5,60 m^2 καί ἡ γενέτειρά του ἔχει μῆκος 1,80 m. Νά ὑπολογίσετε α) τήν ἀκτίνα τῆς βάσεως του, β) τό ὕψος του καί γ) τόν ὄγκο του.

41. Θέλουμε νά κατασκευάσουμε μιά κωνική σκηνή, ἡ ὁποία νά ἔχει ὄγκο τουλάχιστο 20 m^3. Ἄν τό ὕψος τῆς σκηνῆς εἶναι 3 m, πόση πρέπει νά εἶναι ἡ διάμετρος τῆς βάσεως;

42. Πῶς μεταβάλλεται ὁ ὄγκος κώνου, ὅταν διπλασιάσουμε α) τό ὕψος του, β) τήν ἀκτίνα τῆς βάσεώς του καί γ) τό ὕψος καί τήν ἀκτίνα του;

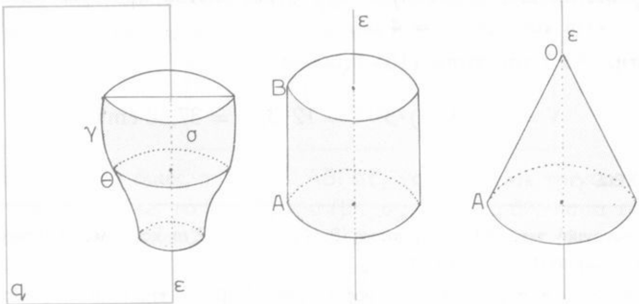
43. Νά συγκρίνετε τό λόγο τῶν ὑψῶν μέ τό λόγο τῶν ἀκτίνων δύο κώνων, πού ἔχουν ἴσους ὄγκους. Τό ὕψος καί ἡ ἀκτίνα τῶν δύο κώνων εἶναι ἀντίστοιχα υ_1, ρ_1 καί υ_2, ρ_2.

Ἐπιφάνειες καί στερεά ἐκ περιστροφῆς.

10. 16. Ὅταν ἕνα ἐπίπεδο q στρέφεται γύρω ἀπό μία εὐθεία του ε κατά μία ὁλόκληρη περιστροφή (δηλαδή κατά γωνία 360°, ὁπότε τό κάθε ἡμιεπίπεδο μέ ἀκμή ε ξανάρχεται στήν ἀρχική του θέση), κάθε γραμμή γ τοῦ ἐπιπέδου q γράφει μιά ἐπιφάνεια σ, ἡ ὁποία λέγεται **ἐπιφάνεια ἐκ περιστροφῆς**. Ἡ εὐθεία ε, ἡ ὁποία εἶναι ἄξονας συμμετρίας τῆς σ, λέγεται **ἄξονας περιστροφῆς** τῆς σ.

Κατά τήν περιστροφή τῆς γ κάθε σημεῖο της Θ γράφει κύκλο (βλ. σχ. 32), ὁ ὁποῖος ἔχει τό κέντρο του στήν ε καί βρίσκεται σέ ἐπίπεδο κάθετο στήν ε.

Εἶναι φανερό ὅτι ἕνα τμῆμα ΑΒ παράλληλο πρός τήν ε γράφει τήν

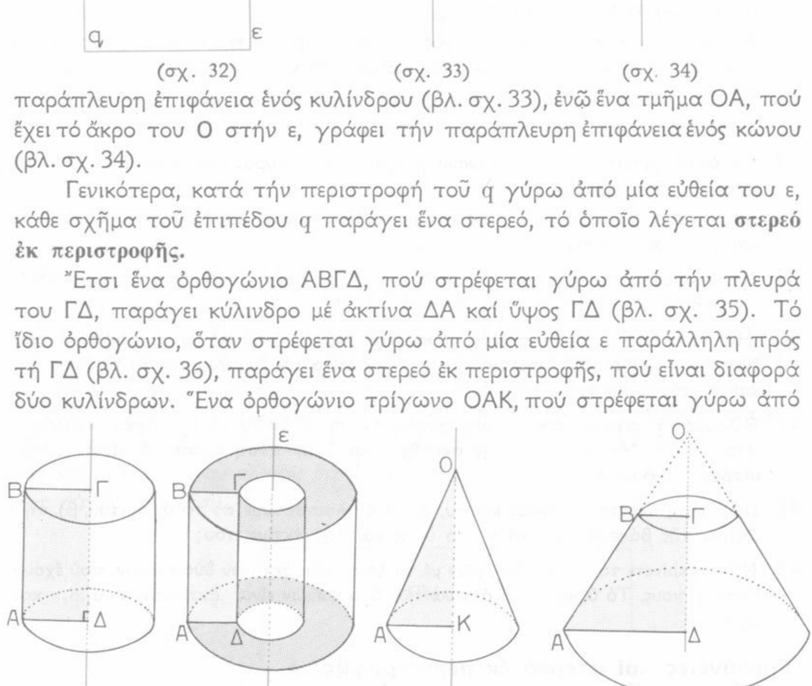


(σχ. 32) (σχ. 33) (σχ. 34)

παράπλευρη ἐπιφάνεια ἑνός κυλίνδρου (βλ. σχ. 33), ἐνῶ ἕνα τμῆμα ΟΑ, πού ἔχει τό ἄκρο του Ο στήν ε, γράφει τήν παράπλευρη ἐπιφάνεια ἑνός κώνου (βλ. σχ. 34).

Γενικότερα, κατά τήν περιστροφή τοῦ q γύρω ἀπό μία εὐθεία του ε, κάθε σχῆμα τοῦ ἐπιπέδου q παράγει ἕνα στερεό, τό ὁποῖο λέγεται **στερεό ἐκ περιστροφῆς.**

Ἔτσι ἕνα ὀρθογώνιο ΑΒΓΔ, πού στρέφεται γύρω ἀπό τήν πλευρά του ΓΔ, παράγει κύλινδρο μέ ἀκτίνα ΔΑ καί ὕψος ΓΔ (βλ. σχ. 35). Τό ἴδιο ὀρθογώνιο, ὅταν στρέφεται γύρω ἀπό μία εὐθεία ε παράλληλη πρός τή ΓΔ (βλ. σχ. 36), παράγει ἕνα στερεό ἐκ περιστροφῆς, πού εἶναι διαφορά δύο κυλίνδρων. Ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ΟΑΚ, πού στρέφεται γύρω ἀπό

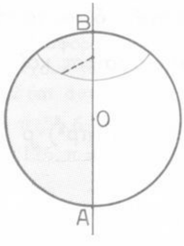


(σχ. 35) (σχ. 36) (σχ. 37) (σχ. 38)

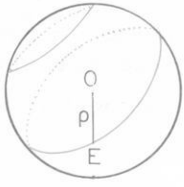
τήν κάθετη πλευρά του ΟΚ, παράγει κῶνο μέ ἀκτίνα ΚΑ καί ὕψος ΟΚ (βλ. σχ. 37). Τέλος, ἕνα τραπέζιο ΑΒΓΔ μέ $\widehat{\Gamma}=\widehat{\Delta}=90^\circ$ ὅταν στρέφεται γύρω ἀπό τήν πλευρά του ΓΔ, παράγει ἕνα στερεό, πού εἶναι διαφορά δύο κώνων καί λέγεται **κόλουρος κῶνος** (βλ. σχ. 38).

Σφαίρα.

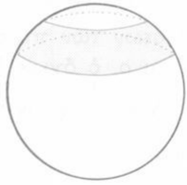
10. 17. Ἄν θεωρήσουμε ἕναν ἡμικυκλικό δίσκο (Ο,ρ) μέ διάμετρο ΑΒ καί περιστρέψουμε τό ἐπίπεδό του γύρω ἀπό τήν εὐθεία ΑΒ, τό στερεό πού παράγεται ἀπό τήν περιστροφή τοῦ ἡμικυκλικοῦ δίσκου λέγεται **σφαίρα** μέ κέντρο Ο καί ἀκτίνα ρ (βλ. σχ. 39). Κατά τήν περιστροφή αὐ-



(σχ. 39)



(σχ. 40)


(σχ. 41)

τή τό ἡμικύκλιο $\widehat{AB}$ γράφει τήν **ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας.** Ἡ ἀπόσταση ἑνός ὁποιουδήποτε σημείου τῆς ἐπιφάνειας μιᾶς σφαίρας ἀπό τό κέντρο της εἶναι ἴση μέ τήν ἀκτίνα της ρ.

Ἄν φέρουμε ἕνα ὁποιοδήποτε ἐπίπεδο, πού διέρχεται ἀπό τό κέντρο Ο τῆς σφαίρας (βλ. σχ. 40), ἡ τομή τοῦ ἐπιπέδου μέ τήν ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας εἶναι κύκλος ἀκτίνας ρ (ἀφοῦ ὅλα τά σημεῖα τῆς τομῆς ἀπέχουν ἀπό τό Ο ἀπόσταση ρ). Ἕνας τέτοιος κύκλος λέγεται **μέγιστος κύκλος** τῆς σφαίρας. Ἡ τομή τῆς ἐπιφάνειας τῆς σφαίρας μέ ὁποιοδήποτε ἄλλο ἐπίπεδο, πού δέ διέρχεται ἀπό τό κέντρο της, εἶναι πάλι κύκλος, ἀλλά τώρα ἡ ἀκτίνα του εἶναι μικρότερη ἀπό ρ, γι᾽ αὐτό καί λέγεται **μικρός κύκλος** τῆς σφαίρας.

Τό μέρος τῆς ἐπιφάνειας τῆς σφαίρας, πού περιέχεται μεταξύ δύο παράλληλων ἐπιπέδων, πού τέμνουν τή σφαίρα (βλ. σχ. 41), λέγεται **σφαιρική ζώνη.**

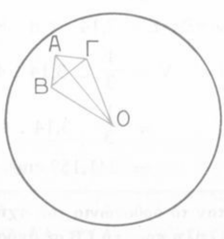
10. 18. Ἀποδεικνύεται ὅτι **τό ἐμβαδό τῆς ἐπιφάνειας μιᾶς σφαίρας εἶναι ἴσο μέ τό ἐμβαδό τεσσάρων μεγίστων κύκλων της,** δηλαδή εἶναι

$$E_\sigma = 4\,\pi\rho^2 \tag{14}$$

Ἔτσι π.χ. ἄν μιά σφαίρα ἔχει ἀκτίνα $\rho = 5$ cm, τό ἐμβαδό τῆς ἐπιφάνειάς της εἶναι

$E_\sigma = 4\cdot 3{,}14\cdot 5^2 = 100\cdot 3{,}14 = 314\ \text{cm}^2$.

Γιά νά βροῦμε τόν ὄγκο μιᾶς σφαίρας, πού ἔχει ἀκτίνα ρ, σκεφτόμαστε ὡς ἑξῆς: Ἄν πάρουμε τρία πολύ γειτονικά σημεῖα Α, Β, Γ πάνω στήν ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας, μποροῦμε νά ὑποθέσουμε ὅτι ἡ τριγωνική πυραμίδα Ο.ΑΒΓ ἔχει ὕψος ρ καί ἡ βάση της ΑΒΓ ταυτίζεται μέ ἕνα μέρος τῆς ἐπιφάνειας τῆς σφαίρας. Φανταζόμαστε τώρα ὅτι ἡ σφαίρα εἶναι ἄθροι-



(σχ. 42)

σμα τέτοιων τριγωνικῶν πυραμίδων, πού ὅλες ἔχουν τό ἴδιο ὕψος ρ. Ἔτσι ὁ ὄγκος της θά εἶναι ἴσος μέ τό ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν πυραμίδων αὐτῶν, πού εἶναι $\frac{1}{3}$ (ἄθροισμα βάσεων) $\times$ (ὕψος). Ἐπειδή ὅμως τό ἄθροισμα τῶν βάσεων τῶν πυραμίδων εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας καί τό ὕψος τους εἶναι ρ, ὁ ὄγκος V τῆς σφαίρας θά εἶναι:

$$V = \frac{1}{3}\ (\text{ἐπιφάνεια σφαίρας}) \times (\text{ἀκτίνα}) = \frac{1}{3}(4\pi\rho^2)\cdot\rho$$

ἤ τελικά

$$(15) \qquad \boxed{V = \frac{4}{3}\ \pi\rho^3}$$

Ἔτσι π.χ. ἄν μιά σφαίρα ἔχει ἀκτίνα $\rho = 5$ cm, ὁ ὄγκος της εἶναι

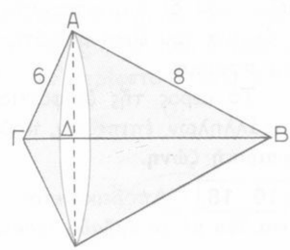
$$V = \frac{4}{3}\cdot 3{,}14\cdot 5^3 = \frac{500}{3}\cdot 3{,}14 \simeq 523{,}33\ \text{cm}^3$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A}=90^0$) στρέφεται γύρω ἀπό τήν ὑποτείνουσά του ΒΓ. Νά βρεῖτε τήν ἐπιφάνεια καί τόν ὄγκο τοῦ στερεοῦ πού παράγεται, ἄν (ΑΒ)=8cm καί (ΑΓ)=6cm.**

Λύση. Τό στερεό, πού παράγεται, ἀποτελεῖται ἀπό δύο κώνους, πού ἔχουν κοινή βάση μέ ἀκτίνα τό ὕψος ΑΔ τοῦ τριγώνου καί ἀντίστοιχα ὕψη τά τμήματα ΒΔ καί ΓΔ. Μέ τό πυθαγόρειο θεώρημα βρίσκουμε $(B\Gamma)^2 = 8^2 + 6^2 \Rightarrow (B\Gamma) = 10$ cm. Ἄν $(A\Delta) = \upsilon$ καί $(B\Delta) = x$, τότε $(\Gamma\Delta) = 10 - x$.

Ἀπό τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΔΒ καί ΑΒΓ ἔχουμε:



(σχ. 43)

$$\left.\begin{aligned} \eta\mu\, B &= \frac{\upsilon}{8} \\ \eta\mu\, B &= \frac{6}{10} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\upsilon}{8} = \frac{6}{10} \Rightarrow \upsilon = 4{,}8\ \text{cm}.$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma\upsilon\nu\, B &= \frac{x}{8} \\ \sigma\upsilon\nu\, B &= \frac{8}{10} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{x}{8} = \frac{8}{10} \Rightarrow x = 6{,}4,\ \text{ὁπότε}\ (\Gamma\Delta) = 3{,}6\ \text{cm}$$

Συνεπῶς $E = 3{,}14\ .\ 4{,}8\ .\ 8 + 3{,}14\ .\ 4{,}8\ .\ 6 = 3{,}14\ .\ 4{,}8\ .\ 14 = 211{,}008\ \text{cm}^2$

καί $V = \frac{1}{3}\ .\ 3{,}14\ .\ 4{,}8^2\ .\ 6{,}4 + \frac{1}{3}\ .\ 3{,}14\ .\ 4{,}8^2\ .\ 3{,}6 =$

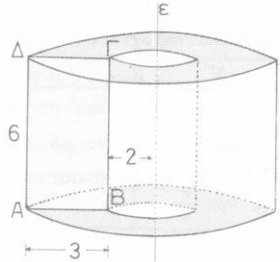
$= \frac{1}{3}\ .\ 3{,}14\ .\ 4{,}8^2\ (6{,}4 + 3{,}6) = \frac{1}{3}\ .\ 3{,}14\ .\ 23{,}04\ .\ 10 =$

$= 241{,}152\ \text{cm}^3.$

2. **Ὅταν τό ὀρθογώνιο τοῦ σχήματος 44 στρέφεται γύρω ἀπό τήν εὐθεία ε, πού εἶναι παράλληλη πρός τή ΓΒ σέ ἀπόσταση 2 cm, παράγεται ἕνα στερεό ἐκ περιστροφῆς. Νά βρεῖτε τόν ὄγκο του.**

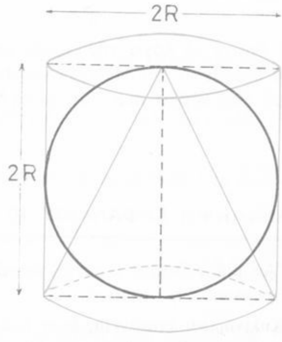
Λύση. Ὁ ὄγκος τοῦ παραγόμενου στερεοῦ εἶναι ἡ διαφορά τῶν ὄγκων δύο κυλίνδρων, πού ἔχουν ἴδιο ὕψος 6 cm καί ἀκτίνες 5cm καί 2 cm ἀντίστοιχα. Ἔχουμε λοιπόν

$V = \pi . 5^2 . 6 - \pi . 2^2 . 6 = \pi . 6 . (5^2 - 2^2) =$
$= 126 . \pi \simeq 126 . 3{,}14 = 395{,}64\ cm^3$



(σχ. 44)

3. **Στό σχῆμα 45 ὁ κῶνος ἔχει κοινή βάση καί κοινό ὕψος μέ ἕναν κύλινδρο, στόν ὁποῖο εἶναι ἐγγεγραμμένη μία σφαίρα, πού ἡ διάμετρός της εἶναι ἴση μέ τή διάμετρο τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου καί τοῦ κώνου καί ἴση μέ τό ὕψος τους. Νά ἀποδείξετε ὅτι : α) Τό ἐμβαδό τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας τοῦ κυλίνδρου εἶναι ἴσο μέ τό ἐμβαδό τῆς ἐπιφάνειας τῆς σφαίρας. β) Ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου εἶναι ἴσος μέ τό ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῆς ἐγγεγραμμένης σφαίρας καί τοῦ κώνου.**



(σχ. 45)

Λύση. α) Ἄν R εἶναι ἡ ἀκτίνα τῆς σφαίρας, τότε ἡ διάμετρος τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου καί τοῦ κώνου καθώς καί τό κοινό ὕψος τους εἶναι 2R. Τό ἐμβαδό τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας τοῦ κυλίνδρου καί τό ἐμβαδό τῆς σφαίρας εἶναι:

$$\left.\begin{aligned} E_\pi &= 2\pi R \,.\, 2R = 4\pi R^2 \\ E_\sigma &= 4\pi R^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow E_\pi = E_\sigma$$

β) Οἱ ὄγκοι τῶν τριῶν στερεῶν εἶναι:

Κυλίνδρου: $V_1 = \pi R^2 . 2R = 2\pi . R^3$

Σφαίρας: $V_2 = \frac{4}{3}\ \pi\ R^3$

Κώνου: $V_3 = \frac{1}{3}\ \pi R^2 \,.\, 2R = \frac{2}{3}\ \pi R^3$

Συνεπῶς ἔχουμε:

$$V_2 + V_3 = \frac{4}{3}\ \pi R^3 + \frac{2}{3}\ \pi R^3 = \left(\frac{4}{3} + \frac{2}{3}\right) \pi R^3 = 2\pi R^3 = V_1$$

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

44. Ποιό εἶναι τό ἐμβαδό τοῦ ὑφάσματος πού χρειάζεται, γιά νά καλυφθεῖ μιά μπάλα τοῦ τένις, πού ἔχει διάμετρο 5 cm; Νά βρεῖτε ἐπίσης τόν ὄγκο τῆς μπάλας.

45. Νά βρεῖτε τό ἐμβαδό τῆς ἐπιφάνειας ἑνός ἡμισφαιρίου, πού ἔχει διάμετρο 10 cm ($\pi \simeq 3{,}1416$).

46. Νά βρεῖτε πόσο κοστίζει τό βάψιμο μιᾶς σφαιρικῆς ἐπιφάνειας μέ ἀκτίνα 4 m, ἄν τό κόστος γιά 1 m^2 εἶναι 105 δρχ. $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$.

47. Μιά σφαίρα μέ ἀκτίνα 5 m χωράει ἀκριβῶς σέ ἕνα μεγάλο κυβικό κιβώτιο. Νά βρεῖτε τό μέρος τοῦ ὄγκου τοῦ κιβωτίου πού μένει ἄδειο.

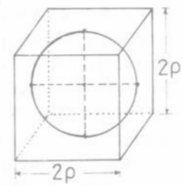
48. Νά βρεῖτε τήν ἀκτίνα μιᾶς σφαίρας, τῆς ὁποίας ἡ ἐπιφάνεια ἔχει ἐμβαδό 2,25 m^2.

49. Τό ἐμβαδό τῆς ἐπιφάνειας μιᾶς σφαίρας εἶναι 113,04 cm^2. Νά ὑπολογισθεῖ ὁ ὄγκος της.

50. Ὁ ὄγκος μιᾶς σφαίρας εἶναι 113,04 cm^3. Νά ὑπολογισθεῖ τό ἐμβαδό τῆς ἐπιφάνειάς της.

51. Τό ἐπιχρύσωμα μιᾶς σφαίρας ἀπό χαλκό στοιχίζει 2 550 δρχ. Ποιός εἶναι ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας, ἄν τό ἐπιχρύσωμα κοστίζει 60 δρχ. τό dm^2;

52. Νά βρεῖτε τό λόγο τῆς ἐπιφάνειας μιᾶς σφαίρας πρός τήν ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σ' αὐτή κύβου (ἡ ἀκμή τοῦ κύβου εἶναι ἴση μέ τή διάμετρο τῆς σφαίρας).



(σχ. 46)

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 10

1. Ἄν μιά εὐθεία ε κινεῖται παράλληλα πρός τόν ἑαυτό της, παράγεται μιά ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία εἶναι:

- **Κυλινδρική ἐπιφάνεια,** ὅταν ἕνα σημεῖο τῆς ε διαγράφει μιά ὁποιαδήποτε ἐπίπεδη γραμμή γ (ὁδηγό τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφάνειας).
- **Πρισματική ἐπιφάνεια,** ὅταν ἕνα σημεῖο τῆς ε γράφει τήν περίμετρο ἑνός πολυγώνου.

Ἀπό τίς τομές τέτοιων ἐπιφανειῶν μέ παράλληλα ἐπίπεδα ὁρίζονται τά **πρίσματα** καί ὁ **κύλινδρος**. Γιά τήν παράπλευρη ἐπιφάνεια E_π καί τόν ὄγκο V ἑνός πρίσματος ἤ κυλίνδρου ἰσχύουν οἱ γενικοί τύποι:

Σέ ὀρθό πρίσμα ἤ κύλινδρο: E_π = **(περίμετρος βάσεως) x (ὕψος)**

Σέ ὁποιοδήποτε πρίσμα ἤ κύλινδρο: V = **(ἐμβαδό βάσεως) x (ὕψος)**

2. Ὅταν μιά ἡμιευθεία Ox κινεῖται μέ τέτοιο τρόπο, ὥστε νά συναντᾶ διαρκῶς μιά ἐπίπεδη γραμμή γ, παράγεται μιά **κωνική ἐπιφάνεια.** Ἀπό τίς τομές τέτοιων ἐπιφανειῶν μέ ἕνα ἐπίπεδο ὁρίζονται οἱ **πυραμίδες** καί ὁ **κῶνος.**

Μιά πυραμίδα λέγεται **κανονική**, ὅταν ἡ βάση της εἶναι κανονικό πολύγωνο καί ἡ κορυφή της προβάλλεται στό κέντρο τῆς βάσεως. Γιά τήν παράπλευρη ἐπιφάνεια κανονικῆς πυραμίδας καί τόν ὄγκο ὁποιασδήποτε πυραμίδας ἤ κώνου ἰσχύουν οἱ γενικοί τύποι:

$$E_\pi = \frac{1}{2}\ \text{(περίμετρος βάσεως) x (ὕψος παράπλευρ. ἕδρας)}$$

$$V = \frac{1}{3}\ \text{(ἐμβαδό βάσεως) x (ὕψος)}$$

3. Ὁ κύλινδρος, ὁ κῶνος καί ἡ σφαίρα εἶναι **στερεά ἐκ περιστροφῆς.**
Γιά τίς ἐπιφάνειες καί τούς ὄγκους τῶν στερεῶν ἐκ περιστροφῆς ἔχουμε τόν πίνακα:

Στερεό	Επ	Εολ	V
Κύλινδρος	$2\pi\rho \cdot \upsilon$	$2\pi\rho\upsilon + 2\pi\rho^2$	$\pi\rho^2 \cdot \upsilon$
Κῶνος	$\pi \cdot \rho \cdot \lambda$	$\pi\rho\lambda + \pi\rho^2$	$\frac{1}{3}\pi\rho^2 \cdot \upsilon$
Σφαίρα		$4\pi\rho^2$	$\frac{4}{3}\pi\rho^3$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ*

53. Ποιά εἶναι ἡ ὁλική ἐπιφάνεια ἑνός κύβου μέ ἀκμή 5 m;

54. Ποιά εἶναι ἡ πλευρά ἑνός κύβου, τοῦ ὁποίου ἡ παράπλευρη ἐπιφάνεια ἔχει ἐμβαδό 0,0576 m²;

55. Ποιά εἶναι ἡ παράπλευρη ἐπιφάνεια ἑνός ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου μέ διαστάσεις 3 m, 5 m, 8 m;

56. Ἡ παράπλευρη ἐπιφάνεια ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου μέ ὕψος 7 m εἶναι 63 m². Ποιά εἶναι ἡ περίμετρος τῆς βάσεώς του;

57. Ποιός εἶναι ὁ ὄγκος ἑνός κύβου πού ἔχει πλευρά 2,80 m;

58. Ποιός εἶναι ὁ ὄγκος ὀρθοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος μέ ὕψος 1,60 m καί ἐμβαδό βάσεως 0,48 m²;

59. Ἡ παράπλευρη ἀκμή κανονικῆς ἑξαγωνικῆς πυραμίδας εἶναι 4,20m καί ἡ πλευρά τῆς βάσεώς της εἶναι 2,10 m. Νά ὑπολογίσετε τό ἐμβαδό τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειάς της.

60. Ποιός εἶναι ὁ ὄγκος μιᾶς πυραμίδας, πού ἔχει βάση 1,5 m² καί ὕψος 2,10 m;

61. Ποιό εἶναι τό ὕψος κανονικῆς πυραμίδας, τῆς ὁποίας ἡ τετραγωνική βάση ἔχει ἐμβαδό 4,84 m² καί ἡ παράπλευρη ἀκμή μῆκος 5,25 m;

62. Ποιά εἶναι ἡ παράπλευρη ἐπιφάνεια κυλίνδρου, πού ἔχει ὕψος 3,90m καί τό μῆκος τοῦ κύκλου τῆς βάσεώς του εἶναι τά 3/4 τοῦ ὕψους του;

63. Τό μῆκος τοῦ κύκλου τῆς βάσεως κυλίνδρου εἶναι 0,960m καί τό ὕψος του εἶναι 3m. Νά βρεῖτε τήν ἀκτίνα τῆς βάσεώς του καί τόν ὄγκο του.

64. Ἡ παράπλευρη ἐπιφάνεια κυλίνδρου ἔχει ἐμβαδό 8,40 m² καί τό ὕψος του εἶναι 4 m. Νά βρεῖτε τήν ἀκτίνα τῆς βάσεώς του καί τόν ὄγκο του.

65. Μιά κυλινδρική στέρνα ἔχει βάθος 2,70 m καί διάμετρο 3 m. Πρέπει νά γεμίσει μέ τή βοήθεια ἑνός κυλινδρικοῦ κουβᾶ, πού ἔχει ὕψος 0,40 m καί διάμετρο βάσεως 0,30 m. Πόσες φορές πρέπει νά ἀδειάσουμε τόν κουβά μέσα στή στέρνα;

66. Νά ὑπολογίσετε τήν ἐπιφάνεια καί τόν ὄγκο κώνου, πού ἔχει ἀκτίνα βάσεως 3cm καί ὕψος 0,4 dm.

67. Νά ὑπολογίσετε μέ προσέγγιση 1 cm³ τόν ὄγκο κωνικοῦ χωνιοῦ, πού ἔχει ὕψος 1dm καί διάμετρο βάσεως 1dm ($\pi \simeq 3{,}1416$).

68. Νά βρεῖτε τήν ἐπιφάνεια σφαίρας γνωρίζοντας ὅτι τό μῆκος ἑνός μεγίστου κύκλου της εἶναι 2,50 m.

69. Νά βρεῖτε τήν ἐπιφάνεια μιᾶς σφαίρας γνωρίζοντας ὅτι τό ἐμβαδό ἑνός μεγίστου κυκλ. δίσκου της εἶναι 32,45 cm^2.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ**

70. Ἐπιστρώσαμε μέ τσιμέντο τά τοιχώματα μιᾶς ὀκταγωνικῆς στέρνας, πού ἔχει πλευρά βάσεως 1,40 m καί βάθος 3,20 m. Πόσα χρήματα θά χρειαστοῦν, ἄν τό τετραγωνικό μέτρο στοιχίζει 260 δρχ.;

71. Μιά στέρνα σχήματος ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου ἔχει 8,5 m μῆκος, 4,60 m πλάτος καί 2,10 m βάθος. Θέλουμε νά χωρέσει 30 ἑκατόλιτρα περισσότερο νερό αὐξάνοντας μόνο τό μῆκος. Κατά πόσο θά χρειαστεῖ νά τό αὐξήσουμε;

72. Ἡ παράπλευρη ἀκμή μιᾶς κανονικῆς ὀκταγωνικῆς πυραμίδας εἶναι 6,5 m καί ἡ περίμετρος τῆς βάσεώς της 14,40 m. Νά ὑπολογίσετε α) τό ὕψος μιᾶς παράπλευρης ἕδρας, β) τήν παράπλευρη ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδας.

73. Μιά πυραμίδα μέ ὕψος 18 dm ἔχει ὄγκο 96 dm^3. Ἡ βάση της εἶναι ρόμβος, τοῦ ὁποίου ἡ μία διαγώνιος εἶναι ἴση μέ τό μισό τῆς ἄλλης. Νά ὑπολογίσετε:
α) Τό μῆκος κάθε διαγωνίου.
β) Τήν ἐπιφάνεια τοῦ κυκλικοῦ δίσκου τοῦ ἐγγεγραμμένου στό ρόμβο τῆς βάσεως.

74. Ποιά εἶναι ἡ παράπλευρη ἐπιφάνεια κυλίνδρου, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτίνα τῆς βάσεως εἶναι 0,60 m καί τό ὕψος του τά 3/2 τοῦ μήκους τοῦ κύκλου τῆς βάσεως;

75. Ἕνας βόθρος μέ βάθος 9,70 m καί διάμετρο 1,5 m ἐπιστρώθηκε μέ τσιμέντο πρός 130 δρχ. τό m^2 γιά τόν πάτο καί 190 δρχ. τό m^2 γιά τήν παράπλευρη κυλινδρική ἐπιφάνειά του. Πόσο κόστισε;

76. Ἕνα φύλλο ἀπό λευκοσίδηρο ἔχει 1 m μῆκος καί 0,80 m πλάτος. Νά ὑπολογίσετε τούς ὄγκους τῶν κυλινδρικῶν σωλήνων πού θά κατασκευάσουμε, α) ἄν διπλώσουμε τό φύλλο κατά μῆκος καί β) ἄν τό διπλώσουμε κατά πλάτος.

77. Ποιά εἶναι ἡ ἐπιφάνεια μιᾶς σφαίρας ἀπό χαλκό, ἡ ὁποία χωράει ἀκριβῶς μέσα σέ ἕνα κυβικό κιβώτιο, πού ἡ ἐσωτερική του ἐπιφάνεια εἶναι 0,0180 m^2;

78. Σέ ἕνα δοχεῖο γεμάτο μέ νερό ἀφήσαμε νά πέσουν μέ προσοχή 5 μπάλες ἀπό μόλυβδο μέ διάμετρο 0,008 m. Νά ὑπολογίσετε τόν ὄγκο τοῦ νεροῦ, πού χύθηκε ἀπό τό δοχεῖο.

79. Μιά σημαδούρα ἔχει σχῆμα δύο ἴσων κώνων, πού ἑνώνονται στή βάση τους. Ἡ διάμετρος τῆς βάσεως ἔχει μῆκος 0,8 m καί τό ὕψος καθενός ἀπό τούς κώνους εἶναι 1 m. Γνωρίζοντας ὅτι γιά τήν κατασκευή τῆς σημαδούρας χρησιμοποιήθηκαν πλάκες μεταλλικές, πού ζυγίζουν 5 κιλά τό m^2, νά βρεῖτε τό βάρος τῆς σημαδούρας ($\pi \simeq 3,14$).

80. Ἕνα «σιλό» ἔχει σχῆμα κώνου μέ τήν κορυφή του πρός τά κάτω. Πάνω ἀπό τόν κῶνο ὑπάρχει ἕνας κύλινδρος μέ ἴδια βάση. Ἡ ἀκτίνα ρ τῆς βάσεως τοῦ κώνου εἶναι 5 m. Ὁ κύλινδρος καί ὁ κῶνος ἔχουν τό ἴδιο ὕψος 6m. Ποιά εἶναι ἡ χωρητικότητα τοῦ σιλό σέ ἑκατόλιτρα; ($\pi \simeq 3,14$).

11ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Εἰσαγωγή.

11. 1. Ὁ καθηγητής τῶν μαθηματικῶν ἑνός γυμνασίου, ὅταν ρωτήθηκε ἀπό τό γυμνασιάρχη του πῶς πᾶνε οἱ μαθητές τῆς Γ' τάξεως στά μαθηματικά, τοῦ ἔδειξε τήν παρακάτω βαθμολογία τοῦ Α' τριμήνου:

ΤΑΞΗ Γ' — ΤΜΗΜΑ 1ο

15	11	7	15	12	20	4
14	12	13	10	13	18	19
7	14	9	16	16	15	
17	6	17	17	9	18	
10	12	3	19	16	16	

ΤΑΞΗ Γ' — ΤΜΗΜΑ 2ο

16	10	17	6	11	9	16
16	17	11	18	15	15	15
14	16	15	13	18	13	
15	13	16	18	10	15	
17	14	18	17	19	16	

Βλέποντας τή βαθμολογία αὐτή ὁ κ. γυμνασιάρχης δέν κατάλαβε πολλά πράγματα γιά τήν ἐπίδοση τῶν δύο τμημάτων. Τότε ὁ καθηγητής πῆρε πίσω τή βαθμολογία καί μετά ἀπό λίγο τοῦ παρουσίασε τόν παρακάτω πίνακα.

ΒΑΘΜΟΛΟΓΙΑ ΤΑΞΕΩΣ Γ'

Βαθμός	Μαθητές 1ου τμήματος	Μαθητές 2ου τμήματος
0– 5	2	0
6– 9	5	2
10–14	10	9
15–18	12	20
19–20	3	1
	32	32

Ἀπό τόν πίνακα αὐτό ὁ κ. γυμνασιάρχης κατάλαβε ἀμέσως ὅτι οἱ μαθητές τοῦ 2ου τμήματος εἶναι γενικά πιό δυνατοί στά μαθηματικά, παρ' ὅλο πού τό 1ο τμῆμα ἔχει μερικούς ἄριστους μαθητές.

Στό παράδειγμά μας αὐτό βλέπουμε χαρακτηριστικά πώς, ὅταν ἐξετάζουμε τά στοιχεῖα ἑνός συνόλου ὡς πρός μιά *μεταβλητή ἰδιότητά* τους, ἡ ἀξιοποίηση τῶν πληροφοριῶν ἤ μετρήσεων, πού βρίσκουμε, γίνεται μέ κάποια ἐπεξεργασία τους. Στήν προηγούμενη περίπτωση εἴχαμε ἕνα ὁρισμένο σύνολο μαθητῶν καί ἐξετάσαμε τά στοιχεῖα του ὡς πρός τή μεταβλητή ἰδιότητά τους «ἐπίδοση στά μαθηματικά». Ἀνάλογες περιπτώσεις ἔχουμε, ὅταν π.χ. ἐξετάζουμε:

— *τούς μαθητές μιᾶς τάξεως ὡς πρός τό ὕψος τους ἤ ὡς πρός τό βάρος τους ἤ ὡς πρός τή διαγωγή τους, κ.λ.π.*

— *τούς ἄνδρες μιᾶς πόλεως ὡς πρός τήν ἡλικία τους ἤ ὡς πρός τό ἐπάγγελμά τους, κ.λ.π.*

— *τίς οἰκογένειες μιᾶς πόλεως ὡς πρός τόν ἀριθμό τῶν παιδιῶν τους ἤ ὡς πρός τό εἰσόδημά τους ἤ ὡς πρός τό μέγεθος τῆς κατοικίας τους, κ.λ.π.*

— *τά βιβλία μιᾶς βιβλιοθήκης ὡς πρός τό περιεχόμενό τους (λογοτεχνικό, ἐπιστημονικό, · · ·) ἤ ὡς πρός τόν ἀριθμό τῶν σελίδων τους, κ.λ.π.*

— *τά αὐτοκίνητα, πού περνᾶνε ἀπό ἕνα σταυροδρόμι, ὡς πρός τήν ἱπποδύναμή τους ἤ ὡς πρός τό χρῶμα τους, κ.λ.π.*

Γενικά λοιπόν, ἀπό τήν ἐξέταση τῶν στοιχείων ἑνός ὁρισμένου συνόλου (ἐμψύχων ἤ ἀψύχων) ὡς πρός μιά ἤ περισσότερες μεταβλητές ἰδιότητές τους προκύπτει ἕνα πλῆθος πληροφοριῶν ἤ μετρήσεων, οἱ ὁποῖες ἀξιοποιοῦνται μόνο μέ κάποια ἐπεξεργασία. Μέ τή συλλογή καί ἐπεξεργασία τέτοιων πληροφοριῶν ἤ μετρήσεων ἀσχολεῖται ἕνας ἰδιαίτερος κλάδος τῶν μαθηματικῶν, πού λέγεται **στατιστική**[1].

Σήμερα τό ἔργο τῆς στατιστικῆς δέν περιορίζεται μόνο στή συλλογή καί ταξινόμηση τῶν πληροφοριῶν, ὅπως ἄλλοτε[2], ἀλλά προχωρεῖ στήν ἑρμηνεία τους καί βγάζει συμπεράσματα ἤ κάνει προβλέψεις.

---

1. Ὁ ὅρος «στατιστική» προέρχεται ἀπό τή Λατινική λέξη «Status» πού σημαίνει καθεστώς, κατάσταση.

2. Θά μπορούσαμε νά ποῦμε ὅτι ἡ στατιστική πρωτοεμφανίστηκε, σέ πολύ ἁπλή μορφή βέβαια, στήν Κίνα πρίν ἀπό 4 000 χρόνια περίπου, γιατί ἀπό τότε οἱ Κινέζοι συγκέντρωναν στοιχεῖα γιά τή γεωργική παραγωγή καί τό ἐμπόριό τους. Ἀργότερα οἱ Αἰγύπτιοι ἄρχισαν ἐπίσης νά συγκεντρώνουν στοιχεῖα γιά τήν κατανομή τῶν γεωργικῶν τους ἐκτάσεων, ἐνῶ σέ πολλές ἄλλες χῶρες ἄρχισε ἡ ἀπογραφή τῶν ἀνδρῶν, πού μποροῦσαν νά φέρουν ὅπλα, καί μετά ἡ ἀπογραφή τῶν πληθυσμῶν τους. Ἡ στατιστική διατηρεῖ αὐτή τήν πολύ ἁπλή μορφή της ἕως τόν 17ο αἰώνα, ὁπότε ἐμφανίζονται οἱ πρῶτοι πίνακες θνησιμότητας. Τότε ἀρχίζει μιά πιό συστηματική ἀνάπτυξη τῆς στατιστικῆς καί γίνονται οἱ πρῶτες ἀπόπειρες γιά στατιστικές ἔρευνες. Οὐσιαστικά ὅμως ἡ στατιστική ξεφεύγει ἀπό τόν περιγραφικό της χαρακτήρα μόνο στίς ἀρχές τοῦ 19ου αἰώνα μέ τήν ἀνάπτυξη τοῦ «λογισμοῦ τῶν πιθανοτήτων».

Γι' αὐτό στήν ἐποχή μας οἱ ἀποφάσεις κάθε σωστῆς διοικήσεως στηρίζονται σέ πλήρη στατιστικά στοιχεῖα. Αὐτός εἶναι ὁ λόγος πού σέ κάθε κράτος ἔχει δημιουργηθεῖ εἰδική στατιστική ὑπηρεσία, ἡ ὁποία συγκεντρώνει συνεχῶς στατιστικά στοιχεῖα ἀπό διάφορους κρατικούς ἤ ἰδιωτικούς φορεῖς (ληξιαρχεῖα, τελωνεῖα, νοσοκομεῖα, κ.λ.π.) καί ὀργανώνει σχετικές στατιστικές ἔρευνες.

Βασικές ἔννοιες.

11. 2. Ἄν τά στοιχεῖα ἑνός ὁρισμένου συνόλου Π ἐξετάζονται ὡς πρός μιά μεταβλητή ἰδιότητά τους, τότε

- τό σύνολο Π λέγεται **στατιστικός πληθυσμός** ἤ ἁπλῶς **πληθυσμός,**
- τά στοιχεῖα τοῦ συνόλου Π λέγονται **ἄτομα** τοῦ πληθυσμοῦ,
- οἱ πληροφορίες ἤ μετρήσεις, πού προκύπτουν ἀπό τήν ἐξέταση τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου Π, λέγονται **παρατηρήσεις** (ἤ **στατιστικά δεδομένα** ἤ **στατιστικά στοιχεῖα).**

Ἄς ὑποθέσουμε π.χ. ὅτι ἐξετάζουμε τά βιβλία μιᾶς βιβλιοθήκης ὡς πρός τό περιεχόμενό τους (Λογοτεχνικό = ΛΟ, Ἐπιστημονικό = ΕΠ, Ἱστορικό=ΙΣ, Ἐγκυκλοπαιδικό=ΕΓ) καί ὅτι ἀπό τήν ἐξέταση αὐτή προκύπτουν οἱ πληροφορίες

ΛΟ, ΕΠ, ΕΠ, ΙΣ, ΕΠ, ΛΟ, ΕΓ, ΕΓ,...,

πού κάθε μιά τους δηλώνει τό περιεχόμενο ἑνός βιβλίου. Τό σύνολο τῶν βιβλίων τῆς βιβλιοθήκης ἀποτελεῖ τόν «πληθυσμό» μας, ἐνῶ κάθε βιβλίο της ἀποτελεῖ ἕνα «ἄτομο» τοῦ πληθυσμοῦ. Οἱ πληροφορίες ΛΟ, ΕΠ, ΕΠ,... ἀποτελοῦν τίς «παρατηρήσεις» μας. Ἡ μεταβλητή ἰδιότητα εἶναι

«περιεχόμενο τοῦ βιβλίου»,

πού δέν μπορεῖ νά μετρηθεῖ, δηλαδή ἡ πληροφορία πού προκύπτει ἀπό κάθε ἄτομο δέν μπορεῖ νά ἐκφρασθεῖ μέ ἀριθμό. Μία τέτοια ἰδιότητα (πού δέν μπορεῖ νά μετρηθεῖ) λέγεται **ποιοτική ἰδιότητα** ἤ **ποιοτική μεταβλητή.**

Ἄς ὑποθέσουμε ἀκόμη ὅτι ἐξετάζουμε τίς οἰκογένειες μιᾶς πολυκατοικίας ὡς πρός τόν ἀριθμό τῶν παιδιῶν τους καί ὅτι ἀπό τήν ἐξέταση αὐτή προκύπτουν οἱ ἀριθμοί

$$1,\ 2,\ 1,\ 1,\ 0,\ 2,\ 4,\ 0,\ 0,\ 1,\ \ldots,$$

πού καθένας τους δηλώνει τόν ἀριθμό τῶν παιδιῶν μιᾶς οἰκογένειας. Τό σύνολο τῶν οἰκογενειῶν τῆς πολυκατοικίας ἀποτελεῖ τόν «πληθυσμό», ἐνῶ κάθε οἰκογένεια ἀποτελεῖ ἕνα «ἄτομο» τοῦ πληθυσμοῦ. Οἱ ἀριθμοί 1,2,1,1,... ἀποτελοῦν τίς «παρατηρήσεις» μας. Ἡ μεταβλητή ἰδιότητα εἶναι τώρα

«ἀριθμός παιδιῶν τῆς οἰκογένειας»

καί μπορεῖ νά μετρηθεῖ, δηλαδή ἡ πληροφορία πού προκύπτει ἀπό κάθε οἰκογένεια εἶναι ἀριθμός. Μία τέτοια ἰδιότητα (πού μπορεῖ νά μετρηθεῖ) λέγεται **ποσοτική ἰδιότητα** ἤ **ποσοτική μεταβλητή** ἤ ἁπλῶς **μεταβλητή.**

Ὅταν λέμε λοιπόν μονολεκτικά **«μεταβλητή»**, ἐννοοῦμε ποσοτική μεταβλητή καί τότε οἱ παρατηρήσεις μας (πού εἶναι ἀριθμοί) λέγονται **«τιμές»** τῆς μεταβλητῆς.

Μία τέτοια (ποσοτική) μεταβλητή λέγεται

- **ἀσυνεχής,** ὅταν παίρνει μεμονωμένες τιμές,
- **συνεχής,** ὅταν μπορεῖ νά πάρει (θεωρητικά τουλάχιστον) κάθε τιμή ἑνός ἀριθμητικοῦ διαστήματος.

Ἔτσι π.χ. ὁ ἀριθμός τῶν παιδιῶν μιᾶς οἰκογένειας εἶναι ἀσυνεχής μεταβλητή, ἐνῶ τό ὕψος, τό βάρος, τό εἰσόδημα ἑνός ἀτόμου εἶναι συνεχεῖς μεταβλητές.

Ἀπογραφή καί δειγματοληψία.

11. 3. Ὅταν οἱ παρατηρήσεις μας προκύπτουν ἀπό ὅλα τά ἄτομα τοῦ πληθυσμοῦ λέμε ὅτι κάνουμε **ἀπογραφή** τοῦ πληθυσμοῦ. Ἔτσι π.χ. ὅταν ἀκοῦμε ὅτι *«ἡ ἑταιρεία Α κάνει ἀπογραφή τῶν ἐμπορευμάτων της»*, καταλαβαίνουμε ὅτι ἐξετάζει τό σύνολο τῶν ἐμπορευμάτων της ὡς πρός τή μεταβλητή «ποσότητα ἐμπορεύματος». Ἐπίσης, ὅταν διαβάζουμε ὅτι *«ἔγινε ἀπογραφή τῶν βιοτεχνιῶν τῆς περιοχῆς Ἀθηνῶν»*, καταλαβαίνουμε ὅτι ἐξετάστηκαν **ὅλες** οἱ βιοτεχνίες ὡς πρός μία ἤ περισσότερες μεταβλητές ἰδιότητές τους.

Οἱ ἀπογραφές σέ μεγάλους πληθυσμούς ἀπαιτοῦν πολύ χρόνο καί πολλά ἔξοδα[1]. Ἐπίσης σέ ὁρισμένες περιπτώσεις ἡ ἀπογραφή τοῦ πληθυσμοῦ εἶναι πρακτικά ἀδύνατη. Μία τέτοια περίπτωση ἔχουμε, ὅταν θέλουμε π.χ. νά ἐξετάσουμε τή διάρκεια ζωῆς τῶν 5 000 λαμπτήρων, πού παράγει κάθε ἡμέρα ἕνα ἐργοστάσιο. Ἐπειδή ἡ ἐξέταση ἑνός λαμπτήρα ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα τήν καταστροφή του (ἀφοῦ γιά νά μετρήσουμε τή διάρκεια ζωῆς του θά πρέπει νά τόν ἀνάψουμε καί νά τόν ἀφήσουμε νά καεῖ), ἡ ἀπογραφή ἐδῶ θά προκαλέσει καταστροφή ὁλόκληρης τῆς ἡμερήσιας παραγωγῆς.

11. 4. Στήν περίπτωση πού μία ἀπογραφή εἶναι ἀσύμφορη οἰκονομικά ἤ ἀδύνατη πρακτικά, καταφεύγουμε στή **δειγματοληψία.** Αὐτό σημαίνει ὅτι δέ θά ἐξετάσουμε ὅλα τά ἄτομα τοῦ πληθυσμοῦ, ἀλλά θά περιορισθοῦμε στήν ἐξέταση τῶν ἀτόμων ἑνός «ἀντιπροσωπευτικοῦ» ὑποσυνόλου του, πού λέγεται **δεῖγμα** τοῦ πληθυσμοῦ.

---

1. Γι' αὐτό, ὅταν ἀποφασίζουμε μιά τέτοια ἀπογραφή, συγκεντρώνουμε ὅσο τό δυνατό περισσότερες πληροφορίες ἐξετάζοντας τά ἄτομα τοῦ πληθυσμοῦ ὡς πρός περισσότερες μεταβλητές ἰδιότητές τους. Ἔτσι π.χ. στήν ἀπογραφή τῶν βιοτεχνιῶν θά παίρναμε πληροφορίες γιά τό προσωπικό τους, τήν ἀξία τῶν μηχανημάτων τους, τά γενικά τους ἔξοδα, τά κέρδη τους, κ.λ.π.

Ἔτσι, ἄν θέλουμε νά ἐξετάσουμε τή διάρκεια ζωῆς τῶν 5 000 λαμπτήρων, πού παράγει κάθε ἡμέρα ἕνα ἐργοστάσιο, θά πάρουμε ἕνα δεῖγμα τους (π.χ. 30 λαμπτῆρες) καί θά ἐξετάσουμε τή διάρκεια ζωῆς καθενός ἀπ' αὐτούς. Ἄν ὑποθέσουμε ὅτι οἱ μισοί ἀπό τούς 30 λαμπτῆρες ἔχουν διάρκεια ζωῆς μεγαλύτερη ἀπό 800 ὧρες ὁ καθένας, παραδεχόμαστε ὅτι οἱ μισοί περίπου ἀπό τούς 5 000 λαμπτῆρες ἔχουν διάρκεια ζωῆς μεγαλύτερη ἀπό 800 ὧρες.

Ἐπίσης, ὅταν θέλουμε νά βροῦμε τό ποσοστό τῶν τηλεθεατῶν μιᾶς πόλεως, πού παρακολουθοῦν μιά ἐκπομπή τηλεοράσεως, δέ ρωτᾶμε ὅλους τούς κατοίκους τῆς πόλεως, ἀλλά παίρνουμε ἕνα «ἀντιπροσωπευτικό» δεῖγμα τους (π.χ. 100 τηλεθεατές) καί ρωτᾶμε καθέναν ἀπ' αὐτούς. Ἄν οἱ μισοί ἀπό τούς 100 τηλεθεατές ἀπαντήσουν ὅτι παρακολουθοῦν τήν ἐκπομπή, παραδεχόμαστε ὅτι οἱ μισοί περίπου ἀπό ὅλους τούς τηλεθεατές τῆς πόλεως παρακολουθοῦν τήν ἐκπομπή.

Βλέπουμε δηλαδή ὅτι τά συμπεράσματα, πού βγαίνουν ἀπό τήν ἐξέταση τῶν ἀτόμων ἑνός δείγματος, τά μεταφέρουμε σέ ὁλόκληρο τόν πληθυσμό μας. Ὅσο μεγαλύτερο εἶναι τό δεῖγμα, τόσο μεγαλύτερος εἶναι καί ὁ *«βαθμός ἀξιοπιστίας»* τῆς μεταφορᾶς αὐτῆς. Πάντως ἡ ἐπιλογή τοῦ δείγματος δέν εἶναι πάντα εὔκολη ὑπόθεση καί ὑπάρχουν εἰδικοί τρόποι γιά τήν ἀντιμετώπισή της.

Στίς μεγάλες δειγματοληψίες καί στίς ἀπογραφές ἡ συγκέντρωση τῶν στατιστικῶν στοιχείων γίνεται μέ εἰδικά ἔντυπα, στά ὁποῖα εἶναι διατυπωμένες οἱ κατάλληλες ἐρωτήσεις. Τά ἔντυπα αὐτά λέγονται *«ἐρωτηματολόγια»*.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Θεωροῦμε τίς παρακάτω μεταβλητές ἰδιότητες τῶν βιβλίων μιᾶς βιβλιοθήκης:**

— Εἶδος περιεχομένου: Ἰδιότητα ΠΟΙΟΤΙΚΗ
— Τιμή ἀγορᾶς: Ἰδιότητα ....
— Ἀριθμός σελίδων: Ἰδιότητα ....
— Χρῶμα ἐξωφύλλου: Ἰδιότητα ....
— Ἀριθμός σχημάτων: Ἰδιότητα ....
— Τρόπος ἀποκτήσεως (ἀγορά, δωρεά): Ἰδιότητα ....

Συμπληρῶστε τίς τελεῖες μέ τό εἶδος κάθε ἰδιότητας (ποσοτική, ποιοτική) σύμφωνα μέ τό ὑπόδειγμα.

Λύση.

— Εἶδος περιεχομένου: Ἰδιότητα ΠΟΙΟΤΙΚΗ
— Τιμή ἀγορᾶς: Ἰδιότητα ΠΟΣΟΤΙΚΗ
— Ἀριθμός σελίδων: Ἰδιότητα ΠΟΣΟΤΙΚΗ
— Χρῶμα ἐξωφύλλου: Ἰδιότητα ΠΟΙΟΤΙΚΗ
— Ἀριθμός σχημάτων: Ἰδιότητα ΠΟΣΟΤΙΚΗ
— Τρόπος ἀποκτήσεως: Ἰδιότητα ΠΟΙΟΤΙΚΗ

2. **Σέ ἕνα Ὑπουργεῖο ὑπηρετοῦν 1 000 ὑπάλληλοι, ἀπό τούς ὁποίους 50 ἀνήκουν στό ἀνώ-**

τερο προσωπικό καί 150 ἀνήκουν στό κατώτερο (κλητῆρες, καθαρίστριες, κ.λ.π.). Θέλουμε νά ἐξετάσουμε τίς συνθῆκες διαβιώσεώς τους καί σκεφτόμαστε νά πάρουμε ἕνα δεῖγμα 100 ὑπαλλήλων μέ ἕναν ἀπό τούς παρακάτω τρόπους:

— Νά πάρουμε τούς 100 πρώτους ὑπαλλήλους, πού θά μποῦν μιά ἡμέρα στό Ὑπουργεῖο.

— Νά πάρουμε τούς 100 ὑπαλλήλους μέ κλῆρο, ἀφοῦ βάλουμε σέ μιά κάλπη 1 000 χαρτάκια μέ τά ὀνόματα τῶν ὑπαλλήλων.

— Νά πάρουμε τρεῖς κάλπες, οἱ ὁποῖες νά περιέχουν τά ὀνόματα τῶν ὑπαλλήλων τοῦ ἀνώτερου, τοῦ μέσου καί τοῦ κατώτερου προσωπικοῦ ἀντιστοίχως καί νά τραβήξουμε ἀπό κάθε κάλπη ἕναν ἀριθμό κλήρων ἀνάλογο μέ τόν ἀριθμό τῶν ἀντίστοιχων ὑπαλλήλων.

Ποιόν τρόπο νομίζετε ὅτι πρέπει νά προτιμήσουμε;

Λύση. Ἐπειδή τό δεῖγμα πρέπει νά εἶναι ἀντιπροσωπευτικό τοῦ πληθυσμοῦ, θά προτιμήσουμε τόν τρίτο τρόπο. Ἀφοῦ λοιπόν στό μέσο προσωπικό ἀνήκουν $1\,000-(50+150)=800$ ὑπάλληλοι, θά πάρουμε:

$\frac{50}{1000}\cdot 100=5$ ὑπαλλήλους ἀπό τό ἀνώτερο προσωπικό

$\frac{800}{1000}\cdot 100=80$ ὑπαλλήλους ἀπό τό μέσο προσωπικό

καί $\frac{150}{1000}\cdot 100=15$ ὑπαλλήλους ἀπό τό κατώτερο προσωπικό.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Στό σύνολο τῶν μαθητῶν μιᾶς τάξεως θεωροῦμε τίς μεταβλητές ἰδιότητες
   — βάρος μαθητῆ
   — ὕψος μαθητῆ
   — ἐπάγγελμα πατέρα
   — βαθμός ἐνδεικτικοῦ
   — χρῶμα μαλλιῶν
   — διαγωγή.
   Νά καθορίσετε τό εἶδος κάθε ἰδιότητας (ποιοτική ἤ ποσοτική).
2. Ἡ Γ τάξη ἑνός γυμνασίου ἔχει 40 μαθητές. Γιά νά βγάλει κάποιος δειγματοληπτικά συμπέρασμα γιά τά ἀναστήματά τους, πηγαίνει στό μάθημα τῆς γυμναστικῆς καί παίρνει γιά δεῖγμα τίς τρεῖς πρῶτες τετράδες τῆς παρατάξεως. Συμφωνεῖτε μέ τόν τρόπο ἐπιλογῆς τοῦ δείγματος;
3. Ἡ Γ' τάξη ἑνός μικτοῦ γυμνασίου ἔχει 32 ἀγόρια καί 28 κορίτσια. Ὁ κ. ἐπιθεωρητής θέλει νά ἐλέγξει τήν ἐπίδοση τῆς τάξεως σέ ἕνα μάθημα ἐξετάζοντας 15 παιδιά. Πόσα ἀγόρια καί πόσα κορίτσια πρέπει νά ἐξετάσει;
4. Ἕνα ἐργοστάσιο κατασκευάζει σωλῆνες, πού ἔχουν μῆκος 50 cm. Ἐξετάζοντας ὅμως μιά ἡμέρα ἕνα δεῖγμα ἀπό 120 σωλῆνες βρήκαμε ὅτι οἱ 3 εἶχαν μῆκος μεγαλύτερο ἀπό 50 cm καί οἱ 9 εἶχαν μῆκος μικρότερο ἀπό 50 cm. Τί συμπέρασμα μποροῦμε νά βγάλουμε γιά τούς 3000 σωλῆνες, πού κατασκεύασε ἐκείνη τήν ἡμέρα τό ἐργοστάσιο;
5. Κλιμάκιο τῆς τροχαίας, πού βρίσκεται στήν ἐθνική ὁδό Ἀθηνῶν- Κορίνθου, θέλει νά κάνει δειγματοληπτικό ἔλεγχο τῶν ἐλαστικῶν τῶν αὐτοκινήτων παίρνοντας δεῖγμα ἀπό 100 αὐτοκίνητα. Ποιός ἀπό τούς παρακάτω τρόπους νομίζετε ὅτι εἶναι ὁ πιό κατάλληλος γιά τήν ἐπιλογή τοῦ δείγματος;
   — Νά πάρει τά 100 πρῶτα λεωφορεῖα πού θά περάσουν.
   — Νά πάρει τά 100 πρῶτα Ι.Χ. ἄσπρου χρώματος.
   — Νά παίρνει τό 10ο, 20ο, 30ο, 40ο,... ἀπό ὅλα γενικά τά αὐτοκίνητα πού περνᾶνε.

Διαλογή παρατηρήσεων. Συχνότητα μιᾶς παρατηρήσεως.

11. 5. Ἂς ὑποθέσουμε ὅτι οἱ μαθητές μιᾶς τάξεως ἔδωσαν γιά τήν ἐνίσχυση τοῦ ταμείου ἐκδρομῶν τῆς τάξεώς τους τά παρακάτω ποσά δραχμῶν:

12	10	15	10	14	20	20	15
17	16	20	15	10	12	15	20
15	11	10	16	17	14	17	12
10	15	14	20	17	10	15	15

Ἂν θέλουμε νά δοῦμε τώρα πόσοι μαθητές ἔδωσαν 10 δρχ., πόσοι ἔδωσαν 11 δρχ., πόσοι ἔδωσαν 12 δρχ.,... κ.λ.π., θά πρέπει νά κάνουμε μιά *«διαλογή»* τῶν παραπάνω παρατηρήσεων ξεχωρίζοντας ἐκεῖνες πού εἶναι ἴσες μέ 10, ἐκεῖνες πού εἶναι ἴσες μέ 11,... κ.ο.κ. Αὐτό γίνεται εὔκολα ὡς ἑξῆς: παίρνουμε διαδοχικές στῆλες καί ἀντιστοιχίζουμε κάθε μιά σέ ἕνα ἀπό τά διάφορα ποσά, πού ἐμφανίζονται στίς παρατηρήσεις.

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
~~IIII~~ I	I	III		III	~~IIII~~ III	II	IIII			~~IIII~~

Ἔπειτα διατρέχουμε ἀπό τήν ἀρχή ὅλες τίς παρατηρήσεις μας καί σημειώνουμε τήν κάθε παρατήρηση μέ μία μικρή γραμμή στήν ἀντίστοιχη στήλη. Τήν πέμπτη γραμμή τῆς κάθε στήλης τή σημειώνουμε πάνω στίς τέσσερις προηγούμενες, ὥστε νά σχηματίζεται «πεντάδα» καί νά εἶναι εὔκολη ἡ τελική καταμέτρηση.

Σέ ἀπογραφές ἤ μεγάλες δειγματοληψίες, ὅπου ἔχουμε πολλές παρατηρήσεις, ἡ διαλογή τους γίνεται μηχανογραφικά μέ εἰδικές μεθόδους (διάτρητα δελτία, μηχανές διαλογῆς, κ.λ.π.).

11. 6. Ἀπό τή διαλογή πού κάνουμε, βλέπουμε π.χ. ὅτι ἀπό τούς 32 μαθητές οἱ 8 ἔδωσαν ἀπό 15 δραχμές ὁ καθένας. Ὁ ἀριθμός 8 λέγεται **συχνότητα** τοῦ ποσοῦ τῶν 15 δρχ., ἐνῶ ὁ ἀριθμός $\frac{8}{32} = 0{,}25$ λέγεται **σχετική συχνότητα** τοῦ ποσοῦ τῶν 15 δρχ.

Γενικά λοιπόν:

- **Συχνότητα** μιᾶς παρατηρήσεως λέγεται ὁ φυσικός ἀριθμός, πού δηλώνει πόσα ἄτομα τοῦ πληθυσμοῦ ἔχουν παρατήρηση ἴση μέ αὐτή.
- **Σχετική συχνότητα** μιᾶς παρατηρήσεως λέγεται τό πηλίκο τῆς συχνότητάς της πρός τόν ἀριθμό ὅλων τῶν ἀτόμων τοῦ πληθυσμοῦ.

᾿Από τούς παραπάνω ὁρισμούς καταλαβαίνουμε ὅτι ἡ **σχετική συχνότητα εἶναι πάντοτε ἀριθμός μικρότερος ἀπό τή μονάδα.**

῎Ετσι π.χ., ἀπό τά παραπάνω ποσά, τό ποσό τῶν 10 δρχ. ἔχει συχνότητα 6 καί σχετική συχνότητα $\frac{6}{32} = 0{,}1875$, ἐνῶ τό ποσό τῶν 17 δρχ. ἔχει συχνότητα 4 καί σχετική συχνότητα $\frac{4}{32} = 0{,}125$.

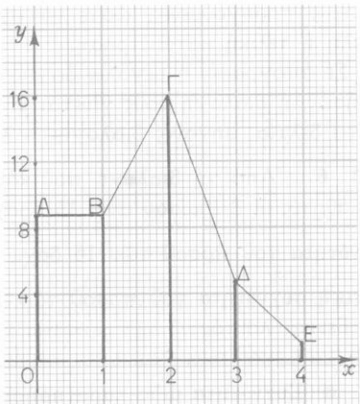
Πίνακες συχνοτήτων.

11. 7. ῾Η διαλογή τῶν παρατηρήσεων μᾶς δίνει τίς συχνότητες τῶν διάφορων παρατηρήσεων ἤ, ὅπως λέμε πιό σύντομα, μᾶς δίνει τήν **κατανομή συχνοτήτων**. Μετά ἀπό τή διαλογή τῶν παρατηρήσεων κατασκευάζουμε τόν **πίνακα συχνοτήτων,** ὁ ὁποῖος ἔχει δύο στῆλες. Στήν πρώτη στήλη ἔχει τίς διαφορετικές μεταξύ τους παρατηρήσεις καί στή δεύτερη στήλη ἔχει τίς συχνότητές τους.

Στήν περίπτωση πού οἱ παρατηρήσεις μας εἶναι τιμές μιᾶς μεταβλητῆς, ἡ πρώτη στήλη τοῦ πίνακα συχνοτήτων περιέχει τίς διαφορετικές μεταξύ τους τιμές τῆς μεταβλητῆς. ῾Ο παρακάτω πίνακας Ι δίνει τήν κατανομή συχνοτήτων τῶν 40 οἰκογενειῶν μιᾶς πολυκατοικίας ὡς πρός τόν ἀριθμό τῶν παιδιῶν τους.

ΠΙΝΑΚΑΣ Ι

᾿Αριθμός παιδιῶν	Οἰκογένειες
0	9
1	9
2	16
3	5
4	1
	40



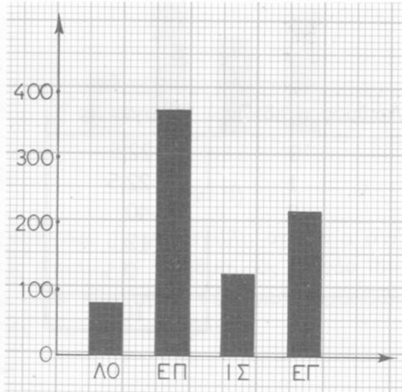
(σχ 1)

Παίρνουμε τώρα ἕνα ὀρθογώνιο σύστημα ἀξόνων καί βάζουμε στόν ἄξονα Ox τίς τιμές τῆς μεταβλητῆς καί στόν ἄξονα Oy τίς συχνότητές τους. ῾Η τεθλασμένη γραμμή, πού ἔχει κορυφές τά σημεῖα Α (0,9), Β (1,9), Γ (2,16), Δ (3,5), Ε (4,1), λέγεται **πολύγωνο συχνοτήτων,** ἐνῶ τά εὐθύγραμμα τμήματα, πού παριστάνουν τίς τεταγμένες τῶν σημείων Α,Β, Γ,Δ,Ε, ἀποτελοῦν τό **διάγραμμα συχνοτήτων.**

Στήν περίπτωση πού οἱ παρατηρήσεις μας ἀναφέρονται σέ ποιοτική μεταβλητή, ἡ πρώτη στήλη τοῦ πίνακα συχνοτήτων περιέχει ὅλες τίς περιπτώσεις, πού διακρίνουμε στήν ποιοτική ἰδιότητα. Ὁ παρακάτω πίνακας II δίνει τήν κατανομή συχνοτήτων τῶν 800 βιβλίων μιᾶς βιβλιοθήκης ὡς πρός τό περιεχόμενό τους.

ΠΙΝΑΚΑΣ II

Περιεχόμενο βιβλίου	Βιβλία
Λογοτεχνικό	84
Ἐπιστημονικό	372
Ἱστορικό	124
Ἐγκυκλοπαιδικό	220
	800



(σχ. 2)

Ἐποπτική εἰκόνα τῶν συχνοτήτων τοῦ πίνακα αὐτοῦ δίνει τό διπλανό του σχῆμα, πού λέγεται **ραβδόγραμμα** καί ἀποτελεῖται ἀπό ὀρθογώνια μέ ἴσα πλάτη, πού ἔχουν ὕψη ἴσα μέ τίς συχνότητες.

Πίνακες σχετικῶν συχνοτήτων.

11. 8. Εἴπαμε ὅτι *σχετική συχνότητα* μιᾶς παρατηρήσεως εἶναι τό πηλίκο τῆς συχνότητάς της διά τοῦ ἀριθμοῦ ὅλων τῶν ἀτόμων τοῦ πληθυσμοῦ. Ἔτσι, ἀπό τόν πίνακα I τῆς § 11.7 βρίσκουμε ὅτι οἱ σχετικές συχνότητες τῶν παρατηρήσεων 0,1,2,3,4 εἶναι ἀντιστοίχως

$$\frac{9}{40}=0{,}225\ ,\ \frac{9}{40}=0{,}225\ ,\ \frac{16}{40}=0{,}40\ ,\ \frac{5}{40}=0{,}125\ ,\ \frac{1}{40}=0{,}025.$$

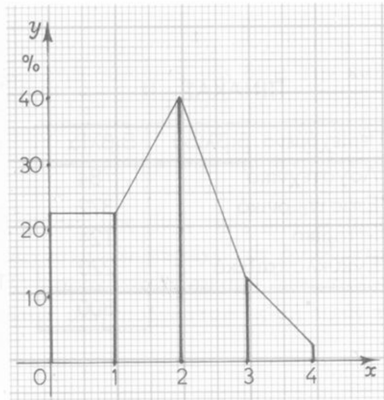
Παρατηροῦμε ὅτι οἱ ἀριθμητές τῶν ὁμώνυμων αὐτῶν κλασμάτων ἔχουν πάντα ἄθροισμα ἴσο μέ τόν παρονομαστή καί συνεπῶς **τό ἄθροισμα ὅλων τῶν σχετικῶν συχνοτήτων εἶναι ἴσο μέ τή μονάδα.**

Συνήθως οἱ σχετικές συχνότητες ἐκφράζονται μέ τά 100πλάσιά τους, δηλαδή μέ ποσοστά *ἐπί τοῖς ἑκατό*. Ἔτσι π.χ. οἱ παραπάνω σχετικές συχνότητες γράφονται ἀντιστοίχως

22,5%, 22,5%, 40%, 12,5%, 2,5%

Ἡ κατανομή τῶν σχετικῶν συχνοτήτων ὅλων τῶν παρατηρήσεων δίνεται πάλι μέ τόν **πίνακα σχετικῶν συχνοτήτων**, πού ἔχει στή δεύτερη στήλη του (ἤ σέ μία τρίτη στήλη τοῦ πίνακα συχνοτήτων) τίς σχετικές συχνότητες τῶν παρατηρήσεων. Ὁ παρακάτω πίνακας σχετικῶν συχνοτήτων εἶναι ἀντίστοιχος τοῦ πίνακα I τῆς § 11.7.

Ἀριθμός παιδιῶν	Οἰκογένειες %
0	22,5
1	22,5
2	40
3	12,5
4	2,5
	100



(σχ. 3)

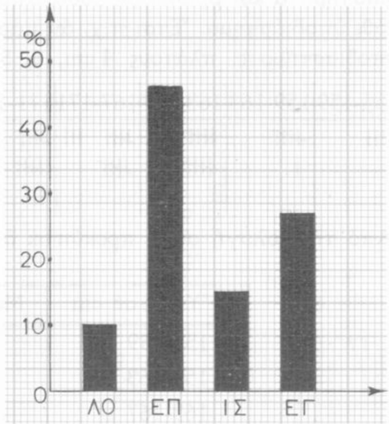
Ἀπό τόν πίνακα αὐτό γίνεται φανερό ὅτι **ἡ σχετική συχνότητα μιᾶς παρατηρήσεως εἶναι ἡ συχνότητα πού θά εἶχε ἡ παρατήρηση, ἄν ὁ πληθυσμός μας εἶχε 100 ἄτομα.**

Πολλαπλασιάζοντας τή σχετική συχνότητα μιᾶς παρατηρήσεως μέ τό πλῆθος ὅλων τῶν ἀτόμων τοῦ πληθυσμοῦ βρίσκουμε τή συχνότητά της. Ἔτσι, ἐπειδή ἡ σχετική συχνότητα τῆς τιμῆς 3 στόν παραπάνω πίνακα εἶναι 12,5% ἤ $\frac{12,5}{100}$, ἡ συχνότητα τῆς τιμῆς 3 εἶναι $\frac{12,5}{100} \cdot 40 = 5$.

Μποροῦμε ἀκόμη νά ἔχουμε τήν ἐποπτική εἰκόνα τῆς κατανομῆς τῶν σχετικῶν συχνοτήτων, ἄν κατασκευάσουμε (μέ τόν ἴδιο τρόπο τῆς § 11.7) **πολύγωνο σχετικῶν συχνοτήτων** (σχ. 3).

Ὁ παρακάτω πίνακας σχετικῶν συχνοτήτων προκύπτει ἀπό τόν πίνακα II τῆς §11.7 καί τό διπλανό του ραβδόγραμμα κατασκευάστηκε μέ τόν ἴδιο τρόπο.

Περιεχόμενο βιβλίου	Βιβλία	%
Λογοτεχνικό	84	10,5
Ἐπιστημονικό	372	46,5
Ἱστορικό	124	15,5
Ἐγκυκλοπαιδικό	220	27,5
	800	100



(σχ. 4)

Γενικά οἱ πίνακες σχετικῶν συχνοτήτων ἔχουν μεγάλη σημασία στή στατιστική, γιατί ἀναφέρονται, ὅπως εἴπαμε, σέ πληθυσμούς μέ τόν ἴδιο ἀριθμό ἀτόμων (100) καί συνεπῶς εἶναι εὔκολη ἡ σύγκριση ὁμοειδῶν πληθυσμῶν, πού ἐξετάζονται ὡς πρός τήν ἴδια μεταβλητή.

Ὁμαδοποίηση παρατηρήσεων.

11. 9. Οἱ παρακάτω μετρήσεις δίνουν σέ cm τά ὕψη τῶν 80 μαθητῶν μιᾶς τάξεως ἑνός γυμνασίου:

175	180	156	172	181	173	167	173	185	164
160	172	173	169	168	183	169	173	169	177
170	161	174	162	176	166	173	163	167	165
174	171	168	174	166	174	158	176	170	160
172	155	183	175	157	182	163	176	177	185
171	172	173	168	173	168	191	189	167	177
162	166	165	186	179	173	183	178	173	173
172	166	170	164	191	178	179	161	173	184

Βλέπουμε ὅτι τώρα ἔχουμε μία μεταβλητή, πού παίρνει πολλές τιμές διαφορετικές μεταξύ τους καί ἡ συχνότητα κάθε τιμῆς εἶναι μικρή. Ἡ κατασκευή λοιπόν ἑνός πίνακα μέ τίς συχνότητες κάθε τιμῆς δέν μᾶς ἐξυπηρετεῖ, γιατί δέ συντομεύει τήν ὅλη εἰκόνα.

Στήν περίπτωση αὐτή (πού παρουσιάζεται συνήθως, ὅταν ἔχουμε συνεχή μεταβλητή) κάνουμε **ὁμαδοποίηση τῶν παρατηρήσεων,** δηλαδή χωρίζουμε τό διάστημα, στό ὁποῖο παίρνει τιμές ἡ μεταβλητή μας, σέ ὑποδιαστήματα καί βρίσκουμε πόσες ἀπό τίς παρατηρήσεις μας βρίσκονται σέ κάθε ὑποδιάστημα. Ἔτσι π.χ. ἄν πάρουμε γιά τήν παραπάνω μεταβλητή ὑποδιαστήματα πλάτους 4 cm, ἡ διαλογή τῶν παρατηρήσεων δίνει.

155-159	159-163	163-167	167-171	171-175	175-179	179-183	183-187	187–191
IIII	~~IIII~~ I	~~IIII~~ ~~IIII~~	~~IIII~~ III ~~IIII~~	~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ II	~~IIII~~ ~~IIII~~	~~IIII~~	~~IIII~~ II	III

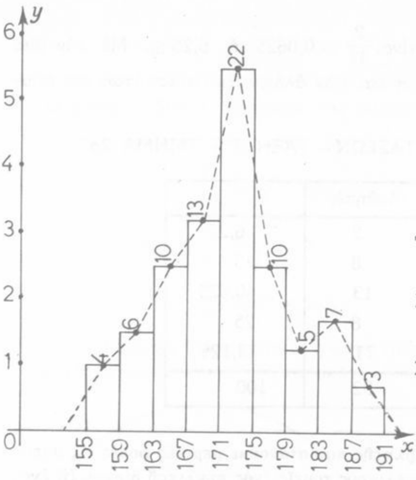
Ἀπό τή διαλογή αὐτή προκύπτει ὁ παρακάτω πίνακας:

Ὕψος σέ cm	Μαθητές	%
155-159	4	5
159-163	6	7,5
163-167	10	12,5
167-171	13	16,25
171-175	22	27,5
175-179	10	12,5
179-183	5	6,25
183-187	7	8,75
187-191	3	3,75
	80	100

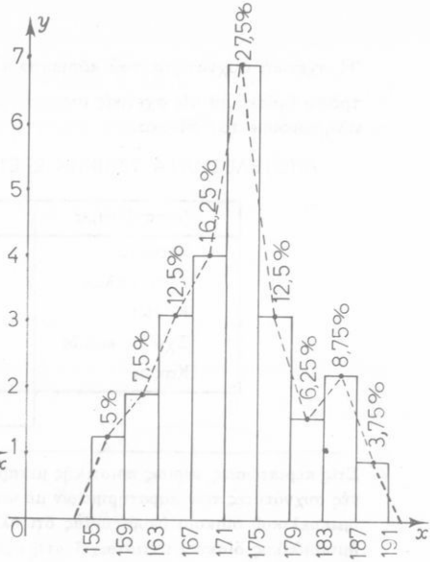
Τά διαστήματα τιμῶν, πού ἐμφανίζονται στήν πρώτη στήλη τοῦ πίνακα, λέγονται **κλάσεις** (ἤ **τάξεις**) τῆς μεταβλητῆς. Στόν πίνακα αὐτό βλέπουμε ὅτι δύο διαδοχικές κλάσεις ἔχουν πάντα ἕνα ὅριο κοινό, ὅπως π.χ. οἱ κλάσεις 171-175 καί 175-179 ἔχουν κοινό ὅριο τό 175. Στήν περίπτωση αὐτή συμφωνοῦμε νά παίρνουμε τίς παρατηρήσεις, πού ἔχουν τιμή ἀκριβῶς 175, πάντα στή δεύτερη κλάση (δηλαδή στήν 175-179). Ἔτσι λοιπόν σέ μιά ὁμαδοποίηση τῶν παρατηρήσεων δέν ἔχουμε συχνότητα (ἤ σχετική συχνότητα) μιᾶς ὁρισμένης τιμῆς, ἀλλά ἔχουμε «συχνότητα κλάσεως» (ἤ «σχετική συχνότητα κλάσεως»).

Ἡ ἐποπτική εἰκόνα τῶν συχνοτήτων (ἤ τῶν σχετικῶν συχνοτήτων) στίς ὁμαδοποιημένες παρατηρήσεις δίνεται μέ συνεχόμενα ὀρθογώνια, πού ἔχουν βάσεις τίς διαδοχικές κλάσεις καί **ἐμβαδά ἴσα μέ τίς ἀντίστοιχες συχνότητες.** Συνεπῶς **τό ὕψος τοῦ κάθε ὀρθογωνίου εἶναι πηλίκο τῆς ἀντίστοιχης συχνότητας διά τοῦ πλάτους τῆς κλάσεως**. Τό σχῆμα, πού ἀποτελοῦν τά συνεχόμενα αὐτά ὀρθογώνια, λέγεται **ἱστόγραμμα.**

Τά ἑπόμενα σχήματα εἶναι τό «ἱστόγραμμα συχνοτήτων» καί τό «ἱστόγραμμα σχετικῶν συχνοτήτων» τῆς κατανομῆς τῶν ὑψῶν τῶν 80 μαθητῶν.



(σχ. 5)



(σχ. 6)

Εἶναι φανερό ὅτι τό ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν ὀρθογωνίων δίνει τό πλῆθος τῶν στοιχείων τοῦ πληθυσμοῦ. Τό ἄθροισμα αὐτῶν τῶν ἐμβαδῶν εἶναι ἴσο μέ τό ἐμβαδό τῆς ἐπιφάνειας, πού περικλείεται ἀπό τόν ἄξονα τῶν x καί μιά τεθλασμένη, πού διέρχεται ἀπό τά μέσα τῶν πάνω βάσεων τῶν ὀρθογωνίων. Τήν τεθλασμένη αὐτή τή λέμε **πολύγωνο συχνοτήτων** (βλ. σχ. 5).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά συμπληρώσετε τά στοιχεῖα πού λείπουν στόν παρακάτω πίνακα.**

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΕΛΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ - ΤΑΞΗ Α' - ΤΜΗΜΑ 2ο

Ἀποτέλεσμα	Μαθητές	%
Ἄριστα	2	...
Λίαν καλῶς	8	...
Καλῶς	13	...
Σχεδόν καλῶς	...	25
Κακῶς	...	...
	32	...

Λύση. Στήν §11.8 εἴδαμε ὅτι τό γινόμενο τῆς σχετικῆς συχνότητας μιᾶς παρατηρήσεως ἐπί τό πλῆθος ὅλων τῶν ἀτόμων τοῦ πληθυσμοῦ εἶναι ἴσο μέ τή συχνότητά της. Ἔτσι, ἡ συχνότητα τοῦ ἀποτελέσματος «σχεδόν καλῶς» εἶναι $\frac{25}{100} \cdot 32 = 8$. Ἑπομένως ἡ συχνότητα τοῦ «κακῶς» εἶναι $32-(2+8+13+8) = 1$.

Ἡ σχετική συχνότητα τοῦ «ἄριστα» εἶναι $\frac{2}{32} = 0{,}0625$ ἤ $6{,}25\%$. Μέ τόν ἴδιο τρόπο βρίσκουμε τίς σχετικές συχνότητες καί τῶν ἄλλων ἀποτελεσμάτων καί συμπληρώνουμε τόν πίνακα.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΕΛΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ – ΤΑΞΗ Α' – ΤΜΗΜΑ 2ο

Ἀποτέλεσμα	Μαθητές	%
Ἄριστα	2	6,25
Λίαν καλῶς	8	25
Καλῶς	13	40,625
Σχεδόν καλῶς	8	25
Κακῶς	1	3,125
	32	100

2. Στίς περιπτώσεις κυρίως ποιοτικῆς μεταβλητῆς παριστάνουμε μερικές φορές τίς σχετικές συχνότητες τῶν παρατηρήσεων μέ κυκλικούς τομεῖς ἑνός κυκλικοῦ δίσκου (ἤ ἑνός ἡμικυκλικοῦ δίσκου) ὑποθέτοντας ὅτι ὁλόκληρος ὁ κυκλικός δίσκος (ἤ ὁλόκληρος ὁ ἡμικυκλικός δίσκος) ἀντιστοιχεῖ στή σχετική συχνότητα 100%. Τό σχῆμα, πού προκύπτει μέ τόν τρόπο αὐτό, λέγεται «κυκλικό διάγραμμα» (ἤ «ἡμικυκλικό διάγραμμα»). Νά κατασκευάσετε ἕνα κυκλικό διάγραμμα καί ἕνα ἡμικυκλικό διάγραμμα γιά τόν παρακάτω πίνακα

ΑΝΕΞΕΤΑΣΤΕΟΙ ΜΑΘΗΤΕΣ Β' ΤΑΞΕΩΣ

Μάθημα	Μαθητές
Νέα ἑλληνικά	6
Ἀρχαῖα ἑλληνικά	3
Μαθηματικά	9
Φυσικά	12
Γαλλικά	4
Ἱστορία	2
	36

Λύση. Οἱ σχετικές συχνότητες εἶναι:

Νέα ἑλληνικά: $\frac{6}{36} \simeq 0{,}167$ ἤ $16{,}7\%$

Ἀρχαῖα ἑλληνικά: $\frac{3}{36} \simeq 0{,}083$ ἤ $8{,}3\%$

Μαθηματικά: $\frac{9}{36} = 0{,}25$ ἤ 25%

Φυσικά: $\frac{12}{36} \simeq 0{,}333$ ἤ $33{,}3\%$

Γαλλικά: $\frac{4}{36} \simeq 0{,}111$ ἤ $11{,}1\%$

'Ιστορία: $\frac{2}{36} \simeq 0{,}056$ ἤ 5,6%

'Ο κυκλικός δίσκος θεωρεῖται σάν κυκλικός τομέας γωνίας 360°. 'Επομένως οἱ γωνίες τῶν κυκλικῶν τομέων θά εἶναι:

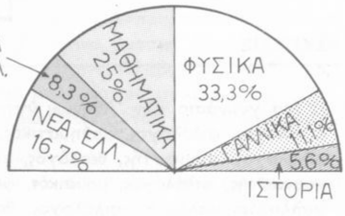
Νέα ἑλληνικά: $\frac{6}{36} \cdot 360° = 60°$, 'Αρχαῖα ἑλληνικά: $\frac{3}{36} \cdot 360° = 30°$

Μαθηματικά: $\frac{9}{36} \cdot 360° = 90°$ Φυσικά: $\frac{12}{36} \cdot 360° = 120°$

Γαλλικά: $\frac{4}{36} \cdot 360° = 40°$, 'Ιστορία: $\frac{2}{36} \cdot 360° = 20°$

Στό ἡμικυκλικό διάγραμμα οἱ γωνίες εἶναι τά μισά τῶν προηγούμενων. Μέ βάση αὐτά κατασκευάζουμε τά παρακάτω διαγράμματα:

(σχ. 7)



(σχ. 8)

3. 'Ο διπλανός πίνακας δείχνει τίς εἰσφορές τῶν μαθητῶν μιᾶς τάξεως γιά τήν ἐνίσχυση τοῦ ταμείου ἐκδρομῶν τῆς τάξεως. 'Από τόν πίνακα αὐτό βλέπουμε ὅτι οἱ μαθητές, πού ἔδωσαν μέχρι 15 δρχ., εἶναι

$$6+1+3+0+3+8 = 21$$

'Ο ἀριθμός 21, πού εἶναι τό ἄθροισμα ὅλων τῶν συχνοτήτων, οἱ ὁποῖες ἀντιστοιχοῦν στίς τιμές τίς μικρότερες ἤ ἴσες μέ 15, λέγεται «ἀθροιστική συχνότητα» τῆς τιμῆς 15, ἐνῶ τό πηλίκο $\frac{21}{32}$ λέγεται «ἀθροιστική σχετική συχνότητα» τῆς τιμῆς 15 καί ἐκφράζεται συνήθως σέ ποσοστό ἐπί τοῖς ἑκατό.

Νά βρεῖτε τίς ἀθροιστικές συχνότητες (καί τίς ἀθροιστικές σχετικές συχνότητες) ὅλων τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς καί νά κατασκευάσετε «πίνακα ἀθροιστικῶν συχνοτήτων» (καί «πίνακα ἀθροιστικῶν σχετικῶν συχνοτήτων») γιά τίς παραπάνω εἰσφορές τῶν μαθητῶν.

Τί παρατηρεῖτε γιά τίς ἀθροιστικές συχνότητες τῆς μικρότερης τιμῆς 10 καί τῆς μεγαλύτερης τιμῆς 20;

Ποσό (σέ δραχμές)	Μαθητές
10	6
11	1
12	3
13	0
14	3
→15	8
16	2
17	4
18	0
19	0
20	5
	32

Λύση.

'Από τό διπλανό πίνακα βλέπουμε ὅτι ἡ ἀθροιστική συχνότητα τῆς τιμῆς 10 εἶναι ἴση μέ τή συχνότητά της, ἐνῶ ἡ ἀθροιστική συχνότητα τῆς τιμῆς 20 εἶναι ἴση μέ τό πλῆθος ὅλων τῶν ἀτόμων τοῦ πληθυσμοῦ.

Ποσό (σέ δραχμές)	'Αθροιστική συχνότητα	'Αθροιστική σχετική % συχνότητα
10	6	18,75
11	7	21,875
12	10	31,25
13	10	31,25
14	13	40,625
15	21	65,625
16	23	71,875
17	27	84,375
18	27	84,375
19	27	84,375
20	32	100

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

6. Σέ ἕνα γυμνάσιο τῶν 'Αθηνῶν ὑπηρετοῦν οἱ ἑξῆς καθηγητές:
φιλόλογος, φιλόλογος, μαθηματικός, βιολόγος, γυμναστής, γαλλικῶν, φυσικός
φιλόλογος, γυμναστής, θεολόγος, τεχνικῶν, μαθηματικός, μαθηματικός
γυμναστής, φιλόλογος, μουσικός, φιλόλογος, φιλόλογος, χημικός, φιλόλογος
γαλλικῶν, γαλλικῶν, φιλόλογος, θεολόγος, φυσικός.
Νά κατασκευάσετε πίνακα συχνοτήτων καί σχετικῶν συχνοτήτων τοῦ προσωπικοῦ τοῦ γυμνασίου.

7. Οἱ 18 ποδοσφαιρικές ὁμάδες, πού μετέχουν στό ποδοσφαιρικό πρωτάθλημα τῆς Α' ἐθνικῆς κατηγορίας, σημείωσαν μιά Κυριακή τά παρακάτω τέρματα.

2	1	0	3	1	1	0	2	1
4	1	3	5	1	0	0	2	0

Νά κάνετε τόν πίνακα συχνοτήτων τῶν παρατηρήσεων αὐτῶν.

8. Οἱ ἑπόμενοι ἀριθμοί δίνουν τή βαθμολογία Α' τριμήνου τῶν μαθητῶν τῆς Α' τάξεως ἑνός γυμνασίου στά μαθηματικά:

12	14	11	18	16	17	16	12	13	11
10	9	9	9	9	10	10	14	10	15
13	8	12	18	13	9	10	9	10	11
9	11	13	18	9	9	9	13	15	16
16	17	11	10	17	17	8	13	16	15

Νά κατασκευάσετε πίνακα συχνοτήτων τῶν βαθμῶν αὐτῶν καί νά κάνετε τό ἀντίστοιχο πολύγωνο συχνοτήτων.

9. Μετρήσαμε τή διάρκεια ζωῆς 60 ἠλεκτρικῶν λαμπτήρων (σέ ὧρες) καί βρήκαμε:

752	825	792	970	1074	800	1060	1108	802	904	725	880
932	1050	1000	995	907	864	807	810	938	955	975	990
1069	1005	1074	1062	1050	1038	952	962	992	770	946	1038
711	830	954	938	960	1000	984	854	870	894	935	835
980	1040	1034	977	1055	870	952	830	874	990	975	910

Νά ὁμαδοποιήσετε τίς παραπάνω παρατηρήσεις σέ κλάσεις πού ἔχουν πλάτος 50 ὡρ. καί νά κάνετε τόν ἀντίστοιχο πίνακα συχνοτήτων.

10. Ὁ διπλανός πίνακας παρουσιάζει τήν παραγωγή ἑνός ἐργοστασίου ἠλεκτρικῶν συσκευῶν κατά τήν πενταετία 1970-1974. Νά παρουσιάσετε τήν παραγωγή τοῦ ἐργοστασίου μέ ραβδόγραμμα.

Ἔτος	Ἀριθμός συσκευῶν
1970	600 000
1971	750 000
1972	500 000
1973	800 000
1974	700 000

11. Δύο φίλοι παρακολουθοῦν τά αὐτοκίνητα, πού περνᾶνε ἀπό ἕνα δρόμο, καί σημειώνουν τό χρῶμα τους. Μετά ἀπό μισή ὥρα ἔχουν σημειώσει τά παρακάτω χρώματα:

κόκκινο, μπλέ, μπλέ, ἄσπρο, μαῦρο, πράσινο, ἄσπρο, ἄσπρο, κόκκινο, μπλέ, μαῦρο, μαῦρο, πράσινο, βυσσινί, κόκκινο, ἄσπρο, πράσινο, πράσινο, βυσσινί, μαῦρο, ἄσπρο, πράσινο, μπλέ, κίτρινο, βυσσινί, ἄσπρο, κόκκινο, κίτρινο, μπλέ, ἄσπρο, κόκκινο, πράσινο, κίτρινο, ἄσπρο, κόκκινο, ἄσπρο, μαῦρο, κίτρινο, πράσινο, ἄσπρο, μπλέ, μπλέ, ἄσπρο, μπλέ, κίτρινο.

Νά κάνετε τόν πίνακα συχνοτήτων τῶν χρωμάτων αὐτῶν καί νά κατασκευάσετε τό ἀντίστοιχο ραβδόγραμμα.

12. Οἱ 54 ἐργάτες ἑνός ἐργοστασίου παίρνουν τά ἑξῆς ἡμερομίσθια (σέ δραχμές):

480	440	550	495	520	465	465	430	500	580	420
440	450	500	400	510	530	560	480	470	500	435
515	600	590	495	505	465	510	420	440	525	415
460	495	435	490	480	535	440	500	430	570	470
520	520	475	550	505	470	550	515	520	495	

Νά ὁμαδοποιήσετε τίς παραπάνω παρατηρήσεις καί νά κάνετε τό ἀντίστοιχο ἱστόγραμμα.

13. Οἱ 40 ὑπάλληλοι μιᾶς δημόσιας ὑπηρεσίας ἔχουν τίς παρακάτω ἡλικίες (σέ ἔτη):

35	46	47	29	32	55	49	54	38	32	26	40	35	55
64	39	44	27	25	30	26	32	21	52	55	45	47	38
22	41	47	39	62	58	40	25	32	50	37	61		

Νά ὁμαδοποιήσετε τίς παραπάνω ἡλικίες σέ κλάσεις τοῦ ἴδιους πλάτους καί νά κάνετε τό ἀντίστοιχο ἱστόγραμμα.

14. Σέ ἀγῶνες σκοποβολῆς πῆραν μέρος 40 σκοπευτές, πού σημείωσαν τίς ἑξῆς ἐπιτυχίες:

147	197	172	135	144	168	195	168	190	170
166	185	188	172	180	164	170	191	189	174
186	150	148	169	171	190	196	184	173	170
164	149	158	131	188	139	155	177	171	180

Νά ὁμαδοποιήσετε τίς παρατηρήσεις αὐτές καί νά κάνετε πίνακα συχνοτήτων καί σχετικῶν συχνοτήτων.

15. Οἱ μαθητές μιᾶς τάξεως ρωτήθηκαν ποιά ἡμέρα τῆς ἑβδομάδας θέλουν νά γίνει ἡ

ἐκδρομή τους καί ἔδωσαν κατά σειρά τίς ἑξῆς ἀπαντήσεις:

Σάββατο, Τρίτη, Δευτέρα, Σάββατο, Τετάρτη, Δευτέρα, Παρασκευή, Σάββατο, Τρίτη, Παρασκευή, Τετάρτη, Πέμπτη, Σάββατο, Σάββατο, Τρίτη, Τετάρτη, Σάββατο, Παρασκευή, Παρασκευή, Τετάρτη, Τετάρτη, Σάββατο, Δευτέρα, Σάββατο, Πέμπτη, Σάββατο, Σάββατο, Δευτέρα, Δευτέρα, Τρίτη, Σάββατο, Παρασκευή.

Νά κατασκευάσετε κυκλικό διάγραμμα καί ἡμικυκλικό διάγραμμα τῶν προτιμήσεων τῶν μαθητῶν.

16. Ἕνα κυκλικό διάγραμμα παρουσιάζει τά μηνιαῖα ἔξοδα μιᾶς οἰκογένειας, πού ἀνέρχονται σέ 14 400 δρχ. Νά βρεῖτε πόσα ξοδεύει ἡ οἰκογένεια γιά διατροφή, ἄν ἡ γωνία τοῦ κυκλικοῦ τομέα «διατροφή» εἶναι 108°.

17. Ὁ παρακάτω πίνακας Ι παρουσιάζει τόν ἀριθμό τῶν παιδιῶν τῶν οἰκογενειῶν μιᾶς πολυκατοικίας. Νά συμπληρώσετε τή στήλη «ἀθροιστική συχνότητα».

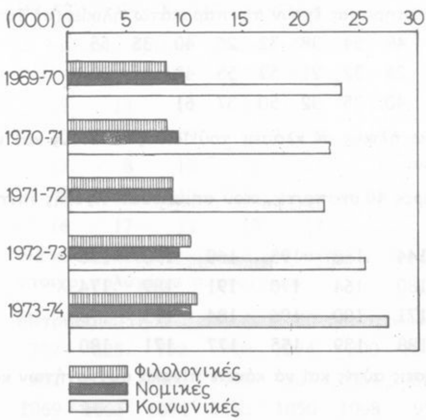
ΠΙΝΑΚΑΣ Ι

Παιδιά	Οἰκογένειες	Ἀθροιστική συχνότητα
0	6	
1	8	
2	13	
3	7	
4	3	
5	1	
	38	

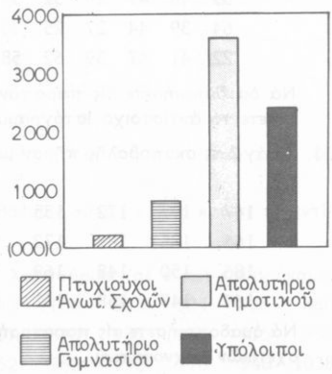
ΠΙΝΑΚΑΣ ΙΙ

Δωμάτια	Διαμερίσμ.	Ἀθροιστική συχνότητα
1	2	
2	4	
3		13
4		
5	4	
6	2	
	35	

18. Ὁ παραπάνω πίνακας ΙΙ παρουσιάζει τόν ἀριθμό δωματίων τῶν διαμερισμάτων μιᾶς πολυκατοικίας. Ἀφοῦ συμπληρώσετε τόν πίνακα, νά βρεῖτε α) πόσα διαμερίσματα ἔχουν λιγότερα ἀπό 4 δωμάτια, β) πόσα ἔχουν τουλάχιστον 4 δωμάτια, γ) πόσα ἔχουν τό πολύ 2 δωμάτια.



(σχ. 9)



(σχ. 10)

19. Τό διάγραμμα στό σχ. 9 παρουσιάζει (σέ χιλιάδες) τούς φοιτητές τῶν θεωρητικῶν ἐπιστημῶν κατά τήν πενταετία 1969-1974. Τό διάγραμμα στό σχ. 10 παρουσιάζει (σέ χιλιάδες) τό ἐπίπεδο ἐκπαιδεύσεως τῶν Ἑλλήνων μέ βάση τά στοιχεία τῆς ἀπογραφῆς τοῦ 1971. Τί συμπεράσματα βγάζετε ἀπό τή μελέτη τῶν δύο διαγραμμάτων;

Ἡ μέση τιμή.

11. 10. Ἄν κατά τή διάρκεια μιᾶς ἡμέρας μετρήσουμε τή θερμοκρασία μιᾶς πόλεως 6 φορές καί πάρουμε τίς παρακάτω ἐνδείξεις (σέ βαθμούς Κελσίου),

$$22, \quad 24, \quad 28, \quad 28, \quad 25, \quad 20,$$

λέμε ὅτι ἡ *«μέση θερμοκρασία»* τῆς ἡμέρας εἶναι

$$\frac{22+24+28+28+25+20}{6} = 24{,}5 \quad \text{βαθμοί.}$$

Ὁ ἀριθμός 24,5 λέγεται **μέση τιμή** ἤ **ἀριθμητικός μέσος** τῶν 6 ἄλλων καί προκύπτει ἀπ' αὐτούς, ὅταν διαιρέσουμε τό ἄθροισμά τους μέ τό πλῆθος τους.

Γενικότερα, ἄν ἔχουμε ν ἀριθμούς $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$, ἡ μέση τιμή τους σημειώνεται μέ $\overline{x}$ καί ὁρίζεται ἀπό τήν ἰσότητα[1]:

$$(1) \qquad \boxed{\overline{x} = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_\nu}{\nu} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} x_i}$$

Σέ μιά ἐπεξεργασία στατιστικῶν στοιχείων, πού **οἱ παρατηρήσεις μας εἶναι τιμές μιᾶς μεταβλητῆς**, μᾶς ἐνδιαφέρει πολύ ἡ μέση τιμή ὅλων τῶν παρατηρήσεων.

Ἀριθμός παιδιῶν	Οἰκογένειες
0	9
1	9
2	16
3	5
4	1
	40

Γιά νά βροῦμε τή μέση τιμή τῶν 40 παρατηρήσεων τοῦ διπλανοῦ πίνακα (βλέπε καί § 11.7), θά πρέπει νά ὑπολογίσουμε πρῶτα τό ἄθροισμά τους. Στό ἄθροισμα ὅμως αὐτό οἱ ἀριθμοί 0 καί 1 ἐμφανίζονται 9 φορές (ὅσες οἱ συχνότητές τους), ὁ ἀριθμός 2 ἐμφανίζεται 16 φο-

---

1. Τό ἄθροισμα $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu$ σημειώνεται σύντομα $\sum\limits_{i=1}^{\nu}\alpha_i$. Ἔτσι π.χ. εἶναι

$$\sum_{i=1}^{3} x_i = x_1+x_2+x_3 \qquad \sum_{i=1}^{3} x_i y_i = x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$$

$$\sum_{i=1}^{4} 3\alpha_i x_i^2 = 3\alpha_1x_1^2+3\alpha_2x_2^2+3\alpha_3x_3^2+3\alpha_4x_4^2$$

ρές, ὁ 3 ἐμφανίζεται 5 φορές καί ὁ 4 μιά φορά. Γιά νά βροῦμε λοιπόν τό ἄθροισμα τῶν 40 παρατηρήσεων, θά πρέπει νά προσθέσουμε τά γινόμενα τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς ἐπί τίς ἀντίστοιχες συχνότητες. Ἔτσι ἔχουμε

$$\bar{x} = \frac{9\cdot 0+9\cdot 1+16\cdot 2+5\cdot 3+1\cdot 4}{40} = \frac{60}{40} = 1{,}5$$

καί ἐπομένως μέση τιμή τῶν 40 παρατηρήσεών μας εἶναι ὁ ἀριθμός 1,5.

Γιά νά διευκολυνθοῦμε στόν ὑπολογισμό τῆς μέσης τιμῆς, συμπληρώνουμε τόν πίνακα συχνοτήτων μέ μιά στήλη πού ἔχει τά γινόμενα (τιμή)×(συχνότητα), ὁπότε τό ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν τῆς στήλης αὐτῆς εἶναι ἀκριβῶς ὁ ἀριθμητής τοῦ $\bar{x}$. Ὁ μηχανισμός αὐτός φαίνεται στόν παρακάτω πίνακα τῶν ὁμαδοποιημένων παρατηρήσεων τῆς § 11.9. Σέ ἕναν τέτοιο πίνακα **παίρνουμε πάντοτε ὡς τιμές τῆς μεταβλητῆς τά «κέντρα» τῶν κλάσεων.**

Ὕψος σέ cm	Κέντρο κλάσεως	Μαθητές	(τιμή) × (συχνότητα)
155–159	157	4	628
159–163	161	6	966
163–167	165	10	1650
167–171	169	13	2197
171–175	173	22	3806
175–179	177	10	1770
179–183	181	5	905
183–187	185	7	1295
187–191	189	3	567
		80	13784

$$\bar{x} = \frac{13784}{80} = 172{,}3$$

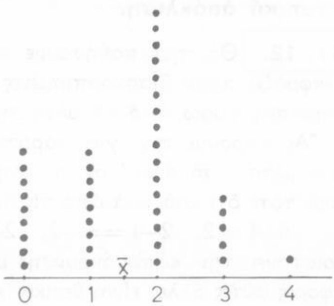
Γενικά λοιπόν, ἄν ἡ μεταβλητή μας παίρνει τίς τιμές $x_1, x_2, \ldots, x_\kappa$ (σέ ὁμαδοποιημένες παρατηρήσεις αὐτές εἶναι τά κέντρα τῶν κλάσεων) μέ συχνότητες $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\kappa$ ἀντιστοίχως, ἡ μέση τιμή $\bar{x}$ θά εἶναι

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + \ldots + \nu_\kappa x_\kappa}{\nu} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\kappa} \nu_i x_i} \qquad (2)$$

Τό ἄθροισμα $\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_\kappa$ τῶν συχνοτήτων εἶναι ἴσο μέ τό πλῆθος ν τῶν παρατηρήσεων, δηλαδή $\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_\kappa = \nu$.

11. 11. Ἡ μέση τιμή $\overline{x}$ εἶναι ἀριθμός συγκεκριμένος καί ὁμοειδής πρός τίς τιμές τῆς μεταβλητῆς. Ἔτσι π.χ. ὁ $\overline{x} = 172{,}3$, πού βρήκαμε στόν προηγούμενο πίνακα, παριστάνει cm καί λέμε ὅτι εἶναι τό «μέσο ὕψος» σέ cm τῶν μαθητῶν πού ἐξετάσαμε.

Ἄν παραστήσουμε τίς τιμές τῆς μεταβλητῆς τῆς § 11.10 (ἀριθμός παιδιῶν) μέ σημεῖα ἑνός ἄξονα, ἡ μέση τιμή θά παριστάνεται μέ ἕνα σημεῖο τοῦ ἴδιου ἄξονα, τό ὁποῖο θά βρίσκεται ἀνάμεσα στά ἄλλα σημεῖα.



Βλέπουμε λοιπόν ὅτι **ἡ μέση τιμή εἶναι ἕνα σημεῖο, γύρω ἀπό τό ὁποῖο βρίσκονται οἱ τιμές τῆς μεταβλητῆς,** καί γι' αὐτό λέμε ὅτι ἡ μέση τιμή εἶναι **χαρακτηριστικό θέσεως.**

Μέ τίς μέσες τιμές τους μποροῦμε νά συγκρίνουμε πρόχειρα δύο ὁμοειδεῖς πληθυσμούς, πού ἐξετάζονται ὡς πρός τήν ἴδια μεταβλητή. Ἄς προσέξουμε π.χ. τούς παρακάτω πίνακες, πού δίνουν τή βαθμολογία τῶν μαθητῶν τῶν δύο τμημάτων τῆς Γ' τάξεως ἑνός γυμνασίου σ' ἕνα πρόχειρο διαγώνισμα τῶν μαθηματικῶν. Ἀπό τούς δύο αὐτούς πίνακες δέν μποροῦμε εὔκολα νά συγκρίνουμε τήν ἐπίδοση τῶν δύο τμημάτων, γιατί δέν ἔχουμε τόν ἴδιο ἀριθμό μαθητῶν σέ κάθε τμῆμα. Ἄν βροῦμε ὅμως τή μέση τιμή βαθμολογίας γιά τό κάθε τμῆμα, δηλαδή ἄν βροῦμε τούς ἀριθμούς

ΤΜΗΜΑ 1ο

Βαθμός	Μαθητές
8	3
9	1
10	3
12	2
13	1
14	5
16	2
17	3
	20

ΤΜΗΜΑ 2ο

Βαθμός	Μαθητές
8	3
9	2
10	5
12	4
13	1
14	5
16	4
17	2
	26

$$\text{γιά τό 1ο}: \ \overline{x} = \frac{3\cdot8+1\cdot9+3\cdot10+2\cdot12+1\cdot13+5\cdot14+2\cdot16+3\cdot17}{20} = 12{,}65$$

$$\text{γιά τό 2ο}: \ \overline{x} = \frac{3\cdot8+2\cdot9+5\cdot10+4\cdot12+1\cdot13+5\cdot14+4\cdot16+2\cdot17}{26} \simeq 12{,}34,$$

καταλαβαίνουμε ἀμέσως ὅτι τό 1ο τμῆμα εἶχε καλύτερη ἐπίδοση στό διαγώνισμα.

Ἡ τυπική ἀπόκλιση.

11. 12. Θά προσπαθήσουμε τώρα νά βροῦμε ἕνα μέγεθος, τό ὁποῖο νά ἐκφράζει πόσο διασκορπισμένες (ἤ πόσο συγκεντρωμένες) εἶναι οἱ παρατηρήσεις γύρω ἀπό τή μέση τιμή τους.

Ἄς πάρουμε π.χ. γιά παρατηρήσεις τούς ἀριθμούς 6, 2, 2, 7, 3, πού ἔχουν μέση τιμή 4 καί ἄς τίς παραστήσουμε μέ σημεῖα ἑνός ἄξονα. Βλέπουμε τότε ὅτι κάθε μιά ἀπό τίς διαφορές

$$6-4=2,\quad 2-4==-2,\quad 2-4=-2,\quad 7-4=3,\quad 3-4=-1$$

παριστάνει τήν «ἀπομάκρυνση» μιᾶς παρατηρήσεως ἀπό τό $\overline{x}$. Ἀπό τίς διαφορές αὐτές ἄλλες εἶναι θετικές καί ἄλλες ἀρνητικές, ἐνῶ τό ἄθροισμά τους εἶναι πάντοτε μηδέν. Ἔτσι τή *συνολική διασπορά* τῶν παρατηρήσεων δέν μποροῦμε νά τήν ἐκφράσουμε μέ τό ἄθροισμα τῶν διαφορῶν. Μποροῦμε ὅμως νά τήν ἐκφράσουμε μέ τό ἄθροισμα

$$A=(6-4)^2+(2-4)^2+(2-4)^2+(7-4)^2+(3-4)^2=22,$$

πού ἔχει προσθετέους τά τετράγωνα τῶν διαφορῶν (γιατί ὅσο πιό ἀπομακρυσμένες εἶναι οἱ παρατηρήσεις μας ἀπό τό $\overline{x}=4$, τόσο μεγαλύτερο εἶναι τό ἄθροισμα αὐτό). Ὁ ἀριθμός Α ὅμως ἔχει δύο μειονεκτήματα. Εἶναι συνήθως μεγάλος σέ σχέση μέ τίς παρατηρήσεις μας καί δέν εἶναι ὁμοειδής μέ αὐτές (ἄν π.χ. οἱ παρατηρήσεις μας 6,2,2,7,3 παριστάνουν cm, τό Α παριστάνει cm^2). Γι' αὐτό ἀκριβῶς παίρνουμε ὡς *«μέτρο διασπορᾶς»* τῶν παρατηρήσεών μας τόν ἀριθμό

$$\sqrt{\frac{(6-4)^2+(2-4)^2+(2-4)^2+(7-4)^2+(3-4)^2}{5}}\simeq 2{,}097$$

πού εἶναι πιό μικρός καί ἔχει τίς ἴδιες μονάδες μετρήσεως μέ τίς παρατηρήσεις μας. Ὁ ἀριθμός αὐτός λέγεται **τυπική ἀπόκλιση** καί συμβολίζεται μέ **s**. Γενικά λοιπόν, ἄν ἔχουμε ὡς παρατηρήσεις τίς ν τιμές $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ μιᾶς μεταβλητῆς, ἡ τυπική ἀπόκλιση s τῶν παρατηρήσεων ὁρίζεται ἀπό τήν ἰσότητα

$$\boxed{s=\sqrt{\frac{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\ldots+(x_\nu-\overline{x})^2}{\nu}}=\sqrt{\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\overline{x})^2}} \tag{3}$$

Ἄς δοῦμε τώρα πῶς ὑπολογίζεται ἡ τυπική ἀπόκλιση τῶν παρατηρήσεων ἀπό ἕνα πίνακα συχνοτήτων. Στήν § 11.10 βρήκαμε ὅτι ἡ μέση τιμή τῶν παρατηρήσεων τοῦ παρακάτω πίνακα εἶναι $\overline{x}=1{,}5$. Γιά νά βροῦμε τήν τυπική ἀπόκλιση τῶν παρατηρήσεων αὐτῶν, πρέπει νά ὑπολογίσουμε πρῶτα τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαφορῶν ὅλων τῶν παρατηρήσεων ἀπό τό 1,5. Στό ἄθροισμα ὅμως αὐτό οἱ διαφορές 0–1,5 καί 1–1,5 ἐμφανίζονται 9 φορές (ὅση εἶναι ἡ συχνότητα τῶν 0 καί 1), ἡ διαφορά 2–1,5 ἐμφανίζεται 16 φορές, ἡ διαφορά 3–1,5 ἐμφανίζεται 5 φορές καί ἡ διαφορά 4 – 1,5 ἐμφανίζεται μιά φορά. Ἔχουμε λοιπόν

Ἀριθμός παιδιῶν	Οἰκογένειες
0	9
1	9
2	16
3	5
4	1
	40

$$s = \sqrt{\frac{9\cdot(0-1{,}5)^2+9\cdot(1-1{,}5)^2+16\cdot(2-1{,}5)^2+5\cdot(3-1{,}5)^2+1\cdot(4-1{,}5)^2}{40}} =$$

$$= \sqrt{\frac{9\cdot 2{,}25+9\cdot 0{,}25+16\cdot 0{,}25+5\cdot 2{,}25+1\cdot 6{,}25}{40}} = \sqrt{\frac{44}{40}} = \simeq 1{,}048$$

καί συνεπῶς τυπική ἀπόκλιση τῶν παρατηρήσεων εἶναι ὁ ἀριθμός 1,048.

Ὁ ὑπολογισμός τῶν $\bar{x}$ καί s διευκολύνεται, ἄν συμπληρώσουμε τόν πίνακα συχνοτήτων μέ τίς ἑξῆς στῆλες:

- μιά στήλη μέ τά γινόμενα *(τιμή) × (συχνότητα)* γιά τόν ὑπολογισμό τοῦ $\bar{x}$.
- μιά στήλη μέ τίς διαφορές $\delta = (\text{τιμή}) - \bar{x}$,
- μιά στήλη μέ τά *τετράγωνα τῶν διαφορῶν δ*,
- μιά στήλη μέ τά γινόμενα *(συχνότητα)* $\cdot\, \delta^2$ τό ἄθροισμα τῆς ὁποίας δίνει τόν ἀριθμητή στό ὑπόρριζο τοῦ s.

Ἡ διαδικασία αὐτή φαίνεται στόν παρακάτω πίνακα.

Ἀριθμός παιδιῶν	Οἰκογένειες	(τιμή) × (συχνότητα)	$\delta=(\text{τιμή})-\bar{x}$	δ^2	(συχνότητα)$\cdot\delta^2$
0	9	0	–1,5	2,25	20,25
1	9	9	–0,5	0,25	2,25
2	16	32	–0,5	0,25	4
3	5	15	1,5	2,25	11,25
4	1	4	2,5	6,25	6,25
	40	60			44

$$\bar{x} = \frac{60}{40} = 1{,}5 \qquad s = \sqrt{\frac{44}{40}} = 1{,}048$$

Σέ ὁμαδοποιημένες παρατηρήσεις ὡς τιμές τῆς μεταβλητῆς παίρνουμε τά κέντρα τῶν κλάσεων.

Γενικά τώρα, ἄν ἡ μεταβλητή μας παίρνει τίς τιμές $x_1, x_2, \ldots, x_\kappa$ μέ συχνότητες $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\kappa$, ἡ τυπική ἀπόκλιση s θά εἶναι

$$(4) \quad \boxed{s = \sqrt{\frac{\nu_1.(x_1-\bar{x})^2+\nu_2.(x_2-\bar{x})^2+\ldots+\nu_\kappa.(x_\kappa-\bar{x})^2}{\nu}} = \sqrt{\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\kappa} \nu_i\,(x_i-\bar{x})^2}}$$

ὅπου πάλι τό ἄθροισμα $\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_\kappa$ τῶν συχνοτήτων εἶναι ἴσο μέ τό πλῆθος ν τῶν παρατηρήσεων, δηλαδή $\nu = \nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_\kappa$

Ἀπό ὅλα τά παραπάνω συμπεραίνουμε ὅτι ἡ τυπική ἀπόκλιση s τῶν παρατηρήσεων ἀναφέρεται στίς ἴδιες μονάδες τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς καί μετράει τή *διασπορά* τῶν παρατηρήσεων γύρω ἀπό τή μέση τιμή τους. Δηλαδή, μεγάλη τυπική ἀπόκλιση σημαίνει ὅτι οἱ παρατηρήσεις μας ἔχουν μεγάλη διασπορά γύρω ἀπό τή μέση τιμή $\bar{x}$, ἐνῶ μικρή τυπική ἀπόκλιση σημαίνει ὅτι ὅλες οἱ παρατηρήσεις μας εἶναι συγκεντρωμένες γύρω ἀπό τή μέση τιμή τους. Γι' αὐτό λέμε ὅτι ἡ τυπική ἀπόκλιση εἶναι **χαρακτηριστικό διασπορᾶς**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Δίνονται ν ἀριθμοί $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$. Ὀνομάζουμε μ τό μικρότερό τους καί Μ τό μεγαλύτερό τους. Νά δείξετε ὅτι $\mu \leq \bar{x} \leq M$. Πότε ἰσχύει ἡ ἰσότητα;**

Λύση. Κάθε ἀριθμός ἀπό τούς $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ εἶναι μικρότερος ἀπό τό Μ (ἤ ἴσος μέ τό Μ) καί μεγαλύτερος ἀπό τό μ (ἤ ἴσος μέ τό μ). Ἑπομένως θά ἔχουμε

$$\begin{array}{c} \mu \leq x_1 \leq M \\ \mu \leq x_2 \leq M \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ \mu \leq x_\nu \leq M \\ \hline \nu.\mu \leq x_1+x_2+\ldots+x_\nu \leq \nu.M \end{array}$$

$$\text{ἤ} \quad \mu \leq \frac{x_1+x_2+\ldots+x_\nu}{\nu} \leq M$$

$$\text{ἤ} \quad \mu \leq \bar{x} \leq M$$

Ἡ ἰσότητα ἰσχύει, ὅταν ὅλοι οἱ ἀριθμοί $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ εἶναι ἴσοι μεταξύ τους. Δηλαδή, **ἄν ὅλες οἱ παρατηρήσεις εἶναι ἴσες μέ τόν ἴδιο ἀριθμό, τότε καί ἡ μέση τιμή τους εἶναι ἴση μέ τόν ἀριθμό αὐτό.**

2. **Στό διπλανό πίνακα σχετικῶν συχνοτήτων νά δείξετε ὅτι ἡ μέση τιμή βρίσκεται ἀμέσως, ἄν προσθέσουμε ὅλα τά γινόμενα (τιμή) × (σχετική συχνότητα).**

Ἀριθμός παιδιῶν	Οἰκογένειες %
0	22,5
1	22,5
2	40
3	12,5
4	2,5

Λύση. Τίς συχνότητες τῶν τιμῶν 0,1,2,3,4 δέν τίς ξέρουμε. Ἄς τίς ὀνομάσουμε $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5$ ἀντιστοίχως. Ἄς ὀνομάσουμε ἀκόμη ν τό πλῆθος ὅλων τῶν παρατηρήσεων (πού ἐπίσης δέν τό ξέρουμε). Τότε θά ἔχουμε

$$\overline{x} = \frac{\nu_1.0+\nu_2.1+\nu_3.2+\nu_4.3+\nu_5.4}{\nu} = \frac{\nu_1}{\nu}.0+\frac{\nu_2}{\nu}.1+\frac{\nu_3}{\nu}.2+\frac{\nu_4}{\nu}.3+\frac{\nu_5}{\nu}.4$$

᾿Αλλά οἱ ἀριθμοί $\frac{\nu_1}{\nu}$, $\frac{\nu_2}{\nu}$, $\frac{\nu_3}{\nu}$, $\frac{\nu_4}{\nu}$, $\frac{\nu_5}{\nu}$ εἶναι οἱ σχετικές συχνότητες τῶν τιμῶν 0,1,2,3,4 καί δίνονται ἀπό τόν πίνακα σχετικῶν συχνοτήτων. Ἔτσι ἔχουμε

$$\overline{x} = 0.(0{,}225)+1.(0{,}225)+2.(0{,}40)+3.(0{,}125)+4.(0{,}025) = 1{,}5$$

Βλέπουμε δηλαδή ὅτι ἀπό ἕναν πίνακα σχετικῶν συχνοτήτων βρίσκεται ἡ μέση τιμή δίχως νά ξέρουμε τό πλῆθος τῶν παρατηρήσεων.

---

3. **Ἄν διατάξουμε τίς παρατηρήσεις μας κατά αὔξουσα τάξη, ὁ ἀριθμός πού τίς χωρίζει σέ δύο ἰσοπληθεῖς ὁμάδες λέγεται «διάμεσος» (ὁ ἀριθμός αὐτός εἶναι χαρακτηριστικό θέσεως). Νά βρεθοῦν οἱ διάμεσοι:**
α) τῶν παρατηρήσεων 6,8,2,3,3,2,7,8,9,7,20
β) τῶν παρατηρήσεων 5,8,2,3,2,7,7,9,6,11

Λύση. α) Γράφοντας τίς παρατηρήσεις μας κατά αὔξουσα τάξη ἔχουμε

2, 2, 3, 3, 6, 7, 7, 8, 8, 9, 20
↑

Βλέπουμε λοιπόν ὅτι ὁ ἀριθμός 7 χωρίζει τίς παρατηρήσεις σέ δύο ὁμάδες μέ ἴσα πλήθη παρατηρήσεων. Ἄρα αὐτός εἶναι ὁ διάμεσος. Γενικά, σέ περιττό πλῆθος παρατηρήσεων διάμεσος εἶναι ἡ «μεσαία» παρατήρηση (ἀφοῦ διαταχθοῦν κατά αὔξουσα τάξη).

β) Γράφουμε τίς παρατηρήσεις μας κατά αὔξουσα τάξη καί ἔχουμε

2 , 2 , 3 , 5 , 6 , 7 , 7 , 8 , 9 , 11

Τώρα ἔχουμε ἄρτιο πλῆθος παρατηρήσεων καί δέν ὑπάρχει μιά «μεσαία» παρατήρηση, ἀλλά ὑπάρχουν δύο «μεσαῖες» παρατηρήσεις. Στήν περίπτωση αὐτή παίρνουμε γιά διάμεσο τό ἡμιάθροισμά τους. Δηλαδή ἐδῶ διάμεσος εἶναι ὁ $\frac{6+7}{2} = 6{,}5$.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

20. Νά βρεῖτε τή μέση τιμή 6 διαδοχικῶν ἀκεραίων, ἄν μεγαλύτερός τους εἶναι ὁ 24.

21. Στούς 9 ἀγῶνες τοῦ ποδοσφαιρικοῦ πρωταθλήματος τῆς Α' ἐθνικῆς κατηγορίας σημειώθηκαν τά παρακάτω ἀποτελέσματα:

2-1, 0-0, 4-2, 1-1, 1-0, 2-2, 2-0, 1-0, 1-1

Νά βρεῖτε τή μέση τιμή τῶν τερμάτων πού σημειώθηκαν.

22. Ἡ μέση τιμή πέντε ἀριθμῶν εἶναι 5,2. Οἱ τρεῖς ἀπ' αὐτούς εἶναι ὁ 2 ὁ 3 καί ὁ 6. Νά βρεῖτε τούς ἄλλους δύο, ἄν ὁ ἕνας εἶναι διπλάσιος ἀπό τόν ἄλλο.

23. Νά βρεῖτε 5 διαδοχικούς ἀκέραιους, πού ἔχουν μέση τιμή τόν 19.

24. Οἱ μαθητές, πού πρώτευσαν στίς τρεῖς τάξεις ἑνός γυμνασίου, πῆραν τούς παρακάτω βαθμούς.

Τῆς Α': 18 20 20 17 19 19 17 18 19
Τῆς Β': 19 19 20 17 17 20 18 18 18 17 19
Τῆς Γ': 20 18 17 19 19 20 18 18 17 18 17 20

Ποιός ἀπό τούς τρεῖς θά πάρει τό βραβεῖο πού ἀθλοθετήθηκε γιά τόν καλύτερο μαθητή τοῦ σχολείου;

25. ῾Ο διπλανός πίνακας παρουσιάζει τίς ἐνδείξεις ἑνός ζαριοῦ, πού τό ρίξαμε 30 φορές. Νά βρεῖτε τή μέση τιμή τῶν ἐνδείξεων αὐτῶν.

Ἔνδειξη	Συχνότητα
1	3
2	6
3	6
4	5
5	6
6	4
	30

26. ῾Ο παρακάτω πίνακας Ι παρουσιάζει τά ἡμερομίσθια τῶν 64 ἐργατῶν ἑνός ἐργοστασίου. Νά βρεῖτε τό μέσο ἡμερομίσθιο.

ΠΙΝΑΚΑΣ Ι

῾Ημερομίσθιο (σέ δραχμές)	Ἐργάτες
300–340	6
340–380	12
380–420	32
420–460	10
460–500	4
	64

ΠΙΝΑΚΑΣ ΙΙ

Ἀριθμός δωματίων	Διαμερίσματα
1	4
2	8
3	12
4	6
5	2
	32

ΠΙΝΑΚΑΣ ΙΙΙ

῾Ηλικία	῾Υπάλληλοι
20–30	6
30–40	14
40–50	10
50–60	8
60–70	2
	40

27. Ἄν πάρουμε γιά παρατηρήσεις τούς ἀριθμούς 2,5,5,8,1,3, νά βρεῖτε τήν τυπική ἀπόκλισή τους.

28. Νά βρεῖτε τήν τυπική ἀπόκλιση τῶν παρατηρήσεων τοῦ παραπάνω πίνακα ΙΙ, πού παρουσιάζει τόν ἀριθμό δωματίων τῶν διαμερισμάτων μιᾶς πολυκατοικίας.

29. ῾Ο παραπάνω πίνακας ΙΙΙ παρουσιάζει τίς ἡλικίες τῶν ὑπαλλήλων μιᾶς δημόσιας ὑπηρεσίας. Νά βρεῖτε τήν τυπική τους ἀπόκλιση.

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 11

1. ῾Η **στατιστική** ἀσχολεῖται μέ τή συλλογή καί ἐπεξεργασία τῶν **παρατηρήσεων**, πού προκύπτουν ἀπό τήν ἐξέταση τῶν στοιχείων **(ἀτόμων)** ἑνός **πληθυσμοῦ** ὡς πρός μιά ἤ περισσότερες μεταβλητές ἰδιότητές τους. Ὅταν ἐξετάζουμε ὅλα τά ἄτομα τοῦ πληθυσμοῦ, κάνουμε **ἀπογραφή**, ἐνῶ, ὅταν ἐξετάζουμε μόνο ἕνα μέρος τους, κάνουμε **δειγματοληψία**. ῾Η μεταβλητή ἰδιότητα, ὡς πρός τήν ὁποία ἐξετάζονται τά ἄτομα ἑνός πληθυσμοῦ, μπορεῖ νά εἶναι:

— *ποσοτική*, ὁπότε λέγεται ἁπλῶς **μεταβλητή** καί οἱ παρατηρήσεις μας εἶναι ἀριθμοί (πού λέγονται *τιμές* τῆς μεταβλητῆς),

— *ποιοτική*, ὁπότε οἱ παρατηρήσεις μας δέν εἶναι ἀριθμοί ἀλλά «χαρακτηρισμοί».

2. Γιά μιά ὁρισμένη παρατήρηση ὁρίζουμε ὅτι:

- **συχνότητά** της εἶναι ὁ ἀριθμός, πού δηλώνει πόσα ἄτομα τοῦ πληθυσμοῦ ἔχουν παρατήρηση ἴση μέ αὐτή. (Τό ἄθροισμα τῶν συχνοτήτων ὅλων τῶν παρατηρήσεων, πού εἶναι διαφορετικές μεταξύ τους, εἶναι ἴσο μέ τόν ἀριθμό τῶν ἀτόμων τοῦ πληθυσμοῦ).

- **σχετική συχνότητά** της εἶναι τό πηλίκο τῆς συχνότητάς της πρός τόν ἀριθμό τῶν ἀτόμων τοῦ πληθυσμοῦ. (῾Η σχετική συχνότητα εἶναι ἀριθμός μικρότερος ἀπό τή μονάδα, καί τό ἄθροισμα τῶν σχετικῶν συχνοτήτων ὅλων τῶν παρατηρήσεων, πού εἶναι διαφορετικές μεταξύ τους, εἶναι ἴσο μέ τή μονάδα).

3. Μετά ἀπό τή **διαλογή τῶν παρατηρήσεων** ἑνός πληθυσμοῦ μποροῦμε νά κατασκευάσουμε:

- τόν **πίνακα συχνοτήτων** τους, ὁ ὁποῖος μᾶς δίνει τήν *κατανομή* ὅλων τῶν παρατηρήσεων. Σ' ἕναν τέτοιο πίνακα ἀντιστοιχεῖ ἕνα **πολύγωνο συχνοτήτων** καί ἕνα **διάγραμμα συχνοτήτων**.
- τόν **πίνακα σχετικῶν συχνοτήτων** τους, στόν ὁποῖο ἀντιστοιχεῖ πάλι ἕνα **πολύγωνο σχετικῶν συχνοτήτων** καί ἕνα **διάγραμμα σχετικῶν συχνοτήτων.**

Στήν περίπτωση πού οἱ παρατηρήσεις μας εἶναι τιμές μιᾶς μεταβλητῆς καί ἔχουμε πολλές τιμές διαφορετικές μεταξύ τους, κάνουμε **ὁμαδοποίηση τῶν παρατηρήσεων.** Χωρίζουμε δηλαδή τό διάστημα μεταβολῆς τῆς μεταβλητῆς σέ ὑποδιαστήματα **(κλάσεις)** καί μετρᾶμε τίς παρατηρήσεις, πού βρίσκονται σέ κάθε ἕνα ἀπ' αὐτά. Οἱ συχνότητες τώρα ἀναφέρονται στίς κλάσεις καί ἡ ἐποπτική εἰκόνα κάθε συχνότητας δίνεται μέ τό ἐμβαδό ἑνός ὀρθογωνίου. Τά ὀρθογώνια, πού παριστάνουν τίς συχνότητες, εἶναι συνεχόμενα καί ἀποτελοῦν ἕνα σχῆμα, πού λέγεται **ἱστόγραμμα.**

4. Ἄν ἔχουμε ν ἀριθμούς $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ ὁρίζουμε ὅτι:

- **μέση τιμή** τους εἶναι ὁ ἀριθμός $\bar{x} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} x_i$
- **τυπική ἀπόκλισή** τους εἶναι ὁ ἀριθμός $s = \sqrt{\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\bar{x})^2}$.

Στήν περίπτωση πού οἱ παρατηρήσεις σ' ἕναν πληθυσμό εἶναι τιμές μιᾶς μεταβλητῆς καί ἡ μεταβλητή αὐτή παίρνει τίς τιμές $x_1, x_2, \ldots, x_\kappa$ μέ συχνότητες $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\kappa$ ἀντιστοίχως, ἡ μέση τιμή καί ἡ τυπική ἀπόκλιση τῶν παρατηρήσεων δίνονται ἀπό τίς ἰσότητες

$$\bar{x} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\kappa}\nu_i x_i \quad , \quad s = \sqrt{\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\kappa}\nu_i(x_i-\bar{x})^2}$$

Οἱ δύο αὐτοί ἀριθμοί εἶναι ὁμοειδεῖς μέ τίς τιμές τῆς μεταβλητῆς καί ὑπολογίζονται μέ προσθήκη κατάλληλων στηλῶν στόν πίνακα συχνοτήτων.

Ἡ μέση τιμή εἶναι **χαρακτηριστικό θέσεως,** δηλαδή παριστάνει ἕνα σημεῖο, γύρω ἀπό τό ὁποῖο βρίσκονται οἱ παρατηρήσεις μας. Ἡ τυπική ἀπόκλιση εἶναι **χαρακτηριστικό διασπορᾶς,** δηλαδή εἶναι ἕνα μέτρο, πού ἐκφράζει πόσο διασκορπισμένες ἤ συγκεντρωμένες εἶναι οἱ παρατηρήσεις μας γύρω ἀπό τή μέση τιμή τους.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ*

30. Οἱ παρακάτω ἀριθμοί δίνουν τά ἀθροίσματα τῶν ἐνδείξεων δύο ζαριῶν, πού τά ρίξαμε 40 φορές.

8	3	5	5	10	6	7	2	6	10	4	4	11	7
7	5	6	4	9	9	12	6	10	7	6	5	3	
2	4	6	2	12	11	9	8	6	9	7	4	4	

Νά κατασκευάσετε τό πολύγωνο συχνοτήτων τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν.

31. Νά κατασκευάσετε τό κυκλικό διάγραμμα, πού ἀντιστοιχεῖ στό διπλανό πίνακα, ὁ ὁποῖος παρουσιάζει τά μηνιαῖα ἔξοδα μιᾶς οἰκογένειας.

Τροφή	4080
Ντύσιμο	2465
Ἐνοίκιο	4250
Ψυχαγ.-Εἰσιτηρ.	1700
Φῶς - νερό...	1785
Διάφορα	1020

32. Ἕνα ἄτομο Α σέ 15 ἡμέρες ξοδεύει καθημερινά τά παρακάτω ποσά (σέ δραχμές):

20 52 40 35 15 28 12 40 40 10 15 25 12 20 50

Ἕνα ἄλλο ἄτομο Β σέ 20 ἡμέρες ξοδεύει καθημερινά (σέ δραχμές):

30 28 42 40 12 14 16 25 18 58 30 24 12 45 36
24 10 20 38 40

Ποιός ἀπό τούς δύο εἶναι ὁ πιό σπάταλος;

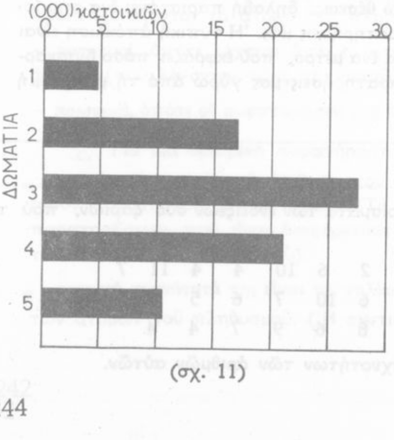
33. Τό μέσο ἡμερομίσθιο 30 ἐργατῶν ἑνός ἐργοστασίου εἶναι 460 δρχ. Ἀπ' αὐτούς οἱ 10 εἶναι εἰδικευμένοι καί ἔχουν ἡμερομίσθιο 620 δρχ. Νά βρεῖτε τό ἡμερομίσθιο τῶν ὑπόλοιπων, πού εἶναι ἀνειδίκευτοι.

34. Νά βρεῖτε τή μέση τιμή καί τήν τυπική ἀπόκλιση τῶν παρατηρήσεων τοῦ διπλανοῦ πίνακα, ὁ ὁποῖος παρουσιάζει τή διάρκεια ζωῆς τῶν λαμπτήρων, πού κατασκευάζει ἕνα ἐργοστάσιο.

Ὧρες	Λαμπτῆρες
700– 750	20
750– 800	56
800– 850	100
850– 900	92
900– 950	68
950–1000	44
	380

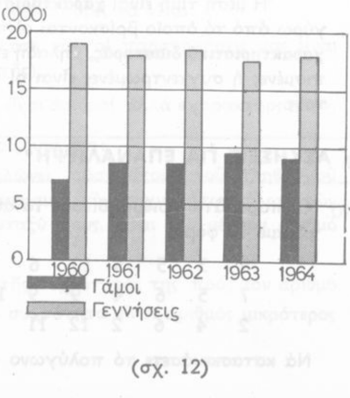
35. Τό διάγραμμα Ι παρουσιάζει τίς νέες κατοικίες, πού χτίστηκαν στήν Ἑλλάδα τό 1974 (σέ χιλιάδες). Τό διάγραμμα ΙΙ παρουσιάζει (σέ χιλιάδες) τούς γάμους καί τίς γεννήσεις κατά τήν πενταετία 1960-1964. Διατυπῶστε τά συμπεράσματα πού βγάζετε ἀπό τή μελέτη τοῦ καθενός διαγράμματος.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ Ι



(σχ. 11)

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΙΙ



(σχ. 12)

36. Ὁ διπλανός πίνακας παρουσιάζει τίς ἡλικίες τῶν κατοίκων μιᾶς κωμοπόλεως. Νά συμπληρώσετε τόν πίνακα μέ στῆλες σχετικῆς συχνότητας, ἀθροιστικῆς συχνότητας καί ἀθροιστικῆς σχετικῆς συχνότητας.

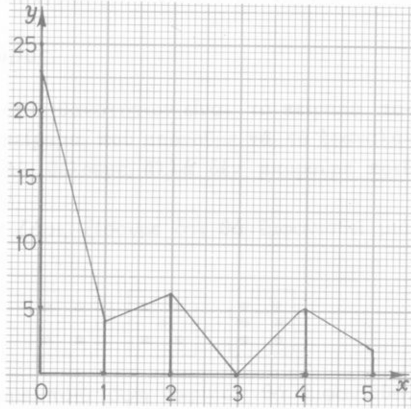
Ἡλικία (σέ ἔτη)	Κάτοικοι
0– 10	325
10– 20	352
20– 30	327
30– 40	404
40– 50	320
50– 60	224
60– 70	126
70– 80	83
80– 90	21
90–100	4

37. Σέ μιά πόλη μετρήσαμε τήν πιό μεγάλη θερμοκρασία ἐπί 30 συνεχεῖς ἡμέρες καί βρήκαμε:

18 21 21 19 23 19 25 27 24 23 20 21 24 19 23
16 15 18 20 21 23 25 27 27 29 28 25 26 26 24

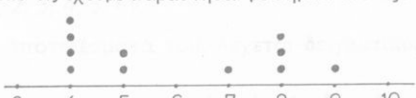
Νά βρεῖτε τό διάμεσο (βλ. πρδ. 3, σελ. 105) καί τήν τυπική ἀπόκλιση τῶν θερμοκρασιῶν αὐτῶν.

38. Τό διπλανό πολύγωνο συχνοτήτων παρουσιάζει τίς ἀπουσίες τῶν μαθητῶν μιᾶς τάξεως σ' ἕνα γυμνάσιο. Νά βρεῖτε τή μέση τιμή καί τήν τυπική τους ἀπόκλιση.
Στόν ἄξονα Ox ἔχουμε τόν ἀριθμό μαθητῶν καί στόν Ox τίς ἀπουσίες

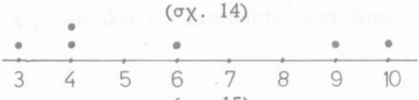


(σχ. 13)

39. Δύο ὁμάδες ὁμοειδῶν παρατηρήσεων τίς ἔχουμε παραστήσει μέ σημεῖα δύο ἀξόνων στά σχ. 14 καί 15. Νά βρεῖτε τίς μέσες τιμές, τίς τυπικές ἀποκλίσεις καί τούς διαμέσους (βλ. πρδ. 3, σελ. 105) τῶν παρατηρήσεων αὐτῶν.



(σχ. 14)



(σχ. 15)

40. Οἱ παρακάτω ἀριθμοί δίνουν τά ἀναστήματα τῶν μαθητῶν μιᾶς τάξεως ἑνός γυμνασίου (σέ cm):

148	170	172	156	160	167	164	178	189	170
174	168	164	162	159	176	153	164	168	166
184	180	172	160	166	169	172	178	180	165
165	168	171	170	161	159	178	177	162	168

Νά ὁμαδοποιήσετε τά ἀναστήματα σέ κλάσεις μέ ἴσα πλάτη καί νά κατασκευάσετε τό ἀντίστοιχο ἱστόγραμμα.

12° ΚΕΦΑΛΑΙΟ

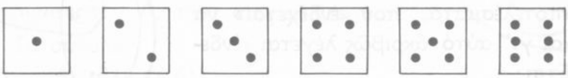
ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

12. 1. Ὑπάρχουν πολλά φαινόμενα τῆς καθημερινῆς μας ζωῆς, πού ἡ τελική τους ἔκβαση χαρακτηρίζεται ἀπό μιά ἀβεβαιότητα. Ἔτσι π.χ. δέν μποροῦμε νά προσδιορίσουμε τήν ἀκριβή θερμοκρασία τῆς ἑπόμενης ἡμέρας ἤ νά προβλέψουμε τό φύλο ἑνός παιδιοῦ, πού περιμένουμε νά γεννηθεῖ. Ἐπίσης ἕνας ὑπάλληλος, πού μπαίνει τό πρωΐ στό λεωφορεῖο, γιά νά πάει στό γραφεῖο του, δέν ξέρει τί ὥρα ἀκριβῶς θά φθάσει, ἤ ἕνας μαθητής ,πού γράφει ἕνα διαγώνισμα, δέν ξέρει τί ἀκριβῶς βαθμό θά πάρει. Στά μαθηματικά βρήκαμε τρόπο νά «μετρήσουμε» τήν ἀβεβαιότητα, πού χαρακτηρίζει τέτοια φαινόμενα, καί μέ τή μέτρηση αὐτή ἀσχολεῖται ἡ **θεωρία πιθανοτήτων,** πού εἶναι ἰδιαίτερος κλάδος τῶν μαθηματικῶν.Στό κεφάλαιο αὐτό θά ἀναπτύξουμε ὁρισμένες βασικές ἔννοιες τῆς θεωρίας αὐτῆς.

Πείραμα τύχης. Δειγματικός χῶρος.

12. 2. Βασική ἔννοια τῆς θεωρίας πιθανοτήτων εἶναι τό **πείραμα τύχης.** Μέ τόν ὅρο αὐτό ἐννοοῦμε **ἕνα πείραμα, πού μποροῦμε νά τό ἐπαναλάβουμε μέ τίς ἴδιες συνθῆκες ὅσες φορές θέλουμε, ἀλλά δέν μποροῦμε ποτέ νά προβλέψουμε τό ἀποτέλεσμά του.**

Ἔτσι π.χ. ὅταν ρίχνουμε ἕνα ζάρι, ξέρουμε ὅτι θά ἐμφανισθεῖ μιά ἀπό τίς ὄψεις (ἐνδείξεις) του



ἀλλά δέν μποροῦμε νά προβλέψουμε ποιά ὄψη ἀκριβῶς θά ἐμφανισθεῖ. Αὐτό λοιπόν εἶναι ἕνα «πείραμα τύχης» καί τό σύνολο

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

πού ἔχει στοιχεῖα ὅλα τά δυνατά ἀποτελέσματά του, λέγεται **δειγματικός χῶρος** τοῦ πειράματος τύχης.

Ἐπίσης ὅταν ρίχνουμε δύο φορές ἕνα νόμισμα (τό ὁποῖο ἔχει ὄψεις Κ = κεφαλή καί Γ = γράμματα), ξέρουμε ὅτι θά ἐμφανισθεῖ μιά ἀπό τίς περιπτώσεις,

ἀλλά δέν μποροῦμε νά προβλέψουμε ποιά ἀκριβῶς περίπτωση θά ἐμφανισθεῖ. Ἔτσι καί τό πείραμα αὐτό εἶναι ἕνα «πείραμα τύχης», πού ἔχει δειγματικό χῶρο τό σύνολο

$$\Omega = \{ΚΚ, ΚΓ, ΓΚ, ΓΓ\}$$

Γενικά λοιπόν, **δειγματικός χῶρος ἑνός πειράματος τύχης λέγεται τό σύνολο, πού ἔχει στοιχεῖα ὅλα τά δυνατά ἀποτελέσματά του.**

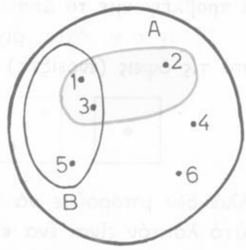
Ἀπό ἐδῶ καί πέρα ὁ δειγματικός χῶρος ἑνός πειράματος τύχης θά σημειώνεται μέ τό γράμμα Ω καί τά στοιχεῖα του θά λέγονται **δυνατές περιπτώσεις** τοῦ πειράματος τύχης. Εἶναι φανερό ὅτι σέ ἕνα πείραμα τύχης ἐμφανίζεται μιά μόνο ἀπό τίς δυνατές περιπτώσεις του καί αὐτή εἶναι τό *«ἀποτέλεσμα»* τοῦ πειράματος τύχης.

Ἐνδεχόμενα.

12. 3. Ὀνομάζουμε **ἐνδεχόμενο** ἤ **γεγονός** σ' ἕνα πείραμα τύχης κάθε ὑποσύνολο τοῦ δειγματικοῦ του χώρου Ω.

Ἄς θεωρήσουμε π.χ. τό πείραμα τύχης «ρίχνουμε ἕνα ζάρι», πού ἔχει γιά δειγματικό χῶρο τόν

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$



Κάθε ὑποσύνολο τοῦ Ω παριστάνει ἕνα πλῆθος ἀπό ἀποτελέσματα, πού «ἐνδέχεται» νά συμβοῦν, καί γι' αὐτό ἀκριβῶς λέγεται «ἐνδεχόμενο». Ἔτσι:

- Τό ὑποσύνολο $A=\{1,2,3\}$ τοῦ Ω παριστάνει τό «ἐνδεχόμενο» ἤ ἔνδειξη τοῦ ζαριοῦ νά εἶναι μικρότερη ἀπό 4. Ἄν ἔρθει μιά ἀπό τίς ἐνδείξεις 1,2,3, τότε λέμε ὅτι «πραγματοποιήθηκε» τό A.
- Τό ὑποσύνολο $B = \{1,3,5\}$ τοῦ Ω παριστάνει τό «ἐνδεχόμενο» ἤ ἔνδειξη τοῦ ζαριοῦ νά εἶναι περιττή. Ἄν ἔρθει μιά ἀπό τίς ἐνδείξεις 1,3,5, τότε λέμε ὅτι «πραγματοποιήθηκε» τό B.

Γενικά θά λέμε ὅτι **πραγματοποιήθηκε ἕνα ἐνδεχόμενο A, ὅταν τό ἀπο-**

τέλεσμα τοῦ πειράματος τύχης εἶναι ἕνα ἀπό τά στοιχεῖα τοῦ Α. Γι' αὐτό ἀκριβῶς τά στοιχεῖα τοῦ δειγματικοῦ χώρου Ω, πού ἀποτελοῦν τό ὑποσύνολο Α, λέγονται καί **εὐνοϊκές περιπτώσεις** τοῦ Α.

Ἀπό τά παραπάνω παραδείγματα γίνεται φανερό ὅτι, ἄν ἔχουμε δύο ἐνδεχόμενα Α καί Β ἑνός δειγματικοῦ χώρου, εἶναι δυνατό τό ἀποτέλεσμα τοῦ πειράματος τύχης νά εἶναι τέτοιο, ὥστε νά πραγματοποιοῦνται καί τά δύο ἐνδεχόμενα ἤ κανένα τους. Ἔτσι π.χ. ὅταν ρίχνουμε ἕνα ζάρι καί ἐμφανισθεῖ ἡ ἔνδειξη 1 ἤ ἡ ἔνδειξη 3, τότε πραγματοποιοῦνται καί τά δύο παραπάνω ἐνδεχόμενα Α καί Β, ἐνῶ ἄν ἐμφανισθεῖ ἡ ἔνδειξη 6, δέν πραγματοποιεῖται κανένα.

Ὅπως ξέρουμε, ὑποσύνολα τοῦ Ω θεωροῦνται ἀκόμη τό ἴδιο τό Ω καί τό κενό σύνολο ∅. Ἔτσι, θά ὑπάρχουν ἐνδεχόμενα, τά ὁποῖα περιγράφονται μέ τά σύνολα αὐτά. Ὁρίζουμε λοιπόν ὅτι:

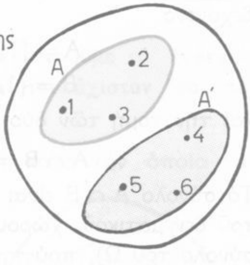
- Ἕνα ἐνδεχόμενο, πού περιγράφεται μέ τό σύνολο Ω, θά λέγεται **βέβαιο ἐνδεχόμενο.** Τέτοιο ἐνδεχόμενο π.χ. εἶναι τό «ἡ ἔνδειξη τοῦ ζαριοῦ εἶναι μικρότερη ἀπό τό 10».
- Ἕνα ἐνδεχόμενο, πού περιγράφεται μέ τό κενό σύνολο ∅, θά λέγεται **ἀδύνατο ἐνδεχόμενο.** Τέτοιο ἐνδεχόμενο π.χ. εἶναι τό «ἡ ἔνδειξη τοῦ ζαριοῦ εἶναι μεγαλύτερη ἀπό τό 10».

Τέλος, τά μονομελή ὑποσύνολα τοῦ Ω λέγονται **ἁπλά ἐνδεχόμενα** ἤ **βασικά ἐνδεχόμενα.**

Ἀντίθετα ἐνδεχόμενα.

12. 4. Ἄς θεωρήσουμε πάλι τό πείραμα τύχης «ρίχνουμε ἕνα ζάρι» καί τό ἐνδεχόμενό του

$$A = \{1,2,3\}$$



Τά στοιχεῖα τοῦ συνόλου Ω, πού δέν ἀνήκουν στό Α, ἀποτελοῦν, ὅπως ξέρουμε, τό *«συμπλήρωμα»* τοῦ Α, πού συμβολίζεται μέ A' ἤ $\overline{A}$. Τό σύνολο

$$A' = \{4, 5, 6\}$$

παριστάνει ἐπίσης ἕνα ἐνδεχόμενο τοῦ Ω, πού λέγεται **ἀντίθετο τοῦ Α.** (Στήν προκειμένη περίπτωση A' εἶναι τό ἐνδεχόμενο «ἡ ἔνδειξη τοῦ ζαριοῦ εἶναι μεγαλύτερη ἤ ἴση τοῦ 4»).

Γενικά λοιπόν, **δύο ἐνδεχόμενα ἑνός δειγματικοῦ χώρου λέγονται «ἀντίθετα» ὅταν τό ἕνα εἶναι συμπλήρωμα τοῦ ἄλλου.**

Δύο ἄλλα ἀντίθετα ἐνδεχόμενα στό ἴδιο πείραμα εἶναι π.χ. τά

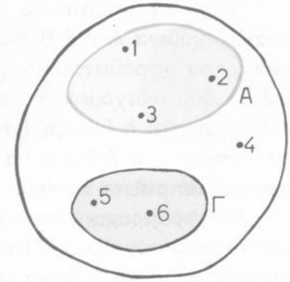
$$B = \{1, 3, 5\} = \{\text{περιττή ἔνδειξη}\}$$
$$B' = \{2, 4, 6\} = \{\text{ἄρτια ἔνδειξη}\}.$$

Εἶναι φανερό ὅτι δύο ἀντίθετα ἐνδεχόμενα δέν εἶναι δυνατό νά πραγματοποιηθοῦν συγχρόνως.

Ἀσυμβίβαστα ἐνδεχόμενα.

12. 5. Στόν ἴδιο δειγματικό χῶρο θεωροῦμε τώρα τά ἐνδεχόμενα

$$A = \{1,2,3\} = \{\text{ἔνδειξη} \leq 3\}$$
$$\Gamma = \{5, 6\} = \{\text{ἔνδειξη} \geq 5\}.$$



Ἐπειδή τά A καί Γ δέν ἔχουν κοινά στοιχεῖα, δηλαδή εἶναι *ξένα* σύνολα, δέν ὑπάρχει ἀποτέλεσμα τοῦ πειράματος τύχης, στό ὁποῖο νά πραγματοποιοῦνται καί τά δύο μαζί. Δύο τέτοια ἐνδεχόμενα λέγονται **ἀσυμβίβαστα ἐνδεχόμενα (ἤ ξένα ἐνδεχόμενα).**

Γενικά λοιπόν, **δύο ἐνδεχόμενα λέγονται ἀσυμβίβαστα (ἤ ξένα), ὅταν ἡ πραγματοποίηση τοῦ ἑνός ἀποκλείει τήν πραγματοποίηση τοῦ ἄλλου.**

Δύο ἄλλα ἀσυμβίβαστα ἐνδεχόμενα στό ἴδιο πείραμα τύχης εἶναι π.χ. τά

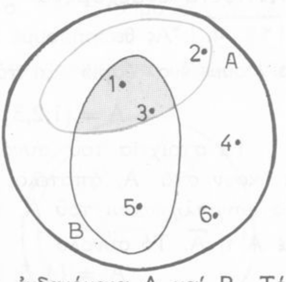
$$B = \{1, 3, 5\} \quad , \quad \Delta = \{2,4\}$$

Εἶναι φανερό ὅτι **δύο ἀντίθετα ἐνδεχόμενα εἶναι πάντοτε ἀσυμβίβαστα.**

Τομή ἤ γινόμενο ἐνδεχομένων.

12. 6. Ἄς θεωρήσουμε, στόν ἴδιο πάντα δειγματικό χῶρο, τά ἐνδεχόμενα

$$A = \{1, 2, 3\}$$
$$B = \{1, 3, 5\}$$



καί τήν τομή τῶν δύο συνόλων A καί B

$$A \cap B = \{1, 3\}$$

Τό σύνολο $A \cap B$ εἶναι ἐπίσης ἕνα ἐνδεχόμενο τοῦ δειγματικοῦ χώρου Ω (ἀφοῦ εἶναι ὑποσύνολο τοῦ Ω), πού πραγματοποιεῖται, μόνο ὅταν πραγματοποιηθοῦν συγχρόνως τά δύο ἐνδεχόμενα A καί B. Τό ἐνδεχόμενο $A \cap B$ σημειώνεται ἀκόμη $\mathbf{A \cdot B}$ ἤ **AB** καί λέγεται **τομή ἤ γινόμενο** τῶν δύο ἐνδεχομένων A καί B.

Εἶναι φανερό ὅτι, ἄν $A \cap B = \varnothing$, τά ἐνδεχόμενα A καί B εἶναι ἀσυμβίβαστα.

Ἄν ἔχουμε τρία ἤ περισσότερα ἐνδεχόμενα $A, B, \Gamma, \ldots, T$ τοῦ ἴδιου δειγματικοῦ χώρου, ἡ τομή τῶν ἐνδεχομένων $A \cap B$ καί Γ σημειώνεται $A \cap B \cap \Gamma$, ἡ τομή τῶν $A \cap B \cap \Gamma$ καί Δ σημειώνεται $A \cap B \cap \Gamma \cap \Delta$, κ.ο.κ. Δηλαδή

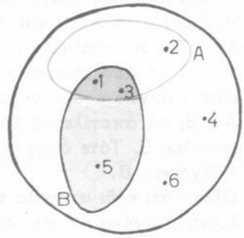
$$A \cap B \cap \Gamma = (A \cap B) \cap \Gamma$$
$$A \cap B \cap \Gamma \cap \Delta = (A \cap B \cap \Gamma) \cap \Delta.$$

Γενικά, **μέ τό σύμβολο $A \cap B \cap \Lambda \cap \ldots \cap T$ ἐννοοῦμε τό ἐνδεχόμενο, πού πραγματοποιεῖται, ὅταν πραγματοποιοῦνται συγχρόνως ὅλα τά ἐνδεχόμενα $A, B, \Gamma, \ldots, T$.**

Ἡ ἕνωση δύο ἐνδεχομένων.

12. 7. Στόν ἴδιο δειγματικό χῶρο Ω θεωροῦμε πάλι τά δύο ἐνδεχόμενα

$$A = \{1, 2, 3\}$$
$$B = \{1, 3, 5\}$$



καί παίρνουμε τώρα τήν ἕνωση τῶν συνόλων A καί B

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}.$$

Τό σύνολο $A \cup B$ εἶναι ἐπίσης ἕνα ἐνδεχόμενο τοῦ δειγματικοῦ χώρου Ω (ἀφοῦ εἶναι ὑποσύνολο τοῦ Ω), πού πραγματοποιεῖται, ὅταν πραγματοποιηθεῖ τουλάχιστον τό ἕνα ἀπό τά A καί B. Τό ἐνδεχόμενο $A \cup B$ λέγεται **ἕνωση τῶν δύο ἐνδεχομένων A καί B.**

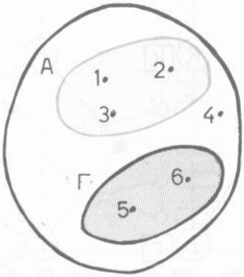
Ἄν ἔχουμε τρία ἤ περισσότερα ἐνδεχόμενα $A, B, \Gamma, \ldots T$ τοῦ ἴδιου δειγματικοῦ χώρου, ἡ ἕνωση τῶν ἐνδεχομένων $A \cup B$ καί Γ σημειώνεται μέ $A \cup B \cup \Gamma$, ἡ ἕνωση τῶν $A \cup B \cup \Gamma$ καί Δ σημειώνεται μέ $A \cup B \cup \Gamma \cup \Delta$, κ.ο.κ. Δηλαδή

$$A \cup B \cup \Gamma = (A \cup B) \cup \Gamma$$
$$A \cup B \cup \Gamma \cup \Delta = (A \cup B \cup \Gamma) \cup \Delta.$$

Γενικά **λοιπόν μέ τό σύμβολο $A \cup B \cup \Gamma \cup \ldots \cup T$ ἐννοοῦμε τό ἐνδεχόμενο, πού πραγματοποιεῖται, ὅταν πραγματοποιεῖται τουλάχιστον ἕνα ἀπό τά ἐνδεχόμενα $A, B, \Gamma, \ldots, T$.**

12. 8. Ἄς δοῦμε τώρα τήν εἰδική περίπτωση, κατά τήν ὁποία τά ἐνδεχόμενα εἶναι ἀσυμβίβαστα, ὅπως π.χ. τά

$$A = \{1, 2, 3\}$$
$$\Gamma = \{5, 6\}.$$



Τά ἐνδεχόμενα A καί Γ ἀποτελοῦνται ἀπό διαφορετικά στοιχεῖα τοῦ Ω καί ἡ ἕνωση $A \cup \Gamma$ ἔχει γιά στοιχεῖα της ὅλα τά στοιχεῖα τοῦ A καί ὅλα τά στοιχεῖα τοῦ Γ.

Στήν περίπτωση αὐτή τό ἐνδεχόμενο $A \cup \Gamma$ λέγεται **ἄθροισμα τῶν ἐνδεχομένων A καί Γ** καί σημειώνεται $\mathbf{A + \Gamma}$. Ἔτσι λοιπόν γιά τά παραπάνω ἐνδεχόμενα ἔχουμε

$$A + \Gamma = \{1, 2, 3, 5, 6\}.$$

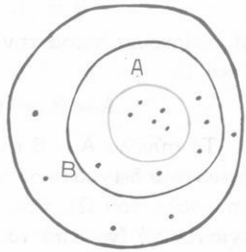
Παρατηροῦμε δηλαδή ὅτι **ὁ ὅρος «ἄθροισμα ἐνδεχομένων» χρησιμο-**

ποιεῖται μόνο στήν περίπτωση, πού τά ἐνδεχόμενα εἶναι ἀσυμβίβαστα(δηλαδή εἶναι ξένα ὑποσύνολα τοῦ Ω) καί δηλώνει τήν ἕνωση τῶν ἐνδεχομένων αὐτῶν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Θεωροῦμε δύο ἐνδεχόμενα Α καί Β ἑνός δειγματικοῦ χώρου τέτοια, ὥστε $A \subseteq B$. Νά δείξετε ὅτι, ὅταν πραγματοποιεῖται τό Α, τότε πραγματοποιεῖται καί τό Β. Νά βρεῖτε τά ἐνδεχόμενα $A \cap B$ καί $A \cup B$.**

Λύση. Γιά νά πραγματοποιηθεῖ τό ἐνδεχόμενο Α, πρέπει τό ἀποτέλεσμα τοῦ πειράματος τύχης νά εἶναι στοιχεῖο τοῦ συνόλου Α. Ἐπειδή ὅμως εἶναι $A \subseteq B$, τό ἀποτέλεσμα θά εἶναι στοιχεῖο καί τοῦ συνόλου Β. Τότε ὅμως πραγματοποιεῖται καί τό ἐνδεχόμενο Β.



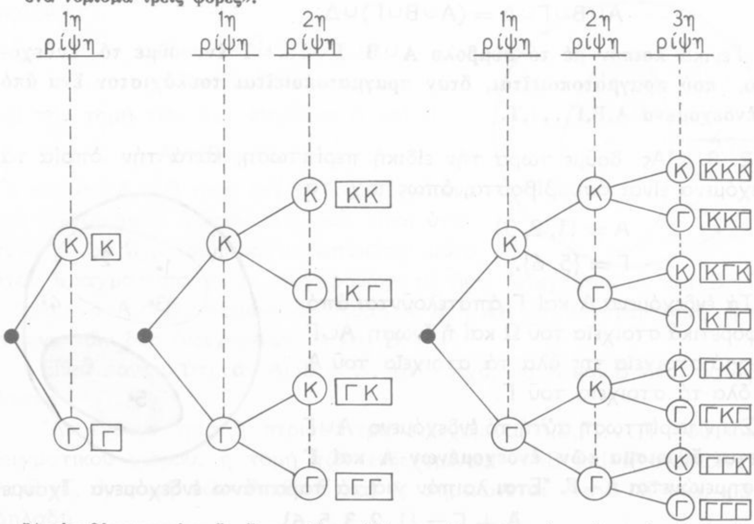
Εἴδαμε ὅτι κάθε στοιχεῖο τοῦ Α ἀνήκει καί στό Β. Συνεπῶς ἀνήκει καί στό σύνολο $A \cap B$. Ἀντιστρόφως, εἶναι φανερό ὅτι κάθε στοιχεῖο τοῦ $A \cap B$ ἀνήκει καί στό Α. Ἀπ' αὐτά συμπεραίνουμε ὅτι εἶναι

$$A \cap B = A.$$

Μέ τόν ἴδιο τρόπο διαπιστώνουμε ὅτι εἶναι

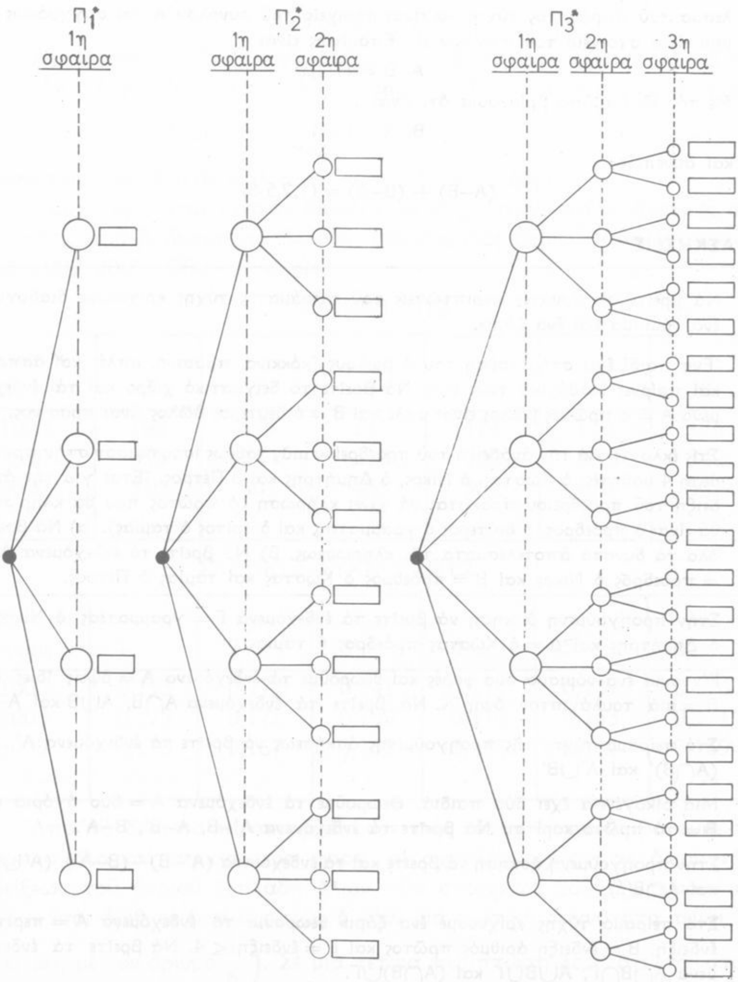
$$A \cup B = B.$$

2. **Τά παρακάτω σχήματα, τά ὁποῖα λέγονται «δενδροδιαγράμματα», δείχνουν πῶς βρίσκουμε ὅλα τά δυνατά ἀποτελέσματα στά τρία κατά σειρά πειράματα τύχης Π_1:«ρίχνουμε ἕνα νόμισμα μιά φορά», Π_2 : «ρίχνουμε ἕνα νόμισμα δύο φορές» καί Π_3 : «ρίχνουμε ἕνα νόμισμα τρεῖς φορές».**



Ἄς ὑποθέσουμε τώρα ὅτι ἔχουμε ἕνα κιβώτιο, πού περιέχει 4 σφαῖρες μέ τούς ἀριθμούς 1,2,3,4. Συμπληρώνοντας τά παρακάτω δενδροδιαγράμματα νά βρεῖτε τίς δυνατές πε-

ριπτώσεις τῶν τριῶν πειραμάτων τύχης Π_1^* : «παίρνουμε ἀπό τό κιβώτιο μιά σφαίρα», Π_2^* : «παίρνουμε διαδοχικά δύο σφαῖρες» καί Π_3^* : «παίρνουμε διαδοχικά τρεῖς σφαῖρες».



3. Ὅταν λέμε «διαφορά δύο ἐνδεχομένων Α καί Β» ἐννοοῦμε τό ἐνδεχόμενο, πού πραγματοποιεῖται ὅταν πραγματοποιεῖται τό Α δίχως νά πραγματοποιεῖται τό Β. Τό ἐνδεχόμενο αὐτό σημειώνεται μέ Α—Β.
Στό πείραμα τύχης «ρίχνουμε ἕνα ζάρι» νά βρεῖτε τά ἐνδεχόμενα Α—Β, Β—Α, (Α—Β) + (Β—Α), ὅταν $A = \{$ἔνδειξη $\leq 4\}$ καί $B = \{$ἔνδειξη $\geq 3\}$.

Λύση. Ἔχουμε

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{3, 4, 5, 6\}.$$

Γιά νά πραγματοποιηθεῖ τό A χωρίς νά πραγματοποιηθεῖ τό B, πρέπει τό ἀποτέλεσμα τοῦ πειράματος τύχης νά εἶναι στοιχεῖο τοῦ συνόλου A καί συγχρόνως νά μήν εἶναι στοιχεῖο τοῦ συνόλου B. Ἑπομένως εἶναι

$$A - B = \{1, 2\}.$$

Μέ τόν ἴδιο τρόπο βρίσκουμε ὅτι εἶναι

$$B - A = \{5, 6\}$$

καί συνεπῶς

$$(A - B) + (B - A) = \{1, 2, 5, 6\}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Νά βρεῖτε τίς δυνατές περιπτώσεις τοῦ πειράματος τύχης «ρίχνουμε διαδοχικά ἕνα νόμισμα καί ἕνα ζάρι».

2. Ἕνα παιδί ἔχει στήν τσέπη του 4 βώλους (κόκκινο, πράσινο, μπλέ καί ἄσπρο) καί παίρνει διαδοχικά τούς δύο. Νά βρεῖτε τό δειγματικό χῶρο καί τά ἐνδεχόμενα A = ὁ πρῶτος βῶλος εἶναι μπλέ καί B = ὁ δεύτερος βῶλος εἶναι πράσινος.

3. Στίς ἐκλογές γιά τήν ἀνάδειξη τοῦ προεδρείου μιᾶς τάξεως ἰσοψήφισαν στήν πρώτη θέση 4 μαθητές, ὁ Κώστας, ὁ Νίκος, ὁ Δημήτρης καί ὁ Πέτρος. Ἔτσι γιά τήν ἀνάδειξη τοῦ προεδρείου πρόκειται νά γίνει κλήρωση (ὁ πρῶτος πού θά κληρωθεῖ, θά εἶναι ὁ πρόεδρος, ὁ δεύτερος ὁ γραμματέας καί ὁ τρίτος ὁ ταμίας). α) Νά βρεῖτε ὅλα τά δυνατά ἀποτελέσματα τῆς κληρώσεως. β) Νά βρεῖτε τά ἐνδεχόμενα A = = πρόεδρος ὁ Νίκος καί B = πρόεδρος ὁ Κώστας καί ταμίας ὁ Πέτρος.

4. Στήν προηγούμενη ἄσκηση νά βρεῖτε τά ἐνδεχόμενα Γ = γραμματέας ὁ Νίκος ἤ ὁ Δημήτρης καί Δ = ὁ Κώστας πρόεδρος ἤ ταμίας.

5. Ρίχνουμε ἕνα νόμισμα δύο φορές καί θεωροῦμε τά ἐνδεχόμενα A = ὄψεις ἴδιες καί B = μιά τουλάχιστον ὄψη K. Νά βρεῖτε τά ἐνδεχόμενα $A \cap B$, $A \cup B$ καί $A - B$.

6. Στό πείραμα τύχης τῆς προηγούμενης ἀσκήσεως νά βρεῖτε τά ἐνδεχόμενα A', B', $(A \cap B)'$ καί $A' \cup B'$.

7. Μιά οἰκογένεια ἔχει δύο παιδιά. Θεωροῦμε τά ἐνδεχόμενα A = δύο ἀγόρια καί B = τό πρῶτο κορίτσι. Νά βρεῖτε τά ἐνδεχόμενα $A' - B$, $A - B'$, $B - A'$.

8. Στήν προηγούμενη ἄσκηση νά βρεῖτε καί τά ἐνδεχόμενα $(A' - B) + (B - A')$, $(A' \cup B)'$ καί $A \cap B'$.

9. Στό πείραμα τύχης «ρίχνουμε ἕνα ζάρι» θεωροῦμε τά ἐνδεχόμενα A = περιττή ἔνδειξη, B = ἔνδειξη ἀριθμός πρῶτος καί Γ = ἔνδειξη ≤ 4. Νά βρεῖτε τά ἐνδεχόμενα $A \cap B \cap \Gamma$, $A \cup B \cup \Gamma$ καί $(A \cap B) \cup \Gamma$.

10. Στό πείραμα τύχης τῆς προηγούμενης ἀσκήσεως νά βρεῖτε ποιά ἀπό τά παρακάτω ἐνδεχόμενα εἶναι ἴσα:

$$A' \cap B' \cap \Gamma', \quad (A \cup B) \cap \Gamma, \quad (A \cup B \cup \Gamma)', \quad (A \cap \Gamma) \cup (B \cap \Gamma)$$

Δειγματικοί χῶροι μέ ἰσοπίθανα στοιχεῖα.

12. 9. Θεωροῦμε τό πείραμα τύχης «ρίχνουμε ἕνα ζάρι», πού ἔχει δειγματικό χῶρο

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ἐπαναλαμβάνουμε τό πείραμα 600 φορές καί ὅτι ἡ ἔνδειξη 6 ἐμφανίζεται 87 φορές. Ὁ ἀριθμός 87 εἶναι ἡ *«συχνότητα»* ἐμφανίσεως τοῦ 6 καί ὁ ἀριθμός $\frac{87}{600} = 0{,}145$ εἶναι ἡ *«σχετική συχνότητα»* ἐμφανίσεως τοῦ 6 στίς 600 φορές πού ρίξαμε τό ζάρι.

Στούς παρακάτω πίνακες δίνονται οἱ συχνότητες καί οἱ σχετικές συχνότητες, πού βρήκαμε γιά ὅλες τίς ἐνδείξεις ἑνός ζαριοῦ, ὅταν ρίξαμε τό ζάρι 1000, 2000, 3000, . . . φορές.

ΣΥΧΝΟΤΗΤΕΣ

Ἐπαναλήψεις	1	2	3	4	5	6
1000	193	177	141	174	139	176
2000	350	344	318	340	306	342
3000	510	501	486	504	492	507
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΕΣ

Ἐπαναλήψεις	1	2	3	4	5	6
1000	0,193	0,177	0,141	0,174	0,139	0,176
2000	0,175	0,172	0,159	0,170	0,153	0,171
3000	0,170	0,167	0,162	0,168	0,164	0,169
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

Ἀπό τό δεύτερο πίνακα βλέπουμε πώς, ὅταν ἐπαναλαμβάνουμε τό πείραμα ὅλο καί περισσότερες φορές, οἱ σχετικές συχνότητες ὅλων τῶν ἐνδείξεων τοῦ ζαριοῦ (δηλαδή ὅλων τῶν στοιχείων τοῦ Ω) τείνουν νά γίνουν ἴσοι ἀριθμοί (καί συνεπῶς ἡ κάθε μιά σχετική συχνότητα τείνει νά γίνει ἴση μέ τόν ἀριθμό $\frac{1}{6}$). Σέ μιά τέτοια περίπτωση λέμε ὅτι τά στοιχεῖα τοῦ δειγματικοῦ χώρου Ω εἶναι **ἰσοπίθανα**.

Γενικά λοιπόν, ἄν ἔχουμε ἕνα δειγματικό χῶρο μέ ρ στοιχεῖα (ἁπλά ἐνδεχόμενα)

$$\Omega = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_\rho\},$$

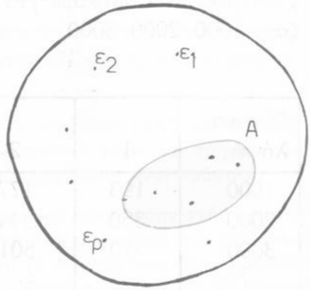
θά λέμε ὅτι τά στοιχεῖα τοῦ Ω εἶναι «ἰσοπίθανα», ὅταν ἐπαναλαμβάνοντας τό πείραμα ὅλο καί περισσότερες φορές βλέπουμε ὅτι οἱ σχετικές συχνότητες ὅλων τῶν στοιχείων του τείνουν νά γίνουν ἴσοι ἀριθμοί $\left(\text{ὁπότε ἡ σχετική συχνότητα κάθε στοιχείου θά τείνει πρός τόν ἀριθμό} \frac{1}{\rho}\right)$.

Σέ ὅλα τά ἑπόμενα θά θεωροῦμε ὅτι οἱ δειγματικοί χῶροι, πού ἀναφέρονται, ἔχουν ἰσοπίθανα στοιχεῖα.

Πιθανότητα ἐνδεχομένου·

12. 10. Ἄς θεωρήσουμε ἕνα πείραμα τύχης μέ ρ δυνατά ἀποτελέσματα $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\rho$ καί τό δειγματικό του χῶρο

$$\Omega = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\rho\}.$$



Ἄν ἕνα ἐνδεχόμενο Α ἀποτελεῖται ἀπό κ στοιχεῖα τοῦ δειγματικοῦ χώρου Ω, ὁ ἀριθμός $\frac{\kappa}{\rho}$ λέγεται **πιθανότητα τοῦ ἐνδεχομένου Α** καί σημειώνεται μέ P(A), δηλαδή

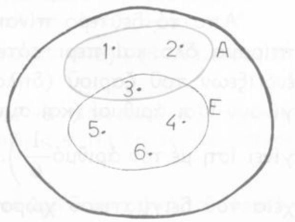
$$P(A) = \frac{\kappa}{\rho} \tag{1}$$

Ἐπειδή ὁ ἀριθμός κ παριστάνει τό πλῆθος τῶν εὐνοϊκῶν περιπτώσεων τοῦ ἐνδεχομένου Α καί ὁ ρ παριστάνει τό πλῆθος ὅλων τῶν δυνατῶν περιπτώσεων τοῦ πειράματος τύχης, ἡ (1) γράφεται πιό ἀναλυτικά

$$P(A) = \frac{\text{πλῆθος εὐνοϊκῶν περιπτώσεων}}{\text{πλῆθος δυνατῶν περιπτώσεων}}, \tag{1'}$$

Παράδειγμα 1. Στό πείραμα τύχης «ρίχνουμε ἕνα ζάρι» ἔχουμε $\rho = 6$ δυνατές περιπτώσεις καί δειγματικό χῶρο τόν

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$



Θεωροῦμε τά ἐνδεχόμενα

Α = {ἔνδειξη μικρότερη τοῦ 4}={1, 2, 3}

Ε = {ἔνδειξη μεγαλύτερη τοῦ 2} = = {3, 4, 5, 6}

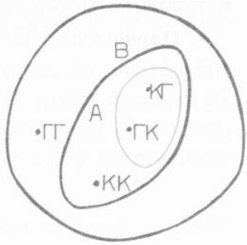
Α ∩ Ε={ἔνδειξη μικρότερη τοῦ 4 καί μεγαλύτερη τοῦ 2} = {3}

Βλέπουμε πώς οἱ εὐνοϊκές περιπτώσεις τῶν ἐνδεχομένων εἶναι ἀντιστοίχως $\kappa = 3$, $\kappa = 4$, $\kappa = 1$ καί συνεπῶς θά ἔχουμε

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad P(E) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \quad P(A \cap E) = \frac{1}{6}$$

Παράδειγμα 2. Στό πείραμα τύχης «ρίχνουμε ἕνα νόμισμα δύο φορές» ἔχουμε ρ = 4 δυνατές περιπτώσεις καί δειγματικό χῶρο τόν

$$\Omega = \{KK, K\Gamma, \Gamma K, \Gamma\Gamma\}$$



Ἄν θεωρήσουμε τά ἐνδεχόμενα

Α={μιά ἔνδειξη Κ}={ΚΓ, ΓΚ}

Β={μιά τουλάχιστον ἔνδειξη Κ}={ΚΚ, ΚΓ, ΓΚ},

βλέπουμε ὅτι οἱ εὐνοϊκές τους περιπτώσεις εἶναι ἀντιστοίχως κ = 2 καί κ = 3 καί συνεπῶς

$$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{3}{4}$$

Ἀπό τά παραπάνω παραδείγματα καταλαβαίνουμε ὅτι, γιά νά βρίσκουμε τήν πιθανότητα ἑνός ἐνδεχομένου Α, θά πρέπει νά κάνουμε «ἀπαρίθμηση» τῶν εὐνοϊκῶν καί τῶν δυνατῶν περιπτώσεων.

Ἰδιότητες πιθανοτήτων.

12. 11. Παρατηροῦμε ὅτι στήν ἰσότητα (1) οἱ ἀριθμοί κ καί ρ εἶναι θετικοί καί ὁ ἀριθμός κ, πού φανερώνει τό πλῆθος τῶν εὐνοϊκῶν περιπτώσεων τοῦ Α, εἶναι πάντοτε μικρότερος (ἤ ἴσος) ἀπό τόν ἀριθμό ρ, πού παριστάνει τό πλῆθος τῶν στοιχείων τοῦ Ω. Ἀπ' αὐτό προκύπτουν τά ἀκόλουθα συμπεράσματα:

α) Ἡ πιθανότητα ἑνός ὁποιουδήποτε ἐνδεχομένου Α εἶναι θετικός ἀριθμός μικρότερος ἤ ἴσος μέ τή μονάδα, δηλαδή

$$\boxed{0 \leqq P(A) \leqq 1}$$

β) Ἡ πιθανότητα τοῦ βέβαιου ἐνδεχομένου Ω εἶναι ἴση μέ τή μονάδα (γιατί τό Ω ἔχει κ = ρ), ἐνῶ ἡ πιθανότητα τοῦ ἀδύνατου ἐνδεχομένου ∅ εἶναι ἴση μέ τό μηδέν (γιατί τό ∅ ἔχει κ = 0), δηλαδή

$$\boxed{P(\Omega) = 1, \qquad P(\varnothing) = 0}$$

γ) Ἄν P(A) εἶναι ἡ πιθανότητα ἑνός ἐνδεχομένου Α καί P(A′) ἡ πιθανότητα τοῦ ἀντίθετου ἐνδεχομένου Α′ θά εἶναι

$$\boxed{P(A') = 1 - P(A)} \tag{2}$$

γιατί τό Α′ ἔχει εὐνοϊκές περιπτώσεις τίς «δυσμενεῖς» περιπτώσεις τοῦ Α, ὁπότε

$$P(A') = \frac{\rho-\kappa}{\rho} = \frac{\rho}{\rho} - \frac{\kappa}{\rho} = 1 - \frac{\kappa}{\rho} = 1 - P(A).$$

Ὁ τύπος (2) γράφεται καί $P(A) = 1 - P(A')$ καί ἡ μορφή αὐτή χρησιμοποιεῖται, γιά νά βρίσκουμε τήν πιθανότητα ἑνός ἐνδεχομένου A, ὅταν ἡ πιθανότητα τοῦ A' βρίσκεται πιό εὔκολα.

Παράδειγμα. Ὅταν ρίχνουμε ἕνα νόμισμα τρεῖς φορές, ποιά εἶναι ἡ πιθανότητα νά φέρουμε μιά τουλάχιστον φορά τήν ὄψη K;
Τό πείραμα τύχης ἔχει ρ=8 δυνατές περιπτώσεις (βλέπε παράδειγμα 2 μετά τήν § 12·8). Ἄν τώρα ὀνομάσομε A τό ἐνδεχόμενο «νά φέρουμε μιά τουλάχιστον φορά τήν ὄψη K», θά εἶναι

$$A' = \{\text{καμμιά ὄψη } K\} = \{\Gamma\Gamma\Gamma\}$$

Ἔτσι τό ἀντίθετο ἐνδεχόμενο εἶναι ἕνα ἀπό τά ἁπλά ἐνδεχόμενα τοῦ

Ω καί συνεπῶς $P(A') = \frac{1}{8}$, ὁπότε

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Ρίχνουμε ἕνα ζάρι δύο φορές καί θεωροῦμε τά ἐνδεχόμενα**

A: πρώτη ἔνδειξη 3
B: δεύτερη ἔνδειξη περιττή
Γ: ἴσες ἐνδείξεις
Δ: ἄθροισμα ἐνδείξεων 7.

Νά βρεθοῦν οἱ πιθανότητες τῶν ἐνδεχομένων A, B, Γ, Δ, $A \cap \Gamma$, $A \cap \Delta$, $B \cap \Delta$, $A \cup \Delta$, $A - \Delta$.

Λύση. Ὁ δειγματικός χῶρος Ω εἶναι:

$$\Omega = \left\{\begin{matrix} (1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4), & (1,5), & (1,6) \\ (2,1), & (2,2), & (2,3), & (2,4), & (2,5), & (2,6) \\ (3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,4), & (3,5), & (3,6) \\ (4,1), & (4,2), & (4,3), & (4,4), & (4,5), & (4,6) \\ (5,1), & (5,2), & (5,3), & (5,4), & (5,5), & (5,6) \\ (6,1), & (6,2), & (6,3), & (6,4), & (6,5), & (6,6) \end{matrix}\right\}$$

(τό πρῶτο στοιχεῖο κάθε διατεταγμένου ζεύγους εἶναι ἡ πρώτη ἔνδειξη καί τό δεύτερο στοιχεῖο εἶναι ἡ δεύτερη ἔνδειξη).
Τά ἐνδεχόμενα εἶναι κατά σειρά

$$A = \{(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)\}$$

$$B = \left\{\begin{matrix} (1,1), & (1,3), & (1,5) \\ (2,1), & (2,3), & (2,5) \\ (3,1), & (3,3), & (3,5) \\ (4,1), & (4,3), & (4,5) \\ (5,1), & (5,3), & (5,5) \\ (6,1), & (6,3), & (6,5) \end{matrix}\right\}$$

$$\Gamma = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$$

$$\Delta = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$$

$$A \cap \Gamma = \{(3,3)\}$$

$A \cap \Delta = \{(3,4)\}$

$B \cap \Delta = \{(2,5),\ (4,3),\ (6,1)\}$

$A \cup \Delta = \{(3,1)\ ,\ (3,2),\ (3,3),\ (3,4),\ (3,5),\ (3,6),\ (1,6),\ (2,5),\ (4,3),\ (5,2),\ (6,1)\}$

$A - \Delta = \{(3,1)\ ,\ (3,2)\ ,\ (3,3)\ ,\ (3,5)\ ,\ (3,6)\}$.

Κάνοντας ἀπαρίθμηση τῶν δυνατῶν περιπτώσεων καί τῶν εὐνοϊκῶν περιπτώσεων κάθε ἐνδεχομένου βρίσκουμε:

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}, \quad P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}, \quad P(\Gamma) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(\Delta) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}, \ P(A \cap \Gamma) = \frac{1}{36}, \ P(A \cap \Delta) = \frac{1}{36}$$

$$P(B \cap \Delta) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}, \ P(A \cup \Delta) = \frac{11}{36}, \ P(A - \Delta) = \frac{5}{36}$$

---

2. **Σέ ἕνα κιβώτιο ἔχουμε 4 ὅμοιες σφαῖρες μέ τούς ἀριθμούς 1,2,3,4. Βγάζουμε διαδοχικά 3 σφαῖρες καί σχηματίζουμε ἕναν τριψήφιο ἀριθμό (ὁ ἀριθμός τῆς πρώτης σφαίρας εἶναι τό ψηφίο τῶν ἑκατοντάδων, τῆς δεύτερης εἶναι τό ψηφίο τῶν δεκάδων καί τῆς τρίτης τό ψηφίο τῶν μονάδων). Νά βρεθοῦν οἱ πιθανότητες τῶν ἐνδεχομένων**
Α = τό πρῶτο ψηφίο (τῶν ἑκατοντάδων) νά εἶναι 2.
Β = τό δεύτερο ψηφίο (τῶν δεκάδων) νά εἶναι 2.
Γ = τό ἄθροισμα τῶν ψηφίων νά εἶναι μικρότερο ἀπό τόν 8.
Νά βρεθοῦν ἀκόμη οἱ πιθανότητες τῶν ἐνδεχομένων $A \cap B$, $A \cap \Gamma$, $B \cap \Gamma$.

Λύση. Τά στοιχεῖα τοῦ δειγματικοῦ χώρου σχηματίστηκαν στό παράδειγμα 2 μετά τήν § 12.8, ὅπου εἴδαμε ὅτι εἶναι $\rho = 24$. Τά ἐνδεχόμενα Α,Β καί Γ εἶναι:

$A = \{213,\ 214,\ 231,\ 234,\ 241,\ 243\}$

$B = \{123,\ 124,\ 321,\ 324,\ 421,\ 423\}$

$\Gamma = \{123,\ 124,\ 132,\ 142,\ 213,\ 214,\ 231,\ 241,\ 312,\ 321,\ 412,\ 421\}$. Ἐπίσης:

$A \cap B = \emptyset$

$A \cap \Gamma = \{213,\ 214,\ 231,\ 241\}$

$B \cap \Gamma = \{123,\ 124,\ 321,\ 421\}$.

Θά εἶναι λοιπόν

$$P(A) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}, \ P(B) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}, \ P(\Gamma) = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = \frac{0}{24} = 0, \quad P(A \cap \Gamma) = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}, \ P(B \cap \Gamma) = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$$

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

11. Μιά κληρωτίδα περιέχει τούς ἀριθμούς ἀπό τό 1 μέχρι καί τό 10. Παίρνουμε στήν τύχη ἕναν ἀριθμό. Νά βρεῖτε τίς πιθανότητες τῶν ἐνδεχομένων Α = ἀριθμός ἄρτιος καί Β = ἀριθμός μικρότερος ἀπό τόν 4.

12. Ἀπό μιά τράπουλα μέ 52 χαρτιά παίρνουμε στήν τύχη ἕνα. Νά βρεῖτε τίς πιθανότητες τῶν ἐνδεχομένων Α = κούπα, Β = ἄσσος καί Γ = κόκκινο χαρτί.

13. Στό πείραμα τύχης τῆς προηγούμενης ἀσκήσεως νά βρεθοῦν οἱ πιθανότητες τῶν ἐνδεχομένων $A \cap B$, $B \cap \Gamma$, Γ', $B - \Gamma$.

14. Τίς τρεῖς ἕδρες ἑνός ζαριοῦ τίς βάφουμε κόκκινες, τίς δύο πράσινες καί τή μιά μπλέ.

Ρίχνουμε τό ζάρι μιά φορά. Νά βρεθοῦν οἱ πιθανότητες τῶν ἐνδεχομένων Α = = πράσινη ἕδρα καί Β = ὄχι κόκκινη ἕδρα.

15. Στό πείραμα τύχης «ρίχνουμε ἕνα ζάρι δύο φορές» νά βρεῖτε τίς πιθανότητες τῶν ἐνδεχομένων: Ε = ἡ πρώτη ἔνδειξη ἄρτια καί ἡ δεύτερη περιττή, Ζ = ἄθροισμα ἐνδείξεων 9, Η = γινόμενο ἐνδείξεων 12.

16. Στό πείραμα τύχης τῆς προηγούμενης ἀσκήσεως νά βρεθεῖ ἡ πιθανότητα τοῦ ἐνδεχομένου Κ = ἐνδείξεις διαφορετικές.

17. Ἡ Α' τάξη ἑνός γυμνασίου ἔχει 72 μαθητές, ἡ Β' τάξη ἔχει 64 καί ἡ Γ' τάξη 50. Κατά τήν ὥρα τοῦ διαλείμματος φωνάζουμε στήν τύχη ἕνα μαθητή. Νά βρεῖτε τήν πιθανότητα τῶν ἐνδεχομένων Α = μαθητής τῆς Α' τάξεως καί Δ = δέν εἶναι μαθητής τῆς Γ' τάξεως.

18. Ἀπό μιά σακούλα, πού περιέχει 5 κόκκινους βώλους, 10 πράσινους, 8 μπλέ καί 12 ἄσπρους, τραβᾶμε στήν τύχη ἕναν. Νά βρεθοῦν οἱ πιθανότητες τῶν ἐνδεχομένων Α = πράσινος βῶλος καί Β = ὄχι ἄσπρος βῶλος.

19. Ἡ Πελοπόννησος ἔχει 7 νομούς. Ἄν πάρουμε στήν τύχη ἕναν Πελοποννήσιο, μποροῦμε νά ποῦμε ὅτι ἡ πιθανότητα νά εἶναι Μεσσήνιος εἶναι $\frac{1}{7}$;

20. Στό πείραμα τύχης «ρίχνουμε ἕνα νόμισμα τρεῖς φορές» νά βρεῖτε τίς πιθανότητες τῶν ἐνδεχομένων Α = δύο ἀκριβῶς ὄψεις Γ, Β = δύο τό πολύ ὄψεις Γ, Δ = δύο τουλάχιστον ὄψεις Γ.

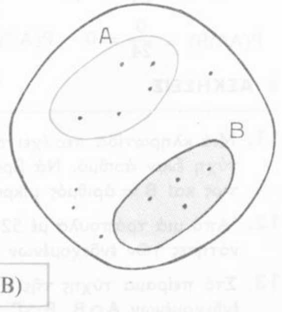
Πιθανότητα ἀθροίσματος ἐνδεχομένων.

12. 12. Ἄς πάρουμε πάλι ἕνα πείραμα τύχης μέ ρ δυνατά ἀποτελέσματα $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\rho$ καί τό δειγματικό του χῶρο

$$\Omega = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\rho\}.$$

Θεωροῦμε τώρα δύο ἀσυμβίβαστα ἐνδεχόμενα Α καί Β καί ὑποθέτουμε ὅτι τό Α ἔχει κ εὐνοϊκές περιπτώσεις καί τό Β ἔχει λ εὐνοϊκές περιπτώσεις. Τότε θά εἶναι

$$P(A) = \frac{\kappa}{\rho} \quad \text{καί} \quad P(B) = \frac{\lambda}{\rho}$$



Τότε ὅμως τό ἐνδεχόμενο Α+Β θά ἔχει, ὅπως ξέρουμε, κ+λ εὐνοϊκές περιπτώσεις, ὁπότε

$$P(A+B) = \frac{\kappa+\lambda}{\rho} = \frac{\kappa}{\rho} + \frac{\lambda}{\rho} = P(A) + \rho(B)$$

Ἀποδείξαμε λοιπόν τήν ἰσότητα

$$\text{(3)} \qquad \boxed{P(A+B) = P(A) + P(B)}$$

ἡ ὁποία λέγεται *κανόνας προσθέσεως* πιθανοτήτων καί ἐκφράζει ὅτι: **ἡ**

πιθανότητα τοῦ ἀθροίσματος δύο ἐνδεχομένων εἶναι ἴση μέ τό ἄθροισμα τῶν πιθανοτήτων τους.

Παράδειγμα 1: Ρίχνουμε ἕνα ζάρι δύο φορές. Ποιά εἶναι ἡ πιθανότητα τό ἄθροισμα τῶν δύο ἐνδείξεων νά εἶναι 9 ἤ 10;

Ἄς θεωρήσουμε τά ἐνδεχόμενα (βλέπε δειγματικό χῶρο παραδείγματος 1 μετά τήν § 12.11)

$$A = \text{ἄθροισμα ἐνδείξεων } 9 = \{(3,6),\ (4,5),\ (5,4),\ (6,3)\}$$
$$B = \text{ἄθροισμα ἐνδείξεων } 10 = \{(4,6),\ (5,5),\ (6,4)\}$$

Τά ἐνδεχόμενα αὐτά εἶναι ἀσυμβίβαστα καί τό ἐνδεχόμενο, πού ζητᾶμε, εἶναι τό $A+B$. Ἔτσι ἔχουμε

$$P(A+B) = P(A) + P(B) = \frac{4}{36} + \frac{3}{36} = \frac{7}{36}.$$

Ὁ κανόνας τῆς προσθέσεως ἐπεκτείνεται καί γιά περισσότερους προσθετέους. Δηλαδή εἶναι πάντοτε

$$P(A+B+\Gamma+\ldots) = P(A)+P(B)+P(\Gamma)+\ \ldots$$

Παράδειγμα 2: Στό πείραμα τύχης τοῦ προηγούμενου παραδείγματος ζητᾶμε τήν πιθανότητα τοῦ ἐνδεχομένου $E =$ τό ἄθροισμα τῶν δύο ἐνδείξεων εἶναι μικρότερο ἀπό τόν 6.

Ἄν ὀνομάσουμε E_2 τό ἐνδεχόμενο «τό ἄθροισμα τῶν δύο ἐνδείξεων εἶναι ἴσο μέ 2», E_3 τό ἐνδεχόμενο «τό ἄθροισμα τῶν δύο ἐνδείξεων εἶναι ἴσο μέ 3»,. . ., θά ἔχουμε

$$E_2 = \{(1,1)\}$$
$$E_3 = \{(1,2),\ (2,1)\}$$
$$E_4 = \{(1,3),\ (2,2),\ (3,1)\}$$
$$E_5 = \{(1,4),\ (2,3),\ (3,2),\ (4,1)\}$$

Ἀλλά τά E_2, E_3, E_4, E_5 εἶναι ἀσυμβίβαστα ἀνά δύο καί τό ζητούμενο ἐνδεχόμενο εἶναι τό $E_2+E_3+E_4+E_5$. Ἔτσι θά εἶναι

$$P(E) = P(E_2)+P(E_3)+P(E_4)+P(E_5) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} = \frac{10}{36}.$$

Ἀνεξάρτητα ἐνδεχόμενα.

12. 13. Ἄς θεωρήσουμε πάλι τό πείραμα τύχης «ρίχνουμε ἕνα ζάρι δύο φορές» καί τά ἐνδεχόμενά του

$A =$ πρώτη ἔνδειξη 3

$B =$ δεύτερη ἔνδειξη 5

$E =$ ἄθροισμα ἐνδείξεων μικρότερο ἀπό τόν 6,

τά ὁποῖα ἔχουν πιθανότητες ἀντιστοίχως

$$P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6},\quad P(B)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6},\quad P(E)=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}.$$

Ἄν ὑποθέσουμε ὅτι τήν πρώτη φορά, πού ρίξαμε τό ζάρι, ἐμφανίστηκε τό 3 (δηλαδή ἄν ὑποθέσουμε ὅτι πραγματοποιήθηκε τό Α), παρατηροῦμε τά ἑξῆς:

α) Γιά νά πραγματοποιηθεῖ τό Β, θά πρέπει στή δεύτερη ρίψη νά ἐμφανισθεῖ τό 5. Αὐτό ὅμως ἔχει τώρα πιθανότητα $\frac{1}{6}$, πού εἶναι ἴση μέ τήν παραπάνω $P(B)=\frac{1}{6}$. Βλέπουμε δηλαδή ὅτι ἡ πραγματοποίηση τοῦ Α δέν ἐπηρέασε τήν πιθανότητα πραγματοποιήσεως τοῦ Β καί γι' αὐτό λέμε ὅτι **τά ἐνδεχόμενα Α καί Β εἶναι ἀνεξάρτητα.**

β) Γιά νά πραγματοποιηθεῖ τό Ε, θά πρέπει στή δεύτερη ρίψη νά ἐμφανισθεῖ ἡ ἔνδειξη 1 ἤ ἡ ἔνδειξη 2 καί αὐτό ἔχει πιθανότητα $\frac{2}{6}=\frac{6}{18}$, πού εἶναι διαφορετική ἀπό τήν παραπάνω $P(E)=\frac{5}{18}$. Βλέπουμε δηλαδή ὅτι ἡ πραγματοποίηση τοῦ Α ἐπηρέασε τήν πιθανότητα πραγματοποιήσεως τοῦ Ε καί γι' αὐτό λέμε ὅτι **τά ἐνδεχόμενα Α καί Ε εἶναι ἐξαρτημένα.**

Ἔχουμε λοιπόν τόν ὁρισμό:

Δύο ἐνδεχόμενα λέγονται ἀνεξάρτητα, ὅταν ἡ πραγματοποίηση τοῦ ἑνός δέν ἐπηρεάζει τήν πιθανότητα πραγματοποιήσεως τοῦ ἄλλου.

Ἀπό τόν ὁρισμό αὐτό καταλαβαίνουμε ἀμέσως ὅτι **τά ἀσυμβίβαστα ἐνδεχόμενα δέν εἶναι ἀνεξάρτητα,** γιατί ἡ πραγματοποίηση τοῦ ἑνός ἀποκλείει τήν πραγματοποίηση τοῦ ἄλλου (δηλαδή ἡ πραγματοποίηση τοῦ ἑνός ὄχι ἁπλῶς ἐπηρεάζει, ἀλλά μηδενίζει τήν πιθανότητα πραγματοποιήσεως τοῦ ἄλλου).

12. 14. Ἄν Α,Β καί Ε εἶναι τά ἐνδεχόμενα τῆς προηγούμενης παραγράφου, θά εἶναι $A\cdot B=\{(3,5)\}$ καί $A\cdot E=\{(3,1),(3,2)\}$ καί συνεπῶς

$$P(A\cdot B)=\frac{1}{36}\quad \text{καί}\quad P(A\cdot E)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}.$$

Συγκρίνοντας τίς πιθανότητες αὐτές μέ τά γινόμενα

$P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$ καί $P(A)\cdot P(E)=\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{18}=\frac{5}{108}$ βλέπουμε ὅτι

εἶναι $\quad P(A)\cdot P(B)=P(AB)\quad$ καί $\quad P(A)\cdot P(E)\neq P(AE).$

Βλέπουμε δηλαδή ὅτι σέ δύο ἀνεξάρτητα ἐνδεχόμενα τό γινόμενο τῶν πιθανοτήτων τους εἶναι ἴσο μέ τήν πιθανότητα τοῦ γινομένου τους, ἐνῶ σέ ἐξαρτημένα ἐνδεχόμενα τό γινόμενο τῶν πιθανοτήτων τους εἶναι διαφορετικό ἀπό τήν πιθανότητα τοῦ γινομένου τους. Ἔτσι ἔχουμε:

Δύο ἐνδεχόμενα Α καί Β εἶναι ἀνεξάρτητα μόνο, ὅταν ἡ πιθανότητα τοῦ γινομένου τους εἶναι ἴση μέ τό γινόμενο τῶν πιθανοτήτων τους, δηλαδή μόνο ὅταν

$$(4) \qquad \boxed{P(AB) = P(A) \,.\, P(B)}$$

Ἡ ἰσότητα αὐτή λέγεται **κανόνας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ** τῶν πιθανοτήτων καί τή χρησιμοποιοῦμε πολλές φορές, γιά νά ἐλέγξουμε τήν ἀνεξαρτησία δύο ἐνδεχομένων. Μέ τήν ἰσότητα (4) ἀποδεικνύεται π.χ. ὅτι:

- Ὅταν ρίχνουμε διαδοχικά ἕνα ζάρι (ἤ ἕνα νόμισμα), οἱ ἐνδείξεις σέ δύο ὁποιεσδήποτε ρίψεις εἶναι ἀνεξάρτητα ἐνδεχόμενα.
- Ὅταν κάνουμε διαδοχικές κληρώσεις ἀπό μιά κάλπη (ξαναβάζοντας μέσα στήν κάλπη κάθε λαχνό πού κερδίζει), τά ἀποτελέσματα δύο ὁποιωνδήποτε κληρώσεων εἶναι ἀνεξάρτητα ἐνδεχόμενα.
- Γενικά, ὅταν ἐπαναλαμβάνουμε διαδοχικά ἕνα πείραμα τύχης (δίχως νά μεταβάλλονται οἱ βασικές πιθανότητες τοῦ δειγματικοῦ χώρου του), τά ἀποτελέσματα σέ δύο ὁποιεσδήποτε ἐπαναλήψεις εἶναι ἀνεξάρτητα ἐνδεχόμενα.

Ἐνδεχόμενα πλήρως ἀνεξάρτητα.

12. 15. Θεωροῦμε τό πείραμα τύχης «ρίχνουμε ἕνα νόμισμα τρεῖς φορές», τό ὁποῖο ἔχει δειγματικό χῶρο

$$\Omega = \{ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΚΓΓ, ΓΚΚ, ΓΚΓ, ΓΓΚ, ΓΓΓ\}$$

καί τά ἐνδεχόμενά του

$$\begin{aligned} A &= \text{πρώτη ρίψη } K = \{ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΚΓΓ\} \\ B &= \text{δεύτερη ρίψη } K = \{ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΓΚΚ, ΓΚΓ\} \\ Γ &= \text{τρίτη ρίψη } \;\; Γ = \{ΚΚΓ, ΚΓΓ, ΓΚΓ, ΓΓΓ\}. \end{aligned}$$

Τά ἐνδεχόμενα αὐτά ἔχουν πιθανότητες

$$P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \quad P(Γ) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

καί εἶναι ἀνεξάρτητα ἀνά δύο, γιατί

$$AB = \{ΚΚΚ, ΚΚΓ\} \Rightarrow P(AB) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(B)$$

$$AΓ = \{ΚΓΓ, ΚΚΓ\} \Rightarrow P(AΓ) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(Γ)$$

$$BΓ = \{ΚΚΓ, ΓΚΓ\} \Rightarrow P(BΓ) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(B) \cdot P(Γ)$$

Παρατηροῦμε ἀκόμη ὅτι τό γινόμενό τους εἶναι ΑΒΓ={ΚΚΓ} καί ἔχει πιθανότητα

$$P(AB\Gamma)=\frac{1}{8},$$

ἡ ὁποία εἶναι ἴση μέ P(A) · P(B) · ρ(Γ). Δηλαδή ἔχουμε τήν ἰσότητα

$$(5) \qquad \boxed{P\,(AB\Gamma) = P\,(A)\,.\,P\,(B)\,.\,P\,(\Gamma)}$$

Τρία τέτοια ἐνδεχόμενα, τά ὁποῖα εἶναι ἀνεξάρτητα ἀνά δύο καί ἡ πιθανότητα τοῦ γινομένου τους βρίσκεται μέ τόν κανόνα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, λέγονται **πλήρως ἀνεξάρτητα**. Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι, γιά νά εἶναι τρία ἐνδεχόμενα πλήρως ἀνεξάρτητα, δέν ἀρκεῖ μόνο νά εἶναι ἀνεξάρτητα ἀνά δύο, ἀλλά θά πρέπει ἀκόμη νά ἰσχύει καί ἡ (5).

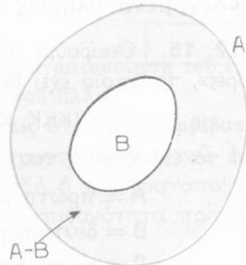
Γενικά, **ἄν ἔχουμε τρία ἤ περισσότερα ἐνδεχόμενα, θά λέμε ὅτι εἶναι «πλήρως ἀνεξάρτητα», μόνο ὅταν ἐφαρμόζεται ὁ κανόνας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ γιά ὁποιαδήποτε καί ὁσαδήποτε ἀπ' αὐτά.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ-ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Ἄν ἔχουμε δύο ἐνδεχόμενα Α καί Β τέτοια, ὥστε $B \subseteq A$, νά δειχθεῖ ὅτι**

$$P(A-B) = P(A) - P(B)$$

Λύση: Στό παράδ. 3 μετά τήν § 12.8 εἴδαμε ὅτι τό ἐνδεχόμενο Α–Β πραγματοποιεῖται, μόνο ὅταν πραγματοποιεῖται τό Α χωρίς νά πραγματοποιεῖται τό Β.
Συνεπῶς τό ἐνδεχόμενο Α–Β περιγράφεται ἀπό τό γραμμοσκιασμένο μέρος τοῦ διπλανοῦ διαγράμματος. Ἀπό τό διάγραμμα ὅμως διαπιστώνουμε ὅτι τά ἐνδεχόμενα Α–Β καί Β εἶναι ἀσυμβίβαστα καί ὅτι (Α–Β)+Β = Α. Ἔτσι λοιπόν ἔχουμε διαδοχικά

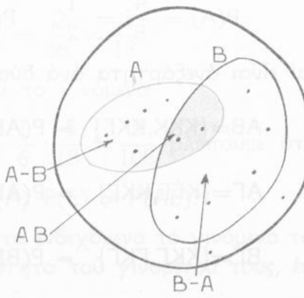


$$(A-B) + B = A$$
$$P[(A-B) + B] = P(A)$$
$$P(A-B) + P(B) = P(A)$$
$$P(A-B) = P(A) - P(B)$$

2. **Ἄν ἔχουμε δύο ἐνδεχόμενα Α καί Β μέ $A \cap B \neq \varnothing$, νά δείξετε ὅτι εἶναι**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Λύση. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ὁ δειγματικός χῶρος ἔχει ρ στοιχεῖα, τό ἐνδεχόμενο Α–Β ἔχει κ στοιχεῖα, τό ΑΒ ἔχει λ στοιχεῖα καί τό Β–Α ἔχει μ στοιχεῖα. Ἀπό τό διάγραμμα φαίνεται ὅτι τό ἐνδεχόμενο Α θά ἔχει κ+λ στοιχεῖα, τό Β θά ἔχει λ+μ στοιχεῖα καί τό $A \cup B$ θά ἔχει κ+λ+μ στοιχεῖα. Ἔχουμε λοιπόν



$$P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{\kappa+\lambda}{\rho}+\frac{\lambda+\mu}{\rho}-\frac{\lambda}{\rho}=\frac{\kappa+\lambda+\mu}{\rho}=P(A\cup B)$$

3. **Θεωροῦμε τό πείραμα τύχης «ρίχνουμε ἕνα ζάρι δύο φορές» καί τά ἐνδεχόμενά του**

Α = πρώτη ἔνδειξη 6
Β = δεύτερη ἔνδειξη 6
Γ = ἄθροισμα ἐνδείξεων 7.

Νά ἀποδείξετε ὅτι τά ἐνδεχόμενα αὐτά εἶναι ἀνεξάρτητα ἀνά δύο, ἀλλά δέν εἶναι πλήρως ἀνεξάρτητα.

Λύση: Εἴδαμε ὅτι οἱ δυνατές περιπτώσεις εἶναι $\rho = 36$. Ἔχουμε ἀκόμη

$$A=\{(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$$
$$B=\{(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6),(6,6)\}$$
$$\Gamma=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$$
$$AB=\{(6,6)\}$$
$$A\Gamma=\{(6,1)\}$$
$$B\Gamma=\{(1,6)\}$$
$$AB\Gamma=\emptyset.$$

Εἶναι λοιπόν

$$P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6},\quad P(B)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6},\quad P(\Gamma)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

$$P(AB)=\frac{1}{36},\quad P(A\Gamma)=\frac{1}{36},\quad P(B\Gamma)=\frac{1}{36},\quad P(AB\Gamma)=0$$

Ἑπομένως εἶναι

$$P(A).P(B)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}=P(AB),$$ δηλαδή τά Α καί Β εἶναι ἀνεξάρτητα.

Μέ τόν ἴδιο τρόπο ἀποδεικνύεται ὅτι τά Α,Γ καθώς καί τά Β,Γ εἶναι ἐπίσης ἀνεξάρτητα. Τά Α,Β,Γ ὅμως δέν εἶναι πλήρως ἀνεξάρτητα, γιατί $P(AB\Gamma)=0$, ἐνῶ

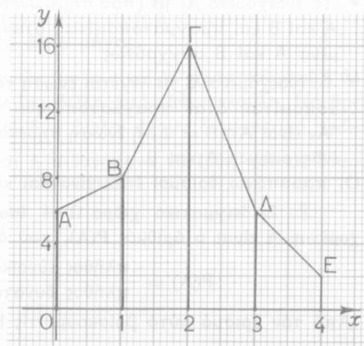
$$P(A)\,.\,P(B)\,.\,P(\Gamma)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{216}\neq 0$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

21. Ἀπό μιά τράπουλα μέ 52 χαρτιά τραβᾶμε στήν τύχη ἕνα. Νά βρεῖτε τίς πιθανότητες τῶν ἐνδεχομένων Α = καρρό ἤ σπαθί καί Β = ἄσσος ἤ ρήγας.

22. Σ' ἕνα πείραμα τύχης ἔχουμε τρία ἐνδεχόμενα τοῦ δειγματικοῦ χώρου Ω, τέτοια ὥστε $A+B+\Gamma=\Omega$. Νά βρεῖτε τήν πιθανότητα τοῦ ἐνδεχομένου Γ, ἄν $P(A)=\frac{1}{3}$ καί $P(B)=\frac{2}{9}$.

23. Τό διπλανό πολύγωνο συχνοτήτων παρουσιάζει τόν ἀριθμό τῶν παιδιῶν ὅλων τῶν οἰκογενειῶν, πού κατοικοῦν σέ μιά πολυκατοικία. Ἕνας ἔνοικος βγαίνει ἀπό τήν πολυκατοικία. Νά βρεῖτε τίς πιθανότητες τῶν ἐνδεχομένων Α=ὁ ἔνοικος ἔχει τουλάχιστον δύο παιδιά καί Β = ὁ ἔνοικος ἔχει περισσότερα ἀπό δύο παιδιά.



24. Μιά οἰκογένεια ἔχει δύο παιδιά. Νά ἐξετάσετε ἄν εἶναι ἀνεξάρτητα τά ἐνδεχόμενα Α = τό ἕνα τουλάχιστον παιδί εἶναι κορίτσι καί Β = τά παιδιά εἶναι διαφορετικοῦ φύλου.

25. Ἀπό δύο σακοῦλες ἡ μιά περιέχει 8 κόκκινους βώλους καί 4 πράσινους καί ἡ ἄλλη περιέχει 6 κόκκινους καί 10 πράσινους. Τραβᾶμε ἕνα βῶλο ἀπό κάθε σακούλα. Νά βρεῖτε τήν πιθανότητα τοῦ ἐνδεχομένου Α = καί οἱ δύο βῶλοι εἶναι κόκκινοι.

26. Μιά ἐπιχείρηση ἔχει 20 ἐργάτες. Κάθε χρόνο γίνεται κλήρωση καί ὁ τυχερός ἐργάτης πηγαίνει διακοπές μέ ἔξοδα τῆς ἐπιχειρήσεως. Νά βρεῖτε τήν πιθανότητα τοῦ ἐνδεχομένου Α = δύο χρονιές συνέχεια κληρώθηκε ὁ ἐργάτης Δημητρίου.

27. Ἀπό μιά τράπουλα μέ 52 χαρτιά τραβᾶμε στήν τύχη ἕνα. Τό βάζουμε πάλι στή θέση του καί τραβᾶμε ἄλλο ἕνα. Νά βρεθοῦν οἱ πιθανότητες τῶν ἐνδεχομένων Α = = καί τά δύο χαρτιά εἶναι σπαθιά καί Β = τό πρῶτο χαρτί εἶναι ντάμα καί τό δεύτερο ρήγας.

28. Ἀπό μιά τράπουλα μέ 52 χαρτιά τραβᾶμε ἕνα στήν τύχη. Νά ἐξετάσετε ἄν εἶναι ἀνεξάρτητα τά ἐνδεχόμενα Α = κούπα καί Β = ρήγας. Ὁμοίως νά ἐξετάσετε ἄν εἶναι ἀνεξάρτητα τά ἐνδεχόμενα Γ = σπαθί καί Δ = κόκκινο χαρτί.

29. Μιά οἰκογένεια ἔχει τρία παιδιά. Νά ἐξετάσετε ἄν εἶναι πλήρως ἀνεξάρτητα τά ἐνδεχόμενα Α = τό πρῶτο παιδί εἶναι ἀγόρι, Β = τό δεύτερο παιδί εἶναι ἀγόρι καί Γ = τό τρίτο παιδί εἶναι ἀγόρι.

30. Στό πείραμα τύχης «ρίχνουμε ἕνα νόμισμα δύο φορές» ἔχουμε τά ἐνδεχόμενα Α = = πρώτη ρίψη Κ, Β = δεύτερη ρίψη Γ καί Ε = δύο ρίψεις ἴδιες. Εἶναι τά ἐνδεχόμενα αὐτά ἀνεξάρτητα ἀνά δύο; Εἶναι πλήρως ἀνεξάρτητα;

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 12

1. Τό σύνολο Ω, πού ἔχει στοιχεῖα ὅλα τά δυνατά ἀποτελέσματα ἑνός **πειράματος τύχης**, λέγεται **δειγματικός χῶρος** τοῦ πειράματος τύχης καί κάθε ὑποσύνολό του Α λέγεται **ἐνδεχόμενο** ἤ *γεγονός*. Τά στοιχεῖα τοῦ Ω ἀποτελοῦν τίς **δυνατές περιπτώσεις** τοῦ πειράματος, ἐνῶ τά στοιχεῖα τοῦ Α ἀποτελοῦν τίς **εὐνοϊκές περιπτώσεις** πραγματοποιήσεως τοῦ Α. Οἱ *«δυσμενεῖς»* περιπτώσεις τοῦ Α ἀποτελοῦν τό **ἀντίθετο ἐνδεχόμενό του Α΄**.

Ἄν ἔχουμε δύο ἐνδεχόμενα Α καί Β τοῦ δειγματικοῦ χώρου Ω, ὁρίζουμε τά ἑξῆς:

- Τό ἐνδεχόμενο $\mathbf{A \cap B}$ (πού σημειώνεται καί ΑΒ) λέγεται **τομή** ἤ **γινόμενο** τῶν Α καί Β καί πραγματοποιεῖται, ὅταν πραγματοποιοῦνται καί τά δύο ἐνδεχόμενα Α καί Β συγχρόνως.
- Τό ἐνδεχόμενο $\mathbf{A \cup B}$ λέγεται **ἕνωση** τῶν δύο ἐνδεχομένων Α καί Β καί πραγματοποιεῖται, ὅταν πραγματοποιηθεῖ τουλάχιστον τό ἕνα ἀπό τά Α καί Β. Ἄν εἶναι $A \cap B = \emptyset$, ἡ ἕνωση σημειώνεται μέ $A + B$ καί λέγεται **ἄθροισμα** τῶν ἐνδεχομένων Α καί Β.

Οἱ παραπάνω ὁρισμοί ἐπεκτείνονται καί γιά περισσότερα ἐνδεχόμενα.

2. Σέ δειγματικό χῶρο Ω μέ **ἰσοπίθανα** στοιχεῖα **πιθανότητα ἑνός ἐνδεχομένου Α** εἶναι ὁ ἀριθμός **P(A)**, πού ὁρίζεται ἀπό τήν ἰσότητα

$$P(A) = \frac{\text{πλῆθος εὐνοϊκῶν περιπτώσεων}}{\text{πλῆθος δυνατῶν περιπτώσεων}}$$

Ἀπό τόν ὁρισμό αὐτό βρίσκουμε τίς ἰδιότητες:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$

2. $P(\Omega) = 1$ καί $P(\varnothing) = 0$

3. $P(A') = 1 - P(A)$

4. $P(A+B) = P(A) + P(B)$

Δύο ἐνδεχόμενα Α καί Β λέγονται **ἀνεξάρτητα**, ὅταν ἡ πραγματοποίηση τοῦ ἑνός δέν ἐπηρεάζει τήν πιθανότητα πραγματοποιήσεως τοῦ ἄλλου. Δύο ἐνδεχόμενα Α καί Β εἶναι ἀνεξάρτητα, μόνο ὅταν ἰσχύει ὁ *«κανόνας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ»*

$$P(AB) = P(A) \,.\, P(B)$$

Πιό γενικά, ἐνδεχόμενα περισσότερα ἀπό δύο εἶναι **πλήρως ἀνεξάρτητα**, ὅταν ἰσχύει ὁ κανόνας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ γιά ὁσαδήποτε καί ὁποιαδήποτε ἀπ' αὐτά.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ*

31. Μιά σακούλα περιέχει κόκκινους καί πράσινους βώλους. Παίρνουμε διαδοχικά 4 βώλους. Νά βρεῖτε ὅλες τίς δυνατές περιπτώσεις.

32. Στό προηγούμενο πείραμα τύχης νά βρεῖτε τά ἐνδεχόμενα Α = δύο τουλάχιστον πράσινοι βῶλοι καί Β = τό πολύ δύο πράσινοι βῶλοι.

33. Σέ μιά λαχειοφόρο ἀγορά πουλήθηκαν 400 λαχνοί, ἀπό τούς ὁποίους κερδίζει ὁ ἕνας. Ἀγόρασε κάποιος 6 λαχνούς. Τί πιθανότητα ἔχει νά κερδίσει;

34. Ρίχνουμε ἕνα ζάρι 3 φορές. Νά βρεῖτε τήν πιθανότητα τοῦ ἐνδεχομένου Α = οἱ δύο πρῶτες ἐνδείξεις εἶναι ἄρτιες καί ἡ τρίτη εἶναι μεγαλύτερη ἀπό τόν 4.

35. Ρίχνουμε δύο ζάρια, ἕνα κόκκινο καί ἕνα ἄσπρο. Νά βρεθεῖ ἡ πιθανότητα τοῦ ἐνδεχομένου Α = ἄθροισμα ἐνδείξεων μεγαλύτερο ἀπό τόν 8.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ**

36. Μιά οἰκογένεια ἔχει τρία παιδιά. Νά ἐξετάσετε ἄν εἶναι ἀνεξάρτητα τά ἐνδεχόμενα Α = ὄχι ὅλα ἀγόρια καί Β = τό πολύ ἕνα ἀγόρι.

37. Ἀπό μιά τράπουλα μέ 52 χαρτιά τραβᾶμε ἕνα στήν τύχη. Τό ξαναβάζουμε στήν τράπουλα καί τραβᾶμε πάλι ἕνα στήν τύχη. Ποιά εἶναι ἡ πιθανότητα τοῦ ἐνδεχομένου Α = τό ἕνα χαρτί ἄσσος καί τό ἄλλο ρήγας.

38. Ἀπό δύο σακοῦλες ἡ μιά περιέχει 8 κόκκινους βώλους καί 10 πράσινους καί ἡ ἄλλη 15 κόκκινους καί 9 πράσινους. Παίρνουμε ἕνα βῶλο ἀπό κάθε σακούλα. Νά βρεῖτε τήν πιθανότητα τοῦ ἐνδεχομένου Α = οἱ δύο βῶλοι ἔχουν διαφορετικό χρῶμα.

39. Ρίχνουμε ἕνα νόμισμα 5 φορές. Ποιά εἶναι ἡ πιθανότητα νά ἔρθει καί τίς 5 φορές ἡ ὄψη Κ;

13° ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΟΣ ΚΑΝΟΝΑΣ

Ἡ ἔννοια τῆς ἀκολουθίας·

13. 1. Στό κεφάλαιο 7 μάθαμε γενικά γιά τίς συναρτήσεις, πού ἔχουν πεδίο ὁρισμοῦ τό R. Εἴδαμε ὅτι ἡ γραφική παράσταση μιᾶς τέτοιας συναρτήσεως, πού ἔχει τύπο

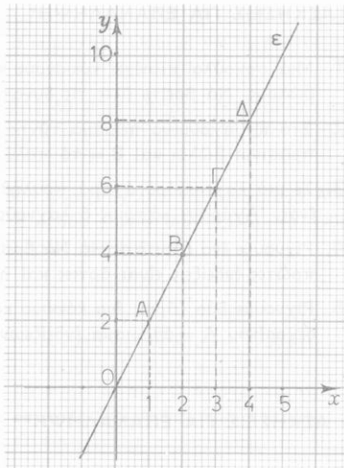
$$\varphi(x) = 2x,$$

εἶναι μιά εὐθεία ε, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπό τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων.

Ἄς πάρουμε τώρα μιά συνάρτηση μέ τόν ἴδιο τύπο, πού ἔχει πεδίο ὁρισμοῦ τό $N^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Ἄν σημειώσουμε μέ ν ἕνα ὁποιοδήποτε στοιχεῖο τοῦ N^*, αὐτή τότε ἡ συνάρτηση λέγεται **ἀκολουθία**, γράφεται

$$(1) \qquad \nu \rightarrow 2\nu$$

καί οἱ τιμές της δίνονται ἀπό τόν πίνακα



(σχ. 1)

ν	1	2	3	4	. . .	. . .	ν	. . .
2ν	2	4	6	8	. . .	. . .	2ν	. . .

Ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως (1) ἀποτελεῖται μόνο ἀπό τά σημεῖα Α (1,2), Β(2,4) Γ(3,6), . . . τῆς εὐθείας ε.

Γενικά, μιά συνάρτηση, πού ἔχει πεδίο ὁρισμοῦ τό σύνολο N^*, δηλαδή μιά συνάρτηση $N^* \rightarrow R$, λέγεται **ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν** ἤ ἁπλῶς **ἀκολουθία** καί οἱ τιμές της λέγονται **ὅροι** τῆς ἀκολουθίας. Ἔτσι π.χ. οἱ ἀριθμοί

$$2, 4, 6, 8, 10, \ldots$$

εἶναι ὅροι τῆς παραπάνω ἀκολουθίας $\nu \to 2\nu$. Ἐπίσης οἱ ἀριθμοί

$$1,\ 7,\ 17,\ 31,\ 49,\ \ldots$$

εἶναι ὅροι τῆς ἀκολουθίας $\nu \to 2\nu^2-1$.

Εἶναι φανερό πώς, ὅταν ξέρουμε τούς ὅρους μιᾶς ἀκολουθίας μέ τή σειρά πού ἐμφανίζονται, ἡ ἀκολουθία (δηλαδή ἡ συνάρτηση $N^* \to R$) εἶναι ἐντελῶς γνωστή, ἀφοῦ ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι εἰκόνα τοῦ 1, ὁ δεύτερος ὅρος εἶναι εἰκόνα τοῦ 2, ... κ.ο.κ. Γι' αὐτό ἀκριβῶς, ὅταν λέμε «ἀκολουθία», ἐννοοῦμε ἁπλῶς ἕνα ἄπειρο πλῆθος ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι θεωροῦνται τιμές μιᾶς συναρτήσεως $N^* \to R$ γραμμένες κατά τέτοιο τρόπο, ὥστε ὁ πρῶτος ἀριθμός νά εἶναι εἰκόνα τοῦ 1, ὁ δεύτερος ἀριθμός νά εἶναι εἰκόνα τοῦ 2,... κ.ο.κ.

Ἡ ἀριθμητική καί ἡ γεωμετρική πρόοδος.

13. 2. Ἄν προσέξουμε τούς ὅρους τῆς ἀκολουθίας

$$(2) \qquad 2,\ 5,\ 8,\ 11,\ 14,\ 17,\ \ldots,$$

παρατηροῦμε ὅτι κάθε ὅρος (ἐκτός ἀπό τόν πρῶτο) εἶναι ἄθροισμα τοῦ προηγούμενου ὅρου καί τοῦ ἀριθμοῦ 3. Ἔτσι π.χ. εἶναι $5=2+3$, $8=5+3$, ... Μιά τέτοια ἀκολουθία λέγεται **«ἀριθμητική πρόοδος» μέ λόγο 3.**

Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι, γιά νά γράψουμε τούς ὅρους μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου, πρέπει νά ξέρουμε τόν πρῶτο ὅρο της καί τό λόγο της. Π.χ. ἡ ἀριθμητική πρόοδος, πού ἔχει πρῶτο ὅρο τό -7 καί λόγο τό 4, εἶναι

$$(3) \qquad -7,\ -3,\ 1,\ 5,\ 9,\ 13,\ldots,$$

γιατί $-7+4=-3$, $\ -3+4=1$, $\ 1+4=5,\ldots$

Παρατηρώντας τήν ἀντιστοιχία

$$\begin{aligned}
\mathbf{1} &\to & -7 &= -7+0.4 = -7+(\mathbf{1}-1)\cdot 4\\
\mathbf{2} &\to & -7+4 &= -7+1\cdot 4 = -7+(\mathbf{2}-1)\cdot 4\\
\mathbf{3} &\to & (-7+4)+4 &= -7+2\cdot 4 = -7+(\mathbf{3}-1)\cdot 4\\
\mathbf{4} &\to & (-7+2.4)+4 &= -7+3\cdot 4 = -7+(\mathbf{4}-1)\cdot 4\\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

βλέπουμε ὅτι ἡ συνάρτηση, ἀπό τήν ὁποία ὁρίζεται ἡ ἀριθμητική πρόοδος (3), εἶναι ἡ

$$\nu \to -7+(\nu-1)\cdot 4$$

Ἔτσι π.χ. ὁ 16ος ὅρος τῆς (3) εἶναι $-7+(16-1)\cdot 4=-7+15\cdot 4=53$.

Εἶναι φανερό ὅτι, *ἄν ἀπό ἕναν ὁποιοδήποτε ὅρο μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου ἀφαιρέσουμε τόν προηγούμενο ὅρο της, θά βροῦμε τό λόγο τῆς προόδου.* Ἔτσι π.χ. στήν πρόοδο (2) ἔχουμε $17-14=3$, $11-8=3,\ldots$, ἐνῶ στήν πρόοδο (3) ἔχουμε $13-9=4$, $-3-(-7)=4,\ldots$ κ.ο.κ.

13. 3. Ἄς προσέξουμε τώρα τούς ὅρους τῆς ἀκολουθίας

$$(4) \qquad 2,\ 6,\ 18,\ 54,\ 162,\ \ldots$$

Παρατηροῦμε ὅτι κάθε ὅρος (ἐκτός ἀπό τόν πρῶτο) εἶναι γινόμενο τοῦ προηγούμενου ὅρου ἐπί τόν ἀριθμό 3. Ἔτσι π.χ. εἶναι $6 = 2\cdot 3$, $18 = 6\cdot 3$, $54 = 18\cdot 3, \ldots$ Μιά τέτοια ἀκολουθία λέγεται **«γεωμετρική πρόοδος» μέ λόγο 3.**

Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι ,γιά νά γράψουμε τούς ὅρους μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου, πρέπει νά ξέρουμε τόν πρῶτο ὅρο της καί τό λόγο της. Π.χ. ἡ γεωμετρική πρόοδος, πού ἔχει πρῶτο ὅρο τό 3 καί λόγο τό 2, εἶναι

(5) $$3,\ 6,\ 12,\ 24,\ 48,\ \ldots,$$

γιατί $3.2 = 6$, $6\cdot 2 = 12$, $12\cdot 2 = 24, \ldots$

Παρατηρώντας τήν ἀντιστοιχία

$$\begin{array}{ll} \mathbf{1} \rightarrow & 3 = 3\cdot 2^0 = 3\cdot 2^{1-1} \\ \mathbf{2} \rightarrow & 3\cdot 2 = 3\cdot 2^1 = 3\cdot 2^{2-1} \\ \mathbf{3} \rightarrow & (3\cdot 2)\cdot 2 = 3\cdot 2^2 = 3\cdot 2^{3-1} \\ \mathbf{4} \rightarrow & (3\cdot 2^2)\cdot 2 = 3\cdot 2^3 = 3\cdot 2^{4-1} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

βλέπουμε ὅτι ἡ συνάρτηση, ἀπό τήν ὁποία ὁρίζεται ἡ γεωμετρική πρόοδος (5), εἶναι

$$\nu \rightarrow 3\cdot 2^{\nu-1}$$

Ἔτσι π.χ. ὁ 10ος ὅρος τῆς (5) εἶναι $3\cdot 2^{10-1} = 3\cdot 2^9 = 1536$.

Εἶναι φανερό ὅτι, *ἄν διαιρέσουμε ἕναν ὁποιοδήποτε ὅρο μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου μέ τόν προηγούμενό του, τό πηλίκο εἶναι ὁ λόγος τῆς προόδου.* Ἔτσι π.χ. στήν πρόοδο (4) ἔχουμε $162:54 = 3$, $18:6 = 3, \ldots$, ἐνῶ στήν πρόοδο (5) ἔχουμε $48 : 24 = 2$, $12 : 6 = 2$, $6 : 3 = 2, \ldots$ κ.ο.κ.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Νά βρεῖτε τόν 6ο, τό 16ο καί τόν 26ο ὅρο τῆς ἀκολουθίας $\nu \rightarrow \frac{\nu(\nu-1)}{2}$.

2. Νά γράψετε τούς 5 πρώτους ὅρους τῆς ἀριθμητικῆς προόδου, πού ἔχει πρῶτο ὅρο τό 1 καί λόγο τό $\frac{1}{2}$.

3. Νά βρεῖτε τό 15ο καί τόν 25ο ὅρο τῆς ἀριθμητικῆς προόδου, πού ἔχει πρῶτο ὅρο τό 8 καί λόγο τό $-\frac{3}{2}$.

4. Νά γράψετε τούς 5 πρώτους ὅρους τῆς γεωμετρικῆς προόδου, πού ἔχει πρῶτο ὅρο $\frac{1}{4}$ καί λόγο 2.

5. Νά βρεῖτε τόν 6ο καί τόν 8ο ὅρο τῆς γεωμετρικῆς προόδου, πού ἔχει πρῶτο ὅρο 243 καί λόγο $-\frac{1}{3}$.

6. Νά βρεῖτε ποιές ἀπό τίς παρακάτω ἀκολουθίες εἶναι πρόοδοι (ἀριθμητικές ἤ γεωμετρικές)

   α) $\nu \rightarrow 3\nu+1$ β) $\nu \rightarrow \nu^2-1$ γ) $\nu \rightarrow -3.2^{\nu}$

Ἡ ἐκθετική συνάρτηση.

13. 4. Ἄς θεωρήσουμε ἕνα θετικό ἀκέραιο ἀριθμό μεγαλύτερο ἀπό τή μονάδα, π.χ. τό 2. Ἄν πάρουμε τίς δυνάμεις του, βλέπουμε ὅτι:

α) Οἱ δυνάμεις μέ θετικούς ἐκθέτες

$2^1 = 2, \quad 2^2 = 4, \quad 2^3 = 8, \quad 2^4 = 16, \ldots$

εἶναι θετικοί ἀριθμοί μεγαλύτεροι ἀπό τή μονάδα καί ἀποτελοῦν γεωμετρική πρόοδο μέ λόγο τόν ἴδιο τόν ἀριθμό 2.

β) Οἱ δυνάμεις μέ ἀρνητικούς ἀκέραιους ἐκθέτες

$$2^{-1} = \frac{1}{2}, \; 2^{-2} = \frac{1}{4}, \; 2^{-3} = \frac{1}{8},$$

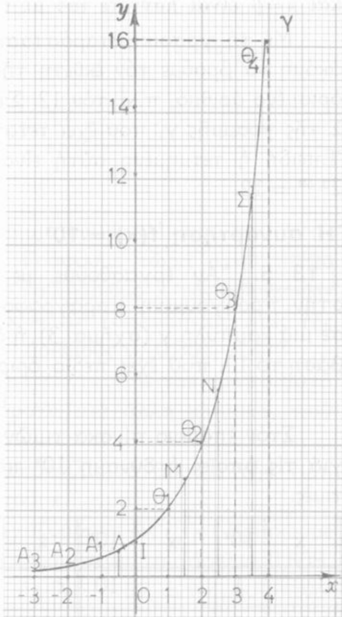
$$2^{-4} = \frac{1}{16}, \ldots$$

εἶναι θετικοί ἀριθμοί μικρότεροι ἀπό τή μονάδα καί ἀποτελοῦν γεωμετρική πρόοδο μέ λόγο τό $\frac{1}{2}$ (τόν ἀντίστροφο τοῦ 2).

Ὑπάρχει λοιπόν μιά συνάρτηση, πού ἔχει τύπο

(6) $\qquad f(x) = 2^x$

καί πεδίο ὁρισμοῦ τό Z. Τιμές τῆς συναρτήσεως αὐτῆς εἶναι οἱ ὅροι τῶν παραπάνω γεωμετρικῶν προόδων, ὅταν $x \neq 0$, ἐνῶ γιά $x = 0$ ἡ τιμή της εἶναι $2^0 = 1$. Στό σχῆμα 2 δίνεται ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως αὐτῆς, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπό τά μεμονωμένα σημεῖα



(σχ. 2)

$$\ldots A_3, \; A_2, \; A_1, \; I, \; \Theta_1, \; \Theta_2, \; \Theta_3, \; \Theta_4, \ldots$$

Ἄς φέρουμε τώρα τή γραμμή γ, πού περνάει ἀπό τά σημεῖα αὐτά. **Ἡ γραμμή γ ὁρίζει τή συνάρτηση, ἡ ὁποία ἔχει πεδίο ὁρισμοῦ τό R καί τύπο τόν (6).** Δηλαδή μέ τή βοήθεια τῆς γραμμῆς γ μποροῦμε νά ὁρίσουμε δύναμη τοῦ 2 γιά ὁποιονδήποτε ἐκθέτη, ὁ ὁποῖος μπορεῖ νά μήν εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός. Ἔτσι, ἄν πάρουμε στή γραμμή γ τά σημεῖα Λ, Μ, Ν, ..., πού ἔχουν τετμημένες –0,5, 1,5, 2,5, ... καί μετρήσουμε τίς τεταγμένες τους, θά βροῦμε (μέ προσέγγιση) τούς ἀριθμούς 0,71, 2,83, 5,66, ... ἀντιστοίχως. Ἔχουμε λοιπόν

$$2^{-0,5} = 0,71 \quad , \quad 2^{1,5} = 2,83 \quad , \quad 2^{2,5} = 5,66$$

Ἡ συνάρτηση αὐτή, πού ὁρίζεται μέ τήν καμπύλη γ, λέγεται **ἐκθετική συνάρτηση μέ βάση τόν ἀριθμό 2.** Ἀπό τίς τιμές, πού βρήκαμε, παρατηροῦμε ὅτι γιά τήν ἐκθετική συνάρτηση ἔχουμε

$$2^{1,5} \cdot 2^{2,5} = (2,83) \cdot (5,66) \sim 16 = 2^4 = 2^{1,5+2,5}$$

ἤ πιό γενικά $$2^{\alpha} \cdot 2^{\beta} = 2^{\alpha+\beta}$$

δηλαδή **σέ μιά ἐκθετική συνάρτηση τό γινόμενο δύο τιμῶν της γιά $x=\alpha$ καί $x=\beta$ εἶναι πάντοτε ἴσο μέ τήν τιμή τῆς συναρτήσεως γιά $x=\alpha+\beta$.**

Μέ τή γραφική παράσταση τῆς ἐκθετικῆς συναρτήσεως μποροῦμε ἀκόμη νά βροῦμε τόν ἐκθέτη τῆς δυνάμεως τοῦ 2, πού εἶναι ἴση μέ ἕναν ὁρισμένο ἀριθμό, π.χ. τόν 12. Στήν περίπτωση αὐτή παίρνουμε τό σημεῖο Σ τῆς γραμμῆς γ, πού ἔχει τεταγμένη 12, καί μετρᾶμε τήν τετμημένη του. Ἐπειδή ἡ τετμημένη αὐτή εἶναι (περίπου) 3,59, καταλαβαίνουμε ὅτι $2^{3,59} = 12$.

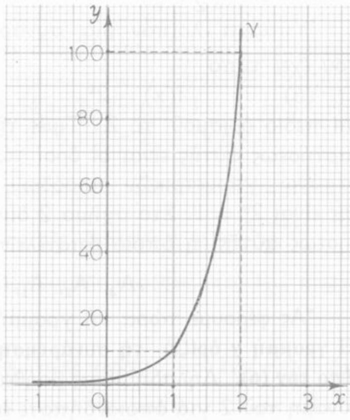
Ἡ συνάρτηση $f(x) = 10^x$.

13. 5. Ἄν ἐργασθοῦμε μέ τίς δυνάμεις τοῦ 10, ὅπως ἐργαστήκαμε στήν προηγούμενη παράγραφο μέ τίς δυνάμεις τοῦ 2, θά καταλήξουμε σέ μιά καμπύλη γ (σχῆμα 3) ἡ ὁποία θά ὁρίζει τήν ἐκθετική συνάρτηση μέ βάση τό 10, πού ἔχει πεδίο ὁρισμοῦ τό R καί τύπο

$$f(x) = 10^x$$

Στόν ἑπόμενο πίνακα τιμῶν τῆς συναρτήσεως δίνονται οἱ τιμές τοῦ x, γιά τίς ὁποῖες ἡ δύναμη 10^x παίρνει ὁρισμένες χαρακτηριστικές ἀκέραιες τιμές.

x	10^x	x	10^x	x	10^x
0	1	1	10	2	100
0,301	2	1,301	20	2,301	200
0,477	3	1,477	30	2,477	300
0,602	4	1,602	40	2,602	400
0,699	5	1,699	50	2,699	500
0,778	6	1,778	60	2,778	600
0,845	7	1,845	70	2,845	700
0,903	8	1,903	80	2,903	800
0,954	9	1,954	90	2,954	900

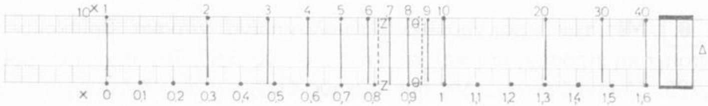


(σχ. 3)

Μέ τή συνάρτηση $f(x) = 10^x$ ἀπεικονίζονται ὅλοι οἱ πραγματικοί ἀριθμοί (πού ἀντιπροσωπεύονται ἀπό τά σημεῖα τοῦ ἄξονα x'x) στούς θετικούς πραγματικούς ἀριθμούς (πού ἀντιπροσωπεύονται ἀπό τά σημεῖα τοῦ ἡμιάξονα Oy). Κατά τήν ἀπεικόνιση αὐτή παρατηροῦμε ὅτι:

- **Οἱ θετικοί πραγματικοί ἀριθμοί ἀπεικονίζονται στούς θετικούς ἀριθμούς τούς μεγαλύτερους ἀπό τή μονάδα.**
- **Οἱ ἀρνητικοί πραγματικοί ἀριθμοί ἀπεικονίζονται στούς θετικούς ἀριθμούς τούς μικρότερους ἀπό τή μονάδα.**

Ἡ ἀπεικόνιση αὐτή μπορεῖ νά δοθεῖ πρακτικά μέ πολύ ἁπλό τρόπο. Παίρνουμε ἕνα χάρακα καί βαθμολογοῦμε τήν κάτω πλευρά του μέ μιά αὐθαίρετη μονάδα μετρήσεως, ὅπως δείχνει τό σχῆμα 4.



(σχ. 4)

Κατασκευάζεται ἔτσι στήν κάτω πλευρά μιά **κοινή κλίμακα**, πού ἀντιπροσωπεύει τούς πραγματικούς ἀριθμούς. Γράφουμε τώρα στήν πάνω πλευρά τοῦ χάρακα καί ἀκριβῶς πάνω ἀπό κάθε ἀριθμό x τῆς κοινῆς κλίμακας τήν εἰκόνα τοῦ x στήν ἀπεικόνιση $x \to 10^x$ (δηλαδή τίς τιμές τῆς δυνάμεως 10^x). Ἔτσι π.χ. πάνω ἀπό τούς ἀριθμούς 0, 0,301, 0,477,... τῆς κοινῆς κλίμακας γράφουμε τούς ἀριθμούς 1,2,3,... Μέ τόν τρόπο αὐτό δημιουργεῖται στήν πάνω πλευρά τοῦ χάρακα μιά ἄλλη κλίμακα, πού λέγεται **λογαριθμική κλίμακα**.

Μέ τό βαθμολογημένο αὐτό χάρακα μποροῦμε νά βροῦμε τήν τιμή τῆς δυνάμεως 10^x γιά ὁποιαδήποτε τιμή τοῦ x.

Ἔτσι, γιά νά βροῦμε τήν τιμή $10^{0,808}$, ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς: Βρίσκουμε στήν κοινή κλίμακα τό σημεῖο Z, πού ἀντιπροσωπεύει τόν ἀριθμό 0,808. Διαβάζουμε στή λογαριθμική κλίμακα τόν ἀριθμό, πού ἀντιπροσωπεύεται ἀπό τό ἀντίστοιχο σημεῖο Z'. Ἔτσι βρίσκουμε ὅτι

$$10^{0,808} = 6,431.$$

Ἀντιστρόφως, μποροῦμε νά γράψουμε ὁποιοδήποτε ἀριθμό, π.χ. τόν 8,725, σάν δύναμη τοῦ 10. Στήν περίπτωση αὐτή βρίσκουμε στή λογαριθμική κλίμακα τό σημεῖο Θ', πού ἀντιπροσωπεύει τόν ἀριθμό 8,725, καί διαβάζουμε στήν κοινή κλίμακα τόν ἀριθμό, πού ἀντιπροσωπεύεται ἀπό τό ἀντίστοιχο σημεῖο Θ. Ἔτσι βρίσκουμε ὅτι

$$8,725 = 10^{0,941}$$

Ἡ εὕρεση καί ἡ ἀνάγνωση τῶν ἀντίστοιχων ἀριθμῶν στίς δύο κλίμακες διευκολύνεται μέ ἕνα *δρομέα* Δ (δηλαδή μέ ἕνα στέλεχος Δ, πού κινεῖται κατά μῆκος τοῦ χάρακα), ὁ ὁποῖος εἶναι ἀπό διαφανές ὑλικό καί ἔχει μιά γραμμή κάθετη πρός τίς δύο κλίμακες.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

7. Νά κάνετε τή γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως, πού ἔχει τύπο $f(x) = 3^x$. Μέ τή βοήθεια τῆς γραφικῆς παραστάσεως νά ἀντικαταστήσετε τά ἀστεράκια μέ τούς κατάλληλους ἀριθμούς, ὥστε νά ἀληθεύουν οἱ παρακάτω ἰσότητες:

α) $3^{2,5} = *$ β) $3^{\frac{2}{5}} = *$ γ) $3^* = 5,37$ δ) $3^* = 12,5$.

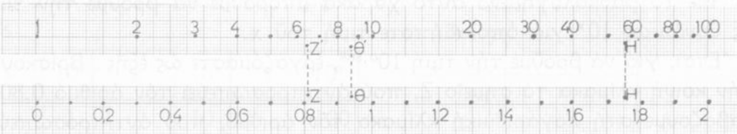
8. Μέ τή βοήθεια τοῦ χάρακα τῆς § 13.5 νά βρεῖτε τούς ἀριθμούς $10^{1,25}$, $10^{0,45}$, $10^{\frac{3}{5}}$ καί νά γράψετε σάν δυνάμεις τοῦ 10 τούς ἀριθμούς 23, 70, 2,7, 24,5.

Ὁ λογαριθμικός κανόνας.

13. 6. Μέ τόν προηγούμενο βαθμολογημένο χάρακα βρίσκουμε μέ ἱκανοποιητική προσέγγιση καί τό γινόμενο δύο ἀριθμῶν, π.χ. τῶν 6,431 καί 8,725. Ἄν γράψουμε τούς δύο αὐτούς ἀριθμούς σάν δυνάμεις τοῦ 10, ἔχουμε

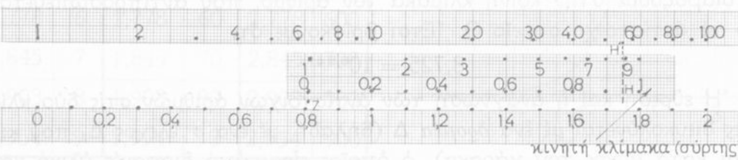
$$\begin{aligned}(6{,}431)\cdot(8{,}725) = 10^{0,808}\cdot 10^{0,941} &= 10^{0,808+0,941} = \\ &= 10^{1,749} = \\ &= 56{,}104\end{aligned}$$

Βλέπουμε δηλαδή ὅτι τό γινόμενο τῶν δύο ἀριθμῶν εἶναι εἰκόνα τοῦ 1,749 στήν ἀπεικόνιση $x \to 10^x$. Αὐτό σημαίνει ὅτι, ἄν βροῦμε τό σημεῖο Η, πού ἀντιπροσωπεύει τόν ἀριθμό 1,749 στήν κοινή κλίμακα, τό γινόμενο θά εἶναι ὁ ἀριθμός τῆς λογαριθμικῆς κλίμακας, ὁ ὁποῖος ἀντιπροσωπεύεται ἀπό τό ἀντίστοιχο σημεῖο Η′ (βλέπε σχῆμα 5).



(σχ. 5)

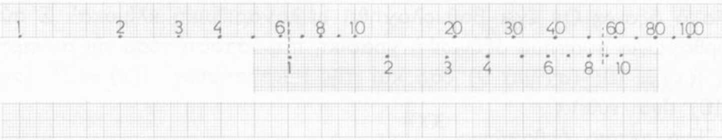
Παρατηροῦμε ὅτι εἶναι (ΟΗ)=1,749=0,808+0,941=(ΟΖ)+(ΟΘ). Ἑπομένως τό σημεῖο Η μπορεῖ νά βρεθεῖ ἀμέσως μ' ἕνα μικρό καί ὅμοια βαθμολογημένο χάρακα, πού θά κινεῖται πάνω ἀπό τόν ἀρχικό καί θά λέγεται *σύρτης* (σχῆμα 6).



(σχ. 6)

Πραγματικά, ἄν βάλουμε τό 0 τῆς κοινῆς κλίμακας τοῦ σύρτη στό σημεῖο Ζ, ὁ ἀριθμός 0,941 τῆς κλίμακας αὐτῆς θά συμπέσει μέ τόν 1,749 τῆς σταθερῆς κλίμακας.

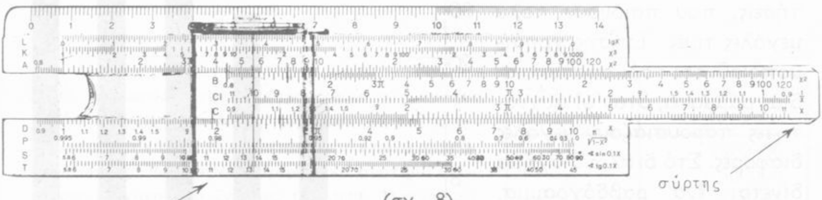
Μποροῦμε ὅμως νά παραλείψουμε τίς κοινές κλίμακες τοῦ χάρακα καί τοῦ σύρτη καί νά βροῦμε τό γινόμενο χρησιμοποιώντας μόνο τίς λογαριθμικές κλίμακες (σχῆμα 7).



(σχ. 7)

Ὅπως βλέπουμε, τοποθετοῦμε τό 1 τῆς κλίμακας τοῦ σύρτη κάτω ἀπό τό 6,431 τῆς κλίμακας τοῦ χάρακα. Τό γινόμενο εἶναι ἡ ἔνδειξη τοῦ χάρακα, ἡ ὁποία εἶναι πάνω ἀπό τό 8,725 τῆς κλίμακας τοῦ σύρτη.

Ἕνα ὄργανο, πού ἔχει τίς δύο λογαριθμικές κλίμακες, μιά σταθερή (τήν Α) καί μιά πάνω σέ σύρτη (τή Β), λέγεται **λογαριθμικός κανόνας**. Ἕνα τέτοιο κανόνα βλέπουμε στό παρακάτω σχῆμα.

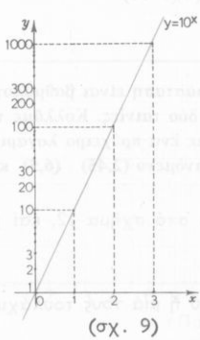


(σχ. 8)

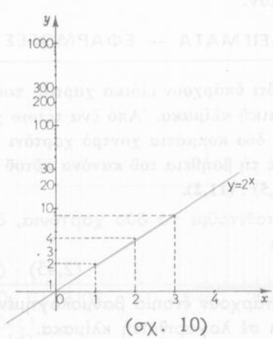
Μέ τό λογαριθμικό κανόνα μποροῦμε νά κάνουμε εὔκολα καί διαίρεση δύο ἀριθμῶν. Ἔστω π.χ. ὅτι θέλουμε νά βροῦμε τό πηλίκο 14 : 2,5. Βάζουμε τό 2,5 τῆς κλίμακας Β (κινητῆς) κάτω ἀπό τό 14 τῆς σταθερῆς κλίμακας Α (σχῆμα 8) καί διαβάζουμε τήν ἔνδειξη τῆς κλίμακας Α πού εἶναι πάνω ἀπό τό 1 τῆς κλίμακας Β. Αὐτό εἶναι τό πηλίκο πού ζητᾶμε. Δηλαδή, 14 : 2,5 = 5,6.

Λογαριθμικές κλίμακες.

13. 7. Ἄς θεωρήσουμε τώρα ἕνα ὀρθογώνιο σύστημα ἀξόνων, στό



(σχ. 9)



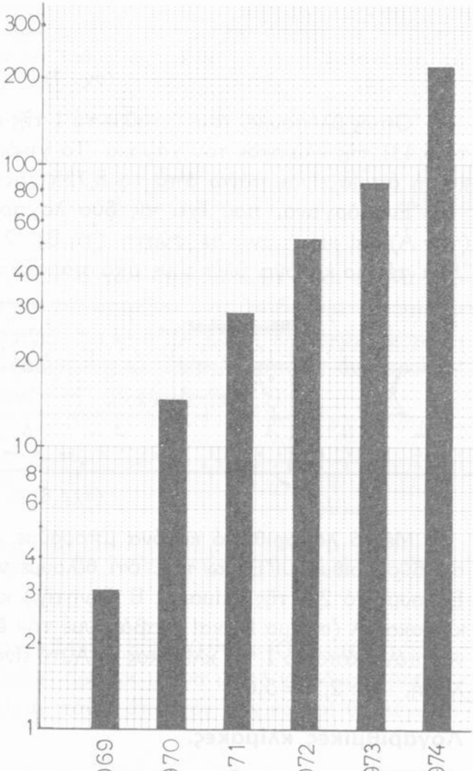
(σχ. 10)

ὁποῖο ὁ ἄξονας Oy ἔχει βαθμολογηθεῖ μέ λογαριθμική κλίμακα[1]. Σ' αὐτό τό ὀρθογώνιο σύστημα ἀξόνων ἡ γραφική παράσταση τόσο τῆς συναρτήσεως $f(x) = 10^x$ (σχῆμα 9) ὅσο καί τῆς συναρτήσεως $f(x) = 2^x$ (σχῆμα 10) εἶναι εὐθεῖες.

Ἕνα τέτοιο ὀρθογώνιο σύστημα λέγεται **ἡμιλογαριθμικό σύστημα** καί ἡ γραφική παράσταση ὁποιασδήποτε ἐκθετικῆς συναρτήσεως στό σύστημα αὐτό εἶναι εὐθεία.

Τά ἡμιλογαριθμικά συστήματα χρησιμοποιοῦνται κατά κανόνα γιά τίς συναρτήσεις, πού παίρνουν πολύ μεγάλες τιμές. Ἐπίσης χρησιμοποιοῦνται σέ στατιστικά διαγράμματα, ὅταν οἱ συχνότητες παρουσιάζουν μεγάλες διαφορές. Στό διπλανό σχῆμα δίνεται ἕνα ραβδόγραμμα, πού παρουσιάζει τόν ἀριθμό συσκευῶν τηλεοράσεως σέ ἕνα χωριό τῆς Πελοποννήσου κατά τά ἔτη 1969-1974.

Στίς περιπτώσεις πού παίρνει μεγάλες τιμές καί ἡ μεταβλητή x, μποροῦμε νά πάρουμε λογαριθμική κλίμακα καί στόν ἄξονα Ox, ὁπότε ἔχουμε **«λογαριθμικό σύστημα» ἀξόνων.**



(σχ. 11)

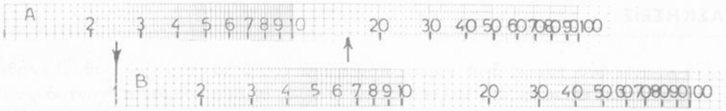
ПАРАΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Εἴπαμε ὅτι ὑπάρχουν εἰδικά χαρτιά, πού ἡ μιά τους διάσταση εἶναι βαθμολογημένη μέ λογαριθμική κλίμακα. Ἀπό ἕνα τέτοιο χαρτί κόβουμε δύο ταινίες. Κολλᾶμε τίς ταινίες αὐτές σέ δύο κομμάτια χοντρό χαρτόνι καί ἔτσι ἔχουμε ἕνα πρόχειρο λογαριθμικό κανόνα. Μέ τή βοήθεια τοῦ κανόνα αὐτοῦ νά βρεῖτε τό γινόμενο (2,45) · (6,5) καί τό πηλίκο (20,5) : (11,2).**

Λύση: Τοποθετοῦμε τά δύο χαρτόνια, ὅπως φαίνεται στό σχῆμα 12, καί βρίσκουμε ὅτι εἶναι

$$(2{,}45) \cdot (6{,}5) = 15{,}92$$

1. Ὑπάρχουν ἕτοιμα βαθμολογημένα χαρτιά, πού ἡ μιά τους τουλάχιστον διάσταση εἶναι σέ λογαριθμική κλίμακα.



(σχ. 12)

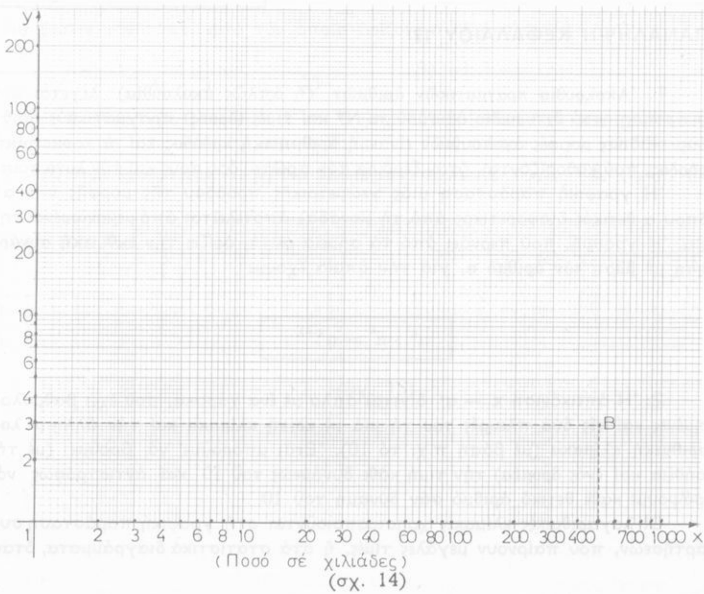
Ἂν τοποθετήσουμε τά χαρτόνια, ὅπως φαίνεται στό σχῆμα 13, βρίσκουμε ὅτι εἶναι

$$(20{,}5) : (11{,}2) = 1{,}83$$

(σχ. 13)

2. Ὁ διπλανός πίνακας παρουσιάζει τόν ἀριθμό τῶν λαχείων, τά ὁποῖα κέρδισαν σέ μιά κλήρωση. Νά κάνετε τό ἀντίστοιχο πολύγωνο συχνοτήτων στό παρακάτω λογαριθμικό σύστημα ἀξόνων. (Εἰκόνα τοῦ ζεύγους (500 000, 3) εἶναι τό σημεῖο Β. Νά βρεῖτε τίς εἰκόνες καί τῶν ἄλλων ζευγῶν).

Ἀριθμός λαχείων	Ποσό σέ δραχμές
1	1000000
3	500000
20	100000
100	50000
200	10000



(σχ. 14)

9. Νά κόψετε δύο ταινίες ἀπό χαρτί, πού ἡ μιά του διάσταση ἔχει βαθμολογηθεῖ μέ λογαριθμική κλίμακα. Νά κολλήσετε τίς ταινίες σέ δύο κομμάτια χοντρό χαρτόνι καί μέ τή βοήθειά τους νά βρεῖτε τά γινόμενα (5,6) · (7,32) καί (0,32) · (4,9).

10. Μέ τή βοήθεια τῶν ταινιῶν τῆς προηγούμενης ἀσκήσεως νά βρεῖτε τά πηλίκα (35,5) : (6,2) καί (0,72) : (0,044).

11. Μέ τίς ἴδιες ταινίες νά βρεῖτε τήν ἀριθμητική τιμή τῶν παραστάσεων (5,2 · 7,45) : 3,6 καί (28,7 : 4,55) · (6,4).

12. Νά κάνετε τή γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως μέ τύπο $f(x) = 3^x$ σέ ἡμι-λογαριθμικό σύστημα ὀρθογώνιων ἀξόνων.

13. Ὁ διπλανός πίνακας παρουσιάζει τούς τουρίστες, πού ἐπισκέφτηκαν ἕνα νησί τοῦ Αἰγαίου κατά τήν πενταετία 1965-69. Νά κάνετε τό ἀντίστοιχο ραβδόγραμμα.

Ἔτος	Τουρίστες
1965	3000
1966	20000
1967	55000
1968	60000
1969	80000

14. Σέ ἕναν πανελλήνιο διαγωνισμό γιά τήν πρόσληψη δημοσίων ὑπαλλήλων οἱ ὑποψήφιοι συγκέντρωσαν τή βαθμολογία, πού φαίνεται στόν διπλανό πίνακα. Νά κάνετε τό ἀντίστοιχο πολύγωνο συχνοτήτων.

Ὑποψήφιοι	Βαθμολογία
20	7
160	40
300	80
100	100
6	120

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 13

1. **Ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν** (ἤ ἁπλῶς **ἀκολουθία**) λέγεται μιά συνάρτηση, πού ἔχει πεδίο ὁρισμοῦ τό N* καί τιμές (**ὅρους**) πραγματικούς ἀριθμούς. Εἰδικές μορφές ἀκολουθιῶν εἶναι ἡ **ἀριθμητική πρόοδος** καί ἡ **γεωμετρική πρόοδος**, πού καθορίζονται, ὅταν ξέρουμε τόν πρῶτο ὅρο τους καί τόν **λόγο** τους.

Ἡ γραφική παράσταση μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου τῆς μορφῆς $\nu \to \alpha^\nu$ (ὅπου α θετικός διαφορετικός ἀπό τή μονάδα) ἀποτελεῖται ἀπό μεμονωμένα σημεῖα. Ἡ γραμμή, πού περνάει ἀπό τά σημεῖα αὐτά, ὁρίζει τήν **ἐκθετική συνάρτηση μέ βάση τόν ἀριθμό α,** γιά τήν ὁποία ἔχουμε

$$\boxed{\alpha^\kappa \cdot \alpha^\lambda = \alpha^{\kappa+\lambda}}$$

2. Ἡ ἀπεικόνιση $x \to \alpha^x$ δίνεται ἁπλά μέ ἕνα χάρακα, πού ἔχει βαθμολογημένες καί τίς δύο πλευρές του τή μιά μέ **κοινή κλίμακα** καί τήν ἄλλη μέ **λογαριθμική κλίμακα** (μέ βάση π.χ. τό 10). Ἔτσι μποροῦμε νά βροῦμε (μέ τή βοήθεια καί ἑνός **δρομέα**) τήν τιμή κάθε δυνάμεως τοῦ 10 καί ἀντιστρόφως νά γράψουμε κάθε θετικό ἀριθμό σάν δύναμη τοῦ 10.

Οἱ λογαριθμικές κλίμακες χρησιμοποιοῦνται στή γραφική παράσταση συναρτήσεων, πού παίρνουν μεγάλες τιμές, ἤ στά στατιστικά διαγράμματα, ὅταν οἱ συχνότητες παρουσιάζουν μεγάλες διαφορές (**ἡμιλογαριθμικά καί λογαριθμικά συστήματα ὀρθογώνιων ἀξόνων**).

Μέ συνδυασμό δύο λογαριθμικῶν κλιμάκων κατασκευάζεται ὁ **λογαριθμικός κανόνας**, μέ τόν ὁποῖο βρίσκουμε εὔκολα καί μέ ἱκανοποιητική προσέγγιση τό γινόμενο ἤ τό πηλίκο δύο θετικῶν ἀριθμῶν.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ*

15. α) Νά βρεῖτε τήν ἀριθμητική πρόοδο, πού ἔχει πρῶτο ὅρο τό 1 καί λόγο τό 2.

β) Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ ἀκολουθία, πού οἱ ὅροι της εἶναι δυνάμεις τοῦ $\frac{3}{5}$ μέ ἐκθέτες τούς ἀντίστοιχους ὅρους τῆς προηγούμενης ἀριθμητικῆς προόδου, εἶναι γεωμετρική πρόοδος.

16. Νά βρεῖτε ποιές ἀπό τίς παρακάτω ἀκολουθίες εἶναι πρόοδοι (ἀριθμητικές ἤ γεωμετρικές) καί ποιός εἶναι ὁ λόγος τους:

α) $-\frac{3}{16}, -\frac{3}{4}, -3, -12, -48, \ldots$ β) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$

γ) $-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$ δ) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$

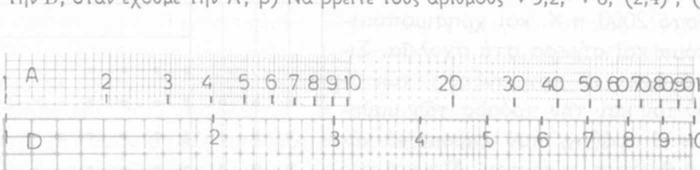
17. Νά κάνετε τή γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως μέ τύπο $f(x) = 2 . 5^x$.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ**

18. Νά βρεῖτε τόν τύπο, ἀπό τόν ὁποῖο ὁρίζονται οἱ ἀκολουθίες:

α) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \ldots$ β) $-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$

19. Μέ τή βοήθεια τῶν κλιμάκων A καί D (σχ. 15) βρίσκουμε τά τετράγωνα καί τίς τετραγωνικές ρίζες τῶν θετικῶν ἀριθμῶν. α) Πῶς μποροῦμε νά κατασκευάσουμε τήν D, ὅταν ἔχουμε τήν A; β) Νά βρεῖτε τούς ἀριθμούς $\sqrt{5{,}2}$, $\sqrt{8}$, $(2{,}4)^2$, $(5{,}1)^2$.



(σχ. 15)

14ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΕΣ

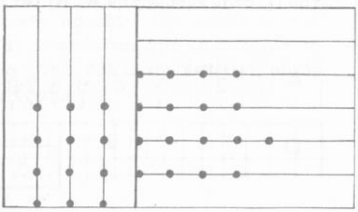
Εἰσαγωγή.

14. 1. Κάθε μέρα σχεδόν ἀκοῦμε νά γίνεται λόγος γιά τούς **ἠλεκτρονικούς ὑπολογιστές** καί λίγο πολύ ὅλοι μας ξέρουμε ὅτι μερικές ἀπό τίς δουλειές, πού κάνει ἕνας ἠλεκτρονικός ὑπολογιστής, εἶναι:

- Βγάζει τούς λογαριασμούς τῆς ΔΕΗ, τοῦ ΟΤΕ κ.λ.π.
- Βγάζει τά ἀποτελέσματα τῶν εἰσαγωγικῶν ἐξετάσεων γιά τίς ἀνώτατες σχολές.
- Κατευθύνει τήν κίνηση τῶν διαστημοπλοίων.
- Ἐλέγχει τούς λογαριασμούς μιᾶς τράπεζας.
- Ζωγραφίζει ἤ συνθέτει μουσική ἤ παίζει σκάκι κ.λ.π.

Ἀκριβῶς γι' αὐτό οἱ ἁπλοί ἄνθρωποι τόν λένε καί *«ἠλεκτρονικό ἐγκέφαλο»*. Στό κεφάλαιο αὐτό θά ἀποκτήσουμε μερικές στοιχειώδεις γνώσεις γιά τούς Η.Υ., πού καθημερινά μπαίνουν στή ζωή μας ὅλο καί περισσότερο. Ἄς δοῦμε ὅμως πρῶτα τήν ἱστορία τους.

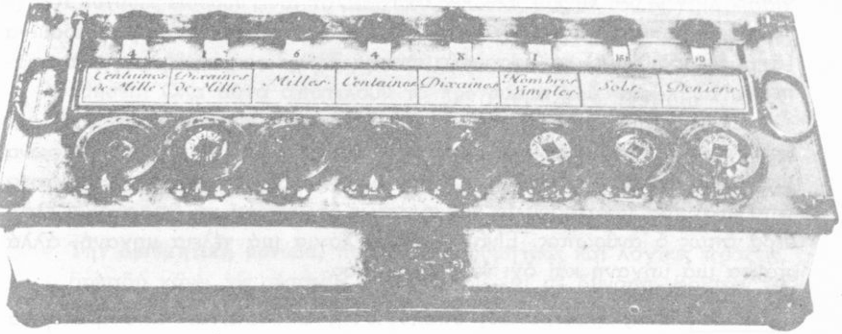
Τό πρῶτο «ἐργαλεῖο» πού χρησιμοποίησε ὁ ἄνθρωπος, μετά ἀπό τά δάκτυλά του, γιά νά μετράει καί νά κάνει ἁπλούς λογαριασμούς, ἦταν ὁ ἄβακας (ἀριθμητήρι), πού ἐπινοήθηκε γύρω στό 2000 π.Χ. καί χρησιμοποιεῖται ἀκόμα καί σήμερα στά σχολεῖα. Σιγά-σιγά ὅμως μέ τήν αὔξηση τῶν ἀναγκῶν του καί τήν πρόοδο τῶν μαθηματικῶν οἱ πράξεις, πού ἔπρεπε νά κάνει ὁ ἄνθρωπος, γίνονταν ὅλο καί πιό πολύπλοκες καί γι' αὐτό προσπάθησε νά βρεῖ «μηχανικούς» τρόπους γιά τήν



(σχ. 1)

ἐκτέλεσή τους. Τό μεγάλο βῆμα ἔγινε τό ἔτος 1600, ὅταν ὁ Νέπερ (Napier) βρῆκε τούς λογάριθμους. Τότε κατασκευάστηκε ὁ λογαριθμικός κανόνας, πού, ὅπως εἴπαμε στό κεφάλαιο 13, ἐκτελεῖ γρήγορα πολλαπλασιασμούς καί διαιρέσεις μέ πρόσθεση καί ἀφαίρεση τμημάτων.

Λίγο ἀργότερα στά 1642 ὁ Πασκάλ (Pascal) κατασκεύασε τήν πρώτη ὑπολογιστική μηχανή, τήν ὁποία τελειοποίησε τό 1671 ὁ μαθηματικός Λάιμπνιτς (Leibnitz).



Ἀριθμομηχανή Pascal 1642
(σχ. 2)

Ἡ μηχανή αὐτή, πού ἔκανε τίς τέσσερις βασικές πράξεις, κυκλοφόρησε στό ἐμπόριο τό 1694 καί ἦταν ἡ πρώτη ἀριθμομηχανή γραφείου. Πέρασαν πάνω ἀπό 100 χρόνια μέ μικροτροποποιήσεις τῶν ἀριθμομηχανῶν αὐτῶν γιά νά φθάσουμε στό 1812, ὁπότε ὁ Ἄγγλος μαθηματικός Babbage σχεδίασε τήν πρώτη *«μηχανή διαφορῶν»* πού δέν ἔκανε μόνο τίς τέσσερις πράξεις, ἀλλά εἶχε καί τή δυνατότητα νά κάνει διάφορες συγκρίσεις. Τό 1833 ὁ ἴδιος σχεδίασε καί μιά *«ἀναλυτική μηχανή»*, πού εἶχε ὅλα τά στοιχεῖα τῶν σημερινῶν ἠλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν, γι' αὐτό καί ὁ Babbage θεωρεῖται σήμερα πατέρας τῶν Η.Υ. Δυστυχῶς, τά τεχνικά μέσα τῆς ἐποχῆς ἦταν ἀνεπαρκή, γιά νά ἀξιοποιηθεῖ ἡ μεγαλοφυΐα του καί πέρασαν ἄλλα 100 χρόνια, ὥσπου νά ἐμφανισθοῦν οἱ Η.Υ. Μόλις τό 1937 κατασκευάζεται στό πανεπιστήμιο τοῦ Harvard μέ σχέδια τοῦ μαθηματικοῦ Aiken ὁ πρῶτος Η.Υ. καί τό 1945 κατασκευάζεται ἕνας πιό τελειοποιημένος στό Πανεπιστήμιο τῆς Pensylvania, ὁ ὁποῖος ὀνομάστηκε ENIAC (Electronic Numerical Indegrador and Computer). Ἦταν τεράστιος σέ ὄγκο καί πολύπλοκος μέ 750 000 ἠλεκτρονικές λυχνίες καί ἄλλα ἐξαρτήματα, πού συνδέονταν μέ περισσότερα ἀπό 800 χιλιόμετρα σύρματα. Ἀποφασιστικός σταθμός στήν πορεία τῶν Η.Υ. στάθηκε ἡ ἐφεύρεση τῶν ἡμιαγωγῶν (transistors) τό 1948 καί ἡ ἐφεύρεση τῶν ὁλοκληρωτικῶν κυκλωμάτων τό 1965. Ἀπό κεῖ καί πέρα οἱ Η.Υ. τελειοποιήθηκαν καί ἁπλοποιήθηκαν πολύ, ὥστε σήμερα οἱ μικροί ὑπολογιστές χρησιμοποιοῦνται ἀκόμα καί ἀπό τίς νοικοκυρές γιά τά καθημερινά τους ψώνια.

Περιγραφή ἑνός ἠλεκτρονικοῦ ὑπολογιστῆ.

14. 2. Μποροῦμε μέ ἁπλᾶ λόγια νά ποῦμε ὅτι δυό εἶναι τά χαρακτηριστικά ἑνός ἠλεκτρονικοῦ ὑπολογιστῆ:

• Κάνει γρήγορα καί σωστά διάφορους ὑπολογισμούς (μπορεῖ π.χ. νά κάνει σέ κλάσμα τοῦ δευτερολέπτου πράξεις, πού ὁ ἀνθρώπινος ἐγκέφαλος χρειάζεται χρόνια γιά νά τίς κάνει).

• Ἔχει *«μνήμη»* καί *«λογική»*, δηλαδή *«θυμᾶται»* διάφορα δεδομένα (ὄχι μόνο ἀριθμούς) καί ἐφαρμόζει σωστά *«ὁδηγίες»* γιά τή λήψη ἀποφάσεων.

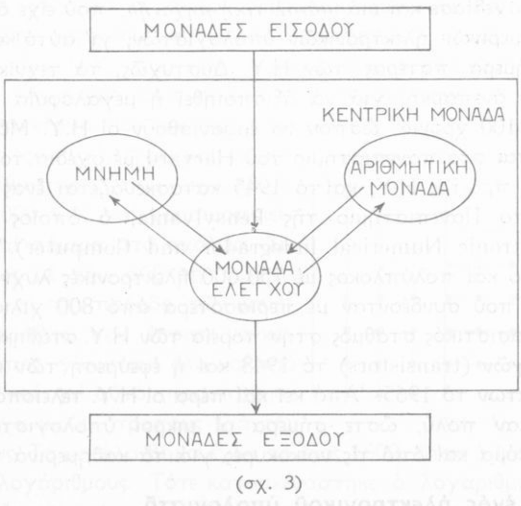
Σέ τί λοιπόν ὑστερεῖ ἀπό τόν ἀνθρώπινο ἐγκέφαλο; Σκέπτεται μηχανικά καί ὄχι δημιουργικά. Λειτουργεῖ καί ἀποφασίζει πάντοτε σύμφωνα μέ τίς ὁδηγίες καί τίς ἐντολές, πού τοῦ δίνουμε. Δέν μπορεῖ νά κάνει τίποτα ἀπό δική του πρωτοβουλία καί συνεπῶς δέν μπορεῖ νά ἀποφασίζει ἐλεύθερα ὅπως ὁ ἄνθρωπος. Εἶναι μέ ἄλλα λόγια μιά τέλεια μηχανή, ἀλλά πάντα μιά μηχανή καί ὄχι ἕνας ἐγκέφαλος.

14. 3. Ἕνας ἠλεκτρονικός ὑπολογιστής ἀποτελεῖται ἀπό ἠλεκτρικά καί ἠλεκτρονικά κυκλώματα καί ἀπό διάφορα ἄλλα ἠλεκτρομηχανικά ἐξαρτήματα.

Χωρίζεται σέ τρία βασικά μέρη:

- **τίς μονάδες εἰσόδου,**
- **τήν κεντρική μονάδα,**
- **τίς μονάδες ἐξόδου.**

Στό σχ. 3 ἔχουμε μιά ἐποπτική διάταξη αὐτῶν τῶν μονάδων.



(σχ. 3)

Δέν εἶναι ἀπαραίτητο τά τρία αὐτά μέρη νά βρίσκονται τό ἕνα κοντά στό ἄλλο ἤ μέσα στήν ἴδια αἴθουσα. Μπορεῖ νά βρίσκονται σέ διαφορετικές αἴθουσες ἤ σέ διαφορετικά κτίρια ἤ ἀκόμα καί σέ διαφορετικές πόλεις.

Ἀπό τά τρία αὐτά μέρη:

α) **Οἱ μονάδες εἰσόδου** εἶναι τό μέσο ἐπικοινωνίας μας μέ τόν Η.Υ., δηλαδή οἱ συσκευές, μέ τίς ὁποῖες δίνουμε στόν Η.Υ. τά δεδομένα τοῦ προβλήματος, πού θέλουμε νά ἐπεξεργασθεῖ, καί τή διαδικασία πού θά ἀκολουθήσει. Ὅλα αὐτά ἀποτελοῦν τό **πρόγραμμα** τοῦ προβλήματος.

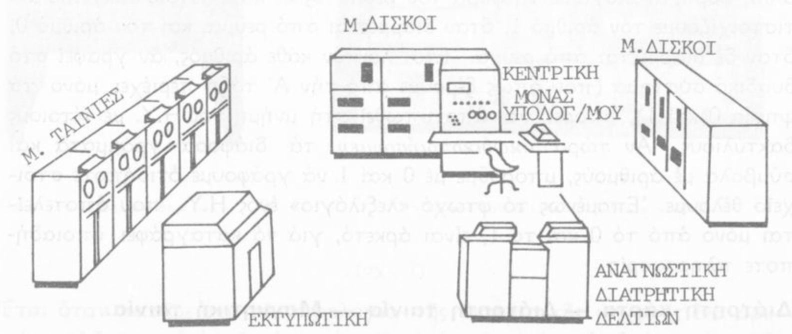
β) **Ἡ κεντρική μονάδα** ἀποτελεῖται ἀπό τρία κομμάτια:

- **Τή μνήμη,** πού ἀποθηκεύει τά διάφορα δεδομένα τοῦ προβλήματος (ἀριθμούς, ὀνόματα, τύπους, ὁδηγίες, ἀποτελέσματα κ.λ.π.) καί πού τά ἐπιστρέφει, ὅταν ζητηθοῦν.
- **Τήν ἀριθμητική μονάδα,** πού κάνει ἀριθμητικές καί λογικές πράξεις, δηλαδή κάνει τίς τέσσερις πράξεις, ὑψώνει σέ δύναμη, βρίσκει τετραγωνικές ρίζες, συγκρίνει διάφορους ἀριθμούς κ.λ.π.
- **Τή μονάδα ἐλέγχου,** πού ἀποφασίζει τί πράξεις θά κάνει ἡ ἀριθμητική μονάδα, τί πληροφορίες χρειάζεται νά πάρει γιά τίς πράξεις αὐτές ἀπό τή μνήμη καί τί ἀποτελέσματα θά ἀποθηκεύσει στή μνήμη.

  Ἔτσι, ἡ ἀριθμητική μονάδα καί ἡ μονάδα ἐλέγχου ἐπεξεργάζονται τά διάφορα στοιχεῖα σύμφωνα μέ τίς ὁδηγίες, πού ἔχουν, καί λύνουν τό πρόβλημα πού δόθηκε.

γ) **Οἱ μονάδες ἐξόδου** εἶναι τά μέσα ἐπικοινωνίας τοῦ Η.Υ. μέ τόν ἐξωτερικό κόσμο, δηλαδή οἱ συσκευές, μέ τίς ὁποῖες ὁ Η.Υ. μᾶς δίνει τά ἀποτελέσματα τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος πού ἐπεξεργάσθηκε καθώς καί διάφορες ἄλλες πληροφορίες ἀπό τή μνήμη του.

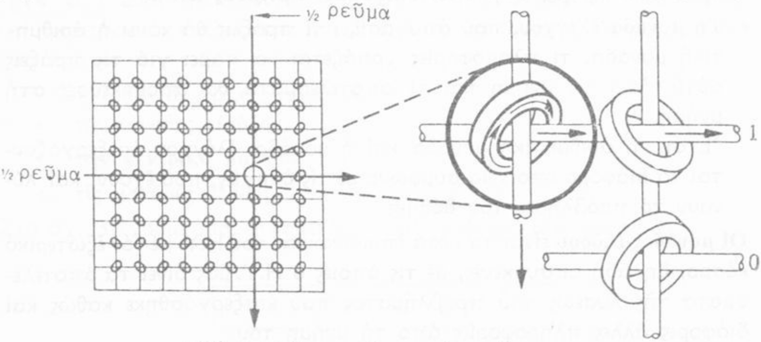
Ἕνα μεγάλο συγκρότημα ἠλεκτρονικοῦ ὑπολογιστῆ μπορεῖ νά ἔχει πολλές μονάδες εἰσόδου καί ἐξόδου, ὅπως ἐπίσης καί πολλές ἄλλες



(σχ. 4)

βοηθητικές συσκευές. Π.χ. ὁ Η.Υ. μιᾶς τράπεζας μπορεῖ νά ἔχει τήν κεντρική μονάδα του στό λογιστήριό της καί σέ κάθε ὑποκατάστημα τῆς τράπεζας νά ὑπάρχουν μονάδες εἰσόδου καί ἐξόδου. Ἐπίσης οἱ ἀστροναῦτες ἑνός διαστημόπλοιου ἔχουν μαζί τους μονάδα εἰσόδου καί ἐξόδου ἑνός Η.Υ., πού βρίσκεται στό κέντρο ἐκτοξεύσεως. Στό παραπάνω σχῆμα ἔχουμε μιά ἐποπτική εἰκόνα ἑνός συγκροτήματος Η.Υ.

14. 4. Δέν μποροῦμε βέβαια νά ἐξηγήσουμε τόν τρόπο λειτουργίας ὅλων τῶν μονάδων ἑνός Η.Υ. Ἐκεῖνο ὅμως, πού μποροῦμε νά ἐξηγήσουμε, εἶναι ἡ ἀρχή στήν ὁποία στηρίζεται ἡ λειτουργία αὐτή. Καί ἡ ἀρχή αὐτή εἶναι πολύ ἁπλή. Ἡ κεντρική μονάδα ἑνός Η.Υ. ἀποτελεῖται ἀπό χιλιάδες *ἠλεκτρικά κυκλώματα.* Ἰδιαίτερα ἡ μνήμη του ἀποτελεῖται ἀπό μικροσκοπικούς *δακτύλιους* πού εἶναι κατασκευασμένοι ἀπό σιδηρομαγνητικό ὑλικό καί ἔχουν διάμετρο μικρότερη ἀπό 1 mm. Μέσα ἀπό κάθε *δακτύλιο* διέρχεται ἕνας λεπτός ἀγωγός ἠλεκτρικοῦ ρεύματος καί ἄν ἀπό τόν ἀγωγό περνάει ρεῦμα, ὁ δακτύλιος μαγνητίζεται κατά τή μιά ἤ τήν ἄλλη φορά, ἀνάλογα μέ τή φορά τοῦ ρεύματος.Σέ κάθε τέτοιο δακτύλιο ἀντιστοιχίζουμε τόν ἀριθμό 1, ὅταν διαρρέεται ἀπό ρεῦμα, καί τόν ἀριθμό 0, ὅταν δέ διαρρέεται ἀπό ρεῦμα. Ἔτσι λοιπόν κάθε ἀριθμός, ἄν γραφεῖ στό δυαδικό σύστημα (πού ὅπως ξέρουμε ἀπό τήν Α' τάξη περιέχει μόνο τά ψηφία 0 καί 1), μπορεῖ νά ἀποτυπωθεῖ στή μνήμη τοῦ Η.Υ. μέ τέτοιους δακτύλιους. Ἄν τώρα *«κωδικοποιήσουμε»* τά διάφορα γράμματα καί σύμβολα μέ ἀριθμούς, μποροῦμε μέ 0 καί 1 νά γράφουμε ὁτιδήποτε στοιχεῖο θέλουμε. Ἑπομένως τό φτωχό «λεξιλόγιο» ἑνός Η.Υ., πού ἀποτελεῖται μόνο ἀπό τό 0 καί τό 1, εἶναι ἀρκετό, γιά νά καταγράφει ὁποιαδήποτε πληροφορία.



Μνήμη καί μαγνήτιση δακτύλιου
(σχ. 5)

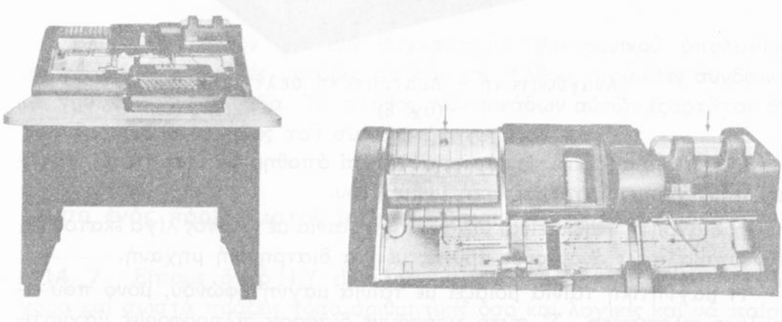
Διάτρητη κάρτα — Διάτρητη ταινία — Μαγνητική ταινία.

14. 5. Ἀπό τή μονάδα εἰσόδου ἑνός Η.Υ. τοῦ δίνουμε τά στοιχεῖα τοῦ προβλήματος, πού θέλουμε νά λύσουμε μέ αὐτόν, καθώς καί τίς ὁδηγίες γιά τή λύση του. Οἱ πληροφορίες αὐτές πρέπει νά γραφοῦν κατάλληλα σ' ἕνα ἀντικείμενο, πού λέγεται **φορέας.** Οἱ πιό γνωστοί φορεῖς εἶναι ἡ **διάτρητη κάρτα, ἡ διάτρητη χαρτοταινία, ἡ μαγνητική ταινία** καί ὁ **μαγνητικός δίσκος.**

Ἡ κάρτα εἶναι ἕνα λεπτό χαρτόνι μέ διαστάσεις 83×187 χιλιοστά τοῦ μέτρου. Κάθε κάρτα ἔχει 80 στῆλες ἀριθμημένες ἀπό 1–80 καί 12 γραμ-

(σχ. 6)

μές ἀριθμημένες ὅπως στό σχ. 6. Μέ μιά εἰδική μηχανή, πού λέγεται **διατρητική μηχανή,** μποροῦμε νά ἀνοίξουμε στήν κάρτα μικρές ὀρθογώνιες τρύπες.



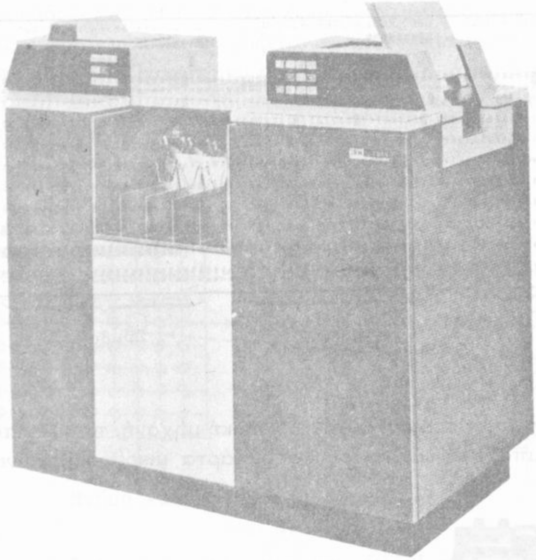
Διατρητική μηχανή δελτίων

Κίνηση τοῦ δελτίου στή διατρητική

(σχ. 7)

Ἔτσι ὅταν πατᾶμε στό πληκτρολόγιο τῆς διατρητικῆς μηχανῆς ἕνα ὁρισμένο πλῆκτρο τό ὁποῖο ἀντιστοιχεῖ σέ ἕνα ὁρισμένο ἀριθμό, γράμμα ἤ σύμβολο, ἐμφανίζεται στήν κάρτα ἕνας συνδυασμός ἀπό τρύπες σέ μιά στήλη της, διαφορετικός γιά κάθε πλῆκτρο, ἐνῶ συγχρόνως τυπώνεται στήν ἴδια στήλη καί στή 12η γραμμή ὁ ἀντίστοιχος ἀριθμός ἤ τό ἀντίστοιχο γράμμα ἤ σύμβολο.

Ἔτσι λοιπόν σ' ἕνα σύνολο ἀπό κάρτες μποροῦμε νά γράψουμε τά στοιχεῖα καί τίς πληροφορίες, μέ τίς ὁποῖες θέλουμε νά τροφοδοτήσουμε ἕναν Η.Υ. Τίς διάτρητες αὐτές κάρτες τίς βάζουμε **στή μονάδα ἀναγνώσεως** τοῦ Η.Υ.



Ἀναγνωστική - Διατρητική δελτίων
(σχ. 8)

Ὁ Η.Υ. «διαβάζει» τίς κάρτες αὐτές καί ἀποθηκεύει ὅλες τίς πληροφορίες, πού ἔχουμε διατρήσει, στή μνήμη του.

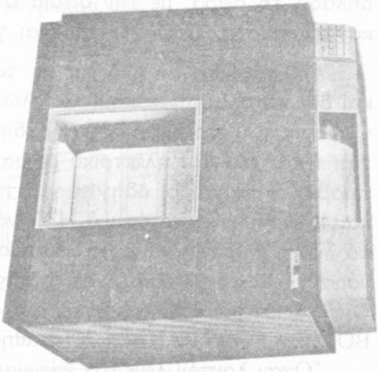
Ἡ διάτρητη ταινία εἶναι μιά χάρτινη ταινία μέ πλάτος λίγα ἑκατοστά, στήν ὁποία πάλι ἀνοίγουμε τρύπες μέ μιά διατρητική μηχανή.

Ἡ μαγνητική ταινία μοιάζει μέ ταινία μαγνητοφώνου, μόνο πού εἶναι λίγο πλατύτερη. Σ' αὐτή γράφουμε διάφορες πληροφορίες μαγνητίζοντας μερικές περιοχές της μέ κάποιον κώδικα.

Οἱ μαγνητικοί δίσκοι εἶναι λεπτοί μεταλλικοί δίσκοι σκεπασμένοι καί ἀπό τίς δυό πλευρές τους μέ μαγνητικό ὑλικό. Ἡ ἐγγραφή τῶν πληροφοριῶν στούς μαγνητικούς δίσκους γίνεται μέ *μαγνητικά σημεῖα* καί μέ *κώδικες*. Ὑπάρχει εἰδική συσκευή, γιά τήν ἐγγραφή στούς μαγνητικούς δίσκους καί γιά τήν ἀνάγνωσή τους.

Μονάδες ἐξόδου Η.Υ.

14. 6. Ὅσα εἴπαμε γιά τήν εἰσαγωγή τῶν πληροφοριῶν στόν Η.Υ. ἰσχύουν καί γιά τήν ἔξοδο, δηλαδή ὑπάρχουν φορεῖς, πάνω στούς ὁποίους ὁ Η.Υ. γράφει τά ἀποτελέσματα, πού βρίσκει ἀπό τή λύση διάφορων προβλημάτων. Χρησιμοποιοῦμε πάλι γιά τή δουλειά αὐτή τήν κάρτα, τή χαρτοταινία, τή μαγνητική ταινία καί τούς μαγνητικούς δίσκους. Ἀκόμα τά ἀποτελέσματα γράφονται καί σέ εἰδικά ἔντυπα μέ τήν **ἐκτυπωτική μηχανή** ἤ ἐμφανίζονται σέ εἰδική **τηλεοπτική ὀθόνη.**



(σχ. 9)

Βλέπουμε λοιπόν ὅτι ἕνα συγκρότημα ἠλεκτρονικοῦ ὑπολογιστῆ μπορεῖ νά ἔχει πολλές μονάδες εἰσόδου καί ἐξόδου, πού ὅλες συνδέονται μέ τήν κεντρική μονάδα. Τό πλῆθος τῶν μονάδων αὐτῶν ἐξαρτᾶται ἀπό τό εἶδος καί τό μέγεθος τοῦ συγκροτήματος.

Λύση ἑνός προβλήματος μέ ἠλεκτρονικό ὑπολογιστή.

14. 7. Εἴπαμε ὅτι ὁ Η.Υ. εἶναι μιά μηχανή, πού μπορεῖ νά ἐκτελεῖ γρήγορα καί σωστά πράξεις τόσο ἀριθμητικές ὅσο καί λογικές καί νά παίρνει ὁρισμένες ἀποφάσεις «μηχανικά». Αὐτό σημαίνει ὅτι πρέπει ἐμεῖς νά τοῦ δώσουμε ὅλες τίς ὁδηγίες καί ὅλες τίς πληροφορίες, πού χρειάζονται γιά τή λύση κάποιου προβλήματος. Μέ ἄλλα λόγια ὁ Η.Υ. δέ μπορεῖ νά λύσει ἕνα πρόβλημα, ἄν δέν ξέρουμε πρῶτα ἐμεῖς πῶς λύνεται καί ἄν δέν τοῦ δώσουμε τίς κατάλληλες ὁδηγίες, γιά νά τό λύσει.

Γιά νά λύσουμε ἕνα πρόβλημα μέ τόν Η.Υ. πρέπει νά κάνουμε πρῶτα μιά προεργασία, δηλαδή μιά *λογική ἀνάλυση* τοῦ προβλήματος. Σέ γενικές γραμμές ἡ προεργασία αὐτή γίνεται ὡς ἑξῆς:

1. Καθορίζουμε τά δεδομένα καί τά ζητούμενα τοῦ προβλήματός μας.

2. Προσπαθοῦμε νά διατυπώσουμε τό πρόβλημά μας μέ μαθηματική μορφή. Εἶναι φανερό ὅτι ἡ ἐπιτυχία τοῦ βήματος αὐτοῦ ἐξαρτᾶται ἀπό τίς μαθηματικές μας γνώσεις καί ἀπό τή φύση τοῦ προβλήματος. Ἄλλα προβλήματα δέχονται εὔκολα μαθηματική διατύπωση καί ἄλλα ὄχι. Τό βῆμα αὐτό εἶναι ἀπό τά πιό σημαντικά.

3. Κάνουμε τό **λογικό διάγραμμα** τοῦ προβλήματος, καθορίζουμε δηλαδή τή σειρά, μέ τήν ὁποία ὁ Η.Υ. θά ἐκτελέσει τίς διάφορες πράξεις καί συγκρίσεις, πού ἀπαιτοῦνται γιά τή λύση τοῦ προβλήματος.

4. Γράφουμε τό **πρόγραμμα** τοῦ προβλήματος. Ὁ Η.Υ. δέ διαβάζει καί δέν καταλαβαίνει καμμιά γλώσσα τῶν ἀνθρώπων, παρά μόνο μιά γλώσσα πού περιέχει τό 0 καί 1, δηλαδή ἄν ἀπό κάποιο κύκλωμά του περνάει ἤ δέν περνάει ἠλεκτρικό ρεῦμα. Πρέπει λοιπόν ὅλα τά δεδομένα ἑνός προβλήματος καί οἱ ὁδηγίες γιά τή λύση του νά «κωδικοποιηθοῦν» μέ 0 καί 1, ὥστε νά μπορέσει ὁ Η.Υ. νά *«διαβάσει»* τό πρόβλημα καί μετά νά τό λύσει. Γιά τήν κωδικοποίηση αὐτή οἱ κατασκευαστές τῶν Η.Υ. ἐπινόησαν εἰδικές γλῶσσες, οἱ ὁποῖες λέγονται **γλῶσσες προγραμματισμοῦ.** Οἱ βασικότερες ἀπό τίς γλῶσσες αὐτές ἔχουν τά ὀνόματα ALGOL, COBOL καί FORTRAN καί ἡ ἐκμάθησή τους δέν εἶναι πολύ δύσκολη.

Ὅταν λοιπόν λέμε ὅτι *κάνουμε τό πρόγραμμα*, ἐννοοῦμε ὅτι γράφουμε ὅλες τίς ὁδηγίες, πού χρειάζονται γιά τή λύση τοῦ προβλήματος, σέ κάποια ἀπό τίς γλῶσσες προγραμματισμοῦ. Ὑπάρχουν εἰδικά ἔντυπα, πάνω στά ὁποῖα γράφεται τό πρόγραμμα.

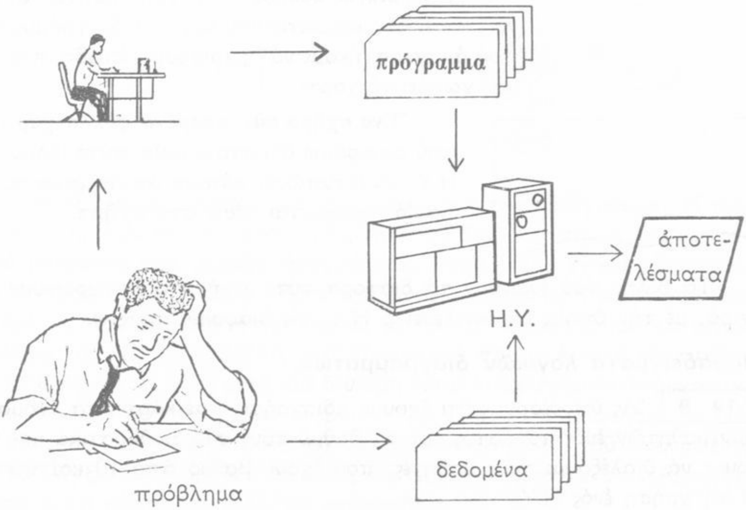
5. Κάνουμε **διάτρηση** τοῦ προγράμματος, δηλαδή τό χειρόγραφο πρόγραμμα τό περνᾶμε σέ κάρτες μέ μιά διατρητική μηχανή.

Τήν προεργασία αὐτή ἀκολουθεῖ ἡ **ἐκτέλεση τοῦ προγράμματος.** Ἀπό τή μονάδα εἰσόδου τοῦ Η.Υ. τροφοδοτοῦμε τόν ὑπολογιστή μέ τό πρόγραμμα. Ὁ ὑπολογιστής «διαβάζει» τό πρόγραμμα καί ἀποθηκεύει στή μνήμη του τά στοιχεῖα τοῦ προβλήματος καί τίς ὁδηγίες γιά τή λύση του. Μετά λύνει τό πρόβλημα σύμφωνα μέ τίς ὁδηγίες τοῦ προγράμματος καί στή μονάδα ἐξόδου μᾶς δίνει τή λύση του. Ἄν κατά τό «διάβασμα» τοῦ προγράμματος βρεῖ «ὀρθογραφικά» λάθη, ὁ Η.Υ. δέν ἐκτελεῖ τό πρόγραμμα, ἀλλά στή μονάδα ἐξόδου τυπώνει τό ἴδιο τό πρόγραμμα σημειώνοντας τά «ὀρθογραφικά» του λάθη. Στήν περίπτωση αὐτή διορθώνουμε τά λάθη καί τροφοδοτοῦμε ξανά τόν Η.Υ. μέ τό πρόγραμμα.

Ἡ τελευταία φάση εἶναι ὁ **ἔλεγχος ἀποτελεσμάτων.** Εἴπαμε ὅτι ὁ Η.Υ. εἶναι ἱκανός νά βρίσκει τά «ὀρθογραφικά» λάθη ἑνός προγράμματος, ὄχι ὅμως καί τά λογικά λάθη. Ἄν ἑπομένως, γράφοντας τό πρόγραμμα, κάνουμε ἕνα τέτοιο λάθος, (π.χ. δώσουμε στόν Η.Υ. ἕνα λανθασμένο τύπο), τότε τά ἀποτελέσματα, πού θά μᾶς δώσει ὁ Η.Υ., θά εἶναι καί αὐτά λανθασμένα.

Γι' αὐτό πάντοτε, ὅταν γράφουμε ἕνα νέο πρόγραμμα γιά τή λύση κάποιου προβλήματος, πρέπει νά γίνεται ἔλεγχος καί μιά ἐπαλήθευση τῶν ἀποτελεσμάτων, πού μᾶς ἔδωσε ὁ Η.Υ.

Στό παρακάτω σχῆμα ἔχουμε μιά ἐποπτική εἰκόνα τῆς διαδικασίας γιά τή λύση ἑνός προβλήματος μέ τόν Η.Υ.

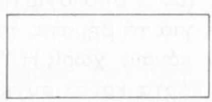


(σχ. 10)

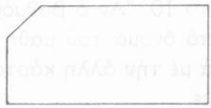
Λογικά διαγράμματα.

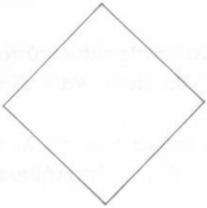
14. 8. Τό *λογικό διάγραμμα* ἑνός προβλήματος εἶναι μιά ἐποπτική εἰκόνα τῶν ἐργασιῶν, πού θά κάνει ἕνας Η.Υ., γιά νά λύσει ἕνα ὁρισμένο πρόβλημα καί διευκολύνει τό γράψιμο τοῦ προγράμματος. Ἕνα λογικό διάγραμμα ἀποτελεῖται ἀπό ἁπλά γεωμετρικά σχήματα, πού ἑνώνονται μέ βέλη. Τά συνηθισμένα σχήματα εἶναι:

Τό ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο, μέσα στό ὁποῖο γράφουμε μιά ἐνδιάμεση πράξη, πού περιγράφεται κατάλληλα.



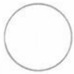
Τό σχῆμα κάρτας, πού φανερώνει ὅτι στό σημεῖο αὐτό χρειάζεται νά χρησιμοποιηθοῦν κάρτες, μέ τίς ὁποῖες θά δίνουμε νά *«διαβάσει»* ὁ ὑπολογιστής κάποια δεδομένα, πού γράφονται μέσα στό σχῆμα αὐτό.



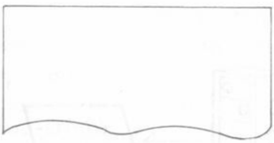


Ὁ ρόμβος, πού φανερώνει μιά ἀπόφαση, πού θά πρέπει νά πάρει ὁ ὑπολογιστής ἀνάλογα μέ τίς δυνατές περιπτώσεις, πού παρουσιάζονται. Ἔτσι μέσα στό ρόμβο γράφουμε ἕνα ἐρώτημα.

Τό «ὀβάλ» σχῆμα, πού παριστάνει τήν ἀρχή ἤ τό τέλος τοῦ λογικοῦ διαγράμματος.



Ἕνας μικρός κύκλος. πού χρησιμοποιεῖται γιά νά ἑνώσει δυό κομμάτια τοῦ λογικοῦ διαγράμματος, πού ἀναγκαστήκαμε νά χωρίσουμε ἐπειδή π.χ. δέ μᾶς χωράει τό χαρτί.



Ἕνα σχῆμα σάν κομμένο φύλλο χαρτιοῦ, πού φανερώνει ὅτι στό σημεῖο αὐτό θέλουμε ὁ Η.Υ. νά ἐκτυπώσει κάποια ἀποτελέσματα, τά ὁποῖα γράφονται μέσα στό σχῆμα.

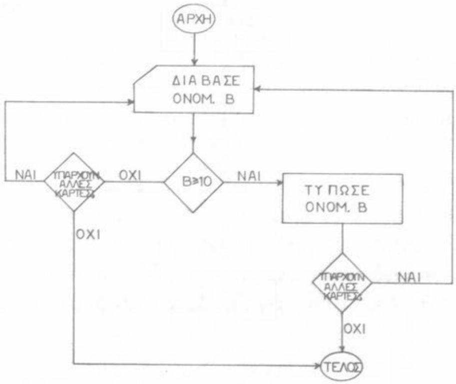
Τά βέλη, πού ἑνώνουν τά διάφορα αὐτά σχήματα, φανερώνουν τή σειρά, μέ τήν ὁποία θά ἐκτελέσει ὁ Η.Υ. τίς διάφορες πράξεις.

Παραδείγματα λογικῶν διαγραμμάτων.

14. 9. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ἔχουμε «διατρήσει» σέ κάρτες τά ὀνόματα τῶν μαθητῶν ἑνός τμήματος καί τό βαθμό τους στά μαθηματικά καί θέλουμε νά διαλέξουμε τούς μαθητές, πού ἔχουν βαθμό ἀπό 10 καί πάνω, μέ τή χρήση ἑνός Η.Υ.
Τά στοιχεῖα τοῦ προβλήματος εἶναι:

- Τό ὀνοματεπώνυμο τοῦ μαθητῆ, πού θά σημειώνεται ΟΝΟΜ.
- Ὁ βαθμός τοῦ μαθητῆ, πού θά σημειώνεται Β.

Πρέπει λοιπόν στή μονάδα ἀναγνώσεως τοῦ Η.Υ. νά βάλουμε αὐτές τίς κάρτες, νά τίς διαβάσει ὁ ὑπολογιστής, νά βρεῖ ποιοί ἔχουν βαθμό μεγαλύτερο (ἤ ἴσο) ἀπό τό 10 καί νά τυπώσει τό ὄνομά τους καί τό βαθμό τους. Ὅπως ἐξηγήσαμε, τίποτα ἀπ' ὅλα αὐτά δέν μπορεῖ νά κάνει μόνος του ὁ ὑπολογιστής, ἄν δέν τοῦ δώσουμε ἐμεῖς μέ τό πρόγραμμα ὁδηγίες γιά τά βήματα, πού πρέπει ν' ἀκολουθήσει. Ἄν τήν ἐργασία αὐτή τήν κάναμε χωρίς Η.Υ., θά ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς: Θά διαβάζαμε τήν πρώτη κάρτα καί θά συγκρίναμε τό βαθμό, πού εἶναι γραμμένος στήν κάρτα, μέ τό 10. Ἄν ὁ βαθμός ἦταν μεγαλύτερος (ἤ ἴσος) ἀπό τό 10, θά γράφαμε τό ὄνομα τοῦ μαθητῆ καί τό βαθμό του. Μετά θά κάναμε τήν ἴδια δουλειά μέ τήν ἄλλη κάρτα καί ὅταν θά τελείωναν οἱ κάρτες, θά σταματούσαμε.



Ἄς ἐξηγήσουμε ἀναλυτικά τό πρῶτο μας λογικό διάγραμμα. Ἡ πρώτη ἐντολή, πού δίνουμε στόν Η.Υ., εἶναι νά διαβάσει τήν πρώτη κάρτα, πού βρίσκεται στή μονάδα ἀναγνώσεως, στήν ὁποία ἔχουμε «διατρήσει» τά στοιχεῖα ΟΝΟΜ καί Β. Μετά τοῦ δίνουμε τήν ἐντολή νά συγκρίνει τό βαθμό Β, πού διάβασε στήν κάρτα, μέ τό 10. Τώρα ἔχουμε δύο πιθανές ἐξελίξεις: α) Ἄν εἶναι $B \geq 10$, τοῦ δίνουμε μιά πρώτη ἐντολή νά τυπώσει τό ΟΝΟΜ καί τό Β καί μετά μιά δεύτερη ἐντολή νά ἐλέγξει ἄν ὑπάρχουν καί ἄλλες κάρτες, πού πρέπει νά διαβάσει. Ἄν ΟΧΙ, νά σταματήσει, ἄν ΝΑΙ, νά ξανακάνει τήν ἴδια δουλειά. β) Ἄν δέν εἶναι $B \geq 10$, τοῦ δίνουμε ἐντολή νά ἐλέγξει ἄν ὑπάρχουν καί ἄλλες κάρτες γιά διάβασμα. Ἄν ΝΑΙ, νά διαβάσει ἄλλη κάρτα, ἄν ΟΧΙ, νά σταματήσει.

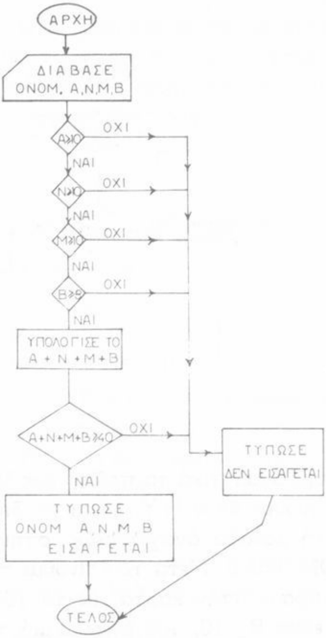
14. 10. Ἕνας μαθητής, γιά νά πετύχει σέ κάποιο διαγωνισμό, πρέπει νά πάρει βαθμό τουλάχιστο 10 στά ἀρχαῖα ἑλληνικά, στά νέα ἑλληνικά καί τά μαθηματικά, τουλάχιστο 8 στή φυσική ἤ ἱστορία καί τουλάχιστο 40 στό σύνολο.

Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι γιά κάθε μαθητή ἔχουμε διατρήσει σέ μιά κάρτα τό ὀνοματεπώνυμό του καί τούς βαθμούς του στίς ἐξετάσεις αὐτές καί ἄς σημειώσουμε τά στοιχεῖα του ὡς ἑξῆς.

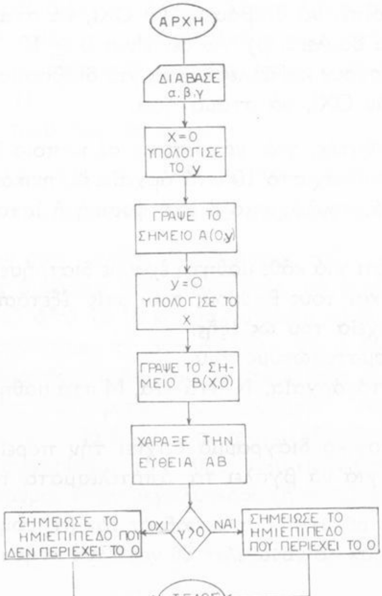
—ΟΝΟΜ τό ὀνοματεπώνυμό του

—Α τό βαθμό στά ἀρχαῖα, Ν στά νέα, Μ στά μαθηματικά καί Β στή φυσική ἤ ἱστορία.

Τό παρακάτω λογικό διάγραμμα δείχνει τήν πορεία, πού πρέπει νά ἀκολουθήσει ὁ Η.Υ., γιά νά βγάλει τά ἀποτελέσματα τοῦ διαγωνισμοῦ αὐτοῦ.



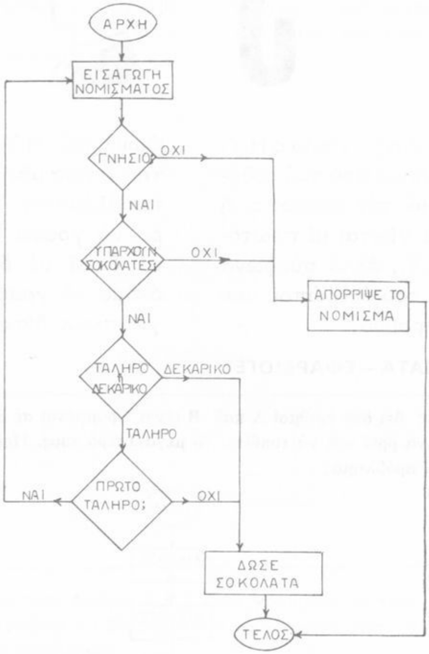
14.11. Λογικό διάγραμμα γιά τή λύση τῆς ἀνισώσεως αx+βy+γ>0.



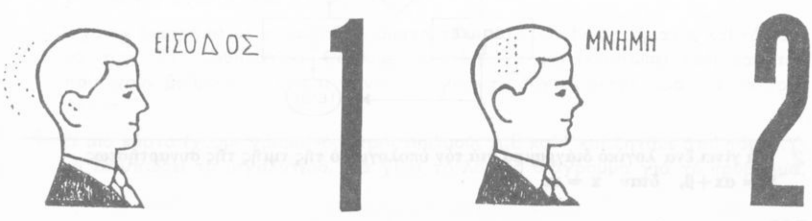
Αὐτόματοι πωλητές.

14. 12. Τά λογικά διαγράμματα δέ χρησιμοποιοῦνται μόνο στούς ἠλεκτρονικούς ὑπολογιστές, ἀλλά εἶναι χρήσιμα καί γιά πολλές ἄλλες δουλειές. Ἔτσι π.χ. μέ τή βοήθεια λογικῶν διαγραμμάτων κατασκευάζονται καί οἱ αὐτόματοι πωλητές.

Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι μιά αὐτόματη μηχανή πουλάει σοκολάτες μέ 10 δραχμές τή μία καί δέχεται κέρματα 1 δεκάδραχμου ἤ 2 πεντάδραχμων. Ἄς ὑποθέσουμε ἀκόμα ὅτι ἡ μηχανή μπορεῖ νά ἐλέγχει ἄν τό νόμισμα εἶναι κίβδηλο, ὁπότε τό ἀπορρίπτει. Τό παρακάτω σχῆμα δείχνει τό λογικό διάγραμμα, σύμφωνα μέ τό ὁποῖο πρέπει νά κατασκευασθεῖ ἡ μηχανή αὐτή:

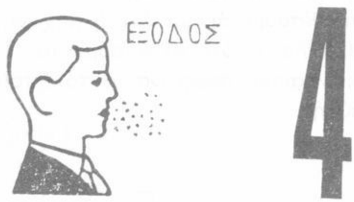


14. 13. **Τά 4 στάδια τῆς «σκέψεως» ἑνός ὑπολογιστῆ.**



Ὅπως ὁ ἀνθρώπινος ἐγκέφαλος ἔτσι καί ὁ Η.Υ. πρέπει πρῶτα νά πάρει τά στοιχεῖα τοῦ προβλήματος, πού θά λύσει. Ἡ τροφοδοσία μέ τά ἀναγκαῖα στοιχεῖα καί τίς κατάλληλες ὁδηγίες γίνεται μέ τήν εἴσοδο.

Ὅλες οἱ πληροφορίες, πού χρειάζεται ὁ Η.Υ., γιά νά λύσει ἕνα πρόβλημα, καθώς καί οἱ ἀναγκαῖες ὁδηγίες, δηλ. τό «πρόγραμμα», ἀποθηκεύονται στή μνήμη του.



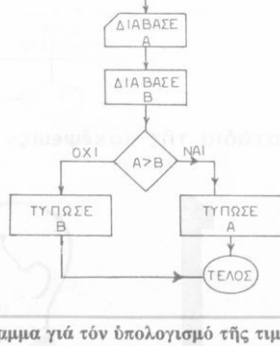
Μέ κατάλληλη ἐπεξεργασία ὁ Η.Υ. λύνει τό πρόβλημα πού τοῦ δόθηκε. Ἀντίθετα μέ τόν ἄνθρωπο, ἡ ἐπεξεργασία δέ γίνεται μέ πρωτοβουλία τοῦ Η.Υ., ἀλλά σύμφωνα μέ τίς ὁδηγίες τοῦ ἀνθρώπου πού ἔκανε τό πρόγραμμα.

Φωνή τοῦ Η.Υ. εἶναι ἡ ἔξοδος, μέ τήν ὁποία μᾶς δίνει τή λύση τοῦ προβλήματος. Ἡ λύση αὐτή μπορεῖ νά γραφεῖ ἀπό μιά μηχανή ἤ νά δοθεῖ σέ διάτρητες κάρτες, ἤ ἀκόμα νά γραφεῖ σέ εἰδικούς μαγνητικούς δίσκους.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι δυό ἀριθμοί Α καί Β εἶναι γραμμένοι σέ δυό κάρτες καί ζητεῖται ἀπό τόν Η.Υ. νά βρεῖ καί νά τυπώσει τό μεγαλύτερό τους. Ποιό εἶναι τό λογικό διάγραμμα γιά τό πρόβλημα;**

Λύση:

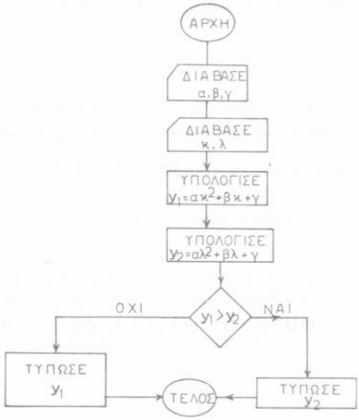


2. **Νά γίνει ἕνα λογικό διάγραμμα γιά τόν ὑπολογισμό τῆς τιμῆς τῆς συναρτήσεως $y = \alpha x + \beta$, ὅταν $x = \kappa$.**

Λύση:

3. **Μᾶς δίνεται ἡ συνάρτηση $y = \alpha x^2+\beta x+\gamma$. Νά γίνει λογικό διάγραμμα γιά τόν ὑπολογισμό τῶν τιμῶν της γιά $x = \kappa$ καί $x = \lambda$, νά γίνει σύγκριση αὐτῶν τῶν τιμῶν καί νά ἐκτυπωθεῖ ἡ μικρότερη τιμή.**

Λύση:



● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι τρεῖς ἀριθμοί Α,Β,Γ εἶναι γραμμένοι σέ τρεῖς κάρτες καί ζητεῖται ἀπό τόν Η.Υ. νά βρεῖ τό ἄθροισμα καί τό γινόμενό τους. Νά γίνει τό λογικό διάγραμμα γιά τό πρόβλημα.
2. Νά γίνει λογικό διάγραμμα γιά τόν ὑπολογισμό τῶν τιμῶν τῆς συναρτήσεως $y = \alpha x+\beta$ ὅταν $x = \kappa$, $\chi = \lambda$, $\chi = 14$.
3. Ἔχουμε διατρήσει σέ κάρτες τά ὀνόματα τῶν μαθητῶν ἑνός τμήματος καί τό βαθμό τους στά μαθηματικά. Θέλουμε ἕνας Η.Υ. νά μᾶς ἐκτυπώσει τούς μαθητές, πού ἔχουν βαθμό ἀπό 15 καί πάνω .Νά γίνει τό λογικό διάγραμμα γιά τό πρόβλημα.
4. Σέ μιά κάρτα ἔχουμε γραμμένους τρεῖς ἀριθμούς Α,Β καί Γ καί ζητᾶμε ἀπό τόν Η.Υ· νά ἐκτυπώσει τό μεγαλύτερο. Νά γίνει τό λογικό διάγραμμα γιά τό πρόβλημα.

5. Νά γίνει λογικό διάγραμμα γιά τή λύση τῆς ἐξισώσεως $Ax = B$: Νά ἐξετασθεῖ καί ἡ περίπτωση, πού μπορεῖ νά εἶναι $A = 0$.

6. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι σέ μιά κάρτα ἔχουμε γραμμένους τούς ἀριθμούς Α καί Β καί σέ μιά ἄλλη τόν ἀριθμό Γ. Θέλουμε μέ ἕναν Η.Υ. νά συγκρίνουμε τό $A+B$ μέ τό $A+\Gamma$ καί νά ἐκτυπώσουμε τό μεγαλύτερο. Νά γίνει τό λογικό διάγραμμα γιά τό πρόβλημα.

7. Ἕνα τρίγωνο ἔχει βάση β καί ὕψος υ. Θέλουμε μέ ἕναν Η.Υ. νά ὑπολογίσουμε τό ἐμβαδό του. Νά γίνει τό λογικό διάγραμμα γιά τό πρόβλημα.

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 14

1. Δύο εἶναι τά κύρια χαρακτηριστικά ἑνός ἠλεκτρονικοῦ ὑπολογιστῆ:
   α) Κάνει γρήγορα καί σωστά καί τούς πιό πολύπλοκους ὑπολογισμούς.
   β) Ἔχει «μνήμη» καί «λογική», δηλαδή ἀποθηκεύει διάφορες πληροφορίες καί τίς ἐπεξεργάζεται σύμφωνα μέ τίς ὁδηγίες τοῦ προγράμματος.

2. Ἕνας ἠλεκτρονικός ὑπολογιστής ἀποτελεῖται ἀπό τρία κύρια μέρη:
   - Τίς μονάδες εἰσόδου.
   - Τήν κεντρική μονάδα.
   - Τίς μονάδες ἐξόδου.

   Ἡ ἐπικοινωνία μας μέ ἕναν ἠλεκτρονικό ὑπολογιστή μπορεῖ νά γίνει μέ διάτρητες κάρτες, μέ διάτρητες ἤ μαγνητικές ταινίες ἤ καί μέ δίσκους.

3. Γιά νά λύσουμε ἕνα πρόβλημα μέ τόν ἠλεκτρονικό ὑπολογιστή πρέπει νά κάνουμε:
   - Λογική ἀνάλυση τοῦ προβλήματος.
   - Λογικό διάγραμμα.
   - Πρόγραμμα.

   Τό πρόγραμμα γίνεται σέ εἰδική *γλώσσα*. Οἱ κυριώτερες γλῶσσες προγραμματισμοῦ εἶναι ἡ FORTRAN, ἡ ALGOL καί ἡ COBOL.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τὸ σύνολο R καί οἱ πράξεις του

1. Τά βασικά ἀριθμητικά σύνολα, μέ τή σειρά πού τά μάθαμε, εἶναι:

- Τό σύνολο τῶν **φυσικῶν ἀριθμῶν** $N = \{0,1,2,3,\ldots\}$
- Τό σύνολο τῶν **ἀκέραιων ἀριθμῶν** $Z = \{\ldots -3,-2,-1,0,1,2,\ldots\ldots\}$
- Τό σύνολο τῶν **ρητῶν ἀριθμῶν** $Q = \{\chi | \chi = \alpha/\beta,\ \alpha \in Z,\ \beta \in Z^*\}$

Κάθε ἕνα ἀπό αὐτά εἶναι «ἐπέκταση» τοῦ προηγουμένου του, ὁπότε

$$N \subset Z \subset Q$$

Τά σύνολα N,Z,Q δίχως τό στοιχεῖο τους 0 σημειώνονται ἀντίστοιχα μέ N^*, Z^*, Q^*.

Κάθε ρητός ἀριθμός μπορεῖ νά γραφεῖ πάντοτε ὡς ἀπειροψήφιος δεκαδικός περιοδικός ἀριθμός (δίχως νά ἀποκλείεται ἡ περίοδός του νά εἶναι τό ψηφίο 0) καί ἀντιστρόφως κάθε τέτοιος δεκαδικός ἀριθμός παριστάνει ρητό ἀριθμό. Συνεπῶς οἱ ἀπειροψήφιοι δεκαδικοί ἀριθμοί, πού δέν εἶναι περιοδικοί, δέν εἶναι ρητοί καί λέγονται **ἄρρητοι ἀριθμοί.** Τό σύνολο, πού ἔχει στοιχεῖα τούς ρητούς καί τούς ἄρρητους ἀριθμούς, λέγεται **σύνολο πραγματικῶν ἀριθμῶν** καί σημειώνεται μέ R (καί μέ R^*, ὅταν ἐξαιροῦμε τό στοιχεῖο 0).

Τά στοιχεῖα τοῦ R ἀπεικονίζονται ἕνα μέ ἕνα μέ τά σημεῖα μιᾶς εὐθείας ε καί τότε ἡ ε λέγεται **εὐθεία τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.**

2. **Πράξεις στό R.** Οἱ ἄρρητοι ἀριθμοί σημειώνονται μέ ρητές προσεγγίσεις τους καί γι' αὐτό οἱ πράξεις στό R γίνονται ὅπως καί στό σύνολο Q καί ἔχουν τίς ἴδιες ἰδιότητες. Ἔτσι, γιά τίς δύο βασικές πράξεις, τήν «πρόσθεση» καί τόν «πολλαπλασιασμό», ἔχουμε τίς ἰδιότητες:

Ἰδιότητες	Πρόσθεση	Πολλαπλασιασμός
ἀντιμεταθετική	$\alpha+\beta=\beta+\alpha$	$\alpha\beta=\beta\alpha$
προσεταιριστική	$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$	$(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma)$
οὐδέτερο στοιχεῖο	$\alpha+0=\alpha$	$\alpha\cdot 1=\alpha$
συμμετρικό στοιχεῖο	$\alpha+(-\alpha)=0$	$\alpha\cdot\dfrac{1}{\alpha}=1$
ἐπιμεριστική	$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$	

Γιά κάθε $\alpha \in R$ ὁ ἀριθμός $-\alpha$ λέγεται **ἀντίθετος** τοῦ α, ἐνῶ ὁ ἀριθμός $\frac{1}{\alpha}$, ἄν $\alpha \neq 0$, λέγεται **ἀντίστροφος** τοῦ α.

Τό ἄθροισμα $\alpha+(-\beta)$ σημειώνεται μέ $\alpha-\beta$ καί εἶναι ἡ **διαφορά τῶν α καί β**, δηλαδή $\boldsymbol{\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)}$.

Τό γινόμενο $\alpha \cdot \frac{1}{\beta}$ σημειώνεται μέ $\frac{\alpha}{\beta}$ καί εἶναι τό **πηλίκο τοῦ α διά τοῦ β**, δηλαδή $\frac{\alpha}{\beta} = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}$.

3. **Διάταξη στό R**. Ἄν ἔχουμε δύο ὁποιουσδήποτε πραγματικούς ἀριθμούς α καί β, πού ἡ διαφορά τους $\alpha-\beta$ εἶναι θετικός ἀριθμός, λέμε ὅτι ὁ α εἶναι **μεγαλύτερος** ἀπό τό β (ἤ ὁ β εἶναι **μικρότερος** ἀπό τόν α) καί γράφουμε τήν «ἀνισότητα» $\alpha>\beta$ (ἤ $\beta<\alpha$). Ἔτσι, ἄν ὁ α εἶναι θετικός ἀριθμός, γράφουμε $\alpha>0$, ἐνῶ ἄν ὁ α εἶναι ἀρνητικός ἀριθμός, γράφουμε $\alpha<0$.

Στίς ἀνισότητες ἰσχύει ἡ μεταβατική ἰδιότητα, δηλαδή

ἄν $\alpha>\beta$ καί $\beta>\gamma$, τότε καί $\alpha>\gamma$.

Ἐπίσης, ἄν ἔχουμε $\alpha>\beta$, θά ἔχουμε ἀκόμη

$$\alpha+\gamma > \beta+\gamma, \quad \text{γιά ὁποιοδήποτε } \gamma \in R$$
$$\alpha-\gamma > \beta-\gamma, \quad \text{γιά ὁποιοδήποτε } \gamma \in R$$
$$\alpha\gamma > \beta\gamma, \quad \text{ὅταν } \gamma>0$$
$$\alpha\gamma < \beta\gamma, \quad \text{ὅταν } \gamma<0.$$

Τέλος μποροῦμε νά προσθέτουμε ὁμοιόστροφες ἀνισότητες κατά μέλη (δηλαδή ἄν $\alpha>\beta$ καί $\gamma>\delta$, θά ἔχουμε καί $\alpha+\gamma>\beta+\delta$), ἐνῶ **δέν μποροῦμε νά ἀφαιροῦμε ὁμοιόστροφες ἀνισότητες κατά μέλη.**

4. **Δυνάμεις**. Ἡ δύναμη α^μ ἑνός πραγματικοῦ ἀριθμοῦ α γιά $\mu \in N$ ὁρίζεται ἀπό τίς ἰσότητες:

$$\alpha^\mu = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \ldots\ldots \alpha}_{\mu \text{ παράγοντες}}, \quad \mu \neq 1, \quad \mu \neq 0$$
$$\alpha^1 = \alpha$$
$$\alpha^0 = 1$$

Ὁρίζεται ἐπίσης καί δύναμη μέ ἐκθέτη ἀρνητικό ἀκέραιο ἀπό τήν ἰσότητα $\alpha^{-\mu} = \frac{1}{\alpha^\mu}$. Ἀπό τόν ὁρισμό τῆς δυνάμεως εἶναι φανερό ὅτι:

- Ἄν $\alpha>0$, τότε εἶναι καί $\alpha^\mu>0$ γιά κάθε $\mu \in N$.
- Ἄν $\alpha<0$ καί μ ἄρτιος, τότε εἶναι $\alpha^\mu>0$.
- Ἄν $\alpha<0$ καί μ περιττός, τότε εἶναι $\alpha^\mu<0$.

Στίς δυνάμεις ἰσχύουν ἀκόμη καί οἱ ἰδιότητες:

$$\alpha^{\mu} \cdot \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu}$$
$$(\alpha^{\mu})^{\nu} = \alpha^{\mu\nu}$$
$$\alpha^{\mu} : \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu-\nu}$$
$$(\alpha \cdot \beta)^{\mu} = \alpha^{\mu} \cdot \beta^{\mu}$$

5. **Τετραγωνική ρίζα πραγματικοῦ ἀριθμοῦ**. Ἄν ἔχουμε ἕναν ἀριθμό $\alpha \in R$, τό σύμβολο $\sqrt{\alpha}$ (τό ὁποῖο λέγεται **τετραγωνική ρίζα** τοῦ α) παριστάνει ἕναν ἀριθμό $\beta \in R$ τέτοιον, ὥστε $\beta^2 = \alpha$. Ἀπό τόν ὁρισμό καταλαβαίνουμε ὅτι:

- Δέν ὑπάρχει τετραγωνική ρίζα ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ.
- Κάθε θετικός ἀριθμός ἔχει δύο τετραγωνικές ρίζες, πού εἶναι ἀντίθετοι ἀριθμοί, π.χ. οἱ τετραγωνικές ρίζες τοῦ 4 εἶναι $+2$ καί -2.

Συμφωνοῦμε ὅτι γιά κάθε θετικό ἀριθμό α τό σύμβολο $\sqrt{\alpha}$ παριστάνει τή θετική ρίζα. Μέ τή συμφωνία αὐτή ἔχουμε π.χ. $\sqrt{4} = 2$ (καί ὄχι $\sqrt{4} = -2$), ὁπότε $-\sqrt{4} = -\sqrt{2}$.

Ἡ $\sqrt{\alpha}$ εἶναι ρητός ἀριθμός, μόνο ὅταν ὁ α εἶναι τετράγωνο ἑνός ρητοῦ ἀριθμοῦ, ἐνῶ στήν ἀντίθετη περίπτωση ὁ $\sqrt{\alpha}$ εἶναι ἄρρητος ἀριθμός. Ἔχουμε λοιπόν πάντα $\sqrt{\rho^2} = \rho$, $(\rho > 0)$, ἐνῶ π.χ. οἱ ἀριθμοί $\sqrt{2}$ καί $\sqrt{5}$ εἶναι ἄρρητοι.

Στήν τετραγωνική ρίζα ἰσχύουν οἱ ἰδιότητες

$$\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\beta}$$
$$\sqrt{\alpha} : \sqrt{\beta} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$$

Τονίζεται ἰδιαίτερα ὅτι γενικά ἔχουμε $\sqrt{\alpha \pm \beta} \neq \sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta}$.

Ἀλγεβρικές παραστάσεις – Συναρτήσεις.

1. Κάθε ἔκφραση, πού δηλώνει μιά σειρά πράξεων μεταξύ ἀριθμῶν ὁρισμένοι ἀπό τούς ὁποίους παριστάνονται μέ γράμματα, λέγεται **ἀλγεβρική παράσταση.** Ὁ ἀριθμός, πού προκύπτει ἀπό μιά ἀλγεβρική παράσταση, ἄν ἀντικαταστήσουμε τά γράμματά της μέ συγκεκριμένους ἀριθμούς, λέγεται **ἀριθμητική τιμή** τῆς ἀλγεβρικῆς παραστάσεως. Γιά νά βροῦμε τήν ἀριθμητική τιμή μιᾶς ἀλγεβρικῆς παραστάσεως, κάνουμε τίς πράξεις, πού εἶναι σημειωμένες σ' αὐτή, μέ τήν ἑξῆς σειρά:

- Ὑπολογισμός δυνάμεων.
- Πολλαπλασιασμός καί διαίρεση.
- Πρόσθεση καί ἀφαίρεση.

Όταν ἡ παράσταση περιέχει καί παρενθέσεις, κάνουμε πρῶτα τίς πράξεις, πού εἶναι σημειωμένες μέσα σ' αὐτές.

Μιά ἀλγεβρική παράσταση, πού περιέχει γράμμα μέσα σέ τετραγωνική ρίζα, λέγεται **ἄρρητη,** ἐνῶ, ὅταν περιέχει γράμμα σέ παρονομαστή, λέγεται **κλασματική.** Μιά ἀλγεβρική παράσταση, πού δέν εἶναι ἄρρητη ἤ κλασματική, λέγεται **ἀκεραία.**

2. **Μονώνυμα.** Κάθε παράσταση, πού περιέχει μόνο πολλαπλασιασμούς, λέγεται **ἀκέραιο μονώνυμο** (ἤ ἁπλῶς «μονώνυμο»). Ἕνα μονώνυμο στήν τελική του μορφή εἶναι γινόμενο, τοῦ ὁποίου ὁ πρῶτος παράγοντας εἶναι ἀριθμός, πού λέγεται **συντελεστής** του, ἐνῶ οἱ ἄλλοι παράγοντες εἶναι δυνάμεις ὁρισμένων γραμμάτων καί ἀποτελοῦν τό **κύριο μέρος** του. Ὁ ἐκθέτης ὡς πρός ἕνα γράμμα (ἤ τό ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν δύο ἤ περισσότερων γραμμάτων) λέγεται **βαθμός τοῦ μονωνύμου** ὡς πρός τό γράμμα αὐτό (ἤ ὡς πρός τά θεωρούμενα γράμματα).

Ἀφοῦ τά μονώνυμα εἶναι γινόμενα παραγόντων, **τό γινόμενο μονωνύμων εἶναι πάντα μονώνυμο,** πού ἔχει συντελεστή τό γινόμενο τῶν συντελεστῶν του. Τό κύριο μέρος τοῦ γινομένου βρίσκεται μέ τίς ἰδιότητες τῶν δυνάμεων, π.χ.

$$(-3\chi^2\psi\alpha)\left(\frac{5}{2}\chi\psi^3\beta\right)\left(-\frac{2}{3}\chi\alpha^2\gamma\right)=5\chi^4\psi^4\alpha^3\beta\gamma$$

Τό πηλίκο δύο ἀκέραιων μονωνύμων ἔχει συντελεστή τό πηλίκο τῶν συντελεστῶν τους, ἀλλά δέν εἶναι πάντα ἀκέραιο μονώνυμο, γιατί μπορεῖ σ' αὐτό νά σημειώνεται καί διαίρεση.

Δύο μονώνυμα, πού ἔχουν τό ἴδιο κύριο μέρος, λέγονται ὅμοια. Ἄν ἔχουμε ὅμοια μονώνυμα, τότε:

- Τό ἄθροισμά τους εἶναι ὅμοιο μονώνυμο, πού ἔχει συντελεστή τό ἄθροισμα τῶν συντελεστῶν τους.
- Τό γινόμενό τους δέν εἶναι ὅμοιο μονώνυμο.
- Τό πηλίκο δύο ὅμοιων μονωνύμων εἶναι ἀριθμός ἴσος μέ τό πηλίκο τῶν συντελεστῶν τους.

Δύο ὅμοια μονώνυμα μέ ἀντίθετους συντελεστές λέγονται **ἀντίθετα.** Τό ἄθροισμα δύο ἀντίθετων μονωνύμων εἶναι μηδέν.

3. **Πολυώνυμα.** Κάθε ἄθροισμα, τοῦ ὁποίου οἱ προσθετέοι εἶναι ἀκέραια μονώνυμα (ὄχι ὅλα ὅμοια), λέγεται **ἀκέραιο πολυώνυμο** (ἤ ἁπλῶς πολυώνυμο). Τά μονώνυμα αὐτά εἶναι οἱ «ὅροι» τοῦ πολυωνύμου. Ἄν σ' ἕνα πολυώνυμο κάνουμε **ἀναγωγή ὅμοιων ὅρων,** δηλαδή ἀντικαταστήσουμε τά ὅμοια μονώνυμα μέ τό ἄθροισμά τους, τό πολυώνυμο παίρνει

τήν *«ἀνηγμένη»* μορφή του· ὅταν στή μορφή αὐτή ἔχει μόνο δύο ἤ τρεῖς ὅρους, λέγεται ἀντίστοιχα **διώνυμο** ἤ **τριώνυμο.**

Ὁ μεγαλύτερος βαθμός ὅλων τῶν ὅρων του ὡς πρός ἕνα γράμμα (ἤ ὡς πρός περισσότερα γράμματα) λέγεται **βαθμός τοῦ πολυωνύμου** ὡς πρός τό γράμμα αὐτό (ἤ ὡς πρός τά γράμματα αὐτά). Ὅταν ὅλοι οἱ ὅροι ἑνός πολυωνύμου ἔχουν τόν ἴδιο βαθμό ὡς πρός ὁρισμένα γράμματα, τό πολυώνυμο λέγεται **ὁμογενές** ὡς πρός τά γράμματα αὐτά. Οἱ πράξεις στά πολυώνυμα γίνονται ὡς ἑξῆς:

α) Γιά νά βροῦμε τό ἄθροισμα πολυωνύμων Α,Β,Γ,..., σχηματίζουμε ἕνα πολυώνυμο, πού ἔχει ὅρους ὅλους τούς ὅρους τῶν Α,Β,Γ,..... καί κάνουμε ἀναγωγή ὅμοιων ὅρων.
Δύο πολυώνυμα, πού ἔχουν ἄθροισμα μηδέν, λέγονται **ἀντίθετα.** Τό ἀντίθετο ἑνός πολυωνύμου Α σημειώνεται μέ –Α καί ἔχει ὅλους τούς ὅρους του ἀντίθετους τῶν ὅρων τοῦ Α, π.χ.

$$A = 3\chi^2\psi - 2\chi\psi + \psi^2 \Rightarrow -A = -(3\chi^2\psi - 2\chi\psi + \psi^2) = -3\chi^2\psi + 2\chi\psi - \psi^2$$

β) Γιά νά ἀφαιρέσουμε ἕνα πολυώνυμο Β ἀπό ἕνα πολυώνυμο Α, προσθέτουμε στό Α τό ἀντίθετο τοῦ Β, δηλαδή

$$A - B = A + (-B)$$

Μποροῦμε πιό γενικά νά ἔχουμε μιά σειρά ἀπό προσθέσεις καί ἀφαιρέσεις πολυωνύμων καί τότε λέμε ὅτι ἔχουμε **«ἀλγεβρικό» ἄθροισμα πολυωνύμων.** Γιά νά βροῦμε ἕνα τέτοιο ἀλγεβρικό ἄθροισμα, ἁπλῶς βγάζουμε τίς παρενθέσεις ἀκολουθώντας τούς δύο κανόνες:

- Ἄν μπροστά ἀπό μιά παρένθεση ὑπάρχει τό +, γράφουμε τούς ὅρους της ὅπως εἶναι.
- Ἄν μπροστά ἀπό μιά παρένθεση ὑπάρχει τό –, γράφουμε τούς ὅρους της μέ ἀλλαγμένα πρόσημα.

γ) Γιά νά βροῦμε τό γινόμενο δύο πολυωνύμων, πολλαπλασιάζουμε κάθε μονώνυμο τοῦ ἑνός μέ ὅλα τά μονώνυμα τοῦ ἄλλου καί προσθέτουμε τά «μερικά» γινόμενα πού βρίσκουμε.
Συνήθως στήν πρόσθεση τῶν μερικῶν γινομένων ἀκολουθοῦμε ὁρισμένη διάταξη γράφοντας τό ἕνα κάτω ἀπό τό ἄλλο κατά τέτοιο τρόπο, ὥστε οἱ ὅμοιοι ὅροι νά βρίσκονται στήν ἴδια στήλη.
Τό γινόμενο πολυωνύμων ἔχει βαθμό ἴσο μέ τό ἄθροισμα τῶν βαθμῶν τῶν παραγόντων του.

δ) Ἄν ἔχουμε ἕνα πολυώνυμο Α καί ἕνα μονώνυμο Β καί διαιρέσουμε κάθε ὅρο τοῦ Α μέ τό Β, βρίσκουμε ἕνα πολυώνυμο Γ τέτοιο, ὥστε $A = B \cdot \Gamma$. Τό Γ λέγεται **πηλίκο τοῦ πολυωνύμου Α διά τοῦ μονωνύμου Β** καί σημειώνεται $\frac{A}{B}$.

Ἂν ἔχουμε τώρα δύο πολυώνυμα Α καί Β καί ὑπάρχει πολυώνυμο Γ τέτοιο, ὥστε Α=Β·Γ, θά λέμε ὅτι «τό Α διαιρεῖται μέ τό Β».
Στήν περίπτωση αὐτή τό Γ λέγεται πάλι πηλίκο τῶν Α καί Β καί σημειώνεται $\frac{A}{B}$. Ἂς θεωρήσουμε δύο πολυώνυμα Α καί Β μιᾶς μεταβλητῆς χ, στά ὁποῖα ὁ βαθμός τοῦ Α εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τό βαθμό τοῦ Β. Ἂν τά διατάξουμε κατά τίς φθίνουσες δυνάμεις τοῦ χ καί κάνουμε τή διαίρεση Α:Β ἀκολουθώντας μιά «τακτική» ἀνάλογη μέ ἐκείνη τῶν ἀκέραιων ἀριθμῶν, βρίσκουμε πάντα δύο πολυώνυμα Π(χ) καί Υ(χ) τέτοια, ὥστε

$$\boxed{A(\chi) = B(\chi)\,.\,\Pi(\chi) + Y(\chi)}$$

Ἡ ἰσότητα αὐτή λέγεται **ταυτότητα τῆς διαιρέσεως** καί εἰδικότερα:

- Τό πολυώνυμο Π(χ) λέγεται **πηλίκο τοῦ Α διά τοῦ Β** καί ὁ βαθμός του εἶναι ἴσος μέ τή διαφορά τῶν βαθμῶν τῶν Α καί Β.
- Τό πολυώνυμο Υ(χ) λέγεται **ὑπόλοιπο** τῆς διαιρέσεως Α : Β καί ὁ βαθμός του εἶναι μικρότερος ἀπό τό βαθμό τοῦ Β(χ).

  Ὅταν εἶναι Υ(χ) = 0, τότε τό Α διαιρεῖται μέ τό Β καί ἔχουμε Α=Β.Π.

4. **Διαίρεση πολυωνύμου μέ χ—α**. Ὅταν διαιροῦμε ἕνα πολυώνυμο Α(χ) μέ τό πολυώνυμο Β(χ) = χ—α, ἡ ταυτότητα τῆς διαιρέσεως γράφεται

$$A(\chi) = (\chi-\alpha)\Pi(\chi) + Y,$$

ὅπου τό Υ εἶναι τώρα ἀριθμός. Ἡ ἰσότητα αὐτή γιά x=α δίνει Υ=Α(α), δηλαδή **τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως ἑνός πολυωνύμου Α(χ) μέ τό χ—α εἶναι ἴσο μέ τήν ἀριθμητική τιμή τοῦ πολυωνύμου γιά χ=α.**

Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι ἕνα πολυώνυμο Α(χ) διαιρεῖται μέ τό χ—α, ὅταν μηδενίζεται γιά χ=α.

5. **Ἀξιοσημείωτοι πολλαπλασιασμοί**. Μέ τόν ὅρο αὐτό ἐννοοῦμε τά ἐξαγόμενα ὁρισμένων πολλαπλασιασμῶν, τούς ὁποίους συναντᾶμε πολύ συχνά. Αὐτά εἶναι

$$\boxed{\begin{aligned}
&(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) = \alpha^2 - \beta^2\\
&(\alpha\pm\beta)^2 = \alpha^2\pm2\alpha\beta+\beta^2\\
&(\alpha+\beta+\gamma)^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma.\\
&(\alpha\pm\beta)^3 = \alpha^3\pm3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2\pm\beta^3\\
&(\alpha\pm\beta)(\alpha^2\mp\alpha\beta+\beta^2) = \alpha^3\pm\beta^3
\end{aligned}}$$

6. **Παραγοντοποίηση πολυωνύμου**. Πολλές φορές εἶναι χρήσιμο νά ἀναλύσουμε ἕνα πολυώνυμο σέ γινόμενο παραγόντων. Οἱ περιπτώσεις, στίς ὁποῖες μπορεῖ νά γίνει αὐτό, εἶναι:

- Όταν οἱ ὅροι τοῦ πολυωνύμου ἔχουν κοινό παράγοντα.
- Όταν σέ μιά κατάλληλη ὁμαδοποίηση τῶν ὅρων πολυωνύμου ἐμφανίζονται κοινοί παράγοντες σέ ὅλες τίς ὁμάδες.
- Όταν τό πολυώνυμο ἔχει μιά ἀπό τίς μορφές, πού ἔχουν ὁρισμένα ἐξαγόμενα ἀξιοσημείωτων πολλαπλασιασμῶν (διαφορά τετραγώνων, διαφορά κύβων, κ.λ.π.), π.χ.

$$\alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$$
$$\alpha^2\pm2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha\pm\beta)^2$$
$$(\alpha^3\pm\beta^3)=(\alpha\pm\beta)(\alpha^2\mp\alpha\beta+\beta^2)$$

Τονίζεται ὅτι **ἕνα ἄθροισμα τετραγώνων $\alpha^2+\beta^2$ δέν μπορεῖ νά γίνει γινόμενο.**

Εἰδικότερα μᾶς ἐνδιαφέρει ἡ παραγοντοποίηση ἑνός τριωνύμου $\chi^2+\beta\chi+\gamma$. Αὐτή γίνεται, ἄν γράψουμε τό τριώνυμο σάν διαφορά τετραγώνων, ἀφοῦ πρῶτα συμπληρώσουμε (προσθέτοντας καί ἀφαιρώντας ἕναν κατάλληλο ἀριθμό) τό διώνυμο $\chi^2+\beta\chi$, ὥστε νά γίνει τέλειο τετράγωνο. Π.χ.

$$\chi^2-4\chi+3=\underbrace{\chi^2-4\chi+4}-4+3=(\chi-2)^2-1=(\chi-1)(\chi-3)$$

Βέβαια μιά τέτοια ἀνάλυση δέν εἶναι πάντα δυνατή, γιατί μπορεῖ μέ τήν προσθαφαίρεση τοῦ κατάλληλου ἀριθμοῦ νά καταλήξουμε σέ ἄθροισμα τετραγώνων.

7. **Ρητές ἀλγεβρικές παραστάσεις**. Κάθε παράσταση τῆς μορφῆς $\frac{A}{B}$, ὅταν τά Α καί Β εἶναι ἀκέραια πολυώνυμα, λέγεται **ρητή ἀλγεβρική παράσταση** ἤ **ἀλγεβρικό κλάσμα.** Σέ μιά τέτοια παράσταση καθένα ἀπό τά γράμματα, πού βρίσκονται στόν παρονομαστή της, δέν μπορεῖ νά πάρει τιμές, πού μηδενίζουν τόν παρονομαστή.

Ἡ ἁπλοποίηση ἑνός ἀλγεβρικοῦ κλάσματος γίνεται σέ δύο βήματα:

- Ἀναλύουμε καί τούς δύο ὅρους του σέ γινόμενα παραγόντων.
- Διαγράφουμε τούς κοινούς παράγοντες τῶν ὅρων (ἄν ὑπάρχουν).

Οἱ πράξεις μεταξύ ἀλγεβρικῶν κλασμάτων γίνονται ὅπως καί στά ἀριθμητικά κλάσματα, δηλαδή:

- Γιά νά προσθέσουμε ἤ νά ἀφαιρέσουμε ἀλγεβρικά κλάσματα, τά τρέπουμε σέ ὁμώνυμα μέ κοινό παρονομαστή τό Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν τους (τό ὁποῖο βρίσκεται, ἄν ἀναλύσουμε ὅλους τούς παρονομαστές σέ γινόμενο παραγόντων) καί μετά προσθέτουμε ἤ ἀφαιροῦμε τούς ἀριθμητές.
- Γιά νά πολλαπλασιάσουμε ἀλγεβρικά κλάσματα, πολλαπλασιάζουμε τούς ἀριθμητές τους καί τούς παρονομαστές τους.

● Γιά νά διαιρέσουμε ἕνα ἀλγεβρικό κλάσμα $\frac{A}{B}$ μέ ἕνα ἄλλο $\frac{\Gamma}{\Delta}$, πολλαπλασιάζουμε τό $\frac{A}{B}$ μέ τό «ἀντίστροφο» $\frac{\Delta}{\Gamma}$. Ἔτσι καί ἕνα «σύνθετο» ἀλγεβρικό κλάσμα $\frac{A/B}{\Gamma/\Delta}$ τρέπεται σέ ἁπλό μέ τήν ἰσότητα

$$\frac{A/B}{\Gamma/\Delta} = \frac{A \cdot \Delta}{B \cdot \Gamma}$$

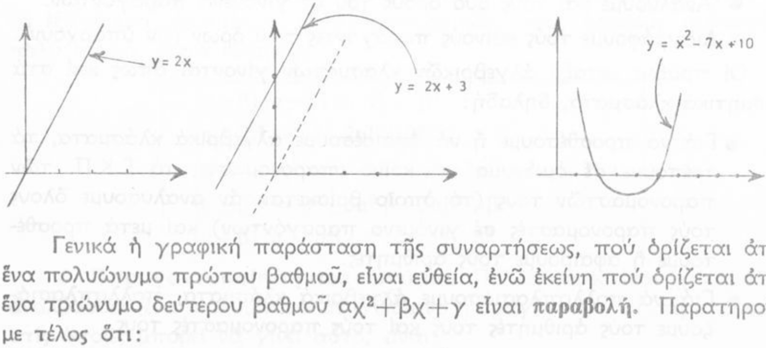
Πρίν ἀπό ὁποιαδήποτε πράξη μεταξύ ἀλγεβρικῶν κλασμάτων πρέπει νά ἁπλοποιοῦμε τά κλάσματα. Ἐπίσης πρέπει νά ἁπλοποιοῦμε καί τό ἀλγεβρικό κλάσμα, πού βρίσκεται ὡς ἐξαγόμενο μιᾶς πράξεως.

8. **Συναρτήσεις**. Κάθε ἀπεικόνιση $\varphi : A \to B$, στήν ὁποία τά A καί B εἶναι ἀριθμητικά σύνολα, λέγεται συνάρτηση μέ πεδίο ὁρισμοῦ A καί τιμές στό B. Συνήθως σέ μιά συνάρτηση φ παίρνουμε γιά σύνολο B τό σύνολο R καί ἔτσι ἡ συνάρτηση θά εἶναι ἐντελῶς ὁρισμένη, ὅταν ξέρουμε:

- τό πεδίο ὁρισμοῦ της A,
- τόν «τύπο» της $\psi = \varphi(\chi)$.

Ἄν πάρουμε ἕνα σύστημα ἀξόνων καί θεωρήσουμε ὅλα τά σημεῖα, πού ἔχουν συντεταγμένες $(\chi, \varphi(\chi))$, τό σύνολο τῶν σημείων αὐτῶν εἶναι ἡ **γραφική παράσταση** τῆς φ.

Κάθε ἀλγεβρική παράσταση, ἡ ὁποία περιέχει ἕνα μόνο γράμμα χ, ὁρίζει μιά συνάρτηση φ, ἄν ἀντιστοιχίζουμε σέ κάθε τιμή τοῦ χ τήν ἀριθμητική τιμή τῆς παραστάσεως. Στά παρακάτω σχήματα δίνονται οἱ τύποι καί οἱ γραφικές παραστάσεις τῶν συναρτήσεων, πού ὁρίζονται ἀντιστοίχως ἀπό τίς ἀλγεβρικές παραστάσεις 2χ, $2\chi+3$, $\chi^2-7\chi+10$.



Γενικά ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως, πού ὁρίζεται ἀπό ἕνα πολυώνυμο πρώτου βαθμοῦ, εἶναι εὐθεία, ἐνῶ ἐκείνη πού ὁρίζεται ἀπό ἕνα τριώνυμο δεύτερου βαθμοῦ $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ εἶναι **παραβολή**. Παρατηροῦμε τέλος ὅτι:

- Ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως $\psi = \alpha\chi$ εἶναι μιά εὐθεία, πού διέρχεται ἀπό τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων.
- Ἡ γραφική παράσταση τῆς $\psi = \alpha\chi + \beta$ εἶναι μιά εὐθεία παράλληλη πρός τήν «εὐθεία» $\psi = \alpha\chi$, πού τέμνει τόν ἄξονα $O\psi$ στό σημεῖο $(0,\beta)$.
- Οἱ «εὐθεῖες» $\psi = \alpha\chi + \beta_1$ καί $\psi = \alpha\chi + \beta_2$ (στίς ὁποῖες οἱ συντελεστές τοῦ χ εἶναι ἴσοι) εἶναι παράλληλες.

Ἐπειδή γιά μιά ὁρισμένη τιμή τοῦ α ἡ δύναμη α^{χ} ἔχει νόημα, ὅταν $\chi \in Z$, μποροῦμε νά ὁρίσουμε συνάρτηση $\varphi : Z \rightarrow R$ μέ τήν ἰσότητα $\varphi(\chi) = \alpha^{\chi}$. Ἡ γραφική παράσταση τῆς φ ἀποτελεῖται ἀπό ἄπειρα «μεμονωμένα» σημεῖα, πού ἔχουν τετμημένες $\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ Ἄν θεωρήσουμε τώρα μιά «συνεχή» γραμμή (γ) πού διέρχεται ἀπό τά σημεῖα αὐτά, ἡ (γ) μπορεῖ νά θεωρηθεῖ γραφική παράσταση μιᾶς συναρτήσεως, πού ἔχει πεδίο ὁρισμοῦ τό R καί τύπο

$$\varphi(\chi) = \alpha^{\chi}$$

Ἡ συνάρτηση αὐτή, ἡ ὁποία δίνει νόημα πραγματικοῦ ἀριθμοῦ στή δύναμη α^{χ} γιά ὁποιαδήποτε πραγματική τιμή τοῦ ἐκθέτη χ (π.χ. $2^{1,5} = 2,83$, $2^{2,5} = 5,66, \ldots$), λέγεται **ἐκθετική συνάρτηση**. Στήν ἐκθετική συνάρτηση $\varphi(\chi) = 10^{\chi}$ στηρίζεται ἡ ἀρχή λειτουργίας τοῦ λογαριθμικοῦ κανόνα.

Ἐξισώσεις–Ἀνισώσεις–Συστήματα.

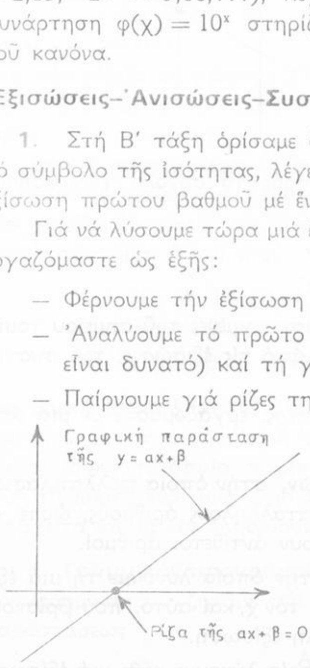
1. Στή Β′ τάξη ὁρίσαμε ὅτι κάθε προτασιακός τύπος, πού περιέχει τό σύμβολο τῆς ἰσότητας, λέγεται **«ἐξίσωση»** καί μάθαμε πῶς λύνεται μιά ἐξίσωση πρώτου βαθμοῦ μέ ἕναν ἄγνωστο.

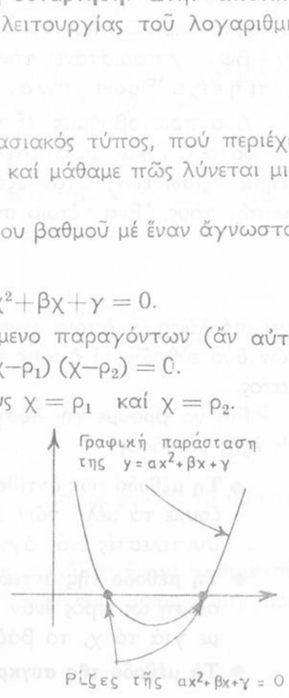
Γιά νά λύσουμε τώρα μιά ἐξίσωση δεύτερου βαθμοῦ μέ ἕναν ἄγνωστο, ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

— Φέρνουμε τήν ἐξίσωση στή μορφή $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0$.

— Ἀναλύουμε τό πρῶτο μέλος σέ γινόμενο παραγόντων (ἄν αὐτό εἶναι δυνατό) καί τή γράφουμε $\alpha(\chi - \rho_1)(\chi - \rho_2) = 0$.

— Παίρνουμε γιά ρίζες της τούς ἀριθμούς $\chi = \rho_1$ καί $\chi = \rho_2$.





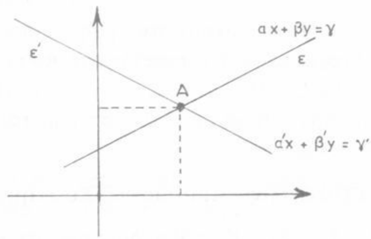
Εἶναι φανερό ὅτι ρίζες τῶν ἐξισώσεων $\alpha\chi+\beta=0$ καί $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ εἶναι ἀντιστοίχως οἱ τετμημένες τῶν σημείων, στά ὁποῖα οἱ γραφικές παραστάσεις τῶν συναρτήσεων μέ τύπους $\varphi(\chi)=\alpha\chi+\beta$ καί $\varphi(\chi)=\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ τέμνουν τόν ἄξονα $O\chi$.

Γενικά, γιά νά λύσουμε μιά ὁποιαδήποτε ἐξίσωση βαθμοῦ ἀνώτερου ἀπό τόν πρῶτο (ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπό μιά ἰσότητα, πού ἔχει τό δεύτερο μέλος της μηδέν) ἀναλύουμε τό πρῶτο μέλος της σέ γινόμενο παραγόντων καί τότε, ἄν ἡ ἐξίσωση παίρνει τή μορφή $A\cdot B\ldots\Theta=0$, οἱ ρίζες της θά εἶναι οἱ ρίζες ὅλων τῶν ἐξισώσεων $A=0,\ B=0,\ldots\Theta=0$.

2. **Ἐξίσωση μέ δύο ἀγνώστους. Συστήματα**. Μιά ἐξίσωση πρώτου βαθμοῦ μέ δύο ἀγνώστους ἔχει (ἤ παίρνει τελικά) τή μορφή

$$\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$$

καί λύση της εἶναι κάθε ζεῦγος τιμῶν (χ,ψ) πού τήν ἐπαληθεύει. Μιά τέτοια ἐξίσωση ἔχει γενικά ἄπειρες λύσεις καί (ἄν κάθε λύση τήν παραστήσουμε μέ ἕνα σημεῖο ἑνός ἐπιπέδου, πού ἔχει τίς ἴδιες συντεταγμένες) ὅλες αὐτές ἀποτελοῦν τά σημεῖα μιᾶς εὐθείας ε. Γι' αὐτό ἀκριβῶς λέμε ὅτι ἡ ἐξίσωση $\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$ παριστάνει τήν εὐθεία ε ἤ ὅτι ἡ ε ἔχει ἐξίσωση τήν $\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$.



Δύο πρωτοβάθμιες ἐξισώσεις μέ ἀγνώστους χ καί ψ ἀποτελοῦν **σύστημα ἐξισώσεων**, ὅταν ἐξετάζονται ὡς πρός τό σύνολο τῶν κοινῶν λύσεών τους. Ἕνα τέτοιο σύστημα

$$\begin{aligned}\alpha\chi+\beta\psi&=\gamma\\ \alpha'\chi+\beta'\psi&=\gamma'\end{aligned}$$

ἔχει μιά λύση, ἡ ὁποία δίνεται ἀπό τίς συντεταγμένες τοῦ σημείου τομῆς τῶν δύο εὐθειῶν, οἱ ὁποῖες παριστάνονται ἀπό τίς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος.

Γιά νά βροῦμε τή λύση ἑνός συστήματος, ἐργαζόμαστε μέ μιά ἀπό τίς ἑξῆς μεθόδους:

- **Τή μέθοδο τῶν ἀντίθετων συντελεστῶν,** στήν ὁποία πολλαπλασιάζουμε τά μέλη τῶν ἐξισώσεων μέ κατάλληλους ἀριθμούς, ὥστε οἱ συντελεστές ἑνός ἀγνώστου νά γίνουν ἀντίθετοι ἀριθμοί.
- **Τή μέθοδο τῆς ἀντικαταστάσεως,** στήν ὁποία λύνουμε τή μιά ἐξίσωση ὡς πρός ἕναν ἄγνωστο, π.χ. τόν χ, καί αὐτό, πού βρίσκουμε γιά τό χ, τό βάζουμε στήν ἄλλη ἐξίσωση.
- **Τή μέθοδο τῆς συγκρίσεως,** στήν ὁποία λύνουμε κάθε μιά ἐξίσωση

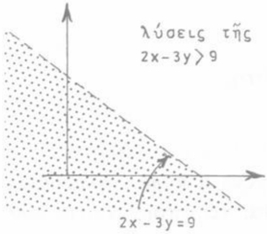
ὡς πρός τόν ἴδιο ἄγνωστο, π.χ. τόν χ, καί ἐξισώνουμε τά δεύτερα μέλη τους.

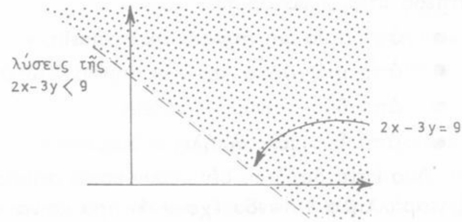
3. **Ἀνισώσεις μέ δύο ἀγνώστους. Συστήματα**. Στή Β' τάξη ὁρίσαμε ὅτι κάθε προτασιακός τύπος, πού περιέχει ἕνα σύμβολο ἀνισότητας, λέγεται **ἀνίσωση»** καί μάθαμε πῶς λύνεται ἡ ἀνίσωση πρώτου βαθμοῦ μέ ἕναν ἄγνωστο.

Μιά ἀνίσωση πρώτου βαθμοῦ μέ δύο ἀγνώστους ἔχει (ἤ παίρνει τελικά) μιά ἀπό τίς μορφές

$$\alpha\chi + \beta\psi > \gamma, \quad \alpha\chi+\beta\psi<\gamma$$

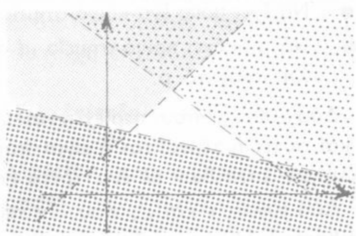
καί λύση της εἶναι κάθε ζεῦγος τιμῶν (χ,ψ), πού τήν ἐπαληθεύει. Μιά τέτοια ἀνίσωση ἔχει γενικά ἄπειρες λύσεις καί αὐτές ἀποτελοῦν τό ἕνα ἀπό τά δύο ἡμιεπίπεδα, στά ὁποῖα χωρίζεται τό ἐπίπεδο τῶν συντεταγμένων





ἀπό τήν εὐθεία $\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$. (Τό ἡμιεπίπεδο τῶν λύσεων τό ἐντοπίζουμε παρατηρώντας ἄν τό σημεῖο (0,0) ἤ ἕνα ὁποιοδήποτε ἄλλο σημεῖο ἐπαληθεύει τήν ἀνίσωση).

Δύο ἤ περισσότερες ἀνισώσεις πρώτου βαθμοῦ μέ δύο ἀγνώστους ἀποτελοῦν ἕνα **σύστημα ἀνισώσεων**, ὅταν ἐξετάζονται ὡς πρός τό σύνολο τῶν κοινῶν λύσεών τους. Ἕνα τέτοιο σύστημα, ὅπως π.χ.



$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &: \ \alpha\chi + \beta\psi > \gamma \\ \varepsilon_2 &: \ \alpha'\chi + \beta'\psi > \gamma' \\ \varepsilon_3 &: \ \alpha''\chi + \beta''\psi > \gamma'' \end{aligned}$$

ἔχει γενικά ἄπειρες κοινές λύσεις, πού δίνονται ἀπό τήν τομή τῶν ἡμιεπιπέδων, τά ὁποῖα παριστάνουν τίς λύσεις κάθε μιᾶς ἀνισώσεως. (Στό σχῆμα διαγράφονται τά ἡμιεπίπεδα, στά ὁποῖα δέν ἀληθεύουν οἱ ἀνισότητες).

4. **Γραμμικός προγραμματισμός**. Στά προβλήματα τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ ζητᾶμε τήν πιό μεγάλη ἤ τήν πιό μικρή τιμή μιᾶς παραστάσεως

$$A = \alpha\chi + \beta\psi,$$

ὅταν οἱ μεταβλητές χ καί ψ εἶναι θετικές καί ἔχουν ὁρισμένους περιορισμούς, οἱ ὁποῖοι μποροῦν νά ἐκφρασθοῦν μέ ἀνισώσεις πρώτου βαθμοῦ ὡς πρός χ καί ψ.

Ἄν ὀνομάσουμε Λ τό σύνολο λύσεων τῶν ἀνισώσεων τῶν περιορισμῶν, τό Λ περικλείεται ἀπό μιά πολυγωνική γραμμή καί ἡ λύση τοῦ προβλήματος (δηλαδή τό ζεῦγος τιμῶν, πού δίνει τήν πιό μεγάλη ἤ τήν πιό μικρή τιμή στήν παράσταση Α) δίνεται ἀπό τίς συντεταγμένες μιᾶς κορυφῆς της. Ἔτσι βλέπουμε ἀμέσως ποιά εἶναι ἡ λύση, ἄν βροῦμε τίς τιμές τῆς παραστάσεως Α σέ ὅλες τίς κορυφές τῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς.

Ἐπίπεδα καί εὐθεῖες στό χῶρο·

1. Ὅταν λέμε **ἐπίπεδο,** ἐννοοῦμε μιά ἐπιφάνεια πάνω στήν ὁποία μιά εὐθεία ἐφαρμόζει ἐντελῶς μέ ὁποιοδήποτε τρόπο καί ἄν τοποθετηθεῖ. Ἕνα ἐπίπεδο μπορεῖ νά ὁρισθεῖ:

- ἀπό τρία μή συνευθειακά σημεῖα,
- ἀπό μιά εὐθεία καί ἕνα σημεῖο ἔξω ἀπ' αὐτή,
- ἀπό δύο τεμνόμενες εὐθεῖες,
- ἀπό δύο παράλληλες εὐθεῖες.

Δύο ἐπίπεδα, πού δέν ἔχουν κοινό σημεῖο, λέγονται **παράλληλα.** Δύο μή παράλληλα ἐπίπεδα ἔχουν ἄπειρα κοινά σημεῖα, τά ὁποῖα ἀποτελοῦν μιά εὐθεία, πού λέγεται **τομή** τῶν ἐπιπέδων.

2. **Θέσεις εὐθείας ὡς πρός ἐπίπεδο**. Τρεῖς εἶναι οἱ δυνατές θέσεις μιᾶς εὐθείας ε μέ ἕνα ἐπίπεδο p:

- Νά περιέχεται στό ἐπίπεδο p καί τότε χωρίζει τό p σέ δύο ἡμιεπίπεδα.
- Νά ἔχει μόνο ἕνα κοινό σημεῖο μέ τό ἐπίπεδο p, ὁπότε «*τέμνει*» τό p.
- Νά μήν ἔχει κοινό σημεῖο μέ τό ἐπίπεδο p καί τότε εἶναι **παράλληλη** πρός τό p.

Δύο εὐθεῖες, πού περιέχονται στό ἴδιο ἐπίπεδο, λέγονται *συνεπίπεδες* καί αὐτές ἤ τέμνονται ἤ εἶναι παράλληλες. Ἔτσι π.χ. οἱ τομές δύο παράλληλων ἐπιπέδων μέ ἕνα τρίτο ἐπίπεδο εἶναι παράλληλες εὐθεῖες.

Δύο εὐθεῖες ε καί ε', πού δέν περιέχονται στό ἴδιο ἐπίπεδο, λέγονται **ἀσύμβατες** (καί τέτοιες εἶναι π.χ. μιά εὐθεία ε ἑνός ἐπιπέδου p καί μιά ἄλλη εὐθεία ε', πού τέμνει τό p σέ σημεῖο ἔξω ἀπό τήν ε). Ἄν ἀπό ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο μιᾶς εὐθείας ε φέρουμε παράλληλη πρός μιά ἀσύμβατή της ε', σχηματίζεται μιά ὀξεία γωνία, πού λέγεται **γωνία τῶν ἀσύμβατων εὐθειῶν**. Ὅταν ἡ γωνία δύο ἀσύμβατων εὐθειῶν εἶναι ὀρθή, οἱ ἀσύμβατες λέγονται ὀρθογώνιες.

3. Ἄν μιά εὐθεία ε τέμνει ἕνα ἐπίπεδο p σ' ἕνα σημεῖο του Κ καί εἶναι

κάθετη σέ δύο εὐθεῖες τοῦ ἐπιπέδου p, πού διέρχονται ἀπό τό K (ἤ ὀρθογώνια πρός δύο ὁποιεσδήποτε εὐθεῖες τοῦ p), τότε λέγεται **κάθετη πρός τό ἐπίπεδο.** Μιά τέτοια εὐθεία εἶναι κάθετη πρός κάθε εὐθεία τοῦ ἐπιπέδου p, πού διέρχεται ἀπό τό K (καί ὀρθογώνια πρός κάθε εὐθεία τοῦ p).

Δύο εὐθεῖες κάθετες στό ἴδιο ἐπίπεδο p εἶναι παράλληλες. Ἀπό ἕνα σημεῖο A ἔξω ἀπό τό ἐπίπεδο p μποροῦμε νά φέρουμε μόνο μιά εὐθεία κάθετη στό p. Ἄν αὐτή τέμνει τό p στό σημεῖο K, τότε:

- Τό ἴχνος της K λέγεται **προβολή τοῦ A στό ἐπίπεδο p.**
- Τό εὐθύγραμμο τμῆμα AK εἶναι μικρότερο ἀπό κάθε ἄλλο τμῆμα AE, πού τό ἄλλο ἄκρο του E εἶναι σημεῖο τοῦ p, καί λέγεται **ἀπόσταση τοῦ A ἀπό τό ἐπίπεδο p.**

Ἄν μιά εὐθεία ε τέμνει ἕνα ἐπίπεδο p καί δέν εἶναι κάθετη πρός τό p, ἡ προβολή τῆς ε στό p (δηλαδή τό σύνολο τῶν προβολῶν ὅλων τῶν σημείων τῆς ε) εἶναι μιά εὐθεία ε′ τοῦ ἐπιπέδου καί ἡ ὀξεία γωνία τῶν δύο εὐθειῶν ε καί ε′ λέγεται **γωνία κλίσεως τῆς ε ὡς πρός τό p.** Ἡ γωνία κλίσεως εἶναι μικρότερη ἀπό κάθε γωνία, πού σχηματίζει ἡ ε μέ ὁποιαδήποτε ἄλλη εὐθεία τοῦ ἐπιπέδου p.

4. **Δίεδρη γωνία. Κάθετα ἐπίπεδα.** Τό σχῆμα, πού σχηματίζουν δύο ἡμιεπίπεδα p_1 καί p_2, τά ὁποῖα ἔχουν ἀκμή τήν ἴδια εὐθεία ε (καί δέν ἀνήκουν στό ἴδιο ἐπίπεδο), λέγεται **δίεδρη γωνία** μέ **ἀκμή ε** καί **ἕδρες** p_1 καί p_2. Ἄν φέρουμε τίς ἡμιευθεῖες Ox_1 καί Ox_2 τῶν δύο ἡμιεπιπέδων p_1 καί p_2, οἱ ὁποῖες εἶναι κάθετες στήν ἀκμή ε στό ἴδιο σημεῖο της O, ἡ γωνία $\widehat{x_1Ox_2}$ λέγεται **ἀντίστοιχη ἐπίπεδη τῆς διέδρης** καί «*ἀντιπροσωπεύει*» γενικά τή δίεδρη γωνία.

Δύο ἐπίπεδα, πού τέμνονται κατά μιά εὐθεία ε, σχηματίζουν τέσσερις δίεδρες γωνίες μέ ἀκμή ε. Ἄν οἱ δίεδρες αὐτές γωνίες εἶναι ἴσες, τότε τά ἐπίπεδα λέγονται **κάθετα** καί κάθε μιά ἀπό τίς δίεδρες λέγεται **ὀρθή**. Ἡ ὀρθή δίεδρη γωνία ἔχει καί ὀρθή ἀντίστοιχη ἐπίπεδη καί ἀντιστρόφως. Ἰσχύει ἡ πρόταση:

Ἄν μιά εὐθεία ε εἶναι κάθετη σ' ἕνα ἐπίπεδο p, κάθε ἐπίπεδο q, πού διέρχεται ἀπό τήν ε, εἶναι κάθετο στό p.

Τρεῖς εὐθεῖες, πού διέρχονται ἀπό τό ἴδιο σημεῖο O καί εἶναι κάθετες ἀνά δύο, ὁρίζουν τρία ἐπίπεδα, τά ὁποῖα εἶναι ἐπίσης κάθετα ἀνά δύο. Μέ τή βοήθεια τριῶν τέτοιων ἐπιπέδων μποροῦμε νά κάνουμε ἀπεικόνιση «ἕνα μέ ἕνα» τῶν σημείων τοῦ χώρου μέ τίς διατεταγμένες τριάδες τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, δηλαδή μποροῦμε νά ὁρίσουμε **«συντεταγμένες στό χῶρο».**

Τά στερεά στό χῶρο.

1. **Κυλινδρικές ἐπιφάνειες.** Μιά εὐθεία ε, πού κινεῖται στό χῶρο παράλληλα πρός τόν ἑαυτό της καί συναντᾶ πάντα μιά ἐπίπεδη γραμμή γ,

παράγει μιά ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία λέγεται **κυλινδρική ἐπιφάνεια** μέ «*γενέτειρα*» τήν εὐθεία ε καί «*ὁδηγό*» τή γραμμή γ.

Ἄν κόψουμε μιά κυλινδρική ἐπιφάνεια, πού ἔχει ὁδηγό «κλειστή» γραμμή γ, μέ δύο παράλληλα ἐπίπεδα, σχηματίζεται ἕνα στερεό. Ἕνα τέτοιο στερεό λέγεται:

— **πρίσμα,** ὅταν ἡ ὁδηγός γ εἶναι περίμετρος ἑνός πολυγώνου,

— **κύλινδρος,** ὅταν ἡ ὁδηγός γ εἶναι κύκλος.

Τά σημεῖα τοῦ στερεοῦ, πού ἀνήκουν στά δύο παράλληλα ἐπίπεδα, ἀποτελοῦν τίς **βάσεις** του καί τά σημεῖα του, πού ἀνήκουν στήν κυλινδρική ἐπιφάνεια, ἀποτελοῦν τήν **παράπλευρη ἐπιφάνειά** του, ἐνῶ οἱ βάσεις μαζί μέ τήν παράπλευρη ἐπιφάνεια ἀποτελοῦν τήν **ὁλική ἐπιφάνεια** τοῦ στερεοῦ. Ἡ ἀπόσταση τῶν δύο βάσεων λέγεται **ὕψος** τοῦ στερεοῦ.

Στήν περίπτωση, πού τό ἐπίπεδο τῆς βάσεως εἶναι κάθετο στή γενέτειρα, τό στερεό λέγεται **ὀρθό.** Τό ἐμβαδό E_π τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας καί ὁ ὄγκος V ἑνός τέτοιου «ὀρθοῦ» στερεοῦ (ὀρθοῦ πρίσματος ἤ ὀρθοῦ κυλίνδρου) δίνονται ἀπό τούς γενικούς τύπους:

$$\boxed{\begin{array}{l} E_\pi = (\text{περίμετρος βάσεως}) \times \text{ὕψος} \\ V = (\text{ἐμβαδό βάσεως}) \times \text{ὕψος} \end{array}}$$

2. **Κωνικές ἐπιφάνειες.** Μιά εὐθεία ε, πού κινεῖται στό χῶρο κατά τέτοιο τρόπο, ὥστε νά διέρχεται ἀπό ἕνα σταθερό σημεῖο Ο καί νά συναντᾶ πάντα μιά ἐπίπεδη γραμμή γ, παράγει μιά ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία λέγεται **κωνική ἐπιφάνεια** μέ «*κορυφή*» Ο καί «*γενέτειρα*» ε.

Ἄν κόψουμε μιά κωνική ἐπιφάνεια, πού ἔχει ὁδηγό «κλειστή» γραμμή γ, μέ ἕνα ἐπίπεδο p, σχηματίζεται ἕνα στερεό. Ἕνα τέτοιο στερεό λέγεται

— **πυραμίδα,** ὅταν ἡ ὁδηγός γ εἶναι περίμετρος ἑνός πολυγώνου,

— **κῶνος,** ὅταν ἡ ὁδηγός γ εἶναι κύκλος καί ἡ κορυφή Ο προβάλλεται στό κέντρο τοῦ κύκλου).

Τά σημεῖα τοῦ στερεοῦ, πού ἀνήκουν στό ἐπίπεδο p, ἀποτελοῦν τή **βάση** του καί τά σημεῖα του, πού ἀνήκουν στήν κωνική ἐπιφάνεια, ἀποτελοῦν τήν **παράπλευρη ἐπιφάνειά** του, ἐνῶ ἡ βάση μαζί μέ τήν παράπλευρη ἐπιφάνεια ἀποτελοῦν τήν **ὁλική ἐπιφάνεια** τοῦ στερεοῦ. Ἡ ἀπόσταση τῆς κορυφῆς Ο ἀπό τή βάση λένεται **ὕψος** τοῦ στερεοῦ. Εἰδικά στόν κῶνο τό εὐθύγραμμο τμῆμα, πού συνδέει τήν κορυφή μέ ὁποιοδήποτε σημεῖο τοῦ κύκλου τῆς βάσεως, λέγεται **πλευρά** τοῦ κώνου.

Στήν περίπτωση, πού ἡ βάση εἶναι κανονικό πολύγωνο καί ἡ κορυφή προβάλλεται στό κέντρο τῆς βάσεως, ἡ πυραμίδα λέγεται **κανονική.** Ἡ παράπλευρη ἐπιφάνεια μιᾶς κανονικῆς πυραμίδας ἀποτελεῖται ἀπό ἴσα ἰσοσκελή τρίγωνα, πού ἔχουν κοινή κορυφή τό Ο καί εἶναι οἱ «παράπλευρες ἕδρες» τῆς πυραμίδας. Γιά τήν κανονική πυραμίδα καί τόν κῶνο ἰσχύουν οἱ γενικοί τύποι:

$$E_\pi = \frac{1}{2}\ (\text{περίμετρος βάσεως}) \times \begin{pmatrix} \text{(ὕψος παράπλευρης ἕδρας)} \\ \text{ἤ πλευρά} \end{pmatrix}$$

$$V = \frac{1}{3}\ (\text{ἐμβαδό βάσεως}) \times \text{ὕψος}$$

3. **Στερεά ἐκ περιστροφῆς**. Ὅταν ἕνα ἐπίπεδο p στρέφεται γύρω ἀπό μιά εὐθεία του ε κατά γωνία 360°, κάθε στερεό πού παράγεται ἀπό τήν περιστροφή ἑνός σχήματος τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ λέγεται γενικά **στερεό ἐκ περιστροφῆς**. Εἶναι τώρα φανερό ὅτι:

- **Ὅταν ἕνα ὀρθογώνιο ΑΒΓΔ στρέφεται γύρω ἀπό τήν πλευρά του ΑΒ, παράγεται ἕνας κύλινδρος, πού ἔχει ὕψος τήν ΑΒ καί ἀκτίνα βάσεως τή ΒΓ.**
- **Ὅταν ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 90°$) στρέφεται γύρω ἀπό τήν κάθετη πλευρά του ΑΒ, παράγεται ἕνας κῶνος, πού ἔχει ὕψος ΑΒ καί ἀκτίνα βάσεως τήν ΑΓ.**

Τό στερεό ἐκ περιστροφῆς, πού παράγεται ἀπό τήν περιστροφή ἑνός ἡμικυκλικοῦ δίσκου διαμέτρου ΑΒ=2ρ, γύρω ἀπό τή διάμετρό του, εἶναι μιά **σφαίρα ἀκτίνας ρ.** Ἡ ἐπιφάνεια καί ὁ ὄγκος μιᾶς σφαίρας ἀκτίνας ρ δίνονται ἀπό τούς τύπους

$$E = 4\pi\rho^2, \qquad V = \frac{4}{3}\pi\rho^3,$$

Στόν παρακάτω πίνακα δίνονται συγκεντρωμένα τά ἐμβαδά τῶν ἐπιφανειῶν καί οἱ ὄγκοι ὁρισμένων βασικῶν στερεῶν

Στερεό	Παράπλευρη ἐπιφάνεια E_π	Ὁλική ἐπιφάνεια $E_{ολ}$	Ὄγκος
Κύβος (ἀκμή α)	$4\alpha^2$	$6\alpha^2$	α^3
Ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο (ἀκμές α,β,γ)	(περίμ.βάσ.)×(ὕψος)	$2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$	$\alpha\beta\gamma$
Ὀρθό πρίσμα	»	$E_\pi + 2$(βάσεις)	(βάση)×(ὕψος)
Κύλινδρος (ἀκτίνας ρ, ὕψους υ)	$2\pi\rho\upsilon$	$2\pi\rho\upsilon+2\pi\rho^2$	$\pi\rho^2\cdot\upsilon$

Πυραμίδα κανονική (h=ὕψος παραπλ. ἕδρας)	$\frac{1}{2}$ (περιμ.βάσ.)$\cdot h$	E_π+(βάση)	$\frac{1}{3}$(βάση × ὕψος)
Κῶνος (λ=πλευρά)	πρλ	πρλ+πρ^2	$\frac{1}{3}$ πρ$^2\cdot$υ
Σφαίρα		4πρ^2	$\frac{4}{3}$ πρ^3

Μετασχηματισμοί στό χῶρο.

Κάθε ἀπεικόνιση φ: Ε → Ε ἑνός συνόλου Ε στόν ἑαυτό του λέγεται **μετασχηματισμός τοῦ Ε** καί, ὅταν τό Ε εἶναι σημειοσύνολο, λέγεται γενικά **γεωμετρικός μετασχηματισμός.**

Εἰδικότερα μέ τόν ὅρο **«σημειακός μετασχηματισμός»** ἐννοοῦμε κάθε γεωμετρικό μετασχηματισμό τοῦ χώρου, δηλαδή κάθε ἀπεικόνιση, πού ἀντιστοιχίζει σέ κάθε σημεῖο τοῦ χώρου ἕνα ἄλλο σημεῖο του. Ἄν θεωρήσουμε ἕναν ὁποιοδήποτε σημειακό μετασχηματισμό, κάθε σχῆμα σ ἔχει μιά «εἰκόνα» σ', ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπό ὅλα τά ἀντίστοιχα τῶν σημείων τοῦ σ. Τέτοιοι βασικοί σημειακοί μετασχηματισμοί εἶναι:

1. **Οἱ συμμετρίες.** Ἕνας γεωμετρικός μετασχηματισμός, ὁ ὁποῖος ἀντιστοιχίζει σέ κάθε σημεῖο Α τοῦ χώρου ἕνα σημεῖο Α', θά λέγεται:

- **Συμμετρία ὡς πρός ἐπίπεδο p,** ὅταν ἕνα ὁρισμένο ἐπίπεδο p εἶναι πάντοτε **μεσοκάθετο τοῦ τμήματος ΑΑ'**. (Τό p λέγεται *«ἐπίπεδο συμμετρίας»*).
- **Συμμετρία ὡς πρός ἄξονα ε,** ὅταν μιά ὁρισμένη εὐθεία ε εἶναι πάντοτε **μεσοκάθετη τοῦ τμήματος** ΑΑ'. (Ἡ ε λέγεται *«ἄξονας συμμετρίας»*).
- **Συμμετρία ὡς πρός κέντρο Ο,** ὅταν ἕνα ὁρισμένο σημεῖο Ο εἶναι πάντοτε **μέσο τοῦ τμήματος ΑΑ'.** (Τό Ο λέγεται *«κέντρο συμμετρίας»*).

Σέ μιά ὁποιαδήποτε συμμετρία ὅλα τά σημεῖα, πού ἀνήκουν στό στοιχεῖο συμμετρίας (ἐπίπεδο, ἄξονα, κέντρο), ἀντιστοιχίζονται στόν ἑαυτό τους.

Ἡ εἰκόνα σ' ἑνός σχήματος σ λέγεται συμμετρικό τοῦ σ (ὡς πρός τό ἐπίπεδο, τόν ἄξονα ἤ τό κέντρο) καί ἰσχύουν γενικά οἱ προτάσεις:

I. Τό συμμετρικό ἑνός τμήματος σ εἶναι τμῆμα ἴσο πρός τό σ.

II. Τό συμμετρικό ἐπιπέδου εἶναι ἐπίπεδο.

III. Τό συμμετρικό εὐθείας εἶναι εὐθεία.

Ἔτσι, γιά νά βρίσκουμε τό συμμετρικό ἑνός ἐπιπέδου (ἤ μιᾶς εὐθείας), ἀρκεῖ νά βρίσκουμε τά συμμετρικά τριῶν μή συνευθειακῶν σημείων του (ἤ δύο σημείων της). Εἰδικότερα τό συμμετρικό ὡς πρός κέντρο ἑνός ἐπιπέδου (ἤ μιᾶς εὐθείας) εἶναι παράλληλο ἐπίπεδο (ἤ παράλληλη εὐθεία)·

Ἄν τό συμμετρικό ἑνός σχήματος σ ὡς πρός ἐπίπεδο p (ἤ ἄξονα ε ἤ κέντρο O) εἶναι τό ἴδιο τό σ, τότε λέμε ὅτι τό σ ἔχει *ἐπίπεδο συμμετρίας* τό p (ἤ *ἄξονας συμμετρίας* τήν ε, ἤ *κέντρο συμμετρίας* τό O).

2. **Ἡ μεταφορά κατά διάνυσμα $\vec{\alpha}$.** Εἶναι ἕνας σημειακός μετασχηματισμός, πού ὁρίζεται μέ τή βοήθεια ἑνός διανύσματος $\vec{\alpha}$ καί ἀντιστοιχίζει σέ κάθε σημεῖο A ἕνα σημεῖο A′ τέτοιο, ὥστε $\overrightarrow{AA'} = \vec{\alpha}$. Σέ μιά ὁποιαδήποτε μεταφορά ἰσχύουν οἱ προτάσεις:

- Ἡ εἰκόνα ἑνός σχήματος σ εἶναι σχῆμα ἴσο πρός τό σ.
- Ἡ εἰκόνα μιᾶς εὐθείας ε εἶναι εὐθεία παράλληλη.
- Ἡ εἰκόνα ἑνός ἐπιπέδου εἶναι ἐπίπεδο παράλληλο.

Ὅταν ἕνα σχῆμα σ′ εἶναι εἰκόνα τοῦ σ, λέμε ὅτι «*τό σ μεταφέρθηκε στὸ σ′*».

3. **Ἡ ὁμοιοθεσία μέ κέντρο K καί λόγο λ.** Εἶναι ἕνας γεωμετρικός μετασχηματισμός, πού ὁρίζεται μέ τή βοήθεια ἑνός σημείου K καί ἑνός θετικοῦ ἀριθμοῦ λ ($\lambda \neq 1$), ὁ ὁποῖος ἀντιστοιχίζει σέ κάθε σημεῖο A ἕνα σημεῖο A′ τῆς ἡμιευθείας KA (ἤ τῆς ἀντικειμένης της) τέτοιο, ὥστε

$$\boxed{KA' = \lambda\, KA}$$

Ἡ εἰκόνα σ′ ἑνός σχήματος σ λέγεται **ὁμοιόθετο τοῦ σ** καί ἰσχύουν οἱ προτάσεις:

- Τό ὁμοιόθετο εὐθύγραμμου τμήματος AB εἶναι τμῆμα A′B′ παράλληλο πρός τό AB καί τέτοιο, ὥστε $A'B' = \lambda\, AB$.
- Τό ὁμοιόθετο εὐθείας εἶναι εὐθεία παράλληλη.
- Τό ὁμοιόθετο ἐπιπέδου εἶναι ἐπίπεδο παράλληλο.

Γενικά λοιπόν στήν ὁμοιοθεσία διατηροῦνται οἱ γωνίες, ὄχι ὅμως καί τά μήκη. Ἔτσι τό ὁμοιόθετο ἑνός σχήματος σ δέν εἶναι πάντοτε ἴσο πρός τό σ.

Ὅμοια στερεά.

4. Δύο στερεά λέγονται **ὅμοια,** ὅταν εἶναι ἤ μπορεῖ νά γίνουν ὁμοιόθετα. Ὁ λόγος τῆς ὁμοιοθεσίας λ λέγεται τώρα **λόγος ὁμοιότητας** τῶν δύο στερεῶν.

Γιά δύο ὅμοια στερεά ἔχουμε τίς προτάσεις:

- Οἱ ἀντίστοιχες ἐπιφάνειές τους ἔχουν ἐμβαδά, πού ὁ λόγος τους εἶναι ἴσος μέ τό τετράγωνο τοῦ λόγου τῆς ὁμοιότητας.

Οἱ ὄγκοι τους ἔχουν λόγο ἴσο μέ τόν κύβο τοῦ λόγου τῆς ὁμοιότητάς τους.

Ἔτσι, ἄν ὀνομάσουμε Ε,Ε′ τά ἐμβαδά τῶν ἀντίστοιχων ἐπιφανειῶν τους (παράπλευρων, ὁλικῶν, κ.λ.π.) καί V,V′ τούς ὄγκους τους, ἔχουμε

$$\boxed{\frac{E}{E'} = \lambda^2, \quad \frac{V}{V'} = \lambda^3}$$

Στατιστική καί πιθανότητες.

1. **Στατιστική**. Ὁ τρόπος, μέ τόν ὁποῖο παρουσιάζουμε τά στατιστικά δεδομένα (παρατηρήσεις) μετά ἀπό τή συγκέντρωση καί τή διαλογή τους, ἐξαρτᾶται ἀπό τή φύση τους, τίς τιμές τους καί τό πλῆθος τους. Συνήθως παρουσιάζουμε τίς παρατηρήσεις μας μέ:

- **Πίνακες συχνοτήτων ἤ πίνακες σχετικῶν συχνοτήτων.**
- **Πολύγωνο συχνοτήτων.**
- **Ἱστόγραμμα** (ἔχουμε συνεχή μεταβλητή μέ πολλές τιμές καί ἔγινε ὁμαδοποίηση τῶν παρατηρήσεων).
- **Ραβδόγραμμα** (σέ ποιοτική μεταβλητή ἤ στή χρονολογική ἐξέλιξη κάποιου φαινομένου).
- **Κυκλικό ἤ ἡμικυκλικό διάγραμμα** (κυρίως σέ ποιοτικές μεταβλητές).

Ἄν οἱ παρατηρήσεις μας ἀναφέρονται σέ ὁλόκληρο τόν πληθυσμό, ἔχουμε **ἀπογραφή,** ἐνῶ, ἄν ἀναφέρονται σέ ἕνα μέρος τοῦ πληθυσμοῦ (δεῖγμα), ἔχουμε **δειγματοληψία.**

Ὅταν οἱ παρατηρήσεις μας εἶναι τιμές μιᾶς μεταβλητῆς, ἡ κατανομή τῶν συχνοτήτων της περιγράφεται σύντομα μέ μερικούς ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι λέγονται *«χαρακτηριστικά θέσεως»* καί *«χαρακτηριστικά διασπορᾶς»*.

α) Χαρακτηριστικά θέσεως εἶναι:

- **Ἡ μέση τιμή** $\overline{\chi}$ πού δίνεται ἀπό τόν τύπο

$$\boxed{\overline{\chi} = \frac{\chi_1\nu_1 + \chi_2\nu_2 + \ldots + \chi_\kappa\nu_\kappa}{\nu} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\kappa} \nu_i\chi_i}$$

  ὅπου $\chi_1, \chi_2, \ldots \chi_\kappa$ εἶναι οἱ διαφορετικές μεταξύ τους παρατηρήσεις, $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\kappa$ οἱ ἀντίστοιχες συχνότητές τους καί ν τό πλῆθος ὅλων τῶν παρατηρήσεων.

- Ὁ **διάμεσος** τῶν παρατηρήσεων, πού εἶναι ἡ «μεσαία» παρατήρηση (ἤ τό ἡμιάθροισμα τῶν δύο «μεσαίων» παρατηρήσεων), ἄν τίς διατάξουμε κατά αὔξουσα τάξη.

β) **Χαρακτηριστικό διασπορᾶς** εἶναι ἡ τυπική ἀπόκλιση s, πού δίνεται ἀπό τόν τύπο

$$s = \sqrt{\frac{\nu_1 . (x_1 - \overline{x})^2 + \nu_2 . (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + \nu_\kappa . (x_\kappa - \overline{x})^2}{\nu}} = \sqrt{\frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\kappa} \nu_i \, (x_i - \overline{x})^2}$$

2. **Πιθανότητες**. Τά δυνατά ἀποτελέσματα ἑνός πειράματος τύχης ἀποτελοῦν τό **δειγματικό χῶρο Ω** καί τά ὑποσύνολα τοῦ Ω λέγονται **ἐνδεχόμενα** τοῦ πειράματος τύχης. Στά πειράματα τύχης, πού ἐξετάζουμε, τά «βασικά ἐνδεχόμενα» (στοιχεῖα τοῦ Ω) θεωροῦνται **ἰσοπίθανα**. Ὀνομάζουμε **πιθανότητα** ἑνός ἐνδεχομένου Α τόν ἀριθμό Ρ(Α), πού ὁρίζεται ἀπό τήν ἰσότητα

$$P(A) = \frac{\text{πλῆθος εὐνοϊκῶν περιπτώσεων}}{\text{πλῆθος δυνατῶν περιπτώσεων}}$$

Εἶναι φανερό ὅτι:

- Γιά κάθε ἐνδεχόμενο Α ἔχουμε $\mathbf{0 \leq P(A) \leq 1}$.
- Γιά τό *βέβαιο ἐνδεχόμενο* Ω ἔχουμε $\mathbf{P(\Omega) = 1}$.
- Γιά τό *ἀδύνατο ἐνδεχόμενο* $\varnothing$ ἔχουμε $\mathbf{P(\phi) = 0}$.

Δύο ἐνδεχόμενα (ὑποσύνολα τοῦ Ω) λέγονται **ἀντίθετα,** ὅταν τό ἕνα εἶναι συμπλήρωμα τοῦ ἄλλου. Τό ἀντίθετο ἐνδεχόμενο τοῦ Α σημειώνεται Α′ καί ἔχουμε

$$\mathbf{P(A') = 1 - P(A)}.$$

Ἄν ἔχουμε δύο ὁποιαδήποτε ἐνδεχόμενα Α καί Β, ὁρίζουμε ὅτι:

- **Γινόμενο** ἤ **τομή** τῶν Α καί Β λέγεται τό ἐνδεχόμενο πού πραγματοποιεῖται, μόνο ὅταν πραγματοποιηθοῦν συγχρόνως καί τά δύο ἐνδεχόμενα Α καί Β. Αὐτό σημειώνεται $A \cdot B$ ἤ $A \cap B$.
  Ὁ ὁρισμός αὐτός ἐπεκτείνεται καί γιά περισσότερα ἐνδεχόμενα.
- **Ἕνωση τῶν Α καί Β** λέγεται τό ἐνδεχόμενο, πού πραγματοποιεῖται, ὅταν πραγματοποιηθεῖ ἕνα τουλάχιστον ἀπό τά Α καί Β. Αὐτό σημειώνεται $A \cup B$.
  Ὁ ὁρισμός αὐτός ἐπεκτείνεται ἐπίσης καί γιά περισσότερα ἐνδεχόμενα.

  Δύο ἐνδεχόμενα Α καί Β λέγονται **ἀσυμβίβαστα,** ὅταν ἡ πραγματοποίηση τοῦ ἑνός ἀποκλείει τήν πραγματοποίηση τοῦ ἄλλου. Δύο ἀσυμβίβαστα ἐνδεχόμενα Α καί Β εἶναι ξένα ὑποσύνολα τοῦ Ω (δηλαδή $A \cap B = \varnothing$) καί ἡ ἕνωσή τους σημειώνεται μέ $A + B$. Ἔχουμε λοιπόν

  $$\mathbf{P(AB) = 0}$$

  $$\mathbf{P(A+B) = P(A) + P(B)} \quad \text{(κανόνας προσθέσεως)}.$$

Ὁ κανόνας τῆς προσθέσεως ἐπεκτείνεται καί γιά περισσότερα ἐνδεχόμενα, δηλαδή ἔχουμε πάντα

$$P(A+B+\Gamma+\ldots+T) = P(A) + P(B) + P(\Gamma) + \ldots + P(T)$$

Δύο ἐνδεχόμενα Α καί Β λέγονται **ἀνεξάρτητα,** ὅταν ἡ πραγματοποίηση τοῦ ἑνός δέν ἐπηρεάζει τήν πιθανότητα πραγματοποιήσεως τοῦ ἄλλου. Γιά τά ἀνεξάρτητα ἐνδεχόμενα (καί μόνο γι' αὐτά) ἰσχύει ἡ ἰσότητα

$$\mathbf{P(AB) = P(A) \,.\, P(B)} \qquad \text{(κανόνας πολλαπλασιασμοῦ).}$$

Εἶναι φανερό ὅτι τά ἀσυμβίβαστα ἐνδεχόμενα δέν εἶναι ἀνεξάρτητα (γιατί ἡ πραγματοποίηση τοῦ ἑνός μηδενίζει τήν πιθανότητα πραγματοποιήσεως τοῦ ἄλλου).

Γενικότερα, τρία ἤ περισσότερα ἐνδεχόμενα τά λέμε **«πλήρως ἀνεξάρτητα»**, ὅταν ἐφαρμόζεται ὁ παραπάνω κανόνας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ γιά ὁσαδήποτε καί γιά ὁποιαδήποτε ἀπ' αὐτά.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗ ΛΥΣΗ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

3. α) Μερικές φορές β) πάντοτε γ) ποτέ δ) πάντοτε ε) μερικές φορές.
5. α) $<$ β) $>$ γ) $<$ δ) $>$ ε) $>$
6. α) 12 β) 0
7. α) α^{-4}, α^2, α^7, α^2
10. α) 14, 270, $\frac{9}{10}$, β) $\frac{\sqrt{7}}{3}$, $\frac{2}{15}$, $\frac{2}{3}$
11. α) -1 β) $16+9\sqrt{3}$ γ) 2 δ) $5-2\sqrt{6}$ ε) $37+20\sqrt{3}$
12. α) $\sqrt{9}+\sqrt{16} \neq \sqrt{9+16}$ β) ὁμοίως
13. α) $-6\sqrt{5}$ β) $22\sqrt{3}$ γ) $7\sqrt{2}$ δ) $2(\alpha+2)\sqrt{5\alpha}$
14. α) 1 β) 1,000428
15. 0, -2, -3
16. 0
17. α) $2\alpha-3\gamma > 2\beta-3\gamma$ β) $2\gamma-3\alpha < 2\gamma-3\beta$
18. Βλ. § 1.10
19. α) Ἄν 2κ, 2λ εἶναι δύο ἄρτιοι ἀριθμοί θά βρεῖτε ὅτι εἶναι κλειστό ὡς πρός τήν πρόσθεση καί ὡς πρός τόν πολλαπλασιασμό.
    β) Ἄν $2\kappa+1$, $2\lambda+1$ εἶναι δύο περιττοί ἀριθμοί θά βρεῖτε ὅτι εἶναι κλειστό ὡς πρός τόν πολλαπλασιασμό.
20. α) Β καί Γ ($3\mu \in B$ καί $3\nu \in B$, τότε $3(\mu+\nu) \in B$ κ.λ.π.) β) Γ γ) Α,Β,Γ ($2^{\mu+\nu} \in A$)
21. Ὑποθέστε ὅτι ὑπάρχει πραγματικός $x \neq 0$ τέτοιος, ὥστε $\alpha + x = \alpha$, ἀλλά $\alpha+0=\alpha$ κ.λ.π.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

2. $-4\ \frac{3}{5}$
4. Τιμές πρώτης στήλης 0,1,4,9.
5. Οἱ ἀριθμητικές τιμές, πού δίνουν οἱ παραστάσεις, εἶναι ἴσες
6. α) $5\upsilon-5\tau$ β) $\frac{5\alpha+3\beta}{8}$
7. $xy+\frac{4x}{5}$, $270\ m^2$
8. $\lambda=2$, $\mu=0$
9. $\alpha=-\frac{1}{2}$
12. α) $-\alpha^2$ β) $-\frac{3}{2}x^2y$ γ) $-\frac{7}{6}xy\omega$
13. α) x^3+5x^2+4x+5
15. α) $-2x-y$ β) $-2x-1$ γ) $7x^2y-2xy^2$

16. α) $-2x^2y$ β) $-x^2y+\frac{1}{2}xy$ γ) $-\frac{25}{2}xy$

17. α) $-x^2$ β) $-\beta$

18. α) $4x^2y^3+4x^3y^2$ β) $-\frac{1}{6}xy^2-\frac{3}{2}x^2y-\frac{1}{4}xy+\frac{1}{3}x^2$

19. α) $3x^3-9x^2+x+2$ β) $7x^3-8x^2$ γ) $-x^3+x^2+5x-4$ δ) $3x^3+2x^2+4x-6$
ε) x^3+10x^2-2x-4

20. α) $3x+8y-3$ β) $5\alpha^3-2\beta^2+3\beta-6$ γ) $2\alpha^2x^2-3\alpha x^3+\alpha^3x-3\alpha^3+2x^3$

22. α) $-\alpha-\beta-5\gamma$ β) $-5x^3-x^2-4x+6$ γ) $4xy$ δ) $-2\alpha^2+\beta^2-4\alpha\beta$

23. α) $-x^2+7x$ β) $-5\alpha^2-\alpha\beta+2\beta^2$ γ) $-x^3+4x^2-2x-1$

24. α) $+6x^3$, β,γ,δ ὁμοίως

25. α) $24\alpha^{10}$ ε) $\alpha^{4\mu}$ στ) $3\alpha^{2x+2}\beta^{2y}$

26. α) $-\frac{1}{8}\alpha^6\beta^9\gamma^3$

27. α) $4x^9y^9$ β) $\frac{1}{2}x^9y^7\omega^2$ γ) $\alpha^{4\mu-4}\ \beta^{4\nu-2}$ δ) $-\frac{1}{12}x^4y^7z^2$

28. α) $6x^5+4x^4-10x^2$

29. α) $-x^3-4x^2-6x-4$ β) $-5x^5+18x^4-4x^3-21x^2-x$
γ) $2\alpha^3-3\alpha^2\beta-\alpha\beta^2-\beta^3$ δ) $-2x^4-2x^3+7x^2-3x-26$ ε) $-5\alpha^3+18\alpha$

31. α) $6x^2-7x-3$ β) $6x^3-19x^2+18x-20$ γ) $-8x^6-8x^4-11x^3+7x^2-7x+3$
δ) $2x^5-2x^4-3x^3+5x^2-7x+5$ ε) $\alpha^3+\beta^3$
στ) $4x^5-2x^4y+4x^3y^2+3x^2y^3-xy^4+2y^5$
ζ) $-2x^7+6x^5-x^4+2x^3+2x^2-6x+3$ η) $\frac{x^4}{2}+\frac{8}{3}x^3y-\frac{13}{4}x^2y^2-\frac{5}{6}xy^3+\frac{y^4}{2}$

32. α) $-x^3+3x^2+2x-1$ β) $-2x^4-5x^2y^2+4xy^3-2y^4$
γ) $\alpha^2+2\alpha\beta^2+\alpha^2\beta+\beta^3$ δ) $-3x^2-3x+2$

33. α) x^3+3x^2-x-3 β) $x^5-x^2y^3+x^3y^2-y^5$

35. Βλ. § 2.12 παραδ. 1

36. Βλ. § 2.12 παραδ. 1

37. Βλ. § 2.12 παραδ. 4

38. α) x^4-1 β) $16\alpha^4-81\beta^4$ γ) x^4-y^4 δ) x^8y^8-1

39. Βλ. § 2.12, ΙΙ α) $(x+y)^2-z^2=x^2+2xy+y^2-z^2$

40. Βλ. § 2.12, ΙΙΙ παραδ. 6

41. Βλ. § 2.12, IV παραδ. 6

42. Βλ. § 2.12, V

43. Βλ. § 2.12 παραδ. 2

44. Βλ. § 2.12 παραδ. 3

45. α) 19 β) $-x^2+16x-28$ γ) $-7\alpha^2-31\alpha\beta-13\beta^2$ δ) 0

46. Ἐκτελέστε τίς πράξεις στό α' μέλος.

47. α) $3x^4-6x^3+4x^2+4x-2$ β) $\alpha^2-11\alpha\beta+18\beta^2+4\alpha-6\beta+1$ γ) 0

48. α) $-54x^3-111x^2-65x-17$ β) $2x^3+4xy^2+2y^3$ γ) $-x^3+10x^2+8x+10$

49. α) Ἐκτελέστε τίς πράξεις στό β' μέλος.

51. Ὑψῶστε τήν $x+y=\alpha$ α) στό τετράγωνο β) στόν κύβο.

52. α) $2x^2$

53. α) $4x^2y\omega$ β) $\frac{4}{9}x^3y^5\omega$ γ) $-12\alpha^4\beta^2$ δ) $-\beta$

54. α) $-4x^2+2x+1$

55. α) $2\alpha(x+y)$

56. α) $\Pi = 2x+1, \quad Y = -33$ β) x^2-2x+1 γ) $x-2$ δ) $5x^2+4x-2$
ε) $2x^3-x+2$

57. α) $x+3\alpha$ β) $2x^2-5xy-6y^2$ γ) $x^2-5xy+6y^2$

58. α) $-2x^2-xy-2y^2$ β) $2x^4-4x^3-x^2+3x-6$
γ) $2x^4+4x^3-5x^2+9x-1$

59. α) 0 β) $2xy^2-2y^3$ γ) $-x^2+1$

60. Βλ. § 2.12, V

61. Βλ. § 2.12, V

62. α,β,γ ἐκτελέστε τίς πράξεις στό α' μέλος δ) μετά τήν ἐκτέλεση τῶν πράξεων στό α' μέλος προσθέστε καί ἀφαιρέστε τό $2\alpha\beta xy$.

63. α) $\frac{3}{4}x^3-\frac{1}{2}x^2+1$ β) $x^2+5xy+3y^2$

64. 'Εκτελέστε τίς πράξεις στό α' μέλος.

65. 'Αποδεῖξτε ὅτι $x^2+y^2 = z^2$

66. α) $\mu+\nu = \kappa$ β) $\gamma_3 = \alpha_3\beta o+\alpha_2\beta_1+\alpha_1\beta_2+\alpha_0\beta_3$
$\gamma_5 = \alpha_4\beta_1+\alpha_3\beta_2+\alpha_2\beta_3+\alpha_1\beta_4+\alpha_0\beta_5$, $\gamma_7 = \alpha_4\beta_3+\alpha_3\beta_4+\alpha_2\beta_5$
β) $\gamma_0 = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 0$ $\gamma_5 = \alpha_3\beta_2 \neq 0$ γιά τούς γ_6, γ_7, γ_8, γ_9 δέν μποροῦμε νά ποῦμε.
δ) $-6x^6+7x^4-9x^3-5x^2+6x+2$

67. Νά προσθέσετε καί νά ἀφαιρέσετε τό μονώνυμο $2\alpha\beta\gamma\delta$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

1. Σύμφωνα μέ τό παράδειγμα τῆς § 3.1 θά ἔχουμε ὑπόλοιπο ἴσο μέ
α) 0, β) 0, γ) 0, δ) 0, ε) -2, στ) 0 ζ) 0 η) 0.

2. Θά πρέπει $P(2) = 0$, ἀπ' ὅπου ἔχουμε $\lambda = 3$.

3. Μέ τόν ἴδιο τρόπο βρίσκουμε $\lambda = 1$.

4. α) Ἄν ἐργαστεῖτε ὅπως στήν ἄσκηση 1, θά βρεῖτε $Y = 0$ β) Κάνοντας τή διαίρεση καί ἐφαρμόζοντας τήν ταυτότητα τῆς διαιρέσεως θά βρεῖτε:
$P(x) = (x-3)\ (2x^2-x-15)$.

5. Σύμφωνα μέ τό παράδειγμα τῆς § 3.2 θά βρεῖτε:
α) $(2x+3)\ (4x^2-6x+9)$ β) $(x-2)\ (x^2+2x+4)$
γ) $(x^2-y)\ (x^4+x^2y+y^2)$ δ) $(x^2+y^2)\ (x^4-x^2y^2+y^4)$.

6. Σύμφωνα μέ τά παραδείγματα τῆς § 3.3, Ι θά βρεῖτε:
α) $2\alpha(\beta-\gamma)$ β) $3x(2x+1)$ γ) $3xy(4x+2y-1)$ δ) $5\alpha^2\beta^2\gamma(3\alpha-\beta\gamma-4\alpha^2\beta^2\gamma^2x)$
ε) $(x+y)\ (\alpha-\beta)$ στ) $(2\alpha-\beta)\ (x-y)$ ζ) $(x-1)\ (\alpha-1)$ η) $(x-y)\ (\alpha+1)$

7. Μέ τόν ἴδιο τρόπο βρίσκετε:
α) $(x-3y)\ (\beta-\alpha)$ β) $3(2x-3y)\ (2\alpha-\beta)$ γ) $\alpha^2(x-1)\ (\alpha+\beta-1)$
δ) $(x-y)\ (\alpha x-\alpha y-\beta)$ ε) $(2x+y)\ (1-\alpha-2x-y)$ στ) $(x+y)^2(x+y-1)$.

8. Σύμφωνα μέ τά παραδείγματα τῆς § 3.3, ΙΙ θά βρεῖτε:
α) $(x+y)\ (\alpha+3)$ β) $(x+y)\ (x-1)$ γ) $(x+1)\ (x^2+1)$ δ) $(\alpha-2)\ (3\alpha^2+5)$
ε) $(x-1)\ (2x^3+3)$ στ) $(\alpha-\beta)^2\ (\alpha+\beta)$ ζ) $(6x+y)\ (x+3\omega)$ η) $(xy-3)\ (8y^2-7\alpha)$

9. Σύμφωνα μέ τά παραδείγματα τῆς § 3.3, IV θά βρεῖτε:
α) $(x+3)(x-3)$ β) $(5x+2)(5x-2)$ γ) $(\alpha\beta+\gamma)(\alpha\beta-\gamma)$ δ) $(9\alpha+7\beta)(9\alpha-7\beta)$
ε) $(4\alpha+xy)(4\alpha-xy)$ στ) $(2\alpha^2+3\beta)(2\alpha^2-3\beta)$ ζ) $(5\alpha x^2+3\beta)(5\alpha x^2-3\beta)$
η) $\dfrac{(2xy+3)\ (2xy-3)}{36}$ θ) $(x-y+1)(x-y-1)$ ι) $\alpha(\alpha-4\beta)$
ια) $4\alpha\beta$ ιβ) $(6x-y)(2x+5y)$

10. Σύμφωνα μέ τά παραδείγματα τῆς § 3.3, I καί IV θά βρεῖτε:
α) $3x(x-1)(x+1)$ β) $3\alpha\beta(\alpha+3\beta)(\alpha-3\beta)$ γ) $5xy(x^2+2y)(x^2-2y)$
δ) $x^{\mu}(x+1)(x-1)$ ε) $(x-\psi)(1+\alpha+\beta)(1-\alpha-\beta)$ στ) $(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$
ζ) $(\alpha+\sqrt{10})(\alpha-\sqrt{10})(\alpha+\sqrt{14})(\alpha-\sqrt{14})$ η) $x(x^2y^2+1)(xy+1)(xy-1)$
θ) $24\alpha(\alpha+1)^2(\alpha-1)$

11. Νά χρησιμοποιήσετε πρῶτα τά παραδείγματα II ἤ I καί ὕστερα τά παραδείγματα τῆς § 3.3, IV καί θά βρεῖτε:
α) $(x+y)(x-y)(\alpha+\beta)$ β) $(x-y)(\alpha+1)(\alpha-1)$ γ) $(x+3)(x-3)(y+1)(y-1)$
δ) $(\alpha^2+1)(\alpha-1)(\alpha+1)^2$ ε) $2(2-x)(3x+4)$ στ) $2(3x-5)(2x-1)$

12. Σύμφωνα μέ τά παραδείγματα τῆς § 3.3, V θά βρεῖτε:
α) $(\alpha-2)(\alpha^2+2\alpha+4)$ β) $(2x+3)(4x^2-6x+9)$ γ) $(xy-1)(x^2y^2+xy+1)$
δ) $(1-4x)(1+4x+16x^2)$ ε) $(\alpha-\beta+\gamma)[\alpha^2+\alpha(\beta-\gamma)+(\beta-\gamma)^2]$
στ) $\alpha\beta(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$ ζ) $(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$
η) $-3(x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1)$ θ) $\alpha(\alpha+1)(\alpha^2-\alpha+1)(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)$

13. Νά χρησιμοποιήσετε πρῶτα τά παραδείγματα II ἤ I καί ὕστερα τό παράδειγμα V τῆς § 3.3 καί θά βρεῖτε:
α) $(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)(x+1)(x^2-x+1)$ β) $(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)$
γ) $(x+2)(x-2)^2(x^2-x+1)$ δ) $\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)$

14. Σύμφωνα μέ τό παράδειγμα III θά βρεῖτε:
α) $(x+5)^2$ β) $(3x-2)^2$ γ) $(3x-2y)^2$ δ) $(2x^2+1)^2$ ε) $(\alpha^2-3\beta)^2$ κ.λ.π.

15. Σύμφωνα μέ τά παραδείγματα III καί VI τῆς § 3.3 θά βρεῖτε:
α) $(\alpha+\beta-1)^2$ β) $(3x+2y)^2$ γ) $(x-2x^2)^2$ δ) $(x+1)(x^2+x+y)$

16. Σύμφωνα μέ τό παράδειγμα 1 τῆς § 3.4 ἔχουμε:
α) $(x-3)(x-1)$ β) $(x-5)(x+2)$ γ) δέν ἀναλύεται
δ) $(x+4)(x+1)$ ε) $(\alpha-\beta)(\alpha-2\beta)$ στ) $(x+y)(x-4y)$

17. Σύμφωνα μέ τό παράδειγμα 2 τῆς § 3.4 ἔχουμε:
α) $(2x+1)(x-3)$ β) $(2x+3)(3x-1)$ γ) $(3x+2)(2x-1)$ δ) δέν ἀναλύεται.
ε) $(2\alpha+5\beta)(\alpha-\beta)$ στ) $(2x+3y)(5x-2y)$

18. Σύμφωνα μέ τό παράδειγμα τῆς § 3.3, VI
α) $(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha-\beta-\gamma)$ β) $(y+x-1)(y-x+1)$ γ) $(\alpha-\beta)(\alpha-\beta-1)$.
δ) $(\alpha+\beta+x-2)(\alpha+\beta-x+2)$ ε) $(\alpha+1)^2(\alpha-1)^2$
στ) $(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha-\beta-\gamma)$
ζ) $(x^2+3y^2+xy)(x^2+3y^2-xy)$ η) $(\alpha^2-2\beta^2-3\alpha\beta)(\alpha^2-2\beta^2+3\alpha\beta)$

19. Μέ τόν ἴδιο τρόπο ἔχουμε α) $2(x-2)(x-1)(4-x)$ β) $(\alpha+3)^2(\alpha-2)(\alpha-4)$

20. Ἀφοῦ μετατρέψουμε κάθε ἐξίσωση στή μορφή $A.B.\Gamma=0$, ἔχουμε ρίζες:
α) $-\dfrac{3}{2}$, $\dfrac{3}{2}$ β) $-1{,}2$ γ) -1, $-\dfrac{2}{3}$ δ) 0, $\dfrac{2}{9}$ ε) $-\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{2}$, $\sqrt{3}$ στ) 2,
$-\sqrt{\dfrac{5}{2}}$, $\sqrt{\dfrac{5}{2}}$
ζ) $-1, 1, 2$ η) $0, -1, 1$ θ) $-1, 1, \sqrt{2}$ ι) ἀδύνατη.

21. α) ἀδύνατη β) 2 (διπλή ρίζα)

22. Σύμφωνα μέ τό παράδειγμα τῆς § 3.6 θά βρεῖτε

α) Μ.Κ.Δ $= 3\alpha^2\beta^2$, Ε.Κ.Π $= 60\alpha^4\beta^3\gamma$ β) Μ.Κ.Δ $= 4\alpha^2x^3$, Ε.Κ.Π $= 24\alpha^3x^5$

γ) Μ.Κ.Δ $= 3\alpha^2(\alpha-\beta)^2$, Ε.Κ.Π $= 6\alpha^2\beta(\alpha-\beta)^2(\alpha+\beta)$

23. Ἐπίσης α) Μ.Κ.Δ $= 1$, Ε.Κ.Π $= 12(x+y)^2(x-y)^2$

β) Μ.Κ.Δ $= \alpha-\beta$, Ε.Κ.Π $= (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)^2(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$

γ) Μ.Κ.Δ $= \alpha-2$, Ε.Κ.Π $= \alpha(\alpha-2)^3(\alpha+2)$

δ) Μ.Κ.Δ $= \alpha-1$, Ε.Κ.Π $= (\alpha-2)(\alpha-1)^2(\alpha+4)(\alpha+1)\alpha$

24. Σύμφωνα μέ τό παράδειγμα τῆς § 3.7 θά βρεῖτε:

α) $\frac{2x}{3}$ β) $\frac{3}{\alpha\gamma}$ γ) $\frac{4x^2}{5y}$ δ) $\frac{3}{4}$ ε) $\frac{x}{3y}$ στ) $x-1$ ζ) $\frac{x+3}{x-1}$ η) $\frac{2y-3x}{2y+3x}$

θ) $\frac{\beta-\alpha}{2(\beta+\alpha)}$ ι) $x-1$ ια) $\frac{1}{\beta(\alpha-\beta)}$ ιβ) $\frac{x(\alpha-\beta)}{2}$

25. Σύμφωνα μέ τό παράδειγμα 1 τῆς § 3.8 θά βρεῖτε:

α) $\frac{4}{x}$ β) $-\frac{1}{\alpha}$ γ) $-\frac{x+5}{6}$ δ) $\frac{5x-10}{12xy}$ ε) $\frac{2x^2-3}{x}$ στ) $\frac{\alpha^2-\beta^2-\gamma^2}{\alpha\beta\gamma}$

ζ) $\frac{5}{3(\alpha+1)}$ η) $\frac{\alpha-2\beta}{\alpha+2\beta}$ θ) $\frac{3}{2\alpha(\alpha+\beta)}$ ι) $-\frac{xy}{x^3+y^3}$ ια) $\frac{5}{(x-2)(x+2)}$

ιβ) $\frac{2(x^3+7x^2+7x+10)}{(x-2)^2(x+1)(x+3)}$

26. Σύμφωνα μέ τό παράδειγμα 2 τῆς § 3.8 θά βρεῖτε:

α) $-\frac{8\beta}{5\alpha}$ β) $\frac{2x^3}{y^2}$ γ) $\frac{\beta}{2\gamma\alpha}$ δ) $\frac{\alpha^2\beta}{\alpha-3}$ ε) $\frac{\beta(\beta-\alpha)}{(\beta-4)(2-\alpha)}$ στ) $\frac{x-2}{x+4}$

ζ) $\frac{(x-1)(x^3+x^2-4)(x-2)}{x(x+2)^2(x^2-2x+4)}$ η) $\alpha^\nu-1$ θ) $-x$ ι) $\frac{6(\alpha-\beta)}{\gamma}$

27. α) $-\frac{xy}{x+y}$ β) $\frac{4}{3}$ γ) -1 δ) 1

28. Σύμφωνα μέ τό παράδειγμα 3 τῆς § 3.8 θά βρεῖτε:

α) $\frac{3y}{2}$ β) $\frac{9x}{8}$ γ) $\frac{x}{\alpha^3(x+2)}$ δ) $\alpha^2-\beta^2$ ε) $\frac{12\alpha\beta x^2-9\alpha^2x+2\beta^2}{6\alpha\beta^2}$

στ) $\frac{x(x+1)}{x^2+2x+4}$

29. α) $\frac{1}{x^2y^2(x-y)}$ β) $\frac{(x^2+4xy+16y^2)(\alpha+1)}{4(x+2y)}$ γ) α δ) 2

30. α) x β) $\frac{x+1}{x}$ γ) $\frac{\beta+1}{\alpha\beta^2}$ δ) $\beta-\alpha$ ε) 0 στ) $\frac{x-3}{x+3}$

31. Σύμφωνα μέ τήν παράγραφο 3.9 καί ἀπορρίπτοντας τίς ρίζες, πού μηδενίζουν τούς παρονομαστές, θά βρεῖτε τίς λύσεις: α) 2 διπλή β) 1 γ) $\frac{3}{2}$ δ) ἀδύνατη $(x \neq 2)$ ε) 0, ἤ 2 ἀπορρίπτεται στ) 2

32. α) Πρέπει τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως μέ $x-2$ νά εἶναι 0 ἀπ' ὅπου $\lambda = 2$ β) $(x-3)(x+2)(x-2)$

33. Βάζοντας ὅπου x τό $-y$ θά βρεῖτε 0, ἄρα διαιρεῖται μέ $x+y$, κ.λ.π.

34. 4

35. α) $5x^2-4x-1$ β) $(5x+1)(x-1)$ γ) $x=-\frac{1}{5}$, $x=1$.

36. α) $225x^4-34x^2+1$ β) $(5x+1)(5x-1)(3x+1)(3x-1)$ γ) $-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$

37. α) $3x(x-2)$, $(x+2)^2$, $2(x+2)(x-2)$, $4(5x+1)(x+2)$
β) $A=\frac{3x}{2(x+2)}$ $B=\frac{5x+1}{x+2}$ γ) $x=-\frac{2}{7}$

38. α) $\frac{1}{\alpha\beta}$ β) $2x$ γ) 0 δ) $x+y$

39. α) 0, β) 1

40. α) Μετατρέποντας τίς διαφορές τετραγώνων τοῦ α' μέλους σέ γινόμενα θά βρεῖτε τό δεύτερο μέλος. β) Κάνοντας τίς πράξεις καί στά δύο μέλη χωριστά θά βρεῖτε ἴσα ἐξαγόμενα. γ) Κάνοντας πράξεις στό δεύτερο μέλος καί μετά τίς ἀναγωγές ὅμοιων ὅρων θά βρεῖτε τό πρῶτο μέλος.

41. α) $20+44\sqrt{2}$ β) $\Gamma=4(4x-1)(x+3)$ γ) $x=\frac{1}{4}$, $x=-3$

42. Κάνοντας τήν πρόσθεση στήν παρένθεση καί ἀναλύοντας τούς ὅρους τῶν κλασμάτων σέ γινόμενα θά βρῖτε 1.

43. α) $\frac{1}{x^2y^2}$ β) $\frac{1}{\alpha+\gamma}$ γ) $\alpha\beta$ δ) 1 ε) -1

44. Γιά τό Α, χρησιμοποιώντας τήν ταυτότητα $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$, θά βρεῖτε $A==y^2-2$. Γιά τό Β, μέ τήν ταυτότητα $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta)$ καί τήν τιμή τοῦ Α, θά βρεῖτε $B=y^3-3y$.

ΕΦΑΛΑΙΟ 4

2. α) Βρίσκονται στό ἴδιο ἐπίπεδο. β) Δέ βρίσκονται στό ἴδιο ἐπίπεδο.
3. β) Συγκρίνετε τά τρίγωνα ΑΒΓ καί ΑΒ'Γ'.
4. α) Εὐθεία ε γ) βλ. α
5. ΒΖ || ΔΘ. κ.λ.π.
6. ΒΑ
7. Τέμνει τόν κύκλο Ο σέ δύο διαμετρικά σημεῖα.
8. Ἡ ΓΜ τέμνει τήν ΑΒ.
9. Ἡ α καί ε ὁρίζουν ἕνα ἐπίπεδο, πού ταυτίζεται μέ τό p.
11. Βλ. § 4.7
13. Οἱ δύο τέμνονται στό Ο ἡ τρίτη θά τέμνει αὐτές σέ δύο διαφορετικά σημεῖα.
14. Νά βρεῖτε τήν τομή τῆς ΑΝ μέ τήν ε.
15. Ὑποθέστε ὅτι ἡ ε τέμνει τήν α.

16. 'Υποθέστε ότι ή α δέ βρίσκεται στό q. Τό ἐπίπεδο, πού ὁρίζουν οἱ ε καί ή α, τέμνει τό q κ.λ.π.

17. Βλ. ΚΕΦ. 4 παραδείγματα καί ἐφαρμογές 2.

18. α) $A'B' \parallel AB$ β) Χρησιμοποιῆστε τό α.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

7. α) Νά παραστήσετε τόν ἄρτιο ἀριθμό μέ 2μ ($\mu \in N^*$)
β) Νά παραστήσετε τόν περιττό ἀριθμό μέ $2\mu+1$ ($\mu \in N^*$)

8. α) Βλ. § 5.9 παράδειγμα 2. β) $\nu^3+11\nu=\nu^3-\nu+12\nu$ κ.λ.π.

9. 'Εφαρμόστε διαδοχικά τά τρία κριτήρια ἰσότητας τῶν τριγώνων.

10. 'Η ΑΜΒ νά χωρισθεῖ σέ δύο γωνίες, πού εἶναι ἀντιστοίχως ἴσες μέ τίς $M\widehat{A}\Gamma$ καί $M\widehat{B}\Delta$.

11. Βλ. § 5.11 (ἀπαγωγή σέ ἄτοπο)

12. ('Απαγωγή σέ ἄτοπο)

13. Βλ. § 5.9 παράδειγμα 1

14. Βλ. § 1.2 (ἀπαγωγή σέ ἄτοπο)

15. 'Αποκλεῖστε νά εἶναι α) $\widehat{A}=\widehat{B}$, β) $\widehat{A}<\widehat{B}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

1. α) 90° β) 45° γ) 90° δ) 45°

2. Νά ἀποδείξετε ότι ή ΙΚ εἶναι κάθετη σέ δύο εὐθεῖες τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓΔ, πού περνᾶνε ἀπό τό ἴχνος της. Τό ἴδιο νά κάνετε καί γιά τό ἄλλο.

3. Νά ἀποδείξετε ότι ή ΜΚ εἶναι μεσοκάθετος τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ.

5. α) Βρίσκονται στήν ἴδια εὐθεία. β) (ΑΒ) = 6 cm ή (ΑΒ) = 18 cm.

6. 'Η ἀπόσταση εἶναι 8 cm.

7. Νά χρησιμοποιήσετε τούς τύπους, πού δίνουν τούς τριγωνομετρικούς ἀριθμούς ὀξείας γωνίας (προβολή = 6,92 cm, ἀπόσταση = 4 cm)

8. β) 1) 45° 2) 90°

9. Νά βρεῖτε πρῶτα τήν ΑΓ. "Αν Γ' εἶναι ή προβολή τοῦ Γ στό p, νά βρεῖτε τήν ΑΓ' ἀπό τό τρίγωνο ΑΓΓ'. Τέλος νά παρατηρήσετε ότι τό τρίγωνο ΑΓ'Β εἶναι ὀρθογώνιο. ($E = 15\ cm^2$). ή βλ. παραδείγματα καί ἐφαρμογές 1.

10. 'Η ἀντίστοιχη ἐπίπεδη τῆς δίεδρης, πού σχηματίζεται, πρέπει νά εἶναι 45°, δηλ. ἴση μέ τήν $A\widehat{B}K$.

11. Νά ἐργασθεῖτε όπως στό παράδειγμα τῆς § 6.10.

12. Νά συγκρίνετε τά τρίγωνα ΜΟΑ, ΜΟΒ.

13. α) Νά συγκρίνετε τά τρίγ. ΜΟΑ, ΜΟΒ β) Νά συγκρίνετε τά τριγ. ΣΟΑ, ΣΟΒ.

14. Νά φέρετε τήν $A\Gamma \perp BB'$ καί νά ἐφαρμόσετε τό Πυθαγόρειο θεώρημα στό ΑΓΒ. (προβολή = 4 cm)

15. Νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ πλευρές τῶν δύο τριγώνων εἶναι ἀνά δύο ἴσες.

16. Νά φέρετε τήν ΑΑ′ $\perp$ q καί ἀπό τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΑ′Δ (Δ μέσο τῆς ΒΓ) νά ὑπολογίσετε τήν Α′Δ. $\left(E = \frac{3\alpha^2}{8} \right)$ ἤ βλ. παραδείγματα καί ἐφαρμογές 1.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

1. α

2. α) $G = \left\{(0,-4), (2,4), (3,2), \left(4, \frac{4}{3}\right), (5,1), \left(6, \frac{4}{5}\right)\right\}$

β) Βλ. § 7.2

γ) Βλ. § 7.2

3. Βλ. § 7.4

4. R, $R-\{1,3\}$, $R-\{-1,1\}$, $\left\{x \mid x \geq \frac{1}{2}\right\}$

5. Βλ. § 7.1.

6. Βλ. § 7.3 παραδείγματα καί ἐφαρμογές 2.

7. Βλ. § 7.4 παραδείγματα καί ἐφαρμογές 2.

8. Ἀνήκουν τά Α καί Γ.

9. Βλ. § 7.5.

10. Βλ. § 7.5.

11. Βλ. § 7.6.

12. α) Ἀπό τήν ἐξίσωση $-12 = \alpha.(-7)+2$ προσδιορίζεται τό α.

β) Ὁμοίως μέ τήν α.

13. Πρώτη - τρίτη, δεύτερη - πέμπτη.

14. Βλ. § 7.7

15. Πρώτη - πέμπτη, τρίτη - τέταρτη.

16. Βλ. § 7.8.

17. α) Βλ. § 7.9 β) § 7.10 καί παράδ. γ) § 7.10 καί παράδ.

18. Βλ. § 7.11 α) $x = \pm 3$ β) ἀδύνατη γ) $x_1 = -1$, $x_2 = 5$ δ) ἀδύνατη

ε) $x_1 = 1\frac{1}{2}$, $x_2 = -1$ στ) $x_1 = x_2 = 2$

19. $f(-2) = 1$, $f(\sqrt{2}) = -1$ κ.λ.π.

20. $\alpha = 4$

21. $y = \frac{1}{2}x$

22. Ἡ ἐξίσωση $y = x^2+\alpha x+\beta$ ἐπαληθεύεται ἀπό τά (0,0) καί (1,3) καί γίνεται $y = x^2+2x$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

1. α) Τά ζεύγη, πού ἀνήκουν στό σύνολο λύσεων, εἶναι: (0,4),(1,3),(2,2),(3,1),(4,0)
β) » » » » » » : (0,4), (2,0), (1,2)
γ) » » » » » » : (0,–2), (2,2), (3,4), $\left(\frac{1}{2},-1\right)$

2. α) Εἶναι τά 7 σημεῖα, πού ἀντιστοιχοῦν στά ζεύγη: (6,0),(5,1),(4,2),(3,3),(2,4) (1,5), (0,6)
β) Εἶναι ὅλα τά σημεῖα τῆς εὐθείας, πού τέμνει τούς ἄξονες Ox, Oy στά σημεῖα: (6,0), (0,6)
γ) Εἶναι ὅλα τά σημεῖα τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας $x\widehat{O}y$ μέ συντεταγμένες (0,0), (1,1), (2,2),. . .
δ) Εἶναι ὅλα τά σημεῖα τῆς εὐθείας τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας $x\widehat{O}y$ μέ ἴσες συντεταγμένες στό R^2.
ε) Εἶναι τά 5 σημεῖα μέ συντεταγμένες (4,0), (3,2), (2,4), (1,6), (0,8)
στ) Εἶναι ὅλα τά σημεῖα τῆς εὐθείας, πού τέμνει τούς ἄξονες Ox,Oy στά:(4,0),(0,8)·
ζ) Εἶναι τά σημεῖα μέ τετμημένη στό Z καί τεταγμένη 2 τῆς παράλληλης εὐθείας πρός τήν Ox.
η) Εἶναι τά σημεῖα μέ τετμημένη στό R καί τεταγμένη 2 τῆς παράλληλης εὐθείας πρός τήν Ox.
θ) Εἶναι ὅλα τά σημεῖα τῆς εὐθείας τῆς παράλληλης πρός τόν ἄξονα Oy μέ τετμημ. 4.

3. α) Εἶναι τά σημεῖα τῆς εὐθείας,πού τέμνει τούς ἄξονες Ox,Oy στά σημεῖα: (2,0),(0,4)
β) » » » » » » » » » » » : $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$,(0,–1)
γ) » » » » » » » » » : (6,0),(0,2),
δ) » » » » » » » » » » » : (3,0) $\left(0,\frac{3}{2}\right)$
ε) » » » » » » » » » » » : (5,0),(0,-5)
στ) » » » » » » » » » » » : $\left(-\frac{1}{2},0\right)$,(0,1)
ζ) » » » » » » » » » » » : (–2,0),(0,1)
η) Εἶναι τά σημεῖα τῆς παράλληλης εὐθείας πρός τόν Oy μέ τετμημένη –2.
θ) Εἶναι τά σημεῖα τῆς παράλληλης εὐθείας πρός τόν Ox μέ τεταγμένη 3.

4. Εἶναι τά σημεῖα τῆς παραβολῆς, πού τέμνει τόν ἄξονα Ox στά (–5,0), (–3,0) καί «στρέφει τά κοῖλα της» πρός τά πάνω.

5. α) {(3,4)} β) {(0, –2)} γ) {(4,3)} δ) {(–3, 9)}
ε) {(4,4)} στ) {(1,3)} ζ) ϕ η) {(1, –1)}
θ) {(1, 0,6)}

6. α) {(2,0)} β) {(–1, 1)} γ) {(2, –1)}

7. α) {(5,5)} β) {(2,4)} γ) {(2,3)} δ) {(–1, –2)}
ε) {(3,4)} στ) $\left\{\left(\frac{3}{2}, -3\right)\right\}$ ζ) {(4,7)} η) {(4,7)}

8. α) $\{(2, 3)\}$ β) $\{(-4,1)\}$ γ) $\left\{\left(\dfrac{\alpha\varepsilon-\beta\delta}{\gamma\varepsilon-\beta\zeta}, \dfrac{\alpha\varepsilon-\beta\delta}{\alpha\zeta-\gamma\delta}\right)\right\}$

ἀλλά πρέπει, γιά νά ὑπάρχει αὐτή ἡ λύση, ἐκτός ἀπό τόν περιορισμό πού ἔχει δοθεῖ, νά εἶναι καί $\gamma\varepsilon-\beta\zeta \neq 0$ καί $\alpha\zeta-\gamma\delta \neq 0$.

9. Στήν προηγούμενη ἄσκηση ἄν $\alpha\varepsilon-\beta\delta=0$, τότε τό σύστημα: $\alpha\varphi+\beta\omega=\gamma$, $\delta\varphi+\varepsilon\omega=\zeta$ εἶναι ἀδύνατο, ἄν εἶναι $\gamma\varepsilon-\beta\zeta \neq 0$ καί $\alpha\zeta-\gamma\delta \neq 0$. Ἄν ὅμως εἶναι: $\alpha\varepsilon-\beta\delta=0$ καί $\gamma\varepsilon-\beta\zeta=0$ καί $\alpha\zeta-\gamma\delta=0$, τότε τό σύστημα ὡς πρός φ καί ω θά εἶναι ἀόριστο, θά πρέπει ὅμως $\varphi \neq 0$, $\omega \neq 0$.

10. α) $\{(6,4), (-5,-7)\}$ β) $\{(5,2), (-26,33)\}$

11. α) $\left\{(2,1), \left(-\dfrac{7}{11}, \dfrac{69}{11}\right)\right\}$ β) $\{(-3,2), (-2,1)\}$

12. $37\dfrac{1}{2}$ καί $25\dfrac{1}{2}$

13. α) $m=4$, $c=-6$ β) $\alpha=5$

14. α) $\alpha=6$, $\beta=-3$ β) 597

15. α) $\alpha=-\dfrac{3}{4}$, $\beta=16$ β) $\upsilon=8\dfrac{1}{2}$ m/sec γ) $t=21\dfrac{1}{3}$ sec.

16. α) $\alpha=24$, $\beta=-5$ β) $h=16m$ γ) Τό βλῆμα προσγειώθηκε.

17. $x=68t$, $x=72\left(t-\dfrac{1}{6}\right)$, χρόνος = 3 ὧρες, ἀπόσταση = 204 km.

18. Ἡ Α δούλεψε 12 ὧρες καί ἡ Β 6 ὧρες.

19. α) 72 km/h β) 60 km/h

20. α) Τά ζεύγη, πού τήν ἐπαληθεύουν, εἶναι: (0,0),(0,1),(0,2),(2,0),(1,1),(1,0)
β) » » » » » » : (–2,0), (–2,1), (–2,–1)
γ) » » » » » » :(0,0),(–1,1),(1,–1),(2,0),(2,1),(0,2)(1,0)

21. α) Κατασκευάζετε πρῶτα τήν εὐθεία $2x-3y-6=0$ πού τέμνει τούς ἄξονες Ox,Oy στά σημεῖα (3,0), (0,–2) ἀντίστοιχα καί διαγράφετε τό ἡμιεπίπεδο, μέ ἀκμή τήν εὐθεία αὐτή, τό ὁποῖο περιέχει τήν ἀρχή Ο. Τά σημεῖα τοῦ ἄλλου ἡμιεπιπέδου παριστάνουν τό σύνολο λύσεων τῆς ἀνισώσεως.
β) Μέ τόν ἴδιο τρόπο βρίσκουμε ὅτι τό σύνολο λύσεων παριστάνουν τά σημεῖα τοῦ ἡμιεπιπέδου, πού περιέχει τό Ο καί ἡ ἀκμή του περνάει ἀπό τά σημεῖα (6,0) καί (0,–2) τῶν ἀξόνων Ox καί Oy ἀντίστοιχα.
γ) Τό ἡμιεπίπεδο πού δέν περιέχει τήν ἀρχή καί ἔχει ἀκμή τήν εὐθεία τῶν (2,0) καί (0,4)
δ) Τό ἡμιεπίπεδο πού περιέχει τό Ο ἐκτός ἀπό τά σημεῖα τῆς ἀκμῆς του (6,0), (0,–2)
ε) Τό ἡμιεπίπεδο πού δέν περιέχει τό Ο ἐκτός ἀπό τά σημεῖα τῆς ἀκμῆς του (2,0),(0,4)
στ) Τό ἡμιεπίπεδο πού περιέχει τό Ο ἐκτός ἀπό τά σημεῖα τῆς ἀκμῆς του $2x-3y-6=0$
ζ) Τό ἡμιεπίπεδο πού περιέχει τό Ο μέ ἀκμή τήν εὐθεία $x=-2$.
η) Τό ἡμιεπίπεδο πού περιέχει τό Ο ἐκτός ἀπό τά σημεῖα τῆς ἀκμῆς του $x-y=8$.
θ) Τό ἡμιεπίπεδο πού περιέχει τό θετικό ἡμιάξονα Oy ἐκτός ἀπό τά σημεῖα τῆς ἀκμῆς του, πού εἶναι ἡ εὐθεία $x-y=0$ (διχοτόμος τῆς $x\widehat{O}y$).

22. α) Τό σύνολο λύσεων εἶναι τά σημεῖα τοῦ τριγώνου, πού σχηματίζουν οἱ εὐθεῖες $x=0$, $y=0$ (οἱ ἄξονες) καί ἡ $x+y=5$, πού ὁρίζεται ἀπό τά σημεῖα (5,0),(0,5)
β) Εἶναι τά ἐσωτερικά σημεῖα τοῦ τριγώνου τῶν εὐθειῶν $x=0$, $y=0$, $x+y=8$.
γ) Εἶναι τά ἐσωτερικά σημεῖα τῆς γωνίας μέ κορυφή τό (8,0), πού σχηματίζεται ἀπό τόν ἄξονα Ox καί τήν εὐθεία $x+2y=8$, πού βρίσκεται κάτω ἀπό τόν ἄξονα Ox.
δ) Εἶναι τά σημεῖα τῆς ὀξείας γωνίας μέ κορυφή τό (4,2), πού σχηματίζουν οἱ εὐθεῖες $y=2$ καί $x+y=6$ καί βρίσκεται πάνω ἀπό τήν εὐθεία $y=2$.

ε) Εἶναι τό τρίγωνο, πού σχηματίζουν οἱ εὐθεῖες $y = 6$, $y = x$, $y = -x$.
στ) Εἶναι τό τρίγωνο τῶν εὐθειῶν $y = 0$, $y = x$, $x + y = 5$.
ζ) Εἶναι τά ἐσωτερικά σημεῖα τοῦ τριγώνου τῶν εὐθειῶν $x = 10$, $y = x$, $y = -x$.
η) Εἶναι τό τρίγωνο τῶν εὐθειῶν $x = 0$, $y = 0$, $y = 8 - x$.
θ) Εἶναι ἡ γωνία, πού σχηματίζουν οἱ εὐθεῖες $x + y = 2$, $y = x - 4$, καί ἔχει στό ἐσωτερικό της τόν ἀρνητικό ἡμιάξονα τῶν x.
ι) Εἶναι τό τρίγωνο, πού ὁρίζουν οἱ εὐθεῖες $y = 2x - 1$, $x + 2y = 6$, $y = 5$ ἐκτός ἀπό τά σημεῖα τῆς πλευρᾶς του πάνω στήν $y = 2x - 1$.
ια) Εἶναι τομή τῶν ἡμιεπιπέδων $2x - 5y > 1$, $2x + y > -5$, $x - 2 < 0$ ἐκτός ἀπό τά σημεῖα τῶν ἀκμῶν τους.
ιβ) Εἶναι ἡ τομή τῶν ἡμιεπιπέδων $x - y > 0$, $x - 3y + 3 < 0$, $x + y - 5 > 0$ ἐκτός ἀπό τά σημεῖα τῶν ἀκμῶν τους.

23. Ἄν ἐργαστεῖτε ὅπως στό παράδειγμα 2, βρίσκετε ἕνα πεντάγωνο γιά σύνολο λύσεων τοῦ συστήματος. Κατασκευάζετε ἔπειτα τήν εὐθεία $5x + 3y = 15$ καί βλέπετε μέ παράλληλη μετατόπισή της ὅτι τό ζητούμενο μέγιστο βρίσκεται στήν κορυφή, πού εἶναι τομή τῶν εὐθειῶν $6x + 5y = 30$, $4x + y = 16$, ἑπομένως τό ζητούμενο μέγιστο βρίσκεται στό σημεῖο $\left(\frac{25}{7}, \frac{12}{7}\right)$ (λύση τοῦ συστήματος) καί εἶναι ἴσο μέ 23.

24. Μέ τόν ἴδιο τρόπο βρίσκουμε ὅτι τό μέγιστο βρίσκεται στήν κορυφή (0,5) καί εἶναι ἴσο μέ 15.

25. Τό μέγιστο εἶναι 10 καί βρίσκεται στό σημεῖο (7,3).

26. 100 χάπια τύπου Π καί 80 τύπου Τ.

27. Τό ζητούμενο ἐλάχιστο εἶναι 5 καί βρίσκεται στήν κορυφή (0,5).

28. Θά ἐργαστεῖτε ὅπως στήν ἄσκηση 23. Τό ζητούμενο μέγιστο θά τό βρεῖτε στήν κορυφή τοῦ πενταγώνου, πού εἶναι τομή τῶν εὐθειῶν $5x + 2y = 30$, $5x + 7y = 35$, μέ παράλληλη μετατόπιση τῆς εὐθείας $4x + 5y = 20$. Ἡ κορυφή εἶναι $\left(\frac{28}{5}, 1\right)$ καί τό μέγιστο 274.

29. Νά ἐξετάσετε τί συμβαίνει γιά $x > 3$, ὁπότε θά βρεῖτε σύνολο λύσεων $\{(0,7), (1,5), (2,3), (3,1)\}$.

30. Νά ἐργαστεῖτε ἀνάλογα καί θά βρεῖτε σύνολο λύσεων $\{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (2,0), (2,1), (3,0), (4,0)\}$

31. α) Εἶναι ἡ εὐθεία τῶν σημείων (0,–8), (4,0) β) Εἶναι τά σημεῖα τοῦ ἡμιεπιπέδου μέ ἀκμή τήν εὐθεία $x + y = 10$, πού περιέχει τό O. γ) εἶναι ἡ εὐθεία τῶν σημείων (0,6), (8,0).

32. α) $\left\{\left(7, -\frac{8}{3}\right)\right\}$ β) $\{(5,0)\}$

33. α) $\{(2,0)\}$ β) $\{(-2,1)\}$ γ) $\{(-1,1)\}$

34. α) Εἶναι τά σημεῖα τοῦ τριγώνου, πού σχηματίζουν οἱ εὐθεῖες $x = 0$, $y = 0$ καί $x + y = 10$. β) Εἶναι τό ἐσωτερικό τοῦ τριγώνου, πού σχηματίζουν οἱ εὐθεῖες $x = 0$, $y = 0$, $2x + 5y = 20$. γ) Εἶναι τό ἐσωτερικό τοῦ τριγώνου, πού σχηματίζουν οἱ εὐθεῖες $x = 0$, $y = 0$, $x + 2y + 20 = 0$.

35. Νά λύσετε τό σύστημα, πού προκύπτει γιά $x=2$, $x=-1$. Θά βρεῖτε $\alpha=-1$, $\beta=-2$.

36. Ἄν ἐργαστεῖτε ὅπως προηγουμένως, θά βρεῖτε $p = 6$, $q = -9$.

37. Λύνοντας τό σύστημα θά βρεῖτε $\left(1\frac{1}{2}, -1\right)$.

38. α) Εἶναι ἡ ζώνη, πού ὁρίζουν οἱ εὐθεῖες μέ ἐξισώσεις $x = 0$, $x = 5$.
β) Εἶναι τό ἡμιεπίπεδο, πού περιέχει τό Ο, ἐκτός ἀπό τά σημεῖα τῆς ἀκμῆς του $x+y= 12$ γ) Εἶναι τό ἡμιεπίπεδο, πού δέν περιέχει τό Ο μέ ἀκμή $y = 3x-15$.
δ) Εἶναι ἡ ζώνη τῶν εὐθειῶν $y = -2$ καί $y = 2$.

39. α) Εἶναι τό τετράπλευρο, πού ὁρίζουν οἱ εὐθεῖες $x=0$, $y=0$, $2x+y=10$, $x+2y=10$.
β) Εἶναι τό τρίγωνο, πού ὁρίζουν οἱ εὐθεῖες $x=8$, $y=5$, $y=x+5$.

40. α) $\{(2,3)\}$ β) $\{(5,7)\}$ γ) $\{(4, -2)\}$

41. $R = 4{,}5$, $r = 2{,}5$

42. Ἄν εἶχε x κιλά πορτοκάλια καί χωροῦσε y κιλά κάθε καφάσι, τότε ἀπό τό σύστημα: $63y+1=x$, $67y-63y = 48$ ἔχουμε $x=757$ κιλ. καί $y=12$ καφ.

43. Μέγιστο κέρδος ἔχουμε στό σημεῖο (120, 120) ἤ στό (200,0) ἴσο μέ 120000 δρχ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

1. Ἀρκεῖ νά σχηματίσετε τά ἀντικείμενα ἡμιεπίπεδα.

2. Στήν προέκταση τῆς ΟΚ νά πάρετε σημεῖο Ο', ὥστε Ο'Κ=ΟΚ καί ἔπειτα τόν (Ο',ρ), πάνω στό ἐπίπεδο πού περνάει ἀπό τό Ο' καί εἶναι παράλληλο πρός τό (Ο,ρ)

3. Νά βρεῖτε τά συμμετρικά τῶν κορυφῶν καί νά ἑνώσετε τά ἀντίστοιχα σημεῖα τῶν ἀκμῶν του.

4. α) Ἀφοῦ διαπιστώσετε ὅτι ἔχετε μιά ἀπεικόνιση, θά δεῖτε ὅτι ἀμετάβλητα σημεῖα εἶναι τά σημεῖα τοῦ q. β) Νά φέρετε ἀπό τό Α παράλληλη πρός τήν προβολή του καί νά σκεφτεῖτε τά κάθετα καί πλάγια τμήματα. Ἄν $AB \perp q$, τότε ἡ προβολή του εἶναι σημεῖο.

5. Σέ κάθε σημεῖο Α τοῦ χώρου νά ἀντιστοιχίσετε τό μέσο τῆς ἀποστάσεώς του ἀπό τό q. Τά ἀμετάβλητα σημεῖα εἶναι τά σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου (τό μέσο μηδενικοῦ τμήματος θά εἶναι τό σημεῖο, πού παριστάνει καί τά ἄκρα πού συμπίπτουν). Ἡ εἰκόνα τοῦ ΑΒ εἶναι τό τμῆμα, πού ἑνώνει τά μέσα τῶν βάσεων τοῦ τραπεζίου πού σχηματίζεται.

6. Νά σχηματίσετε τά ἀντικείμενα ἡμιεπίπεδα τῶν ἑδρῶν της.

7. Στήν πρώτη περίπτωση ἡ εὐθεία εἶναι ἄξονας συμμετρίας τοῦ κυκλ. δίσκου. Στή δεύτερη περίπτωση θά βρεῖτε ἕναν ἐφαπτόμενο κυκλικό δίσκο.

8. Ἔχει τρεῖς ἄξονες. Αὐτούς πού ἑνώνουν τίς τομές τῶν διαγωνίων τῶν ἀπέναντι ὀρθογωνίων.

9. Θά σχεδιάσετε τό ἀνάποδο σπιτάκι ὥστε νά ἀκουμπάει στήν ΑΒ.

10. Νά σκεφτεῖτε ὅτι τό συμμετρικό ἐπιπέδου ὡς πρός ἐπίπεδο κάθετο εἶναι ὁ ἑαυτός του.

11. Εἶναι δίεδρη γωνία, πού ἔχει κοινή ἕδρα πάνω στό ἐπίπεδο συμμετρίας.

12. Π.χ. ἕνα ζάρι, ἕνα κυλινδρικό κουτί γάλα,...

13. Εἶναι ἕνα ἴδιο σχῆμα μέ κοινό μέρος τό ΑΒΓΔ.

14. Συμμετρία ὡς πρός ἐπίπεδο.

15. Νά βρεῖτε πρῶτα τό $|\overrightarrow{OM_1}|$ ἀπό τό τρίγωνο OBM_1, καί ἔπειτα τό $|\overrightarrow{OM}|$ ἀπό τό OM_1M.

16. Σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό τά $\kappa(\lambda\vec{\alpha})$ καί $(\kappa\lambda)\vec{\alpha}$ ἔχουν ἴδιο μέτρο, $|\kappa\lambda|$ φορές τό μέτρο τοῦ $\vec{\alpha}$. Ἔχουν ἐπίσης τήν ἴδια διεύθυνση καί φορά, ἐπειδή εἶναι ὁμόρροπα ἤ ἀντίρροπα μέ τό $\vec{\alpha}$, ἄν κ,λ εἶναι ὁμόσημοι ἤ ἑτερόσημοι. Ἄρα εἶναι ἴσα.

17. Νά πάρετε τά διαδοχικά διανύσματα $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$ καί $\overrightarrow{AB} = \vec{\beta}$. Ἄν $\overrightarrow{O\Gamma} = \kappa\,\vec{\alpha}$ καί $\overrightarrow{O\Delta} = \kappa\,\overrightarrow{OB} = \kappa\,(\vec{\alpha}+\vec{\beta})$, θά εἶναι σύμφωνα μέ τό θεώρημα τοῦ Θαλῆ ΑΒ//ΓΔ. Ἀπό τά ὅμοια τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΓΔ θά ἔχετε $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = \kappa\,\vec{\beta}$ κ.λ.π.

18. α) $\overrightarrow{AH}$ β) $\overrightarrow{AH}$

19. Τά δύο ἀθροίσματα θά τά βρεῖτε ἴσα μέ $\overrightarrow{AH}$ (κανόνας παραλληλογράμμου).

20. Ἀρκεῖ νά ἀποδείξετε ὅτι στό τρίγωνο ΑΑ'Α'' εἶναι $\overrightarrow{AA''} = 2\overrightarrow{K\Lambda}$ (σταθερό).

21. Ἀρκεῖ νά βρεῖτε τήν εἰκόνα τῆς κορυφῆς καί τίς εἰκόνες τῶν πλευρῶν της.

22. Πρέπει πρῶτα νά κατασκευάσετε ἕνα διάνυσμα $\vec{\alpha}$ μέ ἀρχή ὁποιοδήποτε σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου, πού νά σχηματίζει μέ τήν προβολή του γωνία 45° καί ἔπειτα ἀπό τά Α,Β,Γ νά φέρετε παράλληλες πρός τό φορέα τοῦ $\vec{\alpha}$ κ.λπ.

23. α) i) Ἄν $\vec{\alpha}$ καί $\vec{\beta}$ εἶναι ὁμόρροπα, εἶναι μεταφορά κατά διάνυσμα $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ μέ μέτρο $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$, ii) Ἄν εἶναι ἀντίρροπα, ἔχουμε μεταφορά κατά διάνυσμα $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ ἀλλά $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = ||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}||$ β) Μεταφορά κατά διάνυσμα $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ μέ $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| < |\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$.

24. Τό $\overrightarrow{AH}$ πού εἶναι ἴσο μέ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{AE}$.

25. α) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BZ} + \overrightarrow{ZH}$ β) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{\Delta\Theta} + \overrightarrow{\Theta H}$ γ) συνεχίστε.

26. Στή μεταφορά κατά $\overrightarrow{\Delta K}$ βρίσκεται στή θέση ΑΒΛΗ· νά συνεχίσετε.

27. Ἡ εἰκόνα ΣΒΑΤ ἀντιστοιχεῖ στή μεταφορά κατά διάνυσμα $\overrightarrow{P\Sigma}$ β) $\overrightarrow{\Pi A} + \overrightarrow{AB}$ κλπ.

28. Στό ΒΓΖΛ. Νά συνεχίσετε...

29. Ὁ ἑαυτός του.

30. Πάνω στήν ΚΑ νά πάρετε σημεῖο Α' τέτοιο, ὥστε $KA' = \frac{2}{3}$ ΚΑ. Νά συνεχίσετε.

31. Νά κατασκευάσετε τό ὁμοιόθετο ὅπως προηγουμένως. Τό ἐμβαδό εἶναι 400 cm².

32. Οἱ δύο κύβοι θά εἶναι ὅμοια σχήματα μέ λόγο ὁμοιότητας 3. Ἑπομένως ἡ ἐπιφάνειά του θά πολλαπλασιαστεῖ μέ 3^2 καί ὁ ὄγκος του μέ 3^3.

33. Γιά τήν ἀκριβή θέση τοῦ Ο ἑνώνουμε τίς κορυφές Α,Β μέ τίς ἀντίστοιχες τῶν τριγώνων. Μετά μετρώντας τίς ἀποστάσεις ΟΑ = 4,5 cm, ΟΑ' = 9 cm βρίσκετε τούς λόγους 2 καί $\frac{1}{2}$. Ἡ διαφορά ὑπάρχει στή θέση τοῦ Ο.

34. Ἀρκεῖ νά βρεῖτε τό συμμετρικό μόνο τοῦ σημείου Α.

35. Νά παρατηρήσετε ὅτι $|\vec{\alpha}| = \alpha$ (κύβος).

36. Νά φέρετε ἀπό τίς 6 κορυφές τοῦ ἑξαγώνου καί ἀπό τό κέντρο τοῦ κύκλου τά κάθετα πρός τό ἐπίπεδο διανύσματα ἴσα μέ τό $\vec{\delta}$.

37. Ἄν Ο' εἶναι τό μέσο τῆς ΣΟ, νά παρατηρήσετε ὅτι Ο'Α' καί ΟΑ εἶναι τομές παράλληλων ἐπιπέδων ἀπό τό ἐπίπεδο ΑΣΟ καί ὅτι Ο'Α'//ΟΑ κ.λ.π.

38. $\frac{E_1}{E_2} = \frac{1}{4}$, $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{8}$.

39. 672 cm³.

40. Ἐπειδή τό q εἶναι ἐπίπεδο συμμετρίας τῶν Α καί Α', γιά κάθε σημεῖο Μ τοῦ ἐπιπέδου εἶναι ΜΑ = ΜΑ', ἑπομένως γιά κάθε σημεῖο Μ∈q ἔχουμε ΜΑ+ΜΒ=ΜΑ'+ΜΒ

Πότε ὅμως τό ΒΜ + ΜΑ' εἶναι μικρότερο ἀπό τό ΝΑ' + ΝΒ γιά κάθε Ν∈q; ('Η Α'Β τέμνει πάντα τό q).

41. Νά βρεῖτε τό συμμετρικό ὁποιουδήποτε σημείου τῶν $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ὡς πρός τό ἐπίπεδό τους. 'Ανάλογα ἐργάζεστε γιά τίς ἄλλες ἐρωτήσεις.

42. Νά σκεφτεῖτε ὅτι τά ὁμόλογα εὐθ. τμήματα Α'Β' καί Α'Γ' πρέπει νά εἶναι παράλληλα πρός τά ΑΒ καί ΑΓ καί νά θυμηθεῖτε τό εὐκλείδειο αἴτημα.

43. Παρατηρῆστε ὅτι $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_2B_2}$ καί $\overrightarrow{A_1\Gamma_1} = \overrightarrow{A_2\Gamma_2}$. Τί συμπεραίνετε ἀπό τά παραλληλόγραμμα $A_1B_1B_2A_2$ καί $A_1A_2\Gamma_2\Gamma_1$;

44. Ἄν M_1, M_1' εἶναι δύο ἄλλες θέσεις τῶν Μ,Μ', νά παρατηρήσετε ὅτι πρέπει $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{M_1M'_1}$, ὁπότε $MM'M_1'M$ παραλληλόγραμμο κ.λ.π.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10

1. $\alpha = 4$ cm 2. $\alpha = 8{,}625$ cm 3. α) $E_{o\lambda} = 10$ cm² 4. β) $E_{o\lambda} = 142$cm²

5. α) Ἄν οἱ διαγώνιοι τοῦ ρόμβου ΑΒΓΔ τέμνονται στό Ο, νά ὑπολογίσετε ἀπό τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΟΒ ὅτι $(AB)^2 = 14{,}0625 \Rightarrow (AB) = 3{,}75$ cm β) $E_\pi = 105$ cm² καί γ) $E_{o\lambda} = 132$ cm². (Τό ἐμβαδό ρόμβου μέ διαγωνίους δ_1, δ_2 εἶναι $\frac{\delta_1 . \delta_2}{2}$).

6. α) 'Επειδή ἡ πλευρά κανονικοῦ ἑξαγώνου εἶναι ἴση μέ τήν ἀκτίνα του, μέ τό πυθαγόρειο θεώρημα βρίσκετε $\alpha = 4$ cm καί $E_\beta = 24\sqrt{3}$ cm² $\simeq 41{,}52$ cm² ($\sqrt{3} \simeq 1{,}73$). β) $E_\pi = 288$ cm² καί $E_{o\lambda} = 371{,}04$ cm².

7. $E_{o\lambda} \simeq 6{,}5312$ m² 8. $E_\pi \simeq 20{,}096$ m². 9. $\upsilon \simeq 1{,}26$ m

10. Κάθε σωλήνας ἔχει $E_\pi = 1{,}0048$ m². Θά πληρώσουμε 9600 δρχ.

11. Χρειαζόμαστε γιά κάθε δοχεῖο 47,1 m² καί γιά τά 1000 δοχεῖα μαζί μέ τήν ἀπώλεια 10% 0,052 km² (ἀφοῦ ἀπό τά 100m² χρησιμοποιοῦμε μόνο 90 m²).

12. $V = 0{,}72$ m³ 13. 2896,74 gr. 14. $V = 8$ cm³. 15. $V = 64$ m³

16. Τό ἐμβαδό τοῦ τριγώνου 0,0936 m² $V = 0{,}29952$ m³ περίπου 300 dm³.

17. 'Υπολογίζουμε πρῶτα τήν πλευρά τοῦ τετραγώνου ἀπό τό Επ, $\alpha = 0{,}62$ m ὁπότε $V = 0{,}53816$ m³.

18. 'Από $E_\pi = 5.\alpha.\upsilon \Rightarrow \upsilon = 0{,}8$ m, ὅπου α ἡ πλευρά τοῦ κανονικοῦ πενταγώνου.

19. Βρίσκουμε πρῶτα τόν ὄγκο τοῦ νεροῦ 166,95 m³ ἤ 1669,5 ἑκατόλιτρα. καί ἔπειτα 278,25 λεπτά ἤ περίπου 4,6 ὧρες.

20. Νά ἐργαστεῖτε μέ τήν ἴδια μονάδα μετρήσεως καί, ἀφοῦ ἀφαιρέσετε τό 1/4 τοῦ ὄγκου, θά βρεῖτε τό ζητούμενο πάχος ἴσο μέ 40 cm.

21. 50, 24 cm³ 22. $V = 12\,308{,}8$ λίτρα. 23. $R = 40$ cm περίπου.

24. $E_\beta = 6{,}1$ mm². 25. $R = 12{,}1$ περίπου ὁπότε $V = 2758{,}3$ cm³ περίπου.

26. Βρίσκουμε πρῶτα τό ἀπόστημα $h \simeq 12{,}36$ m, $E_{o\lambda} = 184{,}32$ m².

27. α) Βρίσκουμε πρῶτα τό μῆκος τῆς διαγωνίου τοῦ τετραγώνου, πού τό μισό της εἶναι περίπου 527,5 m, καί ἔπειτα τήν ἀκμή 693,36 m. β) Μέ τό πυθαγόρειο θεώρημα βρίσκουμε τό ἀπόστημα $h = 584{,}48$ m. γ) $E_\pi = 0{,}872$ km² περίπου.

28. 'Από τήν παράπλευρη ἐπιφάνεια νά βρεῖτε τήν πλευρά α τοῦ τριγώνου. Τό μισό της εἶναι περίπου 1,3. Ἔπειτα μέ τό πυθαγόρειο θεώρημα ἡ ἀκμή βρίσκεται 4 m περίπου.

29. $E_\pi = 26{,}25$ m² 30. Βρίσκετε πρῶτα $\lambda = 10{,}06$ mm καί ἔπειτα $E_{o\lambda} = 205{,}74$mm²

31. Βρίσκουμε πρῶτα τήν ἀκτίνα $R \simeq 0{,}9$ m μέ προσέγγιση καί ἔπειτα $E_\beta = 2{,}54$ m³

32. Βρίσκουμε πρῶτα τή γενέτειρα τοῦ κώνου $\lambda = 3{,}6m$ καί $E = 98\ m^2$ περίπου.

33. Στό σχηματιζόμενο ὀρθογώνιο τρίγωνο βρίσκετε

$4 = \lambda\eta\mu\varphi \Rightarrow \lambda = 7{,}4$ cm καί ἔπειτα $E_{o\lambda} = 143{,}184\ cm^2$.

34. $V = 144\ m^3$ 35. $V = 0{,}2448\ m^3$ 36. $\upsilon = 3{,}93$ m καί $V \simeq 7\ m^3$.

37. $V = \frac{46{,}71}{3}\ m^3$. 38. $E_\beta = 4{,}5\ m^2$.

39. Νά βρεῖτε τή διαγώνιο τοῦ τετραγώνου. Τό μισό της τό βρίσκετε 4,23 m. Ἔπειτα $\upsilon = 8{,}12$ m καί $V = 97{,}44\ m^3$.

40. α) $\rho = 0{,}99$ m β) $\upsilon = 1{,}50$ m γ) $V = 1{,}53\ m^3$

41. 5 m περίπου.

42. α) Ἄν $V = \frac{1}{3}\pi\rho^2 \cdot \upsilon \Rightarrow V' = \frac{1}{3}\pi\rho^2(2\upsilon) = 2 \cdot V$ β) $V' = 4V$ γ) $V' = 8 \cdot V$

43. Χρησιμοποιώντας τόν τύπο $V = \frac{1}{3}\pi\rho^2\upsilon$ θά βρεῖτε ὅτι $\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2$

44. $E = 78{,}5\ cm^2$ $V = 65{,}41\ cm^3$.

45. $157{,}08\ cm^2$ 46. 21120 δρχ. 47. $V_{\kappa\upsilon\beta} - V_{\sigma\varphi} = 476{,}7\ m^3$.

48. $R \simeq 0{,}42$ m 49. $R \simeq 3m \Rightarrow V = 113{,}04 m^3$ 50. $R = 3$cm καί $E_{\sigma\varphi} = 113{,}04\ cm^2$

51. Βρίσκουμε ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας εἶναι $42{,}5\ dm^2$. Μετά μέ προσέγγιση βρίσκουμε $R = 1{,}83$ dm καί ἔπειτα $V = 25{,}65\ dm^3$.

52. $\frac{\pi}{6}$ 53. $150\ m^2$ 54. Ἀπό $4\alpha^2 = 0{,}0576 \Rightarrow \alpha = 0{,}12$ m.

55. Ἄν 8 m τό ὕψος, τότε $E_\pi = 128\ m^2$, ἄν $\upsilon = 5$ τότε $E_\pi = 110\ m^2$, ἄν $\upsilon = 3 \Rightarrow E_\pi = 78\ m^2$.

56. 9 m 57. $21{,}952\ m^3$ 58. $0{,}768\ m^3$

59. Βρίσκουμε πρῶτα τό ἀπόστημα μέ προσέγγιση $h = 4{,}06$ m καί ἔπειτα $E_\pi = 25{,}578\ m^2$. 60. $1{,}05\ m^3$.

61. Ἄν δ ἡ διαγώνιος τῆς βάσεως, γνωρίζετε ὅτι $\frac{\delta \cdot \delta}{2} = 4{,}84 \Rightarrow \delta \simeq 3{,}11$m καί $\delta/2 = 1{,}55$ καί μέ τό πυθαγόρειο θεώρημα βρίσκουμε μέ προσέγγιση $\upsilon = 5$ m

62. $E_\kappa = 11{,}4075\ m^2$ 63. α) $\rho \simeq 0{,}15$ m, β) $V \simeq 0{,}21\ m^3$.

64. α) $\rho \simeq 0{,}33$m β) $V \simeq 1{,}36\ m^3$.

65. V στέρν. : V κουβ. = 675 φορές.

66. Βρίσκουμε πρῶτα τή γενέτειρα $\lambda = 5$ cm. $E_{o\lambda} = 75{,}36\ cm^2$, $V = 37{,}68\ cm^3$.

67. $262\ cm^3$. 68. $R = 0{,}39$ m (μέ προσέγγιση) $\Rightarrow E_\sigma = 1{,}91\ m^2$.

69. $E_\sigma = 129{,}8\ cm^2$.

70. Βρίσκουμε πρῶτα $E_\pi = 35{,}84\ m^2$ καί ἔπειτα 9318,4 δρχ.

71. Ἡ χωρητικότητα τῆς στέρνας εἶναι τώρα $82{,}11\ m^3$ ἤ 821,10 ἑκατόλιτρα. Συνεπῶς γιά νά ἔχει χωρητικότητα 851,10 ἑκατόλιτρα βρίσκετε ὅτι τό μῆκος της πρέπει νά γίνει περίπου 8,81 m, δηλαδή νά αὐξηθεῖ κατά 0,31 m.

72. Βρίσκετε πρῶτα τό ἀπόστημα περίπου 6,4 m καί ἔπειτα $E_\pi = 46{,}08\ m^2$.

73. α) Ἄν x εἶναι τό μῆκος μιᾶς διαγωνίου, τότε τό ἐμβαδό τοῦ ρόμβου θά εἶναι $\frac{x^2}{4}$, ἀπ' ὅπου βρίσκετε μήκη διαγωνίων 8 dm, 4 dm^2 β) Βρίσκετε τό μῆκος τῆς πλευρᾶς τοῦ ρόμβου $\alpha \simeq 4{,}47$ dm. Τό ἐμβαδό τοῦ ρόμβου εἶναι 16 dm^2 καί μία διάμετρος τοῦ κυκλ. δίσκου εἶναι τό ὕψος τοῦ ρόμβου ἀπ' ὅπου $\rho = 1{,}78$dm καί

$E = 10\ dm^2$.

74. $21{,}3\ m^2$ (μέ προσέγγιση) 75. 8910 δρχ. (μέ προσέγγιση)

76. α) $0{,}05\ m^3$ β) $0{,}06\ m^3$

77. Ἡ πλευρά τοῦ κύβου μέ προσέγγιση εἶναι $0{,}054 \Rightarrow E_{\sigma} \simeq 0{,}0091\ m^2$

78. $1{,}3\ cm^3$ μέ προσέγγιση

79. Τό ἐμβαδό καί τῶν δύο ἐπιφανειῶν εἶναι $2{,}512\ m^2 \Rightarrow$ βάρος σημαδούρας $= 12{,}56$ κιλά.

80. V κώνου $= 157\ m^3$ $V_{κυλ} = 471\ m^3$ Συνεπῶς ὁ συνολικός ὄγκος $628\ m^3$ ἤ 6280 ἑκατόλιτρα (hl).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11

1. Ποσοτικές ἰδιότητες εἶναι ἐκεῖνες, πού μποροῦν νά μετρηθοῦν (ὅπως π.χ. ἡ πρώτη).
2. Ὄχι, γιατί τό δεῖγμα δέν εἶναι «ἀντιπροσωπευτικό».
3. Νά χωρίσετε τόν ἀριθμό 15 σέ μέρη ἀνάλογα πρός τούς ἀριθμούς 32 καί 28. (8 ἀγόρια – 7 κορίτσια).
4. Νά ἐργασθεῖτε ὅπως στήν προηγούμενη ἄσκηση. (Οἱ 75 σωλῆνες θά ἔχουν μῆκος μεγαλύτερο ἀπό 50 cm, οἱ 225 μικρότερο καί οἱ ὑπόλοιποι θά εἶναι ἀκριβῶς 50 cm).
5. Ὁ γ΄ τρόπος
6. Νά κάνετε πρῶτα διαλογή τῶν εἰδικοτήτων καί κατόπιν πίνακα μέ τρεῖς στῆλες (εἰδικότητα, συχνότητα, σχετική συχνότητα).
7. Νά κάνετε πρῶτα διαλογή καί κατόπιν πίνακα μέ δύο στῆλες.
8. Γιά τόν πίνακα νά ἐργασθεῖτε ὅπως στήν προηγούμενη ἄσκηση. Γιά τό πολύγωνο συχνοτήτων, νά ἐργασθεῖτε ὅπως στήν § 11.7.
9. Νά πάρετε πρώτη κλάση 710-760 ὥρ. καί τελευταία 1060-1110 ὥρ.
10. Νά ἐργασθεῖτε ὅπως στό ραβδόγραμμα τῆς § 11.7.
11. Νά κάνετε πρῶτα διαλογή τῶν χρωμάτων καί νά συνεχίσετε ὅπως στήν προηγούμενη ἄσκηση.
12. Νά πάρετε κλάσεις πλάτους 40 δρχ. μέ πρώτη τήν 400–440 δρχ. Τό ἱστόγραμμα θά γίνει ὅπως στήν § 11.9.
13. Νά πάρετε κλάσεις πλάτους 5 ἐτῶν.
14. Πλάτος κλάσεων 10 ἐπιτυχίες. Ὁ πίνακας νά ἔχει 3 στῆλες.
15. Νά κάνετε πρῶτα πίνακα σχετικῶν συχνοτήτων. Κατόπιν νά ἐργασθεῖτε ὅπως στό παράδ. 2 μετά τήν §11.9.
16. Ξοδεύει $\frac{108°}{360°} \cdot 14400 = 4320$ δρχ.
17. Νά ἐργασθεῖτε ὅπως στό παράδ. 3 μετά τήν § 11.9.
18. Νά συμπληρώσετε πρῶτα τή στήλη «διαμερίσματα» (ἡ τιμή 3 ἔχει συχνότητα $13–2–4 = 7$) καί κατόπιν νά συνεχίσετε ὅπως στήν προηγούμενη ἄσκηση.
20. Νά ἐφαρμόσετε τόν τύπο 1 τῆς § 11.10 ($\overline{x} = 21{,}5$)
21. $\overline{x} = 2{,}33$
22. Νά ὀνομάσετε x τό μικρότερο ἀπό τούς δύο (5 καί 10).
23. Νά ὀνομάσετε x τό μικρότερο (17, 18, 19, 20, 21).
24. Νά βρεῖτε τούς ἀριθμητικούς μέσους τῶν τριῶν βαθμολογιῶν καί νά τούς συγκρίνετε. (Τό βραβεῖο θά τό πάρει ὁ Α΄).

25. Νά ἐφαρμόσετε τόν τύπο 2 τῆς § 11.10 ($\bar{x} = 3{,}566$).
26. Νά πάρετε σάν τιμές τῆς μεταβλητῆς τά κέντρα τῶν κλάσεων καί νά συνεχίσετε ὅπως στήν προηγούμενη ἄσκηση ($\bar{x} = 396{,}25$).
27. Νά ἐφαρμόσετε τόν τύπο 3 τῆς § 11.12 ($s = 2{,}309$).
28. Νά ἐφαρμόσετε τόν τύπο 4 τῆς § 11.12 ($s = 1{,}073$).
29. Νά πάρετε σάν τιμές τῆς μεταβλητῆς τά κέντρα τῶν κλάσεων ($s = 11{,}079$).
30. Νά ἐργασθεῖτε ὅπως στήν ἄσκηση 6.
31. Νά ἐργασθεῖτε ὅπως στό παράδ. 2 μετά τήν § 11.9.
32. Νά βρεῖτε τούς ἀριθμητικούς μέσους τῶν ἐξόδων καί νά τούς συγκρίνετε. (Πιό σπάταλος εἶναι ὁ Β).
33. Οἱ ἀνειδίκευτοι ἔχουν ἡμερομίσθιο 380 δρχ.
34. Νά ἐργασθεῖτε ὅπως στήν ἄσκηση 29 ($\bar{x} = 859{,}73$, $s = 68{,}47$).
36. Νά ἐργασθεῖτε ὅπως στό παράδ. 3 μετά τήν § 11.9.
37. Νά διατάξετε τίς θερμοκρασίες κατά αὔξουσα τάξη (διάμεσος = 23, $s = 3{,}56$).
38. Νά κάνετε πρῶτα πίνακα συχνοτήτων ($\bar{x} = 1{,}15$, $s = 1{,}62$)
39. Α΄. $\bar{x} = 6$, διαμ. $= 5$, $s = 1{,}9$ Β΄. $\bar{x} = 6$, διαμ. $= 5$, $s = 2{,}64$.
40. α) Νά πάρετε κλάσεις πλάτους 5 cm μέ πρώτη κλάση 145-150.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12

1. Οἱ δυνατές περιπτώσεις εἶναι 12. (Κ,1), (Κ,2),...
2. Νά κάνετε δενδροδιάγραμμα παρόμοιο μέ τό δενδροδιάγραμμα τοῦ πειράματος π_2^* τοῦ παραδ. 2 μετά τήν § 12.8
3. Νά ἐργασθεῖτε ὅπως στό πείραμα π_3^* τοῦ παραδ. 2 μετά τήν §12.8
5. Νά βρεῖτε πρῶτα τό δειγματικό χῶρο τοῦ πειράματος $A \cap B = \{\kappa\kappa\}$, $A \cup B = \Omega$, $A - B = \{\Gamma\Gamma\}$
6. $A' = \{K\Gamma, \Gamma K\}$, $B' = \{\Gamma\Gamma\}$, $(A \cap B)' = \{K\Gamma, \Gamma K, \Gamma\Gamma\}$, $A' \cup B' = \{K\Gamma, \Gamma K, \Gamma\Gamma\}$.
7. $A' - B = \{\alpha\kappa\}$, $A - B' = \phi$, $B - A' = \phi$.
8. $(A' - B) + (B - A') = \{\alpha\kappa\}$, $(A' \cup B)' = \{\alpha\alpha\}$, $A \cap B' = \{\alpha\alpha\}$.
9. $A \cap B \cap \Gamma = \{3\}$, $A \cup B \cup \Gamma = (\{1,2,3,4,5\}$, $(A \cap B) \cup \Gamma = \{1,2,3,4,5\}$.
10. $A' \cap B' \cap \Gamma' = \{6\}$, $(A \cup B) \cap \Gamma = \{1,2,3\}$, $(A \cup B \cup \Gamma)' = \{6\}$, $(A \cap \Gamma) \cup (B \cap \Gamma) = \{1,2,3\}$
11. Νά ἐφαρμόσετε τόν τύπο 1 τῆς § 12.10. $\left[P(A) = \frac{1}{2},\ P(B) = \frac{3}{10}\right]$
12. $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{13}$, $P(\Gamma) = \frac{1}{2}$
13. Νά βρεῖτε πρῶτα ποιά εἶναι τά ἐνδεχόμενα $\left[P(A \cap B) = \frac{1}{52},\right.$ $\left.P(B \cap \Gamma) = \frac{1}{26},\ P(\Gamma') = \frac{1}{2},\ P(B - \Gamma) = \frac{1}{26}\right]$.
14. $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{2}$
15. Ὁ δειγματικός χῶρος δίνεται στό παράδ. 1 μετά τήν § 12.11. $\left[P(E) = \frac{1}{4},\ P(Z) = \frac{1}{9},\ P(H) = \frac{1}{9}\right]$.
16. Νά ἐφαρμόσετε τόν τύπο 2 τῆς § 12.11. $\left[P(\kappa) = \frac{5}{6}\right]$.

17. $P(A) = \frac{12}{31}$, $P(B) = \frac{68}{93}$.

18. $P(A) = \frac{2}{7}$, $P(B) = \frac{23}{35}$.

19. Ὄχι.

20. Ὁ δειγμ. χῶρος δίνεται στό πείραμα π_3 τοῦ παραδ. 2 μετά τήν § 12.8.
$\left[P(A) = \frac{3}{8}, \quad P(B) = \frac{7}{8}, \quad P(\Delta) = \frac{1}{2}\right]$.

21. $A = A_1 + A_2$, ὅπου A_1 = καρρό καί A_2 = σπαθί. Τό ἴδιο μέ τό Β. Κατόπιν νά ἐφαρμόσετε τόν τύπο 3 τῆς § 12.12.
$\left[P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{2}{13}\right]$.

22. $P(\Gamma) = \frac{4}{9}$.

23. Ἀπό τό πολύγωνο συχνοτήτων νά βρεῖτε πόσες οἰκογένειες δέν ἔχουν κανένα παιδί, πόσες ἔχουν ἕνα,...
$\left[P(A) = \frac{12}{19}, \quad P(B) = \frac{4}{19}\right]$.

24. Νά συγκρίνετε τό P(AB) μέ τό γινόμενο P(A) . P(B).

25. $A = A_1 . A_2$, ὅπου A_1 = ὁ πρῶτος βῶλος κόκκινος καί A_2 = ὁ δεύτερος βῶλος κόκκινος. $\left[P(A) = \frac{1}{4}\right]$.

26. Οἱ δύο κληρώσεις εἶναι ἐπαναλήψεις τοῦ ἴδιου πειράματος. Ἑπομένως τά ἀποτελέσματα τῶν κληρώσεων εἶναι ἀνεξάρτητα ἐνδεχόμενα $\left[P(A) = \frac{1}{400}\right]$.

27. Κάθε ἕνα ἀπό τά ἐνδεχόμενα Α καί Β εἶναι γινόμενο δύο ἀνεξάρτητων ἐνδεχομένων.
$\left[P(A) = \frac{1}{16}, \ P(B) = \frac{1}{169}\right]$.

28. Νά ἐργασθεῖτε ὅπως στήν ἄσκηση 24.

29. Νά βρεῖτε μέ δενδροδιάγραμμα τό δειγμ. χῶρο. Κατόπιν νά ἐργασθεῖτε ὅπως στό παράδ. 3 μετά τήν § 12.15 (Εἶναι πλήρως ἀνεξάρτητα).

30. Νά ἐργασθεῖτε ὅπως στήν προηγούμενη ἄσκηση.

31. Νά κάνετε δενδροδιάγραμμα (16 περιπτώσεις).

32. $P(A) = \frac{11}{16}$, $P(B) = \frac{11}{16}$.

33. Ἡ πιθανότητα εἶναι $\frac{3}{200}$.

34. $A = A_1 . A_2 . A_3$, ὅπου A_1 = πρώτη ἔνδειξη ἄρτια, A_2 = δεύτερη ἔνδειξη ἄρτια, A_3 = τρίτη ἔνδειξη μεγαλύτερη τοῦ 4 $\left[P(A) = \frac{1}{12}\right]$.

35. A = (ἄθροισμα ἐνδείξεων 9) + (ἄθροισμα ἐνδείξεων 10) + (ἄθροισμα ἐνδείξεων 11) + (ἄθροισμα ἐνδείξεων 12) $\left[P(A) = \frac{5}{18}\right]$.

36. Μέ δενδροδιάγραμμα νά βρεῖτε τό δειγμ. χῶρο καί νά συνεχίσετε ὅπως στήν ἄσκηση 24. (Τά ἐνδεχόμενα δέν εἶναι ἀνεξάρτητα).

37. $A = A_1 + A_2$, ὅπου A_1 = πρῶτο χαρτί ἄσσος καί δεύτερο ρήγας καί A_2 = πρῶτο χαρτί ρήγας καί δεύτερο ἄσσος $\left[P(A) = \frac{2}{169}\right]$.

38. Νά ἐργασθεῖτε ὅπως στήν προηγούμενη ἄσκηση. $\left[P(A) = \frac{37}{72}\right]$.

39. $A = A_1 . A_2 . A_3 . A_4 . A_5$, ὅπου A_1 = ἡ πρώτη ἔνδειξη Κ, A_2 = ἡ δεύτερη ἔνδειξη κ,... $\left\{P(A) = \frac{1}{32}\right\}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13

1. 'Ο 6ος εἶναι 15, ὁ 16ος 120 καί ὁ 26ος 325.
2. Οἱ ὅροι εἶναι: 1, 1,5, 2, 2,5, 3
3. Νά ἐφαρμόσετε τόν τύπο τῆς § 13.2. ('Ο 15ος εἶναι −13 καί ὁ 25ος εἶναι −28).
4. Οἱ ὅροι εἶναι : $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4.
5. Νά ἐφαρμόσετε τόν τύπο τῆς § 13.3. $\left(\text{'Ο 6ος εἶναι } -1 \text{ καί ὁ 8ος } -\frac{1}{9}\right)$.
6. 'Η α' εἶναι ἀριθμητική πρόοδος καί ἡ γ'. γεωμετρική.
7. Νά ἐργασθεῖτε ὅπως καί στή γραφική παράσταση τῆς $f(x) = 2^x$ (§13.4)
α) 15,59 β) 1,55 γ) 1,53 δ) 2,3.
8. α) 17,78 , 2,82 , 4. β) 1,36 , 1,84, 0,43, 1,39.
9. $\alpha = 41$ $\beta = 1{,}57$
10. $\alpha = 5{,}73$ $\beta = 16{,}36$
11. $\alpha = 10{,}76$ $\beta = 40{,}37$
12. Νά ἐργασθεῖτε ὅπως καί στήν § 13.7 γιά τίς $f(x) = 2^x$ καί $f(x) = 10^x$.
13. Νά ἐργασθεῖτε ὅπως καί στό ραβδόγραμμα τῆς § 13.7.
14. Νά κάνετε τό πολύγωνο σέ λογαριθμικό σύστημα ἀξόνων.
15. α) 1,3,5,7,9,... β) Νά ἐξετάσετε ἄν τό πηλίκο τῶν διαδοχικῶν ὅρων εἶναι σταθερό.
16. α) Γεωμετρική πρόοδος μέ λόγο 4. γ) 'Αριθμητική πρόοδος μέ λόγο 1.
17. Νά ἐργασθεῖτε ὅπως στήν ἄσκηση 7.
18. α) $f(\nu) = \frac{1}{\nu^2}$ β) $f(\nu) = (-1)^\nu$
19. α) Νά συγκρίνετε τίς μονάδες τῶν δύο κλιμάκων.
β) $\sqrt{5{,}2} = 2{,}28$, $\sqrt{8} = 2{,}83$, $(2{,}4)^2 = 5{,}75$, $(5{,}1)^2 = 26$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 14

1. Διάβασε Α, Διάβασε Β, Διάβασε Γ. 'Υπολόγισε Α+Β+Γ. 'Υπολόγισε Α·Β·Γ. Τύπωσε Α+Β+Γ. Τύπωσε Α·Β·Γ Τέλος.
2. Διάβασε α,β. Διάβασε κ,λ,μ. 'Υπολόγισε $y_1 = \alpha\kappa + \beta$, $y_2 = \alpha\lambda + \beta$, $y_3 = \alpha\mu + \beta$. Τύπωσε y_1, y_2, y_3. Τέλος.
3. Διάβασε ΟΝΟΜ, ΒΑΘΜΟΣ. Σύγκρινε τό βαθμό μέ 15.

4. Διάβασε Α,Β,Γ. Σύγκρινε Α μέ Β, Α μέ Γ, Β μέ Γ.

5. Διάβασε Α, Β. Σύγκρινε τό Α μέ τό Β. Ὑπολόγισε $X=\frac{B}{A}$.

6. Διάβασε Α, Β. Διάβασε Γ. Ὑπολόγισε Α+Β. Ὑπολόγισε Α+Γ. Σύγκρινε Α+Β μέ Α+Γ.

7. Διάβασε β,υ. Ὑπολόγισε $E=\frac{\beta\cdot\upsilon}{2}$. Τύπωσε Ε.

Πίνακας τῶν τετραγώνων

καί τῶν τετραγωνικῶν ριζῶν τῶν ἀριθμῶν 1 μέχρι 100.

ΑΡΙΘΜΟΣ x	x^2	$\sqrt{x}$
1	1	1,000
2	4	1,414
3	9	1,732
4	16	2,000
5	25	2,236
6	36	2,450
7	49	2,646
8	64	2,828
9	81	3,000
10	100	3,162
11	121	3,317
12	144	3.464
13	169	3,606
14	196	3,742
15	225	3,873
16	256	4,000
17	289	4,123
18	324	4,243
19	361	4,359
20	400	4,472
21	441	4,583
22	484	4,690
23	529	4,796
24	576	4,899
25	625	5,000
26	676	5,099
27	729	5,196
28	784	5,292
29	841	5,385
30	900	5,477
31	961	5,568
32	1 024	5,657
33	1 089	5,745
34	1 156	5,831
35	1 225	5,916
36	1 296	6,000
37	1 369	6,083
38	1 444	6,164
39	1 521	6,245
40	1 600	6,325
41	1 681	6,403
42	1 761	6,481
43	1 849	6,507
44	1 936	6,633
45	2 025	6,708
46	2 116	6,782
47	2 209	6,856
48	2 304	6,928
49	2 401	7,000
50	2 500	7,071

ΑΡΙΘΜΟΣ x	x^2	$\sqrt{x}$
51	2 601	7,141
52	2 704	7,211
53	2 809	7,280
54	2 916	7,349
55	3 025	7,416
56	3 136	7,483
57	3 249	7,550
58	3 364	7,616
59	3 481	7,681
60	3 600	7,746
61	3 721	7,810
62	3 844	7,874
63	3 969	7,937
64	4 096	8,000
65	4 225	8,062
66	4 356	8,124
67	4 489	8,185
68	4 624	8,246
69	4 761	8,307
70	4 900	8,367
71	5 041	8,426
72	5 184	8,485
73	5 329	8,544
74	5 476	8,602
75	5 625	8,660
76	5 776	8,718
77	5 929	8,775
78	6 084	8,832
79	6 241	8,888
80	6 400	8,944
81	6 561	9,000
82	6 724	9,055
83	6 889	9,110
84	7 056	9,165
85	7 225	9,220
86	7 396	9,274
87	7 569	9,327
88	7 714	9,381
89	7 921	9,434
90	8 100	9,487
91	8 281	9,539
92	8 464	9,592
93	8 649	9,644
94	8 836	9,695
95	9 025	9,747
96	9 216	9,798
97	9 409	9,849
98	9 604	9,900
99	9 801	9,950
100	10 000	10,000

ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΓΩΝΙΑ	ημ	συν	εφ	ΓΩΝΙΑ	ημ	συν	εφ
1°	0.0175	0.9998	0.0175	46°	0.7193	0.6947	1.036
2°	0.0349	0.9994	0.0349	47°	0.7314	0.6820	1.072
3°	0.0523	0.9986	0.0524	48°	0.7431	0.6691	1.111
4°	0.0698	0.9976	0.0699	49°	0.7547	0.6561	1.150
5°	0.0872	0.9962	0.0875	50°	0.7660	0.6428	1.192
6°	0.1045	0.9945	0.1051	51°	0,7771	0,6293	1,235
7°	0.1219	0.9925	0.1228	52°	7.7880	0.6157	1.280
8°	0.1392	0.9903	0.1405	53°	0.7986	0.6018	1.327
9°	0.1564	0.9877	0.1584	54°	0.8090	0.5878	1.376
10°	0.1736	0.9848	0.1763	55°	0.8192	0.5736	1.428
11°	0.1908	0.9816	0.1944	56°	0.8290	0.5592	1.483
12°	0.2079	0.9781	0.2126	57°	0.8387	0.5446	1.540
13°	0.2250	0.9744	0.2309	58°	0.8480	0.5299	1.600
14°	0.2419	0.9703	0.2493	59°	0.8572	0.5150	1.664
15°	0.2588	0.9659	0.2679	60°	0.8660	0.5000	1.732
16°	0.2756	0.9613	0.2867	61°	0.8746	0.4848	1.804
17°	0.2924	0.9563	0.3057	62°	0.8829	0.4695	1.881
18°	0.3090	0.9511	0.3249	63°	0.8910	0.4540	1.963
19°	0.3256	0.9455	0.3443	64°	0.8988	0.4384	2.050
20°	0.3420	0.9397	0.3640	65°	0.9063	0.4226	2.145
21°	0.3584	0.9336	0.3839	66°	0.9135	0.4067	2.246
22°	0.3746	0.9272	0.4040	67°	0.9205	0.3907	2.356
23°	0.3907	0.9205	0.4245	68°	0.9272	0.3746	2.475
24°	0.4067	0.9135	0.4452	69°	0.9336	0.3584	2.605
25°	0.4226	0.9063	0.4663	70°	0.9397	0.3420	2.747
26°	0.4384	0.8988	0.4877	71°	0.9455	0.3256	2.904
27°	0.4540	0.8910	0.5095	72°	0.9511	0.3090	3.078
28°	0.4695	0.8829	0.5317	73°	0.9563	0.2924	3.271
29°	0.4848	0.8746	0.5543	74°	0.9613	0.2756	3.487
30°	0.5000	0.8660	0.5774	75°	0.9659	0.2586	3.732
31°	0.5150	0.8572	0.6009	76°	0.9703	0.2419	4.011
32°	0.5299	0.8480	0.6249	77°	0.9744	0.2250	4.332
33°	0.5446	0.8387	0.6494	78°	0.9781	0.2079	4.705
34°	0.5592	0.8290	0.6745	79°	0.9816	0.1908	5.145
35°	0.5736	0.8192	0.7002	80°	0.9848	0.1736	5.671
36°	0.5878	0.8090	0.7265	81°	0.9877	0.1564	6.314
37°	0.6018	0.7986	0.7536	82°	0.9903	0.1392	7.115
38°	0.6157	0.7880	0.7813	83°	0.9925	0.1219	8.144
39°	0.6293	0.7771	0.8098	84°	0.9945	0.1045	9.514
40°	0.6428	0.7660	0.8391	85°	0.9962	0.0872	11.43
41°	0.6561	0.7547	0.8693	86°	0.9976	0.0698	14.30
42°	0.6691	0.7431	0.9004	87°	0.9986	0.0523	19.08
43°	0.6820	0.7314	0.9325	88°	0.9994	0.0349	28.64
44°	0.6947	0.7193	0.9657	89°	0.9998	0.0175	57.29
45°	0.7071	0.7071	1.000				

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΟΡΩΝ

Σημ. Οἱ ἀριθμοί ἀναφέρονται στή σελίδα.

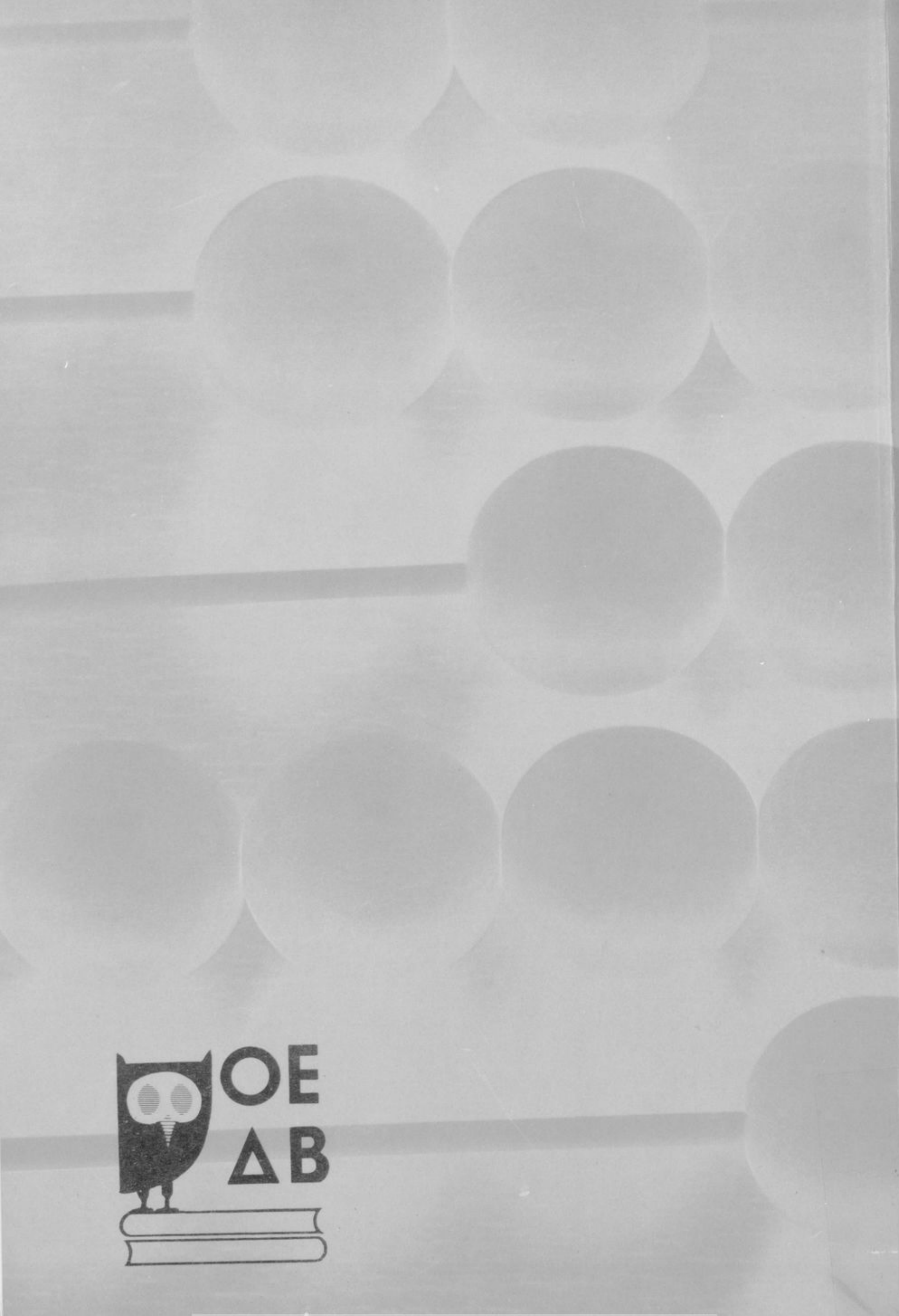
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

024000030078

ΕΚΔΟΣΗ Β 1979 ΑΝΤΙΤΥΠΑ 140.000 ΣΥΜΒΑΣΗ 3199/28-3-79

ΕΚΤΥΠΩΣΗ : ΓΡΑΦΙΣ Ο.Ε.

ΒΙΒΛΙΟΔΕΣΙΑ : Δ. ΚΑΤΣΑΒΡΙΑΣ Ο.Ε.


ΟΕ
ΔΒ