ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΙΩΑΝΝΟΥ Φ. ΠΑΝΑΚΗ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑ 1979

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Τό βιβλίο μεταγλωτίστηκε ἀπό τήν καθαρεύουσα στή δημοτική γλώσσα, ἀπό τούς φιλολόγους κ. κ. Θεοδωρακόπουλο Βασίλειο, Ζορμπᾶ Ἀπόστολο καί τό συγγραφέα.

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΙΩΑΝΝΟΥ Φ. ΠΑΝΑΚΗ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑ 1979

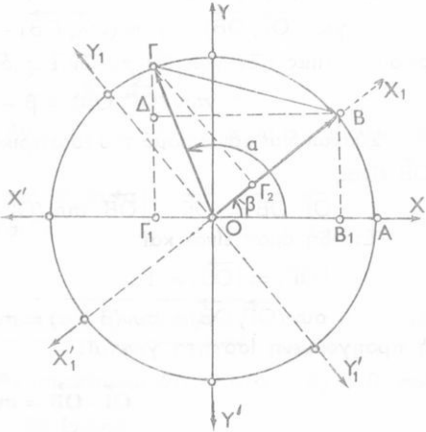
Τά κεφάλαια, οἱ παράγραφοι καί οἱ ὁμάδες ἀσκήσεων πού ἔχουν ἀστερίσκο δέ θά διδαχτοῦν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ I

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΑΣ ΔΥΟ ΤΟΞΩΝ

● **1.** *ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Ἀπό τούς τριγωνομετρικούς ἀριθμούς τῶν προσανατολισμένων τόξων α καί β νά ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τῶν τόξων α — β καί α + β.*

Α) Ὑπολογισμός τοῦ συν(α — β). Ἔχουμε τόν τριγωνομετρικό κύκλο (Ο) καί τούς πρωτεύοντες ἄξονες Χ'ΟΧ καί Υ'ΟΥ τῶν συνημιτόνων καί ἡμιτόνων, ἀντιστοίχως.



Σχ. 1

Ἄς πάρουμε $\widehat{ΑΓ}$ καί $\widehat{ΑΒ}$ δύο τόξα ἴσα πρός τά α καί β, ὅπου Α ἡ κοινή ἀρχή τους. Οἱ συντεταγμένες τῶν Γ καί Β ὡς πρός τούς ἄξονες Χ'Χ καί Υ'Υ εἶναι, ἀντιστοίχως:

$$\left.\begin{aligned} x &= \overline{ΟΓ_1} = συν\,α \\ y &= \overline{Γ_1Γ} = ημ\,α \end{aligned}\right\}$$

καί

$$\left.\begin{aligned} x' &= \overline{ΟΒ_1} = συν\,β \\ y' &= \overline{Β_1Β} = ημ\,β \end{aligned}\right\}$$

Φέρνουμε τή ΒΔ κάθετη πρός τή $Γ_1Γ$. Ἀπό τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΒΔΓ ἔχουμε:

$$ΒΓ^2 = ΒΔ^2 + ΔΓ^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2$$

ἤ

$$\begin{aligned} ΒΓ^2 &= (συν\,α - συν\,β)^2 + (ημ\,α - ημ\,β)^2 \\ &= συν^2α + συν^2β - 2συν\,α\,συν\,β + ημ^2α + ημ^2β - 2ημ\,α\,ημ\,β \\ &= 2 - 2\,(συν\,α\,συν\,β + ημ\,α\,ημ\,β) \qquad (α') \end{aligned}$$

Ἡ τιμή τοῦ τόξου $\widehat{ΒΓ}$ εἶναι: $α - β + 2kπ$ $\quad (k \in \mathbb{Z})$

Φέρνουμε τήν εὐθεία $Χ'_1ΟΒΧ_1$ καί, ἐπάνω σ' αὐτή, τήν κάθετο $Υ'_1ΟΥ_1$, τίς ὁποῖες θεωροῦμε ὡς πρωτεύοντες ἄξονες γιά τό τόξο $(\widehat{ΒΓ}) = α - β$. Ἀπό τό Γ φέρνουμε τήν κάθετη $ΓΓ_2$ πρός τή $Χ'_1Χ$ καί τότε οἱ συντεταγμένες τῶν Β καί Γ θά εἶναι, ἀντιστοίχως:

$$\left.\begin{aligned} x'_1 &= \overline{ΟΒ} = 1 \\ y'_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad καί \quad \left.\begin{aligned} x_1 &= \overline{ΟΓ_2} = συν(α - β) \\ y_1 &= \overline{Γ_2Γ} = ημ(α - β) \end{aligned}\right\}$$

Ἀπό τό ὀρθογώνιο τρίγωνο $ΒΓ_2Γ$ θά ἔχουμε:

$$
\begin{aligned}
ΒΓ^2 &= ΒΓ_2{}^2 + Γ_2Γ^2 = (x_1 - 1)^2 + (y_1 - 0)^2 \\
&= [συν(α-β) - 1]^2 + ημ^2(α-β) \\
&= συν^2(α-β) + 1 - 2\,συν(α-β) + ημ^2(α-β) \\
&= 2 - 2συν(α-β) \qquad (α'')
\end{aligned}
$$

Ἀπό τίς σχέσεις (α'') καί (α'), τώρα, ἔχουμε:

$$2 - 2συν\,(α-β) = 2 - 2\,(συνα\,συνβ + ημα\,ημβ). \text{ Ἄρα:}$$

$\forall α, β \in \mathbb{R}$: $$\boxed{\mathbf{συν(α-β) \equiv συνα\,συνβ + ημα\,ημβ}} \qquad \mathbf{(1)}$$

★ **Δεύτερος τρόπος.** Κατά τό θεώρημα τοῦ Chasles εἶναι:

$$\overline{γων}\,(\overrightarrow{ΟΓ}, \overrightarrow{ΟΒ}) = \overline{γων}\,(\overrightarrow{ΟX}, \overrightarrow{ΟΒ}) - \overline{γων}\,(\overrightarrow{ΟX}, \overrightarrow{ΟΓ}) + k\cdot 2\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

ὅπου οἱ τιμές τῶν γωνιῶν αὐτῶν ἐκφράζονται σέ ἀκτίνια. Ἄρα:

$$\overline{γων}\,(\overrightarrow{ΟΓ}, \overrightarrow{ΟΒ}) = β - α + k\cdot 2\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό τοῦ ἐσωτερικοῦ γινομένου δύο διανυσμάτων $\overrightarrow{ΟΓ}$ καί $\overrightarrow{ΟΒ}$ εἶναι:

$$\overrightarrow{ΟΓ}\cdot\overrightarrow{ΟΒ} = \left|\overrightarrow{ΟΓ}\right| \cdot \left|\overrightarrow{ΟΒ}\right| συν\,(\overrightarrow{ΟΓ}, \overrightarrow{ΟΒ})$$

Ἐπειδή ὅμως εἶναι καί

$$\left.\begin{aligned}
&\left|\overrightarrow{ΟΓ}\right| = \left|\overrightarrow{ΟΒ}\right| = 1 \\
&συν\,(\overrightarrow{ΟΓ}, \overrightarrow{ΟΒ}) = συν(β-α) = συν(α-β)
\end{aligned}\right\}$$

ἡ προηγούμενη ἰσότητα γίνεται:

$$\mathbf{\overrightarrow{ΟΓ}\cdot\overrightarrow{ΟΒ} = συν(α-β).} \qquad (α_1)$$

Στό ὀρθοκανονικό ὅμως σύστημα ἀξόνων εἶναι:

$$\overrightarrow{ΟΓ}\cdot\overrightarrow{ΟΒ} = xx' + yy' = συνα\,συνβ + ημα\,ημβ \qquad (α_2)$$

Ἀπό τίς σχέσεις $(α_1)$ καί $(α_2)$ συμπεραίνουμε ὅτι:

$\forall α, β \in \mathbb{R}$: $$\boxed{\mathbf{συν(α-β) \equiv συνα\,συνβ + ημα\,ημβ.}}$$

δηλαδή προκύπτει πάλι ὁ τύπος (1).

Β) Ὑπολογισμός τοῦ συν(α + β). Ἐπειδή ὁ τύπος (1) ἰσχύει γιά κάθε τόξο α καί β, θά ἰσχύει καί ὅταν στή θέση τοῦ β βάλουμε τό $-β$. Δηλαδή:

$$
\begin{aligned}
συν(α+β) &\equiv συνα\,συν(-β) + ημα\,ημ(-β) \\
&\equiv συνα\,συνβ - ημα\,ημβ,
\end{aligned}
$$

γιατί $συν(-β) = συνβ$ καί $ημ(-β) = -ημβ$. Ἄρα:

$\forall α, β \in \mathbb{R}$: $$\boxed{\mathbf{συν(α+β) \equiv συνα\,συνβ - ημα\,ημβ}} \qquad \mathbf{(2)}$$

Γ) Ὑπολογισμός τοῦ ημ(α + β). Ἄν στόν τύπο (1), ὅπου α βάλουμε $\frac{\pi}{2} - \alpha$, θά ἔχουμε:

$$συν\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right] \equiv συν\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) συν\,\beta + ημ\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) ημ\,\beta \quad (1)$$

$$\text{Ἀλλά} \begin{cases} συν\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta\right) \equiv συν\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right] = ημ(\alpha + \beta) \\ συν\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \equiv ημ\alpha \text{ καί } ημ\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \equiv συν\,\alpha. \end{cases}$$

ὁπότε ἡ ἰσότητα (1) γίνεται:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}: \qquad \boxed{ημ(\alpha + \beta) \equiv ημ\alpha\, συν\beta + ημ\beta\, συν\alpha} \qquad (3)$$

Δ) Ὑπολογισμός τοῦ ημ(α — β). Ἄν στόν τύπο (3), ὅπου β βάλουμε −β, θά ἔχουμε:

$$\begin{aligned} ημ(\alpha - \beta) &\equiv ημ\alpha\, συν(-\beta) + ημ(-\beta)\, συν\alpha \\ &\equiv ημ\alpha\, συν\beta - ημ\beta\, συν\alpha. \end{aligned}$$

Ἄρα:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}: \qquad \boxed{ημ(\alpha - \beta) \equiv ημ\alpha\, συν\beta - ημ\beta\, συν\alpha} \qquad (4)$$

Ε) Ὑπολογισμός τῆς εφ(α + β). Ἄν ὑποθέσουμε ὅτι: $συν(\alpha + \beta) \neq 0$, πού ἰσχύει γιά $\alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$, θά ἔχουμε

$$εφ\,(\alpha + \beta) = \frac{ημ\,(\alpha + \beta)}{συν\,(\alpha + \beta)} = \frac{ημ\alpha\, συν\beta + ημ\beta\, συν\alpha}{συν\alpha\, συν\beta - ημ\alpha\, ημ\beta} \qquad (1)$$

Ἄν $συν\alpha\, συν\beta \neq 0$, πού ἰσχύει γιά:

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k_1\pi \qquad \text{καί} \qquad \beta \neq \frac{\pi}{2} + k_2\pi, \qquad k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$$

τότε ἡ ἰσότητα (1) γράφεται διαδοχικά:

$$εφ(\alpha + \beta) = \frac{ημ\alpha\, συν\beta + ημ\beta\, συν\alpha}{συν\alpha\, συν\beta - ημ\alpha\, ημ\beta} = \frac{\frac{ημ\alpha\, συν\beta}{συν\alpha\, συν\beta} + \frac{ημ\beta\, συν\alpha}{συν\alpha\, συν\beta}}{\frac{συν\alpha\, συν\beta}{συν\alpha\, συν\beta} - \frac{ημ\alpha\, ημ\beta}{συν\alpha\, συν\beta}} =$$

$$= \frac{\frac{ημ\alpha}{συν\alpha} + \frac{ημ\beta}{συν\beta}}{1 - \frac{ημ\alpha}{συν\alpha} \cdot \frac{ημ\beta}{συν\beta}} = \frac{εφ\alpha + εφ\beta}{1 - εφ\alpha\, εφ\beta}.$$

Ἄρα : $$\boxed{\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)=\frac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi\beta}} \tag{5}$$

Στ) Ὑπολογισμός τῆς εφ(α — β). Ἄν στόν τύπο (5) βάλουμε ὅπου β τό $-\beta$ καί ὑποθέσουμε ὅτι $\alpha-\beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$, τότε:

$$\varepsilon\varphi(\alpha-\beta)=\frac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi(-\beta)}{1-\varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi(-\beta)}=\frac{\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\beta}{1+\varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi\beta}$$

γιατί $\varepsilon\varphi(-\beta)=-\varepsilon\varphi\beta$.

Ἄρα: $$\boxed{\varepsilon\varphi(\alpha-\beta)=\frac{\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\beta}{1+\varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi\beta}} \tag{6}$$

Ζ) Ὑπολογισμός τῆς σφ(α + β). Ἄν ὑποθέσουμε ὅτι:

$\eta\mu(\alpha+\beta)\neq 0$, πού ἰσχύει γιά $\alpha+\beta\neq k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

καί $\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta\neq 0$, πού ἰσχύει γιά $\alpha\neq k_1\pi$ καί $\beta\neq k_2\pi$, $k_1, k_2\in\mathbb{Z}$, θά ἔχουμε διαδοχικά:

$$\sigma\varphi(\alpha+\beta)=\frac{\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)}{\eta\mu(\alpha+\beta)}=\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta}{\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\beta\,\sigma\upsilon\nu\alpha}=$$

$$=\frac{\dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta}{\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta}-\dfrac{\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta}{\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta}}{\dfrac{\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta}{\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta}+\dfrac{\eta\mu\beta\,\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta}}=\frac{\sigma\varphi\alpha\,\sigma\varphi\beta-1}{\sigma\varphi\alpha+\sigma\varphi\beta}$$

Ἄρα: $$\boxed{\sigma\varphi(\alpha+\beta)=\frac{\sigma\varphi\alpha\,\sigma\varphi\beta-1}{\sigma\varphi\alpha+\sigma\varphi\beta}} \tag{7}$$

Η) Ὑπολογισμός τῆς σφ (α — β). Ἄν στόν τύπο (7) βάλουμε ὅπου β τό $-\beta$, θά ἔχουμε:

$$\sigma\varphi(\alpha-\beta)=\frac{\sigma\varphi\alpha\,\sigma\varphi(-\beta)-1}{\sigma\varphi\alpha+\sigma\varphi(-\beta)}=\frac{-\sigma\varphi\alpha\,\sigma\varphi\beta-1}{\sigma\varphi\alpha-\sigma\varphi\beta}=\frac{\sigma\varphi\alpha\,\sigma\varphi\beta+1}{\sigma\varphi\beta-\sigma\varphi\alpha}$$

Ἄρα: $$\boxed{\sigma\varphi(\alpha-\beta)=\frac{\sigma\varphi\alpha\,\sigma\varphi\beta+1}{\sigma\varphi\beta-\sigma\varphi\alpha}} \tag{8}$$

ἄν $\alpha-\beta\neq k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ καί $\alpha\neq k_1\pi$ καί $\beta\neq k_2\pi$, $k_1, k_2\in\mathbb{Z}$.

Μερικές περιπτώσεις. Ἂν $\beta = \frac{\pi}{4}$, τότε $\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} = 1$ καί γιά

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\pi \\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k_1\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} + \varepsilon\varphi\alpha}{1 - \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}\cdot\varepsilon\varphi\alpha} = \frac{1 + \varepsilon\varphi\alpha}{1 - \varepsilon\varphi\alpha}, \qquad k, k_1 \in \mathbb{Z}$$

καί γιά

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \neq -\frac{\pi}{4} + k_2\pi \\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k_3\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} - \varepsilon\varphi\alpha}{1 + \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}\cdot\varepsilon\varphi\alpha} = \frac{1 - \varepsilon\varphi\alpha}{1 + \varepsilon\varphi\alpha}, \quad k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$$

Ὥστε:
$$\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{1 + \varepsilon\varphi\alpha}{1 - \varepsilon\varphi\alpha}, \qquad \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1 - \varepsilon\varphi\alpha}{1 + \varepsilon\varphi\alpha} \tag{9}$$

μέ τούς παραπάνω περιορισμούς.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

● *1. Ἂν $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ καί $\eta\mu\,\alpha = \frac{3}{5}$, $\eta\mu\,\beta = \frac{9}{41}$, νά ὑπολογισθοῦν οἱ παραστάσεις:*

$$\eta\mu(\alpha - \beta),\ \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta),\ \varepsilon\varphi(\alpha - \beta),\ \sigma\varphi(\alpha + \beta).$$

Λύση. Ἐπειδή εἶναι $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ καί $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ θά ἔχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = \sqrt{1 - \eta\mu^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5},$$

$$\sigma\upsilon\nu\beta = -\sqrt{1 - \eta\mu^2\beta} = -\sqrt{1 - \left(\frac{9}{41}\right)^2} = -\frac{40}{41},$$

ὁπότε θά εἶναι:

$$\varepsilon\varphi\alpha = \frac{3}{5} : \frac{4}{5} = \frac{3}{4},\ \varepsilon\varphi\beta = \frac{9}{41} : \left(-\frac{40}{41}\right) = -\frac{9}{40},\ \sigma\varphi\alpha = \frac{4}{3},\ \sigma\varphi\beta = -\frac{40}{9}$$

καί, ἑπομένως:

$$\eta\mu\,(\alpha - \beta) = \eta\mu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\beta\ \sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{40}{41}\right) - \frac{9}{41}\cdot\frac{4}{5} = -\frac{156}{205},$$

$$\sigma\upsilon\nu\,(\alpha+\beta)=\sigma\upsilon\nu\alpha\;\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\alpha\;\eta\mu\beta=\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{40}{41}\right)-\frac{3}{5}\cdot\frac{9}{41}=-\frac{187}{205},$$

$$\varepsilon\varphi\,(\alpha-\beta)=\frac{\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\beta}{1+\varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi\beta}=\frac{\frac{3}{4}-\left(-\frac{9}{40}\right)}{1+\frac{3}{4}\left(-\frac{9}{40}\right)}=\frac{\frac{3}{4}+\frac{9}{40}}{1-\frac{27}{160}}=\frac{156}{133},$$

$$\sigma\varphi\,(\alpha+\beta)=\frac{\sigma\varphi\alpha\cdot\sigma\varphi\beta-1}{\sigma\varphi\alpha+\sigma\varphi\beta}=\frac{\frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{40}{9}\right)-1}{\frac{4}{3}+\left(-\frac{40}{9}\right)}=\frac{187}{84}.$$

● **2.** *Νά ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τῶν τόξων 15° καί 75°.*

Λύση. Ἐπειδή $15°+75°=90°$, θά ἔχουμε:

$$\eta\mu 15°=\sigma\upsilon\nu 75°=\sigma\upsilon\nu(45°+30°)=\sigma\upsilon\nu 45°\,\sigma\upsilon\nu 30°-\eta\mu 45°\,\eta\mu 30°=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

$$\sigma\upsilon\nu 15°=\eta\mu 75°=\eta\mu(45°+30°)=\eta\mu 45°\,\sigma\upsilon\nu 30°+\eta\mu 30°\,\sigma\upsilon\nu 45°=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

$$\varepsilon\varphi\,15°=\sigma\varphi 75°=\frac{\sigma\upsilon\nu\,75°}{\eta\mu 75°}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{6-2}=2-\sqrt{3}.$$

$$\sigma\varphi\,15°=\varepsilon\varphi\,75°=\frac{\eta\mu\,75°}{\sigma\upsilon\nu\,75°}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}{6-2}=2+\sqrt{3}.$$

Ἀνακεφαλαίωση.

$\eta\mu\;15°=\sigma\upsilon\nu\;75°=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\varepsilon\varphi\;15°=\sigma\varphi\;75°=2-\sqrt{3}$
$\sigma\upsilon\nu\;15°=\eta\mu\;75°=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\sigma\varphi\;15°=\varepsilon\varphi\;75°=2+\sqrt{3}$

(10)

● **3.** *Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:*

$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}:\quad \eta\mu(\alpha+\beta)\eta\mu(\alpha-\beta)\equiv\eta\mu^2\alpha-\eta\mu^2\beta\equiv\sigma\upsilon\nu^2\beta-\sigma\upsilon\nu^2\alpha.$

Ἀπόδειξη. Ἔχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned}
ημ(α+β)\,ημ(α-β) &\equiv (ημα\,συνβ + ημβ\,συνα)(ημα\,συνβ - ημβ\,συνα)\\
&\equiv ημ^2α\,συν^2β - ημ^2β\,συν^2α\\
&\equiv ημ^2α(1-ημ^2β) - ημ^2β(1-ημ^2α)\\
&\equiv ημ^2α - ημ^2α\,ημ^2β - ημ^2β + ημ^2α\,ημ^2β\\
&\equiv ημ^2α - ημ^2β\\
&\equiv 1 - συν^2α - (1 - συν^2β) \equiv συν^2β - συν^2α.
\end{aligned}$$

● **4.** *Σέ κάθε τρίγωνο ΑΒΓ νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:*

$$\mathbf{Σ \equiv αημ(Β - Γ) + βημ(Γ - Α) + γημ(Α - Β) = 0.}$$

Ἀπόδειξη. Ἐπειδή $α = 2RημΑ = 2Rημ(Β+Γ)$, θά ἔχουμε:

$$αημ(Β-Γ) = 2Rημ(Β+Γ)ημ(Β-Γ) = 2R(ημ^2Β - ημ^2Γ)$$

καί μέ κυκλική ἐναλλαγή τῶν γραμμάτων α, β, γ καί Α, Β, Γ θά ἔχουμε:

$$\begin{aligned}
Σ &\equiv 2R(ημ^2Β - ημ^2Γ) + 2R(ημ^2Γ - ημ^2Α) + 2R(ημ^2Α - ημ^2Β) =\\
&= 2R(ημ^2Β - ημ^2Γ + ημ^2Γ - ημ^2Α + ημ^2Α - ημ^2Β) = 2R\cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ ΥΠΟ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

● **5.** *Ἄν* $α+β+γ=π$, *καί* $α \neq kπ + \frac{π}{2}$ *ἤ* $β \neq k_1π + \frac{π}{2}$ *ἤ* $γ \neq k_2π + \frac{π}{2}$, *νά ἀποδειχθεῖ ἡ σχέση:*

$$\mathbf{εφα + εφβ + εφγ = εφα\,εφβ\,εφγ.}$$

Ἀπόδειξη. Ἀπό τή σχέση $α+β+γ=π \Rightarrow α+β=π-γ$ καί ἑπομένως:

$$εφ(α+β) = εφ(π-γ) = -εφγ \Rightarrow \frac{εφα + εφβ}{1 - εφα\,εφβ} = -εφγ \Rightarrow$$

$$εφα + εφβ + εφγ = εφα\,εφβ\,εφγ.$$

Ἀντιστρόφως:

● **6.** *Ἄν οἱ γωνίες α, β, γ ἱκανοποιοῦν τήν ἰσότητα:*

(1) $$\mathbf{εφα + εφβ + εφγ = εφα\,εφβ\,εφγ} \qquad \mathbf{(12)}$$

μέ ποιά σχέση συνδέονται αὐτές οἱ γωνίες;

Λύση. Ἀπό τή σχέση (1) ἔχουμε:

$$εφα + εφβ = -εφγ(1 - εφα\,εφβ) \qquad (2)$$

Ἄν εἶναι $1 - εφα\,εφβ = 0 \Leftrightarrow εφα\,εφβ = 1$, τότε ἀπό τή (2) $\Rightarrow$

$$εφα + εφβ = 0 \Leftrightarrow εφα = -εφβ,$$

ἡ ὁποία ἰσότητα δέ συμβιβάζεται μέ τήν $εφα\,εφβ = 1$. Ἄρα:

$$1 - εφα\,εφβ \neq 0,$$

ὁπότε ἀπό τή σχέση (2) ἔχουμε:

$$\frac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi\beta}=-\varepsilon\varphi\gamma \Leftrightarrow \varepsilon\varphi(\alpha+\beta)=-\varepsilon\varphi\gamma=\varepsilon\varphi(\pi-\gamma)\Leftrightarrow$$

$$\alpha+\beta=(\pi-\gamma)+\nu\pi \Leftrightarrow \alpha+\beta+\gamma=\pi+\nu\pi=(\nu+1)\pi=k\pi \text{ μέ } \nu,\quad k\in\mathbb{Z}$$

Ἀπό τά παραπάνω βλέπουμε ὅτι οἱ γωνίες α, β, γ συνδέονται μέ τή σχέση $\alpha+\beta+\gamma=k\pi$, ὅπου $k\in\mathbb{Z}$.

● **7.** *Ἄν οἱ γωνίες α, β, γ ἱκανοποιοῦν τήν ἰσότητα $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, τότε:*

$$\text{συν}^2\alpha+\text{συν}^2\beta+\text{συν}^2\gamma+2\text{συν}\alpha\,\text{συν}\beta\,\text{συν}\gamma=1 \tag{13}$$

Ἀπόδειξη. Ἔχουμε $\alpha+\beta+\gamma=\pi \Leftrightarrow \alpha+\beta=\pi-\gamma$ καί ἑπομένως:

$$\text{συν}(\alpha+\beta)=\text{συν}(\pi-\gamma)=-\text{συν}\gamma \Leftrightarrow \text{συν}\alpha\,\text{συν}\beta-\text{ημ}\alpha\,\text{ημ}\beta=-\text{συν}\gamma\Leftrightarrow$$

$$\text{συν}\alpha\,\text{συν}\beta+\text{συν}\gamma=\text{ημ}\alpha\,\text{ημ}\beta$$

Ὑψώνοντας καί τά δύο μέλη τῆς τελευταίας ἰσότητας στό τετράγωνο, ἔχουμε:

$$\text{συν}^2\alpha\,\text{συν}^2\beta+\text{συν}^2\gamma+2\text{συν}\alpha\,\text{συν}\beta\,\text{συν}\gamma=\text{ημ}^2\alpha\,\text{ημ}^2\beta=$$
$$=(1-\text{συν}^2\alpha)(1-\text{συν}^2\beta)=1-\text{συν}^2\alpha-\text{συν}^2\beta+\text{συν}^2\alpha\,\text{συν}^2\beta\Leftrightarrow$$
$$\text{συν}^2\alpha+\text{συν}^2\beta+\text{συν}^2\gamma+2\text{συν}\alpha\,\text{συν}\beta\,\text{συν}\gamma=1.$$

Ἀντιστρόφως:

✶ ● **8.** *Ἄν ἰσχύει ὁ τύπος (13), πῶς συνδέονται οἱ γωνίες α, β, γ;*

Λύση: Ὁ τύπος (13) γράφεται:

$$\text{συν}^2\gamma+2\text{συν}\alpha\,\text{συν}\beta\,\text{συν}\gamma+\text{συν}^2\alpha+\text{συν}^2\beta-1=0 \tag{1}$$

καί μπορεῖ νά θεωρηθεῖ τό πρῶτο μέλος ὡς δευτεροβάθμιο τριώνυμο ὡς πρός συνγ. Ἄν Δ εἶναι ἡ διακρίνουσά του, θά ἔχουμε:

$$\frac{\Delta}{4}=\text{συν}^2\alpha\,\text{συν}^2\beta-\text{συν}^2\alpha-\text{συν}^2\beta+1=(1-\text{συν}^2\alpha)(1-\text{συν}^2\beta)=\text{ημ}^2\alpha\,\text{ημ}^2\beta,$$

καί ἑπομένως οἱ ρίζες τοῦ τριωνύμου θά εἶναι:

$$\text{συν}\gamma=-\text{συν}\alpha\,\text{συν}\beta\pm\text{ημ}\alpha\,\text{ημ}\beta=-\text{συν}(\alpha\pm\beta),$$

ὁπότε θά ἔχουμε:

$$\alpha\pm\beta=\pm(\pi-\gamma)+k\cdot 2\pi \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha\pm\beta\pm\gamma=(2k+1)\pi},\quad \text{μέ } k\in\mathbb{Z}.$$

ΣΗΜ. Τά διπλά σημεῖα εἶναι ἀνεξάρτητα τό ἕνα ἀπό τό ἄλλο.

Μέ ὅμοια ἐργασία βρίσκουμε ὅτι:

✶ *Ἄν οἱ γωνίες α, β, γ ἐπαληθεύουν τήν ἰσότητα:*

$$\text{συν}^2\alpha+\text{συν}^2\beta+\text{συν}^2\gamma-2\text{συν}\alpha\,\text{συν}\beta\,\text{συν}\gamma=1 \tag{14}$$

τότε οἱ γωνίες α, β, γ συνδέονται μέ τίς σχέσεις:

$$\boldsymbol{\alpha\pm\beta\pm\gamma=k.2\pi},\text{ ὅπου } k\in\mathbb{Z}$$

● **9.** *Ἂν μεταξύ τῶν κυρίων στοιχείων ἑνός τριγώνου ΑΒΓ ὑπάρχει ἡ σχέση:*

$$\alpha = 2\beta\,\text{συν}\,\Gamma, \tag{1}$$

τότε τό τρίγωνο αὐτό θὰ εἶναι ἰσοσκελές.

Ἀπόδειξη. Ἡ σχέση (1) γράφεται:

$$2R\,\text{ημ}A = 2\cdot 2R\,\text{ημ}B\,\text{συν}\Gamma \Leftrightarrow \text{ημ}A = 2\text{ημ}B\,\text{συν}\Gamma \tag{2}$$

καί ἐπειδή $A + B + \Gamma = \pi \Rightarrow \text{ημ}A = \text{ημ}(B + \Gamma)$ καί ἡ (2) γίνεται:

$$\text{ημ}(B + \Gamma) = 2\text{ημ}B\,\text{συν}\Gamma \Leftrightarrow \text{ημ}B\,\text{συν}\Gamma + \text{ημ}\Gamma\,\text{συν}B = 2\text{ημ}B\,\text{συν}\Gamma \Leftrightarrow$$

$$\text{ημ}B\,\text{συν}\Gamma - \text{ημ}\Gamma\,\text{συν}B = 0 \Leftrightarrow \text{ημ}(B - \Gamma) = 0 \Leftrightarrow$$

$$B - \Gamma = k\cdot\pi, \quad \text{ὅπου } k \in \mathbb{Z}.$$

Ἐπειδή ὅμως B καί Γ εἶναι γωνίες τριγώνου, πρέπει $k = 0$.

Ἄρα $B - \Gamma = 0$, ὁπότε $B = \Gamma$. Δηλαδή τό τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Πρώτη ὁμάδα

1. Νά ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τῆς γωνίας 105°.

2. Ἂν $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ καί ημ $\alpha = \frac{3}{5}$, συν β $\frac{9}{41}$, νά ὑπολογισθοῦν οἱ παραστάσεις:

$$\text{ημ}(\alpha - \beta),\ \text{συν}(\alpha + \beta),\ \text{εφ}(\alpha - \beta),\ \text{σφ}(\alpha + \beta).$$

3. Ἂν $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$ καί ημ $\alpha = \frac{15}{17}$, συν $\beta = \frac{12}{13}$, νά ὑπολογισθοῦν οἱ παραστάσεις:

$$\text{ημ}(\alpha + \beta),\ \text{συν}(\alpha - \beta),\ \text{εφ}(\alpha + \beta),\ \text{σφ}(\alpha - \beta).$$

4. Ἂν $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ καί συν $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, συν $\beta = -\frac{3}{5}$, νά ὑπολογισθοῦν οἱ παραστάσεις:

$$\text{ημ}(\alpha + \beta),\ \text{συν}(\alpha - \beta),\ \text{εφ}(\alpha - \beta),\ \text{σφ}(\alpha + \beta).$$

5. Νά ἀποδειχθοῦν οἱ ἀκόλουθες ταυτότητες:

1. $\text{ημ}(\alpha - \beta)\text{συν}\beta + \text{ημ}\beta\,\text{συν}(\alpha - \beta) \equiv \text{ημ}\alpha.$
2. $\text{συν}(\alpha - \beta)\,\text{συν}(\alpha + \beta) - \text{ημ}(\alpha - \beta)\,\text{ημ}(\alpha + \beta) \equiv \text{συν}2\alpha.$
3. $\text{ημ}(60° - \alpha)\,\text{συν}(30° + \alpha) + \text{ημ}(30° + \alpha)\,\text{συν}(60° - \alpha) \equiv 1.$
4. $\text{συν}(\alpha + \beta)\,\text{συν}(\alpha - \beta) \equiv \text{συν}^2\alpha - \text{ημ}^2\beta \equiv \text{συν}^2\beta - \text{ημ}^2\alpha.$
5. $\text{εφ}(\beta - \gamma) + \text{εφ}(\gamma - \alpha) + \text{εφ}(\alpha - \beta) = \text{εφ}(\beta - \gamma)\,\text{εφ}(\gamma - \alpha)\,\text{εφ}(\alpha - \beta).$

Γιά ποιές τιμές τῶν α, β, γ δέν ἔχουν ἔννοια τά μέλη τῆς 5;

6. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

1. $\dfrac{\text{ημ}(\alpha - \beta)}{\text{συν}\alpha\,\text{συν}\beta} + \dfrac{\text{ημ}(\beta - \gamma)}{\text{συν}\beta\,\text{συν}\gamma} + \dfrac{\text{ημ}(\gamma - \alpha)}{\text{συν}\gamma\,\text{συν}\alpha} = 0.$
2. $\dfrac{\text{ημ}(\beta - \gamma)}{\text{ημ}\beta\,\text{ημ}\gamma} + \dfrac{\text{ημ}(\gamma - \alpha)}{\text{ημ}\gamma\,\text{ημ}\alpha} + \dfrac{\text{ημ}(\alpha - \beta)}{\text{ημ}\alpha\,\text{ημ}\beta} = 0.$
3. $\dfrac{2\text{ημ}(\alpha + \beta)}{\text{συν}(\alpha + \beta) + \text{συν}(\alpha - \beta)} = \text{εφ}\alpha + \text{εφ}\beta.$
4. $\dfrac{\text{εφ}^2 2\alpha - \text{εφ}^2\alpha}{1 - \text{εφ}^2 2\alpha\,\text{εφ}^2\alpha} = \text{εφ}3\alpha\,\text{εφ}\alpha.$

7. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

1. $\sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2(120^\circ + x) + \sigma\upsilon\nu^2(120^\circ - x) \equiv \frac{3}{2}$.
2. Ἄν $\alpha + \beta = 45^\circ$, τότε: $(1 + \varepsilon\varphi\alpha)(1 + \varepsilon\varphi\beta) = 2$.
3. $\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2(60^\circ + \alpha) + \sigma\upsilon\nu^2(60^\circ - \alpha) \equiv \frac{3}{2}$.

★ Δεύτερη ὁμάδα

8. Ἄν $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

1. $\sigma\varphi\frac{\alpha}{2} + \sigma\varphi\frac{\beta}{2} + \sigma\varphi\frac{\gamma}{2} = \sigma\varphi\frac{\alpha}{2}\,\sigma\varphi\frac{\beta}{2}\,\sigma\varphi\frac{\gamma}{2}$.
2. $\sigma\varphi\alpha\,\sigma\varphi\beta + \sigma\varphi\beta\,\sigma\varphi\gamma + \sigma\varphi\gamma\,\sigma\varphi\alpha = 1$.
3. $\dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\beta\,\eta\mu\gamma} + \dfrac{\sigma\upsilon\nu\beta}{\eta\mu\gamma\,\eta\mu\alpha} + \dfrac{\sigma\upsilon\nu\gamma}{\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta} = 2$.
4. $\eta\mu^2\alpha + \eta\mu^2\beta + \eta\mu^2\gamma - 2\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta\,\sigma\upsilon\nu\gamma = 2$.
5. $\varepsilon\varphi 2\alpha + \varepsilon\varphi 2\beta + \varepsilon\varphi 2\gamma = \varepsilon\varphi 2\alpha\,\varepsilon\varphi 2\beta\,\varepsilon\varphi 2\gamma$.

9. Σέ κάθε τρίγωνο ΑΒΓ νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

1. $\dfrac{\alpha^2\eta\mu(B-\Gamma)}{\eta\mu B + \eta\mu\Gamma} + \dfrac{\beta^2\eta\mu(\Gamma - A)}{\eta\mu\Gamma + \eta\mu A} + \dfrac{\gamma^2\eta\mu(A-B)}{\eta\mu A + \eta\mu B} = 0$.
2. $\dfrac{\alpha^2\eta\mu(B-\Gamma)}{\eta\mu A} + \dfrac{\beta^2\eta\mu(\Gamma - A)}{\eta\mu B} + \dfrac{\gamma^2\eta\mu(A-B)}{\eta\mu\Gamma} = 0$.
3. $(\beta + \gamma)\sigma\upsilon\nu A + (\gamma + \alpha)\sigma\upsilon\nu B + (\alpha + \beta)\sigma\upsilon\nu\Gamma = \alpha + \beta + \gamma$.
4. $\eta\mu A\,\eta\mu(B-\Gamma) + \eta\mu B\,\eta\mu(\Gamma - A) + \eta\mu\Gamma\,\eta\mu(A-B) = 0$.

10. Ἄν $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

1. $\sigma\varphi^2\alpha + \sigma\varphi^2\beta + \sigma\varphi^2\gamma \geqq 1$.
2. $\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2} + \varepsilon\varphi^2\frac{\beta}{2} + \varepsilon\varphi^2\frac{\gamma}{2} \geqq 1$.
3. Ἄν $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$, τότε: $\varepsilon\varphi^2\alpha + \varepsilon\varphi^2\beta + \varepsilon\varphi^2\gamma \geqq 1$.
4. Ἄν $\dfrac{\varepsilon\varphi(\alpha-\beta)}{\varepsilon\varphi\alpha} + \dfrac{\eta\mu^2\gamma}{\eta\mu^2\alpha} = 1$, τότε: $\varepsilon\varphi^2\gamma = \varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi\beta$.

✶ • **10.** *ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Ἀπό τούς τριγωνομετρικούς ἀριθμούς τῶν προσανατολισμένων τόξων α, β, γ νά ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τοῦ ἀθροίσματος $\alpha + \beta + \gamma$.*

Α) Ὑπολογισμός τοῦ $\eta\mu(\alpha + \beta + \gamma)$. Ἔχουμε διαδοχικά:

$$\eta\mu(\alpha+\beta+\gamma) \equiv \eta\mu[(\alpha+\beta)+\gamma] \equiv \eta\mu(\alpha+\beta)\sigma\upsilon\nu\gamma + \eta\mu\gamma\,\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta) \equiv$$
$$\equiv (\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\beta\,\sigma\upsilon\nu\alpha)\sigma\upsilon\nu\gamma + \eta\mu\gamma(\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta)$$
$$\equiv \eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta\,\sigma\upsilon\nu\gamma + \eta\mu\beta\,\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\gamma + \eta\mu\gamma\,\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta\,\eta\mu\gamma$$

Ὥστε, $\forall\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, εἶναι:

$$\boldsymbol{\eta\mu(\alpha+\beta+\gamma) \equiv \eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta\,\sigma\upsilon\nu\gamma + \eta\mu\beta\,\sigma\upsilon\nu\gamma\,\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\gamma\,\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta\,\eta\mu\gamma}$$

καί πιό σύντομα:

$$\boxed{\eta\mu(\alpha+\beta+\gamma) \equiv \Sigma\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta\,\sigma\upsilon\nu\gamma - \eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta\,\eta\mu\gamma} \qquad (15)$$

Β) Ὑπολογισμός τοῦ συν (α + β + γ). Ἔχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned}συν(α+β+γ) &\equiv συν[(α+β)+γ] \equiv συν(α+β)συνγ - ημ(α+β)ημγ \equiv \\ &\equiv (συνα\,συνβ - ημα\,ημβ)συνγ - (ημα\,συνβ + ημβ\,συνα)ημγ \\ &\equiv συνασυνβσυνγ - ημαημβσυνγ - ημαημγσυνβ - ημβημγσυνα.\end{aligned}$$

Ὥστε, $\forall\, α, β, γ \in \mathbb{R}$, εἶναι:

$$\boldsymbol{συν(α+β+γ) \equiv συνα\,συνβ\,συνγ - ημα\,ημβ\,συνγ - ημβ\,ημγ\,συνα - ημγ\,ημα\,συνβ}$$

καί συντομότερα:

$$\boxed{συν(α+β+γ) \equiv συνα\,συνβ\,συνγ - \Sigma ημα\,ημβ\,συνγ} \qquad (16)$$

Γ) Ὑπολογισμός τῆς εφ (α + β + γ). Ἔχουμε διαδοχικά:

$$εφ\,(α+β+γ) = \frac{ημ\,(α+β+γ)}{συν\,(α+β+γ)} = \frac{\Sigma ημα\,συνβ\,συνγ - ημα\,ημβ\,ημγ}{συνα\,συνβ\,συνγ - \Sigma ημα\,ημβ\,συνγ}, \qquad (1)$$

ὅταν εἶναι $συν\,(α+β+γ) \neq 0$, πού ἰσχύει γιά $α+β+γ \neq \frac{π}{2} + kπ,\ k \in \mathbb{Z}$.

Ἄν ὅμως εἶναι καί $συνα\,συνβ\,συνγ \neq 0$, πού ἰσχύει γιά:

$α \neq \frac{π}{2} + k_1π,\ \ β \neq \frac{π}{2} + k_2π,\ \ γ \neq \frac{π}{2} + k_3π$ σύγχρονα $\qquad (k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z})$

διαιρώντας καί τούς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος (1) τοῦ δεύτερου μέλους μέ συνα συνβ συνγ, ἔχουμε:

$$\boxed{εφ\,(α+β+γ) = \frac{\Sigma εφα - εφα\,εφβ\,εφγ}{1 - \Sigma εφα\,εφβ}} \qquad (17)$$

ἤ $$εφ\,(α+β+γ) = \frac{εφα + εφβ + εφγ - εφα\,εφβ\,εφγ}{1 - εφα\,εφβ - εφβ\,εφγ - εφγ\,εφα}$$

Δ) Ὑπολογισμός τῆς σφ (α + β + γ). Ἄν $ημ\,(α+β+γ) \neq 0$, πού ἰσχύει γιά $α+β+γ \neq kπ$, ὅπου $k \in \mathbb{Z}$, ἔχουμε διαδοχικά:

$$σφ(α+β+γ) = \frac{συν\,(α+β+γ)}{ημ\,(α+β+γ)} = \frac{συνα\,συνβ\,συνγ - \Sigma ημα\,ημβ\,συνγ}{\Sigma ημα\,συνβ\,συνγ - ημα\,ημβ\,ημγ} \qquad (1)$$

Ἄν ὅμως εἶναι καί $ημα\,ημβ\,ημγ \neq 0$, πού ἰσχύει γιά $α \neq k_1π$ καί $β \neq k_2π$ καί $γ \neq k_3π$, ὅπου $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$, διαιρώντας τούς ὅρους τοῦ κλάσματος (1) μέ ημα ημβ ημγ, βρίσκουμε τόν τύπο:

$$σφ(α+β+γ) = \frac{σφα\,σφβ\,σφγ - \Sigma σφα}{\Sigma σφβ\,σφγ - 1} \qquad 18$$

$$\boxed{σφ\,(α+β+γ) = \frac{σφα\,σφβ\,σφγ - σφα - σφβ - σφγ}{σφβ\,σφγ + σφγ\,σφα + σφα\,σφβ - 1}}$$

Παράδειγμα. *Ἄν* $\varepsilon\varphi\alpha = \frac{1}{12}$, $\varepsilon\varphi\beta = \frac{2}{5}$, $\varepsilon\varphi\gamma = \frac{1}{3}$, *νά ἀποδειχθεῖ ἡ ἀλήθεια τῆς ἰσότητας:*

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{4} + k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Ἀπόδειξη. Στόν τύπο (17) ἀντικαθιστώντας τίς δεδομένες τιμές, βρίσκουμε μετά τήν ἐκτέλεση τῶν σχετικῶν πράξεων:

$$\varepsilon\varphi(\alpha + \beta + \gamma) = 1 = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}. \text{ Ἄρα: } \alpha + \beta + \gamma = \pi/4 + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Πρώτη ὁμάδα

11. Νά ὑπολογισθοῦν οἱ παραστάσεις:

1.	$\eta\mu(\beta + \gamma - \alpha)$,	$\eta\mu(\gamma + \alpha - \beta)$,	$\eta\mu(\alpha + \beta - \gamma)$.
2.	$\sigma\upsilon\nu(\beta + \gamma - \alpha)$,	$\sigma\upsilon\nu(\gamma + \alpha - \beta)$,	$\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta - \gamma)$.
3.	$\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta - \gamma)$,	$\sigma\upsilon\nu(\beta - \alpha - \gamma)$,	$\sigma\upsilon\nu(\gamma - \alpha - \beta)$.

12. 1. Ἄν $0 < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}$ καί $\varepsilon\varphi\alpha = \frac{3}{4}$, $\varepsilon\varphi\beta = \frac{8}{15}$, $\varepsilon\varphi\gamma = \frac{5}{12}$, νά ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τῶν ἀθροισμάτων $\alpha \pm \beta \pm \gamma$.

2. Ἄν $0 < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}$ καί $\eta\mu\alpha = \frac{3}{5}$, $\eta\mu\beta = \frac{12}{13}$, $\eta\mu\gamma = \frac{7}{25}$, νά ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί $\eta\mu(\alpha + \beta + \gamma)$, $\varepsilon\varphi(\alpha + \beta + \gamma)$, $\sigma\varphi(\alpha + \beta - \gamma)$.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΩΝ ΤΟΞΩΝ

● **11.** *ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Ἀπό τούς τριγωνομετρικούς ἀριθμούς ἑνός τόξου α νά ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τῶν τόξων:*

$$2\alpha, 3\alpha, \ldots, \nu\alpha \qquad \nu \in \mathbb{Z}$$

Α) Ὑπολογισμός τοῦ ημ2α. Ἄν στό γνωστό τύπο:

$$\eta\mu(\alpha + \beta) \equiv \eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\beta\,\sigma\upsilon\nu\alpha$$

βάλουμε ἀντί β τό α, θά ἔχουμε:

$$\eta\mu(\alpha + \alpha) \equiv \eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha$$

ἤ

$$\boxed{\eta\mu\,2\alpha \equiv 2\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha} \qquad \textbf{(19)}$$

Β) Ὑπολογισμός τοῦ συν 2α. Ἄν στό γνωστό τύπο:

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) \equiv \sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta,$$

βάλουμε ὅπου β τό α, θά ἔχουμε διαδοχικά:

$$\sigma\upsilon\nu 2\alpha \equiv \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha \equiv 1 - \eta\mu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha \equiv 1 - 2\eta\mu^2\alpha$$

καί $\quad \sigma\upsilon\nu 2\alpha \equiv \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha \equiv \sigma\upsilon\nu^2\alpha - (1 - \sigma\upsilon\nu^2\alpha) \equiv 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1.$

῞Ωστε:

$$\boxed{\sigma\upsilon\nu 2\alpha \equiv 1 - 2\eta\mu^2\alpha \equiv 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1 \equiv \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha} \qquad (20)$$

Γ) Ὑπολογισμός τῆς εφ 2α. Ἀπό τό γνωστό τύπο:

$$\varepsilon\varphi(\alpha+\beta) = \frac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta}{1 - \varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi\beta},$$ ἄν βάλουμε ὅπου β τό α, ἔχουμε:

$$\varepsilon\varphi(\alpha+\alpha) = \frac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\alpha}{1 - \varepsilon\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi\alpha} = \frac{2\,\varepsilon\varphi\alpha}{1 - \varepsilon\varphi^2\alpha} \quad \text{ἤ} \quad \boxed{\varepsilon\varphi\, 2\alpha = \frac{2\,\varepsilon\varphi\alpha}{1 - \varepsilon\varphi^2\alpha}} \qquad (21)$$

Ὁ τύπος (21) ἰσχύει γιά:

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi \quad \text{καί} \quad \alpha \neq \pm\frac{\pi}{4} + k_1\cdot\pi, \text{ ὅπου } k, k_1, \in \mathbb{Z}.$$

Δ) Ὑπολογισμός τῆς σφ 2α. Ἀπό τό γνωστό τύπο:

$$\sigma\varphi(\alpha+\beta) = \frac{\sigma\varphi\alpha\,\sigma\varphi\beta - 1}{\sigma\varphi\alpha + \sigma\varphi\beta},$$ ὅταν $\beta = \alpha$, ἔχουμε:

$$\sigma\varphi(\alpha+\alpha) = \frac{\sigma\varphi\alpha\cdot\sigma\varphi\alpha - 1}{\sigma\varphi\alpha + \sigma\varphi\alpha} = \frac{\sigma\varphi^2\alpha - 1}{2\sigma\varphi\alpha} \quad \text{ἤ} \quad \boxed{\sigma\varphi 2\alpha = \frac{\sigma\varphi^2\alpha - 1}{2\sigma\varphi\alpha}} \qquad (22)$$

Ὁ τύπος (22) ἰσχύει γιά $\alpha \neq k\pi$ καί $\alpha \neq \pi/2 + k_1\cdot\pi$, ὅπου $k, k_1 \in \mathbb{Z}$.

● **12.** *Οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τοῦ τόξου 3α.* Ἔχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned}\eta\mu 3\alpha &= \eta\mu(2\alpha+\alpha) = \eta\mu 2\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \\ &= 2\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha(1 - 2\eta\mu^2\alpha) = \\ &= 2\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \eta\mu\alpha - 2\eta\mu^3\alpha = \\ &= 2\eta\mu\alpha(1 - \eta\mu^2\alpha) + \eta\mu\alpha - 2\eta\mu^3\alpha = \\ &= 2\eta\mu\alpha - 2\eta\mu^3\alpha + \eta\mu\alpha - 2\eta\mu^3\alpha = 3\eta\mu\alpha - 4\eta\mu^3\alpha.\end{aligned}$$

$$\sigma\upsilon\nu 3\alpha = \sigma\upsilon\nu(2\alpha+\alpha) = \sigma\upsilon\nu 2\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu 2\alpha\,\eta\mu\alpha =$$
$$= (2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1)\sigma\upsilon\nu\alpha - 2\eta\mu^2\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^3\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha - 2(1 - \sigma\upsilon\nu^2\alpha)\sigma\upsilon\nu\alpha =$$
$$= 2\sigma\upsilon\nu^3\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha - 2\sigma\upsilon\nu\alpha + 2\sigma\upsilon\nu^3\alpha = 4\sigma\upsilon\nu^3\alpha - 3\sigma\upsilon\nu\alpha.$$

$$\varepsilon\varphi 3\alpha = \varepsilon\varphi(2\alpha+\alpha) = \frac{3\varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi^3\alpha}{1 - 3\varepsilon\varphi^2\alpha}, \qquad \sigma\varphi 3\alpha = \sigma\varphi(2\alpha+\alpha) = \frac{\sigma\varphi^3\alpha - 3\sigma\varphi\alpha}{3\sigma\varphi^2\alpha - 1}$$

Ὥστε, τελικά, θά ἔχουμε:

$ημ3α = 3ημα - 4ημ^3α$	(23)	καί	$εφ3α = \dfrac{3εφα - εφ^3α}{1 - 3εφ^2α}$
$συν3α = 4συν^3α - 3συνα$			$σφ3α = \dfrac{σφ^3α - 3σφα}{3σφ^2α - 1}$ (24)

ΣΗΜ. Οἱ τύποι (23) καί (24) προκύπτουν ἀπό τούς τύπους 15 - 18, ἄν ἐκεῖ βάλουμε ὅπου $β = γ = α$ καί ἐκτελέσουμε τίς πράξεις.

Ὁ πρῶτος ἀπό τούς τύπους (24) ἔχει ἔννοια, ὅταν

$$3α \neq \frac{π}{2} + kπ \Rightarrow α \neq \frac{π}{6} + k \cdot \frac{π}{3} \quad \text{καί} \quad α \neq \pm \frac{π}{6} + k_1π, \text{ ὅπου } k, k_1 \in \mathbb{Z}.$$

Ὁ δεύτερος ἀπό τούς τύπους (24) ἔχει ἔννοια, ὅταν:

$$3α \neq k_2π \Rightarrow α \neq k_2 \cdot \frac{π}{3} \text{ καί } α \neq \pm \frac{π}{3} + k_3π, \text{ ὅπου } k_2, k_3 \in \mathbb{Z}.$$

★ ● **13.** *Τύποι τοῦ Simpson.* Προφανῶς εἶναι:

$$\left.\begin{aligned} ημ(α+β) + ημ(α-β) &\equiv 2ημα\,συνβ \\ συν(α+β) + συν(α-β) &\equiv 2συνα\,συνβ \end{aligned}\right\}.$$

Ἑπομένως:

$$\left.\begin{aligned} ημ(α+β) &\equiv 2ημα\,συνβ - ημ(α-β) \\ συν(α+β) &\equiv 2συνα\,συνβ - συν(α-β) \end{aligned}\right\}.$$

καί ἄν βάλουμε ὅπου α τό μα καί ὅπου β τό α, βρίσκουμε τούς τύπους:

$$ημ(μ+1)α \equiv 2ημ(μα)\,συνα - ημ(μ-1)α \quad (25)$$

$$συν(μ+1)α \equiv 2συν(μα)συνα - συν(μ-1)α \quad (26)$$

Ἀπό τούς τύπους (25), (26) γιά $μ = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$ βρίσκουμε ἀντιστοίχως τούς τύπους:

$ημ\,2α \equiv 2ημα\,συνα$	$συν\,2α \equiv 2συν^2α - 1$
$ημ\,3α \equiv 3ημα - 4ημ^3α$	$συν3α \equiv 4συν^3α - 3συν\,α$
$ημ\,4α \equiv (4ημα - 8ημ^3α)συνα$	$συν4α \equiv 8συν^4α - 8συν^2α + 1$
$ημ5α \equiv 5ημα - 20ημ^3α + 16ημ^5α$	$συν5α \equiv 16συν^5α - 20συν^3α + 5συνα$
$ημ6α \equiv (6ημα - 32ημ^3α + 32ημ^5α)συνα$	$συν6α \equiv 32συν^6α - 48συν^4α + 18συν^2α - 1$
. . . .	. . . .

● **14.** *ΕΦΑΡΜΟΓΗ. Νά ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τῶν γωνιῶν* **18°, 36°, 54°, 72°.**

Λύση. Ἔχουμε διαδοχικά: $36° + 54° = 90° \Leftrightarrow 36° = 90° - 54° \Leftrightarrow$
$$ημ36° \equiv ημ(90° - 54°) \equiv συν54° \Leftrightarrow ημ(2\cdot 18°) \equiv συν(3\cdot 18°) \Leftrightarrow$$
$$2ημ18°\, συν18° \equiv 4συν^3 18° - 3συν18° \Leftrightarrow$$
$$2ημ18° \equiv 4συν^2 18° - 3 \Leftrightarrow 4ημ^2 18° + 2ημ18° \equiv 1 \Leftrightarrow$$
$$4ημ^2 18° + 2ημ18° + \frac{1}{4} \equiv \frac{5}{4} \Leftrightarrow \left(2ημ18° + \frac{1}{2}\right)^2 \equiv \frac{5}{4} \Leftrightarrow$$
$$\left|2ημ18° + \frac{1}{2}\right| \equiv \frac{\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow 2ημ18° + \frac{1}{2} \equiv \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow ημ18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \approx 0{,}3090$$

Ἄρα
$$συν^2 18° = 1 - ημ^2 18° = 1 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = \frac{10+2\sqrt{5}}{16} \Rightarrow$$
$$συν18° = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

ὁπότε
$$εφ18° = \frac{ημ18°}{συν18°} = \frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}.$$

Ἀπό τόν τύπο $συν2α = 1 - 2ημ^2α$, γιά $α = 18°$, ἔχουμε:
$$συν36° = 1 - 2ημ^2 18° = 1 - 2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

καί $ημ^2 36° = 1 - συν^2 36° = 1 - \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2 = \frac{10-2\sqrt{5}}{16}$ ἤ $ημ36 = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

καί ἄρα:
$$εφ36° = \frac{ημ36°}{συν36} = \sqrt{5-2\sqrt{5}}\cdot$$

Καί ἐπειδή $18° + 72° = 90°$ καί $36° + 54° = 90°$, συμπεραίνουμε:

$$\begin{aligned} ημ72° &= συν18° \\ συν72° &= ημ18° \\ εφ72° &= σφ18° \\ σφ72° &= εφ18° \end{aligned} \qquad \text{καί} \qquad \begin{aligned} ημ54° &= συν36° \\ συν54° &= ημ36° \\ εφ54° &= σφ36° \\ σφ54° &= εφ36° \end{aligned}$$

Ἀνακεφαλαιώνοντας ἔχουμε:

$ημ18° = συν72° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$ημ36° = συν54° = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$
$συν18° = ημ72° = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$συν36° = ημ54° = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$
$εφ18° = σφ72° = \frac{1}{5}\sqrt{25-10\sqrt{5}}$	$εφ36° = σφ54° = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$
$σφ18° = εφ72° = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$σφ36° = εφ54° = \frac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}$

(28)

Πρώτη ὁμάδα

13. Ἄν $ημα = 0{,}4$ καί $90° < α < 180°$, νά ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί:

$$ημ2α,\ συν2α,\ εφ2α,\ σφ2α$$

14. Ἄν $ημα = \frac{1}{3}$, $ημβ = \frac{1}{2}$ καί $0 < α, β < \frac{π}{2}$, νά ὑπολογισθεῖ τό $ημ(2α + β)$.

15. Ἄν $4ημ^2x - 2(1 + \sqrt{3})\,ημx + \sqrt{3} = 0$, νά ὑπολογισθοῦν οἱ ἀριθμοί:

$$ημ2x,\ συν2x,\ εφ2x.$$

16. Ἄν $συνα = \frac{1}{3}$, νά ὑπολογισθεῖ τό $συν3α$.

17. Ἄν $ημα = \frac{3}{5}$, νά ὑπολογισθεῖ τό $ημ3α$.

18. Ἄν $εφα = 3$, νά ὑπολογισθεῖ ἡ $εφ3α$.

19. Νά ἀποδειχθοῦν οἱ ἀκόλουθες ἰσότητες:

1. $\dfrac{ημ2α}{1 + συν3α} = εφα,$ 5. $\dfrac{1 + σφ^2α}{2σφα} = στεμ2α,$

2. $\dfrac{ημ2α}{1 - συν2α} = σφα,$ 6. $\dfrac{σφ^2α + 1}{σφ^2α - 1} = τεμ2α,$

3. $συν^4α - ημ^4α \equiv συν2α,$ 7. $εφ(45° - α) = \dfrac{συν2α}{1 + ημ2α}.$

4. $σφα - εφα = 2σφ2α.$

Πότε ἔχουν ἔννοια τά μέλη τῶν παραπάνω ἀσκήσεων;

20. Νά ἀποδειχθοῦν οἱ ἀκόλουθες ἰσότητες:

1. $συν^2\left(\dfrac{π}{4} - α\right) - ημ^2\left(\dfrac{π}{4} - α\right) \equiv ημ2α.$

2. $εφ(45° + α) - εφ(45° - α) = 2εφ2α.$

3. $\dfrac{συνα + ημα}{συνα - ημα} - \dfrac{συνα - ημα}{συνα + ημα} = 2εφ2α.$

4. $\dfrac{1 - συν2α + ημ2α}{1 + συν2α + ημ2α} = εφα.$

★ Δεύτερη ὁμάδα

21. Νά ἀποδειχθοῦν οἱ ἀκόλουθες ἰσότητες:

1. $\dfrac{ημ3α}{ημα} - \dfrac{συν3α}{συνα} = 2.$ 2. $\dfrac{3\,συνα + συν3α}{3\,ημα - ημ\,3α} = σφ^2α,$

3. $\dfrac{ημ3α + ημ^3α}{συν^3α - συν3α} = σφα.$ 4. $\dfrac{συν^3α - συν3α}{συνα} + \dfrac{ημ^3α + ημ3α}{ημα} = 3.$

5. $4ημ^3α\,συν3α + 4συν^3α\,ημ3α \equiv 3ημ4α.$

6. $4ημα\,ημ(60° + α)\,ημ(60° - α) \equiv ημ3α.$

7. $εφ3α - εφ2α - εφα = εφ3α\,εφ2α\,εφα.$

8. $\dfrac{σφα}{σφα - σφ3α} + \dfrac{εφα}{εφα - εφ3α} = 1.$

● 15. *ΠΡΟΒΛΗΜΑ. 'Από τήν εφα ένός τόξου α νά ύπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τῆς γωνίας 2α.*

Λύση. 'Από τίς ἰσότητες:

$$\sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha} \quad \text{καί} \quad \eta\mu^2\alpha = \frac{\varepsilon\varphi^2\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}, \quad \text{ἄν } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

ἔχουμε διαδοχικά:

$$\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha\, \sigma\upsilon\nu\alpha = 2\varepsilon\varphi\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu^2\alpha = 2\varepsilon\varphi\alpha \cdot \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha} = \frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha},$$

$$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha = \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha} - \frac{\varepsilon\varphi^2\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha} = \frac{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha},$$

$$\varepsilon\varphi 2\alpha = \frac{\eta\mu 2\alpha}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha} = \frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}, \quad \text{ἄν } \alpha \neq \frac{\pi}{4} + k_1 \cdot \frac{\pi}{2} \quad \text{καί} \quad \alpha \neq \pm\frac{\pi}{4} + k_2\pi$$

$$\sigma\varphi 2\alpha = \frac{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}{2\varepsilon\varphi\alpha}, \quad \text{ἄν } \alpha \neq (2k_3+1)\frac{\pi}{2} \quad \text{καί} \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k_4\pi,$$

ὅπου οἱ $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{Z}$.

'Ανακεφαλαιώνοντας ἔχουμε:

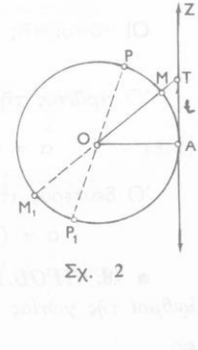
$\eta\mu 2\alpha = \dfrac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}$	$\varepsilon\varphi 2\alpha = \dfrac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}$
$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \dfrac{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}$	$\sigma\varphi 2\alpha = \dfrac{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}{2\varepsilon\varphi\alpha}$

(29)

Στούς τύπους (29) παρατηροῦμε ὅτι οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί ημ2α, συν2α, εφ2α, σφ2α εἶναι ρητές συναρτήσεις τῆς εφα.

✶● 16. Γεωμετρική ἑρμηνεία τῶν τύπων (29). Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι Ο εἶναι τό κέντρο τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου, Α ἡ ἀρχή τῶν τόξων καί ΑΖ ὁ ἄξονας τῶν ἐφαπτομένων.

Ἄν $t = \varepsilon\varphi\alpha = \overline{AT}$ εἶναι ἡ τιμή τῆς ἐφαπτομένης, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ στά δύο ἀντιδιαμετρικά σημεῖα Μ καί M_1 τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου (Ο), τότε τά τόξα, τά ὁποῖα ἔχουν ἐφαπτομένη $t = \overline{AT}$, περατώνονται στό σημεῖο Μ ἤ τό M_1.



Σχ. 2

Ἄρα οἱ τιμές τους θά εἶναι :

$$x = \alpha + k\cdot\pi, \quad \text{ὅπου } k \in \mathbb{Z}.$$

Τά διπλάσια τόξα θά ἔχουν τιμές:

$$2x = 2(\alpha + k\cdot\pi) = 2\alpha + k\cdot 2\pi$$

καί θά περατώνονται στό σημεῖο P ἤ P_1. Ἄν, λοιπόν, γνωρίζουμε τό σημεῖο T, εἶναι ἀμέσως γνωστό καί τό σημεῖο P. Ἄρα οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τοῦ τόξου $\overset{\frown}{AP}$ εἶναι τελείως ὁρισμένοι.

Ἀντιστρόφως, ἄν εἶναι γνωστό τό σημεῖο P, εἶναι ἀμέσως γνωστό καί τό σημεῖο T, ὁπότε εἶναι γνωστή καί ἡ ἐφαπτομένη τοῦ τόξου $\overset{\frown}{AM}$. Δηλαδή ἀπό τούς τριγωνομετρικούς ἀριθμούς τοῦ τόξου $2α$ εἶναι γνωστή ἡ εφα.

Ἔτσι εἶναι:

$$\frac{1-συν2α}{ημ2α}=\frac{2ημ^2α}{2ημα\,συνα}=εφα=\frac{ημ2α}{1+συν2α}.$$

● **17.** *ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Ἀπό τήν εφ $\frac{α}{2}$, νά ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τοῦ τόξου α.*

Λύση. Ἄν στούς γνωστούς τύπους (29) ἀντικαταστήσουμε τή γωνία α μέ τή γωνία $\frac{α}{2}$, θά βροῦμε τούς ἀκόλουθους τύπους:

$ημα=\dfrac{2\,εφα\,\frac{α}{2}}{1+εφ^2\frac{α}{2}}$	$εφα=\dfrac{2\,εφ\,\frac{α}{2}}{1-εφ^2\frac{α}{2}}$
$συνα=\dfrac{1-εφ^2\frac{α}{2}}{1+εφ^2\frac{α}{2}}$	$σφα=\dfrac{1-εφ^2\frac{α}{2}}{2\,εφ\,\frac{α}{2}}$

(30)

Στούς τύπους (30) παρατηροῦμε ὅτι οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τῆς γωνίας α ἐκφράζονται ὡς ρητές συναρτήσεις τῆς εφ $\frac{α}{2}$.

Οἱ τύποι τῆς πρώτης στήλης ἔχουν ἔννοια, ἄν

$$α \neq \pm π + 2kπ, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ὁ πρῶτος τῆς δεύτερης στήλης ἔχει ἔννοια, ἄν

$$α \neq (2k_1+1)\frac{π}{2} \quad καί \quad α \neq \pm\frac{π}{2}+2k_2π, \qquad k_1, k_2 \in \mathbb{Z}.$$

Ὁ δεύτερος τῆς δεύτερης στήλης ἔχει ἔννοια, ἄν

$$α \neq (k_3+1)π \quad καί \quad α \neq π + 2k_4π, \quad k_4, k_3 \in \mathbb{Z}.$$

● **18.** *ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Ἀπό τό συν2α νά ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τῆς γωνίας α.*

Λύση. Ἀπό τούς γνωστούς τύπους:

$$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = 1 - 2\eta\mu^2\alpha \text{ καί } \sigma\upsilon\nu 2\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1,$$

ἔχουμε ἀντιστοίχως:

$$\eta\mu^2\alpha = \frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2} \Leftrightarrow |\,\eta\mu\alpha\,| = \sqrt{\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}}$$

καί

$$\sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2} \Leftrightarrow |\,\sigma\upsilon\nu\alpha\,| = \sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}}$$

Δηλαδή, ἀντιστοίχως:

$$\eta\mu\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}} \text{ καί } \sigma\upsilon\nu\alpha = \pm\sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}}$$

Θά εἶναι ἀκόμα:

$$\varepsilon\varphi^2\alpha = \frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha} \Leftrightarrow |\,\varepsilon\varphi\alpha\,| = \sqrt{\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}}, \text{ μέ } \alpha \neq \pm\frac{\pi}{2} + k\pi$$

καί

$$\sigma\varphi^2\alpha = \frac{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha} \Leftrightarrow |\,\sigma\varphi\alpha\,| = \sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}}, \text{ μέ } \alpha \neq k_1\pi$$

καί $\alpha \neq 2k_2\pi$, ὅπου $k, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

Ἀνακεφαλαιώνοντας ἔχουμε:

$\boldsymbol{\eta\mu\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}}}$	$\boldsymbol{\varepsilon\varphi\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}}}$
$\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu\alpha = \pm\sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}}}$	$\boldsymbol{\sigma\varphi\alpha = \pm\sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}}}$

(31)

Ἀπό τούς τύπους (31) φαίνεται ὅτι τό πρόβλημα ἔχει τίς ἑξῆς λύσεις:

$$1.\ \begin{cases} \eta\mu\alpha = +\sqrt{\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}} \\ \sigma\upsilon\nu\alpha = +\sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}} \end{cases} \qquad 3.\ \begin{cases} \eta\mu\alpha = -\sqrt{\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}} \\ \sigma\upsilon\nu\alpha = -\sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}} \end{cases}$$

$$2.\ \begin{cases} \eta\mu\alpha = +\sqrt{\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}} \\ \sigma\upsilon\nu\alpha = -\sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}} \end{cases} \qquad 4.\ \begin{cases} \eta\mu\alpha = -\sqrt{\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}} \\ \sigma\upsilon\nu\alpha = +\sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}} \end{cases}$$

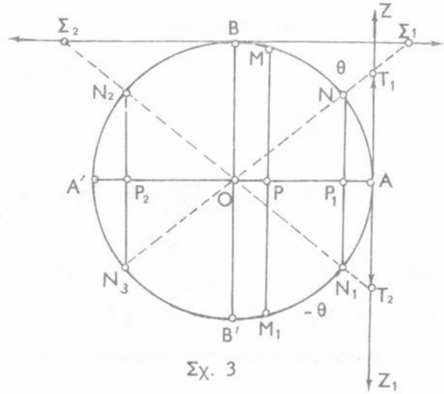
(31α)

✶ ● **19. Γεωμετρική ἑρμηνεία τῶν λύσεων αὐτῶν.** Τό διπλό πρόσημο τῶν παραπάνω τύπων ἐξηγεῖται ὡς ἑξῆς:

Ἄς δεχθοῦμε ὅτι: $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \mu = \overline{OP}$ (σχ. 3) καί $\widehat{AM} = \theta$ τό ἐλάχιστο θετικό τόξο, τοῦ ὁποίου τό συνημίτονο εἶναι μ.

Ἄν M_1 εἶναι τό συμμετρικό τοῦ M ὡς πρός τόν ἄξονα A′OA, τότε καί τό τόξο $\widehat{AA'M_1}$ ἔχει τό ἴδιο συνημίτονο $\mu = \overline{OP}$. Ἡ τιμή κάθε ἄλλου τόξου, τό ὁποῖο ἔχει ἀρχή τό A καί τέλος τό σημεῖο M ἤ M_1, θά εἶναι:

$2\alpha = \pm\theta + k\cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$.



Σχ. 3

Ἄρα: $\alpha = \pm\dfrac{\theta}{2} + k\cdot\pi \qquad (1)$

Ἄν $\mathbf{k = 2\nu}$, $\nu \in \mathbb{Z}$, τότε

$$\alpha = \pm\frac{\theta}{2} + 2\nu\cdot\pi$$

καί τά ἀντίστοιχα τόξα περατώνονται στά σημεῖα N καί N_1, ὅπου N καί N_1 τά μέσα τῶν τόξων $\widehat{AM}$ καί $\widehat{AN_1M_1}$.

Ἄν $\mathbf{k = 2\nu+1}$, $\nu \in \mathbb{Z}$, τότε ἡ σχέση (1) γίνεται:

$$\alpha = \pm\frac{\theta}{2} + (2\nu+1)\pi = \pm\frac{\theta}{2} + \pi + 2\nu\pi \qquad (2)$$

καί τά ἀντίστοιχα τόξα περατώνονται στά σημεῖα N_3 καί N_2, ἀντιδιαμετρικά τῶν N καί N_1 ἀντιστοίχως. Τά ἡμίτονα τῶν τόξων $\widehat{AN}$, $\widehat{AN_2}$, $\widehat{AN_3}$, $\widehat{AN_1}$ ἔχουν ἴσες ἀπόλυτες τιμές. Τό ἴδιο συμβαίνει καί μέ τά συνημίτονά τους.

Τά τόξα $\widehat{AN}$, $\widehat{AN_2}$ καθώς καί τά $\widehat{AN_3}$, $\widehat{AN_1}$ ἔχουν ἴσα ἡμίτονα καί ἀντίθετα συνημίτονα.

Τά τόξα $\widehat{AN}$ καί $\widehat{AN_3}$ ἔχουν τήν ἴδια ἐφαπτομένη $\overline{AT_1}$ καί τήν ἴδια συνεφαπτομένη $\overline{B\Sigma_1}$, ἐνῶ τά τόξα $\widehat{AN_2}$ καί $\widehat{AN_1}$ ἔχουν τήν ἴδια ἐφαπτομένη $\overline{AT_2}$ (ἀρνητική) καί τήν ἴδια συνεφαπτομένη $\overline{B\Sigma_2}$ (ἀρνητική).

Τά διανύσματα $\overrightarrow{AT_1}$ καί $\overrightarrow{AT_2}$ εἶναι ἀντίρροπα, καθώς καί τά $\overrightarrow{B\Sigma_1}$ καί $\overrightarrow{B\Sigma_2}$ μέ ἀλγεβρικές τιμές ἀντίθετες ἀντιστοίχως.

● **20.** *ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Ἀπό τό συνα νά ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τῆς γωνίας* $\dfrac{\alpha}{2}$.

Λύση. Ἄν στούς τύπους (31) βάλουμε ἀντί γιά τή γωνία α τή γωνία $\dfrac{\alpha}{2}$, ἔχουμε τούς τύπους:

$\eta\mu\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{2}}$	$\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}}$
$\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}{2}}$	$\sigma\varphi\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}}$

(32)

Ἀπό τούς τύπους αὐτούς φαίνεται πάλι ὅτι τό πρόβλημα ἔχει τέσσερις λύσεις, τίς ἑξῆς:

$$1.\ \begin{cases}\eta\mu\frac{\alpha}{2}=+\sqrt{\frac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{2}}\\ \sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}=+\sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}{2}}\end{cases}\qquad 3.\ \begin{cases}\eta\mu\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{2}}\\ \sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}{2}}\end{cases}$$

$$2.\ \begin{cases}\eta\mu\frac{\alpha}{2}=+\sqrt{\frac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{2}}\\ \sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}{2}}\end{cases}\qquad 4.\ \begin{cases}\eta\mu\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{2}}\\ \sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}=+\sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}{2}}\end{cases}$$

Ἡ γεωμετρική ἑρμηνεία τῶν διπλῶν σημείων τῶν τύπων αὐτῶν γίνεται μέ τόν τρόπο πού ἔγινε καί στή προηγούμενη παράγραφο καί μέ τό ἴδιο σχῆμα.

Παράδειγμα Ι. *Νά ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τοῦ τόξου 22°,5.*

Λύση. Ἐπειδή $0° < 22°,5 < 90°$, συμπεραίνουμε ὅτι ὅλοι οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τοῦ τόξου 22°,5 εἶναι θετικοί. Ἄρα:

$$\eta\mu 22°,5=\sqrt{\frac{1-\sigma\upsilon\nu 45°}{2}}=\sqrt{\frac{1-(\sqrt{2}:2)}{2}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}},$$

$$\sigma\upsilon\nu 22°,5=\sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu 45°}{2}}=\sqrt{\frac{1+(\sqrt{2}:2)}{2}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}},$$

$$\varepsilon\varphi 22°,5=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{4-2}}{2+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\,(2-\sqrt{2})}{4-2}=\sqrt{2}-1,\quad \text{καί}$$

$$\sigma\varphi 22°,5=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}+1}{2-1}=\sqrt{2}+1.$$

★ **Παράδειγμα II.** *Νά ὑπολογισθεῖ ἡ εφ 7° 30′.*

Λύση. Ἐπειδή εἶναι:

$$\text{εφ}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{\text{ημ}\alpha}{1+\text{συν}\alpha} = \frac{1-\text{συν}\alpha}{\text{ημ}\alpha},\ (\alpha \neq k\pi)\ k \in \mathbb{Z}$$

θά ἔχουμε:
$$\text{εφ}7°\,30' = \frac{1-\text{συν}15°}{\text{ημ}15°} \tag{1}$$

Ἀλλά $\text{συν}15° = \frac{1}{4}\,(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ καί $\text{ημ}15° = \frac{1}{4}\,(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

καί ἡ σχέση (1) γίνεται:

$$\text{εφ}7°\,30' = \frac{1-\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{\frac{1}{4}\,(\sqrt{6}-\sqrt{2})} = \frac{(4-\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})} =$$

$$= \frac{4\sqrt{6}+4\sqrt{2}-4\sqrt{3}-8}{4} = \sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2$$

Ὥστε:
$$\mathbf{\text{εφ}7°\,30' = \sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2}$$

Νά βρεῖτε μόνοι σας τώρα τούς ἄλλους τριγωνομετρικούς ἀριθμούς τῆς γωνίας 7° 30′.

★ **Παράδειγμα III.** *Νά ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τῆς γωνίας 165°.*

Λύση. Ἐπειδή $270° < 330° < 360°$, συμπεραίνουμε ὅτι $135° < 165° < 180°$ καί ἄρα τό τόξο 165° ἔχει τό τέλος του στό δεύτερο τεταρτημόριο. Θά ἔχει ἀκόμη θετικό ἡμίτονο καί ἀρνητικό συνημίτονο.

Ἔτσι θά ἔχουμε:

$$\text{ημ}165° = +\sqrt{\frac{1-\text{συν}330°}{2}} = +\sqrt{\frac{1-(\sqrt{3}:2)}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}},$$

$$\text{συν}165° = -\sqrt{\frac{1+\text{συν}330°}{2}} = -\sqrt{\frac{1+(\sqrt{3}:2)}{2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}},$$

$$\text{εφ}165° = \frac{\text{ημ}165°}{\text{συν}165°} = \sqrt{3}-2 \text{ καί } \text{σφ}165° = -(2+\sqrt{3}).$$

Σημείωση. Ἐπειδή $165° + 15° = 180°$, θά ἔχουμε διαδοχικά:

$$ημ165° = ημ15° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$συν165° = -συν15° = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = -\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

$$εφ\,165° = -εφ15° = -(2-\sqrt{3}) = \sqrt{3}-2$$

καί $σφ165° = -σφ15° = -(2+\sqrt{3})$

✶ **Παράδειγμα IV.** *Νά ἀποδειχθεῖ ἡ ἀλήθεια τῆς ἰσότητας:*

$$A \equiv ημ^4\frac{\pi}{8} + ημ^4\frac{3\pi}{8} + ημ^4\frac{5\pi}{8} + ημ^4\frac{7\pi}{8} = \frac{3}{2}\,. \qquad (1)$$

Ἀπόδειξη. Ἐπειδή $\frac{7\pi}{8} + \frac{\pi}{8} = \pi$ καί $\frac{3\pi}{8} + \frac{5\pi}{8} = \pi$,

προκύπτει ὅτι:

$$ημ\frac{7\pi}{8} = ημ\frac{\pi}{8} \text{ καί } ημ\frac{5\pi}{8} = ημ\frac{3\pi}{8}$$

ὁπότε ἡ (1) μᾶς δίνει διαδοχικά:

$$A \equiv 2ημ^2\frac{\pi}{8} + 2ημ^4\frac{3\pi}{8} = 2\left\{\frac{1-συν\frac{\pi}{4}}{2}\right\}^2 + 2\left\{\frac{1-συν\frac{3\pi}{4}}{2}\right\}^2 =$$

$$= 2.\left\{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}\right\}^2 + 2\left\{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}\right\}^2 = 2.\,\frac{(2-\sqrt{2})^2}{16} + 2.\,\frac{(2+\sqrt{2})^2}{16} =$$

$$= \frac{4-4\sqrt{2}+2}{8} + \frac{4+4\sqrt{2}+2}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

✶ **Παράδειγμα V.** *Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ παράσταση:*

$$B \equiv συν^2α + συν^2(α+120°) + συν^2(α-120°)\,. \qquad (1)$$

εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τό τόξο α.

Ἀπόδειξη. Ἔχουμε διαδοχικά:

$$B \equiv \frac{1+συν2α}{2} + \frac{1+συν(2α+240°)}{2} + \frac{1+συν(2α-240°)}{2} =$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\Big[συν2α + συν(2α+240°) + συν(2α-240°)\Big] =$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\Big[συν2α + 2συν2ασυν240°\Big] = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\Big[συν2α + 2συν2α(-συν60°)\Big]$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\Big[συν2α - 2\cdot\frac{1}{2}συν2α\Big] = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cdot 0 = \frac{3}{2}$$

● **21.** *ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Ἀπό τούς τριγωνομετρικούς ἀριθμούς τῆς γωνίας* $\frac{\alpha}{2}$ *νά ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τῆς γωνίας α.*

Λύση. Ἀπό τούς γνωστούς τύπους:

$$\eta\mu 2\alpha \equiv 2\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha,$$

$$\sigma\upsilon\nu 2\alpha \equiv \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha \equiv 1 - 2\eta\mu^2\alpha \equiv 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1,$$

$$\varepsilon\varphi 2\alpha = \frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha} \quad \text{καί} \quad \sigma\varphi 2\alpha = \frac{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}{2\varepsilon\varphi\alpha},$$

ἂν ὅπου α βάλουμε τό $\frac{\alpha}{2}$, θά ἔχουμε τούς τύπους:

$\eta\mu\alpha \equiv 2\eta\mu\frac{\alpha}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}$	$\varepsilon\varphi\alpha = \dfrac{2\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}}{1-\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}}$
$\sigma\upsilon\nu\alpha \equiv \sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2} - \eta\mu^2\frac{\alpha}{2} \equiv 1 - 2\eta\mu^2\frac{\alpha}{2} \equiv 2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2} - 1$	$\sigma\varphi\alpha = \dfrac{1-\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}}{2\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}}$

(33)

Πότε τά μέλη τῶν τύπων τῆς δεύτερης στήλης δέν ἔχουν ἔννοια;

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. *Νά ἀποδειχθεῖ ἡ ἀλήθεια τῆς ἰσότητας:*

$$\mathbf{A} \equiv \frac{1+\eta\mu\theta-\sigma\upsilon\nu\theta}{1+\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta} = \varepsilon\varphi\frac{\theta}{2}.$$

Ἀπόδειξη. Ἔχουμε διαδοχικά:

$$A \equiv \frac{1+2\eta\mu\frac{\theta}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2}-\left(1-2\eta\mu^2\frac{\theta}{2}\right)}{1+2\eta\mu\frac{\theta}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2}+\left(2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\theta}{2}-1\right)} = \frac{2\eta\mu\frac{\theta}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2}+2\eta\mu^2\frac{\theta}{2}}{2\eta\mu\frac{\theta}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2}+2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\theta}{2}} =$$

$$= \frac{\eta\mu\frac{\theta}{2}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2}+\eta\mu\frac{\theta}{2}\right)}{\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2}\left(\eta\mu\frac{\theta}{2}+\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\eta\mu\frac{\theta}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2}} = \varepsilon\varphi\frac{\theta}{2}$$

ἄν ἰσχύουν: $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ καί $\theta \neq 2k_1\pi + \frac{\pi}{2}$, γιατί; $k, k_1 \in \mathbb{Z}$.

2. *Νά ἀποδειχθεῖ ἡ ἀλήθεια τῆς ἰσότητας:*

$$\varepsilon\varphi^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)=\frac{1+\eta\mu\theta}{1-\eta\mu\theta}, \qquad (1)$$

Ἀπόδειξη. Ἔχουμε διαδοχικά:

$$\varepsilon\varphi^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)=\frac{\left(\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}+\varepsilon\varphi\frac{\theta}{2}\right)^2}{\left(1-\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}\,\varepsilon\varphi\frac{\theta}{2}\right)^2}=\frac{\left(1+\varepsilon\varphi\frac{\theta}{2}\right)^2}{\left(1-\varepsilon\varphi\frac{\theta}{2}\right)^2}=\frac{\left(1+\dfrac{\eta\mu\frac{\theta}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2}}\right)^2}{\left(1-\dfrac{\eta\mu\frac{\theta}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2}}\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2}+\eta\mu\frac{\theta}{2}\right)^2}{\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2}-\eta\mu\frac{\theta}{2}\right)^2}=\frac{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\theta}{2}+\eta\mu^2\frac{\theta}{2}+2\eta\mu\frac{\theta}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2}}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\theta}{2}+\eta\mu^2\frac{\theta}{2}-2\eta\mu\frac{\theta}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2}}=\frac{1+\eta\mu\theta}{1-\eta\mu\theta}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Πρώτη ὁμάδα

22. Νά ἀποδειχθοῦν οἱ ἀκόλουθες ἰσότητες:

1. $\dfrac{\sigma\varphi\frac{\theta}{2}+1}{\sigma\varphi\frac{\theta}{2}-1}=\dfrac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1-\eta\mu\theta}$, 2. $\tau\varepsilon\mu\alpha-\varepsilon\varphi\alpha=\varepsilon\varphi\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$,

3. $\varepsilon\varphi\alpha+\tau\varepsilon\mu\alpha=\sigma\varphi\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$, 4. $\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}}{\eta\mu\alpha+\eta\mu\frac{\alpha}{2}}=\sigma\varphi\frac{\alpha}{2}$.

5. $\dfrac{\eta\mu\,2\alpha}{1-\sigma\upsilon\nu\,2\alpha}\cdot\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}=\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}$, 6. $\dfrac{\eta\mu\,2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\,2\alpha}\cdot\dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}=\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}$.

7. $\sigma\varphi\frac{\alpha}{2}-\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}=2\sigma\varphi\alpha$, 8. $\varepsilon\varphi\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\dfrac{1+\eta\mu\alpha}{1-\eta\mu\alpha}}$,

23. Νά ἀποδειχθοῦν οἱ παρακάτω ἰσότητες:

1. $(\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu\beta)^2+(\eta\mu\alpha-\eta\mu\beta)^2\equiv 4\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha+\beta}{2}$,

2. $(\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu\beta)^2+(\eta\mu\alpha+\eta\mu\beta)^2\equiv 4\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha-\beta}{2}$,

3. $(\sigma\upsilon\nu\alpha-\sigma\upsilon\nu\beta)^2+(\eta\mu\alpha-\eta\mu\beta)^2\equiv 4\eta\mu^2\frac{\alpha-\beta}{2}$.

4. $\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}\right)-\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\alpha}{2}\right)\equiv\frac{\sqrt{2}}{2}\eta\mu\alpha$.

★ Δεύτερη ὁμάδα

24. Νά ἀποδειχθοῦν οἱ ἀκόλουθες ἰσότητες:

1. $συν^4 \frac{π}{8} + συν^4 \frac{3π}{8} = \frac{3}{4}$, 2. $ημ^4 \frac{π}{8} + ημ^4 \frac{3π}{8} = \frac{3}{4}$.

3. $συν^4 \frac{π}{8} + συν^4 \frac{3π}{8} + συν^4 \frac{5π}{8} + συν^4 \frac{7π}{8} = \frac{3}{2}$

4. $\left(1 + συν\frac{π}{8}\right)\left(1 + συν\frac{3π}{8}\right)\left(1 + συν\frac{5π}{8}\right)\left(1 + συν\frac{7π}{8}\right) = \frac{1}{8}$.

5. Ἄν $συνx = \frac{α}{β+γ}$, $συνy = \frac{β}{γ+α}$, $συνω = \frac{γ}{α+β}$, τότε:

$$εφ^2\frac{x}{2} + εφ^2\frac{y}{2} + εφ^2\frac{ω}{2} = 1.$$

25. Νά ἀποδειχθοῦν οἱ ἀκόλουθες ἰσότητες:

1. $εφ\left(α-β+\frac{π}{3}\right) + εφ\left(β-γ+\frac{π}{3}\right) + εφ\left(γ-α+\frac{π}{3}\right) =$

$= εφ\left(α-β+\frac{π}{3}\right) εφ\left(β-γ+\frac{π}{3}\right) εφ\left(γ-α+\frac{π}{3}\right)$.

2. $Σσφ(γ+α-β)\,σφ(α+β-γ) = 1$, ἄν $α+β+γ=0$.

3. $Σσφ(2α+β-3γ)\,σφ(2β+γ-3α) = 1$.

4. $Σx(1-y^2)(1-ω^2) = 4xyω$, ἄν $xy + yω + ωx = 1$.

5. $ημ(α+β+γ) < ημα + ημβ + ημγ$, ἄν $0 < α, β, γ < \frac{π}{2}$

6. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

$1 + ημ^2α + ημ^2β > ημα + ημβ + ημα\,ημβ$.

★ ● 22. *ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ἀπό τήν εφ α νά ὑπολογισθεῖ ἡ εφ $\frac{α}{2}$*

Λύση. Ἀπό τή γνωστή ἰσότητα:

$$εφα = \frac{2εφ\frac{α}{2}}{1-εφ^2\frac{α}{2}} \text{ ἔχουμε τήν: } εφα\,εφ^2\frac{α}{2} + 2εφ\frac{α}{2} - εφα = 0 \qquad (α)$$

ἀπό τήν ὁποία βρίσκουμε:

$$\boxed{εφ\frac{α}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + εφ^2α}}{εφα}} \qquad \textbf{(34)}$$

Διερεύνηση. Ἀπό τόν τύπο (34) φαίνεται ὅτι τό πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις. Σέ μιά τιμή τῆς εφα, πού ἀντιστοιχεῖ στό διάνυσμα $\overrightarrow{AT}$, πού ἔχει μῆκος $\overline{AT}$, ἀντιστοιχοῦν δύο τόξα $\widehat{AM}$ καί $\widehat{A'M_1}$, συμμετρικά ὡς πρός τό κέντρο O τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου (σχ. 4), τῶν ὁποίων οἱ τιμές εἶναι:

$$\alpha = \theta + k\pi \qquad (1) \quad k \in \mathbb{Z}$$

ὅπου $\widehat{AM} = \theta$ τό ἐλάχιστο θετικό τόξο. Ἄρα

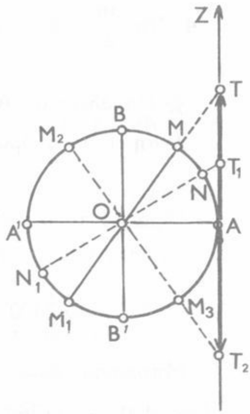
$$\frac{\alpha}{2} = \frac{\theta}{2} + k \cdot \frac{\pi}{2} \qquad (2)$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

A) Ἄν $\mathbf{k = 2\nu}$, $\nu \in \mathbb{Z}$, ἡ (2) γράφεται:

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{\theta}{2} + \nu\pi \qquad (3)$$

καί τά ἀντίστοιχα τόξα ἔχουν τό τέλος τους στά σημεῖα N καί N_1 καί ἔχουν τήν ἴδια ἐφαπτομένη, πού παριστάνεται ἀπό τό τμῆμα AT_1.



Σχ. 4

B) Ἄν $\mathbf{k = 2\nu + 1}$, $\nu \in \mathbb{Z}$, ἡ (2) γράφεται:

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2} + \nu\pi \qquad (4)$$

καί τά ἀντίστοιχα τόξα ἔχουν τό τέλος τους στά σημεῖα M_2 καί M_3 καί ἔχουν ἐφαπτομένη τό μῆκος $\overline{AT_2}$.

Ἐπειδή τό τρίγωνο T_1OT_2 εἶναι ὀρθογώνιο στό O, θά ἔχουμε:

$$\overline{AT_1} \cdot \overline{AT_2} = -OA^2 = -OB^2 \quad \text{ἤ} \quad \frac{\overline{AT}}{\overline{OB}} \cdot \frac{\overline{AT_2}}{\overline{OB}} = -1 \qquad (5)$$

Τό γ νόμενο τῶν ριζῶν x′, x″ τῆς ἐξισώσεως (α) εἶναι:

$$x'x'' = -\frac{\varepsilon\varphi\alpha}{\varepsilon\varphi\alpha} = -1$$

καί ἀπό ἐδῶ φαίνεται ὅτι ἀληθεύει ἡ (5).

Ἄν, ἀντί γιά τήν εφα, δοθεῖ τό τόξο α, τότε ἡ παράσταση $\sqrt{1 + \varepsilon\varphi^2\alpha}$ εἶναι μεγαλύτερη ἀπό τή μονάδα, ὅταν εφα $\neq 0$. Ἄρα:

1. Ἄν $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, τότε: $\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon\varphi\alpha > 0 \\ \varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2} > 0 \end{array} \right. \Rightarrow \varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2} = \dfrac{-1 + \sqrt{1 + \varepsilon\varphi^2\alpha}}{\varepsilon\varphi\alpha}$

2. Ἄν $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, τότε: $\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon\varphi\alpha < 0 \\ \varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2} > 0 \end{array} \right. \Rightarrow \varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2} = \dfrac{-1 - \sqrt{1 + \varepsilon\varphi^2\alpha}}{\varepsilon\varphi\alpha}$

3. Ἄν $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, τότε: $\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon\varphi\alpha > 0 \\ \varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2} < 0 \end{array} \right. \Rightarrow \varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2} = \dfrac{-1 - \sqrt{1 + \varepsilon\varphi^2\alpha}}{\varepsilon\varphi\alpha}$

4. Ἄν $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, τότε: $\left\{\begin{array}{l} \varepsilon\varphi\alpha < 0 \\ \varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2} < 0 \end{array}\right. \Rightarrow \varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2} = \frac{-1+\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}}{\varepsilon\varphi\alpha}$

★ **Παράδειγμα.** Ἀπό τήν $\varepsilon\varphi 4800° = -\sqrt{3}$, νά ὑπολογισθεῖ ἡ $\varepsilon\varphi 2400°$.

Λύση. Γιά νά βροῦμε τό τέλος τοῦ τόξου 2400°, γράφουμε:

$$2400° = 360°.6 + 240°.$$

Ἄρα τό τόξο 2400° ἔχει τό τέλος του στό τρίτο τεταρτημόριο. Ἡ ἐφαπτομένη του εἶναι θετική. Δηλαδή:

$$\varepsilon\varphi\, 2400° = \frac{-1-\sqrt{1+3}}{-\sqrt{3}} = \frac{-1-2}{-\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

Μποροῦμε, ὅμως, νά ἐργαστοῦμε καί ὡς ἑξῆς:

$$\varepsilon\varphi\, 2400° = \varepsilon\varphi\,(360°\cdot 6 + 240°) = \varepsilon\varphi\, 240° = \varepsilon\varphi\,(180° + 60°) = \varepsilon\varphi\, 60° = \sqrt{3}$$

καί ἑπομένως:

$$\sigma\upsilon\nu\, 2400° = \frac{1}{-\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2 2400°}} = \frac{1}{-\sqrt{1+3}} = -\frac{1}{2},$$

$$\eta\mu\, 2400° = \frac{\varepsilon\varphi 2400°}{-\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2 2400°}} = \frac{\sqrt{3}}{-\sqrt{1+3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ II

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

● **23.** *Μετασχηματισμός ἀθροίσματος ἤ διαφορᾶς δύο ὁμώνυμων τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων σέ γινόμενο ἤ πηλίκο.*

α) Ἀπό τίς γνωστές ταυτότητες:

$$\begin{array}{l|l} ημ(α+β) \equiv ημα\, συνβ + ημβ\, συνα, & συν(α+β) \equiv συνα\, συνβ - ημα\, ημβ, \\ ημ(α-β) \equiv ημα\, συνβ - ημβ\, συνα, & συν(α-β) \equiv συνα\, συνβ + ημα\, ημβ, \end{array}$$

προσθέτοντας καί ἀφαιρώντας κατά μέλη, βρίσκουμε:

$$ημ(α+β) + ημ(α-β) \equiv 2ημα\, συνβ, \quad (1)$$
$$ημ(α+β) - ημ(α-β) \equiv 2ημβ\, συνα, \quad (2)$$
$$συν(α+β) + συν(α-β) \equiv 2συνα\, συνβ, \quad (3)$$
$$συν(α+β) - συν(α-β) \equiv 2ημα\, ημβ = 2ημα\, ημ(-β) \quad (4)$$

καί ἄν βάλουμε:

$$\left.\begin{array}{l} α+β=A \\ α-β=B \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 2α=A+B \\ 2β=A-B \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} α=\dfrac{A+B}{2} \\ β=\dfrac{A-B}{2} \end{array} \quad καί \quad -β=\frac{B-A}{2}$$

οἱ (1), (2), (3), (4) γίνονται:

$$\boxed{ημ\, A + ημ\, B = 2\, ημ\, \frac{A+B}{2}\, συν\, \frac{A-B}{2}} \quad (35)$$

$$\boxed{ημ\, A - ημ\, B \equiv 2\, ημ\, \frac{A-B}{2}\, συν\, \frac{A+B}{2}} \quad (36)$$

$$\boxed{συν\, A + συν\, B \equiv 2\, συν\, \frac{A+B}{2}\, συν\, \frac{A-B}{2}} \quad (37)$$

$$\boxed{συν\, A - συν\, B \equiv 2ημ\, \frac{A+B}{2}\, ημ\, \frac{B-A}{2}} \quad (38)$$

β) Ἔχουμε διαδοχικά:

$$εφA + εφB = \frac{ημA}{συνA} + \frac{ημB}{συνB} = \frac{ημA\, συνB + ημB\, συνA}{συνA\, συνB} = \frac{ημ(A+B)}{συνA\, συνB},$$

ἀφοῦ θά εἶναι $A \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ καί $B \neq \dfrac{\pi}{2} + k_1\pi$ μέ $k, k_1 \in \mathbb{Z}$.

$$\varepsilon\varphi A - \varepsilon\varphi B = \frac{\eta\mu A}{\sigma\upsilon\nu A} - \frac{\eta\mu B}{\sigma\upsilon\nu B} = \frac{\eta\mu A\,\sigma\upsilon\nu B - \eta\mu B\,\sigma\upsilon\nu A}{\sigma\upsilon\nu A\,\sigma\upsilon\nu B} = \frac{\eta\mu(A-B)}{\sigma\upsilon\nu A\,\sigma\upsilon\nu B}$$

$$\sigma\varphi A + \sigma\varphi B = \frac{\sigma\upsilon\nu A}{\eta\mu A} + \frac{\sigma\upsilon\nu B}{\eta\mu B} = \frac{\eta\mu B\,\sigma\upsilon\nu A + \eta\mu A\,\sigma\upsilon\nu B}{\eta\mu A\,\eta\mu B} = \frac{\eta\mu(A+B)}{\eta\mu A\,\eta\mu B}$$

ἀφοῦ θά εἶναι $A \neq (k_2+1)\pi$ καί $B \neq (k_3+1)\pi$, μέ $k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$,

καί $\sigma\varphi A - \sigma\varphi B = \frac{\sigma\upsilon\nu A}{\eta\mu A} - \frac{\sigma\upsilon\nu B}{\eta\mu B} = \frac{\eta\mu B\sigma\upsilon\nu A - \eta\mu A\,\sigma\upsilon\nu B}{\eta\mu A\,\eta\mu B} = \frac{\eta\mu(B-A)}{\eta\mu A\,\eta\mu B}$

Ἀνακεφαλαιώνοντας ἔχουμε:

(39)	$\boldsymbol{\varepsilon\varphi A + \varepsilon\varphi B = \frac{\eta\mu(A+B)}{\sigma\upsilon\nu A\,\sigma\upsilon\nu B}}$	$\boldsymbol{\sigma\varphi A + \sigma\varphi B = \frac{\eta\mu(A+B)}{\eta\mu A\,\eta\mu B}}$	(41)
(40)	$\boldsymbol{\varepsilon\varphi A - \varepsilon\varphi B = \frac{\eta\mu(A-B)}{\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B}}$	$\boldsymbol{\sigma\varphi A - \sigma\varphi B = \frac{\eta\mu(B-A)}{\eta\mu A\eta\mu B}}$	(42)

● **24. Εἰδικές περιπτώσεις.** Ἔχουμε διαδοχικά:

α) $\eta\mu A + \sigma\upsilon\nu A \equiv \eta\mu A + \eta\mu(90^\circ - A) \equiv 2\eta\mu 45^\circ\,\sigma\upsilon\nu(A - 45^\circ)$ (1)

καί ἐπειδή $2\eta\mu 45^\circ = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ καί:

$\sigma\upsilon\nu(A - 45^\circ) \equiv \sigma\upsilon\nu(45^\circ - A) \equiv \eta\mu(45^\circ + A)$, ἡ (1) γίνεται:

$$\boxed{\boldsymbol{\eta\mu A + \sigma\upsilon\nu A \equiv \sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu(45^\circ - A) \equiv \sqrt{2}\,\eta\mu\,(45^\circ + A)}} \quad (43)$$

β) $\eta\mu A - \sigma\upsilon\nu A \equiv \eta\mu A - \eta\mu(90^\circ - A) \equiv 2\eta\mu(A - 45^\circ)\sigma\upsilon\nu 45^\circ \equiv$

$\equiv \sqrt{2}\,\eta\mu(A - 45^\circ) \equiv -\sqrt{2}\,\eta\mu(45^\circ - A) \equiv -\sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu(45^\circ + A)$.

Ὥστε θά εἶναι:

$$\boxed{\boldsymbol{\eta\mu A - \sigma\upsilon\nu A \equiv -\sqrt{2}\,\eta\mu\,(45^\circ - A) \equiv -\sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu(45^\circ + A)}} \quad (44)$$

γ) $1 + \eta\mu A \equiv \eta\mu 90^\circ + \eta\mu A \equiv 2\eta\mu\left(45^\circ + \frac{A}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(45^\circ - \frac{A}{2}\right)$

καί ἐπειδή εἶναι:

$\eta\mu\left(45^\circ + \frac{A}{2}\right) \equiv \sigma\upsilon\nu\left(45^\circ - \frac{A}{2}\right)$, θά ἔχουμε:

$$\boxed{\boldsymbol{1 + \eta\mu A \equiv 2\eta\mu^2\left(45^\circ + \frac{A}{2}\right) \equiv 2\sigma\upsilon\nu^2\left(45^\circ - \frac{A}{2}\right)}} \quad (45)$$

δ) Ἐπίσης θά εἶναι καί:

$$1-\eta\mu A \equiv \eta\mu 90^\circ - \eta\mu A \equiv 2\eta\mu\left(45^\circ - \frac{A}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(45^\circ + \frac{A}{2}\right) \equiv$$

$$\equiv 2\eta\mu^2\left(45^\circ - \frac{A}{2}\right) \equiv 2\sigma\upsilon\nu^2\left(45^\circ + \frac{A}{2}\right)$$

δηλαδή:

$$\boxed{\mathbf{1-\eta\mu A \equiv 2\eta\mu^2\left(45^\circ - \frac{A}{2}\right) \equiv 2\sigma\upsilon\nu^2\left(45^\circ + \frac{A}{2}\right)}} \qquad \mathbf{(46)}$$

ε) Ἐπίσης εἶναι:

$$1+\sigma\upsilon\nu A \equiv \sigma\upsilon\nu 0^\circ + \sigma\upsilon\nu A \equiv 2\sigma\upsilon\nu\frac{0^\circ + A}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{0^\circ - A}{2} \equiv 2\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2},$$

$$1-\sigma\upsilon\nu A \equiv \sigma\upsilon\nu 0^\circ - \sigma\upsilon\nu A \equiv 2\eta\mu\frac{0^\circ + A}{2}\,\eta\mu\frac{A - 0^\circ}{2} \equiv 2\eta\mu^2\frac{A}{2}$$

Ἄρα:

$$\boxed{\mathbf{1+\sigma\upsilon\nu A \equiv 2\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2}}} \quad \boxed{\mathbf{1-\sigma\upsilon\nu A \equiv 2\eta\mu^2\frac{A}{2}}} \qquad \mathbf{(47)}$$

στ) Ἄν $A \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, μέ $k \in \mathbb{Z}'$, θά ἔχουμε:

$$1+\varepsilon\varphi A = \varepsilon\varphi 45^\circ + \varepsilon\varphi A = \frac{\eta\mu(45^\circ + A)}{\sigma\upsilon\nu 45^\circ\,\sigma\upsilon\nu A} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\,\eta\mu(45^\circ + A)}{\sigma\upsilon\nu A} = \frac{\sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu(45^\circ - A)}{\sigma\upsilon\nu A},$$

καί

$$1-\varepsilon\varphi A = \varepsilon\varphi 45^\circ - \varepsilon\varphi A = \frac{\eta\mu(45^\circ - A)}{\sigma\upsilon\nu 45^\circ\,\sigma\upsilon\nu A} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\,\eta\mu(45^\circ - A)}{\sigma\upsilon\nu A} = \frac{\sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu(45^\circ + A)}{\sigma\upsilon\nu A}$$

Ἀνακεφαλαιώνοντας ἔχουμε:

$$\boxed{\mathbf{1+\varepsilon\varphi A = \frac{\sqrt{2}\,\eta\mu(45^\circ + A)}{\sigma\upsilon\nu A} = \frac{\sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu(45^\circ - A)}{\sigma\upsilon\nu A}}} \qquad \mathbf{(48)}$$

$$\boxed{\mathbf{1-\varepsilon\varphi A = \frac{\sqrt{2}\,\eta\mu(45^\circ - A)}{\sigma\upsilon\nu A} = \frac{\sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu(45^\circ + A)}{\sigma\upsilon\nu A}}} \qquad \mathbf{(49)}$$

ζ) Ἄν $A \neq (k+1)\pi$, μέ $k \in \mathbb{Z}$ καί μέ ὅμοια ἐργασία βρίσκουμε:

$$\boxed{\mathbf{1+\sigma\varphi A = \frac{\sqrt{2}\,\eta\mu(45^\circ + A)}{\eta\mu A} = \frac{\sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu(45^\circ - A)}{\eta\mu A}}} \qquad \mathbf{(50)}$$

$$\boxed{\mathbf{1-\sigma\varphi A = -\frac{\sqrt{2}\,\eta\mu(45^\circ - A)}{\eta\mu A} = -\frac{\sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu(45^\circ + A)}{\eta\mu A}}} \qquad \mathbf{(51)}$$

α) *Νά ἁπλοποιηθεῖ ἡ παράσταση:*

$$A \equiv \frac{(\sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu 3\alpha)(\eta\mu 8\alpha + \eta\mu 2\alpha)}{(\eta\mu 5\alpha - \eta\mu\alpha)(\sigma\upsilon\nu 4\alpha - \sigma\upsilon\nu 6\alpha)}.$$

Λύση. Ἔχουμε διαδοχικά:

$$A \equiv \frac{2\eta\mu\,\frac{\alpha+3\alpha}{2}\,\eta\mu\,\frac{3\alpha-\alpha}{2}\cdot 2\eta\mu\frac{8\alpha+2\alpha}{2}\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{8\alpha-2\alpha}{2}}{2\eta\mu\,\frac{5\alpha-\alpha}{2}\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{5\alpha+\alpha}{2}\cdot 2\,\eta\mu\frac{4\alpha+6\alpha}{2}\,\eta\mu\,\frac{6\alpha-4\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{2\eta\mu\, 2\alpha\cdot\eta\mu\alpha\cdot 2\eta\mu 5\alpha\,\sigma\upsilon\nu\, 3\alpha}{2\eta\mu 2\alpha . \sigma\upsilon\nu 3\alpha\cdot 2\eta\mu 5\alpha\cdot\eta\mu\alpha} = 1, \text{ ἄν ἰσχύουν:}$$

$$\alpha \neq k\pi,\ \alpha \neq k_1\cdot\frac{\pi}{5},\ \alpha \neq k_2\cdot\frac{\pi}{2},\ \alpha \neq (2k_3+1)\,\frac{\pi}{2},\ k, k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}.$$

β) *Νά ἁπλοποιηθεῖ τό κλάσμα:*

$$B \equiv \frac{\eta\mu\alpha - \eta\mu 5\alpha + \eta\mu 9\alpha - \eta\mu 13\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu 5\alpha - \sigma\upsilon\nu 9\alpha + \sigma\upsilon\nu 13\alpha}.$$

Λύση. Ἔχουμε διαδοχικά:

$$B \equiv \frac{(\eta\mu\, 9\alpha + \eta\mu\alpha) - (\eta\mu 13\alpha + \eta\mu 5\alpha)}{(\sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu 5\alpha) - (\sigma\upsilon\nu 9\alpha - \sigma\upsilon\nu 13\alpha)} = \frac{2\eta\mu 5\alpha\,\sigma\upsilon\nu 4\alpha - 2\eta\mu 9\alpha\,\sigma\upsilon\nu 4\alpha}{2\eta\mu\, 3\alpha\,\eta\mu 2\alpha - 2\eta\mu\, 11\alpha\,\eta\mu 2\alpha} =$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu 4\alpha(\eta\mu 5\alpha - \eta\mu 9\alpha)}{\eta\mu 2\alpha(\eta\mu 3\alpha - \eta\mu 11\alpha)} = \frac{\sigma\upsilon\nu 4\alpha\cdot 2\eta\mu\, 2\alpha\,\sigma\upsilon\nu 7\alpha}{\eta\mu 2\alpha\cdot 2\eta\mu 4\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu 7\alpha} = \sigma\varphi 4\alpha,$$

ἄν ὑπάρχουν οἱ σχέσεις:

$$\eta\mu 2\alpha \neq 0 \Leftrightarrow 2\alpha \neq k\pi \Leftrightarrow \alpha \neq k\cdot\frac{\pi}{2},\ \text{μέ } k \in \mathbb{Z},$$

$$\eta\mu 4\alpha \neq 0 \Leftrightarrow 4\alpha \neq k_1\pi \Leftrightarrow \alpha \neq k_1\cdot\frac{\pi}{4},\ \text{μέ } k_1 \in \mathbb{Z},$$

$$\sigma\upsilon\nu 7\alpha \neq 0 \Leftrightarrow 7\alpha \neq k_2\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \alpha \neq k_2\cdot\frac{\pi}{7} + \frac{\pi}{14}\ \text{μέ } k_2 \in \mathbb{Z}.$$

γ) *Νά γίνει γινόμενο ἡ παράσταση:*

$$A \equiv \eta\mu x + \eta\mu y + \eta\mu\omega - \eta\mu(x + y + \omega).$$

Λύση. Ἔχουμε διαδοχικά:

$$A \equiv 2\eta\mu\,\frac{x+y}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2} + 2\eta\mu\frac{\omega-x-y-\omega}{2}\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{\omega+x+y+\omega}{2} =$$

$$\equiv 2\eta\mu\,\frac{x+y}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2}-2\eta\mu\,\frac{x+y}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{2\omega+x+y}{2}$$

$$\equiv 2\eta\mu\,\frac{x+y}{2}\left[\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2}-\sigma\upsilon\nu\frac{2\omega+x+y}{2}\right]$$

$$\equiv 2\eta\mu\frac{x+y}{2}\cdot 2\eta\mu\frac{x-y+2\omega+x+y}{4}\;\eta\mu\;\frac{2\omega+x+y-x+y}{4}$$

$$\equiv 4\eta\mu\frac{x+y}{2}\cdot\eta\mu\frac{x+\omega}{2}\cdot\eta\mu\frac{\omega+y}{2}.$$ Ἄρα:

$$\boxed{\eta\mu x+\eta\mu y+\eta\mu\omega-\eta\mu(x+y+\omega)\equiv 4\eta\mu\frac{x+y}{2}\;\eta\mu\frac{y+\omega}{2}\;\eta\mu\frac{\omega+x}{2}} \quad (52)$$

Σημείωση. Ἄν οἱ γωνίες x, y, ω εἶναι, ἀντιστοίχως, οἱ γωνίες Α, Β, Γ ἑνός τριγώνου ΑΒΓ, τότε θά ἔχουμε ἀπό τόν τύπο (52):

$$\eta\mu A+\eta\mu B+\eta\mu\Gamma-\eta\mu(A+B+\Gamma)\equiv\eta\mu A+\eta\mu B+\eta\mu\Gamma-\eta\mu 180^\circ\equiv$$

$$\equiv\eta\mu A+\eta\mu B+\eta\mu\Gamma\equiv 4\eta\mu\frac{A+B}{2}\,\eta\mu\frac{B+\Gamma}{2}\,\eta\mu\frac{\Gamma+A}{2}\equiv$$

$$\equiv 4\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2},$$

γιατί $\frac{A+B}{2}+\frac{\Gamma}{2}=90^0$, ἄρα $\eta\mu\frac{A+B}{2}=\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}, \dots$ Ἄρα:

Σέ κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ἰσχύει:

$$\boxed{\eta\mu A+\eta\mu B+\eta\mu\Gamma\equiv 4\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}} \quad (52\alpha)$$

δ) Νά γίνει γινόμενο ἡ παράσταση:

$$B\equiv\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu y+\sigma\upsilon\nu\omega+\sigma\upsilon\nu(x+y+\omega).$$

Λύση. Ἔχουμε διαδοχικά:

$$B\equiv 2\sigma\upsilon\nu\,\frac{x+y}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2}+2\sigma\upsilon\nu\frac{\omega+x+y+\omega}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\omega-x-y-\omega}{2}$$

$$\equiv 2\sigma\upsilon\nu\,\frac{x+y}{2}\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{x-y}{2}+2\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{x+y}{2}\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{x+y+2\omega}{2}$$

$$\equiv 2\sigma\upsilon\nu\frac{x+y}{2}\left[\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2}+\sigma\upsilon\nu\frac{x+y+2\omega}{2}\right]$$

$$\equiv 2\sigma\upsilon\nu\frac{x+y}{2}\cdot 2\sigma\upsilon\nu\frac{x-y+x+y+2\omega}{4}\sigma\upsilon\nu\frac{x-y-x-y-2\omega}{4}$$

$$\equiv 4\sigma\upsilon\nu\frac{x+y}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{y+\omega}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\omega+x}{2}.$$

Ἄρα :

$$\boxed{\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu y+\sigma\upsilon\nu\omega+\sigma\upsilon\nu(x+y+\omega)\equiv 4\sigma\upsilon\nu\frac{x+y}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{y+\omega}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\omega+x}{2}} \qquad (53)$$

Σημείωση. Ἄν οἱ γωνίες x, y, ω εἶναι, ἀντιστοίχως, οἱ γωνίες Α, Β, Γ ἑνός τριγώνου ΑΒΓ, τότε:

$$\sigma\upsilon\nu(x+y+\omega)=\sigma\upsilon\nu(A+B+\Gamma)=\sigma\upsilon\nu 180^\circ=-1$$

καί $\sigma\upsilon\nu\,\frac{x+y}{2}=\sigma\upsilon\nu\,\frac{A+B}{2}=\eta\mu\frac{\Gamma}{2},\ldots$ καί ὁ τύπος (53) γίνεται γιά κάθε τρίγωνο ΑΒΓ:

$$\boxed{\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B+\sigma\upsilon\nu\Gamma=1+4\eta\mu\,\frac{A}{2}\,\eta\mu\frac{B}{2}\,\eta\mu\frac{\Gamma}{2}} \qquad (53\alpha)$$

✱ **ε)** *Νά γίνει γινόμενο παραγόντων ἡ παράσταση:*

$$\Gamma\equiv\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\beta+\sigma\upsilon\nu^2\gamma+\sigma\upsilon\nu^2(\alpha+\beta+\gamma)-2.$$

Λύση. Ἔχουμε διαδοχικά:

$$\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\beta\equiv\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}+\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2\beta}{2}\equiv 1+\frac{1}{2}\left[\sigma\upsilon\nu 2\alpha+\sigma\upsilon\nu 2\beta\right]\equiv$$

$$\equiv 1+\frac{1}{2}\cdot 2\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)\,\sigma\upsilon\nu\,(\alpha-\beta)\equiv 1+\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)\,\sigma\upsilon\nu\,(\alpha-\beta).$$

Ἐπίσης εἶναι:

$$\sigma\upsilon\nu^2\gamma+\sigma\upsilon\nu^2(\alpha+\beta+\gamma)\equiv\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2\gamma}{2}+\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2(\alpha+\beta+\gamma)}{2}\equiv$$

$$\equiv 1+\frac{1}{2}\left[\sigma\upsilon\nu 2\gamma+\sigma\upsilon\nu 2(\alpha+\beta+\gamma)\right]\equiv 1+\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)\,\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta+2\gamma).$$

Ἄρα θά εἶναι:

$$\begin{aligned}\Gamma&\equiv\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)\,\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)+\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)\,\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta+2\gamma)\equiv\\&\equiv\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)\,[\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)+\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta+2\gamma)]\equiv\\&\equiv\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)\cdot 2\sigma\upsilon\nu(\alpha+\gamma)\,\sigma\upsilon\nu(\beta+\gamma)\equiv\\&\equiv 2\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)\,\sigma\upsilon\nu(\beta+\gamma)\,\sigma\upsilon\nu(\gamma+\alpha).\end{aligned}$$

Ὥστε:

$$\boxed{\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\beta+\sigma\upsilon\nu^2\gamma+\sigma\upsilon\nu^2(\alpha+\beta+\gamma)-2\equiv 2\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)\sigma\upsilon\nu(\beta+\gamma)\sigma\upsilon\nu(\gamma+\alpha)} \quad (54)$$

Σημείωση. Ἂν οἱ γωνίες α, β, γ, ἀντιστοίχως, εἶναι οἱ γωνίες ἑνός τριγώνου ΑΒΓ, τότε ὁ τύπος (54) γίνεται:

$$\boxed{\sigma\upsilon\nu^2 A + \sigma\upsilon\nu^2 B + \sigma\upsilon\nu^2 \Gamma = 1 - 2\sigma\upsilon\nu A\, \sigma\upsilon\nu B\, \sigma\upsilon\nu \Gamma} \quad (54\alpha)$$

Ὁ τύπος (54α) γράφεται συντομότερα καί ὡς ἑξῆς:

$$\boxed{\Sigma\sigma\upsilon\nu^2 A = 1 - 2\Pi\sigma\upsilon\nu A} \quad \text{μέ} \quad \boxed{A + B + \Gamma = 180^0}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Πρώτη ὁμάδα

26. Νά γίνουν γινόμενα οἱ παραστάσεις:

1. $\eta\mu 4\alpha + \eta\mu\alpha$,
2. $\eta\mu 7\alpha - \eta\mu 5\alpha$,
3. $\sigma\upsilon\nu 5\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha$,
4. $\sigma\upsilon\nu 3\alpha - \sigma\upsilon\nu 5\alpha$.

27. Νά ἀποδειχθεῖ ἡ ἀλήθεια τῶν ἰσοτήτων:

1. $\dfrac{\sigma\upsilon\nu 3\alpha - \sigma\upsilon\nu 5\alpha}{\eta\mu 5\alpha - \eta\mu 3\alpha} = \varepsilon\varphi 4\alpha$,
2. $\dfrac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha - \sigma\upsilon\nu 4\alpha}{\eta\mu 4\alpha - \eta\mu 2\alpha} = \varepsilon\varphi 3\alpha$,
3. $\dfrac{\eta\mu 2\alpha + \eta\mu 3\alpha}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha - \sigma\upsilon\nu 3\alpha} = \varepsilon\varphi \dfrac{\alpha}{2}$,
4. $\dfrac{\sigma\upsilon\nu 4\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha - \eta\mu 4\alpha} = \varepsilon\varphi \dfrac{5\alpha}{2}$.

28. Νά γίνουν γινόμενα παραγόντων οἱ παραστάσεις:

1. $\eta\mu\alpha - \eta\mu 2\alpha + \eta\mu 3\alpha$,
2. $\eta\mu 3\alpha + \eta\mu 7\alpha + \eta\mu 10\alpha$,
3. $\sigma\upsilon\nu 7\alpha - \sigma\upsilon\nu 5\alpha + \sigma\upsilon\nu 3\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha$,
4. $\sigma\upsilon\nu 3\alpha + \sigma\upsilon\nu 5\alpha + \sigma\upsilon\nu 7\alpha + \sigma\upsilon\nu 15\alpha$,
5. $\eta\mu 7\alpha - \eta\mu 5\alpha - \eta\mu 3\alpha + \eta\mu\alpha$,
6. $\sigma\upsilon\nu\alpha + 2\sigma\upsilon\nu 2\alpha + \sigma\upsilon\nu 3\alpha$.

29. Νά ἀποδειχθεῖ ἡ ἀλήθεια τῶν ἰσοτήτων:

1. $\dfrac{\eta\mu 2\alpha + \eta\mu 5\alpha - \eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha + \sigma\upsilon\nu 5\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha} = \varepsilon\varphi 2\alpha$,
2. $\dfrac{\eta\mu\alpha + \eta\mu 3\alpha + \eta\mu 5\alpha + \eta\mu 7\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu 3\alpha + \sigma\upsilon\nu 5\alpha + \sigma\upsilon\nu 7\alpha} = \varepsilon\varphi 4\alpha$.
3. $\dfrac{\sigma\upsilon\nu 7\alpha + \sigma\upsilon\nu 3\alpha - \sigma\upsilon\nu 5\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu 7\alpha - \eta\mu 3\alpha - \eta\mu 5\alpha + \eta\mu\alpha} = \sigma\varphi 2\alpha$.
4. $\dfrac{\eta\mu A - \eta\mu B}{\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B} = \varepsilon\varphi \dfrac{A - B}{2}$.

Πότε δέν ἔχουν ἔννοια τά μέλη τῶν παραπάνω ἰσοτήτων;

✶ Δεύτερη ὁμάδα

30. Νά γίνουν γινόμενα οἱ παραστάσεις:

1. $\eta\mu(\alpha+\beta+\gamma) + \eta\mu(\alpha-\beta-\gamma) + \eta\mu(\alpha+\beta-\gamma) + \eta\mu(\alpha-\beta+\gamma)$,
2. $\sigma\upsilon\nu(\beta+\gamma-\alpha) - \sigma\upsilon\nu(\gamma+\alpha-\beta) + \sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta-\gamma) - \sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta+\gamma)$.
3. $\eta\mu 2\alpha + \eta\mu 2\beta + \eta\mu 2\gamma - \eta\mu 2(\alpha+\beta+\gamma)$,
4. $\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta - \eta\mu(\alpha+\beta) = 4\eta\mu \dfrac{\alpha}{2}\, \eta\mu \dfrac{\beta}{2}\, \eta\mu \dfrac{\alpha+\beta}{2}$,
5. $\sigma\upsilon\nu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2 2\theta + \sigma\upsilon\nu^2 3\theta + \sigma\upsilon\nu^2 4\theta - 2$.

● 25. Μετασχηματισμός γινομένων σέ ἀθροίσματα ἤ διαφορές.

Ἀπό τίς γνωστές ταυτότητες:

$$\text{ημ}A\,\text{συν}B + \text{ημ}B\,\text{συν}A \equiv \text{ημ}(A+B),$$

καί

$$\text{ημ}A\,\text{συν}B - \text{ημ}B\,\text{συν}A \equiv \text{ημ}(A-B),$$

μέ πρόσθεση καί ἀφαίρεση κατά μέλη βρίσκουμε, ἀντιστοίχως:

$$\boxed{2\text{ημ}A\,\text{συν}B \equiv \text{ημ}(A+B) + \text{ημ}(A-B)} \qquad (54)$$

καί

$$\boxed{2\text{ημ}B\,\text{συν}A \equiv \text{ημ}(A+B) - \text{ημ}(A-B)} \qquad (55)$$

Ἐπίσης ἀπό τίς γνωστές ταυτότητες:

$$\text{συν}A\,\text{συν}B - \text{ημ}A\,\text{ημ}B \equiv \text{συν}(A+B),$$

καί

$$\text{συν}A\,\text{συν}B + \text{ημ}A\,\text{ημ}B \equiv \text{συν}(A-B),$$

μέ πρόσθεση καί ἀφαίρεση κατά μέλη βρίσκουμε, ἀντιστοίχως:

$$\boxed{2\text{συν}A\,\text{συν}B \equiv \text{συν}(A+B) + \text{συν}(A-B)} \qquad (56)$$

καί

$$\boxed{2\text{ημ}A\,\text{ημ}B \equiv \text{συν}(A-B) - \text{συν}(A+B)} \qquad (57)$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

α) *Νά ἁπλοποιηθεῖ τό κλάσμα:*

$$A \equiv \frac{\text{ημ}8\alpha\,\text{συν}\alpha - \text{ημ}6\alpha\,\text{συν}3\alpha}{\text{συν}2\alpha\,\text{συν}\alpha - \text{ημ}3\alpha\,\text{ημ}4\alpha}$$

Λύση. Ἔχουμε διαδοχικά:

$$A \equiv \frac{2\text{ημ}8\alpha\,\text{συν}\alpha - 2\text{ημ}6\alpha\,\text{συν}3\alpha}{2\text{συν}2\alpha\,\text{συν}\alpha - 2\text{ημ}3\alpha\,\text{ημ}4\alpha} = \frac{(\text{ημ}9\alpha + \text{ημ}7\alpha) - (\text{ημ}9\alpha + \text{ημ}3\alpha)}{(\text{συν}3\alpha + \text{συν}\alpha) - (\text{συν}\alpha - \text{συν}7\alpha)} =$$

$$= \frac{\text{ημ}7\alpha - \text{ημ}3\alpha}{\text{συν}3\alpha + \text{συν}7\alpha} = \frac{2\text{ημ}\,2\alpha\,\text{συν}5\alpha}{2\text{συν}\,5\alpha\,\text{συν}2\alpha} = \text{εφ}2\alpha,$$

ἄν $\alpha \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{10}$ καί $\alpha \neq (2k_1+1)\dfrac{\pi}{4}$, $k, k_1 \in \mathbb{Z}$. Γιατί;

β) *Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:*

$$A \equiv \text{συν}\frac{\pi}{15}\text{συν}\frac{2\pi}{15}\text{συν}\frac{3\pi}{15}\text{συν}\frac{4\pi}{15}\text{συν}\frac{5\pi}{15}\text{συν}\frac{6\pi}{15}\text{συν}\frac{7\pi}{15} = \frac{1}{2^7}$$

'Απόδειξη. 'Από τό γνωστό τύπο:

$$\eta\mu 2x = 2\eta\mu x\ \sigma\upsilon\nu x, \text{ ἔχουμε: } \sigma\upsilon\nu x = \frac{\eta\mu 2x}{2\eta\mu x}$$

καί ἐπομένως:

$$A \equiv \frac{\eta\mu\frac{2\pi}{15}}{2\eta\mu\frac{\pi}{15}} \cdot \frac{\eta\mu\frac{4\pi}{15}}{2\eta\mu\frac{2\pi}{15}} \cdot \frac{\eta\mu\frac{6\pi}{15}}{2\eta\mu\frac{3\pi}{15}} \cdot \frac{\eta\mu\frac{8\pi}{15}}{2\eta\mu\frac{4\pi}{15}} \cdot \frac{\eta\mu\frac{10\pi}{15}}{2\eta\mu\frac{5\pi}{15}} \cdot \frac{\eta\mu\frac{12\pi}{15}}{2\eta\mu\frac{6\pi}{15}} \cdot \frac{\eta\mu\frac{14\pi}{15}}{2\eta\mu\frac{7\pi}{15}} = \frac{1}{2^7},$$

γιατί εἶναι: $\eta\mu\frac{\pi}{15} = \eta\mu\frac{14\pi}{15}$, $\eta\mu\frac{3\pi}{15} = \eta\mu\frac{12\pi}{15}$, $\eta\mu\frac{10\pi}{15} = \eta\mu\frac{5\pi}{15}$

✱ γ) *Νά ἀποδειχθεῖ ἡ ἀλήθεια τῆς ἰσότητας:*

$$\mathbf{A \equiv \eta\mu 20^\circ . \eta\mu 40^\circ . \eta\mu 60^\circ . \eta\mu 80^\circ = \frac{3}{16}}. \qquad (1)$$

'Απόδειξη. 'Η ἰσότητα (1) γράφεται:

$$2 \cdot 2\eta\mu 20^\circ\ \eta\mu 40^\circ \cdot 2\sigma\upsilon\nu 30^\circ\ \sigma\upsilon\nu 10^\circ = \frac{3}{2}. \qquad (2)$$

Ἄν ὀνομάσουμε B τό πρῶτο μέλος τῆς (2), θά ἔχουμε:

$$\begin{aligned}
B &\equiv 2(\sigma\upsilon\nu 20^\circ - \sigma\upsilon\nu 60^\circ)(\sigma\upsilon\nu 20^\circ + \sigma\upsilon\nu 40^\circ) = \\
&= 2(\sigma\upsilon\nu^2 20^\circ - \sigma\upsilon\nu 20^\circ\ \sigma\upsilon\nu 60^\circ + \sigma\upsilon\nu 20^\circ\ \sigma\upsilon\nu 40^\circ - \sigma\upsilon\nu 40^\circ\ \sigma\upsilon\nu 60^\circ) = \\
&= 2\sigma\upsilon\nu^2 20^\circ - 2\sigma\upsilon\nu 20^\circ\ \sigma\upsilon\nu 60^\circ + 2\sigma\upsilon\nu 20^\circ\ \sigma\upsilon\nu 40^\circ - 2\sigma\upsilon\nu 40^\circ\ \sigma\upsilon\nu 60^\circ = \\
&= 1 + \sigma\upsilon\nu 40^\circ - (\sigma\upsilon\nu 80^\circ + \sigma\upsilon\nu 40^\circ) + (\sigma\upsilon\nu 60^\circ + \sigma\upsilon\nu 20^\circ) - (\sigma\upsilon\nu 100^\circ + \sigma\upsilon\nu 20^\circ) = \\
&= 1 - (\sigma\upsilon\nu 80^\circ + \sigma\upsilon\nu 100^\circ) + \sigma\upsilon\nu 60^\circ = \\
&= 1 - 2\sigma\upsilon\nu 90^\circ\ \sigma\upsilon\nu 10^\circ + \frac{1}{2} = 1 - 0 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

καί ἄρα $A = \frac{3}{16}$.

✱ ● **26.** *Νά μετασχηματισθεῖ σέ γινόμενο τό ἄθροισμα τῶν ἡμιτόνων ν τόξων, πού ἀποτελοῦν ἀριθμητική πρόοδο.*

Λύση. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι θέλουμε νά βροῦμε τό ἄθροισμα:

$$S = \eta\mu\alpha + \eta\mu(\alpha + \omega) + \eta\mu(\alpha + 2\omega) + \ldots + \eta\mu[\alpha + (\nu - 1)\omega] \qquad (1)$$

Ἄν πολλαπλασιάσουμε καί τά δύο μέλη τῆς (1) μέ $2\eta\mu\frac{\omega}{2}$, ἔχουμε:

$$2S\eta\mu\frac{\omega}{2} = 2\eta\mu\alpha\ \eta\mu\frac{\omega}{2} + 2\eta\mu(\alpha + \omega)\eta\mu\frac{\omega}{2} + \ldots + 2\eta\mu[\alpha + (\nu - 1)\omega]\eta\mu\frac{\omega}{2}$$

'Αλλά: $\quad 2\eta\mu\alpha\ \eta\mu\frac{\omega}{2} = \sigma\upsilon\nu\left(\alpha - \frac{\omega}{2}\right) - \sigma\upsilon\nu\left(\alpha + \frac{\omega}{2}\right),$

$$2\eta\mu(\alpha + \omega)\eta\mu\frac{\omega}{2} = \sigma\upsilon\nu\left(\alpha + \frac{\omega}{2}\right) - \sigma\upsilon\nu\left(\alpha + \frac{3\omega}{2}\right),$$

$$2\eta\mu(\alpha + 2\omega)\eta\mu\frac{\omega}{2} = \sigma\upsilon\nu\left(\alpha + \frac{3\omega}{2}\right) - \sigma\upsilon\nu\left(\alpha + \frac{5\omega}{2}\right),$$

. . . .

$$2\eta\mu\left[\alpha + (\nu - 1)\omega\right]\eta\mu\frac{\omega}{2} = \sigma\upsilon\nu\left[\alpha + \frac{2\nu - 3}{2}\omega\right] - \sigma\upsilon\nu\left[\alpha + \frac{2\nu - 1}{2}\omega\right]$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τίς ἰσότητες αὐτές ἔχουμε:

$$2S\eta\mu\frac{\omega}{2} = \sigma\upsilon\nu\left(\alpha - \frac{\omega}{2}\right) - \sigma\upsilon\nu\left[\alpha + \frac{2\nu - 1}{2}\omega\right] = 2\eta\mu\left[\alpha + \frac{\nu - 1}{2}\omega\right]\eta\mu\frac{\nu\omega}{2},$$

ἀπ' ὅπου, τελικά, βρίσκουμε:

$$\boxed{S = \frac{\eta\mu\left[\alpha + \frac{\nu - 1}{2}\omega\right]\eta\mu\frac{\nu\omega}{2}}{\eta\mu\frac{\omega}{2}}} \qquad (58)$$

Μέ ἀνάλογο τρόπο ἐργαζόμενοι βρίσκουμε ὅτι τό ἄθροισμα:

$$S' = \sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu(\alpha + \omega) + \sigma\upsilon\nu(\alpha + 2\omega) + \ldots + \sigma\upsilon\nu[\alpha + (\nu - 1)\omega]$$

εἶναι:

$$\boxed{S' = \frac{\sigma\upsilon\nu\left[\alpha + \frac{\nu - 1}{2}\omega\right]\eta\mu\frac{\nu\omega}{2}}{\eta\mu\frac{\omega}{2}}} \qquad (59)$$

Τό ἀποτέλεσμα αὐτό βγαίνει ἀπό τόν τύπο (58), ἄν ἀντικαταστήσουμε τό α μέ $\frac{\pi}{2} - \alpha$ καί τό ω μέ $-\omega$.

Ἄν $\omega = \alpha$, οἱ τύποι (58) καί (59) γίνονται:

$$S_1 = \eta\mu\alpha + \eta\mu 2\alpha + \eta\mu 3\alpha + \ldots + \eta\mu(\nu\alpha) = \frac{\eta\mu\frac{(\nu+1)}{2}\alpha \cdot \eta\mu\frac{\nu\alpha}{2}}{\eta\mu\frac{\alpha}{2}} \qquad (60)$$

καί $$S_2 = \sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu 2\alpha + \sigma\upsilon\nu 3\alpha + \ldots + \sigma\upsilon\nu(\nu\alpha) = \frac{\sigma\upsilon\nu\frac{(\nu+1)}{2}\alpha \cdot \eta\mu\frac{\nu\alpha}{2}}{\eta\mu\frac{\alpha}{2}} \qquad (61)$$

Ἄν ὅμως βάλουμε $\omega = 2\alpha$, ἔχουμε τούς τύπους:

$$S_3 = \eta\mu\alpha + \eta\mu 3\alpha + \eta\mu 5\alpha + \ldots + \eta\mu(2\nu - 1)\alpha = \frac{\eta\mu^2(\nu\alpha)}{\eta\mu\alpha} \qquad (62)$$

καί $\quad S_4=\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu 3\alpha+\sigma\upsilon\nu 5\alpha+\ldots+\sigma\upsilon\nu(2\nu-1)\alpha=\frac{\eta\mu 2(\nu\alpha)}{2\eta\mu\alpha}$ **(63)**

★ **Παράδειγμα.** *Νά ἀποδειχθεῖ ἡ ἀλήθεια τῆς ἰσότητας:*

$$S=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{17}+\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{17}+\ldots+\sigma\upsilon\nu\frac{15\pi}{17}=\frac{1}{2}.$$

Ἀπόδειξη. Τά τόξα $\frac{\pi}{17}, \frac{3\pi}{17}, \ldots, \frac{15\pi}{17}$ ἀποτελοῦν ἀριθμητική πρόοδο μέ λόγο $\frac{2\pi}{17}$. Τό πλῆθος τῶν ὅρων της προκύπτει ἀπό τόν τύπο:

$$\tau=\alpha+(\nu-1)\omega \Rightarrow \nu=\frac{\tau-\alpha}{\omega}+1=8.$$

Μέ τή βοήθεια τώρα τοῦ τύπου (59), βρίσκουμε:

$$S=\frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{17}+\frac{8-1}{2}\cdot\frac{2\pi}{17}\right)\eta\mu\frac{8\pi}{17}}{\eta\mu\frac{\pi}{17}}=\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{8\pi}{17}\cdot\eta\mu\frac{8\pi}{17}}{\eta\mu\frac{\pi}{17}}=$$

$$=\frac{2\eta\mu\frac{8\pi}{17}\sigma\upsilon\nu\frac{8\pi}{17}}{2\eta\mu\frac{\pi}{17}}=\frac{\eta\mu\frac{16\pi}{17}}{2\eta\mu\frac{\pi}{17}}=\frac{1}{2},$$

γιατί $\quad \eta\mu\frac{16\pi}{17}=\eta\mu\frac{\pi}{17}$, ἀφοῦ $\frac{\pi}{17}+\frac{16\pi}{17}=\pi$.

Μέ ἀνάλογο τρόπο βρίσκουμε ὅτι:

$$S=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{23}+\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{23}+\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{23}+\ldots+\sigma\upsilon\nu\frac{21\pi}{23}=\frac{1}{2}.$$

✶ • **27.** *Νά ὑπολογισθεῖ τό ἄθροισμα :*

$$S_\alpha=\eta\mu^2\alpha+\eta\mu^2(\alpha+\omega)+\eta\mu^2(\alpha+2\omega)+\ldots+\eta\mu^2[\alpha+(\nu-1)\omega]$$

Λύση. Ἄν στή γνωστή μας ταυτότητα

$$\eta\mu^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha)$$

ἀντικαταστήσουμε τό α μέ τό α + ω, θά ἔχουμε διαδοχικά:

$$\eta\mu^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha),$$

$$\eta\mu^2(\alpha+\omega)=\frac{1}{2}\left[1-\sigma\upsilon\nu 2(\alpha+\omega)\right],$$

$$ημ^2(α+2ω)=\frac{1}{2}\Big[1-συν2(α+2ω)\Big],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$ημ^2\Big[α+(ν-1)ω\Big]=\frac{1}{2}\Big[1-συν2[α+(ν-1)ω]\Big]$$

καί μέ πρόσθεση κατά μέλη:

$$S_α=\frac{ν}{2}-\frac{1}{2}\Big[συν2α+συν2(α+ω)+συν2(α+2ω)+\ldots+συν2\Big[α+(ν-1)ω\Big]\Big]=$$

$$=\frac{ν}{2}-\frac{συν[2α+(ν-1)ω]ημ(νω)}{2ημω}$$

Ὥστε :

$$\mathbf{S_α=ημ^2α+ημ^2(α+ω)+ημ^2(α+2ω)+\ldots+ημ^2[α+(ν-1)ω]=}$$

$$\mathbf{=\frac{ν}{2}-\frac{συν[2α+(ν-1)ω]ημ(νω)}{2ημω}} \qquad \mathbf{(64)}$$

Ἄν στόν τύπο (64) βάλουμε $ω=α$, ἔχουμε:

$$\mathbf{S'_α=ημ^2α+ημ^22α+ημ^23α+\ldots+ημ^2(να)=\frac{ν}{2}-\frac{συν(ν+1)α.ημ(να)}{2ημα}} \qquad \mathbf{(65)}$$

Καί ἄν βάλουμε $ω=2α$, βρίσκουμε ὅτι:

$$\mathbf{S''_α=ημ^2α+ημ^23α+ημ^25α+ημ^2(2ν-1)α=\frac{ν}{2}-\frac{συν2(να)ημ2(να)}{2ημ2α}} \qquad \mathbf{(66)}$$

Μέ τόν ἴδιο τρόπο ἐργαζόμαστε καί ὅταν ἀντί γιά ἡμίτονο ἔχουμε συνημίτονο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Πρώτη ὁμάδα

31. Νά μετασχηματισθοῦν σέ ἄθροισμα ἤ διαφορά οἱ παραστάσεις:

1. $2ημ2α\, συνα$,
2. $2ημα\, συν4α$,
3. $2ημ4α\, συν8α$,
4. $2ημα\, ημ3α$,
5. $2συν5α\, συν7α$,
6. $2ημ3α\, ημ5α$.

32. Νά βρεθεῖ ἡ ἀριθμητική τιμή τῶν παραστάσεων:

1. $2συν60°\, ημ30°$,
2. $ημ45°\, συν75°$,
3. $2συν150°\, συν30°$,
4. $2ημ36°\, συν54°$.

33. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

1. $συν2α\, συνα-ημ4α\, ημα=συν3α\, συν2α$,
2. $συν5α\, συν2α-συν4α\, συν3α=-ημ2α\, ημα$,
3. $ημ4α\, συνα-ημ3α\, συν2α=ημα\, συν2α$.

34. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

1. $συν(36° - α)\, συν(36° + α) + συν(54° + α)\, συν(54° - α) = συν2α$,
2. $συνα\, ημ(β - γ) + συνβ\, ημ(γ - α) + συνγ\, ημ(α - β) = 0$,
3. $ημα\, ημ(β - γ) + ημβ\, ημ(γ - α) + ημγ\, ημ(α - β) = 0$,
4. $\dfrac{ημα\, ημ2α + ημ3α\, ημ6α + ημ4α\, ημ13α}{ημα\, συν2α + ημ3α\, συν6α + ημ4α\, συν13α} = εφ9α$.

Δεύτερη ὁμάδα

35. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

1. $συν20°\, συν40°\, συν60°\, συν80° = \dfrac{1}{16}$,
2. $εφ20°\, εφ40°\, εφ60°\, εφ80° = 3$,
3. $συν\dfrac{2π}{7} + συν\dfrac{4π}{7} + συν\dfrac{6π}{7} = -\dfrac{1}{2}$,
4. $ημ^4\dfrac{π}{16} + ημ^4\dfrac{3π}{16} + ημ^4\dfrac{5π}{16} + ημ^4\dfrac{7π}{16} = \dfrac{3}{2}$.

36. Νά ὑπολογισθοῦν τά ἀκόλουθα ἀθροίσματα, πού τό καθένα τους ἔχει ν προσθετέους:

1. $ημ2α + ημ4α + ημ6α + \dots$
2. $συν2α + συν4α + συν6α + \dots$
3. $ημα - ημ2α + ημ3α - \dots$
4. $συνα - συν2α + συν3α - \dots$

37. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

1. $συν\dfrac{π}{19} + συν\dfrac{3π}{19} + συν\dfrac{5π}{19} + \dots + συν\dfrac{17π}{19} = \dfrac{1}{2}$,
2. $συν\dfrac{2π}{21} + συν\dfrac{4π}{21} + συν\dfrac{6π}{21} + \dots + συν\dfrac{20π}{21} = -\dfrac{1}{2}$,
3. $ημ\dfrac{π}{9} + ημ\dfrac{2π}{ν} + ημ\dfrac{3π}{ν} + \dots = σφ\dfrac{π}{2ν}$, ὅπου τό πλῆθος τῶν ὅρων εἶναι $ν - 1$.
4. $συν\dfrac{π}{ν} + συν\dfrac{3π}{ν} + συν\dfrac{5π}{ν} + \dots = -συν\dfrac{π}{ν}$, ὅπου τό πλῆθος τῶν ὅρων εἶναι $2ν - 1$.

✶ ΚΕΦΑΛΑΙΟ III

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ ΠΟΥ ΑΦΟΡΟΥΝ ΣΤΙΣ ΓΩΝΙΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ — ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟΥ Ή ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ ΥΠΟ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

● **28.** *Τριγωνομετρικές σχέσεις ἀνάμεσα στίς γωνίες ἑνός τριγώνου ΑΒΓ.*

Σέ κάθε τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι:

$$A+B+\Gamma=\pi \text{ καί ἄρα } \frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{\Gamma}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

Ἄρα θά ἔχουμε τίς ἀκόλουθες σχέσεις:

$\eta\mu(A+B)=\eta\mu\Gamma$ $\eta\mu\frac{A+B}{2}=\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}$	$\eta\mu(B+\Gamma)=\eta\mu A$ $\eta\mu\frac{B+\Gamma}{2}=\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}$	$\eta\mu(\Gamma+A)=\eta\mu B$ $\eta\mu\frac{\Gamma+A}{2}=\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}$
$\sigma\upsilon\nu(A+B)=-\sigma\upsilon\nu\Gamma$ $\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}=\eta\mu\frac{\Gamma}{2}$	$\sigma\upsilon\nu(B+\Gamma)=-\sigma\upsilon\nu A$ $\sigma\upsilon\nu\frac{B+\Gamma}{2}=\eta\mu\frac{A}{2}$	$\sigma\upsilon\nu(\Gamma+A)=\sigma\upsilon\nu B$ $\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma+A}{2}=\eta\mu\frac{B}{2}$

Μέ τή βοήθεια τῶν ταυτοτήτων αὐτῶν καί μέ τή χρήση τῶν τριγωνομετρικῶν μετασχηματισμῶν ἀποδεικνύονται διάφορες χρήσιμες τριγωνομετρικές σχέσεις ἀνάμεσα στίς γωνίες Α, Β, Γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καί στά μισά αὐτῶν τῶν γωνιῶν. Οἱ κυριότερες εἶναι οἱ ἀκόλουθες:

● **29.** *Σέ κάθε τρίγωνο ΑΒΓ νά ἀποδειχθεῖ ὅτι :*

$$\boldsymbol{\eta\mu A+\eta\mu B+\eta\mu\Gamma=4\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}}$$

Ἀπόδειξη. Ἔχουμε διαδοχικά :

$$\eta\mu A+\eta\mu B+\eta\mu\Gamma=2\eta\mu\frac{A+B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}+2\eta\mu\frac{\Gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}=$$

$$=2\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}+2\eta\mu\frac{\Gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}=2\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}\left[\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}+\eta\mu\frac{\Gamma}{2}\right]=$$

$$=2\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}\left[\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}+\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}\right]=2\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}\cdot 2\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}=$$

$$=4\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}.$$ Ἄρα :

$A + B + \Gamma = \pi \Rightarrow$	$\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu\Gamma = 4\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}$	(67)

Ὁ τύπος (67) βρέθηκε καί στήν παράγραφο (γ) σελίδα 37 μέ ἄλλο τρόπο.

Παρατήρηση. *Ἄν* $\alpha + \beta + \gamma = 2\nu\pi$, *μέ* $\nu \in \mathbb{Z}^+$, *τότε :*

$$\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta + \eta\mu\gamma = (-1)^{\nu-1}.4\eta\mu\frac{\alpha}{2}\eta\mu\frac{\beta}{2}\eta\mu\frac{\gamma}{2}$$

Ἀπόδειξη. Ἀπό τή σχέση:

$$\alpha + \beta + \gamma = 2\nu\pi \Rightarrow \frac{\gamma}{2} = \nu\pi - \frac{\alpha+\beta}{2} \text{ καί } \frac{\alpha+\beta}{2} = \nu\pi - \frac{\gamma}{2}.$$

Ἀλλά: $$\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta = 2\eta\mu\frac{\alpha+\beta}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\eta\mu\left(\nu\pi - \frac{\gamma}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha-\beta}{2} \quad (1)$$

καί : $$\eta\mu\gamma = 2\eta\mu\frac{\gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\gamma}{2} = 2\eta\mu\frac{\gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\left(\nu\pi - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) \quad (2)$$

Ἐπειδή ὁ ν μπορεῖ νά εἶναι ἄρτιος ἤ περιττός, θά ἔχουμε:

$$\eta\mu\left(\nu\pi - \frac{\gamma}{2}\right) = \pm\,\eta\mu\frac{\gamma}{2} \text{ καί } \sigma\upsilon\nu\left(\nu\pi - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \pm\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Ἄρα σέ ὅλες τίς περιπτώσεις θά εἶναι:

$$\eta\mu\left(\nu\pi - \frac{\gamma}{2}\right) = (-1)^{\nu-1}\eta\mu\frac{\gamma}{2} \text{ καί } \sigma\upsilon\nu\left(\nu\pi - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) = -(-1)^{\nu-1}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Ἄρα οἱ ἰσότητες (1) καί (2) γίνονται:

$$\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta = (-1)^{\nu-1}2\eta\mu\frac{\gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha-\beta}{2} \text{ καί } \eta\mu\gamma = (-1)^{\nu-1}\left[-2\eta\mu\frac{\gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha+\beta}{2}\right],$$

καί μέ πρόσθεση αὐτῶν τῶν ἰσοτήτων κατά μέλη βρίσκουμε:

$$\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta + \eta\mu\gamma = (-1)^{\nu-1}\cdot 2\eta\mu\frac{\gamma}{2}\left[\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha-\beta}{2} - \sigma\upsilon\nu\frac{\alpha+\beta}{2}\right] =$$

$$= (-1)^{\nu-1}\cdot 2\eta\mu\frac{\gamma}{2}\cdot 2\eta\mu\frac{\alpha}{2}\eta\mu\frac{\beta}{2} = (-1)^{\nu-1}\cdot 4\eta\mu\frac{\alpha}{2}\eta\mu\frac{\beta}{2}\eta\mu\frac{\gamma}{2}.$$

Ὥστε :

$\alpha + \beta + \gamma = 2\nu\pi \Rightarrow$	$\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta + \eta\mu\gamma = (-1)^{\nu-1}\cdot 4\eta\mu\frac{\alpha}{2}\eta\mu\frac{\beta}{2}\eta\mu\frac{\gamma}{2}$	(67α)

Ἄν ὅμως εἶναι:

$\alpha+\beta+\gamma=(2\nu-1)\pi \Rightarrow$	$\eta\mu\alpha+\eta\mu\beta+\eta\mu\gamma=(-1)^{\nu}.4\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\beta}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\gamma}{2}$	(67β)

Ἡ ἀπόδειξη τοῦ τύπου (67β) γίνεται μέ τόν ἴδιο τρόπο πού ἔγινε καί ἡ ἀπόδειξη τοῦ τύπου (67α).

● **30.** *Σέ κάθε τρίγωνο ΑΒΓ νά ἀποδειχθεῖ ὅτι :*

$$\textbf{συν}A + \textbf{συν}B + \textbf{συν}\Gamma = 1 + 4\textbf{ημ}\frac{A}{2}\,\textbf{ημ}\frac{B}{2}\,\textbf{ημ}\frac{\Gamma}{2}.$$

Ἀπόδειξη. Ἔχουμε διαδοχικά :

$$συνA + συνB + συν\Gamma = 2συν\frac{A+B}{2}συν\frac{A-B}{2} + 1 - 2ημ^2\frac{\Gamma}{2} =$$

$$= 2ημ\frac{\Gamma}{2}συν\frac{A-B}{2} - 2ημ^2\frac{\Gamma}{2} + 1 = 2ημ\frac{\Gamma}{2}\left[συν\frac{A-B}{2} - ημ\frac{A}{2}\right] + 1 =$$

$$= 1 + 2ημ\frac{\Gamma}{2}\left[συν\frac{A-B}{2} - συν\frac{A+B}{2}\right] = 1 + 2ημ\frac{\Gamma}{2}\cdot 2ημ\frac{A}{2}ημ\frac{B}{2} =$$

$$= 1 + 4ημ\frac{A}{2}ημ\frac{B}{2}ημ\frac{\Gamma}{2}.$$

Ἄρα θά ἰσχύει ἡ συνεπαγωγή:

$A + B + \Gamma = \pi \Rightarrow$	$\textbf{συν}A + \textbf{συν}B + \textbf{συν}\Gamma = 1 + 4\textbf{ημ}\frac{A}{2}\,\textbf{ημ}\frac{B}{2}\,\textbf{ημ}\frac{\Gamma}{2}$	**(68)**

Ὁ τύπος (68) βρέθηκε καί μέ ἄλλο τρόπο στήν παράγραφο (δ) σελίδα 38.

Παρατήρηση. *Ἄν ἀληθεύει ἡ ἰσότητα :*

$$\textbf{συν}\alpha + \textbf{συν}\beta + \textbf{συν}\gamma = 1 + 4\textbf{ημ}\frac{\alpha}{2}\textbf{ημ}\frac{\beta}{2}\textbf{ημ}\frac{\gamma}{2}$$

νά βρεῖτε πῶς συνδέονται οἱ γωνίες α, β καί γ.

Λύση. Ἡ δεδομένη ἰσότητα γράφεται ὡς ἑξῆς:

$$1 - 2ημ^2\frac{\alpha}{2} + 2συν\frac{\beta+\gamma}{2}συν\frac{\beta-\gamma}{2} = 1 + 2ημ\frac{\alpha}{2}\left[συν\frac{\beta-\gamma}{2} - συν\frac{\beta+\gamma}{2}\right] -$$

$$-ημ\frac{\alpha}{2}\left[ημ\frac{\alpha}{2} + συν\frac{\beta-\gamma}{2}\right] = -συν\frac{\beta+\gamma}{2}\left[ημ\frac{\alpha}{2} + συν\frac{\beta+\gamma}{2}\right] \Leftrightarrow$$

$$\left[ημ\frac{\alpha}{2} - συν\frac{\beta-\gamma}{2}\right]\left[ημ\frac{\alpha}{2} + συν\frac{\beta-\gamma}{2}\right] = 0.$$

Ἡ ἰσότητα αὐτή ἐπαληθεύεται:

$$1ο: \text{ Μέ } ημ\frac{\alpha}{2} = συν\frac{\beta+\gamma}{2} = ημ\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\beta+\gamma}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\alpha}{2} = 2k\pi + \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\beta+\gamma}{2} & (1) \\ \dfrac{\alpha}{2} = (2k_1+1)\pi - \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\beta+\gamma}{2} & (2) \end{cases}$$

2ο : Μέ $ημ\frac{α}{2} = -συν\frac{β-γ}{2} = ημ\left(\frac{β-γ}{2} - \frac{π}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{α}{2} = 2k_2π - \frac{π}{2} + \frac{β-γ}{2} & (3) \\ \frac{α}{2} = (2k_3+1)π + \frac{π}{2} - \frac{β-γ}{2} & (4) \end{cases}$

Ἀπό τίς (1), (2), (3), (4) βρίσκουμε εὔκολα τίς σχέσεις:

$$\boxed{\begin{matrix} α \pm β \pm γ = (4λ+1)π \\ α \pm β \pm γ = (4λ-1)π \end{matrix}}, \quad \text{ὅπου } k, k_1, k_2, k_3, λ \in \mathbb{Z}.$$

Ἄν ὅμως εἶναι:

$α+β+γ=2νπ \Rightarrow$	**$συνα+συνβ+συνγ = -1+(-1)^ν.4συν\frac{α}{2}συν\frac{β}{2}συν\frac{γ}{2}$**	**(68α)**

Ἡ ἀπόδειξη γίνεται ὅπως καί στήν παράγραφο (29).
Ἄν, τέλος, εἶναι:

$α+β+γ=(2ν+1)π \Rightarrow$	**$συνα+συνβ+συνγ = 1+(-1)^ν.4ημ\frac{α}{2}\,ημ\frac{β}{2}\,ημ\frac{γ}{2}$**	**(68β)**

● **31.** *Σέ κάθε μή ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ἰσχύει ἡ ἰσότητα :*

$$\mathbf{εφΑ + εφΒ + εφΓ = εφΑ\,εφΒ\,εφΓ.}$$

Ἀπόδειξη. Ἔχουμε: $Α + Β + Γ = π$, ὁπότε:

$$Α + Β = π - Γ \text{ καί } εφ(Α + Β) = εφ(π - Γ) = -εφΓ \Leftrightarrow$$

$$\frac{εφΑ + εφΒ}{1 - εφΑ\,εφΒ} = -εφΓ \Leftrightarrow εφΑ + εφΒ + εφΓ = εφΑ\,εφΒ\,εφΓ.$$

Ὥστε, μέ $Α \neq \frac{π}{2}$ ἤ $Β \neq \frac{π}{2}$ ἤ $Γ \neq \frac{π}{2}$, καί $Α + Β + Γ = π$, ἰσχύει:

$$\boxed{\mathbf{εφΑ + εφΒ + εφΓ = εφΑ\,εφΒ\,εφΓ}} \qquad \mathbf{(69)}$$

Ἀντιστρόφως : Ἄν τρεῖς γωνίες Α, Β, Γ διαφορετικές ἀπό τό $\frac{π}{2}$, ἱκανοποιοῦν τήν ἰσότητα (69), τότε θά εἶναι:

$$εφΑ + εφΒ = εφΑ\,εφΒ\,εφΓ - εφΓ = -εφΓ(1 - εφΑ\,εφΒ) \Leftrightarrow$$

$$\frac{εφΑ + εφΒ}{1 - εφΑ\,εφΒ} = -εφΓ = εφ(π - Γ) \Leftrightarrow εφ(Α + Β) = εφ(π - Γ) \Leftrightarrow$$

$$Α + Β = νπ + π - Γ \Leftrightarrow \mathbf{Α + Β + Γ = (ν + 1)π}, \quad ν \in \mathbb{Z}$$

● **32.** *Σέ κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ἰσχύει ἡ ἰσότητα:*

$$\mathbf{σφA\,σφB + σφB\,σφΓ + σφΓ\,σφA = 1.}$$

Ἀπόδειξη. Ἀπό τή σχέση $A + B + Γ = π$ ἔχουμε:

$$A + B = π - Γ \Rightarrow σφ(A + B) = σφ(π - Γ) = -σφΓ \Rightarrow$$

$$\frac{σφAσφB - 1}{σφA + σφB} = -σφΓ.$$ Ἀπό ἐδῶ προκύπτει ὅτι:

$$\boxed{\mathbf{σφAσφB + σφBσφΓ + σφΓσφA = 1}} \qquad \mathbf{(70)}$$

Ἀντιστρόφως. Ἄν τρεῖς γωνίες Α, Β, Γ ἱκανοποιοῦν τήν ἰσότητα (70), τότε θά ἔχουμε:

$$σφA\,σφB - 1 = -σφΓ(σφA + σφB) \Leftrightarrow$$

$$\frac{σφA\,σφB - 1}{σφA + σφB} = -σφΓ \Leftrightarrow σφ(A + B) = -σφΓ = σφ(π - Γ) \Leftrightarrow$$

$A + B = νπ + (π - Γ)$, μέ $ν \in \mathbb{Z}$. Ἄρα: $\quad \mathbf{A + B + Γ = (ν + 1)π}$

● **33.** *Ἄν οἱ γωνίες ἑνός τριγώνου ΑΒΓ ἀποτελοῦν ἀριθμητική πρόοδο καί συγχρόνως ἰσχύει ἡ ἰσότητα:*

$$\mathbf{ημ^2A + ημ^2B + ημ^2Γ = 2,} \qquad (1)$$

νά ἀποδειχθεῖ ὅτι οἱ πλευρές αὐτοῦ τοῦ τριγώνου εἶναι ἀνάλογες μέ τούς ἀριθμούς **2, $\sqrt{3}$** *καί* **1.**

Ἀπόδειξη. Ἡ δεδομένη σχέση (1) γράφεται:

$$1 - συν^2A + 1 - συν^2B + 1 - συν^2Γ = 2 \Leftrightarrow$$

$$συν^2A + συν^2B + συν^2Γ = 1 \qquad (2)$$

Ἀφοῦ εἶναι $A + B + Γ = π$, κατά τόν τύπο (13), θά ἔχουμε:

$$συν^2A + συν^2B + συν^2Γ + 2συνA\,συνB\,συνΓ = 1 \qquad (3)$$

Ἀπό τίς (2) καί (3) βρίσκουμε τή σχέση:

$$συνA\,συνB\,συνΓ = 0 \Rightarrow \begin{cases} συνA = 0 \Rightarrow A = \frac{π}{2}, \\ ἤ\ συνB = 0 \Rightarrow B = \frac{π}{2}, \\ ἤ\ συνΓ = 0 \Rightarrow Γ = \frac{π}{2}. \end{cases}$$

Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι:

$$A = \frac{π}{2}, \text{ ὁπότε } B + Γ = \frac{π}{2} \qquad (4)$$

'Επειδή άπό τήν ύπόθεση οί γωνίες Α, Β, Γ άποτελοῦν άριθμητική πρόοδο, θά ίσχύει ή σχέση:

$$2B = \Gamma + A = \Gamma + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2B - \Gamma = \frac{\pi}{2} \qquad (5)$$

'Από τίς σχέσεις (4) καί (5) βρίσκουμε:

$$B + \Gamma = 2B - \Gamma \Leftrightarrow B = 2\Gamma \text{ καί ή (4) γίνεται:}$$

$$2\Gamma + \Gamma = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 3\Gamma = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \Gamma = \frac{\pi}{6} \text{ καί ἄρα } B = \frac{\pi}{3}.$$

"Ωστε εἶναι: $A = \frac{\pi}{2},\ B = \frac{\pi}{3},\ \Gamma = \frac{\pi}{6}.$

"Αν α, β, γ εἶναι, άντιστοίχως, ή ύποτείνουσα καί οί κάθετες πλευρές τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, τότε, έπειδή:

$$\Gamma = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \gamma = \frac{\alpha}{2} \text{ καί ἄρα } \beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 = \alpha^2 - \frac{\alpha^2}{4} = \frac{3\alpha^2}{4} \Rightarrow$$

$$\beta = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{\beta}{\sqrt{3}} = \frac{\alpha}{2}. \quad \text{"Αρα: } \boxed{\frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{\sqrt{3}} = \frac{\gamma}{1}}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Πρώτη όμάδα

38. Σέ κάθε τρίγωνο ΑΒΓ νά άποδειχθοῦν οί ίσότητες:

1. $\eta\mu A + \eta\mu B - \eta\mu\Gamma = 4\eta\mu\frac{A}{2}\,\eta\mu\frac{B}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}$,
2. $\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B - \sigma\upsilon\nu\Gamma = -1 + 4\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\,\eta\mu\frac{\Gamma}{2}$,
3. $\eta\mu 2A + \eta\mu 2B + \eta\mu 2\Gamma = 4\eta\mu A\,\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma$,
4. $\sigma\upsilon\nu 2A + \sigma\upsilon\nu 2B + \sigma\upsilon\nu 2\Gamma = -1 - 4\sigma\upsilon\nu A\,\sigma\upsilon\nu B\,\sigma\upsilon\nu\Gamma$,
5. $\varepsilon\varphi 2A + 2\varepsilon\varphi 2B + \varepsilon\varphi 2\Gamma = \varepsilon\varphi 2A\,\varepsilon\varphi 2B\,\varepsilon\varphi 2\Gamma$,
6. $\varepsilon\varphi\frac{A}{2}\,\varepsilon\varphi\frac{B}{2} + \varepsilon\varphi\frac{B}{2}\,\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2} + \varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}\,\varepsilon\varphi\frac{A}{2} = 1.$

39. Σέ κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ίσχύουν οί ίσότητες:

1. $\eta\mu^2 A + \eta\mu^2 B + \eta\mu^2\Gamma = 2 + 2\sigma\upsilon\nu A\,\sigma\upsilon\nu B\,\sigma\upsilon\nu\Gamma$,
2. $\eta\mu^2 A + \eta\mu^2 B - \eta\mu^2\Gamma = 2\eta\mu A\,\eta\mu B\,\sigma\upsilon\nu\Gamma$,
3. $\sigma\upsilon\nu^2 A + \sigma\upsilon\nu^2 B - \sigma\upsilon\nu^2\Gamma = 1 - 2\eta\mu A\,\eta\mu B\,\sigma\upsilon\nu\Gamma$,
4. $\eta\mu(B + \Gamma - A) + \eta\mu(\Gamma + A - B) + \eta\mu(A + B - \Gamma) = 4\eta\mu A\,\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma$.

40. Σέ κάθε τρίγωνο ΑΒΓ νά άποδειχθεῖ ὅτι:

1. $\eta\mu 4A + \eta\mu 4B + \eta\mu 4\Gamma = -4\eta\mu 2A\,\eta\mu 2B\,\eta\mu 2\Gamma$,
2. $\sigma\upsilon\nu 4A + \sigma\upsilon\nu 4B + \sigma\upsilon\nu 4\Gamma = -1 + 4\sigma\upsilon\nu 2A\,\sigma\upsilon\nu 2B\,\sigma\upsilon\nu 2\Gamma$,
3. $\eta\mu^2\frac{A}{2} + \eta\mu^2\frac{B}{2} + \eta\mu^2\frac{\Gamma}{2} = 1 - 2\eta\mu\frac{A}{2}\,\eta\mu\frac{B}{2}\,\eta\mu\frac{\Gamma}{2}$,
4. $\dfrac{\eta\mu 2A + \eta\mu 2B + \eta\mu 2\Gamma}{\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu\Gamma} = 8\eta\mu\frac{A}{2}\,\eta\mu\frac{B}{2}\,\eta\mu\frac{\Gamma}{2}$,

5. $\dfrac{\varepsilon\varphi A + \varepsilon\varphi B + \varepsilon\varphi \Gamma}{(\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu \Gamma)^2} = \dfrac{\varepsilon\varphi \frac{A}{2}\,\varepsilon\varphi \frac{B}{2}\,\varepsilon\varphi \frac{\Gamma}{2}}{2\sigma\upsilon\nu A\,\sigma\upsilon\nu B\,\sigma\upsilon\nu \Gamma}$

41. Ἂν $A + B + \Gamma = 180^\circ$, νά γίνουν γινόμενα οἱ παραστάσεις:

1. $\eta\mu 3A + \eta\mu 3B + \eta\mu 3\Gamma$,
2. $\eta\mu 6A + \eta\mu 6B + \eta\mu 6\Gamma$,
3. $\varepsilon\varphi(kA) + \varepsilon\varphi(kB) + \varepsilon\varphi(k\Gamma)$, ἄν $k \in \mathbb{N}$.

42. Σέ κάθε τρίγωνο ΑΒΓ νά ἀποδειχθεῖ ἡ ἀλήθεια καθεμιᾶς ἀπό τίς παρακάτω ἰσότητες:

1. $\eta\mu \frac{A}{2} + \eta\mu \frac{B}{2} + \eta\mu \frac{\Gamma}{2} = 1 + 4\eta\mu \frac{\pi - A}{4}\,\eta\mu \frac{\pi - B}{4}\,\eta\mu \frac{\pi - \Gamma}{4}$,

2. $\sigma\upsilon\nu \frac{A}{2} + \sigma\upsilon\nu \frac{B}{2} + \sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma}{2} = 4\sigma\upsilon\nu \frac{B + \Gamma}{4}\,\sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma + A}{4}\,\sigma\upsilon\nu \frac{A + B}{4}$,

3. $\eta\mu^2 \frac{A}{4} + \eta\mu^2 \frac{B}{4} + \eta\mu^2 \frac{\Gamma}{4} = \frac{3}{2} - 2\sigma\upsilon\nu \frac{\pi - A}{4}\,\sigma\upsilon\nu \frac{\pi - B}{4}\,\sigma\upsilon\nu \frac{\pi - \Gamma}{4}$,

4. $\sigma\upsilon\nu^2 \frac{A}{4} + \sigma\upsilon\nu^2 \frac{B}{4} + \sigma\upsilon\nu^2 \frac{\Gamma}{4} = \frac{3}{2} + 2\sigma\upsilon\nu \frac{\pi - A}{4}\,\sigma\upsilon\nu \frac{\pi - B}{4}\,\sigma\upsilon\nu \frac{\pi - \Gamma}{4}$.

✱ Δεύτερη ὁμάδα

43. Σέ κάθε τρίγωνο ΑΒΓ νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

1. $\Sigma\eta\mu A\,\sigma\upsilon\nu B\,\sigma\upsilon\nu \Gamma = \eta\mu A\,\eta\mu B\,\eta\mu \Gamma$,
2. $\Sigma\sigma\upsilon\nu A\,\eta\mu B\,\eta\mu \Gamma = 1 + \sigma\upsilon\nu A\,\sigma\upsilon\nu B\,\sigma\upsilon\nu \Gamma$,
3. $\Sigma\eta\mu A\,\sigma\upsilon\nu(B - \Gamma) = 4\eta\mu A\,\eta\mu B\,\eta\mu \Gamma$,
4. $\Sigma\sigma\upsilon\nu A\,\sigma\upsilon\nu(B - \Gamma) = 1 + 4\sigma\upsilon\nu A\,\sigma\upsilon\nu B\,\sigma\upsilon\nu \Gamma$,
5. $\Sigma\eta\mu^3 A\,\eta\mu(B - \Gamma) = 0$,
6. $\Sigma\eta\mu^3 A\,\sigma\upsilon\nu(B - \Gamma) - 3\eta\mu A\eta\mu B\eta\mu \Gamma = 0$,
7. $\Sigma\eta\mu 3A\,\sigma\upsilon\nu(B - \Gamma) = 0$,
8. $\Sigma\eta\mu 3A\,\eta\mu^3(B - \Gamma) = 0$.

44. Σέ κάθε κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

1. $\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu \Gamma + \eta\mu \Delta = 4\eta\mu \frac{A + B}{2}\,\eta\mu \frac{B + \Gamma}{2}\,\eta\mu \frac{\Gamma + A}{2}$,

2. $\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu \Gamma + \sigma\upsilon\nu \Delta = 4\sigma\upsilon\nu \frac{A + B}{2}\,\sigma\upsilon\nu \frac{B + \Gamma}{2}\,\sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma + A}{2}$.

45. Ἂν σέ κάποιο τρίγωνο ΑΒΓ ἀληθεύει καθεμιά ἀπό τίς ἰσότητες:

1. $\sigma\varphi \frac{B}{2} = \frac{\eta\mu A + \eta\mu \Gamma}{\eta\mu B}$, 2. $\eta\mu A = \frac{\eta\mu B + \eta\mu \Gamma}{\sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu \Gamma}$

3. $\eta\mu \Gamma = \sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B$,

νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τό τρίγωνο αὐτό εἶναι ὀρθογώνιο καί ἀντιστρόφως.

46. Ἂν σέ κάποιο τρίγωνο ΑΒΓ ἰσχύει καθεμιά ἀπό τίς ἰσότητες:

1. $\Sigma\varepsilon\varphi \frac{A}{2} + \varepsilon\varphi \frac{A}{2}\,\varepsilon\varphi \frac{B}{2}\,\varepsilon\varphi \frac{\Gamma}{2} = 2$, 2. $\Sigma\sigma\upsilon\nu^2 A = 1$

3. $\eta\mu 2A + \eta\mu 2\Gamma = \eta\mu 2B$, 4. $\Sigma\eta\mu 4A = 0$,

νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τό τρίγωνο αὐτό εἶναι ὀρθογώνιο καί ἀντιστρόφως.

47. Ἂν σέ τρίγωνο ΑΒΓ ἰσχύει ἡ ἰσότητα

$$\eta\mu 3A + \eta\mu 3B + \eta\mu 3\Gamma = 0,$$

νά ἀποδειχθεῖ ὅτι μία γωνία τοῦ τριγώνου εἶναι 60°.

48. Ἂν $ημ \frac{A}{2} συν^3 \frac{B}{2} = ημ \frac{B}{2} συν^3 \frac{A}{2}$, τότε τό τρίγωνο αὐτό εἶναι ἰσοσκελές.

Ἐπίσης, ἄν $συν^2 \frac{A}{2} = ημB\, ημΓ$.

49. Ἂν $συν3A + συν3B + συν3Γ = 1$, τότε μία γωνία τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι 120°.

50. Σέ κάθε τρίγωνο ΑΒΓ νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

$$1 + \Sigma \frac{ημΓ\, συνB}{ημA\, ημ^2B} = (σφA + σφB + σφΓ)^2.$$

51. Ἂν $x + y + ω = xyω$, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

1. $\Sigma \frac{2x}{1-x^2} = \frac{2x}{1-x^2} \cdot \frac{2y}{1-y^2} \cdot \frac{2ω}{1-ω^2}$.
2. $\Sigma \frac{3x-x^3}{1-3x^2} = \frac{3x-x^3}{1-3x^2} \cdot \frac{3y-y^3}{1-3y^2} \cdot \frac{3ω-ω^3}{1-3ω^2}$.
3. $\Sigma x(1-y^2)(1-ω^2) = 4xyω$.

52. Ἂν $A + B + Γ = 180°$ καί $ν \in \mathbb{Z}$, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

$$ημ(2νA) + ημ(2νB) + ημ(2νΓ) = 4(-1)^{ν-1} ημ(νA)\, ημ(νB)\, ημ(νΓ).$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ ΣΧΕΣΕΙΣ ΑΝΑΜΕΣΑ ΣΤΑ ΚΥΡΙΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

● **34.** *ΤΥΠΟΙ ΤΟΥ MOLLWEIDE. Σέ κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ἰσχύουν οἱ ἀκόλουθες σχέσεις:*

$$\frac{\beta-\gamma}{\alpha}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}=\eta\mu\frac{B-\Gamma}{2},\quad \frac{\beta+\gamma}{\alpha}\eta\mu\frac{A}{2}=\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2},$$

$$\frac{\beta-\gamma}{\beta+\gamma}\sigma\varphi\frac{A}{2}=\varepsilon\varphi\frac{B-\Gamma}{2}.$$

Ἀπόδειξη. Ἄν $\beta>\gamma$, θά ἔχουμε διαδοχικά:

$$\frac{\beta-\gamma}{\alpha}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}=\frac{2R\eta\mu B-2R\eta\mu\Gamma}{2R\eta\mu A}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}=\frac{\eta\mu B-\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}=$$

$$=\frac{2\eta\mu\frac{B-\Gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B+\Gamma}{2}}{2\eta\mu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}=\frac{\eta\mu\frac{B-\Gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B+\Gamma}{2}}{\eta\mu\frac{A}{2}}=\eta\mu\frac{B-\Gamma}{2} \qquad (1)$$

$$\frac{\beta+\gamma}{\alpha}\eta\mu\frac{A}{2}=\frac{2R\eta\mu B+2R\eta\mu\Gamma}{2R\eta\mu A}\cdot\eta\mu\frac{A}{2}=\frac{\eta\mu B+\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A}\cdot\eta\mu\frac{A}{2}=$$

$$=\frac{2\eta\mu\frac{B+\Gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}}{2\eta\mu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}}\cdot\eta\mu\frac{A}{2}=\frac{\eta\mu\frac{B+\Gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}}=\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2} \qquad (2)$$

Μὲ διαίρεση τώρα κατὰ μέλη τῶν (1) καὶ (2), βρίσκουμε :

$$\frac{\beta-\gamma}{\beta+\gamma}\sigma\varphi\frac{A}{2}=\varepsilon\varphi\frac{B-\Gamma}{2} \qquad (3)$$

καί μέ κυκλική ἐναλλαγή τῶν α, β, γ, ($\alpha>\beta>\gamma$) καί Α, Β, Γ βρίσκουμε τούς τύπους τοῦ Mollweide.

(71)

$\frac{\alpha-\beta}{\gamma}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}=\eta\mu\frac{A-B}{2}$
$\frac{\beta-\gamma}{\alpha}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}=\eta\mu\frac{B-\Gamma}{2}$
$\frac{\alpha-\gamma}{\beta}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}=\eta\mu\frac{A-\Gamma}{2}$

(72)

$\frac{\beta+\gamma}{\alpha}\eta\mu\frac{A}{2}=\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}$
$\frac{\gamma+\alpha}{\beta}\eta\mu\frac{B}{2}=\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma-A}{2}$
$\frac{\alpha+\beta}{\gamma}\eta\mu\frac{\Gamma}{2}=\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}$

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\,\sigma\varphi\,\frac{\Gamma}{2}=\varepsilon\varphi\,\frac{A-B}{2}\quad \frac{\beta-\gamma}{\beta+\gamma}\,\sigma\varphi\,\frac{A}{2}=\varepsilon\varphi\,\frac{B-\Gamma}{2}\\ \frac{\gamma-\alpha}{\gamma+\alpha}\,\sigma\varphi\,\frac{A}{2}=\varepsilon\varphi\,\frac{\Gamma-A}{2}\end{gathered}} \tag{73}$$

● **35.** *ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Ἀπό τίς πλευρές ἑνός τριγώνου ΑΒΓ νά ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τῶν μισῶν γωνιῶν του.*

Λύση. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι α, β, γ εἶναι οἱ πλευρές τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καί 2τ ἡ περίμετρός του. Τότε θά ἔχουμε:

$$\alpha+\beta+\gamma=2\tau \Rightarrow \begin{cases}\beta+\gamma-\alpha=2\tau-2\alpha=2(\tau-\alpha),\\ \gamma+\alpha-\beta=2\tau-2\beta=2(\tau-\beta),\\ \alpha+\beta-\gamma=2\tau-2\gamma=2(\tau-\gamma).\end{cases}$$

Ἀπό τό νόμο τῶν συνημιτόνων ἔχουμε τόν τύπο:

$$\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\,\sigma\upsilon\nu A \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu A=\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma} \tag{1}$$

Εἶναι ὅμως καί

$$2\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2}=1+\sigma\upsilon\nu A \quad (2) \qquad \text{καί} \qquad 2\eta\mu^2\frac{A}{2}=1-\sigma\upsilon\nu A \tag{3}$$

Ἑπομένως μέ τή βοήθεια τῶν (1) καί (2) θά ἔχουμε:

$$2\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2}=1+\sigma\upsilon\nu A=1+\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}=\frac{\beta^2+\gamma^2+2\beta\gamma-\alpha^2}{2\beta\gamma}=$$

$$=\frac{(\beta+\gamma)^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}=\frac{(\beta+\gamma+\alpha)(\beta+\gamma-\alpha)}{2\beta\gamma}=\frac{2\tau\cdot 2(\tau-\alpha)}{2\beta\gamma}=\frac{2\tau(\tau-\alpha)}{\beta\gamma}$$

Ἐπειδή ὅμως $\frac{A}{2}<\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}>0$ καί θά ἔχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\tau(\tau-\alpha)}{\beta\gamma}}$$

Μέ ὅμοιο τρόπο ἀπό τίς (1) καί (3) βρίσκουμε: $\eta\mu\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\beta\gamma}}$

Τέλος, μέ κυκλική ἐναλλαγή τῶν α, β, γ καί Α, Β, Γ βρίσκουμε:

$$\boxed{\begin{aligned}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{\tau(\tau-\alpha)}{\beta\gamma}}\\ \sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{\tau(\tau-\beta)}{\gamma\alpha}}\\ \sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}&=\sqrt{\frac{\tau(\tau-\gamma)}{\alpha\beta}}\end{aligned}}\ (74)\qquad \boxed{\begin{aligned}\eta\mu\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\beta\gamma}}\\ \eta\mu\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{(\tau-\gamma)(\tau-\alpha)}{\gamma\alpha}}\\ \eta\mu\frac{\Gamma}{2}&=\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}{\alpha\beta}}\end{aligned}}\ (75)$$

Διαιρώντας ἔπειτα κατά μέλη, ἀντιστοίχως, τούς τύπους (75) μέ τούς τύπους (74) βρίσκουμε τούς τύπους:

$$(76)\quad \boxed{\begin{array}{l} \varepsilon\varphi \dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau(\tau-\alpha)}} \\ \hline \varepsilon\varphi \dfrac{B}{2} = \sqrt{\dfrac{(\tau-\gamma)(\tau-\alpha)}{\tau(\tau-\beta)}} \\ \hline \varepsilon\varphi \dfrac{\Gamma}{2} = \sqrt{\dfrac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}{\tau(\tau-\gamma)}} \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} \sigma\varphi \dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{\tau(\tau-\alpha)}{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}} \\ \sigma\varphi \dfrac{B}{2} = \sqrt{\dfrac{\tau(\tau-\beta)}{(\tau-\gamma)(\tau-\alpha)}} \\ \sigma\varphi \dfrac{\Gamma}{2} = \sqrt{\dfrac{\tau(\tau-\gamma)}{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}} \end{array}} \quad (77)$$

★ **Διερεύνηση:** Γιά νά ὑπάρχουν οἱ γωνίες Α, Β, Γ, πρέπει:

$$\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau(\tau-\alpha)} > 0 \text{ ἤ } (\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma) > 0, \text{ ἀφοῦ } \tau > 0$$

Γιά νά εἶναι ὅμως $(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma) > 0$, πρέπει ἤ ὅλοι οἱ παράγοντες νά εἶναι θετικοί ἤ ἕνας θετικός καί οἱ ἄλλοι δύο ἀρνητικοί. Ἄν δύο παράγοντες εἶναι ἀρνητικοί, π.χ. οἱ

$$\left.\begin{array}{l}\tau-\beta<0\\ \tau-\gamma<0\end{array}\right\} \Rightarrow 2\tau-\beta-\gamma<0 \Leftrightarrow \alpha<0, \text{ πράγμα πού εἶναι ἄτοπο.}$$

Ἄρα: $\tau-\alpha>0 \Leftrightarrow \tau>\alpha \Leftrightarrow 2\tau>2\alpha \Leftrightarrow 2\alpha<2\tau \Leftrightarrow \alpha<\beta+\gamma$. Ὁμοίως (1)

$\tau-\beta>0 \Leftrightarrow \beta<\gamma+\alpha$ (2) καί $\tau-\gamma>0 \Rightarrow \gamma<\alpha+\beta$ (3)

Ἀπό τίς σχέσεις (2) καί (3) βρίσκουμε:

$$\left.\begin{array}{l}-\alpha<\gamma-\beta\\ \gamma-\beta<\alpha\end{array}\right\} \Rightarrow -\alpha<\gamma-\beta<\alpha \Leftrightarrow |\gamma-\beta|<\alpha<\beta+\gamma$$

Μέ ὅμοιο τρόπο βρίσκουμε: $|\alpha-\gamma|<\beta<\alpha+\gamma$ καί $|\alpha-\beta|<\gamma<\alpha+\beta$

Ἄν ὅμως α εἶναι ἡ μεγαλύτερη πλευρά, τότε ἀρκεῖ $\alpha<\beta+\gamma$.

Παρατήρηση. Ἄν ἐργαστοῦμε μέ τόν ἴδιο τρόπο στούς τύπους (74) ἤ (75), θά ἔχουμε:

$$0<\frac{\tau(\tau-\alpha)}{\beta\gamma}<1, \text{ δηλαδή } 0<\frac{\tau(\tau-\alpha)}{\beta\gamma} \text{ καί } \frac{\tau(\tau-\alpha)}{\beta\gamma}<1$$

ἤ	$\tau(\tau-\alpha)>0$	καί	$\tau(\tau-\alpha)<\beta\gamma$,
ἤ	$\tau-\alpha>0$	»	$(\beta+\gamma+\alpha)(\beta+\gamma-\alpha)<4\beta\gamma$,
ἤ	$\tau>\alpha$	»	$(\beta-\gamma)^2-\alpha^2<0$,
ἤ	$\alpha<\beta+\gamma$	»	$(\beta-\gamma+\alpha)(\beta-\gamma-\alpha)<0$ (4)

Τό πρῶτο μέλος τῆς (4) εἶναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο ὡς πρός β. Γιά νά εἶναι τό τριώνυμο αὐτό ἀρνητικό, δηλαδή νά ἔχει σημεῖο ἀντίθετο ἀπό τό σημεῖο τοῦ συντελεστοῦ τοῦ β^2, πρέπει καί ἀρκεῖ ὁ β νά βρίσκεται ἀνάμεσα στίς ρίζες τοῦ τριωνύμου. Δηλαδή πρέπει:

$$\gamma-\alpha<\beta<\gamma+\alpha, \text{ ἀπ' ὅπου: } \gamma<\alpha+\beta \text{ καί } \beta<\alpha+\gamma.$$

Ἑπομένως θά ἔχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha < \beta + \gamma, \\ \beta < \gamma + \alpha, \\ \gamma < \alpha + \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} |\beta - \gamma| < \alpha < \beta + \gamma, \\ |\gamma - \alpha| < \beta < \gamma + \alpha, \\ |\alpha - \beta| < \gamma < \alpha + \beta. \end{array}$$

● **36. Ἐμβαδό τριγώνου.** Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι α, β, γ εἶναι οἱ πλευρές τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καί Ε τό ἐμβαδό του. Φέρνουμε τά ὕψη του ΑΔ καί ΒΖ.

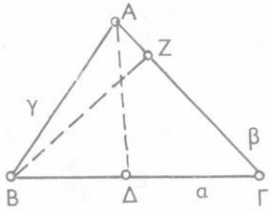
Ἀπό τό σχῆμα 5 ἔχουμε:

$A\Delta = \beta \eta\mu\Gamma$, $A\Delta = \gamma\eta\mu B$ καί $BZ = \gamma\eta\mu A$.

Τό ἐμβαδό τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι:

$$E = \frac{1}{2}\beta \cdot BZ = \frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot A\Delta = \frac{1}{2}\beta\gamma\,\eta\mu A$$

$$= \frac{1}{2}\alpha\beta\,\eta\mu\Gamma = \frac{1}{2}\alpha\gamma\,\eta\mu B.$$



Σχ. 5

Ὥστε :

$$\boxed{E = \frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A = \frac{1}{2}\gamma\alpha\,\eta\mu B = \frac{1}{2}\alpha\beta\,\eta\mu\Gamma} \quad (78)$$

Οἱ σχέσεις (78) δείχνουν ὅτι : *Τό ἐμβαδό κάθε τριγώνου εἶναι ἴσο μέ τό μισό τοῦ γινομένου δύο πλευρῶν του ἐπί τό ἡμίτονο τῆς γωνίας, ἡ ὁποία περιέχεται σ' αὐτές τίς πλευρές.*

Συνέπεια : Ἐπειδή εἶναι $\eta\mu\Gamma = \frac{\gamma}{2R}$, θά ἔχουμε:

$$E = \frac{1}{2}\alpha\beta\eta\mu\Gamma = \frac{1}{2}\alpha\beta\cdot\frac{\gamma}{2R} = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R} \Leftrightarrow \boxed{\alpha\beta\gamma = 4ER} \quad (79)$$

● **37.** *ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Ἀπό τίς πλευρές ἑνός τριγώνου ΑΒΓ νά ὑπολογισθεῖ τό ἐμβαδό του.*

Λύση. Ἔχουμε διαδοχικά:

$$E = \frac{1}{2}\beta\gamma\,\eta\mu A = \frac{1}{2}\beta\gamma\cdot 2\eta\mu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2} = \beta\gamma\eta\mu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2} =$$

$$= \beta\gamma\cdot\sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\beta\gamma}}\cdot\sqrt{\frac{\tau(\tau-\alpha)}{\beta\gamma}} = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$$

Ὥστε:

$$\boxed{E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}} \quad (80)$$

Ὁ τύπος αὐτός καλεῖται τύπος τοῦ **Ἥρωνος.**

● **38.** *ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Ἀπό τίς πλευρές ἑνός τριγώνου ΑΒΓ, νά ὑπολογισθεῖ ἡ ἀκτίνα τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.*

Λύση. Ἀπό τούς γνωστούς τύπους:

$$\alpha\beta\gamma = 4\mathrm{ER} \text{ καί } \mathrm{E} = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$$

μέ ἀπαλοιφή τοῦ Ε βρίσκουμε:

$$\boxed{\mathbf{R} = \frac{\boldsymbol{\alpha\beta\gamma}}{\sqrt{(\tau-\alpha)\,\tau-\beta)\,(\tau-\gamma)}}} \qquad \mathbf{(81)}$$

● **39.** *ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Ἀπό τά ἡμίτονα τῶν γωνιῶν ἑνός τριγώνου ΑΒΓ καί τήν ἀκτίνα R τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου, νά ὑπολογισθεῖ τό ἐμβαδό τοῦ τριγώνου.*

Λύση. Ἀπό τίς γνωστές σχέσεις:

$$\alpha = 2\mathrm{R}\eta\mu\mathrm{A},\ \beta = 2\mathrm{R}\eta\mu\mathrm{B},\ \gamma = 2\mathrm{R}\eta\mu\Gamma$$

καί τόν τύπο: $\alpha\beta\gamma = 4\mathrm{ER}$, ἔχουμε διαδοχικά:

$$\mathrm{E} = \frac{\alpha\beta\gamma}{4\mathrm{R}} = \frac{2\mathrm{R}\eta\mu\mathrm{A}\cdot 2\mathrm{R}\eta\mu\mathrm{B}\cdot 2\mathrm{R}\eta\mu\Gamma}{4\mathrm{R}} = 2\mathrm{R}^2\eta\mu\mathrm{A}\ \eta\mu\mathrm{B}\ \eta\mu\Gamma$$

Ὥστε:

$$\boxed{\mathbf{E = 2\,R^2\ \eta\mu A\ \eta\mu B\ \eta\mu \Gamma}} \qquad \mathbf{(82)}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

α) *Νά ὑπολογισθοῦν οἱ γωνίες Β καί Γ ἑνός τριγώνου ΑΒΓ ἀπό τά γνωστά στοιχεῖα του:*

$$\mathbf{A = 60^0} \quad \textit{καὶ} \quad \boldsymbol{\alpha = (\beta-\gamma)\sqrt{3}},$$

Λύση. Ἀπό τό δεύτερο τύπο τοῦ Mollweide ἔχουμε:

$$\eta\mu\frac{\mathrm{B}-\Gamma}{2} = \frac{\beta-\gamma}{\alpha}\sigma\upsilon\nu\frac{\mathrm{A}}{2} = \frac{\beta-\gamma}{(\beta-\gamma)\sqrt{3}}\sigma\upsilon\nu\frac{60^\circ}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma\upsilon\nu\,30^\circ =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} = \eta\mu 30^\circ.$$

Ἄρα θά εἶναι : $\frac{\mathrm{B}-\Gamma}{2} = 30^\circ \Rightarrow \mathrm{B}-\Gamma = 60^\circ$ (1)

Ἐπειδή ὅμως: $\mathrm{B}+\Gamma = 180^\circ - \mathrm{A} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ (2)

ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) προκύπτει: $\mathrm{B} = 90^\circ$ καί $\Gamma = 30^\circ$.

Συμπέρασμα: Τό τρίγωνο ΑΒΓ ἔχει: $\mathrm{A} = 60^\circ$, $\mathrm{B} = 90^\circ$, $\Gamma = 30^\circ$, δηλαδή εἶναι ὀρθογώνιο στήν κορυφή Β.

β) *Σέ κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ἀληθεύει ἡ σχέση:*

$$\boldsymbol{\beta^2\eta\mu 2\Gamma + \gamma^2\eta\mu 2B = 4E}$$

Ἀπόδειξη. Ἔχουμε διαδοχικά:

$$\beta^2\eta\mu 2\Gamma + \gamma^2\eta\mu 2\mathrm{B} = 2\beta^2\eta\mu\Gamma\,\sigma\upsilon\nu\Gamma + 2\gamma^2\,\eta\mu\mathrm{B}\,\sigma\upsilon\nu\mathrm{B} =$$

$$= 2\beta^2\eta\mu\Gamma\,\sigma\upsilon\nu\Gamma + 2\gamma\cdot\beta\eta\mu\Gamma\,\sigma\upsilon\nu\mathrm{B} = 2\beta\eta\mu\Gamma\,(\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma + \gamma\sigma\upsilon\nu\mathrm{B}) =$$

$$= 2\beta\eta\mu\Gamma\cdot\alpha = 2\alpha\beta\eta\mu\Gamma = 4\mathrm{E},$$

ἀφοῦ ξέρουμε ἀπό τήν προηγούμενη τάξη ὅτι εἶναι:

$$\alpha = \beta\sigma\upsilon\nu\Gamma + \gamma\sigma\upsilon\nu\mathrm{B},\ \gamma\eta\mu\mathrm{B} = \beta\eta\mu\Gamma,\ \alpha\eta\mu\Gamma = \gamma\eta\mu\mathrm{A}.$$

γ) Ἄν οἱ πλευρές α, β, γ καί ἡ γωνία Β ἑνός τριγώνου ΑΒΓ ἱκανοποιοῦν τήν ἰσότητα:

$$\boldsymbol{\alpha + \gamma = \beta\, \sigma\varphi \frac{B}{2}} \qquad (1)$$

νά βρεθεῖ τό εἶδος τοῦ τριγώνου.

Λύση. Ἡ ἰσότητα (1) γράφεται:

$$2R\eta\mu A + 2R\eta\mu \Gamma = 2R\eta\mu B\sigma\varphi \frac{B}{2} \Leftrightarrow \eta\mu A + \eta\mu\Gamma = \eta\mu B\, \sigma\varphi \frac{B}{2} \Leftrightarrow$$

$$2\eta\mu\frac{A+\Gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A-\Gamma}{2} = 2\eta\mu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}}{\eta\mu\frac{B}{2}} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{A-\Gamma}{2} = \sigma\upsilon\nu\frac{B}{2} \qquad (2)$$

Ἄρα θά εἶναι: $\frac{B}{2} = \frac{A-\Gamma}{2} \Leftrightarrow B+\Gamma = A \Leftrightarrow A = 90^\circ$

ἤ $\frac{B}{2} = \frac{\Gamma - A}{2} \Leftrightarrow B + A = \Gamma \Leftrightarrow \Gamma = 90^\circ.$

Ἄρα τό τρίγωνο ΑΒΓ θά εἶναι ὀρθογώνιο ἤ στήν κορυφή Α ἤ στήν κορυφή Γ.

Ἀπό τή σχέση (2) θά μποροῦσε νά προκύψει ὅτι ἰσχύουν οἱ **σχέσεις**:

$$\frac{B}{2} = \frac{\Gamma - A}{2} + k\cdot 360^\circ \quad ἤ \quad \frac{B}{2} = \frac{A-\Gamma}{2} + k\cdot 360^\circ, \quad k\in\mathbb{Z},$$

οἱ ὁποῖες ὅμως ἀπορρίπτονται, γιατί:

$$\frac{B}{2} < 90^\circ \quad καί \quad \frac{|A-\Gamma|}{2} < 90^\circ. \quad Ἄρα \quad k = 0.$$

δ) *Σέ κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ἀληθεύει ἡ σχέση:*

$$(\boldsymbol{\alpha + \beta + \gamma})\left(\boldsymbol{\varepsilon\varphi \frac{A}{2} + \varepsilon\varphi\frac{B}{2}}\right) = \boldsymbol{2\gamma\, \sigma\varphi\, \frac{\Gamma}{2}}.$$

Ἀπόδειξη. Ἔχουμε διαδοχικά:

$$(\alpha+\beta+\gamma)\left(\varepsilon\varphi\frac{A}{2} + \varepsilon\varphi\frac{B}{2}\right) = 2R(\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu\Gamma)\cdot\frac{\eta\mu\frac{A+B}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}} =$$

$$= 2R\cdot 4\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}} = 8R\,\sigma\upsilon\nu^2\frac{\Gamma}{2} =$$

$$= 8R\cdot \eta\mu\frac{\Gamma}{2}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\Gamma}{2}}{\eta\mu\frac{\Gamma}{2}} = 8R\eta\mu\frac{\Gamma}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}}{\eta\mu\frac{\Gamma}{2}} =$$

$$= 2R\cdot 2\cdot 2\eta\mu\frac{\Gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}\cdot\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2} = 2\cdot 2R\eta\mu\Gamma\,\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2} = 2\gamma\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}.$$

ε) *Ἄν οἱ πλευρές ἑνός τριγώνου ΑΒΓ ἱκανοποιοῦν τήν ἰσότητα:*

$$\boldsymbol{\alpha + \gamma = 2\beta}, \quad \textit{τότε} \quad \boldsymbol{\sigma\varphi\frac{A}{2} + \sigma\varphi\frac{\Gamma}{2} = 2\,\sigma\varphi\frac{B}{2}}$$

καί ἀντιστρόφως.

Ἀπόδειξη. Ἀπό τή σχέση:

$$\alpha + \gamma = 2\beta \Leftrightarrow 2\tau - (\alpha + \gamma) = 2\tau - 2\beta \Leftrightarrow (\tau - \alpha) + (\tau - \gamma) = 2(\tau - \beta)$$

διαιρώντας τά μέλη της μέ τήν παράσταση

$$\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau}}$$

βρίσκουμε τή σχέση:

$$\sqrt{\frac{\tau(\tau-\alpha)}{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}} + \sqrt{\frac{\tau(\tau-\gamma)}{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}} = 2\cdot\sqrt{\frac{\tau(\tau-\beta)}{(\tau-\gamma)(\tau-\alpha)}}$$

ἀπό τήν ὁποία, μέ βάση τούς τύπους (77), βρίσκουμε:

$$\sigma\varphi\frac{A}{2} + \sigma\varphi\frac{\Gamma}{2} = 2\sigma\varphi\frac{B}{2}.$$

Ἡ ἀντίστροφη πρόταση ἀποδεικνύεται εὔκολα, ἀφοῦ ὅλες οἱ προηγούμενες πράξεις εἶναι ἀντιστρεπτές.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Πρώτη ὁμάδα

53. Ἄν σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι $\Gamma = 120°$ καί $2\alpha = \beta(\sqrt{3} - 1)$, νά ὑπολογισθοῦν οἱ γωνίες αὐτοῦ τοῦ τριγώνου.

54. Ἄν σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι $3\alpha = (\beta + \gamma)\sqrt{3}$ καί $A = 60°$, νά ὑπολογισθοῦν οἱ ἄλλες γωνίες αὐτοῦ τοῦ τριγώνου.

55. Ἄν σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι $\beta = 2\gamma$ καί $A = 60°$, νά ὑπολογισθοῦν οἱ ἄλλες γωνίες αὐτοῦ τοῦ τριγώνου.

56. Ἄν σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι $\beta = \alpha(\sqrt{3} - 1)$ καί $\Gamma = 30°$, νά ὑπολογισθοῦν οἱ ἄλλες γωνίες αὐτοῦ τοῦ τριγώνου.

57. Ἄν σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι $\alpha = 2$, $\gamma = \sqrt{2}$, $B = 15°$, νά ὑπολογισθοῦν οἱ ἄλλες γωνίες αὐτοῦ τοῦ τριγώνου.

58. Σέ κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ἰσχύουν οἱ ἀκόλουθες ἰσότητες:

1. $\alpha(\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma - \gamma\sigma\upsilon\nu B) = \beta^2 - \gamma^2$,
2. $\alpha(\sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu\Gamma) = 2(\beta + \gamma)\,\eta\mu^2\frac{A}{2}$.

3. $(\beta+\gamma-\alpha)\left(\sigma\varphi\frac{B}{2}+\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}\right)=2\alpha\sigma\varphi\frac{A}{2}$,

4. $\frac{\beta^2-\gamma^2}{\alpha^2}\eta\mu 2A+\frac{\gamma^2-\alpha^2}{\beta^2}\eta\mu 2B+\frac{\alpha^2-\beta^2}{\gamma^2}\eta\mu 2\Gamma=0$.

✶ Δεύτερη ὁμάδα

59. Σέ κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ἰσχύουν οἱ ἰσότητες:

1. $\frac{\alpha\eta\mu(B-\Gamma)}{\beta^2-\gamma^2}=\frac{\beta\eta\mu(\Gamma-A)}{\gamma^2-\alpha^2}=\frac{\gamma\eta\mu(A-B)}{\alpha^2-\beta^2}$,

2. $\Sigma(\beta-\gamma)\,\sigma\varphi\frac{A}{2}=0$, 3. $\Sigma(\beta^2-\gamma^2)\,\sigma\varphi A=0$,

4. $\Sigma(\alpha+\beta)\,\varepsilon\varphi\frac{A+B}{2}=0$, 5. $\Sigma\frac{\beta}{\alpha\eta\mu\Gamma}=2\,\sigma\varphi A$,

6. $\Sigma\alpha\,\sigma\upsilon\nu A=\frac{2E}{R}$, 7. $\Sigma\frac{\sigma\upsilon\nu A\,\sigma\upsilon\nu B}{\alpha\beta}=\frac{1}{4R^2}$,

8. $\Sigma(\alpha-\beta)\,\varepsilon\varphi\frac{A+B}{2}=0$, 9. $\Sigma\alpha\,\eta\mu\frac{B-\Gamma}{2}\,\sigma\tau\varepsilon\mu\frac{A}{2}=0$.

60. Σέ κάθε τρίγωνο ΑΒΓ νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

1. $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-4E\,\sigma\varphi A$, 2. $2E(\sigma\varphi B-\sigma\varphi A)=\alpha^2-\beta^2$,

3. $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=4\,E.\Sigma\,\sigma\varphi A$, 4. $1-\varepsilon\varphi\frac{A}{2}\,\varepsilon\varphi\frac{B}{2}=\frac{\gamma}{\tau}$.

61. Ἄν σέ τρίγωνο ΑΒΓ ἰσχύουν οἱ σχέσεις:

1. $\alpha=2\beta\,\eta\mu\frac{A}{2}$, 2. $\eta\mu A=2\eta\mu B\,\sigma\upsilon\nu\Gamma$,

3. $\alpha=2\beta\,\sigma\upsilon\nu\,\Gamma$, 4. $(\tau-\beta)\,\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}=\tau\,\varepsilon\varphi\frac{B}{2}$,

5. $2\upsilon_\alpha=\alpha\,\sigma\varphi\frac{A}{2}$, 6. $4E=\alpha^2\,\sigma\varphi\frac{A}{2}$,

7. $\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{2E}=\sigma\varphi\frac{A}{2}+3\varepsilon\varphi\frac{A}{2}$, 8. $\alpha\,\varepsilon\varphi\,A+B\,\varepsilon\varphi\,\beta=(\alpha+\beta)\,\varepsilon\varphi\frac{A+B}{2}$

νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τό τρίγωνο αὐτό εἶναι ἰσοσκελές.

62. Ἄν σέ τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι:

$$\eta\mu\Gamma(\sigma\upsilon\nu A+2\sigma\upsilon\nu\Gamma)=\eta\mu B(\sigma\upsilon\nu A+2\sigma\upsilon\nu B),$$

νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τό τρίγωνο αὐτό εἶναι ἰσοσκελές ἤ ὀρθογώνιο.

63. Σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι: $(1-\sigma\varphi\Gamma)[1+\sigma\varphi(45^\circ-B)]=2$. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι αὐτό εἶναι ὀρθογώνιο.

64. Ἄν σέ τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι $A=90^\circ$ καί $4E=\alpha^2$, τό τρίγωνο αὐτό θά εἶναι ἰσοσκελές.

65. Ἄν σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι:

$$\beta^3+\gamma^3-\alpha^3=\alpha^2(\beta+\gamma-\alpha) \text{ καί } 4\,\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma=3,$$

τό τρίγωνο αὐτό εἶναι ἰσόπλευρο.

66. Ἄν σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι $A=120^\circ$, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

$$\gamma(\alpha^2-\gamma^2)=\beta(\alpha^2-\beta^2).$$

67. Ἄν οἱ πλευρές ἑνός τριγώνου ἀποτελοῦν ἀριθμητική πρόοδο, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τά ἡμίτονα τῶν γωνιῶν πού βρίσκονται ἀπέναντι ἀπό τίς πλευρές αὐτές ἀποτελοῦν ἀριθμητική πρόοδο.

68. Ἄν σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι $\alpha^2+\gamma^2=2\beta^2$, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

$$\sigma\varphi A+\sigma\varphi\Gamma=2\sigma\varphi B$$

καί ἀντιστρόφως.

69. Σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι $\alpha + \gamma = 2\beta$. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

1. $\sigma\upsilon\nu A\, \sigma\varphi \frac{A}{2} + \sigma\upsilon\nu \Gamma\, \sigma\varphi \frac{\Gamma}{2} = 2\sigma\upsilon\nu B\, \sigma\varphi \frac{B}{2}$,

2. $\alpha\, \sigma\upsilon\nu^2 \frac{\Gamma}{2} + \gamma\, \sigma\upsilon\nu^2 \frac{A}{2} = \frac{3\beta}{2}$,

3. $\sigma\varphi \frac{A}{2} + \sigma\varphi \frac{\Gamma}{2} = 2\sigma\varphi \frac{B}{2}$,

4. $\varepsilon\varphi \frac{A}{2} \varepsilon\varphi \frac{\Gamma}{2} = \frac{1}{3}$.

Ἰσχύουν τά ἀντίστροφά των;

70. Ἄν οἱ πλευρές α, β, γ τριγώνου ΑΒΓ ἀποτελοῦν ἁρμονική πρόοδο, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι καί οἱ ἀριθμοί

$$\eta\mu^2 \frac{A}{2}, \qquad \eta\mu^2 \frac{B}{2}, \qquad \eta\mu^2 \frac{\Gamma}{2}$$

ἀποτελοῦν ἁρμονική πρόοδο.

71. Σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι $\alpha + \gamma = 2\beta$ καί $A - \Gamma = 90°$. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

$$\frac{\alpha}{\sqrt{7}+1} = \frac{\beta}{7} = \frac{\gamma}{\sqrt{7}-1}.$$

72. Ἄν σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι $\Gamma = 60°$, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

$$\frac{1}{\alpha+\gamma} + \frac{1}{\beta+\gamma} = \frac{3}{\alpha+\beta+\gamma}$$

καί ἀντιστρόφως.

73. Ἄν $\sigma\upsilon\nu A = \sigma\upsilon\nu\alpha\, \eta\mu\beta$, $\sigma\upsilon\nu B = \sigma\upsilon\nu\beta\, \eta\mu\gamma$, $\sigma\upsilon\nu\Gamma = \sigma\upsilon\nu\gamma\, \eta\mu\alpha$ καί $A + B + \Gamma = \pi$, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

$$\varepsilon\varphi\alpha\, \varepsilon\varphi\beta\, \varepsilon\varphi\gamma = 1.$$

74. Ἄν $\sigma\upsilon\nu A = \varepsilon\varphi\beta\, \varepsilon\varphi\gamma$, $\sigma\upsilon\nu B = \varepsilon\varphi\gamma\, \varepsilon\varphi\alpha$, $\sigma\upsilon\nu\Gamma = \varepsilon\varphi\alpha\, \varepsilon\varphi\beta$ καί $A + B + \Gamma = \pi$, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

$$\eta\mu^2\alpha + \eta\mu^2\beta + \eta\mu^2\gamma = 1.$$

75. Σέ κάθε τρίγωνο ΑΒΓ νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

$$\sigma\varphi A + \sigma\varphi B + \sigma\varphi\Gamma \geq \sqrt{3}.$$

76. Ἄν σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ ἀληθεύει ἡ ἰσότητα:

$$\eta\mu\, 4A + \eta\mu\, 4B + \eta\mu\, 4\Gamma = 0,$$

νά ἀποδειχθεῖ ὅτι αὐτό εἶναι ὀρθογώνιο.

77. Ἀφοῦ ἀποδειχθεῖ ἡ ταυτότητα:

$$\varepsilon\varphi x = \sigma\varphi x - 2\sigma\varphi\, 2x,$$

νά ἀποδειχθεῖ ἀκολούθως ὅτι:

$$S_\nu = \frac{1}{2} \varepsilon\varphi \frac{x}{2} + \frac{1}{2^2} \varepsilon\varphi \frac{x}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^\nu} \varepsilon\varphi \frac{x}{2^\nu} = \frac{1}{2^\nu} \sigma\varphi \frac{x}{2^\nu} - \sigma\varphi\, x,$$

ὅπου $0 < x < \frac{\pi}{2}$

78. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ὑπάρχουν δύο ἀριθμοί x καί y, τέτοιοι ὥστε:

$$\sigma\tau\varepsilon\mu\, \alpha = x\, \varepsilon\varphi \frac{\alpha}{2} + y\, \sigma\varphi\, \alpha,$$

ὁποιοδήποτε καί ἄν εἶναι τό α. Ἀκολούθως δεῖξτε ὅτι:

$$S_\nu = \sigma\tau\varepsilon\mu\, \alpha + \sigma\tau\varepsilon\mu\, 2\alpha + \sigma\tau\varepsilon\mu\, 4\alpha + \ldots + \sigma\tau\varepsilon\mu\, 2^\nu\alpha = \sigma\varphi \frac{\alpha}{2} - \varepsilon\varphi\, 2^\nu \alpha.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ V

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ

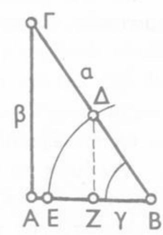
● **40. Ἀνάγκη τῶν τριγωνομετρικῶν πινάκων.** Οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τῶν γωνιῶν χρησιμοποιοῦνται γιά τήν ἐκπλήρωση τοῦ σκοποῦ τῆς Τριγωνομετρίας. Γιά νά γίνει αὐτό ἀντιληπτό ἀπό τώρα, λύνουμε τό ἀκόλουθο πρόβλημα.

● **41.** *ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ἔχει $\alpha = 20\,m$ καί $\beta = 12\,m$. Νά ὑπολογισθεῖ ἡ γωνία του Β.*

Λύση. Μέ κέντρο τό Β καί ἀκτίνα ΒΔ = 1 γράφουμε κύκλο, πού κόβει τήν ὑποτείνουσα ΒΓ στό Δ καί τήν κάθετη πλευρά ΑΒ στό Ε. Φέρνουμε τή ΔΖ κάθετη στήν ΑΒ. Ἀπό τά ὅμοια τρίγωνα ΒΖΔ καί ΒΑΓ ἔχουμε:

$$\frac{\beta}{Z\Delta} = \frac{\alpha}{B\Delta} = \frac{\alpha}{1} \quad \text{ἤ} \quad \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\alpha}{1} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu B = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{12}{20} = \frac{6}{10} = 0{,}6 \qquad (1)$$



Σχ. 6

Ἀπό τή σχέση αὐτή φαίνεται ὅτι γνωρίζουμε τό ημΒ, ὄχι ὅμως καί τή γωνία Β.

Γιά τόν ὑπολογισμό τῆς γωνίας Β ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

Παίρνουμε τούς λογαρίθμους καί τῶν δύο μελῶν τῆς ἰσότητας (1) καί ἔχουμε:

$$\lambda o\gamma\, \eta\mu B = \lambda o\gamma\, 0{,}6 = \bar{1}{,}77815.$$

Ἄν, λοιπόν, ἔχουμε πίνακα, πού νά περιέχει τούς λογαρίθμους τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῶν γωνιῶν, μποροῦμε νά βροῦμε τή γωνία Β, τῆς ὁποίας τό ἡμίτονο ἔχει λογάριθμο τόν ἀριθμό $\bar{1}{,}77815$. Τέτοιοι πίνακες ὑπάρχουν διαφόρων εἰδῶν.

Ἕνας περιέχει τούς λογαρίθμους τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν, ἡμιτόνου, συνημιτόνου, ἐφαπτομένης καί συνεφαπτομένης μέ 7 δεκαδικά ψηφία, ἄλλος μέ 11 δεκαδικά ψηφία, ἄλλος μέ 20 δεκαδικά ψηφία καί ἄλλος μέ 5 δεκαδικά ψηφία.

Γιά τίς συνηθισμένες ὅμως ἐφαρμογές ἀρκεῖ ὁ πενταψήφιος πίνακας, τοῦ ὁποίου ὑπάρχουν καί ἑλληνικές ἐκδόσεις κατά τό σύστημα Dupuis.

Ἕναν τέτοιο πίνακα θά περιγράψουμε μέ συντομία καί θά ἐκθέσουμε καί τόν τρόπο τῆς χρήσεώς του.

● 42. Περιγραφή τῶν λογαριθμικῶν πινάκων Dupuis.

Οἱ πίνακες τοῦ Dupuis περιέχουν τούς λογαρίθμους τοῦ ἡμιτόνου, τῆς ἐφαπτομένης, τῆς συνεφαπτομένης καί τοῦ συνημιτόνου τῶν τόξων ἀπό 0° μέχρις 90°, τά ὁποῖα αὐξάνουν κατά 1′.

Ὁ ἀριθμός τῶν μοιρῶν ἀναγράφεται ἔξω ἀπό τό πλαίσιο τοῦ πίνακα. Γιά τά τόξα πού ἔχουν λιγότερες ἀπό 45°, ὁ ἀριθμός τῶν μοιρῶν γράφεται στό ἐπάνω μέρος τῆς σελίδας. Γιά τά ἄλλα τόξα ὁ ἀριθμός τῶν μοιρῶν γράφεται στό κάτω μέρος τῆς σελίδας.

Οἱ ἀριθμοί τῶν πρώτων λεπτῶν στά τόξα τά μικρότερα ἀπό 45° ἀναγράφονται στήν πρώτη στήλη ἀριστερά, ἡ ὁποία ἔχει ὡς ἐπικεφαλίδα μιά ὀξεία (′), ἐνῶ στά ἄλλα τόξα γράφεται στήν πρώτη στήλη ἀπό τά δεξιά.

Στήν ἀριστερή στήλη τά πρῶτα λεπτά αὐξάνονται ἀπό πάνω πρός τά κάτω, ἐνῶ στή δεξιά αὐξάνονται ἀπό κάτω πρός τά πάνω.

Μέ τήν παραπάνω διάταξη οἱ ἀριθμοί τῶν πρώτων λεπτῶν δύο συμπληρωματικῶν τόξων βρίσκονται στήν ἴδια ὁριζόντια γραμμή. Οἱ λογάριθμοι τοῦ καθενός ἀπό τούς τριγωνομετρικούς ἀριθμούς ἑνός τόξου, πού εἶναι μικρότερο ἀπό 45°, καί δέν περιέχει δεύτερα λεπτά, βρίσκεται στή διασταύρωση τῆς ἀντίστοιχης ὁριζόντιας γραμμῆς τῶν πρώτων λεπτῶν καί τῆς στήλης, ἡ ὁποία ἔχει ὡς ἐπικεφαλίδα τόν τριγωνομετρικό ἀριθμό.

Ἄν ὅμως τό τόξο περιέχεται μεταξύ 45° καί 90° καί δέν ἔχει δεύτερα λεπτά, ὁ λογάριθμος καθενός τριγωνομετρικοῦ ἀριθμοῦ βρίσκεται στή διασταύρωση τῆς ἀντίστοιχης γραμμῆς τῶν πρώτων λεπτῶν καί τῆς στήλης, ἡ ὁποία στό **κάτω** μέρος της ἔχει τήν ὀνομασία τοῦ τριγωνομετρικοῦ ἀριθμοῦ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

λογ ημ $(18° 25') = \overline{1},49958$ λογ ημ $(39° 56') = \overline{1},80746$	λογ ημ $(67° 16') = \overline{1},96488$ λογ ημ $(78° 33') = \overline{1},99127$
λογ συν $(24° 12') = \overline{1},96005$ λογ συν $(43° 52') = \overline{1},85791$	λογ συν $(62° 10') = \overline{1},66922$ λογ συν $(56° 53') = \overline{1},73747$
λογ εφ $(30° 14') = \overline{1},76551$ λογ εφ $(39° 27') = \overline{1},91533$	λογ εφ $(61° 58') = 0,27372$ λογ εφ $(48° 19') = 0,05039$
λογ σφ $(29° 39') = 0,24471$ λογ σφ $(44° 51') = 0,00227$	λογ σφ $(52° 11') = \overline{1},88994$ λογ σφ $(77° 38') = \overline{1},34095$

Ὅταν οἱ λογάριθμοι ἔχουν κοινά τά δύο πρῶτα ψηφία τους, αὐτά γράφονται μόνο στόν πρῶτο καί στόν τελευταῖο λογάριθμο. Γιά τούς ἐνδιάμεσους λογαρίθμους τά δύο αὐτά ψηφία δέ γράφονται, ἀλλά ἐννοοῦνται.

Ἂν οἱ λογάριθμοι αὐτοί βρίσκονται σέ περισσότερες σελίδες, τά δύο ὅμοια ψηφία ἀναγράφονται καί στήν ἀρχή καί στό τέλος αὐτῶν τῶν σελίδων.

Ἂν στό μεταξύ μεταβληθεῖ τό ἕνα ἀπό τά δύο πρῶτα ψηφία, ὁ λογάριθμος ἀναγράφεται ὁλόκληρος, ὅπως καί ὁ προηγούμενός του.

Μετά ἀπό τίς στῆλες τῶν λογαρίθμων τῶν ἡμιτόνων καί τῶν συνημιτόνων, ὑπάρχουν στῆλες μέ ἐπικεφαλίδα τό γράμμα Δ (διαφορά). Στά ἀντίστοιχα τετραγωνίδια ἀναγράφονται σέ μονάδες πέμπτης δεκαδικῆς τάξεως (μ.ε'.δ.τ) οἱ διαφορές τῶν λογαρίθμων τῶν ἡμιτόνων καί συνημιτόνων δύο διαδοχικῶν τόξων.

Ἐπίσης ὅμοια στήλη ὑπάρχει καί ἀνάμεσα στίς στῆλες Εφ καί Σφ πού περιέχουν τίς κοινές διαφορές τῶν λογαρίθμων τῶν ἐφαπτομένων καί συνεφαπτομένων δύο διαδοχικῶν τόξων.

Ἀπό τίς ἰσότητες:

$$\text{εφα} = \frac{1}{\text{σφα}} \quad \text{καί} \quad \text{εφβ} = \frac{1}{\text{σφβ}}$$

ἔχουμε:

$$\text{λογ εφ } \alpha = -\text{ λογ σφ } \alpha \quad \text{καί} \quad \text{λογ εφ } \beta = -\text{ λογ σφ } \beta$$

καί ἑπομένως:

$$\text{λογ εφ } \alpha - \text{λογ εφ } \beta = \text{λογ σφ } \beta - \text{λογ σφ } \alpha$$

Στά δεξιά τῶν συνημιτόνων δέν ὑπάρχει στήλη διαφορῶν γιά τά τόξα πού εἶναι μικρότερα ἀπό 18° ἤ μεγαλύτερα ἀπό 71°, γιατί οἱ διαφορές αὐτές εἶναι μικρότερες ἀπό τό 5 καί βρίσκονται εὔκολα ἀπό μνήμης.

Στίς σελίδες τῶν τόξων ἀπό 6° ἕως 83° καί ἔξω ἀπό τό πλαίσιο, ὑπάρχουν μερικά πινακίδια. Καθένα ἀπό τά πινακίδια αὐτά ἔχει ὡς ἐπικεφαλίδα μιά ἀπό τίς διαφορές πού εἴπαμε πιό πάνω καί διαιρεῖται σέ δύο στῆλες. Ἡ πρώτη στήλη περιέχει τούς μονοψήφιους ἀριθμούς (1 - 9), οἱ ὁποῖοι φανερώνουν δεύτερα λεπτά, καί ἡ ἄλλη τίς ἀντίστοιχες μεταβολές τῶν λογαρίθμων τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν. Τό πινακίδιο π.χ. μέ ἐπικεφαλίδα 23 δείχνει ὅτι, ἄν ἡ διαφορά τῶν λογαρίθμων τριγωνομετρικοῦ ἀριθμοῦ δύο διαδοχικῶν τόξων εἶναι 23 μ.ε'.δ.τ., σέ αὔξηση τοῦ τόξου κατά

$$1'' \text{ ἤ } 2'' \text{ ἤ } 3'' \text{ ἤ } \ldots \text{ ἤ } 9''$$

ἀντιστοιχεῖ αὔξηση ἤ ἐλάττωση τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἴδιου τριγωνομετρικοῦ ἀριθμοῦ κατά:

$$0{,}38 \text{ ἤ } 0{,}77 \text{ ἤ } 1{,}15 \text{ ἤ } \ldots \text{ ἤ } 3{,}45 \text{ μ.ε'.δ.τ.}$$

31	
1″	0,52
2	1,03
3	1,55
4	2,07
5	2,58
6	3,10
7	3,62
8	4,13
9	4,65
30	
1	0,5
2	1,0
3	1,5
4	2,0
5	2,5
6	3,0
7	3,5
8	4,0
9	4,5
24	
1	0,4
2	0,8
3	1,2
4	1,6
5	2,0
6	2,4
7	2,8
8	3,2
9	3,6
23	
1	0,38
2	0,77
3	1,15
4	1,53
5	1,92
6	2,30
7	2,68
8	3,07
9	3,45

′	Ημ	Δ	Εφ	Δ	Σφ	Συν	Δ	′
0	$\overline{1}$,67161	24	$\overline{1}$,72567	31	0,27433	$\overline{1}$,94593	6	60
1	7185	23	2598	30	7402	4587	7	59
2	7208	24	2628	31	7372	4580	7	58
3	7232	24	2659	30	7341	4573	6	57
4	7256		2689		7311	4567		56
—	—	24	—	31	—	—	7	—
5	7280	23	2720	30	7280	4560	7	55
6	7303	24	2750	30	7250	4553	7	54
7	7327	23	2780	31	7220	4546	6	53
8	7350	24	2811	30	7189	4540	7	52
9	7374		2841		7159	4533		51
—	—	24	—	31	—	—	7	—
10	7398	23	2872	30	7128	4526	7	50
11	7421	24	2902	30	7098	4519	6	49
12	7445	23	2932	31	7068	4513	7	48
13	7468	24	2963	30	7037	4506	7	47
14	7492		2993		7007	4499		46
—	—	23	—	30	—	—	7	—
15	7515	24	3023	31	6977	4492	7	45
16	7539	23	3054	30	6946	4485	6	44
17	7562	24	3084	30	6916	4479	7	43
18	7586	23	3114	30	6886	4472	7	42
19	7609		3144		6856	4465		41
—	—	24	—	31	—	—	7	—
20	7633	23	3175	30	6825	4458	7	40
21	7656	24	3205	30	6795	4451	6	39
22	7680	23	3235	30	6765	4445	7	38
23	7703	23	3265	30	6735	4438	7	37
24	7726		3295		6705	4431		36
—	—	24	—	31	—	—	7	—
25	7750	23	3326	30	6674	4424	7	35
26	7773	23	3356	30	6644	4417	7	34
27	7796	24	3386	30	6614	4410	6	33
28	7820	23	3416	30	6584	4404	7	32
29	7843		3446		6554	4397		31
—	—	23	—	30	—	—	7	—
30	$\overline{1}$,67866		$\overline{1}$,73476		0,26524	$\overline{1}$,94390		30
′	Συν		Σφ		Εφ	Ημ		′

′	Ημ	Δ	Εφ	Δ	Σφ	Συν	Δ	′
30	$\bar{1}$,67866	24	$\bar{1}$,73476	31	0,26524	$\bar{1}$,94390	7	30
31	7890	23	3507	30	6493	4383	7	29
32	7913	23	3537	30	6463	4376	7	28
33	7936	23	3567	30	6433	4369	7	27
34	7959		3597		6403	4362		26
—	——	23	——	30	——	——	7	—
35	7982	24	3627	30	6373	4355	6	25
36	8006	23	3657	30	6343	4349	7	24
37	8029	23	3687	30	6313	4342	7	23
38	8052	23	3717	30	6283	4335	7	22
39	8075		3747		6253	4328		21
—	——	23	——	30	——	——	7	—
40	8098	23	3777	30	6223	4321	7	20
41	8121	23	3807	30	6193	4314	7	19
42	8144	23	3837	30	6163	4307	7	18
43	8167	23	3867	30	6133	4300	7	17
44	8190		3897		6103	4293		16
—	——	23	——	30	——	——	7	—
45	8213	24	3927	30	6073	4286	7	15
46	8237	23	3957	30	6043	4279	6	14
47	8260	23	3987	30	6013	4273	7	13
48	8283	22	4017	30	5983	4266	7	12
49	8305		4047		5953	4259		11
—	——	23	——	30	——	——	7	—
50	8328	23	4077	30	5923	4252	7	10
51	8351	23	4107	30	5893	4245	7	9
52	8374	23	4137	29	5863	4238	7	8
53	8397	23	4166	30	5834	4231	7	7
54	8420		4196		5804	4224		6
—	——	23	——	30	——	——	7	—
55	8443	23	4226	30	5774	4217	7	5
56	8466	23	4256	30	5744	4210	7	4
57	8489	23	4286	30	5714	4203	7	3
58	8512	22	4316	29	5684	4196	7	2
59	8534		4345		5655	4189		1
—	——	23	——	30	——	——	7	—
60	$\bar{1}$,68557		$\bar{1}$,74375		0,25625	$\bar{1}$,94182		0
—	——		——		——	——		—
′	Συν		Σφ		Εφ	Ημ		′

	30		29		23		22
1″	0,5	1	0,48	1	0,38	1	0,39
2	1,0	2	0,97	2	0,77	2	0,73
3	1,5	3	1,45	3	1,15	3	1,10
4	2,0	4	1,93	4	1,53	4	1,47
5	2,5	5	2,42	5	1,92		
6	3,0	6	2,90	6	2,30	6	2,20
7	3,5	7	3,38	7	2,68	7	2,57
8	4,0	8	3,87	8	3,07	8	2,93
9	4,5	9	4,35	9	3,45	9	3,30

● **43. Χρήση τῶν λογαριθμικῶν τριγ. πινάκων.** Τούς λογαριθμικούς τριγωνομετρικούς πίνακες τούς χρησιμοποιοῦμε γιά τήν ἐπίλυση τῶν ἀκόλουθων προβλημάτων.

● **44.** *ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ι. Νά βρεθεῖ ὁ λογάριθμος ὁρισμένου τριγωνομετρικοῦ ἀριθμοῦ ἑνός δεδομένου τόξου.*

Λύση. α) Ἄν τό δεδομένο τόξο δέν ἔχει δεύτερα λεπτά, ὁ ζητούμενος λογάριθμος βρίσκεται στή σελίδα τῶν μοιρῶν τοῦ τόξου καί στή διασταύρωση τῆς ὁριζόντιας γραμμῆς τῶν πρώτων λεπτῶν καί τῆς στήλης πού ἔχει τήν ὀνομασία τοῦ τριγωνομετρικοῦ ἀριθμοῦ. Ἔτσι βρίσκουμε:

$\text{λογ ημ}\,(19^\circ\,38') = \overline{1},52634$	$\text{λογ συν}\,(65^\circ\,51') = \overline{1},61186$
$\text{λογ εφ}\,(26^\circ\,17') = \overline{1},69361$	$\text{λογ σφ}\,(56^\circ\,23') = \overline{1},82270$ κλπ.

β) Ἄν τό τόξο περιέχει καί δεύτερα λεπτά, ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς (γιατί οἱ πίνακες δέν περιέχουν δεύτερα λεπτά):

1ο. Ὁ λογ ημ (29° 15′ 18″) δέν ὑπάρχει στούς πίνακες. Γιά νά τόν βροῦμε παρατηροῦμε ὅτι:

$$29^\circ\,15' < 29^\circ\,15'\,18'' < 29^\circ\,16'$$

καί ἄρα:
$$\text{ημ}\,(29^\circ\,15') < \text{ημ}(29^\circ\,15'\,18'') < \text{ημ}\,(29^\circ\,16')$$
καί
$$\text{λογ ημ}\,(29^\circ\,15') < \text{λογ}\,(29^\circ\,15'\,18'') < \text{λογ}\,(29^\circ\,16'),$$
ἤ
$$\overline{1},68897 < \text{λογ}\,(29^\circ\,15'\,18'') < \overline{1},68920.$$

Δηλαδή ὁ ζητούμενος λογάριθμος περιέχεται μεταξύ τῶν ἀριθμῶν $\overline{1},68897$ καί $\overline{1},68920$, οἱ ὁποῖοι διαφέρουν κατά 23 μ.ε′.δ.τ.

Ἀπό τόν πίνακα βλέπουμε πώς σέ αὔξηση τοῦ τόξου κατά 1′ ἀντιστοιχεῖ ἡ ἴδια αὔξηση τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἡμιτόνου του, ἀρκεῖ τό τόξο νά μή διαφέρει πολύ ἀπό τό (29° 15′). Μποροῦμε, λοιπόν, νά θεωρήσουμε τήν αὔξηση περίπου ἀνάλογη μέ τήν αὔξηση τῶν τόξων καί νά ὑπολογίσουμε πόσο πρέπει νά αὐξηθεῖ ὁ λογ ημ (29° 15) = $\overline{1},68897$, γιά νά προκύψει ὁ ζητούμενος λογάριθμος.

Ὁ ὑπολογισμός γίνεται ὡς ἑξῆς:

Ἄν αὐξηθεῖ τό τόξο κατά 1′= 60″, θά ἔχουμε αὔξηση τοῦ λογ. κατά 23 μ.ε′.δ.τ.

» » » » 18″, » » » » » x ;

Ἄρα $x = 23 \cdot \dfrac{18}{60} = \dfrac{414}{60} = 6{,}9$ ἤ 7 μ.ε′.δ.τ. μέ ὑπεροχή.

Ἑπομένως:

$$\text{λογ ημ}\,(29^\circ\,15'\,18'') = \overline{1},68897 + 0{,}00007 = \overline{1},68904.$$

Οἱ παραπάνω πράξεις γράφονται καί ὡς ἑξῆς:

$\lambda o\gamma\, \eta\mu\, (29^\circ\, 16') = \overline{1},68920$	$60''$ 23 μ.ε΄.δ.τ.
$\lambda o\gamma\, \eta\mu\, (29^\circ\, 15') = \overline{1},68897$	$18''$ x ;
$\Delta = \quad 23$	$x = 23 \cdot \frac{18}{60} = 6,9$ ἤ 7 μ.ε΄.δ.τ

Ἄρα: $\quad \lambda o\gamma\, \eta\mu\, (29^\circ\, 15'\, 18'') = \overline{1},68897 + 0,00007 = \overline{1},68904.$

2ο. Κατά τόν ἴδιο τρόπο ἐργαζόμαστε γιά νά βροῦμε καί τό λογάριθμο τῆς ἐφαπτομένης δεδομένου τόξου. Ἔτσι, γιά τήν εὕρεση τοῦ λογ εφ $(60^\circ\, 45'\, 23'')$ γράφουμε:

$\lambda o\gamma\, \varepsilon\varphi\, (60^\circ\, 46') = 0,25209$	$60''$ 30 μ.ε΄.δ.τ.
$\lambda o\gamma\, \varepsilon\varphi\, (60^\circ\, 45') = 0,25179$	$23''$ x ;
$\Delta = \quad 30$	$x = 30 \cdot \frac{23}{60} = \frac{23}{2} = 11,5$ ἤ 12 μ.ε΄.δ.τ,

Ἄρα: $\quad \lambda o\gamma\, \varepsilon\varphi\, (60^\circ\, 45'\, 23'') = 0,25179 + 0,00012 = 0,25191.$

3ο. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι θέλουμε νά βροῦμε τό λογ συν $(60^\circ\, 48'\, 28'')$.

Γνωρίζουμε ὅτι, ὅταν αὐξάνεται τό τόξο ἀπό 0 ἕως 90°, τό συνημίτονο καί ἡ συνεφαπτομένη ἐλαττώνονται. Ἔτσι σέ αὔξηση τοῦ τόξου ἀντιστοιχεῖ ἐλάττωση τῶν λογαρίθμων τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν.

Στήν περίπτωσή μας:

Ἐπειδή $\quad 60^\circ\, 48' < 60^\circ\, 48'\, 28'' < 60^\circ\, 49'$

θά εἶναι $\quad \sigma\upsilon\nu(60^\circ\, 48') > \sigma\upsilon\nu\, (60^\circ\, 48'\, 28'') > \sigma\upsilon\nu\, (60^\circ\, 49')$

ἄρα καί $\quad \lambda o\gamma\, \sigma\upsilon\nu\, (60^\circ\, 48') > \lambda o\gamma\, \sigma\upsilon\nu\, (60^\circ\, 48'\, 28'') > \lambda o\gamma\, \sigma\upsilon\nu\, (60^\circ\, 49')$

ἤ $\quad \overline{1},68829 > \lambda o\gamma\, \sigma\upsilon\nu\, (60^\circ\, 48'\, 28'') > \overline{1},68807.$

Παρατηροῦμε, λοιπόν, ὅτι ὁ ζητούμενος λογάριθμος περιέχεται ἀνάμεσα στούς ἀριθμούς $\overline{1},68829$ καί $\overline{1},68807$, οἱ ὁποῖοι διαφέρουν κατά 22 μ.ε΄.δ.τ.

Γράφουμε τήν πράξη ὡς ἑξῆς:

$\lambda o\gamma\, \sigma\upsilon\nu\, (60^\circ\, 48') = \overline{1},68829$	$60''$ 22 μ.ε΄.δ.τ.
$\lambda o\gamma\, \sigma\upsilon\nu\, (60^\circ\, 49') = \overline{1},68807$	$28''$ x ;
$\Delta = \quad 22$	$x = 22 \cdot \frac{28}{60} = 10,26$ ἤ 10 μ.ε΄.δ.τ.

Ἄρα: $\quad \lambda o\gamma\, \sigma\upsilon\nu\, (60^\circ\, 48'\, 28'') = \overline{1},68829 - 0,00010 = \overline{1},68819.$

4ο. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι θέλουμε νά βροῦμε τό λογ σφ $(36^\circ\, 54'\, 38'')$

Γράφουμε τήν πράξη ὡς ἑξῆς:

$\lambda o\gamma\, \sigma\varphi\, (36^\circ\, 54') = 0,12446$	$60''$ 26 μ.ε΄.δ.τ.
$\lambda o\gamma\, \sigma\varphi\, (36^\circ\, 55') = 0,12420$	$38''$ x ;
$\Delta = \quad 26$	$x = 26 \cdot \frac{38}{60} = 16,46$ ἤ 16 μ.ε΄.δ.τ.

Ἄρα: $\quad \lambda o\gamma\, \sigma\varphi\, (36^\circ\, 54'\, 38'') = 0,12446 - 0,00016 = 0,12430.$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

79. Νά βρεθοῦν οἱ λογάριθμοι τῶν ἀκόλουθων τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν:

1. ημ (15° 27′),
2. συν (36° 12′),
3. συν (58° 10′),
4. ημ (65° 25′),
5. εφ (20° 16′),
6. εφ (53° 6′),
7. σφ (14° 36′),
8. σφ (70° 14′),
9. ημ (25° 10′ 18″),
10. ημ (55° 26′ 39″),
11. συν (33° 17′ 25″),
12. συν (66° 14′ 52″),
13. εφ (18° 56′ 10″),
14. εφ (48° 10′ 50″),
15. σφ (29° 33′ 48″),
16. σφ (24° 19′ 10″),
17. σφ (70° 34′ 15″),
18. ημ (123° 56′ 10″).

80. Ἐπίσης τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν:

1. $\eta\mu \frac{3\pi}{7}$,
2. $\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{17}$,
3. $\varepsilon\varphi \frac{3\pi}{11}$,
4. $\sigma\varphi \frac{5\pi}{17}$.

● **45.** *ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΙ. Νά βρεθεῖ τό ἐλάχιστο θετικό τόξο, ἄν δοθεῖ ὁ λογάριθμος ἑνός τριγωνομετρικοῦ ἀριθμοῦ του.*

1ο. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι θέλουμε νά βροῦμε τό ἐλάχιστο θετικό τόξο x, γιά τό ὁποῖο εἶναι:

$$\lambda o\gamma\ \eta\mu\ x = \overline{1},73940.$$

Λύση. Βρίσκουμε πρῶτα στόν πίνακα ὅτι:

$$\lambda o\gamma\ \eta\mu\ 45° = \overline{1},84949.$$

Καί ἐπειδή: $\overline{1},73940 < \overline{1},84949$, θά ἔχουμε:

$$\eta\mu\ x < \eta\mu 45° \text{ καί ἄρα } x < 45°.$$

Πρέπει, λοιπόν, νά ἀναζητήσουμε τόν ἀριθμό $\overline{1},73940$ στίς στῆλες, τῶν ἡμιτόνων. Τόν βρίσκουμε στή σελίδα τῶν 33° καί στήν ὁριζόντια γραμμή τῶν 17′. Εἶναι, λοιπόν:

$$\lambda o\gamma\ \eta\mu\ x = \overline{1},73940° = \lambda o\gamma\ \eta\mu\ (33°\ 17')$$

καί ἄρα: $x = 33'\ 17'$.

Ἄν ὅμως εἶναι: $\lambda o\gamma\ \eta\mu\ x = \overline{1},68129$, παρατηροῦμε ὅτι:

$$\overline{1},68121 < \overline{1},68129 < \overline{1},68144$$

καί ἑπομένως:

$$28°\ 41' < x < 28°\ 42'$$

Ἐπίσης παρατηροῦμε ὅτι:

$$\Delta = \overline{1},68144 - \overline{1},68121 = 23 \text{ μ.ε΄.δ.τ.},$$

$$\delta = \overline{1},68129 - \overline{1},68121 = 8 \text{ μ.ε΄.δ.τ.}$$

καί καταρτίζουμε τή διάταξη ὡς ἑξῆς:

Αὔξηση λογαρίθμου κατά 23 φέρνει αὔξηση τοῦ τόξου κατά 60″
» » » 8 » » » » » y;

Ἑπομένως:

$$y = 60'' \cdot \frac{8}{23} = \frac{480''}{23} = 20'', 88.$$

Θά εἶναι λοιπόν: $x = 28^\circ\, 41'\, 20'',88.$

Συντομότερα ἡ πράξη γράφεται ὡς ἑξῆς:

$$
\begin{array}{lccc||cc}
 & \bar{1},68129 & \bar{1},68144 & 28^\circ\, 42' & 23 & 60'' \\
 & \bar{1},68121 & \bar{1},68121 & 28^\circ\, 41' & 8 & y; \\
\hline
\text{Διαφορές:} & 8 & 23 & 1' = 60'' & \multicolumn{2}{c}{y = 60'' \cdot \dfrac{8}{23} = 20'',88.}
\end{array}
$$

Ἄρα: $x = 28^\circ\, 41'\, 20'',88.$

2ο. Ἄν $\text{λογ εφ}\, x = \bar{1},85360$, νά ὑπολογισθεῖ ὁ x.

Διάταξη τῶν πράξεων:

$$
\begin{array}{lccc||cc}
 & \bar{1},85360 & \bar{1},85380 & 35^\circ\, 32' & 26 & 60'' \\
 & \bar{1},85354 & \bar{1},85354 & 35^\circ\, 41' & 6 & y; \\
\hline
\text{Διαφορές:} & 6 & 26 & 1' = 60'' & \multicolumn{2}{c}{y = 60'' \cdot \dfrac{6}{26} = 13'',84.}
\end{array}
$$

Ἄρα: $x = 35^\circ\, 31'\, 13'',84.$

3ο. Ἄν $\text{λογ συν}\, x = \bar{1},85842$, νά βρεθεῖ τό ἐλάχιστο θετικό τόξο x.

Στούς πίνακες παρατηροῦμε ὅτι:

$$\bar{1},85851 > \bar{1},85842 > \bar{1},85839$$

καί ἄρα

$$43^\circ\, 47' < x < 43^\circ\, 48'.$$

Ἑπομένως, γιά νά βροῦμε τό τόξο x κάνουμε τήν ἀκόλουθη διάταξη:

$$
\begin{array}{lccc||cc}
 & \bar{1},85842 & \bar{1},85851 & 43^\circ\, 47' & 12 & 60'' \\
 & \bar{1},85839 & \bar{1},85839 & 43^\circ\, 48' & 3 & y; \\
\hline
\text{Διαφορές:} & 3 & 12 & 1' = 60'' & \multicolumn{2}{c}{y = 60'' \cdot \dfrac{3}{12} = 15''.}
\end{array}
$$

Ἐπειδή ὅμως, ὅταν αὐξάνεται τό τόξο ἐλαττώνεται τό συνημίτονο, θά βροῦμε τό τόξο x ὡς ἑξῆς:

$$x = (43^\circ\, 48') - 15'' = (43^\circ\, 47'\, 60'') - 15'' = 43^\circ\, 47'\, 45''.$$

Κατά τόν ἴδιο τρόπο ἐργαζόμαστε καί ὅταν δοθεῖ ὁ λογάριθμος τῆς συνεφαπτομένης ἑνός τόξου x.

★**Σημείωση.** Οἱ λογάριθμοι στούς πενταψήφιους πίνακες ἔχουν γραφεῖ μέ προσέγγιση 0,00005. Ἑπομένως τά τόξα πού ὑπολογίζονται μέ αὐτούς τούς πίνακες δέν εἶναι μαθηματικά ἀκριβῆ. Χρειάζεται, λοιπόν, νά ξέρουμε σέ ποιά περίπτωση βρίσκουμε τήν ἀκριβέστερη τιμή τοῦ τόξου.

Γιά τοῦτο σκεπτόμαστε ὡς ἑξῆς: Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι τό μέτρο ἑνός ἀπό τά τόξα πού εἶναι γραμμένα στούς πίνακες εἶναι α. Τότε τό μέτρο τοῦ ἀμέσως μεγαλύτερού του εἶναι $\alpha + 1' = \alpha + 60''$.

Ἀπό τίς σχέσεις:

$$\varepsilon\varphi(\alpha + 60'') = \frac{\eta\mu(\alpha + 60'')}{\sigma\upsilon\nu(\alpha + 60'')} \quad \text{καί} \quad \varepsilon\varphi\alpha = \frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}$$

προκύπτουν οἱ σχέσεις:

$$\lambda o\gamma\ \varepsilon\varphi\ (\alpha+60'') = \lambda o\gamma\ \eta\mu\ (\alpha+60'') - \lambda o\gamma\ \sigma\upsilon\nu\ (\alpha+60'')$$

καί
$$\lambda o\gamma\ \varepsilon\varphi\ \alpha = \lambda o\gamma\ \eta\mu\ \alpha - \lambda o\gamma\ \sigma\upsilon\nu\ \alpha.$$

Γι' αὐτό καί:

$$\lambda o\gamma\ \varepsilon\varphi\ (\alpha + 60'') - \lambda o\gamma\ \varepsilon\varphi\ \alpha = [\lambda o\gamma\ \eta\mu\ (\alpha + 60'') - \lambda o\gamma\ \eta\mu\ \alpha] + \\ + [\lambda o\gamma\ \sigma\upsilon\nu\ \alpha - \lambda o\gamma\ \sigma\upsilon\nu\ (\alpha + 60'')] \qquad (1)$$

Ἄν παραστήσουμε:

$$\left.\begin{array}{r} \lambda o\gamma\ \varepsilon\varphi\ (\alpha + 60'') - \lambda o\gamma\ \varepsilon\varphi\ \alpha = \delta \\ \lambda o\gamma\ \eta\mu\ (\alpha + 60'') - \lambda o\gamma\ \eta\mu\ \alpha = \delta_1 \\ \lambda o\gamma\ \sigma\upsilon\nu\ \alpha - \lambda o\gamma\ \sigma\upsilon\nu\ (\alpha + 60'') = \delta_2 \end{array}\right\}$$

ἡ (1) γίνεται: $\delta = \delta_1 + \delta_2$

καί ἑπομένως $\delta > \delta_1$ (2) καί $\delta > \delta_2$ (3)

Εἶναι φανερό ὅτι οἱ ἀριθμοί δ, δ_1 καί δ_2, ἀφοῦ ἀναφέρονται σέ πενταψήφιους λογαρίθμους, παριστάνουν ἑκατοντάκις χιλιοστά (ἑ.χ.).

Ἔτσι, σύμφωνα μέ τά προηγούμενα, ἄν πάρουμε ἀντί γιά τό λογ εφ (α 60'') τό λογ εφ α, κάνουμε λάθος ἴσο μέ:

$$\lambda o\gamma\ \varepsilon\varphi\ (\alpha + 60'') - \lambda o\gamma\ \varepsilon\varphi\ \alpha = \delta \quad \text{ἑ.χ.}$$

Ἀλλά τότε ἀντί γιά τό τόξο $\alpha + 60''$, θά πάρουμε τό α. Ἔτσι τό ἀντίστοιχο λάθος στό τόξο θά εἶναι ἴσο μέ 60''.

Δηλαδή, λάθος δ ἑ.χ. πού συμβαίνει στό λογάριθμο τῆς ἐφαπτομένης, προκαλεῖ στό τόξο λάθος 60''.

Ἀπό αὐτό συμπεραίνουμε ὅτι λάθος k ἑ.χ. στό λογάριθμο τῆς ἐφαπτομένης, θά προκαλέσει στό τόξο λάθος $60'' \cdot \frac{k}{\delta}$. Ὅμοια σκεπτόμενοι βρίσκουμε ὅτι λάθος k ἑ.χ. στό λογάριθμο τοῦ ἡμιτόνου ἤ τοῦ συνημιτόνου ἑνός τόξου, προκαλεῖ στό τόξο ἀντίστοιχο λάθος

$$60'' \cdot \frac{k}{\delta_1} \quad \text{ἤ} \quad 60'' \cdot \frac{k}{\delta_2}$$

Ἔχοντας ὅμως ὑπόψη μας καί τίς (2), (3) συνάγουμε ὅτι:

$$60'' \cdot \frac{k}{\delta_1} > 60'' \cdot \frac{k}{\delta} \quad \text{καί} \quad 60'' \cdot \frac{k}{\delta_2} > 60'' \cdot \frac{k}{\delta}$$

Ἀπό αὐτό προκύπτει ὅτι κάποιο τόξο προσδιορίζεται ἀκριβέστερα ἀπό τό λογάριθμο τῆς ἐφαπτομένης παρά ἀπό τό λογάριθμο τοῦ ἡμιτόνου του ἤ τοῦ συνημιτόνου του.

81. Νά ὑπολογισθοῦν οἱ μεταξύ 0^0 καί 90° τιμές τοῦ τόξου x, οἱ ὁποῖες ἱκανοποιοῦν τίς ἐξισώσεις:

1. $\lambda o\gamma\, \eta\mu\, x = \overline{1},84439$,
2. $\lambda o\gamma\sigma\upsilon\nu\, x = \overline{1},65190$,
3. $\lambda o\gamma\, \varepsilon\varphi\, x = \overline{1},26035$,
4. $\lambda o\gamma\, \sigma\varphi\, x = \overline{1},59183$,
5. $\lambda o\gamma\, \sigma\varphi\, x = 0,21251$,
6. $\lambda o\gamma\, \varepsilon\varphi\, x = \overline{1},18954$,
7. $\lambda o\gamma\, \tau\varepsilon\mu\, x = 0,02830$.

● **46.** *ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΙΙ. Νά βρεθεῖ τό ἐλάχιστο θετικό τόξο x ἀπό ἐκεῖνα πού ἔχουν δεδομένο τριγωνομετρικό ἀριθμό.*

Λύση. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι θέλουμε νά βροῦμε τό ἐλάχιστο θετικό τόξο x, πού ἱκανοποιεῖ μιά ἀπό τίς ἐξισώσεις:

$$\eta\mu\, x = \alpha, \quad \sigma\upsilon\nu\, x = \beta, \quad \varepsilon\varphi\, x = \gamma$$

ὅπου $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$. Θά εἶναι:

$$\lambda o\gamma\, \eta\mu\, x = \lambda o\gamma\, \alpha, \quad \lambda o\gamma\, \sigma\upsilon\nu\, x = \lambda o\gamma\, \beta, \quad \lambda o\gamma\, \varepsilon\varphi\, x = \lambda o\gamma\, \gamma.$$

Ἀπό τήν Ἄλγεβρα γνωρίζουμε ὅτι, ἄν δύο θετικοί ἀριθμοί εἶναι ἴσοι, τότε καί οἱ λογάριθμοί τους θά εἶναι ἴσοι.

Ἄν ὅμως ἕνας ἀπό τούς α, β, γ εἶναι ἀρνητικός, τότε αὐτός δέν ἔχει λογάριθμο. Στήν παρίπτωση αὐτή ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

α') Ἄν $\alpha < 0$, τότε ἀπό τήν $\eta\mu\, x = \alpha$, παίρνουμε:

$$\eta\mu(x - 180^\circ) = -\alpha > 0.$$

Ἀπό αὐτή τώρα ὁρίζεται τό τόξο $x - 180^\circ$, ἄρα καί τό x.

Παράδειγμα 1ο. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι: $\eta\mu x = -\dfrac{3}{5}$.

Λύση. Τό ἐλάχιστο θετικό τόξο πού λήγει στό γ' τεταρτημόριο ὑπερβαίνει τό θετικό ἡμικύκλιο κατά κάποιο τόξο y, δηλαδή θά εἶναι:

$$x = 180^\circ + y. \text{ Ἄρα: } \eta\mu\, y = -\eta\mu\, x = \frac{3}{5} \Rightarrow$$

$$\lambda o\gamma\, \eta\mu\, y = \lambda o\gamma\, \frac{3}{5} = \lambda o\gamma 3 - \lambda o\gamma 5 = 0,47712 - 0,69897 = \overline{1},77815,$$

ἀπ' ὅπου κατά τά γνωστά:

$$y = 36^\circ\, 52'\, 10'',58 \text{ καί ἄρα } x = 180^\circ + y = 216^\circ\, 52'\, 10'',58.$$

β') Ἄν $\gamma < 0$, τότε ἀπό τήν

$$\varepsilon\varphi x = \gamma < 0 \Leftrightarrow -\varepsilon\varphi x = -\gamma > 0 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi(180^\circ - x) = -\gamma > 0.$$

Παράδειγμα 2ο. Ἄς δεχθοῦμε ὅτι $\varepsilon\varphi\, x = -3$.

Λύση. Ἔχουμε διαδοχικά:

$$\varepsilon\varphi x = -3 \Leftrightarrow -\varepsilon\varphi x = 3 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi(180^\circ - x) = 3 \Rightarrow$$

$$\lambda o\gamma\ \varepsilon\varphi\ (180^\circ - x) = \lambda o\gamma 3 = 0{,}47712$$

καί κατά τά γνωστά:

$$180^\circ - x = 71^\circ\, 31'\, 54'' \Leftrightarrow x = 108^\circ\, 26'\, 6''.$$

γ) Ἄν $\beta < 0$, τότε ἀπό τή:

$$\sigma\upsilon\nu\ x = \beta < 0 \Leftrightarrow -\sigma\upsilon\nu\ x = -\beta > 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(180^\circ - x) = -\beta > 0.$$

Παράδειγμα 3ο. Ἄς δεχθοῦμε ὅτι: *συν x = −0,6.*

Λύση. Ἔχουμε διαδοχικά:

$$-\sigma\upsilon\nu\ x = 0{,}6 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(180^\circ - x) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow$$

$$\lambda o\gamma\ \sigma\upsilon\nu(180^\circ - x) = \lambda o\gamma\ 3 - \lambda o\gamma\ 5 = 0{,}47712 - 0{,}69897 = \overline{1}{,}77815,$$

καί κατά τά γνωστά βρίσκουμε ἀπό ἐδῶ ὅτι:

$$180^\circ - x = 53^\circ\, 7'\, 49'',42 \Leftrightarrow x = 126^\circ\, 52'\, 10'',58.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

82. Νά ὑπολογισθοῦν οἱ μεταξύ 0° καί 90° ρίζες τῶν παρακάτω ἐξισώσεων:

1. $\eta\mu\, x = -\frac{3}{5}$	4. $\sigma\varphi\, x = \sigma\upsilon\nu\, 42^\circ$,	7. $\sigma\upsilon\nu\, \frac{x}{2} = \varepsilon\varphi\, 150^\circ$,
2. $\sigma\upsilon\nu\, x = -0{,}7$,	5. $\tau\varepsilon\mu\, x = -1{,}8$,	8. $\eta\mu\, 2x = 0{,}58$,
3. $\varepsilon\varphi\, x = -3$,	6. $\sigma\tau\varepsilon\mu\, x = -\frac{4}{3}$	9. $\varepsilon\varphi\left(45^\circ + \frac{x}{2}\right) = -\frac{17}{9}$

✶ ● 47. Χρήση τῶν λογαριθμικῶν τριγωνομετρικῶν πινάκων γιά τόξα μικρότερα ἀπό 4° καί μεγαλύτερα ἀπό 85°.

Παράδειγμα 1ο. *Νά βρεθεῖ ὁ λογ ημ (12′ 40″).*

Λύση. Στούς πίνακες βρίσκουμε ὅτι:

$$\lambda o\gamma\ \eta\mu\ 12' = \overline{3}{,}54291.$$

Ἐξετάζοντες τίς διαφορές στήν οἰκεία στήλη, βλέπουμε ὅτι σέ κάθε αὔξηση ἤ ἐλάττωση τοῦ τόξου κατά 1′ δέν ἔχουμε πάντοτε καί τήν ἴδια αὔξηση ἤ τήν ἴδια μείωση τοῦ ἀντίστοιχου λογαρίθμου· οἱ διαφορές εἶναι δυσανάλογες.

Δέν ὑπάρχει λοιπόν οὔτε κατά προσέγγιση ἀναλογία ἀνάμεσα στήν αὔξηση τῶν τόξων καί στήν αὔξηση τοῦ λογαρίθμου. Αὐτό συμβαίνει γιά τούς λογαρίθμους τοῦ ἡμιτόνου, τῆς ἐφαπτομένης καί τῆς συνεφαπτομένης τῶν τόξων ἐκείνων πού εἶναι μικρότερα ἀπό 4° καί γιά τούς λογαρίθμους τοῦ συνημιτόνου, τῆς ἐφαπτομένης καί τῆς συνεφαπτομένης τῶν τόξων ἐκείνων πού εἶναι μεγαλύτερα ἀπό 85°. Γι' αὐτό τό λόγο δέν μποροῦμε νά ἐφαρμόσουμε στίς περιπτώσεις αὐτές τήν ἀναλογική μέθοδο, τήν ὁποία ἐφαρμόσαμε στά προηγούμενα προβλήματα.

Στίς περιπτώσεις αὐτές ἡ λύση τῶν σχετικῶν προβλημάτων γίνεται μέ τήν ἀκόλουθη εἰδική μέθοδο.

Παρατηροῦμε ὅτι:

$$\eta\mu\, x = x \cdot \frac{\eta\mu x}{x} \quad \text{καί} \quad \varepsilon\varphi\, x = x \cdot \frac{\varepsilon\varphi\alpha}{x}$$

καί ἑπομένως:

$$\lambda o\gamma\, \eta\mu x = \lambda o\gamma x + \lambda o\gamma \frac{\eta\mu x}{x} \quad (1) \quad \text{καί} \quad \lambda o\gamma\, \varepsilon\varphi x = \lambda o\gamma x + \lambda o\gamma \frac{\varepsilon\varphi x}{x} \quad (2)$$

Ἄν x παριστάνει δεύτερα λεπτά, ὁ λογ x βρίσκεται ἀπό τούς πίνακες τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν. Ἐξάλλου ὁ λογάριθμος τῶν λόγων $\frac{\eta\mu\, x}{x}$ καί $\frac{\varepsilon\varphi\, x}{x}$ ἀναγράφεται στό πάνω μέρος τῆς α' σελίδας καί στό κάτω καί ἔξω ἀπό τό πλαίσιο καθεμιᾶς ἀπό τίς ἄλλες σελίδες τῶν λογαριθμικῶν πινάκων τῶν ἀριθμῶν καί ἔξω ἀπό τό πλαίσιό τους. Γιά διάκριση, ὁ λογ $\frac{\eta\mu\, x}{x}$ σημειώνεται μέ τό S, ἐνῶ ὁ λογ $\frac{\varepsilon\varphi x}{x}$ σημειώνεται μέ τό T. Δηλαδή:

$$\lambda o\gamma \frac{\eta\mu x}{x} = S \quad \text{καί} \quad \lambda o\gamma \frac{\varepsilon\varphi x}{x} = T.$$

Ἄν λοιπόν ἐφαρμόσουμε τήν ἰσότητα (1) στό τόξο 12' 40'' = 760'' βρίσκουμε ὅτι:

$$\lambda o\gamma\, \eta\mu(12'\, 40'') = \lambda o\gamma\, 760 + S = 2{,}88081 + \bar{6}{,}68557 = \bar{3}{,}56638.$$

Παράδειγμα 2ο. *Νά βρεθεῖ ὁ λογ εφ (1° 5' 32'').*

Λύση. Ἐπειδή εἶναι 1° 5' 32'' = 3932'', σύμφωνα μέ τήν ἰδιότητα (2) θά ἔχουμε:

$$\lambda o\gamma\, \varepsilon\varphi(1^\circ\, 5'\, 32'') = \lambda o\gamma\, \varepsilon\varphi(3932'') =$$
$$= \lambda o\gamma\, 3932 + T = 3{,}5941 + \bar{6}{,}68563 = \bar{2}{,}28024.$$

Παράδειγμα 3ο. *Νά βρεθεῖ ὁ λογ σφ (15' 20'').*

Λύση. Ἐπειδή εἶναι:

$$\sigma\varphi(15'\, 20'') = \frac{1}{\varepsilon\varphi(15'\, 20'')} \Leftrightarrow \lambda o\gamma\, \sigma\varphi(15'\, 20'') = -\lambda o\gamma\, \varepsilon\varphi(15'\, 20'').$$

Ἀλλά:

$$\lambda o\gamma\, \varepsilon\varphi\, (15'\, 20'') = \lambda o\gamma\, 920 + T = 2{,}96379 + \bar{6}{,}68558 = \bar{3}{,}64937.$$

Ἄρα $\lambda o\gamma\, \sigma\varphi(15'\, 20'') = -(\bar{3}{,}64937) = -\bar{3}{,}64937 = 2{,}35063.$

Παράδειγμα 4ο. *Νά βρεθεῖ ὁ λογ συν (88° 40' 25'').*

Λύση. Ἐπειδή εἶναι:

$$90° - (88° 40' 25'') = 1° 19' 35'' = 4775'',$$

θά ἔχουμε:

$$\text{λογ συν}\,(88°\, 40'\, 25'') = \text{λογ ημ}\,(4775'') = \overline{2},36451.$$

Παράδειγμα 5ο. *Νά βρεθεῖ ὁ λογ εφ (89° 3' 40'').*

Λύση. Ἐπειδή εἶναι: $90° - (89°\, 3'\, 40'') = 56'\, 20''$, θά εἶναι καί:

$$\text{εφ}(89°\, 3'\, 40'') = \text{σφ}(56'\, 20'') = \frac{1}{\text{εφ}(56'\, 20'')}$$

καί ἄρα: $\text{λογ εφ}(89°\, 3'\, 40'') = -\text{λογ εφ}(56'\, 20'') = -(\overline{2},21453) = 1,78547.$

Παράδειγμα 6ο. *Νά βρεθεῖ ὁ λογ σφ (88° 50' 25'').*

Λύση. Ἐπειδή εἶναι:

$$90° - (88°\, 50'\, 25'') = 1°\, 9'\, 35''$$

θά εἶναι καί:

$$\text{λογ σφ}(88°\, 50'\, 25'') = \text{λογ εφ}(1°\, 9'\, 35'') = \overline{2},30629.$$

Παράδειγμα 7ο. *Νά βρεθεῖ τό ἐλάχιστο θετικό τόξο x, γιά τό ὁποῖο εἶναι:*

$\text{λογ ημ}\, x = \overline{3},72960.$

Λύση. Ἄν ἀναζητήσουμε τό δεδομένο λογάριθμο στήν ἀντίστοιχη στήλη τῶν λογαριθμικῶν πινάκων, παρατηροῦμε ὅτι αὐτός περιέχεται μεταξύ τῶν $\overline{3},71900$ καί $\overline{3},74248$. Εἶναι δηλαδή:

$$\overline{3},71900 < \overline{3},72960 < \overline{3},74248$$

$$\text{ἤ} \quad \text{λογ ημ}(18') < \text{λογ ημ}\, x < \text{λογ ημ}(19')$$

$$\text{ἤ} \quad 18' < x < 19' \Leftrightarrow 1080'' < x < 1140'',$$

καί ἐπομένως $S = \overline{6},68557$. Γι' αὐτό ἀπό τήν (1) θά ἔχουμε:

$$\overline{3},72960 = \text{λογ}\, x + \overline{6},68557 \Leftrightarrow$$

$$\text{λογ}\, x = 3,04403 = \text{λογ}(1106'', 69) \Leftrightarrow$$

$$x = 1106'',69 = 18'\, 28'',69.$$

Παράδειγμα 8ο. *Νά βρεθεῖ τό ἐλάχιστο θετικό τόξο x, γιά τό ὁποῖο εἶναι:*

$\text{λογ εφ}\, x = \overline{2},45777.$

Λύση. Ἀπό τούς πίνακες ἔχουμε:

$$\overline{2},45507 < \overline{2},45777 < \overline{2},45958 \Leftrightarrow$$

$$1°\, 38' < x < 1°\, 39' \Leftrightarrow$$

$$5880'' < x < 5940''$$

καί ἐπομένως: $T = \overline{6},68569$ καί ἄρα ἀπό τή (2):

$$\overline{2},45777 = \text{λογ}\, x + \overline{6},68569 \Leftrightarrow$$

$$\text{λογ}\, x = 3,77208 = \text{λογ}\,(5916'',7) \Leftrightarrow x = 1°\, 38'\, 36'',7.$$

Παράδειγμα 9ο. *Νά βρεθεῖ τό ἐλάχιστο θετικό τόξο x, γιά τό ὁποῖο εἶναι:*

$\text{λογ συν}\, x = \overline{2},16833.$

Λύση. Ἀπό τούς πίνακες βρίσκουμε:

$$\overline{2},17128 > \overline{2},16833 > \overline{2},16268 \Leftrightarrow$$
$$89^\circ\, 9' < x < 89^\circ\, 10' \Leftrightarrow$$
$$90^\circ - (89^\circ\, 9') > 90^\circ - x > 90^\circ - (89^\circ\, 10') \Leftrightarrow$$
$$51' > 90^\circ - x > 50' \Leftrightarrow$$
$$3060'' > 90^\circ - x > 3000''$$

Ἄρα, γιά τό τόξο $90^\circ - x$ εἶναι: $S = \overline{6},68556$ καί

$$\log \eta\mu(90^\circ - x) = \log \sigma\upsilon\nu\, x = \overline{2},16833.$$

Ἔτσι ἡ (1) γίνεται:

$$\overline{2},16833 = \log \eta\mu(90^\circ - x) + \overline{6},68556 \Leftrightarrow$$
$$\log \eta\mu(90^\circ - x) = 3,48277 = \log \eta\mu(3039'',29) \Leftrightarrow$$
$$90^\circ - x = 3039'',29 = 50'\, 39'',29 \Leftrightarrow$$
$$x = 89^\circ\, 9'\, 20'',7.$$

Παράδειγμα 10ο. *Νά βρεθεῖ τό ἐλάχιστο θετικό τόξο x, γιά τό ὁποῖο εἶναι:*

$$\log \sigma\varphi\, x = \overline{3},92888.$$

Λύση. Ἀπό τούς πίνακες παρατηροῦμε ὅτι:

$$\overline{3},94086 > \overline{3},92888 > \overline{3},92619 \Leftrightarrow$$
$$89^\circ\, 30' < x < 89^\circ\, 31' \Leftrightarrow$$
$$30' > 90^\circ - x > 29' \Leftrightarrow$$
$$1800'' < 90^\circ - x < 1740'' \text{ καί ἄρα } T = \overline{6},68558.$$

Ἐξάλλου: $\log \varepsilon\varphi\,(90^\circ - x) = \log \sigma\varphi\, x = \overline{3},92888,$

ὁπότε ἡ (2) γίνεται:

$$\overline{3},92888 = \log(90^\circ - x)'' + \overline{6},68558 \Leftrightarrow$$
$$(90^\circ - x)'' = 1751'' = 29'\, 11' \Leftrightarrow$$
$$x = 89^\circ\, 30'\, 49''.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

83. Νά βρεθεῖ τό ἐλάχιστο θετικό τόξο x, γιά τό ὁποῖο εἶναι:

1. $\log \eta\mu\, x = \overline{3},72835,$
2. $\log \varepsilon\varphi\, x = \overline{2},77213,$
3. $\log \sigma\varphi\, x = 1,53421,$
4. $\log \sigma\upsilon\nu\, x = \overline{2},69231,$
5. $\log \varepsilon\varphi\, x = 2,48739,$
6. $\log \sigma\varphi\, x = \overline{2},53298.$

84. Νά βρεθεῖ τό ἐλάχιστο θετικό τόξο x, γιά τό ὁποῖο εἶναι:

$$\sigma\varphi\, x = \frac{\sqrt[3]{\alpha . \sigma\upsilon\nu A}}{\eta\mu\, 5A . \varepsilon\varphi\, B},$$

ὅπου $\alpha = -0,08562$, $A = 131^\circ\, 49'\, 25''$, $B = 36^\circ\, 43'\, 26''$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VI

ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΣΙΜΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

● 48. Χρησιμότητα μετατροπῆς παραστάσεων σέ ἄλλες λογαριθμίσιμες.

Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι θέλουμε νά ὑπολογίσουμε τήν τιμή τῆς παραστάσεως

$$y = \frac{1 + \text{συν}\, x}{1 - \text{συν}\, x}, \quad \text{ἄν} \quad x = 24^\circ\, 36'.$$

θά ἔχουμε: $$y = \frac{1 + \text{συν}(24^\circ\, 36')}{1 - \text{συν}\,(24^\circ\, 36')} \qquad (1)$$

Παρατηροῦμε ὅτι γιά νά βροῦμε τόν y πρέπει νά βροῦμε τό συν(24° 36') καί νά ἐκτελέσουμε τίς πράξεις στό δεύτερο μέλος τῆς (1).

Ἀπό τούς πίνακες βρίσκουμε ὅτι εἶναι:

$$\text{λογ}\,\text{συν}\,(24^\circ\, 36') = \bar{1},95868. \text{ Ἄρα } \quad \text{συν}\,(24^\circ\, 36') = 0,90922$$

καί ἐπομένως:

$$y = \frac{1 + 0,90922}{1 - 0,90922} = \frac{1,90922}{0,09078} = 21,031.$$

Ἐπειδή ὅμως $\frac{1 + \text{συν}x}{1 - \text{συν}x} = \text{σφ}^2\frac{x}{2}$, θά ἔχουμε $y = \text{σφ}^2\frac{x}{2}$ καί ἄρα :

$$y = \text{σφ}^2(12^\circ\, 18') \Leftrightarrow \text{λογ}\, y = 2\text{λογ}\,\text{σφ}(12^\circ\, 18') = 2 \cdot 0,66147 = 1,32394$$

ἀπό ὅπου ἔχουμε: $\qquad y = 21,031.$

Ἀπό τά παραπάνω διαπιστώνουμε ὅτι μέ τό δεύτερο τρόπο τό ζητούμενο βρέθηκε εὐκολότερα καί μέ λιγότερες πράξεις. Αὐτό ὀφείλεται στό ὅτι ἡ δεδομένη παράσταση ἀντικαταστάθηκε μέ τήν ἰσοδύναμή της σφ²(12° 18'), τῆς ὁποίας τό λογάριθμο βρίσκουμε ἄν ἐφαρμόσουμε τή γνωστή ἰδιότητα τοῦ λογαρίθμου μιᾶς δυνάμεως. Γιά τό λόγο αὐτό ἡ τελευταία αὐτή παράσταση ὀνομάζεται λογαριθμίσιμη.

Ἀπό τό παράδειγμα αὐτό καί ἀπό ἄλλα ὅμοια βλέπουμε ὅτι εἶναι πολύ χρήσιμο νά ξέρουμε πῶς νά μετατρέπουμε τριγωνομετρικές παραστάσεις σέ ἄλλες ἰσοδύναμες καί λογαριθμίσιμες.

Στά προηγούμενα κεφάλαια εἴδαμε ὅτι μερικές παραστάσεις μετατρέπονται σέ ἄλλες ἰσοδύναμες μέ μορφή γινομένου ἤ πηλίκου. Ἔτσι εἴδαμε ὅτι οἱ παραστάσεις:

$$\left.\begin{matrix} \text{ημα}\,\text{συνβ} \pm \text{ημβ}\,\text{συνα} \\ \text{συνα}\,\text{συνβ} \pm \text{ημα}\,\text{ημβ} \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} \text{ημA} \pm \text{ημB} \\ \text{συνA} \pm \text{συνB} \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} \text{εφA} \pm \text{εφB} \\ \text{σφA} \pm \text{σφB} \end{matrix}\right\} \text{ κλπ.}$$

μετατρέπονται σέ μονώνυμα.

Ἐπαναλαμβάνουμε μερικές γνωστές παραστάσεις πού εἶναι ἀπαραίτητο νά τίς ξέρουμε.

$1+\sigma\upsilon\nu\alpha \equiv 2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2}$ (1)	$1+\eta\mu\alpha \equiv 2\sigma\upsilon\nu^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$ (2)
$1-\sigma\upsilon\nu\alpha \equiv 2\eta\mu^2\frac{A}{2}$ (3)	$1-\eta\mu\alpha \equiv 2\eta\mu^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$ (4)
$1\pm\varepsilon\varphi\alpha = \frac{\sqrt{2}\,\eta\mu(45^\circ\pm\alpha)}{\sigma\upsilon\nu\alpha}$ (5)	$1\pm\sigma\varphi\alpha = \frac{\sqrt{2}\,\eta\mu(\alpha\pm45^\circ)}{\eta\mu\alpha}$ (6)
$1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha \equiv \eta\mu^2\alpha$ (7)	$1-\eta\mu^2\alpha \equiv \sigma\upsilon\nu^2\alpha$ (8)
$\frac{1+\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi\alpha} = \varepsilon\varphi(45^\circ+\alpha)$ (9)	$\frac{1-\varepsilon\varphi\alpha}{1+\varepsilon\varphi\alpha} = \varepsilon\varphi(45^\circ-\alpha)$ (10)
$1+\varepsilon\varphi^2\alpha = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}$ (11)	$1+\sigma\varphi^2\alpha = \frac{1}{\eta\mu^2\alpha}$ (12)
$\frac{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}{1-\sigma\upsilon\nu\alpha} = \sigma\varphi^2\frac{\alpha}{2}$ (13)	$\frac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha} = \varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}$ (14)

● **49. Χρήση βοηθητικῆς γωνίας.** Πολλές φορές διευκολυνόμαστε στή μετατροπή μιᾶς παραστάσεως σέ ἄλλη λογιστή μέ τούς λογαρίθμους, ἄν χρησιμοποιήσουμε κατάλληλη βοηθητική γωνία. Ἔτσι:

α) Ἄν $k \in \mathbb{R}^+$, τότε ὑπάρχει γωνία ὀξεία φ, τέτοια ὥστε:

$$\varepsilon\varphi\varphi = k \ \text{ἤ}\ \sigma\varphi^2\varphi = k \ \text{ἤ}\ \varepsilon\varphi^2\varphi = k \ \text{ἤ}\ \sigma\varphi\varphi = k.$$

Ἄν $0 < k < 1$, τότε μποροῦμε νά βάλουμε:

$$k = \eta\mu\varphi \ \text{ἤ}\ k = \sigma\varphi\varphi \ \text{ἤ}\ k = \eta\mu^2\varphi \ \text{ἤ}\ k = \sigma\upsilon\nu^2\varphi.$$

β) Ἄν $k \in \mathbb{R}$, τότε μποροῦμε νά βάλουμε:

$$k = \varepsilon\varphi\varphi \ \text{ἤ}\ k = \sigma\varphi\varphi.$$

Ἄν $|k| < 1$, τότε μποροῦμε νά βάλουμε:

$$k = \eta\mu\varphi \ \text{ἤ}\ k = \sigma\upsilon\nu\varphi.$$

γ) Διαλέγουμε πάντοτε ὡς τιμή τῆς γωνίας φ τήν ἐλάχιστη θετική τῆς ἐξισώσεως πού δόθηκε ὡς πρός φ. Ἄν $k > 0$, τότε ἡ γωνία φ εἶναι ὀξεία.

Οἱ συνηθέστερες προτάσεις στίς ὁποῖες γίνεται χρήση τῆς μεθόδου (βοηθητικῆς γωνίας) αὐτῆς ἔχουν τίς ἀκόλουθες μορφές.

● **50.** *ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ι. Νά γίνουν λογαριθμίσιμες οἱ παραστάσεις:*

$$y_1 = \alpha + \beta \quad \textit{καί} \quad y_2 = \alpha - \beta$$

Λύση. Ἐδῶ ὑποτίθεται ὅτι $\alpha > 0$, $\beta > 0$ καί οἱ λογάριθμοί τους εἶναι γνωστοί.

1ο. Ἄς δεχθοῦμε ὅτι $\log\alpha > \log\beta$. Ἄρα $\alpha > \beta$. Ἔτσι γράφουμε:

$$\alpha \pm \beta = \alpha\left(1 \pm \frac{\beta}{\alpha}\right)$$

α′) Ἐπειδή $\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| < 1$, μποροῦμε νά βάλουμε:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \text{συν}\varphi \quad \text{ἤ} \quad \frac{\beta}{\alpha} = \text{εφ}^2\varphi \quad \text{ἤ} \quad \frac{\beta}{\alpha} = \text{εφ}\varphi,$$

ὁπότε θά ἔχουμε ἀντιστοίχως:

$$y_1 = \alpha + \beta = \alpha(1 + \text{συν}\varphi) = 2\alpha\,\text{συν}^2\frac{\varphi}{2},$$

$$y_1 = \alpha + \beta = \alpha(1 + \text{εφ}^2\varphi) = \frac{\alpha}{\text{συν}^2\varphi},$$

$$y_1 = \alpha + \beta = \alpha(1 + \text{εφ}\varphi) = \frac{\alpha\sqrt{2}\,\text{ημ}(45^\circ + \varphi)}{\text{συν}\varphi}$$

β′) Ἄν βάλουμε:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \text{συν}\varphi \quad \text{ἤ} \quad \frac{\beta}{\alpha} = \text{ημ}^2\varphi \quad \text{ἤ} \quad \frac{\beta}{\alpha} = \text{εφ}\varphi$$

καί ὑποθέσουμε ὅτι $\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| < 1$ καί $0 < \frac{\beta}{\alpha} < 1$, τότε θά ἔχουμε, ἀντιστοίχως:

$$y_2 = \alpha - \beta = \alpha(1 - \text{συν}\varphi) = 2\alpha\,\text{ημ}^2\frac{\varphi}{2}$$

$$y_2 = \alpha - \beta = \alpha(1 - \text{ημ}^2\varphi) = \alpha\,\text{συν}^2\varphi,$$

$$y_2 = \alpha - \beta = \alpha(1 + \text{εφ}\varphi) = \frac{\alpha\sqrt{2}\,\text{ημ}(45^\circ - \varphi)}{\text{συν}\varphi}$$

2ο. Ἄν $\log\alpha < \log\beta$, τότε $\alpha < \beta$. Ἔτσι γράφουμε:

$$\alpha + \beta = \alpha\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) \quad \text{καί} \quad \alpha - \beta = \alpha\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right)$$

καί ἐργαζόμαστε ὅπως παραπάνω.

Παρατήρηση. Γιά νά κάνουμε λογαρίθμισιμη τήν παράσταση:

$$x = \alpha - \beta + \gamma - \delta,$$

βάζουμε $\alpha - \beta = A$, $B = A + \gamma$ καί $\Gamma = B - \delta$, καί ἐργαζόμαστε ὅπως καί προηγουμένως.

● **51.** *ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΙ. Νά γίνει λογαριθμίσιμη ἡ παράσταση:*

$$x = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}. \tag{1}$$

Λύση. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι $\alpha > \beta$. Ἄν βάλουμε ὅπου $\frac{\beta}{\alpha} = \varepsilon\varphi\varphi$, τότε θά ἔχουμε :

$$x = \frac{\alpha - \alpha\,\varepsilon\varphi\,\varphi}{\alpha + \alpha\,\varepsilon\varphi\,\varphi} = \frac{1 - \varepsilon\varphi\varphi}{1 + \varepsilon\varphi\varphi} = \varepsilon\varphi(45^\circ - \varphi),$$

καί ἄν $\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| < 1$, μποροῦμε νά βάλουμε ὅπου $\frac{\beta}{\alpha} = \sigma\upsilon\nu\,\varphi$, ὁπότε:

$$x = \frac{\alpha - \alpha\,\sigma\upsilon\nu\varphi}{\alpha + \alpha\,\sigma\upsilon\nu\varphi} = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu\varphi}{1 + \sigma\upsilon\nu\varphi} = \varepsilon\varphi^2\frac{\varphi}{2}.$$

Ἄν $\alpha < \beta$, τότε ὑπολογίζουμε τήν παράσταση $y = \frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha}$

★ ● **52.** *ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΙΙ. Νά γίνουν λογαριθμίσιμες οἱ παραστάσεις:*

$$\mathbf{x = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \quad \textit{καὶ} \quad \mathbf{y = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}\,.$$

Λύση. Ἡ δεύτερη παράσταση, προφανῶς, ἔχει ἔννοια, ὅταν $\alpha > \beta$.

α') Ἄν βάλουμε $\frac{\beta}{\alpha} = \varepsilon\varphi\varphi$, ἡ πρώτη παράσταση γίνεται:

$$x = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \alpha\sqrt{1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2} = \alpha\sqrt{1 + \varepsilon\varphi^2\varphi} = \frac{\alpha}{\sigma\upsilon\nu\varphi}$$

β') Ἄν βάλουμε $\frac{\beta}{\alpha} = \eta\mu\varphi$, τότε ἡ δεύτερη παράσταση γίνεται:

$$y = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = \alpha\sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2} = \alpha\sqrt{1 - \eta\mu^2\varphi} = \alpha\,\sigma\upsilon\nu\varphi.$$

● **53.** *ΠΡΟΒΛΗΜΑ IV. Νά γίνει λογαριθμίσιμη ἡ παράσταση:*

$$\mathbf{y = \alpha\,\sigma\upsilon\nu x \pm \beta\,\eta\mu x.} \tag{1}$$

Λύση. Ἐδῶ ὑποτίθεται ὅτι $\alpha\beta \neq 0$ καί $x \neq k\cdot\frac{\pi}{2}$, $\mathbf{k \in \mathbb{Z}}$.

Ἄν $\frac{\beta}{\alpha} = \varepsilon\varphi\varphi = \frac{\eta\mu\varphi}{\sigma\upsilon\nu\varphi}$, ἡ παράσταση (1) γράφεται:

$$y = \alpha\left(\sigma\upsilon\nu x \pm \frac{\beta}{\alpha}\eta\mu x\right) = \alpha\left(\sigma\upsilon\nu x + \frac{\eta\mu\varphi}{\sigma\upsilon\nu\varphi}\eta\mu x\right) = \frac{\alpha\sigma\upsilon\nu(x \mp \varphi)}{\sigma\upsilon\nu\varphi}$$

Ὥστε :
$$\mathbf{y = \frac{\alpha\,\sigma\upsilon\nu\,(x \mp \varphi)}{\sigma\upsilon\nu\varphi}},$$

ἡ ὁποία εἶναι λογαριθμίσιμη.

Παρατήρηση. Θά μπορούσαμε νά βάλουμε $\frac{\beta}{\alpha} = \sigma\varphi\varphi$ ἤ ἄν βγεῖ κοινός παράγοντας ὁ β, νά βάλουμε :

$$\frac{\alpha}{\beta} = \varepsilon\varphi\varphi \quad ἤ \quad \frac{\alpha}{\beta} = \sigma\varphi\varphi.$$

Παράδειγμα 1ο *Ἡ παράσταση* $\mathbf{y = 3\sigma\upsilon\nu x + 4\eta\mu x}$ *νά γραφεῖ μέ τή μορφή:*

$$\mathbf{y = A\sigma\upsilon\nu(x - \varphi).}$$

Λύση. Ἡ δεδομένη παράσταση γράφεται:

$$y = 5\left(\frac{3}{5}\,\sigma\upsilon\nu x + \frac{4}{5}\,\eta\mu x\right) \tag{1}$$

Ἄν ὅμως $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, τότε $\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{3}{5}$, $\eta\mu\varphi = \frac{4}{5}$. Ἄρα $\varepsilon\varphi\varphi = \frac{4}{3}$

καί ἑπομένως:

$$y = 5(\sigma\upsilon\nu\varphi\,\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu\varphi\,\eta\mu x) = 5\sigma\upsilon\nu(x - \varphi) \tag{2}$$

Ἡ παράσταση (2) εἶναι τῆς ζητούμενης μορφῆς μέ

$$A = 5 \quad \text{καί} \quad \varphi = 53^\circ\, 7'\, 48'',4,$$

γιατί ἀπό τήν $\varepsilon\varphi\varphi = \frac{4}{3}$ παίρνουμε:

$$\lambda o\gamma\, \varepsilon\varphi\varphi = \lambda o\gamma\, 4 - \lambda o\gamma\, 3 = 0,60206 - 0,47712 = 0,12494 = \lambda o\gamma\, \varepsilon\varphi(53^\circ\, 7'\, 48'',4).$$

★ **Παράδειγμα 2ο.** *Νά γίνει λογαριθμίσιμη ἡ παράσταση:*

$$\mathbf{y = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\,\sigma\upsilon\nu A}} \tag{1}$$

Λύση. Θεωροῦμε τούς ἀριθμούς β καί γ θετικούς μέ $\beta > \gamma$ καί ὅτι:

$$0^\circ < A < 180^\circ.$$

Τό ὑπόρριζο γράφεται διαδοχικά:

$$\beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\,\sigma\upsilon\nu A = (\beta^2 + \gamma^2)\left(\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2} + \eta\mu^2\frac{A}{2}\right) - 2\beta\gamma\left(\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2} - \eta\mu^2\frac{A}{2}\right) =$$

$$= (\beta^2 + \gamma^2)\eta\mu^2\frac{A}{2} + (\beta - \gamma)^2\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2} = (\beta^2 + \gamma^2)\eta\mu^2\,\frac{A}{2}\left[1 + \left(\frac{\beta - \gamma}{\beta + \gamma}\right)^2\sigma\varphi^2\frac{A}{2}\right] \Rightarrow$$

$$y = (\beta + \gamma)\eta\mu\,\frac{A}{2}\sqrt{1 + \left(\frac{\beta - \gamma}{\beta + \gamma}\right)^2\sigma\varphi^2\,\frac{A}{2}} \tag{2}$$

Ἄν γράψουμε $\frac{\beta - \gamma}{\beta + \gamma}\,\sigma\varphi\,\frac{A}{2} = \varepsilon\varphi\varphi$, ἡ (2) γίνεται:

$$y = (\beta + \gamma)\,\eta\mu\frac{A}{2}\sqrt{1 + \varepsilon\varphi^2\varphi} = \frac{\beta + \gamma}{\sigma\upsilon\nu\varphi}\,\eta\mu\,\frac{A}{2}$$

Ὥστε :

$$\mathbf{y = \frac{\beta + \gamma}{\sigma\upsilon\nu\varphi}\,\eta\mu\,\frac{A}{2}}$$

★● **54.** *ΠΡΟΒΛΗΜΑ V. Νά γίνουν λογαριθμίσιμες οἱ ρίζες τῆς δευτεροβάθμιας ἐξισώσεως:*

$$\mathbf{\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0.}$$

Λύση. Ἡ κανονική μορφή μιᾶς δευτεροβάθμιας ἐξισώσεως εἶναι ἡ:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \tag{1}$$

Ἄν $\beta = 0$ ἤ $\gamma = 0$, οἱ μή μηδενικές ρίζες τῆς ἐξισώσεως –ἄν αὐτή ἐπιδέχεται τέτοιες– εἶναι λογαριθμίσιμες.

Ἄν ἐπίσης $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$, πάλι οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως εἶναι λογαριθμίσιμες.

Παραλείποντας τίς περιπτώσεις αὐτές, μένει νά ἐξετάσουμε τήν περίπτωση πού ἡ ἐξίσωση εἶναι πλήρης καί ἐπιδέχεται ρίζες πραγματικές καί διαφορετικές ἀπό τό μηδέν.

Ὑποτίθεται πάντα $\alpha > 0$. Ἄρα ἡ (1) μπορεῖ νά ἔχει τίς ἀκόλουθες μορφές:

$$\alpha x^2 - \beta x - \gamma = 0 \quad (2) \qquad \alpha x^2 + \beta x - \gamma = 0 \quad (4)$$

$$\alpha x^2 - \beta x + \gamma = 0 \quad (3) \qquad \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \quad (5)$$

Προφανῶς, οἱ ρίζες τῶν ἐξισώσεων (4) καί (5) εἶναι ἀντιστοίχως ἀντίθετες μέ τίς ρίζες τῶν ἐξισώσεων (2) καί (3).

Ἀρκεῖ, λοιπόν, νά θεωρήσουμε μόνο τίς ἐξισώσεις (2) καί (3).

α΄) Ἡ ἐξίσωση $\alpha x^2 - \beta x - \gamma = 0$. Στήν ἐξίσωση αὐτή εἶναι $\alpha\gamma < 0$ καί ἑπομένως οἱ ρίζες της εἶναι:

$$x_1 = \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 + 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \quad \text{καί} \quad x_2 = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

Ἄν βάλουμε $\frac{4\alpha\gamma}{\beta^2} = \varepsilon\varphi^2\varphi$, ἡ παράσταση $\sqrt{\beta^2 + 4\alpha\gamma}$ γράφεται διαδοχικά:

$$\sqrt{\beta^2 + 4\alpha\gamma} = \beta\sqrt{1 + \frac{4\alpha\gamma}{\beta^2}} = \beta\sqrt{1 + \varepsilon\varphi^2\varphi} = \frac{\beta}{\sigma\upsilon\nu\varphi}$$

$$\text{Ἄρα:} \quad x_1 = \frac{1}{2\alpha}\left(\beta - \frac{\beta}{\sigma\upsilon\nu\varphi}\right) = \frac{\beta}{2\alpha\sigma\upsilon\nu\varphi}(\sigma\upsilon\nu\varphi - 1) = -\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\eta\mu^2\frac{\varphi}{2}}{\sigma\upsilon\nu\varphi} \quad (6)$$

$$\text{καί} \quad x_2 = \frac{1}{2\alpha}\left(\beta + \frac{\beta}{\sigma\upsilon\nu\varphi}\right) = \frac{\beta}{2\alpha\sigma\upsilon\nu\varphi}(\sigma\upsilon\nu\varphi + 1) = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\varphi}{2}}{\sigma\upsilon\nu\varphi} \quad (7)$$

Ἀπό τήν $\frac{4\alpha\gamma}{\beta^2} = \varepsilon\varphi^2\varphi \Leftrightarrow \beta = \frac{2\sqrt{\alpha\gamma}}{\varepsilon\varphi\varphi}$, ὁπότε οἱ (6) καί (7) γίνονται:

$$x_1 = -\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}\,\varepsilon\varphi\,\frac{\varphi}{2} \quad \text{καί} \quad x_2 = \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}\,\sigma\varphi\,\frac{\varphi}{2}$$

δηλαδή παραστάσεις λογαριθμίσιμες.

β΄) Ἡ ἐξίσωση $\alpha x^2 - \beta x + \gamma = 0$. Ἄν εἶναι:

$$\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0 \Leftrightarrow \beta^2 > 4\alpha\gamma,$$

τότε καί ἡ ἐξίσωση ἐπιδέχεται ρίζες θετικές, ἐπειδή τό γινόμενό τους εἶναι θετικό, ὅπως καί τό ἄθροισμά τους εἶναι θετικό. Αὐτές εἶναι:

$$x_1 = \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \quad \text{καί} \quad x_2 = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

Ἐπειδή $\beta^2 > 4\alpha\gamma$, θά εἶναι $0 < \dfrac{4\alpha\gamma}{\beta^2} < 1$ καί μποροῦμε νά βάλουμε:

$$\frac{4\alpha\gamma}{\beta^2} = \eta\mu^2\varphi \Leftrightarrow \beta = \frac{2\sqrt{\alpha\gamma}}{\eta\mu\varphi}$$

Ἄρα ἡ παράσταση $\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}$ γράφεται διαδοχικά:

$$\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma} = \beta\sqrt{1 - \frac{4\alpha\gamma}{\beta^2}} = \beta\sqrt{1 - \eta\mu^2\varphi} = \beta\,\sigma\upsilon\nu\varphi$$

καί ἑπομένως:

$$x_1 = \frac{1}{2\alpha}(\beta - \beta\sigma\upsilon\nu\varphi) = \frac{\beta}{2\alpha}(1 - \sigma\upsilon\nu\varphi) = \frac{\beta}{\alpha}\eta\mu^2\frac{\varphi}{2} \tag{8}$$

καί $$x_2 = \frac{1}{2\alpha}(\beta + \beta\sigma\upsilon\nu\varphi) = \frac{\beta}{2\alpha}(1 + \sigma\upsilon\nu\varphi) = \frac{\beta}{\alpha}\sigma\upsilon\nu^2\frac{\varphi}{2} \tag{9}$$

Ἐπειδή ὅμως $\beta = \dfrac{2\sqrt{\alpha\gamma}}{\eta\mu\varphi}$, οἱ (8) καί (9) γίνονται:

$$\mathbf{x_1 = \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}\,\varepsilon\varphi\,\frac{\varphi}{2}} \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{x_2 = \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}\,\sigma\varphi\,\frac{\varphi}{2}}$$

δηλαδή παραστάσεις λογαριθμίσιμες.

Ἐφαρμογή. *Νά ὑπολογισθοῦν οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως:*

$$\mathbf{4x^2 - 25{,}7x + 35{,}549 = 0.}$$

Λύση. Ἡ ἐξίσωση αὐτή εἶναι τῆς μορφῆς $\alpha x^2 - \beta x + \gamma = 0$.

Ἄν γράψουμε $\eta\mu^2\varphi = \dfrac{4\alpha\gamma}{\beta^2}$, θά ἔχουμε διαδοχικά:

$$\lambda o\gamma\,\eta\mu\varphi = \frac{1}{2}(\lambda o\gamma 4 + \lambda o\gamma\alpha + \lambda o\gamma\,\gamma) + \sigma\upsilon\lambda o\gamma\,\beta =$$

$$= \frac{1}{2}(0{,}60206 + 0{,}60206 + 1{,}55083) + \bar{2}{,}59007 = \bar{1}{,}96755,$$

ὁπότε $\varphi = 68°\,7'\,36''$ καί $\dfrac{\varphi}{2} = 34°\,3'\,48''$.

Οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως προκύπτουν ἀπό τίς σχέσεις (8), (9), δηλαδή:

$$x_1 = \frac{\beta}{\alpha}\eta\mu^2\frac{\varphi}{2} \Leftrightarrow$$

$$\lambda o\gamma\,x_1 = \lambda o\gamma\,\beta + \sigma\upsilon\lambda o\gamma\,\alpha + 2\lambda o\gamma\,\eta\mu(34°\,3'\,48'') =$$
$$= 1{,}40993 + \bar{1}{,}39794 + \bar{1}{,}49654 = 0{,}30441 \Rightarrow$$

$$\mathbf{x_1 = 2{,}0156,}$$

καί $$x_2 = \frac{\beta}{\alpha}\sigma\upsilon\nu^2\frac{\varphi}{2} \Rightarrow$$

$$\lambda o\gamma\, x_2 = \lambda o\gamma\, \beta + \sigma\upsilon\lambda o\gamma\, \alpha + 2\lambda o\gamma\, \sigma\upsilon\nu\, (34^\circ\, 3'\, 48'') =$$
$$= 1{,}40993 + \overline{1}{,}39794 + \overline{1}{,}83650 = 0{,}64437 \quad \Rightarrow$$
$$\mathbf{x_2 = 4{,}4093.}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Πρώτη ὁμάδα

85. Μέ τή χρήση κατάλληλης βοηθητικῆς γωνίας, νά γίνουν λογαριθμίσιμες οἱ ἀκόλουθες παραστάσεις:

1. $x = \sqrt{2} - 1$,
2. $x = 2 + \sqrt{2}$,
3. $x = 2 + \sqrt{3}$,
4. $x = 1 - \sqrt{3}$,
5. $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$,
6. $x = 3 - \sqrt{3}$,
7. $x = \dfrac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}$,
8. $x = \dfrac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}}$
9. $x = \dfrac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}$.

86. Νά γίνουν λογαριθμίσιμες οἱ παραστάσεις:

1. $x = 1 + 2\eta\mu\alpha$,
2. $x = 1 - 2\sigma\upsilon\nu\alpha$,
3. $x = 1 + \sqrt{2}\,\eta\mu\alpha$,
4. $x = 2\sigma\upsilon\nu\alpha - \sqrt{3}$,
5. $x = 1 - \sqrt{3}\,\sigma\varphi\alpha$,
6. $x = \eta\mu\alpha + \eta\mu 2\alpha + \eta\mu 3\alpha$,
7. $x = \sigma\upsilon\nu\alpha + \sqrt{3}\,\eta\mu\alpha$,
8. $x = \dfrac{\sqrt{3} + \varepsilon\varphi\alpha}{1 - \sqrt{3}\,\varepsilon\varphi\alpha}$.

★ Δεύτερη ὁμάδα

87. Ἄν εἶναι γνωστοί οἱ λογα καί λογβ μὲ λογα > λογβ, νὰ γίνουν λογαριθμίσιμες οἱ παραστάσεις:

1. $x = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$,
2. $x = \sqrt{\alpha + \beta} + \sqrt{\alpha - \beta}$,
3. $x = \sqrt{\dfrac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}} + \sqrt{\dfrac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}}$,
4. $x = \dfrac{4(\alpha - \beta)\sqrt{\alpha\beta}}{(\alpha + \beta)^2}$,
5. $x = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}$,

ἄν γιά ὅλες εἶναι: $\alpha = 1375$, $\beta = 8602$, $\gamma = 1215$.

88. Ἄν $\alpha = 108{,}7$, $\beta = 73{,}45$, νά ὑπολογισθεῖ ἡ $x = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.

89. Ἄν $\alpha = 71{,}29$, $\beta = 32{,}57$, νά ὑπολογισθεῖ ἡ $x = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$.

90. Ἄν $\alpha = 4258$, $\beta = 3672$ καί $\beta\, \varepsilon\varphi\, 3x = \alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, νά ὑπολογισθεῖ ὁ x ἔτσι, ὥστε $0^\circ < x < 180^\circ$.

91. Ἄν $\alpha = 4625{,}5$, $\beta = 3944{,}6$, $\theta = 51^\circ\, 57'\, 44''$, $\theta_1 = 63^\circ\, 18'\, 27''$ καί

$$\varepsilon\varphi\, 2x = \frac{\alpha\, \eta\mu\theta_1 - \beta\, \eta\mu\theta}{\alpha\, \eta\mu\theta_1 + \beta\, \eta\mu\theta},$$

νά ὑπολογισθεῖ ὁ x, γιά νά εἶναι: $0^\circ < x < 180^\circ$.

92. Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση:

$$8x^2 - 36{,}75x - 25{,}628 = 0.$$

93. Ἐπίσης οἱ ἐξισώσεις:

1. $x^2 - 148{,}7x + 1385 = 0$,
2. $x^2 - 245{,}7x - 1247{,}6 = 0$,
3. $x^2 + 16{,}75x - 64{,}53 = 0$,
4. $x^2 + 75{,}23x - 433{,}7 = 0$.

[illegible]

92. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις:

$$8x^3 - 36{,}75x - 25{,}628 = 0$$

93. Ἐπίσης αἱ ἐξισώσεις:

1. $x^3 - 48{,}7x + 1385 = 0$, 3. $x^3 + 36{,}75x - 64{,}83 = 0$
2. $x^3 - 245{,}7x - 1247{,}6 = 0$, 4. $x^3 + 75{,}25x - 437{,}7 = 0$

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

024000030031

ΕΚΔΟΣΗ Η΄ 1979 (V) ΑΝΤΙΤΥΠΑ 115.000 — ΣΥΜΒΑΣΗ 3204/10-4-79

Ἐκτύπωση - Βιβλιοδεσία: ΑΘΗΝΑ·Ι·ΚΟ ΚΕΝΤΡΟ ΕΚΔΟΣΕΩΝ Α.Ε. ΤΗΛ. 3606811

ΟΕ
ΔΒ